Invarianten unipotenter Gruppen

Klaus Pommerening

Fachbereich Mathematik der Johannes-Gutenberg-Universität,
Saarstraße 21, D-6500 Mainz, Bundesrepublik Deutschland

In dieser Arbeit sollen einige positive Ergebnisse zum 14. Problem von Hilbert vorgestellt werden. Der Ausgangspunkt dafür ist ein Kriterium von Grosshans; dieses gibt eine notwendige und hinreichende Bedingung für eine Untergruppe H einer reduktiven algebraischen Gruppe G dafür, daß die H-Invariantenalgebra endlich erzeugt ist, wenn $G(!)$ auf einer endlich erzeugten Algebra rational operiert. Leider sind in Charakteristik 0 nur wenige, in Primzahl-Charakteristik fast gar keine Untergruppen (außer den reduktiven) bekannt, für die das Kriterium anwendbar ist.

Hier soll nun für eine doch schon recht umfangreiche Klasse unipotenter Untergruppen von $\mathbb{GL}_n$ die „Grosshans-Eigenschaft“ bewiesen werden. Für den Fall, daß $\mathbb{GL}_n$ wie gewöhnlich auf $(\mathbb{A}^n)^m$ operiert, wird die Invariantenalgebra für diese Untergruppen sogar explizit berechnet. Die Ergebnisse sind unabhängig von der Charakteristik; die explizite Berechnung der genannten Invariantenalgebren gilt sogar über einem beliebigen Grundring.

§ 1. Grosshans-Untergruppen

In diesem Paragraphen wird der Artikel [5] von Grosshans mit einigen Ergänzungen kurz referiert. Der Einfachheit halber sei k ein algebraisch abgeschlossener Grundkörper (beliebiger Charakteristik).

(1.1) Sei G eine affine algebraische Gruppe über k. Eine abgeschlossene Untergruppe H von G heißt

(i) *observabel*, wenn es einen G-Modul V (rational und endlich-dimensional) und ein $x \in V$ gibt mit $G_x = H$,

(ii) *Grosshans-Untergruppe*, wenn man V und x in (i) so wählen kann, daß außerdem für den Abschluß X der Bahn $G \cdot x$ gilt: $\dim(X - G\cdot x) \leqq \dim X - 2$. (In [5] heißt das „Codimension-2-Bedingung für G/H“.)

Bemerkungen. 1. Man kann V und x dann sogar so wählen, daß X normal und $G\cdot x \cong G/H$ ist; das folgt aus den elementaren Eigenschaften der Normalisierung von X in $k(G/H)$.

2. Genau dann ist H observable bzw. Grosshans-Untergruppe von G, wenn $H \cap G^0$ eine solche Untergruppe von G^0 ist. Daher darf man oft „o.B.d.A. G zusammenhängend" sagen. Ebenso ist H genau dann observable bzw. Grosshans-Untergruppe, wenn H^0 es ist.

3. Ist X eine fast-homogene affine G-Varietät, so ist der Stabilisator H der dichten Bahn observabel; hat das Komplement der dichten Bahn die Codimension $\geqq 2$, so ist H sogar Grosshans-Untergruppe. Das folgt, weil man X als abgeschlossenen Teil G-äquivariant in einen G-Modul einbetten kann.

4. Die radiziellen observablen Untergruppen von reduktiven Gruppen sind in [12] vollständig bestimmt; dabei heißt eine Untergruppe radiziell, wenn sie zusammenhängend ist und von einem maximalen Torus normalisiert wird. Die vorliegende Arbeit liefert einen Beitrag zur Bestimmung der radiziellen Grosshans-Untergruppen.

(1.2) Der Zusammenhang dieser beiden Begriffe mit der Invariantentheorie beruht auf folgenden Aussagen [5]:

a) Operiert G auf einer affinen Varietät X, so ist $k[X]^H = k[X]^{\hat{H}}$, wobei $\hat{H}$ die „observable Hülle" von H ist, also die kleinste observable Untergruppe von G, die H enthält.

b) Genau dann ist H Grosshans-Untergruppe von G, wenn H observabel und $k[G]^H$ endlich erzeugte k-Algebra ist; unter $k[G]^H$ wird hier der Invariantenring bei Rechts-Translation, also $k[G/H]$ verstanden. (Natürlich gilt die gleiche Aussage auch für Links-Translation.)

(1.3) Der folgende Satz ist in [5; Theorem 4, S. 241] nur für den Fall „H linear reduktiv" bewiesen.

Satz. *Sei G eine affine algebraische Gruppe, H eine observable Untergruppe von G und K eine Untergruppe von H, die Grosshans-Untergruppe von G ist. Dann ist K auch Grosshans-Untergruppe von H.*

Beweis. Seien o.B.d.A. G und H zusammenhängend. Sei Z das affine Modell von $k[G]^K$ und X eine affine Varietät, die G/H als dichten offenen Teil enthält. Die Inklusionen $k[X] \subseteq k[G]^H \subseteq k[G]^K = k[Z]$ induzieren das kommutative Diagramm

$$\begin{tikzcd} G/K \arrow[r, "p"] \arrow[d, hook] & G/H \arrow[d, hook] \\ Z \arrow[r, "f"'] & X \end{tikzcd},$$

wobei p die natürliche Abbildung ist. Sei $W := Z - G/K$, also $\dim W \leqq \dim Z - 2$.

1. Fall. $f(W) \not\supseteq G/H$. Dann gibt es ein $g \in G$ mit $f^{-1}(gH) = p^{-1}(gH) = g \cdot H/K$; da diese Menge (als Faser) abgeschlossen in Z ist, ist sie affin. Daher ist H/K affin, also erst recht K Grosshans-Untergruppe von H.

2. Fall. $f(W) \supseteq G/H$. Dann ist $f(W)$ dicht in X. Sei W_0 eine irreduzible Komponente von W. Dominiert W_0 nicht X, so gibt es einen dichten offenen Teil von G/H, der $f(W_0)$ nicht trifft. Andernfalls gibt es einen dichten offenen Teil von G/H, für dessen Punkte gH gilt: $f^{-1}(gH) \cap W_0$ hat nur irreduzible Komponenten der Dimension $\dim W_0 - \dim G/H$. Insgesamt gibt es also einen dichten offenen Teil U von G/H, so daß für $gH \in U$ gilt

$$\dim(f^{-1}(gH) \cap W) \leqq \dim W - \dim G/H \leqq \dim H/K - 2,$$
$$f^{-1}(gH) = p^{-1}(gH) \cup (f^{-1}(gH) \cap W),$$

und $p^{-1}(gH)$ ist offen in $f^{-1}(gH)$ und isomorph zu H/K. Da die Codimension von $f^{-1}(gH) \cap W$ in $f^{-1}(gH)$ mindestens 2 ist, ist K Grosshans-Untergruppe. QED

(1.4) Das folgende Ergebnis stammt von Hadžiev [8; Theorem 3.1, S. 388] und Vust [15; Prop. 1, S. 7] für maximale unipotente Untergruppen in Charakteristik 0 und im allgemeinen Fall von Grosshans [5; S. 245] (wo eine überflüssige Normalitäts-Voraussetzung gemacht wird):

Sei H Grosshans-Untergruppe von G, ferner Z ein affines Modell von $k[G]^H$ und X eine affine G-Varietät. Dann ist kanonisch

$$k[X]^H \cong k[X \times Z]^G.$$

Insbesondere ist $k[X]^H$ endlich erzeugt, wenn G reduktiv ist; hier geht natürlich ein, daß Mumfords Vermutung inzwischen bewiesen ist. Auf dem Umweg über die observable Hülle folgt der *Invariantensatz von Grosshans:*

Sei G reduktiv und H eine abgeschlossene Untergruppe. Sei $k[G]^H$ endlich erzeugt. Dann ist $k[X]^H$ für jede affine G-Varietät X endlich erzeugt.

Als Korollar hierzu und zum Satz (1.3) folgt: Sei G eine affine algebraische Gruppe und G' eine reduktive Untergruppe von G. Für eine Untergruppe H von G' sind äquivalent:

(i) H ist Grosshans-Untergruppe von G'.

(ii) H ist Grosshans-Untergruppe von G.

(1.5) Durch den Invariantensatz von Grosshans ist also das Problem, die Grosshans-Untergruppen einer reduktiven Gruppe zu bestimmen, zu einem zentralen Problem der Invariantentheorie geworden. Das Korollar reduziert diese Aufgabe auf die Bestimmung der Grosshans-Untergruppen von $\mathbb{GL}_n$.

Sei V der $\mathbb{GL}_n$-Modul $k^n \oplus \ldots \oplus k^n$ (n Summanden) mit der natürlichen $\mathbb{GL}_n$-Operation; der Koordinatenring von V ist der Polynomring $k[V] = k[X_{ij} \mid 1 \leqq i, j \leqq n]$. Sei $D = \det(X_{ij}) \in k[V]$. Dann ist $\mathbb{GL}_n \subseteq V$ auf natürliche Weise eingebettet mit $k[\mathbb{GL}_n] = k[V][1/D]$.

Sei nun H eine Untergruppe von $\mathbb{SL}_n$; wir betrachten jetzt die Operation von H auf $\mathbb{GL}_n$ durch *Links*-Translation. Dann ist $D \in k[V]^H$ und $k[\mathbb{GL}_n]^H = k[V]^H[1/D]$. Dieses Ergebnis kann man so ausnützen:

Sei $G \subseteq \mathbb{GL}_n$ eine reduktive Gruppe und H eine abgeschlossene Untergruppe von G mit $H^0 \subseteq \mathbb{SL}_n$. Es sei $k[V]^H$ endlich erzeugt. Dann ist $k[X]^H$ für jede affine G-Varietät X endlich erzeugt.

(1.6) *Beispiele für Grosshans-Untergruppen.* Sei G eine affine algebraische Gruppe.

1. (Hadžiev) Die maximalen unipotenten Untergruppen. Die Reduktion auf den Fall „G zusammenhängend halbeinfach" ist dabei trivial, weil das unipotente Radikal in jeder maximalen unipotenten Untergruppe enthalten ist; für die

Reduktion von „reduktiv" auf „halbeinfach" wendet man das Korollar in (1.4) an. Verschiedene Beweise für Charakteristik 0 finden sich in [8], [5], [9] und [15]. Der Beweis von Grosshans funktioniert bei beliebiger Charakteristik.

2. (Hochschild/Mostow [9]) Die unipotenten Radikale der parabolischen Untergruppen in Charakteristik 0. (Im Beweis wird die lineare Reduktivität entscheidend benützt.)

3. Sei X eine faktorielle (oder auch nur fast-faktorielle) affine G-Varietät. Dann gibt es eine dichte offene Menge U von X, so daß der Stabilisator G_x für alle $x \in U$ Grosshans-Untergruppe von G ist. Dies wurde im Spezialfall „G reduktiv, X ein G-Modul und char $k=0$" von Grosshans [6] bewiesen. Da ich keine sinnvolle Anwendung kenne, lasse ich den allgemeinen Beweis hier weg, obwohl er ziemlich kurz ist.

4. (Guillemonat [7]) Sei G halbeinfach in Charakteristik 0 und H eine abgeschlossene Untergruppe von G. Für jeden irreduziblen G-Modul V operiere $N_G(H)^0$ irreduzibel auf dem Raum V^H der H-invarianten Vektoren. Dann ist $k[G]^H$ endlich erzeugt, also die observable Hülle $\hat{H}$ Grosshans-Untergruppe.

(1.7) Nagatas Gegenbeispiel zum 14. Problem von Hilbert zeigt, daß nicht jede unipotente Untergruppe von $\mathbb{SL}_n$ Grosshans-Untergruppe ist (unipotente Untergruppen sind immer observabel). Aus 1. folgt für reduktives G, daß jede eindimensionale radizielle (siehe Bemerkung 4 in (1.1)) unipotente Untergruppe Grosshans-Untergruppe ist. Richtig könnte noch sein:

a) Jede eindimensionale unipotente Untergruppe ist Grosshans-Untergruppe. (Das ist in Charakteristik 0 nach dem Satz von Weitzenböck richtig [13].)

b) Jede radizielle unipotente Untergruppe ist Grosshans-Untergruppe. (Das ist selbst in Charakteristik 0 ein offenes Problem.)

Als Ergebnis von §2 und §3 wird in (3.7) herauskommen:

Theorem 1. *Sei U eine radizielle unipotente Untergruppe von $\mathbb{GL}_n$ (in beliebiger Charakteristik). Es gebe eine Borel-Untergruppe B und eine parabolische Untergruppe $P \supseteq B$ von $\mathbb{GL}_n$ mit $R_u(P) \supseteq U \supseteq R_u(P) \cap (B_u, B_u)$. Dann ist U Grosshans-Untergruppe von $\mathbb{GL}_n$.*

Korollar. *Für $n \leqq 4$ ist jede radizielle unipotente Untergruppe von $\mathbb{GL}_n$ Grosshans-Untergruppe. Für $n=5$ gibt es bis auf Konjugation höchstens 2 Ausnahmen.*

Bemerkung. Ist H eine beliebige radizielle Untergruppe von G und ist $R_u(H)$ Grosshans-Untergruppe von G, so ist

$$k[G]^H = (k[G]^{R_u(H)})^{H/R_u(H)}$$

endlich erzeugt, da $H/R_u(H)$ reduktiv und $k[G]^{R_u(H)}$ endlich erzeugt ist. Die unipotenten Gruppen spielen also bei der Bestimmung der Grosshans-Untergruppen auf jeden Fall die Hauptrolle.

§2. Radizielle unipotente Untergruppen von $\mathbb{GL}_n$

Sei k ein Ring (kommutativ mit 1). Die Gruppe $\mathbb{GL}_n(k)$ der k-wertigen Punkte von $\mathbb{GL}_n$ wird selbst kurz mit $\mathbb{GL}_n$ bezeichnet.

(2.1) Das Wurzelsystem Φ von $\mathbb{GL}_n$ (Typ A_{n-1}) läßt sich beschreiben als die Menge aller Paare (i,j) mit $1 \leq i,j \leq n$, $i \neq j$. Zur „Wurzel“ (i,j) gehört dann die Untergruppe von $\mathbb{GL}_n$, die aus folgenden Matrizen besteht:

$$\begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & \cdots & u & \\ & & & \ddots & \vdots & \\ & & & & 1 & \\ & & & & & \ddots \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix},$$

wobei $u \in k$ in Zeile i und Spalte j steht und alle übrigen Einträge 0 sind. Eine Teilmenge $\Psi \subseteq \Phi$ heißt unipotentes Untersystem, wenn

(i) $(i,j),\ (j,m) \in \Psi \Rightarrow (i,m) \in \Psi$ („abgeschlossen“),

(ii) $(i,j) \in \Psi \Rightarrow (j,i) \notin \Psi$ („unipotent“).

Ein unipotentes Untersystem Ψ definiert eine Untergruppe $U = U_\Psi$ von $\mathbb{GL}_n$, die genau aus folgenden Matrizen (u_{ij}) besteht:

$$u_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{für } i=j, \\ \text{beliebig} \in k & \text{für } (i,j) \in \Psi, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Diese Untergruppe wird wiedergegeben durch einen $n \times n$-Kasten, in dem an den Stellen $(i,j) \in \Psi$ Sterne, in der Diagonalen Einsen und sonst Nullen stehen. (Hier werden also radizielle Untergruppen bezüglich des fest gewählten maximalen Torus betrachtet, der aus den Diagonal-Matrizen besteht.)

Die symmetrische Gruppe $\mathbb{S}_n$ ist als Gruppe der Permutationsmatrizen in $\mathbb{GL}_n$ eingebettet und operiert als Weyl-Gruppe des Wurzelsystems Φ. Zu jedem unipotenten Untersystem Ψ gibt es eine Permutationsmatrix $s \in \mathbb{S}_n$, so daß $s U_\Psi s^{-1} = U_{s\Psi}$ nur aus oberen Dreiecksmatrizen besteht; äquivalent: für $(i,j) \in s\Psi$ ist $i<j$, oder: Ψ besteht nur aus positiven Wurzeln. Solche Gruppen sollen *kanonische unipotente Untergruppen* von $\mathbb{GL}_n$ heißen.

Die Konjugationsklassen von unipotenten Untersystemen Ψ von $\Phi = A_{n-1}$ unter der Weyl-Gruppe $\mathbb{S}_n$ entsprechen bijektiv den gerichteten Graphen mit n Knoten und der Eigenschaft: Es gibt keinen Zykel, der bis auf höchstens eine Kante in gleicher Richtung orientiert ist [11]; dieser Graph soll der Malischew-Graph des Untersystems oder der Untergruppe heißen. Ein Beispiel für A_3:

$$\bullet \qquad \bullet \longrightarrow \bullet \longrightarrow \bullet$$

Man erhält einen beliebigen Vertreter Ψ dieser Konjugationsklasse durch folgendes Verfahren:

1. Die Zahlen $1, \ldots, n$ werden auf die Knoten des Graphen verteilt.
2. $(i,j) \in \Psi \Leftrightarrow$ Es gibt einen Weg von i nach j.

Numeriert man die vier Knoten im obigen Beispiel von links nach rechts mit 1 bis 4, so besteht Ψ aus (2,3), (2,4) und (3,4) und ergibt die Untergruppe

$$\boxed{\begin{matrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ & 1 & * & * \\ & & 1 & * \\ & & & 1 \end{matrix}}\,.$$

(2.2) Sei nun $V = V_q$ die direkte Summe von q Exemplaren k^n. Dann operiert $\mathbb{GL}_n$ kanonisch auf V. Der Koordinatenring $k[V]$ von V ist der Polynomring $k[X]$, wobei X die Menge der Unbestimmten X_{ij}, $1 \leqq i \leqq n$, $1 \leqq j \leqq q$, ist. Die Wirkung von $g \in \mathbb{GL}_n$ auf X_{ij} erhält man, indem man im Matrizen-Produkt

$$g^{-1} \cdot X = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} X_{11} & \dots & X_{1q} \\ \vdots & & \vdots \\ X_{n1} & \dots & X_{nq} \end{pmatrix}$$

den Eintrag in Zeile i und Spalte j nimmt.

Sei $U = U_\Psi$ eine kanonische unipotente Untergruppe von $\mathbb{GL}_n$. Dann wird die Wirkung von $u \in U$, $u^{-1} = (u_{ij})$, so beschrieben:

$$u^{-1} \cdot X_{ij} = X_{ij} + \sum_{(i,l) \in \Psi} u_{il} X_{lj}.$$

Insbesondere ist die Unbestimmte X_{ij} genau dann U-invariant, wenn $(i,l) \notin \Psi$ für alle l. Allgemeiner ist die Unterdeterminante aus den Zeilen $i_1, \dots, i_m$ und den Spalten $j_1, \dots, j_m$ der Matrix (X_{ij}) genau dann invariant, wenn die Zeilenindizes die folgende Bedingung erfüllen:

(I_Ψ) Ist $(i_r, l) \in \Psi$, so tritt l unter den Zeilenindizes $i_1, \dots, i_m$ auf.

Damit läßt sich das Ziel dieser Arbeit präzisieren: für möglichst viele kanonische unipotente Untergruppen U von $\mathbb{GL}_n$ zu zeigen, daß die Invariantenalgebra $k[X]^U$ von den invarianten Unterdeterminanten erzeugt wird.

Dabei kann der Grundring k ganz beliebig sein. Falls allerdings k nicht ein unendlicher Integritätsring ist, muß man unter „Invarianten" „absolute Invarianten" verstehen, d.h. solche, die bei Grundring-Erweiterung $k \subseteq k'$ auch für die k'-wertigen Punkte des betrachteten Gruppenschemas invariant sind, siehe etwa [14]. Der Bequemlichkeit halber setze ich im folgenden k als unendlichen Integritätsring voraus.

(2.3) Das Problem kann in zweierlei Hinsicht reduziert werden.

a) Sei U eine kanonische unipotente Untergruppe von $\mathbb{GL}_n$. Sei $k[V_q]^U$ von den invarianten Unterdeterminanten erzeugt. Dann gilt dies auch für $k[V_r]^U$ mit $r < q$:

Die Einbettung $V_r \to V_q = V_r \oplus V_{q-r}$ induziert eine $\mathbb{GL}_n$-äquivariante Surjektion F: $k[V_q] \to k[V_r]$ („Nullsetzen von X_{ij} für $j > r$") die einen offensichtlichen $\mathbb{GL}_n$-äquivarianten Schnitt $k[V_r] \to k[V_q]$ hat. Daher ist $k[V_r]^U = F(k[V_q]^U)$; und das Bild einer invarianten Unterdeterminante ist sie selbst oder Null.

Daher nehme ich im folgenden o.B.d.A. $q \geqq n$ an.

b) Ist $s \in \mathbb{S}_n$ eine Permutationsmatrix, so ist $s \cdot X_{ij} = X_{si,j}$, d.h., bei den Unterdeterminanten werden die Zeilenindizes entsprechend permutiert. Es ist also keine Einschränkung, wenn ich nur kanonische Untergruppen betrachte, und auch diese können oft durch eine Permutation noch in eine besonders geschickte Form gebracht werden.

(2.4) Ich formuliere nun zunächst einen Satz in einer etwas anderen Situation, auf die aber später Bezug genommen wird.

Satz. *Sei R ein Integritätsring der Charakteristik $p \geqq 0$ und k ein unendlicher Unterring von R. Die additive Gruppe $U := k^m$ operiere auf dem Polynomring $A = R[Y] = R[Y_1, \ldots, Y_m]$ durch*

$$u \cdot Y_s = \sum_{r=1}^{m} u_r t_{rs} + Y_s \qquad (s = 1, \ldots, m)$$

für $u = (u_1, \ldots, u_m) \in U$, wobei $T = (t_{rs})$ eine $m \times m$-Matrix mit Koeffizienten in R und $\det T \neq 0$ *ist. Dann ist $A^U = R$.*

Wenn dieser Satz angewendet wird, wird sogar $T \in \mathbb{GL}_m(R)$ sein. Dann kann man wie in [2; S. 339] schließen: $X = \operatorname{Spec} A$ ist U-äquivariant isomorph zu einem Produkt $U \times_S W$ mit $S = \operatorname{Spec} k$ und $W = \operatorname{Spec} R$, wo U nur auf dem linken Faktor durch Linkstranslation operiert. Daraus folgt $A^U = R$. Den Satz in der obigen Form kann man aber auch ganz elementar durch hinreichend häufigen Koeffizientenvergleich beweisen.

(2.5) Operiere jetzt $\mathbb{GL}_n$ auf dem Polynomring $k[X] = k[X_{ij} \mid 1 \leqq i \leqq n,\ 1 \leqq j \leqq q]$ mit $n \leqq q$ wie in (2.2). Die Unterdeterminante aus den Zeilen $i_1, \ldots, i_m$ und den Spalten $j_1, \ldots, j_m$ der Matrix (X_{ij}) wird als $(i_1 \ldots i_m \mid j_1 \ldots j_m)$ geschrieben; das ist der einfachste Fall eines Bitableaus [4], [3], [2].

Sei $U = U_\Psi$ eine kanonische unipotente Untergruppe von $\mathbb{GL}_n$, beschrieben durch einen $n \times n$-Kasten wie in (2.1). Sei i ein Zeilen-Index, und seien $j_{i1}, \ldots, j_{im_i}$ die Spalten, in denen in der i-ten Zeile ein Stern steht; also $(i,j) \in \Psi \Leftrightarrow j \in \{j_{i1}, \ldots, j_{im_i}\}$. Es ist $m_i \leqq n - i$, und ich kann $i < j_{i1} < \ldots < j_{im_i}$ annehmen. Für $i = 1, \ldots, n-1$ sei d_i die Unterdeterminante $(j_{i1} \ldots j_{im_i} \mid j_{i1} \ldots j_{im_i})$; dabei soll eine „leere" Unterdeterminante als 1 interpretiert werden. Das Produkt $e = d_1 \cdot \ldots \cdot d_{n-1}$ heißt der *kritische Nenner für U.*

Lemma. *Der kritische Nenner e ist U-invariant.*

Beweis. Zu zeigen: jedes d_i erfüllt die Bedingung (I_Ψ) aus (2.2). Das bedeutet: Ist $(j_{ir}, l) \in \Psi$, so tritt l unter den Zeilen-Indizes $j_{i1}, \ldots, j_{im_i}$ auf. Diese Aussage folgt aber direkt aus der Abgeschlossenheit des Wurzelsystems Ψ, denn $(i,l) \in \Psi$. QED

(2.6) **Satz.** *Sei $U = U_\Psi$ eine kanonische unipotente Untergruppe von $\mathbb{GL}_n$, ferner R die von den U-invarianten Unterdeterminanten erzeugte k-Algebra und $e \in R$ der kritische Nenner für U. Dann gilt:*

(i) $k[X][1/e] = R[1/e][X_{ij} \mid (i,j) \in \Psi]$.
(ii) $k[X][1/e]^U = R[1/e]$.

Beweis. Induktion über $r = \max\{i \mid (i,j) \in \Psi$ für ein $j\}$; das ist der größtmögliche Index einer Zeile, in der im zu U gehörigen $n \times n$-Kasten noch ein Stern steht. Sei U' die Untergruppe, die aus U entsteht, indem man die Sterne in der r-ten Zeile wegläßt. Dann ist U' Normalteiler von U und hat den kritischen Nenner $e' = d_1 \dots d_{r-1}$ mit den Bezeichnungen aus (2.5). Insbesondere ist $e = e' \cdot d_r$. Ich schreibe einfach $d_r = d = (j_1 \dots j_m \mid j_1 \dots j_m)$.

Sei R' die von den U'-invarianten Unterdeterminanten erzeugte k-Algebra, insbesondere $R' = R[X_{r1}, \dots, X_{rq}]$. Ich will zeigen: $R'[1/d] = R[1/d][X_{rj_1}, \dots, X_{rj_m}]$.

Sei $j \neq j_1, \dots, j_m$. Dann liegt die Unterdeterminante $(rj_1 \dots j_m \mid jj_1 \dots j_m)$ in R. Ihre Entwicklung nach der ersten Zeile hat die Form

$$X_{rj} \cdot d - X_{rj_1} \cdot d'_1 + \dots \pm X_{rj_m} \cdot d'_m$$

mit $d'_1, \dots, d'_m = (j_1 \dots j_m \mid \dots) \in R$. Also ist $X_{rj} \in R[1/d][X_{rj_1}, \dots, X_{rj_m}]$, und (i) folgt hieraus.

Zum Beweis von (ii) wende ich (2.4) mit $R[1/d]$ für R an: Es ist $U/U' \cong k^m$; die Operation von $u = (u_{ij}) \in U$ auf X_{rj_l} sieht so aus:

$$X_{rj_l} \mapsto X_{rj_l} - u_{rj_1} X_{j_1 j_l} - \dots - u_{rj_m} X_{j_m j_l}.$$

Die Determinante, die für die Anwendung von (2.4) nicht verschwinden darf, ist also gerade $\pm d$. Ferner sind $X_{rj_1}, \dots, X_{rj_m}$ über $R[1/d]$ algebraisch unabhängig; es sind nämlich sogar alle X_{ij} mit $(i,j) \in \Psi$ über $R[1/e]$ algebraisch unabhängig wegen (i) und weil $R \subseteq k[X]^U$ höchstens den Transzendenzgrad $nq - |\Psi|$ über k hat. Also folgt $R'[1/d]^{U/U'} = R[1/d]$.

Nach Induktions-Annahme ist $k[X][1/e']^{U'} = R'[1/e']$. Zusammen ergibt sich

$$k[X][1/e]^U = (k[X][1/e]^{U'})^{U/U'} = R'[1/e]^{U/U'} = R[1/e]. \quad \text{QED}$$

Bemerkung. Falls $k[X]^{U'} = R'$ schon bekannt ist, gilt natürlich sogar $k[X][1/d]^U = R[1/d]$.

§ 3. Die Invarianten von kanonischen unipotenten Untergruppen

Sei wieder k ein unendlicher Integritätsring. Sei $U = U_\Psi$ eine kanonische unipotente Untergruppe von $\mathbb{GL}_n = \mathbb{GL}_n(k)$. Für die natürliche Aktion von $\mathbb{GL}_n$ auf dem Polynomring $k[X] = k[X_{ij} \mid 1 \leqq i \leqq n,\ 1 \leqq j \leqq q]$ mit $q \geqq n$ gilt dann nach (2.6), daß

$$k[X][1/e]^U = R[1/e],$$

wobei R die von den invarianten Unterdeterminanten der Matrix (X_{ij}) erzeugte k-Algebra und e der kritische Nenner für U ist.

Das Ziel dieses Paragraphen ist zu zeigen: $k[X]^U = R$ für möglichst viele Gruppen U. Allerdings gelingt mir das nicht im allgemeinen Fall. Die angemessene Methode ist die Verwendung von Standard-Bitableaux.

(3.1) Eine Unterdeterminante wird wie in (2.5) durch die Zeile $(i_1 \dots i_r | j_1 \dots j_r)$ mit $1 \leqq i_1 < \dots < i_r \leqq n$ und $1 \leqq j_1 < \dots < j_r \leqq q$ wiedergegeben. Man kann auch gleiche Indizes zulassen, dann ist die Unterdeterminante natürlich Null. Ein Produkt von m Unterdeterminanten wird einfach durch Untereinanderschreiben der entsprechenden Zeilen ausgedrückt:

$$\left(\begin{array}{c|c} i_{11} \dots i_{1n_1} & j_{11} \dots j_{1n_1} \\ \vdots & \vdots \\ i_{m1} \dots i_{mn_m} & j_{m1} \dots j_{mn_m} \end{array}\right),$$

wobei man die Faktoren so ordnet, daß $n_1 \geqq \dots \geqq n_m$ ist. Ein solches Zahlenschema (und auch das dadurch beschriebene Produkt von Unterdeterminanten) heißt *Bitableau;* dieses ist also ein homogenes Polynom vom Grad $n_1 + \dots + n_m$ in $k[X]$. Die Folge $(n_1, \dots, n_m, 0, \dots)$ heißt *Form* des Bitableaus. Die Formen werden lexikographisch geordnet; diese Ordnung wird durch das Wort „breiter" ausgedrückt. Der *Inhalt* des Bitableaus ist das $(n+q)$-Tupel $(a_1, \dots, a_n; b_1, \dots, b_q)$, wobei a_i (bzw. b_i) angibt, wie oft die Zahl i in der linken (bzw. rechten) Hälfte, also als Zeilen- (bzw. Spalten-)Index auftritt. Ein Bitableau heißt *Standard*, wenn außerdem jede Spalte von oben nach unten monoton wächst: $i_{11} \leqq \dots \leqq i_{m1}$ usw.

Die Bitableaux liefern nicht nur eine bequeme Schreibweise, sondern führen auch zur *Begradigungsformel* von Doubilet/Rota/Stein:

Die Standard-Bitableaux bilden eine Basis des k-Moduls $k[X]$. *Genauer: Sei T ein Bitableau der Form* $(n_1, \dots, n_m, 0, \dots)$. *Dann ist T eine k-Linearkombination von Standard-Bitableaux vom selben Inhalt und*

a) *von breiterer Form mit höchstens gleich vielen Zeilen oder*

b) *von gleicher Form wie T, wobei nur folgende auftreten:*

b_1) *ein ganz bestimmtes, und zwar mit Koeffizienten* 1; *es soll* das erste *heißen und wird so gebildet: Jede Spalte von T wird in sich monoton wachsend geordnet.*

b_2) *solche, die bezüglich der Spaltenfolge lexikographisch später als das erste kommen.*

Dabei ist die Spaltenfolge des obigen Muster-Exemplars:

$$i_{11}, \dots, i_{m1}, i_{12}, \dots, i_{mn_m}, j_{11}, \dots, j_{mn_m}.$$

Falls außerdem die linke Seite von T schon dem Standard entspricht, so haben alle in b) auftretenden Standard-Bitableaux dieselbe linke Seite wie T.

Der Beweis steht in [3]; die Aussagen, die dort nicht explizit zu finden sind, folgen sofort aus dem Algorithmus zur Berechnung der Koeffizienten mit Hilfe der Capelli-Operatoren [3; S. 78/79].

(3.2) Sei $U = U_\Psi$ eine kanonische unipotente Untergruppe von $\mathbb{GL}_n$. Ein Bitableau T heißt dann *vom Typ* (I_Ψ), wenn jede seiner Zeilen die Bedingung (I_Ψ) aus

(2.2) erfüllt; anders ausgedrückt, wenn alle Unterdeterminanten, die als Faktoren von T auftreten, U-invariant sind. Insbesondere ist dann $T \in R$, wobei R wie üblich die k-Algebra ist, die von den U-invarianten Unterdeterminanten erzeugt wird.

Ich betrachte die folgenden beiden Eigenschaften:

(A) „Der Typ (I_Ψ) überlebt die Begradigung"; d.h.: Ist T ein Bitableau vom Typ (I_Ψ), so sind auch alle Standard-Bitableaux, die in der Basis-Darstellung von T auf Grund der Begradigungsformel auftreten, vom Typ (I_Ψ).

(B_d) (wobei $d \in R$ eine der Unterdeterminanten ist, die den kritischen Nenner für U bilden) „d ist kürzbar"; d.h., für $f \in k[X]$ mit $df \in R$ folgt $f \in R$.

Aus (A) folgt direkt, daß R als k-Modul von den in R gelegenen Standard-Bitableaux erzeugt wird; also ist R ein freier k-Modul mit den Standard-Bitableaux vom Typ (I_Ψ) als Basis. Da die Begradigung ein sukzessiver Prozeß ist, bei dem jeder Einzelschritt aus der Begradigung eines „Teil-Bitableaus" aus zwei Zeilen besteht, braucht (A) nur für zweizeilige Bitableaux nachgewiesen zu werden.

Ist (B_d) für alle auftretenden Unterdeterminanten d erfüllt, so ist $k[X]^U = R$. Ist nämlich $f \in k[X]^U$, so $f \in R[1/e]$ mit dem kritischen Nenner e, also $e^s f \in R$ für eine natürliche Zahl s. Man kann dann sukzessive einen Faktor nach dem anderen kürzen und erhält $f \in R$. Der Beweis von (B_d) ist also das Ziel aller durchzuführenden Überlegungen.

(3.3) Ich betrachte noch eine weitere Eigenschaft:

(C_d) Sei T ein Standard-Bitableau und S das erste Standard-Bitableau bei der Begradigung von $T \cdot d$. Sei S vom Typ (I_Ψ). Dann ist auch T vom Typ (I_Ψ).

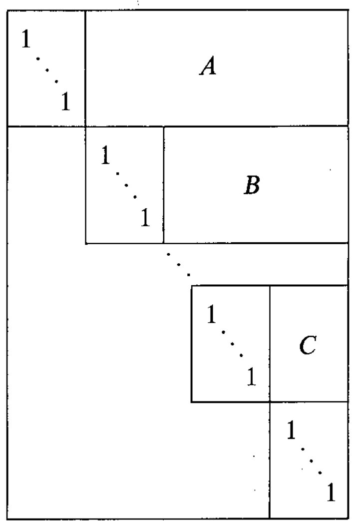
Lemma. *Gelten* (A) *und* (C_d), *so auch* (B_d).

Beweis. Sei $f \in R$ als k-Linearkombination von Standard-Bitableaux ausgedrückt: $f = c_1 T_1 + \ldots + c_r T_r$, wobei alle $c_i \neq 0$, und sei $df \in R$. Zu zeigen ist: Alle T_i sind vom Typ (I_Ψ). Daher kann ich o.B.d.A. annehmen, daß alle T_i denselben Inhalt haben, denn wegen (A) ist R wie $k[X]$ durch den Inhalt graduiert. Die Bitableaux von festem Inhalt seien zunächst nach der Form und bei gleicher Form nach der Spaltenfolge lexikographisch geordnet. Die Reihenfolge $T_1, \ldots, T_r$ entspreche dieser Ordnung. Sei S_1 das Standard-Bitableau, das bei Begradigung von $T_1 \cdot d$ als erstes auftritt. Alle übrigen T_i, $i \geqq 2$, haben entweder eine breitere Form oder entstehen aus T_1 bei gleicher Form durch Permutation der Spaltenfolge, wobei mindestens eine Spalte im Inhalt geändert wird. Daher treten bei der Begradigung von $T_i \cdot d$ mit $i \geqq 2$ nur Standard-Bitableaux auf, die echt nach S_1 kommen. In der Basis-Darstellung von df tritt also der Summand $c_1 S_1$ auf. Wegen (A) muß S_1 vom Typ (I_Ψ) sein, wegen (C_d) auch T_1.

Ich schließe nun genauso für $f - c_1 T_1$ statt f usw. und erhalte schließlich $f \in R$. QED

Ich will die Untergruppe U *gut* nennen, wenn sie die Eigenschaften (A) und (C_d) für alle Faktoren d des kritischen Nenners hat. Insbesondere ist dann $k[X]^U = R$ und erst recht (wenn k algebraisch abgeschlossener Körper ist) U Grosshans-Untergruppe von $\mathbb{GL}_n$.

(3.4) Ich betrachte jetzt eine kanonische unipotente Untergruppe $U=U_{\Psi}$ von $\mathbb{GL}_n$, deren zugehöriger Kasten die folgende Gestalt hat:



wobei jeder der Blöcke $A, B, \ldots, C$ eine der beiden Formen

$$\begin{array}{|ccc|}\hline * & \cdots & * \\ \vdots & & \vdots \\ * & \cdots & * \\ \hline \end{array}\;,\quad \begin{array}{|ccc|}\hline * & \cdots & * \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & * \cdots & * \\ \hline \end{array}$$

hat (darf auch einzeilig sein). Insbesondere sind mit dieser Voraussetzung die unipotenten Radikale der parabolischen Standard-Untergruppen bis auf Konjugation erfaßt.

Lemma. *Hat U die in der Vorbemerkung genannte Gestalt, so ist* (A) *erfüllt.*

Beweis. Ich habe ein zweizeiliges Bitableau vom Typ (I_{Ψ}) zu betrachten. Seien i_1 bzw. j_1 die ersten Einträge dieser beiden Zeilen, o.B.d.A. $i_1 \leqq j_1$ (dann kann allerdings die zweite Zeile die längere sein). Die Indizes der Spalten, in denen im Kasten die Sterne stehen, seien $l+1, \ldots, n$ für i_1 und $m+1, \ldots, n$ für j_1. Das Bitableau sieht also so aus:

$$\left(\begin{array}{l|l} i_1 \ldots i_r \;\; l+1 \ldots n & \ldots \\ j_1 \ldots j_s \;\; m+1 \ldots n & \ldots \end{array}\right)$$

und muß nun begradigt werden.

Falls $l=m$, bleiben die Indizes $l+1, \ldots, n$ bei jedem auftretenden Standard-Bitableau auf die beiden Zeilen verteilt; der Typ (I_{Ψ}) überlebt also die Begradigung. Falls $j_1 \geqq l+1$, ist die linke Seite schon Standard, tritt also bei allen vorkommenden Bitableaux derselben Form unverändert auf. Können auch Standard-Bitableaux von breiterer Form vorkommen? Nein, weil alle Indizes $j_1, \ldots, n$ der zweiten Zeile auch in der ersten Zeile auftreten; eine breitere Form würde also zwei gleiche Indizes in einer Zeile erzwingen.

Es bleibt der Fall $j_1 = l$, $m \geqq l+1$. Dann ist die linke Seite unseres Bitableaus ebenfalls schon Standard; ein auftretendes Bitableau von breiterer Form kann höchstens folgende Gestalt haben:

$$\left(\begin{matrix} i_1 \ldots i_r \; l \; l+1 \ldots n \\ m+1 \ldots n \end{matrix} \middle| \begin{matrix} \ldots \\ \ldots \end{matrix}\right)$$

ist also auch vom Typ (I_Ψ). QED

(3.5) Ein Beispiel, wo der Typ (I_Ψ) bei Begradigung nicht stabil ist, ist

$$\boxed{\begin{matrix} 1 & 0 & 0 & * \\ & 1 & 0 & 0 \\ & & 1 & 0 \\ & & & 1 \end{matrix}}\,.$$

Ein Bitableau vom Typ (I_Ψ) ist nämlich

$$\left(\begin{matrix}14\\23\end{matrix}\middle|\begin{matrix}12\\12\end{matrix}\right) = \left(\begin{matrix}13\\24\end{matrix}\middle|\begin{matrix}12\\12\end{matrix}\right) - \left(\begin{matrix}12\\34\end{matrix}\middle|\begin{matrix}12\\12\end{matrix}\right).$$

Insbesondere hat der Ring R als k-Modul keine Basis aus Standard-Bitableaux.

(3.6) Habe U wieder die in (3.4) betrachtete Gestalt. Der letzte Block C habe die Breite $n-r$. Also enthält C Zeilen mit $n-r$ oder $n-r-1$ Sternen. Der „Beitrag“ zum kritischen Nenner, den C erzwingt, ist also

a) $d = (r+1 \ldots n | r+1 \ldots n)$, wenn C eine Zeile mit $n-r$ Sternen enthält,

b) $d = (r+2 \ldots n | r+2 \ldots n)$, wenn C eine Zeile mit $n-r-1$ Sternen enthält (natürlich ist beides gleichzeitig möglich).

Lemma. *Unter den genannten Voraussetzungen ist* (C_d) *in beiden Fällen* a) *und* b) *erfüllt.*

Beweis. Das Standard-Bitableau T habe die Form

$$T = \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix},$$

wobei A aus den Zeilen der Breite $\geqq n-r$ und B aus den übrigen Zeilen besteht. Dann ist

$$dT = \begin{pmatrix} A \\ d \\ B \end{pmatrix}.$$

Falls die erste Zahl l in der ersten Zeile von B mindestens $r+1$ ist, ist die linke Seite von dT schon Standard. Also sind A und B vom Typ (I_Ψ), also auch T.

Ist dagegen $l \leqq r$, so enthält das erste Standard-Bitableau S, das bei Begradigung von dT auftritt, statt d die Zeile

$$(l \ldots \text{irgendetwas} \ldots n | \ldots)$$

der Breite $n-r$. Hätte S den Typ (I_Ψ), so könnte das höchstens für $l=r$ vorkommen (und auch das nur, wenn a) und b) gleichzeitig erfüllt sind); die erste Zeile von B, die ja mit l beginnt, hätte dann aber auch die Breite $n-r$ und würde gar nicht zu B gehören. Hat also S den Typ (I_Ψ), so muß $l \geqq r+1$ und T vom Typ (I_Ψ) sein.

b) Jetzt wird A aus den Zeilen der Breite $\geqq n-r-1$ und B aus dem Rest gebildet. Wie bei a) sieht man, daß die erste Zahl l der ersten Zeile von B mindestens $r+2$ sein muß, wenn S vom Typ (I_Ψ) sein soll. Daher ist dann auch T vom Typ (I_Ψ). QED

(3.7) Die Entwicklungen dieses Paragraphen lassen sich nun so zusammenfassen:

Theorem 2. *Sei $B \subseteq \mathbb{GL}_n$ die Gruppe der oberen Dreiecks-Matrizen und $P \subseteq \mathbb{GL}_n$ eine parabolische Standard-Untergruppe mit $B \subseteq P$. Sei $U \subseteq \mathbb{GL}_n$ eine kanonische unipotente Untergruppe mit $R_u(P) \supseteq U \supseteq R_u(P) \cap (B_u, B_u)$ und R die k-Algebra, die in $k[X] = k[X_{ij} | 1 \leqq i \leqq n,\ 1 \leqq j \leqq q]$ von den U-invarianten Unterdeterminanten der Matrix (X_{ij}) erzeugt wird. Dann ist*

$$k[X]^U = R.$$

Beweis. Wegen (2.3) kann ich o.B.d.A. $q \geqq n$ annehmen. Die Eigenschaft (A) aus (3.2) ist erfüllt, weil U die in (3.4) genannte Gestalt hat. Mit Induktion über die Anzahl der Blöcke $A, B, \ldots, C$ in (3.4) erreiche ich wegen der Bemerkung in (2.6), daß ich (C_d) aus (3.3) nur für die höchstens zwei Unterdeterminanten d aus (3.6) beweisen muß, und das habe ich dort schon getan. QED

Damit ist auch das Theorem 1 in (1.7) bewiesen.

Bemerkungen. 1.) Es ist klar, daß man mit Hilfe der Standard-Bitableaux in Theorem 2 auch die Relationen zwischen den Erzeugenden der Invarianten-Algebra finden könnte. Da es mir hier aber nur auf die endliche Erzeugbarkeit ankommt, will ich das nicht durchführen.

2.) Wie man am Beweis von (3.4) und (3.6) sieht, reicht auch die folgende Eigenschaft des $n \times n$-Kastens dafür aus, daß U gut ist:

a) In jeder Zeile steht rechts von der Eins entweder höchstens eine Null oder kein Stern.

b) Unter einer Null steht niemals wieder ein Stern.

Ebenfalls werden gute Untergruppen definiert durch die $n \times n$-Kästen der folgenden Gestalten:

(i) $$\boxed{\begin{array}{ccccccccc} 1 & * & \cdots & & & & & \cdots & * \\ & \ddots & & & & & & & \vdots \\ & & 1 & * & \cdots & & & \cdots & * \\ & & & 1 & * & \cdots & * & 0 \cdots & 0 \\ & & & & 1 & & & & \\ & & & & & \ddots & & & \\ & & & & & & & & 1 \end{array}}$$ (vgl. [1; S. 149]),

(ii) z.B. $$\boxed{\begin{array}{ccccc} 1 & 0 & * & * & * \\ & 1 & * & 0 & 0 \\ & & 1 & 0 & 0 \\ & & & 1 & 0 \\ & & & & 1 \end{array}}$$

§ 4. Beispiele bei kleiner Dimension

In diesem Paragraphen soll noch untersucht werden, wie weit die Kriterien aus § 3 für $\mathbb{GL}_n$ mit $n \leqq 5$ tragen. Die Eigenschaft „Grosshans-Untergruppe" soll dabei immer nur für den Fall als ausgesprochen gelten, daß k wie in § 1 ein algebraisch abgeschlossener Körper ist.

(4.1) Für $n=2$ ist die maximale unipotente Untergruppe eindimensional. Also gelten die Aussagen der Theoreme 1 und 2 für alle unipotenten Untergruppen.

Für $n=3$ gibt es vier Konjugationsklassen von kanonischen unipotenten Untergruppen; drei davon sind unipotente Radikale von parabolischen Standard-Untergruppen. Die vierte ist maximal unipotent in einer radiziellen Untergruppe vom Typ $\mathbb{GL}_2$, also auf jeden Fall Grosshans-Untergruppe. Es gilt aber auch die konkrete Aussage über den Invariantenring in Theorem 2 auf Grund des folgenden Lemmas (4.2).

In $\mathbb{GL}_4$ gibt es 15 Konjugationsklassen von nicht-trivialen kanonischen unipotenten Untergruppen, wie man mit Hilfe der Malischew-Graphen leicht zählt. Davon sind $7\,(=2^3-1)$ unipotente Radikale von parabolischen Standard-Untergruppen und 5 weitere dasselbe in $\mathbb{GL}_2 \times \mathbb{GL}_2$, $\mathbb{GL}_3$ oder $\mathbb{GL}_2$, wofür wieder das Lemma (4.2) zuständig ist. Die drei übrigen fallen auch noch unter die Voraussetzung von Theorem 2.

(4.2) Ich betrachte in $\mathbb{GL}_n$ eine Untergruppe vom Typ $H=\mathbb{GL}_{m_1} \times \ldots \times \mathbb{GL}_{m_r}$ mit $m_1+\ldots+m_r \leqq n$, deren Elemente gerade aus Kästchen entsprechender Größe bestehen, die entlang der Diagonalen angeordnet sind. Eine kanonische unipotente Untergruppe U von $\mathbb{GL}_n$ mit $U \subseteq H$ ist ein direktes Produkt $U_1 \times \ldots \times U_r$ von kanonischen unipotenten Untergruppen $U_i \subseteq \mathbb{GL}_{n_i}$. Wenn jedes U_i gut in $\mathbb{GL}_{n_i}$ ist, heißt U auch gute Untergruppe von H.

Lemma. *Sei U eine gute Untergruppe von H. Dann ist U auch in $\mathbb{GL}_n$ gute Untergruppe.*

Beweis. Der entscheidende Fall des Beweises ist $H = \mathbb{GL}_m \times \mathbb{GL}_{n-m}$, wobei $\mathbb{GL}_m$ gerade die „linke obere Ecke" von $\mathbb{GL}_n$ einnimmt. Der Polynomring $k[X] = k[X_{ij} | 1 \leqq i \leqq n, 1 \leqq j \leqq q]$ mit o.B.d.A. $n \leqq q$ wird zerlegt in $k[X'] \otimes_k k[X'']$, wobei X' aus den Unbestimmten X_{ij} mit $i \leqq m$ und X'' aus den übrigen besteht. Dann operiert $\mathbb{GL}_m$ auf $k[X'']$ und $\mathbb{GL}_{n-m}$ auf $k[X']$ trivial. Da $k[X']^{U_1}$ ein freier k-Modul ist, ist

$$\begin{aligned} k[X]^U &= (k[X'] \otimes k[X''])^{U_1 \times U_2} = (k[X']^{U_1} \otimes k[X''])^{U_2} \\ &= k[X']^{U_1} \otimes k[X'']^{U_2}, \end{aligned}$$

und das ist genau die k-Algebra, die von den U-invarianten Unterdeterminanten in $k[X]$ erzeugt wird. QED

(4.3) Wie sieht es nun bei $\mathbb{GL}_5$ aus? Ich brauche nur die kanonischen unipotenten Untergruppen zu betrachten, die in keiner echten Untergruppe $\mathbb{GL}_m \times \mathbb{GL}_{5-m}$ wie in (4.2) liegen. Diesen entsprechen die zusammenhängenden Malischew-Graphen mit 5 Knoten. Meine Zählung ergibt 44 Möglichkeiten. Davon fallen 30 unter die Voraussetzung von Theorem 2. Bei weiteren 6 kann ich mit der Bemerkung 2 in (3.7) zeigen, daß sie gut sind. Weitere 6 sind wenigstens Grosshans-Untergruppen nach dem Kriterium:

Lemma. *Sei k algebraisch abgeschlossen, G reduktiv, L eine reduktive Untergruppe und U' eine unipotente Grosshans-Untergruppe von G mit $L \subseteq N_G(U')$. Sei U'' Grosshans-Untergruppe von L. Dann ist $U'U''$ Grosshans-Untergruppe von G.*

Beweis. Nach (1.4), denn L operiert auf $k[G]^{U'}$. QED

Damit ist auch das Korollar in (1.7) bewiesen; die beiden übrigen Fälle sind

$$\boxed{\begin{matrix} 1 & 0 & * & * & 0 \\ & 1 & 0 & * & * \\ & & 1 & 0 & 0 \\ & & & 1 & 0 \\ & & & & 1 \end{matrix}}$$

und der daraus durch Spiegelung an der Nebendiagonalen entstehende Kasten.

Literatur

1. de Concini, C., Eisenbud, D., Procesi, C.: Young diagrams and determinantal varieties. Inventiones math. **56**, 129–165 (1980)
2. de Concini, C., Procesi, C.: A characteristic free approach to invariant theory. Advances Math. **21**, 330–354 (1976)
3. Désarménien, J., Kung, J.P.S., Rota, G.-C.: Invariant theory, Young bitableaux, and combinatorics. Advances Math. **27**, 63–92 (1978)

4. Doubilet, P., Rota, G.-C., Stein, J.: On the foundations of combinatorial theory: IX, Combinatorial methods in invariant theory. Studies Appl. Math. **53**, 185–216 (1974)
5. Grosshans, F.: Observable groups and Hilbert's fourteenth problem. Amer. J. Math. **95**, 229–253 (1973)
6. Grosshans, F.: Open sets of points with good stabilizers. Bull. Amer. Math. Soc. **80**, 518–521 (1974)
7. Guillemonat, A.: On finite generation of invariants for certain subalgebras of a semisimple Lie algebra. In: Non-Commutative Harmonic Analysis (Marseille-Luminy 1976), pp. 77–90. Lecture Notes in Mathematics **587**. Berlin-Heidelberg-New York: Springer 1977
8. Hadžiev, Dž.: Some questions in the theory of vector invariants. Math. USSR Sbornik **1**, 383–396 (1967); - Mat. Sbornik **72** (1967)
9. Hochschild, G., Mostow, G.D.: Unipotent groups in invariant theory. Proc. Nat. Acad. Sci. USA **70**, 646–648 (1973)
10. Humphreys, J.E.: Linear Algebraic groups. Graduate Texts in Mathematics **21**. New York-Heidelberg-Berlin: Springer 1975
11. Malyšev, F.M.: On closed subsets of roots and cohomology of regular subalgebras. Math. USSR Sbornik **33**, 125–135 (1977); - Mat. Sbornik **104** (1977)
12. Pommerening, K.: Observable radizielle Untergruppen von halbeinfachen algebraischen Gruppen. Math. Z. **165**, 243–250 (1979)
13. Seshadri, C.S.: On a theorem of Weitzenböck in invariant theory. J. Math. Kyoto Univ. **1**, 403–409 (1962)
14. Seshadri, C.S.: Geometric reductivity over arbitrary base. Advances Math. **26**, 225–274 (1977)
15. Vust, Th.: Sur la théorie des invariants des groupes classiques. Ann. Inst. Fourier Grenoble **26**, 1–31 (1976)

Eingegangen am 20. Juni 1980