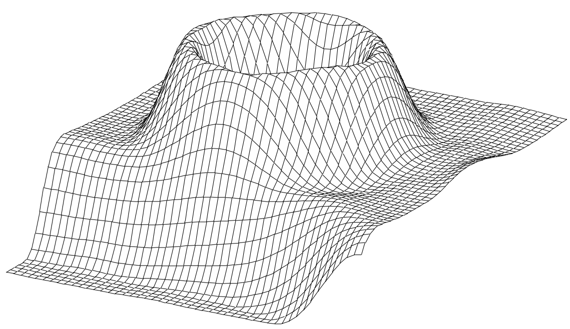
Über das Vermessen tubulärer Strukturen in der Computertomographie

Oliver Weinheimer



Mainz 2007

Titelbild: Ausschnitt aus dem topologischen Relief des Spiralscans eines Plastikröhrchen, das orthogonal zur Scanebene im Meßfeld des Scanners lag. Das Röhrchen war teils von Wasser, teils von Luft umgeben. Die in der Realität scharfen Kanten des Röhrchens sind durch das CT-System weichgezeichnet. Dieser Effekt macht das Messen der Wandstärke des Röhrchens im CT-Bild (speziell bei kleiner Wandstärken) äußerst schwierig. (100 mAs, 120 kV, 1.25 mm, 1 mm, 0.39 mm, B30f, Siemens Volume Zoom)

Über das Vermessen tubulärer Strukturen in der Computertomographie

Oliver Weinheimer

Dissertation

zur Erlangung des Grades
Doktor der Naturwissenschaften

am Fachbereich Physik, Mathematik und Informatik
der Johannes Gutenberg-Universität Mainz

vorgelegt von
Oliver Weinheimer
geboren in Bingen am Rhein

Mainz, im September 2007

Tag der mündlichen Prüfung: 12.12.2007

Zusammenfassung

Die chronisch obstruktive Lungenerkrankung (engl. chronic obstructive pulmonary disease, COPD) ist ein Überbegriff für Erkrankungen, die zu Husten, Auswurf und Dyspnoe (Atemnot) in Ruhe oder Belastung führen - zu diesen werden die chronische Bronchitis und das Lungenemphysem gezählt. Das Fortschreiten der COPD ist eng verknüpft mit der Zunahme des Volumens der Wände kleiner Luftwege (Bronchien). Die hochauflösende Computertomographie (CT) gilt bei der Untersuchung der Morphologie der Lunge als Goldstandard (beste und zuverlässigste Methode in der Diagnostik). Möchte man Bronchien, eine in Annäherung tubuläre Struktur, in CT-Bildern vermessen, so stellt die geringe Größe der Bronchien im Vergleich zum Auflösungsvermögen eines klinischen Computertomographen ein großes Problem dar. In dieser Arbeit wird gezeigt wie aus konventionellen Röntgenaufnahmen CT-Bilder berechnet werden, wo die mathematischen und physikalischen Fehlerquellen im Bildentstehungsprozess liegen und wie man ein CT-System mittels Interpretation als lineares verschiebungsinvariantes System (engl. linear shift invariant systems, LSI System) mathematisch "greifbar" macht. Basierend auf der linearen Systemtheorie werden Möglichkeiten zur Beschreibung des Auflösungsvermögens bildgebender Verfahren hergeleitet. Es wird gezeigt wie man den Tracheobronchialbaum aus einem CT-Datensatz stabil segmentiert und mittels eines topologieerhaltenden 3-dimensionalen Skelettierungsalgorithmus in eine Skelettdarstellung und anschließend in einen kreisfreien Graphen überführt. Basierend auf der linearen System Theorie wird eine neue, vielversprechende, integral-basierte Methodik (IBM) zum Vermessen kleiner Strukturen in CT-Bildern vorgestellt. Zum Validieren der IBM-Resultate wurden verschiedene Messungen an einem Phantom, bestehend aus 10 unterschiedlichen Silikon Schläuchen, durchgeführt. Mit Hilfe der Skelett- und Graphendarstellung ist ein Vermessen des kompletten segmentierten Tracheobronchialbaums im 3-dimensionalen Raum möglich. Für 8 zweifach gescannte Schweine konnte eine gute Reproduzierbarkeit der IBM-Resultate nachgewiesen werden. In einer weiteren, mit IBM durchgeführten Studie konnte gezeigt werden, dass die durchschnittliche prozentuale Bronchialwandstärke in CT-Datensätzen von 16 Rauchern signifikant höher ist, als in Datensätzen von 15 Nichtrauchern. IBM läßt sich möglicherweise auch für Wanddickenbestimmungen bei Problemstellungen aus anderen Arbeitsgebieten benutzen - kann zumindest als Ideengeber dienen. Ein Artikel mit der Beschreibung der entwickelten Methodik und der damit erzielten Studienergebnisse wurde zur Publikation im Journal "IEEE Transactions on Medical Imaging" angenommen.

Abstract

Chronic obstructive pulmonary disease (COPD) is an umbrella term for diseases leading to coughing, phlegm and dyspnoea (shortness of breath) whilst at rest or under pressure - COPD includes chronic bronchitis and lung emphysema. The progression of COPD is strongly associated with an increase in the volume of tissue in the wall of the small airways (bronchi). The high-resolution CT is the imaging gold standard (best and most reliable practice) for the morphological evaluation of lung tissue. When measuring bronchi, an almost tubular structure, the limited spatial resolution of clinical CT scanners in comparison to thin structures like airway walls causes difficulties in measurement. In this thesis it will be shown how to reconstruct CT images from conventional x-ray images, where different mathematical and physical sources of errors lie and how CT systems can be modelled as linear shift invariant systems (LSI systems). Based on the linear system theory, ways to characterize the spatial resolution of an imaging system are derived. It will be shown how to do a stable segmentation of the tracheobronchial tree from a CT dataset. The voxel-based result (object) of the segmentation is skeletonized by a sequential topology-preserving 3D thinning algorithm and then transformed to an acyclic graph. Based on the linear system theory, a new integral based method (IBM) for measuring small structures in CT images is introduced. By the use of the skeleton and graph representation it is possible to measure the whole segmented tracheobronchial tree in the 3-dimensional space. The method was evaluated with a phantom containing 10 silicone tubes and the repeatability was proved in datasets of 8 pigs scanned twice. Furthermore, a comparison of CT datasets of 16 smokers and 15 non-smokers was done. The average percentage airway wall thickness was significantly higher for the smokers. Potentially IBM can be used for wall thickness measurements in other fields of activity. An article with the description of the developed method and the results obtained in the different studies was accepted for publication in the journal “IEEE Transactions on Medical Imaging”.

Inhaltsverzeichnis

Einleitung

Bildgebende Verfahren sind fester Bestandteil der modernen Medizin. Es entstehen Tag für Tag riesige Datenmengen verschiedenster Bildarten, wobei sich Inhalt und Eigenschaften der Bilder je nach angewandter Meßtechnik (Modalität) stark unterscheiden. Ärzte sind in vielerlei Art und Weise auf die Unterstützung durch den Computer angewiesen. Sei es beispielsweise um überhaupt, wie im Falle von Schichtbildaufnahmen, qualitativ hochwertig rekonstruierte Bilder zu bekommen, um bei der Bearbeitung und Auswertung von Bildern unterstützt zu werden oder um Bilddatensätze in Datenbanken sicher und zeitsparend verwalten zu können.

Die vorliegende Arbeit behandelt hauptsächlich die Bearbeitung und Auswertung von computertomographischen Bildern aus dem Thoraxbereich, im Schwerpunkt wird eine Methodik zum Bestimmen der Wanddicke von Bronchien, einer in Annäherung tubulären Struktur, in 3-dimensionalen CT-Volumina vorgestellt. Die Computertomographie (CT) hat seit ihrer Einführung im Jahr 1972 die medizinische Bildgebung revolutioniert, die aktuelle Multislice-CT (MSCT) bietet die Möglichkeit, komplette Volumina mit hoher räumlicher Auflösung innerhalb einer Atempause zu scannen und steigert die Bedeutung der Computertomographie noch mehr. Das größte Problem beim Bestimmen der Bronchialwanddicke stellt die geringe Größe dieser Struktur im Vergleich zum Auflösungsvermögen eines CT-Scanners dar. Dies führt dazu, dass die Darstellungsintensität der Bronchialwände gemindert ist. Ein optisches Bestimmen der korrekten Wanddicke ist dadurch für Mediziner nahezu unmöglich. Um sich der Problemstellung adäquat nähern zu können, ist zunächst ein Wissen um die Fehlerquellen im Zuge des Bildentstehungsprozesses nötig. Bildgebende Verfahren lassen sich mathematisch als lineare verschiebungsinvariante Systeme modellieren. Dies gibt uns die Möglichkeit auftretende Störeffekte in den Bildern durch Methoden der Signal- und Systemtheorie zu beschreiben und zu verstehen. Durch die Modellierung des Problems kann auf mathematischem Wege eine approximative Bestimmung der Wanddicke erfolgen. Um überhaupt in die Lage zu kommen im 3-dimensionalen Raum Bronchien vermessen zu können, müssen vorgelagerte Schritte wie die Segmentierung der Bronchien, die Skelettierung der Segmentierung und der Aufbau eines mathematischen Graphen aus der Skelettierung gelöst werden.

Die hier vorgestellte Methodik läßt sich möglicherweise auch für Wanddickenbestimmungen bei Problemstellungen aus anderen Arbeitsgebieten benutzen - kann zumindest als Ideengeber dienen. Viele der in dieser Arbeit behandelten Konzepte lassen sich problemlos auf andere bildgebende Systeme übertragen.

Aufbau der Arbeit

Das erste Kapitel liefert die Motivation und die Zieldefinition für diese Arbeit. Der Aufbau, die Größenverhältnisse und die Funktion des menschlichen Atmungssystems werden kurz dargestellt. Ausgehend von der Darstellung eines Luftweges in der CT wird ein einfaches 2-dimensionales Querschnittsmodell eingeführt. Bei einigen Lungenerkrankungen, wie beispielsweise der chronisch obstruktiven Lungenkrankheiten (COPD), kommt es zur Zunahme des Volumens der Bronchialwände, einige Aspekte der COPD werden beschrieben.

Kapitel 2 gibt einen Einblick in die Technik der Computertomographie. Nach einem kurzen Ausflug in die Historie der Röntgendiagnostik werden die physikalischen Grundlagen der Röntgentechnik beschrieben. Es werden die hauptsächlichen physikalischen Probleme der CT besprochen und der Weg von einfachen röntgenbasierten Projektionsaufnahmen zu Schichtbildern mittels verschiedener Methoden wird gezeigt. Abschließend wird ein Überblick über die zur Zeit aktuelle Multislice-CT (MSCT) und deren Charakteristika gegeben.

Im dritten Kapitel wird ein CT-System als lineares verschiebungsinvarinates System modelliert. Etwaige Fehler in der Bildentstehung, physikalischer Natur oder bedingt durch den Prozess der Bildrekonstruktion, können durch diese Modellierung bequem abgebildet werden. Durch das Konzept der sogenannten Punktantwort (PSF) wird ein "Rechnen" innerhalb von CT-Volumina möglich gemacht. Verschiedene Parameter zur objektiven Beschreibung der "Auflösung eines bildgebenden Systems" werden eingeführt und deren Zusammenhänge erklärt.

Kapitel 4 behandelt den Themenbereich Segmentierung. Zunächst werden Möglichkeiten zur Rauschkorrektur mittels Faltungsfilter gezeigt. Danach wird im Detail auf die Segmentierung der Lungen und des Tracheobronchialbaums eingegangen. Speziell die Segmentierung des Bronchialbaums ist von entscheidender Bedeutung, da dieses Segmentierungsergebnis die Grundlage für das nachfolgende Kapitel bildet.

Kapitel 5 behandelt die morphologische Bildverarbeitung. Nach der Einführung elementarer morphologischer Operatoren, wird ein 3D-Skelettierungsverfahren zur Findung der Mittelachse eines Objektes vorgestellt. Auf der Grundlage des Skelettierungsergebnisses für den Tracheobronchialbaum kann ein mathematischer Graph zur Beschreibung des Bronchialbaums erzeugt werden.

Im sechsten Kapitel wird schließlich der entwickelte Algorithmus zum Vermessen der Wandstärken von Bronchien beschrieben. Grundlage des Algorithmus ist die Interpretation eines CT-Systems als lineares verschiebungsinvariantes System. Die entwickelte Messmethodik beruht auf der Tatsache, dass, unter bestimmten Voraussetzungen, der Erhalt des Integralwertes entlang eines 1-dimensionalen Profils beim Durchlaufen eines linearen verschiebungsinvarianten Systems angenommen werden kann. Auf der Basis dieser entwickelten Messmethodik kann der gesamte Tracheobronchialbaum in einem CT-Volumen vermessen und eine Kenngröße für den Baum angegeben werden. Hierbei werden die in den vorangegangenen Kapiteln beschriebenen 3 Darstellungsarten des Bronchialbaums: die Voxel- , die Skelett- und die Graphendarstellung benötigt. Messresultate werden für verschiedene Studien mit einem künstlichen Phantom, mit CT-Volumen von Schweinen und CT-Volumen von Patienten aus dem klinischen Alltag präsentiert.

Kapitel 7 liefert eine Zusammenfassung der Arbeit und gibt einen Ausblick auf eine mögliche sinnvolle Fortführung der Forschung in diesem Arbeitsgebiet.

Ein umfangreicher mathematischer und informatischer Anhang sowie eine Auflistung von Veröffentlichungen, die mit dieser Arbeit in direktem Zusammenhang stehen, bilden den Abschluß der Arbeit. Das Erstellen von Software war ein entscheidender Anteil meiner Arbeit, weshalb an dieser Stelle speziell auf den Abschnitt B des informatischen Anhangs verwiesen sei: Dort wird in Kürze beschrieben, wie man mit der von mir entwickelten Software yacta (yet another ct analyzer) Wandstärken von Bronchien (oder Phantomen) lokal für einen Bronchus oder global für den kompletten Tracheobronchialbaum bestimmen kann.

Die Arbeit stellt keinen Versuch dar einen umfassenden Überblick über den *state of the art* in medizinischer Bildverarbeitung zu geben, sondern möchte am konkreten Beispiel der Bronchialwandvermessung zeigen, wie verschiedene Bildverarbeitungstechniken eingesetzt und kombiniert werden können, um dieses nicht-triviale Problem zu lösen.

Bezeichnungen

Die meisten verwendeten Konventionen und Bezeichnungen werden Schritt für Schritt eingeführt. Es ließ sich jedoch nicht vermeiden, dass einige Bezeichnungen von Anfang an in dieser Arbeit benutzt werden. Zu diesen nun einige einführenden Erläuterungen.

- Allen abgebildeten CT-Bildern sind die wichtigsten Scanparameter Röhrenstrom-Zeit-Produkt pro Schicht [mAs] Q, Röhrenspannung[kV] U, nominelle Schichtdicke [mm] s, Schichtabstand t [mm], xy-Abstand der Zentren der Bildpunkte p [mm] (Pixel Spacing) und Rekonstruktionskernel K, sowie die zur Darstellung benutzen Fenstereinstellungen Fensterzentrum C / -breite W und der Herstellername+Modellbezeichnung (P+M) des CT- Scanners in der Form (Q, U, s, t, p, K, $[C/W]$, P+M) beigefügt.

- Mediziner gehen bei der Bezeichnung von Körperteilen immer von der Sicht des Patienten aus. Betrachtet man ein CT-Bild, so blickt man von unten in Richtung Kopf in einen Patienten. Die Bezeichnungen “links” und ”rechts” sind für Körperteile vertauscht. Die linke Lunge ist in einem CT-Bild auf der rechten Seite zu finden.

Meiner Frau Carina
und meinen beiden Kindern Florian und Sina gewidmet.

Kapitel 1

Motivation und Zieldefinition

Die *chronisch obstruktive Lungenerkrankung* (engl. chronic obstructive pulmonary disease, COPD) ist ein Überbegriff für Erkrankungen, die zu Husten, Auswurf und Dyspnoe[1] in Ruhe oder Belastung führen. **Das Fortschreiten der COPD ist eng verknüpft mit der Zunahme des Volumens der Wände kleiner Luftwege** [HCU+]. Erkrankungen der kleinen Luftwege, die nicht nur im Falle einer COPD auftreten, werden mit dem feststehenden englischen Ausdruck "*small airways disease*" bezeichnet. Die Zunahme des Wandvolumens gilt in der Medizin, insbesondere durch die Histologie[2] bewiesen, als Tatsache. Es stellt sich jedoch die Frage, ob die Zunahme des Volumens auch schon für die etwas größeren *Bronchien* mittels der nicht-invasiven Computertomographie (CT) zuverlässig festgestellt werden kann. Das größte Problem ist in diesem Zusammenhang die geringe Größe der Bronchien im Vergleich zum Auflösungsvermögen[3] eines klinischen Computertomographen. Aus diesem Grund stellt das "Vermessen von Bronchien in der CT" eine nicht triviale und spannende Aufgabe dar, die ein umfassendes Verständnis der Computertomographie erfordert.

Die hochauflösende CT gilt bei der Untersuchung der Morphologie der Lunge als *Goldstandard* (beste und zuverlässigste Methode in der Diagnostik). Die Magnetresonanztomographie kommt als bildgebendes Verfahren schon aufgrund der zu geringen Ortsauflösung derzeit nicht in Frage. Bei der Spirometrie[4] ist man stärker von der Mitarbeit des Patienten abhängig und erhält funktionelle, jedoch lediglich globale Informationen über die gesamte untersuchte Lunge. Auch die CT ist auf die Mitarbeit des Patienten hinsichtlich eines Atemanhaltens angewiesen, erbringt jedoch morphologische und ortsaufgelöste Informationen. Ein Nachteil der CT ist, wie bei allen röntgenbasierten Methoden, die ionisierende Strahlung (siehe 2.5.1).

Dieses Kapitel gibt nun einen kurzen Überblick über die Anatomie[5] und Physiologie[6] des menschlichen *Atmungssystems*. Für diese Arbeit relevanten Aspekte wie beispiels-

[1] Medizinischer Ausdruck für Atemnot oder Luftnot.

[2] Die Histologie ist die Wissenschaft von den biologischen Geweben. Es werden sehr dünne Gewebeschnitte hergestellt und unter dem Mikroscope beurteilt.

[3] Der Begriff "Auflösung" wird in Abschnitt 3.2 erläutert.

[4] Verfahren zur Lungenfunktionsprüfung. Der Patient atmet über ein Mundstück in das Spirometer. Lungenbeschreibende Parameter wie Lungenvolumen oder Einsekundenkapazität (FEV_1, Forced Expiratory Volume in 1 Second) werden bestimmt.

[5] Die Anatomie (gr.) ist die Lehre vom Aufbau der Organismen.

[6] Die Physiologie ist die Lehre von den Lebensvorgängen, sie befasst sich mit den physikalischen, biochemischen und informationsverarbeitenden Funktionen von Lebewesen.

weise die Größenverhältnisse in luftleitenden Bronchien werden tiefergehend erörtert. Zunächst wird eine einfache Beschreibung des Aufbaus und der Funktion der unteren Luftwege (*unterer Respirationstrakt*) gegeben. Ein einfaches Modell für den Querschnitt eines Bronchus wird eingeführt. Die chronisch obstruktive Lungenkrankheit wird, da die angestrebten Forschungsziele in enger Verbindung mit dieser Krankheit stehen, beschrieben.

1.1 Das Atmungssystem

Unter *Atmung* (lat. respiration) versteht man ganz allgemein die Aufnahme von Sauerstoff (O_2) und die Abgabe von Kohlendioxid (CO_2). Alle Zellen des menschlichen Organismus sind auf eine ständige O_2-Zufuhr und einen konstanten Abtransport des verbrauchten O_2 in Form von CO_2 angewiesen. Der menschliche Körper besitzt ein System von Organen, dieses wird als Atmungssystem oder *respiratorisches System* bezeichnet, das den Gasaustausch zwischen Blut und Umgebung ermöglicht. Dieser Vorgang wird als *äußere Atmung* bezeichnet. Das zentrale Organ der äußeren Atmung ist die Lunge. Unter *innerer Atmung* versteht man hingegen die in der Zelle ablaufende Verbrennung von Nährstoffen zur Gewinnung von Energie, hierbei wird O_2 verbraucht. Die äußere Atmung ist somit die Voraussetzung für die innere Atmung. Um den aufgenommen O_2 der Außenluft zur Lunge zu befördern passiert er zuerst die *oberen Luftwege* (Nase, Nasennebenhöhlen, Rachenraum), dann die *unteren Luftwege* (Kehlkopf, Luftröhre, Bronchien und die Lungen selbst). Die unteren Luftwege enden in den Lungenbläschen (*Alveolen*). Die Versorgung der Alveolen mit Atemluft bezeichnet man auch als *Ventilation*. In den Alveolen diffundieren[7] O_2 und CO_2 über die Zellmembran in das Transportmedium Blut. Entscheidend für den Gasaustausch ist das Verhältnis zwischen der Lungendurchblutung (*Perfusion*) und der Ventilation (Ventilations-Perfusions-Verhältnis). In einer Durchschnittslunge gibt es etwa 300 Millionen der dünnwandigen, etwa 0.3 mm großen, Lungenbläschen (engl. alveoli), die Gesamtoberfläche dieser beträgt ca. 80-120 m^2.

Abb. 1.1 zeigt die computertomographische Thoraxaufnahme eines Patienten. In der medizinischen Befundung werden standardmäßig neben den *axialen* (*transveralen*) Schichtaufnahmen auch die beiden anderen kanonischen Schnittrichtungen durch einen CT-Datenquader zu Rate gezogen: die *sagittale* Schnittebene und die *koronale* Schnittebene.

1.1.1 Unterer Respirationstrakt

Die unteren Luftwege beginnen mit dem Kehlkopf (Larynx). Zum einen verschließt dieser die unteren Luftwege und regelt so ihre Belüftung zum anderen ist er das Hauptorgan zur Stimmbildung. Beim Schluckvorgang verschließt der Kehldeckel (Epiglottis) die Luftröhre (*Trachea*), damit keine Speisestücke in den Atmungstrakt gelangen. Unterhalb des Kehlkopfs liegt die Trachea, danach folgen die Bronchien. Diese Luftwege werden auch unter dem Begriff Tracheobronchialbaum zusammengefaßt, dieser wird nun ausführlicher beschrieben.

[7] Vom lateinischen diffundere = ausgießen, verstreuen, ausbreiten. Unter Diffusion versteht man in diesem Zusammenhang den Ausgleich von Konzentrationsunterschieden.

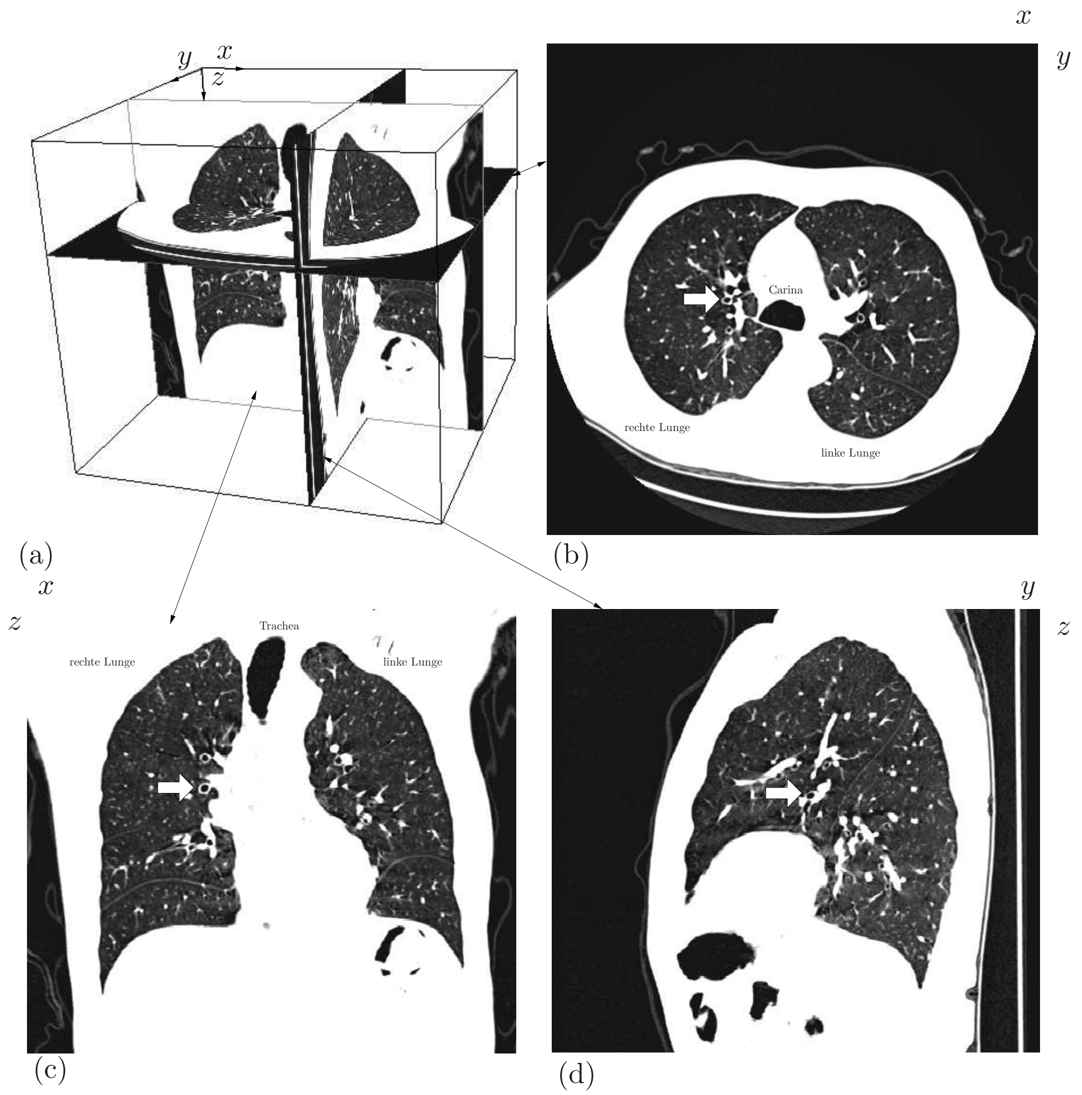


Abbildung 1.1: Throrax-CT eines Patienten. (a) Der Quader zeigt die Hauptschnittebenen eines CT-Volumens, sowie das verwendete Koordinatensystem. In einem axialen (engl. axial) Bild entsprechen die Spalten des Bildes der x-Achse, die Zeilen der y-Achse. Das Laufen entlang der z-Achse entspricht dem Blättern durch einen Bildstapel. (b) Die axiale Schnittebene. (c) Die koronale (engl. coronal) Schnittebene. (d) Sagittale (engl. sagittal) Schnittebene. Das Berechnen beliebiger Schnittebenen durch ein CT-Volumen wird unter dem Begriff *multiplanare Reformation* (MPR) zusammengefaßt. In jedem der drei Hauptschnittebenen ist ein Luftweg mit einem Pfeil gekennzeichnet. (100 mAs, 120 kV, 1.0 mm, 0.8 mm, 0.68 mm, D, [-600/850], Philips Mx8000 IDT 16)

1.1.2 Der Tracheobronchialbaum

Ausgehend von der Trachea beginnt ein sich immer weiter aufzweigendes Röhrensystem, das schließlich in den Alveolen (Alveoli pulmonis, Lungenbläschen) endet. Abb. 1.2 zeigt eine gezeichnete und eine, aus einem klinischen CT-Datensatz, gerenderte Darstellung eines Tracheobronchialbaums. Zwischen Trachea und Alveolen liegen im Durchschnitt 23 Verzweigungen. An der sogenannten *Carina* teilt sich die Trachea in die beiden *Hauptbronchien*, die in die rechte und die linke Lunge führen. Die Trachea ist ein etwa 10-15 cm langer, muskulöser Schlauch mit einem Durchmesser von ungefähr 2 cm, deren Öffnung durch 16-20 U-förmige Knorpelspangen offen gehalten wird. Die Öffnung der Knorpelspangen ist nach hinten gerichtet (dorsal). Dies verhindert, dass sich die Luftröhre bei Unterdruck - welcher regelmäßig bei der Einatmung entsteht - verschließt. Der offene Teil des "Us" wird durch glatte Muskulatur und Bindegewebe geschlossen. Durch diesen Aufbau ist die Trachea sehr flexibel. Die Hauptbronchien (Bronchus principalis sinister/dexter) teilen sich nach wenigen Zentimetern in die zwei bzw. drei Lappenbronchien, welche sich dann in zwei bis fünf Segmentbronchien aufgliedern. Der Aufbau der Hauptbronchien entspricht dem der Trachea, mit zunehmender Verzweigung des Baums werden die Form und Anordnung der Knorpelspangen jedoch unregelmäßiger. Kleinere Bronchien besitzen keine Knorpelstruktur, sie werden durch den Zug des umliegenden Lungengewebes offengehalten. Die lumenzugewandte Seite aller Bronchien ist mit einer Schleimhaut ausgekleidet, die von hauchfeinen Flimmerhärchen (Flimmerepithel) bedeckt ist. Die Flimmerhärchen werden von den schleimbildenden Drüsenzellen ständig feucht gehalten und dienen zum Abtransport von Fremdpartikeln Richtung Mund. Abb. 1.3a+b zeigt histologische Bilder eines Bronchus und einer *Bronchiole*.

Tabelle 1.1: Maße der zentralen und peripheren Luftwege.

Atemwege	Generation	Durchmesser [mm]	Wanddicke [mm]	Anzahl
Trachea	0	13-27	1-3	1
Hauptbronchien	1	11-19	1,5-3	2
Lappen- und Segmentbr.	2-5	5-8	1,5	60
Subsegmentbronchien	6-8	1.5-3	0.3	448
	11	1.0	0.15	2048
Bronchiolus Terminalis	12-16	0,6		126976
Bronchiolus Respiratorius	17-19	0,5		917504
Ductus Alveolares	20-22	0.4		7340032
Sacculi Alveolares	23	0.2-0.3		8388608
Alveolen	-	0.2-0.3	0.3 - 1.2 μm	ca. 300000000

Für die Spalten "Durchmesser" und "Wanddicke" wurden Werte aus [HR05] (Trachea bis Generation 11) und [BDH04, Nun93] (Generation 12 bis Alveolen) übernommen. Durchmesser bezeichnet hier den gesamten Durchmesser (Lumen und Wand) eines Bronchus. In der letzten Zeile ist die Wandstärke der einzelnen Alveolen angegeben, sonst die Wandstärke der Luftwege. Die letzte Spalte ist aus [Wei63], der die Anzahl n von Bronchien im Falle regulärer Dichotomy für eine Generation z mittels $n(z) = 2^z$ berechnet hat. Die Anzahl der Alveolen ist eine Schätzung.

Im Normalfall teilt sich beim Menschen ein Bronchus *dichotom*, d. h. in zwei unter-

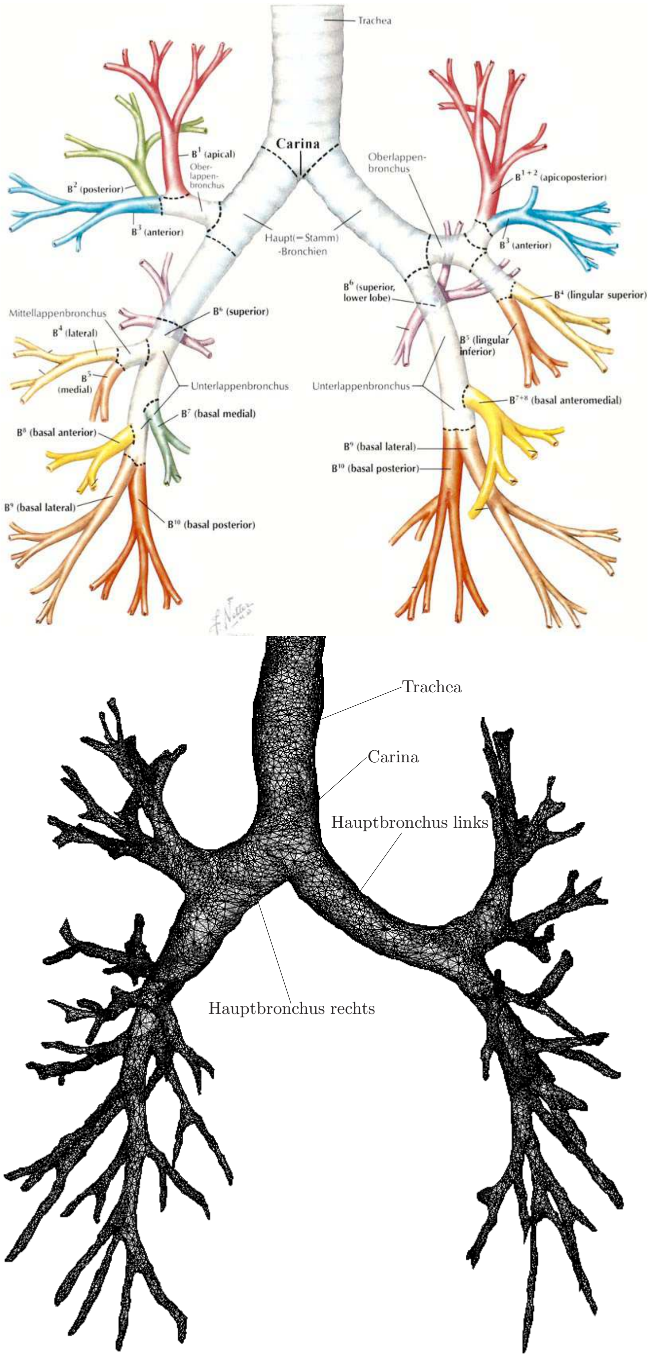


Abbildung 1.2: Oben eine schematische Darstellung des Tracheobronchialbaums aus [Net94] bis etwa zur 6 Generation. Zum Vergleich darunter eine gerenderte Darstellung des Lumens der Luftwege bis etwa zur 7 Generation, entstanden aus einem realen CT-Patientendatensatz (122 mAs, 120 kV, 1.0 mm, 0.8 mm, 0.69 mm, B40f, Siemens Volume Zoom). Mehr über das Segmentieren und Darstellen von Tracheobronchialbäumen in Abschnitt 4.4. In der unteren Darstellung ist, noch deutlicher als in der oberen, der etwas asymmetrische Aufbau des Baums zu erkennen - dies liegt an der Linkslastigkeit des Herzens. Der linke Hauptbronchus ist länger als der rechte, teilt sich aber lediglich in 2 Lappenbronchien. Rechts erfolgt eine Teilung in 3 Lappenbronchien, zunächst die Trennung in den Oberlappenbronchus und den Bronchus Intermedius, dann teilt sich letzterer in den Mittellappenbronchus und den Unterlappenbronchus.

geordnete Bronchien (Bifurkation, dichotome Teilung). In Ausnahmen gibt es auch Verzweigungspunkte, aus denen 3 Atemwege hervorgehen (Trifurkation). Nach den Lappenbronchien folgen die Segmentbronchien, danach die Subsegmentbronchien. Der Durchmesser der Bronchien wird mit jeder Teilung in der Regel geringer[8]. Ab der 11./12. Teilungsgeneration, dem Übergang zu den Bronchiolen, spricht man explizit von den kleinen Luftwegen (engl. small airways). Diese haben in den Wänden weder Knorpel- noch Drüsenanteile, wobei der Übergang fließend ist. Der Knorpelverlust erfolgt bis zur 11., die drüsigen Strukturen verschwinden ab der 12. Generation [HR05]. Die Generationen 17 bis 23 werden als *respiratorischer Abschnitt* bezeichnet oder auch als Azinus. Waren die ersten 16 Generationen reine luftleitenden Bronchien so findet im respiratorischen Abschnitt der Gasaustausch mit dem Blut statt. Am Rand des Azinus befinden sich die ersten Alveolen. Das Ende des Azinus besteht aus dem Alveolar-Kanal (Ductus Alveolares), der noch eine feine netzartige Wandstruktur besitzt - die Alveolen sind um diese angeordnet, und den Alveolar-Säcken (Sacculi Alveolares), die am Ende der Verzweigungsstruktur als eine Gruppe von terminalen Alveolen gesehen werden können. Tabelle 1.1 listet durchschnittliche Maße der zentralen und peripheren Luftwege aus einer medizinischen Veröffentlichung des Jahres 2005 auf. In verschiedenen Büchern und Artikeln findet man teilweise recht unterschiedliche Angaben - zu beachten ist hier hauptsächlich, ob die angegebenen Messwerte auf realen Messungen (aus der Pathologie) oder auf radiologischen Bilddaten (MSCT oder HRCT) beruhen. In der Radiologie werden tendenziell, bedingt durch das beschränkte Auflösungsvermögen der CT-Scanner und den damit bedingten Problemen beim Vermessen kleiner Strukturen, die Querschnittsfläche der Wand zu groß und die des Lumens zu niedrig angegeben. Die Wandstärke[9] der Lungenbläschen wird in [Nun93] mit $0.3 - 1.2\,\mu$m [10] beziffert.

Tabelle 1.2: Durchmesser des Lumens der Luftwege nach 1.1 mit $d_0 = 12$ mm.

Generation	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Lumen [mm]	12	9.52	7.56	6.00	4.76	3.78	3.00	2.38	1.89	1.50	1.19

Weibel hat den Fit der Funktion (1.1) über die Generation 2-10 berechnet und dann den resultierenden Wert $d_0 = 12$ mm erhalten.

In [Wei63] hat E. R. Weibel schon im Jahre 1963 gezeigt, dass die Funktion:

$$d_z = d_0 \cdot 2^{-\frac{z}{3}} \text{ mit } \mathrm{d}_0 = 12\,\mathrm{mm}\,, \tag{1.1}$$

das Lumen der Luftwege in Abhängigkeit von der Generationenzahl für die Generationen 2-10 gut approximiert. Tabelle 1.2 listet die Ergebnisse mit dieser Funktion für die Generationen 0-10. Die Gültigkeit von Gleichung (1.1) hat er experimentell durch Vermessen eines speziell ausgegossenen Bronchialbaums hergeleitet. Die durchschnittliche Abweichung betrug etwa 6%. Das Lumen der Generationen 0 und 1 (Trachea und Hauptbronchien), die außerhalb des Lungengewebes liegen (extrapulmonar), weicht stark von der approximierenden Geraden (halblogarithmisch aufgetragen) durch das Lumen der Generationen 2-10, die innerhalb der Lungen liegen (intrapulmonar), ab. Das

[8] Es gibt Erkrankungen die zu einer Dilatation (Erweiterung, Ausdehnung) der Atemwege führen (z.B. Bronchiektasen), dann gilt diese Regel nicht mehr.

[9] Die Begriffe Wandstärke und Wanddicke werden in dieser Arbeit synonym benutzt.

[10] $\mu\mathrm{m} = 10^{-6}\mathrm{m}$ Mikrometer / Mymeter

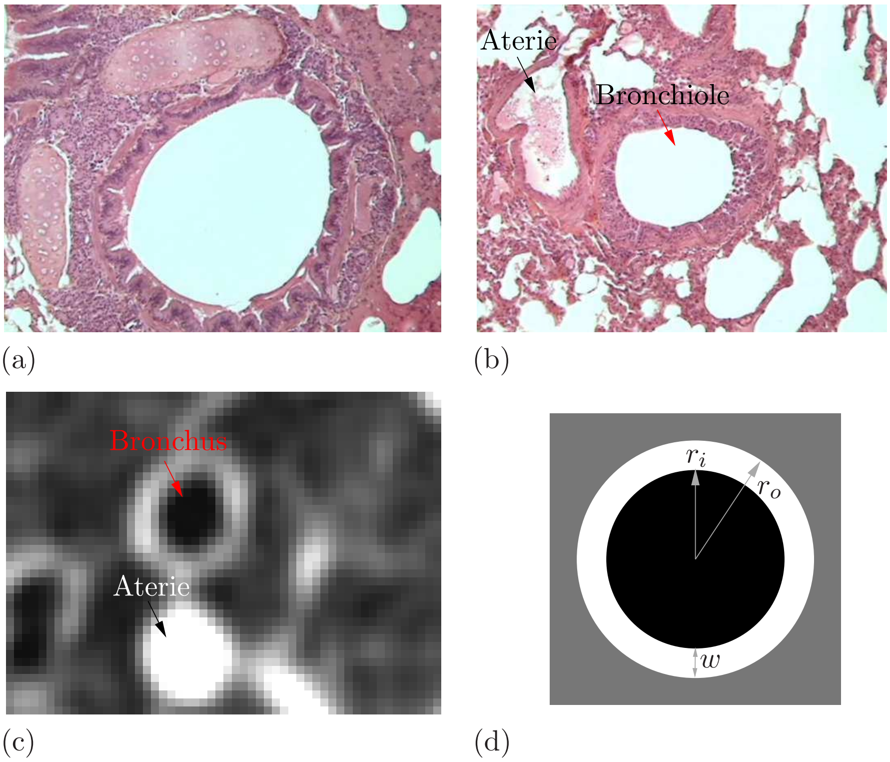


Abbildung 1.3: (a) Histologisches Bild eines Bronchus. (b) Histologisches Bild einer Bronchiole. Die Bronchiole und die dazugehörige Pulmonalaterie (beide gehören zum sogenannten "bronchovaskuläres Bündel") sind jeweils mit einem Pfeil markiert. Da bei histologischen Schnitten die innerhalb einer lebendigen Lunge vorherrschenden Druckverhältnisse und der Muskeltonus (Spannungszustand der Muskulatur) fehlen, hat die Pulmonalaterie ihre im Normalfall annähernd runde Form verloren. Ein wellenförmiger Verlauf der Wände ist zu erkennen: Luftwege haben keine stabile Größe, sondern verändern Form und Größe im Zuge einer Atemphase. In vollkommener Dilatation besitzt die Bronchialwand vereinfacht dargestellt (siehe [SWP00]) eine nahezu glatte Berandung, beim Verkleinern, bedingt durch die Atmung, entsteht ein wellenförmiger (gefalteter) Verlauf der Luftwegsberandung. Die Bilder (a) und (b) stammen von [Sci]. (c) CT-Bild eines Bronchus mit einem Außendurchmesser von ca. 5.3 mm. Auch hier ist der Bronchus und die Pulmonalaterie je durch einen Pfeil markiert. Die Wand besteht in der Breite nur aus wenigen Pixeln. Die unterschiedlichen Wandstrukturen (Wandschichten, wellenförmige Berandungsformen) sind in der CT nicht zu erkennen. (100 mAs, 120 kV, 1.0 mm, 1.0 mm, 0.39 mm, D, [-600/850], Siemens Volume Zoom). (d) Modell eines Querschnitts durch einen Bronchus in einem CT-Bild. Dieses Modell geht von einem homogenen Wandmaterial und einer glatten Wandung aus. r_i bezeichnet den inneren Radius, r_o den äußeren Radius des Kreisringes. Für die in der Darstellung gewählten Größenverhältnisse gilt: $w/2r_i = 0.15$.

Lumen der Generationen größer 10 läßt sich ebenfalls nicht durch die Approximation bestimmen - das Lumen dieser Bronchien ist viel größer als durch (1.1) berechnet. Der für die CT und diese Arbeit interessante Größenbereich wird jedoch durch (1.1) abgedeckt. Kleinere Bronchien (Generation>10) liegen unterhalb des Auflösungsvermögens eines CT-Scanners, sie sind auf CT-Bildern nicht mehr zu erkennen. Die Generationen 0 und 1 liegen außerhalb des Lungengewebes - ein Vermessen wird wegen des dadurch bedingten geringen Kontrastes erschwert.

1.1.3 Modellbildung

Da die verschiedenen Bronchialwandschichten und die unterschiedlichen Formen der Berandung in den CT-Bildern nicht zu erkennen sind (siehe Abb. 1.3c), genügt das in Abb. 1.3d skizzierte Modell des Querschnitts eines Bronchus. Für die ersten Generationen intrapulmonarer Bronchien eines gesunden Menschen entspricht die Wandstärke etwa 10-16 % des inneren Durchmessers [WMN92, RDH97]. Misst man in der histologischen Aufnahme Abb. 1.3(a) die Wandstärke und den inneren Durchmesser manuell, so erhält man ein Verhältnis von $\approx 16\%$, wobei ein Abgrenzen der wahren Wandgrenzen aufgrund der verschiedenen Wandschichten schwierig ist. Bezeichnet man den inneren Radius als r_i und den äußeren als r_o, dann läßt sich die Wandstärke w schreiben als $w = r_o - r_i$. Das geforderte Verhältnis zwischen w und r_i lautet dann formal[11]:

$$w/2r_i = q \text{ mit } q \in [0.1, 0.16]\,. \tag{1.2}$$

Dies bedeutet, dass ein linearer Zusammenhang zwischen der Wandstärke w und des inneren Radius r_i eines Bronchus besteht. Daraus ergibt sich für den prozentualen Wandanteil:

$$\text{wall\%} = \frac{\pi(r_o^2 - r_i^2)}{\pi r_o^2} \cdot 100 = \left(1 - \left(\frac{1}{1+2q}\right)^2\right) \cdot 100\,. \tag{1.3}$$

wall% sollte somit für die ersten Generationen eine Konstante im Bereich von 31-43 % für einen lungengesunden Menschen sein. In der Realität erwartet man nicht wirklich eine präzise Konstante: Die Wand ist nicht aus einem homogenen Material und ihre Zusammensetzung ändert sich im Verlaufe der Verjüngung des Bronchialbaums [SWP00, BP03].

Anmerkung

Die Größenangaben über die Bronchialwandstärke eines gesunden Patienten gehen weit auseinander. In [HR05] wird als normales Verhältnis zwischen Wanddicke w und dem kompletten Durchmesser $2r_o$ eines Bronchus mit

$$w/2r_o = 0.2 \tag{1.4}$$

angegeben. Damit erhält man durch einfaches Umformen unter Ausnutzung von $r_o = r_i + w$:

$$w/2r_i = 1/3 = 0.\overline{3}\,. \tag{1.5}$$

Der prozentuale Anteil vom inneren Durchmesser für gesunde Patienten wird dort also mit mehr als 100% größer als in [WMN92, RDH97] (siehe (1.2)) angegeben, siehe

[11] Durch einfache Umformungen erhält man entsprechend für w und r_o: $w/2r_o = \frac{1}{2} - \frac{1}{2+4q}$.

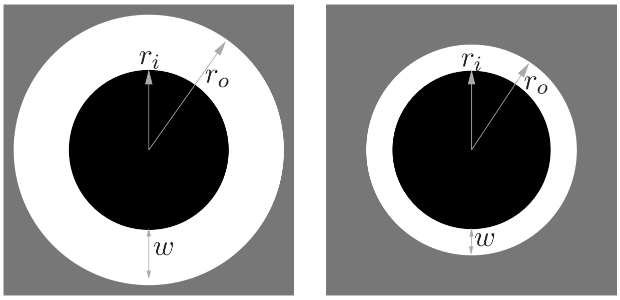


Abbildung 1.4: Für die in der linken Darstellung gewählten Größenverhältnisse gilt: $w/2r_i = 0.33$, zum Vergleich daneben nochmals die Darstellung aus Abb. 1.3 mit $w/2r_i = 0.15$. Die Angaben in der Literatur über "normale" Wandstärken gehen weit auseinander.

Abb. 1.4. Für wall% erhält man somit einen Wert von 64%. In [MKN+05] wird der mittlere Wert für wall% mit $56,9\% \pm 6,6$ (im Bereich von $35,6 - 77,1\%$) bei Patienten ohne bekannte Herz-Lungen-Erkrankung CT-basiert ermittelt. Vor diesem Hintergrund sind die Angaben für die Wandstärken in Tabelle 1.1 der Luftwege mit großer Vorsicht zu genießen[12]. Hat man beim *in vivo*[13] Vermessen der Abbilder von Bronchien in der CT das Problem der Auflösung der CT-Scanner, so sind beim *ex vivo*[14] Vermessen der Bronchien das Fehlen der Druckverhältnisse und des Muskeltonus zu bedenken.

1.2 Lungenerkrankungen

Unter den zehn weltweit häufigsten Todesursachen sind vier Lungenerkrankungen: Pneumonie[15], chronisch obstruktive Lungenerkrankung (COPD), Tuberkulose (TBC, TB) und Lungenkrebs. Nach einer Prognose der Weltgesundheitsorganisation (WHO) ist in nächster Zeit mit einer weiteren Zunahme der zuvor genannten Erkrankungen zu rechnen, so dass diese bis zum Jahre 2020 zu den sieben häufigsten Todesursachen gehören werden [Org02, Ing]. Seit 2001 versucht die von der WHO und National Institutes of Health (NIH) ins Leben gerufene Initiative GOLD (engl. global initiative for chronic obstructive lung disease), weltweit ein optimiertes Vorgehen in der Diagnose und Behandlung der COPD durchzusetzen (siehe [GOL]).

In Deutschland leiden etwa 10 bis 15 % Prozent der Erwachsenen an chronischer Bronchitis, einer Vorstufe von COPD. Etwa 10.000 Menschen sterben jährlich daran. Die COPD war noch im Jahre 1990 in der Rangliste der 10 weltweit häufigsten zum Tode führenden Erkrankungen auf Platz 6 (Tab. 1.3). Die Bedeutung der COPD wird im Hinblick auf die Mortalität in den kommenden Jahren nach Schätzungen der Epidemiologen[16] weiter steigen. Die WHO vermutet, dass die COPD im Jahre 2020 weltweit

[12] Warum es beim Auswerten von CT-Bildern zu großen Unterschieden bei der Angabe der "normalen" Wandstärke kommt, wird im Laufe der Arbeit klar. Die Literaturquelle mit der definitiv richtigen Angabe der statistisch zu erwartenden Wandstärke ist mir nicht bekannt.

[13] Innerhalb lebenden Organismus.

[14] Außerhalb des lebenden Organismus.

[15] Lungenentzündung: akute oder chronische Entzündung des Lungengewebes.

[16] Die Epidemiologie (von gr. epi = auf, über; demos = volk; logos = Lehre) beschäftigt sich mit den Ursachen und Folgen sowie der Verbreitung von gesundheitsbezogenen Zuständen und Ereignissen in Populationen.

die dritthäufigste Todesursache sein wird. Die Bedeutung der COPD im Hinblick auf das Mortalitätsrisiko wird nach Schätzungen von Epidemiologen in den kommenden Jahren bis 2020 zunehmen. Sie wird von Platz 6 im Jahre 1990 auf Platz 3 im Jahre 2020 steigen. Insgesamt ist in Deutschland bis zum Jahre 2010 mit einer Zunahme pneumologischer Volkskrankheiten wie COPD, Asthma und Pneumonie um 25 % auszugehen, bei den bösartigen Erkrankungen der Lunge (z. B. Lungenkrebs) sogar um 30 % [NK00].

Erkrankungen 1990	**Erkrankungen 2020**
Herzkranzgefäßerkrankungen	Herzkranzgefäßerkrankungen
Schlaganfall	Schlaganfall
Lungenentzündung	**COPD**
Durchfallerkrankungen	Lungenentzündung
Säuglingssterblichkeit	Lungenkrebs
COPD	Verkehrsunfall
Tuberkulose	Tuberkulose
Masern	Magenkrebs
Verkehrsunfall	HIV/AIDS
Lungenkrebs	Selbstmord

Tabelle 1.3: Die weltweit häufigsten 10 Todesursachen. Tabelleninhalt aus [NK00].

Chronisch obstruktive Lungenerkrankung (COPD)

Synonyme für chronisch obstruktive Lungenerkrankung sind: COLD (Chronic Obstructive Lung Disease) oder COPD (Chronic Obstructive Pulmonary Disease). Für COPD gibt es weltweit keine einheitliche Definition. Die Initiative GOLD bietet folgende Definition an: "COPD ist eine Lungenerkrankung, bei der eine *nicht vollständig reversible Einschränkung des Atemflusses* vorliegt. Die Einschränkung des Atemflusses ist fortschreitend und geht mit einer abnormen entzündlichen Reaktion auf inhalative Noxen[17] einher". Im Allgemeinen werden die folgenden Krankheiten zum Formenkreis der COPD gerechnet:

- Chronisch obstruktive Bronchitis (COB),
- Emphysem,
- Chronische Bronchitis und Emphysem mit asthmatischer Komponente.

Asthma bronchiale ist explizit ausgeschlossen. Charakteristisch für die COPD ist die pulmonale Obstruktion, d.h. die Begrenzung des Luftflusses in den Atemwegen. Die Verengung der Bronchien beruht auf einer chronischen Entzündung der Bronchialschleimhaut und der dadurch bedingten Schwellung der Schleimhaut der Bronchien. Durch die Entzündung wird die Schleimproduktion erhöht, die Flimmerhärchen verkleben, Fremdpartikel können dann nicht mehr Richtung Mund abtransportiert werden - die Folge sind weitere Entzündungen. [Ing]

[17] Inhalative Noxen (inhalativ = durch Einatmen; Noxen = Schädigungen, Beeinträchtigungen) sind Schädigungen, die durch das Einatmen ("Inhalieren") von Stoffen hervorgerufen werden.

Auslöser einer COPD

Hauptrisikofaktor für die Entstehung und den Verlauf einer COPD ist das inhalative Zigarettenrauchen. Nicht jeder Raucher bekommt eine COPD, allerdings sind oder waren über 90 % der COPD-Patienten Raucher. Mindestens 20% der Raucher erkranken an einer COPD. Eine Dosisabhängigkeit zwischen der Menge der gerauchten Zigaretten und der Abnahme der Lungenfunktion wurde in zahlreichen Untersuchungen gezeigt [SCW+00, AAP+97]. Auf die dauernde Überflutung mit Schadstoffen reagieren die Bronchien neben einer reinen Verengung zunächst mit Husten zur Entfernung der eingedrungenen Schadstoffe. Reicht dieses nicht mehr aus, kommt es zu verstärkter Schleimbildung und zu einer Verdickung der Schleimhaut. Die Atemnot wird stärker. Im weiteren Verlauf nimmt die Zahl der Flimmerhärchen ab, der vermehrt gebildete Schleim kann nicht mehr abtransportiert werden. Der Husten verstärkt sich weiter. Eine schicksalshafte Spirale nimmt ihren Anfang. Das Aufgeben des Rauchens sollte deshalb der erste Schritt in der Behandlung sein. Zwar führt das Einstellen des Rauchens nicht zu einer vollkommenen Wiederherstellung der Lungenfunktion, doch kann dadurch der weitere Krankheitsverlauf deutlich gemildert werden.

Neben dem inhalativen Zigarettenrauchen gelten auch wiederholte Atemwegsinfekte, Alkoholkonsum, Allergien, geringes Geburtsgewicht, Mangelernährung, schlechte Wohnverhältnisse, erblich bedingte Einflüsse sowie Klimafaktoren als Risikofaktoren und mögliche Auslöser einer COPD. Allerdings treten sie im Vergleich zum Nikotinabusus[18] deutlich in den Hintergrund. [Ing]

Abgrenzung von Asthma, Emphysem und chronisch obstruktiver Bronchitis

Man hat den Begriff COPD gewählt, um die chronisch obstruktive Bronchitis und das Lungenemphysem vom Asthma - der anderen großen Lungenkrankheit, die mit einer Einengung der Atemwege einhergehen kann - abzugrenzen. Zunächst ist man davon ausgegangen, dass beide Erkrankungen den gleichen Ursprung haben [Bar06] - dies wurde unter dem Begriff "Dutch Hypthesis" 1961 bekannt. Später wurde dann von verschiedenen Wissenschaftlern gezeigt, dass verschiedene Mechanismen die beiden Krankheiten auslösen.

Asthma und COPD haben auf den ersten Blick sehr ähnliche Symptome, sind aber zwei ganz verschiedene Krankheiten. Das fängt schon bei der Ursache an: Zigarettenrauchen ist als Ursache des Asthmas bisher nicht belegt, aber als Hauptursache der COPD. Das Asthma beginnt in der Kindheit und Jugend, die COPD im höheren Lebensalter. Die Atemnot beim Asthma tritt anfallsartig auf, bei COPD unter Belastung. Der Verlauf der Enge der Atemwege und auch der Erkrankung ist beim Asthma wechselförmig und episodisch, bei der COPD ist es eine dauerhafte Beeinträchtigung, die von Jahr zu Jahr immer stärker wird. Die Enge der Atemwege lässt sich beim Asthma in der Regel gut zurückbilden, bei der COPD kaum. Asthmatiker sprechen bei der Langzeitbehandlung im Gegensatz zum Großteil der COPD-Patienten gut auf inhalierbares Cortison an.[Tes02]

[18] Nikotinabusus (von lat. Abusus = Missbrauch) ist im medizinischen Sprachgebrauch die Bezeichnung für den missbräuchlichen Konsum von Produkten, die Nikotin enthalten.

1.3 Anmerkungen und Literaturhinweise

Die Informationen in diesem Kapitel wurden im wesentlichen, insofern nicht explizit auf andere Literaturquellen verwiesen wurde, aus [SS98] [Bec00] [SD91] [Sch96] [Net94] [Wei63] [WMN92] [GOL] [RDH97] [Tes02] und [Ing] entnommen.

Kapitel 2

Computertomographie

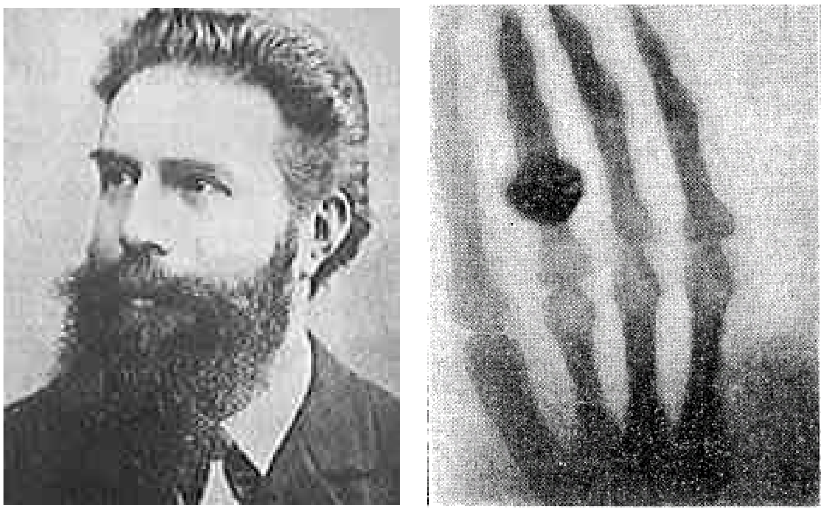
Dieses Kapitel gibt einen Überblick über die Computertomographie (CT). Der Begriff *Tomographie* ist aus den beiden griechischen Wörtern tomos (= Schicht) und graphein (= schreiben/zeichnen) zusammengesetzt. Der Zusatz Computer ist selbsterklärend, ohne die Hilfe des Computers ist diese Art der Bilderzeugung nicht möglich. Es werden grundlegende Begriffe und Zusammenhänge, die zum Verständnis von Computertomogrammen[1] nötig sind, eingeführt und erläutert. Nach einem kurzen Blick in die Historie der Röntgendiagnostik wird, ausgehend von den physikalischen Grundlagen der Röntgentechnik (und ihren Limitierungen), das Grundprinzip der Computertomographie erklärt. Die mathematischen Fundamente, die den Weg von 2-dimensionalen Projektionsbildern zu 3-dimensional ortsaufgelösten Schichtbildern ebnen, werden hergeleitet. Die Betrachtung der physikalischen und mathematischen Hintergründe der CT trägt zum besseren Verständnis von CT-Bildern bei, die unumgänglichen Minderungen der Bildqualität der CT werden deutlich. Die in Kapitel 3 eingeführte Modellierung des Entstehungsprozesses von CT-Bildern als lineares verschiebungsinvariantes System wird einsichtiger. Abschließend wird auf die besonderen Merkmale der zur Zeit aktuellen Multislice-CT eingegangen.

2.1 Historie der Röntgendiagnostik

Am 8. November 1895 entdeckte Wilhelm Conrad Röntgen (1845-1923) (siehe Abb. 2.1a) im physikalischen Institut der Universität Würzburg eine bis dahin unbekannte Strahlung, die er *X-Strahlen* nannte. Diese aufsehenerregende Entdeckung präsentierte Röntgen der Würzburger Physikalisch-Medizinischen Gesellschaft am 28. Dezember 1895 in einer *Vorläufigen Mitteilung* über *Eine neue Art von Strahlen*. Diese Schrift, zunächst in den Sitzungsberichten der Gesellschaft erschienen, wurde in der Folgezeit häufig nachgedruckt. 1901 wurde er in Stockholm mit dem ersten Nobelpreis für Physik ausgezeichnet. Seine X-Strahlen eröffneten der Physik und vor allem der Medizin völlig neue Welten. In Deutschland hat sich die Bezeichnung *Röntgenstrahlen* eingebürgert, während in den meisten Sprachräumen (z. B. engl. *x-rays*) der alte Name geblieben ist. Abb. 2.1b zeigt eine der ersten konventionellen Röntgenaufnahmen eines Menschen.

Durchdringen Röntgenstrahlen eine Gewebeschicht, so werden diese geschwächt. Die Schwächung ist gewebespezifisch. Die geschwächten Strahlen enthalten Informationen

[1] Die Abkürzung CT wird auch für Computertomogramm benutzt.



(a) (b)

Abbildung 2.1: (a) Wilhelm Conrad Röntgen. (b) Druck einer der ersten konventionellen Röntgenaufnahmen eines Menschen. Auf dem Bild soll die linke Hand von Röntgens Frau Bertha mit ihrem Hochzeitsring dargestellt sein (aus [Rön96]).

über die durchdrungenen Gewebe und ihre räumliche Verteilung. Die Entdeckung Röntgens bildete die Grundlage der modernen Röntgendiagnostik und -therapie. Jetzt war es der Medizin möglich geworden, in das Leibesinnere zu schauen, ohne den Körper öffnen zu müssen. Schon im Jahre 1898, 3 Jahre nach Entdeckung der X-Strahlen durch Röntgen, erschien das erste *Lehrbuch zur Röntgenuntersuchung* von Hermann Gocht. Dieser war 1905 Mitbegründer der Deutschen Röntgengesellschaft. Die Leistungsfähigkeit der Röntgenröhren wurde stetig verbessert, die Untersuchung größerer Körperpartien schon bald möglich. In den ersten Jahrzehnten wurden planare Aufnahmen erstellt. Mit dieser Technik ist es zwar möglich einzelne Organe zu differenzieren, die Lage der Organe in Durchstrahlungsrichtung zueinander konnte jedoch nicht beurteilt werden. Ein planares Röntgenbild liefert eben nur ein 2-dimensionales Abbild einer 3-dimensionalen Szene. 3-dimensionale Informationen wurden später mittels der analogen Verwischungstomographie (mehr dazu in [Her80, LOPR97]) erzeugt. Durch die geeignete Anordnung von Film, Röntgenquelle und Patient werden Strukturen außerhalb der abzubildenden Schicht innerhalb des Patienten verwischt. Dies wird dadurch erreicht, dass sowohl der Film als auch der Patient in gleicher Richtung bei gleicher Geschwindigkeit rotieren. In dieser Form der Tomographie werden die Punkte einer gewünschten Aufnahmeschicht immer auf die gleiche Stelle des Films projiziert. Punkte außerhalb der Aufnahmeschicht sind, als unerwünschte Artefakte, in verwischter Form auch auf dem Film zu sehen. Das Problem der Verwischungsartefakte wurde mit der Einführung der Computertomographen beseitigt.

Die Entwicklung des ersten Computertomographen durch Godfrey N. Hounsfield (Abb. 2.2c) stellt einen Meilenstein in der Röntgendiagnostik dar. Die Computertomographie ist ein Schichtaufnahmeverfahren und ermöglicht die 2-dimensionale Verteilung der Schwächungskoeffizienten darzustellen. Die Computertomographie war das erste vollständig digitale Schnittbildverfahren in der Medizin. Der erste CT-Scanner wurde von Hounsfield 1971 für Untersuchungen des Schädels entwickelt. Hounsfield forschte für die britische Firma Electric and Musical Industries (EMI), die bis dahin nur Schallplatten und elektronische Bauelemente produziert hatte. 1973 ging der erste kommerzielle CT-Scanner (EMI Mark I Scanner) für Kopfaufnahmen in Serie. 1977 gab es die ersten kommerziellen Ganzkörper-CT-Scanner Somatom 1 von Siemens. EMI verlor schnell seine Vormachtstellung an besser mit Medizintechnik vertraute Firmen wie General Electric (GE) und Siemens. Die Computertomographie hat sich seitdem rasant weiterentwickelt. Abb. 2.3 zeigt schematisch einen Scanner der dritten Generation. Die verschiedenen Umsetzungen der CT-Technik haben zu einer Einteilung der Scanner in 4 Generationen geführt. Das Grundprinzip ist jedoch immer dasselbe. Ein dünner Fächer oder Kegel aus Röntgenstrahlen durchdringt den Patienten aus verschiedenen Richtungen. Es wird eine Ebene definierter Dicke, die so genannte Scanebene oder Scanschicht, durchstrahlt. Die durch das Durchdringen des Körpers geschwächte Röntgenstrahlung wird mittels Detektoren erfasst. Man kann nun die absoluten Schwächungswerte an jedem Punkt in der Scanebene rekonstruieren. Somit lässt sich eine quadratische Matrix (CT-Matrix), welche üblicherweise aus 256^2, 512^2 oder 1024^2 Pixeln bzw. Voxeln besteht, berechnen.

(a) (b) (c)

Abbildung 2.2: Bedeutende Köpfe der Entwicklungsgeschichte der Computertomographie in chronologischer Reihenfolge. (a) Johann Radon (b) Allan McLeod Cormack (c) Sir Godfrey Newbold Hounsfield.

Sir Godfrey N. Hounsfield erhielt zusammen mit Allan McLeod Cormack 1979 den Nobelpreis für Medizin ("*For the Development of Computer Assisted Tomography*"). Der Physiker Cormack (Abb. 2.2b) hatte schon 1963 und 1964 in zwei wissenschaftlichen Arbeiten die theoretischen Grundlagen der Computertomographie veröffentlicht [Cor63, Cor64]. In Unkenntnis von Cormacks Arbeiten entwickelte Hounsfield den ersten Computertomographen.

Viele Jahre zuvor hatte der Mathematiker Johann Radon (1917, Abb. 2.2a) mit der Publikation der nach ihm benannten Radon-Transformation den formalen mathematischen Grundstein der CT gelegt. Cormack wurde auf Radons Arbeiten aber erst 14 Jahre nach seiner eigenen Veröffentlichung auf diesem Gebiet aufmerksam [Cor79].

Die modernen Multislice-CT-Scanner durchstrahlen bis zu 64 Schichten gleichzeitig und ermöglichen so eine sehr schnelle Datenakquisition durch die Bewegungsartefakte, beispielsweise erzeugt durch Atmung oder Herzschlag, minimiert werden können.

Brauchte der EMI Mark I Scanner für Kopfaufnahmen noch mehrere Minuten für die Datenakquisition und mehrere Stunden für die Rekonstruktion einer 80^2 CT-Matrix, so brauchen heutige Multislice-CT Scanner wenige Sekunden für die Datenakquisition und wenige Minuten für die Rekonstruktion eines kompletten CT Volumens. Ein Thorax-CT umfasst beispielsweise leicht, je nach gewählter Schichtdicke und Patientengröße, 200-400 Einzelschichten bei einer standardmäßigen Matrixgröße von 512^2 Voxel.

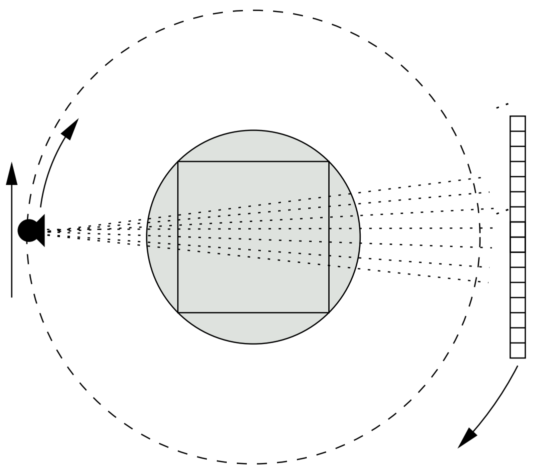


Abbildung 2.3: Stark vereinfachter Aufbau eines CT-Scanners der 3. Generation. Links die emittierende Röntgenquelle, gegenüber die Detektoren und dazwischen der Patient. Durch Rotation der Quelle und der Detektoren kann der Patient komplett abgescannt werden.

2.2 Physikalische Grundlagen der Röntgentechnik

Dieser Abschnitt dient zur Einführung physikalischer Grundlagen und Grundbegriffe aus dem Bereich der Röntgenstrahlung, um ein tiefergehendes Arbeiten mit computertomographischen Bildern zu ermöglichen. Für weiterführende Informationen sei auf gängige Literatur aus den Bereichen der elektromagnetischen Wellen und der Quantenphysik verwiesen.

2.2.1 Röntgenstrahlung

Röntgenstrahlen sind elektromagnetische Wellen, vergleichbar mit sichtbarem Licht, Radiowellen, Mikrowellen oder UV-Strahlung. Elektromagnetische Wellen können sich ohne Trägermedium ausbreiten. Die Strecke, die eine Welle in einem Wellenzyklus zurücklegt, wird als Wellenlänge λ ($[\lambda] = \mathrm{m}$) bezeichnet. Das für den Menschen sichtbare Licht hat einen Wellenlängenbereich von etwa $400 - 700$ nm[2]. Oberhalb von 700 nm folgt die Infrarotstrahlung (780 nm – 1 mm), Mikrowellen ($10 - 100$ mm) und Radiowellen (z. B. Mittelwellen 200-600 m). Unterhalb des Wellenlängenintervalls des sichtbaren Lichts schließt sich die Ultraviolettstrahlung an ($10 - 400$ nm). Im Bereich von $10^{-5} - 10$ nm spricht man von Röntgenstrahlung[3]. Dieser Bereich wird nochmals in

[2]Ein Nanometer wird durch nm abgekürzt, nm $= 10^{-9}$ m.

[3]Es gibt keine einheitliche Definition der unteren Grenzwellenlänge.

harte, mittlere und weiche Röntgenstrahlung unterteilt.

Die verschiedenen elektromagnetischen Wellen unterscheiden sich, wie soeben beschrieben, in ihren Wellenlängen. Die Frequenz ν ($[\nu] = 1/\mathrm{s} = \mathrm{Hz}$ (Hertz)) einer Welle gibt an, wie viele Schwingungen die Welle pro gewählter Zeiteinheit durchführt. Die Frequenz einer Welle lässt sich aus ihrer Wellenlänge unter Berücksichtigung des zugrunde liegenden Trägermediums berechnen, da die Ausbreitungsgeschwindigkeit in einem bestimmten Medium konstant ist. Für bildgebende Verfahren in der Medizin werden Röntgenstrahlen mit Frequenzen im Bereich von $10^9 - 2 \cdot 10^{11}$ GHz[4] verwendet. Im Vakuum breiten sich elektromagnetische Strahlen mit Lichtgeschwindigkeit[Wik07c] $c = 2.9979 \cdot 10^8\,\mathrm{m/s} \approx 300000\,\mathrm{km/s}$ aus[5]. Eine elektromagnetische Welle mit der Wellenlänge λ und der Frequenz ν legt gerade den Weg $\lambda \cdot \nu$ innerhalb einer Sekunde im Vakuum zurück. Es gilt die Beziehung:

$$c = \lambda \cdot \nu\,. \tag{2.1}$$

Für die medizinisch relevanten Röntgenstrahlen ergeben sich Wellenlängen von etwa $10^{-3} - 3 \cdot 10^{-1}$ nm. Der Energiegehalt der Röntgenstrahlung beträgt:

$$E = h \cdot \nu\,, \tag{2.2}$$

wobei $h = 6.626210^{-34}$ Js $= 6{,}58211915(56) \cdot 10^{-16}\,\mathrm{eVs}$ das Plancksche Wirkungsquantum, eine fundamentale Naturkonstante der Physik, bezeichnet. Je kleiner die Wellenlänge, desto höher die Frequenz und damit auch die Energie der Welle. Der Energiegehalt der Röntgenstrahlung von CT-Scannern liegt im Bereich von etwa $0 - 140$ keV[6]. Weichere Strahlung ($<$ 100 keV) wird vermehrt von Weichteilen aufgenommen und birgt für den Menschen das größere Krebsrisiko.

2.2.2 Erzeugung von Röntgenstrahlen

In einer Röntgenröhre werden freie Elektronen von einer Elektronenquelle (der Kathode) in einem elektrischen Feld in Richtung der Anode beschleunigt. Die Elektronen werden durch Erhitzen einer Schwermetallwendel freigesetzt. Treffen die beschleunigten Elektronen auf das Anodenmaterial[7], so wird die kinetische Energie $E_{\mathrm{kin}} = \frac{1}{2}mv^2$ dieser Elektronen zum größten Teil in Wärme umgewandelt. Ein geringer Anteil, kleiner 1%, wird in Röntgenstrahlung umgesetzt. In der Literatur wird meist das Bohrsche Atommodell (diskretes Schalenmodell) für die anschauliche Erklärung der Entstehung von Röntgenstrahlung herangezogen. Auf eine Einführung in dieses Modell sei hier verzichtet, weiterführende Informationen hierzu beispielsweise in [LOPR97, Ewe98]. Quintessenz der Betrachtungen des Entstehungsprozesses von Röntgenstrahlung ist, dass die Umwandlung in Röntgenstrahlung auf zwei verschiedene Arten geschehen kann. Es wird

[4] 1 GHz $= 10^9$ Hz $= 1$ Milliarde Schwingungen pro Sekunde.

[5] In bodennaher Luft ist die Lichtgeschwindigkeit etwa 0.29 Promille geringer als im Vakuum, in Wasser beträgt sie noch etwa 3/4 ihres Vakuumwertes.

[6] Ein Elektronenvolt (eV) entspricht der Energie, die ein Teilchen mit einer Elementarladung e, (ein Elektron hat die Ladung $-e$, ein Proton die Ladung $+e$) beim Durchlaufen einer elektrischen Spannung von einem Volt aufnimmt. Daraus abgeleitet ergeben sich die üblichen Bezeichnungen Kilo-Elektronenvolt (1 keV = 1000 eV), Mega- Elektronenvolt (1 MeV = 1000 keV), Giga-Elektronenvolt (1GeV = 1000 MeV) und Tera-Elektronenvolt (1 TeV = 1000 GeV).

[7] Als Anodenmaterial wird oftmals Wolfram eingesetzt.

keine Röntgenstrahlung einer bestimmten Wellenlänge erzeugt, sondern ein Röntgenspektrum bestehend aus dem diskreten Spektrum der *charakteristischen Strahlung* und dem kontinuierlichen Spektrum der *Bremsstrahlung*.

Charakteristische Strahlung und Bremsstrahlung

Auf der einen Seite kann beim Auftreffen eines beschleunigten Elektrons auf die Anode eine Interaktion mit einem gebundenen Elektron eines Atoms des Anodenmaterials eintreten - entweder nimmt das gebundene Elektron einen Platz auf einer entfernteren Atomschale ein, oder es wird freigesetzt (*Ionisation*[8]). In beiden Fällen wird der Platz des gebundenen Elektrons auf seiner Schale frei. Ein Elektron auf einer energetisch höheren Schale nimmt dann diesen Platz ein, und gibt die nun überschüssige Energie, in Form von Röntgenstrahlung, wieder ab. Da hier Sprünge zwischen diskreten Schalen stattfinden und die Schalen Elektronen gleichen Energieniveaus beherbergen, entsteht die sogenannte charakteristische Strahlung. Die Differenz der Energieniveaus zwischen verschiedenen Schalen ist unterschiedlich, aber für jeweils zwei bestimmte Schalen konstant. Auf diesem Wege wird Röntgenstrahlung verschiedener Energieniveaus (= verschiedener Wellenlängen) erzeugt, da die Elektronen aber auf wenigen diskreten Schalen um den Atomkern angeordnet sind, wird diskrete charakteristische Röntgenstrahlung erzeugt, d. h. Strahlung exakt konstant definierter Wellenlängen. Für jedes Element im Periodensystem gibt es genau definierte Wellenlängen charakteristischer Strahlung.

Der Hauptteil des Röntgenspektrums resultiert aber nicht aus der eben beschriebenen Wechselwirkung der freien beschleunigten Elektronen mit den gebundenen Elektronen, sondern aus der Wechselwirkung der freien beschleunigten (negativ geladenen) Elektronen mit dem elektrischen Feld des positiv geladenen Atomkerns. Die freien Elektronen werden abgebremst und/oder abgelenkt. Die so emittierte Strahlung bezeichnet man als Röntgenbremsstrahlung. Obergrenze für die Energie der erzeugten Röntgenbremsstrahlung stellt die kinetische Energie der beschleunigten Elektronen dar.

Beispiel. In kommerziellen CT-Scannern lässt sich die Röhrenspannung der Röntgenröhre meist auf Werte im Bereich von $30 - 140$ kV[9] einstellen. Die potentielle Energie eines freien Elektrons ist in diesem elektrischen Feld gerade: $E_{\text{pot}} = e \cdot U$ ($e = 1,6022 \cdot 10^{-19}$ As[10]). Diese wird in der Vakuumröntgenröhre in kinetische Energie $E_{\text{kin}} = \frac{1}{2} m v^2$ umgewandelt. Ein Röntgenphoton (-quant) kann somit eine maximale Energie von $30 - 140$ keV erreichen, je nach gewählter Röhrenspannung. Wählt man als Anodenmaterial Wolfram so ergeben sich für verschiedene Röhrenspannungen ([kV]) und Röhrenströme ([mAs]) unterschiedliche Spektren (siehe Abb. 2.4).

2.2.3 Hauptwechselwirkungen mit Materie

Wechselwirkung von Röntgenstrahlung, im Energiebereich von 30-140 keV, mit Materie geschieht auf verschiedene Art und Weise. Die Wahrscheinlichkeit dafür, welcher Prozess eintritt hängt von der Energie der Röntgenstrahlung und der durchleuchteten Materie

[8] Ionisation: Einem Atom oder Molekül werden ein oder mehrere Elektronen entnommen, es bleibt als positiv geladenes Ion zurück.

[9] Im Englischen liest man statt kV auch synonym kVp für kilovolts peak.

[10] 1 As ist gleich der Ladung, die bei einem Strom von einem Ampere (1 A) während einer Zeit von einer Sekunde (1 s) verschoben wird. Alternativ ist die Bezeichnung Coulomb, nach dem französischen Physiker Charles Augustin de Coulomb (1736 - 1806): $\mathrm{A} \cdot \mathrm{s} = \mathrm{C}$.

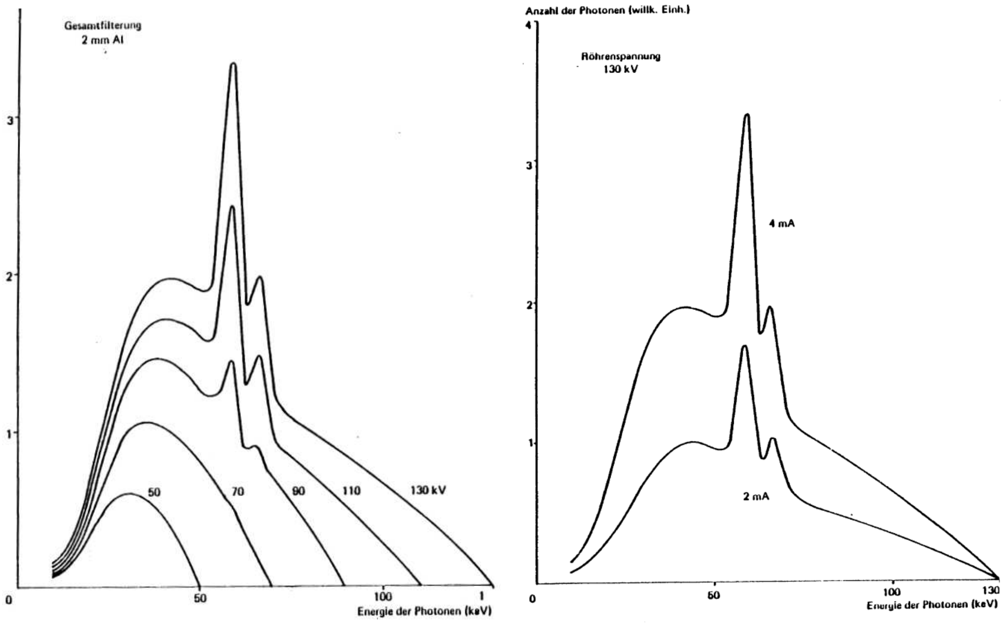


Abbildung 2.4: Ein Röntgenspektrum ist die Summe der erzeugten Bremsstrahlung und charakteristischer Strahlung. Der Verlauf des Spektrums hängt von den gewählten Scannereinstellungen ab - hauptsächlich von der angelegten Röhrenspannung, der Höhe des gewählten Röhrenstroms und dem Anodenmaterial. Durch spezielle Filtertechniken kann das Röntgenspektrum, nach Austritt aus dem Röntgenstrahler, noch nachträglich verändert werden, so dass die energiearmen Anteile der Strahlung reduziert werden (Strahlenfilterung) oder die räumliche Verteilung der emittierten Röntgenstrahlung in der Schnittebene verändert wird (Formfilter). Durch Weiterentwicklung der Rekonstruktionsalgorithmen verliert die Vorfilterung der Röntgenstrahlung jedoch an Bedeutung, Effekte wie Strahlenaufhärtung werden teilweise rechnerisch korrigiert. Dies erhöht die Effizienz der Röntgenquelle. Im Graphen links wurde die Röhrenspannung und im Graphen rechts wurde der Röhrenstrom variiert. Ist die angelegte Röhrenspannung zu niedrig, können Peaks der charakteristischen Röntgenstrahlung fehlen, da die kinetische Energie der beschleunigten Elektronen nicht groß genug war, um die entsprechenden Elektronen aus den Atomschalen zu entfernen. Eine Erhöhung der Röhrenspannung führt zu einer Erhöhung der Grenzenergie sowie einer Erhöhung der Intensität der Röntgenstrahlung, die Lage der Peaks bleibt unverändert. Eine Erhöhung des Röhrenstroms führt zu einer Erhöhung der Intensität der Röntgenstrahlung (sowohl Brems- als auch charakteristische Strahlenanteile) bei unveränderter Grenzenergie. Somit verändert sich auch nicht die Härte der Röntgenstrahlung, sondern nur die Intensität. Ein Röntgenspektrum hängt vom verwendeten Anodenmaterial ab, sowohl das Bremsstrahlen- sowie das charakteristische Röntgenspektrum ist materialspezifisch. (Abb. aus [Lan])

ab. Für die Energieabnahme sind die folgenden Prozesse von größter Bedeutung: die *Photoabsorption* (Photoeffekt, komplette Absorption) und der *Comptoneffekt*, auch als inelastische Streuung oder inkohärente Streuung bezeichnet.

Elastische Streuung (kohärente Streuung) ändert die Richtung der Röntgenphotonen, die Wellenlänge bzw. die Energie bleibt erhalten. Für eine elastische Streuung eines Photons gibt es verschiedene Gründe, so dass man diese nochmals in Thomson-, Rayleigh-, und Delbruck-Streuung unterscheidet.

Tritt eine Interaktion eines Röntgenquants mit einem gebundenen, inneren Schalenelektron des Atoms der durchleuchteten Materie ein, und existiert dieses Quant danach nicht mehr, so bezeichnet man dies als Photoabsorption. Die überschüssige Energie des Photons wird dem herausgelösten Elektron als kinetische Energie mitgegeben. Röntgenstrahlung ist somit also ionisierend. Wird das Loch in der Elektronenhülle des Atoms geschlossen, so tritt niederenergetische Fluoreszenzstrahlung[11] auf. Die Photoabsorption tritt vermehrt im niederenergetischen Bereich der Röntgenstrahlung auf und hängt desweitern stark von der Atomzahl des durchleuchteten Materials ab.

Der Comptoneffekt bezeichnet die energetisch verlustbehaftete Interaktion eines Röntgenquants mit einem äußeren Schalenelektron. Die Energie des Quants nimmt ab, die Wellenlänge nimmt zu, die Richtung der Strahlung wird verändert. Durch den Comptoneffekt können auch schwach gebundene Elektronen (auf den äußeren Schalen) freigesetzt werden (Ionisation).

2.2.4 Physikalische Probleme der CT

Hier werden nun einige physikalisch (unumgängliche) Limitierungen der CT beschrieben. Eine grundlegende Einschränkung der CT stellt die statistische Natur des Prozesses der Röntgenstrahlenerzeugung, der Wechselwirkung mit Materie und der Photonendetektion dar - dies wird unter dem Begriff *Photonenstatistik* zusammengefasst. Daneben werden noch die Begriffe *Strahlenaufhärtung*, *Partialvolumeneffekt* und *Bewegungsartefakt* erläutert.

Photonenstatistik

Man kann zwar im Zuge der Erzeugung von Röntgenstrahlung verschiedene Parameter für die Röntgenquelle einstellen (z. B. Röhrenspannung, siehe 2.2.2), trotzdem bleibt die Erzeugung von Röntgenstrahlung ein statistischer Prozess. Bezeichnet man mit Y eine diskrete Zufallsvariable, die diesen Entstehungsprozess modelliert, dann liefert das Wahrscheinlichkeitsmaß P_Y die Anzahl von Photonen, die von einer festen Röntgenquelle in einer festen Zeiteinheit in Richtung eines Detektors emittiert werden. Diese Zufallsvariable kann als poissonverteilt angenommen werden [Her80, S. 41]:

$$P_Y(y) = \frac{\lambda^y e^{-\lambda}}{y!} \,. \tag{2.3}$$

Das bedeutet, dass man eine Röntgenquelle zwar so justieren kann, dass diese im Mittel eine Anzahl von λ Photonen in Richtung eines Detektors emittiert, diese Anzahl aber keineswegs immer gegeben ist.

[11] Mit Fluoreszenzstrahlung bezeichnet man die spontane Emission von Licht beim Übergang eines elektronisch angeregten Systems in einen Zustand niedrigerer Energie.

Beispiel. Nimmt man an, eine Röntgenquelle emittiert im Mittel $\lambda = 100$ Photonen in einer gewissen Zeitspanne. Dann ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass man in einem Versuch genau 100 Photonen detektiert, gerade $P_Y(y = 100) = \frac{\lambda^y e^{-\lambda}}{y!} = 0,039861 \approx 4\%$. Die Standardabweichung der poisonverteilten Zufallsvariablen beträgt $\sqrt{\lambda} = 10$. Die Wahrscheinlichkeit, dass man zwischen 90 und 110 Photonen zählt beträgt $P_Y(90 <= y <= 110) = 0,70563 \approx 71\%$. Erhöht man die Anzahl der im Mittel emittierten Photonen auf $\lambda = 100 \cdot 100$, dann beträgt die Standardabweichung $\sqrt{\lambda} = 100$, d. h. durch eine Erhöhung der Photonenzahl um den Faktor 100 hat sich die Standardabweichung bezogen auf die Gesamtphotonenzahl um den Faktor 10 verringert, von $10/100 = 10\%$ auf $100/10000 = 1\%$.

Wie das Beispiel zeigt, lässt sich der statistische Fehler, induziert durch den Entstehungsprozess der Röntgenstrahlung, durch ein Erhöhen der Photonenzahl verringern. Hierfür gibt es zwei Möglichkeiten. Zum einen kann man die Belichtungszeit erhöhen, beim Scannen von Lebewesen steigen damit aber auch die sogenannten Bewegungsartefakte. Zum anderen kann die angelegte Röhrenstromstärke erhöht werden, dies hat den Vorteil, dass man keine zusätzlichen Bewegungsartefakte in Kauf nehmen muss. In der Praxis können beide Möglichkeiten, zumindest beim Scannen von Lebewesen, nicht nach Belieben eingesetzt werden, da die Strahlenbelastung steigt. Lange Zeit wurde in der CT nach dem Prinzip der Erzeugung der bestmöglichen Bildqualität gearbeit, in den letzten Jahren wird vermehrt Wert auf sogenannte *low-dose CTs* gelegt.

Unter dem Begriff Photonenstatistik fällt auch die Wechselwirkung (Absorption und Streuung) der Strahlung mit der Materie. Wieviele Photonen einer fixen Anzahl auf dem Weg von der Photonenquelle zum Detektor absorbiert werden, lässt sich nur approximieren, nicht exakt voraussagen.

Als dritter, mit einem gewissen Fehler behafteten Prozess, lässt sich auch die Leistungsfähigkeit eines Detektors durch eine Zufallsvariable beschreiben. Nicht jedes Photon, das den Detektor erreicht, wird auch gezählt (Detektorrauschen).

Strahlenaufhärtung

In 2.2.2 wurde gezeigt, dass die in der CT verwendete Röntgenstrahlung polychromatisch ist. Die Strahlung besteht also aus Photonen verschiedener Wellenlängen. Verfolgt man das Energiespektrum eines Röntgenstrahls von der Quelle durch ein Objekt bis zum Detektor, so wird dieses kontinuierlich geschwächt. Im Allgemeinen ist die Abnahme der Photonenanzahl niedrigerer Energie höher, so dass sich der Schwerpunkt der Verteilung im Energiespekrum während des Strahlenverlaufs hin zu den energiereicheren Quanten verschiebt - die Strahlung wird härter. Schickt man nun Röntgenstrahlen aus der gleichen Röntgenquelle, aber von unterschiedlichen Positionen durch ein Objekt, so kann man den Strahlenverlauf durch zwei Geraden approximieren. Im Schnittpunkt dieser beiden Geraden sieht das Spektrum der beiden Strahlen i. A. unterschiedlich aus, da beide unterschiedliche Wegstrecken durch verschiedene Materialien zurückgelegt haben. Somit unterscheidet sich auch die Schwächung der verbliebenen Strahlung in diesem Punkt. Im Laufe der Zeit wurden verschiedene Verfahren und Vorschläge zur Korrektur von Strahlenaufhärtungsartefakten (engl. beam hardening artefacts) entwickelt [Cas04, Her80].

Bewegungsartefakte und Partialvolumeneffekte

Eine Grundlage der Theorie der Computertomographie ist, dass sich das zu scannende Objekt während der Datenakquirierung nicht bewegt. Dies ist natürlich beim Scannen eines Menschen schwer zu gewährleisten, denkt man z. B. wieder an Herzschlag und Atmung. Bewegungsartefakte (engl. motion artefacts) haben durch die Erhöhung der Aufnahmegeschwindigkeit im Zuge der ständigen CT-Weiterentwicklung (siehe 2.5) immer mehr an Bedeutung verloren, sind aber nicht ganz zu vermeiden.

Zum Abschluß seien noch die sogenannten Partialvolumeneffekte (engl. partial volume effects) erwähnt. Diese beruhen darauf, dass sowohl die Röntgenquelle als auch der Detektor eine bestimmte Größe haben. Die Photonen, die auf einem bestimmten Detektor registriert werden, kommen zwar von der selben Röntgenquelle[12], der Weg von der Quelle zum Detektor war aber nicht für alle exakt der gleiche. Vielmehr haben die Photonen ein ganzes Bündel von sich geringfügig unterscheidenden Wegen zurückgelegt. Dies hat zur Folge, dass die gemessene Strahlung auf dem Detektor unter Umständen verschiedene Materialien durchquert hat, und damit auch unterschiedlich geschwächt wurde.

2.3 Das Prinzip der Computertomographie

Die konventionelle Röntgenabbildung liefert eine Projektion eines 3-dimensionalen Körpers auf eine Ebene. Man kann annehmen, dass sich die Röntgenstrahlen auf geraden Linien bewegen. Jeder Bildpunkt repräsentiert nur die über den zugehörigen Strahlenweg gemittelte Information. Die Tiefeninformation geht verloren. Die Abschwächung der i. A. polychromatischen Röntgenstrahlung ist materialspezifisch und kann durch den linearen Schwächungskoeffizienten μ_E, der energieabhängig ist, als Exponentialgesetz (Lambert-Beersche Gesetz, engl. Beer-Lambert law[13]) beschrieben werden:

$$I = \int_E I_0 \, \mathrm{e}^{-\int_L \mu_E(l) \mathrm{d}l} \mathrm{d}E \,. \tag{2.4}$$

Da polychromatische Röntgenstrahlung nur aufgrund des Mangel an schwer herzustellender monochromatischer Strahlung eingesetzt wird, die Schwächung der monochromatischen Strahlung aber aus der Schwächung für polychromatische Strahlung approximiert werden kann [Her80, S. 36], genügt es im Folgenden von monochromatischer Strahlung auszugehen. Für monochromatische Röntgenquellen lautet das einfachere Schwächungsgesetz:

$$I = I_0 \, \mathrm{e}^{-\int_L \mu(l) \mathrm{d}l} \,. \tag{2.5}$$

In dieser vereinfachten Gleichung des Schwächungsgesetzes steht I_0 für die ungeschwächte Ausgangsintensität des Röntgenstrahls an der Quelle. I bezeichnet die gemessene Intensität am Detektor. L steht für den Weg von der Quelle zum Detektor. Durch Umformen lässt sich die Gesamtinformation entlang des Weges L schreiben als:

$$\ln(I_0/I) = \int_L \mu(l) \mathrm{d}l \,. \tag{2.6}$$

[12] Streustrahlung, die eigentlich für einen anderen Detektor bestimmt war, sei in dieser Überlegung ausgeschlossen.
[13] Auch als Beer's law oder Lambert-Beer law bezeichnet.

$\mu(l)$ steht für den linearen Schwächungskoeffizient (engl. attenuation coeffizient) an der Stelle l auf dem Weg L.

Für eine diskrete Voxelmatrix lässt sich in (2.6) das Integral durch eine Summe ersetzen:

$$\ln(I_0/I) = \sum_L \mu_i s_i \,. \tag{2.7}$$

Hier steht nun μ_i für die durchschnittliche Schwächung innerhalb eines Voxels und s_i bezeichnet die Lauflänge des Röntgenstrahls in dem i-ten Voxel. Die Rekonstruktion der μ_i kann auf verschiedenen Wegen umgesetzt werden, siehe Abschnitt 2.4.

2.3.1 Hounsfield-Skala

Da die absoluten Schwächungskoeffizienten von Untersuchungsparametern und gerätespezifischen Größen abhängen, wurde eine relative Schwächungsskala, die sogenannte *Hounsfield-Skala* eingeführt. Die Definition der CT-Werte wurde so gewählt, dass man für Wasser den Wert 0, und für Luft den Wert -1000 erhält. Der absolute Schwächungswert eines Gewebes x wird dann auf Wasser und Luft, bzw. nur auf Wasser, bezogen:

$$\mathrm{CT-Wert} = 1000 \cdot \frac{\mu_x - \mu_{Wasser}}{\mu_{Wasser} - \mu_{Luft}} \tag{2.8}$$

$$\approx 1000 \cdot \frac{\mu_x - \mu_{Wasser}}{\mu_{Wasser}} \,. \tag{2.9}$$

Oft liest man in der Literatur die Approximation (2.9), da $\mu_{Luft} \approx 0$. Der dimensionslos definierte CT-Wert wird in Hounsfield-Einheiten [HE] (engl. Hounsfield units [HU]) angegeben. Üblicherweise umfasst ein CT-Bild einen Wertebereich von 4096 (12-bit Daten, $2^{12} = 4096$) verschiedenen Grauwerten im Bereich von -1024 bis 3071 HE. In der bildlichen Darstellung wird der Minimalwert standardmäßig schwarz dargestellt, der Maximalwert weiß. Lungengewebe wird dadurch aufgrund des großen Luftgehalts in CT-Bildern eher dunkel dargestellt. Verschiedene Gewebearten und Organe weisen sehr ähnliche CT-Werte auf und sind alleine durch den CT-Wert nicht zu unterscheiden. Knochen erscheinen, bedingt durch ihre hohe physikalische Dichte und der damit einhergehenden hohen Schwächung der Röntgenstrahlen, sehr hell. Die Zuweisung eines bestimmten Grauwertes zu einem Hounsfieldwert ist nicht explizit definiert, siehe 2.3.2. Beim Arbeiten mit dem Computer ist es oft einfacher die CT-Werte in den positiven Bereich zu shiften: $\mathrm{CT-Wert}' = \mathrm{CT-Wert} + 1024$ mit Einheit [HE'] ([HU']) statt [HE] ([HU]).

2.3.2 Fenstertechnik

Die *Fenstertechnik* ist eine Basistechnik der digitalen Bildverarbeitung, in der CT ist die *Fensterung* der Bilder üblich. Man versteht darunter, dass zur Darstellung der Pixelwerte (Hounsfieldwerte) eines CT-Bildes sogenannte *Look-up tables* (LUT) verwendet werden. Die Technik bringt verschiedene Vorteile mit sich: Es lässt sich der Pixelwertebereich an verschiedene Ausgabemedien anpassen, oft können beispielsweise überhaupt nur 256 verschiedene Graustufen dargestellt werden. Dazu kommt, dass das menschliche Auge, je nach Betrachtungsbedingungen, nur in der Lage ist maximal

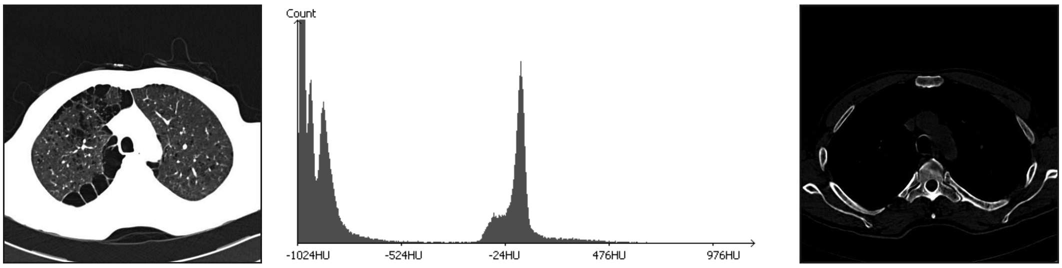


Abbildung 2.5: Dasselbe Bild in unterschiedlichen Fensterungen. Links im Lungenfenster (300 mAs, 120 kV, 1.25 mm, 1 mm, B30f, [-600/850], Siemens Volume Zoom), rechts im Knochenfenster (300 mAs, 120 kV, 1.25 mm, 1 mm, B30f, [500/1000], Siemens Volume Zoom), dazwischen das Histogramm dieses CT-Bildes. Im Lungenfenster werden die Histogrammpeaks ganz links graukodiert dargestellt, im Knochenfenster die rechten Peaks.

40-100 Graustufen zu differenzieren. Mehr Graustufen bringen somit keine Zusatzinformation für den menschlichen Betrachter. Der wichtigste Gesichtspunkt ist jedoch, dass je nach medizinischer Fragestellung nicht die gesamte Hounsfield-Skala von Interesse ist. Zum Befunden der Lungen ist ein anderer Grauwertbereich von Interesse (Lungenfenster) als beim Befunden von Knochenstrukturen (Knochenfenster). Am gleichen CT können mit Hilfe der Fenstertechnik unterschiedliche medizinischen Fragestellung gelöst werden (siehe Abb. 2.5). Ein Fenster (Hounsfieldfenster) wird gebräuchlicherweise durch die Parameter Fensterlage (Fensterzentrum) und Fensterbreite beschrieben (engl. window center und window width).

2.4 Von Projektionsbildern zu Schichtbildern

Rekonstruktionsalgorithmen lassen sich grob in zwei verschiedene Gruppen einteilen.

Zum einen gibt es Algorithmen die auf einer expliziten Transformationsformel beruhen und eine approximierte direkte Umsetzung der *Radonschen Umkehrformel* darstellen. Man rechnet praktisch so, als hätte man eine unendliche Anzahl von Projektionsbildern - und für diesen Fall lässt sich das Rekonstruktionsproblem theoretisch fehlerfrei lösen. Die Umsetzung der Radonschen Inversen kann auf verschiedenen Wegen erreicht werden.

Zum anderen kann das Rekonstruktionsproblem durch ein lineares Gleichungssystem beschrieben werden. Auf Grund der Größe der entstehenden Systeme kommen hier meist nur iterative Lösungsverfahren in Frage.

Die Radon-Transformation, respektive die gesuchte Umkehr dieser, liefert den mathematischen Rahmen um von einer projizierten Funktion wieder zu der ursprünglichen Funktion zu kommen.

2.4.1 Radon-Transformation

Die Radon-Transformation wurde 1917 von dem österreichischen Mathematiker Johann Radon publiziert. $[\mathcal{R}f](s,\theta)$ bezeichne die Radon-Transformierte einer kontinuierlichen, zweidimensionalen Bildfunktion $f(x,y)$. $[\mathcal{R}f](s,\theta)$ kann als Linienintegral von f unter Zuhilfenahme der Diracschen Deltadistribution (siehe A.7.1) für den Fall paralleler

Strahlen durch eine Ebene durch folgendes Doppelintegral definiert werden:

$$[\mathcal{R}f_\theta](s) \equiv [\mathcal{R}f](s,\theta) \equiv g(s,\theta) := \iint_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,\delta(s - x\cos\theta - y\sin\theta)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,, \tag{2.10}$$

wobei verschiedene Notationen gängig sind. Die Radontransformierte $[\mathcal{R}f]\,(s,\theta)$ ist eine eindimensionale Projektion der Funktion $f(x,y)$ zu einem bestimmten Winkel θ. $[\mathcal{R}f](s,\theta)$ wird auch als Strahlensumme bezeichnet, denn die Integralbildung von $f(x,y)$ erfolgt entlang einer Geraden. Abbildung 2.6 visualisiert das Vorgehen der Radon Transformation. Da die δ-Distribution für Werte $\neq 0$ verschwindet, liefern nur die (x,y) einen

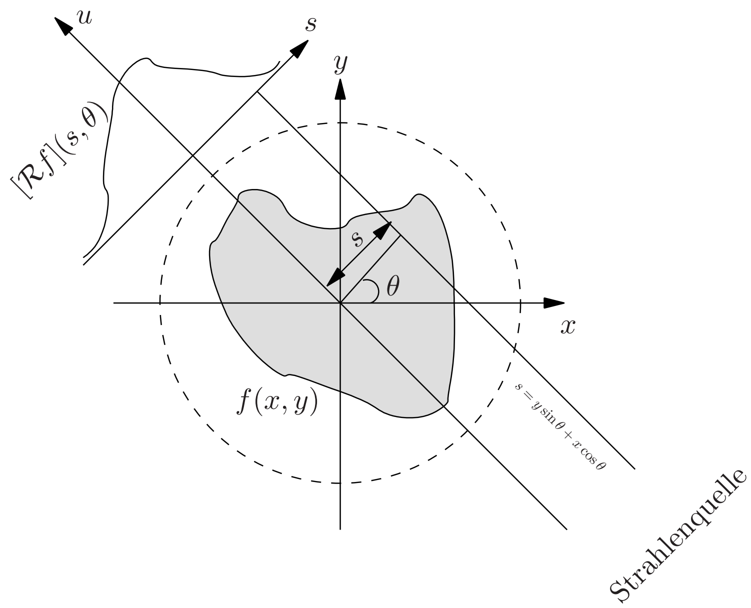


Abbildung 2.6: Vereinfachte Projektionsgeometrie in der Computertomographie: Die Radon-Transformierte $[\mathcal{R}f](s,\theta)$ der Bildfunktion $f(x,y)$ entspricht gerade dem Integral von f entlang der Geraden $s = y\sin\theta + x\cos\theta$.

nicht verschwindenden Beitrag zum Integral für die gilt:

$$s = x\cos\theta + y\sin\theta\,. \tag{2.11}$$

(2.11) definiert die Integrationsgerade L in ihrer Polarform. s ist hierbei der Abstand vom Ursprung des x,y-Koordinatensystems. Gleichung (2.10) lässt sich etwas salopper als Linienintegral aufschreiben:

$$[\mathcal{R}f](s,\theta) = \int_{\mathbf{x}\in L} f(x,y)\,\mathrm{d}\mathbf{x}\,,\ \mathbf{x} = (x,y)\,. \tag{2.12}$$

Das x,y-Koordinatensystem kann mit der Rotationsmatrix

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \tag{2.13}$$

in das gedrehte s,u-Koordinatensystem (siehe Abb. 2.6) transformiert werden. Der Ursprung der beiden Koordinatensysteme ist identisch. Für das gedrehte Koordinatensystem gelten dann folgende Beziehungen:

$$\begin{aligned} s &= x\cos\theta + y\sin\theta\,, \\ u &= -x\sin\theta + y\cos\theta\,, \end{aligned} \tag{2.14}$$

und andererseits:

$$\begin{aligned} x &= s\cos\theta - u\sin\theta\,, \\ y &= s\sin\theta + u\cos\theta\,. \end{aligned} \tag{2.15}$$

Mit (2.15) lässt sich (2.12) umformulieren zu:

$$[\mathcal{R}f](s,\theta) = \int_{-\infty}^{\infty} f(s\cos\theta - u\sin\theta, s\sin\theta + u\cos\theta)\,\mathrm{d}u\,. \tag{2.16}$$

Angenehm ist in dieser Schreibweise gegenüber der Definition in (2.10) das Wegfallen des Doppelintegrals, da parallel zur u-Koordinatenachse integriert wird, s und θ sind konstant.

Häufig, beispielsweise in [Her80, S. 90 ff.], werden statt des kartesischen x, y-Koordinatensystems Polarkoordinaten (r, ϕ) verwendet. Es gelten folgende Zusammenhänge:

$$\begin{aligned} r &= \sqrt{x^2+y^2}\,, \\ \phi &= \arctan(y/x)\,, \\ x &= r\cos\phi\,, \\ y &= r\sin\phi\,. \end{aligned} \tag{2.17}$$

Fasst man f als eine Funktion über Polarkoordinaten (r, ϕ) auf, gelangt man für die Radon-Transformation zu der Darstellung:

$$\begin{aligned} [\mathcal{R}f]\,(s,\theta) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(\sqrt{s^2+u^2}, \theta + \arctan(u/s))\,\mathrm{d}u\;, \text{ falls } s \neq 0\,, \\ [\mathcal{R}f]\,(s,\theta) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(u, \theta + \pi/2)\,\mathrm{d}u\;, \text{ falls } s = 0\,. \end{aligned} \tag{2.18}$$

Darstellung (2.18) erhält man aus (2.16) durch Anwenden der Zusammenhänge aus (2.17) (siehe auch Abb. 2.7). Es gilt:

$$\begin{aligned} r &= \sqrt{x^2+y^2} \\ &= \sqrt{(s\cos\theta - u\sin\theta)^2 + (s\sin\theta + u\cos\theta)^2} \\ &= \sqrt{s^2+u^2}\,, \end{aligned} \tag{2.19}$$

unter Ausnutzung von $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$, sowie

$$\begin{aligned} \phi &= \arctan(y/x) \\ &= \arctan((s\sin\theta + u\cos\theta)/(s\cos\theta - u\sin\theta)) \\ &= \arctan((\tan\theta + u/s)/(1 - \tan\theta u/s)) \\ &= \theta + \arctan(u/s)\,, \end{aligned} \tag{2.20}$$

mit $\arctan a + \arctan b = \arctan((a+b)/(1-ab))$.

(2.10), (2.12), (2.16) und (2.18) sind äquivalente Darstellungen der Radon-Transformation für den zweidimensionalen Fall paralleler Strahlen in einer Ebene. Je nach Problemstellung ist die eine oder die andere Darstellung, beispielsweise zur Herleitung weiterführender mathematischer Sätze, vorteilhaft. Der Operator $\mathcal{R}$ wird auch Projektionsoperator (engl. projection operator) genannt. Die Radon-Transformation bildet den 2-dimensionalen x, y-Raum auf den 1-dimensionalen s, θ-Raum ab. Wie gezeigt, existieren unter den gegebenen Voraussetzungen verschiedene Definitionen (Schreibweisen) der Radon-Transformation, die sich aber jeweils ineinander überführen lassen.

Allgemeiner kann man die Radon-Transformation auch für Funktionen f auf $\mathbf{R}^n$ definieren [NW01]. Die Integration erfolgt dann über Hyperebenen
$H(\theta, s) = \{\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n : \mathbf{x} \cdot \theta = s\}$ mit $\theta \in S^{n-1}$, der Einheitskugel im $\mathbf{R}^n$. $H(\theta, s)$ ist die Hyperebene senkrecht zu θ mit Abstand $s \in \mathbf{R}$ vom Ursprung. $[\mathcal{R}f](s, \theta)$ wird dann als Integral von f über $H(\theta, s)$ definiert:

$$[\mathcal{R}f](s, \theta) = \int_{H(\theta,s)} f(x)\,\mathrm{d}\mathbf{x}\,. \tag{2.21}$$

Zurück zum klassischen 2-dimensionalen Fall. Für einen festen Punkt in der x, y-Ebene mit den Polarkoordinaten (r, ϕ) gilt (siehe Abb. 2.7):

$$s = r\cos(\theta - \phi)\,. \tag{2.22}$$

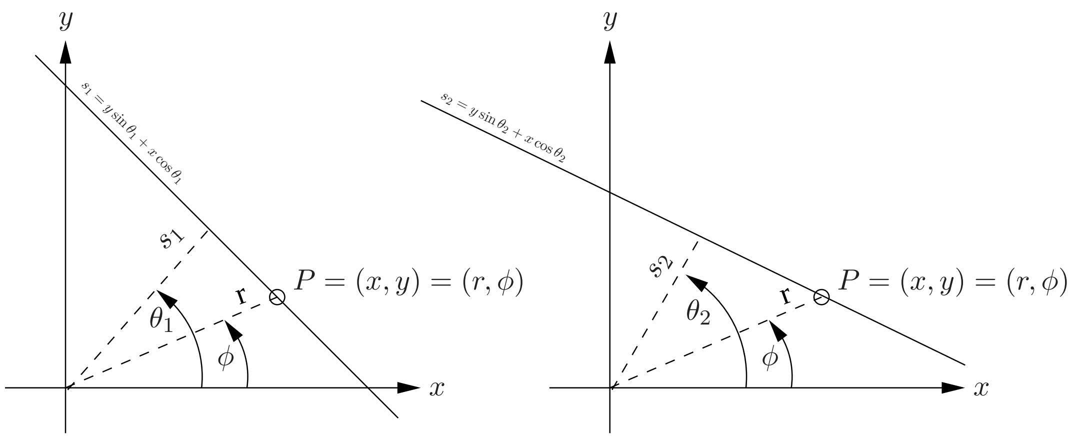


Abbildung 2.7: Zusammenhang zwischen (s, θ) und (r, ϕ). Der feste Punkt P trägt zu den Linienintegralen $[\mathcal{R}f](s_1, \theta_1)$ und $[\mathcal{R}f](s_2, \theta_2)$ bei. Für $\theta_1 \neq \theta_2$ gilt i.a. $s_1 \neq s_2$. Siehe auch Abb. 2.8.

Ein fester Punkt in der x, y-Ebene wird also im Allgemeinen auf verschiedene Positionen im s, θ-Koordinatensystem projiziert. Ändert man den Projektionswinkel θ, so ändert sich der dazugehörige Wert s. In Abb. 2.8 sieht man die Radontransformierten von zwei synthetischen Bildern mit einem einzigen Eintrag $\neq 0$ für verschiedene Projektionswinkel in einer Bildmatrix, dem sogenannten *Sinogramm*, dargestellt. Die Intensitäten des Sinogramms sind proportional den Werten der entsprechenden Linienintegralen. Halt - bisher wurde die Radon-Transformation über $\mathbf{R}$ betrachtet. Im Diskreten wird die Radon-Transformation durch eine Summe approximiert. Das in diesem Kapitel verwendete Octave-Script zum Erstellen der Bildbeispiele ist im B.2.2 zu finden. Abb. 2.9 zeigt ein synthetisches Bild mit einer diskreten Geraden gleicher Intensität. Das Sinogramm weißt einen auffälligen isolierten Peak auf. In [Tof96] werden die Zusammenhänge zwischen der Radon-Transformation und der mit dieser eng verwandten Hough-Transformation, die sich aus ersterer herleiten lässt, dargestellt. Die Hough-Transformation wird in der Bildverarbeitung oft eingesetzt um einfache geometrische

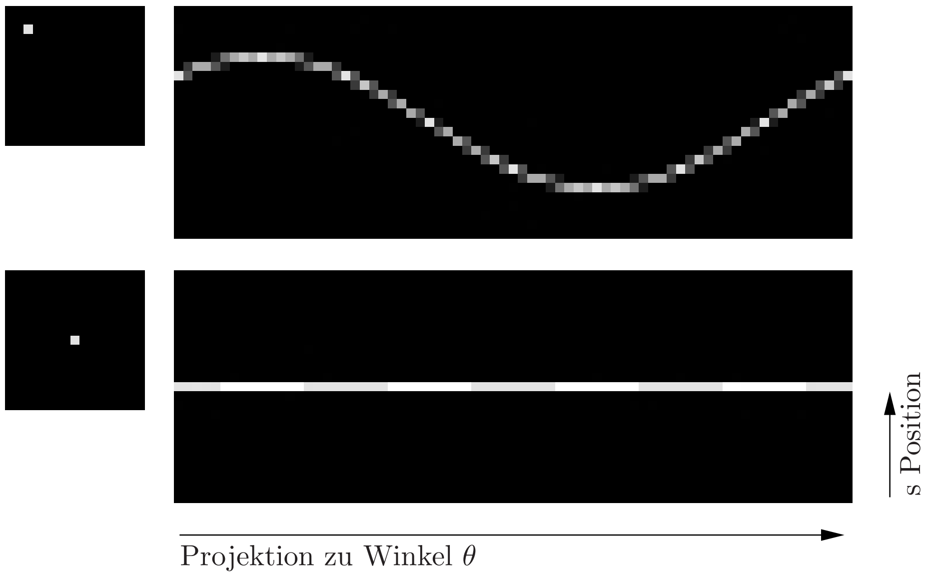


Abbildung 2.8: Die beiden Bilder links wurden für die Winkel $\theta = 0° : 5° : 355°$ radontransformiert. Trägt man die Radontransformierten als Spalten sukzessive in eine Bildmatrix ein, so erhält man die beiden Sinogramme auf der rechten Seite. Die Ausgangsmatrizen sind 15x15-Matrizen mit einem einzigen Eintrag $\neq 0$. Man beachte, dass die einzelnen Radontransformierten in s-Richtung mindestens $15\sqrt{2}$ Elemente aufnehmen müssen, da im Extremfall die Diagonalen projiziert werden.

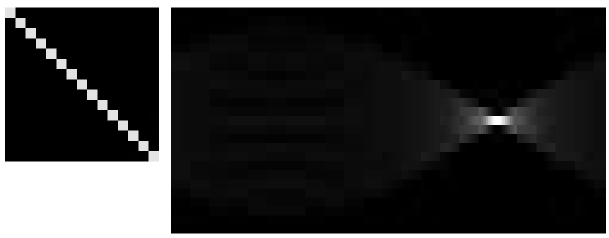


Abbildung 2.9: Links das Ausgangsbild mit einer diskreten Linie. Rechts das dazugehörige Sinogramm in dem sich eindeutig ein Peak heraushebt. Die Radon-Transformation steht im direkten Zusammenhang zur Hough-Transformation. Anhand des Peaks im Hough-Raum kann die Gerade identifiziert werden.

Strukturen wie Linien, Kreise, Kugeln oder andere parametrisierbare geometrische Figuren in 2D- oder 3D-Bildern zu entdecken.

Möchte man aus den Radontransformierten $[\mathcal{R}f](s,\theta)$ wieder die ursprüngliche Funktion f berechnen, benötigt man einen Operator $\mathcal{R}^{-1}$ für den gilt, dass:

$$[\mathcal{R}^{-1}\mathcal{R}f](x,y) = f(x,y)\,. \tag{2.23}$$

Ein solcher Operator wird definiert durch:

$$[\mathcal{R}^{-1}\mathcal{R}f](x,y) = \frac{1}{2\pi^2}\int_0^{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\left[\partial\left[\mathcal{R}f\right]/\partial s\right](s,\theta)}{x\cos\theta + y\sin\theta - s}\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}\theta\,. \tag{2.24}$$

Radon hat diese Umkehrformel bereits 1917 veröffentlicht, der historische Beweis ist beispielsweise in [Her80] Abschnitt 16.3 nachzulesen, eine elegantere Beweisführung in

[Jai89]. Trotz dieser exakten mathematischen Lösung des Problems müssen in der Praxis meist viele weitere Klippen umschifft werden, da man selten die für die exakte Lösung (2.24) nötigen Voraussetzungen vorfindet. Es folgen einige Gründe, die das Realisieren der Umkehrformel erschweren:

- (2.24) liefert uns die exakte Lösung, falls man alle möglichen Linienintegrale zur Verfügung hätte. In der Praxis hat man lediglich eine begrenzte Anzahl von Linienintegralen.
- (2.24) ist lediglich die Inversionsformel für den einfachen Fall paralleler Projektionsstrahlen in einer Ebenen. Oft ist die Geometrie in der Praxis sehr viel komplexer.
- Jedes Linienintegral für sich liefert uns nicht den exakten Wert an dieser Stelle im (s, θ)-Raum, sondern ist durch physikalische Limitierungen schon fehlerbehaftet.
- Explizite Umkehrformeln wie (2.24) müssen erst noch in einen effizienten numerischen Algorithmus umgesetzt werden.

2.4.2 Rückprojektion

Viele komplexere Transformationsmethoden zur Bildrekonstruktion beinhalten den Rückprojektions-Operator $\mathcal{B}$ (engl. backprojection operator). Unter $\mathcal{B}$ versteht man in kartesischer respektive polarer Schreibweise folgenden Operator [Jai89, S. 439 ff.] [Her80, S. 96 ff.]:

$$[\mathcal{B}\mathcal{R}f]\,(x,y) \equiv [\mathcal{B}g]\,(x,y) \quad := \quad \int_0^\pi g(x\cos\theta + y\sin\theta, \theta)\,\mathrm{d}\theta\,, \tag{2.25}$$

$$[\mathcal{B}\mathcal{R}f]\,(r,\phi) \equiv [\mathcal{B}g]\,(r,\phi) \quad := \quad \int_0^\pi g(r\cos(\theta-\phi), \theta)\,\mathrm{d}\theta\,. \tag{2.26}$$

Im Diskreten summiert, im Kontinuierlichen integriert, der Operator $\mathcal{B}$ für einen Punkt $(x, y) = (r, \phi)$ sämtliche Radontransformierten für θ von 0 bis π, deren Integrationsgerade durch (x, y) geht. Abb. 2.10 zeigt zwei verschiedene Ausgangsbilder, deren Sinogramme und die aus den Sinogrammen berechneten Rückprojektionen. Wie man sieht sind die erzeugten Rekonstruktionen sehr unscharf. In welcher Beziehung steht der Rückprojektions-Operator $\mathcal{B}$ zu der Radonschen Umkehrformel aus (2.24)? Um das besser verstehen zu können, betrachtet man die Hilbert-Transformation $\mathcal{H}$ (Definition siehe A.8.2) der Funktion $\partial\,[\mathcal{R}f]\,/\partial s$, wobei $\partial\,[\mathcal{R}f]\,/\partial s$ durch $\mathcal{D}$ ersetzt wird:

$$[\mathcal{H}\mathcal{D}]\,(s',\theta) = -\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathcal{D}(s,\theta)}{s'-s}\,\mathrm{d}s\,. \tag{2.27}$$

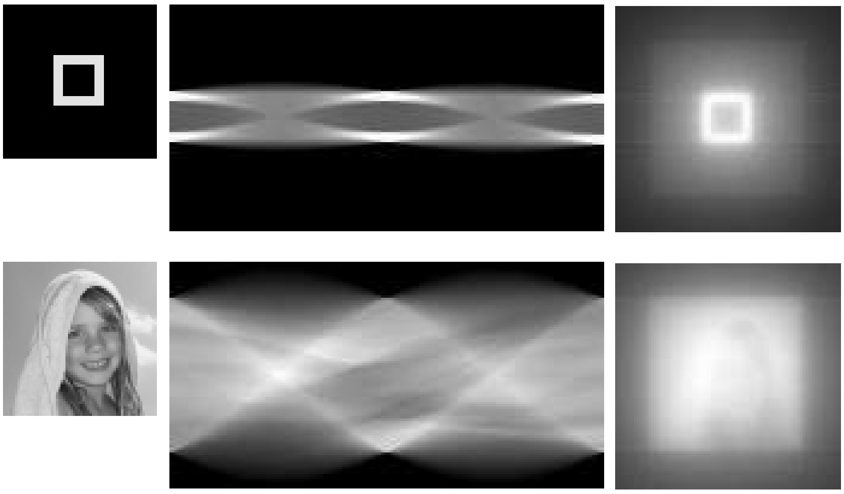


Abbildung 2.10: Oben links eine 64×64-Bildmatrix mit einem gelochten Quadrat als Ausgangsbild. Daneben ein Sinogramm entstanden aus 180 Projektionen des linken Ausgangsbildes mit äquidistanten Winkelabständen. Rechts eine Rekonstruktion aus den Radontransformierten mit dem Rückprojektions-Operator $\mathcal{B}$. Das rechte Bild wurde abschließend in den Grauwertbereich $0-255$ skaliert. Darunter das gleiche Vorgehen für einen 64×64-Urlaubsschnappschuss - das dazugehörige Sinogramm und das Ergebnis der Rückprojektion.

Nun kann man (2.24) umformen zu

$$\begin{aligned}
[\mathcal{R}^{-1}\mathcal{R}f](x,y) &= \frac{1}{2\pi^2}\int_0^\pi \int_{-\infty}^{\infty} \frac{[\partial\,[\mathcal{R}f]\,/\partial s]\,(s,\theta)}{x\cos\theta + y\sin\theta - s}\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}\theta \\
&= \frac{1}{2\pi^2}\int_0^\pi \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathcal{D}\,(s,\theta)}{(x\cos\theta + y\sin\theta) - s}\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}\theta \\
&= -\frac{1}{2\pi}\int_0^\pi [\mathcal{H}\mathcal{D}]\,((x\cos\theta + y\sin\theta),\theta)\,\mathrm{d}\theta \\
&= -\frac{1}{2\pi}\,[\mathcal{B}\mathcal{H}\mathcal{D}]\,(x,y)\,. \qquad (2.28)
\end{aligned}$$

In dieser Schreibweise ist sehr schön zu sehen, warum das alleinige Anwenden des Rückprojektions-Operators $\mathcal{B}$ noch nicht die gewünschten guten Rekonstruktionen liefert. Durch $f(x,y) = -\frac{1}{2\pi}\,[\mathcal{B}\mathcal{H}\mathcal{D}]\,(x,y)$ weiß man genau, wie man im Falle vollkommener Information f aus $\mathcal{R}f$ rekonstruiert. Man bildet die partielle Ableitung von $\mathcal{R}f$ nach s, wendet die Hilbert-Transformation auf das erlangte Resultat an und rückprojiziert erst dann mit $\mathcal{B}$ in den x,y-Raum. Abschließend muss das Resultat mit dem Faktor $-(1/2\pi)$ multipliziert (normalisiert) werden. Durch geeignete direkte Implementierung von (2.28) können Rekonstruktionsalgorithmen entworfen werden. Das Problem ist hierbei die diskrete Approximierung der Hilbert-Transformation, da diese eine Singularität aufweist und die Implementierung dadurch schwierig ist. Das Integral der Hilbert-Transformation wird durch den Cauchyschen Hauptwert bestimmt (siehe A.18). In [NCP04] wird eine auf der Hilbert-Transformation beruhende Rekonstruktionsmethode beschrieben. Diese hat den Vorteil gegenüber der gefilterten Rückprojektion, die als Standardalgorithmus zur CT-Rekonstruktion verwendet wird, dass sich unter bestimmten Bedingungen, Bildbereiche (regions of interest = ROIs) rekonstruieren lassen.

2.4.3 Zentralschnitt-Theorem

Das Zentralschnitt-Theorem oder auch Fourier-Slice-Theorem liefert einen fundamentalen Zusammenhang zwischen der 2-dimensionalen Fourier-Transformation einer Funktion $f(x, y)$ und der 1-dimensionalen Fourier-Transformation der Radon-Transformierten dieser Funktion. Für die Definition der Fourier-Transformation siehe A.8.3.

Zentralschnitt-Theorem

Die 1-dimensionale Fourier-Transformation der Radon-Transformierten $[\mathcal{R}f](s, \theta)$ bezüglich des freien Parameters s ist gleich dem zentralen Schnitt mit dem Winkel θ durch die 2-dimensionale Fourier-Transformation der Funktion $f(x, y)$. Schreibt man die Frequenzen ξ_1 und ξ_2 im 2-dimensionalen Frequenzraum (Fourierraum) als Polarkoordinaten in der Form

$$(\xi_1, \xi_2) = (\xi \cos\theta, \xi \sin\theta)\,, \tag{2.29}$$

dann lässt sich diese Gleichheit, mit ξ als freier Variablen, wie folgt schreiben:

$$G(\xi, \theta) \equiv [\mathcal{F}_1 g_\theta](\xi) \equiv [\mathcal{F}_1 \mathcal{R} f_\theta](\xi) = [\mathcal{F}_2 f_\theta](\xi) \equiv F(\xi \cos\theta, \xi \sin\theta)\,. \tag{2.30}$$

(2.30) kann auf direktem Wege hergeleitet werden.

Ausgehend von der Definition der 2-dimensionalen Fourier-Transformation der Funktion $f(x, y)$ lassen sich mit Hilfe der Koordinatentransformation (2.14) (2.15), der Definition der Radon-Transformation (2.16) und der zulässigen Vertauschbarkeit von ds und du folgende Gleichheiten schreiben:

$$\begin{aligned}
[\mathcal{F}_2 f](\xi_1, \xi_2) &\equiv F(\xi_1, \xi_2) && (2.31)\\
&= F(\xi \cos\theta, \xi \sin\theta) && (2.32)\\
&= \iint_{-\infty}^{\infty} f(x, y)\, e^{-i2\pi(x\xi\cos\theta + y\xi\sin\theta)}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y && (2.33)\\
&= \iint_{-\infty}^{\infty} f(s\cos\theta - u\sin\theta, s\sin\theta + u\cos\theta)\, e^{-i2\pi\xi s}\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}u && (2.34)\\
&= \int_{-\infty}^{\infty} [\mathcal{R}f](s, \theta)\, e^{-i2\pi\xi s}\,\mathrm{d}s && (2.35)\\
&= [\mathcal{F}_1 \mathcal{R} f_\theta](\xi) && (2.36)\\
&\equiv G(\xi, \theta)\,. && (2.37)
\end{aligned}$$

Abb. 2.11 zeigt das Zentralschnitt-Theorem in Bildern.

2.4.4 Gefilterte Rückprojektion

Die gefilterte Rückprojektion ist der bedeutendste Rekonstruktionsalgorithmus in der Computertomographie. Sie kann als approximierte Umsetzung der Radonschen Inversionsformel (2.24) gesehen werden. Man schreibt zunächst die Funktion f als Hintereinanderausführung ihrer 2-dimensionalen Fourier-Transformatierten und deren Inversen (siehe A.37), überführt dieses Doppelintegral in die Polarkoordinatendarstellung ([For84b] §13) und ändert die Integrationsgrenzen des Doppelintegrals. Abschließend ersetzt man die 2-dimensionale Fourier-Transformierte mit der entsprechenden 1-Dimensionalen wie im Zentralschnitt-Theorem gezeigt:

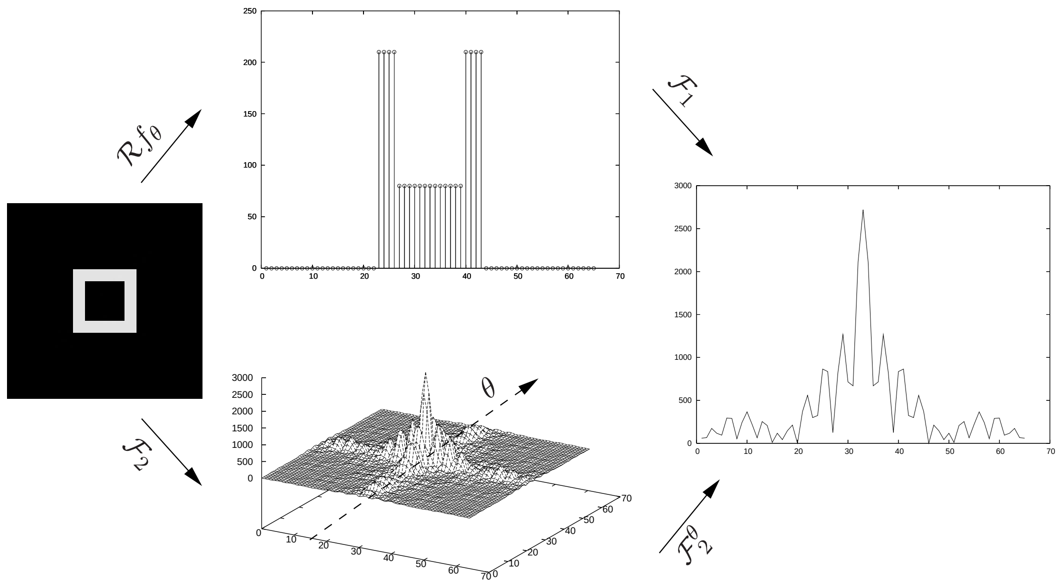


Abbildung 2.11: Das Zentralschnitt-Theorem in Bildern. Links das benutzte Ausgangsbild f. In der Mitte oben die Radontransformierte von f zum Winkel θ. Darunter die 2-dimensionale diskrete Fouriertransformation des Ausgangsbildes. Es gilt nun, dass die 1-dimensionale Fouriertransformierte des Projektionsbildes gleich dem Schnitt durch die 2-dimensionale Fouriertransformierte zum Winkel θ durch den Ursprung ist. Diese Beispielbilder wurden mit $\theta = 0$ erstellt.

$$\begin{aligned} f(x,y) &= [\mathcal{F}_2^{-1}\mathcal{F}_2 f](x,y) = \iint_{-\infty}^{\infty} F(\xi_1,\xi_2)\, e^{i2\pi(\xi_1 x+\xi_2 y)}\,\mathrm{d}\xi_1\,\mathrm{d}\xi_2 && (2.38)\\ &= \int_0^{2\pi}\int_0^{\infty} \xi F(\xi\cos\theta,\xi\sin\theta)\, e^{i2\pi(\xi x\cos\theta+\xi y\sin\theta)}\,\mathrm{d}\xi\,\mathrm{d}\theta && (2.39)\\ &= \int_0^{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |\xi| F(\xi\cos\theta,\xi\sin\theta)\, e^{i2\pi\xi(x\cos\theta+y\sin\theta)}\,\mathrm{d}\xi\,\mathrm{d}\theta && (2.40)\\ &= \int_0^{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |\xi| [\mathcal{F}_1\mathcal{R}f_\theta](\xi)\, e^{i2\pi\xi(x\cos\theta+y\sin\theta)}\,\mathrm{d}\xi\,\mathrm{d}\theta\,. && (2.41)\end{aligned}$$

Den Namen “gefilterte Rückprojektion” hat die Methode deshalb, da sich (2.41) in zwei Schritte zerlegen lässt. Zunächst wendet man einen Filter mit Frequenzantwort $|\xi|$ [14] auf die Radontransformierte von f zum Winkel θ im Fourierraum an. Das Resultat wird mit der Inversen Fourier-Transformation wieder in den Ortsraum gebracht. Die Operatoren $\mathcal{F}_1^{-1}\left[|\xi|\,\mathcal{F}_1[\mathcal{R}f_\theta]\right]$ definiert man als:

$$\widehat{g}(s,\theta) := \int_{-\infty}^{\infty} |\xi| [\mathcal{F}_1\mathcal{R}f_\theta](\xi)\, e^{i2\pi\xi s}\,\mathrm{d}\xi\,. \qquad (2.42)$$

Danach folgt der Rückprojektions-Operator $\mathcal{B}$, der auf $\widehat{g}$ angewendet wird und wieder

[14] Die Fouriertransformation einer Funktion wird in der Signaltheorie auch als Frequenzantwort dieser Funktion bezeichnet. Mehr dazu in Kapitel 3.

zu der ursprünglichen Funktion f führt:

$$f(x,y) = \int_0^\pi \widehat{g}(x\cos\theta + y\sin\theta, \theta)\,\mathrm{d}\theta\,. \tag{2.43}$$

Unter der gefilterten Rückprojektion sind zusammenfassend folgenden Operationen zu verstehen:

$$\mathcal{B}\mathcal{F}_1^{-1}\left[|\xi|\,\mathcal{F}_1[\mathcal{R}f_\theta]\right]\,. \tag{2.44}$$

Die inverse Fourier-Transformierte muss hier wieder mittels der Bestimmung des Cauchyschen Hauptwertes berechnet werden, da sie wegen $|\xi|$ und der unendlichen Integrationsgrenzen mit gewöhnlicher Integration nicht berechnet werden kann. Hat man bei direkter Umsetzung der Radonschen Inversionsformel noch das Problem, dass der Cauchysche Hauptwert berechnet werden muss, da eine uneigentliche Stelle des Integranden zwischen den Integrationsgrenzen vorliegt, so muss der Cauchysche Hauptwert nun wegen unendlicher Integrationsgrenzen eingesetzt werden. Dies hat in der Praxis einen großen Vorteil. Wegen physikalischer Beschränkungen verfügt man nur über bandbreitenbeschränkte Bildern und somit lässt sich die inverse (diskrete) Fourier-Transformation problemlos anwenden, da die hochfrequenten Anteile wegen des Rechnens im Diskreten verschwinden. Der Filter kann somit abgeschnitten werden, die Probleme bei der Berechnung der inversen Fourier-Transformation verschwinden. Abb. 2.12 zeigt die Ergebnisse der gefilterten Rückprojektion mit dem, im folgenden Abschnitt beschriebenen, Shepp-Logan-Filter für die beiden Ausgangsbilder aus Abb. 2.10. An dieser Stelle sei nochmals darauf hingewiesen, dass die gefilterte Rückprojektion hier natürlich nur für den klassischen Fall paralleler Strahlen in einer Ebene hergeleitet wurde. Von Katsevich [Kat02] wurde eine exakte Formel für die schnelle gefilterte Rückprojektion für die Geometrie von Cone-Beam Spiral-CT Scannern erst im Jahre 2001 vorgestellt. Die Entwicklung neuer Scanner mit verschiedenen Flugbahnen der Röntgenquelle erfordert auch immer die Entwicklung neuer Rekonstruktionsalgorithmen oder zumindest die approximierte Überführung in schon gelöste Geometriefälle.

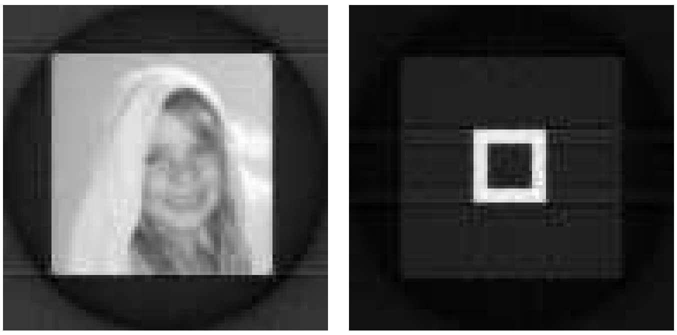


Abbildung 2.12: Rekonstruktion der Ausgangsbilder aus Abb. 2.10. Hier wurde eine gefilterte Rückprojektion mit dem Shepp-Logan-Filter durchgeführt.

Filterfunktionen

Je nachdem wie der verlangte Filter (Rekonstruktionskernel, Rekonstruktionsfilter, Filterkern, engl. convolution kernel) mit der Frequenzantwort $|\xi|$ umgesetzt wird, erhält man zwei verschiedene Algorithmen. Wird der Filter via Faltung im Ortsraum der

Radon-Transformierten durchgeführt, spricht man oft nicht von gefilterter Rückprojektion sondern von faltungsbasierter Rückprojektion.

Der Ram-Lak-Filter ist nach Ramachandran and Lakshminarayanan [RL71] benannt und entspricht der kanonischen Umsetzung des nach (2.44) geforderten Filters $|\xi|$ im Falle von bandbreitenlimitierten Bildern mit Grenzfrequenz ξ_0. Mit der Rechteckfunktion (A.38) lässt sich die Frequenzantwort des Ram-Lak Filters definieren als:

$$H_{RL}(\xi) := |\xi| \operatorname{rect}(d\xi) \ , \ d := \frac{1}{2\xi_0} \, . \tag{2.45}$$

In dieser Form kann der Filter im Frequenzraum via Multiplikation angewendet werden. $d := \frac{1}{2\xi_0}$ entspricht gerade dem Nyquist-Intervall (siehe A.9). Nach dieser Definition verschwindet der Ram-Lak-Filter wegen der Rechteckfunktion, falls der Quotient $\frac{\xi}{2\xi_0}$ betragsmäßig größer als $\frac{1}{2}$ ist (siehe Abb. 2.13a). Soll der Filter jedoch im Ortsraum mittels Faltung eingesetzt werden, muss die inverse Fourier-Transformierte von $|\xi| \operatorname{rect}(d\xi)$ gebildet werden. Für die Impulsantwort gilt:

$$\begin{aligned}
h_{RL}(s) &= \left[\mathcal{F}_1^{-1} \, |\xi| \operatorname{rect}(d\xi)\right](s) && (2.46)\\
&= \int_{-\infty}^{\infty} |\xi| \operatorname{rect}(d\xi) e^{i2\pi\xi s} \, \mathrm{d}\xi && (2.47)\\
&= \int_{-\frac{1}{2}d^{-1}}^{\frac{1}{2}d^{-1}} |\xi| \, e^{i2\pi\xi s} \, \mathrm{d}\xi && (2.48)\\
&= \int_0^{\frac{1}{2}d^{-1}} \xi e^{-i2\pi\xi s} \, \mathrm{d}\xi + \int_0^{\frac{1}{2}d^{-1}} \xi e^{i2\pi\xi s} \, \mathrm{d}\xi && (2.49)\\
&= 2 \int_0^{\xi_0} \xi \cos(2\pi\xi s) \, \mathrm{d}\xi && (2.50)\\
&= 2 \left[\frac{\cos(2\pi\xi s)}{(2\pi s)^2} + \frac{\xi \sin(2\pi\xi s)}{2\pi s}\right]_0^{\xi_0} && (2.51)\\
&= \frac{\cos(2\pi\xi_0 s) - 1}{2\pi^2 s^2} + \frac{2\xi_0^2 \sin(2\pi\xi_0 s)}{2\pi\xi_0 s} && (2.52)\\
&= \frac{\cos^2(\xi_0\pi s) - \sin^2(\xi_0\pi s) - 1}{2\pi^2 s^2} + 2\xi_0^2 \operatorname{sinc}(2\xi_0 s) && (2.53)\\
&= \xi_0^2 (2 \operatorname{sinc}(2\xi_0 s) - \operatorname{sinc}^2(\xi_0 s)) \, . && (2.54)
\end{aligned}$$

Anwendung findet hier zunächst die Eulersche Formel (siehe A.3), die Auflösung des Integrals steht in [BS91, S. 54], für die Definition der sinc-Funktion siehe (A.15). Den Ram-Lak-Filter wendet man oft in seiner diskreten Form an. Um den Filter zu diskretisieren schreibt man:

$$\hat{h}_{RL}(m) := d h_{RL}(md) \, . \tag{2.55}$$

Mit $d := \frac{1}{2\xi_0}$ [15], entsprechend dem Nyquist-Shannonschen Abtasttheorem A.9, erhält

[15] Hat man digitale Projektionsbilder und man wendet die diskrete FFT (engl. fast Fourier transform) auf diese an, arbeitet man automatisch mit einer Grenzfrequenz von $\xi_0 = \frac{1}{2}$, und somit d=1. In [Smi99, S. 148 ff.] ist eine lesenswerte Einführung über die verschiedenen, für den Frequenzbereich üblichen Bezeichnungen der x-Achse.

man:

$$\hat{h}_{RL}(m) = dh_{RL}(md) = d\xi_0^2(2\,\mathrm{sinc}(2\xi_0 md) - \mathrm{sinc}^2(\xi_0 md)) \tag{2.56}$$

$$= \frac{1}{4d}(2\,\mathrm{sinc}(m) - \mathrm{sinc}^2(m/2))\,. \tag{2.57}$$

Dies lässt sich mittels einfacher Umformung in diese Form bringen:

$$\hat{h}_{RL}(m) = \begin{cases} \frac{1}{4d} & \text{für } m = 0 \\ -\frac{sin^2(\pi m/2)}{d\pi^2 m^2} & \text{für } m \text{ ungerade} \\ 0 & \text{für } m \text{ gerade} \end{cases}\,. \tag{2.58}$$

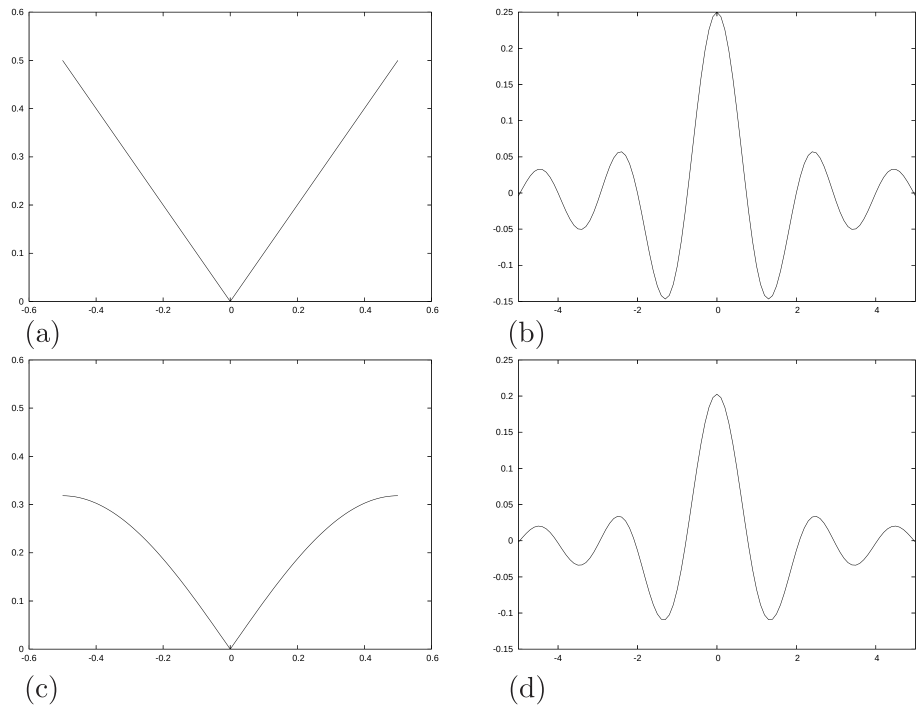


Abbildung 2.13: (a) Frequenzantwort des Ram-Lak-Filters. (b) Impulsantwort des Ram-Lak-Filters. (c) Frequenzantwort des Shepp-Logan-Filters. (d) Impulsantwort des Shepp-Logan-Filters.

Der Filter $|\xi|$ betont die höheren Frequenzen und in diesen ist in der Praxis das Signal-Rausch-Verhältnis (SNR, mehr dazu Abschnitt 4.1.1) am niedrigsten. Deshalb wurden verschiedene Modifikationen des Ram-Lak-Filters entwickelt. Sehr bekannt ist der Vorschlag von Shepp und Logan [LS74], die den Filter-Faktor $\mathrm{sinc}(\xi d)$ einführten. Die Frequenzantwort des Shepp-Logan-Filters lautet:

$$H_{SL}(\xi) := |\xi|\,\mathrm{sinc}(\xi d)\,\mathrm{rect}(d\xi)\,. \tag{2.59}$$

Abb. 2.13 zeigt die Frequenz- und Impulsantworten des Ram-Lak- und Shepp-Logan-Filters.

Beispiel. Für Abb. 2.14 wurde das untere Ausgangsbild aus Abb. 2.10 mittels gefilterter Rückprojektion und dem Shepp-Logan- sowie dem Ram-Lak-Filter rekonstruiert.

Das Ausgangsbild sei über die Matrizeneinträge $a_{i,j}$ ansprechbar. Die rekonstruierten Bilder wurden aus den ungestörten Projektionsvektoren und aus jeweils zwei Sätzen von gestörten Projektionsvektoren erzeugt. Die Matrix einer Rekonstruktion sei mit $r_{i,j}$ bezeichnet. Als Bildrauschen wurde ein Bildvektor R mit Zufallswerten zwischen -0.5 und 0.5 gefüllt. Dieser Vektor wurde mit dem Rauschfaktor n und dem Maximalwert im jeweiligen Projektionsvektor multipliziert. Als Bildfehlermaß (engl. picture distance measure) sei

$$r = \frac{\sum_{i=1}^{64} \sum_{j=1}^{64} |a_{i,j} - r_{i,j}|}{\sum_{i=1}^{64} \sum_{j=1}^{64} |a_{i,j}|} \tag{2.60}$$

gewählt (siehe [Her80, S. 66]). Bei den beiden ungestörten Rekonstruktionen liegt der Fehler für die Ram-Lak-Rekonstruktion unter dem der Shepp-Logan-Rekonstruktion. Bringt man Rauschen in die Projektionsdaten, so liefert der Shepp-Logan-Filter die besseren Resultate.

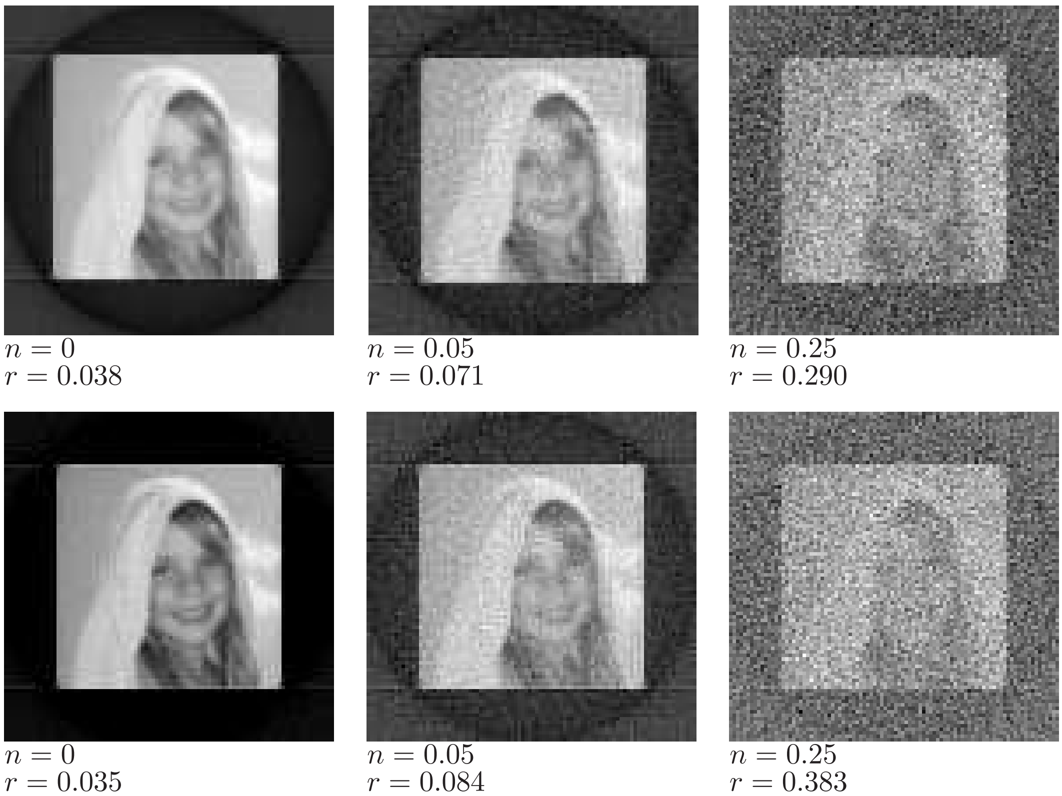


Abbildung 2.14: Obere Reihe: Rekonstruktionen mit dem Shepp-Logan-Filter. n bezeichnet die Höhe des in die Projektionsbilder eingebrachten Rauschens, r den nach (2.60) berechneten Fehler. Untere Reihe: Rekonstruktionen mit dem Ram-Lak-Filter.

Gibt es ein DC-offset Problem?

Man kann den durchschnittlichen Grauwert eines Bildes an der Amplitude der nullten Frequenz der Fouriertransformierten des Bildes ablesen, da alle Frequenzen $\xi \neq 0$ Sinusoide darstellen, deren negativen und positiven Anteile sich beim Integrieren aufheben (Inverse Fourier-Transformation (A.35) bzw. (A.37)). Dies ist lediglich bei der

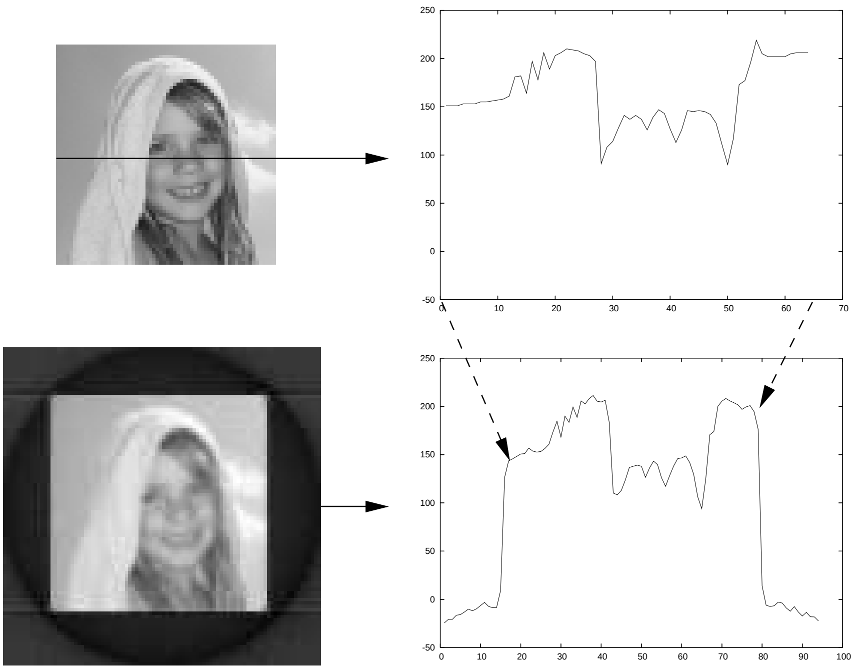


Abbildung 2.15: Oben: Das Profil einer Zeile des linken Ausgangsbildes. Der Durchschnittswert dieser Zeile ist 163.84. Unten: Profil der entsprechenden Zeile in dem mittels gefilterter Rückprojektion und Shepp-Logan Filter rekonstruierten Bild. Betrachtet man in der Rekonstruktion nur den inneren Teil des Bildes, gleich der Größe des Ausgangsbildes, so liegt der Durchschnittswert nahe an dem des Ausgangsbildes. Für die verkürzte Zeile, angedeutet durch die gestrichelten Pfeile, beträgt der Durchschnittswert 161.70. Den DC-offset Wert von 0 erhält man, wenn man die Rekonstruktion $\tilde{f}$ über den kompletten Träger der Funktion betrachtet.

nullten Frequenz nicht der Fall, da man hier, wegen $\cos(0) = 1$ und des Vorfaktors eine Konstante $\neq 0$ erhält. Diese wird auch als DC[16]-offset bezeichnet. Betrachten wir nun Gleichung (2.44). Die Multiplikation mit dem Filter $|\xi|$ stellt ein Nullsetzen der nullten Frequenz dar[17], und aus $F(0,0) = 0$ folgt $\iint f(x,y)\,dxdy = 0$, d.h. der Mittelwert des rekonstruierten Bildes ist 0 [Jai89, S. 442]. Haben nun alle Rekonstruktionen den Durchschnittswert 0? Ja und Nein. Ja deshalb, da die Rückprojektion ein Bild $\tilde{f}$ auf einem unbeschränkten Träger liefert. Berechnet man den Mittelwert über den kompletten Träger, so erhält man den Wert 0. Interessant ist jedoch nur ein Teilbereich des Trägers, nämlich gerade der Träger des Ausgangsbildes. Dort findet man, bei guter Rekonstruktion, einen Mittelwert ähnlich dem des Ausgangsbildes. Siehe hierzu Abb. 2.15.

[16] Die Abkürzung “DC” steht im englischen für “direct current” (Gleichstrom), und bedeutet zeitlich unveränderter Stromfluß.

[17] Einsichtiger in der Schreibweise mit 2-dimensionaler Fourier-Transformation: $f(x,y) = \mathcal{F}_2^{-1}\left[|\xi| \mathcal{F}_2 \left[\mathcal{B}g\right]\right]$, siehe [Jai89, S. 441].

2.4.5 Iterative Methoden

Die bisher vorgestellte Vorgehensweise der Rekonstruktionsalgorithmen basiert auf der Approximation der Randonschen Inversionsformel im Diskreten. Die Herleitung erfolgte im Kontinuierlichen, erst bei der Implementierung der Algorithmen für einen Computer werden die kontinuierlichen Operatoren durch Ihre diskreten Pendants ersetzt.

Im Unterschied dazu wird beim Verwenden iterativer Methoden zunächst das Rekonstruktionsproblem ins Diskrete - in die Form eines linearen Gleichungssystems (LGS) - übersetzt und dann wird versucht dieses LGS zu lösen. Ein planares Bild wird als Feld von Unbekannten aufgefasst. Mit Hilfe der Abtastgeometrie des verwendeten Scanners wird ein System linearer Gleichungen aufgestellt. Obwohl dieser Ansatz gegenüber den transformationsbasierten konzeptionell einfacher erscheint, ist die Implementierung iterativer Methoden schwierig. Aufgrund der Größe der Systeme entstehen hohe Berechnungszeiten. Ein Plus dieser Verfahren ist ihre Flexibilität - sie sind leicht auf andere Geometrien übertragbar. Es gibt beispielsweise Situationen, in denen es nicht möglich ist eine große Anzahl von Projektionsbildern zu erzeugen, oder die Projektionen sind nicht gleichmäßig über das Bogenmaß von 0 bis π bzw. 2π verteilt - beides sind jedoch Voraussetzungen für die Anwendung der transformationsbasierten Ansätze.

Verbreitete Anwendung haben lediglich die algebraische Rekonstruktionsmethode (engl. algebraic reconstruction technique, ART) und der EM Algorithmus gefunden [NW01]. Für algebraische Methoden ist es notwendig, die genauen Wegstrecken von der Röntgenquelle zu einem Detektor zu kennen, man muss wissen welche Voxel/Pixel von einem Strahlengang durchquert werden. Hounsfield nutze für seine ersten Rekonstruktionen ART, erst durch den Schritt hin zu transformationsbasierten Algorithmen wurde die Berechnungsdauer der Rekonstruktionen auf ein erträgliches Maß reduziert. Die wissenschaftliche Forschung hat sich aber weiter mit iterativen Methoden zur Bildrekonstruktion beschäftigt, was beispielsweise die lange Publikationsliste von Yair Censor[18], der sich ausgiebig mit iterativen Verfahren beschäftigt hat, zeigt.

ART

ART bezeichnet eine große Familie von Rekonstruktionsalgorithmen, in der Grundkonfiguration ist die bekannte Kaczmarz[19]-Methode damit gemeint. Erstmals wurde ART von Gordon, Bender und Hermann 1970 in den Kontext der Bildrekonstruktion aus Projektionsbildern gesetzt. In einer Patentschrift von Hounsfield wurde diese Methodik auch für das CT vorgeschlagen (1972).

Man definiert einen Bildvektor $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^N$ (Rekonstruktionsvolumen), der im 3-dimensionalen Raum das zu rekonstruierende Objekt umfassen soll. N ist frei wählbar, beispielsweise $N = 512^3$ [20]. Ziel ist es nun die Einträge von $\mathbf{x}$, welche den Schwächungskoeffizienten μ an der jeweiligen Stelle entsprechen sollen, zu bestimmen. Die Projektionsbilder seien mit P_i bezeichnet, n bezeichnet die Anzahl der Projektionsbilder. Jedes Projektionsbild P_i besitzt r_i Zeilen und c_i Spalten. Die Pixelwerte aller Projektionsbilder $P_i \in \mathbf{R}^{r_i \cdot c_i}$, $i = 1(1)n$ werden in den Vektor $\mathbf{b} \in \mathbf{R}^M$, $M = \sum_{i=1}^{n} r_i \cdot c_i$ geschrieben.

[18] Beispielsweise [CEG83, CGG01b, CGG01a], Publikationsliste unter `math.haifa.ac.if/yair/`.

[19] Benannt nach dem polnischen Mathematiker Stefan Kaczmarz (1895-1940), der diese Methodik 1937 unter dem Titel *Angenäherte Auflösung von Systemen linearer Gleichungen* veröffentlichte.

[20] $\mathbf{x}$ entspricht in der Ausdrucksweise der vorangegangenen Abschnitte einem in z-Richtung zusammenhängenden Volumen aus 2-dimensionalen Bildfunktionen $f(x, y)$.

Die Geometrie der einzelnen Projektionsbilder wird in der Matrix $A \in \mathbf{R}^{M \times N}$ gehalten. Eine Zeile von A entspricht einem Strahlengang von der Röntgenquelle durch das Rekonstruktionsvolumen $\mathbf{x}$ zu einem bestimmten Detektor, mit einem Pixelwert gehalten im Vektor $\mathbf{b}$. A kann einfach nur aus der binären Information aufgebaut sein, ob ein Voxel $x_i \in \mathbf{x}$ von einem Strahl getroffen wird oder nicht. Exakter lässt sich A mit einem Algorithmus zur Strahlenverfolgung (engl. ray tracing), wie z. B. in [AW87] beschrieben, oder mit der Berechnung der Überlappung eines Detektors mit einem Voxel belegen [MB04].

Beispiel. Hat man eine kleine Anzahl n von Projektionsbilder, erzeugt mit einem konventionellen Röntgengerät bei freier Geometrie (siehe Abb. 2.16), so lässt sich mit ART eine Rekonstruktion berechnen. Die Aufnahmegeometrie wurde hier mit der Referenzkugelmethode bestimmt (siehe [SWB+05][21]).

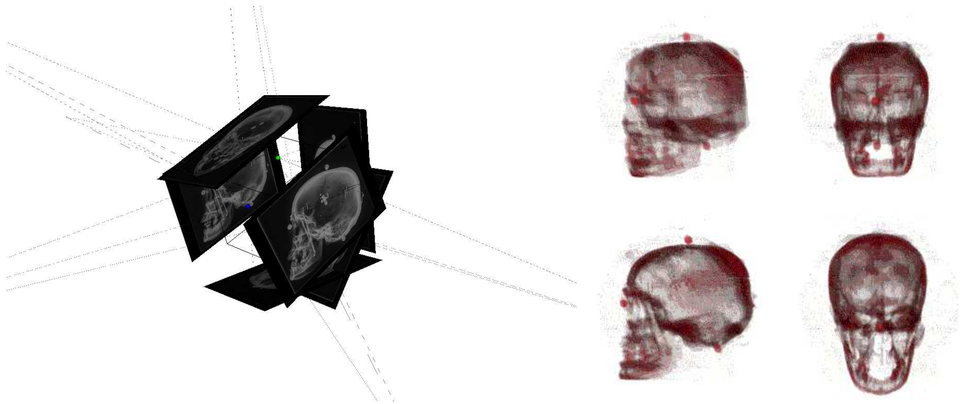


Abbildung 2.16: Links: 6 planare Röntgenbilder, die bei freier Aufnahmegeomtrie erzeugt wurden. Zwischen den Projektionsaufnahmen liegt das Rekonstruktionsvolumen. Weiß man die Position der Bilder im Raum kann mit ART eine Rekonstruktion des aufgenommenen 3-dimensionalen Objekts berechnet werden. Rechts: 4 Screenshots einer gerenderten Rekonstruktion.

Unabhängig davon, wie A erstellt wird, lässt sich das Problem der Bildrekonstruktion als Suche nach der Lösung des LGS

$$Ax = b \tag{2.61}$$

auffassen. A ist im Allgemeinen weder quadratisch noch regulär und ist von gigantischer Größe, N Spalten und M Zeilen. ART und alle anderen iterativen Verfahren liefern eine Folge von Lösungsvektoren x^0, x^1, x^2, ... die gegen eine Lösung x^* des LGSs konvergieren (falls es eine Lösung gibt). Sei a_i^T die i-te Zeile von A, dann ist der Lösungsraum von $a_i^T x = b_i$ eine Hyperebene H_i im $\mathbf{R}^N$ [22]. Die Idee die zum Lösen des LGS benutzt wird ist trivial. Man definiert den Rest $r_i := (b_i - a_i^T x^k)$ und verteilt diesen auf den Vektor x_k:

$$x^{k+1} := x^k + \lambda_k \frac{r_i}{\|a_i\|^2} a_i \,, \text{wobei } i = k \bmod M + 1. \tag{2.62}$$

[21] Weitere Infos zu dieser Methodik unter http://www.rsm3d.de .
[22] $H_i \in \mathbf{R}^{N-1}$

Die λ_k heißen Relaxationsparameter, für $\lambda_k = 1 \, \forall \, k$ erhält man die von Kaczmarz vorgeschlagene Iterationsvorschrift [NW01]. Abb. 2.17 zeigt eine geometrische Interpretation der Methode. Die Methodik lässt sich speichereffizient implementieren, da x^{k+1} in den Speicher von x^k geschrieben werden kann. Die Lösungsvektoren konvergieren gegen x^*, falls das LGS lösbar ist (d.h. der Schnitt aller Hyperebenen ist nicht leer) und $0 < \liminf \lambda_k \leq \limsup \lambda_k < 2$ erfüllt ist [CEG83]. Der Einfluss des Relaxationsparameters λ lässt sich geometrisch wie folgt interpretieren:

- $\lambda < 0$ Bewegung weg von H_i,
- $\lambda = 0$ keine Bewegung,
- $0 < \lambda < 1$ Bewegung hin zu H_i,
- $\lambda = 1$ Sprung genau auf H_i,
- $1 < \lambda < 2$ Sprung über H_i hinweg, aber x^{k+1} ist näher an H_i als x^k,
- $\lambda = 2$ Spiegelung an H_i,
- $\lambda > 2$ Sprung über H_i hinweg, x^{k+1} ist weiter von H_i als x^k.

Für $\lambda_k = 1 \, \forall \, k$ führt die Methode sukzessive orthogonale Sprünge in die Hyperebenen H_i durch. Für inkonsistente Systeme, und Inkonsistenz ist im Bereich der Bildrekonstruktion der Normalfall, sind die Teilfolgen $\left\{x^{kM+i}\right\}_{k \geq 0}$, $0 \leq i \leq M-1$ für $\lambda = 1$ konvergent [K.T71]. In [CEG83] wird gezeigt, dass für geeignete λ ein $x^*(\lambda) = \lim_{k \to \infty} x^{kM+i}$ existiert, und $\lim_{\lambda \to 0} x^*(\lambda) = A^+ b + (I - A^+ A) x^0$ [23]. Im Bereich iterativer Löser für inkonsistente Probleme wurden im Laufe der Zeit viele Verbesserungsvorschläge gemacht um die Konvergenzeigenschaften zu verbessern, Beispiele sind in [Her80], [CGG01b] oder [CGG01a] nachzulesen. Diese Verbesserungen werden in der Literatur auch als *Tricks* bezeichnet - mit Tricks kann a-priori Information in den Rekonstruktionsvorgang eingebracht werden, oder die nicht eindeutige Lösung des LGS in eine bestimmte Richtung geführt werden.

Tricks

- Vorbelegung von x_0 mit einer Minimum-Backprojection oder Mean-Backprojection: Man wirft alle Projektionsbilder in das Projektionsvolumen zurück, nur der Minimalwert oder ein Durchschnittswert an einer Stelle werden im Rekonstruktionsvolumen gehalten. Abschließend muss das Rekonstruktionsvolumen geeignet normiert werden.
- Benutzen kleiner λs (strong underrelaxation). Mit $\lambda_k << 1$ (z. B. $\lambda_k = 0.05 \, \forall k$) kann eine Konvergenz gegen eine normminimale Lösung erzielt werden (siehe [CEG83]).
- Keine negativen Werte in x_k zulassen (constraining). Dies ist in der CT sinnvoll, da die Schwächung der Röntgenstrahlung immer nicht-negativ ist.

[23] A^+ ist die Moore-Penrose Matrix Inverse von A. Es gilt: $z := A^+ b$ ist die normminimale Lösung von $Ax = b$.

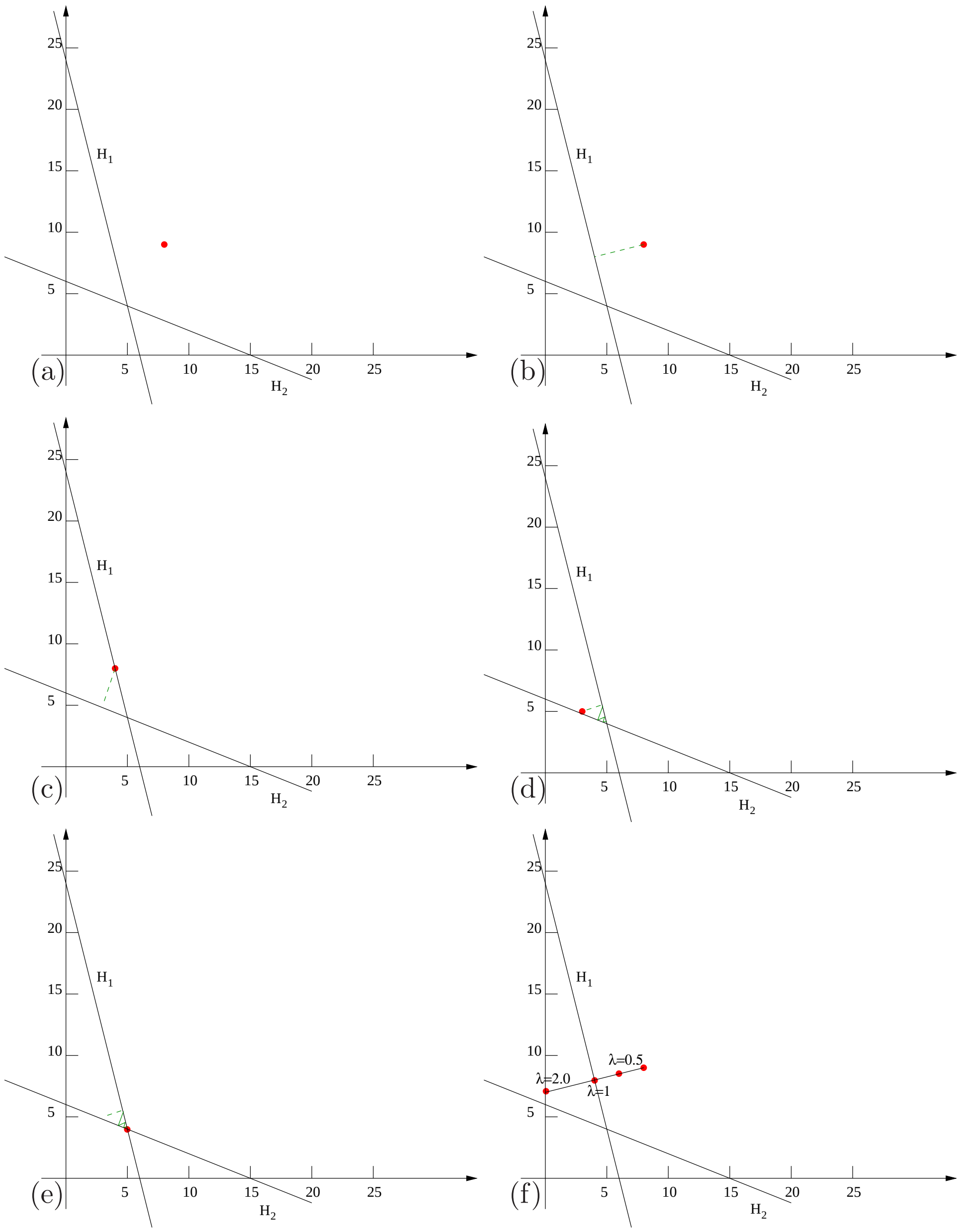


Abbildung 2.17: (a)-(e) Geometrische Interpretation der Kaczmarz-Methode für $N = 2$, ähnlich [Her80, S. 185]. (a) zeigt einen beliebigen Startpunkt im $\mathbf{R}^2$. Ein Iterationsschritt bedeutet (mit $\lambda_k = 1$) einen Sprung in die, durch die gerade behandelte Zeile definierte, Hyperebene. Eine Hyperebene im $\mathbf{R}^2$ entspricht einer Geraden. (b)-(e) Weitere Sprünge mit der Kaczmarz-Methode. (f) Visualisierung des Einflusses der Relaxationsparameter auf die Sprungweite.

- Smoothing (glätten) der x_k. Dies ist sinnvoll, wenn man beispielsweise weiß, dass sich im Rekonstruktionsvolumen große Regionen mit einheitlichen Schwächungswerten befinden.

- Die Reihenfolge der Geometrien beeinflusst die Konvergenzgeschwindigkeit. Es hat sich gezeigt, dass es vorteilhaft ist zunächst alle Strahlengänge eines Projektionsbildes abzuarbeiten und dann ein Projektionsbild zu wählen, bei dem die Röntgenquelle einen großen Winkel zu dem gerade abgearbeiteten Projektionsbild beschreibt [Her80].

In [Cen81, CGG01b, CGG01a] werden viele weitere iterative Lösungsmethoden vorgestellt.

2.5 Die Multislice-CT

Im Laufe der Zeit wurden immer leistungsfähigere CT-Scanner entwickelt. Als Unterscheidungsmerkmale der Scanner dient die Anordnung der Röhren und der Detektoren sowie die mechanische Bewegung dieser Komponenten.

Abb. 2.18 zeigt das Design der *Scanner-Generationen* 1-4. Benötigten Scanner der 1. Generation noch bis zu 5 Minuten um eine Schicht zu scannen, konnten Scanner der 2. Generation dies schon in etwa 20 Sekunden (ab 1972). Heutige Scanner benutzen die Abtast-Geometrie der 3. und 4. Generation (ab 1976 bzw. 1978), wobei häufiger das Design der 3. Generation eingesetzt wird. Die Translationsbewegung der Röntgenquelle wird nicht mehr durchgeführt, der Fächerstrahl ist so ausgelegt, dass der gesamte Patientenquerschnitt durchstrahlt wird. Durch die Anwendung eines Fächerstrahls war es auch erforderlich die Rekonstruktionsmethoden auf die nun divergenten Strahlengänge anzupassen. Hierzu wurde die sogenannte *Randonsche Inversionsformel für divergente Strahlen* entwickelt.

Moderne Geräte arbeiten im Spiralverfahren (bezeichnet als Helical-CT, Spiral-CT oder Volumetric-CT), bei dem der Patient mit konstanter Geschwindigkeit entlang seiner Längsachse durch die Strahlenebene bewegt wird, während die Strahlenquellendetektoreinheit konstant rotiert. Der schnell rotierenden Ring, auf dem gegenüberliegend Röntgenröhre und Röntgendetektor angebracht sind, wird als *Gantry* bezeichnet. Alternative kann man sich ein Spiral-CT auch mit einer Röntgenquelle, die sich auf einer Helix um den Patienten bewegt, vorstellen. Die Spiral-CT reduzierte die Zeiten für die Aufnahme von Volumendatensätze drastisch. Thorax-Aufnahmen innerhalb einer Atempause sind mit diesen Geräten möglich. Auch durch diese Geometrieänderung mussten die Rekonstruktionsalgorithmen wieder weiterentwickelt werden. Eine naheliegende Methodik ist die Folgende: Die gewonnenen Rohdaten werden mittels Interpolationsverfahren in planare Daten überführt, dann lassen sich Rekonstruktionsalgorithmen für eine planare Geometrie anwenden.

Die Geschwindigkeit der Spiral-CT erhöhte sich nochmals durch die Einführung der Multislice-CT (MSCT, wird auch als Multidetektor-CT (MDCT) bezeichnet) signifikant. Statt einer 1-dimensionalen Detektorenreihe werden nun 2-dimensionale Detektorenreihen eingesetzt. Aktuelle MSCT Scanner verfügen über 64 Detektorenreihen. Mit diesen Scannern ist es möglich Volumendatensätze fast ohne Bewegungsartefakte zu erzeugen, sogar für Aufnahmen des Herzens.

2.5.1 Strahlenbelastung

Die Strahlenexposition einer CT-Untersuchung ist wesentlich höher als bei einer konventionellen Röntgenaufnahme. Als CT-spezifische Dosisgröße hat sich der Computed

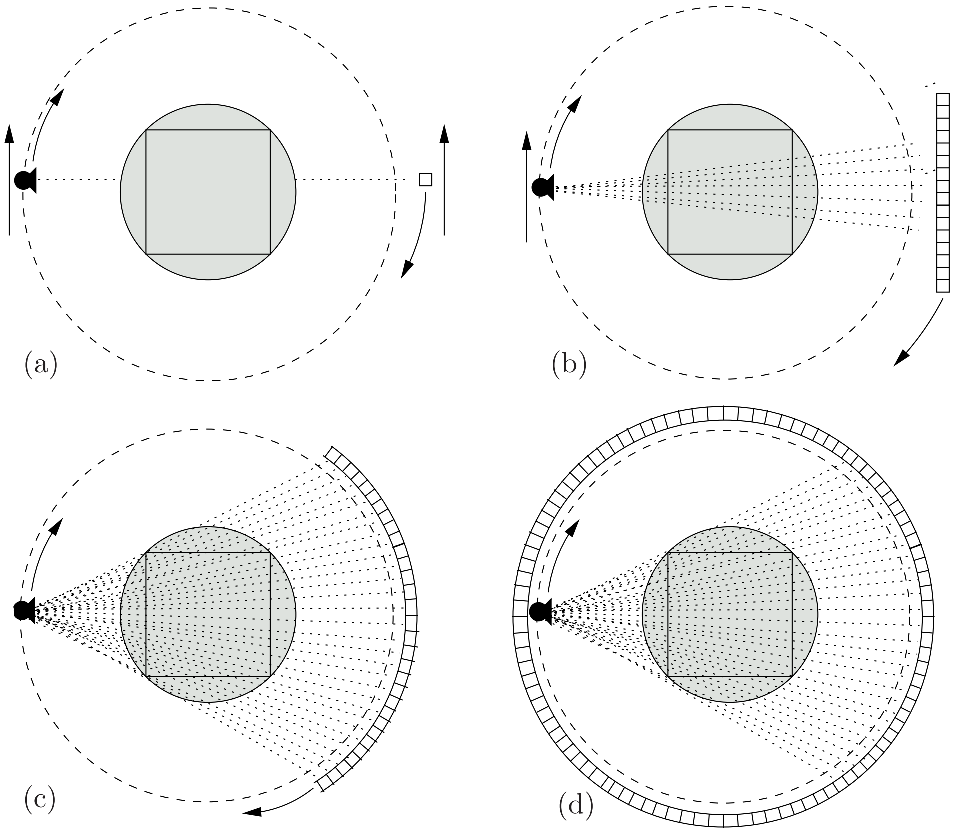


Abbildung 2.18: (a) Scanner der 1. Generation: Eine Röntgenquelle und ein Detektor. Beide führen eine Translations- und Rotationsbewegung aus. (b) Scanner der 2. Generation: Eine Röntgenquelle die einen Fächerstrahl aussendet, mehrere Detektoren. Gleiches Bewegungsmuster wie bei Scanner der 1. Generation. (c) Scanner der 3. Generation: Eine Röntgenquelle die einen Fächerstrahl ausschickt, der gesamte Fächer wird von einem Detektorenteilring aufgenommen. Röntgenquelle und Detektoren rotieren. (d) Scanner der 4. Generation: Fester Detektorenring, nur die Röntgenquelle rotiert.

Tomography Dose Index (CTDI) seit Jahren durchgesetzt:

$$\mathrm{CTDI} = \frac{1}{s}\int_{-\infty}^{\infty} D(z)\,\mathrm{d}z\,. \tag{2.63}$$

Die Dosis $D(z)$ an der Stelle z wird in mGy[24] angegeben. s bezeichnet die nominelle Schichtdicke[25]. (2.63) definiert einen konstanten Dosiswert CTDI (Äquivalentwert), so dass $s \cdot \mathrm{CTDI}$ gerade die Gesamtdosis $\int_{-\infty}^{\infty} D(z)\,\mathrm{d}z$ ergibt. Man weist der nominell definierten Schicht die gesamte Dosis zu. Dies ist sinnvoll, da beim Scannen die Strahlungsenergie nicht nur in die zu scannende Schicht, sondern auch in den benachbarten

[24] Gy bezeichnet die Einheit Gray. mGy $= 10^{-3}$ Gy. Gray gibt die durch Radioaktivität und andere ionisierende Strahlung verursachte Energiedosis an (die pro Masse absorbierte Energie).

[25] Unter der nominellen Schichtdicke versteht man die Schichtkollimation. Diese entspricht ungefähr der Halbwertsbreite des Dosisprofils, sofern nicht detektorseitig eine engere Kollimation vorgenommen wurde [NS02]. Die effektive Schichtdicke berechnet sich in der Spiral-CT aus der Schichtkollimation, dem Pitch und dem verwendeten Interpolationsalgorithmus.

Regionen deponiert wird. Ursache dafür ist die begrenzte Güte der Kollimination und die Divergenz des Strahlenbündels, dazu kommt noch die, während der Interaktion mit der zu durchdringenden Materie, erzeugte Streustrahlung. Man erhält ein Dosisprofil, das sich über viele Schichten verteilt. Der $CTDI$ ist eine lokale Dosisgröße, d.h. er ist ein Maß für die Intensität der Bestrahlung innerhalb des bestrahlten Körperabschnitts. Scanned man statt einer Schicht 10 Schichten, so bleibt die Dosis die gleiche. Integrale Dosisgrößen werden auch der Ausdehnung der Bestrahlung gerecht. Um das sogenannte Dosislängenprodukt (DLP) zu erhalten, multipliziert man den CTDI mit der Anzahl der Schichten n und der Schichtdicke s:

$$\mathrm{DLP} = \mathrm{CTDI} \cdot \mathrm{n} \cdot \mathrm{s}\,. \tag{2.64}$$

In einer Beispielrechnung[26] für eine Standard-Thorax-Untersuchung mit der CT (27 Schichten je 10 mm dick, 200 mAs pro Scan [NS02, Seite 23]) erhält H. D. Nagel eine etwa 100-mal höhere Strahlenbelastung als in der konventionellen Untersuchung (Projektionsaufnahme). Ein Mehr an Information hat seinen Preis ist hierfür die einfache Erklärung.

Im Falle der Multislice-CT erhöht sich dieser Faktor noch weiter, da oftmals sehr dünne, überlappende Schichten erzeugt werden[27]. Oftmals liest man als Synonym für die Strahlendosis die Angabe der verwendeten mAs - dies ist zwar nicht vollkommen falsch, der Zusammenhang zwischen Dosis und mAs ist jedoch gerätespezifisch [NS02].

Als *Pitch-Faktor* p (oder einfach nur Pitch) bezeichnet man das Verhältnis von Tischvorschub t (pro Rotation) zum Produkt aus nomineller Schichtdicke s mal Anzahl der gleichzeitig gescannten Schichten m:

$$p = \frac{t}{m \cdot s}\,. \tag{2.65}$$

Scannt man mit Pitch < 1, erhält man überlappende Schichten. Je höher der Pitch desto geringer ist die Strahlenbelastung für den Patienten. Der Kehrwert des Pitch-Faktors wird als *Packing-Faktor* bezeichnet.

In Abb. 2.18 ist das sogenannte *Meßfeld* oder *Scanfeld* des CT-Scanners grau hinterlegt, es entspricht dem Schnitt aller Strahlenfächer. Das Zentrum des Meßfeldes entspricht dem *Rotationszentrum* der Röntgenröhre. Bei vielen Scannern lässt sich die Größe des Scanfeldes verändern. Liegt das gewählte verkleinerte Meßfeld innerhalb des Patienten, kann die Strahlenbelastung dadurch verringert werden.

Scannt man mehrere nebeneinanderliegende Schichten überlappend, dann erhöht sich der Aquivalentwert der Dosis in einer Schicht[28]. Dies hat zur Einführung des MSAD (Multiple Scan Average Dose) geführt:

$$MSAD = \frac{1}{p} \cdot CTDI\,. \tag{2.66}$$

[26] Um den Vergleich CT und konventionelle Röntgentechnik durchführen zu können bedarf es noch der Definition einer weiteren Dosisgröße: die effektive Dosis. Siehe [NS02].

[27] Eine Standard-Thorax-Untersuchung mit einem modernen MSCT-Scanner (z. B. Philips Mx8000 IDT 16) wird in der Universitätsklinik Mainz zur Zeit (August 2007) mit etwa 60 mAs erstellt, d.h. gegenüber der Beispielrechnung von Nagel ist die Stromhöhe erheblich niedriger, andererseits sind in der MSCT jedoch Schichtdicken von ca. 1 mm üblich.

[28] Mathematisch entspricht das entstehende Gesamtdosisprofil der diskreten Faltung der Einzelschichten mit dem Dosisprofil einer Einzelschicht.

Die CT leistet heute mit Abstand den größten Beitrag zur medizinisch bedingten Strahlenexposition - das Thema “Dosisinformation wird mittlerweile jedoch groß geschrieben, der Begriff des “*low-dose CTs*” gewinnt immer mehr an Bedeutung. Weiterführende Informationen zum Thema Strahlenbelastung sind in [NS02] zu finden.

2.6 Anmerkungen und Literaturhinweise

Die Informationen in diesem Kapitel wurden im wesentlichen, insofern nicht explizit auf andere Literaturquellen verwiesen wurde, aus [Ewe98], [Sch99], [Roh03], [YF00], [Wei01], [Bac99], [Leh],[NS02],[LOPR97] und [Her80] entnommen. Besonders wertvoll und hilfreich war für mich persönlich die Lektüre von [Her80] - ein hervorragendes Einstiegsbuch in die Computertomographie mit der nötigen Tiefe, aber nicht mehr ganz taufrisch, da schon im Jahre 1980 erschienen.

Kapitel 3

CT-Bilder als Signale

Bildgebende Verfahren werden häufig als lineare verschiebungsinvariante Systeme (engl. linear shift invariant systems, LSI[1]) aufgefasst. Etwaige Störungen oder Effekte, wie einige der in Kapitel 2 bei der Computertomographie unumgänglichen systematischen Minderungen der Bildqualität, lassen sich mit den Methoden der Signal- und Systemtheorie beschreiben. In diesem Kapitel werden nun Notationen eingeführt, die eine mathematische Handhabung der CT-Bilder im Sinne der Signal- und Systemtheorie erlauben. Es werden verschiedene Konzepte zur Beschreibung des Auflösungsvermögens eines CT-Systems beschrieben. Auf die Zusammenhänge zwischen den einzelnen Konzepten wird eingegangen.

3.1 Lineare verschiebungsinvariante Systeme

3.1.1 Signale

Der Begriff *Signal* kommt in vielen Gebieten der Wissenschaft und Technik vor. Allgemein kann man ein Signal als einen Träger von Information bezeichnen. Signale sind kontinuierliche oder diskrete Funktionen einer oder mehrerer Veränderlichen und enthalten beispielsweise Informationen über physikalische Größen, terrestrische Radiosignale und Fernsehsignale oder mögliche Signale außerirdischer Intelligenz, wie sie im wissenschaftliches Experiment SETI@home gesucht werden[2]. Im Bereich der CT-Bilder kommt man mit verschieden-dimensionalen Signalen in Berührung. Eine Zeile eines Bildes kann als 1-dimensionales Signal interpretiert werden. Ein einzelnes CT-Bild entspricht einem 2-dimensionalen Signal, ein zusammenhängender Stack von CT-Bildern, ein CT-Volumen, kann als dreidimensionales Signal behandelt werden. Eine vierte Dimension erhält man, wenn eine 3-dimensionale Aufnahme über die Zeit betrachtet wird. Im Folgenden werden die Definitionen im 2-Dimensionalen eingeführt, ein Überführen in eine andere Dimensionalität ist meist problemlos möglich.

3.1.2 Sampling und Quantisierung

Um CT-Bilder in den Kontext linearer verschiebungsinvarianter Systeme zu heben, ist ein kleines Gedankenexperiment hilfreich. Angenommen man hätte einen perfekten

[1]Oft auch als LTI Systems (engl. linear time invariant systems) bezeichnet. Diese Bezeichnung ist eher in der Analyse von 1-dimensionalen zeitkontinuierlichen System gebräuchlich (siehe [OS99]).

[2]Mehr zu SETI@home unter `http://setiweb.ssl.berkeley.edu/` .

CT-Scanner. Dies sei ein 3-dimensionales bildgebendes Verfahren, das ein kontinuierliches (analoges) Abbild der Realität in Hounsfield-Einheiten codiert, erzeugen kann (perfekte Abbilder). Möchte man diese kontinuierlichen Bilder mit einem Computer weiterverarbeiten, so müssen die Bilder digitalisiert werden. Ein analoges Bild wird durch periodisches Abtasten in ein diskretes Bild überführt. Dieses Abtasten (engl. sampling) lässt sich elegant mit Hilfe der Kamm-Funktion comb (engl. comb function, siehe A.7.2) formulieren:

$$f_s(x,y) = f(x,y)\,\mathrm{comb}(x,y,\Delta x,\Delta y) = \sum_{m=-\infty}^{\infty}\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(m\Delta x, n\Delta y)\,\delta(x-m\Delta x, y-n\Delta y)\,. \tag{3.1}$$

Das Sampling konvertiert die unabhängige Variable, die Ortsinformation (x,y), vom Kontinuierlichen ins Diskrete. Das Umwandeln der kontinuierlichen abhängigen Variablen, der Hounsfield-Einheiten (siehe 2.3.1), ins Diskrete wird als Quantisierung bezeichnet. In der Computertomographie ist ein Abbilden der kontinuierlichen Hounsfield-Einheiten auf den diskreten Bereich $\{-1024,-1023,...,3071\}$ üblich. Mit Digitalisierung bezeichnet man zusammenfassend die beiden Schritte “Abtastung und Quantisierung”, die ein analoges Bild in ein Diskretes wandeln. Digitale Bilder werden im Folgenden als $v(i,j)$, $v_{i,j}$, $u(l,m)$ oder $u_{l,m}$ geschrieben. Die Gitterpunkte (i,j) werden im 2-Dimensionalen auch als Pixel (engl. picture element) bezeichnet. Im 3-Dimensionalen spricht man von Voxeln (engl. volume element). Die Größe eines Bildes wird in der Form $M \times N$ angegeben, M steht für die Anzahl der Spalten und N für die Anzahl der Zeilen. In der CT gilt meist $M = N$.

3.1.3 Systeme

Ein System verarbeitet spezielle Signale, indem es ein Eingangssignal (Eingangsbild, Eingangsvolumen, Input) in ein Ausgabesignal (Ausgabebild, Ausgabevolumen, Output) wandelt. Es gibt sowohl kontinuierliche als auch diskrete Systeme. In der digitalen Bildverarbeitung werden, bedingt durch den Einsatz des Computers, diskrete Systeme eingesetzt. Viele der sich anschließenden Herleitungen werden jedoch im Kontinuierlichen durchgeführt und sind dann ins Diskrete zu adaptieren.

Ein diskretes System lässt sich mathematisch als eine Abbildung $\mathcal{H}$ definieren, die ein Eingangssignal $v(i,j)$ in ein Ausgangssignal $u(i,j)$ wandelt:

$$u(i,j) = \mathcal{H}\left[v(i,j)\right]\,. \tag{3.2}$$

Ein System wird linear genannt, falls für eine Linearkombination der Eingangssignale $v_1(i,j)$ und $v_2(i,j)$ mit beliebigen Konstanten a_1 und a_2 aus $\mathbf{R}$ der Superpositionssatz[3] gilt:

$$\begin{aligned}\mathcal{H}\left[a_1 v_1(i,j) + a_2 v_2(i,j)\right] &= a_1\mathcal{H}\left[v_1(i,j)\right] + a_2\mathcal{H}\left[v_2(i,j)\right] \\ &= a_1 u_1(i,j) + a_2 u_2(i,j)\,.\end{aligned} \tag{3.3}$$

3.3 lässt sich verallgemeinern zu:

$$\mathcal{H}\left[\sum_k a_k v_k(i,j)\right] = \sum_k a_k \mathcal{H}\left[v_k(i,j)\right] = \sum_k a_k u_k(i,j) \tag{3.4}$$

mit beliebigen $a_k \in \mathbf{R}$.

[3] Von lat. super=über und positio=Lage, Stellung ⇒ Überlagerungssatz.

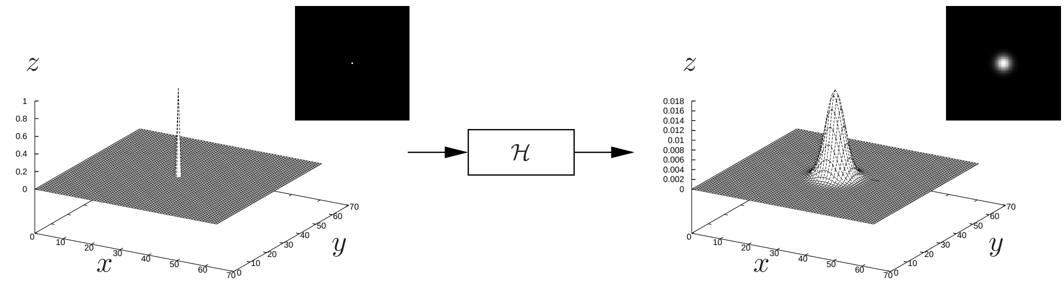


Abbildung 3.1: Links ist das Kronecker-Delta mittig in einer 65×65 Bildmatrix dargestellt, rechts die Antwort des Systems $\mathcal{H}$. Unterhalb der Grauwertdarstellung des Bildes ist der Graph des Bildes abgebildet (siehe 5.1). Als PSF wurde hier eine Gaußglocke (siehe A.5) mit Standardabweichung $\sigma = 3.0$ benutzt. Damit die Bilddarstellung rechts oben nicht fast ganz schwarz erscheint, wurden die Grauwerte gefenstert (siehe Fenstertechnik 2.5).

3.1.4 Punktantwort (PSF)

Die Antwort eines diskreten linearen Systems auf das zweidimensionale Kronecker-Delta[4] $\delta(i,j)$ an der Stelle (i',j') (siehe A.7.4) wird als Punktantwort[5] (engl. point spread function, PSF) h des Systems $\mathcal{H}$ an der Stelle (i',j') bezeichnet:

$$h(i,j;i',j') = \mathcal{H}\left[\delta(i-i',j-j')\right] . \tag{3.5}$$

Ist die PSF eines Systems lokal begrenzt $\neq 0$, dann spricht man von einem FIR-System (engl. finite impulse response), ansonsten von einem IIR-System (engl. infinite impulse response). Bemerke: Die in Abb. 3.1 verwendete Gaußglocke entspricht im Kontinuierlichen einem IIR-System und im Diskreten einem FIR-System.

Weiß man die PSF eines linearen Systems, kann man die Systemantwort $u(i,j)$ auf jedes beliebige Eingangssignal $v(i,j)$ berechnen:

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}\left[v(i,j)\right] &= \mathcal{H}\left[\sum_{i'}\sum_{j'} v(i',j')\,\delta(i-i',j-j')\right] \\
&= \sum_{i'}\sum_{j'} v(i',j')\mathcal{H}\left[\delta(i-i',j-j')\right] \\
&= \sum_{i'}\sum_{j'} v(i',j')h(i,j;i'j') && (3.6) \\
&= u(i,j)\,. && (3.7)
\end{aligned}$$

Ein System heißt *verschiebungsinvariant*, wenn ein Verschieben des Eingangssignals zu einer Verschiebung des Ausgabesignals führt. Dies bedeutet für die Punktantwort:

$$h(i,j;i',j') = \mathcal{H}\left[\delta(i-i',j-j')\right] = h(i-i',j-j';0,0) = h(i-i',j-j')\,. \tag{3.8}$$

[4] Im Kontinuierlichen wird hier das Diracsche Delta benutzt.
[5] Im eindimensionalen spricht man von der Impulsantwort (engl. impulse response).

Die PSF ist, bis auf eine Verschiebung, für jede Stelle im Bild gleich. Es genügt somit, die PSF in der Form $h(i, j)$, ohne Angabe der Position (i', j'), anzugeben. Somit kann man für verschiebungsinvariante Systeme in Gleichung (3.6) schreiben:

$$\begin{aligned}\sum_{i'}\sum_{j'} v(i', j')h(i, j; i'j') &= \sum_{i'}\sum_{j'} v(i', j')h(i - i', j - j') \\ &= v(i, j) * h(i, j)\,, \end{aligned} \tag{3.9}$$

also

$$u(i, j) = v(i, j) * h(i, j)\,. \tag{3.10}$$

Das bedeutet, dass sich das Ausgabebild für ein verschiebungsinvariantes, lineares System gerade durch die Faltung[6] des Eingangsbildes mit der PSF berechnen lässt.

Eine wichtige und wünschenswerte Eigenschaft der Punktantwort ist:

$$\sum_{i}\sum_{j} h(i, j) = 1\,. \tag{3.11}$$

Dies ist gerade im Bereich der Computertomographie äußerst wichtig, da ein direkter Zusammenhang zwischen der physikalischen Dichte eines Stoffes und seinem CT-Wert besteht (siehe 2.3.1). (3.11) bedeutet für ein CT-Bild, dass der durchschnittliche CT-Wert eines Bildes erhalten bleibt, denn:

$$\begin{aligned}\sum_{i}\sum_{j} u(i, j) &= \sum_{i}\sum_{j} [v(i, j) * h(i, j)] \\ &= \sum_{i}\sum_{j}\sum_{i'}\sum_{j'} v(i', j')h(i - i', j - j') \\ &= \left[\sum_{i}\sum_{j} v(i, j)\right]\left[\sum_{i}\sum_{j} h(i, j)\right]\,. \end{aligned} \tag{3.12}$$

Hat die Summe über die Punktantwort h den Wert 1, so entspricht der Gesamtwert des Ausgabebildes u dem des Eingangsbildes v.

Im Folgenden wird die Computertomographie als verschiebungsinvariantes lineares System mit kreisförmig symmetrischer PSF[7] behandelt. Statt $h(i, j)$ wird auch $PSF(i, j)$ geschrieben[8].

3.2 Auflösung eines Systems

Unter der Auflösung eines Systems $\mathcal{H}$ ist der kleinste mögliche Abstand zwischen zwei gleich hellen Objekten zu verstehen, so dass diese Objekte nach der Übertragung durch das System $\mathcal{H}$ im Ausgabebild noch unterscheidbar sind. Im letzten Abschnitt wurde gezeigt, dass ein System $\mathcal{H}$ durch seine PSF vollkommen beschrieben ist. Möchte man

[6] Infos zum Falten von Funktionen im Kontinuierlichen und Diskreten in A.1.

[7] Für die Definition von kreisförmig symmetrischen, geraden und ungeraden Funktionen siehe A.2.

[8] Das kontinuierliche Pendant zu $h(i, j)$ bzw. $PSF(i, j)$ wird als $h(x, y)$ bzw. $PSF(x, y)$ geschrieben.

die PSF eines CT-Scanners bestimmen, muss ein Diracsches Delta als Eingabesignal erzeugt werden, dieses kann man beispielsweise durch kleine Metallkugeln approximieren [SK05].

Die PSF ist ein unhandliches und nicht einfach zu berechnendes Maß um das Auflösungsvermögen eines CT-Scanners zu beschreiben. Deshalb wurden, basierend auf der linearen Systemtheorie, weitere Wege zur Beschreibung des Auflösungsvermögens bildgebender Verfahren entwickelt.

3.2.1 Halbwertsbreite der PSF (FWHM)

Unter der Halbwertsbreite (engl. full width at half maximum, FWHM) der PSF eines linearen Systems versteht man die Breite der PSF, bis zu der deren Wert nur noch die Hälfte ihres Maximalwertes beträgt (siehe Abb. 3.2). Für ein klinisches CT-System liegen die FWHM-Werte etwa im Bereich von 0.9 - 1.6 mm[9]. Es ist leicht einzusehen, dass verschiedene PSFs den gleichen FWHM-Wert haben können. Dies bedeutet, dass ein System nicht eindeutig durch die Angabe der Halbwertsbreite seiner Punktantwort beschrieben ist. Für nicht symmetrische PSFs können verschiedene FWHM-Werte je nach gewählter Raumrichtung entstehen. Je geringer der FWHM-Wert eines Systems ist, desto besser ist die Auflösung dieses Systems.

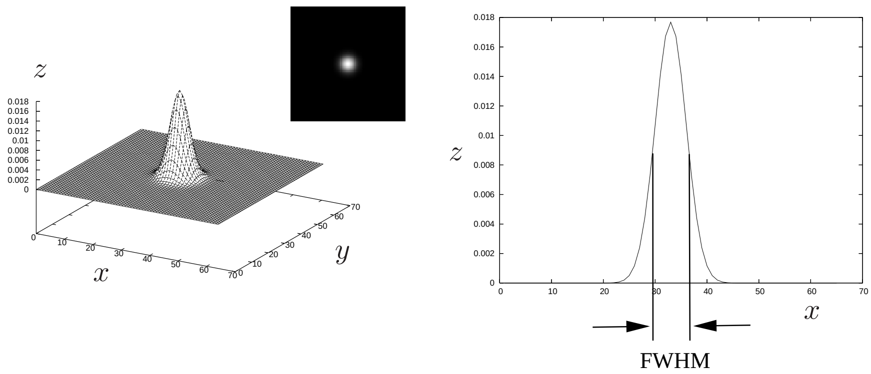


Abbildung 3.2: Der FWHM-Wert wird an der PSF eines Systems bestimmt. Rechts sieht man ein Profil durch das Zentrum der links abgebildeten, symmetrischen PSF - der FWHM-Wert ist eingezeichnet.

Beispiel. Sei die PSF eines 2-dimensionalen Systems eine Gaußglocke mit $\sigma = 3.0\,(1.0)$. Man erhält als maximalen Amplitudenwert für die Gaußglocke $1/(2\pi\sigma^2) = 0.018\,(0.159)$ und für die Halbwertsbreite FWHM $= \sqrt{-2\sigma^2 \ln(1/2)} = 7.064\,(2.355)$. Abb. 3.3 zeigt die Systemantwort auf zwei dicht nebeneinander liegenden Kronecker-Deltas.

3.2.2 Linienspreizfunktion (LSF)

Die Linienspreizfunktion (engl. line spread function, LSF) ist die Antwort eines linearen Systems auf eine beliebig dünne Linie. Präziser ausgedrückt entspricht diese Linie einer

[9] Diese Angabe soll lediglich ein Gefühl für die Größenordnung vermitteln und ist [DN99] entnommen, FWHM hängt natürlich von vielen Faktoren ab: Welches CT-System wurde verwendet? Welches FOV wurde für die Rekonstruktion eingestellt? Welcher Kernel wurde für die Bildrekonstruktion gewählt? ...

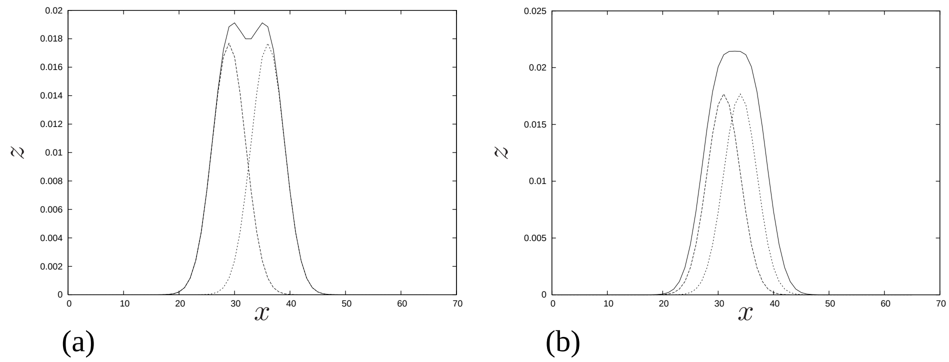


Abbildung 3.3: (a) Der Plot zeigt die Antwort eines Systems mit Gaußscher PSF und $\sigma = 3.0$ auf ein Eingangsbild mit zwei Kronecker-Deltas (Profilansicht), die genau 7 Pixel ($\approx$ ungefähr die Halbwertsbreite der PSF) auseinanderlagen. Im Ausgabebild sind zwei Maxima erkennbar. (b) Verringert man den Abstand auf 6 Pixel, verschmelzen die beiden Maxima und die beiden Punktobjekte sind im Ausgabebild nicht mehr trennbar.

kontinuierlichen Aneinanderreihung von Dirac-Stößen. Die LSF wird dann auf einer Geraden orthogonal zu der abgebildeten Linie im Ausgabebild bestimmt. Im Diskreten entspricht diese Aneinanderreihung von Dirac-Stößen gerade einer 1 Pixel breiten diskreten Linie aus Kronecker-Deltas (siehe Abb. 3.4). Die LSF lässt sich in der Praxis leichter bestimmen als die PSF. Im CT kann eine LSF beispielsweise durch das Scannen eines dünnen Wolframdrahtes erzeugt werden [NDOH98].

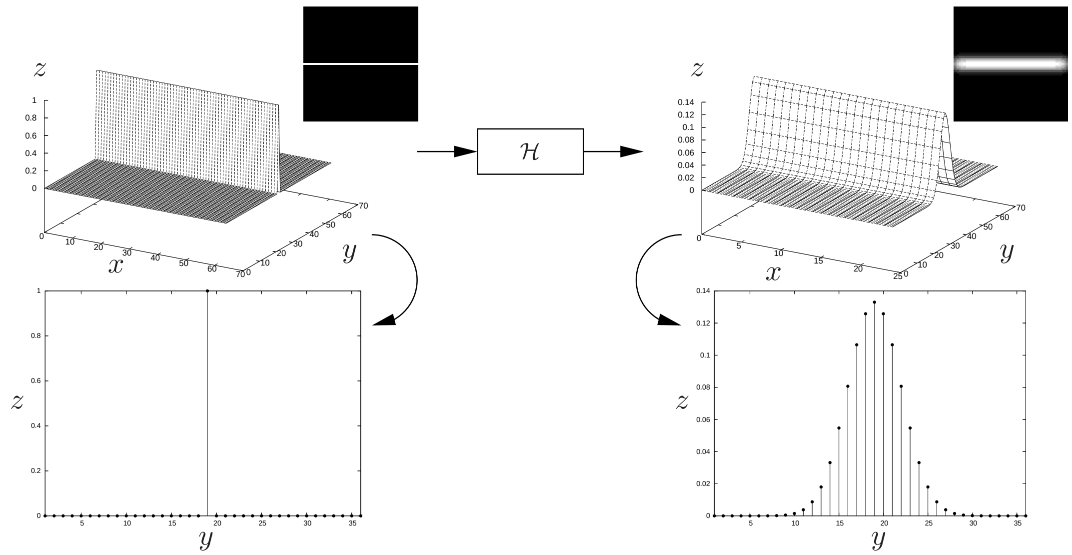


Abbildung 3.4: Links sieht man eine gesampelte Linie als Ausgabebild eines perfekten CT-Scanners als 1 Pixel breite Linie. Rechts die gleiche Linie als Ausgabebild eines virtuellen CT-Scanners mit einer Gaußschen PSF. Zusätzlich zur Grauwertdarstellung und zur Höhenprofildarstellung ist darunter jeweils ein Schnitt (1-dimensionales Profil) zentral durch das Höhenprofil abgebildet.

3.2.3 Kantenspreizfunktion (ESF)

Die Kantenspreizfunktion (engl. edge spread function, ESF) ist die Antwort eines linearen Systems auf eine gerade Kante (Sprungstelle, Unstetigkeitstelle). Die ESF wird auf einer Geraden orthogonal zu der abgebildeten Kante im Ausgabebild bestimmt. Um das Auflösungsvermögen eines Systems mit einem einzigen Parameter zu beschreiben, wird die Distanz angegeben, die die Amplitude der ESF von dem 10%-Wert bis zum 90%-Wert benötigt (siehe Abb. 3.5). Scharfe Kanten sind in Bildern vergleichweise einfach herzustellen, deshalb stellt die Kantenspreizfunktion ein einfacher zu berechnendes Maß dar.

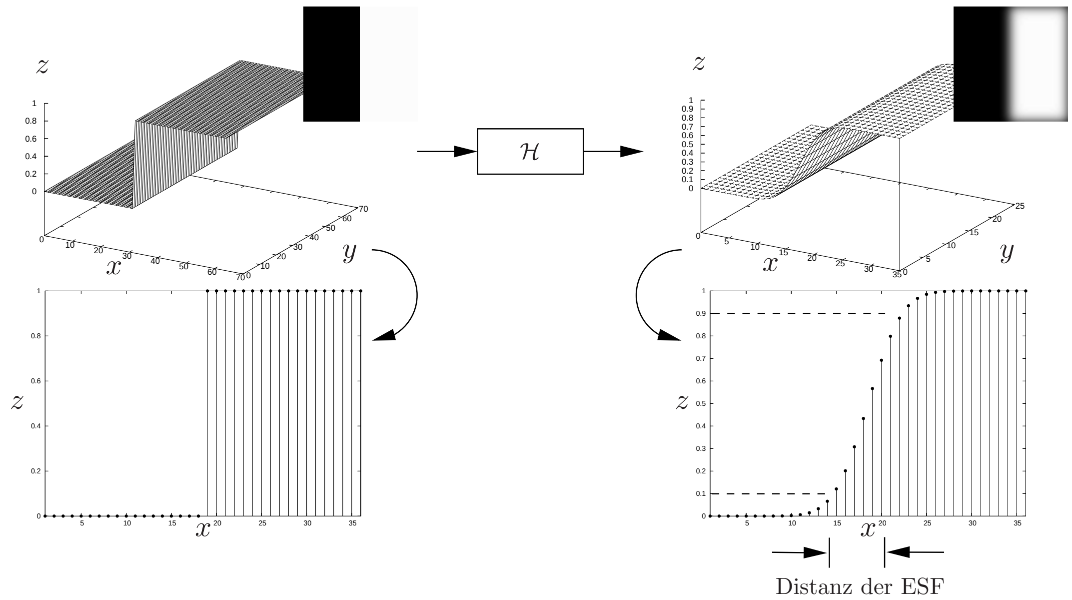


Abbildung 3.5: Links sieht man eine gesampelte scharfe Kante als Ausgabebild eines perfekten CT-Scanners. Rechts die gleiche Kante als Ausgabebild eines virtuellen CT-Scanners mit einer Gaußschen PSF. Die Distanz der Kantenantwort (engl. edge response) ist eingezeichnet.

3.2.4 Modulationsübertragungsfunktion (MTF)

Die Modulationsübertragungsfunktion oder Modulationstransferfunktion (engl. modulation transfer function, MTF) beschreibt den Kontrast und die Auflösung eines Systems zugleich. Die MTF ist als normalisierte Magnitude der Frequenzantwort H ($H = \mathcal{F}_2 h =$ 2-dimensionale Fouriertransformierte der Punktantwort h)[10] eines bildgebenden Systems $\mathcal{H}$ definiert [Jai89, S. 21]:

$$MTF(\xi_1, \xi_2) = \frac{|H(\xi_1, \xi_2)|}{|H(0,0)|} = \frac{|[\mathcal{F}_2 h]\,(\xi_1, \xi_2)|}{|[\mathcal{F}_2 h]\,(0,0)|}\,. \tag{3.13}$$

Im Falle einer radial symmetrischen PSF h ist die 2-dimensionale Fouriertransformierte der PSF, die Frequenzantwort H, ebenfalls kreisförmig symmetrisch (siehe A.8.3). Die komplette Information der Frequenzantwort ist somit in einem ihrer Profile, beispielsweise dem Profil $H_x(\xi)$ (entlang der x-Achse) durch das Zentrum, enthalten. Die MTF lässt sich dann in Abhängigkeit von nur einer Veränderlichen schreiben als:

$$MTF(\xi) = \frac{|H_x(\xi)|}{|H_x(0)|}\,. \tag{3.14}$$

Man beachte, dass ein Profil der 2-dimensionalen Frequenzantwort[11], nicht gleich der Fouriertransformierten eines Profils der 2-dimensionalen Punktantwort[12] eines Systems ist. Dies wird bei der Erklärung der Zusammenhänge zwischen PSF, LSF und MTF im Abschnitt 3.3 oder durch erneutes Betrachten des Zentralschnitt-Theorems in 2.4.3 klarer - es muss statt des einfachen Profils der 2-dimensionalen Punktantwort die Radon-Transformierte der Punktantwort benutzt werden.

Die Aussagekraft der MTF lässt sich leichter aus einem etwas anderen Blickwinkel verstehen. Sie beschreibt die Antwort eines Systems auf sinusoide Eingangssignale - warum dies so ist lässt sich anschaulich mit dem Begriff der *Eigenfunktion* eines linearen Systems erklären. Eine Funktion $g(x)$ ist eine Eigenfunktion eines linearen Systems $\mathcal{H}$, wenn es einen Skalierungsfaktor (Amplitudenfaktor) λ gibt, so dass:

$$\mathcal{H}\,[g] = \lambda g\,. \tag{3.15}$$

Diese Funktionen werden durch das System nicht in der Form, sondern lediglich in ihrer Amplitude durch den Faktor λ verändert.

[10] In der digitalen Signalverarbeitung werden Signale im Frequenzraum oftmals von der kartesischen Darstellung in die Polarkoordinatendarstellung überführt. Man spricht dann von der Magnitude und der Phase eines Signals. In der Bildverarbeitung ist meist (wie hier beim Bestimmen der MTF) nur die Magnitude von Bedeutung.

[11] 2-dimensionale Fouriertransformation der 2-dimensionalen Punktantwort.

[12] Berechnet mit der 1-dimensionalen Fouriertransformation.

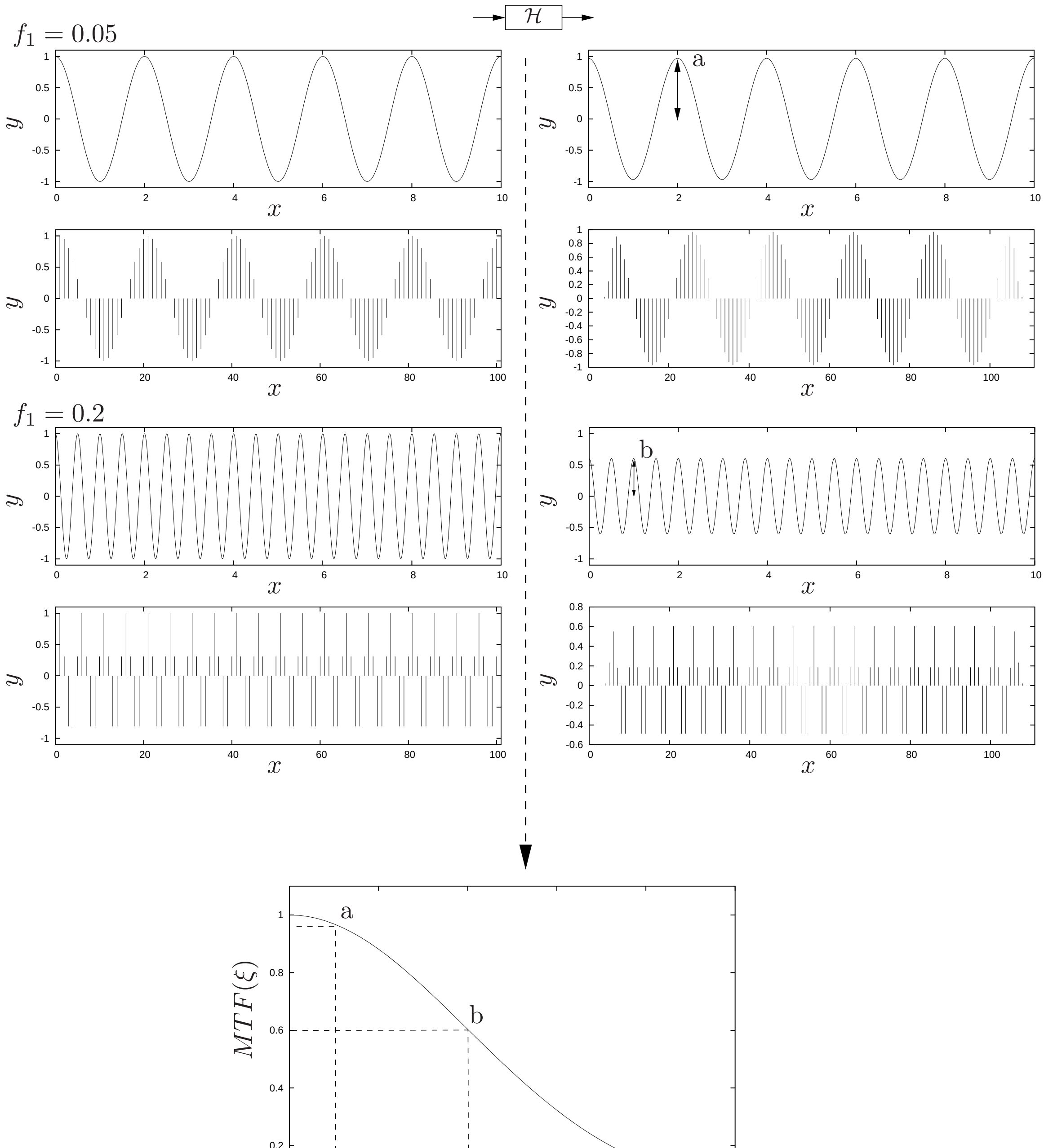


Abbildung 3.6: Berechnung der MTF aus Kosinusfunktionen: Schickt man Kosinusfunktionen $\cos(2\pi f x)$ mit immer größer werdenden Frequenzen f durch ein System $\mathcal{H}$, kann die MTF anhand der Amplitudenstärke der Ausgabebilder bestimmt werden. Hier sind zwei Beispielkurven mit $f = 0.05 = \frac{1}{20}$ und $f = 0.2 = \frac{1}{5}$, kontinuierlich und diskret, abgebildet. Diese werden durch das System $\mathcal{H}$ in ihrer Amplitude, nicht aber in ihrer Form verändert. Auf diese Art und Weise lässt sich $MTF(\xi)$ bestimmen.

$g(x) := e^{i2\pi fx}$ ist solch eine Eigenfunktion, denn mit der PSF h von $\mathcal{H}$ gilt:

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}[g(x)] &= g(x) * h(x) &(3.16)\\
&= h(x) * e^{i2\pi fx} &(3.17)\\
&= \int_{-\infty}^{\infty} h(x')e^{i2\pi f(x-x')}\,\mathrm{d}x' &(3.18)\\
&= e^{i2\pi fx}\int_{-\infty}^{\infty} h(x')e^{-i2\pi fx'}\,\mathrm{d}x' &(3.19)\\
&= e^{i2\pi fx}\,[\mathcal{F}h]\,(f) &(3.20)\\
&= e^{i2\pi fx}H(f) &(3.21)\\
&= g(x)H(f)\,. &(3.22)
\end{aligned}$$

Zusammenfassend bedeutet diese Gleichungsfolge: Steckt man $g(x) = e^{i2\pi fx}$ in das System $\mathcal{H}$ (3.16), bekommt man als Systemantwort $g(x)$ multipliziert mit der Frequenzantwort H an der Stelle f (3.22) [13].

Weiter gilt (siehe Eulersche Formel A.3): $e^{i2\pi fx} = \cos(2\pi fx) + i\sin(2\pi fx)$ und $\cos(2\pi fx) = \frac{1}{2}(e^{i2\pi fx} + e^{-i2\pi fx})$. Unter der Voraussetzung, dass h gerade ist, lässt sich leicht zeigen, dass auch sin und cos lediglich in ihrer Amplitude durch das System $\mathcal{H}$ verändert werden, jeweils um $H(f)$. sin und cos sind somit Eigenfunktionen. Abb. 3.6 zeigt bildlich den Zusammenhang zwischen der Kosinusfunktion und der MTF.

In der Praxis werden zum Messen der MTF oftmals verschieden feine Linienraster benutzt, siehe Abb. 3.7. Daher kommt auch die Bezeichnung Linienpaare (eine dunkle Linie neben einer hellen Linie) pro einer gewissen Strecke. Die Linienpaare sind als Approximation an sinusoide Eigenfunktionen zu verstehen. Ein weiteres bekanntes Bildmuster zum Messen der MTF ist der sogenannte Siemensstern, siehe Abb. 3.8.

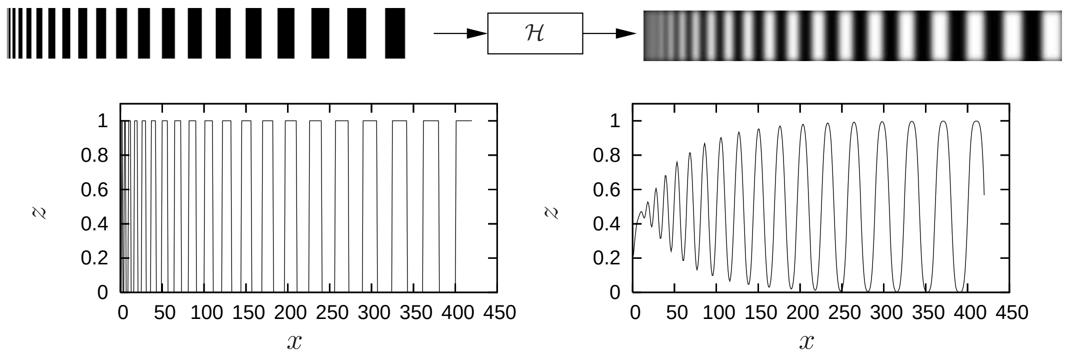


Abbildung 3.7: Links oben ein Eingangssignal bestehend aus von links nach rechts breiter werdenden Streifen. Rechts daneben das Ausgabesignal des Systems $\mathcal{H}$, die Streifen sehen verwaschen aus. Darunter ein Profil durch das Eingangsbild sowie durch das Ausgabebild. Für die schmaleren Streifen ist der Amplitudenverlust deutlich zu sehen.

In der Computertomographie wird die Definition der MTF meist in der Form (3.14) angegeben, da man von kreisförmig symmetrischen PSFs ausgeht. Oft wird von den

[13] Dieses Beispiel ist im 1-Dimensionalen gerechnet, d.h. $h(x)$ stellt die 1-dimensionale Systemantwort dar. Im 2-Dimensionalen kann der Kosinus entsprechend definiert werden, wobei die Abhängigkeit von y weggelassen wird. $h(x)$ entspricht dann nicht der PSF, sondern der LSF.

Scannerherstellern, um die Leistungsfähigkeit eines Systems zu beschreiben, auch die Frequenz angegeben, bei der die MTF auf 10% reduziert ist.

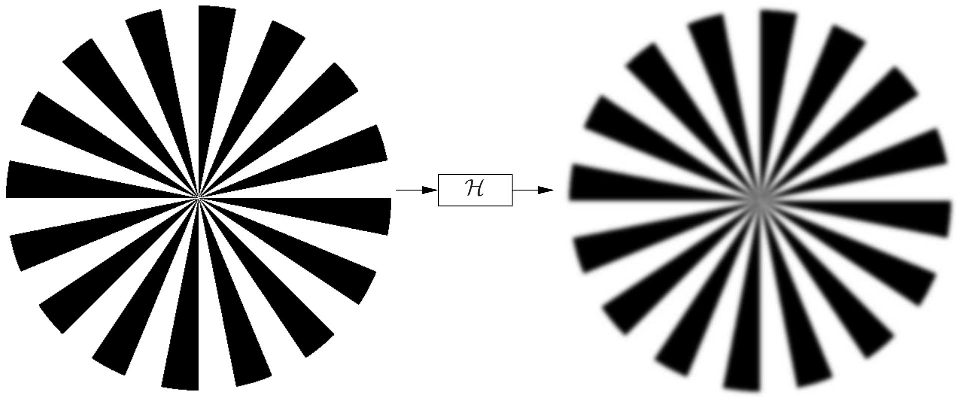


Abbildung 3.8: Der sogenannte Siemensstern. Um die Performance eines Systems zu beschreiben, wird hier die Größe des verwaschenen Bereichs im Zentrum des Sterns benutzt.

3.3 Zusammenhänge zwischen PSF, LSF, ESF und MTF

Die Zusammenhänge zwischen PSF, LSF, ESF und MTF werden im Folgenden im Kontinuierlichen hergeleitet.

ESF ⇔ LSF

In Anlehnung an die Geradengleichung in Polarkoordinatendarstellung aus (2.11) sei $g(x, y)$ als Funktion von $\mathbf{R}^2$ nach $\mathbf{R}$ definiert als:

$$g(x, y) := x \cos\theta + y \sin\theta + s\,. \tag{3.23}$$

Getrennt durch die Gerade $g(x, y) = 0$ erhält man zwei Halbebenen: eine für $g(x, y) \geq 0$ und die andere für $g(x, y) < 0$. Damit lässt sich ein perfektes Kantenbild im Kontinuierlichen mit der Heavisideschen Sprungfunktion Θ (siehe A.7.3) wie folgt definieren:

$$f(x, y) := \Theta(g(x, y)) = (\Theta \circ g)(x, y)\,. \tag{3.24}$$

Abb. 3.5 zeigt ein solches Kantenbild in gesampelter Form. Betrachten wir nun exemplarisch die Kante, die mit $\theta = 0$ beschrieben wird. Steckt man dieses Kantenbild in ein lineares System mit der Punktantwort $PSF(x, y)$, dann hat das Ausgabebild die Form:

$$\begin{aligned}(\Theta \circ g)(x, y) * PSF(x, y) &= \Theta(x + s) * PSF(x, y) \\ &= \iint_{-\infty}^{\infty} \Theta(x + s - x')PSF(x', y')\,\mathrm{d}x'\,\mathrm{d}y' \\ &= ESF(x)\,. \end{aligned} \tag{3.25}$$

Das Ausgabebild hängt nicht mehr von der Veränderlichen y ab und entspricht der in 3.2.3 definierten Kantenspreizfunktion. Diese kann man im Sinne von der Differentiation von Distributionen differenzieren. Mit der Kettenregel und der Ableitungsregel für

Faltungen (siehe A.6) erhält man, dass $\frac{\partial}{\partial y}\left[(\Theta \circ g)(x,y) * PSF(x,y)\right]$ verschwindet[14]. Für $\frac{\partial}{\partial x}$ erhält man auf dem gleichen Weg mit dem Wissen, dass $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\,\Theta(x) = \delta(x)$ (siehe A.30):

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x}\left[(\Theta \circ g)(x,y) * PSF(x,y)\right] &= \delta(x+s) * PSF(x,y) \\ &= LSF(x)\,. \end{aligned} \tag{3.26}$$

ESF und LSF, jeweils auf 1-dimensionalen Schnitten orthogonal zur abgebildeten Kante bzw. Linie definiert, hängen in der Form zusammen, dass die LSF gerade die Ableitung der ESF darstellt. Also:

$$\frac{\partial}{\partial x} ESF(x) = LSF(x)\,. \tag{3.27}$$

PSF ⇔ LSF

Für die folgenden Betrachtungen sei eine Bildlinie identisch der y-Achse gewählt, um den Schreibaufwand möglichst gering zu halten. Formal hat die LSF der Bildlinie folgende Gestalt (siehe auch (3.26) mit $s = 0$):

$$\begin{aligned} LSF(x) &= \delta(x) * PSF(x,y) && (3.28)\\ &= \iint_{-\infty}^{\infty} \delta(x-x')PSF(x',y')\,\mathrm{d}x'\mathrm{d}y' && (3.29)\\ &= \int_{-\infty}^{\infty} PSF(x,y')\,\mathrm{d}y' && (3.30)\\ &= 2\int_{0}^{\infty} PSF(x,y')\,\mathrm{d}y' && (3.31)\\ &= 2\int_{\varphi(0)=x}^{\varphi(\infty)=\infty} PSF_x(\varphi(r))\,\mathrm{d}\varphi(r)\,, \text{mit } r^2 = x^2 + y'^2 \text{ und} && (3.32)\\ &\quad\ \varphi(r) := y' = \sqrt{r^2 - x^2} \\ &= 2\int_{x}^{\infty} PSF_x(\varphi(r))\,\varphi'(r)\mathrm{d}r && (3.33)\\ &= 2\int_{x}^{\infty} \frac{PSF_x(r)r}{\sqrt{r^2-x^2}}\,\mathrm{d}r && (3.34) \end{aligned}$$

(3.30) zeigt anschaulich, dass die LSF der Projektion der PSF in einer Richtung entspricht. Von (3.30) nach (3.31) gelangt man mittels Ausnutzung der geforderten Symmetrie der PSF. Wendet man die Substitutionsregel an und ersetzt $PSF(x,y)$ durch $PSF_x(r)$, gelangt man zu (3.32). Man beachte, dass x in diesem Fall keine Veränderliche mehr ist, sondern ein Parameter und deshalb als Index geschrieben ist. Nach der Definition der Abel-Transformation (siehe A.8.1) entspricht die LSF gerade der Abel-Transformierten der PSF:

$$LSF(x) = 2\int_{x}^{\infty} \frac{PSF_x(r)r}{\sqrt{r^2-x^2}}\,\mathrm{d}r\,. \tag{3.35}$$

Aus der Gleichheit von (3.28) und (3.30) folgt sofort, dass

$$\int_{-\infty}^{\infty} LSF(x)\,\mathrm{d}x = \iint_{-\infty}^{\infty} PSF(x,y')\,\mathrm{d}y'\mathrm{d}x\,. \tag{3.36}$$

[14] Sieht man natürlich auch an der Tatsache, dass die Abhängigkeit von y nicht mehr gegeben ist.

Der Wert des 2-dimensionalen Integrals der PSF ist gleich dem Wert des 1-dimensionalen Integrals der LSF.

Beispiel. Sei die PSF eines 2-dimensionalen Systems gegeben als Gaußglocke (siehe A.5):

$$PSF(x,y) = \frac{1}{2\pi\sigma^2} e^{-\frac{(x^2+y^2)}{2\sigma^2}} . \tag{3.37}$$

Dann gilt unter Anwendung von (3.35) mit $r^2 = x^2 + y'^2$:

$$LSF(x) = 2\int_x^\infty \frac{\frac{1}{2\pi\sigma^2} e^{-\frac{(r^2)}{2\sigma^2}} r}{\sqrt{r^2 - x^2}} \, \mathrm{d}r = \frac{1}{2\pi\sigma^2} 2 \int_x^\infty \frac{e^{-\frac{(r^2)}{2\sigma^2}} r}{\sqrt{r^2 - x^2}} \, \mathrm{d}r . \tag{3.38}$$

Die Abel-Transformation von $f(r) := \exp(-r^2/2\sigma^2)$ ist $f_A(x) = \sqrt{2\pi}\sigma \exp(-x^2/2\sigma^2)$ (siehe Tab. A.1). Damit erhält man

$$LSF(x) = \frac{1}{2\pi\sigma^2} \sqrt{2\pi}\sigma e^{-x^2/2\sigma^2} = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-x^2/2\sigma^2} . \tag{3.39}$$

D.h., die LSF einer 2-dimensionalen Gaußschen PSF mit Standardabweichung σ ist eine 1-dimensionale Gaußsche Verteilung mit gleicher Standardabweichung σ. Sowohl PSF als auch LSF besitzen, über den gesamten Definitionsbereich integriert, den Integralwert 1.

Weiter ist die Gaußglocke eine separabele Funktion[15] und es gilt:

$$\begin{aligned} PSF(x,y) &= \frac{1}{2\pi\sigma^2} e^{-\frac{(x^2+y^2)}{2\sigma^2}} && (3.40) \\ &= \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}\right) \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{y^2}{2\sigma^2}}\right) && (3.41) \\ &= LSF(x) \cdot LSF(y) . && (3.42) \end{aligned}$$

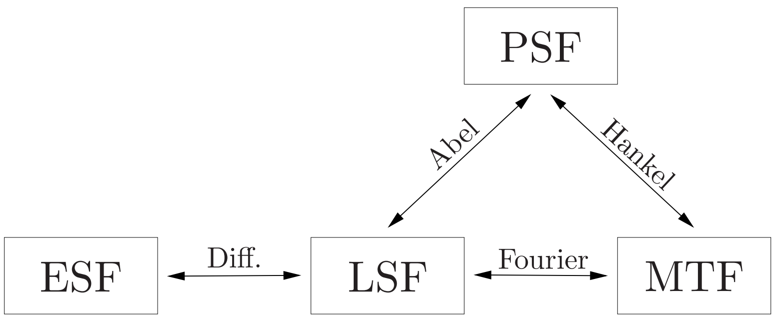


Abbildung 3.9: Zusammenhang zwischen PSF, MTF, LSF und ESF. Die entstehende Ringverbindung zwischen PSF, MTF und LSF wird auch als Abel-Fourier-Hankel Ring der Transformationen bezeichnet [Bra00, S. 357].

[15]Eine Funktion $f(x,y)$ heißt separabel falls es f_1 und f_2 gibt, so dass: $f(x,y) = f_1(x)f_2(y)$.

LSF ⇔ MTF

Da die Abel-Transformation ein Spezialfall der Radon-Transformation für kreisförmig symmetrischen Funktionen ist, gilt das Zentralschnitt-Theorem aus 2.4.3. Dies bedeutet, dass die 1-dimensionale Fourier-Transformation der LSF[16] dem zentralen Schnitt mit einem beliebigen Winkel durch die 2-dimensionale Fourier-Transformation der PSF entspricht.

Im Falle einer radial symmetrischen PSF kann somit die MTF direkt aus der ESF berechnet werden: Man differenziert die ESF und gelangt so zur LSF (3.27), mittels 1-dimensionaler Fouriertransformation der LSF gelangt man dann zur MTF:

$$MTF(\xi) = \frac{[\mathcal{F}_1 LSF](\xi)}{[\mathcal{F}_1 LSF](0)}\,. \tag{3.43}$$

Der in B.1.3 vorgestellte *MTF-Calculator* basiert auf diesem Zusammenhang.

MTF ⇔ PSF

Der vorige Abschnitt hat gezeigt, wie man die MTF eines Systems aus der ESF berechnen kann, ohne die PSF explizit zu kennen. Dies hat den Vorteil, dass man lediglich eine scharfe Kante zur MTF-Bestimmung benötigt.

Hat man eine radial symmetrische PSF kann man die MTF aber auch direkt, mit der sogenannten Hankel-Transformation berechnen (siehe A.8.3).

Abbildung 3.9 zeigt die in diesem Abschnitt hergeleiteten Zusammenhänge nochmals in Diagrammform. In B.1.3 wird an Hand eines Beispiels gezeigt, wie diese Zusammenhänge innerhalb eines Bildes angewendet werden können.

3.4 Anmerkungen und Literaturhinweise

Die Informationen in diesem Kapitel wurden im wesentlichen, insofern nicht explizit auf andere Literaturquellen verwiesen wurde, aus Literatur [Bra00, LOPR97, Smi99, Jai89] entnommen.

[16] LSF = Abel-Transformierte der PSF = Radon-Transformierte der PSF für einen beliebigen Winkel.

Kapitel 4

Segmentieren medizinischer Bildstrukturen

Möchte man bestimmte Objekte innerhalb eines Bilddatensatzes analysieren, müssen diese zunächst markiert werden. Den Vorgang, inhaltlich zusammenhängende Gebiete, durch das Zusammenfassen benachbarter Pixel respektive Voxel zu bestimmen, bezeichnet man als *Segmentierung*. In der Computertomographie wird die Segmentierung von Bildobjekten durch die Hounsfield-Skala etwas erleichtert, da diese Dichteinformationen über die Voxel liefert. In diesem Kapitel wird eine vollautomatische Methode zum Segmentieren des Tracheobronchialbaums aus CT-Volumen vorgestellt.

Wie in Abschnitt 1.1.2 beschrieben, kann der Tracheobronchialbaum als ein sich verjüngendes System von Röhren aufgefasst werden. Die CT-Datensätze sollten über ein gutes Signal-Rausch-Verhältnis verfügen um das Segmentieren zu erleichtern. Methoden zur nachträglichen Bildverbesserung, d. h. zur Erhöhung des Signal-Rausch-Verhältnisses vorhandener CT-Bilder, werden im ersten Abschnitt behandelt. Der folgende Abschnitt ist der Suche nach einem geeignet Startpunkt (*Landmark*), um die Segmentierung des Tracheobronchialbaums mittels eines speziellen Bereichswachstumsverfahrens zu ermöglichen, gewidmet. Danach wird die Methodik der Bereichswachstumsverfahren allgemeinen eingeführt und anschließend werden spezielle Wachstumsbedingungen für die Segmentierung tubulärer Strukturen vorgestellt. Zum Abschluß des Kapitels wird ein Vorgehen zum automatischen Identifizieren und Separieren der Lungen beschrieben. Teile dieses Kapitels wurden schon in [WAB+03] veröffentlicht. Auf der Grundlage der in diesem Kapitel beschriebenen Segmentierungsalgorithmen sind einige medizinische Veröffentlichungen entstanden, auf diese wird im Abschnitt "Anmerkungen zur Literatur" verwiesen.

4.1 Bildverbesserung

Rauschartefakte stellen in der Radiologie ein großes Problem dar. In diesem Abschnitt sei unter dem Begriff "Rauschen" ein willkürliches Pixelrauschen (engl. random noise) zu verstehen. Quellen für solch ein willkürliches Rauschen bietet die CT zur Genüge, beispielsweise die im Abschnitt Photonenstatistik (2.2.4) beschriebenen Ursachen. In

Bildbereichen mit niedrigem Kontrast[1] lassen sich Details bei hohem Rauschen nur noch schlecht oder gar nicht mehr erkennen. In der CT können dadurch anatomische Details und Besonderheiten verloren gehen - Rauschen kann zu falschen Diagnosen führen. Eine Bildverbesserung läßt sich in der CT auf verschiedenen Wegen und zu unterschiedlichen Zeitpunkten erreichen. Zunächst über das geeignete Einstellen entsprechender Parameter des CT-Scanners bei der Projektionsdatenerzeugung. Wird z. B. der Röhrenstrom erhöht, werden die durch Photonenstatistik hervorgerufenen Rauschartefakte geringer, es steigt aber auch die Strahlenbelastung für den Patienten (Beispiel 2.2.4). Eine nächste Möglichkeit zur Bildkorrektur bietet der Einsatz rauschunterdrückender Rekonstruktionsfilter beim Rekonstruieren der CT-Bilder aus den Projektionsdaten (2.4.4). Die Wahl des Rekonstruktionsfilters beeinflußt den Kontrast und das Rauschen der entstehenden Bilder. Dies wurde schon in Beispiel 2.4.4 gezeigt. Einen weiteren Weg zur Bildverbesserung bietet der Einsatz von Filtermasken. Diese Methodik wird im Folgenden beschrieben. Zunächst werden nun einige Definitionen zur objektiven Beschreibung der Qualität eines Bildes eingeführt.

4.1.1 Signal-Rausch-Verhältnis

Unter Rauschen versteht man allgemein die Abweichung eines Bildes von dem idealen, gewünschten Originalbild[2]. Zum Beurteilen der Qualität eines Bildes werden in der Regel entweder subjektive oder quantitative Kriterien angewendet. Beim subjektiven Bewerten der Qualität von Bildern wird ein Bild durch mehrere Personen in eine Skala (beispielsweise: exzellent, gut, mäßig, ausreichend, mangelhaft) eingeordnet. Der Durchschnitt der Bewertung kann dann als abschließende Qualität des Bildes gesehen werden. Quantitative Kriterien sollen objektive Maßzahlen mit Hilfe von Meßgeräten und/oder Algorithmen zur Beurteilung von Bildern liefern. Allgemeim ist das Signal-Rausch-Verhältnis (engl. signal-to-noise ratio, SNR) definiert als:

$$\mathrm{SNR} = \frac{\text{Nutzsignalleistung}}{\text{Rauschsignalleistung}} \,. \tag{4.1}$$

Oftmals wird, aufgrund des in der Regel großen Unterschiedes zwischen Nutzsignal- und Rauschsignalleistung, das SNR auch logarithmisch (dekadisch) skaliert:

$$\mathrm{SNR} = 10 \lg \frac{\text{Nutzsignalleistung}}{\text{Rauschsignalleistung}} \,. \tag{4.2}$$

Der so berechnete dimensionslose Wert wird mit der Einheit Dezibel versehen[3]. Als Störwert zwischen zwei Bildern kann der mittlere quadratische Fehler (engl. mean squared error, MSE) zwischen zwei $M \times N$ Bildern u und v, wobei u das Originalbild und v die Approximation sei, definiert werden:

$$\mathrm{MSE} = \sigma^2 = \frac{1}{MN} \sum_{i=0}^{M-1} \sum_{j=0}^{N-1} \| u(i,j) - v(i,j) \|^2 \,. \tag{4.3}$$

[1] Es gibt viele Definitionen um den Kontrast innerhalb eines Bildes zu beschreiben. In der CT läßt sich für ein Objekt das Verhältnis $\frac{|HE_{Umgebung} - HE_{Objekt}|}{HE'_{Objekt}}$ als lokaler Kontrast bzgl. dieses Objekts definieren. Als globaler Kontrast wird oftmals die Varianz eines Bildes benutzt.

[2] Der Begriff "Rauschen" ist nicht exakt definiert.

[3] Das Bel (nach Alexander Graham Bell) dient zur Kennzeichnung des dekadischen Logarithmus des Verhältnisses zweier gleichartiger Leistungs- bzw. Energiegrößen P1 und P2: $L = \lg \frac{P_1}{P_2}\,\mathrm{B} = 10 \lg \frac{P_1}{P_2}\,\mathrm{dB}$. 1 Bel (B) ist der Wert von L, wenn $P_1/P_2 = 10$. $1\,\mathrm{dB} = 1/10\,\mathrm{B}$.

$h(-1,-1)$	$h(0,-1)$	$h(1,-1)$
$h(-1,0)$	$h(0,0)$	$h(1,0)$
$h(-1,1)$	$h(0,1)$	$h(1,1)$

(a)

$\frac{1}{9}$

1	1	1
1	1	1
1	1	1

(b)

$\frac{1}{16}$

1	2	1
2	4	2
1	2	1

(c)

Abbildung 4.1: (a) Der allgemeine Aufbau einer Filtermaske. (b) Die Maske zeigt den 3×3 Rechteckfilter mit normierendem Vorfaktor. (c) Die Maske entspricht dem 3×3 Gaußfilter mit normierendem Vorfaktor.

Mit dem MSE kann nun das Signal-Rausch-Verhältnis für Bilder definiert werden als:

$$\mathrm{SNR} = 10 \lg \frac{\sigma_u^2}{\mathrm{MSE}}\,, \tag{4.4}$$

wobei σ_u^2 die Varianz des Originalbildes bezeichnet. In der Bildverarbeitung wird oft statt der Varianz des Originalbildes der Maximalwert $u_{\max}$ des Originalbildes benutzt (engl. peak signal-to-noise ratio, PSNR):

$$\mathrm{PSNR} = 10 \lg \frac{u_{max}^2}{\mathrm{MSE}}\,. \tag{4.5}$$

Aufgrund der Definition liegen die Werte für PSNR meist um einige dB höher als die Werte für SNR. Es gilt: Je größer MSE, desto kleiner wird SNR und PSNR.

4.1.2 Faltungsfilter

In Kapitel 3 wurden CT-Bilder in den Kontext linearer verschiebungsinvarianter Systeme gehoben. Dort wurde gezeigt, dass sich ein CT-Bild v als ein mit einer PSF h gefaltetes ideales Abbild der Realität u auffassen läßt (3.10). Rauschartefakte wurden in diesen Betrachtungen nicht beachtet. Diese lassen sich durch eine weitere Faltung der CT-Bilder mit sogenannten Filtermasken (Templates, Masken) mildern. Abb. 4.1a zeigt ein gängiges Schema zum Notieren von Filtermasken. Gebräuchliche Masken haben die Dimensionen 3×3 oder 5×5. Im Falle von *isotropen*[4] Voxeln bieten sich auch 3-dimensionale Filtermasken an.

Rechteckfilter

Der Rechteckfilter (oder Meanfilter) bildet den Durchschnitt der Grauwerte in einer Filtermaske. Der berechnete Wert wird dem zentralen Voxel zugewiesen. Der Rechteckfilter ist ein Rauschfilter, extreme Punkte werden geglättet, Kanten werden "verschmiert" (engl. blurring), die Amplituden periodischer Signale hoher Frequenzen werden reduziert - es kann im Extremfall zum kompletten Verlust hochfrequenter Anteile im Bild

[4]Isotrope Voxel besitzen in alle Raumrichtungen gleiche Kantenlänge - sie entsprechen somit einem Würfel.

kommen. Die entsprechende Maske ist in Abb. 4.1b zu sehen. Der Rechteckfilter ist ein linearer Filter[5].

Gaußfilter

Der Gaußfilter beruht auf der diskreten Umsetzung der Dichtefunktion der Gaußschen Normalverteilung (siehe A.5). Ebenso wie der Rechteckfilter ist der Gaußfilter ein linearer Filter. Die entsprechende 3×3 Maske ist in Abb. 4.1c abgebildet. Bezeichnet man die Gaußmaske mit g, dann gilt für das gefilterte Bild v:

$$v(i,j) = u(i,j) * h(i,j) * g(i,j)\,, \tag{4.6}$$

wobei u für das ideale CT-Bild und h für die PSF des CT-System steht. Wegen der Assoziativität der Faltungsoperation (siehe A.1) kann zunächst die Faltung $h(i,j) * g(i,j)$ berechnet werden und danach die Faltung mit dem Bild u - dies führt zu einer erheblichen Reduktion des Rechenaufwandes. Bedeutung gewinnt das Ausnutzen der Assoziativität in der Praxis beispielsweise, wenn man zunächst einen Rauschfilter und anschließend einen Kantenfilter benutzen möchte. Ein konkretes Beispiel hierfür ist der sogenannte LoG-Filter (Laplacian of Gaussian, Marr Filter), eine Gaußmaske wird mit dem Laplace-Operator, der einer Approximation der zweiten Ableitung einer Funktion entspricht, gefaltet [Jäh97, S. 334]. Die entstehende Filtermaske wird dann auf ein Bild angewendet.

Der Gaußfilter wird extensiv in der Bildverarbeitung eingesetzt, denn viele natürliche Prozesse können als normalverteilt angenommen werden (z. B. random noise), desweiteren besitzt der Filter angenehme mathematische Eigenschaften (z. B. Separabilität, siehe 4.1.3).

Der zentrale Grenzwertsatz. Der zentrale Grenzwertsatz (engl. central limit theorem) ist in der Wahrscheinlichkeitstheorie von fundamentaler Bedeutung - nebenbei ist er eine einleuchtende mathematische Erklärung, warum in der Natur die Gaußverteilung sehr häufig zu beobachten ist. Einfach zusammengefaßt sagt der zentrale Grenzwertsatz, dass man eine Gaußsche Verteilung erhält, wenn die interessierende Zufallsvariable als Summe von vielen unabhängigen Zufallsvariablen definiert ist. D.h. auch wenn die einzelnen Komponenten nicht gaußverteilt sind, ihre Summe ist es (aproximativ). Weiter impliziert der zentrale Grenzwertsatz auch eine interessante Aussage über die mathematische Faltung: Faltet man ein impulsartiges Signal (beispielsweise PSFs oder Filtermasken) immer wieder mit sich selbst, so konvergiert das Resultat gegen eine Gaußverteilung - auch wenn das ursprüngliche Signal keinerlei Ähnlichkeit mit einer Gaußverteilung hatte (siehe [Kre91, S. 153 ff.] [Smi99, S. 135 ff.]).

Medianfilter

Der Medianfilter ist ein Beispiel für einen nicht linearen Filter. Es wird der Medianwert innerhalb einer Filtermaske gesucht und dem zentralen Pixel zugewiesen. Man erzielt dadurch eine Rauschreduktion, das Verschmieren der Kanten wird im Vergleich zum Rechteckfilter und Gaußfilter aber eingedämmt.

[5] Die Linearitätsbedingung für einen Filter g ist die identische wie für lineare Systeme (siehe 3.3), das System $\mathcal{H}$ ersetzt man in 3.3 durch den Filter g.

Beispiel. In Abb. 4.2 wurde das Originalbild links oben mit Rauschen unterschiedlicher Stärke versehen. Als Bildrauschen diente eine Matrix R mit Zufallswerten zwischen -0.5 und 0.5. Diese wurde mit dem Rauschfaktor n und dem Maximalwert des Ausgangsbildes multipliziert und dann auf das Originalbild addiert. Das Rauschen nimmt in der oberen Bildreihe von links nach rechts zu. Die so entstandenen Bilder wurden mit dem 3×3 Mean- und Gaußfilter gefaltet (siehe mittlere und untere Bildreihe). Zur Beschreibung der Bildqualität wurde das Fehlermaß r, definiert in (2.60), und die in diesem Abschnitt eingeführten Maße MSE (nach (4.3)), SNR (nach (4.4)) und PSNR (nach (4.5)) berechnet. In der oberen Bildreihe werden die Werte für r und MSE, wie zu erwarten, mit steigendem Rauschen größer - SNR und PSNR werden geringer. Gleiches gilt auch für die mit dem Mean- und Gaußfilter gefalteten Bildreihen. Hier ist der Effekt jedoch weniger deutlich. Nach den gewählten Fehlermaßen sind die beiden ungefilterten Bilder mit Rauschen $n = 0$ und $n = 0.05$ "besser" als die Gauß-gefilterten Pendants. Für die stärker gestörten Bilder mit $n = 0.1$ und $n = 0.2$ gilt das Umgekehrte, d. h. durch den Gaußfilter konnten die Fehler bzgl. r und MSE reduziert und gleichzeitig SNR und PSNR erhöht werden. Der Meanfilter schneidet etwas schlechter ab, als der Gaußfilter. Dieses Beispiel zeigt, dass gestörte Bilder mit Hilfe der Filtertechnik verbessert werden können. Achtung: Beim Kodieren von Videofilmen oder beim komprimieren von Urlaubsbildern hat man die Möglichkeit die Fehlermaße gegen die Originalaufnahmen zu berechnen[6]. In der Computertomographie steht man vor dem Problem, dass bei klinischen Routinedatensätzen keine idealen Originalbilddaten zum Berechnen der Fehlermaße zur Verfügung stehen.

Beispiel. In der CT hat man in der Regel nicht die Möglichkeit Bildfehlermaße gegen das ideale CT-Bild zu berechnen - denn in der klinischen Routine liegt dieses ideale Bild nicht vor. Es ist auch nicht möglich einen fixen Wert für das Rauschen bei einer bestimmten Scannereinstellung im Voraus anzugeben. Dies liegt daran, dass das Pixelrauschen in den Bildern viele Ursachen wie die Photonenstatistik, die Strahlenaufhärtung, Bewegungsartefakte, der Partialvolumeneffekt oder die Wahl des Rekonstruktionskernels hat, und einige dieser Effekte hängen auch davon ab, welches Objekt gescannt wurde. Bei gleicher Scannereinstellung ist im Allgemeinen das SNR für einen dickeren Patienten schlechter als für einen Schlanken. Es gibt Ansätze einer Dosisanpassung an das Körpervolumen der Patienten ("Automatic Exposure Control = AEC") - die Regel ist dies im klinischen Alltag aber nicht[7]. Abb. 4.3a+b zeigt das *Silikon-Schlauch-Phantom* (siehe 6.4.1). Die Bilder wurden aus identischen Projektionsdaten mit unterschiedlichen Rekonstruktionsfiltern berechnet. Die beiden Bilder besitzen somit unterschiedliche PSFs. Für die linke Rekonstruktion wurde der weichere Kernel eingesetzt, dies hat eine breitere PSF zur Folge. Beide Bilder besitzen den gleichen Mittelwert, Gleichung (3.11) ist für beide Rekonstruktionen erfüllt[8].

Die Varianz ist im linken Bild mit 22671.1 geringer als im Rechten mit 27858.5 . Hat man zwei Rekonstruktionen gleicher Rohdaten, liefert, zumindest in diesem Beispiel, die Varianz ein geeignetes Maß um das Rauschen zu quantifizieren. Es ist offensichtlich, dass dies nicht für Bilder unterschiedlichen Inhalts gelten kann. Man stelle sich

[6] Wir nehmen an, dass diese Originalaufnahmen "perfekt" seien - sicher ist die Erstellung eines Fotos oder einer Videoaufnahme weniger komplex und mit weniger möglichen Fehlerquellen versehen als die Erstellung eines CT-Bildes.

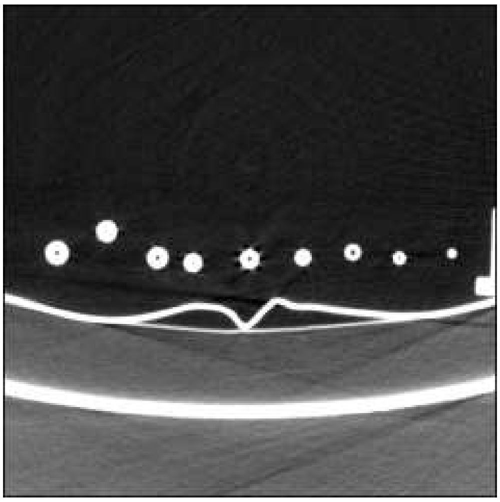
[7] Eine gewisse Abhängigkeit eines CT-Bildes vom gescannten Objekt lässt sich nie vermeiden!

[8] ... oder für beide im gleichen Maße nicht erfüllt.

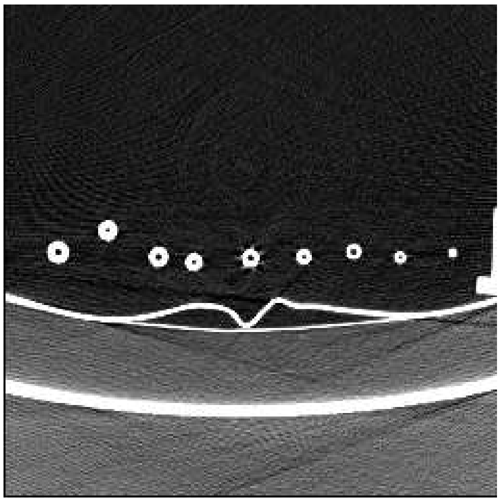
Abbildung 4.2: Obere Reihe: Von links nach rechts wurde dem 128×128 Originalbild (links) stärkeres Rauschen hinzugefügt. Mittlere Reihe: Obere Bildreihe gefaltet mit dem Meanfilter. Untere Reihe: Die obere Reihe gefaltet mit dem Gaußfilter.

einen komplett homogen ausgefüllten Scannbereich vor: Die Varianz des Bildes ist dann zwangsläufig sehr gering und wird außschließlich vom Rauschen und nicht mehr vom Bildinhalt bestimmt.

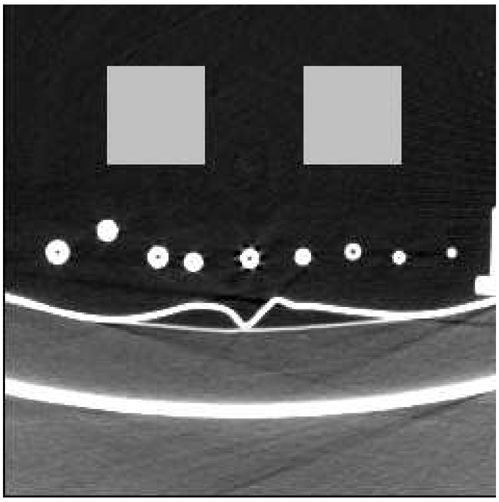
Eine Möglichkeit die Bildinhaltsabhängigkeit der Varianz zu umgehen, bietet das Berechnen der Varianz in homogenen Bildbereichen, dargestellt in Abb. 4.3c+d. Auch hier gilt, dass die Varianz in beiden quadratischen Regionen des linken, mit dem weicheren Kernel rekonstruierten Bildes, geringer ist als in den beiden entsprechenden quadratischen Regionen des rechten Bildes. Kann man in zwei CT Bildern unterschiedlichen Bildinhaltes zwei homogene, gleichartige Bildregionen (z. B. Luftregionen) bestimmen, so kann die Varianz als Rauschmaß weiterhelfen.



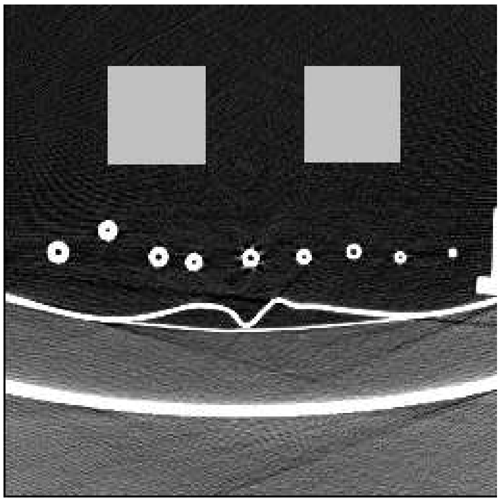
(a) mean= −962 HE var= 22671.1



(b) mean= −962 HE var= 27858.5



(c) Quadrat links: mean= −1008 HE var= 5.03
Quadrat rechts: mean= −1008 HE var= 4.75



(d) Quadrat links: mean= −1008 HE var= 37.43
Quadrat rechts: mean= −1008 HE var= 35.61

Abbildung 4.3: Die Bilder links und rechts sind aus identischen Projektionsdaten berechnet - es wurden lediglich unterschiedliche Rekonstruktionskernels verwendet. Auf den Bildern ist das Silikon-Schlauch-Phantom (siehe 6.4.1) zu sehen. Die Fensterung wurde so gewählt, dass die Rauschartefakte in Luftbereichen betont dargestellt werden. (100 mAs, 120 kV, 0.9 mm, 0.45 mm, 0.195 mm, B bzw. L, [-950/148], Philips Brilliance 64)

4.1.3 Separabele Filter

Der Rechenaufwand von Filtern läßt sich reduzieren, wenn diese separabel sind. Separabele Filter können als Analogon zu separabelen Funktionen im Kontinuierlichen verstanden werden. Im Beispiel 3.3 wird gezeigt, dass für eine 2-dimensionale Gaußsche

PSF gilt: $PSF(x,y) = LSF(x) \cdot LSF(y)$. Für den Gaußfilter $g()$ gilt entsprechend:

$$g(i,j) = g_1(i) * g_2(j) = \tag{4.7}$$

$$\frac{1}{16}\begin{array}{|ccc|}\hline 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ \hline\end{array} = \frac{1}{4}\begin{array}{|ccc|}\hline 1 & 2 & 1 \\ \hline\end{array} * \frac{1}{4}\begin{array}{|c|}\hline 1 \\ 2 \\ 1 \\ \hline\end{array} . \tag{4.8}$$

Der Sternoperator steht hier für das Hintereinanderausführen der Filtermasken. Die Zerlegung für den Rechteckfilter hat die Form:

$$\frac{1}{9}\begin{array}{|ccc|}\hline 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ \hline\end{array} = \frac{1}{3}\begin{array}{|ccc|}\hline 1 & 1 & 1 \\ \hline\end{array} * \frac{1}{3}\begin{array}{|c|}\hline 1 \\ 1 \\ 1 \\ \hline\end{array} . \tag{4.9}$$

Bei einer $N \times N$ Filtermaske hat man bei der Anwendung im Ortsraum $2 * N^2$ Lesezugriffe, N^2 Multiplikationen, sowie $N^2 - 1$ Additionen durchzuführen. Der Rechenaufwand kann für separabele Filter durch Zerlegung und Hintereinanderausführung entscheidend verringert werden. Statt eines quadratischen Aufwandes von $\mathcal{O}(N^2)$ hat man nur noch einen linearen Aufwand von $\mathcal{O}(N)$. Es sind $4N$ Lesezugriffe, $2N$ Multiplikationen und $2(N-1)$ Additionen notwendig. Das Ausnutzen der Separabilität durch Zerlegung der 2-dimensionalen Filtermaske in 1-dimensionale Filtervektoren ist schon für $N = 3$ vorteilhaft. Eine weitere Möglichkeit das Filtern eines Bildes erheblich zu beschleunigen, stellt das Filtern im Frequenzraum dar, siehe A.8.3.

4.2 Bereichswachstumsverfahren

Das Bereichswachstumsverfahren (engl. region-growing, seeding) ist ein mächtiges Verfahren zum Segmentieren von Bilddatensätzen. Zunächst erfolgt die Auswahl von Keimpunkten (engl. seedpoints) oder -regionen, die als Ausgangspunkt(e) für eine Segmentierung dienen. Alle übrigen Bildpunkte werden als nicht-regionenzugehörig markiert. Ausgehend von den Keimpunkten werden alle benachbarten Bildpunkte (für Nachbarschaftsdefinitionen siehe 5.1) geprüft, ob sie den Wachstumsbedingungen (engl. growing conditions) genügen und somit der Region hinzugefügt werden können. Als Wachstumsbedingung kann ein einfacher Schwellenwert (engl. threshold) gewählt werden. Es werden dann alle Bildpunkte oberhalb bzw. unterhalb des Schwellenwertes der Region hinzugefügt. Darüber hinaus lassen sich aber auch beliebig komplexe Wachstumsbedingungen formulieren. Das Finden der "richtigen" Wachstumsbedingungen für die jeweilige Problemstellung ist der wesentliche Punkt in der Entwicklung eines Bereichswachstumsverfahrens. Das Verfahren bricht ab, wenn kein weiterer Bildpunkt der Region mehr hinzugefügt werden kann. Die Implementierung eines Bereichswachstumsverfahrens ist als C++-Quellcodebeispiel in B.1.2 zu finden.

Beispiel. Der Tracheobronchialbaum kann als ein mit Luft gefülltes Röhrensystem angesehen werden (siehe 1.1.2). Es ist daher nahe liegend ein Bereichswachstumsverfahren an einem Punkt innerhalb des Systems zu starten und alle angrenzenden Luftvoxel der Region hinzuzufügen. Als Luft seien alle Voxel im CT-Werte-Bereich $[-1024, -950]$ HE angenommen. Als Keimpunkt dient ein beliebiger Bildpunkt mit CT-Wert ≤ -950 HE innerhalb der Trachea, als Nachbarschaftssystem wird N_{26} gewählt. Abb. 4.4 zeigt das Segmentierungsresultat für diesen schwellenwertbasierten Bereichswachstumsprozess für einen CT-Datensatz. Der Algorithmus ist in das Lungenparenchym ausgelaufen. Dies ist ein bekanntes, häufig vorkommendes Problem [JTS05]. Die Ursache ist die sehr dünne Bronchialwand und die Ähnlichkeit der Textur innerhalb des Lumens und innerhalb des Lungenparenchyms. Dies gilt insbesondere für COPD-Patienten mit ausgeprägter emphysematischer Komponente, da der CT-Wert des Lungenparenchyms für diese im Allgemeinen gemindert ist [UMS+, BWL01]. Wird nun die Darstellung der Wand durch Bildrauschen oder durch Partialvolumeneffekte gestört, so kann das Bereichswachstumsverfahren in das Lungenparenchym überspringen.

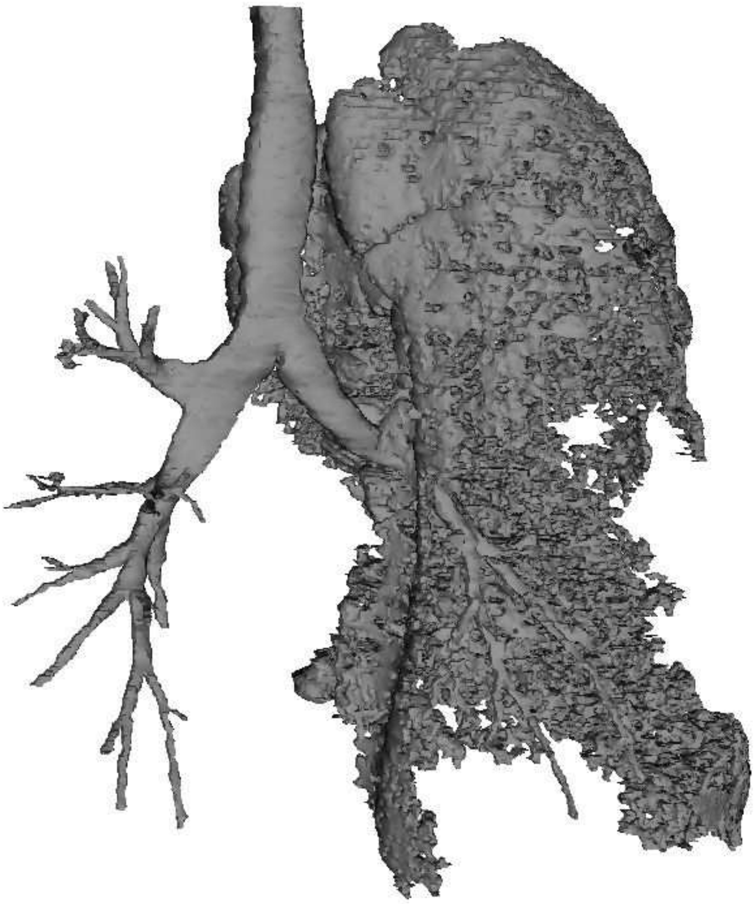
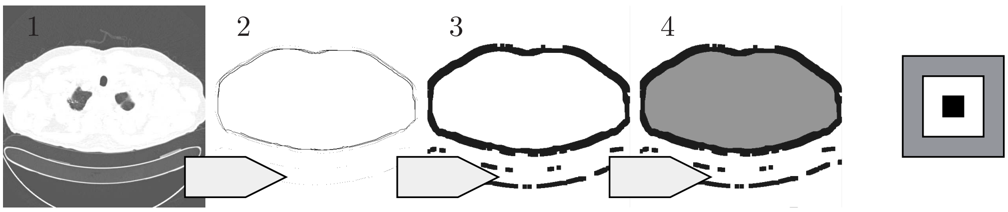


Abbildung 4.4: Resultat eines Bereichswachstumsverfahrens mit Schwellenwert -950 HE. Das Verfahren ist großflächig in das Lungenparenchym ausgelaufen. (100 mAs, 140 kV, 1.25 mm, 1.0 mm, 0.80 mm, B40f, Siemens Volume Zoom)

4.3 Landmarksuche

Möchte man zusammenhängende Strukturen in CT-Datensätzen mit Hilfe eines Bereichswachstumsverfahrens segmentieren, werden zunächst einzelne Keimpunkte (Landmarks) innerhalb der zu segmentierenden Struktur benötigt. Die Landmarksuche wird im Folgenden am Beispiel der Suche eines Voxels innerhalb der Trachea beschrieben. Dieser Landmark wird dann als Startpunkt für die Segmentierung des Tracheobronchialbaums benutzt. Die Suche nach der Trachea wird auf den "oberen" Schichten eines Datensatzes durchgeführt. Die oberen Schichten eines CT Datensatzes können mit Hilfe des DICOM-Tags "Slice Location" im Header der DICOM-Files bestimmt werden[9]. Zunächst wird der Patientenkörper in dem CT-Bild segmentiert. Der Suchraum für die Trachea kann auf die Körperregion limitiert werden. Abb. 4.5 zeigt den Ablauf der Körperdetektion.



(a) (b)

Abbildung 4.5: (a) Die verschiedenen Stufen der Körperdetektion: 1. Ausgangsbild. 2. Markieren der Körperrandvoxel. 3. Dilatation (siehe 5.2.1) der Körperrandvoxel mit einem 5×5 Fenster als Strukturelement. 4. Nach einem Region-Growing innerhalb der Körperrandvoxel. Die Körperregion ist grau markiert. (b) Maske für die Suche der Trachea innerhalb des Körpers. Abbildung aus [WAB+03].

Um die Trachea zu identifizieren wird die in Abb. 4.5b gezeigte Maske verwendet. In einem 5×5-Fenster um ein Voxel wird geprüft, ob der durchschnittliche CT-Wert < 50 HE' ist (schwarzes zentrales Quadrat Abb. 4.5b) - ob das Fenster aus reiner Luft besteht. In einer gelochten Umgebung (grauer Bereich in Abb. 4.5b) wird bestimmt, ob alle Voxel > 750 HE' liegen (Gewebe, definitiv nicht Luft). Falls beide Bedingungen erfüllt sind, wird ein 2-dimensionaler schwellenwertbasierter Bereichswachstumsalgorithmus gestartet (Schwellenwert -800 HE). Resultiert der Wachstumsprozess in eine Fläche zwischen $5^2 \times \pi\,\mathrm{mm}^2$ und $15^2 \times \pi\,\mathrm{mm}^2$ [10], wird das initiale Voxel als Trachealandmark benutzt. Der Algorithmus stoppt, falls ein Punkt innerhalb der Trachea identifiziert werden konnte oder falls kein brauchbarer Bildpunkt auf den ersten "oberen" 25 mm des Datensatzes gefunden wurde. Wurde eine 2-dimensionale Trachearegion segmentiert, wird diese benutzt um das Rauschen im Datensatz zu bestimmen. Man hat eine homogene Luftregion und kann mittels Varianzbestimmung eine Aussage über das im Datensatz vorhandene Rauschen machen. Liegt das Rauschen oberhalb eines Schwellenwertes, wird die Anwendung eines Gaußfilter vorgeschlagen.

Auf ähnliche, wissensbasierte Art und Weise werden weitere Landmarks für die linke und rechte Lunge und im Mediastinum[11] bestimmt - auf eine detaillierte Beschreibung

[9] Mehr zum DICOM-Standard in B.4.

[10] Es wird ein maximaler Radius von 15 mm für die Trachea angenommen. 15 mm ist großzügig gewählt, für die Trachea ist in Tabelle 1.1 ein Durchmesser (Lumen und Wand) von 13-27 mm angegeben.

[11] Das Mediastinum kann grob als Raum zwischen den beiden Lungen (auch als Lungenflügel oder

des Vorgehens sei hier verzichtet.

4.4 Tracheobronchialbaumtracer

In [CHHY01] wird ein 2-dimensionales Vorgehen zum Finden und Vermessen von Bronchien in axialen HRCT-Bildern beschrieben und in [MLB+03] wird ein Verfahren aus 2-dimensionalen und 3-dimensionalen Modulen für die Segmentierung in MSCT-Datensätzen vorgestellt. Im Folgenden wird ein, durch diese beiden Methoden motivierter, reiner 3-dimensionaler Algorithmus zum Segmentieren des Tracheobronchialbaums (Tracheobronchialbaumtracer, TBT) vorgestellt. Grundlage des Tracheobronchialbaumtracers ist ein Bereichswachstumsverfahren. Die automatische Landmarksuche aus 4.3 liefert den notwendigen Keimpunkt innerhalb der Trachea. Dieser kann auch manuell gesetzt werden, falls die Landmarksuche fehlschlägt. Ausgehend von dem Keimpunkt wird dann ein Bereichswachstumsverfahren gestartet. Als Nachbarschaftssystem wird die N_{26} gewählt, da sich damit auch nur in der Diagonalen angrenzende Voxel dem Segmentierungsresultat hinzufügen lassen. Dies ermöglicht die Segmentierung sehr kleiner Bronchien oder das Überbrücken von Stenosen[12]. Ein Voxel wird nur als Lumenvoxel in Betracht gezogen, falls das Voxel einen Wert < -775 HE besitzt. Zunächst werden folgende Wachstumsbedingungen geprüft:

1. Der Durchschnittswert in N^*_{26} oder $N^*_6 < -950$ HE (siehe Abb. 4.6a+b).

2. Kein CT-Wert > -900 HE in N^*_8.

Falls die Bedingungen erfüllt sind, wird ein Voxel als "BronchusL" im Detektionsvolumen (siehe B.1.1) markiert. Die Bedingungen sind restriktiv ausgewählt, dadurch ist ein "Auslaufen" (engl. leaking out) der Segmentierung in das Lungenparenchym (fast) nicht möglich. Mittels dieser Bedingungen werden Voxel innerhalb des Lumens der Trachea oder der Hauptbronchien hinzugefügt. Sind die Bedingungen nicht erfüllt, wird geprüft ob das Voxel in einem kleineren Bronchus liegt. Die Überlegung hinter der zweiten, komplexeren Auswertung ist: ein Bronchus wird entweder in einer axialen, koronalen oder sagittalen Schicht kreisförmig bis elliptisch angeschnitten (siehe Abb. 4.6c+d). Falls ein Voxel innerhalb eines Bronchus liegt, dann ist es in einer der Ebenen in allen Richtungen von Bronchialwand umgeben. Der Algorithmus prüft nicht alle Richtungen, sondern in jeder Ebene werden nur 8 regelmäßig verteilte Strahlen ausgesendet (siehe Abb. 4.6e+f).

Auf jedem Strahl wird der maximale positive Gradient $(grad_i)_{1 \leq i \leq 8}$ und der maximale CT-Wert $(max_i)_{1 \leq i \leq 8}$ bestimmt. Um zu entscheiden, ob ein Voxel zum Bronchialbaum gehört oder nicht, wird ein Vorgehen ähnlich dem der diskreten ERS Transformation, beschrieben in [CHHY01], angewendet. Kurz gesagt wird geprüft, ob ein Voxel im CT-Wertebereich von Luft liegt und in einer Ebene in allen Richtung von Wand umgeben ist. Wiederum sind die Bedingungen so restriktiv ausgewählt, dass ein "Auslaufen" in das Lungenparenchym verhindert wird. Falls ein Voxel als Lumenvoxel in einer Ebene identifiziert wird, wird es bezüglich der Ebene in der es identifiziert wurde im Detektionsvolumen als "BronchusS" (sagittal), "BronchusC" (koronal) oder

Lungenhälften bezeichnet), dem Sternum (Brustbein) und der Wirbelsäule angesehen werden. Im Mediastinum liegen das Herz mit den großen Blutgefäßen (Aorta, Vena Cava), Trachea und Ösophagus.

[12] Hier: Einengung des Luftwegs, im Allgemeinen: Einengung eines Kanals.

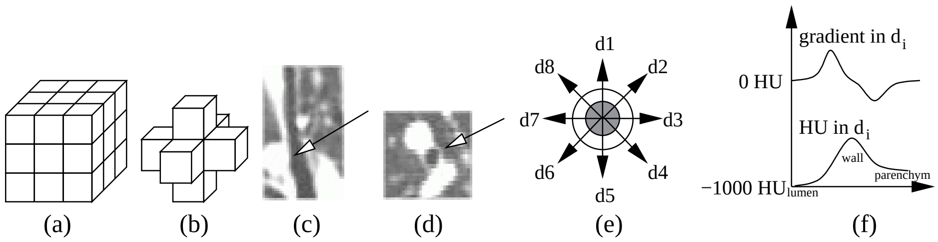


Abbildung 4.6: (a) N_{26}^{*} entspricht einem Würfel mit der Seitenlänge 3. (b) N_6^{*} Nachbarschaft. In diesen beiden Strukturelementen werden die CT-Werte untersucht. (c) Ein Bronchus in der axialen Ansicht. (d) Gleicher Bronchus wie in (c) in der koronalen Ansicht als annähernd runder Anschnitt. (e) Schematische Repräsentation eines Bronchus. Jeder Bronchus wird entweder in der sagittalen, koronalen oder axialen Ebene annähernd kreisförmig oder elliptisch angeschnitten. Es werden 8 Strahlen ausgesandt. Auf den dazugehörigen Profilen werden die CT-Werte untersucht. (f) Darstellung des Gradienten und der CT-Werte in Richtung d_i. Abbildung aus [WAB+03].

"BronchusA" (axial) markiert. Abb. 4.7a zeigt für einen Datensatz die als "BronchusL" markierten Voxel, Abb. 4.7b das gesamte Ergebnis des Tracheobronchialbaumtracers.

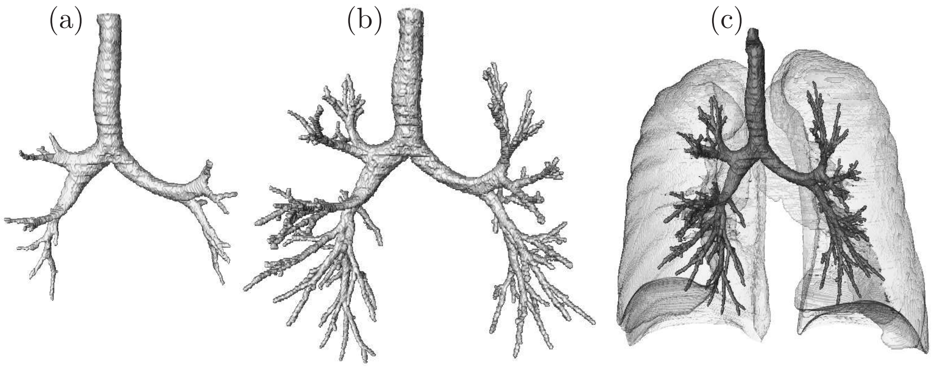


Abbildung 4.7: (a) Visualisierung der als "BronchusL" markierten Voxel. (b) Endresultat der Tracheobronchialbaumsegmentierung. (c) Tracheobronchialbaum mit segmentierten Lungen. Abbildung aus [WAB+03]. (100 mAs, 140 kV, 1.25 mm, 1.0 mm, 0.80 mm, B40f, Siemens Volume Zoom)

Abb. 4.8 zeigt das Segmentierungsresultat für den Datensatz aus Beispiel 4.2, der TBT ist nicht in das Lungenparenchym ausgelaufen.

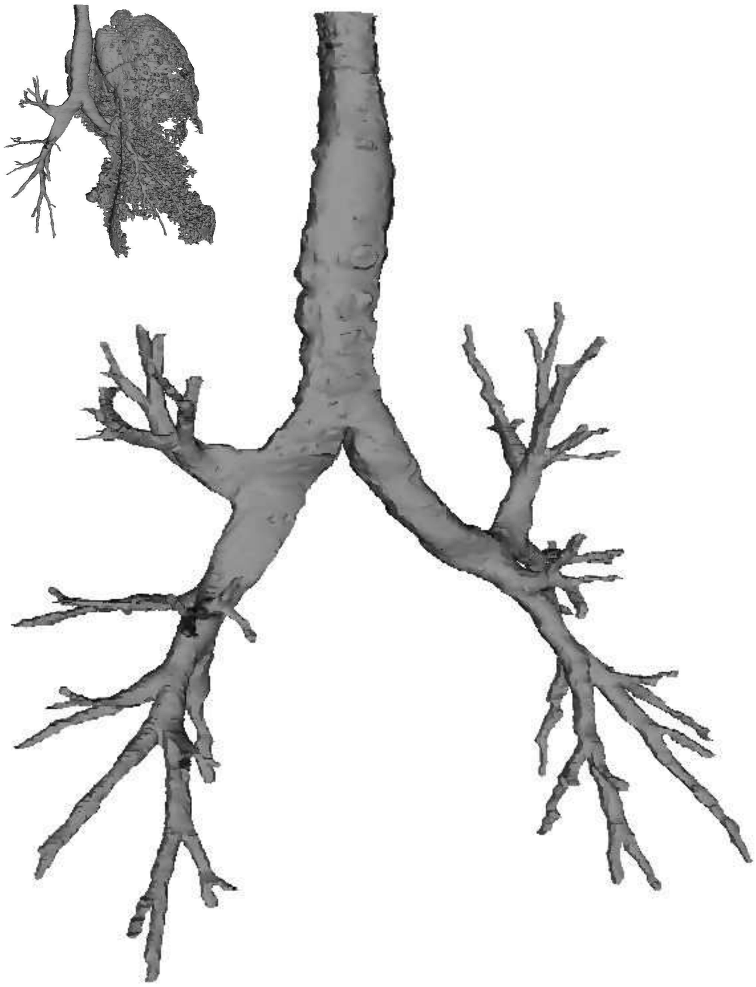


Abbildung 4.8: Resultat des Tracheobronchialbaumtracers für den CT-Datensatz aus Beispiel 4.2. Durch die restriktiv gewählten Wachstumsbedingungen wurde ein Auslaufen in das Lungenparenchym verhindert. Zum Vergleich ist links oben nochmals das Segmentierungsergebnis mit dem einfachen schwellenwertbasierten Bereichswachstumsverfahren abgebildet. (100 mAs, 140 kV, 1.25 mm, 1.0 mm, 0.80 mm, B40f, Siemens Volume Zoom)

Beispiel. Abb. 4.9 zeigt weitere 3 Beispiele für erfolgreich mit der vorgestellten Methodik segmentierter Tracheobronchialbäume. Die 3 CT-Scans wurden mit einer sehr geringen Dosis von 40 mAs erstellt (low-dose CT, siehe 2.5.1). Bei Emphysem-Patienten ist die Lungendichte teilweise oder großflächig verringert [UMS$^+$, HAB$^+$06, AWH$^+$04, Bus06] - emphysematöse Bereiche (dunkle Bereiche erniedrigter Dichte) sind auf den koronalen Ansichten von CT2 und CT3 zu erkennen.

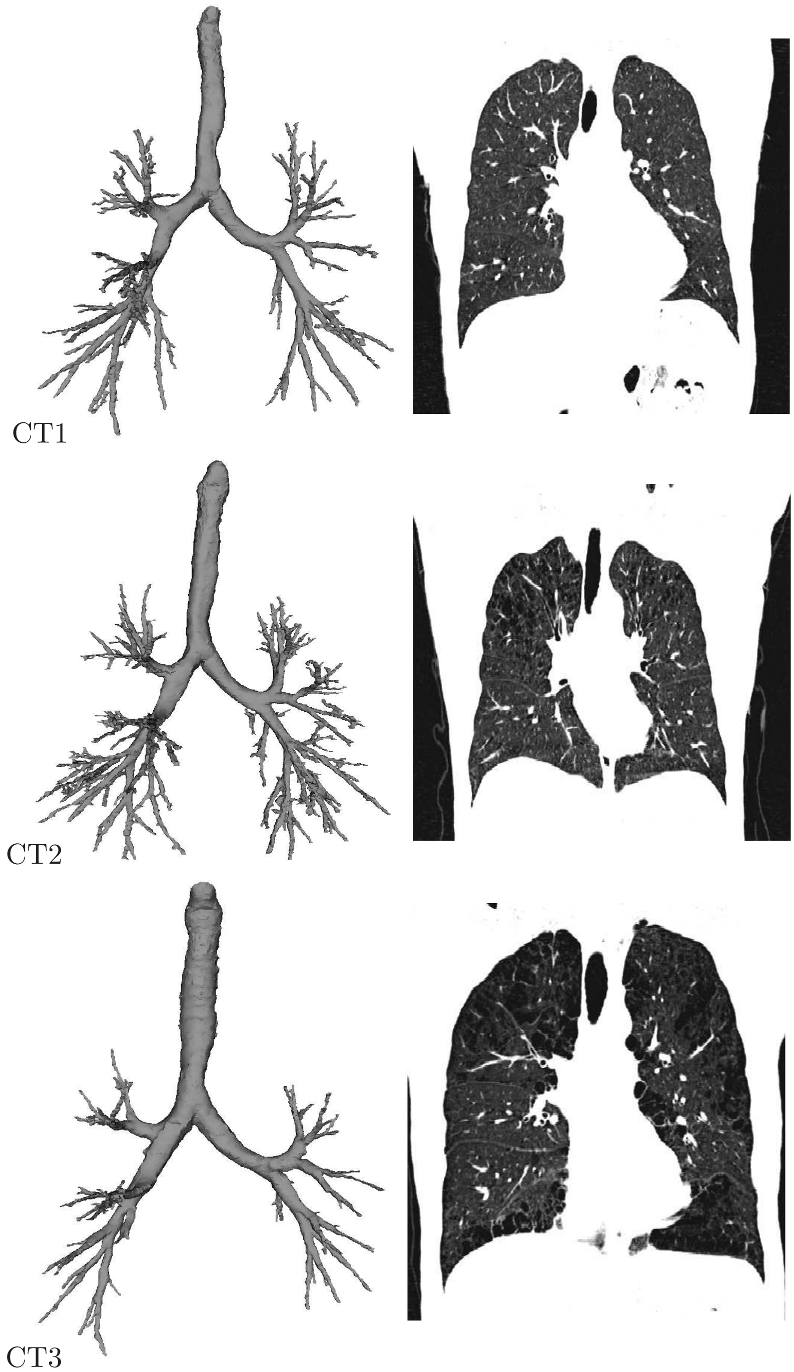


Abbildung 4.9: 3 Beispiele für mit dem TBT segmentierte Tracheobronchialbäume. In den 3 Datensätze wurde der Tracheobronchialbaum automatisch segmentiert. (a) In der koronalen Reformation sind keine pathologischen Veränderungen zu erkennen. (b) In der koronalen Reformation sind größere, dunkle Bereiche (Emphysem) zu erkennen. (c) In der koronalen Reformation sind großflächige, dunkle Bereiche (Emphysem) zu erkennen. (40 mAs, 140 kV, 1.25 mm, 1.0 mm, 0.78 mm, D, [-600/850], Philips Mx8000 IDT 16)

4.5 Segmentieren und Separieren der Lungen

In Thorax-CT-Bildern kann der natürlich vorhandene Kontrast zwischen den Lungen, die über eine niedrige physikalische Dichte und somit niedrige Hounsfieldwerte verfügen, und den umliegenden Gewebearten mit weitaus höheren Dichtewerten, zur Segmentierung der Lungen genutzt werden. Es wurden schon von verschiedenen Gruppen Algorithmen zur computerunterstützten Segmentierung von Thorax-CT-Bildern entwickelt. In [HHR01] wird ein schwellenwertbasierter Algorithmus zur Lungensegmentierung mit anschließender Trennung der beiden Lungen präsentiert. [SAB05] beschreibt eine Methodik basierend auf einer Wasserscheidentransformation (engl. watershed transformation, siehe [LOPR97, S. 373 ff.]), ein nachträgliches Separieren der Lungen ist hier nicht mehr notwendig. Der im Folgenden vorgestellte Algorithmus benötigt nur in seltenen Fällen Benutzerinteraktion und basiert auf einem Bereichswachstumsverfahren. Zur anschließenden Lungentrennung wird ein *snakebasierter* Algorithmus angewendet.

4.5.1 Segmentierung der Lungen

Auf der Basis von zuvor gefundenen Keimpunkten in beiden Lungen[13], wird das Lungenparenchym mit zwei schwellenwertbasierten Bereichswachstumsverfahren (Schwellenwert: -500 HE[14]) segmentiert. Dann werden morphologische Operatoren auf die als Lunge markierten Bildbereiche angewendet. Wir betrachten die Segmentierung der Lungen als binäres Volumen (siehe 5.1). Ziel ist es nun, Regionen die innerhalb der Lunge liegen, aber nicht als Lunge durch das Bereichswachstumsverfahren markiert wurden (z. B. Blutgefäße), der Segmentierung "Lunge" hinzuzufügen. Dies wird durch zwei morphologische Methoden erreicht:

1. Dilatation (siehe 5.2.1) der Segmentierung "Lunge" mit einem 3×3-Fenster als strukturierendes Element.

2. Füllen von Löchern (siehe 5.2.2), ein Loch ist definiert als Menge von Bildpunkten, die nicht als Lunge markiert wurden und die nicht mit dem Bildrand direkt verbunden sind.

Abb. 4.7c zeigt das Resultat der Lungensegmentierung für einen CT-Datensatz.

4.5.2 Separation der Lungen

Die Segmentierung der Lungen mit dem in 4.5.1 beschriebenen schwellenwertbasierten Bereichswachstumsverfahren resultiert oftmals nicht in zwei getrennt segmentierte Lungen, sondern in eine Lungenregion. Die Ursache ist ein Überspringen des Bereichswachstumsverfahrens von einer Lunge auf die andere. Hierfür gibt es zwei Ursachen: Zum einen kann das Bereichswachstumsverfahren über den Tracheobronchialbaum von einer Lunge in die andere gelangen. Um dies zu verhindern, segmentiert man zuerst den Tracheobronchialbaum und vergrößert die Segmentierung mit einer Dilatation etwas - somit dient er als "Trennschicht" zwischen der linken und rechten Lunge. Zum anderen kann es zu Berührpunkten zwischen der linken und der rechten Lunge kommen.

[13] Für eine beispielhafte für Landmarksuche siehe 4.3 .

[14] Für die Segmentierung von Lungenparenchym werden in der Literatur oftmals Werte zwischen -200 und -500 HE vorgeschlagen (siehe z. B. [BWL01]).

Abb. 4.10 zeigt einen solchen Fall. Resultieren die beiden Bereichswachstumsverfahren nicht in zwei Lungenregionen, wird der Algorithmus zum nachträglichen Separieren der Lungen angewendet.

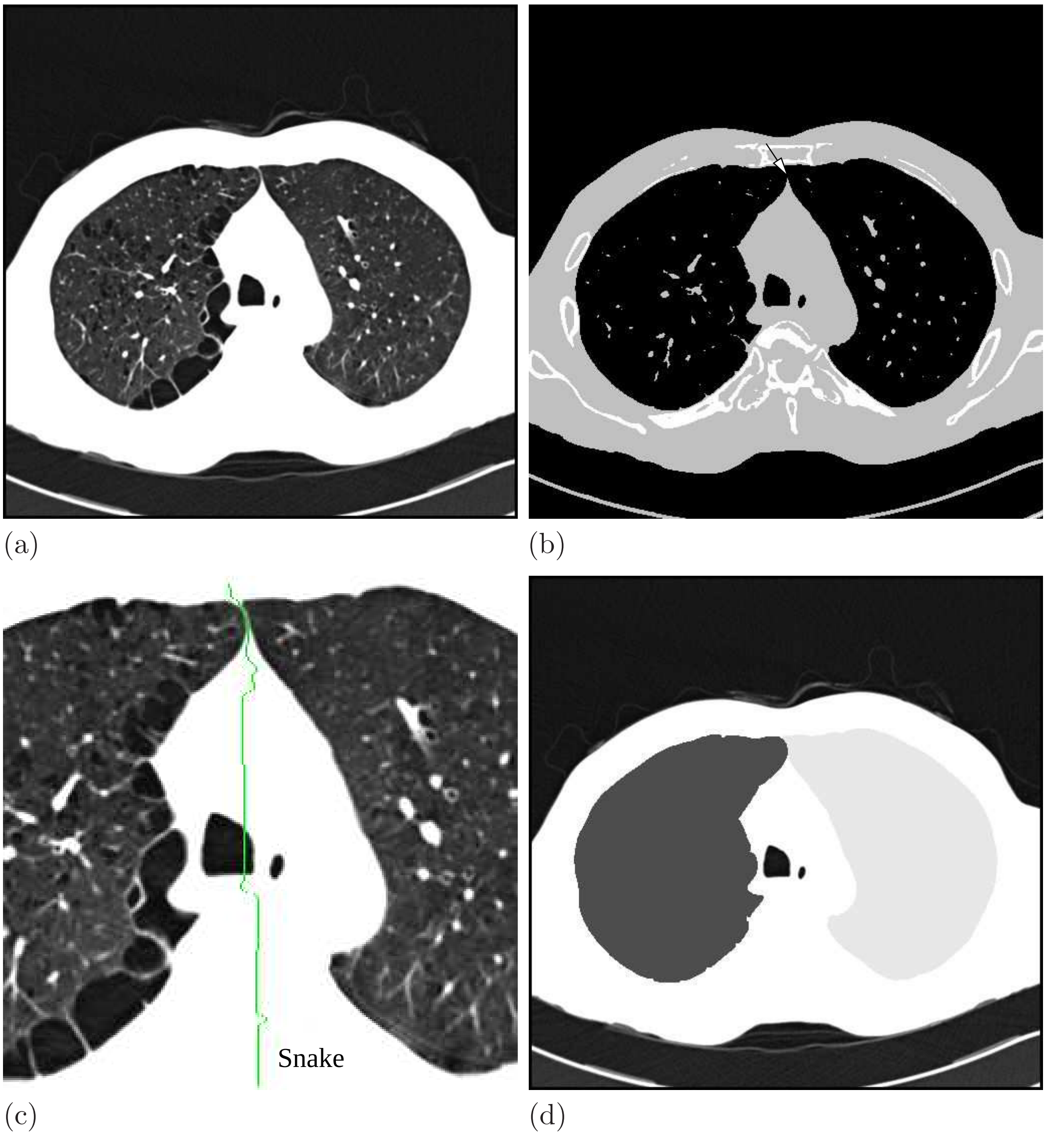


Abbildung 4.10: (a) Original CT-Bild. (b) Alle Bildpunkte ≤ -500 HE sind schwarz dargestellt. Der Pfeil deutet auf die Stelle, an der sich die beiden Lungen berühren. Über diese "Brücke" läuft ein Bereichswachstumsverfahren mit Schwellenwert -500 HE von der einen Lunge in die andere. (c) Die Snake hat sich zwischen die beiden Lungen gelegt. (d) Mit Hilfe der Snake lassen sich die beiden Lungen wieder in rechts und links trennen. (100 mAs, 140 kV, 1.25 mm, 1.0 mm, 0.80 mm, B40f, [-650/850], Siemens Volume Zoom)

Deformierbare Modelle

Dieser Abschnitt gibt eine kurze Einführung in deformierbare Modelle. Das bekannteste deformierbare Modell ist das unter dem Namen "*Snakes*" eingeführte Modell von Kass et al. [KWT88]. Eine diskrete Snake S der Länge n repräsentiert ein Bildobjekt mittels seiner Konturen[15], S ist eine parametrisierte Konturfunktion im $\mathbf{R}^2$. Die Konturpunkte oder *Snakepunkte* seien bezeichnet als:

$$v_i = (x_i, y_i)\,,\; i \in [0, n-1]\,. \tag{4.10}$$

Wie sich die Form der Snake in einem Bild verändert wird von einer Energiefunktion $\mathcal{E}_{snake}$ bestimmt:

$$\mathcal{E}_{snake} = \sum_{i=0}^{n-1} \mathcal{E}(v_i)\,. \tag{4.11}$$

Die Gesamtenergie der Snake setzt sich aus der Summe der Energien der einzelnen Snakepunkte $\mathcal{E}(v_i)$ zusammen. Die Energie eines Snakepunktes $\mathcal{E}(v_i)$ wird aus der internen Verformungsenergie (engl. internal deformation energy) $\mathcal{E}_{int}(v_i)$ und der externen Bildenergie (engl. external image energy) $\mathcal{E}_{ext}(v_i)$ zusammengesetzt:

$$\mathcal{E}(v_i) = \mathcal{E}_{int}(v_i) + \mathcal{E}_{ext}(v_i)\,. \tag{4.12}$$

Um Snakes auf spezielle Bilder anzuwenden, müssen die internen und externen Energietherme auf die jeweilige Problemstellung angepasst werden. Die interne Energie wird im Normalfall so gewählt, dass sie für glatte Konturverläufe minimal wird:

$$\mathcal{E}_{int}(v_i) = \alpha \left\|v_i'\right\|^2 + \beta \left\|v_i''\right\|^2\,. \tag{4.13}$$

α und β sind frei wählbare Gewichtungsfaktoren. v_i' und v_i'' stehen für die diskrete Approximationen der 1. bzw. 2. Ableitung der Snakekurve in v_i:

$$\left\|v_i'\right\|^2 \approx \left\|v_i - v_{i-1}\right\|^2\,, \tag{4.14}$$

$$\left\|v_i''\right\|^2 \approx \left\|v_{i-1} - 2v_i - v_{i+1}\right\|^2\,. \tag{4.15}$$

Die externe Energie hängt stark von der Problemstellung ab und kann so designed werden, dass die Energie minimal wird, wenn sich die Snake in Intensitätsextrema, Kanten oder anderen Bildmerkmale von Interesse legt.

Snakebasierte Separation der Lungen

Zunächst wird eine *Bounding Box*[16] um die schwellenwertbasierte Segmentierung der Lungen berechnet. Dann wird die Snake auf einem CT-Bild (innerhalb der Bounding Box) initialisiert. Dies geschieht auf der Basis eines zuvor gefundenen Landmarks im Mediastinum zwischen den beiden Lungen[17]. Ausgehend von diesem Landmark wird

[15] Auch hier gilt, dass die theoretische Herleitungen bzgl. der Snake-Technik meist im Kontinuierlichen durchgeführt werden und dann später eine Überführung ins Diskrete erfolgt.

[16] Unter einer "Boundig Box" versteht man einen Quader, der ein zu bearbeitendes Objekt umschreibt. Verschiedene, das Objekt betreffende, Berechnungen müssen dann nicht mehr im ganzen CT-Volumen durchgeführt werden, sondern können auf die Bounding Box beschränkt werden.

[17] Für eine beispielhafte für Landmarksuche siehe 4.3 .

eine Linie zwischen den beiden Lungen aufgebaut. In jeder Zeile des Bildes wird ein Snakepunkt erzeugt. Beim Initialisieren der Snakepunkte wird darauf geachtet, dass der Abstand zu den beiden Lungen gleich ist. Ist kein Abstand zwischen beiden Lungen vorhanden, wie beispielsweise in der durch den Pfeil in Abb. 4.10b dargestellten Situation, wird der Snakepunkt in dieser Zeile auf das Pixel mit dem höchsten CT-Wert gesetzt[18]. Dann wird die Energie der Snake auf diesem CT-Bild minimiert. Wurde das Energieminimum gefunden, werden die Snakepunkte in das angrenzende CT-Bild durch dekrementieren bzw. inkrementieren des z-Koordinatenwertes der Snakepunkte, verschoben. Als interner Energieterm wird (4.13) benutzt. Im Gegensatz zum klassischen Snake-Modell ist die hier beschriebene Snake nicht geschlossen, d. h. es gilt:

$$v_0 \neq v_{n-1}\,. \tag{4.16}$$

Die Bewegung der Snakepunkte ist auf die Bewegung entlang der x-Achse (innerhalb einer Bildzeile) eingeschränkt. Dies verhindert das typische Zusammenschrumpfen einer Snake, das durch Gleichung (4.14) und dem Bestreben nach Energieminimierung bewirkt wird. Als externe Bildenergie $\mathcal{E}_{ext}$ definieren wir:

$$\mathcal{E}_{ext}(v_i) = \gamma \frac{1}{\Delta_{Lung}(v_i)} + \delta I(v_i)\,, \tag{4.17}$$

wobei $\Delta_{Lung}()$ ein Abstandsmaß bzgl. der Segmentierung "Lunge" bezeichnet und $I()$ den CT-Wert des Punktes v_i berücksichtigt. Die externe Energie ist so gewählt, dass sie umso kleiner wird, je größer der Wert für das Abstandsmaß und je höher der CT-Wert ist. Die Gewichtung der beiden Einflussgrößen kann über die Faktoren γ und δ beeinflußt werden. Zum Minimieren der Gleichung (4.12) wird ein sogenannter *Greedy Algorithmus* eingesetzt. Iterativ wird jeweils die Energie der Punkte v_i minimiert: In einem Iterationsschritt wird zunächst v_0 auf die Position mit der niedrigsten Energie $\mathcal{E}(v_0)$ gesetzt, danach wird dies für alle folgenden Snakepunkte gemacht. Die iterative Minimierung wird abgebrochen, wenn ein Energieminimum (Energieänderung kleiner einem gewählten ϵ) oder eine maximale Iterationenanzahl erreicht wird. Der Greedy-Algorithmus führt relativ schnell zu einer Lösung, kann aber in lokalen Minima hängenbleiben.

Beispiel. Betrachten wir wieder die 3 CT-Scans aus Beispiel 4.4. Die gerenderte Darstellung der Lungen- und Tracheobronchialbaumsegmentierungen ist in Abb. 4.11 abgebildet. Für CT2 und CT3 lieferten die beiden Bereichswachstumsverfahren auf der Basis von Keimpunkten in den beiden Lungen zwei getrennte Lungen. In CT1 wurde die Lungentrennung durch den snakebasierten Ansatz vollzogen. Übereinstimmend mit dem rein optischen Eindruck, den man schon aus den koronalen Ansichten in 4.4 gewinnen konnte, ist die mittlere Lungendichte (MLD) für CT1 mit -797 HE am höchsten (links: -793 HE, rechts: -799 HE), für CT2 erhält man für die MLD -816 HE (links: -813 HE, rechts: -818 HE) und für CT3 -856 HE (links: -855 HE, rechts: -857 HE).

4.6 Anmerkung zur Literatur

Die Informationen in diesem Kapitel wurden im wesentlichen, insofern nicht auf andere Literaturquellen verwiesen wurde, aus [Jai89], [LOPR97] und [Jäh97] entnommen.

[18] Das Pixel in dieser Zeile darf zusätzlich einen festgelegten Abstand ($\approx 8mm$) zum Vorgängerpixel nicht überschreiten.

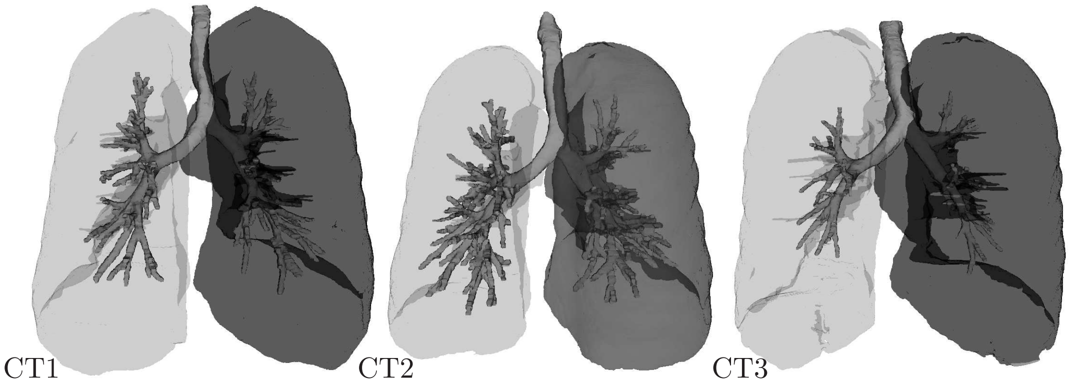


Abbildung 4.11: In CT1 war die MLD -797 HE, in CT2 -816 HE und in CT3 -856 HE. (40 mAs, 140 kV, 1.25 mm, 1.0 mm, 0.78 mm, D, Philips Mx8000 IDT 16)

Weiterführende Literatur zum Thema Snakes: [KWT88], [Hor99], [Ste04].

Teile dieses Kapitels wurden schon in [WAB+03] veröffentlicht. Gut dokumentierte Ergebnisse mit den hier vorgestellten Segmentierungsalgorithmen sind u. a. in folgenden medizinischen Publikationen zu finden: [LZLW+07], [LLZU+06], [ZLW+06], [HAB+06], [Bus06], [ZLE+05], [AWH+04]. Auf der Grundlage der Segmentierungen von Tracheaobronchialbaum und der Lungen erfolgt in diesen Publikationen im Schwerpunkt eine Quantifizierung emphysematöser Bereiche in den Lungen. Das hierfür entwickelte Modul ist Teil der Software yacta (siehe B.1.3).

Kapitel 5

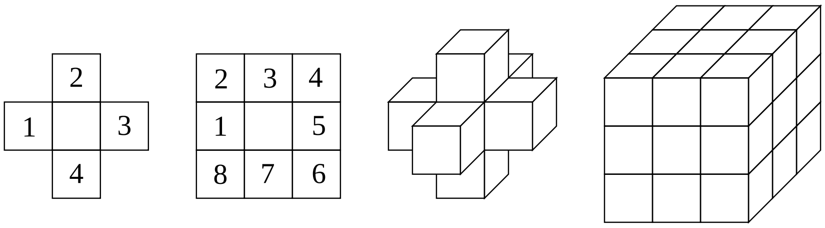
Morphologische Bildverarbeitung

Unter mathematischer Morphologie (MM) kann die Theorie zur Analyse räumlicher Strukturen verstanden werden. Man spricht von Morphologie, da das Ziel die Analyse der Form von Objekten ist. In diesem Kapitel werden morphologische Operationen vorgestellt, die es erlauben das voxelbasierte Segmentierungsergebnis des vorangegangenen Kapitels zunächst in eine Skelettdarstellung und dann in einen mathematischen Graphen zu überführen. Dies ist notwendig, da die voxelbasierte Darstellung des Tracheobronchialbaums nicht ausreicht, um die nachfolgende Analyse des Baumes durchführen zu können. Im ersten Abschnitt werden einige grundlegende morphologische Begriffe eingeführt. Es folgt die Darstellung zentraler Operationen wie Erosion, Dilatation, Opening und Closing. Im anschließenden Abschnitt wird ein Skelettierungsverfahren zur Findung der Mittelachse eines 3-dimensionalen Objektes vorgestellt. Abschließend wird die Übertragung des Skelettierungsresultates in einen mathematischen Graphen behandelt.

5.1 Grundlagen

Möchte man komplexe Bildanalyseprobleme lösen, so ist es oft nötig das Gesamtproblem zunächst in kleinere Teilprobleme zu zerlegen. Diese Teilprobleme lassen sich dann möglicherweise mit schon bekannten Algorithmen bearbeiten - und somit wäre das Gesamtproblem durch eine Kombination bekannter Algorithmen lösbar. Im vorangegangenen Kapitel wurde ein Algorithmus zum Segmentieren des Tracheobronchialbaums in MSCT-Daten vorgestellt. Ein weiteres großes Feld von mächtigen Bildverarbeitungsalgorithmen stellt die morphologische Bildverarbeitung dar. Ein wichtiger Anwendungsbereich für morphologische Methoden ist die Anwendung auf schon vorhandene Segmentierungsergebnisse - mit diesem Anwendungsbereich werden wir uns im Folgenden beschäftigen. Zunächst werfen wir einen Blick auf die diskrete Geometrie, die meisten Begriffe werden im 2-Dimensionalen eingeführt, ein Überführen in eine andere Dimensionalität ist meist problemlos möglich.

Nachbarschaften. Sei $p = (x_1, ..., x_n) \in \mathbf{Z}^n$. Wichtige und häufig benutzte Nachbar-



(a) (b) (c) (d)

Abbildung 5.1: (a) Direkte Nachbarn in der 2-dimensionalen diskreten Topologie. (b) Direkte und indirekte Nachbarn in der 2-dimensionalen diskreten Topologie. (c) Direkte Nachbarn in der 3-dimensionalen diskreten Topologie. (b) Direkte und indirekte Nachbarn in der 3-dimensionalen diskreten Topologie.

schaften in der 2-dimensionalen ($n = 2$) diskreten Topologie sind:

$$N_4(p) = \left\{ p' \in \mathbf{Z}^2 \mid \sum_{i=1..2} |x_i - x'_i| = 1 \right\} \text{ und } N_4^*(p) = N_4(p) \cup \{p\} \;, \quad (5.1)$$

$$N_8(p) = \left\{ p' \in \mathbf{Z}^2 \mid \max_{i=1..2} |x_i - x'_i| = 1 \right\} \text{ und } N_8^*(p) = N_8(p) \cup \{p\} \;. \quad (5.2)$$

Wichtige und häufig benutzte Nachbarschaften in der 3-dimensionalen ($n = 3$) diskreten Topologie sind:

$$N_6(p) = \left\{ p' \in \mathbf{Z}^3 \mid \sum_{i=1..3} |x_i - x'_i| = 1 \right\} \text{ und } N_6^*(p) = N_6(p) \cup \{p\} \;, \quad (5.3)$$

$$N_{26}(p) = \left\{ x' \in \mathbf{Z}^3 \mid \max_{i=1..3} |x_i - x'_i| = 1 \right\} \text{ und } N_{26}^*(p) = N_{26}(p) \cup \{p\} \;. \quad (5.4)$$

Abb. 5.1 zeigt die wichtigsten 4 Nachbarschaftssysteme für $n = 2, 3$. Die durch $N_4(p)$ und $N_6(p)$ definierten Punkte werden als *direkte* Nachbarn von p bezeichnet, die übrigen als *indirekte* Nachbarn. In dieser Arbeit kommen lediglich die Fälle $n \in \{2, 3\}$ vor[1]. Liegt ein Punkt q in der Nachbarschaft $N_m(p)$ des Punktes p, so bezeichnet man die Punkte p und q als *m-benachbart*.

Binärbilder. In einem (diskreten) binären Bild f hat jeder Bildpunkt den Wert 0 (weißer Punkt) oder 1 (schwarzer/grauer Punkt), je nachdem ob er zum Bildhintergrund oder zum Objekt gehört. Formal läßt sich dies wie folgt beschreiben:

$$f : D_f \subset \mathbf{Z}^n \rightarrow \{0, 1\} \;. \quad (5.5)$$

Ein binäres *Bildobjekt* B (*Vordergrundobjekt*) läßt sich dann notieren als:

$$B = \{p \in D_f \mid f(p) = 1\} \;. \quad (5.6)$$

$\mathbf{Z}^n \setminus B = \overline{B}$ wird als *Bildhintergrund* (*Hintergrundobjekt*) bezeichnet.

m-Pfad. Ein m-Pfad der Länge n ist eine Folge von Punkten $(p_i \in B \mid 0 \leq i \leq n)$, wobei jeder Punkt p_i des Pfades zu seinem Vorgänger p_{i-1} m-benachbart ist[2].

[1] Statt $p = (x_1, ..., x_n)$ könnten wir deshalb auch, im Einklang mit den vorangegangenen Kapiteln, $p = (i, j)$ oder $p = (i, j, k)$ schreiben. Die Nachbarschaftsdefinitionen lassen sich jedoch mit der Indexschreibweise schöner schreiben.

[2] Die Pfadlänge ist um 1 geringer als die Anzahl der Punkte, die den Pfad bilden.

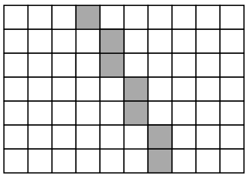


Abbildung 5.2: Die grauen Pixel stellen das Bildobjekt, eine 8-zusammenhängende diskrete Linie, dar. Die weißen Hintergrundpixel werden durch die graue Linie in zwei 4-zusammenhängende Hintergrundobjekte geteilt.

Grauwertbilder. Ein (diskretes) Grauwertbild f ist eine Abbildung einer Untermenge von $\mathbf{Z}^n$ auf eine begrenzte Menge oder eine endliche Folge von natürlichen Zahlen die als Grauwerte kodiert dargestellt werden. Formal läßt sich dies wie folgt beschreiben:

$$f : D_f \subset \mathbf{Z}^n \to W_f \subset \mathbf{N}_0. \tag{5.7}$$

Offensichtlich ist ein Binärbild ein Spezialfall eines Grauwertbildes, ebenso ein CT-Bild.

Graph eines Bildes. Sei f ein diskretes Grauwertbild und sei $p \in D_f$. Der Graph $\mathcal{G}$ eines Bildes f ist die Menge der Punkte $q = (p, f(p)) \in D_f \times W_f \subset \mathbf{Z}^n \times \mathbf{N}_0$:

$$\mathcal{G}(f) = \{q = (p, f(p)) \,|\, p \in D_f\} \;. \tag{5.8}$$

Der Graph eines Bildes wird oft auch als *Intensitätsoberfläche*, *Höhenprofildarstellung* oder *topologisches Relief* bezeichnet. Ein Beispiel für ein topologisches Relief ist die Darstellung des gescannten Röhrchens auf der Titelseite dieser Arbeit.

m-Zusammenhang eines Bildobjektes. Zwei Punkte p und q eines Bildobjektes B heißen m-zusammenhängend, falls es einen m-Pfad in B gibt, der die beiden Punkte p und q verbindet. Eine m-zusammenhängende Menge von Objektpunkten wird als *Zusammenhangskomponente* bezeichnet. Ein Bildobjekt kann aus mehreren Zusammenhangskomponenten bestehen. Der Begriff der Zusammenhangskomponente ist ein wesentlicher Begriff zum Beschreiben der topologischen Struktur eines Objekts. Ein wichtiges Konzept innerhalb der diskreten Geometrie ist die Verwendung unterschiedlicher Zusammenhangsrelationen für Objekt- und Hintergrundpunkte. Abb. 5.2 zeigt eine graue Punktmenge, die man intuitiv als (diskrete) Linie auffaßt. Betrachte man die grauen Pixel als 8-zusammenhängendes Bildobjekt, so wird der weiße Bildhintergrund in zwei 4-zusammenhängende Zusammenhangskomponenten getrennt - die intuitiv gewünschte und sinnvolle Interpretation der Pixel wird so erreicht. Betrachtet man die grauen Pixel als 4-zusammenhängendes Bildobjekt, so zerfällt es in 4 Zusammenhangskomponenten. Der weiße Hintergrund als 8-zusammenhängenden aufgefasst, bleibt durch die grauen Pixel ungetrennt. Die einzig konsistente Regel für das Arbeiten im diskreten Pixelgitter ist, die Bildobjekte als 8-zusammenhängend, und den Hintergrund als 4-zusammenhängend zu betrachten [Soi98, S. 31]. Im 3-Dimensionalen werden Vordergrundobjekte entsprechend als 26-zusammenhängend und Hintergrundobjekte als 6-zusammenhängend aufgefaßt. Allgemein fassen wir Vordergrundobjekte als m-zusammenhängend und Hintergrundobjekte als n-zusammenhängend auf.

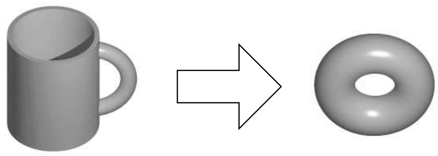


Abbildung 5.3: Klassisches Beispiel für einen Homöomorphismus: Ein Donat ist homöomorph zu einer einhenkeligen Kaffeetasse.

Randpunkt. Ein Objektpunkt eines Bildobjektes B heißt *Randpunkt* falls in $N_n(p)$ mindestens ein Hintergrundpunkt liegt, d. h. wenn $\left|N_n(p) \cap \overline{B}\right| \geq 1$.

Endpunkt. Ein Objektpunkt eines Bildobjektes B heißt *Endpunkt* falls in $N_m(p)$ genau ein weiterer Objektpunkt liegt, d. h. wenn $|N_m(p) \cap B| = 1$.

Isolierte Punkte. Ein Punkt p eines Bildobjektes B wird als *isolierter* Punkt bezeichnet, wenn in $N_m(p)$ kein weiterer Punkt des Bildobjektes liegt, d. h. wenn $|N_m(p) \cap B| = 0$.

Topologie. Die Topologie untersucht die Eigenschaften geometrischer Körper (d. h. topologischer Räume), die durch Verformungen mit Homöomorphismen[3] nicht verändert werden. Das klassische Beispiel für einen Homöomorphismus ist die Abbildung eines Donuts (entspricht einem Torus) auf eine einhenkelige Kaffeetasse (siehe Abb. 5.3) - die topologische Struktur bleibt unverändert [Wik07e]. Neben dem Begriff der Zusammenhangskomponente sind *Hohlräume* und *Henkel* wichtige Eigenschaften eines Objekts, die seine Topologie beschreiben. Hohlräume sind Hintergrundkomponenten, die komplett von dem Vordergrundobjekt umschlossen sind, d. h. es gibt keinen n-zusammenhängenden Pfad zum Bildrand (bzw. Volumenrand). Ein Henkel ist ein Tunnel durch ein Objekt, wie der Henkel einer Kaffeetasse oder das Loch im Donut.

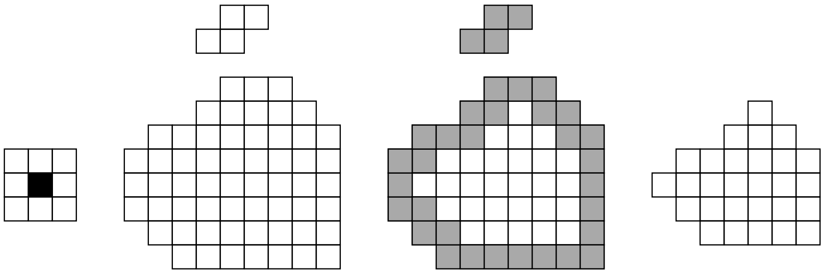
5.2 Zentrale morphologische Operatoren

Mittels morphologischer Operatoren sollen relevante Bildstrukturen extrahiert werden. Dies kann durch das sogenannte *Proben* des binären Bildes mit einer bekannten Menge (Maske, Template), die struktierendes Element (SE) genannt wird, erreicht werden. Hat man beispielsweise eine Segmentierung eines Objektes die durch Bildrauschen fehlerhaft ist, kann diese Segmentierung nachträglich durch geeignete morphologische Operatoren verbessert werden. Die Erosion und die Dilatation stellen die Grundlage vieler morphologischer Operatoren dar. Die Definitionen der morphologischen Operatoren lassen sich so erweitern, dass diese direkt auf Grauwertbilder anwendbar sind. In dieser Arbeit begnügen wir uns mit der Anwendung auf binäre Bilder.

5.2.1 Erosion und Dilatation

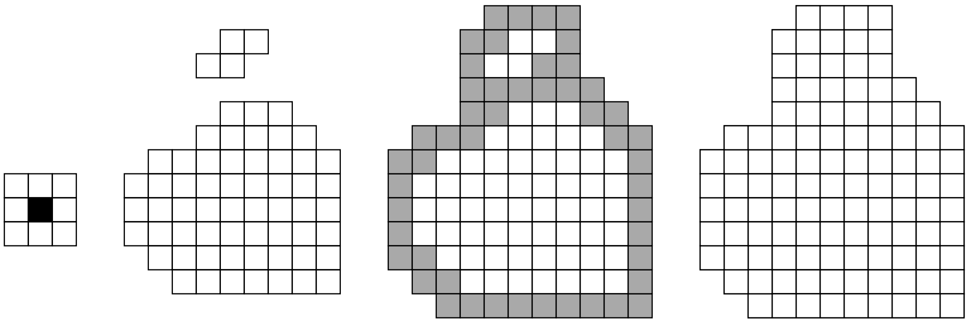
Erosion. Bei der Erosion wird geprüft ob ein strukturierendes Element vollständig in eine zu strukturierende Ausgangsmenge passt. Ist dies der Fall, so wird der *Bezugs-*

[3]Ein Homöomorphismus ist eine bijektive, stetige Abbildung zwischen zwei Objekten, deren Umkehrabbildung ebenfalls stetig ist.



(a) (b) (c) (d)

Abbildung 5.4: (a) Ein Quadrat als strukturiendes Element. Der Bezugspunkt ist schwarz hinterlegt. (b) Die zu strukturierende Menge. (c) Ergebnis der Erosion. Die aus der Menge gelöschten Punkte sind grau hinterlegt. Die kleine Teilkomponente der Menge ist komplett verschwunden, da das SE nicht vollständig hineingepasst hat. (d) Einfarbiges Endergebnis.



(a) (b) (c) (d)

Abbildung 5.5: (a) Ein Quadrat als SE. Der Bezugspunkt ist schwarz hinterlegt. (b) Die zu strukturierende Menge. (c) Ergebnis der Dilatation. Die der Menge hinzugefügten Punkte sind grau hinterlegt. Die kleine Teilkomponente ist mit der größeren Menge verschmolzen. (d) Einfarbiges Endergebnis der Dilatation.

punkt des SE der Ergebnismenge hinzugefügt. Abb. 5.4 veranschaulicht das Vorgehen im 2-Dimensionalen[4]. Kleine Teilkomponenten der Ausgangsmenge können komplett verschwinden. Die erodierte Menge ist eine Untermenge der Ausgangsmenge.

Dilatation. Das Gegenstück zur Erosion bildet die Dilatation. Es wird geprüft ob ein SE beim Verschieben über das gesamte Bild die zu erweiternde Ausgangsmenge berührt. Ist dies der Fall, wird der Bezugspunkt des SE der Menge hinzugefügt. Abb. 5.5 veranschaulicht die Auswirkungen einer Dilatation im 2-Dimensionalen auf die schon aus Abb. 5.4 bekannte Ausgangsmenge. Kleinere Löcher können geschlossen werden, Teilkomponenten der Ausgangsmenge können verschmelzen. Die dilatierte Menge ist eine Obermenge der Ausgangsmenge.

[4]Bemerke: Die in diesem Beispiel als “Rand” markierten Bildpunkte entsprechen nicht der zuvor gemachten Randdefinition aus 5.1. Dies liegt an der Wahl des SE, um der Randdefinition zu genügen müsste das SE einem Kreuz ($N_4^*()$) entsprechen.

5.2.2 Öffnung und Schließung

Wendet man die Erosion auf ein Segmentierungsergebnis an, um beispielsweise Rauschartefakte zu beseitigen, dann verschwinden zwar kleine ungewollte Strukturen, große gewollte Strukturen werden aber auch verkleinert. Um diesen Verkleinerungseffekt zu korrigieren, kann eine *morphologische Öffnung* angewendet werden. Wendet man auf der anderen Seite die Dilatation auf ein Segmentierungsergebnis an, um beispielsweise kleinere Löcher zu füllen, steht man vor dem Problem, dass das Endergebnis vergrößert wurde. Um diesen Vergrößerungseffekt zu korrigieren kann eine *morphologische Schließung* angewendet werden.

Morphologische Öffnung. Unter der morphologischen Öffnung versteht man die Hintereinanderausführung einer Erosion und einer Dilatation mit dem gleichen SE. Abb 5.6 zeigt das Wirken einer Öffnung. Aus der schon aus Abb. 5.4 bekannten Ausgangsmenge wurden 3 Pixel im Inneren entfernt, dann wurde ein morphologisches Öffnen durchgeführt. Die geöffnete Menge ist eine Untermenge der Ausgangsmenge.

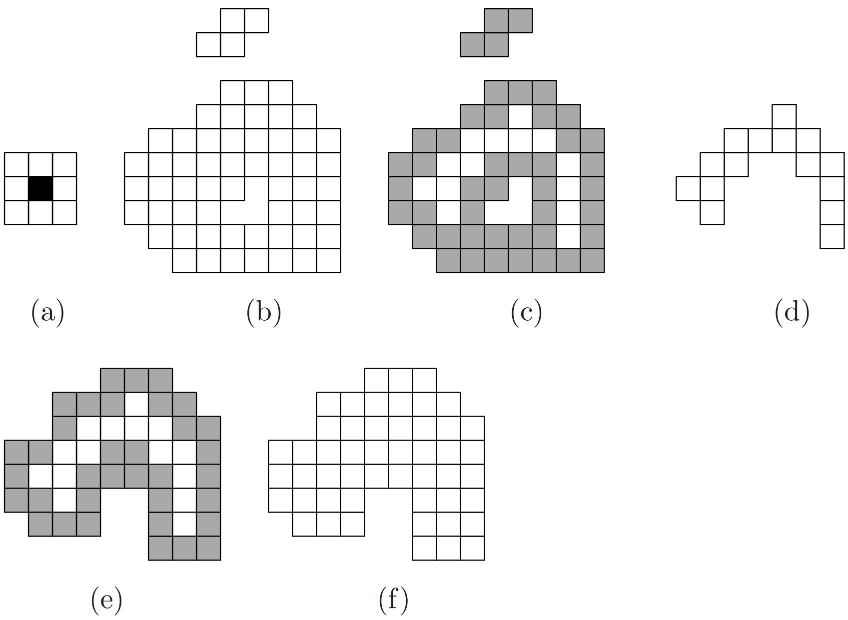


Abbildung 5.6: (a) Ein Quadrat als strukturierendes Element (SE). Der Bezugspunkt ist schwarz hinterlegt. (b) Die zu strukturierende Menge. (c)+(d) Ergebnis der Erosion. Die der Menge weggenommenen Punkte sind grau hinterlegt. Die kleine Teilkomponente der Menge ist nun verschwunden. (e)+(f) Endergebnis nach abschließender Dilatation.

Morphologisches Schließen. Unter dem morphologischen Schließen versteht man die Hintereinanderausführung einer Dilatation und einer Erosion mit dem gleichen SE. Abb 5.7 zeigt das Wirken einer Schließung auf die schon aus Abb. 5.6 bekannte Ausgangsmenge. Die geschlossene Menge ist eine Obermenge der Ausgangsmenge.

Füllen von Hohlräumen. Hohlräume (im 2-Dimensionalen auch als *Löcher* bezeichnet) eines Binärobjektes sind Teilmengen, die komplett von dem Binärbild umschlossen sind, aber nicht zu diesem gehören. Ein Bildpunkt gehört zu einem Loch eines Objektes,

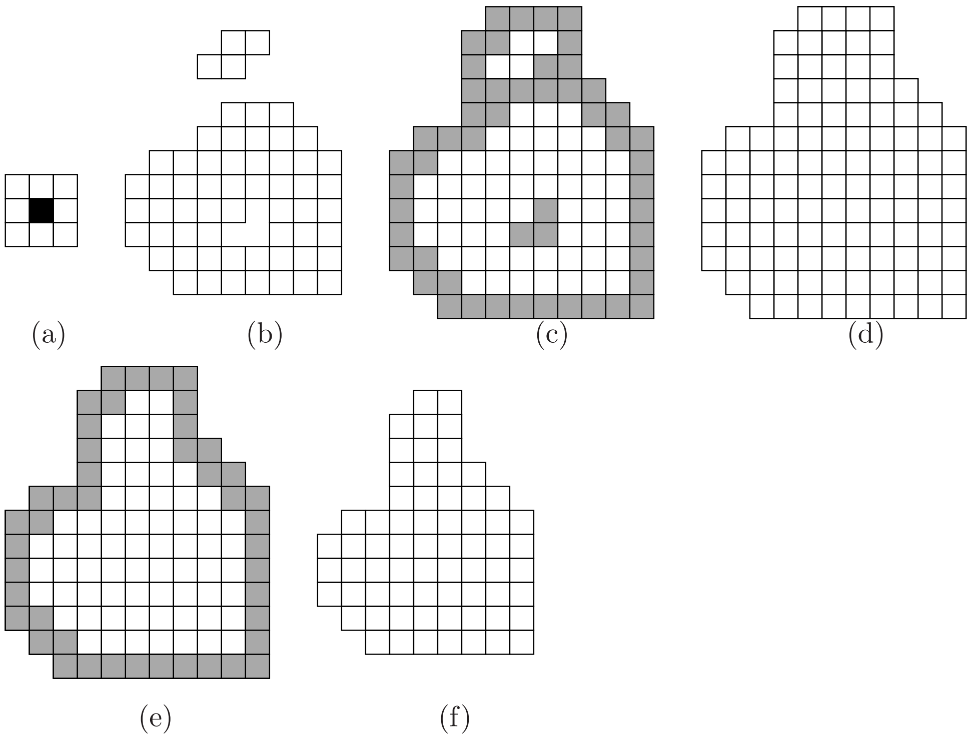


Abbildung 5.7: (a) Ein Quadrat als strukturiendes Element (SE). Der Bezugspunkt ist schwarz hinterlegt. (b) Die zu strukturiende Menge. (c) Ergebnis der Dilatation. Die der Menge hinzugefügten Punkte sind grau hinterlegt. Die kleine Teilkomponente der Menge ist nun mit der größeren Menge verschmolzen. (e)+(f) Endergebnis nach abschließender Erosion.

falls es keinen diskreten Weg von diesem Bildpunkt durch das Bild zum Bildrand gibt, ohne das Objekt zu schneiden. Das Füllen von Löchern läßt sich effizient implementieren, indem man mittels eines Bereichswachstumsverfahrens alle Bildpunkte außerhalb des Objektes, ausgehend vom Bildrand, als nicht-regionenzugehörig markiert. Alle Bildpunkte, die weder zum Bildobjekt gehören noch als nicht-regionenzugehörig markiert sind, müssen dann zwangsläufig zu einem Loch gehören und können dem Objekt hinzugefügt werden. Gegenüber dem morphologischen Schließen hat dieser Ansatz den Vorteil, dass die Abhängigkeit von dem gewählten SE wegfällt. Sind nur kleine Löcher, beispielsweise durch Rauschen verursacht, zu schließen, so liefern beide Ansätze, das Füllen von Hohlräumen und das morphologische Schließen, ähnliche Resultate.

5.3 Skelettierung

Die Skelettierung ist ein Verfahren zur Formanalyse von binären Objekten. Das sogenannte Skelett eines Objektes erhält man beispielsweise durch Verdünnen der Objektpunktmenge. Es gibt zahlreiche verschiedene formelle Definitionen für das Skelett einer euklidischen Menge (siehe [Soi98, S. 142 ff.]). Statt Skelett und Skelettierung ließt man häufig die Ausdrücke Mittelachse und Mittelachsentransformation. Der innerhalb dieser Arbeit entwickelte und verwendete Algorithmus ist eine Simulation der sogenannten *Grasfeuerausbreitung* im euklidischen Raum. Man stelle sich ein binäres

Objekt als Grasfläche vor. Am Rand der Fläche wird ein Feuer entzündet, dieses breitet sich mit einer einheitlichen Geschwindigkeit in der Fläche aus. Die Mittelachse oder das Skelett ist dann die Menge von Punkten, an denen sich die Feuerfronten treffen. Der im Folgenden vorgestellte Algorithmus ist ein sequentieller, topologieerhaltender[5] Ausdünnungsalgorithmus, hauptsächlich angelehnt an [PSB+01] und [Sel99].

Wir betrachten ein 3-dimensionales Objekt als eine 26-zusammenhängende Voxelmenge. Der Objekthintergrund wird 6-zusammenhängend betrachtet. Wir bezeichnen die Menge der Zusammenhangskomponenten eines Objekts B mit $\mathcal{C}(B)$, die Menge der Hohlräume mit $\mathcal{H}(B)$ und die Menge der Tunnels mit $\mathcal{T}(B)$. Die *Euler-Charakteristik*[6] ist in der Topologie eine Kennzahl für Objekte. Die Euler-Charateristik von B ist definiert durch:

$$\chi(B) = \mathcal{C}(B) + \mathcal{H}(B) - \mathcal{T}(B)\,. \tag{5.9}$$

Objekte, die unter topologischen Gesichtspunkten als gleich angesehen werden, haben dieselbe Euler-Charakteristik. Man bezeichnet die Euler-Charakteristik deshalb als *topologische Invariante*. Ein Torus hat beispielsweise die Euler-Charakteristik 0, genau wie die einhenkelige Kaffeetasse, ein zusammenhängendes Objekt ohne Tunnel und Hohlraum die Euler-Charakteristik 1, und eine hohle Kugel die Euler-Charakteristik 2. Die Hauptanforderung, die wir an eine Skelettierung stellen ist, dass die Topologie des skelettierten Objekts nicht verändert wird. Das Skelett muss die gleiche Anzahl von Komponenten, Hohlräumen und Tunnels enthalten wie das dazugehörige Ausgangsobjekt. Im vorangegangenen Abschnitt wurde gezeigt, dass eine einfache Dilatation oder ein morphologisches Öffnen nicht topologieerhaltend ist - in den Beispielen zu diesen Methoden sind Zusammenhangskomponenten verschwunden.

Einfache Punkte nach Morgenthaler. [Mor81] Ein Punkt $p \in B \subseteq \mathbf{Z}^3$ heißt genau dann *einfach* (engl. simple point), falls die Wegnahme des Punktes p die Topologie von B nicht verändert, d. h. falls folgende Bedingungen erfüllt sind:

$$|\mathcal{C}(B \cap N_{26}(p))| = |\mathcal{C}\,(B \cap N^*_{26}(p))|\,, \tag{5.10}$$

$$\left|\mathcal{C}(\overline{B} \cap N_{26}(p))\right| = \left|\mathcal{C}\left(\overline{B} \cap N^*_{26}(p)\right)\right|\,, \tag{5.11}$$

$$\chi(B \cap N_{26}(p)) = \chi(B \cap N^*_{26}(p))\,. \tag{5.12}$$

Im Laufe der Zeit wurden weitere Charakterisierungen von einfachen Punkten entwickelt, eine Zusammenstellung ist in [Ba] zu finden. Erwähnt sei hier noch die Charakterisierung von Lee et al., die zu der Morgenthalerschen äquivalent ist:

Einfache Punkte nach Lee et al. . [LKC94] Ein Punkt $p \in B \subseteq \mathbf{Z}^3$ heißt genau dann einfach, falls die Wegnahme des Punktes p die Topologie von B nicht verändert, d. h. falls folgende Bedingungen erfüllt sind[7]:

$$|\mathcal{C}(B \cap N^*_{26}(p))| = 1\,, \tag{5.13}$$

$$\chi(B \cap N_{26}(p)) = \chi(B \cap N^*_{26}(p))\,. \tag{5.14}$$

[5] Topologieerhaltend bzgl. der Euler-Charakteristik. Der entwickelte Algorithmus ist aber kein Homöomorphismus, da die nötige Bijektivität nicht gegeben ist.

[6] Benannt nach Leonhard Euler (1707-1783).

[7] Nur das Überprüfen der zweiten Bedingung reicht nicht aus, man kann sich leicht Gegenbeispiele überlegen, bei denen die Wegnahme eines Voxels die Eulercharakteristik nicht verändert, aber das Objekt in zwei Zusammenhangskomponenten zerfällt. Die Eulercharakteristik bleibt erhalten, da gleichzeitig durch die Wegnahme des Voxels ein Tunnel erzeugt wird.

Gleichung (5.13) läßt sich ausgehend von einem beliebigen Objektvoxel in $N_{26}(p)$ mit einem Region-Growing, wobei das Wachstum auf $N_{26}(p)$ eingeschränkt wird, überprüfen. Ist die Anzahl der mit dem Region-Growing gefundenen Objektvoxel gleich der gesamten Anzahl der Objektvoxel in $N_{26}(p)$, so ist die Gleichung (5.13) erfüllt. Ob sich die Euler-Charakteristik eines Objekts durch die Wegnahme eines Punktes ändert (5.14), läßt sich mit dem Verfahren von Lobregt ([LVG80], [Sel99, Anhang A]) effizient berechnen.

Die Einfachheit eines Voxels läßt sich rationell mittels Überprüfung der beiden Charakterisierungsgleichungen von Lee et al. ermitteln. Endpunkte sind per Definition einfache Punkte. Möchte man verhindern, dass Endpunkte gelöscht werden und Mittelachsen auf einen Punkt zusammenschrumpfen können, so muss man zusätzlich Endpunkte identifizieren. Dies bedeutet jedoch keinen Mehraufwand, da die Anzahl der Objektvoxel in $N_{26}(p)$ schon bei der Bestimmung der Einfachheit benötigt wird. Gilt $|N_m(p) \cap B| = 1$, liegt ein Endpunkt vor.

Da wir die Topologie eines Objektes erhalten wollen, müssen eventuelle ungewollte Hohlräume im Objekt vor der Skelettierung geschlossen werden. Solche Hohlräume können beispielsweise beim Segmentieren des Tracheobronchialbaums in verrauschten CT-Volumen entstehen. Würde man solche Hohlräume nicht entfernen, würde ein topologieerhaltender Skelettierungsalgorithmus eine 1-Voxel breite geschlossene Hülle um diese Hohlräume liefern. Zum Schließen von Hohlräumen kann ein einfaches morphologisches Closing (siehe 5.2.2) oder der etwas aufwendigere Algorithmus zum Schließen von Löchern (5.2.2) verwendet werden.

Die Mittelachsenbildung ist entscheidend von der Reihenfolge der Wegnahme von Voxeln aus dem Bildobjekt abhängig. Ordnet man die Randvoxel nach der Anzahl der Objektvoxel in der m-Nachbarschaft, und nimmt man zunächst die Randvoxel mit den meisten Objektvoxeln in der Nachbarschaft weg, dann wird die Entwicklung von Mittelachsen gefördert, da Randvoxel an den Ecken des Bildobjekts leicht zu Endpunkten einer Mittelachse werden können. Löscht man dagegen zunächst die Randvoxel mit den wenigsten angrenzenden Objektvoxeln, so wird die Bildung von Mittelachsen unterdrückt. Abb. 5.8 zeigt die hier beschriebene mögliche Förderung bzw. Unterdrückung von Skelettlinien anhand eines Beispiels.

Eine weitere Strategie ein einheitliches Schrumpfen des Bildobjektes zu erreichen, ist die Definition von verschiedenen Randvoxeltypen. Je nachdem in welcher Richtung ein Hintergrundvoxel an ein Randvoxel angrenzt, wird das Randvoxel als W-, E-, S-, N-, U-, D-Randvoxel bezeichnet, siehe Abb. 5.9. Durch einheitliches, richtungsbasiertes Schrumpfen des Bildobjekts wird vermieden, dass beispielsweise bei einem 2 Voxel breiten Objekt als Skelett eine Zick-Zack-Linie entsteht.

Schreibt man alle einfachen Randvoxel in eine Liste und beginnt sequenziell Randvoxel aus Liste und Bildobjekt zu löschen, so kann sich der Status, der in der Liste verbleibenden nicht gelöschten Voxel im Laufe des sequenziellen Löschens ändern. Einfache Voxel können zu nicht-einfachen Voxeln werden, neue Mittelachsenendpunkte können entstehen. Aus diesem Grund müssen alle potentiell löschbaren Randvoxel vor dem eigentlichen Wegnehmen nochmals darauf geprüft werden, ob sie immer noch einfach und keine Mittelachsenendpunkte sind (*re-checking*). Hat man die Liste der Randvoxel einmal durchlaufen und löschbare Voxel aus dieser entfernt, so können in der Liste auch Randvoxel, die beim ersten Durchlaufen noch den Status nicht-einfach hatten zu einfachen Voxeln mutiert haben. Ein Beispiel hierfür ist eine 1-Voxel dicke 2-dimensionale

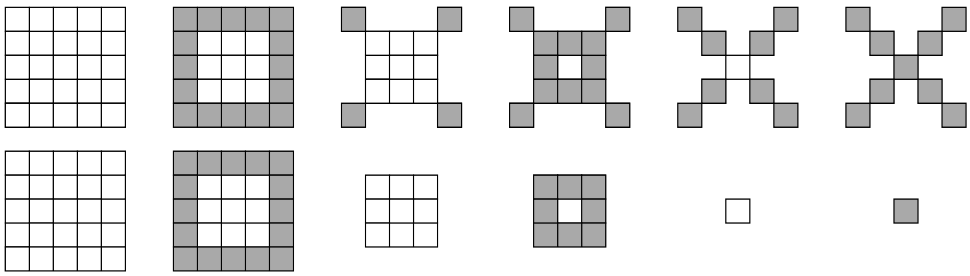


Abbildung 5.8: Die Mittelachsenbildung hängt von der Reihenfolge der Wegnahme von Bildpunkten aus dem Bildobjekt ab. Nimmt man zunächst die Punkte mit den meisten Bildobjektpunkten in $N_m()$ weg, dann wird die Bildung von Mittelachsen gefördert. In der oberen Reihe ist dies illustriert. Randpunkte sind grau hinterlegt. Die Randpunkte an den Ecken des Quadrats haben 3 Nachbarn, die übrigen Randpunkte haben 5 Nachbarn. Geht man umgekehrt vor, und nimmt zunächst die Punkte mit den wenigsten Bildobjektpunkten in $N_m()$ weg (untere Abbildungsreihe), dann wird die Mittelachsenbildung unterdrückt.

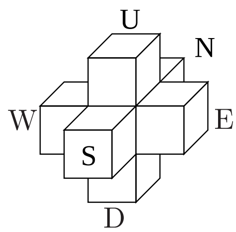


Abbildung 5.9: Randvoxel werden als West-, East-, South-, North-, Up- und Down-Randvoxel bezeichnet, je nachdem in welcher Richtung ein Hintergrundvoxel and das Randvoxel angrenzt.

Ebene im 3-dimensionalen Raum: Voxel in der Mitte der Ebene sind zwar Randvoxel aber nicht-einfach, da ein Wegnehmen dieser Voxel einen Tunnel erzeugen würde. Ein Auflösen der Ebene muss vom Rand her erfolgen. Deshalb wird die Randvoxelliste nach einem Durchlaufen, falls sie nicht leer, aber kleiner geworden ist, neu sortiert (*re-ordering*).

Der Skelettierungsalgorithmus

Beschreibung der sequentiellen Skelettierung des Bildobjekts B. Wegen der in der MSCT oft vorkommenden, unterschiedlichen Auflösungen in x, y- und z-Richtung[8], wird die Wegnahme von Randvoxeln der Typen W, E, S und N und von den Typen U und D von zwei gesonderten Iterationszählern gemerkt, $\Delta x, y$ steht für den Pixelabstand in einer Bildschicht, Δz für den Abstand zwischen zwei Bildern.

1. Initialisierung der Iterationszähler `counterWESN = 0` und `counterUD = 0` .

2. Hochzählen der Iterationszähler:

   (a) `counterWESN = counterWESN +1`

[8] Der Pixelabstand ist in der Regel geringer als der Schichtabstand.

(b) falls `((counterWESN *` $\Delta x, y$`) > (counterUD *` Δz`))`
dann `counterUD = counterUD +1` und `updown = true`
sonst `updown = false`

3. Alle Randvoxel (und somit potentiell löschbare Voxel) des Bildobjekts B werden sortiert in eine Liste `L` geschrieben. Erstes Sortierkriterium ist der Randvoxeltyp, die verwendete Sortierreihenfolge ist: W, E, S, N, U, D. Randvoxel vom Typ U, D werden nur in die Liste geschrieben falls `updown == true`. Alle Randvoxel des gleichen Randvoxeltyps werden des weiteren nach der Anzahl der Objektvoxel in der m-Nachbarschaft sortiert, die Sortierung kann aufsteigend ($\rightarrow$ Unterdrückung von Mittelachsen) oder absteigend ($\rightarrow$ Förderung von Mittelachsen) erfolgen.

4. Lösche sequenziell aus der List `L` alle Randvoxel die einfach und keine Mittelachsenendpunkte sind (Löschen mit re-checking).

5. Falls in 4. Voxel gelöscht wurden, die Liste `L` aber nicht leer ist, wird die Liste neu sortiert (re-ordering), dann Sprung zu 4. .

6. Falls das Bildobjekt B verändert wurde, gehe zu 2., sonst fertig.

Beispiel. Abb. 5.10 zeigt die Skelettierung eines Würfels mit dem vorgestellten Algorithmus. In Abb. 5.10a+b besteht der Würfel aus 141^3 isotropen Voxeln. In Abb. 5.10c+d ist der Würfel aus $141^2 \times 11$ anisotropen Voxeln zusammengesetzt. In Abb. 5.10a wurde die Skelettierung mit der Einstellung "Unterdrückung von Mittelachsen" gestartet. Das Skelett besteht aus 3 Voxeln, zentral im Würfel gelegen. Der Algorithmus stoppt an dieser Stelle, da das zentrale Voxel nicht-einfach ist und die beiden angrenzenden Voxel Mittelachsenendpunkte darstellen. In Abb. 5.10b wurde der Algorithmus mit der Einstellung "Förderung von Mittelachsen" gestartet, an den 8 Eckpunkten des Würfels entstehen somit Mittelachsenendpunkte. Die an den Eckpunkten startenden Mittelachsen treffen sich in dem zentralen Voxel des Würfels. In Abb. 5.10c wurde Mittelachsenbildung wieder unterdrückt, für den Würfel bestehend aus anisotropen Voxeln, liefert die Methode das identischen Resultat wie in Abb. 5.10a. Dies wird durch die beschriebene unterschiedliche Behandlung der Randvoxeltypen erreicht. In Abb. 5.10d führt das Fördern von Skelettlinien aufgrund der anisotropen Voxel dazu, dass die Skelettlinien innerhalb der Schichten 2 bis 10 (der Würfel besteht aus 11 Schichtbildern) aus mehreren Voxeln bestehen. In der MSCT verfügt man (meist) über nahezu isotrope Voxel, so dass ein direktes Anwenden des Skelettierungsalgorithmus auf die Bilddaten möglich ist. Ist der Abstand zwischen den einzelnen Schichtbildern zu groß, sollte ein Resampling[9] der Daten durchgeführt werden.

Stutzen des Skeletts. Unter dem Stutzen (engl. truncation) einer gegebenen Größe N des Skeletts versteht man das Entfernen von N Voxeln, ausgehend von jedem Endpunkt des Skeletts.

5.4 Transformation des Skeletts in einen Graphen

Die Verzweigungsstruktur des Tracheobronchialbaums legt es nahe aus dessen Skelettierungsergebnis einen mathematischen *Graphen* aufzubauen, um die Verzweigungs-

[9] D. h. man erzeuge isotrope Voxel.

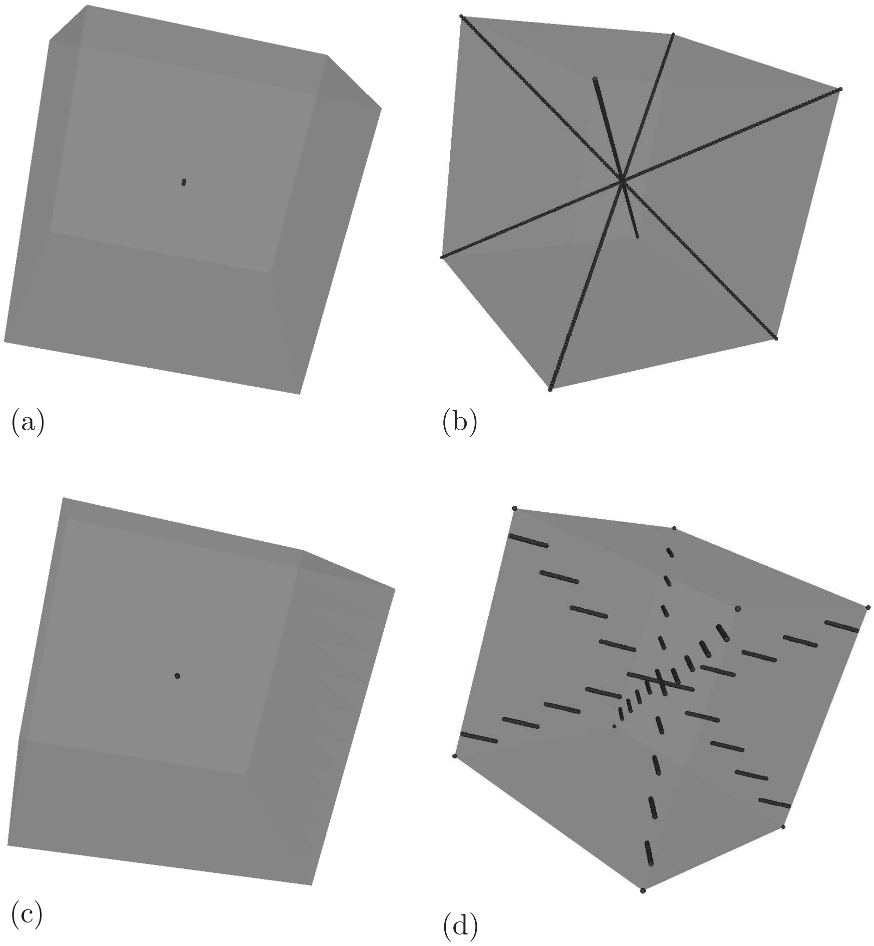


Abbildung 5.10: Ergebnisse der Skelettierung bei Unterdrückung der Mittelachsenbildung im Falle von isotropen (a) und anisotropen Voxeln (c). Skelettlinien bei Förderung der Mittelachsenbildung für isotrope Voxel (b) und anisotrope Voxel (d).

struktur abstrahiert widerzuspiegeln. Zunächst werden einige wichtige Grundbegriffe aus der Graphentheorie eingeführt. Danach wird die Überführung des Skeletts S eines Tracheobronchialbaums in einen *kreisfreien Graphen* beschrieben.

5.4.1 Grundlagen der Graphentheorie

Graph. Ein *Graph* G ist ein Satz von *Knoten* P und *Kanten* K. Die Kanten verbinden Paare von verschiedenen Knoten. $G = (P, K)$.

Pfad. Ein *Pfad* ist eine Folge von Knoten, wobei jeder Knoten (außer der erste) mit seinem Vorgänger mit einer Kante verbunden ist. Ein Pfad heißt *einfach*, falls alle Knoten und Kanten des Pfades verschieden sind. Ein *Kreis* ist ein Pfad, dessen Anfangsknoten mit dem Endknoten identisch ist.

Verbundener Graph. Ein Graph ist ein *verbundener Graph*, wenn es von jedem Knoten des Graphen zu jedem anderen Knoten des Graphen einen Pfad gibt. Ein nicht verbundener Graph besteht aus einer Menge von verbundenen Komponenten, diese werden als *maximal verbundene Untergraphen* bezeichnet.

Baum. Ein kreisfreier verbundener Graph wird als *Baum* bezeichnet, eine Menge von Bäumen bezeichnet man als *Wald*. Ein Knoten, der nur eine Kante besitzt wird als *Endknoten* oder *Blatt* bezeichnet.

Gerichteter Graph. Hat eine Kante eine Richtung, d.h. verbindet sie einen Knoten a mit einem Knoten b, aber nicht b mit a, so wird sie als *gerichtete Kante* bezeichnet. Einen Graphen mit gerichteten Kanten bezeichnet man als *gerichteten Graphen*. Eine *Wurzel* ist ein Knoten eines gerichteten Graphen von dem alle anderen Knoten erreicht werden können. Ein *gerichteter Baum* wird auch als *gewurzelter Baum* bezeichnet.

Ein gewurzelter Baum entspricht definitionsgemäß der Verzweigungsstruktur eines Tracheobronchialbaums, wie in 1.1.2 beschrieben. Der "Startpunkt" der Trachea kann als Wurzel des Baums angesehen werden

5.4.2 Transformation

Um mögliche falsche, kurze Skelettlinien, die in einem verrauschten Datensatz leicht entstehen können, von der Transformation in einen Graphen auszuschließen, wird das gesamte Skelett zunächst um eine fixe Größe $N = 3$ gestutzt. Durch das Stutzen können eventuell einige einfache Voxel entstehen, deshalb ist ein erneutes "Skelettieren" des gestutzten Skeletts nötig, um neu entstandene einfache Voxel von diesem zu entfernen. Stutzt man beispielsweise das in Abb. 5.11c abgebildete Skelett um 3 Voxel, ausgehend von den beiden schwarz hinterlegten Endvoxeln, dann bleiben die beiden grau hinterlegten Verzweigungsvoxel übrig: Einer der beiden grauen Voxel kann dann entfernt werden, da er weder ein Endvoxel noch nicht-einfach ist. Weitere Konstellationen sind einfach ausdenkbar.

Klassifikation der Skelettvoxel

Bekannte Verfahren klassifizieren ein einzelnes Skelettvoxel p anhand der Anzahl von weiteren Skelettvoxeln in $N_{26}(p)$ (für einen Überblick siehe [Sel99][S. 76 ff.]). Die einzelnen Voxel des Skeletts S des Tracheobronchialbaums werden nach folgendem Schema klassifiziert: Ein Skelettvoxel $p \in S$ wird als *Endvoxel* markiert, falls:

$$|N_{26}(p) \cap S| = 1\,. \tag{5.15}$$

Ein Skelettvoxel $p \in S$ wird als *Kantenvoxel* markiert, falls:

$$|N_{26}(p) \cap S| = 2\,. \tag{5.16}$$

Ein Skelettvoxel $p \in S$ wird als *Verzweigungsvoxel* markiert, falls:

$$|N_{26}(p) \cap S| \geq 3\,. \tag{5.17}$$

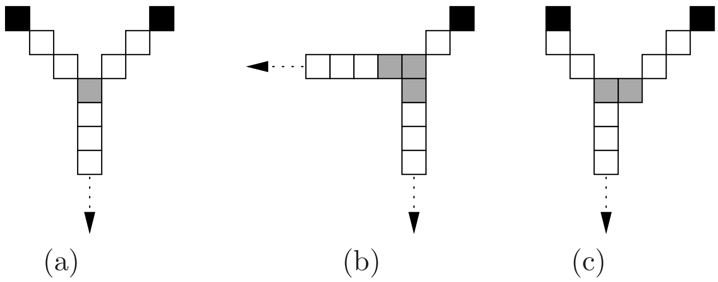


Abbildung 5.11: (a)-(c) Beispiel für 3 verschiedene Verzweigungsmöglichkeiten. Endvoxel sind schwarz, Verzweigungsvoxel grau hinterlegt. Wie in (b) und (c) zu sehen, kann eine Verzweigung aus mehreren Verzweigungsvoxeln (Verzweigungsvoxelmenge) bestehen.

Erzeugung des Graphen

Es ist möglich, dass mehrere Verzweigungsvoxel nebeneinander liegen (siehe 5.11b+c). Aus diesem Grund werden alle 26-zusammenhängende Verzweigungsvoxel zunächst mittels einem Bereichswachstumsverfahren zu einer *Verzweigungsvoxelmenge* V zusammengefasst[10]. Für jede Verzweigungsvoxelmenge gilt: $|V| \geq 1$. Der Graph wird nach folgenden Regeln erzeugt:

- Jedem Endvoxel entspricht ein Knoten im Graphen.
- Jeder Verzweigungsvoxelmenge entspricht ein Knoten im Graphen.
- Aus den, als Kantenvoxel klassifizierten Voxeln, werden die Kanten mittels Bereichswachstumsverfahren gebildet.

Bestimmung der Hauptstruktur des Baumes

Als *Wurzel* des Baums wird der Knoten definiert, der die geringste euklidische Distanz zum Landmark "Trachea" (siehe 4.3) aufweist. Dieser Knoten bekommt die Bezeichnung "Trachea" zugewiesen. Dann erfolgt eine Bereinigung des Graphen von eventuell vorhandenen Kreisen. Jeder Knoten des Graphen darf nur eine hinführende Kante besitzen. Um Knoten mit zwei oder mehr hinführenden Kanten zu identifizieren, wird eine Breitensuche (engl. breadth first search, siehe [Sed02, S. 114 ff.]) im Graphen durchgeführt. Die Breitensuche startet an der Wurzel des Baums. Wird ein Knoten, der schon durch die Breitensuche markiert wurde, durch eine weitere hinführende Kante erreicht, so wird diese weitere Kante aus dem Graphen gelöscht. Nach dem Entfernen überflüssiger Kanten kann mittels erneuter Breitensuche dann eine hierarchische Ordnung im Graphen eingeführt werden. Startpunkt ist die Trachea (Level 0). In dem nun kreisfreien Graphen wird anschließend ein Knoten mit der Bezeichnung "Carina" versehen: Dieser muss dem Knoten "Trachea" nachgelagert sein, eine große Ähnlichkeit zum Carinaknoten im *Referenzgraphen* haben und seine abgehenden Teilbäume müssen

[10] Dirk Selle löst das Problem der zusammenhängenden Verzweigungsvoxel auf einem anderen Weg: Er definiert redundante Verzweigungsvoxel, diese werden dann anliegenden Kanten zugeordnet. Jeder Knoten entspricht damit genau einem Voxel.

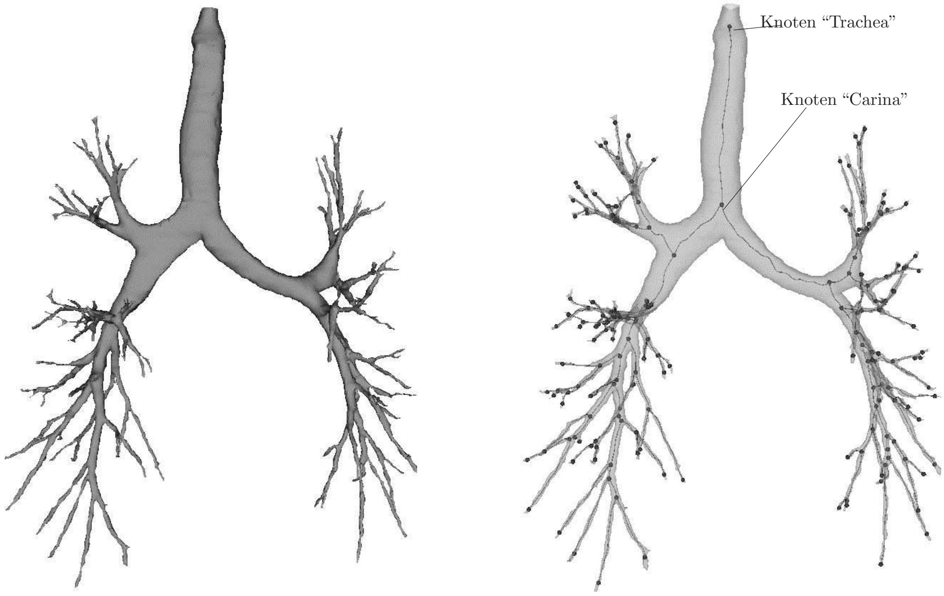


Abbildung 5.12: Links ein segmentierter und gerenderter Tracheobronchialbaum. Rechts die Skelettdarstellung des Baums (innerhalb des halbtransparenten Tracheobronchialbaums), die Knotenpunkte sind durch kleine Kugeln visualisiert. (122 mAs, 120 kV, 1.0 mm, 0.8 mm, 0.69 mm, B40f, Siemens Volume Zoom)

über eine ähnlich große Anzahl von Knoten verfügen. Jedem Knoten lassen sich nun Richtungsvektoren zum Knoten “Trachea” und zum Knoten “Carina” zuweisen.

Ist das Bezeichnen (engl. labeling) der Knoten “Trachea” und “Carina” noch ohne größere Probleme wissensbasiert möglich, so stellt das Labeling der nachfolgenden Knoten eine Herausforderung dar. Erschwert wird es auf der einen Seite durch Fehler in der Segmentierung oder Skelettierung des Tracheobronchialbaums und auf der anderen Seite durch die vielen, in der Natur vorkommenden, verschiedenen Variationsmöglichkeiten in den Verzweigungsmustern von Bronchien. Eine Möglichkeit ist das Graphenmatching gegen einen zuvor manuell gelabelten Referenzgraphen (oder gegen mehrere Referenzgraphen). Als Ähnlichkeitsmaß für zu vergleichende zwei Knoten können beispielsweise die generierten Richtungsvektoren zur “Trachea” und zur “Carina” dienen. Das Labeling des Tracheobronchialbaums wurde nur in Ansätzen umgesetzt und ist nicht Ziel dieser Arbeit, weiterführende Information zu diesem Arbeitsbereich gibt es beispielsweise in [PSZ99, KPT+02, JTS05]. Ein funktionierendes Labeling ist wichtig für anatomisch korrektes Zuordnen von Messresultaten und aus diesem Grund von großer Bedeutung.

5.5 Anmerkung zur Literatur

Die Informationen bzgl. der morphologischen Bildverarbeitung in diesem Kapitel wurden, insofern nicht explizit auf andere Literaturquellen verwiesen wurde, aus [Soi98, LOPR97] zusammengetragen. In [Soi98] finden sich eine tiefer gehende und empfehlenswerte Betrachtungen der zentraler morphologischen Operatoren sowie weiterer morphologischer Bildverarbeitungsmöglichkeiten. Algorithmen zur Graphentheorie werden ausführlich in [Sed02] besprochen.

Kapitel 6

Vermessen tubulärer Strukturen

Die Computertomographie ist zur Zeit die Methode der Wahl für nichtinvasives und sensitives Abbilden von pathologischen Veränderungen der Lunge. Die Entwicklung der Multislice-CT (MSCT, siehe 2.5) kombiniert die Vorteile der High-Resolution-CT (HRCT) und der Spiral-CT und erlaubt eine Visualisierung der Lungen und des Tracheobronchialbaums über das subsegmentale Niveau hinaus. Die MSCT liefert Volumendatensätze mit nahezu isotroper Auflösung, dies erlaubt ein nichtinvasives 3-dimensionales Vermessen und Quantifizieren der Bronchiengeometrie. Bei verschiedenen Erkrankungen wie Lungenemphysem oder COPD gehen Veränderungen des Lungenparenchyms mit einer Zunahme der Bronchialwanddicke einher (siehe Kapitel 1).

In diesem Kapitel wird zunächst ein Blick auf den Stand der Forschung im Bereich des Vermessens von Bronchien in CT-Bildern geworfen. Danach wenden wir uns der Theorie des Messens von dünnen Strukturen in der CT im Allgemeinen zu. Die limitierte räumliche Auflösung der klinischen CT-Scanner, im Vergleich zu dünnen Strukturen wie den Bronchialwänden, bereitet Probleme beim Bestimmen der physikalischen Dichte und der Dicke solcher Strukturen - diese Probleme werden eingehend besprochen. Anschließend wird eine neue, objektive Methode zum Vermessen von tubulären Strukturen in CT-Volumendatensätzen Schritt für Schritt vorgestellt. Es wird gezeigt, dass ein Bestimmen der Bronchialwanddicke auf 1-dimensionalen Profilen durch die Wand approximativ möglich ist. Eine geschlossene Lösung zur Wanddickenbestimmung wird hergeleitet. Somit läßt sich diese Methode in effizienter Form implementieren. Die entwickelte Lösung wurde mit einem Phantom, bestehend aus 10 Schläuchen[1] mit verschiedenen Geometrien, evaluiert. Um die Wiederholbarkeit von Messergebnissen mit der neuen Messmethodik in klinischen Datensätzen zu zeigen, wurden 8 Schweine zweimal gescannt und analysiert. Dann erfolgt der Vergleich von 16 Raucher- und 15 Nicht-Raucher-Datensätzen, die neue Messmethodik war in der Lage einen signifikanten Unterschied in der durchschnittlichen Bronchialwanddicke dieser beiden Gruppen aufzuzeigen. Abschließend wird die vorgestellte Methodik, sowie ihre Vor- und Nachteile diskutiert.

[1] Die Begriffe Röhrchen und Schlauch werden im Folgenden synonym benutzt.

6.1 Stand der Forschung

Es wurden in der Vergangenheit mehrere manuelle, halbautomatische und automatische Methoden zum Bestimmen der Geometrie von Bronchien in verschiedenen Arten von CT-Bildern vorgestellt [RDH97, KMW+00, NMS+00, CHHY01, SHR03, RJAC+03, JTS05, OKN+06].

[RJAC+03] ist ein Beispiel für eine manuelle Messmethode. Die Bilder wurden von zwei Radiologen unabhängig in einem definierten Hounsfield-Fenster [-600/1600] HE analysiert. Die Datensätze wurden, nach in der Literatur zu findenden diagnostischen Kriterien, ausgewertet [KMM95] [LNT+93].

Der in [NMS+00] angewendete Algorithmus basiert auf der *full width at half maximum-Methode* (FWHM-Methode)[2]. Es wird angenommen, dass die Wand in der Hälfte zwischen dem Maximum (Peak) und den beiden Minima der CT-Werte auf einem virtuellen Strahl (Profil, siehe z. B. Abb. 6.3b) vom Zentrum des Luftweges durch die Wand beginnt.

Die in [KMW+00] benutzte Methode bestimmt das Lumen mit einem Bereichswachstumsverfahren basierend auf einem Schwellenwert. Danach wird ein Kreis um den Luftweg gezeichnet, dieser wird solange erodiert bis die äußere Wandgrenze des Luftwegs identifiziert ist.

In [SHR03] wird eine modellbasierte Methode vorgestellt. Der CT-Scanner ist als lineares System (siehe Kapitel 3) modelliert, wobei die PSF des Systems als 3-dimensionale Gaußglocke mit Standardabweichungen in x, y und z Richtung simuliert wird. Die Methode ist ähnlich der in [RDH97] eingeführten, dort wird aber lediglich mit einer 2-dimensionalen Gaußglocke gearbeitet. Ein Bronchus wird als Kreisring modelliert. Die Differenz zwischen dem modellierten, künstlichen CT-Bild und dem wirklichen, realen CT-Bild wird minimiert. Da Bronchien nicht immer orthogonal zur gescannten Bildebene verlaufen, erfolgt eine Winkelkorrektur der 2D-Messergebnisse. Die Methode wurde mit Hilfe eines Phantoms bestehend aus 5 Plexiglas Röhrchen mit Wanddicken zwischen 1.16 mm und 3.05 mm validiert. Der innere Durchmesser der Röhrchen war zwischen 0.98 mm und 6.5 mm.

In [JTS05] wird eine Kostenfunktion (engl. cost function) benutzt. Die inneren Wandgrenzen werden mittels dynamischer Maximierung[3] dieser Kostenfunktion, die auf der ersten und zweiten Ableitung des Grauwertbildes beruht, gesucht. Die Methodik wurde mittels eines Phantoms bestehend aus 7 Plexiglas Röhrchen validiert. Nur 6 der 7 Röhrchen mit bekannten inneren Durchmessern von 1.98 mm bis 19.25 mm konnten bearbeitet werden, das kleinste Röhrchen mit einem inneren Durchmesser von 0.98 mm konnte mit der Methodik nicht vermessen werden.

In [OKN+06] werden zwei Röhrchen initialisiert und diese dann an die innere und äußere Wand, basierend auf den Grauwertgradienten, gefittet. Die Genauigkeit der Methodik ist schwierig abzuschätzen, da keine Phantommessungen dokumentiert wurden.

Fasst man die Schlussfolgerungen der bisherigen Publikationen im Bereich "Wand-

[2]FWHM bezeichnet zum einen die Halbwertsbreite der PSF eines Systems und ist somit ein die Auflösung des System beschreibender Parameter (siehe 3.2.1). Zum anderen wird unter FWHM auch die hier erwähnte Messmethodik verstanden. Die Messmethodik wird im Folgenden immer mit FWHM-Methode bezeichnet.

[3]Die Autoren benutzen den Begriff "cost function", verweisen aber darauf, dass man die Funktion eigentlich als "reward function" (Erlösfunktion) bezeichnen müsste, da eine Kostenfunktion in der Regel minimiert wird, sie aber eine Maximierung durchführen.

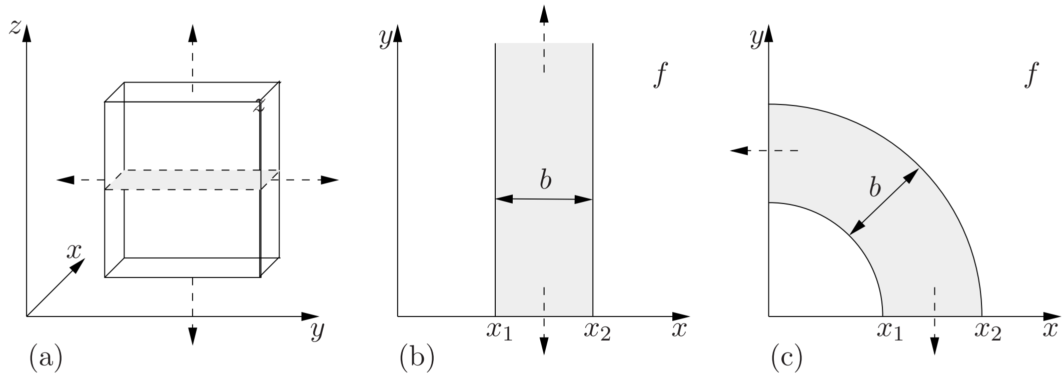


Abbildung 6.1: (a) Schnitt einer geraden Wand mit der Scanebene. Die Schnittfläche zwischen Scanebene und Wand ist grau hinterlegt. (b) Darstellung der geschnittenen Wand aus (a) im x, y-Koordinatensystem, die Wand ist parallel zur y-Achse. (c) Darstellung einer gekrümmten Wand.

dickenbestimmung von Bronchien" zusammen, so kann man sagen, dass eine exakte, wiederholbare Bestimmung der Bronchiengeometrie nicht mit manuellen Segmentierungsmethoden gemacht werden kann [RDH97]. Das Bestimmen der wahren Kanten von kleinen Objekten in CT-Bildern ist ein komplexes Problem. Die FWHM-Methode führt zu unakzeptablen Fehlern beim Vermessen von geringen Wandstärken, dies wird in diesem Kapitel nochmals in Abschnitt 6.4 untermauert.

6.2 Theorie des Vermessens dünner Strukturen

In Kapitel 3 wurde gezeigt, dass der Wert des 2-dimensionalen Integrals der PSF gleich dem Wert des 1-dimensionalen Integrals der LSF ist (3.36). Dies legt die Vermutung nahe, dass man das Problem der Wanddickenbestimmung von Bronchien, unter bestimmten Voraussetzungen, auf die Auswertung von 1-dimensionalen Profilen durch deren Wand reduzieren kann. Wir betrachten den Sachverhalt nun mit Hilfe der in Kapitel 3 erarbeiteten signaltheoretischen Grundlagen. Es wird nun gezeigt, welche Voraussetzungen hinreichend für die Berechtigung der Wanddickenbestimmung auf einem 1-dimensionalen Profil sind.

6.2.1 Reduzierung auf 1-dimensionale Profile

Eine parallel zur Scanrichtung z und zur y-Achse verlaufende gerade Wand der Stärke b, läßt sich durch eine Funktion f mit folgender Definition beschreiben:

$$f(x,y) := \begin{cases} 1 & \text{für } x_1 \leq x \leq x_2 \text{ mit } x_2 - x_1 = b \\ 0 & \textit{sonst} \end{cases} . \tag{6.1}$$

Abb. 6.1a+b visualisiert $f(x,y)$. Integriert man auf einem Weg orthogonal zur Richtung der Wand (parallel zur x-Achse), dann erhält man die Wandstärke b:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{x_1}^{x_2} 1\,\mathrm{d}x = x_2 - x_1 = b\,. \tag{6.2}$$

Schickt man f nun durch ein lineares System mit separabeler, symmetrischer Punktantwort PSF mit Integralwert 1 und integriert wieder auf einem Weg parallel zur x-Achse, so erhält man:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y) * PSF(x,y)\,\mathrm{d}x \tag{6.3}$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \left[\iint_{-\infty}^{\infty} f(x-x')PSF(x',y')\,\mathrm{d}x'\mathrm{d}y' \right] \mathrm{d}x \tag{6.4}$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{x-x_1}^{x-x_2} PSF(x',y')\,\mathrm{d}x'\mathrm{d}y'\,\mathrm{d}x \tag{6.5}$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{x-x_1}^{x-x_2} LSF(x')LSF(y')\,\mathrm{d}x'\mathrm{d}y'\,\mathrm{d}x \tag{6.6}$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{x-x_1}^{x-x_2} \left[\int_{-\infty}^{\infty} LSF(y')\,\mathrm{d}y' \right] LSF(x')\,\mathrm{d}x'\,\mathrm{d}x \tag{6.7}$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{x-x_1}^{x-x_2} LSF(x')\,\mathrm{d}x'\,\mathrm{d}x \tag{6.8}$$

$$= (x_2 - x_1) \int_{-\infty}^{\infty} LSF(x)\,\mathrm{d}x \tag{6.9}$$

$$= b\,. \tag{6.10}$$

Das Vertauschen der Integrationsgrenzen von (6.6) nach (6.7) ist nach dem Satz von Fubini möglich [For84b]. Nach (3.36) gilt $\int_{-\infty}^{\infty} LSF(y')\,\mathrm{d}y' = 1$, dies erlaubt den Schritt nach (6.8). Im Falle einer geraden Wand bleibt der Wert des Wegintegrals durch das lineare System unangetastet. Nach (3.12) gilt dies für das Integral des Gesamtbildes, hier wurde nun gezeigt, dass auch das Wegintegral unter den gewählten Voraussetzungen erhalten bleibt. Auf dieser Tatsache beruht die im Folgenden vorgestellte Messmethodik[4].

Beispiel. Sei die PSF eines 2-dimensionalen, diskreten Systems $\mathcal{H}$ gegeben als Gaußglocke (siehe A.5) mit $\sigma = 1.5$. In Abb. 6.2a wird das Bild einer 4 Pixel breiten, geraden Wand durch $\mathcal{H}$ geschickt. Betrachten wir nun die Wegintegrale im Eingangsbild und im Ausgabebild über den identischen Weg γ, wobei γ orthogonal zum Wandverlauf gewählt ist. Der Integralwert wird nicht verändert, man erhält in beiden Fällen den Wert 4. In Abb. 6.2b wird ein Kreisring mit Wandstärke 4 Pixel durch das System geschickt. Hier dient als Startpunkt des Integralweges γ das zentrale Pixel innerhalb des Kreisringes. Im Eingangsbild erhält man wiederum einen Wert von 4, im Ausgabebild einen Wert von 4.10. Die Abweichung ist auf die Krümmung des Kreisringes zurückzuführen.

[4] Eine geschlossene Lösung des Wegintegrals für eine gekrümmte Wand (siehe Abb. 6.1c) kann ich an dieser Stelle nicht angeben. Im diesem Abschnitt beigefügten Beispiel wird ersichtlich, dass der Integralwert geringfügig verändert wird. Für schmale PSFs und nicht allzu kleine Radien der Kreisringen, kann in Näherung jedoch der Erhalt des Integralwertes angenommen werden.

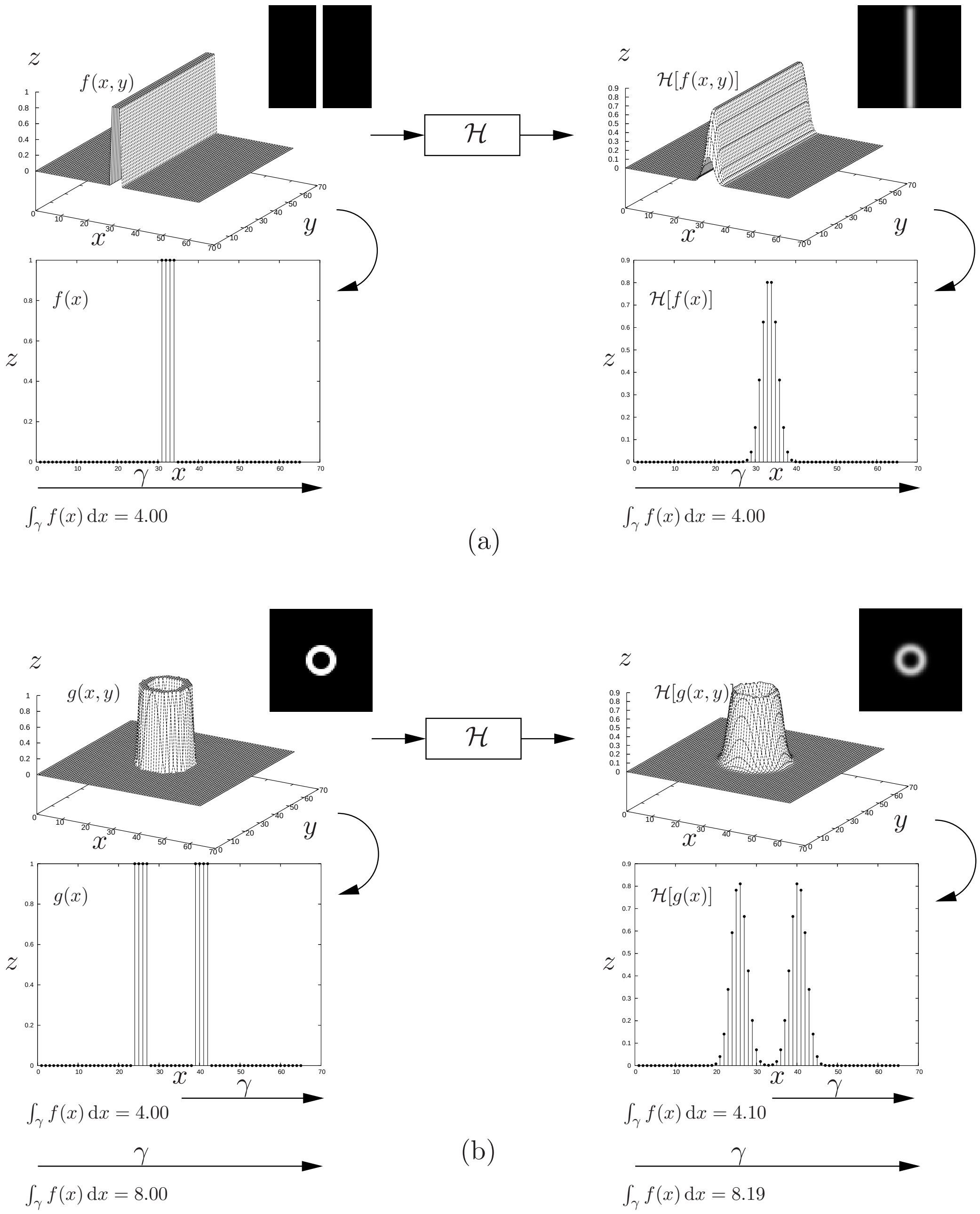
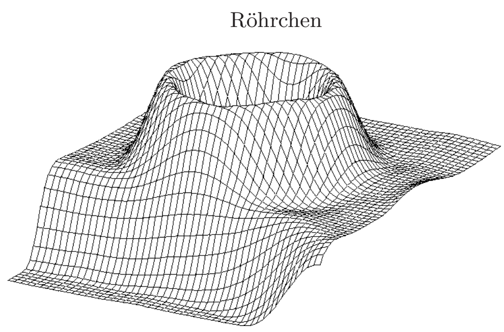


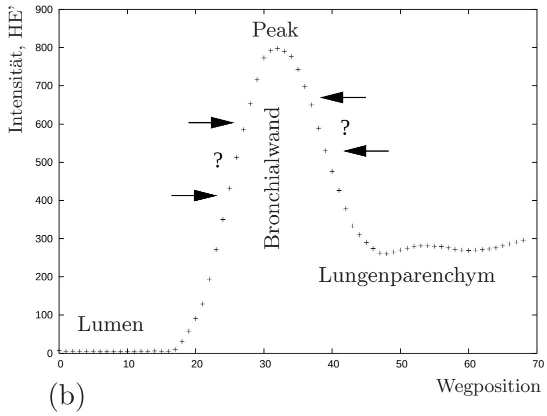
Abbildung 6.2: (a) Links eine 4 Pixel breite gerade Wand parallel zur y-Achse, rechts die Antwort des Systems $\mathcal{H}$ auf das linke Eingangsbild. (b) Links ein Kreisring mit Wandbreite 4 Pixel, rechts die Antwort des Systems $\mathcal{H}$ auf den Kreisring. Die Bildmatrix hat jeweils die Größe 65×65. Die jeweiligen Werte des Integrals längs des eingezeichneten Weges γ sind angegeben. In (a) bleibt der Integralwert für die gerade Wand beim Durchgang durch $\mathcal{H}$ erhalten, dies gilt nicht für die gekrümmte Wand in (b).

6.2.2 Abbildung dünner Strukturen in der CT

Über die Ungenauigkeiten und Probleme beim Messen von dünnen Strukturen in der CT, wurde schon von verschiedenen Autoren berichtet [NDOH98, DN99, RDH97]. Abb. 6.3 skizziert die Problematik der Bronchialwandvermessung auf 1-dimensionalen Profilen in der CT[5].



(a)



(b)

Abbildung 6.3: (a) Darstellung der Röntgendichte eines Silikonröhrchens mit scharf abgegrenzter Berandung in einer einzelnen CT-Schicht als topologisches Relief (Höhenprofil). Das Röhrchen war von zwei verschiedenen Materialien umgeben. Die Kanten sind durch das bildgebende System geblurrt. (100 mAs, 120 kV, 1.25 mm, 1 mm, 0.39 mm, B30f, Siemens Volume Zoom) (b) Schnitt durch das Relief (Profil) einer realen Abbildung eines Schweine-Bronchus. Die Pfeile symbolisieren das Dilemma: *Wo ist die genaue Grenze der Bronchialwand?* Die FWHM-Methode würde die beiden Wandgrenzen dort setzen, wo die Profilwerte auf die Hälfte des Peak-Wertes abgefallen sind. (98 mAs, 120 kV, 1.0 mm, 1.0 mm, 0.32 mm, 59.10.AB50, Siemens Somatom plus 4)

Dougherty und Newman haben in einer rein simulierten und einer experimentellen Studie verdeutlicht [NDOH98, DN99], welche Faktoren das Blurring in CT-Systemen beeinflussen. Das Interesse der beiden lag auf der Bestimmung der Kortikalisdicke von Wirbelkörpern[6]. Als Haupteffekte, die eine Überschätzung von dünnen Strukturen in der CT begründen, wird von Dougherty und Newman in diesen Arbeiten das Blurring ausgelöst durch geometrische Effekte wie Größe und Form der Röntgenröhre, Objektvergrößerung durch die Distanzen zwischen Röntgenröhre, Objekt und Detektor, Streuung der Röntgenstrahlen, Limitierungen im Absorptionsverhalten der Detektoren und der, im Zuge der Bildrekonstruktion aus Projektionsaufnahmen, verwendete Rekonstruktionskernel, aufgeführt. Viele Faktoren, die die Auflösung eines CT-Systems limitieren, wurden in Kapitel 2 ausführlich besprochen. Sowohl Dougherty und Newman als auch verschiedene andere Autoren charakterisieren das Darstellungsvermögen eines bildgebenden Systems mittels einer, das gesamte System beschreibenden, PSF [DN99, SHR03, RDH97, Jai89]. Betrachtet man ein CT-System zunächst als kontinuierliches System, so gesellen sich für ein digitales System noch die Effekte des endlichen

[5] Abb. 6.3a entspricht dem Titelbild der Arbeit.

[6] Die Kortikalis (lat. substantia compacta) bildet die Außenfläche der Knochen. Eine weitere Erscheinungsform von Knochensubstanz ist die Spongiosa (von lat. spongia = Schwamm) im Inneren der Knochen, diese wird nach außen hin von der Kortikalis umhüllt.

Samplings, der endlichen Voxelgröße und der Quantisierung (siehe 3.1.2) zum Blurring hinzu. Das Blurring eines CT-Systems läßt kleine Objekte in einem Bild breiter und weniger hell (weniger dicht) erscheinen. Die Modulationsübertragungsfunktion (MTF, siehe 3.2.4) ist ein Auflösungsmaß, welches genau diese Effekte des Blurrings beschreibt. Die MTF ist als normalisierte Magnitude der Frequenzantwort H ($H = \mathcal{F}_2 h$ = 2-dimensionale Fouriertransformierte der Punktantwort h) definiert. Die MTF beschreibt, wie höhere Raumfrequenzen durch ein System $\mathcal{H}$ in ihrer Amplitude reduziert werden (siehe Abb. 6.4). Auf diesem Wege kombiniert die MTF eine Aussage über den Kontrast und das Auflösungsvermögen. CT-Scanner besitzen MTFs, die für kleine Frequenzen oft Amplituden größer als 1.0 besitzen (siehe [Sti03] oder [LZLW+07]), dies unterstützt den bekannten Ringing-Effekt an den Rändern größerer Objekte mit scharfer Berandung (siehe Anhang A.5) und sorgt für eine Erhöhung der Hounsfieldwerte für Objekte, die im niedrigen Frequenzbereich angesiedelt sind. Die Amplitude von Objekten aus dem höheren Frequenzbereich (kleine, dünne Objekte) wird verringert. Abb. 6.5 visualisiert die Hauptprobleme, die das Dilemma beim Vermessen von Bronchialwänden verursachen.

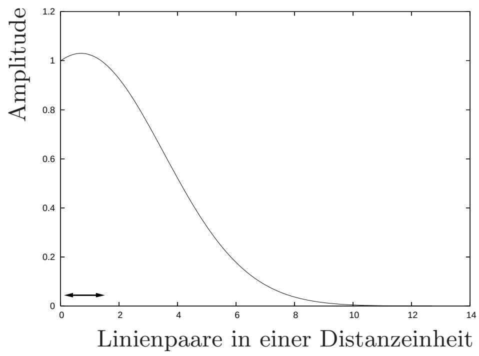
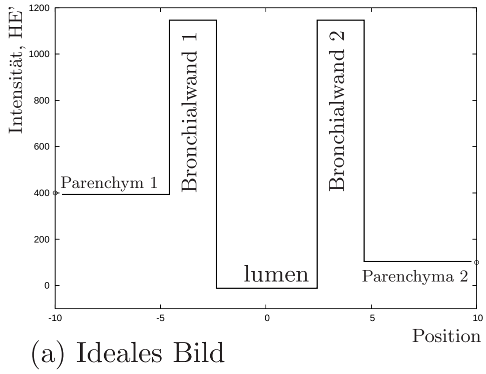


Abbildung 6.4: Beispiel einer Modulationsübertragungsfunktion eines CT-Scanners. Die MTF dokumentiert den Amplitudenverlust für höhere Frequenzen bzw. mehr Linienpaare pro Distanzeinheit. Das heißt auch, die MTF dokumentiert den Rückgang bzw. die Zunahme der CT-Werte in Profilen durch dünne Objekte. Eine Amplitudenüberhöhung erfolgt im mit dem Doppelpfeil markierten Bereich, rechts vom Doppelpfeil wird die Amplitude verringert. Links vom Doppelpfeil hat die MTF-Kurve einen Wert von 1.0, dies bedeutet, dass breite Objekte mit der korrekten Amplitude wiedergeben werden.

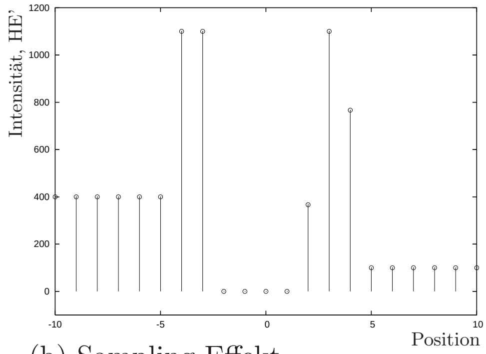
Dickebestimmungen mit der FWHM-Methode ist für Standard-Rekonstruktionskernel nur annähernd präzise, falls die wahre Dicke größer als das 1.5- bis 2.0-fache des FWHM-Wertes der System PSF ist, der exakte Faktor hängt hauptsächlich vom gewählten Rekonstruktionskernel ab [DN99].

Dougherty und Newman zeigen eine nahezu lineare Beziehung zwischen der wahren Dicke einer dünnen Struktur geteilt durch die Halbwertsbreite der System-PSF (FWHM) und dem CT-Maximum in einem Profil durch diese Struktur [DN99]. Der lineare Zusammenhang ist nur vorhanden, wenn wir dünne Strukturen der gleichen physikalischen Dichte vermessen, da die Schwächung der Röntgenstrahlung hauptsächlich von diesem Parameter abhängt. Für ein exaktes Messen ist das Wissen der physikalischen Dichte oder des zu erwartenden Hounsfieldwertes im Vorfeld nötig. Der

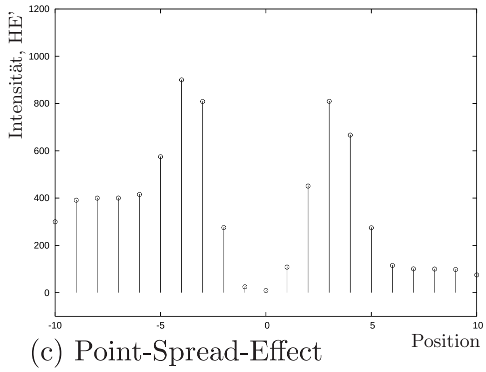
Hounsfieldwert hängt größtenteils von der physikalischen Dichte ab und kann aus dieser berechnet werden (siehe [SBS00]). Zusätzlich wird der CT-Wert noch von der Atomzahl[7] (Ordnungszahl) des Materials beeinflußt. Diese Abhängigkeit wird im Folgenden vernachläßigt.



(a) Ideales Bild



(b) Sampling-Effekt



(c) Point-Spread-Effect

Abbildung 6.5: (a) Intensitätsprofil durch einen “idealen” Luftweg erzeugt von einem perfekten CT-Scanner. (b)+(c) Das ideale Bild aus (a) wird durch den Sampling-Effekt und die PSF des Systems geblurrt. Dies bewirkt eine Reduzierung der Intensitätsmaxima und weichgezeichnete Kanten. (b) zeigt das Resultat nach dem Sampling. (c) das Resultat nach dem Blurring durch die System-PSF. Man bemerke, dass Wände gleicher Dicke zu unterschiedlichen CT-Maxima führen können.

[7] Die Atomzahl bzw. die Ordnungszahl gibt die Anzahl der Protonen im Atomkern an. In jedem ungeladenen Atom entspricht die Zahl der Protonen im Kern der Zahl der Elektronen in der Atomhülle.

Falls das gemessene CT-Maximum in einem 1-dimensionalen Profil kleiner als der erwartete CT-Wert für das Material ist, dann liefert die Dickenbestimmung mit der FWHM-Methode im Allgemeinen eine Überschätzung der wahren Wanddicke (siehe hierzu 6.4.1).

BPL-Wert. Wir bezeichnen nun die variable Prozentzahl auf einem Profil durch eine dünne Wand, an der die exakte Dicke des Materials bestimmt werden kann, mit der Variablen *BPL* (von engl. "best percentage level").

Man beachte, dass es möglich ist, dass die in der Realität gleich dünnen Objekte (beispielsweise Bronchialwand 1 und Bronchialwand 2 in Abb. 6.5a), nach der Abbildung durch ein CT-System, verschiedene Profile liefern (siehe Abb. 6.5c). Dies hängt vom Sampling des CT-Systems und von dem, die Objekte umgebenden Material, welches die Profile in Folge der Faltung mit der PSF beeinflusst, ab. Die BPL-Werte werden durch den Entstehungsprozess des Bildes beeinflusst und sind selbst für ein bestimmtes Material mit einer bekannten Dicke wegen des Samplings und der Faltungsoperation nicht konstant. Um möglichst präzise messen zu können, sollte ein kleines "Field Of View"[8] (FOV) verwendet werden, um die Effekte des Samplings und der endlichen Voxelgröße zu verringern.

6.2.3 Herleitung der integral-basierten Messmethode (IBM)

Wie in Kapitel 3 besprochen, lassen sich CT-Systeme mittels einer das gesamte System beschreibenden PSF als verschiebungsinvariantes lineares System auffassen. Die exakten PSFs von Spiral-CT-Systemen sind kaum untersucht und selten in der Literatur erwähnt. Oftmals wird gefolgert, dass die PSF durch eine 3D-Gaußglocke angenähert werden kann [WVS+98]. Schwarzband und Kiryati haben gezeigt, dass die PSF eines Spiral-CTs eine komplizierte 3-dimensionale Form hat [SK05].

Selbst wenn wir nicht die exakte PSF kennen, können wir annehmen, dass das Integral der LSF[9] folgende wünschenswerte Gleichheit in alle Richtungen erfüllen sollte:

$$\int_{-\infty}^{\infty} LSF(t)dt = 1\,. \tag{6.11}$$

Beispielsweise wird Gleichung (6.11) von allen normalisierten 3D-Gaußglocken erfüllt, da diese symmetrisch und separabel sind, siehe Beispiel 3.3. Falls die PSF des Systems den Integralwert 1 besitzt, wird der Gesamtwert des Bildes durch das System nicht verändert, die Faltung ändert nicht den Integralwert des Bildes. Gleiches gilt für das Integral eines Profiles orthogonal durch eine gerade Wand entlang eines unendlichen langen Weges in einem unendlichen großen Idealbild, dies wurde in 6.2.1 gezeigt. Diese Integralerhaltungseigenschaft wird im Englischen als "volume conservation property of convolution" bezeichnet [Jai89].

Unglücklicherweise sind die CT-Bilder, und somit die aus diesen erzeugten Dichteprofile, von endlicher Länge. Da man im Diskreten aber im Allgemeinen mit System-PSFs rechnet, die außerhalb eines kleinen Bereichs verschwinden, stellt dies zunächst

[8] Mit "Field Of View" (FOV) bezeichnet man das Gebiet, das im CT-Bild abgebildet wird. In den Standardeinstellungen werden die technischen Möglichkeiten eines CT-Scanners meist nicht optimal ausgenutzt. Durch Verkleinerung des FOVs kann die Auflösung verbessert werden.

[9] Die LSF entspricht dem in einer Richtung integrierten Profil der PSF, siehe (3.36).

keine Einschränkung dar. Ein großes Problem ist in realen CT-Bildern aber die Fülle der abgebildeten Objekte, man denke nur an eine Aufnahmeschicht durch einen menschlichen Körper. Die Abbildung eines Bronchus wird beispielsweise durch das umliegende Lungenparenchym und die Blutgefäße beeinflusst. Möchte man die Integralerhaltungseigenschaft in realen CT-Bildern nutzen, stellt sich die Frage, wo der Integrationsweg durch die Bronchialwand beginnen und enden soll. Neben der System-PSF und der MTF-Kurve stellt die $10\% - 90\%$ Kantenantwort (siehe 3.2.3) ein bekanntes Maß dar, um das Auflösungsvermögen eines Systems zu beschreiben [Smi99]. Dadurch inspiriert, nehmen wir das 10%-Level der aufsteigenden Flanke und das 10%-Level der absteigenden Flanke als Start- und Endpunkt des Integrationpfades (Abb. 6.6b). Dies hat zumindest zwei offensichtliche Vorzüge: Zum einen sind die Positionen für jedes Profil einfach zu bestimmen, zum anderen ist die reale Wand garantiert innerhalb dieses Bereichs abgebildet.

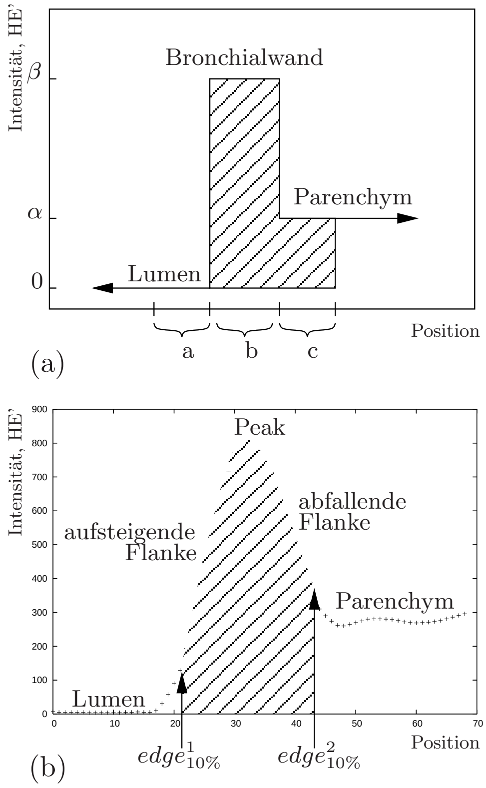


Abbildung 6.6: (a) Das Diagramm zeigt ein 1D-Intensitätsprofil durch ein orthogonal angeschnittenes, ideales Luftwegsmodell (Modellbildung, siehe 1.1.3). a bezeichnet die Pfadlänge innerhalb des Lumens, b bezeichnet die Pfadlänge innerhalb der Bronchialwand und c bezeichnet die Pfadlänge innerhalb des umgebenen Lungenparenchyms. Die Intensität des Lumens beträgt 0, die Intensität der Wand ist β und die Intensität des Lungenparenchyms ist α. (b) Profil durch eine Bronchialwand in einem echten CT-Bild. Die Kanten der Bronchialwand sind durch das CT-System geblurrt. $edge^1_{10\%}$ bezeichnet das 10%-Level der aufsteigenden Flanke und $edge^2_{10\%}$ bezeichnet das 10%-Level der abfallenden Flanke.

Das Problem der Bronchialwanddickenbestimmung läßt sich approximativ durch folgendes lineares Gleichungssystem beschreiben:

$$
\begin{aligned}
a \cdot 0 + b \cdot \beta + c \cdot \alpha &= \int_{edge^1_{10\%}}^{edge^2_{10\%}} f(t)dt && (6.12)\\
a + b + c &= \left|edge^1_{10\%}, edge^2_{10\%}\right| && (6.13)\\
a - c &= 0 && (6.14)
\end{aligned}
$$

Die linke Seite der Gleichung (6.12) repräsentiert den Wert des Integrals im Luftwegsmodell, abgebildet in Abb. 6.6a. a bezeichnet die Länge des Pfades innerhalb des Lumens, b bezeichnet die Pfadlänge in der Bronchialwand und c bezeichnet die Pfadlänge im umliegenden Lungenparenchym. Die Intensität des Lumens ist 0 HE' (geshiftete Hounsfieldwerte), β steht für die Intensität der Bronchialwand und α repräsentiert die Intensität des Lungenparenchyms. Die rechte Seite ist der Wert des gemessenen Integrals im echten CT-Bild, wobei $edge^1_{10\%}$ das 10%-Level der ansteigenden Flanke und $edge^2_{10\%}$ das 10%-Level der abfallenden Flanke, dargestellt in Abb. 6.6b, bezeichnet. (6.13) fordert, dass die zugrundeliegende Pfadlänge beider Integrale in (6.12) gleich sein muss. (6.14) fordert, dass die Kantenantwort auf beiden Seiten (für beide Flanken) gleich breit sein muss.

Löst man das LGS (6.12) - (6.14) so erhält man folgende geschlossene Lösung für eine approximierte Bronchialwanddicke:

$$
b = \frac{\int_{edge^2_{10\%}}^{edge^1_{10\%}} f(t)dt - \frac{\alpha}{2}\left|edge^2_{10\%}, edge^1_{10\%}\right|}{\beta - \frac{\alpha}{2}}\,. \qquad (6.15)
$$

Durch das Integrieren über den endlichen Weg von $edge^1_{10\%}$ bis $edge^2_{10\%}$ geht Information verloren. Benutzt man harte Rekonstruktionsfilter[10], so erhält man erhöhte Integralwerte. Deshalb führen wir nun einen Korrekturfaktor λ in (6.12) für den im realen Bild berechneten Integralwert ein, wobei λ von der System-PSF abhängt. Härterer Rekonstruktionskernel benötigen kleinere λ-Werte, da die endlichen Integrale erhöht sind. Softere (weichere) Kernels benötigen größere λ-Werte, da die Integrale nicht so stark erhöht sind. Der Korrekturfaktor λ hängt zusätzlich von der Länge des Integrationspfades (und somit von der eigentlichen Dicke des zu vermessenden Objekts) ab. Je breiter ein Objekt ist, desto geringer ist der Informationsverlust den man durch das Abschneiden der Profile an beiden Falken erzeugt. Man kann sich leicht überlegen, dass λ gegen 1 gehen muss, je breiter ein Objekt ist. Abb. 6.7e+f zeigt die Abhängigkeit von λ von der realen Wandstärke. Um die Abhängigkeit von λ von der Pfadlänge $|\gamma|$ zu kennzeichnen schreiben wir λ_γ.

Somit wird Gleichung (6.12) zu:

$$
a \cdot 0 + b \cdot \beta + c \cdot \alpha = \lambda_\gamma \int_{edge^1_{10\%}}^{edge^2_{10\%}} f(t)dt\,, \qquad (6.16)
$$

[10] Unter harten oder scharfen Rekonstruktionsfiltern versteht man kantenanhebende Filter. Diese besitzen MTF-Werte > 1.0 im unteren Frequenzbereich.

und für die approximierte Wanddicke gilt:

$$b = \frac{\lambda_\gamma \int_{edge^2_{10\%}}^{edge^1_{10\%}} f(t)dt - \frac{\alpha}{2}\left|edge^2_{10\%}, edge^1_{10\%}\right|}{\beta - \frac{\alpha}{2}}. \tag{6.17}$$

Die Korrektheit und Anwendbarkeit von Formel (6.17) wurde mit einer 1-dimensionalen Faltungsmaschine (engl. convolution machine)[11] geprüft. Die wichtigsten Faktoren, die das Wandprofil bestimmen, wurden variiert: die Position der Wand im diskreten Sampling-Gitter, die Wandstärke, die System-PSF und die Intensität des umgebenen Lungenparenchyms. Abb. 6.7 zeigt beispielhaft die verschiedenen getesteten Situationen. In allen getesteten Situation war der absolute Fehler für die approximierte Wandstärke sehr gering, was für diese sehr künstlichen Testsituationen nicht überraschend ist. Ausführlich werden Resultate, die mit der IBM in richtigen CT-Bildern berechnet wurden, in Abschnitt 6.4 dokumentiert und besprochen.

[11] Dies impliziert die Annahme eines geraden und nicht gekrümmten Wandverlaufs.

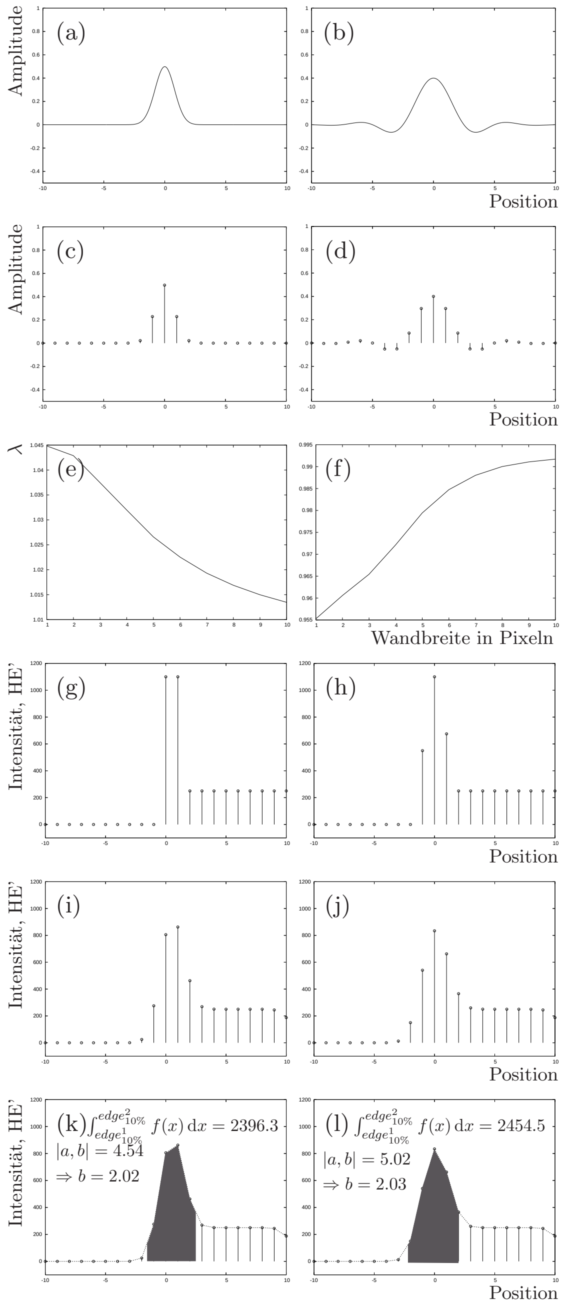


Abbildung 6.7: Testphase: Neben der Gaußglocke, dargestellt in (a), wurde die mit dem Hamming Window multiplizierte (siehe [Smi99, Seite 286]) sinc-Funktion (siehe Anhang A.4), abgebildet in (b) als System-PSF getestet. (c) und (d) zeigen die diskreten Pendants zu (a) und (b). (e) zeigt die nötigen λ-Werte damit man mit der Formel (6.17) und $\alpha = 0$ mit der Gaußschen PSF die wahre Wandstärke erhält - (f) entsprechend die nötigen λ-Werte für die sinc-basierte PSF. (g) ist ein Profil durch ein ideales Luftwegsmodell mit einer Wandstärke von exakt $2\Delta x$, wobei die Wand hier perfekt ins Sampling-Gitter passt. (h) ist ein Profile durch eine Wand mit einer exakten Stärke von $2\Delta x$, die Wand passt hier jedoch nicht perfekt in Sampling-Gitter. (i) ist das mit der Gaußchen PSF gefaltete Signal aus (g). (j) ist das mit der Gaußchen PSF gefaltete Signal aus (h). (k) und (l) dokumentieren die Resultate von Formel (6.17) mit Korrekturfaktor $\lambda = 1.043$. $\lambda > 0$, da wir in diesem Beispiel eine Gaußche PSF verwendet haben. Wackelt man an den λ-Werten, z. B. setzt man $\lambda = 1.05$, so bekommt man $b = 2.04$ oder mit $\lambda = 1.01$, erhält man $b = 1.94$ (in Beispiel (k)).

6.3 Implementierung der 3D-Methode

6.3.1 Segmentierung, Skelettierung und Graphenaufbau

In einem ersten Schritt wird das Lumen des Bronchialbaums (resp. der zu vermessenden tubulären Struktur) komplett oder nur der interessierende Teil in einer 3-dimensionalen Box (engl. box of interest) mit der in 4.4 eingeführten Methodik segmentiert. Die Messmethodik an sich, ist unabhängig von dem gewählten Segmentierungsalgorithmus. Liefert beispielsweise ein rein schwellenwertbasiertes Bereichswachstumsverfahren eine gute Segmentierung kann auch diese benutzt werden. Das voxelbasierte Resultat der Segmentierung wird mit dem in 5.3 beschriebenen, sequentiellen, topologieerhaltenden 3D-Verdünnungsalgorithmus skelettiert. Der Algorithmus wird mit der Option "Unterdrückung von Mittelachsen" gestartet. Danach wird ein azyklischer Graph, wie in 5.4 beschrieben, aufgebaut. Mit Hilfe dieser vorbereitenden Schritte lassen sich nun orthogonale Ebenen (orthogonal zu den Skelettlinien) zwischen zwei Knotenpunkten extrahieren. Innerhalb dieser Ebenen wird dann die in 6.2.3 hergeleitete integral-basierte Messmethodik angewendet, das genaue Vorgehen wird im nächsten Abschnitt beschrieben.

6.3.2 3D-Wanddickenbestimmung

f sei ein diskretes CT-Volumen, modelliert als LSI-System (siehe Kapitel 3, speziell 3.10). Der Definitionsbereich von f sei D_f und dieser wird auf den diskreten Wertebereich, die Hounsfield-Skala (siehe 2.3.1), abgebildet:

$$f : D_f \subset \mathbf{Z}^3 \to W_f \subset \mathbf{N}_0 \cap [0, 4095] \,. \tag{6.18}$$

f' bezeichne die Erweiterung von f auf $\mathbf{R}^3$ mittels trilinearer Interpolation (siehe [Hec95, S. 521-524]). Es werden $N = 128$ virtuelle Strahlen vom Zentrum c des Bronchus orthogonal zur Richtung desselben ausgesendet. c ist durch die Skelettierung gegeben, die Orientierung des Luftweges ist durch die Skelettlinie zwischen den beiden dazugehörigen Verzweigungspunkten bestimmt. Benutzt man zur Orientierungsbestimmung eines Luftweges lediglich die angrenzenden Skelettvoxel, so kann die berechnete Richtung von der wirklichen Richtung abweichen. Deshalb wird ein Richtungsvektor von den zur Skelettlinie gehörenden Verzweigungspunkten (den zu einer Skelettlinie gehörenden beiden Knotenpunkte) und ein weiterer von den direkt angrenzenden Skelettnachbarn von c berechnet. Der hieraus gemittelte Richtungsvektor wird als Richtung des Luftweges benutzt. Von den virtuellen Strahlen werden Profile erstellt. Ein einzelnes Profil sei notiert als:

$$l^i = \left\{p_0^i, p_1^i, \ldots, p_n^i\right\} \text{ mit } i \in \{1, \ldots, N\} \,. \tag{6.19}$$

Die Profile werden im Subvoxelbereich berechnet und die Endpunkte der Profile beschreiben einen kompletten Kreis um c. Es gilt für die einzelnen Punkte der Profile: $p_k^i \in \mathbf{R}^3$. Die Distanz zwischen zwei Profilpunkten p_k^i und p_{k+1}^i ist gleich dem Pixelabstand $\Delta x, y$ innerhalb eines einzelnen CT-Bildes gewählt, die HE-Werte an den Punkten sind durch f' gegeben. Das Erzeugen der Profile entspricht einem Resampling (siehe 3.1.2) des CT-Volumens entlang des Strahlenverlaufs. Standardmäßig wird eine Strahlenlänge von 20 mm beim Vermessen von Bronchien verwendet. $p_{\min_1}^i$, $p_{\max}^i$ and $p_{\min_2}^i$ sind die Stellen, an denen f' das erste Minimum im Lumen, das Maximum innerhalb der Wand und das nächste HE-Minimum oder -Plateau hinter der Wand (siehe Abb. 6.8) annimmt. Es werden nur Profile, die über einen "ausreichend" großen Kontrast verfügen, verarbeitet (100 HE zwischen Lumen und Wand, 20 HE zwischen Wand und Parenchym)[12]. An dieser Stelle kann nun die geschlossene Lösung für das Wanddickenproblem (6.17) benutzt werden, um die Wanddicke zu approximieren. Zusätzlich können noch die inneren und äußeren Wandpositionen , $p^i_{\mathrm{wall}_i}$ und $p^i_{\mathrm{wall}_o}$, sowie r_i und r_o, berechnet werden. Als HE-Wert für das Lungenparenchym α wird $f'(p^i_{\mathrm{min}_2})$ in Gleichung (6.17) benutzt.

Die N Messresultate entlang der einzelnen Strahlen werden nach der Länge des Integrationspfades $\left|edge^2_{10\%}, edge^1_{10\%}\right|$ sortiert. Kurze Integrationspfade bedeuten scharfe Kanten zwischen zwei verschiedenen Materialien. Das Endresultat der Messung in einer orthogonalen Schicht wird als Durchschnittswert der Wanddickenberechnungen definiert, die auf den kürzesten 25% der Integrationspfade erhalten wurden. Es werden zwei Methoden zur Berechnung der Lumen- und der Wandfläche in einer Ebene, A_{lumen} und A_{wall}, benutzt. Unter der Annahme, dass der Querschnitt eines idealen Luftweges annährend von kreisförmiger Gestalt ist (siehe 1.1.3), wird die Kreisformel $\pi \cdot r^2$ benutzt. Hierzu werden die Durchschnittswerte für r_o und r_i als Eingabewerte eingesetzt. Als zweite Methodik wird eine Ellipse durch die Menge der Luftwegsberandungspunkte gefittet. Hierzu wird die direkte Ellipse-Fitting Methode von Fitzgibbon [FPF99] angewendet, die Methodik wird ausführlich in Abschnitt 6.3.3 beschrieben, das verwendete Octave-Script ist in B.2.2 abgedruckt.

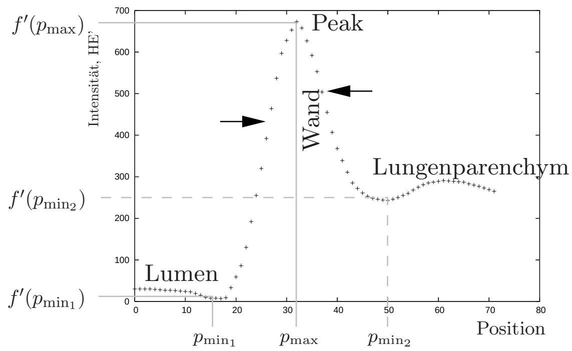


Abbildung 6.8: Die beiden Pfeile zeigen auf die berechneten Randpunkte p_{wall_i} und p_{wall_o} der Luftwegsberandung. $p^i_{\min_1}$, $p^i_{\max}$ and $p^i_{\min_2}$ sind die Stellen, an denen f' das erste Minimum im Lumen, das Maximum innerhalb der Wand und das nächste HE-Minimum oder -Plateau hinter der Wand (siehe Abb. 6.8) annimmt.

Um zwischen "glaubwürdigen" und "unglaubwürdigen" Messresultaten (z. B. im Falle von einem angrenzenden Blutgefäß) zu unterscheiden werden folgende Error-Variablen[13] beobachtet:

- Die Varianz über alle Dickemessungen in einer Ebene muss kleiner als ein Schwellenwert sein. Dies berücksichtigt die Ähnlichkeit der N Messungen in einer Ebene.
- Mehr als $\frac{N}{2}$ der Profile in einer Ebene müssen vermessbar gewesen sein.

[12] der gewählten Schwellenwerte siehe in 6.5
[13] Diskussion der gewählten Error-Variablen siehe in 6.5.

- $\left| \left\| p^i_{\text{wall}_i} - p^i_{\max} \right\| - \left\| p^i_{\text{wall}_o} - p_{\max} \right\| \right| \leq \tau \Delta x, y$, mit $\tau = 2$[14] muss auf einem Profil l^i erfüllt sein. Man beachte, dass ein kleiner Unterschied zwischen der inneren Wandstärke $\left\| p^i_{\text{wall}_i} - p^i_{\max} \right\|$ und der äußeren Wandstärke $\left\| p^i_{\text{wall}_o} - p^i_{\max} \right\|$ wegen des diskreten Samplings normal ist.
- $\left| \frac{A^{\text{circle}}_{\text{lumen}}}{A^{\text{ellipse}}_{\text{lumen}}} - 1 \right|$ muss kleiner als ein Schwellenwert sein. Dies stellt somit eine Bestätigung des, anhand der Skelettlinien, berechneten Richtungsvektors dar - denn für einen kreisrunden Anschnitt sollten $A^{\text{circle}}_{\text{lumen}}$ und $A^{\text{ellipse}}_{\text{lumen}}$ nahezu identisch sein.

Zusätzlich werden die ersten und die letzten beiden Skelettpunkte zwischen zwei Knotenpunkten nicht für das Messen benutzt, da diese Messungen meist von den Knotenpunkten (von den Gabelungen der Bronchien) beinflußt werden.

6.3.3 Ellipse Fitting

Eine weitere Methode, neben dem Anwenden der Kreisformel, die Lumenfläche eines Bronchus zu bestimmen, stellt das Ellipse Fitting dar. Hat man via IBM die Startpunkte der Bronchialwand bestimmt, so erhält man eine Menge von Punkten in einer Ebene. Von diesen weiß man nun wegen der Anatomie eines Bronchus, dass sie kreisförmig bis elliptisch angeordnet sein müssen. Es bietet sich somit an, eine Ellipse in diese Punktmenge zu fitten. Das Problem eine Ellipse in eine Punktwolke zu legen, tritt in vielen verschiedenen Anwendungsbereichen auf. Im Laufe der Zeit haben sich verschiedene Ansätze herausgebildet. Iterative und direkte Verfahren, geometrische und algebraische Verfahren sowie Clustering-Verfahren [GGS96].

Da unsere Punkte im allgemeinen nicht auf der x_1, x_2-Ebene (x, y-Ebene) liegen, müssen wir zunächst eine Transformation der Punktwolke in diese durchführen. Die Transformationsmatrix läßt sich mit Hilfe der C++-Klasse `vtkLandmarkTransform` bestimmen (siehe Anhang B.3.1).

Nach der Transformation kann das vereinfachte Problem in der x_1, x_2-Ebene gelöst werden. Zum Fitten der Ellipse wurde das von [FPF99] vorgeschlagene Verfahren implementiert. Der nun folgende mathematische Beweis geht über die Beweisführung in dem angeführten Artikel hinaus und bietet einige Verbesserungen und Erweiterungen.

Eine Ellipse gehört zu den Kurven zweiter Ordnung [BS91]. Dies sind Punktmengen, deren Koordinaten $x = (x_1, x_2)$ einer Gleichung folgender Form genügen:

$$F(\alpha, x) = \alpha \cdot x = ax_1^2 + bx_1x_2 + cx_2^2 + dx_1 + ex_2 + f = 0, \tag{6.20}$$

wobei $\alpha = [a, b, c, d, e, f]^T$ und $x = [x_1^2, x_1x_2, x_2^2, x_1, x_2, 1]$. $F(\alpha, x')$ wird als algebraische Distanz eines beliebigen Punktes x' zu der Kurve $F(\alpha, x) = 0$ bezeichnet. Zum Lösen des Fitting-Problems, muss die Summe der quadratischen Distanzen:

$$D(\alpha) = \sum_{i=1}^{N} F(\alpha, x_i)^2 \,, \tag{6.21}$$

der N Datenpunkte x_i, durch die die Ellipse gefittet werden soll, minimiert werden. Um eine elliptische Lösung sicherzustellen[15], wird der Parametervektor α eingeschränkt.

[14] Für extrem kleine Voxelgrößen muss der Wert für τ gegebenenfalls erhöht werden.

[15] Nicht jede kurve 2. Ordnung ist eine Ellipse, auch Hyperbeln und Parabeln sind möglich [BS91][S. 220].

In [FPF99] werden die Nebenbedingung $4ac - b^2 = 1$ benutzt. Diese lassen sich in Matrizenform ausdrücken:

$$\alpha^T C\alpha = 1 \text{ mit } C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$D = (x_1, x_2, \cdots, x_N)^T$ wird als *Design-Matrix* bezeichnet. In diese fließen die Datenpunkte ein. Das Minimierungsproblem kann mit D und der formulierten Nebenbedingung auch geschrieben werden als:

$$\text{minimiere } E = \|D\alpha\|^2 \text{ unter der Nebenbedingung } \alpha^T C\alpha - 1 = 0. \tag{6.22}$$

Sei nun α solch ein minimierender Vektor. Der Satz über die Langrangeschen Multiplikatoren [For84a, Heu93] liefert nun, dass es ein $\lambda \in \mathbf{R}$ gibt, so dass

$$grad\left[\|D\alpha\|^2\right] = \lambda\, grad\left[\alpha^T C\alpha - 1\right].^{16} \tag{6.23}$$

Für die linke Seite gilt (mit der Kettenregel):

$$grad\left[\|D\alpha\|^2\right] = grad\left[\sum_{i=1}^{N}(x_i^T\alpha)^2\right] =$$

$$grad\left[\left\|\begin{pmatrix} x_{1,1}^2 & x_{1,1}x_{1,2} & x_{1,2}^2 & x_{1,1} & x_{1,2} & 1 \\ x_{2,1}^2 & x_{2,1}x_{2,2} & x_{2,2}^2 & x_{2,1} & x_{2,2} & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_{N,1}^2 & x_{N,1}x_{N,2} & x_{N,2}^2 & x_{N,1} & x_{N,2} & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \\ f \end{pmatrix}\right\|^2\right] =$$

$$\begin{pmatrix} \sum_{i=1}^N 2(x_i^T\alpha)\frac{\partial}{\partial a}(x_i^T\alpha) \\ \sum_{i=1}^N 2(x_i^T\alpha)\frac{\partial}{\partial b}(x_i^T\alpha) \\ \sum_{i=1}^N 2(x_i^T\alpha)\frac{\partial}{\partial c}(x_i^T\alpha) \\ \sum_{i=1}^N 2(x_i^T\alpha)\frac{\partial}{\partial d}(x_i^T\alpha) \\ \sum_{i=1}^N 2(x_i^T\alpha)\frac{\partial}{\partial e}(x_i^T\alpha) \\ \sum_{i=1}^N 2(x_i^T\alpha)\frac{\partial}{\partial f}(x_i^T\alpha) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^N 2(x_i^T\alpha)x_{i,1}^2 \\ \sum_{i=1}^N 2(x_i^T\alpha)x_{i,1}x_{i,2} \\ \sum_{i=1}^N 2(x_i^T\alpha)x_{i,2}^2 \\ \sum_{i=1}^N 2(x_i^T\alpha)x_{i,1} \\ \sum_{i=1}^N 2(x_i^T\alpha)x_{i,2} \\ \sum_{i=1}^N 2(x_i^T\alpha)1 \end{pmatrix} = 2D^T D\alpha. \tag{6.24}$$

Betrachte nun die rechte Seite:

$$\lambda\, grad\left[\alpha^T C\alpha - 1\right] = \lambda\, grad\left[4ac - b^2 - 1\right] = \lambda\begin{pmatrix} 4c \\ -2b \\ 4a \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 2\lambda C\alpha\,. \tag{6.25}$$

[16] Anschaulich ist klar, dass ein gefundenes Extremum in diesem Fall ein Minimum ist, zur Untermauerung dieser Aussage muss die Hessesche Matrix aufgestellt werden. Diese ist $2D^T D$, also positiv definit, es handelt sich bei einem Extremum somit um ein Minimum.

Man erhält also:

$$2D^T D\alpha = 2\lambda C\alpha\,. \tag{6.26}$$

Mit der sogenannten *Scatter-Matrix* $S = D^T D$ läßt sich unser Problem jetzt schreiben als:

$$S\alpha = \lambda C\alpha,\ \ \alpha^T C\alpha - 1 = 0\,. \tag{6.27}$$

Offensichtlich ist S symmetrisch mit lauter reellen Einträgen, d.h. S ist hermitesch $S = \overline{S}^T = S^H$. Für eine beliebig $m \times n$-Matrizen A gilt, dass $A^H A$ positiv semidefinit ist, denn für $x \in \mathbf{C}^n$ gilt $x^H(A^H A)x = \|Ax\|^2 \geq 0$. Und somit sind alle Eigenwerte von S nicht negativ [SB90, S. 18]. Betrachten wir zunächst den Fall, dass S positiv semidefinit ist, d.h. $\exists\ x \neq 0$ mit $\|Dx\| = 0$. Wir können somit eine Lösung unseres Ausgangsproblems direkt bestimmen, die Punkte liegen auf einer Kurve 2. Ordnung. Eine ellipsoide Lösung kann hiermit aber nicht gewährleistet werden, die Ergebnisse können auch hyperbolische oder parabolide Form besitzen.

Im Folgenden wird davon ausgegangen, dass S positiv definit ist. (6.27) wird auch als allgemeines Eigenwertproblem bezeichnet und kann mit dem QZ-Verfahren von Moler und Stewart gelöst werden [SB90, S. 82]. Hat man eine Lösung (λ, τ) des Problems (6.27), d.h. $S\tau = \lambda C\tau$, dann kann man sich eine Lösung des Gesamtproblems konstruieren, denn für jedes μ ist auch $(\lambda, \mu\tau)$ eine Lösung. Man kann deshalb $\mu^2\tau^T C\tau = 1$ fordern, und erhält:

$$\mu = \sqrt{\frac{1}{\tau^T C\tau}}. \tag{6.28}$$

$\alpha = \mu\tau$ würde das Minimierungsproblem in (6.22) lösen.

Bleibt noch die Frage ob das Problem in (6.22) überhaupt eine Lösung besitzt? Multipliziert man $S\alpha = \lambda C\alpha$ von links mit α^T, dann erhält man durch Umstellen: $\lambda = \frac{\alpha^T S\alpha}{\alpha^T C\alpha}$. Da $\alpha^T C\alpha = 1$ und S positiv definit und deshalb $x^H Sx > 0$ folgt $\lambda > 0$.
$\Rightarrow$ **Falls eine Lösung existiert, muss diese mit einem positiven Eigenwert korrespondieren.**

Lemma. *Sei $S \in \mathbf{R}_{n\times n}$ positiv definit und $C \in \mathbf{R}_{n\times n}$ symmetrisch. Dann sind die Vorzeichen der generalisierten Eigenwerte von $S\alpha = \lambda C\alpha$ bis auf eine Permutation der Reihenfolge gleich derer der Matrix C.*

Beweis. Sei $\sigma(S)$ das Spektrum von S (Menge der Eigenwerte von S) und $\sigma(S, C)$ das Spektrum des generalisierten Eigenwertproblems $S\alpha = \lambda C\alpha$. Es ist also zu zeigen, dass $signs(\sigma(C)) = signs(\sigma(S, C))$. Da S positive definit, gibt es nach [Sto94, S. 196 ff. (Cholesky-Verfahren)] eine Matrix L, so dass $S = LL^H$. Weiter existiert S^{-1} und somit auch L^{-1}. Somit: $LL^H\alpha = \lambda C\alpha$ und durch die Substitution $u = L^H\alpha$ gilt: $Lu = \lambda C(L^H)^{-1}u$. Also: $u = \lambda L^{-1}C(L^{-1})^H u$ und $signs(\sigma(S, C)) = signs(\sigma(L^{-1}C(L^{-1})^H))$. Vom *Sylvesterschen Trägheitssatz* erhält man, dass die Anzahl der positiven, negativen und Null-Eigenwerte für C und $L^{-1}C(L^{-1})^H$ gleich bleibt, d.h. $signs(\sigma(L^{-1}C(L^{-1})^H)) = signs(C)$ und abschließend $signs(C) = signs(\sigma(S, C))$. □

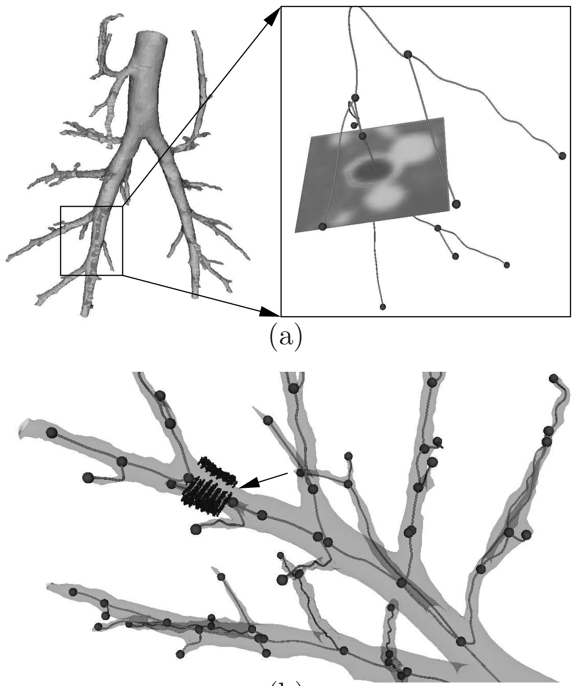
Satz. *Die Lösung des Minimierungs-Problems (6.22) liefert exakt eine elliptische Lösung. Diese korrespondiert mit dem einzigen generalisierten positiven Eigenwert des Problems in (6.27).*

Beweis. Die Eigenwerte von C sind $\{-2, -1, 2, 0, 0, 0\}$. Das vorangegangene Lemma liefert nun, dass unser generalisiertes Eigenwertproblem (6.27) genau einen positiven Eigenwert besitzt. □

Um die Fläche der gefundenen Ellipse zu bestimmen, wird diese in ihre Normalform transformiert. Das Vorgehen (Hauptachsentransformation) wird beispielsweise in [BS91] beschrieben. Das Octave-Script zum Lösen des Fitting-Problems ist in Anhang B.2.2 zu finden (mit Hauptachsentrafo und Flächenberechnung). Wie man Octave als numerischen Server aus einer C++-Umgebung nutzen kann, wird in Anhang B.2 gezeigt.

6.3.4 Globale Bronchialbaumanalyse

Die eingeführte 3D-Wanddickenbestimmung ist nicht auf orthogonal zu einer Scanschicht angeschnittene Bronchien beschränkt. Vielmehr ist es möglich alle segmentierten Bronchien, unabhängig davon welcher Segmentierungsalgorithmus benutzt wurde, zu vermessen. Abbildung Abb. 6.9 zeigt beispielhaft, wie man sich das Vermessen eines Bronchus vorstellen kann. Somit kann eine globale Analyse des segmentierten Bronchialbaums durchgeführt werden.



(a)

(b)

Abbildung 6.9: (a) 3D-Vermessung eines Schweine-Bronchus in einer "Box of Interest". Möchte man nur einen Bronchus vermessen, so können sämtliche Algorithmen in einer Box of Interest angewendet werden. (b) Hier wurde der komplette Tracheobronchialbaum eines Schweines segmentiert und für diese Darstellung lediglich ein Bronchus vermessen. Die dunklen Punkte um den vermessenen Bronchus stellen die gefundenen CT-Maxima dar. Die Lücke zwischen den Maxima (schwarzer Pfeil) ist durch ein angrenzendes Blutgefäß verursacht - der Algorithmus konnte hier die CT-Maxima nicht finden oder der Kontrast war zu gering.

Der prozentuale Wandanteil wall% wurde in (1.3) definiert. Vermißt man nur einige wenige Bronchien in einem Datensatz, so kann dies zu irreführenden Ergebnissen führen, da eine mögliche Erkrankung nicht notwendigerweise homogen über den Tracheobronchialbaum verteilt sein muss. Um dies zu umgehen, definieren wir nun folgende, den kompletten Bronchialbaum beschreibende, Kenngröße[17]:

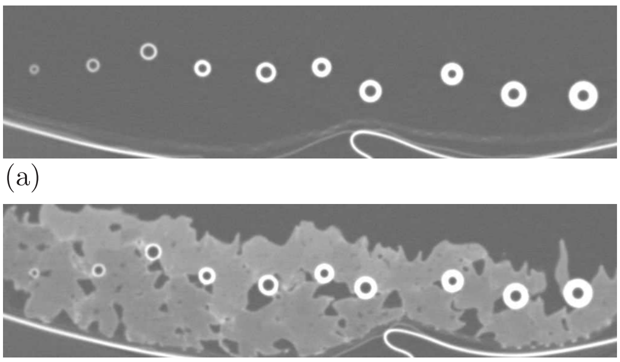
$$GBT_{3,8} := \underset{3 \leq d_0 \leq 8}{\text{mean}} \; \text{wall\%} \,. \tag{6.29}$$

Es wurde das Intervall $[3, 8]$ mm gewählt, da die meisten äußeren Durchmesser d_o der segmentierten Bronchien in diesem Bereich liegen. Durch die Wahl der oberen Grenze von 8 mm, liegen die Bronchien eines erwachsenen Menschen innerhalb des Lungenparenchyms (siehe 1.1), dadurch ist ein höherer Kontrast zwischen Bronchialwand und dem umliegenden Gewebe gewährleistet. Die Wanddicke der Bronchien eines gesunden menschlichen Bronchialbaums liegt bei etwa 10-16 % des inneren Durchmessers und somit liegt der normale Bereich für wall% bei 31-43 % (siehe 1.1.3). In der Realität erwartet man speziell in krankhaft veränderten Lungen keinen konstanten Wert für wall%.

6.4 Resultate mit der integral-basierten Methode

6.4.1 Phantommessungen

Zum Validieren der IBM-Resultate in realen CT-Bildern, wurden verschiedene Phantommessungen durchgeführt. Das verwendete *Silikon-Schlauch-Phantom* ist in Abb. 6.10 zu sehen. Das Phantom, bestehend aus 10 Schläuchen (Silikonschläuche von der Deutsch-&Neuman GmbH aus Berlin, Wanddicken im Bereich von 0.3 - 2.5 mm, äußerer Durchmesser im Bereich von 2.6 - 9.0 mm), wurde mit einem Philips Multislice-CT Scanner (Brilliance CT 64, Philips Medical Systems, Niederlande) gescannt.



(b)

Abbildung 6.10: (a) Das Silikon-Schlauch-Phantom besteht aus 10 Silikonschläuchen mit unterschiedlichen Innen- und Außendurchmessern. Die Schläuche waren für diesen Scan orthogonal zur Scannebene in der Gantry platziert. (b) Hier wurde das Silikon-Schlauch-Phantom mit Sprühsahne umgeben, um das Lungenparenchym zu modellieren.

[17] GBT aus dem Englischen "global bronchial tree".

Tabelle 6.1: Geometrie der 10 Schläuche

$Nr.$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
w	0.3	0.4	0.5	1.0	1.0	1.5	1.5	2.0	2.0	2.5
d_i	2.0	3.0	4.0	3.0	4.0	3.0	4.0	3.0	4.0	4.0
d_o	2.6	3.8	5.0	5.0	6.0	6.0	7.0	7.0	8.0	9.0
p_1	-663	-514	-360	39	137	280	282	345	315	366
p_2	-749	-652	-542	-200	-148	44	44	184	157	245
p_3	-665	-538	-388	8	93	252	257	337	308	361
p_4	-747	-659	-551	-214	-155	33	30	172	143	230
$wall\%$	41	38	36	64	56	75	67	82	75	80

Abkürzungen die in dieser und den folgenden Tabellen benutzt werden: Nummer des Schlauches ($Nr.$), Wandstärke (w), innerer Durchmesser (d_i), äußerer Durchmesser (d_o), gemessene Wandstärke ($\tilde{w}$), absoluter Fehler Δw und relativer Fehler $\%w$. CT-Peak-Werte für FOV 1 Kernel L (p_1), FOV 1 Kernel B (p_2), FOV 2 Kernel L (p_3) und FOV 2 Kernel B (p_4). CT-Peak-Werte höher als der erwartete (berechnete) CT-Wert von ≈ 207 HE lassen sich durch Amplitudenwerte > 1.0 in der MTF-Kurve des Scanners begründen.

Tabelle 6.1 zeigt die Geometrie der Silikonschläuche wie vom Hersteller angegeben. Wir nummerieren die einzelnen Schläuche, entsprechend der Abb. 6.10, von links nach rechts aufsteigend. Die Wandstärken von Schlauch Nr. 1 bis zu Schlauch Nr. 10 sind monoton zunehmend. Die Rekonstruktionen wurden mit dem B Kernel und dem härteren L Kernel durchgeführt, als Voxelgröße wurde $0.19 \times 0.19 \times 0.9\,\mathrm{mm}^3$ (FOV 1) und $0.35 \times 0.35 \times 0.9\,\mathrm{mm}^3$ (FOV 2) mit einem Schichtabstand von 0.45 mm gewählt. Alle Schläuche hatten die gleiche physikalische Dichte, vom Hersteller mit $\rho = 1,14\,\mathrm{g/cm}^3$ angegeben. Die CT-Peak-Werte der 10 Schläuche für die beiden verwendeten FOVs und für beide Rekonstruktionskernels sind in Tabelle 6.1 abgedruckt. Wegen der Korrelation zwischen den CT-Werten und der Dichte ρ, läßt sich ein zu erwartender CT-Wert mittels den in [SBS00] beschriebenen Konvertierungsmethoden berechnen. Wir erhalten rechnerisch eine Röntgendichte von ca. 207 HE[18], basierend auf der vom Hersteller angegebenen Dichteinformation. Abb. 6.11 zeigt die benötigten BPL-Werte[19] für ein exaktes Messen der Schläuche.

[18]Benutzt wurde die Konvertierungsformel (19) aus [SBS00]: $(1.017 + 0.592 \times 10^{-3} H)\,\mathrm{gcm}^{-3}$, H ist Variable für den Hounsfieldwert, ρ steht für die Dichte des Materials.

[19]Die BPL-Werte wurden mittels Ausprobieren ermittelt, für die Definition des BPL-Wertes siehe 6.2.2.

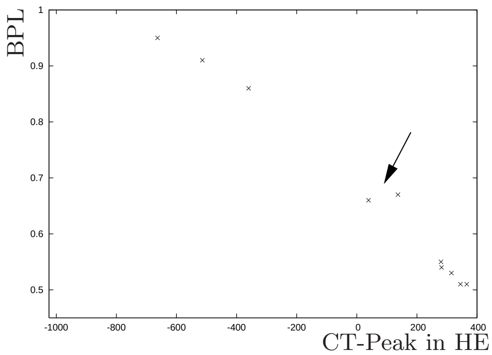


Abbildung 6.11: Die benötigten BPL-Werte um die wahren Wandstärken der 10 Schläuche zu erhalten. Die für diesen Graphen benutzten Bilder wurden mit dem L Kernel und FOV 1 rekonstruiert. Schläuche mit schmaleren Wänden erzeugen kleinere CT-Peak-Werte. Man erhält etwas höhere CT-Peak-Werte, als der berechnete zu erwartende CT-Wert von ≈ 207 HE, für die breiteren Schlauchwände. Dieser Effekt läßt sich mit den höheren Amplituden der MTF eines CT-Scanners begründen (siehe Abschnitt 6.4). Die Pfeile zeigen auf Schlauch Nr. 4 und Nr. 5, beide haben die gleiche Wanddicke aber signifikant unterschiedliche CT-Peak-Werte (39 HE and 137 HE). Dies wird hauptsächlich durch die verschiedenen Durchmesser der beiden Schläuche, die den CT-Peak-Wert im Zuge der Faltung des idealen CT-Bildes mit der System-PSF beeinflussen, hervorgerufen. Offensichtlich gibt es keine bijektive Abbildung zwischen den BPL-Werten und den CT-Peak-Werten. Man bemerke, dass es möglich ist, für verschiedene Wanddicken gleiche CT-Peak-Werte zu erhalten - dies ist durch die Form der MTF eines CT-Scanners begründet - es ist keine umkehrbare Funktion (siehe Abb. 6.4). Im Allgemeinen gibt es keinen exakten linearen Zusammenhang zwischen den BPL-Werten und den CT-Peak-Werten.

Für eine zweite Aufnahmesituation wurden die Schläuche, von Sprühsahne umgeben, gescannt. Die Sprühsahne weist in den CT-Bildern einen mittleren CT-Wert von ca. -750 HE auf und dient zur Simulation des Lungenparenchyms. Das Silikon-Schlauch-Phantom wurde mit und ohne simuliertem Lungenparenchym sowohl orthogonal zur Scannebene (90° Scan) als auch in einem 45° Winkel zur Scanebene (45° Scan) im CT-Scanner platziert. Die Kalibrierung des λ-Wertes an die zwei verschiedenen Kernel erfolgte durch Vermessen von Schlauch Nr. 10 (in FOV 1, 90° Scan). Für das Vermessen der Schläuche wurde $\lambda = 0.90$, für alle Scans die mit Kernel L, und $\lambda = 0.93$, für alle Scans die mit Kernel B rekonstruiert wurden, benutzt. Die Messresultate werden im Folgenden besprochen, die meisten sind tabellarisiert. Abb. 6.12 zeigt exemplarische Screenshots, beim Vermessen des Phantoms erstellt. Die berechneten inneren und äußeren Radien hängen hauptsächlich von der berechneten Wandstärke ab, deshalb beschränken wir uns in der tabellarischen Darstellung auf die Resultate der Wanddickenberechnung.

Tabelle 6.2 dokumentiert die Resultate der einfachen FWHM-Methode. Der mittlere absolute Fehler (relative Fehler) für die Wanddickenbestimmung der einzelnen Röhrchen war 0.31 mm (70 %) für den L Kernel und FOV 1. Der maximale relative Fehler trat für das kleinste Röhrchen (Nr. 1) mit 318 % auf. Man beachte, dass sogar die monoton zunehmende Wandstärke von Röhrchen Nr. 1 bis Nr. 10 von der FWHM-Methode nicht

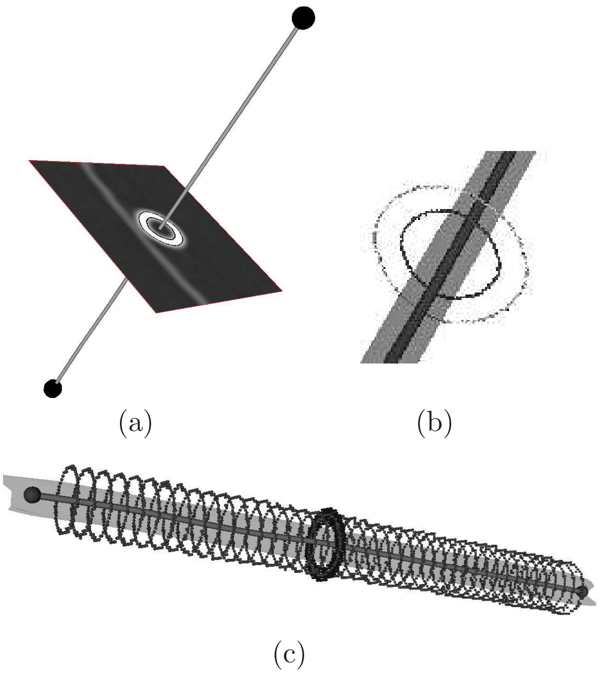


Abbildung 6.12: (a) Der Graph eines Röhrchens besteht genau aus einer Kante und 2 Endpunkten. Eine Ebene orthogonal zur Richtung der Kante ist dargestellt. (b) Berechnete innere und äußere Wandgrenzen eines Röhrchens. (c) Entlang der Skelettlinie eines Röhrchens können viele Wandvermessungen durchgeführt werden.

erhalten bleibt. Für den B Kernel und FOV 1 war der mittleren Fehler 0.57 mm (100 %). Die mittleren Fehler mit der FWHM-Methode waren für FOV 2 etwas höher[20]: 0.36 mm (77 %) für den L Kernel und 0.60 mm (104 %) für Kernel B.

Die folgenden Tabellen dokumentieren die Messresultate mit der neuentwickelten IBM. Die mittleren Fehler in Tabelle 6.3 waren für FOV 1 0.02 mm (2 %) und für FOV 2 0.02 mm (3 %) - dies sind die Resultate für den B Kernel und den 90° Scan. Für den L Kernel und FOV 1 lieferte IBM 0.01 mm (2 %) und für FOV 2 0.02 mm (2 %) [20]. Die durchschnittlichen Fehler waren für FOV 2 geringfügig höher.

In Tabelle 6.4 sind die durchschnittlichen Fehler 0.01 mm (2 %) für den 90° Scan, rekonstruiert mit Kernel L und FOV 1, und 0.02 mm (2 %) für den 45° Scan. Für FOV 2 waren die durchschnittlichen Fehler 0.02 mm (2 %) für den 90° Scan und 0.03 mm (4 %) für den 45° Scan [20]. Es liegen somit nur kleine Unterschiede zwischen den Resultaten für die beiden verschiedenen Winkel vor.

Die Tabellen 6.5 und 6.6 zeigen die Resultate für die schwierigsten Testsituationen, die Röhrchen waren hier von der Sprühsahne umgeben, die das Lungenparenchym simulieren soll. Die mittleren Fehler für den 90° Scan und FOV 1 waren 0.03 mm (3 %) und für den 45° Scan 0.03 mm (4 %). Die Fehler waren für FOV 2 etwas größer: 0.04 mm (5 %) für den 90° Scan und 0.04 (5 %) für den 45° Scan.

Die neue integral-basierte Methode liefert im Allgemeinen gute Ergebnisse in allen getesteten Situationen. Die größten Fehler treten bei den schwierigsten Testsituationen auf, die Fehler sind im Allgemeinen für geringere Wandstärken leicht größer.

[20] Die einzelnen Resultate für diesen Scan sind nicht tabellarisiert.

Tabelle 6.2: Phantommessungen - Vergleich der Resultate der FWHM-Methode für den B Kernel und den L Kernel (FOV 1, 90° Scan)

	FOV 1 Kernel B & 90°			FOV 1 Kernel L & 90°		
no.	$\tilde{w}$	Δw	$\%w$	$\tilde{w}$	Δw	$\%w$
1	1.20	0.90	299.67	1.25	0.95	318.00
2	1.57	1.17	292.00	1.13	0.73	183.00
3	1.50	1.00	200.00	1.10	0.60	120.00
4	1.65	0.65	64.70	1.29	0.29	28.80
5	1.64	0.64	64.00	1.30	0.30	30.30
6	1.86	0.36	23.87	1.59	0.09	5.73
7	1.84	0.34	22.67	1.58	0.08	5.53
8	2.22	0.22	10.75	2.02	0.02	0.90
9	2.24	0.24	12.10	2.06	0.06	3.00
10	2.65	0.15	6.00	2.52	0.02	0.84

Tabelle 6.3: Phantommessungen - Vergleich der Resultate mit IBM für FOV 1 und FOV 2 (Kernel B, 90° scan)

	FOV 1 Kernel B & 90°			FOV 2 Kernel B & 90°		
no.	$\tilde{w}$	Δw	$\%w$	$\tilde{w}$	Δw	$\%w$
1	0.29	-0.01	2.67	0.31	0.01	3.67
2	0.41	0.01	2.00	0.42	0.02	4.25
3	0.54	0.04	7.60	0.54	0.04	7.80
4	1.03	0.03	2.50	1.03	0.03	3.00
5	1.02	0.02	2.40	1.06	0.06	5.80
6	1.48	-0.02	1.20	1.49	-0.01	0.87
7	1.50	0.00	0.27	1.49	-0.01	0.53
8	2.02	0.02	0.90	2.02	0.02	0.80
9	1.98	-0.02	1.15	1.99	-0.01	0.50
10	2.50	0.00	0.12	2.51	0.01	0.40

Tabelle 6.4: Phantommessungen - Vergleich der Resultate mit IBM für Scanwinkel von 45° und 90° (Kernel L, FOV 1)

	FOV 1 Kernel L & 90°			FOV 1 Kernel L & 45°		
no.	$\tilde{w}$	Δw	$\%w$	$\tilde{w}$	Δw	$\%w$
1	0.29	-0.01	2.33	0.31	0.01	1.67
2	0.41	0.01	3.50	0.43	0.03	6.75
3	0.54	0.04	7.60	0.53	0.03	5.80
4	1.01	0.01	0.60	1.01	0.01	1.40
5	1.03	0.03	3.30	1.04	0.04	4.10
6	1.49	-0.01	0.67	1.48	-0.02	1.07
7	1.50	0.00	0.33	1.49	-0.01	0.60
8	1.99	-0.01	0.30	1.98	-0.02	1.20
9	1.98	-0.02	0.80	1.97	-0.03	1.35
10	2.50	0.00	0.16	2.52	0.02	0.92

Tabelle 6.5: Phantommessungen - Vergleich der Resultate mit IBM für Scanwinkel von 45° und 90° (Spray Cream, Kernel L, FOV 1)

	FOV 1 & Kernel L & Spray Cream & 90°			FOV 1 & Kernel L & Spray Cream & 45°		
no.	$\tilde{w}$	Δw	$\%w$	$\tilde{w}$	Δw	$\%w$
1	0.31	0.01	2.33	0.33	0.03	9.67
2	0.41	0.01	3.00	0.44	0.04	8.75
3	0.53	0.03	6.40	0.55	0.05	9.60
4	0.98	-0.02	1.70	1.03	0.03	3.30
5	1.03	0.03	2.60	1.06	0.06	6.00
6	1.48	-0.02	1.53	1.47	-0.03	2.13
7	1.47	-0.03	1.87	1.50	0.00	0.07
8	1.95	-0.05	2.55	1.98	-0.02	1.00
9	1.94	-0.06	2.85	1.95	-0.05	2.40
10	2.47	-0.03	1.40	2.50	0.00	0.12

Tabelle 6.6: Phantommessungen - Vergleich der Resultate mit IBM für Scanwinkel von 45° und 90° (Spray Cream, Kernel L, FOV 2)

	FOV 2 & Kernel L & Spray Cream & 90°			FOV 2 & Kernel L & Spray Cream & 45°		
no.	$\tilde{w}$	Δw	$\%w$	$\tilde{w}$	Δw	$\%w$
1	0.36	0.06	19.33	0.35	0.05	18.00
2	0.42	0.02	4.25	0.36	-0.04	9.75
3	0.55	0.05	9.00	0.54	0.04	7.00
4	1.03	0.03	2.90	1.01	0.01	1.00
5	1.09	0.09	8.70	1.08	0.08	8.20
6	1.51	0.01	0.67	1.47	-0.03	1.87
7	1.51	0.01	0.80	1.50	0.00	0.20
8	1.96	-0.04	2.20	1.97	-0.03	1.55
9	1.96	-0.04	2.20	1.95	-0.05	2.65
10	2.47	-0.03	1.08	2.52	0.02	0.96

6.4.2 Globale Bronchialbaumanalyse

Abb. 6.13 zeigt 3 Graphen, die aus den Messresultaten eines menschlichen Bronchialbaums generiert wurden. Abb. 6.13a zeigt die wall%-Werte aufgetragen gegen den äußeren Durchmesser der vermessenen Bronchien. Man beachte, dass für einen bestimmten äußeren Durchmesser verschiedene wall%-Werten gemessen wurden.

Abb. 6.13b zeigt die CT-Peak-Werte aufgetragen versus dem äußeren Durchmesser und Abb. 6.13c dokumentiert den linearen Zusammenhang zwischen dem äußeren Durchmesser und der Wandstärke, der in (1.2) hergeleitet wurde. Ein linearer Zusammenhang kann für Bronchien mit einem äußeren Durchmesser kleiner als 8 mm gesehen werden. Es sollte klar sein, dass sich die Messergebnisse, selbst wenn wir einen Bronchus perfekt vermessen könnten, in zwei verschiedenen Scans eines Individuums unterscheiden können, da wall% auch von dem Einatemstadium des Individuums abhängt. Die Fläche bzw. das Volumen des Lumens ist nicht konstant. Zum Vermessen der Bronchien empfiehlt es sich, den CT-Scan während tiefer Inspiration durchzuführen[21], dadurch wird der Kontrast zwischen Bronchialwand und belüftetem Lungenparenchym erhöht[22] und ein Vermessen der Bronchien erleichtert. Der Einatmungsstatus kann sich des weiteren auch während des Scans eines Individuums leicht ändern, dieser Effekt wird durch die sehr hohe Geschwindigkeit aktueller Scanner verringert und wird in der Zukunft, durch die sich ständig steigernde Performance der CT-Scanner, weiter eingedämmt.

[21] Der Scan während Inspiration ist der Standard in der radiologischen Lungendiagnostik.

[22] Um einen CT-Scanner zu einer festgelegten Atemphase zu starten, werden in der Medizin sogenannte Trigger eingesetzt. Trigger sind technisch gesteuerte Auslöser eines Messvorgangs (hier: des CT-Scans). Ein CT-Scanner kann beispielsweise mittels EKG oder mit einem um den Brustkorb angelegten Gürtel getriggert werden. Für Routinescans ist der Einsatz eines Triggers nicht üblich - getriggert wird in der klinischen Routine mit der Aufforderung: "Bitte tief einatmen!"

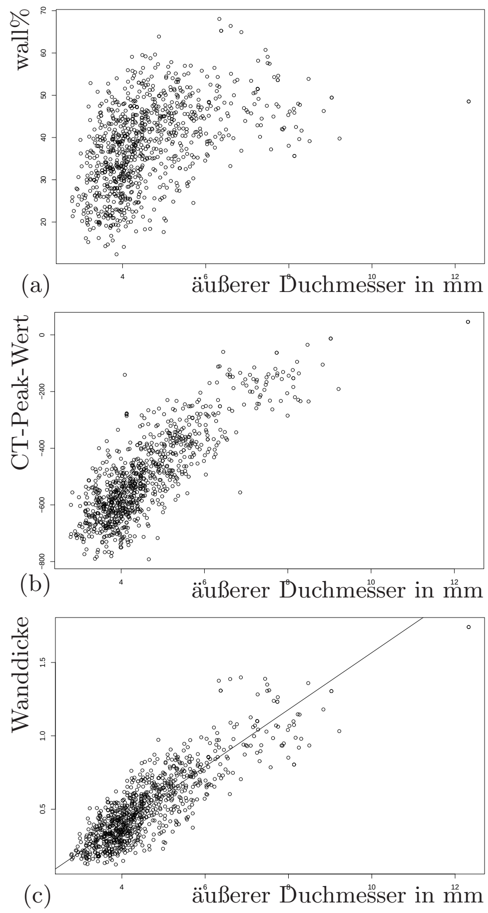


Abbildung 6.13: (a) wall% vs. äußerer Durchmesser. Für einen einzelnen äußeren Durchmesser wurde ein Bereich für wall% gemessen. $GBT_{3,8} = 38.10$. (b) CT-Peak-Wert vs. äußerer Durchmesser. (c) Berechnete Wanddicke vs. äußerer Durchmesser. Parameter des linearen Fits: Steigung $= 0.194$, $R^2 = 0.702$, residual standard error $= 0.128$. Die Graphen (a)-(c) sind aus einem menschlichen Datensatz entstanden. Die Software konnte die Wanddicken in 904 verschiedenen orthogonalen Ebenen bestimmen.

Wiederholbarkeit der globalen Bronchialbaumanalyse

Um die Wiederholbarkeit von Bronchialwanddickenbestimmungen in realen CT-Bildern echter Lungen zu prüfen, wurden 8 Schweine zweimal gescannt. Es wurde das identische Scan-Protokoll eingesetzt, der zweite Scan erfolgte eine kurze Zeitspanne nach dem ersten Scan nach einer Repositionierung der Schweine auf dem CT-Scanner (Siemens Somatom Plus 4). Die Schweine wurden mechanisch ventiliert und die Scans während eines Atemanhaltens durchgeführt. Alle Datensätze wurden mit dem gleichen Kernel rekonstruiert. Die Voxelgröße war $0.31 \times 0.31 \times 1.0\,\mathrm{mm}^3$. Die maximale absolute Differenz zweier $GBT_{3,8}$-Werte eines Schweines war 1.22 und die mittlere Differenz war 0.60 (siehe Abb. 6.14).

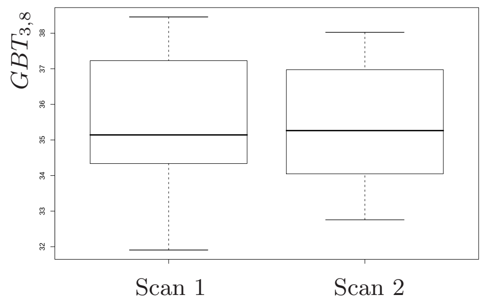


Abbildung 6.14: Box-Whisker-Plot der $GBT_{3,8}$-Werte für zwei Scanserien der gleichen 8 Schweine. Der Pearson-Korrelationskoeffizient der $GBT_{3,8}$-Werte der beiden Scanserien war $r = 0.93$. Der Median der $GBT_{3,8}$-Werte war im ersten Scandurchgang 35.14 und im 2. Durchgang 35.26 .

Globale Bronchialbaumanalyse von Raucher- und Nichtraucher-Datensätzen

Läßt sich mit der globalen Bronchialbaumanalyse eine Gruppe von Rauchern von einer Nichtrauchergruppe unterscheiden? Um dies zu beantworten haben wir 16 Raucher mit einer Rauchervergangenheit von 50 ± 25 Packungsjahren[23] und 15 Nichtraucher CT-Datensätze ohne Rauchervergangenheit analysiert. Alle Datensätze wurden mit dem gleichen CT-Scanner (Siemens Volume Zoom) erzeugt und mit dem gleichen Kernel rekonstruiert. Die Voxelgröße war $0.39 \times 0.39 \times 1.0\,\text{mm}^3$. Der Medianwert der $GBT_{3,8}$-Werte für die Raucher war 39.12 (Mittelwert 38.86, Wertebereich 24.73-51.74) und für die Nichtraucher 28.56 (mean 29.62, range 24.40-40.60), siehe Abb. 6.15. Der $GBT_{3,8}$-Medianwert ist signifikant unterschiedlich für die beiden Gruppen (zweiseitiger Wilcoxon rank sum test: $p = 0.0008$). Der Median der Steigung des linearen Fits zwischen der Wandstärke und dem äußerem Luftwegsdurchmesser (siehe den Beispielgraphen Abb. 6.13c) war 0.18 (Mittelwert 0.18, Wertebereich 0.11-0.29) für die Raucher und 0.14 (Mittelwert 0.14, Wertebereich 0.10-0.22) für die Nichtraucher. Die Steigung war für die Raucher signifikant höher (zweiseiter Wilcoxon Rangsummentest: $p = 0.0041$).

In dieser Untersuchung war die neue Methode in der Lage zwischen Rauchern und Nichtrauchern anhand der Bronchialwanddicke zu unterscheiden. Weitere klinische Studien zur Quantifizierung der Bronchialwände bei Lungenerkrankungen, u.a. mit Rauchern und Nichtrauchern, werden fortgesetzt.

Die durchschnittliche Laufzeit auf einem PC (Intel Pentium 4, 3.0 GHz, 2GB RAM) für die vorbereitenden Algorithmen (Segmentierung, Skelettierung, Graphenaufbau) war 202 s (Wertebereich 176-238 s). Die durchschnittliche Laufzeit für die darauf folgende globale Analyse der Bronchialbäume betrug 406 s (Wertebereich 296-501 s) und hing hauptsächlich von der Größe des Baums und der Bildqualität ab[24]. Mehr als 500, als “glaubwürdig” eingestufte Messungen, konnten für jeden Patienten in ein Textfile für statistische Auswertungen geschrieben werden.

[23] Packungsjahren (engl. pack-years): die Zahl der täglich konsumierten Zigarettenpackungen (Inhalt ca. 20 Stück) wird mit der Zahl der Raucherjahre multipliziert.

[24] Der zeitaufwändigste Teil ist der zur Zeit noch das Ellipse Fitting, da dies als Octave-Script implementiert ist und via Pipe (siehe B.2.1) benutzt wird.

Man beachte, dass der $GBT_{3,8}$-Wert den globalen Bronchialbaum beschreibt und von dem segmentierten Teil des Bronchialbaums abhängt. Der $GBT_{3,8}$-Wert kann unter Umständen verfälscht werden, falls eine Erkrankung nicht homogen in der Lunge verteilt ist oder wenn von der Krankheit beeinflusste Bronchien nicht von dem Segmentierungsalgorithmus detektiert wurden. Für die in diesem Abschnitt beschriebenen Analyseergebnisse wurden die Segmentierungsergebnisse des in 4.4 beschriebenen Tracheobronchialbaumtracers benutzt.

Für die statistischen Auswertungen in diesem Abschnitt wurde GNU R 2.3.1 für Windows benutzt.

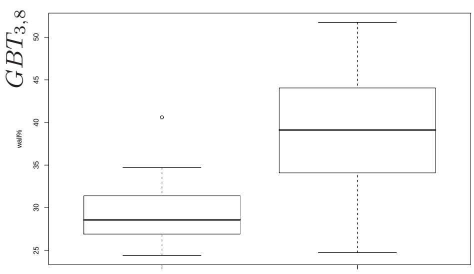


Abbildung 6.15: Box-Whisker-Plot der $GBT_{3,8}$-Werte der 16 Raucher- (Median $GBT_{3,8}$-Wert 39.12) und 15 Nichtraucher-Datensätze (Median $GBT_{3,8}$-Wert 28.56).

6.4.3 Weitere Phantommessungen

Beim Durchführen der Phantommessungen in 6.4.1 haben wir gesehen, dass sich die Messresultate für die FWHM-Methode durch das Verringern der Größe des FOVs verbessern lassen. Der mittlere Fehler mit der FWHM-Methode ist für FOV 2 (90° Scan, Kernel L) 0.36 mm und für das kleinere FOV 1 0.31 mm - im Vergleich dazu ist die erzielte absolute Verbesserung mit IBM nur gering: der mittlere Fehler hat sich von 0.02 mm auf 0.01 mm verringert. Die geringe absolute Verringerung des Fehlers liegt hauptsächlich am ohnehin schon sehr geringen Fehlerniveau mit IBM. Unter der Annahme, dass ein Arzt die exakte Kante eines Objekts ähnlich der FWHM-Methode abschätzt, bedeutet das aber, dass sich die Qualität der CT-Bilder durch Verringern des FOVs für den menschlichen Betrachter verbessert. Durch Verringern des FOVs können kleine Strukturen für einen Arzt besser zu beurteilen sein, und somit unter Umständen Diagnosen verbessern bzw. erleichtern. Aus diesem Grund haben wir noch untersucht, wie sich die Messfehler bei weiteren Verkleinerungen des FOVs verhalten. Erneut wurde das Silikon-Schlauch-Phantom mit dem Philips Multislice-CT Scanner (Brilliance CT 64, Philips Medical Systems, Niederlande) gescannt (90° Scan, B Kernel). Es wurden 4 verschiedene quadratische FOVs bei einer Matrixgröße von 512^2 untersucht: FOV 50, FOV 100, FOV 200 und FOV 360, die Zahlenangabe entspricht immer der Seitenlänge des gewählten Quadrats[25]. Der mittlere Fehler ist mit IMB für FOV 360 war 0.03 mm (4 %), für FOV 200 0.02 (2 %), für FOV 100 0.02 (2 %) und für FOV 50 0.02 (2 %). Während sich der mittlere Fehler bei IBM somit fast nicht verändert, sind bei der

[25] Bei einer Matrixgröße von 512^2 resultiert für FOV 360 ein Pixelabstand von 360/512 mm = 0.70 mm.

FWHM-Methode größere Veränderungen zu verzeichnen: Der mittlere Fehler für FOV 360 ist 0.48 mm (92 %), für FOV 200 0.33 (72 %), für FOV 100 0.28 (62 %) und für FOV 50 0.26 (60 %). Wir können somit festhalten, dass die Messfehler für die FWHM-Methode durch Verringern des FOVs verkleinert werden können, bei IBM sind kaum Änderungen zu erkennen. Abb. 6.16 dokumentiert die Messergebnisse.

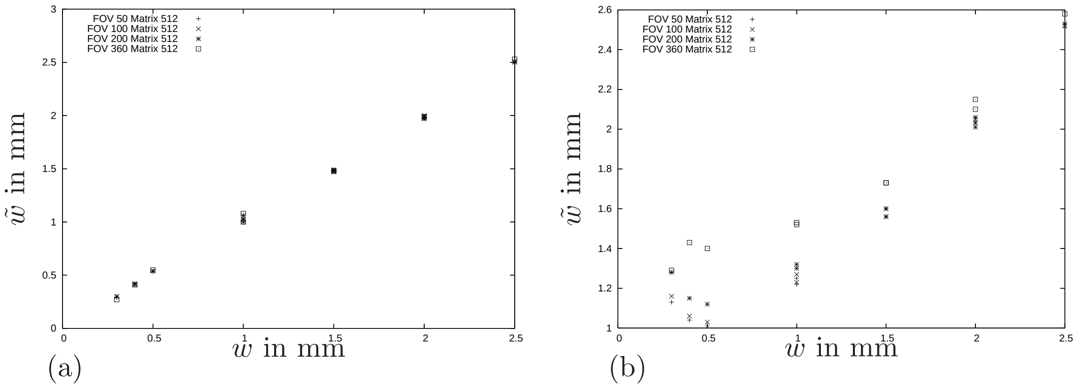


Abbildung 6.16: Messresultate von IBM und FWHM-Methode für verschiedene FOVs. (a) Das Verringern des FOVs hat bei der IBM nur einen geringen Einfluss auf die Messresultate. (b) Die FWHM-Methode reagiert sensitiv auf ein Verringern des FOVs.

6.5 Diskussion

In diesem Kapitel wurden die Probleme, die beim Vermessen der Bronchialwände (bzw. dünner Strukturen im Allgemeinen) in CT-Bildern auftreten, adressiert. Die Beziehung zwischen physikalischer Dichte, Amplitude und Kontrast in CT-Bildern wurde aufgezeigt und eine geschlossene Lösung zum Umgehen der beschriebenen Probleme wurde hergeleitet. Die integral-basierte Methode (IBM) benötigt einen Kalibrierungsschritt um den λ-Faktor auf verschiedene Scanparameter einzustellen. Ein weiterer Nachteil von IBM ist, dass man einen zu erwartenden Hounsfieldwert des Wandmaterials benötigt. Ist die Methode einmal kalibriert, arbeitet sie, im Falle der globalen Bronchialbaumanalyse, ohne manuelle Interaktion. Klar ist, dass die CT-Dichte für die Bronchialwand entlang des gesamten Bronchialbaums nicht konstant ist, da die Wand aus verschiedenen Gewebearten (Muskelschicht, Knorpel, verkalkter Knorpel, Mucus, etc.) und verschiedenartigen Zusammensetzungen dieser Gewebearten besteht. Obwohl die verschiedenen Gewebearten über ähnliche physikalische Dichten verfügen, können entlang des Bronchialbaums etwas unterschiedliche Wanddichten erwartet werden. Eine Optimierung der Methodik könnte durch ein dynamisches Anpassen von β in Gleichung (6.17) erreicht werden, eine Aufgabe für die Zukunft. Es werden $N = 128$ virtuelle Strahlen für das Vermessen in einer berechneten orthogonalen Schicht benutzt. Es ist vielleicht möglich weniger Strahlen zu benutzen ohne Genauigkeit in den Messresultaten zu verlieren - dies wurde nicht untersucht. Zusätzliche Quellen, die das Bestimmen der Wandstärke beeinflussen können, ist die Auswahl von Profilen mit einem höheren Kontrast als ein vordefinierter Schwellenwert, das Sortieren der Messresultate nach der Länge des Integrationsweges und die benutzen Error-Variablen um zwischen “glaubwürdigen" und "unglaubwürdigen" Messungen zu unterscheiden. Mit diesen Manövern sollen fragwürdige Messergebnisse ausgeschlossen werden, es wären weitere Tests nötig gewesen, um den Einfluß dieser Parameter genauer zu bestimmen. Unser neuer Algorithmus muss auf das verwendete Scanprotokoll mittels Setzen des Korrekturfaktors λ kalibriert werden, λ hängt von der System-PSF ab. Wir haben nicht den Einfluss der verwendeten Strahlendosis auf die System-PSF behandelt - eine Dosisänderung genauso wie verschiedene Körpermaße von Patienten beeinflussen die CT-Bilder und infolgedessen auch die Profile durch die Bronchialwände. Zumindest wurde die Strahlungsdosis in unseren Studien konstant gehalten. Zusätzlich ist, wie schon bei seiner Einführung erwähnt, der Korrekturfaktor λ keine Konstante, sondern hängt von der Länge des Integrationpfades ab. Für alle Phantommessungen wurden konstante λ-Faktoren benutzt, trotzdem wurden sehr gute Resultate in der Wanddickenbestimmung erzielt, die Methodik ist somit nicht sehr sensitiv bezüglich des λ-Faktors. Die erzielten Messergebnisse waren fast schon besser wie erwartet, eine mögliche Erklärung hierfür könnte die nicht beachtete Krümmung der Wände oder die im Allgemeinen nicht-separable PSF des CT-Systems sein.

Die Methode von Saba und seinen Mitarbeitern wurde mittels eines Phantoms bestehend aus 5 Plexiglas-Röhrchen mit einer Wanddicke zwischen 1.16 mm und 3.05 mm validiert. Wanddicken von Bronchien innerhalb des höchsten Interesses der medizinischen Diagnostik sind jedoch ≤ 1.0 mm, da die Lungenfunktion mutmaßlich zu einem großen Teil von den kleinen Luftwegen bestimmt wird [HNO+06]. Wir wissen aber nicht wie gut diese Methode innerhalb dieses Größenbereichs arbeitet. Saba et al. schreiben, dass die modellbasierte Methode in der Lage ist ("im Allgemeinen, mit Ausnahmen") die Luftwegsgeometrie innerhalb der Hälfte eines 0.29 mm Pixels für Standardrekonstruktionen zu bestimmen.

Die in [JTS05] eingeführte iterative Methode zeigte gute Resultate für die Bestimmung der inneren Durchmesser des, zur Validierung benutzten, Plexiglas-Phantoms. Sie benutzten drei verschiedene Scan-Protokolle (niedrige Dosis, normale Dosis, hohe Dosis) und eine Voxelgröße von $0.39 \times 0.39 \times 0.6\,\mathrm{mm}^3$. Die durchschnittliche absolute Abweichung der berechneten Durchmesser zu den nominal angegebenen hat nie 0.26 mm überschritten. Klar ist nicht, wie die Methodik an verschiedene Materialien angepasst wird. Wanddickenbestimmungen sind nicht beschrieben.

Die Resultate die wir mit unserer neuen integral-basierten Methode beim Vermessen des Silikon-Schlauch-Phantoms erzielt haben zeigen offensichtlich, dass die Annahmen (6.11) und (6.14) eine vernünftige Wahl waren. Es wurde gezeigt, dass Messungen mit der einfachen FWHM-Methode zu unakzeptabel hohen Fehlern für Wandstärken kleiner als ≤ 1.0 mm führen. Messungen mit der neuen IBM lieferten für alle getesteten Röhrchen des Silikon-Schlauch-Phantoms gute Resultate, auch für die geringen Wandstärken der Röhrchen Nr. 1 - Nr. 3. Für alle berichteten Resultate der Wanddickenbestimmungen in den Phantomscans waren die Fehler kleiner als 1/3 des Pixelabstandes innerhalb einer CT-Schicht. Für die nicht in den Tabellen angegebenen inneren und äußeren Radien waren die Fehler der Resultate kleiner als die Hälfte des Pixelabstandes.

Der in 6.3.4 eingeführte $GBT_{3,8}$-Wert zeigt gute Reproduzierbarkeit und ist ein einzelner Parameter, der den Bronchialbaum eines Patienten beschreibt, im Allgemeinen basierend auf hunderten von Messergebnissen. Ein Parameter, der in Abhängigkeit von der (anatomisch korrekten) Generationennummer der Bronchien bestimmt wird, ist aus dem medizin-wissenschaftlichen Blickwinkel wünschenswert. Das hierfür nötige automatische Labeling des Bronchialbaums konnte innerhalb dieser Arbeit aber nicht zuverlässig implementiert werden. Tschirren et al. haben in [JTS05] gute Resultate im Bereich des Bronchialbaumlabelings publiziert.

6.6 Anmerkung zur Literatur

Ein großer Teil dieses Kapitels wurde in [WAB+07] veröffentlicht.

Kapitel 7

Zusammenfassung und Ausblick

In Bezug auf Bildqualität, Orts- und Zeitauflösung, Dosisersparnis und Patientenkomfort hat sich die Computertomographie seit ihren Anfängen 1972 drastisch weiterentwickelt. Noch immer stellt das Vermessen von kleinen Strukturen in klinischen CT-Bildern ein großes Problem dar, dieses läßt sich auch in Zukunft nur bedingt Lösen, da das Auflösungsvermögen der klinischen CT-Scanner beschränkt bleibt. Medizinisches Ziel dieser Arbeit ist im Schwerpunkt die Entwicklung einer Methodik zum Vermessen der Wanddicke von Bronchien, einer annähernd tubulären Struktur. Beim Auseinandersetzen mit der Thematik wird die enge Verknüpfung von Mathematik, Physik und Informatik im Bereich der Computertomographie deutlich. Es wird gezeigt wie aus konventionellen Röntgenaufnahmen CT-Bilder berechnet werden, wo die mathematischen und physikalischen Fehlerquellen im Bildentstehungsprozess liegen und wie man ein CT-System mittels Interpretation als lineares verschiebungsinvariantes System mathematisch "greifbar" macht. Basierend auf der linearen Systemtheorie werden Möglichkeiten zur Beschreibung des Auflösungsvermögens bildgebender Verfahren beschrieben. Die vorliegende Arbeit zeigt, wie man den Tracheobronchialbaum aus einem CT-Datensatz stabil segmentieren kann und diesen mit morphologischen Operatoren in eine Skelett- und Graphendarstellung überführt. Der vorgestellte Skelettierungsalgorithmus, ist sowohl für isotrope als auch für anisotrope Voxeldatensätze einsetzbar. Die Schwierigkeiten beim Vermessen von kleinen Strukturen in CT-Bildern werden ausführlich besprochen. Versucht man beispielsweise mit einem einfachen Verfahren wie der FWHM-Methode die Wanddicke der Bronchien zu bestimmen, erhält man inakzeptabel hohe Fehler - Fehler in der Größenordnung von über 200 % sind leicht möglich. Spätestens an dieser Stelle muss das Auflösungsvermögen eines Computertomographen genau verstanden und beachtet werden, um ein akzeptables Bestimmen der Wandstärke von Bronchien zu erlauben. Eine neue, vielversprechende, integral-basierte Methodik (IBM) zum Vermessen kleiner Strukturen in CT-Bildern wurde entwickelt und validiert. Durch die Skelett- und Graphendarstellung ist ein Vermessen des kompletten segmentierten Tracheobronchialbaums im 3-dimensionalen Raum möglich. In einer mit IBM durchgeführten Studie konnte gezeigt werden, dass die durchschnittliche prozentuale Bronchialwandstärke in CT-Datensätzen von Rauchern höher ist, als in Datensätzen von Nichtrauchern. Für 8 zweifach gescannte Schweine konnte eine gute Reproduzierbarkeit der IBM-Resultate gezeigt werden. Zusätzlich wurde nachgewiesen, dass ein Verkleinern des FOVs zwar die Resultate von IBM kaum beeinflußt, dass aber die Resultate der FWHM-Methode damit stark verbessert werden können. Gerade bei der

Lungenbildgebung spielen oftmals geringe morphologische Veränderungen beim Befunden eine große Rolle. Beim Beurteilen kleiner Strukturen in der CT kann mittels IBM, bei bekannter physikalischer Dichte der Struktur, ein sehr präzises Messen ermöglicht werden. Ist die physikalische Dichte nicht bekannt, so kann der Radiologe durch Verkleinern des FOVs beim visuellen Beurteilen genauere Aussagen bzgl. der Größe einer kleinen Struktur machen - auch ohne Einsatz von IBM, und ohne die Strahlendosis zu erhöhen. Dies kann als Empfehlung für die vermehrte Verwendung der, von modernen Scannern schon angebotenen, Matrixgröße von 1024^2 Voxeln verstanden werden - denn läßt man das FOV unverändert und vergrößert lediglich die Matrix, so erzielt man ebenfalls eine Verbesserung der Auflösung. Nachteilig ist natürlich hier, dass die anfallende Datenmenge vervierfacht wird. Hier muss zwischen der höheren Qualität der Bilder und dem vierfachen Speicherbedarf, gegenüber den standardmäßig verwendeten 512^2 großen Bildmatrizen, abgewogen werden.

Für die weitere Forschung ergeben sich aus dieser Dissertation ohne weiteres eine Reihe von Anknüpfungspunkten. Die Methodik und die Idee hinter der IBM kann vielleicht auch in anderen Anwendungsbereichen Verwendung finden. Das Einbetten der entwickelten Messmethodik in die lineare Systemtheorie kann noch verbessert werden, vor allem die Bestimmung des endlichen Integrationsweges γ und der damit einhergehende Korrerkturfaktor λ_γ bieten noch Potential zur Verbesserung der vorgestellten Messmethodik. Daneben liefert die Abbildung des Tracheobronchialbaums durch die Computertomographie auch in der Zukunft weitere interessante Fragestellungen. Der Schwerpunkt dieser Arbeit liegt auf dem exakten Vermessen tubulärer Strukturen, die hierfür benötigte Segmentierung des Tracheobronchialbaums bietet weiteren Spielraum für Verbesserungen. Wünschenswert ist auch die Integration eines exakten, anatomischen Labelings des Tracheobronchialbaums - hierzu gibt es schon gute und vielversprechende Ansätze [JTS05]. Ein weiteres Automatisieren der, im Rahmen dieser Arbeit, entwickelten Software ist erstrebenswert: Ein Arzt sollte von seiner Bildbetrachtungssoftware (benutzerfreundlich) in der Lage sein, Datensätze an die Analyse-Software zu schicken, und nach einer kurzen Bearbeitungszeit Ergebnisse zurückbekommen.

Anhang A

Mathematischer Anhang

A.1 Faltung

Die Faltung (engl. convolution) zweier Funktionen $f(x)$ und $g(x)$ ist definiert als:

$$f(x) * g(x) := \int_{-\infty}^{\infty} f(u)g(x-u)\mathrm{d}u\,. \tag{A.1}$$

Eine anschauliche Deutung der Faltung ist die Gewichtung einer Funktion mit einer anderen.
Eigenschaften der Faltung:

- Kommutativgesetz
$$f * g = g * f \tag{A.2}$$
- Assoziativgesetz
$$(f * g) * h = f * (g * h) \tag{A.3}$$
- Distributivgesetz
$$f * (g + h) = (f * g) + (f * h) \tag{A.4}$$
- Assoziativität mit der skalaren Multiplikation
$$a(f * g) = (af) * g = f * (ag) \tag{A.5}$$
mit $a \in \mathbf{C}$.
- Ableitungsregel
$$\mathcal{D}\,(f * g) = \mathcal{D}f * g = f * \mathcal{D}g \tag{A.6}$$
- Faltungssatz
$$\mathcal{F}(f * g) = \sqrt{2\pi}\,(\mathcal{F}f) \cdot (\mathcal{F}g) \tag{A.7}$$
Die Fouriertransformierte $\mathcal{F}(f * g)$ (siehe A.8.3) des Faltungsprodukts $f * g$ ist bis auf den Faktor $\sqrt{2\pi}$ gleich dem Produkt der Fouriertransformierten von f und g.

Bei der diskreten Faltung wird das Integral durch eine Summation ersetzt, die Faltung zweier 2-dimensionaler digitaler Bilder v und u hat dann folgende Form:

$$v(i,j) * u(i,j) = \sum_{i'} \sum_{j'} v(i',j')u(i-i',j-j')\,. \tag{A.8}$$

Weiteres über die Faltung von Funktionen in [Bra00] [Wik07b] [Jai89].

A.2 Symmetrische, gerade und ungerade Funktionen

Eine Funktion $f(x, y)$ mit $x, y \in \mathbf{R}$ heißt *kreisförmig symmetrisch* oder *radial symmetrisch*, wenn sich f in der Abhängigkeit von r schreiben läßt als:

$$f(x, y) = f(r)\,, \text{ mit } r^2 = x^2 + y^2\,. \tag{A.9}$$

Eine Funktion $f(x)$ heißt *gerade*, wenn

$$f(x) = f(-x)\,. \tag{A.10}$$

Eine Funktion $f(x)$ heißt *ungerade*, wenn

$$f(-x) = -f(x)\,. \tag{A.11}$$

Eine radial symmetrische Funktion $f(r)$ ist gerade.

A.3 Eulersche Formel

Die *Eulersche Formel* oder *Eurlersche Identität* bezeichnet die Formel:

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x\,. \tag{A.12}$$

Für $x = \pi$ gilt:

$$e^{i\pi} = -1\,. \tag{A.13}$$

Oft wird diese Formel als die "schönste Formel der Mathematik" bezeichnet. Grund dafür ist das gemeinsame Vorkommen von der Eulerschen Zahl e, der trigonometrischen Funktionen cos und sin, der imaginären Einheit i der komplexen Zahlen, der Kreiszahl π und der Einheit 1 der reellen Zahlen.

A.4 sinc-Funktion

Die sinc-Funktion wird durch die Gleichung $\operatorname{sinc}(x) := \frac{\sin(\pi x)}{\pi x}$ definiert. An der Stelle $x = 0$ lässt sich die sinc-Funktion stetig erweitern, denn nach der Regel von L'Hospital gilt:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin(\pi x)}{\pi x} = \lim_{x \to 0} \frac{(\sin(\pi x))'}{(\pi x)'} = \lim_{x \to 0} \frac{\pi \cos(\pi x)}{\pi} = 1\,. \tag{A.14}$$

Somit erhält man:

$$\operatorname{sinc}(x) := \begin{cases} \frac{\sin(\pi x)}{\pi x} \text{ für } |x| \neq 0 \\ 1 \text{ für } |x| = 0 \end{cases} \tag{A.15}$$

Die sinc-Funktion ist Teil der Impulsantwort des Ram-Lak-Filters und kann somit beim Implementieren eines low-pass Filter eingesetzt werden.

A.5 Gaußsche Normalverteilung

Die Gaußsche Normalverteilung $N(\mu, \sigma^2)$ besitzt die Dichte:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp \frac{-(x-\mu)^2}{2\sigma^2} . \tag{A.16}$$

Sie wird in der Bildverarbeitung meist mit dem Erwartungswert $\mu = 0$ eingesetzt. In μ liegt sowohl das Maximum als auch das Symmetriezentrum der Funktion. σ ist die Standardabweichung der Verteilung und gibt zugleich den Abstand vom Symmetriezentrum zu den Wendepunkten an. Mittels σ läßt sich die Breite und Höhe der Kurve verändern. Die zweidimensionale Version der Gaußschen Normalverteilung $N^2(\mu, \sigma^2)$ hat mit verschwindenden Kovarianzen und Erwartungswerten folgende Gestalt:

$$f(x, y) = \frac{1}{2\pi\sigma^2} \exp -\frac{x^2 + y^2}{2\sigma^2}. \tag{A.17}$$

Mit $\mu = 0$ und $\sigma^2 = 1$ wird die Gaußsche Normalverteilung auch Standard Normalverteilung genannt.

A.6 Cauchyscher Hauptwert

Ist das Integral $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ uneigentlich an der Stelle $c \in (a, b)$ (d.h. $\int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x = \pm\infty$ und $\int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x = \mp\infty$), da f in einer Umgebung um c unbeschränkt ist, so bezeichnet man den Grenzwert

$$\lim_{\epsilon \to 0^+} \left(\int_a^{c-\epsilon} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{c+\epsilon}^b f(x)\,\mathrm{d}x \right) =: \mathrm{CH} \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\,, \tag{A.18}$$

falls er existiert, als den *Cauchyschen Hauptwert*. Der Cauchysche Hauptwert stellt eine Erweiterung des Integralbegriffs dar, da das Integral weder als Riemann-Integral, noch als Lebesgue-Integral existiert. Man bezeichnet auch die Grenzwerte

$$\lim_{\epsilon \to 0^+} \left(\int_{a+\epsilon}^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^{b+\epsilon} f(x)\,\mathrm{d}x \right) =: \mathrm{CH} \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \tag{A.19}$$

(uneigentlich an den Stellen a und b)

und

$$\lim_{a \to \infty} \int_{-a}^a f(x)\,\mathrm{d}x =: \mathrm{CH} \int_{-\infty}^\infty f(x)\,\mathrm{d}x \tag{A.20}$$

$$\text{mit} \quad \int_{-\infty}^0 f(x)\,\mathrm{d}x = \pm\infty \text{ und } \int_0^\infty f(x)\,\mathrm{d}x = \mp\infty \tag{A.21}$$

falls sie existieren, als Cauchysche Hauptwerte.

A.7 Diracsche Deltadistribution und Verwandte

Hier werden zunächst grundlegende Eigenschaften der Diracschen Deltadistribution erläutert und dann die eng verwandten Begriffe Dirac-Kamm, Heavisidesche Sprungfunktion und Kronecker-Delta beschrieben. Weiterführende Informationen zur Diracsche Deltadistribution stehen in [Jai89], mathematische Einführung in die Theorie der Distributionen in [For84b].

A.7.1 Diracsche Deltadistribution

Die Diracsche Deltadistribution $\delta(\cdot)$, oft einfach als Dirac-Funktion bezeichnet, wurde von dem britischen Physiker Paul Adrien Maurice Dirac eingeführt. Sie ist keine Funktion im herkömmlichen Sinne sondern wird über ihr Integral wie folgt definiert durch:

$$\delta(x) = 0 \text{ für } x \neq 0\,, \tag{A.22}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x)\,\mathrm{d}x = 1\,. \tag{A.23}$$

Die Dirac-Funktion tritt in der Literatur auch unter den Bezeichnungen Dirac-Delta-Funktion, Dirac-Impuls, Dirac-Puls, Dirac-Stoß, Stoßfunktion oder Einheitsimpulsfunktion auf. Die zu bevorzugende Bezeichnung ist jedoch Dirac-Distribution, da man leicht sieht, dass keine herkömmliche Funktion obige Bedingungen erfüllt, Abb. A.1 zeigt eine mögliche Darstellung der Dirac-Distribution. Das Lebesque-Integral müsste verschwinden, da die Funktion Lebesque-fast überall verschwindet. Erst durch Einführung der Theorie der Distributionen lässt sich die Diracsche Deltadistribution wirklich befriedigend erklären. Im Felde der Bildverarbeitung findet die Dirac-Distribution oftmals Anwendung. Die in dieser Arbeit verwendeten Eigenschaften der Dirac-Distribution sind:

- Skalierungseigenschaft

  $$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(ax)\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(u)\,\frac{\mathrm{d}u}{|a|} = \frac{1}{|a|} \Rightarrow \delta(ax) = \frac{\delta(x)}{|a|}\,,\; a \in \mathbf{R} \tag{A.24}$$

  Dies zeigt auch, dass die Dirac-Funktion eine gerade Funktion ist, d. h. es gilt $\delta(x) = \delta(-x)$.

- Faltungseigenschaft (Faltungssatz)

  $$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\;\delta(x-a)\,\mathrm{d}x = f(a)\,,\; a \in \mathbf{R} \tag{A.25}$$

  Dies wird auch als Siebeigenschaft der Dirac-Funktion bezeichnet. Es wird der Funktionswert von f an der Stelle a herausgesiebt. $\delta(x-a)$ wird oft auch als $\delta_a(x)$ geschrieben.

Die 2-dimensionale Version der Diracschen Deltadistribution ist definiert als:

$$\delta(x, y) = \delta(x)\,\delta(y)\,. \tag{A.26}$$

Die Diracsche Deltadistribution kann auf entsprechende Art auch höher-dimensional definiert werden.

A.7.2 Diracscher Kamm

Der Diracsche Kamm oder Schah-Funktion (engl. “Sha function” oder “comb function”) stellt eine periodische Folge von Dirac-Stößen dar:

$$\mathrm{comb}(x, \Delta x) := \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(x - n\Delta x)\,. \tag{A.27}$$

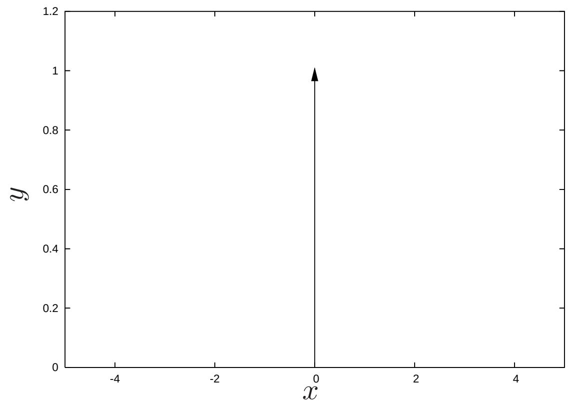


Abbildung A.1: Die Delta-Distribution ist keine Funktion im herkömmlichen Sinne und auch der Graph zur Delta-Distribution läßt sich nicht im herkömmlichen Sinne zeichnen. Anschaulich stellt man sich die Delta-Distribution als eine beliebig hohe und beliebig schmale Funktion vor, deren Fläche den Grenzwert 1 besitzt, d.h. die Amplitude der Funktion müsste gegen Unendlich gehen. Im Graphen ist die unendliche Amplitude durch die Pfeilspitze angedeutet.

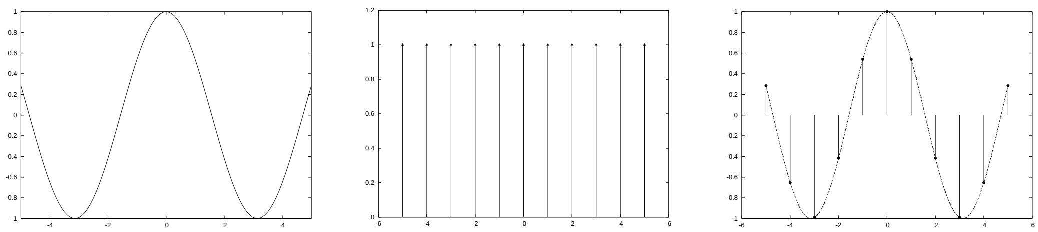


Abbildung A.2: Abtastung einer kontinuierlichen Kosinusfunktion (links) mit dem Diracschen Kamm (Mitte) . Die gesampelte Funktion (rechts) läßt sich schreiben als: $\cos_s(x) = \cos(x) \cdot \mathrm{comb}(x, \Delta x = 1)$.

Mit Hilfe des Diracschen Kamms läßt sich das Abtasten einer Funktion mathematisch durch Multiplikation mit der abzutastenden Funktion beschreiben:

$$f_s(x) = f(x)\,\mathrm{comb}(x, \Delta x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n\Delta x)\,\delta(x - n\Delta x)\,. \tag{A.28}$$

Abb. A.2 zeigt dies beispielhaft für die Kosinusfunktion. In der Literatur wird oft das kyrillische Zeichen Ш als Bezeichner für den Diracschen Kamm benutzt.

A.7.3 Heavisidesche Sprungfunktion

Sei $\Theta(x) \equiv H(x) : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ die Heavisidesche Sprungfunktion, benannt nach dem britischen Physiker und Mathematiker Oliver Heaviside. Diese wird definiert durch:

$$\Theta(x) := \begin{cases} 0 & \text{für } x < 0 \\ 1 & \text{für } x \geq 0 \end{cases}. \tag{A.29}$$

Die Heaviside-Funktion ist im Nullpunkt nicht stetig und damit auch nicht differenzierbar. Bezüglich des erweiterten Differentialoperators für Distributionen, kann man $\Theta(x)$

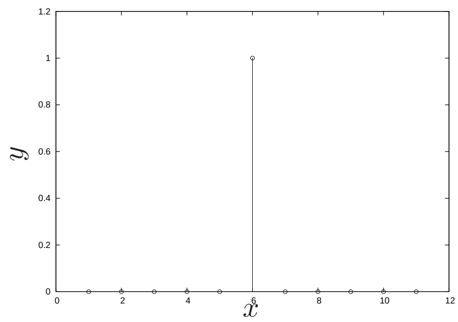


Abbildung A.3: Der Graph des Kronecker-Deltas hat an der Stelle 0 den Wert 1 und ist sonst überall 0.

differenzieren und es gilt:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\,\Theta(x) = \delta_0(x)\,. \tag{A.30}$$

A.7.4 Kronecker-Delta

Das Kronecker-Delta ist eine Funktion, deren Definitionsbereich die Menge der ganzen Zahlen ist (siehe Abb. A.3). Sie verschwinden überall, mit Ausnahme an der Stelle 0:

$$\delta(n) := \begin{cases} 0 & \text{für } n \neq 0 \\ 1 & \text{für } n = 0 \end{cases}. \tag{A.31}$$

Ein Verschieben der Stelle, an der das Kronecker-Delta nicht verschwindet, läßt sich durch die Schreibweise δ(n-n') ausdrücken. Dieses δ gibt an der festen Stelle n' den Werte 1 zurück und verschwindet im übrigen Definitionsbereich.

$f(r)$	$f_A(x)$
$\exp(-r^2/2\sigma^2)$	$\sqrt{(2\pi)}\sigma\exp(-x^2/2\sigma^2)$
$\delta(r)/\pi\lvert r\rvert$	$\delta(r)$

Tabelle A.1: Abel-Transformationen.

A.8 Transformationen

A.8.1 Abel-Transformation

Einen Spezialfall der Radon-Transformation (siehe 2.4.1) stellt die Abel-Transformation dar (für die Herleitung des Zusammenhangs siehe 3.3). Diese ist für kreisförmig symmetrische 2-dimensionale Funktionen $f(x, y)$, geschrieben als $f(r)$ mit $r^2 = x^2 + y^2$, definiert als:

$$f_A(x) := 2\int_x^\infty \frac{f(r)r}{\sqrt{(r^2 - x^2)}}\,\mathrm{d}r\,. \tag{A.32}$$

Mehr über die Abel-Transformation ist in [Bra00] zu finden. Tab. A.1 zeigt zwei aus diesem Werk entnommene Abel-Transformationen.

A.8.2 Hilbert-Transformation

Die Hilbert-Transformation von $f(x)$ ist eine lineare Integraltransformation, die als

$$[\mathcal{H}f](x) = g(x) := -\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^\infty \frac{f(x')}{x - x'}\mathrm{d}x' = -\frac{1}{\pi x} * f(x) \tag{A.33}$$

definiert ist. Auf der rechten Seite ist der Cauchysche Hauptwert (siehe A.18) des Integrals gemeint. Es gilt: $\mathcal{H}^{-1} = -\mathcal{H}$, d.h. $f(x) = -(\frac{-1}{\pi x} * [\mathcal{H}f](x)$, beispielsweise gilt: $[\mathcal{H}\cos](x) = -\sin(x)$ und $[\mathcal{H}\sin](x) = \cos(x)$. [Bra00, S. 359 ff.] [Her80]

A.8.3 Fourier-Transformation

Die Fourier-Transformation von $f(x) : \mathbf{R} \to \mathbf{C}$ ist definiert als:

$$F(\xi) \equiv [\mathcal{F}_1 f](\xi) := \int_{-\infty}^\infty f(x)e^{-i2\pi\xi x}\,\mathrm{d}x\,. \tag{A.34}$$

Für die inverse Fourier-Transformation gilt dann:

$$f(x) \equiv [\mathcal{F}_1^{-1}F](x) = \int_{-\infty}^\infty F(\xi)e^{i2\pi\xi x}\,\mathrm{d}\xi\,. \tag{A.35}$$

Die Rücktransformation existiert nur unter den Voraussetzungen,

- dass das Integral von $|f(x)|$ von $-\infty$ bis ∞ existiert,
- eventuelle Unstetigkeitsstellen von $f(x)$ sind alle endlich,
- und $f(x)$ ist von beschränkter Variation.

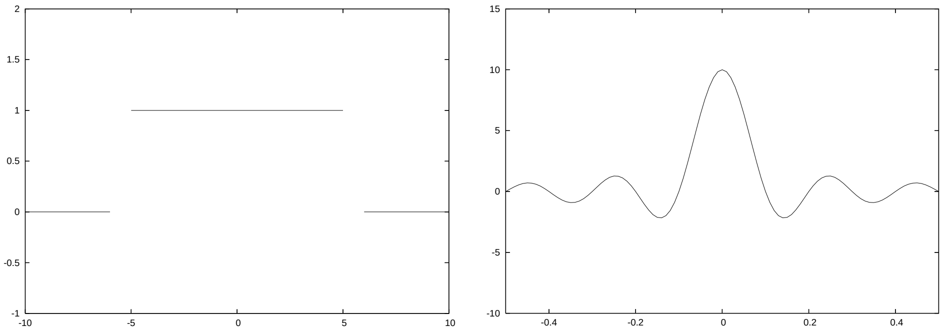


Abbildung A.4: Links die Rechteckfunktion $\mathrm{rect}(xd)$ (A.38 mit $d := 1/10$) im Ortsraum, rechts die Frequenzantwort der Rechteckfunktion - die, abgesehen vom Vorfaktor d^{-1}, der sinc-Funktion (A.15) entspricht.

Entsprechend lässt sich die 2-dimensionale Fourier-Transformation definieren:

$$F(\xi_1, \xi_2) = [\mathcal{F}_2 f](\xi_1, \xi_2) = \iint_{-\infty}^{\infty} f(x, y) e^{-i2\pi(\xi_1 x + \xi_2 y)} \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y \,. \tag{A.36}$$

Die Inverse im 2-dimensionalen ist dann:

$$f(x, y) = [\mathcal{F}_2^{-1} F](x, y) = \iint_{-\infty}^{\infty} F(\xi_1, \xi_2) e^{i2\pi(\xi_1 x + \xi_2 y)} \,\mathrm{d}\xi_1 \,\mathrm{d}\xi_2 \,. \tag{A.37}$$

Beispiel. Berechnen wir nun die Fourier-Transformation im Beispiel an der Funktion:

$$\Pi(x) \equiv \mathrm{rect}(x) := \begin{cases} 1 & \text{für } |x| \leq \frac{1}{2} \\ 0 & \text{für } |x| > \frac{1}{2} \end{cases} . \tag{A.38}$$

Dann gilt für die Fourier-Transformation von $\mathrm{rect}(dx), d \in \mathbf{R}$:

$$\begin{aligned} [\mathcal{F}_1 \,\mathrm{rect}](d\xi) &= \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{rect}(dx) e^{-i2\pi\xi x} \,\mathrm{d}x && \text{(A.39)} \\ &= \int_{-\frac{1}{2}d^{-1}}^{\frac{1}{2}d^{-1}} e^{-i2\pi\xi x} \,\mathrm{d}x && \text{(A.40)} \\ &= \left[\frac{1}{-i2\pi\xi} e^{-i2\pi\xi x} \right]_{-\frac{1}{2}d^{-1}}^{\frac{1}{2}d^{-1}} && \text{(A.41)} \\ &= \frac{\sin(\pi\xi d^{-1})}{\pi\xi} && \text{(A.42)} \end{aligned}$$

Von A.41 nach A.42 gelangt man mit der Eulerschen Formel A.3. Abb. A.4 zeigt die Rechteckfunktion im Ortsraum und ihre Frequenzantwort.

Die Fouriertransformierte der Punktantwort h eines linearen Systems $\mathcal{H}$ wird auch als Frequenzantwort (engl. frequency response) H des Systems $\mathcal{H}$ bezeichnet. Weiterführende Informationen zur Fourier-Transformation findet man in [Bra00, Smi99].

Hankel-Transformation

Die 2-dimensionale Fouriertransformierte einer kreisförmig symmetrischen Funktion $f(x,y) = f(r)$ ist ebenfalls kreisförmig symmetrisch und kann $F(\xi_1, \xi_2) = F(q)$ geschrieben werden [Bra00, S. 336]. Es gilt dann:

$$F(q) = 2\pi \int_0^\infty f(r) J_0(2\pi q r) r \,\mathrm{d}r \tag{A.43}$$

und

$$f(r) = 2\pi \int_0^\infty F(q) J_0(2\pi q r) q \,\mathrm{d}q \tag{A.44}$$

mit der Bessel-Funktion

$$J_0(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-iz\cos(\beta)} \mathrm{d}\beta \,. \tag{A.45}$$

Man bezeichnet $F(q)$ als Hankel-Transformation oder Fourier-Bessel-Transformation von f.

Anwendungsbeispiele der Fourier-Transformation

Die Fourier-Transformation findet in der Bildverarbeitung vielfache Anwendung. Beispiele hierfür sind das Filtern von Bilddaten, die Datenkompression oder die schnelle Faltung. Das Bild wird vom Ortsraum mit Hilfe der Schnellen Fourier-Transformation (engl. fast Fourier transform, FFT) in den Frequenzraum transformiert. Dort wird es dann verarbeitet und abschließend wieder, mit Hilfe der inversen FFT, zurück in den Ortsraum gebracht.

Beim Filtern von Bildern können beispielsweise bestimmte Frequenzbereiche aus dem Frequenzspektrum herausgenommen werden. Man spricht etwa von *Tiefpaßfiltern*, falls die hohen Frequenzanteile herausgenommen werden und von *Hochpaßfiltern*, falls die niedrigen Frequenzen gestrichen werden. Eine Kombination aus Tief- und Hochpaßfilter wird als *Bandpaßfilter* bezeichnet.

Das Prinzip der Datenkompression beruht darauf, dass man aus einem Bild die hochfrequenten Anteile herausnehmen kann und sich der Qualitätsverlust zunächst nicht spürbar bemerkbar macht. Abb. A.5 zeigt 3 verschiedene Beispiele. In der 3. Zeile der Abbildungen wurden 49% aller Fouriereinträge gelöscht, der subjektive Qualtitätsverlust ist nicht allzu groß. Der objektive Qualitätsverlust ist durch die beigefügten Fehlermaße r und MSE dokumentiert. Nach diesem Prinzip lassen sich auch Audiosignale komprimieren. Da der Mensch nur ein bestimmtes Frequenzspektrum erfassen kann, können nicht hörbare Frequenzen ohne einen hörbaren Qualtitätsverlust aus dem Fourierspektrum entfernt werden. Siehe hierzu Informationen zu dem MP3-Format [Wik07d].

Als drittes Beispiel sei hier auf die schnelle Faltung von Bildern hingewiesen. Braucht man zum Berechnen der Faltung zweier Bilder der Matrixgröße $N \times N$ im Ortsraum $\mathcal{O}(N^2)$ Operationen, so liegt der Gesamtaufwand für die Faltung zweier Bilder über den Frequenzraum (FFT $\mapsto$ Multiplikation der Fourierkoeffizient $\mapsto$ inverse FFT) bei $\mathcal{O}(N \cdot \lg(N))$ [LOPR97, S.244].

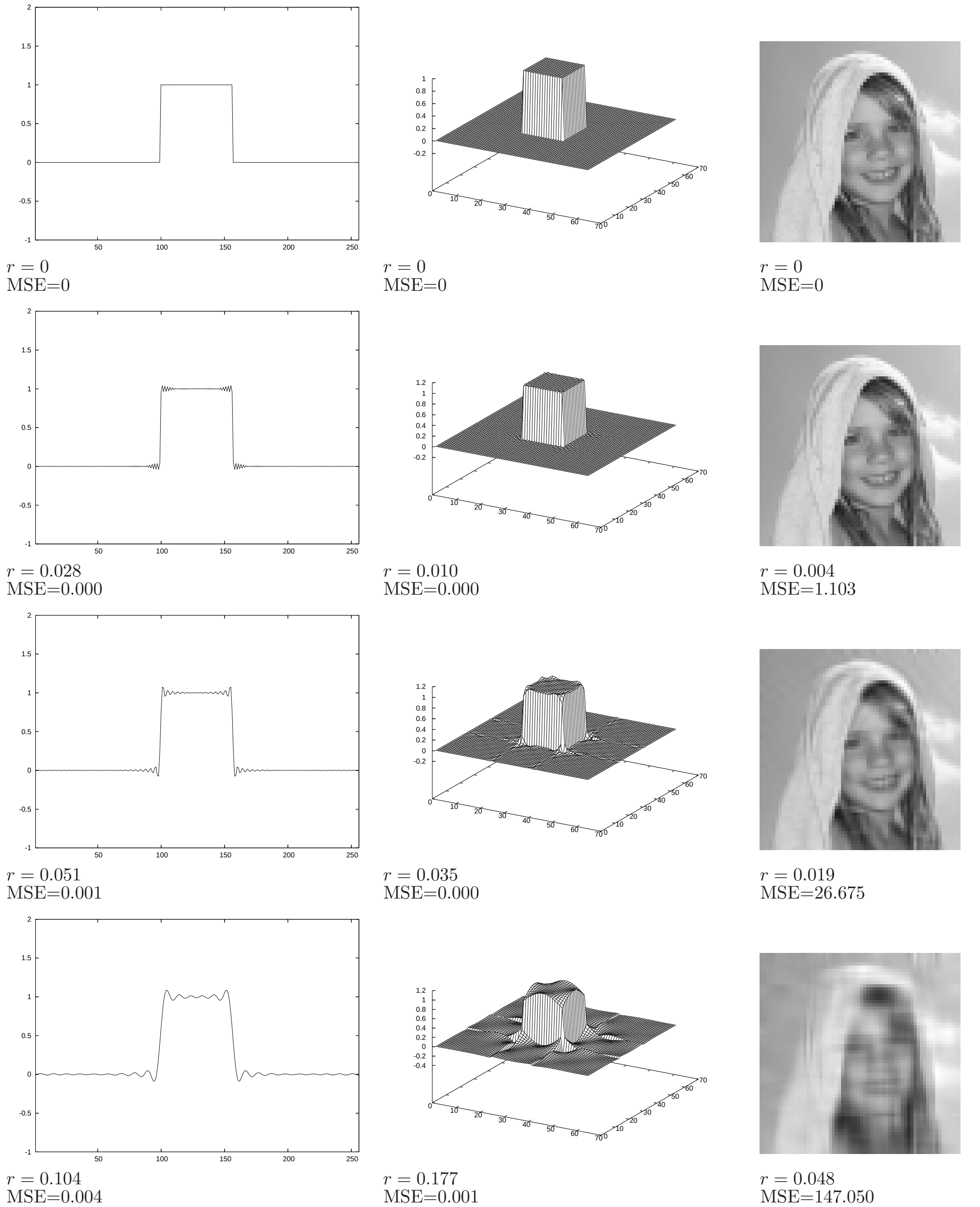


Abbildung A.5: Links: Die Rechteckfunktion $\mathrm{rect}(\frac{1}{56}(x-128))$. Mitte: Quadrat innerhalb einer 64×64-Bildmatrix. Rechts: 64×64-Urlaubsschnappschuss. Die Abbildungen oben wurden mittels 1-dimensionaler bzw. 2-dimensionaler Fast Fourier Transformation (FFT) in den Frequenzraum überführt. Es wurden 0, 7%, 49%, 79% aller Fourierkoeffizienten gelöscht und dann die inverse 1- bzw. 2-dimensionale FFT ausgeführt. Die Fehlermaße r (siehe (2.60)) und MSE (siehe (4.3)) wurden gegen das Orignalbild bzw. -signal berechnet. Die Über- und Unterschwinger an den Unstetigkeitsstellen, gut bei der Rechteckfunktion links unten zu sehen, werden als Gibbs Phänomen (engl. Gibbs phenomenon) oder Ringing bezeichnet.

A.9 Bandbegrenzte Bilder

Während des Aufnahmeprozesses digitaler Bilder wird ein bandbreitenbeschränktes Abbild der Realität erzeugt. Eine Funktion $f(x, y)$ heißt bandbreitenbeschränkte, bandbreitenlimitiert oder bandbegrenzt, falls ihre Fourier-Transformation $F(\xi_1, \xi_2)$ außerhalb eines beschränkten Bereichs verschwindet:

$$F(\xi_1, \xi_2) = 0 \text{ für } |\xi_1| > \xi_{x_0} \text{ und } |\xi_2| > \xi_{y_0} . \tag{A.46}$$

ξ_{x_0} und ξ_{y_0} werden als x und y Bandbreite eines Bildes bezeichnet.

Im Allgemeine sind die (realen) Objekte, die in der Computertomographie aufgenommen werden nicht bandbreitenbeschränkt [KS99, S. 178]. Man beachte, dass die Projektion eines Objekts mit einer scharfen Kante (Sprungstelle) die höchste Frequenz, die durch die Anordnung und Größe der Detektoren des Tomographen bestimmt ist, belegt. Dies liegt daran, dass sich eine Funktion mit einer Sprungstelle nur durch eine unendliche Anzahl von Sinusoiden darstellen lässt. Hat man ein kontinuierliches Signal mit Sprungstelle, so kann dieses nur fehlerbehaftet aus endlich vielen Sinusoiden rekonstruiert werden.

Abtasttheorem

Das Abtasttheorem (Nyquist-Shannonsche Abtasttheorem) besagt, dass ein bandbreitenbeschränktes Bild mit einer Frequenz größer als $2\xi_{x_0}$ und $2\xi_{y_0}$ abgetastet werden muss, damit das ursprüngliche Bild wieder hergestellt werden kann. $2\xi_{x_0}$ und $2\xi_{y_0}$ werden als Nyquist-Frequenzen, $\frac{1}{2\xi_{x_0}}$ und $\frac{1}{2\xi_{y_0}}$ als Nyquist-Intervalle bezeichnet[1]. Bezogen auf eine sinusoide Schwingung bedeutet das, dass eine Schwingung (1 Wellental und 1 Wellenberg) an 2 Stellen abgetastet werden muss. Nichtbeachtung des Abtasttheorems führt zu sogenannten Aliasing-Effekten, diese können beispielsweise in der Form des Gibbs-Phänomens oder Moiré-Mustern auftreten.

Die für das Gibbs-Phänomen typischen Ober- und Unterschwinger sind in Abb. A.5 zu sehen. Sie werden durch fehlende hochfrequente Anteile hervorgerufen. Dies kann auch durch das Tiefpaßfiltern eines digitalen Bildes ausgelöst werden.

Moiré-Muster entstehen, wenn ein bandbreitenbeschränktes Bild mit hochfrequenten periodischen Strukturen mit einer Frequenz kleiner als $2\xi_{x_0}$ und $2\xi_{y_0}$ abgetastet wird. Die Musterbildung läßt sich vermeiden, indem das Eingangsbild zuvor einen geeigneten Tiefpaßfilter durchläuft, oder die Abtastfrequenz erhöht wird. Moiré-Muster entstehen beispielsweise beim Einscannen eines Bildes mit hochfrequenten periodischen Strukturen oder beim Downsampling eines Fernsehsignals[2]. Im Zuge der Bildrekonstruktion aus Projektionsdaten können Moiré-Muster entstehen, wenn die Projektionsbilder höhere Frequenzen beinhalten, als die zu rekonstruierende Schicht aufnehmen kann.

Häufig wird auch der Treppeneffekt (treppenartiges Erscheinungsbild von Kanten oder Geraden) als Aliasing-Effekt aufgeführt. Dieser Effekt beruht jedoch einzig auf der gewählten Abtastrate und nicht auf signaltheoretischen Frequenzeffekten wie im Falle des Gibbs-Effekts und der Moiré Muster. Mehr Infos zu Aliasing in [KS99],[Smi99],[Jai89], [Wik07a]

[1] Die Namensgebung ist hier nicht eindeutig.
[2] Man denke an den nervigen gestreiften Pullover im Fernsehen, dank HDTV kommt dies nur noch selten vor.

Anhang B

Informatischer Anhang

B.1 yet another CT analyzer (yacta)

Dieser Abschnitt beschreibt in Kürze beispielhaft die entwickelte Software *yacta* (für "yet another CT analyzer"). yacta wurde in der Programmiersprache C++ geschrieben. Gestartet wurde die Entwicklung von yacta unter Windows mit dem Borland C++ Builder 5.5, danach folgte eine Portierung des Quellcodes auf den Borland C++ Builder 6 und schließlich auf das Borland Developer Studio 2006 (BDS 2006). Zur Zeit wird yacta erfolgreich unter Windows 2000/XP eingesetzt (Vista wurde bisher noch nicht getestet). Der eingesetzte PC sollte mindestens über 1 GB RAM und einen Intel Pentium-Prozessor mit mind. 1 GHz (oder einem vergleichbaren Prozessor) verfügen. yacta benutzt die C++-Bibliotheken DCMTK, VTK und ITK - GNU Octave wird als "numerischer Server" benutzt. Es folgen kleine Code-Snippets aus dem yacta-Quellcode und die Beschreibung von Anwendungsbeispielen der Software. Abschließend werden VTK, DCMTK und GNU Octave kurz beschrieben.

B.1.1 Detektionsvolumen

Die Bilddaten werden in yacta innerhalb der Klasse `yctDicomVolume` in einem `unsigned short int`-Feld gehalten, d.h. der Wert eines Voxels wird in 2 Byte gespeichert. Die Klasse `yctDetectionVolume` dient zum Halten von Segmentierungsergebnissen. Herzstück des *Detektionsvolumens* (*Labelvolumens*) sind verschiedene Methoden zum Lesen und Speichern von Segmentierungsresultaten (siehe das folgende Codebeispiel). yacta benutzt eine definierte Menge von Labeln (zur Zeit 72, beliebig erweiterbar), für jedes Voxel kann jedes dieser Label "an" oder "aus" gestellt werden - hierfür wird der STL[1]-Mengentyp `std::bitset` benutzt, jedes Label wird in einem Bit gespeichert. Jedem Voxel wird eine Bitkombination (Labelmenge) zugewiesen. Würde man die Labelmenge für jedes Voxel "unbehandelt" im Hauptspeicher halten, bräuchte man $72/8 = 9$ Byte pro Voxel. Um dies zu vermeiden, wird für jede, während des Arbeitens mit yacta generierte Labelmenge, ein 2 Byte langer Schlüssel generiert. Lediglich dieser Schlüssel wird im Speicher gehalten, der Speicherbedarf bleibt dadurch überschaubar. Ein normal großer MSCT-Thorax-Datensatz umfaßt etwa 400 Bilder, bei einer Bildmatrixgröße von 512^2 benötigen die Bilddaten $400 \cdot 512^2 \cdot 2 = 209715200$ Byte $= 209715200/1024^2 = 200$

[1] C++ Standard Template Libary.

MByte, yacta benötigt somit für das Halten der Bilder und des Labelvolumens ca. 400 MByte RAM.

C++ Quellcode

```
//**********
inline bool GetValue(const yctLabel& label, const UINT& offset)
{
  return ByteToLabelSet_const(*(pdetectionVolume +offset)).test(label);
}

//**********
inline void SetValue(const yctLabel& label, const UINT& offset)
{
  unsigned short int* labelvalue = pdetectionVolume +offset;
  *labelvalue=(LabelSetToByte(ByteToLabelSet(*labelvalue).set(label)));
}
```

Die Methoden `yctDetectionVolume::SetValue()` und `yctDetectionVolume::GetValue()` sind für verschiedene Übergabeparameter implementiert, z. B. kann statt des Offset-Wertes bzgl. des Ursprungs des CT-Volumendatensatzes auch eine x, y, z-Koordinate übergeben werden. Mittels der Methode `yctDetectionVolume::GetValue()` kann erfragt werden, ob für ein bestimmtes Voxel eines Datensatzes ein Label gesetzt ist oder nicht. Aus Performancegründen ist ein Arbeiten mit Sprungadressen bzgl. des Ursprungs eines CT-Volumendatensatzes vorzuziehen. Mit der Methode `yctDetectionVolume::SetValue()` kann ein Label für ein bestimmtes Voxel im Detektionsvolumen gesetzt werden. Der Vorteil des überschaubar bleibenden Speicherbedarfs wird mit einem Overhead in der Datenverwaltung erkauft - es gibt aber auch Fälle, die zu einer Zeitersparnis führen: Möchte man ein Label im kompletten Datensatz auf "aus" setzen, so genügt es, dies in der Schlüsselmenge durchzuführen, der Datensatz muss hierfür nicht komplett durchlaufen werden.

B.1.2 Voxel Seed

Bereichswachstumsverfahren werden in yacta durch die Klasse `yctSeeding` durchgeführt. Im folgenden Quellcodeausschnitt ist die Instanzierung der Klasse `yctSeeding` sowie eine Klassenmethode, die den wesentlichen Teil eines Seedings erledigt, abgedruckt.

C++ Quellcode

```
//**********
...
yctSeeding< std::deque<unsigned int> > Seeding;
  Seeding.SetDetectionVolume(&detectionVolume);
  Seeding.SetDicomVolume(&dicomVolume);
  Seeding.SetMarkLabel(Extra);
  Seeding.SetExcludeLabel(Lung);
  Seeding.SetGrowthTest(&yctSeeding< std::deque<unsigned int> >::GrowthOnLabelExclude);
  Seeding.SetNeighbors(&yctSeeding< std::deque<unsigned int> >::GetN6check);
  Seeding.SetMaxPoints(MaxVoxel);
  Seeding.SetStartPoint(*iter);

int counter = Seeding.SeedingLabelCount();
...

//**********
template<typename T> int yctSeeding<T>::SeedingLabelCount()
{

 unsigned int startoffset;
```

```
 pDetectionstack->Point2Offset(startoffset,startPoint.x,startPoint.y,startPoint.z);

 if( (this->*growthtest)(startoffset))
  container.push_back(startoffset);

 int counter=0;
 while((!container.empty()) && (counter<maxPoints))
 {
  if ((!pDetectionstack->GetValue(markLabel,*(container.begin()))
      && (this->*growthtest)(*(container.begin()))))
  {
   pDetectionstack->SetValue(markLabel,*(container.begin()));
   (this->*neighbors)(*(container.begin()));
   ++counter;
  }
  container.pop_front();
 } // end of while

 return counter;
}

//**********
template<typename T>
bool yctSeeding<T>::GrowthOnLabelExclude(const unsigned int& offset)
{
 if(!pDetectionstack->GetValue(excludeLabel,offset))
  return true;
 else
  return false;
}

//**********
template<typename T>
bool yctSeeding<T>::GrowthOnLabelIncludeThresholding(const unsigned int& offset)
{
 if( (pDicomstack->Value(offset) <= maxGreyValue) &&
  (pDicomstack->Value(offset) >= minGreyValue) &&
  (pDetectionstack->GetValue(includeLabel,offset)))
  return true;
 else
  return false;
}
```

Eine Instanz der Klasse `yctSeeding` wird durch `yctSeeding< std::deque<unsigned int> > Seeding` erzeugt. Statt `std::deque` kann auch `std::list` oder `std::vector` verwendet werden. Prinzipiell kann jeder Container der STL benutzt werden, der über Implementierungen aller verwendeter Containermethoden verfügt. Die Verwendung von `std:: vector` kann problematisch sein, da `std::vector` seine Elemente in zusammenhängenden Speicherbereichen ablegt, und so, bei stark fragmentiertem Arbeitsspeicher, das Allozieren von Speicher schnell fehlschlagen kann. Aus Performancegründen arbeitet das Seeding nicht mit x, y, z-Koordinaten, sondern mit Offset-Werten bzgl. des Ursprungs des CT-Volumendatensatzes. Mittels der Setter `Seeding::SetDetectionVolume()` und `Seeding::SetDicomVolume()` bekommt die Klasse die Pointer auf das Labelvolumen und das Bilddatenvolumen übergeben. Mit `Seeding.SetGrowthTest()` wird der Klasse ein Pointer auf die Funktion `GrowthOnLabelExclude`, in der die Wachstumsbedingungen implementiert sind, übergeben. `GrowthOnLabelExclude` nimmt alle benachbarten Voxel zu einer Region, die nicht mit dem Label `excludeLabel` markiert sind. Die Funktion `GrowthOnLabelIncludeThresholding` ist ein weiteres Beispiel für implementierte Wachstumsbedingungen, hier werden alle Voxel einer Region hinzugefügt, die mit dem Label `includeLabel` markiert sind und zusätzlich in einem zuvor gesetzten CT-Wertebereich liegen. `Seeding.SetNeighbors()` legt das zu verwendende Nachbarschaftssystem fest und mit `Seeding.SetMaxPoints()` setzt man eine maximal zu segmentierende Voxelanzahl. Der Bereichswachstumsalgorithmus wird dann, nach festlegen eines Startpunktes oder einer Startpunktmenge, mit `Seeding.SeedingLabelCount()` gestartet. Rückgabewert dieser Methode ist die Gesamtanzahl aller, durch das Bereichswachstumsverfahren, markierter Voxel.

B.1.3 Beispielsitzungen mit yacta

Nach dem Starten von yacta stehen zur Verwaltung von DICOM-Datensätzen der *Volume Manager* und der *Volume Editor* zur Verfügung. Mit dem Volume Manager kann nach zusammenhängenden DICOM-Volumen gesucht werden. Der Volume Editor ermöglicht ein Preview auf die DICOM-Bilder. Zum Laden der Bilder wird das OFFIS DICOM Toolkit[2] benutzt. Im Volume Editor können Teilvolumendatensätze erzeugt werden.

Volume Manager

Zum Volume Manager (Abb. B.1c) gelangt man über den Hauptmenüeintrag *File > Search Volume ...*[3]. Links oben im Volume Manager Form läßt sich ein Laufwerk sowie ein Verzeichnis auswählen. Per Rechtsklick auf die Verzeichnislistbox kann ein neues Verzeichnis erzeugt werden. In der Filelistbox rechts oben werden die Files des ausgewählten Verzeichnisses angezeigt. Drückt man den Button *Edit Dir* öffnet sich der Volume Editor, in diesem hat man nun auf alle DICOM-Files des gewählten Verzeichnisses Zugriff. Durch Drücken von *Search Volume* wird das aktuelle Verzeichnis auf zusammenhängende DICOM-Volumen durchsucht. Markiert man zusätzlich noch die Checkbox *Include Subdirectories*, werden auch alle Unterverzeichnisse in die Suche mit einbezogen. Die gefundenen Volumen werden in der unteren Listbox angezeigt. Jeder gefundene Datensatz erhält eine laufende Nummer, die Anzahl der zum Volumen gehörenden DICOM-Files wird in einer weiteren Spalte angegeben. In den übrigen Spalten werden die DICOM-Header-Einträge *PatientID*, *PatientsName*, *ConvolutionKernel*, *Modality*, *SliceThickness* und *BodyPartExamined* des DICOM-Volumens angezeigt. Wählt man ein Volumen aus der Liste aus, so hat man mittels des Buttons *Edit Volume* Zugriff auf alle Dateien dieses Volumens. Mittels *Generate *.dcv-file* läßt sich ein Textfile mit der Endung *.dcv erzeugen, welches alle Dateinamen des Volumens enthält. Durch *Copy DICOM Files* und *Move DICOM Files* lassen sich die DICOM-Files eines Volumens in das gerade aktuelle Verzeichnis kopieren bzw. verschieben. Ein Klick mit der rechten Maustaste auf die rechte obere Listbox öffnet ein Kontextmenu, das die Möglichkeit gibt eine *.dcv- oder *.txt-Datei mit Notepad[4] zu öffnen, sowie eine *.dcv-Datei entweder mit dem *Standard Viewer* oder mit dem Volume Editor zu betrachten.

Bronchienvermessen

Nach dem Laden eines Datensatzes wird dieser im *Renderer* (siehe Abb. B.2) und im Standard Viewer (siehe Abb. B.3a) angezeigt. Es wird nun beschrieben wie ein Bron-

[2] http://dicom.offis.de/dcmtk siehe auch B.4 .
[3] Alle Hauptmenüeinträge auf die Auslassungspunkte folgen, öffnen ein weiteres Fenster in yacta.
[4] Falls notepad.exe auf dem benutzten System verfügbar ist.

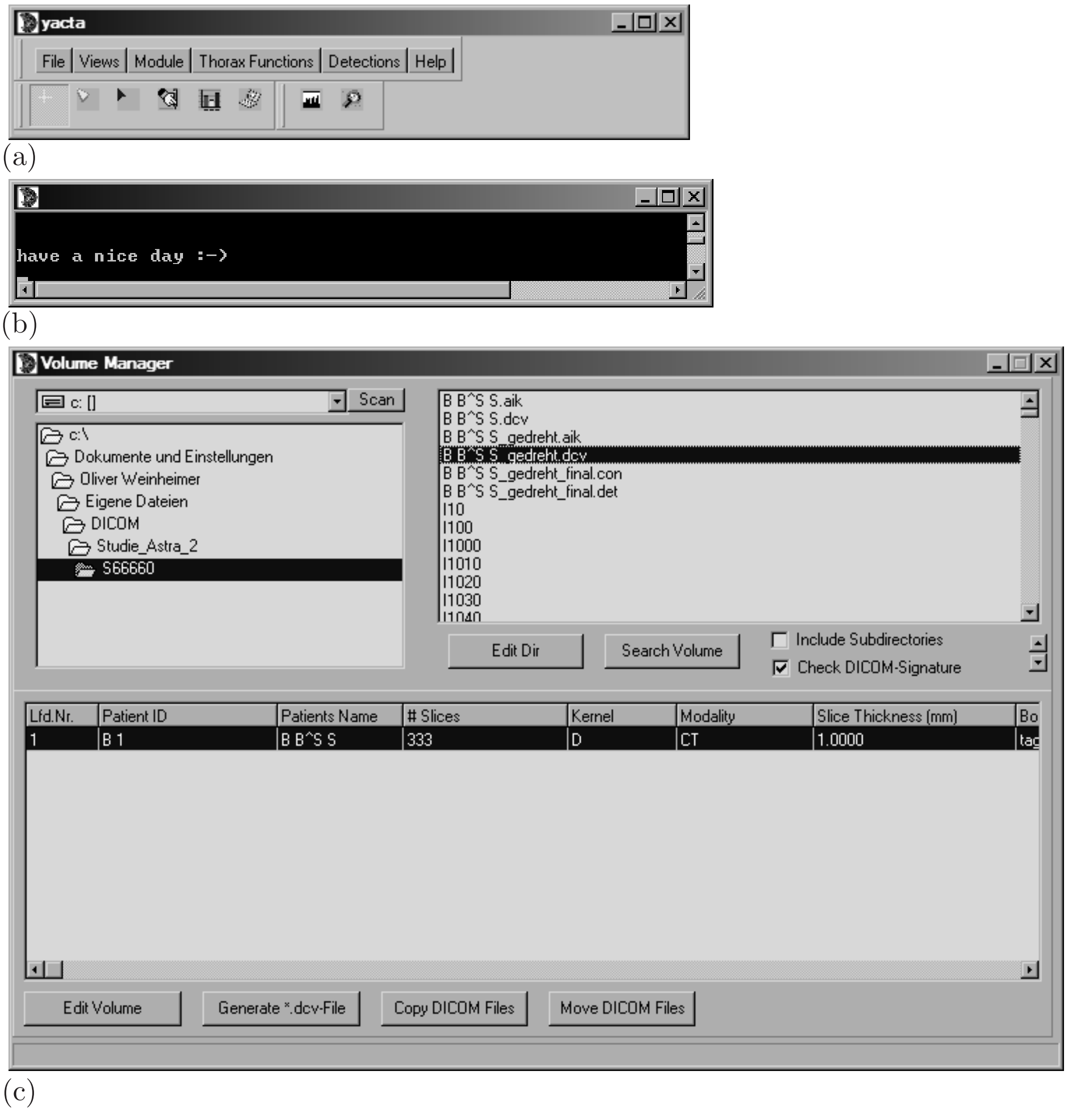


Abbildung B.1: (a) Das Hauptfenster von yacta. (b) Die zu yacta gehörende Konsole. (c) Der Volume Manager.

chus lokal vermessen werden kann. Man betrachtet den Datensatz und sucht einen zu vermessenden Bronchus heraus. Dieser sollte von möglichst viel Lungengewebe umgeben sein, da hier bessere Ergebnisse zu erwarten sind als bei Bronchien, die zum großen Teil an Gefäße grenzen.

Das Modul zum Bronchienvermessen wird über *Module > Airway Analysis* gestartet. Um einen Bronchus 3D zu vermessen, muss die Checkbox *Perpendicular Measurement* ausgewählt sein, ansonsten wird der Bronchus auf der aktuell im Standard Viewer angezeigten axialen Schicht vermessen. Nun klickt man im Standard Viewer bei gehaltener Strg-Taste in das Lumen des gewünschten Bronchus mit der linken Maustaste. Dann ist der Button *Do lokal Segmentation/Skeletonization* zu drücken. In einer lokalen Box wird nun der Bronchialbaum segmentiert und skelettiert, wurde zuvor die Checkbox *Scene Visualization* ausgewählt, so wird der Graph des segmentierten Bronchialbaums in dem Renderer Form angezeigt. Danach kann ein Voxel der Kategorie

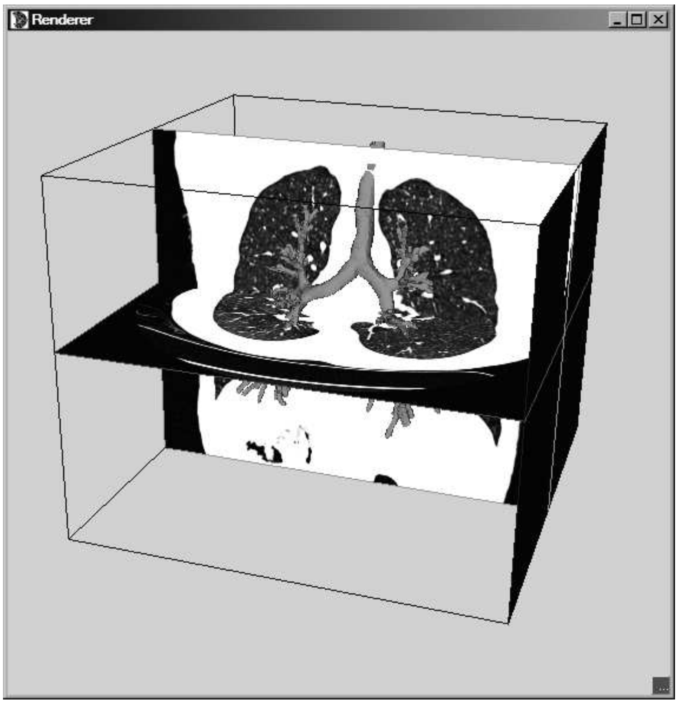


Abbildung B.2: Das hier abgebildete Renderer Form wird nach dem Laden eines DICOM-Datensatzes angezeigt. Zunächst werden nur die 3 Hauptschnittebenen eines CT-Volumens visualisiert. In dieser Abbildung ist zusätzlich noch ein mit dem Marching Cubes Algorithmus gerenderter Tracheobronchialbaum zu sehen.

CenterPoints wieder bei gehaltener Strg-Taste ausgewählt werden und ein Vermessen durch den Button *Start Measurement* gestartet werden. Mittels des Sliders rechts (im Airway Analysis Form) ist es möglich einen kompletten Bronchus entlang seiner Skelettlinie zu vermessen, jedoch nur innerhalb des blau eingefärbten Messintervalls.

Das blaue Messintervall kann, mittels der kleinen Buttons oben und unten, eingestellt werden. Versieht man unter dem Reiter *Options 1* die Checkbox *Measure whole Bronchus* mit einem Haken und startet das Measurement erneut, so wird nun der gesamte Bronchus im blauen Messintervall vermessen. Die Ergebnisse können in einer Textdatei mittels *Write Protocol* gespeichert werden. Das Vermessen des kompletten Bronchialbaums ist auf ähnliche Weise durchzuführen. Es muss lediglich unter dem Reiter *Options 1* der Haken bei *Do Analysis in Cuboid* entfernt werden und die Checkbox *Whole Tree* markiert werden (alle Messresultate werden dann in ein File geschrieben, der Filename kann in dem folgenden Editfeld angegeben werden). Ansonsten ist das Vorgehen genauso wie zuvor beschrieben, man muss in die Trachea klicken, um den gesamten Bronchialbaum zu segmentieren.

Emphysemquantifizierung

Das Emphysem-Tool läßt sich via *Module > Emphysema ...* starten. Um die Emphysem-Analyse mit Standardoptionen durchzuführen muss lediglich der Button *Start* gedrückt werden. Bevor die eigentliche Emphysem-Analyse durchgeführt werden kann, müssen zunächst die Schritte *Mark Tracheobronchialtree*, *Close Tracheobronchialtree*, *Mark*

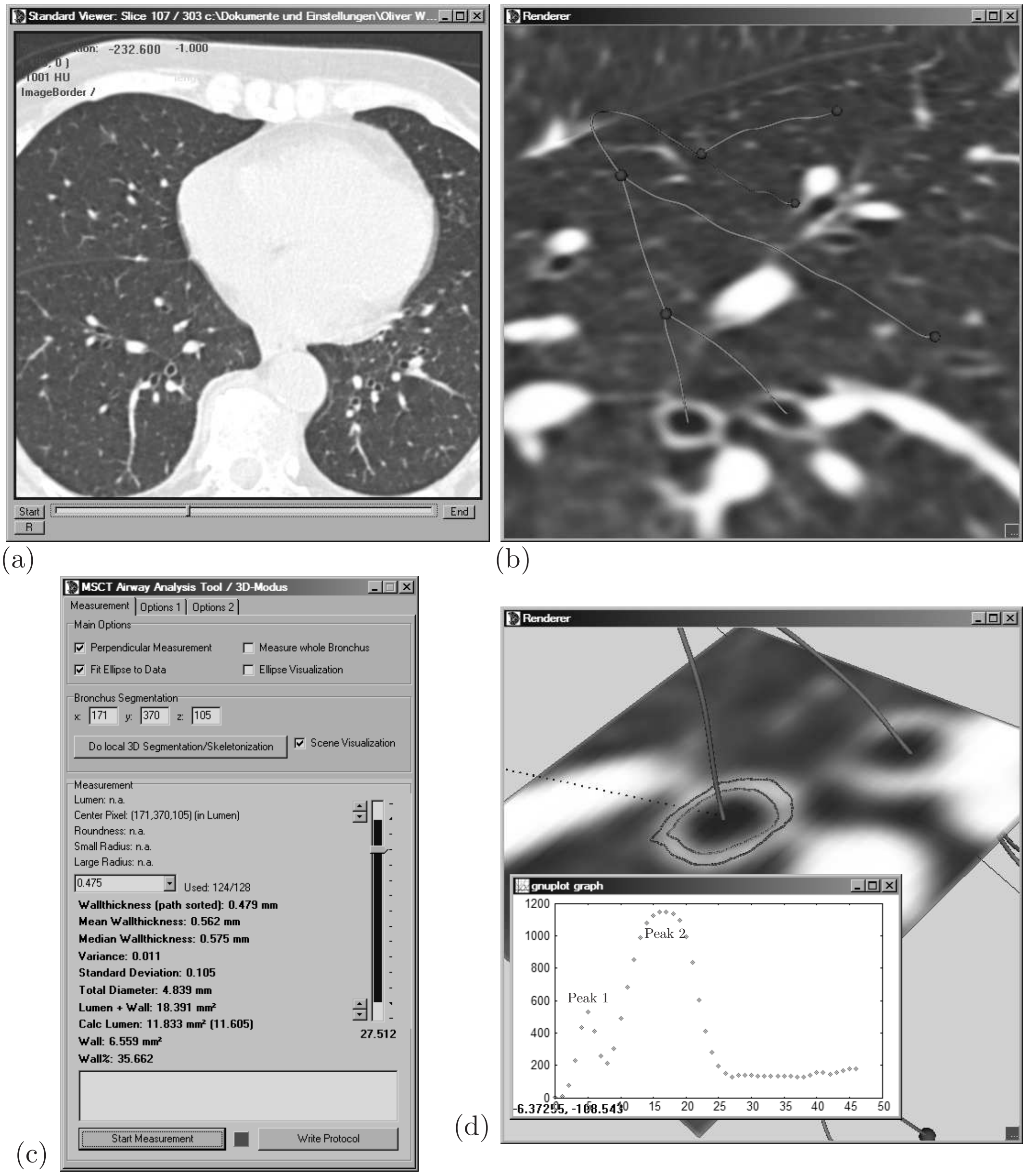


Abbildung B.3: (a) Der Standard Viewer zeigt ein axiales Schnittbild. (b) Renderer Form mit einem lokal generierten Graphen - die Verzweigungspunkte der Bronchien sind durch kleine Kugeln visualisiert. (c) Modul zum Bronchienvermessen. (d) Orthogonal zu einem Bronchus ist hier eine Ebene angezeigt. In dieser kann der Bronchus vermessen werden - die inneren und äußeren Wandgrenzen sind eingezeichnet. Die vom Zentrum des Bronchus nach außen gehenden Kugeln stellen einen Strahlengang dar, auf dem die Wanddicke bestimmt wird. Die CT-Werte entlang des Profils sind in einem Graphen dargestellt. Peak 1 gehört zur Bronchialwand, Peak 2 korrespondiert mit dem Blutgefäß.

Lung, *Close Lung* und gegebenenfalls *Separate Lung* durchgeführt werden - yacta erledigt dies automatisch. Verschiedene Parameter (Thresholds, Wachstumsbedingungen, ...) des Algorithmus können über die Tabs *Options 1* und *Options 2* verändert werden. Nach Beendigung der Analyse werden die Resultate unter den Tabs *Results 1* und *Results 2* angezeigt. Unter Results 1 wird in der letzten Zeile eine abschließende textbasierte Diagnose gestellt. Mit dem Emphysem-Modul wurde eine Vielzahl von medizinischen Publikationen erstellt, in 4.6 wird auf diese verwiesen.

MTF-Calculator

Mit dem *MTF-Calculator* kann die ESF, LSF und MTF eines bildgebenden Systems bestimmt werden. Abb. B.4 zeigt wie der MTF-Calculator an einem künstlichen Kantenbild (gesetzter Pixelabstand: 0.2 mm) eingesetzt wird.

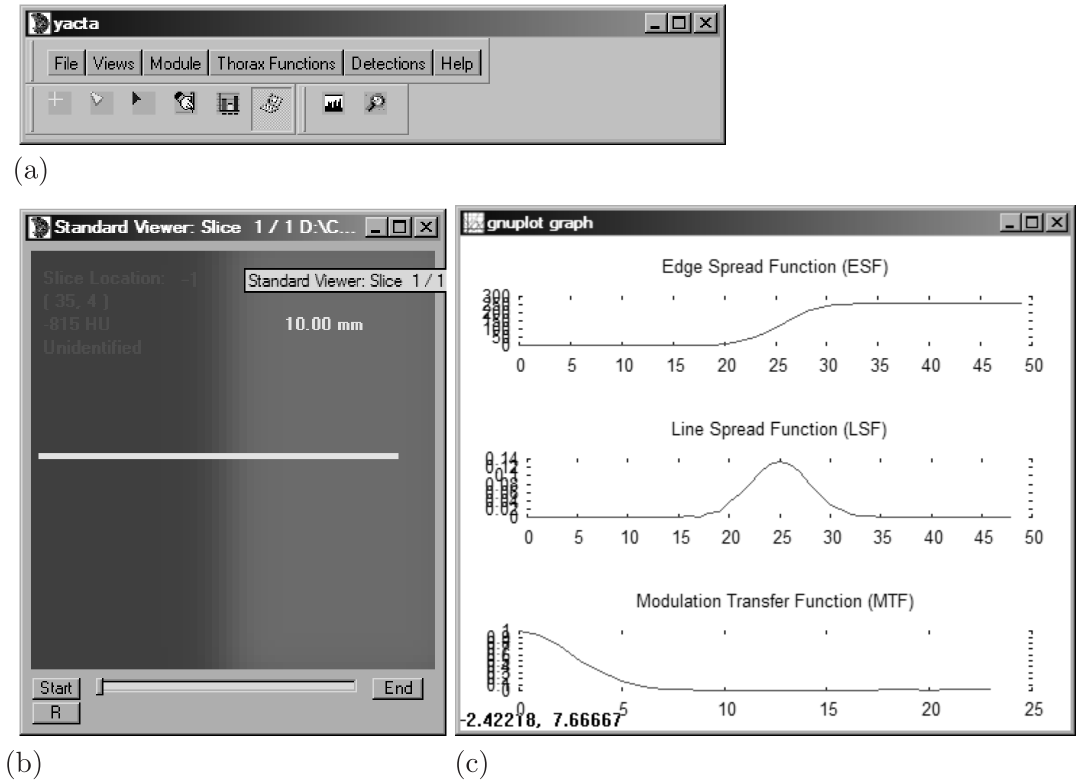


Abbildung B.4: (a) Hauptfenster von yacta: Der Button “MTF-Calculator” ist hier gedrückt zu sehen. (b) Im Standard Viewer kann nun mit dem Mauszeiger eine orthogonale Linie zu einer Kante gezeichnet werden. (c) Ausgabe der ESF, LSF und MTF in einem gnuplot-Fenster.

Für das Weichzeichnen des Kantenbildes wurde ein Gaußfilter mit $\sigma = 3.0$ verwendet. Zum Berechnen der MTF werden die in 3.3 aufgezeigten Zusammenhänge zwischen ESF, LSF und MTF benutzt. Die ESF entspricht dem Profil über die in Abb. B.4b eingezeichnete Linie. Die LSF erhält man dann via Differentiation der ESF, die MTF via der Fourier-Transformation der LSF[5]. Neben der graphischen Ausgabe der ESF, LSF und MTF, siehe Abb. B.4c, werden auf der Konsole weitere, die Auflösung des Systems beschreibenden, Parameter ausgeben:

[5] In der Implementierung ist die Differentiation durch eine Differenzenbildung approximiert, die Fourier-Transformation wird mit Octave und der dort integrierten schnellen Fourier-Transformation (FFT, Octave-Funktion: fft()) durchgeführt.

- Der Maximalwert der LSF, hier 0.133.
- Das zum Maximalwert der LSF korrespondierende Gauß-σ[6], hier 2.99 .
- Die Frequenz an der die MTF auf 10% reduziert ist, hier 0.124 .
- Die Anzahl der Linienpaare die auf 1 mm noch dargestellt werden können, hier 0.619364 lp/mm = 6.19364 lp/cm. Das heißt eine Sinusfunktion mit 6.19 lp/cm (genauer: 6.19 Wellenberge und -täler) wird in ihrer Amplitude auf 10 % ihres eigentlichen Wertes reduziert (siehe hierzu auch Abb. 3.6.).

B.2 GNU Octave

GNU Octave ist eine höhere Programmiersprache, die hauptsächlich zum numerischen Rechnen geeignet ist. GNU Octave ist freie Software und Teil des GNU Projects. Weitere Informationen gibt es unter `www.octave.org` bzw.unter `www.gnu.org`. Die von Octave benutze Sprache ist weitestgehend mit der von Matlab kompatibel, Matlab-Scripte müssen meist nur geringfügig abgeändert werden, damit sie von Octave ausgeführt werden können.

B.2.1 Octave als numerischer Server

Octave läßt sich komfortabel innerhalb von C++-Programmen als numerischer Server via Pipes unter Windows benutzen. Der folgende C++-Quelltext erzeugt eine Read-Write-Pipe zu Octave unter Windows. Octave ist über die Funktionen `yctGuiCon::WriteToOctave()` und `yctGuiCon::ReadFromOctave()` aus dem C++-Quellcode ansprechbar. Einzelne Befehle wie beispielsweise das Setzen einer Octave-Variablen `a = 0` werden an Octave via `WriteToOctave("a = 0 \n")` geschickt. Octave-Scripte können problemlos ausgeführt werden. Die von Octave berechneten Ergebnisse sind über die Funktion `yctGuiCon::ReadFromOctave()` einzulesen.

C++ Quelltext

```
 //global variables
HANDLE r_output_handle_octave;
HANDLE w_input_handle_octave;[7]
...

//**********
bool yctGuiCon::GenerateOctavePipeRW(const char* octave)
{

 char* path2octave=0;
 path2octave = searchpath(octave);

 if (path2octave==0)  {
  std::cout << "path2octave: not found" << std::endl;
  std::cout << "\n" << std::endl;
  return false;
```

[6]Mittels des Maximalwertes der LSF $LSF_{\max}$ kann ein Gauß-σ für diese Kante berechnet werden, es gilt: Gauß-σ = $\sqrt{\frac{1}{2\pi LSF_{\max}^2}}$. Der in diesem Beispiel berechnete Wert für das Gauß-σ von 2.99 trifft das verwendete Gauß-σ von 3.0 fast exakt. In klinischen CT-Bildern kann man jedoch nicht von Gaußschen-PSFs ausgehen.

[7]Globale Handles dürfen nicht vererbbar (engl. inheritable) sein. `CreatePipe()` liefert aber immer vererbbare Handles, deshalb muss im Quelltext weiter unten via `DuplicateHandle()` die Vererbbarkeit der globalen Handles abgestellt werden.

```
 }

 HANDLE tmp_r_output_handle_octave;
 HANDLE tmp_w_input_handle_octave;
 HANDLE w_output_handle_octave;
 HANDLE r_input_handle_octave;
 HANDLE e_output_handle_octave;

 //create pipes
 SECURITY_ATTRIBUTES sa;
 ZeroMemory(&sa,sizeof(SECURITY_ATTRIBUTES));
 sa.nLength=sizeof(SECURITY_ATTRIBUTES);
 sa.bInheritHandle=true;
 sa.lpSecurityDescriptor=NULL;

 //erzeuge pipe1 (child output pipe)
 if(!CreatePipe(&tmp_r_output_handle_octave,&w_output_handle_octave,&sa,0))
  std::cerr << "CreatePipe Error!" << endl;

 if(!DuplicateHandle(GetCurrentProcess(),w_output_handle_octave,
    GetCurrentProcess(),&e_output_handle_octave,0,
    TRUE,DUPLICATE_SAME_ACCESS))
  std::cerr << "DuplicateHandle Error!" << endl;

  if(!DuplicateHandle(GetCurrentProcess(),tmp_r_output_handle_octave,
    GetCurrentProcess(),&r_output_handle_octave,0,
    FALSE,DUPLICATE_SAME_ACCESS))
   std::cerr << "DuplicateHandle Error!" << endl;

  //erzeuge pipe2 (child input pipe)
  if(!CreatePipe(&r_input_handle_octave,&tmp_w_input_handle_octave,&sa,0))
   std::cerr << "CreatePipe Error!" << endl;
   if(!DuplicateHandle(GetCurrentProcess(),tmp_w_input_handle_octave,
    GetCurrentProcess(),&w_input_handle_octave,0,
    FALSE,DUPLICATE_SAME_ACCESS))
     std::cerr << "DuplicateHandle Error!" << endl;

 //schliesse die temporaeren Handles
 CloseHandle(tmp_r_output_handle_octave);
 CloseHandle(tmp_w_input_handle_octave);

 //Set Startupinfos
 STARTUPINFO si;
 ZeroMemory(&si,sizeof(STARTUPINFO));
 si.cb=sizeof(STARTUPINFO);
 si.dwFlags=STARTF_USESHOWWINDOW|STARTF_USESTDHANDLES;
 si.wShowWindow=SW_HIDE;
 si.hStdOutput= w_output_handle_octave;
 si.hStdError= e_output_handle_octave;
 si.hStdInput=r_input_handle_octave;

 ZeroMemory(&pi_octave,sizeof(PROCESS_INFORMATION));

 if(!CreateProcess(path2octave,NULL,NULL,NULL,true,DETACHED_PROCESS,
  NULL,NULL,&si,&pi_octave))
    std::cout << "CreateProcess Error" << std::endl;

 CloseHandle(w_output_handle_octave);
 CloseHandle(e_output_handle_octave);
 CloseHandle(r_input_handle_octave);

 std::string preface="";
 while (preface==""){
 ReadFromOctave(&preface);
 }

 std::cout << "octave pipe started!" << std::endl;

 return true;
}

//**********
bool yctGuiCon::WriteToOctave(const char* message)
```

```
{
 DWORD byteswriten;
 if (w_input_handle_octave!=0){
  if (!WriteFile(w_input_handle_octave,message,lstrlen(message),&byteswriten,0))
   std::cerr << "WriteFile to octave fails!" << std::endl;
  if (!FlushFileBuffers(w_input_handle_octave))
   std::cerr << "FlushFileBuffers to octave fails!" << std::endl;   return true;
 }
 else  {
  std::cout << "Can not write to octave ..." << std::endl;
  return false;
 }
}

//**********
bool yctGuiCon::ReadResultsFromOctave(string* results)
{
 if (r_output_handle_octave==0)
 {
  std::cerr << "Can not read from octave ..." << std::endl;
  return false;
 }
 DWORD BytesRead;
 DWORD TotalBytes;
 DWORD BytesLeft;
 char Data[1024] = "";
 char* test;
 string::size_type pos = 0;

 Data[BytesRead]='\0';
 *results += string(Data);

 for (;;)
 {
  //Check for the presence of data in the pipe
  if(!PeekNamedPipe(r_output_handle_octave,Data,sizeof(Data)-1,&BytesRead,
    &TotalBytes,&BytesLeft))
  {
   std::cerr << "PeekNamedPipe Error" << std::endl;
   return false;
  }

  //If there are bytes, read them
  if(!ReadFile(r_output_handle_octave,Data,BytesRead,&BytesRead,NULL))
  {
   std::cerr << "Timeout while reading results form octave-pipe. " << std::endl;
  }

  pos = results->size()-1;
  Data[BytesRead]='\0';
  *results += string(Data);

  //Check for the presence of the substring "eor" (end of results)
  pos = results->find("eor",pos);

  if (pos!=string::npos)
  {
   return true;
  }

 }//end of for-block

}//end of function ReadResultsFromOctave(string* results)
```

B.2.2 Octave Quellcode

Projection

Octave verfügt zur Zeit noch nicht über eine Image Processing Toolbox ähnlich der von Matlab. Aus diesem Grund sind hier einige Scripte für GNU Octave aufgelistet, die zum erstellen der Rekonstruktionen, in Kapitel 2 dieser Arbeit, benutzt wurden.

Octave Quelltext

```
% **********
% script for simulation of the radon-trafo
% and following filtered backprojection
% Written by: Oliver Weinheimer

a = imread("sina.jpg");
a = double(a(:,:,1));

theta = [0:1:180];
b = project(a,theta);

% add noise
noise_factor = 0.1;
noise = max(max(b));
b = b .+ noise_factor*noise*(rand(size(b)) .- 0.5);

% choose a reconstruction-filter
% c = filtershepplogan(b);
c = filterramlak(b);
% c=b

d = backproject(c,theta);


% **********
% file: projection.m
% This MATLAB function takes an image matrix and vector of angles and then
% finds the 1D projection (Radon transform) at each of the angles. It returns
% a matrix whose columns are the projections at each angle.
% Written by : Justin K. Romberg
% Modified by : Oliver Weinheimer

function PR = projection(IMG, THETA)

% pad the image with zeros so we don’t lose anything when we rotate.
[iLength, iWidth] = size(IMG);
iDiag = sqrt(iLength2̂ + iWidth2̂);
LengthPad = ceil(iDiag - iLength) + 2;
WidthPad = ceil(iDiag - iWidth) + 2;
padIMG = zeros(iLength+LengthPad, iWidth+WidthPad);
padIMG(ceil(LengthPad/2):(ceil(LengthPad/2)+iLength-1),
       ceil(WidthPad/2):(ceil(WidthPad/2)+iWidth-1)) = IMG;

% loop over the number of angles, rotate 90-theta (because we can easily sum % if we look at
stuff from the top), and then add up. Don’t perform any % interpolation on the rotating. n =
length(THETA);
PR = zeros(size(padIMG,2), n);
for i = 1:n
  tmpimg = imrotate(padIMG, 90-THETA(i), ’bilinear’, ’crop’);
  PR(:,i) = (sum(tmpimg))’;
  THETA(i)
end


% **********
% file : backproject.m
% This is a MATLAB function that takes filtered back projections without
% using the ’imrotate’ command. Here, we try to cut out all the loops.
% PR is a matrix whose columns are the projections at each angle.
% THETA is a row vector of the angles of the respective projections.
% Written by : Justin K. Romberg
```

```
% Modified by: Oliver Weinheimer

function [ BPI,M ] = backproject(PR, THETA)

% figure out how big our picture is going to be.
n = size(PR,1);
sideSize = n;

%Projections must be filtered ouside
filtPR = PR;

% convert THETA to radians
th = pi/180*THETA;

% set up the image
m = length(THETA);
BPI = zeros(sideSize,sideSize);

% find the middle index of the projections
% note, octave indexing starts with 1
% midindex = (n+1)/2;

% set up x and y matrices
x = 1:sideSize;
y = 1:sideSize;
[X,Y] = meshgrid(x,y);
xpr = X - (sideSize+1)/2;
ypr = Y - (sideSize+1)/2;

% loop over each projection
for i = 1:m   % figure out which projections to add to which spots
  % nearest neighborhood interpolation?
  filtIndex = round(midindex + xpr*sin(th(i)) + ypr*cos(th(i)));

  % if we are "in bounds" then add the point
  BPIa = zeros(sideSize,sideSize);
  spota = find((filtIndex > 0) & (filtIndex <= n));
  newfiltIndex = filtIndex(spota);
  BPIa(spota) = filtPR(newfiltIndex(:),i);

  BPI = BPI + BPIa;

end

BPI = BPI .* (pi/m);
```

Betrachten wir die ersten Zeilen des Listings. Mittels der Funktion `imread` wird ein Bild (Grauwertbild) in Octave eingeladen. In diesem Beispiel wurde ein jpg-Bild geladen. Da jpg-Bilder über 3 Kanäle verfügen, die aber im Falle von Grauwertbildern identisch belegt sind, kann das Bild mit `a = double(a(:,:,1))` auf einen Kanal beschränkt werden. Dann werden die Projektionsbilder durch die Funktion `project` zu dem Winkel `theta` erstellt, hier im äquidistanten Abstand von genau einem Grad. Auf diese wird ein Rauschen addiert. Danach erfolgt, falls gewünscht, die Anwendung eines Filters auf die Projektionsdaten. Die abschließende Rekonstruktion wird durch die Funktion `backproject` erledigt.

Ellipse Fitting

Das original Script für das von [FPF99] eingeführte Ellipse Fitting ist eine Implementation für Matlab. Hier das entsprechende Octave-Script mit einigen Erweiterungen.

Octave-Script

```
%build design matrix: vector a contains the coordinates
```

```
D = [ a(:,1).*a(:,1), a(:,1).*a(:,2), a(:,2).*a(:,2), a(:,1), a(:,2), ones(rows(a),1) ];
%build scatter matrix
S=D'*D;
%build constrain matrix
C(6,6)=0; C(1,3)=2; C(2,2)=-1; C(3,1)=2;
[AA,BB,Q,Z,V,W,lambda] = qz(S,C);
[max_lambda,max_lambda_index] = max(lambda);
u_i = V(:,max_lambda_index)' * C * V(:,max_lambda_index);
my = sqrt(1/u_i);
a_dach=my*V(:,max_lambda_index);

% -- extensions --
% transformation of ellipse to normal form
%see e. g. [BS91] chapter 2.6.6.2 Geometrie
A_normal = [ a_dach(1), a_dach(2)/2; a_dach(2)/2, a_dach(3) ];
A_schlange = [ a_dach(1), a_dach(2)/2, a_dach(4)/2; a_dach(2)/2, a_dach(3),  a_dach(5)/2;
a_dach(4)/2, a_dach(5)/2, a_dach(6) ];
a_strich = det(A_schlange)/det(A_normal);
lambda_A_normal = eig(A_normal);
f_a = sqrt(-a_Strich/lambda_A_normal(1));
f_b = sqrt(-a_Strich/lambda_A_normal(2));
%ellipse = (1 / f_a^2) *x^2 + (1 / f_b^2)*y^2 = 1
area = pi * f_a * f_b

% calculation of ellipse center
a_normal = [-a_dach(4)/2; -a_dach(5)/2]
center = A_Normal \ a_normal
%determination of ellipse axis
%see e. g. [BS91] chapter 2.4.4.5.3 Geometrie
[EV,EW] = eig(A_Normal)
% EV contains the normalized eigenvektors of matrix A_Normal
axis1 = f_a*EV(:,1)
axis2 = f_b*EV(:,2)
```

B.3 Visualization Toolkit (VTK)

Das Visualization Toolkit (VTK) ist eine in C++ implementierte, plattformunabhängige Open-Source Software-Bibliothek, die unter Verwendung objektorientierter Entwurfsmuster entwickelt wurde. Die Bibliothek enthält neben Methoden aus der Computergrafik und Bildverarbeitung hauptsächlich Methoden zur Visualisierung. Auch bietet VTK Schnittstellen für weitere Sprachen wie beispielsweise die Scriptsprachen Tcl und Python durch einen Wrapping-Mechanismus. Da sich unter VTK Objekte auf einem höheren Abstraktionslevel befinden als beispielsweise in OpenGL, ist es mit VTK wesentlich einfacher, Grafik- und Visualisierungsanwendungen zu erstellen. Neben verschiedenen Render-, Beleuchtungs- und Texturierungsmethoden und vielen Visualisierungstechniken, z.B. basierend auf Punkten, Polygonen, Tensoren oder Rastern, bietet VTK auch eine große Palette an 3D-Grafikobjekten. Es folgen zwei kleine Code-Snippets aus dem yacta-Quellcode in denen VTK-Klassen benutzt werden.

B.3.1 vtkLandmarktransform

Mittels des Richtungsvektors dir eines Bronchus lassen sich zwei Ebenenvektoren $dir1$ und $dir2$ bestimmen, die sowohl zu dir als auch zueinander orthogonal stehen. Hat man nun eine Menge von Punkten innerhalb einer Ebene, im folgenden Beispiel sind in `min1pointsreal` die Lumenrandpunkte eines Bronchus gespeichert, so kann vtkLandmarkTransform folgendermaßen angewendet werden:

C++-Quelltext

```
//Verschiebung und Drehung der Ebene
//Bestimme die Transformationsmatrix mittels vtkLandmarkTransform
vtkLandmarkTransform *l = vtkLandmarkTransform::New();
float xyz[3];
float xyz_out[3];

//Setze zunaechst das gewuenschte Zielkoordinatensystem
vtkPoints *target = vtkPoints::New();
xyz[0] = 0; xyz[1] = 0; xyz[2] = 0;
target->InsertPoint(0,xyz);
xyz[0] = 0; xyz[1] = 1; xyz[2] = 0;
target->InsertPoint(1,xyz);
xyz[0] = 1; xyz[1] = 0; xyz[2] = 0;
target->InsertPoint(2,xyz);
target->Modified();
l->SetTargetLandmarks(target);

//Bestimme die drei Punkte der 3D-Ebene, die in das Zielkoordinatensystem
//uebertragen werden sollen
vtkPoints *source = vtkPoints::New();
xyz[0] = CenterVoxel.x*pDicomstack->PixelSpacingX();
xyz[1] = CenterVoxel.y*pDicomstack->PixelSpacingY();
xyz[2] = CenterVoxel.z*pDicomstack->GapBetweenSlices();
source->InsertPoint(0,xyz);
xyz[0] = CenterVoxel.x*pDicomstack->PixelSpacingX() +dir1[0];
xyz[1] = CenterVoxel.y*pDicomstack->PixelSpacingY() +dir1[1];
xyz[2] = CenterVoxel.z*pDicomstack->GapBetweenSlices() +dir1[2];
source->InsertPoint(1,xyz);
xyz[0] = CenterVoxel.x*pDicomstack->PixelSpacingX() +dir2[0];
xyz[1] = CenterVoxel.y*pDicomstack->PixelSpacingY() +dir2[1];
xyz[2] = CenterVoxel.z*pDicomstack->GapBetweenSlices() +dir2[2];
source->InsertPoint(2,xyz);
source->Modified();
l->SetSourceLandmarks(source);

//Transformiere die Punkte
std::string transfer;
transfer += "a = [";
for (iter=min1pointsreal.begin();iter!=min1pointsreal.end();++iter)
{
  xyz[0]=(*iter).x *pDicomstack->PixelSpacingX();
  xyz[1]=(*iter).y *pDicomstack->PixelSpacingY();
  xyz[2]=(*iter).z *pDicomstack->GapBetweenSlices();
  l->TransformPoint(xyz,xyz_out);
  transfer += FloatToStr(xyz_out[0]).c_str() + string(" ") + FloatToStr(xyz_out[1]).c_str()
+ string(" ") + FloatToStr(xyz_out[2]).c_str() + string("; "); }
transfer += string("]; \n");
```

Die Lumenrandpunkte stehen nun transformiert im string `transfer` und können mittels `WriteToOctave(transfer.c_str())` für das Ellipse Fitting an Octave weitergereicht werden.

Anmerkung: Hat man, wie in diesem Beispiel, lediglich 3 Landmarks, kann eine Transformationsmatrix natürlich auch mittels Lösen eines einfach aufzustellenden linearen Gleichungssystems ermittelt werden. Die Klasse `vtkLandmarktransform` bietet den Vorteil, dass man lediglich zwei Mengen von Landmarks definieren muss und die Klasse dann den besten Fit der Quellenlandmarks auf die Ziellandmarks berechnet, wobei die Abstandsquadrate minimiert werden.

B.3.2 vtkImageImport und vtkPlaneImageWidget

Das Überführen von CT-Bilddaten aus der Software yacta in die VTK-Datenstruktur ist durch die Klasse `vtkImageImport` möglich. Zum Anzeigen von axialen, sagittalen oder koronalen Ebenen durch ein CT-Volumen ist die Klasse `vtkImagePlaneWidget` sehr gut geeignet, diese Klasse wird beispielsweise zum Anzeigen der Ebenen in Abb. B.2 eingesetzt. Der folgende yacta-Quelltext zeigt die wesentlichen Schritte beim Instantiieren der Klassen `vtkImageImport` und `vtkImagePlaneWidget`. Aufgrund der Namensgebung sollten die meisten hier verwendeten Klassenfunktionen selbsterklärend sein, VTK verfügt über eine sehr gute HTML-Dokumentation, die ein Einarbeiten in das Toolkit erleichtert.

C++-Quelltext `//**********`
```
...
importer = vtkImageImport::New();
importer->SetWholeExtent(0,cols-1,0,rows-1,0,slices-1);
importer->SetDataSpacing(pDicomstack()->PixelSpacingX(),pDicomstack()->PixelSpacingY(),
                  pDicomstack()->GapBetweenSlices());
importer->SetDataExtentToWholeExtent();
importer->SetDataScalarTypeToUnsignedShort();
importer->SetImportVoidPointer(pDicomstack()->imageValues);
...

//**********
...
planeWidgetY = vtkImagePlaneWidget::New();
planeWidgetY->SetInteractor(vtkWindow1->GetRenderWindow()->GetInteractor());
planeWidgetY->DisplayTextOn();
planeWidgetY->SetLookupTable(bwLut);
planeWidgetY->SetInput(importer->GetOutput());
planeWidgetY->SetPlaneOrientationToXAxes();
planeWidgetY->SetSliceIndex(0);
planeWidgetY->GetPlaneProperty()->SetColor(0,0,1);
planeWidgetY->SetKeyPressActivationValue('x');
planeWidgetY->RestrictPlaneToVolumeOn();
planeWidgetY->SetResliceInterpolateToLinear();
planeWidgetY->UseContinuousCursorOn();
planeWidgetY->On();
...
```

B.4 DICOM Standard

DICOM steht für "Digital Imaging and Communications in Medicine". DICOM ist ein weltweit offener Standard zum Austausch von digitalen Bildern in der Medizin. DICOM standardisiert sowohl das Format zur Speicherung von Bilddaten, als auch das Kommunikationsprotokoll zum Austausch der Bilder. Ein DICOM-Bild besteht aus einer Liste von Datenelementen (sogenannten Attributen), die eine Vielzahl von bildbegleitenden Informationen enthalten:

- Informationen zum Patient, z. B. Name, Geburtsdatum und Identifikationsnummer,
- Informationen zu Modalität und Aufnahme, z. B. Geräteparameter, Kalibrierung, Strahlungsdosis und Kontrastmittelgabe, und
- Bildinformationen, z. B. Auflösung, Fensterung oder Bildposition.

Der aktuelle DICOM-Standard wird von der National Electrical Manufactures Association (NEMA) bereitgestellt (siehe http://dicom.nema.org).

DCMTK (DCMTK - DICOM-Toolkit) ist eine Sammlung von Bibliotheken und Anwendungen, die zusammen große Teile des DICOM-Standards implementieren. DCMTK enthält Anwendungen zum Untersuchen, Erzeugen und Konvertieren von DICOM-Bilddateien, zum Bearbeiten von Speichermedien, zum Versenden und Empfangen von DICOM-Bildern in einem Netzwerk sowie Beispiel-Server für die DICOM-Bildarchivdienste und "Modality Worklist". DCMTK ist in einem Gemisch aus ANSI C und C++ implementiert und wird als "Open Source"-Software im Quelltext zur Verfügung gestellt. Das DCMTK steht unter http://dicom.offis.de zum Download bereit.

Anhang C

Veröffentlichungen

Während meiner Zeit als Doktorand im Klinikum der Johannes Gutenberg-Universität Mainz sind zahlreiche Publikationen mit meinem Mitwirken entstanden:

- **O. Weinheimer**, T. Achenbach, C. Buschsiewke, C. P. Heussel, T. Uthmann, and H.U. Kauczor: "*Quantification and Characterization of Pulmonary Emphysema in Multislice CT*", in Medical Data Analysis, Volume 2868 of Lecture Notes in Computer Science Springer Verlag, Oct. 2003

- Tobias Achenbach, **Oliver Weinheimer**, Claus Peter Heussel, Manfred Thelen and Hans Ulrich Kauczor: "*Fully Automatic Detection and Quantification of Emphysema on Thin Section MD-CT of the Chest by a New and Deticated Software*", in Forschr Röntgenstr. RöFo 176 (2004), S. 1409-1415

- **O. Weinheimer**, T. Achenbach, C. P. Heussel, M. Thelen und T. Uthmann: "*Analyse von Bronchien in der Multislice-CT*", in Bildverarbeitung für die Medizin 2004, Springer Verlag, März 2004

- RKW. Schulze, **O. Weinheimer**, DD. Brüllmann, F. Röder, B. d'Hoedth, und E. Schömer: "*Software for automated application of a reference-based method for a posteriori determination of the effective radiographic imaging geometry*", in Dentomaxillofacial Radiology (2005) 34, S. 205-211

- Julia Zaporozhan, Sebastian Ley, Ralf Eberhardt, **Oliver Weinheimer**, Svitlana Iliyushenko, Felix Herth and Hans-Ulrich Kauczor: "*Paired Inspiratory/Expiratory Volumetric Thin-Slice CT Scan for Emphysema Analysis: Comparison of Different Quantitative Evaluations and Pulmonary*", Chest 2005, 128, 3212-3220

- Julia Zaporozhan, Sebastian Ley, **Oliver Weinheimer**, Ralf Eberhardt, Ioannis Tsakiris, Yasuhiro Noshi, Felix Herth, und Hans-Ulrich Kauczor: "*Multi-detector CT of the chest: influence of dose onto quantitative evaluation of severe emphysema: a simulation study*", J Comput Assist Tomogr. (2006), 30:460-468

- Christian Buschsieweke: "*Vergleich intelligenter Nachbearbeitungsalgorithmen zur Quantifizierung des Lungenemphysems in Mehrschicht - CT Datensätzen*", Dissertation, Mai 2006

- C. P. Heußel, T. Achenbach, C. Buschsieweke, J.-M. Kuhnigk, **O. Weinheimer**, G. P. Hammer, C. Düber, und H.-U. Kauczor: “*Quantifizierung des Lungenemphysems in der Mehrschicht-CT mittels verschiedener Softwareverfahren*”, in Fortschr Röntgenstr 2006 RöFo, 178: 987-998

- Sebastian Ley, Julia Ley-Zaporozhan, Roland Unterhinninghofen, Yasuo Saito, Michael Fabel-Schulte, **Oliver Weinheimer**, Jens-Peter Schenk, Gabor Szabo, und Hans-Ulrich Kauczor: “*Investigation of retrospective respiratory gating techniques for acquisition of thin-slice 4d-multidetector-computed tomorgraphy (mdct) of the lung: feasibility study in a large animal model*”, in Exp Lung Res. 2006 Oct ;32 (9):395-412 17162648

- Julia Ley-Zaporozhan, Sebastian Ley, Ralf Eberhardt, **Oliver Weinheimer**, Christian Fink, Michael Puderbach, Monika Eichinger, Felix Herth und Hans Ulrich Kauczor: “*Assessment of the relationship between lung parenchymal destruction and impaired pulmonary perfusion on a lobar level in patients with emphysema*”, in European Journal of Radiology, 2007

- Julia Ley-Zaporozhan, Sebastian Ley, **Oliver Weinheimer**, S. Iliyushenko, S. Erdugan, R. Eberhardt, A. Fuxa, J. Mews, und Hans Ulrich Kauczor: “*Quantitative analysis of emphysema in 3D using MDCT: Influence of different reconstruction algorithms*”, in European Journal of Radiology, 2007

- **Oliver Weinheimer**, Tobias Achenbach, Carsten Bletz, Christoph Düber, Hans-Ulrich Kauczor, und C. P. Heußel: “*About Objective 3D Analysis of Airway Geometry in Computerized Tomography*”, erscheint in IEEE Transactions on Medical Imaging, angenommen am 29. Mai 2007

- Julia Ley-Zaporozhan, Sebastian Ley, R. Unterhinninghofen, **Oliver Weinheimer**, Y. Saito, Hans Ulrich Kauczor und G. Szabo : “*Quantification of Lung Volume at Different Tidal Volumes and Positive End-expiratory Pressure in a Porcine Model by Using Retrospective Respiratory Gated 4D-CT*”, erscheint in Investigative Radiology, angenommen im September 2007

- Daniela Freudenstein: “Vergleich der Bronchialwanddicke bei Rauchern mit COPD und Nichtrauchern ohne COPD mittels computergestützter Nachverarbeitung von Dünnschicht-Mehrschicht-CT Datensätzen durch das Computerprogramm YACTA”, Dissertation, noch nicht eingereicht

Literaturverzeichnis

[AAP+97] A, Prescott ; AM, Bjerg ; PK, Andersen ; P, Lange ; J, Vestbo: Gender difference in smoking effects on lung function and risk of hospitalization for COPD: results from a Danish longitudinal population study. In: *Eur Respir J* 10 (1997), Nr. 4, S. 822–7

[AW87] Amanatides, J. ; Woo, A.: A Fast Voxel Traversal Algorithm for Ray Tracing. In: *Proc. Eurographics 1987*, 1987, S. 1–10

[AWH+04] Achenbach, Tobias ; Weinheimer, Oliver ; Heussel, Claus P. ; Thelen, Manfred ; Kauczor, Hans U.: Fully Automatic Detection and Quantification of Emphysema on Thin Section MD-CT of the Chest by a New and Deticated Software. In: *Forschr Röntgenstr RöFo* 176 (2004), S. 1409–1415

[Ba] Bezerra, Francisco N. ; et al. *Some Comments on Thinning Algorithms for 3-D Images*. citeseer.ist.psu.edu/bezerra98some.html

[Bac99] Backfrieder, Werner: *Computertomographie*. 1999. – Vorlesung

[Bar06] Barnes, Peter J.: Against the Dutch Hypothesis: Asthma and Chronic Obstructive Pulmonary Disease are Distinct Disease. In: *American Journal of Respiratory and Critrical Care Medicine* 174 (2006), S. 240–243

[BDH04] Böcker, W. ; Denk, H. ; Heitz, P. U.: *Pathologie*. Elsevier, Urban und Fischer, 2004

[Bec00] Beck, Thomas. *Anatomie des Menschen: Durchblutung und Feinbau der Lunge*. http://www.pharmazeutische-zeitung.de/. 2000

[BP03] Brusasco, Vito ; Pellegrino, Riccardo: Complexity of factors modulating airway narrowing in vivo: relevance to assessment of airway hyperresponsiveness. In: *J. Applied Physiology* 95 (2003), S. 1305–1313

[Bra00] Bracewell, Ronald N.: *The Fourier Transform and its Applications, Third Edition*. McGraw-Hill Higher Education, 2000

[BS91] Bronstein, I. N. ; Semendjajew, K. A.: *Taschenbuch der Mathematik*. Teubner Verlagsgesellschaft, 1991

[Bus06] Buschsieweke, Christian: *Vergleich intelligenter Nachbearbeitungsalgorithmen zur Quantifizierung des Lungenemphysems in Mehrschicht-CT-Datensätzen*, Diss., 2006

[BWL01] Blechschmidt, R. A. ; Werthschützky, R. ; Lörcher, U.: Automated CT Image Evaluation of the Lung: A Morphology-Based Concept. In: *IEEE Transactions on Medical Imaging* 20 (2001), May, Nr. 5

[Cas04] de Casteele, Elke V.: *Model-based approach for Beam Hardening Correction and Resolution Measurements in Microtomography*, Diss., 2004

[CEG83] Censor, Yair ; Eggermont, Paul P. B. ; Gordon, Dan: Strong Underrelaxation in Kaczmarz's Method for Inconsitent Systmes. In: *Numerische Mathmatik* 41 (1983)

[Cen81] Censor, Yair: Row-Action Methods For Huge And Sparse Systems And Their Applications. In: *SIAM Review* 23 (1981), Oct., Nr. 4, S. 444–466

[CGG01a] Censor, Yair ; Gordon, Dan ; Gordon, Rachel: BICAV: A Block-Iterative, Parallel Algorithm for Sparse Systems with Pixel-Related Weighting. In: *IEEE Transactions on Medical Imaging* 20 (2001), S. 1050–1060

[CGG01b] Censor, Yair ; Gordon, Dan ; Gordon, Rachel: Component averaging: An efficient iterative parallel algorithm for large and sparse unstructured problems. In: *Elsevier Parallel Computing* 27 (2001), S. 777–808

[CHHY01] Chabat, F. ; Hu, X.-P. ; Hansell, D. M. ; Yang, G.-Z: ERS Transform for the Automated Detection of Bronchial Abnormalities on CT of the Lungs. In: *IEEE Transactions on Medical Imaging* 20 (2001), Sept., Nr. 9

[Cor63] Cormack, A. M.: Representation of a Function by Its Line Integrals, with Some Radiological Applications. In: *Journal of Applied Physics* 34 (1963), S. 2722–2727

[Cor64] Cormack, A. M.: Representation of a Function by Its Line Integrals, with Some Radiological Applications. II. In: *Journal of Applied Physics* 35 (1964), S. 2908–2913

[Cor79] Cormack, A. M.: Early Two-Dimensional Reconstruction And Recent Topics Stemming From It. In: *Nobel Lecture* (1979)

[DN99] Dougherty, Geoffrey ; Newman, David: Measurement of thickness and density of thin structures by computed tomography: A simulation study. In: *Medical Physics* 26 (1999), Nr. 7, S. 1341–1348

[Ewe98] Ewen, Klaus: *Moderne Bildgebung: Physik, Gerätetechnik, Bildbearbeitung, und -kommunikation, Strahlenschutz, Qualitätskontrolle.* Thieme Verlag, 1998

[For84a] Forster, Otto: *Analysis 2 - Differentialrechnung im* $\mathbf{R}^n$ *- Gewöhnliche Differentialgleichungen.* Vieweg Verlag, 1984

[For84b] Forster, Otto: *Analysis 3 - Integralrechnung im* $\mathbf{R}^n$ *- mit Anwendungen.* Vieweg Verlag, 1984

[FPF99] Fitzgibbon, Andrew ; Pilu, Maurizio ; Fisher, Robert B.: Direct Least Square Fitting of Ellipses. In: *IEEE Transactions on Pattern Analyses and Machine Intelligence* 21 (1999), May, Nr. 5

[GGS96] Gander, W. ; Golub, G. H. ; Strebel, R.: Least-Squares Fitting of Circles and Ellipses. In: editorial board Bulletin Belgian Mathematical Society (Hrsg.): *Numerical analysis (in honour of Jean Meinguet)*, 1996, S. 63–84

[GOL] GOLD: *The Global Initiative for Chronic Obstructive Lung Disease (GOLD)*. http://goldcopd.com . – online; Stand 6. März 2007

[HAB+06] Heussel, C. P. ; Achenbach, T. ; Buschsieweke, C. ; Kuhnigk, J.-M. ; Weinheimer, O. ; Hammer, G. P. ; Düber, C. ; Kauczor, H.-U.: Quantifizierung des Lungenemphysems in der Mehrschicht-CT mittels verschiedener Softwareverfahren. In: *Fortschr Röntgenst* 178 (2006), S. 987–998

[HCU+] Hogg, James C. ; Chu, Fanny ; Utokaparch, Soraya ; Woods, Ryan ; Elliott, W. M. ; Buzatu, Liliana ; Cherniack, Ruben M. ; Rogers, Robert M. ; Sciurba, Frank C. ; Coxson, Harvey O. ; Pare, Peter D.: The Nature of Small-Airway Obstruction in Chronic Obstructive Pulmonary Disease. In: *The new england journal of medicine* 350, Nr. 26, S. 2645–2653

[Hec95] Heckbert, Paul (Hrsg.): *Graphics Gems IV*. Academic Press, 1995

[Her80] Herman, Gabor T.: *Image Reconstruction From Projections*. Academic Press, 1980

[Heu93] Heuser, H.: *Lehrbuch der Analysis - Teil 2*. Teubner Verlag, 1993

[HHR01] Hu, Shiying ; Hoffmann, Eric A. ; Rheinhardt, Joseph M. *Automatic Lung Segmentation for Accurate Quantitation of Volumetric X-Ray CT Images*. June 2001

[HNO+06] Hasegawa, Masaru ; Nasuhara, Yasuyuki ; Onodera, Yuya ; Makita, Hironi ; Nagai, Katsura ; Fuke, Satoshi ; Ito, Yoko ; Besuyaku, Tomoko ; Nishimura, Masaharu: Airflow Limitation and Airway Dimensions in Chronic Obstructive Pulmonary Disease. In: *Am J Respir Crit Care Med* 173 (2006), S. 1309–1315

[Hor99] Horrit, Matthew S.: A statistical active contour model for SAR image segmentation. In: *Image and Vision Computing* 17 (1999), S. 213–224

[HR05] Hering, K. G. ; Rodenwaldt, J.: Bildgebung der Atemwege. In: *Pneumologe* 2 (2005), S. 393–406

[Ing] Ingelheim, Boehringer: *Astma / COPD*. http://www.medworld.de . – online; Stand 5. März 2007

[Jai89] Jain, Anil K.: *Fundamentals of digital image processing*. Prentice-Hall International, 1989 (Prentice-Hall information and system sciences series)

[Jäh97] Jähne, Bernd: *Digitale Bildverarbeitung.* Springer Verlag, 1997

[JTS05] Juerg Tschirren, Erik A. H. ; Sonka, Milan: Intrathoracic Airway Trees: Segmentation and Airway Morphology Analysis From Low-Dose CT Scans. In: *IEEE Trans. Medical Imaging* 24 (2005), Dec., Nr. 12, S. 1529–1539

[Kat02] Katsevich, Alexander: Analysis of an exact inversion algorithm for spiral cone-beam CT. In: *Phys. Med. Biol.* (2002), Nr. 47, S. 2583–2597

[KMM95] Kang, Eun Y. ; Miller, Roberta R. ; Müller, Nestor L.: Bronchiectasis: comparison of preoperative thin-section CT and pathologic findings in resected specimens. In: *Radiology* 195 (1995), S. 649–654

[KMW+00] King, Gregory G. ; Müller, N. L. ; Whittall, K. P. ; Xiang, Q. ; Pare, P. D.: An Analysis Algorithm for Measuring Airway Lumen and Wall Areas from High-ResolutionComputed Tomographic Data. In: *Am J Respir Crit Care Med* 161 (2000), S. 574–580

[KPT+02] Kitaoka, H. ; Park, Y. ; Tschirren, J. ; Reinhardt, J. ; Sonka, M. ; McLennan, G. ; Hoffmann, E. A.: Automated Nomenclature Labeling of the Bronchial Tree in 3D-CT Lung Images. In: *MICCAI 2002* Bd. 2489, Springer Verlag, 2002, S. 1–11

[Kre91] Krengle, Ulrich: *Einführung in die Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik.* Vieweg Verlag, 1991

[KS99] Kak, Avinash C. ; Slaney, Malcolm: *Principles of Computerized Tomographic Imaging.* IEEE Press, 1999

[K.T71] K.Tanabe: Projection method for solving a singular system of linear equations and its applications. In: *Numerische Mathmatik* 17 (1971), S. 203–214

[KWT88] Kass, M. ; Witkin, A. ; Terzopoulos, D.: Snakes: Active contour models. In: *Int. Jour. of Computer Vision* (1988), Nr. 8, S. 321–331

[Lan] Lang, Dr. J.: *Unterweisung für Ärzte über den Strahlenschutz in der Diagnostik mit Röntgenstrahlen.* http://mitglied.lycos.de/DrJoachimLang/infoinha.htm . – [Online; Stand 22. Januar 2007]

[Leh] Lehnertz, Klaus: *Physics in Medicine: Physical Fundamentals of Medical Imaging.* http://imbie.meb.uni-bonn.de/epileptologie/staff/lehnertz/lectures.htm . – [Online; Stand 4. Februar 2007]

[LKC94] Lee, T. C. ; Kashyap, R. L. ; Chu, G. N.: Building skeleton models via 3-d medial surface/axis thinning. In: *CVGIP* Bd. 56, 1994, S. 462–478

[LLZU+06] Ley, Sebastian ; Ley-Zaporozhan, Julia ; Unterhinninghofen, Roland ; Saito, Yasuo ; Fabel-Schulte, Michael ; Weinheimer, Oliver ; Schenk, Jens-Peter ; Szabo, Gabor ; Kauczor, Hans-Ulrich: Investigation of retrospective respiratory gating techniques for acquisition of thin-slice 4d-multidetector-computed tomorgraphy (mdct) of the lung: feasibility study in a large animal model. In: *Exp Lung Res.* 32 (9) (2006), Oct, S. 395–412

[LNT+93] Lynch, David A. ; Newell, John D. ; Tschomper, Bryan A. ; Cink, Thomas M. ; Newman, Lee S. ; Bethel, Robert: Uncomplicated asthma in adults: comparison of CT appearance of the lungs in asthmatic and healthy subjects. In: *Radiology* 188 (1993), S. 829–833

[LOPR97] Lehmann, Thomas ; Oberschelp, Walter ; Pelikan, Erich ; Repges, Rudolf: *Bildverarbeitung fürf die Medizin*. Springer Verlag, 1997

[LS74] Logan, L. A. ; Shepp, B. F.: The Fourier reconstruction of a head section. In: *IEEE Trans. Nuclear. Sci.* NS-21 (1974), S. 21–43

[LVG80] Lobregt, S. ; Verbeek, P. W. ; Groen, F. C. A.: Three-Dimensional Skeletonization: Prinziple and Algorithm. In: *IEEE Transactions on Pattern Analyses and Machine Intelligence* 2 (1980), Nr. 1, S. 75–77

[LZLW+07] Ley-Zaporozhan, Julia ; Ley, Sebastian ; Weinheimer, Oliver ; Iliyushenko, Svitlana ; Erdugan, Serap ; Eberhardt, Ralf ; Fuxa, Adelheid ; Mews, Jürgen ; Kauczor, Hans-Ulrich: Quantitative analysis of emphysema in 3D using MDCT: Influence of different reconstruction algorithms. In: *European Journal of Radiology* (2007)

[MB04] Man, Bruno D. ; Basu, Samit: Distance-driven projection and backprojection in three dimensions. In: *Phys. Med. Biol.* 49 (2004)

[MKN+05] Matsuoka, S. ; Kurihara, Y. ; Nakjima, Y. ; Ashida, H. ; Kaneoya, K.: Serial change in airway lumen and wall thickness at thin-section CT in asymptomatic subjects. In: *Radiology* 234 (2005), S. 595–603

[MLB+03] Mayer, D. ; Ley, S. ; Brook, B.S. ; Thust, S. ; Heussel, C.P. ; Kauczor, H.-U.: 3D-Segmentierung des menschlichen Trachiobronchialbaums aus CT-Bilddaten. In: *Bildverarbeitung für die Medizin 2003*, Springer Verlag, 2003, S. 333–337

[Mor81] Morgenthaler, D. G.: Three-Dimensional Simple Points: Serial Erosion, Parallel Thinning and Skeletonization. 1981 (TR-1005). – Forschungsbericht

[NCP04] Noo, Frederic ; Clackdoyle, Rolf ; Pack, Jed D.: A two-step Hilbert transform method for 2D image reconstruction. In: *Phys. Med. Biol.* (2004), Nr. 49, S. 3903–3923

[NDOH98] Newman, David ; Dougherty, Geoffrey ; Obaid, A A. ; Hajrasy, H A.: Limitations of clinical CT in assessing cortical thickness and density. In: *Phys. Med. Biol.* 43 (1998), S. 619–626

[Net94] Netter, F. H.: *Atlas der Anatomie des Menschen*. Thieme Verlag, 1994

[NK00] Nikolaus Konietzko, Helmut F.: *Weißbuch Lunge*. Thieme Verlag, 2000

[NMS+00] NAKANO, Yasutaka ; MURO, Shigeo ; SAKAI, Hiroaki ; HIRAI, Toyohiro ; CHIN, Kazuo ; TSUKINO, Mitsuhiro ; NISHIMURA, Koichi ; ITOH, Harumi ; PARÉ, Peter D. ; HOGG, James C. ; MISHIMA, Michiaki: Computed Tomographic Measurements of Airway Dimensions and Emphysema in Smokers. In: *Am. J. Respir. Crit. Care Med* 162 (2000), Sept., Nr. 3, S. 1102–1108

[NS02] NAGEL, Hans D. ; SCHMIDT, Theodor: *Strahlenexposition in der Computertomographie*. CTB Publications Hamburg, 2002

[Nun93] NUNN, J. F.: *Nunn's Applied Respiratory Physiology*. Butterworth-Heinemann, 1993

[NW01] NATTERER, Frank ; WÜBBELING, Frank: *Mathematical methods in image reconstruction*. Siam Monographs on Mathematical Modeling and Computation, 2001

[OKN+06] ODRY, B.L. ; KIRALY, A.P. ; NOVAK, C.L. ; NAIDICH, D.P. ; LERALLUT, JF.: Automated airway evaluation system for multi-slice computed tomography using airway lumen diameter, airway wall thickness and broncho-arterial ratio, 2006

[Org02] ORGANIZATION, World H. *Chronic Respiratory Diseases*. http://www.who.int/ . 2002

[OS99] OPPENHEIM, Alan V. ; SCHAFER, Roland W.: *Zeitdiskrete Signalverarbeitung*. Oldenbourg Verlag, 1999

[PSB+01] PALAGYI, K. ; SORANTIN, E. ; BALOGH, E. ; KUBA, A. ; HALMAI, C. ; ERDÖHELYI, B. ; HAUSEGGER, K.: A Sequential 3D Thinning Algorithm and its Medical Applications, Springer Verlag, 2001, S. 409–415

[PSZ99] PELILLO, M. ; SIDDIQI, K. ; ZUCKER, S. W.: Matching Hierarchical Structures Using Association Graphs. In: *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence* 21 (1999), november, Nr. 11

[RDH97] REINHARDT, Joseph M. ; D'SOUZA, Neil D. ; HOFFMAN, Eric A.: Accurate Measurement of Intra-Thoracic Airways. In: *IEEE Trans. Medical Imaging* 16 (1997), Dec., Nr. 6, S. 820–827

[RJAC+03] REMY-JARDIN, Martine ; AMARA, Assia ; CAMPISTRON, Philippe ; MASTORA, Ioana ; DELANNOY, Valerie ; DUHAMEL, Alain ; REMY, Jacques: Diagnosis of bronchiectasis with multislice spiral CT: accuracy of 3-mm-thick structured sections. In: *Eur Radiol* 13 (2003), S. 1165–1171

[RL71] RAMACHANDRAN, G. N. ; LAKSHMINARAYANAN, A. V.: Three-dimensional Reconstruction from Radiographs and Electron Micrographs: Application of Convolution instead of Fourier Transform. In: *Proc. Nat. Acad. Sci. USA* 68 (1971), Nr. 9, S. 2236–2240

[Rön96] RÖNTGEN, W.C.: On a New Kind of Rays. In: *Nature* 53 (1896), S. 274

[Roh03] ROHRER, Martin. *Multislice-CT Technology*. http://www.multislice-ct.com. 2003

[SAB05] Shojaii, R. ; Alirezaie, J. ; Babyn, P.: Automatic lung segmentation in CT images using watershed transform, 2005

[SB90] Stoer, Josef ; Bulirsch, Roland: *Numerische Mathematik 2*. Springer Verlag, 1990

[SBS00] Schneider, Wilfried ; Bortfeld, Thomas ; Schlegel, Wolfgang: Correlation between CT numbers and tissue parameters needed for Monte Carlo simulations of clinical dose distributions. In: *Phys. Med. Biol.* 45 (2000), S. 459–478

[Sch96] Schwegler, Johann S.: *Der Mensch - Anatomie und Physiologie*. Georg Thieme Verlag, 1996

[Sch99] Schneider, Malte. *Alles über den Entdecker Wilhelm Conrad Roentgen*. 1999

[Sci] Science, Natural: *Anatomy and Physiology Page*. http://science.tjc.edu/Course/BIOLOGY/AP/Anat.htm . – [Online; Stand 1. März 2007]

[SCW+00] Scanlon, Paul D. ; Connett, John E. ; Waller, Lance A. ; Altose, Murray D. ; Bailey, William C. ; Buist, A. S. ; P.Tashkin, Donald: Smoking cessation and lung function in mild-to-moderate chronic obstructive pulmonary disease. The Lung Health Study. In: *Am J Respir Crit Care Med* 161 (2000), Nr. 2, S. 381–390

[SD91] Silbernagel, S. ; Despopoulos, A.: *Taschenatlas der Physiologie*. Thieme Verlag, 1991

[Sed02] Sedgewick, Robert: *Algorithms in C, Part 5, Graph Algorithms*. Addison-Wesley, 2002

[Sel99] Selle, Dirk: *Analyse von Gefäßstrukturen in medizinischen Schichtdatensätzen für die computergestützte Operationsplanung*, Diss., 1999

[SHR03] Saba, Osama ; Hoffman, Eric A. ; Reinhardt, Joseph M.: Maximizing Quantitative Accuracy of Lung Airway Lumen and Wall Measures Obtained from X-ray CT Imaging. In: *J. Applied Physiology* 95 (2003), S. 1063–1095

[SK05] Schwarzband, G. ; Kiryati, N.: The point spread function of spiral CT. In: *Phys. Med. Biol.* 50 (2005), S. 5307–5322

[Smi99] Smith, Steven W.: *Digital Signal Processing*. Californial Technical Publishing, 1999

[Soi98] Soille, Pierre: *Morphologische Bildverarbeitung*. Springer Verlag, 1998

[SS98] Schäffler, Arne ; Schmidt, Sabine: *Biologie,Anatomie,Physiologie*. Gustav Fischer Verlag, 1998

[Ste04] Stegmann, Mikkel B.: *Generative Interpretation of Medical Images*, Diss., 2004

[Sti03] Stierstorfer, K.: *Theoretical MTF Values of P30 Kernels.* Siemens AG, 2003

[Sto94] Stoer, Josef: *Numerische Mathematik 1.* Springer Verlag, 1994

[SWB+05] Schulze, RKW. ; Weinheimer, O. ; Brüllmann, DD. ; Röder, F. ; d'Hoedth, B. ; Schömer, E.: Software for automated application of a reference-based method for a posteriori determination of the effective radiographic imaging geometry. In: *Dentomaxillofacial Radiology* 34 (2005), S. 205–211

[SWP00] Seow, Chun Y. ; Wang, Lu ; Paré, Peter D.: Airway narrowing and internal structural constraints. In: *J. Applied Physiology* 88 (2000), S. 527–533

[Tes02] Teschler, H.: Abgrenzung Asthma - Chronisch obstruktive Bronchitis - Emphysem. In: *Symposium der Bayer Vital GmbH anlässlich des 43. Kongresses der Deutschen Gesellschaft für Pneumologie* (2002), März

[Tof96] Toft, Peter: *The Radon Transform - Theory and Implementation*, Diss., 1996

[UMS+] Uppaluri, Renuka ; Mitsa, Theophano ; Sonka, Milan ; Hoffmann, Eric A. ; McLennan, Geoffrey: Quantification of Pulmonary Emphysema from Lung Computed Tomography Images. In: *Am J Respir Crit Care Med*

[WAB+03] Weinheimer, Oliver ; Achenbach, Tobias ; Buschsieweke, Christian ; Heussel, Claus P. ; Uthmann, Thomas ; Kauczor, Hans-Ulrich: Quantification and Characterization of Pulmonary Emphysema in Multislice-CT. In: *Medical Data Analysis (ISMDA 2003, Berlin, Germany)* Bd. 2868, Springer Verlag, Oct 2003, S. 77–84

[WAB+07] Weinheimer, Oliver ; Achenbach, Tobias ; Bletz, Carsten ; Düber, Christoph ; Kauczor, Hans-Ulrich ; Heussel, C. P.: About Objective 3D Analysis of Airway Geometry in Computerized Tomography. In: *IEEE Transactions on Medical Imaging* (2007)

[Wei63] Weibel, Ewald R.: *Morphometry Of The Human Lung.* Springer Verlag, 1963

[Wei01] Weinheimer, Oliver. *Bildsegmentierung in Thorax-CT-Bildern auf der Basis gegebener Landmarks.* 2001

[Wik07a] Wikipedia: *Aliasing — Wikipedia, The Free Encyclopedia.* http://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Aliasing&oldid=131836418 . 2007. – [Online; accessed 29-May-2007]

[Wik07b] Wikipedia: *Faltung (Mathematik) — Wikipedia, Die freie Enzyklopädie.* http://de.wikipedia.org/w/index.php?title=Faltung_%28Mathematik%29&oldid=33944190 . 2007. – [Online; Stand 5. Juli 2007]

[Wik07c] Wikipedia: *Lichtgeschwindigkeit — Wikipedia, Die freie Enzyklopädie.* http://de.wikipedia.org/w/index.php?title=Lichtgeschwindigkeit&oldid=26448131 . 2007. – [Online; Stand 16. Januar 2007]

[Wik07d] Wikipedia: *MP3 — Wikipedia, Die freie Enzyklopädie.* http://de.wikipedia.org/w/index.php?title=MP3&oldid=31437341 . 2007. – [Online; Stand 11. Mai 2007]

[Wik07e] Wikipedia: *Topologie (Mathematik) — Wikipedia, Die freie Enzyklopädie.* http://de.wikipedia.org/w/index.php?title=Topologie_%28Mathematik%29&oldid=34176746 . 2007. – [Online; Stand 11. Juli 2007]

[WMN92] Webb, W. R. ; Müller, N. L. ; Naidich, D. P.: *High-Resolution CT of the Lung.* 1992

[WVS+98] Wang, G. ; Vannier, M. W. ; Skinner, M. W. ; Cavalcanti, M. G. P. ; Harding, G. W.: Spiral CT image deblurring for cochlear implantation. In: *IEEE Trans. Med. Imaging* 17 (1998), S. 251–261

[YF00] Yang, G.-Z. ; Firmin, D. N.: Retrospectroscope - The Birth of the First CT Scanner. In: *IEEE Engineering in Medicine and Biology* (2000), Feb.

[ZLE+05] Zaporozhan, Julia ; Ley, Sebastian ; Eberhardt, Ralf ; Weinheimer, Oliver ; Iliyushenko, Svitlana ; Herth, Felix ; Kauczor, Hans-Ulrich: Paired Inspiratory/Expiratory Volumetric Thin-Slice CT Scan for Emphysema Analysis: Comparison of Different Quantitative Evaluations and Pulmonary Function Test. In: *Chest* 128 (2005), S. 3212–3220

[ZLW+06] Zaporozhan, Julia ; Ley, Sebastian ; Weinheimer, Oliver ; Ralf Eberhardt, Ioannis T. ; Noshi, Yasuhiro ; Herth, Felix ; Kauczor, Hans-Ulrich: Multi-detector CT of the chest: influence of dose onto quantitative evaluation of severe emphysema: a simulation study. In: *J Comput Assist Tomogr.* 30 (2006), S. 460–468

Lebenslauf

Name:	Oliver Weinheimer
Geboren:	30.03.1973 in Bingen am Rhein
Staatsangehörigkeit:	deutsch
Familienstand:	verheiratet mit Carina Weinheimer, geb. Alt (*25.12.1974)
Kinder:	Florian (*17.03.1997) und Sina Carina (*20.08.1999)
Anschrift:	Am Tiergarten 24, 55494 Dichtelbach
Tel.:	06764/302217
E-Mail:	mailto:mail@oliwe.com
Web:	http://www.oliwe.com

Werdegang

1979 - 1983	Grundschule Trechtingshausen/Niederheimbach
1983 - 1992	Stefan-George-Gymnasium in Bingen am Rhein; Abschluß: Abitur
1992 - 1993	Zivildienst in der Jugendherberge Burg Stahleck in Bacharach
1993 - 2001	Studium an der Johannes Gutenberg-Universität Mainz; Hauptfach: Mathematik mit Schwerpunkt Informatik; Nebenfach: BWL mit Schwerpunkt Finanzwirtschaft/-derivate; Diplomarbeit in der Medizin-Informatik
seit 11.2001	Wissenschaftlicher Mitarbeiter der Johannes Gutenberg-Universität Mainz (Klinik und Poliklinik für Radiologie); Hauptarbeitsgebiet: Segmentierung, Analyse und Visualisierung medizinischer Bilddaten; Mitarbeit im MAIFOR-Projekt “Früherkennung und quantitatives Therapiemonitoring von Lungenerkrankungen mittels Mehrschicht-CT”; Mitarbeit im DFG-Projekt “3D-Rekonstruktion aus mehreren 2D-Projektions-Röntgenaufnahmen mit Hilfe der Referenzkugel-Methode (RSM)”; Mitarbeit in der DFG Forschergruppe FOR 474 “Bildgestützte zeitliche und regionale Analyse der Ventilations-Perfusionsverhältnisse in der Lunge”; Während dieser Zeit Promotion zum Doktor der Naturwissenschaften mit dem Thema: “Über das Vermessen von tubulären Strukturen in der Computertomographie”