

# Messung und Optimierung der Lichtpolarisation des A4-Compton- Rückstreupolarimeters

## Dissertation

zur Erlangung des Grades  
„Doktor der Naturwissenschaften“

am Fachbereich 08 – Physik, Mathematik und Informatik  
der Johannes Gutenberg-Universität in Mainz

von  
**Yoshio Imai**  
geboren in Bad Kreuznach

Mainz, den 14. 11. 2018

---

*Messung und Optimierung der Lichtpolarisation  
des A4-Compton-Rückstreupolarimeters*

© 2018

Yoshio Imai

c/o

A4-Kollaboration

Institut für Kernphysik,

Johannes Gutenberg-Universität, Mainz

Johann-Joachim-Becher-Weg 45

D-55128 Mainz

[imai@uni-mainz.de](mailto:imai@uni-mainz.de)

---

---

---

Datum der mündlichen Prüfung : **04. 06. 2019**

---

---

ETSI MVLTÀ OBSTARENT, PER INTERCESSIONEM SANCTI IVDÆ  
THADDÆI, APOSTOLI ET MARTYRIS, HOC OPVS PERFICI POTVIT.

---

*Aus datenschutzrechtlichen Gründen entfällt die Widmung in dieser  
Ausgabe.*





# Zusammenfassung

Das A4-Experiment am Teilchenbeschleuniger MAMI der Johannes Gutenberg-Universität Mainz macht sich die Paritätsverletzung in der elastischen Streuung polarisierter Elektronen an unpolarisierten Nukleonen zunutze, um den Beitrag von *strange*-Quarks zu den elektromagnetischen Vektorformfaktoren des Nukleons zu bestimmen und so zusammen mit den Ergebnissen ähnlicher Experimente an anderen Beschleunigern den Einfluß des „Quark-Sees“ auf die statischen Eigenschaften des Nukleons zu beleuchten. Die Meßdaten, die bei Strahlenergien zwischen 315 MeV und 1.5 GeV genommen wurden, können allerdings nur analysiert werden, wenn eine Absolutbestimmung der Strahlpolarisation vorliegt. Zu diesem Zweck wurde ein laserbasiertes Compton-Rückstreupolarimeter entworfen und aufgebaut, mit dem dieser Polarisationsgrad zerstörungsfrei, d. h. parallel zum Experimentierbetrieb und bei denselben Strahlbedingungen wie das Hauptexperiment gemessen werden kann. Ein wichtiger Parameter ist hierbei die Polarisation des Laserstrahls, deren Kenntnis wiederum unabdingbar für die Analyse der Polarimeter-Meßdaten ist.

Die hier vorgelegte Arbeit berichtet nun einerseits über die Weiterentwicklung des optischen Systems und seiner Steuerungs-Infrastruktur, andererseits über den Entwurf, die Konstruktion und die Inbetriebnahme eines neuen Meßgeräts zur Bestimmung der Laserpolarisation mitsamt des hierfür erforderlichen Datennahmesystems und der Methode zur Analyse der Meßdaten. Dieses Gerät erreicht eine statistische Meßgenauigkeit von 0.05 % bei einer systematischen Unsicherheit von weniger als 0.2 %, wobei Veränderungen des Polarisationsgrads zwischen dem Ort der Wechselwirkung mit dem Elektronenstrahl und dem Ort der Messung berücksichtigt werden. Die so gewonnenen Daten wurden mit Resultaten einer parallel angefertigten Dissertation kombiniert, um erstmals die mit dem hier beschriebenen Polarimeter während einer Strahlzeit des A4-Experiments gemessene Strahlpolarisation zu extrahieren. Diese konnte trotz Beschränkung auf eine Teilmenge der Daten mit einer statistischen Unsicherheit von 2.5 % und einer systematischen Unsicherheit von 0.4 % bestimmt werden, was eine deutliche Verbesserung gegenüber dem bisher mit anderen Methoden erzielten Wert von 4 % darstellt.

---

# Abstract

The A4 experiment at the Mainz Microtron accelerator facility of the Johannes Gutenberg University in Mainz, Germany, exploits the parity violation in the elastic scattering of polarized electrons off unpolarized nucleons to determine the strange quark contribution to the electromagnetic vector form factors of the nucleon. The objective is to combine these results with those of similar experiments elsewhere in order to shed light on the influence of the “quark sea” on the static properties of the nucleon. In order to analyze the data which were taken at beam energies between 315 MeV and 1.5 GeV, an absolute determination of the beam polarisation is necessary. For this purpose, a laser-based Compton backscattering polarimeter, which allows measurement of this polarization parallel to and at the same beam conditions as the main experiment, has been developed and installed in the beamline. One key parameter of this system is the light polarization which must be known in order to interpret the polarimeter data.

This work reports on further developments of the optical system and its control infrastructure as well as the design, construction and operation of a novel device for determining the laser polarization including the data acquisition system and analysis methods. Using this device, the polarization state can be measured with 0.05 % statistical uncertainty and less than 0.2 % systematic uncertainty, wherein changes to the polarization between the electron-photon interaction region and the position of the measuring device are accounted for. These measurements are combined with results from another dissertation in order to extract for the first time the beam polarization measured for the A4 experiment using the Compton polarimeter described here. Despite a limitation to only a subset of the available data, this polarization was determined with 2.5 % statistical uncertainty and 0.4 % systematic uncertainty, thereby improving on the previous value of 4 % achieved using different methods of polarimetry.

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Einleitung</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Ziel und Aufbau des A4-Experiments</b>	<b>5</b>
2.1	<i>Strangeness</i> und die Struktur des Nukleons . . . . .	5
2.2	Paritätsverletzende Elektronenstreuung . . . . .	7
2.2.1	Elastische Streuung am Nukleon . . . . .	8
2.2.2	Zugang zur <i>strangeness</i> : flavour-Zerlegung . . . . .	10
2.2.3	Die Rolle der schwachen Wechselwirkung . . . . .	12
2.2.4	Paritätsverletzende Asymmetrie . . . . .	14
2.2.5	Extraktion der <i>strangeness</i> . . . . .	16
2.3	Aufbau des A4-Experiments . . . . .	18
2.3.1	Polarisierte Quelle . . . . .	20
2.3.2	Wienfilter . . . . .	24
2.3.3	Beschleuniger . . . . .	25
2.3.4	Strahlmonitore und Stabilisierungssysteme . . . . .	28
2.3.5	Target, Kalorimeter und Luminosität . . . . .	32
2.3.6	Polarimetrie . . . . .	34
<b>3</b>	<b>Das <i>internal-cavity</i>-Polarimeter</b>	<b>37</b>
3.1	Compton-Rückstreupolarimetrie . . . . .	37
3.1.1	Kinematik . . . . .	38
3.1.2	Wirkungsquerschnitt und Analysierstärke . . . . .	42
3.1.3	Funktionsweise von Compton-Rückstreupolarimetern . . . . .	47
3.1.4	Bestimmung der Polarisation . . . . .	49
3.1.5	Messzeit . . . . .	53
3.1.6	Luminosität . . . . .	55
3.1.7	Designkonzepte zur Luminositätserhöhung . . . . .	58
3.2	Andere Methoden der Polarimetrie . . . . .	60
3.2.1	Mott-Polarimetrie . . . . .	60
3.2.2	Møller-Polarimetrie . . . . .	62
3.3	Aufbau des A4-Compton-Rückstreupolarimeters . . . . .	64
3.3.1	Strahlführung . . . . .	64
3.3.2	Optisches System . . . . .	67

3.3.3	Detektorsystem . . . . .	70
3.3.4	<i>Slow-Control</i> -System . . . . .	75
3.3.5	Betrieb des Polarimeters . . . . .	82
3.4	Vergleich mit anderen Compton-Rückstreupolarimetern . . . . .	92
3.4.1	JLab Hall A (HAPPEX) . . . . .	92
3.4.2	JLab Hall A (PREX) . . . . .	93
3.4.3	JLab Hall C . . . . .	94
3.4.4	Quantitativer Vergleich . . . . .	95
<b>4</b>	<b>Messung der Laserpolarisation</b>	<b>97</b>
4.1	Die Beschreibung polarisierten Lichts . . . . .	97
4.1.1	Grundlagen und Konventionen . . . . .	98
4.1.2	Polarisationsellipse und Helizität . . . . .	99
4.1.3	Unpolarisiertes Licht . . . . .	101
4.1.4	Beschreibung optischer Systeme . . . . .	103
4.2	Polarisationsoptische Elemente . . . . .	108
4.2.1	Doppelbrechung . . . . .	109
4.2.2	Das Glan-Laser-Prisma . . . . .	110
4.2.3	Die Wellenplatte . . . . .	112
4.2.4	Der Fresnel-Rhombus . . . . .	114
4.3	Verfahren zur Messung des Polarisationszustands . . . . .	115
4.4	Entwurf einer Meßapparatur für polarisiertes Licht . . . . .	116
4.4.1	Konzept und mechanischer Aufbau . . . . .	117
4.4.2	Entwurf der Intensitätssensoren . . . . .	129
4.4.3	Signalelektronik . . . . .	140
4.4.4	Signalerfassung . . . . .	144
4.4.5	Justierung und Kalibration . . . . .	145
<b>5</b>	<b>Analyse der Stokes-Meßdaten</b>	<b>153</b>
5.1	Analyse des einzelnen Datenpunkts . . . . .	153
5.1.1	Behandlung und Vorverarbeitung der Rohdaten . . . . .	154
5.1.2	Überlegungen zur Wahl der Analysemethode . . . . .	156
5.1.3	Untersuchungen zur Rekonstruktionsgenauigkeit . . . . .	158
5.1.4	Interpretation und Schlußfolgerungen . . . . .	164
5.1.5	Unsicherheiten der rekonstruierten Parameter . . . . .	168
5.1.6	Gültigkeit des Modells . . . . .	170
5.1.7	Eindimensionale Stichproben . . . . .	174
5.2	Analyse der einzelnen Stokesmessung . . . . .	178
5.2.1	Nomenklatur . . . . .	178
5.2.2	Das korrelierte Fitverfahren . . . . .	180

5.2.3	Ableitung des Fitmodells . . . . .	184
5.2.4	Beurteilung der Fitgüte . . . . .	193
5.3	Kalibrationsmessungen . . . . .	195
5.3.1	Initialjustierung . . . . .	196
5.3.2	Kalibration der Wellenplatten-Winkelskala . . . . .	204
5.3.3	Justierfehleranalyse . . . . .	214
<b>6</b>	<b>Bestimmung der Polarisation von Laser- und Elektronenstrahl</b>	<b>221</b>
6.1	Organisation der Meßdaten und Kalibrationswerte . . . . .	221
6.1.1	Format der Messungen . . . . .	222
6.1.2	Verwaltungsstruktur für die Meßdaten . . . . .	223
6.2	Ablauf der Analyse . . . . .	226
6.2.1	Pedestalmessung . . . . .	227
6.2.2	Initialjustierung . . . . .	229
6.2.3	Anpassung der statistischen Unsicherheiten . . . . .	231
6.2.4	Skalenkalibration der Wellenplatte . . . . .	237
6.2.5	Justierfehleranalyse . . . . .	239
6.2.6	Analyse der Stokes-Polarisationsmessung . . . . .	241
6.3	Berücksichtigung systematischer Effekte . . . . .	243
6.3.1	Quellen systematischer Unsicherheit . . . . .	243
6.3.2	Verfahren zur Bestimmung der kalibrationsbedingten Unsicherheiten . . . . .	246
6.3.3	Berücksichtigung funktionaler Abhängigkeiten . . . . .	249
6.3.4	Extraktion der Unsicherheiten . . . . .	253
6.3.5	Diskussion anhand des Beispiels <i>beam260509</i> . . . . .	255
6.3.6	Berücksichtigung der Pedestalkalibration . . . . .	259
6.4	Die Polarisations-Transfermatrix . . . . .	263
6.4.1	Meßverfahren und Apparatur . . . . .	264
6.4.2	Methode zur Auswertung der Meßdaten . . . . .	272
6.4.3	Sensoren-Linearität . . . . .	278
6.4.4	Transfermatrix des 90°-Fensters . . . . .	286
6.4.5	Transfermatrix des 45°-Fensters . . . . .	290
6.4.6	Konsistenzprüfung des Verfahrens . . . . .	292
6.4.7	Anwendung der Transfermatrix auf Stokes-Polarisations- messungen . . . . .	294
6.5	Bestimmung der Strahlpolarisation bei 1.5 GeV . . . . .	296
6.5.1	Zuordnung zwischen Stokes- und Asymmetriemessungen	297
6.5.2	Polarisation des Laserstrahls . . . . .	298
6.5.3	Polarisation des Elektronenstrahls . . . . .	298
6.5.4	Vergleich mit anderen Compton-Rückstreupolarimetern	307

<b>7 Zusammenfassung und Ausblick</b>	<b>311</b>
<b>A Hilfsmethoden zur Wahl des Einzelpunkt-Analyseverfahrens</b>	<b>315</b>
A.1 Bestimmung der Bineinteilung . . . . .	315
A.1.1 Dreidimensionaler Fall . . . . .	316
A.1.2 Zweidimensionaler Fall . . . . .	318
A.2 Bestimmung der Hauptachsendarstellung . . . . .	319
A.2.1 Zweidimensionaler Fall . . . . .	320
A.2.2 Dreidimensionaler Fall . . . . .	321
<b>B Hilfsmethoden der Datenanalyse</b>	<b>325</b>
B.1 Harmonische Analyse . . . . .	325
B.2 Multinormaler Zufallszahlengenerator . . . . .	329
B.3 Prüfung des analytischen Gradienten der <i>NLL</i> -Funktion . . . . .	330
<b>C Auswirkungen einer Fehlkalibrierung der Winkelskala</b>	<b>333</b>
<b>D Untersuchungen zu den laserinduzierten Ablagerungen</b>	<b>337</b>
D.1 Natur und Ursache der Depositionen . . . . .	337
D.2 Wirkung auf die optischen Eigenschaften . . . . .	338
<b>Literaturverzeichnis</b>	<b>343</b>

# Abbildungsverzeichnis

2.1	Konstituentenquarkmodell und QCD-Beschreibung des Protons	6
2.2	Elastische Elektron-Nukleon-Streuung . . . . .	8
2.3	Welt-Daten zur <i>strangeness</i> im Nukleon . . . . .	17
2.4	Überblick über die Beschleunigeranlage . . . . .	19
2.5	Prinzipskizze des A4-Experiments . . . . .	20
2.6	Polarisierte Quelle . . . . .	21
2.7	Spinrotationsmessung für 1.5 GeV-Betrieb . . . . .	24
2.8	Schematische Darstellung von MAMI-A und -B . . . . .	26
2.9	Schematische Darstellung von MAMI-C . . . . .	27
2.10	Schematische Darstellung der Strahlparametermessung . . . . .	29
2.11	Beispiel eines Histogramms des A4-Kalorimeters . . . . .	33
2.12	Schemazeichnung des A4-Transmissionspolarimeters . . . . .	35
3.1	Relativistische Compton-Kinematik . . . . .	38
3.2	Einfallswinkel im Ruhesystem . . . . .	40
3.3	Photonen-Streuwinkel im Laborsystem . . . . .	41
3.4	Energie des gestreuten Photons . . . . .	42
3.5	Definition der Größen des Compton-Wirkungsquerschnitts . . . . .	44
3.6	Winkelabhängiger Compton-Wirkungsquerschnitt . . . . .	45
3.7	Longitudinale Analysierstärke . . . . .	46
3.8	Grundlegender Aufbau von Compton-Rückstreupolarimetern . . . . .	47
3.9	Problematik der geringen Luminosität . . . . .	57
3.10	<i>External-cavity</i> -Design . . . . .	58
3.11	<i>Internal-cavity</i> -Design . . . . .	59
3.12	Aufbau des A4-Polarimeters . . . . .	65
3.13	Photo des Polarimeters . . . . .	65
3.14	Detektorregion des A4-Polarimeters . . . . .	70
3.15	Photonenkalorimeter . . . . .	71
3.16	Bestimmung der Compton-Asymmetrie . . . . .	74
3.17	Slow-Control-System: RS-232 . . . . .	76
3.18	Datenerfassungshardware des <i>slow-control</i> -Systems . . . . .	79
3.19	Herstellung von Strahlüberlapp . . . . .	84
3.20	Resonatorinterne Leistung . . . . .	86

3.21 Kohlenstoffdeposition durch Synchrotronstrahlung . . . . .	87
3.22 Laserinduzierte Deposition auf $W_45$ . . . . .	88
3.23 Verbesserte Plasmareinigungsapparatur . . . . .	90
3.24 Plasmareinigungsapparatur im Betrieb . . . . .	91
4.1 Die Polarisationsellipse . . . . .	100
4.2 Definition der Helizitäten . . . . .	101
4.3 Feldverlauf bei positiver Phasenlage . . . . .	102
4.4 Helizität bei positiver Phasenlage . . . . .	103
4.5 Das Glan-Laser-Prisma . . . . .	111
4.6 Die $\lambda/4$ -Platte . . . . .	113
4.7 Der Fresnel-Rhombus . . . . .	114
4.8 Vereinfachtes Schema der Meßapparatur . . . . .	116
4.9 Reflektierte Teilstrahlen an $W_45$ . . . . .	118
4.10 Meßkonzept des Stokesmeter MkII . . . . .	119
4.11 Schematische Darstellung des Stokesmeter MkII . . . . .	120
4.12 Photo des Stokesmeter MkII . . . . .	121
4.13 Halterung der Stokesmeter-Wellenplatte . . . . .	124
4.14 Meßapparatur zu Bestimmung des Taumelfehlers . . . . .	126
4.15 Untersuchung zum Taumelfehler des Prismen-Drehtischs . . . . .	127
4.16 Untersuchung zur Klemmung des Prismen-Drehtischs . . . . .	128
4.17 Halterung des Stokesmeter-Prismas . . . . .	129
4.18 Konzept der Stokesmeter-Sensoren . . . . .	131
4.19 Optimierung der Sensorgeometrie . . . . .	137
4.20 Zusammenfassung der Sensorenoptimierung . . . . .	138
4.21 Stokesmeter-Sensormodule . . . . .	139
4.22 Polarisationsabhängigkeit des Sensors . . . . .	141
4.23 Sensorenvorverstärker . . . . .	142
4.24 Differentielle Treiberstufe . . . . .	143
4.25 Kalibrationsprismen-Modul . . . . .	148
4.26 Schnellkalibrationsmodul . . . . .	149
4.27 Absolutkalibrationsmodul . . . . .	150
4.28 Prismenhalterung zum Absolutkalibrationsmodul . . . . .	151
5.1 Verteilung der normierten Rekonstruktionsgenauigkeiten . . . . .	162
5.2 Rekonstruktionsgenauigkeit als Funktion von $\bar{n}$ . . . . .	163
5.3 Graphische Interpretation des korrelierten Fitverfahrens. . . . .	183
5.4 Definition des Geräte-Koordinatensystems . . . . .	189
5.5 Initialjustierung . . . . .	198
5.6 Definition der Kalibrationsprismen-Winkelskala . . . . .	201



---

5.7	Definition der Wellenplatten-Winkelskala . . . . .	205
5.8	Wellenplatten-Skalenkalibration . . . . .	206
5.9	Justierfehleranalyse . . . . .	215
6.1	Unterteilung der Strahlzeitdaten . . . . .	226
6.2	Analyse einer Pedestalmessung . . . . .	228
6.3	Analyse der Initialjustierung . . . . .	230
6.4	Auswirkung einer Fehljustierung auf die Initialjustierung . . . . .	232
6.5	Auswirkung eines möglichen Taumelfehlers des Wellenplatten- Drehtischs . . . . .	233
6.6	Analyse der Initialjustierung nach Reskalierung der statisti- schen Unsicherheiten . . . . .	236
6.7	Analyse der $\lambda/4$ -Skalenkalibration . . . . .	238
6.8	Justierfehleranalyse . . . . .	240
6.9	Analyse einer Stokes-Polarisationsmessung . . . . .	242
6.10	Abhängigkeitsstruktur der Kalibrationsarten . . . . .	247
6.11	Beispiel einer Systematikuntersuchung . . . . .	248
6.12	Abtastgitter zur Bestimmung der funktionalen Abhängigkeit . . . . .	250
6.13	Abtastung der funktionalen Abhängigkeit . . . . .	251
6.14	Berücksichtigung funktionaler Abhängigkeiten . . . . .	252
6.15	Interpolationsartefakte bei Verwendung der Justierfehleranalyse . . . . .	258
6.16	Normale Kalibrationsabhängigkeit einer Polarisationsmessung . . . . .	260
6.17	Vergleichsanalyse zur Relevanz der Pedestals . . . . .	261
6.18	Vereinfachte Kalibrationsabhängigkeit . . . . .	262
6.19	Polarisationsverändernde Elemente am Strahlteiler . . . . .	263
6.20	Schema der Transfermatrix-Messung . . . . .	265
6.21	CAD-Darstellung des Ellipsometrie-Meßplatzes . . . . .	266
6.22	Photo des Ellipsometrie-Meßplatzes . . . . .	267
6.23	Schnellwechselrahmen für Transfermatrixmessung . . . . .	268
6.24	Intensitätsnormierung bei Transfermatrixmessung . . . . .	271
6.25	Apparatur zur Linearitätsmessung der internen Sensoren . . . . .	280
6.26	Resultat der Linearitätsmessung: interne Sensoren . . . . .	281
6.27	Apparatur zur Linearitätsmessung des externen Sensors . . . . .	282
6.28	Korrekturkurve für den externen Normierungssensor . . . . .	285
6.29	Auswirkung des <i>W90</i> -Vakuumfensters . . . . .	287
6.30	Substratisotropie des <i>W90</i> -Vakuumfensters . . . . .	289
6.31	Substratisotropie des <i>W45</i> -Vakuumfensters . . . . .	291
6.32	Transfermatrix des <i>W45</i> -Fensters . . . . .	292
6.33	Transfermatrix-Korrektur einer Polarisationsmessung . . . . .	295
6.34	Bestimmung der Elektronenpolarisation . . . . .	303

6.35	Übersicht über die Polarisationsmessungen während der Strahlzeit <i>beam101109</i> . . . . .	304
B.1	Prüfung des analytischen Gradienten der <i>NLL</i> -Funktion . . . . .	332
C.1	Auswirkung des Winkelskalen-Justierfehlers . . . . .	335
D.1	Auswirkung der Depositionen auf die Transmission . . . . .	339
D.2	Auswirkung der Depositionen auf die <i>W45</i> -Transfermatrix . . . . .	340

# Tabellenverzeichnis

2.1	Elektroschwache Kopplungen der Quarks . . . . .	13
3.1	Strahlparameter bei 855 MeV . . . . .	66
3.2	Übersicht über die Optomechanik . . . . .	77
3.3	Vergleich der Polarimeterkonzepte . . . . .	95
4.1	Betrachtete Sensorgeometrien . . . . .	136
5.1	Histogrammparameter ohne Optimierung . . . . .	157
5.2	Rekonstruktionsgenauigkeit bei 1024 Werten pro Stichprobe .	165
5.3	Rekonstruktionsgenauigkeit bei 2048 Werten pro Stichprobe .	166
5.4	Modellparameter des Stokesmeter-Prismas . . . . .	185
5.5	Modellparameter der Stokesmeter-Wellenplatte . . . . .	187
5.6	Kalibrationskonstanten der Stokesmessungs-Analyse . . . . .	191
5.7	Modellparameter der Initialjustierung . . . . .	202
5.8	Modellparameter der Wellenplatten-Skalenkalibration . . . . .	210
5.9	Modellparameter der Winkelskalen-Kalibration . . . . .	211
5.10	Modellparameter der Justierfehleranalyse . . . . .	217
6.1	Primäre Kalibrationsarten . . . . .	225
6.2	Resultate der Pedestalmessung <i>stok230509_05</i> . . . . .	227
6.3	Resultate der Initialjustierung <i>GRbeam260509_001</i> . . . . .	235
6.4	Resultate der $\lambda/4$ -Skalenkalibration und der Justierfehlerana- lyse ( <i>GRbeam260509_002</i> und <i>_003</i> ). . . . .	239
6.5	Stokes-Polarisationsmessung <i>stok230509_31</i> . . . . .	243
6.6	Systematische Unsicherheit der Initialjustierung . . . . .	255
6.7	Systematische Unsicherheit der $\lambda/4$ -Skalenkalibration . . . . .	256
6.8	Systematische Unsicherheit der Justierfehleranalyse . . . . .	257
6.9	Systematische Unsicherheit einer Polarisationsmessung . . . . .	259
6.10	Nichtlinearität des externen Normierungssensors . . . . .	284
6.11	Transfermatrix des <i>W90</i> -Vakuumsfensters . . . . .	290
6.12	Transfermatrix eines unbeschichteten Substrats . . . . .	294
6.13	Systematische Unsicherheit der korrigierten Polarisationsmes- sung . . . . .	296

6.14	Verfügbare Compton-Asymmetriedaten für <i>beam101109</i> . . . .	298
6.15	Analyse der Laserpolarisation . . . . .	299

# Kapitel 1

## Einleitung

Eine der Triebkräfte hinter der Entwicklung der modernen Physik bestand und besteht in dem Wunsch, den Aufbau der Materie und die zwischen deren Konstituenten wirkenden Kräfte zu verstehen. Dies wird wesentlich vereinfacht, wenn es gelingt, die beobachteten Objekte systematisch in einem Ordnungsschema zu erfassen. Nach dem entsprechenden Erfolg des Periodensystems der Elemente auf dem Niveau der makroskopischen Materie schien nun in den 1960er Jahren das (nichtrelativistische) Quarkmodell eine ähnliche Ordnung in die subatomare Welt der seinerzeit noch als „Elementarteilchen“ bezeichneten Hadronen zu bringen. Gegen Ende der 1980er Jahre wurde jedoch deutlich, daß dieses Modell bei genauerer Betrachtung schon „einfache“ statische Eigenschaften dieser Teilchen nicht zu beschreiben vermag.

Die A4-Kollaboration am Institut für Kernphysik der Johannes Gutenberg-Universität zu Mainz wurde im Jahr 1992 gegründet, um einen Beitrag zur Klärung einer solchen Schwachstelle des Quarkmodells, die sich im „Protonen-Spin-Puzzle“ äußert, zu leisten; dieses besteht in einer erheblichen Diskrepanz zwischen dem beobachteten Spin des Protons und den gemessenen Spinbeiträgen seiner nach dem Quarkmodell vermuteten Konstituenten, aus denen sich dieser eigentlich durch einfache Summierung ergeben sollte. Zu diesem Zweck wurde am Teilchenbeschleuniger MAMI ein Experiment aufgebaut, das sich die Paritätsverletzung in der elastischen Streuung polarisierter Elektronen wechselnder Helizität an unpolarisierten Nukleonen zunutze macht, um den Beitrag von *strange*-Quarks zu den Vektorformfaktoren des Nukleons zu ermitteln: Wenngleich *strange*-Quarks nach dem nichtrelativistischen Quarkmodell nicht zu den Konstituenten des Nukleons gehören, können sie dennoch im Rahmen von Quantenfluktuationen kurzzeitig auftreten und so möglicherweise einen nennenswerten Anteil auch an den statischen Eigenschaften des Nukleons tragen.

Die Meßgröße ist in diesem Fall eine paritätsverletzende Asymmetrie in den

Zählraten der gestreuten Elektronen, die aufgrund der Spinabhängigkeit des Wirkungsquerschnitts durch den Helizitätswechsel bewirkt wird und deren Größe vom Beitrag der *strange*-Quarks abhängt. Um die nun eigentlich relevante Asymmetrie des *Wirkungsquerschnitts* aus der Zählratenasymmetrie extrahieren zu können, muß allerdings der Absolutwert der Strahlpolarisation bekannt sein. Zu diesem Zweck wurden seit 1996 Vorstudien für ein Compton-Rückstreupolarimeter durchgeführt, mit dem diese Polarisation *zerstörungsfrei*, d. h. parallel zum eigentlichen Experimentierbetrieb und bei denselben Strahlbedingungen gemessen werden kann; die Entwicklung des Polarimeters in seiner jetzigen Form begann dann ab dem Jahr 2002. Dieses System ist erstmals nach dem *internal-cavity*-Konzept aufgebaut, bei dem der Elektronenstrahl direkt durch den Resonator des verwendeten Lasers geleitet wird; auf diese Weise kann eine Lichtintensität genutzt werden, die deutlich größer als die Nutzleistung des Lasers ist, ohne daß hierfür ein externer Fabry-Pérot-Resonator konstruiert werden muß. Aufgrund der resultierenden Länge des Resonators und der Vielzahl der darin enthaltenen optischen Elemente ist dieser Ansatz jedoch mit einigen physikalischen und technischen Herausforderungen verbunden. Einer der wichtigsten Aspekte ist hierbei die Kontrolle der Lichtpolarisation, die sowohl direkt über die Analysierstärke der Polarisationsmessung als auch indirekt über ihren Einfluß auf die Laserleistung die Dauer des Meßprozesses beeinflusst und ohne deren Kenntnis die Interpretation der Polarimeter-Meßdaten unmöglich ist.

Die vorliegende Arbeit berichtet nun einerseits über die Entwicklung des optischen Systems dieses Polarimeters mit besonderem Augenmerk auf die Methode zur Bestimmung der Lichtpolarisation, andererseits aber auch über die erstmalige Verwendung solcher Meßdaten in Verbindung mit Resultaten einer parallel angefertigten Dissertation, um die longitudinale Polarisation des MAMI-Elektronenstrahls während einer Strahlzeit des A4-Experiments bei 1.5 GeV Strahlenergie zu ermitteln. Im Anschluß an diese Einleitung wird im zweiten Kapitel zunächst die physikalische Fragestellung des A4-Experiments vertieft und dessen Umsetzung an MAMI erläutert. Das dritte Kapitel widmet sich der Beschreibung des Compton-Rückstreupolarimeters, das im Rahmen dieser und weiterer Arbeiten für das A4-Experiment entwickelt wurde: Zunächst werden die Grundlagen der Compton-Polarimetrie an sich beschrieben, dann der Aufbau und die Besonderheiten des hier vorgestellten Polarimeters dargelegt.

Das vierte Kapitel beschäftigt sich dann mit dem ersten Schwerpunkt dieser Arbeit: der Bestimmung der Laserpolarisation, die unabdingbar für die Interpretation der Polarimeter-Meßdaten ist. Nach einer Vorstellung des Formalismus zur Beschreibung polarisierten Lichts und der verwendeten po-

---

larisationsoptischen Elemente werden Planung und Aufbau des zu diesem Zweck entwickelten Meßinstruments – des *Stokesmeter MkII* – erläutert. Im fünften Kapitel wird anschließend die Methode zur Analyse der Stokesmeter-Meßdaten inklusive der Berücksichtigung systematischer Effekte beschrieben.

Das sechste Kapitel enthält schließlich den zweiten Schwerpunkt dieser Arbeit und beschreibt die konkrete Analyse der Lichtpolarisation für eine gegebene Strahlzeit sowie das Verfahren, um die so gewonnenen Resultate mit den im Rahmen einer parallelen Dissertation analysierten Daten des Polarimeter-Detektorsystems zu kombinieren und dadurch die Polarisation des MAMI-Elektronenstrahls zu extrahieren. Dies stellt die erstmalige Absolutbestimmung der Strahlpolarisation während einer Strahlzeit des A4-Experiments mit dem hier vorgestellten Polarimeter dar.





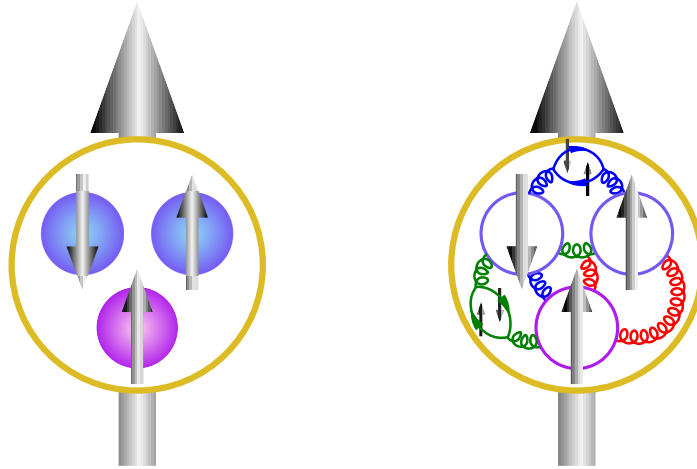
# Kapitel 2

## Ziel und Aufbau des A4-Experiments

Das A4-Experiment am MAMI-Teilchenbeschleuniger der Johannes Gutenberg-Universität in Mainz ist eines von mehreren Experimenten, die sich die Paritätsverletzung in der elastischen Streuung von Elektronen an Nukleonen zunutze machen, um die Struktur des Nukleons zu untersuchen [182]. Ein besonderer Fokus liegt hierbei auf dem Beitrag der *strange-Quarks* zu den statischen Eigenschaften des Nukleons. In diesem Kapitel soll die physikalische Motivation dieser Untersuchungen vertieft und der theoretische Hintergrund beleuchtet werden. Darüberhinaus soll auf den Aufbau des A4-Experiments eingegangen werden.

### 2.1 *Strangeness* und die Struktur des Nukleons

Die Untersuchung der Höhenstrahlung mit Ballon-Experimenten und die Entwicklung von Teilchenbeschleunigern mit Energien jenseits der Pionenschwelle haben dazu geführt, daß ab der Mitte des 20. Jahrhunderts ein stetig wachsender „Zoo“ subatomarer Teilchen – insbesondere Hadronen – entdeckt wurde. Nachdem bereits die anomalen magnetischen Momente von Proton und Neutron nahegelegt hatten, daß es sich hierbei nicht um elementare, d. h. strukturlose Teilchen handelt, erlaubte das von Gell-Mann und Zweig entwickelte nichtrelativistische Quarkmodell [72, 208], die neu entdeckten Teilchen in ein systematisches Ordnungsschema analog zum Periodensystem der Elemente [135] einzuordnen. Nach diesem Modell sind Mesonen aus jeweils einem *Quark* und einem *Antiquark*, Baryonen hingegen aus drei Quarks zusammengesetzt, wobei die Eigenschaften des resultierenden Hadrons gerade die Summe der Eigenschaften seiner Konstituenten sind. Dieses *Konstitu-*



**Abbildung 2.1:** Im Konstituentenquarkmodell (links) wird das Proton als System aus drei Quarks beschrieben, deren Eigenschaften sich zu denen des Protons summieren. Im Rahmen der QCD muß das Proton allerdings als sehr dynamisches Objekt aufgefaßt werden, zu dessen Eigenschaften auch Quantenfluktuationen und Austauschteilchen beitragen (rechts).

entenquarkmodell benötigte zunächst drei Sorten (*flavours*) von Quarks, die als *up*, *down* und *strange* bezeichnet werden<sup>1</sup>. Das Proton besteht in diesem Bild aus zwei *up*-Quarks und einem *down*-Quark, das Neutron aus einem *up*-Quark und zwei *down*-Quarks.

Wenngleich es nun möglich war, grundlegende Eigenschaften und Verhaltensweisen der Hadronen aufgrund der Eigenschaften ihrer Konstituenten zu verstehen, hat spätestens die Entdeckung des „Protonen-Spin-Puzzles“ (auch als „Spinkrise“ bekannt) durch die EMC-Kollaboration [9] und die nachfolgende Bestätigung durch das SMC-Experiment klargestellt, daß selbst grundlegende statische Eigenschaften wie der Spin des Protons durch dieses Modell nicht erklärt werden können. Die letzten Analysen [1] aus der tiefinelastischen Streuung ergeben vielmehr, daß diese Quarks, die nun auch als *Valenzquarks* bezeichnet werden, nur etwa 25 % des Nukleonenspins tragen, wie anhand ihrer Nettopolarisationen ersichtlich wird:

$$\begin{aligned}
 \Delta u_v &= 0.77 \pm 0.10 \pm 0.08 \\
 \Delta d_v &= -0.52 \pm 0.14 \pm 0.09 \\
 \Rightarrow \Delta \Sigma_v &:= \Delta u_v + \Delta d_v = 0.25 \pm 0.21
 \end{aligned}
 \tag{2.1}$$

Das moderne Bild des Nukleons beschreibt dieses stattdessen als ein durch die

<sup>1</sup>Später wurde es um die neu entdeckten *flavours charm*, *bottom* und *top* erweitert.

starke Wechselwirkung zusammengehaltenes dynamisches System, das durch eine relativistische Quantenfeldtheorie, die *Quantenchromodynamik* (QCD), beschrieben werden muß (vgl. Abbildung 2.1).

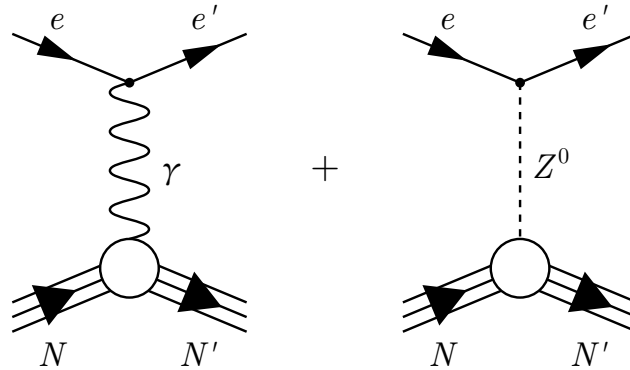
Eine Eigenschaft dieser Theorie ist, daß die *Gluonen*, welche als Eichbosonen die Kräfte zwischen den Quarks vermitteln, temporär sowohl in Quark-Antiquark-Paare als auch – da es sich um eine *nicht-abelsche* Feldtheorie mit Wechselwirkungen der Eichbosonen untereinander handelt – in Gluonenpaare aufspalten können. Diese nur aufgrund von Quantenfluktuationen existierenden Teilchen bilden den *Quark- und Gluonensee* des Hadrons (vgl. etwa [76, Kap. 9.3]). Im Zuge der Spinkrise wurde nun die Frage aufgeworfen, inwieweit diese beiden Seen zu den statischen Eigenschaften der Nukleonen beitragen können. Insbesondere wurde die Rolle der *strange*-Quarks diskutiert [103, 71], da das Nukleon keine *Netto-strangeness* aufweist, in den  $\bar{q}q$ -Schleifen jedoch Quarks aller flavours auftreten können; eine gezielte Untersuchung von *s*-Quark-Beiträgen würde somit unzweifelhaft Eigenschaften des Quarksees vermessen. Erste Hinweise auf die Relevanz der *s*-Quarks wurden hierbei nicht nur in der o. g. Messung zur Zusammensetzung des Nukleonenspins, sondern auch in der Pion-Nukleon-Streuung gefunden: die Messung des Pion-Nukleon-Sigma-Terms ergab Hinweise auf einen nicht unerheblichen Beitrag von *s*-Quarks zur Masse des Nukleons, der zum Zeitpunkt der Planung des A4-Experiments auf ca. 130 MeV/c<sup>2</sup> geschätzt wurde [67].

## 2.2 Paritätsverletzende Elektronenstreuung

Für die Untersuchung der *strangeness* im Nukleon ist es erforderlich, geeignete Matrixelemente zu finden, mit denen eine auf diesen Aspekt des Nukleons empfindliche Messung durchgeführt werden kann. Prinzipiell eignen sich hierzu die Matrixelemente

$$\begin{aligned} \langle N | \bar{s}s | N \rangle & \quad (\text{skalare Dichte}) \\ \langle N | \bar{s}\gamma_\mu s | N \rangle & \quad (\text{Vektorstrom}) \\ \langle N | \bar{s}\gamma_\mu\gamma_5 s | N \rangle & \quad (\text{Axialvektorstrom}) \end{aligned}$$

wobei die letzten beiden am einfachsten zugänglich sind [103]. Insbesondere läßt sich zeigen, daß die Paritätsverletzung in der elastischen Elektron-Nukleon-Streuung bei geringem Viererimpulsübertrag geeignet ist, um diese Matrixelemente zu vermessen [131].



**Abbildung 2.2:** In Born'scher Näherung tragen zwei Feynman-Diagramme zur elastischen Elektron-Nukleon-Streuung bei: der Austausch eines Photons (links) und der Austausch eines neutralen  $Z^0$ -Bosons (rechts).

### 2.2.1 Elastische Streuung am Nukleon

In Born'scher Näherung wird die elastische Streuung eines Elektrons am Nukleon durch den Austausch eines Eichbosons beschrieben, wobei sowohl der Austausch eines Photons als auch der Austausch eines  $Z^0$ -Bosons stattfinden kann (vgl. Abb. 2.2). Da es sich hierbei um einen Zweikörperprozeß handelt, ist die Kinematik durch den Streuwinkel vollständig bestimmt: Ein Elektron mit anfänglichem Viererimpuls

$$k_i^\mu = (E, \vec{k}_i) \quad , \quad E \gg m_e$$

das auf ein ruhendes Proton der Masse  $M$  trifft, wird anschließend eine vom Streuwinkel  $\vartheta$  abhängige Energie

$$E' = \frac{E}{1 + 2\frac{E}{M} \sin^2(\vartheta/2)} \quad (2.2)$$

mit zugehörigem Viererimpuls  $k_f^\mu = (E', \vec{k}_f)$  aufweisen. Das Austauscheteilchen hat somit einen Viererimpuls

$$q^\mu = k_f^\mu - k_i^\mu \quad (2.3)$$

dessen Betrag üblicherweise durch die Größe

$$Q^2 := -q^2 = 4EE' \sin^2(\vartheta/2) \quad (2.4)$$

ausgedrückt wird. Die entsprechenden Impulse des Protons seien mit  $p_i^\mu$  und  $p_f^\mu$  bezeichnet und – ebenso wie alle anderen Impulse und Massen – in „natürlichen“ Einheiten ( $\hbar = 1$  und  $c = 1$ ) ausgedrückt.

Die *Dynamik* der Streuung wird nun im Rahmen der Feldtheorie als Wechselwirkung zweier Ströme – demjenigen des Elektrons,  $j^\mu(x)$ , und demjenigen des Protons,  $J^\mu(x)$  – beschrieben, die durch den Propagator  $G$  des zugehörigen Austauschteilchens vermittelt wird [76, Kap. 4.2]. Der Wirkungsquerschnitt ergibt sich hierbei aus der Streuamplitude

$$T_{fi} = -i \int j^\mu(x) G_{\mu\nu} J^\nu(x) d^4x \quad (2.5)$$

die meistens auf die *invariante Amplitude*  $\mathfrak{M}$ , definiert durch

$$T_{fi} =: -i(2\pi)^4 \delta(k_i^\mu + p_i^\mu - k_f^\mu - p_f^\mu) \mathfrak{M} \quad (2.6)$$

reduziert wird und die Form

$$\mathfrak{M} = j^\mu G_{\mu\nu} J^\nu \quad (2.7)$$

annimmt; die nunmehr ortsunabhängigen Größen  $j^\mu$  und  $J^\nu$  stellen hierbei übliche Kurzschreibweisen für die auf den Anteil des Matrixelements eingeschränkten Ströme  $j^\mu(x)$  bzw.  $J^\nu(x)$  dar.

Im Falle der Streuung aufgrund der elektromagnetischen Wechselwirkung – entsprechend dem Austausch eines Photons – ist der Propagator gerade durch

$$G_{\mu\nu} = -\frac{g_{\mu\nu}}{q^2} \quad (2.8)$$

und der Strom des Elektrons durch

$$j^\mu = -e \bar{u}_e(k_f) \gamma^\mu u_e(k_i) \quad (2.9)$$

gegeben, wobei  $u_e(k_i)$  der Spinor des einlaufenden Elektrons,  $\bar{u}_e(k_f)$  derjenige des auslaufenden Elektrons und  $\gamma^\mu$  der „Vierervektor der Dirac-Matrizen“ ist. Der entsprechende Strom des Protons läßt sich analog ausdrücken, hat jedoch die deutlich kompliziertere Form

$$J^\mu = e \bar{u}_p(p_f) \left( F_1^p(Q^2) \gamma^\mu + \frac{1}{2M} F_2^p(Q^2) i \sigma^{\mu\nu} q_\nu \right) u_p(p_i) \quad (2.10)$$

da es sich in diesem Fall nicht mehr um ein punktförmiges Teilchen handelt [76, Kap. 8.2]. Die vom Impulsübertrag abhängigen Größen  $F_1^p$  und  $F_2^p$  enthalten hierbei die nichttriviale elektrische und magnetische Struktur des Protons und werden als *Dirac-* bzw. *Pauli-Formfaktor* bezeichnet<sup>2</sup>; es ist

<sup>2</sup>Der Term  $F_2^p$  enthält hier bereits das anomale magnetische Moment  $\kappa$  des Protons.

allerdings üblich, sie durch die *elektrischen und magnetischen Sachs-Formfaktoren* des Protons

$$\begin{aligned} G_E^p(Q^2) &:= F_1^p(Q^2) + \frac{q^2}{4M^2} F_2^p(Q^2) \\ G_M^p(Q^2) &:= F_1^p(Q^2) + F_2^p(Q^2) \end{aligned} \quad (2.11)$$

auszudrücken, die – wenigstens im durch  $\vec{p}_f^* = -\vec{p}_i^*$  definierten *Breit-Bezugssystem* und für  $q^2 \ll M^2$  – anschaulich als Fouriertransformierte von Ladungs- und Magnetisierungsdichte des Protons interpretiert werden können. Definiert man der Einfachheit halber noch

$$\tau := -\frac{q^2}{4M^2} \quad (2.12)$$

so kann man das folgende, auch als *Rosenbluth-Formel* bezeichnete Resultat für den differentiellen Wirkungsquerschnitt der elastischen elektromagnetischen Elektron-Proton-Streuung ableiten [165]:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega_{lab}} = \frac{\alpha^2}{4E^2 \sin^4 \frac{\vartheta}{2}} \frac{E'}{E} \left\{ \frac{(G_E^p)^2 + \tau (G_M^p)^2}{1 + \tau} \cos^2 \frac{\vartheta}{2} + 2\tau (G_M^p)^2 \sin^2 \frac{\vartheta}{2} \right\} \quad (2.13)$$

### 2.2.2 Zugang zur *strangeness*: flavour-Zerlegung

Um nun den Beitrag der *s*-Quarks zu den Eigenschaften des Protons – wie sie sich etwa in den o. g. Formfaktoren manifestieren – zu ermitteln, wird ausgenutzt, daß man in Gleichung 2.10 den Strom des Protons durch die Ströme der im Proton enthaltenen Quarksorten ausdrücken kann [24]:

$$J^\mu = e\bar{u}_p \left\{ \sum_f Q^f \left( F_1^{p,f} \gamma^\mu + \frac{1}{2M} F_2^{p,f} i\sigma^{\mu\nu} q_\nu \right) \right\} u_p \quad (2.14)$$

Der Index  $f$  soll hierbei die Summierung über alle flavours darstellen und  $Q^f$  die zugehörigen elektrischen Ladungen der Quarks, ausgedrückt in Einheiten der Elementarladung, bezeichnen. Da man sich überlegen kann, daß die Beiträge der schweren Quarks hier stark unterdrückt sein werden, erscheint es zulässig, die Summierung in den nachfolgenden Betrachtungen auf die drei leichtesten flavours  $u$ ,  $d$  und  $s$  einzuschränken [103].

Die Linearität von Gl. 2.14 in den Formfaktoren erlaubt es, den Strom des Protons wieder auf die Form von Gl. 2.10 zu bringen, wobei lediglich

$F_1^p$  und  $F_2^p$  als Linearkombinationen der verschiedenen flavour-Beiträge  $F_1^{p,f}$  bzw.  $F_2^{p,f}$  betrachtet werden müssen. Die Definition in Gl. 2.11 impliziert, daß eine analoge Zerlegung dann auch für die Sachs-Formfaktoren  $G_E^p$  und  $G_M^p$  existiert:

$$\begin{aligned} G_E^p &= \sum_{f=u,d,s} Q_f G_E^{p,f} \\ G_M^p &= \sum_{f=u,d,s} Q_f G_M^{p,f} \end{aligned} \quad (2.15)$$

Wenngleich es aber somit möglich ist, die Eigenschaften des Protons nach den Beiträgen einzelner Quarksorten aufzuschlüsseln, erlaubt die Struktur des Rosenbluth-Wirkungsquerschnitts nur eine Bestimmung von  $G_E^p$  bzw.  $G_M^p$  als ganzem, wobei auch hierfür mindestens zwei Messungen bei gleichem Impulsübertrag  $Q^2$ , aber verschiedenen Streuwinkeln  $\vartheta$  erforderlich sind (sog. *Rosenbluth-Separation*). Eine Bestimmung des *strangeness*-Anteils an den Formfaktoren erfordert daher entweder mehr Observable oder eine Reduktion der Anzahl unbekannter Größen.

Der erste Schritt hierzu besteht nun darin, das Neutron in die Überlegungen einzubeziehen. Dies erscheint zunächst sinnlos, da eine Bestimmung der Neutronenformfaktoren zwar zwei zusätzliche Meßgrößen  $G_E^n$  und  $G_M^n$ , aber auch sechs neue Unbekannte in Form der Quarkbeiträge  $G_E^{n,f}$  bzw.  $G_M^{n,f}$  in das Problem einführt. Im Falle des Nukleons kann man aber ausnutzen, daß in guter Näherung Ladungssymmetrie gilt und somit die Wellenfunktion der  $u$ -Quarks im Proton gleich derjenigen der  $d$ -Quarks im Neutron (und umgekehrt) ist, wobei die Wellenfunktionen der  $s$ -Quarks in beiden Fällen gleich sind [136]. Daraus folgt

$$\begin{aligned} G_{E,M}^{p,u} &\equiv G_{E,M}^{n,d} =: G_{E,M}^u \\ G_{E,M}^{p,d} &\equiv G_{E,M}^{n,u} =: G_{E,M}^d \\ G_{E,M}^{p,s} &\equiv G_{E,M}^{n,s} =: G_{E,M}^s \end{aligned} \quad (2.16)$$

wodurch die Anzahl Unbekannter halbiert wird. Die Ladungssymmetrie ist zwar nicht exakt erfüllt, jedoch sagen Untersuchungen zur Verletzung dieser Symmetrie in Hinblick auf die Bestimmung der *strangeness* im Nukleon einen vernachlässigbar kleinen Einfluß auf die Meßergebnisse voraus [136, 197]. Insgesamt ergibt sich somit die folgende flavour-Zerlegung der Formfaktoren:

$$\begin{aligned} G_{E,M}^p &= \frac{2}{3} G_{E,M}^u - \frac{1}{3} G_{E,M}^d - \frac{1}{3} G_{E,M}^s \\ G_{E,M}^n &= \frac{2}{3} G_{E,M}^d - \frac{1}{3} G_{E,M}^u - \frac{1}{3} G_{E,M}^s \end{aligned} \quad (2.17)$$

### 2.2.3 Die Rolle der schwachen Wechselwirkung

Aus Gl. 2.17 wird ersichtlich, daß auch bei Ausnutzung der Ladungssymmetrie noch sechs Unbekannte bei lediglich vier Meßgrößen vorliegen. An dieser Stelle soll daher nun der zweite Aspekt der elastischen Elektron-Nukleon-Streuung, die schwache Wechselwirkung in Form des bereits angesprochenen  $Z^0$ -Austauschs, betrachtet werden.

Wenngleich im Rahmen des Standardmodells die schwache und die elektromagnetische Wechselwirkung lediglich unterschiedliche Ausprägungen *einer* zugrundeliegenden Kraft – der *elektroschwachen* Wechselwirkung – darstellen, unterscheiden sie sich in mehreren grundlegenden Aspekten:

- Die schwache Wechselwirkung wird durch *drei* Austauscheteilchen vermittelt, von denen zwei ( $W^+$  und  $W^-$ ) geladen sind und eines ( $Z^0$ ) elektrisch neutral ist.
- Die Austauscheteilchen der schwachen Wechselwirkung sind massiv, und
- sie koppeln unterschiedlich stark an rechts- und linkshändige Fermionen, d. h. die schwache Wechselwirkung ist *paritätsverletzend*.

Der letztgenannte Punkt ist hierbei von zentraler Bedeutung für das Verfahren zur Messung der *strangeness* im Nukleon und wird im nächsten Abschnitt näher beleuchtet werden. An dieser Stelle ist zunächst relevant, daß sich die Kopplungsstärke des  $Z^0$  an die Quarks nicht nur absolut, sondern auch relativ im Vergleich der einzelnen Quarkflavours von derjenigen des Photons unterscheidet. Dies bedeutet, daß eine Analyse der Elektron-Nukleon-Streuung im Hinblick auf die *schwachen* Formfaktoren des Nukleons zusätzliche Meßgrößen liefert, mit denen die Unterbestimmtheit des Gleichungssystems 2.17 behoben werden kann.

Die Beschreibung des  $Z^0$ -Austauschs in der elastischen Elektron-Nukleon-Streuung folgt prinzipiell demselben Muster wie in Abschnitt 2.2.1, wobei allerdings sowohl der Propagator als auch die beteiligten Ströme aufgrund der o. g. Unterschiede eine kompliziertere Struktur aufweisen. Da das  $Z^0$  ein massives Teilchen ist, gilt hier

$$\tilde{G}_{\mu\nu} = -\frac{g_{\mu\nu} - q_\mu q_\nu / m_Z^2}{q^2 - m_Z^2} \quad (2.18)$$

während der *neutrale schwache Strom* des Protons<sup>3</sup> – bei expliziter Ausführung der flavour-Zerlegung analog zu Gl. 2.14 – die folgende Form an-

---

<sup>3</sup>Hiermit ist nicht gemeint, daß das Proton elektrisch neutral ist, sondern daß sich die Ladung des Stroms infolge der schwachen Wechselwirkung mittels des  $Z^0$  nicht ändert.



Quarkflavour	$T_3$ (linksh.)	(rechtsh.)	$Q$
$u$	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{2}{3}$
$d$	$-\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{3}$
$s$	$-\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{3}$

**Tabelle 2.1:** Elektroschwache Kopplungseigenschaften ausgewählter Quarks (siehe z. B. [76, Kap. 13]). Der schwache Isospin hat die Eigenschaft, für linkshändige Fermionen den Wert  $T = \frac{1}{2}$  (mit dritter Komponente  $T_3 = \pm\frac{1}{2}$ ) und für rechtshändige Fermionen den Wert  $T = 0$  anzunehmen.

nimmt [24]:

$$\tilde{J}^\mu = \frac{g}{\cos \theta_W} \bar{u} \sum_{f=u,d,s} \left\{ Q_V^f \left( \gamma^\mu \tilde{F}_1^{p,f} + i \frac{\tilde{F}_2^{p,f}}{2M} \sigma^{\mu\nu} q_\nu \right) - Q_A^f \gamma^\mu \gamma^5 \tilde{G}_A^{p,f} \right\} u \quad (2.19)$$

Das Auftreten des letzten, *axialen* Terms mit der Dirac-Matrix  $\gamma^5$  ist hierbei Ausdruck der paritätsverletzenden Natur der schwachen Wechselwirkung. Die Größe  $g$  in Gl. 2.19 stellt die Kopplungskonstante der schwachen Wechselwirkung dar und ist insofern das Analogon zur elektrischen Ladung in Gl. 2.14, während  $\theta_W$  den *schwachen Mischungswinkel* (auch *Weinberg-Winkel*) bezeichnet. Die unterschiedlichen Kopplungsstärken der jeweiligen Quarkflavours an das  $Z^0$ -Boson werden durch  $Q_V$  (Vektorkopplung) und  $Q_A$  (Axialvektorkopplung) ausgedrückt und sind durch

$$\begin{aligned} Q_V^f &= 2T_3^f - 4Q_f \sin^2 \theta_W \\ Q_A^f &= 2T_3^f \end{aligned} \quad (2.20)$$

gegeben, wobei  $T_3^f$  die dritte Komponente des schwachen Isospins und  $Q_f$  wie schon zuvor die elektrische Ladung des jeweiligen Quarks sein soll (vgl. hierzu auch Tabelle 2.1).

Die Ähnlichkeit von Gl. 2.14 und 2.19 legt nun nahe, daß auch die schwachen Formfaktoren des Protons  $\tilde{F}_1^p$  und  $\tilde{F}_2^p$  bzw. die zu Gl. 2.11 analogen Linearkombinationen  $\tilde{G}_E^p$  und  $\tilde{G}_M^p$  in Beiträge der einzelnen Quarkflavours zerlegt werden können. Dies erscheint zunächst wiederum wenig hilfreich, da hierdurch – ähnlich wie bei der Einbeziehung des Neutrons in die Betrachtungen – zusätzliche Unbekannte in das Problem eingeführt werden. Es ist allerdings sinnvoll, anzunehmen, daß die Quarkverteilungen *universell* sind, d. h. daß sich der schwachen und der elektromagnetischen Wechselwirkung

jeweils dieselben Quarkverteilungen, lediglich mit unterschiedlichen Kopplungsstärken, präsentieren. Unter diesen Umständen gilt für die schwachen Quarkbeiträge

$$\begin{aligned}\tilde{F}_{1,2}^{p,f} &\equiv F_{1,2}^f & \text{bzw.} \\ \tilde{G}_{E,M}^{p,f} &\equiv G_{E,M}^f\end{aligned}\quad (2.21)$$

so daß die schwachen Sachs-Formfaktoren des Protons auf die bereits im vorigen Abschnitt eingeführten Größen zurückgeführt werden können:

$$\tilde{G}_{E,M}^p = \left(\frac{1}{4} - \frac{2}{3} \sin^2 \theta_W\right) G_{E,M}^u - \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{3} \sin^2 \theta_W\right) G_{E,M}^d - \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{3} \sin^2 \theta_W\right) G_{E,M}^s \quad (2.22)$$

Sofern es also möglich ist,  $\tilde{G}_E^p$  und  $\tilde{G}_M^p$  zu bestimmen, liegen in Verbindung mit Gl. 2.17 nun genausoviele Observable wie Unbekannte vor – allerdings um den Preis einer zusätzlich zu berücksichtigenden Größe in Form des axialen Formfaktors  $\tilde{G}_A^p$ .

## 2.2.4 Paritätsverletzende Asymmetrie

Da der hier beschriebene Zugang zur *strangeness* im Nukleon eine Untersuchung mittels *elastischer* Elektron-Nukleon-Streuung voraussetzt [131], müssen die entsprechenden Experimente bei einem geringem Impulsübertrag (typischerweise  $Q^2 < 1$  (GeV/c)<sup>2</sup>, vgl. Übersicht in [21]) durchgeführt werden. Für die Übergangsmatrixelemente, die die Wahrscheinlichkeiten der beiden konkurrierenden Prozesse widerspiegeln, gilt aber

$$\begin{aligned}\mathfrak{M}_\gamma &= j^\mu \frac{g_{\mu\nu}}{Q^2} J^\nu \\ \mathfrak{M}_Z &= \tilde{j}^\mu \frac{g_{\mu\nu} - q_\mu q_\nu / m_Z^2}{Q^2 + m_Z^2} \tilde{j}^\nu\end{aligned}\quad (2.23)$$

so daß der Beitrag des  $Z^0$  zur Streuamplitude aufgrund der großen Masse von  $m_Z = 91.2$  GeV/c<sup>2</sup> [154] bei diesen Bedingungen nahezu vernachlässigbar klein ist; dies stellt ein erhebliches Problem für die Bestimmung der schwachen Formfaktoren des Protons dar.

Der Wirkungsquerschnitt der Streuung ergibt sich nun aus dem Betragsquadrat der Summe aller beteiligten Matrixelemente und kann demnach in die drei Beiträge

$$\sigma_{eN} \propto |\mathfrak{M}_\gamma + \mathfrak{M}_Z|^2 = |\mathfrak{M}_\gamma|^2 + 2\Re(\mathfrak{M}_\gamma \mathfrak{M}_Z^*) + |\mathfrak{M}_Z|^2 \quad (2.24)$$

zerlegt werden. Der dritte Term ist hierbei mit  $Q^4/m_Z^4$  gegenüber dem führenden Term unterdrückt und wird somit keine Rolle spielen. Der zweite Term, der als „Interferenzterm“ bezeichnet werden kann, ist immer noch um einen Faktor  $10^{-5}$  kleiner<sup>4</sup> als der elektromagnetische Term; es ist allerdings möglich, ihn unter Ausnutzung der Eigenschaften der schwachen Wechselwirkung dennoch zugänglich zu machen: Da der Spin ein Axialvektor ist, ändert er unter Parität sein Vorzeichen, so daß aus einem rechtehändigen Elektron ein linkshändiges Elektron wird und umgekehrt. Wie bereits im vorigen Abschnitt festgestellt, hat die schwache Wechselwirkung nun aber die Eigenschaft, paritätsverletzend zu sein und demnach unterschiedlich stark an rechts- und linkshändige Fermionen zu koppeln. Die elektromagnetische Wechselwirkung hingegen ist paritätserhaltend, so daß die Kopplung an rechts- und linkshändige Elektronen gleich groß ist. Somit kann der dominante elektromagnetische Anteil in Gl. 2.24 eliminiert werden, indem man die Streuung spinpolarisierter Elektronen wechselnder Helizität betrachtet und die *paritätsverletzende Asymmetrie* des elastischen Elektron-Nukleon-Wirkungsquerschnitts

$$A_{PV} := \frac{\sigma_R - \sigma_L}{\sigma_R + \sigma_L} \quad (2.25)$$

bestimmt.

Im Falle des Protons kann für diese Asymmetrie nun unter Verwendung der bereits eingeführten Größen, der Fermi-Kopplungskonstante  $G_F$ , der Feinstrukturkonstante  $\alpha$ , und zunächst unter Vernachlässigung von Strahlungskorrekturen, der Ausdruck

$$A_{PV} = -\frac{G_F Q^2}{4\pi\alpha\sqrt{2}} \frac{\epsilon G_E^p \tilde{G}_E^p + \tau G_M^p \tilde{G}_M^p - (1 - 4\sin^2\theta_W)\epsilon' G_M^p \tilde{G}_A^p}{\epsilon (G_E^p)^2 + \tau (G_M^p)^2} \quad (2.26)$$

abgeleitet werden [142, 153], wobei der Einfachheit halber zusätzlich die Definitionen

$$\begin{aligned} \epsilon &:= \frac{1}{1 + 2(1 + \tau) \tan^2(\vartheta/2)} \\ \epsilon' &:= \sqrt{(1 - \epsilon^2) \tau (1 + \tau)} \end{aligned} \quad (2.27)$$

eingeführt wurden. Um den *strangeness*-Beitrag zu den Vektorformfaktoren herauszustellen, kann diese Formel dann gemäß

$$A_{PV} = A_V + A_s + A_A \quad (2.28)$$

<sup>4</sup>ausgehend von einem Impulsübertrag von  $Q^2 = 0.2 \text{ (GeV/c)}^2$

in drei Bestandteile zerlegt werden, von denen  $A_V$  den Anteil der Vektorkopplung ohne  $s$ -Quarks,  $A_s$  den hier interessierenden Vektorkopplungsanteil der  $s$ -Quarks und  $A_A$  den Anteil der Axialkopplung am Protonen-Vertex darstellt. Unter Berücksichtigung schwacher Strahlungskorrekturen ergibt sich hierfür [207, 124]

$$\begin{aligned}
 A_V &= -\frac{G_F Q^2}{4\pi\alpha\sqrt{2}} \varrho'_{eq} \left\{ (1 - 4\hat{\kappa}'_{eq} \hat{s}_Z^2) - \frac{\epsilon G_E^p G_E^n + \tau G_M^p G_M^n}{\epsilon (G_E^p)^2 + \tau (G_M^p)^2} \right\} \\
 A_s &= \frac{G_F Q^2}{4\pi\alpha\sqrt{2}} \varrho'_{eq} \frac{\epsilon G_E^p G_E^s + \tau G_M^p G_M^s}{\epsilon (G_E^p)^2 + \tau (G_M^p)^2} \\
 A_A &= \frac{G_F Q^2}{4\pi\alpha\sqrt{2}} \frac{(1 - 4\hat{s}_Z^2) \epsilon' G_M^p \tilde{G}_A^p}{\epsilon (G_E^p)^2 + \tau (G_M^p)^2}
 \end{aligned} \tag{2.29}$$

wobei die Größen  $\varrho'_{eq}$  und  $\hat{\kappa}'_{eq}$  die elektroschwachen Strahlungskorrekturen enthalten und

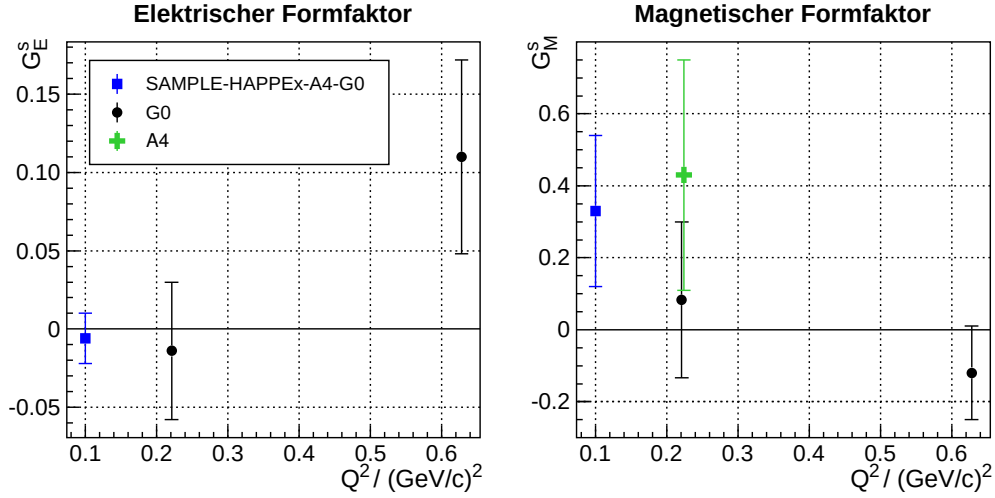
$$\hat{s}_Z^2 := \sin^2 \theta_W (M_Z) \tag{2.30}$$

ein Ausdruck für den Grad der elektroschwachen Mischung im  $\overline{MS}$ -Renormierungsschema ist (vgl. [154, S. 153]).

### 2.2.5 Extraktion der *strangeness*

Die Aufschlüsselung von  $A_{PV}$  gemäß Gl. 2.28 erlaubt es nun, den Beitrag der  $s$ -Quarks zu den Vektorformfaktoren des Nukleons zu bestimmen, sofern die anderen auftretenden Größen – idealerweise aufgrund separater Messungen, ggf. aber auch anhand theoretischer Modellvorhersagen – bekannt sind; hierbei handelt es sich insbesondere um die elektromagnetischen Formfaktoren  $G_E^{p,n}$  und  $G_M^{p,n}$  sowie den axialen Formfaktor  $\tilde{G}_A^p$ . Wie man anhand des Ausdrucks für  $A_s$  in Gl. 2.29 allerdings erkennen kann, ist eine einzelne Messung von  $A_{PV}$  hierzu nicht ausreichend, da die gesuchten Größen  $G_E^s$  und  $G_M^s$  nur als Linearkombination auftreten. Es ist daher in Analogie zur Rosenbluth-Separation erforderlich, mehrere Messungen bei gleichem Impulsübertrag, aber unterschiedlichen Streuwinkeln durchzuführen, um durch gezielte Variation der Vorfaktoren die einzelnen Beiträge zu isolieren.

Wenngleich dies nun prinzipiell recht unkompliziert z. B. durch jeweils eine Messung unter Vorwärts- und Rückwärtswinkeln erreicht werden kann, erwächst eine erhebliche Schwierigkeit aus dem axialen Formfaktor  $\tilde{G}_A^p$ : Da die theoretischen Rechnungen zu den Strahlungskorrekturen hier mit erheblichen Unsicherheiten behaftet sind, muß diese Größe letztlich ebenfalls als Unbekannte betrachtet und im Rahmen der Messungen mitbestimmt werden



**Abbildung 2.3:** Überblick über die Datenlage zu den *strangeness*-Vektorformfaktoren des Nukleons, sofern diese ohne Verwendung theoretischer Rechnungen zu  $\tilde{G}_A^p$  gewonnen wurden. Die Daten stammen aus einer kombinierten Analyse aller verfügbaren Messungen bei  $0.1 (\text{GeV}/c)^2$  [122] sowie einer Analyse „vollständiger“ Datensätze des G<sup>0</sup>- [4] und des A4-Experiments [15]. Die zitierte Analyse der A4-Meßdaten liefert hierbei keinen Wert für  $G_E^s$ , da der Fokus stattdessen auf der Separation des isoskalaren und isovektoriellen Anteils von  $\tilde{G}_A^p$  lag. Die Publikation des G<sup>0</sup>-Experiments enthält nur eine graphische Darstellung der Resultate; die hier zugrundegelegten Zahlenwerte wurden per privater Kommunikation von einem der Autoren (J.-S. Real) bezogen.

(vgl. [182, 21]). Hierzu ist es erforderlich, neben der Variation der Kinematik auch Untersuchungen an unterschiedlichen Targets durchzuführen: Bei Rückwärtswinkeln ist die Asymmetrie wegen  $\epsilon \rightarrow 0$  im wesentlichen durch  $G_M^s$  und  $\tilde{G}_A^p$  dominiert, wobei im Falle der Streuung an Deuterium der Beitrag von  $G_M^s$  stark unterdrückt ist [140, 94]; eine Kombination beider Messungen erlaubt somit die Trennung dieser Beiträge. Darüberhinaus ist es bei geringem Impulsübertrag ( $Q^2 \lesssim 0.1 \text{ GeV}^2/c^2$ ) möglich, durch eine Messung an  $^4\text{He}$  unter Vorwärtswinkeln den elektrischen *strangeness*-Formfaktor einzeln zu bestimmen [5].

Verschiedene Arbeitsgruppen, angefangen mit der SAMPLE-Kollaboration am Bates-Beschleuniger des Massachusetts Institute of Technology [140], haben nun seit Mitte der 1990er Jahre damit begonnen, die paritätsverletzende Asymmetrie  $A_{PV}$  bei verschiedenen kinematischen Bedingungen und an unterschiedlichen Targetmaterialien zu vermessen. Mit den so gewonnenen Daten ist es inzwischen möglich, sowohl den *strangeness*-Beitrag zu

den Vektorformfaktoren des Nukleons als auch den axialen Formfaktor  $\tilde{G}_A^p$  für drei verschiedene Impulsüberträge –  $0.1 \text{ (GeV/c)}^2$ ,  $0.22 \text{ (GeV/c)}^2$  und  $0.63 \text{ (GeV/c)}^2$  – separat zu extrahieren; ein Überblick über die so ermittelten Werte ist in Abb. 2.3 dargestellt. Die hier vorgestellte Arbeit wird in diesem Zusammenhang insbesondere zur Analyse eines weiteren Datenpunkts bei  $Q^2 = 0.63 \text{ (GeV/c)}^2$  beitragen, der mit dem im nächsten Abschnitt näher beleuchteten A4-Experiment gemessen wurde.

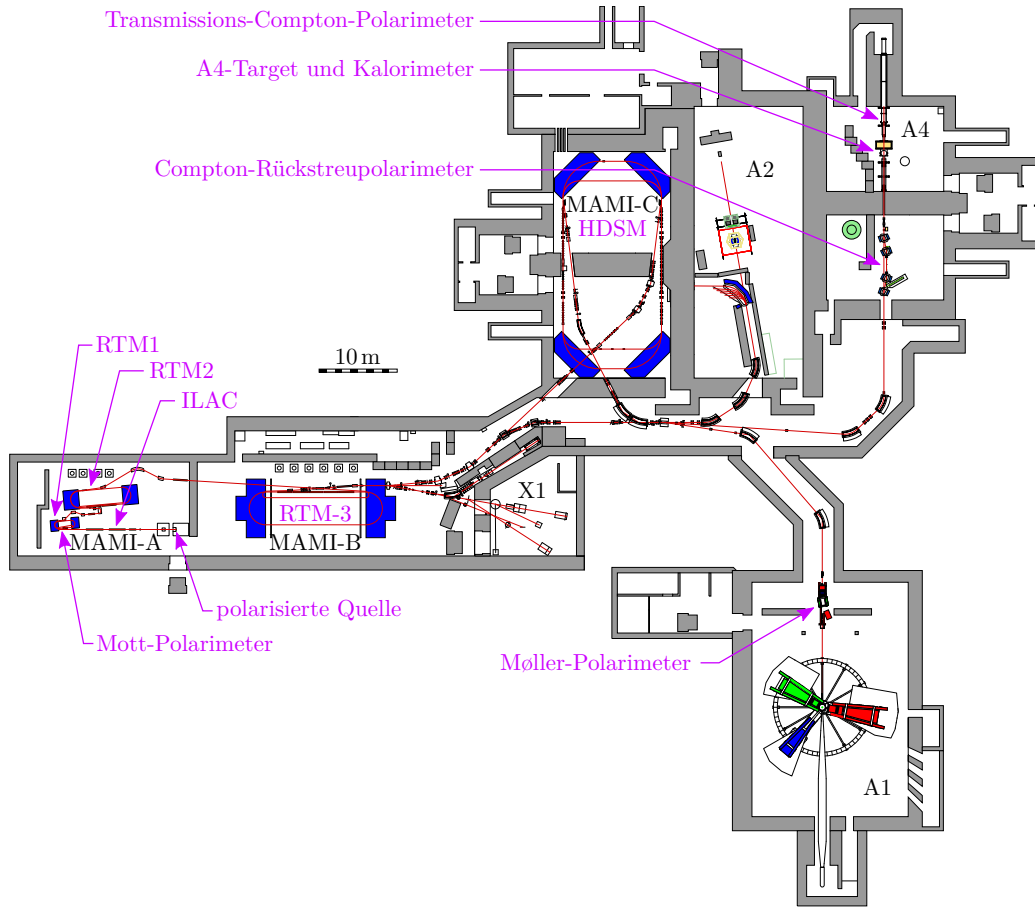
Wie man nun anhand von Abb. 2.3 erkennen kann, sind sowohl  $G_E^s$  als auch  $G_M^s$  relativ klein und innerhalb von ein bis zwei Standardabweichungen mit 0 verträglich. Wenngleich somit die Vorhersagen großer Effekte, die den Ausgangspunkt des *strangeness*-Meßprogramms bildeten, nicht bestätigt werden konnten, stellen die so ermittelten Obergrenzen für den Beitrag der *s*-Quarks und die Verifikation theoretischer Modelle zu den Strahlungskorrekturen des axialen Formfaktors wichtige Randbedingungen für die Datenanalyse der nächsten Generation von Experimenten zur Paritätsverletzung, die eine genaue Bestimmung des schwachen Mischungswinkels  $\theta_W$  zum Ziel haben, dar [15, 23, 7].

## 2.3 Aufbau des A4-Experiments

Das A4-Experiment [123] wird der zweiten Generation von Experimenten zur paritätsverletzenden Elektronenstreuung zugerechnet [182], die explizit die Untersuchung der *strangeness*-Formfaktoren des Nukleons zum Ziel hatten. Es wurde ab 1996 am MAMI-Teilchenbeschleuniger der Johannes Gutenberg-Universität in Mainz aufgebaut und konnte im Jahr 2000 den Regelbetrieb aufnehmen. Eine Übersicht der Beschleunigeranlage mit Hervorhebung der für das Experiment relevanten Komponenten ist in Abb. 2.4 dargestellt.

Das A4-Experiment ist als klassisches einarmiges Streuexperiment aufgebaut, bei dem ein longitudinal polarisierter Elektronenstrahl an einem Target aus unpolarisiertem Wasserstoff oder Deuterium gestreut wird, wobei die gestreuten Elektronen in einem geeigneten Detektor – in diesem Fall ein Kalorimeter – nachgewiesen werden (vgl. Abb. 2.5). Um die paritätsverletzende Asymmetrie zu bestimmen, wird die Helizität des Elektronenstrahls mit einer Frequenz von 50 Hz umgeschaltet und der Unterschied in den Zählraten beobachtet. Die experimentelle Meßgröße des A4-Experiments ist demnach die *Zählratenasymmetrie*

$$A_{Rate} = \frac{N^+ - N^-}{N^+ + N^-} \quad (2.31)$$



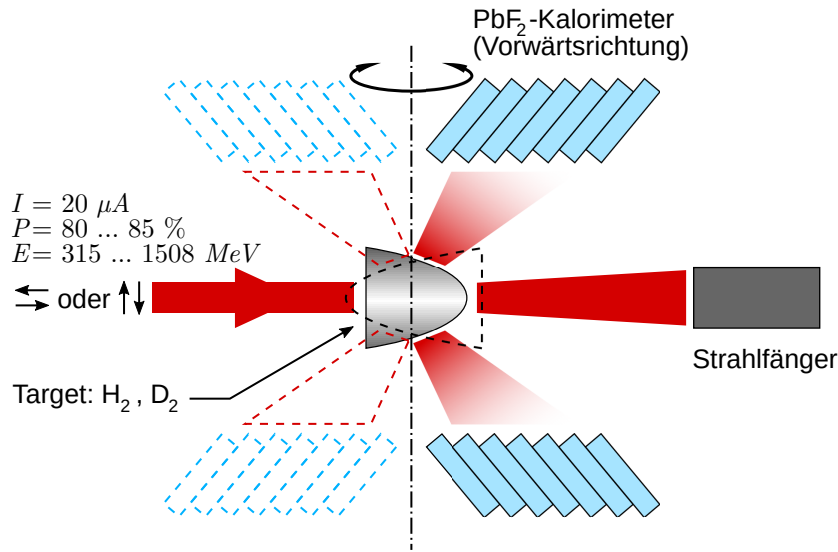
**Abbildung 2.4:** Überblick über die Beschleunigeranlage mit Hervorhebung der für das A4-Experiment relevanten Installationen

die unter idealen Bedingungen in folgendem Zusammenhang mit der gesuchten physikalischen Größe steht:

$$A_{Rate} = P_e^{long} A_{PV} \quad (2.32)$$

Es ist also möglich,  $A_{PV}$  aus den Meßdaten zu extrahieren, sofern eine Absolutmessung der Strahlpolarisation  $P_e^{long}$  vorliegt.

In der Realität werden allerdings Schwankungen der Experimentierbedingungen auftreten, die zu zusätzlichen „falschen“ Asymmetrien in der Zählrate führen können. Es soll daher im folgenden auf die einzelnen Komponenten der Apparatur, die neben dem Target und dem Detektor auch den Beschleuniger an sich umfaßt, eingegangen werden, um aufzuzeigen, wo Quellen solcher Verfälschungen des Meßresultats liegen und mit welchen experimentellen



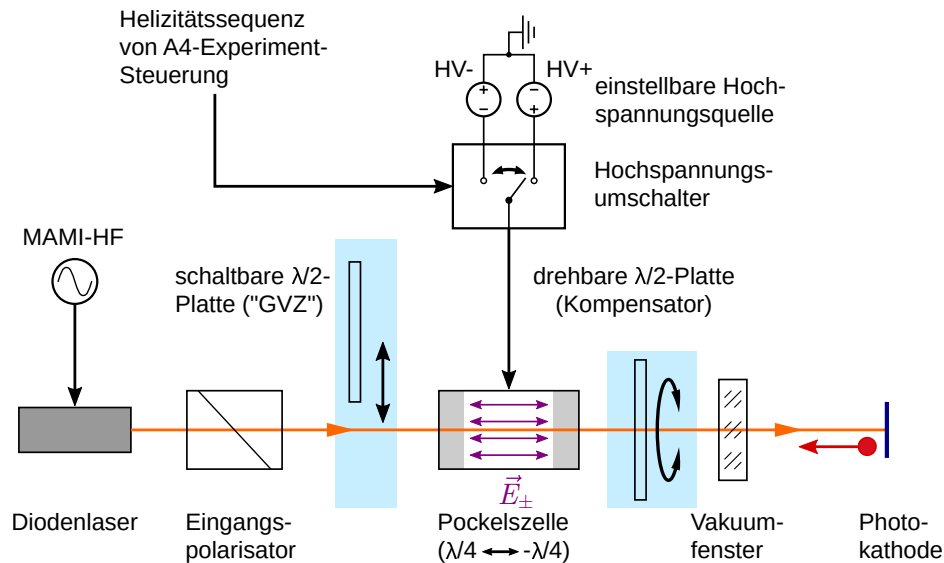
**Abbildung 2.5:** Prinzipielle Funktionsweise des A4-Experiments. Der Teilchenbeschleuniger MAMI liefert longitudinal und transversal polarisierte Elektronen verschiedener Energien, die an einem Target aus flüssigem Wasserstoff oder Deuterium gestreut und in einem Kalorimeter nachgewiesen werden. Das beteiligte Proton bleibt unbeobachtet. Kalorimeter und Target können um die Vertikalachse rotiert werden, um den Bereich der Rückwärtsstreuung abzudecken.

Techniken diese minimiert werden können.

### 2.3.1 Polarisierte Quelle

Die polarisierte Quelle des MAMI-Beschleunigers ist in der Lage, Elektronenstrahlen mit Polarisationsgraden von 80 – 85 % bei Stromstärken von bis zu 240  $\mu A$  zur Verfügung zu stellen. Da sie direkt in die für die Messung erforderliche Helizitätsumschaltung eingebunden ist, ist sie ein integraler Bestandteil des A4-Experiments; sie in Abb. 2.6 schematisch dargestellt. Der Lichtstrahl eines mit der MAMI-Grundfrequenz von 2.45 GHz gepulsten Diodenlasers wird auf einen uniaxial deformierten GaAs-Halbleiterkristall (sog. *strained layer*-, später auch *strained superlattice*-Photokathoden) gerichtet, wo er aufgrund des Photoeffekts Elektronen auslöst. Die so freigesetzten Elektronenpakete werden durch ein elektrisches Feld von 100 kV von der Photokathode abgezogen und dem Beschleuniger zugeführt. Aufgrund dieser Betriebsart hat der Elektronenstrahl von vorneherein eine an die Akzeptanz der verwendeten Linearbeschleuniger angepasste Zeitstruktur, so daß höchstens 5 %





**Abbildung 2.6:** Schema der polarisierten Quelle des MAMI-Beschleunigers nach [11]. Die Photokathode befindet sich auf einem Potential von  $-100$  kV gegenüber dem restlichen Beschleuniger, so daß die ausgelösten Elektronen elektrostatisch von der Quelle abgesaugt werden. Die blau hinterlegten Komponenten dienen der Kompensation apparativer Unvollkommenheiten. Die strahlformende Optik wurde der Einfachheit halber weggelassen.

der Elektronen aufgrund falscher Phasenlage im Beschleuniger verlorengehen bzw. bei der vorbereitenden longitudinalen Strahlkollimierung ausgeblendet werden [10, S. 29].

Für die Erzeugung eines *polarisierten* Elektronenstrahls ist es nun erforderlich, zirkularpolarisiertes Licht auf die Kathode einzustrahlen; dies wird durch zwei polarisationsoptische Elemente erreicht<sup>5</sup>: Zunächst wird mittels eines Prismenpolarisators (des *Eingangspolarisators*) ein sehr reiner linear polarisierter Zustand erzeugt, der dann auf einen Kristall mit elektrisch induzierbarer Doppelbrechung, die *Pockelszelle*, trifft. Diese wirkt wie eine schaltbare  $\lambda/4$ -Platte und ist somit in der Lage, linear polarisiertes Licht geeigneter Orientierung in zirkularpolarisiertes Licht umzuwandeln, wobei die Helizität des Polarisationszustands vom angelegten elektrischen Feld abhängt. Die Pockelszelle wird hierzu von zwei einstellbaren Hochspannungsquellen entgegengesetzter Polarität gespeist, zwischen denen mittels eines elektronischen Schalters gewechselt werden kann. Dieser Schalter wird unmittelbar

<sup>5</sup>Für eine ausführliche Diskussion polarisierten Lichts und polarisationsoptischer Elemente sei auf Abs. 4.1 bzw. 4.2 verwiesen.

von der Kontrollelektronik des A4-Experiments angesteuert, um die vorgesehenen Abfolgen von Helizitätszuständen zu erzeugen.

Die Polarisationsoptik ist von erheblicher Bedeutung für die Problematik der falschen Asymmetrien: Um den notwendigen zirkularen Polarisationszustand des Laserlichts hervorzurufen, muß das auf die Pockelszelle einfallende Licht möglichst rein linearpolarisiert sein, wobei die Polarisations Ebene einen bestimmten Winkel zur optischen Achse der Zelle einnehmen muß; darüberhinaus muß die Hochspannung möglichst genau auf denjenigen Wert eingestellt werden, der für eine Phasenverzögerung von einer Viertelwellenlänge erforderlich ist. Da dies in der Realität nie exakt zu erreichen ist, kann das auf die Kathode auftreffende Licht auch bei guter Justierung des Systems eine Beimischung linearpolarisierten Lichts von bis zu 1 % enthalten [10, S. 110]. Die Schwierigkeit erwächst nun daraus, daß im Normalfall die Orientierung dieser linearen Komponente bei Umschaltung der Hochspannung zwischen zwei Richtungen hin- und herspringen wird, was über drei verschiedene Mechanismen zu einer falschen Asymmetrie führen kann [10]:

- Wenn der Lichtstrahl schräg auf optische Oberflächen des Systems fällt, wird die Transmission aufgrund der Fresnel'schen Formeln von der Orientierung der Polarisations Ebene abhängen. Sollte sich diese bei der Helizitätsumschaltung ändern, wird auch die transmittierte Intensität für beide Helizitäten verschieden sein, wodurch sich ein helizitätskorrelierter Unterschied des Elektronenstroms und somit „trivialerweise“ auch der Zählrate im A4-Detektor ergibt. Dieser Effekt wird auch als *polarisationsinduzierte Transportasymmetrie* (PITA) [38] bezeichnet und liegt üblicherweise in der Größenordnung von  $10^{-6}$ .
- Auch bei entspiegelten optischen Oberflächen kann es zu Mehrfachreflexionen des Strahls innerhalb des optischen Systems kommen, wobei die Teilstrahlen aufgrund der Kohärenzeigenschaften des Laserlichts interferenzfähig sind. Der Strahlfleck auf der Photokathode ist dann das Resultat der Überlagerung mehrerer Teilstrahlen, so daß das Intensitätsprofil und somit auch die Gesamtintensität durch das resultierende räumliche Interferenzmuster definiert sind. Die Größe der interferenzbedingten Intensitätsvariation hängt allerdings von der relativen Orientierung der Polarisationszustände dieser Teilstrahlen ab<sup>6</sup>, die sich – wie bereits beschrieben – bei der Helizitätsumschaltung ändern kann; infolge der so entstehenden Unterschiede in der Lichtintensität können

---

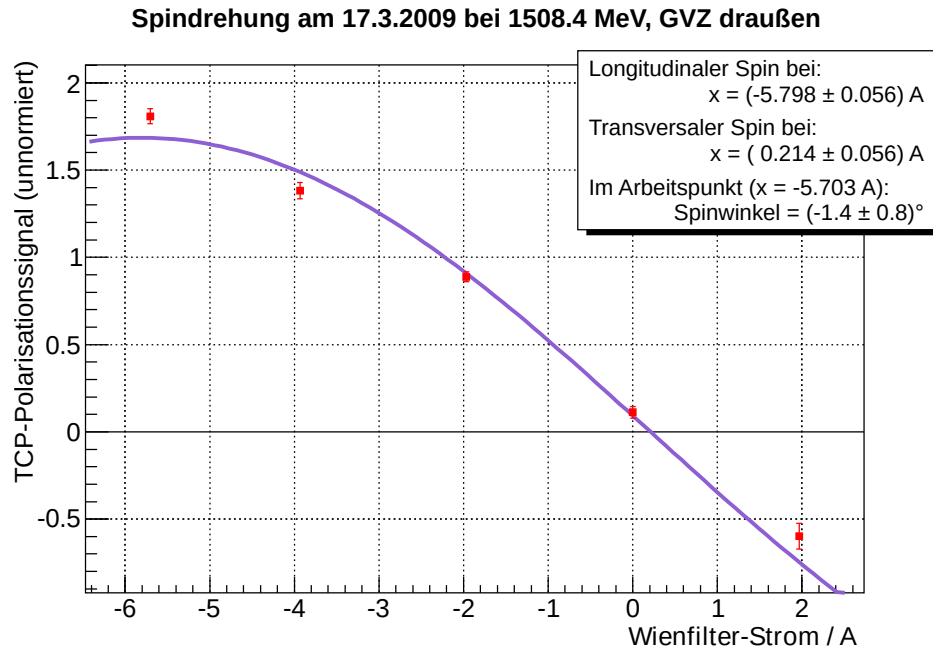
<sup>6</sup>Bei Teilstrahlen orthogonaler Linearpolarisation ergibt sich z. B. gar kein Interferenzmuster.

falsche Asymmetrien von bis zu  $100 \cdot 10^{-6}$  auftreten.

- Aufgrund der uniaxialen Deformation des Kristallgitters steht das Kathodenmaterial unter einer stetigen Spannung, die häufig zur Bildung linienförmiger Kristalldefekte führt (sog. *strain-relaxation*). Bei den für eine Photokathode geeigneten Schichtdicken ist deren Orientierung allerdings nicht isotrop verteilt, sondern vorzugsweise entlang *einer* der kristallographischen Achsen ausgerichtet, so daß die Kathode wie ein dichroitischer Linearpolarisator wirkt. Daher ist die effektive Quantenausbeute von der Orientierung der linearpolarisierten Komponente des Laserlichts abhängig, wodurch sich wiederum eine helizitätskorrelierte Differenz im Elektronenstrom ergeben kann. Dieser Effekt kann bis zu 1 ‰ betragen und ist die dominante Ursache falscher Asymmetrien im A4-Experiment.

Um solche falschen Asymmetrien zu erkennen und zu minimieren, enthält die polarisierte Quelle zwei Halbwellenplatten, von denen die eine drehbar und permanent im Strahlengang montiert ist, während die andere bei Bedarf in den Strahlengang hineingefahren werden kann. Die drehbare Wellenplatte dient hierbei als Kompensator, um die Stromasymmetrie aufgrund der *strain-relaxation* zu minimieren: Durch eine geeignete Orientierung der Wellenplatte kann die Polarisationssebene des linearen Anteils so gedreht werden, daß er für beide Helizitätseinstellungen symmetrisch um die Vorzugsrichtung der Photokathode liegt und somit der Anteil entlang der Vorzugsrichtung gleich groß ist. Dann ist aber auch die effektive Quantenausbeute für beide Helizitätseinstellungen gleich groß, so daß dieser Beitrag zu den falschen Asymmetrien verschwindet.

Die zweite, schaltbare  $\lambda/2$ -Platte rotiert die Polarisationssebene des Laserlichts vor Auftreffen auf die Pockelszelle um  $90^\circ$ , so daß die Wirkung der Pockelszelle invertiert wird, ohne daß hierfür Eingriffe in den Betriebszustand des Beschleunigers oder die Steuerelektronik erforderlich sind. Wird diese Wellenplatte, die auch als „Generalvorzeichen“-Wellenplatte (*GVZ*) bezeichnet wird, in den Strahlengang gefahren, so müssen alle physikalischen Asymmetrien ihr Vorzeichen umkehren, während falsche Asymmetrien in vielen Fällen ihr Vorzeichen beibehalten werden und so identifiziert werden können. Im Rahmen von A4-Strahlzeiten wird zu diesem Zweck typischerweise alle drei bis vier Tage zwischen Strahlbetrieb mit und ohne GVZ gewechselt.



**Abbildung 2.7:** Resultat der Spinrotationsmessung für den Betrieb bei 1.5 GeV. Dargestellt ist das vorverarbeitete Signal des Transmissionspolarimeters, das proportional zur Strahlpolarisation ist, in Abhängigkeit des Wienfilter-Spulenstroms. Im anhand von Spintransportrechnungen ermittelten Sollwert des Stroms weicht der Spinwinkel um weniger als  $2^\circ$  von der longitudinalen Orientierung ab.

### 2.3.2 Wienfilter

Für Experimente mit spinpolarisierten Elektronenstrahlen ist es essentiell, daß der Elektronenspin am Target exakt longitudinal bzw. transversal orientiert ist. Aufgrund des anomalen magnetischen Moments des Elektrons wird die ursprüngliche Spinorientierung nach Durchlaufen der magnetischen Strahlführungselemente eines Teilchenbeschleunigers jedoch im allgemeinen nicht erhalten bleiben, da der Spin stärker als der Impuls präzediert. Es ist zwar möglich, durch eine Anpassung der Endenergie und somit der notwendigen Magnetfelder des Beschleunigers den Präzessionsüberschuß explizit zum Verschwinden zu bringen, allerdings führt dies bei Energien unter 300 MeV zu inakzeptablen Änderungen der Experimentierbedingungen und ist bei noch geringeren Energien unterhalb von 20 MeV, wie sie etwa für den Betrieb des

Mott-Polarimeters erforderlich sind<sup>7</sup>, gar nicht möglich [190].

Aus diesem Grund wurde hinter der polarisierten Quelle ein Spinrotator auf Basis eines Wienfilters installiert [188], bei dem der Elektronenstrahl ein elektrisches und ein magnetisches Feld, die innerhalb desselben Volumens senkrecht zueinander und zur Flugbahn stehen, durchquert. Die Stärke des Magnetfelds wird dabei so gewählt, daß der Spin um den gewünschten Winkel präzediert, während das elektrische Feld die Bahnablenkung durch das magnetische Feld gerade kompensieren soll. Auf diese Weise kann der Spinwinkel um  $\pm 90^\circ$  gedreht werden, womit innerhalb der Beschleunigerebene eine beliebige Spinorientierung an allen Experimentierstationen und auch am Mott-Polarimeter des Beschleunigers eingestellt werden kann. Aufgrund der Bedeutung der Spinorientierung wird im Rahmen des A4-Experiments für jede neue Strahlenergie eine Spinrotationsmessung durchgeführt, bei der mittels des in Abs. 2.3.6 diskutierten Transmissionspolarimeters die Strahlpolarisation am Target in Abhängigkeit der Wienfiltereinstellung gemessen wird. Longitudinale Polarisation liegt dann im Maximum der resultierenden Kurve vor, während transversale Polarisation an den Nulldurchgängen vorliegt (vgl. Abb. 2.7).

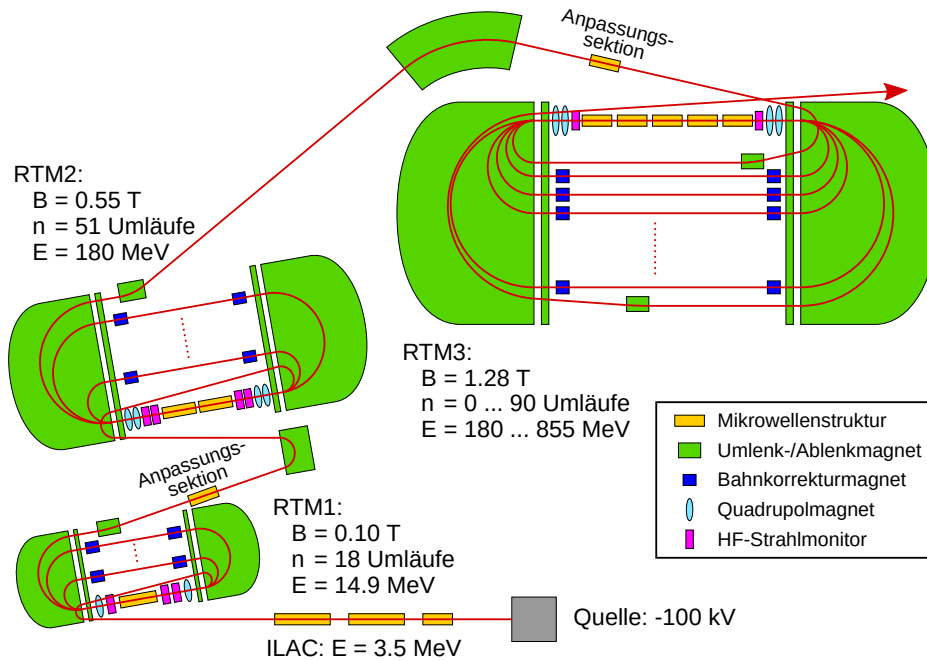
### 2.3.3 Beschleuniger

Das Mainzer Mikrotron (MAMI) ist ein mehrstufiger Elektronenbeschleuniger auf Basis normalleitender Mikrowellenstrukturen; die verschiedenen Stufen sind in Abb. 2.8 und Abb. 2.9 schematisch dargestellt. Die Elektronen werden in der polarisierten Quelle durch eine statische Hochspannung von 100 kV von der Photokathode abgesaugt und durchqueren anschließend einen Vorbeschleuniger, den *Injektor-Linearbeschleuniger* (ILAC), wo sie eine Energie von 3.5 MeV und somit eine Geschwindigkeit von  $\beta = 0.992$  erreichen. Dies ist eine Vorbedingung für die Einspeisung in die eigentliche Beschleunigerkaskade, die aus drei aufeinanderfolgenden *Rennbahn-Mikrotronen* besteht.

Ein Rennbahn-Mikrotron oder auch *race track microtron* (RTM) [203] ist ein Teilchenbeschleuniger, bei dem die Teilchen mittels zweier  $180^\circ$ -Umlenkmagnete immer wieder durch ein und dieselbe Beschleunigerstruktur gelenkt werden, wobei sich der Bahnradius innerhalb der Magnete bei jedem Umlauf vergrößert. Auf diese Weise sind hohe Endenergien möglich, ohne daß eine (ggf. mehrere Kilometer lange) Kette hintereinandergeschalteter Linear-

---

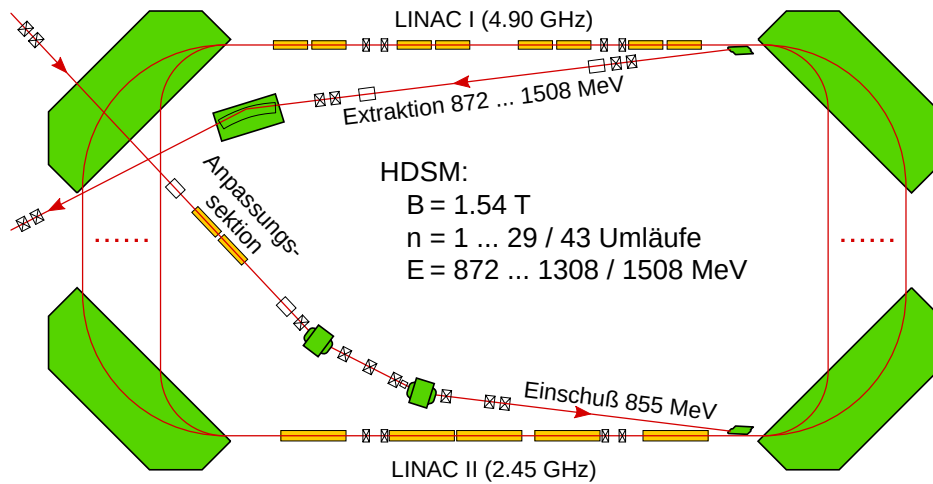
<sup>7</sup>Dieses kann nur die transversale Strahlpolarisation vermessen (vgl. Abs. 3.2), während die Quelle ja longitudinal polarisierte Strahlen erzeugt.



**Abbildung 2.8:** Schematische Darstellung der RTM-Kaskade des MAMI-Teilchenbeschleunigers, entsprechend den Ausbaustufen „MAMI-A“ (RTM1 und RTM2) und „MAMI-B“ (RTM3). Einige strahloptische Komponenten sind der Übersichtlichkeit halber weggelassen.

beschleuniger errichtet werden müßte. Allerdings ist es hierfür erforderlich, daß sich die Geschwindigkeit der Teilchen zwischen zwei Umläufen effektiv nicht mehr ändert: Bei den Beschleunigerstrukturen handelt es sich um eine Abfolge axial gekoppelter Hohlräumresonatoren, in denen sich eine stehende Welle ausbildet [84], deren elektrische Komponente für die beschleunigende Wirkung herangezogen wird. Dies erfordert jedoch, daß die Flugzeit der Elektronen durch jede Resonator-kammer genau einer halben Schwingungsperiode entspricht, damit diese in allen aufeinanderfolgenden Kammern die beschleunigende Halbwelle vorfinden. Die Verwendung solcher Strukturen in einem rezirkulierenden Beschleuniger ist daher nur im relativistischen Bereich möglich, wo die Geschwindigkeit unabhängig von der Anzahl bereits absolvierter Umläufe zur Kammerlänge paßt. Bei niedrigeren Energien – wie sie etwa beim Injektor vorliegen – muß die Länge der Hohlräume hingegen stetig erhöht werden, um an die wachsende Geschwindigkeit angeglichen zu werden (sog. *graded-beta*-Struktur).

Die Beschleunigung mittels einer Mikrowelle bedingt auch die in der Beschreibung der polarisierten Quelle genannte zeitliche Struktur des Elektro-



**Abbildung 2.9:** Schematische Darstellung der dritten Ausbaustufe „MAMI-C“. Nicht aufgeführt sind u. a. die Korrekturmagnete, von denen wie schon bei den RTM je zwei pro dispersiver Bahn installiert sind.

nenstrahls: Da jede Kammer während der Hälfte der Zeit eine abbremsend wirkende elektrische Feldrichtung aufweist, kann der Strahl kein Gleichstrom im eigentlichen Sinne sein; er ist vielmehr in Pakete (sog. *Mikrobunches*) unterteilt, zwischen denen ein so langer Abstand liegt, daß die „falsche“ Halbwelle vollständig übersprungen wird. Da allerdings jede beschleunigende Halbwelle ausgenutzt wird und die pulsierende Zeitstruktur aufgrund der hohen Frequenz von den Teilchendetektoren nicht aufgelöst werden kann, fällt MAMI dennoch in die Kategorie der *Dauerstrichbeschleuniger*, die einen nahezu kontinuierlichen Teilchenstrom zur Verfügung stellen können.

Die erste Stufe „MAMI-A“ besteht aus zwei hintereinandergeschalteten RTM mit 18 bzw. 51 Umläufen, in denen die Elektronen erst auf 14.9 MeV und dann auf 180 MeV beschleunigt werden. Die Beschleunigersektionen haben Längen von 0.8 m und 3.55 m und werden von drei Klystronen mit insgesamt 120 kW Mikrowellenenergie auf einer Frequenz von 2.45 GHz gespeist. Die zweite Stufe „MAMI-B“, das derzeit größte Mikrotron weltweit, hat 90 Rückführungsbahnen, wobei der Strahl nach jeder gerade nummerierten Bahn extrahiert werden kann; somit können Endenergien von 180 – 855 MeV in Schritten von 15 MeV erzielt werden. Um die Energie noch weiter zu erhöhen, wurde 2006 die letzte Stufe „MAMI-C“ in Betrieb genommen. Da das RTM-Konzept aus technischen Gründen<sup>8</sup> allerdings schon mit MAMI-B ausgereizt ist [83], wurde hier erstmals das Konzept des *harmonischen doppelsei-*

<sup>8</sup>insbesondere die Größe und Feldhomogenität der Umlenkmagnete

tigen Mikrotrons (HDSM) umgesetzt [97]. Hierbei wird der Strahl nicht um  $2 \times 180^\circ$ , sondern  $4 \times 90^\circ$  umgelenkt (vgl. Abb. 2.9), was u. a. die Größe der notwendigen Magnete reduziert. In diesem Schema gibt es dann zwei dispersionsfreie Strecken mit Linearbeschleunigern, von denen einer aus Gründen der Strahlstabilität auf der ersten harmonischen Oberwelle von 4.9 GHz betrieben wird. Das HDSM weist 43 Rückführungsbahnen auf, wobei zusätzlich die Möglichkeit geschaffen wurde, den Strahl auf jeder der ersten 30 Bahnen zu extrahieren. Insgesamt ist so eine Beschleunigung des Elektronenstrahls auf Energien bis zu 1.5 GeV möglich.

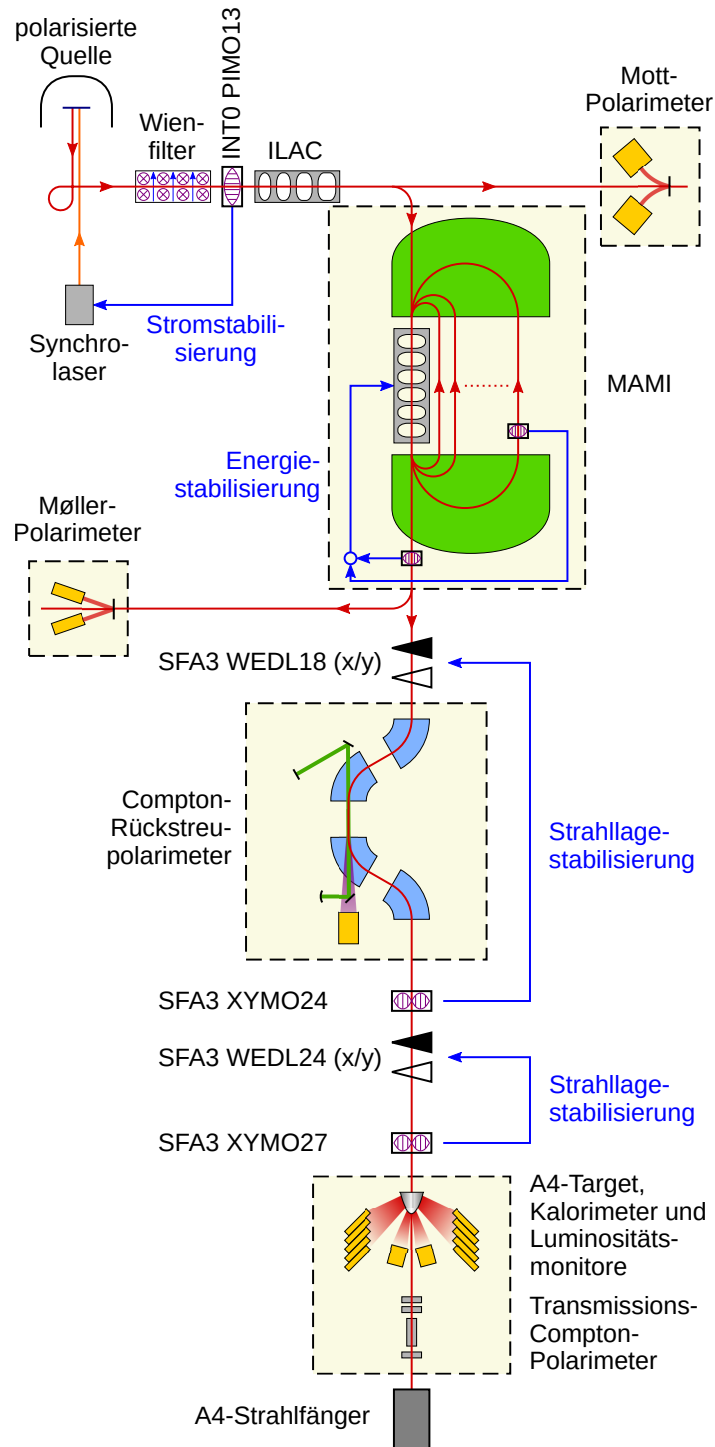
### 2.3.4 Strahlmonitore und Stabilisierungssysteme

Wie bereits am Beispiel der polarisierten Quelle geschildert, ist es für ein Experiment zur Paritätsverletzung von enormer Bedeutung, daß alle Parameter des Teilchenstrahls bei Umschaltung der Helizität unverändert bleiben, so daß Änderungen des Meßergebnisses nur von der Paritätsverletzung herühren können. Da dies in der Praxis nie ganz zu erreichen ist, werden zwei Strategien verfolgt, um solche Änderungen so gering wie möglich zu halten: zum einen wird die Helizität in relativ schneller Abfolge – hier alle 20 ms entsprechend der Netzfrequenz von 50 Hz – umgeschaltet, um die Auswirkung von Langzeitdriften auf das Meßergebnis zu minimieren und gleichzeitig das Netzbrummen als Störquelle auszuschließen. Zum anderen werden die wichtigsten Strahlparameter permanent mittels Sensoren überwacht, wobei die Abweichung vom Sollwert mittels schneller Regelungsmechanismen korrigiert wird; eine Übersicht ist in Abb. 2.10 dargestellt. Viele dieser Systeme wurden eigens für das A4-Experiment entwickelt und in den Beschleuniger integriert. Bei der Messung der meisten Parameter kommen unterschiedliche Systeme für die Absolutmessung – die meistens langsamer ist und oft nur bei Bedarf durchgeführt wird – und die kontinuierliche Überwachung zwecks Stabilisierung zum Einsatz.

#### Strahlstrom

Die Meßsonde, die zur Absolutmessung des Strahlstroms verwendet wird, basiert auf einem als Nulldetektor betriebenen *Saturationskern-* oder *Flux-gate-*Magnetometer und wird daher *pars pro toto* als *Förstersonde* bezeichnet. Die Messung erfolgt, indem ein zum Strahlstrom entgegengesetzt gerichteter Strom erzeugt wird, dessen Größe von einem Regelungsmechanismus variiert wird, bis das über einen ringförmigen Pfad um beide Ströme integrierte Magnetfeld verschwindet. Der so erzeugte Kompensationsstrom ist





**Abbildung 2.10:** Schema der für das A4-Experiment relevanten Installationen an MAMI mit Fokus auf der Messung und Stabilisierung der Strahlparameter

dann genauso groß wie der Strahlstrom, kann jedoch mit einem herkömmlichen Ampèremeter gemessen werden [192, 193]. Da er insbesondere auch den Gleichstromanteil des zu vermessenden Stroms enthält, wird eine solche Anordnung als aktiver Gleichstromtransformator oder *DC current transformer* (*DCCT*) bezeichnet.

Ein solches System ist auf der LINAC-Strecke des RTM3 installiert, hat jedoch nur eine Bandbreite von ca. 0.1 Hz, weshalb es sich nicht für die Stromstabilisierung im Rahmen des A4-Experiments eignet. Für die Beobachtung und Korrektur der Fluktuationen wird daher auf *Phasen-Intensitätsmonitore* (*PIMO*) zurückgegriffen. Hierbei handelt es sich um Mikrowellenresonatoren, in denen die Zeitstruktur des Elektronenstrahls eine  $TM_{010}$ -Schwingungsmoden anregt [84]. Zusammen mit einem Referenzsignal des MAMI-Masteroszillators kann auf diese Weise sowohl die Strahlintensität als auch die Phasenlage der Mikrobunches ermittelt werden. Einer dieser Intensitätsmonitore (PIMO 13) wird verwendet, um die Abweichung des Strahlstroms vom Sollwert zu messen und so ein Korrektursignal zu erzeugen, mit dem die Intensität des Diodenlasers an der polarisierten Quelle nachgeregelt wird. Der niederfrequente Anteil bis ca. 10 Hz kann hierbei über einen Flüssigkristall-Abschwächer und somit ohne Eingriff in den Betriebszustand des Lasers korrigiert werden, während für den darüberliegenden Frequenzbereich eine auf den Treiberstrom der Laserdiode wirkende Elektronik verwendet wird [10]. Auf diese Weise können die falschen Asymmetrien, die von helizitätskorrelierten Intensitätsunterschieden herrühren, um einen Faktor 30 reduziert werden [12].

## Strahllage

Sowohl zur Reduzierung der effektiven Strahlemittanz als auch zur Vermeidung helizitätskorrelierter Positionsschwankungen, die über die Winkelabhängigkeit der Wirkungsquerschnitte ebenfalls zu falschen Asymmetrien führen können, sind an mehreren Stellen des Beschleunigers *XY-Strahllagemonitore* (*XYMO*) installiert. Hierbei handelt es sich um Mikrowellenresonatoren, die auf die  $TM_{110}$ -Schwingungsmoden [84] optimiert sind, da deren Amplitude bei einem in der Nähe des geometrischen Mittelpunkts durchtretenden pulsierenden Gleichstrom nahezu linear vom Abstand zum Mittelpunkt abhängt. Die Signale einiger dieser Monitore werden verwendet, um die Strahllage mittels schneller Ablenkmagnete auf den Sollwert zu regeln.

Um falsche Asymmetrien aufgrund helizitätskorrelierter Positions- und Richtungsschwankungen identifizieren zu können, muß am A4-Target auch der Absolutwert dieser Größen bekannt sein. Hierfür werden die Signale der letzten beiden XYMO vor dem Target unter Verwendung der bekannten Ab-

stände untereinander verrechnet. Die notwendige Kalibration erfolgt, indem der Strahl langsam über ein spezielles Target, bestehend aus zwei parallelen Wolframdrähten mit bekanntem Abstand, gewedelt wird, wobei der in den Drähten influenzierte Strom zusammen mit den Signalen der XYMO aufgezeichnet wird.

### Strahlenergie

Für die Absolutmessung der Strahlenergie wird die transversale Dispersion in den Umlenkmagneten des RTM3 ausgenutzt, um durch eine Messung des Krümmungsradius auf die Energie schließen zu können. Zu diesem Zweck wurde ein kompakter, aus Platzgründen auf eine Frequenz von 9.8 GHz ausgelegter XYMO auf der 73. Rückführungsbahn installiert, dessen Abstand von der LINAC-Strecke des RTM3 bis auf ca. 0.4 mm genau bekannt ist [49]. Für die Energiemessung wird der Strahl zunächst auf der LINAC-Strecke und anschließend mittels kalibrierter Korrektur-Dipolmagnete<sup>9</sup> auch im XYMO 73 zentriert. Über die notwendigen Korrektoreinstellungen kann dann der Krümmungsradius des 73. Umlaufs berechnet werden, woraus sich in Kombination mit der Feldstärke der Umlenkmagnete die Energie auf dieser Rückführungsbahn ergibt. Die Endenergie wird dann durch Interpolation zu derjenigen Bahn, auf der die tatsächliche Extraktion stattfindet, bestimmt. Da die Magnete ein sehr homogenes Feld aufweisen, dessen Stärke zudem mittels einer Kernresonanzsonde präzise vermessen wird, kann so eine Messgenauigkeit von typischerweise 130 keV erzielt werden.

Da diese Messung einen Eingriff in den Beschleunigerbetrieb erfordert und somit keine kontinuierliche Überwachung erlaubt, wurde für die Energiestabilisierung ein anderes System entwickelt, das sich die Energieabhängigkeit der Laufzeit einzelner Mikrobunches im Beschleuniger zunutze macht [102, 97]. Kernkomponenten sind zwei ebenfalls auf 9.8 GHz ausgelegte PIMO, von denen einer auf der letzten genutzten Rückführungsbahn und der andere in der Extraktionsstrahlführung nach dem letzten RTM-Durchlauf installiert ist. Die relative Phasenlage der beiden Ausgangssignale hängt dann von der Laufzeit bei der letzten Durchquerung eines Umlenkmagneten und somit über die Dispersion von der Energie der Elektronen ab. Da die Mikrobunches aufgrund ihrer begrenzten zeitlichen Ausdehnung von 30 – 40 ps [10] die beschleunigende Halbwelle nur zu einem Teil ausnutzen, kann nun die Endenergie der Elektronen durch die relative Phasenlage von Mikrowelle und Teilchenstrahl variiert werden, indem die Bunches hin zu höheren oder geringeren Feldstär-

---

<sup>9</sup>die im MAMI-Jargon als „Wedler“ bezeichnet werden

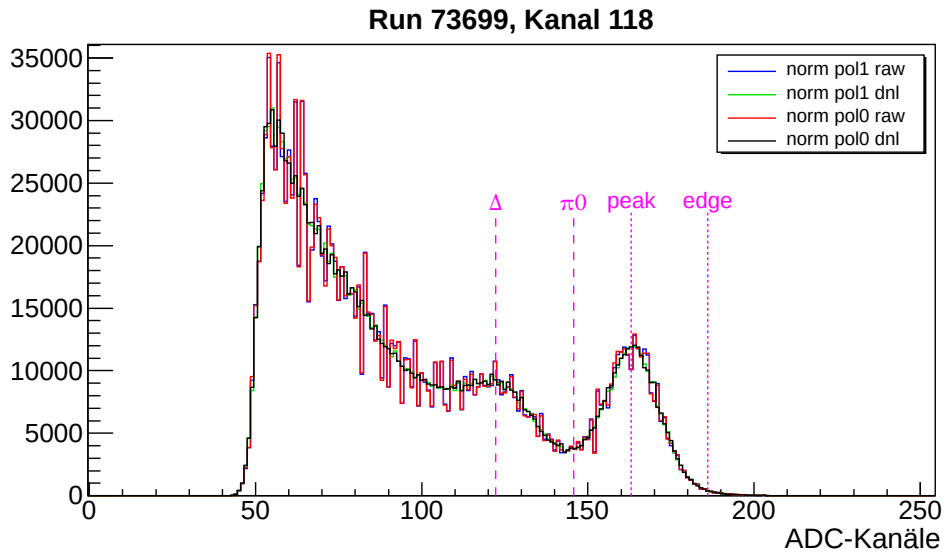
ken innerhalb der Schwingungsperiode verschoben werden. Hierzu wird aus der Laufzeitmessung ein Korrektursignal abgeleitet, mit dem die Phase der Mikrowellensender nachgeregelt wird, um Schwankungen der Strahlenergie auszugleichen. Auf diese Weise gelingt es, die Energie innerhalb einer *rms*-Schwankungsbreite von 1.4 keV konstant zu halten [171]. Die notwendigen Strahlmonitore wurden im Laufe der Zeit auf allen für das A4-Experiment genutzten Extraktionsbahnen installiert. Ein entsprechendes System wurde auch für das HDSM entwickelt [46].

### 2.3.5 Target, Kalorimeter und Luminosität

Im A4-Experiment werden die Elektronen an flüssigem Wasserstoff oder Deuterium gestreut. Je nachdem, ob unter Vorwärts- oder Rückwärtswinkeln gemessen wird, kommt eine Targetzelle mit einer effektiven Targetlänge von 10 cm oder 23 cm entsprechend einer Luminosität von  $0.5 \cdot 10^{38} \text{ cm}^{-2}\text{s}^{-1}$  bzw.  $1.2 \cdot 10^{38} \text{ cm}^{-2}\text{s}^{-1}$  bei 20  $\mu\text{A}$  Strahlstrom [21] zum Einsatz.

Die gestreuten Teilchen werden in einem schnellen totalabsorbierenden Kalorimeter aus 1022 einzeln ausgelesenen  $\text{PbF}_2$ -Kristallen nachgewiesen. Die Kristalle sind in sieben Ringen angeordnet und alle auf den geometrischen Mittelpunkt des Targets ausgerichtet; sie weisen zu diesem Zweck die Form eines Pyramidenstumpfs mit einer Stirnfläche von  $26 \times 26 \text{ mm}^2$ , einer Bodenfläche von  $31 \times 31 \text{ mm}^2$  und einer Länge zwischen 150 mm und 180 mm auf. Das Kalorimeter ist so ausgelegt, daß ein Block von  $3 \times 3$  Kristallen ein Volumen von  $\pm 2$  Molière-Radien in Transversalrichtung ( $R_M = 18 \text{ mm}$ ) und 16 Strahlungslängen in Längsrichtung ( $X_0 = 9.3 \text{ mm}$ ) [154] umfaßt und somit 95 % der Energie eines von einem auftreffenden Teilchen ausgelösten elektromagnetischen Schauers einfangen kann. Das Kalorimeter deckt in Azimutalrichtung den vollen Winkelbereich und in Polarrichtung den Bereich zwischen  $30 - 40^\circ$  bei Vorwärtsstreuung bzw.  $140 - 150^\circ$  bei Rückwärtsstreuung ab; dies entspricht insgesamt einem Raumwinkel von ca. 0.6 sr.

Da das Kalorimeter für den Nachweis nur den Tscherenkoff-Effekt ausnutzt, wird eine sehr kurze Pulsabklingzeit von lediglich 20 ns erreicht. Dies erlaubt es, die gestreuten Teilchen trotz der hohen Raten von bis zu  $10^8 \text{ s}^{-1}$  bei Vorwärtsstreuung an Wasserstoff [123] einzeln nachzuweisen und nach ihrer deponierten Energie zu histogrammieren, wobei zwecks Erfassung der gesamten deponierten Energie die analoge Summe über den getroffenen Kristall und seine acht nächsten Nachbarn gebildet wird. Auf diese Weise ist es möglich, durch geeignete Schnitte im Histogramm die für das A4-Experiment relevanten elastischen Streueignisse vom inelastischen Untergrund abzutrennen (vgl. Abb. 2.11).



**Abbildung 2.11:** Beispiel eines mit dem A4-Kalorimeter aufgenommenen Energiespektrums gestreuter Teilchen. Dargestellt sind die während eines fünfminütigen Datennahmelaufs anlässlich der 1.5 GeV-Strahlzeit *beam101109* aufgenommenen Histogramme für Zentralkristall Nr. 118. Es gibt insgesamt vier Histogramme: zwei für jeden Helizitätszustand („pol0“ und „pol1“), von denen jeweils eines die Rohdaten („raw“) und eines die um Nichtlinearitäten der Erfassungselektronik bereinigten Daten („dnl“) enthält. Eingezeichnet sind außerdem die ermittelten Positionen des elastischen Peaks, der oberen Kante des Histogramms, der Pionenschwelle und der Deltaresonanz.

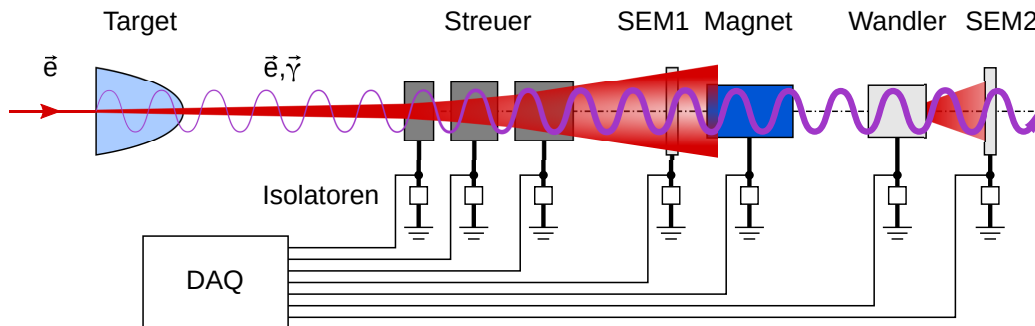
Bei nominellem Strahlstrom wird durch den Elektronenstrahl eine thermische Leistung von ca. 100 W im Target deponiert. Das Kühlsystem ist zwar so dimensioniert, daß es diese Wärmemenge problemlos abführen und den Wasserstoff dennoch auf einer unterkühlten Temperatur von 14 K halten kann; allerdings stellt sowohl das Strahleintrittsfenster als auch das Austrittsfenster der Targetzelle einen „toten Punkt“ für die Kühlzirkulation dar, so daß es insbesondere hier zu thermisch bedingten Dichteschwankungen des Wasserstoffs bis hin zur Blasenbildung durch Kochen kommen kann. Ein wichtiger Faktor, der den idealisierten Zusammenhang nach Gl. 2.32 stört, ist allerdings gerade der Umstand, daß die Luminosität schwanken kann und somit die Rate gestreuter Teilchen alleine kein geeignetes Maß für den Wirkungsquerschnitt darstellt; vielmehr muß die Zählrate wenigstens um Schwankungen der Luminosität bereinigt werden. Zu diesem Zweck sind hinter dem Target acht ebenfalls ringförmig angeordnete Luminositätsmonitore auf Basis von Wasser-Tscherenkoff-Detektoren montiert. Diese decken einen engen Bereich

von Streuwinkeln zwischen  $4.4$  und  $10^\circ$  um die Strahlachse ab und machen sich den sehr genau bekannten Wirkungsquerschnitt der dort dominierenden Møller-Streuung zunutze, um aus der Schwankung der Zählraten auf Schwankungen der Targetdichte zu schließen und so die gemessene Zählratenasymmetrie um diesen Effekt zu bereinigen [77]. Außerdem kann durch die Messung der Luminosität ein drohendes Kochen bereits im Vorfeld erkannt und durch geeignete Anpassungen der Strahlbedingungen vermieden werden, so daß entsprechende Korrekturen gar nicht erst notwendig werden oder wenigstens minimal gehalten werden können.

### 2.3.6 Polarimetrie

Aus Gl. 2.32 wird ersichtlich, daß die Daten des A4-Experiments nur analysiert werden können, wenn eine Absolutmessung der Strahlpolarisation vorliegt; dies war auch der Grund für die Entwicklung des in dieser Arbeit vorgestellten Polarimeters. Vor dessen Fertigstellung war das A4-Experiment hierfür auf an anderer Stelle des Beschleunigers installierte Polarimeter angewiesen, insbesondere das Møller-Polarimeter der A1-Kollaboration (vgl. hierzu auch Abs. 3.2). Dieses Gerät erlaubt eine absolute Bestimmung der Strahlpolarisation mit einer Unsicherheit von  $2.1\%$  [19], liegt allerdings in einer anderen Strahlführung und kann nicht bei den hohen Strömen, wie sie für das A4-Experiment erforderlich sind, betrieben werden. Eine Messung mit diesem Polarimeter unterliegt somit der Einschränkung, daß die gemessene Polarisation sich unter Umständen von derjenigen unterscheidet, die bei den Experimentierbedingungen des A4-Experiments vorliegen würde und ist immer mit einer größeren Unterbrechung des Experimentierbetriebs verbunden; aus diesem Grund wurde sie höchstens einmal pro Woche, manchmal auch nur einmal während der gesamten Strahlzeit durchgeführt.

Um dennoch die Notwendigkeit einer Interpolation zwischen zwei Møller-Messungen zu vermeiden, wurde im Jahr 2002 ein Compton-*Transmissions*-Polarimeter im Bereich des Strahlfängers des A4-Experiments installiert [202], mit dem die Änderung der Strahlpolarisation kontinuierlich überwacht werden kann. Dieses basiert wie auch das in dieser Arbeit vorgestellte Rückstreupolarimeter auf der Polarisationsabhängigkeit des Compton-Wirkungsquerschnitts (vgl. Abs. 3.1), wobei die Rollen von zu vermessenem Strahl und Analysator allerdings vertauscht sind: Das Wasserstoff-Target wirkt als Radiator, in dem aufgrund der longitudinalen Strahlpolarisation zirkularpolarisierte Bremsstrahlungsphotonen entstehen, die auf ein Target aus polarisier-



**Abbildung 2.12:** Schemazeichnung des A4-Transmissions-Comptonpolarimeters. Der Elektronenstrahl erzeugt polarisierte Bremsstrahlung im Target und in drei Graphitstreuern, die zudem möglichst viele Elektronen von der Strahlachse entfernen sollen. Anschließend treffen die Photonen auf den Magneten, wo ihre helizitätsabhängige Transmission für die Polarisationsmessung ausgenutzt wird. Hinter dem Magneten befindet sich ein Wandler, in dem die Photonen leichter nachzuweisende geladene Teilchen erzeugen sollen. Das ursprüngliche Konzept sah vor, zwei dedizierte Aluminiumscheiben als Sekundärelektronenmonitore (SEM1/2) zu verwenden; allerdings wurde festgestellt, daß von anderen Bauteilen teilweise bessere Signale abgeleitet werden können.

ten Elektronen in Form eines starken  $\text{Sm}_2\text{Co}_{17}$ -Permanentmagneten<sup>10</sup> treffen. Da der Wirkungsquerschnitt der Compton-Streuung von der relativen Spinorientierung beider Teilchen abhängt, wird der Magnet je nach Strahlhelizität eine andere „Transparenz“ für die Photonen aufweisen, wobei der Unterschied proportional zum Polarisationsgrad der Photonen und somit auch zu demjenigen der Strahlelektronen ist. Um den Transmissionsgrad zu messen, sind vor und hinter dem Magneten verschiedene (unpolarisierte) Festkörpertargets im Strahlengang montiert, die aufgrund der auftreffenden Elektronen und Photonen elektrisch aufgeladen werden (siehe hierzu Abb. 2.12). Durch eine Messung der resultierenden Sekundärelektronenströme jeweils eines geeigneten Bauteils vor und hinter dem Magneten kann eine Größe abgeleitet werden, die proportional zur Photonentransmission ist. Dieses Polarimeter erzielt innerhalb kurzer Zeit eine sehr hohe statistische Genauigkeit, kann aber nur die Schwankung der Polarisation messen, da sich die Analysierstärke des Systems, deren Kenntnis für eine Absolutmessung erforderlich ist, nicht genau bestimmen läßt. Eine wichtige Ursache hierfür besteht darin, daß sich der Magnet aufgrund der auftreffenden Strahlung aufheizt und dadurch eine – für Messungen unzugängliche – Entmagnetisierung erleidet; darüberhinaus

<sup>10</sup>Vacuumschmelze GmbH & Co. KG, Grüner Weg 37, 63450 Hanau

sind aber auch die genannten Proportionalitätskonstanten nur sehr ungenau bekannt und zudem sehr empfindlich auf die Strahllage.

Ein weiteres Instrument, das zur Verfolgung von Driften in der Strahlpolarisation eingesetzt wird, ist das Mott-Polarimeter hinter der polarisierten Quelle [189]. Dieses Polarimeter ist sehr ausgereift und kann bei der nominalen Stromstärke von  $20\ \mu\text{A}$  eingesetzt werden, liefert jedoch ebenfalls aufgrund von Unsicherheiten bei der Bestimmung der Analysierstärke nur eine relative Messung der Polarisation (vgl. Abs. 3.4). Dennoch kann hierdurch die Interpolation zwischen den Møller-Messungen verbessert und eine unabhängige Prüfung der Resultate des Transmissionspolarimeters erzielt werden.



# Kapitel 3

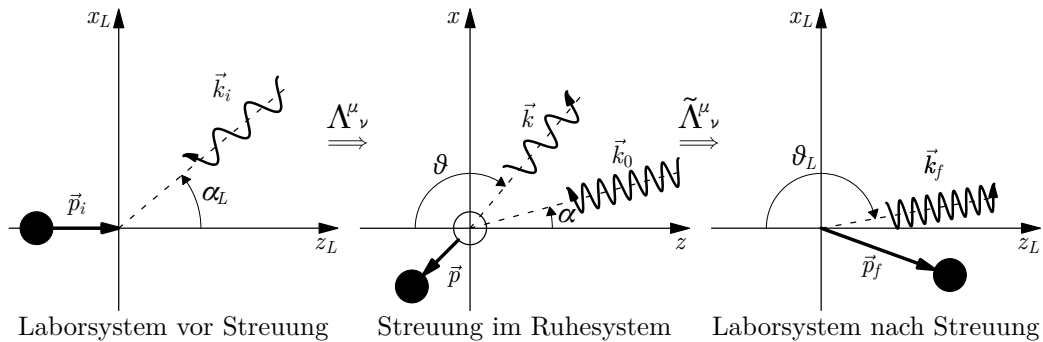
## Das *internal-cavity*-Polarimeter

Dieses Kapitel soll einen Überblick über das für das A4-Experiment aufgebaute Compton-Rückstreupolarimeter geben. Um die Anforderungen und Rahmenbedingungen zu verdeutlichen, sollen hierfür zunächst noch einmal die Grundlagen der Compton-Streuung und der Compton-Rückstreupolarimetrie dargelegt werden. Anschließend wird der allgemeine Aufbau von Compton-Rückstreupolarimetern beschrieben und zuletzt auf den spezifischen Aufbau des A4-Polarimeters eingegangen, mit dem zum ersten Mal das *internal-cavity*-Konzept für Compton-Rückstreupolarimetrie verwirklicht wird.

### 3.1 Compton-Rückstreupolarimetrie

Es ist sinnvoll, die Polarisationsbestimmung in einem Beschleunigerexperiment möglichst unmittelbar vor dem Punkt der Wechselwirkung des Strahls mit dem Target und bei denselben Strahlbedingungen wie das eigentliche Experiment durchzuführen, da andernfalls systematische Unterschiede zwischen der während der Messung vorliegenden Strahlpolarisation und der im regulären Experimentierbetrieb vorliegenden nicht ausgeschlossen werden können; als Ursachen solcher Abweichungen kommen etwa der Strahltransport vom Ort der Messung bis zum Target oder eine von den Betriebsbedingungen des Beschleunigers abhängige Strahlpolarisation schon an der Quelle oder deren Änderung bei Durchflug durch den Beschleuniger in Frage. Außerdem sollte die Polarisationsmessung innerhalb kurzer Zeit die erwünschte statistische Genauigkeit erreichen, damit auch mögliche Driften des Polarisationsgrades erkannt werden. Im A4-Experiment wird zur Polarisationsmessung die Compton-Rückstreupolarimetrie eingesetzt [48, 92, 117], mit der die meisten dieser Anforderungen erfüllt werden können.

Compton-Rückstreupolarimetrie ist eine seit langem erprobte Methode, um die longitudinale und transversale Polarisation von Elektronenstrahlen zu bestimmen [14, 157]. Hierbei wird ausgenutzt, daß der Wirkungsquerschnitt



**Abbildung 3.1:** Zusammenhang zwischen den kinematischen Größen der Compton-Streuung im Laborsystem und im Ruhesystem des Elektrons. Das Elektron bewege sich in positive Richtung entlang der  $z$ -Achse; die Streuebene sei der Einfachheit halber gleich der  $xz$ -Ebene. Der Streuwinkel ist gemäß der in [121] und [157] verwendeten Konvention so definiert, daß Rückstreuung für  $\vartheta = \pi$  vorliegt.

der Compton-Streuung einen Anteil enthält, der sowohl von der Elektronen- als auch von der Lichtpolarisation abhängt; somit kann bei Nachweis der gestreuten Teilchen mittels geeigneter Detektoren durch einen Vergleich der Streuwahrscheinlichkeiten für verschiedene Lichtpolarisationen die Elektronenpolarisation ermittelt werden. Diese Methode der Polarimetrie hat gegenüber anderen Verfahren wie der Mott- und der Møller-Polarimetrie einige Vorteile, die in Abschnitt 3.2 aufgezeigt werden.

### 3.1.1 Kinematik

Als Compton-Streuung bezeichnet man die elastische Streuung eines Photons an einem freien Spin-1/2-Teilchen [42, 43]. Da sowohl die Kinematik als auch der Wirkungsquerschnitt dieses Prozesses am einfachsten im Ruhesystem des Elektrons betrachtet werden können, sollen an dieser Stelle auch die Beziehungen zwischen den kinematischen Größen im Labor- und Ruhesystem kurz abgeleitet werden, wobei die Größen zunächst gemäß der vereinfachten Konvention nach Abb. 3.1 definiert seien; außerdem wird die übliche Notation verwendet, in der  $c = 1$  gesetzt wird.

Ein Photon, das im Laborsystem mit einer Energie  $k_i$  unter einem Winkel  $\alpha_L$  auf ein Elektron mit Impuls  $p_i$  bzw. Geschwindigkeit  $\beta = v/c$  trifft, erscheint im Ruhesystem des Elektrons unter einem gestauchten Winkel  $\alpha$  und mit einer blauverschobenen Energie  $k_0$ . Die Beziehung zwischen den

Vierervektoren des Photons im Laborsystem und im Ruhesystem,

$$k_i^\mu = \begin{pmatrix} k_i \\ -k_i \sin \alpha_L \\ 0 \\ -k_i \cos \alpha_L \end{pmatrix} \quad \text{bzw.} \quad k_0^\mu = \begin{pmatrix} k_0 \\ -k_0 \sin \alpha \\ 0 \\ -k_0 \cos \alpha \end{pmatrix} \quad (3.1)$$

ist nun durch die Lorentztransformation

$$\Lambda^\mu{}_\nu = \begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 & -\gamma\beta \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\gamma\beta & 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix} \quad (3.2)$$

gegeben:

$$k_0^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu k_i^\nu \quad (3.3)$$

Durch direkten Vergleich des Ergebnisses von Gl. 3.3 mit der Definition in Gl. 3.1 erhält man dann die Transformation der Photonenenergie und des Einfallswinkels vom Labor- ins Ruhesystem:

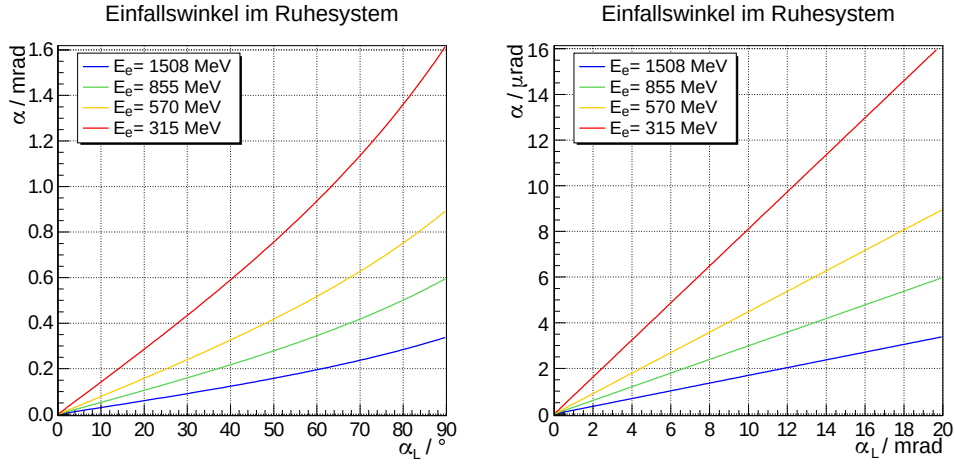
$$\begin{aligned} k_0 &= \gamma k_i (1 + \beta \cos \alpha_L) \\ \alpha &= \arcsin \frac{(1/\gamma) \sin \alpha_L}{1 + \beta \cos \alpha_L} = \arccos \frac{\beta + \cos \alpha_L}{1 + \beta \cos \alpha_L} \end{aligned} \quad (3.4)$$

Betrachtet man nun die Größe des Ruhesystem-Einfallswinkels  $\alpha$  für verschiedene im A4-Experiment typische Elektronenenergien, wie sie in Abb. 3.2 dargestellt ist, so stellt man fest, daß dieser für alle physikalisch sinnvollen Werte (d. h. bis hin zu senkrechtem Einfall im Laborsystem) weniger als 2 mrad beträgt und für die im Experiment tatsächlich auftretenden Winkel ( $\alpha_L \lesssim 20$  mrad, vgl. Abs. 3.1.5) mit maximal 20  $\mu$ rad vernachlässigbar klein ist. Es erscheint daher zulässig, bei diesen und den folgenden Betrachtungen näherungsweise von einem exakt entlang der  $z$ -Achse einfallenden Photon ( $\alpha = 0$ ) auszugehen.

Der Streuprozess an sich läßt sich nun relativ einfach mittels Energie- und Impulserhaltung berechnen. Es gilt:

$$k_0^\mu + p_0^\mu = k^\mu + p^\mu \quad (3.5)$$

wobei der Anfangsimpuls des Photons gemäß Gl. 3.1 definiert ist und die anderen Impulse wie folgt gegeben sind (vgl. auch Abb. 3.1):



**Abbildung 3.2:** Einfallswinkel des Photons im Ruhesystem des Elektrons als Funktion des Laborsystem-Einfallswinkels  $\alpha_L$  für verschiedene Elektronenenergien, bei denen das A4-Experiment betrieben wurde: links für den vollen Winkelbereich bis  $90^\circ$ , rechts für einen in der Compton-Polarimetrie realistischen Winkelbereich bis ca. 20 mrad.

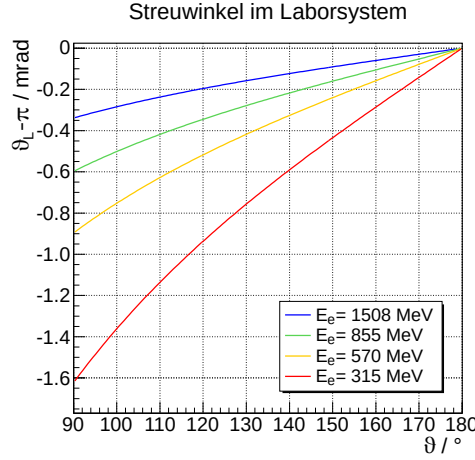
$$p_0^\mu = \begin{pmatrix} m_0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad p^\mu = \begin{pmatrix} \sqrt{p^2 + m_0^2} \\ p_{trans} \\ 0 \\ p_{long} \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad k^\mu = \begin{pmatrix} k \\ k \sin \vartheta \\ 0 \\ -k \cos \vartheta \end{pmatrix} \quad (3.6)$$

Setzt man diese Definitionen in Gl. 3.5 ein, so erhält man folgenden Ausdruck für die Energie des gestreuten Photons in Abhängigkeit von Anfangsenergie und Streuwinkel:

$$k = \frac{k_0}{1 + \frac{k_0}{m_0} (1 - \cos \vartheta)} \quad (3.7)$$

Um diese Beziehung ins Laborsystem zu transformieren, muß zunächst die Rücktransformation vom Ruhe- ins Laborsystem

$$\tilde{\Lambda}^\mu{}_\nu = \begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 & \gamma\beta \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \gamma\beta & 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix} \quad (3.8)$$



**Abbildung 3.3:** Transformation des Photonen-Streuwinkels vom Ruhesystem in das Laborsystem in Analogie zu Abb. 3.2. Der Streuwinkel ist so definiert, daß Rückstreuung für  $\vartheta = 180^\circ$  bzw.  $\pi$  vorliegt (vgl. Abb. 3.1).

auf den Vierervektor des gestreuten Photons im Ruhesystem angewandt werden:

$$k_f^\mu = \tilde{\Lambda}^\mu{}_\nu k^\nu \quad (3.9)$$

Hieraus ergibt sich die Transformation der Photonenenergie und des Streuwinkels ins Laborsystem:

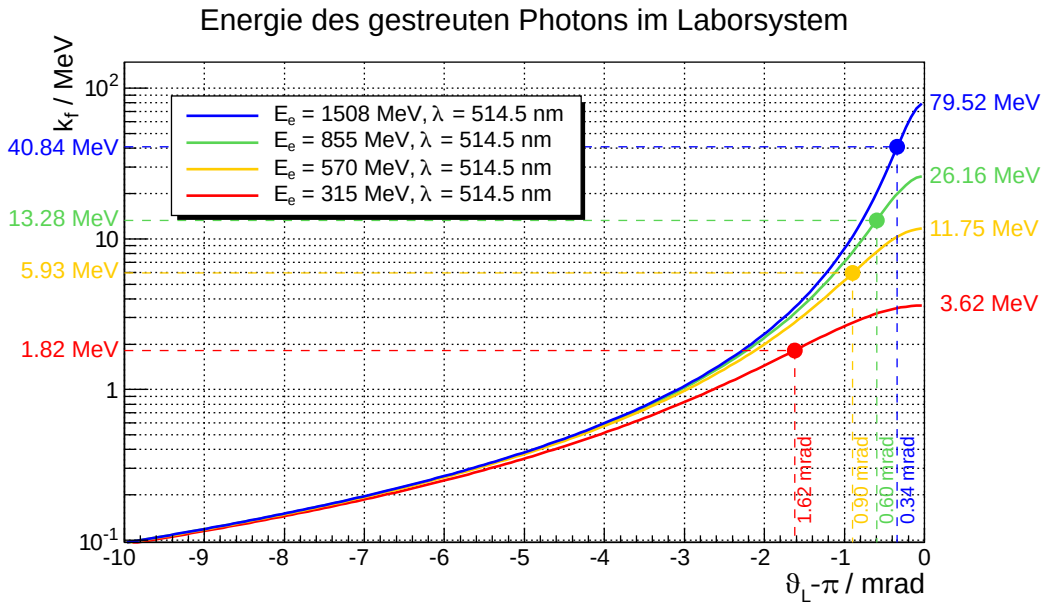
$$\begin{aligned} k_f &= \gamma k (1 - \beta \cos \vartheta) \\ \vartheta_L &= \arcsin \frac{(1/\gamma) \sin \vartheta}{1 - \beta \cos \vartheta} = \arccos \frac{-\beta + \cos \vartheta}{1 - \beta \cos \vartheta} \end{aligned} \quad (3.10)$$

Da aber für den Streuwinkel eigentlich die inversen Beziehungen benötigt werden, geht man nun noch analog zur Transformation des Einfallswinkels in das Ruhesystem vor und wendet  $\Lambda^\mu{}_\nu$  auf den Vierervektor des gestreuten Photons im Laborsystem ( $k_f^\mu$ ) an; hierdurch erhält man:

$$\sin \vartheta = \frac{(1/\gamma) \sin \vartheta_L}{1 + \beta \cos \vartheta_L} \quad \text{bzw.} \quad \cos \vartheta = \frac{\beta + \cos \vartheta_L}{1 + \beta \cos \vartheta_L} \quad (3.11)$$

Der Ausdruck für die Energie des gestreuten Photons im Laborsystem ergibt sich dann durch Einsetzen dieser Teilergebnisse in Gl. 3.7:

$$k_f = \frac{(1 + \beta) k_i}{1 + \beta \cos \vartheta_L + \frac{k_i}{\gamma m_0} (1 - \cos \vartheta_L)} \quad (3.12)$$



**Abbildung 3.4:** Energie des gestreuten Photons im Laborsystem für die bereits genannten Experimentierbedingungen und eine realistische Energie des einfallenden Photons. Eingezeichnet ist zusätzlich der „charakteristische Winkel“  $\vartheta_L^* = 1/\gamma$ , der einem Streuwinkel von  $90^\circ$  im Ruhesystem entspricht und bei dem die Energie des Photons ungefähr auf die Hälfte der Maximalenergie, wie sie bei Rückstreuung ( $\vartheta_L = \pi$ ) vorliegt, abgefallen ist.

Betrachtet man nun diese letzten beiden Resultate, wie sie in Abb. 3.3 und Abb. 3.4 für verschiedene im A4-Experiment verwirklichte Meßbedingungen dargestellt sind, so erkennt man, daß einerseits nahezu der gesamte Winkelbereich im Ruhesystem auf einen sehr engen Kegel um die Rückstreurichtung gestaucht wird und andererseits auch die Energie der rückgestreuten Photonen nur innerhalb eines sehr engen Bereichs um die Rückstreurichtung oberhalb der Nachweisgrenze der im Bereich der Hochenergiephysik gängigen Detektormaterialien liegt.

### 3.1.2 Wirkungsquerschnitt und Analysierstärke

Mehrere Autoren [110, 148, 60, 80] haben Formeln für den Wirkungsquerschnitt des Compton-Prozesses angegeben, jedoch wurde eine vollständige Theorie, die alle Polarisierungseffekte berücksichtigt, erst von Lipps und Tolhoek [121] entwickelt. Da die Detektoren für die gestreuten Teilchen als pola-

risationsunempfindlich betrachtet werden können<sup>1</sup>, ist die für die Compton-Rückstreupolarimetrie relevante Form des Wirkungsquerschnitts nun diejenige, die nur von den Polarisierungen im Anfangszustand abhängt und bei der über alle möglichen Polarisierungen im Endzustand summiert wurde. Im Ruhesystem des Elektrons lautet sie wie folgt:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega}(\vartheta, \varphi) = \frac{d\sigma_0}{d\Omega}(\vartheta) + q \frac{d\sigma_1}{d\Omega}(\vartheta) - v P_e^{long} \frac{d\sigma_2^{long}}{d\Omega}(\vartheta) - v P_e^{trans} \frac{d\sigma_2^{trans}}{d\Omega}(\vartheta, \varphi) \quad (3.13)$$

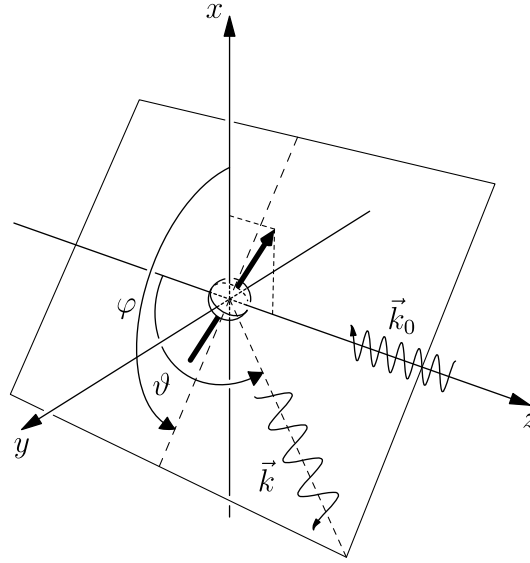
Hierbei ist

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma_0}{d\Omega}(\vartheta) &= \frac{1}{2} r_0^2 \frac{k^2}{k_0^2} ((1 + \cos^2 \vartheta) + (k_0 - k)(1 - \cos \vartheta)) \\ \frac{d\sigma_1}{d\Omega}(\vartheta) &= \frac{1}{2} r_0^2 \frac{k^2}{k_0^2} \sin^2 \vartheta \\ \frac{d\sigma_2^{long}}{d\Omega}(\vartheta) &= -\frac{1}{2} r_0^2 \frac{k^2}{k_0^2} (k_0 + k)(1 - \cos \vartheta) \cos \vartheta \\ \frac{d\sigma_2^{trans}}{d\Omega}(\vartheta, \varphi) &= \frac{1}{2} r_0^2 \frac{k^2}{k_0^2} k (1 - \cos \vartheta) \sin \vartheta \cos \varphi \end{aligned} \quad (3.14)$$

und  $r_0$  der klassische Elektronenradius. Alle Energien und Impulse sind in „natürlichen“ Einheiten (d. h. mit  $\hbar = 1$ ,  $c = 1$  und  $m_e = 1$ ) angegeben und die Definition der kinematischen Größen entspricht der in Abb. 3.5 dargestellten, „vervollständigten“ Konvention. Die Transformation dieser Ausdrücke ins Laborsystem ist unter Zuhilfenahme der im vorigen Abschnitt abgeleiteten Beziehungen problemlos möglich. Die Größen  $q$  und  $v$  sind *intensitätsnormierte Stokesparameter*, die den Polarisationszustand des Photons beschreiben (siehe Abs. 4.1). Ein Zustand mit  $q = \pm 1$  und  $v = 0$  etwa stellt rein linear horizontal bzw. vertikal polarisiertes Licht dar, wohingegen ein Zustand mit  $q = 0$  und  $v = \pm 1$  rein rechts- bzw. linkszirkulares Licht beschreibt.

Der Wirkungsquerschnitt besteht somit aus vier Bestandteilen, von denen nur die letzten beiden, die sowohl von der Licht- als auch von der Elektronenpolarisation abhängen, für die Polarimetrie nutzbar sind. Compton-Rückstreupolarimeter arbeiten daher mit rein zirkularem Licht, um die Verdünnung dieser Polarisationsempfindlichkeit durch den zweiten Term zu vermeiden. Von den verbleibenden Anteilen sind diejenigen, die nur von  $\vartheta$  abhängen, in Abb. 3.6 dargestellt. Wie man sieht, ist der spinunabhängige Anteil

<sup>1</sup>Kalorimetrische Detektoren registrieren die gesamte Energie der einfallenden Teilchen, unabhängig von deren Polarisationszustand.



**Abbildung 3.5:** Schema zur Definition der kinematischen Größen der Compton-Streuung im Ruhesystem des Elektrons. Das einfallende Photon mit Impuls  $\vec{k}_0$  bewege sich in negative  $z$ -Richtung und habe nach der Streuung den Impuls  $\vec{k}$ . Die transversalen Koordinatenachsen sind so gewählt, daß der Elektronenspin in der  $xz$ -Ebene liegt.

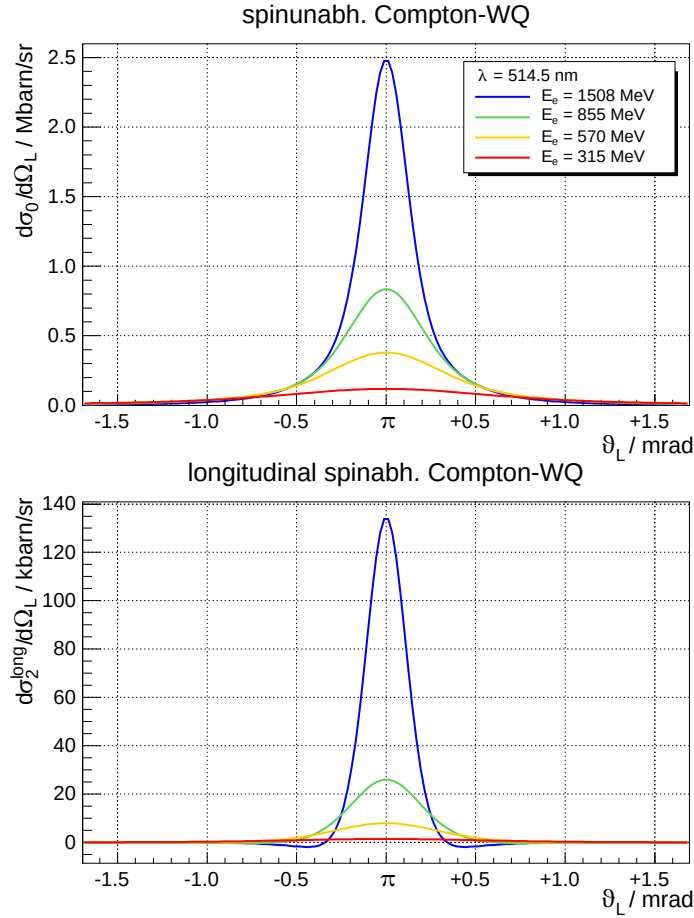
gegenüber dem spinabhängigen Anteil dominant. Zur Bestimmung der Elektronenpolarisation aus den Meßdaten werden daher Einzelspinasymmetrien gebildet, bei denen dieser konstante Anteil herausfällt. Wechselt man etwa zwischen rechts- und linkszirkularem Licht und nimmt man für beide Helizitäten betragsmäßig gleiche Polarisationsgrade  $v_{\pm} = \pm P_L$  an, so ist die Asymmetrie durch

$$\begin{aligned}
 A(\vartheta, \varphi) &:= \frac{\frac{d\sigma_+}{d\Omega}(\vartheta, \varphi) - \frac{d\sigma_-}{d\Omega}(\vartheta, \varphi)}{\frac{d\sigma_+}{d\Omega}(\vartheta, \varphi) + \frac{d\sigma_-}{d\Omega}(\vartheta, \varphi)} \\
 &= -P_L P_e^{long} \frac{\frac{d\sigma_2^{long}}{d\Omega}(\vartheta)}{\frac{d\sigma_0}{d\Omega}(\vartheta)} - P_L P_e^{trans} \frac{\frac{d\sigma_2^{trans}}{d\Omega}(\vartheta, \varphi)}{\frac{d\sigma_0}{d\Omega}(\vartheta)}
 \end{aligned} \tag{3.15}$$

gegeben.

Wie aus Abb. 3.6 ersichtlich, werden die Photonen in einen sehr engen Winkelbereich um die Rückwärtsrichtung gestreut. Wenn also ein großer Detektor zum Nachweis der Photonen verwendet wird, wie es etwa bei einer kalorimetrischen Messung der Fall ist, so wird über den azimuthalen Winkel





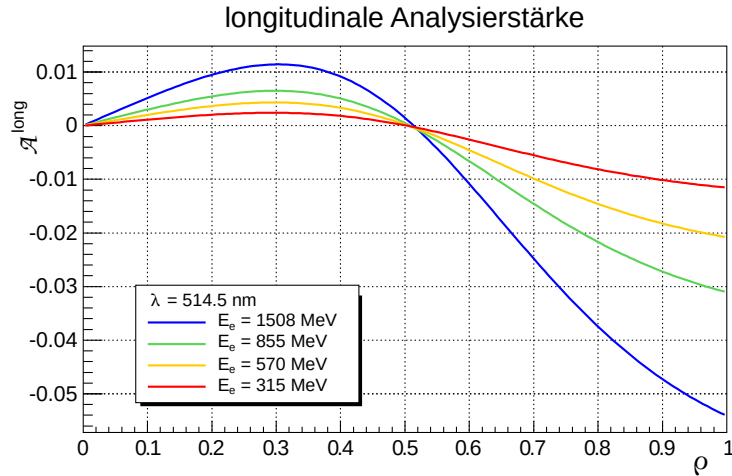
**Abbildung 3.6:** Darstellung des polarisationsunabhängigen Wirkungsquerschnitts und des von der longitudinalen Elektronenpolarisation abhängigen Anteils als Funktion des Streuwinkels im Laborsystem für verschiedene Elektronenenergien, bei denen das A4-Experiment betrieben wurde. Der Streuwinkel  $\vartheta$  ist so definiert, daß für  $\vartheta = \pi$  Rückstreuung vorliegt (vgl. Abb. 3.5).

$\varphi$  integriert, und man erhält die *longitudinale Asymmetrie*

$$A^{long}(\varrho) = -P_L P_e^{long} \frac{\frac{d\sigma_2^{long}}{d\varrho}(\varrho)}{\frac{d\sigma_0}{d\varrho}(\varrho)} \quad (3.16)$$

In diesem Ausdruck wurde der Streuwinkel  $\vartheta$  durch die reduzierte Energie des gestreuten Photons im Laborsystem,  $\varrho$ , ersetzt<sup>2</sup>, die als das Verhältnis der Energie nach der Streuung zur maximal möglichen Energie, wie sie bei

<sup>2</sup>Die beiden Größen sind äquivalent, da es sich um ein Zweikörperproblem handelt.



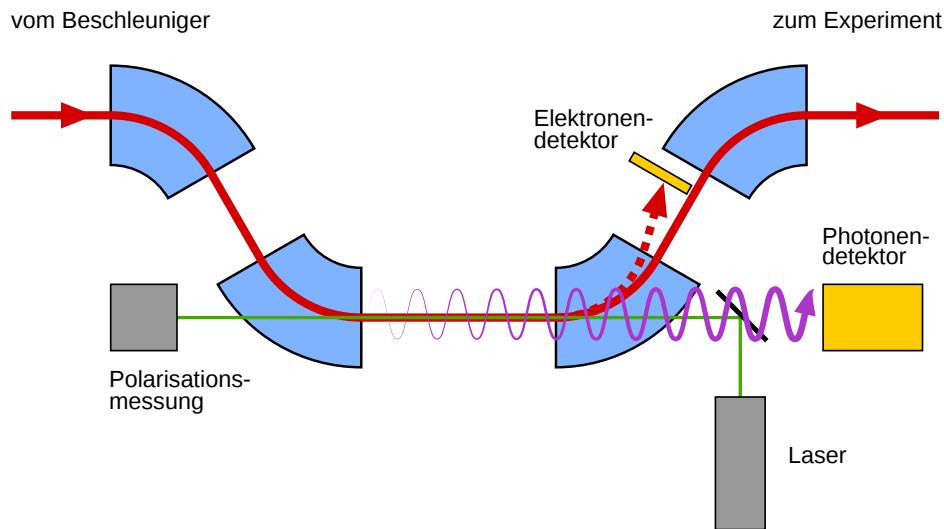
**Abbildung 3.7:** Darstellung der longitudinalen Analysierstärke als Funktion der reduzierten Energie des gestreuten Photons,  $\rho$ . Der Maximalwert wird für den Fall der Rückstreuung ( $\rho = 1$  bzw.  $\vartheta = \pi$ ) erreicht; zusätzlich gibt es einen Nulldurchgang bei  $\rho \approx 0.5$ .

Rückstreuung ( $\vartheta = \pi$ ) auftritt, definiert ist [157]:

$$\rho := \frac{k_f}{k_{f,max}} \quad (3.17)$$

Wie man erkennt, ist die Asymmetrie proportional zur Polarisierung des Elektronenstrahls und des Laserstrahls, so daß die gesuchte (longitudinale) Strahlpolarisation zugänglich ist. Der Proportionalitätsfaktor wird als *Analysierstärke*  $\mathcal{A}$  bezeichnet und ist von fundamentaler Bedeutung bei der Charakterisierung und dem Vergleich polarimetrischer Methoden, insbesondere bei der Bestimmung der Meßzeit, die zum Erreichen einer vorgegebenen statistischen Genauigkeit erforderlich ist (vgl. Abs. 3.1.5). Im Falle der Compton-Rückstreupolarimetrie ist sie durch ein einfaches Verhältnis aus Anteilen des Wirkungsquerschnitts gegeben und kann im Rahmen der Quantenelektrodynamik nahezu beliebig genau berechnet werden; die Born'sche Näherung gemäß Gl. 3.14 ist in Abb. 3.7 dargestellt

Die transversale Strahlpolarisation ist prinzipiell ebenfalls für die Compton-Rückstreupolarimetrie zugänglich, allerdings muß hierfür auch die räumliche Verteilung des rückgestreuten Photonenstrahls – wenigstens in Form bestimmter Verteilungsmomente – gemessen werden.



**Abbildung 3.8:** Schematische Darstellung des grundlegenden Aufbaus von Compton-Rückstreupolarimetern. In diesem Beispiel ist das Polarimeter in einer magnetischen Schikane aus vier Dipolmagneten (blau) installiert. Die Komponenten des optischen Systems sind in grau, die des Detektorsystem in orange gehalten.

### 3.1.3 Funktionsweise von Compton-Rückstreupolarimetern

Nach der Vorstellung der physikalischen Grundlagen der Compton-Streuung soll noch kurz auf die Umsetzung dieses Prinzips in modernen Polarimetern eingegangen werden. Wie bereits festgestellt, basiert die Compton-Polarimetrie darauf, daß Photonen an dem zu vermessenden Elektronenstrahl gestreut und anschließend in Detektoren nachgewiesen werden. Die hierfür benötigten funktionalen Komponenten sind schematisch in Abb. 3.8 dargestellt; sie können allgemein in die Kategorien *Strahlführung*, *optisches System* und *Detektorsystem* eingeteilt werden.

#### Strahlführung

Wie man aus Abb. 3.3 und 3.6 ersehen kann, werden im Falle relativistischer Elektronenenergien aufgrund der doppelten Lorentz-Transformation nahezu alle Photonen in einen engen Winkelbereich um die Bewegungsrichtung des Elektronenstrahls gestreut. Es ist daher notwendig, diese rückgestreuten Photonen räumlich vom Elektronenstrahl zu trennen, um überhaupt ein Detektorsystem für die Photonen aufbauen zu können; dies macht die Strahlfüh-

zung des Elektronenstrahls zu einem wichtigen Bestandteil des Polarimeters selbst. Im allgemeinen werden Compton-Rückstreupolarimeter in magnetische Schikanen eingebaut, die den Strahl seitlich versetzen (vgl. Abb. 3.8). Dies hat den Vorteil, daß zwischen den inneren Dipolmagneten auf natürliche Weise eine klar abgegrenzte Wechselwirkungszone entsteht und zudem jegliche Spinpräzession zwischen dem Ort der Polarimetrie und dem eigentlichen Experiment nahezu eliminiert wird. An ringförmigen Beschleunigern bietet es sich allerdings an, das Polarimeter zwischen zwei der sowieso benötigten radialen Ablenkmagnete zu installieren.

### Optisches System

Da die Compton-Polarimetrie auf der Streuung von Photonen an dem zu vermessenden Elektronenstrahl basiert, ist zunächst eine intensive Quelle polarisierten Lichts erforderlich; diese wird generell durch ein Lasersystem realisiert. Neben dieser Quelle muß das optische System noch Komponenten enthalten, die den Polarisationszustand des Lichts in den gewünschten rein zirkular polarisierten Zustand überführen und die Umschaltung der Lichtelicität ermöglichen (vgl. Abs. 4.2). Hierfür ist zudem eine Apparatur zur Messung des aktuellen Polarisationszustands erforderlich – auch deshalb, weil die Lichtpolarisation direkt in die Analysierstärke eingeht (siehe Gl. 3.16) und somit bekannt sein muß. Dieser Aspekt des optischen Systems ist der wesentliche Schwerpunkt der vorliegenden Arbeit und wird in Kapitel 4 eingehend behandelt.

### Detektorsystem

Die Energie der Photonen, die im Anfangszustand im Bereich des sichtbaren Lichts liegt, kann nach der Streuung je nach Energie des Elektronenstrahls mehrere MeV bis hin zu GeV betragen, so daß sie mit den üblichen Detektoren für Teilchenstrahlung nachgewiesen werden können. Sofern ein longitudinal polarisierter Strahl vermessen werden soll, wird für den Nachweis in den meisten Fällen ein schnelles Szintillations-Kalorimeter verwendet [152, 25, 57, 160]. Bei transversal polarisierten Strahlen, wo auch die räumliche Verteilung der Photonen bekannt sein muß, ist allerdings wenigstens ein bzgl. der Mittelebene symmetrisch segmentiertes Kalorimeter [16, 156] erforderlich, idealerweise wird jedoch ein fein ortsauflösender Detektor (wie z. B. ein Mikrostreifendetektor mit vorgeschaltetem Radiator [50]) verwendet.

Zusätzlich zum Nachweis der gestreuten Photonen hat es sich als essentiell für die Polarimetrie im Bereich hoher Meßgenauigkeiten (in der Größenord-

nung von  $\lesssim 1\%$  relative Unsicherheit) herausgestellt, auch die gestreuten Elektronen nachzuweisen. Hierbei wird die Dispersion in der hinteren Hälfte der Strahlführung ausgenutzt, um mittels eines ortsauflösenden Elektronendetektors die Energie der an der Compton-Streuung beteiligten Elektronen zu bestimmen. In vielen Fällen wird hierfür ebenfalls ein Mikrostreifendetektor verwendet [57, 160, 144], aber auch andere Detektorkonzepte – beim hier vorgestellten Polarimeter etwa ein szintillierendes Faserbündel – wurden bereits erfolgreich eingesetzt. Der Elektronendetektor kann im einfachsten Fall zur Unterdrückung unkorrelierten Untergrunds im Photonendetektor (z. B. aus Kollisionen von Teilchen des Strahlhalos mit der Strahlführung) benutzt werden; der wichtigste Einsatz liegt aber im Betrieb als Photonen-Tagger: Durch Forderung einer Koinzidenz zwischen dem Photonenkalorimeter und *einem bestimmten* Ortskanal des Elektronendetektors steht ein „virtuell monochromatischer“ Photonenstrahl zur Verfügung, mit dem systematische Untersuchungen über das Antwortverhalten des Photonendetektors durchgeführt werden können (vgl. Abs. 3.3.3 bzw. Abs. 3.4.1 und Abs. 3.4.3).

### 3.1.4 Bestimmung der Polarisierung

Wie in Abs 3.1.2 festgestellt, ist die zu bestimmende Polarisierung des Elektronenstrahls  $P_e^{long}$  über die Compton-Asymmetrie gemäß Gl. 3.16 zugänglich, sofern Analysierstärke und Lichtpolarisation bekannt sind. Tatsächlich gemessen wird aber nicht die in der genannten Gleichung aufgeführte *Wirksamkeitsquerschnitt*-Asymmetrie, sondern eine Asymmetrie in den *Zählraten* der rückgestreuten Photonen. Je nachdem, wie der Photonendetektor beschaffen ist, gibt es nun drei verschiedene Methoden, die beiden Größen miteinander in Verbindung zu bringen und somit die Polarisierung zu bestimmen; sie werden in Anlehnung an [17] als *integrale*, *energiegewichtete* und *differentielle* Methode bezeichnet und sollen im folgenden kurz vorgestellt werden.

#### Integrale Methode

Bei der integralen Methode wird einfach die Gesamtzahl  $N_+$  bzw.  $N_-$  der während der beiden Licht-Helizitätszustände im Detektor nachgewiesenen Photonen aufgezeichnet; die so gebildete Asymmetrie ist dann

$$A_{exp}^{int} = \frac{N_+ - N_-}{N_+ + N_-} \quad (3.18)$$

wobei die zu erwartenden Photonenzahlen durch

$$N_{\pm} = \mathcal{L}_{\pm} T_{\pm} \int_{\varrho_{min}}^1 \epsilon(\varrho) \frac{d\sigma_{\pm}}{d\varrho} d\varrho \quad (3.19)$$

oder, unter Ausnutzung von Gl. 3.16, durch

$$N_{\pm} = \mathcal{L}_{\pm} T_{\pm} \int_{\varrho_{min}}^1 \epsilon(\varrho) \frac{d\sigma_0}{d\varrho} (1 \mp P_L P_e^{long} \mathcal{A}^{long}(\varrho)) d\varrho \quad (3.20)$$

gegeben sind. Hierbei ist  $\varrho_{min}$  die untere Nachweisschwelle der Datennahmelektronik (in Einheiten der maximalen Rückstreu-Energie),  $\epsilon(\varrho)$  die energieabhängige Nachweiseffizienz des Detektors<sup>3</sup>,  $\mathcal{L}_{\pm}$  die Luminosität des Aufbaus und  $T_{\pm}$  die Messungsdauer während der beiden Licht-Helizitätszustände; außerdem wurden, wie schon für Gl. 3.16, gleiche Polarisationsgrade  $v_{\pm} = \pm P_L$  vorausgesetzt. Wenn man nun noch die (vernünftige) Annahme gleicher Luminositäten und Messungsdauern,

$$T_+ = T_- = T \quad , \quad \mathcal{L}_+ = \mathcal{L}_- = \mathcal{L}$$

macht, ergibt sich folgender Zusammenhang zwischen der experimentell beobachteten *Zählraten-Asymmetrie* und der Analysierstärke des Compton-Prozesses:

$$A_{exp}^{int} = -P_L P_e^{long} \frac{\int_{\varrho_{min}}^1 \epsilon(\varrho) \frac{d\sigma_0}{d\varrho} \mathcal{A}^{long}(\varrho) d\varrho}{\int_{\varrho_{min}}^1 \epsilon(\varrho) \frac{d\sigma_0}{d\varrho} d\varrho} \quad (3.21)$$

Die gesuchte Strahlpolarisation kann demnach aus der gemessenen Zählratenasymmetrie bestimmt werden, wenn sowohl Lichtpolarisation  $P_L$  als auch die *experimentelle Analysierstärke*

$$\mathcal{A}_{exp}^{int} := \frac{\int_{\varrho_{min}}^1 \epsilon(\varrho) \frac{d\sigma_0}{d\varrho} \mathcal{A}^{long}(\varrho) d\varrho}{\int_{\varrho_{min}}^1 \epsilon(\varrho) \frac{d\sigma_0}{d\varrho} d\varrho} \equiv \langle \mathcal{A}^{long}(\varrho) \rangle_{\epsilon, \sigma} \quad (3.22)$$

bekannt sind:

$$P_e^{long} = -\frac{A_{exp}^{int}}{P_L \mathcal{A}_{exp}^{int}} \quad (3.23)$$

Wie man sehen kann, ist die Meßgröße in diesem Fall proportional zum mit der Nachweiseffizienz und dem Wirkungsquerschnitt gewichteten Mittelwert

---

<sup>3</sup>die als polarisationsunabhängig angenommen wird; alles andere wäre ein Widerspruch zur Annahme in Abs. 3.1.2

der theoretischen Analysierstärke. Dies ist von Nachteil, weil die Asymmetrie aufgrund des Vorzeichenwechsels von  $\mathcal{A}^{long}$  bei  $\varrho \approx 0.5$  (s. Abb. 3.7) durch den Beitrag der niederenergetischen Photonen verdünnt wird.

### Energiegewichtete Methode

Ein Ansatz, den Nachteil der integralen Methode zu vermeiden, besteht darin, statt der Gesamtzahl die Gesamtenergie der Photonen während jedes Helizitätszustands aufzusummieren. Dies setzt die Verwendung eines kalorimetrischen Detektors voraus, eignet sich aber besonders für Situationen mit hohen Raten rückgestreuter Photonen, wo eine Registrierung einzelner Zählereignisse nicht mehr möglich ist. Da nun diejenigen Photonen mit hoher Energie, bei denen auch die Analysierstärke am größten ist, stark gewichtet werden und andererseits die niederenergetischen Photonen, bei denen die Analysierstärke das umgekehrte Vorzeichen hat, kaum zur Bilanz beitragen, kann der o. g. „Verdünnungseffekt“ größtenteils unterdrückt werden. Die gemessene Asymmetrie wird nun zwischen den in beiden Helizitätszuständen im Detektor deponierten Energien, deren Erwartungswert durch

$$E_{\pm} = \mathcal{L}_{\pm} T_{\pm} \int_{\varrho_{min}}^1 k_f \epsilon(\varrho) \frac{d\sigma_{\pm}}{d\varrho} d\varrho \quad (3.24)$$

gegeben ist (wobei  $k_f = \varrho k_{f,max}$ , vgl. Gl. 3.17), gebildet:

$$A_{exp}^{e.w.} = \frac{E_+ - E_-}{E_+ + E_-} = -P_L P_e^{long} \frac{\int_{\varrho_{min}}^1 \varrho \epsilon(\varrho) \frac{d\sigma_0}{d\varrho} \mathcal{A}^{long}(\varrho) d\varrho}{\int_{\varrho_{min}}^1 \varrho \epsilon(\varrho) \frac{d\sigma_0}{d\varrho} d\varrho} \quad (3.25)$$

Die experimentelle Analysierstärke ist somit:

$$\mathcal{A}_{exp}^{e.w.} = \langle \mathcal{A}^{long}(\varrho) \rangle_{\varrho, \epsilon, \sigma} \quad (3.26)$$

### Differentielle Methode

Das Problem der Asymmetrieverdünnung kann vollständig eliminiert werden, wenn man für jedes eintreffende Photon einzeln die Energie registriert und somit tatsächlich Spektren der rückgestreuten Photonen in Form eines Histogramms aufzeichnet. In diesem Fall gibt es für jeden einzelnen Histogrammkanal  $[\varrho_i; \varrho_{i+1}]$  eine erwartete Photonenzahl

$$n_{\pm}^i = \mathcal{L}_{\pm} T_{\pm} \int_{\varrho_i}^{\varrho_{i+1}} \epsilon(\varrho) \frac{d\sigma_{\pm}}{d\varrho} d\varrho \quad (3.27)$$

und somit auch eine Asymmetrie

$$\begin{aligned}
 A_{exp}^{diff;i} &= \frac{n_+^i - n_-^i}{n_+^i + n_-^i} = -P_L P_e^{long} \frac{\int_{\varrho_i}^{\varrho_{i+1}} \epsilon(\varrho) \frac{d\sigma_0}{d\varrho} \mathcal{A}^{long}(\varrho) d\varrho}{\int_{\varrho_i}^{\varrho_{i+1}} \epsilon(\varrho) \frac{d\sigma_0}{d\varrho} d\varrho} \\
 &=: -P_L P_e^{long} \mathcal{A}_{exp}^{diff;i}
 \end{aligned} \tag{3.28}$$

die mit der tatsächlich gemessenen Zählratenasymmetrie verglichen werden kann, um den Polarisationsgrad zu ermitteln. Dieser kann dann einerseits als gewichtetes Mittel der so gewonnenen Einzel-Polarisationsgrade

$$P_e^{long;i} = -\frac{A_{exp}^{diff;i}}{P_L \mathcal{A}_{exp}^{diff;i}} \tag{3.29}$$

berechnet werden, andererseits kann man aber auch die Zählratenasymmetrien  $A_{exp}^{diff;i}$  direkt verwenden, um die Strahlpolarisation in Form eines Fitparameters durch Anpassung eines Modells  $A_{exp}(\varrho)$  an die Meßdaten zu bestimmen; in beiden Fällen trägt jeder Histogrammkanal „konstruktiv“ zum Endergebnis bei.

Wie man sehen kann, ist bei allen genannten Verfahren eine hinreichend genaue Kenntnis des Detektor-Antwortverhaltens – hier nur dargestellt durch die Nachweiseffizienz  $\epsilon(\varrho)$ , in der Praxis aber auch in Form von Energieauffö-  
 sung, Signalverstärkung oder sogar Eigenschaften des Aufbaus wie etwa Aperturen – erforderlich, um die Meßdaten korrekt zu interpretieren. Dies ist eine besondere Herausforderung bei den beiden ersten Verfahren, wo die Messung selbst nur *eine* Größe – die Asymmetrie an sich – liefert. Hier ist es notwendig, den Detektor und alle Faktoren, die zum Untergrund beitragen können, entweder durch akkurat modellierte Monte-Carlo-(*MC*-)Simulationen zu charakterisieren, oder durch dedizierte Messungen mit energieaufgelöstem Nachweis jedes einzelnen Ereignisses experimentell zu bestimmen. Dies kann unter Umständen eine Abweichung von den nominellen Experimentierbedingungen (z. B. den Betrieb bei einer geringeren Stromstärke und somit Ereignisrate) oder sogar den Einsatz eines anderen Detektors erforderlich machen. Problematisch ist auch, daß zeitliche Änderungen dieser Größen nicht von einer Änderung der Strahlpolarisation unterschieden werden können, was zu einer erheblichen systematischen Unsicherheit führt.

Bei der differentiellen Methode hingegen steht ein vollständiges Energiespektrum der rückgestreuten Photonen zur Verfügung, aus dessen Form auch schon während des Experimentierbetriebs Änderungen der experimentellen Analysierstärke, wie sie z. B. durch Driften der Detektorverstärkung oder



Schwankungen der Strahlparameter entstehen können, erkennbar sind. Man kann somit teilweise direkt Fehlerursachen identifizieren und ggf. korrigieren oder aber zumindest im Rahmen einer Qualitätskontrolle die entsprechenden Daten von der Analyse ausschließen. Weiterhin sind die meisten Parameter der Analyse, wie etwa die untere Schwelle  $\varrho_{min}$ , nicht durch die Apparatur festgelegt, sondern können während der Analyse noch nachträglich variiert werden. Wenngleich auch hier das Antwortverhalten des Detektors und Effekte der Meßapparatur wie etwa Aperturen und absorbierende Materialien berücksichtigt werden müssen<sup>4</sup> und generell bei allen Methoden regelmäßig separate Messungen zur Bestimmung des Untergrunds notwendig sind, ist die differentielle Methode vom Standpunkt der systematischen Unsicherheit deutlich vorteilhafter als die anderen beiden Methoden; ihr Nachteil ist allerdings, daß sie durch die Notwendigkeit des Einzelereignisnachweises nicht für Experimente mit hohen Rückstreuraten in Frage kommt.

### 3.1.5 Meßzeit

Ein wichtiges Kriterium bei der Wahl der Meßmethode (und somit auch des Analyseverfahrens) ist die Meßzeit, die zum Erreichen einer bestimmten statistischen Genauigkeit erforderlich ist. Um hier einen Vergleich durchführen zu können, ist es zunächst einmal notwendig, einen Ausdruck für die statistischen Unsicherheiten der jeweiligen Methode abzuleiten; dies soll exemplarisch für die integrale Methode dargestellt werden.

Aus Gl. 3.23 sieht man, daß die statistische Unsicherheit der (hier longitudinalen) Elektronenpolarisation durch

$$\sigma_{P_e} = \left| \frac{dP_e}{dA_{exp}} \right| \sigma_{A_{exp}} \quad (3.30)$$

gegeben ist, so daß gilt:

$$\frac{\sigma_{P_e}}{P_e} = \frac{\sigma_{A_{exp}}}{A_{exp}} \quad (3.31)$$

Die statistische Unsicherheit der experimentellen Zählratenasymmetrie ergibt sich durch Gauß'sche Fehlerfortpflanzung aus den Unsicherheiten der jeweiligen Gesamt-Ereigniszahlen

$$\sigma_{N_{\pm}} = \sqrt{N_{\pm}} \quad (3.32)$$

<sup>4</sup>Dies hat einen beträchtlichen Teil der parallelen Doktorarbeit [48] ausgemacht.

Setzt man in den entsprechenden Ausdruck die erwarteten Photonenzahlen gemäß Gl. 3.20 ein und verwendet die Definitionen

$$T_{tot} := T_+ + T_- = 2T$$

$$\sigma_{eff} := \int_{\varrho_{min}}^1 \epsilon(\varrho) \frac{d\sigma_0}{d\varrho} d\varrho$$

so ergibt sich die folgende Beziehung zwischen der notwendigen Meßzeit  $T_{tot}$  und der gewünschten relativen statistischen Unsicherheit der Polarisation,  $\sigma_{P_e}/P_e$ :

$$T_{tot}^{int} = \frac{1 - P_L^2 P_e^2 \langle \mathcal{A}^{long}(\varrho) \rangle_{\epsilon, \sigma}^2}{\left(\frac{\sigma_{P_e}}{P_e}\right)^2 \sigma_{eff} \mathcal{L} P_L^2 P_e^2 \langle \mathcal{A}^{long}(\varrho) \rangle_{\epsilon, \sigma}^2} \quad (3.33)$$

$$\approx \frac{1}{\left(\frac{\sigma_{P_e}}{P_e}\right)^2 \sigma_{eff} \mathcal{L} P_L^2 P_e^2 \langle \mathcal{A}^{long}(\varrho) \rangle_{\epsilon, \sigma}^2}$$

Die Näherung ist zulässig, weil die theoretische Analysierstärke nur im Bereich weniger Prozent liegt (vgl. Abb. 3.7) und ihr Mittelwert aufgrund des Vorzeichenwechsels nochmals deutlich kleiner ist; das Quadrat des Mittelwerts im Zähler kann dann gegenüber der 1 vernachlässigt werden.

In Analogie hierzu kann man entsprechende Ausdrücke auch für die energiegewichtete und differentielle Methode ableiten [17]:

$$T_{tot}^{e.w.} \approx \frac{1}{\left(\frac{\sigma_{P_e}}{P_e}\right)^2 \sigma_{eff} \mathcal{L} P_L^2 P_e^2 \langle \mathcal{A}^{long}(\varrho) \rangle_{\varrho, \epsilon, \sigma}^2} \quad (3.34)$$

$$T_{tot}^{diff} \approx \frac{1}{\left(\frac{\sigma_{P_e}}{P_e}\right)^2 \sigma_{eff} \mathcal{L} P_L^2 P_e^2 \langle (\mathcal{A}^{long}(\varrho))^2 \rangle_{\epsilon, \sigma}}$$

Wie man erkennen kann, ist die Form dieser Ausdrücke bis auf die Art des Mittelwerts der Analysierstärke bei allen Methoden gleich; dieser spiegelt somit den im vorigen Abschnitt schon angesprochenen Aspekt der „Verdünnung“ der Compton-Asymmetrie wider, wenn keine energieauflösende Messung vorgenommen wird: Sowohl bei der integralen als auch der energiegewichteten Methode tritt ein gewichtetes Mittel der Analysierstärke auf, zu dem die niederenergetischen Photonen mit dem entgegengesetzten Vorzeichen und somit „destruktiv“ beitragen. Bei der differentiellen Methode hingegen wird über die quadratische Analysierstärke gemittelt, so daß die Photonen aller Energien

mit demselben Vorzeichen und somit „konstruktiv“ zum Mittelwert beitragen. Sofern alle anderen Umstände gleich sind, kann man mit der differentiellen Methode also die kürzesten Meßzeiten erreichen.

Es ist allerdings zu beachten, daß die Meßzeit bei allen genannten Verfahren über den zu verwendenden Mittelwert und den effektiven totalen Wirkungsquerschnitt  $\sigma_{eff}$  stark von der unteren Schwelle  $\varrho_{min}$  abhängt. Man kann sogar zeigen, daß bei einer geeigneten Wahl dieser Schwelle alle drei Verfahren vergleichbar schnelle Messungen ermöglichen [17]; insofern ist die Kontrolle über systematische Einflüsse der eigentlich ausschlaggebende Aspekt bei der Wahl des Verfahrens. Nahezu alle modernen Compton-Rückstreupolarimeter, einschließlich des in dieser Arbeit vorgestellten Systems, verwenden daher die differentielle Meßmethode, da sie die größtmögliche Flexibilität bei der Datenanalyse – insbesondere im Hinblick auf die Erkennung und Berücksichtigung systematischer Effekte – ermöglicht.

Weiterhin ist zu berücksichtigen, daß alle o. g. Formeln unter der Annahme einer untergrundfreien Messung abgeleitet wurden; in der Realität, wo etwa Bremsstrahlung an Restgasatomen oder Wechselwirkungen des Strahlhalos mit Engstellen in der Strahlführung ebenfalls zu Signalen im Detektor führen, wird sich die notwendige Meßzeit gegenüber diesen Voraussagen verlängern.

### 3.1.6 Luminosität

Die Luminosität ist der Proportionalitätsfaktor, der den Wirkungsquerschnitt einer Reaktion mit der tatsächlich beobachtbaren Rate an Ereignissen in einem konkreten Meßaufbau verbindet und stellt somit ein Maß für die „Wechselwirkungsdichte“ zwischen den Kollisionspartnern dar:

$$\frac{dN}{dt} = \mathcal{L}\sigma_{tot} \quad (3.35)$$

Für den Fall zweier Teilchenstrahlen, die im Laborsystem mit jeweils (nahezu) Lichtgeschwindigkeit unter einem Winkel  $\alpha$  aufeinander treffen, ist sie durch

$$\mathcal{L} = c(1 + \cos \alpha) \int \varrho_1(\vec{r}) \varrho_2(\vec{r}) d^3r \quad (3.36)$$

gegeben [143, 64], wobei  $\varrho_1$  und  $\varrho_2$  die Teilchendichten der beiden Strahlen sind.

Sowohl der Laserstrahl als auch der Elektronenstrahl können nun in guter Näherung als *Gauß'sche Strahlen* beschrieben werden. Dieses Modell, das im Rahmen der wellenoptischen Analyse der ersten Laserresonatoren entwickelt

wurde [112], zeichnet sich dadurch aus, daß der Strahl an jedem Ort  $z'$  entlang der Strahlachse ein bivariat normalverteiltes transversales Intensitätsprofil aufweist, dessen Ausdehnung sich in charakteristischer Weise ändert und ein Minimum, die „Strahltaile“, durchläuft. Im allgemeinen, nicht rotations-symmetrischen Fall<sup>5</sup> ist die Strahldichte dann durch

$$\varrho(\vec{r}') = \frac{N_0}{2\pi\sigma_{x'}(z')\sigma_{y'}(z')} \exp\left(-\frac{x'^2}{2\sigma_{x'}^2(z')}\right) \exp\left(-\frac{y'^2}{2\sigma_{y'}^2(z')}\right) \quad (3.37)$$

gegeben, wobei für die transversalen Strahlfleckgrößen gilt:

$$\sigma_{x'/y'}(z') = \sigma_{0x'/y'} \sqrt{1 + \left(\frac{z'}{z_{R,x'/y'}}\right)^2} \quad (3.38)$$

Das Strahl-Koordinatensystem  $x'y'z'$  sei so definiert, daß die  $z'$ -Achse entlang der Strahlachse ausgerichtet ist und die Strahltaile im Koordinatenursprung liegt. Die Größen  $z_{R,x'}$  und  $z_{R,y'}$  werden als *Rayleigh-Längen* des Strahls bezeichnet und stellen ein Maß für die Fokussierung in  $x'$ - bzw.  $y'$ -Richtung dar: Die Fokussierung ist umso stärker, je kleiner die Rayleigh-Länge ist. Die Normierungskonstanten  $N_0$  sind im hier vorliegenden Fall eines Elektronenstrahls der Stromstärke  $I$  und eines Laserstrahls der Leistung  $P$  durch

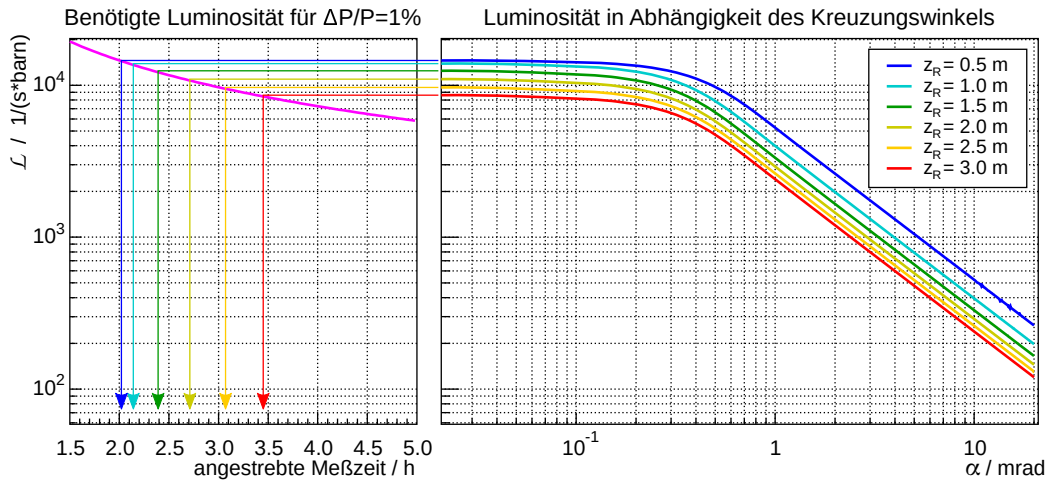
$$N_{0e} = \frac{I}{ec} \quad \text{bzw.} \quad N_{0L} = \frac{\lambda P}{hc^2} \quad (3.39)$$

gegeben [17]. Es ist zu beachten, daß Gl. 3.37 im Falle eines Laserstrahls nur die *Grundmode* TEM<sub>00</sub> beschreibt; das transversale Strahlprofil kann je nach Symmetrieeigenschaften des optischen Systems aber auch kompliziertere Formen annehmen, die sich durch Multiplikation der o. g. Formel mit Hermite- oder Laguerre-Polynomen darstellen lassen [112].

Wie man aus Gl. 3.36 unschwer erkennt, spielt der Überlapp beider Strahlen eine zentrale Rolle bei der Optimierung der Luminosität. Man kann zeigen [17], daß der Maximalwert dann erreicht wird, wenn beide Strahlen kollinear sind, die Strahltaillen am gleichen Ort liegen und sowohl Strahldurchmesser als auch Rayleigh-Längen identisch sind. Da die entsprechenden Parameter des Elektronenstrahls durch die Erfordernisse des Hauptexperiments festgelegt sind, kommt dem Entwurf des optischen Systems erhebliche Bedeutung zu; dennoch wird es alleine schon aufgrund der unterschiedlichen Strahlemittanzen von Laser- und Elektronenstrahl, im weiteren auch aufgrund baulicher Beschränkungen, im allgemeinen nicht möglich sein, alle Bedingungen

---

<sup>5</sup>Der Einfachheit halber soll es dennoch eine gemeinsame Strahltaile für beide Transversalrichtungen geben.

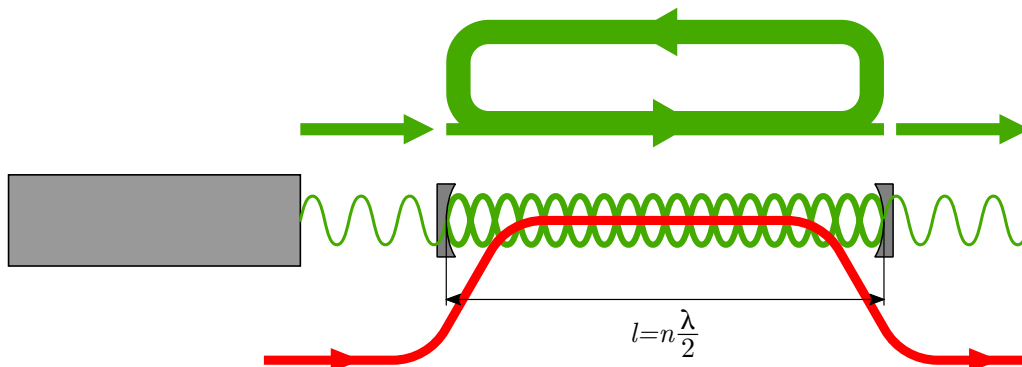


**Abbildung 3.9:** *Rechts:* berechnete Luminosität als Funktion des Kreuzungswinkels unter Zugrundelegung der realen Strahlparameter des A4-Experiments für den Elektronenstrahl und für verschiedene Fokussierungen des Laserstrahls. Die Tailen beider Strahlen wurden als am gleichen Ort liegend angenommen, und die Verkippung soll um die Vertikalachse mit der Strahltaille als Angelpunkt erfolgen. – *Links:* benötigte Luminosität zur Erzielung einer relativen statistischen Genauigkeit von 1% in Abhängigkeit der Meßzeit für die differentielle Methode mit einem idealem Detektor und ohne Untergrund.

gleichzeitig zu erfüllen (siehe auch Abs. 3.3). Gerade die Forderung kollinearier Strahlen kann selten umgesetzt werden, obwohl schon kleine Kreuzungswinkel zu erheblichen Einbußen in der Luminosität führen.

Dies ist deutlich in Abb. 3.9 zu erkennen, in der die Luminosität in Abhängigkeit des Kreuzungswinkels für verschiedene Fokussierungen, wie sie bei der Planung des A4-Compton-Rückstreupolarimeters in Erwägung gezogen wurden, dargestellt ist, wobei als Lichtquelle ein typischer kommerziell erhältlicher Hochleistungslaser in Form eines Argon-Ionenlasers mit 10 W Ausgangsleistung bei 514.5 nm angenommen wurde. Wie man sieht, fällt die Luminosität bereits bei einem Kreuzungswinkel von ca. 3 mrad um eine Größenordnung gegenüber dem Fall kollinearier Strahlen ab. Wie man allerdings ebenfalls erkennt, reicht die verfügbare Ausgangsleistung selbst in diesem Idealfall nicht aus, um bei den Betriebsbedingungen des A4-Experiments bezüglich der notwendigen Meßzeiten auch nur annähernd konkurrenzfähig etwa zur Møller-Polarimetrie zu sein.

Diese Schwierigkeit ist die Kehrseite des wesentlichen Vorteils der Compton-Rückstreupolarimetrie – der zerstörungsfreien Messung – und tritt an allen Teilchenbeschleunigern auf, die (anders als die Speicherringe, an denen die



**Abbildung 3.10:** Schematische Darstellung des *external-cavity*-Designkonzepts zur Erhöhung der Luminosität

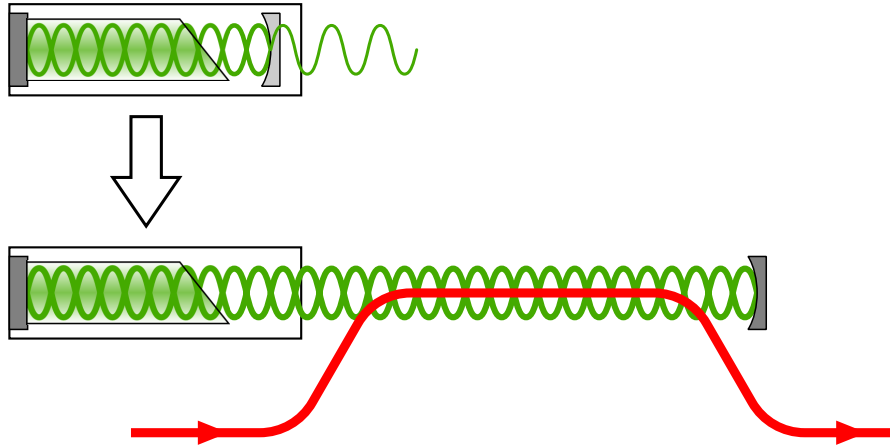
Compton-Polarimetrie zuerst eingesetzt wurde) mit Stromstärken deutlich unterhalb von 1 mA arbeiten. Es wurden daher verschiedene Ansätze verfolgt, um die zur Verfügung stehende Lichtintensität zu erhöhen.

### 3.1.7 Designkonzepte zur Luminositätserhöhung

Eine Lösungsmöglichkeit für das Problem der geringen Luminosität besteht darin, den Nutzstrahl des Lasers in einen externen Fabry-Pérot-Resonator mit hochreflektierenden Spiegeln einzuspeisen. Sofern dieser die bekannte Resonanzbedingung

$$l = n \frac{\lambda}{2} \quad , \quad n \in \mathbb{N} \quad (3.40)$$

erfüllt, kommt es aufgrund der konstruktiven Interferenz zwischen einlaufender und rezirkulierender Welle innerhalb des Resonators zu einer erheblichen Intensitätsüberhöhung. Leitet man dann den Elektronenstrahl durch diesen externen Resonator, so steht eine deutlich höhere Laserleistung für die Compton-Streuung zur Verfügung, als der Laser konstruktionsbedingt bereitstellen könnte (siehe Abb. 3.10). Dieses *external-cavity*-Design wurde erstmals erfolgreich im Rahmen des HAPPEX-Experiments am CEBAF-Beschleuniger der *Thomas Jefferson National Accelerator Facility* (kurz *JLab*) umgesetzt, wobei die Ausgangsleistung eines 300 mW-Nd:YAG-Lasers um einen Faktor von maximal 7400 gesteigert werden konnte [57]. Es hat allerdings den Nachteil, daß es sehr hochwertig verarbeitete Spiegel benötigt und empfindlich von der Einhaltung der Resonanzbedingung abhängt, weshalb für den Betrieb dieses Polarimeters ein aufwendiges Stabilisierungssystem auf



**Abbildung 3.11:** Schematische Darstellung der Modifikation eines Lasers zwecks Umsetzung des *internal-cavity*-Designkonzepts zur Erhöhung der Luminosität

Basis der Pound-Drever-Hall-Methode [52] entwickelt werden mußte. Hierbei wird ausgenutzt, daß die effektive Reflektivität eines exakt abgestimmten Resonators verschwindet und so – in Verbindung mit einer Phasenmodulation des Laserlichts und anschließender homodyner Demodulation – aus der reflektierten Lichtmenge und deren Phasenlage ein Korrektursignal zur Nachregelung der Laserwellenlänge abgeleitet werden kann. Dies erlaubt es, Abweichungen von der Resonanzbedingung, wie sie etwa aufgrund mechanischer Vibrationen oder temperaturbedingter Driften sowohl der Resonatorlänge als auch des Lasersystems entstehen können, auszugleichen.

Ein anderer Ansatz, das *internal-cavity*-Konzept [54], nutzt die Tatsache aus, daß der Laser an sich bereits aus einem Fabry-Pérot-Resonator mit einem laseraktivem Medium besteht und der nach außen abgegebene Nutzstrahl nur einen geringen Bruchteil der im Resonator rezirkulierenden Intensität darstellt. Es ist daher möglich, die Luminosität zu erhöhen, indem der Elektronenstrahl durch den Laserresonator selbst geleitet wird (der für diesen Zweck allerdings verlängert werden muß) und mit der resonatorinternen Lichtintensität wechselwirkt. Zusätzlich kann man ausnutzen, daß in diesem Fall kein „Nutzstrahl“ außerhalb des Resonators gebraucht wird, und eine weitere Intensitätssteigerung erzielen, indem der teildurchlässige Auskoppelspiegel durch einen ebenfalls hochreflektierenden Spiegel ersetzt wird

(siehe Abb. 3.11). Da sich in diesem Fall das Lasermedium im verwendeten Resonator selbst befindet, paßt sich die Emissionswellenlänge des Lasers von selbst an etwaige Schwankungen der Resonatorlänge an, so daß kein aktives Stabilisierungssystem notwendig ist.

Das im Rahmen dieser und der parallelen Arbeiten [117, 48] vorgestellte A4-Compton-Rückstreupolarimeter stellt die erste Umsetzung dieses Konzepts in einem realen Anwendungsfall dar, wobei Lichtintensitäten bis zu 120 W mit einem 10 W Argon-Ionenlaser im *single-line*-Betrieb erzielt werden konnten. Auf den genauen Aufbau dieses Polarimeters und die Herausforderungen im Betrieb wird in Abs. 3.3 näher eingegangen werden; ein grober Vergleich der Leistungsfähigkeit beider Konzepte wird in Abs. 3.4 vorgestellt.

## 3.2 Andere Methoden der Polarimetrie

Neben der Compton-Rückstreupolarimetrie gibt es noch andere Möglichkeiten zur Bestimmung der Polarisation eines Elektronenstrahls, auf die an dieser Stelle kurz eingegangen werden soll. Hierbei werden die Vor- und Nachteile dieser Methoden gegenüber der Compton-Rückstreupolarimetrie aufgezeigt und Gründe für oder gegen ihren Einsatz im A4-Experiment dargelegt.

### 3.2.1 Mott-Polarimetrie

Bei der Mott-Polarimetrie, die zum ersten Mal [68] explizit bei der Untersuchung der Paritätsverletzung im  $\beta$ -Zerfall [63] angewandt wurde, wird der zu untersuchende Elektronenstrahl an unpolarisierten Atomkernen gestreut. Aufgrund der LS-Kopplung zwischen dem Elektronenspin und dem Bahndrehimpuls des Kerns im Ruhesystem des Elektrons kommt es zu einer rechts-links-Asymmetrie im Wirkungsquerschnitt, die proportional zum transversalen Anteil der Strahlpolarisation ist und ihr Maximum in der Streuebene senkrecht zur Transversalkomponente erreicht. Das Verfahren kann also nur auf transversal polarisierte Strahlen angewandt werden, wohingegen die Compton-Rückstreupolarimetrie sowohl bei transversal [14] als auch bei longitudinal [157] polarisierten Strahlen eingesetzt werden kann.

Als Streutarget wird in der Praxis eine dünne Metallfolie aus Gold [63] oder einem anderen schweren Element (z. B. Blei [183]) mit einer Stärke im Bereich von wenigen 10 nm bis zu einigen  $\mu\text{m}$  verwendet. Hierdurch ergibt sich eine hohe Luminosität, so daß eine hohe statistische Genauigkeit in deutlich kürzerer Zeit als bei der Compton-Rückstreupolarimetrie erreicht werden kann. Dies bedeutet jedoch auch, daß der Elektronenstrahl durch



den Meßprozeß stark aufgestreut wird und somit hinter der Apparatur nicht mehr für ein Experiment nutzbar ist. Im Gegensatz zur Compton-Rückstreupolarimetrie, aus der der Elektronenstrahl nahezu unverändert hervorgeht, ist die Mott-Polarimetrie somit „destruktiv“ und nicht für die permanente Polarisationsüberwachung parallel zum Experimentierbetrieb geeignet.

Die Analysierstärke der Mott-Streuung, die im allgemeinen als *Sherman-Funktion* bezeichnet wird, ist deutlich höher als bei der Compton-Rückstreupolarimetrie im für das A4-Experiment relevanten Energiebereich und kann mehr als 50% betragen [68, 184]. Ihre genaue Kenntnis stellt allerdings die wichtigste Begrenzung der systematischen Genauigkeit der Mott-Polarimetrie dar. Sie kann analytisch nur für die elastische Streuung an einem einzelnen Kern berechnet werden, wird jedoch bereits bei Folienstärken von wenigen 10 nm durch Mehrfachstreuung<sup>6</sup> so stark verdünnt [69], daß kein Rückschluß auf den Absolutwert der Polarisation mehr möglich ist. Daher wird normalerweise mit unterschiedlich dicken Folien gemessen und eine Extrapolation zu 0 durchgeführt. Es gibt jedoch kein allgemein akzeptiertes Modell für den funktionalen Verlauf dieser Extrapolation, so daß bisher zwischen mehreren, nur qualitativ über die Kurvenform motivierten Modellen eher willkürlich gewählt werden mußte [68, 69]. Erst seit wenigen Jahren wird daran gearbeitet, diese Unsicherheit durch quantitative Untersuchungen der Mehrfachstreuung mit Hilfe von Monte-Carlo-Simulationen [184, 106, 13] auszuräumen.

Das größte Hindernis für den Einsatz der Mott-Polarimetrie im A4-Experiment ist jedoch, daß das Maximum der Analysierstärke mit steigender Strahlenergie immer stärker zu Rückwärtswinkeln hin verschoben wird [184], wo einerseits die Trennung vom einlaufenden Strahl zunehmend schwieriger wird, andererseits der Wirkungsquerschnitt insgesamt stark abfällt und zusätzlich noch durch Konkurrenzprozesse unterdrückt wird. Mott-Polarimetrie ist daher nur bis zu Strahlenergien von wenigen 10 MeV anwendbar [51]<sup>7</sup>, wohingegen Compton-Rückstreupolarimetrie bei Energien bis zu mehreren GeV erfolgreich angewandt wurde [16, 25, 156, 173]. Da ein Mott-Polarimeter somit nur am Anfang des Beschleunigers installiert werden kann und mögliche Polarisationsänderungen in der nachfolgenden Strahlführung nicht erfaßt werden, eignet sich diese Methode nicht für die alleinige Polarisationsüberwachung im A4-Experiment.

---

<sup>6</sup>engl. *plural scattering*, d. h. wenige Streuungen mit großem Streuwinkel, im Gegensatz zu *multiple scattering*, d. h. viele Streuungen mit geringem Streuwinkel

<sup>7</sup>wobei die dort beschriebene zusätzliche Schwierigkeit durch die konkurrierende Bhabha-Streuung bei der *Elektronenpolarimetrie* allerdings nicht auftritt

### 3.2.2 Møller-Polarimetrie

Um einige der Nachteile der Mott-Polarimetrie zu vermeiden, wurde bereits kurze Zeit später – ebenfalls im Rahmen der Untersuchung der Paritätsverletzung – ein anderes Verfahren zur Polarisationsmessung vorgeschlagen [62] und auch eingesetzt [61], das sich die Spinabhängigkeit der Møller-Streuung [137], d. h. der Streuung von Elektronen an anderen, freien Elektronen, zunutze macht. Hierfür wird der zu untersuchende Elektronenstrahl an einem Target aus polarisierten Elektronen gestreut, wobei sich bei Umkehr der Strahl- oder Targetpolarisation eine Zählratenasymmetrie proportional zum Produkt der beiden Polarisierungen ergibt. Die Größe der Asymmetrie hängt hierbei von der Orientierung der Targetpolarisation in Bezug auf die Strahlpolarisation ab [33]. Im Gegensatz zur Mott-Polarimetrie ist es bei der Møller-Polarimetrie also durch entsprechende Wahl der Targetpolarisationsrichtung möglich, sowohl die transversale als auch die longitudinale Polarisationskomponente des Strahls zu bestimmen [198], wenn auch nicht gleichzeitig, wie bei der Compton-Rückstreupolarimetrie.

Das Target besteht im allgemeinen aus einer wenige 10  $\mu\text{m}$  starken ferromagnetischen Folie, die durch ein externes Feld magnetisiert wird. Auch bei diesem Verfahren ist somit eine hohe Luminosität schon bei kleinen Strahlströmen gegeben, so daß eine bestimmte statistische Genauigkeit deutlich schneller als im Fall der Compton-Rückstreupolarimetrie erreicht werden kann. Dies bedeutet aber gleichzeitig, daß die Møller-Polarimetrie ebenfalls destruktiv ist und nicht parallel zum Experimentierbetrieb eingesetzt werden kann.

Møller-Polarimetrie kann ebenso wie die Compton-Rückstreupolarimetrie problemlos bei hohen Energien bis zu mehreren GeV angewandt werden [44], hat aber zusätzlich den Vorteil, daß die Analysierstärke schon ab wenigen 100 MeV unabhängig von der Strahlenergie wird. Sie erreicht ihr Maximum im Fall der symmetrischen Streuung, bei der beide beteiligten Elektronen mit gleicher Energie symmetrisch zur Strahlrichtung aus dem Prozeß hervorgehen. Dies ist besonders günstig, weil durch den Nachweis beider Elektronen in Koinzidenz der Untergrund größtenteils eliminiert werden kann. Die longitudinale Analysierstärke beträgt im symmetrischen Fall  $-7/9$  und ist somit nochmals größer als bei der Mott-Polarimetrie, wird allerdings durch die geringe erreichbare Targetpolarisation von nur ca. 8% [40] stark verdünnt. Dies eliminiert den Vorteil gegenüber der Compton-Rückstreupolarimetrie, bei der die Analysierstärke zwar nur wenige Prozent, die Targetpolarisation aber typischerweise fast 100% beträgt. Die Kenntnis der Targetpolarisation stellt auch die größte systematische Fehlerquelle dar [132]: bei herkömmlichen

Møller-Polarimetern [44, 198, 132] ist die Targetfolie um ca.  $20 - 30^\circ$  gegen den Strahl geneigt und wird durch ein Feld von  $10 - 30$  mT in der Folienebene magnetisiert. Im Gegensatz zur Compton-Rückstreupolarimetrie wird somit nie die reine longitudinale Strahlpolarisation, sondern immer eine Linearkombination aus longitudinaler und evtl. vorhandener transversaler Polarisation gemessen. Die Magnetisierung der Folie kann über den Induktionsstoß bei Umkehr der Feldrichtung oder durch die elektromotorische Kraft bei Bewegung der magnetisierten Folie durch eine Aufnahmespule [73] bestimmt werden. Die Unsicherheit der Polarisation stammt nun zum einen aus der nicht-trivialen Absolutmessung selbst, zum anderen aus der mangelnden oder ungenauen Kenntnis des  $g'$ -Faktors für die jeweilige Folienlegierung, der zur Umrechnung der Magnetisierung in die Spinpolarisation notwendig ist [29]. Weiterhin ist die Magnetisierung der Folie nicht über die gesamte Fläche konstant, so daß eine genaue Kenntnis des Auftreffpunkts des Elektronenstrahls erforderlich ist, um die Messung korrekt analysieren zu können [73].

Ein neuer Ansatz zur Vermeidung dieser Probleme besteht darin, eine senkrecht zum Strahl stehende dünne Reineisenfolie als Target zu verwenden und senkrecht zur Folienebene mit einem starken Feld von ca. 4 T bis deutlich in die Sättigung zu magnetisieren [78]. Da die Sättigungs-Spinpolarisation von Reineisen und deren Temperaturabhängigkeit gut bekannt ist, kann auf eine Polarisationsmessung verzichtet werden [29]; es muß allerdings sichergestellt werden, daß die Richtung des magnetisierenden Felds genau bekannt ist. Problematisch ist außerdem, daß bei diesen Feldstärken das Polarimeter selbst zum elektronenoptischen Element wird und Änderungen in der Akzeptanz der Polarimeterdetektoren hervorruft [73].

Møller-Polarimetrie ist insgesamt eine attraktive Alternative zur Compton-Rückstreupolarimetrie, hat jedoch einen entscheidenden Nachteil: da sich die Targetfolien durch den Strahl aufheizen, kommt es bei höheren Strömen zu einer lokalen Depolarisierung des Targets und somit zu einer unkontrollierten Änderung der Møller-Asymmetrie; ab einer gewissen Stromstärke ist sogar mit einer Beschädigung des Targets zu rechnen [29]. Dieser Effekt und die Notwendigkeit, die Rate zufälliger Koinzidenzen gering zu halten, verhindern den Einsatz dieses Verfahrens bei Strahlintensitäten oberhalb von  $2 - 3 \mu\text{A}$  [40]. Wenngleich daher vor der endgültigen Einsatzbereitschaft des in dieser Arbeit vorgestellten Compton-Rückstreupolarimeters ein von einer anderen Arbeitsgruppe des Instituts betriebenes Møller-Polarimeter eingesetzt wurde (vgl. Abs. 2.3.6), ist die Møller-Polarimetrie aufgrund der notwendigen Unterbrechung des Experimentierbetriebs und der systematischen Unsicherheiten bei der Interpretation der Meßergebnisse – diese wurden auf ca. 4% abgeschätzt, während die rein statistische Unsicherheit ca. 2% be-

trug [124] – nicht die bevorzugte Methode zur Polarisationsbestimmung im A4-Experiment. Es gibt allerdings neue Ansätze, die diese Beschränkung in Zukunft aufheben könnten: so wurde etwa vorgeschlagen, den Strahl über die Targetfolie zu wedeln oder nur zeitweise auf das Target zu richten, um so die effektive Stromstärke zu reduzieren und eine Aufheizung zu vermeiden [66]. Eine andere Möglichkeit besteht darin, die Depolarisation infolge der Aufheizung zu messen, um die Møller-Asymmetrie auf diesen Effekt zu korrigieren. Ein entsprechendes System, das die Polarisationsänderung am Auftreffort des Strahls mittels des magnetooptischen Kerr-Effekts vermisst, wurde bereits getestet und ermöglicht den Betrieb bei Stromstärken von bis zu  $8\ \mu\text{A}$  [78].

In eine ganz andere Richtung gehen Vorschläge, statt einer magnetisierten Metallfolie spinpolarisiertes atomares Wasserstoffgas als Target zu verwenden [40]. Dieses Verfahren hat deutliche Vorteile gegenüber der herkömmlichen Møller-Polarimetrie: die Polarisationsmessung kann bei deutlich höheren Strömen und parallel zum Experimentierbetrieb durchgeführt werden, und es kann eine Targetpolarisation bis zu 100 % erreicht werden. Insbesondere entfällt bei der Verwendung von atomarem Wasserstoff mit dem Levchuk-Effekt [120], der bei der Streuung an den stark gebundenen inneren Elektronen auftritt und bei Systemen mit kleiner Detektorakzeptanz zu einer systematischen Überschätzung der Polarisation führt, der zweitgrößte Beitrag zum systematischen Fehler [132, 78]. Erste Testmessungen in dieser Hinsicht wurden bereits erfolgreich durchgeführt [53].

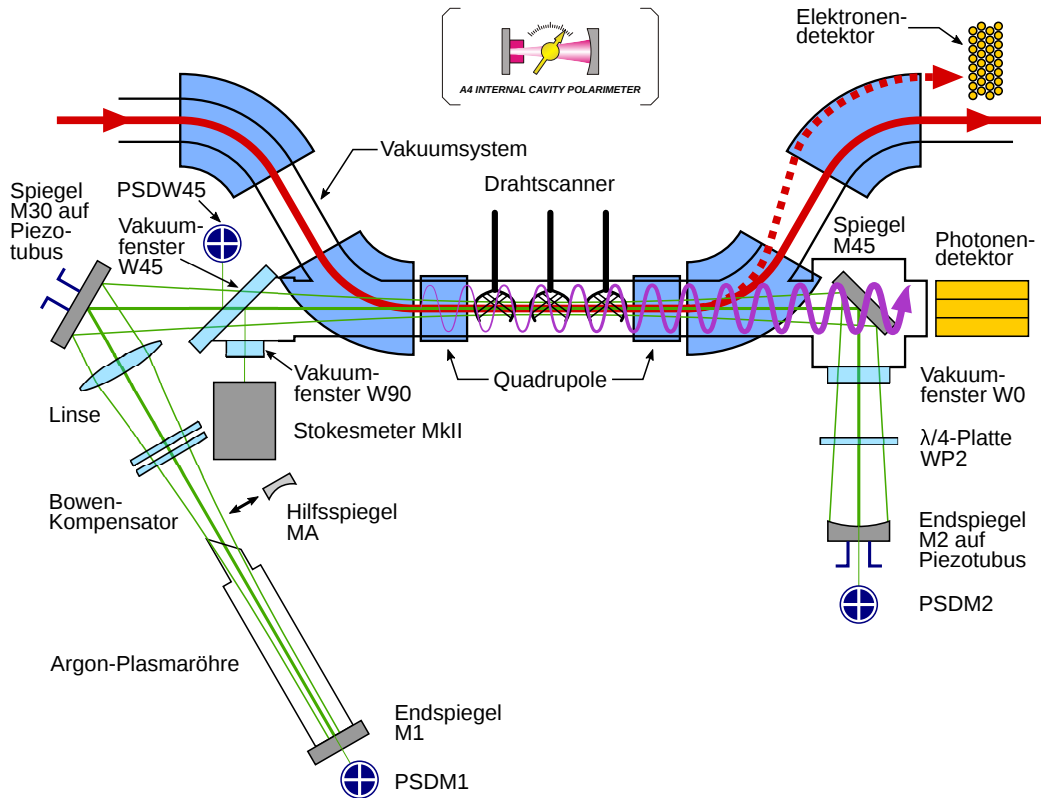
### 3.3 Aufbau des A4-Compton-Rückstreupolarimeters

Der Aufbau des A4-Compton-Rückstreupolarimeters ist in Abb. 3.12 schematisch und in Abb. 3.13 in Form eines Panoramaphotos dargestellt. Im folgenden soll auf die einzelnen Funktionselemente kurz eingegangen werden, wobei ein besonderes Augenmerk auf das optische System gerichtet wird.

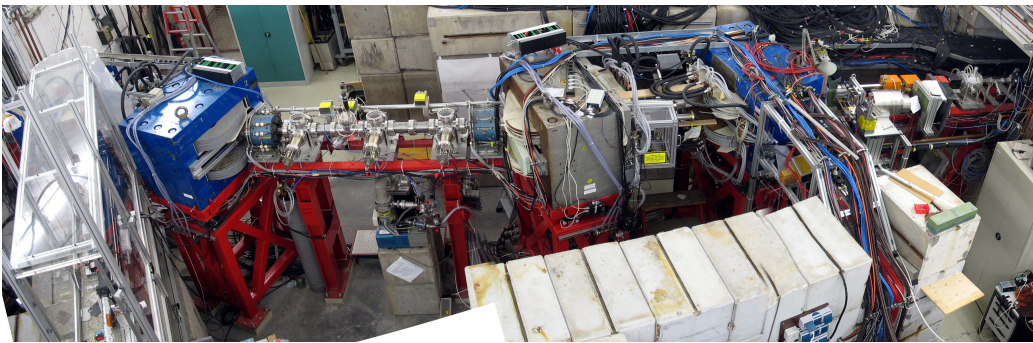
#### 3.3.1 Strahlführung

Das Polarimeter ist in einer horizontalen magnetischen Schikane aus vier Dipolmagneten installiert, die jeweils auf eine maximale Feldstärke von 0.8 T ausgelegt sind und den Strahl um 35 cm seitlich versetzen; weiterhin umfaßt die Strahlführung zwei Quadrupolmagnete, die den Einfluß der Randfelder der Dipolmagnete kompensieren und die Schikane insgesamt achromatisch für

### 3.3 Aufbau des A4-Compton-Rückstreupolarimeters



**Abbildung 3.12:** Schematische Aufsicht auf das A4-Compton-Rückstreupolarimeter in Anlehnung an Abb. 3.8



**Abbildung 3.13:** Panoramaphoto der Experimentierhalle 3 des Instituts für Kernphysik, in der das Compton-Polarimeter aufgebaut wurde. Der Strahl tritt an der linken Seite in die Halle ein, durchläuft die Polarimeterschikane (der erste Ablenkmagnet ist durch die Abdeckung des Lasersystems verdeckt) und trifft dann auf das A4-Target in Experimentierhalle 4, die sich rechts anschließt.

Strahlemittanz	horizontal	$\epsilon_e^{hor}$	$7.8 \pi \mu\text{m} \cdot \text{mrad}$
	vertikal	$\epsilon_e^{vert}$	$0.5 \pi \mu\text{m} \cdot \text{mrad}$
Rayleigh-Länge	horizontal	$z_{R,e}^{hor}$	4.97 m
	vertikal	$z_{R,e}^{vert}$	12.97 m
Strahltaile	horizontal	$\sigma_{0,e}^{hor}$	0.20 mm
	vertikal	$\sigma_{0,e}^{vert}$	0.08 mm

**Tabelle 3.1:** Parameter des MAMI-Elektronenstrahls innerhalb der magnetischen Schikane bei 855 MeV [117]. Bei den angegebenen Emittanzen handelt es sich um *unnormierte* RMS-Emittanzen.

den Elektronenstrahl machen sollen. Der Strahl hat bei dieser Konfiguration eine Strahltaile in der Mitte der Schikane, wie sie für eine optimale Luminosität der Compton-Streuung notwendig ist. Alle anderen Strahlparameter sind durch die Erfordernisse des A4-Experiments festgelegt; sie sind in Tabelle 3.1 zusammengefaßt. Eine komplette Übersicht über die Eigenschaften der Strahlführung und deren Optimierung ist in einer parallel angefertigten Dissertation [117] zu finden.

Das A4-Compton-Rückstreupolarimeter ist auf kollinearen Überlapp zwischen Elektronen- und Laserstrahl ausgelegt, was einerseits eine hohe Luminosität garantiert, andererseits aber besondere Anforderungen an die Positionierung der beiden Strahlen stellt. Daher befinden sich in der Wechselwirkungszone drei modifizierte Versionen der an MAMI verwendeten Drahtscanner, mit denen die Positionen beider Strahlen gleichzeitig bestimmt werden können. Anhand dieser Meßergebnisse können die Strahlen dann in geeigneter Weise verschoben werden, um einen optimalen Überlapp zu erreichen (vgl. Abs. 3.3.5 und [117, 48]).

Die Eigenschaften der Strahlführungselemente waren ursprünglich für den Betrieb bei 855 MeV bemessen, allerdings wurde das A4-Experiment im Laufe der Jahre auch bei Energien von 570 MeV, 315 MeV [22] und sogar 1508 MeV betrieben, so daß Anpassungen der ursprünglichen Installation notwendig wurden. Insbesondere der Betrieb bei 1.5 GeV stellte hier ein Problem dar, da die hierfür erforderliche Feldstärke deutlich über die Auslegung der Dipolmagnete hinausging und diese somit stark in der Sättigung betrieben werden mußten. Dies hatte erhebliche Auswirkungen auf die in der Nähe installierten Detektoren, weshalb diese, anders als ursprünglich geplant (vgl. etwa [47, 92]), nicht zwischen dem dritten und vierten Dipol belassen werden konnten, sondern hinter den vierten Dipol versetzt werden mußten.



### 3.3.2 Optisches System

Das optische System wurde im Rahmen einer vorherigen Diplomarbeit [92] entworfen. Kernstück ist ein ca. 8 m langer Laserresonator auf Basis eines kommerziellen Argon-Ionenlasers *Coherent INNOVA 425*<sup>8</sup>, der in werkseitiger Konfiguration bis zu 25 W Ausgangsleistung im *multi-line*-Betrieb (d. h. verteilt auf mehrere Emissionswellenlängen zwischen 454 und 529 nm) oder bis zu 10 W im *single-line*-Betrieb bei 514.5 nm abgeben kann. Das laseraktive Medium ist in diesem Fall eine ca. 1.90 m lange, mit Argongas gefüllte Plasmaröhre, in der eine kontinuierliche Gasentladung gezündet wird. Aufgrund der hohen Leistungsaufnahme von ca. 33 kW<sup>9</sup> benötigt das System eine externe Wasserkühlung mit mindestens 23 l/s Durchflußrate.

Das Lasersystem hat werkseitig einen *hemisphärischen Resonator* bestehend aus einem ebenen, hochreflektierenden Endspiegel, der fest an der Plasmaröhre montiert ist, und einem sphärischen, teildurchlässigen Spiegel als Auskoppler; diese Konfiguration zwingt die Strahltaile auf den ebenen Spiegel. Um die Leistungscharakteristik nicht zu beeinträchtigen, muß dieses Strahlprofil im Lasermedium beibehalten werden, andererseits ist aber auch eine Strahltaile in der Schikanenmitte koinzidierend mit derjenigen des Elektronenstrahls erforderlich (vgl. Abs. 3.1.6). Der Polarimeter-Resonator enthält daher eine Fokussierlinse, die die beiden Strahlprofile ineinander überführt und das optische System auf natürliche Weise in einen „Medium-Arm“ und einen „Wechselwirkungs-Arm“ unterteilt. Den Abschluß bildet ein wiederum hochreflektierender sphärischer Spiegel. Aus Platzgründen ist der Resonator zusätzlich mittels zweier ebener Spiegel, die auf einen Einfallswinkel von 30° bzw. 45° ausgelegt sind, U-förmig gefaltet. Außerdem sind zwei planparallele Vakuumfenster installiert, um den Laserstrahl in die Strahlführung des Elektronenstrahls einzuführen; eines von ihnen ist unter 45° zum Strahl montiert, um als „parasitärer“ Strahlteiler einen Teil des Lichts für diagnostische Zwecke auszukoppeln (s. u.). Weiterhin besteht die Möglichkeit, einen teildurchlässigen Spiegel mit denselben Spezifikationen wie der werkseitige Auskoppelspiegel in den Strahlengang zu fahren, um die Initialjustierung des optischen Systems zu erleichtern.

Die optischen Elemente sind von kommerziellen Anbietern erhältliche Produkte in Interferometerqualität, d. h. die Oberflächen weisen eine Genauigkeit von  $\lambda/10$  und eine Güte („scratch-dig“) der Stufe „10-5“ im weit verbreiteten *MIL-PRF-13830B*-Spezifikationsschema [194] auf. Alle Spiegel sind dielek-

---

<sup>8</sup>Coherent Inc., 5100 Patrick Henry Drive, Santa Clara, CA 95054, USA

<sup>9</sup>berechnet anhand von im realen Betrieb gemessenen Stromstärken und Röhrenspannungen

trisch beschichtete Hochleistungsspiegel, und alle transparenten Elemente sind mit einer entsprechenden dielektrischen Entspiegelungsbeschichtung versehen. Als Grundmaterial wurde synthetisches Quarzglas<sup>10</sup> in UV-Qualität gewählt, so daß in der Kombination aller Effekte die Resonatordämpfung durch Reflexion, Streuung und Absorption minimiert wird, eine möglichst hohe Strahlenfestigkeit erreicht wird und alle optischen Elemente die notwendige Zerstörschwelle für die deutlich höheren resonatorinternen Lichtintensitäten aufweisen. Das Gesamtsystem ist auf den *single-line*-Betrieb bei 514.5 nm ausgelegt.

Der Laserresonator ist so konzipiert, daß der Strahl im Wechselwirkungsbereich eine Rayleigh-Länge von 2.5 m aufweist. Dies weicht deutlich von den in Abs. 3.1.6 angesprochenen Bedingungen für eine optimale Luminosität ab; allerdings muß berücksichtigt werden, daß eine exakte Anpassung an den Elektronenstrahl aufgrund von dessen Eigenschaften sowieso nicht möglich ist und zusätzliche Randbedingungen eine Rolle spielen: Zum einen sollten die Brechkräfte von Linse und Spiegel möglichst preisgünstig mechanisch zu fertigen sein, zum anderen müssen die optischen Elemente innerhalb des verfügbaren Raumes und möglichst gut (etwa für Wartungsarbeiten) zugänglich plaziert werden können; aus diesem Grund schieden alle Konfigurationen aus, bei denen etwa die Linse im Vakuum hätte montiert werden müssen. Zusätzlich ist zu berücksichtigen, daß der Strahlüberlapp durch transversale Fluktuationen der Laserstrahlachse, wie sie etwa von Vibrationen der optischen Elemente herrühren, herabgesetzt werden kann; daher wurde eine solche Kombination aus Bauteilwerten und -positionen gewählt, die möglichst unempfindlich gegen diese Einflüsse ist [92].

Da es in der Experimentierhalle vielfältige Quellen für mechanische Schwingungen (wie z. B. Vakuumpumpen, Kühlwasserleitungen, Luftumwälzung und dergleichen) gibt, wurden auch konstruktionstechnische Vorkehrungen getroffen, um Vibrationen des Systems zu vermeiden oder zu unterdrücken: Der gesamte „Medium-Arm“ ist auf einer massiven Granitplatte montiert, die zwecks mechanischer Entkopplung vom Hallenboden auf einem Polystyrolblock aufliegt. Außerdem wurden später alle außerhalb des Vakuums liegenden Bereiche des optischen Systems (d. h. der gesamte Aufbau auf der Granitplatte sowie der Bereich um den Endspiegel  $M_2$ ) in Gehäusen aus Acrylglas eingekapselt, so daß einerseits die empfindlichen optischen Oberflächen noch besser gegen Staub geschützt sind und andererseits auch die Luft als Träger-

---

<sup>10</sup>Heraeus Suprasil®, Corning 7980 oder vergleichbares Material. Mit *synthetisch* ist hierbei gemeint, daß auch der Ausgangsstoff nicht etwa natürlicher Quarz, sondern durch Flammhydrolyse erzeugtes Siliziumdioxid ist.



medium von Schall und Temperaturschwankungen weitgehend als Störquelle ausgeschaltet werden konnte.

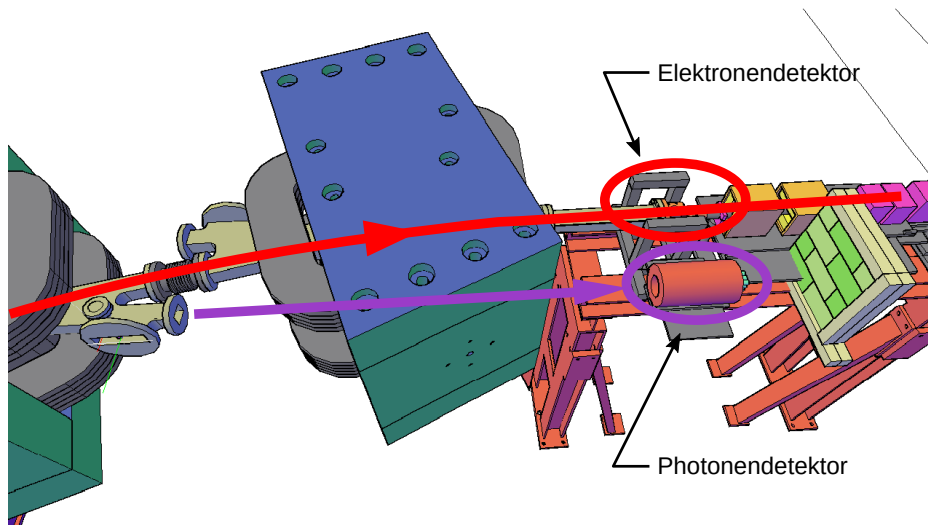
Um solche Einflüsse noch weiter zu minimieren, wurde im Rahmen einer vorangegangenen Arbeit [47] ein aktives Stabilisierungssystem für die Strahl-lage entwickelt, das die Signale zweier positionsempfindlicher Lichtsensoren (PSD) verwendet, um mittels zweier Spiegel, die auf piezobetriebenen Kipp-plattformen *PI S-315.10*<sup>11</sup> montiert sind, Abweichungen von der Soll-lage zu kompensieren. Hierbei wird ausgenutzt, daß die hochreflektierenden Spiegel immer noch einen geringen Bruchteil (typischerweise 0.5 % oder weniger) des einfallenden Lichts transmittieren und auch das antireflexbeschichtete 45°-Vakuumsfenster ca. 0.6 % des Lichts pro Oberfläche reflektiert, so daß außerhalb des eigentlich „geschlossenen“ Resonators ebenfalls Licht für solche Anwendungen zur Verfügung steht.

Die Plasmaröhre des Lasers ist mit einem Fenster aus kristallinem Quarz abgeschlossen, das unter dem Brewster'schem Winkel zur Strahlachse ausge-richtet ist. Da somit nur linear vertikal polarisiertes Licht dieses Fenster ver-lustfrei passieren kann und es ansonsten wie eine Quarz-Verzögerungsplatte wirkt [92, S. 71], sind mehrere optische Elemente notwendig, damit sich auch in Bezug auf die Lichtpolarisation eine „Eigenmode“ des Resonators herausbil-den kann, die einerseits linear vertikal am Brewster-Fenster ist, andererseits aber im Wechselwirkungsbereich rein rechts- bzw. linkszirkular. In der vorher-gehenden Arbeit [92] wurde bereits festgestellt, daß hierfür im Gegensatz zu anderen Polarimetertypen *zwei* Wellenplatten notwendig sind; die Erfahrung im realen Betrieb hat aber gezeigt, daß zusätzliche, unerwünschte Doppelbre-chungseffekte an den beteiligten optischen Oberflächen auftreten, zu deren Ausgleich eine der Wellenplatten durch einen Polarisations*kompensator* er-setzt werden muß. Im Fall des vorliegenden Polarimeters wurde hierfür ein Bowen-Kompensator [114] gewählt, da dieser sich als „Erweiterung“ der er-sten Wellenplatte sowohl mechanisch als auch von der Steuerung her sehr einfach in das bereits bestehende System integrieren ließ.

Um zielgerichtet einen rechts- bzw. linkszirkularen Polarisationszustand herzustellen und diesen dann auch quantitativ zu überwachen, ist ein ent-sprechendes Lichtpolarimeter erforderlich. Hierzu wird derjenige am 45°-Va-kuumsfenster herausreflektierte Teilstrahl, der von der dem Elektronenstrahl entgegenseitigen Lichtwelle herrührt, mittels einer eigens konzipierten Ap-paratur – dem *Stokesmeter MkII* – vermessen. Dieser Aspekt bildet den Hauptteil der hier vorgelegten Arbeit und wird in den nachfolgenden Kapi-teln eingehend beschrieben.

---

<sup>11</sup>Physik Instrumente GmbH & Co. KG, Auf der Römerstraße 1, 76228 Karlsruhe



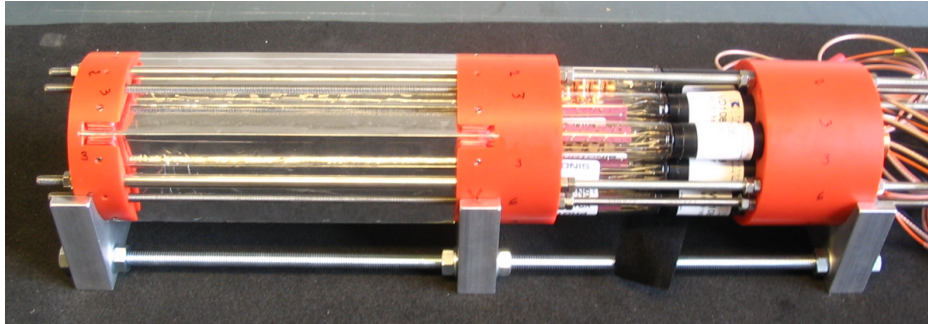
**Abbildung 3.14:** CAD-Darstellung der Detektorregion des A4-Compton-Rückstreupolarimeters. Hervorgehoben sind der Photonendetektor (vorne) und der Elektronendetektor (hinten), der vollständig von einem Montagerahmen umgeben ist. Außerdem ist rechts die Abschirmwand aus Bleieziegeln erkennbar, mit der der Untergrund rückgestreuter Teilchen aus dem Targetbereich des A4-Experiments verringert werden soll.

### 3.3.3 Detektorsystem

Das Detektorsystem umfaßt als zentrale Komponenten einen Photonen- und einen Elektronendetektor hinter dem letzten Dipolmagneten der Polarimeterstrahlführung, die auf die Messung der Compton-Asymmetrie nach der „differentiellen Methode“ ausgelegt sind. Entwicklung und Betrieb dieser Detektoren sind ausführlich in den parallelen Dissertationen [117, 48] beschrieben, weshalb hier nur ein kurzer Überblick über Aufbau und Funktionsweise gegeben werden soll.

#### Photonendetektor

Dem Photonendetektor kommt eine besonders kritische Bedeutung zu, da er angesichts der sehr unterschiedlichen Meßbedingungen des A4-Experiments über einen großen Energiebereich hinweg eine präzise Bestimmung der Photonspektren erlauben muß: Bei der kleinsten verwendeten Strahlenergie von 315 MeV haben die rückgestreuten Photonen eine Energie von höchstens 3.6 MeV, während bei der höchsten Strahlenergie von 1508 MeV ein Energiebereich bis zu 79 MeV abgedeckt werden muß. Nach Versuchen mit ver-



**Abbildung 3.15:** Das LYSO-Photonenkalorimeter in einer Wartungshalterung. Man erkennt links die in Reflektorfolie eingepackten Einzelkristalle und rechts die Photomultiplier-Röhren, die durch einen mittels Gewindestangen montierten Kunststoffrahmen gehalten werden.

schiedenen anderen Detektormaterialien (u. a. NaI(Tl), BaF<sub>2</sub> und PbWO<sub>4</sub>) wurde ein schnelles Kalorimeter aus Cer-dotiertem Lutetium-Yttrium-Silikat (Lu<sub>1,8</sub>Y<sub>0,2</sub>SiO<sub>5</sub>:Ce oder kurz LYSO(Ce) – hier Saint-Gobain PreLude<sup>®</sup> 420<sup>12</sup>) entwickelt [138], da dieses Material neben seiner hohen Dichte auch eine äußerst vorteilhafte Kombination von Lichtausbeute und Pulsabklingzeit aufweist. Es ermöglicht daher eine Einzelereignis-Auslese auch bei hohen Raten und hat dennoch eine gute Energieauflösung bei geringen Photonenenergien. Das Kalorimeter besteht aus neun Kristallen zu je 20 × 20 × 200 mm<sup>3</sup> in einer quadratischen 3 × 3-Anordnung und deckt somit ein Volumen von 16 Strahlungslängen und 1.25 Molière-Radien ab. Jeder Kristall wird von einer eigenen Photomultiplier-Röhre ausgelesen, wobei aber für die eigentliche Datennahme nur die analoge Summe dieser Einzelsignale digitalisiert und histogrammiert wird. Mit dieser Apparatur wird eine relative Energieauflösung von 8.5 % (FWHM/E) bei 1.33 MeV erreicht [48].

Da kein einzelner Photomultipliertyp den gesamten Energiebereich der rückgestreuten Photonen abdecken kann, wurden die Röhren nicht mit den Kristallen verklebt. Stattdessen wurde ein Halterahmen mit Schnellwechsellvorrichtung konstruiert, in dem die Photomultiplier mittels Federdruck und Silikonöl optisch an die Stirnflächen der Kristalle angekoppelt werden, so daß sie für den Strahlbetrieb bei 315 MeV unkompliziert gegen einen Typ mit größerer Verstärkung ausgetauscht werden können.

Das Photonkalorimeter ist in einen Bleizylinder mit ca. 40 mm Wandstärke eingebettet, um es gegen unkorrelierten Strahlungsuntergrund etwa aus Kollisionen von Strahlelektronen mit der Wand der Strahlführung abzu-

<sup>12</sup>Compagnie de Saint-Gobain S. A., 18, avenue d'Alsace, 92400 Courbevoie, Frankreich

schirmen. Eine weitere Abschirmwand aus 50 mm Blei und 55 mm boriertem Polyethen befindet sich hinter dem Detektor, um ihn gegen rückgestreute Teilchen aus dem Targetbereich des A4-Experiments abzuschirmen. Vor dem Kalorimeter befindet sich zudem eine Bleiabschirmung mit mechanisch verstellbarer Blende; diese erlaubt, den (breiter gefächerten) Untergrund aus Gas-Bremsstrahlung und Streueignissen von Halo-Elektronen zu minimieren, ohne die Photonen aus der Compton-Rückstreuung nennenswert zu beeinträchtigen. Desweiteren ist die gesamte Anordnung auf einem elektrisch und hydraulisch in beide Transversalrichtungen verfahrbaren Justiertisch montiert, so daß der Detektor ferngesteuert auf den Strahl rückgestreuter Photonen zentriert werden kann.

### Elektronendetektor

Die gestreuten Elektronen werden im hier vorgestellten Polarimeter mittels parallel angeordneter szintillierender Kunststoffasern nachgewiesen, wobei jede Faser einer Ortskoordinate im transversalen Abstand zum Elektronenstrahl entspricht; aufgrund der Dispersion in der magnetischen Schikane ist dies gleichbedeutend mit einer bestimmten Energie der gestreuten Elektronen. Die endgültige Version des Detektors verwendet 48 Fasern des Typs *Kuraray SCSM-78F*<sup>13</sup>, die in vier versetzt aufeinander geschichteten Lagen aus je zwölf Fasern angeordnet sind und von einem Multinoden-Photomultiplier *Hamamatsu H7546*<sup>14</sup> ausgelesen werden. Der aktive Kern einer Faser hat einen Durchmesser von 0.78 mm, während der Abstand zwischen zwei Fasern innerhalb einer Lage 1.2 mm beträgt; es wird daher mit zwei versetzten Lagen bereits eine lückenlose Abdeckung der gesamten Breite erreicht. Die zweite Doppellage Fasern dient nur zur Erhöhung der Nachweiseffizienz des Detektors, weshalb auch die beiden jeweils exakt hintereinanderliegenden Fasern beider Doppellagen, die derselben transversalen Ortskoordinate entsprechen, auf denselben Pixel des Photomultipliers geführt werden. Die Geometrie des Faserbündels ist so optimiert, daß der Überlapp zweier benachbarter Fasern so gering wie möglich ausfällt und die effektive Materialstärke als Funktion des transversalen Abstands eine möglichst kleine Welligkeit aufweist. Außerdem wurde die Zuordnung von Fasern zu Kathodenpixeln so gewählt, daß die zu überbrückende transversale Distanz zwischen der Position im Faserbündel und der Position auf der Kathode möglichst für alle Fasern gleich groß ist,

---

<sup>13</sup>Kuraray K. K., Ōte Center Building 1-1-3, Ōtemachi, Chiyoda-ku, Tōkyō 100-8115, Japan

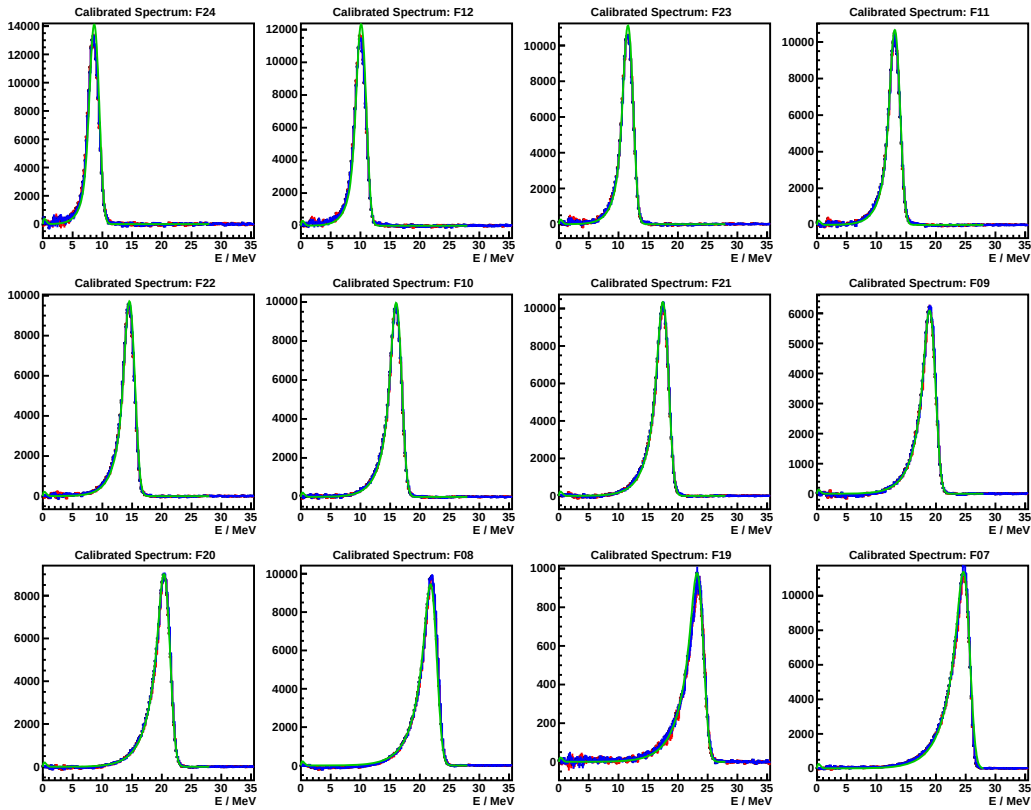
<sup>14</sup>Hamamatsu Photonics K. K., 325-6 Sunayama-chō, Naka-ku, Hamamatsu-shi, Shizuoka 430-8587, Japan

um Variationen in der Transitzeit zu minimieren [117].

Jede der Fasern wird von einem ladungsintegrierenden Analog-Digital-Wandler (*QDC*) ausgelesen. Dies ermöglicht es, eine Kombination von hardware- und softwarebasierter Entscheidungslogik einzusetzen, um verschiedene Koinzidenzbedingungen zwischen Photonen- und Elektronendetektor festzulegen und die Daten auf unterschiedliche Arten zu histogrammieren. Im einfachsten Fall wird eine Koinzidenz zwischen einer beliebigen Faser und dem Photonendetektor gefordert; hiermit kann bereits ein großer Teil des unkorrelierten Untergrunds unterdrückt werden. Die eigentliche Stärke des Systems kommt aber dann zum Tragen, wenn das Photonenk calorimeter in Koinzidenz mit einzelnen Fasern betrieben und der Elektronendetektor in Verbindung mit der Schikane quasi als *Photonentagger* verwendet wird: Da in diesem Fall Photonen mit „bekannten Eigenschaften“ vermessen werden, eignet sich dieser Meßmodus insbesondere für die Kalibration und Charakterisierung des Detektors. Diese beiden Verfahren sind essentiell für den Betrieb des Polarimeters und die Datenanalyse; sie werden im Detail in einer der parallel angefertigten Dissertationen [48] beschrieben.

#### Datennahme und -analyse

Das A4-Compton-Rückstreupolarimeter ist auf die Messung der Polarisation mittels der „differentiellen“ Methode ausgelegt, weshalb die Compton-Asymmetrie anhand der Energiespektren rückgestreuter Photonen ermittelt wird. Wie in Abs. 3.1.4 und 3.1.5 aufgezeigt wurde, ist hierfür aber eine genaue Kenntnis der Antwortfunktion des Detektors erforderlich, da das reale Spektrum – und somit auch die Energieabhängigkeit der experimentellen Asymmetrie – gegenüber dem theoretischen Verlauf des Wirkungsquerschnitts aufgrund der Energieauflösung des Detektors und Aperturereffekten der Strahlführung „verschmiert“ ist. Um Verfälschungen der Meßwerte aufgrund dieser Einflüsse zu vermeiden, wird wiederum die „Tagger“-Eigenschaft des Elektronendetektors ausgenutzt: Im Rahmen einer parallelen Dissertation [48] wurde durch eine umfassende *MC*-basierte Untersuchung der Nachweiseigenschaften von Elektronen- und Photonendetektor eine parametrisierbare Beschreibung der in Koinzidenz mit Einzelfasern aufgenommenen Photonspektren entwickelt. Das Datennahmesystem erlaubt es nun, die Signale des Photonendetektors je nach koinzident ansprechendem Faserkanal in separate Histogramme zu schreiben, so daß koinzidente Einzelfaserspektren des Photonendetektors für alle Fasern des Elektronendetektors simultan aufgenommen werden können. Wenn nun die Asymmetrien aus diesen Einzelfaserspektren statt aus festen Energieintervallen des nicht-koinzidenten Photo-



**Abbildung 3.16:** Simultaner Fit des parametrisierten Detektorantwortmodells an die Einzelfaser-Koinzidenzspektren zu zwölf Kanälen des Faserspektrums zwecks Bestimmung des Polarisationsprodukts  $P_L P_e^{long}$ . Dargestellt ist die Analyse einer kombinierten Signal-Untergrund-Messungsgruppe der 855 MeV-Strahlzeit *beam200208* (*Mikrosample #1*, bestehend aus den jeweils fünfminütigen Datennahmeläufen 56341 – 56348; für eine Begriffsdefinition sei auf Abs. 6.5 verwiesen). Man kann erkennen, daß das parametrisierte Modell eine sehr gute Beschreibung beider Detektoren ermöglicht. Die zwischen (F19 – F24) und (F7 – F12) alternierende Numerierung der Fasern ist Ausdruck der aus versetzten Lagen bestehenden Geometrie des Faserbündels.

nenspektrums gebildet werden, sind die o. g. Verschmierungseffekte bereits zu einem großen Teil eliminiert. Zusätzlich kann aber auch ein simultaner Fit des parametrisierten Modells an diese Einzelfaser-Koinzidenzspektren durchgeführt werden, um die für die Analyse der Histogramme relevanten Einflüsse wie Energieauflösung des Detektors, Nachweiseffizienz der Fasern und Position des Elektronenstrahls<sup>15</sup> für jeden Datennahmelauf einzeln zu ermitteln (vgl. Abb. 3.16). Dies macht die Bestimmung der Compton-Asymmetrie relativ unabhängig von externen Annahmen über (möglicherweise fluktuierende) Eigenschaften der Apparatur und erlaubt es, die systematische Unsicherheit nahezu eine Größenordnung kleiner als die statistische Unsicherheit zu halten.

#### 3.3.4 *Slow-Control-System*

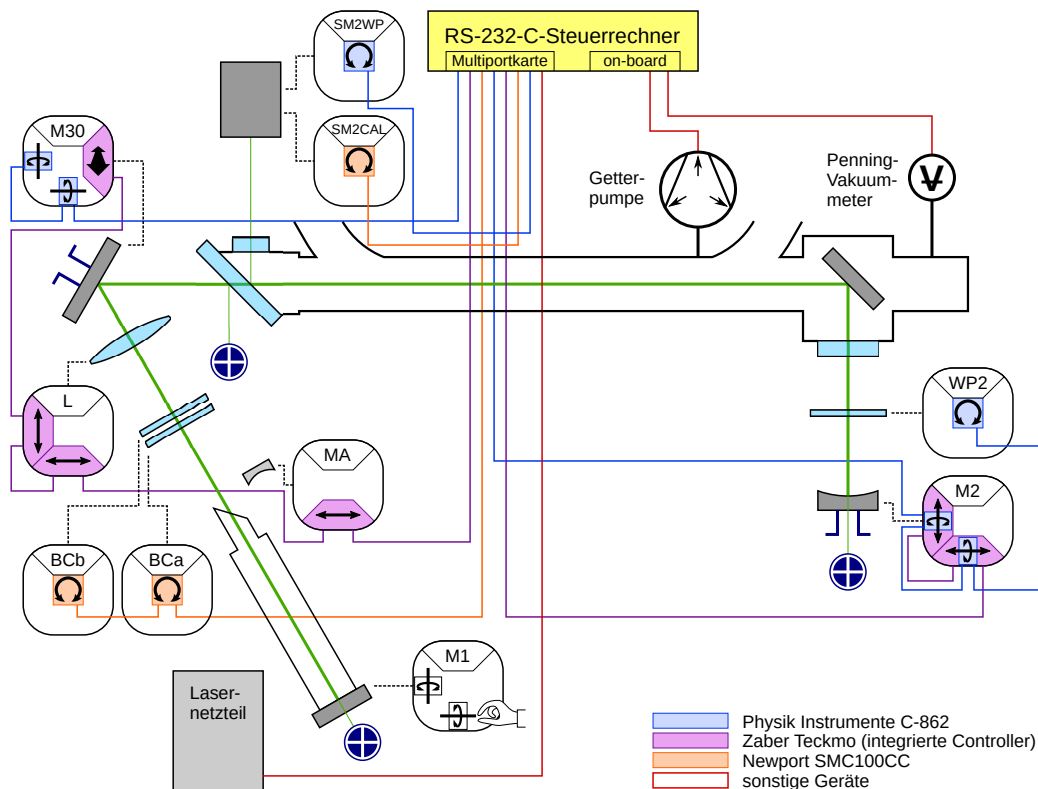
Durch Änderungen der Umgebungsbedingungen (insbesondere thermische Drift) kann sich die Strahlachse des Laserresonators verschieben, wodurch der Strahlüberlapp, die Laserleistung und ggf. sogar der Polarisationszustand des Laserstrahls beeinträchtigt werden. Dies ist besonders in den ersten 24 bis 48 Stunden einer Strahlzeit der Fall, da das gesamte System erst noch in ein Temperaturgleichgewicht mit der Umgebung kommen muß. Um in solchen Fällen nicht den Strahlbetrieb des Hauptexperiments für eine Nachjustierung unterbrechen zu müssen und um andere, teilweise langwierige Optimierungsaufgaben automatisieren zu können, wurden die optischen Elemente bis auf wenige Ausnahmen auf motorisierten Halterungen montiert, die über ein Steuergerät mit Leistungsendstufe (seltener auch direkt) an einen Computer angeschlossen werden können. Um eine einheitliche Schnittstelle für die Steuerung dieser Optomechanik zur Verfügung zu stellen und eine periodische Überwachung des Betriebszustands zu ermöglichen, wurde im Rahmen dieser Arbeit ein *slow-control*-System für das A4-Compton-Rückstreupolarimeter aufgebaut, dessen hardwareseitiger Kern aus zwei mit zusätzlichen Steuerungskomponenten ausgerüsteten 19-Zoll-Servern *Dell PowerEdge 2550*<sup>16</sup> besteht und das im folgenden kurz beschrieben werden soll. Es ist dabei zu beachten, daß dieses System nicht alle Bereiche des Polarimeters umfaßt: Das Detektorsystem und seine Auslese sind eng an die Datenerfassungsstrukturen des A4-Hauptexperiments angebunden, weshalb hierfür im Rahmen einer parallelen Arbeit [48] ein eigenes Steuerkonzept entwickelt wurde.

---

<sup>15</sup>Letztere ist für eine korrekte Einschätzung der Schikanendispersion erforderlich.

<sup>16</sup>Dell Inc., One Dell Way, Round Rock, TX 78682, USA





**Abbildung 3.17:** Übersicht über die Steuerungshardware des *slow-control*-Systems des A4-Compton-Rückstreupolarimeters. Die optomechanischen Komponenten sind je nach Typ der Steuerungseinheit in unterschiedlichen Farben gehalten (vgl. Legende). Der Endspiegel *M1* ist nur manuell verstellbar.

### Steuerungshardware

Die Steuereinheiten der Optomechanik, das Lasersystem und Teile der Vakuumapparaturen des Polarimeters sind mit einer seriellen Schnittstelle nach dem *RS-232-C*-Standard ausgerüstet. Der erste der beiden Server wurde daher mit einer PCI-Multiportkarte *Rayon P588/U*<sup>17</sup> ausgestattet, so daß diesem Rechner insgesamt zehn serielle Schnittstellen zur Verfügung stehen. Da die Steuereinheiten der Optomechanik eine Hintereinanderschaltung mehrerer Geräte gleichen Typs zu einer „daisy-chain“ erlauben, die dann an *eine* Schnittstelle des Rechners angeschlossen werden kann, können so bereits alle Steuerungsaufgaben wahrgenommen werden.

<sup>17</sup>Rayon Technology Co., Ltd., 2F, Nr. 177 Zhongshan 2nd Road, Luzhou District, New Taipei City 24656, Taiwan



### 3.3 Aufbau des A4-Compton-Rückstreupolarimeters

Freiheitsgrad	Optomechanische Halterung	Steuerungsgerät	verwendet für
Tangential-Kipptische	PI M-042.PD	PI C-862 „Mercury II“	<i>M30, M2</i>
Drehtische	PI M-037.PD	PI C-862 „Mercury II“	<i>WP2</i>
	PI M-060.PD	dto.	<i>SM2WP</i>
	Newport <sup>18</sup> SR50CC	Newport SMC100CC	<i>BCa, BCb, SM2CAL</i>
Lineartische	Newport M-423/426 mit Zaber <sup>19</sup> T-LA28-/T-LA60-Aktuator	integriert	<i>MA, L, M30, M2</i>

**Tabelle 3.2:** Übersicht über die verwendeten optomechanischen Komponenten und ihre Steuerungseinheiten

Das Steuerungssystem kontrolliert insgesamt neun optische Elemente mit 14 motorisierten Freiheitsgraden (auch *Achsen* genannt), den Laser selbst und zwei Komponenten des Vakuumsystems – ein Penning-Vakuummessgerät am Ende der Wechselwirkungszone in der Nähe des Austrittsflansches der rückgestreuten Photonen und eine Ionen-Getterpumpe im hinteren Bereich der Schikane, deren Betriebsparameter ebenfalls zur Bestimmung des Vakuums herangezogen werden können. Die Justierfreiheitsgrade werden durch tangential angetriebene Zweiachs-Kipptische zur Justierung des Neigungswinkels gegen die Strahlachse (*M30, M2*), Linearverstellische zur Zentrierung auf den Strahl (*L, M30, M2*) und axial ausgerichtete Drehtische zur Orientierung polarisationsoptischer Elemente (*BCa, BCb, WP2, SM2CAL, SM2WP*) umgesetzt. Einen Überblick über die Konfiguration des Systems und die anzusteuernden Geräte geben Abb. 3.17 und Tabelle 3.2.

#### Datenerfassungshardware

Das *slow-control*-System soll ferngesteuerte und teilweise sogar automatisierte Optimierungen des optischen Systems erlauben sowie die Langzeitüberwachung von Betriebsparametern des Polarimeters ermöglichen. Hierfür ist neben der Steuerung auch eine elektronische Erfassung von Sensorsignalen erforderlich, weshalb der zweite Server mit einer PCI-Datenerfassungskar-

<sup>18</sup>Newport Corporation, 1791 Deere Avenue, Irvine, CA 92606, USA

<sup>19</sup>Zaber Technologies Inc., #2-605 West Kent Avenue North, Vancouver, British Columbia V6P 6T7, Kanada

te *AdlinkTech DAQ-2205*<sup>20</sup> ausgestattet wurde. Diese Karte verfügt über 64 Analogeingänge, deren Signale mit einer Auflösung von 16 Bit und einer Rate von bis zu 500 000 Wandlungen pro Sekunde *quasisimultan* abgetastet werden können<sup>21</sup>. Es ist hierbei möglich, zwecks Unterdrückung von Störsignalen auf den Signalleitungen zwei Eingänge zu einem differentiellen Eingang zusammenzuschließen. Zusätzlich stehen zwei analoge Signalausgänge und 24 digitale Signalleitungen zur Verfügung, die wahlweise als Ein- oder Ausgänge genutzt werden können.

Der Aufbau des Datenerfassungssystems ist schematisch in Abb. 3.18 dargestellt. Es werden insgesamt sieben analoge Signale ausgelesen:

- ein Intensitätssignal zur Überwachung der Laserleistung

Die positionsempfindlichen Sensoren der Strahllageregelung geben neben der Position auch die Lichtintensität des einfallenden Strahls aus. In diesem Fall wird hierfür das entsprechende Signal des am Endspiegel *M1* befindlichen Sensors ausgelesen. Eine Absolutmessung der resonatorinternen Leistung ist durch geeignete Kalibration möglich.

- das Positionssignal des Elektronendetektors

Um den Elektronendetektor zielgerichtet aus dem Strahl oder an den Strahl heranfahren zu können, muß dessen Position bekannt sein. Zu diesem Zweck ist am Rahmen des Aufbaus ein Potentiometer angebracht, dessen Schleifkontakt mit dem Verfahr Schlitten verbunden ist und so ein linear positionsabhängiges Spannungssignal erzeugt; dieses wird zusammen mit der zugehörigen Versorgungsspannung ausgelesen. Um die Position kalibrieren zu können, sind zwei Wolframdrähte neben dem Faserbündel montiert, die nach demselben Prinzip wie die in Abs. 3.3.1 erwähnten Drahtscanner funktionieren (vgl. [48, S. 95]).

- der Scanner-Detektor

Strahlabwärts der Schikane ist ein Bleiglasdetektor installiert, um die durch die Kollision von Strahlelektronen mit Drähten der verschiedenen Drahtscanner ausgelösten elektromagnetischen Schauer nachzuweisen. Dieser Detektor wird sowohl für die Drahtscanner-Messungen zur

---

<sup>20</sup>Adlink Technology Inc., 9F, Nr. 166 Jiang Yi Road, Zhonghe District, New Taipei City 235, Taiwan

<sup>21</sup>Dies bedeutet, daß die Karte nur *einen* Analog-Digital-Wandler (*A/D-Wandler* bzw. *ADC*) enthält, dem die Signale verschiedener Eingangskanäle aber nacheinander in sehr schneller Folge zugeführt werden können, so daß man die Einzelwerte als nahezu gleichzeitig gemessen ansehen kann.

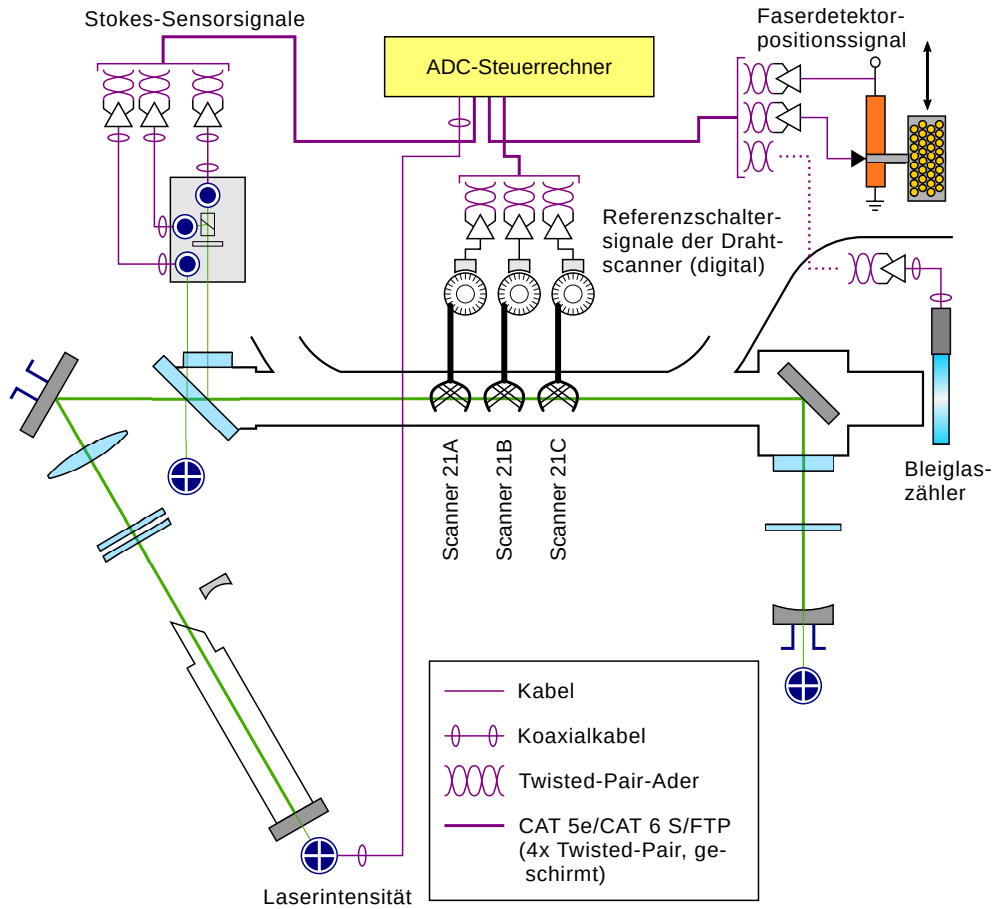


Abbildung 3.18: Schematischer Überblick über das Datenerfassungssystem.

Herstellung von Strahlüberlapp verwendet als auch bei der Positionskalibration des Elektronendetektors.

- die Signale der Laser-Polarisationsmessung (siehe hierzu Abs. 4.4)

### Client-Server-System

Wie man sehen kann, umfaßt das *slow-control*-System eine erhebliche Anzahl teils recht unterschiedlicher Geräte, die sowohl als Befehlsempfänger als auch als Datenquellen fungieren können. Damit nun einerseits der Betriebszustand aller dieser Komponenten an einem zentralen Ort (etwa dem Kontrollraum des Experiments) in Form eines Gesamtüberblicks dargestellt werden kann und andererseits eine Bedienung des Systems sowohl von diesem Ort als auch ggf. von anderen Arbeitsplätzen aus möglich ist (z. B. bei

lokalen Wartungsarbeiten in der Experimentierhalle), wurde im Rahmen dieser Arbeit ein *client-server*-basiertes Softwarekonzept für die Steuerung des Systems entwickelt.

Die zentrale Bedienungskomponente ist ein in der Programmiersprache *C++* geschriebenes Client-Programm mit graphischer Benutzeroberfläche, das (ein wenig augenzwinkernd) *Compton Polarimeter Synergy Station* oder kurz *CoPSyS* genannt wurde. Ihm gegenüber stehen verschiedene Server-Programme, die die direkte Kontrolle über die Hardware ausüben und entsprechend als *Compton Polarimeter Distributed Services* bzw. *CoPDiS* bezeichnet werden. Es sind dies im einzelnen:

#### *copdis\_optoserver*

Aus Tabelle 3.2 kann man erkennen, daß drei unterschiedliche Steuerungssysteme zur Kontrolle der optomechanischen Komponenten eingesetzt werden. Jedes System hat eine eigene Hardware-Befehlssyntax, unterschiedliche Arten von Betriebszuständen und unterschiedliche Arten, auf Befehle zu reagieren und die Befehle zu verarbeiten.

Um hier eine einheitliche Bedienungsschnittstelle zu schaffen, wurde ein zentraler Server geschrieben, der aus Perspektive eines Client-Prozesses unabhängig vom tatsächlichen Gerätetyp dasselbe Verhalten aufweist, welches – soweit wie möglich – die für am praktischsten befundenen Eigenschaften aller verwendeten Typen in sich vereint. Dies wird dadurch erreicht, daß dem Client ein Satz allgemein gehaltener Befehle (z. B. „Fahre zu Position“, „Halt“, „Setze Geschwindigkeit“ usw.) zur Verfügung gestellt wird, deren tatsächliche Umsetzung dann an einen für jeden Controllertyp eigens geschriebenen „Gerätetreiber“ in Form einer dynamisch geladenen Bibliothek<sup>22</sup> delegiert wird. Dieser Treiber kann dann entweder eine passende, von der Firmware des Controllers vorgesehene Funktion direkt aufrufen, oder er muß eine entsprechend gewählte Sequenz von Befehlen und Statusabfragen ausführen, die das gewünschte Verhalten der Achse bewirken.

Der *optosever* ist bei weitem der komplexeste Server des Systems, erlaubt aufgrund dieser Modularität aber auch, neue Controllertypen nahtlos in den Aufbau zu integrieren.

#### *copdis\_adcserver*

Dies ist ein relativ kompaktes Programm, das im wesentlichen auf externe Anfragen reagiert und dann die entsprechende Funktionalität

---

<sup>22</sup>in Windows<sup>TM</sup> als *DLL*, in Linux als *shared library* bezeichnet

im vom Hersteller zur Verfügung gestellten Gerätetreiber aufruft, zusätzlich aber auch eine Ressourcenverwaltung zur Vermeidung konkurrierender Hardwarezugriffe enthält. Darüberhinaus wird per Software-Emulation ein gemischter Datennahmemodus zur Verfügung gestellt, mit dem analoge Signale und digitale Logikpegel quasisimultan abgetastet werden können; hier wird allerdings eine geringere Datennahmerate als bei den hardwaremäßig vorgesehenen Funktionen erreicht, da dieser Modus in der Realität durch eine Programmschleife, bestehend aus Abtastung der Analogeingänge, Einlesen der Digitalkanäle und anschließender Pause, umgesetzt wird.

Passend zum *adcserver* wurde auch ein Kommandozeilenprogramm (der *daq2000\_client*) geschrieben, welches vom Benutzer aufgerufen werden kann, um die Datennahme mit der ADC-Karte auszulösen; außerdem können auf diese Weise beliebige andere Programme die Funktionalität der Karte nutzen, ohne selbst die entsprechende Kommunikation mit dem Server implementieren zu müssen.

#### *copdis\_laserserver*

Die Motivation zur Entwicklung des hier vorgestellten *slow-control*-Systems ist ursprünglich aus der Notwendigkeit heraus entstanden, den Betriebszustand des Lasers – der aufgrund der erheblichen elektrischen Leistung die stör anfälligste Komponente des Polarimeters ist – zu überwachen. Anfangs wurde hierfür ein Programm verwendet, daß direkt mit dem Laser kommuniziert und somit zwangsläufig auf dem Rechner, an den der Laser angeschlossen ist, gestartet werden mußte; im Laufe der Zeit wurde dann zwecks Flexibilisierung das hier beschriebene *client-server*-System eingeführt.

Der *laserserver* ermöglicht es, den Laser ein- und auszuschalten und die Laserleistung (ggf. auch schrittweise) zu verändern; außerdem fragt er periodisch alle Parameter ab, die den Betriebszustand betreffen, und schreibt sie ggf. in eine Protokolldatei. Da das Lasernetzgerät selbst aber nicht alle relevanten Größen mißt (insbesondere die Kühlwassertemperatur, welche enorm wichtig für den sicheren Betrieb des Lasers ist), ist der Server so konzipiert, daß er nicht speziell auf die Kommunikation mit dem Laser zugeschnitten ist, sondern mit beliebigen angeschlossenen Geräten (und sogar mit den anderen Servern des *slow-control*-Systems) in Verbindung treten oder Steuerungsaufgaben per Kommandozeilenbefehl ausführen kann, wobei die Kommunikationssyntax über eine Konfigurationsdatei relativ frei vom Anwender selbst

definiert werden kann. Aufgrund dieser Flexibilität wurden bei Strahlzeiten im allgemeinen zwei dieser Server gestartet, von denen der eine das Lasersystem und der andere das Vakuumsystem des Polarimeters überwacht.

Die Kommunikation zwischen Client und Server erfolgt über ein eigens definiertes, textbasiertes Protokoll, das über eine TCP/IP-Netzwerkverbindung abgewickelt wird. Es enthält eine Flußsteuerung, mit der ein Client über den „Fortschritt“ des ausgelösten Befehls unterrichtet werden kann, sowie die Möglichkeit, Benachrichtigungen über Hardwareparameter zu „abonnieren“, so daß ein Client automatisch informiert wird, wann immer dem Server ein aktueller Wert dieses Parameters gemeldet wurde oder anderweitig vorliegt.

### 3.3.5 Betrieb des Polarimeters

Das hier vorgestellte *internal-cavity*-Konzept weist einige Besonderheiten im Betrieb auf, die an einigen Beispielen kurz verdeutlicht werden sollen.

#### Justierung der Optik

Damit Lasertätigkeit in einem Resonator einsetzt, müssen die optischen Elemente so justiert werden, daß der Strahl an allen Endspiegeln nahezu exakt in sich selbst zurückreflektiert wird und möglichst zentral alle Aperturen und insbesondere das laseraktive Medium passiert. Der Resonator des hier vorgestellten Polarimeters hat nun eine Länge von ca. 8 m, wodurch diese Justierung – insbesondere in Verbindung mit der gefalteten Geometrie und der größeren Anzahl optischer Elemente – deutlich erschwert wird; eine zusätzliche Komplikation erwächst hierbei aus der resonatorinternen Polarisationsoptik. Dies macht sich vor allem nach Wartungsarbeiten oder längeren Betriebspausen bemerkbar, wenn keinerlei Anhaltspunkte für die Abweichung des derzeitigen Justierzustands vom Optimalfall vorliegen.

Um in diesen Fällen den Zeitaufwand in einem überschaubaren Rahmen zu halten, wird die Initialjustierung ohne polarisationsoptische Elemente und mit einem Pilotlaserverfahren durchgeführt. Zu diesem Zweck wurde ein teildurchlässiger plankonkaver Spiegel mit demselben Krümmungsradius und derselben Reflektivität wie der werkseitige Auskoppelspiegel (*MA* in Abb. 3.12) auf einem Linearverschiebetisch montiert, so daß er bei Bedarf in die nominelle Strahlachse hineingefahren werden kann und zusammen mit dem werkseitigen Endspiegel *M1* einen leichter zu justierenden zweielementigen Resonator bildet. Sobald bei diesem die Lasertätigkeit eingesetzt hat

(und somit ein nach außen abgegebener Nutzstrahl vorliegt), wird er auf maximale Leistung justiert, so daß die gegenwärtige Strahlachse optimal in der Plasmaröhre liegt; anschließend kann der Laser bei geringem Röhrenstrom betrieben werden, um alle anderen Elemente des Polarimeterresonators auf die durch den Nutzstrahl nun sichtbar manifestierte Strahlachse zu zentrieren. Mit dieser Vorjustierung ist es deutlich einfacher, den Polarimeterresonator selbst zu justieren.

Sobald der Hauptresonator auf maximale Leistung optimiert ist, können die polarisationsoptischen Elemente wieder installiert werden. Anschließend werden mit einer automatischen Suchroutine diejenigen Einstellungen von Kompensator und Wellenplatte gesucht, bei denen die Lasertätigkeit wieder einsetzt und die die beste Kombination aus Laserleistung und Reinheit des Polarisationszustands bieten.

#### Strahlüberlapp

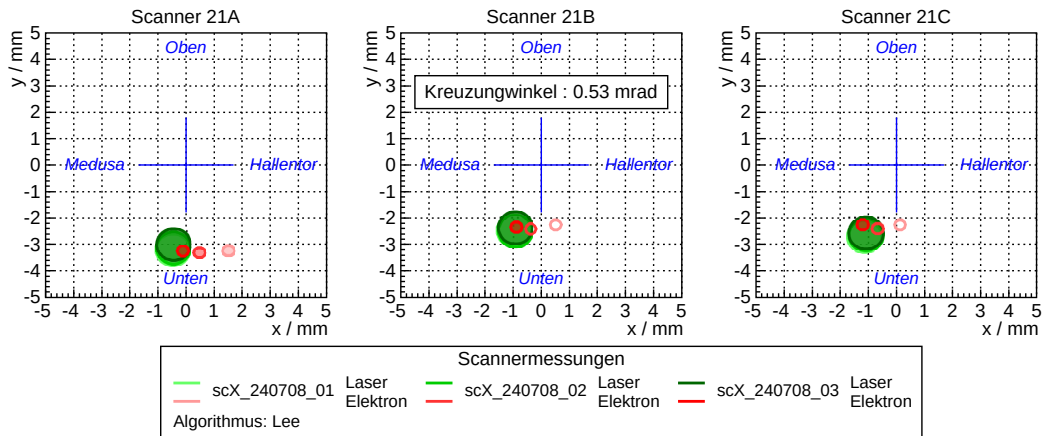
Wie in Abs. 3.1.6 festgestellt wurde, hängt die Leistungsfähigkeit des hier beschriebenen Polarimeters empfindlich von der Einhaltung der kollinearen Strahlgeometrie ab. Aus diesem Grund wird die relative Lage beider Strahlen im Laufe einer Strahlzeit regelmäßig mit den in Abs. 3.3.1 erwähnten Drahtscannern gemessen, um ggf. die Strahlführung oder das optische System nachzujustieren.

Jeder Scanner beinhaltet eine an einem Pendelarm befestigte Gabel, in der zwei Paare dünner paralleler Wolframdrähte in einem Winkel von ca.  $110^\circ$  zueinander gespannt sind. Der Pendelarm wird durch einen Elektromotor bewegt, so daß die Gabel periodisch auf und ab durch das Strahlrohr pendelt. Sobald einer der Drähte im Rahmen einer Messung den Elektronenstrahl durchquert, entsteht ein elektromagnetischer Teilchenschauer, der durch einen Bleiglasdetektor nachgewiesen werden kann. Trifft ein Draht hingegen auf den Laserstrahl, so wird er Streu- und Beugungsverluste im Resonator hervorrufen und somit die Laserleistung verringern. Es ist daher möglich, die Positionen beider Strahlen zu bestimmen, indem das Detektor- und das Intensitätssignal zusammen mit dem Referenzschaltersignal gemessen wird; ein entsprechendes Analyseverfahren wurde in einer parallelen Arbeit [117] entwickelt.

Der Prozeßablauf und die Datenerfassung der Scannermessungen<sup>23</sup> sind in das o. g. *slow-control*-System eingebunden und werden vom dort erwähnten *CoPSyS*-Programm aus gesteuert. Dieses übernimmt auch die Verarbeitung

---

<sup>23</sup>bis auf die Betätigung der Scanner selbst, die vom MAMI-Bedienraum aus erfolgt



**Abbildung 3.19:** Darstellung der Drahtscanner-Meßergebnisse während der Optimierung der Strahlpositionen im Rahmen der Strahlzeit *beam230708* am 24.07.2008. Der grüne Punkt stellt jeweils den Laserstrahl dar, der rote Punkt den Elektronenstrahl. Die dargestellten Strahlfleckgrößen dienen nur der Veranschaulichung und sind zwar realistische, aber willkürlich gewählte Werte und kein Ergebnis der Messung. Wie man sehen kann, wurde innerhalb von drei Schritten ein Strahlüberlapp mit einem Kreuzungswinkel von nur 0.53 mrad erreicht, was insgesamt lediglich 20 Minuten in Anspruch genommen hat.

der Daten, wobei für die Positionsbestimmung auf den in [117] entwickelten Algorithmus zurückgegriffen wird. Die räumliche Lage beider Strahlen ist bestimmt, sobald eine Meßreihe mit allen drei Scannern durchgeführt wurde. Um nun gezielt eine Korrektur der Strahlposition durchführen zu können, wurde im Rahmen der Untersuchung der Schikaneneigenschaften [117] auch ein Verfahren entwickelt, um aus den Lageinformationen Korrekturwerte für die Betriebsparameter der Strahlführung zu berechnen und dem Beschleuniger-Operator direkt zum Import zur Verfügung zu stellen. Wenngleich dieses Verfahren meistens iterativ angewandt werden muß, konvergiert es innerhalb weniger Schritte, wodurch auch bei ungünstiger Ausgangslage typischerweise innerhalb von maximal 1/2 h der gewünschte Strahlüberlapp erreicht wird (vgl. Abb. 3.19).

Es ist zu beachten, daß die Herstellung des Überlapps bevorzugt durch Verschiebung des Elektronenstrahls erfolgt, da jede Verschiebung des Laserstrahls eine Änderung des laseraktiven Resonators selbst bedingt und daher unerwünschte Nebeneffekte auf die Laserleistung und den Polarisationszustand haben kann. Allerdings erlaubt die Strahlführung des Elektronen-



strahls nur eine Verschiebung in der Horizontalebene<sup>24</sup>, da aufgrund des verfügbaren Platzes keine Installation entsprechender Strahlkorrektur Elemente für die Vertikalrichtung möglich war. Sofern ein nennenswerter vertikaler Abstand beider Strahlen vorliegt, kann jedoch auch die Laserstrahlachse durch geeignete Anpassung der Spiegel *M30* und *M2* höher- bzw. tiefergelegt werden.

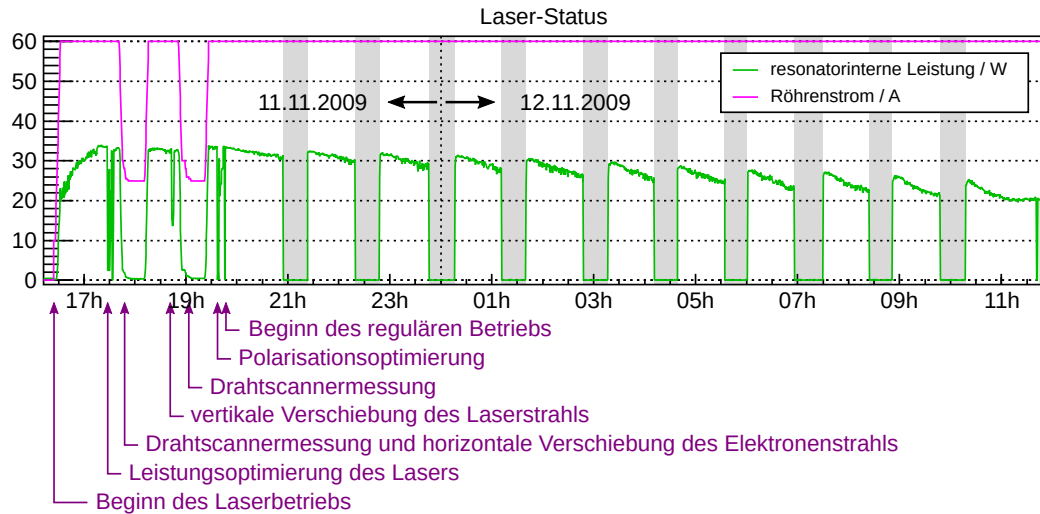
#### Stabilität des Lasersystems

Da das Lasersystem wie alle Plasmalaser nur einen geringen Wirkungsgrad aufweist, entsteht im Betrieb eine erhebliche Menge an Verlustwärme, die über eine externe Wasserkühlung abgeführt werden muß (vgl. Abs. 3.3.2). Der größte Anteil fällt hierbei an der Plasmaröhre und somit in unmittelbarer Nähe optischer Elemente an, weshalb Änderungen der Betriebsbedingungen sich direkt auf den Laserresonator auswirken können. Insbesondere kann die thermische Ausdehnung der Rahmenstruktur und der Optikhalterungen zu einer Änderung der Resonatorlänge (und somit der Wellenlänge des Laserlichts), aber auch zu einer transversalen Verschiebung der Strahlachse führen, was sich aufgrund der Justierempfindlichkeit des Systems sofort in einer Änderung der Lichtintensität niederschlägt. Zwar ist der Anteil der Wärme, der auf diese Weise in die Umgebung entweicht und somit das optische System beeinträchtigen kann, gering, stellt bei diesem Laser jedoch immer noch eine so große Wärmemenge dar, daß bei einer Änderung der Betriebsbedingungen mitunter mehrere Stunden vergehen, bis wieder ein thermisches Gleichgewicht und somit eine stabile Laserleistung erreicht wird.

Um dies zu veranschaulichen, ist in Abb. 3.20 die zeitliche Entwicklung der Laserleistung während der ersten 19 Stunden nach der Inbetriebnahme des Lasers im Rahmen einer A4-Strahlzeit dargestellt. Man kann deutlich erkennen, daß die Leistung innerhalb der ersten Stunde noch erheblich nachläuft und dies wahrscheinlich auch weiter getan hätte, wenn der Röhrenstrom nicht zwecks Durchführung einer Drahtscannermessung reduziert worden wäre. Weiterhin kann man sehen, daß selbst im anschließenden Regelbetrieb, bei dem der Röhrenstrom und somit die Wärmeentwicklung konstant bleibt, eine stetige Drift der Laserleistung festzustellen ist. Im Rahmen regelmäßiger Überprüfungen der Strahlage bei verschiedenen Strahlzeiten konnte die Vermutung bestätigt werden, daß diese Drift hauptsächlich durch eine schleichende Verschiebung der Strahlachse verursacht wird; hierfür spricht auch,

---

<sup>24</sup>Hierfür wird die Gesamt-Stromstärke der Dipolmagnete sowie das Nebenschlußverhältnis von eigens für diesen Zweck installierten parallelgeschalteten Lastwiderständen angepasst [48].

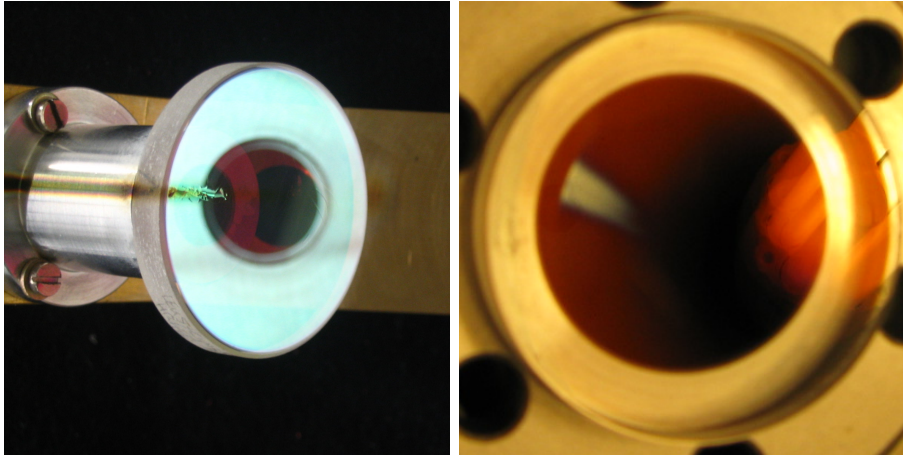


**Abbildung 3.20:** Verlauf der resonatorinternen Leistung und des Röhrenstroms während der ersten 19 Betriebsstunden des Lasers im Rahmen der Strahlzeit *beam101109*. Die Lichtintensität wurde mittels des Positionssensors *PSDM1* (vgl. Abb. 3.12) überwacht, wobei die Kalibration aufgrund einer Messung mit einem kommerziellen Tastkopf *Coherent LM-2* unterhalb des Vakuumfensters *W45* in Verbindung mit dessen bekannter Reflektivität erfolgte. Während der grau hinterlegten Phasen war der Laserstrahl blockiert, um Untergrundmessungen mit den Detektoren durchführen zu können.

daß sich die resultierende Abnahme der Leistung im allgemeinen durch eine Nachjustierung der Laseroptik wieder größtenteils kompensieren läßt.

Man kann aus Abb. 3.20 jedoch auch ersehen, daß die Verlustleistung in der Plasmaröhre nicht die einzige Quelle der beobachteten Driften sein kann: Obwohl während der Untergrundmessungen der Laserstrahl nur mittels eines Strahlfängers unterbrochen wird und die Betriebsparameter ansonsten konstant bleiben, ist die Laserleistung nach der erneuten Freigabe des Strahls immer höher als zuletzt vor der Unterbrechung. Dies könnte darauf hindeuten, daß sich die optischen Elemente aufgrund des Laserstrahls selbst ebenfalls aufheizen und hierdurch zusätzliche Störungen der Resonatoreigenschaften auftreten.

Insgesamt bleibt allerdings festzuhalten, daß die aus Abb. 3.20 ersichtliche Lichtintensität deutlich hinter den in Abs. 3.1.7 erwähnten Werten von bis zu 100 W zurückbleibt. Die Ursache hierfür ist nicht abschließend geklärt; es ist jedoch davon auszugehen, daß – neben einem möglichen Verschleiß der optischen Oberflächen – die mangelnde Kompensation der parasitären Doppelbrechung der Resonatoroptik einen erheblichen Anteil an der in diesem

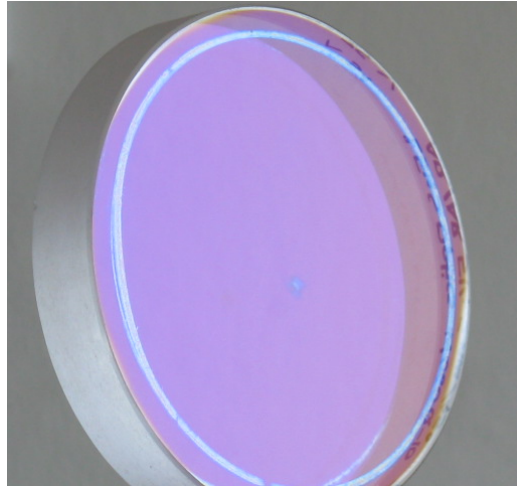


**Abbildung 3.21:** Kohlenstoffdeposition auf der strahlabwärts gelegenen Vakuumoptik. *Links:* 90°-Umlenkspiegel *LEnS-Optics MS1.5'' Q-10 HR 460-540nm/45° #2* in der Funktion als *M45* – *Rechts:* Vakuumfenster *LEnS-Optics WW035Q-10 AR/AR 475-530nm/0° #1* in der Funktion als *W0*, wobei die Vakuumseite oben auf liegt.

Fall beobachteten Leistungseinbuße hat.

#### Plasmareinigung der Optik

Bereits kurz nach den ersten Phasen längeren Polarimeterbetriebs wurde festgestellt, daß sich auf dem strahlabwärts gelegenen Umlenkspiegel *M45* ein dunkelbrauner Belag bildet, dessen Form den zu erwartenden Synchrotronstrahlungskegel im dritten Dipolmagneten nachzeichnet (vgl. Abb. 3.21). Die Vermutung eines Zusammenhangs mit der Synchrotronstrahlung wurde dadurch unterstützt, daß ein gemäß dem entsprechenden Spiegelbild geformter Belag auch auf der vakuumseitigen Oberfläche des Vakuumfensters *W0* gefunden wurde: Die einzige andere Erklärung wäre die Bremsstrahlung am Restgas gewesen, wobei diese Photonen jedoch aufgrund ihres Energiespektrums nicht am Spiegel reflektiert worden wären und somit keine Beeinträchtigung des Fensters hätte auftreten sollen. Aufgrund dieser Beobachtungen wurde zunächst die Schlußfolgerung gezogen, daß Kohlenwasserstoffe im Restgas der Schikane durch die kurzwellige Synchrotronstrahlung aufgespalten werden und sich als strahlungsinduzierte chemische Gasphasenabscheidung (auch *chemical vapour deposition* oder *CVD*) auf den optischen Oberflächen niederschlagen. Da hiermit eine Beeinträchtigung der Laserleistung und teilweise sogar eine Beschädigung der Optik einherging, wurden die entsprechen-



**Abbildung 3.22:** Laserinduzierter Fleck auf dem 45°-Vakuumsfenster *LEnS-Optics W060Q-10 AR/AR 514.5nm/45° #1*.

den Elemente in der Folge regelmäßig ausgetauscht und Maßnahmen zur Verbesserung des Vakuums, insbesondere durch die Beseitigung von Engstellen im Vakuumsystem und die Installation einer zusätzlichen Pumpe (vgl. [48, Kap. 4.1]), getroffen.

Wenngleich es mit den genannten Maßnahmen gelang, dieses Problem deutlich abzumildern, wurde mit Beginn der Vorbereitungen für die erste Strahlzeit bei 1.5 GeV regelmäßig beobachtet, daß sich bei Dauerbetrieb des Lasers innerhalb von weniger als einem Tag ein diffuser Fleck auf der Vakuumseite des Fensters *W45* genau an der Stelle bildet, an der der Laserstrahl auf dieses Fenster trifft. Eine genauere Untersuchung ergab dann, daß auch die früher eingesetzten Fenster einen solchen Fleck aufwiesen, der allerdings deutlich schwächer ausgeprägt war. Da nun im Laufe der Zeit sowohl das Lasersystem als auch die Justierverfahren verbessert worden waren und somit höhere Lichtintensitäten erreicht wurden, lag die Vermutung nahe, daß es sich hierbei um das laserinduzierte Analogon der bereits auf *M45* bzw. *W0* beobachteten Kohlenstoffdepositionen handelt.

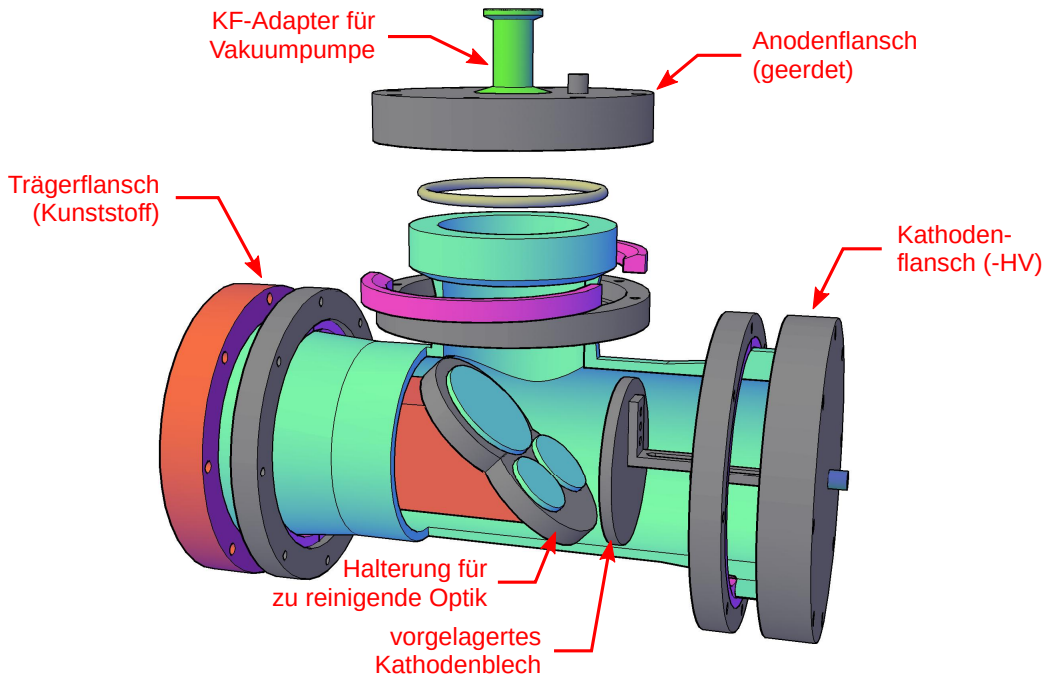
Ein solcher Effekt stellt nun in zweierlei Hinsicht ein erhebliches Problem dar: Einerseits führen die durch diese Depositionen hervorgerufenen resonatorinternen Absorptionsverluste zu einer deutlichen Verringerung der Laserleistung, andererseits soll gerade das von dieser Oberfläche herausgespiegelte Licht zur Bestimmung der Laserpolarisation herangezogen werden; eine – zumal zeitlich nicht konstante – Änderung der Reflexionseigenschaften würde daher die Interpretation der Meßdaten unmöglich machen (siehe hierzu auch

Abs. 6.4). Im Zuge weiterer Überlegungen zu den Ursachen wurde jedoch festgestellt, daß dieses Problem vermieden werden kann, wenn die optischen Oberflächen (unmittelbar) vor der Installation im Resonator einer Gasentladung von 2 – 10 mA bei Drücken von ca. 0.1 – 0.5 mbar ausgesetzt werden. Grundlage dieser Idee war die im Rahmen diverser Untersuchungen zur Depositionsbildung gewonnene Erkenntnis, daß die bei *diesem* Effekt aufgespaltenen Kohlenwasserstoffe möglicherweise bereits auf der Oberfläche adsorbiert waren und nicht erst aus dem Restgas der Schikane dorthin diffundiert sind. Bei dem Versuch, verschiedene Reinigungsmethoden zu testen, ohne jedes Mal die Bildung einer Deposition unter Einwirkung des Laserlichts abwarten zu müssen, stellte sich dann heraus, daß die als „Substitut“ für den Laser eingesetzte Gasentladungs-Kathodenstrahlapparatur selbst eine solche Methode darstellen könnte, falls ein Kontakt der Oberfläche mit dem hier entstehenden reaktiven Plasma zu einer Oxidation dieser Kohlenwasserstoffe zu  $\text{CO}_x$  und  $\text{H}_2\text{O}$  führt [48]. In der Tat konnte nach entsprechender Abwandlung der Apparatur [48] im Rahmen eines Testlaufs demonstriert werden, daß sich bei einem auf diese Weise behandelten Fenster<sup>25</sup> auch nach mehr als 40 Stunden Dauerbetrieb des Lasers noch keine Deposition gebildet hatte; in der Folge wurde die Plasmareinigung als fester Bestandteil der Strahlzeitvorbereitungen etabliert. Die atmosphärenseitigen Oberflächen der Vakuumfenster müssen hierbei nicht behandelt werden, da bei einer Aufspaltung der Kohlenwasserstoffe an *dieser* Seite ja genügend Sauerstoff für eine sofortige Oxidation der entstehenden Kohlenstoffradikale zur Verfügung steht; lediglich im „anaeroben“ Vakuum können diese mit anderen Kohlenwasserstoffresten reagieren und als Belag auf der Oberfläche zurückbleiben.

Trotz der so erzielten Erfolge erschien eine Verbesserung des Systems wünschenswert, da der Prototyp zwei wichtige Nachteile aufweist: zunächst kann mit dieser Apparatur immer nur *ein* optisches Element behandelt werden, weil dieses den Abschluß des (einseitig offenen) Entladungsrohrs bildet. Da jedoch drei Resonatorkomponenten (*W45*, *M45* und *W0*) betroffen sind, müssen diese dann der Reihe nach gereinigt werden, obwohl bei einem zu großen zeitlichen Abstand zwischen Reinigung und Wiederherstellung des Vakuums nach der Installation die Gefahr besteht, daß die gerade behandelten Oberflächen wieder kontaminiert werden. Der zweite Nachteil der Apparatur ist ebenfalls eine Folge dieser konstruktiven Besonderheit und besteht darin, daß das optische Element – lediglich durch einen Gummiring getrennt – auf einem metallenen Schweißflansch aufliegt, der gleichzeitig als Kathode des Systems fungiert. Im Rahmen eines Belastungstests wurde jedoch festgestellt, daß

---

<sup>25</sup> *LEnS-Optics W060Q-10 AR/AR 475-530nm/45° #2-3*



**Abbildung 3.23:** Verbesserte Apparatur zur Plasmareinigung der Optik. Die Befestigung der Flansche ist exemplarisch am Beispiel des Anodenflanschs dargestellt.

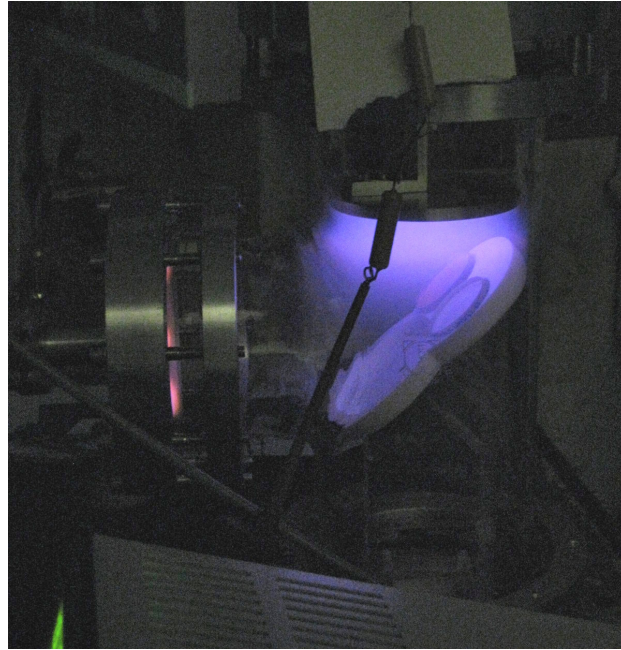
durch die Gasentladung unter Umständen Material von diesem Flansch abgesputtert werden kann, das sich dann aufgrund des geringen Abstands als Metallfilm auf der zu reinigenden Oberfläche niederschlägt.

Im Rahmen dieser Arbeit wurde daher eine verbesserte Apparatur entworfen, bei der die Gasentladung eine Biegung um  $90^\circ$  vollführt, um die optischen Elemente dem Plasma aussetzen zu können, ohne sie dafür in der Mitte der Kathode plazieren zu müssen; sie ist schematisch in Abb. 3.23 dargestellt. Kern der Apparatur ist ein Reduzier-T-Stück *Schott TS 100/88/333*<sup>26</sup> aus DURAN-Spezialglas, dessen vorderer und seitlicher Ausgang durch Aluminiumflansche verschlossen sind, die zugleich als Kathode bzw. Anode fungieren; die Anode weist hierbei auch den Anschluß für die Vakuumapparatur auf und liegt daher auf Erdpotential. Die zu reinigenden optischen Elemente werden in eine unter  $45^\circ$  zur Längsachse geneigte Halterung gelegt, die über einen Trägerarm am dritten Flansch der Apparatur befestigt ist. Die Halterung besteht hierbei aus *MACOR*-Glaskeramik<sup>27</sup>, da sie einerseits nichtleitend sein

<sup>26</sup>Schott AG, Hattenbergstraße 10, 55122 Mainz

<sup>27</sup>Corning Inc., 1 Riverfront Plaza, Corning, NY 14831, USA





**Abbildung 3.24:** Photo der neuen Apparatur während der Reinigung zweier optischer Elemente bei einem Druck von ca. 0.2 mbar. Die Apparatur steht hierbei aufrecht mit dem Kathodenflansch oben. Man sieht deutlich den gekrümmten Verlauf des Entladungspfads.

muß, um die Gasentladung nicht zu stören, andererseits aber unter dem Ionenbombardement auch keine Kohlenstoffverbindungen abgeben soll, die sich evtl. wieder als Kontamination auf den optischen Oberflächen absetzen könnten. Am Kathodenflansch ist zusätzlich eine in Längsrichtung verstellbare Aluminiumscheibe befestigt, mit der sich die genaue Lage der Gasentladung innerhalb des Rohres anpassen läßt.

Abbildung 3.24 zeigt die Apparatur nun im realen Betrieb während der Vorbereitung der 1.5 GeV-Strahlzeit *beam101109*. Man kann deutlich erkennen, daß das Kathodenglimmlicht, dem wahrscheinlich die größte Reinigungswirkung zuzuschreiben ist [48], hier nicht die gesamte Optikhalterung bedeckt. In diesem Fall war es daher erforderlich, für die Reinigung des Vakuumfensters *W45* nochmals die alte Apparatur einzusetzen; durch eine geeignete Optimierung der Kathodengeometrie und der Gasentladungsparameter sollte dieser Mangel aber auch ausgeräumt werden können. Für weitere Ausführungen über die Kohlenstoffdepositionen und die Notwendigkeit ihrer Vermeidung sei auf Anhang D verwiesen.

## 3.4 Vergleich mit anderen Compton-Rückstreupolarimetern

Um die Leistung des hier beschriebenen Polarimeters einzuordnen, soll es mit solchen Compton-Rückstreupolarimetern verglichen werden, die für Experimente mit ähnlich gelagerten Meßbedingungen konzipiert wurden, wobei das Augenmerk im besonderen auf den Ansatz zur Lösung des Luminositätsproblems gerichtet werden soll. Es ist naheliegend, daß solche Apparaturen für Experimente mit ähnlicher Zielsetzung oder Methodik wie das A4-Experiment gebaut werden; diese sind insbesondere am JLab zu finden.

### 3.4.1 JLab Hall A (HAPPEX)

Das HAPPEX-Experiment in Experimentierhalle A des JLab hatte ebenso wie das A4-Experiment das Ziel, den *strangeness*-Beitrag zum Quark-See des Nukleons durch präzise Vermessung der paritätsverletzenden Asymmetrie in der elastischen Streuung polarisierter Elektronen zu untersuchen (vgl. Abs. 2.2.5). Wenngleich bei höherer Strahlenergie (4.6 GeV gegenüber 855 MeV) betrieben, war der Strahlstrom ähnlich niedrig, so daß hier ebenfalls die Schwierigkeit der geringen Luminosität zu bewältigen war.

Wie bereits in Abs. 3.1.7 erwähnt, war das Hall A-Polarimeter das erste, bei dem das *external-cavity*-Konzept zur Luminositätserhöhung umgesetzt wurde. Der Strahl wurde hierbei in einer vertikalen Schikane aus vier Dipolmagneten abgelenkt und durch einen 0.85 m langen monolithischen Fabry-Pérot-Resonator geleitet, der von einem Nd:YAG-Laser mit 230 mW Laserleistung bei einer Wellenlänge von 1064 nm gespeist wurde [57]. Um die Einhaltung der Resonanzbedingung zu gewährleisten, wurde ein zweistufiges Regelkonzept auf Basis der Pound-Drever-Methode entwickelt, mit dem die Laserwellenlänge durch Dehnung bzw. Stauchung des Laserkristalls (und damit effektiv des laseraktiven Resonators) nachgeregelt und so an Fluktuationen des externen Resonators angepaßt werden konnte [58]. Die schnelle Komponente basierte hierbei auf einem fest mit dem Nd:YAG-Kristall verbundenen Piezoaktuator, der durch Anlegen einer geeigneten Hochspannung seine Länge ändert (dieses Verfahren wurde auch bei der im Rahmen des Regelungssystems erforderliche Frequenzmodulation des Lasers eingesetzt), während für die langsame Komponente die Temperatur des Kristalls geändert und die resultierende thermische Ausdehnung ausgenutzt wurde.

Mit diesem System wurden Intensitätserhöhungen um einem Faktor von bis zu 7400 erreicht [57]; allerdings waren hierfür spezialangefertigte und sehr



empfindliche Hochleistungsspiegel erforderlich. Um diese vor Strahlenschäden zu schützen, wurde der Resonator daher so konzipiert, daß die Spiegel einen Sicherheitsabstand von 5 mm zum Elektronenstrahl einhalten. Dies bedingte allerdings einen Kreuzungswinkel von 23 mrad zwischen beiden Strahlen, was einen nicht unerheblichen Teil des Luminositätsgewinns wieder zunichte macht (vgl. Abs. 3.1.6).

Für den Nachweis der rückgestreuten Photonen wurde ein segmentiertes  $\text{PbWO}_4$ -Szintillationskalorimeter eingesetzt, das 25 Strahlungslängen und 2.5 Molière-Radien abdeckte, wobei die Energie jedes einzelnen Photons in einem Histogramm registriert wurde; die Analyse der Daten erfolgte dann allerdings nach der integralen Methode (vgl. Abs. 3.1.4). Als Elektronendetektor kam ein Silizium-Streifendetektor bestehend aus vier Lagen mit je 48 Streifen von 0.65 mm Breite zum Einsatz. Mit diesem wurde im Rahmen dedizierter Messungen, bei denen das Photonenkalorimeter in Koinzidenz mit einzelnen Kanälen des Elektronendetektors ausgelesen wurde, ein parametrisiertes Modell der Detektor-Antwortfunktion bestimmt. Diese Parametrisierung wurde dann verwendet, um die Compton-Asymmetrie aus den Photonenspektren der regulären Messungen zu ermitteln.

Dieses System war mehrere Jahre lang erfolgreich in Betrieb, wobei Polarisationsmessungen mit einer relativen statistischen Unsicherheit von 0.8 % innerhalb einer Stunde und einer systematischen Unsicherheit von 1.23 % erzielt wurden [57].

#### 3.4.2 JLab Hall A (PREx)

Das Nachfolgeexperiment von HAPPE<sub>x</sub>, PRE<sub>x</sub>, wurde bei einer noch geringeren Strahlenergie von nur 1.06 GeV betrieben, so daß aufgrund der geringeren Analysierstärke die Leistung des soeben beschriebenen Systems nicht mehr den Anforderungen an die Meßgenauigkeit genügte. Daher wurde das Polarimeter ab dem Jahr 2009 einer umfangreichen Aufwertung („green upgrade“) unterzogen [160], bei der insbesondere der bisherige Infrarotlaser durch einen frequenzverdoppelten Laser mit einer Wellenlänge von 532 nm und einer Ausgangsleistung von 1.7 W ersetzt wurde. Dieses System erreicht nun Lichtintensitäten von bis zu 3.7 kW im Resonator; außerdem erhöht sich die Compton-Analysierstärke um nahezu einen Faktor 2 im Vergleich zum vorherigen Fall infraroten Lichts.

Das Detektorsystem und die Datenerfassung wurden im Rahmen dieser Aufwertung ebenfalls ausgetauscht: das Photonenkalorimeter besteht nun aus einem einzelnen Cer-dotierten  $\text{Gd}_2\text{SiO}_5$ -Kristall, der eine deutlich höhere Lichtausbeute als das vorher verwendete  $\text{PbWO}_4$  aufweist (20 % der

Helligkeit von NaI(Tl) gegenüber 0.3%), und der bisherige Elektronendetektor wurde durch eine Anordnung von Si-Mikrostreifenmodulen mit deutlich besserer Ortsauflösung (Gitterweite 0.24 mm) ersetzt.

Die Datenerfassung wurde von der bisherigen ladungsempfindlichen Histogrammierung der Einzelphotonensignale auf eine digitale Abtastung der Rohsignal-Pulsform mittels eines schnellen *flash-ADC* umgestellt. Die Analyse der Daten erfolgt dann nach der energiegewichteten Methode, d. h. die Ladungsinhalte aller aufgezeichneten Pulse werden für jeden Helizitätszustand digital aufsummiert und daraus eine Asymmetrie gebildet. Da in der Anfangszeit der Elektronendetektor dieses Polarimeters noch nicht vollständig betriebsbereit war, wurden die ersten Messungen unter Verwendung einer rein Monte-Carlo-basierten Detektor-Antwortfunktion analysiert, wobei eine relative statistische Unsicherheit von 0.8% innerhalb einer Stunde und eine systematische Unsicherheit von ca. 1.18% erzielt wurde [160].

### 3.4.3 JLab Hall C

Im Rahmen des  $Q_{weak}$ -Experiments wurde in Experimentierhalle C des JLab ebenfalls ein Compton-Rückstreupolarimeter installiert, das unter ähnlich schwierigen Betriebsbedingungen wie bei PREx (1.2 GeV Strahlenergie und 180  $\mu$ A Strahlstrom) eine hohe Meßgenauigkeit erzielen muß. Aufgrund der bereits vorhandenen Expertise wurde in diesem Fall der grundlegende Aufbau nahezu vollständig vom Hall A-Polarimeter übernommen, wobei das optische System allerdings etwas anders konzipiert wurde: durch Verwendung eines stärkeren Lasers mit 10 W Ausgangsleistung bei 532 nm konnten die Anforderungen an Optik und Stabilisierung herabgesetzt werden. Das System erreicht nun mit kommerziell erhältlicher Optik in Interferometerqualität Lichtintensitäten von bis zu 1.7 kW im Resonator, was einer Intensitätserhöhung um einen Faktor 170 entspricht [144].

Zum Nachweis der rückgestreuten Photonen wird wie im ursprünglichen Hall A-Aufbau ein segmentiertes Bleiwolframat-Kalorimeter – bestehend allerdings aus vier statt 25 Kristallen – verwendet, während für den Elektronennachweis ein Diamant-Mikrostreifendetektor mit einem Gitterabstand von 200  $\mu$ m zu Einsatz kommt.

Die Datenanalyse im Hall C-Polarimeter verfolgt einen neuartigen Ansatz dergestalt, daß die Asymmetrie der gestreuten *Elektronen* zur eigentlichen Polarisationsbestimmung herangezogen wird und die Daten des Photonenkalorimeters zunächst lediglich der Plausibilitätsprüfung dienen. Das Analyseverfahren ist analog zur differentiellen Methode und basiert auf der Anpassung eines Modells für die Energieabhängigkeit der Compton-Asymmetrie

	Hall A IR	grün $\rightarrow f$	Hall C $\rightarrow f$	A4 $\rightarrow f$
$\lambda$ (nm)	1064	532 $\times 4$	532 $\times 4$	514.5 $\times 4.3$
$P_L$ (W)	1700	3700 $\times 2.2$	1700 $\times 1$	100 $\times 0.06$
$\alpha$ (mrad)	23	23 $\times 1$	23 $\times 1$	0 $\times 20$
Design		$\times 8.8$	$\times 4$	$\times 5.2$
$E_e$ (GeV)	4.6	1 $\times 0.05$	1.17 $\times 0.06$	0.86 $\times 0.03$
$I_e$ ( $\mu\text{A}$ )	40	50 $\times 1.25$	180 $\times 4.5$	20 $\times 0.5$
Experiment		$\times 0.06$	$\times 0.27$	$\times 0.02$
Gesamt		$\times 0.55$	$\times 1.08$	$\times 0.08$

**Tabelle 3.3:** Vereinfachter quantitativer Vergleich der Polarimeterkonzepte anhand ausgewählter Konstruktions- und Betriebsparameter. Es ist zu berücksichtigen, daß hierbei der Einfluß einiger Größen wie etwa der Strahlfokussierung vernachlässigt wurde.

an die in den einzelnen Detektorstreifen gemessenen Zählratenasymmetrien, wobei die Zuordnung zwischen der Position der Streifen und der zugehörigen Energie über ein Modell der Schikanendispersion und unter Ausnutzung charakteristischer Strukturen im Energiespektrum erfolgt. Insgesamt konnten so Polarisationsmessungen mit einer relativen statistischen Unsicherheit von ca. 0.5% innerhalb einer Stunde und einer relativen systematischen Unsicherheit von ca. 0.6% durchgeführt werden.

### 3.4.4 Quantitativer Vergleich

Auch wenn ein Vergleich der hier vorgestellten Polarimeterkonzepte aufgrund der unterschiedlichen Rahmenbedingungen schwierig ist, soll dennoch zum Abschluß dieses Abschnitts versucht werden, die Leistungsfähigkeit der verschiedenen Entwürfe bei der Überwindung des Luminositätsproblems quantitativ zu veranschaulichen. Eine Möglichkeit hierfür besteht darin, die Auswirkung der jeweiligen Konstruktionsentscheidungen und experimentellen Rahmenbedingungen auf den statistischen Gütefaktor

$$f := \left\langle (\mathcal{A}^{long})^2 \right\rangle \sigma_{tot} \mathcal{L} \quad (3.41)$$

zu betrachten, der proportional zur Inversen einer vereinfachten Form der Meßzeit bei Verwendung der differentiellen Meßmethode ist und somit ein Maß für die Schnelligkeit, mit der eine gegebene statistische Genauigkeit

erreicht werden kann, darstellt. Da das Hall A-Polarimeter die erste Umsetzung eines „laserseitigen high luminosity“-Konzepts darstellt, wird dessen Gütefaktor als Referenz gewählt, mit dem alle anderen Polarimeter verglichen werden. Dies geschieht dadurch, daß für die wichtigsten Konstruktions- und Betriebsparameter betrachtet wird, wie sich der Wert von  $f$  als Folge des Unterschieds zum Hall A/HAPPEX-Anwendungsfall ändert.

Das Ergebnis dieses Vergleichs ist in Tabelle 3.3 aufgeführt. Die obere Hälfte stellt dabei das Designpotential dar, während die untere Hälfte die Herausforderungen aufgrund der experimentellen Rahmenbedingungen quantifiziert. Die letzte Zeile faßt alle Einflüsse zusammen und drückt somit aus, wie „schwierig“ die Polarisationsmessung sich im Rahmen der jeweiligen Experimente dann gestaltet. Man kann erkennen, daß das aufgewertete Hall A-Polarimeter das leistungsfähigste Konzept darstellt, während das hier vorgestellte A4-Polarimeter unter den anspruchsvollsten Rahmenbedingungen betrieben wurde.

# Kapitel 4

## Messung der Laserpolarisation

In Abs. 3.1.2 wurde festgestellt, daß die für die Polarimetrie an Elektronenstrahlen ausgenutzte Asymmetrie durch die Abhängigkeit des Compton-Wirkungsquerschnitts vom Polarisationszustand des Laserlichts zustandekommt. Dementsprechend geht in diese Asymmetrie gemäß Gl. 3.15 bzw. 3.16 nicht nur der gesuchte Polarisationsgrad des Elektronenstrahls, sondern auch der (zirkulare) Polarisationsgrad des Laserlichts ein. Wie bei allen Untersuchungsverfahren, die auf der Streuung an einem polarisierten Target basieren, ist somit auch in diesem Fall die Messung der *Targetpolarisation* – hier also der Polarisation des Laserstrahls – erforderlich, um die eigentlich gesuchte Größe – die Polarisation des Elektronenstrahls – aus den Meßdaten zu extrahieren. Da mit dem in dieser Arbeit beschriebenen Compton-Rückstreupolarimeter sogar eine Absolutmessung durchgeführt werden soll, muß auch die Targetpolarisation absolut bekannt sein. Ein entsprechendes Meßverfahren wurde im Rahmen dieser Arbeit entwickelt und soll in diesem Kapitel vorgestellt werden. Hierfür ist es zunächst notwendig, einen mathematischen Formalismus für die Beschreibung polarisierten Lichts einzuführen. Darauf aufbauend wird anschließend dargelegt, mit welchen Methoden der Polarisationszustand von Licht überhaupt einer Messung zugänglich ist. Im letzten Teil dieses Kapitels werden schließlich Planung, Aufbau und Funktion des hierfür entwickelten Meßgerätes – des „Stokesmeter MkII“ – beschrieben.

### 4.1 Die Beschreibung polarisierten Lichts

Wenngleich Licht strenggenommen im Rahmen einer Quantenfeldtheorie beschrieben werden muß, sind im vorliegenden Fall die Intensitäten hoch genug, als daß auch eine klassische Behandlung mit hinreichender Genauigkeit möglich ist. Die Polarisation wird daher im folgenden mit den Methoden der klassischen Elektrodynamik beschrieben, in der Licht als fortschreitende elektromagnetische Welle interpretiert wird [129, 85].

### 4.1.1 Grundlagen und Konventionen

In einem nichtleitenden Medium ohne freie Ladungen ( $\sigma \equiv 0$  und  $\rho \equiv 0$ ) haben die Maxwell-Gleichungen folgende Form [41]:

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\mu\mu_0 \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \qquad \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0 \qquad (4.1)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \epsilon_r \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \qquad \vec{\nabla} \cdot \vec{H} = 0 \qquad (4.2)$$

Hieraus lassen sich harmonische Wellengleichungen für das elektrische und magnetische Feld ableiten. Die genaue Ortsabhängigkeit der resultierenden Wellen hängt hierbei von den jeweiligen Randbedingungen des betrachteten Problems ab. Ein besonders einfacher Fall ist die monochromatische ebene Welle, bei der die Fundamentallösungen die Form

$$\begin{aligned} \vec{\mathcal{E}}(\vec{r}, t) &= \vec{E}_0 e^{i(\omega t \pm \vec{k} \cdot \vec{r})} \\ \vec{\mathcal{H}}(\vec{r}, t) &= \vec{H}_0 e^{i(\omega t \pm \vec{k} \cdot \vec{r})} \end{aligned} \qquad (4.3)$$

annehmen, wobei  $\vec{k}$  die Ausbreitungsrichtung der Welle ist. Man kann anhand der Maxwell-Gleichungen zeigen, daß die Vektoren  $\vec{E}_0$ ,  $\vec{H}_0$  und  $\vec{k}$  senkrecht aufeinander stehen und daß das elektrische und das magnetische Feld in Phase schwingen. Da die Lösungen der Wellengleichungen demnach *transversale* Wellen sind, ist zur ihrer vollständigen Beschreibung neben der Intensität, Ausbreitungsrichtung, Phasengeschwindigkeit und Frequenz noch die Angabe der transversalen Orientierung der Schwingung notwendig. Dieser letzte Aspekt wird als *Polarisation* der Welle bezeichnet und ist der zentrale Gegenstand dieses Kapitels.

Um die Polarisation einer elektromagnetischen Welle zu beschreiben, muß nun streng genommen sowohl die elektrische als auch die magnetische Komponente charakterisiert werden. Da die beiden Felder aber im hier betrachteten Fall des nichtleitenden Mediums stets senkrecht aufeinander stehen, ist es ausreichend, eines der beiden Felder zu betrachten. Üblicherweise wird der *elektrische Feldvektor* gewählt, weil bei der Wechselwirkung von (sichtbarem) Licht mit Materie das elektrische Feld dominiert [41, S. 5]. Für eine *mathematische* Beschreibung der Polarisation ist nun weiterhin eine quantifizierbare Größe erforderlich, die die transversale Orientierung des Feldes erfaßt. Hierfür wählt man die *Ortskurve*, die der elektrische Feldvektor an einem Ort

$\vec{r}$  als Funktion der Zeit durchläuft und deren Parameter eine quantitative Erfassung der Polarisation erlauben<sup>1</sup>.

Im folgenden wird davon ausgegangen, daß der betrachtete Lichtstrahl als monochromatische ebene Welle beschrieben werden kann, die sich in positive  $z$ -Richtung ausbreitet. Das Koordinatensystem wird so gewählt, daß die  $x$ -Achse horizontal (d. h. in der Ebene der Polarimeter-Schikane) liegt und die  $y$ -Achse nach oben zeigt. Die Orts- und Zeitabhängigkeit ist gemäß Gl. 4.3 sinusförmig, muß jedoch – da eine physikalische Lösung betrachtet wird – reellwertig sein. Dies ist bei einer konkreten Lösung der Wellengleichung, wo die Berücksichtigung der Anfangs- und Randbedingungen eine Linearkombination der Fundamentallösungen notwendig macht, automatisch gegeben. Bei der Darstellung einer solchen Lösung mit reellen trigonometrischen Funktionen macht sich dies durch das Auftreten zusätzlicher Phasen  $\delta_x$  und  $\delta_y$  im Argument bemerkbar. Es wird folgende Konvention zur Wahl der Vorzeichen und Definition der Phasen gewählt (vgl. [41, S. 18]):

$$\begin{aligned} E_x(z, t) &= E_{0x} \cos(\omega t - kz + \delta_x) \\ E_y(z, t) &= E_{0y} \cos(\omega t - kz + \delta_y) \\ E_z(z, t) &= 0 \end{aligned} \quad (4.4)$$

Dies kann als Beschreibung eines räumlich starren Feldmusters interpretiert werden, das sich rein translatorisch in positive  $z$ -Richtung bewegt. Es ist zu beachten, daß die Absolutwerte der Phasen  $\delta_x$  und  $\delta_y$  keine Bedeutung haben, weil sie von der Wahl des Zeit- bzw. Koordinatennullpunkts abhängen.

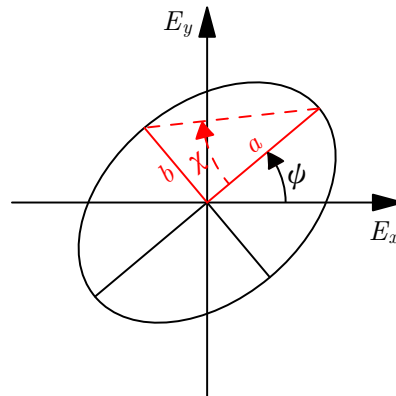
### 4.1.2 Polarisationsellipse und Helizität

Durch algebraische Umformungen von Gl. 4.4 und mit Hilfe der Abkürzung  $\phi := \omega t - kz$  läßt sich die folgende Relation für die an jedem Ort  $z$  bzw. Zeitpunkt  $t$  vorliegenden Feldstärken ableiten:

$$\left( \frac{E_x(\phi)}{E_{0x}} \right)^2 + \left( \frac{E_y(\phi)}{E_{0y}} \right)^2 - 2 \frac{E_x(\phi)E_y(\phi)}{E_{0x}E_{0y}} \cos(\delta_y - \delta_x) = \sin^2(\delta_y - \delta_x) \quad (4.5)$$

Dies ist die Normalform einer Ellipsengleichung für eine gegen die Koordinatenachsen verdrehte Ellipse im  $(E_x, E_y)$ -Raum, deren größte Ausdehnungen

<sup>1</sup>Dies ist möglich, weil die betrachtete monochromatische Welle ein streng periodisches Phänomen ist und die Ortskurve demnach eine geschlossene Kurve sein muß.



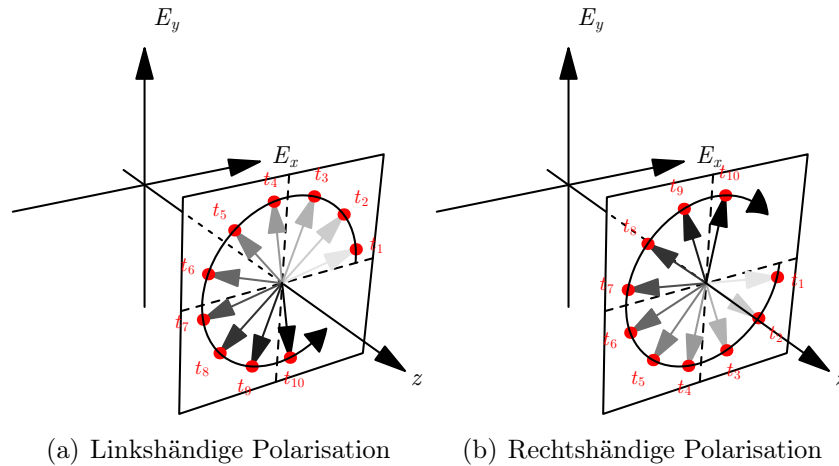
**Abbildung 4.1:** Darstellung der Polarisationsellipse und Definition der Parameter. Das Verhältnis  $b/a$  wird oftmals durch den Hilfswinkel  $\chi$  ausgedrückt.

entlang der Koordinatenachsen gerade  $E_{0x}$  und  $E_{0y}$  sind. Der elektrische Feldvektor durchläuft somit an jedem Ort  $z$  als Funktion der Zeit eine Ellipse, deren mathematische Parameter zur quantitativen Charakterisierung des Polarisationszustands herangezogen werden können. Wenn die Ellipse zu einer Linie entartet, bezeichnet man das Licht als *linearpolarisiert*, im anderen Extremfall eines Kreises als *zirkularpolarisiert*, und im allgemeinen Fall als *elliptisch polarisiert*.

Die Form der Polarisationsellipse ist durch drei Parameter eindeutig festgelegt: die beiden Halbachsen  $a$  und  $b$  (es sei o. B. d. A.  $a > b$ ) und den Orientierungswinkel  $\psi$  (siehe Abb. 4.1). Die Polarisationsellipse kann allerdings in zwei Richtungen durchlaufen werden, weshalb zur Charakterisierung eines Polarisationszustands zusätzlich zu den genannten Parametern noch der Umlaufsinn erforderlich ist; dieser wird als *Händigkeit* bzw. *Helizität* bezeichnet. Die Definition der Händigkeit folgt der klassischen Notation von Born, bei der ein Beobachter die elektromagnetische Welle „strahlaufwärts“, d. h. entgegen der Fortpflanzungsrichtung betrachtet [41, S. 19]. Vollführt der Feldvektor, an einem festen Ort  $z$  als Funktion der Zeit betrachtet, eine Drehbewegung *im Uhrzeigersinn*, so wird das Licht als *rechtshändig* bezeichnet. Dreht sich der Feldvektor stattdessen *entgegen dem Uhrzeigersinn*, so wird das Licht als *linkshändig* bezeichnet (siehe Abb. 4.2).

Es stellt sich nun die Frage, welche relative Phasenlage  $\delta_y - \delta_x$  zu einem rechtshändigen Polarisationszustand führt und welche zu einem linkshändigen. Hierzu wird exemplarisch der Fall  $\delta_y - \delta_x = \frac{\pi}{2}$  betrachtet, wobei der Einfachheit halber der Koordinatenursprung so gewählt sei, daß  $\delta_x = 0$ . Zur Zeit  $t = 0$  ergibt sich dann für die  $x$ - und  $y$ -Komponente des Feldes die





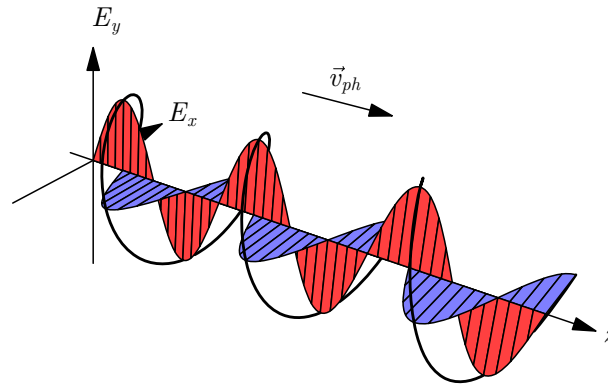
**Abbildung 4.2:** Definition der Helizitäten am Beispiel zirkularpolarisierten Lichts, daß sich in positive  $z$ -Richtung fortpflanzen soll. Dargestellt ist die Orientierung des Feldvektors an einem gegebenen Ort  $z$  für verschiedene Zeiten  $t$ , wobei  $t_1 < t_2 < \dots < t_{10}$  sei. Der Feldvektor vollführt demnach eine Kreisbewegung in der jeweils angedeuteten Richtung.

in Abb. 4.3 dargestellte Situation. Man kann erkennen, daß der resultierende Feldvektor eine rechtshändige räumliche Spirale beschreibt. Wenn sich dieses Feldmuster gemäß der Interpretation in Abs. 4.1.1 rein translatorisch auf den Beobachter zubewegt, der den Feldvektor in einer beliebigen Ebene  $z = z_0$  beobachten möge, so vollführt dieser dort im Laufe der Zeit eine Drehbewegung im Uhrzeigersinn, so daß diese Phasenlage rechtszirkular polarisiertem Licht entspricht (siehe Abb. 4.4). Somit gilt (vgl. [41, S. 19]):

- Für  $\pi > (\delta_y - \delta_x) > 0$  ist das Licht *rechtshändig*.
- Für  $-\pi < (\delta_y - \delta_x) < 0$  ist das Licht *linkshändig*.
- *Rechtshändiges Licht* bildet ein *rechtshändiges räumliches* Spiralmuster.
- *Linkshändiges Licht* bildet ein *linkshändiges räumliches* Spiralmuster.

### 4.1.3 Unpolarisiertes Licht

Wie man aus Gl. 4.5 ersehen kann, durchläuft der Feldvektor an einem gegebenen Ort in jeder Schwingungsperiode genau einmal eine wohldefinierte, geschlossene Ortskurve. Dies ist der Fall, weil bei dem hier betrachteten *monochromatischen* Licht sowohl die Amplituden als auch die Phasendifferenz

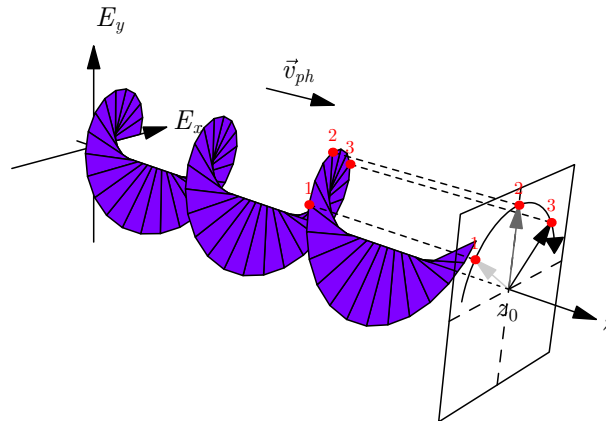


**Abbildung 4.3:**  $x$ - und  $y$ -Komponente des elektrischen Felds und resultierende Helix bei festgehaltener Zeit  $t = 0$  für den Fall  $\delta_x = 0$ ,  $\delta_y = \frac{\pi}{2}$ . Es sei  $E_{0x} = E_{0y} = E_0$ .

konstant sind. Sein Polarisationszustand ist somit ebenfalls zu jedem Zeitpunkt wohldefiniert und konstant. Licht mit dieser Eigenschaft wird als *vollständig polarisiert* bezeichnet; monochromatisches Licht ist demnach immer vollständig polarisiert.

Natürlich vorkommendes Licht kann allerdings mit den bislang eingeführten Methoden nicht beschrieben werden. Es ist (im Extremfall) vollständig isotrop und kann somit weder elliptisch noch linear polarisiert sein. Es ist jedoch auch nicht zirkularpolarisiert, weil es sich nicht durch gezielte Veränderung der Phasen  $\delta_x$  bzw.  $\delta_y$  um  $\frac{\pi}{2}$  in linearpolarisiertes Licht überführen läßt [41, S. 8]. Die einzig mögliche Erklärung ist, daß der elektrische Feldvektor keinem periodischen Muster folgt, sondern zufällig zwischen verschiedenen Orientierungen fluktuiert, wobei alle Richtungen gleich wahrscheinlich und mit gleicher Amplitudenverteilung vertreten sind. Licht in diesem Zustand wird als *unpolarisiert* bezeichnet. Mathematisch kann dies dergestalt beschrieben werden, daß die beiden orthogonalen Linearkomponenten nach Gl. 4.4 zwar gleiche Amplituden, aber keine feste Phasenbeziehung untereinander haben, also *inkohärent* sind (dies läßt sich auf die Beschreibung als inkohärente Überlagerung beliebiger „entgegengesetzt“ polarisierter Strahlen verallgemeinern [186, S. 412]). Unpolarisiertes Licht kann demnach nicht monochromatisch und monochromatisches Licht nicht unpolarisiert sein, weil die Fluktuationen der Phasen  $\delta_{x,y}$  zu einer zusätzlichen Zeitabhängigkeit neben dem harmonischen  $\cos \omega t$ -Term führen.

Normalerweise wird nun Licht betrachtet, das zwar nicht monochromatisch ist, dessen Frequenzspektrum jedoch beschränkt und um eine Mittenfrequenz herum konzentriert ist. In diesem Fall wird die Zeitabhängigkeit



**Abbildung 4.4:** Zusammenhang zwischen Händigkeit des räumlichen Feldmusters und Umlaufsinn der Polarisationsellipse. Der Pfeil gibt die Bewegungsrichtung des Feldmusters im Laufe der Zeit an; die Nummern die Reihenfolge, in der bestimmte Orientierungen des Feldvektors die Beobachtungsebene erreichen.

der Phasen und Amplituden langsam im Vergleich zur Mittenfrequenz sein<sup>2</sup>, jedoch immer noch schnell im Vergleich zur Zeitauflösung von Detektoren. Dieses *quasimonochromatische* Licht kann daher mit einer leicht modifizierten Form von Gl. 4.4 beschrieben werden, in der  $E_{0x}$ ,  $E_{0y}$  und  $\delta_{x,y}$  langsam veränderliche zeitabhängige Größen sind. Bei unpolarisiertem quasimonochromatischem Licht würde der Feldvektor dann zwar auf im Vergleich zur Zeitauflösung von Detektoren kurzen Zeitskalen (näherungsweise) eine definierte Ellipse beschreiben, jedoch würde sich deren Form und Orientierung stetig und stochastisch ändern, so daß im Mittel wiederum keine definierte Ortskurve existiert [180, 91].

In der Realität wird ein Lichtstrahl nun weder vollständig polarisiert noch vollständig unpolarisiert sein; stattdessen wird die „instantane“ Polarisationsellipse um eine gegebene stationäre Ellipse herum fluktuieren. Dieser Zustand wird als *teilpolarisiert* bezeichnet. Er kann als (inkohärente) Überlagerung eines vollständig polarisierten Lichtstrahls mit einem unpolarisierten Lichtstrahl aufgefaßt werden [186, S. 413][180, S. 34].

#### 4.1.4 Beschreibung optischer Systeme

Wenn Licht auf ein optisches Element trifft, kann sich aufgrund der Geometrie des Problems und der Eigenschaften des optischen Elements der Polarisations-

<sup>2</sup>Man betrachte etwa die Schwebung eng beieinanderliegender akustischer Frequenzen.

tionszustand des Lichtes ändern. Im einfachsten Fall treten hierbei Effekte *linearer Anisotropie* auf, d. h. solche, deren Wirkung sich separat durch die Veränderung der linearen Feldkomponenten der einlaufenden Welle ausdrücken lassen, sofern letztere in geeigneter Weise in orthogonale linearpolarisierte Zustände zerlegt wird. Bei entsprechender Wahl des Koordinatensystems und unter Beschränkung auf Effekte, die linear in den Feldamplituden sind, kann man die Wirkung des optischen Elements auf die elektromagnetische Welle wie folgt darstellen (vgl. [41, S. 22]):

$$\begin{aligned} E'_x(z, t) &= E'_{0x} \cos(\omega t - kz + \delta'_x) = f_x E_{0x} \cos(\omega t - kz + \delta_x - \Delta_x) \\ E'_y(z, t) &= E'_{0y} \cos(\omega t - kz + \delta'_y) = f_y E_{0y} \cos(\omega t - kz + \delta_y - \Delta_y) \end{aligned} \quad (4.6)$$

Bei dieser Notation wird angenommen, daß  $z$  die rein geometrische Ortskoordinate entlang der Strahlachse ist, die die ggf. unterschiedlichen optischen Weglängen innerhalb eines optischen Elements nicht berücksichtigt. Diese werden vielmehr durch die *Verzögerungen*  $\Delta_x$  und  $\Delta_y$  des Elements<sup>3</sup> ausgedrückt, die letztlich in die – somit implizit ortsabhängigen – Phasen  $\delta_x$  und  $\delta_y$  hineingezogen werden. Die Koeffizienten  $f_x$  und  $f_y$  repräsentieren die durch Absorption oder Reflexionsverluste verursachten Dämpfungen der Feldamplituden. Es ist zu beachten, daß auf die korrekte Interpretation von Ortskoordinate und Phasen in der Literatur oft nicht eingegangen wird und die polarisationsoptischen Komponenten meist stillschweigend als unendlich dünn angenommen werden (vgl. [41, S. 21f]). Die Verzögerungen haben dann allerdings einen anderen Wert als bei der Notation im Sinne von Gl. 4.6, weil sie als absoluter Phasenvorschub im optischen Element und nicht als Unterschied gegenüber dem Phasenvorschub im Vakuum verstanden werden (siehe z. B. [111, S. 68f]). In der Praxis hat dies allerdings keine Auswirkung, weil in die Beschreibung des Polarisationszustands nur die *Differenz* der Phasen eingeht, die in beiden Notationen identisch ist.

Da für die Anwendbarkeit von Gl. 4.6 im allgemeinen eine Koordinatentransformation durchgeführt werden muß, ist insbesondere bei der Beschreibung komplexer zusammengesetzter Systeme eine kompaktere Notation wünschenswert. In der Tat kann die o. g. Polarisationsänderung elegant durch Matrixformalismen ausgedrückt werden, bei denen das optische Element durch eine Matrix repräsentiert wird, die auf einen Vektor (den Polarisationszustand) wirkt. Die beiden gebräuchlichen Formalismen sind hierbei der Jones- und der Mueller-Formalismus.

---

<sup>3</sup>Die Bezeichnung rührt daher, daß ein positiver Wert für  $\Delta_{x,y}$  denselben Effekt wie eine zeitliche Verzögerung  $t \rightarrow t' = t - \Delta t_{x,y}$  hat.

### Jones-Formalismus

Im Jones-Formalismus [100] wird der Lichtstrahl auf dem Niveau der Feldamplituden beschrieben, wobei der Phasenanteil allerdings in einer Exponentialschreibweise dargestellt wird:

$$\vec{\mathcal{E}}(z, t) = \begin{pmatrix} E_{0x} e^{i(\omega t - kz + \delta_x)} \\ E_{0y} e^{i(\omega t - kz + \delta_y)} \end{pmatrix}$$

In dieser Notation lässt sich Gl. 4.6 wie folgt schreiben:

$$\vec{\mathcal{E}}'(z, t) = \begin{pmatrix} E'_{0x} e^{i(\omega t - kz + \delta'_x)} \\ E'_{0y} e^{i(\omega t - kz + \delta'_y)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_x e^{-i\Delta_x} & 0 \\ 0 & f_y e^{-i\Delta_y} \end{pmatrix} \vec{\mathcal{E}}(z, t)$$

Da sowohl  $t$  als auch  $z$  globale Parameter sind, kann nun die explizite Orts- und Zeitabhängigkeit auf beiden Seiten herausgekürzt werden. Somit hat der den Polarisationszustand repräsentierende „Jones-Vektor“ – ggf. bis auf einen Normierungsfaktor – die Form

$$\vec{J} = \begin{pmatrix} E_{0x} e^{i\delta_x} \\ E_{0y} e^{i\delta_y} \end{pmatrix} \quad (4.7)$$

und die Wirkung eines optischen Elements, dessen Vorzugsrichtungen um einen Winkel  $\alpha$  gegen die Koordinatenachsen verdreht sein mögen, lässt sich als Matrix-Vektor-Multiplikation schreiben:

$$\vec{J}' = R(-\alpha) M R(\alpha) \vec{J} \quad (4.8)$$

Hierbei sei  $R(\alpha)$  die Rotation des Koordinatensystems um den Winkel  $\alpha$  und  $M$  die „Jones-Matrix“ des optischen Elements. In dieser Darstellung kann man leicht sehen, daß im Fall *linearer* Anisotropien die Eigenvektoren der Matrix  $M$  linearpolarisierte Zustände sind. Mit Hilfe der Eigenvektoren können auch Jones-Matrizen für kompliziertere Fälle wie z. B. optische Aktivität abgeleitet werden [101]. Polarisationszustände, deren Jones-Vektoren ein verschwindendes Skalarprodukt haben, heißen *orthogonal* [101].

### Stokes-/Mueller-Formalismus

Wenngleich von Jones selbst eine mögliche Erweiterung zur Behandlung von teil- und unpolarisiertem Licht vorgeschlagen wurde [101], kann der Jones-Formalismus zunächst nur monochromatisches und somit vollständig polarisiertes Licht sowie die *kohärente* Überlagerung zweier Lichtstrahlen beschreiben. Der im folgenden beschriebene Stokes-Formalismus basiert ebenfalls auf

der Beschreibung des Lichts als elektromagnetische Welle, geht jedoch stärker auf die phänomenologischen Eigenschaften polarisierten Lichts ein und kann sowohl vollständig als auch teil- und unpolarisiertes Licht beschreiben, allerdings nur die *inkohärente* Überlagerung zweier Lichtstrahlen. Kernstück ist die Beschreibung des Polarisationszustands durch vier reelle Parameter, die erstmals von Stokes eingeführt wurden [186] und daher als *Stokesparameter* bezeichnet werden, wenngleich ihre Interpretation und Anwendung im heutigen Sinne stark von Soleillet [180] geprägt wurden. Sie sind im Falle vollständig polarisierten Lichts definiert als [180]<sup>4</sup>:

$$\begin{aligned} I &= E_{0x}^2 + E_{0y}^2 \\ Q &= E_{0x}^2 - E_{0y}^2 \\ U &= 2E_{0x}E_{0y} \cos(\delta_y - \delta_x) \\ V &= 2E_{0x}E_{0y} \sin(\delta_y - \delta_x) \end{aligned} \tag{4.9}$$

Der erste Parameter  $I$  ist – bis auf eine Proportionalitätskonstante – gleich der Intensität des betrachteten Strahls. Die anderen Parameter können als Intensitätsdifferenzen interpretiert werden, die bei der Transmission dieses Strahls durch verschiedene Typen von Polarisatoren und deren jeweiliges Gegenstück auftreten würden [111, S. 76], und drücken so das Maß an Übereinstimmung des vorliegenden Polarisationszustands mit dem durch den jeweiligen Polarisator definierten Polarisationszustand aus. Die Parameter können Werte von  $+I$  bis  $-I$  annehmen, werden allerdings oftmals auf den Intensitätsparameter normiert dargestellt. Im einzelnen entsprechen sie der – ggf. normierten – Differenz der Intensitäten hinter

$Q$  : einem horizontalen und einem vertikalen Linearpolarisator

$U$  : einem unter  $+45^\circ$  und einem unter  $-45^\circ$  orientierten Linearpolarisator

$V$  : je einem Zirkularpolarisator für rechts- und linkshändige Helizität

Hieraus kann man bereits ersehen, daß im Falle unpolarisierten Lichts alle Stokesparameter außer  $I$  verschwinden [186, S. 411f][180, S. 34]. Ferner kann man aus Gl. 4.9 für vollständig polarisiertes Licht die folgende Relation ableiten:

$$I^2 = Q^2 + U^2 + V^2 \tag{4.10}$$

---

<sup>4</sup>Es gibt mehrere unterschiedliche Benennungen der Parameter, wobei im folgenden diejenige nach Walker [199] gewählt wird. Es ist zu beachten, daß Stokes' ursprüngliche Bezeichnungen  $\{A, B, C, D\}$  noch eine andere Reihenfolge als die heute übliche, auf Soleillet zurückgehende, implizieren. Im Sinne von Gl. 4.9 müßten sie als  $\{A, C, D, B\}$  zusammengefaßt werden [180, S. 27].

Orthogonale Polarisationszustände zeichnen sich im Stokes-Formalismus dadurch aus, daß die zugehörigen Parameter  $Q$ ,  $U$  und  $V$  jeweils dem Betrag nach gleich groß sind, jedoch entgegengesetzte Vorzeichen aufweisen.

Bei der inkohärenten Überlagerung zweier Lichtstrahlen sind die *unnormierten* (s. u.) Stokesparameter des resultierenden Strahls gleich der Summe der jeweiligen Parameter der Teilstrahlen [180, S. 33]. Dies ist auch anschaulich verständlich, da die Stokesparameter im Sinne physikalisch beobachtbarer Intensitäten interpretiert werden können. Da teilpolarisiertes Licht als Überlagerung eines vollständig polarisierten und eines unpolarisierten Strahls beschrieben werden kann und sich der Intensitätsparameter somit aus zwei Beiträgen  $I_{pol}$  und  $I_{unp}$  zusammensetzt, ändert sich die Relation in Gl. 4.10 in diesem allgemeinen Fall zu

$$I^2 \geq Q^2 + U^2 + V^2 \quad (4.11)$$

und es ist sinnvoll, den *Polarisationsgrad*  $p$  als Anteil der polarisierten Intensität an der Gesamtintensität zu definieren [180, S. 35]:

$$p := \frac{I_{pol}}{I} = \frac{\sqrt{Q^2 + U^2 + V^2}}{I} \quad (4.12)$$

Auch bei der Verwendung von Stokesparametern ist nun eine kompakte Schreibweise für den Polarisationszustand eines Lichtstrahls und seine Änderung durch polarisationsoptische Elemente wünschenswert. Hierbei macht man sich zunutze, daß die Stokesparameter eines durch ein polarisationsoptisches Element veränderten Strahls lineare Funktionen der ursprünglichen Parameter sind [180, S. 31]. Man faßt daher die vier Stokesparameter zu einer  $4 \times 1$ -Matrix, dem „Stokes-Vektor“

$$\vec{S} = \begin{pmatrix} I \\ Q \\ U \\ V \end{pmatrix} \quad (4.13)$$

zusammen, und kann – ähnlich wie beim Jones-Formalismus – das optische Element als reelle  $4 \times 4$ -Matrix darstellen, die auf diesen Vektor wirkt [141]. Die entsprechenden Matrizen werden als *Mueller-Matrizen* bezeichnet. Da auch sie von der Wahl des Koordinatensystems abhängen, werden sie üblicherweise bezüglich der Vorzugsrichtungen des optischen Elements dargestellt, so daß im allgemeinen wiederum eine „Rotations“-Matrix in die Rechnungen ein-

bezogen werden muß; im Stokes-Formalismus ist diese durch

$$M_{rot}(\vartheta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos 2\vartheta & \sin 2\vartheta & 0 \\ 0 & -\sin 2\vartheta & \cos 2\vartheta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (4.14)$$

gegeben [41, S. 36].

Im Rahmen der vorliegenden Arbeit wird im wesentlichen der Stokes-Formalismus eingesetzt, weil die Anwendbarkeit auf teilpolarisiertes Licht eine wichtige Rolle bei der Untersuchung systematischer Fehlereinflüsse im Zuge der Berechnungen zur Polarisationsmessung am Laserstrahl spielt (vgl. Kapitel 5). Der Jones-Formalismus eignet sich hingegen besonders für die Berechnungen zum resonatorinternen Polarisationszustand, wie sie etwa in der vorangegangenen Diplomarbeit [92] durchgeführt wurden.

Es ist hierbei zu beachten, daß die Stokesparameter aufgrund ihrer Interpretation als Differenzen meßbarer Intensitäten „absolute“ Größen sind und insbesondere mit der Gesamtintensität des betrachteten Lichtstrahls skalieren. Für die Beschreibung eines Polarisationszustands sind sie in dieser „rohen“ Form demnach ungeeignet, weil schon eine reine Intensitätsänderung, bei der die Proportionen der Polarisationsellipse erhalten bleiben, zu einer Änderung der Stokesparameter führt, obwohl sich der zugrundeliegende Polarisationszustand eigentlich nicht geändert hat; bei der Charakterisierung eines Lichtstrahls ist es daher sinnvoller, auf die *intensitätsnormierten Stokesparameter*

$$\{q, u, v\} := \left\{ \frac{Q}{I}, \frac{U}{I}, \frac{V}{I} \right\} \quad (4.15)$$

zurückzugreifen. In ähnlicher Form trifft diese Überlegung auch auf die Jones-Vektoren zu.

## 4.2 Polarisationsoptische Elemente

Ziel der vorliegenden Arbeit ist die Optimierung und Messung der Polarisation des als „Streutarget“ in diesem Polarimeter dienenden Laserlichts. Zu diesem Zweck ist es an verschiedenen Stellen notwendig, den Polarisationszustand des Lichts gezielt zu verändern. Hierbei kommen verschiedene polarisationsoptische Elemente zum Einsatz, deren Funktionsweise und mathematische Beschreibung hier kurz vorgestellt werden sollen. Es sind dies das



Glan-Laser-Prisma, die  $\lambda/4$ -Platte und der Fresnel-Rhombus. Darüberhinaus muß allerdings berücksichtigt werden, daß auch fast alle anderen optischen Elemente den Polarisationsgrad – nun jedoch unerwünschterweise – beeinflussen. Auf ihre Wirkung wird an gegebener Stelle eingegangen werden.

### 4.2.1 Doppelbrechung

Viele polarisationsoptische Elemente beruhen auf der Doppelbrechung der eingesetzten Materialien. Unter Doppelbrechung ist hierbei eine Anisotropie der Kristallstruktur zu verstehen, die sich dadurch bemerkbar macht, daß ein einfallender unpolarisierter Lichtstrahl bei der Brechung in *zwei* Lichtstrahlen orthogonaler Polarisation aufgespalten wird, die sich mit unterschiedlicher Lichtgeschwindigkeit durch den Kristall bewegen und von denen einer nicht gemäß dem Snellius'schen Brechungsgesetz gebrochen wird. Dieser Strahl, dessen Lichtgeschwindigkeit von seiner Richtung in Bezug auf das Kristallgitter abhängt, wird daher als *außerordentlicher* bzw. *e*-Strahl bezeichnet. Im Falle *linearer* Doppelbrechung sind die beiden Strahlen orthogonal linearpolarisiert, und es gibt eine Ausbreitungsrichtung – die *optische Achse*, die normalerweise gleich der Symmetrieachse des Gitters ist – für die beide Phasengeschwindigkeiten gleich sind. Senkrecht dazu ist der Unterschied maximal, und die hier vorliegende außerordentliche Phasengeschwindigkeit wird zur Definition des *außerordentlichen Haupt-Brechungsindex*  $n_e = c/v_e^\perp$  herangezogen<sup>5</sup>. Ist  $n_e > n_o$ , heißt ein Material *positiv*, sonst *negativ* doppelbrechend [41, S. 78].

Das Phänomen läßt sich physikalisch dadurch beschreiben, daß die relative Dielektrizitätskonstante  $\epsilon_r$  des Materials nun nicht mehr ein Skalar, sondern ein Tensor ist. Ist das Licht orthogonal zur optischen Achse polarisiert, so ist der Tensor für diesen Unterraum isotrop ( $\vec{D} \parallel \vec{E}$ ), und die Strahlausbreitung folgt denselben Gesetzen wie bei isotropen Medien. Hat die Polarisation allerdings eine Komponente in Richtung der optischen Achse, so sind  $\vec{D}$  und  $\vec{E}$  nicht mehr parallel, und die Ausbreitungsrichtung der Welle weicht von der Richtung des Wellenvektors  $\vec{k}$  ab. Im Huygens'schen Bild kann man dies dadurch erklären, daß die Elementarwellen keine Kugelwellen mehr sind, sondern Rotationsellipsoide, die oblat bzw. prolat bezüglich der optischen Achse sind [41, S. 75]. Im komplizierteren Fall eines *zweiachsigen* Kristalls geht auch diese verbliebene Symmetrie verloren, und es treten nur noch außerordentliche Strahlen auf.

<sup>5</sup>wobei der Begriff unglücklich gewählt ist, weil die Brechung des außerordentlichen Strahls im allgemeinen gerade nicht einfach über einen Brechungsindex berechnet werden kann.

Doppelbrechung kann auch in isotropen Medien durch mechanische Spannung oder elektrische bzw. magnetische Felder hervorgerufen werden.

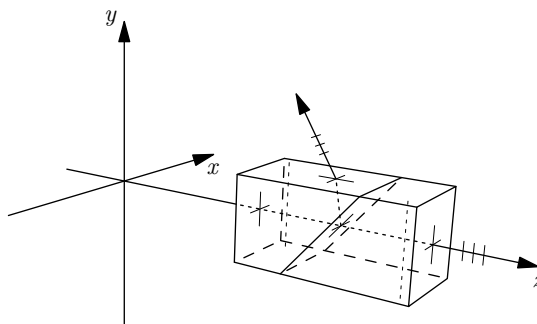
### 4.2.2 Das Glan-Laser-Prisma

Das Glan-Laser-Prisma, eine für hohe Laserleistungen optimierte Form des Glan-Taylor-Prismas [6], ist ein *Linearpolarisator*, d. h. ein polarisationsoptisches Element, an dessen Ausgang das Licht unabhängig vom Eingagszustand linearpolarisiert ist – lediglich die Intensität hängt vom Polarisationszustand des einfallenden Lichts ab. Es besteht aus einem Quader eines negativen einachsigen Kristalls (häufig Kalkspat, neuerdings auch  $\alpha$ -BBO<sup>6</sup>), dessen Ein- und Austrittsfläche parallel zur optischen Achse liegen und der durch eine schräge Schnittfläche symmetrisch in zwei Hälften geteilt wird, wobei die Hälften durch einen schmalen Luftspalt getrennt bleiben (siehe Abb. 4.5). Die Schnittfläche steht senkrecht auf der optischen Achse, so daß der ordentliche Strahl der *p*-Komponente und der außerordentliche Strahl der *s*-Komponente entspricht. Der Schnittwinkel ist so gewählt, daß der Einfallswinkel für den *o*-Strahl am Kristall-Luft-Übergang den Grenzwinkel der Totalreflexion überschreitet, während er für den *e*-Strahl möglichst nahe am Brewster-Winkel liegt. Die Polarisationskomponente senkrecht zur optischen Achse wird demnach vollständig aus dem transmittierten Strahl entfernt, während die Polarisationskomponente parallel dazu größtenteils transmittiert wird. Die *Durchlaßrichtung* dieses Polarisators ist also gleich der Orientierung der optischen Achse. Die zweite Prismenhälfte dient lediglich dazu, die Richtungsänderung des Strahls infolge der Brechung wieder rückgängig zu machen; der resultierende Strahlversatz ist aufgrund der geringen Breite des Luftspalts vernachlässigbar.

Nicht nur der transmittierte, sondern auch der an der Schnittfläche totalreflektierte Teilstrahl ist rein linearpolarisiert, wobei dessen Polarisationsebene senkrecht zur nominellen Durchlaßrichtung des Prismas steht; insofern kann das Prisma auch für den Reflexionspfad des Lichts als Linearpolarisator angesehen werden. Es ist allerdings zu beachten, daß hierbei *zwei* reflektierte Strahlen auftreten, da auch ein Teil des *e*-Strahls am internen Kristall-Luft-Übergang reflektiert wird. Dieser wird allerdings beim Austritt aus dem Prisma nicht gemäß dem Brechungsgesetz (oder, anders ausgedrückt, mit einem anderen effektiven Brechungsindex) gebrochen und kann daher leicht von der erwünschten Komponente unterschieden bzw. getrennt werden.

---

<sup>6</sup>Dies ist nicht zu verwechseln mit  $\beta$ -BBO, welches für Pockelszellen und nichtlineare Optik verwendet wird.



**Abbildung 4.5:** Schematische Darstellung eines Glan-Laser-Prismas, dessen Durchlaßrichtung der Übersichtlichkeit halber entlang der  $y$ -Achse ausgerichtet sei. Eingezeichnet sind die Orientierungen der optischen Achsen beider Prismenhälften sowie die Polarisations Ebenen der transmittierten und reflektierten Komponenten des Strahls, der in positiver  $z$ -Richtung auf das Prisma einfallen möge.

Ein ideales Glan-Laser-Prisma, dessen Durchlaßrichtung für transmittiertes Licht entlang der  $x$ -Achse ausgerichtet ist, wird (bei Vernachlässigung der Reflexionsverluste an den Oberflächen) durch folgende Mueller-Matrizen beschrieben (vgl. [41, S. 38]):

$$M_{GLP,x}^{trans} = M_{lin,x} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (4.16)$$

$$M_{GLP,x}^{ref} = M_{lin,y} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (4.17)$$

In der Realität wird der transmittierte Strahl immer einen Anteil der eigentlich verworfenen Polarisationskomponente enthalten. Je nach Art des Linearpolarisators gibt es hierfür verschiedene Ursachen; eine wichtige – und bei allen Polarisatorarten mehr oder minder stark auftretende – Quelle liegt in der Beschaffenheit des Materials [111, S. 43]: Verunreinigungen oder mangelnde Qualität der Oberflächen können zu diffusen Streueffekten führen, die eine Depolarisation des Strahls zur Folge haben; zudem können unerwünschte Phasenverzögerungen zu einer Drehung der Polarisations Ebene oder einer Beimischung eines zirkularen Anteils noch im Polarisator führen [145]. Speziell

beim Glan-Laser-Prisma ist es zudem möglich, daß aufgrund der üblicherweise geringen Breite des Luftspalts die Totalreflexion des ordentlichen Strahls gestört wird und somit ein Teil seiner Intensität in die zweite Prismenhälfte gelangt.

Ein Maß für die Güte eines Linearpolarisatorstyps ist die *Extinktion*, definiert als das Verhältnis der Transmission durch zwei Polarisatoren mit gekreuzten Durchlaßrichtungen zur Transmission bei parallelen Durchlaßrichtungen [111, S. 30]. Bei Glan-Laser-Prismen werden hier Werte bis zu  $10^{-6}$  erreicht [111, S. 32].

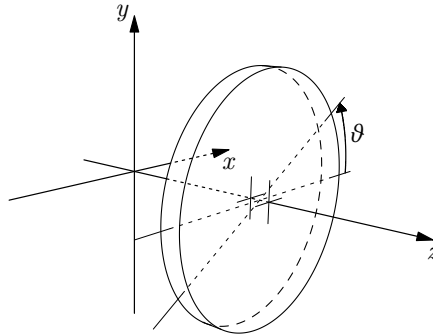
### 4.2.3 Die Wellenplatte

Eine  $\lambda/4$ -Platte ist ein Phasenverzögerer, der zwischen den orthogonalen Komponenten eines einfallenden Strahls eine relative Phasendifferenz von  $\pi/2$  bzw. einer Viertelwellenlänge hervorruft. Sie besteht prinzipiell aus einer planparallelen Platte eines linear doppelbrechenden Materials (normalerweise Quarz<sup>7</sup>), dessen optische Achse parallel zur Plattenebene liegt. Ein senkrecht einfallender Strahl wird somit nicht aufgespalten, sondern die parallel bzw. senkrecht zur optischen Achse polarisierten Komponenten des Strahls pflanzen sich mit unterschiedlicher Phasengeschwindigkeit fort, so daß die Dicke der Platte einer unterschiedlichen Anzahl an Wellenlängen der beiden Polarisationskomponenten entspricht. Gemäß der Definition zirkularen Lichts kann mit einer  $\lambda/4$ -Platte demnach lineares Licht in zirkulares Licht umgewandelt werden, wenn die Polarisationssebene um  $45^\circ$  gegen die optische Achse verdreht ist und die Polarisationskomponenten somit gleich große Amplituden haben.

Da das Vorzeichen der relativen Phasenänderung von der Art der Doppelbrechung (positiv oder negativ) abhängt, bezieht man sich bei der Angabe der Orientierung einer  $\lambda/4$ -Platte nicht auf die optische Achse, sondern bezeichnet diejenige Polarisationsrichtung mit der größeren Phasengeschwindigkeit als *schnelle* Achse und wählt diese als Bezugsrichtung. Die dazu orthogonale Richtung ist dementsprechend die *langsame* Achse. Die Verzögerungen, die eine Platte der Dicke  $d$  bei einem Lichtstrahl der Wellenlänge  $\lambda$  in den Polarisationskomponenten entlang diesen Achsen hervorruft, betragen:

---

<sup>7</sup>Quarz ist allerdings kein einachsiger doppelbrechender Kristall im Sinne von Abs. 4.2.1, sondern ein *optisch aktiver* Kristall: Hier hängt auch der Polarisationszustand der Teilstrahlen von der Fortpflanzungsrichtung ab. Senkrecht zur  $c$ -Achse des Kristalls sind diese allerdings linearpolarisiert, und *rechtshändiger* Quarz verhält sich dann wie ein einachsiger *positiv* doppelbrechender Kristall [41, S. 79f].



**Abbildung 4.6:** Schematische Darstellung einer  $\lambda/4$ -Platte. Die schnelle Achse sei um  $\vartheta$  gegen die  $x$ -Achse gedreht.

$$\begin{aligned}\Delta_f &= (n_f - 1) \frac{2\pi}{\lambda} d \\ \Delta_s &= (n_s - 1) \frac{2\pi}{\lambda} d\end{aligned}\quad (4.18)$$

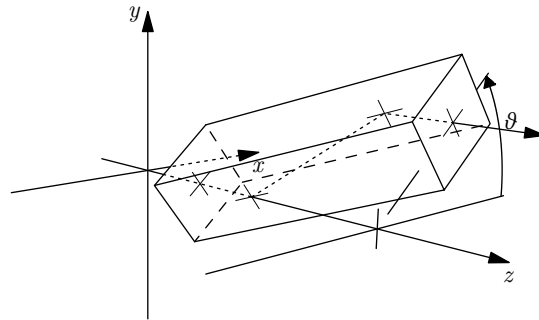
Somit ist eine  $\lambda/4$ -Platte normalerweise für genau eine Wellenlänge geeignet.

Da  $d$  für einen Phasenunterschied von genau  $1 \times \lambda/4$  unhandlich dünn wäre, verwendet man in der Praxis zwei hintereinandergesetzte Platten mit orthogonalen schnellen Achsen, deren Wirkung sich bis auf  $1 \times \lambda/4$  kompensiert [111, S. 42]; diese Konstruktion wird auch als „Wellenplatte nullter Ordnung“ bezeichnet. Auf diese Weise kann zusätzlich die durch die Wärmeausdehnung bedingte thermische Drift, die sich bei „Wellenplatten höherer Ordnung“ mit einer (mechanisch handhabbaren) Verzögerung von  $2n\lambda + \lambda/4$  störend bemerkbar macht, stark verringert werden.

Eine ideale  $\lambda/4$ -Platte, deren schnelle Achse entlang der  $x$ -Achse ausgerichtet ist, wird durch folgende Mueller-Matrix beschrieben (vgl. [111, S. 287]):

$$M_{QWP,x} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}\quad (4.19)$$

Es ist zu beachten, daß die Ausdrücke in Gl. 4.18 die Auswirkung von Vielfachreflexionen innerhalb der Platte vernachlässigen. Auch ist eine doppelbrechende Platte kein *reiner* Verzögerer, weil aufgrund der unterschiedlichen Brechungsindizes auch bei senkrechtem Einfall die Transmissionskoeffizien-



**Abbildung 4.7:** Schematische Darstellung eines Fresnel-Rhombus, der um  $\vartheta$  gegen die  $x$ -Achse gedreht sei.

ten für beide Polarisationsrichtungen verschieden sind<sup>8</sup>[41, S. 103]. Beide Effekte können aber durch eine Antireflexbeschichtung weitgehend vermieden werden.

#### 4.2.4 Der Fresnel-Rhombus

Der Fresnel-Rhombus ist ebenfalls ein Phasenverzögerer, welcher jedoch nicht auf Doppelbrechung beruht, sondern sich die von den Trivialwerten 0 und  $\pi$  abweichende winkelabhängige Phasenänderung der  $s$ - und  $p$ -Komponente bei Totalreflexion am dünneren Medium zunutze macht [41, S. 63]. Ein Fresnel-Rhombus für eine Verzögerung von  $\lambda/4$  ist normalerweise ein Parallelepiped aus Glas mit zwei quadratischen Stirnflächen, die als Ein- und Austrittsflächen dienen, und ist auf zwei Totalreflexionen mit einer relativen Phasenverzögerung von je  $\lambda/8$  ausgelegt (vgl. Abb. 4.7). Diese Bauform hat den Nachteil, daß sie einen seitlichen Strahlversatz in das optische System einführt; jedoch sind versatzfreie Bauformen, die auf drei oder vier Reflexionen ausgelegt sind, aufgrund ihrer Länge anfälliger gegen Spannungsdoppelbrechung [41, S. 112].

Um einen linearpolarisierten Lichtstrahl in einen zirkularpolarisierten Lichtstrahl umzuwandeln, muß die Polarisationssebene um  $45^\circ$  gegen die Reflexionsebene innerhalb des Rhombus verdreht sein. Der Fresnel-Rhombus hat gegenüber einer Verzögerungsplatte den Vorteil, daß er aufgrund des isotropen Materials ein reiner Verzögerer ist und aufgrund der Geometrie Mehrfachreflexionen keine Rolle spielen. Auch ist ein Fresnel-Rhombus aufgrund der

---

<sup>8</sup>Daher beträgt der zur Herstellung zirkularpolarisierten Lichts erforderliche Orientierungswinkel auch nicht exakt  $45^\circ$ : Relevant ist, daß die Amplituden *hinter* der Wellenplatte gleich sind!

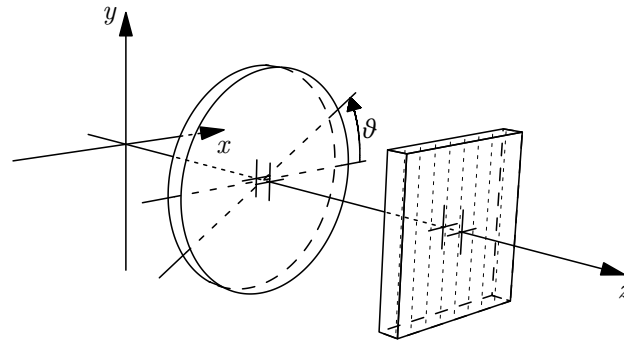
normalerweise geringen Dispersion über einen größeren Wellenlängenbereich als  $\lambda/4$ -Verzögerer nutzbar, während doppelbrechende Verzögerungsplatten auf eine einzige Wellenlänge optimiert sind. Zudem ist die Lage der „schnellen Achse“ bei einem Fresnel-Rhombus direkt aus seiner Form ersichtlich, wohingegen diese bei einer Wellenplatte *a priori* unbekannt ist. Die Mueller-Matrix des Fresnel-Rhombus ist gleich derjenigen der  $\lambda/4$ -Platte.

### 4.3 Verfahren zur Messung des Polarisationszustands

Für die Bestimmung des Polarisationszustands eines Lichtstrahls gibt es prinzipiell zwei verschiedene Herangehensweisen, die man als *direkt* und *indirekt* bezeichnen kann [162]. In beiden Fällen wird ausgenutzt, daß bei der Wechselwirkung eines Lichtstrahls mit polarisationsoptischen Elementen die transmittierte Lichtintensität von dessen ursprünglichem Polarisationszustand abhängt. Es werden also gezielt solche Elemente in den Strahlverlauf eingebracht und die Intensitätsveränderung bei Variation der Orientierung und/oder der Verzögerung dieser Elemente beobachtet. Bei der *direkten* Methode werden diese anhand eines Modells, das die Wechselwirkung eines allgemein elliptisch (teil-)polarisierten Strahls mit der Meßapparatur beschreibt, ausgewertet, um durch Bestimmung der Modellparameter den Polarisationszustand direkt zu ermitteln. Bei der *indirekten* Methode wird der Polarisationszustand des zu untersuchenden Strahls zunächst durch ein geeignetes einstellbares polarisationsoptisches Element in einen vorher festgelegten Polarisationszustand überführt, dessen Vorliegen dann mit einer (ggf. einfacheren) direkten Methode nachgewiesen werden muß. Der ursprüngliche Polarisationszustand ergibt sich in diesem Fall aus den für diese Transformation notwendigen Stellparametern.

Das im Rahmen der vorliegenden Arbeit verwendete Meßprinzip fällt in die Kategorie der direkten Methoden und ist zugleich eines der wenigen, die aus sich heraus die Erfassung des gesamten Polarisationszustands erlauben [41, S. 151f]. Bei diesem Verfahren, das erstmals bei der Untersuchung des atmosphärischen Streulichts eingesetzt wurde [172], wird der zu vermessende Lichtstrahl durch eine Anordnung aus einer drehbaren  $\lambda/4$ -Platte und einem feststehenden Linearpolarisator geleitet, wobei die Intensität des transmittierten Lichts als Funktion der Wellenplatten-Orientierung gemessen wird (vgl. Abb. 4.8).

Unter der Annahme idealer optischer Elemente wird der ursprüngliche



**Abbildung 4.8:** Vereinfachtes Schema der Meßapparatur, bestehend aus  $\lambda/4$ -Platte und Linearpolarisator. Der Lichtstrahl durchläuft die Anordnung in positive  $z$ -Richtung. Eingezeichnet sind die schnelle Achse der  $\lambda/4$ -Platte und die Durchlaßrichtung des Linearpolarisators, für die hier die  $y$ -Richtung angenommen wird.

Stokes-Vektor  $\vec{S}$  hierbei – je nach Orientierung des Linearpolarisators – gemäß

$$\begin{aligned}\vec{S}'_x(\vartheta) &= M_{lin,x} M_{rot}(-\vartheta) M_{QWP,x} M_{rot}(\vartheta) \vec{S} \quad \text{bzw.} \\ \vec{S}'_y(\vartheta) &= M_{lin,y} M_{rot}(-\vartheta) M_{QWP,x} M_{rot}(\vartheta) \vec{S}\end{aligned}\quad (4.20)$$

transformiert, wobei  $\vartheta$  der Winkel zwischen  $x$ -Achse und schneller Achse der  $\lambda/4$ -Platte ist. Die transmittierte Intensität läßt sich somit als amplitudenmoduliertes Signal beschreiben, dessen Modulationsamplituden gerade die normierten Stokesparameter sind:

$$\begin{aligned}I'_x(\vartheta) &= \frac{1}{4} I ((2 + q) - 2v \sin 2\vartheta + u \sin 4\vartheta + q \cos 4\vartheta) \quad \text{bzw.} \\ I'_y(\vartheta) &= \frac{1}{4} I ((2 - q) + 2v \sin 2\vartheta - u \sin 4\vartheta - q \cos 4\vartheta)\end{aligned}\quad (4.21)$$

Der gesuchte Polarisationszustand kann demnach durch eine harmonische Analyse oder durch *best-fit*-Anpassung dieses Modells an die Meßdaten bestimmt werden.

## 4.4 Entwurf einer Meßapparatur für polarisiertes Licht

Eine erste Apparatur zur Messung des Polarisationszustands nach diesem Verfahren wurde bereits im Rahmen der vorausgegangenen Diplomarbeit [92]

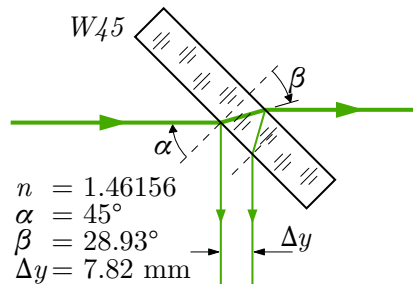


entworfen; allerdings hatte sich im Betrieb schnell herausgestellt, daß die Umgebungsbedingungen in der Experimentierhalle eine deutlich robustere Auslegung der Elektronik für eine zuverlässige Funktion erfordern. Außerdem wurde festgestellt, daß im Hinblick auf die teils komplexen Messungen ein größeres Maß an Automatisierung wünschenswert ist, die sich zudem in das neue *slow-control*-Konzept (siehe Abs. 3.3.4) integrieren lassen sollte. Darüberhinaus hatten die Erfahrungen im Einsatz ergeben, daß die korrekte Funktion einer solchen Apparatur deutlich höhere Anforderungen an die Präzision der mechanischen Verarbeitung und die Positioniergenauigkeit der optischen Halterungen stellt; insgesamt bedeutete dies, daß das alte Gerät ersetzt werden mußte. Die von kommerziellen Herstellern angebotenen Polarimeter waren aber entweder auf die im Bereich der Glasfaserkommunikation üblichen Wellenlängen im Infrarotbereich ausgelegt oder aber nicht für die zu erwartenden hohen Lichtintensitäten geeignet. Aus diesem Grund wurde ein völlig neues Gerät für die Messung der Stokesparameter – das „Stokesmeter MkII“ – entwickelt, das im folgenden Abschnitt beschrieben werden soll; es wurde aufgrund der im Rahmen dieser Arbeit erstellten technischen Zeichnungen von der mechanischen Werkstatt des Instituts für Kernphysik angefertigt.

##### 4.4.1 Konzept und mechanischer Aufbau

Bei der Planung dieses Gerätes wurde ein besonderes Augenmerk darauf gelegt, die während des Betriebs des Vorgängermodells identifizierten Quellen von Polarisationsartefakten und Signalverfälschungen auszuschließen. Dies machte es insbesondere bei der Intensitätsnormierung (s. u.) erforderlich, die Konstruktion auf die spezifische Verwendungssituation innerhalb des A4-Compton-Rückstreupolarimeters auszurichten, was einen möglichen Einsatz in anderen Meßaufbauten deutlich erschwert.

Das Grundkonzept der Apparatur ist die Bestimmung des vollständigen Satzes an Stokesparametern nach dem im vorigen Abschnitt beschriebenen Verfahren. Die Kernbestandteile sind daher eine  $\lambda/4$ -Platte und ein Linearpolarisator, der aufgrund der Anforderungen an die Reinheit des Polarisationszustands und die Zerstörschwelle durch ein Glan-Laser-Prisma realisiert wird. Da diejenigen Prismen, die auf hohe Laserleistungen ausgelegt sind, seitliche Austrittsfenster für die verworfene (und somit herausreflektierte) Polarisationskomponente aufweisen, hat dies zusätzlich den Vorteil, daß neben dem transmittierten Strahl auch ein reflektierter Strahl orthogonaler Polarisation zur Verfügung steht (vgl. Abs. 4.2.2), der nach Gl. 4.21 gleichermaßen für die Bestimmung der Stokesparameter geeignet ist. Das neue Stokesme-

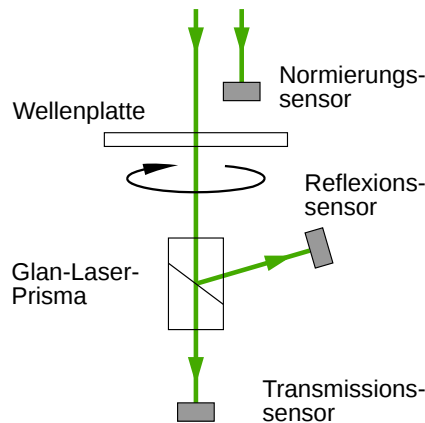


**Abbildung 4.9:** Maßstabsgetreue Darstellung der Reflexion am Vakuumfenster  $W_{45}$ , wobei hier vom resonatorinternen Strahl nur die dem Elektronenstrahl entgegelaufende Komponente der eigentlich stehenden Welle dargestellt ist. Man erkennt deutlich die räumliche Trennung der beiden reflektierten Strahlen.

ter weist daher sowohl im Transmissions- als auch im Reflexionspfad einen Sensor zur Messung der Lichtintensität auf, so daß bei jeder Messung zwei komplementäre Datensätze zur Verfügung stehen; dies ermöglicht einerseits eine Plausibilitätsprüfung der Analyseresultate, andererseits aber auch eine Verbesserung der Genauigkeit durch eine Kombination beider Datenquellen in der Analyse (siehe Abs. 5.2).

Da die Bestimmung des Polarisationszustands auf der von der Orientierung der  $\lambda/4$ -Platte abhängigen Änderung der auf diese Sensoren einfallenden Intensität beruht, ist es unabdingbar, alle anderen Ursachen solcher Änderungen auszuschließen; daher ist eine Normierung der Sensorintensitäten auf die Intensität des einfallenden Lichtstrahls erforderlich. Prinzipiell sollte diese bei der hier vorliegenden Konstruktion bereits bestimmt sein, da sie sich – unter der vernünftigen Annahme, daß das Glan-Laser-Prisma keine Absorptionsverluste aufweist – aus der Summe von transmittiertem und reflektiertem Teilstrahl ergibt. Allerdings würde dies eine Kalibration der beiden Sensoren aufeinander unter Berücksichtigung der unterschiedlichen Abschwächung auf beiden Lichtpfaden aufgrund der abweichenden Anzahl optischer Grenzschichten erfordern, deren Stabilität zudem überwacht werden müßte.

Aus diesem Grund wird im vorliegenden Fall explizit ausgenutzt, daß das Stokesmeter MkII unterhalb des unter  $45^\circ$  zur Strahlachse montierten Vakuumfensters  $W_{45}$  plaziert wird. Wenngleich auch dieses mit einer reflexionsmindernden Beschichtung versehen ist, wird von *beiden* Oberflächen eine nicht unerhebliche Menge an Licht herausreflektiert, was die Polarisationsmessung überhaupt erst ermöglicht. Da dieses Fenster nun zwecks Vermei-

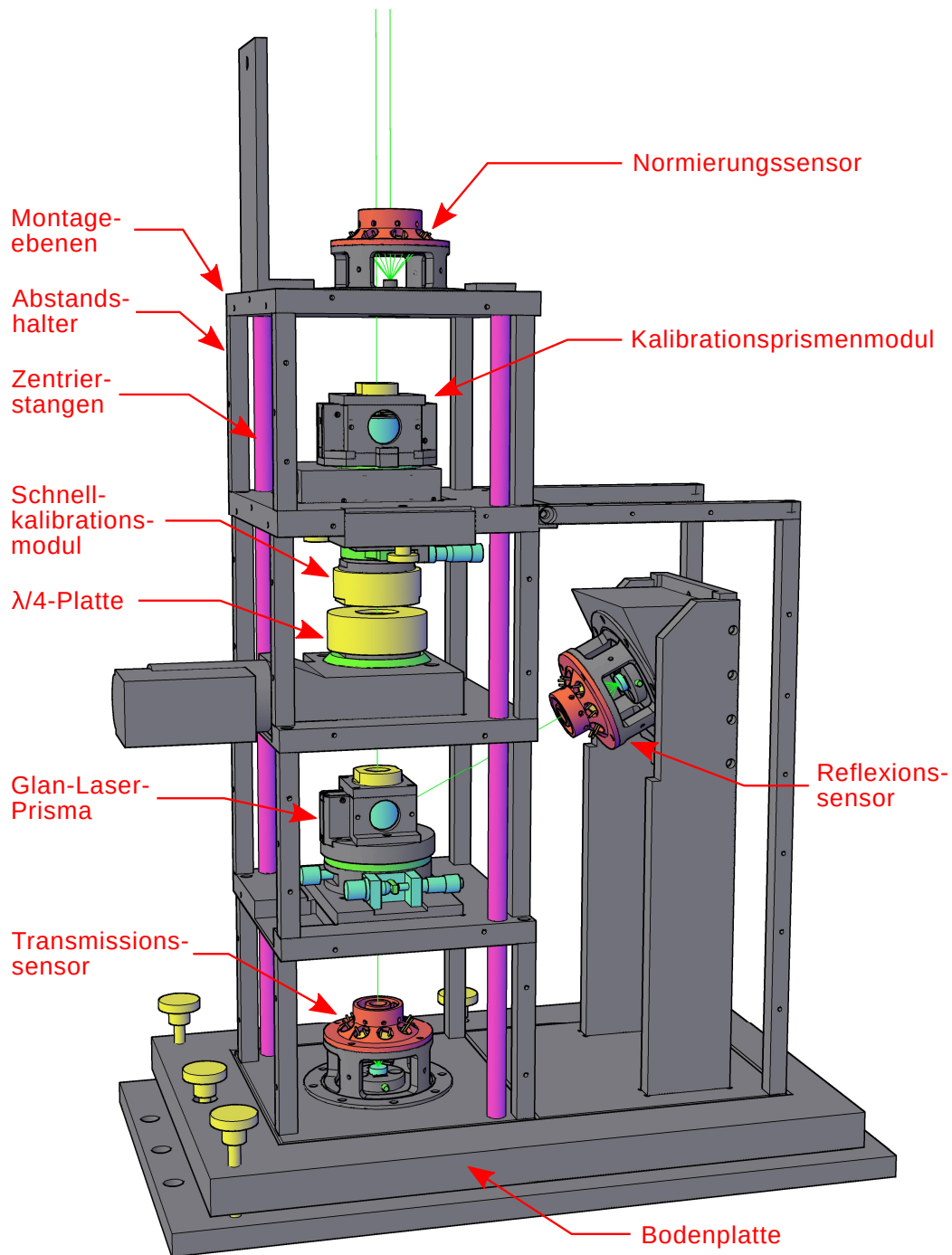


**Abbildung 4.10:** Schematische Darstellung des Meßkonzepts des Stokesmeter MkII

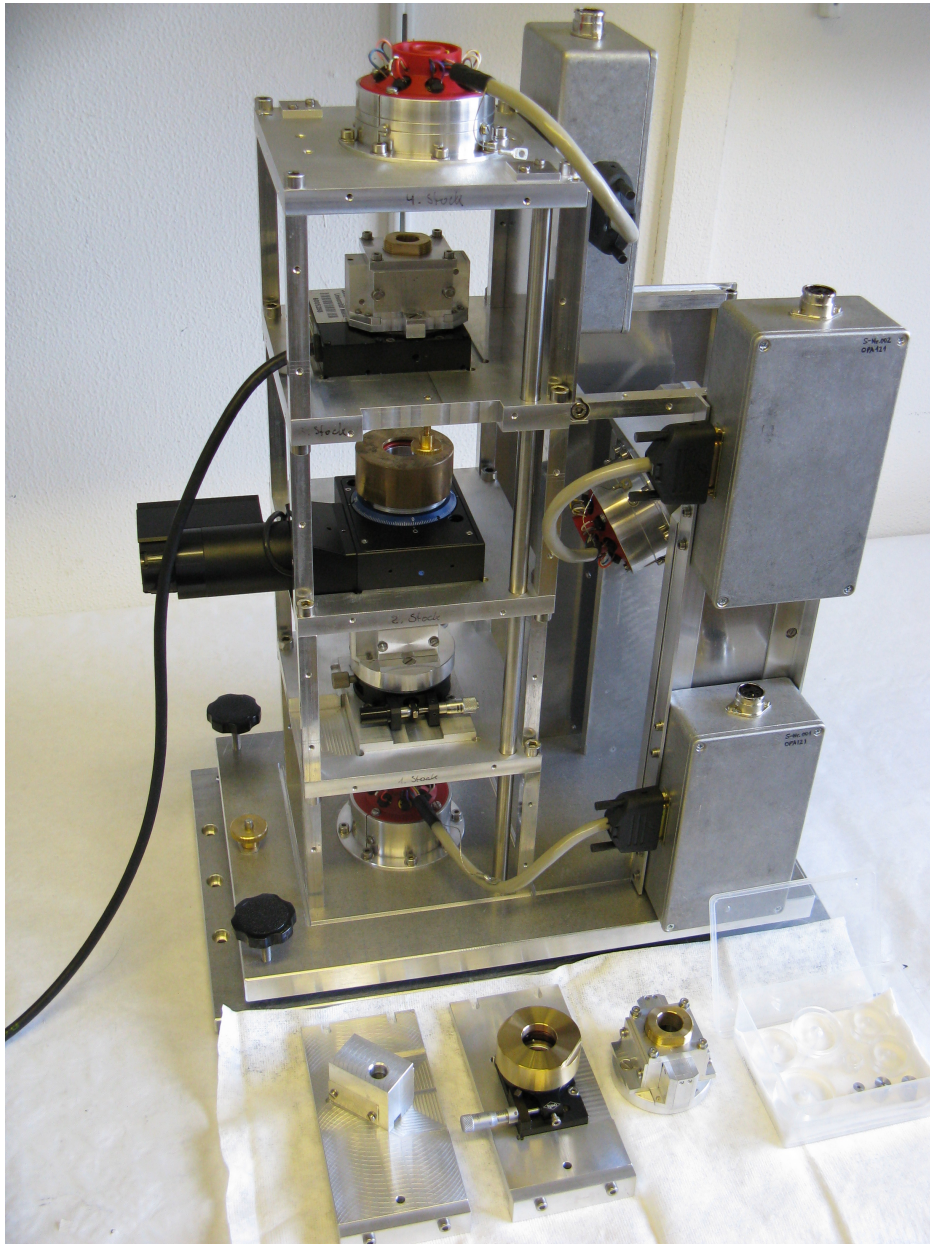
derung von durch den Druckunterschied induzierter Spannungsdoppelbrechung mit 10 mm sehr dick ausgeführt ist, weisen die beiden Teilstrahlen eine deutliche räumliche Separation von ca. 7.8 mm auf (vgl. Abb. 4.9). Somit steht neben dem ersten, vakuumseitig reflektierten Strahl, der zur polarimetrischen Vermessung genutzt wird, noch ein zweiter Strahl zur Verfügung, der ebenfalls alle Schwankungen der resonatorinternen Lichtintensität widerspiegelt und somit als Referenzstrahl zur Intensitätsnormierung verwendet werden kann. Dieser Strahl wird im Stokesmeter MkII mit einem dritten Intensitätssensor vermessen (siehe Abb. 4.10).

### Struktur der Konstruktion

Das Stokesmeter MkII, dargestellt in Abbildungen 4.11 und 4.12, ist eine Rahmenkonstruktion aus Aluminium bestehend aus einer nivellierbaren, 20 mm starken Bodenplatte und vier äquidistanten Instrumentenebenen für die Montage der optischen Elemente. Diese Montageplattformen weisen paßgenaue Ausfräsungen für die Halterungen der optischen Elemente auf, um deren genaue Zentrierung auf die nominelle Strahlachse des Geräts zu gewährleisten. Die transversale Ausrichtung der Instrumentenebenen selbst wird hierbei durch zwei lange, paßgenau endbearbeitete und diagonal angeordnete Edelstahlwellen ermöglicht, die in präzise in die Bodenplatte eingebrachten Bohrungen verankert sind und auf die die oberen Montageplattformen, die mit ebenso präzisen Bohrungen versehen sind, aufgesteckt werden. Auf der obersten Ebene wird der Normierungssensor befestigt, sie beinhaltet aber zusätzlich auch einen Haltewinkel für Zubehörteile, die keiner präzisen Zentrierung



**Abbildung 4.11:** CAD-Modell des Stokesmeter MkII, das die volle Ausbaustufe inklusive aller Kalibrationsvorrichtungen darstellt. Zwecks besserer Sichtbarkeit sind alle Abdeckungen und die Elektronikmodule entfernt.



**Abbildung 4.12:** Photo des Stokesmeter MkII inklusive Zubehörteilen. Das Gerät ist mit montiertem Kalibrationsprismenmodul, aber ohne äußere Abdeckplatten abgebildet. Vor der Bodenplatte sind die beiden Schnellwechsellmodule für die Kalibration mit zirkularem Licht, die dedizierte Prismenhalterung für die Absolutkalibration und die Justierziele für die Ausrichtung der Apparatur auf den Laserstrahl zu sehen; diese Baugruppen werden in Abs. 4.4.5 näher erläutert.



bedürfen (wie z. B. kommerzielle Laserleistungsmeßgeräte). Die nachfolgende Ebene dient der Montage von Kalibrationszubehör, auf das in Abs. 4.4.5 näher eingegangen wird. Anschließend folgen zwei Ebenen für die Befestigung jeweils der Wellenplatte und des Glan-Laser-Prismas (s. u.) sowie die Bodenplatte, auf der der Transmissionssensor montiert ist.

Der vertikale Abstand zwischen den Instrumentenebenen wird durch jeweils vier quadratische Aluminiumstäbe definiert, bei deren Fertigung besonders auf die Einhaltung gleicher Längen aller Exemplare geachtet wurde. Hierdurch wird zugleich die Parallelität der Instrumentenebenen sichergestellt und eine wichtige Quelle systematischer Meßfehler – die Verkippung polarisationsoptischer Elemente gegeneinander – weitgehend ausgeräumt.

Neben der vertikalen Anordnung der Montageplattformen befindet sich ein Halterahmen mit einem höhenverstellbaren Befestigungsblock für den Reflexionssensor. Dieser Block ist so gefertigt, daß seine Stirnfläche senkrecht zum reflektierten Strahl steht. Die vertikale Ausrichtung des Halterahmens wird hierbei neben einer genauen Bearbeitung der Grundflächen, die zudem in entsprechenden paßgenauen Ausfräsungen ruhen, durch in Präzisionsbohrungen verankerte Paßstifte<sup>9</sup> gewährleistet.

Abgesehen von der fehlerhaften Ausrichtung der polarisationsoptischen Elemente aufeinander ist auch möglicherweise auf die Sensoren fallendes Umgebungslicht eine Quelle systematischer Meßfehler. Aus diesem Grund können Abdeckplatten am Rahmen befestigt werden, die das Stokesmeter MkII lichtdicht verschließen, wobei zu Wartungszwecken jede Ebene einzeln geöffnet werden kann. Die Halterung des Reflexionssensors ist ebenfalls mit einem Rahmen aus Aluminiumstangen umgeben, die die Befestigung einer Abdeckung erlauben.

## Wellenplatte

Im Stokesmeter MkII wird eine Quarz-Wellenplatte „nullter Ordnung“ des Typs *LEnS-Optics W4Z25-514.5*<sup>10</sup>, der auch im Laserresonator selbst Anwendung findet, eingesetzt; sie ist in einer zylindrischen Fassung mit einem Durchmesser von 35 mm und einer freien Apertur von 23 mm montiert. Aufgrund der zu erwartenden hohen Laserleistungen (s. u.) sind die beiden Quarzscheiben bei dieser Bauform nicht optisch zementiert<sup>11</sup>, sondern durch einen

---

<sup>9</sup>nach DIN EN 28 734

<sup>10</sup>LEnS-Optics GmbH, Bürgermeister-Neumeyr-Straße 7, 85391 Allershausen

<sup>11</sup>d. h. mit einem transparenten Zement verklebt, dessen Brechungsindex zwecks Minimierung von Reflexionsverlusten an die Indizes der zu verbindenden Elemente angepaßt ist; diese Art der Montage kann durch hohe Lichtintensitäten zerstört werden.

expliziten Luftspalt getrennt. Die Wellenplatte ist mit einer Oberflächengenauigkeit von  $\lambda/8$  und einer Güte von 20-10 nach *MIL-PRF-13830B* von ähnlicher Qualität wie die restliche Resonatoroptik.

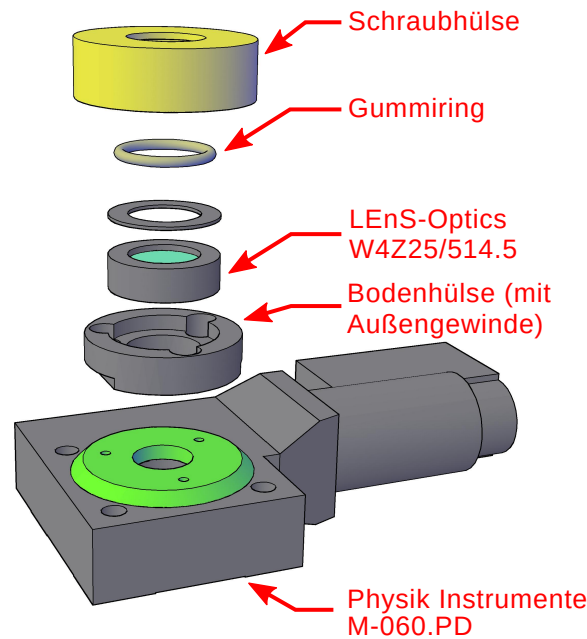
Die Oberflächen der Quarzplatten sind mit einer Antireflexbeschichtung versehen, die die Reflexion pro Oberfläche auf ca. 0.15 % reduziert. Eigentlich sollte dies in einem polarimetrischen Gerät möglichst vermieden werden, da solche Beschichtungen den Polarisationszustand des Lichts in unvorhersehbarer Weise beeinflussen. In diesem Fall erschien es allerdings nützlich, um andere Quellen systematischer Fehler zu vermeiden: Einerseits würden bei unbeschichteten Oberflächen die in Abs. 4.2.3 erwähnten Vielfachreflexionen auftreten, die eine erhebliche Abhängigkeit der Verzögerung vom Einfallswinkel verursachen [41]; andererseits können unerwünscht reflektierte Teilstrahlen zu in diesem Fall sogar von der Orientierung der Wellenplatte abhängigem Störlicht auf den Intensitätssensoren führen. Da zudem – wie sich später herausstellen wird – die Möglichkeit besteht, die tatsächlichen Eigenschaften der  $\lambda/4$ -Platte zu vermessen, sollte der prinzipiell sicherlich vorhandene Nachteil hier vernachlässigbar sein.

Beim Vorgängermodell des Stokesmeters war die Wellenplatte auf einem Tubus montiert, der mittels eines Zahnriemens durch einen Schrittmotor angetrieben wurde; die Stokesmessung wurde dann bei kontinuierlicher Rotation durchgeführt, wobei die Winkelskala anhand eines magnetischen Referenzschaltersignals kalibriert wurde. Dies hatte neben Ungenauigkeiten durch mechanische Toleranzen und der begrenzten Möglichkeit zur Fernsteuerung auch Nachteile für die Signalelektronik, auf die weiter unten eingegangen wird; für das neue Stokesmeter wurde daher ein kommerziell erhältlicher Präzisionsdrehtisch des Typs *PI M-060.PD* verwendet. Dieser weist neben einer hohen Winkelgeschwindigkeit von  $90^\circ/\text{s}$  auch eine gute Positioniergenauigkeit auf<sup>12</sup>, so daß er sich auch für Messungen bei diskreten Winkelpositionen eignet. Neben dem Umstand, daß das Referenzschaltersignal im Falle kommerzieller, vollintegrierter Drehtische meistens nicht für den Nutzer verfügbar ist, hat diese Betriebsart auch den Vorteil, daß keine Annahmen über die Konstanz der Rotationsgeschwindigkeit gemacht werden müssen.

Die Befestigung der Wellenplatte auf dem Drehtisch erfolgt mittels einer eigens entworfenen Schraubfassung (siehe Abb. 4.13), die zwecks Vermeidung unerwünschter Doppelbrechungseffekte auf eine möglichst spannungsarme Montage ausgelegt ist. Sie besteht aus einer Basis mit Zentriersenkung, in die die Wellenplatte eingelegt wird, und einer Schraubhülse, mit der sie durch vertikale Klemmung in der Fassung fixiert wird. Zwischen dem Gehäuse der

---

<sup>12</sup>lt. Herstellerspezifikation 50  $\mu\text{rad}$  unidirektionale Wiederholgenauigkeit



**Abbildung 4.13:** CAD-Modell der Wellenplatten-Halterung des Stokesmeter MkII

$\lambda/4$ -Platte und der Schraubhülse werden zusätzlich ein Gummiring und eine Kunststoffscheibe eingelegt; der Ring dient dazu, die für einen verdrehsicheren Halt notwendige Klemmkraft abzufedern, während die Scheibe ein Mitschleifen der Wellenplatte beim Zuschrauben der Fassung unterbinden soll. Um zu vermeiden, daß das Getriebe des Drehtischs beim Anziehen der Befestigungsschrauben der Fassung oder dem Zuschrauben der Fassung selbst beschädigt wird, weisen sowohl Basis als auch Hülse einen Angriff für ein Paar eigens angefertigter Gabelschlüssel auf; auf diese Weise ist es in beiden Fällen möglich, das Schraub-Drehmoment mit dem Schlüssel aufzufangen, statt es über das Getriebe auf das Gehäuse des Drehtischs zu übertragen.

Trotz der genannten Maßnahmen wird klar, daß die Wellenplatte selbst dann, wenn die Lage der schnellen Achse auf dem Gehäuse gekennzeichnet wäre, innerhalb der Fassung nicht gezielt ausgerichtet werden könnte. Aus diesem Grund sind bei der Inbetriebnahme des Gerätes Kalibrationsmessungen erforderlich, mit denen die Winkelskala des Drehtischs in geeigneter Weise definiert wird; auf sie wird in Abs. 4.4.5 und 5.3 eingegangen.



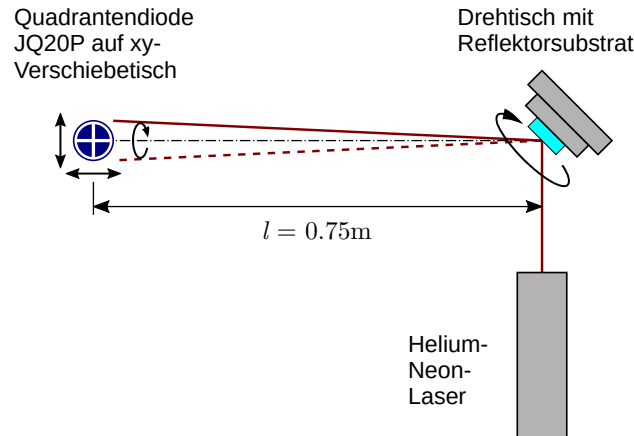
### Prisma

Als Linearpolarisator wird ein hochleistungstaugliches Glan-Laser-Prisma des Typs *CASIX PGL8310*<sup>13</sup> mit einem Extinktionsvermögen von  $< 10^{-6}$  eingesetzt. Das Prisma ist aus  $\alpha$ -BBO gefertigt und weist einen Schnittwinkel von ca.  $37.2^\circ$  auf, wobei beide Hälften – wie schon bei der  $\lambda/4$ -Platte – durch einen Luftspalt voneinander getrennt sind. Es ist in einem zylindrischen Gehäuse mit einem Durchmesser von 25.4 mm und einer freien Apertur von 8 mm montiert, das an beiden Seiten Austrittsfenster für den herausreflektierten Teilstrahl aufweist, damit die ggf. auftretenden hohen Laserleistungen nicht zu einer Aufheizung des Gehäuses oder in der Folge gar zu einer Beschädigung des Kristalls führen; das Prisma ist demnach bidirektional nutzbar. Die optischen Oberflächen haben eine Genauigkeit von  $\lambda/4$  und eine Güte von 20-10 für den Transmissionspfad und sind – aufgrund der schon bei der  $\lambda/4$ -Platte angestellten Überlegungen – explizit ohne reflexmindernde Beschichtung ausgeführt, was wegen der hier vorliegenden schrägen Schnittfläche jedoch kein Problem darstellt. Aufgrund der hygroskopischen Eigenschaften des Materials sind die Ein- und Austrittsfläche allerdings mit einer Schutzschicht aus  $\text{MgF}_2$  versehen.

Da beim Stokesmeter MkII auch der reflektierte Strahl genutzt werden soll, muß das entsprechende Austrittsfenster präzise auf den Reflexionssensor ausgerichtet werden; es besteht daher (wiederum) die Schwierigkeit, ein in ein zylindrisches Gehäuse eingefasstes optisches Element mit einer reproduzierbaren Orientierung innerhalb des Gerätes zu montieren. In diesem Fall besteht die Lösung darin, das Prisma ebenfalls auf einem Präzisions-Drehtisch zu befestigen und es nach jedem Einbau explizit auf den Reflexionssensor auszurichten; aus Platz- und Kostengründen wird hier jedoch kein motorisiertes Exemplar verwendet. Es muß allerdings berücksichtigt werden, daß bei manueller Bewegung des Drehtischs deutlich ungleichmäßigere Kräfte wirken als im Fall einer motorisierten Rotation; außerdem muß der Drehtisch in der endgültigen Position gegen weitere unbeabsichtigte Bewegung gesichert werden, was meistens durch eine dedizierte Fixierschraube oder ähnliche Klemmvorrichtung geschieht. Um sicherzustellen, daß sich bei solchen Lastwechseln die Orientierung (und ggf. sogar Neigung) des Prismas nicht in unvorhergesehener Weise ändert, wurden vor der endgültigen Auswahl des verwendeten Drehtischs Untersuchungen über den Taumelfehler und die Anfälligkeit gegen Verkippen an von den Herstellern zur Verfügung gestellten Probeexemplaren durchgeführt; dies war erforderlich, weil die Hersteller selbst keine entsprechenden Angaben liefern konnten.

---

<sup>13</sup>CASIX Inc., 20 Fuxing Street, Fuxing Investment District, Fuzhou 350014, V. R. China



**Abbildung 4.14:** Schematische Darstellung der Meßapparatur zur Bestimmung des Taumelfehlers

Zwei Firmen waren bereit, Testexemplare zu Prüfzwecken zur Verfügung zu stellen. Es handelt es sich um die Modelle

- *Linos Photonics RT 60*<sup>14</sup> und
- *ThorLabs PR01/M*<sup>15</sup>

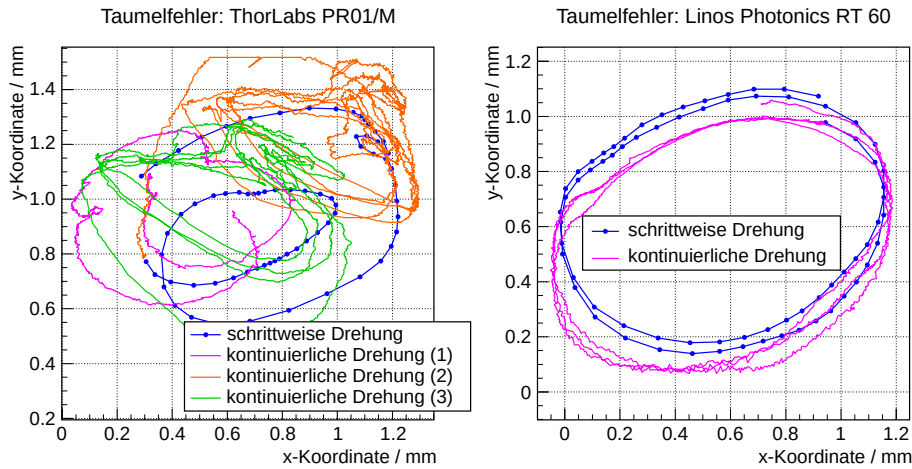
Der Aufbau der Messung ist in Abb. 4.14 dargestellt: Der Strahl eines Helium-Neon-Lasers wird von einem Reflektor, der auf dem zu prüfenden Drehtisch befestigt ist, um 90° umgelenkt und mit einer positionsempfindlichen Quadrantendiode *Laser Components JQ20P*<sup>16</sup> nachgewiesen, wobei für die Signalauslese auf die für die Lagestabilisierung des Laserstrahls entwickelte Elektronik [47] zurückgegriffen wurde. Die gemessene Positionsänderung des Strahlflecks bei Drehung des Tisches kann dann herangezogen werden, um dessen Qualität einzuschätzen.

Im vorliegenden Fall wird ein unbeschichtetes Glassubstrat *Laser Components 12PW1-1037C* in Interferometerqualität mit einer Parallelität von besser als 48  $\mu\text{rad}$  als Reflektor eingesetzt, das auf einem präzisionsgefertigten Montageadapter befestigt ist. Die Quadrantendiode befindet sich in einer manuell verstellbaren Zweiachs-Verschiebehalterung und kann so auf den reflektierten Strahlfleck zentriert werden. Außerdem erlaubt diese Anordnung eine Kalibration der Positionssignale, indem die Diode bei feststehendem La-

<sup>14</sup>heute Qioptiq Photonics GmbH & Co. KG, Königsallee 23, 37081 Göttingen

<sup>15</sup>Thorlabs Inc., 56 Sparta Avenue, Newton, NJ 07860, USA

<sup>16</sup>Laser Components GmbH, Werner-von-Siemens-Straße 15, 82140 Olching

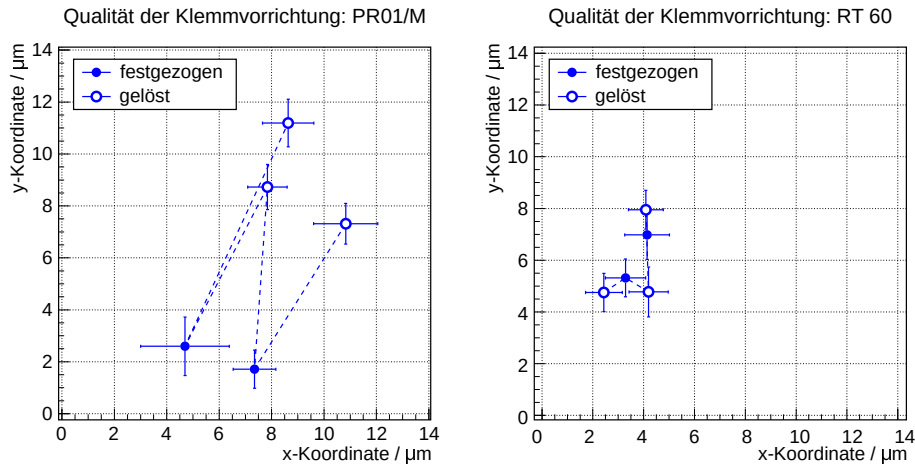


**Abbildung 4.15:** Messungen zur Untersuchung des Taumelfehlers der beiden Drehtisch-Kandidaten. *Links: Thorlabs PR01/M – Rechts: Linos Photonics RT 60.* Im Falle der schrittweisen Drehung wurde eine ganze Stichprobe pro Winkelstellung aufgezeichnet, aus der dann Mittelwert und Standardabweichung im Sinne einer statistischen Unsicherheit ermittelt wurden. Der Nullpunkt der Achsen wurde willkürlich festgelegt. Im Falle der kontinuierlichen Drehung hat der Strahlfleck beim *PR01/M* teilweise die Grenzen des Erfassungsbereichs verlassen.

serstrahl mittels der Verstellerschrauben um definierte Wegstrecken verschoben wird; dies wurde für jeden untersuchten Drehtisch separat durchgeführt.

Zur Qualitätsprüfung wurden zwei Messungen mit jedem Tisch durchgeführt. Der erste Test hatte den Zweck, den Gleichlauf des jeweiligen Drehtischs zu vermessen, indem die Wanderung des Strahlflecks bei Rotation des Drehtischs aufgezeichnet wurde. Hierbei wurde sowohl der Fall untersucht, daß der Tisch in diskreten Schritten von ca.  $10^\circ$  gedreht und bei feststehendem Tisch die Strahlposition gemessen wird, als auch der Fall, daß der Tisch von Hand kontinuierlich um mehrere Umdrehungen gedreht und die Strahlposition dabei laufend mitgeschrieben wird. Ersteres erlaubt Rückschlüsse auf den Taumelfehler des Drehtischs (d. h. eine etwaige Fehlstellung der Drehachse), letzteres auf die Stabilität der Lagerung bei unstetiger Krafrichtung. Die Resultate sind in Abb. 4.15 dargestellt. Wie man sieht, umschreibt die Trajektorie des Strahlflecks im Fall des *RT 60* zwar eine größere Fläche, ist aber deutlich stetiger als beim *PR01/M*.

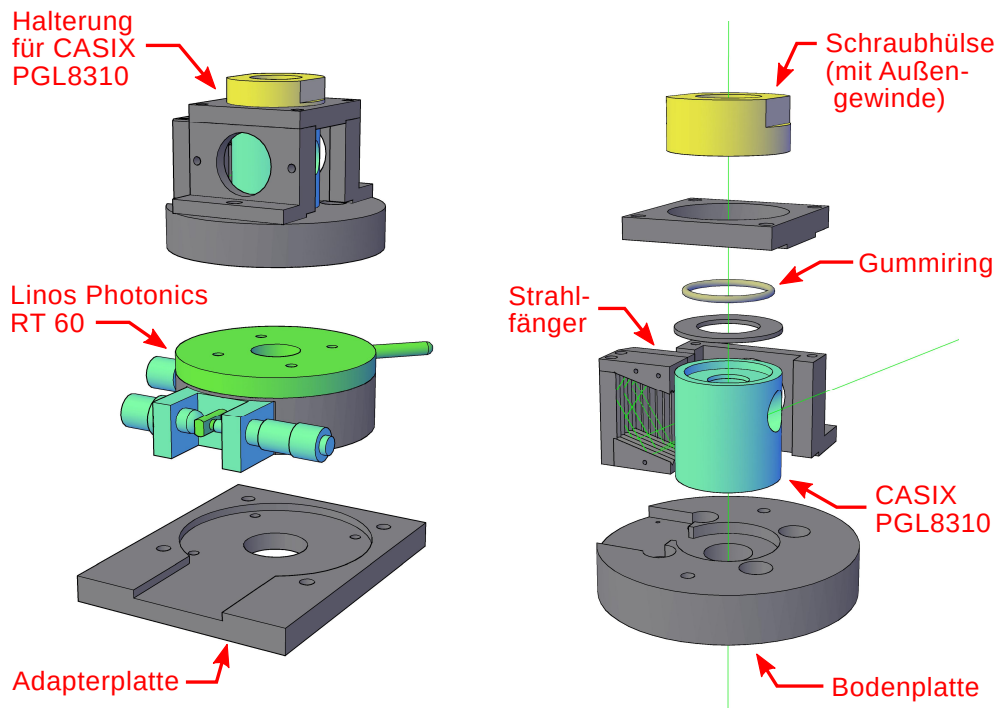
Der zweite Test sollte klären, ob sich die Orientierung des reflektierten Strahls (sei es in diesem Aufbau oder im eigentlichen Stokesmeter) durch das Festziehen der Klemmvorrichtung des Drehtischs in nennenswertem Um-



**Abbildung 4.16:** Messungen zur Stabilität der Drehplattform bei Anziehen und Lösen der Klemmung. *Links: Thorlabs PR01/M – Rechts: Linos Photonics RT 60.* Auch hier wurde der Nullpunkt der Achsen willkürlich festgelegt.

fang ändert. Dies ist von Interesse, weil eine solche Änderung den Justiervorgang deutlich erschweren würde. Wie man aus dem in Abb. 4.16 dargestellten Ergebnis sieht, ist beim *PR01/M* ein systematischer Unterschied zwischen festgezogener und gelöster Klemmung sichtbar, der auch deutlich größer als beim *RT 60* ausfällt; allerdings ist der Effekt in beiden Fällen vernachlässigbar klein. Insgesamt wurde aufgrund dieser Messungen der *Linus Photonics*-Drehtisch für die Befestigung des Stokesmeter-Prismas ausgewählt, da er in beiden Untersuchungen die besten Resultate erzielt hatte.

Um nun das Glan-Laser-Prisma auf dem so ausgewählten Drehtisch zu montieren, wurde wiederum eine entsprechende Halterung entworfen, die in Abb. 4.17 dargestellt ist. Sie besteht aus einer Bodenplatte, die direkt auf den Drehtisch geschraubt wird, und einem mehrteiligen Gehäuse, das das Prisma von drei Seiten umschließt, wobei die dem Reflexionssensor zugewandte „Vorderseite“ offen bleibt. Wie schon im Fall der  $\lambda/4$ -Platte wird das Prisma mittels einer durch einen Gummiring gepufferten Schraubhülse spannungsarm von oben festgeklemmt. Die Seitenwände haben Löcher, durch die das Prisma grob innerhalb des Gehäuses ausgerichtet und ggf. während des Schraubvorgangs festgehalten werden kann; diese können später durch zusätzliche Abdeckplatten lichtdicht verschlossen werden. Um sicherzustellen, daß das vom Transmissionssensor diffus reflektierte Laserlicht nicht zu Artefakten im Intensitätssignal führt, befindet sich an der „Rückseite“, der das Austrittsfenster für die inverse Strahlrichtung zugewandt ist, ein Strahl-



**Abbildung 4.17:** CAD-Modell des Prismenmoduls. *Links:* Prismenmodul insgesamt – *Rechts:* Explosionszeichnung der Prismenhalterung

fänger. Dieser ist in der Art eines reflexionsarmen Raums<sup>17</sup> aufgebaut und weist an allen Wänden keilförmige Nuten auf, in denen jegliches Licht durch Mehrfachreflexion zerstreut werden soll. Die Wände sind zusätzlich mit einer anthrazitfarbenen Beschichtung aus MoS<sub>2</sub> versehen, um das so aufgestreute Licht so weit wie möglich zu absorbieren.

Bei der Planung des Geräts wurden auch Anwendungsfälle vorgesehen, in denen das Glan-Laser-Prisma kontinuierlich rotiert werden muß; aus diesem Grunde wurde auch dessen Instrumentenebene mit einer Senkung für den Drehtisch der  $\lambda/4$ -Platte versehen. Der Prismen-Drehtisch ist daher auf einer Adapterplatte montiert, die dieselbe Geometrie wie die Grundfläche des *PI M-060.PD* aufweist.

#### 4.4.2 Entwurf der Intensitätssensoren

Den Intensitätssensoren kommt eine zentrale Bedeutung bei der Funktion des Stokesmeter MkII zu, weshalb in der Planungsphase einige Vorüberle-

<sup>17</sup>umgangssprachlich auch als „schalltoter Raum“ bezeichnet

gungen unter Berücksichtigung der Erfahrungen mit dem Vorgängermodell angestellt wurden. Zu den wichtigsten Konstruktionszielen zählt hierbei die Unempfindlichkeit gegen Streulicht, weshalb die Sensoren auch innerhalb des Stokesmeter-Gehäuses noch einmal eigens gekapselt sind. Ein weiterer wichtiger Aspekt ist der dynamische Meßbereich in Bezug auf die einfallende Lichtintensität. Die hierzu angestellten Voruntersuchungen sollen im folgenden kurz angerissen werden.

### Lichtintensität

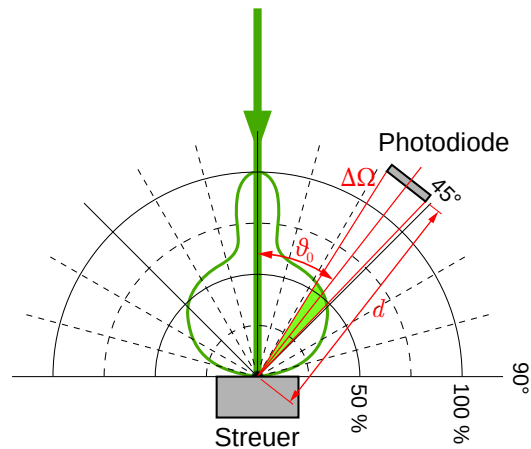
Im Stokesmeter MkI wurden für die Messung der Intensität dieselben Quadrantendioden *JQ20P* verwendet, wie sie auch bei den Positionssensoren der Strahlagestabilisierung [47] zum Einsatz kamen. Dies war möglich, weil die hierfür entwickelte Sensorelektronik neben den Lagesignalen auch ein Summensignal ausgibt, das der Gesamtintensität entspricht; auf diese Weise konnte eine Eigenentwicklung für das Stokesmeter vermieden werden. Im Rahmen des Polarimeterbetriebs wurde jedoch festgestellt, daß die hierbei auftretenden Intensitäten teilweise deutlich jenseits des Erfassungsbereichs dieser Sensoren liegen und somit ein anderes Meßkonzept erforderlich ist.

Tatsächlich wurden unterhalb des *W45*-Fensters Lichtintensitäten von bis zu 0.75 W gemessen, was sogar die Zerstörschwelle halbleiterbasierter Lichtsensoren erheblich überschreitet. Diese wird in der Regel mit ca. 50 mW<sup>18</sup> angesetzt, wobei allerdings schon vor Erreichen dieses Wertes mit einer nicht-linearen Detektorantwort zu rechnen ist. Für die o. g. Quadrantendiode etwa wird ein Photostrom von 0.2 mW/mm<sup>2</sup> als Obergrenze des linearen Bereichs spezifiziert, was bei der Gesamtfläche und spektralen Empfindlichkeit dieses Modells einer Intensität von nur 13 mW entspricht.

Es wäre nun prinzipiell denkbar, anstelle der photoelektrischen Messung ein anderes Verfahren anzuwenden, bei dem die Zerstörschwelle des Sensors höher liegt; eine etablierte Methode ist etwa die Verwendung eines bolometrischen Detektors auf Basis einer Thermosäule. Allerdings erfordert dieses Meßprinzip eine definierte Wärmeabfuhr, die meistens durch Konvektionskühlung über einen Wärmetauscher realisiert wird; dies führt jedoch zu einer erheblichen Größe der Sensoren und ist insgesamt nur schwer mit dem Ziel eines vollständig lichtdicht verschlossenen Meßgeräts zu vereinen. Darüberhinaus weisen solche Sensoren je nach der Intensität, auf die sie ausgelegt wurden, Anstiegszeiten bis hin zu mehreren Sekunden auf, wodurch sie sehr träge auf Änderungen der Lichtintensität reagieren. Dies führt jedoch nicht

---

<sup>18</sup>z. B. im Fall des *Coherent LM-2*-Laserleistung-Tastkopfs



**Abbildung 4.18:** Konzept zur Optimierung der Sensorempfindlichkeit. Der Laserstrahl trifft auf eine nichtreflektierende Oberfläche und wird mit einer von Material, Bearbeitung und Polarisation abhängigen Richtcharakteristik gestreut. Das Streulicht wird von einer Photodiode ausgelesen, wobei die Abschwächung der gemessenen Intensität sowohl durch die Wahl der Beobachtungsrichtung als auch der Raumwinkelabdeckung angepaßt werden kann.

nur dazu, daß die Messung prinzipiell nur im schrittweisen Betrieb möglich wäre und durch die notwendige Wartezeit erheblich länger dauern würde, sondern macht – sofern die Sensoren in dieser Hinsicht nicht exakt aufeinander abgestimmt sind – auch die Intensitätsnormierung unmöglich, weshalb dieser Ansatz für den Bau der Sensoren ausscheidet.

Um den Sensor dennoch auf der Basis einer Photodiode konstruieren zu können, ist nun eine Abschwächung der einfallenden Lichtintensität um einen Faktor 10 – 20 erforderlich. Im allgemeinen werden zu diesem Zweck Neutraldichtefilter verwendet, wobei im Falle intensiver Laserstrahlung reflektierende Filter zum Einsatz kommen. Diese Möglichkeit wurde zunächst auch im Falle des vorherigen Stokesmeter MkI verfolgt; allerdings wurde bei Untersuchungen zu systematischen Effekten festgestellt, daß solche Filter offenbar ebenfalls eine Zeitkonstante aufweisen können. Dies führt jedoch zum gleichen Problem, das schon die Verwendung bolometrischer Sensoren ausgeschlossen hatte, weshalb die auf den Detektor einfallende Intensität auf andere Weise reduziert werden muß.

Für das Stokesmeter MkII wurde daher ein Konzept verfolgt, bei dem der Lichtstrahl innerhalb des Sensors zunächst auf eine nur diffus reflektierende Oberfläche auftrifft und dann Photodetektoren an geeigneten Stellen plaziert werden, um das gestreute Licht nachzuweisen (siehe Abb. 4.18). Dies ermög-



licht eine Anpassung des Abschwächungsfaktors sowohl durch Ausnutzung der Richtcharakteristik der Streuung als auch einfach durch Änderung des erfaßten Raumwinkels.

### Vorüberlegungen zur Optimierung

Als Detektorelement wurde die Si-Photodiode *Vishay BPW21*<sup>19</sup> ausgewählt, die eine große bestrahlungsempfindliche Fläche von  $7.5 \text{ mm}^2$  und eine gute Lichtempfindlichkeit im grünen Wellenlängenbereich aufweist. Die spektrale Empfindlichkeitskurve ist hierbei zwar durch einen Farbkorrekturfilter an die Wahrnehmung des menschlichen Auges angepaßt, allerdings ist dies kein prinzipieller Nachteil, da so auch die Empfindlichkeit des Sensors gegen Störlicht anderer Herkunft etwas geringer ausfällt. Die Diode hat einen typischen Linearitätsbereich von  $2 \cdot 10^{-2} - 2 \cdot 10^5 \text{ lx}$ , was ungefähr einer Lichtintensität von  $0.36 \text{ nW} - 3.6 \text{ mW}$  bei  $514.5 \text{ nm}$  entspricht.

Ziel des Entwurfsprozesses ist nun, einen Sensor zu entwickeln, der die gewünschte Abschwächung der Lichtintensität zum Schutz der Photodioden und Sicherstellung eines großen linearen Betriebsbereichs aufweist und gleichzeitig möglichst kompakt ist. Ein weiteres – wenngleich untergeordnetes – Ziel besteht darin, eine polarisationsunabhängige Nachweiseffizienz zu erreichen. Dies ist zwar nur beim Normierungssensor relevant, da die auf den Transmissions- und Reflexionssensor einfallenden Teilstrahlen aufgrund des Glan-Laser-Prismas eine unveränderliche Linearpolarisation aufweisen, hätte aber den vorteilhaften Effekt theoretisch gleicher Lichtempfindlichkeit aller Sensoren. Dies wird sicherlich nicht mit einer einzelnen Photodiode zu erreichen sein, da die hierfür notwendige Rotationssymmetrie der Anordnung bei einem schrägen Einfall des Lichts auf den Streuer oder einer schräg auf den Streuer gerichteten Diode (vgl. Abb. 4.18) gebrochen ist.

Um die optimale Platzierung der Photodioden zu finden, ist es nun erforderlich, die Richtcharakteristik der diffusen Streuung mathematisch zu modellieren. Diese wird durch die *bidirektionale Reflektanzverteilungsfunktion* (BRDF) ausgedrückt [147] und ist von Material und Oberflächenbeschaffenheit des Streuers sowie Wellenlänge und Polarisation des einfallenden Lichtstrahls abhängig. Im vorliegenden Fall wurde das auf der *SCATMECH*-Softwarebibliothek<sup>20</sup> basierende Programm *Modeled Integrated Scattering Tool* verwendet, das am *National Institute of Standards and Tech-*

---

<sup>19</sup>Vishay Semiconductor GmbH, Theresienstraße 2, 74072 Heilbronn

<sup>20</sup>T. A. Germer: *SCATMECH* und *MIST*, verfügbar unter  
<https://pml.nist.gov/Scatmech/html/index.htm>



nology (kurz *NIST*<sup>21</sup>) entwickelt wurde und die Berechnung der diffusen Streuung polarisierten Lichts an rauen Oberflächen mittels verschiedener BRDF-Modelle ermöglicht.

Es stellt sich demnach die Frage, mit welchem der verschiedenen Modelle die Oberfläche am besten zu beschreiben ist. Hierzu muß zunächst festgelegt werden, wie der Streuer prinzipiell gefertigt werden soll und welche Oberflächeneigenschaften daraus resultieren. Um sowohl die mechanische Fertigung als auch die für die Optimierung notwendigen Rechnungen so einfach wie möglich zu halten, erscheint es sinnvoll, eine plangefräste Aluminiumoberfläche als Streuer zu verwenden. Die Güte einer solchen Oberfläche wird häufig durch den *Mittenrauwert*

$$R_a := \langle |h(x) - \bar{h}| \rangle \quad (4.22)$$

charakterisiert, der die Abweichung des (linear gemessenen) Höhenprofils  $h(x)$  von der mittleren Profillinie  $\bar{h}$  beschreibt und bei gefrästen Flächen in der Größenordnung von  $1.6 - 12.5 \mu\text{m}$  liegt [45]; es ist daher ein Modell gesucht, das Oberflächen dieses Rauheitsgrads korrekt beschreibt.

Diese Fragestellung ist nun nicht nur für die Optik, sondern auch für die Ortungs- und Kommunikationstechnik sowie die Material- und Geowissenschaften von großer Bedeutung, weshalb insbesondere seit den 1960er Jahren vermehrt mathematische Ansätze entwickelt wurden, um die Eigenschaften rauher Oberflächen zu charakterisieren und so diffuse Streuvorgänge berechnen zu können; ein Überblick findet sich etwa in [150] sowie etwas spezialisierter in [55] (analytische Methoden) und [200] (numerische Methoden). Zwei wichtige Vertreter sind hierbei die Rayleigh-Rice-Theorie [161] und die Kirchhoff'sche Näherung [93], wobei letztere meistens in Form der Beckmann-Kirchhoff-Theorie [26] Anwendung findet. Die Rayleigh-Rice-Theorie ist allerdings nur für sehr glatte Oberflächen mit Rauheiten in der Größenordnung von  $\lambda/100$  anwendbar, während die Beckmann-Kirchhoff-Theorie zwar rauhere Oberflächen behandeln kann, jedoch auf einer paraxialen Näherung basiert, die nur in einer kleinen Umgebung um die spiegelnde Reflexionsgeometrie gültig ist [196, 159]; zudem handelt es sich hierbei um eine skalare Theorie, die demnach keine Polarisierungseffekte berücksichtigen kann. Letzteres ist zwar im vorliegenden Fall kein prinzipielles Hindernis, stellt im Hinblick auf das Sekundärziel, einen polarisationsunabhängigen Detektor zu konstruieren, aber dennoch einen Nachteil dar.

---

<sup>21</sup>National Institute of Standards and Technology, 100 Bureau Drive, Gaithersburg, MD 20899, USA

Beim hier vorliegenden Verhältnis von Oberflächenrauheit zu Lichtwellenlänge ist es jedoch möglich, ein in der geometrischen Optik begründetes Modell anzuwenden, bei dem die Oberfläche auf einem mikroskopischen Niveau als eine Ansammlung ebener, jeweils perfekt spiegelnder Facetten mit zufälligen Orientierungen und Neigungswinkeln betrachtet wird [191, 18]. Dieses Modell, das auch als „Theorie der spiegelnden Punkte“ (*specular point theory*) bezeichnet wird, ist zwar nur bei relativ rauhen Oberflächen anwendbar [34], erzielt jedoch innerhalb seines Geltungsbereichs – der auch die hier vorliegende Situation umfaßt – sehr genaue Resultate [37] und hat zudem den Vorteil einer analytischen Form der Gleichungen, wodurch der Rechenaufwand im Vergleich zu anderen Verfahren deutlich reduziert wird. Zwar ist auch das Facettenmodell aufgrund der inkohärenten Summierung über alle beitragenden Oberflächenpunkte keine vektorielle Theorie und kann somit die Änderung des *Polarisationszustands* infolge der Streuung nicht vorhersagen; allerdings kann es durch seine Verwendung der Fresnel’schen Reflexionskoeffizienten für die einzelne Facette zumindest separate Abschwächungskoeffizienten für die *s*- und *p*-Komponente des einfallenden Lichtstrahls angeben und somit die Polarisationsabhängigkeit der gestreuten *Gesamtintensität* korrekt wiedergeben. Da die hier verwendeten Photosensoren als polarisationsunempfindlich angenommen werden können, ist dies für die hier durchzuführende Analyse völlig ausreichend.

Um das Facettenmodell im vorliegenden Fall tatsächlich anwenden zu können, müssen nun allerdings noch die passende Beschreibung für die statistischen Eigenschaften der Oberfläche sowie geeignete Werte für deren Parameter gefunden werden. In der Vergangenheit wurde bei der Modellierung der diffusen Streuung in der Optik [18, 27, 107], aber auch bei der Charakterisierung maschinell gefertigter Oberflächen in den Ingenieurwissenschaften [206] vielfach angenommen, daß die betrachtete Oberfläche als *gaußförmig* angesehen werden kann, d. h. daß sich ihr Höhenprofil  $h(x)$  durch eine gaußförmige Amplitudenverteilung und eine ebenfalls gaußförmige Autokorrelationsfunktion mit *einer* Korrelationslänge  $L$  beschreiben läßt. Wenngleich neuere Untersuchungen davon ausgehen, daß die Korrelationsstruktur eher einem exponentiellen Modell folgt [151, 159, 2], ist die für das Facettenmodell relevante Steigungsverteilung (*slope distribution function*) in beiden Fällen eine Normalverteilung [151], so daß für eine Simulation nur noch die auf den hier vorliegenden Fall zutreffende Standardabweichung bestimmt werden muß. Im einfacheren Fall der gaußförmigen Oberfläche ist sie durch

$$\sigma_s^{Gauss} = \sqrt{2} \frac{\sigma_h}{L} \quad (4.23)$$

gegeben (siehe z. B. [159]), wobei  $\sigma_h$  die Standardabweichung des Höhenprofils und somit eine alternative Beschreibung der Oberflächengüte ist. Letztere kann bei der Fertigung vorgegeben werden und wird sinnvollerweise so gewählt, daß keine über das übliche Maß hinausgehenden Vorkehrungen erforderlich sind; im vorliegenden Fall wurde daher ein Wert von

$$R_a = 5 \mu\text{m}$$

festgelegt.

Die Angabe der Oberflächengüte in Form des Mittenrauwerts ist in der Metallbearbeitung zwar gängige Praxis, macht jedoch im Rahmen der hier durchzuführenden Optimierung eine Umrechnung in die quadratisch gemittelte Rauheit erforderlich. Da ein normalverteiltes Höhenprofil angenommen wurde, besteht in diesem Fall der folgende Zusammenhang zwischen beiden Größen [70]:

$$R_a = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sigma_h \quad (4.24)$$

Dies wird in der Praxis auch durch Daten einer Untersuchung über die Aussagekraft verschiedener Rauheitsparameter zur Beschreibung maschinell bearbeiteter Oberflächen [30] bestätigt, die zumindest für geschliffenes Aluminium im Bereich von  $R_a = 0.2 \dots 1.6 \mu\text{m}$  eine lineare Abhängigkeit der Form

$$R_a \approx 0.78 \sigma_h$$

nahelegen. Dieselbe Untersuchung erlaubt den Schluß, daß für die Korrelationslänge  $L$  unter diesen Umständen ein Wert von ca.  $30 \mu\text{m}$  realistisch ist. Für die Rechnungen zur Optimierung des Sensorentwurfs wurde nun angenommen, daß diese Feststellungen näherungsweise auch auf den Fall einer gefrästen Oberfläche mit der hier vorgegebenen Rauheit zutreffen.

#### Optimierung der Sensorgeometrie

Um nun eine geeignete Geometrie für die Anordnung der Photodioden zu finden, wurde die effektive Reflektivität, die durch den von den Dioden abgedeckten Anteil der BRDF gegeben ist, für verschiedene Betrachtungswinkel  $\vartheta_0$  und Abstände  $d$  (vgl. Abb. 4.18) berechnet. Die hierzu notwendige numerische Integration wurde mittels der o. g. *MIST*-Software durchgeführt, wobei die Einstellungen `Facet_BRDF_Model` für das Streumodell und `Gaussian_Slope_Distribution_Function` für die Oberflächeneigenschaften gewählt wurden. Das Material der streuenden Oberfläche ist in Form des

$\vartheta_0 / ^\circ$	15	20	25	30	35	40	45
$d / \text{mm}$	50	38	31	26	22.5	20	18

**Tabelle 4.1:** Auflistung der im Rahmen der Optimierung berücksichtigten Sensorgeometrien. Der Betrachtungswinkel  $\vartheta_0$  wurde unabhängig variiert, während der Abstand  $d$  der aktiven Fläche der Diode zum Streuzentrum für jeden Winkel von Hand optimiert wurde.

komplexen Brechungsindex anzugeben; im vorliegenden Fall massiven Aluminiums beträgt dieser<sup>22</sup>

$$n = 0.8186, \quad k = 6.254 \quad (4.25)$$

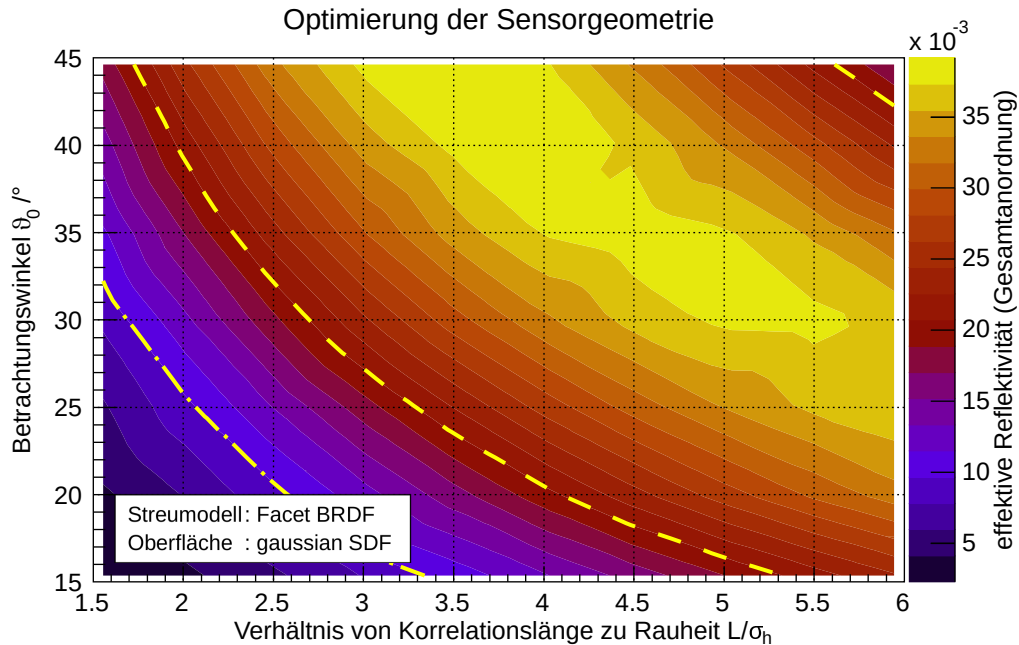
bei einer Wellenlänge von 514.5 nm. Um eine polarisationsunabhängige Nachweiseffizienz zu erzielen, wurden insgesamt acht äquidistante Photodioden in ringförmiger Anordnung vorgesehen.

Für die Optimierungsrechnung wurde der Betrachtungswinkel  $\vartheta_0$  im Bereich von  $15^\circ - 45^\circ$  in  $5^\circ$ -Schritten variiert. Der Abstand  $d$  kann allerdings nicht frei gewählt werden, da er aufgrund konstruktionstechnischer Randbedingungen auf einen für jeden Wert von  $\vartheta_0$  unterschiedlichen Bereich eingeschränkt ist. Es wurde deshalb anhand eines CAD-Modells für jeden Winkel ein „handoptimierter“ Wert für  $d$  bestimmt, der die Konstruktion eines möglichst kompakten und dennoch sowohl in der Fertigung als auch im späteren Betrieb möglichst gut handzuhabenden Sensormoduls ermöglicht (vgl. Tab. 4.1); somit wurden im Rahmen dieser Untersuchung beide Optimierungsparameter simultan variiert. Wie weiterhin bereits im vorigen Abschnitt festgestellt wurde, sind für die statistischen Parameter der Oberflächenrauheit nur begründete Anhaltspunkte, jedoch keine exakten Vorhersagen verfügbar. Um diese Unsicherheit in den Annahmen zu berücksichtigen, wurde daher zusätzlich das ausschlaggebende Verhältnis  $L/\sigma_h$  (vgl. Gl. 4.23), dessen nomineller Wert bei ca. 4.7 liegt, im Bereich von 1.5 bis 6.0 variiert.

Das Resultat der Rechnungen ist in Abb. 4.19 dargestellt. Wie man erkennt, variiert die effektive Reflektivität von weniger als 0.5 % bis ca. 3.8 %, wobei eine starke Abhängigkeit sowohl vom Betrachtungswinkel als auch von der Oberflächenrauheit gegeben ist. Das Ziel der Optimierung ist nun eine

---

<sup>22</sup>verfügbar z. B. über die Brechungsindexdatenbank von  
 Filmetrics Inc., 9335 Chesapeake Drive, San Diego, CA 92123, USA  
 (<http://www.filmetrics.com/refractive-index-database/Al/Aluminium>)  
 oder der Brigham Young-Universität, Provo, UT 84602, USA  
 (<http://photonics.byu.edu/reference.phtml>)

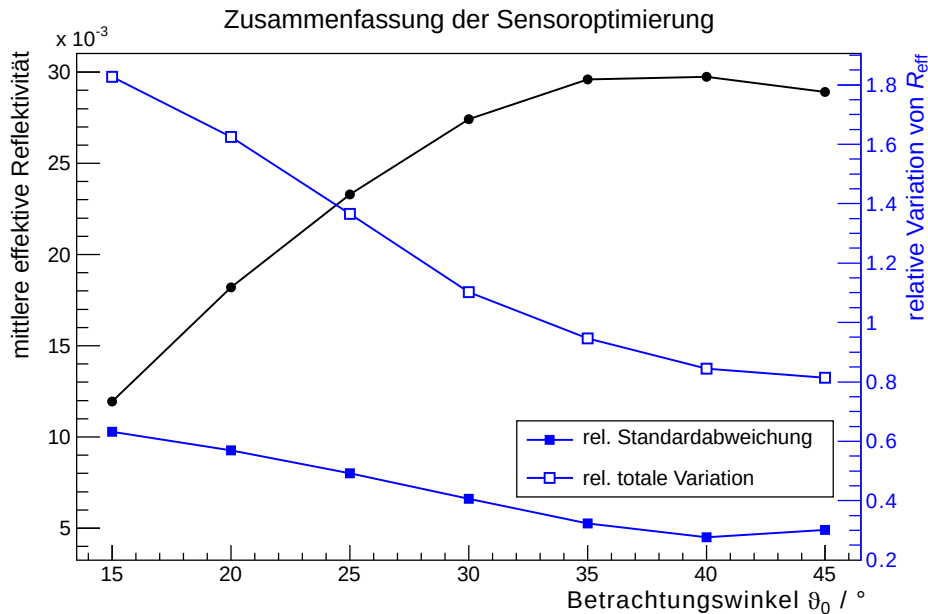


**Abbildung 4.19:** Effektive Reflektivität der aus acht Dioden bestehenden Sensorenanordnung in Abhängigkeit des Beobachtungswinkels und der Rauheit bei Annahme einer gaußförmigen Oberfläche. Die gestrichelten Konturen entsprechen Abschwächungen um einen Faktor 50 bzw. 100; ein Faktor von 25 wird über den gesamten Parameterraum erreicht.

Abschwächung der eingestrahnten Lichtintensität um einen Faktor von mindestens 25, besser jedoch 50 – 100, damit die im Mittel auf jede Diode auftreffende Lichtintensität sicher innerhalb des linearen Bereichs liegt. Wie aus der Abbildung ersichtlich, kommt somit der größte Teil des dargestellten Parameterraums in Frage. Da allerdings der auf die Oberfläche zutreffende Wert für  $L/\sigma_h$  unbekannt ist, sollte der endgültige Wert für  $\vartheta_0$  so gewählt werden, daß einerseits diese Unsicherheit möglichst gering ausfällt, andererseits aber auch die wahrscheinlich erzielte effektive Reflektivität den genannten Anforderungen genügt. Eine Zusammenfassung der Optimierungsrechnung unter diesen Gesichtspunkten ist in Abb. 4.20 dargestellt. Wie man erkennen kann, sind alle Winkel im Bereich von  $35^\circ - 45^\circ$  gleichermaßen geeignet.

### Endgültiger Entwurf

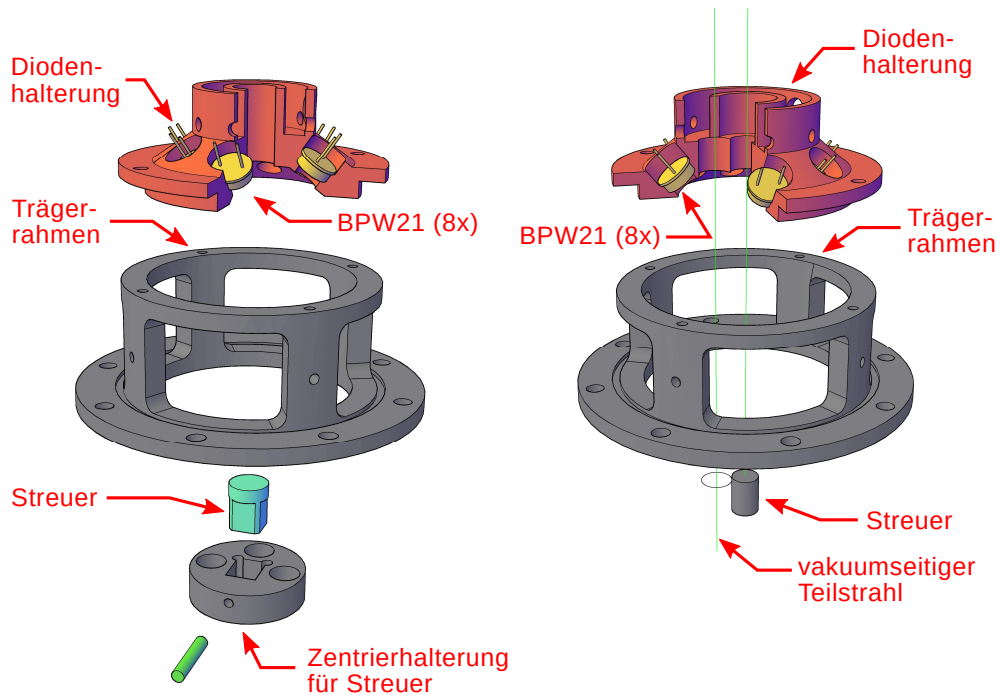
Der endgültige Entwurf der Intensitätssensoren ist in Abb. 4.21 dargestellt. Die acht Dioden sind unter einem Betrachtungswinkel von  $\vartheta_0 = 35^\circ$  in ei-



**Abbildung 4.20:** Zusammenfassung der Optimierung der Sensorgeometrie. Neben dem Mittelwert der effektiven Reflektivität sind zwei Maße für die Variation infolge der  $L/\sigma_h$ -Abhängigkeit angegeben: die Standardabweichung und die totale Variation (Differenz von Maximal- und Minimalwert), jeweils normiert auf den Mittelwert.

ner Kunststoffhalterung befestigt, die am oberen Ende einen umlaufenden Kabelkanal für die Dioden aufweist. Der Abstand der Dioden vom Streuzentrum mußte hierbei aus konstruktionstechnischen Gründen im Nachhinein von 22.5 mm auf 26.5 mm vergrößert werden, wodurch sich der abgedeckte Raumwinkel um 27% auf 86 msr verringert. Die Halterung wird auf einem zylindrischen, an vier Seiten offenen Trägerrahmen befestigt, mit dem der korrekte Abstand der Dioden zum Streuzentrum eingestellt wird. Im normalen Betrieb wird er mittels ebenfalls zylindrischer Abdeckungen lichtdicht verschlossen, um den Sensor vor Störlicht zu schützen; zu Wartungszwecken können diese allerdings leicht demontiert werden. Der Streuer selbst wird als Aluminiumzylinder mit einer vorgegebenen Oberflächenrauheit von  $R_a = 5 \mu\text{m}$  ausgeführt und ist in einer Wechselhalterung befestigt.

Während Transmissions- und Reflexionssensor baugleich sind, muß beim Normierungssensor beachtet werden, daß hier noch beide vom Vakuumfenster  $W_{45}$  reflektierte Teilstrahlen vorliegen, von denen aber nur einer vermessen wird. Da der Sensor demnach so konstruiert werden muß, daß der ungenutz-



**Abbildung 4.21:** CAD-Modell der Sensormodule. *Links:* reguläres Sensormodul – *Rechts:* Normierungs-Sensormodul. Der Streuer des Normierungsmoduls kann direkt in der Bodenplatte verschraubt werden, da diese von unten zugänglich ist; daher wird hier keine Zentrierhalterung benötigt. Die Diodenhalterung weist bei diesem Sensor *zwei* Öffnungen an der Oberseite für die beiden vom  $W45$ -Fenster reflektierten Strahlen auf.

te Teilstrahl ihn ungestört passieren kann, wurde ein Betrachtungswinkel von  $\vartheta_0 = 40^\circ$  und ein Diodenabstand von  $d = 27$  mm gewählt, so daß die Oberseite der Diodenhalterung eine genügend große Fläche für zwei Strahleintrittsöffnungen aufweist. Der abgedeckte Raumwinkel beträgt in diesem Fall 82 msr und fällt somit deutlich geringer aus als nach Tab. 4.1 vorgesehen.

### Polarisationsempfindlichkeit

Bei den vorgestellten Rechnungen zur Optimierung der Sensorgeometrie wurde angenommen, daß der einfallende Lichtstrahl linearpolarisiert ist. Wie in den Vorüberlegungen festgestellt wurde, ist es jedoch wünschenswert, daß die Sensoren eine polarisationsunabhängige Nachweiseffizienz aufweisen. Es wurde daher mittels zusätzlicher Rechnungen geprüft, ob der Entwurf die-



se Zielvorgabe ebenfalls erfüllt. Hierfür wurde der Polarisationszustand des einfallenden Lichtstrahls mittels der Darstellung

$$\vec{S} = \begin{pmatrix} 1 \\ \cos 2\chi \cos 2\psi \\ \cos 2\chi \sin 2\psi \\ \sin 2\chi \end{pmatrix} \quad (4.26)$$

über den gesamten Parameterraum von Exzentrizität (ausgedrückt durch das Achsverhältnis  $\cos 2\chi$ ) und Orientierung der Polarisationsellipse ( $\psi$ ) variiert und die effektive Reflektivität sowohl für eine einzelne Diode als auch für die Summe über den vollständigen Ring bestimmt. Wie man anhand der Resultate in Abb. 4.22 sieht, kann in der Tat durch die Summierung über den ganzen Ring<sup>23</sup> die bei der Einzeldiode noch vorhandene (geringe) Polarisationsabhängigkeit eliminiert werden; somit erfüllt dieser Sensorentwurf auch das sekundäre Konstruktionsziel.

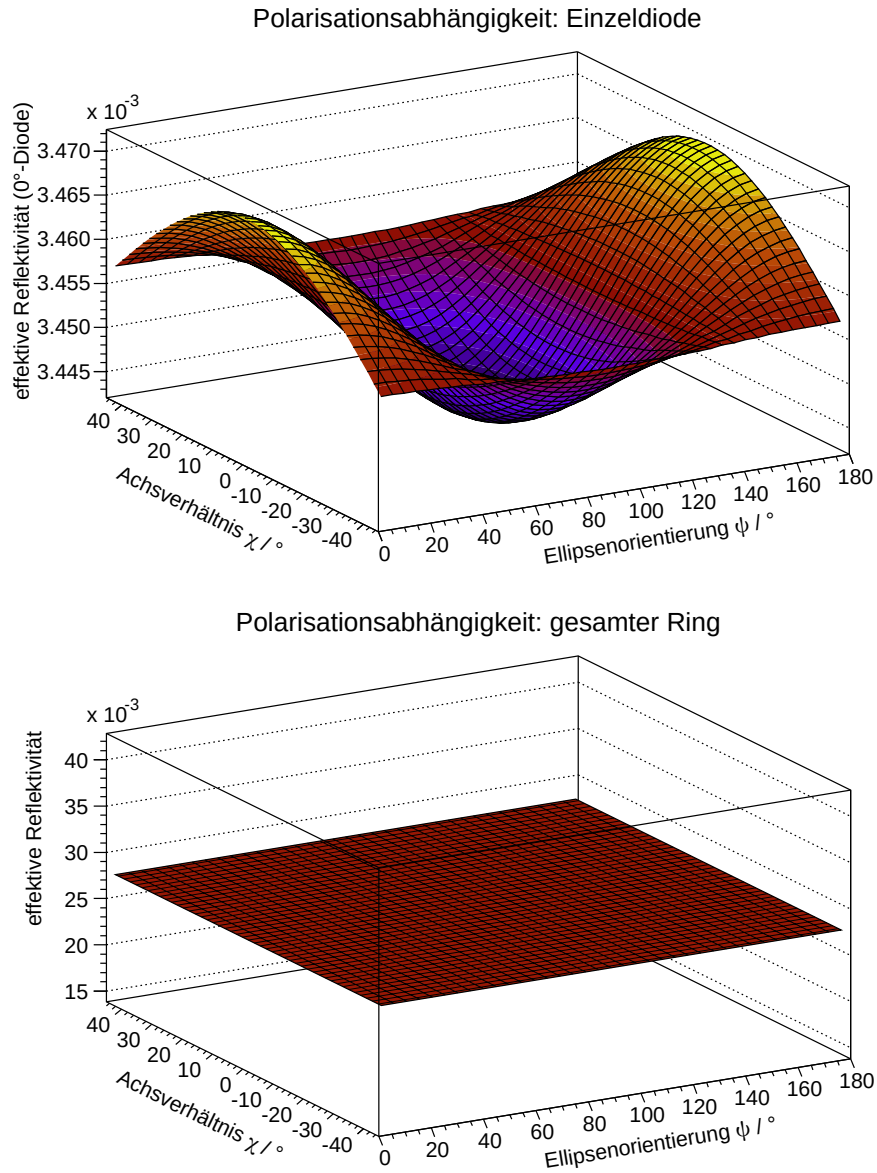
### 4.4.3 Signalelektronik

Beim Vorgängermodell der hier beschriebenen Apparatur wurde festgestellt, daß die Datenerfassungs- und Steuerungselektronik empfindlich durch elektromagnetische Einstrahlungen hochfrequenter Signalquellen sowohl in der Experimentierhalle als auch im Gerät selbst gestört wurde. Dies äußerte sich nicht nur in verstärktem Rauschen auf den Sensorsignalen, sondern zusätzlich in Fehlauflösungen der A/D-Wandlung, so daß außerhalb des Schrittmotortakts eine unkontrollierte Anzahl zusätzlicher Meßwerte genommen und damit deren vorausgesetzte Äquidistanz zerstört wurde. Aufgrund dieser Erfahrungen wurde bei der Planung der Elektronik für das neue Stokesmeter darauf geachtet, einerseits die Signalverarbeitung und -übertragung möglichst unempfindlich gegenüber Störeinstrahlungen auszulegen und andererseits sicherzustellen, daß die elektronischen Komponenten nicht selbst zu Störquellen werden. Eine Konsequenz dieser Zielsetzung besteht darin, daß die Elektronik zur Auslese der Sensorsignale aus zwei separaten Komponenten besteht: Zunächst werden die von den Photodioden erzeugten Ströme aufsummiert und in ein Spannungssignal umgewandelt (Abb. 4.23); anschließend werden die Spannungssignale aller Sensoren gesammelt und mittels einer Treiberstufe (Abb. 4.24) über ein gemeinsames mehradriges Signalkabel an den A/D-Wandler (*ADC*) übertragen.

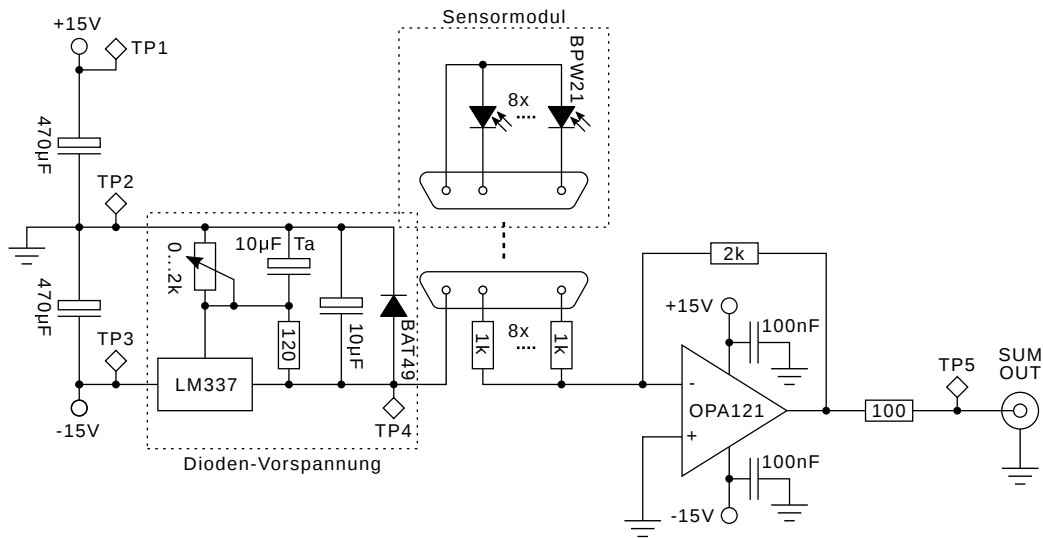
---

<sup>23</sup>Strenggenommen reicht die Aufsummierung der Signale zweier beliebiger um 90° gegeneinander versetzter Dioden aus.





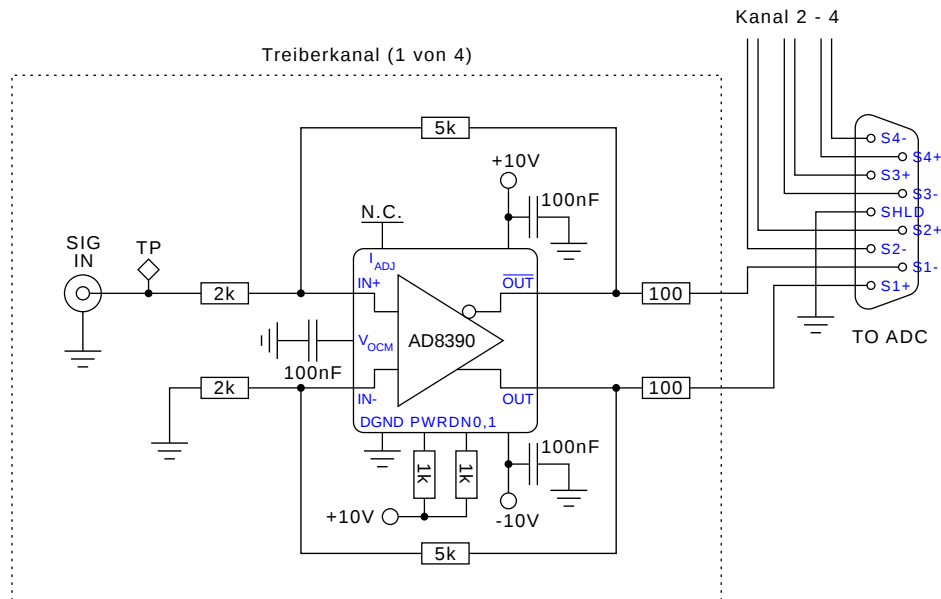
**Abbildung 4.22:** Polarisationsabhängigkeit des Diodensignals unter Zugrundelegung der Geometrie des endgültigen Entwurfs mit  $\vartheta_0 = 35^\circ$  und  $d = 26.5$  mm. *Oben:* Ausgangssignal einer einzelnen Diode. – *Unten:* Summensignal aller acht Dioden. Für den Oberflächenparameter  $L/\sigma_h$  wurde der „nominelle“ Wert von 4.7 eingesetzt.



**Abbildung 4.23:** Schaltplan der Diodenvorverstärkerschaltung und des Sensormoduls. Die Vorspannung der Dioden wird mittels des Spannungsreglers *LM337* auf  $-5\text{ V}$  eingestellt. Der  $10\ \mu\text{F}$  Tantal-Kondensator über dem Trimmwiderstand ist essentiell für die Stabilität der Vorspannung und das Rauschverhalten des Ausgangssignals.

Die Sensormodule an sich enthalten nur die Photodioden und werden über ein kurzes 16-adriges Kabel mittels eines *D-SUB*-Steckers an das zugehörige Vorverstärkermodul angeschlossen. Dieses enthält neben dem eigentlichen Strom-Spannungs-Wandler auch eine Spannungsquelle für die Photodioden, welche in Sperrichtung bei  $-5\text{ V}$  betrieben werden. Die Vorspannung wird hierbei über einen einstellbaren Spannungsregler des Typs *LM337* erzeugt, wobei besonderes Augenmerk auf eine möglichst rauscharme Referenzspannung gelegt wurde, nachdem erste Testmessungen einen starken Einfluß auf den Rauschpegel des Summensignals gezeigt hatten. Der Strom-Spannungs-Wandler an sich ist als invertierende Summierverstärkerschaltung mit dem Operationsverstärker *Burr-Brown OPA121*<sup>24</sup> aufgebaut; dieser Typ wurde gewählt, weil er neben vorteilhaften elektronischen Eigenschaften auch eine hohe Strahlenfestigkeit aufweist. Die Verstärkung wurde so gewählt, daß das letztlich digitalisierte Signal unter Berücksichtigung aller dazwischenliegenden Verstärkungen bei der maximal zu erwartenden Lichtintensität noch innerhalb des dynamischen Bereichs des ADCs liegt. Das gesamte Modul ist zwecks Abschirmung gegen elektromagnetische Störeinflüsse in ein Alumi-

<sup>24</sup>jetzt Teil von Texas Instruments Inc., 12500 TI Boulevard, Dallas, TX 75243, USA



**Abbildung 4.24:** Schaltplan der Treiberstufe unter Auslassung der Spannungsversorgung. Der *AD8390* ist im Gegensatz zur restlichen Elektronik auf  $\pm 10\text{ V}$  ausgelegt. Da ein Ethernet-Kabel vier Aderpaare umfaßt, wurde das Treibermodul ebenfalls mit vier Kanälen ausgestattet; der vierte Kanal kann dann für externe Sensoren eingesetzt werden (s. Abs. 6.4). Der Schirm des Kabels liegt empfangenseitig auf Masse und wird hier benutzt, um das Erdpotential zu definieren; die Spannungsversorgung ist prinzipiell erdfrei gestaltet.

umgehäuse eingebaut.

Für die Überbrückung größerer Distanzen wurde – ebenfalls aufgrund der Erfahrungen mit dem Stokesmeter MkI – grundsätzlich die Methode der differentiellen Signalübertragung gewählt, bei der für jedes zu übermittelnde Signal ein komplementäres Signal mit entgegengesetztem Vorzeichen erzeugt wird und beide anschließend über ein verdrehtes Aderpaar zum Empfänger transportiert werden. Da Einstreuungen von Störsignalen sich dann auf beiden Leitungen im Gleichtakt mit dem Nutzsignal überlagern, können sie durch Differenzbildung am Ende des Kabels eliminiert werden. Für das Stokesmeter MkII wurde zu diesem Zweck ein dediziertes Treibermodul unter Verwendung des spezialisierten differentiellen Verstärkers *Analog Devices AD8390*<sup>25</sup> entwickelt, an das die Summensignale aller Sensormodule mittels kurzer *RG 58*-Koaxialkabel angeschlossen sind. Die so symmetrisierten Signale werden dann über ein doppelt geschirmtes Ethernetkabel (CAT 6 S/FTP)

<sup>25</sup>Analog Devices Inc., One Technology Way, Norwood, MA 02062, USA

zum ADC übertragen (vgl. Abb. 3.18), wobei allerdings neunpolige *D-SUB*-Stecker anstelle der mechanisch und elektronisch nicht so zuverlässigen *RJ45*-Stecker zum Einsatz kommen. Das Treibermodul selbst ist wiederum in einem geschlossenen Aluminiumgehäuse untergebracht, um Störemissionen in beide Richtungen zu unterbinden. An der Empfängerseite ist keine weitere Hardware erforderlich, da die Datenerfassungskarte von sich aus bereits über die Funktion verfügt, zwei Einzeleingänge zu einem differentiellen Eingang zusammenzuschließen (vgl. Abs. 3.3.4).

### Vergleich mit der Simulation

Um die korrekte Funktion der Sensoren und der Vorverstärker zu prüfen, wurden vor Inbetriebnahme des Stokesmeter MkII verschiedene Testmessungen mit Laserlicht durchgeführt. Im Rahmen einer solchen Messung – bei der die Verstärkung allerdings um einen Faktor 500 größer als im regulären Betrieb eingestellt war – wurde bei einer eingestrahlen Lichtintensität von 1.16 mW, gemessen mit einem *Coherent FieldMaster* Leistungsmeßgerät mit *LM2*-Tastkopf, ein Ausgangssignal von 3.5 V beobachtet, was in dieser Konfiguration einem Photostrom von 0.44  $\mu\text{A}$  pro Diode entspricht. Da die spektrale Empfindlichkeit der *BPW21*-Diode bei einer Wellenlänge von 514.5 nm und einer Vorspannung von  $-5\text{ V}$  ca. 0.31 A/W beträgt, empfängt jede Diode somit einen Strahlungsfluß von 1.41  $\mu\text{W}$  bzw. einen Bruchteil von  $1.21 \cdot 10^{-3}$  der einfallenden Intensität. Wengleich dies einer Abweichung um einen Faktor 2.9 gegenüber der Simulationsvorhersage von  $3.45 \cdot 10^{-3}$  entspricht, ist die Übereinstimmung angesichts der groben Abschätzungen über die Oberflächenparameter doch erstaunlich gut; insofern sind die in die Simulation eingeflossenen Annahmen einigermaßen realistisch.

#### 4.4.4 Signalerfassung

Bei der neuen Meßapparatur werden die Sensoren nicht mehr während einer kontinuierlichen Rotation der  $\lambda/4$ -Platte, sondern an diskret angefahrenen Orientierungen bei stehender Wellenplatte ausgelesen. Es ist daher möglich, bei jeder Winkelstellung eine ganze Serie quasisimultan abgetasteter Meßwerte aufzuzeichnen, statt wie beim Vorgängermodell auf einen ADC-Wert beschränkt zu sein. Hiermit kann einerseits die Meßgenauigkeit verbessert werden, indem Fluktuationen der Signalpegel herausgemittelt werden; andererseits ist es nun durch eine geeignete statistische Auswertung möglich, die Unsicherheit des so bestimmten Datenpunkts ohne Rückgriff auf externe Abschätzungen quantitativ anzugeben. Insbesondere ist aufgrund der quasisi-

multanen Abtastung die Korrelation der Sensoren untereinander zugänglich, so daß die Signale von Transmissions- und Reflexionssensor auf verschiedene Arten in der Analyse kombiniert werden können, um systematische Einflüsse zu reduzieren. Dies stellt einen erheblichen Vorteil gegenüber dem Stokesmeter MkI dar, wo die statistische Unsicherheit des Einzelmesswerts nur anhand der Pedestal-Kalibrationsmessung (vgl. Abs. 6.1.2) abgeschätzt werden konnte und die Fehlerbehandlung im Falle einer Kombination von Meßdaten ohne Kenntnis der zugehörigen Kovarianzen hätte erfolgen müssen. Auf die mathematischen Details des Verfahrens wird in Kapitel 5 eingegangen werden.

#### 4.4.5 Justierung und Kalibration

Wie in Abschnitt 5.2 aufgezeigt werden wird, ist für die Bestimmung der Stokesparameter mittels der hier vorgestellten Methode eine genaue Kenntnis der Eigenschaften der polarisationsoptischen Elemente erforderlich, da diese im allgemeinen von den idealisierten Annahmen in Abs. 4.3 abweichen werden und somit explizit in das Modell zur Datenanalyse eingehen. Solche Abweichungen können nun nicht nur aufgrund von Schwankungen während der Produktion auftreten, sondern – etwa im Fall der  $\lambda/4$ -Platte – auch durch einen schrägen Einfall des Lichtstrahls auf das optische Element hervorgerufen werden. Solche Effekte sind nur schwer zu quantifizieren und ggf. auch zeitlich variabel. Da ein schräger Lichteinfall zusätzlich die Gefahr von Störlicht durch unerwünschte Reflexionen erhöht, muß das Stokesmeter MkII so justiert werden, daß der zu vermessende Strahl möglichst exakt entlang der nominellen Strahlachse einfällt. Weiterhin besteht die bereits in Abs. 4.4.1 erwähnte Schwierigkeit, daß für die Datenanalyse die absolute Orientierung der  $\lambda/4$ -Platte bekannt sein muß, obwohl die Fassung keine definierte Einbaulage ermöglicht. Es ist daher erforderlich, mittels dedizierter Messungen die Winkelskala des Drehtischs in geeigneter Weise zu kalibrieren. Für beide Maßnahmen mußten zusätzliche Komponenten entworfen werden, die im folgenden kurz angesprochen werden sollen.

##### Justierzubehör

Um das Stokesmeter MkII auf den einfallenden Strahl ausrichten zu können, ist die Bodenplatte als oberer Bestandteil einer Nivellier Vorrichtung ausgelegt, die in Anlehnung an eine kinematische Spiegelhalterung entworfen wurde und in Verbindung mit einer weiteren Aluminiumplatte die Verkipfung der Apparatur um zwei Achsen ermöglicht. Diese zweite Platte ist drehbar auf einem Gewindezapfen gelagert, der in einer weiteren, darunter liegen-

den Aluminiumplatte befestigt ist; hiermit wird eine Justierung aller drei Rotationsfreiheitsgrade ermöglicht. Die Gesamtanordnung ist zusätzlich auf einem Zweiachs-Verschiebetisch montiert, der die horizontale Zentrierung des Stokesmeters auf den Strahl erlaubt.

Um nun die Abweichung des Lichtstrahls von der nominellen Geräteachse zu prüfen, wurden zusätzlich mehrere Justierziele entworfen, die an verschiedenen Stellen des Strahlengangs eingesetzt werden können. Es handelt sich hierbei um eine Reihe paßgenau gefertigter Zylinder aus transparentem Kunststoff, die einen Flansch und eine 2 mm große Bohrung in der Mitte aufweisen und in die jeweiligen – aus diesem Grund ebenfalls präzisionsgefertigten – Durchgangsöffnungen der verschiedenen Montageebenen eingesetzt werden können. Der Durchmesser der Bohrung ist so gewählt, daß der größte Teil des Lichtstrahls ein mittig getroffenes Justierziel nahezu ungehindert passiert, so daß für die Justierung auf die weiter strahlabwärts gelegenen Ziele die darüberliegenden nicht entfernt werden müssen. Um sicherzustellen, daß alle Teilstrahlen mittig auf die jeweiligen Intensitätssensoren auftreffen, können auch die entsprechenden Streuer durch Varianten ersetzt werden, die eine Zentrierbohrung an der Oberseite aufweisen und so als Justierziele fungieren.

Diese Justierung muß bei der Erstinbetriebnahme vor einer Strahlzeit durchgeführt und in regelmäßigen Abständen wiederholt werden, da im Laufe einer Strahlzeit die Position des Laserstrahls thermisch bedingten Driften unterliegt. In der Anfangsphase des Stokesmeter-Betriebs, in der die Justierung sehr häufig geprüft wurde, konnte so allerdings auch nachgewiesen werden, daß die Strahlachse innerhalb des Stokesmeter MkII durch die Installation der polarisationsoptischen Elemente nicht meßbar verändert wird; dies unterstreicht die Fertigungspräzision der mechanischen Komponenten.

### Kalibrationsprisma

Da die Orientierung der  $\lambda/4$ -Platte nach deren Installation auf dem Drehtisch zunächst unbekannt ist, muß dessen Winkelskala durch Vermessung wohldefinierter bekannter Polarisationszustände kalibriert werden (siehe Abs. 5.3). Dies erfordert zusätzliche Komponenten für die Herstellung der entsprechenden Lichtpolarisation, hat aber auch den Vorteil, daß diese Messungen zugleich quantitative Informationen über die Eigenschaften der polarisationsoptischen Elemente des Stokesmeters liefern [201]. Wie in Abs. 5.3 gezeigt wird, müssen hierfür Kalibrationsmessungen sowohl mit linearem Licht als auch mit zirkularpolarisiertem Licht bekannter Helizität durchgeführt werden. Die Präparation erfordert somit ein Modul mit einem Linearpolarisator

und im zweiten Kalibrationsschritt zusätzlich ein Modul mit einer  $\lambda/4$ -Platte, das sinnvollerweise schnell und unkompliziert im Strahlengang montiert und auch wieder daraus sollte entfernt werden können.

Als Linearpolarisator wird ein hochleistungstaugliches Glan-Laser-Prisma des Typs *B. Halle PGH 10.10*<sup>26</sup> mit einem Extinktionsvermögen von  $10^{-6}$  eingesetzt. Das Prisma ist aus Kalkspat gefertigt und weist einen Schnittwinkel von  $39.7^\circ$  auf, wobei auch hier beide Hälften durch einen Luftspalt voneinander getrennt sind. Es ist in einem zylindrischen Gehäuse mit einem Durchmesser von 25 mm und einer freien Apertur von 10 mm montiert, das – wie schon beim Stokesmeter-Prisma – an beiden Seiten Austrittsfenster für den herausreflektierten Teilstrahl aufweist. Die optischen Oberflächen haben eine Genauigkeit von  $\lambda/10$  für den Transmissionspfad und  $2\lambda$  für die seitlichen Austrittsfenster und sind vollständig unbeschichtet. Der Verzicht auf eine Beschichtung ist in diesem Fall nochmals wichtiger als beim Stokesmeter-Prisma, weil der hier zu erzeugende Polarisationszustand als Referenz verwendet wird und somit in gewisser Hinsicht ungeprüft akzeptiert werden muß. Dieser Umstand kann allerdings dadurch abgemildert werden, daß im Rahmen der Kalibrationsmessungen auch Eigenschaften des Kalibrationsprismas selbst bestimmt werden können.

Da die Orientierung des Geräte-Koordinatensystems durch das Stokesmeter-Prisma vorgegeben ist, muß das Kalibrationsprisma in eine definierte Orientierung bzgl. dieses Koordinatensystems gebracht werden. Aus diesem Grund wird es auf einem motorisierten Drehtisch *Newport SR50 CC* montiert; dieser hat eine vergleichbar gute Positioniergenauigkeit wie das für die Stokesmeter- $\lambda/4$ -Platte eingesetzte Modell<sup>27</sup>, ist aber deutlich kompakter. Der wesentliche Unterschied liegt in der erheblich geringeren Winkelgeschwindigkeit von nur  $4^\circ/\text{s}$ , die allerdings in diesem Anwendungsfall keinen Nachteil darstellt. Die Prismenhalterung ist analog zur Halterung des Stokesmeter-Prismas gestaltet, wobei hier aber beide Austrittsfenster mit einem Strahlfänger abgedeckt werden müssen. Auch in diesem Fall wurden die Wände der Strahlfänger mit einer absorbierenden  $\text{MoS}_2$ -Beschichtung versehen, die bei  $175^\circ\text{C}$  ausgeheizt wurde, um ein Ausgasen oder Abdampfen bei starker Lichteinstrahlung zu vermeiden.

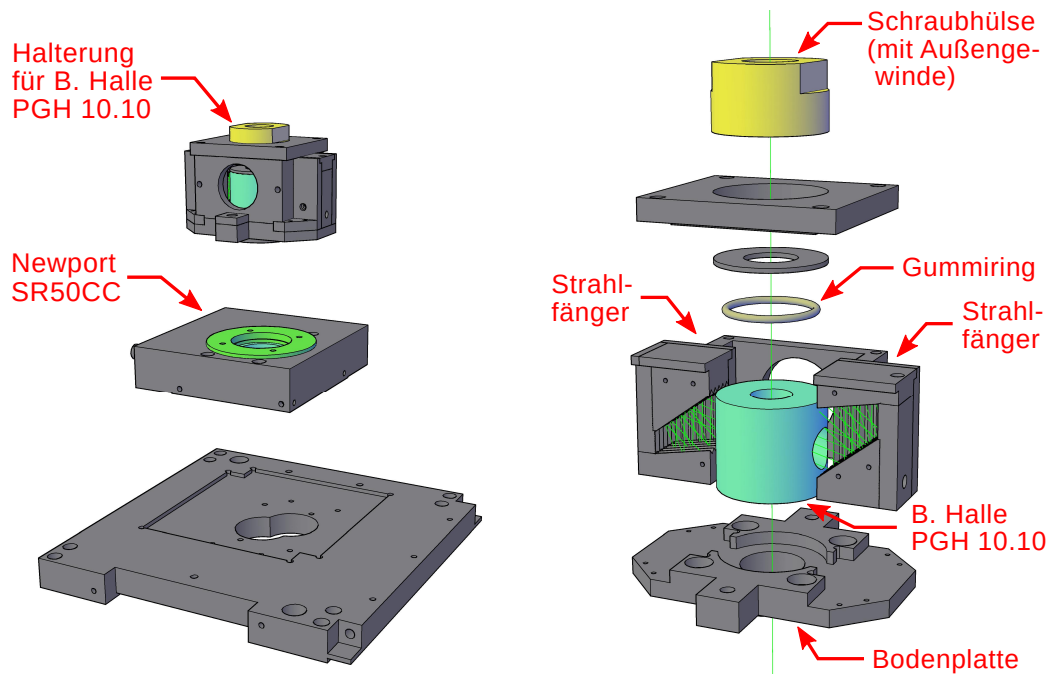
Das Kalibrationsprisma muß während der gesamten Kalibrationsphase installiert bleiben, so daß hier auf eine Schnellwechsellvorrichtung verzichtet wurde. Das Prismenmodul, das in Abb. 4.25 dargestellt ist, besteht daher nur aus dem Drehtisch und der Prismenhalterung und wird – ähnlich wie die fest

---

<sup>26</sup>Bernhard Halle Nachfl. GmbH, Hubertusstraße 10, 12163 Berlin

<sup>27</sup>lt. Herstellerspezifikation typischerweise  $45\ \mu\text{rad}$  unidirektionale Wiederholgenauigkeit





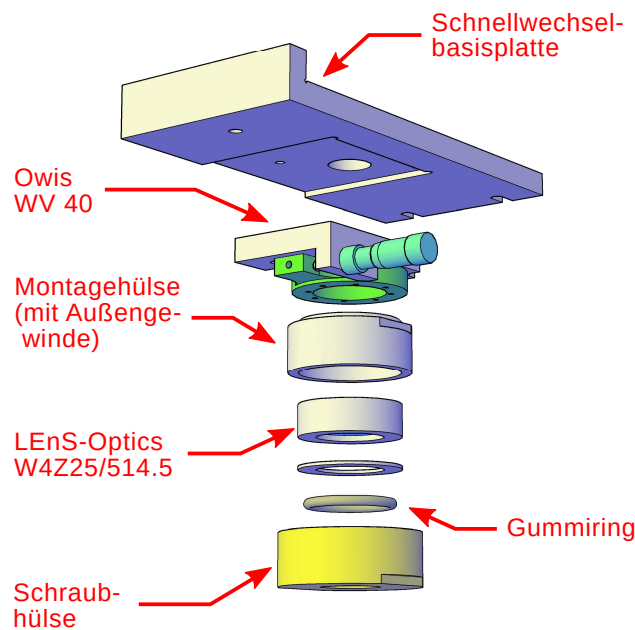
**Abbildung 4.25:** CAD-Darstellung des Kalibrationsprismenmoduls bestehend aus Drehtisch und Halterung. *Links:* prinzipielle Baugruppen über der entsprechenden Montageplatte des Stokesmeters. In der Platte sind die Paßfräsungen für beide Montageplätze des Prismenmoduls sichtbar, die je nach Methode zur Kalibration mit zirkularem Licht verwendet werden. – *Rechts:* Explosionszeichnung der Prismenhalterung.

installierten Komponenten des Stokesmeter MkII – in einer paßgenau gefertigten Senkung in der Montageplatte der Kalibrationsebene festgeschraubt.

### Schnellkalibrationsmodul

Für die Erzeugung des im zweiten Kalibrationsschritt erforderlichen zirkularpolarisierten Lichts müßte nun hinter dem Kalibrationsprisma eine weitere  $\lambda/4$ -Platte im Strahlengang montiert werden, deren schnelle Achse exakt unter  $45^\circ$  zur Polarisationssebene des einfallenden Lichts ausgerichtet ist. Da dies aus den bereits im Rahmen von Abs. 4.4.1 dargelegten Gründen nicht möglich ist, wurde die Analyse der Kalibrationsmessungen so ausgelegt, daß auch ein elliptisch polarisierter Zustand ausreicht, solange dessen Helizität bekannt ist (vgl. Abs. 5.3.2); dies kann gewährleistet werden, wenn die Orientierung der Kalibrationswellenplatte wenigstens bis auf  $\pm\pi/4$  mit dem Sollwert übereinstimmt.

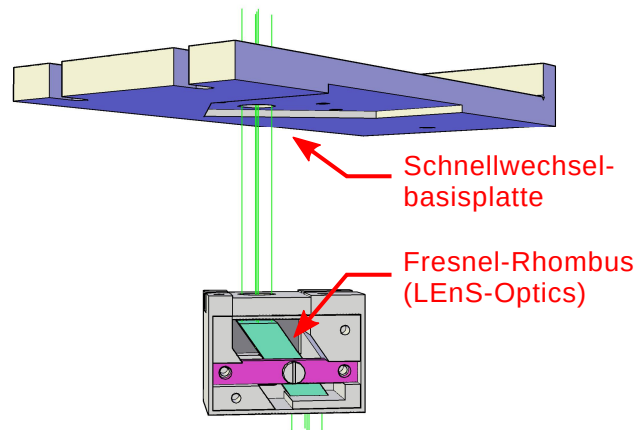




**Abbildung 4.26:** CAD-Darstellung des Schnellkalibrationsmoduls. Auch hier wurden bei beiden Teilen der Wellenplattenfassung Schlüsselangriffe vorgesehen, damit die Montage ohne Ausübung eines Drehmoments auf den Winkelverstelltisch erfolgen kann.

Für die Montage der  $\lambda/4$ -Platte wurde die in Abb. 4.26 dargestellte Schnellwechselhalterung entworfen. Sie basiert auf einer Grundplatte mit seitlichem Tiefenanschlag, die in eine paßgenau gefertigte Nut in der Unterseite der Kalibrationsebene des Stokesmeters eingeschoben werden kann. Die Platte weist am hinteren Ende zwei offene Langlöcher auf, so daß die Halterung auf zwei in der Montageplatte des Stokesmeters befindliche Rändelschrauben aufgeschoben werden kann und nur die dritte Befestigungsschraube vollständig entfernt und wieder eingesetzt werden muß, um das Modul zu befestigen. Als polarisationsoptisches Element wird auch hier eine Quarz-Wellenplatte *LEnS-Optics W4Z25-514.5* verwendet, bei der allerdings vom Hersteller eine Markierung der ungefähren Lage der schnellen Achse auf der Fassung angebracht wurde. Die Kalibrationswellenplatte wird mittels einer Schraubfassung spannungsarm auf einem manuellen Winkelverstelltisch *Owis WV 40*<sup>28</sup> montiert, der „hängend“ an der Grundplatte befestigt ist; dies erlaubt

<sup>28</sup>Owis GmbH, Im Gaisgraben 7, 79219 Staufen i. Br.



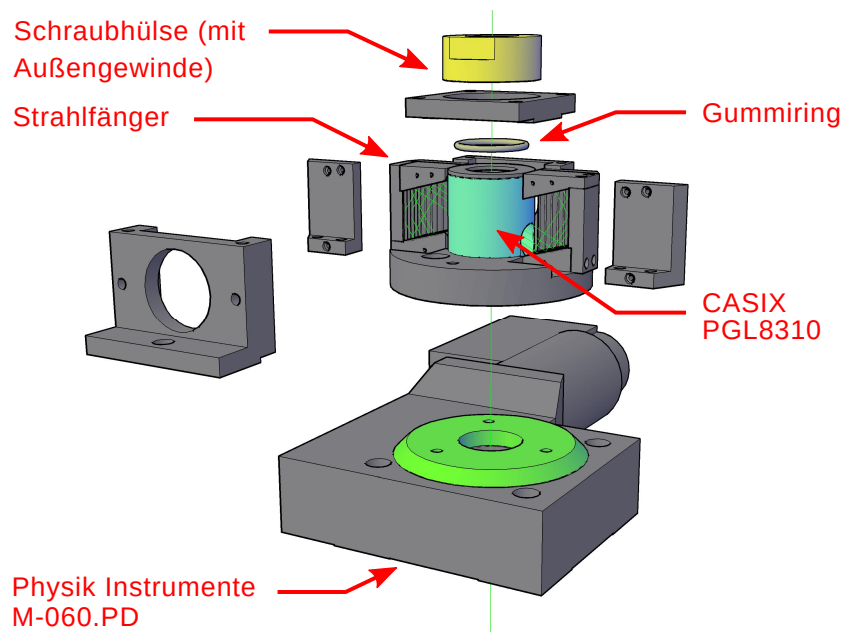
**Abbildung 4.27:** CAD-Darstellung des Absolutkalibrationsmoduls

eine mechanisch präzise Ausrichtung der  $\lambda/4$ -Platte, die einmalig beim Zusammenbau des Moduls erforderlich ist. Im vorliegenden Fall wurde die Orientierung so gewählt, daß die schnelle Achse einen Winkel von ca.  $45^\circ$  zur  $x$ -Achse des Geräte-Koordinatensystems einnimmt; das präparierte Licht ist somit rechtshändig elliptisch polarisiert. Da hier kein exakt reproduzierbarer Polarisationszustand erforderlich ist, kann das Modul für die Kalibrationsmessung einfach eingeschoben und wieder entfernt werden, ohne daß jedesmal eine Feinjustierung erforderlich wäre.

### Absolutkalibrationsmodul

Da die tatsächliche Lage der schnellen Achse einer  $\lambda/4$ -Platte innerhalb der Fassung nicht exakt mechanisch zugänglich ist und sogar die Möglichkeit besteht, daß schnelle und langsame Achse bzgl. einer etwaigen Markierung vertauscht sein können<sup>29</sup>, wurde zusätzlich die Möglichkeit vorgesehen, die Kalibration mit zirkularem Licht unter Verwendung eines Fresnel-Rhombus anstelle einer Wellenplatte durchzuführen. Der Vorteil besteht darin, daß in diesem Fall keine Unsicherheit über Händigkeit und Referenzrichtung des polarisationsoptischen Elements besteht, da diese anhand der Geometrie direkt ersichtlich sind. Allerdings erzeugt der Rhombus einen Strahlversatz im

<sup>29</sup>diese Möglichkeit wurde von einem Hersteller eingeräumt



**Abbildung 4.28:** CAD-Darstellung der Glan-Laser-Prismenhalterung, die bei Verwendung des Absolutkalibrationsmoduls benötigt wird

optischen System, so daß anstelle des normalen Kalibrationsverfahrens eine deutlich aufwendigere Vorgehensweise erforderlich wird.

Der mechanische Aufbau dieses „Absolutkalibrationsmoduls“ ist an das Schnellkalibrationsmodul angelehnt und in Abb. 4.27 dargestellt. Der Fresnel-Rhombus besteht aus BK7-Glas und hat die Form eines Parallelepipeds mit einer Höhe von 19.1 mm und einem Neigungswinkel von  $34.9^\circ$  gegen die nominelle Einfallsrichtung; die Ein- und Austrittsflächen sind quadratisch und weisen eine Kantenlänge von 10 mm auf. Der Rhombus ist in einem quaderförmigen, bis auf die Durchlaßöffnungen für den Laserstrahl vollständig lichtdicht verschlossenen Gehäuse montiert, das unter  $45^\circ$  zur Längsrichtung der Grundplatte des Moduls befestigt ist. Aufgrund des Strahlversatzes von ca. 13 mm müssen sowohl der Normierungssensor als auch das Kalibrationsprisma bei Messungen in dieser Gerätekonfiguration in diagonal um diese Strecke versetzt angefertigte Paßfräsungen auf den jeweiligen Montageplatten befestigt werden.

Da der Rhombus in diesem Fall fest montiert ist, muß nun das Kalibrationsprisma so ausgerichtet werden, daß seine Durchlaßrichtung exakt unter  $45^\circ$  zur Vorzugsrichtung des Fresnel-Rhombus orientiert ist und somit ein vollständig zirkularer Polarisationszustand erzeugt wird. Zu diesem Zweck

wurde eine modifizierte, mit zwei Strahlfängern versehene Halterung für das Stokesmeter-Prisma entworfen, mit der dieses auf dem Drehtisch der  $\lambda/4$ -Platte befestigt werden kann (siehe Abb. 4.28). Dies ermöglicht es, die Ausrichtung des Kalibrationsprismas – ausgehend von einer Orientierung entlang der  $x$ -Achse – zu optimieren, indem für jede Winkelstellung die Modulation der transmittierten Intensität bei Rotation des Stokesmeter-Prismas bestimmt wird; die korrekte Orientierung ist dann gefunden, wenn diese Modulation verschwindet. Dann werden sowohl Stokesmeter-Prisma als auch Stokes- $\lambda/4$ -Platte wieder in ihren regulären Positionen montiert, wobei das Prisma wiederum auf den Reflexionssensor justiert werden muß. Da nun ein exakt zirkularer Polarisationszustand bekannter Helizität vorliegt, ist für die Kalibration der Wellenplatten-Winkelskala nur noch eine Messung erforderlich.

Wie man erkennen kann, ist die hier vorgestellte Methode der „absoluten“ Kalibration sehr zeitaufwendig. Da sich im Betrieb zudem herausgestellt hat, daß die Schnellkalibrationsmethode völlig ausreicht, konnte auf den Einsatz dieses Verfahrens verzichtet werden.

# Kapitel 5

## Analyse der Stokes-Meßdaten

In diesem Kapitel soll die Vorgehensweise zur Auswertung von Stokesmessungen beschrieben werden. Hierbei sind mehrere Schritte und Ebenen zu unterscheiden: Zunächst müssen die einzelnen Datenpunkte, aus denen sich eine Stokesmessung zusammensetzt, analysiert werden. Diese Daten werden anschließend zusammengefaßt, um die Messung an sich zu analysieren. Hierfür wurde ein Fitverfahren entwickelt, bei dem mögliche Korrelationen der in die Analyse eingehenden Sensorsignale berücksichtigt werden.

Für beide Analyseschritte sind neben den reinen Meßdaten noch gerätespezifische Kalibrationsparameter erforderlich, die allerdings selbst im Rahmen dedizierter Kalibrationsmessungen mit dem im vorigen Kapitel beschriebenen Stokesmeter MkII ermittelt werden können. Für diesen Zweck ist meistens eine simultane Auswertung mehrerer Messungen erforderlich, auf die im letzten Abschnitt eingegangen wird.

### 5.1 Analyse des einzelnen Datenpunkts

Wie bereits erwähnt wurde, werden bei der neu entworfenen Meßapparatur die Sensorsignale nicht mehr kontinuierlich während der Umdrehung der  $\lambda/4$ -Platte abgetastet; vielmehr wird diese in diskreten Schritten gedreht und nach jedem Schritt in der so erreichten Zwischenposition quasisimultan eine Anzahl von Meßwerten aller Sensoren aufgenommen. Ziel dieses Verfahrens ist es einerseits, den statistischen Fehler des einzelnen Meßpunktes zu reduzieren; andererseits soll durch Aufzeichnung einer ganzen Stichprobe eine Grundlage gelegt werden, um überhaupt eine solche statistische Unsicherheit angeben zu können. Für die korrekte Analyse dieser Daten müssen nun einige Überlegungen angestellt werden, auf die nachfolgend eingegangen werden soll.

### 5.1.1 Behandlung und Vorverarbeitung der Rohdaten

Für jeden Datenpunkt liegen drei Meßkurven vor, die die auf den Transmissionsensor, den Reflexionssensor und den Normierungssensor eingestrahlte Intensität darstellen. Da alle diese Teilstrahlen aus demselben resonatorinternen Strahl hervorgehen, sind die Sensorsignale zwangsläufig untereinander korreliert. Es muß daher davon ausgegangen werden, daß dies auch auf die Unsicherheiten der im Rahmen der Einzelpunkt-Analyse bestimmten Signalpegel zutrifft. Wie nun in Abschnitt 4.4.1 erwähnt wurde, soll bei dem hier vorliegenden Stokesmeter eine Verbesserung der Meßgenauigkeit erreicht werden, indem die Stokesparameter sowohl aus den Daten des Transmissions- als auch des Reflexionssignals bestimmt werden. Jegliche Kombination von Resultaten dieser beiden Datenquellen muß jedoch dieser Korrelation Rechnung tragen, weshalb bei jeder Einzelpunkt-Analyse auch die Kovarianz der Resultate bestimmt werden muß. Die Signale dürfen demnach nicht getrennt voneinander als skalarwertige Meßgrößen ausgewertet werden, sondern müssen zu einer vektorartigen Meßgröße zusammengefaßt werden, deren statistische Eigenschaften im Rahmen der Analyse bestimmt werden.

An dieser Stelle gibt es nun zwei wichtige Punkte, die einer genaueren Überlegung bedürfen, für die es – wie sich herausstellen wird – dann aber eine gemeinsame Schlußfolgerung gibt:

1. Die Reihenfolge der Normierung

Die Messung der Stokesparameter basiert auf der von der Winkelstellung der optischen Elemente abhängigen Transmission bzw. Reflexion des untersuchten Strahls, weshalb alle anderweitig hervorgerufenen Änderungen der auf die Sensoren auftreffenden Intensitäten eliminiert werden müssen. Dies geschieht, indem die Meßwerte des Transmissions- und Reflexionssensors auf die mit dem Normierungssensor gemessene „Quellintensität“ normiert wird.

Bei der vorherigen Version des Stokesmeters wurde pro Winkelstellung nur jeweils ein Meßwert für alle Sensorsignale genommen, weshalb die Normierungsvorschrift hier klar war: der (einzig vorhandene) Transmissions- bzw. Reflexionsmeßwert wurde auf den (einzig vorhandenen) Intensitätsmeßwert normiert. Im hier vorliegenden Fall einer ganzen Meßserie pro Winkelstellung gäbe es aber prinzipiell zwei mögliche Herangehensweisen: einerseits könnte man die Messung als Stichprobe einer dreidimensionalen Meßgröße betrachten und den aus der Stichprobenanalyse resultierenden Transmissions- bzw. Reflexions-Signalpegel auf den resultierenden Intensitäts-Signalpegel normieren,

andererseits könnte man auch jeden Einzelwert (*sample*) des Transmissions- bzw. Reflexionssignals auf den entsprechenden Einzelwert des Intensitätssignals normieren und die Messung dann als Stichprobe einer zweidimensionalen Meßgröße – des Vektors der normierten Signale – ansehen. Es stellt sich daher die Frage, welche Vorgehensweise hier vorzuziehen ist.

## 2. Die korrekte Interpretation der Meßserie

Der mathematische Ansatz zur Analyse der für jeden Datenpunkt aufgetragenen Meßserie besteht darin, die Einzelwerte der – in diesem Fall vektorartigen – Meßgröße  $\vec{S}$  als um den „wahren“ Signalpegel fluktuierende Zufallsgrößen zu betrachten und durch Analyse der Verteilungseigenschaften einerseits diesen Signalpegel mit erhöhter Genauigkeit zu rekonstruieren und andererseits auch die Kovarianzeigenschaften, die für eine Kombination beider Sensoren in der Analyse notwendig sind, zu ermitteln.

Es ist nun allerdings zu beachten, daß die so aufgenommenen Meßwerte  $\{\vec{s}_i\}$  eigentlich nicht als Stichprobe der zugrundeliegenden Verteilung betrachtet werden können, weil es sich bei dem gemessenen Datensatz statistisch gesehen um eine *Zeitserie* handelt und somit die für eine Stichprobe notwendige Voraussetzung der Unabhängigkeit und identischen Verteilung der Einzelwerte nicht notwendigerweise gegeben ist. Letzteres wäre nur dann der Fall, wenn sich die Fluktuationen der Sensorsignale als stationärer Prozeß mit weißem Rauschen beschreiben ließen; im vorliegenden Fall jedoch sind die Signalfuktuationen durch Intensitätsschwankungen des resonatorinternen Laserstrahls dominiert, die z. B. von Schwankungen der Resonatorgüte infolge mechanischer Vibrationen oder von Relaxationsvorgängen im Plasma herrühren [178, Kap. 25]. Da die zeitliche Abfolge der Intensitätsmeßwerte demnach auf kleinen, aber dennoch makroskopischen Zeitskalen stark deterministisch ist, können die Rohdaten der Einzelpunktmessung nicht im herkömmlichen Sinne statistisch ausgewertet werden.

Die Lösung beider Fragen besteht darin, die zweite der oben genannten Methoden bei der Signalnormierung zu wählen: indem man die Sensorsignale sampleweise auf das Intensitätssignal normiert, werden sie um die explizite, von der Laserdynamik herrührende Zeitabhängigkeit bereinigt. Es erscheint daher als zulässig, die hieraus resultierende Datenreihe als stationären Prozeß zu behandeln, dessen Fluktuationen von nichtdeterministischen Quellen wie etwa elektronischem Rauschen in den Sensoren herrühren. In diesem

Fall kann sie tatsächlich als Stichprobe einer (nunmehr zweidimensionalen) Zufallsgröße – des um die „wahren normierten“ Signalpegel  $t$  und  $r$  fluktuierenden normierten Sensorsignals – betrachtet und analysiert werden.

Um eine solche Stichprobe statistisch analysieren zu können, muß die Art der zugrundeliegende Verteilung bekannt sein. In vielen Fällen lassen sich zufällige Fluktuationen, wie sie etwa durch elektronisches Rauschen entstehen, durch eine Normalverteilung beschreiben. Das Äquivalent für mehrdimensionale Zufallsgrößen ist die *multivariate* Normalverteilung, die im allgemeinen,  $d$ -dimensionalen Fall durch die folgende Wahrscheinlichkeitsdichte charakterisiert wird [3, S. 20]:

$$p(\vec{s}|\vec{\mu}, \Sigma) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^d |\Sigma|}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} (\vec{s} - \vec{\mu})^T \Sigma^{-1} (\vec{s} - \vec{\mu}) \right\} \quad (5.1)$$

Hierbei ist  $\vec{\mu}$  der Vektor der Erwartungswerte und  $\Sigma$  eine symmetrische, positiv definite  $d \times d$ -Matrix, die als *Kovarianzmatrix* bezeichnet wird und deren Komponenten die Breiten und die Orientierung der Verteilung bestimmen:

$$\begin{aligned} \Sigma &= (\sigma_{ij}) \quad i, j = 1, \dots, d \\ \sigma_{ij} &= \text{cov}[S_i, S_j] = E[(S_i - E[S_i])(S_j - E[S_j])] \end{aligned} \quad (5.2)$$

Die Komponenten von  $\vec{\mu}$  entsprechen in dieser Anwendung den gesuchten „wahren“ Signalpegeln.

### 5.1.2 Überlegungen zur Wahl der Analyseverfahren

Um eine Stichprobe einer zufallsverteilten Größe auszuwerten, wird diese üblicherweise in einem Histogramm aufgetragen, an das dann eine Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion angepaßt wird. Ein fundamentaler Parameter ist hierbei die Wahl der Binbreite. Im Falle der Bestimmung der Signal-Nullpunkte (sog. *Pedestalmessung*, vgl. Abs. 6.1.2), wo tatsächlich nur ein einzelner, dreidimensionaler „Datenpunkt“ aufgezeichnet wird, ist im Prinzip durch den A/D-Wandler (*ADC*) bereits eine Bineinteilung vorgegeben. Diese ist mit einer Auflösung von 16 Bit jedoch im Vergleich zu den auftretenden Schwankungsbereichen der Signale sehr fein, wodurch sich – zumal in einem mehrdimensionalen Histogramm, bei dem dies auf alle Achsen zutrifft – übermäßig große Binanzahlen ergeben. Da der Umfang der Stichprobe im Verhältnis dazu sehr gering ist, wird ein großer Anteil der Bins leer bleiben (vgl. Tab. 5.1), was bei einer Kurvenanpassung durch  $\chi^2$ -Minimierung (sog.  $\chi^2$ -*Fit*) zu undefinierten Ergebnissen führt [8, 149, 104]. Ferner ist die Analyse dann mit einer großen statistischen Unsicherheit behaftet, weil selbst die gefüllten Bins nur wenige Einträge enthalten.



Binanzahl T-Achse	58,3
Binanzahl R-Achse	59,3
Binanzahl N-Achse	44,4
Binanzahl 3D-Histogramm	$1,54 \cdot 10^5$
Anteil leerer Bins	99,6 %

**Tabelle 5.1:** Durchschnittliche Binanzahlen und -belegungen bei Übernahme der vom ADC vorgegebenen Bineinteilung. Die Daten wurden anhand der Pedestalmessungen des Stokesmeters ermittelt. Messungen, deren Signalverlauf erkennbar einen nicht-stochastischen Anteil aufweist, blieben hierbei unberücksichtigt.

Diese Probleme können durch Zusammenlegung benachbarter Bins gelöst werden. Hierdurch wird jedoch die Auflösung verschlechtert, was besonders im mehrdimensionalen Fall die Rekonstruktionsgenauigkeit des Verfahrens einschränkt. Analysiert man etwa eine Stichprobe mit 1024 Meßwerten mit Hilfe eines Histogramms, dessen Binsgröße auf einen durchschnittlichen Inhalt von 10 Einträgen pro Bin ausgelegt ist, so beträgt die Auflösung entlang jeder einzelnen Signalachse nur noch vier bis fünf Bins. Außerdem nimmt die Anzahl der Freiheitsgrade des Fitvorgangs durch die Zusammenlegung drastisch ab, was ab einem gewissen Punkt die statistische Signifikanz des Resultats beeinträchtigen kann.

Bei der Analyse sampleweise normierter Einzelpunkt-Meßdaten ist das Problem nicht so stark ausgeprägt, weil die Verteilungen hier zweidimensional sind. Allerdings ist der Wertebereich in diesem Fall kontinuierlich, so daß es, anders als im dreidimensionalen Fall, keine natürliche Wahl für die Bineinteilung gibt. Somit bringt die Analyse mittels Histogramm ein zusätzliches Maß an Willkür in den Prozeß ein.

Dies kann vermieden werden, wenn die Daten nicht mit einem gebinnten Fit an ein Histogramm ausgewertet werden, sondern mit einem ungebinten Fit [108] an die Stichprobe. In diesem Fall müssen die Daten nicht künstlich diskretisiert werden, was weitere Vorteile mit sich bringt: Die Problematik leerer oder kaum gefüllter Bins entfällt, ebenso der Verlust an Auflösung bei deren Behebung. Außerdem stehen (abzüglich der Anzahl an Fitparametern) so viele Freiheitsgrade zur Verfügung, wie die Stichprobe an Meßwerten umfaßt, unabhängig von der Dimensionalität des Problems. Mit diesem Verfahren können somit auch diejenigen Probleme, die bei der Analyse der dreidimensionalen Verteilungen auftreten, umgangen werden.

Die Verwendung ungebinnter Fits hat allerdings auch zwei Nachteile: Zum

einen ist der Rechenaufwand deutlich größer, da die Daten „unreduziert“ analysiert werden; zum anderen gibt es noch kein akzeptiertes Kriterium, um die Güte eines ungebinnten Maximum-Likelihood-(*ML*-)Fits im mehrdimensionalen Fall zu bemessen [79, 205], wenngleich an der Verallgemeinerung eindimensionaler Tests [109] und der Entwicklung vereinheitlichter Gütekriterien für gebinnte und ungebinnte Fits gearbeitet wird.

Um nun zu klären, wie die Verteilungsparameter der Einzelpunktdaten im Hinblick auf diese Schwierigkeiten am besten zu rekonstruieren sind, wurden vier Reihen von Monte-Carlo-(*MC*-)Untersuchungen durchgeführt, die im folgenden näher beschrieben werden sollen.

### 5.1.3 Untersuchungen zur Rekonstruktionsgenauigkeit

Ziel der Untersuchungen war es, einerseits die optimale Bineinteilung für die gebinnte Analyse zu ermitteln, andererseits aber auch durch Vergleich mit dem ungebinnten *ML*-Fit zu prüfen, welches der Verfahren besser für die Analyse geeignet ist. Um hierbei die Anzahl der zu optimierenden Parameter möglichst gering zu halten, wurde die Bineinteilung nur durch die geforderte durchschnittliche Anzahl von Einträgen pro Bin charakterisiert. Das Verfahren, um hieraus die tatsächliche Bineinteilung abzuleiten, wird in Anhang A.1 beschrieben.

Das entscheidende Kriterium für die Eignung eines Analyseverfahrens ist nun die *Rekonstruktionsgenauigkeit*, d. h. die Abweichung der anhand der Stichprobe rekonstruierten Verteilungsparameter von den zugrundeliegenden tatsächlichen Parameterwerten. Um diese zu bestimmen, wurde eine große Anzahl von Stichproben zufallsgeneriert und mit den zu prüfenden Verfahren analysiert. Die Stichproben wurden über die Verwerfungsmethode (*acceptance-rejection*-Verfahren) [146] aus einer Gauß'schen Wahrscheinlichkeitsdichte nach Gl. 5.1 mit verschiedenen vorgegebenen Erwartungswerten und Kovarianzmatrizen erzeugt<sup>1</sup>. Bei der Wahl dieser Quellparameter ist jedoch zu beachten, daß die Kovarianzmatrix positiv definit sein muß, so daß die Varianzen und Kovarianzen nicht unabhängig voneinander gewählt werden konnten. Für die Erzeugung der Stichproben wurde die Kovarianzmatrix  $\Sigma$  daher nach ihrer Hauptachsenform und den Eulerwinkeln, die zur Transformation der Verteilung aus dem Hauptachsensystem in ihre tatsächliche

---

<sup>1</sup>In späteren Schritten der Datenanalyse wurde ein verbessertes Verfahren für die Erzeugung multivariater Zufallswerte verwendet, das in Anhang B.2 beschrieben ist.

Orientierung erforderlich sind, parametrisiert:

$$d = 2: \quad \Sigma = R(\alpha)^T \Sigma_0 R(\alpha) \quad (5.3)$$

$$d = 3: \quad \Sigma = R_1(\alpha)^T R_2(\beta)^T R_3(\gamma)^T \Sigma_0 R_3(\gamma) R_2(\beta) R_1(\alpha) \quad (5.4)$$

Hierbei ist  $\Sigma_0$  eine Diagonalmatrix, die die Varianzen in Richtung der Hauptachsen der Verteilung enthält, während  $R_1, \dots, R_3$  die für die Rücktransformation notwendigen Rotationsmatrizen sind. Die Hauptachsen-Varianzen und die Eulerwinkel sind nun Parameter, die beliebig<sup>2</sup> und unabhängig voneinander gewählt werden können, ohne die Bedingung der Positiv-Definitheit zu verletzen.

Um die Aussagekraft der Simulationen zu vergrößern, wurden die Quellparameter der Verteilungen allerdings nicht willkürlich gewählt; vielmehr wurden aus den bis dahin genommenen Messungen 900 Einzel-Datenpunkte ausgesucht und deren Verteilungsparameter als Muster für die Erzeugung der *MC*-Daten herangezogen. Die Punkte wurden zufällig aus den verschiedenen Arten von Messungen ausgewählt, die im realen Betrieb auftreten, und in Gruppen zu je 150 Datenpunkten aufgeteilt:

- 150 Datenpunkte aus Messungen zur Kalibration des Stokesmeters (s. Abs. 5.3): *FT\_sample\_1a*
- je 150 Datenpunkte aus Messungen zur Bestimmung der Transfermatrix (s. Abs. 6.4): *FT\_sample\_1b* und *\_1c*
- 450 Datenpunkte aus Messungen der resonatorinternen Polarisation: *FT\_sample\_2a ... \_2c*

Um deformierte Quellverteilungen auszuschließen, wurden zuvor solche Datenpunkte aussortiert, bei denen die gemessenen Signale den Grenzen des dynamischen Bereichs des ADCs zu nahe kamen; als Mindestabstand wurde hierbei jeweils 1 % des dynamischen Bereichs festgelegt.

Die so gewählten Datenpunkte wurden anschließend einer vorläufigen Analyse unterzogen, bei der die Stichproben-Schätzwerte der Verteilungsparameter bestimmt und in die Hauptachsenform überführt wurden. Diese Analyse wurde für jeden Datenpunkt sowohl auf die rohe dreidimensionale Verteilung der Meßwerte als auch auf die zweidimensionale Verteilung der sampleweise normierten Meßwerte angewandt; das entsprechende Verfahren wird in Anhang A.2 beschrieben. Indem die so bestimmten Hauptachsenparameter

---

<sup>2</sup>mit der Einschränkung, daß alle Varianzen größer als 0 sein müssen

zur Erzeugung der *MC*-Daten verwendet werden, ist sichergestellt, daß die Beurteilung der Analysemethoden auf realistischen Daten, wie sie auch im tatsächlichen Meßbetrieb auftreten, beruht.

Es wurden nun Simulationsreihen zur Rekonstruktion der Verteilungsparameter im zweidimensionalen und im dreidimensionalen Fall durchgeführt. Um eine hinreichende Statistik bzgl. der Rekonstruktionsgenauigkeit zu sammeln, wurden im Rahmen jeder Serie für die zuvor bestimmten 900 Parametersätze jeweils 200 Stichproben erzeugt und analysiert. Da auch der Einfluß des Stichprobenumfangs auf die Rekonstruktionsgenauigkeit geprüft werden sollte, wurde für beide Fälle je eine Simulationsserie mit 1024 und eine mit 2048 Werten pro Stichprobe erzeugt. Jede Stichprobe wurde sowohl ungebinnt als auch gebinnt analysiert. Um die Abhängigkeit der Rekonstruktionsgenauigkeit von der Bineinteilung zu untersuchen, wurde die gebinnte Analyse mit drei verschiedenen geforderten Bininhalten  $\bar{n}$  von 10, 12 und 14 Einträgen pro Bin durchgeführt.

Die Routinen zur Erzeugung und Analyse der *MC*-Daten wurde unter Verwendung des *ROOT*-Softwarepakets [36] in der Programmiersprache *C++* geschrieben. Um Fehler bei der Erstellung der recht umfangreichen Formeln zu vermeiden, wurde die *GiNaC*-Softwarebibliothek [20] im Sinne eines Computeralgebrasystems eingesetzt, um die mathematischen Ausdrücke aus einfachen Objekten zusammensetzen und ggf. numerisch auszuwerten. Auf diese Weise wurde die bei der Erzeugung der Stichproben verwendete Kovarianzmatrix aus ihrer Parametrisierung nach Gl. 5.3 bzw. 5.4 durch Einsetzen der in ihrer Hauptachsendarstellung vorliegenden Quellparameter ermittelt. Als Fitmodell für den ungebinnten Fit wurde die normierte Wahrscheinlichkeitsdichte nach Gl. 5.1 verwendet. Bei den gebinnten Fits muß diese noch um einen Amplitudenparameter  $A$  erweitert werden.

Beide Fitverfahren benötigen Startwerte für die zu bestimmenden Parameter  $\vec{\mu}$  und  $\Sigma$ . Anhand der zu analysierenden Stichprobe können nun Schätzwerte dieser Parameter errechnet werden, die sich als Startwerte eignen. Im vorliegenden Fall wurden hierfür die *Maximum-Likelihood-(ML)*-Schätzwerte eingesetzt. Bei einer Stichprobe, die aus  $N$  Werten  $\{\vec{s}_1, \dots, \vec{s}_N\}$  besteht, sind diese durch

$$\begin{aligned}\hat{\vec{\mu}} &= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \vec{s}_i \\ \hat{\Sigma} &= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \left( \vec{s}_i - \hat{\vec{\mu}} \right) \left( \vec{s}_i - \hat{\vec{\mu}} \right)^T\end{aligned}\tag{5.5}$$

gegeben [3, S. 70]. Es ist zu beachten, daß der *ML*-Schätzwert im Fall der

Kovarianzmatrix nicht erwartungstreu ist [3, S. 77], allerdings ist die Abweichung bereits bei 1024 Werten pro Stichprobe kleiner als 0.1 %, weshalb dieser Umstand vernachlässigt werden kann. Beim gebinnten Fit wurde die Amplitude durch die Riemann'sche Zwischensumme abgeschätzt, die sich in diesem Fall durch die (jeweils homogenen) Binbreiten  $w_k$  in  $d = 2$  bzw. 3 Dimensionen zu

$$\hat{A} = N \prod_{k=1}^d w_k \quad (5.6)$$

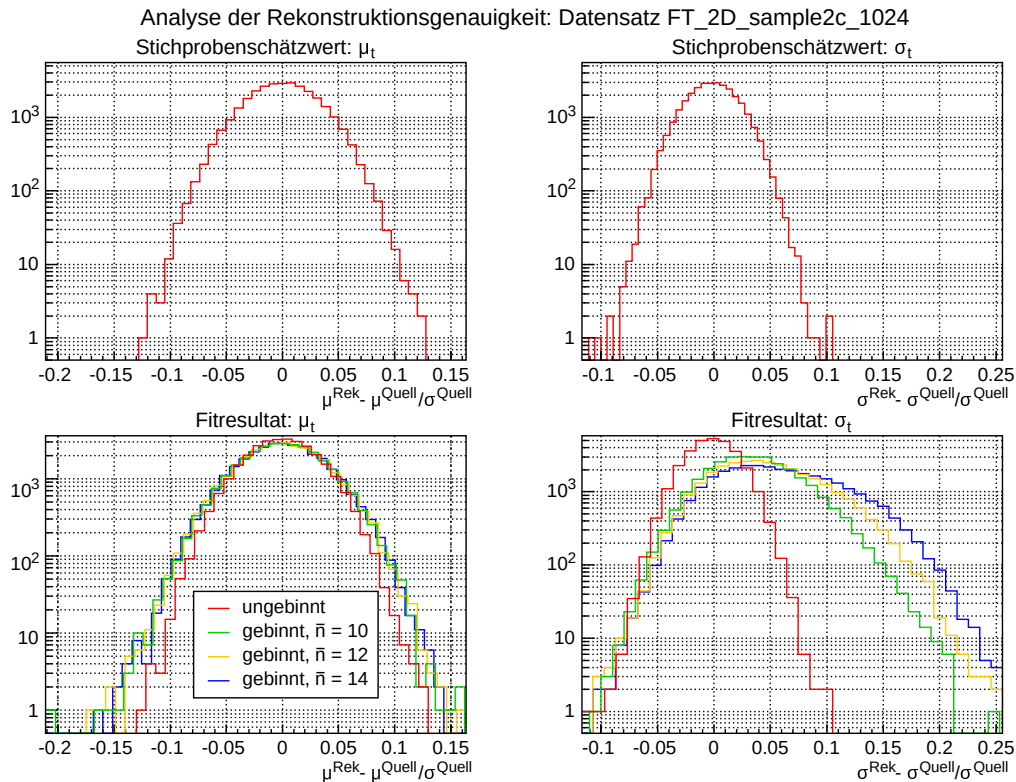
ergibt.

Um aus den so erzeugten und analysierten *MC*-Daten Rückschlüsse auf die Rekonstruktionsgenauigkeit der Analyseverfahren zu ziehen, muß nun die Abweichung der rekonstruierten Verteilungsparameter von den Quellparametern betrachtet werden. Diese Abweichungen werden histogrammiert, um Aussagen über die mittlere Abweichung und die Schwankungsbreite der Rekonstruktion ableiten zu können. Da die Quellparameter eine große Bandbreite an Werte annehmen können, wurden hierbei normierte Differenzen betrachtet, um die Daten mehrerer Parametersätze miteinander vergleichen bzw. gemeinsam auswerten zu können. Als Bezugsgrößen der Normierung wurden die jeweiligen Standardabweichungen gewählt, weil nur diese sicher von 0 verschieden sind:

$$\begin{aligned} \text{Erwartungswerte} \quad r_{\mu_i} &= \frac{\mu_i^{\text{rek}} - \mu_i^{\text{Quell}}}{\sigma_i^{\text{Quell}}} \\ \text{Standardabweichungen} \quad r_{\sigma_i} &= \frac{\sigma_i^{\text{rek}} - \sigma_i^{\text{Quell}}}{\sigma_i^{\text{Quell}}} \\ \text{Kovarianzen} \quad r_{\sigma_{ij}} &= \frac{\sigma_{ij}^{\text{rek}} - \sigma_{ij}^{\text{Quell}}}{\sigma_i^{\text{Quell}} \sigma_j^{\text{Quell}}} \end{aligned} \quad (5.7)$$

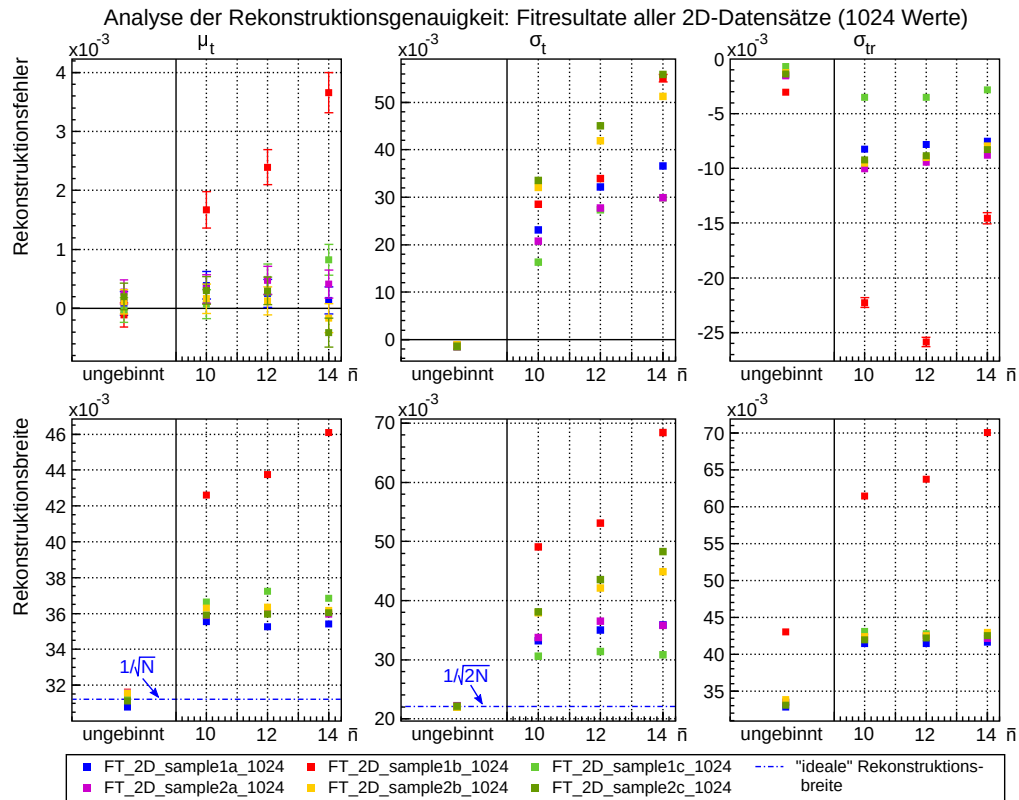
Man kann sich überlegen, daß im Fall der Erwartungswerte die so normierten Abweichungen idealerweise einer Normalverteilung mit Standardabweichung  $1/\sqrt{N}$  unterliegen werden, da der Mittelwert einer gemäß  $\mathcal{N}(\mu, \sigma)$  normalverteilten Stichprobe der Größe  $N$  ebenfalls um  $\mu$  normalverteilt ist, wobei die Standardabweichung *dieser* Verteilung gerade  $\sigma/\sqrt{N}$  beträgt [105, S. 134] (vgl. auch Abs. 5.1.5). Die Verteilung der  $r_{\sigma_i}$  fällt komplizierter aus<sup>3</sup>, geht jedoch für hinreichend große  $N$  ebenfalls in eine Normalverteilung über, deren Standardabweichung dann  $\sigma/\sqrt{2N}$  beträgt [105, S. 136]. Wie aus Abb. 5.2 ersichtlich wird, liegt der so beschriebene Idealfall bei der gebinnten Analyse normalerweise nicht vor.

<sup>3</sup>Sie läßt sich auf die  $\chi^2$ -Verteilung zurückführen [105, S. 185].



**Abbildung 5.1:** Verteilungen der Rekonstruktionsgenauigkeit für die Parameter  $\mu_t$  und  $\sigma_t$ , wie sie bei den Simulationen im Rahmen der Datengruppe *sample2c* für zweidimensionale Stichproben mit 1024 Werten ermittelt wurden. Der obere Teil zeigt die Verteilungen der Stichprobenabschätzungen; da diese für alle Analyseverfahren gleich sind, gibt hier es nur je ein Histogramm. Im unteren Teil sind die Resultate der getesteten Fitverfahren in separaten Histogrammen dargestellt. Bei der Histogrammierung wurden solche Analyseläufe ausgelassen, in denen der Fit fehlgeschlagen ist.

Um die Simulationen auszuwerten, wurden nun die normierten Simulationsergebnisse jeweils einer Datengruppe histogrammiert und eine Gaußverteilung an die Histogramme angepaßt. Der Erwartungswert dieser Gaußverteilung soll im folgenden als *Rekonstruktionsfehler*, die Standardabweichung als *Rekonstruktionsbreite* bezeichnet werden. Bei der Histogrammierung wurden all jene Analyseläufe ausgelassen, bei denen der Fit fehlgeschlagen ist. Der Bruchteil dieser fehlgeschlagenen Fits wurde jedoch für jedes Analyseverfahren vermerkt und ist ein weiteres Gütekriterium des jeweiligen Verfahrens. Außerdem wurde ein Maß für den von der Gaußform abweichenden Anteil jedes dieser Histogramme ermittelt, das sich aus der normierten Differenz



**Abbildung 5.2:** Rekonstruktionsgenauigkeit der Fitverfahren als Funktion des durchschnittlichen Bininhalts für die zweidimensionalen Simulationsreihen mit 1024 Werten pro Stichprobe, stellvertretend für die drei Arten möglicher Größen: Erwartungswerte, Standardabweichungen und Kovarianzen. In der oberen Zeile ist der Rekonstruktionsfehler dargestellt, wobei die Fehlerbalken der Unsicherheit des jeweiligen Fitparameters entsprechen; die untere Zeile zeigt die Rekonstruktionsbreiten inkl. der „Idealwerte“ im Fall von  $\mu$  und  $\sigma$ .

zwischen der angepaßten Gaußverteilung und den histogrammierten Daten ergibt.

Bei der Auswertung der Simulationen fällt zunächst auf, daß die Abhängigkeit der Rekonstruktionsgenauigkeit vom Analyseverfahren für die unterschiedlichen zu rekonstruierenden Parameter deutlich verschieden ausfällt. Dies ist bereits in Abb. 5.1 sichtbar, wird jedoch noch deutlicher bei Betrachtung von Abb. 5.2, in der der Rekonstruktionsfehler und die Rekonstruktionsbreite als Funktion des geforderten durchschnittlichen Bininhalts für die zweidimensionalen Stichproben mit 1024 Werten dargestellt sind: Im Falle der Erwartungswerte ist der Fehler praktisch unabhängig vom geforderten



Bininhalt, lediglich die Rekonstruktionsbreite ist bei den gebinnten Verfahren ca. 18 % größer als beim ungebinnten *ML*-Fit. Bei den Standardabweichungen hingegen liegt eine deutliche Abhängigkeit vom Fitverfahren vor: Der Rekonstruktionsfehler ist beim ungebinnten Fit am kleinsten und steigt bei den gebinnten Fits nahezu linear mit  $\bar{n}$  an, so daß die Standardabweichung systematisch immer stärker überschätzt wird. Die Rekonstruktionsbreite weist für die gebinnten Verfahren eine ähnliche Abhängigkeit auf, wobei die relative Zunahme allerdings deutlich geringer als beim Rekonstruktionsfehler ausfällt; auch hier ist die Breite für das ungebinnte Verfahren am kleinsten. Wiederum ein anderes Bild ergibt sich bei der Betrachtung der Kovarianz: Ähnlich wie bei den Erwartungswerten ist der Rekonstruktionsfehler nahezu unabhängig von  $\bar{n}$ , wobei die von den gebinnten Fitverfahren herrührenden Werte aber merklich von den Resultaten der ungebinnten Fits abgesetzt sind. Auch in diesem Fall ist die Rekonstruktionsbreite der gebinnten Verfahren größer als beim ungebinnten Fit, variiert aber kaum mit  $\bar{n}$ .

Bei der Simulationsserie mit 2048 Werten pro Stichprobe fällt das Ergebnis ähnlich aus, wobei hier die ggf. vorhandene Abhängigkeit von  $\bar{n}$  allerdings noch geringer ist. Die Resultate beider Serien sind in Tabelle 5.2 und 5.3 zusammengefaßt, in denen die über alle Datengruppen und „Koordinatenrichtungen“ ( $t$  bzw.  $r$ ) gemittelten Rekonstruktionsfehler und -breiten für die verschiedenen Verteilungsparameter und Analyseverfahren aufgeführt sind. Da die Rekonstruktionsgenauigkeit – wie in Abb. 5.2 erkennbar – von Datengruppe zu Datengruppe schwankt, wurden auch hierdurch verursachten Standardabweichungen der Mittelwerte von Rekonstruktionsfehler und -breite aufgeführt, damit die Signifikanz von Unterschieden zwischen den Verfahren korrekt eingeschätzt werden kann. Wie man anhand der Tabellen erkennt, sind in allen betrachteten Fällen beide Güteparameter beim ungebinnten *ML*-Fit am geringsten, so daß demnach dieses Verfahren die höchste Rekonstruktionsgenauigkeit erzielt. Zusätzlich zeichnet es sich durch die geringste Quote an fehlgeschlagenen Fits aus.

Im dreidimensionalen Fall ist die Situation ähnlich, wobei hier jedoch die Unterschiede zwischen den Rekonstruktionsverfahren noch stärker ausfallen. Insbesondere beträgt die Überschätzung der Standardabweichungen bis zu 10 % bei  $\bar{n} = 14$  und der Anteil fehlgeschlagener Fits erreicht Durchschnittswerte von bis zu 18 %.

#### 5.1.4 Interpretation und Schlußfolgerungen

Wie die *MC*-Simulationen zeigen, leidet die Analyse mittels gebinntem  $\chi^2$ -Fit unter einer systematischen Überschätzung der Standardabweichungen und



$\bar{n}$	ungebinnt	10	12	14
Fehlgeschlagen	0 %	1.7 %	2.1 %	2.6 %
<b>Erwartungswerte:</b>				
Rekonstruktionsfehler				
Mittelwert	$-5.59 \cdot 10^{-6}$	$4.36 \cdot 10^{-4}$	$5.81 \cdot 10^{-4}$	$8.10 \cdot 10^{-4}$
Standardabw.	$1.66 \cdot 10^{-4}$	$9.04 \cdot 10^{-4}$	$1.15 \cdot 10^{-3}$	$1.78 \cdot 10^{-3}$
Mittl. Fitfehler	$2.08 \cdot 10^{-4}$	$2.49 \cdot 10^{-4}$	$2.50 \cdot 10^{-4}$	$2.55 \cdot 10^{-4}$
Rekonstruktionsbreite				
Mittelwert	$3.14 \cdot 10^{-2}$	$3.69 \cdot 10^{-2}$	$3.71 \cdot 10^{-2}$	$3.75 \cdot 10^{-2}$
Standardabw.	$2.78 \cdot 10^{-4}$	$2.42 \cdot 10^{-3}$	$2.93 \cdot 10^{-3}$	$3.89 \cdot 10^{-3}$
Mittl. Fitfehler	$1.95 \cdot 10^{-4}$	$2.36 \cdot 10^{-4}$	$2.37 \cdot 10^{-4}$	$2.43 \cdot 10^{-4}$
<b>Standardabweichungen:</b>				
Rekonstruktionsfehler				
Mittelwert	$-1.42 \cdot 10^{-3}$	$2.04 \cdot 10^{-2}$	$2.72 \cdot 10^{-2}$	$3.36 \cdot 10^{-2}$
Standardabw.	$1.41 \cdot 10^{-4}$	$7.59 \cdot 10^{-3}$	$1.00 \cdot 10^{-2}$	$1.33 \cdot 10^{-2}$
Mittl. Fitfehler	$1.47 \cdot 10^{-4}$	$2.49 \cdot 10^{-4}$	$2.71 \cdot 10^{-4}$	$3.25 \cdot 10^{-4}$
Rekonstruktionsbreite				
Mittelwert	$2.21 \cdot 10^{-2}$	$3.58 \cdot 10^{-2}$	$3.82 \cdot 10^{-2}$	$4.13 \cdot 10^{-2}$
Standardabw.	$1.07 \cdot 10^{-4}$	$6.09 \cdot 10^{-3}$	$7.35 \cdot 10^{-3}$	$1.21 \cdot 10^{-2}$
Mittl. Fitfehler	$1.39 \cdot 10^{-4}$	$2.26 \cdot 10^{-4}$	$2.40 \cdot 10^{-4}$	$2.62 \cdot 10^{-4}$
<b>Kovarianz:</b>				
Rekonstruktionsfehler				
Mittelwert	$-1.56 \cdot 10^{-3}$	$-1.05 \cdot 10^{-2}$	$-1.07 \cdot 10^{-2}$	$-8.32 \cdot 10^{-3}$
Standardabw.	$7.78 \cdot 10^{-4}$	$6.24 \cdot 10^{-3}$	$7.72 \cdot 10^{-3}$	$3.75 \cdot 10^{-3}$
Mittl. Fitfehler	$2.35 \cdot 10^{-4}$	$3.05 \cdot 10^{-4}$	$3.07 \cdot 10^{-4}$	$3.20 \cdot 10^{-4}$
Rekonstruktionsbreite				
Mittelwert	$3.50 \cdot 10^{-2}$	$4.54 \cdot 10^{-2}$	$4.59 \cdot 10^{-2}$	$4.70 \cdot 10^{-2}$
Standardabw.	$3.96 \cdot 10^{-3}$	$7.86 \cdot 10^{-3}$	$8.79 \cdot 10^{-3}$	$1.13 \cdot 10^{-2}$
Mittl. Fitfehler	$2.22 \cdot 10^{-4}$	$2.88 \cdot 10^{-4}$	$2.86 \cdot 10^{-4}$	$3.07 \cdot 10^{-4}$

**Tabelle 5.2:** Rekonstruktionsgenauigkeit der verschiedenen Analyseverfahren für zweidimensionale Verteilungen mit 1024 Werten pro Stichprobe. Angegeben sind die Mittelwerte der anhand der einzelnen Datengruppen bestimmten Rekonstruktionsgenauigkeiten. Sie stammen aus derselben Analyse wie die Graphen in Abb. 5.2. Die Angabe des mittleren Fitfehlers von Rekonstruktionsfehler und -breite soll dazu dienen, das Ausmaß der durch die Standardabweichung angedeuteten Schwankung dieser Größen einschätzen zu können. Auf die Angabe der Standardabweichung des Fitfehlers wurde verzichtet, da sie in allen Fällen mindestens eine Größenordnung kleiner als der Fehler selbst war, so daß dieser als für alle Datengruppen gleich angesehen werden kann.

$\bar{n}$	ungebinnt	10	12	14
Fehlgeschlagen	0 %	1.2 %	1.2 %	1.3 %
<b>Erwartungswerte:</b>				
Rekonstruktionsfehler				
Mittelwert	$5.22 \cdot 10^{-5}$	$2.32 \cdot 10^{-4}$	$1.55 \cdot 10^{-4}$	$2.95 \cdot 10^{-4}$
Standardabw.	$1.18 \cdot 10^{-4}$	$5.33 \cdot 10^{-4}$	$3.12 \cdot 10^{-4}$	$5.52 \cdot 10^{-4}$
Mittl. Fitfehler	$1.47 \cdot 10^{-4}$	$1.73 \cdot 10^{-4}$	$1.76 \cdot 10^{-4}$	$1.76 \cdot 10^{-4}$
Rekonstruktionsbreite				
Mittelwert	$2.22 \cdot 10^{-2}$	$2.59 \cdot 10^{-2}$	$2.58 \cdot 10^{-2}$	$2.60 \cdot 10^{-2}$
Standardabw.	$9.93 \cdot 10^{-5}$	$2.13 \cdot 10^{-3}$	$2.04 \cdot 10^{-3}$	$2.33 \cdot 10^{-3}$
Mittl. Fitfehler	$1.39 \cdot 10^{-4}$	$1.64 \cdot 10^{-4}$	$1.71 \cdot 10^{-4}$	$1.69 \cdot 10^{-4}$
<b>Standardabweichungen:</b>				
Rekonstruktionsfehler				
Mittelwert	$-1.04 \cdot 10^{-3}$	$1.35 \cdot 10^{-2}$	$1.39 \cdot 10^{-2}$	$1.55 \cdot 10^{-2}$
Standardabw.	$9.96 \cdot 10^{-5}$	$7.68 \cdot 10^{-3}$	$7.98 \cdot 10^{-3}$	$7.35 \cdot 10^{-3}$
Mittl. Fitfehler	$1.04 \cdot 10^{-4}$	$1.93 \cdot 10^{-4}$	$1.94 \cdot 10^{-4}$	$1.92 \cdot 10^{-4}$
Rekonstruktionsbreite				
Mittelwert	$1.57 \cdot 10^{-2}$	$2.67 \cdot 10^{-2}$	$2.70 \cdot 10^{-2}$	$2.67 \cdot 10^{-2}$
Standardabw.	$8.55 \cdot 10^{-5}$	$5.06 \cdot 10^{-3}$	$5.42 \cdot 10^{-3}$	$5.31 \cdot 10^{-3}$
Mittl. Fitfehler	$9.64 \cdot 10^{-5}$	$1.68 \cdot 10^{-4}$	$1.73 \cdot 10^{-4}$	$1.70 \cdot 10^{-4}$
<b>Kovarianz:</b>				
Rekonstruktionsfehler				
Mittelwert	$-1.26 \cdot 10^{-3}$	$-8.86 \cdot 10^{-3}$	$-8.90 \cdot 10^{-3}$	$-9.10 \cdot 10^{-3}$
Standardabw.	$7.08 \cdot 10^{-4}$	$4.18 \cdot 10^{-3}$	$4.55 \cdot 10^{-3}$	$5.15 \cdot 10^{-3}$
Mittl. Fitfehler	$1.71 \cdot 10^{-4}$	$2.13 \cdot 10^{-4}$	$2.15 \cdot 10^{-4}$	$2.15 \cdot 10^{-4}$
Rekonstruktionsbreiten				
Mittelwert	$2.48 \cdot 10^{-2}$	$3.17 \cdot 10^{-2}$	$3.16 \cdot 10^{-2}$	$3.17 \cdot 10^{-2}$
Standardabw.	$2.69 \cdot 10^{-3}$	$6.13 \cdot 10^{-3}$	$6.02 \cdot 10^{-3}$	$6.84 \cdot 10^{-3}$
Mittl. Fitfehler	$1.62 \cdot 10^{-4}$	$2.00 \cdot 10^{-4}$	$2.03 \cdot 10^{-4}$	$2.03 \cdot 10^{-4}$

**Tabelle 5.3:** Rekonstruktionsgenauigkeit der verschiedenen Analyseverfahren für zweidimensionale Verteilungen mit 2048 Werten pro Stichprobe.

einer erhöhten Anfälligkeit gegen Fehlschlag des Fitvorgangs. Beide Effekte nehmen bei Vergrößerung des geforderten Bininhalts zu, weshalb ihre Ursache wahrscheinlich im bereits erwähnten Verlust an Auflösung zu suchen ist. In der Tat kann die zunehmende Überschätzung der Standardabweichungen dadurch erklärt werden, daß beim gebinnten Fit das Fitmodell nur punktweise in der Binmitte an den Inhalt des gesamten Bins angepaßt wird. Mit zunehmender Binbreite rücken diese Mittelpunkte jedoch immer weiter nach außen. Aufgrund der Nichtlinearität der Gaußverteilung bedeutet dies, daß im Zuge des Fitvorgangs der Bininhalt einem Punkt zugeordnet wird, der weiter vom Erwartungswert der Verteilung entfernt ist als der Schwerpunkt des Modells im jeweiligen Bin, wobei dieser Effekt mit zunehmendem Abstand vom Erwartungswert, wo der Bininhalt gering und das Gewicht im Fitvorgang somit groß ist<sup>4</sup>, noch anwächst. Hierdurch erscheint die Verteilung dann breiter, als sie tatsächlich ist. Um solche Effekte zu minimieren, stellt das Softwarepaket *ROOT* eigentlich eine Option zur korrekten Mittelung des Fitmodells über das Binvolumen zur Verfügung<sup>5</sup>. In einem Test wurde jedoch festgestellt, daß die Auswertung einer einzelnen zweidimensionalen Stichprobe mit dieser Option selbst auf einem modernen PC mit 2.5 GHz-CPU und 64 Bit-Betriebssystem auch nach 10 Minuten noch nicht beendet ist und kurze Zeit später mit einem Programmabsturz endet. Dieses Problem der gebinnten Analyse kann demnach hier nicht behoben werden.

Der zweite Effekt, die erhöhte Anfälligkeit gegen Fehlschlag des Fitvorgangs, kann ebenfalls mit dem Verlust an Auflösung erklärt werden: da die Bineinteilungen der Histogramme entlang der Koordinatenachsen ausgerichtet sind, kann man bei einer großen Binbreite Verteilungen, die schmal und gegen die Koordinatenachsen verkippt sind, nicht mehr korrekt abtasten. Vielmehr werden die Einträge der Verteilung auf wenige Bins entlang, aber nicht notwendigerweise auf, der großen Hauptachse konzentriert sein, während die restlichen Bins nahezu leer sein werden. Diese an sich schon ungünstige Ausgangssituation wird zusätzlich durch den bereits beschriebenen Effekt, daß das Fitmodell nur in der Binmitte abgetastet wird, verzerrt. Bei einer solchen Konfiguration ist ein Scheitern des Fit-Algorithmus zunehmend wahrscheinlicher, je gröber die Bineinteilung ist.

Das Verfahren mit der größten Rekonstruktionsgenauigkeit und Robustheit gegenüber der konkreten Form der Verteilung ist die Analyse mittels ungebinntem *ML*-Fit. Wenn man nun Abb. 5.1 betrachtet, fällt auf, daß die

---

<sup>4</sup>Es wird Poisson-Statistik angenommen, so daß  $\sigma_i = \sqrt{N_i}$  und somit  $g_i = 1/\sigma_i^2$  im Falle wenig gefüllte Bins groß ist.

<sup>5</sup>Option „I“ in `TH2::Fit()` bzw. `TH3::Fit()`

Histogramme der mittels ungebinntem Fit rekonstruierten Werte und die Histogramme der Stichprobenabschätzungen sehr ähnlich sind; tatsächlich unterscheiden sich die Resultate des ungebinnten Fits kaum von den durch Abschätzung nach Gl. 5.5 bestimmten Startwerten. Dies ist nicht verwunderlich, da es sich hierbei um die *Maximum-Likelihood*-Schätzwerte handelt, die dieselbe Likelihood-Funktion wie der ungebinnte *ML*-Fit maximieren. Da die Berechnung der *ML*-Schätzwerte allerdings deutlich schneller vonstatten geht als die Durchführung des *ML*-Fits<sup>6</sup>, wird die Stichprobenabschätzung als Verfahren zur Analyse des einzelnen Stokes-Datenpunkts gewählt, wobei für die Kovarianzmatrix aber nun der erwartungstreue Schätzer [3, S. 77]

$$S = \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N \left( \vec{s}_i - \hat{\vec{\mu}} \right) \left( \vec{s}_i - \hat{\vec{\mu}} \right)^T \quad (5.8)$$

verwendet wird.

### 5.1.5 Unsicherheiten der rekonstruierten Parameter

Die so ermittelten Schätzwerte für die Erwartungswerte der Sensorsignale werden anschließend im Rahmen der Analyse der Einzelmessung weiterverarbeitet, wobei die Meßdaten des Transmissions- und Reflexionssensors kombiniert werden sollen. Um eine verlässliche Fehlerabschätzung des Endergebnisses vornehmen zu können, müssen hierbei nun auch die Unsicherheiten der Schätzwerte inklusive ihrer Kovarianzen korrekt in die Analyse einfließen. Hierfür ist die Kenntnis der Verteilungseigenschaften des *ML*-Schätzwertes  $\hat{\vec{\mu}}$  erforderlich.

Der Schätzwert  $\hat{\vec{\mu}}$  ist eine Funktion von Zufallsgrößen (nämlich der Stichprobenwerte) und somit selbst eine Zufallsgröße. Man kann zeigen [3, S. 77], daß er im Fall einer multivariat normalverteilten Stichprobe ebenfalls einer multivariaten Normalverteilung unterliegt, die um den tatsächlichen Erwartungswert  $\vec{\mu}$  der Stichprobe zentriert ist und deren Kovarianzmatrix gerade die um  $1/N$  skalierte Kovarianzmatrix der der Stichprobe zugrundeliegenden Verteilung ist. Sofern die wahre Kovarianzmatrix  $\Sigma$  bekannt ist, kann man also folgende Aussagen über die Unsicherheiten und Kovarianzen der

---

<sup>6</sup>Der ungebinnte *ML*-Fit dauert ca. zehnmal so lange wie ein gebinnter Fit, da das Fitmodell hier in jeder Iteration bei jedem Wert der Stichprobe ausgewertet werden muß und nicht nur bei jedem Bin des Histogramms.

Komponenten  $\hat{\mu}_i$  ableiten:

$$\begin{aligned}\sigma_{\hat{\mu}_i} &= \frac{1}{\sqrt{N}}\sigma_i \\ \sigma_{\hat{\mu}_i\hat{\mu}_j} &= \frac{1}{N}\sigma_{ij}\end{aligned}\tag{5.9}$$

Im hier betrachteten Fall ist die wahre Kovarianzmatrix allerdings gerade nicht bekannt und kann somit auch nicht zur Konstruktion eines Vertrauensintervalls herangezogen werden. Um dennoch alleine auf der Basis der vorliegenden Stichprobe die Unsicherheit des Schätzwerts bestimmen zu können, muß eine andere Größe konstruiert werden, deren Verteilung nur von bekannten Parametern abhängt und die trotzdem Aufschluß über die Unsicherheit des Mittelwerts gibt. Im univariaten Fall wird dies durch die „Studentisierung“ erreicht: man kann zeigen [75], daß die auf die Stichproben-Standardabweichung normierte Differenz zwischen Stichproben-Mittelwert und Erwartungswert der Verteilung unabhängig von den Parametern der zugrundeliegenden Verteilung ist. Die multivariate Entsprechung dieser Größe ist die Hotelling’sche  $T^2$ -Statistik [89], die durch

$$T^2 = N \left( \hat{\mu} - \vec{\mu} \right)^T S^{-1} \left( \hat{\mu} - \vec{\mu} \right)\tag{5.10}$$

gegeben ist und einer Fisher-Snedecor-Verteilung mit  $d$  und  $N - d$  Freiheitsgraden unterliegt [3, S.176]. Hiermit läßt sich auch bei Unkenntnis von  $\Sigma$  ein Vertrauensintervall für die Lage des wahren Erwartungswertes um den Schätzwert aus der Relation [98, S.180]

$$P \left( T^2 \geq \frac{(N - 1)d}{N - d} F_{\alpha;d,N-d} \right) = \alpha\tag{5.11}$$

ableiten, wobei  $F_{\alpha;d,N-d}$  das obere<sup>7</sup>  $\alpha$ -Quantil der o. g.  $F$ -Verteilung ist. Das Intervall wird wegen der zusätzlichen Unsicherheit durch den – ebenfalls zufallsverteilten – Schätzwert  $S$  größer als bei bekannter Kovarianzmatrix ausfallen.

Wie in Abs. 5.2.2 dargelegt wird, wäre die Verwendung dieser exakten Verteilung jedoch mit einem erheblichen analytischen und numerischen Aufwand verbunden, der die Auswertung der Messungen stark verlangsamen und die zugrundeliegenden mathematischen Formeln deutlich verkomplizieren würde.

<sup>7</sup>Der Begriff „oberes“ Quantil wird verwendet, um zu verdeutlichen, daß zur Definition des Quantils der Flächeninhalt unter der Wahrscheinlichkeitsdichte, der *rechts* dieser Abszisse liegt, verwendet wird [35, S.696].

Aus diesem Grund wird hier ausgenutzt, daß bei den vorliegenden Stichprobengrößen von  $N \geq 2048$  die wahre Kovarianzmatrix  $\Sigma$  in Gl. 5.9 in sehr guter Näherung durch die Stichproben-Kovarianzmatrix  $S$  ersetzt werden kann, so daß eine Beschreibung der Verteilung des Mittelwerts durch die einfacher zu handhabende multivariate Normalverteilung zulässig ist.

### 5.1.6 Gültigkeit des Modells

Alle bislang aufgeführten Interpretationen, wie auch die später noch folgenden Überlegungen zum Fitverfahren in Abs. 5.2.2, sind nur dann zutreffend, wenn die zu analysierenden Stichproben tatsächlich multivariat normalverteilt sind. Daher – und weil eine nicht normalverteilte Stichprobe auf ein systematisches Problem der Messung hindeutet – muß im Rahmen der Datenanalyse zunächst geprüft werden, ob die auszuwertende Stichprobe dieser Annahme auch genügt, wobei in einem ersten Schritt solche Datenpunkte aussortiert werden, bei denen eines oder mehrere Sensorsignale den dynamischen Bereich des ADCs überschreitet oder dessen Grenzen so nahe kommt, daß Nichtlinearitäten in der Eingangskennlinie zum Tragen kommen könnten.

Es gibt nun eine große Anzahl von Verfahren für den Test auf das Vorliegen einer multivariaten Normalverteilung [133], wie etwa die multivariate Verallgemeinerung des Shapiro-Wilk-Tests [166], der auf der multivariaten Verallgemeinerung von Schiefe und Wölbung basierende Mardia-Kent-Test [125] oder die Korrelationsanalyse nach Singh [179]. Einige der Ansätze wurden bereits auf grundlegendem Niveau kritisiert, bei anderen wurden Unzulänglichkeiten in der Konstruktion und formalen Ableitung bemängelt. Insbesondere wurde festgestellt, daß vielen der Verfahren zwei wichtige fundamentale Eigenschaften fehlen, nämlich *Invarianz*<sup>8</sup> *unter affiner Transformation* und *Konsistenz* [81]. Unter Konsistenz ist hierbei der mathematische Nachweis zu verstehen, daß ein Verfahren im Grenzfall unendlich großer Stichproben *jede* andere Verteilungsform außer der multivariaten Normalverteilung mit Sicherheit verwirft.

Bei der Wahl einer Testmethode ist aber darüberhinaus wichtig, wie gut sie im realen Fall *endlicher* Stichproben solche, die einer anderen als der multivariaten Normalverteilung unterliegen, erkennen kann. Die Testverfahren sind nun als statistische Hypothesentests im Sinne von Fisher [118] ausgelegt, d. h. sie spezifizieren eine Nullhypothese<sup>9</sup>, die ggf. im Lichte der vorliegenden Daten verworfen werden muß. Die Nullhypothese lautet hierbei, daß es sich bei

---

<sup>8</sup>der Teststatistik, s. u.

<sup>9</sup>ohne explizite Alternativhypothese

der Stichprobe um multivariat normalverteilte Werte handelt. Um diese Hypothese zu testen, definiert man nun eine *Teststatistik*, d. h. eine (skalare) Funktion der Stichprobenelemente, deren Verteilungseigenschaften für den Fall, daß die Nullhypothese zutrifft, bekannt sind. Wenn diese Teststatistik für eine gegebene zu untersuchende Stichprobe einen Wert annimmt, der, würde die Nullhypothese zutreffen, sehr unwahrscheinlich ist, deutet dies darauf hin, daß die Hypothese falsch und die Stichprobe nicht multivariat normalverteilt ist. Um dies quantitativ zu beurteilen, wird der zugehörige  $p$ -Wert betrachtet, d. h. die Wahrscheinlichkeit, daß die Teststatistik bei zutreffender Nullhypothese den vorliegenden oder einen noch extremeren Wert annähme. Unterschreitet der  $p$ -Wert eine vorher festgelegte Untergrenze  $\alpha$  – das *Signifikanzniveau* des Tests – so wird die Nullhypothese als falsch verworfen. Demzufolge ist das Signifikanzniveau gleich der Wahrscheinlichkeit für das Auftreten des *Fehlers 1. Art*, d. h. der irrtümlichen Zurückweisung einer eigentlich zutreffenden Nullhypothese (in diesem Fall die Verwerfung einer Stichprobe, obwohl sie multivariat normalverteilt ist). Der zugehörige Wert der Teststatistik wird als *kritischer Wert* bezeichnet.

Bei der Auswahl eines Testverfahrens ist neben der Übereinstimmung der tatsächlichen Rate des Fehlers 1. Art mit dem gewählten Signifikanzniveau<sup>10</sup> entscheidend, daß die Wahrscheinlichkeit für den *Fehler 2. Art*, d. h. das Akzeptieren einer eigentlich unzutreffenden Nullhypothese, möglichst gering ist. In jüngster Zeit wurden nun einige *MC*-Untersuchungen durchgeführt, in deren Rahmen die Eigenschaften verschiedener Testverfahren, insbesondere deren Diskriminierungsschärfe gegen eine Vielzahl alternativer Verteilungsformen, ermittelt wurden [134, 59]. Hierbei wurde unter anderem ein von Henze und Zirkler beschriebenes Verfahren [82] für empfehlenswert erachtet, weil es neben den Eigenschaften der Konsistenz und Invarianz über eine hohe Erkennungsgenauigkeit für nicht-normale Verteilungen verfügt und weil für die Berechnung der kritischen Werte eine genäherte analytische Formel für den asymptotischen Fall<sup>11</sup> bekannt ist; demnach ist kein Rückgriff auf tabellierte kritische Werte notwendig, was die Freiheit bei der Wahl des Signifikanzniveaus und der Stichprobengröße einschränken würde. Die Konvergenz ist dabei hinreichend schnell, daß bei den hier betrachteten Stichprobengrößen keine nennenswerten Abweichungen von den exakten Werten zu erwarten sind [82]. Im Rahmen der vorliegenden Arbeit wurde somit dieses Verfahren für den Test auf Normalverteilung gewählt und eine entsprechende Imple-

---

<sup>10</sup>Dies sollte eigentlich *per definitionem* gegeben sein. In den Fällen, in denen nur genäherte kritische Werte der Teststatistik bekannt sind, können hier allerdings z. T. deutliche Abweichungen auftreten.

<sup>11</sup>d. h. im Grenzfall  $N \rightarrow \infty$

mentierung in der Programmiersprache *C++* erstellt.

Die Teststatistik des Henze-Zirkler-Tests für eine  $d$ -dimensionale Stichprobe mit  $N$  Werten  $\{\vec{s}_i\}$  ist, sofern es sich bei dem *ML*-Schätzer  $\hat{\Sigma}$  der Kovarianzmatrix um eine reguläre Matrix handelt<sup>12</sup>, durch

$$T_{N,\beta}(\vec{s}_1, \dots, \vec{s}_N) = ND_{N,\beta} \quad (5.12)$$

mit

$$D_{N,\beta} = \frac{1}{\sqrt{2\pi\beta^{2d}}} \int_{\mathbb{R}^d} \left| \psi_N(\vec{t}) - \exp\left(-\frac{1}{2}\|\vec{t}\|^2\right) \right|^2 \exp\left(-\frac{\|\vec{t}\|^2}{2\beta^2}\right) d^d t \quad (5.13)$$

gegeben, wobei  $\|\cdot\|$  die euklidische Norm und

$$\psi_N(\vec{t}) = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \exp(i\vec{t} \cdot \vec{y}_j) \quad (5.14)$$

die empirische charakteristische Funktion der skalierten Residuen

$$\vec{y}_j = \hat{\Sigma}^{-\frac{1}{2}} (\vec{s}_j - \hat{\vec{\mu}}) \quad (5.15)$$

ist. Diese Größe kann als gewichteter Abstand zwischen der empirischen Wahrscheinlichkeitsdichte der Stichprobenwerte und der multivariaten Standardnormalverteilung im  $L^2$ -Raum der quadratintegrablen Funktionen interpretiert werden; somit ist die Nullhypothese für große Werte der Teststatistik abzulehnen. Für die praktische Anwendung ist die folgende Darstellung von  $D_{N,\beta}$  geeigneter, in der die mehrdimensionale uneigentliche Integration nicht mehr auftritt [82, Formel 2.6]:

$$D_{N,\beta} = \frac{1}{N^2} \sum_{j,k=1}^N \exp\left(-\frac{1}{2}\beta^2\|\vec{y}_j - \vec{y}_k\|^2\right) - \frac{2}{N\sqrt{1+\beta^{2d}}} \sum_{j=1}^N \exp\left(-\frac{\beta^2}{2(1+\beta^2)}\|\vec{y}_j\|^2\right) + \frac{1}{\sqrt{1+2\beta^{2d}}} \quad (5.16)$$

Die Verteilung von  $T_{N,\beta}$  kann im asymptotischen Fall durch eine Lognormalverteilung genähert werden, so daß sich eine analytische Formel für die Berechnung der Quantile ableiten läßt [82]:

$$q_{\beta,d}(p) = \left(1 + \frac{\sigma_{\beta,d}^2}{\mu_{\beta,d}^2}\right)^{-1/2} \mu_{\beta,d} \exp\left(\Phi^{-1}(p) \sqrt{\ln\left(1 + \frac{\sigma_{\beta,d}^2}{\mu_{\beta,d}^2}\right)}\right) \quad (5.17)$$

---

<sup>12</sup>Bei singulärer Matrix ist die Hypothese sowieso abzulehnen.



Hierbei ist

$$\begin{aligned}
 \mu_{\beta,d} &= 1 - (1 + 2\beta^2)^{-d/2} \left( 1 + \frac{d\beta^2}{1 + 2\beta^2} + \frac{d(d+2)\beta^4}{2(1 + 2\beta^2)^2} \right) \\
 \sigma_{\beta,d}^2 &= 2(1 + 4\beta^2)^{-d/2} \\
 &\quad + 2(1 + 2\beta^2)^{-d} \left( 1 + \frac{2d\beta^4}{(1 + 2\beta^2)^2} + \frac{3d(d+2)\beta^8}{4(1 + 2\beta^2)^4} \right) \\
 &\quad - \frac{4}{\sqrt{w(\beta)}^d} \left( 1 + \frac{3d\beta^4}{2w(\beta)} + \frac{d(d+2)\beta^8}{2w(\beta)^2} \right) \\
 w(\beta) &= (1 + \beta^2)(1 + 3\beta^2)
 \end{aligned} \tag{5.18}$$

und  $\Phi^{-1}(p)$  die inverse Verteilungsfunktion der univariaten Standardnormalverteilung. Der kritische Wert der Teststatistik für das Signifikanzniveau  $\alpha$  ist dann durch  $q_{\beta,d}(1 - \alpha)$  gegeben.

Der Parameter  $\beta$  ist ein Glättungsparameter, der deutliche Auswirkungen auf die Stärke des Tests hat. Um den Test schon bei geringer Stichprobengröße empfindlich gegenüber einer möglichst großen Auswahl nicht-normaler Verteilungen zu machen, wird ein Wert empfohlen [187], der sich in Abhängigkeit von der Dimensionalität des Problems durch folgende Parametrisierung berechnen läßt:

$$\beta = 0.688 + 0.0375d \tag{5.19}$$

Es ist nun zu beachten, daß eine Stokesmessung im allgemeinen aus 36 solcher Meßpunkte besteht. Bei den üblicherweise gewählten Signifikanzniveaus (die *MC*-Simulationen zur Ermittlung der Teststärke [134, 59, 82] wurden auf dem  $\alpha = 0.05$ -Niveau durchgeführt) ist also auch bei einer einwandfreien Messung mit einer gewissen Anzahl (fälschlicherweise) zurückgewiesener Meßpunkte zu rechnen und es stellt sich die Frage, wie mit diesen zu verfahren ist. Im Rahmen der hier vorgestellten Analyse wird mittels eines weiteren statistischen Tests überprüft, ob die Anzahl der zurückgewiesenen Meßpunkte mit der anhand des für den Test des Einzelpunkts gewählten Signifikanzniveaus erwarteten Anzahl vereinbar ist. Ist dies der Fall, so werden *alle* Meßpunkte akzeptiert und zur Analyse der Messung verwendet – allerdings werden die zurückgewiesenen Meßpunkte als solche kenntlich gemacht. Ein Ausschluß einzelner Meßpunkte von der Analyse kommt nur dann in Frage, wenn aufgrund weiterer Indizien davon auszugehen ist, daß der Meßvorgang zwar bei diesem Punkt gestört war, dies jedoch keine Kompromittierung der anderen Meßpunkte zur Folge hat. Ergibt der Test hingegen, daß die Anzahl zurückgewiesener Meßpunkte nicht mit der Erwartung aufgrund des Signifi-

kanzniveaus vereinbar ist, wird die gesamte Messung zunächst verworfen und höchstens nach weitergehender manueller Inspektion doch noch ausgewertet.

Um diese Entscheidung zu fällen, macht man sich zunutze, daß es sich beim Test auf Normalverteilung um einen statistischen Test handelt und Akzeptanz oder Zurückweisung eines Meßpunkts somit ein dichotomes Zufallsereignis ist<sup>13</sup>. Beim Test aller Punkte einer Stokesmessung handelt es sich also – wenn die Nullhypothese, daß alle Meßpunkte normalverteilten Stichproben entstammen, zutrifft – um einen Bernoulli-Prozeß, und die Anzahl der akzeptierten bzw. verworfenen Meßpunkte unterliegt der Binomialverteilung. Somit kann durch Anwendung des Binomialtests auf einem geeigneten Signifikanzniveau geprüft werden, ob die beobachtete Anzahl verworfener Meßpunkte mit der Erwartung vereinbar ist oder nicht. Im vorliegenden Fall wird der Binomialtest auf demselben Signifikanzniveau wie der Test auf Normalverteilung durchgeführt, wobei zur Vermeidung unnötig hoher Fehlalarmraten für letzteren das  $\alpha = 0.01$ -Niveau gewählt wird<sup>14</sup>. Hierdurch sinkt zwar die Teststärke bzw. steigt die Wahrscheinlichkeit des Fehlers 2. Art gegenüber den o. g. Vergleichsuntersuchungen, jedoch wurde bei diesen für den Henze-Zirkler-Test eine recht hohe Teststärke schon bei deutlich kleineren als den hier betrachteten Stichproben ermittelt. Da die Teststärke mit zunehmendem Stichprobenumfang steigt, sollte das geringere Signifikanzniveau keine nennenswerten negativen Auswirkungen auf die Diskriminierungsschärfe haben.

### 5.1.7 Eindimensionale Stichproben

Im Normalfall sind die für den einzelnen Datenpunkt genommenen Stichproben mehrdimensional, weshalb der Analyse dieses Falls (auch wegen der vergleichsweise geringen Verbreitung der entsprechenden Methoden [133]) ein größerer Umfang in diesem Abschnitt eingeräumt wurde. Es gibt allerdings bei den Kalibrationsverfahren des Stokesmeters eine Situation – die Initialjustierung (s. Abs. 5.3.1) – bei der das untere Glan-Laser-Prisma noch nicht installiert ist und somit kein Signal des Reflexionssensors vorliegt. Die Stichprobe der normierten ADC-Meßwerte ist demnach eindimensional, weshalb noch kurz auf das entsprechende Verfahren zur Analyse in diesem Fall eingegangen werden soll.

---

<sup>13</sup>wobei allerdings für normalverteilte Stichproben die Wahrscheinlichkeit, akzeptiert zu werden, dominiert.

<sup>14</sup>Aufgrund der diskreten Natur der Binomialverteilung wird beim Binomialtest das tatsächliche Signifikanzniveau kleiner als das nominell gewählte Niveau sein, weil die Grenzen des Ablehnungsbereichs nur ganzzahlige Werte annehmen können.

Die Auswertung univariater – zumal gaußverteilter – Stichproben ist ein wohletabliertes Problem der Statistik, so daß eine Vielzahl an Verfahren hierfür zur Verfügung steht. Im einfachsten Fall kann man die normierten Meßwerte in ein Histogramm einsortieren und mittels eines  $\chi^2$ -Fits eine Gauß'sche Wahrscheinlichkeitsdichte daran anpassen. Das in Abs. 5.1.2 angesprochene Problem des geringen Binninhalts träte im vorliegenden eindimensionalen Fall nicht auf. Andererseits ist auch hier jegliche Bineinteilung willkürlich, so daß eine ungebinnte Analyseverfahren vorzuziehen ist. Es liegt nun nahe, wieder den Stichprobenmittelwert als *ML*-Schätzer des Erwartungswerts der zugrundeliegenden Verteilung zu verwenden; dieser hat allerdings den Nachteil, daß er anfällig gegenüber möglichen Ausreißern ist. Dies trifft zwar auch auf den multivariaten Fall zu, jedoch sind im univariaten Fall „robuste“ statistische Methoden, wie z. B. *M*-Schätzer [90] oder Winsorisierung, verfügbar, mit denen sich dieses Problem vermeiden läßt. Die einfachste – und älteste – dieser Methoden besteht nun darin, anstelle des Mittelwerts den Median zu verwenden [130], der für eine Stichprobe  $X_1, \dots, X_N$  (bzw. deren Ordnungsstatistiken  $X_{(1)} \leq \dots \leq X_{(N)}$ ) durch

$$\hat{X}_N = \begin{cases} X_{(m+1)} & \text{falls } N = 2m + 1 \text{ ungerade} \\ \frac{1}{2} (X_{(m)} + X_{(m+1)}) & \text{falls } N = 2m \text{ gerade} \end{cases} \quad (5.20)$$

gegeben ist. Dies ist möglich, weil bei der Normalverteilung sowohl Mittelwert als auch Median mit dem hier zu bestimmenden Erwartungswert  $\mu$  zusammenfallen.

Eine Herausforderung besteht allerdings auch hier darin, ein Vertrauensintervall für den so ermittelten Median anzugeben, welches keine Kenntnis der hier erst zu bestimmenden Verteilungsparameter erfordert. Im Falle des Mittelwerts könnte hier das Verfahren der Studentisierung, d. h. der Normierung auf die Stichproben-Standardabweichung angewandt werden, weil die Verteilung des so normierten Abstands zwischen Mittelwert und wahren Erwartungswert unabhängig von den Parametern der der Stichprobe zugrundeliegenden Verteilung ist; für den Median gibt es ein solches Verfahren allerdings nicht. Um dennoch ein entsprechendes Vertrauensintervall zu bestimmen, stehen nun im wesentlichen die folgenden beiden Ansätze zur Auswahl [176]: Zum einen kann durch verschiedene Abschätzungsmethoden für die Varianz des Medians eine näherungsweise Studentisierung durchgeführt werden, um das Äquivalent einer  $1\sigma$ -Umgebung um den ermittelten Median anzugeben [130]. Die abgeleiteten Schätzer stellen hierbei für eine breite Auswahl an Verteilungsarten eine gute Näherung dar, ohne jedoch für eine davon exakt zu sein (vgl. [126, 175, 158]). Eine andere Methode basiert auf

der Möglichkeit, exakte, durch Ordnungsstatistiken begrenzte Vertrauensintervalle verteilungsfrei<sup>15</sup> mit Hilfe des Vorzeichentests zu berechnen. Da hier allerdings nur bestimmte, durch die Binomialverteilung vorgegebene Werte für das Vertrauensniveau wählbar sind, wurden Interpolationsverfahren entwickelt [86, 28, 87], um Vertrauensintervalle für beliebige Niveaus konstruieren zu können. Im Rahmen dieser Arbeit wurden die aussichtsreichsten Verfahren beider Kategorien, die Interpolationsmethode nach Hettmansperger und Sheather [86], die kalibrierte Interpolationsmethode nach Ho und Lee [87] und die Studentisierung mit dem Varianzschätzer  $V_{PB2}$  nach Price und Bonett<sup>16</sup> [158], mittels einer *MC*-Untersuchung verglichen. Hierbei wurde festgestellt, daß die von allen Verfahren ermittelten Vertrauensintervalle im Mittel gleich gut sind, das per Studentisierung ermittelte Intervall jedoch eine geringere Streuung aufweist. Da dieses Verfahren zudem deutlich weniger rechenintensiv ist<sup>17</sup>, wird somit der nach Price und Bonett abgeschätzte Standardfehler (als Wurzel aus dem Varianzschätzer) für die Konstruktion des Vertrauensintervalls verwendet.

Für die weitere Verarbeitung dieser Resultate muß nun zusätzlich zur Breite noch die Form der Verteilung des Medians bekannt sein. Die o. g. *MC*-Untersuchung hat hierbei ergeben, daß sich diese Verteilung im Falle normalverteilter Stichproben selbst auch sehr gut durch eine Normalverteilung beschreiben läßt. Dies deckt sich mit früheren Untersuchungsergebnissen [130, S. 757], nach denen die Quantile der Normalverteilung die beste Übereinstimmung zwischen per *MC*-Simulation und per Studentisierung ermittelten Vertrauensintervallen liefern; daher kann für die Zwecke der Fehlerfortpflanzung von gaußverteilten Fehlern ausgegangen werden.

Auch im Fall eindimensionaler Stichproben wird vor der Auswertung geprüft, ob die Annahme der Normalverteilung gerechtfertigt ist. Da dies – zumal in univariaten Fall – eine fundamentale Fragestellung der Statistik ist, stehen hier schon seit geraumer Zeit entsprechende Testverfahren zur Verfügung, angefangen mit dem  $\chi^2$ -Anpassungstest von Pearson [155] und dem Kolmogorov-Smirnov-Test [113]<sup>18</sup>. In verschiedenen Vergleichsstudien [185, 164] wurden nun der Chen-Shapiro-Test [39] und der Shapiro-Wilk-Test [174] als die zuverlässigsten unter den vorhandenen Methoden identifiziert, da sie gegen eine große Vielfalt an nicht-normalen Alternativverteilungen gleich

---

<sup>15</sup>d. h. ohne, daß die Art der zugrundeliegenden Verteilung explizit eingeht

<sup>16</sup>der allerdings selbst auf der Methode der exakten, verteilungsfreien Vertrauensintervalle beruht

<sup>17</sup>ca. ein Faktor 500 gegenüber Hettmansperger-Sheather und ein Faktor 2000 gegenüber Ho-Lee in der Rechenzeit

<sup>18</sup>die allerdings beide noch nicht auf eine bestimmte Verteilung spezialisiert waren

gute oder bessere Ergebnisse als die anderen untersuchten Verfahren erzielen. Beim Chen-Shapiro-Test ist allerdings zu berücksichtigen, daß eines der bereits im multivariaten Fall angesprochenen wünschenswerten Kriterien – die Unabhängigkeit von tabellierten kritischen Werten – hier nur durch eine nichtlineare Interpolation erreicht wird, deren Gültigkeit nur bei Stichprobengrößen im Bereich von  $10 \leq N \leq 2000$  sichergestellt ist. Da die Stichproben in der vorliegenden Arbeit größer sind, wird für die Analyse univariater Stichproben der Shapiro-Wilk-Test eingesetzt.

Die Teststatistik  $W$  dieses Tests kann als Korrelationskoeffizient eines  $Q$ - $Q$ -Plots der betrachteten Stichprobe  $\{x_{(1)} \leq \dots \leq x_{(N)}\}$  gegen die erwarteten Ordnungsstatistiken der Normalverteilung interpretiert werden und ist durch

$$W = \frac{\left(\sum_{i=1}^N a_i x_{(i)}\right)^2}{\sum_{i=1}^N (x_{(i)} - \bar{x})^2} \quad (5.21)$$

gegeben [174], wobei die Gewichtungsfaktoren  $a_i$  von den Erwartungswerten  $m_i$  dieser Ordnungsstatistiken und deren Kovarianzmatrix  $V$  wie folgt abhängen:

$$\vec{a} = \frac{\vec{m}^T V^{-1}}{\|\vec{m}^T V^{-1}\|} \quad (5.22)$$

Die Berechnung dieser Gewichtungsfaktoren ist mathematisch sehr aufwendig, so daß im allgemeinen auf tabellierte Werte zurückgegriffen wird, die für jede Stichprobengröße verschieden sind. Um dies zu vermeiden, wird in der vorliegenden Arbeit eine näherungsweise Parametrisierung [167] verwendet, mit der sich die Faktoren  $a_i$  ohne Matrixmanipulationen analytisch bestimmen lassen.

Die Nullverteilung der Teststatistik ist nun analytisch nur für den Fall  $N = 3$  bekannt [174, S. 595]; darüberhinaus existieren lediglich per  $MC$ -Simulation ermittelte kritische Werte [174, S. 602]. Um auch hier von tabellierten Werten unabhängig zu sein, wird daher zusätzlich noch eine Transformation der Teststatistik angewandt, die deren Nullverteilung in eine Standardnormalverteilung überführt [167]. Die hierbei angewandten Parametrisierungen können bei Stichprobengrößen im Bereich von  $4 \leq N \leq 5000$  eingesetzt werden [169, 168]<sup>19</sup>.

<sup>19</sup>Dieser Geltungsbereich wurde allerdings nicht per Simulation nachgewiesen; vielmehr nimmt der Autor an, daß die Parametrisierung auch jenseits des Bereichs von  $4 \leq N \leq 2000$ , anhand dessen sie bestimmt wurde, anwendbar ist [168, S. 40].

## 5.2 Analyse der einzelnen Stokesmessung

Die im vorigen Schritt verarbeiteten Einzel-Datenpunkte der Stokesmessung werden nun zusammengefaßt, um den gemessenen Polarisationszustand zu extrahieren. Dies geschieht, indem ein Modell der Winkelabhängigkeit der auf die jeweiligen Sensoren einfallenden Intensitäten, zu dessen freien Parametern die Stokesparameter des Lichts zählen, an die Meßdaten angepaßt wird. Bevor auf dieses Modell näher eingegangen wird, ist es erforderlich, die darin einfließenden Größen systematisch und konsistent zu erfassen. Außerdem soll beschrieben werden, wie die bereits erwähnten Korrelationen der Sensorsignale bei der Analyse mathematisch korrekt berücksichtigt werden können.

### 5.2.1 Nomenklatur

Die eigentlichen *Meßgrößen* in dieser Analyse sind die Lichtintensitäten, die auf die drei Sensoren des Stokesmeters einfallen. Sie werden im folgenden als

$$I_{tr}, \quad I_{ref} \quad \text{und} \quad I_{norm}$$

bezeichnet. Andererseits sind die *Signale*, die im Rahmen der computergestützten Analyse ausgewertet werden, keine Intensitäten, sondern digitalisierte Zahlenwerte, die lediglich proportional zur eingestrahelten Intensität sind. Wenn man die – im Rahmen einer Messung als konstant angenommene, jedoch ggf. von Messung zu Messung leicht verschiedene – Übertragungsfunktion zwischen diesen Größen, die die Empfindlichkeit der Sensoren und die interne Verstärkung des A/D-Wandlers beinhaltet, als  $G$  bezeichnet, so sind die zu modellierenden Größen demnach

$$\begin{array}{ll} \text{das Signal des Transmissionssensors} & \mathcal{T}(t) := G_{tr} I_{tr}(t) \\ \text{das Signal des Reflexionssensors} & \mathcal{R}(t) := G_{ref} I_{ref}(t) \quad \text{und} \\ \text{das Signal des Normierungssensors} & \mathcal{N}(t) := G_{norm} I_{norm}(t) \end{array}$$

die aufgrund der möglichen Fluktuation der Lichtintensität prinzipiell zeitabhängig sind. Allerdings treten die Sensorsignale bei dieser Analyse nur in der normierten Form

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{T}} &= \frac{G_{tr}}{G_{norm}} \frac{I_{tr}(t)}{I_{norm}(t)} =: g_{tr} \frac{I_{tr}(t)}{I_{norm}(t)} \\ \tilde{\mathcal{R}} &= \frac{G_{ref}}{G_{norm}} \frac{I_{ref}(t)}{I_{norm}(t)} =: g_{ref} \frac{I_{ref}(t)}{I_{norm}(t)} \end{aligned} \tag{5.23}$$

auf, bei der diese Zeitabhängigkeit exakt herausfällt<sup>20</sup>. Die Modelle für diese normierten Größen werden gegebenenfalls noch zum „Modellvektor“

$$\vec{\mathcal{M}} = \begin{pmatrix} \tilde{\mathcal{T}} \\ \tilde{\mathcal{R}} \end{pmatrix} \quad (5.24)$$

zusammengefaßt.

Die tatsächlichen Meßdaten liegen nun in Form der im vorigen Schritt bestimmten Mittelwerte des normierten Transmissions- und Reflexionssignals bei der jeweiligen Winkelstellung des optischen Elements vor. Die Werte des  $i$ -ten Datenpunkts werden im folgenden als

$$\begin{aligned} t_i &:= \left\langle \frac{\mathcal{T}_i(t_j)}{\mathcal{N}_i(t_j)} \right\rangle_j && \text{(Transmissions-Meßwert)} \\ r_i &:= \left\langle \frac{\mathcal{R}_i(t_j)}{\mathcal{N}_i(t_j)} \right\rangle_j && \text{(Reflexions-Meßwert)} \end{aligned} \quad (5.25)$$

bezeichnet, bzw. zum „Mittelwertvektor“ (oder „Meßwertvektor“)

$$\vec{m}_i := \begin{pmatrix} t_i \\ r_i \end{pmatrix} \quad (5.26)$$

zusammengefaßt. Die zugehörigen Unsicherheiten sind im Fall univariater Stichproben die jeweiligen Standardabweichungen der Mittelwerte, die als  $\sigma_{t,i}$  bzw.  $\sigma_{r,i}$  bezeichnet werden. Im allgemeinen, multivariaten Fall ist hier die Kovarianzmatrix der Mittelwerte

$$\tilde{\Sigma}_i = \begin{pmatrix} \sigma_{t,i}^2 & \sigma_{tr,i} \\ \sigma_{tr,i} & \sigma_{r,i}^2 \end{pmatrix} \quad (5.27)$$

zu verwenden, die gerade der um  $1/N$  reduzierten Kovarianzmatrix  $S$  der zugrundeliegenden Stichprobe normierter Sensorwerte entspricht (vgl. Abschnitt 5.1.5).

<sup>20</sup>Der Grund hierfür liegt darin, daß bei der Beschreibung der polarisationsoptischen Elemente nur lineare Effekte berücksichtigt werden (vgl. Abs. 4.1.4), so daß die auf die Sensoren auftreffenden Intensitäten proportional zur Quellintensität sind. Diese kürzt sich bei einer einfachen Division jedoch exakt heraus, so daß nur noch die – zeitunabhängigen – Proportionalitätskonstanten übrigbleiben.

## 5.2.2 Das korrelierte Fitverfahren

Sowohl die Meßdaten des Transmissionssensors als auch diejenigen des Reflexionssensors erlauben für sich bereits eine vollständige Bestimmung des Polarisationszustands. Dennoch ist es wünschenswert, beide Datensätze zu kombinieren, da sich hierdurch erweiterte Möglichkeiten ergeben, systematische Einflüsse zu identifizieren und gegebenenfalls zu korrigieren. Obwohl es nun aufgrund der mannigfaltigen Verfügbarkeit von Programmbibliotheken zur Datenanalyse prinzipiell ein einfaches ist, ein entsprechend abgeleitetes Modell für die normierten Sensorsignale an die normierten Meßdaten anzupassen, ist im vorliegenden Fall ein zusätzliches Maß an Überlegung erforderlich, um die möglicherweise zwischen den Meßdaten beider Sensoren vorhandenen Kovarianzen korrekt zu berücksichtigen.

In den meisten Fällen wird für die Anpassung eines skalarwertigen Modells an einen gegebenen Datensatz der  $\chi^2$ -Fit angewandt, bei dem die Teststatistik des  $\chi^2$ -Tests [155], die in geeigneten Fällen ein Maß für die Anpassungsgüte zwischen Modell und Daten ist, minimiert wird. Während es prinzipiell möglich ist, dieses Verfahren separat auf die Daten des Transmissionssensors und des Reflexionssensors anzuwenden und die resultierenden Parameterwerte anschließend zu mitteln, ist die Bestimmung der Unsicherheiten der so kombinierten Größen schwierig. Es ist jedoch möglich, das Fitverfahren auf vektorwertige Daten mit korrelierten Vektorkomponenten zu erweitern, wenn man berücksichtigt, daß die  $\chi^2$ -Minimierung als Sonderfall des allgemeineren *likelihood*-Fits (auch *negative log-likelihood*- oder *NLL*-Fit) angesehen werden kann.

Beim *NLL*-Fit wird ein Ausdruck für die *likelihood*, d. h. die Wahrscheinlichkeit<sup>21</sup>, daß sich im Rahmen einer Messung die vorliegenden Datenpunkte ergeben, wenn das zugrundegelegte Modell inklusive der gewählten Parameterwerte korrekt ist, gebildet. Diese *Likelihood-Funktion* wird dann durch Variation der Parameter maximiert bzw. deren negativer Logarithmus minimiert. Die Likelihood ist zwar nicht identisch mit der Wahrscheinlichkeit dafür, daß das Modell und die Parameterwerte im Lichte der vorliegenden Meßdaten korrekt sind, aber beide Größen sind proportional, so daß eine Maximierung der Likelihood auch die Wahrscheinlichkeit für die Korrektheit der Parameterwerte maximiert – wenngleich dieses Maximum beliebig klein sein kann, wenn das Modell falsch ist.

Zu Illustrationszwecken soll zunächst noch einmal die Likelihood-Funktion einer Serie von Messungen  $\{y_1, \dots, y_N\}$  einer skalarwertigen Meßgröße  $Y$  mit normalverteilten Unsicherheiten abgeleitet werden, deren Abhängigkeit von

---

<sup>21</sup>bei kontinuierlichen Größen die Wahrscheinlichkeitsdichte



einer gegebenen Eingangsgröße  $x$  untersucht werden möge. Unter normalverteilten Unsicherheiten ist (nach frequentistischer Sichtweise) zu verstehen, daß für einen gegebenen Datenpunkt die Abweichung zwischen dem Meßwert  $y$  und dem „wahren“ Wert der untersuchten Größe einer Normalverteilung unterliegt, deren Standardabweichung dann dem „Meßfehler“  $\sigma$  dieses Datenpunkts entspricht<sup>22</sup>. Wenn also angenommen wird, daß das Modell  $f(x; p_1, \dots, p_M)$  für die Abhängigkeit der untersuchten Größe zutrifft und die Parameterwerte  $\vec{p}$  korrekt sind, so ist die Wahrscheinlichkeit, beim  $i$ -ten Datenpunkt den Meßwert  $y_i$  zu erhalten, gerade

$$p(y_i | f(x; p_1, \dots, p_M)) dy_i = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_i} \exp\left(-\frac{(y_i - f(x_i; p_1, \dots, p_M))^2}{2\sigma_i^2}\right) dy_i$$

Unter der Annahme, daß die Messungen der einzelnen Datenpunkte untereinander unabhängig sind, ist die Wahrscheinlichkeit, den Datensatz  $\{y_1, \dots, y_N\}$  zu erhalten, das Produkt der Einzelpunkt-Wahrscheinlichkeiten

$$p(\{y_1, \dots, y_N\} | f) dy_1 \cdots dy_N = \prod_{i=1}^N \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_i} \exp\left(-\frac{(y_i - f(x_i; \vec{p}))^2}{2\sigma_i^2}\right) dy_i$$

Die Likelihood-Funktion ist demnach

$$\mathcal{L}(p_1, \dots, p_M) = \prod_{i=1}^N \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_i} \exp\left(-\frac{(y_i - f(x_i; p_1, \dots, p_M))^2}{2\sigma_i^2}\right)$$

und ihr negativer Logarithmus:

$$-\ln \mathcal{L}(p_1, \dots, p_M) = \text{const.} + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \frac{(y_i - f(x_i; p_1, \dots, p_M))^2}{\sigma_i^2}$$

Die Konstante umfaßt hierbei die Logarithmen der Vorfaktoren, die – da sie nicht von den zu variierenden Modellparametern abhängen – für die Likelihood-Maximierung irrelevant sind. Wie man erkennen kann, ist der relevante Teil der  $NLL$ -Funktion bis auf den Faktor  $1/2$  gleich der  $\chi^2$ -Teststatistik, wie sie beim  $\chi^2$ -Fit minimiert wird.

Analog dazu ist es nun auch möglich, eine Likelihood-Funktion für den hier vorliegenden zweidimensionalen Fall abzuleiten. Wie in Abs. 5.1 beschrieben,

<sup>22</sup>Ein gewisses Maß an Vorsicht bei dieser Aussage ist geboten, da der angegebene Meßfehler eines Meßwertes normalerweise nur eine Abschätzung der Unsicherheit darstellt.

sind die Datenpunkte von Transmissions- und Reflexionssensor bei einer gegebenen Winkelstellung  $\vartheta_i$  gerade die Komponenten des Mittelwerts  $\vec{m}_i$  der zugrundeliegenden Stichprobe normierter Sensorwerte. Da sichergestellt wurde, daß die verwendeten Stichproben multivariat normalverteilt sind, unterliegt die Unsicherheit dieses Mittelwerts – im Rahmen der hier verwendeten Näherung für große Stichproben – ebenfalls einer multivariaten Normalverteilung, deren Kovarianzmatrix durch die reduzierte Stichproben-Kovarianzmatrix gegeben ist. Wenn also angenommen wird, daß das Modell  $\vec{\mathcal{M}}$  inklusive der Parameterwerte  $\{p_k\}$  zutrifft und für eine gegebene Winkelstellung  $\vartheta_i$  die „wahren“ Sensorwerte liefert, und weiterhin angenommen wird, daß die Messungen bei verschiedenen Winkelstellungen untereinander unabhängig sind, so ist die Wahrscheinlichkeit, daß sich für den  $i$ -ten Datenpunkt gerade der Mittelwertvektor  $\vec{m}_i$  ergibt, durch

$$p\left(\vec{m}_i | \vec{\mathcal{M}}(\vartheta; \vec{p})\right) dt_i dr_i = \frac{1}{2\pi\sqrt{|\tilde{\Sigma}_i|}} \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\vec{m}_i - \vec{\mathcal{M}}(\vartheta_i)\right)^T \tilde{\Sigma}_i^{-1}\left(\vec{m}_i - \vec{\mathcal{M}}(\vartheta_i)\right)\right\} dt_i dr_i \quad (5.28)$$

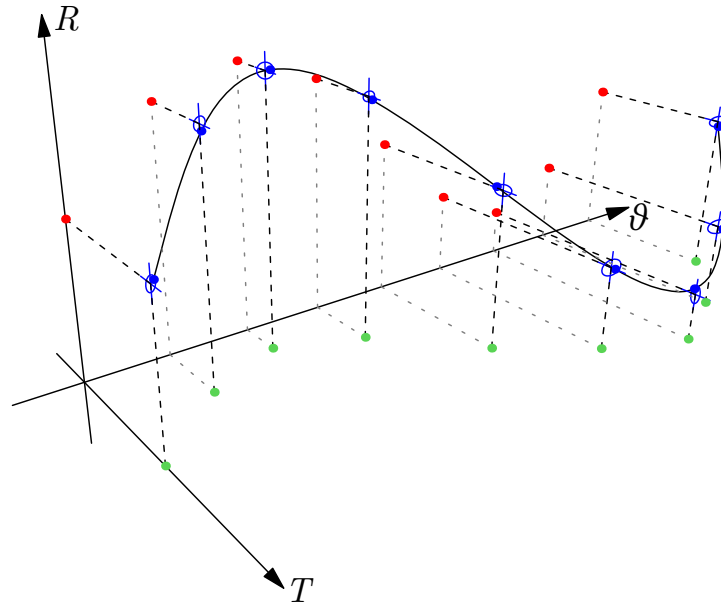
gegeben. Die Likelihood-Funktion für die Daten einer komplette Stokesmessung ist demnach

$$\mathcal{L}(p_1, \dots, p_M) = \prod_{i=1}^N \frac{1}{2\pi\sqrt{|\tilde{\Sigma}_i|}} \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\vec{m}_i - \vec{\mathcal{M}}(\vartheta_i)\right)^T \tilde{\Sigma}_i^{-1}\left(\vec{m}_i - \vec{\mathcal{M}}(\vartheta_i)\right)\right\} \quad (5.29)$$

und ihr negativer Logarithmus (unter Vernachlässigung der irrelevanten Konstante):

$$F := -\ln \mathcal{L}(p_1, \dots, p_M) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \left(\vec{m}_i - \vec{\mathcal{M}}(\vartheta_i)\right)^T \tilde{\Sigma}_i^{-1} \left(\vec{m}_i - \vec{\mathcal{M}}(\vartheta_i)\right) \quad (5.30)$$

Durch Verwendung dieser Likelihood-Funktion kann somit ein simultaner Fit der Modelle für das Transmissions- und Reflexionssignal an die Datenpunkte des Transmissions- und Reflexionssensors durchgeführt werden, der die Kovarianz zwischen den Unsicherheiten des jeweiligen Transmissions- und Reflexionsmeßwerts berücksichtigt. Das Verfahren kann graphisch als Anpassung einer in expliziter Darstellung vorliegenden Raumkurve an eine Punktspur im dreidimensionalen Raum, deren Punkte jeweils von einer senkrecht zur  $z$ -Achse liegenden  $1\sigma$ -Fehlerellipse umgeben sind, interpretiert werden (siehe Abb. 5.3). Da die Likelihood-Funktion auch formal als solche abgeleitet wurde und demnach die korrekten Normierungseigenschaften besitzt,



**Abbildung 5.3:** Graphische Interpretation des korrelierten Fitverfahrens.

können auch Unsicherheiten für die so bestimmten Modellparameter ermittelt werden, indem das übliche Verfahren, die Parameter einzeln zu variieren, bis sich die  $NLL$  um 0.5 gegenüber dem Minimum vergrößert hat [95], angewandt wird.

Im Falle der vorliegenden Datenanalyse wird für diese Abläufe die vom *ROOT*-Softwarepaket zur Verfügung gestellte Implementierung des *Minuit*-Fitters [96]<sup>23</sup> verwendet. Hierbei lässt sich die Geschwindigkeit des Fitvorgangs beschleunigen, die Wahrscheinlichkeit eines Fehlschlags verringern und die Unsicherheit der resultierenden Fitparameter verbessern, indem der Gradient der  $NLL$  in analytischer Form vorgegeben wird<sup>24</sup>. Er ist durch

$$\left. \frac{\partial F}{\partial p_k} \right|_{\vec{p}} = - \sum_{i=1}^N \left( \left. \frac{\partial \vec{\mathcal{M}}}{\partial p_k} \right|_{\vartheta_i; \vec{p}} \right)^T \tilde{\Sigma}_i^{-1} \left( \vec{m}_i - \vec{\mathcal{M}}(\vartheta_i; \vec{p}) \right) \quad (5.31)$$

gegeben, wobei  $\partial \vec{\mathcal{M}} / \partial p_k$  die partiellen Ableitungen des betrachteten Modells nach dessen Fitparametern sind. Die Korrektheit des analytischen Gradienten wurde im Rahmen der Analyse auch mittels numerischer Methoden sichergestellt (siehe Anhang B.3).

<sup>23</sup>Klasse `MnMigrad` aus dem *Minuit2*-Paket

<sup>24</sup>Hierfür wird die Zielfunktion in Form einer von `FCNGradientBase` aus dem *Minuit2*-Paket abgeleiteten Objektklasse umgesetzt.

Wie bereits in Abs. 5.1.5 erwähnt wurde, unterliegt die Unsicherheit der Mittelwerte  $\vec{m}_i$  tatsächlich nur näherungsweise einer multivariaten Normalverteilung. Es ist nun prinzipiell möglich, bei der Aufstellung der Likelihood-Funktion die exakte Beschreibung mittels der Verteilungseigenschaften der  $T^2$ -Statistik einfließen zu lassen. Dies wäre allerdings mit deutlichem analytischem und numerischem Mehraufwand verbunden, da hier die Wahrscheinlichkeitsdichte der  $T^2$ -Statistik um einen Azimutalterm erweitert und dann das differentielle Raumelement auf kartesische Koordinaten transformiert werden müßte. Da der Gewinn an Genauigkeit als gering einzuschätzen ist, wurde in diesem Fall darauf verzichtet.

### 5.2.3 Ableitung des Fitmodells

Nachdem nun das *Fitverfahren* erklärt wurde, muß im folgenden noch das *Fitmodell* abgeleitet werden, anhand dessen die Meßdaten analysiert werden sollen. Prinzipiell gelten hierfür dieselben Überlegungen, die bereits in Abs. 4.3 angestellt wurden; allerdings wurde dort von idealen optischen Elementen ausgegangen und auch andere Aspekte einer realen Meßapparatur vernachlässigt. In einem ersten Schritt soll daher eine realistischere Beschreibung der relevanten polarisationsoptischen Elemente entwickelt werden, die dann zur Konstruktion des eigentlichen Modells herangezogen wird.

#### Realistisches Glan-Laser-Prisma

In Abs. 4.2.2 wurde bereits angesprochen, daß ein realer Linearpolarisator alleine schon aufgrund der Reflexionsverluste an den Glas-Luft-Oberflächen keine vollständige Transmission der erwünschten Komponente aufweisen wird und daß andererseits auch die unerwünschte Komponente im transmittierten Strahl nie vollständig eliminiert werden kann. Daher ist statt der Mueller-Matrix des idealen Polarisators (Gl. 4.16) diejenige des unvollkommenen Polarisators

$$M_{lin,imp} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} f_x^2 + f_y^2 & f_x^2 - f_y^2 & 0 & 0 \\ f_x^2 - f_y^2 & f_x^2 + f_y^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2f_x f_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2f_x f_y \end{pmatrix} \quad (5.32)$$

zu verwenden, wobei  $f_x$  und  $f_y$  die *Amplituden-Transmissionskoeffizienten* in  $x$ - bzw.  $y$ -Richtung sind; ein analoger Ausdruck gilt für den reflektierten Lichtstrahl.

$f_{trSP}$	Amplituden-Transmissionskoeffizient für die gewünschte (d. h. durchzulassende) Polarisationskomponente
$f_{lkSP}$	„Leckage“, d. h. Transmissionskoeffizient für die eigentlich zu verwerfende Polarisationskomponente
$f_{rfSP}$	Amplituden-Reflexionskoeffizient für die aus der Transmissionsrichtung zu entfernende Polarisationskomponente
$f_{prSP}$	parasitärer Reflexionskoeffizient für die eigentlich durchzulassende Polarisationskomponente

**Tabelle 5.4:** Erklärung der Parameter, die zur Modellierung des Stokesmeter-Prismas verwendet werden. Die Koeffizienten haben hier die Bedeutung „totaler“ Transmissions- bzw. Reflexionskoeffizienten und beinhalten alle Einflüsse, die die jeweiligen Feldamplituden zwischen der Eintritts- und der entsprechenden Austrittsfläche dämpfen können.

Wie in Abs. 4.4 erwähnt, ist das Stokesmeter-Prisma so orientiert, daß seine Durchlaßrichtung parallel zur  $y$ -Achse liegt; für den auf den Transmissionsensor auftreffenden Teilstrahl wird es daher durch

$$M_{SP}^{trans} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} f_{SP+}^2 & f_{SP-}^2 & 0 & 0 \\ f_{SP-}^2 & f_{SP+}^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2f_{trSP}f_{lkSP} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2f_{trSP}f_{lkSP} \end{pmatrix} \quad (5.33)$$

beschrieben, während für die Modellierung des Reflexionssignals folgende Matrix einzusetzen ist:

$$M_{SP}^{ref} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} f_{SPr+}^2 & f_{SPr-}^2 & 0 & 0 \\ f_{SPr-}^2 & f_{SPr+}^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2f_{rfSP}f_{prSP} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2f_{rfSP}f_{prSP} \end{pmatrix} \quad (5.34)$$

Die Bedeutung der in diesen Matrizen auftretenden Größen ist in Tabelle 5.4 erklärt, wobei zusätzlich die Abkürzungen

$$\begin{aligned} f_{SP+}^2 &:= f_{trSP}^2 + f_{lkSP}^2 & f_{SPr+}^2 &:= f_{rfSP}^2 + f_{prSP}^2 \\ f_{SP-}^2 &:= -f_{trSP}^2 + f_{lkSP}^2 & f_{SPr-}^2 &:= f_{rfSP}^2 - f_{prSP}^2 \end{aligned}$$

verwendet wurden.

Es ist zu beachten, daß einige der in Abs. 4.2.2 angeführten Effekte wie etwa Depolarisation oder Phasenverzögerungen hier nicht berücksichtigt wurden, da sie einerseits bei hochwertigen Polarisatoren wie den hier verwendeten Prismen sehr klein sind und sie andererseits weder in den Spezifikationen

der Hersteller aufgeführt werden noch mit vertretbarem Aufwand selbst gemessen werden könnten.

### Realistische Wellenplatte

Bei einer realen Wellenplatte – zumal einer „Wellenplatte nullter Ordnung“, die aus zwei doppelbrechenden Elementen zusammengesetzt ist – muß davon ausgegangen werden, daß die resultierende Verzögerung nicht exakt eine Viertelwellenlänge beträgt. Außerdem ist, wie in Abs. 4.2.3 beschrieben, die Transmission für die Polarisationskomponente parallel und senkrecht zur schnellen Achse nicht exakt gleich; beide Effekte können durch eine Abweichung vom senkrechten Einfall des Lichtstrahls noch verstärkt werden.

Um dies in der Analyse zu berücksichtigen, wird die realistische Wellenplatte als Abfolge einer anisotropen Transmission an der Eintrittsseite (modellierbar als unvollkommener Linearpolarisator), einer reinen Wellenplatte mit willkürlicher Verzögerung und wiederum einer anisotropen Transmission an der Austrittsseite beschrieben. Unter der Annahme, daß die schnelle Achse in  $x$ -Richtung orientiert ist, sind die relevanten Mueller-Matrizen wie folgt gegeben:

$$M_{tr,E/A} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} t_{f,E/A}^2 + t_{s,E/A}^2 & t_{f,E/A}^2 - t_{s,E/A}^2 & 0 & 0 \\ t_{f,E/A}^2 - t_{s,E/A}^2 & t_{s,E/A}^2 + t_{f,E/A}^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2t_{f,E/A}t_{s,E/A} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2t_{f,E/A}t_{s,E/A} \end{pmatrix}$$

$$M_{Verz}(\Delta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \Delta & \sin \Delta \\ 0 & 0 & -\sin \Delta & \cos \Delta \end{pmatrix}$$

Die Darstellung einer realistischen Wellenplatte ergibt sich dann als Verkettung der o. g. Effekte gemäß

$$M_{WP,x} = M_{tr,A} M_{Verz}(\Delta_{WP}) M_{tr,E} \quad (5.35)$$

was sich unter Verwendung der Abkürzungen

$$\begin{aligned} t_{WPf} &:= t_{f,E} t_{f,A} \\ t_{WPs} &:= t_{s,E} t_{s,A} \\ t_{WP+}^2 &:= t_{WPf}^2 + t_{WPs}^2 \\ t_{WP-}^2 &:= t_{WPf}^2 - t_{WPs}^2 \end{aligned}$$

$t_{WPf}$	Amplituden-Transmissionskoeffizient entlang der schnellen Achse
$t_{WP_s}$	Amplituden-Transmissionskoeffizient entlang der langsamen Achse
$\Delta_{WP}$	tatsächliche Verzögerung der Wellenplatte

**Tabelle 5.5:** Bedeutung der Modellparameter der Stokesmeter-Wellenplatte, in Analogie zu Tab. 5.4

zu folgendem Ausdruck vereinfachen läßt:

$$M_{WP,x} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} t_{WP+}^2 & t_{WP-}^2 & 0 & 0 \\ t_{WP-}^2 & t_{WP+}^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2t_{WPf}t_{WP_s} \cos \Delta_{WP} & 2t_{WPf}t_{WP_s} \sin \Delta_{WP} \\ 0 & 0 & -2t_{WPf}t_{WP_s} \sin \Delta_{WP} & 2t_{WPf}t_{WP_s} \cos \Delta_{WP} \end{pmatrix} \quad (5.36)$$

### Fitmodell für Stokesmessungen

Auf Grundlage der in den letzten Abschnitten gefundenen Ausdrücke ist es nun möglich, eine realistischere Beschreibung der während einer Messung auf die Sensoren auftreffenden Lichtintensität herzuleiten. In Analogie zur Vorgehensweise in Abs. 4.3 wird hierfür wieder betrachtet, wie sich der Stokes-Vektor  $\vec{S}_0$  eines beliebigen einfallenden Polarisationszustands beim Durchlaufen des Transmissions- bzw. Reflexionskanals des Stokesmeters in Abhängigkeit der Wellenplatten-Orientierung ändert:

$$\begin{aligned} \vec{S}_{tr}^{SM}(\vartheta_{WP}) &= M_{SP}^{tr} M_{rot}(-\vartheta_{WP}) M_{WP,x} M_{rot}(\vartheta_{WP}) \vec{S}_0 \quad \text{bzw.} \\ \vec{S}_{ref}^{SM}(\vartheta_{WP}) &= M_{SP}^{ref} M_{rot}(-\vartheta_{WP}) M_{WP,x} M_{rot}(\vartheta_{WP}) \vec{S}_0 \end{aligned} \quad (5.37)$$

Durch Einsetzen der entsprechenden Matrizen ergeben sich dann folgende

Ausdrücke für die Intensitäten:

$$\begin{aligned}
 I_{tr}^{SM}(\vartheta_{WP}) = & \frac{1}{4} \left\{ (f_{SP+}^2 t_{WP+}^2 + f_{SP-}^2 t_{WP-}^2 \cos 2\vartheta_{WP}) I_0 \right. \\
 & + [f_{SP+}^2 t_{WP-}^2 \cos 2\vartheta_{WP} + f_{SP-}^2 t_{WP+}^2 \cos^2(2\vartheta_{WP}) \\
 & \quad \left. + 2f_{SP-}^2 t_{WPf} t_{WP_s} \cos \Delta_{WP} \sin^2(2\vartheta_{WP})] Q_0 \right. \\
 & + [f_{SP+}^2 t_{WP-}^2 + \\
 & \quad \left. f_{SP-}^2 (t_{WP+}^2 - 2t_{WPf} t_{WP_s} \cos \Delta_{WP}) \cos 2\vartheta_{WP}] \sin 2\vartheta_{WP} U_0 \right. \\
 & \left. - 4f_{SP-}^2 t_{WPf} t_{WP_s} \cos \vartheta_{WP} \sin \vartheta_{WP} \sin \Delta_{WP} V_0 \right\}
 \end{aligned} \tag{5.38}$$

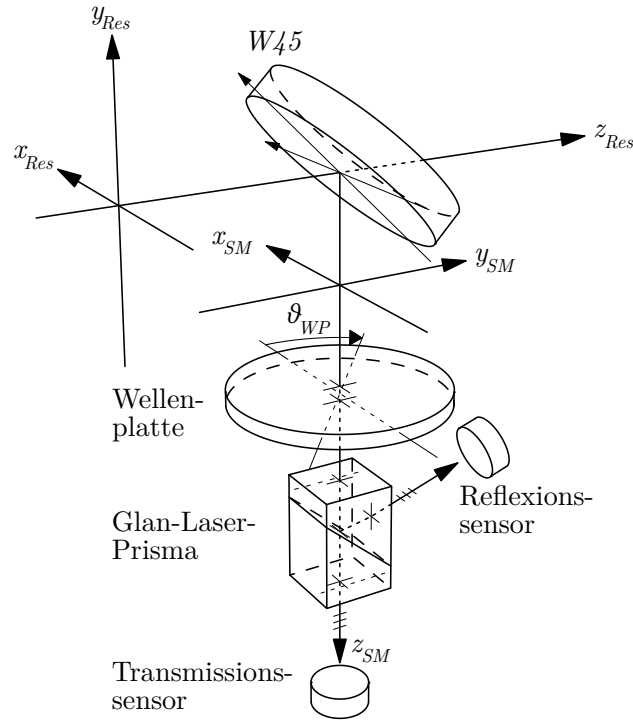
$$\begin{aligned}
 I_{ref}^{SM}(\vartheta_{WP}) = & \frac{1}{4} \left\{ (f_{SPr+}^2 t_{WP+}^2 + f_{SPr-}^2 t_{WP-}^2 \cos 2\vartheta_{WP}) I_0 \right. \\
 & + [f_{SPr+}^2 t_{WP-}^2 \cos 2\vartheta_{WP} + f_{SPr-}^2 t_{WP+}^2 \cos^2(2\vartheta_{WP}) \\
 & \quad \left. + 2f_{SPr-}^2 t_{WPf} t_{WP_s} \cos \Delta_{WP} \sin^2(2\vartheta_{WP})] Q_0 \right. \\
 & + [f_{SPr+}^2 t_{WP-}^2 + \\
 & \quad \left. f_{SPr-}^2 (t_{WP+}^2 - 2t_{WPf} t_{WP_s} \cos \Delta_{WP}) \cos 2\vartheta_{WP}] \sin 2\vartheta_{WP} U_0 \right. \\
 & \left. - 4f_{SPr-}^2 t_{WPf} t_{WP_s} \cos \vartheta_{WP} \sin \vartheta_{WP} \sin \Delta_{WP} V_0 \right\}
 \end{aligned} \tag{5.39}$$

Der Winkel  $\vartheta_{WP}$  ist hierbei wieder der Winkel zwischen der  $x$ -Achse des Stokesmeters und der schnellen Achse der  $\lambda/4$ -Platte. Die Definition des Geräte-Koordinatensystems ist in Abb. 5.4 erläutert und so gewählt, daß der transversale Anteil der Koordinaten so weit wie möglich dieselbe Bedeutung wie *vor* der Reflexion am Vakuumfenster  $W45$  hat und dennoch zusammen mit der Ausbreitungsrichtung des Strahls, die eine natürliche Definition der  $z$ -Achse darstellt, ein rechtshändiges Koordinatensystem bildet; dies gelingt auch bis auf einen Vorzeichenwechsel bei der  $y$ -Achse.

Wie man sieht, treten in den Ausdrücken für die Intensitäten nur gerade Ordnungen der Modulationsfrequenz auf. Dies ist auch unmittelbar einzu- sehen, da die schnelle Achse der  $\lambda/4$ -Platte eine Vorzugsrichtung innerhalb des Kristallgitters darstellt, die in sich ungerichtet ist, so daß es keine von der Parallelstellung unterscheidbare „Antiparallelstellung“ gibt. Somit ist ihre Lage nur bis auf  $\pm 180^\circ$  bestimmt, was sich auch im Modell widerspiegeln muß.

Es ist nun zu beachten, daß die in Gl. 5.38 bzw. 5.39 angegebenen Intensitäten *nicht* die eigentlich zu modellierenden Größen sind; vielmehr muß das





**Abbildung 5.4:** Schematische Darstellung der funktionalen Elemente des Stokesmeter MkII zwecks Definition des Geräte-Koordinatensystems. Dieses ist so gewählt, daß die Bedeutung von  $x_{SM}$  und  $y_{SM}$  bis auf einen Vorzeichenwechsel mit den entsprechenden Achsen des Resonator-Koordinatensystems übereinstimmt.

hier abzuleitende Fitmodell die normierten digitalisierten Sensorsignale

$$\begin{aligned}\tilde{\mathcal{T}}^{SM}(\vartheta_{WP}) &= g_{tr} \frac{I_{trans}^{SM}(\vartheta_{WP})}{I_0} \\ \tilde{\mathcal{R}}^{SM}(\vartheta_{WP}) &= g_{ref} \frac{I_{ref}^{SM}(\vartheta_{WP})}{I_0}\end{aligned}\quad (5.40)$$

beschreiben.

Da die Meßdaten in Abhängigkeit der Drehtisch-Orientierung in Encoderkoordinaten  $\Theta_{EWP}$  vorliegen, muß zunächst eine Kalibration der Winkelskala durchgeführt werden. Dabei ist zu beachten, daß diese Skala bei dem hier verwendeten Drehtisch die inverse Orientierung aufweist; außerdem ist, wie in Abs. 4.4.1 bereits erwähnt, die Einbaulage der  $\lambda/4$ -Platte innerhalb der Halterung *a priori* unbestimmt, so daß die Winkelposition des Drehtischs nur bis auf eine additive Konstante mit der Richtung der schnellen Achse der Wel-

lenplatte übereinstimmt. Es gilt daher der folgende Zusammenhang zwischen der Winkelkoordinate des Drehtischs und der tatsächlichen Orientierung der  $\lambda/4$ -Platte (vgl. hierzu Abs. 5.3.2):

$$\vartheta_{WP} = 2\pi \left( 1 - \frac{\Theta_{EWP} - \Theta_{0WP}}{\Theta_{WPfull}} \right) \quad (5.41)$$

Bei der Konstruktion des Modells ist nun zusätzlich zu beachten, daß einige der in Gl. 5.38 – 5.40 aufgeführten Parameter unbekannt sind und nicht oder nur mit unverhältnismäßigem Aufwand bestimmt werden könnten. Man kann allerdings zeigen, daß diese Schwierigkeit durch geeignete Wahl der Fitparameter umgangen werden kann, indem unbestimmbare Parameter in allgemeine Normierungskonstanten absorbiert werden (siehe hierzu Abs. 5.3). Aufgrund dieser Überlegungen ergibt sich folgendes Modell für die Analyse der Stokes-Meßdaten:

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{T}}^{SM}(\vartheta_{WP}) = N_{tr}^{SM} \left\{ f_{SP+}^2 (1 + k_{WP}^2) + \frac{1}{2} f_{SP-}^2 (1 + k_{WP}^2 + 2k_{WP} \cos \Delta_{WP}) q_0 \right. \\ + (1 - k_{WP}^2) (f_{SP-}^2 + f_{SP+}^2 q_0) \cos 2\vartheta_{WP} \\ + [(1 - k_{WP}^2) f_{SP+}^2 u_0 - 2k_{WP} f_{SP-}^2 \sin \Delta_{WP} v_0] \sin 2\vartheta_{WP} \\ + \frac{1}{2} f_{SP-}^2 (1 + k_{WP}^2 - 2k_{WP} \cos \Delta_{WP}) \times \\ \left. \times (q_0 \cos 4\vartheta_{WP} + u_0 \sin 4\vartheta_{WP}) \right\} \quad (5.42) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{R}}^{SM}(\vartheta_{WP}) = N_{ref}^{SM} \left\{ (1 + k_{SPr}^2) (1 + k_{WP}^2) \right. \\ + \frac{1}{2} (1 - k_{SPr}^2) (1 + k_{WP}^2 + 2k_{WP} \cos \Delta_{WP}) q_0 \\ + (1 - k_{WP}^2) [1 - k_{SPr}^2 + (1 + k_{SPr}^2) q_0] \cos 2\vartheta_{WP} \\ + [(1 - k_{WP}^2) (1 + k_{SPr}^2) u_0 - 2k_{WP} (1 - k_{SPr}^2) \sin \Delta_{WP} v_0] \times \\ \times \sin 2\vartheta_{WP} \\ + \frac{1}{2} (1 - k_{SPr}^2) (1 + k_{WP}^2 - 2k_{WP} \cos \Delta_{WP}) \times \\ \left. \times (q_0 \cos 4\vartheta_{WP} + u_0 \sin 4\vartheta_{WP}) \right\} \quad (5.43) \end{aligned}$$

Dieses Modell enthält insgesamt fünf Fitparameter, von denen die beiden Normierungskonstanten allerdings nur Nebenresultate sind:

$\Theta_{0WP}$	Winkelabstand zwischen schneller Achse der $\lambda/4$ -Platte und Referenzposition des Drehtischs, in Encodereinheiten
$\Theta_{WPfull}$	Anzahl Encoderschritte pro vollständiger Umdrehung
$\Delta_{WP}$	tatsächliche Verzögerung der $\lambda/4$ -Platte
$k_{WP} := \frac{t_{WP_s}}{t_{WP_f}}$	Transmissions-Anisotropie der $\lambda/4$ -Platte
$f_{trSP}$	Transmissionskoeffizient des Stokesmeter-Prismas
$f_{lkSP}$	parasitärer Transmissionskoeffizient des Stokesmeter-Prismas
$k_{SP_r} := \frac{f_{prSP}}{f_{rfSP}}$	relativer parasitärer Reflexionskoeffizient des Stokesmeter-Prismas

**Tabelle 5.6:** Erläuterung der Kalibrationskonstanten, die in die Analyse der Stokes-Polarisationsmessung eingehen.

Transmissions-Normierungskonstante	: $N_{tr}^{SM} := \frac{1}{4}g_{tr}t_{WP_f}^2$
Reflexions-Normierungskonstante	: $N_{ref}^{SM} := \frac{1}{4}g_{ref}t_{WP_f}^2f_{rfSP}^2$
Polarisationszustand des untersuchten Strahls	: $q_0, u_0, v_0$

Die anderen Größen in Gl. 5.42 und 5.43 sind Kalibrationskonstanten, deren Bedeutung in Tabelle 5.6 erläutert wird; auf ihre Bestimmung wird in Abs. 5.3 näher eingegangen.

### Bestimmung der Startwerte

Aufgrund der Komplexität des so abgeleiteten Fitmodells ist es unabdingbar, der Minimierungsroutine geeignete Startwerte für die Fitparameter zur Verfügung zu stellen. Da die Meßdaten hier in Form eines amplitudenmodulierten Signals vorliegen, bietet es sich an, mittels einer harmonischen Analyse Näherungswerte für die Modulationsamplituden zu bestimmen, anhand derer dann Schätzwerte für die Fitparameter berechnet werden können. Im vorliegenden Fall ist allerdings zu berücksichtigen, daß die hierfür üblicherweise geforderte Äquidistanz der Abtastpunkte nur näherungsweise gegeben ist und aufgrund der Einzelpunkt-Qualitätskontrolle teilweise sogar explizite Lücken in der Meßreihe auftreten können; aus diesem Grund wurde hier ein

abgewandeltes Verfahren angewandt, das in Anhang B.1 näher beschrieben ist.

Um nun Startwerte aus den so ermittelten Modulationsamplituden berechnen zu können, muß das Fitmodell zunächst gemäß

$$\begin{aligned}\tilde{\mathcal{T}}^{SM}(\vartheta_{WP}) &= \frac{a_{0t}^{SM}}{2} + \sum_{k=1}^n (a_{kt}^{SM} \cos k\vartheta_{WP} + b_{kt}^{SM} \sin k\vartheta_{WP}) \\ \tilde{\mathcal{R}}^{SM}(\vartheta_{WP}) &= \frac{a_{0r}^{SM}}{2} + \sum_{k=1}^n (a_{kr}^{SM} \cos k\vartheta_{WP} + b_{kr}^{SM} \sin k\vartheta_{WP})\end{aligned}\quad (5.44)$$

in seine harmonischen Komponenten zerlegt werden, wobei im Falle der Analyse von Polarisationsmessungen nur die geraden Ordnungen bis maximal  $k = 4$  auftreten können. Für den hier vorliegenden Fall kann man aus Gl. 5.42 und 5.43 nahezu direkt die resultierenden 10 Amplituden ablesen:

$$\begin{aligned}a_{0t}^{SM} &= 2N_{tr}^{SM} \left[ f_{SP+}^2 (1 + k_{WP}^2) + \frac{1}{2} f_{SP-}^2 (1 + k_{WP}^2 + 2k_{WP} \cos \Delta_{WP}) q_0 \right] \\ a_{2t}^{SM} &= N_{tr}^{SM} (1 - k_{WP}^2) (f_{SP-}^2 + f_{SP+}^2 q_0) \\ b_{2t}^{SM} &= N_{tr}^{SM} [(1 - k_{WP}^2) f_{SP+}^2 u_0 - 2k_{WP} f_{SP-}^2 \sin \Delta_{WP} v_0] \\ a_{4t}^{SM} &= \frac{1}{2} N_{tr}^{SM} f_{SP-}^2 (1 + k_{WP}^2 - 2k_{WP} \cos \Delta_{WP}) q_0 \\ b_{4t}^{SM} &= \frac{1}{2} N_{tr}^{SM} f_{SP-}^2 (1 + k_{WP}^2 - 2k_{WP} \cos \Delta_{WP}) u_0\end{aligned}\quad (5.45)$$

$$\begin{aligned}a_{0r}^{SM} &= 2N_{ref}^{SM} \left[ (1 + k_{SPr}^2) (1 + k_{WP}^2) \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} (1 - k_{SPr}^2) (1 + k_{WP}^2 + 2k_{WP} \cos \Delta_{WP}) q_0 \right] \\ a_{2r}^{SM} &= N_{ref}^{SM} (1 - k_{WP}^2) [(1 - k_{SPr}^2) + (1 + k_{SPr}^2) q_0] \\ b_{2r}^{SM} &= N_{ref}^{SM} [(1 - k_{WP}^2) (1 + k_{SPr}^2) u_0 - 2k_{WP} (1 - k_{SPr}^2) \sin \Delta_{WP} v_0] \\ a_{4r}^{SM} &= \frac{1}{2} N_{ref}^{SM} (1 - k_{SPr}^2) (1 + k_{WP}^2 - 2k_{WP} \cos \Delta_{WP}) q_0 \\ b_{4r}^{SM} &= \frac{1}{2} N_{ref}^{SM} (1 - k_{SPr}^2) (1 + k_{WP}^2 - 2k_{WP} \cos \Delta_{WP}) u_0\end{aligned}\quad (5.46)$$

Dieses Gleichungssystem müßte nun nach den Fitparametern aufgelöst werden, wobei sich für jeden Parameter mit Ausnahme der Normierungskonstanten sowohl eine Abschätzung anhand des Transmissions- als auch des Reflexionssignals ergäbe. Die Gleichungen sind allerdings sehr unhandlich und kaum

zu invertieren; aus diesem Grund macht man sich zunutze, daß die nichtidealen Eigenschaften der optischen Elemente sehr klein sind und im Falle dieser Startwert-Abschätzung auch vernachlässigt werden können. Die idealisierten Amplituden sehen dann wie folgt aus:

$$\begin{aligned}
 a_{0t,id}^{SM} &= 2N_{tr}^{SM} f_{trSP}^2 (2 - q_0) & a_{0r,id}^{SM} &= 2N_{ref}^{SM} (2 + q_0) \\
 a_{2t,id}^{SM} &= 0 & a_{2r,id}^{SM} &= 0 \\
 b_{2t,id}^{SM} &= 2N_{tr}^{SM} f_{trSP}^2 v_0 & b_{2r,id}^{SM} &= -2N_{ref}^{SM} v_0 \\
 a_{4t,id}^{SM} &= -N_{tr}^{SM} f_{trSP}^2 q_0 & a_{4r,id}^{SM} &= N_{ref}^{SM} q_0 \\
 b_{4t,id}^{SM} &= -N_{tr}^{SM} f_{trSP}^2 u_0 & b_{4r,id}^{SM} &= N_{ref}^{SM} u_0
 \end{aligned} \tag{5.47}$$

Hieraus lassen sich nun problemlos Ausdrücke für die Startwerte ableiten:

$$\begin{aligned}
 \hat{N}_{tr}^{SM} &= \frac{a_{0t,id}^{SM} - 2a_{4t,id}^{SM}}{4f_{trSP}^2} \\
 \hat{N}_{ref}^{SM} &= \frac{1}{4} (a_{0r,id}^{SM} - 2a_{4r,id}^{SM}) \\
 \hat{q}_0^{SM} &= -\frac{4a_{4t,id}^{SM}}{a_{0t,id}^{SM} - 2a_{4t,id}^{SM}} = \frac{4a_{4r,id}^{SM}}{a_{0r,id}^{SM} - 2a_{4r,id}^{SM}} \\
 \hat{u}_0^{SM} &= -\frac{4b_{4t,id}^{SM}}{a_{0t,id}^{SM} - 2a_{4t,id}^{SM}} = \frac{4b_{4r,id}^{SM}}{a_{0r,id}^{SM} - 2a_{4r,id}^{SM}} \\
 \hat{v}_0^{SM} &= \frac{2b_{2t,id}^{SM}}{a_{0t,id}^{SM} - 2a_{4t,id}^{SM}} = -\frac{2b_{2r,id}^{SM}}{a_{0r,id}^{SM} - 2a_{4r,id}^{SM}}
 \end{aligned} \tag{5.48}$$

Die harmonische Analyse liefert neben den Amplitudenschätzwerten selbst auch ein Maß für die Güte dieser Abschätzungen. Diese können dann verwendet werden, um mittels Gauß'scher Fehlerfortpflanzung eine entsprechende Anfangs-Unsicherheit der Fitparameter-Startwerte anzugeben, wie sie für das im Rahmen dieser Analyse verwendete Minimierungsverfahren erforderlich ist.

### 5.2.4 Beurteilung der Fitgüte

Da in der vorliegenden Analyse von multivariat normalverteilten Unsicherheiten der gemessenen Datenpunkte ausgegangen wird, ist es möglich, einen Test zur Beurteilung der Fitgüte analog zum  $\chi^2$ -Test [155] zu konstruieren. Diesem Test liegt die folgende Überlegung zugrunde: es sei

$$\vec{X} \sim \mathcal{N}_d(\vec{\mu}, \Sigma) \tag{5.49}$$

eine  $d$ -dimensional normalverteilte Zufallsgröße mit Erwartungswert  $\vec{\mu}$  und Kovarianzmatrix  $\Sigma$ . Dann ist die quadratische Mahalanobis-Distanz von  $\vec{X}$  zum Erwartungswert  $\vec{\mu}$  bezüglich  $\Sigma$ ,

$$C^2 := \left(\vec{X} - \vec{\mu}\right)^T \Sigma^{-1} \left(\vec{X} - \vec{\mu}\right) \quad (5.50)$$

ebenfalls eine Zufallsgröße, die ihrerseits einer  $\chi^2$ -Verteilung mit  $d$  Freiheitsgraden unterliegt [98, Kap. 4.6]. Falls also das Modell  $\vec{\mathcal{M}}(\vartheta; \vec{p})$  die korrekte Beschreibung der Daten darstellt und die Meßfehler aller Datenpunkte zweidimensional normalverteilt, durch  $\{\tilde{\Sigma}_1, \dots, \tilde{\Sigma}_N\}$  korrekt beschrieben und untereinander unabhängig sind, so sind alle Abweichungen

$$\vec{m}_i - \vec{\mathcal{M}}(\vartheta_i; \vec{p})$$

der Meßwerte von der Modellvorhersage alleine durch statistische Schwankungen im Rahmen des Meßprozesses bedingt und entstammen daher einer zweidimensionalen Normalverteilung mit Erwartungswert 0 und Kovarianzmatrix  $\tilde{\Sigma}_i$ . Die zugehörigen quadratischen Mahalanobis-Distanzen bezüglich  $\tilde{\Sigma}_i$  entstammen demnach der  $\chi^2$ -Verteilung mit 2 Freiheitsgraden.

Eine Summe unabhängiger,  $\chi^2$ -verteilter Zufallsgrößen ist nun selbst ebenfalls eine  $\chi^2$ -verteilte Größe, wobei die „Anzahl der Freiheitsgrade“ der resultierenden Verteilung gerade durch die Summe der Freiheitsgrade derjenigen Verteilungen, denen die aufaddierten Größen unterliegen, gegeben ist. Daher ist unter der o. g. Nullhypothese die Summe der quadratischen Mahalanobis-Distanzen

$$c_{N,2}^2 := \sum_{i=1}^N \left(\vec{m}_i - \vec{\mathcal{M}}(\vartheta_i; \vec{p})\right)^T \tilde{\Sigma}_i^{-1} \left(\vec{m}_i - \vec{\mathcal{M}}(\vartheta_i; \vec{p})\right) \quad (5.51)$$

eine Zufallsgröße, die der  $\chi^2$ -Verteilung mit  $2N$  Freiheitsgraden unterliegt. Man kann diese Größe demnach für einen Test der Fitgüte verwenden, indem man sie analog zum klassischen univariaten Fall dem  $\chi^2$ -Test auf einem geeigneten Signifikanzniveau unterwirft und prüft, ob sie in den Ablehnungsbereich fällt<sup>25</sup>. Ein Vorteil dieses Tests ist, daß die Teststatistik gerade dem Doppelten der  $NLL$  (siehe Gl. 5.30) entspricht und somit ohne weiteren Programmieraufwand verfügbar ist.

---

<sup>25</sup>Hierbei wird sinnvollerweise ein beidseitiger Test durchgeführt. Obwohl kontraintuitiv, deutet auch ein extrem kleiner Wert des „multivariaten  $\chi^2$ “ auf eine Verletzung der Hypothese hin: entweder sind die ermittelten Meßfehler zu groß, oder das Modell versucht fälschlicherweise, die unvermeidlichen, aber *per definitionem* nicht vorhersagbaren statistischen Fluktuationen der Meßwerte mitzumodellieren.

Genau wie im univariaten Fall ist nun zu berücksichtigen, daß sich die Verteilung der Teststatistik ändert, wenn die Parameter der zu prüfenden Modellfunktion erst anhand der Meßdaten ermittelt werden. Im univariaten Fall stellt sich hierbei heraus, daß es sich immer noch um eine  $\chi^2$ -Verteilung handelt, wobei aber die „Anzahl der Freiheitsgrade“ der Verteilung gerade um die Anzahl der Fitparameter zu reduzieren ist<sup>26</sup>. Im vorliegenden multivariaten Fall hängen nun manche der Fitparameter – die Normierungskonstanten  $N_{tr}$  und  $N_{ref}$  – explizit nur von der Projektion der Meßdaten auf die  $T$ - $\vartheta$ - bzw.  $R$ - $\vartheta$ -Ebene ab, die anderen jedoch vom vollständigen „räumlichen“ Datensatz. Um zu prüfen, ob sich hierdurch tiefere Veränderungen in der Verteilung der Teststatistik ergeben, wurde diese durch eine  $MC$ -Simulation empirisch bestimmt. Hierbei wurde festgestellt, daß auch in diesem Fall jeder per Fit bestimmte Modellparameter genau eine „Zwangsbedingung“ einführt, so daß die Nullverteilung der Teststatistik immer noch eine  $\chi^2$ -Verteilung, nunmehr allerdings mit

$$\nu = 2N - n_{par} \quad (5.52)$$

Freiheitsgraden, ist.

## 5.3 Kalibrationsmessungen

Wie bereits festgestellt, verwendet das Stokesmeter MkII zwei polarisationsoptische Komponenten: eine  $\lambda/4$ -Platte und ein Glan-Laser-Prisma, für die jeweils passende Halterungen zwecks Montage im Gerät entworfen wurden. Es ist nun zu berücksichtigen, daß neben den unweigerlich auftretenden mechanischen Toleranzen beide Arten optischer Elemente meistens in zylindrische Gehäuse eingefaßt sind, so daß selbst dann, wenn die optische Achse auf der Fassung gekennzeichnet ist, keine reproduzierbare Ausrichtung innerhalb der Halterung möglich ist; demzufolge ist die Winkelskala des Wellenplatten-Drehtischs *a priori* undefiniert. Eine Kenntnis der absoluten Orientierung der  $\lambda/4$ -Platte ist allerdings aus mehreren Gründen unabdingbar für die Analyse der Stokesmessungen:

1. Die Stokesparameter  $q$  und  $u$  und somit die Orientierung der Polarisationsellipse werden falsch ermittelt, wenn eine Stokesmessung unter Zugrundelegung einer falschen Winkelskala analysiert wird. Dies mag als nebensächliches Problem erscheinen, da für die Compton-Polarimetrie lediglich der zirkulare Polarisationsgrad relevant ist; allerdings wird in

<sup>26</sup>Dies trifft nicht mehr exakt zu, wenn Variationsgrenzen für Parameter existieren!

Abs. 6.4 aufgezeigt, daß auch im hier vorliegenden Anwendungsfall der vollständige Polarisationsgrad des einfallenden Lichtstrahls bestimmt werden muß.

2. Ein Fehler im Ursprung der Winkelskala führt zu einer Fehlbestimmung des unpolarisierten Lichtanteils<sup>27</sup>, so daß auch der zirkulare Polarisationsgrad des Lichtstrahls falsch eingeschätzt würde (zu diesem und dem vorausgegangenen Punkt siehe auch Anhang C).
3. Ohne Kenntnis des Ursprungs der Winkelskala ist keine Aussage über das Vorzeichen des zirkularen Polarisationsanteils und somit über die Lichthelizität möglich.

Es ist demnach notwendig, nach jedem Aus- und Einbau der polarisationsoptischen Elemente die Winkelskala des Wellenplatten-Drehtischs zu kalibrieren, um das Stokesmeter MkII für die Polarimetrie einsetzen zu können. Zu diesem Zweck wurde im Rahmen dieser Arbeit ein mehrstufiges Kalibrationsverfahren entwickelt, das auf der Präparation und Vermessung eines bekannten, wohldefinierten Polarisationszustands mit einfach auszuwertender Signalform beruht.

### 5.3.1 Initialjustierung

Vom Prinzip her ist das Kalibrationsverfahren relativ einfach: aus Gl. 4.21 ist ersichtlich, daß das von einem rein horizontal linearpolarisierten Lichtstrahl ( $v = 0$ ,  $q = 1$ ) hervorgerufene Sensorsignal einen exakt (d. h. ohne zusätzlichen Phasenterm) kosinusförmigen Verlauf der Form

$$I_{trans}(\vartheta_{WP}) = \frac{1}{4}I(1 - q \cos 4\vartheta_{WP}) \quad (5.53)$$

mit dem vierfachen der Umlauffrequenz aufweist. Wenn man also einen solchermaßen präparierten Polarisationszustand vermißt, liegt die den Ursprung der Winkelskala definierende Parallelstellung von schneller Achse der  $\lambda/4$ -Platte und  $x$ -Achse des Geräts in einem Minimum der aufgezeichneten Meßkurve und kann so problemlos ermittelt werden.

Es bietet sich nun an, den hierfür notwendigen Polarisationszustand ebenfalls mit einem Glan-Laser-Prisma herzustellen, das in den Strahlengang vor

---

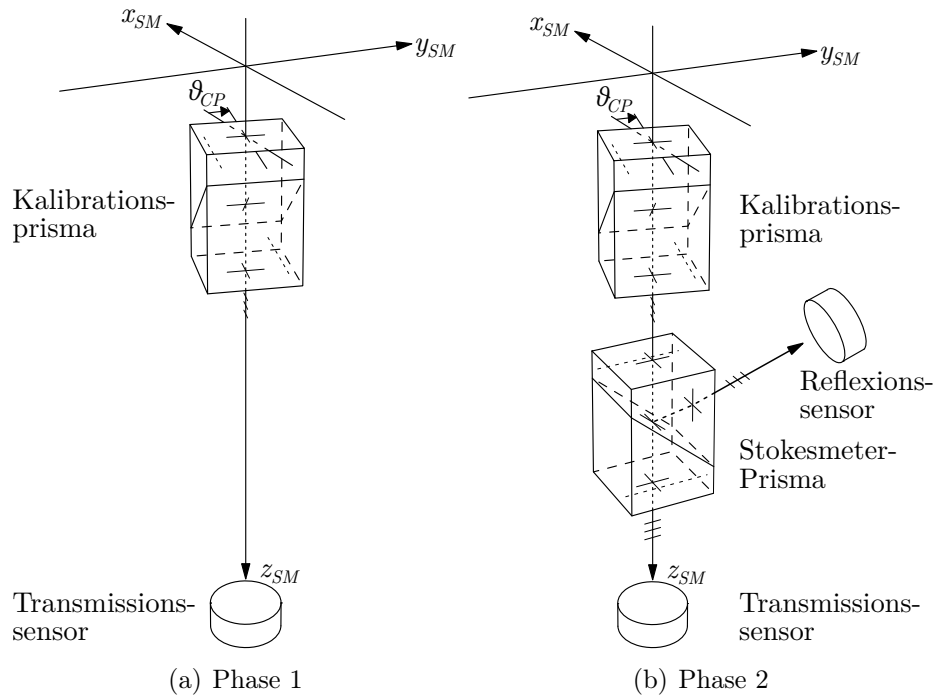
<sup>27</sup>Dieser kann dann sogar negative Werte annehmen, wodurch sich ein Polarisationsgrad von über 100 % ergäbe.



dem Stokesmeter eingebracht wird; dieses Prisma soll nachfolgend als „Kalibrationsprisma“ bezeichnet werden (siehe auch Abs. 4.4.1). Damit dieser Polarisationszustand jedoch so wohldefiniert ist, daß er sich für eine Kalibration eignet, muß sichergestellt werden, daß die Orientierung des Kalibrationsprismas exakt bekannt ist; insofern steht man erneut vor der Aufgabe, die Winkelskala eines Drehtisches kalibrieren zu müssen.

Im hier vorliegenden Fall kann man sich nun zunutze machen, daß das Stokesmeter-Prisma ja die  $y$ -Achse definiert und somit linear horizontal polarisiertes Licht dann vorliegt, wenn beide Prismen in gekreuzter Stellung orientiert sind. Da in dieser Stellung die Gesamt-Transmission der aus den beiden Polarisatoren bestehenden Anordnung verschwindet, kann sie aufgefunden werden, indem eines der beiden Prismen rotiert und das Minimum der transmittierten Intensität gesucht wird. Eine solche Messung ist mit der Datennahme-Infrastruktur des Stokesmeters unmittelbar möglich, allerdings muß hierfür die Stokesmeter-Wellenplatte ausgebaut werden bzw. sinnvollerweise die Kalibration in den Montageablauf des Stokesmeters eingeflochten werden. Darüberhinaus ist zu beachten, daß schon diese Messung erst dann durchgeführt werden kann, wenn das Stokesmeter in der Strahlführung installiert und der Laserresonator betriebsbereit justiert ist, da für die Intensitätsnormierung der Sensorsignale beide am Vakuumfenster  $W45$  ausgekoppelten Teilstrahlen erforderlich sind (vgl. Abs. 4.4.1).

Eine Schwierigkeit erwächst nun dadurch, daß für die notwendige Rotation im hier vorliegenden Fall nur das Kalibrationsprisma in Frage kommt, da das Stokesmeter-Prisma die  $y$ -Achse des Geräts definiert und somit fest auf den Reflexionssensor ausgerichtet bleiben muß. Unter diesen Umständen kann die so aufgezeichnete Meßreihe allerdings nicht anhand des Malus'schen Gesetzes ausgewertet werden, da dieses nur auf solche Fälle anwendbar ist, in denen der weiter strahlabwärts gelegene, als „Analysator“ fungierende Polarisator eines solchen Paares rotiert wird; dreht man hingegen den strahlaufrwärts gelegenen Polarisator, so ändert sich die transmittierte Intensität zusätzlich aufgrund der hierdurch erfolgenden Abtastung des einfallenden Polarisationszustands, dessen Eigenschaften *a priori* beliebig sein können. Im schlimmsten Fall – wenn der auf das Kalibrationsprisma einfallende Lichtstrahl bereits linear polarisiert ist, was beim Polarimeterresonator im Betrieb ohne Wellenplatten in guter Näherung zutrifft – ergeben sich dadurch zusätzliche ununterscheidbare Minima in der Signalkurve; auf jeden Fall aber wird hierdurch die Form der Minima verzerrt, so daß eine akkurate Bestimmung durch ein naives sinusförmiges Modell unmöglich wird. Es ist somit für die Initialjustierung des Kalibrationsprismas unumgänglich, den Polarisations-



**Abbildung 5.5:** Schematische Darstellung der Initialjustierung des Stokesmeter MkII.

zustand des einfallenden Lichtstrahls explizit zu berücksichtigen<sup>28</sup>; wie sich herausstellen wird, ist es im Rahmen dieser Analyse dann aber auch möglich, einige nichtideale Eigenschaften des Stokesmeter-Prismas selbst zu charakterisieren, wie sie im Fitmodell für die Stokesmessungs-Analyse (Gl. 5.42 f.) als Kalibrationsparameter auftreten.

### Phase 1

Um den Polarisationszustand des auf den Präparator einfallenden Lichtstrahls zu berücksichtigen, wird in einem ersten Schritt eine Messung nur mit dem Kalibrationsprisma durchgeführt, d. h. noch bevor das Stokesmeter-Prisma im Gerät installiert ist. In diesem Fall ist dann auch nur das Signal des Transmissionsensors verfügbar, das es nun zu modellieren gilt.

Da das Kalibrationsprisma vom Prinzip her genauso beschaffen ist wie das Stokesmeter-Prisma, wird es in Analogie zu Gl. 5.33 durch die Mueller-

<sup>28</sup>auch wenn in der Praxis versucht wird, den genannten Extremfall durch Installation einer zusätzlichen  $\lambda/4$ -Platte noch vor der Apparatur in einen besser geeigneten, möglichst zirkular polarisierten Zustand umzuwandeln

Matrix

$$M_{CP} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} f_{CP+}^2 & f_{CP-}^2 & 0 & 0 \\ f_{CP-}^2 & f_{CP+}^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2f_{trCP}f_{lkCP} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2f_{trCP}f_{lkCP} \end{pmatrix} \quad (5.54)$$

beschrieben, wobei die Parameter  $f_{trCP}$  und  $f_{lkCP}$  dieselbe Bedeutung wie die entsprechenden Größen in Tabelle 5.4 haben, mit dem Unterschied, daß hier

$$f_{CP-}^2 := f_{trCP}^2 - f_{lkCP}^2$$

definiert wurde.

Um einen Ausdruck für die transmittierte Intensität abzuleiten, wird nun wiederum die Änderung des Stokes-Vektors  $\vec{S}_0$  des einfallenden Lichtstrahls beim Durchlauf der Apparatur betrachtet, die in diesem Fall nur aus dem um den Winkel  $\vartheta_{CP}$  gedrehten Kalibrationsprisma besteht:

$$\vec{S}^{I1} = M_{rot}(-\vartheta_{CP}) M_{CP} M_{rot}(\vartheta_{CP}) \vec{S}_0 \quad (5.55)$$

Hieraus folgt:

$$I_{tr}^{I1} = \frac{1}{2} \{ f_{CP+}^2 I_0 + f_{CP-}^2 (Q_0 \cos 2\vartheta_{CP} + U_0 \sin 2\vartheta_{CP}) \} \quad (5.56)$$

## Phase 2

Nachdem die erste Messung abgeschlossen ist, wird sofort das Stokesmeter-Prisma im Gerät installiert und mittels des Justierziels (vgl. Abs. 4.4.1) auf den Reflexionssensor ausgerichtet. Anschließend wird die „eigentliche“ Messung zur Auffindung der für die Kalibration notwendigen Extinktionsstellung beider Prismen durchgeführt, indem die Sensorsignale (nun unter Einbindung des Reflexionssensors) bei Drehung des Kalibrationsprismas aufgezeichnet werden. In diesem Fall ergeben sich die auf die Sensoren einfallenden Intensitäten durch Betrachtung der Ausdrücke

$$\begin{aligned} \vec{S}_{tr}^{I2} &= M_{SP}^{tr} M_{rot}(-\vartheta_{CP}) M_{CP} M_{rot}(\vartheta_{CP}) \vec{S}_0 \\ \vec{S}_{ref}^{I2} &= M_{SP}^{ref} M_{rot}(-\vartheta_{CP}) M_{CP} M_{rot}(\vartheta_{CP}) \vec{S}_0 \end{aligned} \quad (5.57)$$

zu:

$$\begin{aligned}
 I_{tr}^{I_2} &= \frac{1}{4} \left\{ f_{CP+}^2 f_{SP+}^2 I_0 + \frac{1}{2} (f_{CP+}^2 + 2f_{trCP} f_{lkCP}) f_{SP-}^2 Q_0 \right. \\
 &\quad + f_{CP-}^2 (f_{SP+}^2 Q_0 + f_{SP-}^2 I_0) \cos 2\vartheta_{CP} + f_{CP-}^2 f_{SP+}^2 U_0 \sin 2\vartheta_{CP} \\
 &\quad + \frac{1}{2} (f_{CP+}^2 - 2f_{trCP} f_{lkCP}) f_{SP-}^2 Q_0 \cos 4\vartheta_{CP} \\
 &\quad \left. + \frac{1}{2} (f_{CP+}^2 - 2f_{trCP} f_{lkCP}) f_{SP-}^2 U_0 \sin 4\vartheta_{CP} \right\} \\
 I_{ref}^{I_2} &= \frac{1}{4} \left\{ f_{CP+}^2 f_{SPr+}^2 I_0 + \frac{1}{2} (f_{CP+}^2 + 2f_{trCP} f_{lkCP}) f_{SPr-}^2 Q_0 \right. \\
 &\quad + f_{CP-}^2 (f_{SPr+}^2 Q_0 + f_{SPr-}^2 I_0) \cos 2\vartheta_{CP} + f_{CP-}^2 f_{SPr+}^2 U_0 \sin 2\vartheta_{CP} \\
 &\quad + \frac{1}{2} (f_{CP+}^2 - 2f_{trCP} f_{lkCP}) f_{SPr-}^2 Q_0 \cos 4\vartheta_{CP} \\
 &\quad \left. + \frac{1}{2} (f_{CP+}^2 - 2f_{trCP} f_{lkCP}) f_{SPr-}^2 U_0 \sin 4\vartheta_{CP} \right\}
 \end{aligned} \tag{5.58}$$

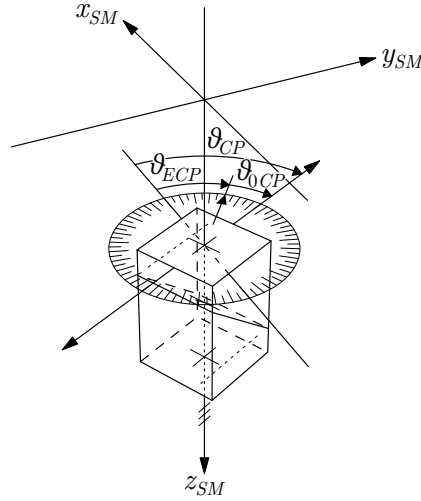
Das eigentliche Fitmodell muß nun auch in diesem Fall wieder die normierten Sensorsignale und nicht die Rohintensitäten beschreiben. Hierbei ist jedoch zusätzlich zu beachten, daß nicht die Orientierung des Kalibrationsprismas  $\vartheta_{CP}$ , sondern nur diejenige des Kalibrationsprismen-Drehtisches gemäß Encoderskala,  $\Theta_{ECP}$ , bekannt ist, weshalb das Fitmodell in Abhängigkeit dieser Größe formuliert sein muß. Der Zusammenhang zwischen den Winkeln ist durch

$$\vartheta_{CP} = 2\pi \frac{\Theta_{ECP} + \Theta_{0CP}}{\Theta_{CPfull}} =: (\Theta_{ECP} + \Theta_{0CP}) l_{CP} \tag{5.59}$$

gegeben (siehe auch Abb. 5.6), wobei  $\Theta_{0CP}$  die gesuchte Kalibrationskonstante der Winkelskala ist, anhand derer dann das Kalibrationsprisma in eine wohldefinierte Orientierung ausgerichtet werden kann.

### Simultane Analyse

Aus der Analyse eines Signals, das sich als Überlagerung mehrerer harmonischer Oszillationen darstellen läßt, kann man prinzipiell soviele Ergebnisparameter bestimmen, wie unabhängige Modulationsamplituden vorhanden sind. Man kann daher durch Betrachtung von Gl. 5.56 und 5.58 unter diesem Gesichtspunkt erkennen, daß aus der Initialjustierung durch geeignete Wahl



**Abbildung 5.6:** Definition der Kalibrationsprismen-Winkelskala. Die Ausrichtung des Drehtisches  $\vartheta_{ECP}$  ist durch die Referenzposition des intern montierten Winkelencoders gegeben, die jedoch von außen nicht ersichtlich ist.

der Modellparameter tatsächlich mehr Informationen als nur die – eigentlich gesuchte – Referenzposition des Kalibrationsprismas und der Polarisationszustand des einfallenden Lichts gewonnen werden können und sogar Aussagen über die nichtidealen Eigenschaften der Polarisationsoptik möglich sind. Die bestmögliche Ausnutzung der Messung wird hierbei durch das nachfolgende Modell erreicht, dessen Parameter in Tabelle 5.7 aufgeführt sind:

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{T}}^{I1}(\Theta_{ECP}) = N_{tr}^I \{ & (1 + k_{CP}^2) \\ & + (1 - k_{CP}^2) q_0 \cos 2(\Theta_{ECP} + \Theta_{0CP}) l_{CP} \\ & + (1 - k_{CP}^2) u_0 \sin 2(\Theta_{ECP} + \Theta_{0CP}) l_{CP} \} \end{aligned} \quad (5.60)$$

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{T}}^{I2}(\Theta_{ECP}) = \frac{1}{2} N_{tr}^I \left\{ & (1 + k_{CP}^2) f_{SP+}^2 + \frac{1}{2} (1 + k_{CP}^2)^2 f_{SP-}^2 q_0 \right. \\ & + (1 - k_{CP}^2) (f_{SP+}^2 q_0 + f_{SP-}^2) \cos 2(\Theta_{ECP} + \Theta_{0CP}) l_{CP} \\ & + (1 - k_{CP}^2) f_{SP+}^2 u_0 \sin 2(\Theta_{ECP} + \Theta_{0CP}) l_{CP} \\ & + \frac{1}{2} (1 - k_{CP}^2)^2 f_{SP-}^2 q_0 \cos 4(\Theta_{ECP} + \Theta_{0CP}) l_{CP} \\ & \left. + \frac{1}{2} (1 - k_{CP}^2)^2 f_{SP-}^2 u_0 \sin 4(\Theta_{ECP} + \Theta_{0CP}) l_{CP} \right\} \end{aligned} \quad (5.61)$$

$N_{tr}^I$	$:= \frac{1}{2} g_{tr} f_{trCP}^2$	Transmissions-Normierungskonstante
$N_{ref}^I$	$:= \frac{1}{4} g_{ref} f_{trCP}^2 f_{rfSP}^2$	Reflexions-Normierungskonstante
$k_{CP}$	$:= \frac{f_{lkCP}}{f_{trCP}}$	relativer parasitärer Transmissionskoeffizient des Kalibrationsprismas
$f_{trSP}$		Transmissionskoeffizient des Stokesmeter-Prismas
$f_{lkSP}$		parasitärer Transmissionskoeffizient des Stokesmeter-Prismas
$k_{SPr}$	$:= \frac{f_{prSP}}{f_{rfSP}}$	relativer parasitärer Reflexionskoeffizient des Stokesmeter-Prismas
$q_0, u_0$		Polarisationszustand des einfallenden Lichtstrahls
$\Theta_{0CP}$		Kalibrationskonstante der Winkelskala: Winkel zwischen Durchlaßrichtung des Kalibrationsprismas und $x$ -Achse am nominellen Nullpunkt der Encoderskala

**Tabelle 5.7:** Erläuterung der Fitparameter der Initialjustierung. Die so bestimmten Parameter werden zu den Kalibrationskonstanten der nachfolgenden Messungen, vgl. auch Tabelle 5.6.

$$\begin{aligned}
 \tilde{\mathcal{R}}^{I2}(\Theta_{ECP}) = N_{ref}^I \left\{ (1 + k_{CP}^2)(1 + k_{SPr}^2) + \frac{1}{2}(1 + k_{CP})^2(1 - k_{SPr})^2 q_0 \right. \\
 + (1 - k_{CP}^2) [(1 + k_{SPr}^2) q_0 + (1 - k_{SPr})^2] \cos 2(\Theta_{ECP} + \Theta_{0CP}) l_{CP} \\
 + (1 - k_{CP}^2)(1 + k_{SPr}^2) u_0 \sin 2(\Theta_{ECP} + \Theta_{0CP}) l_{CP} \\
 + \frac{1}{2}(1 - k_{CP})^2(1 - k_{SPr})^2 q_0 \cos 4(\Theta_{ECP} + \Theta_{0CP}) l_{CP} \\
 \left. + \frac{1}{2}(1 - k_{CP})^2(1 - k_{SPr})^2 u_0 \sin 4(\Theta_{ECP} + \Theta_{0CP}) l_{CP} \right\} \quad (5.62)
 \end{aligned}$$

Es ist nun zu berücksichtigen, daß hier zwei eigenständige Messungen analysiert werden, von denen lediglich angenommen wird, daß sich der Polarisationszustand des einfallenden Lichts in der Zwischenzeit nicht geändert hat, die aber beide zur Bestimmung desselben Parametersatzes herangezogen werden. Eine separate Auswertung der Messungen ist nun nicht möglich, da jede Messung für sich nicht einmal die Bestimmung derjenigen Größen erlaubt, die nur in dem zu dieser Messung gehörigen Modell auftreten. Dies

macht es erforderlich, die Fitparameter durch eine simultane Analyse beider Messungen zu ermitteln.

Um dies zu erreichen, wird in Erweiterung des in Abs. 5.2.2 beschriebenen Verfahrens eine gemeinsame Likelihood-Funktion beider Messungen aufgestellt, deren negativer Logarithmus dann wieder mit dem *Minuit*-Verfahren minimiert wird. Da zwischen den Datenpunkten beider Messungen keine Korrelationen bestehen, ist diese gemeinsame Likelihood-Funktion

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^I = & \prod_{i=1}^{N1} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_i^{I1}}} \exp\left(-\frac{\left(t_i^{I1} - \tilde{\mathcal{T}}^{I1}(\Theta_i^{I1})\right)^2}{2(\sigma_i^{I1})^2}\right) \times \\ & \times \prod_{j=1}^{N2} \frac{1}{2\pi\sqrt{|\tilde{\Sigma}_j^{I2}|}} \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\vec{m}_j^{I2} - \vec{\mathcal{M}}^{I2}(\Theta_j^{I2})\right)^T \left(\tilde{\Sigma}_j^{I2}\right)^{-1} \left(\vec{m}_j^{I2} - \vec{\mathcal{M}}^{I2}(\Theta_j^{I2})\right)\right\} \end{aligned} \quad (5.63)$$

einfach das Produkt der Likelihood-Funktion einer aus  $N1$  Datenpunkten bestehenden univariaten Messung und der Likelihood-Funktion einer aus  $N2$  Datenpunkten bestehenden korrelierten bivariaten Messung gemäß Gl. 5.30, wobei  $t_i^{I1}$  der  $i$ -te Transmissionsmeßwert der ersten Messung und  $\sigma_i^{I1}$  dessen statistische Unsicherheit sei. Somit ergibt sich folgender Ausdruck für die zu minimierende Funktion:

$$\begin{aligned} F^I = & \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N1} \frac{\left(t_i^{I1} - \tilde{\mathcal{T}}^{I1}(\Theta_i^{I1})\right)^2}{2(\sigma_i^{I1})^2} \\ & + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{N2} \left(\vec{m}_j^{I2} - \vec{\mathcal{M}}^{I2}(\Theta_j^{I2})\right)^T \left(\tilde{\Sigma}_j^{I2}\right)^{-1} \left(\vec{m}_j^{I2} - \vec{\mathcal{M}}^{I2}(\Theta_j^{I2})\right) \end{aligned} \quad (5.64)$$

Ihr Gradient ist demnach durch

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial F^I}{\partial p_k} \right|_{\vec{p}} = & - \sum_{i=1}^{N1} \frac{t_i^{I1} - \tilde{\mathcal{T}}^{I1}(\Theta_i^{I1}; \vec{p})}{(\sigma_i^{I1})^2} \left. \frac{\partial \tilde{\mathcal{T}}^{I1}}{\partial p_k} \right|_{\Theta_i^{I1}; \vec{p}} \\ & - \sum_{j=1}^{N2} \left( \left. \frac{\partial \vec{\mathcal{M}}^{I2}}{\partial p_k} \right|_{\Theta_j^{I2}; \vec{p}} \right)^T \left(\tilde{\Sigma}_j^{I2}\right)^{-1} \left(\vec{m}_j^{I2} - \vec{\mathcal{M}}^{I2}(\Theta_j^{I2}; \vec{p})\right) \end{aligned} \quad (5.65)$$

gegeben. Auch in diesem Fall können Startwerte für die Fitparameter anhand der mittels harmonischer Analyse ermittelten Modulationsamplituden beider Messungen bestimmt werden.

Da bei beiden Messungen von univariat bzw. bivariat normalverteilten Unsicherheiten ausgegangen wird, ist auch bei dieser Analyse die Größe

$$\tilde{X}_I^2 := 2F_{min}^I \quad (5.66)$$

eine  $\chi^2$ -verteilte Größe; somit kann man in Erweiterung des in Abs. 5.2.4 beschriebenen Verfahrens wieder die Fitgüte des Analyseresultats durch einen  $\chi^2$ -Test beurteilen, wobei die Anzahl an Freiheitsgraden in diesem Fall aber durch

$$\nu^I = N^{I1} + 2N^{I2} - n_{par} \quad (5.67)$$

gegeben ist.

### Präparation des Polarisationszustands

Am Ende dieser Analyse ist es nun möglich, einen wohldefinierten linear horizontalen Polarisationszustand zu präparieren, indem das Kalibrationsprisma auf die Position

$$\Theta_{ECP} = -\Theta_{0CP}$$

gefahren wird.

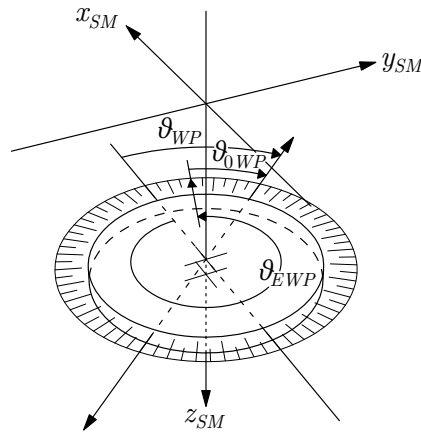
Man kann unschwer erkennen, daß die Qualität der nachfolgenden Kalibration von der Positioniergenauigkeit des Drehtisches abhängt, wobei zwischen expliziten und verdeckten Abweichungen unterschieden werden soll. Explizite Abweichungen sind hierbei Positionierungsfehler, bei denen das Steuergerät die Sollposition nicht ganz erreicht, obwohl es diesen Umstand mittels des eingebauten Winkelencoders erkennt; solche Zustände können bei den hier eingesetzten *PID*-geregelten Steuersystemen je nach Wahl der Regelungsparameter auftreten. Da explizite Abweichungen allerdings bekannt sind, ist es möglich, ihren Einfluß zu modellieren und somit in der Kalibrationsanalyse zu berücksichtigen.

Verdeckte Abweichungen hingegen sind solche, in denen aufgrund mechanischer Toleranzen (etwa im üblicherweise vorhandenen Schneckengetriebe der Drehtische) ein Fehlwinkel vorliegt, obwohl laut Encoder die Sollposition erreicht wurde. Diese können nur den Gerätespezifikationen des Herstellers entnommen werden; auf sie soll in Abs. 6.3.5 kurz eingegangen werden.

### 5.3.2 Kalibration der Wellenplatten-Winkelskala

Nachdem in der Initialjustierung ein wohldefinierter linear horizontaler Polarisationszustand präpariert wurde, kann nun die eigentliche Kalibration der Winkelskala des Wellenplatten-Drehtisches erfolgen, indem dieser Zustand mit



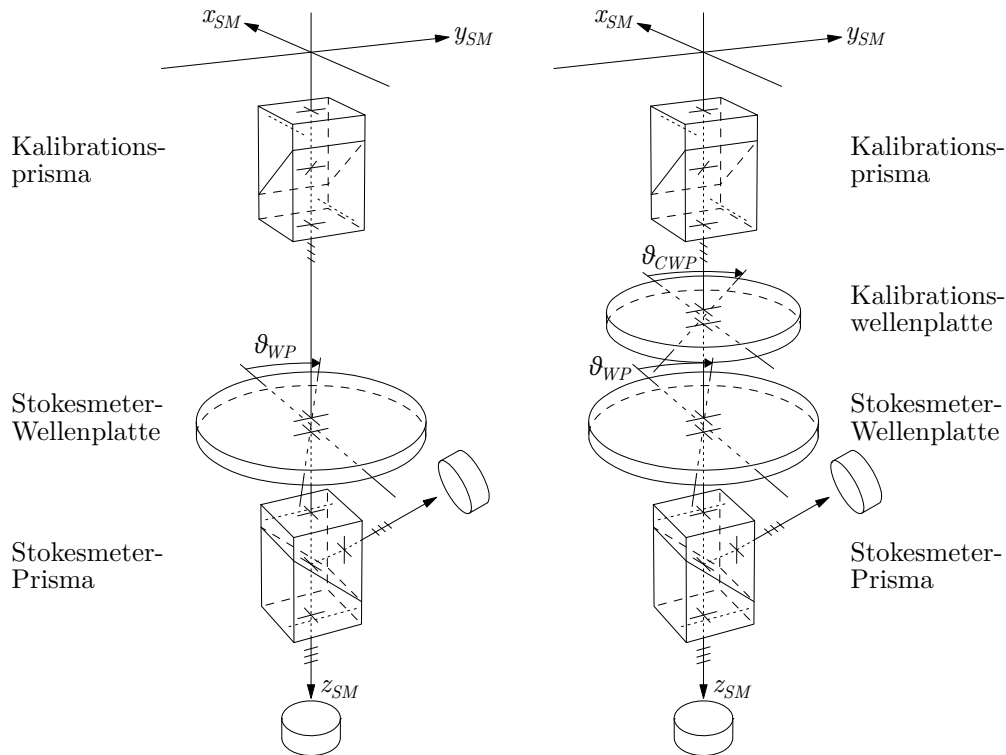


**Abbildung 5.7:** Definition der Wellenplatten-Winkelskala. Bei dem hier verwendeten Drehtisch ist die Encoderskala gegenüber der mathematisch positiven Richtung invertiert.

dem Stokesmeter vermessen wird; hierzu muß die  $\lambda/4$ -Platte in das Gerät eingebaut werden, dessen Montage damit vollständig ist. Anschließend wird eine Messung durchgeführt, bei der die Sensorsignale in Abhängigkeit der Encoderposition der  $\lambda/4$ -Platte aufgezeichnet werden. Der Zusammenhang zwischen den Winkeln wird in Abb. 5.7 erklärt und wurde bereits in Gl. 5.41 formuliert:

$$\vartheta_{WP} = 2\pi \left( 1 - \frac{\Theta_{EWP} - \Theta_{0WP}}{\Theta_{WPfull}} \right) =: 2\pi - (\Theta_{EWP} + \Theta_{0WP}) l_{WP}$$

Die Schwierigkeit besteht nun darin, daß die Vermessung eines linearpolarisierten Zustands insgesamt vier Minima liefert, so daß die Kalibrationskonstante  $\Theta_{0WP}$  alleine aufgrund dieser Messung nur bis auf  $\pm n \cdot 90^\circ$ , ( $n = 0, 1, 2$ ) bestimmt werden kann. Ein Teil dieser Unbestimmtheit ist der bereits im Zusammenhang mit dem Stokesmessungs-Fitmodell geschilderten  $180^\circ$ -Symmetrie polarisationsoptischer Apparaturen geschuldet. Im hier vorliegenden Fall ist jedoch zusätzlich zu berücksichtigen, daß der für die Kalibration präparierte linearpolarisierte Zustand die  $\lambda/4$ -Platte sowohl bei Parallelstellung der schnellen *als auch der langsamen* Achse mit der Polarisations Ebene unverändert passiert, weshalb die Symmetrie des Systems zusätzlich auf  $90^\circ$  heruntergebrochen wird. Dies bedeutet allerdings, daß alleine aufgrund dieser Messung nicht zwischen der schnellen und der langsamen Achse der  $\lambda/4$ -Platte unterschieden werden kann, womit letztlich die Helizität eines vermessenen Polarisationszustands unbekannt bliebe.



**Abbildung 5.8:** Schematische Darstellung der Skalenkalibration der Stokesmeter-Wellenplatte. *Links:* Kalibration mit linearem Licht – *Rechts:* Kalibration mit zirkularem Licht

Um diese Unbestimmtheit aufzuheben, wird nun nach der Messung mit linearem Licht zusätzlich eine Kalibrationsmessung mit zirkularpolarisiertem Licht bekannter Helizität durchgeführt. Prinzipiell würde für die Kalibration der Winkelskala sogar die Kalibrationsmessung mit zirkularem Licht alleine ausreichen, allerdings kann dieses kaum in der notwendigen Reinheit, wie sie für eine exakt sinusförmige Modulation der Intensität erforderlich ist, hergestellt werden.

### Kalibration mit linearem Licht

Im ersten Schritt der Winkelskalen-Kalibration wird der im Rahmen der Initialjustierung präparierte linearpolarisierte Zustand vermessen. Um das resultierende Signal zu modellieren, sind nun allerdings einige Vorüberlegungen notwendig.

Bislang wurde versucht, die optischen Elemente und die Umstände der Messung soweit wie möglich inklusive ihrer nichtidealen Eigenschaften zu

modellieren, um einerseits systematische Verfälschungen der Resultate so weit wie möglich auszuschließen und andererseits die Möglichkeit zu eröffnen, im Zuge der Analyse neben den eigentlich gesuchten Kalibrationskonstanten auch diese nichtidealen Eigenschaften zu bestimmen. Im vorliegenden Fall bedeutet dies, daß neben einer realistischen Modellierung der  $\lambda/4$ -Platte (siehe Gl. 5.36) auch Abweichungen des präparierten Polarisationszustands von der reinen Linearpolarisation aufgrund des nichtidealen Kalibrationsprismas berücksichtigt werden müßten. Hierzu ist jedoch eine Kenntnis der Polarisation des auf das Kalibrationsprisma einfallenden Lichtstrahls notwendig, die im Rahmen dieser Messung allerdings nicht abgetastet wird und somit unzugänglich ist. Man könnte zwar voraussetzen, daß noch derselbe Polarisationszustand wie bei der Initialjustierung vorliegt; allerdings erscheint es wünschenswert, sich bei der Kalibration nicht zu sehr auf die Stabilität des Laserresonators zu verlassen.

In diesem Fall besteht die Lösung darin, bei der Analyse der hier betrachteten Kalibrationsmessungen von einem (bis auf eine von 1 abweichende Transmission  $T_{CP}^{id}$ ) idealen Kalibrationsprisma auszugehen und die Berücksichtigung nichtidealer Eigenschaften auf eine anderweitig motivierte, im Anschluß durchzuführende Kalibrationsmessung – die *Justierfehleranalyse* – zu verschieben. Der im Rahmen der Initialjustierung präparierte Polarisationszustand wird daher mit Hilfe der Mueller-Matrix des idealen Polarisators beschrieben und ergibt sich zu:

$$\begin{aligned} \vec{S}_{prep}^{Klin} &= \frac{1}{2} T_{CP}^{id} M_{rot}(-\vartheta_{CP}) M_{lin,x} M_{rot}(\vartheta_{CP}) \vec{S}_0 \\ &= \frac{1}{2} T_{CP}^{id} (I_0 + Q_0 \cos 2\vartheta_{CP} + U_0 \sin 2\vartheta_{CP}) \begin{pmatrix} 1 \\ \cos 2\vartheta_{CP} \\ \sin 2\vartheta_{CP} \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (5.68)$$

Die Parameter  $I_0$ ,  $Q_0$  und  $U_0$  stellen hierbei den unbekanntem Polarisationszustand des einfallenden Lichtstrahls dar; sie können später in eine Normierungskonstante absorbiert werden und brauchen daher nicht bestimmt zu werden. Die Orientierung des Kalibrationsprismas andererseits ist aufgrund der Initialjustierung eine bekannte Größe und im Rahmen dieser Analyse somit eine Kalibrationskonstante.

Unter Verwendung der in Abs. 5.2.3 abgeleiteten Stokesmeter-Gerätetrix ergibt sich dann die Intensität auf dem Transmissions- bzw. Reflexions-

sensor aus der Betrachtung von

$$\begin{aligned}\vec{S}_{tr}^{Klin}(\vartheta_{WP}) &= M_{SP}^{tr} M_{rot}(-\vartheta_{WP}) M_{WP,x} M_{rot}(\vartheta_{WP}) \vec{S}_{prep}^{Klin} \quad \text{bzw.} \\ \vec{S}_{ref}^{Klin}(\vartheta_{WP}) &= M_{SP}^{ref} M_{rot}(-\vartheta_{WP}) M_{WP,x} M_{rot}(\vartheta_{WP}) \vec{S}_{prep}^{Klin}\end{aligned}\quad (5.69)$$

was zu folgenden Ausdrücken führt:

$$\begin{aligned}I_{tr}^{Klin}(\vartheta_{WP}) &= \\ &\frac{1}{8} T_{CP}^{id} (I_0 + Q_0 \cos 2\vartheta_{CP} + U_0 \sin 2\vartheta_{CP}) \times \\ &\quad \times \left\{ f_{SP+}^2 t_{WP+}^2 + f_{SP-}^2 t_{WP-}^2 \cos 2\vartheta_{WP} \right. \\ &\quad \left. + [f_{SP+}^2 t_{WP-}^2 \cos 2\vartheta_{WP} + f_{SP-}^2 t_{WP+}^2 \cos^2(2\vartheta_{WP}) \right. \\ &\quad \left. + 2f_{SP-}^2 t_{WPf} t_{WP_s} \cos \Delta_{WP} \sin^2(2\vartheta_{WP}) \right] \cos 2\vartheta_{CP} \\ &\quad \left. + [f_{SP+}^2 t_{WP-}^2 + f_{SP-}^2 (t_{WP+}^2 - 2t_{WPf} t_{WP_s} \cos \Delta_{WP}) \cos 2\vartheta_{WP}] \times \right. \\ &\quad \left. \times \sin 2\vartheta_{WP} \sin 2\vartheta_{CP} \right\}\end{aligned}\quad (5.70)$$

$$\begin{aligned}I_{ref}^{Klin}(\vartheta_{WP}) &= \\ &\frac{1}{8} T_{CP}^{id} (I_0 + Q_0 \cos 2\vartheta_{CP} + U_0 \sin 2\vartheta_{CP}) \times \\ &\quad \times \left\{ f_{SPr+}^2 t_{WP+}^2 + f_{SPr-}^2 t_{WP-}^2 \cos 2\vartheta_{WP} \right. \\ &\quad \left. + [f_{SPr+}^2 t_{WP-}^2 \cos 2\vartheta_{WP} + f_{SPr-}^2 t_{WP+}^2 \cos^2(2\vartheta_{WP}) \right. \\ &\quad \left. + 2f_{SPr-}^2 t_{WPf} t_{WP_s} \cos \Delta_{WP} \sin^2(2\vartheta_{WP}) \right] \cos 2\vartheta_{CP} \\ &\quad \left. + [f_{SPr+}^2 t_{WP-}^2 + f_{SPr-}^2 (t_{WP+}^2 - 2t_{WPf} t_{WP_s} \cos \Delta_{WP}) \cos 2\vartheta_{WP}] \times \right. \\ &\quad \left. \times \sin 2\vartheta_{WP} \sin 2\vartheta_{CP} \right\}\end{aligned}\quad (5.71)$$

### Kalibration mit zirkularem Licht

Um die Unbestimmtheit zwischen schneller und langsamer Achse der  $\lambda/4$ -Platte aufzuheben, wird im Anschluß an diese Messung mittels der bereits in Abs. 4.4.1 erwähnten Schnellwechselmodule eine zusätzliche  $\lambda/4$ -Platte – die Kalibrationswellenplatte – zwischen Kalibrationsprisma und Stokesmeter-Wellenplatte im Strahlengang montiert. Diese muß nun so orientiert werden, daß der bereits präparierte linearpolarisierte Zustand in einen zirkular polarisierten Zustand oder zumindest einen elliptisch polarisierten Zustand mit nennenswertem zirkularem Anteil umgewandelt wird.

Aufgrund der bereits im vorigen Abschnitt angeführten Schwierigkeiten wird auch die Kalibrationswellenplatte – wiederum bis auf die von 1 abweichende Transmission – als ideales optisches Element modelliert:

$$M_{WP}^{id}(\vartheta_{CWP}) = T_{CWP}^{id} M_{rot}(-\vartheta_{CWP}) M_{QWP,x} M_{rot}(\vartheta_{CWP}) \quad (5.72)$$

Der resultierende Polarisationszustand ist dann durch

$$\begin{aligned} \vec{S}_{prep}^{Kzirk} &= M_{WP}^{id}(\vartheta_{CWP}) \vec{S}_{prep}^{Klin} \\ &= \frac{1}{2} T_{CP}^{id} T_{CWP}^{id} (I_0 + Q_0 \cos 2\vartheta_{CP} + U_0 \sin 2\vartheta_{CP}) \times \\ &\quad \times \begin{pmatrix} 1 \\ \cos 2\vartheta_{CWP} \cos 2(\vartheta_{CWP} - \vartheta_{CP}) \\ \sin 2\vartheta_{CWP} \cos 2(\vartheta_{CWP} - \vartheta_{CP}) \\ \sin 2(\vartheta_{CWP} - \vartheta_{CP}) \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (5.73)$$

gegeben, so daß für die auf die Sensoren auftreffenden Intensitäten gilt:

$$\begin{aligned} I_{tr}^{Kzirk}(\vartheta_{WP}) &= \\ &= \frac{1}{8} T_{CP}^{id} T_{CWP}^{id} (I_0 + Q_0 \cos 2\vartheta_{CP} + U_0 \sin 2\vartheta_{CP}) \times \\ &\quad \times \left\{ f_{SP+}^2 t_{WP+}^2 + f_{SP-}^2 t_{WP-}^2 \cos 2\vartheta_{WP} \right. \\ &\quad \left. + [f_{SP+}^2 t_{WP-}^2 \cos 2\vartheta_{WP} + f_{SP-}^2 t_{WP+}^2 \cos^2(2\vartheta_{WP}) \right. \\ &\quad \left. + 2f_{SP-}^2 t_{WP} f_{tWP_s} \cos \Delta_{WP} \sin^2(2\vartheta_{WP}) \right] \cos 2\vartheta_{CWP} \cos 2(\vartheta_{CWP} - \vartheta_{CP}) \\ &\quad + [f_{SP+}^2 t_{WP-}^2 + f_{SP-}^2 (t_{WP+}^2 - 2t_{WP} f_{tWP_s} \cos \Delta_{WP}) \cos 2\vartheta_{WP}] \times \\ &\quad \times \sin 2\vartheta_{WP} \sin 2\vartheta_{CWP} \cos 2(\vartheta_{CWP} - \vartheta_{CP}) \\ &\quad \left. - 4f_{SP-}^2 t_{WP} f_{tWP_s} \cos \vartheta_{WP} \sin \vartheta_{WP} \sin \Delta_{WP} \sin 2(\vartheta_{CWP} - \vartheta_{CP}) \right\} \end{aligned} \quad (5.74)$$

$$\begin{aligned} I_{ref}^{Kzirk}(\vartheta_{WP}) &= \\ &= \frac{1}{8} T_{CP}^{id} T_{CWP}^{id} (I_0 + Q_0 \cos 2\vartheta_{CP} + U_0 \sin 2\vartheta_{CP}) \times \\ &\quad \times \left\{ f_{SPr+}^2 t_{WP+}^2 + f_{SPr-}^2 t_{WP-}^2 \cos 2\vartheta_{WP} \right. \\ &\quad \left. + [f_{SPr+}^2 t_{WP-}^2 \cos 2\vartheta_{WP} + f_{SPr-}^2 t_{WP+}^2 \cos^2(2\vartheta_{WP}) \right. \\ &\quad \left. + 2f_{SPr-}^2 t_{WP} f_{tWP_s} \cos \Delta_{WP} \sin^2(2\vartheta_{WP}) \right] \cos 2\vartheta_{CWP} \cos 2(\vartheta_{CWP} - \vartheta_{CP}) \\ &\quad + [f_{SPr+}^2 t_{WP-}^2 + f_{SPr-}^2 (t_{WP+}^2 - 2t_{WP} f_{tWP_s} \cos \Delta_{WP}) \cos 2\vartheta_{WP}] \times \\ &\quad \times \sin 2\vartheta_{WP} \sin 2\vartheta_{CWP} \cos 2(\vartheta_{CWP} - \vartheta_{CP}) \\ &\quad \left. - 4f_{SPr-}^2 t_{WP} f_{tWP_s} \cos \vartheta_{WP} \sin \vartheta_{WP} \sin \Delta_{WP} \sin 2(\vartheta_{CWP} - \vartheta_{CP}) \right\} \end{aligned} \quad (5.75)$$

$T_{CP}^{id}$	(isotrope) Intensitäts-Transmission des idealisierten Kalibrationsprismas
$T_{CWP}^{id}$	(isotrope) Intensitäts-Transmission der idealisierten Kalibrationswellenplatte
$\vartheta_{CWP}$	Orientierung der schnellen Achse der Kalibrationswellenplatte

**Tabelle 5.8:** Erklärung der Parameter, die zur Beschreibung der Wellenplatten-Skalenkalibration neu eingeführt wurden

Die in Gl. 5.74 und 5.75 neu hinzugekommenen Größen sind hierbei in Tabelle 5.8 erläutert.

Um nun den so präparierten Polarisationzustand zur Kalibration heranziehen zu können, muß die Ausrichtung der schnellen Achse der Kalibrationswellenplatte,  $\vartheta_{CWP}$ , bekannt sein. Demzufolge stünde man nun prinzipiell erneut vor der Aufgabe, die Orientierung einer  $\lambda/4$ -Platte exakt zu definieren. Man kann jedoch zeigen, daß in diesem Fall die Ausrichtung der schnellen Achse nur so genau bekannt sein muß, daß zwischen rechts- und linkshändiger Polarisation des resultierenden Strahls unterschieden werden kann. In der vorliegenden Analyse wurde dies dergestalt umgesetzt, daß die Orientierung der Kalibrationswellenplatte ebenfalls zu den zu ermittelnden Fitparametern hinzugerechnet und die Kenntnis über die ungefähre Orientierung in Form eines Startwerts in die Analyse eingebracht wird.

### Simultane Analyse

Genau wie im Fall der Initialjustierung werden auch bei dieser Analyse zwei unabhängige Messungen zur Bestimmung ein- und desselben Parametersatzes herangezogen; es liegt daher nahe, dem ebenfalls durch einen simultanen Fit mittels einer kombinierten *NLL*-Funktion Rechnung zu tragen. Diese sieht dann wie folgt aus:

$$\begin{aligned}
 F^K = & \sum_{j=1}^{Nl} \left( \vec{m}_j^{Klin} - \vec{\mathcal{M}}^{Klin}(\Theta_j^{Klin}) \right)^T \left( \tilde{\Sigma}_j^{Klin} \right)^{-1} \left( \vec{m}_j^{Klin} - \vec{\mathcal{M}}^{Klin}(\Theta_j^{Klin}) \right) \\
 & + \sum_{j=1}^{Nz} \left( \vec{m}_j^{Kzirk} - \vec{\mathcal{M}}^{Kzirk}(\Theta_j^{Kzirk}) \right)^T \left( \tilde{\Sigma}_j^{Kzirk} \right)^{-1} \left( \vec{m}_j^{Kzirk} - \vec{\mathcal{M}}^{Kzirk}(\Theta_j^{Kzirk}) \right)
 \end{aligned} \tag{5.76}$$

Aufgrund der bereits in Abs. 5.3.1 angestellten Überlegungen kann man

$N_{tr}^K$	$:= \frac{1}{8} g_{tr} T_{CP}^{id} (1 + q_0 \cos 2\vartheta_{CP} + u_0 2\vartheta_{CP}) t_{WPf}^2$	Transmissions-Normierungskonstante
$N_{ref}^K$	$:= \frac{1}{8} g_{ref} T_{CP}^{id} (1 + q_0 \cos 2\vartheta_{CP} + u_0 2\vartheta_{CP}) t_{WPf}^2 t_{rfSP}^2$	Reflexions-Normierungskonstante
$T_{CWP}^{id}$		(isotrope) Transmission der idealisierten Kalibrationswellenplatte
$\vartheta_{CWP}$		Orientierung der Kalibrationswellenplatte
$k_{WP}$	$:= \frac{t_{WP_s}}{t_{WP_f}}$	Transmissions-Anisotropie der Stokesmeter-Wellenplatte
$\Delta_{WP}$		tatsächliche Verzögerung der Stokesmeter-Wellenplatte
$\Theta_{0WP}$		Kalibrationskonstante der Winkelskala

**Tabelle 5.9:** Erläuterung der Fitparameter der Winkelskalen-Kalibration

außerdem erkennen, daß sich der in Tabelle 5.9 definierte Satz an Fitparametern am besten zur Analyse der Messungen eignet, so daß die eigentlichen Fitmodelle sinnvollerweise wie folgt formuliert werden:

$$\begin{aligned}
 \tilde{\mathcal{T}}^{Klin}(\Theta_{EWP}) = & \\
 & N_{tr}^K \left\{ f_{SP+}^2 (1 + k_{WP}^2) + \frac{1}{2} f_{SP-}^2 (1 + k_{WP}^2 + 2k_{WP} \cos \Delta_{WP}) \cos 2\vartheta_{CP} \right. \\
 & + (1 - k_{WP}^2) (f_{SP-}^2 + f_{SP+}^2 \cos 2\vartheta_{CP}) \cos 2(\Theta_{EWP} - \Theta_{0WP}) l_{WP} \\
 & - (1 - k_{WP}^2) f_{SP+}^2 \sin 2\vartheta_{CP} \sin 2(\Theta_{EWP} - \Theta_{0WP}) l_{WP} \\
 & + \frac{1}{2} f_{SP-}^2 (1 + k_{WP}^2 - 2k_{WP} \cos \Delta_{WP}) \cos 2\vartheta_{CP} \cos 4(\Theta_{EWP} - \Theta_{0WP}) l_{WP} \\
 & \left. - \frac{1}{2} f_{SP-}^2 (1 + k_{WP}^2 - 2k_{WP} \cos \Delta_{WP}) \sin 2\vartheta_{CP} \sin 4(\Theta_{EWP} - \Theta_{0WP}) l_{WP} \right\} \\
 & (5.77)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \tilde{\mathcal{R}}^{Klin}(\Theta_{EWP}) = & \\
 N_{ref}^K \left\{ & (1 + k_{SPr}^2)(1 + k_{WP}^2) + \frac{1}{2}(1 - k_{SPr}^2)(1 + k_{WP}^2 + 2k_{WP} \cos \Delta_{WP}) \cos 2\vartheta_{CP} \right. \\
 & + (1 - k_{WP}^2) \left( (1 - k_{SPr}^2) + (1 + k_{SPr}^2) \cos 2\vartheta_{CP} \right) \cos 2(\Theta_{EWP} - \Theta_{0WP}) l_{WP} \\
 & - (1 - k_{WP}^2)(1 + k_{SPr}^2) \sin 2\vartheta_{CP} \sin 2(\Theta_{EWP} - \Theta_{0WP}) l_{WP} \\
 & + \frac{1}{2}(1 - k_{SPr}^2)(1 + k_{WP}^2 - 2k_{WP} \cos \Delta_{WP}) \cos 2\vartheta_{CP} \cos 4(\Theta_{EWP} - \Theta_{0WP}) l_{WP} \\
 & \left. - \frac{1}{2}(1 - k_{SPr}^2)(1 + k_{WP}^2 - 2k_{WP} \cos \Delta_{WP}) \sin 2\vartheta_{CP} \sin 4(\Theta_{EWP} - \Theta_{0WP}) l_{WP} \right\} \\
 & (5.78)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \tilde{\mathcal{T}}^{Kzirk}(\Theta_{EWP}) = & \\
 N_{tr}^K T_{CWP}^{Kid} \left\{ & f_{SP+}^2 (1 + k_{WP}^2) \right. \\
 & + \frac{1}{2} f_{SP-}^2 (1 + k_{WP}^2 + 2k_{WP} \cos \Delta_{WP}) \cos 2\vartheta_{CWP} \cos 2(\vartheta_{CWP} - \vartheta_{CP}) \\
 & + (1 - k_{WP}^2) [f_{SP-}^2 + f_{SP+}^2 \cos 2\vartheta_{CWP} \cos 2(\vartheta_{CWP} - \vartheta_{CP})] \times \\
 & \quad \times \cos 2(\Theta_{EWP} - \Theta_{0WP}) l_{WP} \\
 & - [(1 - k_{WP}^2) f_{SP+}^2 \sin 2\vartheta_{CWP} \cos 2(\vartheta_{CWP} - \vartheta_{CP}) \\
 & \quad - 2k_{WP} f_{SP-}^2 \sin \Delta_{WP} \sin 2(\vartheta_{CWP} - \vartheta_{CP})] \sin 2(\Theta_{EWP} - \Theta_{0WP}) l_{WP} \\
 & + \frac{1}{2} f_{SP-}^2 (1 + k_{WP}^2 - 2k_{WP} \cos \Delta_{WP}) \cos 2\vartheta_{CWP} \cos 2(\vartheta_{CWP} - \vartheta_{CP}) \times \\
 & \quad \times \cos 4(\Theta_{EWP} - \Theta_{0WP}) l_{WP} \\
 & - \frac{1}{2} f_{SP-}^2 (1 + k_{WP}^2 - 2k_{WP} \cos \Delta_{WP}) \sin 2\vartheta_{CWP} \cos 2(\vartheta_{CWP} - \vartheta_{CP}) \times \\
 & \quad \times \sin 4(\Theta_{EWP} - \Theta_{0WP}) l_{WP} \left. \right\} \\
 & (5.79)
 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
 \tilde{\mathcal{R}}^{Kzirk}(\Theta_{EWP}) = & \\
 N_{ref}^K T_{CWP}^{id} \left\{ & (1 + k_{SPr}^2) (1 + k_{WP}^2) \right. \\
 & + \frac{1}{2} (1 - k_{SPr}^2) (1 + k_{WP}^2 + 2k_{WP} \cos \Delta_{WP}) \cos 2\vartheta_{CWP} \cos 2(\vartheta_{CWP} - \vartheta_{CP}) \\
 & + (1 - k_{WP}^2) [(1 - k_{SPr}^2) + (1 + k_{SPr}^2) \cos 2\vartheta_{CWP} \cos 2(\vartheta_{CWP} - \vartheta_{CP})] \times \\
 & \quad \times \cos 2(\Theta_{EWP} - \Theta_{0WP}) l_{WP} \\
 & - [(1 - k_{WP}^2) (1 + k_{SPr}^2) \sin 2\vartheta_{CWP} \cos 2(\vartheta_{CWP} - \vartheta_{CP}) \\
 & \quad - 2k_{WP} (1 - k_{SPr}^2) \sin \Delta_{WP} \sin 2(\vartheta_{CWP} - \vartheta_{CP})] \sin 2(\Theta_{EWP} - \Theta_{0WP}) l_{WP} \\
 & + \frac{1}{2} (1 - k_{SPr}^2) (1 + k_{WP}^2 - 2k_{WP} \cos \Delta_{WP}) \cos 2\vartheta_{CWP} \cos 2(\vartheta_{CWP} - \vartheta_{CP}) \times \\
 & \quad \times \cos 4(\Theta_{EWP} - \Theta_{0WP}) l_{WP} \\
 & - \frac{1}{2} (1 - k_{SPr}^2) (1 + k_{WP}^2 - 2k_{WP} \cos \Delta_{WP}) \sin 2\vartheta_{CWP} \cos 2(\vartheta_{CWP} - \vartheta_{CP}) \times \\
 & \quad \left. \times \sin 4(\Theta_{EWP} - \Theta_{0WP}) l_{WP} \right\}
 \end{aligned} \tag{5.80}$$

Da im Falle der Kalibrationswellenplatte keine Winkelskala definiert werden muß, kann ihre Orientierung direkt im Bogenmaß ausgedrückt werden.

Wenngleich auch in diesem Fall eine Zerlegung des Fitmodells nach Modulationamplituden zwecks Bestimmung der Fitparameter-Startwerte in Frage kommt, sind die resultierenden Gleichungen meistens zu komplex, um analytisch nach den Fitparametern umgestellt zu werden. Dies trifft insbesondere auf die Kalibration mit zirkularem Licht zu, weshalb in diesem Fall mit einem idealisierten Modell gearbeitet wird, um Startwerte auch anhand dieser Messung ermitteln zu können. Da man aber selbst dann nicht für alle Fitparameter einen Ausdruck zur Berechnung eines Startwerts ableiten kann, werden für die Parameter, die der Charakterisierung der  $\lambda/4$ -Platte dienen, die idealen Werte als Startwerte eingesetzt:

$$\begin{aligned}
 \hat{\Delta}_{WP} &= \frac{\pi}{2} \\
 \hat{k}_{WP} &= 1
 \end{aligned}$$

Die Start-Schrittweite wird dann auf 1% des Startwerts festgelegt.

Bei der Bestimmung von Startwerten für die Winkelparameter ist zusätzlich zu beachten, daß diese aufgrund der Verwendung des Arcustangens im allgemeinen nur bis auf Vielfache von  $\frac{\pi}{4}$  zu bestimmen sind. Im Fall der

Winkelskalen-Kalibrationskonstante  $\Theta_{0WP}$  ist es immerhin möglich, die Unsicherheit bei Bestimmung anhand der Kalibration mit linearem Licht bis auf Vielfache von  $\frac{\pi}{2}$  zu reduzieren; für die Unterscheidung zwischen schneller und langsamer Achse muß jedoch auch auf die Resultate der Kalibration mit zirkularem Licht zurückgegriffen werden. Da letztere aber eine weniger genaue Abschätzung des Minimums erlauben, wird als Grundlage der Schätzwert aus den Daten der Kalibration mit linearem Licht verwendet und solange um  $\frac{\pi}{2}$  verschoben, bis er nahezu mit dem Schätzwert aus der Kalibration mit zirkularem Licht übereinstimmt. Im Falle der Orientierung der Kalibrationswellenplatte wird die Unbestimmtheit aufgehoben, indem der Schätzwert solange korrigiert wird, bis er näherungsweise mit der vom Benutzer vorgegebenen ungefähren Orientierung übereinstimmt. Letztere kann anhand der Markierung der schnellen Achse auf der Fassung der  $\lambda/4$ -Platte realistischerweise bis auf  $\frac{\pi}{8}$  abgeschätzt werden; eine genauere Angabe ist hier nicht möglich, da aus Platzgründen kein mikromechanischer Drehtisch für die Montage dieser Wellenplatte vorgesehen werden konnte.

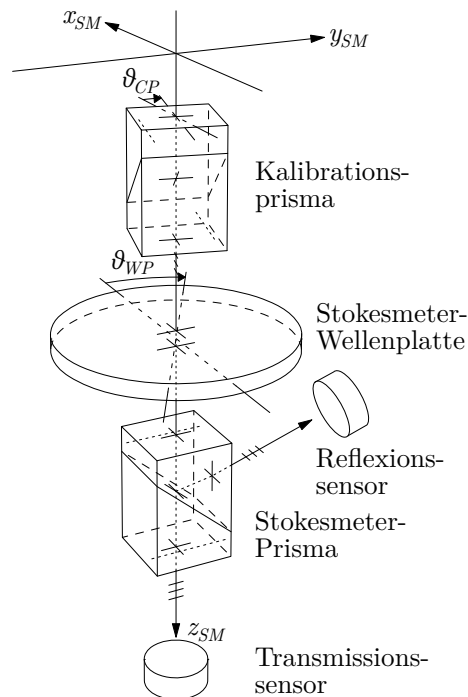
Die bereits in den vorigen Abschnitten angestellten Überlegungen zur Beurteilung der Fitgüte sind auch auf die hier beschriebene Kalibration anwendbar; man kann sich leicht überlegen, daß in diesem Fall die für den  $\chi^2$ -Test zu verwendende Anzahl an Freiheitsgraden durch

$$\nu^K = 2N^{Klin} + 2N^{Kzirk} - n_{par} \quad (5.81)$$

gegeben ist.

### 5.3.3 Justierfehleranalyse

Die Justierfehleranalyse ist ein Verfahren, das ursprünglich im Zusammenhang mit dem Vorgängermodell des hier beschriebenen Stokesmeters eingeführt wurde, nachdem erste Analysen der mit dem damaligen Gerät durchgeführten Messungen oft unerklärlich hohe unpolarisierte Anteile im Polarisationszustand ergeben hatten. Dieses Phänomen konnte zum Teil auf eine verschobene Kalibration der Wellenplatten-Winkelskala zurückgeführt werden (vgl. Anhang C), weshalb ein Verfahren zur nachträglichen Überprüfung und Korrektur dieser Kalibration entwickelt wurde. Bei dieser Meßreihe wird die Kalibrationswellenplatte wieder aus dem Strahlengang entfernt und linear polarisiertes Licht verschiedener Orientierungen mit dem Stokesmeter vermessen. Wenn eine Verschiebung des Skalenursprungs vorliegt, äußert sich dies in einer charakteristischen Abhängigkeit des rekonstruierten unpolarisierten Anteils von der rekonstruierten Orientierung der Polarisations Ebene.



**Abbildung 5.9:** Schematische Darstellung der Justierfehleranalyse

Im Rahmen der Kalibration des Stokesmeter MkII kann dieses Verfahren nun eingesetzt werden, um die bereits angesprochenen Schwachpunkte der Wellenplatten-Skalenkalibration zu beheben. Da im Rahmen der Meßreihe das Kalibrationsprisma einmal vollständig gedreht wird, umfaßt sie implizit auch eine Abtastung des eingestrahnten Polarisationszustands, so daß dessen Einfluß auf die Kalibration nun doch mitberücksichtigt werden kann. Die Justierfehleranalyse ist in der Lage, dieselben Informationen wie die zuvor beschriebene Wellenplatten-Skalenkalibration zu liefern, sie kann nur nicht ohne extern zur Verfügung gestellte Informationen die Ununterscheidbarkeit zwischen langsamer und schneller Achse der Stokesmeter-Wellenplatte aufheben. Aus diesem Grund sind Justierfehleranalyse und Kalibration mit linearem/zirkularem Licht auch nicht redundant, vielmehr stellt die Justierfehleranalyse eine (notwendige) Verfeinerung der zuvor beschriebenen Skalenkalibration dar.

### Ableitung des Fitmodells

Im Rahmen dieser Meßreihe wird das Kalibrationsprisma in diskreten Schritten gedreht und bei jeder Winkelstellung eine vollständige Stokesmessung

durchgeführt; somit wird der präparierte Polarisationszustand durch

$$\vec{S}_{prep}^{JFA}(\vartheta_{CP}) = M_{rot}(-\vartheta_{CP}) M_{CP} M_{rot}(\vartheta_{CP}) \begin{pmatrix} I_0 \\ Q_0 \\ U_0 \\ V_0 \end{pmatrix} \quad (5.82)$$

beschrieben. Die Orientierung des Kalibrationsprismas,  $\vartheta_{CP}$ , kann hierbei direkt gewählt werden, da dessen Winkelskala bereits während der Initialjustierung kalibriert wurde; dies bedeutet andererseits, daß die entsprechende Winkelkalibration und alle Angaben zu nichtidealen Eigenschaften dieses Prismas als Kalibrationskonstanten in die Analyse dieser Messungen eingebracht werden müssen.

Für die auf die Sensoren einfallende Intensität ergeben sich demnach folgende Ausdrücke:

$$\begin{aligned} I_{tr}^{JFA}(\vartheta_{CP}, \vartheta_{WP}) = & \frac{1}{8} \left\{ (f_{SP+}^2 t_{WP+}^2 + f_{SP-}^2 t_{WP-}^2 \cos 2\vartheta_{WP}) \times \right. \\ & \times (f_{CP+}^2 I_0 + f_{CP-}^2 Q_0 \cos 2\vartheta_{CP} + f_{CP-}^2 U_0 \sin 2\vartheta_{CP}) \\ & + \left[ \frac{1}{2} f_{SP-}^2 (t_{WP+}^2 + 2t_{WPf} t_{WP_s} \cos \Delta_{WP}) + f_{SP+}^2 t_{WP-}^2 \cos 2\vartheta_{WP} \right. \\ & \left. + \frac{1}{2} f_{SP-}^2 (t_{WP+}^2 - 2t_{WPf} t_{WP_s} \cos \Delta_{WP}) \cos 4\vartheta_{WP} \right] \times \\ & \times \left[ \frac{1}{2} (f_{trCP} + f_{lkCP})^2 Q_0 + f_{CP-}^2 I_0 \cos 2\vartheta_{CP} + \right. \\ & \left. + \frac{1}{2} (f_{trCP} - f_{lkCP})^2 (Q_0 \cos 4\vartheta_{CP} + U_0 \sin 4\vartheta_{CP}) \right] \\ & + \left[ f_{SP+}^2 t_{WP-}^2 \sin 2\vartheta_{WP} \right. \\ & \left. + \frac{1}{2} f_{SP-}^2 (t_{WP+}^2 - 2t_{WPf} t_{WP_s} \cos \Delta_{WP}) \sin 4\vartheta_{WP} \right] \times \\ & \times \left[ \frac{1}{2} (f_{trCP} + f_{lkCP})^2 U_0 + f_{CP-}^2 I_0 \sin 2\vartheta_{CP} \right. \\ & \left. - \frac{1}{2} (f_{trCP} - f_{lkCP})^2 (U_0 \cos 4\vartheta_{CP} - Q_0 \sin 4\vartheta_{CP}) \right] \\ & \left. - 4f_{SP-}^2 t_{WPf} t_{WP_s} \sin \Delta_{WP} f_{trCP} f_{lkCP} V_0 \sin 2\vartheta_{WP} \right\} \end{aligned}$$

$N_{tr}^{JFA}$	$:= \frac{1}{8} g_{tr} f_{trCP}^2 t_{WPf}^2$	Transmissions-Normierungskonstante
$N_{ref}^{JFA}$	$:= \frac{1}{8} g_{ref} t_{trCP}^2 t_{WPf}^2 f_{rfSP}^2$	Reflexions-Normierungskonstante
$q_0, u_0, v_0$		Polarisationszustand des einfallenden Lichtstrahls
$k_{WP}$	$:= \frac{t_{WPf}}{t_{WPs}}$	Transmissions-Anisotropie der Stokesmeter-Wellenplatte
$\Delta_{WP}$		tatsächliche Verzögerung der Stokesmeter-Wellenplatte
$\Theta_{0WP}$		Kalibrationskonstante der Winkelskala

**Tabelle 5.10:** Fitparameter der Justierfehleranalyse.

$$\begin{aligned}
 I_{ref}^{JFA}(\vartheta_{CP}, \vartheta_{WP}) = & \\
 & \frac{1}{8} \left\{ (f_{SPr+}^2 t_{WP+}^2 + f_{SPr-}^2 t_{WP-}^2 \cos 2\vartheta_{WP}) \times \right. \\
 & \quad \times (f_{CP+}^2 I_0 + f_{CP-}^2 Q_0 \cos 2\vartheta_{CP} + f_{CP-}^2 U_0 \sin 2\vartheta_{CP}) \\
 & + \left[ \frac{1}{2} f_{SPr-}^2 (t_{WP+}^2 + 2t_{WPf} t_{WPs} \cos \Delta_{WP}) + f_{SPr+}^2 t_{WP-}^2 \cos 2\vartheta_{WP} \right. \\
 & \quad \left. + \frac{1}{2} f_{SPr-}^2 (t_{WP+}^2 - 2t_{WPf} t_{WPs} \cos \Delta_{WP}) \cos 4\vartheta_{WP} \right] \times \\
 & \quad \times \left[ \frac{1}{2} (f_{trCP} + f_{lkCP})^2 Q_0 + f_{CP-}^2 I_0 \cos 2\vartheta_{CP} + \right. \\
 & \quad \left. + \frac{1}{2} (f_{trCP} - f_{lkCP})^2 (Q_0 \cos 4\vartheta_{CP} + U_0 \sin 4\vartheta_{CP}) \right] \\
 & + \left[ f_{SPr+}^2 t_{WP-}^2 \sin 2\vartheta_{WP} \right. \\
 & \quad \left. + \frac{1}{2} f_{SPr-}^2 (t_{WP+}^2 - 2t_{WPf} t_{WPs} \cos \Delta_{WP}) \sin 4\vartheta_{WP} \right] \times \\
 & \quad \times \left[ \frac{1}{2} (f_{trCP} + f_{lkCP})^2 U_0 + f_{CP-}^2 I_0 \sin 2\vartheta_{CP} \right. \\
 & \quad \left. - \frac{1}{2} (f_{trCP} - f_{lkCP})^2 (U_0 \cos 4\vartheta_{CP} - Q_0 \sin 4\vartheta_{CP}) \right] \\
 & \left. - 4f_{SPr-}^2 t_{WPf} t_{WPs} \sin \Delta_{WP} f_{trCP} f_{lkCP} V_0 \sin 2\vartheta_{WP} \right\}
 \end{aligned}$$

Die Wahl der Modellparameter fällt in diesem Fall logischerweise ähnlich aus wie bei der Wellenplatten-Skalenkalibration und ist in Tabelle 5.10 zusammengefaßt. Es ergeben sich demnach folgende Fitmodelle:

$$\begin{aligned}
 \tilde{\mathcal{T}}(\Theta_{EWP}, \vartheta_{CP}) = & \\
 & N_{tr}^{JFA} \left\{ \left[ f_{SP+}^2 (1 + k_{WP}^2) + f_{SP-}^2 (1 - k_{WP}^2) \cos 2(\Theta_{EWP} - \Theta_{0WP}) l_{WP} \right] \times \right. \\
 & \quad \times \left[ 1 + k_{CP}^2 + (1 - k_{CP}^2) (q_0 \cos 2\vartheta_{CP} + u_0 \sin 2\vartheta_{CP}) \right] \\
 & + \left[ \frac{1}{2} f_{SP-}^2 (1 + k_{WP}^2 + 2k_{WP} \cos \Delta_{WP}) \right. \\
 & \quad + f_{SP+}^2 (1 - k_{WP}^2) \cos 2(\Theta_{EWP} - \Theta_{0WP}) l_{WP} \\
 & \quad \left. + \frac{1}{2} f_{SP-}^2 (1 + k_{WP}^2 - 2k_{WP} \cos \Delta_{WP}) \cos 4(\Theta_{EWP} - \Theta_{0WP}) l_{WP} \right] \times \\
 & \quad \times \left[ \frac{1}{2} (1 + k_{CP})^2 q_0 + (1 - k_{CP}^2) \cos 2\vartheta_{CP} \right. \\
 & \quad \left. + \frac{1}{2} (1 - k_{CP})^2 (q_0 \cos 4\vartheta_{CP} + u_0 \sin 4\vartheta_{CP}) \right] \\
 & + \left[ f_{SP+}^2 (1 - k_{WP}^2) \sin 2(\Theta_{EWP} - \Theta_{0WP}) l_{WP} \right. \\
 & \quad \left. + \frac{1}{2} f_{SP-}^2 (1 + k_{WP}^2 - 2k_{WP} \cos \Delta_{WP}) \sin 4(\Theta_{EWP} - \Theta_{0WP}) l_{WP} \right] \times \\
 & \quad \times \left[ \frac{1}{2} (1 + k_{CP})^2 u_0 + (1 - k_{CP}^2) \sin 2\vartheta_{CP} \right. \\
 & \quad \left. - \frac{1}{2} (1 - k_{CP})^2 (u_0 \cos 4\vartheta_{CP} - q_0 \sin 4\vartheta_{CP}) \right] \\
 & \left. - 4f_{SP-}^2 k_{WP} k_{CP} \sin \Delta_{WP} u_0 \sin 2(\Theta_{EWP} - \Theta_{0WP}) l_{WP} \right\}
 \end{aligned} \tag{5.83}$$

$$\begin{aligned}
 \tilde{\mathcal{R}}(\Theta_{EWP}, \vartheta_{CP}) = & N_{ref}^{JFA} \left\{ \left[ (1 + k_{SPr})^2 (1 + k_{WP}^2) \right. \right. \\
 & + (1 - k_{SPr}^2) (1 - k_{WP}^2) \cos 2(\Theta_{EWP} - \Theta_{0WP}) l_{WP} \left. \right] \times \\
 & \times \left[ 1 + k_{CP}^2 + (1 - k_{CP}^2) (q_0 \cos 2\vartheta_{CP} + u_0 \sin 2\vartheta_{CP}) \right] \\
 & + \left[ \frac{1}{2} (1 - k_{SPr}^2) (1 + k_{WP}^2 + 2k_{WP} \cos \Delta_{WP}) \right. \\
 & + (1 + k_{SPr})^2 (1 - k_{WP}^2) \cos 2(\Theta_{EWP} - \Theta_{0WP}) l_{WP} \\
 & + \left. \frac{1}{2} (1 - k_{SPr}^2) (1 + k_{WP}^2 - 2k_{WP} \cos \Delta_{WP}) \cos 4(\Theta_{EWP} - \Theta_{0WP}) l_{WP} \right] \times \\
 & \times \left[ \frac{1}{2} (1 + k_{CP})^2 q_0 + (1 - k_{CP}^2) \cos 2\vartheta_{CP} \right. \\
 & \left. + \frac{1}{2} (1 - k_{CP})^2 (q_0 \cos 4\vartheta_{CP} + u_0 \sin 4\vartheta_{CP}) \right] \\
 & + \left[ (1 + k_{SPr})^2 (1 - k_{WP}^2) \sin 2(\Theta_{EWP} - \Theta_{0WP}) l_{WP} \right. \\
 & + \left. \frac{1}{2} (1 - k_{SPr}^2) (1 + k_{WP}^2 - 2k_{WP} \cos \Delta_{WP}) \sin 4(\Theta_{EWP} - \Theta_{0WP}) l_{WP} \right] \times \\
 & \times \left[ \frac{1}{2} (1 + k_{CP})^2 u_0 + (1 - k_{CP}^2) \sin 2\vartheta_{CP} \right. \\
 & \left. - \frac{1}{2} (1 - k_{CP})^2 (u_0 \cos 4\vartheta_{CP} - q_0 \sin 4\vartheta_{CP}) \right] \\
 & \left. - 4 (1 - k_{SPr}^2) k_{WP} k_{CP} \sin \Delta_{WP} v_0 \sin 2(\Theta_{EWP} - \Theta_{0WP}) l_{WP} \right\} \quad (5.84)
 \end{aligned}$$

### Analyse der Daten

Im hier vorliegenden Fall wird die Notwendigkeit einer simultanen Analyse der Messungen besonders deutlich, da es sich bei der Meßreihe für die Justierfehleranalyse effektiv um die Abtastung einer Vektorfunktion zweier Parameter handelt, so daß der Fitvorgang in diesem Fall als Fit eines Vektorfeldes an ein zweidimensionales Gitter aus Meßwertvektoren interpretiert werden muß. Auch dies ist in Anlehnung an den bereits für die vorhergehenden Kalibrationsschritte entwickelten Formalismus möglich, in dem die Likelihood-Funktion  $\mathcal{L}^{JFA}$  als Produkt der korrelierten Likelihood-Funktionen der jeweiligen Einzelmessungen formuliert wird. Wenn man also mit  $\vec{m}_{ij}$  den Meßwert

bei der  $j$ -ten Winkelstellung der  $\lambda/4$ -Platte und der  $i$ -ten Winkelstellung des Kalibrationsprismas und mit  $\tilde{\Sigma}_{ij}$  die zugehörige Kovarianzmatrix bezeichnet, kann man folgenden Ausdruck für die  $NLL$ -Funktion ableiten:

$$F^{JFA} = \sum_{i=1}^{N_{CP}} \sum_{j=1}^{N_i} \left( \vec{m}_{ij} - \vec{\mathcal{M}}^{JFA}(\Theta_{EWP,j}, \vartheta_{CP,i}) \right)^T \tilde{\Sigma}_{ij}^{-1} \left( \vec{m}_{ij} - \vec{\mathcal{M}}^{JFA}(\Theta_{EWP,j}, \vartheta_{CP,i}) \right) \quad (5.85)$$

Aufgrund der nochmals deutlich größeren Komplexität des Fitmodells ist es bei dieser Analyse besonders wichtig, geeignete Startwerte für die zu bestimmenden Fitparameter vorzugeben. Hier erweist es sich dann als Vorteil, daß die wichtigsten Parameter auch schon in der vorangegangenen Wellenplatten-Skalenkalibration bestimmt wurden, so daß diese Resultate als Startwerte für den Fitvorgang verwendet werden können. Für die restlichen Parameter wird wieder die Methode der harmonischen Analyse angewandt, um anhand der Modulationsamplituden geeignete Abschätzungen zu bestimmen. Im Fall dieser Analyse ist aber eine *zweidimensionale* Zerlegung, d. h. sowohl bezüglich der  $\Theta_{EWP}$ - als auch der  $\vartheta_{CP}$ -Abhängigkeit erforderlich; dann allerdings findet man wieder relativ einfache analytische Ausdrücke zur Bestimmung der Parameterschätzwerte. Um die experimentellen Modulationsamplituden zu bestimmen, wird zunächst eine harmonische Analyse der Meßdaten bezüglich  $\Theta_{EWP}$  durchgeführt, und anschließend die so bestimmten, aber noch zu verschiedenen Kalibrationsprismen-Orientierungen gehörenden Modulationsamplituden einer gegebenen Ordnung in  $\Theta_{EWP}$  nach demselben Verfahren analysiert, um deren  $\vartheta_{CP}$ -Modulation zu ermitteln. Auf diese Weise ist es möglich, Startwerte für die Stokesparameter des eingestrahnten Polarisationszustands und die beiden Normierungskonstanten zu berechnen.

Die Justierfehleranalyse ist der letzte Schritt in der Kalibration des Stokesmeter MkII; nach ihrem Abschluß kann auch das Kalibrationsprisma entfernt und das Gerät somit für die Messung des resonatorinternen Polarisationszustands eingesetzt werden.



# Kapitel 6

## Bestimmung der Polarisation von Laser- und Elektronenstrahl

Nachdem im vorigen Kapitel die mathematischen Methoden zur Analyse der Stokesmessungen vorgestellt wurden, soll nun dargelegt werden, wie diese auf die während einer Strahlzeit durchgeführten Messungen angewandt werden können, um zunächst die Polarisation des Laserstrahls und anschließend die Polarisation des Elektronenstrahls zu bestimmen.

In einem ersten Abschnitt soll hierbei auf die Organisation der Meßdaten und der für ihre Analyse erforderlichen Kalibrationswerte eingegangen werden, bevor im Hauptteil des Kapitels der eigentliche Analyseprozeß, für den ein dediziertes Analyseprogramm entwickelt wurde, schrittweise nachvollzogen wird. Ein wesentlicher Aspekt ist hierbei die Untersuchung systematischer Einflüsse auf das Meßergebnis und deren Berücksichtigung in der Gesamtunsicherheit der Resultate. Es gibt zwei Arten solcher Effekte, die als *intern* und *extern* bezeichnet werden je nachdem, ob ihre Ursachen im Meßgerät selbst oder außerhalb liegen; auf sie wird in jeweils eigenen Abschnitten eingegangen werden.

Zum Abschluß des Kapitels wird der auf diese Weise bestimmte resonatorinterne Polarisationszustand des Laserstrahls mit den Ergebnissen der parallelen Dissertation [48] kombiniert, um die Polarisation des Elektronenstrahls während einer ausgewählten Strahlzeit zu bestimmen.

### 6.1 Organisation der Meßdaten und Kalibrationswerte

Die Polarisationsmessungen mit dem Stokesmeter MkII sind, anders als etwa die Daten des A4-Experiments oder selbst die Messungen zur Bestimmung der Compton-Asymmetrie für das Compton-Rückstreupolarimeter, völlig un-

abhängig vom MAMI-Elektronenstrahl. Dies bedeutet einerseits, daß die Häufigkeit und zeitliche Struktur der Messungen nicht mit derjenigen der A4-Datenerfassung oder auch nur des Photonenkalorimeters gekoppelt ist, und andererseits, daß etwa Schwankungen oder Driften der Meßgröße von gänzlich anderen Ursachen herrühren, so daß auch die Notwendigkeit von Kalibrationsmessungen nicht mit derjenigen bei den anderen Teilen des Polarimeters korreliert ist. Aus diesem Grund verwendet das Stokesmeter MkII auch auf der Softwareseite eine separate Infrastruktur für die Datennahme und -analyse; auf diese soll im folgenden näher eingegangen werden.

### 6.1.1 Format der Messungen

Die Bestimmung der Strahlpolarisation und aller Kalibrationsparameter erfolgt in diskreten Messungen, die die Signale aller Sensoren während einer kompletten Umdrehung des jeweiligen optischen Elements umfassen. Alle relevanten Parameter der Datennahme können hierbei über eine Konfigurationsdatei voreingestellt und für die einzelne Messung auch übersteuert werden. Es hat sich in diesem Fall als sinnvoll herausgestellt, die Winkelabhängigkeit der Signale in  $10^\circ$ -Schritten abzutasten, wobei bei jeder Winkelstellung 2048 ADC-Meßwerte<sup>1</sup> (*samples*) bei einer Abtastrate von 2 kSa/s aufgenommen werden; eine Stokesmessung dauert somit typischerweise 1.5 min, eine Messung mit Drehung des Kalibrationsprismas ca. 2.5 min.

Die Rohdaten werden in Form von `TNtupleD`-Datenstrukturen in einer binären *ROOT*-Datei gespeichert; zusätzlich wird für jede Messung eine ASCII-Textdatei mit Metadaten (wie etwa Zeitpunkt, Zweck, verwendete Sensoren usw.) erstellt, die als *Header-Datei* bezeichnet wird. Eine Ausnahme bilden solche Messungen, bei denen kein optisches Element rotiert wurde und die daher nur aus einem Datenpunkt bestehen; hier werden die Einzelpunkt-Meßserien selbst ebenfalls in Textform in die Header-Datei geschrieben. Anstelle des im Hauptexperiment üblichen „Run-Nummern“-Schemas, das auch bei den Messungen der Compton-Asymmetrie Verwendung findet [48], werden die Stokesmessungen durch einen aus dem Datum und einer fortlaufenden Nummer bestehenden Bezeichner der Form *stokTTMMJJ\_NNN* identifiziert, wobei die Nummer an jedem neuen Tag wieder bei eins beginnt.

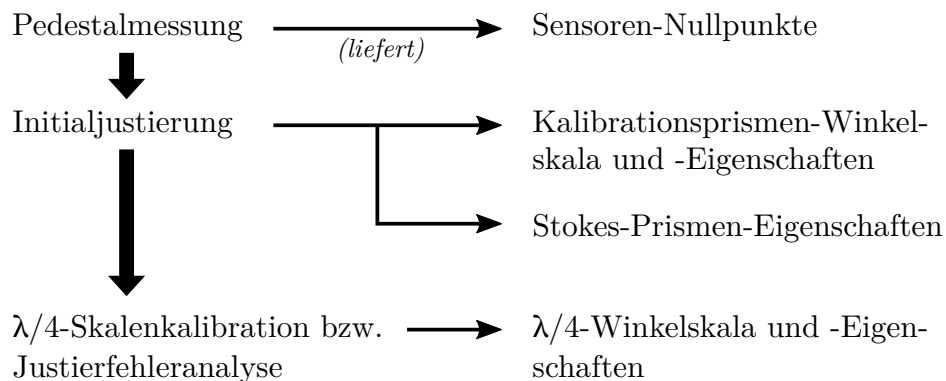
---

<sup>1</sup>Es gibt keinen prinzipiellen Grund, aus dem die Länge der Einzelpunkt-Meßserien eine Zweierpotenz sein muß; allerdings wurde im Hinblick auf eine möglicherweise bei der späteren Analyse erforderliche Anwendung von FFT-Methoden üblicherweise mit solchen Längen gearbeitet.

### 6.1.2 Verwaltungsstruktur für die Meßdaten

Im vorangegangenen Kapitel wurde festgestellt, daß für die Datenanalyse neben den eigentlichen Meßdaten noch Kalibrationsparameter benötigt werden, die die (meistens nichtidealen) Eigenschaften der Apparatur beschreiben. Im Falle des hier vorgestellten Stokesmeter MkII ist es nun möglich, alle benötigten Kalibrationsparameter mit dem Gerät selbst zu bestimmen. Dies hat den Vorteil, daß einerseits durch wiederholte Messungen Driften der Parameter erkannt werden können und andererseits auf diese Weise auch die Unsicherheiten der Werte bekannt sind, was für eine korrekte Fehleranalyse erforderlich ist. Im folgenden soll nun erläutert werden, wie diese Kalibrationswerte für die Analyse einzelner Messungen verwaltet und bereitgestellt werden.

Zunächst muß hierfür die Auffistung in Abs. 5.3 um eine weitere wichtige Kalibrationsart erweitert werden: die Pedestalmessung, mit der die Signal-Nullpunkte aller Stokes-Sensoren bestimmt werden. Zu diesem Zweck wird bei abgeschaltetem oder blockiertem Laserstrahl eine Meßserie aller Sensorsignale aufgezeichnet, wobei auch hier üblicherweise eine Länge von 2048 samples bei 2 kSa/s gewählt wird. Es wird hierbei keines der ggf. installierten optischen Elemente rotiert, so daß die Pedestalmessung zu den nur aus einem Datenpunkt bestehenden Messungen zählt. Insgesamt ist demnach für die Bestimmung eines vollständigen Satzes an Kalibrationsparametern die nachfolgend beschriebene Abfolge aufeinander aufbauender Messungen erforderlich, wobei jede Stufe die im Rahmen der vorangegangenen Stufe ermittelten Parameter benötigt:



Um die Meßdaten einer Strahlzeit analysieren zu können, müssen diese nun in geeigneter Weise unterteilt werden. Für die Messungen mit dem Stokesmeter MkII hat es sich hierbei als sinnvoll herausgestellt, zwei „parallel“ lau-

fende Unterteilungsebenen anzuwenden: das *Sample* und das *Mikrosample*. Ein Sample ist in diesem Fall eine Ansammlung von Polarisationsmessungen, bei denen die Meßbedingungen ähnlich genug sind, daß eine Verbesserung der Genauigkeit durch Mittelung oder Interpolation möglich ist; ein neues Sample muß daher z. B. dann angefangen werden, wenn aufgrund von Justierarbeiten an der Optik mit einer – beabsichtigten oder unbeabsichtigten<sup>2</sup> – Änderung des Polarisationszustands gerechnet werden muß, andererseits können aber auch „außer Konkurrenz“ laufende Optimierungsmessungen zu einem Sample zusammengefaßt werden, um sie so auf übersichtliche Weise von der Analyse auszuschließen. Ein Mikrosample in diesem Sinne war ursprünglich als ein Unterabschnitt eines Samples zwischen zwei verschiedenen Kalibrationsmessungen gedacht. Dieses Schema hätte impliziert, daß für jedes Sample wenigstens einmal der komplette Satz an Kalibrationsparametern bestimmt werden muß; aus diesem Grund wurde die streng hierarchische Ordnung aufgegeben, so daß ein Mikrosample sich über mehr als ein Sample erstrecken kann und einfach die Menge aller Messungen zwischen zwei Kalibrationen darstellt.

Aufgrund dieser Definition liegt es nun nahe, die interne Verwaltungsstruktur der Kalibrationsdaten ebenfalls auf dem Mikrosample aufzubauen: Jede Messung wird einem Mikrosample-Objekt zugeordnet, in dessen Geltungsbereich sie fällt und von dem sie die für die Analyse notwendigen Kalibrationskonstanten bezieht. Da die verschiedenen Kalibrationsmessungen unterschiedlich oft durchgeführt werden, muß es für alle Kalibrationsarten jeweils eigene, parallel laufende Linien von Mikrosamples geben. Somit gehört jede Messung verschiedenen Mikrosamples an, aber immer nur einem einzigen jeder Kalibrationsart. Die Mikrosample-Objekte spielen auch bei der späteren Untersuchung systematischer Einflüsse eine große Rolle (siehe Abs. 6.3).

Eine Besonderheit stellt in dieser Hinsicht die Initialjustierung dar: Wie man den Beschreibungen in Abs. 5.3.1 entnehmen kann, liefert die Initialjustierung sowohl Informationen über das Kalibrationsprisma ( $k_{CP}$ ,  $\Theta_{0CP}$ ) als auch über das Stokesmeter-Prisma ( $f_{trSP}$ ,  $f_{lkSP}$ ,  $k_{SPr}$ ). Allerdings werden die Angaben zum Kalibrationsprisma – insbesondere die Skalenkalibrationskonstante  $\Theta_{0CP}$  – in dem Augenblick ungültig, in dem das entsprechende Kalibrationsmodul entfernt wird, während die Angaben zum Stokesmeter-Prisma weiterhin gültig bleiben. Aus diesem Grund werden die Resultate der Initialjustierung in zwei separate Kalibrationsarten aufgeteilt, von denen

---

<sup>2</sup>Auch wenn etwa im Zuge einer Justierung zur Leistungsoptimierung nur die Strahlachse verändert wird, kann aufgrund des geänderten Auftreffwinkels auf die polarisationsoptisch wirksamen Elemente eine Änderung des Polarisationszustands auftreten.

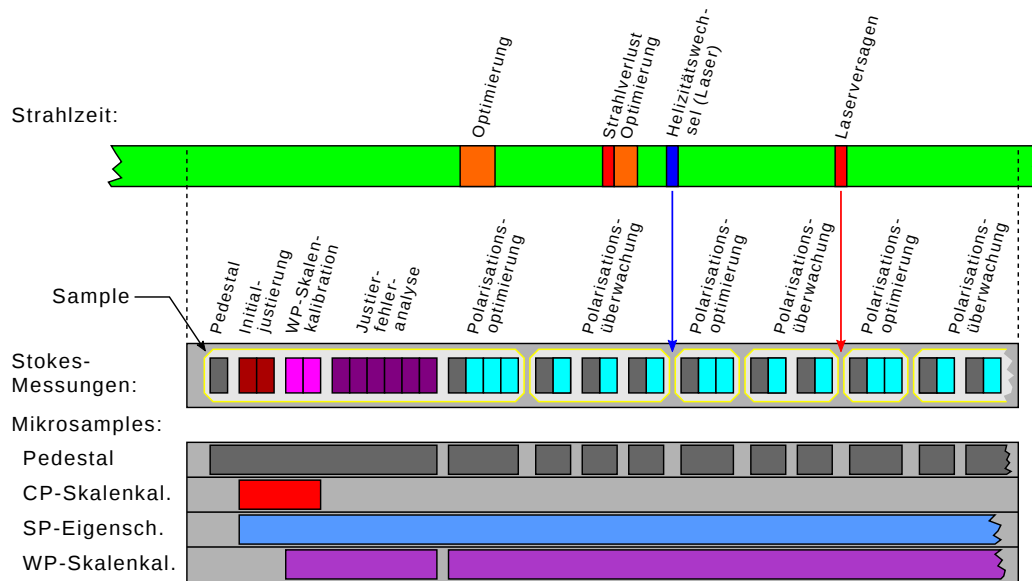
Kalibrationsart	Kalibrationskonstanten
Pedestals	$P_T, P_R, P_N$
Kalibrationsprismen- Winkelskala	$k_{CP}, \Theta_{0CP}$
Stokes-Prismen- Eigenschaften	$f_{trSP}, f_{lkSP}, k_{SPr}$
$\lambda/4$ -Winkelskala	$k_{WP}, \Delta_{WP}, \Theta_{0WP}$

**Tabelle 6.1:** Liste der Mikrosample-Typen, die zur Verwaltung der Kalibrationskonstanten für die Analyse der Messungen benötigt werden

die eine nur bis zum Widerruf aufgrund der Entfernung des Kalibrationsprismas gilt. Insgesamt ergeben sich somit die in Tabelle 6.1 aufgeführten primären Mikrosample-Typen.

Eine weitere Besonderheit ergibt sich bei der Justierfehleranalyse: prinzipiell ist das Mikrosample als die Menge aller Messungen zwischen zwei Kalibrationen definiert, wobei die Kalibrationsmessungen selbst ebenfalls dem Mikrosample hinzugerechnet werden. Nun liefern sowohl die  $\lambda/4$ -Skalenkalibration als auch die Justierfehleranalyse Informationen über die Winkelskala der Stokesmeter-Wellenplatte, wodurch das erste der beiden entsprechenden Mikrosamples nach dieser Konvention nur die beiden Messungen der Skalenkalibration umfassen würden. Die Justierfehleranalyse kann aber nur unter Verwendung der Resultate eben dieser Kalibration ausgewertet werden, so daß in diesem Fall ausnahmsweise der Geltungsbereich der neuen Kalibrationswerte erst *nach* den zur Justierfehleranalyse gehörenden Messungen beginnt und diese selbst noch dem vorangehenden  $\lambda/4$ -Winkelskalen-Mikrosample zugerechnet werden. Ein schematischer Überblick über die Unterteilung und Verwaltung der Meßdaten unter Berücksichtigung dieser Aspekte findet sich in Abb. 6.1.

Wie man am eben genannten Beispiel erkennen kann, ist es teilweise möglich, eine gegebene Kalibrationskonstante auf unterschiedliche Arten zu bestimmen. Darüberhinaus gibt es Fälle, in denen Kalibrationskonstanten sich auf spezifische Meßbedingungen beziehen: So ist etwa davon auszugehen, daß die Lage des Pedestalwerts für einen bestimmten Sensor von der gewählten Verstärkung des ADCs abhängig ist. Um nun in der Analyse ggf. nachvollziehen zu können, welchen Ursprungs ein hierbei verwendeter Kalibrationswert ist, und andererseits auch in der Lage zu sein, die Anwendbarkeit eines solchen Wertes auf die vorliegende Messung zu prüfen, besteht die Möglichkeit, Parameter mit einer Kontextkennung zu versehen, aus denen anderen Teile



**Abbildung 6.1:** Beispielhafte Darstellung des Unterteilungsschemas für die Stokes-Meßdaten. Die oberste Zeile stellt symbolisch die Zeitleiste der wichtigsten Strahlzeitereignisse dar, während der darunterliegende Block die Datennahme mit dem Stokesmeter und die Verwaltungsstruktur der Kalibrationsdaten repräsentiert. Wie man sieht, haben die beschleunigerseitigen Ereignisse und Unterbrechungen keinen Einfluß auf den Betrieb des Stokesmeters, während Änderungen oder Störungen an der Laser-Hardware im allgemeinen eine erneute Optimierung und somit den Beginn eines neuen Samples zur Folge haben.

des Analysevorgangs diese Umstände ersehen können.

## 6.2 Ablauf der Analyse

Nachdem in den vorangegangenen Abschnitten das Verfahren und die softwareseitige Infrastruktur der Analyse vorgestellt wurden, sollen nun die einzelnen Schritte der Datenanalyse am Beispiel der Strahlzeit *beam260509* konkret demonstriert werden. Hierzu wird die Auswertung aller Messungen, die zum Aufbau des vollständigen Satzes an Kalibrationskonstanten erforderlich sind, bis hin zur ersten Stokesmessung nachvollzogen und einzeln beschrieben; bei dieser Gelegenheit sollen auch unerwartete Resultate beleuchtet werden, die im Zuge der Datenanalyse aufgetreten sind.

$P_T^{\pm 2.5V} = 32819.99$	$\sigma_{P_T^{\pm 2.5V}} = 0.75$	$\sigma_{P_T^{\pm 2.5V} P_R^{\pm 2.5V}} = -0.002$
$P_R^{\pm 2.5V} = 32770.68$	$\sigma_{P_R^{\pm 2.5V}} = 0.74$	$\sigma_{P_T^{\pm 2.5V} P_N^{\pm 2.5V}} = -0.007$
$P_N^{\pm 2.5V} = 32786.11$	$\sigma_{P_N^{\pm 2.5V}} = 0.71$	$\sigma_{P_R^{\pm 2.5V} P_N^{\pm 2.5V}} = -0.029$

**Tabelle 6.2:** Resultierende Kalibrationsparameter und deren Kovarianzstruktur, wie sie anhand der Pedestalmessung *stok230509\_05* bestimmt wurden. Da der ADC eine Auflösung von 16 Bit aufweist, hat der Wertebereich einen Umfang von  $[0, 65535]$  und einen Mittelpunkt von 32767.

### 6.2.1 Pedestalmessung

Der erste Schritt bei der Bestimmung der Kalibrationskonstanten besteht in der Messung der Sensoren-Nullpunkte und wurde im vorliegenden Fall in Form der Stokesmessung *stok230509\_05* durchgeführt, wobei alle Sensoren mit einer Verstärkung digitalisiert wurden, die einem Meßbereich von  $\pm 2.5$  V entspricht. Die Analyse folgt dem in Abs. 5.1 dargelegten Schema für den Einzelpunkt<sup>3</sup>: Zunächst wird ein Test auf Normalverteilung durchgeführt und anschließend der Stichproben-Mittelwert und die Stichproben-Kovarianzmatrix bestimmt. Diese Vorgehensweise ist gerechtfertigt, weil ohne Vorliegen eines expliziten Intensitätssignals alle Fluktuationen auf stochastische Effekte innerhalb der Elektronik zurückgeführt werden können; dies wird auch durch den regelmäßig erfolgreichen Normalitätstest bestätigt.

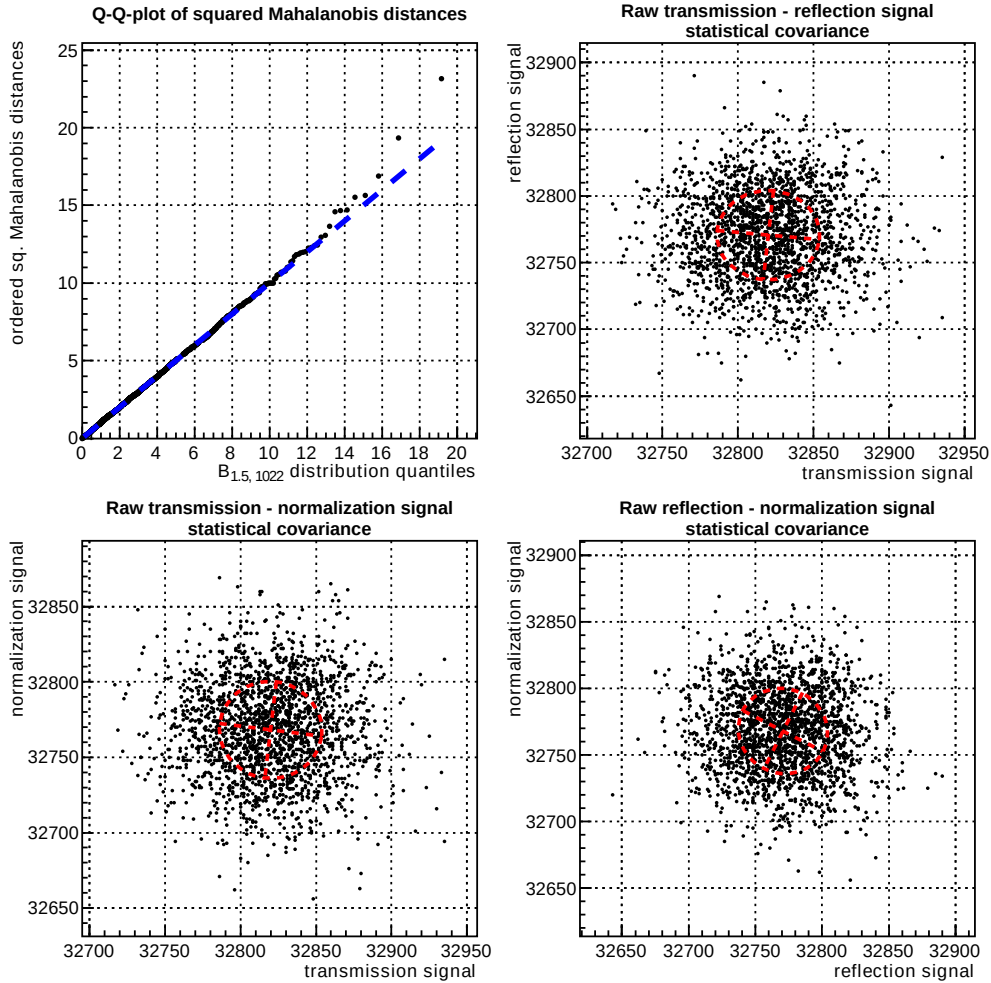
Das Resultat einer solchen Analyse ist in Abb. 6.2 in Form der graphischen Ausgabe des Analyseprogramms *view\_stokes* dargestellt. Sie enthält in Tabellenform die quantitativen Resultate des Normalitätstests und der Pedestal-Rekonstruktion sowie eine graphische Veranschaulichung des Analyseergebnisses. Dieses wird dargestellt, indem in die drei Projektionen der Verteilung der dreidimensionalen Einzelmesswerte jeweils die zugehörige  $1\text{-}\sigma$ -Ellipse als Projektion des  $1\text{-}\sigma$ -Ellipsoids der rekonstruierten Kovarianzmatrix eingezeichnet wird. Im vorliegenden Fall ergeben sich hieraus die in Tabelle 6.2 aufgeführten Kalibrationsparameter.

Das Resultat des Normalitätstests wird ebenfalls veranschaulicht, wobei hierfür die Form eines Quantil-Quantil-Diagramms gewählt wird: wenn eine aus  $N$  Elementen bestehende Stichprobe  $d$ -dimensional normalverteilt ist, unterliegen die quadrierten Mahalanobis-Distanzen (vgl. Gl. 5.50) der Einzelpunkte nach einer Skalierung mit  $N/(N-1)^2$  einer Beta-Verteilung mit den Parametern  $d/2$  und  $(N-d-1)/2$ , so daß eine Korrelationsdarstellung der

<sup>3</sup>wobei hier allerdings jeweils das dreidimensionale Analogon zu wählen ist



Normality test of stok230509_05		Pedestals as per stok230509_05	
Normality test type:	Henze-Zirkler	Stokes_Trans::Pedestal{B2.5}	32820.0
Significance level:	0.01	Stokes_Trans::Pedestal{B2.5}STERR	0.8
Henze-Zirkler $\beta$ parameter:	0.8005	Stokes_Ref::Pedestal{B2.5}	32770.7
Critical value of test statistic:	0.5721	Stokes_Ref::Pedestal{B2.5}STERR	0.7
Actual value of test statistic:	0.2996	Laser_Int::Pedestal{B2.5}	32768.1
p-value of this test statistic:	0.4140	Laser_Int::Pedestal{B2.5}STERR	0.7
<b>normality assumption accepted</b>			



**Abbildung 6.2:** Resultat der Analyse einer Pedestalmessung am Beispiel von *stok230509\_05*. Im oberen Teil sind Analysekonfiguration und numerische Resultate (mit Ausnahme der Kovarianzen) in Tabellenform aufgeführt, wobei die Bezeichner der Resultatwerte im intern genutzten „maschinenlesbaren“ Format gehalten sind; die Angaben in den geschweiften Klammern entsprechen den bereits erwähnten Parameterkontexten und stellen hier den Meßbereich des ADCs (2.5 V, bipolar) dar. Im darunterliegenden Hauptteil ist eine graphische Veranschaulichung des Tests auf Normalverteilung und der Rekonstruktion der Verteilungsparameter dargestellt.



nach Größe geordneten Distanzen gegen die Quantile der Beta-Verteilung einen linearen Zusammenhang ergeben sollte [74, S. 113]. Diese Darstellung erlaubt eine visuelle Einschätzung des Testergebnisses; allerdings wird für die Entscheidung über Akzeptanz oder Verwerfung der Stichprobe allein der Henze-Zirkler-Test herangezogen.

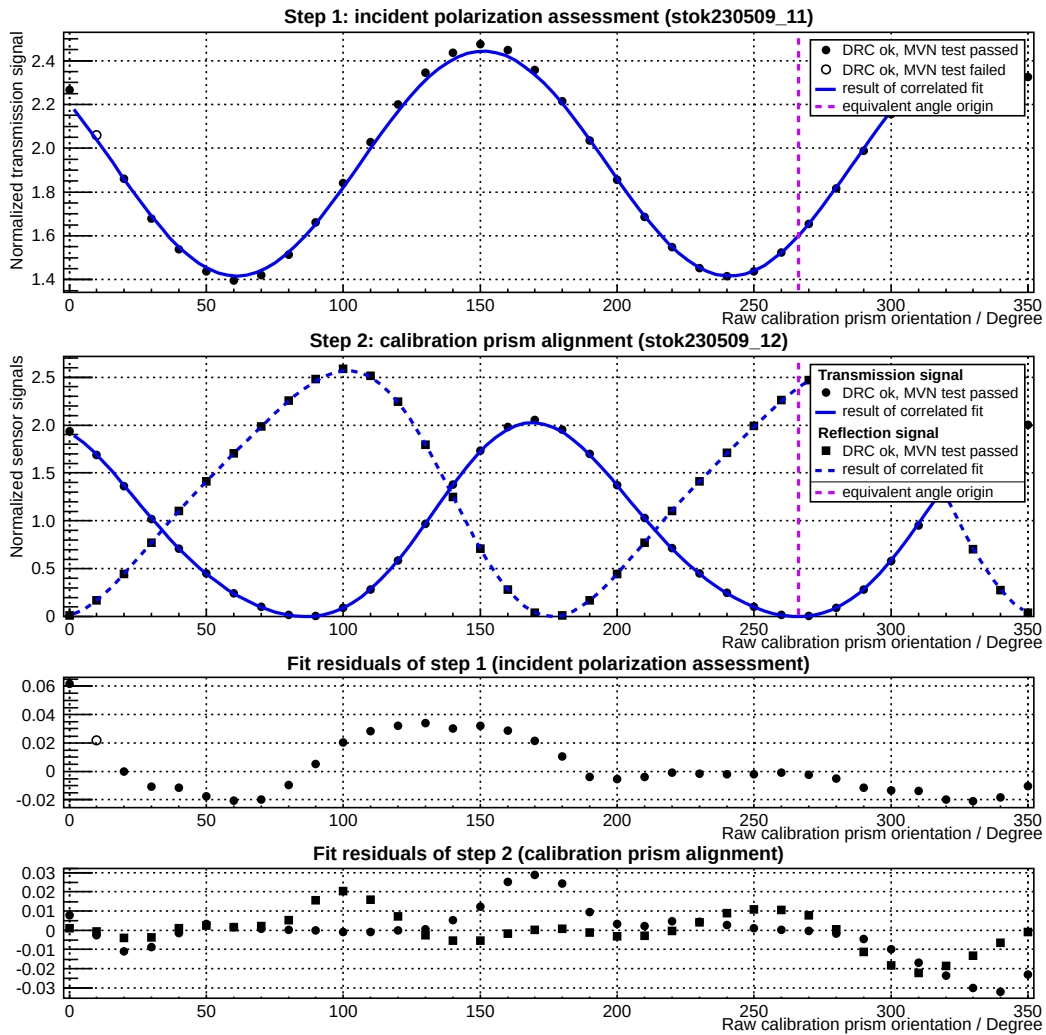
### 6.2.2 Initialjustierung

Nachdem die Sensoren-Nullpunkte bestimmt wurden, können nun auch die weiteren, „eigentlichen“ Kalibrations- und Stokesmessungen analysiert werden. Der nächste Schritt in dieser Folge besteht in der Auswertung der Initialjustierung; im vorliegenden Fall umfaßt diese die Messungen *stok230509\_11* und *stok230509\_12*, die zur Messungsgruppe *GRbeam260509\_001* zusammengefaßt werden.

Zunächst erfolgt die Vorverarbeitung der einzelnen Messungen: Die Rohdaten der Einzelpunkt-Stichproben werden aus der entsprechenden *ROOT*-Datei geladen und in einer ersten Qualitätskontrolle auf Überschreitung des dynamischen Bereichs des ADCs geprüft. Wenn hierbei beide Stokes-Sensoren oder der Normierungssensor den erlaubten Bereich verlassen, ist der Datenpunkt gänzlich auszusortieren; wenn dies hingegen nur auf den Transmissions- oder Reflexionssensor zutrifft, kann der Datenpunkt immer noch im Rahmen einer univariaten Analyse genutzt werden<sup>4</sup>. Die Einzelpunktdateien werden dann nach der Pedestalkorrektur aller Sensoren normiert, so daß eine Abfolge ein- bzw. zweidimensionaler Stichproben entsteht; diese werden dann mit den in Abs. 5.1 beschriebenen Methoden ausgewertet, um „den Sensorenmeßwert“ bei der jeweiligen Winkelstellung des Kalibrationsprismas zu ermitteln. Im Anschluß werden alle normierten Stichproben auf Vorliegen einer Normalverteilung geprüft und festgestellt, ob die Anzahl durchgefallener Datenpunkte mit der Fehlalarmrate aufgrund des gewählten Signifikanzniveaus verträglich ist. Sollte dies nicht zutreffen, wird der Vorgang an dieser Stelle abgebrochen, ansonsten werden die Messungen für den zweiten Schritt der Analyse freigegeben. In diesem Fall wird dann der korrelierte Fit an beide Datensätze durchgeführt, woraus die Kalibrationskonstanten und einige irrelevante Parameter (wie etwa Normierungskonstanten) resultieren. Diese Vorgehensweise wird auch bei der Analyse aller nachfolgend beschriebenen Kalibrations- und Messungsarten sinngemäß angewandt. Das Resultat der Analyse für die hier betrachtete Strahlzeit ist in Abb. 6.3 dargestellt.

<sup>4</sup>Die entsprechende Erweiterung der *NLL*-Funktion nach Gl. 5.64 ist mathematisch trivial, wurde bislang aber nicht in der Software umgesetzt, da der Fall recht selten auftritt.

Analysis of initial alignment	Resulting calibration parameters		(continued)
using dataset GRbeam260509_001	CalPrism::AngleFormat	2	$\theta_{\text{OCP}}^{(\text{real})}$ $93.718 \pm 6 \times 10^{-4}$
Analysis model: realistic	CalPrism::AngleUnit	Degree	$k_{\text{CP}}^{(\text{real})}$ $0.005 \pm 8 \times 10^{-5}$
Secondary results:	(short-form summary)		<b>Goodness-of-fit</b>
$N_{\text{tr}}$ $1.9301 \pm 5.3 \times 10^{-5}$	$f_{\text{trSP}}^{(\text{real})}$ $0.937 \pm 2 \times 10^{-5}$		test performed simut. UV/MV $\chi^2$
$N_{\text{ref}}$ $1.4414 \pm 5.4 \times 10^{-5}$	$f_{\text{kSP}}^{(\text{real})}$ $-9 \times 10^{-8} \pm 5 \times 10^{-4}$		$\chi_{\text{UV/MV, sim}}^2$ $2.8 \times 10^5$
$q_0$ $-0.1698 \pm 3.1 \times 10^{-5}$	$k_{\text{SPr}}^{(\text{real})}$ $6 \times 10^{-8} \pm 2 \times 10^{-4}$		$n_{\text{DOF}}$ 99
$u_0$ $0.2048 \pm 2.3 \times 10^{-5}$			p-value 0
Angle scale origin: 266.3 deg			



**Abbildung 6.3:** Resultat der Analyse der Initialjustierung am Beispiel der Messungsgruppe *GRbeam260509\_001* analog zu Abb. 6.2. Der Hauptteil zeigt hier die Daten der beiden Messungen mit dem Resultat des korrelierten Fits und die zugehörigen Residuen. Man sieht deutlich, daß letztere nicht mit den statistischen Unsicherheiten vereinbar sind. Die eingezeichnete Winkelposition dient als Orientierungshilfe und ist nicht gleich der Kalibrationskonstanten, sondern stellt diejenige Encoderposition dar, an der das Prisma entlang der  $x$ -Achse ausgerichtet ist.

### 6.2.3 Anpassung der statistischen Unsicherheiten

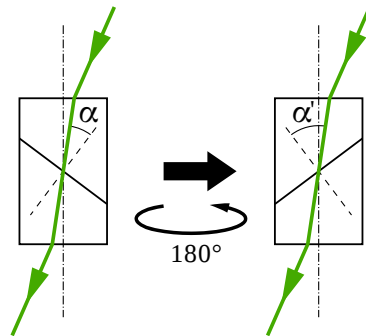
Aus Abb. 6.3 geht klar hervor, daß das Fitmodell zwar prinzipiell die Daten beschreiben kann, die Abweichungen jedoch nicht im Rahmen der statistischen Unsicherheiten der Datenpunkte erklärbar sind. Im vorliegenden Fall ergibt sich für die Fitgüte ein Wert von

$$\tilde{\chi}_I^2 = 2.8 \cdot 10^5$$

bei  $\nu^I = 99$  Freiheitsgraden, was einem  $p$ -Wert von praktisch 0 entspricht. Betrachtet man nun die Fitresiduen, so kann man feststellen, daß dieser Umstand auf einen systematischen Einfluß zurückzuführen sein muß; dies wird insbesondere anhand der Signale des Transmissionssensors deutlich, deren Residuen bei beiden Messungen ähnliche Strukturen aufweisen.

Ein solches Phänomen wurde nun nicht nur bei der Initialjustierung, sondern bei allen mit dem Stokesmeter MkII durchgeführten Messungen beobachtet, d. h. auch in denjenigen Fällen, in denen nicht das Kalibrationsprisma, sondern die Stokesmeter-Wellenplatte rotiert wurde. Es konnte hierbei allerdings kein einheitliches Muster festgestellt werden: Teilweise war eine Korrelation zwischen der Größe der Residuen und den entsprechenden Signalpegeln bei der jeweiligen Winkelstellung zu beobachten, während in anderen Fällen eher eine kontinuierliche Drift vorlag und eine systematisch vorliegende Periodizität nicht festgestellt werden konnte; bei wieder anderen Messungen wiesen die Residuen eine sinusförmige Komponente auf, deren Modulationsfrequenz gleich der Umlauffrequenz des jeweiligen optischen Elements war.

Die letztgenannte Beobachtung ist insofern auffallend, als die Vorzugsrichtungen polarisationsoptischer Elemente eigentlich keine unterscheidbare „Parallel-“ und „Antiparallelstellung“ aufweisen dürften (vgl. Abs. 5.2.3) und somit jegliche Modulationsfrequenzen der transmittierten Intensität *gerade* Vielfache der mechanischen Rotationsfrequenz sein müßten. Allerdings wird für die Initialjustierung, bei der dieser Effekt zuerst registriert wurde, ein Prismenpolarisator eingesetzt, der aufgrund der schrägen Schnittfläche die  $180^\circ$ -Symmetrie verletzt. Dieser Umstand führt nun insbesondere dazu, daß bei einem aufgrund ungenauer Justierung der Apparatur schrägen Einfall des Laserstrahls auf das Prisma die Transmission bei zwei um  $180^\circ$  auseinanderliegenden Prismenorientierungen verschieden sein kann, weil sich in diesem Fall die Einfallswinkel auf die Schnittfläche und somit auch die Fresnel'schen Transmissionskoeffizienten unterscheiden. Dieser Unterschied ist am größten zwischen denjenigen beiden Winkelstellungen, bei denen Prismenachse, Strahlrichtung und Schnittflächennormale komplanar sind (vgl. Abb. 6.4). In der Tat kann man ausrechnen, daß bereits ein Fehler von  $0.1^\circ$  bzw. 1.7 mrad

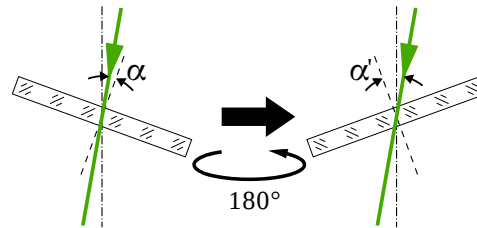


**Abbildung 6.4:** Illustration der Auswirkung eines schrägen Einfalls des Laserstrahls auf das Kalibrationsprisma infolge einer ungenauen Nivellierung des Stokesmeter MkII. Wenngleich der Effekt durch die Brechung an der Eintrittsfläche abgemildert wird, ergeben sich bei einer Drehung um  $180^\circ$  unterschiedliche Auftreffwinkel  $\alpha \neq \alpha'$  auf die Schnittfläche, was aufgrund der Winkelabhängigkeit der Fresnel-Koeffizienten zu Unterschieden in der Transmission bei den beiden Prismenorientierungen führt.

im Einfallswinkel ausreicht, um einen Effekt in der Größenordnung von 1% hervorzurufen, wie er bei der hier betrachteten Initialjustierung beobachtet wurde.

Derselbe Effekt kann nun auftreten, wenn der Laserstrahl zwar entlang der nominellen Strahlachse einfällt, das Prisma jedoch nicht korrekt auf dem Drehtisch nivelliert ist oder der Drehtisch an sich einen Taumelfehler aufweist. Dies stellt möglicherweise auch eine Erklärung für die anderen beobachteten Formen überproportional großer Residuen dar, denn wie aus den Vermessungen der Kandidaten für den manuellen Drehtisch des Stokesmeter-Prismas (siehe Abs. 4.4.1) hervorgeht, kann der Taumelfehler zwei verschiedene Ausprägungen annehmen: einerseits eine „statische“ in Form einer konstanten Mißweisung der Drehteller-Normalen gegenüber der Rotationsachse, andererseits eine „dynamische“ als zufällig schwankende Abweichung beider Achsen, etwa infolge zu großen Spiels im verwendeten Kugellager. Letztere Form würde dann zu fluktuierenden Einfallswinkeln des Strahls auf die Schnittfläche und somit zu einer zufällig schwankenden Komponente in der transmittierten Lichtintensität führen.

Es stellt sich nun die Frage, ob diese Argumentation auch auf diejenigen Messungen, bei denen die  $\lambda/4$ -Platte das rotierte optische Element ist, übertragen werden kann, da in diesem Fall keine durch die Geometrie des Bauteils bedingte Brechung der  $180^\circ$ -Symmetrie vorliegt und somit keine zu Abb. 6.4 analoge Situation auftreten kann. Falls jedoch zusätzlich zu einem



**Abbildung 6.5:** Ein Taumelfehler des Wellenplatten-Drehtischs kann ähnliche Auswirkungen wie ein entsprechender Fehler des Kalibrationsprismen-Drehtischs haben, aber nur in Verbindung mit einem fehljustierten Laserstrahl oder bei Vorliegen des „dynamischen“ Taumelfehlers.

statischen Taumelfehler des Wellenplatten-Drehtischs eine schräger Einfall des Laserstrahls vorliegt oder aber der Drehtisch einen dynamischen Taumelfehler aufweist, sind auch in dieser Situation irregulär große Residuen möglich, die mit der Grundfrequenz der mechanischen Rotation schwanken bzw. zufallsgetriebene Driften aufweisen.

Wenngleich dies ein attraktives Erklärungsmodell darstellt, ist in der Praxis nun zu beachten, daß der beschriebene Effekt bei der  $\lambda/4$ -Platte deutlich kleiner ausfallen muß als beim Kalibrationsprisma, da erstere mit einer reflexionsmindernden Beschichtung versehen ist; dies steht allerdings im Widerspruch zu der Beobachtung, daß die anomalen Residuen bei den „eigentlichen“ Stokesmessungen in derselben Größenordnung wie bei der Initialjustierung liegen. Eine weitere Schwierigkeit ergibt sich aus der Tatsache, daß der Hersteller des Kalibrationsprismen-Drehtischs einen Taumelfehler von maximal  $50 \mu\text{rad}$  garantiert, so daß zumindest die beobachteten *zufallsgetriebenen* Driften nicht mit diesem Mechanismus erklärt werden können. Bei der mit der Rotationsfrequenz modulierten Komponente der Residuen wäre dies zwar dennoch denkbar, da der effektive statische Taumelfehler auch mechanische Ungenauigkeiten in der Fertigung und Montage der Prismenhalterung umfaßt; allerdings wurde keine entsprechende Untersuchung wie beim Drehtisch des Stokesmeter-Prismas durchgeführt, so daß die tatsächliche Größenordnung unbekannt ist. Eine weitere mögliche Erklärung stellen mechanische Vibrationen des Gestells, auf dem das Stokesmeter MkII montiert ist, dar; auch hier gibt es jedoch keinerlei Messungen, anhand derer diese Hypothese geprüft werden könnte.

Wenngleich die Ursache somit nicht endgültig geklärt werden konnte, ist es dennoch offensichtlich, daß dieser Effekt sich auf die Unsicherheiten der resultierenden Fitparameter auswirken muß; es ist allerdings mangels mathematischer Modellierung nicht möglich, ihn explizit im Rahmen der Un-

tersuchung systematischer Einflüsse (vgl. Abs. 6.3) zu berücksichtigen. Es erscheint jedoch zulässig, diesem Effekt wenigstens im Rahmen der statistischen Unsicherheiten der Analysresultate Rechnung zu tragen, denn obwohl die Fitresiduen offenkundig einer deterministischen Abfolge unterliegen und nicht zufällig verteilt sind, kann man aus dem in vielen Fällen beobachteten Fehlen einer Periodizität darauf schließen, daß der zugrundeliegende Mechanismus zufallsgetrieben oder zumindest unkorreliert mit dem Meßbetrieb des Stokesmeters abläuft und somit schon aus prinzipiellen Gründen nicht mathematisch modelliert werden kann.

Es wurde daher ein Verfahren entwickelt, um die statistischen Unsicherheiten der Datenpunkte so zu reskalieren, daß die Größe der Fitresiduen mit ihnen vereinbar ist<sup>5</sup>. Hierzu wird ausgenutzt, daß die zu minimierende Zielfunktion des hier gewählten Fitverfahrens eine wohldefinierte statistische Interpretation hat und somit – unter der Voraussetzung, daß das Modell zutrifft – ein „Idealwert“ für diese Größe angegeben werden kann. Wie nun bereits in Abs. 5.3 festgestellt wurde, ist das Minimum der Zielfunktion  $F_{min}^I$  die Hälfte einer  $\chi^2$ -verteilten Zufallsgröße

$$\begin{aligned} \tilde{X}_I^2 := & \sum_{i=1}^{N1} \frac{\left(t_i^{I1} - \tilde{T}_{min}^{I1}(\Theta_i^{I1})\right)^2}{2(\sigma_i^{I1})^2} \\ & + \sum_{j=1}^{N2} \left(\vec{m}_j^{I2} - \vec{\mathcal{M}}_{min}^{I2}(\Theta_j^{I2})\right)^T \left(\tilde{\Sigma}_j^{I2}\right)^{-1} \left(\vec{m}_j^{I2} - \vec{\mathcal{M}}_{min}^{I2}(\Theta_j^{I2})\right) \end{aligned} \quad (6.1)$$

deren wahrscheinlichster Wert gerade

$$\hat{X}_I^2 = \nu^I \quad (6.2)$$

beträgt. Es ist demnach möglich, einen beliebigen, aufgrund von Gl. 6.1 bestimmten Wert für die Fitgüte in den „Optimalwert“ nach Gl. 6.2 zu überführen, indem ein globaler Skalierungsfaktor

$$f := \tilde{X}_I^2 / \nu^I \quad (6.3)$$

bestimmt wird, mit dem alle Varianzen und Kovarianzmatrizen multipliziert werden; dies entspricht einer Reskalierung der statistischen Unsicherheiten um einen Faktor  $\sqrt{f}$ . Damit sich dies nun auch in den Unsicherheiten der

---

<sup>5</sup>Dies kann natürlich nicht exakt gelten, da die Residuen im hier vorliegenden Fall nicht normalverteilt sind; die Gültigkeit dieser Aussage ist daher auf die Betrachtung des zweiten zentralen Moments – der Varianz – beschränkt.

Parameter	ohne Reskalierung		mit Reskalierung	
$\Theta_{0CP} / ^\circ$	93.72	$\pm 6 \cdot 10^{-4}$	93.72	$\pm 0.03$
$k_{CP}$	$4.7 \cdot 10^{-3}$	$\pm 8 \cdot 10^{-5}$	$4.7 \cdot 10^{-3}$	$\pm 4.3 \cdot 10^{-3}$
$f_{trSP}$	0.94	$\pm 2 \cdot 10^{-5}$	0.937	$\pm 0.001$
$f_{lkSP}$	$-9 \cdot 10^{-8}$	$\pm 5 \cdot 10^{-4}$	$3 \cdot 10^{-6}$	$\pm 0.03$
$k_{SPr}$	$6 \cdot 10^{-8}$	$\pm 2 \cdot 10^{-4}$	$2 \cdot 10^{-6}$	$\pm 0.01$

**Tabelle 6.3:** Resultierende Kalibrationsparameter der Initialjustierungsgruppe *GRbeam260509\_001*, wobei links zum Vergleich auch das Ergebnis der Analyse ohne Anpassung der statistischen Unsicherheiten angegeben ist. Der große Unterschied bei den Kalibrationswerten für die parasitären Eigenschaften des Stokesmeter-Prismas läßt darauf schließen, daß diese eigentlich verschwindend klein sind und die ermittelten Werte im wesentlichen durch die Schrittweite des Suchalgorithmus gegeben sind.

Fitparameter niederschlägt, wird ein zweistufiges Verfahren angewandt: Zunächst wird ein regulärer Fit durchgeführt und der erforderliche Korrekturfaktor nach Gl. 6.3 ermittelt; anschließend wird der Fit unter Einbeziehung dieses Faktors erneut durchgeführt, so daß der *Minuit*-Algorithmus durch Auswertung der nunmehr korrigierten *NLL*-Hyperfläche (vgl. Abs. 5.2.2) entsprechend angepaßte Unsicherheiten für die Fitparameter bestimmen kann. Die Berücksichtigung des Korrekturfaktors kann hierbei sehr effizient umgesetzt werden, indem bei jeder Auswertung des FCN-Objekts die *NLL* regulär berechnet und nur das Endergebnis mit  $f$  skaliert wird. Die Zentralwerte der Fitparameter bleiben hierbei unverändert, weil eine *globale* Skalierung der Zielfunktion die Lage des Minimums nicht ändert.

Im hier vorgestellten Beispiel der Initialjustierung ergibt sich auf diese Weise ein Korrekturfaktor von ca.

$$f = 2829$$

was einer notwendigen Reskalierung der statistischen Unsicherheiten um

$$\sqrt{f} = 53.2$$

entspricht. Das Resultat der Analyse unter Einbeziehung dieser Korrektur ist in Tabelle 6.3 angegeben und graphisch nochmals in Abb. 6.6 dargestellt.

Analysis of initial alignment	Resulting calibration parameters	(continued)
using dataset GRbeam260509_001	CalPrism::AngleFormat 2 CalPrism::AngleUnit Degree	$\theta_{\text{OCP}}^{(\text{real})}$ 93.72 ± 0.03 $k_{\text{CP}}^{(\text{real})}$ 0.005 ± 0.004
Analysis model: realistic data stat. err's scaled: 53.2	(short-form summary)	<b>Goodness-of-fit</b>
Secondary results:	$f_{\text{trSP}}^{(\text{real})}$ 0.937 ± 0.001 $f_{\text{lkSP}}^{(\text{real})}$ $3 \times 10^{-6} \pm 0.03$ $k_{\text{SPr}}^{(\text{real})}$ $2 \times 10^{-6} \pm 0.01$	test performed simul. UV/MV $\chi^2$ $\chi^2_{\text{UV/MV, sim}}$ 99 $\Pi_{\text{DOF}}$ 99 p-value 0.96
$N_{\text{tr}}$ 1.930 ± 0.003 $N_{\text{ref}}$ 1.441 ± 0.003 $q_0$ -0.170 ± 0.002 $u_0$ 0.205 ± 0.001 Angle scale origin: 266.3 deg		

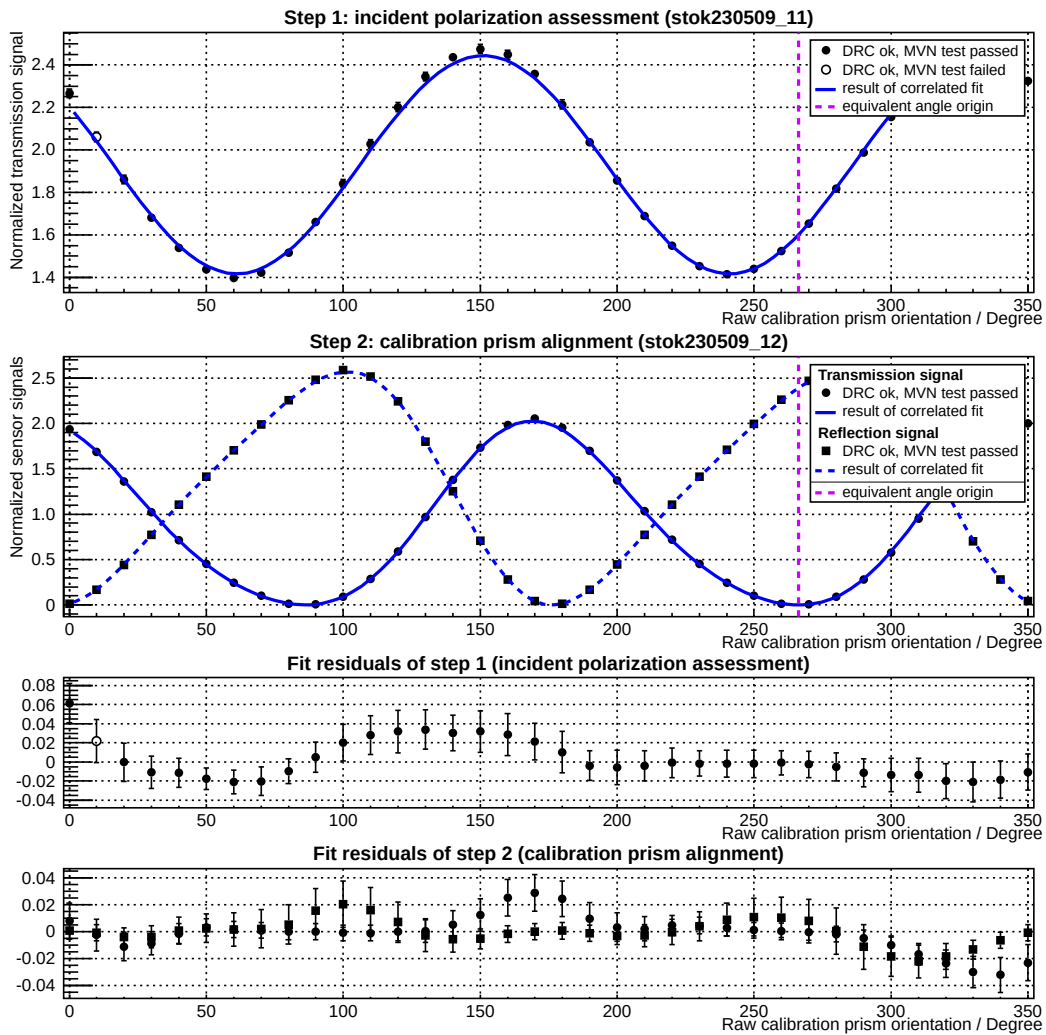


Abbildung 6.6: Resultat der Initialjustierung GRbeam260509\_001 unter Einbeziehung des Korrekturfaktors für die statistischen Unsicherheiten



### 6.2.4 Skalenkalibration der Wellenplatte

Aufgrund der Analyse der Initialjustierung ist es nun möglich, die Orientierung des vom Kalibrationsprisma erzeugten linearen Polarisationszustands anzugeben, wodurch die Winkelskala des Wellenplatten-Drehtischs kalibriert werden kann. Wie in Abs. 5.3.2 beschrieben, ist hierbei zunächst die vorläufige Kalibration mittels des vereinfachten Analysemodells durchzuführen. Im Rahmen der hier beschriebenen Strahlzeit wurde das Kalibrationsprisma zu diesem Zweck auf  $\Theta_{ECP} = 86.47^\circ$  gedreht, was einer kalibrierten Orientierung von

$$\vartheta_{CP} = 180.19^\circ$$

entspricht; anschließend wurde das so erzeugte linearpolarisierte Licht in der Messung *stok230509\_13* vermessen. Der Polarisationszustand weicht damit zwar ein wenig von der in Abs. 5.3.2 beschriebenen exakt horizontalen Linearpolarisation ab, allerdings wurde das Analysemodell so konstruiert, daß es die tatsächliche Orientierung des Kalibrationsprismas explizit berücksichtigen kann. Die Abweichung ist darauf zurückzuführen, daß bei der Auswertung der Initialjustierung im Rahmen der Kalibrationsarbeiten für diese Strahlzeit noch ein leicht vereinfachtes Fitmodell verwendet wurde.

Für den nächsten Schritt wurde die Kalibrationswellenplatte im Strahlengang montiert, wobei die vom Hersteller angebrachte Markierung zur Lage der schnellen Achse grob entlang der ersten Winkelhalbierenden ausgerichtet war. Der so präparierte elliptische Polarisationszustand wurde in der Messung *stok230509\_14* vermessen. Beide Messungen können nun zur Messungsgruppe *GRbeam260509\_002* zusammengefaßt werden, um die Skalenkalibration zu analysieren, wobei die Vorverarbeitung der Meßdaten nach dem gleichen Muster wie bei der Initialjustierung abläuft. Die eigentliche Analyse erfordert dann noch einen Schätzwert für die Orientierung der Kalibrationswellenplatte (vgl. Abs. 5.3.2), der auf

$$\hat{\vartheta}_{CWP} = \frac{\pi}{4}$$

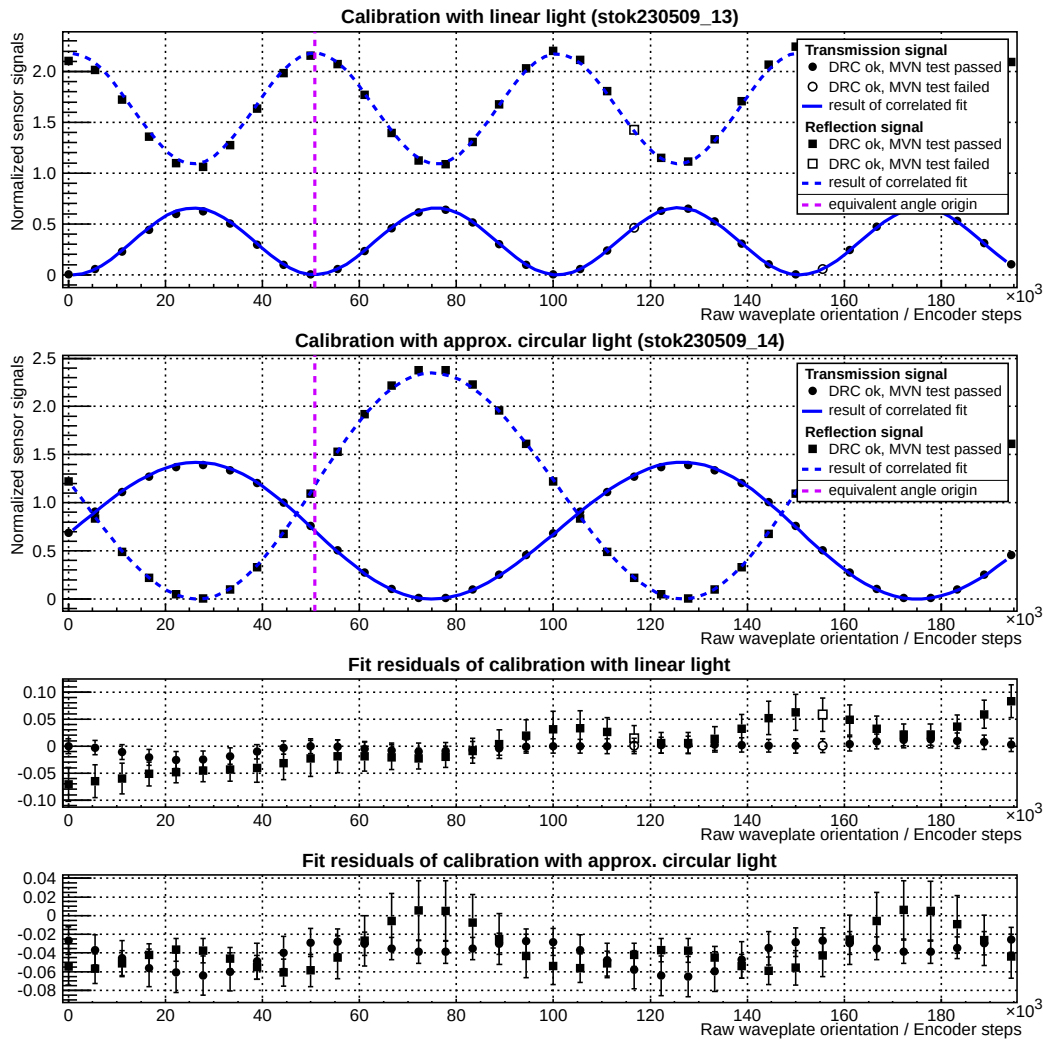
festgesetzt wurde.

Das Resultat dieser Analyse ist – zusammen mit demjenigen der nachfolgenden Justierfehleranalyse – in Tabelle 6.4 aufgeführt und graphisch in Abb. 6.7 dargestellt. Wie man feststellen kann, ist auch bei der Skalenkalibration der Stokemeter- $\lambda/4$ -Platte eine Anpassung der statistischen Unsicherheiten erforderlich, die im vorliegenden Fall

$$\sqrt{f} = 107.2$$

beträgt.

Analysis of waveplate scale calib. using dataset GRbeam260509_002	Resulting calibration parameters (short-form summary)	Goodness-of-fit
data stat. err's scaled: 107.2	$\Theta_{\text{OWP}}$ 50856 $\pm$ 38	test performed simult. MV $\chi^2$
Secondary results:	$\Delta_{\text{WP}}$ 1.570 $\pm$ 0.004	$\chi^2_{\text{MV, sim}}$ 137
$N_{\text{tr}}^{\text{K}}$ 0.376 $\pm$ 0.002	$k_{\text{WP}}$ 0.998 $\pm$ 0.002	$n_{\text{DOF}}$ 137
$N_{\text{ref}}^{\text{K}}$ 0.546 $\pm$ 0.002		p-value 0.97
$T_{\text{CWP}}^{\text{id}}$ 1.077 $\pm$ 0.004		
$\vartheta_{\text{CWP}}$ 0.814 $\pm$ 0.002		



**Abbildung 6.7:** Resultat der Skalenkalibration des Wellenplatten-Drehtischs, wie sie anhand der Messungsgruppe *GRbeam260509\_002* unter Berücksichtigung eines Korrekturfaktors für die statistischen Unsicherheiten bestimmt wurde. Die eingezeichnete Winkelposition entspricht aufgrund der invertierten Encoderskala des Drehtischs sowohl der Kalibrationskonstante als auch derjenigen Orientierung, an der die schnelle Achse der Wellenplatte entlang der  $x$ -Achse ausgerichtet ist.

Parameter	aus Skalenkalibration		aus Justierfehleranalyse	
$\Theta_{0WP}$ / Enc.-Schritte	50856	$\pm 38$	50896	$\pm 6$
$\Delta_{WP}$	1.570	$\pm 0.004$	1.5853	$\pm 5 \cdot 10^{-4}$
	$\frac{\lambda}{4} - 0.18 \frac{\lambda}{1000}$	$\pm 0.62 \frac{\lambda}{1000}$	$\frac{\lambda}{4} + 2.31 \frac{\lambda}{1000}$	$\pm 0.08 \frac{\lambda}{1000}$
$k_{WP}$	0.998	$\pm 0.002$	1.0003	$\pm 4 \cdot 10^{-4}$

**Tabelle 6.4:** Resultierende Kalibrationsparameter der Skalenkalibration des Wellenplatten-Drehtischs anhand von *GRbeam260509\_002* im Vergleich mit den entsprechenden Resultaten der Justierfehleranalyse *GRbeam260509\_003*. Die Verzögerung  $\Delta_{WP}$  wurde hierbei zusätzlich zur Angabe im Bogenmaß noch in Einheiten der Wellenlänge dargestellt, um die Abweichung vom Idealwert leichter zugänglich zu machen.

### 6.2.5 Justierfehleranalyse

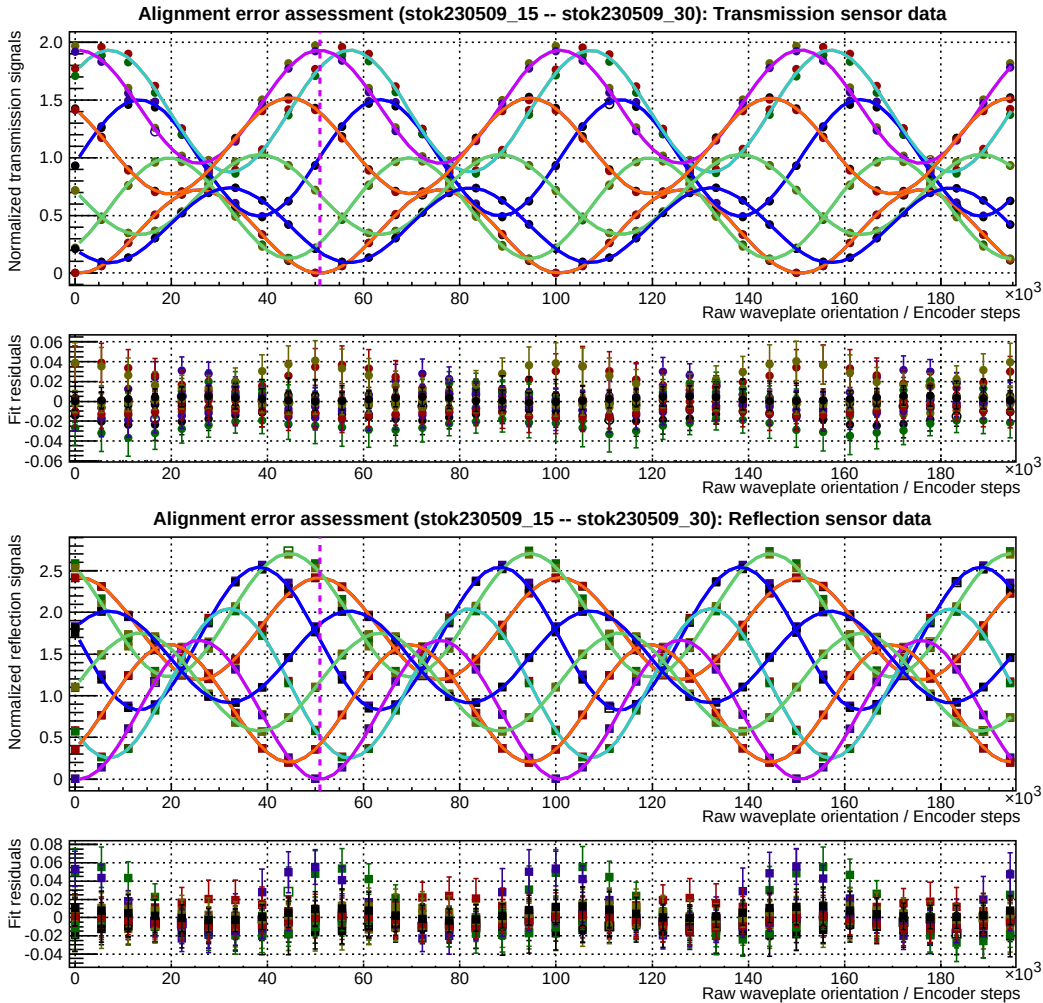
Mit dem Ergebnis der vorläufigen Skalenkalibration kann nun die Justierfehleranalyse durchgeführt werden, die zur endgültigen Definition der Winkelskala des Wellenplatten-Drehtischs führt. Hierfür wurde die Kalibrationswellenplatte wieder entfernt und eine Serie von 16 Stokesmessungen aufgenommen, für die das Kalibrationsprisma jeweils in  $22.5^\circ$ -Schritten um insgesamt  $360^\circ$  gedreht wurde. Diese Messungen (*stok230509\_15 ... stok230509\_30*) bilden dann die Messungsgruppe *GRbeam260509\_003*, die für die Justierfehleranalyse ausgewertet wird.

Eine Gegenüberstellung der resultierenden Kalibrationsparameter mit denen aus der vorangegangenen „einfachen“ Skalenkalibration ist in Tabelle 6.4 aufgeführt. Wie man sehen kann, sind beide Ergebnisse größtenteils miteinander verträglich, wobei die Justierfehleranalyse jedoch deutlich geringere statistische Unsicherheiten erzielt. Die auch in diesem Fall wieder erforderliche Anpassung der statistischen Unsicherheiten der Einzelpunkte belief sich auf

$$\sqrt{f} = 79.6$$

Eine graphische Zusammenfassung der Analyse findet sich in Abb. 6.8. Aufgrund der nominell vorhandenen  $180^\circ$ -Symmetrie des Kalibrationsprismas gibt es nun immer zwei Datensätze, die denselben präparierten Polarisationszustand darstellen. Da das Fitmodell diese Symmetrie widerspiegelt, sind die Fitkurven in beiden Fällen *per constructionem* deckungsgleich; man kann jedoch erkennen, daß dies auf die zugehörigen Datenpunkte nicht zutrifft. Diese Beobachtung unterstreicht das bereits in Abs. 6.2.3 diskutierte Problem der

Analysis of alignment error assessment		Resulting calibration parameters		Legend	
using dataset GRbeam260509_003		(short-form summary)			
data stat. err's scaled: 79.6		$\Theta_{\text{OWP}}$	$50896 \pm 6$	$\bullet$ ( $\theta_{\text{CP}} = 180.19^\circ$ )	$\bullet$ ( $\theta_{\text{CP}} = 360.19^\circ$ )
Secondary results:		$\Delta_{\text{WP}}$	$1.5853 \pm 5 \times 10^{-4}$	$\bullet$ ( $\theta_{\text{CP}} = 202.69^\circ$ )	$\bullet$ ( $\theta_{\text{CP}} = 382.69^\circ$ )
$N_{\text{tr}}^{\text{JFA}}$	$0.4780 \pm 3 \times 10^{-4}$	$k_{\text{WP}}$	$1.0003 \pm 4 \times 10^{-4}$	$\bullet$ ( $\theta_{\text{CP}} = 225.19^\circ$ )	$\bullet$ ( $\theta_{\text{CP}} = 405.19^\circ$ )
$N_{\text{ref}}^{\text{JFA}}$	$0.7130 \pm 5 \times 10^{-4}$	<b>Goodness-of-fit</b>		$\bullet$ ( $\theta_{\text{CP}} = 247.69^\circ$ )	$\bullet$ ( $\theta_{\text{CP}} = 427.69^\circ$ )
$q_0$	$-0.1532 \pm 6 \times 10^{-4}$	test performed	simultan. MV $\chi^2$	$\bullet$ ( $\theta_{\text{CP}} = 270.19^\circ$ )	$\bullet$ ( $\theta_{\text{CP}} = 450.19^\circ$ )
$u_0$	$0.1855 \pm 6 \times 10^{-4}$	$\chi_{\text{MV, sim}}^2$	1144	$\bullet$ ( $\theta_{\text{CP}} = 292.69^\circ$ )	$\bullet$ ( $\theta_{\text{CP}} = 472.69^\circ$ )
$v_0$	$-0.02 \pm 0.04$	$\rho_{\text{DOF}}$	1144	$\bullet$ ( $\theta_{\text{CP}} = 315.19^\circ$ )	$\bullet$ ( $\theta_{\text{CP}} = 495.19^\circ$ )
		p-value	0.99	$\bullet$ ( $\theta_{\text{CP}} = 337.69^\circ$ )	$\bullet$ ( $\theta_{\text{CP}} = 517.69^\circ$ )



**Abbildung 6.8:** Resultat der Justierfehleranalyse *GRbeam260509\_003*. Der oberste Graph zeigt in überlagerter Darstellung die Daten des Transmissionsensors aus allen durchgeführten Messungen zusammen mit dem Ergebnis des korrelierten Fits, der darunterliegende kleinere die zugehörigen Residuen. Die unteren beiden Graphen stellen analog dazu die Daten des Reflexionssensors dar.

anormalen Residuen bei Rotation des Kalibrationsprismas, wobei allerdings der entsprechende von der Wellenplatte herrührende Effekt ebenfalls in Form einer sinusförmigen Modulation der Residuen sichtbar ist.

### 6.2.6 Analyse der Stokes-Polarisationsmessung

Mit dem Abschluß der Justierfehleranalyse ist die Kalibration des Stokesmeter MkII beendet, wodurch die Auswertung der „eigentlichen“ Stokes-Polarisationsmessungen möglich ist und somit die Polarisation des eingestrahelten Laserlichts bestimmt werden kann. Dies soll am Beispiel der Messung *stok230509\_31* demonstriert werden, die im Rahmen der hier betrachteten Strahlzeit nach Entfernung des Kalibrationsprismas durchgeführt wurde, um den aktuellen Polarisationsgrad zu bestimmen.

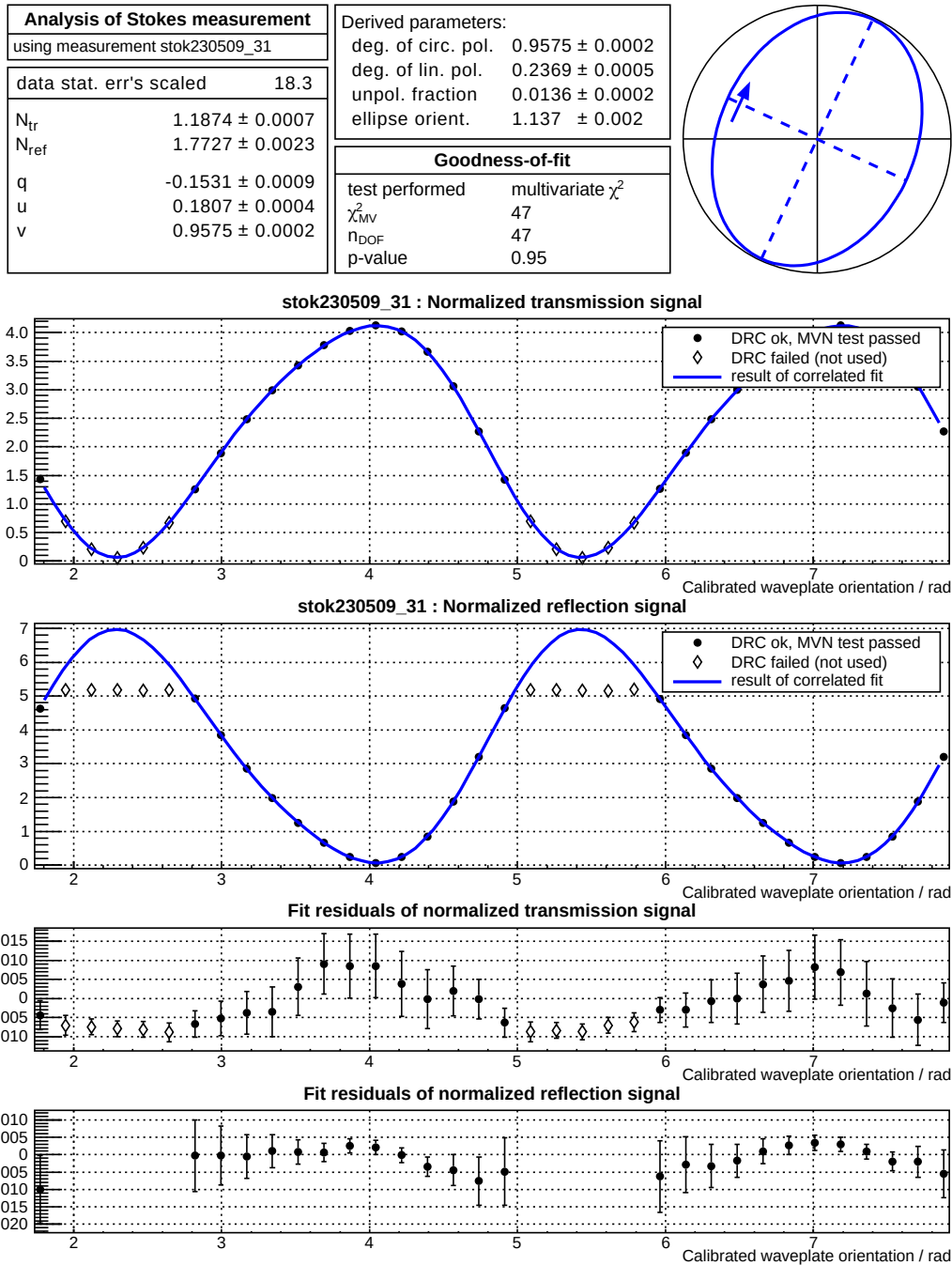
Wie man aus Abb. 6.9 erkennen kann, war der gewählte Meßbereich des A/D-Wandlers von  $\pm 2.5$  V in diesem Fall zu gering für den Reflexionspfad des Stokesmeters. Der Grund hierfür liegt darin, daß bei den vorangegangenen Kalibrationsmessungen noch mindestens das Kalibrationsprisma mit vier unbeschichteten Kristall-Luft-Grenzflächen im Strahlengang montiert war, so daß die tatsächlich auf das Stokesmeter einfallende Intensität deutlich abgeschwächt war. Der Reflexionspfad ist empfindlicher auf diese Problematik, da der reflektierte Teilstrahl im Stokesmeter-Prisma nur zwei statt vier Kristall-Luft-Grenzflächen passieren muß und daher eine höhere Intensität als der transmittierte Teilstrahl aufweist. Prinzipiell wäre es zwar möglich, das Fitverfahren in Anlehnung an die Analyse der Initialjustierung so anzupassen, daß Datenpunkte, bei denen nur *einer* der Sensoren in die Sättigung geraten ist, wenigstens univariat zum Resultat beitragen, allerdings hätte dies die Komplexität der Analyseroutinen deutlich vergrößert, so daß solche Datenpunkte im Rahmen der Qualitätskontrolle gänzlich von der Analyse ausgeschlossen werden<sup>6</sup>. Diese Datenpunkte werden somit auch nicht bei der Anpassung der statistischen Unsicherheiten berücksichtigt, die sich im vorliegenden Fall auf

$$\sqrt{f} = 18.3$$

beläuft.

Insgesamt ergibt sich aus dieser Messung der in Tabelle 6.5 aufgeführte Polarisationszustand, der in Abb. 6.9 zusätzlich durch seine Polarisationsellipse (vgl. Abs. 4.1.2) dargestellt ist. Die Polarisation des Lichtstrahls ist demnach rechtshändig elliptisch, wobei die zirkuläre Komponente dominiert.

<sup>6</sup>vgl. auch den Kommentar in Abs. 6.2.2



**Abbildung 6.9:** Resultat der Stokesmessung *stok230509\_31* zur Bestimmung der aktuellen Polarisation. Die oberste Zeile enthält neben den üblichen Angaben auch eine Darstellung des Polarisationszustands in Form einer Polarisationsellipse, deren Umlaufsinn durch den Pfeil angezeigt wird. Bei den Sensorsignalen wurden einige Datenpunkte aussortiert, da sie den dynamischen Bereich des Reflexionssensors überschreiten (rautenförmige Symbole).

Parameter	Wert
$q$	$-0.1531 \pm 0.0009$
$u$	$0.1807 \pm 0.0004$
$v$	$0.9575 \pm 0.0002$
$DOLP$	$0.2369 \pm 0.0005$
$DOCP$	$0.9575 \pm 0.0002$

**Tabelle 6.5:** Polarisationszustand des Laserstrahls, wie er im Rahmen der Stokesmessung *stok230509\_31* bestimmt wurde. Neben den Stokesparametern  $q$ ,  $u$  und  $v$  ist noch der daraus abgeleitete lineare ( $DOLP$ ) und zirkulare ( $DOCP$ ) Polarisationsgrad angegeben.

Man kann erkennen, daß mit dem hier vorgestellten Stokesmeter MkII eine relative statistische Meßgenauigkeit im Bereich von 0.1 % erzielt werden kann.

## 6.3 Berücksichtigung systematischer Effekte

Die Genauigkeit der Analyseresultate wird neben der bereits im vorigen Abschnitt behandelten statistischen Unsicherheit des Meßprozesses dadurch beeinflusst, daß äußere Faktoren die Meßergebnisse verfälschen können. Sofern der Mechanismus bekannt ist, kann ein solcher Effekt zwar rechnerisch korrigiert werden, allerdings ist es hierfür notwendig, zunächst dessen Größe zu bestimmen. Da auch dies nur mit endlicher Genauigkeit möglich ist, wird hierdurch eine weitere Quelle von Unsicherheiten in das Endergebnis der Analyse eingeführt. Diese *systematischen* Unsicherheiten sollen im folgenden betrachtet werden.

### 6.3.1 Quellen systematischer Unsicherheit

Eine systematische Verfälschung der Meßdaten kann von allen Einflüssen herühren, die die auf die Sensoren einfallende Lichtintensität (und das daraus abgeleitete elektrische Signal) in einer während der Dauer der Messung nicht um den Nullpunkt fluktuierenden Art und Weise gegenüber dem planmäßig von der Apparatur verursachten Eingriff verändern. Diese Einflüsse können grob in *interne* und *externe* Quellen unterteilt werden.



## Externe Quellen

Externe Quellen sind alle Mechanismen, bei denen sich die Eigenschaften des Laserstrahls aufgrund von Wechselwirkungen mit der Umgebung verändern oder bei denen Variationen der Umgebungsbedingungen zu einer Verschiebung der gemessenen Signale führen. Dies umfaßt z. B. temperaturbedingte Änderungen der Eigenschaften der Signalelektronik oder auf die Sensoren einfallendes Umgebungslicht. Strenggenommen zählt hierzu auch die Fluktuation der resonatorinternen Lichtintensität; allerdings wird diese bereits durch die Normierung der Einzelpunkt-Meßdaten zu Beginn der Datenanalyse (siehe Abs. 5.1) korrigiert, so daß die hierdurch hervorgerufene Unsicherheit schon in der statistischen Kovarianzstruktur der Einzelpunkt-Stichproben berücksichtigt ist.

Die Korrektur externer systematischer Einflüsse ist schwierig, da bereits die Identifikation eines bestimmten Umgebungsparameters als Quelle von Signalverfälschungen oftmals nicht gelingt. Darüberhinaus ist die Art der Wechselwirkung mit der Umgebung meistens sehr komplex, so daß selbst in denjenigen Fällen, in denen ein mathematisches Modell der Störung formuliert werden kann, die Messung der Störgröße mit der notwendigen (auch räumlichen) Genauigkeit kaum möglich ist; im erwähnten Fall der temperaturabhängigen Eigenschaften der Signalelektronik etwa müßte die Temperatur an den Montageorten aller relevanten Komponenten überwacht werden. Im Falle der vorliegenden Analyse wurde daher bis auf den eingangs angesprochenen Fall der Fluktuation in der Quellintensität auf eine entsprechende Korrektur verzichtet; dennoch soll an dieser Stelle kurz darauf eingegangen werden, inwieweit die genannten Effekte problematisch für die Analyse der Meßdaten werden können.

Die Temperaturabhängigkeit elektronischer Komponenten ist ein Problem in allen Meßinstrumenten und wurde auch in der Signalelektronik des A4-Experiments selbst als Ursache systematischer Effekte identifiziert [115]. Sie macht sich unter anderem im Rauschverhalten, in der Lage der Signalnullpunkte und in der Signalverstärkung bemerkbar, wobei das Rauschverhalten nur zur statistischen Unsicherheit beiträgt und daher bereits berücksichtigt ist. Da die Lage der Signalnullpunkte im Rahmen des Kalibrationsverfahrens regelmäßig gemessen wird, ist auch diese Auswirkung der Temperaturabhängigkeit durch das Analyseverfahren abgedeckt. In Bezug auf die Signalverstärkung kann nun festgestellt werden, daß der *absolute* Wert der Verstärkung irrelevant ist, weil diese in die Normierungskonstanten des Fitmodells absorbiert wurde (vgl. Gl. 5.42 bzw. 5.43). In beiden Fällen ist für eine korrekte Analyse also lediglich erforderlich, daß die Umgebungstemperatur während



der Dauer einer Messung bzw. zwischen zwei Pedestalmessungen konstant bleibt. Dies ist allerdings eine vernünftige Annahme, da die Elektronikmodule in vollständig geschlossenen Metallgehäusen montiert sind und die Experimentierhallen über eine Umluftklimatisierung verfügen; sofern also die Hallentore nicht oder nur selten geöffnet werden und die Luftzirkulation in einem einigermaßen ungestörten Gleichgewicht verbleibt, sollte dieser Effekt keine unkorrigierbaren Auswirkungen auf die Analyse haben.

Um den Einfluß des Umgebungslichts zu minimieren, wurden bereits in der Planungsphase besondere Abschirmmaßnahmen vorgesehen (vgl. Abs. 4.4.1); darüberhinaus sind die Photosensoren mit Spektralfiltern ausgestattet, deren maximale Empfindlichkeit im Bereich grünen Lichts liegt. Dennoch wird wenigstens ein gewisser Anteil des Umgebungslichts von den Sensoren registriert werden, so daß sich die Frage stellt, wie stark die Analyse hierdurch beeinflusst wird. Solange der Lichtpegel allerdings konstant ist (d. h. keine Änderungen in der Hallenbeleuchtung vorgenommen werden und Abschattungseffekte ebenfalls konstant bleiben), wird sich dieser Effekt ebenfalls nur als ein Beitrag zu den Signalnullpunkten bemerkbar machen, so daß auch hier die entsprechende Korrektur bereits im Rahmen der Pedestalmessung durchgeführt wird. Allerdings ist dieser Beitrag zu den Signalpegeln durchaus meßbar: so wurde zu Anfang einer Meßserie festgestellt, daß die Pedestalmessung einen oszillatorischen Anteil aufwies, der auf flackernde Leuchtstoffröhren in der Hallenbeleuchtung zurückgeführt werden konnte.

Insgesamt kann festgestellt werden, daß die relevanten externen Quellen systematischer Effekte entweder vernachlässigbar sind oder bereits im Rahmen bestehender Kalibrationsverfahren korrigiert werden. Die einzige Ausnahme hiervon – die Transfermatrix – wird in einem späteren Abschnitt gesondert behandelt.

### Interne Quellen

Im Gegensatz zu den externen Quellen liegen die *internen* Quellen systematischer Unsicherheit in der Apparatur selbst und werden typischerweise durch die (nichtidealen) Eigenschaften der Konstruktion oder der verwendeten Komponenten verursacht. Im Falle der polarisationsoptischen Elemente wurde hierauf bereits bei der Ableitung des Fitmodells eingegangen (vgl. Abs. 5.2.3) und dieses so konstruiert, daß es die wichtigsten Ursachen für Abweichungen von der idealisierten Abhängigkeit nach Gl. 4.21 schon berücksichtigt. Es ist daher möglich, die Auswirkungen dieser Effekte zu korrigieren, sofern die Größen der jeweiligen nichtidealen Eigenschaften bekannt sind. Diese werden im Rahmen des Kalibrationsverfahrens gemessen, so daß die resul-

tierende systematische Unsicherheit direkt auf die begrenzte Meßgenauigkeit der Kalibrationskonstanten zurückgeführt werden kann; dies ermöglicht es, diese Unsicherheiten mit mathematischen Methoden zu bestimmen. Der Rest dieses Abschnitts wird sich mit dem hierfür entwickelten Verfahren befassen.

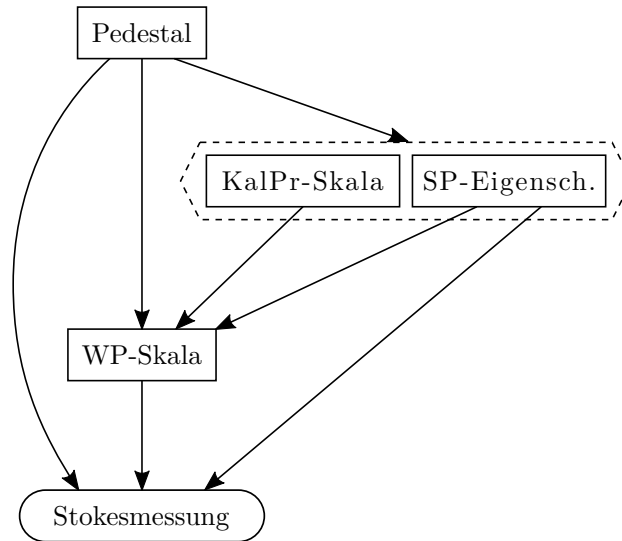
In den Fällen, in denen keine mathematische Modellierung oder Messung des systematischen Effekts möglich ist, kann hingegen höchstens eine Abschätzung über die dadurch verursachte Unsicherheit im Endergebnis durchgeführt werden. Ein Beispiel hierfür sind die mechanischen Toleranzen in den Positioniersystemen, die vermutlich für die beobachteten irregulär großen Fitresiduen verantwortlich sind (vgl. Abs. 6.2.3). Dieser systematische Effekt wurde im Rahmen der vorliegenden Analyse allerdings in die statistische Unsicherheit absorbiert und wird an dieser Stelle daher nicht mehr betrachtet.

### 6.3.2 Verfahren zur Bestimmung der kalibrationsbedingten Unsicherheiten

Wie zu Anfang dieses Kapitels beschrieben wurde, besteht das Kalibrationsverfahren aus mehreren sukzessive aufeinander aufbauenden Stufen. Wenngleich daher jede Kalibrationsart einen anderen Aspekt in den Eigenschaften der Polarimeteroptik beschreibt, sind die verschiedenen Kalibrationsarten durch zwei Arten nichttrivialer Zusammenhänge untereinander verbunden: Korrelation und funktionale Abhängigkeit. Korrelation tritt dann auf, wenn Abhängigkeiten zwischen den statistischen Unsicherheiten zweier Sätze von Kalibrationskonstanten bestehen; dies ist der Fall bei den beiden Kalibrationsarten *Kalibrationsprismen-Winkelskala* und *Stokes-Prismen-Eigenschaften* (vgl. Tabelle 6.1), da diese aus derselben Kalibrationsmessung stammen. Eine funktionale Abhängigkeit hingegen besteht dann zwischen zwei Kalibrationsarten, wenn für die Bestimmung eines Satzes von Kalibrationskonstanten die Resultate einer vorhergehenden Kalibrationsanalyse erforderlich sind. Dies trifft konstruktionsbedingt auf alle Kalibrationsarten außer der Pedestalmessung zu und bedeutet, daß im äußersten Fall einer unmittelbar im Anschluß an das Kalibrationsverfahren durchgeführten Polarisationsmessung die in Abb. 6.10 dargestellte Abhängigkeit der Stokes-Analyse von den Kalibrationskonstanten besteht. Mathematisch gesehen wird dies durch den Zusammenhang

$$\vec{S} = \vec{f}\left(\vec{D}; \vec{K}_P, \vec{K}_{SP}(\vec{K}_P), \vec{K}_{WP}\left(\vec{K}_P, \vec{K}_{CP}(\vec{K}_P), \vec{K}_{SP}(\vec{K}_P)\right)\right) \quad (6.4)$$

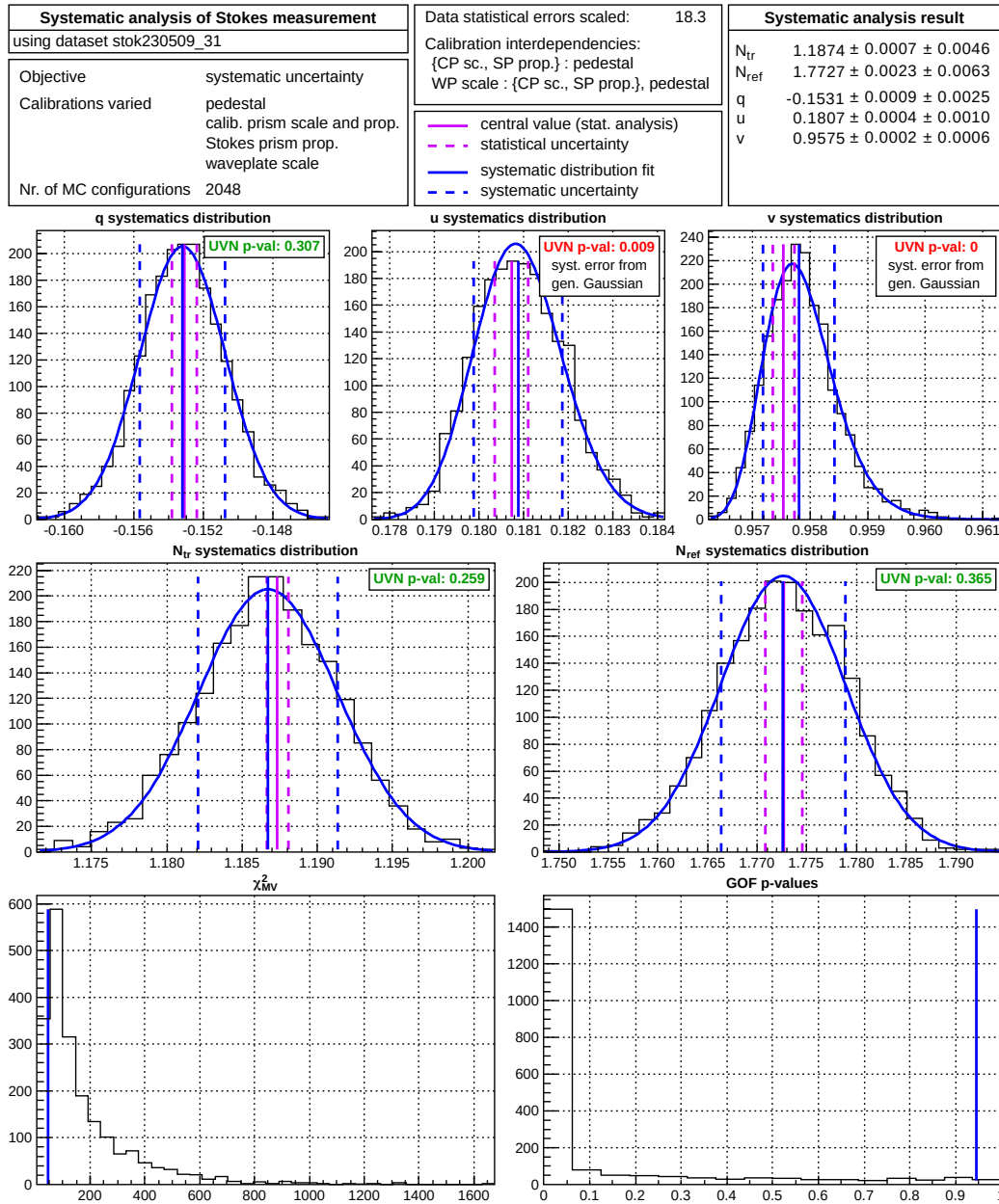
ausgedrückt, wobei  $\vec{D}$  die Meßdaten und  $\vec{K}_{xx}$  die jeweiligen Gruppen von Kalibrationskonstanten darstellen sollen.



**Abbildung 6.10:** Schematische Darstellung der maximal möglichen Abhängigkeitsstruktur zwischen den Kalibrationsarten und deren Auswirkungen auf die Analyse der Stokesmessung

Um diese Umstände korrekt wiederzugeben, wird zur Bestimmung der systematischen Unsicherheiten die Monte-Carlo-Methode angewandt, d. h. die Kalibrationskonstanten werden im Rahmen ihrer statistischen Unsicherheiten normalverteilt zufallsgeneriert und die Analyse jeweils mit diesen so variierten Kalibrationskonstanten wiederholt. Sofern eine hinreichend große Anzahl solcher *MC*-Durchgänge akkumuliert wird, entspricht die Standardabweichung der resultierenden Verteilungen der Ergebnisparameter dann der gesuchten systematischen Unsicherheit der Analyseergebnisse. Technisch wird dies dadurch erreicht, daß die Mikrosample-Objekte, die ja für die Verwaltung der Kalibrationsdaten zuständig sind (vgl. Abs. 6.1.2), mit einem Zufallszahlengenerator ausgestattet werden, um für jede Iteration einen neuen Satz von Kalibrationskonstanten zu erzeugen. Diese Methode ermöglicht es darüberhinaus, die Beiträge der einzelnen Quellen zur Gesamtunsicherheit im Sinne eines „Fehlerbudgets“ separat zu betrachten, indem jeweils nur die Parameter *einer* Kalibrationsart variiert werden, während diejenigen der anderen Kalibrationen auf ihren nominellen Werten verbleiben. Ein Beispiel einer Untersuchung der Gesamtunsicherheit ist in Abb. 6.11 dargestellt.

Bei dem Verfahren ist nun zu berücksichtigen, daß solche Kalibrationskonstanten, die durch denselben Analysevorgang bestimmt wurden, typischerweise Korrelationen der statistischen Unsicherheiten aufweisen, d. h. die Kovarianzmatrix der Parameter enthält nichtverschwindende Elemente außerhalb



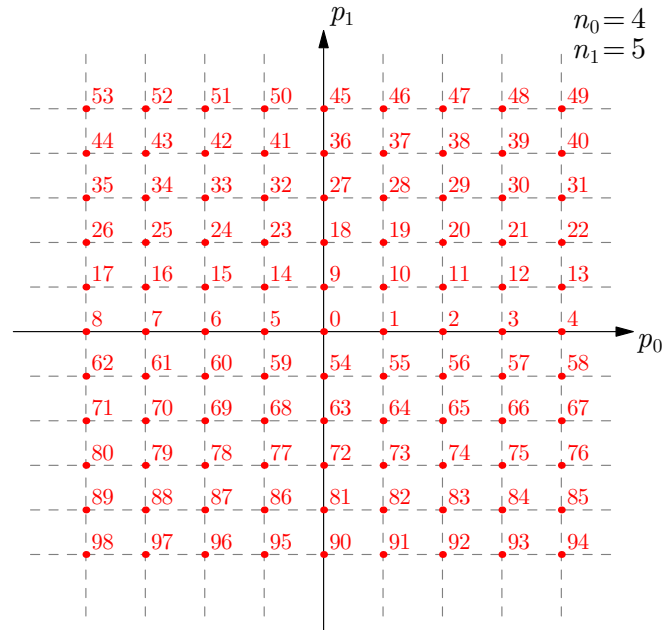
**Abbildung 6.11:** Illustration der Untersuchung systematischer Unsicherheiten am Beispiel der Stokesmessung *stok230609\_31*. Dargestellt ist die Bestimmung der systematischen Gesamtunsicherheit, die sich aus der jeweiligen Standardabweichung der im unteren Teil dargestellten Verteilungen der Analyseergebnisse ergibt. Man kann deutlich erkennen, daß diese nicht in allen Fällen einer Normalverteilung unterliegen; auf diesen Aspekt wird in Abs. 6.3.4 eingegangen. In der untersten Reihe sind zur Veranschaulichung der Fitgüte auch die Verteilung der  $\chi^2$ -Teststatistik und des zugehörigen  $p$ -Werts dargestellt.

der Diagonalen. Da sich dieser Umstand auch in den zufallsgenerierten Kalibrationswerten widerspiegeln muß, wurde ein effizientes Verfahren zur Erzeugung multivariat normalverteilter Zufallszahlen entwickelt, bei dem die Kovarianzstruktur der Parameter erhalten bleibt (siehe Anhang B.2). Dies ermöglicht dann auch die korrekte Behandlung der bereits erwähnten Korrelation zwischen den Parametern der Kalibrationsprismen-Winkelskala und der Stokes-Prismen-Eigenschaften, da beide Parametersätze ja ursprünglich aus ein und derselben Analyse stammen und lediglich willkürlich in zwei Gruppen unterteilt wurden.

### 6.3.3 Berücksichtigung funktionaler Abhängigkeiten

Da mit Ausnahme der Pedestalmessung alle in Abb. 6.10 aufgeführten Analysen eine Kurvenanpassung beinhalten, ist es nicht möglich, die in Gl. 6.4 angedeutete Abhängigkeit der Resultate von den Kalibrationsparametern in analytischer Form auszudrücken. Dies stellt nun ein Problem dar, weil Kalibrationsarten nicht nur durch die bereits erwähnten Korrelationen, sondern auch durch direkte und indirekte funktionale Abhängigkeiten zusammenhängen können, was bei einer Variation von Kalibrationsparametern, wie sie für die Untersuchungen zu systematischen Einflüssen notwendig ist, berücksichtigt werden muß. Aus diesem Grund beinhaltet eine vollständige Untersuchung der Systematik einer gegebenen Kalibration neben der Bestimmung der systematischen Unsicherheit auch eine Abtastung der funktionalen Abhängigkeit der Analyseresultate von den hierfür erforderlichen Kalibrationskonstanten.

Im Rahmen der hier vorgestellten Untersuchung werden zu diesem Zweck die in die jeweilige Analyse eingehenden Kalibrationsparameter in diskreten Schritten variiert, wobei die Schrittweite einem festgelegten Bruchteil (typischerweise 1/4) der statistischen Unsicherheit des betreffenden Parameters entspricht. Die Analyse wird für jede der so bestimmten Kalibrationskonfigurationen wiederholt und die Analyseresultate inklusive ihrer statistischen Kovarianzstruktur in einem `TTree`-Objekt gespeichert. Auf diese Weise entsteht ein mehrdimensionales regelmäßiges Gitter im Raum der Kalibrationskonfigurationen (vgl. Abb. 6.12), innerhalb dessen der Verlauf der funktionalen Abhängigkeit der Analyseresultate und ihrer statistischen Unsicherheiten bekannt ist. Der Algorithmus ist hierbei prinzipiell derselbe wie bei der Bestimmung der systematischen Unsicherheit, da lediglich eine andere Methode für die Variation der Kalibrationsparameter verwendet wird. Ein Beispiel für das Resultat einer solchen Untersuchung ist in Abb. 6.13 dargestellt. Wie man erkennen kann, ist die Änderung der Analyseergebnisse teilweise deutlich grö-



**Abbildung 6.12:** Schematische Darstellung der Abtastung der funktionalen Abhängigkeit eines Analyseregebnisses von zwei Kalibrationsparametern  $p_0$  und  $p_1$ . Die Punkte des Abtastgitters sind rot markiert und mit einer Zahl versehen, die die Reihenfolge der Abtastung angibt.

ßer als deren statistische Unsicherheit und sollte daher nicht vernachlässigt werden.

Da kein mathematisches Modell für die Abhängigkeit vorhanden ist, muß nun zwischen den Gitterpunkten empirisch interpoliert werden; hierzu wird die Methode der multivariaten inversen Distanzwichtung [177] gewählt. Bei diesem Verfahren wird der Funktionswert  $\vec{f}$  an einem gegebenen Ort  $\vec{p}$  approximiert, indem die bekannten Funktionswerte an den Interpolationsstützpunkten  $\vec{p}_i$  mit dem inversen Abstand (ggf. zu einer bestimmten Potenz  $\alpha$ ) gewichtet aufsummiert werden, wobei die Summe auf einen maximalen Abstand  $r_{max}$  eingeschränkt werden kann:

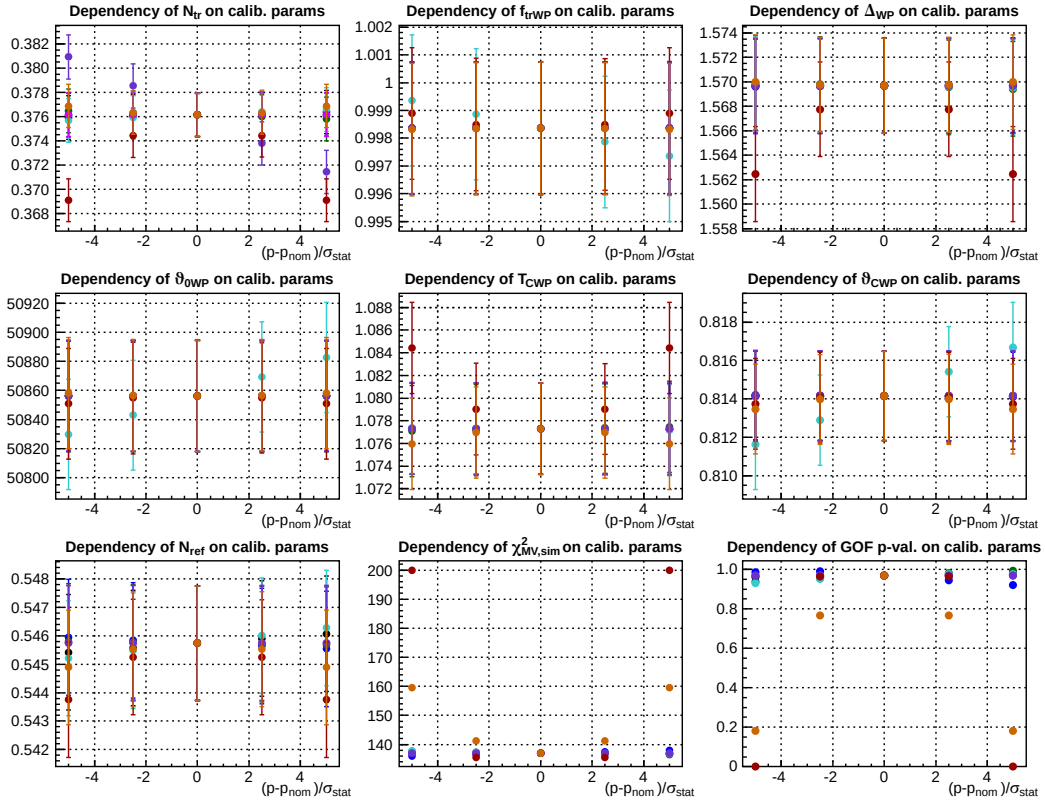
$$\vec{f}(\vec{p}) = \sum_{d(\vec{p}_i, \vec{p}) < r_{max}} \frac{\vec{f}(\vec{p}_i)}{d(\vec{p}_i, \vec{p})^\alpha} / \sum_{d(\vec{p}_i, \vec{p}) < r_{max}} \frac{1}{d(\vec{p}_i, \vec{p})^\alpha} \quad (6.5)$$

Für die hier vorgestellte Analyse wird ein Exponent von  $\alpha = 2$  gewählt und die Interpolation auf die Eckpunkte der Gitterzelle beschränkt, innerhalb derer  $\vec{p}$  liegt.

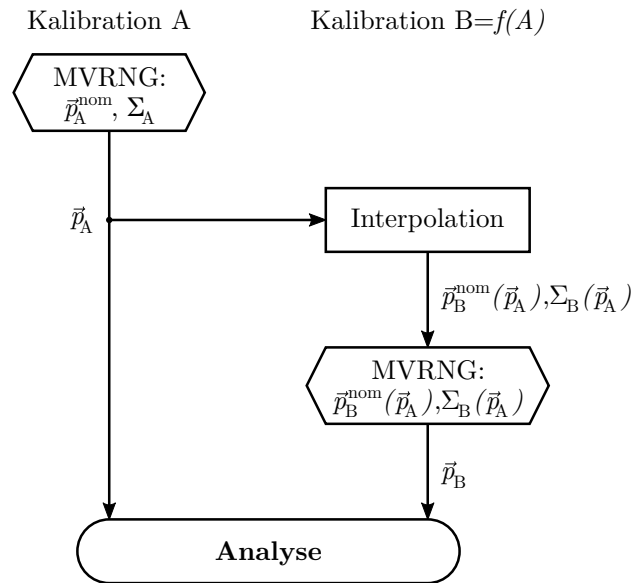
Es ist nun zu beachten, daß die Komponenten von  $\vec{p}$  die verschiedenen

### 6.3 Berücksichtigung systematischer Effekte

Systematic analysis of WP scale calib.		Nominal analysis results		Varied calibration parameters	
using dataset GRbeam260509_002		$N_{tr}^K$	$0.376 \pm 0.002$	● $N_0$	
Objective	functional dependency of results	$N_{ref}^K$	$0.546 \pm 0.002$	● $R_0$	
Calibrations varied	pedestal calib. prism scale and prop. Stokes prism prop.	$T_{CWP}^{id}$	$1.077 \pm 0.004$	● $T_0$	
Scan grid	uniform (relative to stat. uncert.)	$\vartheta_{CWP}$	$0.814 \pm 0.002$	● $\vartheta_{0CP}$	
Step size	$2.5 \sigma$	$\Theta_{WP}$	$50856 \pm 38$	● $k_{ikCP}$	
Grid size per dir.	$\pm 2$ steps	$\Delta_{WP}$	$1.570 \pm 0.004$	● $f_{trSP}$	
Data stat. err's scaled	107.2	$k_{WP}$	$0.998 \pm 0.002$	● $f_{ikSP}$	
				● $k_{prSP}$	



**Abbildung 6.13:** Untersuchung der funktionalen Abhängigkeit eines Analyseresultats von den dafür benötigten Kalibrationsparametern am Beispiel der  $\lambda/4$ -Skalenkalibrationsmessung *GRbeam260509\_002*. Das Abtastgitter ist in diesem Beispiel relativ grob gewählt und hat eine Gitterweite von  $2.5\sigma$  bei einer Gesamtausdehnung von  $\pm 5\sigma$  in alle Koordinatenrichtungen. Aufgrund der hohen Dimensionalität des Problems umfaßt das Gitter dennoch 390624 Kalibrationskonfigurationen, so daß die Analyse ca. einen Tag Rechenzeit in Anspruch nahm. Die so gefundene Abhängigkeit der einzelnen Analyseresultate von den Kalibrationsparametern ist im unteren Teil dargestellt. Der Übersichtlichkeit halber wird für jeden variierten Kalibrationsparameter nur diejenige Änderung des Analyseresultats dargestellt, bei der die anderen Kalibrationsparameter auf ihren nominellen Werten verblieben sind.



**Abbildung 6.14:** Illustration des Ablaufs zur Berücksichtigung funktionaler Abhängigkeiten bei der Bestimmung der systematischen Unsicherheit eines Analyseresultats. Der Einfachheit halber wird nur der Fall einer „unabhängigen“ und einer „abhängigen“ Kalibrationsart dargestellt. Die mit „MVRNG“ beschrifteten Elemente bezeichnen multivariate Zufallszahlengeneratoren, die Zufallskonfigurationen von Kalibrationsparametern gemäß der durch  $\vec{p}^{nom}$  und  $\Sigma$  definierten Verteilung erzeugen.

in die Analyse eingehenden Kalibrationswerte sind und somit völlig unterschiedliche Bedeutungen und physikalische Einheiten haben. Es ist daher nicht trivial möglich, innerhalb dieses Konfigurationsraums einen sinnvollen „Abstand“ zwischen zwei Punkten zu definieren; vielmehr ist eine geeignete Metrik erforderlich. Es bietet sich an, hierfür die Inverse der statistischen Kovarianzmatrix der Kalibrationsparameter zu wählen und den Abstand als

$$d(\vec{p}_1, \vec{p}_2) := \sqrt{(\vec{p}_2 - \vec{p}_1)^T \Sigma_{stat}^{-1} (\vec{p}_2 - \vec{p}_1)} \quad (6.6)$$

zu definieren, weil dies einerseits eine „natürliche“ Methode darstellt, die physikalischen Einheiten zu eliminieren und andererseits der Abstand dann leicht als „Vielfaches der multivariaten Unsicherheit“ interpretiert werden kann.

Um nun die funktionalen Abhängigkeiten bei der Bestimmung der systematischen Unsicherheit zu berücksichtigen, wird folgende Vorgehensweise gewählt, die in Abb. 6.14 beispielhaft illustriert ist:

- Die Parameter  $\vec{p}_A$  der unabhängigen Kalibrationsart werden im Rah-



men ihrer statistischen Unsicherheiten  $\{\vec{p}_A^{nom}, \Sigma_A\}$  zufallsgeneriert.

- Die nominellen Werte von Kalibrationsparametern  $\vec{p}_B^{nom}(\vec{p}_A)$  und Unsicherheiten  $\Sigma_B(\vec{p}_A)$  der abhängigen Kalibrationsart werden unter Zugrundelegung der zufallsgenerierten Parameter der unabhängigen Kalibrationsart durch Interpolation bestimmt.
- Die Parameter  $\vec{p}_B$  der abhängigen Kalibrationsart werden im Rahmen der so ermittelten statistischen Unsicherheiten zufallsgeneriert.
- Die so bestimmten Parametersätze  $\vec{p}_A$  und  $\vec{p}_B$  werden zur Analyse der betrachteten Messung herangezogen.

Dieses Verfahren wird sinngemäß auch bei der Bestimmung des systematischen Fehlerbudgets angewandt: Wenngleich in diesem Fall immer nur *eine* Kalibrationsart explizit im Rahmen ihrer statistischen Unsicherheit variiert wird, muß dennoch die Auswirkung dieser Änderung auf die nachfolgenden abhängigen Kalibrationsarten berücksichtigt werden.

Prinzipiell wäre es natürlich möglich, die funktionale Abhängigkeit anhand der Daten, die bei der Bestimmung der systematischen Unsicherheit erzeugt werden, zu gewinnen, statt eine explizite Abtastung durchzuführen. Allerdings wären in diesem Fall die Interpolationsstützpunkte statistisch verteilt, was mehrere Komplikationen zur Folge hat: Erstens wäre es notwendig, den gesamten Datensatz zu durchsuchen, um die „nächsten Nachbarn“ eines gegebenen Interpolationspunkts  $\vec{p}$  zu finden, wohingegen die entsprechenden Einträge bei einem regelmäßigen Gitter gezielt ausgelesen werden können (vgl. Abb. 6.12). Zweitens wäre die Abdeckung inhomogen, so daß die Genauigkeit der Interpolation mit zunehmendem Abstand von den nominellen Werten der Kalibrationsparameter schlechter würde. Drittens wären die Grenzen der Abdeckung kaum zu kontrollieren, wodurch die Gefahr wächst, daß im Rahmen der Untersuchung zufallsgenerierte Parameterkonfigurationen außerhalb des abgedeckten Bereichs liegen und eine Interpolation unmöglich ist.

### 6.3.4 Extraktion der Unsicherheiten

Da die Abhängigkeit der Analyseresultate von den variierten Kalibrationsparametern im allgemeinen nichtlinear ist und die Berücksichtigung funktionaler Abhängigkeiten zwischen den Kalibrationsarten eine zusätzliche Komplexität in das Problem einführt, muß davon ausgegangen werden, daß die Resultatparameter nicht mehr normalverteilt sind, auch wenn die Kalibrationswerte im Rahmen der Untersuchung normalverteilt zufallsgeneriert werden. In der Tat kann man in Abb. 6.11 erkennen, daß bei einigen der Größen

eine deutliche Abweichung von der Normalverteilung vorliegt, obwohl sich die Histogramme der anderen sehr gut durch eine solche beschreiben lassen.

Dies führt nun zu der Schwierigkeit, daß sich die systematischen Unsicherheiten nicht mehr durch die Anpassung einer Normalverteilung an die Histogramme der Resultatparameter ermitteln lassen, da die vorliegenden Verteilungen teilweise deutlich asymmetrisch sind oder aber eine andere Wölbung (Kurtosis) als die Normalverteilung aufweisen. Man kann jedoch feststellen, daß sich die Histogramme in den meisten dieser Fälle durch eine *verallgemeinerte Normalverteilung* beschreiben lassen, so daß es möglich ist, die Systematik-Untersuchungen mit diesem veränderten Fitmodell doch noch auszuwerten. Im vorliegenden Fall ist die Verallgemeinerung der Normalverteilung nach Hosking und Wallis [88] gemeint, die durch die Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion

$$f(x) = \frac{\phi(y)}{\alpha - \kappa(x - \xi)} \quad (6.7)$$

definiert ist, wobei  $\phi(y)$  die Wahrscheinlichkeitsdichte der Standardnormalverteilung bezeichnet und

$$y = \begin{cases} -\frac{1}{\kappa} \ln \left( 1 - \frac{\kappa(x-\xi)}{\alpha} \right) & \text{falls } \kappa \neq 0 \\ \frac{x-\xi}{\alpha} & \text{falls } \kappa = 0 \end{cases} \quad (6.8)$$

sei. Die Lage und Form der Verteilung wird durch die Parameter  $\alpha$ ,  $\kappa$  und  $\xi$  bestimmt:  $\xi$  entspricht gerade dem Median der Verteilung, während  $\kappa$  die Schiefe, Wölbung und Breite,  $\alpha$  hingegen nur die Breite beeinflusst.

Um nun festzustellen, mit welcher Methode die statistische Unsicherheit zu ermitteln ist, wird das folgende Verfahren angewandt:

- Die dem Histogramm zugrundeliegende Stichprobe wird einem univariaten Test auf Normalverteilung unterzogen (vgl. Abs. 5.1.7). Wenn der  $p$ -Wert mehr als 5% beträgt, wird eine Normalverteilung angepaßt; die systematische Unsicherheit entspricht dann der Standardabweichung  $\sigma$  der Verteilung.
- Liegt der  $p$ -Wert unter 5%, so wird statt der Normalverteilung eine verallgemeinerte Normalverteilung als Fitmodell verwendet. Anschließend wird mit einem  $\chi^2$ -Test geprüft, ob das Histogramm hierdurch adäquat beschrieben wird. Ist der  $p$ -Wert dieses Tests größer als  $10^{-4}$ , so gilt die Hypothese als angenommen; die systematische Unsicherheit ergibt sich in diesem Fall aus der Standardabweichung der verallgemeinerten Normalverteilung zu

$$\sigma_{genG} = \left| \frac{\alpha}{\kappa} \right| \sqrt{e^{\kappa^2} (e^{\kappa^2} - 1)} \quad (6.9)$$

Parameter	Wert	Unsicherheit	
		stat.	sys.
$\Theta_{0CP}/^\circ$	93.72	$\pm 3 \cdot 10^{-2}$	$\pm 2 \cdot 10^{-4}$
$k_{CP}$	$4.7 \cdot 10^{-3}$	$\pm 4.3 \cdot 10^{-3}$	$\pm 5 \cdot 10^{-5}$
$f_{trSP}$	0.937	$\pm 1 \cdot 10^{-3}$	$\pm 2 \cdot 10^{-5}$
$f_{lkSP}$	$3 \cdot 10^{-6}$	$\pm 3 \cdot 10^{-2}$	$\pm 2 \cdot 10^{-7}$
$k_{SPr}$	$2 \cdot 10^{-6}$	$\pm 1 \cdot 10^{-2}$	$\pm 8 \cdot 10^{-8}$

**Tabelle 6.6:** Systematische Unsicherheit der anhand der Initialjustierung *GRbeam260509\_001* bestimmten Kalibrationsparameter

- Liegt der  $p$ -Wert des  $\chi^2$ -Tests unter  $10^{-4}$ , so wird als „Notlösung“ die Stichproben-Standardabweichung als Schätzwert für die systematische Unsicherheit gewählt.

Strenggenommen müßte man nun in den Fällen, in denen auf die verallgemeinerte Normalverteilung zurückgegriffen wird, asymmetrische Unsicherheiten angeben. Aus Gründen der Einfachheit wird hier allerdings darauf verzichtet, zumal die tatsächlichen Verteilungseigenschaften nicht mehr in spätere Untersuchungen eingehen.

### 6.3.5 Diskussion anhand des Beispiels *beam260509*

Die hier beschriebenen Verfahren sollen nun in Analogie zu Abs. 6.2 ebenfalls auf die Messungen der Strahlzeit *beam260509* angewandt werden, um die tatsächliche Auswirkung der betrachteten systematischen Einflüsse einordnen zu können. Die Untersuchung fängt in diesem Fall bei der Initialjustierung an, da die Analyse der Pedestalmessung ohne externe Kalibrationsparameter auskommt.

#### Initialjustierung *GRbeam260509\_001*

Die systematische Unsicherheit wurde durch eine *MC*-Untersuchung mit 2048 Durchläufen bestimmt; das Resultat ist in Tabelle 6.6 wiedergegeben. Anschließend wurde die funktionale Abhängigkeit auf einem Gitter der Ausdehnung  $\pm 4.8\sigma$  in alle Koordinatenrichtungen mit einer Schrittweite von  $0.4\sigma$  abgetastet. Wie man sieht, sind die systematischen Unsicherheiten aller Resultatparameter vernachlässigbar klein im Vergleich zu den statistischen Un-

Parameter	Wert	Unsicherheit		Beiträge zur Systematik		
		stat.	syst.	Ped.	KP-Sk.	SP-Eig.
$\Theta_{0WP}/\text{Enc.-S.}$	50856	$\pm 38$	$\pm 5$	$2 \cdot 10^{-2}$	5	0.2
$T_{CWP}^{id}$	1.077	$\pm 4 \cdot 10^{-3}$	$\pm 2 \cdot 10^{-4}$	$4 \cdot 10^{-5}$	$2 \cdot 10^{-5}$	$2 \cdot 10^{-4}$
$\vartheta_{CWP}$	0.814	$\pm 2 \cdot 10^{-3}$	$\pm 5 \cdot 10^{-4}$	$1 \cdot 10^{-5}$	$5 \cdot 10^{-4}$	$2 \cdot 10^{-4}$
$k_{WP}$	0.998	$\pm 2 \cdot 10^{-3}$	$\pm 2 \cdot 10^{-4}$	$2 \cdot 10^{-6}$	$2 \cdot 10^{-4}$	$9 \cdot 10^{-6}$
$\Delta_{WP}$	1.567	$\pm 4 \cdot 10^{-3}$	$\pm 1 \cdot 10^{-4}$	$5 \cdot 10^{-5}$	$3 \cdot 10^{-5}$	$4 \cdot 10^{-4}$

**Tabelle 6.7:** Systematische Gesamtunsicherheit und Fehlerbudget der  $\lambda/4$ -Skalenkalibrationsmessung *GRbeam260509\_002*

sicherheiten; man kann daraus schließen, daß die Pedestals kein relevanter systematischer Einfluß sind.

Es ist nun noch interessant, die Unsicherheit der „eigentlichen“ Winkelskalen-Kalibrationskonstante  $\Theta_{0CP}$  in Relation zur Wiederholgenauigkeit des Referenzschalters des Kalibrationsprismen-Drehtischs zu setzen. Diese wird vom Hersteller mit  $\pm 0.025^\circ$  spezifiziert und ist somit vergleichbar mit der statistischen Unsicherheit.

### $\lambda/4$ -Skalenkalibration *GRbeam260509\_002*

Wenngleich die anschließende Justierfehleranalyse die „eigentliche“ Kalibration der Wellenplatten-Winkelskala darstellt, wurde der Vollständigkeit halber auch die Systematik der  $\lambda/4$ -Skalenkalibrationsmessung *GRbeam260509\_002* betrachtet. Die Bestimmung der systematischen Unsicherheit erfolgte wiederum durch eine *MC*-Stichprobe mit 2048 Werten. Da in diesem Fall aber mehrere Kalibrationsarten in die Analyse eingehen, wurde die Gesamtunsicherheit zusätzlich in ein „Fehlerbudget“ aufgeschlüsselt, indem jeweils nur die Parameter *einer* Kalibrationsart variiert wurden, während die anderen auf ihren nominellen Werten verblieben; auch hier wurden 2048 *MC*-Durchläufe pro Kalibrationsart durchgeführt. Bei beiden Untersuchungen wurden die Pedestalwerte, die Kalibrationsprismen-Winkelskalenkalibration und die Stokes-Prismen-Eigenschaften variiert. Für die Berücksichtigung der funktionalen Abhängigkeiten wurde die bei der Diskussion der Initialjustierung erwähnte Abtastung herangezogen.

Das Ergebnis dieser Untersuchung ist in Tabelle 6.7 aufgeführt. Man kann erkennen, daß auch in diesem Fall die statistische Unsicherheit deutlich größer als die systematische ist, wobei letztere durch den Beitrag der Kalibra-

Parameter	Wert	Unsicherheit		Beiträge zur Systematik		
		stat.	syst.	Ped.	KP-Sk.	SP-Eig.
$\Theta_{0WP}/\text{Enc.-S.}$	50896	$\pm 6$	$\pm 8$	$8 \cdot 10^{-2}$	8	$1 \cdot 10^{-2}$
$k_{WP}$	1.0003	$\pm 4 \cdot 10^{-4}$	$\pm 2 \cdot 10^{-6}$	$4 \cdot 10^{-8}$	$2 \cdot 10^{-6}$	$7 \cdot 10^{-7}$
$\Delta_{WP}$	1.5853	$\pm 5 \cdot 10^{-4}$	$\pm 2 \cdot 10^{-4}$	$1 \cdot 10^{-5}$	$2 \cdot 10^{-4}$	$2 \cdot 10^{-5}$

**Tabelle 6.8:** Systematische Unsicherheit und Fehlerbudget der Justierfehleranalyse *GRbeam260509\_003*

tionsprismen-Winkelskala dominiert wird. Wie man ebenfalls sieht, läßt sich die systematische Gesamtunsicherheit nicht einfach durch die quadratische Summierung der Einzelbeiträge bestimmen; dies ist ein deutlicher Hinweis darauf, daß die Kalibrationen nicht unabhängig voneinander sind.

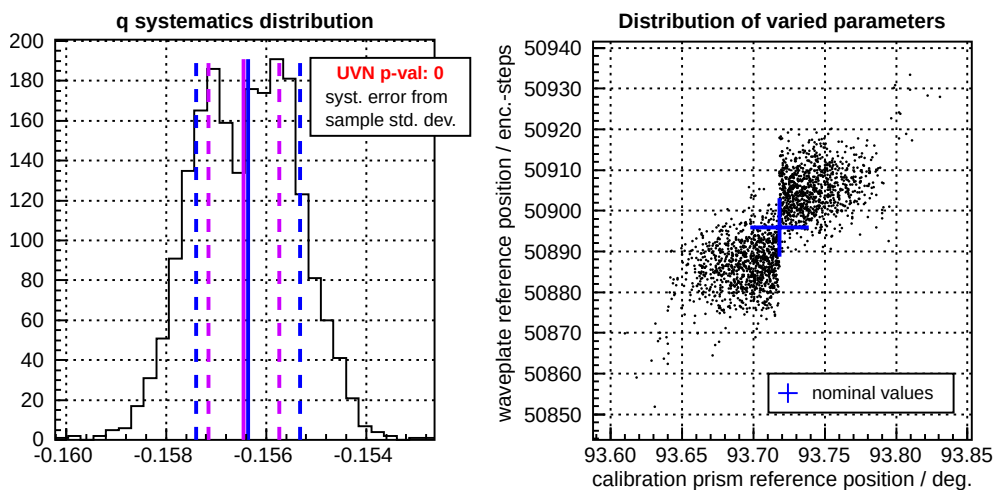
Auch in diesem Fall wurde eine Abtastung der funktionalen Abhängigkeit durchgeführt, wobei das Gitter hierbei eine Ausdehnung von  $\pm 5\sigma$  bei einer Gitterweite von  $2.5\sigma$  aufwies. Diese Untersuchung wurde in Abs. 6.3.3 als Beispiel zur Illustration des Verfahrens gewählt; das Resultat ist in Abb. 6.13 dargestellt.

### Justierfehleranalyse *GRbeam260509\_003*

Die Untersuchung der Justierfehleranalyse folgt demselben Schema, das auch bei der  $\lambda/4$ -Skalenkalibration angewandt wurde. Es wurden wiederum die systematische Gesamtunsicherheit und das Fehlerbudget mit jeweils 2048 *MC*-Durchläufen bestimmt, wobei auch dieselbe Abtastung der funktionalen Abhängigkeit der Initialjustierung von den Pedestals zugrundegelegt wurde; das Resultat ist in Tabelle 6.8 angegeben. Auch in diesem Fall ist die systematische Unsicherheit im wesentlichen durch den Beitrag der Kalibrationsprismen-Winkelskala gegeben. Für die Abtastung der funktionalen Abhängigkeit wurde dasselbe relativ grobe Gitter wie im Fall der  $\lambda/4$ -Skalenkalibration gewählt. Aufgrund der Komplexität der Analyse nahm diese Untersuchung allerdings mehr als 10 Tage Rechenzeit in Anspruch.

### Stokes-Polarisationsmessung *stok230509\_31*

Die Bestimmung der systematischen Unsicherheit erfordert im Fall der Stokes-Polarisationsmessung *stok230509\_31* die Variation aller Kalibrationsarten, da sie indirekt auch von der Kalibrationsprismen-Winkelskala abhängt (vgl.



**Abbildung 6.15:** Beobachtete Interpolationsartefakte bei Verwendung der Justierfehleranalyse als Quelle der Wellenplatten-Skalenkalibration für die Analyse der Stokesmessung *stok230509\_31*. *Links:* bimodale Struktur in der Verteilung des resultierenden Stokesparameters  $q$ . – *Rechts:* Diskontinuität in den zufallsgenerierten Werten der Winkelskalen-Kalibrationskonstante  $\Theta_{0WP}$ .

Abb. 6.10). Für diese Untersuchung sind dementsprechend auch zwei aufeinander aufbauende Interpolationsschritte erforderlich: die Bestimmung der nominellen Initialjustierungs-Kalibrationsparameter in Abhängigkeit der zufallsgenerierten Pedestals und die Bestimmung der nominellen  $\lambda/4$ -Skalenkalibration in Abhängigkeit der zufallsgenerierten Pedestals und Initialjustierungs-Kalibrationswerte. Hierzu sind die bereits erwähnten Abtastungen der funktionalen Abhängigkeit der Initialjustierung *GRbeam260509\_001* und der Justierfehleranalyse *GRbeam260509\_003* erforderlich.

Bei der Durchführung dieser Analyse wurde jedoch festgestellt, daß die Histogramme der Resultatparameter teilweise bimodal ausfallen; dies geht einher mit einer Diskontinuität der zufallsgenerierten Werte der Referenzposition  $\Theta_{0WP}$  der Wellenplatten-Winkelskala (vgl. Abb. 6.15). Ein solcher Effekt wird nun nicht beobachtet, wenn für diese Kalibration statt der Resultate der Justierfehleranalyse diejenigen der vorläufigen Kalibrationmessung *GRbeam260509\_002* samt zugehöriger Abtastung der funktionalen Abhängigkeit verwendet werden. Es ist daher zu vermuten, daß es sich hierbei um Interpolationsartefakte handelt, die von einer für die funktionale Abhängigkeit der Justierfehleranalyse zu grob gewählten Gitterweite herrühren.

Da aufgrund des hohen Rechenaufwands keine feinere Abtastung der funktionalen Abhängigkeit möglich ist, wurde in diesem Fall nur eine näherungs-

	Wert	Unsicherheit		Beiträge zur Systematik			
		stat.	syst.	Ped.	KalPr.	SP-Eig.	WP-Sk.
$q$	-1.531	$8 \cdot 10^{-4}$	$2.5 \cdot 10^{-3}$	$2 \cdot 10^{-4}$	$3 \cdot 10^{-4}$	$1 \cdot 10^{-4}$	$2.5 \cdot 10^{-3}$
$u$	0.1807	$4 \cdot 10^{-4}$	$1.1 \cdot 10^{-3}$	$1 \cdot 10^{-5}$	$1 \cdot 10^{-5}$	$8 \cdot 10^{-5}$	$1 \cdot 10^{-3}$
$v$	0.9575	$2 \cdot 10^{-4}$	$6 \cdot 10^{-4}$	$4 \cdot 10^{-5}$	$2 \cdot 10^{-5}$	$5 \cdot 10^{-4}$	$5 \cdot 10^{-4}$

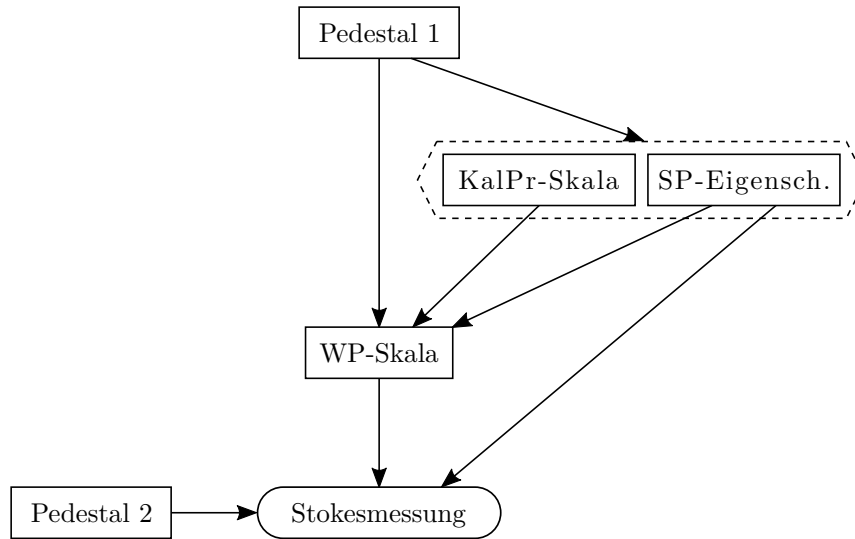
**Tabelle 6.9:** Systematische Gesamtunsicherheit und Fehlerbudget einer Stokes-Polarisationsmessung am Beispiel von *stok230509\_31*

weise Analyse unter Verwendung der vorläufigen  $\lambda/4$ -Skalenkalibration durchgeführt. Auch hier wurde sowohl die Gesamtunsicherheit als auch das Fehlerbudget anhand von *MC*-Datensätzen mit jeweils 2048 Stichprobenelementen ermittelt. Die Resultate beider Untersuchungen sind in Tabelle 6.9 zusammengefaßt, darüberhinaus wurde die Bestimmung der Gesamtunsicherheit bereits in Abb. 6.11 als Beispiel für diese Art von Untersuchungen illustriert. Wie man erkennt, stammt der dominante Beitrag zur systematischen Unsicherheit in diesem Fall von der Skalenkalibration des Wellenplatten-Drehtischs und übertrifft sogar die statistische Unsicherheit; die anderen Einflüsse sind hingegen nahezu vernachlässigbar.

### 6.3.6 Berücksichtigung der Pedestalkalibration

In Abb. 6.10 wird die im Rahmen von Systematikuntersuchungen maximal mögliche Abhängigkeit von Analyseresultaten untereinander dargestellt, die allerdings nur dann auftritt, wenn eine Stokes-Polarisationsmessung unmittelbar im Anschluß an die Kalibration des Stokesmeter MkII erfolgt. Im Regelfall wird jedoch in der Zwischenzeit eine weitere Pedestalmessung durchgeführt worden sein, so daß stattdessen die in Abb. 6.16 aufgezeigte Situation vorliegt. Es ist somit für die Bestimmung der systematischen Unsicherheit erforderlich, in jedem *MC*-Durchlauf für dieselbe Kalibrationsart „Pedestal“ zwei verschiedene Parametersätze gemäß unterschiedlichen Quellverteilungen zu erzeugen; dies führt ein zusätzliches Maß an Komplexität in den Analyseprozeß ein.

Aus den vorangegangenen Anwendungsbeispielen des Analyseverfahrens wird jedoch ersichtlich, daß die Pedestal-Kalibration in allen Fällen einen vernachlässigbar kleinen Beitrag zur systematischen Unsicherheit darstellt; es wurde daher überlegt, ob auf die Berücksichtigung dieser Kalibrationsart verzichtet werden kann. Hierfür spricht, daß der Polarisationszustand ja



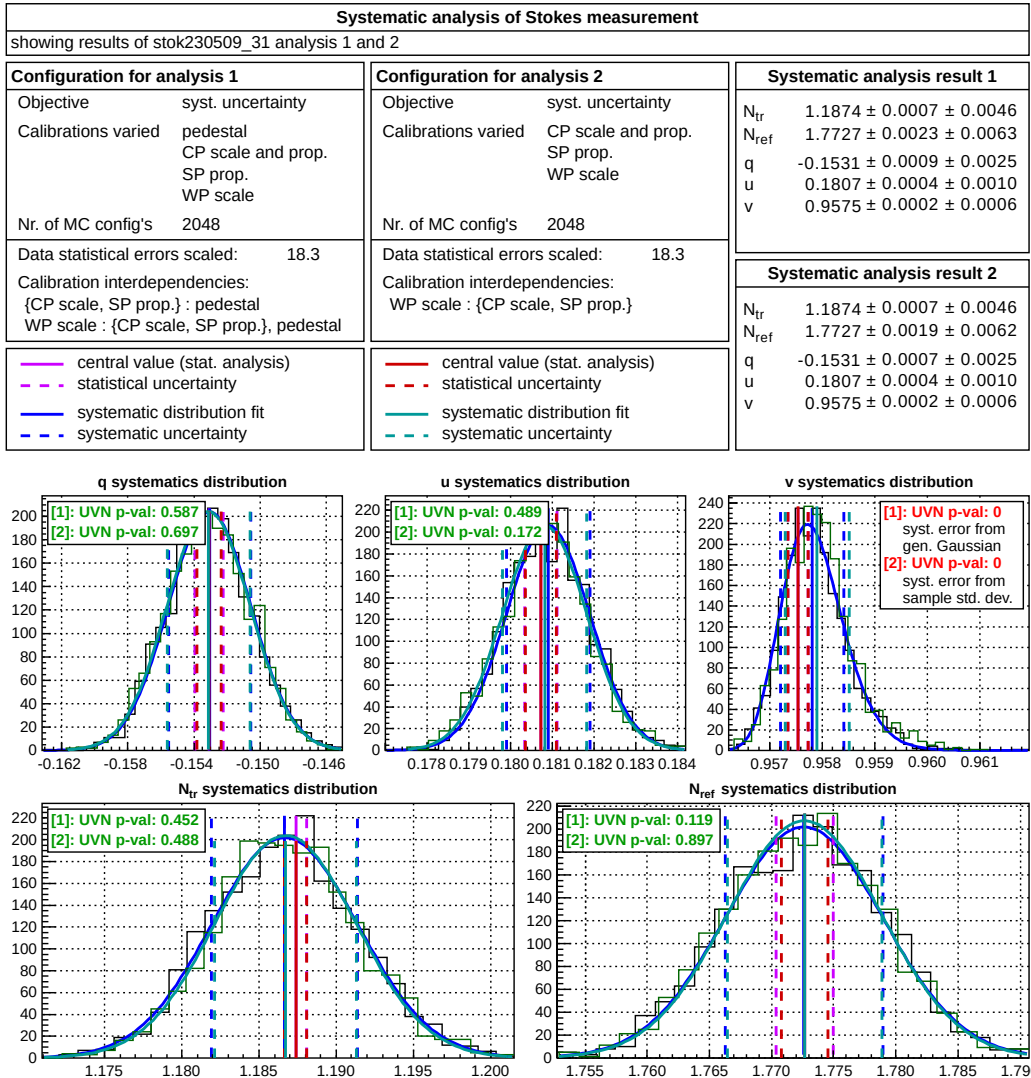
**Abbildung 6.16:** Schematische Darstellung der Kalibrationsabhängigkeit einer Polarisationsmessungs-Analyse im Regelfall

im wesentlichen durch die Modulationsamplituden der Sensorsignale gegeben ist, die typischerweise um einen Faktor  $10^4 - 10^5$  größer als die statistischen Unsicherheiten der Pedestals ausfallen – eine Fluktuation der Pedestals im Rahmen dieser Unsicherheiten sollte daher einen entsprechend geringen Einfluß auf das Analyseresultat haben.

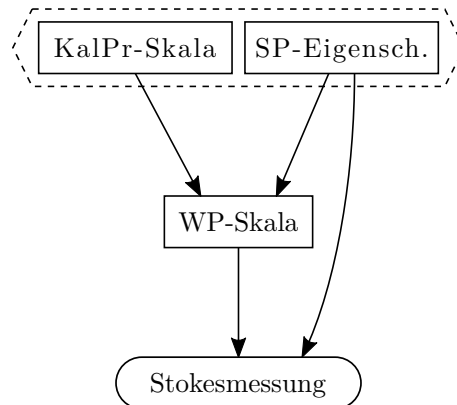
Um diese Vermutung zu untermauern, müssen nun Systematikuntersuchungen ohne Berücksichtigung der Pedestals mit den entsprechenden vollständigen Systematikuntersuchungen verglichen werden. Da dies allerdings aufgrund der notwendigen Abtastung der funktionalen Abhängigkeit der  $\lambda/4$ -Skalenkalibration bzw. der Justierfehleranalyse mit einem erheblichen Zeitaufwand verbunden ist (s. o.), konnte die Zulässigkeit dieser Vereinfachung nur anhand weniger Beispiele überprüft werden; um die Aussagekraft dennoch so groß wie möglich zu halten, wurden hierfür Messungen aus zwei verschiedenen Strahlzeiten (*beam260509* und *beam210709*) ausgewählt.

Zunächst wurde nun eine Abtastung der funktionalen Abhängigkeit der  $\lambda/4$ -Skalenkalibration von den Resultaten der Initialjustierung durchgeführt, bei der die Pedestals auf ihren nominellen Werten verblieben. Anschließend wurde unter Verwendung dieser Daten eine Systematikuntersuchung der jeweiligen Stokesmessung durchgeführt, bei der die Pedestalwerte ebenfalls nicht variiert wurden; die Resultate wurden dann mit denen der vollständigen Analyse verglichen. Stellvertretend ist in Abb. 6.17 das entsprechende Ergebnis für die Stokesmessung *stok230509\_31* dargestellt. Man sieht so-





**Abbildung 6.17:** Direkter Vergleich der Untersuchungen zur Systematik der Stokes-Polarisationsmessung *stok230509\_31* mit (Analyse „1“) und ohne (Analyse „2“) Berücksichtigung der Pedestals. Da die Verteilungen der Resultatparameter praktisch deckungsgleich sind, erscheint die Vernachlässigung der Pedestalkalibration als zulässige Vereinfachung. Die Größen zur Beurteilung der Fitqualität wurden der Übersichtlichkeit halber weggelassen, weisen jedoch ebenfalls nahezu identische Verteilungen auf.



**Abbildung 6.18:** Bei Vernachlässigung der Pedestalkalibration reduzieren sich Abb. 6.10 und Abb. 6.16 zu dieser vereinheitlichten Abhängigkeitsstruktur.

fort, daß die Verteilungen der Resultatparameter in beiden Fällen nahezu deckungsgleich sind; auch sind die ermittelten systematischen Unsicherheiten nahezu identisch. Eine Vernachlässigung der Pedestals als systematischer Einfluß erscheint daher zulässig.

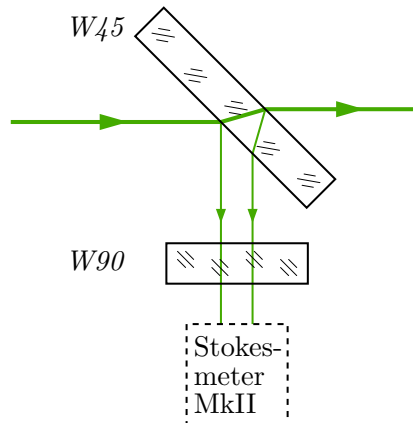
Diese Vorgehensweise hat nun neben einer vereinfachten und für alle Polarisationsmessungen einheitlichen Abhängigkeitsstruktur der Analyse (vgl. Abb. 6.18) die folgenden Vorteile, durch die einige der im vorigen Abschnitt angesprochenen Schwierigkeiten vermieden werden können:

- Die Untersuchungen zur Systematik werden um einen Faktor von bis zu 25 schneller, weil nicht mehr bei jeder *MC*-Iteration die Einzelpunkt-Stichproben neu ausgewertet werden müssen<sup>7</sup>.
- Durch die Beschleunigung der Analyse der einzelnen Kalibrationskonfiguration und die reduzierte Dimensionalität des Problems kann die funktionale Abhängigkeit der Analyseresultate deutlich feiner abgetastet werden.

Auf diese Weise ist es möglich, die Ursache der beobachteten Interpolationsartefakte auszuräumen und somit die Resultate der Justierfehleranalyse anstelle der vorläufigen  $\lambda/4$ -Skalenkalibration für die Untersuchung der systematischen Unsicherheit zu verwenden.

---

<sup>7</sup>Dieser Effekt war bereits bei den Untersuchungen zur Bestimmung des Fehlerbudgets aufgefallen, da die Beiträge der Pedestalkalibration deutlich mehr Zeit in Anspruch nahmen als die der anderen Kalibrationsarten.



**Abbildung 6.19:** Detailschema der optischen Elemente am röhrenseitigen Ende der Wechselwirkungszone. Der Polarisationszustand des zu vermessenden Lichtstrahls kann durch die Reflexion am eigentlich antireflexbeschichteten Vakuumbenfenster  $W_{45}$  und aufgrund der Transmission durch das ebenfalls beschichtete Seitenaustrittsfenster  $W_{90}$  verfälscht werden.

## 6.4 Die Polarisations-Transfermatrix

Ziel der Stokesmessungen ist es, den zirkularen Polarisationsgrad des dem Elektronenstrahl entgegeneilenden Lichts zu bestimmen, um so die Strahlpolarisation aus der gemessenen Compton-Asymmetrie extrahieren zu können. Da im hier vorliegenden Fall eines *internal-cavity*-Polarimeters allerdings kein Meßgerät innerhalb des Resonators plaziert werden kann, muß für jegliche diagnostische Zwecke auf solches Licht zurückgegriffen werden, das aufgrund der unvollständigen Reflektivität von Spiegeln oder der unerwünschten Reflektivität von Vakuumbenfenstern aus dem Resonator austritt. Unter diesen Umständen muß jedoch damit gerechnet werden, daß der Polarisationszustand des Lichtstrahls sich aufgrund der Wechselwirkung mit den optischen Oberflächen ändert und die außerhalb des Resonators gemessene Zirkularpolarisation nicht der für die Analyse relevanten Größe  $P_L$  im Sinne von Gl. 3.16 entspricht.

Im konkreten Fall des A4-Compton-Rückstreupolarimeters ist das Vakuumbenfenster  $W_{45}$  unter  $45^\circ$  zur Strahlachse montiert, so daß es zusätzlich als Strahlteiler dient und einen geringen Bruchteil des Lichts auskoppelt; dieser wird dann mit dem Stokesmeter MkII vermessen (siehe Abb. 6.19). Die Auswirkungen dieser optischen Oberflächen auf den Polarisationszustand lassen sich nun einfach als Mueller-Matrizen ausdrücken (vgl. Abs. 4.2), so daß es mathematisch unkompliziert ist, die Meßergebnisse um diesen systematischen

Effekt zu bereinigen. Es ist allerdings laut Auskunft einiger Hersteller nicht möglich, Daten zu den durch eine solche dielektrische Beschichtung hervorgerufenen Phasen- und Amplitudenveränderungen zur Verfügung zu stellen, da diese nicht im Produktionsprozeß vorhergesagt werden können; die entsprechende Polarisations-Transfermatrix mußte daher für jedes eingesetzte Fenster einzeln bestimmt werden. In diesem Abschnitt sollen das hierfür entwickelte Meßverfahren und die Methode zur Auswertung der entsprechenden Rohdaten vorgestellt werden.

### **6.4.1 Meßverfahren und Apparatur**

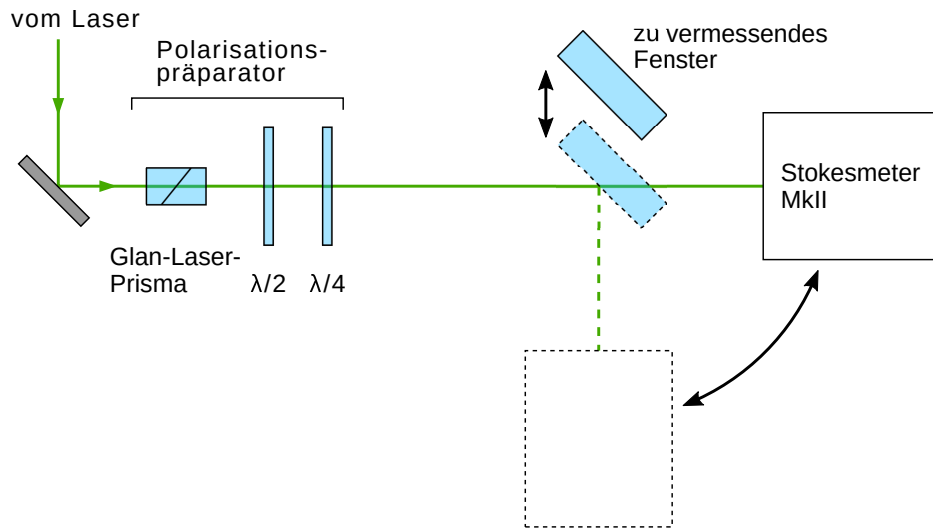
Da mit dem Stokesmeter MkII ein Polarisationsmeßgerät zur Verfügung steht, bietet es sich an, die Transfermatrix zu bestimmen, indem verschiedene präparierte Polarisationszustände auf das zu charakterisierende Fenster eingestrahlt und die resultierenden „deformierten“ Polarisierungen vermessen werden. Zu diesem Zweck wird der Laser wieder in seine werkseitige, einfacher zu handhabende Konfiguration zurückversetzt und der erzeugte Nutzstrahl in eine hierfür entworfene Meßapparatur eingespeist, die unterhalb der Resonatorebene zwischen den ersten beiden Dipolmagneten plaziert wird; das Vakuumfenster *W45* muß daher durch einen 45°-Umlenkspiegel ersetzt werden. Die Apparatur besteht aus einem Tisch mit einer präzisionsgefertigten Montageplatte für die polarisationsoptischen Elemente, zwei Probenhalterungen für die zu vermessenden Fenster und einer Schwenkhalterung, in die das Stokesmeter MkII eingebaut werden kann. Im folgenden soll kurz auf die einzelnen Baugruppen eingegangen werden, während für einen Gesamtüberblick auf Abb. 6.21 und 6.22 verwiesen sei.

#### **Polarisationspräparation**

Das optische System ist in Abb. 6.20 schematisch dargestellt. Der Laserstrahl tritt an der linken Seite von oben in die Apparatur ein und wird mittels eines 45°-Spiegels auf die Apparatur gelenkt, wo er zunächst auf den Polarisationspräparator, bestehend aus einem Glan-Laser-Prisma und zwei Wellenplatten, trifft. Das Prisma ist in einer manuellen Justierhalterung montiert und hat zweierlei Funktionen: Einerseits soll es einen möglichst reinen linearpolarisierten Zustand als Ausgangspunkt für die weitere Präparation herstellen<sup>8</sup>, andererseits ist es Teil des Verfahrens zur Intensitätsnormierung (s. u.). Der

---

<sup>8</sup>Diese Funktion ist strenggenommen nicht erforderlich, da der Laser aufgrund des Brewster-Fensters bereits linearpolarisiertes Licht erzeugt.



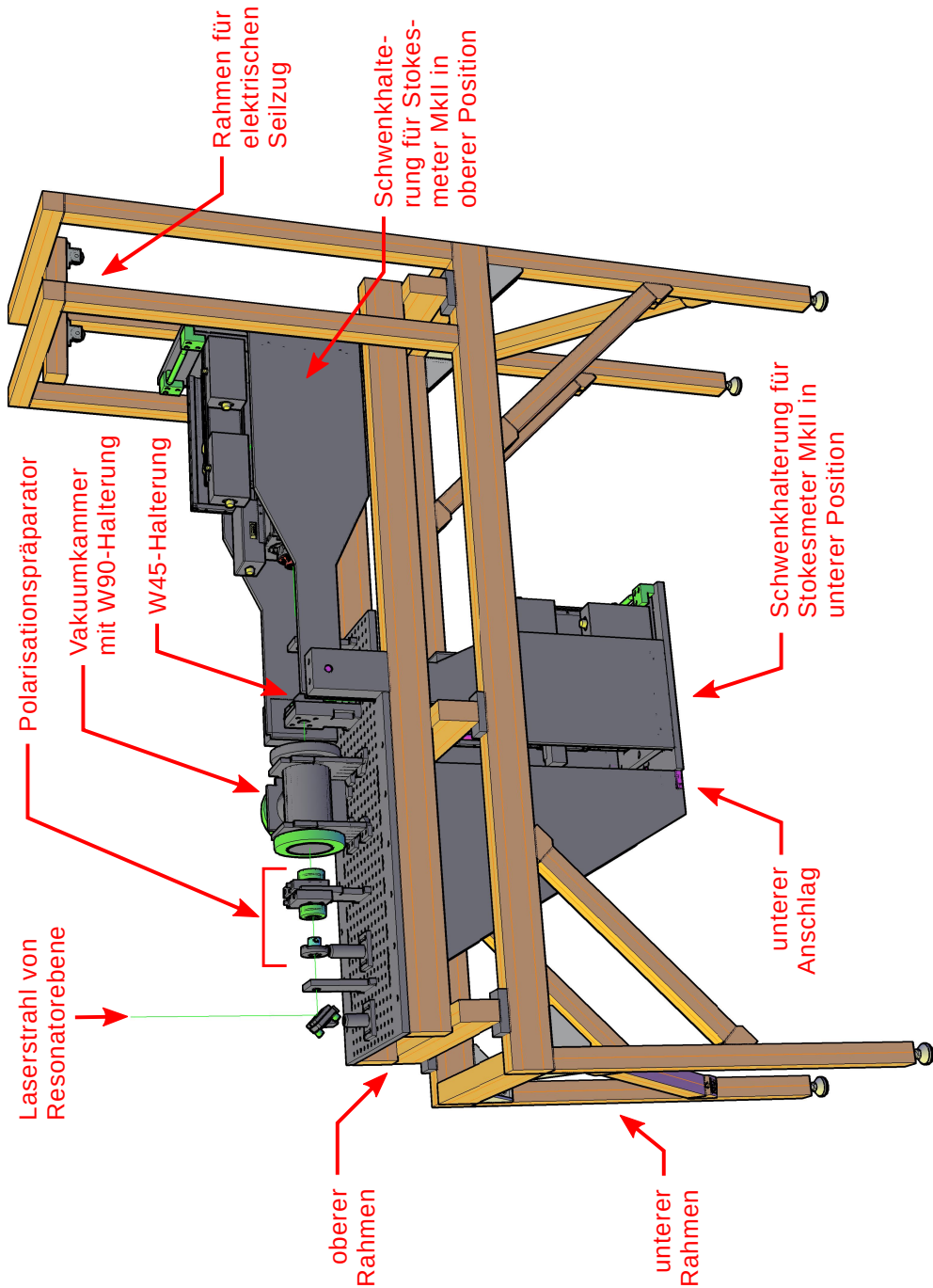
**Abbildung 6.20:** Schematische Darstellung des Ellipsometrie-Meßplatzes in der Konfiguration zur Bestimmung einer  $W_{45}$ -Transfermatrix. Für die Vermessung der eingestrahlichten präparierten Polarisation ist das Fenster entfernt und das Stokesmeter befindet sich in der oberen Position; anschließend wird das Fenster in den Strahlengang eingebracht und das Stokesmeter nach unten geschwenkt, um den „deformierten“ Polarisationszustand zu messen.

Einfachheit halber wird an dieser Stelle das Kalibrationsprisma wiederverwendet. Bei den Wellenplatten handelt es sich um eine  $\lambda/2$ -Platte des Typs *LEnS-Optics W2Z25-514.5* und eine  $\lambda/4$ -Platte *LEnS-Optics W4Z25-514.5*, die im Normalfall Teil des Bowen-Kompensators ist. Beide sind auf motorisierten Drehtischen *Newport SR50CC*, die ebenfalls normalerweise für den Bowen-Kompensator verwendet werden, montiert. Diese Anordnung ermöglicht es, den kompletten Parameterraum polarisierter Zustände abzudecken: Mittels der  $\lambda/2$ -Platte kann die Polarisations Ebene des eingestrahlichten Lichts beliebig gedreht werden, während mit der nachfolgenden  $\lambda/4$ -Platte die Exzentrizität der Polarisationsellipse eingestellt werden kann<sup>9</sup>.

### Probenhalterung und Meßverfahren

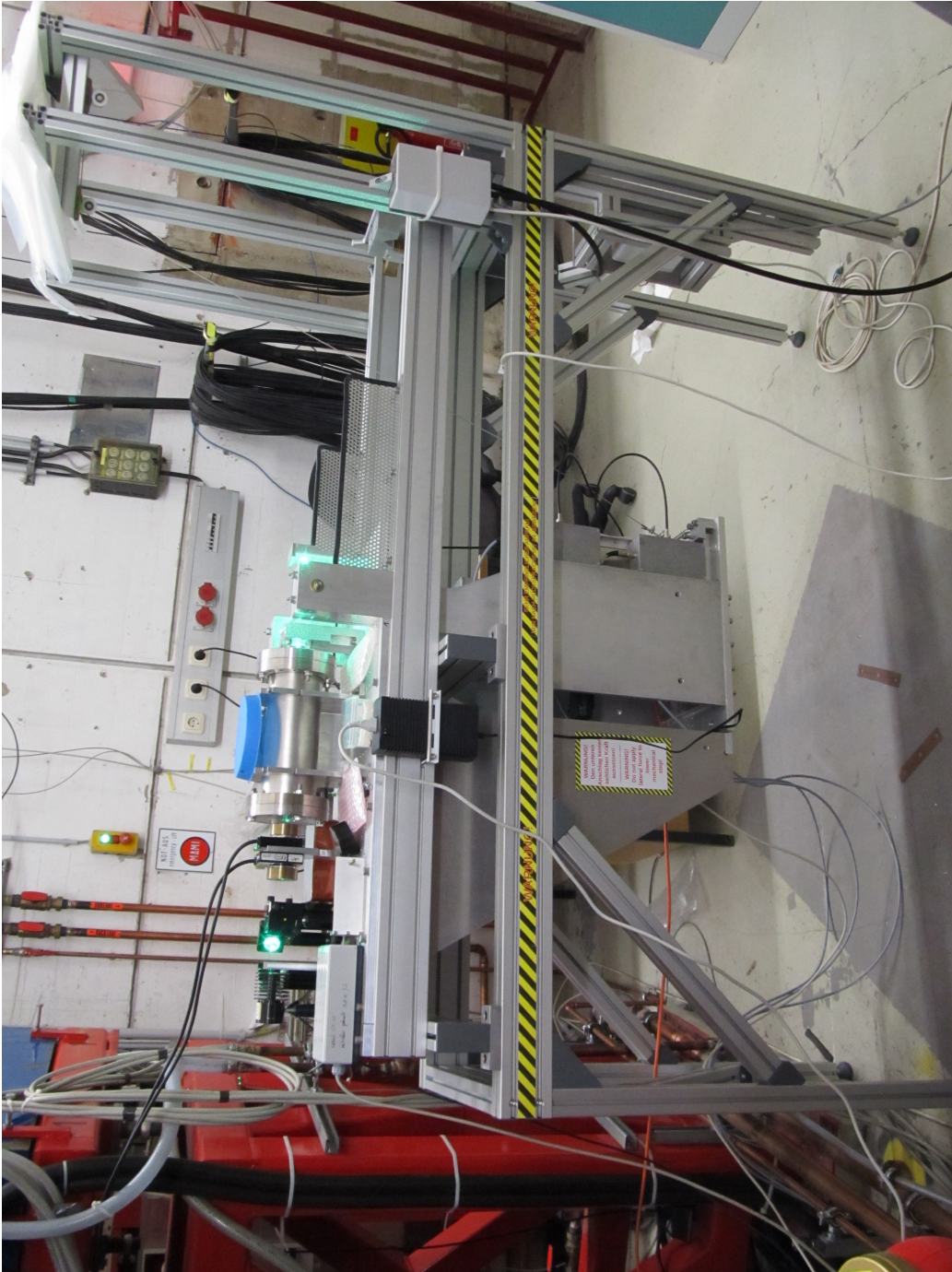
Hinter dem Polarisationspräparator befinden sich zwei Montageplätze für die zu vermessenden Fenster. Für die Untersuchung von  $90^\circ$ -Fenstern ist eine Dreiwege-Vakuumkammer auf dem Tisch montiert, in deren vorderen und

<sup>9</sup>wobei hier der Winkel zwischen den schnellen Achsen beider Wellenplatten ausschlaggebend ist.

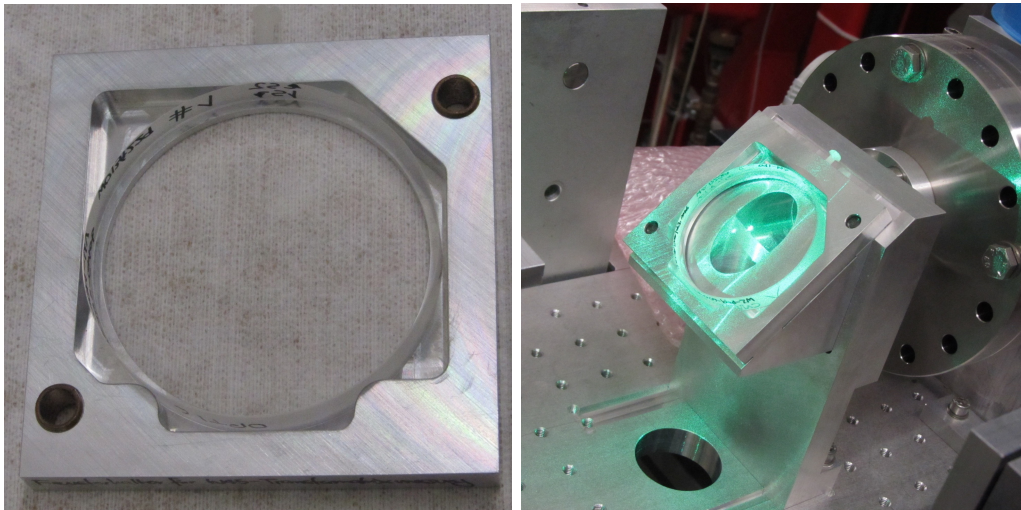


**Abbildung 6.21:** CAD-Modell des Ellipsometrie-Meßplatzes. Aus Gründen der Übersichtlichkeit wurde die Optik des externen Normierungssensors weggelassen. Der vordere Umlenkspiegel befindet sich in der Realität auf einer separaten Plattform.





**Abbildung 6.22:** Photo des Ellipsometrie-Meßplatzes während der Vermessung eines  $45^\circ$ -Fensters. Das Fenster ist installiert und das Stokesmeter in die untere Position geschwenkt.



**Abbildung 6.23:** Photos eines  $45^\circ$ -Fensters im Schnellwechselrahmen. Das Fenster wird mittels einer Kunststoffschraube gegen die beiden CNC-gefrästen abgerundeten Kanten gedrückt; auf diese Weise ist die mechanisch genaue Zentrierung sichergestellt. Das rechte Bild zeigt den in der Meßapparatur installierten Zustand.

rückwärtigen Endflansch Befestigungsmöglichkeiten für die Fenster eingefräst wurden, während am seitlichen Flansch die Vakuumpumpe angeschlossen werden kann. Auf diese Weise sind auch Untersuchungen zum Einfluß der Spannungsdoppelbrechung auf die Transfermatrix des Fensters möglich; diese Messungen sind allerdings aus praktischen Gründen sehr aufwendig. Für die Untersuchung von  $45^\circ$ -Fenstern ist ein  $45^\circ$ -Halterungsblock auf dem Tisch montiert, der an seiner schrägen Seite mit Paßstiften versehen ist. Die zu vermessenden Fenster werden in Schnellwechselrahmen eingespannt, welche entsprechende Präzisionsbohrungen mit Sintermetall-Gleitlagern aufweisen (siehe Abb. 6.23); auf diese Weise ist es möglich, die Fenster reproduzierbar im Strahlengang zu montieren und auch wieder daraus zu entfernen.

Für die Bestimmung der Transfermatrix werden nun die beiden Wellenplatten des Polarisationspräparators schrittweise gedreht, wobei bei jeder solchen Einstellung zunächst das zu untersuchende Fenster entfernt und ggf. das Stokesmeter in die obere Position geschwenkt wird, um die ungestörte Polarisation (auch „Referenzpolarisation“) zu messen. Anschließend wird im Falle eines  $90^\circ$ -Fensters das Fenster wieder installiert und der deformierte Polarisationszustand gemessen. Im Falle eines  $45^\circ$ -Fensters muß hierfür zusätzlich das Stokesmeter in die untere Position bewegt werden; zudem sind die Intensitäten des eingestrahnten und reflektierten Lichtstrahls sehr



verschieden, weshalb hier der Meßbereich gewechselt und dementsprechend auch eine passende Pedestalmessung durchgeführt werden muß. Es wäre zwar einfacher, zunächst ohne Fenster alle ungestörten Zustände und anschließend mit Fenster alle deformierten Zustände zu bestimmen; allerdings müßte man sich dann gänzlich auf die Wiederholgenauigkeit beider Drehtische verlassen und hätte keine Möglichkeit, sicherzustellen, daß bei derselben eingestellten Winkelkonfiguration auch exakt derselbe Polarisationszustand vorlag.

Um den gesamten Parameterbereich abzudecken, werden beide Wellenplatten in 20°-Schritten von 0° bis einschließlich 160° rotiert<sup>10</sup>, wobei für jede Stellung der  $\lambda/2$ -Platte eine komplette Winkelserie der  $\lambda/4$ -Platte absolviert wird; insgesamt liegen einer Transfermatrix somit typischerweise 81 Polarisationskonfigurationen zugrunde. Für ein einzelnes 90°-Fenster dauert dieses Meßprogramm im allgemeinen sieben bis neun Stunden, für ein 45°-Fenster wegen des höheren Aufwands ca. 12 bis 15 Stunden.

### Rahmenkonstruktion und Schwenkhalterung

Da das Stokesmeter MkII ein erhebliches Gewicht aufweist und die Gesamtkonstruktion dennoch eine hohe mechanische Präzision und Wiederholgenauigkeit erfordert, ist der Meßplatz als Doppelrahmen-Konstruktion ausgelegt. Der untere Rahmen mit den Tischbeinen stellt hierbei die eigentliche Tragkonstruktion des Aufbaus dar und besteht, wie auch die restliche Konstruktion, aus extrudierten Aluminium-Profilen der Firma *MiniTec*<sup>11</sup>. An seiner Oberseite sind sechs Aluminiumblöcke befestigt, die als Montagepunkte und Ausgleichselemente zwischen den beiden Rahmen dienen. Auf diesen Ausgleichsblöcken sind drei Querträger verschraubt, auf denen der obere Rahmen ruht; dieser soll eine möglichst verwindungssteife Unterlage für die eigentliche optische Montageplattform bieten. Die Plattform selbst ist eine 15 mm starke massive Aluminiumplatte mit den in der Optik üblichen, im 50 mm-Raster angeordneten M6-Gewinden; zusätzlich weist sie Paßfräsungen für die Montage einiger positionskritischer Elemente – der Justierzielhalter und des *W45*-Trägers – auf. Letzterer ist so gefertigt, daß der Auftreffpunkt des Laserstrahls auf dem Fenster exakt auf der Drehachse des Stokesmeter-Schwenkmechanismus liegt.

Der Schwenkmechanismus besteht aus einer Montageplattform für das Stokesmeter, die an zwei flachen Schwenkarmen hängend festgeschraubt ist, wobei die genaue Plazierung der Arme durch Paßstifte sichergestellt wird. An der Oberseite weisen die Arme Sintermetall-Gleitlager auf, mit denen sie

---

<sup>10</sup>Die 180°-Stellung ist äquivalent zu 0° und wird daher aus Effizienzgründen weggelassen.

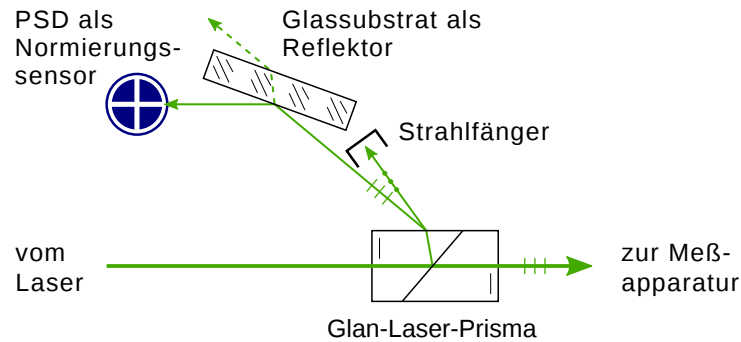
<sup>11</sup>MiniTec GmbH & Co. KG, MiniTec Allee 1, 66901 Schönenberg-Kübelberg

auf kurze, in massiven Aluminiumblöcken befestigte Stahlwellen aufgesteckt werden; diese Wellen definieren die Drehachse des Mechanismus. Um das Stokesmeter in der oberen Position zu fixieren, ist die Unterseite der Montageplattform mit einem Edelstahlbolzen von 20 mm Durchmesser versehen, der mittels eines verschiebbaren Riegels in einem Halteblock am Ende des Rahmens befestigt werden kann. Der Halteblock weist hierfür eine paßgenau gefertigte trapezförmige Nut auf, so daß der Bolzen im verriegelten Zustand an genau drei Flächen des Haltemechanismus aufliegt und keine Überdefinierung der Position vorliegt. Der Block selbst ist in einer Paßfräsung im Rahmenprofil befestigt, mit der die seitliche Zentrierung gewährleistet wird. Der untere Anschlag hat die Form eines Querbalkens mit hervorstehender präzisionsgefräster Anschlagsfläche, der über zwei seitliche Trägerplatten mit der Montageplatte verbunden ist. Aufgrund des hohen Gewichts des Stokesmeter MkII und der Notwendigkeit, häufig zwischen oberer und unterer Position zu wechseln, wurde die Konstruktion darüberhinaus mit einer elektrisch betriebene Seilwinde versehen, die die Schwenkhalterung am hinteren Ende der Stokesmeter-Montageplattform nach oben zieht.

Um die notwendige Fertigungspräzision zu erreichen, wurde der gesamte obere Rahmen inklusive Montageplatte, Querträgern und Ausgleichsblöcken vor der Endbearbeitung montiert, um die Präzisionsarbeiten auf einer entsprechend großen Fräsmaschine in jeweils *einem* Arbeitsschritt durchführen zu können. Hierfür wurde die Konstruktion zunächst umgedreht, um die Unterseiten der Ausgleichsblöcke planzufräsen, so daß diese eine gemeinsame Referenzebene darstellen. Anschließend wurden alle Paßfräsungen an der Oberseite in die Montageplatte und die Rahmenprofile eingebracht, so daß das maximal mögliche Maß an Parallelität von Unter- und Oberseite gewährleistet ist.

### **Strahljustierung**

Die korrekte Ausrichtung des Laserstrahls auf die optischen Elemente ist von fundamentaler Bedeutung, da insbesondere bei der Vermessung eines 45°-Fensters sonst die Gefahr besteht, daß der reflektierte Strahl deutlich schräg auf das Stokesmeter einfällt, wenn es in die untere Position geschwenkt wurde. Aus diesem Grund können vor der Prismenhalterung und hinter der W45-Halterung Justierziele ähnlich denjenigen für das Stokesmeter (vgl. Abs. 4.4.5) in den Strahlengang eingesetzt werden, um das optische System zu justieren. Mit diesem Verfahren gelingt es reproduzierbar, den Strahl so präzise auszurichten, daß er das Stokesmeter in der oberen Position exakt zentriert durchläuft. In der unteren Position wurde bei der Inbetriebnahme eine



**Abbildung 6.24:** Schematische Darstellung der Intensitätsnormierung bei der Vermessung der Transfermatrix. Von den zwei seitlich herausreflektierten Teilstrahlen wird derjenige, der die verworfene Polarisationskomponente darstellt, in einem Strahlfänger absorbiert. Der andere, der einem eigentlich verlorengegangenen Bruchteil der erwünschten Polarisationskomponente entspricht, wird durch Reflexion an einem Glassubstrat weiter abgeschwächt und auf einen als Intensitätssensor verwendeten PSD gelenkt.

leichte Abweichung vom idealen Strahlverlauf festgestellt, die jedoch durch eine 0.2 mm starke Messingplatte zwischen Montageplattform und Anschlag ausgeglichen werden konnte.

### Intensitätsnormierung

Wie in Abs. 4.4.1 beschrieben wurde, basiert die Intensitätsnormierung bei dem hier vorgestellten Stokesmeter darauf, daß vom Vakuumfenster  $W_{45}$  zwei reflektierte Strahlen auf die Apparatur eingestrahlt werden, von denen einer zur Überwachung der Quellintensität genutzt werden kann. Bei denjenigen Messungen, für die das Stokesmeter in die obere Position geschwenkt wird, steht allerdings nur der direkte Strahl zur Verfügung, so daß dieses Schema in diesen Fällen nicht angewandt werden kann. Aus diesem Grund wurde für die Bestimmung der Transfermatrix ein anderes Normierungsverfahren erdacht, das sich die nichtidealen Eigenschaften des Glan-Laser-Prismas zunutze macht (vgl. Abb. 6.24).

Die Funktion des Glan-Laser-Prismas als Linearpolarisator beruht darauf, daß an der Schnittstelle der beiden Prismenhälften der Grenzwinkel der Totalreflexion für die zu verwerfende Polarisationsrichtung überschritten wird, so daß nur die hierzu orthogonal polarisierte Komponente transmittiert wird. Allerdings wird auch diese erwünschte Komponente nicht verlustfrei transmittiert, sondern je nach Schnittwinkel ebenfalls zu einem gewissen Bruchteil reflektiert werden. Wenngleich diese beiden reflektierten Strahlen nun

*innerhalb* des Prismas ununterscheidbar sind, verlassen sie doch das Prisma aufgrund der Doppelbrechung unter unterschiedlichen Austrittswinkeln. Da es somit möglich ist, die eigentlich unerwünschterweise herausreflektierte Komponente, die jedoch einen festen Bruchteil des transmittierten Lichtstrahls darstellt, räumlich zu isolieren, kann dieser Teilstrahl zur Korrektur von Intensitätsfluktuationen herangezogen werden.

Die Intensität dieses Teilstrahls wird in diesem Fall mit einem Positionssensor, wie er auch in der Strahllagestabilisierung (vgl. Abs. 3.3.2) verwendet wird, gemessen. Hierbei wurde allerdings festgestellt, daß aufgrund der hohen Empfindlichkeit dieser Geräte selbst der parasitär reflektierte Strahl noch zu intensiv und somit eine weitere Abschwächung erforderlich ist. Da auch hier die Verwendung eines Filters vermieden werden soll (vgl. die Diskussion in Abs. 4.4.2), wird stattdessen die Winkelabhängigkeit der Fresnel-Koeffizienten ausgenutzt, um durch Reflexion an einem Glassubstrat in der Nähe des Brewster-Winkels eine Verringerung der Intensität zu erreichen.

## 6.4.2 Methode zur Auswertung der Meßdaten

Die mathematische Idee hinter der vorgestellten Meßmethode besteht darin, eine unbekannte  $4 \times 4$ -Matrix  $M$  zu bestimmen, indem ausgenutzt wird, daß diese einen linearen Zusammenhang

$$\vec{D} = M\vec{R} \quad (6.10)$$

zwischen den für eine direkte Messung zugänglichen Größen  $\vec{D}$  (dem gestörten Polarisationszustand) und  $\vec{R}$  (dem eingestrahnten ursprünglichen Polarisationszustand) herstellt. Dies entspricht der multivariaten Verallgemeinerung des Problems der linearen Regression, bei dem ebenfalls ein Zusammenhang der Form

$$y = mx$$

anhand einer entsprechend großen Anzahl zusammengehöriger Wertepaare  $\{x_i, y_i\}$  bestimmt werden soll und das sich mit der Methode der kleinsten Fehlerquadrate (*least-squares-Verfahren*) lösen läßt. Im hier vorliegenden Fall kann jedoch aus zwei Gründen nicht einfach die multivariate Verallgemeinerung dieser Methode angewandt werden, um die Transfermatrix zu bestimmen:

1. Die Symmetrie zwischen  $\vec{D}$  und  $\vec{R}$

Das *least-squares-Verfahren* basiert ebenso wie die häufig eingesetzte  $\chi^2$ -Kurvenanpassung darauf, daß es eine vom Experimentator gewählte

und als exakt bekannt angenommene „Stellgröße“ gibt, in Abhängigkeit von der dann die ggf. fehlerbehaftete „Meßgröße“ bestimmt wird. Dies bedeutet, daß – bezogen auf das o. g. univariate Beispiel – die Minimierung des Abstands zwischen Ausgleichsgerade und Datenpunkten nur in  $y$ -Richtung erfolgt, während Unsicherheiten der  $x$ -Werte nicht vorgesehen sind bzw. vernachlässigt werden.

Im hier vorliegenden Fall sind jedoch sowohl die Quellvektoren  $\vec{R}_i$  als auch die gestörten Vektoren  $\vec{D}_i$  gleichermaßen „Meßgrößen“, die sogar mittels derselben Apparatur bestimmt werden; sie werden daher auch mit Unsicherheiten in vergleichbarer Größenordnung behaftet sein. Würde man nun das „klassische“ *least-squares*-Verfahren<sup>12</sup> auf die Meßdaten anwenden, so würden die Unsicherheiten der  $\vec{R}_i$  vernachlässigt, was eine falsche Gewichtung der Datenpunkte bei der Regression und somit unzutreffende Analyseresultate zur Folge hätte (vgl. etwa [128]).

## 2. Die Nichtlinearität des Problems

Der mit Gl. 6.10 begründete Ansatz macht sich zunutze, daß die Polarisationszustände  $\vec{D}_i$  und  $\vec{R}_i$  durch die gesuchte Transfermatrix  $M$  linear miteinander verknüpft sind. Allerdings stehen die dort aufgeführten *vollständigen* Stokes-Vektoren hier gar nicht zur Verfügung, da mangels Intensitätskalibration der Sensoren die absolute Skala der Stokesparameter in die jeweilige Normierungskonstante des Fitmodells absorbiert wird (vgl. Abs. 5.2.3). Im Rahmen der hier vorgestellten Analyse sind somit lediglich die *intensitätsnormierten* Stokesparameter  $\{q, u, v\}$  bekannt, für die es keinen einfachen Matrix-Formalismus gibt, um die Auswirkung eines polarisationsoptischen Elements mathematisch auszudrücken.

Es sind demnach weitere Überlegungen erforderlich, auf die im folgenden näher eingegangen werden soll.

### Ableitung des mathematischen Zusammenhangs

Aus den vorangegangenen Anmerkungen wird ersichtlich, daß zunächst der korrekte mathematische Zusammenhang zwischen den *normierten* Stokesparametern vor und nach der Wechselwirkung mit einem polarisationsoptischen Element abgeleitet werden muß, um die im Rahmen der Transfermatrixmessung genommenen Polarisationsdaten analysieren zu können. Es seien zu

<sup>12</sup>das aus diesem Grund teilweise auch als *ordinary least squares* bzw. *OLS* bezeichnet wird

diesem Zweck

$$M = \begin{pmatrix} m_{11} & \cdots & m_{14} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ m_{41} & \cdots & m_{44} \end{pmatrix} \quad (6.11)$$

die Mueller-Matrix des untersuchten Fensters,

$$\vec{R} = \begin{pmatrix} I_r \\ Q_r \\ U_r \\ V_r \end{pmatrix} \quad \text{bzw.} \quad \vec{D} = \begin{pmatrix} I_d \\ Q_d \\ U_d \\ V_d \end{pmatrix} \quad (6.12)$$

die vollständigen Stokes-Vektoren vor ( $\vec{R}$ ) und nach ( $\vec{D}$ ) Wechselwirkung mit dem Fenster, und

$$\hat{R} := \frac{1}{I_r} \vec{R} \quad \text{bzw.} \quad \hat{D} := \frac{1}{I_d} \vec{D} \quad (6.13)$$

die zugehörigen intensitätsnormierten Stokes-Vektoren (vgl. Abs. 4.1.4). Dann folgt aus Gl. 6.10 unmittelbar

$$\begin{aligned} q_d &= \frac{Q_d}{I_d} = \frac{m_{21}I_r + m_{22}Q_r + m_{23}U_r + m_{24}V_r}{m_{11}I_r + m_{12}Q_r + m_{13}U_r + m_{14}V_r} \\ &= \frac{m_{21} + m_{22}q_r + m_{23}u_r + m_{24}v_r}{m_{11} + m_{12}q_r + m_{13}u_r + m_{14}v_r} \end{aligned}$$

was sich unter Verwendung der Definition

$$\hat{M} := \frac{1}{m_{11}} M \quad (6.14)$$

wie folgt ausdrücken und auf die beiden anderen Stokesparameter übertragen läßt:

$$\begin{aligned} q_d &= \frac{\hat{m}_{21} + \hat{m}_{22}q_r + \hat{m}_{23}u_r + \hat{m}_{24}v_r}{1 + \hat{m}_{12}q_r + \hat{m}_{13}u_r + \hat{m}_{14}v_r} \\ u_d &= \frac{\hat{m}_{31} + \hat{m}_{32}q_r + \hat{m}_{33}u_r + \hat{m}_{34}v_r}{1 + \hat{m}_{12}q_r + \hat{m}_{13}u_r + \hat{m}_{14}v_r} \\ v_d &= \frac{\hat{m}_{41} + \hat{m}_{42}q_r + \hat{m}_{43}u_r + \hat{m}_{44}v_r}{1 + \hat{m}_{12}q_r + \hat{m}_{13}u_r + \hat{m}_{14}v_r} \end{aligned} \quad (6.15)$$

Das Ziel der Analyse besteht also darin, durch eine geeignete nichtlineare Regression unter Verwendung von Gl. 6.15 die fünfzehn nichttrivialen Elemente  $\hat{m}_{12}, \dots, \hat{m}_{44}$  der „reduzierten“ Mueller-Matrix  $\hat{M}$  zu bestimmen. Man

kann sich leicht überlegen, daß dieses Ergebnis auch im Hinblick auf die spätere Anwendung zur Korrektur der gemessenen Laserpolarisation ausreichend und eine Bestimmung der vollständigen Matrix  $M$  nicht erforderlich ist, da für die Auswertung der Compton-Asymmetrien ebenfalls nur die normierten Stokesparameter benötigt werden (vgl. Gl. 3.13). Zu diesem Zweck müssen allerdings noch die o. g. Transformationsgleichungen invertiert werden, um vom gemessenen Polarisationszustand auf den ursprünglichen, resonatorinternen zurückschließen zu können; diese Aufgabe wird sinnvollerweise einem Computeralgebrasystem übergeben.

### Regressionsverfahren

Um die genannten Schwierigkeiten der „asymmetrischen“ Regressionsverfahren zu überwinden, wurden verschiedene Erweiterungen der klassischen *least-squares*-Methode entwickelt, die unter anderem als *total least-squares* (TLS) oder *orthogonale Regression* (ODR) bezeichnet werden [128]<sup>13</sup>. Es ist nun zu beachten, daß auch hier zunächst die Annahme gleicher Unsicherheiten aller Datenpunkte gemacht wird und erst die Betrachtung des (*elementweise*) *gewichteten* Problems [116, 127] die Analyse realistischer Daten zuläßt. Dieses hat allerdings selbst im linearen Fall keine analytische Lösung mehr, weshalb grundsätzlich der Einsatz numerischer Optimierungsverfahren notwendig ist. Da die TLS- bzw. ODR-Methoden zudem zweistufige Optimierungsprobleme darstellen<sup>14</sup> und somit schon mathematisch deutlich komplexer sind, ist der Rechenaufwand bei der Datenanalyse erheblich größer als beim klassischen *least-squares*-Verfahren.

Einen Ansatz zur Abmilderung dieses Nachteils stellt der *ODRPACK*-Algorithmus [32, 209] dar, der im folgenden kurz vorgestellt werden soll. Hierfür werden zunächst die mathematischen Grundlagen des nichtlinearen gewichteten orthogonalen Regressionsproblems rekapituliert [31], das den Kern der Transfermatrixanalyse darstellt. Es seien also

$$\left\{ \vec{X}_i, \vec{Y}_i \right\}, \quad i = 1 \dots N \quad (6.16)$$

die gemessenen, im allgemeinen  $2d$ -dimensionalen „Datenpunkte“, die aufgrund der statistischen Unsicherheit des Meßprozesses von den „wahren“, aber

<sup>13</sup>Ersterer Begriff findet sich hierbei insbesondere in der Literatur zum linearen Problem.

<sup>14</sup>Anschaulich gesprochen müssen während der Optimierung der Modellparameter für jeden Parametersatz zunächst die Orte größter Annäherung zwischen Modell und Datenpunkten bestimmt werden, um dann durch geeignete Parametervariation die so gefundenen Distanzen zu minimieren.

unbekannten Werten

$$\{\vec{x}_i, \vec{y}_i\}, \quad i = 1 \dots N \quad (6.17)$$

der physikalischen Größen um additive Fehler

$$\begin{aligned} \vec{\delta}_i &:= \vec{x}_i - \vec{X}_i \\ \vec{\epsilon}_i &:= \vec{y}_i - \vec{Y}_i \end{aligned} \quad (6.18)$$

abweichen mögen. Die „wahren“ Größen  $\vec{x}$  und  $\vec{y}$  seien durch den als bekannt vorausgesetzten mathematischen Zusammenhang

$$\vec{y} = \vec{f}(\vec{x}; \vec{\beta}) \quad (6.19)$$

miteinander verknüpft, dessen „wahre“ Modellparameter  $\vec{\beta} = \{\beta_1, \dots, \beta_p\}$  anhand der gemessenen Datenpunkte bestimmt werden sollen. Im Rahmen des „einfachen“ ODR-Problems wären dies diejenigen Parameter, für die die quadratische Summe der *orthogonalen* Distanzen zwischen Modell und Datenpunkten minimiert wird.

Die Erweiterung auf den realistischen Fall, in dem die Datenpunkte unterschiedlich große Unsicherheiten aufweisen, ist unter Berücksichtigung ähnlicher Diskussionen in Abs. 5.2 relativ einfach: Wenn man annimmt, daß die Abweichungen der Meßgrößen jeweils multivariaten Normalverteilungen der Form

$$\begin{aligned} \vec{\delta}_i &\sim \mathcal{N}(0, \Sigma_{\delta,i}) \\ \vec{\epsilon}_i &\sim \mathcal{N}(0, \Sigma_{\epsilon,i}) \end{aligned} \quad (6.20)$$

mit Kovarianzmatrizen  $\Sigma_{\delta,i}$  bzw.  $\Sigma_{\epsilon,i}$  unterliegen, so kann man zeigen, daß der *Maximum-Likelihood*-Schätzwert  $\hat{\beta}$  der Modellparameter gerade durch die Lösung des Minimierungsproblems

$$\min_{\vec{\beta}, \vec{\delta}_i, \vec{\epsilon}_i} \sum_{i=1}^N \left( \vec{\epsilon}_i^T \Sigma_{\epsilon,i}^{-1} \vec{\epsilon}_i + \vec{\delta}_i^T \Sigma_{\delta,i}^{-1} \vec{\delta}_i \right) \quad (6.21)$$

mit der Nebenbedingung

$$\vec{Y}_i + \vec{\epsilon}_i = \vec{f}(\vec{X}_i + \vec{\delta}_i; \vec{\beta}) \quad \forall i \quad (6.22)$$

gegeben ist, wobei  $\vec{\delta}_i$ ,  $\vec{\epsilon}_i$  und  $\vec{\beta}$  die jeweils aktuellen „Versuchswerte“ der Größen  $\vec{\delta}_i$ ,  $\vec{\epsilon}_i$  und  $\vec{\beta}$  im Verlauf des Optimierungsprozesses seien. Die Nebenbedingungen stellen hierbei sicher, daß die Summanden tatsächlich einen quadrieren Abstand zwischen einem Datenpunkt und der Modellfunktion darstellen,



während die Minimierung über  $\tilde{\delta}_i$  und  $\tilde{\epsilon}_i$  garantiert, daß es sich um den jeweils *minimalen* Abstand<sup>15</sup> handelt.

Dieses bedingte Minimierungsproblem kann nun in ein freies Problem umgewandelt werden, indem die  $\tilde{\epsilon}_i$  und die Nebenbedingungen durch Einsetzen von Gl. 6.22 in Gl. 6.21 eliminiert werden, wodurch sich die folgende Formulierung für das *gewichtete ODR-Problem* ergibt:

$$\hat{\beta} = \arg \min_{\tilde{\beta}, \tilde{\delta}_i} \sum_{i=1}^N \left\{ \left[ \vec{f}(\vec{X}_i + \tilde{\delta}_i; \tilde{\beta}) - \vec{Y}_i \right]^T \Sigma_{\epsilon, i}^{-1} \left[ \vec{f}(\vec{X}_i + \tilde{\delta}_i; \tilde{\beta}) - \vec{Y}_i \right] + \tilde{\delta}_i^T \Sigma_{\delta, i}^{-1} \tilde{\delta}_i \right\} \quad (6.23)$$

Es ist unmittelbar ersichtlich, daß dieses Problem eine deutlich größere mathematische Komplexität als das entsprechende *OLS*- oder  $\chi^2$ -Minimierungsproblem hat, da es statt der „eigentlichen“  $p$  Parameter nun  $Nd + p$  Größen gibt, die im Rahmen der Optimierung variiert werden müssen.

Der *ODRPACK*-Algorithmus basiert nun auf einem „herkömmlichen“ *trust region*-Verfahren [181, 139]<sup>16</sup> zur Minimierung der Zielfunktion, nutzt jedoch die spezifische mathematische Struktur aus, die sich bei Anwendung dieses Verfahrens auf das *ODR*-Problem (Gl. 6.23) ergibt, um die Komplexität auf ein Maß vergleichbar mit derjenigen der klassischen *least-squares*-Methode zu reduzieren. Bislang gibt es allerdings nur Umsetzungen des Algorithmus in der Programmiersprache *FORTRAN* [209], so daß für eine Verwendung im Rahmen dieser Analyse entweder eine Portierung oder eine komplett neue Umsetzung in *C++* hätte erfolgen müssen. Da jedoch die Auswertung einer Transfermatrix-Messungsgruppe relativ selten erforderlich ist und die Leistungseinbuße infolge Verwendung eines nicht-optimierten Algorithmus somit vertretbar erscheint, wurde in diesem Fall darauf verzichtet. Um die Zielfunktion der Transfermatrix-Analyse

$$F_{TM} = \sum_{i=1}^N \left\{ \left[ \vec{f}(\vec{r}_i + \vec{\delta}_i; \hat{M}) - \vec{d}_i \right]^T \Sigma_{d, i}^{-1} \left[ \vec{f}(\vec{r}_i + \vec{\delta}_i; \hat{M}) - \vec{d}_i \right] + \vec{\delta}_i^T \Sigma_{r, i}^{-1} \vec{\delta}_i \right\} \quad (6.24)$$

zu minimieren, wird daher auf die bereits bekannte *ROOT*-Implementierung des *MIGRAD*-Verfahrens zurückgegriffen, wobei die Umsetzung analog zu derjenigen für das korrelierte Fitverfahren in der Stokesmessungs-Analyse ist (vgl. Abs. 5.2.2). Geeignete Startwerte für die Modellparameter werden hierbei bestimmt, indem die Daten zunächst mit dem „gewöhnlichen“ *least-squares*-Verfahren ausgewertet werden.

<sup>15</sup>genauer: die minimale Mahalanobis-Distanz

<sup>16</sup>eine Weiterentwicklung des Levenberg-Marquardt-Verfahrens

Da auch in diesem Fall die Zielfunktion die korrekten Normierungseigenschaften einer  $\chi^2$ -Teststatistik aufweist, können die Unsicherheiten der resultierenden Matrixelemente wiederum anhand der Hesse'schen Matrix bzw. der Form des gefundenen Minimums ermittelt werden [95]. Aus demselben Grund ist auch die Beurteilung der Fitgüte durch Anwendung des  $\chi^2$ -Tests möglich, wobei die Anzahl der Freiheitsgrade gerade

$$\begin{aligned}\nu_{TM} &= 6N - 3N - 15 \\ &= 3N - 15\end{aligned}\tag{6.25}$$

beträgt. Im Rahmen von *MC*-Untersuchungen wurden sowohl das Fitverfahren selbst als auch die beiden letztgenannten Aussagen zur Interpretation der Zielfunktion erfolgreich verifiziert. Es ist zu beachten, daß auf die *Systematik* der Transfermatrixmessung hier nicht eingegangen werden kann, da dies den Rahmen dieser Arbeit überschreiten würde; prinzipiell könnte man hierzu aber nach demselben Schema wie bei der internen Systematik vorgehen.

### 6.4.3 Sensoren-Linearität

Der in dieser Betriebsart des Stokesmeters als Normierungssensor eingesetzte PSD zeichnet sich zwar durch eine sehr gute Linearität der *Positionssignale* auf, ist jedoch nicht für die Verwendung als Intensitätssensor ausgelegt; es muß daher davon ausgegangen werden, daß das *Intensitätssignal* eine nicht-lineare Kennlinie aufweist. Aus diesem Grund wurden Untersuchungen angestellt, um die Linearität besonders dieses externen Sensors, aber auch der Stokesmeter-Intensitätssensoren selbst zu bestimmen.

#### Meßverfahren

Für die Messung der Linearität sind eine stabile Lichtquelle und ein selbst als linear angenommener, idealerweise kalibrierter Referenzsensor erforderlich. Das Ausgangssignal des zu prüfenden Sensors wird dann bei verschiedenen Lichtintensitäten aufgezeichnet, wobei die Quellintensität zusätzlich mit dem Referenzsensor bestimmt wird.

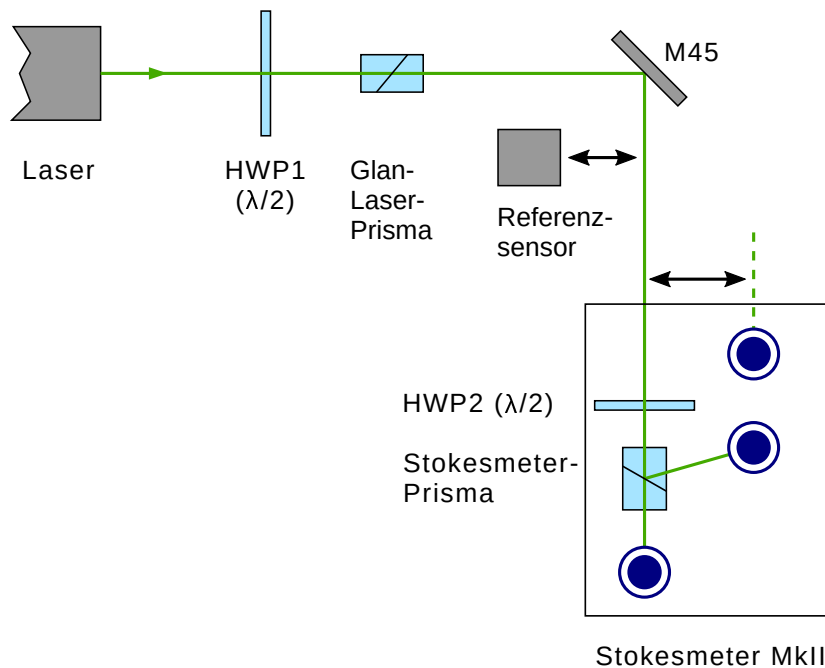
Für diese Messung wurde wieder der Polarimeterlaser in seiner werkseitigen Konfiguration als Lichtquelle verwendet, wobei er zusätzlich im „light regulation“-Modus betrieben wurde, bei dem die abgegebene Lichtintensität über einen internen Regelmechanismus stabilisiert wird. Wenngleich es nun aber möglich wäre, die Lichtintensität durch die Vorgabe unterschiedlicher Sollwerteneinstellungen des Lasers zu variieren, hat sich in der Praxis herausgestellt, daß die Leistungsregelung des Lasers bei geringem Röhrenstrom deut-

lich schlechter funktioniert als bei hohen Stromstärken. Aus diesem Grund wurde der Laser bei einer konstanten, hohen Intensitätsvorgabe betrieben, die einer Stromstärke im Bereich von 35 – 40 A entsprach. Um nun die auf die Sensoren eingestrahlte Intensität dennoch zu variieren, wurde ausgenutzt, daß der Laser aufgrund des Brewster-Fensters im Resonator linear vertikal polarisiertes Licht erzeugt: Wenn die Polarisationssebene dieses Lichts mittels einer  $\lambda/2$ -Platte gedreht und dahinter ein Linearpolarisator in den Strahlengang eingebracht wird, kann aufgrund des Malus'schen Gesetzes die transmittierte Intensität über die Orientierung der Wellenplatte eingestellt werden, ohne daß hierfür Eingriffe in den Betriebszustand des Lasers notwendig sind und ohne daß sich hierdurch der Polarisationszustand des so manipulierten Nutzstrahls ändert (siehe Abb. 6.25 und 6.27). Zu diesem Zweck wurde die Polarisationspräparator-Einheit der Transfermatrixmessung so modifiziert, daß statt der  $\lambda/4$ -Platte das Stokesmeter-Kalibrationsmodul (siehe Abb. 4.25) auf dem zweiten Drehtisch befestigt wird.

### Linearität der internen Sensoren

Die Vermessung der internen Sensoren erfolgte in zwei Schritten, da in der werkseitigen Konfiguration nur *ein* Lichtstrahl zur Verfügung steht und somit entweder der Normierungssensor oder die Transmissions-/Reflexionssensor-Anordnung in den Strahlengang gebracht werden kann. Die beiden letztgenannten Sensoren können allerdings simultan vermessen werden, sofern sichergestellt ist, daß auf beide ungefähr derselbe Bruchteil des eingestrahlten Lichts einfällt. Hierfür wurde die  $\lambda/4$ -Platte des Stokesmeters durch eine weitere  $\lambda/2$ -Platte *HWP2* ersetzt, um die Polarisationssebene des Lichtstrahls so zu drehen, daß die Ausgangssignale der beiden Sensoren gleich groß ausfallen. Dies wird nicht bei einem Winkel von  $45^\circ$  zwischen Polarisationsrichtung und Durchlaßrichtung der Fall sein, da die Teilstrahlen unterschiedlich viele Kalzit-Luft-Übergänge passieren und somit unterschiedlich große Reflexionsverluste erleiden.

Für die Messung wurde zunächst die Wellenplatte *HWP2* so orientiert, daß beide Sensoren denselben Bruchteil des einfallenden Lichtstrahls empfangen; die  $\lambda/2$ -Platte *HWP1* war hierfür auf maximale Transmission eingestellt. Anschließend wurde die höchste für den gewählten Meßbereich des ADCs noch zu erfassende Solleistung des Lasers gewählt (in diesem Fall ca. 1 W entsprechend einem Röhrenstrom von ca. 35 A) und danach die tatsächliche Lichtintensität durch Rotation der Wellenplatte *HWP1* in Schritten von anfangs ca. 50 mW, später ca. 25 mW reduziert, um die Sensorenkennlinie aufzunehmen. Als Referenzsensor wurde ein erst kurz zuvor kalibrierter

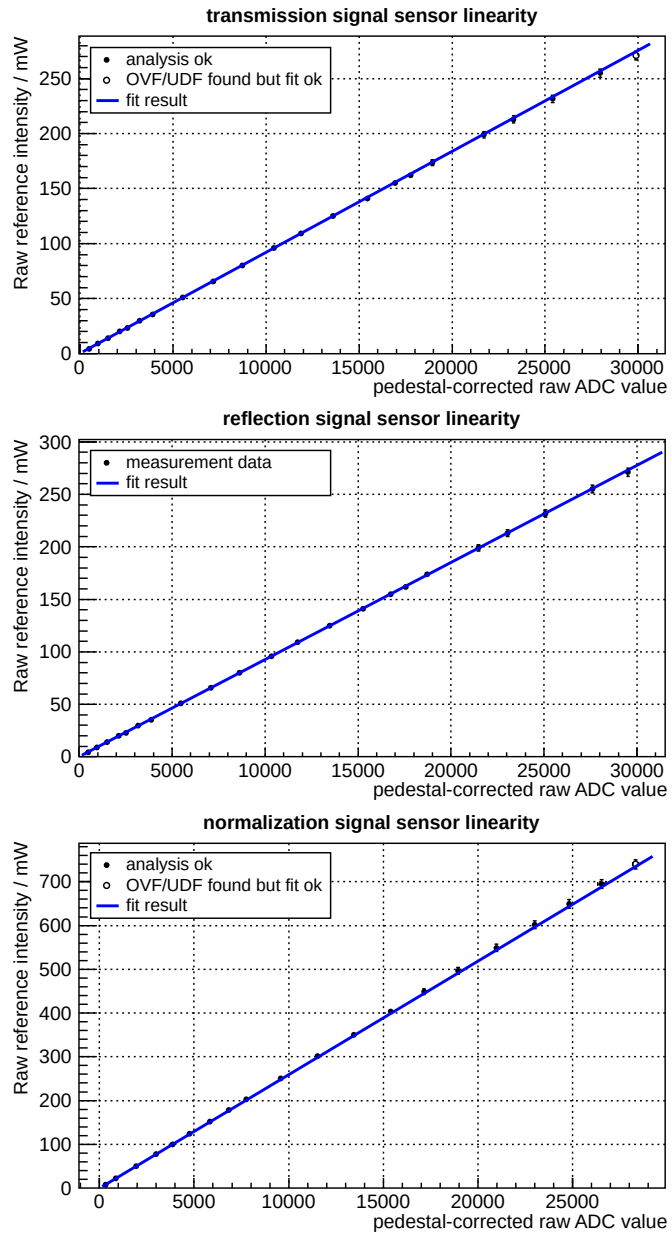


**Abbildung 6.25:** Aufbau zur Linearitätsmessung der Stokesmeter-Sensoren. Die Lichtintensität wird durch die  $\lambda/2$ -Platte *HWP1* in Verbindung mit dem Glan-Laser-Prisma eingestellt. Das Stokesmeter ist in seiner üblichen Position unterhalb des  $45^\circ$ -Fensters aufgestellt, welches jedoch in dieser Betriebsart durch einen  $45^\circ$ -Spiegel ersetzt ist. Anstelle der Stokesmeter-Wellenplatte wird die  $\lambda/2$ -Platte *HWP2* installiert, um die auf Transmissions- und Reflexionssensor einfallende Lichtintensität anzugleichen.

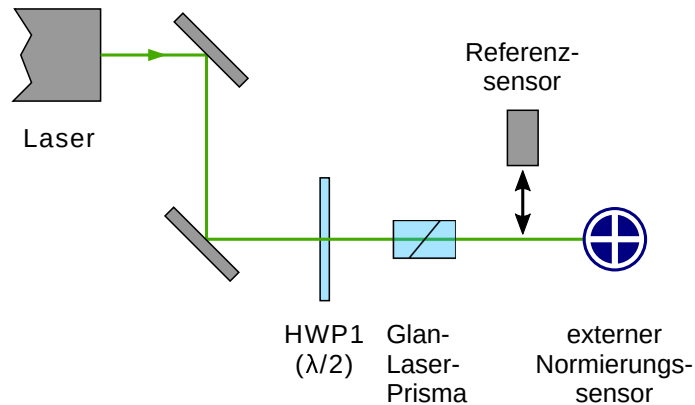
bolometrischer Detektor des Typs *Coherent LM-10 HD* in Verbindung mit dem Steuergerät *Coherent FieldMaster GS* verwendet. Der Hersteller spezifiziert für diese Kombination eine statistische Unsicherheit von ca.  $\pm 1 \dots 1.4\%$ , wobei zur Steigerung der Meßgenauigkeit zusätzlich eine Betriebsart mit gleichem Mittelwert über zehn Meßwerte gewählt wurde.

Diese Vorgehensweise wurde sinngemäß für alle Eingangsempfindlichkeiten des ADCs ( $\pm 10 \text{ V} \dots \pm 1.25 \text{ V}$ ) durchgeführt und das Meßprogramm danach mit dem internen Normierungssensor wiederholt. Das Ergebnis dieser Untersuchungen ist in Abb. 6.26 dargestellt. Da davon ausgegangen wurde, daß die internen Sensoren linear sind, wurden die Meßdaten im Sinne eines Tests auf Vorliegen exakter Linearität analysiert. Hierzu wurde eine offsetfreie Gera-

Analysis of sensor linearity	
Using measurement stok040613_19	
Analysis objective:	prove linearity
Offset allowed:	no offset allowed
Fit method:	effective variance
Linearity test:	chi-square
Significance level:	0.05
Transmission sensor	
Hypothesis of offset-free linearity	
$\chi^2$	7.16
$n_{\text{DOF}}$	20
GOF p-value	0.996
⇒ linearity hypothesis accepted	
Reflection sensor	
Hypothesis of offset-free linearity	
$\chi^2$	7.84
$n_{\text{DOF}}$	21
GOF p-value	0.996
⇒ linearity hypothesis accepted	
Analysis of sensor linearity	
Using measurement stok060613_14	
Analysis objective:	prove linearity
Offset allowed:	no offset allowed
Fit method:	effective variance
Linearity test:	chi-square
Significance level:	0.05
Normalization sensor	
Hypothesis of offset-free linearity	
$\chi^2$	26.4
$n_{\text{DOF}}$	18
GOF p-value	0.09
⇒ linearity hypothesis accepted	



**Abbildung 6.26:** Resultat der Linearitätsmessung der Transmissions- und Reflexionssensoren (oben) und des Normierungssensors (unten). Aus Gründen der Übersichtlichkeit ist jeweils nur die Messung für den  $\pm 2.5$  V-Meßbereich des ADCs dargestellt. Man sieht deutlich, daß die Linearitätsvermutung bestätigt wird.



**Abbildung 6.27:** Der Aufbau zur Linearitätsmessung des externen Normierungssensors benutzt dasselbe Schema zur Intensitätsvorwahl wie bei den internen Stokesmeter-Sensoren, ist aber auf dem Ellipsometrie-Meßtisch installiert.

de<sup>17</sup>

$$I(\mathcal{S}_{pc}) = G\mathcal{S}_{pc} \quad (6.26)$$

an die Datenpunkte angepaßt, wobei  $I$  die mit dem Referenzsensor gemessene Intensität des Lichtstrahls und  $\mathcal{S}_{pc}$  das pedestalbereinigte Signal des zu prüfenden Sensors sei. Anschließend wurde ein  $\chi^2$ -Test auf dem 5%-Signifikanzniveau durchgeführt, um die Übereinstimmung der so ausgedrückten Linearitätsvermutung mit den Daten zu prüfen. Wie man erkennen kann, erfüllen die Stokesmeter-Sensoren diese Vermutung. Es ist zu beachten, daß hiermit keine Intensitätskalibration der Sensoren beabsichtigt ist und im Falle des Transmissions- und Reflexionssensors auch keine zustandekommt, weil aufgrund der nur empirisch optimierten Stellung der  $\lambda/2$ -Platte  $HWP2$  unklar ist, wie sich die Gesamtintensität des einfallenden Strahls auf die beiden Teilstrahlen aufteilt, und zudem die Reflexionsverluste an den optischen Oberflächen unbekannt sind.

### Linearität des externen Normierungssensors

Um die Linearität des externen Normierungssensors zu bestimmen, wurde eine Meßanordnung analog zu derjenigen für die Stokesmeter-Sensoren auf der optischen Platte des Ellipsometrie-Meßtischs aufgebaut (siehe Abb. 6.27). Als Referenzsensor wurde in diesem Fall ein halbleiterbasierter Tastkopf *Co-*

<sup>17</sup>Diese Annahme erscheint gerechtfertigt, da vor den Messungen eine Offsetkorrektur des Referenzsensors durchgeführt wurde und die angezeigte Intensität nach Beendigung der Messungen wieder exakt auf den Nullpunkt zurückkehrte.

herent LM-2 VIS mit einem Meßbereich von 0 – 50 mW verwendet, da der PSD einen deutlich geringeren dynamischen Bereich als die internen Sensoren aufweist.

Für die Messung wurde die Laserleistung auf 2.2 W entsprechend einem Röhrenstrom von ca. 40 A eingestellt und wie auch im Fall der internen Sensoren durch geeignete Orientierung der  $\lambda/2$ -Platte reduziert. Die erste Kennlinie wurde bei einer Eingangsempfindlichkeit des Polarimeter-ADCs von  $\pm 10$  V aufgenommen, wobei die Lichtintensität ausgehend von 34 mW bis zu einem Wert von 10 mW in Schritten von 2 mW, darunter in Schritten von 1 mW reduziert wurde. Hierbei mußte allerdings festgestellt werden, daß die Intensität durch Rotation der  $\lambda/2$ -Platte nicht unter 8 mW gesenkt werden konnte; für den darunterliegenden Bereich wurde daher der Vorgabewert der Leistungsregelung entsprechend verringert. Da die Quellintensität im  $\pm 5$  V-Meßbereich bereits auf Werte von unter 10 mW begrenzt werden mußte, um noch erfaßt werden zu können, war eine Bestimmung der Nichtlinearität bei den Eingangsempfindlichkeiten von  $\pm 2.5$  V und  $\pm 1.25$  V nicht mehr praktisch durchzuführen.

Im Falle des hier betrachteten Sensors weisen bereits die Rohdaten klar auf eine nichtlineare Kennlinie hin, so daß die Analyse im Hinblick auf eine Korrektur dieses Effekts erfolgen muß. Hierzu ist es erforderlich, den Zusammenhang

$$\mathcal{S}_{pc} = k(I) \quad (6.27)$$

zwischen dem Sensorsignal  $\mathcal{S}$ , ausgedrückt in ADC-Einheiten, und der Intensität  $I$ , durch eine geeignete Transformation in eine lineare Form

$$\mathcal{S}_{lin} = G_{equiv} I \quad (6.28)$$

zu überführen, wobei  $G_{equiv}$  ein frei wählbarer Skalierungsparameter ist. Man kann leicht sehen, daß sich eine solche Transformation durch Invertieren von Gl. 6.27 und Einsetzen in Gl. 6.28 ergibt:

$$\mathcal{S}_{lin}(\mathcal{S}_{pc}) = G_{equiv} k^{-1}(\mathcal{S}_{pc}) \quad (6.29)$$

Da nun kein physikalisches Modell für die Sensorenkennlinie bzw. deren Inverse zur Verfügung stand, wurde zunächst nach einer empirisch motivierten mathematischen Funktion gesucht, mit der sich die Daten adäquat beschreiben lassen; hierbei hat sich eine Kombination aus linearer und exponentieller Abhängigkeit der Form

$$k^{-1}(\mathcal{S}_{pc}) = \gamma (e^{\alpha \mathcal{S}_{pc}} - 1) + \beta \mathcal{S}_{pc} \quad (6.30)$$

$\gamma_{\pm 10V}$	$2.7 \cdot 10^{-2}$	$\pm 5 \cdot 10^{-3}$	mW
$\alpha_{\pm 10V}$	$3.21 \cdot 10^{-4}$	$\pm 9 \cdot 10^{-6}$	
$\beta_{\pm 10V}$	$2.44 \cdot 10^{-4}$	$\pm 9 \cdot 10^{-6}$	mW
$G_{equiv}$	1000		$mW^{-1}$

**Tabelle 6.10:** Resultat der Linearitätsmessung *stok240613\_11* für den externen Normierungssensor im  $\pm 10$  V-Meßbereich des Stokesmeter-ADCs. Die Größe  $G_{equiv}$  ist hierbei kein Analyseergebnis, sondern ein frei wählbarer Skalierungsparameter; in diesem Fall wurde er so gewählt, daß der Definitionsbereich  $D = [-32768; 32767]$  der Transformation auf einen ungefähr gleich großen Wertebereich abgebildet wird.

als geeignet erwiesen. Die äquivalente Signalverstärkung  $G_{equiv}$  wird dann sinnvollerweise so gewählt, daß die linearisierte ADC-Skala ungefähr denselben Umfang wie die Hardware-Skala hat (d. h.  $-32768 \dots 32767$ ).

Das Ergebnis der Auswertung für die Messung im  $\pm 10$  V-Eingangsbereich ist in Tabelle 6.10 zusammengefaßt und in Abb. 6.28 nochmals graphisch dargestellt. Diese Korrekturdaten lassen sich nahtlos als neue Kalibrationsart in die bestehende Analyse-Infrastruktur einfügen, so daß hiermit die zwecks Bestimmung der Transfermatrizen aufgenommenen Stokes-Polarisationsmessungen ausgewertet werden können.

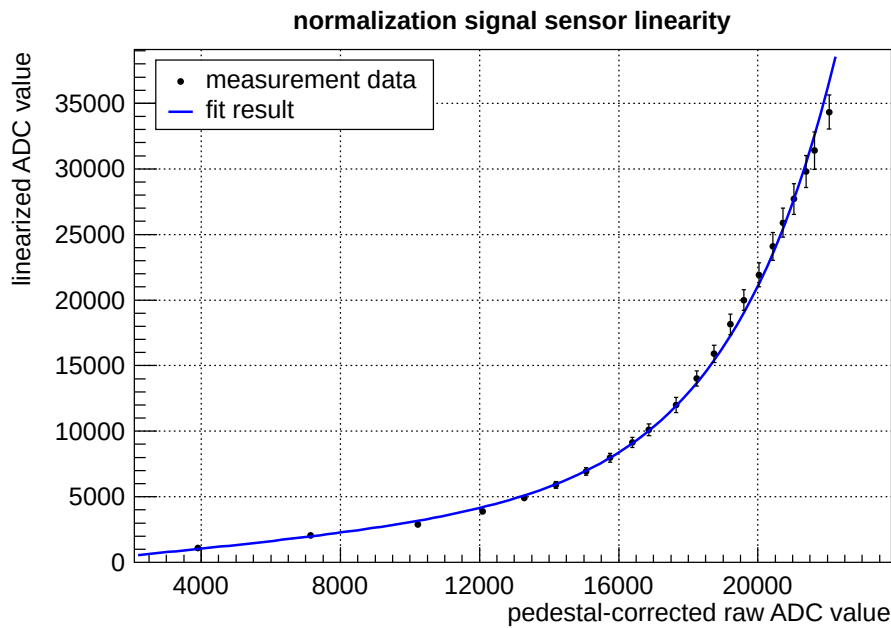
### Analyseverfahren

Da eine Integration des Referenzsensors in die Datenerfassung in Sinne einer synchronen Abtastung mit dem zu charakterisierenden Sensor nicht möglich war, wurden die Linearitätsmessungen in einem semiautomatischen Verfahren durchgeführt. Bei diesem wird für jeden Stellwert der Quellintensität zunächst ein Meßwert des Referenzsensors abgelesen und von Hand eingepeist, anschließend automatisch eine Einzelpunkt-Stichprobe (vgl. Abs. 5.1) des zu untersuchenden Sensors aufgezeichnet und zuletzt nochmals die Referenzintensität bestimmt. Ziel ist es, auf diese Weise evtl. vorhandene Driften der Quellintensität identifizieren und korrigieren zu können.

Zu diesem Zweck werden alle drei Meßvorgänge mit einer Zeitmarke versehen, so daß in der Analyse die Einzelpunkt-Stichprobe mit einem linear zwischen den beiden Messungen interpolierten Referenzwert korreliert werden kann. Die statistische Unsicherheit des interpolierten Werts wird durch Gauß'sche Fehlerfortpflanzung aus den Unsicherheiten der Einzelmesswerte bestimmt, die aufgrund der bereits erwähnten Mittelung im Bereich von



Analysis of sensor linearity		Analysis result	
Using measurement <code>stok240613_11</code>		$\gamma_{\pm 10V}$	0.026 ± 0.005
Analysis objective: determine nonlinearity		$\alpha_{\pm 10V}$	$(3.2 \pm 0.1) \times 10^{-4}$
Fit model: $f^{-1}(S) = \gamma(e^{\alpha S} - 1) + \beta S$		$\beta_{\pm 10V}$	$(2.4 \pm 0.1) \times 10^{-4}$
Fit method: effective variance		Goodness-of-fit	
Equivalent gain: 1000		$\chi^2$	22.5
		$n_{\text{DOF}}$	19
		p-value	0.52



**Abbildung 6.28:** Darstellung der Korrekturfunktion zur Linearisierung der Sensorsignale am Beispiel der Messung `stok240613_11`. Das Fitmodell wurde zwar empirisch gewählt, beschreibt die Meßdaten aber hinreichend gut.

$\pm 0.4\%$  liegen. Darüberhinaus ist nun noch die Unsicherheit der Sensorenkalibration zu berücksichtigen, die sich aus einem Beitrag der Korrektur der Wellenlängenabhängigkeit und einem Beitrag der absoluten Intensitätskalibration zusammensetzt und für die hier verwendeten Sensoren mit  $\pm 2.5\%$  (*LM-10*) bzw.  $\pm 5.2\%$  (*LM-2*) spezifiziert ist. Auch wenn dieser Effekt offenkundig systematischer Natur ist, wird er in diesem Fall im Sinne einer näherungsweise Abschätzung auf den statistischen Fehler aufgeschlagen, da die Systematik der Transfermatrixmessung, in die diese Kalibration letztlich eingeht, hier nicht betrachtet wird.

An die so bestimmten Punkte muß nun je nach Zielsetzung entweder eine Gerade oder ein Modell für die Nichtlinearität (s. Gl. 6.29) angepaßt werden. Da auch in diesem Fall die Datenpunkte mit Unsicherheiten in beiden Freiheitsgraden behaftet sind, muß wiederum ein entsprechend geeignetes Fitverfahren angewandt werden. Prinzipiell eignet sich auch hierfür die in Abs. 6.4.2 vorgestellte orthogonale Regression; allerdings stand zum Zeitpunkt der Nichtlinearitätsanalyse noch keine Umsetzung dieses Verfahrens zur Verfügung. Da zudem die Unsicherheiten in der als „unabhängige“ Größe behandelten Sensorenantwort klein gegen die Unsicherheit der „abhängigen“ Größe (der wahren Intensität bzw. der linearisierten Sensorenantwort) sind, kann hier mit der Methode der *effektiven Varianz* gearbeitet werden [204], die im *ROOT*-Softwarepaket bereits implementiert ist und bei Angabe von Unsicherheiten für beide Variablen auch standardmäßig angewandt wird. Bei diesem Verfahren wird die Unsicherheit der unabhängigen Größe, transformiert mit der Steigung des Modells an diesem Datenpunkt, auf die Unsicherheit der abhängigen Größe wie folgt aufgeschlagen:

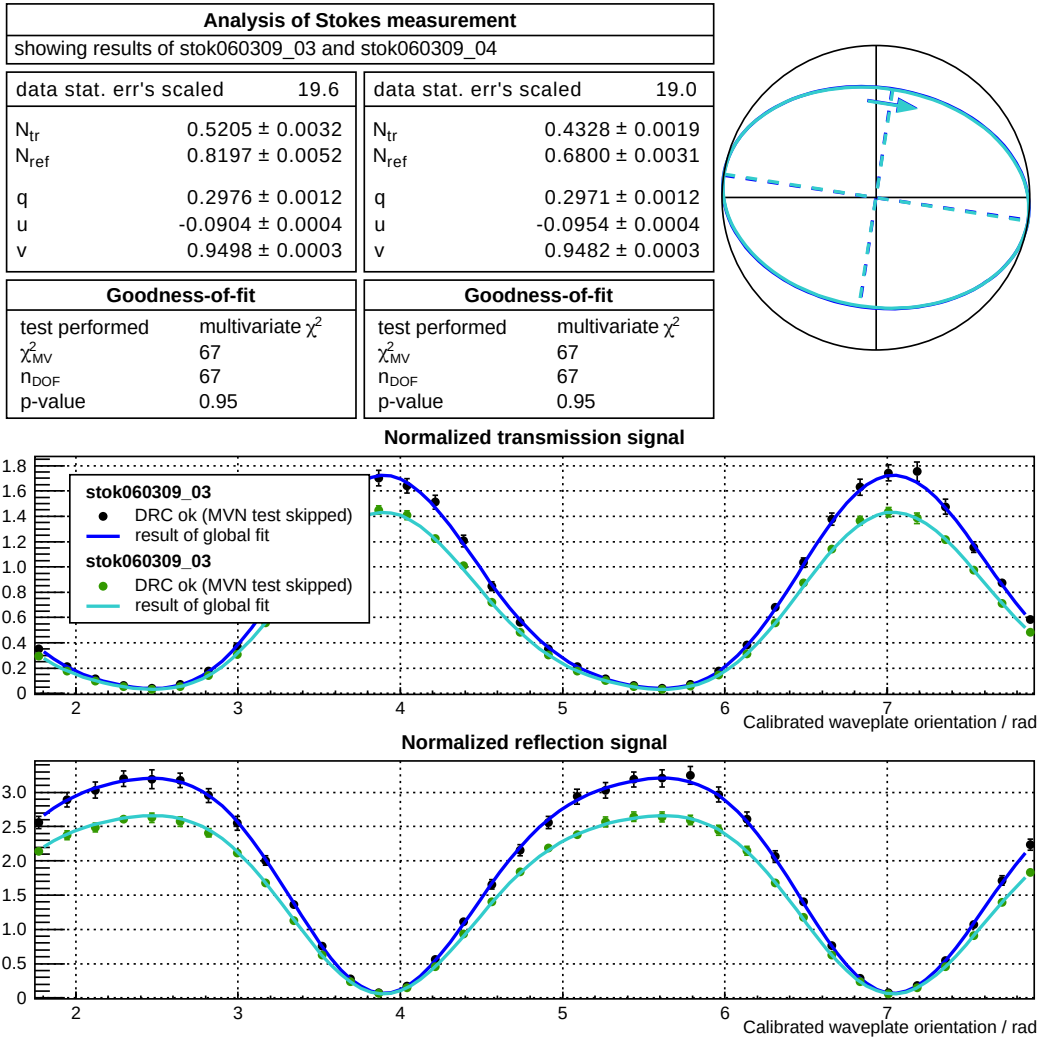
$$\sigma_{eff,i}^2 = \sigma_{y,i}^2 + \left( \left. \frac{df}{dx} \right|_{x_i} \right)^2 \sigma_{x,i}^2 \quad (6.31)$$

Auf diese Weise ist es möglich, das Problem auf einen klassischen  $\chi^2$ -Fit zurückzuführen.

#### 6.4.4 Transfermatrix des 90°-Fensters

Zwischen der Streuung am Elektronenstrahl und der Polarisationsvermessung mit dem Stokesmeter MkII erleidet der Laserstrahl zwei Wechselwirkungen mit optischen Elementen: die Reflexion am 45°-Fenster und die Transmission durch das senkrecht zum so ausgekoppelten Strahl stehende Vakuumfenster *W90* (vgl. Abb. 6.19). Wenngleich die Geometrie im letzteren Fall prinzipiell isotrop ist, kann unter Umständen aufgrund der Eigenschaften der reflexionsmindernden Beschichtung auch hier eine Änderung des Polarisationszustands auftreten, die dann bei der Interpretation des Meßergebnisses berücksichtigt werden müßte. Aus diesem Grund wurde das 90°-Fenster ebenfalls in die Untersuchungen zur Transfermatrix einbezogen.

In einem ersten Schritt wurde im Rahmen einer qualitativ motivierten Meßserie untersucht, ob das Einbringen des Fensters einen merklichen Einfluß auf den Polarisationszustand hat und ob das Substrat in dieser Hinsicht isotrop ist. Hierzu wurde zunächst die mittels des Präparators eingestellte



**Abbildung 6.29:** Qualitative Messungen zur Einschätzung der Auswirkungen des 90°-Vakuumfensters *LEnS Optics W035Q-10 AR/AR 514.5nm/0° #2* in Form der überlagerten Darstellung zweier Stokes-Polarisationsmessungen. Die Messung *stok060309\_03* stellt die Referenzpolarisation dar, die Messung *stok060309\_04* den Polarisationszustand mit Fenster. Wie man sieht, unterscheiden sich die Meßresultate kaum. Auf die Darstellung der Fitresiduen wurde aus Platzgründen verzichtet.

Referenzpolarisation bestimmt; anschließend wurde das Fenster im Strahlengang montiert und die resultierende Polarisation bei verschiedenen azimutalen Orientierungen des Fensters vermessen. Die Ergebnisse sind in Abb. 6.29 und 6.30 dargestellt und legen nahe, daß dieses Fenster die gemessene Polarisation nicht verfälscht und in dieser Eigenschaft auch isotrop ist. Somit ist sichergestellt, daß die Bestimmung einer Transfermatrix überhaupt einen Sinn hat – ohne Isotropie wäre die Messung zu aufwendig, um sie ohne eine komplett automatisierte Apparatur durchzuführen.

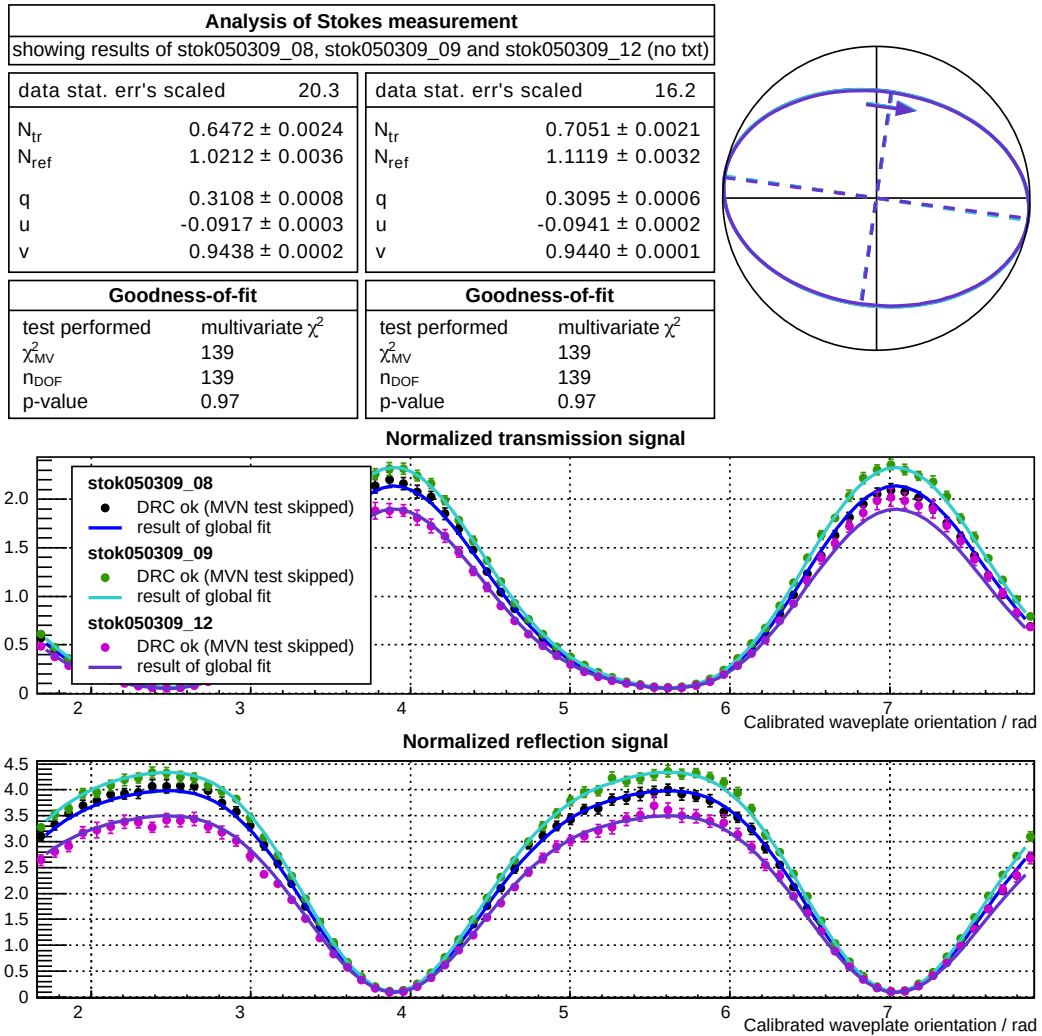
Anschließend wurde mit der eigentliche Meßserie zur Bestimmung der Transfermatrix begonnen. Hierfür wurden beide Wellenplatten des Polarisationspräparators jeweils in 20°-Schritten um einen Gesamtwinkel von 160° gedreht (vgl. Abs. 6.4.1), wobei für jede Winkelstellung der  $\lambda/2$ -Platte eine Winkelserie der  $\lambda/4$ -Platte aufgezeichnet wurde. Auch wenn die Isotropie des Substrats als gegeben angenommen werden konnte, wurde darauf geachtet, es immer in derselben Orientierung im Strahlengang zu plazieren. Insgesamt gehen somit 81 Polarisationskonfigurationen in die Bestimmung der Transfermatrix ein. Das Ergebnis der Analyse ist in Tabelle 6.11 aufgeführt; wie man sieht, ist die reduzierte Transfermatrix mit einer Einheitsmatrix vereinbar. Diese Messung wurde zwecks Prüfung der Reproduzierbarkeit insgesamt dreimal innerhalb von fünf Monaten durchgeführt, wobei das Ergebnis unverändert war. Es erscheint daher zulässig, dieses Fenster bei der Rücktransformation der Stokesmessungen auf die resonatorinterne Polarisation zu vernachlässigen. Da das untere Austrittsfenster nicht von dem Problem der laserinduzierten Deposition betroffen ist und daher nur sehr selten ausgetauscht werden mußte, gilt diese Aussage für die gesamte nachfolgende Betriebsdauer des Compton-Rückstreupolarimeters.

Bei der Interpretation der Ergebnisse ist zu berücksichtigen, daß diese Messungen unter atmosphärischem Druck durchgeführt wurden und somit Effekte, die aufgrund von Spannungsdoppelbrechung auftreten, nicht berücksichtigt sind. Allerdings wurde in der Planungsphase darauf geachtet, das Fenster mit einer Materialstärke von  $d = 10$  mm so dick zu wählen, daß es praktisch keine Durchbiegung aufgrund des Druckunterschieds aufweisen wird [92]. Darüberhinaus ist die Spannungsdoppelbrechung gerade in der Mitte, wo der zu vermessende Teilstrahl im wesentlichen auftritt, am geringsten<sup>18</sup> und beträgt auch am Rand höchstens<sup>19</sup>  $\lambda/100$ . Auf eine explizite Berücksichtigung dieses Effekts wurde daher verzichtet, zumal hierfür sowohl eine positionsabhängige

---

<sup>18</sup>Im exakten Scheitelpunkt der Krümmung verschwindet sie sogar.

<sup>19</sup>Wahrscheinlich wird sie deutlich geringer sein: In dieser Rechnung wurde angenommen, daß das Fenster auf einer harten Kante aufliegt; in der Realität liegt es jedoch auf einer flexiblen Gummidichtung, die einen großen Teil der Kraft aufnimmt.



**Abbildung 6.30:** Qualitative Messungen zur Einschätzung der Isotropie des 90°-Vakuumfensters. Dargestellt sind drei Messungen des „deformierten“ Polarisationszustands, zwischen denen das Substrat jeweils um 45° um die Längsachse gedreht wurde. Der Übersichtlichkeit halber sind quantitative Resultate nur für die ersten beiden Messungen angegeben; auch wurde wiederum die Darstellung der Fitresiduen weggelassen. Da die Stokesparameter im Rahmen ihrer Unsicherheiten übereinstimmen, kann das Substrat als isotrop angenommen werden.

$\hat{M}$	$\begin{pmatrix} 1 & 3.7 \cdot 10^{-4} & -3.8 \cdot 10^{-4} & 0.8 \cdot 10^{-4} \\ 2.4 \cdot 10^{-4} & 1 - 6.9 \cdot 10^{-6} & 1.5 \cdot 10^{-6} & 1.0 \cdot 10^{-4} \\ -3.9 \cdot 10^{-4} & -1.0 \cdot 10^{-4} & 1 - 4.9 \cdot 10^{-5} & 4.0 \cdot 10^{-4} \\ 1.6 \cdot 10^{-4} & -1.1 \cdot 10^{-3} & -5.8 \cdot 10^{-4} & 1 - 2.1 \cdot 10^{-4} \end{pmatrix}$
$\sigma_{\hat{M}}$	$\begin{pmatrix} - & 1.8 & 1.4 & 1.3 \\ 1.6 & 1.4 & 1.9 & 2.0 \\ 1.3 & 2.3 & 2.0 & 1.3 \\ 1.0 & 1.4 & 1.0 & 0.6 \end{pmatrix} \cdot 10^{-4}$

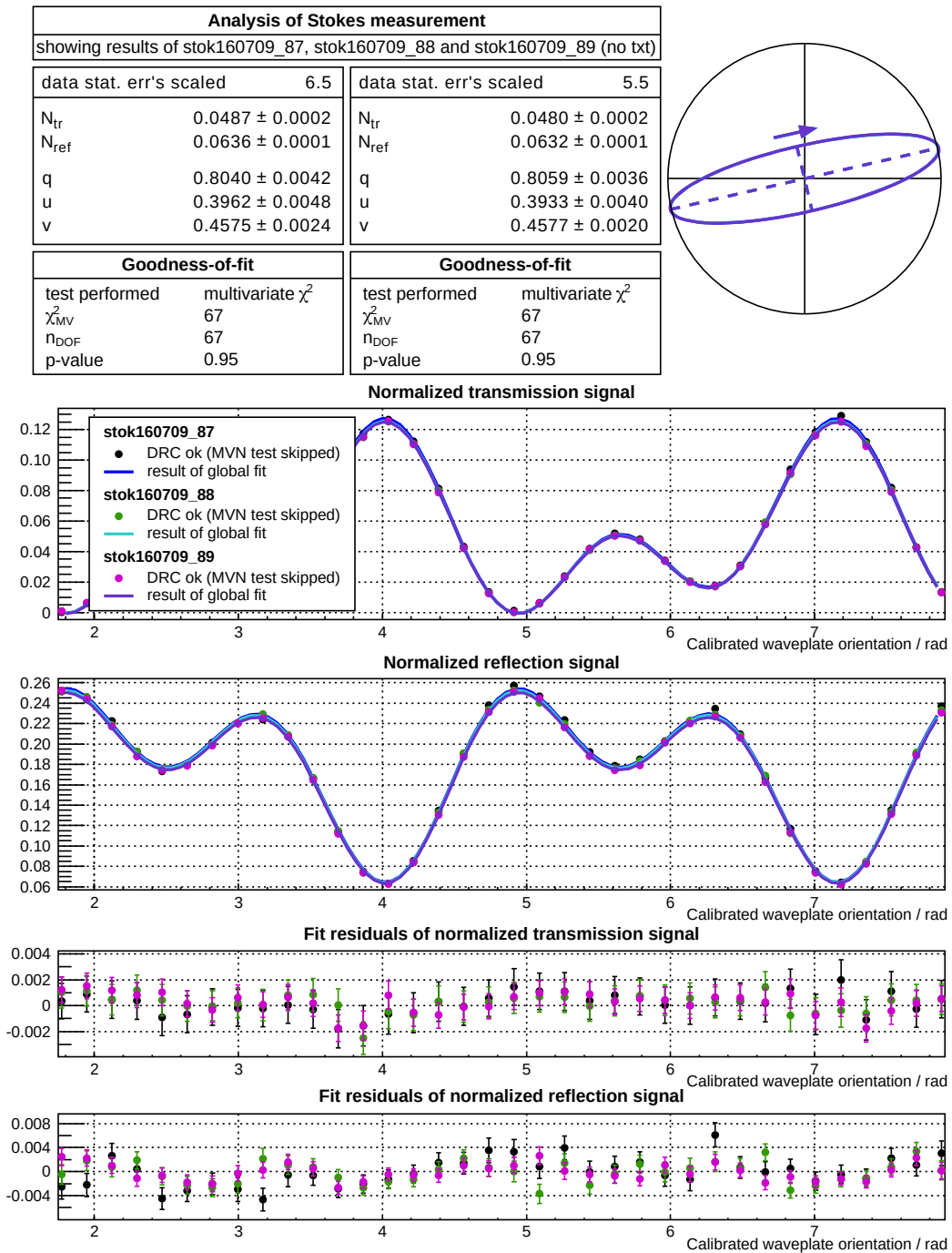
**Tabelle 6.11:** Transfermatrix *TMbeam210709\_001* des Vakuumfensters *LEnS Optics W035Q-10 AR/AR 514.5nm/0° #2*. Der Übersichtlichkeit halber ist bei den Diagonalelementen die Abweichung von 1 explizit ausgedrückt. In der zweiten Zeile sind die statistischen Unsicherheiten der Matrixelemente (ohne Kovarianzstruktur) in Matrixform dargestellt. Das Matrixelement  $\hat{m}_{11}$  ist *per definitionem* gleich 1 und weist somit keine Unsicherheit auf.

Messung der Transfermatrix als auch eine Bestimmung des Auftreffpunkts des ausgekoppelten Teilstrahls auf das *W90*-Fenster für jede durchgeführte Stokes-Polarisationsmessung erforderlich wäre.

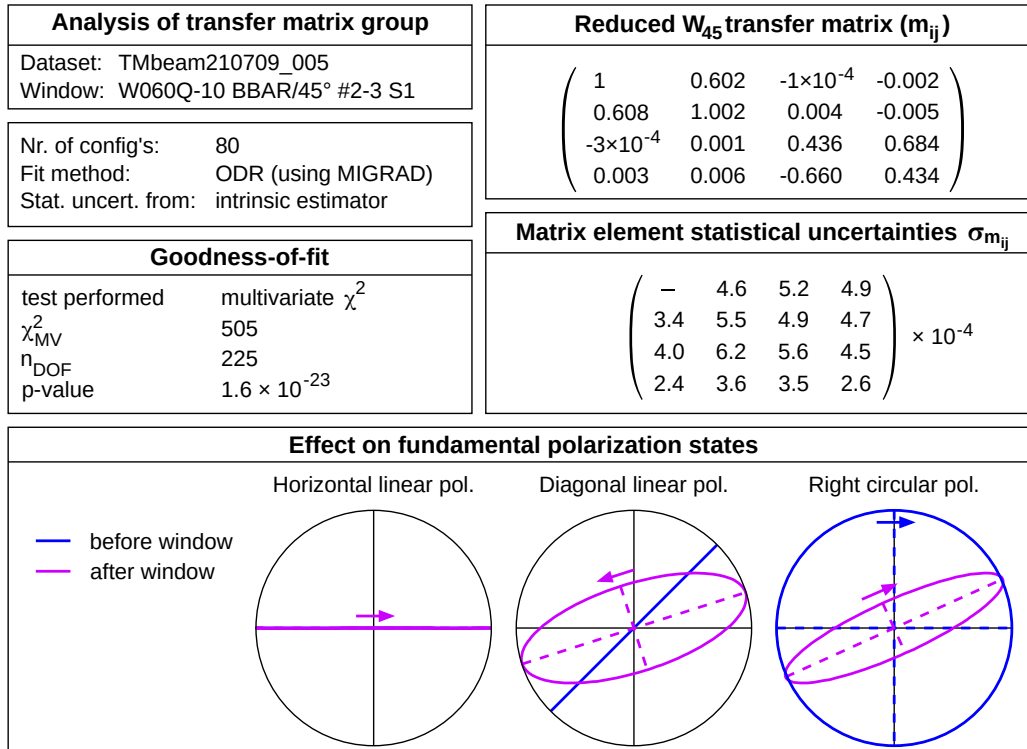
### 6.4.5 Transfermatrix des 45°-Fensters

Während der in Abs. 6.2 betrachteten Strahlzeit *beam260509* war das Vakuumfenster *LEnS-Optics W060Q-10 AR/AR 475-530nm/45° #2-3* als Strahlteilerfenster *W45* im Resonator installiert, wobei die (willkürlich) als „S1“ bezeichnete Oberfläche auf der Vakuumseite lag und somit den polarimetrisch vermessenen Teilstrahl aus dem Resonator ausgekoppelt hat. Für eine vollständige Betrachtung dieser Strahlzeit muß somit die für diese Beschichtung zutreffende Transfermatrix berücksichtigt werden. Wie bereits im Fall des 90°-Fensters wurde zunächst geprüft, ob die Orientierung des Substrats einen Einfluß auf die Deformation des reflektierten Teilstrahls hat. Aus dem in Abb. 6.31 dargestellten Ergebnis kann man ersehen, daß auch hier das Substrat als isotrop angenommen werden kann; dennoch wurde die Transfermatrix des Fensters in derjenigen Orientierung gemessen, in der es während der Strahlzeit installiert war.

Die Messung erfolgte nach demselben Schema wie beim 90°-Fenster; es mußte lediglich eine der 81 gemessenen Konfigurationen verworfen werden, da durch eher restriktiv gewählte Grenzwerte eine eigentlich nutzbare Mes-



**Abbildung 6.31:** Qualitative Messungen zur Einschätzung der Isotropie des 45°-Vakuumsfensters *LEnS-Optics W060Q-10 AR/AR 475-530nm/45° #2-3*, Oberfläche „S1“. Die Darstellung ist analog zu Abb. 6.30 aufgebaut. Auch hier wird die Isotropie des Substrats und seiner Beschichtung untermauert.



**Abbildung 6.32:** Darstellung des Analyseresultats für die Messungsgruppe *TMbeam210709\_005*, mit der die Transfermatrix des 45°-Vakuumfensters bestimmt wurde. Die numerische Angabe der Resultate entspricht der Konvention von Tabelle 6.11. In der unteren Zeile ist die Auswirkung dieser Matrix auf verschiedene „fundamentale“ Polarisationszustände dargestellt.

sung von der automatischen Qualitätskontrolle aussortiert wurde. Das Resultat dieser Analyse ist in Abb. 6.32 dargestellt; man kann deutlich erkennen, daß das 45°-Fenster eine erhebliche Verfälschung des Polarisationszustands verursacht und dieser Effekt somit keinesfalls in der Analyse vernachlässigt werden kann.

### 6.4.6 Konsistenzprüfung des Verfahrens

Wegen der fundamentalen Bedeutung der Transfermatrix für die Analyse der Polarisationsmessungen wurde das Verfahren durch die Vermessung einer „bekannten“ Transfermatrix überprüft. Da der Einsatz eines doppelbrechenden polarisationsoptischen Elements mit zu hohen Anforderungen an die Reproduzierbarkeit der Orientierung einhergegangen wäre, wurde ein unbe-



schichtetes Quarzglas-Substrat *CVI/Melles-Griot PW1-6010M-UV* mit den Abmessungen eines *W45*-Fensters in Reflexionsgeometrie vermessen. In diesem Fall ändert sich der Polarisationszustand nur aufgrund der unterschiedlichen Fresnel-Koeffizienten für *s*- und *p*-Komponente des Lichts, so daß die Transfermatrix analytisch vorhergesagt werden kann.

Da hier nur eine anisotrope Änderung der Amplituden und keine Doppelbrechung auftritt, entspricht dies dem unvollkommenen Linearpolarisator, wie er durch Gl. 5.32 beschrieben wird. Aufgrund der Definition des Koordinatensystems (vgl. Abb. 5.4) zeigt die *s*-Komponente des Lichtstrahls in *x*-Richtung und die *p*-Komponente in *y*-Richtung, so daß sich folgende Transfermatrix für das unbeschichtete Substrat ergibt:

$$M_{substr} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} r_s^2 + r_p^2 & r_s^2 - r_p^2 & 0 & 0 \\ r_s^2 - r_p^2 & r_s^2 + r_p^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2r_s r_p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2r_x r_p \end{pmatrix} \quad (6.32)$$

Die Reflexionskoeffizienten  $r_s$  und  $r_p$  sind hierbei durch die Fresnel-Formeln gegeben:

$$\begin{aligned} r_s &= \frac{\cos \alpha - n \cos \beta}{\cos \alpha + n \cos \beta} \\ r_p &= \frac{n \cos \alpha - \cos \beta}{n \cos \alpha + \cos \beta} \end{aligned} \quad (6.33)$$

wobei  $\alpha = 45^\circ$  der Einfallswinkel,  $\beta = 28.93^\circ$  der Brechungswinkel (vgl. Abb. 4.9) und  $n$  der Brechungsindex des Substrats ist. Für synthetisches Quarzglas in UV-Qualität beträgt dieser

$$n = 1.46156$$

bei einer Wellenlänge von 514.5 nm; somit ist folgende reduzierte Transfermatrix für das unbeschichtete Substrat zu erwarten:

$$\hat{M}_{substr} = \begin{pmatrix} 1 & 0.8468 & 0 & 0 \\ 0.8468 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0.5319 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -0.5319 \end{pmatrix}$$

Das Resultat der *Messung* ist in Tabelle 6.12 angegeben und weist eine gute Übereinstimmung mit der Vorhersage auf; somit kann das Verfahren als korrekt angenommen werden.

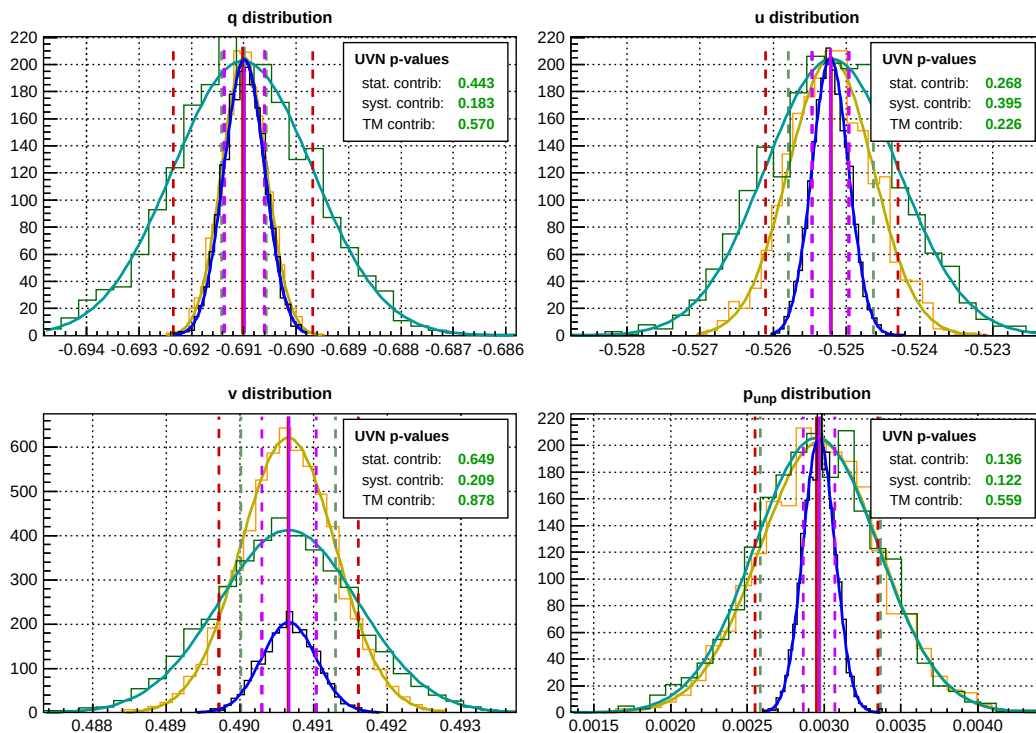
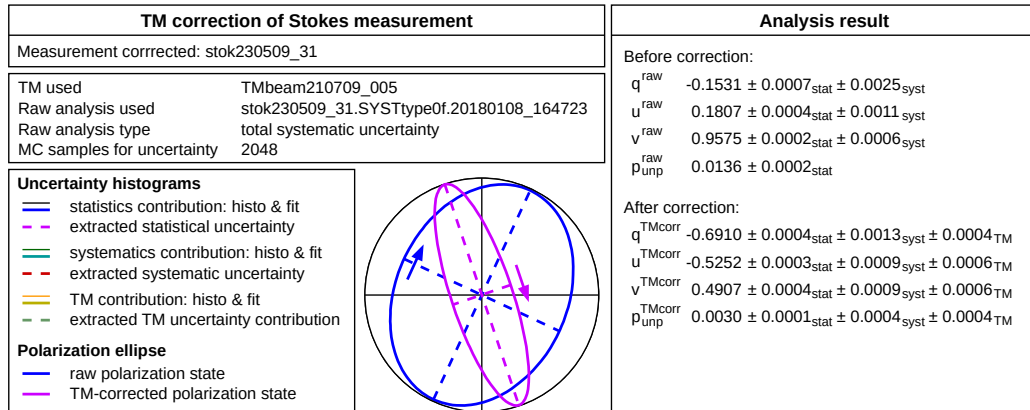
$\hat{M}_{substr}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0.8453 & 0.0143 & -0.0016 \\ 0.8474 & 0.9990 & 0.0266 & -0.0018 \\ 0.0151 & 0.0280 & -0.5351 & -0.0040 \\ 0.0006 & 0.0002 & -0.0003 & -0.5311 \end{pmatrix}$
$\sigma_{\hat{M}}$	$\begin{pmatrix} - & 3 & 6 & 7 \\ 2 & 3 & 6 & 7 \\ 3 & 4 & 5 & 4 \\ 2 & 2 & 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot 10^{-4}$

**Tabelle 6.12:** Gemessene Transfermatrix  $TM_{final\_meas\_001}$  des unbeschichteten Quarzglas-Substrats *CVI/Melles-Griot PW1-6010M-UV #1*, Seite „S1“.

### 6.4.7 Anwendung der Transfermatrix auf Stokes-Polarisationsmessungen

Das Ziel der Bestimmung der Transfermatrix besteht darin, die Stokes-Polarisationsmessungen um den Einfluß des 45°-Fensters auf den Polarisationszustand zu bereinigen. Hierzu werden die gemessenen Stokesparameter in die invertierten Transformationsgleichungen 6.15 eingesetzt, um die ursprünglichen Parameter zu rekonstruieren. Die Unsicherheiten des so rekonstruierten resonatorinternen Polarisationszustands können mithilfe einer Monte-Carlo-basierten Methode bestimmt werden. Hierbei werden im ersten Schritt die gemessenen Stokesparameter im Rahmen ihrer statistischen und – sofern das Korrekturverfahren auf eine systematische Analyse angewandt wird – auch im Rahmen ihrer systematischen Unsicherheiten variiert und die entsprechenden rekonstruierten Parameter aufgezeichnet. Die Standardabweichungen der so gesammelten Stichproben entsprechen dann den statistischen bzw. systematischen Unsicherheiten der resonatorinternen Stokesparameter. Im zweiten Schritt werden dann die Matrixelemente im Rahmen ihrer statistischen Unsicherheiten variiert und die Rekonstruktion der Stokesparameter unter Zugrundelegung der nominellen Stokes-Meßwerte, aber jeweils der statistisch verrauschten Matrix, durchgeführt. Die Standardabweichungen dieser Stichproben entsprechen dann der systematischen Unsicherheit der Stokesparameter aufgrund der Transfermatrix-Korrektur.

Zum Abschluß der Diskussion des Analyseverfahrens soll nun auch dieser Schritt beispielhaft anhand der Strahlzeit *beam260509* demonstriert werden. Hierzu wurde die Transfermatrix-Korrektur auf die in Abs. 6.3.5 vorgestellten



**Abbildung 6.33:** Graphische Darstellung der Korrektur einer Polarisationsmessung um den Effekt des 45°-Fensters. Im unteren Teil sind jeweils überlagert die Histogramme der Resultatparameterverteilungen aufgrund der Variation der unkorrigierten Parameter bzw. der Transfermatrix im Rahmen ihrer jeweiligen Unsicherheiten dargestellt. Im oberen Teil ist zwischen der Legende und der Tabelle der Analysresultate der so vermessene Polarisationszustand in Form der Polarisationsellipse vor (blau) und nach (violett) der Anwendung der inversen Transfermatrix abgebildet; die Notwendigkeit dieser Korrektur ist deutlich erkennbar.

	Wert	Unsich./10 <sup>-4</sup>		Systematik-Beiträge				TM	syst. tot.
		stat.	int. syst.	Ped.	KP	SP	WP-Sk.		
$q$	-0.1531	8	25	2	3	1	25	–	25
$u$	0.1807	4	11	0.1	0.1	0.8	10	–	11
$v$	0.9575	2	6	0.4	0.2	5	5	–	6
$q^{korr}$	-0.6910	5	13	1	2	0.5	0.1	4	14
$u^{korr}$	-0.5252	3	9	0.7	0.9	3	9	6	11
$v^{korr}$	0.4907	4	9	0.6	0.8	2	9	6	11

**Tabelle 6.13:** Systematische Gesamtunsicherheit und Fehlerbudget einer Stokes-Polarisationsmessung nach Bereinigung um die Auswirkung des 45°-Fensters, wobei die in Tab. 6.9 vorgestellten Analysen zugrundegelegt wurden. In der oberen Hälfte der Tabelle sind die unkorrigierten Parameter zwecks Vergleich nochmals aufgeführt. Die systematische Gesamtunsicherheit in der dritten Spalte der Ergebnisse enthält noch nicht den Beitrag aufgrund der Transfermatrix-Korrektur; dieser ist in der vorletzten Spalte aufgeführt. Die letzte Spalte enthält die systematische Gesamtunsicherheit. Alle Unsicherheiten sind in Einheiten von 10<sup>-4</sup> ausgedrückt.

Systematikuntersuchungen zur Stokes-Polarisationsmessung *stok230509\_31* angewandt. Abbildung 6.33 zeigt das Resultat dieser Korrektur und die so bestimmte systematische Gesamtunsicherheit der rekonstruierten resonator-internen Stokesparameter, während Tabelle 6.13 eine Übersicht über das Fehlerbudget gibt. Man kann deutlich erkennen, daß ohne die Berücksichtigung dieses Effekts keine auch nur näherungsweise zutreffende Polarisationsbestimmung möglich ist; hierdurch wird auch die Notwendigkeit, den vollständigen Polarisationszustand zu vermessen, untermauert (vgl. Abs. 5.3).

## 6.5 Bestimmung der Strahlpolarisation bei 1.5 GeV

Das A4-Compton-Rückstreupolarimeter konnte ab dem Frühjahr 2009 im Routinebetrieb eingesetzt werden, um bei Produktionsstrahlzeiten des A4-Experiments den Polarisationsgrad des Elektronenstrahls zu vermessen. Zum Abschluß dieses Kapitels sollen nun die zuvor beschriebenen Verfahren auf die Meßdaten einer ausgewählten Strahlzeit im November 2009 (*beam101109*) angewandt werden, um die Strahlpolarisation zu ermitteln.

### 6.5.1 Zuordnung zwischen Stokes- und Asymmetriemessungen

Die Polarisation des Elektronenstrahls wird bestimmt, indem – zunächst unter der Annahme gleicher Polarisationsgrade für beide Strahlhelizitäten – das mit den beiden Polarisimeterdetektoren anhand der Compton-Asymmetrie ermittelte Polarisationsprodukt

$$P_e P_L = -\frac{A_{exp}}{\mathcal{A}} \quad (6.34)$$

durch die Polarisation des Laserstrahls dividiert wird. Die Auslese dieser Detektoren ist nun an die Datenerfassung des Hauptexperiments gekoppelt, so daß die Messung der Compton-Asymmetrie auf Histogrammen basiert, die während der fünfminütigen Datennahmeläufe („Runs“) des A4-Experiments akkumuliert werden [48]. Diese Histogramme müssen um den Untergrundanteil, der z. B. von Bremsstrahlungsereignissen oder der Kollision von Haloelektronen mit der Strahlführung herrührt (vgl. Abs. 3.1.3 oder 3.1.4), bereinigt werden, um so die reinen Compton-Streuereignisse zu isolieren. Aus diesem Grunde werden immer abwechselnd Messungen mit und ohne Laserlicht durchgeführt, so daß nach geeigneter Skalierung der Untergrund in den Spektren subtrahiert werden kann. Die Bestimmung der Compton-Asymmetrie erfordert somit mindestens einen „Signal“- und einen zugehörigen „Untergrund“-Run, die zu der minimalen analysierbaren Dateneinheit, dem *Compton*-Mikrosample<sup>20</sup>, zusammengefaßt werden. Im Regelfall werden nun jeweils zehn Runs in Folge mit und anschließend fünf Runs in Folge ohne Laserlicht genommen, um durch Summierung der Daten die statistische Unsicherheit verringern zu können; ein reales Mikrosample wird daher typischerweise fünfzehn Runs umfassen.

Während der hier betrachteten Strahlzeit wurden nun insgesamt 863 Runs genommen, die in 38 Mikrosamples unterteilt wurden. Die Analyse dieser Daten ist allerdings noch nicht abgeschlossen, so daß derzeit nur vorläufige Bestimmungen des Polarisationsprodukts für die drei in Tabelle 6.14 aufgeführten Mikrosamples vorliegen. Um die Strahlpolarisation zu bestimmen, müssen diesen Daten noch geeignete Messungen der Laserpolarisation gegenübergestellt werden, wobei für die Auswahl nur der Zeitraum der „Signal“-Runs ausschlaggebend ist. Im Rahmen der regelmäßigen Polarisationsüberwachung wurden nun kurz vor und kurz nach dem durch diese Mikrosamples abgedeckten Zeitraum die Messungen *stok111109\_07* (um 19:45) und

<sup>20</sup>Dieses ist nicht zu verwechseln und auch nicht korreliert mit dem in Abs. 6.1 eingeführten Kalibrations-Mikrosample der Stokes-Analyse.

C.- $\mu$ Sa	Signal-Runs	Untergrund-Runs	Zeitraum (Signal-Runs)
#2	71238 – 71247	71248 – 71252	11.11.2009, 21:25 – 22:18
#10	71350 – 71353	71357	12.11.2009, 07:52 – 08:13
#11	71354 – 71362	71358	12.11.2009, 08:13 – 09:02

**Tabelle 6.14:** Verfügbare Datensätze zur Bestimmung der Compton-Asymmetrie für die Strahlzeit *beam101109*

*stok121109\_02* (um 11:42) durchgeführt, die für diesen Zweck herangezogen werden können.

### 6.5.2 Polarisation des Laserstrahls

Für die Bestimmung der Laserpolarisation wurden die genannten Stokesmessungen nach dem im vorangegangenen Teil dieses Kapitels beschriebenen Verfahren analysiert, wobei sowohl die systematische Gesamtunsicherheit als auch das Fehlerbudget ermittelt wurde. Anschließend wurde aus diesen Daten mithilfe der Transfermatrix *TMbeam101109\_001* der resonatorinterne Polarisationszustand samt zugehöriger Unsicherheiten berechnet. Das Ergebnis dieser Untersuchungen ist in Tabelle 6.15 zusammengefasst.

Für die Compton-Polarimetrie ist nun lediglich der zirkulare Polarisationsanteil relevant, der durch den reduzierten Stokesparameter  $v$  gegeben ist. Wie man sieht, wurde in diesem Zeitraum ein linkshändiger Polarisationszustand mit einem zirkularen Anteil von 91 – 93% erzielt. Diese Resultate müssen nun in geeigneter Weise mit den anhand der Compton-Spektren gewonnenen Asymmetriedaten verrechnet werden, um die longitudinale Strahlpolarisation  $P_e$  zu ermitteln.

### 6.5.3 Polarisation des Elektronenstrahls

Die vorläufige Analyse der Compton-Mikrosamples führt zu folgenden Werten für das Polarisationsprodukt [48, S. 210]:

$$\begin{aligned} \mu\text{Sa \#2} : \quad P_e P_L &= 0.7163 \pm 0.0210_{\text{stat}} \\ \mu\text{Sa \#10} : \quad P_e P_L &= 0.7214 \pm 0.0411_{\text{stat}} \\ \mu\text{Sa \#11} : \quad P_e P_L &= 0.7288 \pm 0.0437_{\text{stat}} \end{aligned}$$

In die Analyse des A4-Hauptexperiments geht nun nur die mittlere Strahlpolarisation während eines „GVZ-Samples“, d. h. während einer festen Einstel-

6.5 Bestimmung der Strahlpolarisation bei 1.5 GeV

	Wert	Unsicherheit / $10^{-4}$		Einzelbeiträge (int. syst.)			TM
		stat.	int. syst.	KalPr.	SP-Eig.	WP-Sk.	
<i>stok111109_07</i>							
$q^{corr}$	-0.3979	7	15	14	0.5	5	9
$u^{corr}$	-0.1044	5	3	2	0.1	2	7
$v^{corr}$	-0.9077	7	10	10	0.3	5	12
<i>stok121109_02</i>							
$q^{corr}$	-0.3429	8	14	14	0.3	5	10
$u^{corr}$	-0.0684	7	4	3	0.1	3	7
$v^{corr}$	-0.9315	8	11	10	0.2	5	13

**Tabelle 6.15:** Resultat der Analyse der Laserpolarisationsmessungen *stok111109\_07* und *stok121109\_02*, die zur Bestimmung der Strahlpolarisation anhand der Compton-Mikrosamples #2, #10 und #11 herangezogen werden, in Anlehnung an die Darstellung in Tabelle 6.13

lung der  $\lambda/2$ -Platte an der polarisierten Quelle, die der Identifikation falscher Asymmetrien dient (vgl. Abs. 2.3), ein; dies entspricht typischerweise drei bis vier Tagen Datennahme. Auch wenn ein solcher Zeitraum mit den für diese Strahlzeit verfügbaren Daten nicht abgedeckt werden kann<sup>21</sup>, soll durch die Analyse dieser begrenzten Datenbasis wenigstens ein Überblick über Resultate und Leistungsfähigkeit des A4-Compton-Rückstreupolarimeters gegeben werden.

Die mittlere Polarisation des Elektronenstrahls wird hierbei bestimmt, indem die gewichteten Mittelwerte von Polarisationsprodukt und Laserpolarisation gebildet und dann durcheinander dividiert werden. Es sei zu diesem Zweck

$$\mathcal{P}_i := (P_e P_L)_{\mu Sa \#i}$$

das Polarisationsprodukt für ein gegebenes Compton-Mikrosample und  $\sigma_{\mathcal{P},i}$  die zugehörige (statistische) Unsicherheit. Dann gilt für das mittlere Polarisationsprodukt die Formel

$$\bar{\mathcal{P}} = \frac{\sum_i \mathcal{P}_i / \sigma_{\mathcal{P},i}^2}{\sum_i 1 / \sigma_{\mathcal{P},i}^2} \quad (6.35)$$

<sup>21</sup>Die in Tabelle 6.14 aufgeführten Messungen liegen innerhalb eines GVZ-Samples, das sich von Run 71147 bis 71955 über 109 h erstreckt.

während die statistische Unsicherheit anhand des Zusammenhangs

$$\frac{1}{\sigma_{\bar{\mathcal{P}}}^2} = \sum_i \frac{1}{\sigma_{\mathcal{P},i}^2} \quad (6.36)$$

berechnet wird; im vorliegenden Fall ergibt sich hieraus ein Wert von

$$\bar{\mathcal{P}} = 0.7191 \pm 0.0172_{\text{stat}}$$

für den angegebenen Zeitraum.

Die entsprechende Betrachtung der Laserpolarisation  $\bar{v}$  gestaltet sich nun schwieriger, weil hier auch systematische Unsicherheiten bekannt und somit zu berücksichtigen sind; diese werden zudem stark korreliert sein, da beide in die Analyse eingehenden Messungen denselben Kalibrations-Mikrosamples angehören<sup>22</sup>. Diesen Umständen kann man durch einen Monte-Carlo-basierten Ansatz gerecht werden, bei dem in Analogie zur Systematikuntersuchung einer einzelnen Messung die Kalibrationskonstanten im Rahmen ihrer Unsicherheiten variiert werden und für jede solcher Konfigurationen das gewichtete Mittel der jeweiligen Einzelmessungsergebnisse gespeichert wird; die systematische Unsicherheit dieses Mittelwerts ist dann wiederum durch die Standardabweichung der Resultatparameterverteilungen gegeben. Im hier vorliegenden Fall sind aber sowohl die resultierenden Polarisationen als auch die systematischen Unsicherheiten beider Messungen so ähnlich, daß auf diese Betrachtung verzichtet und die systematische Unsicherheit des Mittelwerts durch die größere der beiden Unsicherheiten der Einzelmessungsergebnisse abgeschätzt werden kann; somit ergibt sich eine mittlere Laserpolarisation von

$$\bar{v} = -0.9185 \pm 5 \cdot 10_{\text{stat}}^{-4} \pm 1.70 \cdot 10_{\text{syst}}^{-3}$$

wobei die interne und die transfermatrixbedingte systematische Unsicherheit zusammengefaßt wurden. Unter Verwendung Gauß'scher Fehlerfortpflanzung für statistische und systematische Unsicherheit führt dies zu folgendem Wert für die mittlere Elektronenpolarisation:

$$\bar{P}_e = -0.7829 \pm 0.0187_{\text{stat}} \pm 0.0015_{\text{syst,Stokes}}$$

Schon für diesen sehr begrenzten Ausschnitt aus den Meßdaten wird somit eine relative statistische Unsicherheit von 2.3% bei vernachlässigbarer systematischer Unsicherheit seitens der Laserpolarisationsmessung erzielt. Wenn

---

<sup>22</sup>bis auf die Pedestalkalibration, die hier jedoch vernachlässigt wird.



alle Compton-Daten des hier betrachteten GVZ-Samples analysiert sein werden entspricht dies einer Vergrößerung der Datenmenge um einen Faktor 19.5, so daß sich die statistische Unsicherheit ungefähr um einen Faktor 1/4.4 auf

$$\sigma_{\text{stat}} \approx 0.004$$

verringern sollte.

### Ausblick auf die vollständige Analyse

Die vorangegangene Bestimmung der Strahlpolarisation beruht auf der impliziten Annahme, daß der Mittelwert des Polarisationsprodukts gleich dem Produkt der Mittelwerte von Laser- und Elektronenpolarisation ist, obwohl im allgemeinen für zwei Zufallsgrößen  $X$  und  $Y$  der Zusammenhang

$$\langle XY \rangle = \langle X \rangle \langle Y \rangle - \text{Cov}(X, Y) \quad (6.37)$$

gilt. Bei der hier vorliegenden Situation kann dies zunächst als zulässige Näherung betrachtet werden, da die Polarisierungen der beiden Strahlen mit völlig verschiedenen Methoden und durch völlig unabhängige Apparaturen hergestellt werden und somit Kovarianzen zwischen diesen Größen nahezu ausgeschlossen sind. Es gibt allerdings zwei Umstände, die in der Praxis eine genauere Betrachtung des zeitlichen Verlaufs von Polarisationsprodukt und Laserpolarisation erforderlich machen: Zum einen können sich zufällige Korrelationen nur dann herausmitteln, wenn der betrachtete Zeitraum (hier also ein GVZ-Sample) groß gegen die Zeitskala der für Driften verantwortlichen physikalischen Prozesse ist, zum anderen werden beide Polarisationsgrade auch explizit und somit zielgerichtet durch Eingriffe des Experimentators in die Apparaturen verändert. Für eine exakte Analyse ist es somit erforderlich, anhand der Meßdaten geeignete Interpolationsfunktionen  $\mathcal{P}(t)$  und  $v(t)$  zu bestimmen, deren Quotient

$$P_e(t) = \frac{\mathcal{P}(t)}{v(t)} \quad (6.38)$$

dann mit numerischen oder analytischen Methoden zeitlich gemittelt wird. Dies stellt normalerweise eine erhebliche Herausforderung dar, weil es keine natürliche Wahl für die Art der Interpolation gibt, diese aber den errechneten Mittelwert unter Umständen stark beeinflussen kann; zudem werden bei expliziten Änderungen der Polarisationsgrade Sprungstellen in den Größen auftreten.

Im hier vorliegenden Fall, wo nur zwei bzw. drei Datenpunkte vorliegen und laserseitig keine Optimierung, beschleunigerseitig nur eine Optimierung an der Energiestabilisierung vorgenommen wurde, ist es jedoch naheliegend, eine lineare Interpolation durchzuführen; somit ist es möglich, auch das exakte Analyseverfahren anhand des verfügbaren Ausschnitts aus den Polarimeterdaten zu demonstrieren. Die Interpolationsgerade für die Laserpolarisation wird hierbei direkt durch die beiden Punkte gelegt, während sie für das Polarisationsprodukt nach der Methode der kleinsten Fehlerquadrate an die Daten angepaßt wird. Die resultierende Polarisation des Elektronenstrahls hat dann einen zeitlichen Verlauf der Form

$$P_e(t) = \frac{\mathcal{P}_{\text{offs}} + m_{\mathcal{P}}t}{v_{\text{offs}} + m_v t} \quad (6.39)$$

wobei  $\mathcal{P}_{\text{offs}}$  und  $v_{\text{offs}}$  jeweils die Achsenabschnitte und  $m_{\mathcal{P}}$  bzw.  $m_v$  die Steigungen der Interpolationsgeraden sind. Die mittlere Strahlpolarisation während des Geltungsbereichs  $[t_1, t_2]$  der Interpolation ist dann durch

$$\bar{P}_e = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_2}^{t_1} P_e(t) dt \quad (6.40)$$

gegeben. Bei der hier vorgestellten Analyse wird die Integration auf numerischem Wege unter Verwendung des *ROOT*-Softwarepakets durchgeführt<sup>23</sup>, wobei  $t_1$  und  $t_2$  die Grenzen der Schnittmenge der durch die jeweils äußersten Datenpunkte definierten Geltungsbereiche von  $\mathcal{P}(t)$  und  $v(t)$  sind.

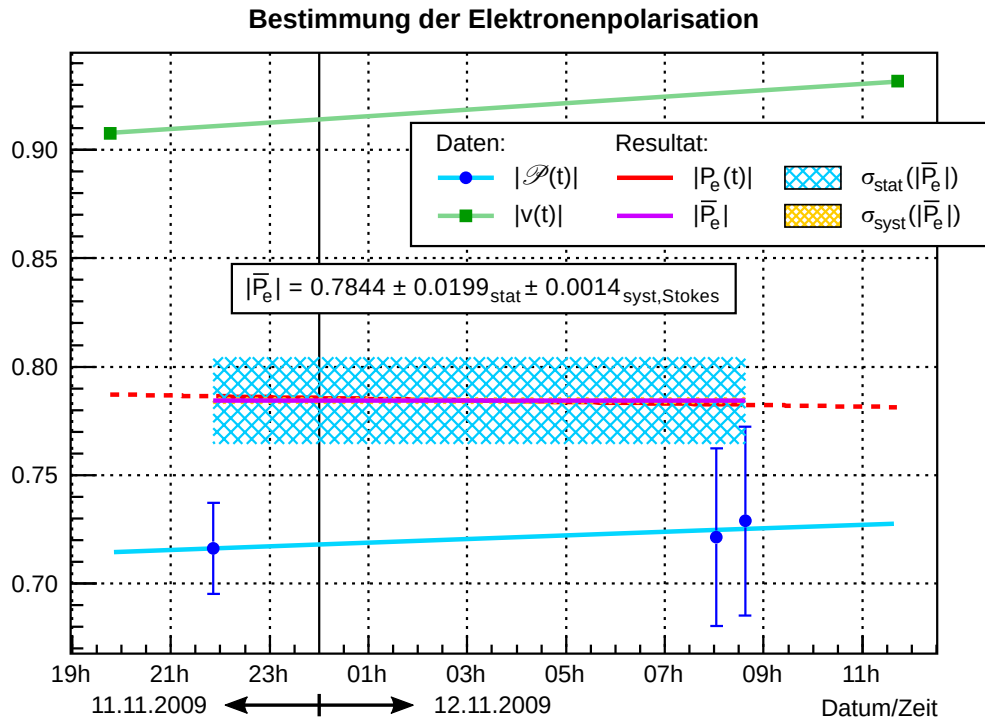
Um die statistische Unsicherheit der mittleren Polarisation zu ermitteln, wird wiederum auf das bekannte *MC*-Schema zurückgegriffen, bei dem die Datenpunkte im Rahmen ihrer statistischen Unsicherheiten variiert werden, wobei die Standardabweichung der jeweils resultierenden  $\bar{P}_e$ -Werte mit der Unsicherheit des Resultats identifiziert wird. Bei der systematischen Unsicherheit wird ähnlich vorgegangen, allerdings werden in diesem Fall beide Datenpunkte gemeinsam im Rahmen ihrer – auch hier als gleich groß angenommenen – systematischen Unsicherheit variiert. Dieses Vorgehen erscheint gerechtfertigt, weil die Polarisationszustände so ähnlich sind, daß ein gegebener systematischer Effekte beide Resultate um einen nahezu gleichen Betrag in dieselbe Richtung verschieben wird.

Das Ergebnis dieser Analyse ist in Abb. 6.34 dargestellt. Insgesamt ergibt sich eine mittlere Strahlpolarisation von

$$\bar{P}_e = -0.7844 \pm 0.0199_{\text{stat}} \pm 0.0014_{\text{syst,Stokes}}$$

---

<sup>23</sup>Methode `TF1::Integral()`

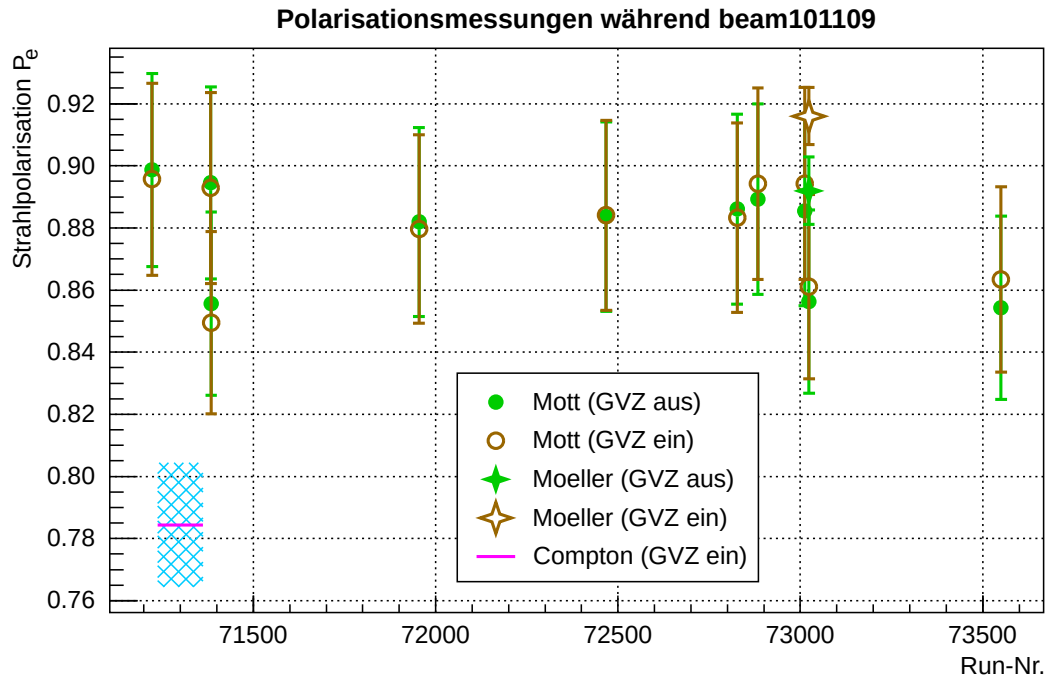


**Abbildung 6.34:** Demonstration der Methode zur exakten Bestimmung der Strahlpolarisation anhand der für die Strahlzeit *beam101109* verfügbaren Daten des Compton-Rückstreupolarimeters. Zwischen den Datenpunkten wurde jeweils mittels Geraden interpoliert, deren Quotient  $P_e(t)$  (rote Linie) numerisch gemittelt wurde (violette Linie). Die schraffierten Rechtecke stellen jeweils die statistische und systematische Unsicherheit des so bestimmten Mittelwerts dar. Um die Darstellung übersichtlicher zu halten, wurde hier nur mit den Beträgen der jeweiligen Größen gearbeitet.

was mit den im vorangegangenen Überblick vorgestellten Werten kompatibel ist. Wie man anhand der Interpolationsgeraden sehen kann, ist die Drift des Polarisationsprodukts  $\mathcal{P}$  während des betrachteten Zeitraums größtenteils auf die Drift der Laserpolarisation zurückzuführen, während die Elektronenpolarisation nahezu konstant geblieben ist.

### Einordnung der Ergebnisse

Wie in Abs. 2.3 beschrieben, wurde für die Interpretation der im A4-Experiment gemessenen Asymmetrie lange Zeit auf die Daten zweier anderer Polarimeter zurückgegriffen, die im Rahmen dieser Strahlzeit ebenfalls zum Einsatz kamen und mit deren Resultaten die hier vorgestellten Polarisations-



**Abbildung 6.35:** Übersicht über die während der Strahlzeit *beam101109* durchgeführten Polarisationsmessungen mit den verschiedenen Polarimetern des Beschleunigers als Funktion der Zeit. Die Zeitskala ist hierbei über die Run-Nummer des A4-Hauptexperiments ausgedrückt, wobei die Messungen mit dem Mott- und Møller-Polarimeter unabhängig von der A4-Datenerfassung sind und somit zeitlich dem *ersten darauffolgenden* Run zugeordnet werden. Das Meßergebnis des A4-Compton-Rückstreupolarimeters ist in Analogie zu Abb. 6.34 eingetragen.

werte verglichen werden sollen.

Eine entsprechende Zusammenfassung der Polarisationsmessungen ist in Abb. 6.35 dargestellt. Es ist zu beachten, daß bei Messungen mit dem Mott- und Møller-Polarimeter die Strahlpolarisation immer für beide Einstellungen des GVZ bestimmt wird, da für diese Messungen der Experimentierbetrieb sowieso unterbrochen werden muß; aus diesem Grund gibt es hier jeweils zwei Werte pro Messung. Die analysierten Daten des Compton-Rückstreupolarimeters fallen in eine Meßperiode mit in den Strahlengang eingeschobenem GVZ, so daß die in diesem Abschnitt vorgestellten Resultate mit den als „GVZ ein“ gekennzeichneten Datenpunkten zu vergleichen sind. Man kann erkennen, daß die Unsicherheit der Polarisationsmessung bereits mit dem begrenzten zur Verfügung stehenden Datensatz geringer als bei den Mott-Messungen ausfällt und ähnlich gut wie diejenige des Møller-Polarimeters

ist. Mit der zu erwartenden Verbesserung bei Verwendung der vollständigen Compton-Asymmetriedaten wird sich eine deutliche Verringerung der Unsicherheit selbst gegenüber dem Møller-Polarimeter erzielen lassen. Es ist jedoch ebenfalls offensichtlich, daß die Mott- und Møller-Messungen, die aufgrund der Orientierung des Mott-Polarimeters am Møller-Polarimeter *per definitionem* miteinander vereinbar sind, um deutlich mehr als die kombinierten Unsicherheiten von der mit dem Compton-Rückstreupolarimeter bestimmten Strahlpolarisation abweichen.

Es gibt nun zwei Aspekte, die zu einer solchen Diskrepanz beitragen können: Zum einen wurden die hier vorgestellten Compton-Asymmetrien nur einer vorläufigen Analyse unterzogen, so daß aufgrund notwendiger Korrekturen noch mit Verschiebungen des Endresultats zu rechnen ist. Wie groß diese ausfallen werden, ist zur Zeit noch unklar, allerdings wird der dominante Anteil auf Totzeitkorrekturen entfallen [48, S. 210], die zwar prinzipiell das Ergebnis hin zu einer größeren Strahlpolarisation verschieben werden, jedoch höchstens um Werte im einstelligen Prozentbereich<sup>24</sup>.

Eine andere mögliche Ursache liegt in der Spinpräzession des Elektrons beim Durchlaufen der Strahlführung des Beschleunigers (vgl. Abs. 2.3): Sollte hierdurch eine nennenswerte Abweichung von der Longitudinalrichtung auftreten, würde dies zu einer augenscheinlichen Verringerung der Polarisation des Elektronenstrahls führen. Allerdings wurde in einer vorangegangenen Strahlzeit (*beam170309*) eine Spinrotationsmessung durchgeführt, um mittels des Transmissions-Comptonpolarimeters im Strahlfänger die Einstellung des Wienfilters zu verifizieren; bei dieser wurde eine Fehlstellung des Elektronenspins gegenüber der Longitudinalrichtung von nur  $1.4 \pm 0.8^\circ$  bei der nominellen Einstellung für diese Strahlenergie festgestellt, so daß die hieraus resultierende Abweichung kleiner als 0.1 % ausfällt. Die Spinorientierung innerhalb der Wechselwirkungszone des Polarimeters kann zwar aufgrund der Präzession in den Schikanenmagneten ebenfalls von der vom Transmissionspolarimeter am A4-Target gemessenen abweichen, jedoch müßte sich hierbei ein Fehlwinkel von ca.  $25^\circ$  ergeben, um die beobachtete Abweichung erklären zu können. Derzeit liegt somit keine plausible Erklärung für die unterschiedlichen Meßergebnisse der verschiedenen Polarimeter vor.

### Auswirkung auf die A4-Datenanalyse

Das wesentliche Ziel bei der Entwicklung des A4-Compton-Rückstreupolarimeters bestand in der Verringerung des Beitrags der Polarisationsmessung

---

<sup>24</sup>J. Diefenbach, private Kommunikation

zur systematischen Unsicherheit der paritätsverletzenden Asymmetrie in der Elektron-Nukleon-Streuung (vgl. Abs. 2.3). Die hier betrachtete Strahlzeit *beam101109* war Teil einer Meßserie zur Bestimmung dieser Asymmetrie bei einer Strahlenergie von 1.508 GeV unter Vorwärtswinkeln, was einem Viererimpulsübertrag von  $Q^2 = 0.63 \text{ (GeV/c)}^2$  entspricht. Nach dem derzeitigen Stand der Analyse beträgt die gemessene Zählratenasymmetrie bei diesen Bedingungen

$$A_{Rate} = (19.24 \pm 0.59) \cdot 10^{-6}$$

wobei hier die Gesamtunsicherheit inklusive Beiträgen der Systematik angegeben ist. Um hieraus die gesuchte physikalische Asymmetrie  $A_{PV}$  zu bestimmen, muß dieser Wert nun durch die Strahlpolarisation dividiert werden. Mit den bisherigen Methoden wurde für hierfür ein Wert von

$$P_e = 0.85$$

bei einer relativen Unsicherheit von 4% gemessen, was einem Beitrag der Polarimetrie zur systematischen Unsicherheit der *physikalischen* Asymmetrie von

$$\sigma_{A_{PV}}^{Pola} = \left| \frac{A_{Rate}}{P_e^2} \right| \sigma_{P_e} = 0.91 \cdot 10^{-6}$$

entspricht. Bereits mit den hier vorgestellten begrenzten Compton-Meßdaten ergibt sich eine Verbesserung dieses Werts auf

$$\sigma_{A_{PV}}^{Pola} = 0.62 \cdot 10^{-6}$$

was eine Verkleinerung des Polarimetrie-Beitrags um fast 1/3 darstellt. Falls sich die statistische Unsicherheit durch die Verwendung des vollständigen GVZ-Samples wie erwartet verringert, würde dies zu einem noch geringeren Beitrag von

$$\sigma_{A_{PV}}^{Pola} = 0.15 \cdot 10^{-6}$$

führen.

Die Gesamtunsicherheit der paritätsverletzenden Asymmetrie setzt sich nun aus dem Beitrag der Zählratenasymmetrie und der Polarisationsmessung zusammen und beträgt mit den bisherigen Polarisations-Meßdaten

$$\sigma_{A_{PV}} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_{A_{Rate}}}{P_e}\right)^2 + \left(\frac{A_{Rate}}{P_e^2} \sigma_{P_e}\right)^2} = 1.14 \cdot 10^{-6} \quad (6.41)$$

Bereits mit der auf der vorgestellten Teilmenge der Daten beruhenden Messung des Compton-Rückstreupolarimeters verringert sich dieser Wert um 15% auf

$$\sigma_{A_{PV},neu} = 0.97 \cdot 10^{-6}$$

Bei Verwendung der Compton-Daten des vollständigen GVZ-Samples ist sogar eine Verbesserung um 1/3 auf

$$\sigma_{APV,theo} = 0.76 \cdot 10^{-6}$$

zu erwarten. Durch den Einsatz des Compton-Rückstreupolarimeters kann die relative Unsicherheit des Meßergebnisses somit von bisher 5 % auf nunmehr 4 %, wahrscheinlich sogar auf 3 % verkleinert werden. Wenn die Polarimeterdaten einer gesamten Strahlzeit in die Analyse eingehen, ist es durchaus möglich, daß die Polarisationsbestimmung einen vernachlässigbar kleinen Beitrag zur Gesamtunsicherheit darstellen wird.

### 6.5.4 Vergleich mit anderen Compton-Rückstreupolarimetern

Zum Abschluß soll die Leistungsfähigkeit dieses Polarimeters noch mit den in Abs. 3.4 aufgeführten Systemen verglichen werden. Für das Hall-A-Polarimeter in seiner Infrarotkonfiguration wurde eine relative statistische Unsicherheit der Strahlpolarisation von 0.8 % innerhalb einer Stunde bei einer systematischen Unsicherheit von 1.23 % angegeben [57]; die Laserpolarisation konnte hierbei mit einer relativen statistischen Unsicherheit von 0.2 % und einer systematischen Unsicherheit von 0.6 % bestimmt werden. Hierbei ist zu berücksichtigen, daß die Bestimmung der Transfermatrix – die auch in diesem Fall notwendig ist, um die außerhalb des Resonators gemessene Polarisation um die Auswirkung der optischen Elemente zwischen Wechselwirkungspunkt und Meßapparatur zu bereinigen – nur ohne die Resonatorspiegel möglich war, so daß deren Auswirkung lediglich abgeschätzt werden konnte. Darüberhinaus wurde im regulären Meßbetrieb nur der zirkulare Polarisationsgrad außerhalb des Resonators gemessen, so daß die Rücktransformation auf den resonatorinternen Polarisationszustand zusätzliche Unsicherheiten aufwies. Beide Effekte tragen jeweils 0.4 % zur angegebenen systematischen Unsicherheit bei. Bei der Ermittlung der Transfermatrix ist weiterhin zu beachten, daß nur Polarisationszustände einer vorgegebenen Exzentrizität entsprechend einem zirkularen Polarisationsgrad von 92.2 %, allerdings bei verschiedenen Orientierungen der Ellipse, präpariert wurden und daß für die Bestimmung der resonatorinternen „ungestörten“ Polarisation eine andere Meßapparatur als für die Polarisation außerhalb des Resonators zum Einsatz kam [56, S. 110].

Nach der Aufwertung für das PREx-Experiment konnte das Hall-A-Polarimeter die Strahlpolarisation bei den nunmehr anspruchsvolleren Betriebsbedingungen (vgl. Abs. 3.4.4) mit einer relativen statistischen Unsicherheit

von 0.8 % innerhalb einer Stunde und einer systematischen Unsicherheit von 1.18 % bestimmen, wobei für die Laserpolarisation eine relative Unsicherheit von 0.1 % (statistisch) bzw. 0.7 % (systematisch) angegeben wird [160]. Da bei der Aufwertung nichts am Prinzip des Aufbaus verändert wurde, gelten die o. g. Aussagen zur Einordnung der Systematik sinngemäß auch hier, wobei allerdings das Modell für die Transfermatrix etwas allgemeiner gehalten war und für die Bestimmung der Matrix eine zusätzliche, wenngleich kürzere Meßserie mit einem zirkularen Polarisationsgrad von 97 % durchgeführt wurde.

Das A4-Compton-Rückstreupolarimeter erreicht im Vergleich dazu nur eine statistische Genauigkeit von 2.5 % innerhalb von 2.75 h, was ca. 4.1 % innerhalb einer Stunde entspricht. Dies wird zum einen sicherlich an der in Abs. 3.3.5 erwähnten Problematik der mangelnden Laserintensität liegen, zum anderen gibt es aber auch zwei verschiedene Mechanismen, die den für die Luminosität essentiellen Strahlüberlapp verschlechtern. Im einfachsten Fall geschieht dies dadurch, daß die Strahlachse des Laserresonators sich etwa aufgrund thermischer Effekte im Laufe der Zeit verschiebt; im Rahmen der betrachteten Strahlzeit *beam101109* wurden hier Driften von bis zu 0.5 mm innerhalb von 24 Stunden<sup>25</sup> beobachtet. Darüberhinaus wurde aber im Betrieb auch mehrfach festgestellt, daß der Laser nicht auf der Grundmode  $TEM_{00}$  (vgl. Abs. 3.1.6) schwingt, sondern ein ringförmiges Strahlprofil, die sog. „doughnut“-Mode aufweist. Diese auch als  $TEM_{01}^*$  bezeichnete Intensitätsverteilung [163] ist nun allerdings denkbar schlecht für die Überlagerung mit dem Elektronenstrahl geeignet, da im eigentlichen Idealfall kollinearere Strahlen das Maximum der Elektronenstrahldichte dann gerade mit dem Minimum der Laserintensität zusammenfällt.

Die systematische Unsicherheit des A4-Compton-Rückstreupolarimeters ist für den vorliegenden Datensatz noch nicht vollständig untersucht, so daß derzeit lediglich der Beitrag der Laser-Polarisationsmessung mit 0.14 % beziffert werden kann. Um dennoch wenigstens eine Abschätzung der Gesamtunsicherheit zu ermitteln, kann man nun annehmen, daß die relative systematische Unsicherheit des Polarisationsprodukts  $\mathcal{P}$  genauso groß wie im Fall der 855 MeV-Strahlzeit *beam200208* ausfällt, deren Compton-Asymmetriedaten bereits vollständig analysiert sind [48]. Diese Unsicherheit betrug in jenem Fall 0.34 %, was als konservative Abschätzung für die vorliegende Strahlzeit angesehen werden kann, da einige der dort angebrachten systematischen Korrekturen hier nicht notwendig sein werden [48, S. 210]. Die resultierende systematische Unsicherheit des A4-Compton-Rückstreupolarimeters beträgt

---

<sup>25</sup>bei abgeschaltetem Stabilisierungssystem (vgl. Abs. 3.3.2)



somit ca. 0.37%, womit die entsprechenden Werte der Hall-A-Polarimeter deutlich übertroffen werden. Insbesondere im Bezug auf die Laserpolarisation, die mit einer relativen statistischen Unsicherheit von 0.05% und einer systematischen Unsicherheit von 0.2% bestimmt werden konnte, fällt der Vergleich vorteilhaft für das A4-Polarimeter aus, zumal bei der Polarisations-Transfermatrix nur die Effekte der vakuumbedingten Spannungsdoppelbrechung nicht berücksichtigt werden konnten, was allerdings auf die Hall-A-Polarimeter ebenfalls zutrifft.

Beim Hall-C-Polarimeter wird in Bezug auf diese Problematik ein gänzlich anderer Weg beschritten [144] und ein optisches Reversibilitätstheorem ausgenutzt [195], nach dem ein am Eingang eines optischen Systems linearpolarisierter Strahl an dessen Ausgang genau dann vollständig zirkularpolarisiert ist, wenn er – würde er dort ideal reflektiert – am Eingang orthogonal zum einfallenden Strahl linearpolarisiert wäre. Wenn man also zunächst mittels eines Polarisators einen rein linearen Zustand erzeugt und die nachfolgenden polarisationspräparierenden Elemente so einstellt, daß das vom Einkoppelspiegel des Fabry-Pérot-Resonators reflektierte Licht am anfänglichen Polarisator vollständig verworfen wird, ist sichergestellt, daß unabhängig von der Natur der dazwischenliegenden optischen Elemente – inklusive des möglicherweise unter mechanischer Spannung stehenden Vakuumfensters – rein zirkularpolarisiertes Licht in den Resonator eingespeist wird. Um die Gültigkeit dieses Ansatzes zu prüfen, wurde die Stärke dieser reflektierten Polarisationskomponente für verschiedene Einstellungen des Polarisationspräparators gemessen und ein theoretisches Modell an die Daten angepaßt; hierbei ergab sich trotz kleinerer systematischer Abweichungen eine gute qualitative Übereinstimmung [99, S. 187], so daß die für das Theorem notwendige Annahme lediglich phasenverzögernd oder polarisationsdrehend wirkender optischer Elemente gerechtfertigt erscheint.

Auch hier ist nun zunächst davon auszugehen, daß sich die Polarisation bei der Einkopplung in den Resonator noch ändert; allerdings wurde im Rahmen einer zweiten Meßserie bei geöffnetem System<sup>26</sup> festgestellt, daß die zuvor gefundenen Optimaleinstellungen auch innerhalb des Resonators den zirkularen Polarisationsgrad maximieren. Gleichzeitig konnte gezeigt werden, daß in der Nähe dieses Maximums ein linearer Zusammenhang zwischen der Intensität der ursprünglichen Polarisationskomponente im reflektierten Licht und dem zirkularen Polarisationsgrad im Resonator besteht, so daß die für die Datenanalyse erforderliche Laserpolarisation durch eine Messung dieser Intensität bestimmt werden kann [99, S. 190]. In der Praxis wird allerdings die

---

<sup>26</sup>d. h. insbesondere bei abgeschalteter Resonator-Stabilisierung

Erkenntnis ausgenutzt, daß die Verwendung des Reversibilitätstheorems es ermöglicht, alleine durch Optimierung des Polarisationspräparators im Hinblick auf das rückreflektierte Licht einen rein zirkularen Polarisationszustand im Resonator zu erzeugen und anstelle einer Messung die Laserpolarisation pauschal mit 100% angegeben [99, S. 207], wobei mögliche systematische Abweichungen von diesem Idealzustand durch Abschätzungen eingegrenzt und zu einer systematischen Unsicherheit von 0.18% zusammengefaßt werden [144]. Dieser Ansatz ist insoweit elegant, als daß die Systematik der Transfermatrixmessung hiermit größtenteils umgangen werden kann; allerdings muß damit gerechnet werden, daß bei *aktiv stabilisiertem* Resonator aufgrund der resonatorinternen Vielfachreflexionen systematische Änderungen des Polarisationszustands auftreten, die für eine Messung nicht zugänglich sind und deren Einfluß daher nur aufgrund indirekter Beobachtungen und Überlegungen abgeschätzt werden konnte.

Insgesamt kann das Hall-C-Polarimeter die Polarisation des Elektronenstrahls mit einer relativen systematischen Unsicherheit von 0.59% bestimmen, wobei statistische Unsicherheiten von bis zu 0.47% innerhalb einer Stunde erreicht werden [144]. Auch hier kann festgestellt werden, daß das A4-Compton-Rückstreupolarimeter in Bezug auf die Systematik etwas bessere Resultate erzielt, allerdings unter Vernachlässigung einer möglichen Änderung der Transfermatrix bei Evakuierung des Vakuumsystems.

# Kapitel 7

## Zusammenfassung und Ausblick

Für das A4-Experiment am Elektronenbeschleuniger MAMI der Johannes Gutenberg-Universität in Mainz wurde ein laserbasiertes Compton-Rückstreupolarimeter aufgebaut, um die absolute (longitudinale) Polarisierung des Elektronenstrahls *online*, d. h. parallel zum Experimentierbetrieb und bei denselben Bedingungen wie das Hauptexperiment, zu vermessen. Zuvor war das Experiment auf die Verwendung von Polarimetern in anderen Strahlführungen des Beschleunigers angewiesen, die zudem bei anderen Strahlbedingungen betrieben werden mußten, so daß einerseits immer eine Unterbrechung des Experimentierbetriebs für eine Absolutmessung notwendig war und andererseits verdeckte systematische Verfälschungen des Meßwerts aufgrund der notwendigen Umstellungen am Beschleuniger nicht ausgeschlossen werden konnten. Mit dem im Rahmen dieser und zweier paralleler Dissertationen [117, 48] entwickelten Polarimeter wird zudem erstmalig das „internal cavity“-Konzept zur Erhöhung der Luminosität umgesetzt, bei dem der zu vermessende Elektronenstrahl direkt durch den in geeigneter Weise modifizierten aktiven Resonator des verwendeten Lasers selbst geleitet wird, um von der im Vergleich zum Nutzstrahl deutlich größeren resonatorinternen Lichtintensität zu profitieren. Ohne eine solche Maßnahme wäre es unmöglich, bei den geringen Strahlströmen und -energien des A4-Experiments eine angemessene statistische Genauigkeit des Meßergebnisses zu erzielen.

Das wesentliche Augenmerk der hier vorgestellten Arbeit lag auf der Untersuchung des optischen Systems im Hinblick auf die Messung und Optimierung der Lichtpolarisation, da diese einerseits direkt die notwendige Meßzeit beeinflusst und andererseits für eine Analyse der mit dem Polarimeter genommenen Meßdaten genau bekannt sein muß. Zu diesem Zweck wurde ein neues Meßinstrument – das *Stokesmeter MkII* – konstruiert, das eine Bestimmung des einfallenden Polarisationszustands mit einer Genauigkeit von typischerweise

0.2 % erlaubt. Darüberhinaus wurde ein Verfahren entwickelt, um die Polarisationsveränderung des Laserstrahls bei der Auskopplung aus dem Resonator quantitativ zu erfassen und die „rohen“ Stokesmeter-Messungen um diesen Effekt zu bereinigen. In Verbindung mit den gemessenen Compton-Asymmetrien ist es damit zum ersten Mal möglich, die Polarisation des Elektronenstrahls mit dem A4-Compton-Rückstreupolarimeter zu bestimmen. Dies wurde am Beispiel einer A4-Strahlzeit bei 1.5 GeV demonstriert: Wenngleich nur eine kleine Teilmenge der Compton-Meßdaten zur Verfügung stand, ergab die Analyse hier einen Wert von

$$\bar{P}_e = -0.7844 \pm 0.0199_{\text{stat}} \pm 0.0014_{\text{syst,Stokes}}$$

und somit eine relative Gesamtunsicherheit von 2.5 %, was bereits vergleichbar mit der Präzision des Møller-Polarimeters von 1.1 % ist. Es ist zu erwarten, daß sich die statistische Unsicherheit bei Verwendung des vollständigen Datensatzes um einen Faktor 4.4 auf 0.0045 für ein GVZ-Sample, das die kleinste Analyseeinheit des A4-Hauptexperiments darstellt, verringert.

Das Meßergebnis des Compton-Rückstreupolarimeters weicht damit allerdings signifikant von demjenigen des Møller-Polarimeters ab. Da keine plausiblen Mechanismen gefunden wurden, die zu einer expliziten Verfälschung der Resultate in dieser Größenordnung führen könnten, deutet dies auf eine systematische Änderung der Strahlpolarisation infolge der notwendigen Umstellung des Beschleunigerbetriebszustands für eine Møller-Messung hin. Dieser Umstand sollte genauer untersucht werden.

Es ist zu beachten, daß die so bestimmte Strahlpolarisation noch vorläufig ist, da auf der Seite der Compton-Asymmetrie für diese Strahlzeit noch keinerlei Korrekturen und Untersuchungen der systematischen Unsicherheit vorliegen. Wenngleich dies kaum Auswirkungen auf den Meßwert an sich haben sollte, wird sich hierdurch noch eine zumindest leichte Vergrößerung der Gesamtunsicherheit ergeben. Die Systematik der Stokes-Meßwerte ist ebenfalls noch nicht vollständig untersucht, da die Betrachtung der systematischen Unsicherheit der Transfermatrix noch aussteht.

Insgesamt wird durch die Verwendung des Compton-Rückstreupolarimeters aber bereits jetzt die relative Unsicherheit der Strahlpolarisation von 4 % auf 2.5 % verringert, wodurch sich die relative Gesamtunsicherheit der mit dem A4-Experiment gemessenen paritätsverletzenden Asymmetrie bei der hier betrachteten Strahlzeit *beam101109* nach dem derzeitigen Stand der Analyse von 5 % auf 4 % verkleinert. Durch Verwendung aller Compton-Meßdaten dieser Strahlzeit ist eine noch weitergehende Verbesserung dieses Wertes zu erwarten.

---

Der Vergleich mit anderen Compton-Rückstreupolarimetern, die unter ähnlichen Betriebsbedingungen eingesetzt werden, fällt in Bezug auf die systematische Unsicherheit vorteilhaft für das hier vorgestellte System aus. Lediglich bei der statistischen Unsicherheit liegt das A4-Polarimeter deutlich hinter den anderen Systemen und auch hinter dem eigentlich vorhandenen Potential zurück, wobei letzteres wahrscheinlich durch eine bessere Kontrolle des Laserstrahls hätte vermieden werden können.



# Anhang A

## Hilfsmethoden zur Wahl des Einzelpunkt-Analyseverfahrens

Im folgenden sollen die mathematischen Methoden, die bei den Untersuchungen zur Rekonstruktionsgenauigkeit der Analyseverfahren in Abschnitt 5.1 verwendet wurden, näher beschrieben werden.

### A.1 Bestimmung der Bineinteilung

Das Ziel der Untersuchung besteht einerseits darin, die optimale Bineinteilung für die Analyse mittels Histogrammen zu finden und andererseits diese gebinnten Analysen mit dem ungebinnten *ML*-Fit zu vergleichen. Um die Bineinteilung eines Histogramms festzulegen, sind nun mindestens<sup>1</sup> drei Parameter pro Achse erforderlich: die Ober- und die Unterkante des Wertebereichs und die Binbreite. Da die hier betrachteten Fälle mehrdimensional sind, müßten somit sechs bzw. neun Parameter optimiert werden, was einen hohen Rechenaufwand bedeutet und die Analyse der Ergebnisse erschwert. Aus diesem Grund wird die Bineinteilung bei dieser Untersuchung nur durch *einen* Parameter, die zu erzielende durchschnittliche Binbelegung  $\bar{n}$ , charakterisiert.

Es wird demnach ein Verfahren benötigt, um anhand dieses Parameters für eine gegebene zu analysierende Verteilung auf eindeutige Art und Weise eine Bineinteilung zu bestimmen. Ausgangspunkt ist hierbei die maximal zulässige Binanzahl  $B'$ , die sich aus der Größe der Stichprobe  $N$  und dem geforderten durchschnittlichen Bininhalt ergibt:

$$B' = \frac{N}{\bar{n}} \tag{A.1}$$

---

<sup>1</sup>d. h. bei homogener Binbreite

Andererseits ist  $B'$  das Produkt der Binanzahlen entlang der einzelnen Achsen  $b_i$ , d. h.:

$$B' = \prod_i b_i \quad (\text{A.2})$$

Kern des Verfahrens ist somit die Bestimmung einer geeigneten Faktorzerlegung der vorgegebenen Binanzahl  $B'$ , die hierfür im allgemeinen noch zu einer ganzen Zahl gerundet werden muß.

Prinzipiell könnte man hierfür nun Verfahren zur Primfaktorzerlegung anwenden; im vorliegenden Fall, in dem die zu zerlegende Zahl zwischen 100 und 1000 liegt, wäre z. B. die Methode der elliptischen Kurven [119] geeignet. Anschließend müßten die so bestimmten Teiler allerdings noch zu sinnvollen Produkten für die Binanzahlen entlang der einzelnen Achsen kombiniert werden. Aufgrund der hohen Anzahl von Möglichkeiten, die ursprüngliche Teilmenge auf die einzelnen Achsen aufzuteilen, wurde dieser Ansatz nicht weiterverfolgt. Die verwendete Methode basiert stattdessen auf dem Prinzip, daß die Binanzahlen entlang der einzelnen Achsen etwa im selben Verhältnis wie die ausgenutzten Wertebereiche entlang der jeweiligen Achsen stehen sollen. Dies ist sinnvoll, weil aufgrund der Konstruktion des Stokesmeters die verschiedenen Sensorsignale etwa gleich stark sind und daher die Auflösungen entlang der einzelnen Achsen ebenfalls etwa gleich groß sein sollten. Zusätzlich wird allerdings noch eine Mindestanzahl von

$$b'_{min} = 4$$

Bins pro Achse gefordert, da sonst zuwenige Freiheitsgrade existieren, um die Struktur der Verteilung entlang der einzelnen Achsen noch bestimmen zu können.

### A.1.1 Dreidimensionaler Fall

Der dreidimensionale Fall liegt dann vor, wenn unnormierte Einzelpunktdaten – normalerweise in Form der Pedestalmessung (vgl. Abs. 6.1.2) – auszuwerten sind. In diesem Fall wird ausgenutzt, daß durch den A/D-Wandler bereits eine intrinsische Bineinteilung vorgegeben ist.

Es sei nun  $s_i^{max}$  der größte und  $s_i^{min}$  der kleinste Wert, den das Signal  $S_i$  ( $i = T, R, N$ ) in der betrachteten Stichprobe annimmt. Dann ist

$$b_i = s_i^{max} - s_i^{min} + 1 \quad (\text{A.3})$$

die „rohe“ Binanzahl entlang der Achse des Signals  $i$  und ein Maß für den Umfang des Wertebereichs dieses Signals. Diese Werte werden nun der Größe



nach geordnet und in  $b_1, b_2, b_3$  umbenannt, so daß

$$b_1 \leq b_2 \leq b_3 \quad (\text{A.4})$$

Weiterhin werden die Verhältnisse der Wertebereiche

$$\begin{aligned} q &:= \frac{b_2}{b_1} \\ r &:= \frac{b_3}{b_1} \end{aligned} \quad (\text{A.5})$$

definiert, wobei aufgrund der obigen Wahl  $q$  und  $r$  größer oder gleich 1 sind.

Nun wird gefordert, daß die neuen Binanzahlen  $b'_1, b'_2$  und  $b'_3$  nahezu im selben Verhältnis zueinander stehen. Da dies nur in den seltensten Fällen exakt möglich sein wird, werden zunächst „vorläufige“, reelle Werte  $\tilde{b}'_1, \tilde{b}'_2$  und  $\tilde{b}'_3$  ermittelt, aus denen dann durch Rundung die endgültigen Binanzahlen bestimmt werden. Es gilt demnach:

$$\begin{aligned} \tilde{b}'_2 &\stackrel{!}{=} q\tilde{b}'_1 \\ \tilde{b}'_3 &\stackrel{!}{=} r\tilde{b}'_1 \end{aligned} \quad (\text{A.6})$$

Somit ergibt sich folgende Bestimmungsgleichung für  $\tilde{b}'_1$ :

$$\begin{aligned} B' &= \tilde{b}'_1 \tilde{b}'_2 \tilde{b}'_3 = qr\tilde{b}'_1{}^3 \\ \tilde{b}'_1 &= \max\left(\sqrt[3]{\frac{B'}{qr}}, b_{min}\right) \end{aligned} \quad (\text{A.7})$$

War nun die Wurzel in der Tat größer als das Minimum, so werden die übrigen vorläufigen Binanzahlen nach Gl. A.6 bestimmt. Falls nicht, so wird dennoch versucht, die Verhältnisse der beiden anderen Wertebereiche beizubehalten, d. h. man definiert

$$s := \frac{b_3}{b_2} \quad (\text{A.8})$$

und fordert

$$\tilde{b}'_3 \stackrel{!}{=} s\tilde{b}'_2 \quad (\text{A.9})$$

Hieraus folgt als Bestimmungsgleichung für  $\tilde{b}'_2$ :

$$\begin{aligned} B' &= \tilde{b}'_1 \tilde{b}'_2 \tilde{b}'_3 = sb_{min}\tilde{b}'_2{}^2 \\ \tilde{b}'_2 &= \max\left(\sqrt{\frac{B'}{sb_{min}}}, b_{min}\right) \end{aligned} \quad (\text{A.10})$$

Falls auch hier die Wurzel kleiner als das Minimum war, so wird  $\tilde{b}'_3$  auf

$$\tilde{b}'_3 = \frac{B'}{b_{min}^2} \quad (\text{A.11})$$

gesetzt, ansonsten nach Gl. A.9 bestimmt. Die endgültigen Binanzahlen  $b'_1$ ,  $b'_2$  und  $b'_3$  werden nun – sofern notwendig – durch Rundung auf ganzzahlige Werte ermittelt. Bei  $b'_2$  und  $b'_3$  wird hierbei zunächst abgerundet; sollte die zulässige Binanzahl mit diesen Werten noch nicht ausgeschöpft sein, werden sie der Reihe nach jeweils um 1 erhöht.

Zuletzt müssen noch die untere und obere Kante der Achseinteilungen ermittelt werden. Hierzu werden die Kanten der ursprünglichen Bineinteilung, die jeweils um 0.5 unterhalb von  $s_i^{min}$  bzw. oberhalb von  $s_i^{max}$  liegen, symmetrisch dergestalt nach außen verschoben, daß der dann eingeschlossene Bereich ein ganzzahliges Vielfaches der neuen Binanzahlen ist. Ist die Differenz zu diesem Vielfachen ungerade, so wird die obere Grenze um 1 weiter verschoben als die untere. Insgesamt kann mit diesem Verfahren eine Bineinteilung definiert werden, bei der der durchschnittliche Bininhalt so nahe am geforderten Wert liegt, wie die konkrete Stichprobe es unter Sicherstellung einer minimalen Auflösung entlang jeder Achse erlaubt.

### A.1.2 Zweidimensionaler Fall

Im Regelfall handelt es sich bei den Einzelpunktdaten um sampleweise normierte, zweidimensionale Stichproben, für die es keine intrinsische Bineinteilung gibt. In einem ersten Schritt wird daher eine grundlegende Einteilung erstellt, die dann analog zum dreidimensionalen Fall an den geforderten durchschnittlichen Bininhalt angepaßt wird. Mit diesem indirekten Ansatz soll erreicht werden, daß in der Ausgangssituation wieder eine isotrope Bineinteilung vorliegt; dies ist sinnvoll, weil Transmissions- und Reflexionssensor identisch konstruiert sind und somit dieselben Fluktuationseigenschaften haben sollten. Aus diesem Grund wird die „elementare“ Binbreite für beide Achsen gleich groß gewählt und aus dem geometrischen Mittel der Standardabweichungen der beiden Signalkomponenten gebildet:

$$w = \frac{1}{4} \sqrt{\sigma_t \sigma_r} \quad (\text{A.12})$$

Anschließend müssen die Binanzahlen  $b_i$  ( $i = t, r$ ) und die Ober- und Unterkanten der Bineinteilungen für beide Signalachsen bestimmt werden. Für  $b_i$  wird jeweils der kleinste Wert gewählt, mit dem der Wertebereich des

jeweiligen Signals vollständig überdeckt werden kann, d. h.

$$b_i = \lceil \frac{s_i^{max} - s_i^{min}}{w} \rceil$$

Falls der von der Bineinteilung abgedeckte Wertebereich sich um weniger als 1/10 einer Binbreite vom tatsächlichen Wertebereich unterscheidet, wird die Binanzahl nochmals um eins erhöht. Die endgültigen Ober- und Unterkanten der Bineinteilung werden so gewählt, daß sie jeweils gleich weit vom größten bzw. kleinsten Wert der Stichprobe entfernt sind.

Nach der Festlegung dieser grundlegenden Bineinteilung entspricht die weitere Vorgehensweise derjenigen im dreidimensionalen Fall: Zunächst werden die gerade ermittelten Binanzahlen  $b_t$  und  $b_r$  der Größe nach sortiert und das Verhältnis

$$a := \frac{b_2}{b_1} \tag{A.13}$$

definiert, welches auch für die endgültigen Binanzahlen gefordert wird:

$$\tilde{b}'_2 \stackrel{!}{=} a\tilde{b}'_1 \tag{A.14}$$

Daraus ergibt sich folgende Bestimmungsgleichung für  $\tilde{b}'_1$ :

$$\begin{aligned} B' &= a\tilde{b}'_1{}^2 \\ \tilde{b}'_1 &= \max\left(\sqrt{\frac{B'}{a}}, b_{min}\right) \end{aligned} \tag{A.15}$$

Anschließend wird  $\tilde{b}'_2$  gemäß Gl. A.14 berechnet. Die endgültigen Binanzahlen  $b'_1$  und  $b'_2$  werden wiederum durch Rundung auf ganzzahlige Werte ermittelt, wobei im Falle von  $b'_2$  abgerundet wird; ist die zulässige Binanzahl so noch nicht ausgeschöpft, wird  $b'_1$  erhöht. Danach werden die Ober- und Untergrenze der Achseinteilungen genau wie im dreidimensionalen Fall gewählt, wobei sie hier zusätzlich so gelegt werden, daß sie mit Binkanten der zuvor bestimmten grundlegenden Bineinteilung zusammenfallen.

## A.2 Bestimmung der Hauptachsendarstellung

Damit die Monte-Carlo-Simulationen, die der Auswahl des Analyseverfahrens zugrunde liegen, möglichst realistisch sind, sollen die künstlichen Daten nach dem Vorbild echter Meßdaten erzeugt werden. Hierfür wurden im Rahmen einer vorläufigen Analyse die Verteilungsparameter ausgesuchter

Einzelpunkt-Daten realer Stokesmessungen bestimmt. Um nun anhand dieser Verteilungsparameter eine Stichprobe für einen *MC*-Durchlauf erzeugen zu können, muß allerdings sichergestellt sein, daß die aus ihnen gebildete Kovarianzmatrix positiv definit ist (vgl. Abs. 5.1.1); dies ist jedoch bei Parametern, die anhand realer Meßdaten rekonstruiert wurden, nicht notwendigerweise exakt der Fall. Es ist daher von Vorteil, die Kovarianzmatrix in ihre Diagonalform und die Transformationen, mit denen sie in die tatsächliche Orientierung der Verteilung überführt werden kann, zu zerlegen (siehe Gl. 5.3 und 5.4), da Diagonalmatrizen mit positiven Elementen automatisch positiv definit sind und orthogonale Transformationen diese Eigenschaft nicht ändern. Aus diesem Grund wurden für die als Vorbild gewählten Einzelpunkt-Stichproben die entsprechenden Hauptachsen-Varianzen und Transformationswinkel bestimmt und als *eigentliche* Quellparameter der *MC*-Simulationen verwendet; die hierfür angewandten Verfahren sollen im folgenden kurz erläutert werden.

Es ist anzumerken, daß eine anhand der Hauptachsendarstellung errechnete Kovarianzmatrix nicht exakt mit der aus den Stichproben-Verteilungsparametern gebildeten empirischen Kovarianzmatrix übereinstimmen wird, falls letztere die Bedingung der Positiv-Definitheit aufgrund statistischer Fluktuationen nicht erfüllt; solche kleinen Abweichungen ändern aber nichts daran, daß die daraus erzeugten *MC*-Datensätze dem Vorbild realer Meßdaten nachempfunden sind, was ja das eigentliche Ziel dieser Vorgehensweise darstellt.

### A.2.1 Zweidimensionaler Fall

Im zweidimensionalen Fall, wo es nur eine Rotation gibt, ist die Struktur der parametrisierten Kovarianzmatrix hinreichend einfach, um die Formeln für die Hauptachsenparameter durch direkten Vergleich abzuleiten. Die Kovarianzmatrix der Verteilung lautet in diesem Fall:

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_t^2 & \sigma_{tr} \\ \sigma_{tr} & \sigma_r^2 \end{pmatrix} \quad (\text{A.16})$$

Die parametrisierte Form der Kovarianzmatrix ist hingegen durch Gl. 5.3 gegeben:

$$\begin{aligned} \Sigma &= R(\alpha)^T \Sigma_0 R(\alpha) \\ &= \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & 0 \\ 0 & \sigma_2^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \sigma_1^2 \cos^2 \alpha + \sigma_2^2 \sin^2 \alpha & (\sigma_1^2 - \sigma_2^2) \sin \alpha \cos \alpha \\ (\sigma_1^2 - \sigma_2^2) \sin \alpha \cos \alpha & \sigma_1^2 \sin^2 \alpha + \sigma_2^2 \cos^2 \alpha \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (\text{A.17})$$

Durch Vergleich der Matrixelemente kann man nun folgende Relationen ableiten:

$$\begin{aligned}\sigma_t^2 &= \sigma_1^2 \cos^2 \alpha + \sigma_2^2 \sin^2 \alpha \\ \sigma_r^2 &= \sigma_1^2 \sin^2 \alpha + \sigma_2^2 \cos^2 \alpha \\ \sigma_{tr} &= \frac{1}{2} (\sigma_1^2 - \sigma_2^2) \sin 2\alpha\end{aligned}\tag{A.18}$$

Hieraus ergeben sich dann die folgenden Bestimmungsgleichungen für die Hauptachsenparameter der Kovarianzmatrix:

$$\begin{aligned}\tan 2\alpha &= \frac{2\sigma_{tr}}{\sigma_t^2 - \sigma_r^2} \\ \sigma_1 &= \sqrt{\frac{1}{2} \left( (\sigma_t^2 + \sigma_r^2) + \frac{\sigma_t^2 - \sigma_r^2}{\cos 2\alpha} \right)} \\ \sigma_2 &= \sqrt{\frac{1}{2} \left( (\sigma_t^2 + \sigma_r^2) - \frac{\sigma_t^2 - \sigma_r^2}{\cos 2\alpha} \right)}\end{aligned}\tag{A.19}$$

### A.2.2 Dreidimensionaler Fall

Im dreidimensionalen Fall sind nun drei Rotationen erforderlich, um die Kovarianzmatrix aus ihrer Hauptachsenform zu erzeugen. Da die so parametrisierte Matrix demnach durch eine Verkettung von sieben Matrizen zustandekommt, sind die Matrixelemente zu kompliziert, als daß das aus der elementweisen Auswertung von Gl. 5.4 entstehende Gleichungssystem nach den Hauptachsenvarianzen und Transformationswinkeln umgestellt werden könnte. Stattdessen wird in diesem Fall die Methode der *Hauptachsentransformation* angewandt, d. h. das Eigenwertproblem für die Kovarianzmatrix  $\Sigma$  gelöst. Hierdurch werden drei Eigenwerte  $\lambda_i$  und Eigenvektoren  $\vec{s}_i$  bestimmt, die der Relation

$$\Sigma \vec{s}_i = \lambda_i \vec{s}_i$$

genügen. Wenn man nun diese Eigenvektoren zu einer  $3 \times 3$ -Matrix  $T$  dergestalt zusammenfaßt, daß die  $k$ -te Spalte der Matrix gerade durch den als Spaltenvektor dargestellten Eigenvektor  $\vec{s}_k$  gegeben ist, so erhält man eine Transformationsmatrix, die die Kovarianzmatrix  $\Sigma$  in die Diagonalform  $\Sigma_0 = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$  überführt:

$$T^{-1} \Sigma T = \Sigma_0\tag{A.20}$$

Im Rahmen der hier vorgestellten Untersuchungen wurde dabei auf entsprechende Funktionen der *GNU scientific library* [65] zurückgegriffen.

Das Ziel besteht nun darin, die in Gl. 5.4 eingeführten Transformationswinkel anhand der Matrix  $T$  zu bestimmen. Mit der Definition

$$U := R_3(\gamma)R_2(\beta)R_1(\alpha) \quad (\text{A.21})$$

folgt:

$$\begin{aligned} \Sigma &= U^{-1}\Sigma_0U = T\Sigma_0T^{-1} \\ \Sigma_0 &= UT\Sigma_0T^{-1}U^{-1} \end{aligned} \quad (\text{A.22})$$

Nennt man jetzt noch

$$V := UT \quad (\text{A.23})$$

so erhält man die Relation

$$\begin{aligned} \Sigma_0 &= V\Sigma_0V^{-1} \\ \Sigma_0V &= V\Sigma_0 \end{aligned} \quad (\text{A.24})$$

Die Matrix  $V$  kommutiert demnach mit der diagonalen Matrix  $\Sigma_0$ . Wenn man nun den nichtentarteten Fall betrachtet, in dem alle Eigenwerte verschieden sind, folgt hieraus, daß auch  $V$  diagonal sein muß:

$$V = \text{diag}(v_{11}, v_{22}, v_{33}) \quad (\text{A.25})$$

Somit gilt für die Determinante

$$|V| = v_{11}v_{22}v_{33} \quad (\text{A.26})$$

Da weiterhin die Inverse von  $V$  existiert, ist diese Determinante nichtverschwindend, was demnach auch auf alle Diagonalelemente zutreffen muß. Damit gilt folgende Relation zwischen der Transformationsmatrix  $U$  der Parametrisierung und der Transformationsmatrix  $T$  des Eigenwertproblems:

$$\begin{aligned} V &= UT \\ U^{-1} &= TV^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} & t_{13} \\ t_{21} & t_{22} & t_{23} \\ t_{31} & t_{32} & t_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/v_{11} & 0 & 0 \\ 0 & 1/v_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 1/v_{33} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} t_{11}/v_{11} & t_{12}/v_{22} & t_{13}/v_{33} \\ t_{21}/v_{11} & t_{22}/v_{22} & t_{23}/v_{33} \\ t_{31}/v_{11} & t_{32}/v_{22} & t_{33}/v_{33} \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (\text{A.27})$$

Die Matrix  $U^{-1} = U^T$ , deren Matrixelemente mit  $\hat{u}_{ij}$  bezeichnet sein mögen, ist durch

$$\begin{aligned}
 U^T &= R_1^T R_2^T R_3^T \\
 &= \begin{pmatrix} \cos \beta \cos \gamma & -\cos \beta \sin \gamma & \sin \beta \\ \sin \alpha \cos \gamma \sin \beta + \sin \gamma \cos \alpha & \cos \alpha \cos \gamma - \sin \gamma \sin \alpha \sin \beta & -\cos \beta \sin \alpha \\ \sin \gamma \sin \alpha - \cos \alpha \cos \gamma \sin \beta & \sin \gamma \cos \alpha \sin \beta + \sin \alpha \cos \gamma & \cos \beta \cos \alpha \end{pmatrix}
 \end{aligned} \tag{A.28}$$

gegeben. Unter Verwendung von Gl. A.27 können nun die Transformationswinkel anhand der Matrixelemente von  $T$  bestimmt werden. Da die dort auftretenden Diagonalelemente von  $V$  allerdings unbekannt sind, müssen hierbei Verhältnisse gebildet werden, in denen diese Elemente herausfallen:

$$\begin{aligned}
 \tan \alpha &= -\frac{\hat{u}_{23}}{\hat{u}_{33}} &= -\frac{t_{23}}{t_{33}} \\
 \tan \beta &= -\frac{\hat{u}_{13} \sin \alpha}{\hat{u}_{23}} &= -\frac{t_{13} \sin \alpha}{t_{23}} \\
 \tan \gamma &= \frac{(\hat{u}_{21} \cos \alpha + \hat{u}_{31} \sin \alpha) \sin \beta}{\hat{u}_{21} \sin \alpha - \hat{u}_{31} \cos \alpha} &= \frac{(t_{21} \cos \alpha + t_{31} \sin \alpha) \sin \beta}{t_{21} \sin \alpha - t_{31} \cos \alpha}
 \end{aligned} \tag{A.29}$$

Die ebenfalls zu bestimmenden Hauptachsen-Varianzen sind gerade die Eigenwerte der Kovarianzmatrix, d. h.

$$\sigma_i = \sqrt{\lambda_i} \quad , \quad i = 1 \dots 3 \tag{A.30}$$





# Anhang B

## Hilfsmethoden der Datenanalyse

### B.1 Harmonische Analyse

Im Rahmen der hier vorgestellten Analyse wird der Polarisationszustand durch einen *NLL*-Fit einer geeigneten Modellfunktion an die Meßdaten bestimmt. Da die Modellfunktionen nichtlinear von den zu bestimmenden Parametern abhängen, wird der optimale Parametersatz durch einen iterativen numerischen Minimierungsalgorithmus ermittelt. Solche Algorithmen benötigen allerdings einen Startpunkt im Parameterraum und im allgemeinen auch eine Abschätzung der Unsicherheiten dieser Startwerte bzw. die Vorgabe einer Schrittweite für den ersten Optimierungsschritt, um zuverlässig das korrekte Minimum zu finden.

Wie in Kapitel 4 beschrieben, basiert die hier verwendete Methode der Polarisationsmessung nun darauf, daß die Rotation polarisationsoptischer Elemente im Strahlengang des zu untersuchenden Laserstrahls zu einer Modulation der auf die Detektoren auftreffenden Intensität führt. Die Information über den Polarisationszustand des Lichtstrahls ist demnach in diesen Modulationsamplituden enthalten. Es ist demnach möglich, Näherungswerte für die Modellparameter zu bestimmen, indem man diese Amplituden mithilfe der harmonischen Analyse [35, S. 862] abschätzt. Ausgangspunkt ist hierbei der Umstand, daß die Modulationsamplituden  $a_i$  und  $b_i$  einer zumindest näherungsweise harmonischen Funktion

$$f(x) \approx \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n (a_k \cos kx + b_k \sin kx) \quad (\text{B.1})$$

durch

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos kx dx & \text{und} \\ b_k &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin kx dx \end{aligned} \quad (\text{B.2})$$

gegeben sind. Im Falle von Meßdaten ist hierbei allerdings zu beachten, daß die Funktionswerte von  $f(x)$  nur in abgetasteter Form, d. h. für bestimmte  $x$ -Werte  $\{x_0, \dots, x_N\}$  vorliegen. In der harmonischen Analyse wird nun ausgenutzt, daß die Integrale in Gl. B.2 sich im Fall einer *äquidistanten* Abtastung  $x_i = 2\pi \frac{i}{N}$  durch Anwendung der Trapezformel wie folgt nähern lassen:

$$\begin{aligned} a_k &\approx \frac{2}{N} \sum_{i=1}^N f\left(2\pi \frac{i}{N}\right) \cos\left(k2\pi \frac{i}{N}\right) \\ b_k &\approx \frac{2}{N} \sum_{i=1}^N f\left(2\pi \frac{i}{N}\right) \sin\left(k2\pi \frac{i}{N}\right) \end{aligned} \quad (\text{B.3})$$

Diese Näherung kann auf die Analyse der Stokesmessungen allerdings nicht angewandt werden, da einerseits die Äquidistanz der Abtastkoordinaten  $x_i$  nur näherungsweise gegeben ist und andererseits einzelne Meßwerte aufgrund der Qualitätsprüfung komplett entfallen können (vgl. Abs. 5.3.1). Daher wurde für die vorliegende Arbeit ein Verfahren entwickelt, daß auf einer Verallgemeinerung von Gl. B.3 beruht.

Bei der üblichen Anwendung der Trapezformel wird das Integral einer gegebenen Funktion  $\varphi(x)$  genähert, indem diese zwischen den Endpunkten des Integrals linear interpoliert wird. Für hinreichend kleine Integrationsbereiche  $h$  gilt dann:

$$\int_{x_0}^{x_0+h} \varphi(x) dx \approx \frac{1}{2} h (\varphi(x_0) + \varphi(x_0 + h))$$

Für einen *makroskopischen* Integrationsbereich  $[x_0, x_N]$ , der durch  $N + 1$

Stützpunkte  $\{x_0, \dots, x_N\}$  abgetastet wird, kann dann die Näherung

$$\begin{aligned} \int_{x_0}^{x_N} \varphi(x) dx &= \int_{x_0}^{x_1} \varphi(x) dx + \int_{x_1}^{x_2} \varphi(x) dx + \dots + \int_{x_{N-1}}^{x_N} \varphi(x) dx \\ &\approx \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N (x_i - x_{i-1}) (\varphi(x_i) + \varphi(x_{i-1})) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N x_i \varphi(x_i) - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N x_{i-1} \varphi(x_i) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N x_i \varphi(x_{i-1}) - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N x_{i-1} \varphi(x_{i-1}) \\ &= \frac{1}{2} \left( \sum_{i=1}^N x_i \varphi(x_i) - \sum_{i=0}^{N-1} x_i \varphi(x_i) \right) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N (x_i \varphi(x_{i-1}) - x_{i-1} \varphi(x_i)) \end{aligned}$$

abgeleitet werden, die sich zu

$$\int_{x_0}^{x_N} \varphi(x) dx \approx \frac{1}{2} (x_N \varphi(x_N) - x_0 \varphi(x_0)) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N (x_i \varphi(x_{i-1}) - x_{i-1} \varphi(x_i)) \quad (\text{B.4})$$

vereinfachen läßt. Der Fehler dieser Näherung kann über die obere Grenze des Restglieds  $R$  abgeschätzt werden und beträgt für den einzelnen Integrationsabschnitt [35, S. 836]:

$$|R| \leq \frac{h^3}{12} M_2^* \quad , \quad \text{wobei} \quad M_2^* = \sup_{[x_0, x_0+h]} |\varphi''(x)|$$

Demnach gilt für den Gesamtfehler

$$|R_{tot}| \leq \frac{M_2}{12} \sum_{i=1}^N (x_i - x_{i-1})^3 \quad (\text{B.5})$$

mit

$$M_2 = \sup_{[x_0, x_N]} |\varphi''(x)|$$

Die Verallgemeinerung der Ausdrücke in Gl. B.3 auf nicht-äquidistante Abtastkoordinaten und  $m$  Perioden folgt nun durch die Ersetzung

$$\begin{aligned} \varphi(x) &\rightarrow f(x) \cos kx && \text{bzw.} \\ \varphi(x) &\rightarrow f(x) \sin kx \end{aligned}$$

wobei zusätzlich an die Stelle des (theoretischen) Funktionswerts  $f(x_i)$  der empirische Meßwert  $y_i$  tritt:

$$\begin{aligned}
 a_k &= \frac{1}{m\pi} \int_0^{2m\pi} f(x) \cos kx dx \\
 &\approx \frac{1}{2m\pi} \left( x_N y_N \cos kx_N - x_0 y_0 \cos kx_0 + \sum_{i=1}^N (x_i y_{i-1} \cos kx_{i-1} - x_{i-1} y_i \cos kx_i) \right) \\
 b_k &= \frac{1}{m\pi} \int_0^{2m\pi} f(x) \sin kx dx \\
 &\approx \frac{1}{2m\pi} \left( x_N y_N \sin kx_N - x_0 y_0 \sin kx_0 + \sum_{i=1}^N (x_i y_{i-1} \sin kx_{i-1} - x_{i-1} y_i \sin kx_i) \right)
 \end{aligned} \tag{B.6}$$

Demnach ist es möglich, Startwerte für die Fitparameter zu bestimmen, indem zunächst die Fitmodelle analytisch in ihre Modulationsamplituden zerlegt, die resultierenden Ausdrücke nach den Fitparametern aufgelöst und anschließend die nach Gl. B.6 ermittelten Näherungswerte der Amplituden eingesetzt werden.

Zuletzt muß noch ein Maß für die Unsicherheiten dieser Fitparameter-Startwerte bestimmt werden. In der vorliegenden Analyse geschieht dies durch eine Fehlerfortpflanzung der gemäß Gl. B.5 abgeschätzten Amplitudenfehler, wobei mangels Kenntnis der Korrelationen dieser Fehler die Formel für den absoluten Maximalfehler angewandt wird. Um die Fehler der Modulationsamplituden abschätzen zu können, muß allerdings noch die obere Schranke  $M_2$  ermittelt werden, wofür die zweiten Ableitungen

$$\begin{aligned}
 \frac{d^2}{dx^2} (f(x) \cos kx) &= f''(x) \cos kx - 2kf'(x) \sin kx - k^2 f(x) \cos kx \\
 \frac{d^2}{dx^2} (f(x) \sin kx) &= f''(x) \sin kx + 2kf'(x) \cos kx - k^2 f(x) \sin kx
 \end{aligned} \tag{B.7}$$

quantitativ bekannt sein müssen. Dies ist aber beim anzupassenden Modell  $f(x)$  erst *nach* dem eigentlichen Fitvorgang, wenn die Modellparameter bekannt sind, der Fall<sup>1</sup>. Um nun eine iterative Vorgehensweise zu vermeiden,

---

<sup>1</sup>Prinzipiell kann man hier die ermittelten Startwerte einsetzen. Allerdings besteht bei manchen Parametern die Möglichkeit, die Startwerte auf mehrere unterschiedliche Arten zu bestimmen. Um die Zuverlässigkeit der Abschätzung zu erhöhen, wird in solchen Fällen für den endgültigen Startwert das mit dem inversen „Fehler“ gewichtete Mittel dieser Einzelwerte gewählt, weshalb schon für die Startwertbestimmung eine Kenntnis der Unsicherheiten erforderlich sein kann.

werden die Ableitungen von  $f(x)$  in Gl. B.7 numerisch über die entsprechenden Differenzenquotienten der Meßwerte  $\{y_0, \dots, y_N\}$  abgeschätzt.

Es ist zu beachten, daß hiermit keine echte Fehleranalyse der Startwerte vorliegt, da etwa die Unsicherheiten der zugrundeliegenden Meßwerte überhaupt nicht berücksichtigt wurden. Dies ist jedoch kein Mangel, da die so bestimmten „Unsicherheiten“ genau wie die Startwerte selbst lediglich als interne Ausgangspunkte für den jeweils verwendeten Optimierungsalgorithmus dienen sollen.

## B.2 Multinormaler Zufallszahlengenerator

An mehreren Stellen in der Datenanalyse und den vorbereitenden Untersuchungen besteht bzw. bestand die Notwendigkeit, mehrdimensionale Zufalls-  
werte mit nichtverschwindenden Korrelationen zwischen den Komponenten zu erzeugen. In allen Fällen ist die zugrundeliegende Verteilung eine multivariate Normalverteilung gemäß Gl. 5.1.

Anfänglich wurde zu diesem Zweck eine Programmroutine auf Basis der Verwerfungsmethode (*acceptance-rejection-Verfahren*) [146] erstellt. Dieses Verfahren ist zwar universell anwendbar, jedoch nicht sehr effizient, weil von den zunächst homogen erzeugten Zufallsvektoren ein mehr oder minder großer Anteil wieder verworfen wird, um die tatsächliche Verteilung gemäß der gewünschten Wahrscheinlichkeitsdichte „auszudünnen“. Diese Ineffizienz erhöht sich mit zunehmender Dimensionalität des Problems [170, S. 67], weshalb diese Methode insbesondere für die spätere Untersuchung systematischer Einflüsse (vgl. Abs. 6.3), bei der teilweise eine erhebliche Anzahl korrelierter Größen auftritt, ungeeignet ist.

Im Fall der multivariaten Normalverteilung ist es jedoch möglich, die Erzeugung eines  $d$ -dimensionalen Zufallsvektors auf die Erzeugung  $d$  unkorrelierter standardnormalverteilter Skalare zurückzuführen (siehe etwa [170]), wofür es effiziente Algorithmen gibt. Dieses Verfahren hat folgende Grundlage: Sei

$$\vec{X} \sim \mathcal{N}_d(\vec{\mu}, \Sigma)$$

eine  $d$ -dimensionale, multivariat normalverteilte Zufallsgröße mit Erwartungswert  $\vec{\mu}$  und Kovarianzmatrix  $\Sigma$ . Dann ist  $\Sigma$  notwendigerweise symmetrisch und positiv definit und es existiert die *Cholesky-Zerlegung*, d. h. eine untere Dreiecksmatrix  $L$ , so daß  $LL^T = \Sigma$ . Man kann nun zeigen, daß dann die transformierte Größe

$$\vec{Z} := L^{-1}(\vec{X} - \vec{\mu})$$

ebenfalls einer multivariaten Normalverteilung, allerdings mit Erwartungswert 0 und Kovarianzmatrix  $\mathbb{1}$ , unterliegt. Da die Komponenten von  $\vec{Z}$  somit untereinander unkorreliert sind, erhält man einen Vertreter  $\vec{z}$  dieser Größe einfach, indem man für jede Komponente einen standardnormalverteilten Skalar erzeugt. Die Rücktransformation

$$\vec{x} = L\vec{z} + \vec{\mu}$$

ergibt dann einen Vertreter von  $\vec{X}$ .

Eine solche Programmroutine wurde für die vorliegende Arbeit implementiert und mit dem bereits in Abs. 5.1 beschriebenen Test auf Normalverteilung auf ihre Korrektheit überprüft. Für die Erzeugung standardnormalverteilter Skalare wurde wiederum auf die entsprechende Funktionalität der *GNU scientific library* [65] zurückgegriffen.

### B.3 Prüfung des analytischen Gradienten der *NLL*-Funktion

Der im Rahmen dieser Analyse eingesetzte *Minuit*-Fitter (vgl. Abs. 5.2.2) verwendet intern das Verfahren der variablen Metrik [96], um das Minimum der Zielfunktion zu finden. Für dieses Verfahren muß nun bei jedem Iterationsschritt der Gradient der Zielfunktion ermittelt werden, weshalb sowohl Rechenaufwand als auch Unsicherheiten der resultierenden Fitparameter verringert werden können, indem der analytische Gradient durch den Anwender explizit vorgegeben wird, statt ihn durch Abtastung der Zielfunktion in der Umgebung des aktuellen Arbeitspunkts numerisch zu nähern.

Die vom *ROOT*-Programmpaket zur Verfügung gestellte Implementierung des *Minuit*-Fitters führt nun in dem Fall, daß der Anwender eine eigene Routine zur Berechnung des analytischen Gradienten vorgibt, eine numerische Prüfung dieses Gradienten durch, um eventuelle Programmierfehler seitens des Anwenders aufdecken zu können. Unter bestimmten Umständen – insbesondere, wenn die Startwerte einzelner Fitparameter klein im Vergleich zu ihren „Start-Unsicherheiten“ sind – versagt diese Methode jedoch und lehnt einen analytischen Gradienten ab, obwohl er korrekt implementiert wurde. Daher wurde für alle im Rahmen dieser Analyse definierten *NLL*-Zielfunktionen (bzw. deren Umsetzung in *C++*-Routinen) ein zusätzlicher Test eingeführt, um die Korrektheit des Gradienten sicherzustellen.

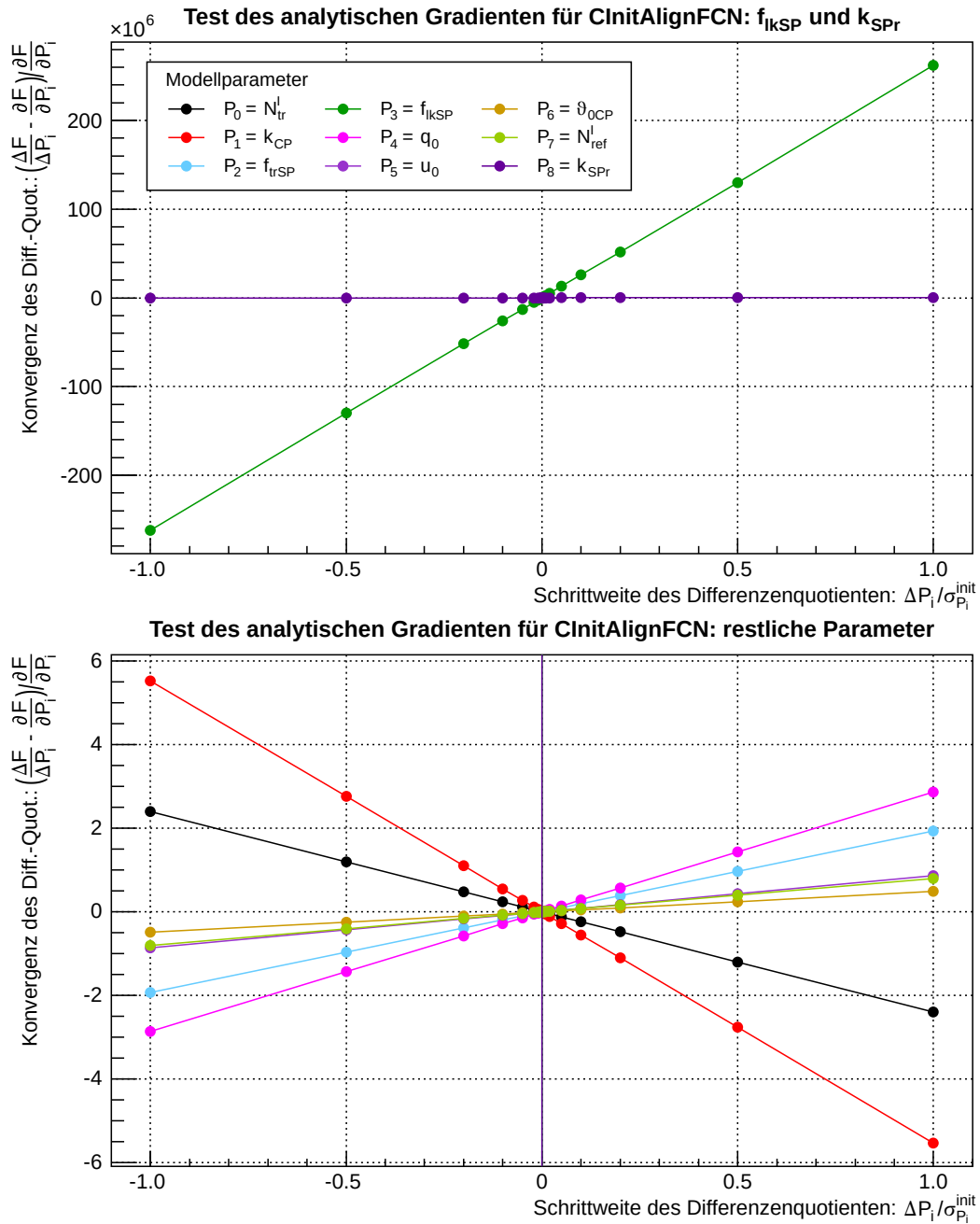
Für diesen Test werden die Startwerte  $\vec{p}_{init}$  der Fitparameter als Arbeitspunkt gewählt und für jeden Parameter des Modells separat der (partielle)

Differenzenquotient

$$D_k(\vec{p}_{init}) = \left. \frac{\Delta F}{\Delta p_k} \right|_{\vec{p}_{init}}$$

für einen gegebenen Abstand  $\Delta p_k$  des jeweiligen Parameters von seinem Startwert berechnet. Wenn diese Schrittweite immer weiter verringert wird, sollte der Differenzenquotient gegen den vom Anwender vorgegebenen Gradienten konvergieren. Im vorliegenden Fall wurde als Ausgangswert der Schrittweite jeweils die ebenfalls vorgegebene Start-Unsicherheit des betrachteten Parameters gewählt. Die Schrittweite wurde dann logarithmisch bis auf 1/100 des Ausgangswerts verringert und in negativer Richtung entsprechend wieder bis auf die volle Start-Unsicherheit vergrößert. Wenn der analytische Gradient korrekt bestimmt wurde, sollte die Abweichung des partiellen Differenzenquotienten von der zugehörigen analytisch bestimmten partiellen Ableitung, dargestellt als Funktion des Schrittweite, einen Nulldurchgang bei einer Schrittweite von 0 aufweisen.

Durch Anwendung dieses Verfahrens in denjenigen Fällen, in denen der analytische Gradient von der internen Prüfung des *Minuit*-Fitters abgelehnt wurde, konnte sichergestellt werden, daß die Implementierung des Gradienten in allen Fällen fehlerfrei ist. Dies ist exemplarisch in Abb. B.1 für den Fall der Analyse der Initialjustierung dargestellt: Man kann klar erkennen, daß die – hier auf die analytische partielle Ableitung normierte – Abweichung zwischen Differenzenquotient und analytischer Ableitung für alle Modellparameter einen Nulldurchgang bei einer Schrittweite von 0 aufweist, wodurch die Korrektheit des analytischen Gradienten nachgewiesen ist.



**Abbildung B.1:** Prüfung des analytischen Gradienten der *NLL*-Funktion am Beispiel der Initialjustierungsgruppe *GRbeam260509\_001*, bei der dieser von *Minuit* abgelehnt wurde. Die Schrittweite des Differenzenquotienten ist auf die Start-Unsicherheit des jeweiligen Parameters normiert. *Oben:* Der Differenzenquotient für den Parameter  $f_{ikSP}$ , aufgrund dessen der Gradient abgelehnt wurde, weist zwar eine extreme Steigung auf, konvergiert jedoch gegen die analytische Ableitung. – *Unten:* Konvergenz im Fall der übrigen Parameter.



# Anhang C

## Auswirkungen einer Fehlkalibrierung der Winkelskala

In Abschnitt 5.3 wurde die Notwendigkeit aufgezeigt, die Winkelskala des Wellenplatten-Drehtischs zu kalibrieren, indem einige Auswirkungen einer falschen Annahme über deren Ursprung aufgezeigt wurden. An dieser Stelle soll nun mathematisch aufgezeigt werden, wie eine solche Abweichung zu den beschriebenen Analysefehlern führt.

Hierzu wird nochmals das in Abs. 4.3 abgeleitete idealisierte Modell für die Winkelabhängigkeit der auf die Sensoren einfallenden Lichtintensität herangezogen, wobei der Einfachheit halber nur der Transmissionskanal betrachtet werden soll:

$$I(\vartheta) = \frac{1}{4} (2I + Q - 2V \sin 2\vartheta + U \sin 4\vartheta + Q \cos 4\vartheta) \quad (\text{C.1})$$

Wenn diese Funktion nun unter Zugrundelegung einer verschobenen Winkelskala

$$\vartheta_f = \vartheta + \vartheta_{err} \quad (\text{C.2})$$

ausgewertet wird, so entspricht dies einer Demodulation des Intensitätssignals mit einem Phasenfehler. Die Stokesparameter müssten dann eigentlich anhand der Amplituden des Modells

$$\begin{aligned} I(\vartheta_f) = \frac{1}{4} \{ & 2I + Q + 2V \sin 2\vartheta_{err} \cos 2\vartheta_f \\ & - 2V \cos 2\vartheta_{err} \sin 2\vartheta_f \\ & + (U \cos 4\vartheta_{err} + Q \sin 4\vartheta_{err}) \sin 4\vartheta_f \\ & + (Q \cos 4\vartheta_{err} - U \sin 4\vartheta_{err}) \cos 4\vartheta_f \} \end{aligned} \quad (\text{C.3})$$

bestimmt werden, würden aber fälschlicherweise nach Gl. C.1 ermittelt. Dies führt nicht nur zu deutlich größeren Fitresiduen aufgrund der vom Modell

nicht berücksichtigten, neu hinzugekommenen  $\cos 2\vartheta$ -Abhängigkeit, sondern auch zu falsch rekonstruierten Stokesparametern

$$\begin{aligned}
 \tilde{I} &= I + \frac{1}{2}Q(1 - \cos 4\vartheta_{err}) + \frac{1}{2}U \sin 4\vartheta_{err} \\
 \tilde{Q} &= Q \cos 4\vartheta_{err} - U \sin 4\vartheta_{err} \\
 \tilde{U} &= Q \sin 4\vartheta_{err} + U \cos 4\vartheta_{err} \\
 \tilde{V} &= V \cos 2\vartheta_{err}
 \end{aligned}
 \tag{C.4}$$

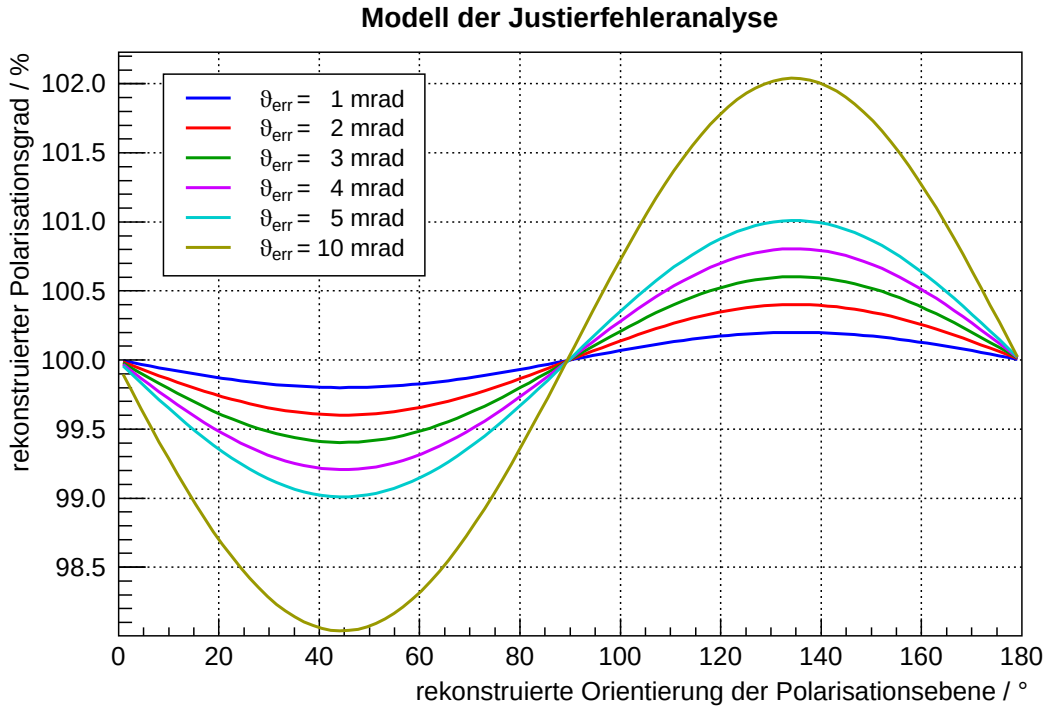
aus denen nicht nur unzutreffende, sondern sogar unphysikalische Polarisationsgrade resultieren können.

Dies läßt sich besonders einfach anhand von linearpolarisiertem Licht zeigen und stellte zugleich den ersten Hinweis auf die in Abs. 4.4.1 erwähnten konstruktionsbedingten Probleme beim Vorgängemodell des in dieser Arbeit beschriebenen Stokesmeter MkII dar: Im Rahmen von Testmessungen mit linearem Licht wechselnder Polarisationsrichtungen wurden deutlich schwankende Polarisationsgrade beobachtet, die teilweise sogar mehr als 100 % betrug. Eine genauere Untersuchung ergab schließlich, daß der Polarisationsgrad eine spezifische funktionale Abhängigkeit von der rekonstruierten Orientierung der Polarisationssebene aufwies, so daß es sich um einen systematischen Effekt handeln mußte. Diesen kann man nun folgendermaßen erklären: Ein vollständig linearpolarisierter Zustand, dessen Polarisationssebene einen Winkel  $\psi$  zur  $x$ -Achse einnimmt, ist durch die Stokesparameter

$$\begin{aligned}
 I &= I_0 \\
 Q &= I_0 \cos 2\psi \\
 U &= I_0 \sin 2\psi \\
 V &= 0
 \end{aligned}
 \tag{C.5}$$

charakterisiert. Wenn diese nun mit einer im Sinne von Gl. C.2 verschobenen Winkelskala rekonstruiert werden, so ergibt sich für die Polarisationssebene

$$\tilde{\psi} = \frac{1}{2} \arctan \frac{\tilde{U}}{\tilde{Q}} = \psi + 2\vartheta_{err}
 \tag{C.6}$$



**Abbildung C.1:** Auswirkung einer Verschiebung der Wellenplatten-Winkelskala. Dargestellt ist der falsch rekonstruierte Polarisationsgrad  $\tilde{p}$  in Abhängigkeit des falsch rekonstruierten Orientierungswinkels  $\tilde{\psi}$  der Polarisationsebene für verschiedene Werte des Justierfehlers  $\vartheta_{err}$ . Wie man sieht, ergäben sich bei manchen Winkeln sogar Polarisationsgrade von mehr als 100 %.

und für den Polarisationsgrad (siehe Gl. 4.12):

$$\begin{aligned}
 \tilde{p} &= \frac{\sqrt{\tilde{Q}^2 + \tilde{U}^2}}{\tilde{I}} \\
 &= \frac{1}{1 + \sin 2(\psi + \vartheta_{err}) \sin 2\vartheta_{err}} \\
 &= \frac{1}{1 + \sin 2(\tilde{\psi} - \vartheta_{err}) \sin 2\vartheta_{err}}
 \end{aligned} \tag{C.7}$$

Je nach Größe des Justierfehlers kann das Analyseresultat demnach in erheblichem Ausmaß verzerrt werden, wie man auch anhand von Abb. C.1 erkennt, wo dieser Zusammenhang graphisch dargestellt ist.

Andererseits ist es somit offenkundig möglich, den Justierfehler  $\vartheta_{err}$  zu bestimmen, indem man den beobachteten Zusammenhang zwischen den rekonstruierten Größen  $\tilde{p}$  und  $\tilde{\psi}$  analysiert. Zu diesem Zweck wurde als unmittelbare

Abhilfe für das seinerzeit festgestellte Problem die „Justierfehleranalyse“ eingeführt, bei der nach der Kalibration des damaligen Stokesmeters ein drehbares Glan-Laser-Prisma vor das Gerät montiert und der Polarisationszustand für verschiedene Orientierungen des Prismas gemessen wurde; ein Fit des Modells nach Gl. C.7 an die entsprechend aufgetragenen Analyseresultate ergab dann den Justierfehler. Wenngleich im Laufe der Untersuchungen schließlich festgestellt wurde, daß die verschobene Winkelskala nur ein Symptom der zugrundeliegenden Unzulänglichkeiten in der Konstruktion des alten Stokesmeters darstellte, hat sich das Verfahren der Justierfehleranalyse auch bei der Kalibration des neuen Stokesmeter MkII als letztlich sogar für unabdingbar befundener Bestandteil etabliert.

## Anhang D

# Untersuchungen zu den laserinduzierten Ablagerungen

Da das in Abs. 3.3.5 beschriebene Problem der strahlungsinduzierten Ablagerungen auf den optischen Elementen den Betrieb des Polarimeters erheblich erschwert, wurden im Laufe der Zeit verschiedene Untersuchungen durchgeführt, um Ursache und Auswirkungen dieses Phänomens weiter zu erforschen. Wie bereits erwähnt, wurden nun *zwei* verschiedene Ausprägungen des Phänomens gefunden: zum einen die aufgrund ihrer Form recht eindeutig dem Elektronenstrahl zuzuordnenden Depositionen auf der strahlabwärts gelegenen Optik (Umlenkspiegel  $M45$  und Vakuumfenster  $W0$ , vgl. Abb. 3.12), zum anderen die Ablagerung auf dem Vakuumfenster  $W45$ . Während erstgenannte nun sicherlich eine Störung darstellen, sind sie dennoch aus zwei Gründen ein geringeres Problem für den Betrieb des Polarimeters: Erstens konnten sie durch eine Verbesserung der Vakuumapparatur und regelmäßigen Austausch in ihrer Stärke begrenzt oder sogar vermieden werden, zweitens führen sie – wenn sie auftreten – zwar zu einer Verringerung der Laserleistung, beeinträchtigen aber nicht die Interpretation der Meßergebnisse des Polarimeters. Die Ablagerungen auf dem  $45^\circ$ -Fenster hingegen können zu einer unkontrollierten Änderung der Polarisations-Transfermatrix (vgl. Abs. 6.4) führen, die darüberhinaus zeitabhängig sein wird, da sich die Schichtdicke und somit die Größe des Effekts sicherlich im Laufe der Zeit ändert. Aus diesem Grund lag der Fokus der Untersuchungen auf dem Vakuumfenster  $W45$ .

### D.1 Natur und Ursache der Depositionen

Zunächst wurde versucht, die Ursache der beobachteten Depositionen zu klären. Hierzu wurde der Polarimeterresonator ohne Polarisationsoptik betrieben, um die Lichtintensität zu maximieren, und bei verschiedenen Testbedingungen geprüft, ob und ggf. wie schnell sich ein solcher Fleck auf dem

45°-Fenster bildet. Ein Schwerpunkt lag hierbei insbesondere auf der Unterscheidung, ob es sich um eine laserinduzierte Abscheidung aus der Gasphase handelt oder bereits auf der Oberfläche adsorbierte Moleküle durch die intensive Lichteinstrahlung aufgebrochen werden.

In einem ersten Schritt wurde das Vakuum durch Regeneration von in der Schikane installierten passiven Getterpumpen um ca. eine Größenordnung verbessert; hierbei ergab sich keine Änderung in der Schnelligkeit der Depositionsbildung. Anschließend wurde das Vakuumfenster durch ein zusätzliches „Schutzfenster“ gegen evtl. aus der Schikanenmitte dorthin driftende Restgasmoleküle abgeschirmt; hier wurde sowohl auf der Vakuumseite des 45°-Fensters als auch auf beiden Seiten des Schutzfensters die Bildung einer Ablagerung beobachtet. Wenngleich diese Untersuchungen lediglich qualitativer Natur waren und die Interpretation einiger Vorsicht bedarf, wurde hieraus die vorläufige Schlußfolgerung gezogen, daß die Ursache in bereits auf der Oberfläche befindlichen Verunreinigungen zu suchen ist. Bei Untersuchungen, die diesen Ansatz weiterverfolgen sollten, wurde dann die in Abs. 3.3.5 beschriebene präventive Wirkung des Kontakts mit einer Gasentladung festgestellt.

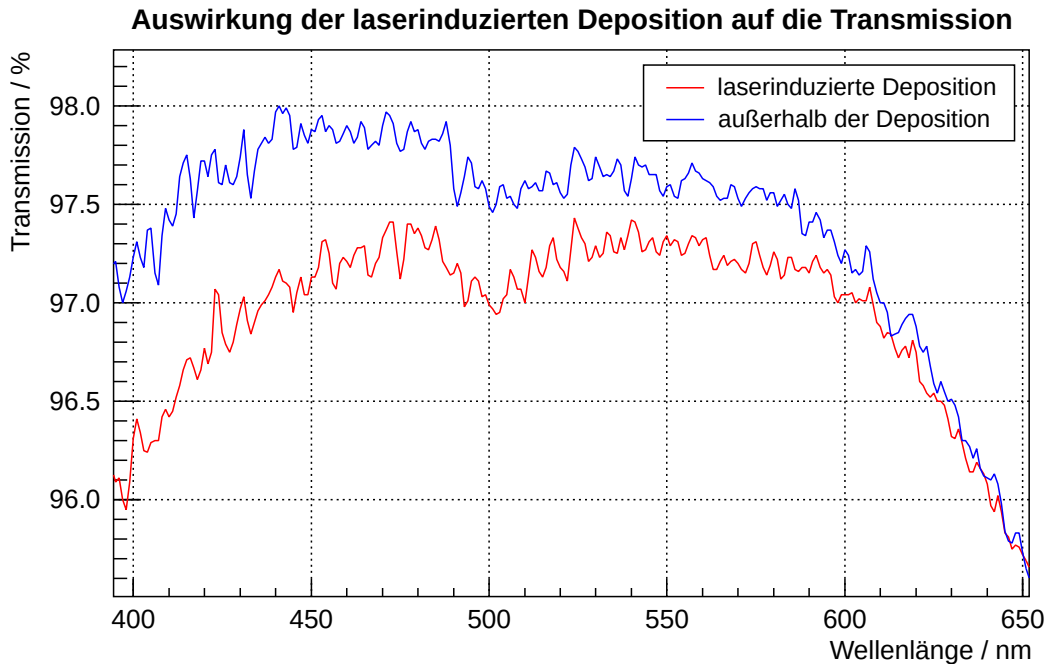
Parallel zu diesen Untersuchungen wurde versucht, die chemische Zusammensetzung der Ablagerungen zu verstehen, um hieraus ggf. weitere Maßnahmen zur Vermeidung des Problems ableiten zu können. Zu diesem Zweck wurde Kontakt mit der Arbeitsgruppe *KOMET* des Instituts für Physik aufgenommen, die sich mit der Untersuchung kondensierter Materie befaßt, wodurch sich im Juni 2009 die Möglichkeit ergab, die Ablagerungen mittels eines Rasterelektronenmikroskops JEOL<sup>1</sup> JSM-4600 unter Verwendung der energiedispersiven Röntgenspektroskopie (*EDX spectroscopy*) zu untersuchen. Leider mußte hierbei festgestellt werden, daß das Glassubstrat sich unter dem Elektronenbeschuß relativ schnell elektrostatisch auflädt, so daß die eigentlich angestrebte spektroskopische Elementenbestimmung aufgrund der gestörten Elektronentrajektorien unmöglich gemacht wird. Ein Versuch, den interessierenden Bereich mittels einer ringförmigen, geerdeten Elektrode zu umschließen und so die Aufladung zu vermeiden, erschien zwar erfolgversprechend, konnte jedoch aus Zeitgründen nicht weiterverfolgt werden.

## D.2 Wirkung auf die optischen Eigenschaften

Die offenkundigste Auswirkung der Ablagerungen besteht in einer verringerten Transmission des Vakuumfensters. Dies ist von Nachteil, weil jegliche

---

<sup>1</sup>Nihon Denshi K. K., 3-1-2 Musashino, Akishima, Tōkyō 196-8556, Japan



**Abbildung D.1:** Abschätzung der Transmissionsänderung infolge der laserinduzierten Depositionen anhand des Fensters *LEnS-Optics W060Q-10 AR/AR 475-530nm/45° #2-3*

Verluste innerhalb des Resonators zu deutlichen Einbußen in der Laserintensität und somit zu einer größeren statistischen Unsicherheit der Polarisationsmessung führen. Wenngleich es sich hierbei um ein untergeordnetes Problem (s. o.) handelt, wurden Messungen mit einem Spektrophotometer *Shimadzu UV2101PC*<sup>2</sup> in Verbindung mit einer Großraum-Probenkammer *Shimadzu MPC3100* durchgeführt, um die Größe des Effekts abschätzen zu können. Zu diesem Zweck wurde die Transmission eines solchermaßen beeinträchtigten Fensters einmal mit auf den Depositionsfleck zentriertem Meßstrahl und einmal weit außerhalb des beeinträchtigten Bereichs bestimmt. Das Ergebnis dieser Messung ist in Abb. D.1 dargestellt und zeigt deutlich die Änderung der Transmission; bei der Interpretation des Resultats ist zusätzlich noch zu beachten, daß der Strahlfleck des Meßinstrumentes auch im Fokus deutlich größer als die Fläche der Ablagerung ist, so daß die hier beobachtete Abnahme der Transmission aufgrund der „Verdünnung“ durch die unbeeinträchtigten Bereiche der Oberfläche kleiner als der eigentliche Effekt ausfällt.

<sup>2</sup>Shimadzu Seisakusho K. K., 1 Nishinokyō-Kuwabara-chō, Nakagyō-ku, Kyōto 604-8511, Japan

Analysis of transfer matrix group			
Dataset: TMbeam210709_004 Window: W2-PW1 AR/45° #091-143 S1	Dataset: TMfinal_meas_002 Window: W2-PW1 AR/45° #091-143 S1 w. depos.		
Reduced $W_{45}$ transfer matrix ( $m_{ij}$ )			
$\begin{pmatrix} 1 & 0.414 & 0.004 & -0.002 \\ 0.420 & 1.001 & 0.005 & 0.003 \\ 0.003 & -4 \times 10^{-4} & 0.801 & -0.447 \\ -0.002 & -0.005 & 0.432 & 0.798 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0.460 & 0.008 & 0.003 \\ 0.461 & 1.000 & 0.012 & -0.016 \\ 0.011 & 0.008 & 0.308 & 0.799 \\ 0.003 & 0.015 & -0.784 & 0.305 \end{pmatrix}$		
Matrix element statistical uncertainties $\sigma_{m_{ij}}$			
$\begin{pmatrix} - & 5.2 & 5.2 & 4.5 \\ 3.5 & 5.8 & 5.1 & 4.6 \\ 3.8 & 6.7 & 6.0 & 4.4 \\ 2.6 & 3.7 & 3.2 & 2.8 \end{pmatrix} \times 10^{-4}$	$\begin{pmatrix} - & 10 & 10 & 10 \\ 6.8 & 10 & 10 & 10 \\ 8.1 & 10 & 10 & 9.4 \\ 4.9 & 7.2 & 7.6 & 5.6 \end{pmatrix} \times 10^{-4}$		
Effect on fundamental polarization states			
<ul style="list-style-type: none"> <li>— no window</li> <li>— unused window</li> <li>— window w. depos.</li> </ul>	Horizontal linear pol.	Diagonal linear pol.	Right circular pol.

**Abbildung D.2:** Veränderung der Transfermatrix des 45°-Vakuumsfensters CVI/Melles-Griot W2-PW1 60×10M AR/AR 514.5nm/45° #091-143 durch die laserinduzierten Ablagerungen. *Links:* Transfermatrix des unbenutzten Fensters – *Rechts:* Transfermatrix des Fensters nach Bildung einer Ablagerung. Man erkennt deutlich die Unterschiede in der Wirkung auf die Polarisation; insbesondere erreichen die Polarisationsellipsen der am beeinträchtigten Fenster reflektierten Polarisationszustände nicht mehr den Referenzkreis, was auf eine depolarisierende Wirkung der Ablagerung hindeutet.

Die wichtigere Wirkung der laserinduzierten Depositionen ist nun allerdings die Änderung der Polarisations-Transfermatrix, weshalb eine Vergleichsmessung durchgeführt wurde, um diese quantitativ zu erfassen. Als Testexemplar wurde das Vakuumsfenster CVI/Melles-Griot W2-PW1 60×10M AR/AR 514.5nm/45° #091-143 ausgewählt, dessen Transfermatrix bereits im Rahmen der Messungsgruppe TMbeam210709\_004 vermessen worden war, auf dessen Oberfläche „S1“ sich allerdings während der Strahlzeit beam180809



schon innerhalb der ersten zwei Tage ein laserinduzierter Fleck gebildet hatte. Um die Transfermatrix des beeinträchtigten Bereichs zu messen, wurde ein dedizierter Schnellwechselrahmen (vgl. Abb. 6.23) entworfen, bei dem dieser Fleck auf die Strahlachse des Ellipsometrie-Meßplatzes zentriert wird. In Abb. D.2 ist das Resultat dieser Messung ( $TM_{final\_meas\_002}$ ) im Vergleich zu der im unbenutzten Zustand bestimmten Transfermatrix dargestellt; wie man sieht, verändert die Ablagerung nicht nur die doppelbrechenden Eigenschaften der Oberfläche, sondern bewirkt auch eine Depolarisierung des Lichts. Letzteres ist für eine diffus reflektierende Substanz sicherlich zu erwarten, unterstreicht aber zusätzlich die Notwendigkeit, diese Art von Beeinträchtigung der optischen Elemente zu vermeiden. Auch hier ist im übrigen zu berücksichtigen, daß die Größe des Effekts wahrscheinlich unterschätzt sein wird, da der laserinduzierte Fleck in diesem Fall deutlich die auf eine „doughnut“-Mode (vgl. Abs. 6.5.4) zurückzuführende Ringform aufweist, wohingegen der Laserstrahl im Doppelbrechungs-Meßaufbau deutlich besser zu kontrollieren ist und somit auf der Grundmode schwingt. Auch hier wird somit eine Mischung von beeinträchtigter und unbeeinträchtigter Oberfläche des Fensters abgetastet worden sein, was wiederum eine Verdünnung des Meßergebnisses zur Folge hat.



# Literaturverzeichnis

- [1] Adeva, B. *et al.*: *Polarised quark distributions in the nucleon from semi-inclusive spin asymmetries*. Physics Letters B, 420:180 – 190, 1998.
- [2] Alexander-Katz, R. und R. G. Barrera: *Surface correlation effects on gloss*. Journal of Polymer Science B: Polymer Physics, 36:1321 – 1334, 1998.
- [3] Anderson, T. W.: *An introduction to multivariate statistical analysis*. John Wiley & Sons, Hoboken, NJ, 3. Auflage, 2003, ISBN 978-0-471-36091-9.
- [4] Androić, D. *et al.*: *Strange quark contributions to parity-violating asymmetries in the backward angle  $G_0$  electron scattering experiment*. Physical Review Letters, 104:012001, 2010.
- [5] Aniol, K. A. *et al.*: *Parity-violating electron scattering from  $^4\text{He}$  and the strange electric form factor of the nucleon*. Physical Review Letters, 96:022003, 2006.
- [6] Archard, J. F. und A. M. Taylor: *Improved Glan-Foucault Prism*. Journal of Scientific Instruments, 25:407 – 409, 1948.
- [7] Armstrong, D. S. und R. D. McKeown: *Parity-violating electron scattering and the electric and magnetic strange form factors of the nucleon*. Annual Review of Nuclear and Particle Science, 62:337 – 359, 2012.
- [8] Arzner, K. *et al.*: *Unbinned maximum-likelihood estimators for low-count data*. Astronomy and Astrophysics, 468:501 – 514, 2007.
- [9] Ashman, J. *et al.*: *A measurement of the spin asymmetry and determination of the structure function  $g_1$  in deep inelastic muon-proton scattering*. Physics Letters B, 206:364 – 370, 1988.
- [10] Aulenbacher, K.: *Erzeugung intensiver hochpolarisierter Elektronenstrahlen mit hoher Symmetrie unter Helizitätswechsel*. Habilitationsschrift, Johannes Gutenberg-Universität, Mainz, Juli 2007.

- [11] Aulenbacher, K.: *Helicity correlated asymmetries caused by optical imperfections*. European Physical Journal A, 32:543 – 547, 2007.
- [12] Aulenbacher, K.: *Polarized beams for electron accelerators*. European Physical Journal Special Topics, 198:361 – 380, 2011.
- [13] Aulenbacher, K. und V. Tioukine: *Ab initio calculation of effective Sherman functions in MeV Mott scattering*. In: Crabb, D. G., Y. Prok, M. Poelker, S. Liuti, D. B. Day und X. Zheng (Herausgeber): *Proceedings of the 18th international spin physics symposium, Charlottesville, VA (USA), 2008*, Band 1149 der Reihe *AIP Conference Proceedings*, Seiten 1155 – 1159, 2009, ISBN 978-0-7354-0686-5.
- [14] Baier, V. N. und V. A. Khoze: *Determination of the transverse polarization of high-energy electrons*. Soviet Journal of Nuclear Physics, 9:238 – 239, 1969.
- [15] Balaguer Ríos, D. *et al.*: *Measurement of the parity violating asymmetry in the quasielastic electron-deuteron scattering and improved determination of the magnetic strange form factor and the isovector anapole radiative correction*. Physical Review D, 94:051101(R), 2016.
- [16] Barber, D. P. *et al.*: *The HERA polarimeter and the first observation of electron spin polarization at HERA*. Nuclear Instruments and Methods in Physics Research A, 329:79 – 111, 1993.
- [17] Bardin, G. *et al.*: *Conceptual design report of a Compton polarimeter for CEBAF Hall A*. Technischer Bericht DAPNIA/SPhN/96-14, CEA, Gif-sur-Yvette, Mai 1996.
- [18] Barrick, D. E.: *Rough surface scattering based on the specular point theory*. IEEE Transactions on Antennas and Propagation, 16:449 – 454, 1968.
- [19] Bartsch, P.: *Aufbau eines Møller-Polarimeters für die Drei-Spektrometer-Anlage und Messung der Helizitätsasymmetrie in der Reaktion  $p(\vec{e}, e'p)\pi^0$  im Bereich der  $\Delta$ -Resonanz*. Dissertation, Johannes Gutenberg-Universität, Mainz, 2001.
- [20] Bauer, C. *et al.*: *Introduction to the GiNaC framework for symbolic computation within the C++ programming language*. Journal of Symbolic Computation, 33:1 – 12, 2002.

- 
- [21] Baunack, S.: *Single spin asymmetries in the (quasi)elastic electron-proton and electron-deuteron scattering*. European Physical Journal Special Topics, 198:343 – 359, 2011.
- [22] Baunack, S. *et al.*: *Measurement of strange quark contributions to the vector form factors of the proton at  $Q^2 = 0.22 (\text{GeV}/c)^2$* . Physical Review Letters, 102:151803, 2009.
- [23] Baunack, S. *et al.*: *Measurement of the axial and the strangeness magnetic form factor of the proton with a P2 backward angle setup*. In: Milner, R., R. Carlini und F. Maas (Herausgeber): *Proceedings of the Workshop to explore Physics Opportunities with intense, polarized Electron Beams at 50 – 300 MeV, Cambridge, MA (USA), 2013*, Band 1563 der Reihe *AIP Conference Proceedings*, Seiten 73 – 77, 2013, ISBN 978-0-7354-1191-3.
- [24] Beck, D. H.: *Strange-quark vector currents and parity-violating electron scattering from the nucleon and from nuclei*. Physical Review D, 39:3248 – 3256, 1989.
- [25] Beckmann, M. *et al.*: *The longitudinal polarimeter at HERA*. Nuclear Instruments and Methods in Physics Research A, 479:334 – 348, 2002.
- [26] Beckmann, P. und A. Spizzichino: *The scattering of electromagnetic waves from rough surfaces*, Band 4 der Reihe *International Series of Monographs on electromagnetic Waves*. Pergamon Press, Oxford, 1. Auflage, 1963.
- [27] Bennett, H. E. und J. O. Porteus: *Relation between surface roughness and specular reflectance at normal incidence*. Journal of the Optical Society of America, 51:123 – 129, 1961.
- [28] Beran, R. und P. Hall: *Interpolated nonparametric prediction intervals and confidence intervals*. Journal of the Royal Statistical Society B („Methodological“), 55:643 – 652, 1993.
- [29] Bever, L. V. de *et al.*: *A target for precise Møller polarimetry*. Nuclear Instruments and Methods in Physics Research A, 400:379 – 386, 1997.
- [30] Bigerelle, M. *et al.*: *Relevance of roughness parameters for describing and modelling machined surfaces*. Journal of Materials Science, 38:2525 – 2536, 2003.

- [31] Boggs, P. T., R. H. Byrd und R. B. Schnabel: *A stable and efficient algorithm for nonlinear orthogonal distance regression*. SIAM Journal on Scientific and Statistical Computing, 8:1052 – 1078, 1987.
- [32] Boggs, P. T. *et al.*: *Algorithm 676: ODRPACK: Software for weighted orthogonal distance regression*. ACM Transactions on Mathematical Software, 15:348 – 364, 1989.
- [33] Bouchiat, C. und L. Michel: *Mesure de la polarisation des électrons relativistes*. Nuclear Physics, 5:416 – 434, 1958.
- [34] Brodmann, R. und G. Thurn: *Roughness measurement of ground, turned and shot-peened surfaces by the light scattering method*. Wear, 109:1 – 13, 1986.
- [35] Bronstein, I., A. Semendjajew, G. Musiol und H. Mühlig: *Taschenbuch der Mathematik*. Harri Deutsch, Frankfurt, 3. Auflage, 1997, ISBN 3-8171-2003-6.
- [36] Brun, R. und F. Rademakers: *ROOT – An object oriented data analysis framework*. Nuclear Instruments and Methods in Physics Research A, 389:81 – 86, 1996.
- [37] Butler, S. D. *et al.*: *Comparison of microfacet BRDF model to modified Beckmann-Kirchhoff-BRDF model for rough and smooth surfaces*. Optics Express, 23:29100 – 29112, 2015.
- [38] Cates, G. D. *et al.*: *The Bates polarized electron source*. Nuclear Instruments and Methods in Physics Research A, 287:293 – 317, 1989.
- [39] Chen, L. und S. S. Shapiro: *An alternative test for normality based on normalized spacings*. Journal of Statistical Computation and Simulation, 53:269 – 287, 1995.
- [40] Chudakov, E. und V. Luppov: *Møller polarimetry with atomic hydrogen targets*. IEEE Transactions on Nuclear Science, 51:1533 – 1540, 2004.
- [41] Clarke, D. und J. F. Grainger: *Polarized Light and Optical Measurement*, Band 35 der Reihe *International Series of Monographs in Natural Philosophy*. Pergamon Press, Oxford, 1. Auflage, 1971.
- [42] Compton, A.: *A quantum theory of the scattering of X-rays by light elements*. Physical Review, 21:483 – 502, 1923.

- [43] Compton, A.: *The spectrum of scattered X-rays*. Physical Review, 22:409 – 413, 1923.
- [44] Cooper, P. S. *et al.*: *Polarized electron-electron scattering at GeV energies*. Physical Review Letters, 34:1589 – 1592, 1975.
- [45] Dax, W. *et al.*: *Tabellenbuch für Metalltechnik*. Verlag Handwerk und Technik, Hamburg, 8. Auflage, 1999, ISBN 3-582-3291-4.
- [46] Dehn, M. *et al.*: *The MAMI C accelerator*. European Physical Journal Special Topics, 198:19 – 47, 2011.
- [47] Diefenbach, J.: *Aufbau einer elektronischen Stabilisierung für das A4-Compton-Polarimeter*. Diplomarbeit, Johannes Gutenberg-Universität, Mainz, Februar 2003.
- [48] Diefenbach, J.: *Bestimmung der Analysierstärke des A4-Compton-Rückstreupolarimeters zur Messung der longitudinalen Spinpolarisation des MAMI-Elektronenstrahls*. Dissertation, Johannes Gutenberg-Universität, Mainz, Juli 2010.
- [49] Doerk, Th.: *Entwurf und Erprobung einer Anordnung zur kontinuierlichen und hochauflösenden Messung der Endenergie des Mainzer Mikrotrens MAMI*. Diplomarbeit, Johannes Gutenberg-Universität, Mainz, Oktober 1996.
- [50] Doll, D. *et al.*: *A counting silicon microstrip detector for precision Compton polarimetry*. Nuclear Instruments and Methods in Physics Research A, 492:356 – 364, 2002.
- [51] Dollan, R. *et al.*: *Low energy positron polarimetry for the ILC*. In: Frey, A. und S. Riemann (Herausgeber): *Proceedings of the international linear collider workshop, Hamburg (Germany), 2007*, Band 1, Seiten 880 – 885. DESY, Oktober 2008, ISBN 978-3-935702-27-0.
- [52] Drever, R. W. P. *et al.*: *Laser phase and frequency stabilization using an optical resonator*. Applied Physics B, 31:97 – 105, 1983.
- [53] Dyug, M. V. *et al.*: *Møller polarimeter for VEPP-3 storage ring based on internal polarized gas jet target*. Nuclear Instruments and Methods in Physics Research A, 536:338 – 343, 2005.

- [54] Düren, M.: *Prototype of an internal laser cavity system for polarized Compton backscattering*. Technischer Bericht HERMES-00-005, DESY, Hamburg, März 2000.
- [55] Elfouhaily, T. M. und C.-A. Guérin: *A critical survey of approximate scattering wave theories from random rough surfaces*. Waves in Random Media, 14:R1 – R40, 2004.
- [56] Escoffier, S.: *Mesure précise de la polarisation du faisceau d'électrons à TJNAF par polarimétrie Compton pour les expériences  $G_E^p$  et  $N - \Delta$* . Dissertation, Université Paris 7 – Denis Diderot, Oktober 2001.
- [57] Escoffier, S. *et al.*: *Accurate measurement of the electron beam polarization in JLab Hall A using Compton polarimetry*. Nuclear Instruments and Methods in Physics Research A, 551:563 – 574, 2005.
- [58] Falletto, N. *et al.*: *Compton scattering off polarized electrons with a high finesse Fabry-Pérot cavity at JLab*. Nuclear Instruments and Methods in Physics Research A, 459:412 – 425, 2001.
- [59] Farrell, P. J. *et al.*: *On tests for multivariate normality and associated simulation studies*. Journal of Statistical Computation and Simulation, 77:1065 – 1080, 2007.
- [60] Franz, W.: *Die Streuung von Strahlung am magnetischen Elektron*. Annalen der Physik, 425:698 – 707, 1938.
- [61] Frauenfelder, H. *et al.*: *Parity and electron polarization:  $Au^{198}$* . Physical Review, 107:909 – 910, 1957.
- [62] Frauenfelder, H. *et al.*: *Parity and electron polarization: Møller scattering*. Physical Review, 107:643 – 644, 1957.
- [63] Frauenfelder, H. *et al.*: *Parity and the polarization of electrons from  $Co^{60}$* . Physical Review, 106:386 – 387, 1957.
- [64] Furman, M. A.: *The Møller luminosity factor*. Technischer Bericht LBNL-53553, Lawrence Berkeley National Laboratory, Berkeley, CA, September 2003.
- [65] Galassi, M. *et al.*: *GNU Scientific Library Reference Manual*. Network Theory Ltd., Bristol, 3. Auflage, Januar 2009, ISBN 978-0-9546120-7-8.



- [66] Gaskell, D. *et al.*: *New methods for precision Møller polarimetry*. European Physical Journal A, 32:561 – 564, 2007.
- [67] Gasser, J., H. Leutwyler und M. E. Sainio: *Sigma-term update*. Physics Letters B, 253:252 – 259, 1991.
- [68] Gay, T. J. und F. B. Dunning: *Mott electron polarimetry*. Review of Scientific Instruments, 63:1635 – 1651, 1992.
- [69] Gay, T. J. *et al.*: *Extrapolation procedures in Mott electron polarimetry*. Review of Scientific Instruments, 63:114 – 130, 1992.
- [70] Geary, R. C.: *The ratio of the mean deviation to the standard deviation as a test of normality*. Biometrika, 27:310 – 332, 1935.
- [71] Geiger, P. und N. Isgur: *Strange hadronic loops of the proton: a quark model calculation*. Physical Review D, 55:299 – 310, 1997.
- [72] Gell-Mann, M.: *A schematic model of baryons and mesons*. Physics Letters, 8:214 – 215, 1964.
- [73] Glamazdin, O.: *Møller (iron foils) existing techniques*. In: *Proceedings of the workshop on parity violation and hadronic structure (PAVI) 2011, Rome (Italy), 2011*, Seiten 176 – 180, 2012.
- [74] Gnanadesikan, R. und J. R. Kettenring: *Robust estimates, residuals, and outlier detection with multiresponse data*. Biometrics, 28:81 – 124, 1972.
- [75] Gosset, W. S.: *The probable error of a mean*. Biometrika, 6:1 – 25, 1908. [publiziert unter dem Pseudonym „Student“].
- [76] Halzen, F. und A. D. Martin: *Quarks and Leptons*. John Wiley & Sons, 1. Auflage, 1984, ISBN 0-471-88741-2.
- [77] Hammel, Th.: *Luminositätsmessung und Korrektur helizitätskorrelierter Effekte für ein Experiment zur Messung der Paritätsverletzung in der elastischen Elektronenstreuung*. Dissertation, Johannes Gutenberg-Universität, Mainz, Oktober 2003.
- [78] Hauger, M. *et al.*: *A high-precision polarimeter*. Nuclear Instruments and Methods in Physics Research A, 462:382 – 392, 2001.

- [79] Heinrich, J.: *Pitfalls in goodness-of-fit from likelihood*. In: Lyons, L., R. Mount und R. Reitmeyer (Herausgeber): *Proceedings of the conference on statistical problems in particle physics, astrophysics and cosmology (PHYSTAT), Stanford, CA (USA) 2003*, Seiten 52 – 55, 2003.
- [80] Heitler, W.: *The quantum theory of radiation*. International Series of Monographs in Physics. Oxford University Press, London, 3. Auflage, 1954.
- [81] Henze, N.: *Invariant tests for multivariate normality: a critical review*. Statistical Papers, 43:467 – 506, 2002.
- [82] Henze, N. und B. Zirkler: *A class of invariant consistent tests for multivariate normality*. Communications in Statistics – Theory and Methods, 19:3595 – 3617, 1990.
- [83] Herminghaus, H.: *From MAMI to the Polytrons – Microtrons in the 10 GeV range*. In: Henke, H., H. Homeyer und Ch. Petit-Jean-Genaz (Herausgeber): *Proceedings of the 3rd European particle accelerator conference, Berlin (Germany), 1992*, Band 1, Seiten 247 – 251, Gif-sur-Yvette, 1992. Edition Frontières.
- [84] Herminghaus, H. *et al.*: *Status report on the normal conducting cw racetrack microtron cascade MAMI*. IEEE Transactions on Nuclear Science, NS-30:3274 – 3278, 1983.
- [85] Hertz, H.: *Ueber Strahlen elektrischer Kraft*. Annalen der Physik, 272:769 – 783, 1889.
- [86] Hettmansperger, T. P. und S. J. Sheather: *Confidence intervals based on interpolated order statistics*. Statistics and Probability Letters, 4:75 – 79, 1986.
- [87] Hoo, Y. H. S. und S. M. S. Lee: *Calibrated interpolated confidence intervals for population quantiles*. Biometrika, 92:234 – 241, 2005.
- [88] Hosking, J. R. M. und J. R. Wallis: *Regional frequency analysis: an approach based on L-moments*. Cambridge University Press, Cambridge, 1997, ISBN 0-521-43045-3.
- [89] Hotelling, H.: *The generalization of Student's ratio*. Annals of Mathematical Statistics, 2:360 – 378, 1931.

- 
- [90] Huber, P. J.: *Robust estimation of a location parameter*. Annals of Mathematical Statistics, 35:73 – 101, 1964.
- [91] Hurwitz, Jr., H.: *The statistical properties of unpolarized light*. Journal of the Optical Society of America, 35:525 – 531, 1945.
- [92] Imai, Y.: *Entwicklung eines optischen Systems für ein Compton-Rückstreupolarimeter*. Diplomarbeit, Johannes Gutenberg-Universität, Mainz, Februar 2003.
- [93] Isakovich, M. A.: *Wave scattering from a statistically rough surface*. Journal of Experimental and Theoretical Physics, 23:305 – 314, 1952.
- [94] Ito, T. *et al.*: *Parity-violating electron deuteron scattering and the proton's neutral weak axial vector form factor*. Physical Review Letters, 92:102003, 2004.
- [95] James, F.: *Interpretation of the shape of the likelihood function around its minimum*. Computer Physics Communications, 20:29 – 35, 1980.
- [96] James, F. und M. Roos: *MINUIT – A system for function minimization and analysis of the parameter errors and correlations*. Computer Physics Communications, 10:343 – 367, 1975.
- [97] Jankowiak, A.: *The Mainz Microtron MAMI – Past and future*. European Physical Journal A, 28:149 – 160, 2006.
- [98] Johnson, R. A. und D. W. Wichern: *Applied Multivariate Statistical Analysis*. Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ, 3. Auflage, 1992, ISBN 0-13-041773-4.
- [99] Jones, D. C.: *Measuring the weak charge of the proton via elastic electron-proton scattering*. Dissertation, University of Virginia, Oktober 2015.
- [100] Jones, R. C.: *A new calculus for the treatment of optical systems I*. Journal of the Optical Society of America, 31:488 – 493, 1941.
- [101] Jones, R. C.: *A new calculus for the treatment of optical systems IV*. Journal of the Optical Society of America, 32:486 – 493, 1942.
- [102] Kaiser, K.-H. *et al.*: *New installations and beam measurements at MAMI*. In: Myers, S., L. Liljeby, Ch. Petit-Jean-Genaz, J. Poole und K. G.

- Rensfelt (Herausgeber): *Proceedings of the 6th European particle accelerator conference, Stockholm (Sweden), 1998*, Seiten 523 – 525. CRC Press, 1998, ISBN 978-075035792.
- [103] Kaplan, D. B. und A. Manohar: *Strange matrix elements in the proton from neutral-current experiments*. Nuclear Physics B, 310:527 – 547, 1988.
- [104] Kearns, K. *et al.*: *Bias-free parameter estimation with few counts, by iterative chi-squared minimization*. In: Shaw, R. A., H. E. Payne und J. J. E. Hayes (Herausgeber): *Proceedings of the 4th Astronomical Data Analysis Software and Systems Conference, Baltimore, MD (USA) 1994*, Band 77 der Reihe *ASP Conference Series*, Seiten 331 – 334, 1995.
- [105] Kenney, J. F.: *Mathematics of Statistics, Part two*. Chapman & Hall Ltd., London, 1940.
- [106] Khakoo, M. A. *et al.*: *Monte Carlo studies of Mott scattering asymmetries from gold foils*. Physical Review A, 64:052713, 2001.
- [107] Khamsi, H. R. *et al.*: *Rough surface scattering based on facet model*. Technischer Bericht NASA-CR-141869, National Aeronautics and Space Administration, Houston, TX, November 1974.
- [108] Kinoshita, K.: *Evaluating quality-of-fit in unbinned maximum likelihood fitting*. In: Lyons, L. und M. Whalley (Herausgeber): *Proceedings of the workshop on Advanced Statistical Techniques in Particle Physics (ASTPP), Durham (UK) 2002*, Seiten 176 – 181, 2002.
- [109] Kinoshita, K.: *An unbinned goodness-of-fit test based on the random walk*. In: Lyons, L., R. Mount und R. Reitmeyer (Herausgeber): *Proceedings of the conference on statistical problems in particle physics, astrophysics and cosmology (PHYSTAT), Stanford, CA (USA) 2003*, Seiten 56 – 60, 2003.
- [110] Klein, O. und Y. Nishina: *Über die Streuung von Strahlung durch freie Elektronen nach der neuen relativistischen Quantendynamik von Dirac*. Zeitschrift für Physik, 51:853 – 868, 1929.
- [111] Kligler, D. S., J. W. Lewis und C. Einterz-Randall: *Polarized light in optics and spectroscopy*. Academic Press Inc., San Diego, CA, 1990, ISBN 0-12-414975-8.

- 
- [112] Kogelnik, H. und T. Li: *Laser Beams and Resonators*. Applied Optics, 5:1550 – 1567, 1966.
- [113] Kolmogorov, A. N.: *Sulla determinazione empirica di una legge di distribuzione*. Giornale dell’Istituto Italiano degli Attuari, 4:83 – 91, 1933.
- [114] Koschinsky, M. und F. Kneer: *On the use of Bowen compensators for polarimetry*. Astronomy and Astrophysics Supplement Series, 119:171 – 176, 1996.
- [115] Kothe, R.: *Aufbau und Betrieb einer schnellen Kalorimeterelektronik für ein Experiment zur Messung der Paritätsverletzung in der elastischen Elektronenstreuung*. Dissertation, Johannes Gutenberg-Universität, Mainz, Januar 2008.
- [116] Kukush, A. und S. van Huffel: *Consistency of elementwise-weighted total least squares estimator in a multivariate errors-in-variables model  $AX = B$* . Metrika, 59:75 – 97, 2004.
- [117] Lee, J.-H.: *Concept and Realization of the A4 Compton Backscattering Polarimeter at MAMI*. Dissertation, Johannes Gutenberg-Universität, Mainz, Dezember 2008.
- [118] Lenhard, J.: *Models and statistical inference: the controversy between Fisher and Neyman – Pearson*. British Journal for the Philosophy of Science, 57:69 – 91, 2006.
- [119] Lenstra, Jr., H. W.: *Factoring integers with elliptic curves*. Annals of Mathematics, 126:649 – 673, 1987.
- [120] Levchuk, L. G.: *The intra-atomic motion of bound electrons as a possible source of the systematic error in electron beam polarization measurements by means of a Möller polarimeter*. Nuclear Instruments and Methods in Physics Research A, 345:496 – 499, 1994.
- [121] Lipps, F. W. und H. A. Tolhoek: *Polarization phenomena of electrons and photons*. Physica, 20:85 – 98 und 395 – 405, 1954.
- [122] Liu, J. et al.: *Global analysis of nucleon strange form factors at low  $Q^2$* . Physical Review C, 76:025202, 2007.
- [123] Maas, F. E.: *Parity-violating electron scattering at the MAMI facility in Mainz*. European Physical Journal A, 17:339 – 343, 2003.

- [124] Maas, F. E. *et al.*: *Measurement of strange-quark contributions to the nucleon's form factors at  $Q^2 = 0.230 \text{ (GeV/c)}^2$* . Physical Review Letters, 93:022002, 2004.
- [125] Mardia, K. V. und J. T. Kent: *Rao score tests for goodness of fit and independence*. Biometrika, 78:355 – 363, 1991.
- [126] Maritz, J. S. und R. G. Jarrett: *A note on estimating the variance of the sample median*. Journal of the American Statistical Association, 73:194 – 196, 1978.
- [127] Markovsky, I. *et al.*: *The element-wise weighted total least-squares problem*. Computational Statistics and Data Analysis, 50:181 – 209, 2006.
- [128] Markovsky, I. und S. van Huffel: *Overview of total least-squares methods*. Signal Processing, 87:2283 – 2302, 2007.
- [129] Maxwell, J. C.: *A dynamical theory of the electromagnetic field*. Philosophical transactions of the Royal Society of London, 155:459 – 512, 1865.
- [130] McKean, J. W. und R. M. Schrader: *A comparison of methods for studentizing the sample median*. Communications in Statistics – Simulation and Computation, 13:751 – 773, 1984.
- [131] McKeown, R. D.: *Sensitivity of polarized elastic electron-proton scattering to the anomalous baryon number magnetic moment*. Physics Letters B, 219:140 – 142, 1989.
- [132] Mecking, B. A. *et al.*: *The CEBAF large acceptance spectrometer*. Nuclear Instruments and Methods in Physics Research A, 503:513 – 553, 2003.
- [133] Mecklin, C. J. und D. J. Mundfrom: *An appraisal and bibliography of tests for multivariate normality*. International Statistical Review, 72:123 – 138, 2004.
- [134] Mecklin, C. J. und D. J. Mundfrom: *A Monte Carlo comparison of the Type I and Type II error rates of tests of multivariate normality*. Journal of Statistical Computation and Simulation, 75:93 – 107, 2005.
- [135] Mendelejeff, D.: *Über die Beziehungen der Eigenschaften zu den Atomgewichten der Elemente*. Zeitschrift für Chemie, 12:405 – 406, 1869.

- 
- [136] Miller, G. A.: *Nucleon charge symmetry breaking and parity violating electron-proton scattering*. Physical Review C, 57:1492 – 1505, 1998.
- [137] Møller, C.: *Zur Theorie des Durchgangs schneller Elektronen durch Materie*. Annalen der Physik, 406:531 – 585, 1932.
- [138] Mora Espí, M. C.: *Development of a new photon detector for the A4-Compton backscattering polarimeter at MAMI*. Diplomarbeit, Johannes Gutenberg-Universität, Mainz, August 2007.
- [139] Moré, J. J. und D. C. Sorenson: *Computing a trust region step*. SIAM Journal on Scientific and Statistical Computing, 4:553 – 572, 1983.
- [140] Mueller, B. *et al.*: *Measurement of the proton's neutral weak magnetic form factor*. Physical Review Letters, 78:3824 – 3827, 1997.
- [141] Mueller, H.: *The foundations of optics*. Journal of the Optical Society of America, 38:661, 1948. [Paper abstracts of the 1948 Winter Meeting of the Optical Society of America].
- [142] Musolf, M. J. *et al.*: *Intermediate-energy semileptonic probes of the hadronic neutral current*. Physics Reports, 239:1 – 178, 1994.
- [143] Napoly, O.: *The luminosity for beam distributions with error and wakefield effects in linear colliders*. Particle Accelerators, 40:181 – 203, 1993.
- [144] Narayan, A. *et al.*: *Precision electron-beam polarimetry at 1 GeV using diamond microstrip detectors*. Physical Review X, 6:011013, 2016.
- [145] Nee, S.-M. F., C. Yoo, T. Cole und D. Burge: *Characterization for imperfect polarizers under imperfect conditions*. Applied Optics, 37:54 – 64, 1998.
- [146] Neumann, J. von: *Various techniques used in connection with random digits*. In: Householder, A. S., G. E. Forsythe und H. H. Germond (Herausgeber): *Monte Carlo Method*, Band 12 der Reihe *National Bureau of Standards Applied Mathematics Series*, Seiten 36 – 38. U.S. Government Printing Office, Washington, D.C., 1951.
- [147] Nicodemus, F. E.: *Directional reflectance and emissivity of an opaque surface*. Applied Optics, 4:767 – 775, 1965.

- [148] Nishina, Y.: *Die Polarisation der Compton-Streuung nach der Diracschen Theorie des Elektrons*. Zeitschrift für Physik, 51:869 – 877, 1929.
- [149] Nousek, J. und D. Shue:  $\chi^2$  and *C* statistic minimization for low count per bin data. Astrophysical Journal, 342:1207 – 1211, 1989.
- [150] Ogilvy, J. A.: *Wave scattering from rough surfaces*. Reports on Progress in Physics, 50:1553 – 1608, 1987.
- [151] Ogilvy, J. A. und J. R. Foster: *Rough surfaces: gaussian or exponential statistics?* Journal of Physics D, 22:1243 – 1251, 1989.
- [152] Passchier, I. *et al.*: *A Compton backscattering polarimeter for measuring longitudinal electron polarization*. Nuclear Instruments and Methods in Physics Research A, 414:446 – 458, 1998.
- [153] Pate, S. F.: *Determination of the Strange Form Factors of the Nucleon from  $\nu p$ ,  $\bar{\nu} p$ , and Parity-Violating  $\vec{e}p$  Elastic Scattering*. Physical Review Letters, 92:082002, 2004.
- [154] Patrignani, C. *et al.*: *Review of Particle Physics*. Chinese Physics C, 40:100001, 2016.
- [155] Pearson, K.: *On the criterion that a given system of deviations from the probable in the case of a correlated system of variables is such that it can be reasonably supposed to have arisen from random sampling*. Philosophical Magazine (Series 5), 50:157 – 175, 1900.
- [156] Placidi, M. *et al.*: *Design and first performance of the LEP laser polarimeter*. In: Mandrillon, P. und P. Marin (Herausgeber): *Proceedings of the 2nd European particle accelerator conference, Nice (France), 1990*, Seiten 791 – 793, Gif-sur-Yvette, 1991. Edition Frontières, ISBN 978-2-86332090-7.
- [157] Prescott, C. Y.: *Spin dependent Compton scattering for use in analyzing electron beam polarizations*. Technischer Bericht SLAC-TN-73-1, SLAC, Stanford, CA, Januar 1973.
- [158] Price, R. M. und D. G. Bonett: *Estimating the variance of the sample median*. Journal of Statistical Computation and Simulation, 68:295 – 305, 2001.



- 
- [159] Ragheb, H. und E. R. Hancock: *The modified Beckmann-Kirchhoff scattering theory for rough surface analysis*. Pattern Recognition, 40:2002 – 2020, 2007.
- [160] Rakhman, A. et al.: *A high-finesse Fabry-Perot cavity with a frequency-doubled green laser for precision Compton polarimetry at Jefferson Lab*. Nuclear Instruments and Methods in Physics Research A, 822:82 – 96, 2016.
- [161] Rice, S. O.: *Reflection of electromagnetic waves from slightly rough surfaces*. Communications on Pure and Applied Mathematics, 4:351 – 378, 1951.
- [162] Richartz, M. und H.-Y. Hsü: *Analysis of elliptical polarization*. Journal of the Optical Society of America, 39:136 – 157, 1949.
- [163] Rigrod, W. W.: *Isolation of axi-symmetrical optical-resonator modes*. Applied Physics Letters, 2:51 – 53, 1963.
- [164] Romão, X., R. Delgado und A. Costa: *An empirical power comparison for univariate goodness-of-fit tests for normality*. Journal of Statistical Computation and Simulation, 80:545 – 591, 2010.
- [165] Rosenbluth, M. N.: *High energy elastic scattering of electrons on protons*. Physical Review, 79:615 – 619, 1950.
- [166] Royston, J. P.: *Some techniques for assessing multivariate normality based on the Shapiro-Wilk W*. Journal of the Royal Statistical Society C („Applied Statistics“), 32:121 – 133, 1983. [in späteren Publikationen als „P. Royston“].
- [167] Royston, P.: *Approximating the Shapiro-Wilk W-test for non-normality*. Statistics and Computing, 2:117 – 119, 1992.
- [168] Royston, P.: *A toolkit for testing for non-normality in complete and censored samples*. Journal of the Royal Statistical Society D („The Statistician“), 42:37 – 43, 1993.
- [169] Royston, P.: *Remark AS R94: A remark on algorithm AS 181: the W-test for normality*. Journal of the Royal Statistical Society C („Applied Statistics“), 44:547 – 551, 1995.

- [170] Rubinstein, R. Y. und D. P. Kroese: *Simulation and the Monte Carlo Method*. John Wiley & Sons, Hoboken, NJ, 2. Auflage, 2008, ISBN 978-0-470-17794-5.
- [171] Seidl, M. *et al.*: *High precision beam energy stabilisation of the Mainz Microtron MAMI*. In: Mitaroff, W. A., Ch. Petit-Jean-Genaz, J. Poole, M. Regler und J. L. Laclare (Herausgeber): *Proceedings of the 7th European particle accelerator conference, Vienna (Austria), 2000*, Seiten 1930 – 1932, Genf, 2000. European Physical Society, ISBN 978-3700129318.
- [172] Sekera, Z.: *Recent developments in the study of the polarisation of sky light*. *Advances in Geophysics*, 3:43 – 104, 1956.
- [173] Shapiro, G. *et al.*: *The Compton polarimeter at the SLC*. In: *Proceedings of the 1993 particle accelerator conference, Washington, D.C. (USA)*, Band 3, Seiten 2172 – 2174. IEEE, 1994, ISBN 0-7803-1203-1.
- [174] Shapiro, S. S. und M. B. Wilk: *An analysis of variance test for normality (complete samples)*. *Biometrika*, 52:591 – 611, 1965.
- [175] Sheather, S. J.: *A finite sample estimate of the variance of the sample median*. *Statistics and Probability Letters*, 4:337 – 342, 1986.
- [176] Sheather, S. J. und J. W. McKean: *A comparison of testing and confidence interval methods for the median*. *Statistics and Probability Letters*, 6:31 – 36, 1987.
- [177] Shepard, D.: *A two-dimensional interpolation function for irregularly-spaced data*. In: *Proceedings of the 1968 23rd ACM National Conference*, Seiten 517 – 524. ACM, 1968.
- [178] Siegman, A. E.: *Lasers*. University Science Books, Sausalito, CA, 1986, ISBN 0-935702-11-3.
- [179] Singh, A.: *Omnibus robust procedures for assessment of multivariate normality and detection of multivariate outliers*. In: Patil, G. P. und C. R. Rao (Herausgeber): *Multivariate Environmental Statistics*, Band 6 der Reihe *North-Holland Series in Statistics and Probability*, Seiten 445 – 488. North-Holland, Amsterdam, 1993, ISBN 978-0-444-89804-3.
- [180] Soleillet, P.: *Sur les paramètres caractérisant la polarisation partielle de la lumière dans les phénomènes de fluorescence*. *Annales de Physique (10<sup>e</sup> série)*, 12:23 – 97, 1929.

- 
- [181] Sorenson, D. C.: *Newton's method with a model trust region modification*. SIAM Journal on Numerical Analysis, 19:409 – 426, 1982.
- [182] Souder, P. und K. D. Paschke: *Parity violation in electron scattering*. Frontiers of Physics, 11:111301, 2016.
- [183] Sromicki, J. *et al.*: *Polarization in Mott Scattering of Multi-MeV Electrons from Heavy Nuclei*. Physical Review Letters, 82:57 – 60, 1999.
- [184] Steigerwald, M.: *MeV Mott Polarimetry at Jefferson Lab*. In: Hatanaka, K., T. Nakano, K. Imai und H. Ejiri (Herausgeber): *Proceedings of the 14th international spin physics symposium, Osaka (Japan), 2000*, Band 570 der Reihe *AIP Conference Proceedings*, Seiten 935 – 942, Juni 2001, ISBN 0-7354-0008-3.
- [185] Stephens, M. A.: *EDF statistics for goodness of fit and some comparisons*. Journal of the American Statistical Association, 69:730 – 737, 1974.
- [186] Stokes, G. G.: *On the composition and resolution of streams of polarized light from different sources*. Transactions of the Cambridge Philosophical Society, 9:399 – 416, 1852.
- [187] Tenreiro, C.: *On the choice of the smoothing parameter for the BHEP goodness-of-fit test*. Computational Statistics and Data Analysis, 53:1038 – 1053, 2009.
- [188] Tioukine, V. und K. Aulenbacher: *Operation of the MAMI accelerator with a Wien filter based spin rotation system*. Nuclear Instruments and Methods in Physics Research A, 568:537 – 542, 2006.
- [189] Tioukine, V., K. Aulenbacher und E. Riehn: *A Mott polarimeter operating at MeV electron beam energies*. Review of Scientific Instruments, 82:033303, 2011.
- [190] Tioukine, V. *et al.*: *Spin manipulation at MAMI-C*. In: Garvey, T., J. Le Duff, P. Le Roux, Ch. Petit-Jean-Genaz, J. Poole und L. Rivkin (Herausgeber): *Proceedings of the 8th European particle accelerator conference, Paris (France), 2002*, Band 2, Seiten 1816 – 1818. EPS-IGA/CERN, 2002, ISBN 92-9083-196-X.
- [191] Torrance, K. E. und E. M. Sparrow: *Theory for off-specular reflection from roughened surfaces*. Journal of the Optical Society of America, 57:1105 – 1114, 1967.

- [192] Unser, K.: *Beam current transformer with d. c. to 200 MHz range*. IEEE Transactions on Nuclear Science, NS-16:934 – 938, 1969.
- [193] Unser, K.: *A toroidal DC beam current transformer with high resolution*. IEEE Transactions on Nuclear Science, NS-28:2343 – 2346, 1981.
- [194] U.S. Army Armament Research, Development and Engineering Center, Picatinny Arsenal, NJ: *Optical components for fire control instruments; General specification governing the manufacture, assembly, and inspection of*, Januar 1997. Leistungsspezifikation MIL-PRF-13830B.
- [195] Vansteenkiste, N. *et al.*: *Optical reversibility theorems for polarization: Application to remote control of polarization*. Journal of the Optical Society of America A, 10:2240 – 2245, 1993.
- [196] Vernold, C. und J. Harvey: *Comparison of Harvey-Shack scatter theory with experimental measurements*. In: Gu, Z.-H. und A. A. Maradudin (Herausgeber): *Scattering and Surface Roughness*, Band 3141 der Reihe *Proceedings of SPIE*, Seiten 128 – 138, 1997.
- [197] Wagman, M. und G. A. Miller: *Charge symmetry breaking and parity violating electron-proton scattering*. Physical Review C, 89:065206, 2014.
- [198] Wagner, B. *et al.*: *A Møller polarimeter for cw and pulsed intermediate energy electron beams*. Nuclear Instruments and Methods in Physics Research A, 294:541 – 548, 1990.
- [199] Walker, M. J.: *Matrix calculus and the Stokes parameters of polarized radiation*. American Journal of Physics, 22:170 – 173, 1954.
- [200] Warnick, K. F. und W. C. Chew: *Numerical simulation methods for rough surface scattering*. Waves in Random Media, 11:R1 – R30, 2001.
- [201] Wedding, A. B., A. G. Mikosza und J. F. Williams: *Polarimetry in electron-photon coincidence studies*. Journal of the Optical Society of America, 8:1729 – 1738, 1991.
- [202] Weinrich, Ch.: *Entwicklung eines Transmissions-Compton-Polarimeters für das A4-Experiment*. Diplomarbeit, Johannes Gutenberg-Universität, Mainz, Juli 2000.

- [203] Wilk, B. H. und P. B. Wilson: *The racetrack microtron. An accelerator for medium energies*. In: Lapostolle, P. M. und A. L. Septier (Herausgeber): *Linear Accelerators*, Seite 553. North-Holland, Amsterdam, 1. Auflage, 1970, ISBN 9780720401561.
- [204] Wolberg, J.: *Data analysis using the method of least squares*. Springer, Berlin, 1. Auflage, 2006, ISBN 978-3-540-25674-8.
- [205] Yabsley, B.: *Statistical practice at the Belle experiment, and some questions*. Journal of Physics G, 28:2733 – 2745, 2002.
- [206] Yim, D. Y. und S. W. Kim: *Optical roughness measurement of ground surfaces by light scattering*. International Journal of Machine Tools and Manufacture, 30:283 – 289, 1990.
- [207] Zhu, S.-L. *et al.*: *Nucleon anapole moment and parity-violating ep scattering*. Physical Review D, 62:033008, 2000.
- [208] Zweig, G.: *An  $SU_3$  model for strong interaction symmetry and its breaking*. Technischer Bericht CERN-TH-401, CERN, Genf, Januar 1964.
- [209] Zwolak, J. W., P. T. Boggs und L. T. Watson: *Algorithm 869: ODRPACK95: A weighted orthogonal distance regression code with bound constraints*. ACM Transactions on Mathematical Software, 33:Artikel 27, 2007.



# Danksagungen

*Aus datenschutzrechtlichen Gründen entfallen die Danksagungen in dieser Ausgabe.*





# Lebenslauf

*Aus datenschutzrechtlichen Gründen entfällt der Lebenslauf in dieser Ausgabe.*