

Ein inverses Rückstreuprobem der elektrischen Impedanztomographie

Dissertation zur Erlangung des Grades
Doktor der Naturwissenschaften
am Fachbereich 08 – Physik, Mathematik und Informatik
der Johannes Gutenberg-Universität Mainz.

Vorgelegt von
Stefanie Hollborn geb. Reußwig
aus Hanau.

Mainz 2012

Datum der mündlichen Prüfung: 6. Juli 2012

D 77 Mainzer Dissertation

Vorwort

Aufgrund datenschutzrechtlicher Bedenken gestattet die Johannes Gutenberg-Universität Mainz in ihrem elektronischen Publikationssystem Archiv Mainzer elektronischer Dokumente (ArchiMeD) nicht die namentliche Nennung Dritter. In dieser Version wurden daher die Namen entfernt.

Zum Gelingen dieser Arbeit haben viele beigetragen. Ihnen allen gilt meine tiefe Wertschätzung und mein herzlicher Dank. Allen voran danke ich meinem Betreuer für seine Unterstützung, Ermunterung und Ermutigung. Mein Dank gilt dem am gemeinsamen Forschungsprojekt beteiligten Wissenschaftler für die gute Zusammenarbeit sowie dem Berichterstatter für die Übernahme des Zweitgutachtens. Bei den jetzigen und ehemaligen Mitarbeitern der Arbeitsgruppe Numerik in Mainz möchte ich mich für das freundschaftliche Miteinander bedanken. Und schließlich hätte diese Arbeit nicht gelingen können ohne den verlässlichen Rückhalt meiner Familie. Ihnen und in besonderer Weise meinem Mann gebührt mein besonderer Dank für alle ideelle und tatkräftige Unterstützung und stetige Ermutigung.

Mainz, im August 2012

Stefanie Hollborn

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	7
2	Definition der Rückstreufunction	13
2.1	Rückstreuung von einem Isolator	13
2.2	Rückstreuung von einem inhomogenen Medium	18
2.3	Rückstreuung auf einem beliebigen Gebiet	24
2.4	Approximation einer Elektrodenmessung	28
3	Eigenschaften	33
3.1	Holomorphie	33
3.1.1	Faktorisierung der Neumann-Dirichlet-Abbildung	33
3.1.2	Analytische Fortsetzung der Rückstreudaten	38
3.2	Rückstreudaten und konforme Transformationen	40
4	Identifizierbarkeit von Einschlüssen	47
4.1	Ein Randwertproblem	47
4.2	Eindeutigkeit für einen Isolator	52
4.3	Eingeschränkte Eindeutigkeit für einen perfekten Leiter	53
5	Rekonstruktion der konformen Abbildung	59
5.1	Lösbarkeit des Randwertproblems	59
5.2	Implementierung	61
5.2.1	Berechnung der Randabbildung	61
5.2.2	Auswerten der Laurentreihe	64
5.3	Numerische Beispiele	67
6	Der konvexe Rückstreuträger	73
6.1	Definition und Eigenschaften	73
6.2	Implementierung	82
6.3	Numerische Beispiele	85
	Zusammenfassung	89
	Literaturverzeichnis	91

1 Einleitung

Die elektrische Impedanztomographie (EIT) ist ein bildgebendes Verfahren, das mittels elektrostatischer Messungen an der Körperoberfläche die Leitfähigkeitsverteilung im Körperinneren bestimmt. Die elektrische Leitfähigkeit eines Stoffes ist eine spezifische Materialkonstante, die quantifiziert, wie gut der Stoff elektrischen Strom leitet. Anhand des ortsabhängigen elektrischen Leitfähigkeitskoeffizienten lässt sich daher ein Bild der Materialzusammensetzung im Körperinneren gewinnen. Zur Bestimmung des Leitfähigkeitskoeffizienten in der EIT werden an der dem Beobachter zugänglichen Körperoberfläche verschiedene Strommuster angelegt, woraufhin sich im Inneren ein elektrostatisches Potential einstellt, das von der Leitfähigkeitsverteilung abhängt. Das Potential wird dann auf der Körperoberfläche gemessen. Einspeisung und Messung des Stroms erfolgen mit an der Oberfläche angebrachten Elektroden. Die EIT ist somit ein nichtinvasives und schonendes Verfahren, das nur relativ einfache Messapparaturen benötigt. Ihre Anwendung ist besonders in der medizinischen Bildgebung attraktiv, beispielsweise bei der Überwachung der Lungenfunktion oder der Krebserkennung. Weitere nichtklinische Anwendungsgebiete sind zum Beispiel nichtdestruktive Prüfverfahren, die Untersuchung von Bodenbeschaffenheiten in der Geophysik oder das Auffinden von Leckagen und die Überwachung industrieller Produktionsprozesse.

Die mathematische Forschung zur elektrischen Impedanztomographie hat ihren Ausgangspunkt in der 1980 erschienenen Arbeit *On an inverse boundary value problem* von Alberto Calderón [14], der bei seiner Tätigkeit als Ingenieur eines Ölkonzerns im Rahmen der Erdölsuche auf dieses Problem stieß. Mathematisch formuliert, erfüllen das elektrostatische Potential u und der elektrische Leitfähigkeitskoeffizient σ die elliptische Differentialgleichung

$$\nabla \cdot (\sigma \nabla u) = 0.$$

Ein eingespeister Randstrom entspricht einer Neumannrandbedingung für obige Differentialgleichung, während das gemessene Potential durch die Dirichletrandwerte von u beschrieben wird. Die Eingangsdaten und gemessenen Daten bilden die sogenannte *Strom-Spannungs-* oder *Neumann-Dirichlet-Abbildung*, die jedem Strommuster das entsprechende Potential zuordnet. Die Grundfrage der EIT ist, ob sich aus der Kenntnis einiger oder aller solcher gemessener Neumann-Dirichlet-Paare der Leitfähigkeitskoeffizient im Körperinneren eindeutig bestimmen lässt. Für das zweidimensionale Problem ist seit 1996 bekannt, dass die Kenntnis der vollen Neumann-Dirichlet-Abbildung ausreicht, um zweimal stetig differenzierbare isotrope Leitfähigkeiten im Inneren eines Körpers zu rekonstruieren. Der Beweis dazu stammt von Nachmann [75], und

eine Verallgemeinerung auf beschränkte positive Leitfähigkeiten gelang Astala und Päiväranta [6] im Jahr 2006. Eine Übersicht über die mathematische Forschung zur EIT liefern die Arbeiten [9, 15, 72, 90] sowie das Buch [51].

Das EIT-Problem gehört zur Klasse der *inversen Probleme*. Bei inversen Problemen wird von einer beobachteten Wirkung (das sich vom eingespeisten Strommuster aus einstellende Randpotential) auf die zugrunde liegende Ursache (die elektrische Beschaffenheit des Körpers) geschlossen. Dies steht im Gegensatz zum zugehörigen *direkten* oder *Vorwärtsproblem*, bei dem es darum geht, bei bekannter elektrischer Leitfähigkeit das elektrostatische Potential zur Randstromvorgabe zu berechnen. Die Herausforderung bei der Lösung inverser Probleme besteht darin, dass sie häufig *schlecht gestellt* sind. Ein Problem heißt *gut gestellt* im Sinn von Hadamard, wenn für das zugrunde liegende mathematische Modell die folgenden drei Aussagen zutreffen: Für alle beobachtbaren Wirkungen lässt sich eine Ursache angeben. Die Ursache einer beobachteten Wirkung ist eindeutig. Unterscheiden sich zwei Beobachtungen nur wenig voneinander, so ähneln sich auch ihre Wirkungen, das heißt, Ursachen hängen stetig von ihren Wirkungen ab. Ist eine dieser Aussagen verletzt, so ist das Problem schlecht gestellt. Die letzte Eigenschaft nennt man Stabilität, und ihr Fehlen ist besonders schwerwiegend. Vereinfachungen bei der mathematisch-physikalischen Modellierung, Diskretisierungsfehler und Messungenauigkeiten führen nämlich dazu, dass reale Daten im Hinblick auf das zugrunde liegende mathematische Modell nicht exakt vorliegen. Schlecht gestellte Probleme stellen besondere Ansprüche an numerische Lösungsverfahren, da sie sehr störanfällig gegenüber solchen Datenfehlern sind. Die EIT gehört zu den schlecht gestellten inversen Problemen, die nicht stabil bezüglich wichtiger praxisrelevanter Topologien sind, vgl. Alessandrini [4] und Brühl [12, Abschnitt 3.2].

In der Praxis steht nicht die volle Neumann-Dirichlet-Abbildung für die Verwendung in Rekonstruktionsverfahren zur Verfügung, sondern die vorliegenden Informationen bestehen nur aus einer endlichen Anzahl an durch Elektrodenmessungen erworbenen Datensätzen. Diese sind in mehrfacher Hinsicht eingeschränkt: Die Klasse der mit verschiedenen Elektrodenanordnungen erzeugbaren Randströme ist meist viel kleiner als der Vektorraum, mit dem diese Randströme mathematisch beschrieben werden. Insofern kann eine theoretische Identifizierbarkeit in der Praxis oft gar nicht nachgebildet werden. Außerdem unterliegen reale Daten stets Modell- und Messfehlern, sodass selbst eine Vielzahl an Datensätzen nur wenig Information enthält. Hinzu kommt, dass oftmals nicht die ganze Objektfläche für Messungen zugänglich ist, sondern Informationen nur auf einem Teilstück des Randes gesammelt werden können, oder dass spezielle Messgeräte nur die Messung ganz bestimmter Strommuster ermöglichen. Schließlich sind Anwendungen denkbar, in denen nur wenige Datensätze vorliegen oder im Extremfall nur ein Datensatz verfügbar ist.

Wir untersuchen in dieser Arbeit einen speziellen Datentyp, die sogenannten *Rückstreudaten*. Das Konzept von Rückstreudaten folgt der intuitiven Einschätzung, dass eine Beobachtung besonders von jener Position aus einträglich ist, von der aus ein Objekt beleuchtet wird. Im Kontext der Wellengleichung, dem Rückstreudaten entstammen, soll ein Objekt anhand der von ihm gestreuten Wellen identifiziert werden. Zur Erfassung von Rückstreudaten wird die vom Objekt *zurückgestreute* Welle an derselben Position gemessen, an der

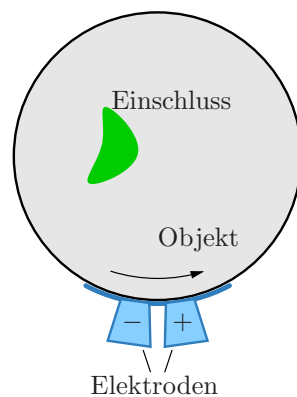


Abbildung 1.1: Skizze eines möglichen Messaufbaus.

die ursprüngliche Welle angeregt wird. Auf Strom-Spannungs-Messungen übertragen bedeutet dies, dass nur ein einzelnes Paar Elektroden an der Objekt-oberfläche nahe beieinander angebracht wird. Durch diese Elektroden wird ein Strom eingespeist und das resultierende Potential dazwischen gemessen. Demgegenüber erfordert die konventionelle Erfassung von Daten in der EIT eine ganze Anordnung von Elektroden auf der Objekt-oberfläche. Verschiedene Strommuster werden angelegt und das sich einstellende Potential wiederum an allen oder zumindest an einigen Elektroden registriert. Die beiden Elektroden der Rückstreuung können in einem einzigen Sensor zusammengefasst werden, der dann zur Datenerfassung über die Objekt-oberfläche bewegt wird, wie in Abbildung 1.1 skizziert. Dies macht die Erfassung von Rückstreudaten sehr komfortabel. Allerdings liefern Rückstreudaten für jede Randposition nur einen Wert, was quantitativ einem einzelnen Strom-Spannungs-Paar entspricht. Daher fallen Rückstreudaten in die oben beschriebene Rubrik eingeschränkter Datensätze.

Aus theoretischer Sicht gibt es viele Fälle, in denen aus wenigen Datensätzen schon eine gewünschte Information extrahiert werden kann. In vielen Anwendungen sind bereits wesentliche Eigenschaften der Leitfähigkeitsverteilung bekannt und dieses Kenntnis wird als Vorwissen in das Modell integriert. Ziel ist dann nicht die Rekonstruktion der gesamten Leitfähigkeit, sondern vielmehr gilt es Bereiche zu identifizieren, in denen die Leitfähigkeit von dem bekannten und erwarteten Wert abweicht. Solche Probleme nennt man *inverse Hindernisprobleme*. Beispiele dafür sind Verunreinigungen, Lufteinschlüsse oder schadhafte Stellen in einem ansonsten homogenen Stoff oder kanzeröses Gewebe, das stark durchblutet ist und sich in seiner Leitfähigkeit deutlich von gesundem abhebt. In diesen Fällen kommt man in Theorie und Praxis mit weniger Daten aus. So ist ein isolierender Einschluss in einem homogenen Hintergrundmedium mit nur einer Messung eindeutig zu identifizieren, s. Kress [66]. Dabei genügt es, wenn die Daten nur auf einem offenen Teilstück des Randes gemessen werden. Hat die Inhomogenität eine nichtverschwindende Leitfähigkeit, so sind entweder mehr Datensätze oder aber weitere Vorinformationen über Gestalt und Lage des Einschlusses nötig. Eine Auswahl an theoretischen Resultaten bieten die Arbeiten [8, 25, 55, 57, 83]. Das inverse Hindernisproblem mit

Rückstreudaten wurde in der EIT unserer Kenntnis nach noch nicht untersucht. Es gibt einige Eindeutigkeitsresultate für Rückstreudaten für die Schrödinger-Gleichung, die für einen ganzen Bereich verschiedener Frequenzen gemessen werden, s. beispielsweise [24, 32, 74, 76, 78, 84]. Weniger ist bekannt im Hinblick auf Rückstreudaten zu einer festen Frequenz, s. [31, 67].

Im Gebiet der EIT gibt es eine Vielzahl von Rekonstruktionsmethoden, die sich dem inversen Hindernisproblem mit einem (konventionellen) Datensatz widmen. Eine intuitive Methode zur Lösung des inversen Hindernisproblems basiert auf der Inversion des Hindernis-Daten-Funktional, das den Rand der Inhomogenität auf das vorliegende Neumann-Dirichlet-Paar abbildet. Kress und Rundell und verschiedene Koautoren lösen die nichtlineare Gleichung mittels eines geeigneten Newtonverfahrens, s. [49, 59, 68, 79, 80]. Die Arbeiten [11, 60–62] verwenden dafür iterative Minimierungsverfahren. Diese Verfahren liefern gute Ergebnisse, sind aber sehr rechenaufwendig, da in jedem Iterationsschritt das Vorwärtsproblem gelöst werden muss.

Eine weitere Klasse iterativer Verfahren bilden die sogenannten Level-Set-Methoden. Dabei wird der Einschluss als Nullniveaumenge einer sogenannten Level-Set-Funktion geschrieben. Auf diese Weise muss nicht direkt mit einer Randparametrisierung des Einschlusses gearbeitet werden, wie bei den oben vorgestellten auf dem Newtonverfahren basierenden Methoden. Level-Set-Methoden sind daher flexibler im Hinblick auf die topologischen Eigenschaften der Einschlüsse. Beispielsweise muss die Anzahl der Komponenten des Einschlusses nicht im Vorhinein bekannt sein. Ausgehend von einer Startnäherung erfolgt die Entwicklung der Level-Set-Funktion über die Minimierung eines Kostenfunktional. Für einen allgemeinen Überblick verweisen wir auf [20] sowie auf die Arbeiten [5, 13, 58]. In [10, 17] wird eine neue Methode vorgestellt, die das Minimierungsproblem durch die Lösung eines Cauchyproblems ersetzt und zu guten Ergebnissen führt.

Neben diesen iterativen Methoden gibt es einige direkte Methoden, die aus den gegebenen Daten Informationen über die Lage der Inhomogenität ziehen. Die *effective dipole method* von Hanke [34, 35] beispielsweise identifiziert einen Punkt nahe des Schwerpunkts eines einzelnen Einschlusses. Eine ähnliche Methode wird in [71] vorgestellt.

Im Kontext der Helmholtzgleichung haben Kusiak und Sylvester mit verschiedenen Koautoren das Konzept des *konvexen Streuträgers* entwickelt und auf verschiedene Anwendungen, insbesondere auf Rückstreudaten, verallgemeinert, s. [31, 69, 70, 77, 86, 87]. Der konvexe Streuträger ist eine Menge, die in der konvexen Hülle der Einschlüsse liegt und damit Aufschluss über Lage und Größe insbesondere eines einzelnen Einschlusses gibt. Besteht der Einschluss aus mehreren Komponenten, bildet der konvexe Streuträger einen Teil der konvexen Hülle aller Einschlüsse und zeigt somit nur noch an, dass sich Inhomogenitäten im Objekt befinden. Das Konzept des konvexen Streuträgers wurde von Hanke, Hyvönen und der Autorin in [40] erfolgreich auf die zweidimensionale EIT übertragen, s. auch [39]. In der Folge wurde es von Harhanen und Hyvönen in [46] auf den Halbraum und von Hanke, Harhanen, Hyvönen und Schweickert in [37] auf den dreidimensionalen Fall erweitert. In [33] findet sich eine Anwendung für mit zwei Punktelektroden gemessene Daten (sog. *sweep data*). Diese Methode kommt ohne Vorwissen über die Inhomogenität aus und ist ein

schnelles, direktes Verfahren, das vor allem bei einem Einschluss gute Resultate liefert. Wir übertragen diese Methode in Kapitel 6 auf Rückstreudaten.

Speziell für das zweidimensionale EIT-Problem gibt es eine Klasse von Lösungsverfahren, die auf Methoden der komplexen Analysis und konkret auf dem Riemann'schen Abbildungssatz für zweifach zusammenhängende Gebiete in der komplexen Ebene beruhen. Kress hat diese Verfahren in einer Reihe von Arbeiten mit verschiedenen Koautoren für perfekt leitende [3,66] und isolierende [29] Einschlüsse, sowie für eine stückweise konstante Leitfähigkeit [30] entwickelt. Diese Methoden eignen sich allerdings nur zur Rekonstruktion eines einzelnen Einschlusses.

Die vorliegende Arbeit behandelt die Rekonstruktion von Einschlüssen aus Rückstreudaten in der elektrischen Impedanztomographie. Sie entwickelt ein geeignetes mathematisches Modell für Rückstreudaten in der EIT und untersucht deren Eigenschaften. Ferner stellt sie zwei Rekonstruktionsalgorithmen für das inverse Hindernisproblem vor. Die Arbeit ist folgendermaßen gegliedert:

Das zweite Kapitel widmet sich zunächst dem Vorwärtsproblem. Wir stellen ein mathematisches Modell für Rückstreudaten vor, das der in Abbildung 1.1 illustrierten Vorstellung gerecht wird. Dazu modellieren wir den von zwei benachbarten Elektroden erzeugten Randstrom als Tangentialdipol am Rand des Einheitskreises. Wir diskutieren die Lösbarkeit des zugehörigen Neumannproblems in Abschnitt 2.1 zunächst für den Einheitskreis mit einem einzelnen isolierenden Einschluss und geben analytische und numerische Beispiele. In den folgenden Abschnitten erweitern wir die Definition auf allgemeine elektrische Leitfähigkeitsverteilungen und beliebige einfach zusammenhängende Gebiete. Abschnitt 2.4 bestätigt das intuitive Verständnis einer Rückstreumessung aus Abbildung 1.1: Wir zeigen im Kontext des sogenannten *Lückenmodells* (engl. *gap model*) für die Elektroden, dass Rückstreudaten eine Approximation erster Ordnung an mit realen Elektrodenmessungen gewonnene Daten sind.

Kapitel 3 befasst sich mit den Eigenschaften der Rückstreufunktion. Im ersten Abschnitt zeigen wir, dass die Rückstreudaten zu einer Funktion fortgesetzt werden können, die außerhalb der Inhomogenität analytisch ist. Im zweiten Teil untersuchen wir das Verhalten von Rückstreudaten unter konformen Koordinatentransformationen. Wir beschränken uns hier auf den Fall eines einzelnen einfach zusammenhängenden (isolierenden oder perfekt leitenden) Einschlusses. Der Riemann'schen Abbildungssatz für zweifach zusammenhängende Gebiete liefert eine konforme Transformation, die den Einheitskreis ohne Einschluss auf einen Kreisring abbildet. Die Rückstreudaten sind mit dieser Transformation und ihren ersten drei Ableitungen sowie mit dem inneren Radius des Kreisrings durch eine nichtlineare Gleichung verbunden. Diese Beziehung bildet die Grundlage zur Lösung des inversen Problems in den folgenden Kapiteln.

Im vierten Kapitel untersuchen wir, inwiefern ein einzelner isolierender oder perfekt leitender Einschluss eindeutig anhand seiner Rückstreudaten identifiziert werden kann. Die Resultate aus Abschnitt 3.2 lassen sich zu einem nichtlinearen Randwertproblem dritter Ordnung für die Randabbildung der konformen Abbildung formulieren. In Abschnitt 4.2 wird gezeigt, dass das Randwertproblem zu einem isolierenden Einschluss eine eindeutige Lösung hat und der Einschluss dadurch anhand seiner Rückstreudaten identifizierbar ist. Abschnitt 4.3 erläutert die Situation bei einem perfekt leitenden Einschluss. Hier

gibt es spezielle Fälle, in denen eine Identifizierung nicht möglich ist. Wir geben Beispiele für solche Einschlüsse an.

Der Eindeutigkeitsbeweis für einen Isolator ist konstruktiv und dient als Grundlage für einen Rekonstruktionsalgorithmus, den wir in Kapitel 5 vorstellen. Der Algorithmus berechnet die konforme Abbildung, die das Objekt ohne Einschluss auf einen konzentrischen Kreisring abbildet, und löst dazu das Randwertproblem aus Abschnitt 4.2. Danach wird die konforme Abbildung auf dem inneren Rand des Referenzkreisrings ausgewertet, um den Rand des Einschlusses zu erhalten. Dieser zweite Schritt ist extrem schlecht gestellt, und angemessene Regularisationsmethoden sind notwendig. Schließlich demonstrieren wir die Leistungsfähigkeit der Rekonstruktionsmethode an numerischen Beispielen.

Der Eindeutigkeitsbeweis und der darauf aufbauende Rekonstruktionsalgorithmus eignen sich nur für einzelne isolierende (und unter Einschränkungen auch für perfekt leitende) Einschlüsse. Sind mehrere Einschlüsse vorhanden oder deren physikalische Eigenschaften unbekannt, ist der Algorithmus aus Kapitel 5 nicht anwendbar. Für diesen Fall entwickeln wir in Kapitel 6 das bereits beschriebene Konzept des *konvexen Rückstreuträgers*. Dies beruht auf der in Abschnitt 3.1 hergeleiteten holomorphen Fortsetzbarkeit der Rückstreudaten bis an den Rand der Inhomogenität. Der konvexe Rückstreuträger ist eine Untermenge der konvexen Hülle der tatsächlichen Einschlüsse und kann zu deren Auffindung dienen. Numerische Experimente bestätigen, dass unsere Methode bei unverrauschten Daten gute Approximationen der Einschlüsse liefert.

Der Inhalt dieser Arbeit entstand im Rahmen einer von der Deutschen Forschungsgemeinschaft geförderten Kooperation mit Martin Hanke und Nuutti Hyvönen und wurde bereits veröffentlicht: Die Arbeit [41] behandelt die mathematische Modellierung von Rückstreudaten in der EIT und zeigt die eindeutige Identifizierbarkeit eines einzelnen Isolators anhand seiner Rückstreudaten. In [43] wird untersucht, in welchen Fällen das inverse Rückstreuproblem für einen perfekten Leiter eindeutig lösbar ist. Die holomorphe Fortsetzbarkeit der Rückstreudaten zu einer strikt positiven elektrischen Leitfähigkeit wurde in [42] gezeigt im Hinblick auf die dort ebenfalls vorgestellte Rekonstruktionsmethode des konvexen Rückstreuträgers. Der auf dem Eindeutigkeitsbeweis aufbauende Rekonstruktionsalgorithmus wurde von der Autorin in [52] vorgestellt.

2 Definition der Rückstreuung

2.1 Rückstreuung von einem Isolator

$D \subset \mathbb{R}^2$ sei die offene Einheitskreisscheibe, und $\Omega \subset D$ sei ein einfach zusammenhängendes Gebiet mit $C^{2+\alpha}$ -Rand $\Gamma \subset D$, $\alpha > 0$. Die elektrische Leitfähigkeit σ sei homogen in $D \setminus \overline{\Omega}$, und das Gebiet Ω sei isolierend, das heißt

$$\sigma(x) = \begin{cases} 1, & x \in D \setminus \overline{\Omega}, \\ 0, & x \in \Omega \end{cases}$$

nach geeigneter Skalierung. ν bezeichne den nach außen gerichteten Normaleneinheitsvektor und τ den Tangentialeinheitsvektor in einem Randpunkt von D oder Ω . Wir parametrisieren den Rand des Einheitskreises $T = \partial D$ durch die Bogenlänge, das heißt durch $z_t = (\cos t, \sin t)$, $t \in [0, 2\pi)$. Der Normalenvektor im Punkt z_t ist gerade $\nu_{z_t} = (\cos t, \sin t)^T$, und der Tangentialvektor τ ergibt sich aus ν durch eine Drehung um den Winkel $\pi/2$ gegen den Uhrzeigersinn. Wir verwenden die übliche Notation $C^\infty(T)$ für den Raum der unendlich oft differenzierbaren Funktionen auf T , sowie für die Sobolevräume $H^s(D)$ auf D beziehungsweise $H^s(T)$ auf T , $s \in \mathbb{R}$. Bei Funktionenräumen bezeichnet der Index \diamond jeweils den abgeschlossenen Unterraum der Funktionen mit verschwindendem Integralmittel über den Rand T , das heißt

$$\begin{aligned} C_\diamond^\infty(T) &= \left\{ f \in C^\infty(T) : \int_T f \, ds = 0 \right\}, \\ H_\diamond^s(D) &= \{v \in H^s(D) : \langle v|_T, \mathbf{1} \rangle = 0\} \quad \text{und} \\ H_\diamond^s(T) &= \{f \in H^s(T) : \langle f, \mathbf{1} \rangle = 0\} \end{aligned}$$

für $s \in \mathbb{R}$. Dabei steht $\langle \cdot, \cdot \rangle$ für die vom L^2 -Skalarprodukt induzierte duale Paarung. $\langle v|_T, \mathbf{1} \rangle$ bezeichnet also die Auswertung der Spur von $v \in H^s(D)$ an der konstanten Funktion $\mathbf{1}(x) \equiv 1$ für alle $x \in T$. Bei Bedarf indizieren wir die duale Paarung mit den zugrunde liegenden Vektorräumen oder Mengen.

Wir modellieren den für Rückstreudaten spezifischen Randstrom auf T folgendermaßen: $\theta \in [0, 2\pi)$ sei ein fester Winkel, der einen Punkt $z_\theta \in T$ kennzeichne. Wir bezeichnen mit

$$\delta'_\theta(\cdot) := \frac{\partial}{\partial \tau} \delta(\cdot - z_\theta) \tag{2.1}$$

die in z_θ lokalisierte Tangentialableitung der Deltadistribution auf T . Die Distribution δ'_θ gehört zum Raum $H_\diamond^{-3/2-\varepsilon}(T)$ für $\varepsilon > 0$ und ist definiert durch

$$\langle \delta'_\theta, v \rangle_{H^{-3/2-\varepsilon}(T) \times H^{3/2+\varepsilon}(T)} = - \frac{\partial v}{\partial t}(z_\theta) \quad \text{für alle } v \in H^{3/2+\varepsilon}(T),$$

vgl. Saranen und Vainikko [81, Abschnitte 5.2 und 5.3]. Die Variable t bezeichnet dabei wie oben beschrieben die Bogenlänge auf T . δ'_θ modelliert einen Randstrom, der im Gebiet D durch zwei nahe der Position z_θ angebrachte Elektroden erzeugt wird, s. Abschnitt 2.4.

Unter dem Randstrom δ'_θ stellt sich in D ein elektrostatisches Potential u ein, das das Neumann'sche Randwertproblem

$$\Delta u = 0 \text{ in } D \setminus \overline{\Omega}, \quad \frac{\partial}{\partial \nu} u = \delta'_\theta \text{ auf } T, \quad \frac{\partial}{\partial \nu} u = 0 \text{ auf } \Gamma \quad (2.2)$$

löst. Da der konstante Lösungsanteil durch die Neumannrandbedingung nicht festgelegt wird, fordern wir zusätzlich, dass

$$\int_T u \, ds = 0, \quad (2.3)$$

um Eindeutigkeit in (2.2) zu erhalten. Wir verwenden in dieser Arbeit stets den schwachen Lösungsbegriff für die vorkommenden partiellen Differentialgleichungen. Die Normierungsbedingung (2.3) ist daher als Auswertung der Spur $u|_T$ an der auf T konstanten Funktion zu verstehen, das heißt

$$\langle u|_T, 1 \rangle = 0.$$

Das Randwertproblem (2.2) besitzt unter der Bedingung (2.3) eine eindeutige Lösung $u \in H^{-\varepsilon}(D \setminus \overline{\Omega})$. Um dies zu beweisen, betrachten wir eine Folge glatter Funktionen $(f_n)_n \subset C_\diamond^\infty(T)$, die bezüglich der $H^{-3/2-\varepsilon}(T)$ -Topologie gegen δ'_θ konvergiert, das heißt

$$\|f_n - \delta'_\theta\|_{H^{-3/2-\varepsilon}(T)} = \sup_{\|v\|_{H^{3/2+\varepsilon}}=1} \left| \int_T f_n v \, ds + \frac{\partial v}{\partial t}(z_\theta) \right| \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty. \quad (2.4)$$

Solche Folgen existieren, da $C_\diamond^\infty(T)$ dicht in $H_\diamond^{-3/2-\varepsilon}(T)$ ist, vgl. Lions und Magenes [73, Kapitel 1, Abschnitt 7.3]. Zur Berechnung der von den Randströmen f_n erzeugten Potentiale benötigen wir die Neumannfunktion des Laplaceoperators in D :

$$N(z, x) = \begin{cases} -\frac{1}{2\pi} \left(\log |z - x| + \log \left| \frac{z}{|z|} - |z|x \right| \right), & z \neq 0, \\ -\frac{1}{2\pi} \log |x|, & z = 0. \end{cases} \quad (2.5)$$

Die Neumannfunktion ist für alle $x \in D$ die eindeutige Lösung von

$$\Delta_z N(z, x) = \delta(z - x) \text{ in } D, \quad \frac{\partial}{\partial_z \nu} N(z, x) = -\frac{1}{2\pi} \text{ auf } T$$

und

$$\int_T N(z, x) \, ds(z) = 0, \quad (2.6)$$

vgl. Henrici [48, §15.7]. Auf $\overline{D} \setminus \{z\}$ ist $N(z, \cdot)$ eine glatte Funktion und ihre Spur liegt insbesondere in $H^{3/2+\varepsilon}(T)$.

Die Potentiale

$$u_{0,n}(z) = \int_T N(z, z_t) f_n(z_t) ds(z_t), \quad z \in D \quad (2.7)$$

lösen die Randwertprobleme

$$\Delta u_{0,n} = 0 \quad \text{in } D, \quad \frac{\partial}{\partial \nu} u_{0,n} = f_n \quad \text{auf } T,$$

s. [48, §15.7]. Wegen (2.4) konvergiert die Folge $(u_{0,n})_n$ in $H^{-\varepsilon}(D)$ gegen

$$u_0(z) := -\frac{\partial}{\partial_x \tau} N(z, x)|_{x=z_\theta} = -\frac{1}{\pi} \frac{z \cdot z_\theta^\perp}{|z - z_\theta|^2}, \quad z \neq z_\theta \quad (2.8)$$

für $z_\theta^\perp = (-\sin \theta, \cos \theta)$, vgl. [73, Kapitel 2, Bemerkung 7.2], und u_0 löst das sogenannte *Referenzproblem*

$$\Delta u_0 = 0 \quad \text{in } D, \quad \frac{\partial}{\partial \nu} u_0 = \delta'_\theta \quad \text{auf } T \quad (2.9)$$

und

$$\int_T u_0 ds = 0. \quad (2.10)$$

Gleichung (2.9) beschreibt das elektrostatische Potential, das durch den Randstrom δ'_θ bei homogener Leitfähigkeit in D erzeugt wird. Wir nennen die Lösung u_0 von (2.9) daher *Referenzpotential*. Die Spur von u_0 auf T lautet

$$u_0|_T(z_t) = -\frac{1}{2\pi} \cot \frac{t - \theta}{2}, \quad z_t \neq z_\theta. \quad (2.11)$$

u_0 hat also einen Pol erster Ordnung in $z = z_\theta$, und die Spur von u_0 gehört nicht zu $L^1(T)$, sondern u_0 erfüllt die Normierungsbedingung (2.10) im Sinne eines Cauchy'schen Hauptwerts.

Die Lösung von (2.2) ergibt sich als Summe $u = u_0 + w$ des Referenzpotentials und des sogenannten *relativen Potentials* w , das das Randwertproblem

$$\Delta w = 0 \quad \text{in } D \setminus \overline{\Omega}, \quad \frac{\partial}{\partial \nu} w = 0 \quad \text{auf } T, \quad \frac{\partial}{\partial \nu} w = -\frac{\partial}{\partial \nu} u_0 \quad \text{auf } \Gamma \quad (2.12)$$

unter der Bedingung

$$\int_T w ds = 0 \quad (2.13)$$

löst. Wir erhalten die Lösung w von (2.12) als *Einfachschichtpotential*

$$w(z) = \int_\Gamma N(z, x) \psi(x) ds(x), \quad z \in D \setminus \overline{\Omega} \quad (2.14)$$

mit einer Dichtefunktion

$$\psi \in C_\circ(\Gamma) = \left\{ f \in C(\Gamma) : \int_\Gamma f ds = 0 \right\}.$$

Das Einfachschichtpotential w ist harmonisch in $D \setminus \overline{\Omega}$ und erfüllt die homogene Neumannbedingung auf T , denn

$$\frac{\partial}{\partial \nu} w(z) = \int_{\Gamma} \frac{\partial}{\partial z \nu} N(z, x) \psi(x) \, ds(x) = -\frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} \psi(x) \, ds(x) = 0 \quad \text{für } z \in T.$$

Wir bestimmen ψ so, dass w die Randbedingung auf Γ in (2.12) erfüllt: Die Normalenableitung von w auf Γ lautet

$$\frac{\partial}{\partial \nu} w(z) = \left(-\frac{1}{2} \text{Id} + K_{\Gamma}^* \right) \psi(z), \quad z \in \Gamma$$

mit

$$K_{\Gamma}^* \psi(z) = \int_{\Gamma} \frac{\partial}{\partial z \nu} N(z, x) \psi(x) \, ds(x), \quad z \in \Gamma,$$

vgl. beispielsweise Griesmaier [27, Abschnitt 2.2]. Mithilfe der Fredholm'schen Alternative kann dann wie üblich gezeigt werden, dass der Nullraum des Operators $-\frac{1}{2} \text{Id} + K_{\Gamma}^*$ in $H^{-1/2}(\Gamma)$ trivial ist, vgl. etwa [27, Lemma 2.3], und wir daher eine eindeutige Lösung der Gleichung

$$\left(-\frac{1}{2} \text{Id} + K_{\Gamma}^* \right) \psi = -\frac{\partial}{\partial \nu} u_0|_{\Gamma} \quad (2.15)$$

erhalten. Diese Lösung ψ ist insbesondere stetig, denn u_0 ist harmonisch in D und damit analytisch in einer Umgebung des Randes Γ . Daher ist die Normalenableitung von u_0 auf Γ glatt, und $(\partial u_0 / \partial \nu)|_{\Gamma}$ und damit ψ sind stetig, vgl. Kress [65, Satz 2.23 und Korollar 4.16]. Das Integralmittel von ψ über Γ verschwindet, denn

$$-\frac{1}{2} \int_{\Gamma} \psi(z) \, ds(z) + \int_{\Gamma} K_{\Gamma}^* \psi(z) \, ds(z) = 0 \quad (2.16)$$

und

$$\int_{\Gamma} K_{\Gamma}^* \psi \, ds(z) = \int_{\Gamma} \left(\int_{\Gamma} \frac{\partial}{\partial z \nu} N(z, x) \, ds(z) \right) \psi(x) \, ds(x). \quad (2.17)$$

Die Neumannfunktion N setzt sich aus der Summe zweier logarithmischer Potentiale zusammen. Der erste Summand in (2.5) hat eine Singularität in $z = x \in \Gamma$, und das Integralmittel der entsprechenden Normalenableitung über den Rand Γ beträgt

$$-\frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} \frac{\partial}{\partial z \nu} \log |z - x| \, ds(z) = -\frac{1}{2}, \quad x \in \Gamma,$$

s. [65, Beispiel 6.16]. Die Singularität des zweiten Summanden liegt hingegen in $z = x/|x|^2$ und damit nicht in D . Daher ist das zugehörige logarithmische Potential harmonisch in Ω , und das Integral seiner Normalenableitung über Γ verschwindet:

$$-\frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} \frac{\partial}{\partial z \nu} \log \left| \frac{z}{|z|} - |z|x \right| \, ds(z) = 0, \quad x \in \Gamma.$$

In (2.17) gilt also

$$\int_{\Gamma} K_{\Gamma}^* \psi \, ds(z) = -\frac{1}{2} \int_{\Gamma} \psi(x) \, ds(x),$$

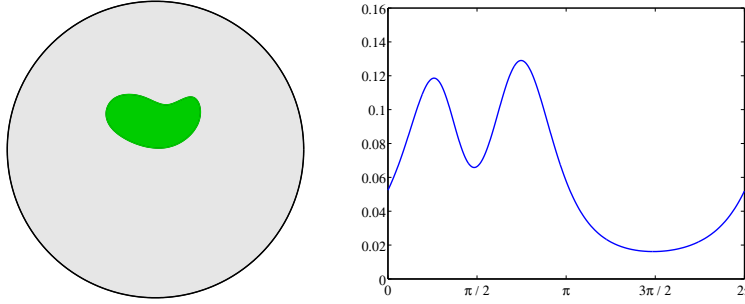


Abbildung 2.1: Rückstreudaten für einen isolierenden Einschluss.

und aus (2.16) folgt $\psi \in C_\infty(\Gamma)$. Mit dieser Dichte liegt das Potential w aus (2.14) in $C^2(D \setminus \overline{\Omega})$ und löst die Gleichung (2.12). Die Normierungsbedingung (2.13) ist wegen (2.6) ebenfalls erfüllt.

Schließlich löst das Potential $u = u_0 + w$ die Gleichung (2.2) und erfüllt (2.3) im Sinn eines Cauchy'schen Hauptwerts. u gehört wie u_0 zu $H^{-\varepsilon}(D \setminus \overline{\Omega})$ und ist glatt für $z \neq z_\theta \in T$. Außerdem erfüllt u die Neumannbedingung auf Γ im klassischen Sinn.

Eine *Rückstreuungsmessung* im Punkt z_θ ist nun folgendermaßen definiert:

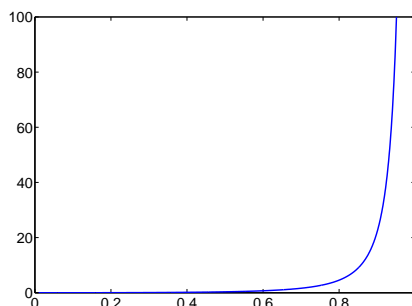
$$b(\theta) := - \left(\frac{\partial}{\partial \tau} w|_T \right) (z_\theta). \quad (2.18)$$

Im Gegensatz zum Potential u ist w glatt auf dem Rand T und kann an der Stelle der Elektroden z_θ ausgewertet werden. (2.18) ist folglich wohldefiniert.

Bislang hingen alle Potentiale vom festen Parameter $\theta \in [0, 2\pi)$ ab. Nun betrachten wir die Funktion $b : [0, 2\pi) \rightarrow \mathbb{R}$, die für alle Winkel $\theta \in [0, 2\pi)$ durch (2.18) definiert sei. Wir nennen diese Funktion die *Rückstreuungsfunktion* oder *Rückstreudaten*. Abbildung 2.1 zeigt die Rückstreudaten für einen isolierenden Einschluss, der im linken Bild in grün eingezeichnet ist. Die Werte der Rückstreuungsfunktion rechts wurden anhand von Formel (2.18) numerisch für jede Position θ berechnet.

Beispiel 2.1. Wir berechnen die Rückstreudaten eines isolierenden konzentrischen Kreises $\Omega = B_R$ mit Radius R in D . Offensichtlich sind die Rückstreudaten in diesem Fall nicht von der Position θ , sondern nur vom Radius R des Einschlusses abhängig. Wir bezeichnen ihren Wert mit β_R . Zur Bestimmung von β_R berechnen wir die Potentiale u und u_0 für $\theta = 0$, in dem wir (2.2) und (2.9) mithilfe eines Fourierreihenansatzes lösen, s. Axler, Bourdon und Ramey [7, Kapitel 10] sowie [81, Abschnitte 5.2 und 5.3]. Die Fourierreihe des Tangentialdipols δ'_0 lautet

$$\delta'_0(t) = -\frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} k \sin kt,$$

Abbildung 2.2: β_R für $R \in (0, 1)$ aus Beispiel 2.1.

vgl. Walter [91, Abschnitt 10.VI]. Das ergibt für $x = rz_t$, $r \in [0, 1)$, $t \in [0, 2\pi)$ die Reihenentwicklung

$$u_0(x) = -\frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} r^k \sin kt$$

für das Referenzpotential. Auf dem Kreisring $r \in (R, 1)$ hat das Potential u die Gestalt

$$u(x) = -\frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{1-R^{2k}} r^k + \frac{R^{2k}}{1-R^{2k}} r^{-k} \right) \sin kt.$$

Folglich ist

$$w(x) = -\frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{R^{2k}}{1-R^{2k}} (r^k + r^{-k}) \sin kt$$

und

$$\beta_R = -\frac{\partial}{\partial t} w(z_t)|_{t=0} = \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} k \frac{R^{2k}}{1-R^{2k}} > 0. \quad (2.19)$$

β_R ist als Funktion von R monoton wachsend und unbeschränkt für $R \rightarrow 1$,

$$\lim_{R \rightarrow 0} \beta_R = 0 \quad \text{und} \quad \lim_{R \rightarrow 1} \beta_R = +\infty,$$

vgl. auch Abbildung 2.2. Der Radius R eines isolierenden kreisförmigen Einschlusses im Zentrum von D ist somit aus seinen Rückstreudaten identifizierbar.

2.2 Rückstreuung von einem inhomogenen Medium

Wir verallgemeinern in diesem Abschnitt die Definition der Rückstreufunction auf strikt positive elektrische Leitfähigkeiten $\sigma \in L^\infty(D)$, die homogen in der Nähe des Randes T sind, das heißt, $\sigma \geq c > 0$, und $\text{supp}(\sigma - 1)$ sei eine kompakte Teilmenge von D . Für eine alternative Formulierung von (2.18) verwenden wir die *Neumann-Dirichlet-Abbildung* Λ , die einem am Rand des Gebiets D

angelegten Strommuster $f = \partial\hat{u}/\partial\nu$ die Dirichletdaten des resultierenden Potentials \hat{u} zuweist. Das Potential \hat{u} hängt von der elektrischen Leitfähigkeit im Gebiet D ab und erfüllt die elliptische Differentialgleichung

$$\nabla \cdot (\sigma \nabla \hat{u}) = 0 \quad \text{in } D, \quad \frac{\partial}{\partial \nu} \hat{u} = f \quad \text{auf } T. \quad (2.20)$$

Die Referenzabbildung Λ_0 ist in analoger Weise definiert. Sie weist einem Randstrom f die Dirichletdaten des Referenzpotentials \hat{u}_0 zu, das sich bei homogener Leitfähigkeit einstellt:

$$\Delta \hat{u}_0 = 0 \quad \text{in } D, \quad \frac{\partial}{\partial \nu} \hat{u}_0 = f \quad \text{auf } T. \quad (2.21)$$

Wie zuvor normieren wir die Potentiale durch

$$\int_T \hat{u} \, ds = 0 \quad \text{und} \quad \int_T \hat{u}_0 \, ds = 0.$$

Mithilfe der Neumann-Dirichlet-Abbildungen lässt sich die Spur des relativen Potentials $\hat{w} = \hat{u} - \hat{u}_0$ darstellen durch

$$(\Lambda - \Lambda_0) \delta'_\theta = \hat{w}|_T,$$

vgl. Gleichung (2.14). Die zu (2.18) korrespondierende Definition der Rückstreuendaten lautet daher

$$b(z_\theta) = \langle \delta'_\theta, (\Lambda - \Lambda_0) \delta'_\theta \rangle. \quad (2.22)$$

Wir diskutieren nun zunächst die eindeutige Lösbarkeit der beiden Neumannprobleme (2.20) und (2.21), bevor wir die Regularität der Neumann-Dirichlet-Abbildungen untersuchen, um die Darstellung (2.22) zu rechtfertigen. Wir beginnen mit einem Lemma, das die Regularität einer harmonischen Funktion im Inneren eines Gebiets untersucht:

Lemma 2.2. U und U_0 seien zwei beschränkte C^∞ -Gebiete und $\bar{U} \subset U_0$. Die Funktion $v \in H^s(U_0)$, $s \in \mathbb{R}$, sei harmonisch. Dann gilt

$$\|v\|_{H^r(U)} \leq C \|v\|_{H^s(U_0)}$$

für alle $r \in \mathbb{R}$ mit einer Konstanten $C > 0$. Insbesondere ist $v|_U \in C^\infty(U)$.

Beweis: Wir nehmen ohne Einschränkung an, dass s eine ganze Zahl sei. Gilt die Aussage des Lemmas nämlich für alle $s \in \mathbb{Z}$, so wählen wir zu $s' \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ ein $s \in \mathbb{Z}$ mit $s < s'$. Da $H^{s'}(U_0) \subset H^s(U_0)$ stetig eingebettet ist, gilt die Aussage des Lemmas auch für s , vgl. [73, Kapitel 1, Abschnitte 6.1 und 9.1].

Im Verlauf der folgenden Abschätzungen bezeichne C eine Konstante, deren Wert variiert, aber nicht von v abhängt. U_1 sei ein weiteres C^∞ -Gebiet mit $\bar{U} \subset U_1$ und $\bar{U}_1 \subset U_0$. Wir wählen eine Abschneidefunktion $\eta \in C_0^\infty(U_0)$, die in U_1 den Wert eins hat. Die Distribution $\tilde{v} = \eta v$ löst das Dirichletproblem

$$\Delta \tilde{v} = F \quad \text{in } U_0, \quad \tilde{v} = 0 \quad \text{auf } \partial U_0$$

für $F = 2\nabla\eta \cdot \nabla v + \Delta\eta v$. Die Distribution F hat wie η kompakten Träger in U_0 und liegt in $H^{s-1}(U_0)$ mit

$$\|F\|_{H^{s-1}(U_0)} \leq C \|v\|_{H^s(U_0)},$$

s. [73, Kapitel 1, Lemma 7.2]. Aus der Lösungstheorie für das Dirichletproblem [73, Kapitel 2, Bemerkung 7.2] folgt, dass

$$\|\tilde{v}\|_{H^{s+1}(U_0)} \leq C \|F\|_{H^{s-1}(U_0)}.$$

Da $\eta \equiv 1$ auf $U_1 \subset U_0$, gilt

$$\|v\|_{H^{s+1}(U_1)} = \|\tilde{v}\|_{H^{s+1}(U_1)} \leq \|\tilde{v}\|_{H^{s+1}(U_0)}$$

und insgesamt

$$\|v\|_{H^{s+1}(U_1)} \leq C \|v\|_{H^s(U_0)}.$$

Im Übergang von U_0 auf die kleinere Menge U_1 erhöht sich also der Exponent des Sobolevraums, in dem v liegt, um eins. Dies nutzen wir nun iterativ aus und wählen im nächsten Schritt eine Menge U_2 mit $\overline{U} \subset U_2$ und $\overline{U}_2 \subset U_1$. Die gleiche Konstruktion wie eben ergibt, dass

$$\|v\|_{H^{s+2}(U_2)} \leq C \|v\|_{H^{s+1}(U_1)} \leq C \|v\|_{H^s(U_0)}.$$

Für ein vorgegebenes $r \in \mathbb{R}$ wiederholen wir dies k -mal, bis $r \leq s + k$. Damit ist die Behauptung gezeigt. \square

Nach dieser Vorarbeit beweisen wir, dass die Neumannprobleme (2.20) und (2.21) eindeutig lösbar sind:

Satz 2.3. Für einen beliebigen Randstrom $f \in H_\diamond^s(T)$, $s \in \mathbb{R}$, haben die Randwertprobleme (2.20) und (2.21) eindeutige Lösungen \hat{u} und \hat{u}_0 in

$$\mathcal{H}_s := H^{\min\{1, s+3/2\}}(D) \cap H_{\text{loc}}^1(D),$$

wobei

$$H_{\text{loc}}^1(D) = \{v \in \mathcal{D}'(D) : v|_U \in H^1(U) \text{ für jedes offene } U \text{ mit } \overline{U} \subset D\}$$

und $\mathcal{D}'(D)$ den Raum der Distributionen bezeichne.

Beweis: Zu einem Randstrom $f \in H_\diamond^s(T)$ hat das Neumannproblem (2.21) eine eindeutige Lösung $\hat{u}_0 \in H^{s+3/2}(D)$, die

$$\|\hat{u}_0\|_{H^{s+3/2}(D)} \leq C \|f\|_{H^s(T)} \quad (2.23)$$

erfüllt, vgl. [73, Kapitel 2, Bemerkung 7.2]. Aufgrund von Lemma 2.2 ist \hat{u}_0 glatt auf offenen Teilmengen U von D mit $\overline{U} \subset D$, und folglich ist $\hat{u}_0 \in \mathcal{H}_s$. Ω sei ein C^∞ -Gebiet mit $\text{supp}(\sigma - 1) \subset \Omega$ und $\Gamma = \partial\Omega \subset D$, und $\eta \in C_0^\infty(D)$ sei eine Abschneidefunktion, die eins auf $\overline{\Omega}$ ist. Ω_0 sei ein weiteres Gebiet mit $\text{supp} \eta \subset \Omega_0$ und $\overline{\Omega}_0 \subset D$. Wir zeigen, dass das Variationsproblem

$$\int_D \sigma \nabla \hat{w} \cdot \nabla v \, dx = \int_D \sigma \nabla \hat{u}_0 \cdot \nabla (\eta v) \, dx \quad \text{für alle } v \in H_\diamond^1(D) \quad (2.24)$$

eine eindeutige Lösung $\hat{w} \in H_\diamond^1(D)$ besitzt. $\hat{u}_0 - \hat{w}$ löst dann (2.20), wie wir im Folgenden sehen werden. Die linke Seite von (2.24) definiert eine stetige und koerzive Bilinearform auf $H_\diamond^1(D) \times H_\diamond^1(D)$. Auf der rechten Seite von (2.24) untersuchen wir den linearen Operator

$$A : H_\diamond^1(D) \rightarrow \mathbb{R}, \quad A(v) = \int_D \sigma \nabla \hat{u}_0 \cdot \nabla(\eta v) \, dx.$$

Die Stetigkeit von A folgt aus der Schwarz'schen Ungleichung:

$$\begin{aligned} |A(v)| &\leq \|\sigma \nabla \hat{u}_0\|_{L^2(\Omega_0)^3} \|\nabla(\eta v)\|_{L^2(\Omega_0)^3} \\ &\leq C \|\hat{u}_0\|_{H^1(\Omega_0)} \|v\|_{H^1(\Omega_0)}. \end{aligned}$$

Wir wenden Lemma 2.2 auf \hat{u}_0 an und erhalten mit (2.23), dass

$$|A(v)| \leq C \|f\|_{H^s(T)} \|v\|_{H^1(D)} \quad \text{für alle } v \in H_\diamond^1(D).$$

Das Lemma von Lax-Milgram garantiert nun die Existenz einer eindeutigen Lösung $\hat{w} \in H_\diamond^1(D)$ des Variationsproblems (2.24) mit

$$\|\hat{w}\|_{H^1(D)} \leq C \|f\|_{H^s(T)}, \quad (2.25)$$

s. beispielsweise Gilbarg und Trudinger [26, Satz 5.8]. Für die distributionelle Definition der Divergenz von $\sigma \nabla \hat{w}$ erhalten wir aus (2.24) mit $v \in C_0^\infty(D)$ die Gleichung

$$\begin{aligned} \langle \nabla \cdot (\sigma \nabla \hat{w}), v \rangle &= - \int_D \sigma \nabla \hat{w} \cdot \nabla v \, dx \\ &= \int_D \sigma \nabla \hat{u}_0 \cdot \nabla((1-\eta)v) \, dx - \int_D \sigma \nabla \hat{u}_0 \cdot \nabla v \, dx \\ &= \int_{D \setminus \bar{\Omega}} \nabla \hat{u}_0 \cdot \nabla((1-\eta)v) \, dx + \langle \nabla \cdot (\sigma \nabla \hat{u}_0), v \rangle. \end{aligned}$$

Da \hat{u}_0 in $D \setminus \bar{\Omega}$ harmonisch und $(1-\eta)v$ jeweils in einer Umgebung von Γ und T null ist, folgt aus der Green'schen Identität, dass der erste Term auf der rechten Seite in obiger Gleichung verschwindet. Wir erhalten

$$\nabla \cdot (\sigma \nabla \hat{w}) = \nabla \cdot (\sigma \nabla \hat{u}_0) \quad \text{in } D$$

im distributionellen Sinn. Insbesondere ist \hat{w} außerhalb der Menge Ω harmonisch. Die Normalenableitung von \hat{w} auf T erfüllt aufgrund der Green'schen Formel die Gleichung

$$\left\langle \frac{\partial}{\partial \nu} \hat{w}, v \right\rangle = \int_D \nabla \cdot (\sigma \nabla \hat{w}) v \, dx + \int_D \sigma \nabla \hat{w} \cdot \nabla v \, dx \quad \text{für } v \in H_\diamond^1(D).$$

Dieser Ausdruck verschwindet wegen (2.24), wenn wir Testfunktionen einsetzen, deren Träger in $D \setminus \bar{\Omega}_0$ liegt. Daher ist $\partial \hat{w} / \partial \nu = 0$ auf T .

Zusammenfassend haben wir gezeigt, dass $\hat{u} = \hat{u}_0 - \hat{w} \in \mathcal{H}_s$ das Randwertproblem (2.20) löst. (2.23) und (2.25) ergeben zusammen, dass

$$\|\hat{u}\|_{H^{\min\{1, s+3/2\}}(D)} \leq C \|f\|_{H^s(T)}. \quad (2.26)$$

Wir zeigen nun noch, dass die Lösung von (2.20) eindeutig ist. Dazu seien u_1 und u_2 zwei Lösungen von (2.20) in \mathcal{H}_s und $h = u_1 - u_2$. Die Spur $g = (u_1 - u_2)|_\Gamma$ auf Γ liegt dann in $H^{1/2}(\Gamma)$, und die Einschränkung $h|_{D \setminus \overline{\Omega}}$ löst das Randwertproblem

$$\Delta h = 0 \quad \text{in } D \setminus \overline{\Omega}, \quad \frac{\partial}{\partial \nu} h = 0 \quad \text{auf } T, \quad h = g \quad \text{auf } \Gamma.$$

Folglich ist $h|_{D \setminus \overline{\Omega}} \in H^1(D \setminus \overline{\Omega})$, s. [73, Kapitel 2, Bemerkung 7.2], und h liegt nicht nur lokal, sondern insgesamt in $H^1(D)$. Somit ist h die aufgrund des Lemmas von Lax-Milgram eindeutige Lösung von (2.20) mit $f = 0$ in $H_\diamond^1(D)$. Diese Lösung ist allerdings konstant, und damit ist $h \equiv 0$. \square

Wir kommen nun zur Neumann-Dirichlet-Abbildung:

Satz 2.4. Die Neumann-Dirichlet-Abbildungen Λ und Λ_0 sind stetige lineare Abbildungen $H_\diamond^s(T) \rightarrow H_\diamond^{s+1}(T)$. Die Differenzabbildung $\Lambda - \Lambda_0$ ist darüber hinaus beschränkt als Abbildung von $H_\diamond^s(T)$ nach $C_\diamond^\infty(T)$ für ein beliebiges $s \in \mathbb{R}$.

Beweis: Die Linearität der Neumann-Dirichlet-Abbildungen folgt aus der Linearität der zugrunde liegenden Randwertprobleme. Aufgrund der Ergebnisse von Satz 2.3, bleibt nur, die Stetigkeit beider Neumann-Dirichlet-Abbildungen nachzuweisen. Wir beginnen mit der Referenzabbildung Λ_0 , deren Stetigkeit durch den Spursatz, s. [73, Kapitel 2, Sätze 6.5 und 7.2], kombiniert mit (2.23) gesichert wird, denn

$$\|\hat{u}_0\|_{H^{s+1}(T)} \leq C \|\hat{u}_0\|_{H^{s+3/2}(D)} \leq C \|f\|_{H^s(T)}.$$

$\hat{u} \in \mathcal{H}_s$ sei wie zuvor die Lösung von (2.20). Das C^∞ -Gebiet Ω umschlieÙe die Inhomogenität $\text{supp}(\sigma - 1)$ mit $\overline{\Omega} \subset D$. Ferner sei U eine Umgebung von $\Gamma = \partial\Omega$ in $D \setminus \text{supp}(\sigma - 1)$, und $\overline{U} \subset U_0$ für ein weiteres Gebiet U_0 mit $\overline{U_0} \subset D \setminus \text{supp}(\sigma - 1)$, vgl. die Voraussetzungen von Lemma 2.2. \hat{u} ist nun harmonisch in $(D \setminus \overline{\Omega}) \cup U_0$ und der Spursatz sowie [73, Kapitel 2, Bemerkung 7.2] ergeben, dass

$$\|\hat{u}\|_{H^{s+1}(T)} \leq C \|\hat{u}\|_{H^{s+3/2}(D \setminus \overline{\Omega})} \leq C \left(\|f\|_{H^s(T)} + \left\| \frac{\partial}{\partial \nu} \hat{u} \right\|_{H^s(\Gamma)} \right).$$

Wir wenden noch einmal den Spursatz an und erhalten mithilfe von Lemma 2.2 und Abschätzung (2.26), dass

$$\left\| \frac{\partial}{\partial \nu} \hat{u} \right\|_{H^s(\Gamma)} \leq C \|\hat{u}\|_{H^{s+3/2}(U)} \leq C \|\hat{u}\|_{H^{\min\{1, s+3/2\}}(U_0)} \leq C \|f\|_{H^s(T)}.$$

Insgesamt gilt

$$\|\hat{u}\|_{H^{s+1}(T)} \leq C \|f\|_{H^s(T)},$$

und Λ ist somit beschränkt.

Es bleibt zu zeigen, dass die Spur von $\hat{w} = \hat{u} - \hat{u}_0$ für beliebige $r \in \mathbb{R}$ in $H_\diamond^r(T)$ liegt. Dann liegt $\hat{w}|_T$ auch in $C_\diamond^\infty(T)$. Die Normalenableitung von \hat{w} verschwindet auf T , und unter Verwendung von (2.25) ergibt eine analoge Argumentation wie eben, dass

$$\begin{aligned} \|\hat{w}\|_{H^r(T)} &\leq C \left\| \frac{\partial}{\partial \nu} \hat{w} \right\|_{H^{r-1}(\Gamma)} \leq C \|\hat{w}\|_{H^{r+1/2}(U)} \\ &\leq C \|\hat{w}\|_{H^1(U_0)} \leq C \|f\|_{H^s(T)}. \end{aligned}$$

Es gilt also

$$\|(\Lambda - \Lambda_0)f\|_{H^r(T)} \leq C \|f\|_{H^s(T)}.$$

Die Behauptung ist nun gezeigt. \square

Wählen wir in Satz 2.4 den Exponenten $s = -3/2 - \varepsilon$, so ist der Ausdruck in Gleichung (2.22) wegen $\delta'_\theta \in H_\diamond^{-3/2-\varepsilon}(T)$ und $(\Lambda - \Lambda_0)\delta'_\theta \in C_\diamond^\infty(T)$ wohldefiniert.

Die Definition (2.18) beziehungsweise (2.22) der Rückstreudaten behält ihre Gültigkeit, wenn sich im Gebiet D ein perfekt leitender Einschluss Ω befindet. In einem perfekten Leiter gleichen sich Potentialunterschiede aus. Bei den Randwertproblemen (2.2) beziehungsweise (2.20) wird daher die Neumannbedingung auf Γ durch die Vorgabe konstanter Dirichletdaten ersetzt, das heißt

$$\Delta u = 0 \quad \text{in } D \setminus \overline{\Omega}, \quad \frac{\partial}{\partial \nu} u = \delta'_\theta \quad \text{auf } T, \quad u = \text{konstant auf } \Gamma. \quad (2.27)$$

Eindeutigkeit von u erhalten wir wieder durch die Normierungsbedingung (2.3).

Beispiel 2.5. Wir berechnen die Rückstreudaten für einen perfekt leitenden kreisförmigen Einschluss B_R , $R < 1$, der zentriert in D liegt, vgl. Beispiel 2.1. Die Rückstreudaten sind nur von R und nicht von θ abhängig, und wir bezeichnen sie für einen perfekt leitenden Einschluss mit β'_R . Das Potential u aus (2.27) lautet für $x = rx_t$, $r \in (R, 1)$ und $t \in [0, 2\pi)$:

$$u(x) = -\frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{1+R^{2k}} r^k - \frac{R^{2k}}{1+R^{2k}} r^{-k} \right) \sin kt.$$

Das relative Potential ist dann

$$w(x) = \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{R^{2k}}{1+R^{2k}} (r^k + r^{-k}) \sin kt,$$

und die Rückstreudaten haben den Wert

$$\beta'_R = -\frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} k \frac{R^{2k}}{1+R^{2k}} < 0. \quad (2.28)$$

β'_R ist als Funktion von R negativ und streng monoton fallend,

$$\lim_{R \rightarrow 0} \beta'_R = 0 \quad \text{und} \quad \lim_{R \rightarrow 1} \beta'_R = -\infty.$$

Wie im Fall des Isolators ist der Radius R aus dem Wert der Rückstreudaten eindeutig bestimmbar.

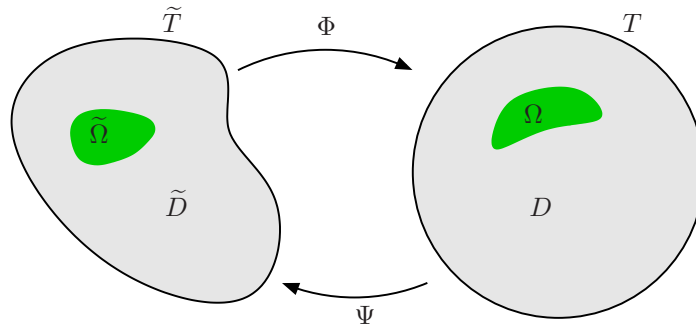


Abbildung 2.3: Konforme Abbildung eines Gebiets auf die Einheitskreisscheibe.

2.3 Rückstreuung auf einem beliebigen Gebiet

Die Rückstreufunktion für ein einfach zusammenhängendes Gebiet \tilde{D} mit analytischem Jordanrand lässt sich mithilfe einer konformen Koordinatentransformation auf den kreisförmigen Fall zurückführen. Wir identifizieren \mathbb{R}^2 mit der komplexen Ebene, indem wir einen Punkt $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ mit der komplexen Zahl $\xi(x) = x_1 + ix_2 \in \mathbb{C}$ gleichsetzen. Die bereits verwendete Parametrisierung des Einheitskreises $z_t = (\sin t, \cos t)$ lautet dann $z_t = e^{it}$ für $t \in [0, 2\pi)$. Entsprechend betrachten wir eine Menge U je nach Kontext als Untermenge von \mathbb{R}^2 oder \mathbb{C} .

$\tilde{D} \subset \mathbb{C}$ sei ein einfach zusammenhängendes Gebiet in der komplexen Ebene. Der Riemann'sche Abbildungssatz besagt, dass sich \tilde{D} konform auf die Einheitskreisscheibe $D \subset \mathbb{C}$ abbilden lässt. Eine *konforme Abbildung* von \tilde{D} nach D ist eine komplexe Funktion Φ , die holomorph ist und $\Phi'(\zeta) \neq 0$ für alle $\zeta \in \tilde{D}$ erfüllt. Während diese Bedingung nur lokale Umkehrbarkeit impliziert, fordern wir darüber hinaus, dass Φ injektiv ist. Selbstüberlappungen des Gebiets \tilde{D} sind damit ausgeschlossen, und die inverse Funktion $\Psi = \Phi^{-1}$ ist eine konforme Abbildung von D auf \tilde{D} . Der Begriff *konform* beschreibt auf folgende Weise die Abbildungseigenschaften einer solchen analytischen Funktion: Schneiden sich zwei Kurven in \tilde{D} mit Winkel α , so schneiden sich die Bilder der beiden Kurven unter Φ mit demselben Winkel. Insbesondere bleiben deshalb Normalen- und Tangentialableitungen unter einer konformen Koordinatentransformation bis auf Stauchungen beziehungsweise Streckungen erhalten.

Der Rand \tilde{T} des Gebiets \tilde{D} sei eine analytische Jordankurve. Dann lässt sich die konforme Abbildung Φ analytisch auf den Rand \tilde{T} und durch Spiegelung über ihn hinaus fortsetzen. Zu den hier genannten Eigenschaften konformer Abbildungen verweisen wir auf Henrici [47, Kapitel 5] und Ahlfors [2, Kapitel 3 und 6]. Abbildung 2.3 verdeutlicht die hier beschriebene Situation.

Der Riemann'sche Abbildungssatz beinhaltet eine Normierungsbedingung, die durch Festlegung eines Punktes $\zeta_0 \in \tilde{D}$ mit $\Phi(\zeta_0) = 0$ und $\Phi'(\zeta_0) > 0$ Eindeutigkeit der konformen Abbildung garantiert. Wir verzichten hier auf die Normierung und betrachten im Folgenden eine beliebige, aber fest gewählte konforme Abbildung Φ , die \tilde{D} auf D abbildet. Für Φ und Ψ verwenden wir meist komplexe Notation, ansonsten behalten wir die Vektornotation des \mathbb{R}^2

bei. Der Übersichtlichkeit halber verwenden wir im Definitionsbereich von Φ griechische Variablen, $\zeta = \lambda + i\eta$, und im Bildbereich lateinische wie bisher, $z = x + iy$. Wir bezeichnen den Real- und Imaginärteil von Φ mit Φ_1 respektive Φ_2 . Da Φ die Cauchy-Riemann'schen Differentialgleichungen erfüllt, gilt

$$\Phi'(\zeta) = \frac{\partial}{\partial \lambda} \Phi_1(\zeta) + i \frac{\partial}{\partial \lambda} \Phi_2(\zeta).$$

Durch $\chi(t) := \Psi(z_t)$, $t \in [0, 2\pi)$, erhalten wir eine reguläre, positiv orientierte Parametrisierung von \tilde{T} mit $\chi'(t) = i\Psi'(z_t)z_t \neq 0$ für alle $t \in [0, 2\pi)$, vgl. [81, Abschnitt 2.4]. Wir bezeichnen die Punkte auf \tilde{T} auch mit $\zeta_t = \chi(t)$. Ist $\chi(t) = \chi_1(t) + i\chi_2(t)$ mit Real- und Imaginärteil χ_1 beziehungsweise χ_2 , so lauten der Tangential- und der äußere Normalenvektor an \tilde{T} im Punkt ζ_t :

$$\tau_{\zeta_t} = |\Phi'(\zeta_t)| (\chi_1'(t), \chi_2'(t))^T \quad \text{und} \quad \nu_{\zeta_t} = |\Phi'(\zeta_t)| (\chi_2'(t), -\chi_1'(t))^T.$$

Aufgrund der Konformität von Φ ergibt sich daraus für die Tangential- und Normalenableitungen einer Funktion $\tilde{v} = v \circ \Phi$, dass

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \tilde{v}(\zeta_t) = |\Phi'(\zeta_t)| \frac{\partial}{\partial \tau} v(z_t) \quad \text{und} \quad \frac{\partial}{\partial \nu} \tilde{v}(\zeta_t) = |\Phi'(\zeta_t)| \frac{\partial}{\partial \nu} v(z_t).$$

Der Winkel $\theta \in [0, 2\pi)$ sei beliebig, aber im Folgenden fest gewählt. Analog zu (2.1) bezeichnen wir die Tangentialableitung der Deltadistribution in ζ_θ mit $\tilde{\delta}'_\theta$. Sie ist definiert durch

$$\langle \tilde{\delta}'_\theta, \tilde{v} \rangle_{H^{-3/2-\varepsilon}(\tilde{T}) \times H^{3/2+\varepsilon}(\tilde{T})} = -\frac{\partial}{\partial \tau} \tilde{v}(\zeta_\theta)$$

für alle $\tilde{v} \in H^{3/2+\varepsilon}(\tilde{T})$, vgl. die Definition der Sobolevräume auf \tilde{T} in [65, Abschnitt 8.2]. Eine einfache Rechnung zeigt, dass diese Definition von der jeweiligen Parametrisierung von \tilde{T} und damit auch von der konformen Abbildung Ψ unabhängig ist.

Lemma 2.6. $(f_n)_n \subset C^\infty(T)$ konvergiere in der Topologie von $H^{-3/2-\varepsilon}(T)$ gegen δ'_θ . Wir definieren eine Folge in $C^\infty(\tilde{T})$ durch

$$\tilde{f}_n(\zeta) := |\Phi'(\zeta_\theta)| (f_n \circ \Phi)(\zeta) |\Phi'(\zeta)|, \quad \zeta \in \tilde{T}.$$

Dann konvergiert die Folge $(\tilde{f}_n)_n$ in $H^{-3/2-\varepsilon}(\tilde{T})$ gegen $\tilde{\delta}'_\theta$.

Beweis: Für eine Funktion $\tilde{v} \in H^{3/2+\varepsilon}(\tilde{T})$ liegt die transformierte Funktion $v := \tilde{v} \circ \Psi$ in $H^{3/2+\varepsilon}(T)$ und

$$\|v\|_{H^{3/2+\varepsilon}(T)} \leq C \|\tilde{v}\|_{H^{3/2+\varepsilon}(\tilde{T})} \quad (2.29)$$

mit einer von \tilde{v} unabhängigen Konstanten $C > 0$, vgl. Adams [1, Satz 3.35]. Es gilt

$$\begin{aligned} \left| \langle \tilde{f}_n - \tilde{\delta}'_\theta, \tilde{v} \rangle \right| &= \left| \int_{\tilde{T}} \tilde{f}_n \tilde{v} \, ds + \frac{\partial}{\partial \tau} \tilde{v}(\zeta_\theta) \right| \\ &= |\Phi'(\zeta_\theta)| \left| \int_{\tilde{T}} (f_n \circ \Phi)(v \circ \Phi) |\Phi'| \, ds + \frac{\partial}{\partial \tau} v(z_\theta) \right| \\ &= |\Phi'(\zeta_\theta)| \left| \int_T f_n v \, ds + \frac{\partial}{\partial \tau} v(z_\theta) \right| \\ &= |\Phi'(\zeta_\theta)| |\langle f_n - \delta'_\theta, v \rangle|. \end{aligned} \quad (2.30)$$

Wegen (2.29) können wir in (2.30) das Supremum über alle $\tilde{v} \in H^{-3/2-\varepsilon}(\tilde{T})$ bilden und erhalten

$$\left\| \tilde{f}_n - \tilde{\delta}'_\theta \right\|_{H^{-3/2-\varepsilon}(\tilde{T})} \leq C |\Phi'(\zeta_\theta)| \|f_n - \delta'_\theta\|_{H^{-3/2-\varepsilon}(T)} \rightarrow 0 \quad \text{für } n \rightarrow \infty.$$

Damit ist die Behauptung gezeigt. \square

Die Folge $(f_n)_n \subset C^\infty_\diamond(T)$ konvergiere also gegen δ'_θ und die transformierte Folge $(\tilde{f}_n)_n \subset C^\infty_\diamond(\tilde{T})$ entsprechend gegen $\tilde{\delta}'_\theta$. $u_{0,n}$ seien die zu den f_n gehörigen Referenzpotentiale aus (2.7), die in $H^{-\varepsilon}(D)$ gegen u_0 aus (2.8) konvergieren. Da harmonische Funktionen unter konformen Koordinatentransformationen harmonisch bleiben, lösen die Potentiale

$$\tilde{u}_{0,n}(\zeta) = |\Phi'(\zeta_\theta)| (u_{0,n} \circ \Phi)(\zeta) + c_{0,n}$$

die Randwertprobleme

$$\Delta \tilde{u}_{0,n} = 0 \quad \text{in } \tilde{D}, \quad \frac{\partial}{\partial \nu} \tilde{u}_{0,n} = \tilde{f}_n \quad \text{auf } \tilde{T}$$

mit Konstanten $c_{0,n}$, die jeweils

$$\int_{\tilde{T}} \tilde{u}_{0,n} \, ds = 0$$

sicherstellen. Für das Referenzpotential \tilde{u}_0 gilt die entsprechende Beziehung

$$\tilde{u}_0(\zeta) = |\Phi'(\zeta_\theta)| (u_0 \circ \Phi)(\zeta) + c_0$$

mit einer Konstanten c_0 , die die Normierungsbedingung garantiert. Da die Koordinatentransformation eine stetige lineare Abbildung von $H^{-\varepsilon}(D)$ nach $H^{-\varepsilon}(\tilde{D})$ ist, vgl. [1, Satz 3.35], folgt aus der Konvergenz der $u_{0,n}$ gegen u_0 in $H^{-\varepsilon}(D)$ die Konvergenz der transformierten Folge $(\tilde{u}_{0,n})_n$ gegen \tilde{u}_0 in $H^{-\varepsilon}(\tilde{D})$.

Im Gebiet $\tilde{D} \subset \mathbb{C}$ befinde sich ein isolierendes, einfach zusammenhängendes Gebiet $\tilde{\Omega}$ mit $C^{2+\alpha}$ -Rand $\tilde{\Gamma} = \partial \tilde{\Omega}$, $\alpha > 0$. Der Isolator $\tilde{\Omega}$ wird von Φ auf ein einfach zusammenhängendes Gebiet $\Omega = \Phi(\tilde{\Omega})$ abgebildet und die Ränder $\Gamma = \partial \Omega$ und $\tilde{\Gamma}$ korrespondieren unter Φ . Wie zuvor untersuchen wir das elektrostatische Potential \tilde{u} , das durch den Randstrom $\tilde{\delta}'_\theta$ in \tilde{D} erzeugt wird:

$$\Delta \tilde{u} = 0 \quad \text{in } \tilde{D} \setminus \overline{\tilde{\Omega}}, \quad \frac{\partial}{\partial \nu} \tilde{u} = \tilde{\delta}'_\theta \quad \text{auf } \tilde{T}, \quad \frac{\partial}{\partial \nu} \tilde{u} = 0 \quad \text{auf } \tilde{\Gamma} \quad (2.31)$$

mit Normierung

$$\int_{\tilde{T}} \tilde{u} \, ds = 0. \quad (2.32)$$

Lemma 2.7. Die Funktion

$$\tilde{u}(\zeta) = |\Phi'(\zeta_\theta)| (u \circ \Phi)(\zeta) + c \quad (2.33)$$

mit u aus (2.2) löst (2.31). \tilde{u} erfüllt die Normierungsbedingung (2.32), wenn

$$c = -|\Phi'(\zeta_\theta)| \int_T u(z) |\Psi'(z)| \, ds(z).$$

Beweis: Wir beweisen die Relation (2.33) zuerst für stetige Potentiale, die von glatten Randströme herrühren. Dazu beginnen wir mit einer beliebigen Folge $(f_n)_n \subset C_\infty^\infty(T)$, die in $H^{-3/2-\varepsilon}(T)$ gegen δ'_θ konvergiert. Zu dem Randstrom f_n sei $u_n \in C^1(\overline{D} \setminus \Omega)$ die Lösung des Randwertproblems

$$\Delta u_n = 0 \text{ in } D \setminus \overline{\Omega}, \quad \frac{\partial}{\partial \nu} u_n = f_n \text{ auf } T, \quad \frac{\partial}{\partial \nu} u_n = 0 \text{ auf } \Gamma$$

unter der Bedingung

$$\int_T u_n \, ds = 0.$$

Wir leiten eine Darstellung von u_n wie in Abschnitt 2.1 her. Dazu definieren wir wie in (2.14) das relative Potential

$$w_n(z) = \int_\Gamma N(z, x) \psi_n(x) \, ds(x), \quad z \in D \setminus \overline{\Omega},$$

mit einer stetigen Dichtefunktion ψ_n , die (2.15) mit $u_{0,n}$ anstelle von u_0 löst. Da die $u_{0,n}$ harmonisch in D sind, konvergieren sie und ihre Ableitungen lokal gleichmäßig. Insbesondere konvergiert $\partial u_{0,n}/\partial \nu$ gleichmäßig gegen $\partial u_0/\partial \nu$ auf Γ , vgl. Dautray und Lions [19, Kapitel II, §2.3]. Da der Operator in (2.15) beschränkt ist, konvergieren die Dichten ψ_n gleichmäßig gegen ψ , und damit konvergiert auch die Folge der Einfachschichtpotentiale w_n auf $\overline{D} \setminus \Omega$ gleichmäßig gegen w aus (2.14). Insgesamt konvergiert also die Folge der $u_n = u_{0,n} + w_n$ in der $H^{-\varepsilon}(D \setminus \overline{\Omega})$ -Topologie gegen das Potential u aus (2.2). Wir definieren

$$\tilde{u}_n(\zeta) := |\Phi'(\zeta_\theta)| (u_n \circ \Phi)(\zeta) + c_n$$

mit Konstanten c_n , die

$$\int_{\tilde{T}} \tilde{u}_n \, ds = 0$$

garantieren. \tilde{u}_n ist harmonisch in $\tilde{D} \setminus \overline{\tilde{\Omega}}$, und wegen

$$\frac{\partial}{\partial \nu} \tilde{u}_n(\zeta) = |\Phi'(\zeta_\theta)| |\Phi'(\zeta)| \frac{\partial}{\partial \nu} u_n(\Phi(\zeta)) \quad \text{für } \zeta \in \tilde{T} \cup \tilde{\Gamma}$$

löst \tilde{u}_n das Randwertproblem

$$\Delta \tilde{u}_n = 0 \text{ in } \tilde{D} \setminus \overline{\tilde{\Omega}}, \quad \frac{\partial}{\partial \nu} \tilde{u}_n = \tilde{f}_n \text{ auf } \tilde{T}, \quad \frac{\partial}{\partial \nu} \tilde{u}_n = 0 \text{ auf } \tilde{\Gamma}.$$

Die \tilde{u}_n konvergieren gegen \tilde{u} aus (2.33), denn

$$\|\tilde{u}_n - \tilde{u}\|_{H^{-\varepsilon}(\tilde{D} \setminus \overline{\tilde{\Omega}})} \leq C \|u_n - u\|_{H^{-\varepsilon}(D \setminus \overline{\Omega})} \rightarrow 0 \quad \text{für } n \rightarrow \infty.$$

Insbesondere gilt wegen der Stetigkeit der Spurabbildung und der Konvergenz von $(\tilde{f}_n)_n$ gegen $\tilde{\delta}'_\theta$, dass

$$\frac{\partial}{\partial \nu} \tilde{u} = \tilde{\delta}'_\theta.$$

Das ist die Behauptung. \square

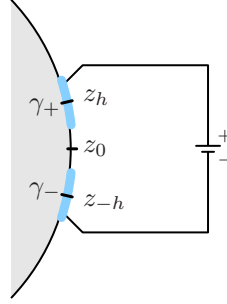


Abbildung 2.4: Elektrodenanordnung in Abschnitt 2.4.

Die beiden relativen Potentiale w und $\tilde{w} = \tilde{u} - \tilde{u}_0$ stehen Lemma 2.7 zufolge in der Beziehung

$$\tilde{w}(\zeta) = |\Phi'(\zeta_\theta)| (w \circ \Phi)(\zeta) + c - c_0,$$

und \tilde{w} hat die Tangentialableitung

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \tilde{w}(\zeta_t) = |\Phi'(\zeta_\theta)| |\Phi'(\zeta_t)| \frac{\partial}{\partial \tau} w(\Phi(\zeta_t)). \quad (2.34)$$

Wir definieren die Rückstreudaten im Punkt ζ_θ für das Gebiet \tilde{D} wie in Abschnitt 2.1 durch

$$\tilde{b}(\theta) := - \left(\frac{\partial}{\partial \tau} \tilde{w}|_{\tilde{\Gamma}} \right) (\zeta_\theta).$$

Durchläuft θ die Werte $[0, 2\pi)$, so ergibt sich mithilfe von (2.34) die reelle Rückstreuungsfunktion

$$\tilde{b}(\theta) = |\Phi'(\zeta_\theta)|^2 b(\theta), \quad \theta \in [0, 2\pi). \quad (2.35)$$

Bemerkung 2.8. Die in diesem Abschnitt durchgeführten Rechnungen und insbesondere Lemma 2.7 gelten auch, wenn $\tilde{\Omega}$ und entsprechend Ω perfekt leitende Einschlüsse sind. Die Neumannbedingung auf $\tilde{\Gamma}$ in (2.31) muss dann durch eine konstante Dirichletvorgabe ersetzt werden. Da die Ränder $\tilde{\Gamma}$ und Γ unter Φ korrespondieren, ist $u \circ \Phi$ und damit wegen (2.33) auch \tilde{u} konstant auf $\tilde{\Gamma}$. Mit (2.33) behält auch Gleichung (2.35) ihre Gültigkeit für perfekt leitende Einschlüsse.

2.4 Approximation einer Elektrodenmessung

Dieser Abschnitt beschreibt den Zusammenhang zwischen Rückstreudaten und einer Messung des elektrostatischen Potentials mit zwei kleinen Elektroden, die am Rand des Messobjekts nahe beieinander angebracht sind. Wir modellieren die Elektroden mit dem sogenannten *Lückenmodell* (engl. *gap model*). Hierbei wird der Strom, der durch Elektroden angelegt wird, durch charakteristische Funktionen auf der Kontaktfläche zwischen Elektrode und Messobjekt

modelliert. Das Lückenmodell ist eine intuitive, wenn auch ungenaue Approximation, vgl. beispielsweise [9, 85]. Wir verwenden es hier, weil es das Konzept der Rückstreuung auf einfache Weise motiviert und verdeutlicht. Ein genaueres Modell ist das *vollständige Elektrodenmodell* [53, 85]. Für eine Untersuchung der Rückstreudaten im Kontext dieses Modells verweisen wir auf die Arbeit [38] von Hanke, Harrach und Hyvönen. Wir betrachten hier wieder die Einheitskreisscheibe D mit einem isolierenden einfach zusammenhängenden Gebiet $\Omega \subset D$ und approximieren eine Rückstreuung an der Stelle $\theta = 0$, das heißt im Punkt $z_\theta = (1, 0)$. Zwei Elektroden der Länge $h > 0$ seien am Rand von D an den Positionen $\gamma_+ = \gamma_+^h = \{z_t : t \in [h/2, 3h/2]\}$ und $\gamma_- = \gamma_-^h = \{z_t : z_{-t} \in \gamma_+\}$ angebracht, und es fließe ein Strom von γ_- nach γ_+ , s. Abbildung 2.4. Das resultierende Potential u_h erfüllt bei entsprechender Normierung im Lückenmodell das Randwertproblem

$$\Delta u_h = 0 \quad \text{in } D \setminus \overline{\Omega}, \quad \frac{\partial}{\partial \nu} u_h = f_h \quad \text{auf } T, \quad \int_T u_h \, ds = 0 \quad (2.36)$$

mit

$$f_h := -\frac{1}{2h^2} (\mathbf{1}_{\gamma_+} - \mathbf{1}_{\gamma_-}) \in L^2_\diamond(T),$$

wobei $\mathbf{1}_{\gamma_\pm}$ die charakteristische Funktion auf der Elektrodenfläche $\gamma_\pm \subset T$ bezeichne. Der Strom f_h ist so normiert, dass f_h für $h \rightarrow 0$ den Tangentialdipol δ'_0 approximiert, s. (2.41). Im Lückenmodell beschreibt $2hf_h$ einen Strom der Stärke einer Einheit, der von γ_- zu γ_+ fließt. Wir bezeichnen mit $u_{0,h}$ das Referenzpotential zu (2.36), das heißt

$$u_{0,h}(z) = \int_T N(z, z_t) f_h(z_t) \, ds(z_t), \quad z \in D,$$

vgl. Gleichung (2.7). Das entsprechende relative Potential $w_h = u_h - u_{0,h}$ lässt sich wie in Abschnitt 2.1 als Einfachschichtpotential über Γ darstellen mit Dichte $\psi_h \in C_\diamond(\Gamma)$:

$$w_h(z) = \int_\Gamma N(z, x) \psi_h(x) \, ds(x), \quad z \in D \setminus \Gamma. \quad (2.37)$$

Die Dichte ψ_h ist die Lösung von

$$\left(-\frac{1}{2} \text{Id} + K_\Gamma^* \right) \psi_h = -\frac{\partial}{\partial \nu} u_{0,h} \Big|_\Gamma. \quad (2.38)$$

Das Lückenmodell besagt, dass die an beiden Elektroden γ_\pm gemessenen relativen Potentiale den Wert

$$W_\pm := \frac{1}{h} \int_{\gamma_\pm} w_h(z_t) \, ds(z_t)$$

haben. Wir zeigen die Beziehung

$$W_- - W_+ = -2h \left(\frac{\partial}{\partial \tau} w \Big|_T \right) (z_0) + O(h^3) \quad (2.39)$$

mit w aus (2.14). Im Lückenmodell sind die Rückstreudaten demnach eine Approximation zweiter Ordnung an die zwischen zwei Elektroden der Länge h und im Abstand h gemessene Potentialdifferenz.

Wir zeigen zuerst, dass die Familie von Randströmen f_h für $h \rightarrow 0$ gegen δ'_0 in $H^{-4}(T)$ konvergiert. Im Verlauf der folgenden Rechnungen bezeichne C eine Konstante, deren Wert variiert, aber einzig von Γ abhängt. Eine Funktion $v \in H^4(T)$ hat laut Sobolev'schem Einbettungssatz eine zweimal stetig differenzierbare Ableitung nach der Bogenlänge $\partial v / \partial s \in H^3(T)$, s. beispielsweise [81, Lemma 5.3.3]. Diese erfüllt

$$\sum_{l=0}^3 \sup_{t \in [0, 2\pi]} \left| \frac{\partial^l v}{\partial s^l}(z_t) \right| \leq C \|v\|_{H^4(T)}.$$

Aus diesem Grund kann $\partial v / \partial s$ durch zentrale Differenzenquotienten approximiert werden, s. Hackbusch [28, Lemma 4.1.1], und wir erhalten

$$\sup_{|t| \leq 3h/2} \left| \frac{v(z_t) - v(z_{-t})}{2t} - \frac{\partial v}{\partial s}(z_0) \right| \leq Ch^2 \|v\|_{H^4(T)}.$$

Dies ermöglicht eine Abschätzung der distributionellen Auswertung von f_h an $v \in H^4(T)$:

$$\begin{aligned} \left| \langle f_h, v \rangle + \frac{\partial v}{\partial s}(z_0) \right| &\leq \frac{1}{2h^2} \int_{h/2}^{3h/2} 2t \left| \frac{v(z_t) - v(z_{-t})}{2t} - \frac{\partial v}{\partial s}(z_0) \right| dt \\ &\leq Ch^2 \|v\|_{H^4(T)}. \end{aligned} \quad (2.40)$$

Aus (2.40) folgt für $h \rightarrow 0$ die Konvergenz von f_h gegen δ'_0 in der Topologie von $H^{-4}(T)$, das heißt

$$\|f_h - \delta'_0\|_{H^{-4}(T)} \leq Ch^2. \quad (2.41)$$

Als Nächstes zeigen wir, dass die Dichten ψ_h gleichmäßig gegen ψ aus (2.15) konvergieren: Die Normalenableitung von $u_{0,h}$ auf Γ lautet

$$\frac{\partial}{\partial \nu} u_{0,h}(z) = \left\langle f_h, \frac{\partial}{\partial z \nu} N(z, \cdot) \right\rangle \quad \text{für } z \in \Gamma.$$

Die Normalenableitung der Neumannfunktion $\partial N(z, \cdot) / \partial z \nu$ ist in der $H^4(T)$ -Norm für alle $z \in \Gamma$ gleichmäßig beschränkt. Daher können wir v in (2.40) durch $\partial N(z, \cdot) / \partial z \nu$ ersetzen. Dies ergibt zusammen mit der Definition von u_0 in (2.8), dass

$$\sup_{z \in \Gamma} \left| \frac{\partial}{\partial \nu} u_{0,h}(z) - \frac{\partial}{\partial \nu} u_0(z) \right| \leq Ch^2 \left\| \frac{\partial}{\partial z \nu} N(z, \cdot) \right\|_{H^4(T)} \leq Ch^2.$$

Wie in Abschnitt 2.1 erläutert, ist der Operator in (2.38) stetig invertierbar auf $C_\diamond(\Gamma)$. Daraus folgt die gewünschte Abschätzung:

$$\|\psi_h - \psi\|_{C(\Gamma)} \leq Ch^2.$$

Die Konvergenz der Dichten überträgt sich auf die relativen Potentiale aus (2.14) und (2.37):

$$\begin{aligned} \left\| \frac{\partial}{\partial \tau} w_h - \frac{\partial}{\partial \tau} w \right\|_{C(T)} &\leq \sup_{z \in T} \int_{\Gamma} \left| \frac{\partial}{\partial z \tau} N(z, x) \right| ds(x) \|\psi_h - \psi\|_{C(\Gamma)} \\ &\leq Ch^2. \end{aligned} \quad (2.42)$$

Da sich der Integrand in (2.37) für $z = z_t \in T$ beliebig oft nach der Bogenlänge differenzieren lässt, sind die Ableitungen von $w_h|_T$ wohldefiniert, und $w_h|_T$ konvergiert auch in $H^4(T)$ für $h \rightarrow 0$ gegen $w|_T$. Infolgedessen gilt, dass

$$\frac{W_- - W_+}{2h} = -\frac{1}{2h^2} \int_{\gamma_+} (w_h(z_t) - w_h(z_{-t})) \, ds(z_t) = \langle f_h, w_h \rangle,$$

und damit

$$\begin{aligned} \left| \frac{W_- - W_+}{2h} + \left(\frac{\partial}{\partial \tau} w|_T \right) (z_0) \right| &= |\langle f_h - \delta'_0, w_h \rangle + \langle \delta'_0, w_h - w \rangle| \\ &\leq \|f_h - \delta'_0\|_{H^{-4}(T)} \|w_h\|_{H^4(T)} + \left\| \frac{\partial}{\partial \tau} w_h - \frac{\partial}{\partial \tau} w \right\|_{C(T)}. \end{aligned}$$

Zusammen mit (2.41) und (2.42) ergibt dies das gewünschte Resultat (2.39). Wir haben somit folgende Interpretation der Rückstreudaten im Lückenmodell gerechtfertigt: Für einen Strom einer Einheitsstärke, das heißt der Form $2hf_h$, der von γ_- nach γ_+ fließt, entspricht die Potentialdifferenz zwischen den Elektroden γ_- und γ_+ einem Wert $4h^2b(0) + O(h^4)$. Die im Term vierter Ordnung vorkommenden Konstanten hängen von Γ und damit vom Einschluss Ω ab. Die Rückstreudaten können also als Term führender Ordnung aus der asymptotischen Entwicklung gemessener Daten gewonnen werden.

3 Eigenschaften der Rückstreuungsfunktion

3.1 Holomorphie

3.1.1 Faktorisierung der Neumann-Dirichlet-Abbildung

In diesem Abschnitt zeigen wir, dass die Rückstreudaten als holomorphe Funktion in den Bereich fortgesetzt werden können, in dem die Leitfähigkeit homogen ist. Dies gelingt mittels einer Zerlegung der in Abschnitt 2.2 eingeführten Neumann-Dirichlet-Abbildung. Wir modifizieren dazu die der sogenannten *Faktorisierungsmethode* zugrunde liegende Faktorisierung von $\Lambda - \Lambda_0$, s. zum Beispiel Brühl [12] sowie Hanke und Kirsch [44, Abschnitt 1.2.2]. Während in diesen Arbeiten die Neumann-Dirichlet-Abbildungen als Operatoren von $H_\diamond^{-1/2}(T)$ nach $H_\diamond^{1/2}(T)$ untersucht werden, konstruieren wir hier eine Faktorisierung für $\Lambda - \Lambda_0 : H_\diamond^{-s}(T) \rightarrow H_\diamond^s(T)$, $s > 0$. Eine ähnliche Faktorisierung für Rückstreudaten wurde von Hanke in [36] hergeleitet.

Die elektrische Leitfähigkeit σ genüge den Voraussetzungen aus Abschnitt 2.2, das heißt, $\sigma \in L^\infty(D)$ sei strikt positiv und $\text{supp}(\sigma - 1)$ sei eine kompakte Teilmenge von D . Die offene Menge $\Omega \subset D$ überdecke $\text{supp}(\sigma - 1)$ und bestehe aus endlich vielen einfach zusammenhängenden Komponenten Ω_j , $j = 1, \dots, m$, mit C^∞ -Rändern $\Gamma_j \subset D$ und $\overline{\Omega}_i \cap \overline{\Omega}_j = \emptyset$ für $i \neq j$. Insbesondere ist $\sigma \equiv 1$ in einer Umgebung des Randes T sowie in einer Umgebung der Ränder Γ_j , $j = 1, \dots, m$.

Der Dualraum von $H_\diamond^s(T)$ kann auf folgende Weise mit $H_\diamond^{-s}(T)$ identifiziert werden: Der Raum $H_\diamond^s(T)$ ist der Kern der linearen Abbildung $N : H^s(T) \rightarrow \mathbb{C}$, $g \mapsto \langle g, 1 \rangle$. Der Annihilator des Kerns von N sind die konstanten Funktionen $\text{span}\{\mathbf{1}\}$ mit $\mathbf{1}(z) \equiv 1$ für alle $z \in T$. Der Homomorphiesatz (s. zum Beispiel Werner [92, Satz III.1.10]) liefert $(H_\diamond^s(T))' \cong H^{-s}(T)/\text{span}\{\mathbf{1}\}$. Schließlich identifizieren wir eine Äquivalenzklasse im Raum $H^{-s}(T)/\text{span}\{\mathbf{1}\}$ mit demjenigen Vertreter, dessen Randintegral über T verschwindet.

Auf dem Rand $\Gamma = \bigcup \Gamma_j$ benötigen wir die Räume

$$H_\diamond^{\pm 1/2}(\Gamma) := H_\diamond^{\pm 1/2}(\Gamma_1) \oplus \dots \oplus H_\diamond^{\pm 1/2}(\Gamma_m).$$

Der Index \diamond bezieht sich in diesem Fall auf das Integralmittel über die Randkomponenten Γ_j , also

$$H_\diamond^{\pm 1/2}(\Gamma_j) = \{f \in H^{\pm 1/2}(\Gamma_j) : \langle f, 1 \rangle_{\Gamma_j} = 0\}.$$

Der Dualraum von $H_\diamond^{1/2}(\Gamma_j)$ ist aufgrund der gleichen Argumentation wie eben $H_\diamond^{-1/2}(\Gamma_j)$ und entsprechend

$$\left(H_\diamond^{1/2}(\Gamma)\right)' \cong H_\diamond^{-1/2}(\Gamma).$$

Wir konstruieren nun eine Faktorisierung

$$\Lambda - \Lambda_0 = R'FR: H_\diamond^{-s}(T) \rightarrow H_\diamond^s(T)$$

für $s > 0$ mit beschränkten linearen Operatoren F und R .

Der Operator R ist über das Randwertproblem

$$\begin{aligned} \Delta v &= 0 \quad \text{in } D \setminus \overline{\Omega}, & \frac{\partial}{\partial \nu} v &= f \quad \text{auf } T, \\ \frac{\partial}{\partial \nu} v &= 0 \quad \text{auf } \Gamma, & \int_T v \, ds &= 0 \end{aligned} \tag{3.1}$$

definiert. Und zwar bildet R den Randstrom $f \in H_\diamond^{-s}(T)$ auf die Spur $Rf = v|_\Gamma - \sum c_j \mathbf{1}_{\Gamma_j} \in H_\diamond^{1/2}(\Gamma)$ ab mit Konstanten $c_j = \langle v, 1 \rangle_{\Gamma_j} / |\Gamma_j|$. Dabei bezeichnen wir mit $\mathbf{1}_{\Gamma_j} : \Gamma \rightarrow \mathbb{R}$ die charakteristische Funktion auf Γ_j . Die Lösung v von (3.1) liegt in $H_{\text{loc}}^1(D \setminus \overline{\Omega})$, vgl. Lemma 2.2. Der Operator R ist die Verkettung des Lösungsoperators von (3.1) mit dem Spuroperator und der Auswertung $\langle \cdot, 1 \rangle$ auf Γ und daher linear und beschränkt, vgl. Lions und Magenes [73, Kapitel 1, Satz 9.4 und Kapitel 2, Bemerkung 7.2].

Der zu R duale Operator ist gegeben durch $R' : \varphi \mapsto w|_T$, wobei w das Randwertproblem

$$\begin{aligned} \Delta w &= 0 \quad \text{in } D \setminus \overline{\Omega}, & \frac{\partial}{\partial \nu} w &= 0 \quad \text{auf } T, \\ \frac{\partial}{\partial \nu} w &= -\varphi \quad \text{auf } \Gamma, & \int_T w \, ds &= 0 \end{aligned} \tag{3.2}$$

für $\varphi \in H_\diamond^{-1/2}(\Gamma)$ löst. Die Lösung $w \in H_\diamond^1(D \setminus \overline{\Omega})$ ist harmonisch, und die Einschränkung von w auf den Randstreifen $U_\varepsilon = \{x \in D : |x| > 1 - \varepsilon\} \subset D \setminus \overline{\Omega}$ für ein geeignetes $\varepsilon > 0$ löst das Neumannproblem für den Laplaceoperator auf U_ε zur Randvorgabe $(\partial w / \partial \nu)|_{\partial U_\varepsilon}$. Auf $T_\varepsilon = \{x \in D : |x| = 1 - \varepsilon\}$ ist die Randbedingung $\partial w / \partial \nu$ glatt, da w in einer Umgebung von T_ε harmonisch ist, und $\partial w / \partial \nu = 0$ auf T wegen (3.2). Die Stetigkeit des Lösungsoperators für dieses Neumannproblem und des Spurooperators führen auf

$$\|w\|_{H^s(T)} \leq C \|w\|_{H^{s+1/2}(U_\varepsilon)} \leq C \left\| \frac{\partial}{\partial \nu} w \right\|_{H^{s-1}(\partial U_\varepsilon)} = C \left\| \frac{\partial}{\partial \nu} w \right\|_{H^{s-1}(T_\varepsilon)},$$

und $w|_T$ gehört folglich zu $H_\diamond^s(T)$ für alle $s > 0$. Die Dualität von R und R' ergibt sich aus der Green'schen Formel:

$$\begin{aligned} \langle Rf, \varphi \rangle_\Gamma &= \int_\Gamma v \varphi \, ds - \sum_{j=1}^m c_j \int_{\Gamma_j} \varphi \, ds = \int_T v \frac{\partial}{\partial \nu} w \, ds - \int_\Gamma v \frac{\partial}{\partial \nu} w \, ds \\ &= \int_T w \frac{\partial}{\partial \nu} v \, ds - \int_\Gamma w \frac{\partial}{\partial \nu} v \, ds = \int_T w \frac{\partial}{\partial \nu} v \, ds = \langle f, w \rangle_T \\ &= \langle f, R'\varphi \rangle_T \end{aligned}$$

für $f \in H_{\diamond}^{-s}(T)$ und $\varphi \in H_{\diamond}^{-1/2}(\Gamma)$.

Der mittlere Operator der Faktorisierung ist schließlich über die Lösung des Transmissionsproblem

$$\begin{aligned} \nabla \cdot (\sigma \nabla h) &= 0 \quad \text{in } D \setminus \Gamma, & \frac{\partial}{\partial \nu} h &= 0 \quad \text{auf } T, \\ h^+ - h^- &= \psi \quad \text{auf } \Gamma, & \frac{\partial}{\partial \nu} h^+ - \frac{\partial}{\partial \nu} h^- &= 0 \end{aligned} \quad (3.3)$$

für die Vorgabe $\psi \in H_{\diamond}^{1/2}(\Gamma)$ definiert. Die Superskripte $+$ und $-$ bezeichnen die Spur einer Funktion bezüglich $D \setminus \overline{\Omega}$ beziehungsweise Ω . Die Funktion h_0 löse das entsprechende Problem für die homogene Leitfähigkeit $\sigma \equiv 1$. Das Transmissionsproblem (3.3) hat eine eindeutige Lösung in $H^1(D \setminus \Gamma)$, die stetig von ψ abhängt. Im homogenen Fall lässt sich die Lösung als Einfachschichtpotential mit Dichte ψ darstellen, und im allgemeinen Fall muss ein geeignetes Variationsproblem gelöst werden, vgl. beispielsweise Hanke und Kirsch [44, Abschnitt 1.2.2].

Der Operator F bildet die Funktion ψ auf die Normalenableitung von $h - h_0$ auf Γ ab, das heißt

$$F : H_{\diamond}^{1/2}(\Gamma) \rightarrow H_{\diamond}^{-1/2}(\Gamma), \quad \psi \mapsto \frac{\partial}{\partial \nu}(h - h_0)|_{\Gamma}.$$

Da die Normalenableitung von $h - h_0$ über Γ keinen Sprung hat, ist F wohldefiniert. Ferner ist F stetig und stimmt mit seinem dualen Operator überein, vgl. wieder [44, Abschnitt 1.2.2]. F kann zu einem stetigen Operator $H_{\diamond}^s(\Gamma) \rightarrow H_{\diamond}^{-s}(\Gamma)$ fortgesetzt werden. Um das einzusehen, sei U_0 eine C^{∞} -Umgebung des Randes Γ mit $\overline{U_0} \subset D \setminus \text{supp}(\sigma - 1)$. Das Potential $h - h_0$ ist dann harmonisch in $((D \setminus \overline{\Omega}) \cup U_0) \setminus \Gamma$, und der Sprung von $h - h_0$ und von $\partial(h - h_0)/\partial \nu$ über Γ ist jeweils null, da sowohl h als auch h_0 die Sprungbedingungen über Γ aus (3.3) erfüllen. Daher ist $h - h_0$ harmonisch in ganz $D \setminus \overline{\Omega} \cup U_0$, vgl. Dautray und Lions [19, Kapitel II, §2, Proposition 17]. Wie im Beweis zu Satz 2.4 erhalten wir

$$\left\| \frac{\partial}{\partial \nu}(h - h_0) \right\|_{H^t(\Gamma)} \leq C \|h - h_0\|_{H^1(U_0)} \leq C \|\psi\|_{H^{1/2}(\Gamma)}$$

für $t \in \mathbb{R}$. F ist also eine beschränkte Abbildung $H_{\diamond}^{1/2}(\Gamma) \rightarrow H_{\diamond}^t(\Gamma)$, und der duale Operator F' ist entsprechend ein stetiger Operator von $H_{\diamond}^{-t}(\Gamma)$ nach $H_{\diamond}^{-1/2}(\Gamma)$. Da F und F' auf $H_{\diamond}^{-t}(\Gamma) \cap H_{\diamond}^{1/2}(\Gamma)$ übereinstimmen, folgt mittels Interpolationstheorie, dass

$$F : H_{\diamond}^{1/4-t/2}(\Gamma) \rightarrow H_{\diamond}^{t/2-1/4}(\Gamma)$$

beschränkt ist, s. Taylor [88, Kapitel 4, Proposition 2.1]. Für $t = 1/2 - 2s$ ist das gerade das gewünschte Resultat, vgl. auch den Beweis zu Satz 2.1 bei Hyvönen [54].

Satz 3.1. Die Neumann-Dirichlet-Abbildung $\Lambda - \Lambda_0 : H_{\diamond}^{-s}(T) \rightarrow H_{\diamond}^s(T)$ lässt sich faktorisieren in

$$\Lambda - \Lambda_0 = R'FR \quad (3.4)$$

mit den Operatoren R und R' aus (3.1) beziehungsweise (3.2) sowie F aus (3.3).

Beweis: Für $f \in H_\diamond^{-s}(T)$ sei v die Lösung von (3.1) mit den entsprechenden Konstanten c_j . Für $\psi = Rf$ löst

$$h(x) = \begin{cases} v(x) - \hat{u}(x), & x \in D \setminus \bar{\Omega}, \\ c_j - \hat{u}(x), & x \in \Omega_j, \quad j = 1, \dots, m, \end{cases}$$

das Transmissionsproblem (3.3) mit \hat{u} aus (2.20). Die Funktion

$$h_0(x) = \begin{cases} v(x) - \hat{u}_0(x), & x \in D \setminus \bar{\Omega}, \\ c_j - \hat{u}_0(x), & x \in \Omega_j, \quad j = 1, \dots, m, \end{cases}$$

löst das entsprechende homogene Problem mit \hat{u}_0 aus (2.21). Damit ist

$$F\psi = \frac{\partial}{\partial \nu}(h - h_0)|_\Gamma = -\frac{\partial}{\partial \nu}(\hat{u} - \hat{u}_0)|_\Gamma.$$

Schließlich ist $\hat{u} - \hat{u}_0$ die Lösung von (3.2) mit $\varphi = -\partial(\hat{u} - \hat{u}_0)|_\Gamma / \partial \nu$. \square

Wir modifizieren nun die Faktorisierung von $\Lambda - \Lambda_0$. Dazu definieren wir den Operator

$$B : H_\diamond^{-s}(T) \rightarrow H^{1/2}(\Gamma), \quad f \mapsto \hat{u}_0|_\Gamma$$

mit \hat{u}_0 aus (2.21). B ist linear und Lemma 2.2 zufolge beschränkt. Des Weiteren benötigen wir die Dirichlet-Neumann-Abbildung auf Ω , die durch

$$\Lambda_1^{-1} : H^{1/2}(\Gamma) \rightarrow H_\diamond^{-1/2}(\Gamma), \quad \psi \mapsto \frac{\partial}{\partial \nu} v_1|_\Gamma$$

definiert ist, wobei v_1 das Dirichletproblem

$$\Delta v_1 = 0 \quad \text{in } \Omega, \quad v_1 = \psi \quad \text{auf } \Gamma \tag{3.5}$$

löst. Da v_1 auf allen Komponenten Ω_j harmonisch ist, verschwinden die Randintegrale von $\partial v_1 / \partial \nu$ auf den Rändern Γ_j , und das Bild von Λ_1^{-1} liegt tatsächlich in $H_\diamond^{-1/2}(\Gamma)$. Ferner definieren wir die lineare Abbildung

$$\Lambda_2 : H_\diamond^{-1/2}(\Gamma) \rightarrow H_\diamond^{1/2}(\Gamma), \quad \varphi \mapsto v_2|_\Gamma - \sum_{j=1}^m c_{2,j} \mathbf{1}_{\Gamma_j}$$

mit

$$\begin{aligned} \Delta v_2 &= 0 \quad \text{in } D \setminus \bar{\Omega}, & \frac{\partial}{\partial \nu} v_2 &= 0 \quad \text{auf } T, \\ \frac{\partial}{\partial \nu} v_2 &= \varphi \quad \text{auf } \Gamma, & \int_T v_2 \, ds &= 0 \end{aligned} \tag{3.6}$$

und $c_{2,j} = \langle v_2, 1 \rangle_{\Gamma_j} / |\Gamma_j|$. Wohldefiniertheit und Stetigkeit der beiden Operatoren folgen aus [73, Kapitel 2, Satz 7.3 und Bemerkung 7.2]. Sind die Randströme ψ und φ stetig, so haben die Randwertprobleme (3.5) und (3.6) sogar stetige Lösungen, vgl. Kress [65, Kapitel 6], und Λ_1^{-1} und Λ_2 können als stetige Operatoren $C(\Gamma) \rightarrow C(\Gamma)$ aufgefasst werden.

Lemma 3.2. Der Operator R besitzt die Faktorisierung

$$R = \left(\tilde{I}' - \Lambda_2 \Lambda_1^{-1} \right) B.$$

Dabei ist

$$\tilde{I}' : H^{1/2}(\Gamma) \rightarrow H_\diamond^{1/2}(\Gamma), \quad w \mapsto w - \sum_{j=1}^m d_j \mathbf{1}_{\Gamma_j} \text{ mit } d_j = \frac{1}{|\Gamma_j|} \langle w, \mathbf{1} \rangle_{\Gamma_j}$$

der zur Einbettung $\tilde{I} : H_\diamond^{-1/2}(\Gamma) \hookrightarrow H^{-1/2}(\Gamma)$ duale Operator.

Beweis: Das Potential $\hat{u}_0|_\Omega$ mit $\hat{u}_0 \in H_\diamond^{s+3/2}(D)$ aus (2.21) löst das Dirichletproblem (3.5) für $\psi = \hat{u}_0|_\Gamma = Bf$, also $(\partial\hat{u}_0/\partial\nu)|_\Gamma = \Lambda_1^{-1}Bf$. Die Funktion $v_2 \in H_\diamond^1(D \setminus \bar{\Omega})$ löse (3.6) für $\varphi = (\partial\hat{u}_0/\partial\nu)|_\Gamma$, dann ist

$$\left(\tilde{I}' - \Lambda_2 \Lambda_1^{-1} \right) Bf = \hat{u}_0|_\Gamma - v_2|_\Gamma - \sum_{j=1}^m (c_{0,j} - c_{2,j}) \mathbf{1}_{\Gamma_j}.$$

mit $c_{0,j} = \langle \hat{u}_0, \mathbf{1} \rangle_{\Gamma_j} / |\Gamma_j|$. Die Differenz $\hat{u}_0|_{D \setminus \bar{\Omega}} - v_2$ löst nun (3.1), also

$$Rf = \left(\tilde{I}' - \Lambda_2 \Lambda_1^{-1} \right) Bf. \quad \square$$

Wir fügen Lemma 3.2 und Satz 3.1 zu folgendem Korollar zusammen:

Korollar 3.3. Die Neumann-Dirichlet-Abbildung lässt sich zu

$$\Lambda - \Lambda_0 = B'GB \quad (3.7)$$

faktorisieren. Der Operator

$$G : H^{1/2}(\Gamma) \rightarrow H^{-1/2}(\Gamma), \quad G = \left(\tilde{I} - (\Lambda_1^{-1})' \Lambda_2' \right) F \left(\tilde{I}' - \Lambda_2 \Lambda_1^{-1} \right)$$

ist stetig und zu sich selbst dual. Darüber hinaus kann G als stetiger Operator von $C(\Gamma)$ nach $C(\Gamma)$ aufgefasst werden.

Beweis: Die Faktorisierung ergibt sich aus Satz 3.1 und Lemma 3.2. Die zweite Behauptung folgt aus den bereits ausgeführten Erläuterungen, dass alle an der Faktorisierung von G beteiligten Operatoren als stetige Abbildungen von $C(\Gamma) \rightarrow C(\Gamma)$ aufgefasst werden können. \square

Wenngleich wir die Faktorisierungen (3.4) und (3.7) nur für strikt positive und beschränkte Leitfähigkeiten gezeigt haben, gelten sie auch für isolierende und perfekt leitende Einschlüsse. Die Operatoren müssen dafür den veränderten Randbedingungen entsprechend abgeändert werden, behalten aber ihre Eigenschaften bei. Die Details sind bei Brühl [12, Abschnitt 4.3.1] erläutert.

3.1.2 Analytische Fortsetzung der Rückstreudaten

Mit Hilfe der Faktorisierung (3.7) zeigen wir in diesem Abschnitt, dass die Rückstreudaten holomorph in $D \setminus \overline{\Omega}$ fortsetzbar sind. Für einen Tangentialdipol im Punkt z_θ lässt sich $B\delta'_\theta$ mittels der Darstellung (2.8) für u_0 explizit angeben:

$$B\delta'_\theta(x) = u_0(x) = -\frac{\partial}{\partial z\tau} N(x, z_\theta) = -\frac{1}{\pi} \frac{x \cdot z_\theta^\perp}{|x - z_\theta|^2}, \quad x \in \Gamma$$

mit $z_\theta^\perp = (-\sin \theta, \cos \theta)$. Wir identifizieren D und Ω wie zuvor mit den entsprechenden Mengen in der komplexen Ebene und verwenden die Notation $\xi = \xi(x) = x_1 + ix_2$ und die Variable $\zeta = e^{i\theta}$ auf T . Wir erhalten für $x \in \Gamma$ den Ausdruck

$$B\delta'_\theta(x) = \frac{1}{2\pi i} \frac{\bar{\xi}\zeta - \xi\bar{\zeta}}{(\xi - \zeta)(\bar{\xi} - \bar{\zeta})} = \frac{i}{2\pi} \frac{\bar{\xi}\zeta^2 - \xi}{(\zeta - \xi)(\bar{\xi}\zeta - 1)} =: g(x, \zeta). \quad (3.8)$$

g lässt sich zu einer stetigen Funktion auf $\Gamma \times (\overline{D} \setminus \overline{\Omega})$ fortsetzen, die bezüglich ζ in $D \setminus \overline{\Omega}$ komplex differenzierbar ist. Wir bezeichnen die Fortsetzung weiterhin mit g . Die Ableitung $\partial_\zeta g(x, \zeta)$ ist stetig auf $\Gamma \times (\overline{D} \setminus \overline{\Omega})$.

Lemma 3.4. Die Funktion $[Gg(\cdot, \zeta)](x)$, $(x, \zeta) \in \Gamma \times (D \setminus \overline{\Omega})$ mit dem Operator G aus Korollar 3.3 ist komplex differenzierbar bezüglich ζ . Sowohl $[Gg(\cdot, \zeta)](x)$ als auch $\partial_\zeta [Gg(\cdot, \zeta)](x)$ sind stetig in $\Gamma \times (\overline{D} \setminus \overline{\Omega})$.

Beweis: G bildet Korollar 3.3 zufolge $C(\Gamma)$ stetig auf $C(\Gamma)$ ab. Wir betrachten zwei beliebige Folgen $\{x_j\} \subset \Gamma \subset \mathbb{R}^2$ und $\{\zeta_j\} \subset \overline{D} \setminus \overline{\Omega} \subset \mathbb{C}$ mit Grenzwerten $x \in \Gamma$ beziehungsweise $\zeta \in \overline{D} \setminus \overline{\Omega}$. Da $G : C(\Gamma) \rightarrow C(\Gamma)$ beschränkt ist, erhalten wir

$$\begin{aligned} & \left| [Gg(\cdot, \zeta)](x) - [Gg(\cdot, \zeta_j)](x_j) \right| \\ & \leq \left| [Gg(\cdot, \zeta)](x) - [Gg(\cdot, \zeta)](x_j) \right| + \left| [Gg(\cdot, \zeta)](x_j) - [Gg(\cdot, \zeta_j)](x_j) \right| \\ & \leq \left| [Gg(\cdot, \zeta)](x) - [Gg(\cdot, \zeta)](x_j) \right| + C \|g(\cdot, \zeta) - g(\cdot, \zeta_j)\|_{C(\Gamma)}. \end{aligned} \quad (3.9)$$

Der erste Summand konvergiert für $j \rightarrow \infty$ gegen null, da $[Gg(\cdot, \zeta)]$ auf Γ stetig ist. Aus Gleichung (3.8) und der Kompaktheit von Γ folgt, dass $g(\cdot, \zeta_j)$ auf Γ gleichmäßig gegen $g(\cdot, \zeta)$ konvergiert, daher wird auch der zweite Summand in (3.9) beliebig klein. $[Gg(\cdot, \zeta)](x)$ ist also eine stetige Funktion der Variablen $(x, \zeta) \in \Gamma \times (\overline{D} \setminus \overline{\Omega})$.

Ebenfalls aus (3.8) und der Kompaktheit von Γ folgt für ein festes $\zeta \in D \setminus \overline{\Omega}$, dass

$$\frac{g(\cdot, \zeta + \delta) - g(\cdot, \zeta)}{\delta} \rightarrow \partial_\zeta g(\cdot, \zeta) \quad \text{für } \delta \rightarrow 0, \delta \neq 0,$$

bezüglich der $C(\Gamma)$ -Topologie. Aufgrund der Linearität und Stetigkeit von G folgt daraus, dass

$$\frac{1}{\delta} \left([Gg(\cdot, \zeta + \delta)] - [Gg(\cdot, \zeta)] \right) \rightarrow [G\partial_\zeta g(\cdot, \zeta)] \quad \text{für } \delta \rightarrow 0$$

in der Topologie von $C(\Gamma)$. $[Gg(\cdot, \zeta)](x)$ ist also komplex differenzierbar bezüglich $\zeta \in D \setminus \overline{\Omega}$. \square

Liegt ζ auf dem Rand T , so ist $g(x, \zeta)$ reellwertig. Korollar 3.3 und die Gleichungen (2.22) und (3.8) führen für $\zeta = z_\theta$ auf die Darstellung

$$b(\zeta) = \langle GB\delta'_\theta, B\delta'_\theta \rangle = \int_\Gamma [Gg(\cdot, \zeta)](x)g(x, \zeta) ds(x). \quad (3.10)$$

Die rechte Seite von (3.10) ist für $\zeta \in \overline{D} \setminus \overline{\Omega}$ wohldefiniert und ermöglicht, die Rückstreufunction nach $D \setminus \overline{\Omega}$ fortzusetzen. Wir bezeichnen die Fortsetzung der Rückstreufunction weiterhin mit b .

Satz 3.5. Die Rückstreufunction b aus (2.22) lassen sich durch (3.10) holomorph auf $D \setminus \text{supp}(\sigma - 1)$ fortsetzen.

Beweis: Lemma 3.4 besagt, dass die beiden Funktionen $[Gg(\cdot, \zeta)](x)g(x, \zeta)$ und $\partial_\zeta [Gg(\cdot, \zeta)](x)g(x, \zeta)$ für $(x, \zeta) \in \Gamma \times (\overline{D} \setminus \overline{\Omega})$ stetig und holomorph bezüglich ζ sind. Daher ist durch (3.10) eine holomorphe Fortsetzung der Rückstreufunction nach $D \setminus \overline{\Omega}$ definiert, vgl. Tutschke und Vasudeva [89, Abschnitt 4.1, Proposition 27].

Als nächstes zeigen wir, dass die Fortsetzung der Rückstreufunction in (3.10) nicht von der konkreten Wahl der Menge Ω , die $\text{supp}(\sigma - 1)$ umschließt, abhängt. Dazu seien b_1 und b_2 holomorphe Fortsetzungen der Rückstreufunction definiert durch (3.10) für zwei verschiedene Mengen Ω_1 beziehungsweise Ω_2 . Wir wählen eine dritte C^∞ -Menge Ω_3 , die die Voraussetzungen von Abschnitt 3.1.1 erfüllt, und $\Omega_3 \subset \Omega_k$, $k = 1, 2$. b_3 bezeichne die entsprechende holomorphe Fortsetzung der Rückstreufunction in $D \setminus \overline{\Omega}_3$. Da alle drei Fortsetzungen die gleichen Randwerte auf T besitzen, gilt

$$b_1 = b_3|_{D \setminus \overline{\Omega}_1} \quad \text{und} \quad b_2 = b_3|_{D \setminus \overline{\Omega}_2}$$

aufgrund des Prinzips der eindeutigen Fortsetzbarkeit. Insbesondere stimmen b_1 und b_2 in $D \setminus (\overline{\Omega}_1 \cup \overline{\Omega}_2)$ überein, auch wenn diese Menge nicht zusammenhängend ist. Schließlich können wir für jeden Punkt $\zeta_0 \in D \setminus \text{supp}(\sigma - 1)$ eine C^∞ -Menge Ω wählen, die die Anforderungen von Abschnitt 3.1.1 erfüllt und ζ_0 nicht enthält. Mittels (3.10) lassen sich die Rückstreufunction holomorph bis hin zu einer Umgebung von ζ_0 fortsetzen. Folglich sind die Rückstreufunction zu einer eindeutigen holomorphen Funktion auf $D \setminus \text{supp}(\sigma - 1)$ fortsetzbar. \square

Die holomorphe Fortsetzung der Rückstreufunction ist komplexwertig und hat daher die Gestalt

$$b(z) = u_b(z) + iv_b(z), \quad z \in D \setminus \overline{\Omega},$$

mit harmonischem Real- und Imaginärteil u_b beziehungsweise v_b .

Korollar 3.6. Die Funktion u_b löst das Cauchyproblem

$$\Delta u_b = 0 \quad \text{in } D \setminus \overline{\Omega}, \quad u_b = b \quad \text{auf } T, \quad \frac{\partial}{\partial \nu} u_b = 0 \quad \text{auf } T. \quad (3.11)$$

Beweis: Als Realteil einer holomorphen Funktion ist u_b harmonisch. Außerdem ist $b|_T$ reellwertig und stimmt daher mit $u_b|_T$ überein. Aufgrund des Spiegelungsprinzips, s. Henrici [47, Satz 5.11b], ist b und damit auch u_b und v_b über

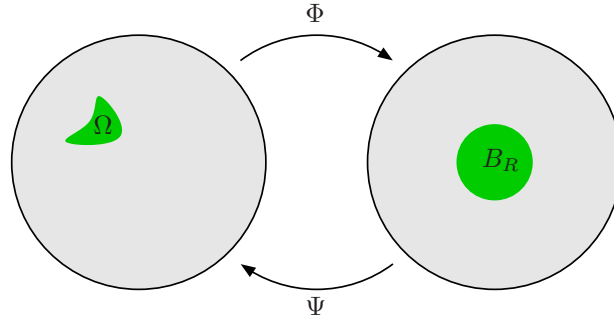


Abbildung 3.1: Konforme Abbildungen in Abschnitt 3.2

T hinaus fortsetzbar. Auf T gelten daher die Cauchy-Riemann'schen Differentialgleichungen, die auf die Beziehung $\partial u_b / \partial \nu = \partial v_b / \partial \tau$ führen. Da der Imaginärteil v_b auf T verschwindet, ist auch die Tangentialableitung von v_b und damit auch die Normalenableitung von u_b auf T null. u_b erfüllt demnach (3.11). \square

3.2 Rückstreudaten und konforme Transformationen

In diesem Abschnitt betrachten wir den Fall eines einzelnen isolierenden oder perfekt leitenden Einschlusses Ω in D . In den Beispielen 2.1 und 2.5 haben wir den Wert der Rückstreudaten eines konzentrischen kreisförmigen Einschlusses berechnet. Mittels einer konformen Koordinatentransformation bestimmen wir ähnlich wie in Abschnitt 2.3 den Zusammenhang zwischen den Rückstreudaten des Einschlusses Ω und jenen eines geeigneten konzentrischen Kreisgebiets.

Dem Riemann'schen Abbildungssatz für zweifach zusammenhängende Gebiete zufolge existiert eine bis auf Rotationen eindeutige konforme Abbildung Φ , die $D \setminus \overline{\Omega}$ auf einen Kreisring $\{x \in D : R < |x| < 1\}$ abbildet. Der innere Radius R ist durch Ω eindeutig festgelegt, s. [48, Theorem 17.1a]. Abbildung 3.1 veranschaulicht dies. Aufgrund des Spiegelungsprinzips lässt sich Φ analytisch in eine Umgebung des Einheitskreises T fortsetzen. Da Γ laut unserer Voraussetzungen in Abschnitt 2.1 glatt ist, lässt sich Φ stetig auf Γ fortsetzen und bildet Γ bijektiv auf den inneren Rand des Kreisrings ab, s. Conway [16, Kapitel 15, Satz 3.4]. $\Psi = \Phi^{-1}$ sei die zu Φ inverse Transformation und φ die Randabbildung von Φ , das heißt

$$\varphi(t) = \arg \Phi(e^{it}) = \frac{1}{i} \log(\Phi(e^{it})), \quad t \in [0, 2\pi).$$

Wir nehmen an, dass Φ die Orientierung von T nicht ändert. Aufgrund der Bijektivität von Φ ist φ deshalb monoton steigend. Die Ableitung φ' ist positiv, also

$$\varphi'(t) = \Phi'(e^{it}) e^{i(t-\varphi(t))} = |\Phi'(e^{it})| > 0. \quad (3.12)$$

Wir halten den Parameter $\theta \in [0, 2\pi)$ fest und bezeichnen mit u die Lösung von (2.2) respektive (2.27) auf dem Gebiet $D \setminus \overline{\Omega}$ mit Randstrom δ'_θ . \tilde{u} sei das entsprechende Potential, das sich in Anwesenheit eines konzentrischen Einschluss

$B_R = \{x \in D : |x| < R\}$ zu dem in $\tilde{\theta} = \varphi(\theta)$ lokalisiertem Randstrom $\delta'_{\tilde{\theta}}$ einstellt. Lemma 2.7 zufolge und wegen (3.12) gilt

$$u = \varphi'(\theta) (\tilde{u} \circ \Phi) + c \quad (3.13)$$

mit einer Konstanten $c \in \mathbb{R}$.

Wir untersuchen zunächst den Fall eines kreisförmigen Einschlusses Ω , für den sich die konforme Abbildung explizit angeben lässt. In diesem Fall ist Φ eine Möbiustransformation und hat die Gestalt

$$\Phi(z) = \frac{z - \zeta}{1 - \bar{\zeta}z} \quad (3.14)$$

mit Parameter $\zeta = \rho e^{is} \in D$, vgl. [47, Satz 5.4e]. Φ ist eine konforme Abbildung der ganzen Einheitskreisscheibe D . Daher lässt sich Lemma 2.7 auch auf das Referenzpotential u_0 anwenden, das heißt

$$u_0 = \varphi'(\theta) (\tilde{u}_0 \circ \Phi) + c_0. \quad (3.15)$$

\tilde{u}_0 bezeichne dabei das Referenzpotential mit im Punkt $\tilde{\theta} = \varphi(\theta)$ lokalisiertem Randstrom. Die Gleichungen (3.13) und (3.15) führen zu folgendem Satz:

Satz 3.7. Ω sei eine Kreisscheibe $B_r(x)$ mit Mittelpunkt $x \in D$, $x \neq 0$ und Radius $r < 1 - |x|$. Die Randabbildung der konformen Abbildung Φ aus (3.14) lautet (bis auf Vielfache von 2π)

$$\varphi(t) = s + 2 \arctan \left(\frac{1 + \rho}{1 - \rho} \tan \frac{t - s}{2} \right)$$

mit Ableitung

$$\varphi'(t) = \frac{1 - \rho^2}{1 - 2\rho \cos(t - s) + \rho^2}.$$

Ist der Einschluss $B_r(x)$ isolierend, so haben die Rückstreudaten die Gestalt

$$b(\theta) = \beta_R \varphi'(\theta)^2, \quad (3.16)$$

mit $s = \arg x$,

$$\rho = \frac{1 + |x|^2 - r^2}{2|x|} - \sqrt{\left(\frac{1 + |x|^2 - r^2}{2|x|} \right)^2 - 1},$$

und β_R definiert durch (2.19) für $R^2 = (\rho - |x|)/(\rho - \rho^2|x|)$. Im Fall eines perfekt leitenden Einschlusses muss β_R in (3.16) durch β'_R aus (2.28) ersetzt werden.

Beweis: Zur Berechnung der Rückstreudaten betrachten wir die relativen Potentiale $w = u - u_0$ und $\tilde{w} = \tilde{u} - \tilde{u}_0$, die in der Beziehung

$$w = \varphi'(\theta) (\tilde{u} \circ \Phi - \tilde{u}_0 \circ \Phi) + c' = \varphi'(\theta) (\tilde{w} \circ \Phi) + c'$$

für eine Konstante $c' \in \mathbb{R}$ stehen. Dementsprechend gilt für die Rückstreudaten wie in Gleichung (2.35) aus Abschnitt 2.3, dass

$$b(\theta) = - \left(\frac{\partial}{\partial t} w|_T \right) (x_\theta) = -\varphi'(\theta) \left(\frac{\partial}{\partial \tilde{t}} \tilde{w}|_T \right) (x_{\tilde{\theta}}) |\Phi'(x_\theta)| = \varphi'(\theta)^2 \beta_R.$$

β_R bezeichnet wieder die konstanten Rückstreudaten des konzentrischen Einschlusses aus Beispiel 2.1. Die Berechnung des Parameters $\zeta = \rho e^{is}$ in (3.14) und des inneren Radius R von B_R erfolgt mit den für Möbiustransformationen typischen Berechnungen, vgl. Schinzinger und Laura [82, Abschnitt 3.2.1]. \square

Im Allgemeinen lassen sich konforme Abbildungen zweifach zusammenhängender Gebiete $D \setminus \overline{\Omega}$ nicht analytisch in den Einschluss Ω fortsetzen und eine zu Gleichung (3.15) analoge Beziehung existiert nicht. In diesen Fällen gilt stattdessen folgender Satz:

Satz 3.8. Ω sei ein isolierender Einschluss in D , und φ sei die Randabbildung der konformen Abbildung Φ , die $D \setminus \overline{\Omega}$ auf $D \setminus \overline{B}_R$ mit passendem $R \in (0, 1)$ abbildet. Die zugehörigen Rückstreudaten lauten dann:

$$b(\theta) = \beta_R \varphi'(\theta)^2 + \frac{1}{12\pi} - \frac{1}{12\pi} \varphi'(\theta)^2 + \frac{1}{4\pi} \frac{\varphi''(\theta)^2}{\varphi'(\theta)^2} - \frac{1}{6\pi} \frac{\varphi'''(\theta)}{\varphi'(\theta)}. \quad (3.17)$$

Ist Ω ein perfekt leitender Einschluss, so gilt (3.17) mit β'_R anstelle von β_R .

Beweis: Wie zuvor halten wir den Winkel θ zunächst fest und bezeichnen mit u die Lösung von (2.2) und mit \tilde{u} das transformierte Potential aus (3.13). \tilde{u} löst das zu (2.2) analoge Randwertproblem mit B_R und $\tilde{\theta} = \varphi(\theta)$ anstelle von Ω und θ . Entsprechend benötigen wir die beiden Referenzpotentiale u_0 und \tilde{u}_0 . Die beiden relativen Potentiale $w = u - u_0$ und $\tilde{w} = \tilde{u} - \tilde{u}_0$ stehen in der Relation

$$\begin{aligned} w &= \varphi'(\theta) (\tilde{u} \circ \Phi) - u_0 + c \\ &= \varphi'(\theta) (\tilde{u} \circ \Phi) - \varphi'(\theta) (\tilde{u}_0 \circ \Phi) + \varphi'(\theta) (\tilde{u}_0 \circ \Phi) - u_0 + c \\ &= \varphi'(\theta) (\tilde{w} \circ \Phi) + \varphi'(\theta) (\tilde{u}_0 \circ \Phi) - u_0 + c \end{aligned}$$

mit einer Konstanten $c \in \mathbb{R}$. Die Differenz der beiden Terme mit den Referenzpotentialen bezeichnen wir mit

$$d(t) = \varphi'(\theta) \tilde{u}_0(\Phi(x_t)) - u_0(x_t).$$

d ist eine Funktion des Winkels $t \in [0, 2\pi)$ und periodisch auf \mathbb{R} fortsetzbar. Aufgrund der Regularität der relativen Potentiale ist d differenzierbar, und wie im Beweis zu Satz 3.7 gilt

$$b(\theta) = \varphi'(\theta)^2 \beta_R - d'(\theta). \quad (3.18)$$

Wir bestimmen nun die Ableitung von d . Mithilfe von Gleichung (2.11) lässt sich die Taylorentwicklung von u_0 in der Nähe des Punktes x_θ auf dem Rand berechnen, nämlich

$$u_0(x_t) = -\frac{1}{2\pi} \cot \frac{t-\theta}{2} = -\frac{1}{\pi} \frac{1}{t-\theta} + \frac{1}{12\pi} (t-\theta) + O(t-\theta)^2$$

für $t \neq \theta$. Auf ähnliche Weise ergibt sich

$$\begin{aligned}\tilde{u}_0(\Phi(x_t)) &= -\frac{1}{2\pi} \cot \frac{\varphi(t) - \varphi(\theta)}{2} \\ &= -\frac{1}{\pi} \frac{1}{\varphi(t) - \varphi(\theta)} + \frac{1}{12\pi} (\varphi(t) - \varphi(\theta)) + O(\varphi(t) - \varphi(\theta))^2 \\ &= -\frac{1}{\pi} \frac{1}{\varphi'(\theta)(t - \theta)} \left(1 - \frac{\varphi''(\theta)}{2\varphi'(\theta)} (t - \theta) + \left(\frac{\varphi''(\theta)^2}{4\varphi'(\theta)^2} - \frac{\varphi'''(\theta)}{6\varphi'(\theta)} \right) (t - \theta)^2 \right) \\ &\quad + \frac{1}{12\pi} \varphi'(\theta)(t - \theta) + O(t - \theta)^2.\end{aligned}$$

Folglich ist

$$d(t) = \frac{1}{2\pi} \frac{\varphi''(\theta)}{\varphi'(\theta)} + \frac{1}{12\pi} \left(2 \frac{\varphi'''(\theta)}{\varphi'(\theta)} - 3 \frac{\varphi''(\theta)^2}{\varphi'(\theta)^2} + \varphi'(\theta)^2 - 1 \right) (t - \theta) + O(t - \theta)^2.$$

Da d glatt ist, gilt diese Gleichung auch für $t = \theta$, und die Ableitung von d lautet:

$$d'(\theta) = \frac{1}{12\pi} \left(-1 + \varphi'(\theta)^2 - 3 \frac{\varphi''(\theta)^2}{\varphi'(\theta)^2} + 2 \frac{\varphi'''(\theta)}{\varphi'(\theta)} \right).$$

In (3.18) eingesetzt, ergibt dies die gewünschte Formel (3.17). \square

Für eine Möbiustransformation stimmen die Darstellungen (3.16) und (3.17) überein. Dies wird deutlich, wenn wir (3.17) mit Hilfe der *Schwarz'schen Ableitung* ausdrücken. Die Schwarz'sche Ableitung einer analytischen Funktion Φ auf einem Gebiet $G \subset \mathbb{C}$ ist definiert durch

$$S_\Phi(z) = \frac{\Phi'''(z)}{\Phi'(z)} - \frac{3}{2} \left(\frac{\Phi''(z)}{\Phi'(z)} \right)^2, \quad z \in G. \quad (3.19)$$

Ist $\Phi'(z) \neq 0$ in G , so ist S_Φ analytisch. Die Schwarz'sche Ableitung S_Φ verschwindet genau dann, wenn Φ eine Möbiustransformation ist, vgl. zum Beispiel Hille [50, Kapitel 10]. Im Hinblick auf Gleichung (3.17) berechnen wir die Schwarz'sche Ableitung S_Φ auf T , wenn wir $\Phi(x_\theta) = e^{i\varphi(\theta)}$ mittels der Randabbildung ausdrücken. Die Ableitungen von Φ lauten:

$$\begin{aligned}\Phi'(x_\theta) &= \varphi'(\theta) e^{i(\varphi(\theta) - \theta)}, \\ \Phi''(x_\theta) &= \left(-i\varphi''(\theta) + \varphi'(\theta)^2 - \varphi'(\theta) \right) e^{i(\varphi(\theta) - 2\theta)}, \\ \Phi'''(x_\theta) &= \left(-\varphi'''(\theta) - 3i\varphi''(\theta)\varphi'(\theta) + 3i\varphi''(\theta) \right. \\ &\quad \left. + \varphi'(\theta)^3 - 3\varphi'(\theta)^2 + 2\varphi'(\theta) \right) e^{i(\varphi(\theta) - 3\theta)}.\end{aligned}$$

Kombiniert mit (3.12) ergibt sich daraus, dass

$$\left(\frac{\Phi'(x_\theta)}{\Phi(x_\theta)} \right)^2 = e^{-2i\theta} \varphi'(\theta)^2$$

und

$$S_\Phi(x_\theta) = e^{-2i\theta} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \varphi'(\theta)^2 + \frac{3}{2} \frac{\varphi''(\theta)^2}{\varphi'(\theta)^2} - \frac{\varphi'''(\theta)}{\varphi'(\theta)} \right). \quad (3.20)$$

Dies setzen wir in Formel (3.17) ein und erhalten:

$$b(\theta) = \beta_R \varphi'(\theta)^2 + \frac{e^{2i\theta}}{6\pi} S_{\Phi}(x_\theta) = e^{2i\theta} \left(\beta_R \left(\frac{\Phi'(x_\theta)}{\Phi(x_\theta)} \right)^2 + \frac{1}{6\pi} S_{\Phi}(x_\theta) \right). \quad (3.21)$$

Für einen kreisförmigen Einschluss führt (3.21) direkt auf (3.16), da Φ in diesem Fall eine Möbiustransformation ist und S_{Φ} verschwindet.

Wir fassen nun b wieder vermöge der Parametrisierung $\theta \mapsto x_\theta$ wie in Abschnitt 3.1.2 als Funktion auf dem Einheitskreis T auf, ohne in der Notation zwischen den Definitionsbereichen zu unterscheiden. Gleichung (3.21) lautet dann

$$b(x_\theta) = x_\theta^2 \left(\beta_R \left(\frac{\Phi'(x_\theta)}{\Phi(x_\theta)} \right)^2 + \frac{1}{6\pi} S_{\Phi}(x_\theta) \right).$$

Diese Darstellung eröffnet eine Alternative zu Satz 3.5, um die Rückstreudaten zu einer analytischen Funktion in $D \setminus \overline{\Omega}$ fortzusetzen:

Korollar 3.9. Ω sei ein isolierender oder perfekt leitender Einschluss in D , und Φ sei die (bis auf Rotationen eindeutige) zugehörige konforme Abbildung, die $D \setminus \overline{\Omega}$ auf $D \setminus \overline{B}_R$ abbildet mit einem geeigneten $R \in (0, 1)$. Die zugehörigen Rückstreudaten sind zu einer in $D \setminus \overline{\Omega}$ holomorphen Funktion fortsetzbar durch

$$b(z) = z^2 \left(\beta_R \left(\frac{\Phi'(z)}{\Phi(z)} \right)^2 + \frac{1}{6\pi} S_{\Phi}(z) \right), \quad z \in D \setminus \overline{\Omega}. \quad (3.22)$$

Beweis: Φ ist holomorph in $D \setminus \overline{\Omega}$ und bildet $D \setminus \overline{\Omega}$ bijektiv auf $D \setminus \overline{B}_R$ ab, also ist $\Phi'(z) \neq 0$ und $\Phi(z) \neq 0$. Daher ist die Schwarz'sche Ableitung S_{Φ} und mit ihr die rechte Seite von (3.22) holomorph in $D \setminus \overline{\Omega}$. \square

Bemerkung 3.10. Die konforme Abbildung Φ zu einem Einschluss Ω ist nur bis auf eine Drehung eindeutig bestimmt. Dies hat aber auf die Gleichungen (3.17) und (3.22) keinen Einfluss, da die dort vorkommenden Ausdrücke invariant unter Drehungen sind und somit nur vom Einschluss, aber nicht von der konkreten Wahl der konformen Abbildung abhängen. Ist $T(z) = e^{i\sigma} z$ nämlich eine Drehung um den Winkel σ , so lautet die Randabbildung von $T \circ \Phi$ gerade

$$\tilde{\varphi}(t) = \arg(T \circ \Phi)(e^{it}) = \sigma + \varphi(t), \quad \text{und es ist} \quad \tilde{\varphi}'(t) = \varphi'(t).$$

Da in der Gleichung (3.17) für die Rückstreudaten nur Ableitungen der Randabbildung vorkommen, ist die Formel unter Drehungen der konformen Abbildung invariant. Ebenso verhält es sich mit der Darstellung (3.22): Eine Drehung ist eine lineare Transformation, die die Schwarz'sche Ableitung nicht beeinflusst, das heißt

$$S_{T \circ \Phi}(z) = S_{\Phi}(z),$$

s. Hille [50, Satz 10.1.2]. Schließlich ist der Ausdruck

$$\frac{(T \circ \Phi)'(z)}{(T \circ \Phi)(z)} = \frac{e^{i\sigma} \Phi'(z)}{e^{i\sigma} \Phi(z)} = \frac{\Phi'(z)}{\Phi(z)}$$

ebenfalls drehungsinvariant. Also ist auch Formel (3.22) für einen Einschluss eindeutig. Wir können daher zukünftig die konformen Abbildungen durch die Festlegung

$$\Phi(1) = 1$$

normieren.

4 Identifizierbarkeit von Einschlüssen

4.1 Ein Randwertproblem

Das vorliegende Kapitel untersucht, unter welchen Bedingungen ein Einschluss eindeutig anhand seiner Rückstreudaten identifizierbar ist. Ω_1 und Ω_2 seien zwei isolierende oder zwei perfekt leitende Einschlüsse mit identischen Rückstreudaten $b_1 = b_2$. Wie zuvor seien Φ_j , $j = 1, 2$, die konformen Abbildungen, die $D \setminus \overline{\Omega}_j$ jeweils auf einen Kreisring mit innerem Radius R_j abbilden, und $\Psi_j = \Phi_j^{-1}$. Bemerkung 3.10 entsprechend seien die konformen Abbildungen durch die Bedingung $\Phi_j(1) = 1$ normiert. In diesem Abschnitt untersuchen wir, welche Informationen die Ergebnisse aus Abschnitt 3.2 über Φ_1 und Φ_2 liefern. Dazu betrachten wir die Abbildung

$$\Xi = \Phi_1 \circ \Psi_2. \quad (4.1)$$

Ξ ist eine konforme Abbildung in einer Umgebung des Randes T . Da Φ_1 und Ψ_2 die Orientierung von T nicht ändern und $\Xi(1) = 1$ gilt, ist die Randabbildung $\xi(\theta) = \arg \Xi(e^{i\theta}) = \varphi_1 \circ \psi_2(\theta)$ eine bijektive Abbildung des Intervalls $[0, 2\pi]$ mit positiver Ableitung ξ' . Dabei bezeichnen wir φ_1 und ψ_2 die Randabbildungen von Φ_1 beziehungsweise Ψ_2 . Sind beide Einschlüsse gleich, so ist Ξ die Identität.

Lemma 4.1. Wenn die Rückstreudaten der beiden Einschlüsse Ω_1 und Ω_2 übereinstimmen, so löst die Randabbildung ξ von (4.1) das Randwertproblem

$$\xi'''(\theta) = \frac{3}{2} \frac{\xi''(\theta)^2}{\xi'(\theta)} + \gamma_2 \xi'(\theta) - \gamma_1 \xi'(\theta)^3, \quad \theta \in (0, 2\pi) \quad (4.2a)$$

mit Randbedingungen

$$\xi(0) = 0, \quad \xi(2\pi) = 2\pi, \quad \xi'(0) = \xi'(2\pi) \quad \text{und} \quad \xi''(0) = \xi''(2\pi). \quad (4.2b)$$

Dabei ist

$$\gamma_j = (1 - 12\pi\beta_j)/2, \quad j = 1, 2,$$

wobei β_j für den Wert der konzentrischen Rückstreudaten von B_{R_j} steht, das heißt $\beta_j = \beta_{R_j}$ aus (2.19) für einen Isolator oder $\beta_j = \beta'_{R_j}$ aus (2.28) für einen perfekten Leiter.

Wir beweisen eine allgemeinere Version von Lemma 4.1, die wir später in Kapitel 5 benötigen:

Lemma 4.2. Ω sei ein isolierender oder perfekt leitender Einschluss in D mit konformer Abbildung Φ und Rückstreudaten b . ψ sei die Randabbildung von $\Psi = \Phi^{-1}$, und R sei der innere Radius des Referenzkreisrings. Die Funktion $v : [0, 2\pi] \rightarrow [0, 2\pi]$ sei auf dem Intervall $(0, 2\pi)$ dreimal stetig differenzierbar und $v'(\theta) \neq 0$ für alle $\theta \in (0, 2\pi)$. v erfülle für einen Parameter $\beta \in \mathbb{R}$ die Gleichung

$$b(\theta) = \beta v'(\theta)^2 + \frac{1}{12\pi} - \frac{1}{12\pi} v'(\theta)^2 + \frac{1}{4\pi} \frac{v''(\theta)^2}{v'(\theta)^2} - \frac{1}{6\pi} \frac{v'''(\theta)}{v'(\theta)} \quad (4.3)$$

sowie die Randbedingungen

$$v(0) = 0, \quad v(2\pi) = 2\pi, \quad v'(0) = v'(2\pi) \quad \text{und} \quad v''(0) = v''(2\pi). \quad (4.4)$$

Dann löst die Funktion $\xi = v \circ \psi$ das Randwertproblem (4.2) für $\beta_1 = \beta$ und $\beta_2 = \beta_R$, wenn Ω ein Isolator ist, $\beta_2 = \beta'_R$ für einen perfekt leitenden Einschluss Ω .

Beweis: Die Randabbildung ψ ist eine unendlich oft differenzierbare bijektive Abbildung des Intervalls $[0, 2\pi]$ mit 2π -periodischen Ableitungen, vgl. Gleichung (3.12). Die Normierung $\Psi(1) = 1$ aus Bemerkung 3.10 ergibt $\psi(0) = 0$ und $\psi(2\pi) = 2\pi$. Die Funktion v ist wegen (4.3) unendlich oft differenzierbar, und die Ableitungen von v sind aufgrund von (4.4) 2π -periodisch. ξ ist folglich ebenfalls glatt mit periodischen Ableitungen und erfüllt die Randbedingungen (4.2b).

Wir definieren für eine dreimal stetig differenzierbare Funktion g die Abbildung

$$\varsigma_g(\theta) = e^{-2i\theta} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} g'(\theta)^2 + \frac{3}{2} \frac{g''(\theta)^2}{g'(\theta)^2} - \frac{g'''(\theta)}{g'(\theta)} \right). \quad (4.5)$$

Falls g die Randabbildung einer konformen Transformation ist, dann ist ς_g gerade deren Schwarz'sche Ableitung in Polarkoordinaten, vgl. Gleichung (3.20). Wir bezeichnen mit $\varphi = \psi^{-1}$ wieder die Randabbildung von Φ . Dann sind insbesondere ς_φ und ς_v wohldefiniert. Eine einfache Rechnung zeigt, dass

$$\varsigma_\xi(\theta) = e^{2i(\psi(\theta)-\theta)} \psi'(\theta)^2 (\varsigma_v(\psi(\theta)) - \varsigma_\varphi(\psi(\theta))).$$

Gleichung (3.21) für die Rückstreudaten lautet unter Verwendung von (4.5) dann

$$b(\theta) = \beta_2 \varphi'(\theta)^2 + \frac{e^{2i\theta}}{6\pi} \varsigma_\varphi(\theta)$$

mit $\beta_2 = \beta_R$ oder $\beta_2 = \beta'_R$. Gleichung (4.3) führt auf die Darstellung

$$b(\theta) = \beta v'(\theta)^2 + \frac{e^{2i\theta}}{6\pi} \varsigma_v(\theta).$$

Wir definieren nun

$$h(\theta) = \beta \xi'(\theta)^2 + \frac{e^{2i\theta}}{6\pi} \varsigma_\xi(\theta)$$

und folgern, dass h konstant ist, denn

$$\begin{aligned} h(\theta) &= \psi'(\theta)^2 \left(\beta v'(\psi(\theta))^2 + \frac{e^{2i\psi(\theta)}}{6\pi} \varsigma_v(\psi(\theta)) - \frac{e^{2i\psi(\theta)}}{6\pi} \varsigma_\varphi(\psi(\theta)) \right) \\ &= \psi'(\theta)^2 \left(b(\psi(\theta)) - \left(b(\psi(\theta)) - \beta_2 \varphi'(\psi(\theta))^2 \right) \right) \\ &= \beta_2 \left((\varphi \circ \psi)'(\theta) \right)^2 = \beta_2. \end{aligned}$$

Es ist also

$$\beta_2 = \beta \xi'(\theta)^2 + \frac{e^{2i\theta}}{6\pi} \varsigma_\xi(\theta).$$

Aufgelöst nach ξ''' , ist das gerade die Differentialgleichung (4.2a) mit Parametern $\gamma_1 = (1 - 12\pi\beta)/2$ und $\gamma_2 = (1 - 12\pi\beta_2)/2$. \square

Die Randabbildung φ_1 erfüllt offensichtlich die Voraussetzungen an v aus Lemma 4.2. Daher folgt Lemma 4.1 aus Lemma 4.2.

Wir untersuchen nun das Randwertproblem aus Lemma 4.1: Da in Gleichung (4.2a) nur Ableitungen von ξ vorkommen, betrachten wir zunächst die nichtlineare Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$f''(t) = \frac{3}{2} \frac{f'(t)^2}{f(t)} + c_{\text{fix}} f(t) + c_{\text{var}} f(t)^3, \quad t \in (0, 2\pi) \quad (4.6a)$$

mit periodischen Randbedingungen

$$f(0) = f(2\pi) \quad \text{und} \quad f'(0) = f'(2\pi) \quad (4.6b)$$

und der zusätzlichen Bedingung

$$\int_0^{2\pi} f(t) dt = 2\pi. \quad (4.6c)$$

Der Parameter $c_{\text{fix}} \in \mathbb{R}$ sei vorgegeben, wohingegen $c_{\text{var}} \in \mathbb{R}$ variabel sei. Unter einem *Lösungspaar* $(f; c_{\text{var}})$ des Randwertproblems (4.6) verstehen wir ein Tupel aus einer zweimal stetig differenzierbaren Funktion f , die den Bedingungen (4.6b) und (4.6c) genügt, und einer Konstanten c_{var} , für die f die Differentialgleichung (4.6a) löst. Eine solche periodische Funktion f liegt aufgrund von Gleichung (4.6a) in $C^\infty([0, 2\pi])$.

Zunächst stellen wir fest, dass eine konstante Lösung von (4.6) aufgrund der Integralbedingung (4.6c) notwendigerweise den Wert eins hat. Dies führt in (4.6a) auf $c_{\text{var}} = -c_{\text{fix}}$. Wir suchen im Weiteren Lösungspaare $(f; c_{\text{var}})$ mit nichtkonstanten Funktionen f . Aufgrund des Mittelwertsatzes der Integralrechnung und (4.6c) gibt es eine Stelle τ , an der

$$f(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) dt = 1. \quad (4.7)$$

Ferner hat eine nichtkonstante Lösung wegen der periodischen Randbedingungen (4.6b) mindestens ein lokales Maximum an einer Stelle s , dessen Wert m

hinsichtlich (4.7) größer gleich eins ist, $f(s) = m \geq 1$. Da f zweimal stetig differenzierbar ist, gilt $f'(s) = 0$. Die Funktion f löst somit das Anfangswertproblem

$$\begin{aligned} f''(t) &= \frac{3}{2} \frac{f'(t)^2}{f(t)} + c_{\text{fix}} f(t) + c_{\text{var}} f(t)^3, & t \in (0, 2\pi), \\ f(s) &= m, & f'(s) = 0. \end{aligned} \quad (4.8)$$

Die Lösung des Anfangswertproblems ist dem Satz von Picard-Lindelöf zufolge eindeutig und kann explizit angegeben werden. Dazu unterscheiden wir die Fälle $c_{\text{fix}} = 0$, $c_{\text{fix}} < 0$ und $c_{\text{fix}} > 0$, von denen einzig der letzte auf eine Lösung des Randwertproblems (4.6) führt:

Ist $c_{\text{fix}} = 0$, so lautet die Lösung von (4.8)

$$f(t) = \frac{2m}{2 - m^2 c_{\text{var}} (t - s)^2}$$

mit $c_{\text{var}} \neq 0$. Da f nicht periodisch ist, löst dieses f allerdings nicht das Randwertproblem (4.6). Im Fall $c_{\text{fix}} = 0$ existieren also keine Lösungspaare von (4.6) mit nichtkonstanten Lösungen.

Ist $c_{\text{fix}} < 0$ so lautet die Lösung von (4.8)

$$f(t) = \frac{m c_{\text{fix}}}{c_{\text{fix}} \cosh^2(\omega(t - s)) + m^2 c_{\text{var}} \sinh^2(\omega(t - s))}$$

mit $\omega = \sqrt{-c_{\text{fix}}/2}$. Damit die periodische Randbedingung von (4.6) erfüllt ist, muss auch ein lokales Minimum existieren, das heißt eine Stelle $s' \in [0, 2\pi)$, für die f' verschwindet. Das führt auf die Gleichung

$$(c_{\text{fix}} + m^2 c_{\text{var}}) \cosh(\omega(s' - s)) \sinh(\omega(s' - s)) = 0.$$

Sowohl $s = s'$ als auch $c_{\text{fix}} = -m^2 c_{\text{var}}$ liefern nur eine konstante Lösung f .

Es bleibt der Fall $c_{\text{fix}} > 0$. Die Lösung des Anfangswertproblems (4.8) lautet

$$f(t) = \frac{m c_{\text{fix}}}{c_{\text{fix}} \cos^2(\omega(t - s)) - m^2 c_{\text{var}} \sin^2(\omega(t - s))}$$

mit $\omega = \sqrt{c_{\text{fix}}/2}$. Die periodischen Randbedingungen von (4.6) sind nur erfüllt, wenn 2ω ganzzahlig ist, also $c_{\text{fix}} = k^2/2$, $k \in \mathbb{N}$. Außerdem ist $c_{\text{var}} < 0$, sonst hätte f eine Singularität. Die äquivalente Darstellung

$$f(t) = \frac{m \left(1 + \tan^2 \left(\frac{k(t - s)}{2} \right) \right)}{\left(1 - \frac{m^2 k^2}{2c_{\text{var}}} \tan^2 \left(\frac{k(t - s)}{2} \right) \right)}$$

führt auf die Stammfunktion

$$F(t) = \sqrt{-\frac{2}{c_{\text{var}}}} \arctan \left(m \sqrt{\frac{-k^2}{2c_{\text{var}}}} \tan \left(\frac{k(t - s)}{2} \right) \right) + n\pi \sqrt{\frac{-2}{c_{\text{var}}}}$$

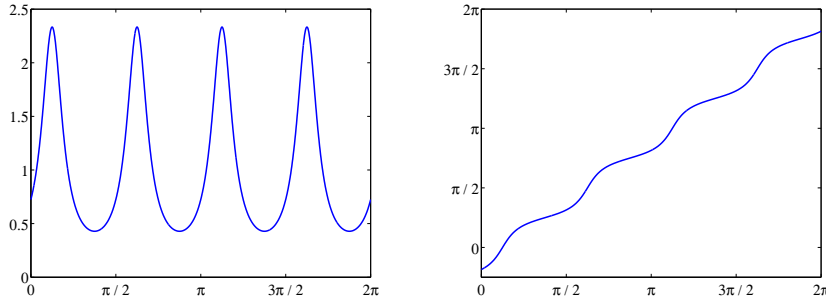


Abbildung 4.1: $f_{\rho, s}$ (links) und $F_{\rho, s}$ (rechts) für $k = 4$, $\rho = 0.4$ und $s = \pi/8$.

mit einer Stufenzahl $n \in \mathbb{Z}$, sodass

$$\frac{(2n-1)\pi}{k} + s < t < \frac{(2n+1)\pi}{k} + s$$

und

$$F\left(\frac{(2n-1)\pi}{k} + s\right) = n\pi \sqrt{\frac{-2}{c_{\text{var}}}}.$$

Der Definitionsbereich $[0, 2\pi]$ wird hierbei in k Intervalle der Länge $2\pi/k$ eingeteilt, an deren Rändern die Singularitäten des Tangens in der Definition von F liegen. Die Stufen der Höhe $\pi\sqrt{-2/c_{\text{var}}}$ gleichen die Sprünge des Arkustangens aus. F ist stetig differenzierbar auf $(0, 2\pi)$. Die Differenz der Stufenzahlen für $t = 0$ und $t = 2\pi$ ist k , und Bedingung (4.6c) führt auf

$$2\pi = F(2\pi) - F(0) = k\pi \sqrt{\frac{-2}{c_{\text{var}}}},$$

also

$$c_{\text{var}} = -\frac{k^2}{2} = -c_{\text{fix}}.$$

Die Darstellung von f vereinfacht sich dadurch zu

$$f(t) = \frac{1 - \rho^2}{1 + \rho^2 - 2\rho \cos(k(t-s))},$$

mit $\rho = (m-1)/(m+1)$.

Wir fassen zusammen:

Lemma 4.3. Bei vorgegebenem c_{fix} besitzt das Randwertproblem (4.6) das Lösungspaar $(\mathbf{1}; -c_{\text{fix}})$, bestehend aus der konstanten Lösung $\mathbf{1}(t) \equiv 1$ und dem Parameter $c_{\text{var}} = -c_{\text{fix}}$. Nichtkonstante Lösungen existieren nur, wenn $c_{\text{fix}} = k^2/2$, $k \in \mathbb{N}$. Die Lösungspaare lauten $(f_{\rho, s}; -k^2/2)$ mit

$$f_{\rho, s}(t) = \frac{1 - \rho^2}{1 + \rho^2 - 2\rho \cos(k(t-s))}, \quad t \in [0, 2\pi].$$

Die Funktion $f_{\rho,s}$ ist $2\pi/k$ -periodisch und hängt neben k von zwei freien Parametern $s \in [0, 2\pi/k)$ und $0 < \rho < 1$ ab. Die Stammfunktion von $f_{\rho,s}$ mit $F_{\rho,s}(s) = 0$ lautet

$$F_{\rho,s}(t) = \frac{2}{k} \arctan \left(\frac{1+\rho}{1-\rho} \tan \frac{k(t-s)}{2} \right) + \frac{2n\pi}{k} \quad (4.9a)$$

mit einer Stufenzahl $n \in \mathbb{Z}$, sodass $(2n-1)\pi/k < t-s < (2n+1)\pi/k$, und

$$F_{\rho,s} \left(\frac{(2n-1)\pi}{k} + s \right) = \frac{2n\pi}{k}. \quad (4.9b)$$

Abbildung 4.1 zeigt $f_{\rho,s}$ und $F_{\rho,s}$ für eine Parameterauswahl.

4.2 Eindeutigkeit für einen Isolator

Wir kommen nun zum Beweis, dass ein isolierender Einschluss durch seine Rückstreudaten eindeutig bestimmt ist.

Satz 4.4. Zwei isolierende Einschlüsse Ω_1 und Ω_2 in D , die gleiche Rückstreudaten $b_1 = b_2$ erzeugen, sind identisch.

Beweis: Φ_j , $j = 1, 2$, seien die beiden konformen Abbildungen, die $D \setminus \overline{\Omega}_j$ auf die jeweiligen Kreisringe $D \setminus \overline{B}_{R_j}$ abbilden, und $\Psi_j = \Phi_j^{-1}$ seien die entsprechenden Inversen. Wie in Abschnitt 4.1 untersuchen wir die Abbildung $\Xi = \Phi_1 \circ \Psi_2$. Die Randabbildung $\xi(\theta) = \arg \Xi(e^{i\theta})$ löst Lemma 4.1 zufolge das Randwertproblem (4.2) mit $\beta_j = \beta_{R_j}$ aus (2.19). Die einzige konstante Lösung dieses Randwertproblems lautet $\xi' \equiv 1$ gemäß Lemma 4.3, was für die Parameter $\gamma_1 = \gamma_2$ impliziert, also $R_1 = R_2$ wegen der Monotonie von β_R in (2.19). Ξ ist in diesem Fall die Identität und $\Omega_1 = \Omega_2$. Weitere Lösungen existieren nach Lemma 4.3 nicht, denn die notwendige Bedingung $\gamma_1 = \gamma_2 = k^2/2$, $k \in \mathbb{N}$ führt auf den Widerspruch

$$0 < k = \sqrt{2\gamma_1} = \sqrt{1 - 12\pi\beta_{R_1}} < 1, \quad (4.10)$$

da $\beta_{R_1} > 0$, wie in Beispiel 2.1 berechnet. \square

Korollar 4.5. Jeder isolierende Einschluss $\Omega \subset D$ hat nichtverschwindende Rückstreudaten $b \neq 0$.

Beweis: Wir nehmen an, der Einschluss Ω erzeuge verschwindende Rückstreudaten $b \equiv 0$. Die konforme Abbildung Φ_2 bilde $D \setminus \overline{\Omega}$ auf den entsprechenden Kreisring ab, und Ψ_2 sei die zu Φ_2 inverse Abbildung. Wir wählen $\Phi_1 = \text{Id}$ und $\beta_{R_1} = 0$, sodass (3.22) gilt mit linker Seite $b_1 \equiv 0$. Wir definieren ferner Ξ wie in (4.1) und erhalten wie im Beweis zu Satz 4.4, dass Ξ und damit auch Φ_2 die Identität ist. Der Einschluss Ω ist also ein konzentrischer Kreis, dessen Rückstreudaten verschwinden. Das ist aber nach Beispiel 2.1 nicht möglich. \square

Das Eindeutigkeitsresultat aus Satz 4.4 lässt sich leicht auf Situationen übertragen, in denen die Daten nur unvollständig bekannt sind:

Satz 4.6. Satz 4.4 und Korollar 4.5 behalten ihre Gültigkeit, auch wenn die Rückstreudaten nur auf einem nichtleeren offenen Teilstück $T_0 \subset T$ des Randes vorliegen.

Beweis: Die Rückstreudaten sind laut Korollar 3.9 die Randwerte einer holomorphen Funktion, die in einer Umgebung des Randes T definiert ist. Eine holomorphe Funktion wird durch ihre Werte auf einem nichtleeren offenen Teilstück des Einheitskreises eindeutig bestimmt. Stimmen die Rückstreudaten von zwei Einschlüssen also auf T_0 überein, so sind sie auf dem ganzen Einheitskreis identisch. In diesem Fall greift Satz 4.4, und die Einschlüsse sind gleich. \square

Der Eindeutigkeitsatz gilt auch für beliebige einfach zusammenhängende Gebiete \tilde{D} , vgl. Abschnitt 2.3.

Satz 4.7. $\tilde{\Omega}_1$ und $\tilde{\Omega}_2$ seien zwei isolierende Einschlüsse in einem einfach zusammenhängenden Gebiet \tilde{D} mit analytischem Jordanrand \tilde{T} wie in Abschnitt 2.3. Die Rückstreudaten \tilde{b}_1 und \tilde{b}_2 der beiden Gebiete stimmen auf einem nichtleeren offenen Teilstück $\tilde{T}_0 \subset \tilde{T}$ des Randes überein. Dann sind die Einschlüsse identisch, $\tilde{\Omega}_1 = \tilde{\Omega}_2$.

Beweis: Wie in Abschnitt 2.3 sei Φ eine konforme Abbildung, die das Gebiet \tilde{D} auf die Einheitskreisscheibe D abbildet. Die Gebiete Ω_j seien die Bilder der Einschlüsse $\tilde{\Omega}_j$, $j = 1, 2$, unter Φ . Laut Gleichung (2.35) lautet die Rückstreufunktion von $\tilde{\Omega}_j$ im Punkt $\zeta_\theta \in \tilde{T}$:

$$\tilde{b}_j(\theta) = |\Phi'(\zeta_\theta)|^2 b_j(\theta).$$

Dabei bezeichne b_j die Rückstreufunktion des Einschlusses Ω_j in D . Da \tilde{b}_1 und \tilde{b}_2 auf \tilde{T}_0 gleich sind, stimmen auch b_1 und b_2 auf einem nichtleeren offenen Teilstück des Randes überein. Nach Satz 4.4 sind Ω_1 und Ω_2 identisch und damit auch $\tilde{\Omega}_1 = \tilde{\Omega}_2$. \square

4.3 Eingeschränkte Eindeutigkeit für einen perfekten Leiter

Im Gegensatz zu einem Isolator ist ein perfekt leitender Einschluss nicht immer eindeutig anhand seiner Rückstreudaten identifizierbar. Satz 3.8 und Korollar 3.9 gelten für ein perfekt leitendes Gebiet Ω in gleicher Weise wie für einen Isolator, doch die Rückstreudaten β'_R eines perfekten leitenden konzentrischen Kreisgebiets sind negativ, und dies führt zu möglichen Parameterwerten, für die es nichtkonstante Lösungen des Randwertproblems aus Lemma 4.1 gibt. Der Beweis von Satz 4.4 ist aus diesem Grund nicht übertragbar, da der Widerspruch (4.10) im Allgemeinen nicht gilt.

Wir beginnen diesen Abschnitt mit einem Lemma über die Referenzkreisringe von perfekt leitenden Einschlüssen mit gleichen Rückstreudaten:

Lemma 4.8. Ω_1 und Ω_2 seien zwei perfekt leitende Einschlüsse in D , die gleiche Rückstreudaten $b_1 = b_2$ erzeugen. Dann sind die inneren Radien der Referenzkreisringe von Ω_1 und Ω_2 gleich.

Beweis: Φ_1 und Φ_2 seien die konformen Abbildungen, die $D \setminus \overline{\Omega}_1$ und $D \setminus \overline{\Omega}_2$ auf Kreistränge mit inneren Radien R_1 beziehungsweise R_2 abbilden. Wie im Fall isolierender Einschlüsse in Satz 4.4 betrachten wir die Abbildung $\Xi = \Phi_1 \circ \Psi_2$ und deren Randabbildung ξ . Gemäß Lemma 4.1 löst ξ das Randwertproblem (4.2). Dieses Randwertproblem ist aber wie in Lemma 4.3 gezeigt nur lösbar, wenn die beiden Parameter γ_1 und γ_2 übereinstimmen. Daraus folgt, dass die Werte β'_{R_j} der Rückstreudaten von B_{R_j} gleich sind. Wegen der Monotonie von β'_R aus (2.28) gilt dann $R_1 = R_2$. \square

In Abhängigkeit des Radius des Referenzkreisrings erhalten wir nun ein eingeschränktes Eindeutigkeitsresultat:

Satz 4.9. In der Situation von Lemma 4.8 sei R der innere Radius des Referenzkreisrings zu den perfekt leitenden Einschlüssen Ω_1 und Ω_2 , und β'_R aus (2.28) nehme keinen der Werte $(1 - k^2)/(12\pi)$, $k = 2, 3, \dots$, an. Dann stimmen beide Einschlüsse überein, $\Omega_1 = \Omega_2$.

Beweis: Wir betrachten wie im Beweis zu Lemma 4.8 die Randabbildung ξ , die das Randwertproblem (4.2) löst. Die beiden Parameter sind wegen Lemma 4.8 gleich und haben den Wert $(1 - 12\pi\beta'_R)/2$. Die Bedingung $\beta'_R \neq (1 - k^2)/(12\pi)$, $k = 2, 3, \dots$ garantiert, dass der Parameter $c_{\text{fix}} = (1 - 12\pi\beta'_R)/2$ in (4.2a) beziehungsweise (4.6a) keine Werte annimmt, für die nichtkonstante Lösungen des Randwertproblems existieren, s. Lemma 4.3. Es gilt also $\xi' \equiv 1$, das heißt $\Xi = \text{Id}$. Mit Lemma 4.8 folgt nun die Behauptung. \square

Korollar 4.5 und Satz 4.6 gelten entsprechend auch für den Fall perfekt leitender Einschlüsse, die den Voraussetzungen von Satz 4.9 genügen.

Hat der Referenzkreisring eines perfekt leitenden Gebiets Ω_1 einen inneren Radius P_k , für den β'_{P_k} in (2.28) den Wert $(1 - k^2)/(12\pi)$, $k = 2, 3, \dots$, annimmt, so ist der Einschluss unter Umständen nicht eindeutig aus den Rückstreudaten rekonstruierbar. Die in Lemma 4.3 auftretenden nichtkonstanten Lösungen des Randwertproblems führen auf konforme Abbildungen, durch die verschiedene Einschlüsse mit gleichen Rückstreudaten korrespondieren. Der Wert k sei im Folgenden fest gewählt. Die Abbildung ξ , die das Randwertproblem (4.2) für $\gamma_1 = \gamma_2 = k^2/2$ löst, lautet nach Lemma 4.3:

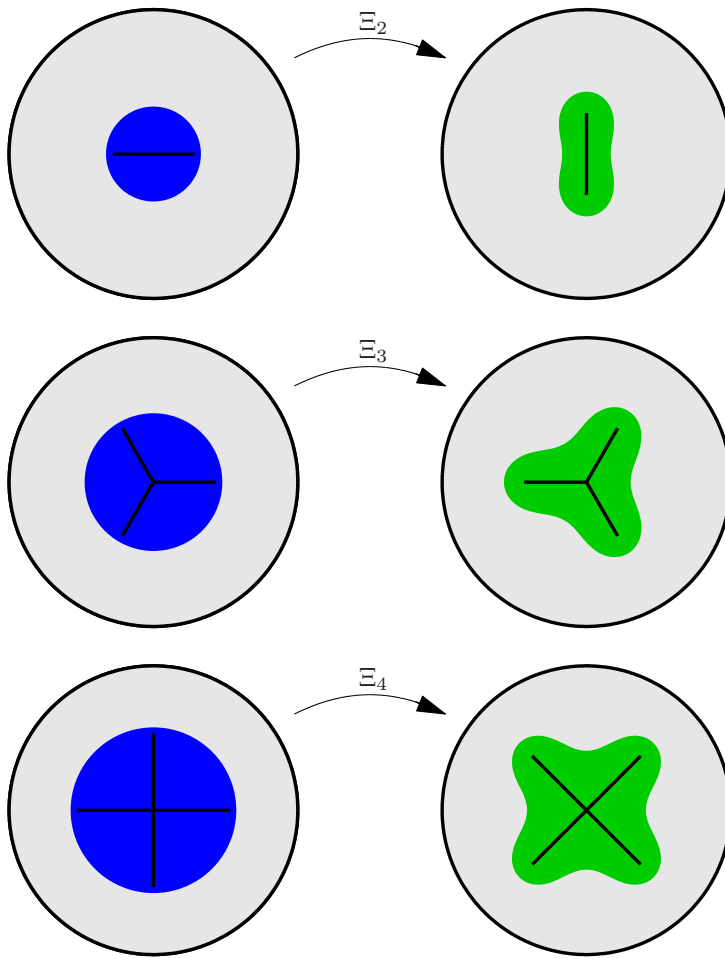
$$\xi(\theta) = \frac{2}{k} \arctan \left(\frac{1 + \rho}{1 - \rho} \tan \left(\frac{k\theta}{2} \right) \right) + \frac{2n\pi}{k} \quad (4.11a)$$

für $(2n - 1)\pi < k\theta < (2n + 1)\pi$ und

$$\xi \left(\frac{(2n - 1)\pi}{k} \right) = \frac{2n\pi}{k}. \quad (4.11b)$$

Die Funktion ξ besitzt einen freien Parameter $\rho \in (0, 1)$. Aufgrund der Festlegung $\xi(0) = 0$ ist der Parameter $s = 0$ in (4.9). ξ ist die Randabbildung der konformen Abbildung Ξ_k , die die Relation

$$(\Xi_k(z))^k = \frac{z^k - \rho}{1 - \rho z^k}, \quad z \in D \quad (4.12)$$

Abbildung 4.2: Ξ_k für $k = 2, 3, 4$ und $\rho = 0.08$.

erfüllt. Die Abbildung Ξ_k setzt sich zusammen aus der Möbiustransformation

$$M(w) = \frac{w - \rho}{1 - \rho w},$$

die D bijektiv auf sich abbildet, und den Abbildungen $z \mapsto z^k$ und deren Inverser $w \mapsto w^{1/k}$. Entsprechend bildet Ξ_k Kreissektoren der Bogenlänge $2\pi/k$ bijektiv aufeinander ab und hat Verzweigungspunkte in den k -ten Wurzeln von ρ , der Nullstelle von M . Demzufolge definieren wir die Menge

$$\Sigma = \{z = re^{2\pi ij/k} : 0 \leq r \leq \rho^{1/k}, j = 0, 1, \dots, k-1\},$$

die die k -ten Wurzeln von ρ verbindet. Ξ_k lässt sich konform auf die Menge $D \setminus \Sigma$ fortsetzen, und das Bild von $D \setminus \Sigma$ unter Ξ_k ist $D \setminus \Sigma'$ mit $\Sigma' = e^{i\pi/k} \Sigma$, der Drehung von Σ um den Winkel π/k . Wir wählen $\rho < P_k^k$ so klein, dass $\Sigma \subset B_{P_k}$ und somit Ξ_k eine konforme Abbildung auf dem Kreisring $D \setminus \overline{B}_{P_k}$ ist. Dieser

wird auf ein Gebiet $D \setminus \overline{C}_k$ abgebildet mit einem einfach zusammenhängenden Gebiet $C_k \subset D$, das invariant unter Drehungen des Winkels $2\pi/k$ ist. In Abbildung 4.2 sind die Gebiete C_k für $k = 2, 3$ und 4 dargestellt. Die Bilder auf der linken Seite zeigen in blau den Kreis B_{P_k} für die entsprechenden Werte von P_k im Einheitskreis (schwarze Linie). Im Inneren der B_{P_k} ist jeweils die Menge Σ eingezeichnet. Der Wert des Parameters ρ beträgt in allen drei Beispielen 0.08 . Auf der rechten Seite sind in grün die C_k dargestellt, die Mengen Σ' sind in schwarz eingezeichnet.

Beispiel 4.10. Das perfekt leitende Gebiet C_k hat konstante Rückstreudaten $\beta'_{P_k} = (1 - k^2)/(12\pi)$. Nach obiger Konstruktion ist $D \setminus C_k$ nämlich das Bild von $D \setminus \overline{B}_{P_k}$ unter Ξ_k für einen hinreichend kleinen Wert $\rho < P_k^k$. Die Rückstreudaten von C_k sind dann laut (3.21) durch

$$b(\theta) = \beta'_{P_k} \xi^{-1'}(\theta)^2 + \frac{e^{2i\theta}}{6\pi} S_{\Xi_k^{-1}}(x_\theta) \quad (4.13)$$

gegeben. Da ξ das Randwertproblem (4.2) löst, vereinfacht sich die Darstellung der Schwarz'schen Ableitung S_{Ξ_k} in der Form von (3.20) zu

$$S_{\Xi_k}(x_{\tilde{\theta}}) = \frac{1 - k^2}{2} e^{-2i\tilde{\theta}} \left(1 - \xi'(\tilde{\theta})^2\right).$$

Die Schwarz'sche Ableitung erfüllt

$$S_{\Xi_k^{-1}} = -\left(\Xi_k^{-1'}\right)^2 (S_{\Xi_k} \circ \Xi_k^{-1}) \quad (4.14)$$

s. Hille [50, Abschnitt 10.1]. Daraus und wegen

$$\Xi_k^{-1'}(x_\theta) = \xi^{-1'}(\theta) e^{i(\xi^{-1}(\theta) - \theta)}$$

folgt für $\tilde{\theta} = \xi^{-1}(\theta)$, dass

$$S_{\Xi_k^{-1}}(x_\theta) = \frac{1 - k^2}{2} e^{-2i\theta} \left(1 - \xi^{-1'}(\theta)^2\right). \quad (4.15)$$

Gleichung (4.13) lautet daher

$$b(\theta) \equiv \beta'_{P_k}.$$

Das perfekt leitende Gebiet C_k ist demnach anhand seiner Rückstreudaten nicht von dem konzentrischen Kreisgebiet B_{P_k} unterscheidbar.

Satz 4.11. Ω_1 und Ω_2 seien zwei perfekt leitende Gebiete mit identischen Rückstreudaten $b_1 = b_2$, und der innere Radius des Referenzkreisrings beider Gebiete sei P_k für ein $k \in \mathbb{N}$, $k > 1$, sodass die Rückstreudaten in (2.28) den Wert $\beta'_{P_k} = (1 - k^2)/(12\pi)$ annehmen, vgl. Lemma 4.8. Dann stehen die konformen Abbildungen beider Einschlüsse in der Relation

$$\Phi_1(z) = \Xi_k(\Phi_2(z)), \quad z \in T,$$

mit Ξ_k aus (4.12) für einen geeigneten Parameter $\rho \in (0, 1)$.

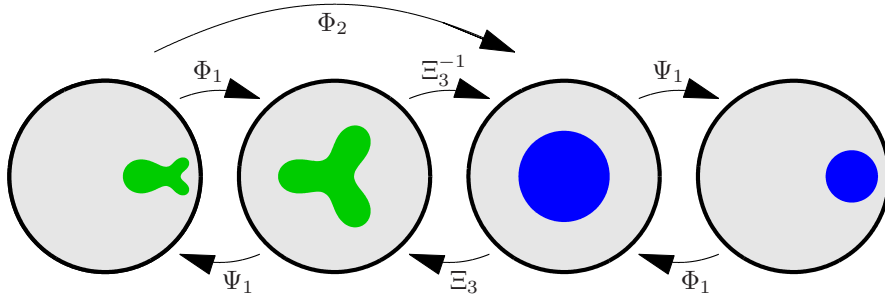


Abbildung 4.3: Illustration der konformen Abbildungen aus Beispiel 4.12.

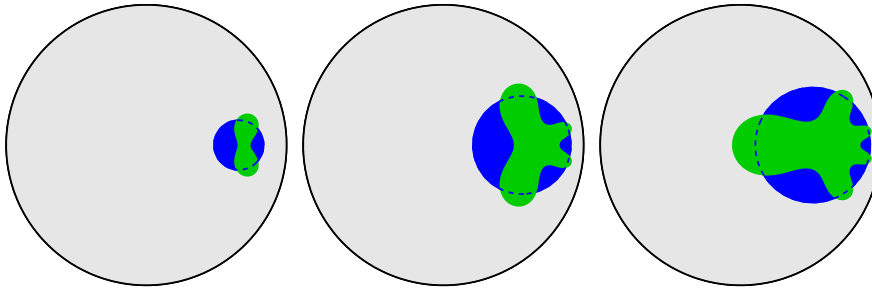


Abbildung 4.4: Jedes Bild zeigt jeweils in blau und grün zwei perfekte Leiter mit gleichen Rückstreudaten; $k = 2$ (links), $k = 4$ (Mitte) und $k = 5$ (rechts), s. Beispiel 4.12.

Beweis: Wie im Beweis zu Satz 4.9 schließen wir, dass die Randabbildung von $\Xi = \Phi_1 \circ \Psi_2$ aufgrund des Wertes P_k die Gestalt (4.11) für ein geeignetes $\rho \in (0, 1)$ hat. Ξ ist dann durch (4.12) gegeben. \square

Beispiel 4.12. Ω_1 sei das Bild der Kreisscheibe B_{P_k} unter der Möbiustransformation

$$\Psi_1(z) = \frac{z + \tau}{1 + \tau z}, \quad z \in D,$$

mit $\tau \in (0, 1)$. Das Gebiet Ω_1 ist ebenfalls kreisförmig und der Mittelpunkt von Ω_1 liegt auf der positiven reellen Achse. Als perfekt leitendes Gebiet hat Ω_1 gemäß Proposition 3.7 die Rückstreudaten

$$b_1(\theta) = \beta'_{P_k} \varphi'_1(\theta)^2, \quad \theta \in [0, 2\pi),$$

mit der Randabbildung φ_1 von

$$\Phi_1(z) = \frac{z - \tau}{1 - \tau z}.$$

Wir definieren einen weiteren Einschluss durch $\Omega_2 = \Psi_1(C_k)$ mit C_k aus Beispiel 4.10. Die konforme Abbildung zu Ω_2 lautet dann $\Phi_2 = \Xi_k^{-1} \circ \Phi_1$. In

Abbildung 4.3 ist diese Konstruktion für $k = 3$ skizziert. Als perfekt leitendes Gebiet hat Ω_2 die Rückstreudaten

$$b_2(\theta) = \beta'_{P_k} \varphi'_2(\theta)^2 + \frac{e^{2i\theta}}{6\pi} S_{\Phi_2}(x_\theta), \quad \theta \in [0, 2\pi). \quad (4.16)$$

Da Φ_1 eine Möbiustransformation ist, verschwindet S_{Φ_1} , und wir erhalten mit (4.15), dass

$$S_{\Phi_2}(x_\theta) = \Phi'_1(x_\theta)^2 S_{\Xi_k^{-1}}(\Phi_1(x_\theta)) = \frac{1-k^2}{2} e^{-2i\theta} \left(\varphi'_1(\theta)^2 - \varphi'_2(\theta)^2 \right).$$

Eingesetzt in (4.16) ergibt das

$$b_2(\theta) = \frac{1-k^2}{12\pi} \varphi'_1(\theta)^2 = b_1(\theta).$$

Abbildung 4.4 illustriert dies für die Parameterwahl $\tau = 0.7$, $\rho = 0.1$ und verschiedene k . In den drei Bildern ist jeweils in blau der Einschluss Ω_1 eingetragen und in grün der Einschluss Ω_2 . Der Rand von Ω_2 hat stets k Ausläufer, die Stärke der Auslenkung wird von ρ gesteuert. Mit wachsendem k wird P_k und damit der Durchmesser von Ω_1 größer. Nach Festlegung der Zahl k und von $\rho < P_k^k$ ist in diesem Beispiel noch der Parameter τ variabel, der die Lage von Ω_1 bestimmt.

Diese Konstruktion weiterer perfekt leitender Einschlüsse mit gleichen Rückstreudaten gelingt immer, wenn Ψ_1 konform auf $D \setminus \overline{C}_k$ fortsetzbar ist und wenn $\rho < P_k^k$.

5 Rekonstruktion der konformen Abbildung

5.1 Lösbarkeit des Randwertproblems

In Kapitel 4 wurde gezeigt, dass ein isolierender Einschluss eindeutig anhand seiner Rückstreudaten identifizierbar ist. Aufbauend auf dem Beweis des Eindeutigkeitsresultats aus Satz 4.4 entwickeln wir in diesem Kapitel ein numerisches Verfahren zur Rekonstruktion eines Einschlusses aus seinen Rückstreudaten. Anschließend demonstrieren wir das Verfahren an Beispielen mit simulierten Daten.

Ein perfekt leitender Einschluss ist bis auf die in Abschnitt 4.3 beschriebenen Ausnahmen aus seinen Rückstreudaten rekonstruierbar. Das in diesem Kapitel beschriebene Verfahren lässt sich ebenfalls auf die unter Satz 4.9 fallenden perfekt leitenden Einschlüsse anwenden, lediglich der Parameter β_R muss durch β'_R ersetzt werden.

Zur Rekonstruktion eines Einschlusses Ω berechnen wir zuerst die konforme Abbildung Φ und den inneren Radius R des Referenzkreisrings. In einem zweiten Schritt werten wir die inverse konforme Transformation $\Psi = \Phi^{-1}$ auf dem Kreis mit Radius R aus und erhalten so den Rand $\Gamma = \partial\Omega$. In Gleichung (3.17) manifestiert sich der Zusammenhang zwischen den Rückstreudaten, der konformen Abbildung Φ und dem inneren Radius R . Wir untersuchen daher das Randwertproblem

$$f'''(\theta) = \left(\frac{1}{2} - 6\pi b(\theta)\right) f'(\theta) - \gamma f'(\theta)^3 + \frac{3 f''(\theta)^2}{2 f'(\theta)}, \quad \theta \in (0, 2\pi), \quad (5.1a)$$

$$f(0) = 0, \quad f(2\pi) = 2\pi, \quad f'(0) = f'(2\pi), \quad f''(0) = f''(2\pi) \quad (5.1b)$$

mit Parameter $\gamma \in \mathbb{R}$. Aus Satz 4.4 ist bekannt, dass es genau eine konforme Abbildung gibt, deren Randabbildung dieses Problem löst. Das schließt allerdings nicht aus, dass andere klassische Lösungen von (5.1) existieren, die nicht von konformen Abbildungen abstammen. Der nächste Satz schließt die Existenz solcher Lösungen aus:

Satz 5.1. Das Randwertproblem (5.1) besitzt für die Rückstreudaten b eines Einschlusses Ω eine eindeutige klassische Lösung bestehend aus einer glatten Funktion und einem zugeordneten Parameter. Diese klassische Lösung ist gerade die Randabbildung φ der konformen Abbildung Φ zum Einschluss Ω , und der Parameter ist $\gamma_R = (1 - 12\pi\beta_R)/2$ mit β_R aus (2.19) für den Radius R des Referenzkreisrings von Ω .

Beweis: Die Randabbildung φ löst das Randwertproblem (5.1) mit Parameter $\gamma_R = (1 - 12\pi\beta_R)/2$. Dies ist durch Umformen von Gleichung (3.17) ersichtlich. Die ersten beiden Randbedingungen sind aufgrund der Festlegung der konformen Abbildung in Bemerkung 3.10 erfüllt. Die Periodizität folgt aus (3.12).

Zum Beweis der Eindeutigkeit nehmen wir an, dass neben φ eine andere klassische Lösung f von (5.1) existiert mit einem zugehörigen Parameter γ . Wir bezeichnen mit $\psi = \varphi^{-1}$ wieder die Randabbildung der inversen konformen Abbildung Ψ und untersuchen die Funktion

$$\xi(\theta) = f \circ \psi(\theta), \quad \theta \in [0, 2\pi].$$

Lemma 4.2 besagt, dass ξ das Randwertproblem (4.2) mit Parametern $\gamma_1 = \gamma$ und $\gamma_2 = \gamma_R$ erfüllt. Wie im Beweis zu Satz 4.4 folgern wir, dass ξ die Identität ist und die beiden Parameter übereinstimmen, $\gamma_R = \gamma$. Daraus folgt $f = \varphi$ und damit die Eindeutigkeit der Lösung von (5.1). \square

Bemerkung 5.2. Für Rückstreudaten eines perfekten Leiters, dessen Referenzgebiet keinen der Radien P_k aus Abschnitt 4.3 hat, gilt Satz 5.1 entsprechend. Die Argumentation am Ende des Beweises gleicht dann der im Beweis zu Satz 4.9.

Durch Lösen des Randwertproblems (5.1) zu gegebenen Rückstreudaten b lassen sich die Randabbildung φ und der Parameter β_R bestimmen. Der Radius R des Referenzkreisrings ist aus (2.19) berechenbar. Um Ψ zu bestimmen, invertieren wir φ , um dann aus der Randabbildung ψ die Koeffizienten der Laurentreihe von Ψ zu berechnen:

$$\Psi(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \alpha_k x^k \quad \text{mit} \quad \alpha_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\psi(\theta)} e^{-ik\theta} d\theta. \quad (5.2)$$

Da Ψ stetig auf ∂B_R fortsetzbar ist und sich an T spiegeln lässt, konvergiert die Laurentreihe von Ψ für $R \leq |x| \leq 1/R$ absolut, und die Laurentkoeffizienten fallen exponentiell ab, das heißt

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |\alpha_k|^2 R^{-2|k|} < \infty.$$

Zur Berechnung von Γ werten wir Ψ an $|x| = R$ aus. Dabei müssen allerdings Ausdrücke der Form

$$\Psi(R e^{it}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \alpha_k R^k e^{ikt}, \quad t \in [0, 2\pi)$$

berechnet werden. Die negativen Frequenzen α_k , $k < 0$, werden hierbei mit den Faktoren R^k multipliziert, die für kleine R sehr groß werden und die Berechnung höchst instabil machen. Aus diesem Grund erfordert dieser Teil des Rekonstruktionsalgorithmus ein geeignetes Regularisierungsverfahren, das wir in Abschnitt 5.2.2 vorstellen.

5.2 Implementierung

5.2.1 Berechnung der Randabbildung

Um das Randwertproblem (5.1) zu lösen, formulieren wir es als System erster Ordnung:

$$\begin{aligned} y' &= F(\theta, y; \gamma), & \theta &\in (0, 2\pi), \\ G(y(0), y(2\pi)) &= 0. \end{aligned} \quad (5.3)$$

Die Funktion $F : (0, 2\pi) \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ beschreibt die Differentialgleichung und ist definiert durch

$$F(\theta, y; \gamma) = \begin{pmatrix} y_2 \\ y_3 \\ \left(\frac{1}{2} - 6\pi b(\theta)\right) y_2 - \gamma y_2^3 + \frac{3}{2} \frac{y_3^2}{y_2} \end{pmatrix},$$

mit $y(\theta) = [y_1(\theta), y_2(\theta), y_3(\theta)]^T$, während $G : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$ die Einhaltung der Randbedingungen gewährleistet, das heißt

$$G(y(0), y(2\pi)) = \begin{pmatrix} y_1(0) \\ y_1(2\pi) - 2\pi \\ y_2(0) - y_2(2\pi) \\ y_3(0) - y_3(2\pi) \end{pmatrix}.$$

Die Differentialgleichung besitzt aufgrund des unbekanntes Parameters γ vier Freiheitsgrade. Dies rechtfertigt die vier Randbedingungen. Aufgrund von Satz 5.1 hat (5.3) eine eindeutige Lösung, die wir mit \hat{y} bezeichnen. Offenbar ist $\hat{y}_1 = \varphi$. Wir lösen das Randwertproblem (5.3) mittels eines Kollokationsverfahrens, das in der Matlabroutine `bvp5c` implementiert ist, s. Kierzenka und Shampine [63]. `bvp5c` verwendet ein implizites Runge-Kutta-Verfahren sechster Ordnung zur Lösung des Randwertproblems. Für den unbekanntes Parameter wird eine zusätzliche triviale Differentialgleichung $\gamma' = 0$ eingeführt. `bvp5c` besitzt einen Fehlerschätzer, der für jedes Gitterintervall die Abweichung der berechneten zur exakten Lösung in der Maximumsnorm bestimmt, und führt eine adaptive Gitterverfeinerung durch. Dabei verbessert `bvp5c` die approximative Lösung iterativ, bis der geschätzte Fehler auf jedem Gitterintervall unter eine festgelegte Toleranzschranke `tol` fällt. Die von `bvp5c` erzielte numerische Lösung ist stetig differenzierbar und approximiert die analytische Lösung mit einer Genauigkeit fünfter Ordnung.

Der Löser benötigt eine Startnäherung, deren Qualität großen Einfluss auf das Ergebnis der Berechnung hat. Unsere Startnäherung geht wie in Satz 3.7 von einem kreisförmigen Einschluss aus. In diesem Fall vereinfacht sich die Rückstreugleichung (3.17) zu

$$b(\theta) = \beta_{\text{ini}} (\varphi'_{\text{ini}}(\theta))^2,$$

mit Randabbildung φ_{ini} und Parameter β_{ini} . Da das Integral von φ'_{ini} über $[0, 2\pi]$ den Wert 2π hat, erhalten wir als Startnäherung

$$\beta_{\text{ini}} = \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sqrt{b(\theta)} \, d\theta \right)^2 \quad \text{und} \quad \varphi'_{\text{ini}}(\theta) = \sqrt{b(\theta)/\beta_{\text{ini}}}.$$

Zum Abschluss legen wir noch die Fehlerschranke für `bvp5c` fest und erläutern, wie diskrete Daten interpoliert werden: Für das numerische Rekonstruktionsverfahren liegen die Daten in Form eines Vektors $\mathbf{b} = [b_1, \dots, b_N]^T$ auf einem äquidistanten Gitter $t_1 < \dots < t_N$ über dem Intervall $[0, 2\pi)$ vor. Infolge der adaptiven Gitterverfeinerung muss das Verfahren `bvp5c` auf die Werte der Rückstreuungsfunktion $b(\theta)$ an beliebigen Punkten θ zurückgreifen können. Falls die Daten ausschließlich numerisches Rauschen enthalten, interpolieren wir sie dazu linear. Als Fehlerschranke für `bvp5c` geben wir in diesem Fall $\text{tol} = 10^{-6}$ vor. Wir simulieren Rauschen mit Signal-Rausch-Verhältnis δ , indem wir einen Vektor \mathbf{e} entsprechender Größe mit standardnormalverteilten Einträgen auf die Daten $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^N$ addieren, das heißt

$$\mathbf{b}_\delta = \mathbf{b} + \delta \frac{|\mathbf{b}|}{|\mathbf{e}|} \mathbf{e}, \quad (5.4)$$

wobei $|\cdot|$ die Euklidnorm bezeichne. Sind die Daten auf diese Weise mit einem Signal-Rausch-Verhältnis δ gestört, genügt es zur Lösung der Differentialgleichung im Allgemeinen nicht, die Daten linear zu interpolieren und die Fehlertoleranz auf $\text{tol} = \delta$ zu erhöhen. Bloße lineare Interpolation führt bei verrauschten Daten zu einer sehr irregulären Rückstreuungsfunktion, für die das Randwertproblem (5.3) nicht mit der gewünschten Genauigkeit numerisch lösbar ist. Aus diesem Grund bereiten wir verrauschte Daten auf, indem wir sie durch einen glättenden Spline approximieren. Dazu approximieren wir \mathbf{b} mittels eines kubischen Splines s , der den Ausdruck

$$p \sum_{k=1}^N |b_k - s(t_k)|^2 + (1-p) \int_0^{2\pi} |s''(t)|^2 dt$$

minimiert. Matlab stellt die Methode `csaps` zur Berechnung eines solchen Splines s bereit. Der Parameter $p \in [0, 1]$ in obigem Ausdruck wird in Abhängigkeit des Rauschens nach folgender Abwägung gewählt: Um der Genauigkeit willen sollte der Näherungsspline s die Daten so gut wie möglich approximieren, $p \approx 1$. Gleichzeitig sollte s glatt genug sein, damit `bvp5c` die geforderte Genauigkeit erreicht. Daher wählen wir zu Beginn $p = 1 - \delta/100$ und verkleinern p wenn nötig. Mit geglätteten Daten lösen wir die Kollokationsgleichungen dann bis zu einer Fehlertoleranz von $\text{tol} = \delta$.

Wenngleich die vorbereitende Glättung der Daten deren Informationsgehalt mindert, verbessert sie unserer Erfahrung nach das Ergebnis des Lösungsverfahrens erheblich. In manchen Fällen berechnet `bvp5c` zwar eine Lösung mit linearer Interpolation ohne vorherige Datenaufarbeitung, die Ergebnisse stehen allerdings qualitativ hinter denen mit geglätteten und kubisch interpolierten Daten zurück. Wir verweisen dazu auf die ersten beiden Beispiele in Abbildung 5.6 aus Abschnitt 5.3.

Mit den oben ausgeführten Einstellungen ist `bvp5c` ein leistungsfähiges und schnelles Lösungsverfahren für das Randwertproblem (5.3). Beispiel 5.3 veranschaulicht diese Einschätzung:

Beispiel 5.3. Wir demonstrieren die Leistungsfähigkeit des Kollokationsverfahrens `bvp5c` mit den oben beschriebenen Einstellungen als Lösungsmethode für das Randwertproblem (5.3) für vier verschiedene isolierende Einschlüsse Ω_j ,

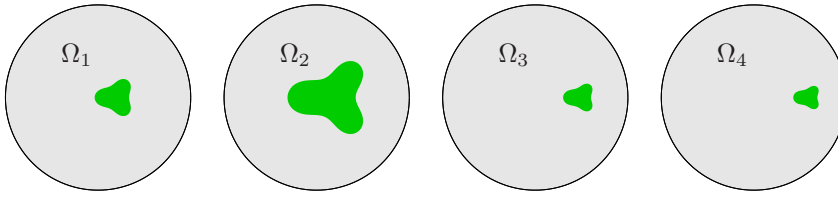


Abbildung 5.1: Einschlüsse aus Beispiel 5.3.

$j = 1, \dots, 4$, die in Abbildung 5.1 dargestellt sind. Die zu den Einschlüssen zugehörigen konformen Abbildung haben die Gestalt

$$\Phi(z) = \Xi_3^{-1} \left(\frac{z - \tau}{1 - \tau z} \right), \quad z \in D \setminus \overline{\Omega}_j$$

mit Ξ_3 aus (4.12), vgl. die Konstruktion aus Beispiel 4.12. Der Radius R des Referenzkreisrings sowie die Parameter ρ von Ξ_3 und τ sind für die vier Einschlüsse verschieden. Mittels Formel (3.21) berechnen wir die Rückstreudaten der Einschlüsse an 768 äquidistanten Punkten auf dem Rand T . Wir simulieren Rauschen mit Signal-Rausch-Verhältnis δ durch (5.4). Tabelle 5.1 präsentiert für jeden Einschluss die Ergebnisse von `bvp5c` für unterschiedliches Rauschniveau und verschiedene Einstellungen des Glättungsparameter p und der geforderten Genauigkeit `tol` des Kollokationsverfahrens. Das Lösungsverfahren liefert einen Vektor $\mathbf{y} = [y_1, \dots, y_L]^T \in \mathbb{R}^L$, der die Randabbildung φ von Φ in den vom Verfahren adaptiv gewählten Winkeln θ_j , $j = 1, \dots, L$ approximiert. Die letzte Spalte *Fehler* verzeichnet die relative Differenz zwischen der berechneten und der analytischen Lösung in der Euklidnorm, das heißt die Größe

$$\left(\frac{\sum_{j=1}^L |\varphi(\theta_j) - y_j|^2}{\sum_{j=1}^L |\varphi(\theta_j)|^2} \right)^{1/2}.$$

Wie Tabelle 5.1 zeigt, erreicht `bvp5c` die vorgeschriebene Genauigkeit gut. Insbesondere beeinflusst der Glättungsparameter p die Genauigkeit der Lösung nicht signifikant, wie beispielsweise die Ergebnisse mit 1% Rauschen im zweiten und vierten und mit 3% Rauschen im dritten Beispiel belegen. Die Ergebnisse lassen den Schluss zu, dass das Kollokationsverfahren gute Ergebnisse erzielt und die vorgegebene Genauigkeit `tol` meistens erreicht. Wenn der Einschluss allerdings nahe am Rand liegt, kann das Verfahren die Lösung des Randwertproblems aus verrauschten Daten unter Umständen nicht mit der geforderten Genauigkeit bestimmen. Die Randabbildung des Einschlusses Ω_4 berechnet das Verfahren beispielsweise bei 3% Rauschen nicht mit der vorgegebenen Genauigkeit von `tol = 3 \cdot 10^{-2}`. Der Einschluss Ω_4 ist relativ klein und liegt nah am Rand, daher ändern die Rückstreudaten und die Randabbildung ihr Steigungsverhalten sehr abrupt. Die numerische Lösung des Randwertproblems ist in solchen Fällen schwierig, vgl. Kierzenka, Shampine und Reichelt [64]. Bei einem Signal-Rausch-Verhältnis von 3% führt auch starkes Glätten der Daten zu keiner genauen Lösung.

Schließlich bietet Abbildung 5.2 einen Ausblick auf die Rekonstruktionen der Einschlüsse aus Tabelle 5.1. Die Rekonstruktionen wurden für 3% Rauschen

Tabelle 5.1: Lösungen der Randwertproblems für Testeinschlüsse.

Einschluss	Rauschen	p	tol	Fehler
Ω_1	0.0 %	1	$1 \cdot 10^{-6}$	$6.1 \cdot 10^{-8}$
	0.1 %	0.99999	$1 \cdot 10^{-3}$	$1.4 \cdot 10^{-5}$
	1.0 %	0.9999	$1 \cdot 10^{-2}$	$2.4 \cdot 10^{-4}$
	3.0 %	0.9997	$3 \cdot 10^{-2}$	$1.3 \cdot 10^{-4}$
Ω_2	0.0 %	1	$1 \cdot 10^{-6}$	$5.9 \cdot 10^{-8}$
	0.1 %	0.99999	$1 \cdot 10^{-3}$	$8.4 \cdot 10^{-6}$
	1.0 %	0.9999	$1 \cdot 10^{-2}$	$1.6 \cdot 10^{-4}$
	1.0 %	0.99	$1 \cdot 10^{-2}$	$1.8 \cdot 10^{-4}$
	3.0 %	0.9997	$3 \cdot 10^{-2}$	$2.2 \cdot 10^{-4}$
Ω_3	0.0 %	1	$1 \cdot 10^{-6}$	$6.3 \cdot 10^{-8}$
	0.1 %	0.99999	$1 \cdot 10^{-3}$	$8.0 \cdot 10^{-5}$
	1.0 %	0.9999	$1 \cdot 10^{-2}$	$1.2 \cdot 10^{-4}$
	3.0 %	0.995	$3 \cdot 10^{-2}$	$2.0 \cdot 10^{-3}$
	3.0 %	0.99	$3 \cdot 10^{-2}$	$2.0 \cdot 10^{-3}$
Ω_4	0.0 %	1	$1 \cdot 10^{-6}$	$6.7 \cdot 10^{-8}$
	1.0 %	0.995	$1 \cdot 10^{-2}$	$1.6 \cdot 10^{-4}$
	1.0 %	0.99	$1 \cdot 10^{-2}$	$2.5 \cdot 10^{-4}$
	3.0 %	0.999	$3 \cdot 10^{-2}$	$3.0 \cdot 10^{-1}$
	3.0 %	0.99	$3 \cdot 10^{-2}$	$8.1 \cdot 10^{-1}$

durchgeführt, lediglich Ω_4 wurde aus mit nur zu 1% verrauschten Daten rekonstruiert, da die berechnete Lösung bei 3% Rauschen zu ungenau ist. Die blaue Linie kennzeichnet in den Bildern jeweils den Einschluss innerhalb des in schwarz markierten Einheitskreises. Das orange eingefärbte Gebiet zeigt die entsprechende Rekonstruktion. Abschnitt 5.2.2 erläutert, wie diese Rekonstruktionen aus der Lösung des Randwertproblems (5.3) berechnet werden.

5.2.2 Auswerten der Laurentreihe

Dieser Abschnitt beschreibt, wie der Rand eines Einschlusses Ω aus der Kenntnis der Transformation Φ auf dem Einheitskreis und des inneren Radius R des Referenzkreisrings rekonstruiert wird. Mit dem in Abschnitt 5.2.1 beschriebenen Verfahren erhalten wir eine Näherung der Randabbildung φ und dementsprechend die Einschränkung von Φ auf den Einheitskreis, das heißt

$$\Phi(e^{i\theta_j}) = e^{i\varphi_j}, \quad j = 1, \dots, L,$$

für diskrete Winkel θ_j und Werte $\varphi(\theta_j) = \varphi_j$ aus dem Kollokationsverfahren. Die Berechnung von Γ durch Auswerten der Laurentreihe (5.2) auf ∂B_R geschieht in zwei Schritten:

1. *Umkehrung*: Wir schneiden die Laurentreihe (5.2) nach $2M + 1$ Termen ab.

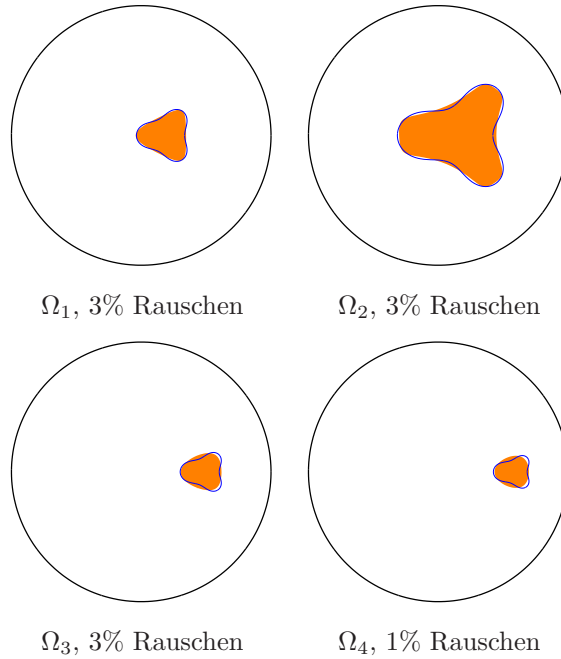


Abbildung 5.2: Rekonstruktionen der Einschlüsse aus Tabelle 5.1.

Die Koeffizienten α_k , $k = -M, \dots, M$, sind Näherungslösungen der linearen Gleichungen

$$\sum_{k=-M}^M \alpha_k e^{ik\varphi_j} \approx e^{i\theta_j}, \quad j = 1, \dots, L. \quad (5.5)$$

2. *Auswertung*: Nach der Berechnung der Koeffizienten $\{\alpha_k\}$ werten wir die Laurentreihe (5.2) auf dem Kreis mit Radius R aus, um ein Punktgitter auf Γ zu berechnen:

$$\sum_{k=-M}^M \alpha_k R^k e^{ikt_l} \quad \text{für äquidistante Gitterpunkte } t_l \text{ aus } [0, 2\pi). \quad (5.6)$$

Die Schwierigkeit bei der Umsetzung dieser beiden Schritte des Rekonstruktionsalgorithmus resultiert aus der Tatsache, dass $R > 0$ im Allgemeinen sehr klein ist. Minimale Datenfehler in den negativen Frequenzen α_k , $k < 0$, die entweder durch Rauschen oder die begrenzte Rechengenauigkeit hervorgerufen werden, werden durch die Multiplikation mit R^k extrem verstärkt. Andererseits geht ein Großteil der Information aus den positiven α_k , $k > 0$, verloren. Aus diesem Grund ist es nicht ratsam, eine große Anzahl M an Frequenzen zu berechnen. Wir wählen $M = 50$, dann liegt in all unseren Beispielen R^M weit unterhalb der Rechengenauigkeit, und ein größeres M würde die Ergebnisse nicht verbessern. Mit dieser Wahl von M ist das lineare Gleichungssystem (5.5) überbestimmt. Darüber hinaus ist die Auswertung der Laurentreihe (5.6) im zweiten Schritt instabil, weil jede Matrix, die die Faktoren R^{-M}, \dots, R^M

enthält, äußerst schlecht konditioniert ist. Aus diesem Grund ist unsere Methode für die Umkehrung im ersten Schritt schon auf die spätere instabile Auswertung ausgerichtet. Um das Gleichungssystem (5.5) zu lösen, definieren wir:

$$\eta_k = \begin{cases} \alpha_k R^k, & k = -M, \dots, -1, \\ \alpha_k, & k = 0, \dots, M. \end{cases}$$

Der Vektor $[\eta_{-M}, \dots, \eta_M]^T$ löst die Gleichung

$$\mathbf{A}\mathbf{y} = \mathbf{w} \quad (5.7)$$

mit $\mathbf{A} = \mathbf{E}\mathbf{P} \in \mathbb{C}^{L \times (2M+1)}$, wobei

$$\mathbf{E} = \begin{pmatrix} e^{-iM\varphi_1} & e^{-i(M-1)\varphi_1} & \dots & e^{iM\varphi_1} \\ e^{-iM\varphi_2} & & & \vdots \\ & & \ddots & \\ \vdots & & & e^{iM\varphi_{L-1}} \\ e^{-iM\varphi_L} & \dots & e^{i(M-1)\varphi_L} & e^{iM\varphi_L} \end{pmatrix}$$

und \mathbf{P} eine Diagonalmatrix mit $[R^M, R^{M-1}, \dots, R, 1, 1, \dots, 1] \in \mathbb{C}^{2M+1}$ auf der Diagonalen ist. Die rechte Seite von (5.7) lautet $\mathbf{w} = [e^{i\theta_1}, \dots, e^{i\theta_L}]^T$. Nach der Berechnung einer Lösung \mathbf{y} von (5.7) muss für die Auswertung (5.6) die inverse schnelle Fouriertransformation auf den Vektor $\mathbf{Q}\mathbf{y}$ angewandt werden, wobei \mathbf{Q} die quadratische Diagonalmatrix mit $[1, \dots, 1, R, R^2, \dots, R^M] \in \mathbb{C}^{2M+1}$ auf der Diagonalen bezeichnet.

Wir lösen das Gleichungssystem (5.7) durch Tikhonov-Regularisierung. Für einen Regularisierungsparameter $\lambda > 0$ berechnen wir

$$\mathbf{y}_\lambda = \arg \min_{\mathbf{y} \in \mathbb{C}^{2M+1}} (|\mathbf{A}\mathbf{y} - \mathbf{w}|^2 + \lambda |\mathbf{y}|^2). \quad (5.8)$$

Der Parameter λ wird mittels des Diskrepanzprinzips von Morozov bestimmt, s. Engl, Hanke und Neubauer [23, Abschnitt 4.3]. Entsprechend beginnen wir mit $\lambda = 1$ und berechnen \mathbf{y}_λ aus (5.8). Dann verkleinern wir λ um den Faktor 1/10 bis der Fehler $|\mathbf{A}\mathbf{y} - \mathbf{w}|$ einer vorgeschriebenen Schranke δ_{reg} genügt. Den Wert von δ_{reg} passen wir folgendermaßen auf das Rauschniveau und die Genauigkeit der Lösung des Randwertproblems an: Sind die Daten \mathbf{b} (bis auf Rechengenauigkeit) exakt, dann wird das Randwertproblem (5.3) bis zu einer Genauigkeit von $\text{tol} = 10^{-6}$ gelöst, wie in Abschnitt 5.2.1 erläutert. Die Ergebnisse in Tabelle 5.1 suggerieren $\delta_{\text{reg}} = 10^{-8}$ als gute Wahl für die Regularisierung. Auch unserer Erfahrung nach liefert diese Wahl deutlich bessere Ergebnisse als die Einstellung $\delta_{\text{reg}} = 10^{-6}$. Deshalb wählen wir $\delta_{\text{reg}} = 10^{-8}$ als Grundeinstellung. Wenn `bvp5c` hingegen die vorgegebene Genauigkeit nicht erreicht (was es durch eine Warnung anzeigt), setzen wir den Parameter auf $\delta_{\text{reg}} = 10^{-6}$. Bei verrauschten Daten gehen wir ähnlich vor: Bei einem Signal-Rausch-Verhältnis der Größenordnung δ wählen wir $\delta_{\text{reg}} = \delta/10$, falls `bvp5c` jedoch eine Warnung ausgibt oder die vorgegebene Genauigkeit nicht erreicht wird, setzen wir $\delta_{\text{reg}} = 10 \cdot \delta$.

5.3 Numerische Beispiele

Dieser Abschnitt stellt Ergebnisse der Rekonstruktionsmethode aus Abschnitt 5.2 vor. Wir beginnen mit den Einschlüssen aus Beispiel 5.3. Abbildung 5.2 zeigt die entsprechenden Rekonstruktionen für das jeweils angegebene Rauschniveau. Wie bereits erwähnt, ist der Rand der Einschlüsse in blau eingezeichnet und der Einheitskreis in schwarz, das orange gefärbte Gebiet zeigt die Rekonstruktion der Einschlüsse. Die Ergebnisse der oberen Reihe sind sehr genau mit kleinen Abweichungen am Rand der Einschlüsse, während in der zweiten Reihe die konkaven und konvexen Auslenkungen der Randkurve der Einschlüsse nicht akkurat wiedergegeben werden. Lage, Größe und vage Form der Einschlüsse werden angezeigt. Die Defizite der Rekonstruktionen der zweiten Reihe liegen daran, dass die Einschlüsse nah am Rand liegen und ihre Rückstreudaten jähle Änderungen aufweisen. Das Randwertproblem ist in diesen Fällen wie in Beispiel 5.3 erläutert schwierig zu lösen, und die Rekonstruktionen wurden mit der „vorsichtigen“ Parameterjustierung $\delta_{\text{reg}} = 10 \cdot \delta$ vorgenommen. In der ersten Reihe hingegen ist $\delta_{\text{reg}} = 3 \cdot 10^{-3}$ eingestellt.

Abbildung 5.3 zeigt Rekonstruktionen eines bumerangförmigen Einschlusses für verschiedene Rauschniveaus. Wir lösen das Vorwärtsproblem mit einer Randintegralmethode, die die Rückstreudaten an 768 äquidistanten Punkten des Intervalls $[0, 2\pi)$ berechnet. Rauschen simulieren wir wie in (5.4). Die Graphen auf der linken Seite zeigen in dunkelblau die Rückstreudaten, und die hellblaue Linie zeigt den zugehörigen Glättungsspline. Die Bilder der rechten Spalte zeigen die entsprechenden Resultate. Die erste Reihe zeigt ein unverraushtes Beispiel, in der zweiten beträgt das Signal-Rausch-Verhältnis 1%, in der dritten 3% und 10% in der untersten Reihe. Die Parameterwerte sind wie in Abschnitt 5.2 beschrieben gewählt, also $p = 0.9999$ für 1% Rauschen und $p = 0.9997$ für 3% Rauschen. Nur im Beispiel mit 10% Rauschen war stärkeres Glätten notwendig ($p = 0.976$). Bei diesem Beispiel gelingt es dem Kollokationsverfahren bei exakten Daten nicht, die vorgeschriebene Fehlerschranke von $\text{tol} = 10^{-6}$ zu erfüllen, sondern es erreicht nur eine (geschätzte) Genauigkeit von etwa $7 \cdot 10^{-5}$. Folglich ist das gewählte Level für die Regularisierung $\delta_{\text{reg}} = 10^{-6}$. Trotzdem ist die Rekonstruktion ausgezeichnet mit leichten Unebenheiten am Rand. Mit zunehmenden Rauschen wird der konkave Teil des Randes schlechter rekonstruiert, bis die Form in der untersten Reihe bei 10 % Rauschen schließlich nur noch als Dreieck angedeutet wird. Das Regularisierungsniveau ist für alle verrauschten Beispiele der Standardwert $\delta_{\text{reg}} = \delta/10$.

Als weiteres Beispiel zeigen wir die Resultate des Algorithmus für einen sternförmigen Einschluss in Abbildung 5.4. Die Daten in der ersten Reihe sind wieder exakt, während die zweite Reihe zu 3% verrauscht ist. Das unverrauschte Beispiel ist fast genau rekonstruiert ($\delta_{\text{reg}} = 10^{-8}$). Aus den verrauschten Daten identifiziert der Algorithmus alle fünf Strahlen des Sterns, aber nicht die genaue Krümmung dazwischen. Der Glättungsparameter ist hier $p = 0.9997$ und das Regularisierungsniveau $\delta_{\text{reg}} = 3 \cdot 10^{-3}$.

Abbildung 5.5 stellt Rekonstruktionen verschiedener Einschlüsse mit 3% Rauschen vor, die alle mit der Standardparametereinstellung $p = 0.9997$ und $\delta_{\text{reg}} = 3 \cdot 10^{-3}$ vorgenommen wurden. Diese Beispiele stützen unsere positive Einschätzung des Rückstreualgorithmus: Wenn die Parameter so eingestellt

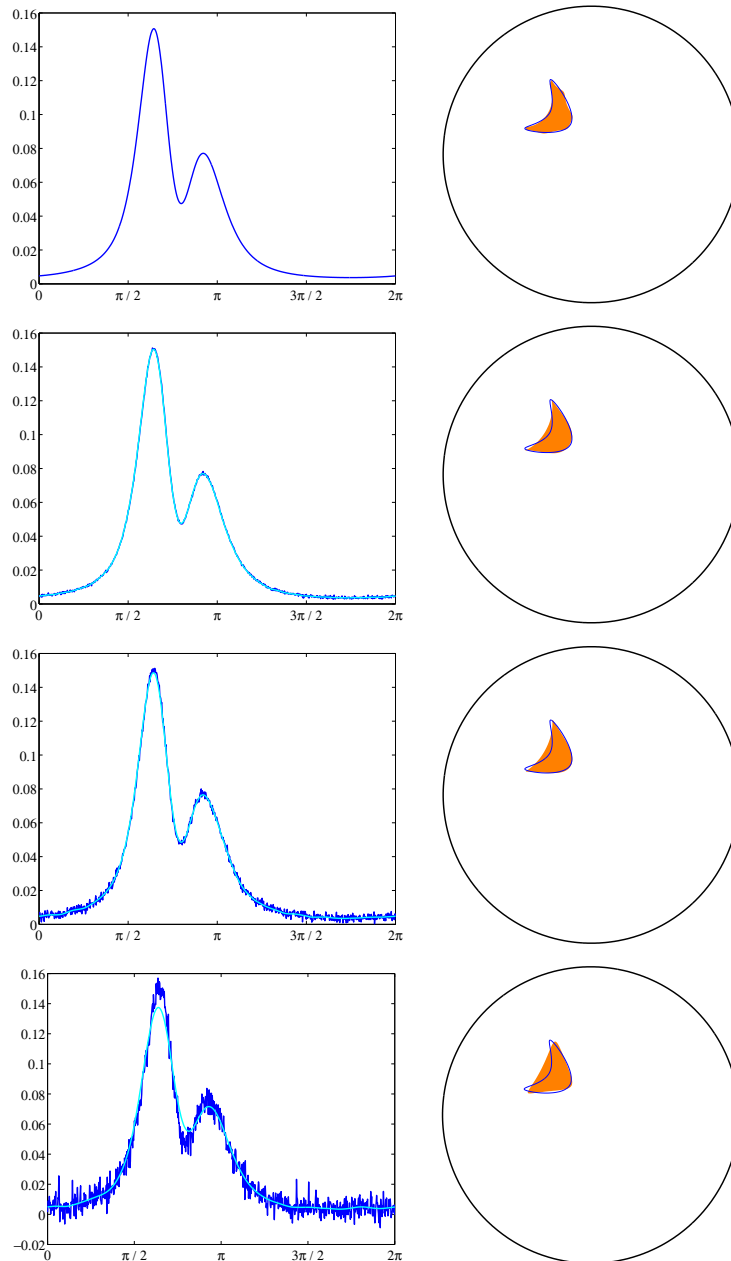


Abbildung 5.3: Rekonstruktionen eines bumerangförmigen Einschlusses.

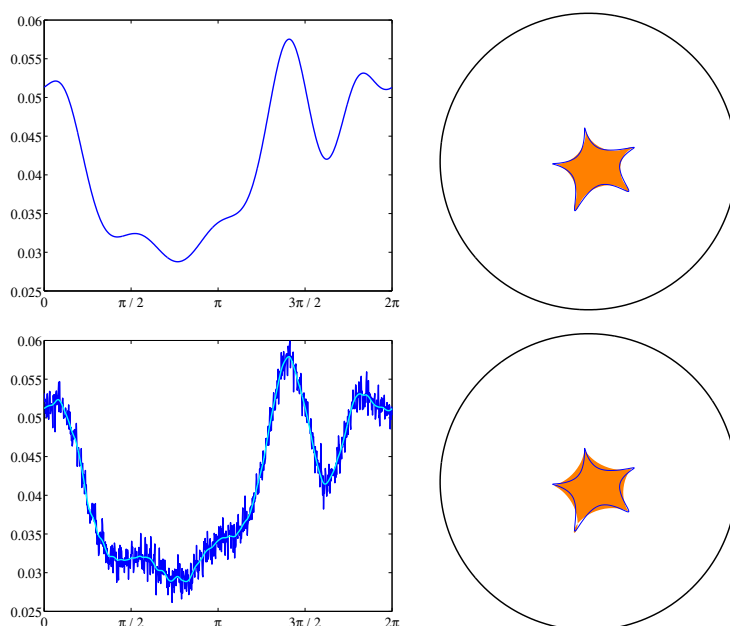


Abbildung 5.4: Rekonstruktionen eines sternförmigen Einschlusses.

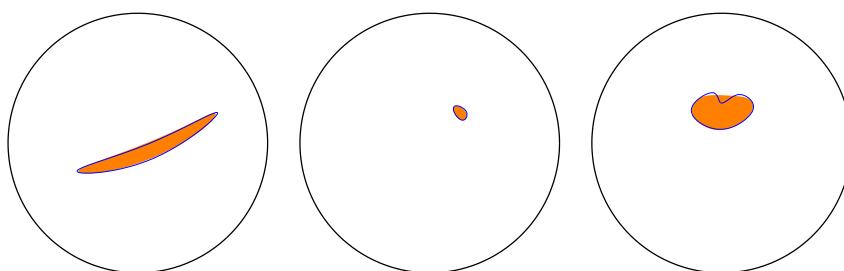


Abbildung 5.5: Rekonstruktionen verschiedener Einschlüsse mit 3% Rauschen.

werden können, dass das Randwertproblem (5.3) numerisch lösbar ist, dann sind die Rekonstruktionen gut. Dies trifft für den Schlitz und den kleinen Einschluss in Abbildung 5.5 zu. Das Auffinden konkaver Randgebiete stellt insbesondere unter Rauschen eine Herausforderung dar, wie das letzte Beispiel in Abbildung 5.5 veranschaulicht.

Im letzten Beispiel 5.6 simulieren wir reale Messungen. Die Anzahl der zur Verfügung stehenden Datenpunkte ist in den ersten beiden Zeilen auf 16 und in den beiden unteren auf 32 reduziert. Diese sind im Bild durch dunkelblaue Punkte markiert. Das Signal-Rausch-Verhältnis beträgt 3% in den ersten drei Zeilen und 10% in der vierten Zeile. Die Rekonstruktion in der ersten Zeile ist ohne Datenaufbereitung durchgeführt: Die 16 Werte wurden ohne vorheriges Glätten lediglich linear interpoliert und als Eingabe für das Kollokationsverfahren verwendet. Dieser Fall benötigt eine spezielle Parametereinstellung: Das

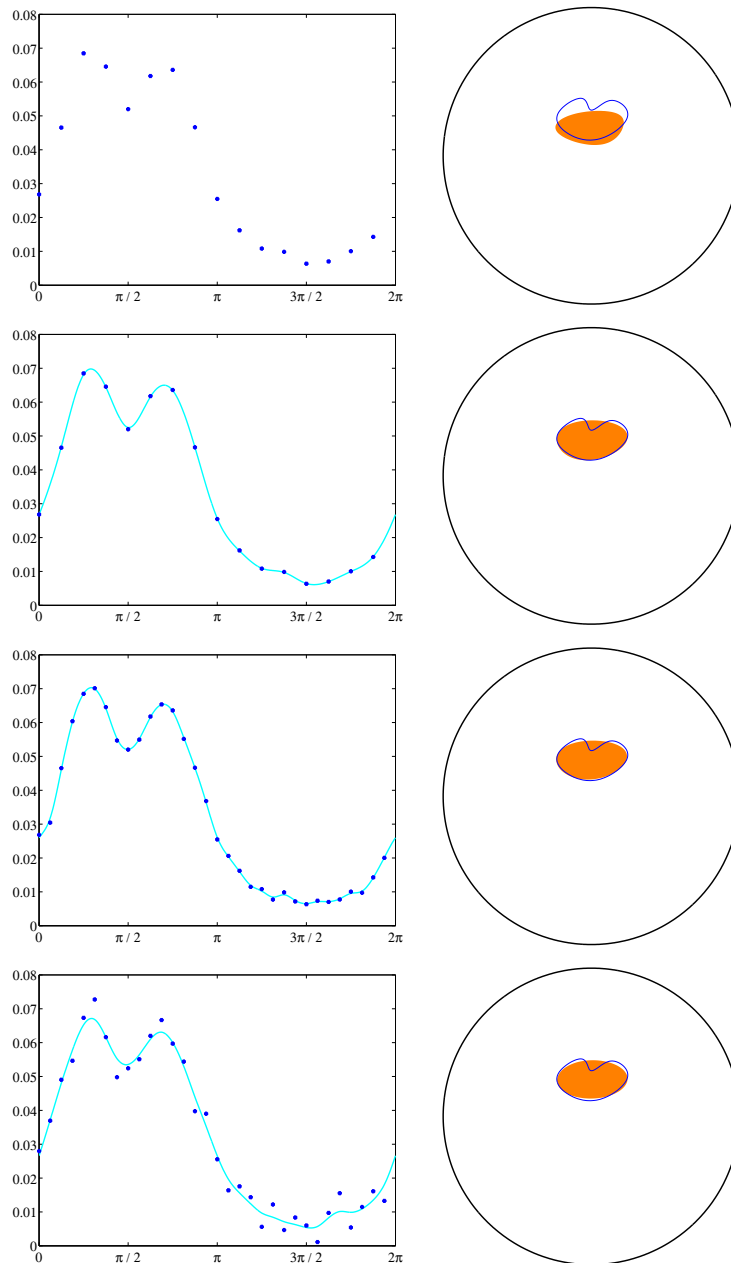


Abbildung 5.6: Rekonstruktionen aus 16 und 32 Datensätzen mit 3% (1.-3. Zeile) und 10% (4. Zeile) Rauschen.

Randwertproblem wird mit einer relativ hohen Genauigkeit von $\text{tol} = 10^{-6}$ gelöst, da die Berechnung der Randabbildung sonst zu ungenau ist. Der Regularisierungsparameter beträgt $\delta_{\text{reg}} = 0.3$ entsprechend der „vorsichtigen“ Parameterwahlstrategie aus Abschnitt 5.2.2. Abbildung 5.6 zeigt, dass die Rekonstruktion des Einschlusses in Richtung der Mitte verschoben ist. Das bessert sich durch vorheriges Glätten und kubische Interpolation, wie die unteren Zeilen von Abbildung 5.6 belegen. Die linken Graphen zeigen wieder in hellblau die jeweiligen Glättungssplines, berechnet für $p = 0.9997$ bei 3% Rauschen in den mittleren Zeilen und für $p = 0.995$ mit 10% Rauschen in der untersten Zeile. In den Zeilen zwei und drei ist die Fehlertoleranz $\text{tol} = 0.03$ und der Regularisierungsparameter $\delta_{\text{reg}} = 0.3$; in Zeile vier sind die Parameter $\text{tol} = 0.1$ und $\delta_{\text{reg}} = 1$. Die Rekonstruktion für 16 (zweite Zeile) und 32 (dritte Zeile) Datensätze mit 3% Rauschen sind fast gleich: Ort und Größe des Einschlusses sind präzise wiedergegeben, Details der Gestalt sind allerdings nicht erkennbar. Das ändert sich nicht, wenn das Rauschen in der vierten Zeile auf 10% angehoben wird. Im Vergleich mit der Rekonstruktion aus dem vollen Datensatz in 5.5 ist die Qualität der Rekonstruktion allerdings nicht signifikant geringer.

Wir fassen zusammen, dass Stabilität und Leistungsfähigkeit des Algorithmus wesentlich von der Lösung des Randwertproblems (5.3) abhängen, wie in Abschnitt 5.2.1 beschrieben wird. Das verwendete Rekonstruktionsverfahren liefert stets glatte Lösungen und harmoniert daher sehr gut mit analytischen Rückstreudaten und Randabbildungen. Die Rekonstruktionen aus exakten Daten sind sehr genau und detailgetreu. Das Lösungsverfahren `bvp5c` erreicht allerdings häufig nicht die gewünschte Genauigkeit, wenn die Daten zu verrauscht sind und insbesondere wenn kleine Einschlüsse nah am Rand von D liegen, wie Beispiel 5.3 zeigt. Aus diesem Grund ist vorbereitende Glättung der Daten durch einen approximierenden Spline unerlässlich. Das vorherige Glätten mindert freilich den Informationsgehalt der Daten und nivelliert Details der Gestalt des Einschlusses, insbesondere in konkaven Regionen, vgl. Abbildung 5.3. Das Maß an Rauschen, das durch die Approximation mit glättenden Splines beherrscht werden kann, ist begrenzt: Die hier gezeigten Einschlüsse sind alle aus mit bis zu 10% verrauschten Daten rekonstruierbar, für ein höheres Signal-Rausch-Verhältnis funktioniert die Methode nicht zuverlässig.

6 Der konvexe Rückstreuträger

6.1 Definition und Eigenschaften

Wir stellen in diesem Kapitel ein weiteres Lösungsverfahren für das inverse Hindernisproblem der EIT aus Rückstreudaten vor. Die in Kapitel 5 entwickelte Rekonstruktionsmethode findet bei einem einzelnen isolierenden und eingeschränkt auch bei einem einzelnen perfekt leitenden Einschluss Anwendung. Martin Hanke hat in [36] ein Verfahren entwickelt, das mehrere kleine Einschlüsse aus Rückstreudaten rekonstruiert. Dazu werden die Rückstreudaten durch eine rationale Funktion approximiert, die mit ihren Polen die Position der Einschlüsse anzeigt. Die in diesem Kapitel entwickelte Rekonstruktionsmethode benötigt kein Vorwissen über die Anzahl oder die elektrischen Eigenschaften der Einschlüsse. Sie beruht auf der holomorphen Fortsetzbarkeit der Rückstreudaten innerhalb des homogenen Bereichs der Leitfähigkeit aus Abschnitt 3.1 und rekonstruiert eine Teilmenge der konvexen Hülle der Inhomogenität. Die elektrische Leitfähigkeit $\sigma \in L^\infty(D)$ sei also positiv und in der Nähe des Randes T homogen, das heißt, $\text{supp}(\sigma - 1)$ sei eine kompakte Teilmenge von D . Dies entspricht den Voraussetzungen aus Abschnitt 2.2. Die Menge $\Omega \subset D$ bezeichne in diesem Kapitel das Innere der konvexen Hülle von $\text{supp}(\sigma - 1)$, und die Funktion u_b sei der Realteil der holomorphen Fortsetzung der Rückstreudaten b aus Korollar 3.6. Wir bestimmen eine Untermenge von Ω , indem wir die kleinste konvexe Menge herausarbeiten, in die u_b nicht harmonisch fortsetzbar ist. Diese Herangehensweise liegt dem Konzept des *konvexen Quellträgers* aus [39, 41] zugrunde, das wir hier zum *konvexen Rückstreuträger* erweitern.

Kusiak und Sylvester haben in [69] das Konzept des *konvexen Streuträgers* für die Helmholtzgleichung entwickelt. Der konvexe Streuträger ist das kleinste konvexe Gebiet, in dem es möglich ist, eine Welle zu erzeugen, deren Fernfeld mit gemessenen Daten übereinstimmt. Der Umstand, dass hier *mögliche* Quellen in Betracht gezogen werden, ist entscheidend, denn inverse Quellprobleme sind nicht eindeutig lösbar. Mit dem konvexen Streuträger wird jedoch eine Menge identifiziert, die in der konvexen Hülle aller Quellen liegt, die die Daten erzeugen können, und damit auch in der konvexen Hülle der echten Quelle. In den Arbeiten [39, 40] haben wir diese Herangehensweise auf das inverse Hindernisproblem in der EIT übertragen. Wird die homogene Hintergrundleitfähigkeit in D durch einen Einschluss gestört, so ist das Referenzpotential $\hat{w} = \hat{u} - \hat{u}_0$ eine harmonische Funktion außerhalb von $\text{supp}(\sigma - 1)$ mit verschwindender Normalenableitung auf T , vgl. Abschnitt 2.2. \hat{w} ist das elektrostatische Potential, das von der distributionellen Quelle $F = \nabla \cdot (1 - \sigma)\nabla \hat{u}$ erzeugt wird, und löst das

Poissonproblem $\Delta \hat{w} = F$ in D . Der Träger von F liegt in $\text{supp}(\sigma - 1)$. Schon aus Dimensionsgründen lässt sich F nicht aus Kenntnis der Dirichletdaten $w|_T$ bestimmen. Verschiedene Rekonstruktionsmethoden suchen daher nach speziellen Quelltypen wie zum Beispiel Punktquellen, Dipolen oder charakteristischen Funktionen, vgl. beispielsweise die Arbeiten [21, 22, 45, 56]. Unser Augenmerk richtet sich auf das *Quellgebiet* $\text{supp} F$. Wir bezeichnen eine Menge U als Quellgebiet zu den Daten $w|_T$, wenn es einen Quellterm F mit $\text{supp} F \subseteq U$ gibt, der ein Potential mit den entsprechenden Daten erzeugt. Es gibt ein ganzes Mengensystem solcher Quellgebiete zu $w|_T$, unter denen es eine – näher zu spezifizierende – kleinste Menge auszuzeichnen gilt. Die Arbeit [39] stellt mit dem *konvexen Quellträger* eine solche Menge vor. Der konvexe Quellträger ist der Schnitt der konvexen Hüllen aller zu den Daten passenden Quellgebiete. Diese Menge ist für $\hat{w}|_T \neq 0$ nichtleer, und tatsächlich existiert in jeder Umgebung des konvexen Quellträgers ein Quelle, die die Daten erzeugt. In [40] wurde ein Algorithmus für die Berechnung des konvexen Quellträgers zur Inhomogenität $\text{supp}(\sigma - 1)$ aus einem einzigen klassischen Datensatz der EIT entwickelt. Im Folgenden werden wir dieses Konzept als *konvexen Rückstreuträger* auf Rückstreudaten übertragen. Dies korrespondiert zur Arbeit [31] von Haddar, Kusiak und Sylvester im Kontext akustischer Streuprobleme. Die in [31] verwendeten Methoden und Argumente lassen sich allerdings nicht auf die zweidimensionale EIT übertragen, stattdessen berufen wir uns auf Resultate der komplexen Analysis.

Grundlage unserer weiteren Untersuchung ist die Poissongleichung

$$\Delta v = F \text{ in } D, \quad \frac{\partial}{\partial \nu} v = 0 \text{ auf } T. \quad (6.1)$$

Wir suchen distributionelle Quellterme F , für die die Lösung von (6.1) Dirichletwerte $v|_T = b$ hat. Wir bezeichnen mit $\mathcal{E}'(D) = (C^\infty(D))'$ den Raum der Distributionen mit kompaktem Träger in D . Der abgeschlossene Unterraum $\mathcal{E}'_\diamond(D) \subset \mathcal{E}'(D)$ bestehe aus jenen Distributionen, die konstante Funktion auf null abbilden,

$$\mathcal{E}'_\diamond(D) = \{F \in \mathcal{E}'(D) : \langle F, 1 \rangle = 0\},$$

wobei $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathcal{E}'(D) \times C^\infty(D) \rightarrow \mathbb{R}$ hier für die duale Paarung zwischen Distributionen mit kompaktem Träger und glatten Funktionen auf D steht. Wir befassen uns kurz mit der Lösungstheorie der Poissongleichung (6.1):

Lemma 6.1. Das Poissonproblem (6.1) hat für einen distributionellen Quellterm $F \in \mathcal{E}'_\diamond(D)$ eine Lösung $v \in \cup_{m \in \mathbb{Z}} H^m(D)$, die bis auf eine Konstante eindeutig bestimmt ist. Die Spur von v auf T ist glatt, $v|_T \in C^\infty(T)$.

Beweis: Die Distribution $F \in \mathcal{E}'_\diamond(D)$ hat endliche Ordnung und liegt daher in $H^m(D)$ für eine Zahl $m \in \mathbb{Z}$, s. Dautray und Lions [18, Kapitel IV, §2 Satz 1]. Dann existiert eine Lösung $v \in H^{m+2}(D)$ von (6.1), und diese ist bis auf eine Konstante eindeutig, vgl. Lions und Magenes [73, Kapitel 2 Bemerkung 7.2]. Die Glattheit der Spur $v|_T$ folgt aus der Tatsache, dass v nahe des Randes T harmonisch ist und $\partial v / \partial \nu$ auf T verschwindet, vgl. Lemma 2.2 und [19, Kapitel II, §6 Satz 1]. \square

Aufgrund des obigen Lemmas ist der *Quelle-Dirichlet-Operator*

$$L : \mathcal{E}'_\diamond(D) \rightarrow C^\infty(T)/\mathbb{R}, \quad F \mapsto v|_T$$

wohldefiniert. Wir nennen eine Quelle F mit den Rückstreudaten b verträglich oder kompatibel, wenn es eine Lösung von (6.1) gibt, deren Spur auf T mit b übereinstimmt, also $b = LF$. Da L nicht injektiv ist, lässt sich eine passende Quelle nicht eindeutig finden. Selbst der Träger der mit b verträglichen Quellen ist nicht eindeutig bestimmt, und der Durchschnitt der Träger zweier mit den Daten kompatibler Quellterme kann durchaus leer sein, wie das folgende Beispiel illustriert:

Beispiel 6.2. Die Kreisscheibe $B_r(x) \subset D$, $x \neq 0$, sei ein isolierender Einschluss und Φ eine Möbiustransformation, die $B_r(x)$ auf eine konzentrische Kreisscheibe mit Radius $R < 1$ abbildet und D invariant lässt. Die Rückstreudaten von $B_r(x)$ wurden in Satz 3.7 berechnet und lassen sich laut Korollar 3.9 zu einer holomorphen Funktion

$$b(z) = z^2 \beta_R \left(\frac{\Phi'(z)}{\Phi(z)} \right)^2$$

fortsetzen. b ist holomorph in $D \setminus \{\zeta\}$ mit der Nullstelle ζ von Φ . Die Lösung des Cauchyproblems (3.11) ist $u_b(z) = \operatorname{Re} b(z)$ und lässt sich ebenfalls harmonisch bis hin zu ζ fortsetzen. $B_1 \subset B_2 \subset D$ seien zwei beliebige Kreisscheiben, die ζ enthalten. Wir definieren $v_j \in L^2(D)$ durch $v_j = u_b$ in $D \setminus \overline{B_j}$ und $v_j = 0$ in B_j . Die Quellen $F_j := \Delta v_j$ sind Distributionen mit kompaktem Träger $\operatorname{supp} F_j \subseteq \partial B_j$, und beide erfüllen $LF_j = b$. Der Schnitt beider Träger ist leer.

Anstelle des Trägers einer Quelle $F \in \mathcal{E}'_\diamond(D)$ betrachten wir daher den sogenannten *konvexen Träger* $\operatorname{supp}_c F$, das heißt die konvexe Hülle von $\operatorname{supp} F$. Wir bezeichnen $\operatorname{supp}_c F$ auch als *konvexes Quellgebiet*. In Satz 6.4 zeigen wir, dass der Schnitt der konvexen Träger zweier mit nichtkonstanten Rückstreudaten b verträglicher Quellterme stets nichtleer und selbst wieder ein konvexes Quellgebiet ist. Aus diesem Grund ist folgende Definition einer minimalen konvexen Menge naheliegend: Wir verstehen unter dem *konvexen Rückstreuträger* $\mathcal{B}b$ den Schnitt der konvexen Träger aller mit b kompatibler Quellen,

$$\mathcal{B}b = \bigcap_{LF=b} \operatorname{supp}_c F. \quad (6.2)$$

Sind die Rückstreudaten nicht konstant, so ist $\mathcal{B}b$ nichtleer und eine Untermenge von Ω , der konvexen Hülle der Inhomogenität, wie die folgenden Lemmata belegen. Wir verwenden die Notation $N_\varepsilon(\Sigma) = \{x \in \mathbb{R}^2 : \operatorname{dist}(x, \Sigma) < \varepsilon\}$ für die offene ε -Umgebung einer Menge $\Sigma \subset \mathbb{R}^2$ mit $\operatorname{dist}(x, \Sigma) = \inf_{y \in \Sigma} |x - y|$.

Lemma 6.3. Zu den Rückstreudaten b gibt es für jedes $\varepsilon > 0$ mit $\overline{N_\varepsilon(\Omega)} \subset D$ eine passende Quelle $F_\varepsilon \in \mathcal{E}'_\diamond(D)$, deren konvexer Träger $\operatorname{supp}_c F_\varepsilon$ eine Teilmenge von $\overline{N_\varepsilon(\Omega)}$ ist.

Beweis: Zum Beweis dieses Lemmas imitieren wir die Konstruktion der Quellen aus Beispiel 6.2 und betrachten die $L^2(D)$ -Funktion

$$v_\varepsilon = \begin{cases} u_b & \text{in } D \setminus N_\varepsilon(\Omega), \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Wir definieren den gewünschten Quellterm durch $F_\varepsilon := \Delta v_\varepsilon \in \mathcal{E}'_\diamond(D) \cap H^{-2}(D)$, denn laut Korollar 3.6 gilt, dass

$$LF_\varepsilon = v_\varepsilon|_T = u_b|_T = b.$$

Der Träger von F_ε ist eine Teilmenge von $\overline{N_\varepsilon(\Omega)}$, und da $N_\varepsilon(\Omega)$ konvex ist, gilt auch $\text{supp}_c F_\varepsilon \subseteq \overline{N_\varepsilon(\Omega)}$. \square

Durch die Konstruktion des konvexen Rückstreuträgers ist garantiert, dass keine konvexe Untermenge von $\mathcal{B}b$ Träger einer mit b verträglichen Quelle sein kann. Der nächste Satz zeigt, dass $\mathcal{B}b$ – oder genauer jede offene Umgebung von $\mathcal{B}b$ – selbst ein konvexes Quellgebiet ist:

Satz 6.4. Der konvexe Rückstreuträger $\mathcal{B}b$ ist eine Teilmenge der konvexen Hülle $\overline{\Omega}$ der Inhomogenität $\text{supp}(\sigma - 1)$. Darüber hinaus gibt es für jedes $\varepsilon > 0$ eine Quelle F_ε mit

$$\mathcal{B}b \subseteq \text{supp}_c F_\varepsilon \subseteq \overline{N_\varepsilon(\mathcal{B}b)}.$$

Der konvexe Rückstreuträger ist genau dann leer, $\mathcal{B}b = \emptyset$, wenn die Rückstreudaten b konstant sind.

Beweis: Die erste Aussage folgt sofort aus Lemma 6.3 und der Definition in (6.2), denn

$$\mathcal{B}b \subseteq \bigcap_{\varepsilon > 0} \overline{N_\varepsilon(\Omega)} = \overline{\Omega}.$$

Wir nehmen zunächst an, dass $\mathcal{B}b$ nicht leer sei, und konstruieren einen Quellterm F_ε mit $\text{supp}_c F_\varepsilon \subseteq \overline{N_\varepsilon(\mathcal{B}b)}$: Die Mengen $D \setminus \text{supp}_c F$ der mit b verträglichen Quellterme F bilden eine offene Überdeckung von $D \setminus \overline{N_\varepsilon(\mathcal{B}b)}$. Diese Menge ist beschränkt und abgeschlossen bezüglich D , daher gibt es endlich viele Quellen F_1, \dots, F_N mit der Eigenschaft

$$D \setminus \overline{N_\varepsilon(\mathcal{B}b)} \subset \bigcup_{k=1}^N D \setminus \text{supp}_c F_k = D \setminus \bigcap_{k=1}^N \text{supp}_c F_k,$$

also

$$C := \bigcap_{k=1}^N \text{supp}_c F_k \subset \overline{N_\varepsilon(\mathcal{B}b)}.$$

Für jede dieser Quellen existiert eine harmonische Funktion v_k in $D \setminus \text{supp}_c F_k$ mit Cauchydaten $(b, 0)$ auf T . Da $\text{supp}_c F_1$ und $\text{supp}_c F_2$ konvexe Mengen sind, stimmen v_1 und v_2 auf $D \setminus (\text{supp}_c F_1 \cup \text{supp}_c F_2)$ überein, und v_1 lässt sich durch v_2 zu einer harmonischen Funktion \tilde{v}_2 auf $D \setminus (\text{supp}_c F_1 \cap \text{supp}_c F_2)$ fortsetzen. \tilde{v}_2 und v_3 stimmen nun auf $D \setminus ((\text{supp}_c F_1 \cap \text{supp}_c F_2) \cup \text{supp}_c F_3)$ überein, und \tilde{v}_2 lässt sich wieder harmonisch nach $D \setminus (\text{supp}_c F_1 \cap \text{supp}_c F_2 \cap \text{supp}_c F_3)$ fortsetzen. So erhalten wir sukzessive eine auf $D \setminus C$ harmonische Funktion v mit Cauchydaten $(b, 0)$ auf T . Wir definieren wie in Lemma 6.3 das Potential $v_\varepsilon \in L^2(D)$ durch

$$v_\varepsilon = \begin{cases} v & \text{in } D \setminus \overline{N_\varepsilon(\mathcal{B}b)}, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Die gesuchte Quelle lautet nun $F_\varepsilon := \Delta v_\varepsilon \in \mathcal{E}'_\diamond(D) \cap H^{-2}(D)$.

Im Fall $\mathcal{B}b = \emptyset$ finden wir wie eben zulässige Quellen F_1, \dots, F_N , deren konvexe Träger keinen gemeinsamen Punkt haben,

$$\bigcap_{k=1}^N \text{supp}_c F_k = \emptyset.$$

Die harmonischen Funktionen v_k können nun zu einer in ganz D harmonischen Funktion v fortgesetzt werden. Dieses v ist aber aufgrund seiner verschwindenden Neumannrandwerte auf T in D konstant. Folglich ist auch die Spur $v|_T = b$ konstant.

Sind umgekehrt die Rückstreudaten b konstant, so löst $v \equiv b$ das Poissonproblem (6.1) mit $F \equiv 0$, und $\mathcal{B}b \subseteq \text{supp}_c F = \emptyset$. Das beschließt den Beweis. \square

Fortsetzung von Beispiel 6.2. Die Rückstreudaten eines isolierenden kreisförmigen Einschlusses $B_r(x)$, $x \neq 0$, haben eine holomorphe Fortsetzung in $D \setminus \{\zeta\}$ mit einem Pol in ζ . Mit der im ersten Teil des Beispiels durchgeführten Konstruktion lässt sich auf dem Rand jeder Kreisscheibe B mit $\zeta \in B$ eine mit b kompatible Quelle angeben. Der konvexe Rückstreuträger ist also eine Untermenge des Schnitts aller Kreisscheiben, die ζ enthalten. Andererseits ist $\mathcal{B}b$ nach Satz 6.4 nichtleer. Folglich umfasst der konvexe Rückstreuträger genau diesen Punkt, $\mathcal{B}b = \{\zeta\}$.

Der nächste Satz liefert ein wichtiges Kriterium zur Berechnung von $\mathcal{B}b$ anhand der Fourierkoeffizienten $(\alpha_j)_j \in l^2$ zu den Rückstreudaten b ,

$$\alpha_j = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} b(\theta) e^{-ij\theta} d\theta, \quad j \in \mathbb{Z}.$$

Lemma 6.5. Zu den Rückstreudaten b existiert genau dann eine passende Quelle $F \in \mathcal{E}'_\diamond(D)$ mit Träger in der konzentrischen Kreisscheibe \overline{B}_R , $R \in (0, 1)$, wenn es eine Zahl $m \in \mathbb{Z}$ gibt, sodass die Reihe

$$\sum_{j \in \mathbb{Z}} \frac{|\alpha_j|^2}{R^{2|j|}} (1 + j^2)^{m/2} < \infty \quad (6.3)$$

konvergiert. F kann so gewählt werden, dass $\text{supp } F \subseteq \partial B_R$.

Beweis: Wir nehmen zuerst an, dass es eine zu b passende Quelle $F \in \mathcal{E}'_\diamond(D)$ mit $\text{supp } F \subseteq \overline{B}_R$ gibt, und zeigen, dass dann (6.3) gilt. v sei die Lösung von (6.1) für dieses F mit $b = v|_T$. Laut Lemma 6.1 liegt v in $H^l(D)$ für ein $l \in \mathbb{Z}$. Die Spur $\psi := (v|_{D \setminus \overline{B}_R})|_{\partial B_R}$ von v auf ∂B_R ist wohldefiniert und liegt in $H^{l-1/2}(\partial B_R)$, vgl. [73, Kapitel 1, Satz 9.4 für $l \geq 0$ und Kapitel 2, Satz 6.5 für $l < 0$].

Das Randwertproblem

$$\Delta p = 0 \text{ in } D \setminus \overline{B}_R, \quad \frac{\partial}{\partial \nu} p = 0 \text{ auf } T, \quad p = \psi \text{ auf } \partial B_R \quad (6.4)$$

besitzt eine Lösung $p \in H^l(D \setminus \overline{B}_R)$, die eindeutig ist und stetig von ψ abhängt, vgl. [73, Kapitel 2, Bemerkung 7.2]. p lässt sich durch einen Laurentreihenansatz bestimmen und lautet

$$p(rx_\theta) = \sum_{j \in \mathbb{Z}} \frac{\gamma_j}{R^j + R^{-j}} (r^j + r^{-j}) e^{ij\theta}, \quad (r, \theta) \in (R, 1) \times [0, 2\pi), \quad (6.5)$$

vgl. Axler, Bourdon und Ramey [7, Satz 9.17]. Dabei bezeichnen wir mit $\{\gamma_j\}$ die Fourierkoeffizienten von ψ , das heißt

$$\gamma_j = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \psi(Rx_\theta) e^{-ij\theta} d\theta, \quad j \in \mathbb{Z}.$$

Das Integral ist als duale Paarung zwischen Distributionen und glatten Funktionen zu verstehen. Nun löst $v|_{D \setminus \overline{B}_R}$ ebenfalls das Randwertproblem (6.4), und aus der Eindeutigkeit der Lösung folgt $v|_{D \setminus \overline{B}_R} \equiv p$. Die beiden Reihenentwicklungen von $b = v|_T$ und p in (6.5) stimmen also auf T überein. Daraus folgt die Relation

$$|\alpha_j| = 2 \frac{|\gamma_j|}{R^j + R^{-j}} \leq 2R^{|j|} |\gamma_j|, \quad j \in \mathbb{Z}. \quad (6.6)$$

Die Norm von $\psi \in H^{l-1/2}(\partial B_R)$ lautet

$$\|\psi\|_{H^{l-1/2}(\partial B_R)} = \left(\sum_{j \in \mathbb{Z}} |\gamma_j|^2 (1 + j^2)^{l-1/2} \right)^{1/2}, \quad (6.7)$$

s. Kress [65, Sätze 8.2 und 8.10], daher resultiert aus der Abschätzung (6.6) die Konvergenz der Reihe (6.3) für $m = 2l - 1$, denn

$$\sum_{j \in \mathbb{Z}} \frac{|\alpha_j|^2}{R^{2|j|}} (1 + j^2)^{l-1/2} \leq 4 \|\psi\|_{H^{l-1/2}(\partial B_R)}^2 < \infty.$$

Für den Umkehrschluss nehmen wir an, dass (6.3) für ein $m \in \mathbb{Z}$ gelte. Wir betrachten die Distribution

$$v(rx_\theta) = \sum_{j \in \mathbb{Z}} \frac{\alpha_j}{2} (r^j + r^{-j}) e^{ij\theta}, \quad (r, \theta) \in (R, 1) \times [0, 2\pi).$$

Wir gehen im weiteren Beweis davon aus, dass m negativ ist. Für $m > 0$ ist v nämlich eine stetige Funktion und die Argumentation vereinfacht sich entsprechend. Ferner sei $m = -2l + 1$ mit $l \in \mathbb{N}$ ungerade, andernfalls betrachten wir $m - 1$. Die Distribution v ist harmonisch in $D \setminus \overline{B}_R$ und hat auf T die Cauchydaten $(b, 0)$. Die Spur $v|_{\partial B_R}$ liegt wegen (6.3) und (6.7) in $H^{-l-1/2}(\partial B_R)$, und da v das Randwertproblem (6.4) für $\psi = v|_{\partial B_R}$ löst, gilt $v \in H^{-l}(D \setminus \overline{B}_R)$, vgl. dazu wieder [73, Kapitel 2, Bemerkung 7.2]. Wir setzen v nun zu einer Distribution aus $H^{-l}(D)$ fort: Für eine Menge U ist $H^{-l}(U)$ der Dualraum von $H_0^l(U)$, dem Abschluss von $C_0^\infty(U)$ bezüglich der H^l -Norm. Wir identifizieren eine Funktion in $H_0^l(D \setminus \overline{B}_R)$ mit ihrer Nullfortsetzung nach \overline{B}_R und erhalten dadurch eine Funktion in $H_0^l(D)$. Auf diese Weise lässt sich $H_0^l(D \setminus \overline{B}_R)$ als

abgeschlossener Unterraum von $H_0^l(D)$ auffassen und besitzt entsprechend ein orthogonales Komplement, das heißt $H_0^l(D) = H_0^l(D \setminus \overline{B}_R) \oplus H_0^l(D \setminus \overline{B}_R)^\perp$. Diese direkte Zerlegung von $H_0^l(D)$ ermöglicht nun wiederum, die stetige Linearform $v \in H^{-l}(D \setminus \overline{B}_R)$ durch null auf $H_0^l(D \setminus \overline{B}_R)^\perp$ zu einer stetigen Linearform aus $H^{-l}(D)$ fortzusetzen. Wir nennen diese Fortsetzung \hat{v} . Wir definieren nun die Distribution $F = \Delta \hat{v} \in H^{-l-2}(D) \cap \mathcal{E}'_\diamond(D)$. Wenden wir F auf eine Testfunktion $\varphi \in C_0^\infty(D \setminus \overline{B}_R)$ an, so ergibt dies

$$\langle F, \varphi \rangle = \langle \hat{v}, \Delta \varphi \rangle = \langle v, \Delta \varphi \rangle = \langle \Delta v, \varphi \rangle = 0.$$

Und ebenso ist

$$\langle F, \eta \rangle = \langle \hat{v}, \Delta \eta \rangle = 0$$

für alle $\eta \in C_0^\infty(B_R) \subset H_0^l(D \setminus \overline{B}_R)^\perp$, also $\text{supp } F \subseteq \partial B_R$. Da offensichtlich $LF = b$ gilt, ist die Behauptung bewiesen. \square

Korollar 6.6. Der konvexe Rückstreuträger $\mathcal{B}b$ liegt genau dann innerhalb eines konzentrischen Kreises mit Radius $R \in (0, 1)$, wenn

$$\sum_{j \in \mathbb{Z}} \frac{|\alpha_j|^2}{(R + \varepsilon)^{2|j|}} < \infty \quad (6.8)$$

für alle $\varepsilon > 0$.

Beweis: Dieses Korollar ergibt sich aus einem Koeffizientenvergleich der Reihen in (6.3) und (6.8). Für hinreichend große $|j|$ gilt nämlich, dass

$$(1 + j^2)^{m/2} > \left(\frac{R}{R + \varepsilon} \right)^{2|j|}.$$

Wenn die Reihe in (6.8) divergiert, gibt es daher kein $m \in \mathbb{Z}$, für das (6.3) gilt. Gilt hingegen (6.8), so liegt $\mathcal{B}b$ laut Lemma 6.5 im Schnitt der Kreisscheiben $B_{R+\varepsilon}$ für alle $\varepsilon > 0$, also $\mathcal{B}b \subseteq \overline{B}_R$. \square

Korollar 6.6 stellt ein Kriterium zur Verfügung, anhand dessen überprüft werden kann, ob eine konzentrische Kreisscheibe den konvexen Rückstreuträger enthält. In der Folge verallgemeinern wir dieses Kriterium auf beliebige Kreisscheiben $B \subset \mathbb{R}^2$. Insbesondere soll der Test auch für Kreisscheiben greifen, die nicht in D liegen. Dazu betrachten wir das Poissonproblem (6.1) auf der größeren Kreisscheibe B_ρ für $\rho > 1$ anstelle von D und stellen eine Methode vor, mit der wir die Daten b nach außen transferieren. Distributionen mit kompaktem Träger in D lassen sich durch null auf $B_\rho \setminus D$ fortsetzen, und $\mathcal{E}'_\diamond(D)$ ist auf diese Weise in $\mathcal{E}'_\diamond(B_\rho) = \{F \in \mathcal{E}'(B_\rho) : \langle F, 1 \rangle = 0\}$ eingebettet. Wir unterscheiden in der Notation nicht zwischen einer Distribution $F \in \mathcal{E}'_\diamond(D)$ und ihrer Fortsetzung in $\mathcal{E}'_\diamond(B_\rho)$. Wir definieren auf $T_\rho = \partial B_\rho$ die *expandierten Rückstreudaten* b_ρ durch

$$b_\rho(\theta) = \sum_{j \in \mathbb{Z}} \frac{\alpha_j}{\rho^{|j|}} e^{ij\theta}, \quad \theta \in [0, 2\pi). \quad (6.9)$$

Die Reihe (6.9) konvergiert wie die Fourierreihe von b absolut und gleichmäßig. Wir konstruieren ein Potential u_ρ auf B_ρ mit Cauchydaten $(b_\rho, 0)$, indem wir

die Randbedingungen von u_b aus Korollar 3.6 auf T mittels einer harmonischen Funktion nach außen transferieren. Dazu setzen wir u_b in $B_\rho \setminus \overline{D}$ durch null fort und bezeichnen die Fortsetzung mit \hat{u}_b . Wir definieren $u_\rho := \hat{u}_b + w_\rho$ mit

$$w_\rho(rx_\theta) = \begin{cases} \frac{1}{2} \sum_{j=-\infty}^{\infty} \alpha_j (\rho^{-2|j|} - 1) r^{|j|} e^{ij\theta}, & r \in [0, 1), \\ \frac{1}{2} \sum_{j=-\infty}^{\infty} \alpha_j (\rho^{-2|j|} r^{|j|} + r^{-|j|}) e^{ij\theta}, & r \in (1, \rho]. \end{cases}$$

Die Funktion w_ρ löst das Transmissionsproblem

$$\begin{aligned} \Delta w_\rho &= 0 \quad \text{in } B_\rho \setminus T, & \frac{\partial}{\partial \nu} w_\rho &= 0 \quad \text{auf } T_\rho, & \int_{T_\rho} w_\rho \, ds &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial \nu} w_\rho^+ - \frac{\partial}{\partial \nu} w_\rho^- &= 0, & w_\rho^+ - w_\rho^- &= b \quad \text{auf } T, \end{aligned}$$

und u_ρ erfüllt die Differentialgleichung

$$\Delta u_\rho = F_b \quad \text{in } B_\rho, \quad \frac{\partial}{\partial \nu} u_\rho = 0 \quad \text{auf } T_\rho, \quad u_\rho = b_\rho \quad \text{auf } T_\rho$$

mit Quellterm $F_b := \Delta \hat{u}_b \in \mathcal{E}'_\diamond(B_\rho)$. Auf dem Kreisgebiet B_ρ definieren wir den *expandierten Quelle-Dirichlet-Operator* durch

$$L_\rho : \mathcal{E}'_\diamond(B_\rho) \rightarrow C^\infty(T_\rho)/\mathbb{R}, \quad F \mapsto v|_{T_\rho},$$

wobei v_ρ das Poissonproblem (6.1) auf B_ρ löst. Es gilt also $L_\rho F_b = b_\rho$. Für die Definition des konvexen Rückstreuträgers in (6.2) ist es unerheblich, ob wir Quellterme im Urbild $L^{-1}(b)$ oder $L_\rho^{-1}(b_\rho)$ betrachten:

Lemma 6.7. Für alle $\rho > 1$ gilt

$$\mathcal{B}b = \bigcap_{L_\rho F = b_\rho} \text{supp}_c F.$$

Beweis: $\rho > 1$ sei ein beliebiger, aber im Folgenden fest gewählter Parameter. Da $\mathcal{E}'_\diamond(D)$ in $\mathcal{E}'_\diamond(B_\rho)$ eingebettet ist und die Gleichung $LF = b$ mittels der gleichen Konstruktion mit w_ρ wie eben auf $L_\rho F = b_\rho$ führt, gilt

$$C := \bigcap_{L_\rho F = b_\rho} \text{supp}_c F \subseteq \mathcal{B}b.$$

Der Beweis von Satz 6.4 lässt sich direkt auf C übertragen, und so gibt es für jedes $\varepsilon > 0$ ein Quelle F_ε mit $L_\rho F_\varepsilon = b_\rho$ und $\text{supp}_c F_\varepsilon \subseteq \overline{N_\varepsilon(C)}$. Die Quelle F_ε liegt aber auch in $\mathcal{E}'_\diamond(D)$ und $LF_\varepsilon = b$. Das führt auf $\mathcal{B}b \subseteq \text{supp}_c F_\varepsilon \subseteq \overline{N_\varepsilon(C)}$ für alle $\varepsilon > 0$, also $\mathcal{B}b \subseteq C$. Daraus folgt die Behauptung. \square

Um das Kriterium aus Korollar 6.6 auf eine beliebige Kreisscheibe $B \subset \mathbb{R}^2$ zu verallgemeinern, wählen wir $\rho > 1$ so groß, dass B_ρ eine Obermenge von B sei. Φ_ρ sei eine Möbiustransformation, die \overline{B}_ρ auf \overline{D} und \overline{B} auf eine im Ursprung zentrierte Kreisscheibe \overline{B}_R abbildet. Der Radius $R = R(B, \rho)$ von

B_R ist durch B und ρ eindeutig bestimmt und kann ähnlich wie in Satz 3.7 berechnet werden. Wir bezeichnen die Randabbildung von Φ_ρ auf ∂B_ρ mit

$$\varphi_\rho : [0, 2\pi) \rightarrow [0, 2\pi), \quad \varphi_\rho(\theta) = \arg \Phi_\rho(\rho e^{i\theta}).$$

Die Fourierkoeffizienten von $b_\rho \circ \varphi_\rho^{-1}$ nennen wir $\alpha_j(\Phi_\rho)$, das heißt

$$\alpha_j(\Phi_\rho) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} b_\rho(\theta) e^{-ij\varphi_\rho(\theta)} \varphi_\rho'(\theta) d\theta, \quad j \in \mathbb{Z}. \quad (6.10)$$

Wir verallgemeinern nun die Aussage von Lemma 6.5:

Lemma 6.8. Es gibt genau dann eine Quelle $F \in \mathcal{E}'_\circ(B_\rho)$ mit $\text{supp } F \subseteq B$ und $L_\rho F = b_\rho$, wenn eine Zahl $m \in \mathbb{Z}$ existiert mit der Eigenschaft

$$\sum_{j \in \mathbb{Z}} \frac{|\alpha_j(\Phi_\rho)|^2}{R^{2|j|}} (1 + j^2)^{m/2} < \infty.$$

Beweis: Wir nehmen zuerst an, es gebe eine Quelle $\tilde{F} \in \mathcal{E}'_\circ(B_\rho)$ mit $\text{supp } \tilde{F} \subseteq B$ und $b_\rho = \tilde{v}|_{T_\rho}$, wobei \tilde{v} das entsprechende Poissonproblem (6.1) auf B_ρ löse. Wir erhalten mittels des Diffeomorphismus $\Phi_\rho : \bar{B}_\rho \rightarrow \bar{D}$ eine konforme Koordinatentransformation und definieren $v \in \mathcal{D}'(D)$ durch

$$\langle v, \eta \rangle = \langle \tilde{v}, |\Phi_\rho'|^2 (\eta \circ \Phi_\rho) \rangle \quad \text{für alle } \eta \in C_0^\infty(D).$$

Ist \tilde{v} eine reguläre Distribution, so lässt sich v auf intuitive Weise als Komposition $\tilde{v} \circ \Phi_\rho^{-1}$ auffassen. Es gilt:

$$\begin{aligned} \langle \Delta v, \eta \rangle &= \langle v, \Delta \eta \rangle = \langle \tilde{v}, |\Phi_\rho'|^2 (\Delta \eta) \circ \Phi_\rho \rangle \\ &= \langle \tilde{v}, \Delta(\eta \circ \Phi_\rho) \rangle = \langle \Delta \tilde{v}, \eta \circ \Phi_\rho \rangle \end{aligned}$$

für alle $\eta \in C_0^\infty(D)$, vgl. Henrici [47, Satz 5.6b]. Wir setzen $F = \Delta v \in \mathcal{D}'(D)$ und erhalten eine Quelle F mit kompaktem Träger in B_R . Die Auswertung $\langle F, \eta \rangle$ ist nämlich null, wenn der Träger von $\eta \circ \Phi_\rho$ sich nicht mit $\text{supp } \tilde{F} \subset B$ schneidet, das heißt insbesondere für $\text{supp } \eta \subseteq D \setminus \bar{B}_R$. Da Φ_ρ konform ist, folgt aus $(\partial \tilde{v} / \partial \nu)|_{T_\rho} = 0$ auch $(\partial v / \partial \nu)|_T = 0$. Aufgrund des Divergenzsatzes ist daher auch $\langle F, \mathbf{1} \rangle = 0$. Damit gilt $LF = v|_T = \tilde{v} \circ \Phi_\rho + c = b + c$ mit einer Konstanten c . Die Behauptung folgt nun aus dem konzentrischen Fall von Lemma 6.5. \square

Wir erhalten als Korollar das gewünschte Klassifikationskriterium, anhand dessen diejenigen Kreisscheiben identifizierbar sind, die den konvexen Rückstreuträger $\mathcal{B}b$ enthalten:

Korollar 6.9. Der konvexe Rückstreuträger $\mathcal{B}b$ liegt genau dann in B , wenn

$$\sum_{j \in \mathbb{Z}} \frac{|\alpha_j(\Phi_\rho)|^2}{(R + \varepsilon)^{2|j|}} < \infty \quad (6.11)$$

für $R = R(B, \rho)$ und alle $\varepsilon > 0$.

Da die konvexe Menge $\mathcal{B}b$ durch den Schnitt aller sie einschließenden Kreise eindeutig bestimmt ist, dient (6.11) als Grundlage für einen numerischen Algorithmus zur Konstruktion des konvexen Rückstreuträgers.

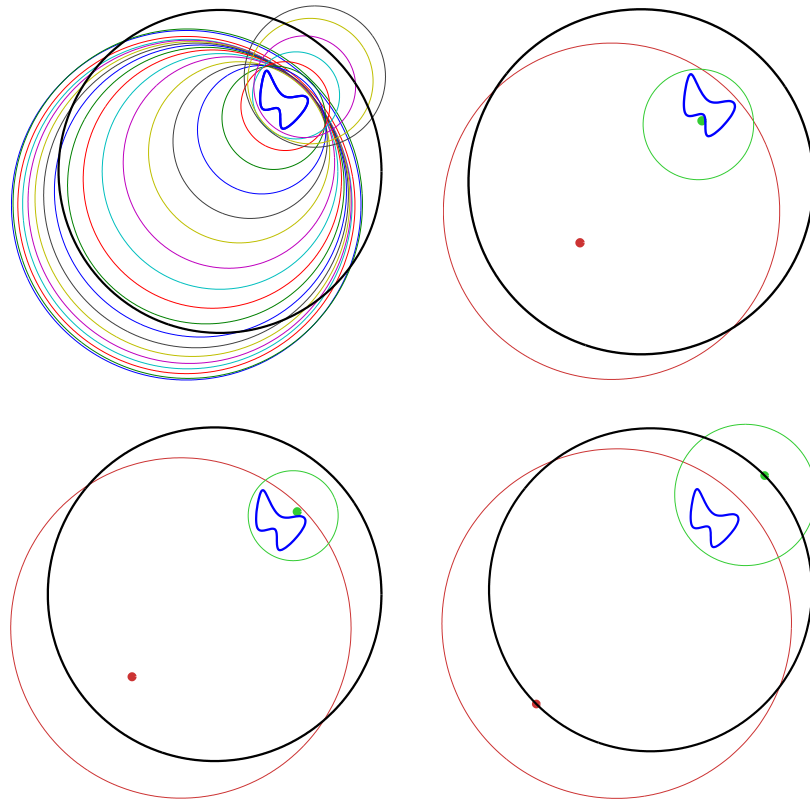


Abbildung 6.1: Veranschaulichung der Parametereinstellung: Darstellung der Kreise in (6.13) für $\zeta = \pm re^{i\pi/4}$ mit verschiedenen Werten für r (links oben) und $r = 0.5, 0.7$ und 1 (von links oben nach rechts unten).

6.2 Implementierung

In diesem Abschnitt beschreiben wir den Algorithmus zur Berechnung des konvexen Rückstreuträgers zu den Rückstreudaten b , der auf dem Kriterium in Korollar 6.9 des vorhergehenden Abschnitts beruht. Der Algorithmus überprüft für eine (geschickte) Auswahl von Kreisscheiben, ob sie den konvexen Rückstreuträger enthalten oder nicht. Anschließend wird der Durchschnitt aller Kreise gebildet, die das Kriterium erfüllen, um eine Annäherung an $\mathcal{B}b$ zu erhalten.

Im Hinblick auf die Leistungsfähigkeit des Algorithmus sind zwei Aspekte entscheidend: Eine wichtige Rolle spielt eine geschickte Auswahl der zu untersuchenden Kreise, und darüber hinaus gilt es, das Kriterium (6.11) effektiv zu implementieren. Um beiden Aspekten gerecht zu werden, gehen wir folgendermaßen vor: Wir halten den Parameter $\rho > 1$ fest und untersuchen Möbiustransformationen der Gestalt

$$\Phi_{\zeta}(z) = \rho \frac{z - \zeta}{\rho^2 - \bar{\zeta}z} \quad (6.12)$$

mit Parameter $\zeta \in B_\rho$, die \overline{B}_ρ auf den Einheitskreis \overline{D} abbilden, vgl. [47, Satz 5.4e]. Das Urbild einer Kreisscheibe \overline{B}_R mit $R \in (0, 1)$ unter Φ_ζ ist eine abgeschlossene Kreisscheibe $\Phi_\zeta^{-1}(\overline{B}_R)$, die den Parameter $\zeta \in B_\rho$ enthält. Für wachsendes R sind die zugehörigen Kreisscheiben $\Phi_\zeta^{-1}(\overline{B}_R)$ ineinander geschachtelt. Der Algorithmus bestimmt für ein solches Φ_ζ den kleinsten Parameter R_ζ , für den die Reihe (6.11) konvergiert. Der konvexe Rückstreuträger ist dann eine Untermenge von $\Phi_\zeta^{-1}(\overline{B}_{R_\zeta})$, jedoch nicht von $\Phi_\zeta^{-1}(\overline{B}_R)$ für $R < R_\zeta$, vgl. Korollar 6.9.

Für ein festes ρ ist Φ_ζ in (6.12) durch ζ eindeutig festgelegt. Wir wählen ein Gitter Z aus Punkten $\zeta \in B_\rho$ und berechnen für jeden dieser Punkte den minimalen Radius R_ζ . Schließlich approximieren wir

$$\mathcal{B}b \approx \bigcap_{\zeta \in Z} \Phi_\zeta^{-1}(\overline{B}_{R_\zeta}). \quad (6.13)$$

Die Berechnung der expandierten Rückstreudaten b_ρ erfolgt direkt mittels Gleichung (6.9). Sind die Daten $\mathbf{b} = [b_1, \dots, b_N]^T$ an N äquidistanten Werten $\theta_1, \dots, \theta_N$ aus $[0, 2\pi)$ gegeben, so berechnen wir die Fourierkoeffizienten von \mathbf{b} und multiplizieren sie mit den entsprechenden Faktoren $\rho^{-|j|}$. Die inverse Fouriertransformation liefert dann die expandierten Daten $\mathbf{b}_\rho = [b_{\rho,1}, \dots, b_{\rho,N}]^T$ mit $b_\rho(\theta_k) \approx b_{\rho,k}$. Mit diesen Daten berechnen wir für alle Gitterpunkte $\zeta \in Z$ die transformierten Fourierkoeffizienten aus (6.10) mit der Trapezformel, das heißt

$$\alpha_j(\Phi_\zeta) \approx \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N b_{\rho,k} e^{-ij\varphi_\zeta(\theta_k)} \varphi_\zeta'(\theta_k). \quad (6.14)$$

φ_ζ ist die Randabbildung von Φ_ζ und lautet für $\zeta = re^{i\lambda}$:

$$\varphi_\zeta(\theta) = \lambda + 2 \arctan \left(\frac{\rho + r}{\rho - r} \tan \left(\frac{\theta - \lambda}{2} \right) \right) \quad (6.15)$$

mit Ableitung

$$\varphi_\zeta'(\theta) = \frac{\rho^2 - r^2}{\rho^2 - 2\rho r \cos(\theta - \lambda) + r^2}.$$

Die Wahl von ρ resultiert aus einem Kompromiss zwischen der Approximationsgüte in (6.13) und der Stabilität des Algorithmus. Einerseits nähern wir nämlich die konvexe Menge $\mathcal{B}b$ durch den Schnitt von Kreisen in B_ρ an, und die Approximation (6.13) verbessert sich entsprechend, je größer ρ gewählt wird, da mehr und größere Kreise in Betracht gezogen werden können. Andererseits geht durch den Transfer der Rückstreudaten hin zum Rand des größeren Kreises B_ρ Information verloren, da hierbei in (6.9) Details, die in den hohen Frequenzen α_j der Rückstreudaten enthalten sind, durch Multiplikation mit $\rho^{-|j|}$ nivelliert werden. Unsere numerischen Tests haben gezeigt, dass sich die Ergebnisse im Allgemeinen verschlechtern, wenn $\rho > 1.5$ gewählt wird. Daher verwenden wir in den hier gezeigten Beispielen die Einstellung $\rho = 1.4$.

Bei der Wahl des Gitters Z für die Werte ζ berücksichtigen wir die in Abbildung 6.1 exemplarisch illustrierte Beobachtung: Die Bilder zeigen in schwarz eingezeichnet den Einheitskreis und als blaue Linie den Rand eines Einschlusses. Die

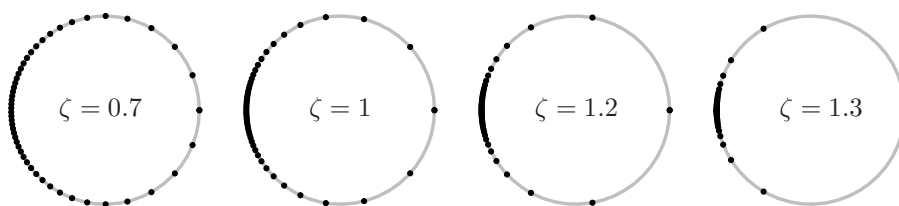


Abbildung 6.2: Bild äquidistanter Punkte auf T_ρ ($\rho = 1.4$) unter Φ_ζ für verschiedene ζ .

bunten Kreise stellen die vom Algorithmus bestimmten Kreise für verschiedene $\zeta = \pm r e^{i\pi/4}$ und $r \in [0, 1]$ dar. Das Bild links oben zeigt, dass diese Kreise für wachsendes r ineinander geschachtelt sind. Jene ζ , die nah am Ursprung liegen, tragen kaum zum Durchschnitt in (6.13) bei, sondern den entscheidenden Beitrag leisten vor allem die außen liegenden Kreise mit großem r . Zur Verdeutlichung zeigen die anderen drei Bilder jeweils die beiden Kreise für $r = 0.5, 0.7$ und 1 . Die zugehörigen ζ sind als Punkte in der entsprechenden Farbe markiert. Die Bilder machen deutlich, dass vor allem die Kreise jener ζ zum Durchschnitt in (6.13) beitragen, die zwischen der Inhomogenität Ω und dem Rand T_ρ liegen. Allerdings sollte r auch nicht zu groß gewählt werden, da sonst die Qualität der Approximation der konvexen Hülle des Einschlusses wieder abnimmt, wie das rechte untere Bild demonstriert: Die Kreise zu $r = 1$ sind ungenauer als die zu $r = 0.7$ (unten links). Das liegt an der Berechnung der Koeffizienten $\alpha_j(\Phi_\zeta)$ mit der Trapezformel in (6.14). Und zwar sind die Randpunkte $\varphi_\zeta(\theta_k)$ aus (6.15) sehr ungleichmäßig verteilt, wenn ζ nahe an T_ρ liegt, vgl. Abbildung 6.2, und die Qualität der Quadraturformel in (6.14) nimmt entsprechend ab.

Bei der Wahl des Gitters Z gilt es also zwischen Informationsgehalt und Stabilität abzuwägen. Aufgrund der eben gegebenen Erläuterungen wählen wir für Z ein äquidistantes Gitter aus 64 Punkten ζ mit festem Betrag $|\zeta| = \rho_0$. Der Wert von $\rho_0 < \rho$ sollte so groß sein, dass einige ζ zwischen der Inhomogenität Ω und dem Rand T_ρ liegen, denn nur so erhalten wir Informationen über den konvexen Rückstreuträger auf der innen liegenden Seite der Inhomogenität. Gleichzeitig darf ρ_0 nicht zu groß sein, da sonst die Berechnung der $\alpha_j(\Phi_\zeta)$, $j \in \mathbb{Z}$, in (6.14) zu ungenau wird. Da von vornherein nichts über die Lage der Inhomogenität Ω bekannt ist, muss der Parameter ρ_0 a priori allein in Abhängigkeit von ρ gewählt werden. Aufgrund unserer in Abbildung 6.1 exemplifizierten Erfahrung mit dem Algorithmus wählen wir zu $\rho = 1.4$ den Parameter $\rho_0 = 0.8$.

Um das kleinste R zu finden, für das die Reihe in (6.11) konvergiert, nutzen wir die folgende Beobachtung aus: Mit ansteigender Frequenz zeigen die Fourierkoeffizienten $\alpha_j(\Phi_\zeta)$ in (6.10) typischerweise exponentielles Abklingverhalten. Aus diesem Grund schätzen wir die Abklingrate von $\log |\alpha_j(\Phi_\zeta)|$ durch lineare Ausgleichsrechnung, das heißt, wir bestimmen die Steigung m und den Achsenabschnitt c , sodass

$$\log |\alpha_j(\Phi_\zeta)| \approx m |j| + c. \quad (6.16)$$

Wir gehen davon aus, dass die Reihe in (6.11) konvergiert, sofern $R > e^m$.

Folglich setzen wir $R_\zeta = e^m$.

Wichtig im Hinblick auf die Stabilität des Algorithmus ist die Entscheidung, welche Fourierkoeffizienten verlässlich und welche zu fehlerhaft sind, um für die Berechnung von (6.16) herangezogen zu werden. Die Anzahl verlässlicher Fourierkoeffizienten hängt nicht nur vom Signal-Rausch-Verhältnis der Daten ab, sondern auch von der jeweiligen Abklingrate der Folge (6.10) für jedes ζ . Wenn die Koeffizienten langsam abklingen, können mehr Koeffizienten zur Berechnung herangezogen werden als bei schnell abfallenden Koeffizienten. Unsere Erfahrung suggeriert folgende Vorgehensweise: Falls die Daten nur numerisches Rauschen aufweisen, wählen wir den Abschneideindex adaptiv, indem wir alle Frequenzen verwerfen, die

$$|\alpha_k(\Phi_\zeta)| < 2 \cdot 10^4 \min_j |\alpha_j(\Phi_\zeta)|$$

erfüllen. Beträgt das Signal-Rausch-Verhältnis 1%, ist unserer Erfahrung nach nur in den ersten fünf Frequenzen verwertbare Information enthalten, und wir verwenden nur diese für die Rekonstruktion.

6.3 Numerische Beispiele

Wir präsentieren in diesem Abschnitt Beispiele, die die Leistungsfähigkeit des in Abschnitt 6.2 beschriebenen Algorithmus veranschaulichen. Wir berechnen Rückstreudaten wie zuvor mit einer Randintegralmethode, die einen Datenvektor \mathbf{b} an $N = 768$ äquidistanten Werten $\theta_1, \dots, \theta_N$ aus $[0, 2\pi)$ liefert. In allen Beispielen ist die elektrische Leitfähigkeit konstant in den zusammenhängenden Komponenten der Inhomogenität $\text{supp}(\sigma - 1)$.

Abbildung 6.3 zeigt verschiedene Beispiele für Rekonstruktionen aus unverrauschten Daten. Die Bilder zeigen als schwarze Linie den Einheitskreis und den Rand verschiedener Einschlüsse in blau. Die bunten Linien geben die 64 Kreise aus (6.13) wieder, und das weiße Gebiet zeigt ihre Schnittmenge. Die erste Zeile in Abbildung 6.3 präsentiert einen bumerangförmigen Einschluss mit Leitfähigkeit $\sigma = 0$ (links) und $\sigma = 0.5$ (rechts). In beiden Fällen stimmt der rekonstruierte konvexe Rückstreuträger beinahe mit der konvexen Hülle des Einschlusses überein. Die Rekonstruktionen in der mittleren Reihe von Abbildung 6.3 bestätigen dies: Das ovale Gebiet ($\sigma = 0$) links ist fast genau wiedergegeben, ebenso wurde die konvexe Hülle des Einschlusses rechts ($\sigma = 0.5$) vom Algorithmus genau erfasst.

Ist der Einschluss eine isolierende Kreisscheibe, so lassen sich die Rückstreudaten wie in Beispiel 6.2 erläutert bis zu einem einzigen Punkt im Inneren des Kreises analytisch fortsetzen. Der konvexe Rückstreuträger besteht nur aus diesem einen Punkt. Im Bild links unten wird diese Situation vom Algorithmus richtig wiedergegeben.

Das Bild unten rechts zeigt zwei Einschlüsse unterschiedlicher Leitfähigkeit, nämlich $\sigma = 0.5$ im großen Einschluss und $\sigma = 2$ im kleinen bumerangförmigen Gebiet. Wie erwartet, ermittelt der Algorithmus eine konvexe Menge, die beide Einschlüsse berücksichtigt. Dieses Gebiet ist allerdings größer als die konvexe

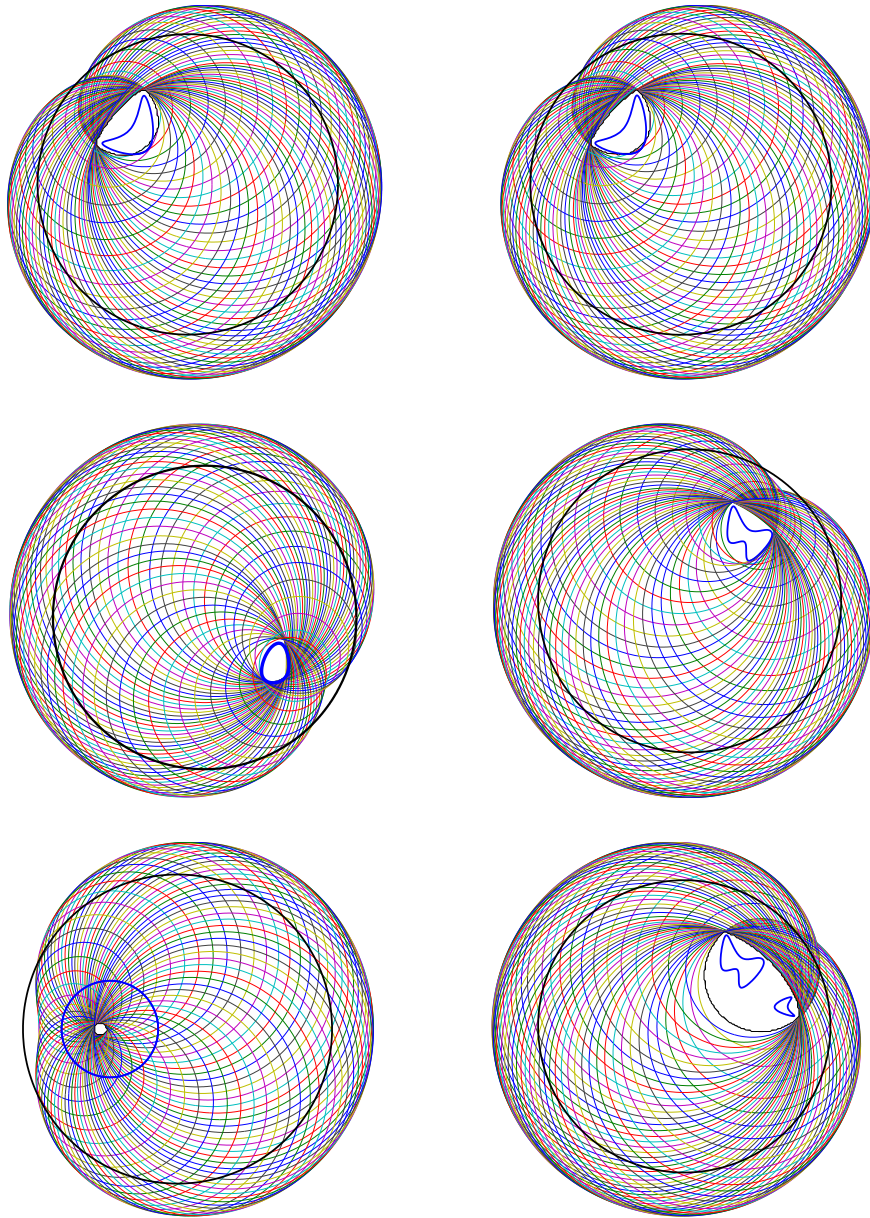


Abbildung 6.3: Rekonstruktionen des konvexen Rückstreuträgers für isolierende Einschlüsse (links) und leitende Einschlüsse (rechts; die Leitfähigkeit in den Einschlüssen beträgt $\sigma = 0.5$, nur im kleinen bumerangförmigen Einschluss unten ist $\sigma = 2$).

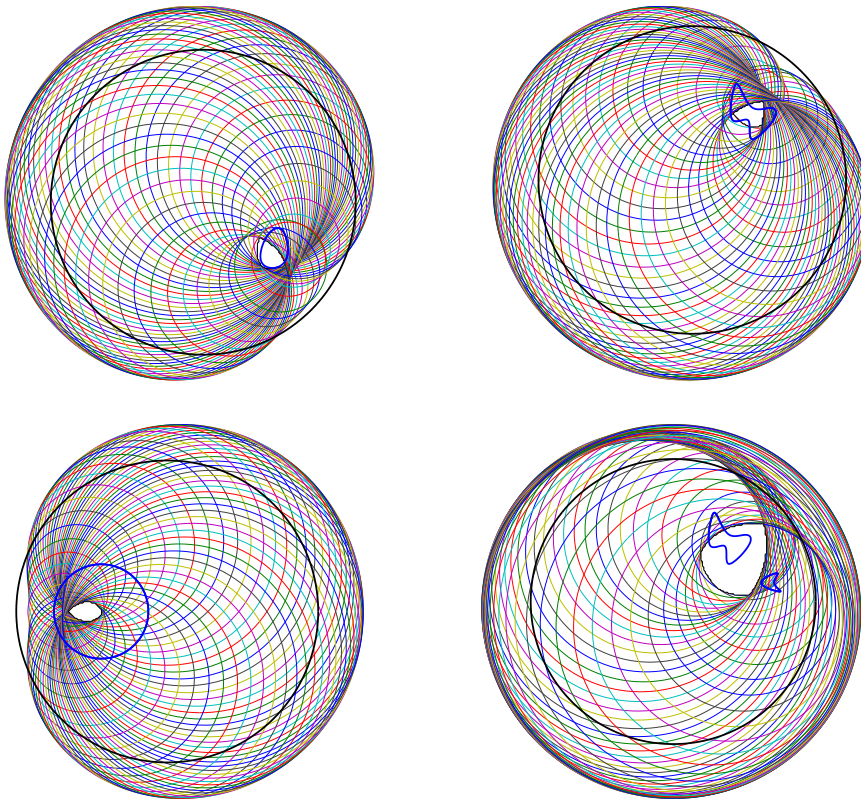


Abbildung 6.4: Rekonstruktionen des konvexen Rückstreuträgers mit 1% Rauschen. Die Leitfähigkeiten der Einschlüsse entsprechen denen aus Abbildung 6.3.

Hülle beider Einschlüsse. Das Beispiel zeigt, wie die Wahl des Parameters ρ die Rekonstruktion beeinflusst: Um die Rekonstruktion zu verbessern, müsste ρ größer gewählt werden, um bei der Schnittbildung in (6.13) weitere Kreise mit geringerer Krümmung in der der Mitte zugewandten Seite der Einschlüsse zu berücksichtigen. In der Tat wird die Rekonstruktion beispielsweise für $\rho = 2$ besser. Der Algorithmus wird mit dieser Einstellung allerdings instabiler und in einigen der anderen Beispiele werden schlechtere Resultate erzielt. Aus diesem Grund behalten wir die bewährte Parametereinstellung $\rho = 1.4$ auch in diesem Beispiel bei. Zu bemerken ist noch, dass die unterschiedlichen Leitfähigkeiten die Qualität der Rekonstruktion nicht beeinflussen.

In einer weitere Folge von Beispielen addieren wir 1% normalverteiltes Rauschen auf die Daten und verwenden nur die ersten fünf Fourierkoeffizienten, um die Abklingrate in (6.16) zu schätzen. Abbildungen 6.4 und 6.5 zeigen die Ergebnisse. In allen vier Beispielen gibt es eine deutliche Schnittmenge aller 64 Kreise. Die weiß dargestellte Menge zeigt zuverlässig die Position der Einschlüsse an, Informationen über deren Gestalt liefert sie aber nicht.

Die Schnittmenge ist bei den bumerangförmigen Einschlüssen nur schwer zu

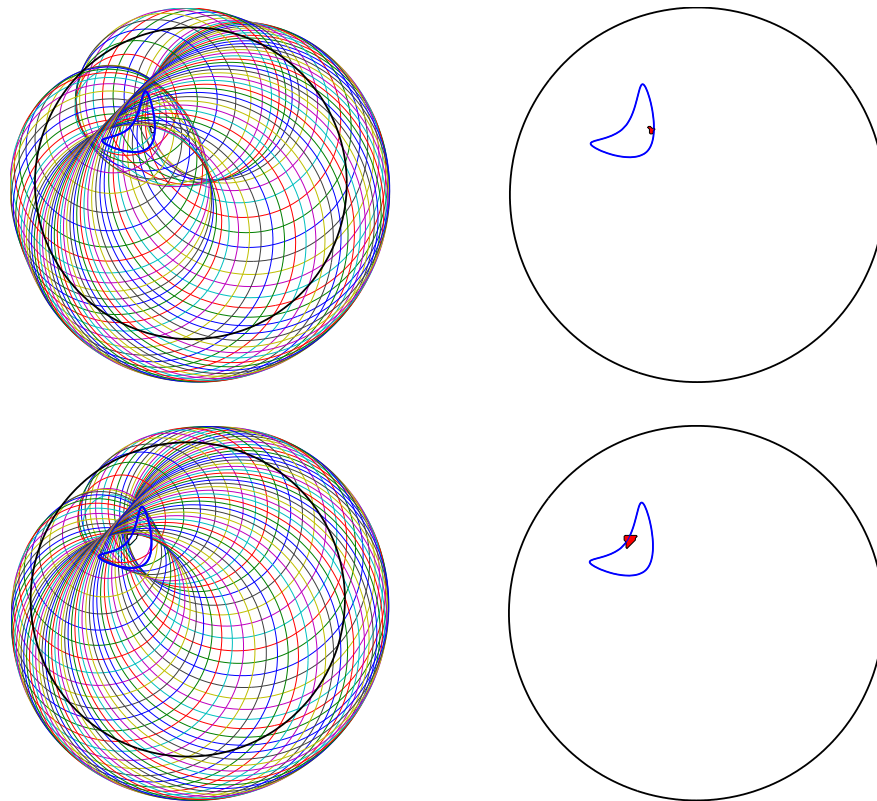


Abbildung 6.5: Rekonstruktionen des konvexen Rückstreuträgers des bumerangförmigen Einschlusses mit 1% Rauschen und Leitfähigkeit $\sigma = 0$ (oben) beziehungsweise $\sigma = 0.5$ (unten). (Beide Spalten visualisieren dasselbe Ergebnis.)

erkennen, deshalb heben wir sie in der rechten Spalte von Abbildung 6.5 in rot hervor. Die erste Reihe zeigt den isolierenden Einschluss, während die Leitfähigkeit im Einschluss unten $\sigma = 0.5$ beträgt. Wiederum geben die Rekonstruktionen Auskunft über die Lage der Einschlüsse, aber nicht über deren Gestalt oder Größe.

Wir haben für eine Reihe von Beispielen Rekonstruktionen dieser Qualität mit demselben Signal-Rausch-Verhältnis erhalten. Auch bei einem Rauschen von 5% geben die Rekonstruktionen in den meisten Fällen Aufschluss über die Lage der Einschlüsse. Allerdings ist der Durchschnitt aller Kreise in diesen Fällen üblicherweise leer. Dies erschwert es, allgemeintaugliche Parametereinstellungen für die Rekonstruktionsverfahren anzugeben.

Zusammenfassung

Die vorliegende Arbeit untersucht das inverse Hindernisproblem der zweidimensionalen elektrischen Impedanztomographie (EIT) mit Rückstreudaten. Wir präsentieren und analysieren das mathematische Modell für Rückstreudaten, diskutieren das inverse Problem für einen einzelnen isolierenden oder perfekt leitenden Einschluss und stellen zwei Rekonstruktionsverfahren für das inverse Hindernisproblem mit Rückstreudaten vor.

Ziel des inversen Hindernisproblems der EIT ist es, Inhomogenitäten (sogenannte Einschlüsse) der elektrischen Leitfähigkeit eines Körpers aus Strom-Spannungs-Messungen an der Körperoberfläche zu identifizieren. Für die Messung von Rückstreudaten ist dafür nur ein Paar aus an der Körperoberfläche nahe zueinander angebrachten Elektroden nötig, das zur Datenerfassung auf der Oberfläche entlang bewegt wird.

Wir stellen ein mathematisches Modell für Rückstreudaten vor und zeigen, dass Rückstreudaten die Randwerte einer außerhalb der Einschlüsse holomorphen Funktion sind. Auf dieser Grundlage entwickeln wir das Konzept des konvexen Rückstreuträgers: Der konvexe Rückstreuträger ist eine Teilmenge der konvexen Hülle der Einschlüsse und kann daher zu deren Auffindung dienen. Wir stellen einen Algorithmus zur Berechnung des konvexen Rückstreuträgers vor und demonstrieren ihn an numerischen Beispielen.

Ferner zeigen wir, dass ein einzelner isolierender Einschluss anhand seiner Rückstreudaten eindeutig identifizierbar ist. Der Beweis dazu beruht auf dem Riemann'schen Abbildungssatz für zweifach zusammenhängende Gebiete und dient als Grundlage für einen Rekonstruktionsalgorithmus, dessen Leistungsfähigkeit wir an verschiedenen Beispielen demonstrieren. Ein perfekt leitender Einschluss ist hingegen nicht immer aus seinen Rückstreudaten rekonstruierbar. Wir diskutieren, in welchen Fällen die eindeutige Identifizierung fehlschlägt und zeigen Beispiele für unterschiedliche perfekt leitende Einschlüsse mit gleichen Rückstreudaten.

Literaturverzeichnis

- [1] ROBERT A. ADAMS, *Sobolev spaces*, Academic Press, New York, 1975.
- [2] LARS V. AHLFORS, *Complex Analysis. An introduction to the theory of analytic functions of one complex variable*, McGraw-Hill Book Co., New York, 1979.
- [3] IBRAHIM AKDUMAN UND RAINER KRESS, *Electrostatic imaging via conformal mapping*, *Inverse Problems* 18 (2002), 1659–1672.
- [4] GIOVANNI ALESSANDRINI, *Stable determinations of conductivity by boundary measurements*, *Appl. Anal.* 27 (1988), 153–172.
- [5] HEND BEN AMEUR, MARTIN BURGER UND BENJAMIN HACKL, *Level set methods for geometric inverse problems in linear elasticity*, *Inverse Problems* 20 (2004), 673–696.
- [6] KARI ASTALA UND LASSI PÄIVÄRINTA, *Calderón’s inverse conductivity problem in the plane*, *Ann. Math. (2)* 163 (2006), 265–299.
- [7] SHELDON JAY AXLER, PAUL BOURDON UND WADE RAMEY, *Harmonic function theory*, Springer, New York, 2001.
- [8] BARTOLOMÉ BARCELÓ, EUGENE FABES UND JIN KEUN SEO, *The inverse conductivity problem with one measurement: Uniqueness for convex polyhedra*, *Proc. Amer. Math. Soc.* 122 (1994), 183–189.
- [9] LILIANA BORCEA, *Electrical impedance tomography*, *Inverse Problems* 18 (2002), R99–R136.
- [10] LAURENT BOURGEOIS UND JÉRÉMI DARDÉ, *A quasi-reversibility approach to solve the inverse obstacle problem*, *Inverse Probl. Imaging* 4 (2010), 351–377.
- [11] KURT BRYAN, *Numerical recovery of certain discontinuous electrical conductivities*, *Inverse Problems* 7 (1991), 827–840.
- [12] MARTIN BRÜHL, *Gebietserkennung in der elektrischen Impedanztomographie*, Dissertation, Universität Karlsruhe, 1999.
Verfügbar unter <http://digbib.ubka.uni-karlsruhe.de/volltexte/11299>.
- [13] MARTIN BURGER, *Levenberg–Marquardt level set methods for inverse obstacle problems*, *Inverse Problems* 20 (2004), 259–282.

-
- [14] ALBERTO P. CALDERÓN, *On an inverse boundary value problem*, Comput. Appl. Math. 25 (2006), 133–138. Nachdruck des Originals aus Seminar on Numerical Analysis and its Application to Continuum Physics, W. H. Meyer und M. A. Raupp (Hg.), Soc. Brasil Mat., Rio de Janeiro, 1980, 65–73.
- [15] MARGARET CHENEY, DAVID ISAACSON UND JONATHAN C. NEWELL, *Electrical impedance tomography*, SIAM Rev. 41 (1999), 85–101.
- [16] JOHN B. CONWAY, *Functions of one complex variable. Vol. II*, Springer, New York, 1995.
- [17] JÉRÉMI DARDÉ, *The ‘exterior approach’: a new framework to solve inverse obstacle problems*, Inverse Problems 28 (2012), 015008.
- [18] ROBERT DAUTRAY UND JACQUES-LOUIS LIONS, *Mathematical analysis and numerical methods for science and technology. Volume 2: Functional and variational methods*, Springer, Berlin, 1988.
- [19] ROBERT DAUTRAY UND JACQUES-LOUIS LIONS, *Mathematical analysis and numerical methods for science and technology. Volume 1: Physical origins and classical methods*, Springer, Berlin, 1990.
- [20] OLIVER DORN UND DOMINIQUE LESSELIER, *Level set methods for inverse scattering*, Inverse Problems 22 (2006), R67–R131.
- [21] ABDELLATIF EL BADIA UND TUONG HA DUONG, *Some remarks on the problem of source identification from boundary measurements*, Inverse Problems 14 (1998), 883–891.
- [22] ABDELLATIF EL BADIA UND TUONG HA DUONG, *An inverse source problem in potential analysis*, Inverse Problems 16 (2000), 651–663.
- [23] HEINZ W. ENGL, MARTIN HANKE UND ANDREAS NEUBAUER, *Regularization of inverse problems*, Kluwer Academic Publishers Group, Dordrecht, 1996.
- [24] GREGORY ESKIN UND JAMES RALSTON, *Inverse backscattering in two dimensions*, Commun. Math. Phys. 138 (1991), 451–486.
- [25] AVNER FRIEDMAN UND VICTOR ISAKOV, *On the uniqueness in the inverse conductivity problem with one measurement*, Indiana Univ. Math. J. 38 (1989), 563–579.
- [26] DAVID GILBARG UND NEIL S. TRUDINGER, *Elliptic partial differential equations of second order*, Springer, Berlin, 1998.
- [27] ROLAND GRIESMAIER, *Detection of small buried objects: Asymptotic factorization and MUSIC*, Dissertation, Johannes Gutenberg-Universität Mainz, 2008.
Verfügbar unter <http://ubm.opus.hbz-nrw.de/volltexte/2008/1666/>.
- [28] WOLFGANG HACKBUSCH, *Elliptic differential equations*, Springer, Berlin, 1992.

-
- [29] HOUSSEM HADDAR UND RAINER KRESS, *Conformal mappings and inverse boundary value problems*, Inverse Problems 21 (2005), 935–953.
- [30] HOUSSEM HADDAR UND RAINER KRESS, *Conformal mapping and impedance tomography*, Inverse Problems 26 (2010), 074002.
- [31] HOUSSEM HADDAR, STEVEN KUSIAK UND JOHN SYLVESTER, *The convex back-scattering support*, SIAM J. Appl. Math. 66 (2005), 591–615.
- [32] PETER HÄHNER UND RAINER KRESS, *Uniqueness for a linearized, inverse obstacle problem using backscattering data*, in Mathematical and numerical aspects of wave propagation. 5th international conference, Santiago de Compostela, Spain, July 10–14, 2000, Alfredo Bermúdez, Dolores Gómez, Christophe Hazard, Patrick Joly und Jean E. Roberts (Hg.), SIAM, Philadelphia, 2000, 489–493.
- [33] HARRI HAKULA, LAURI HARHANEN UND NUUTTI HYVÖNEN, *Sweep data of electrical impedance tomography*, Inverse Problems 27 (2011), 115006.
- [34] HARRI HAKULA UND NUUTTI HYVÖNEN, *Two noniterative algorithms for locating inclusions using one electrode measurement of electric impedance tomography*, Inverse Problems 24 (2008), 055018.
- [35] MARTIN HANKE, *On real-time algorithms for the location search of discontinuous conductivities with one measurement*, Inverse Problems 24 (2008), 045005.
- [36] MARTIN HANKE, *Locating several small inclusions in impedance tomography from backscatter data*, SIAM J. Numer. Anal. 49 (2011), 1991–2016.
- [37] MARTIN HANKE, LAURI HARHANEN, NUUTTI HYVÖNEN UND EVA SCHWEICKERT, *Convex source support in three dimensions*, BIT 52 (2012), 45–63.
- [38] MARTIN HANKE, BASTIAN HARRACH UND NUUTTI HYVÖNEN, *Justification of point electrode models in electrical impedance tomography*, Math. Models Methods Appl. Sci. 21 (2011), 1395–1413.
- [39] MARTIN HANKE, NUUTTI HYVÖNEN, MANFRED LEHN UND STEFANIE REUSSWIG, *Source supports in electrostatics*, BIT 48 (2008), 245–264.
- [40] MARTIN HANKE, NUUTTI HYVÖNEN UND STEFANIE REUSSWIG, *Convex source support and its applications to electric impedance tomography*, SIAM J. Imaging Sci. 1 (2008), 364–378.
- [41] MARTIN HANKE, NUUTTI HYVÖNEN UND STEFANIE REUSSWIG, *An inverse backscatter problem for electric impedance tomography*, SIAM J. Math. Anal. 41 (2009), 1948–1966.
- [42] MARTIN HANKE, NUUTTI HYVÖNEN UND STEFANIE REUSSWIG, *Convex backscattering support in electric impedance tomography*, Numer. Math. 117 (2011), 373–396.

-
- [43] MARTIN HANKE, NUUTTI HYVÖNEN UND STEFANIE REUSSWIG, *Erratum: An inverse backscatter problem for electric impedance tomography*, SIAM J. Math. Anal. 43 (2011), 1495–1497.
- [44] MARTIN HANKE UND ANDREAS KIRSCH, *Sampling methods*, in Handbook of mathematical methods in imaging. Vol. I, Otmar Scherzer (Hg.), Springer, New York, 2011, 501–550.
- [45] MARTIN HANKE UND WILLIAM RUNDELL, *On rational approximation methods for inverse source problems*, Inverse Probl. Imaging 5 (2011), 185–202.
- [46] LAURI HARHANEN UND NUUTTI HYVÖNEN, *Convex source support in half-plane*, Inverse Probl. Imaging 4 (2010), 429–448.
- [47] PETER HENRICI, *Applied and computational complex analysis. Vol. 1*, John Wiley & Sons, New York, 1974.
- [48] PETER HENRICI, *Applied and computational complex analysis. Vol. 3*, John Wiley & Sons, New York, 1986.
- [49] FRANK HETTLICH UND WILLIAM RUNDELL, *The determination of a discontinuity in a conductivity from a single boundary measurement*, Inverse Problems 14 (1998), 67–82.
- [50] EINAR HILLE, *Ordinary differential equations in the complex domain*, John Wiley & Sons, New York, 1976.
- [51] DAVID S. HOLDER (Hg.), *Electrical impedance tomography. Methods, history and applications*, Institute of Physics Publishing, Bristol and Philadelphia, 2005.
- [52] STEFANIE HOLLBORN, *Reconstructions from backscatter data in electric impedance tomography*, Inverse Problems 27 (2011), 045007.
- [53] NUUTTI HYVÖNEN, *Complete electrode model of electrical impedance tomography: approximation properties and characterization of inclusions*, SIAM J. Appl. Math. 64 (2004), 902–931.
- [54] NUUTTI HYVÖNEN, *Application of a weaker formulation of the factorization method to the characterization of absorbing inclusions in optical tomography*, Inverse Problems 21 (2005), 1331–1343.
- [55] MASARU IKEHATA, *On reconstruction in the inverse conductivity problem with one measurement*, Inverse Problems 16 (2000), 785.
- [56] VICTOR ISAKOV, *Inverse source problems*, AMS, Providence, RI, 1990.
- [57] VICTOR ISAKOV, *Inverse problems for partial differential equations*, Springer, New York, 2006.
- [58] KAZUFUMI ITO, KARL KUNISCH UND ZHILIN LI, *Level-set function approach to an inverse interface problem*, Inverse Problems 17 (2001), 1225–1242.

- [59] OLHA IVANYSHYN UND RAINER KRESS, *Nonlinear integral equations for solving inverse boundary value problems for inclusions and cracks*, J. Integral Equations Appl. 18 (2006), 13–38.
- [60] HYEONBAE KANG, JIN KEUN SEO UND DONGWOO SHEEN, *The inverse conductivity problem with one measurement: stability and estimation of size*, SIAM J. Math. Anal. 28 (1997), 1389–1405.
- [61] HYEONBAE KANG, JIN KEUN SEO UND DONGWOO SHEEN, *Numerical identification of discontinuous conductivity coefficients*, Inverse Problems 13 (1997), 113–123.
- [62] HOSAM KI UND DONGWOO SHEEN, *Numerical inversion of discontinuous conductivities*, Inverse Problems 16 (2000), 33–47.
- [63] JACEK KIERZENKA UND LAWRENCE F. SHAMPINE, *A BVP solver that controls residual and error*, J. Numer. Anal. Ind. Appl. Math. 3 (2008), 27–41.
- [64] JACEK KIERZENKA, LAWRENCE F. SHAMPINE UND MARK W. REICHEL, *Solving boundary value problems for ordinary differential equations in matlab with bvp4c*.
Verfügbar unter
<http://www.mathworks.com/matlabcentral/fileexchange/3819>, abgerufen am 8. März 2012.
- [65] RAINER KRESS, *Linear integral equations*, Springer, New York, 1999.
- [66] RAINER KRESS, *Inverse dirichlet problem and conformal mapping*, Math. Comput. Simul. 66 (2004), 255–265.
- [67] RAINER KRESS UND WILLIAM RUNDELL, *Inverse obstacle scattering using reduced data*, SIAM J. Appl. Math. 59 (1999), 442–454.
- [68] RAINER KRESS UND WILLIAM RUNDELL, *Nonlinear integral equations and the iterative solution for an inverse boundary value problem*, Inverse Problems 21 (2005), 1207–1223.
- [69] STEVEN KUSIAK UND JOHN SYLVESTER, *The scattering support*, Comm. Pure Appl. Math. 56 (2003), 1525–1548.
- [70] STEVEN KUSIAK UND JOHN SYLVESTER, *The convex scattering support in a background medium*, SIAM J. Math. Anal. 36 (2005), 1142–1158.
- [71] OHIN KWON, JIN KEUN SEO UND JEONG-ROCK YOON, *A real time algorithm for the location search of discontinuous conductivities with one measurement*, Comm. Pure Appl. Math. 55 (2002), 1–29.
- [72] WILLIAM R. B. LIONHEART, *EIT reconstruction algorithms: pitfalls, challenges and recent developments*, Physiol. Meas. 25 (2004), 125–142.
- [73] JACQUES-LOUIS LIONS UND ENRICO MAGENES, *Non-homogeneous boundary value problems and applications. Vol. I*, Springer, New York, 1972.

-
- [74] RICHARD MELROSE UND GUNTHER UHLMANN, *Generalized backscattering and the Lax-Phillips transform*, *Serdica Math. J.* 34 (2008), 355–372.
- [75] ADRIAN I. NACHMAN, *Global uniqueness for a two-dimensional inverse boundary value problem*, *Ann. Math. (2)* 143 (1996), 71–96.
- [76] PETRI OLA, LASSI PÄIVÄRINTA UND VALERI SEROV, *Recovering singularities from backscattering in two dimensions*, *Commun. Partial Differ. Equations* 26 (2001), 697–715.
- [77] ROLAND POTTHAST, JOHN SYLVESTER UND STEVEN KUSIAK, *A ‘range test’ for determining scatterers with unknown physical properties*, *Inverse Problems* 19 (2003), 533–547.
- [78] JUAN MANUEL REYES, *Inverse backscattering for the Schrödinger equation in 2D*, *Inverse Problems* 23 (2007), 625–643.
- [79] WILLIAM RUNDELL, *Recovering an obstacle and its impedance from Cauchy data*, *Inverse Problems* 24 (2008), 045003.
- [80] WILLIAM RUNDELL, *Recovering an obstacle using integral equations*, *Inverse Probl. Imaging* 3 (2009), 319–332.
- [81] JUKKA SARANEN UND GENNADI VAINIKKO, *Periodic integral and pseudodifferential equations with numerical approximation*, Springer, Berlin, 2002.
- [82] ROLAND SCHINZINGER UND PATRICIO A. A. LAURA, *Conformal Mapping: Methods and Applications*, Elsevier, Amsterdam, 1991.
- [83] JIN KEUN SEO, *On the uniqueness in the inverse conductivity problem*, *J. Fourier Anal. Appl.* 2 (1996), 227–235.
- [84] VALERIY SEROV, *Inverse fixed angle scattering and backscattering problems in two dimensions*, *Inverse Problems* 24 (2008), 065002.
- [85] ERKKI SOMERSALO, MARGARET CHENEY UND DAVID ISAACSON, *Existence and uniqueness for electrode models for electric current computed tomography*, *SIAM J. Appl. Math.* 52 (1992), 1023–1040.
- [86] JOHN SYLVESTER, *Notions of support for far fields*, *Inverse Problems* 22 (2006), 1273–1288.
- [87] JOHN SYLVESTER UND JAMES KELLY, *A scattering support for broadband sparse far field measurements*, *Inverse Problems* 21 (2005), 759–771.
- [88] MICHAEL E. TAYLOR, *Partial differential equations. I. Basic theory*, Springer, New York, 1996.
- [89] WOLFGANG TUTSCHKE UND HARKRISHAN L. VASUDEVA, *An introduction to complex analysis. Classical and modern approaches*, Chapman & Hall/CRC, Boca Raton, FL, 2005.
- [90] GUNTHER UHLMANN, *Electrical impedance tomography and Calderón’s problem*, *Inverse Problems* 25 (2009), 123011.

-
- [91] WOLFGANG WALTER, *Einführung in die Theorie der Distributionen*, BI-Wissenschaftsverlag, Mannheim, 1994.
- [92] DIRK WERNER, *Funktionalanalysis*, Springer, Berlin, 2002.