

**Über die Linearität
der Teichmüllerschen Modulgruppe
des Torus mit zwei Punktierungen**

Dissertation
zur Erlangung des Grades

”Doktor der Naturwissenschaften”

am Fachbereich Mathematik
der Johannes Gutenberg-Universität
in Mainz.

Vorgelegt von:
Hans-Josef Beauvisage,
geboren in Koblenz,

Mainz, 2002.

Tag der Prüfung: 18.02.2003

Der Fanatiker

*Ein Maler, verrückt, versessen.
Dabei's Leben verloren.
Im Malen — geboren!
Einmal vergessen?*

Inhaltsverzeichnis

1	Die Teichm. Modulgruppe des zweifach gepunkteten Torus	1
1.1	p-Kongruenzstrukturen	1
1.2	Die Teichmüllersche Modulgruppe einer Riemannschen Fläche	11
1.3	Die quasikonformen Diffeomorphismen des Torus	12
1.4	Der Zusammenhang von $\Pi_0(\text{Fix}(q_1, q_2), \text{id})$ und $M(T \setminus \{q_1, q_2\})$	19
2	Einbettungen der $\text{Aut}F_2$ in p-adische Liegruppen	22
2.1	p-adische Liegruppen	22
2.2	Eine ∞ -dim Darstellung von $\text{Aut}F_2$	24
2.3	Der Fall $\text{Inn}(F_2) \subset I + M_1$	31
2.4	Der allgemeine Fall	38
2.5	Einbettung in die Automorphismengruppe einf. $\mathbb{C}$ -Liealgebren	40
3	Die Sphäre mit 5 Punktierungen	50
3.1	Eine Darstellung des Teichmüllerschen Modulraum des Torus mit n Punktierungen	50
3.2	Die Teichmüllersche Modulgruppe des Torus mit 2 Punktierungen und die Teichmüllersche Modulgruppe der Sphäre mit 5 Punktierungen	54
3.3	Überblick über die Linearität Teichmüllerscher Modulgruppen	57

Vorwort

In meiner Arbeit beschäftige ich mich mit der Frage, ob die Teichmüllersche Modulgruppe des Torus mit zwei Punktierungen linear ist.

Mein Ansatz hierbei ist, die Teichmüllersche Modulgruppe in eine p -adische Liegruppe einzubetten.

Dazu benötigt man den Begriff der p -Kongruenzstruktur einer Gruppe. Eine p -Kongruenzstruktur einer Gruppe G ist eine Folge von Untergruppen $\{G_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ s.d. $\varprojlim_{n \in \mathbb{N}} \frac{G}{G_n}$ eine p -adische endlichdimensionale Liegruppe ist. Eine endlich erzeugte Gruppe besitzt nach [lub, Seite 207] genau dann eine p -Kongruenzstruktur, wenn sie linear ist.

Sei nun F_2 die von zwei Elementen erzeugte freie Gruppe und $\text{Aut}(F_2)$ die Automorphismengruppe der F_2 .

Inhalt des ersten Kapitels ist es nun zu zeigen, daß folgende Aussagen äquivalent sind:

1. Die Teichmüllersche Modulgruppe des Torus mit zwei Punktierungen ist linear,
2. $\text{Aut}(F_2)$ ist linear,
3. F_2 besitzt eine p -Kongruenzstruktur, deren Folgenglieder von $\text{Aut}(F_2)$ festgehalten werden, also charakteristisch sind.

Im zweiten Kapitel wird zunächst eine Darstellung der $\text{Aut}(F_2)$ und damit eine Darstellung der Teichmüllerschen Modulgruppe des Torus mit zwei Punktierungen durch Einbettung in eine unendlichdimensionale p -adische Liegruppe konstruiert.

Dann wird gezeigt, daß, falls $\text{Aut}(F_2)$ linear ist (was 2000 in [kra1] bewiesen wurde), es eine Einbettung einer Untergruppe endlichen Indexes der $\text{Aut}(F_2)$ in eine einfache Liegruppe gibt. Anschließend wird gezeigt, daß die von der Buraudarstellung der 4. Braidgruppe B_4 induzierte Darstellung der orientierungserhaltenden Elemente von $\text{Aut}(F_2)$ (siehe [for]) ihr Bild in der $\text{Aut}(sl_3(\mathbb{Q}_p))$ hat, wobei die $sl_3(\mathbb{Q}_p)$ eine einfache Liealgebra ist.

Darauf basierend wird eine Beweisidee vorgestellt, mit der man evtl. zeigen kann, daß die Buraudarstellung der B_4 treu ist.

Zunächst habe ich ein Verfahren entwickelt, mit dem man für eine Gruppe, die von zwei Matrizen, für die jeweils die Logarithmusreihe konvergiert, erzeugt wird, prüfen kann, ob diese Gruppe frei ist.

Dieses Verfahren habe ich an der durch die Elemente $\begin{pmatrix} 1 & X \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ X & 1 \end{pmatrix}$ erzeugten Gruppe bereits getestet.

(Dieser Test ist aber kein Teil meiner Dissertation).

(Diese Gruppe ist, wie bereits Hausdorff anfang letztes Jahrhundert zeigte, frei).

Um zu zeigen, daß die Darstellung der B_4 treu ist, genügt es zu zeigen, daß die Darstellung einer gewissen Untergruppe der B_4 , die von zwei Elementen erzeugt wird, frei ist. Dieses mit obigem Verfahren zu zeigen, gestaltet sich im Vergleich zu der Testgruppe sehr schwierig, denn in diesem Fall muß man ein unendliches, lineares Gleichungssystem lösen, dessen Lösungen gerade die Koeffizienten der Wörter des Kernes der Buraudarstellungen sind.

In dritten Kapitel wird mit den Methoden des 1. Kapitels gezeigt, daß der Torus mit zwei Punktierungen genau dann linear ist, wenn die Teichmüllersche Modulgruppe der Sphäre mit 5 Punktierungen es auch ist. Nach [kra1] ist aber B_4 linear, insbesondere ist die Teichmüllersche Modulgruppe der Sphäre mit 5 Punktierungen linear:

Denn es gilt nach [kra1] mit $D_4 := D \setminus \{p_1, \dots, p_4\}$ wobei D die abgeschlossene Einheitskreisscheibe sei und $p_1, \dots, p_4 \in \text{Inn}(D)$ paarweise verschieden:

$$B_4 \cong H(D_4)/H_0(D_4)$$

wobei mit $H(D_4)$ die Homöomorphismen auf D_4 gemeint seien und mit $H_0(D_4)$ die zu id isotopen orientierungserhaltenden Homöomorphismen auf B_4 . (vergl. [big3])

Also gilt insbesondere:

Die Teichmüllersche Modulgruppe der Sphäre mit 5 Punktierungen ist eine Projektion von B_4 . Dabei ist der Kern nach [big3] das Zentrum von B_4 . Wie in dem Satz der besagt, daß die Teichmüllersche Modulgruppe des Torus mit zwei Punktierungen genau dann linear ist, wenn es die Teichmüllersche Modulgruppe der Sphäre mit 5 Punktierungen auch ist, zeigt man nun, daß die Teichmüllersche Modulgruppe der Sphäre mit 5 Punktierungen genau dann linear ist, wenn die B_4 es ist. (vgl. [big3])

(die oben zitierten Artikel [big3] und [kra1] kamen erst heraus, als die Arbeit schon abgeschlossen war.)

Ferner wird für die Teichmüllersche Modulgruppe des Torus mit n Punktierungen eine Darstellung konstruiert.

Kapitel 1

Die Teichmüllersche Modulgruppe des zweifach gepunkteten Torus

1.1 p-Kongruenzstrukturen

Definition 1.1.1 Sei p prim, $d \in \mathbb{N}$. Eine p -Kongruenzstruktur einer Gruppe G ist eine Folge $\{N_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ von Untergruppen von G s.d:

- (i) Für $i \in \mathbb{N}$ gilt: $N_i \trianglelefteq G$.
- (ii) Für $i, j \in \mathbb{N}$ mit $i \leq j$ gelte: $N_j \trianglelefteq N_i$.
- (iii) Für $i \in \mathbb{N}$ ist G/N_i eine endliche Gruppe.
- (iv) Für $i, j \in \mathbb{N}$ mit $i \leq j$ ist N_i/N_j eine p -Gruppe.
- (v) Für $i \leq j$ besitzt jede Untergruppe von N_i/N_j ein Erzeugendensystem von höchstens d Elementen.
- (vi) $\bigcap_{i \in \mathbb{N}} N_i = \{e\}$.

Vergleiche: [lub, Seite 207 ff]

Beispiel 1.1.2 Beispiele von p -Kongruenzstrukturen:

1. Bsp. Wähle $G = (\mathbb{Z}, +)$, $p, q \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ mit $p > 0$ prim, dann bildet die Folge $\{N_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ mit $N_i := qp^i \mathbb{Z}$ eine p -Kongruenzstruktur von $\mathbb{Z}$ mit zugehörigem $d = 1$.
2. Bsp. vergl. [lub, Seite 207 ff]: Sei $G = \text{PSL}_2(\mathbb{Z})$, $M_2(\mathbb{Z})$ bzw. $M_2(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$ die additive Gruppe der 2×2 -Matrizen, $q \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, $p \in \mathbb{N}$ prim, dann ist die Folge $\{N_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ mit:
 $N_i := \{M \in \text{PSL}_2(\mathbb{Z}) \mid M = I + qp^i A \text{ mit } A \in M_2(\mathbb{Z})\}$
eine p -Kongruenzstruktur:
 - (i) Sei $i \in \mathbb{N}$:

Definiere:

$$\begin{aligned}\varphi_i : M_2(\mathbb{Z}) &\longrightarrow M_2(\mathbb{Z}/qp^i\mathbb{Z}) \\ \{m_{kl}\}_{k,l \in \{1,2\}} &\longmapsto \{m_{kl} + qp^i\mathbb{Z}\}_{k,l \in \{1,2\}}\end{aligned}$$

Dann ist

$$\varphi_i|_{PSL_2(\mathbb{Z})} : PSL_2(\mathbb{Z}) \longrightarrow PSL_2(\mathbb{Z}/qp^i\mathbb{Z})$$

offenbar ein Gruppenhomomorphismus mit $\ker \varphi_i|_{PSL_2(\mathbb{Z})} = N_i$.

Insbesondere gilt: $N_i \trianglelefteq G$.

(ii) Sei $j \geq i$, dann gilt: $\ker \varphi_i|_{PSL_2(\mathbb{Z})} \supseteq \ker \varphi_j|_{PSL_2(\mathbb{Z})} \Rightarrow N_i \supseteq N_j$

(iii) Für $i \in \mathbb{N}$ gilt: $G/N_i \simeq PSL_2(\mathbb{Z}/qp^i\mathbb{Z}) \Rightarrow |G/N_i| < \infty$

(iv) Sei $i \in \mathbb{N}$, dann ist die Abbildung

$$\begin{aligned}\xi_i : N_i/N_{i+1} &\longrightarrow M_2(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}) \\ (I + qp^i A)/N_{i+1} &\longmapsto A\end{aligned}$$

ein injektiver Gruppenhomomorphismus auf die additive Matrizen-
gruppe $M_2(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$.

Sei $g \in N_i/N_{i+1} \Rightarrow \xi_i(g^p) = p\xi_i(g) = 0 \Rightarrow g^p \in N_{i+1}$.

Sei nun $j > i$; $g \in N_i/N_j$, dann gilt: $g^{p^{j-i}} \in N_j$.

Also ist N_i/N_j eine p -Gruppe.

(v) Seien $i \leq j$, dann gilt: $\xi_i(N_i/N_{i+1}) \subseteq \xi_j(N_j/N_{j+1})$.

Denn sei $(I + qp^i A) \in N_i \Rightarrow (I + qp^i A)^{p^{j-i}} \in N_j$

mit $(I + qp^i A)^{p^{j-i}} = I + qp^j A + qp^{j+1} R$ mit $R \in M_2(\mathbb{Z})$.

Insbesondere existiert für $i \leq j$ die Abbildung:

$$\begin{aligned}\xi_j^{-1} \circ \xi_i : N_i/N_{i+1} &\longrightarrow N_j/N_{j+1} \\ gN_{i+1} &\longmapsto g^{p^{j-i}} N_{j+1}\end{aligned}$$

Damit ist $\xi_j^{-1} \circ \xi_i$ ein injektiver Gruppenhomomorphismus.

Da $M_2(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$ eine endliche additive Gruppe ist, gibt es $j_0 \in \mathbb{N}$
mit: $\xi_i(N_i/N_{i+1}) = \xi_j(N_j/N_{j+1})$ für $j_0 \leq i \leq j$.

Zwischenbehauptung:

Sei nun $i \leq j$, V eine Untergruppe von N_i , dann gilt:

Sei $\{g_k N_j | k \in \{1, \dots, s\}\}$ ein minimales Erzeugendensystem von VN_j ,

dann gibt es $l_k \in \mathbb{Z}$ mit $k \in \{1, \dots, s\}$ s.d. $\{g_k^{p^{l_k}} N_j | k \in \{1, \dots, s\}\}$ ein mi-
nimales Erzeugendensystem einer Untergruppe von $(V \cap N_{j-1})N_j$ ist.

Beweis mit Induktion über $j - i$:

Sei VN_{j-1} von dem minimalen Erzeugendensystem $\{g_k N_{j-1} | k \in \{1, \dots, s\}\}$
erzeugt, dann gibt es nach Induktionsvoraussetzung $l_k \in \mathbb{N}$, $k \in \{1, \dots, s\}$

s.d. $\{g_k^{p^{l_k}} N_{j-1} | k \in \{1, \dots, s\}\}$ ein minimales Erzeugendensystem einer
Untergruppe von $(V \cap N_{j-2})N_{j-1}$ ist.

Da

$$\xi_{j-1}^{-1} \circ \xi_{j-2} : N_{j-2}/N_{j-1} \longrightarrow N_{j-1}/N_j$$

ein injektiver Gruppenhomomorphismus ist, ist $\{g_k^{p^{l_k+1}} N_j | k \in \{1, \dots, s\}\}$
ein minimales Erzeugendensystem einer Untergruppe U/N_j von $(N_{j-1} \cap V)/N_j$.

Sei nun $\{g_k N_j | k \in \{1, \dots, s\}\}$ ein minimales Erzeugendensystem von V/N_j . Dann gibt es nach obiger Behauptung $l_k \in \mathbb{Z}$ mit $k \in \{1, \dots, s\}$
s.d. $\{g_k^{p^{l_k}} N_j | k \in \{1, \dots, s\}\}$ ein minimales Erzeugendensystem einer
Untergruppe von $V \cap N_{j-1}/N_j$ ist.

Da N_j/N_{j+1} für $j \in \mathbb{N}$ isomorph zu einer Untergruppe von $M_2(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$
ist, muß $s \leq 4$ sein.

(vi) klar.

Satz 1.1.3 Sei G eine Gruppe mit einer p -Kongruenzstruktur. Dann besitzt auch jede Untergruppe H von G eine p -Kongruenzstruktur.

Beweis:

Vergleiche: [lub, Seite 209]

Sei $\{N_i\}$ eine p -Kongruenzstruktur von G

Beh: $\{N_i \cap H\}_{i \in \mathbb{N}}$ ist eine p -Kongruenzstruktur von H .

(i) klar.

(ii) klar.

(iii) Für $i \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\frac{H}{N_i \cap H} \cong \frac{HN_i}{N_i} \Rightarrow \left| \frac{H}{N_i \cap H} \right| \leq \left| \frac{G}{N_i} \right| < \infty$$

(iv) Sei $i \leq j$, $g \in N_i \cap H$. Dann gibt es $l \in \mathbb{N}$ s.d. $g^{p^l} \in N_j \Rightarrow g^{p^l} \in N_j \cap H$.
Insbesondere ist $\frac{N_i \cap H}{N_j \cap H}$ eine p -Gruppe.

(v) Für $i \leq j$ gilt:

$$\frac{N_i \cap H}{N_j \cap H} \cong \frac{N_i \cap H}{N_j \cap (H \cap N_i)} \cong \frac{(N_i \cap H)N_j}{N_j}$$

Damit ist $\frac{N_i \cap H}{N_j \cap H}$ zu einer Untergruppe von N_i/N_j isomorph. Insbesondere ist jede Untergruppe von $\frac{N_i \cap H}{N_j \cap H}$ zu einer Untergruppe von $\frac{N_i}{N_j}$ isomorph.

(vi) klar.

Lemma 1.1.4 Sei G eine Gruppe mit zwei p -Kongruenzstrukturen, $\{N_i\}_{i \in \mathbb{N}}$, $\{M_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ wobei allerdings nicht notwendigerweise 1.1.1 (vi) erfüllt sei. Dann ist $\{G_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ mit $G_i := M_i \cap N_i$ ebenfalls eine p -Kongruenzstruktur, für die nicht notwendigerweise 1.1.1 (vi) erfüllt ist.

Falls zusätzlich gilt: $\bigcap_{i \in \mathbb{N}} N_i \cap \bigcap_{i \in \mathbb{N}} M_i = \{id\}$, dann ist $\{G_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ eine p -Kongruenzstruktur.

Beweis:

(i) Da für $i \in \mathbb{N}$ gilt: $N_i \trianglelefteq G$, $M_i \trianglelefteq G$ gilt insbesondere $G_i = N_i \cap M_i \trianglelefteq G$.

- (ii) Es gilt für $i \geq j$: $G_i \subseteq M_i \subseteq M_j$ und $G_i \subseteq N_j$, also $G_i \subseteq N_j \cap M_j = G_j$. Wegen $G_i \trianglelefteq G$ folgt insbesondere: $G_i \trianglelefteq G_j$.
- (iii) Zunächst gilt für $i \in \mathbb{N}$: $\frac{N_i}{G_i} = \frac{N_i}{N_i \cap M_i} \cong \frac{N_i M_i}{M_i} \subseteq \frac{G}{M_i}$.
Daher gilt: $\left| \frac{N_i}{G_i} \right| \leq \left| \frac{G}{M_i} \right| < \infty$.
Nach Voraussetzung gilt aber auch: $\left| \frac{G}{N_i} \right| < \infty$.
Also: $\left| \frac{G}{G_i} \right| = \left| \frac{G}{N_i} \right| \left| \frac{N_i}{G_i} \right| < \infty$.
- (iv) Sei $i \geq j$, $g \in G_j$. Dann gilt insbesondere: $g \in M_j$. Daher gibt es $k_M \in \mathbb{N}$ s.d.: $g^{p^{k_M}} \in M_i$.
Nun ist $g^{p^{k_M}} \in N_j$. Daher gibt es $k_N \in \mathbb{N}$ s.d.: $g^{p^{k_M+k_N}} = (g^{p^{k_M}})^{p^{k_N}} \in N_i$. Daher gilt: $g^{p^{k_M+k_N}} \in N_i \cap M_i = G_i$. Also besitzen alle Elemente der Gruppe G_j/G_i p -Potenzordnung. Damit muß G_j/G_i eine p -Gruppe sein.
- (v) Sei wieder $i \geq j$. Nach Voraussetzung gibt es ein $d \in \mathbb{N}$, das nicht von i, j abhängt, s.d. jede Untergruppe von $\frac{N_j}{N_i}$ und jede Untergruppe von $\frac{M_j}{M_i}$ jeweils von höchstens d Elementen erzeugt wird.
Sei nun V eine Untergruppe von $\frac{G_j}{G_i}$. Nun gibt es eine Untergruppe $U \supseteq G_i$ von G_j s.d. $\frac{U}{G_i} = V$.

Für U wird nun gezeigt: $U \cap M_j = U$

Beweis: Nach Voraussetzung gilt: $G_i \subseteq U \subseteq G_j$, d.h.:

$$\begin{aligned} M_i \cap N_i &\subseteq \underbrace{U \subseteq M_j \cap N_j} \\ &\Rightarrow U \subseteq M_j \Rightarrow U \cap M_j = U \end{aligned}$$

q.e.d.

Damit gilt (vergl. [lub, Seite 209]): $\frac{N_i \cap U}{G_i} = \frac{N_i \cap U}{(N_i \cap U) \cap M_i} \cong \frac{(N_i \cap U) M_i}{M_i} = \frac{(N_i \cap U \cap M_j) M_i}{M_i}$.

Nun ist $(N_i \cap U \cap M_j) M_i$ eine Untergruppe von M_j . Insbesondere wird nach Voraussetzung $\frac{(N_i \cap U \cap M_j) M_i}{M_i}$ und damit auch $\frac{N_i \cap U}{G_i}$ von höchstens d Elementen erzeugt.

Es gilt aber auch: $\frac{U}{N_i \cap U} \cong \frac{U N_i}{N_i} = \frac{(U \cap N_j) N_i}{N_i}$.

Nun ist $(U \cap N_j) N_i$ eine Untergruppe von N_j . Insbesondere wird nach Voraussetzung $\frac{(U \cap N_j) N_i}{N_i}$ von höchstens d Elementen erzeugt.

Damit wird $V = \frac{U}{G_i} \cong \frac{U}{N_i \cap U} \frac{N_i \cap U}{G_i}$ von höchstens d^2 Elementen erzeugt.

- (vi) Falls die Zusatzbedingung $\bigcap_{i \in \mathbb{N}} N_i \cap \bigcap_{i \in \mathbb{N}} M_i = \{id\}$, erfüllt ist, gilt insbesondere

$$\bigcap_{i \in \mathbb{N}} G_i = \{id\}$$

Bemerkung 1.1.5 In 1.1.10 wird gezeigt, daß eine Gruppe genau dann eine p -Kongruenzstruktur besitzt, wenn sie in eine p -adische Liegruppe einbettbar ist.

Mit obigem Lemma folgt daraus:

Endlich viele Einbettungen einer endlich erzeugten Gruppe G in p -adische Liegruppen haben eine gemeinsame Überlagerung:

Dazu genügt es zu zeigen, daß zwei Einbettungen eine gemeinsame Überlagerung haben. Seien nun $\{M_i\}_{i \in \mathbb{N}}$, $\{N_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ die p -Kongruenzstrukturen von G , die sich nach 1.1.10

aus den beiden Einbettungen gewinnen lassen.

Man erhält nun mit $G_i := M_i \cap N_i$ die p -Kongruenzstruktur $\{G_i\}_{i \in \mathbb{N}}$.

Nun hat man folgende Überlagerung:

$$\varprojlim_{i \in \mathbb{N}} \frac{G}{G_i} \begin{matrix} \nearrow \\ \searrow \end{matrix} \begin{matrix} \varprojlim_{i \in \mathbb{N}} \frac{G}{M_i} \\ \varprojlim_{i \in \mathbb{N}} \frac{G}{N_i} \end{matrix}$$

Denn nach 1.1.10 ist $\varprojlim_{i \in \mathbb{N}} \frac{G}{G_i}$ ebenfalls eine p -adische Liegruppe und die Abbildungen sind die Einbettungen von $\varprojlim_{i \in \mathbb{N}} \frac{G}{G_i}$ in $\varprojlim_{i \in \mathbb{N}} \frac{G}{N_i}$ bzw. $\varprojlim_{i \in \mathbb{N}} \frac{G}{M_i}$, die wegen $G_i := M_i \cap N_i$ wohldefiniert sind.

Die beiden Abbildungen sind stetige Projektionen, was man daran sieht, daß $\{M_i\}_{i \in \mathbb{N}}$, $\{N_i\}_{i \in \mathbb{N}}$, $\{G_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ eine Umgebungsbasis von $\{id\}$ in der jeweiligen Liegruppe bilden.

Beispiel 1.1.6 Die freie von 2 Elementen erzeugte Gruppe F_2 besitzt eine p -Kongruenzstruktur.

Beweis:

In [wer, Seite 32] findet sich folgender

Satz: Sei $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| \geq 2$, dann ist $G := \left\langle \begin{pmatrix} 1 & z \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ z & 1 \end{pmatrix} \right\rangle$ eine freie Gruppe. Nach 1.1.2 Beispiel 2 und 1.1.3 besitzt G für $z \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ eine p -Kongruenzstruktur.

Bemerkung 1.1.7 Man erhält sogar für jedes $p, q \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$, p prim, eine p -Kongruenzstruktur $N(q, p)_{i \in \mathbb{N}}$ von F_2 . Selbst wenn man p festhält gibt es $q_1, q_2 \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ s.d.

$N(q_1, p)_1 N(q_2, p)_i \supsetneq N(q_1, p)_1$ für alle $i \in \mathbb{N}$.

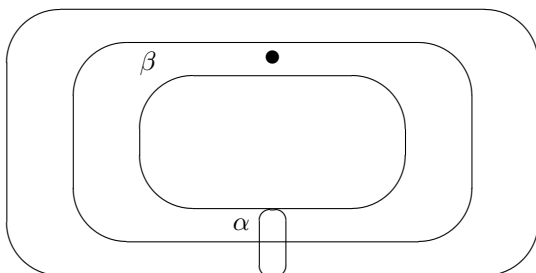
D.h. es gibt eine Folge $\{g_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ s.d. $g_i \in N(q_2, p)_i$ und $g_i \notin N(q_1, p)_1$ für alle $i \in \mathbb{N}$. F_2 besitzt also verschiedene p -Kongruenzstrukturen, d.h. die verschiedenen p -Kongruenzstrukturen induzieren auf F_2 verschiedene Topologien.

Bemerkung 1.1.8 Da alle von höchstens abzählbar vielen Elementen erzeugten freien Gruppen in F_2 nach [lyn, Seite 13 Proposition 3.1] einbettbar sind, besitzen diese nach 1.1.3 ebenfalls eine p -Kongruenzstruktur.

Satz 1.1.9 Die Homotopiegruppe des einfach gepunkteten Torus $\dot{T}$ ist isomorph zur F_2 und besitzt damit eine p -Kongruenzstruktur.

Beweis:

Wähle 2 Kurven α, β von $\dot{T}$ wie auf folgendem Bild zu sehen:



s.d. $\dot{T} \setminus |\alpha\beta|$ eine zu der punktierten offenen Kreisscheibe homöomorphe Manigfaltigkeit ist.

Nun gibt es eine stetige Abbildung:

$$\varphi : [0, 1] \times \dot{T} \longrightarrow \dot{T}$$

s.d. $\varphi_0 = id, \varphi_1(\dot{T}) = |\alpha\beta|$ mit $\varphi_1|_{|\alpha\beta|} = id \Rightarrow \Pi_1 \dot{T} \cong \Pi_1 |\alpha\beta|$, wobei $|\alpha\beta|$ die Gestalt 8 hat. Aus $\Pi_1 |\alpha\beta| \cong F_2$ folgt der Satz.

Satz 1.1.10 Eine endlich erzeugte Gruppe G besitzt genau dann eine p -Kongruenzstruktur, wenn es ein $n \in \mathbb{N}$ gibt, s.d. G in $Gl_n(\mathbb{C})$ einbettbar ist.

Beweis:

In [lub, Seite 207] wird eine andere Definition von p -Kongruenzstruktur verwendet. Dort wird (v) ersetzt durch

(w): Für $i \leq j$ wird N_i/N_j von einem Erzeugendensystem mit höchstens d Elementen erzeugt.

Da nach [lub, Seite 207 f] eine Gruppe genau dann linear ist, wenn sie eine p -Kongruenzstruktur mit (w) besitzt, ist noch zu zeigen: (w) $\Leftrightarrow$ (v)

Da (v) $\Rightarrow$ (w) trivial ist, bleibt (w) $\Rightarrow$ (v) zu zeigen:

Besitze G eine p -Kongruenzstruktur mit (w) statt (v). Dann existiert der projektive Limes $\overline{G} = \varprojlim_{i \in \mathbb{N}} G/N_i$, in den man G einbetten kann.

Nach [lub, Seite 209, Proposition 2] ist $\overline{G}$ eine von d Elementen erzeugte p -adische endlichdimensionale Liegruppe. Seien nun $i < j$ und U/N_j eine Untergruppe von N_i/N_j , dann gilt mit $\overline{U} := \varprojlim_{l > i} U/N_l$ und mit $\overline{N}_j := \varprojlim_{l > j} N_j/N_l$:

$\overline{U}$ ist eine offene Lieuntergruppe von $\overline{G}$, insbesondere eine endlichdimensionale p -adische Liegruppe.

Ferner gilt:

$$\overline{U}/\overline{N}_j \cong U/N_j$$

Nach [man, Seite 509 Theorem 2.3] gilt:

$\overline{U}$ kann durch d Elemente dicht erzeugt werden. Wegen $\overline{N}_j \subset_{\text{offen}} \overline{G}$ wird $\overline{U}/\overline{N}_j$ von höchstens d Elementen erzeugt, also wird auch U/N_j von höchstens d Elementen erzeugt.

Bemerkung 1.1.11 Man kann einer von endlich vielen Elementen erzeugten Gruppe G nun eine Dimension zuordnen:

Man betrachte sämtliche p -Kongruenzstrukturen von G (auch die mit $d = \infty$ um die Existenz mindestens einer p -Kongruenzstruktur (nämlich der absteigenden $G_{p^n}G^{(n)}$ -reihe, das sind jeweils die Erzeugnisse der Elemente aus G der Gestalt w^{p^n} (also der p^n Potenzen) und der Gestalt $\{\dots\{w_1, w_2\}, \dots, w_n\}$ (womit die n -fachen Kommutatoren gemeint sind) zu sichern).

Sei $\{N_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ eine p -Kongruenzstruktur. Dann ist $\varprojlim_{i \in \mathbb{N}} \frac{G}{N_i}$ eine d -dimensionale p -adische Liegruppe.

Als Dimension wähle man nun das Minimum aller so ermittelten Dimensionen.

Nach diesem Dimensionsbegriff ist eine Gruppe genau dann linear, wenn sie endlichdimensional ist.

Die endlich erzeugten freien Gruppen haben nach 1.1.6 und nach 1.1.8 Dimension 3, denn

man kann leicht nachrechnen, daß eine freie Gruppe nicht in eine 1 bzw. 2 dimensionale Liegruppe einbettbar ist:

1. Eine eindimensionale Liegruppe besitzt eine eindimensionale Liealgebra. Insbesondere verschwindet das der Liealgebra zugeordnete Lieprodukt $AB - BA$ wobei A, B Elemente der Liealgebra seien. Nach [bur, Seite 352] ist die Liegruppe dann auflösbar, was nicht sein kann, da sie nach Voraussetzung eine freie Untergruppe besitzt.
2. Eine zweidimensionale Liegruppe besitzt eine zweidimensionale Liealgebra. Man rechnet nun leicht nach, daß Lieprodukte von Lieprodukten verschwinden. Nach [bur, Seite 352] ist die Liegruppe auch in diesem Fall auflösbar. Damit kann die Liegruppe wieder keine freie Gruppe enthalten.

Man kann sich nun noch fragen, welche Dimensionen die $\varprojlim_{i \in \mathbb{N}} \frac{G}{N_i}$ annehmen können,

s.d. $\varprojlim_{i \in \mathbb{N}} \frac{G}{N_i}$ keine Überlagerung von $\varprojlim_{i \in \mathbb{N}} \frac{G}{M_i}$, wo $\{M_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ eine weitere p -Kongruenzstruktur sei, ist:

Falls G kommutativ ist, ist diese Dimension eindeutig. Im Allgemeinen kann es mehrere solcher Dimensionen geben:

Im Fall der endlich erzeugten freien Gruppen gibt es nach 1.1.6, 1.1.8 eine Einbettung der Dimension 3, die die gewünschte Eigenschaft hat.

Außer der $\mathfrak{psl}_2(\mathbb{C})$ (das ist die Liealgebra, die die 2×2 Matrizen über $\mathbb{C}$ mit Spur 0 und dem Lieprodukt $AB - BA$ bilden) ist auch die $\mathfrak{psl}_3(\mathbb{C})$ (entsprechend wie die $\mathfrak{psl}_2(\mathbb{C})$ definiert) von 2 Elementen erzeugbar. Falls diese beiden Elemente mit der Hausdorffmultiplikation ($A \cdot B := \log(\exp(A)\exp(B))$) eine freie Gruppe bilden, hat man zwei verschiedenen-dimensionalen Einbettungen der freien Gruppe gefunden, die irreduzibel sind, da die $\mathfrak{psl}_2(\mathbb{C})$ und die $\mathfrak{psl}_3(\mathbb{C})$ einfache Liealgebren (d.h. die Liealgebra besitzt keine echtes Ideal, was man für $\mathfrak{psl}_2(\mathbb{C})$ und $\mathfrak{psl}_3(\mathbb{C})$ leicht nachrechnet) sind. (Wären die Einbettungen in die Liegruppen nicht irreduzibel, besäßen die Liegruppen einen echten Normalteiler, was nach [bur, Seite 347] zur Folge hätte, daß deren Liealgebren nicht einfach wären.)

Lemma 1.1.12 Sei $1 \longrightarrow N \xrightarrow{i} G \xleftarrow{j} G/N \longrightarrow 1$ exakt

Genau dann besitzt G eine p -Kongruenzstruktur, wenn für $M := G/N$ gilt:

1. N besitzt eine p -Kongruenzstruktur $\{N_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ s.d. $N_i \trianglelefteq G$
2. M besitzt eine p -Kongruenzstruktur $\{M_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ s.d. für $m \in M_i$ gilt:

$$\begin{aligned} id = m^* : N/N_i &\longrightarrow N/N_i \\ nN_i &\longmapsto i^{-1}(j(m)i(n)j(m)^{-1})N_i \end{aligned}$$

Beweis:

" $\Rightarrow$ " Besitze G eine p -Kongruenzstruktur $\{G_i\}_{i \in \mathbb{N}}$, dann besitzt N die p -Kongruenzstruktur $N_i := i^{-1}(i(N) \cap G_i)$.

Es gilt: $N_i \trianglelefteq N$.

Entsprechend erhält M die p -Kongruenzstruktur $M_i := p(j(M) \cap G_i)$.

Sei nun $m \in M_i$. Dann gilt:

$i(n)^{-1}j(m)i(n)j(m)^{-1} \in i(N) \cap G_i$, da $j(m)i(n)j(m)^{-1} \in i(N) \wedge i(n)^{-1} \in i(N)$ und $j(m) \in G_i \wedge i(n)^{-1} \in i(N)$
 $\Rightarrow i^{-1}(j(m)i(n)j(m)^{-1}) \in nN_i$

" $\Leftarrow$ " Es gilt:

$$\begin{aligned} G &= i(N)j(M) \\ g &\mapsto g(j \circ p(g^{-1}))(j \circ p(g)) \end{aligned}$$

Beh: $G_i := i(N_i)j(M_i)$ ist eine p -Kongruenzstruktur von G :

(i) G_i ist eine Gruppe:

Seien $g_1, g_2 \in G_i$. Dann gibt es $n_1, n_2 \in N_i$, $m_1, m_2 \in M_i$ s.d. $g_1 = i(n_1)j(m_1)$,
 $g_2 = i(n_2)j(m_2)$
 $\Rightarrow g_1 g_2 = i(n_1)j(m_1)i(n_2)j(m_1)^{-1}j(m_1 m_2)$ mit $i(n_1)j(m_1)i(n_2)j(m_1)^{-1} \in i(N_i)$, und
 $j(m_1 m_2) \in j(M_i)$

Sei $g \in G_i$, dann gibt es $n \in N_i, m \in M_i$ s.d. $g = i(n)j(m)$.

$g^{-1} = j(m)^{-1}i(n)^{-1}j(m)j(m)^{-1}$ mit $j(m)^{-1}i(n)^{-1}j(m) \in i(N_i)$ $j(m)^{-1} \in j(M_i)$

G_i ist ein Normalteiler:

Sei $g \in G$, dann gibt es $n \in N, m \in M$ s.d. $g = i(n)j(m)$,

$n_i \in N_i, m_i \in M_i$ s.d. $g_i = i(n_i)j(m_i)$.

$\Rightarrow gg_i g^{-1} = i(n)j(m)i(n_i)j(m_i)j(m)^{-1}i(n)^{-1} =$

$i(n)j(m)i(n_i)j(m)^{-1}i(n)^{-1}i(n)j(mm_i m^{-1})i(n^{-1})j(mm_i^{-1} m^{-1})j(mm_i m^{-1})$

mit $i(n)j(m)i(n_i)j(m)^{-1}i(n)^{-1} \in i(N_i)$,

$i(n)j(mm_i m^{-1})i(n^{-1})j(mm_i^{-1} m^{-1}) \in j(M_i)$ und $j(mm_i m^{-1}) \in j(M_i)$.

(ii) klar.

(iii) Sei $i \in \mathbb{N}$ zu zeigen: $|G/G_i| < \infty$

Beh: $1 \longrightarrow N/N_i \xrightarrow{i} G/G_i \xleftarrow{j} M/M_i \longrightarrow 1$ exakt

Injektivität von i :

Sei $n \in N$ mit $i(n) \in G_i$, d.h.:

$\bigvee \tilde{n} \in N_i, \tilde{m} \in M_i : i(n) = i(\tilde{n})j(\tilde{m})$

$\Rightarrow e_M = p \circ i(n) = p \circ j(\tilde{m}) = \tilde{m} \Rightarrow n = \tilde{n} \in N_i$

Wohldefiniertheit von p :

zu zeigen: $p(G_i) \subset M_i$. Sei also $g \in G_i, n \in N_i, m \in M_i$ s.d. $g = i(n)j(m)$

$\Rightarrow p(g) = p \circ j(m) = m \in M_i$

Surjektivität von p :

Sei $m \in M$, dann ist $j(m) \in G$. Nun gilt: $p(j(m)G_i) = p \circ j(m)M_i = mM_i$

($\ker p \supseteq \text{Im } i$):

Sei $n \in N : p \circ i(nN_i) = e_M \subset M_i$.

($\ker p \subseteq \text{Im } i$):

Sei $g \in G, n \in N, m \in M$ s.d. $g = i(n)j(m)$ mit $p(gG_i) = M_i \Rightarrow$

$M_i = p(i(n)j(m)G_i) = p \circ j(m)M_i = mM_i \Rightarrow$

$m \in M_i \Rightarrow gG_i = i(n)G_i$ da $j(m) \in G_i$. $\Rightarrow gG_i = i(nN_i)$.

Aus der Spaltung der exakten Sequenz folgt nun: $G/G_i = i(N/N_i)j(M/M_i)$. Da gilt:
 $|N/N_i| < \infty, |j(M/M_i)| < \infty$ folgt: $|G/G_i| < \infty$.

(iv) Seien $i \leq j$, $g \in G_i$. Dann gilt: $p(g) \in M_i$. Nun gibt es $l \in \mathbb{N}$ s.d.: $p(g)^{p^l} \in M_j$
 $\Rightarrow \bigvee n \in N_i : g^{p^l} G_j = i(n)G_j$.

Nun gibt es $m \in \mathbb{N} : n^{p^m} \in N_j \Rightarrow g^{p^{l+m}} G_j = i(n)^{p^m} G_j = G_j$, da $i(N_j) \subset G_j$.

(v) Aus der kurzen exakten Sequenz für $j \in \mathbb{N}$:

$$1 \longrightarrow N/N_j \xrightarrow{i} G/G_j \xrightarrow[p_j]{p} M/M_j \longrightarrow 1$$

ergibt sich die folgende kurze exakte Sequenz für $i \in \mathbb{N}, i \leq j$:

$$1 \longrightarrow N_i/N_j \xrightarrow{i} G_i/G_j \xrightarrow[p_j]{p} M_i/M_j \longrightarrow 1$$

Damit gilt: $G_i/G_j = i(N_i/N_j)j(M_i/M_j)$.

Nun gibt es $d_M, d_N \in \mathbb{N}$ s.d. gilt:

N_i/N_j wird von einem Erzeugendensystem erzeugt, das höchstens d_N Elemente besitzt, M_i/M_j wird von einem Erzeugendensystem erzeugt, das höchstens d_M Elemente besitzt.

Nach Voraussetzung kann man d_M, d_N unabhängig von i, j wählen. Damit besitzt G_i/G_j für alle $i, j \in \mathbb{N}$ mit $i \leq j$ ein Erzeugendensystem mit höchstens $d_M d_N$ Elementen.

(vi) Sei $g \in \bigcap G_i \Rightarrow p(g) \in \bigcap M_i = \{e\}$

$\Rightarrow g \in i(N) \cap \bigcap G_i = \bigcap (i(N) \cap G_i)$.

Nun gilt: $i(N) \cap G_i = i(N_i) \Rightarrow i^{-1}(g) \in \bigcap N_i = \{e\} \Rightarrow g = e$

Bemerkung 1.1.13 Nach [man, Seite 509 Korollar 2.4] gilt folgender Satz:

Sei $1 \longrightarrow N \xrightarrow{i} G \xrightarrow[p]{p} M \longrightarrow 1$

eine kurze exakte Sequenz und besitzen N, G, M eine p -Kongruenzstruktur ohne (v) s.d.: $i(N_i) \subset G_i, p(G_i) \subset M_i$.

Dann besitzt G genau dann eine p -Kongruenzstruktur, wenn M, N eine p -Kongruenzstruktur besitzen.

Bemerkung 1.1.14 Mit Hilfe von [dix, Seite 89, Theorem 5.6], das besagt:

Sei G eine Gruppe mit einer p -Kongruenzstruktur $\{G_i\}_{i \in \mathbb{N}}$, dann besitzt die Untergruppe von $\text{Aut } G$, deren Elemente die G_i für alle $i \in \mathbb{N}$ festhalten, auch eine p -Kongruenzstruktur.

kann man folgenden Satz zeigen:

Satz 1.1.15 Sei $1 \longrightarrow N \xrightarrow{i} G \xrightarrow[p]{p} M \longrightarrow 1$ exakt

und $\{g \in G \mid \bigwedge n \in N : g(i(n))g^{-1} = i(n)\} = \{e\}$, d.h. der Schnitt von $i(N)$ mit dem Zentrum von G ist die Identität.

Dann besitzt G genau dann eine p -Kongruenzstruktur, wenn N eine p -Kongruenzstruktur $\{N_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ mit $i(N_i) \trianglelefteq G$ besitzt.

Beweis:

" $\Rightarrow$ " wie in 1.1.12.

" $\Leftarrow$ " Sei

$$\begin{aligned} \varphi : G &\longrightarrow \text{Aut } N \\ g &\longmapsto (n \mapsto i^{-1}(g(i(n))g^{-1})) \end{aligned}$$

Da $i(N_i) \trianglelefteq G$ gilt, erfüllt $\varphi(G)$ die Voraussetzungen aus obigem Theorem, besitzt insbesondere eine p -Kongruenzstruktur.

Noch zu zeigen: φ ist injektiv, denn dann induziert die p -Kongruenzstruktur von $\varphi(G)$ eine p -Kongruenzstruktur auf G .

Sei nun $g \in \ker \varphi \Rightarrow \bigwedge n \in N : i(n) = g(i(n))g^{-1}$

Nach Voraussetzung des Satzes folgt daraus: $g = e$.

Lemma 1.1.16 *Sei*

$$1 \longrightarrow N \xrightarrow{i} G \xrightleftharpoons[j]{p} M \longrightarrow 1 \text{ exakt}$$

mit $|M| < \infty$, dann gilt:

G besitzt genau dann eine p -Kongruenzstruktur, wenn N eine p -Kongruenzstruktur besitzt.

Beweis:

" $\Leftarrow$ " Sei $\{N_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ eine p -Kongruenzstruktur von N . Definiere nun $\{G_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ durch:
 $G_i := \bigcap_{m \in M} mN_i m^{-1}$ für $i \in \mathbb{N}$. Es gilt: $G_i \trianglelefteq G$ und $G_i \subset N$. Nach 1.1.12 besitzt G nun eine p -Kongruenzstruktur, wenn $\{G_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ eine p -Kongruenzstruktur von N induziert:
 (i), (ii) sind klar.
 (iii), (iv), (v):

zu zeigen: $\frac{\bigcap_{m \in M} mN_i m^{-1}}{\bigcap_{m \in M} mN_{i+k} m^{-1}}$ für $i, k \in \mathbb{N}$ ist eine endliche p -Gruppe, die von d (d unabhängig von i) Elementen erzeugt wird.

Nun gilt mit $M = \{m_1, \dots, m_m\}$ mit $m \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} & \frac{m_1 N_i m_1^{-1} \cap \dots \cap m_j N_i m_j^{-1} \cap m_{j+1} N_i m_{j+1}^{-1} \cap m_{j+2} N_i m_{j+2}^{-1} \cap \dots \cap m_m N_i m_m^{-1}}{m_1 N_i m_1^{-1} \cap \dots \cap m_j N_i m_j^{-1} \cap m_{j+1} N_{i+k} m_{j+1}^{-1} \cap m_{j+2} N_{i+k} m_{j+2}^{-1} \cap \dots \cap m_m N_{i+k} m_m^{-1}} \\ &= \frac{m_1 N_i m_1^{-1} \cap \dots \cap m_j N_i m_j^{-1} \cap m_{j+1} N_i m_{j+1}^{-1} \cap m_{j+2} N_{i+k} m_{j+2}^{-1} \cap \dots \cap m_m N_{i+k} m_m^{-1}}{m_1 N_i m_1^{-1} \cap \dots \cap m_j N_i m_j^{-1} \cap m_{j+1} N_{i+k} m_{j+1}^{-1} \cap m_{j+2} N_{i+k} m_{j+2}^{-1} \cap \dots \cap m_m N_{i+k} m_m^{-1} \cap m_{j+1} N_{i+k} m_{j+1}^{-1}} \end{aligned}$$

wobei der Quotient hier als Aufteilung in Nebenklassen zu verstehen ist. Durch Konjugation eines solchen Quotienten bleibt die Anzahl der Nebenklassen bestehen.

Man konjugiere nun mit m_{j+1}^{-1} und erhält:

$$\begin{aligned} & \frac{m_{j+1}^{-1} m_1 N_i m_1^{-1} m_{j+1} \cap \dots \cap m_{j+1}^{-1} m_j N_i m_j^{-1} m_{j+1} \cap m_{j+1}^{-1} N_i m_{j+1} \cap m_{j+2} N_{i+k} m_{j+2}^{-1} m_{j+1} \cap \dots \cap m_{j+1}^{-1} m_m N_{i+k} m_m^{-1} m_{j+1}}{m_{j+1}^{-1} m_1 N_i m_1^{-1} m_{j+1} \cap \dots \cap m_{j+1}^{-1} m_j N_i m_j^{-1} m_{j+1} \cap m_{j+1}^{-1} N_i m_{j+1} \cap m_{j+2} N_{i+k} m_{j+2}^{-1} m_{j+1} \cap \dots \cap m_{j+1}^{-1} m_m N_{i+k} m_m^{-1} m_{j+1} \cap N_{i+k}} \\ & \sim \frac{m_{j+1}^{-1} m_1 N_i m_1^{-1} m_{j+1} \cap \dots \cap m_{j+1}^{-1} m_j N_i m_j^{-1} m_{j+1} \cap m_{j+1}^{-1} N_i m_{j+1} \cap m_{j+2} N_{i+k} m_{j+2}^{-1} m_{j+1} \cap \dots \cap m_{j+1}^{-1} m_m N_{i+k} m_m^{-1} m_{j+1}}{N_{i+k}} \end{aligned}$$

Dieser Quotient besteht nach Voraussetzung aus höchstens d (womit das zu der p -Kongruenzstruktur $\{N_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ gehörige d gemeint ist) Nebenklassen. Insbesondere bestand auch der erste Quotient aus höchstens d Nebenklassen.

Nun kann man den Quotienten $\frac{m_1 N_i m_1^{-1} \cap \dots \cap m_m N_i m_m^{-1}}{m_1 N_{i+k} m_1^{-1} \cap \dots \cap m_m N_{i+k} m_m^{-1}}$ in m Zwischenquotienten zerlegen. Damit wird

$$\frac{\bigcap_{m \in M} mN_i m^{-1}}{\bigcap_{m \in M} mN_{i+k} m^{-1}}$$

von höchstens md Elementen erzeugt und ist endlich. Daß diese Gruppe eine p -Gruppe ist, folgt, da für $m \in M$; $i, k \in \mathbb{N}$ gilt: $\frac{mN_i m^{-1}}{mN_{i+k} m^{-1}}$ ist eine p -Gruppe. Denn damit findet man

$$\text{für ein } g \in \bigcap_{m \in M} mN_i m^{-1} \text{ ein } j \in \mathbb{N} \text{ s.d. } g^{p^j} \in \bigcap_{m \in M} mN_{i+k} m^{-1}$$

(vi) ist klar.

" $\Rightarrow$ " folgt aus 1.1.3.

1.2 Die Teichmüllersche Modulgruppe einer Riemannschen Fläche

Definition 1.2.1 vergleiche :[nag, Seite 22ff]

Seien M_0, M Riemannsche Flächen, $\varphi : M_0 \longrightarrow M$ ein orientierungserhaltender Diffeomorphismus.

Die komplexe Dilatation von φ sei definiert durch $\mu(\varphi) := \frac{\varphi_{\bar{z}}}{\varphi_z}$, wobei z ein lokaler Parameter auf M_0 ist.

φ heißt quasikonformer Diffeomorphismus, falls $\|\mu(\varphi)\|_\infty < 1$.

Definition 1.2.2 Sei M_0 eine Riemannsche Fläche, sei $D(M_0)$ die Menge aller zu M_0 quasikonform diffeomorphen Riemannschen Flächen.

Dann versehe $D(M_0)$ mit folgender Äquivalenzrelation:

Seien $M_1, M_2 \in D(M_0)$, dann definiere:

$M_1 \sim_R M_2 :\Leftrightarrow M_1$ und M_2 sind biholomorph.

Man definiere nun den Riemannschen Modulraum $R(M_0)$ als: $R(M_0) := D(M_0) / \sim_R$

Bemerkung 1.2.3 Vergleiche:[nag, Seite 103ff]

Der Riemannsche Modulraum einer kompakten Riemannschen Fläche mit endlich vielen Punktierungen beschreibt die komplexen Strukturen mit denen M_0 versehen werden kann, denn sei M_1 homöomorph zu M_0 , dann gibt es auch einen quasikonformen Diffeomorphismus von M_0 auf M_1 .

Bei anderen Riemannschen Flächen betrachtet man nur die zu M_0 quasikonform diffeomorphen Riemannschen Flächen M_1 und erhält damit nicht alle homöomorphen komplexen Strukturen.

Man kann nun $R(M_0)$ wie folgt mit einer Metrik versehen:

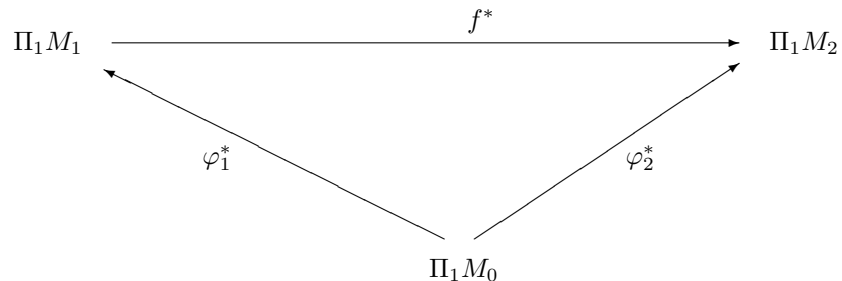
Seien $R_1, R_2 \in R(M_0)$, dann definiere:

$d_R(R_1, R_2) := \inf \{ \log(\|\mu(\varphi)\|_\infty) \mid \varphi : M_1 \longrightarrow M_2 \text{ q.k. Diffeom. mit } M_1 \in R_1, M_2 \in R_2 \}$

Es wird sich nun herausstellen, daß $R(M_0)$ bezüglich dieser Metrik zusammenhängend aber nicht einfach zusammenhängend ist. Der Riemannsche Modulraum wird von einem einfach zusammenhängenden Raum, der sogar eine komplexe Struktur trägt, überlagert. Dieser Raum heißt der Teichmüllerraum.

Definition 1.2.4 Sei M_0 eine Riemannsche Fläche. Man betrachte die Menge der Tripel (M_0, φ, M) mit $M \in D(M_0)$, wo $\varphi : M_0 \longrightarrow M$ ein quasikonformer Diffeomorphismus ist.

Der Teichmüllerraum $T(M_0)$ von M_0 ist die Menge der Äquivalenzklassen obiger Tripel mit: $(M_0, \varphi_1, M_1) \sim_T (M_0, \varphi_2, M_2) :\Leftrightarrow \exists f : M_1 \longrightarrow M_2$ biholomorph s.d. folgendes Diagramm kommutiert:



Definition 1.2.5 Man definiere nun die Teichmüllermetrik wie folgt:

$d : T(M_0) \times T(M_0) \longrightarrow \mathbb{R}_0^+$ mit

$d(\tau_1, \tau_2) := \inf \{ \log \|f_{\bar{z}}/f_z\|_\infty \mid f : M_1 \longrightarrow M_2 \text{ s.d. } id^* =$

$(\varphi_1 \circ \varphi_2^{-1})^* \circ f^* : \Pi_1 M_1 \longrightarrow \Pi_1 M_1$ mit $(M_0, \varphi_i, M_i) \in \tau_i$ für $i \in \{1, 2\}$
 vergl. [nag, Seite 58, 108, 118]

Satz 1.2.6 Der Teichmüllerraum einer Riemannschen Fläche M_0 , versehen mit der Teichmüllermetrik, ist zusammenhängend, einfach zusammenhängend und besitzt eine komplexe Struktur. [nag, Seite 108, 118, 150, 185]

Definition 1.2.7 Sei $\text{Diff}_{q.c.}(M_0)$ die Gruppe der quasikonformen Diffeomorphismen auf einer Riemannschen Fläche M_0 . Man versehe $\text{Diff}_{q.c.}(M_0)$ mit der kompakt-offenen Topologie.

Die Teichmüllersche Modulgruppe wird nun definiert als: $M(M_0) := \Pi_0(\text{Diff}_{q.c.}(M_0), id)$
 Dabei ist die Zusammenhangskomponente innerhalb der Homöomorphismen gemeint.

Satz 1.2.8 $M(M_0)$ operiert auf $T(M_0)$:

Sei $\bar{\varphi} \in M(M_0)$, $\tau \in T(M_0)$, $\varphi \in \bar{\varphi}$, $(M_0, \Psi, M_1) \in \tau_1$.

Dann definiere:

$\bar{\varphi}(\tau) := (M_0, \Psi \circ \varphi, M_1) / \sim_T$.

Beweis der Wohldefiniertheit siehe [nag, Seite 122].

Satz 1.2.9 $R(M_0) \cong T(M_0)/M(M_0)$

Beweis siehe [nag, Seite 124].

Bemerkung 1.2.10 Die Teichmüllersche Modulgruppe ist die Gruppe der Decktransformationen der einfachzusammenhängenden komplexen Überlagerung $T(M_0)/M(M_0)$.

1.3 Die quasikonformen Diffeomorphismen des Torus

Definition 1.3.1 Sei T ein Torus, $\text{Diff}_{q.c.}(T)$ die Gruppe der quasikonformen Diffeomorphismen von T . Seien $q_1, q_2 \in T$ mit $q_1 \neq q_2$. $\text{Fix}(q_1)$, $\text{Fix}(q_1, q_2)$ sei die Untergruppe der Elemente von $\text{Diff}_{q.c.}(T)$, die q_1 bzw. q_1, q_2 festhalten.

Definition 1.3.2 vergleiche: [bir, Seite 175]

Sei M ein topologischer Raum, F ein topologischer Unterraum von M , $x_0 \in F$, $i \in \mathbb{N}$, dann definiere:

$[0, 1]^{-j} := \emptyset$ für $j \in \mathbb{N}$, $[0, 1]^0 := \{0\}$, $\delta[0, 1]^i$ sei der Rand von $[0, 1]^i$.

Seien $f_0, f_1 : ([0, 1]^i, \delta[0, 1]^i, (\delta[0, 1]^{i-1} \times \{1\}) \cup ([0, 1]^{i-1} \times \{0\})) \longrightarrow (M, F, x_0)$,

dann definiere folgende Äquivalenzrelation: $f_0 \sim f_1$

$:\Leftrightarrow \bigvee h : [0, 1] \times ([0, 1]^i, \delta[0, 1]^i, (\delta[0, 1]^{i-1} \times \{1\}) \cup ([0, 1]^{i-1} \times \{0\})) \xrightarrow{\text{stetig}} (M, F, x_0)$ mit $h(0) = f_0, h(1) = f_1$.

Nun definiere: $\Pi_i(M, F, x_0) :=$

$\left\{ \{f : ([0, 1]^i, \delta[0, 1]^i, (\delta[0, 1]^{i-1} \times \{1\}) \cup ([0, 1]^{i-1} \times \{0\})) \xrightarrow{\text{stetig}} (M, F, x_0)\} / \sim \right\}$

Sei $f : ([0, 1]^i, \delta[0, 1]^i, (\delta[0, 1]^{i-1} \times \{1\}) \cup ([0, 1]^{i-1} \times \{0\})) \xrightarrow{\text{stetig}} (M, F, x_0)$,

dann bezeichne $\Pi_i(f)$ die dazugehörige Äquivalenzklasse in $\Pi_i(M, F, x_0)$.

Ferner definiere $\Pi_i(M, x_0) := \Pi_i(M, x_0, x_0)$.

Satz 1.3.3 Nach [bir, Seite 175] gibt es folgende lange exakte Sequenz:

$$\begin{array}{ccccccc} \cdots & \longrightarrow & \Pi_i(F, x_0) & \xrightarrow{j_i} & \Pi_i(M, x_0) & \xrightarrow{p_i} & \Pi_i(M, F, x_0) & \xrightarrow{\delta_i} \\ & & \xrightarrow{\delta_i} & \Pi_{i-1}(F, x_0) & \xrightarrow{j_{i-1}} & \Pi_{i-1}(M, x_0) & \xrightarrow{p_{i-1}} & \Pi_{i-1}(M, F, x_0) & \xrightarrow{\delta_{i-1}} \cdots \end{array}$$

mit folgenden Bezeichnungen:

$$\begin{aligned} j_i(\Pi_i(f)) &:= \Pi_i(j \circ f) \text{ mit } j : F \xrightarrow{id} M; \\ p_i(\Pi_i(m)) &:= \Pi_i(l \circ m) \text{ mit } l : (M, x_0, x_0) \xrightarrow{id} (M, F, x_0); \\ \delta_i(\Pi_i(m)) &:= \Pi_i(k \circ m|_{[0,1]^{i-1} \times \{1\}}) \text{ mit} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} k : (F, F, x_0) &\longrightarrow (F, x_0, x_0) \\ (m, m, x_0) &\longmapsto (m, x_0, x_0) \end{aligned}$$

Korollar 1.3.4 Wenn man nun für $F = \text{Fix}(q_1, q_2)$, $M = \text{Fix}(q_1)$ wählt, ergibt sich:

$$.. \longrightarrow \Pi_i(\text{Fix}(q_1, q_2), id) \longrightarrow \Pi_i(\text{Fix}(q_1), id) \longrightarrow \Pi_i(\text{Fix}(q_1), \text{Fix}(q_1, q_2), id) \longrightarrow ..$$

Satz 1.3.5 Nach [bir, Seite 176] gilt für $i \in \mathbb{N}$:

Die Abbildung

$$\begin{aligned} q_i : \Pi_i(\text{Fix}(q_1), \text{Fix}(q_1, q_2), id) &\longrightarrow \Pi_i(T \setminus \{q_1\}, q_2, q_2) \\ (h, g, id) &\longmapsto (h(q_2), g(q_2), q_2) \end{aligned}$$

ist ein Isomorphismus.

Satz 1.3.6 Nach obigem Satz gibt es folgende lange exakte Sequenz:

$$.. \rightarrow \Pi_i(\text{Fix}(q_1, q_2), id) \xrightarrow{j_i} \Pi_i(\text{Fix}(q_1), id) \xrightarrow{q_i \circ p_i} \Pi_i(T \setminus \{q_1\}, q_2) \xrightarrow{\delta_i \circ q_i^{-1}} \Pi_{i-1}(\text{Fix}(q_1, q_2), id) \rightarrow ..$$

Dabei hat nach [bir, Seite 176] die Abbildung $q_i \circ p_i$ folgende Gestalt:

$$\begin{aligned} \hat{q}_i := q_i \circ p_i : \Pi_i(\text{Fix}(q_1), id) &\longrightarrow \Pi_i(T \setminus \{q_1\}, q_2) \\ \Pi_i(f) &\longmapsto \Pi_i(\hat{q} \circ f) \end{aligned}$$

mit

$$\begin{aligned} \hat{q} : \text{Fix}(q_1) &\longrightarrow T \setminus \{q_1\} \\ h &\longmapsto h(q_2) \end{aligned}$$

Satz 1.3.7 Es gibt einen Gruppenhomomorphismus

$$\begin{aligned} \bar{\eta} : \Pi_1(T \setminus \{q_1\}, q_2) &\longrightarrow \Pi_0(\text{Fix}(q_1, q_2), id) \\ \Pi_1(\gamma) &\longmapsto \Pi_0(\eta_\gamma(1)) \end{aligned}$$

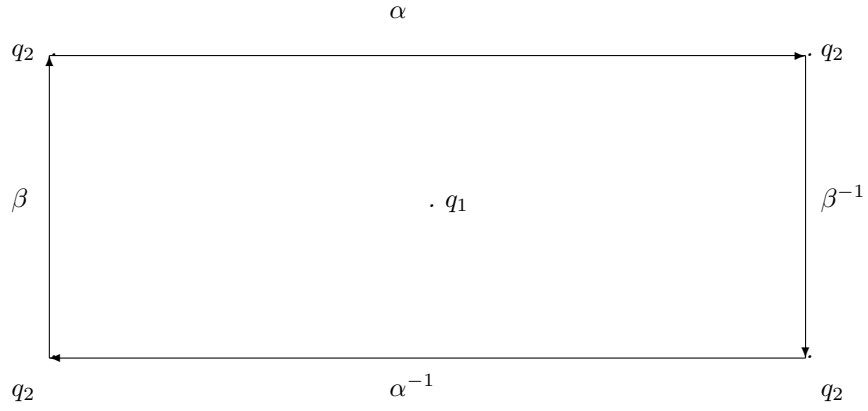
mit $\eta_\gamma : [0, 1] \xrightarrow{\text{stetig}} \text{Fix}(q_1)$ s.d. mit der Abbildung:

$$\begin{aligned} \tilde{q} : \text{Fix}(q_1) &\longrightarrow T \setminus \{q_1\} \\ f &\longmapsto f(q_2) \end{aligned}$$

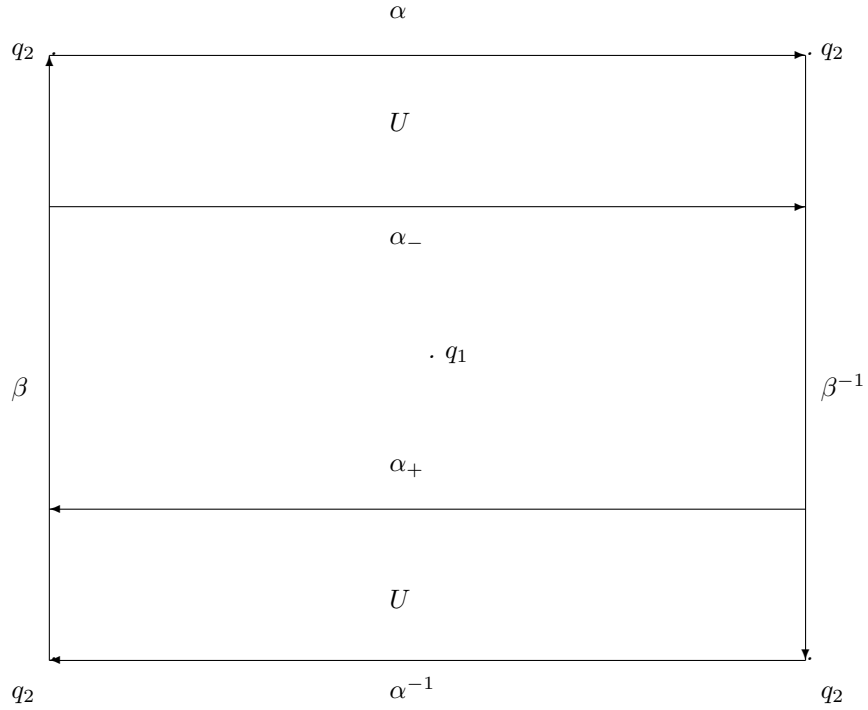
gilt: $\Pi_1(\tilde{q} \circ \eta_\gamma) = \Pi_1(\gamma)$

Beweis:

Nach 1.1.9 ist $\Pi_1(T \setminus \{q_1\}, q_2)$ eine freie Gruppe, die von $\Pi_1(\alpha), \Pi_1(\beta)$ erzeugt wird. $T \setminus \{q_1\}$ ist homotopieäquivalent zu einem einfach punktierten Rechteck mit dem Rand $\alpha\beta\alpha^{-1}\beta^{-1}$, bei dem α, α^{-1} und β, β^{-1} verklebt werden.



Wähle nun α_+, α_- parallel zu α s.d. $q_1 \notin \overline{U}$, wo U die α enthaltende Zusammenhangskomponente von $T \setminus \{q_1 \cup |\alpha_+| \cup |\alpha_-|\}$ sei.



$\overline{U}$ ist nun diffeomorph zu $[-1, 1] \times S^1$ mit $q_2 = (0, 1), \alpha = (0, S^1)$
Für $s \in [0, 1]$ definiere φ_s^α :

$$\begin{aligned} \varphi_s^\alpha : [-1, 1] \times S^1 &\longrightarrow [-1, 1] \times S^1 \\ (t, \exp(i\varphi)) &\longmapsto (t, \exp(i(\varphi + \frac{2\pi s}{e}(e^{-\frac{1}{t^2-1}})))) \end{aligned}$$

φ_s^α hat folgende Eigenschaften:

$\varphi_s^\alpha|_{0 \times S^1}(0, e^{i\varphi}) = (0, e^{i(\varphi + 2\pi s)})$ insbesondere:

$\varphi_s^\alpha(0, 1) = (0, e^{i2\pi s}), \varphi_1^\alpha(0, 1) = (0, 1)$

$\varphi_s^\alpha|_{\{-1, 1\} \times S^1} = id|_{\{-1, 1\} \times S^1}$.

φ_s^α ist differenzierbar und es gilt für die Ableitung $d\varphi_s^\alpha$:

$d\varphi_s^\alpha(t, e^{i\varphi}) = d \text{ id}(t, e^{i\varphi})$ für $t \in \{1, -1\}$

Damit kann man $\tilde{\varphi}_s^\alpha \in \text{Fix}(q_1)$ wie folgt definieren:

$$\tilde{\varphi}_s^\alpha := \begin{cases} \varphi_s^\alpha(z) & \text{für } z \in U \\ \text{id} & \text{sonst} \end{cases}$$

Nun definiere man η_α wie folgt:

$$\begin{aligned} \eta_\alpha : [0, 1] &\longrightarrow \text{Fix}(q_1) \\ s &\longmapsto \tilde{\varphi}_s^\alpha \end{aligned}$$

Aus der Definition von η_α folgt: $\tilde{q} \circ \eta_\alpha = \alpha \Rightarrow \Pi_1(\tilde{q} \circ \eta_\alpha) = \Pi_1(\alpha)$.

Entsprechend gibt es $\eta_\beta : [0, 1] \longrightarrow \text{Fix}(q_1)$.

Man definiere nun: $\eta_{\alpha^{-1}}(t) := (\eta_\alpha(t))^{-1}$, $\eta_{\beta^{-1}}(t) := (\eta_\beta(t))^{-1}$ für $t \in [0, 1]$.

Sei nun $\Pi_1(\gamma) \in \Pi_1(T \setminus \{q_1\}, q_2)$, dann gibt es $n \in \mathbb{N}$; $a_j, b_j \in \mathbb{Z}$ s.d. $\Pi_1(\gamma) = \prod_{j=1}^n (\Pi_1(\alpha)^{a_j} \Pi_1(\beta)^{b_j})$,

da nach 1.1.9 $\Pi_1(T \setminus \{q_1\}, q_2)$ die von $\Pi_1(\alpha), \Pi_1(\beta)$ erzeugte freie Gruppe ist.

Nun gilt mit $m = \sum_{j=1}^n |a_j| + |b_j|$; $c_j^\alpha, c_j^\beta \in \{-1, 0, 1\}$ geeignet:

$$\Pi_1(\gamma) = \prod_{j=1}^m (\Pi_1(\alpha)^{c_j^\alpha} \Pi_1(\beta)^{c_j^\beta}).$$

Definiere nun: $\eta_\gamma : [0, 1] \longrightarrow \text{Fix}(q_1)$ mit $l \in \{0, \dots, m-1\}$ s.d.:

$$\eta_\gamma|_{[\frac{2l}{2m}, \frac{2(l+1)}{2m}]}(t) := \left(\prod_{i=1}^l (\eta_\alpha^{c_i^\alpha}(1) \circ \eta_\beta^{c_i^\beta}(1)) \right) \circ \eta_\alpha^{c_{l+1}^\alpha}(2mt - 2l).$$

$$\eta_\gamma|_{[\frac{2(l+1)}{2m}, \frac{2(l+1)}{2m}]}(t) := \left(\prod_{i=1}^l (\eta_\alpha^{c_i^\alpha}(1) \circ \eta_\beta^{c_i^\beta}(1)) \right) \circ \eta_\alpha^{c_{l+1}^\alpha}(1) \circ \eta_\beta^{c_{l+1}^\beta}(2mt - 2(l+1)).$$

Die Wohldefiniertheit folgt, da $\Pi_1(T \setminus \{q_1\}, q_2)$ frei ist, die Stetigkeit folgt aus der Stetigkeit von $\eta_\alpha, \eta_{\alpha^{-1}}, \eta_\beta, \eta_{\beta^{-1}}$. Der Satz folgt nun, da $\eta_\gamma(1)(q_2) = q_2$.

Satz 1.3.8 Die Abbildung $\delta_1 \circ q_1^{-1}$ hat die Gestalt:

$$\begin{aligned} \Pi_1(T \setminus \{q_1\}, q_2) &\longrightarrow \Pi_0(\text{Fix}(q_1, q_2), \text{id}) \\ \bar{\gamma} &\longmapsto \bar{\eta}(\bar{\gamma}) \end{aligned}$$

und ist injektiv. vergl. [bir, Seite 177]

Beweis

Daß $\delta_1 \circ q_1^{-1}$ obige Gestalt hat, folgt aus Satz 1.3.7, denn $\delta_1 \circ q_1^{-1}(\bar{\gamma}) = \delta_1(\Pi_1(\eta_{\bar{\gamma}}, \eta_{\bar{\gamma}}|_{\{0,1\}}, \text{id})) = \Pi_0(\eta_{\bar{\gamma}}(1), \text{id})$.

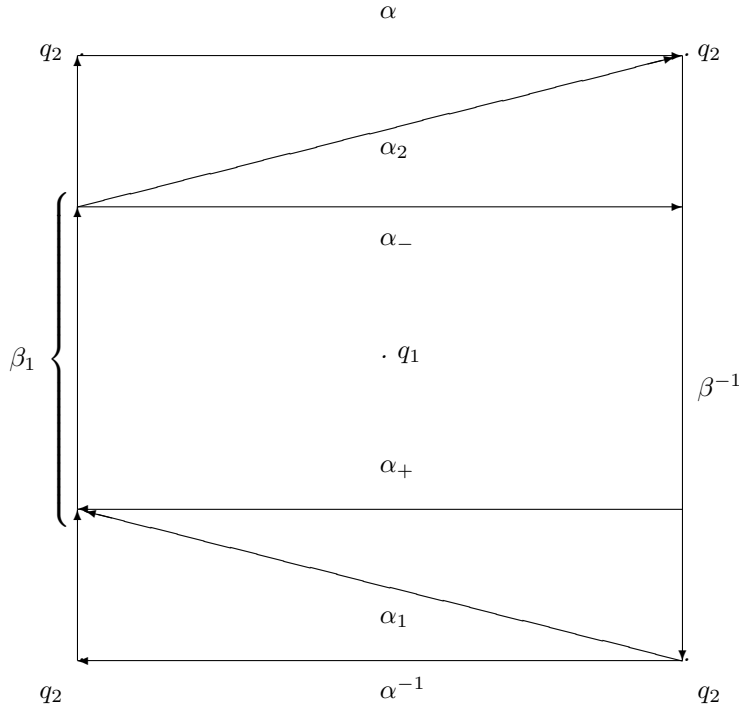
Seien nun $\Pi_1(\xi), \Pi_1(\gamma) \in \Pi_1(T \setminus \{q_1\}, q_2)$, dann gilt: $(\delta_1 \circ q_1^{-1}(\Pi_1(\xi)))^*(\Pi_1(\gamma)) = \Pi_1(\xi) \Pi_1(\gamma) \Pi_1(\xi)^{-1}$ was im folgenden gezeigt wird.

Dabei bezeichne $(\delta_1 \circ q_1^{-1}(\Pi_1(\xi)))^*$ die Abbildung, die von einer beliebigen Abbildung aus $\delta_1 \circ q_1^{-1}(\Pi_1(\xi)) \in \Pi_0(\text{Fix}(q_1, q_2), \text{id})$, die also auf $T \setminus \{q_1\}$ operiert und dabei den Punkt q_2 festhält, auf der Homotopiegruppe $\Pi_1(T \setminus \{q_1\}, q_2)$ induziert wird. Die induzierte Abbildung ist dabei wohldefiniert, da $\delta_1 \circ q_1^{-1}(\Pi_1(\xi))$ zusammenhängend ist und damit die Bilder einer Kurve $\zeta \subset T \setminus \{q_1\}$ mit Basispunkt q_2 unter den Abbildungen aus $\delta_1 \circ q_1^{-1}(\Pi_1(\xi))$ alle homotop sind.

Es gilt:

$$\begin{aligned} (\delta_1 \circ q_1^{-1}(\Pi_1(\xi)))^* : \Pi_1(T \setminus \{q_1\}, q_2) &\longrightarrow \Pi_1(T \setminus \{q_1\}, q_2) \\ \bar{\gamma} &\longmapsto \Pi_1(\eta_\xi(1)(\gamma)) \end{aligned}$$

wo η_ξ wie in 1.3.7 gewählt werde. Für $\Pi_1(\alpha), \Pi_1(\beta)$ wie in 1.3.7 ergibt sich: $\eta_\alpha(1)(\beta) : [0, 1] \longrightarrow T \setminus \{q_1\}$ hat die Gestalt: $\eta_\alpha(1)(\beta) = \alpha_2 \circ \beta_1 \circ \alpha_1$ mit den Bezeichnungen wie auf folgender Abbildung:



$$\Rightarrow \Pi_1((\eta_\alpha(1))(\beta)) = \Pi_1(\alpha)\Pi_1(\beta)\Pi_1(\alpha^{-1}) \Rightarrow (\delta_1 \circ q_1^{-1}(\Pi_1(\alpha)))^*(\Pi_1(\beta)) = \Pi_1(\alpha)\Pi_1(\beta)\Pi_1(\alpha^{-1})$$

Für $\Pi_1(\gamma) \in \Pi_1(T \setminus \{q_1\}, q_2)$ gilt:

$$\Pi_1(\gamma) = \prod_{i=1}^n (\Pi_1(\alpha)^{a_i} \Pi_1(\beta)^{b_i}) \text{ mit } n \in \mathbb{N}, a_i, b_i \in \mathbb{Z}.$$

$$\Rightarrow (\delta_1 \circ q_1^{-1}(\Pi_1(\alpha)))^*(\Pi_1(\gamma)) = \Pi_1(\alpha)\Pi_1(\gamma)\Pi_1(\alpha^{-1})$$

Sei nun: $\Pi_1(\xi) \in \Pi_1(T \setminus \{q_1\}, q_2)$ mit

$$\Pi_1(\xi) = \prod_{i=1}^m (\Pi_1(\alpha)^{c_i} \Pi_1(\beta)^{d_i}) \text{ mit } m \in \mathbb{N}, c_i, d_i \in \mathbb{Z}.$$

Nun ist die Abbildung:

$$\delta_1 \circ q_1^{-1} : \Pi_1(T \setminus \{q_1\}, q_2) \longrightarrow \Pi_0(\text{Fix}(q_1, q_2), id) \text{ ein Gruppenhomomorphismus.}$$

Insbesondere gilt:

$$(\delta_1 \circ q_1^{-1}(\Pi_1(\xi)))^*(\Pi_1(\gamma)) = \left(\prod_{i=1}^m (\delta_1 \circ q_1^{-1}(\Pi_1(\alpha)))^{c_i} (\delta_1 \circ q_1^{-1}(\Pi_1(\beta)))^{d_i} \right)^*(\Pi_1(\gamma))$$

$$= \left(\prod_{i=1}^m \Pi_1(\alpha)^{c_i} \Pi_1(\beta)^{d_i} \right) \Pi_1(\gamma) \left(\prod_{i=1}^m \Pi_1(\alpha)^{c_i} \Pi_1(\beta)^{d_i} \right)^{-1}$$

Da $\Pi_1(T \setminus \{q_1\}, q_2)$ eine freie Gruppe ist, gibt es für $\Pi_1(\xi) \in \Pi_1(T \setminus \{q_1\}, q_2) \setminus \{1\}$ ein $\Pi_1(\gamma) \in \Pi_1(T \setminus \{q_1\}, q_2)$ s.d. $(\delta_1 \circ q_1^{-1}(\Pi_1(\xi)))^*(\Pi_1(\gamma)) \neq (\Pi_1(\gamma))$, was die Injektivität zeigt.

Satz 1.3.9 Die Abbildung

$$\begin{aligned} \Pi_0(\text{Fix}(q_1, q_2), id) &\longrightarrow \text{Aut}^+(\Pi_1(T \setminus \{q_1\}, q_2)) \\ \Pi_0(\varphi) &\longmapsto (\varphi|_{T \setminus \{q_1\}})^* \end{aligned}$$

(wobei $(\varphi|_{T \setminus \{q_1\}})^*$ der von $\varphi|_{T \setminus \{q_1\}}$ auf $\Pi_1(T \setminus \{q_1\}, q_2)$ induzierte Gruppenautomorphismus sei) ist ein Isomorphismus.

Dabei ist $\text{Aut}^+(\Pi_1(T \setminus \{q_1\}, q_2)) :=$

$$\ker \left(\begin{array}{ccc} \text{Aut}(\Pi_1(T \setminus \{q_1\}, q_2)) & \longrightarrow & \{1, -1\} \\ \varphi & \longmapsto & \det \left(\bar{\varphi} : \frac{\Pi_1(T \setminus \{q_1\}, q_2)}{(\Pi_1(T \setminus \{q_1\}, q_2))'} \longmapsto \frac{\Pi_1(T \setminus \{q_1\}, q_2)}{(\Pi_1(T \setminus \{q_1\}, q_2))'} \right) \end{array} \right)$$

$(\Pi_1(T \setminus \{q_1\}, q_2))'$ sei dabei die Kommutatorgruppe von $\Pi_1(T \setminus \{q_1\}, q_2)$.

Beweis

$\text{Homeo}(T \setminus \{q_1\}, q_2)$ sei die Gruppe der Homöomorphismen, die q_2 festhalten. Seien ferner $\text{Homeo}_0(T \setminus \{q_1\}, q_2)$ die Zusammenhangskomponente von id in $\text{Homeo}(T \setminus \{q_1\}, q_2)$, $\text{Homeo}^+(T \setminus \{q_1\}, q_2)$ die orientierungserhaltenden Homöomorphismen, die man wie folgt definieren kann:

$$\varphi \in \text{Homeo}^+(T \setminus \{q_1\}, q_2) :\Leftrightarrow \varphi^* \in \text{Aut}^+(\Pi_1(T \setminus \{q_1\}, q_2)).$$

Dabei sei φ^* die Abbildung, die von φ auf $\Pi_1(T \setminus \{q_1\}, q_2)$ induziert wird.

Nun ist folgende Abbildung ein Isomorphismus:

$$\begin{array}{ccc} \frac{\text{Homeo}^+(T \setminus \{q_1\}, q_2)}{\text{Homeo}_0(T \setminus \{q_1\}, q_2)} & \longrightarrow & \text{Aut}^+(\Pi_1(T \setminus \{q_1\}, q_2)) \\ \varphi & \longmapsto & \varphi^* \end{array} \quad (1.1)$$

Die Wohldefiniertheit der Abbildung folgt, da für $\varphi \in \text{Homeo}_0(T \setminus \{q_1\}, q_2)$ gilt: $\varphi^* = \text{id}$, denn der Wegzusammenhang von φ und id induziert sofort eine Homotopie zwischen einer geschlossenen Kurve $\gamma \subset T \setminus \{q_1\}$ deren Start- und Endpunkt q_2 sei und der geschlossenen Kurve $\varphi(\gamma)$, deren Start- und Endpunkt dann q_2 ist. Umgekehrt folgt aus [ahl], [mac], daß für $\varphi^* = \text{id}$ gilt: φ ist isotop zu id , d.h. die Abbildung ist injektiv.

Zur Surjektivität:

Da $\Pi_1(T \setminus \{q_1\}, q_2)$ eine freie Gruppe ist, folgt nach [lyn, Seite 23] und [mag2], daß $\text{Aut}^+(T \setminus \{q_1\}, q_2)$ von folgenden Automorphismen erzeugt wird:

(die Bezeichnungen seien dabei wie in 1.3.8)

Den inneren Automorphismen von $\Pi_1(T \setminus \{q_1\}, q_2)$, die geometrisch einer Rotation von q_2 entlang der entsprechenden Kurve entsprechen und den Automorphismen A, B , die Dehnwists entlang α, β entsprechen und die auf $\Pi_1(\alpha), \Pi_1(\beta)$ wie folgt definiert sind:

(wodurch sie auch eindeutig bestimmt sind.)

$$A(\Pi_1(\alpha)) = \Pi_1(\alpha) \circ \Pi_1(\beta), \quad A(\Pi_1(\beta)) = \Pi_1(\beta)$$

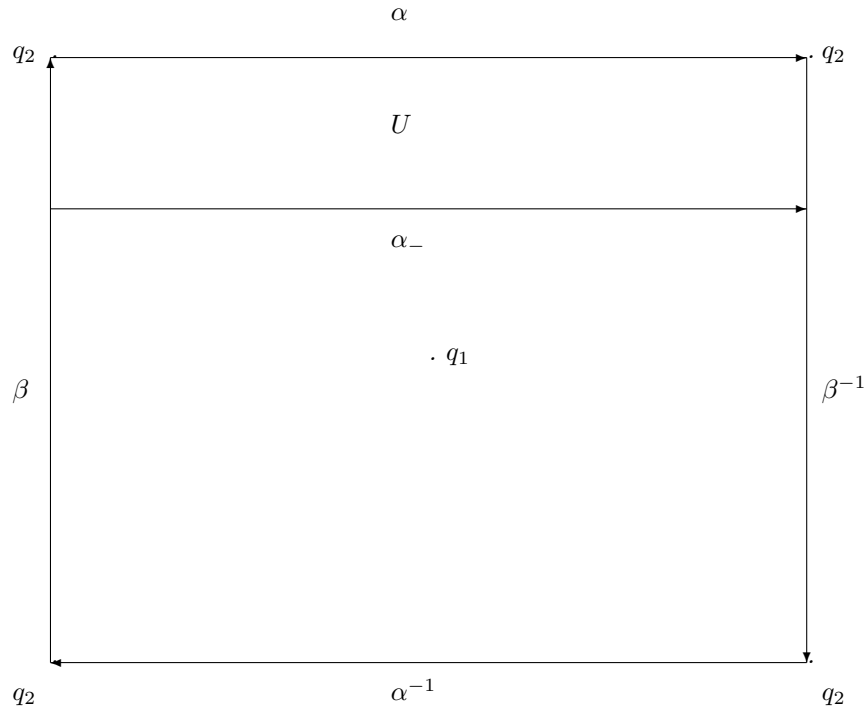
$$B(\Pi_1(\beta)) = \Pi_1(\alpha) \circ \Pi_1(\beta), \quad B(\Pi_1(\alpha)) = \Pi_1(\alpha)$$

Nach dem Beweis von 1.3.8 gibt es zu $C \in \text{Inn}(\Pi_1(T \setminus \{q_1\}, q_2))$ ein $\varphi_C \in \text{Fix}(q_1, q_2)$ mit $\varphi_C^* = C$.

Zwischenbehauptung:

Es gibt auch $\varphi_B \in \text{Fix}(q_1, q_2)$ mit $\varphi_B^* = B$:

Sei der Torus T nun wie in 1.3.8 ein Rechteck, das an den Kanten α, α^{-1} und β, β^{-1} verklebt wird. Wähle nun α_- , U wie auf folgendem Diagramm:

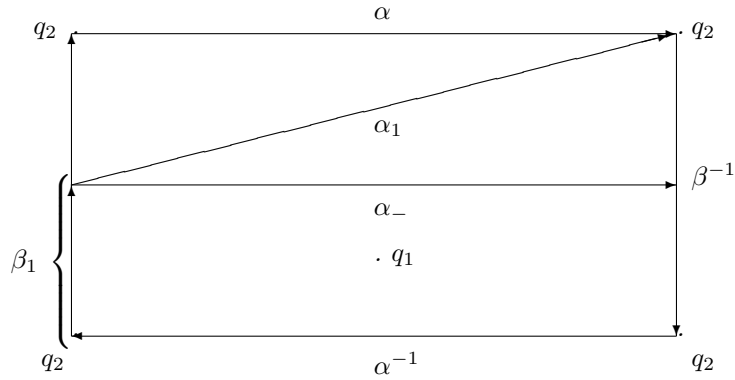


Man identifiziere U mit $[0, 1] \times S^1$, wobei $\alpha = \{1\} \times S^1$ und $\alpha_- = \{0\} \times S^1$ sei.

Man definiere nun:

$$\varphi_B := \begin{cases} \varphi_B|_U : & [0, 1] \times S^1 \longrightarrow [0, 1] \times S^1 \\ & (s, e^{it}) \longmapsto [s, \exp(it + 2\pi i e^{-\frac{1}{s^2}} (e^{-\frac{1}{s^2-1}} + 1))] \\ \varphi_B|_{T \setminus U} = id : & T \setminus U \longrightarrow T \setminus U \end{cases}$$

Wie in 1.3.7 ist φ_B ein Diffeomorphismus. Nun gilt: $\varphi_B(\beta) = \alpha_1 \circ \beta_1$ mit β_1, α_1 wie folgt:



$$\Rightarrow \varphi_B^*(\Pi_1(\beta)) = \Pi_1(\alpha_1) \circ \Pi_1(\beta_1) = \Pi_1(\alpha) \circ \Pi_1(\beta)$$

Da $\varphi_B(\alpha) = \alpha$ folgt: $\varphi_B^*(\Pi_1(\alpha)) = \Pi_1(\alpha)$

Damit gilt insbesondere: $\varphi_B^* = B$.

Entsprechend findet man $\varphi_A \in \text{Fix}(q_1, q_2)$ s.d. $\varphi_A^* = A$.

Da $\varphi_A|_{T \setminus \{q_1\}}, \varphi_B|_{T \setminus \{q_1\}} \in \text{Homeo}^+(T \setminus \{q_1\}, q_2)$ folgt die Surjektivität.

Nun betrachte man die Abbildung

$$\begin{aligned}\Pi_0(\text{Fix}(q_1, q_2), id) &\longrightarrow \frac{\text{Homeo}^+(T \setminus \{q_1\}, q_2)}{\text{Homeo}_0(T \setminus \{q_1\}, q_2)} \\ \Pi_0(\varphi) &\longmapsto \varphi|_{T \setminus \{q_1\}}\end{aligned}$$

Dies ist offenbar eine wohldefinierte Einbettung. Die Surjektivität dieser Abbildung folgt aus dem Beweis der Surjektivität von (1.1), denn $\varphi_A, \varphi_B, \varphi_C$ mit C innerer Automorphismus der freien Gruppe liegen in deren Bild.

Lemma 1.3.10 Sei $\bar{\varphi} \in \Pi_0(\text{Fix}(q_1, q_2), id)$, $\Pi_1(\alpha) \in \Pi_1(T \setminus \{q_1\}, q_2)$, dann gilt:

$$\bar{\varphi} \circ (\delta_1 \circ q_1^{-1}(\Pi_1(\alpha))) \circ \bar{\varphi}^{-1} = \delta_1 \circ q_1^{-1}((\varphi|_{T \setminus \{q_1\}})^*(\Pi_1(\alpha)))$$

für alle $\varphi \in \bar{\varphi}$.

Beweis:

Nach 1.3.8 genügt es mit $\bar{\alpha} := \Pi_1(\alpha)$ zu zeigen:

$$\bar{\varphi} \circ \Pi_0(\eta_{\bar{\alpha}}) \circ \bar{\varphi}^{-1} = \Pi_0(\eta_{(\varphi|_{T \setminus \{q_1\}})^*(\bar{\alpha})}).$$

Sei nun $\Pi_1(\gamma) \in \Pi_1(T \setminus \{q_1\}, q_2)$, dann gilt:

$$(\eta_{(\varphi|_{T \setminus \{q_1\}})^*(\bar{\alpha})})^*(\Pi_1(\gamma)) = (\varphi|_{T \setminus \{q_1\}})^*(\bar{\alpha}) \circ \Pi_1(\gamma) \circ (\varphi|_{T \setminus \{q_1\}})^*(\bar{\alpha}^{-1}).$$

Andererseits gilt:

$$\begin{aligned}(\varphi \circ \eta_{\bar{\alpha}} \circ \varphi^{-1}|_{T \setminus \{q_1\}})^*(\Pi_1(\gamma)) &= (\varphi|_{T \setminus \{q_1\}})^* \circ (\eta_{\bar{\alpha}}|_{T \setminus \{q_1\}})^* \circ (\varphi^{-1}|_{T \setminus \{q_1\}})^*(\Pi_1(\gamma)) = (\varphi|_{T \setminus \{q_1\}})^*(\bar{\alpha} \circ \\ &((\varphi^{-1}|_{T \setminus \{q_1\}})^*(\Pi_1(\gamma))) \circ \bar{\alpha}^{-1}) \\ &= (\varphi|_{T \setminus \{q_1\}})^*(\bar{\alpha}) \circ (\Pi_1(\gamma)) \circ ((\varphi|_{T \setminus \{q_1\}})^*(\bar{\alpha}^{-1})).\end{aligned}$$

Aus Satz 1.3.9 folgt die Behauptung.

Lemma 1.3.11 $\Pi_0(\text{Fix}(q_1, q_2), id)$ besitzt genau dann eine p -Kongruenzstruktur, wenn $\Pi_1(T \setminus \{q_1\}, q_2)$ eine bezüglich $\text{Aut}^+(\Pi_1(T \setminus \{q_1\}, q_2))$ charakteristische p -Kongruenzstruktur besitzt, d.h. eine p -Kongruenzstruktur, deren Folgenglieder von jedem Element von $\text{Aut}^+(\Pi_1(T \setminus \{q_1\}, q_2))$ festgehalten werden.

Beweis:

Man wende Satz 1.1.15 an.

Zu zeigen ist nun, daß es zu $\bar{\varphi} \in \Pi_0(\text{Fix}(q_1, q_2)) \setminus \{\Pi_0(id)\}$ ein $\Pi_1(\alpha) \in \Pi_1(T \setminus \{q_1\}, q_2)$ gibt, s.d.

$$\bar{\varphi} \circ (\delta_1 \circ q_1^{-1}(\Pi_1(\alpha))) \circ \bar{\varphi}^{-1} \neq \delta_1 \circ q_1^{-1}(\Pi_1(\alpha))$$

Nach 1.3.10 ist dies äquivalent zu :

$$\delta_1 \circ q_1^{-1}((\varphi|_{T \setminus \{q_1\}})^*(\Pi_1(\alpha))) \neq \delta_1 \circ q_1^{-1}(\Pi_1(\alpha))$$

$$\Leftrightarrow (\varphi|_{T \setminus \{q_1\}})^*(\Pi_1(\alpha)) \neq \Pi_1(\alpha) \text{ nach 1.3.8.}$$

Falls ein solches $\Pi_1(\alpha)$ nicht existiert, gilt: $(\varphi|_{T \setminus \{q_1\}})^* = id$.

Nach Satz 1.3.9 gilt dann: $\bar{\varphi} \in \Pi_0(id)$, was der Wahl von $\bar{\varphi}$ widerspricht.

Damit gilt: $\Pi_0(\text{Fix}(q_1, q_2), id)$ besitzt genau dann eine p -Kongruenzstruktur, wenn $\Pi_1(T \setminus \{q_1\}, q_2)$ eine p -Kongruenzstruktur $\{N_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ besitzt, s.d. $\delta_1 \circ q_1^{-1}(N_i) \trianglelefteq \Pi_0(\text{Fix}(q_1, q_2), id)$. Nach 1.3.10 gilt dann aber für $i \in \mathbb{N}$, $\bar{\varphi} \in \Pi_0(\text{Fix}(q_1, q_2), id)$ folgendes:

$$(\varphi|_{T \setminus \{q_1\}})^*(N_i) = N_i \text{ für } \varphi \in \bar{\varphi}. \text{ Mit 1.3.9 folgt das Lemma.}$$

1.4 Der Zusammenhang zwischen $\Pi_0(\text{Fix}(q_1, q_2), id)$ und $M(T \setminus \{q_1, q_2\})$

Lemma 1.4.1 Sei $\bar{\varphi} \in M(T \setminus \{q_1, q_2\}) = \Pi_0(\text{Diff}_{q.c.}(T \setminus \{q_1, q_2\}), id)$ und $\varphi \in \bar{\varphi}$. Dann kann man φ zu einem Homöomorphismus $\hat{\varphi}$ auf T fortsetzen mit:

$$\hat{\varphi}(\{q_1, q_2\}) = \{q_1, q_2\}$$

Lemma 1.4.2 Sei $\varphi \in \text{Diff}_{q.c.}(T \setminus \{q_1, q_2\})$ s.d. $\hat{\varphi}(q_i) = q_i$ für $i \in \{1, 2\}$, dann gibt es $\psi \in \Pi_0(\varphi)$ s.d. für dessen Fortsetzung gilt: $\hat{\psi} \in \text{Diff}_{q.c.}(T)$

Beweis:

Man definiere zunächst $\xi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $\xi \in C^\infty(\mathbb{R})$ mit $\xi|_{[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]} = 1$, $\xi|_{\mathbb{R} \setminus]-1, 1[} = 0$ wie folgt:

$$\xi := \begin{cases} \xi|_{[-\infty, -1]} & := 0 \\ \xi|_{[-1, -\frac{1}{2}]} & := t \mapsto e^2 (e^{-\frac{1}{t+1}})(e^{\frac{1}{t+\frac{1}{2}}} + 1) \\ \xi|_{[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]} & := 1 \\ \xi|_{[\frac{1}{2}, 1]} & := t \mapsto e^2 (e^{\frac{1}{t-1}})(e^{-\frac{1}{t-\frac{1}{2}}} + 1) \\ \xi|_{[1, \infty]} & := 0 \end{cases}$$

Sei ferner $\mu_\varphi := \frac{\varphi_z}{\varphi_z}$ die zu φ gehörige komplexe Dilatation.

Seien nun $\psi_i: V_i \rightarrow U_i \subseteq \mathbb{C}$ mit $i \in \{1, 2\}$ zwei C^∞ -Karten auf T mit $q_i \in V_i$, $\psi_i(q_i) = 0$, $\overline{V_1} \cap \overline{V_2} = \emptyset$.

Seien nun $W_i \subseteq_{\text{offen}} V_i$ mit $q_i \in W_i$ so gewählt, daß $\varphi(W_i) \subseteq V_i$. Dies ist möglich, da $\hat{\varphi}$ ein Homöomorphismus ist, der q_i festhält.

Man definiere nun:

$$\begin{aligned} \mu_\varphi^{(i)}: \psi_i(W_i) &\longrightarrow \mathbb{C} \\ z &\longmapsto \frac{(\psi_i \circ \varphi \circ (\psi_i|_{W_i})^{-1})_{\bar{z}}}{(\psi_i \circ \varphi \circ (\psi_i|_{W_i})^{-1})_z} \end{aligned}$$

Definiere weiter für $t \in \mathbb{C}$ mit $|t| \leq 1$, $c_i := \text{dist}(0, \delta(\psi_i(W_i)))$ wobei $\delta(\psi_i(W_i))$ der Rand von $\psi_i(W_i)$ sei:

$$\begin{aligned} \mu^{(i,t)}: \psi_i(W_i) &\longrightarrow \mathbb{C} \\ z &\longmapsto (1 - t\xi\left(\left|\frac{z}{c_i}\right|\right)) \cdot \mu_\varphi^{(i)}(z) \end{aligned}$$

Definiere nun für $q \in T \setminus \{q_1, q_2\}$, $t \in \mathbb{C}$ mit $|t| \leq 1$:

$$\mu_\varphi^{(t)} := \begin{cases} (\mu^{(i,t)} \circ \psi_i)(q) & \text{für } q \in W_i \setminus \{q_i\} \\ \mu_\varphi(q) & \text{sonst} \end{cases}$$

Damit gilt: $\mu_\varphi^{(0)} = \mu_\varphi$ und es gibt für q_1, q_2 Umgebungen auf denen gilt: $\mu_\varphi^{(1)} = 0$.

Da $\mu_\varphi^{(t)}$ diffbar ist, existiert nach [nag, Seite 37,34] auf $T \setminus \{q_1, q_2\}$ zu $\mu_\varphi^{(t)}$ ein quasikonformer Diffeomorphismus φ^t s.d. : $\mu_\varphi^{(t)} = \frac{\varphi_z^t}{\varphi_z}$.

Nach [nag, Seite 38] kann man die φ^t so wählen, daß die Abbildung $t \mapsto \varphi^t$ holomorph ist. Nach [nag, Seite 32] gibt es eine biholomorphe Funktion $f: T \rightarrow T$ s.d. gilt: $f \circ \varphi^0 = \varphi$. Da nun offenbar die Abbildung $t \mapsto f \circ \varphi^t$ stetig ist, ist φ isotop zu $f \circ \varphi^1$, also zu einer Abbildung, die in einer Umgebung von $\{q_1, q_2\}$ holomorph und nach 1.4.1 stetig auf T fortsetzbar ist. Damit ist $f \circ \varphi^1$ holomorph auf $\{q_1, q_2\}$ fortsetzbar.

Lemma 1.4.3 Es gibt $\varphi \in \text{Diff}_{q.c.}(T)$ mit $\varphi(q_1) = q_2$ und $\varphi(q_2) = q_1$ mit $q_1, q_2 \in T$.

Beweis:

Es gilt: $T \cong S^1 \times S^1$, $q_1 \neq q_2$ mit $q_j = (e^{i\psi_j^1}, e^{i\psi_j^2})$, $\psi_j^i \in \mathbb{R}$. Nun gibt es folgende Spiegelungen auf T

$$\begin{aligned} S_1 : S^1 \times S^1 &\longrightarrow S^1 \times S^1 \\ (e^{i\eta^1}, e^{i\eta^2}) &\longmapsto (e^{i(-(\eta^1 - \frac{\psi_1^1 + \psi_2^1}{2}) + \frac{\psi_1^1 + \psi_2^1}{2})}, e^{i\eta^2}) \\ S_2 : S^1 \times S^1 &\longrightarrow S^1 \times S^1 \\ (e^{i\eta^1}, e^{i\eta^2}) &\longmapsto (e^{i\eta^1}, e^{i(-(\eta^2 - \frac{\psi_1^2 + \psi_2^2}{2}) + \frac{\psi_1^2 + \psi_2^2}{2})}) \end{aligned}$$

Die Abbildung $S_1 \circ S_2$ ist orientierungserhaltend und differenzierbar und erfüllt: $S_1 \circ S_2(q_1) = q_2$, $S_1 \circ S_2(q_2) = q_1$

Satz 1.4.4 Es gilt: Folgende kurze exakte Sequenz spaltet:

$$1 \longrightarrow \Pi_0 \text{Fix}(q_1, q_2) \longrightarrow M(T \setminus \{q_1, q_2\}) \xrightleftharpoons{\quad} \langle \varphi \rangle \longrightarrow 1$$

wobei $\langle \varphi \rangle$ die von φ aus 1.4.3 erzeugte Untergruppe von $M(T \setminus \{q_1, q_2\})$ (diese hat Ordnung 2) sei und die Abbildung $M(T \setminus \{q_1, q_2\}) \rightarrow \langle \varphi \rangle$ wie folgt definiert sei: $A \in M(T \setminus \{q_1, q_2\})$ werde auf id abgebildet, falls $A(q_1) = q_1$, $A(q_2) = q_2$; im Fall $A(q_1) = q_2$, $A(q_2) = q_1$ auf φ . Dies sind die einzigen möglichen Fälle, da A eine Permutation auf $\{q_1, q_2\}$ induziert.

Satz 1.4.5 $M(T \setminus \{q_1, q_2\})$ besitzt genau dann eine p -Kongruenzstruktur, wenn $\Pi_0(\text{Fix}(q_1, q_2), \text{id})$ eine solche besitzt.

Der Beweis folgt aus 1.4.4 und 1.1.16

Korollar 1.4.6 $M(T \setminus \{q_1, q_2\})$ besitzt genau dann eine p -Kongruenzstruktur, wenn $\text{Aut}(F_2)$ eine p -Kongruenzstruktur besitzt.

Beweis:

Es gilt: $\Pi_0 \text{Fix}(q_1, q_2) \cong \text{Aut}^+(F_2)$ und $M(T \setminus \{q_1, q_2\})$ besitzt nach 1.4.5 genau dann eine p -Kongruenzstruktur, wenn $\Pi_0 \text{Fix}(q_1, q_2)$ eine p -Kongruenzstruktur besitzt. Ferner besitzt $\text{Aut}^+(F_2)$ genau dann eine p -Kongruenzstruktur, wenn $\text{Aut}(F_2)$ eine p -Kongruenzstruktur besitzt:

Dies gilt, da man 1.1.16 auf folgende kurze exakte Sequenz anwenden kann:

Sei $F_2 = \langle a, b \rangle$, werde also von a, b erzeugt. Sei nun $\phi^{a^{-1}} \in \text{Aut}(F_2)$ das durch $\phi^{a^{-1}}(a) = a^{-1}$, $\phi^{a^{-1}}(b) = b$ eindeutig definierte Element. $\phi^{a^{-1}}$ hat Ordnung 2. Nun spaltet folgende kurze exakte Sequenz:

$$1 \rightarrow \text{Aut}^+(F_2) \rightarrow \text{Aut}(F_2) \xrightleftharpoons{\quad} \langle \phi^{a^{-1}} \rangle \rightarrow 1$$

wobei $\langle \phi^{a^{-1}} \rangle$ die kleinste von $\phi^{a^{-1}}$ erzeugte Gruppe sei.

Die Abbildung $\text{Aut}(F_2) \rightarrow \langle \phi^{a^{-1}} \rangle$ sei dabei wie folgt definiert:

$A \in \text{Aut}(F_2)$ werde auf $\phi^{a^{-1}}$ abgebildet, falls $\det(\bar{A} : \frac{F_2}{F_2'} \rightarrow \frac{F_2}{F_2'}) = -1$, sonst auf id . Dabei sei F_2' die Kommutatorgruppe von F_2 .

Kapitel 2

Einbettungen der $\text{Aut}F_2$ in p -adische Liegruppen

Zu diesem Kapitel ist zu bemerken, daß erst nach seiner Erstellung der Artikel [kra1, Seite 453] veröffentlicht wurde, in dem mitbewiesen wird, das $\text{Aut}F_2$ linear ist. Dort wird gezeigt, daß eine der Buraudarstellung der B_4 verwandte Darstellung treu ist. Ob die Buraudarstellung treu ist, ist bisher unklar, wird von mir am Schluß des Kapitels mittels einer Beweisidee vermutet. In [kra1, Seite 455] wird vermutet, daß sie einen nichttrivialen Kern hat.

2.1 p -adische Liegruppen

Bezeichnung 2.1.1 Sei p prim, $\mathbb{Z}_p$ die p -adischen Zahlen und $\mathbb{Q}_p$ der p -adische Körper.

Definition 2.1.2 Eine p -adische Liegruppe ist eine p -adische Mannigfaltigkeit G s.d. G zusätzlich eine Gruppe ist. Dabei sei zusätzlich die Abbildung

$$\begin{aligned} G \times G &\longrightarrow G \\ (g_1, g_2) &\longmapsto g_1 \circ g_2^{-1} \end{aligned}$$

analytisch.

Definition 2.1.3 Eine $\mathbb{Q}_p$ -Liealgebra A ist ein $\mathbb{Q}_p$ -Vektorraum mit einer Multiplikation

$$\begin{aligned} A \times A &\longrightarrow A \\ (a, b) &\longmapsto [a, b] \end{aligned}$$

s.d. für $a, b, c \in A$ gilt:

$$[a, a] = 0, [[a, b], c] + [[b, c], a] + [[c, a], b] = 0.$$

Definition 2.1.4 Auf dem Tangentialraum $T_e G$ einer Liegruppe G im Punkt e definiere man wie folgt eine Multiplikation:

$[a, b] := \text{ad}_a(b)$ mit $a, b \in T_e G$, wobei $\text{ad}: T_e \times T_e \longrightarrow T_e$ die Ableitung der Abbildung

$$\begin{aligned} \text{Ad}: G &\longrightarrow \text{Aut}(T_e G) \\ g &\longmapsto d k_g \end{aligned}$$

mit $k_g(h) := ghg^{-1}$ für $h \in G$ sei.

Satz 2.1.5 $T_e G$ versehen mit obiger Multiplikation ist eine Liealgebra. Man bezeichnet sie als die der Liegruppe G zugehörige Liealgebra.

Beweis siehe [bur, Seite 252, Proposition 44 Seite 266].

Satz 2.1.6 Sei G eine p -adische Liegruppe mit zugehöriger p -adischer Liealgebra L . Dann gibt es eine offene Umgebung V der 0 in L und eine Abbildung:

$\exp : V \longrightarrow G$ mit folgenden Eigenschaften:

(i) $\exp$ ist ein Homöomorphismus auf sein Bild.

(ii) $\exp$ ist analytisch.

(iii) Seien $\lambda \in \mathbb{Z}$ und $x \in V$ s.d. auch $\lambda x \in V$, dann gilt: $\exp(\lambda x) = \exp(x)^\lambda$

Beweis siehe [bur, Seite 284]

Satz 2.1.7 Sei G eine p -adische Liegruppe mit zugehöriger p -adischer Liealgebra L .

Sei $G_p := \{g \in G \mid \bigwedge_{e \in N} \bigcup_{n \in \mathbb{N}} g^n \in N\}$,
offen

dann gibt es eine Abbildung $\log : G_p \longrightarrow L$ mit folgenden Eigenschaften:

(i) $\log|_{\exp(V)} \longrightarrow L$ ist die Umkehrabbildung von $\exp : V \longrightarrow G$.

(ii) $\log$ ist analytisch.

Beweis siehe [bur, Seite 333], daß $\exp(V) \subset G_p$ folgt aus der Definition von V .

Bemerkung 2.1.8 Sei $g \in G$ mit $g^n = e$ für ein $n \in \mathbb{N}$, dann gilt: $\log(g) = 0$.

Satz 2.1.9 Sei G eine p -adische Liegruppe mit zugehöriger p -adischer Liealgebra L .

Sei ferner A ein stetiger Liegruppenautomorphismus, dann gibt es einen Liealgebrenautomorphismus $\bar{A}$ s.d. folgendes Diagramm kommutiert:

$$\begin{array}{ccc} G_p & \xrightarrow{A} & G_p \\ \log \downarrow & & \downarrow \log \\ L & \xrightarrow{\bar{A}} & L \end{array}$$

Beweis siehe [bur, Seite 254]

Lemma 2.1.10 Sei $G \subset GL_n(\mathbb{Z}_p)$ eine endlich erzeugte p -adische Liegruppe, dann gilt: $G_p = G$

Beweis:

Da $G \subset GL_n(\mathbb{Z}_p)$ und endlich erzeugt ist, besitzt G eine p -Kongruenzstruktur $\{N_i\}_{i \in \mathbb{N}}$. Siehe z.B. [dix, Seite 194 Theorem 9.34]. Nun ergibt sich aus $G \subseteq \varprojlim_{i \in \mathbb{N}} \frac{G}{N_i}$, daß $G_p = G$

nach Definition der p -Kongruenzstruktur, denn die $\{N_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ bilden eine Umgebungsbasis von $\{e\}$, d.h. jede offene Umgebung von e enthält alle $\{N_i\}$ bis auf endlich viele.

Lemma 2.1.11 Existiert nun für $G = G_p$ ein injektiver Logarithmus, dann ist die Abbildung

$$\begin{array}{ccc} \text{Aut} G & \longrightarrow & \text{Aut} L \\ A & \longmapsto & \bar{A} \end{array}$$

eine bijektive Abbildung.

2.2 Eine ∞ -dim Darstellung von $\text{Aut} F_2$

Einleitung:

In [pla] werden alle irreduziblen Darstellungen von $\text{Aut}(F_2)$ in die $\text{GL}_n(F)$ mit $n \leq 4, F$ beliebiger Körper untersucht. Dabei stellt sich heraus, daß keine dieser Darstellungen treu ist, da das Bild von F_2 unter diesen Darstellungen immer auflösbar ist.

Für $n = 6$ gibt es eine Darstellung, bei der das Bild von F_2 nicht auflösbar ist. Diese rührt nach [for] von der Burau-Darstellung der 4-ten Braidgruppe her. Ob diese Darstellung treu ist, ist nach [long] und nach [big] und [kra1] unbekannt. In [kra1] wird mittels einer der Burau verwandten Darstellung bewiesen, daß $\text{Aut} F_2$ linear ist.

In [pro] wird gezeigt, daß es für $\text{Aut}(F_n)$ für $n \geq 3$ keine treue Darstellung geben kann. Die Frage, ob es eine treue Darstellung der $\text{Aut}(F_2)$ geben kann, ist offen.

Im folgenden werden Darstellungen (vgl. [lus]) für $n \in \mathbb{N}, p \in \mathbb{N}$ prim: $d_n : \text{Aut}(F_2) \longrightarrow \text{GL}_{m_n}(\mathbb{Q}_p)$, mit $\{m_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ streng monoton steigende Folge mit Werten in $\mathbb{N}$, konstruiert, für die gilt:

$$1 \rightarrow K_n \rightarrow \text{Aut}(F_2) \rightarrow \text{GL}_{m_n}(\mathbb{Q}_p)$$

mit $K_{n_1} \supset K_{n_2}$ für $n_1 \leq n_2$ und $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} K_n = \text{id}$

Für die folgende Konstruktionen vergl: [dix, Seite 212 ff]

Definition 2.2.1 Sei $\hat{A}$ die von A, B erzeugte freie $\mathbb{Q}_p$ -Algebra mit neutralem Multiplikationselement I . Die Monome $I, A, B, AA, AB, BA, BB, AAB, \dots$ in $\hat{A}$ bilden eine $\mathbb{Q}_p$ -Basis von $\hat{A}$, insbesondere hat ein Element $C \in \hat{A}$ folgende Gestalt: $C = \sum_{\tilde{C} \text{ Monom}} c_{\tilde{C}} \tilde{C}$ mit $c_{\tilde{C}} \in \mathbb{Q}_p$ und nur endlich viele $c_{\tilde{C}}$ seien von Null verschieden.

Sei $C \in \hat{A}$, dann definiere man den Betrag von C wie folgt:

$$|C|_p := \max\{|q_{\tilde{C}}|_p \mid C = \sum q_{\tilde{C}} \tilde{C} \text{ mit } \tilde{C} \text{ durchläuft die Monome von } \hat{A}\}$$

Für diesen Betrag gilt mit $C, D \in \hat{A}$: $|C + D|_p \leq \max\{|C|_p, |D|_p\}$

Man definiere nun auf $\hat{A}$ ein Produkt $[\cdot, \cdot]$ wie folgt:

$$\begin{aligned} \hat{A} \times \hat{A} &\longrightarrow \hat{A} \\ (C_1, C_2) &\longmapsto [C_1, C_2] := C_1 C_2 - C_2 C_1 \end{aligned}$$

$\hat{A}$ versehen mit diesem Produkt ist eine $\mathbb{Q}_p$ Liealgebra.

Die von $\{A, B\}$ erzeugte $\mathbb{Q}_p$ Unterliealgebra $\hat{L}$ von $\hat{A}$ ist die freie, von $\{A, B\}$ erzeugte Liealgebra. (siehe [bur, Seite 158])

Sei nun $\bar{\hat{A}}$ die Menge von Äquivalenzklassen von Cauchyfolgen mit Folgengliedern aus $\hat{A}$, wobei 2 Cauchyfolgen äquivalent seien, wenn deren Differenz eine Nullfolge ist.

$\bar{\hat{A}}$ liegt dicht in $\bar{\hat{A}}$, wobei man $C \in \hat{A}$ mit der Äquivalenzklasse der Folge $(C, C, \dots)$ identifiziert.

Man kann nun $\bar{\hat{A}}$ zu einer $\mathbb{Q}_p$ Algebra machen, indem die Algebraoperationen auf die Cauchyfolgen fortgesetzt.

Entsprechend ist das Produkt $[\cdot, \cdot]$ auf $\bar{\hat{A}}$ fortsetzbar und macht $\bar{\hat{A}}$ zu einer $\mathbb{Q}_p$ Liealgebra.

Bezeichnung 2.2.2 Sei $\bar{\hat{L}}$ die $\mathbb{Q}_p$ Lieunteralgebra von $\bar{\hat{A}}$, die den Abschluß von $\hat{L}$ in $\bar{\hat{A}}$ bildet.

Sei nun $\bar{\hat{L}}^{(i)} := \langle \{[[[C_1, C_2], C_3] \dots C_i] \mid C_j \in \{A, B\}, j \in \{1, \dots, i\}\} \rangle$ mit $i \in \mathbb{N}$ und sei $\bar{\hat{L}}_p := \{C \in \bar{\hat{L}} \mid |C|_p < 1\}$.

Definition 2.2.3 Man definiere nun die Funktionen:

$$\begin{aligned} \exp : \bar{\hat{L}}_p &\longrightarrow I + \bar{\hat{L}}_p \subset \hat{A} \\ C &\longmapsto \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i!} C^i \\ \log : I + \bar{\hat{L}}_p \subset \hat{A} &\longrightarrow \bar{\hat{L}}_p \\ I + C &\longmapsto \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-1)^{i+1}}{i} C^i \end{aligned}$$

Nun kann man die Campbell-Hausdorffreihe (vergl. [bur, Seite 161]) wie folgt definieren:

$$\begin{aligned} H : \bar{\hat{L}}_p \times \bar{\hat{L}}_p &\longrightarrow \bar{\hat{L}}_p \\ (w_1, w_2) &\longmapsto \log(\exp(w_1)\exp(w_2)) \end{aligned}$$

Lemma 2.2.4 Nach [bur, Seite 161] hat H folgende Gestalt:

$$\begin{aligned} H(C_1, C_2) = C_1 + C_2 + \frac{1}{2}[C_1, C_2] + \frac{1}{12}[[C_1, C_2], C_2] - \frac{1}{12}[[C_1, C_2], C_1] \\ + \frac{1}{24}[[[C_1, C_2], C_1], C_2] + \sum_{i=5}^{\infty} \sum_{C \in \bar{\hat{L}}^{(i)}} a_C C \end{aligned}$$

mit $a_C \in \mathbb{Q}_p$

Bezeichnung 2.2.5 Für $C_1, C_2 \in \bar{\hat{L}}_p$ schreibe man statt $H(C_1, C_2)$: $C_1 \mathrel{H} C_2$

Beobachtung 2.2.6 Nach [helm] kann man die Koeffizienten der Hausdorffreihe iterativ berechnen.

Es gilt z.B.: $a_{[\log(d(\varphi_a)), \underbrace{\log(d(\varphi_b)), \dots, \log(d(\varphi_b))}_{2l+1}]]} = 0$ für $l \geq 1$.

Satz 2.2.7 $\bar{\hat{L}}_p$ versehen mit der Verknüpfung $\mathrel{H}$ bildet nach [bur, Seite 158] eine Gruppe. Das neutrale Element ist die Null, das Inverse Element von $C \in \bar{\hat{L}}_p$ ist $-C$. Die von $\{pA, pB\}$ erzeugte Untergruppe ist nach [bur, Seite 158] die von zwei Elementen erzeugte freie Gruppe F_2 .

Definition 2.2.8 Definition einiger Elemente von $\text{Aut}(F_2)$: Sei F_2 von $\{a, b\}$ erzeugt und sei $F_2^{(j)}$ für $j \in \mathbb{N}$ die von $\{p^j A, p^j B\} \subset \bar{\hat{L}}$ mit der Multiplikation $\mathrel{H}$ erzeugte freie Gruppe. Dann ist jede Abbildung: $\phi : \{a, b\} \rightarrow F_2$ zu einem Gruppenhomomorphismus von F_2 fortsetzbar. ϕ ist genau dann ein Automorphismus, falls F_2 von $\{\phi(a), \phi(b)\}$ erzeugt wird. Für jede der Abbildungen: $\phi^{(j)} : \{p^j A, p^j B\} \rightarrow F_2^{(j)}$ gilt das entsprechende. Seien nun $A^l, (A^l)^{(j)}, A^r, (A^r)^{(j)}, B^l, (B^l)^{(j)}, B^r, (B^r)^{(j)}, \phi_a^b, (\phi_a^b)^{(j)}, \phi^{a^{-1}}, (\phi^{a^{-1}})^{(j)}, \phi^{b^{-1}}, (\phi^{b^{-1}})^{(j)}, \varphi_a, (\varphi_a)^{(j)}, \varphi_b, (\varphi_b)^{(j)} \in \text{Aut}(F_2)$ bzw. $\text{Aut}(F_2^{(j)})$ wie folgt durch ihre Einschränkung auf $\{a, b\}$ bzw. $\{p^j A, p^j B\}$ definiert:

$$\begin{array}{llll}
A^l : \{a, b\} & \longrightarrow & F_2 & (A^l)^{(j)} : \{p^j A, p^j B\} \longrightarrow F_2^{(j)} \\
a & \longmapsto & a & p^j A \longmapsto p^j A \\
b & \longmapsto & ab & p^j B \longmapsto p^j A \text{ }_H \text{ } p^j B \\
A^r : \{a, b\} & \longrightarrow & F_2 & (A^r)^{(j)} : \{p^j A, p^j B\} \longrightarrow F_2^{(j)} \\
a & \longmapsto & a & p^j A \longmapsto p^j A \\
b & \longmapsto & ba & p^j B \longmapsto p^j B \text{ }_H \text{ } p^j A \\
B^l : \{a, b\} & \longrightarrow & F_2 & (B^l)^{(j)} : \{p^j A, p^j B\} \longrightarrow F_2^{(j)} \\
a & \longmapsto & ba & p^j A \longmapsto p^j B \text{ }_H \text{ } p^j A \\
b & \longmapsto & b & p^j B \longmapsto p^j B \\
B^r : \{a, b\} & \longrightarrow & F_2 & (B^r)^{(j)} : \{p^j A, p^j B\} \longrightarrow F_2^{(j)} \\
a & \longmapsto & ab & p^j A \longmapsto p^j A \text{ }_H \text{ } p^j B \\
b & \longmapsto & b & p^j B \longmapsto p^j B \\
\phi_a^b : \{a, b\} & \longrightarrow & F_2 & (\phi_a^b)^{(j)} : \{p^j A, p^j B\} \longrightarrow F_2^{(j)} \\
a & \longmapsto & b & p^j A \longmapsto p^j B \\
b & \longmapsto & a & p^j B \longmapsto p^j A \\
\phi^{a^{-1}} : \{a, b\} & \longrightarrow & F_2 & (\phi^{a^{-1}})^{(j)} : \{p^j A, p^j B\} \longrightarrow F_2^{(j)} \\
a & \longmapsto & a^{-1} & p^j A \longmapsto -p^j A \\
b & \longmapsto & b & p^j B \longmapsto p^j B \\
\phi^{b^{-1}} : \{a, b\} & \longrightarrow & F_2 & (\phi^{b^{-1}})^{(j)} : \{p^j A, p^j B\} \longrightarrow F_2^{(j)} \\
a & \longmapsto & a & p^j A \longmapsto p^j A \\
b & \longmapsto & b^{-1} & p^j B \longmapsto -p^j B \\
\varphi_a : \{a, b\} & \longrightarrow & F_2 & (\varphi_a)^{(j)} : \{p^j A, p^j B\} \longrightarrow F_2^{(j)} \\
a & \longmapsto & a & p^j A \longmapsto p^j A \\
b & \longmapsto & aba^{-1} & p^j B \longmapsto p^j A \text{ }_H \text{ } p^j B \text{ }_H \text{ } -p^j A \\
\varphi_b : \{a, b\} & \longrightarrow & F_2 & (\varphi_b)^{(j)} : \{p^j A, p^j B\} \longrightarrow F_2^{(j)} \\
a & \longmapsto & bab^{-1} & p^j A \longmapsto p^j B \text{ }_H \text{ } p^j A \text{ }_H \text{ } -p^j B \\
b & \longmapsto & b & p^j B \longmapsto p^j B
\end{array}$$

Nach [lyn, Seite 23] wird $\text{Aut}(F_2)$ von A^l, A^r, ϕ_a^b erzeugt. Die inneren Automorphismen $\text{Inn}(F_2)$ werden von φ_a, φ_b erzeugt.

Lemma 2.2.9 Für $\varphi \in \text{Aut}(F_2^{(j)})$, $C \in \langle p^j A, p^j B \rangle$ gilt: $|\varphi(C)|_p = |C|_p$.

Beweis:

Man betrachte zunächst die Abbildung

$$\begin{array}{ll}
A^+ : \langle p^j A, p^j B \rangle & \longrightarrow \bar{\hat{L}} \\
w(A, B) & \longmapsto w(A, A + B)
\end{array}$$

wobei $w(A, B)$ ein Wort in A, B bezeichnet. A^+ ersetzt also in einem Wort $w(A, B)$ den Buchstaben B durch $A + B$. Sei B eine aus Monomen der Gestalt $[[C_1, C_2], \dots, C_n]$, $n \in \mathbb{N}$, $C_i \in \{A, B\}$ mit $i \in \{1, \dots, n\}$ bestehende Basis von $\bar{\hat{L}}$.

Nun gilt für $W \in \bar{\hat{L}}$ mit $W = \sum_{C \in B} a_C C$: $|C|_p = \max\{|a_C|_p \mid C \in B\}$

Für $C \in B$ ist nach Definition von A^+

$$A^+(C) = \sum_{\tilde{C} \in B} a_{\tilde{C}}^C \tilde{C} \text{ mit } a_{\tilde{C}}^C \in \mathbb{Z}.$$

$$\text{Damit gilt: } |A^+(W)|_p = \left| \sum_{C \in B} a_C \left(\sum_{\tilde{C} \in B} a_{\tilde{C}}^C \tilde{C} \right) \right|_p \leq \max\{|a_C|_p \mid C \in B\} = |W|_p.$$

Nun gilt für $W \in \langle p^j A, p^j B \rangle$, $w \neq 0$:

$$(A^r)^{(j)}(W) = A^+(W) + pR(W) \text{ mit } |R(W)|_p \leq |A^+(W)|_p.$$

Insbesondere gilt nun: $|(A^r)^{(j)}(W)|_p \leq |W|_p$.

Für die anderen oben aufgeführten Gruppenautomorphismen zeigt man die Ungleichung entsprechend. Da nun alle Elemente von $\text{Aut}(F_2^{(j)})$ durch diese Automorphismen erzeugt werden, gilt für $\varphi \in \text{Aut}(F_2^{(j)})$, $C \in \langle p^j A, p^j B \rangle$: $|\varphi(C)|_p \leq |C|_p$.

Die Gleichheit folgt nun aus der Invertierbarkeit der Gruppenautomorphismen.

Satz 2.2.10 Die in 2.2.8 definierten Gruppenautomorphismen induzieren auf $\bar{\hat{L}}$ Liealgebrenautomorphismen, indem man $F_2 = \langle pA, pB \rangle$ als Teilmenge von $\bar{\hat{L}}$ auffaßt.

Nun kann man die Automorphismen von F_2 auf $\bar{\hat{L}}$ so fortsetzen, daß die Fortsetzungen Liealgebrenautomorphismen von $\bar{\hat{L}}$ sind.

Beweis:

$\bar{\hat{L}}$ wird durch $\{A, B\}$ dicht erzeugt. Ein Liealgebrenautomorphismus $\bar{A}$ ist also durch die Bilder $\bar{A}(A), \bar{A}(B)$ eindeutig bestimmt. Da $\bar{\hat{L}}$ die Vervollständigung einer freien Liealgebra ist, kann man jede Abbildung: $\{pA, pB\} \rightarrow \bar{\hat{L}}$ auf einen Liealgebrenhomomorphismus $\hat{L} \rightarrow \bar{\hat{L}}$ fortsetzen. Falls diese Abbildung eine Isometrie ist, kann man sie zu einem isometrischen Liealgebrenhomomorphismus $\hat{L} \rightarrow \bar{\hat{L}}$ fortsetzen. Dieser ist ein Liealgebrenautomorphismus, wenn er eine Inverse besitzt. Man definiere nun:

$$\begin{aligned} \tilde{A}^l : \hat{L} &\longrightarrow \bar{\hat{L}} \\ A &\longmapsto A \\ B &\longmapsto \frac{1}{p}(pA \text{ }_H \text{ } pB) \\ \tilde{A}^{l,-1} : \hat{L} &\longrightarrow \bar{\hat{L}} \\ A &\longmapsto A \\ B &\longmapsto \frac{1}{p}(-pA \text{ }_H \text{ } pB) \end{aligned}$$

Nun ist nach Definition $\tilde{A}^l|_{\{pA, pB\}} = (A^l)^{(1)}|_{\{pA, pB\}}$. $(A^l)^{(1)} : \langle pA, pB \rangle \rightarrow \bar{\hat{L}}$ ist eine Isometrie, und kann, da $\langle pA, pB \rangle$ dicht in $\bar{\hat{L}}$ liegt, zu einer isometrischen Selbstabbildung von $\bar{\hat{L}}$ fortgesetzt werden. Dadurch ist insbesondere $\tilde{A}^l$ isometrisch und kann infolgedessen zu einem isometrischen Liealgebrenhomomorphismus $\bar{A}^l : \bar{\hat{L}} \rightarrow \bar{\hat{L}}$ fortgesetzt werden. $\tilde{A}^{l,-1}$ kann entsprechend zu einem Liealgebrenhomomorphismus $\bar{A}^{l,-1} : \bar{\hat{L}} \rightarrow \bar{\hat{L}}$ fortgesetzt werden. Nun gilt: $\bar{A}^l \circ \bar{A}^{l,-1} = \bar{A}^{l,-1} \circ \bar{A}^l = \text{id}$, da diese Gleichungen bereits auf der dichten Teilmenge $\langle pA, pB \rangle$ gelten. Damit ist $\bar{A}^l$ ein Liealgebrenautomorphismus von $\bar{\hat{L}}$. Die Liealgebrenautomorphismen $\bar{A}^r, \bar{B}^l, \bar{B}^r, \bar{\phi}_a^l, \bar{\phi}_a^{a-1}, \bar{\phi}_b^{b-1}, \bar{\varphi}_a, \bar{\varphi}_b$ definiert man entsprechend.

Definition 2.2.11 Sei $n \in \mathbb{N}$, dann definiere:

$$\bar{\hat{L}}^{(n)} := \{ \underbrace{[[[C_1, C_2], \dots, C_n]]}_{n\text{-mal}} \mid C_i \in \bar{\hat{L}} \text{ für } i \in \{1, \dots, n\} \}$$

Lemma 2.2.12 $\bar{\hat{L}}^{(n)}$ ist ein Ideal der Liealgebra $\bar{\hat{L}}$, das bzgl. $\text{Aut} \bar{\hat{L}}$ charakteristisch ist. Beweis siehe [bur, Seite 5]

Lemma 2.2.13 Die Abbildung

$$d : \text{Aut} F_2 \longrightarrow \text{Aut} \frac{\bar{\hat{L}}}{\bar{\hat{L}}^{(n)}}$$

$$C \longmapsto \overline{C}_n : \frac{\overline{\hat{L}}}{\overline{\hat{L}}^{(n)}} \mapsto \frac{\overline{\hat{L}}}{\overline{\hat{L}}^{(n)}}$$

wobei $\overline{C}_n$ der durch C induzierte Liealgebrenautomorphismus von $\frac{\overline{\hat{L}}}{\overline{\hat{L}}^{(n)}}$ sei, ist eine endlichdimensionale Darstellung.

Beweis:

Die Menge $\{[[[C_1, C_2], \dots, C_m] | C_i \in \{A, B\} \text{ mit } m \in \mathbb{N}_0\}$ ist ein

$\mathbb{Q}_p$ -Vektorraum erzeugendensystem von $\hat{L}$.

Damit ist $\frac{\overline{\hat{L}}}{\overline{\hat{L}}^{(n)}}$ ein endlichdimensionaler $\mathbb{Q}_p$ -Vektorraum.

Beispiel 2.2.14 Das Beispiel $\frac{\overline{\hat{L}}}{\overline{\hat{L}}^{(4)}}$:

$\frac{\overline{\hat{L}}}{\overline{\hat{L}}^{(4)}}$ hat als $\mathbb{Q}_p$ -Vektorraum folgende Basis: $\{A, B, [A, B], [[A, B], A], [[B, A], B]\}$.

Es gilt mit:

$$pA \circ pB = pA + pB + \frac{1}{2}[pA, pB] - \frac{1}{12}[[pA, pB], pA] - \frac{1}{12}[[pB, pA], pB]:$$

$$d(A^l)(A) = A,$$

$$d(A^l)(B) = \frac{1}{p}(pA \circ pB) = A + B + \frac{p}{2}[A, B] - \frac{p^2}{12}[[A, B], A] - \frac{p^2}{12}[[B, A], B]$$

$$\text{Wegen } d(A^l)([A, B]) = [d(A^l)(A), d(A^l)(B)],$$

$$d(A^l)([[A, B], A]) = [[d(A^l)(A), d(A^l)(B)], d(A^l)(A)],$$

$$d(A^l)([[B, A], B]) = [[d(A^l)(B), d(A^l)(A)], d(A^l)(B)]$$

kennt man nun die Bilder der Basis unter $d(A^l)$ und kann damit $d(A^l)$ folgende Matrix zuordnen:

$$d(A^l) \hat{=} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}p & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{12}p^2 & -\frac{1}{2}p & 1 & -1 \\ 0 & -\frac{1}{12}p^2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Für $d(A^r)$ ergibt sich:

$$d(A^r)(A) = A$$

$$d(A^r)(B) = \frac{1}{p}(pB \circ pA) = B + A - \frac{p}{2}[A, B] - \frac{p^2}{12}[[A, B], A] - \frac{p^2}{12}[[B, A], B].$$

Damit kann man $d(A^r)$ folgende Matrix zuordnen:

$$d(A^r) \hat{=} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2}p & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{12}p^2 & \frac{1}{2}p & 1 & -1 \\ 0 & -\frac{1}{12}p^2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Für $d(B^r)$ ergibt sich mit $d(B^r)(B) = B, d(B^r)(A) = \frac{1}{p}(pA \circ pB)$

$$d(B^r) \hat{=} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2}p & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{12}p^2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{12}p^2 & 0 & -\frac{1}{2}p & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Für $d(B^l)$ ergibt sich mit $d(B^l)(B) = B, d(B^l)(A) = \frac{1}{p}(pB \text{ }_H pA)$

$$d(B^l) \hat{=} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2}p & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{12}p^2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{12}p^2 & 0 & \frac{1}{2}p & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Für $d(\phi_a^b), d(\phi^{a^{-1}}), d(\phi^{b^{-1}})$ ergibt sich:

$$d(\phi_b^a) \hat{=} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$d(\phi^{a^{-1}}) \hat{=} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$d(\phi^{b^{-1}}) \hat{=} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Für $d(\varphi_a)$ ergibt sich:

$$d(\varphi_a)(A) = A$$

$$d(\varphi_a)(B) = \frac{1}{p}(pA \text{ }_H pB \text{ }_H - pA)$$

$$= \frac{1}{p}(pA \text{ }_H (pB - pA + \frac{1}{2}[pA, pB] + \frac{1}{12}[[pB, pA], pB] - \frac{1}{12}[[pA, pB], pA]))$$

$$= B + \frac{p}{2}[A, B] + \frac{p^2}{12}[[B, A], B] - \frac{p^2}{12}[[A, B], A] + \frac{p}{2}[A, B]$$

$$- \frac{p^2}{4}[[A, B], A] - \frac{p^2}{12}[[A, B], A] - \frac{p^2}{12}[[B, A], B] - \frac{p^2}{12}[[A, B], A]$$

$$= B + p[A, B] - \frac{p^2}{2}[[A, B], A]$$

Damit hat $d(\varphi_a)$ folgende Matrixdarstellung:

$$d(\varphi_a) \hat{=} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2}p^2 & -p & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Für $d(\varphi_b)$ ergibt sich:

$$d(\varphi_b)(B) = B$$

$$d(\varphi_b)(A) = \frac{1}{p}(pB \text{ }_H pA \text{ }_H - pB)$$

$$= \frac{1}{p}(pB \text{ }_H (pA - pB - \frac{1}{2}[pA, pB] + \frac{1}{12}[[pA, pB], pA] - \frac{1}{12}[[pB, pA], pB]))$$

$$= A - \frac{p}{2}[A, B] + \frac{p^2}{12}[[A, B], A] - \frac{p^2}{12}[[B, A], B] - \frac{p}{2}[A, B]$$

$$- \frac{p^2}{4}[[B, A], B] - \frac{p^2}{12}[[B, A], B] - \frac{p^2}{12}[[A, B], A] - \frac{p^2}{12}[[B, A], B]$$

$$= A - p[A, B] - \frac{p^2}{2} [[B, A], B]$$

Damit hat $d(\varphi_b)$ folgende Matrixdarstellung:

$$d(\varphi_b) \hat{=} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -p & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2}p^2 & 0 & p & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2.3 Der Fall $\text{Inn}(F_2) \subset I + M_1$

Definition 2.3.1 $M_j := \{M \in M_n(\mathbb{Q}_n) \mid |M_{ik}|_p \leq \frac{1}{p^j}, i, k \leq n\}$ mit $j \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}$

Lemma 2.3.2 Die Bezeichnungen in diesem Lemma seien wie in 2.2.8.

Sei $d : \text{Aut}(F_2) \longrightarrow GL_n(\mathbb{Q}_p)$ eine Darstellung.

Dann gilt: $\log(\overline{d(\text{Aut}(F_2))}) \subseteq M_n(\mathbb{Q}_p)$

Gelte nun : $d(\text{Aut}(F_2)) \subseteq M_0$,
 $L := \overline{\log(d(\text{Inn}(F_2)))} \subseteq M_1$

(i) Dann wird L erzeugt von $\{\log(d(\varphi_a)), \log(d(\varphi_b))\}$

(ii) Es gibt eine stetige Projektion $q : \hat{L} \longrightarrow L$ mit $q : \hat{L}_j \longrightarrow L_j$
wobei $\hat{L}_j := \{A \in \hat{L} \mid |A|_p \leq \frac{1}{p^j}\}$, $L_j := L \cap M_j$, $j \in \mathbb{Z}$.

(iii) $d(\text{Aut}(F_2))$ operiert isometrisch auf L durch Konjugation.

(iv) Sei $|\log(d(\varphi_a))|_p = \frac{1}{p^{j_a}}$, $|\log(d(\varphi_b))|_p = \frac{1}{p^{j_b}}$ mit $j_a, j_b \in \mathbb{N}$, dann gilt: $j_a = j_b$.

Sei $j := j_a$. Die durch $\text{Aut}(F_2^{(j)})$ induzierten Elemente von $\text{Aut}(\hat{L})$ operieren isometrisch.

(v) Sei $C \in \text{Aut}(F_2^{(j)})$, $\overline{C} : \hat{L} \longrightarrow \hat{L}$ der durch C auf $\hat{L}$ induzierte Liealgebrenautomorphismus, $\overline{C}_L$ der durch Konjugation von $d(C)$ auf L induzierte Liealgebrenautomorphismus.

Dann kommutiert folgendes Diagramm:

$$\begin{array}{ccc} \hat{L} & \xrightarrow{\overline{C}} & \hat{L} \\ q \downarrow & & \downarrow q \\ L & \xrightarrow{\overline{C}_L} & L \end{array}$$

(vi) Sei $\hat{A}$ der durch

$$\begin{array}{ccc} A^+ : \hat{L}|_{\{A, B\}} & \longrightarrow & \hat{L} \\ A & \longrightarrow & A \\ B & \longrightarrow & A + B \end{array}$$

induzierte Liealgebrenautomorphismus, dann kommutiert für $i \in \mathbb{N}$:

$$\begin{array}{ccc} \frac{\hat{L}_i}{\hat{L}_{i+1}} & \xrightarrow{A^+} & \frac{\hat{L}_i}{\hat{L}_{i+1}} \\ q \downarrow & & \downarrow q \\ \frac{L_i}{L_{i+1}} & \xrightarrow{\overline{A^+}_L} & \frac{L_i}{L_{i+1}} \end{array}$$

Beweis:

(i) Zunächst werde gezeigt: $\log(d(\text{Inn}(F_2))) \subset \overline{\langle \log(d(\varphi_a)), \log(d(\varphi_b)) \rangle}$
 Da $\text{Inn}(F_2)$ von $\{\varphi_a, \varphi_b\}$ erzeugt wird, kann man dies mittels der Länge der Worte in $\text{Inn}(F_2)$ zeigen:
 Induktionsanfang: $\{\log(d(\varphi_a)), \log(d(\varphi_b))\} \subset \overline{\langle \log(d(\varphi_a)), \log(d(\varphi_b)) \rangle}$
 Induktionsschritt: Seien $\varphi, \varphi_1, \varphi_2 \in \text{Inn}(F_2)$ mit $\varphi = \varphi_1 \circ \varphi_2$, wobei φ_1, φ_2 kürzere Wortlänge haben als φ . Insbesondere gilt nach Induktionsvoraussetzung: $\{\log(d(\varphi_1)), \log(d(\varphi_2))\} \subset \overline{\langle \log(d(\varphi_a)), \log(d(\varphi_b)) \rangle}$
 $\Rightarrow \log(d(\varphi)) = \log(d(\varphi_1) \circ d(\varphi_2))$
 $= \log(d(\varphi_1)) \cdot \log(d(\varphi_2)) \subset \overline{\langle \log(d(\varphi_a)), \log(d(\varphi_b)) \rangle}$,
 da $\overline{\langle \log(d(\varphi_a)), \log(d(\varphi_b)) \rangle}$ bezüglich der Multiplikation abgeschlossen ist.
 $\Rightarrow \overline{\langle \log(d(\text{Inn}(F_2))) \rangle} \subset \overline{\langle \log(d(\varphi_a)), \log(d(\varphi_b)) \rangle}$

(ii) Werde $\hat{L}$ von $\{A, B\}$ erzeugt, dann ist der Liealgebrenhomomorphismus $q : \hat{L} \rightarrow L$ nach [bur, Seite 124 ff] durch $q(A) = \frac{\log(d(\varphi_a))}{|\log(d(\varphi_a))|_p}$ und $q(B) = \frac{\log(d(\varphi_b))}{|\log(d(\varphi_b))|_p}$,
 (falls $d(\varphi_a) \neq I$ bzw. $d(\varphi_b) \neq I$, ansonsten setze man $q(A) = 0$ bzw. $q(B) = 0$) eindeutig, wohldefiniert, stetig und nach (i) surjektiv.

Noch zu zeigen: $q : \hat{L}_i \rightarrow L_i$.

Wegen $\hat{L}_i = p^i \hat{L}_0$, $L_i = p^i L_0$ genügt es zu zeigen: $q : \hat{L}_0 \rightarrow L_0$.

Zunächst werde gezeigt: $|q([C_1, C_2], \dots, C_m)|_p \leq |[C_1, C_2], \dots, C_m|_p$ mit $m \in \mathbb{N}$, $C_i \in \{A, B\}$ für $i \in \{1, \dots, n\}$.

Für $m = 1$ ergibt sich: $|q(A)|_p \leq 1 = |A|_p$, $|q(B)|_p \leq 1 = |B|_p$.

Sei nun schon gezeigt: $|q([C_1, C_2], \dots, C_k)|_p \leq |[C_1, C_2], \dots, C_k|_p$ für $k \in \{1, \dots, m-1\}$.

Nun gilt für $[[C_1, C_2], \dots, C_{m-1}, C_m]$:

$$\max_{i,j \in \{1, \dots, n\}} |q([C_1, C_2], \dots, C_k)_{ij}|_p \leq 1, \text{ für } k \in \{1, \dots, m-1\}.$$

Damit gilt: $|q([[[C_1, C_2], \dots, C_{m-1}], C_m])|_p$

$$= \max_{i,j \in \{1, \dots, n\}} \left| \sum_{k=1}^n q([C_1, C_2], \dots, C_{m-1})_{ik} q(C_m)_{kj} - q(C_m)_{ik} q([C_1, C_2], \dots, C_{m-1})_{kj} \right|_p \leq$$

$$\max_{i,j \in \{1, \dots, n\}} |q([C_1, C_2], \dots, C_{m-1})_{ij}|_p \max_{i,j \in \{1, \dots, n\}} |q(C_m)_{ij}|_p$$

$$= |q([C_1, C_2], \dots, C_{m-1})|_p |q(C_m)|_p \leq 1$$

Definiere nun $B := \{[[C_1, C_2], \dots, C_n] \mid n \in \mathbb{N}, C_i \in \{A, B\} \text{ mit } i \in \{1, \dots, n\}\}$

Sei nun $w \in \hat{L}_0$. Dann hat w die Gestalt $w = \sum_{v \in B} a_v v$ mit $|a_v|_p \geq \frac{1}{p^j}$ für $j \in \mathbb{Z}$ fest

nur für endlich viele $v \in B$.

Sei $\hat{L}^{(m)} = \{[[C_1, C_2], \dots, C_m] \mid C_i \in \hat{L} \text{ mit } i \in \{1, \dots, m\}\}$ für $m \in \mathbb{N}$ und $w^m := \sum_{v \in B \cap \hat{L}^{(m)}} a_v v$. Dann bildet $\{w - w^m\}_{m \in \mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge. Daher bildet $\{q(w - w^m)\}_{m \in \mathbb{N}}$ ebenfalls eine Cauchyfolge mit $|q(w - w^m)|_p \leq 1$, die wegen der Vollständigkeit von $\mathbb{Q}_p$ in L konvergiert und wegen der Stetigkeit von q gegen $q(w)$ konvergiert. Damit gilt: $|q(w)|_p \leq 1$.

(iii) Nach Voraussetzung gilt für $C \in \text{Aut}(F_2)$: $|C|_p \leq 1$, $|C^{-1}|_p \leq 1$.

Insbesondere gilt: $\max_{i,j \in \{1, \dots, n\}} |d(C)_{ij}|_p \leq 1$, $\max_{i,j \in \{1, \dots, n\}} |d(C^{-1})_{ij}|_p \leq 1$.

Für $\varphi \in L$ folgt daraus:

$$|d(C)\varphi d(C^{-1})|_p \leq |\varphi|_p.$$

Da das Konjugieren mit $d(C)$ ein Isomorphismus ist, muß Gleichheit gelten.

(iv) Folgt aus 2.2.8 und 2.2.9

(v) Es genügt zu zeigen:

$$\begin{array}{ccc} \{A, B\} & \xrightarrow{\quad \overline{C} \quad} & \hat{L} \\ q \downarrow & & \downarrow q \\ \{q(A), q(B)\} & \xrightarrow{\quad \overline{C}_L \quad} & L \end{array}$$

Man betrachte nur den Fall $j < \infty$, denn im Fall $j = \infty$ ist $L = 0$.

Nun gilt für $(A^r)^{(j)}: (A^r)^{(j)}(A) = A$,

$$(A^r)^{(j)}(B) = \frac{1}{|\log(d(\varphi_b))|_p} (\log(d(\varphi_b)))|_p B \quad \text{H} \quad |\log(d(\varphi_a))|_p A$$

Für $\overline{A^r}_L$ gilt:

$$\begin{aligned} \overline{A^r}_L \left(\frac{\log(d(\varphi_a))}{|\log(d(\varphi_a))|_p} \right) &= d(A^r) \frac{\log(d(\varphi_a))}{|\log(d(\varphi_a))|_p} d(A^r)^{-1} = \frac{\log(d(A^r)\varphi_a d(A^r)^{-1})}{|\log(d(\varphi_a))|_p} = \frac{\log(d(\varphi_a))}{|\log(d(\varphi_a))|_p} \\ \overline{A^r}_L \left(\frac{\log(d(\varphi_b))}{|\log(d(\varphi_b))|_p} \right) &= d(A^r) \frac{\log(d(\varphi_b))}{|\log(d(\varphi_b))|_p} d(A^r)^{-1} = \frac{\log(d(A^r)\varphi_b d(A^r)^{-1})}{|\log(d(\varphi_b))|_p} = \frac{\log(d(\varphi_b)\varphi_a)}{|\log(d(\varphi_b))|_p} = \frac{\log(d(\varphi_b)*d(\varphi_a))}{|\log(d(\varphi_b))|_p} \\ &= \frac{|\log(d(\varphi_b))|_p B \quad \text{H} \quad |\log(d(\varphi_a))|_p A}{|\log(d(\varphi_b))|_p} \end{aligned}$$

Für die Abbildungen $(A^l)^{(j)}, (B^r)^{(j)}, (B^l)^{(j)}, (\phi_a^b)^{(j)}, (\phi^{a^{-1}})^{(j)}, (\phi^{b^{-1}})^{(j)}$ zeigt man die Kommutativität entsprechend.

Da diese Abbildungen $\text{Aut}(F_2)$ erzeugen, folgt die Kommutativität für alle $C \in \text{Aut}(F_2)$.

(vi) folgt aus (v).

Lemma 2.3.3 Sei $d: \text{Aut}(F_2) \rightarrow \text{Gl}_n(\mathbb{Q}_p)$ eine Einbettung wie in 2.3.2.

Dann gibt es ein $m_0 \in \mathbb{N}$ s.d. $((\overline{A^r}_L - I)^{m_0}: L_i \rightarrow L_{i+1})$ für $i \in \mathbb{Z}$.

Ferner gilt für $p > d$, wobei d die Größe des größten Jordankästchens von $\overline{A^r}_L$ sei: Es gibt $m \in \mathbb{N}$ s.d. $[\dots [q(A), \underbrace{q(B), \dots, q(B)}_{m\text{-mal}}]] = 0$.

Daraus folgt dann, daß $d(\varphi_a)$ und damit auch $d(\varphi_b)$ nicht diagonalisierbar ist.

Beweis:

Man betrachte zunächst die Abbildung $(A^r)^{(j)} - I: \hat{L} \rightarrow \hat{L}$ mit $|\log(A)|_p = p^{-j}$.

Diese hat die Gestalt $A^+ - I + p^j R$ mit $R: \hat{L}_i \rightarrow \hat{L}_i$ für $i \in \mathbb{N}$, da $(A^r)^{(j)}(A) = \frac{1}{p^j}(p^j B \quad \text{H} \quad p^j A)$.

Für $n \in \mathbb{N}$ findet man induktiv für $w = \sum_{C \in \{[\dots [C_1, C_2], \dots, C_i] | C_i \in \{A, B\}, i \in \mathbb{N}\}} a_C C$:

$((A^r)^{(j)} - I)^n(w) = (A^+ - I)^n(w) + p^j R_n(w)$ mit $R_n: \hat{L}_i \rightarrow \hat{L}_i$ für $i \in \mathbb{N}$. Nun gibt es für $l \in \mathbb{N}$ nur endlich viele $C \in \{[\dots [C_1, C_2], \dots, C_i] | C_i \in \{A, B\}\}$ mit $|a_C|_p > p^{-l}$.

Ferner gilt für $v = [\dots [C_1, C_2], \dots, C_l]$ mit $l \in \mathbb{N}$, $C_i \in \{A, B\}$: $(A^+ - I)^{l-1}(v) = 0$.

Daher gibt es $n \in \mathbb{N}$ s.d.: $|(A^+ - I)^n(w)|_p < |w|_p$

$$\Rightarrow |(A^r)^{(j)} - I)^n(w)|_p < |w|_p$$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} ((A^r)^{(j)} - I)^n = 0$$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} ((\overline{A^r}_L)^{(j)} - I)^n = 0$$

Da L endlichdimensional ist gibt es folglich $n \in \mathbb{N}$, s.d.

$(\overline{A^r}_L - I)^n: L_{i+1} \rightarrow L_i$ für $i \in \mathbb{Z}$.

Folglich gilt für jeden Eigenwert a von $(\overline{A^r}_L - I)$: $\lim_{n \rightarrow \infty} a^n = 0$ d.h. $a = p^r a_0$ mit $|a_0|_p = 1$

und $0 < r \in \mathbb{R}$

Sei nun d die Größe des größten Jordankästchens von $\overline{A^r}_L$ (und damit auch von $\overline{A^l}_L, \overline{B^r}, \overline{B^l}$). Dann gilt für $w \in L \setminus \{0\}$ wegen der Gestalt der Eigenwerte:

$$|(\overline{A^r}_L - I)^d(w)|_p < |w|_p$$

Andererseits gilt:

$$\begin{aligned} (A^+ - I)^d([\dots [A, \underbrace{B, \dots, B}_{d+1-\text{mal}}]) &= -d!([\dots [B, \underbrace{A, \dots, A}_{d+1-\text{mal}}]) \\ \phi_a^b([\dots [A, \underbrace{B, \dots, B}_{d+1-\text{mal}}]) &= [\dots [B, \underbrace{A, \dots, A}_{d+1-\text{mal}}]) \end{aligned}$$

Wegen der 1. Gleichung gibt es $R \in L$ mit $|R|_p \leq \left| q([\dots [A, \underbrace{B, \dots, B}_{d+1-\text{mal}}]) \right|_p$ s.d:

$$(\overline{A^r}_L - I)^d(q([\dots [A, \underbrace{B, \dots, B}_{d+1-\text{mal}}])) = -d!(q([\dots [B, \underbrace{A, \dots, A}_{d+1-\text{mal}}])) + pR$$

Aus der zweiten Gleichung kann man folgern:

$$\begin{aligned} (\overline{\phi_a^b})_L(q([\dots [A, \underbrace{B, \dots, B}_{d+1-\text{mal}}])) &= q([\dots [B, \underbrace{A, \dots, A}_{d+1-\text{mal}}])) \\ \Rightarrow \left| q([\dots [A, \underbrace{B, \dots, B}_{d+1-\text{mal}}]) \right|_p &= \left| q([\dots [B, \underbrace{A, \dots, A}_{d+1-\text{mal}}]) \right|_p \end{aligned}$$

Wegen $p > d$ folgt nun: $q([\dots [A, \underbrace{B, \dots, B}_{d+1-\text{mal}}]) = 0$

Falls $\log(d(\varphi_a))$ diagonal ist, Jordannormalform hat und verschiedene Diagonalelemente hat, folgt aus $q([\dots [B, A, \dots, A]) = 0$, daß $\log(d(\varphi_b))$ dieselbe Kästchenform hat. Insbesondere kann man $d(\varphi_a)$ und $d(\varphi_b)$ simultan diagonalisieren (man beachte, daß $\log$ in diesem Fall injektiv ist.) , was der Freiheit der dadurch erzeugten Gruppe widerspricht.

Bemerkung 2.3.4 Sei die Darstellung $d: \text{Aut}(F_2) \rightarrow GL_n(\mathbb{Q}_p)$ so daß die induzierte Darstellung irreduzibel ist und sie erfülle die Voraussetzungen obigen Lemmas und es gelte $p > 2$.

Dann besitzen $d(\varphi_a), d(\varphi_b)$ nur Eigenwert 1.

Dies sieht man wie folgt:

Habe z.B. $d(\varphi_{ab^{-1}})$ Jordan-Normalform, wobei $\log(d(\varphi_{ab^{-1}})) = \begin{pmatrix} A_{11} & 0 \\ 0 & A_{22} \end{pmatrix}$ sei.

Dabei habe diesem Beispiel $d(\varphi_{ab^{-1}})$ zwei verschiedene Kästchen A_{11}, A_{22} die jeweils alle Jordankästchen eines Eigenwertes und dessen inversen Eigenwertes enthalten .

Ferner habe $\log d(\varphi_b)$ die Gestalt $\begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{12} & B_{22} \end{pmatrix}$.

Dann ergibt sich aus $[[\log(d(\varphi_{ab^{-1}})), \log(d(\varphi_b))], \dots, \log(d(\varphi_b))] = 0$,

daß gilt: $B_{21} = B_{12} = 0$.

Hieraus ergibt sich, daß die Darstellung der freien Gruppe nicht irreduzibel war. Aus $\phi_a^b \varphi_{ab^{-1}} \phi_a^b =$

$\varphi_{ab^{-1}}, \phi^{b^{-1}} \varphi_b \phi^{b^{-1}} = \varphi_b^{-1}$ und $B^r \varphi_b = \varphi_b B^r$ folgt, daß auch die Darstellung der $\text{Aut}(F_2)$ nicht irreduzibel war. Also besteht $d(\varphi_{ab^{-1}})$ nur aus Jordankästchen eines einzigen Eigenwertes und dessen Inversen. Da $d(\varphi_a), d(\varphi_b)$ zu $d(\varphi_{ab^{-1}})$ konjugiert sind, haben diese dieselben Eigenwerte.

Sei dieser Eigenwert nicht 1:

Seien nun auch die Kästchen von $d(\varphi_{ab^{-1}})$ nach Eigenwerten sortiert, dann haben $d(\varphi_b)$ und $d(\varphi_a)$ ebenfalls diese Kästchenform mit eventuell anderer Eigenwertreihenfolge.

(wegen $[\dots [\log(d(\varphi_{ab^{-1}})), \log(d(\varphi_b))], \dots, \log(d(\varphi_b))] = 0$,
 $[\dots [\log(d(\varphi_{ab^{-1}})), \log(d(\varphi_a))], \dots, \log(d(\varphi_a))] = 0$).

Nun folgt, daß das erste Kästchen von $d(\varphi_a)$ aus mehreren Jordankästchen besteht (das sieht man, da die Determinante nur Werte annehmen kann, die nicht zu einem Jordankästchen obiger Eigenwerte gehören können), was der Annahme widerspricht.

Bemerkung 2.3.5 Nach [for] gibt es, falls es eine treue Darstellung $d: \text{Aut}(F_2) \rightarrow \text{Gl}_n(\mathbb{C})$ gibt, auch eine irreduzible treue Darstellung.

Lemma 2.3.6 Sei $\text{Aut}(F_2)$ in eine p -adische Liegruppe einbettbar, dann ist $\log$ auf $\text{Aut}(F_2)$ nicht injektiv, insbesondere gibt es auf $\log(\text{Aut}(F_2))$ keine Exponentialabbildung.

Beweis: $\text{Aut}(F_2)$ enthält Elemente endlicher Ordnung.

Lemma 2.3.7 Nach [for] (hier ist bei der letzten Relation ein Druckfehler) und [mag2] hat $\text{Aut}(F_2)$ folgende Gestalt:

$$\text{Aut}(F_2) = \{\phi_a^b, \phi^{-a}, B^r \mid 1 = (\phi_a^b)^2 = (\phi^{a^{-1}})^2 = (\phi^{a^{-1}} \circ \phi_b^a)^4 = (\phi_a^b \circ \phi^{a^{-1}} \circ \phi_a^b B^r)^2 = (B^r \circ \phi^{a^{-1}} \circ \phi_a^b)^3 = \{B^r, \phi^{a^{-1}} \circ B^r \circ \phi^{a^{-1}}\}\}$$

Sei $d: \text{Aut}(F_2) \rightarrow \text{Gl}_n(\mathbb{Q}_p)$ mit $n \in \mathbb{N}$ eine Darstellung, dann gelten obige Relationen aus denen man folgende Relationen herleiten kann:

$$\begin{aligned} [d(A^r), d(\varphi_a)] &= [d(A^l), d(\varphi_a)] = [d(A^r), d(A^l)] = 0, \\ d(\phi_a^b) &= d(\phi_a^b)^{-1}, \quad d(\phi^{a^{-1}}) = d(\phi^{a^{-1}})^{-1}, \quad d(\phi^{b^{-1}}) = d(\phi^{b^{-1}})^{-1}, \\ d(A^l) \circ d(A^r)^{-1} &= d(\varphi_a), \\ d(\phi^{b^{-1}}) \circ d(A^l) \circ d(\phi^{b^{-1}}) &= d(A^r)^{-1}, \\ d(\phi_a^b) \circ d(A^l) \circ d(\phi_a^b) &= d(B^l), \\ d(\phi_a^b) \circ d(A^r) \circ d(\phi_a^b) &= d(B^r), \\ d(\phi_a^b) \circ d(\varphi_a) \circ d(\phi_a^b) &= d(\varphi_b) \end{aligned}$$

Lemma 2.3.8 Sei $d: \text{Aut}(F_2) \rightarrow \text{Gl}_n(\mathbb{Q}_p)$ mit $n \in \mathbb{N}$ eine Darstellung. Dann gilt: $\log(d(\varphi_a)) = \log(d(A^l)) - \log(d(A^r))$

Beweis:

Es gilt: $A^l \circ (A^r)^{-1} = \varphi_a$ und $[(A^r)^{-1}, A^l] = 0$.

Sei nun q so gewählt, daß $|\log(d(A^l)^q)|_p < 1, |\log(d((A^r)^{-q})|_p < 1,$

$|\log(d(\varphi_a)^q)|_p < 1$.

Man erhält nun:

$$\begin{aligned} \log(d(\varphi_a)) &= \frac{1}{q} \log(d(\varphi_a)^q) = \frac{1}{q} \log(d(A^l)^q \circ d(A^r)^{-q}) = \\ &= \frac{1}{q} \log(\exp(\log(d(A^l)^q)) \circ \exp(\log(d(A^r)^{-q}))) = \frac{1}{q} (\log(d(A^l)^q) - \log(d(A^r)^{-q})) = \frac{1}{q} (\log(d(A^l)^q) + \\ &= \log(d(A^r)^{-q})) = \log(d(A^l)) - \log(d(A^r)) \end{aligned}$$

Lemma 2.3.9 Seien $C, D \in \text{Gl}_n(\mathbb{Q}_p)$, dann gilt:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{qp^n} (C^{qp^n} \log(D) C^{-qp^n} - \log(D)) = [\log(C), \log(D)]$$

wobei q so gewählt sei, daß $|\log(C^q)|_p < 1$.

Insbesondere gilt: $\lim_{n \rightarrow \infty} C^{qp^n} = I$

Der Beweis ist klar, da ad die Ableitung von Ad ist.

Korollar 2.3.10

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{qp^n} (d(A^l)^{qp^n} \log(d(\varphi_b)) d(A^l)^{-qp^n} - \log(d(\varphi_b))) &= [\log(d(A^l)), \log(d(\varphi_b))] \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{qp^n} (d(A^r)^{qp^n} \log(d(\varphi_b)) d(A^r)^{-qp^n} - \log(d(\varphi_b))) &= [\log(d(A^r)), \log(d(\varphi_b))] \end{aligned}$$

Wobei man q in der ersten Gleichung wie in obigem Lemma wählen kann. Die zweite Gleichung folgt aus: $d(\phi^{b^{-1}}) \circ d(\phi^{a^{-1}}) \circ d(A^l) \circ d(\phi^{a^{-1}}) \circ d(\phi^{b^{-1}}) = d(A^r)$ und $d(\phi^{b^{-1}}) \circ d(\phi^{a^{-1}}) \circ d(\varphi_b) \circ d(\phi^{a^{-1}}) \circ d(\phi^{b^{-1}}) = d(\varphi_b)$

Korollar 2.3.11 $[\log(d(\varphi_a)), \log(d(\varphi_b))] = [\log(d(A^l)), \log(d(\varphi_b))] - [\log(d(A^r)), \log(d(\varphi_b))]$
 $= \lim_{n \rightarrow \infty} (d(A^l)^{qp^n} \log(d(\varphi_b)) d(A^l)^{-qp^n} - \log(d(\varphi_b))$
 $- d(A^r)^{qp^n} \log(d(\varphi_b)) d(A^r)^{-qp^n} + \log(d(\varphi_b)))$

Satz 2.3.12 Sei $d : \text{Aut}(F_2) \rightarrow \text{Gl}_n(\mathbb{Q}_p)$ mit $n \in \mathbb{N}$ eine Darstellung mit Exponentialfunktion auf $\log(d(\text{Inn}(F_2)))$.

$$\begin{aligned} [\log(d(A^l)), \log(d(\varphi_b))] &= \log(d(\varphi_a)) + \frac{1}{2} [\log(d(\varphi_a)), \log(d(\varphi_b))] \\ &+ \frac{1}{12} [[\log(d(\varphi_a)), \log(d(\varphi_b))], \log(d(\varphi_b))] + \sum_{l=4}^{\infty} a_l [\underbrace{[\log(d(\varphi_a)), \log(d(\varphi_b))], \dots, \log(d(\varphi_b))}_l] \end{aligned}$$

Beweis:

$$\begin{aligned} \text{Es gilt: } (A^l)^{qp^n} \circ \varphi_b \circ (A^l)^{-qp^n} &= \varphi_{(A^l)^{qp^n}(b)} = \varphi_a^{qp^n} \circ \varphi_b \\ \Rightarrow d(A^l)^{qp^n} \circ \log(d(\varphi_b)) \circ d(A^l)^{-qp^n} &= \log(d(A^l)^{qp^n} \circ d(\varphi_b) \circ d(A^l)^{-qp^n}) = \log(d(\varphi_a)^{qp^n} \circ d(\varphi_b)) \\ &= (qp^n \log(d(\varphi_a))) \text{ H } \log(d(\varphi_b)) \\ \Rightarrow [\log(d(A^l)), \log(d(\varphi_b))] &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{qp^n} (d(A^l)^{qp^n} \log(d(\varphi_b)) d(A^l)^{-qp^n} - \log(\varphi_b)) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{qp^n} (qp^n \log(d(\varphi_a)) \text{ H } \log(d(\varphi_b)) - \log(d(\varphi_b))) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{qp^n} (qp^n \log(d(\varphi_a)) + \frac{qp^n}{2} [\log(d(\varphi_a)), \log(d(\varphi_b))]) \\ &+ \sum_{l=3}^{\infty} \frac{1}{l!} \sum_{C \in \{[C_1, C_2], \dots, C_l\} | C_i \in \{qp^n \log(d(\varphi_a)), \log(d(\varphi_b))\}, i \in \{1, \dots, l\}\}} a_C C) \\ &= \log(d(\varphi_a)) + \frac{1}{2} [\log(d(\varphi_a)), \log(d(\varphi_b))] + \sum_{l=2}^{\infty} a_l [\underbrace{[\log(d(\varphi_a)), \log(d(\varphi_b))], \dots, \log(d(\varphi_b))}_l] \end{aligned}$$

Nun gilt nach [bur, Seite 161]: $a_3 = 0$.

Beobachtung 2.3.13 Unter den Voraussetzungen von Lemma 2.3.3 liefert Konjugation mit $d(\phi^{b^{-1}})$:

$$\begin{aligned} [\log(d(A^r)), \log(d(\varphi_b))] &= \log(d(\varphi_a)) - \frac{1}{2} [\log(d(\varphi_a)), \log(d(\varphi_b))] \\ &+ \frac{1}{12} [[\log(d(\varphi_a)), \log(d(\varphi_b))], \log(d(\varphi_b))] + \sum_{l=4}^{\infty} (-1)^l a_l [\underbrace{[\log(d(\varphi_a)), \log(d(\varphi_b))], \dots, \log(d(\varphi_b))}_l] \end{aligned}$$

Damit gilt:

$$\begin{aligned} [\log(d(\varphi_a)), \log(d(\varphi_b))] &= [\log(d(A^l)), \log(d(\varphi_b))] - [\log(d(A^r)), \log(d(\varphi_b))] \\ &= [\log(d(\varphi_a)), \log(d(\varphi_b))] + \sum_{l=4}^{\infty} (1 - (-1)^l) a_l [\underbrace{[\log(d(\varphi_a)), \log(d(\varphi_b))], \dots, \log(d(\varphi_b))}_l]. \end{aligned}$$

Sei nun l_0 minimal so gewählt, daß für $l > l_0$ gilt: $0 = [[\log(d(\varphi_a)), \underbrace{\log(d(\varphi_b)), \dots, \log(d(\varphi_b))}_{2l+1}],$

dann sind die $[[\log(d(\varphi_a)), \underbrace{\log(d(\varphi_b)), \dots, \log(d(\varphi_b))}_{2l+1}]]$ mit $l \in \{1, \dots, l_0\}$ linear unabhängig.

Nach obiger Rechnung gilt aber:

$$0 = \sum_{l=1}^{\infty} 2a_{2l+1} [[\log(d(\varphi_a)), \underbrace{\log(d(\varphi_b)), \dots, \log(d(\varphi_b))}_{2l+1}]]$$

Damit gilt: $a_{[[\log(d(\varphi_a)), \underbrace{\log(d(\varphi_b)), \dots, \log(d(\varphi_b))}_{2l+1}]]} = 0$ für $l \in \{1, \dots, l_0\}$

Nun sieht man aber am Beispiel 2.2.14, daß man l_0 beliebig groß wählen kann. Also gilt:
 $a_{[[\log(d(\varphi_a)), \underbrace{\log(d(\varphi_b)), \dots, \log(d(\varphi_b))}_{2l+1}]]} = 0$ für $l \geq 1$.

Dies kann man auch mittels [helm] berechnen.

2.4 Der allgemeine Fall

Bezeichnung 2.4.1 Sei $d_{\mathbb{C}} : \text{Aut}(F_2) \rightarrow \text{Gl}_n(\mathbb{C})$ eine injektive Darstellung. Sei $\xi \in \text{Gl}_n(\mathbb{C})$ so gewählt, daß $\xi d_{\mathbb{C}}(\varphi_a) \xi^{-1}$ Jordan-Normalform hat. Sei

$$\begin{aligned} i_{\xi} : \text{Gl}_n(\mathbb{C}) &\longrightarrow \text{Gl}_n(\mathbb{C}) \\ A &\longmapsto \xi A \xi^{-1} \end{aligned}$$

der zugehörige innere Automorphismus.

Nun gibt es nach [lub, 207-214] eine Einbettung $k : i_{\xi} \circ d_{\mathbb{C}}(\text{Aut} F_2) \rightarrow \text{Gl}_n(\mathbb{Z}_p)$ mit p prim, $\mathbb{Z}_p$ die p -adischen Zahlen. Diese Abbildung hält die Matrixeinträge aus $\mathbb{Z}$ fest. Insbesondere hat $k \circ i_{\xi} \circ d_{\mathbb{C}}(\varphi_a)$ auch Jordan-Normalform, da die Matrixeinträge von $\xi \varphi_a \xi^{-1}$, die 0,1 betragen, festgehalten werden.

Sei $\mathbb{Z}_p(\frac{1}{p}, \dots, \frac{1}{p^{n-1}})$ der von $\{\frac{1}{p}, \dots, \frac{1}{p^{n-1}}\}$ erzeugte $\mathbb{Z}_p$ -Modul.

$$\text{Für } \rho := \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & p & & \\ & & \ddots & \\ & & & p^{n-1} \end{pmatrix} \text{ gilt: } \rho^{-1} \in \mathbb{Z}_p(\frac{1}{p}, \dots, \frac{1}{p^{n-1}}).$$

$$\text{Nun gilt: } \rho(k \circ i_{\xi} \circ d_{\mathbb{C}}(\varphi_a))\rho^{-1} = D + \begin{pmatrix} 0 & \delta_1 & & 0 \\ & \cdot & \cdot & \\ & & \cdot & \delta_{n-1} \\ 0 & & & 0 \end{pmatrix} \text{ für } D \text{ Diagonalmatrix,}$$

$\delta_i \in \{0, p\}$ mit $i \in \{1, \dots, n-1\}$.

Man definiere nun:

$$\begin{aligned} d : \text{Aut} F_2 &\longrightarrow \text{Gl}_n(\mathbb{Z}_p(\frac{1}{p}, \dots, \frac{1}{p^{n-1}})) \\ \varphi &\longmapsto \rho(k \circ i_{\xi} \circ d_{\mathbb{C}}(\varphi))\rho^{-1} \end{aligned}$$

Lemma 2.4.2 $\det(d(\varphi_a)) = \det(d(\varphi_b)) = 1$

Beweis: (vergl.) [pla]

Sei $\phi_a^{ab} \in \text{Aut} F_2$ mit $\phi_a^{ab}(a) = ab$, $\phi_a^{ab}(ab) = a$.

Nun gilt: $\phi_a^{ab} \circ \varphi_a \circ \phi_a^{ab} = \varphi_{ab} = \varphi_a \circ \varphi_b \Rightarrow \varphi_a^{-1} \circ \phi_a^{ab} \circ \varphi_a \circ \phi_a^{ab} = \varphi_b$
 $\Rightarrow \det(d(\varphi_b)) = 1$.

Wegen $\varphi_a = \phi_a^b \circ \varphi_b \circ \phi_a^b$ folgt: $\det(d(\varphi_a)) = 1$

$$\text{Lemma 2.4.3 Seien } A, B \in \text{Gl}_n(\mathbb{Q}_p) \text{ und habe } A \text{ die Gestalt: } aI + \begin{pmatrix} 0 & p & & 0 \\ & \cdot & \cdot & \\ & & \cdot & p \\ 0 & & & 0 \end{pmatrix}$$

mit $a \in \mathbb{Q}_p$

Wenn B mit A vertauscht, dann hat $B = \{B_{ij}\}_{i,j \in \{1, \dots, n\}}$ folgende Eigenschaften:

$b_{ij} = 0$ für $i > j$ und $b_{i_1 j_1} = b_{i_2 j_2}$ für $i_1 - j_1 = i_2 - j_2$.

$$\text{Das sieht z.B. im Fall } n=3 \text{ wie folgt aus: } \begin{pmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \\ 0 & b_1 & b_2 \\ 0 & 0 & b_1 \end{pmatrix}$$

Beweis:

Es gilt für $i, k \in \{1, \dots, n\}$: $\sum_{j=1}^n a_{ij} b_{jk} = \sum_{j=1}^n b_{ij} a_{jk}$

$$\Rightarrow \bigwedge_{i \in \{1, \dots, n-1\}, k \in \{2, \dots, n\}} ab_{ik} + pb_{(i+1)k} = ab_{ik} + pb_{i(k-1)}.$$

Damit ist gezeigt: $b_{i_1 j_1} = b_{i_2 j_2}$ für $i_1 - j_1 = i_2 - j_2 = m$ mit $m \in \{-n+1, \dots, n-1\}$.

Für $k = 1$ erhält man: $ab_{i1} = ab_{i1} + pb_{(i+1)1} \Rightarrow b_{(i+1)1} = 0$ für $i \in \{1, \dots, n-1\}$.

Korollar 2.4.4 Es kann keine injektive Darstellung $d: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ geben, s.d. $d(\varphi_a)$ nur aus einem Jordankästchen besteht.

Beweis:

Falls $d: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ nur aus einem Jordankästchen besteht, hat $d(\varphi_a)$ obige Gestalt.

Nun gilt aber: $d(\phi^{b^{-1}})$ vertauscht mit $d(\varphi_a)$.

Damit hat $d(\phi^{b^{-1}})$ die Gestalt aus obigem Lemma.

Sei also $d(\phi^{b^{-1}}) = \{\phi_{ij}^{b^{-1}}\}_{i,j \in \{1, \dots, n\}}$, dann gilt: $\phi_{i_1 j_1}^{b^{-1}} = \phi_{i_2 j_2}^{b^{-1}}$ für $i_1 - j_1 = i_2 - j_2$ und $\phi_{ij}^{b^{-1}} = 0$ für $i > j$.

Andererseits gilt: $d(\phi^{b^{-1}})^2 = I$. Man erhält:

$$\delta_{ik} = \sum_{j=1}^n \phi_{ij}^{b^{-1}} \phi_{jk}^{b^{-1}} = \sum_{k \geq j \geq i} \phi_{ij}^{b^{-1}} \phi_{jk}^{b^{-1}}$$

Für $i = k = 1$ ergibt sich: $\phi_{11}^{b^{-1}} \phi_{11}^{b^{-1}} = 1$. Damit gilt: $\phi_{11}^{b^{-1}} \in \{1, -1\}$. Aus der Gestalt folgt nun, da $\phi_{ii}^{b^{-1}} = \phi_{11}^{b^{-1}}$ für $i \in \{1, \dots, n\}$, daß I oder $-I$ die Diagonale von $d(\phi^{b^{-1}})$ ist.

Für $i = 1, k = 2$ ergibt sich: $\phi_{11}^{b^{-1}} \phi_{12}^{b^{-1}} + \phi_{12}^{b^{-1}} \phi_{22}^{b^{-1}} = 0 \Rightarrow \phi_{12}^{b^{-1}} = 0$.

Sei schon gezeigt: $\phi_{1k}^{b^{-1}} = 0$ für $k \in \{1, \dots, k_0\}$, $k_0 < n$, dann gilt:

$$\phi_{11}^{b^{-1}} \phi_{1(k_0+1)}^{b^{-1}} + \phi_{1(k_0+1)}^{b^{-1}} \phi_{(k_0+1)(k_0+1)}^{b^{-1}} = 0 \Rightarrow \phi_{1(k_0+1)}^{b^{-1}} = 0.$$

Induktiv folgt nun: $\phi_{1k}^{b^{-1}} = 0$ für $k \in \{2, \dots, n\}$.

Aus der Gestalt von $d(\phi^{b^{-1}})$ ergibt sich nun: $d(\phi^{b^{-1}}) \in \{I, -I\}$.

Damit ist $d(\phi^{b^{-1}})$ im Zentrum von $d(\text{Aut}(F_2))$, aber nicht im Zentrum von $\text{Aut}(F_2)$.

Lemma 2.4.5 $d(\varphi_a), d(\varphi_b), d(\varphi_a)^{-1}, d(\varphi_b)^{-1}$ haben alle dieselbe Jordan-Normalform. Der Beweis ist klar, da sie zueinander konjugiert sind.

Korollar 2.4.6 Die Anzahl und Größen der Jordankästchen zu den Eigenwerten ϵ, ϵ^{-1} entsprechen einander.

Lemma 2.4.7 Seien $A, B \in \text{Gl}_n(\mathbb{Z}_p(\frac{1}{p}, \frac{1}{p^2}, \dots, \frac{1}{p^{n-1}}))$ vertauschbar, s.d.

$$A \text{ die Gestalt } \begin{pmatrix} A_1 & & & \\ & A_2 & & 0 \\ & & \ddots & \\ 0 & & & A_n \end{pmatrix}$$

habe, wobei die A_i zu paarweise verschiedenen Eigenwerten gehörige Jordankästchen seien.

$$\text{Dann gilt: } B \text{ hat die Gestalt: } \begin{pmatrix} B_1 & & & \\ & B_2 & & 0 \\ & & \ddots & \\ 0 & & & B_n \end{pmatrix}$$

Der Beweis erfolgt durch leichte Rechnung.

Satz 2.4.8 $d(\varphi_a)$ hat mindestens einen Eigenwert mit zwei verschiedenen Jordankästchen.

Beweis:

Man nehme an, jeder Eigenwert habe nur ein Jordankästchen, habe $d(\varphi_a)$ nun Jordan-Normalform mit der Gestalt:

$$d(\varphi_a) = \begin{pmatrix} d(\varphi_a)_1 & & & \\ & d(\varphi_a)_2 & & 0 \\ & & \ddots & \\ 0 & & & d(\varphi_a)_n \end{pmatrix}$$

Dabei sei $d(\varphi_a)_i$ das zum i -ten Eigenwert gehörige Kästchen. Dann gilt:

$$d(\phi^{b^{-1}}) = \begin{pmatrix} d(\phi^{b^{-1}})_1 & & & \\ & d(\phi^{b^{-1}})_2 & & 0 \\ & & \ddots & \\ 0 & & & d(\phi^{b^{-1}})_n \end{pmatrix}$$

$$d(A^l) = \begin{pmatrix} d(A^l)_1 & & & \\ & d(A^l)_2 & & 0 \\ & & \ddots & \\ 0 & & & d(A^l)_n \end{pmatrix}$$

$$d((A^r)^{-1}) = \begin{pmatrix} d((A^r)^{-1})_1 & & & \\ & d((A^r)^{-1})_2 & & 0 \\ & & \ddots & \\ 0 & & & d((A^r)^{-1})_n \end{pmatrix}.$$

Daher gilt: $d(\phi^{b^{-1}})_i d(\varphi_a)_i d(\phi^{b^{-1}})_i = d(\varphi_a)_i$ für $i \in \{1, \dots, n\}$.

Da die $d(\varphi_a)_i$ für $i \in \{1, \dots, n\}$ jeweils nur aus einem Jordankästchen bestehen, gilt: $d(\phi^{b^{-1}})_i \in \{I, -I\}$ für $i \in \{1, \dots, n\}$

Aus $d(\phi^{b^{-1}})_i d(A^l)_i d(\phi^{b^{-1}})_i = d((A^r)^{-1})_i$ für $i \in \{1, \dots, n\}$ folgt nun:

$d(A^l) = d(A^r)^{-1}$, womit die Darstellung nicht treu ist.

2.5 Einbettung in die Automorphismengruppe einfacher $\mathbb{C}$ -Liealgebren

Definition 2.5.1 Sei $d: \text{Aut}(F_2) \longrightarrow \text{Gl}_n(\mathbb{C})$ eine Einbettung. Man definiere nun folgende abgeschlossenen Lieuntergruppen von $\text{Gl}_n(\mathbb{C})$: $G := d(\text{Aut}(F_2))$, $N := d(\text{Inn}(F_2))$ und die dazugehörigen Liealgebren: $L(G), L(N)$

Bemerkung 2.5.2 $d(\text{Aut}(F_2))$ operiert diffbar auf N durch Konjugation. Dabei operiert $d(\text{Aut}(F_2))$ auf $d(\text{Inn}(F_2))$ genauso, wie $\text{Aut}(F_2)$ auf F_2 operiert.

Die Ableitung ist die Konjugation von $d(\text{Aut}(F_2))$ auf $L(N)$. Man kann also F_2 mit einer Topologie versehen, bezüglich der die Elemente von $\text{Aut}(F_2)$ diffbar sind.

Definition 2.5.3 Das Radikal $\text{Rad}(L)$ einer Liealgebra L ist das maximale auflösbare Ideal von L , also das Ideal, das durch folgende Eigenschaften definiert ist:

Es gibt ein $m_0 \in \mathbb{N}$ s.d. für alle $\{C_1, \dots, C_m\}$ mit $m \geq m_0$ und $C_i \in \text{Rad}(L)$ für $i \in \{1, \dots, m\}$ gilt: $[[C_1, C_2], \dots, C_m] = 0$ und $\text{Rad}(L)$ ist maximal mit dieser Eigenschaft.

Satz 2.5.4 Gebe es eine Einbettung von $\text{Aut}(F_2)$ in eine Liegruppe wie in 2.5.1, dann operiert $\text{Aut}(F_2)$ auch auf $\frac{L(N)}{\text{Rad}(L(N))}$ treu.

Beweis:

Sei nun $M \trianglelefteq N$ offen s.d. $\log: M \rightarrow L(G)$ existiert und injektiv ist, also $\exp: \log(M) \rightarrow M$ existiert.

Definiere nun $R := \exp(\log(M) \cap \text{Rad}L(N))$.

Beh: $R \trianglelefteq N$.

Seien $g_1, g_2 \in R$. Dann gilt: $\log(g_1 g_2) = \log(\exp(\log(g_1)) \exp(\log(g_2)))$
 $= \log(g_1) + \log(g_2) \in \text{Rad}(L(N)) \cap \log(M)$, da $\log(M)$ wegen der Offenheit von $M \trianglelefteq N$
ein abgeschlossenes Ideal von $L(N)$ ist und somit $\text{Rad}(L(N)) \cap \log(M)$ auch ein abge-
schlossenes Ideal von $L(N)$ ist, also bzgl. $+$ abgeschlossen ist. Sei $g \in R$, dann gibt es
 $m \in \log(M) \cap \text{Rad}(L(M))$ s.d: $g = \exp(m)$, also gilt: $g^{-1} = \exp(-m) \in R$. Außerdem gilt:
 $\text{id} = \exp(0) \in R$, also ist R eine Gruppe.

Sei $g \in R, \varphi \in N$, dann gilt:

$\log(\varphi g \varphi^{-1}) = \varphi \log(g) \varphi^{-1} \in \text{Rad}(N)$, da $\text{Rad}(N)$ nach [bur, Seite 354] charakteristisch ist.
Andererseits gilt: $\varphi g \varphi^{-1} \in M \Rightarrow \log(\varphi g \varphi^{-1}) \in \text{Rad}(N) \cap \log(M)$

$\Rightarrow$ Beh.

Man identifiziere nun $\text{Aut}(F_2)$ mit seiner Einbettung in die Liegruppe.

Nun gilt: $\text{Inn}(F_2) \cap R$ ist ein auflösbarer Normalteiler von $\text{Inn}(F_2)$.

Da $\text{Inn}(F_2)$ frei ist, muß gelten: $\text{Inn}(F_2) \cap R = \text{id}$.

Damit gilt: $\text{Aut}(F_2)$ operiert auf $\frac{(\text{Inn}(F_2) \cap M)R}{R}$ durch Konjugation treu, denn:

$$(i) \quad \frac{(\text{Inn}(F_2) \cap M)R}{R} \cong \frac{\text{Inn}(F_2) \cap M}{\text{Inn}(F_2) \cap R \cap M} = \text{Inn}(F_2) \cap M \underset{\text{offen}}{\trianglelefteq} \text{Inn}(F_2).$$

(ii) $\text{Inn}(F_2) \cap M$ ist, da es eine offene Untergruppe ist, eine endliche Indexuntergruppe von $\text{Inn}(F_2)$

(iii) Als nächstes werde gezeigt:

$\text{Aut}(F_2)$ operiert auf jedem Normalteiler H von F_2 endlichen Indexes treu:

Sei $\varphi \in \text{Aut}(F_2)$, s.d. gelte: $\varphi(h) = h$ für alle $h \in H$

Sei $w \in F_2$ und $m \in \mathbb{N}$ so gewählt, daß $w^m \in H$.

$$\Rightarrow \varphi(w^m) = w^m$$

$$\Rightarrow \varphi(w) = w$$

$$\Rightarrow \varphi = \text{id}$$

(i), (ii), (iii) $\Rightarrow \text{Aut}(F_2)$ operiert auf $\text{Inn}(F_2) \cap M$ treu. Also operiert $\text{Aut}(F_2)$ auf $\frac{(\text{Inn}(F_2) \cap M)R}{R}$
und damit insbesondere auch auf $\frac{L}{R}$ treu.

Lemma 2.5.5 $\text{Rad}(L(G)) \cap L(N) = \text{Rad}(L(N))$

Beweis:

Klar ist: $\text{Rad}(L(N)) \supseteq \text{Rad}(L(G)) \cap L(N)$, da letzteres ein auflösbares Ideal von $L(N)$ ist.
Da $\text{Rad}(L(N))$ charakteristisches Ideal von $L(N)$ ist und $L(N)$ durch Konjugation von Ele-
menten aus $\text{Aut}(F_2)$ festgehalten wird, ist $\text{Rad}(L(N))$ ein Ideal von $L(G)$ ([bur, Seite 354])
und offenbar auflösbar. $\Rightarrow \text{Rad}(L(N)) \subseteq \text{Rad}(L(G)) \cap L(N)$

Korollar 2.5.6 Ist $\text{Aut}(F_2)$ in die Automorphismengruppe einer Liealgebra wie in 2.5.1
einbettbar, dann gibt es eine einfache Liealgebra I , s.d. ein Normalteiler endlichen Indexes
von $\text{Aut}(F_2)$ in $\text{Aut}(I)$ einbettbar ist.

Beweis:

Aus der Halbeinfachheit von $\frac{L(G)}{\text{Rad}(L(G))}$ und aus $L(N) \trianglelefteq L(G)$ folgt nach [hum, Seite 23]:

$\frac{L(N)}{\text{Rad}(L(N))} \cong \frac{L(N)\text{Rad}(L(G))}{\text{Rad}(L(G))} = I_1 + \dots + I_j$ mit $j \in \mathbb{N}$ wobei $I_j \trianglelefteq \frac{L(N)\text{Rad}(L(G))}{\text{Rad}(L(G))}$ einfache
abgeschlossene Ideale von $\frac{L(G)}{\text{Rad}(L(G))}$ sind.

Im Fall $j = 1$ ist das Korollar bewiesen, also behandle man den Fall $j > 1$:

Beh: Es gibt einen endlichen Indexnormalteiler U von $\text{Aut}(F_2)$ s.d. die Darstellung dieses Normalteilers $U \rightarrow \text{Aut}(\frac{L(N)}{\text{Rad}(L(N))})$ nicht irreduzibel ist:

Sei $\varphi \in \text{Aut}(F_2)$. Dann operiert φ auf $\frac{L(N)}{\text{Rad}(L(N))}$ durch Konjugation.

Klarerweise gilt für I_i mit $i \in \{1, \dots, j\}$: $\varphi I_i \varphi^{-1}$ ist auch ein einfaches Ideal. Insbesondere gilt: $\varphi I_i \varphi^{-1} \cap I_k \in \{0, I_k\}$ für $k \in \{1, \dots, j\}$. Damit induziert φ eine Permutation auf $\{I_1, \dots, I_j\}$. Damit hat man einen Gruppenhomomorphismus $\text{Aut}(F_2) \rightarrow \Pi(\{I_1, \dots, I_j\})$, wobei $\Pi(\{I_1, \dots, I_j\})$ die Permutationen von $\{I_1, \dots, I_j\}$ seien. Die φ , die die identische Permutation induzieren, bilden also einen endlichen Indexnormalteiler U von $\text{Aut}(F_2)$. Die Darstellung von U zerfällt also in Darstellungen $U \rightarrow \text{Aut}(L(I_i))$ mit $i \in \{1, \dots, j\}$.

Wie in [for] zeigt man nun, daß eine dieser Darstellungen treu sein muß. (Dazu benötigt man, daß $(\text{Inn}(F_2))^l$ für große l in U liegt.)

Korollar 2.5.7 Ist $\text{Aut}(F_2)$ in die Automorphismengruppe einer Liealgebra wie in 2.5.1 einbettbar, dann gibt es $N \trianglelefteq \text{Aut}(F_2)$ endlichen Indexes s.d. N in $\text{Inn}(L)$ einbettbar ist, wobei L eine halbeinfache Liealgebra sei und $\text{Inn}(L) := \text{Inn}(\exp(\text{nilpotente Elemente aus } L))$, also die durch die nilpotenten Elemente induzierten inneren Automorphismen von L seien.

Beweis:

Nach [hum]/[Seite 87] gilt: $\text{Aut}(L)$ ist das semidirekte Produkt einer endlichen Gruppe und $\text{Inn}(L)$. Da es eine Einbettung $d: \text{Aut}(F_2) \rightarrow \text{Aut}(L)$ gibt, kann man $N := d(\text{Aut}(F_2)) \cap \text{Inn}(L)$ definieren.

$d^{-1}(N)$ ist offenbar ein Normalteiler endlichen Indexes in $\text{Aut}(F_2)$.

Bemerkung 2.5.8 Ist $\text{Aut}(F_2)$ in die Automorphismengruppe einer Liealgebra wie in 2.5.1 einbettbar, dann gibt es einen Normalteiler $N \trianglelefteq \text{Aut}(F_2)$ endlichen Indexes s.d. N in $\text{Inn}(L)$ einbettbar ist, wobei L eine einfache Liealgebra sei und $\text{Inn}(L) := \text{Inn}(\exp(\text{nilpotente Elemente aus } L))$.

Der Beweis geht wie obiges Korollar, nur ist hier N ein Normalteiler endlichen Indexes von U aus dem Beweis von Korollar 2.5.6. Damit ist N eine Untergruppe endlichen Indexes von $\text{Aut}(F_2)$, die in $\text{Inn}(L)$ einbettbar ist. Da jede Untergruppe endlichen Indexes von $\text{Aut}(F_2)$ einen endlichen Index-Normalteiler von $\text{Aut}(F_2)$ enthält, gibt es $M \trianglelefteq \text{Aut}(F_2)$ endlichen Indexes s.d. M in $\text{Inn}(L)$ einbettbar ist.

Korollar 2.5.9 Sei $\hat{d}: \text{Aut}(F_2) \rightarrow \text{Gl}_n(\mathbb{C})$ eine Einbettung, dann gibt es eine Einbettung $d: \text{Aut}(F_2) \rightarrow \text{Aut}(L)$, wobei L eine halbeinfache Liealgebra ist. Ferner gilt: $\log(d(\text{Aut}(F_2))) \subseteq \log(\text{Inn}(L))$.

Beweis:

Es gilt: Es gibt einen Normalteiler endlichen Indexes N von $\text{Aut}(F_2)$ s.d. $d(N) \subseteq \text{Inn}(L)$

Damit gilt: $\log \text{Inn}(L) \supseteq \log(d(N)) \subseteq \log(\text{Aut}(F_2))$. Es ist zu bemerken, daß, wenn $L = \log(d(\text{Inn}(F_2)))$, also $\log(d(\text{Inn}(F_2)))$ bereits halbeinfach war, gilt: $\log(\text{Inn}(L)) = \log(\text{Inn}(F_2))$

Beispiel 2.5.10 Nun folgt das Beispiel der Burau Darstellung von $\text{Aut}^+(F_2)$ aus [for, Seite 407ff].

Nach dem Theorem [for, Seite 406] hat $\text{Aut}^+(F_2)$ folgendes Erzeugendensystem: $(A^r)^{-1}, (A^l)^{-1}$ und

$$C: F_2 \longrightarrow F_2$$

$$\begin{aligned} a &\longmapsto b \\ b &\longmapsto ba^{-1}b \end{aligned}$$

Sei t ein Körperelement eines Körpers K , der $\mathbb{Q}$ enthält, das transzendent über $\mathbb{Q}$ ist oder eine Variable, dann gibt es zu jedem solchen t nach obigem Theorem eine Darstellung $d_t : \text{Aut}^+(F_2) \rightarrow \text{Gl}_3(\mathbb{Q}[t, t^{-1}])$ mit:

$$\begin{aligned} d_t(A^r)^{-1} &= \mu \cdot \begin{pmatrix} -t & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ d_t(A^l)^{-1} &= \mu \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & t & -t \end{pmatrix} \\ d_t(C) &= \mu \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ t & -t & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

wobei μ nach dem Theorem [for, Seite 406] folgende Gestalt hat:

$$\begin{aligned} \mu &= (\det((A^l)^{-1}C(A^r)^{-1}))^{\frac{-4}{36}} \\ &= \det \left(\begin{pmatrix} -t & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ t & -t & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & t & -t \end{pmatrix} \right)^{\frac{-4}{36}} \\ &= \det \left(\begin{pmatrix} 0 & 0 & -t \\ t & 0 & -t \\ 0 & t & -t \end{pmatrix}^4 \right)^{\frac{-1}{36}} \\ &= \det \begin{pmatrix} t^4 & 0 & 0 \\ 0 & t^4 & 0 \\ 0 & 0 & t^4 \end{pmatrix}^{\frac{-1}{36}} \\ &= t^{\frac{-1}{3}} \end{aligned}$$

Damit haben die Erzeuger $d_t(\varphi_a)$, $d_t(\varphi_b)$ von $\text{Inn}(F_2)$ die Gestalt:

$$\begin{aligned} d_t(\varphi_a) &= d_t(A^r)^{-1}d_t(A^l) = \begin{pmatrix} -t & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -t^{-1} \end{pmatrix} \\ d_t(\varphi_b) &= d_t(C)d_t(\varphi_a)d_t(C^{-1}) = \begin{pmatrix} 1-t & 1-t^2 & 1 \\ -t^{-1} & t^{-1} & t^{-1} \\ t^{-1} & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Nach [for, Seite 408] erhält man eine neue Darstellung δ_s , indem man t durch $-s$ ersetzt und anschließend mit der Matrix:

$$Z = \begin{pmatrix} s^2 - s & s & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & s & 1 - s \end{pmatrix}, \text{ deren Inverse } Z^{-1} = \frac{1}{1-s} \begin{pmatrix} -s^{-1} & 1 & 0 \\ 0 & 1-s & 0 \\ 0 & -s & 1 \end{pmatrix} \text{ ist, konjugiert.}$$

Man erhält:

$$\delta_s(\varphi_a) = \begin{pmatrix} s & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & s^{-1} \end{pmatrix}$$

$$\delta_s(\varphi_b) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -(1+s^{-1}) & s+1+s^{-1} & 0 \\ -(s+1+s^{-1}) & s^2+s+1+s^{-1} & 0 \end{pmatrix}$$

wobei gilt: $\delta_s(\varphi_b) = ZCZ^{-1}\delta_s(\varphi_a)ZC^{-1}Z^{-1}$.

Damit gilt: $\delta_s(\text{Inn}(F_2)) \subset \text{Psl}_3(\mathbb{Q}_p)$, liegt also in der einfachen Gruppe der 3×3 Matrizen über $\mathbb{Q}_p$ mit Determinante 1.

Sei nun $s \in \mathbb{Q}_p$ transzendent über $\mathbb{Q}$ mit $|s-1|_p < 1$.

Dann konvergieren folgende Reihen:

$$\log(\delta_s(\varphi_a)) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-1)^{i+1}}{i} (\delta_s(\varphi_a) - I)^i$$

$$\exp(\log(\delta_s(\varphi_a))) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i!} (\log(\delta_s(\varphi_a)))^i$$

Da $\delta_s(\varphi_b)$ zu $\delta_s(\varphi_a)$ konjugiert ist, existieren die Reihen $\log(\delta_s(\varphi_b))$, $\exp(\log(\delta_s(\varphi_b)))$.

Hierbei haben $\log(\delta_s(\varphi_a))$, $\log(\delta_s(\varphi_b))$ folgende Gestalt:

$$\begin{aligned} \log(\delta_s(\varphi_a)) &= \log(s) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \\ \log(\delta_s(\varphi_b)) &= \frac{\log(s)}{1-s} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1+s^2 & -1-s \\ 1 & 0 & -1 \\ 1+s & -1-s^2 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

mit $1-s$ teilt $\log(s)$, woraus folgt: $|\log(s)|_p < 1$.

Insbesondere gilt: $\log(\delta_s(\text{Inn}(F_2))) \subset \text{sl}_3(\mathbb{Q}_p)$, also besteht nur aus 3×3 Matrizen mit Spur 0. Dabei erzeugt, was man durch eine einfache Rechnung leicht nachweist, $\log(\delta_s(\text{Inn}(F_2)))$ ganz $\text{sl}_3(\mathbb{Q}_p)$.

Also induziert die Burau-Darstellung einen Gruppenhomomorphismus von $\text{Aut}^+(F_2)$, einer endlichen Indexuntergruppe von $\text{Aut}(F_2)$, in $\text{Aut}(\text{sl}_3(\mathbb{Q}_p))$, also in die Automorphismengruppe einer einfachen Liealgebra. (Daß die $\text{sl}_3(\mathbb{Q}_p)$ einfach ist, also keine nichttriviale Ideale enthält ist bekannt, kann aber auch nachgerechnet werden.)

Nun folgt eine Beweisidee mit der man vielleicht zeigen kann, daß obige Darstellung treu ist, was nach [kra1] unbekannt ist.

Dazu genügt es zu zeigen, daß F_2 treu abgebildet wird:

Die Hauptidee ist, daß auf dem Bild der Darstellung der freien Gruppe der Logarithmus gebildet werden kann. Danach betrachtet man s als eine transzendente Variable und ein beliebiges im Bild von F_2 verschwindendes reduziertes Wort.

Durch Koeffizientenvergleich erhält man dann Gleichungen, die der Reduziertheit widersprechen.

Zunächst werde gezeigt, daß es genau dann ein transzendentes s über $\mathbb{Q}$ gibt, bezüglich dessen die Darstellung treu ist, wenn die Darstellung bezüglich s als Variable treu ist:

$$|\log(\delta_s(\varphi_a))|_p < 1,$$

$$|\log(\delta_s(\varphi_b))|_p = 1 \text{ ergibt sich leicht:}$$

Es existiert das Hausdorffprodukt für alle Wörter in $\langle \log(\delta_s(\varphi_a)), \log(\delta_s(\varphi_b)) \rangle$.

Dabei hat ein Wort $\varphi_1 \cdot \dots \cdot \varphi_n$ mit $n \in \mathbb{N}$, $\varphi_1, \dots, \varphi_n \in \{\log(\delta_s(\varphi_a)), \log(\delta_s(\varphi_b))\}$ die Gestalt:

$$\sum_{i=1}^{\infty} \sum_{\eta_j \in \{\log(\delta_s(\varphi_a)), \log(\delta_s(\varphi_b))\}, j \in \{1, \dots, i\}} a_{[\eta_1, \eta_2], \dots, \eta_i} [[\eta_1, \eta_2], \dots, \eta_i]$$

mit $a_{[\eta_1, \eta_2], \dots, \eta_i}$ geeignet.

Man sieht, Worte sind Elemente der 3×3 Matrizen, deren Einträge Potenzreihen in s über $\mathbb{Q}$ sind.

Damit kann man nun zeigen: Es gibt genau dann ein transzendentes s , s.d. die Burau-Darstellung treu ist, falls die Darstellung bzgl. s als Variable treu ist:

Falls ein Wort bzgl. einem s verschwindet und das Wort verschwindet bezüglich s als Variable aufgefaßt nicht, dann gibt es eine offene Umgebung von s , s.d. für alle s in dieser Umgebung das Wort nicht verschwindet.

Insbesondere verschwindet das Wort nur für abzählbar viele s .

Nun besteht die von zwei Elementen erzeugte freie Gruppe nur aus abzählbar vielen Elementen. Daher gibt es nur abzählbar viele transzendente s , für die die Burau-Darstellung bezüglich eines Wortes, das in der Burau-Darstellung bzgl. der Variablen s nicht verschwindet, verschwindet. Da es überabzählbar viele transzendente s gibt, gibt es also überabzählbar viele transzendente s , s.d. die Burau Darstellung in s genau dann verschwindet, wenn die Burau-Darstellung in der Variablen s verschwindet.

Im Folgenden betrachte man s als eine Variable. Damit haben die 3×3 Matrizen Einträge aus dem Vektorraum der formalen Potenzreihen über $\mathbb{Q}_p$.

Nun definiere man:

$$a = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad b(s) = \frac{1}{1-s} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1+s^2 & -1-s \\ 1 & 0 & -1 \\ 1+s & -1-s^2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{Nun gilt: } a^3 = a, \quad b(s)^3 = b(s),$$

$$a^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$b(s) = \frac{1}{s-1} b_{-1}^1 + b_0^1 + (s-1)b_1^1 \text{ mit}$$

$$b_{-1}^1 = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ -2 & 2 & 0 \end{pmatrix}, \quad b_0^1 = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}, \quad b_1^1 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$b(s)^2 = \frac{1}{(s-1)^2} \begin{pmatrix} -2s & (1+s)(1+s^2) & -1-s^2 \\ -1-s & 2(1+s^2) & -1-s \\ -1-s^2 & (1+s)(1+s^2) & -2s \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{(s-1)^2} b_{-2}^2 + \frac{1}{s-1} b_{-1}^2 + b_0^2 + (s-1) b_1^2 \text{ mit} \\
b_{-2}^2 &= (b_{-1}^1)^2 = \begin{pmatrix} -2 & 4 & -2 \\ -2 & 4 & -2 \\ -2 & 4 & -2 \end{pmatrix}, \quad b_{-1}^2 = \begin{pmatrix} -2 & 6 & -2 \\ -1 & 4 & -1 \\ -2 & 6 & -2 \end{pmatrix} \\
b_0^2 &= \begin{pmatrix} 0 & 4 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 4 & 0 \end{pmatrix}, \quad b_1^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Sei nun $id = \prod_{i=1}^n \delta_s(\varphi_a)^{n_i} \delta_s(\varphi_b)^{m_i}$ ein reduziertes Wort, dann gilt:

$$\begin{aligned}
id &= \prod_{i=1}^n \exp(n_i \log(s) a) \exp(m_i \log(s) b(s)) \\
&= \prod_{i=1}^n \left(\sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!} (n_i a \log(s))^j \right) \left(\sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!} (m_i b(s) \log(s))^j \right) \\
&= \prod_{i=1}^n \left(\left(\sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{(2j)!} n_i^{2j} \log(s)^{2j} a^{2j} \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{(2j-1)!} n_i^{2j-1} \log(s)^{2j-1} a^{2j-1} \right) \right. \\
&\quad \left(\sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{(2j)!} m_i^{2j} \log(s)^{2j} b(s)^{2j} \right. \\
&\quad \left. \left. + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{(2j-1)!} m_i^{2j-1} \log(s)^{2j-1} b(s)^{2j-1} \right) \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{Mit } a^{2j} &= a^2 \\
a^{2j-1} &= a \\
b(s)^{2j} &= \left(\frac{b_{-2}^2}{(s-1)^2} + \frac{b_{-1}^2}{s-1} + b_0^2 + (s-1) b_1^2 \right) \\
b(s)^{2j-1} &= \left(\frac{b_{-1}^1}{s-1} + b_0^1 + (s-1) b_1^1 \right) \\
\log(s) &:= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} (s-1)^k
\end{aligned}$$

(beim Einsetzen macht die Gleichung nur noch für $|s-1| < 1$ Sinn) folgt dann:

$$\begin{aligned}
id &= \prod_{i=1}^n \left(\left(id + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{(2j)!} n_i^{2j} \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} (s-1)^k \right)^{2j} a^2 \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{(2j-1)!} n_i^{2j-1} \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} (s-1)^k \right)^{2j-1} a \right) \right. \\
&\quad \left(id + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{(2j)!} m_i^{2j} \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} (s-1)^k \right)^{2j} \left(\frac{b_{-2}^2}{(s-1)^2} + \frac{b_{-1}^2}{s-1} + b_0^2 + (s-1) b_1^2 \right) \right. \\
&\quad \left. \left. + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{(2j-1)!} m_i^{2j-1} \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} (s-1)^k \right)^{2j-1} \left(\frac{b_{-1}^1}{s-1} + b_0^1 + (s-1) b_1^1 \right) \right) \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{(2j-1)!} m_i^{2j-1} \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} (s-1)^k \right)^{2j-1} \left(\frac{b_{-1}^1}{s-1} + b_0^1 + (s-1)b_1^1 \right) \Bigg) \\
& = \sum_{i=0}^{\infty} c_i (s-1)^i \\
& \Rightarrow \bigwedge_{i>0} c_i = 0
\end{aligned}$$

Man erhält also aus den zu $(s-1)^i$ gehörigen Koeffizienten c_i der darüberstehenden Reihe unendlich viele Gleichungen für die n_i, m_i .

Falls man die Koeffizienten m_i, n_i aus $\{1, -1\}$ wählt, kann man obige Gleichungen wesentlich vereinfachen:

$$\begin{aligned}
id &= \prod_{i=1}^n \left(id + \left(\frac{1}{2} (\exp(n_i \log(s)) + \exp(-n_i \log(s))) - 1 \right) \cdot a^2 \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{2} (\exp(n_i \log(s)) - \exp(-n_i \log(s))) \cdot a \right) \\
&\quad \left(id + \left(\frac{1}{2} (\exp(m_i \log(s)) + \exp(-m_i \log(s))) - 1 \right) \right. \\
&\quad \left(\frac{b_{-2}^2}{(s-1)^2} + \frac{b_{-1}^2}{s-1} + b_0^2 + (s-1)b_1^2 \right) \\
&\quad \left. + \frac{1}{2} (\exp(m_i \log(s)) - \exp(-m_i \log(s))) \right. \\
&\quad \left. \left(\frac{b_{-1}^1}{s-1} + b_0^1 + (s-1)b_1^1 \right) \right) \\
&= \prod_{i=1}^n \left(id + \left(\frac{1}{2} (s^{n_i} + s^{-n_i}) - 1 \right) \cdot a^2 + \frac{1}{2} (s^{n_i} - s^{-n_i}) \cdot a \right) \\
&\quad \left(id + \left(\frac{1}{2} (s^{m_i} + s^{-m_i}) - 1 \right) \left(\frac{b_{-2}^2}{(s-1)^2} + \frac{b_{-1}^2}{s-1} + b_0^2 + (s-1)b_1^2 \right) \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{2} (s^{m_i} - s^{-m_i}) \left(\frac{b_{-1}^1}{s-1} + b_0^1 + (s-1)b_1^1 \right) \right) \\
&= \prod_{i=1}^n \left(id + \left(\frac{1}{2} \left(s + \frac{1}{s} \right) - 1 \right) \cdot a^2 + \frac{n_i}{2} \left(s - \frac{1}{s} \right) \cdot a \right) \\
&\quad \left(id + \left(\frac{1}{2} \left(s + \frac{1}{s} \right) - 1 \right) \cdot \left(\frac{b_{-2}^2}{(s-1)^2} + \frac{b_{-1}^2}{s-1} + b_0^2 + (s-1)b_1^2 \right) \right. \\
&\quad \left. + \frac{m_i}{2} \left(s - \frac{1}{s} \right) \cdot \left(\frac{b_{-1}^1}{s-1} + b_0^1 + (s-1)b_1^1 \right) \right) \\
&= \prod_{i=1}^n \left(id + \frac{1}{2} \frac{(s-1)^2}{s} \cdot a^2 + \frac{n_i}{2} \frac{(s-1)(s+1)}{s} \cdot a \right) \\
&\quad \left(id + \frac{1}{2} \frac{(s-1)^2}{s} \cdot \left(\frac{b_{-2}^2}{(s-1)^2} + \frac{b_{-1}^2}{s-1} + b_0^2 + (s-1)b_1^2 \right) \right. \\
&\quad \left. + \frac{m_i}{2} \frac{(s-1)(s+1)}{s} \cdot \left(\frac{b_{-1}^1}{s-1} + b_0^1 + (s-1)b_1^1 \right) \right)
\end{aligned}$$

Man setze nun $\frac{1}{s} := \sum_{j=0}^{\infty} (-(s-1))^j$, was beim Einsetzen wiederum nur für $|1-s| < 1$ Sinn macht. Man erhält:

$$\begin{aligned}
id &= \prod_{i=1}^n \left(id + \frac{1}{2} \left(\sum_{j=2}^{\infty} (-(s-1))^j \right) \cdot a^2 + \frac{n_i}{2} \left((s-1) - \sum_{j=1}^{\infty} (-(s-1))^j \right) \cdot a \right) \\
&\quad \left(id + \frac{1}{2} \left(\sum_{j=2}^{\infty} (-(s-1))^j \right) \cdot \left(\frac{b_{-2}^2}{(s-1)^2} + \frac{b_{-1}^2}{s-1} + b_0^2 + (s-1)b_1^2 \right) \right. \\
&\quad \left. + \frac{m_i}{2} \left((s-1) - \sum_{j=1}^{\infty} (-(s-1))^j \right) \cdot \left(\frac{b_{-1}^1}{s-1} + b_0^1 + (s-1)b_1^1 \right) \right) \\
&= \prod_{i=1}^n \left(id + \frac{1}{2} \left(\sum_{j=0}^{\infty} (1-s)^j \right) \cdot a^2(1-s)^2 + \frac{-n_i}{2} \left(1 + \sum_{j=0}^{\infty} (1-s)^j \right) \cdot a(1-s) \right) \\
&\quad \left(id + \frac{1}{2} \left(\sum_{j=0}^{\infty} (1-s)^j \right) \cdot (b_{-2}^2 - b_{-1}^2(1-s) + b_0^2(1-s)^2 - b_1^2(1-s)^3) \right. \\
&\quad \left. + \frac{m_i}{2} \left(1 + \sum_{j=0}^{\infty} (1-s)^j \right) \cdot (b_{-1}^1 - b_0^1(1-s) + b_1^1(1-s)^2) \right) \\
&= \prod_{i=1}^n \left(id - \frac{n_i}{2} a(1-s) \right. \\
&\quad \left. + \left(\sum_{j=0}^{\infty} (1-s)^j \right) \left(\frac{-n_i}{2} a(1-s) \right) \right. \\
&\quad \left. + \left(\sum_{j=0}^{\infty} (1-s)^j \right) \left(\frac{1}{2} a^2(1-s)^2 \right) \right) \\
&\quad \left(id - \frac{m_i}{2} (b_{-1}^1 - b_0^1(1-s) + b_1^1(1-s)^2) \right. \\
&\quad \left. + \left(\sum_{j=0}^{\infty} (1-s)^j \right) \left(\frac{1}{2} b_{-2}^2 - \frac{m_i}{2} b_{-1}^1 \right) \right. \\
&\quad \left. + \left(\sum_{j=0}^{\infty} (1-s)^j \right) \left(-\frac{1}{2} b_{-1}^2 + \frac{m_i}{2} b_0^1 \right) (1-s) \right. \\
&\quad \left. + \left(\sum_{j=0}^{\infty} (1-s)^j \right) \left(\frac{1}{2} b_0^2 - \frac{m_i}{2} b_1^1 \right) (1-s)^2 \right. \\
&\quad \left. + \left(\sum_{j=0}^{\infty} (1-s)^j \right) \left(-\frac{1}{2} b_1^2 \right) (1-s)^3 \right) \\
&= \sum_M a_M \left(\sum_{j=0}^{\infty} (1-s)^j \right)^{k_M} (1-s)^{d_M}
\end{aligned}$$

wobei M die durch das Produkt entstehenden Monome durchläuft. Diese hängen von den

m_i, n_i ab. Wenn man nun alle Möglichkeiten auszählt, bei der ein Monom mit Grad B vorkommt, stellt sich heraus, daß das genauso oft ist, wie man $B - d_M$ Bälle auf k_M Behälter verteilen kann. Damit gilt:

$$id = \sum_{B=0}^{\infty} \sum_M a_M \binom{B + k_M - 1 - d_M}{k_M - 1} (1-s)^B$$

Dies ist äquivalent zu:

$$id = \sum_M a_M \frac{(z + k_M - 1 - d_M) \dots (z - d_M + 1)}{(k_M - 1)!}$$

für alle $z \in \mathbb{C}$.

Wenn man den Koeffizienten von z^{k_M-1} betrachtet, erhält man, daß die Summe aller a_M mit $k_M = n$ verschwindet:

$$0 = \prod_{i=1}^n (a^2 - n_i a) (b_{-2}^2 - m_i b_{-1}^1 - b_{-1}^2 + m_i b_1^1 - b_1^2)$$

Für die anderen Koeffizienten erhält man weitere Gleichungen für die m_i, n_i .

Im allgemeinen Fall erhält man die Gleichung:

$$\begin{aligned} id &= \prod_{i=1}^n \left(id + \left(\frac{1}{2} (s^{n_i} + s^{-n_i}) - 1 \right) \cdot a^2 + \frac{1}{2} (s^{n_i} - s^{-n_i}) \cdot a \right) \\ &\quad \left(id + \left(\frac{1}{2} (s^{m_i} + s^{-m_i}) - 1 \right) \left(\frac{b_{-2}^2}{(s-1)^2} + \frac{b_{-1}^2}{s-1} + b_0^2 + (s-1)b_1^2 \right) \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} (s^{m_i} - s^{-m_i}) \left(\frac{b_{-1}^1}{s-1} + b_0^1 + (s-1)b_1^1 \right) \right) \\ \Rightarrow 0 &= \prod_{i=1}^n \left(s^{|n_i|} \cdot id + \left(\frac{1}{2} (s^{2|n_i|} + 1) - s^{|n_i|} \right) \cdot a^2 + \frac{n_i}{2|n_i|} (s^{2|n_i|} - 1) \cdot a \right) \\ &\quad \left(s^{|m_i|+2} \cdot id + \left(\frac{1}{2} (s^{2|m_i|} + 1) - s^{|m_i|} \right) (b_{-2}^2 + (s-1)b_{-1}^2 + (s-1)^2 b_0^2 + (s-1)^3 b_1^2) \right. \\ &\quad \left. + \frac{m_i}{2|m_i|} (s^{2|m_i|} - 1) ((s-1)b_{-1}^1 + (s-1)^2 b_0^1 + (s-1)^3 b_1^1) \right) \\ &\quad - s^{(\sum |n_i| + |m_i|)} (s-1)^{2n} \cdot id \end{aligned}$$

Man erhält also ein Polynom in s und kann die Koeffizienten nun daraufhin untersuchen, ob sie verschwinden.

Kapitel 3

Die Sphäre mit 5 Punktierungen

In diesem Kapitel mit den Methoden des 1. Kapitels gezeigt, daß der Torus mit zwei Punktierungen genau dann linear ist, wenn die Teichmüllersche Modulgruppe der Sphäre mit 5 Punktierungen es auch ist. Nach [kra1] ist aber B4 linear, insbesondere ist die Teichmüllersche Modulgruppe der Sphäre mit 5 Punktierungen linear:

Denn es gilt nach [kra1] mit $D_4 := D \setminus \{p_1, \dots, p_4\}$ wobei D die abgeschlossene Einheitskreisscheibe sei und $p_1, \dots, p_4 \in \text{Inn}(D)$ paarweise verschieden:

$$B4 \cong H(D_4)/H_0(D_4)$$

wobei mit $H(D_4)$ die Homöomorphismen auf D_4 gemeint seien und mit $H_0(D_4)$ die zu idisotopen orientierungserhaltenden Homöomorphismen auf B4. (vergl. [big3])

Also gilt insbesondere: Die Teichmüllersche Modulgruppe der Sphäre mit 5 Punktierungen ist eine Projektion von B4, wobei der Kern nach [big3] das Zentrum von B4 ist, wobei dann genauso, wie in dem Satz, daß die Teichmüllersche Modulgruppe des Torus mit zwei Punktierungen genau dann linear ist, wenn es die Teichmüllersche Modulgruppe der Sphäre mit 5 Punktierungen auch ist, folgt, daß dann auch die Teichmüllersche Modulgruppe der Sphäre mit 5 Punktierungen linear ist.

(die oben zitierten Artikel kamen erst heraus, als die Arbeit eigentlich schon abgeschlossen war.)

Ferner wird für die Teichmüllersche Modulgruppe des Torus mit n Punktierungen eine Darstellung konstruiert.

3.1 Eine Darstellung des Teichmüllerschen Modulraum des Torus mit n Punktierungen

Bezeichnung 3.1.1 Sei M eine Riemannsche Fläche, dann werde mit $\Pi_0 \text{Aut}(M)$ (bzw mit $\Pi_0 \text{Aut}^+(M)$) die Gruppe der Isometrieklassen der Homöomorphismen (bzw der positiv orientierten Homomorphismen) von M bezeichnet.

Lemma 3.1.2 Seien $\{q_1, \dots, q_{n+1}, x_0\} \in T$, $n \geq 1$, paarweise verschieden, wobei x_0 im Laufe des Beweises noch näher bestimmt werde.

$\Pi_0 \text{Fix}(q_1, \dots, q_{n+1}, x_0)$ bzw. $\Pi_0 \text{Fix}(q_1, \dots, q_n, q_{n+1})$ die Untergruppen von $\Pi_0 \text{Aut}^+(T \setminus \{q_1, \dots, q_{n+1}\})$ bzw. $\Pi_0 \text{Aut}^+(T \setminus \{q_1, \dots, q_n\})$, deren stetige Fortsetzungen auf T die Punkte $\{q_1, \dots, q_{n+1}, x_0\}$ bzw. $\{q_1, \dots, q_n, q_{n+1}\}$ elementweise festhalten, dann spaltet folgende kurze exakte Sequenz:

$$1 \longrightarrow \Pi_1(T \setminus \{q_1, \dots, q_{n+1}\}, x_0) \xrightarrow{i} \Pi_0 \text{Fix}(q_1, \dots, q_{n+1}, x_0) \xleftarrow[p]{j} \Pi_0 \text{Fix}(q_1, \dots, q_n, q_{n+1}) \longrightarrow 1 \text{ (es wird nicht gezeigt, aber für } n=0 \text{ spaltet obige Sequenz nicht.)}$$

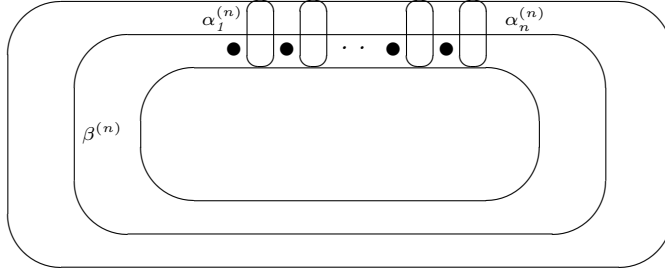
Beweis:

Die Existenz der kurzen exakten Sequenz

$$1 \longrightarrow \Pi_1(T \setminus \{q_1, \dots, q_{n+1}\}, x_0) \xrightarrow{i} \Pi_0 \text{Fix}(q_1, \dots, q_{n+1}, x_0) \xrightarrow{p} \Pi_0 \text{Fix}(q_1, \dots, q_n, q_{n+1}) \longrightarrow 1$$

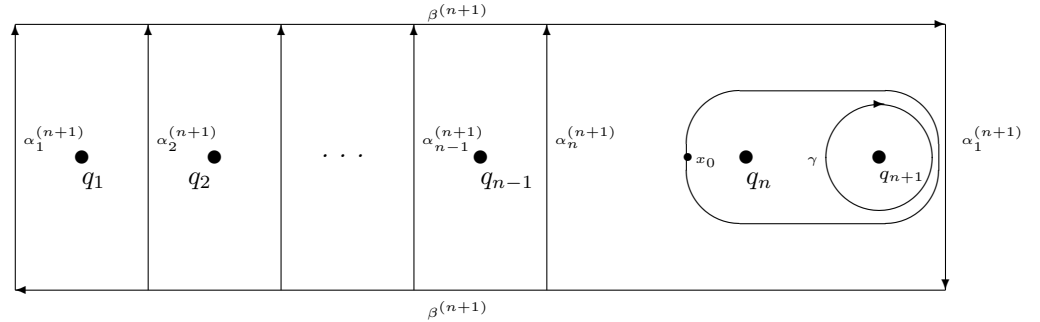
folgt wie in Satz 1.3.6.

Nun gilt ferner: $\Pi_1(T \setminus \{q_1, \dots, q_n\}, q_{n+1})$ ist die freie Gruppe, die von $\{\alpha_1^{(n)}, \dots, \alpha_n^{(n)}, \beta^{(n)}\}$ erzeugt wird, wobei $\{\alpha_1^{(n)}, \dots, \alpha_n^{(n)}, \beta^{(n)}\}$ wie auf folgender Zeichnung definiert werden:



Sei nun $\hat{i} : \Pi_1(T \setminus \{q_1, \dots, q_n\}, q_{n+1}) \longrightarrow \Pi_1(T \setminus \{q_1, \dots, q_{n+1}\}, x_0)$ mit x_0 wie in der nächsten Abbildung, die Einbettung mit:

$\hat{i}(\alpha_i^{(n)}) = \alpha_i^{(n+1)}$ für $i \in \{1, \dots, n\}$ und $\hat{i}(\beta^{(n)}) = \beta^{(n+1)}$, wobei die $\alpha_i^{(n+1)}$ so gewählt seien, daß sie die unten eingezeichnete Umgebung von q_n, q_{n+1} nur in x_0 berühren. Dabei sind die Verbindungen zum Basispunkt x_0 nicht eingezeichnet.



Man definiere nun:

$$j : \text{Aut} \Pi_1(T \setminus \{q_1, \dots, q_n\}, q_{n+1}) \longrightarrow \text{Aut} \Pi_1(T \setminus \{q_1, \dots, q_{n+1}\}, x_0)$$

$$\varphi \longmapsto \begin{cases} \xi \mapsto \hat{i} \circ \varphi \circ \hat{i}^{-1}(\xi) & \xi \in \{\alpha_1^{(n+1)}, \dots, \alpha_n^{(n+1)}, \beta^{(n+1)}\} \\ \xi \mapsto \xi & \xi = \alpha_{n+1}^{(n+1)} \end{cases}$$

wobei $j(\varphi)$ die Fortsetzung der Abbildung auf der rechten Seite zu einem Gruppenhomomorphismus von $\Pi_1(T \setminus \{q_1, \dots, q_{n+1}\}, x_0)$ sei, was wohldefiniert und eindeutig möglich ist, da $\Pi_1(T \setminus \{q_1, \dots, q_{n+1}\}, x_0) = \langle \alpha_1^{(n+1)}, \dots, \alpha_n^{(n+1)}, \beta^{(n+1)} \rangle$ eine freie Gruppe ist. Außerdem ist $j(\varphi)$ invertierbar, denn $j(\varphi^{-1})$ ist die Inverse.

Nun betrachte man die Untergruppe von $\Pi_0 \text{Aut}(T \setminus \{q_1, \dots, q_{n+1}\})$, die aus den Dehn-Twists $\varphi_{\xi^{(n+1)}}$ entlang der Kurven $\xi^{(n+1)} \in \{\alpha_1^{(n+1)}, \dots, \alpha_n^{(n+1)}, \beta^{(n+1)}\}$ erzeugt wird. Man kann die Dehn-Twists so wählen, daß sie die auf der Abbildung eingezeichnete Umgebung von q_n, q_{n+1} festhalten.

Sei $\hat{p}$ die Projektion $\hat{p} : \Pi_1(T \setminus \{q_1, \dots, q_{n+1}\}, x_0) \rightarrow \Pi_1(T \setminus \{q_1, \dots, q_n\}, q_{n+1})$ und $\xi^{(n)} \in \{\alpha_1^{(n)}, \dots, \alpha_n^{(n)}, \beta^{(n)}\}$, $\xi^{(n+1)} \in \{\alpha_1^{(n+1)}, \dots, \alpha_n^{(n+1)}, \beta^{(n+1)}\}$, mit $\hat{p}(\xi^{(n+1)}) = \xi^{(n)}$ und seien $\varphi_{\xi^{(n)}}$, $\varphi_{\xi^{(n+1)}}$ die zugehörigen Dehn-Twists, dann kommutiert folgendes Diagramm nach Definition der $\varphi_{\xi^{(n+1)}}$, $\varphi_{\xi^{(n)}}$.

$$\begin{array}{ccc}
\langle \alpha_1^{(n+1)}, \dots, \alpha_n^{(n+1)}, \beta^{(n+1)} \rangle & \xrightarrow{\varphi_{\xi^{(n+1)}}^*} & \langle \alpha_1^{(n+1)}, \dots, \alpha_n^{(n+1)}, \beta^{(n+1)} \rangle \\
\downarrow \hat{p} & & \downarrow \hat{p} \\
\langle \alpha_1^{(n)}, \dots, \alpha_n^{(n)}, \beta^{(n)} \rangle & \xrightarrow{\varphi_{\xi^{(n)}}^*} & \langle \alpha_1^{(n)}, \dots, \alpha_n^{(n)}, \beta^{(n)} \rangle
\end{array}$$

Da die $\varphi_{\xi^{(n+1)}}$ außerdem γ festhalten, (die Kurven $\xi^{(n+1)}$ berühren die Umgebung von q_n, q_{n+1} nur in x_0) ist die Abbildung $\varphi_{\xi^{(n)}} \mapsto \varphi_{\xi^{(n+1)}}$ die topologische Realisierung von j eingeschränkt auf $\varphi_{\xi^{(n)}}$ mit $\xi^{(n)} \in \{\alpha_1^{(n)}, \dots, \alpha_n^{(n)}, \beta^{(n)}\}$.

Da nun $\text{Fix}(q_1, \dots, q_n)$ nach [bir, Seite 177f] von den $\varphi_{\xi^{(n)}}$ mit $\xi^{(n)} \in \langle \alpha_1^{(n)}, \dots, \alpha_n^{(n)}, \beta^{(n)} \rangle$ erzeugt wird, ist die Abbildung j die gesuchte Spaltung.

Nun kann man sich fragen, ob man mittels der Methoden aus dem 1. Kapitel für die Teichmüllersche Modulgruppe des Torus mit $n = 3$ Punktierungen aus der p -Kongruenzstruktur der Teichmüllerschen Modulgruppe des Torus mit 2 Punktierungen eine p -Kongruenzstruktur für die Teichmüllersche Modulgruppe konstruieren kann. Das Ergebnis des nächsten Satzes besagt, daß man eine p -Kongruenzstruktur ohne Bedingung 1.1.1 (vi) findet, die eine Darstellung induziert, deren Kern aus gewissen Kommutatoren besteht.

Satz 3.1.3 *Es gibt eine p -Kongruenzstruktur der Teichmüllerschen Modulgruppe des Torus mit 3 Punktierungen deren Schnitt allerdings nicht aus $\{id\}$ sondern aus denjenigen Kommutatoren besteht, die verschwinden, sobald eine Punktierung verschwindet. Induktiv kann man dann p -Kongruenzstrukturen der Teichmüllerschen Modulgruppe mit n Punktierungen konstruieren, deren Schnitt aus den entsprechenden Kommutatoren besteht.*

Beweis:

Die Bezeichnungen seien wie in obigem Satz.

Besitze die Teichmüllersche Modulgruppe des Torus mit 2 Punktierungen eine p -Kongruenzstruktur, besitzt insbesondere $\Pi_0 \text{Fix}(q_1, q_2)$ eine p -Kongruenzstruktur $\{G_i\}_{i \in \mathbb{N}}$.

Dann besitzt $\Pi_1(T \setminus \{q_1\}, q_2)$ die bezüglich $\text{Fix}(q_1, q_2)$ charakteristische p -Kongruenzstruktur $\{M_i\}_{i \in \mathbb{N}} := \{\iota^{-1}(G_i \cap \iota(\Pi_1(T \setminus \{q_1\}, q_2)))\}_{i \in \mathbb{N}}$ wobei ι die Einbettung aus folgender kurzer exakter Sequenz sei:

$$1 \longrightarrow \Pi_1(T \setminus \{q_1\}, q_2) \xrightarrow{\iota} \Pi_0 \text{Fix}(q_1, q_2) \longrightarrow \Pi_0 \text{Fix}(q_1) \longrightarrow 1$$

Sei

$$q : \Pi_1(T \setminus \{q_1, q_2\}, x_0) \rightarrow \Pi_1(T \setminus \{q_1\}, q_2)$$

die Projektion, die sich aus der Projektion

$$\Pi_1(T \setminus \{q_1, q_2\}, x_0) \rightarrow \Pi_1(T \setminus \{q_1\}, x_0)$$

und einem anschließenden inneren Automorphismus, der x_0 nach q_2 verschiebt zusammensetzt. Dabei werde der Weg von x_0 nach q_2 so gewählt, daß er von $j(\Pi_0 \text{Fix}(q_1, q_2))$ festge-

halten werde.

Man versehe $\Pi_1(T \setminus \{q_1, q_2\}, x_0)$ mit der p -Kongruenzstruktur

$$\{N_i\}_{i \in \mathbb{N}} := \{q^{-1}(M_i)\}_{i \in \mathbb{N}}$$

Diese ist offenbar bezüglich $j(\text{Fix}(q_1, q_2))$ charakteristisch.

Nun wird gezeigt, daß die spaltende kurze exakte Sequenz

$$1 \longrightarrow \Pi_1(T \setminus \{q_1, q_2\}, x_0) \xrightarrow{i} \Pi_0 \text{Fix}(q_1, q_2, x_0) \xrightleftharpoons[p]{p} \Pi_0 \text{Fix}(q_1, q_2) \longrightarrow 1$$

die Voraussetzungen von Lemma 1.1.12 erfüllt:

Zunächst ist zu zeigen, daß:

$$i(N_i) \leq \Pi_0 \text{Fix}(q_1, q_2, x_0)$$

Sei $\xi \in j(\Pi_0 \text{Fix}(q_1, q_2))$, $\psi \in \Pi_1(T \setminus \{q_1, q_2\}, x_0)$,

dann gilt: $\xi \circ i(\psi) \circ \xi^{-1} = i(\xi(\psi))$, denn $i(\psi)$ ist nichts anderes, als der zugehörige innere Automorphismus bezüglich des Basispunktes x_0 vergl. 1.3.8.

Also folgt: $\xi \circ i(\psi) \circ \xi^{-1} = i(\xi(\psi))$ für $\xi \in j(\Pi_0 \text{Fix}(q_1, q_2))$.

Daraus folgt: $\xi \circ i(N_i) \circ \xi^{-1} = i(N_i)$, da N_i von ξ festgehalten wird.

Da nun $\Pi_0 \text{Fix}(q_1, q_2, x_0)$ von $i(\Pi_1(T \setminus \{q_1, q_2\}, x_0))$, $j(\Pi_0 \text{Fix}(q_1, q_2))$ erzeugt wird, folgt: $i(N_i) \leq \Pi_0 \text{Fix}(q_1, q_2, x_0)$

Als nächstes wird gezeigt, daß für $\xi \in j(G_i)$, $\psi \in \Pi_1(T \setminus \{q_1, q_2\}, x_0)$ gilt: $\xi(\psi) \in \psi N_i$.
 $\xi(\psi) = q^{-1}(p(\xi)(q(\psi))) \in q^{-1}(q(\psi)M_i) = \psi N_i$, da folgendes Diagramm kommutiert:

$$\begin{array}{ccc} \Pi_1(T \setminus \{q_1, q_2\}, x_0) & \xrightarrow{\xi} & \Pi_1(T \setminus \{q_1, q_2\}, x_0) \\ \downarrow q & & \downarrow q \\ \Pi_1(T \setminus \{q_1\}, q_2) & \xrightarrow{p(\xi)} & \Pi_1(T \setminus \{q_1\}, q_2) \end{array}$$

Damit besitzt $\text{Fix}(q_1, q_2, x_0)$ die p -Kongruenzstruktur $\{i(N_i)j(G_i)\}_{i \in \mathbb{N}}$, die allerdings 1.1.1 (vi) nicht erfüllt, sondern der Schnitt $\bigcap_{i \in \mathbb{N}} i(N_i)j(G_i)$ berechnet sich zu: $\bigcap_{i \in \mathbb{N}} i(N_i)$

Also besitzt $\Pi_0 \text{Fix}(q_1, q_2, x_0)$ eine p -Kongruenzstruktur, deren Schnitt gerade $i^{-1}(\ker q)$ ist. Dabei besteht $\ker q$ gerade aus dem Erzeugnis des Elementes, das durch den Rand einer geeignet kleinen Umgebung von q_0 erzeugt wird, und Kommutatoren, die eines obiger Elemente enthalten.

Indem man nun die Rollen von q_1, q_2, x_0 vertauscht, und die entstehenden p -Kongruenzstrukturen schneidet, erhält man eine p -Kongruenzstruktur, deren Schnitt nur Kommutatoren enthält, die verschwinden, sobald q_1 oder q_2 oder x_0 verschwindet.

Induktiv erhält man p -Kongruenzstrukturen von $\Pi_0 \text{Fix}(q_1, \dots, q_n, x_0)$, deren Schnitt nur Kommutatoren enthält, die verschwinden, sobald eine Punktierung von $q_1, \dots, q_n, x_0$ verschwindet.

Damit besitzt $\text{Mod}(T \setminus \{q_1, \dots, q_n\})$ eine entsprechende p -Kongruenzstruktur und damit eine Darstellung, deren Kern obige Gestalt hat, denn :
 $\langle \{\varphi_{q_i}^{q_j} | i \neq j, i \in \{1, \dots, n\}\}, \Pi_0 \text{Fix}(q_1, \dots, q_n, x_0) \rangle, = \text{Mod}(T \setminus \{q_1, \dots, q_n\})$ wobei $\varphi_{q_i}^{q_j}$ Abbildungen seien, die Punktierungen q_i, q_j vertauschen und die anderen Punktierungen festhalten. Die $\varphi_{q_i}^{q_j}$ halten obigen Kern fest.

3.2 Die Teichmüllersche Modulgruppe des Torus mit 2 Punktierungen und die Teichmüllersche Modulgruppe der Sphäre mit 5 Punktierungen

Satz 3.2.1 Die Teichmüllersche Modulgruppe der 5-fach punktierten Sphäre ist genau dann linear, wenn es die Teichmüllersche Modulgruppe des 2-fach punktierten Torus es auch ist.

Beweis:

Nach [nag, Seite 125ff] gilt:

Es gibt ein α im Zentrum der Teichmüllerschen Modulgruppe des Torus mit zwei Punktierungen $T \setminus \{q_1, q_2\}$ mit $\alpha^2 = \text{id}$ s.d. für die Teichmüllersche Modulgruppe der 5-fach punktierten Sphäre $S \setminus \{p_1, \dots, p_5\}$ gilt:

$$1 \longrightarrow \langle \alpha \rangle \longrightarrow \text{Mod}(T \setminus \{q_1, q_2\}) \xrightarrow{p} \text{Mod}(S \setminus \{p_1, \dots, p_5\}) \longrightarrow 1$$

Falls nun $\text{Mod}(T \setminus \{q_1, q_2\})$ linear ist, besitzt $\text{Mod}(T \setminus \{q_1, q_2\})$ nach [lub, Seite 208] für fast alle Primzahlen p eine p -Kongruenzstruktur $\{N_i\}_{i \in \mathbb{N}}$.

Nun gilt: $\bigcap_{i \in \mathbb{N}} N_i = \{\text{id}\}$. Insbesondere gibt es ein $i_0 \in \mathbb{N}$ mit $\alpha \notin N_{i_0}$, also $N_{i_0} \cap \langle \alpha \rangle = \text{id}$.

Also ist die Abbildung

$$p : N_{i_0} \subset \text{Mod}(T \setminus \{q_1, q_2\}) \longrightarrow p(N_{i_0}) \subset \text{Mod}(S \setminus \{p_1, \dots, p_5\})$$

ein Isomorphismus. Also besitzt $p(N_{i_0})$ eine p -Kongruenzstruktur, nämlich $\{p(N_{i-1+i_0})\}_{i \in \mathbb{N}}$. Nun genügt es, da $p(N_i) \leq \text{Mod}(S \setminus \{p_1, \dots, p_5\})$ für $i \in \mathbb{N}$, nach 1.1.1 (i) zu zeigen, daß $\left| \frac{\text{Mod}(S \setminus \{p_1, \dots, p_5\})}{p(N_{i_0})} \right| < \infty$.

Dies folgt, da

$$p : \frac{\text{Mod}(T \setminus \{q_1, q_2\})}{N_{i_0} < \alpha >} \longrightarrow \frac{\text{Mod}(S \setminus \{p_1, \dots, p_5\})}{p(N_{i_0})}$$

ein Isomorphismus ist, also:

$$\left| \frac{\text{Mod}(S \setminus \{p_1, \dots, p_5\})}{p(N_{i_0})} \right| < \left| \frac{\text{Mod}(T \setminus \{q_1, q_2\})}{N_{i_0}} \right| < \infty.$$

Besitze umgekehrt $\text{Mod}(S \setminus \{p_1, \dots, p_5\})$ eine p -Kongruenzstruktur $\{N_i\}_{i \in \mathbb{N}}$, dann bildet $\{p^{-1}(N_i)\}_{i \in \mathbb{N}}$ eine p -Kongruenzstruktur von $\text{Mod}(T \setminus \{q_1, q_2\})$ ohne Bedingung 1.1.1 (vi):

- (i) Sei $\varphi \in \text{Mod}(S \setminus \{p_1, \dots, p_5\})$, dann gilt für $\varphi^{-1}(p^{-1}(N_i))\varphi$:
 $p(\varphi^{-1}(N_i))p(\varphi) \in N_i$, also: $\varphi^{-1}(p^{-1}(N_i))\varphi \in p^{-1}(N_i)$.
 Also: $p^{-1}(N_i) \leq \text{Mod}(S \setminus \{p_1, \dots, p_5\})$

- (ii) Für $i > j$ folgt aus $N_i \leq N_j$:
 $p^{-1}(N_i) \leq p^{-1}(N_j)$

(iii) Es gilt: Die Abbildung

$$p : \frac{\text{Mod}(T \setminus \{q_1, q_2\})}{p^{-1}(N_i)} \longrightarrow \frac{\text{Mod}(S \setminus \{q_1, \dots, q_5\})}{N_i}$$

ist ein Isomorphismus, da ihr Kern $p^{-1}(N_i) < \alpha > = p^{-1}(N_i)$ ist, also verschwindet.

Daraus folgt sofort: $\left| \frac{\text{Mod}(T \setminus \{q_1, q_2\})}{p^{-1}(N_i)} \right| < \infty$

(iv) Für $i > j$ folgt aus obigem Isomorphismus: $\frac{p^{-1}(N_j)}{p^{-1}(N_i)}$ ist eine p -Gruppe.

(v) Ebenso folgt: Es gibt ein d s.d. für $i > j$: $\frac{p^{-1}(N_j)}{p^{-1}(N_i)}$ wird von höchstens d Elementen erzeugt.

(vi) Diese Bedingung kann offenbar nicht erfüllt sein, da $\bigcap_{i \in \mathbb{N}} p^{-1}(N_i) \supseteq < \alpha >$ Sei nun

$$\gamma \in \bigcap_{i \in \mathbb{N}} p^{-1}(N_i) \text{ Dann gilt: } p(\gamma) \in \bigcap_{i \in \mathbb{N}} N_i.$$

$$\Rightarrow p(\gamma) = id \Rightarrow \gamma \in < \alpha >.$$

Damit gilt:

$$\bigcap_{i \in \mathbb{N}} p^{-1}(N_i) = < \alpha >$$

Nun gilt: $\Pi_0 \text{Fix}(q_1, q_2) \subseteq \text{Mod}(T \setminus \{q_1, q_2\})$.

Insbesondere besitzt $\Pi_0 \text{Fix}(q_1, q_2)$ die von $\text{Mod}(T \setminus \{q_1, q_2\})$ induzierte p -Kongruenzstruktur $\{F_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ mit $\bigcap_{i \in \mathbb{N}} p^{-1}(F_i) \subseteq < \alpha >$

Nun besitzt $\Pi_0 \text{Fix}(q_1, q_2)$ nach 1.3.6 außerdem noch die kurze exakte Sequenz aus

$$1 \longrightarrow \Pi_1(T \setminus \{q_1\}, q_2) \xrightarrow{i} \Pi_0 \text{Fix}(q_1, q_2) \longrightarrow \Pi_0 \text{Fix}(q_1) \longrightarrow 1$$

wobei $\Pi_1(T \setminus \{q_1\}, q_2)$ mittels den dazugehörigen inneren Automorphismen mit q_2 als Basispunkt eingebettet wird (siehe 1.3.7). Auch diese kurze exakte Sequenz induziert p -Kongruenzstrukturen ohne 1.1.1 (vi) für fast alle Primzahlen p .

Dies folgt wie oben, da $\Pi_0 \text{Fix}(q_1) \cong \text{Mod}(T \setminus \{q_1\})$ (vergl [bir, Seite 176, 177] und beachte: Das Bild von $\bar{\delta} = id$.) linear und endlich erzeugt ist, also wie oben für fast alle p eine p -Kongruenzstruktur $\{M_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ besitzt und die Abbildung

$$p : \frac{\Pi_0 \text{Fix}(q_1, q_2)}{p^{-1}(M_i)} \longrightarrow \frac{\Pi_0 \text{Fix}(q_1)}{M_i}$$

für $i \in \mathbb{N}$ wieder ein Isomorphismus ist. Nun zeigt man wie oben, daß gilt:

$$\bigcap_{i \in \mathbb{N}} p^{-1}(M_i) = i(\Pi_1(T \setminus \{q_1\}, q_2))$$

Sei nun p eine Primzahl, s.d. $\Pi_0 \text{Fix}(q_1, q_2)$ gleichzeitig die beiden p -Kongruenzstrukturen $\{p^{-1}(F_i)\}_{i \in \mathbb{N}}$, $\{p^{-1}(M_i)\}_{i \in \mathbb{N}}$ ohne 1.1.1 (vi) besitzt.

Nach 1.1.4 ist nun $\{p^{-1}(F_i) \cap p^{-1}(M_i)\}_{i \in \mathbb{N}}$ eine p -Kongruenzstruktur (eventuell ohne 1.1.1 (vi)) von $\Pi_0 \text{Fix}(q_1, q_2)$.

Es bleibt also noch zu zeigen: $i(\Pi_1(T \setminus \{q_1\}, q_2)) \cap < \alpha > = \{id\}$.

Nun liegt aber kein Element von $i(\Pi_1(T \setminus \{q_1\}, q_2)) \setminus \{id\}$ im Zentrum von $\Pi_0 \text{Fix}(q_1, q_2)$, denn für $\eta \in \Pi_1(T \setminus \{q_1\}, q_2)$ gibt es $\hat{\eta} \in \Pi_1(T \setminus \{q_1, q_2\})$ s.d. gilt: $\hat{\eta}^{-1} \circ \eta \circ \hat{\eta} \neq \eta$, da $\Pi_1(T \setminus \{q_1\}, q_2)$ eine freie Gruppe ist.

Insbesondere gilt dann auch: $i(\hat{\eta})^{-1} \circ i(\eta) \circ i(\hat{\eta}) \neq i(\eta)$, also $i(\eta)$ liegt nicht im Zentrum von $\text{Mod}(T \setminus \{q_1, q_2\})$, insbesondere nicht in $< \alpha >$, also $i(\Pi_1(T \setminus \{q_1\}, q_2)) \cap < \alpha > = id$

Damit besitzt $\Pi_0 \text{Fix}(q_1, q_2)$ eine p -Kongruenzstruktur mit 1.1.1 (vi).

Wie in Satz 1.3.7 zeigt man nun, daß damit auch $\text{Mod}(T \setminus \{q_1, q_2\})$ eine p -Kongruenzstruktur besitzt, also linear ist.

Bemerkung 3.2.2 Zum Aufbau der Teichmüllerschen Modulgruppe der Sphäre mit 5 Löchern $\text{Mod}(S \setminus \{p_1, \dots, p_5\})$ läßt sich folgendes sagen:

$$\frac{\text{Mod}(S \setminus \{p_1, \dots, p_5\})}{i(\Pi_1(S \setminus \{p_1, \dots, p_4\}, p_5))} \cong \text{Mod}(S \setminus \{p_1, \dots, p_4\})$$

(vergleiche 1.3.6, 1.3.7) Ferner wird $\text{Mod}(S \setminus \{p_1, \dots, p_5\})$ offenbar durch die Kerne der Projektionen mit $j \in \{1, \dots, n\}$

$$P_j : \text{Mod}(S \setminus \{p_1, \dots, p_5\}) \longrightarrow \text{Mod}(S \setminus \{p_1, \dots, p_{j-1}, p_{j+1}, \dots, p_5\})$$

erzeugt.

Nun ist $\text{Mod}(S \setminus \{p_1, \dots, p_4\})$ linear: Nach [nag, 127ff] gilt:

$$\text{Mod}(S \setminus \{p_1, \dots, p_4\}) \cong \frac{\text{Mod}(T)}{\langle \alpha \rangle}$$

wobei $\alpha \neq \text{id}$ eine Involution im Zentrum von $\text{Mod}(T)$ ist.

Andererseits gilt: $\text{Mod}(T) \cong \text{PSL}_2(\mathbb{Z})$. Da $\langle -\text{id} \rangle$ das Zentrum von $\text{PSL}_2(\mathbb{Z})$ ist, muß gelten: $\alpha = -\text{id}$. Nun genügt es zu zeigen, daß $\text{PSL}_2(\mathbb{Z}) / \langle -\text{id} \rangle$ linear ist:

Dazu betrachte man die Abbildung:

$$\begin{aligned} \text{Ad} : \text{PSL}_2(\mathbb{Z}) &\longrightarrow \text{Aut}(\text{psl}_2(\mathbb{C})) \\ A &\longmapsto M \rightarrow A^{-1}MA \end{aligned}$$

Für den Kern dieser Abbildung muß gelten:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} dc & d^2 \\ -c^2 & -cd \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -ba & -b^2 \\ a^2 & ba \end{pmatrix}$$

Insbesondere muß gelten: $b = c = 0$, $|a| = |b| = 1$. Da die Determinante 1 sein muß, enthält der Kern dieser Abbildung nur die Elemente $\text{id}, -\text{id}$.

Insbesondere ist $\text{PSL}_2(\mathbb{Z}) / \langle -\text{id} \rangle$ in $\text{Aut}(\text{psl}_2(\mathbb{C}))$ einbettbar, also linear. Insbesondere besitzt $\text{Mod}(S \setminus \{p_1, \dots, p_4\})$ eine p -Kongruenzstruktur $\{N_i\}_{i \in \mathbb{N}}$.

Dann ist wie in obigem Satz $\{\bigcap_{j \in \{1, \dots, n\}} p_j^{-1}(N_i)\}_{i \in \mathbb{N}}$ eine p -Kongruenzstruktur ohne 1.1.1

(vi) von $\Pi_0 \text{Fix}(p_1, \dots, p_5)$, wobei mit $\Pi_0 \text{Fix}(p_1, \dots, p_5)$ diejenigen Elemente aus $\text{Mod}(S \setminus \{p_1, \dots, p_5\})$ gemeint seien, die für $i \in \{1, \dots, 5\}$ jede Umgebung von p_i in eine Umgebung von p_i abbilden.

Für den Schnitt dieser p -Kongruenzstruktur ohne 1.1.1(vi) gilt nun: $\bigcap_{i \in \mathbb{N}} \bigcap_{j \in \{1, \dots, n\}} p_j^{-1}(N_i)$

$= \bigcap_{j \in \{1, \dots, n\}} p_j^{-1}(e)$. Die Abbildungen, die in diesem Schnitt liegen haben die Gestalt $i(K)$, wo-

bei K eine nichttriviale Untergruppe gewisser Kommutatoren aus $\Pi_1(S \setminus \{p_1, \dots, p_4\}, p_5)$ ist. Wie in 1.3.7 kann man zeigen, daß $\text{Mod}(S \setminus \{p_1, \dots, p_5\})$ genau dann eine p -Kongruenzstruktur besitzt, wenn $\Pi_0 \text{Fix}(S \setminus \{p_1, \dots, p_5\})$ eine p -Kongruenzstruktur besitzt.

Bemerkung 3.2.3 Aus [kra2] oder [big3] folgt, daß die Teichmüllerschen Modulgruppen der Sphären mit n Punktierungen linear sind.

3.3 Überblick über die Linearität Teichmüllerscher Modulgruppen

Bemerkung 3.3.1 Von folgenden Teichmüllerschen Modulgruppen ist bekannt, daß sie auf jeden Fall linear sind:

1. Die Teichmüllerschen Modulgruppen der Tori mit $n \leq 2$ Punktierungen.
2. Die Teichmüllerschen Modulgruppen der Sphären mit n Punktierungen. (Die Teichmüllerschen Modulgruppen der Sphären mit höchstens 3 Punktierungen bestehen nur aus der Identität (siehe [nag, Seite 128]))
3. Die Teichmüllersche Modulgruppe der Riemannschen Fläche vom Geschlecht 2

Man hat also schon in einigen Fällen gezeigt, daß die Teichmüllersche Modulgruppe linear ist. Dabei genügte es nicht, die Modulgruppe auf der Homologie der Riemannschen Fläche operieren zu lassen, da die daraus resultierende Darstellung einen nichttrivialen Kern hat. Läßt man andererseits die Teichmüllersche Modulgruppe auf der Homotopie operieren, bekommt man zwar einen injektiven Gruppenhomomorphismus, da die Homotopie in diesen Fällen nicht kommutativ ist, aber keine lineare Darstellung.

Die obigen Darstellungen operieren jeweils auf der Homologie einer Braidgruppe. Dieses Verfahren funktioniert aber leider nur bei punktierten Sphären. Im allgemeinen Fall kann man vielleicht einen Ansatz von [bir] verwenden, in dem man bei der Darstellung nicht nur die Bahnen der Punktierungen betrachtet, sondern die Bahnen aller Erzeuger der Homotopie.

Literaturverzeichnis

- [ahl] Ahlfors; Lectures on q.c. Mappings;
Princeton, D. Van Nostrand Company (1966), Seite 119
- [big] Bigelow, Stephen; The Burau representation is not faithful for $n = 5$;
Geom. Topol. 3 1999 Seite 397-404
- [big2] Bigelow, Stephen; Braid groups are linear, preprint (1999)
<http://www.ms.unimelb.edu.au/~bigelow/>
- [big3] Bigelow Stephen; The Mapping Class Group of a Genus two surface is linear
(2000) preprint <http://www.ms.unimelb.edu.au/~bigelow/>.
- [bir] Joan S. Birman; Braids, links and mapping class groups, Annals of Mathematic studies 82 (1975);
im Artikel: Discrete Groups and automorphic Forms Seite 163ff
- [bur] Bourbaki; Lie-groups and Lie-algebras
- [dix] Dixon, Mann; Analytic pro-p Groups;
London Math. Society, Lecture Notes Series 157 (1991)
- [for] Deyer, Formanek; On the linearity of automorphism groups of free groups;
Archiv der Mathematik 38 1982 Seite 404-409.
- [helm] Jaques Helmsstetter; Serie de Hausdorff d'une algebre Lie et projections canoniques dans l'algebre envelopante;
Journal of Algebra 120 Seite 192
- [hum] Humphreys; Introduction into Lie Algebras and Representation Theorie;
Graduate Texts in Mathematics 9, Springer-Verlag (1972)
- [kra1] Daan Krammer; The braid group B_4 is linear; Invent. math 142 451-486 (2000)
- [kra2] Daan Krammer; Braid groups are linear, preprint (2000)
www.math.unibas.ch/pub/krammer/.
- [long] Long, Platon; The Burau representation is not faithful for $n \geq 6$;
Topologie 32 1993 Seite 439-447
- [lub] Lubotzky; A grouptheoretic characterisation of linear Groups;
Journal of Algebra 113
- [lus] Lustig, Metzler; Integral Representations of $\text{Aut}(F_n)$;
Contemporary Mathematics Vol 44 (1985) Seite 60 ff
- [lyn] Lyndon, Schupp; Combinatorial Grouptheory;
Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete 89, Springer-Verlag (1977)

- [mac] Maclachan und Harvey; Mapping Class Group and Teichmüller Spaces;
Proc. Lond Math Soc 1975; Seite 495ff Lemma 2
- [man] Lubotzky, Mann; Powerful p-groups II, p-adic Analytic groups;
Journal of Algebra 105
- [mag] Magnus, Tretkoff; Representations of automorphism groups of free groups;
Adison S.I. Wordproblems II; 1980; Seite 255-259
- [mag2] Magnus, Karrass, Solitar; Combinatorial Group Theory: Presentations of
groups in terms of generators and relations;
Intescience Publishers, a division of John Wilney and Sons (1966)
- [nag] Nag; The complex analytic Theory of Teichmüller Spaces;
Canadian Mathematical Society, Series of Monographes and Advanced Texts,
Wilney (1988)
- [pla] Platanov, Donkovic; Low-dim Representations of $\text{Aut}F_2$;
Manuscripta mathematica Nr.89 1995 Seite 475ff;
- [pro] Formanek, Procesi; The automorphismgoup of a free group is not linear; Jour-
nal of Algebra 149 1992 Seite 494-499
- [wer] Wehrfritz; Infinite linear Groups;
Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete 76, Springer-Verlag (1973)

Lebenslauf

Angaben zur Person:

Nachname	Beauvisage
Vorname	Hans-Josef
Adresse	55122 Mainz, Am Gonsenheimer Spie 16
Geburt	13.02.1964 in Koblenz
Staatsangehörigkeit	Deutsch
Konfession	römisch-katholisch

Angaben zur Ausbildung:

Grundschule	1970-1974 in Wengerohr
Gymnasium	1974-1976 in Wittlich
	1976-1979 in Idar-Oberstein
	1979-1983 in Mainz
Wehrdienst	1983-1984 in Koblenz und Diez an der Lahn
Universität	1984-1991 in Mainz
Fachrichtung	Mathematik mit Nebenfach Physik
Vordiplom	1986
Diplom	1991
Thema	Die Diskontinuität der Teichmüllerschen Modulgruppe

Bisherige Arbeitsverhältnisse:

1.Firma	01.04.1992-31.07.1992 Unternehmensberatung Diplom IngenieurArnold GmbH
2.Firma	seit 01.09.1992 Mainzer Wach- und Schließgesellschaft