Observable radizielle Untergruppen von halbeinfachen algebraischen Gruppen

Klaus Pommerening

Fachbereich Mathematik der Johannes-Gutenberg-Universität,
Saarstraße 21, D-6500 Mainz, Bundesrepublik Deutschland

Einleitung

Sei G eine affine algebraische Gruppe, definiert über einem algebraisch abgeschlossenen Körper k von beliebiger Charakteristik. Die observablen Untergruppen von G sind die Untergruppen, die als Stabilisatoren bei rationalen Darstellungen von G auftreten. Sie wurden in [2] und [5] ausführlich diskutiert. Dabei zeigte sich, daß es im allgemeinen wohl sehr schwierig ist zu entscheiden, ob eine Untergruppe observabel ist. Daher ist es sinnvoll, Kriterien zu finden. In [9] gab Sukhanov für Charakteristik 0 ein notwendiges und hinreichendes Kriterium dafür an, daß eine radizielle Untergruppe einer halbeinfachen algebraischen Gruppe observabel ist; dabei will ich unter einer radiziellen Untergruppe eine zusammmenhängende abgeschlossene Untergruppe verstehen, die von einem maximalen Torus normalisiert wird. Sukhanovs Kriterium läßt sich leicht auf beliebige Charakteristik übertragen und in eine sehr handliche Form bringen (2.4).

Das wirklich neue Ergebnis dieses Artikels steckt in §3: Eine genaue Charakterisierung der kleinsten observablen Untergruppe, die eine gegebene radizielle Untergruppe enthält. Als Anwendung hiervon lassen sich diejenigen homogenen Räume vom Typ „halbeinfache Gruppe modulo radizieller Untergruppe" bestimmen, die nur konstante globale Funktionen besitzen.

In den Bezeichnungen halte ich mich an [6].

§ 1. Präliminarien

In diesem Paragraphen werden die benötigten Begriffe und Ergebnisse zusammengestellt.

(1.1) Sei G eine affine algebraische Gruppe. Eine Untergruppe H von G heißt *observabel*, wenn es einen rationalen G-Modul V und ein $x \in V$ gibt mit Stabilisator $G_x = H$. (Dann ist H automatisch abgeschlossen.) Ich benötige folgende Eigenschaften:

a) Ist H observable Untergruppe von G und K observable Untergruppe von H, so ist K observable Untergruppe von G [2; S. 143]; falls G nicht zusammenhängend ist, siehe auch [2; Theorem 6, S. 137].

b) Jeder abgeschlossene Normalteiler ist observabel [2; Theorem 10, S. 142].

c) Eine abgeschlossene Untergruppe H von G ist genau dann observabel, wenn die Zusammenhangskomponente H^0 observabel ist; siehe [2; Theorem 7, S. 138], die Umkehrung folgt nach b und a.

d) Die Observabilität einer Untergruppe hängt nur von ihrem Radikal ab: Sei H abgeschlossene Untergruppe von G und $R=R(H)$ ihr Radikal. Ist H observabel, so auch R nach a und b. Ist umgekehrt R observabel, so läßt sich aus [2; Theorem 9, S. 140] direkt schließen, daß auch H observabel ist.

(1.2) Ist H abgeschlossene Untergruppe der affinen algebraischen Gruppe G, so heißt H *R_u-eingebettet* in G, wenn $R_u(H) \subseteq R_u(G)$. Ist dies der Fall, so ist der homogene Raum G/H affin [1; S. 581] [4; Theorem 4.3, S. 9, und Corollary 4.6, S. 11]. Also ist H observabel [4; Lemma 4.2, S. 9].

(1.3) Von jetzt an sei G stets eine zusammenhängende halbeinfache algebraische Gruppe; dafür wird kurz gesagt: G sei halbeinfach. Eine Untergruppe H von G heißt *radiziell*, wenn H abgeschlossen und zusammenhängend ist und von einem maximalen Torus von G normalisiert wird. Die Untergruppen dieses Typs wurden in [3; § 3] ausführlich untersucht. Sei ein maximaler Torus T von G fest gewählt, $\Phi=\Phi(T,G)$ das zugehörige Wurzelsystem, aufgefaßt als Teilmenge der Charaktergruppe $X(T)$. Für eine quasi-abgeschlossene Teilmenge [3; S. 76] $\Psi \subseteq \Phi$ sei $G^*(\Psi)$ die von den Wurzel-Untergruppen U_α mit $\alpha \in \Psi$ erzeugte Untergruppe von G und $T^*(\Psi)=(T \cap G^*(\Psi))^0$. Eine (bezüglich T) radizielle Untergruppe von G wird dann vollständig beschrieben durch

a) eine quasi-abgeschlossene Teilmenge $\Psi \subseteq \Phi$,

b) einen Untertorus $S \subseteq T$ mit $T^*(\Psi) \subseteq S$.

Außer bei einigen Gruppen in Charakteristik 2 und 3 sind quasi-abgeschlossene Mengen von Wurzeln sogar abgeschlossen [3; S. 71 und 76]. Für $\Psi \subseteq \Phi$ werden mit Ψ_s und Ψ_u stets der halbeinfache und der unipotente Teil von Ψ bezeichnet.

(1.4) Sei T ein maximaler Torus von G. Auf $X(T) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$ sei ein Skalarprodukt $(.|.)$ gewählt, das unter der Weyl-Gruppe von $\Phi=\Phi(T,G)$ invariant ist. Jeder Charakter $\chi \in X(T)$ bestimmt ein parabolisches Untersystem

$$\Phi^+(\chi) := \{\alpha \in \Phi \mid (\chi|\alpha) \geqq 0\}$$

von Φ und somit eine parabolische Untergruppe $P(\chi)$.

Sei $G(\chi)$ die radizielle Untergruppe zu $\Phi^+(\chi)$ mit Torus $T_\chi := (\mathrm{Kern}\,\chi)^0 \subseteq T$. Der Torus T_χ umfaßt $T^*(\Phi^+(\chi))$, weil nur der halbeinfache Teil von $\Phi^+(\chi)$ zu $T^*(\Phi^+(\chi))$ beiträgt. $G(\chi)$ hat die Codimension 1 in $P(\chi)$, wenn $\chi \neq 0$.

Eine Untergruppe H von G heißt *maximal subparabolisch*, wenn es einen maximalen Torus T von G und einen Charakter $\chi \in X(T)$ gibt mit $H=G(\chi)$.

Beispiele. 1. G selbst für $\chi=0$.

2. $G=\mathbb{SL}_n$ und H der Stabilisator eines Elements $x \in k^n$ bezüglich der gewöhnlichen Operation von G.

Eine Untergruppe H von G heißt *subparabolisch*, wenn sie abgeschlossen und in eine maximal subparabolische Untergruppe R_u-eingebettet ist.

(1.5) *Bemerkungen.* a) Jede reduktive Untergruppe von G ist subparabolisch, weil sie R_u-eingebettet in G selbst ist.

b) Jede R_u-eingebettete Untergruppe einer subparabolischen Untergruppe ist selbst subparabolisch.

c) *Jede subparabolische Untergruppe von G ist observabel.* Nach (1.1) a und (1.2) genügt es, diese Behauptung für eine maximal subparabolische Untergruppe $G(\chi)$ mit $\chi \neq 0$ zu beweisen. Dazu sei $X(T)$ so geordnet, daß χ dominant ist. V sei der irreduzible G-Modul mit höchstem Gewicht χ; ist x ein Gewichtsvektor zu χ, so ist die Gerade kx stabil unter $P(\chi)$, und $G_x^0 = G(\chi)$. Nach (1.1) c ist $G(\chi)$ observabel. □

(1.6) Welches sind nun die *radiziellen* subparabolischen Untergruppen? Sei dazu o.B.d.A. ein maximaler Torus T von G fest gewählt. Dann wird durch die Auswahl von

a) einem Charakter $\chi \in X(T)$,

b) einer quasi-abgeschlossenen Teilmenge $\Psi \subseteq \Phi = \Phi(T, G)$ mit $\Psi_u \subseteq \Phi^+(\chi)_u = \{\alpha \in \Phi \mid (\alpha|\chi) > 0\}$,

c) einem Torus S mit $T^*(\Phi^+(\chi)) \subseteq S \subseteq T_\chi$

eine radizielle subparabolische Untergruppe bestimmt, und zwar ist offensichtlich jede derartige Untergruppe so erhältlich.

§ 2. Observable radizielle Untergruppen

In diesem Paragrahen wird für radizielle Untergruppen von halbeinfachen algebraischen Gruppen ein sehr bequemes notwendiges und hinreichendes Kriterium für Observabilität bewiesen (2.4). Die vorbereitenden Ergebnisse (2.1) und (2.2) sind von Sukhanov [9] mit Lie-Algebra-Methoden in Charakteristik 0 bewiesen worden. Sei weiterhin G stets halbeinfach.

(2.1) Sei T ein maximaler Torus von G. Die kanonische Paarung zwischen der Charaktergruppe $X(T)$ und der Gruppe $X_*(T)$ der Ein-Parameter-Untergruppen von T sei mit $\langle .,. \rangle$ bezeichnet. Für eine Wurzel $\alpha \in \Phi = \Phi(T, G)$ sei λ_α die Cowurzel, also die durch $T^*(\{\alpha, -\alpha\})$ bestimmte Ein-Parameter-Untergruppe mit $\langle \alpha, \lambda_\alpha \rangle = 2$. Es ist $\langle \chi, \lambda_\alpha \rangle = 2(\chi|\alpha)/(\alpha|\alpha)$ für alle $\chi \in X(T)$.

Lemma. *Sei V ein rationaler G-Modul, χ ein Gewicht von V bezüglich T, $x \in V_\chi - \{0\}$ ein Gewichtsvektor, $\alpha \in \Phi$ eine Wurzel mit $U_\alpha \subseteq G_x$. Dann gilt:*

(i) $\langle \chi, \lambda_\alpha \rangle \geqq 0$.

(ii) $\langle \chi, \lambda_\alpha \rangle = 0 \Leftrightarrow U_{-\alpha} \subseteq G_x$.

Beweis. Sei $H = G^*(\{\alpha, -\alpha\})$ und $W \subseteq V$ der von x erzeugte H-Untermodul. Dann ist x maximaler Vektor in W, und alle Gewichte von H in W sind Einschränkungen auf $T \cap H$ von Charakteren der Form $\rho = \chi - c\alpha$ mit $c \geqq 0$ ganz;

insbesondere $\langle\rho,\lambda_\alpha\rangle \leqq \langle\chi,\lambda_\alpha\rangle$. Da die Weyl-Gruppe die Gewichte permutiert, kommt auch $-\chi|_{T\cap H}$ als Gewicht in W vor, also $\langle\chi,\lambda_\alpha\rangle \geqq 0$. Außerdem ist genau dann $\langle\chi,\lambda_\alpha\rangle=0$, wenn x von ganz H stabilisiert wird. □

(2.2) **Satz.** *Sei G eine halbeinfache algebraische Gruppe und H eine radizielle Untergruppe von G. Dann sind äquivalent:*

(i) *H ist subparabolisch.*

(ii) *H ist observabel.*

Dabei kann für die Eigenschaft „subparabolisch" in (1.6) *jeder maximale Torus gewählt werden, der H normalisiert.*

Beweis. Wegen (1.5) c ist nur noch „(ii) ⇒ (i)" zu beweisen. Dazu sei T ein maximaler Torus von G, der H normalisiert, und H sei durch $\psi \subseteq \Phi$ und den Untertorus S von T beschrieben. Sei V ein rationaler G-Modul und $x \in V$ ein Element mit Stabilisator $G_x=H$. Sei $x=\sum x_\chi$ die Zerlegung von x in Gewichtskomponenten zu den Charakteren $\chi \in X(T)$, und $M_x := \{\chi \in X(T) | x_\chi \neq 0\}$. Falls M_x nur aus der 0 besteht, ist $T \subseteq G_x = H$, also H reduktiv nach [5; Cor. 2, S. 237] und erst recht subparabolisch nach (1.5)a.

Daher kann ich im folgenden annehmen, daß M_x Gewichte $\neq 0$ enthält. Sei $\eta \in X(T)$ die Summe aller $\chi \in M_x$. Ich betrachte die maximale subparabolische Untergruppe $G(\eta)$ mit Torus T_η und Wurzelsystem $\Phi^+(\eta)$ und will zeigen, daß H in $G(\eta)$ R_u-eingebettet ist.

$S \subseteq T_\eta$ ist trivial. Außerdem ist $\Psi \subseteq \Phi^+(\eta)$: Für $\alpha \in \Psi$ sei nämlich $\vartheta_\alpha \colon \mathbb{G}_a \to U_\alpha$ der übliche Isomorphismus; für alle $s \in k$ gilt dann

$$\sum_{\chi \in M_x} x_\chi = x = \vartheta_\alpha(s)\cdot x = \sum_{\chi \in M_x} \left[x_\chi + \sum_{i=1}^{\infty} s^i x_{\chi,i}\right]$$

mit $x_{\chi,i} \in V_{\chi+i\alpha}$, also

$$0 = \sum_{\chi \in M_x} \left[\sum_{i=1}^{\infty} s^i x_{\chi,i}\right] = \sum_{i=1}^{\infty} s^i \Big[\sum_{\chi \in M_x} x_{\chi,i}\Big].$$

Der Koeffizientenvergleich für dieses Polynom ergibt

$$\sum_{\chi \in M_x} x_{\chi,i} = 0 \qquad \text{für alle } i=1,2,\ldots.$$

Da die Summanden auf der linken Seite alle zu verschiedenen Gewichtsräumen gehören (i fest!), müssen sie alle 0 sein. Also wird x_χ für jedes $\chi \in M_x$ von U_α stabilisiert. Da $(\chi|\alpha)$ und $\langle\chi,\lambda_\alpha\rangle$ dasselbe Vorzeichen haben, folgt $(\chi|\alpha)\geqq 0$ aus (2.1)(i). Erst recht ist $(\eta|\alpha)\geqq 0$.

Damit ist $H \subseteq G(\eta)$ gezeigt, und es fehlt nur noch $\psi_u \subseteq \Phi^+(\eta)_u$: Sei $\alpha \in \Psi_u$. Wäre $(\chi|\alpha)=0$ für alle $\chi \in M_x$, so würde nach (2.1)(ii) auch $U_{-\alpha}$ alle x_χ und damit x stabilisieren, im Widerspruch zu $-\alpha \notin \Psi$. Also gibt es wenigstens ein $\chi \in M_x$ mit $(\chi|\alpha)>0$. Daher ist $(\eta|\alpha)>0$ und $\alpha \in \Phi^+(\eta)_u$. □

(2.3) *Bemerkung.* Aus $T \subseteq G_x$ folgte hier für *radizielles* G_x ganz elementar, daß G_x reduktiv ist. Dieser Schluß gilt aber auch allgemein: Ist $T \subseteq G_x$, so ist die

Bahn $G \cdot x$ nach [10; Cor. 1, S. 70] abgeschlossen, also affin. Nach dem Satz von Matsushima [8] folgt, daß G_x reduktiv ist – dazu ist aber eine Lücke zu schließen, nämlich $G \cdot x$ affin $\Leftrightarrow$ G/G_x affin. Das folgt, weil der kanonische Morphismus $\rho\colon G/G_x \to G \cdot x$ ein Homöomorphismus [6; Ex. 4, S. 86], also affin ist.

(2.4) Sei ein maximaler Torus T von G fest gewählt, zusammen mit einer Ordnung auf der Charaktergruppe $X(T)$. Sei $\Phi = \Phi(T, G)$ das Wurzelsystem, $\Psi \subseteq \Phi^+$ eine quasi-abgeschlossene Teilmenge des positiven Teils Φ^+ von Φ (insbesondere Ψ unipotent), $U := G^*(\Psi)$. Eine beliebige radizielle Untergruppe zu Ψ ist dann ein semidirektes Produkt $R = S \cdot U$ mit einem Untertorus S von T.

R ist nach (2.2) genau dann observabel, wenn es einen Charakter $\chi \in X(T)$ gibt, so daß R in $G(\chi)$ R_u-eingebettet ist, also genau dann, wenn es χ gibt mit

(i) $(\alpha|\chi) > 0$ für alle $\alpha \in \Psi$,

(ii) $\chi(s) = 0$ für alle $s \in S$.

Die Aussage (i) beschreibt als möglichen Bereich für χ einen offenen konvexen Polyeder-Kegel $\Omega(\Psi)$ im Vektorraum $X(T) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$. Der Kegel $\Omega(\Psi)$ ist nicht leer, weil er die dominante Weyl-Kammer von $X(T) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$ enthält. (ii) beschreibt den Unterraum $S^\perp$, der von $\{\chi \in X(T) | \chi|_S \text{ trivial}\}$ aufgespannt wird. D.h., R ist genau dann observabel, wenn $S^\perp$ den Kegel $\Omega(\Psi)$ trifft.

Daher lassen sich die radiziellen observablen Untergruppen von G so charakterisieren:

Theorem. *Sei G eine halbeinfache algebraische Gruppe, T ein maximaler Torus von G und $\Phi = \Phi(T, G)$ das Wurzelsystem. Sei H eine radizielle Untergruppe von G, beschrieben durch eine Teilmenge Ψ von Φ und einen Untertorus S von T; Ψ_u sei der unipotente Teil von Ψ. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

(i) *H ist observable Untergruppe von G.*

(ii) *Der Unterraum $S^\perp$ von $X(T) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$ trifft den Kegel $\Omega(\Psi_u)$.* □

(2.5) *Beispiele.* 1. Drei Beispiele, in denen schon längst bekannt ist, wann (i) gilt, bei denen die Prüfung von (ii) also zum Checken des Theorems als Übungsaufgabe geeignet ist: a) H reduktiv (also Ψ symmetrisch); b) $S = T$; c) $H = G^*(\Psi)$.

2. Ein einfaches typisches Beispiel: Sei G vom Typ A_2. Eine Basis des Wurzelsystems sei $\{\alpha_1, \alpha_2\}$. Sei $\Psi = \{\alpha_1, \alpha_1 + \alpha_2\}$ und S ein eindimensionaler Torus, beschrieben durch eine Ein-Parameter-Untergruppe $\lambda\colon \mathbb{G}_m \to T$ mit $\langle \alpha_i, \lambda \rangle = m_i$, wobei m_1 und m_2 nicht beide 0 sind. Die dadurch beschriebene radizielle Untergruppe H ist, wie man leicht nachrechnet, genau dann observabel, wenn $m_2 \neq 0$ und $-2 < m_1/m_2 < 1$.

§ 3. Die observablen Hüllen von radiziellen Untergruppen

Sei G weiterhin stets eine zusammenhängende halbeinfache algebraische Gruppe. In diesem Paragraphen wird zu einer beliebigen radiziellen Untergruppe H von G die observable Hülle H'' konstruiert, d.h., die kleinste observable Untergruppe von G, die H enthält [5; S. 236]. Die Bedeutung der observablen Hülle in der Invariantentheorie liegt in der folgenden Aussage: Ist X eine affine Varietät, auf der G operiert, so ist $k[X]^H = k[X]^{H''}$; d.h., bei der Invariantenbildung „kommt es nur auf die observable Hülle an" [5; Lemma 1, S. 242]. Eine häufig gebrauchte Schlußweise beruht auf $B'' = G$, wenn B eine Borel-Untergruppe von G ist.

(3.1) **Satz.** *Sei H eine radizielle Untegruppe von G. Dann ist auch die observable Hülle H'' radiziell, und zwar bezüglich desselben maximalen Torus T von G.*

Beweis. Da H zusammenhängend und $(H'')^0$ observabel ist, ist H'' zusammenhängend. H'' wird von T normalisiert, weil H'' genau aus den Elementen von G besteht, die den Invariantenring $k[G]^H$ (unter Rechts-Translation) elementweise festlassen. □

Korollar. *Ist H radiziell, aber nicht observabel, so ist das zu H'' gehörige Wurzelsystem ψ'' echt größer als das zu H gehörige ψ.*

Beweis. Andernfalls würde nur der zugehörige Untertorus S zu S'' vergrößert; aber dann würde $(S'')^\perp \subseteq S^\perp$ erst recht nicht $\Omega(\Psi_u) = \Omega(\Psi_u'')$ treffen, im Widerspruch zu (2.4). □

(3.2) Um zu einer brauchbaren Beschreibung der observablen Hülle zu kommen, muß ich den Rand des konvexen Polyeder-Kegels $\Omega = \Omega(\Psi_u)$ genauer ansehen.

Für eine Teilmenge Γ von Ψ_u sei $\Gamma^c := \Psi_u - \mathbb{R}\Gamma$ die Menge aller Wurzeln in Ψ_u, die nicht reelle Linearkombinationen von Γ sind. Damit wird die folgende Abbildung $p: \mathscr{P}(\Psi_u) \to \mathscr{P}(\bar{\Omega})$ definiert:

$$p(\Gamma) := \{\chi \in \bar{\Omega} \mid (\chi \mid \alpha) = 0 \text{ für alle } \alpha \in \Gamma,\ (\chi \mid \beta) > 0 \text{ für alle } \beta \in \Gamma^c\}.$$

Die Bilder unter p sind gerade die Kanten, Seiten, ... von Ω und heißen *Facetten*. Sie bilden einen Verband $\mathscr{F}$ mit der Ordnungsrelation $F' \prec F :\Leftrightarrow F' \subseteq \bar{F}$. Dabei ist $\bar{F} = \mathbb{R}F \cap \bar{\Omega}$. Die Abbildung $p: \mathscr{P}(\Psi_u) \to \mathscr{F}$ ist antiton und surjektiv, eine Rechts-Inverse ist $q: \mathscr{F} \to \mathscr{P}(\Psi_u)$,

$$q(F) := F^\perp \cap \Psi_u = \{\alpha \in \Psi_u \mid (\chi \mid \alpha) = 0 \text{ für alle } \chi \in F\}.$$

Das Paar (p, q) ist eine Galois-Korrespondenz zwischen den Verbänden $\mathscr{P}(\Psi_u)$ und $\mathscr{F}$.

Lemma. *Für jeden Untertorus S von T gibt es eine eindeutig bestimmte größte Facette F von Ω, die $S^\perp$ trifft. Sie ist charakterisiert durch*

(i) $S^\perp \cap F = \varnothing$, (ii) $S^\perp \cap \bar{F} = S^\perp \cap \bar{\Omega}$.

Beweis. Zu zeigen ist: Wenn $S^\perp$ zwei Facetten F_1 und F_2 trifft, so trifft es auch das Supremum F_0 von F_1 und F_2 im Verband $\mathscr{F}$. Das folgt aber unmittelbar daraus, daß die Verbindungslinie eines $\chi_1 \in S^\perp \cap F_1$ mit einem $\chi_2 \in S^\perp \cap F_2$ ganz in $S^\perp$ liegt und F_0 trifft. Der Zusatz ist klar. □

(3.3) Sei nun wieder eine radizielle Untergruppe H von G gegeben, beschrieben bezüglich eines maximalen Torus T von G durch eine Teilmenge Ψ von $\Phi = \Phi(T, G)$ und einen Untertorus S von T. Sei F die eindeutig bestimmte größte Facette von $\Omega = \Omega(\Psi_u)$, die $S^\perp$ trifft, $\Gamma := q(F) \subseteq \Psi_u$. Dazu sei Ψ'_0 der von $\Psi_s \cup \Gamma \cup (-\Gamma)$ erzeugte quasi-abgeschlossene Teil von Φ und Ψ' der von $\Psi'_0 \cup \Psi_u$ (oder von $\Psi \cup (-\Gamma)$) erzeugte quasi-abgeschlossene Teil von Φ. Außerdem sei S' der von S und den Ein-Parameter-Untergruppen λ_α mit $\alpha \in \Gamma$ erzeugte Untertorus von T.

Lemma. (i) *Ψ'_0 ist der halbeinfache Teil von Ψ'.*

(ii) *Die durch Ψ' und S' beschriebene radizielle Untergruppe H' von G ist observabel.*

Beweis. Sei $\beta \in \Psi_u$. Ist dann $(\chi|\beta) = 0$ für *ein* $\chi \in F$, so ist $\beta \in \Gamma$, da dann notwendig $F \prec p(\{\beta\})$.

(i) Zu zeigen ist: $\Psi'_s \subseteq \Psi'_0$. Sei dazu $\beta \in \Psi'_s$, also $-\beta \in \Psi'$. Dann ist $\beta = \beta_1 + \beta_2$, $-\beta = \beta_3 + \beta_4$, wobei β_1 und β_3 (eventuell leere) Summen von Wurzeln aus Γ^c =(in diesem Fall) $\Psi_u - \Gamma$, β_2 und β_4 Summen von Wurzeln aus $\Psi_s \cup \Gamma \cup (-\Gamma)$ sind. Sei nun $\chi \in F \cap S^\perp$. Dann ist

$$0 \leqq (\chi|\beta_1) = (\chi|\beta) = -(\chi|-\beta) = -(\chi|\beta_3) \leqq 0,$$

also $(\chi|\beta_1) = 0$. Nach der Vorbemerkung muß daher $\beta_1 = 0$ sein, also $\beta = \beta_2 \in \Psi'_0$.

(ii) $(S')^\perp$ trifft $\Omega(\Psi'_u)$, weil für $\chi \in S^\perp \cap F$ und alle $\beta \in \Psi'_u$ offensichtlich $(\chi|\beta) > 0$ ist. □

(3.4) **Theorem.** *Sei G halbeinfach, T ein maximaler Torus von G, Φ das Wurzelsystem. Sei H eine radizielle Untergruppe von G, gegeben durch $\Psi \subseteq \Phi$ und einen Untertorus S von T. Dann ist die observable Hülle H'' von H diejenige radizielle Untergruppe von G, die durch $\Psi'' \subseteq \Phi$ und den Untertorus S'' von T beschrieben wird, wobei Ψ'' und S'' so entstehen:*

(i) *Sei F die größte Facette des Polyeder-Kegels $\Omega(\Psi_u)$, die auf S verschwindende Charaktere von T enthält und $\Gamma \subseteq \Psi_u$ die F definierende Teilmenge. Dann ist Ψ'' der Quasi-Abschluß von $\Psi \cup (-\Gamma)$ und Ψ''_s der von $\Psi_s \cup \Gamma \cup (-\Gamma)$.*

(ii) *S'' ist das Erzeugnis von S und den Ein-Parameter-Untergruppen λ_α mit $\alpha \in \Gamma$.*

Beweis. Nach (3.3) ist nur noch zu zeigen, daß $\Gamma \subseteq \Psi''_s$. Da H'' observabel ist, gibt es ein $\chi \in (S'')^\perp$ mit $(\chi|\beta) > 0$ für alle $\beta \in \Psi''_u$. Für beliebiges $\alpha \in \Psi_u$ gibt es zwei Möglichkeiten:

a) entweder $\alpha \in \Psi''_s$; dann ist λ_α in S'', also $(\chi|\alpha) = 0$;

b) oder $\alpha \in \Psi''_u$; dann ist $(\chi|\alpha) > 0$.

Insbesondere ist $\chi \in \bar{\Omega}(\Psi_u)$; genauer folgt sogar

$$\chi \in (S'')^\perp \cap \bar{\Omega}(\Psi_u) \subseteq S^\perp \cap \bar{\Omega}(\Psi_u) = S^\perp \cap \bar{F} \subseteq \bar{F},$$

also $(\chi|\alpha) = 0$ für alle $\alpha \in \Gamma$. Daher muß $\Gamma \subseteq \Psi''_s$ sein. □

(3.5) *Beispiele.* 1. Im Beispiel 2 aus (2.5) hat der Kegel $\Omega = \Omega(\Psi_u)$ die Facetten Ω, $p(\{\alpha_1\})$, $p(\{\alpha_1 + \alpha_2\})$ und $\{0\}$. Im nicht observablen Fall gibt es drei Möglichkeiten:

a) $S^{\perp}$ trifft $p(\{\alpha_1\})$, äquivalent dazu: $m_1/m_2 = -2$. Dann ist $\Gamma = \{\alpha_1\}$, $\Psi'' = \{\alpha_1, -\alpha_1, \alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2\}$ parabolisch und $S'' = S$. Insbesondere ist H'' maximal subparabolisch.

b) Analoges gilt, wenn $S^{\perp}$ die Facette $p(\{\alpha_1 + \alpha_2\})$ trifft.

c) $S^{\perp}$ trifft $\bar{\Omega}$ nur in $\{0\}$. Dann ist $\Gamma = \Psi$, $\Psi'' = \Phi$, $S'' = T$ und $H'' = G$.

2. Die kleinste Facette von Ω ist $p(\Psi_u)$; sie ist gleichzeitig der größte Unterraum von $X(T) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$, der ganz in $\bar{\Omega}$ liegt. H'' ist genau dann reduktiv, wenn $S^{\perp} \cap \bar{\Omega} \subseteq p(\Psi_u)$; in diesem Fall ist Ψ'' das kleinste halbeinfache quasi-abgeschlossene Untersystem von Φ, das Ψ enthält, und $H'' = S \cdot G^*(\Psi'')$.

(3.6) Wann hat der homogene Raum G/H nur konstante globale Funktionen? Genau dann, wenn $k[G]^H = k$, also $H'' = G$. Aus dem obigen Beispiel 2 folgt:

Korollar. *Ist H radizielle Untergruppe von G, so ist $k[G/H] = k$ äquivalent zu den beiden Bedingungen*

(i) $S^{\perp} \cap \bar{\Omega} \subseteq p(\Psi_u)$,

(ii) $\Psi \cup (-\Psi)$ *hat als Quasi-Abschluß ganz* Φ. □

Dadurch wird ein Beispiel von Otsuka [7; S. 292 ff.] verallgemeinert.

Literatur

1. Bialynicki-Birula, A.: Homogeneous affine spaces of linear algebraic groups. Amer. J. Math. **85**, 577–582 (1963)
2. Bialynicki-Birula, A., Hochschild, G., Mostow, G.D.: Extensions of representations of algebraic linear groups. Amer. J. Math. **85**, 131–144 (1963)
3. Borel, A., Tits, J.: Groupes réductifs. Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. **27**, 55–150 (1965)
4. Cline, E., Parshall, P., Scott, L.: Induced modules and affine quotients. Math. Ann. **230**, 1–14 (1977)
5. Grosshans, F.: Observable groups and Hilbert's fourteenth problem. Amer. J. Math. **95**, 229–253 (1973)
6. Humphreys, J.E.: Linear Algebraic Groups. Graduate Texts in Mathematics **21**. New York-Heidelberg-Berlin: Springer 1975
7. Otsuka, K.: On orbit spaces by torus groups. J. Math. Kyoto Univ. **3**, 287–294 (1964)
8. Richardson, R.W.: Affine coset spaces of reductive algebraic groups. Bull. London Math. Soc. **9**, 38–41 (1977)
9. Sukhanov, A.A.: Observable subgroups of a complex semisimple Lie group. Vestnik Moskov. Univ. Ser. I Mat. Meh. **32**, 50–53 (1977); – Moscow Univ. Math. Bull. **32**, 42–45 (1977)
10. Steinberg, R.: Conjugacy Classes in Algebraic Groups. Lecture Notes in Mathematics **366**. Berlin-Heidelberg-New York: Springer 1974

Eingegangen am 31. Juli 1978