

Gleichmäßig dünne Basen zweiter Ordnung

Dissertation

zur Erlangung des Grades

Doktor der Naturwissenschaften

am Fachbereich Physik, Mathematik und

Informatik

der Johannes Gutenberg-Universität Mainz

Christoph Schmitt

geboren am xx.xx.xxxx in xxxxx

Mainz, 2005

Dekan:	XY
Erster Berichterstatter:	XY
Zweiter Berichterstatter:	XY
Tag der mündlichen Prüfung:	22.07.2005

Vorwort

Die additive Zahlentheorie beschäftigt sich unter anderem mit der Fragestellung nach Basen h -ter Ordnung. Dabei heißt eine Menge nicht negativer ganzer Zahlen B Basis h -ter Ordnung, wenn jede nicht negative ganze Zahl Summe von maximal h Elementen der Menge B ist. Man kann zeigen, daß Basen B h -ter Ordnung existieren, die $|B \cap (0, x)| = O(\sqrt[h]{x})$ genügen. Andererseits erfüllt jede Basis h -ter Ordnung auch $\sqrt[h]{x} = O(|B \cap (0, x)|)$. Dann kann man den Limes superior $\bar{d}_h(B)$, den Limes inferior $\underline{d}_h(B)$ und im Falle der Existenz den Limes $d_h(B)$ des Quotienten

$$\frac{|B \cap (0, x)|}{\sqrt[h]{x}}$$

als Dichtefunktion von Basen h -ter Ordnung betrachten. Dabei nennen wir $\bar{d}_h(B)$ obere asymptotische, $\underline{d}_h(B)$ untere asymptotische und $d_h(B)$ asymptotische Wurzeldichte der Basis B . Wir untersuchen hier insbesondere Basen zweiter Ordnung, bei denen die asymptotische Wurzeldichte existiert.

Hauptwerkzeug dieser Arbeit ist eine hier neu eingeführte Verallgemeinerung des Begriffes asymptotischer Wurzeldichten.

Mit Hilfe dieser Verallgemeinerung (Pseudo-Dichte genannt) erhalten wir ein erstes neues Resultat: Weder die Stöhrsche Basis zweiter Ordnung noch die von G. Hofmeister modifizierte kann zu einer Basis ergänzt werden, die eine asymptotische Wurzeldichte besitzt.

Als zweites Resultat weisen wir nach, daß eine Verbesserung der asymptotischen Wurzeldichte mit den beiden bekannten Konstruktionsprinzipien für gleichmäßig dünne Basen zweiter Ordnung von J. W. S. Cassels und

G. Hofmeister nicht möglich ist. Dabei hat G. Hofmeister die zuvor von J. W. S. Cassels erzielte asymptotische Wurzeldichte $d_2(C) = 3\sqrt{3} = 5,196\dots$ mit einer anderen Konstruktion um ungefähr 10 Prozent auf $d_2(H) = \frac{10}{\sqrt{6}}\sqrt[4]{\frac{5}{3}} = 4,638\dots$ verbessert.

Als drittes Resultat verbessern wir die asymptotische Wurzeldichte um über 25 Prozent gegenüber der von G. Hofmeister erzielten Verbesserung auf $d_2(Q) = 2\sqrt{3} = 3,464\dots$.

Als viertes Resultat dieser Arbeit zeigen wir, daß auch mit dem hier eingeführten Konstruktionsprinzip eine weitere Verbesserung nicht möglich ist. Bisher war die Frage nach möglichen Verbesserungen innerhalb der jeweiligen Konstruktionsprinzipien offen geblieben.

Mainz, im April 2005

Christoph Schmitt

Inhaltsverzeichnis

Erstes Kapitel: Pseudo-Dichte und dünne Mengen

1.1 Einführung	3
1.2 Asymptotische Ergänzung und Lemma von Cassels	5
1.2.1 Einleitung	5
1.2.2 Definition (asymptotische Dichte und Ergänzzbarkeit)	7
1.2.3 Bemerkung	8
1.2.4 Lemma	9
1.2.5 Beispiel	10
1.2.6 Äquivalenzen für asymptotische Dichten	12
1.2.7 Lemma von Cassels	14
1.2.8 Bemerkung	14
1.2.9 Beispiel	15
1.3 Pseudo-Dichte und Minorantenerzeuger	17
1.3.1 Einleitung	17
1.3.2 Satz	18
1.3.3 Beispiel	21
1.3.4 Bemerkung	23
1.3.5 Definition (Pseudo-Dichte und Minorantenerzeuger)	23
1.3.6 Bemerkung	24
1.3.7 Satz	25
1.3.8 Definition (Pseudo-Dichte für nicht diskrete Mengen)	25
1.3.9 Beispiel	26
1.3.10 Interpretation der Pseudo-Dichte	27

1.3.11 Beispiel	28
1.3.12 Obere asymptotische Dichte und Minorantenerzeuger	30
1.3.13 Bemerkung	31
1.3.14 Zerlegung von Minorantenerzeugern	32
1.3.15 Einschränkung der Minorantenerzeuger	34
1.4 Pseudo-Dichte und asymptotische Dichten	37
1.4.1 Einleitung	37
1.4.2 Obere asymptotische Dichte als untere Abschätzung der Pseudo-Dichte ..	38
1.4.3 Bemerkung	39
1.4.4 Pseudo-Dichte einer gleichmäßig dünnen Menge	39
1.4.5 Bemerkung	39
1.4.6 Eine untere Abschätzung für die Pseudo-Dichte	40
1.4.7 Zusammenhang zwischen asymptotischen Dichten und Pseudo-Dichte	41
1.4.8 Unabhängigkeit zwischen $\delta_h(A)$ bzw. $d_h(A)$ und $\underline{d}_h(A)$ bzw. $\bar{d}_h(A)$	42
1.4.9 Eine nicht asymptotisch ergänzbare Menge mit beliebig kleiner $\bar{d}_h(A)$...	43
1.4.10 Unabhängigkeit zwischen $\delta_h(A)$ bzw. $d_h(A)$ und $\underline{d}_h(A)$ bzw. $\bar{d}_h(A)$ II ..	46
1.4.11 Beispiel	46
1.4.12 Obere asymptotische Dichte und Minorantenerzeuger	46
1.4.13 Bemerkung	48

Zweites Kapitel: Pseudo-Dichte als Verallgemeinerung der asymptotischen Dichte

2.1 Einführung	49
2.2 Optimale asymptotische Ergänzungen	51
2.2.1 Einleitung	51

2.2.2 Erstes Resultat: Eine optimale asymptotische Ergänzung	52
2.2.3 Berechnung einer optimalen asymptotischen Ergänzung	57
2.2.4 Weitere asymptotische Ergänzungen	58
2.2.5 Bemerkung	59
2.2.6 Zweites Resultat: Pseudo-Dichte als Verallgemeinerung von $d_h(A)$	59
2.2.7 Bemerkung	59
2.3 Pseudo-Dichte und Lemma von Cassels. Separierte Progressio-	
nenschar	61
2.3.1 Einleitung	61
2.3.2 Satz (Lemma von Cassels)	62
2.3.3 Bemerkung	70
2.3.4 Lemma von Cassels und Pseudo-Dichte	71
2.3.5 Definition (arithmetische Progression, separierte Progressionenschar)	73
2.3.6 Bemerkung	74
2.3.7 Pseudo-Dichte einer separierten Progressionenschar	74
2.3.8 Bemerkung	77

Drittes Kapitel: Dünne Basen zweiter Ordnung

3.1 Einführung	79
3.2 Dünne Basen	81
3.2.1 Einleitung	81
3.2.2 Definition (Summenmenge, Basis h -ter Ordnung)	82
3.2.3 Beispiel	82
3.2.4 Bemerkung	83
3.2.5 Lemma	83

3.2.6 Die Stöhrschen Basen	86
3.2.7 Definition	87
3.2.8 Bemerkung	88
3.2.9 UR-Basen	88
3.2.10 Obere asymptotische Dichte von UR-Basen	88
3.3 Dünne Basen zweiter Ordnung	89
3.3.1 Einleitung	89
3.3.2 Erstes Hauptresultat I: Zur Stöhrschen Basis zweiter Ordnung	90
3.3.3 Bemerkung	94
3.3.4 Erstes Hauptresultat II: Zu einer dünnen Basis von G. Hofmeister	94
3.3.5 Bemerkung	97
3.3.6 Zur asymptotischen Ergänzzbarkeit von UR-Basen zweiter Ordnung	97
3.3.7 Bemerkung	97
3.3.8 Eine untere Schranke für die obere asymptotische Dichte	98
3.3.8 Eine untere Abschätzung für die untere asymptotische Dichte	99
3.3.10 Bemerkung	99
3.3.11 Teilweise dünne Basen zweiter Ordnung	99
3.3.12 Bemerkung	100
3.4 Gleichmäßig dünne Basen zweiter Ordnung	101
3.4.1 Einleitung	101
3.4.2 Lemma (Summenmengen aus arithmetischen Progressionen)	102
3.4.3 Zur gleichmäßig dünnen Basis von J. W. S. Cassels	104
3.4.4 Zweites Hauptresultat I: Pseudo-Dichte von Basen nach Cassels	108
3.4.5 Zur gleichmäßig dünnen Basis von G. Hofmeister	108
3.4.6 Zweites Hauptresultat II: Pseudo-Dichte von Basen nach Hofmeister	113
3.4.7 Bemerkung	113

Viertes Kapitel: PR-Basen

4.1 Einführung	115
4.2 PR-Basen und ihre obere asymptotische Dichte	117
4.2.1 Einleitung	117
4.2.2 Definition (Restklassen, volle Restsysteme)	118
4.2.3 Bemerkung	118
4.2.4 Satz (Summenmenge von arithm. Progression und vollem Restsystem)	119
4.2.5 Lemma zu 4.2.4	120
4.2.6 Bemerkung	120
4.2.7 Lemma (Eigenschaft voller Restsysteme modulo m^n)	121
4.2.8 Lemma (Eigenschaft arithm. Progressionen mit Schrittweite m^n)	122
4.2.9 Bemerkung	122
4.2.10 PR-Basen	123
4.2.11 Lemma (Eigenschaft von PR-Basen)	124
4.2.12 Drittes Hauptresultat: Obere asymptotische Dichte von PR-Basen	126
4.2.13 Bemerkung	130
4.2.14 Untere asymptotische Dichte von PR-Basen	131
4.2.15 Bemerkung	133
4.3 Gleichmäßig dünne PR-Basen	135
4.3.1 Einleitung	135
4.3.2 Gleichmäßig dünne Mengen, die die Progressionenschar umfassen	137
4.3.3 Bemerkung	138
4.3.4 Mächtigkeit der Menge, die zur Progressionenschar hinzugefügt wird	139
4.3.5 Bemerkung	142
4.3.6 Zum Austausch der zur Progressionenschar P hinzugefügten Elemente	143

4.3.7 Bemerkung	148
4.3.8 Lemma (Erhalt der asymptotischen Dichten)	148
4.3.9 Viertes Hauptresultat: PR-Basen mit asymptotischer Dichte $2\sqrt{m+1}$..	150
4.3.10 Bemerkung	156
4.3.11 Zur Konstruktion von PR-Basen mit asymptotischer Dichte $2\sqrt{m+1}$..	156
4.3.12 Konstruktion einer PR-Basis mit asymptotischer Dichte $2\sqrt{3}$	158
 Literaturverzeichnis	 169
Register	171
Einige Schreibweisen und Rechenregeln	vii

Einige Schreibweisen und Rechenregeln

Wir setzen

$$\mathbb{N} = \{n \in \mathbb{Z} \mid n > 0\} ,$$

$$\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\} ,$$

$$\mathbb{R}^+ = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\} ,$$

$$\mathbb{R}_0^+ = \mathbb{R}^+ \cup \{0\} ,$$

$$\lfloor x \rfloor = \max\{z \in \mathbb{Z} \mid z \leq x\} \quad \forall x \in \mathbb{R} ,$$

$$\lceil x \rceil = \min\{z \in \mathbb{Z} \mid z \geq x\} \quad \forall x \in \mathbb{R} ,$$

Ferner benutzen wir für Funktionen $f, g : D \mapsto (-\infty, \infty)$ mit Definitionsbereich $D \in \{\mathbb{R}, \mathbb{R}_0^+, \mathbb{R}^+, \mathbb{Z}, \mathbb{N}_0, \mathbb{N}\}$ das Landau-Symbol: Wir schreiben zum einen

$$f(x) = o(g(x)) \iff \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$$

und zum anderen

$$f(x) = O(g(x)) \iff \exists c > 0, x_0 > 0 : |f(x)| < cg(x) \quad \forall x > x_0 .$$

Dabei verwenden wir auch die übliche Schreibweise $f(x) = h(x) + o(g(x))$.

Weiterhin betrachten wir $\pm\infty$ als Grenzwerte in der aus der Analysis gewohnten Art und Weise einschließlich der allgemein üblichen Rechenregeln wie zum Beispiel $\infty + \infty = \infty$, $\frac{c}{\infty} = 0$ etc. Außerdem schreiben wir

$$f(x) \cong g(x) \iff \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 1 .$$

Ferner vereinbaren wir für die Teilbarkeit ganzer Zahlen $m, n \in \mathbb{Z}$ die Schreibweise

$$m \mid n \iff \exists d \in \mathbb{N} : n = dm .$$

Gleichmäßig
dünne Basen
zweiter Ordnung

1 Pseudo-Dichte und dünne Mengen

1.1 Einführung

In den ersten beiden Kapiteln untersuchen wir, welche Mengen $A \subseteq [0, \infty)$ zu gleichmäßig dünnen Mengen $A \cup E_A$ ergänzt werden können. Zu dieser Fragestellung ist bisher nur das Lemma von J. W. S. Cassels[2] bekannt. Die dortigen Voraussetzungen wollen wir abschwächen. Ferner fragen wir uns, in welchen Fällen Cassels Ergebnis möglicherweise scharf ist.

Dazu führen wir in diesem Kapitel die asymptotische Ergänzung sowie die Pseudo-Dichte für beliebige Teilmengen $A \subseteq [0, \infty)$ ein. Anschließend zeigen wir einige Zusammenhänge zwischen Pseudo-Dichte und unterer, oberer bzw. asymptotischer Dichte auf – zum Beispiel, daß Pseudo-Dichte und asymptotische Dichte sich für gleichmäßig dünne Mengen entsprechen. Dann kann man die Pseudo-Dichte als Verallgemeinerung der asymptotischen Dichte ansehen.

Im zweiten Kapitel weisen wir nach, daß eine Menge A genau dann zu einer gleichmäßig dünnen Menge $A \cup E_A$ ergänzt werden kann, wenn ihre Pseudo-Dichte endlich ist. In diesem Falle existiert eine asymptotische Ergänzung E_A derart, daß die asymptotische Dichte der Menge $A \cup E_A$ mit der Pseudo-Dichte der Menge A übereinstimmt. Zum Abschluß des zweiten Kapitels erschließen wir uns einige Aussagen, die uns mit dem Lemma von Cassels verwehrt geblieben wären.

Als Anwendung zeigen wir unter anderem im dritten Kapitel, daß man die dünnen Basen zweiter Ordnung von A. Stöhr[8] und D. Raikov[6] sowie von G. Hofmeister[4] nicht zu gleichmäßig dünnen Basen ergänzen kann.

1.2 Asymptotische Ergänzung und Lemma von Cassels

1.2.1 Einleitung

In der Zahlentheorie werden Mengen $A \subseteq \mathbb{N}_0$ bezüglich ihrer Mächtigkeit auch asymptotisch untersucht. Dazu betrachtet man mit Hilfe der Zählfunktion

$$A : \mathbb{N}_0 \mapsto \mathbb{N}_0 ,$$
$$A(n) = |\{a \in A \mid 1 \leq a \leq n\}| \quad \forall n \in \mathbb{N}_0$$

und einer bemessenden Funktion

$$\Delta : \mathbb{N} \mapsto \mathbb{R}^+$$

die durch den Quotienten gegebene Dichtefunktion

$$\frac{A}{\Delta} : \mathbb{N} \mapsto \mathbb{R}_0^+ .$$

Dabei wird die Funktion Δ jeweils problemadäquat gewählt. Für die in dieser Arbeit betrachteten Basen h -ter Ordnung ist zum Beispiel $\Delta(n) = \sqrt[h]{n}$ zu wählen. Dann kann man den unteren Grenzwert (untere asymptotische Dichte), den oberen Grenzwert (obere asymptotische Dichte) oder auch im Falle der Existenz den Limes (asymptotische Dichte) des Quotienten zur Beurteilung der asymptotischen Mächtigkeit der Menge A heranziehen.

Im allgemeinen betrachtet man auch ohne gegebene Problemstellung die untere, obere bzw. asymptotische Dichte von Mengen, indem man schlicht

$$\Delta(n) = n \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

wählt und den Quotient $\frac{A(n)}{n}$ bezüglich genannter Grenzwerte untersucht.

Wir betrachten hier ausschließlich die für Basen h -ter Ordnung relevanten asymptotischen Dichten, auch Wurzeldichten genannt, sprechen allerdings der Einfachheit halber stets von asymptotischen Dichten. Es sei bereits vermerkt, daß sich die Ergebnisse der ersten beiden Kapitel vermutlich auf jede asymptotische Dichte mit streng monoton wachsender Funktion Δ übertragen lassen. Der besseren Lesbarkeit halber verzichten wir hier auf die Darstellung in der allgemeinen Form. Anstelle dessen betrachten wir aber in Verallgemeinerung der üblichen Wurzeldichten nicht nur natürliche Mengen A und $h \in \mathbb{N}$ sondern beliebige Mengen $A \subseteq [0, \infty)$ und beliebige $h > 0$ sowie als Definitionsbereich der bemessenden Funktion Δ ganz $\mathbb{R}^+$.

Der besseren Übersicht halber vereinbaren wir auch für beliebige reelle $h > 0$, die nicht natürlich sind, die Definition der Wurzelfunktion

$$\begin{aligned}\sqrt[h]{} &: (0, \infty) \mapsto (0, \infty) , \\ \sqrt[h]{x} &= x^{\frac{1}{h}} \quad \forall x \in (0, \infty) ,\end{aligned}$$

damit wir in der gewohnten Schreibweise verbleiben können. Dabei sprechen wir im gesamten Verlauf der Arbeit von h -ten Potenzen und h -ten Wurzeln, selbst wenn $h > 0$ nicht natürlich ist. Denn zum einen vermitteln uns Wurzeln und Potenzen eine bessere Vorstellung der Begrifflichkeiten. Zum anderen formulieren wir Beispiele anhand der allgemein vertrauten Menge der h -ten Potenzen, die allerdings auch für beliebige $h > 0$ Gültigkeit besitzen.

Im Abschnitt 1.2 wollen wir die bereits benannten asymptotischen Dichten vorstellen und den Begriff der asymptotischen Ergänzung einführen. Mit Hilfe der Menge der h -ten Potenzen werden wir uns eine erste asymptotische Ergänzung konstruieren. Als weiteres Beispiel betrachten wir die im Lemma von Cassels implizit enthaltene asymptotische Ergänzung. Ferner zeigen wir Zusammenhänge und Äquivalenzen für asymptotische Dichten auf.

1.2.2 Definition

Gegeben seien eine Menge $A \subseteq [0, \infty)$ und ein $h \in (0, \infty)$.

Zählfunktion. Die *Zählfunktion* der Menge A wird von uns ebenfalls durch A bezeichnet und ist mit $|\emptyset| = 0$ gegeben durch

$$\begin{aligned} A : [0, \infty) &\rightarrow \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}, \\ A(x) &= \left| \left\{ a \in A \mid 0 < a \leq x \right\} \right| \quad \forall x \in [0, \infty). \end{aligned} \quad (1)$$

Untere asymptotische Dichte und teilweise dünne Mengen. Wir definieren die *untere asymptotische Dichte h -ter Ordnung* der Menge A durch

$$\underline{d}_h(A) = \liminf_{x \rightarrow \infty} \frac{A(x)}{\sqrt[h]{x}}. \quad (2)$$

Ist die untere asymptotische Dichte h -ter Ordnung einer Menge endlich, so nennen wir sie *teilweise dünne Menge h -ter Ordnung* bzw. *teilweise dünn*.

Obere asymptotische Dichte und dünne Mengen. Wir definieren die *obere asymptotische Dichte h -ter Ordnung* der Menge A durch

$$\bar{d}_h(A) = \limsup_{x \rightarrow \infty} \frac{A(x)}{\sqrt[h]{x}}. \quad (3)$$

Ist die obere asymptotische Dichte h -ter Ordnung einer Menge endlich, so nennen wir sie *dünne Menge h -ter Ordnung* bzw. *dünn*.

Asymptotische Dichte und gleichmäßig dünne Mengen. Stimmen untere und obere asymptotische Dichte h -ter Ordnung der Menge A überein, so definieren wir die *asymptotische Dichte h -ter Ordnung* der Menge A durch

$$d_h(A) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{A(x)}{\sqrt[h]{x}}. \quad (4)$$

Ist die asymptotische Dichte h -ter Ordnung einer Menge endlich, so nennen wir sie *gleichmäßig dünne Menge h -ter Ordnung* bzw. *gleichmäßig dünn*.

Asymptotische Ergänzzbarkeit. Wir nennen die Menge A *asymptotisch ergänzbar*, wenn eine Menge $E_A \subseteq [0, \infty)$ existiert, so daß die Menge $A \cup E_A$ gleichmäßig dünn ist:

$$d_h(A \cup E_A) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(A \cup E_A)(x)}{\sqrt[h]{x}} < \infty .$$

Dann heißt die Menge E_A *asymptotische Ergänzung* zu A .

Optimale asymptotische Ergänzung. Wir nennen eine asymptotische Ergänzung E_A zu A *optimal* zu A und E_A *optimale asymptotische Ergänzung* zu A , wenn für jede weitere asymptotische Ergänzung F_A zu A gilt:

$$d_h(A \cup F_A) \geq d_h(A \cup E_A) .$$

1.2.3 Bemerkung

1. Eine Menge $A \subseteq [0, \infty)$, die für ein $h > 0$ nicht dünn ist, genügt für beliebige Mengen $Y \subseteq [0, \infty)$ der Ungleichung

$$\begin{aligned} \bar{d}_h(A \cup Y) &= \limsup_{x \rightarrow \infty} \frac{(A \cup Y)(x)}{\sqrt[h]{x}} \\ &\geq \limsup_{x \rightarrow \infty} \frac{A(x)}{\sqrt[h]{x}} \\ &= \infty . \end{aligned}$$

Eine Menge A kann also nur dann eine asymptotische Ergänzung besitzen, wenn sie dünn ist.

2. Entspricht die obere asymptotische Dichte h -ter Ordnung einer Menge $A \subseteq [0, \infty)$ gerade $\bar{d}_h(A) = 0$, so beträgt auch ihre untere asymptotische Dichte h -ter Ordnung $\underline{d}_h(A) = 0$. Dann ist die Menge A gleichmäßig dünn mit asymptotischer Dichte $d_h(A) = 0$. Deshalb stellt sich die Frage nach einer asymptotischen Ergänzung eigentlich nur, wenn die obere asymptotische Dichte h -ter Ordnung positiv reellwertig ist.

3. Ist für ein $h_0 > 0$ die obere asymptotische Dichte $\bar{d}_{h_0}(A)$ h_0 -ter Ordnung einer Menge $A \subseteq [0, \infty)$ positiv, so erfüllt die Menge A einerseits für jedes $h < h_0$ die Äquivalenz $\bar{d}_h(A) = 0$ und andererseits für jedes $h > h_0$ die Gleichheit $\bar{d}_h(A) = \infty$. Also ist die Suche nach asymptotischen Ergänzungen stets auf maximal ein $h > 0$ beschränkt. Wir verzichten daher meist auf die Bezeichnungsweise h -ter Ordnung und sprechen schlicht von asymptotischen Dichten und dünnen Mengen.

4. Eine Menge $A \subseteq [0, \infty)$, die nicht diskret ist, besitzt einen Häufungspunkt $x_0 \in [0, \infty)$. Dann genügt die Zählfunktion der Gleichung $A(x) = \infty \forall x > x_0$. Also ist A keine dünne Menge. Deshalb betrachten wir meist diskrete Mengen.

1.2.4 Lemma

Optimale asymptotische Ergänzungen sind nicht eindeutig.

Beweis. Durch die Menge E_A sei eine optimale asymptotische Ergänzung zu einer Menge $A \subseteq [0, \infty)$ gegeben. Mit einem beliebigen $c > 0$ wählen wir zu jedem $e \in E_A$ eine Zahl c_e aus, die $|c_e| < \max\{c, e\}$ genügt, und setzen

$$E_{A_1} = \{e + c_e \mid e \in E_A\},$$

$$E_{A_2} = E_A \cup Z, \quad \text{wobei} \quad Z = \{n^{h+1} \mid n \in \mathbb{N}\}.$$

Die Mengen E_{A_1} und E_{A_2} sind ebenfalls optimale asymptotische Ergänzungen zu A . Denn zum einen ist durch die Abschätzungen

$$\frac{(A \cup E_{A_1})(x)}{\sqrt[h]{x}} \leq \frac{(A \cup E_A)(x+c)}{\sqrt[h]{x+c}} \frac{\sqrt[h]{x+c}}{\sqrt[h]{x}},$$

$$\frac{(A \cup E_{A_1})(x)}{\sqrt[h]{x}} \geq \frac{(A \cup E_A)(x-c)}{\sqrt[h]{x-c}} \frac{\sqrt[h]{x-c}}{\sqrt[h]{x}},$$

die asymptotische Dichte der Menge $A \cup E_{A_1}$ gerade durch

$$d_h(A \cup E_{A_1}) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(A \cup E_{A_1})(x)}{\sqrt[h]{x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(A \cup E_A)(x)}{\sqrt[h]{x}} = d_h(A \cup E_A)$$

gegeben. Damit ist die Menge E_{A_1} optimal zu A . Zum anderen ist wegen

$$d_h(Z) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{Z(x)}{\sqrt[h]{x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\lfloor \sqrt[h+1]{x} \rfloor}{\sqrt[h]{x}} = 0$$

auch die asymptotische Dichte der Menge $A \cup E_{A_2}$

$$d_h(A \cup E_{A_2}) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(A \cup E_A \cup Z)(x)}{\sqrt[h]{x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(A \cup E_A)(x)}{\sqrt[h]{x}} = d_h(A \cup E_A) .$$

Dann ist die Menge E_{A_2} eine optimale asymptotische Ergänzung zu A .

Bemerkung. Im letzten Kapitel werden wir ein der Konstruktionsidee der asymptotischen Ergänzung E_{A_1} nahestehendes Vorgehen anwenden, um die asymptotische Ergänzung für unsere gewünschte gleichmäßig dünne Basis zweiter Ordnung zu entwickeln.

1.2.5 Beispiel

Setzen wir

$$\begin{aligned} P_t &= \{(2^n + m)^h \mid m < 2^{n-1}, n, m \in \mathbb{N}_0\} \\ &= \{1^h, 2^h, 4^h, 5^h, 8^h, 9^h, 10^h, 11^h, 16^h, 17^h, \dots, 23^h, 32^h, 33^h, \dots\} , \end{aligned}$$

so ist die Menge P_t Teilmenge der h -ten Potenzen $P = \{1^h < 2^h < \dots\}$, die eine gleichmäßig dünne Menge mit asymptotischer Dichte eins darstellen:

$$P(x) = \lfloor \sqrt[h]{x} \rfloor \implies \frac{P(x)}{\sqrt[h]{x}} \cong 1 \implies d_h(P) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{P(x)}{\sqrt[h]{x}} = 1 .$$

Als Teilmenge der h -ten Potenzen ist P_t zumindest eine dünne Menge.

Betrachten wir für beliebiges $n \in \mathbb{N}$ die Punkte

$$S_n = (2^n)^h ,$$

$$s_n = (3 \cdot 2^{n-2})^h ,$$

so genügt die Menge P_t offensichtlich den Gleichungen

$$P_t(S_n) = P_t(s_n) + 1 ,$$

$$P_t(s_n) = 1 + \sum_{k=1}^{n-1} 2^{k-1} = 2^{n-1} .$$

Dann ist die Menge P_t nicht gleichmäßig dünn. Denn die untere und obere asymptotische Dichte erfüllen die Abschätzungen

$$\begin{aligned} \underline{d}_h(P_t) &= \liminf_{x \rightarrow \infty} \frac{P_t(x)}{\sqrt[h]{x}} \\ &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{P_t(S_n)}{\sqrt[h]{S_n}} \\ &= \frac{1}{2} , \\ \bar{d}_h(P_t) &= \limsup_{x \rightarrow \infty} \frac{P_t(x)}{\sqrt[h]{x}} \\ &\geq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{P_t(s_n)}{\sqrt[h]{s_n}} \\ &= \frac{2}{3} . \end{aligned}$$

Mit der trivialen Zerlegung der Menge der h -ten Potenzen $P = P_t \cup (P \setminus P_t)$ ist die durch $E_{P_t} = P \setminus P_t$ gegebene Menge E_{P_t} natürlich eine asymptotische Ergänzung zu P_t . Denn die Menge der h -ten Potenzen P ist ja gleichmäßig dünn mit asymptotischer Dichte $d_h(P) = 1$. Später sehen wir, daß die Menge E_{P_t} bereits eine optimale asymptotische Ergänzung zu P_t ist.

1.2.6 Äquivalenzen für asymptotische Dichten

Die Menge $A = \{a_1 < a_2 < \dots\} \subseteq [0, \infty)$ sei abzählbar unendlich.

Behauptung. Stets gelten die Gleichungen

$$\underline{d}_h(A) = \liminf_{x \rightarrow \infty} \frac{A(x)}{\sqrt[h]{x}} = \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{A(a_n)}{\sqrt[h]{a_n}} = \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\sqrt[h]{a_n}}, \quad (5)$$

$$\left(\underline{d}_h(A)\right)^{-h} = \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{n^h}, \quad (6)$$

$$\bar{d}_h(A) = \limsup_{x \rightarrow \infty} \frac{A(x)}{\sqrt[h]{x}} = \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{A(a_n)}{\sqrt[h]{a_n}} = \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\sqrt[h]{a_n}}, \quad (7)$$

$$\left(\bar{d}_h(A)\right)^{-h} = \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{n^h}. \quad (8)$$

Beweis. Weil der Kehrwert der Äquivalenz (6) bzw. (8) der h -ten Potenz der Gleichung (5) bzw. (7) entspricht, brauchen nur die Gleichungen (5) und (7) gezeigt werden. Wir beachten, daß die links- und rechtsseitigen Äquivalenzen der Gleichungen (5) und (7) aufgrund der Definitionen der asymptotischen Dichten und der Zählfunktion erfüllt sind. Um die Gültigkeit von (5) nachzuweisen, genügt es daher,

$$\liminf_{x \rightarrow \infty} \frac{A(x)}{\sqrt[h]{x}} = \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{A(a_n)}{\sqrt[h]{a_n}} \quad (9)$$

zu beweisen. Offensichtlich ist

$$\liminf_{x \rightarrow \infty} \frac{A(x)}{\sqrt[h]{x}} \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{A(a_n)}{\sqrt[h]{a_n}}. \quad (10)$$

Es verbleibt also der Nachweis der Abschätzung

$$\liminf_{x \rightarrow \infty} \frac{A(x)}{\sqrt[h]{x}} \geq \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{A(a_n)}{\sqrt[h]{a_n}}.$$

Ist die Menge A beschränkt, so sei $x > \sup A$ beliebig. Dann ist $A(x) = \infty$, und wir erhalten

$$\infty = \frac{A(x)}{\sqrt[h]{x}} \geq \frac{A(a_n)}{\sqrt[h]{a_n}} \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Für eine beschränkte Menge A gilt damit

$$\liminf_{x \rightarrow \infty} \frac{A(x)}{\sqrt[h]{x}} \geq \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{A(a_n)}{\sqrt[h]{a_n}}.$$

Sei die Menge A nun unbeschränkt. Zu jedem $x > 0$ existiert ein minimales $n \in \mathbb{N}$, das $a_n \geq x$ erfüllt. Für dieses a_n ist

$$\frac{A(x)}{\sqrt[h]{x}} \geq \frac{A(a_n) - 1}{\sqrt[h]{a_n}}.$$

Wir erhalten auch für unbeschränkte Mengen A die Abschätzung

$$\liminf_{x \rightarrow \infty} \frac{A(x)}{\sqrt[h]{x}} \geq \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{A(a_n)}{\sqrt[h]{a_n}}. \quad (11)$$

Die Ungleichungen (10) und (11) ergeben Gleichung (9).

Analog ist zum Nachweis der Äquivalenz (7) nur

$$\limsup_{x \rightarrow \infty} \frac{A(x)}{\sqrt[h]{x}} = \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{A(a_n)}{\sqrt[h]{a_n}}$$

zu zeigen. Ist A beschränkt, ist die Gleichung wegen $A(x) = \infty \forall x \geq x_0$ und $A(a_n) \rightarrow \infty$ erfüllt. Andernfalls betrachten wir bei gegebenem $x > 0$ das maximale $n \in \mathbb{N}$, das $a_n \leq x$ genügt. Dann ist

$$\frac{A(x)}{\sqrt[h]{x}} \leq \frac{A(a_n)}{\sqrt[h]{a_n}},$$

und damit auch

$$\limsup_{x \rightarrow \infty} \frac{A(x)}{\sqrt[h]{x}} \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{A(a_n)}{\sqrt[h]{a_n}}.$$

Daß $\geq$ erfüllt ist, ist klar.

1.2.7 Lemma von Cassels (J. W. S. Cassels 1957)

$A = \{a_0 < a_1 < a_2 < \dots\} \subseteq \mathbb{Z}$ sei eine Menge ganzer Zahlen.

Voraussetzung. Für ein $\lambda > 0$ und ein $h \in (\mathbb{N} \setminus \{1\})$ gelte

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1} - a_n}{\sqrt[h]{a_n^{h-1}}} \geq \lambda. \quad (12)$$

Behauptung. Stets existiert eine Menge $B = \{b_0 < b_1 < b_2 < \dots\} \subseteq \mathbb{Z}$, die die Aussagen (13) und (14) erfüllt. Ist Ungleichung (12) echt, so kann die Menge B so gewählt werden, daß sie auch Aussage (15) genügt:

$$A \subseteq B, \quad (13)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_n}{n^h} = \left(\frac{\lambda}{h}\right)^h, \quad (14)$$

$$b_n = \left(\frac{\lambda}{h}\right)^h n^h + O(n^{h-1}). \quad (15)$$

1.2.8 Bemerkung

Für Mengen $A \subseteq \mathbb{N}_0 \subseteq [0, \infty)$ liefert das Lemma von Cassels 1.2.7 durch die Definition $E_A = (B \setminus A) \cap [0, \infty)$ wegen der Äquivalenzen (6) und (8) aus 1.2.6 die Existenz einer asymptotischen Ergänzung E_A zu A . A priori sind zwar in der Menge B auch negative Elemente enthalten. Weil B Teilmenge der ganzen Zahlen und die Folge $(b_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ streng monoton wachsend ist, ist deren Anzahl allerdings beschränkt. Damit beträgt die asymptotische Dichte der Menge $A \cup E_A = B \cap [0, \infty)$ ebenfalls $d_h(A \cup E_A) = d_h(B) = \frac{h}{\lambda}$. Später untersuchen wir zum einen, inwiefern Voraussetzung (12) notwendig für die Existenz asymptotischer Ergänzungen ist, und zum anderen, ob die Menge $E_A = (B \setminus A) \cap [0, \infty)$ optimale asymptotische Ergänzung zu A ist.

1.2.9 Beispiel

Betrachten wir wiederum die Menge

$$P_t = \{(2^n + m)^h \mid m < 2^{n-1}, n, m \in \mathbb{N}_0\}$$

aus Beispiel 1.2.5, so liefert uns das Lemma von Cassels gemäß 1.2.7 (12) für die Menge $A = P_t$ wegen

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1} - a_n}{\sqrt[h]{a_n^{h-1}}} = h$$

die Existenz einer Menge

$$B = \{b_0 < b_1 < b_2 < \dots\} \subseteq \mathbb{N}_0,$$

die zum einen gemäß 1.2.7 (13) die Menge P_t enthält und zum anderen

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_n}{n^h} = \left(\frac{h}{h}\right)^h = 1$$

gemäß 1.2.7 (14) genügt. Mit den Äquivalenzen (6) und (8) aus 1.2.6 ist durch die Menge

$$E_{P_t}^* = B \setminus P_t$$

eine asymptotische Ergänzung zu P_t gegeben, die

$$d_h(P_t \cup E_{P_t}^*) = 1$$

genügt. In Beispiel 1.3.3 sehen wir, daß die Menge $E_{P_t}^*$ eine weitere optimale asymptotische Ergänzung zu P_t ist.

1.3 Pseudo-Dichte und Minorantenerzeuger

1.3.1 Einleitung

Im Abschnitt 1.3 betrachten wir die Pseudo-Dichte $\delta_h(A)$ einer dünnen Menge $A \subseteq [0, \infty)$ zunächst als eine untere Schranke für die asymptotische Dichte $d_h(A \cup E_A)$ der Vereinigung der Menge A mit einer ihrer asymptotischen Ergänzungen E_A . Dafür stellen wir in Satz 1.3.2 zunächst eine untere Abschätzung für die asymptotische Dichte zur Verfügung, die wir jeweils mit Hilfe eines spezifischen Folgenpaares erzielen. Um diese Schranke nachzuweisen, wenden wir die Cauchy-Eigenschaft von konvergenten Folgen reeller Zahlen auf die asymptotische Dichte an. Dabei gehen wir davon aus, daß wir eine mögliche asymptotische Ergänzung einer dünnen Menge bereits kennen. Die in der Definition 1.3.5 angegebene Pseudo-Dichte entspricht dann gerade dem Supremum aller Abschätzungen aus Satz 1.3.2. Allerdings benötigen wir zur Berechnung der Pseudo-Dichte nicht mehr alle Folgenpaare aus Satz 1.3.2, sondern nur die in Definition 1.3.5 bereitgestellten Minorantenerzeuger.

In der Interpretation 1.3.10 erörtern wir die anschauliche Bedeutung der Pseudo-Dichte. Im Anschluß daran arbeiten wir einige Eigenschaften von Minorantenerzeugern und Pseudo-Dichte aus. So stellen wir im Satz 1.3.12 die obere asymptotische Dichte durch geeignete Minorantenerzeuger dar. Im Satz 1.3.15 sehen wir, daß die Pseudo-Dichte bereits durch eine bestimmte Klasse von Minorantenerzeugern festgelegt ist.

Weiterhin betrachten wir beispielhaft unsere Menge P_t aus Abschnitt 1.2. Mit Satz 1.3.2 wird sich zeigen, daß die zuvor im Abschnitt 1.2 gefundenen asymptotischen Ergänzungen optimal zu P_t sind.

1.3.2 Satz

Gegeben sei eine diskrete Menge $A \subseteq [0, \infty)$, ein $h > 0$ und ein Folgenpaar $(S, s) = ((S_n)_{n \in \mathbb{N}}, (s_n)_{n \in \mathbb{N}})$ reeller Zahlen.

Voraussetzung. Das Folgenpaar $(S, s) = ((S_n)_{n \in \mathbb{N}}, (s_n)_{n \in \mathbb{N}})$ erfülle

$$S_n > s_n > 0, \quad (16)$$

$$s_n \rightarrow \infty, \quad (17)$$

$$\frac{s_n}{S_n} \rightarrow q \leq 1. \quad (18)$$

Man setze

$$\delta_h^o(A, S, s) = \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{A(S_n) - A(s_n)}{\sqrt[h]{S_n}}, \quad (19)$$

$$\delta_h(A, S, s) = \frac{\delta_h^o(A, S, s)}{1 - \sqrt[h]{q}}. \quad (20)$$

Behauptung. Im Falle $\delta_h^o(A, S, s) < \infty$, $q < 1$ genügt die asymptotische Dichte bezüglich jeder asymptotischen Ergänzung E_A zu A der Abschätzung

$$d_h(A \cup E_A) \geq \delta_h(A, S, s). \quad (21)$$

Ist $\delta_h^o(A, S, s) = \infty$ oder sind $\delta_h^o(A, S, s) > 0$ und $q = 1$ erfüllt, so ist die Menge A nicht asymptotisch ergänzbar.

Bemerkung. Der verbleibende Fall $\delta_h^o(A, S, s) = 0$, $q = 1$ ist i.a. nicht zu bewerten. Sei $A \subseteq \mathbb{N}_0$. Betrachten wir $S_n = n^h$, $s_n = n^h - 1$, so erhalten wir unabhängig von A die Aussage $\delta_h^o(A, S, s) = 0$.

Beweis. Aus der folgenden Annahme leiten wir je nach Fall entweder (21) oder einen Widerspruch ab.

Annahme. Die Menge A hat eine asymptotische Ergänzung E_A .

Wir setzen $\tilde{A} = A \cup E_A$. Gemäß der Definition der asymptotischen Dichte ist für beliebige Folgen $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, die $x_n \rightarrow \infty$ genügen, durch $\frac{\tilde{A}(x_n)}{\sqrt[h]{x_n}}$ eine Cauchy-Folge mit $\frac{\tilde{A}(x_n)}{\sqrt[h]{x_n}} \rightarrow d_h(\tilde{A}) < \infty$ gegeben. Wir erhalten also einerseits

$$\begin{aligned} \frac{\tilde{A}(s_n)}{\sqrt[h]{s_n}} - \frac{\tilde{A}(s_n)}{\sqrt[h]{S_n}} &= \left(1 - \frac{\sqrt[h]{s_n}}{\sqrt[h]{S_n}}\right) \frac{\tilde{A}(s_n)}{\sqrt[h]{s_n}} \\ &\rightarrow (1 - \sqrt[h]{q}) d_h(\tilde{A}) . \end{aligned}$$

Andererseits ist

$$\begin{aligned} \frac{\tilde{A}(s_n)}{\sqrt[h]{s_n}} - \frac{\tilde{A}(s_n)}{\sqrt[h]{S_n}} &= \frac{\tilde{A}(s_n)}{\sqrt[h]{s_n}} - \frac{\tilde{A}(S_n)}{\sqrt[h]{S_n}} + \frac{\tilde{A}(S_n) - \tilde{A}(s_n)}{\sqrt[h]{S_n}} \\ &\geq \frac{\tilde{A}(s_n)}{\sqrt[h]{s_n}} - \frac{\tilde{A}(S_n)}{\sqrt[h]{S_n}} + \frac{A(S_n) - A(s_n)}{\sqrt[h]{S_n}} . \end{aligned}$$

Die asymptotische Dichte von $\tilde{A} = A \cup E_A$ genügt also der Abschätzung

$$\begin{aligned} (1 - \sqrt[h]{q}) d_h(\tilde{A}) &\geq \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{A(S_n) - A(s_n)}{\sqrt[h]{S_n}} \\ &= \delta_h^o(A, S, s) . \end{aligned} \tag{22}$$

Im Falle $q < 1$ und $\delta_h^o(A, S, s) < \infty$ folgt aus Ungleichung (22)

$$\begin{aligned} d_h(A \cup E_A) &= d_h(\tilde{A}) \\ &\geq \frac{\delta_h^o(A, S, s)}{1 - \sqrt[h]{q}} \\ &= \delta_h(A, S, s) , \end{aligned}$$

also die Behauptung (21).

Im Falle $\delta_h^o(A, S, s) = \infty$ kann die Menge $\tilde{A}$ die Abschätzung (22) nicht erfüllen. Folglich ist die Annahme falsch, und die Menge A besitzt keine asymptotische Ergänzung.

Im Falle $\delta_h^o(A, S, s) > 0$ und $q = 1$ setzen wir für alle $k \in (\mathbb{N} \setminus \{1\})$

$$s_n^{(k)} = \left(1 - \frac{1}{k}\right) s_n \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Mit $q^{(k)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{s_n^{(k)}}{s_n} = \frac{k-1}{k}$ erfüllt auch das Folgenpaar $(S, s^{(k)})$ die Voraussetzungen (16)-(18). Wir beachten, daß wegen $s_n^{(k)} < s_n$ insbesondere

$$\delta_h^o(A, S, s^{(k)}) \geq \delta_h^o(A, S, s)$$

folgt. Ist für ein k $\delta_h^o(A, S, s^{(k)}) = \infty$, so können wir den bereits betrachteten Fall $q < 1$ und $\delta_h^o(A, S, s) = \infty$ auf $(S, s^{(k)})$ anwenden, das heißt, die Menge A besitzt keine asymptotische Ergänzung. Andernfalls erhalten wir die Schlußkette

$$\begin{aligned} d_h(\tilde{A}) &\geq \delta_h(A, S, s^{(k)}) \\ &= \frac{\delta_h^o(A, S, s^{(k)})}{1 - \sqrt[k]{\frac{k-1}{k}}} \\ &\geq \frac{\delta_h^o(A, S, s)}{1 - \sqrt[k]{\frac{k-1}{k}}} \rightarrow \infty, \end{aligned}$$

und damit auch hier einen Widerspruch. Also ist die Menge A im zuletzt betrachteten Fall ebenfalls nicht asymptotisch ergänzbar.

Bemerkung. Im letzten Fall $q = 1$ und $\delta_h^o(A, S, s) > 0$ können wir den Beweis unmittelbar aus Ungleichung (22) vollziehen. Während die linke Seite für $q = 1$ null entspricht, ist die rechte Seite positiv. Im weiteren Verlauf werden wir allerdings auf die obige Vorgehensweise zurückkommen.

1.3.3 Beispiel

Wir wollen Satz 1.3.2 an unserem Beispiel 1.2.5 anwenden. Es sind

$$P_t = \left\{ (2^n + m)^h \mid m < 2^{n-1}, n, m \in \mathbb{N}_0 \right\},$$

$$S_n = 2^{n^h},$$

$$s_n = (3 \cdot 2^{n-2})^h.$$

Offensichtlich ist die Menge P_t diskret, und der Quotient $\frac{s_n}{S_n}$ genügt der Konvergenz

$$\frac{s_n}{S_n} \rightarrow \left(\frac{3}{4}\right)^h.$$

Dann besitzt das Folgenpaar (S, s) die in Satz 1.3.2 geforderten Eigenschaften (16)-(18). Desweiteren gelten nach Beispiel 1.2.5

$$P_t(S_n) = P_t(s_n) + 1,$$

$$P_t(s_n) = 2^{n-1}.$$

Für die Abschätzung (21) aus Satz 1.3.2 benötigen wir noch die Größen 1.3.2 (19) und 1.3.2 (20). Zum einen ist

$$\begin{aligned} \delta_h^o(P_t, S, s) &= \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{P_t(S_n) - P_t(s_n)}{\sqrt[h]{S_n}} \\ &= \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[h]{S_n}} \\ &= 0, \end{aligned}$$

und zum anderen ist

$$\begin{aligned} \delta_h(P_t, S, s) &= \frac{\delta_h^o(P_t, S, s)}{1 - \sqrt[h]{q}} \\ &= \frac{0}{1 - \frac{3}{4}} \\ &= 0. \end{aligned}$$

Dann erhalten wir gemäß (21) aus Satz 1.3.2 die (triviale) Aussage, daß die asymptotische Dichte bezüglich jeder asymptotischen Ergänzung F_{P_t} zu P_t die folgende Abschätzung erfüllt:

$$d_h(P_t \cup F_{P_t}) \geq 0 .$$

Setzen wir

$$\hat{S}_n = s_{n+1} ,$$

$$\hat{s}_n = S_n ,$$

so genügt der Quotient $\frac{\hat{S}_n}{\hat{s}_n}$ der Konvergenz

$$\frac{\hat{S}_n}{\hat{s}_n} \rightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^h .$$

Offensichtlich besitzt auch das Folgenpaar $(\hat{S}, \hat{s})$ die Eigenschaften 1.3.2 (16)-(18). Die Zählfunktion von P_t erfüllt an den Punkten $\hat{S}_n, \hat{s}_n$

$$P_t(\hat{S}_n) - P_t(\hat{s}_n) = 2^{n-1} - 1 ,$$

und wir erhalten für das Folgenpaar $(\hat{S}, \hat{s})$ nach 1.3.2 (19) und 1.3.2 (20)

$$\begin{aligned} \delta_h^o(P_t, \hat{S}, \hat{s}) &= \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{P_t(\hat{S}_n) - P_t(\hat{s}_n)}{\sqrt[h]{\hat{S}_n}} \\ &= \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{n-1} - 1}{3 \cdot 2^{n-1}} = \frac{1}{3} , \\ \delta_h(P_t, \hat{S}, \hat{s}) &= \frac{\delta_h^o(P_t, \hat{S}, \hat{s})}{1 - \sqrt[h]{\hat{q}}} \\ &= \frac{\frac{1}{3}}{1 - \frac{2}{3}} = 1 . \end{aligned}$$

Gemäß Satz 1.3.2 (21) genügt nun jede asymptotische Ergänzung F_{P_t} zu P_t der Abschätzung $d_h(P_t \cup F_{P_t}) \geq 1$. Insbesondere sind die asymptotischen Ergänzungen E_{P_t} aus Beispiel 1.2.5 und $E_{P_t}^*$ aus Beispiel 1.2.9 optimal zu P_t .

1.3.4 Bemerkung

Man beachte, daß die Wahl des Folgenpaars (S, s) in Satz 1.3.2 nach Beispiel 1.3.3 erheblichen Einfluß auf die Qualität der Abschätzung $\delta_h(A, S, s)$ aus Satz 1.3.2 haben kann.

1.3.5 Definition: Pseudo-Dichte und Minorantenerzeuger

Gegeben seien eine diskrete Menge $A \subseteq [0, \infty)$ und ein $h > 0$.

Minorantenerzeuger. Jedes Folgenpaar $(S, s) = ((S_n)_{n \in \mathbb{N}}, (s_n)_{n \in \mathbb{N}})$ von reellen Zahlen mit den Eigenschaften

$$S_n > s_n > 0, \quad (23)$$

$$S_n, s_n \uparrow \infty, \quad (24)$$

$$\frac{s_n}{S_n} \rightarrow q < 1 \quad (25)$$

heißt *Minorantenerzeuger*. Für beliebige Minorantenerzeuger (S, s) setzen wir analog zu Satz 1.3.2

$$\delta_h^o(A, S, s) = \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{A(S_n) - A(s_n)}{\sqrt[h]{S_n}}, \quad (26)$$

$$\delta_h(A, S, s) = \frac{\delta_h^o(A, S, s)}{1 - \sqrt[h]{q}}. \quad (27)$$

Pseudo-Dichte h-ter Ordnung. Für jede asymptotische Ergänzung E_A zu A ist gemäß Satz 1.3.2 durch die Definition

$$\delta_h(A) = \sup \left\{ \delta_h(A, S, s) \mid (S, s) \text{ Minorantenerzeuger} \right\} \quad (28)$$

eine untere Abschätzung der asymptotischen Dichte $d_h(A \cup E_A)$ der Menge $A \cup E_A$ gegeben. $\delta_h(A)$ heißt *Pseudo-Dichte (h-ter Ordnung)* der Menge A .

1.3.6 Bemerkung

Aufgrund der Definition (28) der Pseudo-Dichte generiert ein Minorantenerzeuger eine untere Abschätzung der Pseudo-Dichte der Form (27). Deshalb nennen wir diese Folgenpaare Minorantenerzeuger.

Die definierenden Forderungen 1.3.5 (23)-(25) eines Minorantenerzeugers (S, s) sind zwar schärfer als die Forderungen (16)-(18) an das Folgenpaar $(\hat{S}, \hat{s})$ aus Satz 1.3.2. Trotzdem liefert uns die Pseudo-Dichte das Supremum aller Abschätzungen (21) aus Satz 1.3.2. Hierzu betrachten wir ein beliebiges Folgenpaar $(\hat{S}, \hat{s})$ gemäß 1.3.2 (16)-(18) und unterscheiden die Fälle $\hat{q} < 1$ und $\hat{q} = 1$ mit $\delta_h^o(A, \hat{S}, \hat{s}) > 0$. Im letzteren Falle ist die Menge A nach Satz 1.3.2 nicht asymptotisch ergänzbar, und wir müssen zeigen, daß die Pseudo-Dichte der Menge A unbeschränkt ist.

Im Falle $\hat{q} < 1$ kann man durch Übergang zu einer Teilfolge stets einen Minorantenerzeuger (S, s) mit $\delta_h(A, S, s) = \delta_h(A, \hat{S}, \hat{s})$ finden. Dazu wählen wir zunächst eine Teilfolge aus, für die der Quotient $\frac{A(\hat{S}_{n_k}) - A(\hat{s}_{n_k})}{\sqrt[n]{\hat{S}_{n_k}}}$ gegen den Limes superior konvergiert. Danach gehen wir in eine weitere Teilfolge über, die der Bedingung $\hat{S}_{n_{k_l}} \uparrow \infty$ genügt. Wir selektieren schließlich eine Teilfolge, die $\hat{s}_{n_{k_{lm}}} \uparrow \infty$ erfüllt. Bezeichnet man diese durch (S, s) , so ist (S, s) ein Minorantenerzeuger, für den $\delta_h(A, S, s) = \delta_h(A, \hat{S}, \hat{s})$ gilt.

Im Falle $\hat{q} = 1$ und $\delta_h^o(A, \hat{S}, \hat{s}) > 0$ liefert uns der Beweis für diesen Fall aus Satz 1.3.2 die Konstruktion einer Folge von Folgenpaaren $(\hat{S}, \hat{s}^{(k)})$ mit $\hat{q}^{(k)} < 1$ und $\delta_h(A, \hat{S}, \hat{s}^{(k)}) \rightarrow \infty$. Nun wenden wir das obige Vorgehen auf die Folgenpaare $(\hat{S}, \hat{s}^{(k)})$ an und erhalten so eine Folge $(S, s^{(k)})$ von Minorantenerzeugern, die $\delta_h(A, S, s^{(k)}) = \delta_h(A, \hat{S}, \hat{s}^{(k)}) \rightarrow \infty$ genügt. Also gilt $\delta_h(A) = \infty$.

Ist nun E_A eine asymptotische Ergänzung zur Menge A , so ist die Pseudo-Dichte der Menge A als Supremum aller Abschätzungen aus Satz 1.3.2 eine untere Abschätzung der asymptotischen Dichte der Menge $A \cup E_A$. Wir erhalten bereits die Aussage

$$\delta_h(A) = \infty \Rightarrow \text{Die Menge } A \text{ besitzt keine asymptotische Ergänzung.}$$

Im zweiten Kapitel zeigen wir

$$\delta_h(A) < \infty \Rightarrow \text{Die Menge } A \text{ ist asymptotisch ergänzbar.}$$

Wir konstruieren dabei eine asymptotische Ergänzung E_A zu A , die

$$d_h(A \cup E_A) = \delta_h(A)$$

genügt. Weil die Pseudo-Dichte eine untere Abschätzung der asymptotischen Dichte von $A \cup E_A$ ist, ist die Menge E_A sogar eine optimale asymptotische Ergänzung zu A . Die Motivation für diesen Ansatz entnehmen wir im folgenden unserem Beispiel und der Interpretation der Pseudo-Dichte.

1.3.7 Satz

Ist die Pseudo-Dichte $\delta_h(A)$ einer Menge $A \subseteq [0, \infty)$ unbeschränkt – also $\delta_h(A) = \infty$, so ist die Menge A nicht asymptotisch ergänzbar.

Beweis. Die Behauptung folgt aus der Definition (28) der Pseudo-Dichte und Satz 1.3.2.

1.3.8 Erweiterung der Pseudo-Dichte auf nicht diskrete Mengen

Ist eine Menge $A \subseteq [0, \infty)$ nicht diskret, so ist sie nach Bemerkung 1.2.3.4. nicht asymptotisch ergänzbar. Wir setzen für nicht diskrete Mengen A

$$\delta_h(A) = \infty .$$

1.3.9 Beispiel

Gemäß Beispiel 1.3.3 und Satz 1.3.2 erfüllt die Pseudo-Dichte der dort betrachteten Menge

$$P_t = \left\{ (2^n + m)^h \mid m < 2^{n-1}, n, m \in \mathbb{N}_0 \right\}$$

aufgrund ihrer Definition die Abschätzung

$$\delta_h(P_t) \geq 1 .$$

Ferner genügt die asymptotische Ergänzung $E_{P_t} = P \setminus P_t$ der Gleichung

$$d_h(P_t \cup E_{P_t}) = 1 .$$

Gemäß ihrer Definition 1.3.5 und Satz 1.3.2 ist die Pseudo-Dichte eine untere Abschätzung der asymptotischen Dichte von $P_t \cup E_{P_t}$. Also muß die Pseudo-Dichte der Menge P_t gerade $\delta_h(P_t) = 1$ betragen.

Wir bestimmen die Pseudo-Dichte der Menge P_t auch aus ihrer Definition. Beachtet man, daß die Menge P_t Teilmenge der h -ten Potenzen ist, so sind

$$P_t(S_n) - P_t(s_n) \leq \sqrt[h]{S_n} - \sqrt[h]{s_n} + 1 ,$$

$$\delta_h^o(P_t, S, s) \leq 1 - \sqrt[h]{q} ,$$

$$\delta_h(P_t, S, s) \leq 1$$

für beliebige Minorantenerzeuger (S, s) . Also genügt die Pseudo-Dichte der Abschätzung $\delta_h(P_t) \leq 1$. Das in Beispiel 1.3.3 betrachtete Folgenpaar $(\hat{S}, \hat{s})$ ist ein Minorantenerzeuger. Wir erhalten $\delta_h(P_t) \geq 1$ und damit $\delta_h(P_t) = 1$.

1.3.10 Interpretation der Pseudo-Dichte

Die Pseudo-Dichte einer Menge A sei $\delta_h(A) = m > 0$. Für ein beliebig gewähltes $\varepsilon > 0$ mit $\varepsilon < m$ sei durch (S, s) ein Minorantenerzeuger gegeben, der $m - \varepsilon \leq \delta_h(A, S, s)$ genügt. Nun ist

$$\begin{aligned} \delta_h(A, S, s) &= \delta_h^o(A, S, s) \frac{1}{1 - \sqrt[h]{q}} \\ &= \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{A(S_n) - A(s_n)}{\sqrt[h]{S_n}} \frac{1}{1 - \frac{\sqrt[h]{s_n}}{\sqrt[h]{S_n}}} \\ &= \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{A(S_n) - A(s_n)}{\sqrt[h]{S_n} - \sqrt[h]{s_n}}. \end{aligned}$$

Setzen wir $T_n = \sqrt[h]{S_n}$ und $t_n = \sqrt[h]{s_n}$, so erhalten wir

$$m - \varepsilon \leq \delta_h(A, S, s) = \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{A(T_n^h) - A(t_n^h)}{T_n - t_n}. \quad (29)$$

Diese Darstellung von $\delta_h(A, S, s)$ läßt eine Veranschaulichung der Pseudo-Dichte zu. Man ermittelt im Zähler die Anzahl der in der Menge A zwischen den h -ten Potenzen von t_n und T_n gelegenen Elemente und im Nenner die Differenz aus T_n und t_n . Asymptotisch betrachtet gleicht die Differenz $T_n - t_n$ der Anzahl derjenigen h -ten Potenzen ganzer Zahlen, die zwischen den h -ten Potenzen von t_n und T_n liegen. Also bemißt der Quotient die Mächtigkeit der Menge A gewissermaßen als Vielfachheit der Mächtigkeit der h -ten Potenzen innerhalb der durch den jeweiligen Minorantenerzeuger vorgegebenen Intervalle $[t_n^h, T_n^h]$. Dabei entspricht $\delta_h(A, S, s)$ gerade dem Limes superior der genannten Vielfachheiten in den Intervallen $[t_n^h, T_n^h]$. Die Pseudo-Dichte der Menge A ist dann das Supremum all dieser Limiten.

Daher ist es naheliegend, zu fragen, ob wir für ein geeignetes $m_0 \geq m$ die Menge A durch eine Menge E_A ergänzen können, so daß

$$m_0 = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(A \cup E_A)(T_n^h) - (A \cup E_A)(t_n^h)}{T_n - t_n} \quad (30)$$

für jeden Minorantenerzeuger erfüllt ist. Ist die Menge E_A – im Falle der Existenz – eine asymptotische Ergänzung zu A ? Beträgt dann die asymptotische Dichte der Menge $A \cup E_A$ etwa $d_h(A \cup E_A) = m_0$? Gibt es vielleicht eine asymptotische Ergänzung E_A^* zu A , so daß die asymptotische Dichte der Menge $A \cup E_A^*$ exakt der Pseudo-Dichte der Menge A entspricht? Im zweiten Kapitel weisen wir die Existenz der Mengen E_A und E_A^* nach. Zunächst arbeiten wir Eigenschaften von Minorantenerzeugern sowie Beziehungen zwischen unterer bzw. oberer asymptotischer Dichte und Pseudo-Dichte aus.

Wir haben in Bemerkung 1.3.6 gezeigt, daß die Pseudo-Dichte mit dem Supremum aller Abschätzungen (21) aus Satz 1.3.2 übereinstimmt. Nun ist es uns allerdings auch für Folgenpaare (S, s) gemäß Satz 1.3.2 (16)-(18) mit $\delta_h^o(A, S, s) = 0$ und $q = 1$ möglich, den Quotienten $\frac{A(T_n^h) - A(t_n^h)}{T_n - t_n}$ und den zugehörigen Limes superior zu bilden. Anhand des Beispiels 1.3.11 sehen wir, daß diese Folgenpaare zu einer fehlerhaften Einschätzung der Pseudo-Dichte führen können. Die für die Minorantenerzeuger in Definition 1.3.5 gegebene Voraussetzung (25) $q < 1$ ist also bei der Betrachtung des Grenzwertes (29) als untere Abschätzung der Pseudo-Dichte wesentlich.

1.3.11 Beispiel

Setzen wir für $h \geq 2$

$$P_0 = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{n^{3h}, n^{3h} + 1, \dots, n^{3h} + n - 1\},$$

so erhalten wir für die Zählfunktion der Menge P_0 die Abschätzung

$$\sum_{k=1}^{\lfloor \sqrt[3h]{n} \rfloor - 1} k \leq P_0(n) \leq \sum_{k=1}^{\lfloor \sqrt[3h]{n} \rfloor} k .$$

Daher gilt die Ungleichung

$$\frac{(\sqrt[3h]{n} - 2)(\sqrt[3h]{n} - 1)}{2} \leq P_0(n) \leq \frac{\sqrt[3h]{n}(\sqrt[3h]{n} + 1)}{2} .$$

Also beträgt die asymptotische Dichte der Menge P_0

$$d_h(P_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{P_0(n)}{\sqrt[3h]{n}} = 0 .$$

Mengen A , deren asymptotische Dichte verschwindet, genügen bezüglich jeden Minorantenerzeugers (S, s) nach den Definitionen 1.3.5 (26) und (27) den Gleichungen $\delta_h^o(A, S, s) = 0$ und $\delta_h(A, S, s) = 0$. Es sind nämlich

$$\delta_h^o(A, S, s) = \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{A(S_n) - A(s_n)}{\sqrt[3h]{S_n}} \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{A(S_n)}{\sqrt[3h]{S_n}} = 0 ,$$

$$\delta_h(A, S, s) = \frac{\delta_h^o(A, S, s)}{1 - \sqrt[3h]{q}} = 0 .$$

Gemäß Definition 1.3.5 (28) ist dann auch die Pseudo-Dichte null:

$$\delta_h(A) = \sup \left\{ \delta_h(A, S, s) \mid (S, s) \text{ Minorantenerzeuger} \right\} = 0 .$$

Insbesondere ist also $\delta_h(P_0) = 0$.

Die Menge P_0 enthält allerdings zwischen zwei h -ten Potenzen schließlich beliebig viele Elemente. Setzen wir $T_n = \left(n + \frac{1}{3n}\right)^3$ und $t_n = n^3$, so gelten $\frac{t_n}{T_n} \rightarrow 1$ und $T_n^h > n^{3h} + n$. Dann liefert die Betrachtung aus 1.3.10 mit

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{P_0(T_n^h) - P_0(t_n^h)}{T_n - t_n} \geq 1$$

die fehlerhafte Einschätzung $\delta_h(P_0) \geq 1$. Wie in 1.3.10 angekündigt ist also die Voraussetzung $q < 1$ für Minorantenerzeuger bei der Betrachtung des Grenzwertes (29) als untere Abschätzung der Pseudo-Dichte wesentlich.

1.3.12 Obere asymptotische Dichte und Minorantenerzeuger

Betrachten wir Minorantenerzeuger (S, s) , die $q = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{s_n}{S_n} = 0$ genügen, so erhalten wir die Gültigkeit der folgenden Ungleichung für beliebige dünne Mengen $A \subseteq [0, \infty)$, also für Mengen A , deren obere asymptotische Dichte $\bar{d}_h(A) = \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{A(n)}{\sqrt[h]{n}}$ endlich ist:

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{A(s_n)}{\sqrt[h]{S_n}} = \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[h]{s_n}}{\sqrt[h]{S_n}} \frac{A(s_n)}{\sqrt[h]{s_n}} \leq \bar{d}_h(A) \cdot \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[h]{s_n}}{\sqrt[h]{S_n}} = 0 .$$

Daraus folgen unmittelbar die Aussagen

$$\delta_h^o(A, S, s) = \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{A(S_n)}{\sqrt[h]{S_n}} ,$$

$$\delta_h(A, S, s) = \delta_h^o(A, S, s) \leq \bar{d}_h(A) .$$

Wir können nun den Minorantenerzeuger (S, s) so wählen, daß (S, s) gerade der Bedingung $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{A(S_n)}{\sqrt[h]{S_n}} = \bar{d}_h(A)$ genügt und erhalten $\delta_h(A, S, s) = \bar{d}_h(A)$. Untersuchen wir nur Minorantenerzeuger (S, s) , die $q = 0$ genügen, so erzeugen wir bei der Bildung des Supremums über $\delta_h(A, S, s)$ gerade die obere asymptotische Dichte der Menge A . Also können wir für dünne Mengen A die obere asymptotische Dichte unter Zuhilfenahme von Minorantenerzeugern darstellen:

$$\bar{d}_h(A) = \sup \left\{ \delta_h(A, S, s) \mid (S, s) \text{ Minorantenerzeuger mit } q = 0 \right\} . \quad (31)$$

Unter Beachtung der Interpretation 1.3.10 der Pseudo-Dichte bemißt also die obere asymptotische Dichte die Mächtigkeit einer Menge A als maximale, immer wieder auftretende Vielfachheit der Mächtigkeit der h -ten Potenzen in den Intervallen $[0, T_n^h]$. Wir können diese Aussage auch unmittelbar an der Definition der oberen asymptotischen Dichte ablesen.

1.3.13 Bemerkung

Analog zur Pseudo-Dichte kann man mit den Definitionen

$$\delta_h^*(A, S, s) = \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{A(S_n) - A(s_n)}{\sqrt[h]{S_n}} ,$$

$$\delta_h^u(A, S, s) = \frac{\delta_h^u(A, S, s)}{1 - \sqrt[h]{q}} ,$$

$$\delta_h^u(A) = \inf \left\{ \delta_h^*(A, S, s) \mid (S, s) \text{ Minorantenerzeuger} \right\}$$

anstelle der Definition 1.3.5 der Pseudo-Dichte einen noch schwächeren Dichtebegriff als die untere asymptotische Dichte einführen. Dann erhält man, daß $\delta_h^u(A)$ gerade die minimale, in bestimmten Intervallen $[t_n^h, T_n^h]$ immer wieder auftretende Vielfachheit der Menge A im Verhältnis zu den h -ten Potenzen bemißt. Man kann nun wie in 1.3.12 schließen, daß die untere asymptotische Dichte für teilweise dünne Mengen der Äquivalenz

$$\underline{d}_h(A) = \inf \left\{ \delta_h^*(A, S, s) \mid (S, s) \text{ Minorantenerzeuger mit } q = 0 \right\} \quad (32)$$

genügt. Also bemißt die untere asymptotische Dichte die Mächtigkeit der Menge A gerade als minimale, immer wieder auftretende Vielfachheit der Mächtigkeit der h -ten Potenzen in den Intervallen $[0, T_n^h]$.

Wir zeigen nun, daß es – nach Wahl eines beliebigen $\varepsilon > 0$ – zur Berechnung der Pseudo-Dichte genügt, nur Minorantenerzeuger (S, s) zu betrachten, die $\frac{s_n}{S_n} \rightarrow q > 1 - \varepsilon$ erfüllen. Mit den Überlegungen aus 1.3.12 und 1.3.13 können wir bereits erahnen, daß die Pseudo-Dichte einer Menge in einem, wenn überhaupt, nur geringem funktionalen Zusammenhang zur unteren und oberen asymptotischen Dichte steht.

1.3.14 Zerlegung von Minorantenerzeugern

Voraussetzung. Gegeben seien eine diskrete Menge $A \subseteq [0, \infty)$ und ein Minorantenerzeuger (S, s) , der $0 < q < 1$ genügt. Ferner sei $q_1 \in (q, 1)$. Sei $q_2 = \frac{q}{q_1}$. Dann ist auch $q_2 \in (q, 1)$. Setzt man nun $\forall n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned}\hat{S}_n &= q_1 S_n, \\ \hat{s}_n &= \hat{S}_n,\end{aligned}$$

so sind $(S, \hat{s})$ und $(\hat{S}, s)$ offensichtlich Minorantenerzeuger.

Behauptung. Die Minorantenerzeuger (S, s) , $(S, \hat{s})$ und $(\hat{S}, s)$ genügen stets der Abschätzung

$$\delta_h(A, S, s) \leq \max \left\{ \delta_h(A, S, \hat{s}), \delta_h(A, \hat{S}, s) \right\}. \quad (33)$$

Beweis. Im Falle $\delta_h(A, S, s) < \infty$ erhält man die Schlußkette

$$\begin{aligned}\delta_h(A, S, s) &= \frac{\delta_h^o(A, S, s)}{1 - \sqrt[q]{q}} \\ &= \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{A(S_n) - A(s_n)}{\sqrt[q]{S_n} - \sqrt[q]{s_n}} \\ &= \limsup_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{A(S_n) - A(\hat{s}_n)}{\sqrt[q]{S_n} - \sqrt[q]{\hat{s}_n}} + \frac{A(\hat{S}_n) - A(s_n)}{\sqrt[q]{S_n} - \sqrt[q]{s_n}} \right) \\ &= \limsup_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\sqrt[q]{S_n} - \sqrt[q]{\hat{s}_n}}{\sqrt[q]{S_n} - \sqrt[q]{s_n}} \cdot \frac{A(S_n) - A(\hat{s}_n)}{\sqrt[q]{S_n} - \sqrt[q]{\hat{s}_n}} \right. \\ &\quad \left. + \frac{\sqrt[q]{\hat{S}_n} - \sqrt[q]{s_n}}{\sqrt[q]{S_n} - \sqrt[q]{s_n}} \cdot \frac{A(\hat{S}_n) - A(s_n)}{\sqrt[q]{\hat{S}_n} - \sqrt[q]{s_n}} \right)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \limsup_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1 - \sqrt[h]{\frac{\hat{S}_n}{S_n}}}{1 - \sqrt[h]{\frac{s_n}{S_n}}} \cdot \frac{\frac{A(S_n) - A(\hat{s}_n)}{\sqrt[h]{S_n}}}{1 - \sqrt[h]{\frac{\hat{s}_n}{S_n}}} \right. \\
&\quad \left. + \frac{\sqrt[h]{\frac{\hat{S}_n}{S_n}} - \sqrt[h]{\frac{s_n}{S_n}}}{1 - \sqrt[h]{\frac{s_n}{S_n}}} \cdot \frac{\frac{A(\hat{S}_n) - A(s_n)}{\sqrt[h]{\hat{S}_n}}}{1 - \sqrt[h]{\frac{s_n}{\hat{S}_n}}} \right) \\
&= \limsup_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1 - \sqrt[h]{q_1}}{1 - \sqrt[h]{q}} \cdot \frac{\frac{A(S_n) - A(\hat{s}_n)}{\sqrt[h]{S_n}}}{1 - \sqrt[h]{q_1}} \right. \\
&\quad \left. + \frac{\sqrt[h]{q_1} - \sqrt[h]{q}}{1 - \sqrt[h]{q}} \cdot \frac{\frac{A(\hat{S}_n) - A(s_n)}{\sqrt[h]{\hat{S}_n}}}{1 - \sqrt[h]{q_2}} \right) \\
&\leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - \sqrt[h]{q_1}}{1 - \sqrt[h]{q}} \cdot \frac{\frac{A(S_n) - A(\hat{s}_n)}{\sqrt[h]{S_n}}}{1 - \sqrt[h]{q_1}} \\
&\quad + \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[h]{q_1} - \sqrt[h]{q}}{1 - \sqrt[h]{q}} \cdot \frac{\frac{A(\hat{S}_n) - A(s_n)}{\sqrt[h]{\hat{S}_n}}}{1 - \sqrt[h]{q_2}} \\
&= \frac{1 - \sqrt[h]{q_1}}{1 - \sqrt[h]{q}} \delta_h(A, S, \hat{s}) + \frac{\sqrt[h]{q_1} - \sqrt[h]{q}}{1 - \sqrt[h]{q}} \delta_h(A, \hat{S}, s) \\
&\leq \max \left\{ \delta_h(A, S, \hat{s}), \delta_h(A, \hat{S}, s) \right\} .
\end{aligned}$$

Im Falle $\delta_h(A, S, s) = \infty$ seien $\delta_h(A, S, \hat{s}) < \infty$ und $\delta_h(A, \hat{S}, s) < \infty$. Wendet man die obige Schlußkette in umgekehrter Reihenfolge an, so folgt $\delta_h(A, S, s) < \infty$, im Widerspruch zur Voraussetzung. Also ist die Behauptung auch im Falle $\delta_h(A, S, s) = \infty$ gezeigt.

1.3.15 Einschränkung der Minorantenerzeuger

Voraussetzung. Seien eine diskrete Menge $A \subseteq [0, \infty)$ und ein $\varepsilon > 0$ gegeben. Man setze

$$\hat{\delta}_h(A) = \sup \left\{ \delta_h(A, S, s) \mid (S, s) \text{ Minorantenerzeuger, } \frac{s_n}{S_n} \rightarrow q > 1 - \varepsilon \right\}.$$

Behauptung. Die Pseudo-Dichte der Menge A genügt

$$\delta_h(A) = \hat{\delta}_h(A). \quad (34)$$

Beweis. Während bei der Pseudo-Dichte das Supremum von $\delta_h(A, S, s)$ über alle Minorantenerzeuger gebildet wird, werden für $\hat{\delta}_h(A)$ nur Minorantenerzeuger in Betracht gezogen, die $q > 1 - \varepsilon$ genügen. Es folgt unmittelbar

$$\delta_h(A) \geq \hat{\delta}_h(A).$$

(S, s) sei ein Minorantenerzeuger, der $q > 0$ und $\frac{s_n}{S_n} \rightarrow q \leq 1 - \varepsilon$ genügt. Unter Anwendung von Satz 1.3.14 mit $q_1 = q^{(1)} = \sqrt{q}$ erhalten wir aus dem Minorantenerzeuger (S, s) zwei Minorantenerzeuger $(S, \hat{s})$ und $(\hat{S}, s)$, die

$$\begin{aligned} \max \left\{ \delta_h(A, S, \hat{s}), \delta_h(A, \hat{S}, s) \right\} &\geq \delta_h(A, S, s) \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\hat{s}_n}{S_n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{s_n}{\hat{S}_n} = q^{(1)} \end{aligned}$$

genügen. Aus diesen beiden Minorantenerzeuger wählen wir gerade denjenigen Minorantenerzeuger $(S^{(1)}, s^{(1)})$ aus, für den

$$\delta_h(A, S^{(1)}, s^{(1)}) = \max \left\{ \delta_h(A, S, \hat{s}), \delta_h(A, \hat{S}, s) \right\}$$

gilt. Dann ist $\delta_h(A, S^{(1)}, s^{(1)}) \geq \delta_h(A, S, s)$. Induktiv wiederholen wir für $k \geq 2$ die Anwendung des Satzes 1.3.14 mit $q_1 = q^{(k)} = \sqrt{q^{(k-1)}}$ auf den Minorantenerzeuger $(S^{(k-1)}, s^{(k-1)})$, bis wir $q^{(k_0)} = \sqrt{q^{(k_0-1)}} > 1 - \varepsilon$ erhalten. Auf

diese Weise generieren wir einen Minorantenerzeuger $(S^{(k_0)}, s^{(k_0)})$, der

$$\frac{s_n^{(k_0)}}{S_n^{(k_0)}} \rightarrow q^{(k_0)} > 1 - \varepsilon \quad \text{und} \quad \delta_h(A, S^{(k_0)}, s^{(k_0)}) \geq \delta_h(A, S, s)$$

erfüllt. Damit haben wir jedem Minorantenerzeuger (S, s) , der $0 < q \leq 1 - \varepsilon$ genügt, einen Minorantenerzeuger $(\hat{S}, \hat{s})$ mit den Eigenschaften

$$\hat{q} > 1 - \varepsilon \quad \text{und} \quad \delta_h(A, \hat{S}, \hat{s}) \geq \delta_h(A, S, s) \quad (35)$$

zugeordnet. Gelingt es uns, nun noch entsprechendes für Minorantenerzeuger (S, s) mit $q = 0$ zu zeigen, so ist auch

$$\delta_h(A) \leq \hat{\delta}_h(A) .$$

Sei (S, s) ein Minorantenerzeuger mit $q = 0$. Dann ist gemäß 1.3.12

$$\delta_h(A, S, s) = \delta_h^o(A, S, s) \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{A(S_n)}{\sqrt[h]{S_n}} \leq \bar{d}_h(A) .$$

Wir wählen eine Folge $\hat{S}_n$, die streng monoton wächst und $\frac{A(\hat{S}_n)}{\sqrt[h]{\hat{S}_n}} \rightarrow \bar{d}_h(A)$ genügt. Ferner setzen wir $\hat{s}_n = (1 - \frac{\varepsilon}{2})\hat{S}_n$. Somit ist $(\hat{S}, \hat{s})$ ein Minorantenerzeuger, der $\hat{q} = (1 - \frac{\varepsilon}{2}) > 1 - \varepsilon$ erfüllt. Weiterhin ist

$$\begin{aligned} \delta_h(A, \hat{S}, \hat{s}) &= \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{A(\hat{S}_n) - A(\hat{s}_n)}{\sqrt[h]{\hat{S}_n}} \\ &= \limsup_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{A(\hat{S}_n)}{\sqrt[h]{\hat{S}_n}} - \frac{\sqrt[h]{\hat{s}_n} A(\hat{s}_n)}{\sqrt[h]{\hat{S}_n} \sqrt[h]{\hat{s}_n}} \right) \\ &\geq (1 - \sqrt[h]{\hat{q}}) \bar{d}_h(A) . \end{aligned}$$

Also ist $\delta_h(A, \hat{S}, \hat{s}) \geq \bar{d}_h(A) \geq \delta_h(A, S, s)$. Damit ist Aussage (35) auch für den Fall $q = 0$ bewiesen.

1.4 Pseudo-Dichte und asymptotische Dichten

1.4.1 Einleitung

Im Abschnitt 1.4 wollen wir näher auf mögliche Zusammenhänge zwischen der Pseudo-Dichte einer Menge und deren unteren asymptotischen, oberen asymptotischen sowie asymptotischen Dichte eingehen. So zeigen wir in Satz 1.4.2, daß die obere asymptotische Dichte eine untere Schranke für die Pseudo-Dichte ist. In Satz 1.4.4 sehen wir, daß die asymptotische Dichte gleichmäßig dünner Mengen mit der Pseudo-Dichte übereinstimmt.

Mit Hilfe des Satzes 1.4.6 und dessen inhaltlicher Deutung in 1.4.7 zeigen wir, daß die Pseudo-Dichte in keinem funktionalen Zusammenhang zu unterer und oberer asymptotischen Dichte steht, siehe auch 1.4.8. Weil die Pseudo-Dichte einer gleichmäßig dünnen Mengen der asymptotischen Dichte entspricht, folgt damit insbesondere auch die Eigenständigkeit des Begriffes einer gleichmäßig dünnen Menge.

Im folgenden Kapitel zeigen wir in Satz 2.2.2, daß eine Menge A genau dann asymptotisch ergänzbar ist, wenn ihre Pseudo-Dichte $\delta_h(A)$ beschränkt ist. Dann existiert eine asymptotische Ergänzung E_A , die der Gleichung $d_h(A \cup E_A) = \delta_h(A)$ genügt. Gemäß der Definition 1.3.5 der Pseudo-Dichte ist die asymptotische Ergänzung E_A optimal zur Menge A .

Zum Abschluß dieses Abschnitts wollen wir uns in der Betrachtung 1.4.12 die asymptotischen Dichten und die Pseudo-Dichte nochmals bezüglich ihrer per Definition gegebenen Aussagen veranschaulichen.

1.4.2 Obere asymptotische Dichte als untere Abschätzung der Pseudo-Dichte

Voraussetzung. Gegeben sei eine diskrete Menge $A \subseteq [0, \infty)$.

Behauptung. Die obere asymptotische Dichte der Menge A ist stets untere Abschätzung ihrer Pseudo-Dichte:

$$\delta_h(A) \geq \bar{d}_h(A) . \quad (36)$$

Beweis. 1. Fall: A ist eine dünne Menge. Wir wählen eine Folge $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$, die $S_n \uparrow \infty$ und $\frac{A(S_n)}{\sqrt[h]{S_n}} \rightarrow \bar{d}_h(A)$ erfüllt. Für ein beliebiges q , $0 < q < 1$, setzen wir $s_n = qS_n$. Dann ist (S, s) Minorantenerzeuger, und aus

$$\frac{A(S_n) - A(s_n)}{\sqrt[h]{S_n}} = \frac{A(S_n)}{\sqrt[h]{S_n}} - \frac{\sqrt[h]{s_n} A(s_n)}{\sqrt[h]{S_n} \sqrt[h]{s_n}}$$

folgt unmittelbar

$$\delta_h^o(A, S, s) = \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{A(S_n) - A(s_n)}{\sqrt[h]{S_n}} \geq (1 - \sqrt[h]{q}) \bar{d}_h(A) .$$

Damit ist $\delta_h(A) \geq \delta_h(A, S, s) \geq \bar{d}_h(A)$.

2. Fall: A ist keine dünne Menge. Wir setzen

$$S = \{S_1 < S_2 < S_3 < \dots\} = \left\{k \in \mathbb{N} \mid \frac{A(k)}{\sqrt[h]{k}} > \frac{A(l)}{\sqrt[h]{l}} \forall l \in \mathbb{N}, l < k\right\} .$$

Wäre $A(n) = \infty$ für ein $n \in \mathbb{N}$, dann wäre A keine diskrete Menge. Nach Voraussetzung ist $\bar{d}_h(A) = \infty$, und deshalb ist $|S| = \infty$. Wir wählen $q < 1$ beliebig und definieren $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ wie im ersten Fall. Dann erhalten wir

$$\frac{A(S_n) - A(s_n)}{\sqrt[h]{S_n}} > (1 - \sqrt[h]{q}) \frac{A(S_n)}{\sqrt[h]{S_n}} \rightarrow \infty .$$

Also ist $\delta_h^o(A, S, s) = \infty$. Gemäß Definition beträgt auch die Pseudo-Dichte $\delta_h(A) = \delta_h(A, S, s) = \infty$. Damit ist $\delta_h(A) \geq \bar{d}_h(A)$.

1.4.3 Bemerkung

Ist $A \subseteq [0, \infty)$ keine diskrete Menge, so ist $A(x) = \infty$ für alle $x > x_0$ und $\bar{d}_h(A) = \infty$. Per Definition ist auch die Pseudo-Dichte der Menge A $\delta_h(A) = \infty$. Also gilt Satz 1.4.2 auch für nicht diskrete Mengen $A \subseteq [0, \infty)$. Insbesondere sind (gleichmäßig) dünne Mengen stets diskret.

1.4.4 Pseudo-Dichte einer gleichmäßig dünnen Menge

Voraussetzung. $A \subseteq [0, \infty)$ sei eine gleichmäßig dünne Menge.

Behauptung. Die Pseudo-Dichte entspricht der asymptotischen Dichte:

$$\delta_h(A) = d_h(A) . \quad (37)$$

Beweis. Unter Beachtung von Satz 1.3.2, den Definitionen (26),(27) und der Definition (28) der Pseudo-Dichte genügt es, für jeden Minorantenerzeuger (S, s) die Gleichung $\delta_h^o(A, S, s) = (1 - \sqrt[h]{q}) d_h(A)$ zu zeigen. Es ist

$$\begin{aligned} \delta_h^o(A, S, s) &= \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{A(S_n) - A(s_n)}{\sqrt[h]{S_n}} = \limsup_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{A(S_n)}{\sqrt[h]{S_n}} - \frac{\sqrt[h]{s_n} A(s_n)}{\sqrt[h]{S_n} \sqrt[h]{s_n}} \right) \\ &= (1 - \sqrt[h]{q}) d_h(A) . \end{aligned}$$

1.4.5 Bemerkung

Wenn wir in Abschnitt 2.2 die Existenz einer asymptotischen Ergänzung E_A zu A mit $d_h(A \cup E_A) = \delta_h(A)$ gezeigt haben, können wir die asymptotische Dichte als denjenigen Spezialfall der Pseudo-Dichte ansehen, in dem die Grundmenge A bereits gleichmäßig dünn ist. In diesem Fall bemißt die asymptotische Dichte gewissermaßen die Pseudo-Dichte der Menge A .

1.4.6 Eine untere Abschätzung für die Pseudo-Dichte

Voraussetzung. Gegeben seien eine Menge $A \subseteq [0, \infty)$, $\lambda, \mu \geq 0$ mit $\lambda \leq \mu$ und ein Minorantenerzeuger (S, s) mit den Eigenschaften

$$\frac{A(s_n)}{\sqrt[n]{s_n}} \rightarrow \lambda ,$$

$$\frac{A(S_n)}{\sqrt[n]{S_n}} \rightarrow \mu .$$

Behauptung. Mit $q = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{s_n}{S_n}$ genügt die Pseudo-Dichte $\delta_h(A)$ der Menge A der Abschätzung

$$\delta_h(A) \geq \mu + \frac{\sqrt[n]{q}}{1 - \sqrt[n]{q}} (\mu - \lambda) . \quad (38)$$

Speziell für $\lambda = \underline{d}_h(A)$ und $\mu = \bar{d}_h(A)$ erhalten wir

$$\delta_h(A) \geq \bar{d}_h(A) + \frac{\sqrt[n]{q}}{1 - \sqrt[n]{q}} (\bar{d}_h(A) - \underline{d}_h(A)) . \quad (39)$$

Beweis. Ist die Menge A nicht diskret, so ist $\delta_h(A) = \infty$, und (38) ist trivial. Ist die Menge A diskret, so wenden wir wieder die Äquivalenz

$$\frac{A(S_n) - A(s_n)}{\sqrt[n]{S_n}} = \frac{A(S_n)}{\sqrt[n]{S_n}} - \frac{\sqrt[n]{s_n}}{\sqrt[n]{S_n}} \frac{A(s_n)}{\sqrt[n]{s_n}}$$

an und erhalten

$$\delta_h^o(A, S, s) = \mu - \sqrt[n]{q} \lambda .$$

Also erfüllt die Pseudo-Dichte der Menge A die Ungleichung

$$\begin{aligned} \delta_h(A) &\geq \delta_h(A, S, s) \\ &= \frac{\delta_h^o(A, S, s)}{1 - \sqrt[n]{q}} \\ &= \mu + \frac{\sqrt[n]{q}}{1 - \sqrt[n]{q}} (\mu - \lambda) . \end{aligned}$$

1.4.7 Zum Zusammenhang zwischen den asymptotischen Dichten und der Pseudo-Dichte

Gegeben sei eine dünne Menge $A \subseteq [0, \infty)$, die nicht gleichmäßig dünn ist. Nach Satz 1.4.6 genügt die Pseudo-Dichte der Abschätzung (39)

$$\delta_h(A) \geq \bar{d}_h(A) + \frac{\sqrt[h]{q}}{1 - \sqrt[h]{q}} (\bar{d}_h(A) - \underline{d}_h(A)) ,$$

wenn wir einen – den Voraussetzungen in Satz 1.4.6 entsprechenden – Minorantenerzeuger (S, s) nachweisen können. Dazu wählen wir zunächst ein Folgenpaar $(\hat{S}, \hat{s})$ mit den Eigenschaften

$$\begin{aligned} \hat{s}_n &< \hat{S}_n , \\ \hat{s}_n, \hat{S}_n &\uparrow \infty , \\ \frac{A(\hat{s}_n)}{\sqrt[h]{\hat{S}_n}} &\rightarrow \underline{d}_h(A) , \\ \frac{A(\hat{S}_n)}{\sqrt[h]{\hat{S}_n}} &\rightarrow \bar{d}_h(A) \end{aligned}$$

aus. Der Satz von Bolzano-Weierstraß besagt die Existenz mindestens eines $q \in [0, 1]$, gegen das eine Teilfolge von $\frac{\hat{s}_n}{\hat{S}_n}$ konvergiert. Damit ist die Existenz von (S, s) gezeigt.

Können wir etwa $q \rightarrow 1$ wählen, so folgt $\delta_h(A) = \infty$. Dann besitzt die Menge A keine asymptotische Ergänzung. Also existiert für jede dünne – aber nicht gleichmäßig dünne – asymptotisch ergänzbare Menge A ein $\varepsilon > 0$, so daß jeder Minorantenerzeuger mit den obigen Eigenschaften $q < 1 - \varepsilon$ erfüllt.

Man kann die obige Betrachtung mit beliebigen reellen $\lambda < \mu$, die der Abschätzung $\underline{d}_h(A) \leq \lambda < \mu \leq \bar{d}_h(A)$ genügen, tätigen. Denn λ und μ sind

für beliebiges $x_0 \in \mathbb{R}_0$ Häufungspunkte der Menge $\left\{ \frac{A(x)}{\sqrt[h]{x}} \mid x \geq x_0 \right\}$. Also existieren zu allen Paaren $\lambda < \mu$, die $\underline{d}_h(A) \leq \lambda < \mu \leq \overline{d}_h(A)$ erfüllen, Minorantenerzeuger (S, s) , die den Voraussetzungen des Satzes 1.4.6 genügen. Die Menge A wiederum kann nur dann asymptotisch ergänzbar sein, wenn für all diese Paare ein $\varepsilon = \varepsilon(\lambda, \mu) > 0$ existiert, so daß jeder solche Minorantenerzeuger $q < 1 - \varepsilon$ erfüllt.

Wir werden hier gewissermaßen explizit auf die Aussage des Satzes 1.3.15 verwiesen. Danach wird die Pseudo-Dichte schließlich von denjenigen Minorantenerzeugern generiert, für die $q \rightarrow 1$ gilt:

$$\delta_h(A) = \limsup_{\varepsilon \downarrow 0} \left\{ \delta_h(A, S, s) \mid (S, s) \text{ Minorantenerzeuger, } \frac{s_n}{S_n} \rightarrow q > 1 - \varepsilon \right\}.$$

1.4.8 Zur Unabhängigkeit der Pseudo-Dichte und asymptotischen Dichte von unterer und oberer asymptotischen Dichte

Im allgemeinen kann die Pseudo-Dichte nicht als Funktion von unterer und oberer asymptotischer Dichte dargestellt werden, auch nicht mit Hilfe zugehöriger Minorantenerzeuger:

$$\delta_h(A) \neq f(\underline{d}_h(A), \overline{d}_h(A)). \quad (40)$$

Ist E_A eine asymptotische Ergänzung einer Menge A , so ist die Pseudo-Dichte der Menge A eine untere Schranke der asymptotischen Dichte der Menge $A \cup E_A$. Gemäß 1.4.7 steht die Pseudo-Dichte in keinem funktionalen Zusammenhang zur unteren und oberen asymptotischen Dichte. Ferner entsprechen sich gemäß Satz 1.4.4 Pseudo-Dichte der Menge $A \cup E_A$ und asymptotische Dichte der Menge $A \cup E_A$. Insbesondere folgt die Eigenständigkeit des Begriffes einer gleichmäßig dünnen Menge.

1.4.9 Beispiel einer nicht asymptotisch ergänzbaren Menge mit beliebig kleiner oberen asymptotischen Dichte

Wir wollen eine Menge finden, deren obere asymptotische Dichte möglichst klein und deren Pseudo-Dichte unbeschränkt ist. Zum einen ist die durch einen Minorantenerzeuger (S, s) erzeugte untere Abschätzung $\delta_h(A, S, s)$ der Pseudo-Dichte insbesondere dann sehr groß, wenn gerade in den betrachteten Intervallen $(s_n, S_n]$ möglichst viele Elemente der Menge nahe beieinander liegen. Zum anderen müssen wir darauf achten, daß es weiterhin möglich ist, die obere asymptotische Dichte der Menge zu minimieren. Deshalb betrachten wir den folgenden Ansatz. Wir wählen ein beliebiges ε , das $0 < \varepsilon < 1$ genügt, und setzen für natürliche $h \geq 2$

$$P_\varepsilon = \left\{ (2^n)^h + j \mid 0 \leq j \leq (2^{n-1} - 1)\varepsilon, j \in \mathbb{N}_0, n \in \mathbb{N} \right\}.$$

Dann beinhaltet die Menge P_ε anstelle aller h -ten Potenzen nur die h -ten Potenzen aller 2^n und die $\lfloor (2^{n-1} - 1)\varepsilon \rfloor$ darauffolgenden ganzen Zahlen. Heuristisch kann man die Menge P_ε von zwei Seiten betrachten: Man ersetzt die $2^n - 1$ h -ten Potenzen zwischen $(2^n)^h$ und $(2^{n+1})^h$ durch $\lfloor (2^{n-1} - 1)\varepsilon \rfloor$ Elemente, die kleiner als die h -te Potenz von 2^{n+1} sind, oder man tauscht die $2^{n-1} - 1$ h -ten Potenzen zwischen $(2^{n-1})^h$ und $(2^n)^h$ durch $\lfloor (2^{n-1} - 1)\varepsilon \rfloor$ Elemente, die größer als die h -te Potenz von 2^n sind, aus. Unter Berücksichtigung, daß die h -ten Potenzen die asymptotische Dichte eins besitzen, können wir aufgrund der ersten Sichtweise

$$\underline{d}_h(P_\varepsilon) \geq \frac{\varepsilon}{2}$$

und aufgrund der zweiten

$$\overline{d}_h(P_\varepsilon) \leq \varepsilon$$

annehmen. In der Tat gilt in den beiden obigen Aussagen sogar die Gleichheit. Dazu schreiben wir ein beliebiges $m > 0$ in der Form

$$m = (2^h)^k x + r, \quad x < 2^h, \quad 0 \leq r < (2^h)^k, \quad k \in \mathbb{N}_0, \quad x \in \mathbb{N}, \quad r \in \mathbb{R}.$$

Weil wir $x < 2^h$ vorgeben, ist die obige Darstellung eindeutig. Wir erhalten also mit $(2^h)^k \leq m < (2^h)^{k+1}$ die beiden Abschätzungen

$$\begin{aligned} P_\varepsilon(m) &\geq \sum_{n=1}^{k-1} \left(1 + \lfloor \varepsilon(2^{n-1} - 1) \rfloor\right) \geq (2^{k-1} - k)\varepsilon, \\ P_\varepsilon(m) &\leq \sum_{n=1}^k \left(1 + \lfloor \varepsilon(2^{n-1} - 1) \rfloor\right) \leq (2^k - k - 1)\varepsilon + k. \end{aligned}$$

Dabei sind die Einsen Bestandteile der Summen, weil ja die h -ten Potenzen der 2^n in der Menge P_ε enthalten sind. Diese beiden Ungleichungen führen uns zu den oben aufgeführten Schranken für die untere und obere asymptotische Dichte. Zum Nachweis der Gleichheit beachten wir, daß wir bereits für $x = 1$ und $r \geq \varepsilon(2^{k-1} - 1)$ die untere Abschätzung der Zählfunktion der Menge P_ε durch die untere Schranke für das darauffolgende k ersetzt dürfen. Wählt man $m_k = (2^h)^{k+1}$, so ist zum einen $m_k \cong m_k + \varepsilon(2^{k-1} - 1)$ und zum anderen $P_\varepsilon(m_k + \varepsilon(2^{k-1} - 1)) \cong 2P_\varepsilon(m_k)$. Dann erhalten wir einerseits mit m_k die untere asymptotische Dichte

$$\underline{d}_2(P_\varepsilon) = \frac{\varepsilon}{2}$$

und andererseits mit $m_k + \varepsilon(2^{k-1} - 1)$ die obere asymptotische Dichte

$$\overline{d}_2(P_\varepsilon) = \varepsilon,$$

wobei wir noch berücksichtigen, daß der Quotient $\frac{P_\varepsilon(x)}{\sqrt[h]{x}}$ in Bereichen mit konstanter Zählfunktion $P_\varepsilon(x)$ mit wachsenden x natürlich streng monoton fallend ist.

Wir betrachten nun für eine reelle Zahl δ , die $0 < \delta < 1$ genügt, den Minorantenerzeuger

$$\begin{aligned} S_k &= (1 + \delta)^h (2^k)^h, \\ s_k &= (2^k)^h. \end{aligned}$$

Dann folgen unmittelbar die Aussagen

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{s_k}{S_k} &= \frac{1}{(1 + \delta)^h}, \\ S_k &\geq (2^k)^h + \varepsilon(2^{k-1} - 2) \quad \forall k \geq k_1, \\ P_\varepsilon(S_k) - P_\varepsilon(s_k) &= \lfloor \varepsilon(2^{k-1} - 2) \rfloor \quad \forall k \geq k_1. \end{aligned}$$

Weil $\delta < 1$ gewählt ist, erhalten wir gemäß 1.3.5 zunächst

$$\delta_h^o(P_\varepsilon, S, s) = \frac{1}{2} \cdot \frac{\varepsilon}{1 + \delta},$$

und damit als untere Abschätzung für die Pseudo-Dichte der Menge P_ε

$$\delta_h(P_\varepsilon, S, s) = \frac{\varepsilon}{2\delta}.$$

Dann liefert der Grenzübergang $\delta \downarrow 0$ die Unbeschränktheit der Pseudo-Dichte der Menge P_ε . Wir haben also für jedes ε mit $0 < \varepsilon < 1$ und jedes natürliche $h \geq 2$ eine dünne Menge P_ε nachgewiesen, die den Aussagen

$$\begin{aligned} \underline{d}_h(P_\varepsilon) &= \frac{\varepsilon}{2} \quad \forall \varepsilon > 0, \\ \bar{d}_h(P_\varepsilon) &= \varepsilon \quad \forall \varepsilon > 0, \\ \delta_h(P_\varepsilon) &= \infty \quad \forall \varepsilon > 0 \end{aligned}$$

genügt. Insbesondere ist gezeigt, daß die asymptotische Ergänzzbarkeit im allgemeinen unabhängig sowohl von der Größe der oberen asymptotischen Dichte als auch von der Differenz zwischen oberer und unterer asymptotischer Dichte ist.

1.4.10 Zur Unabhängigkeit der Pseudo-Dichte von der oberen und unteren asymptotischen Dichte II

Gemäß 1.4.8 stehen Pseudo-Dichte und untere sowie obere asymptotische Dichte im allgemeinen in keinem funktionalen Zusammenhang. Dem Beispiel 1.4.9 entnehmen wir, daß die asymptotische Ergänzzbarkeit selbst bei beliebig kleiner oberen asymptotischen Dichte nicht gegeben sein muß. Wie in Beispiel 1.4.9 gesehen, läßt selbst eine noch so kleine Differenz zwischen oberer und unterer asymptotischen Dichte im allgemeinen keine Aussage bezüglich der asymptotischen Ergänzzbarkeit der Menge zu.

1.4.11 Bemerkung

Man könnte nun meinen, daß die Unbeschränktheit der Pseudo-Dichte der Menge P_ε aus Beispiel 1.4.9 darin begründet ist, daß die obere asymptotische Dichte das Doppelte der unteren beträgt. Fügen wir allerdings der Menge P_ε eine geeignete gleichmäßig dünne Menge hinzu, so können wir erzielen, daß auch der Quotient von unterer und oberer asymptotischen Dichte beliebig nahe an Eins liegt, die Pseudo-Dichte aber weiterhin unbeschränkt ist.

1.4.12 Veranschaulichung der verschiedenen Dichten

Eine dünne Menge $A \subseteq [0, \infty)$ ist im allgemeinen nicht asymptotisch ergänzbar. Die obere asymptotische Dichte besagt nur, daß die Mächtigkeit der Menge A in den Intervallen $[0, x]$ im Verhältnis zur Mächtigkeit der Menge P der h -ten Potenzen schließlich durch ihre obere asymptotische Dichte $\bar{d}_h(A)$ beschränkt ist:

$$\frac{|A \cap (0, x]|}{|P \cap (0, x]|} \leq \bar{d}_h(A) + \varepsilon \quad \forall x \geq x_0. \quad (41)$$

Entsprechend besagt die untere asymptotische Dichte für teilweise dünne Mengen A , daß

$$\frac{|A \cap (0, x]|}{|P \cap (0, x]|} \geq \underline{d}_h(A) - \varepsilon \quad \forall x \geq x_0 \quad (42)$$

schließlich erfüllt ist. Die Existenz der asymptotischen Dichte erfordert sogar

$$\frac{|A \cap (0, x]|}{|P \cap (0, x]|} \in (d_h(A) - \varepsilon, d_h(A) + \varepsilon) \quad \forall x \geq x_0. \quad (43)$$

Unsere Definition der Pseudo-Dichte verlangt

$$\frac{|A \cap (s_n, S_n]|}{|P \cap (s_n, S_n]|} \leq \delta_h(A) + \varepsilon \quad \forall n \geq n_0(S, s), \quad \forall (S, s), \quad (44)$$

wobei (S, s) ein beliebiger Minorantenerzeuger ist. In Beispiel 1.3.11 haben wir gesehen, daß bei der obigen Veranschaulichung der Pseudo-Dichte die Einschränkung auf Minorantenerzeuger für den Wert der Pseudo-Dichte wesentlich ist. Dabei beachten wir, daß es nach Satz 1.3.15 ausreichend ist, nur Minorantenerzeuger (S, s) zu betrachten, die $q = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{s_n}{S_n} > 1 - \varepsilon$ für ein beliebiges $\varepsilon > 0$ genügen.

Nach Satz 1.4.4 stimmen Pseudo-Dichte und asymptotische Dichte für gleichmäßig dünne Mengen überein. Für gleichmäßig dünne Mengen sind also die Aussagen (43) und (44) äquivalent.

Andererseits genügt eine beliebige asymptotische Ergänzung E_A zu A der Abschätzung $d_h(A \cup E_A) \geq \delta_h(A)$. Im nächsten Kapitel zeigen wir, daß es eine asymptotische Ergänzung E_A gibt, die $d_h(A \cup E_A) = \delta_h(A)$ erfüllt. Dann genügt die Menge $A \cup E_A$ der Abschätzung (43) mit $\delta_h(A)$. Insofern können wir die Pseudo-Dichte als Verallgemeinerung der asymptotischen Dichte auf beliebige Teilmengen $A \subseteq [0, \infty)$ ansehen.

1.4.13 Bemerkung

Mit den bis hierhin zur Verfügung gestellten Hilfsmitteln weisen wir im dritten Kapitel für die dünnen Basen zweiter Ordnung von A. Stöhr[8] und D. Raikov[6] sowie G. Hofmeister[4] nach, daß sie nicht asymptotisch ergänzbar sind. Aus der Eigenständigkeit des Begriffes einer gleichmäßig dünnen Menge folgt auch, daß die Untersuchung gleichmäßig dünner Basen ein von dünnen Basen nur bedingt abhängiges Problem ist.

2 Pseudo-Dichte als Verallgemeinerung der asymptotischen Dichte

2.1 Einführung

Die Betrachtung 1.4.12 hat uns gezeigt, daß die Mächtigkeit einer dünnen Menge im Verhältnis zur Mächtigkeit der h -ten Potenzen in den Intervallen $[0, n]$ schließlich durch ihre obere asymptotische Dichte begrenzt ist. Entsprechend gilt dann für gleichmäßig dünne Mengen, daß die Mächtigkeit der Menge im Verhältnis zur Mächtigkeit der h -ten Potenzen in den Intervallen $[0, n]$ schließlich gegen die asymptotische Dichte strebt.

Nun hatten wir bei der Interpretation 1.3.10 der Pseudo-Dichte gesehen, daß die Pseudo-Dichte einer Menge gerade das Supremum der in gewissen Intervallen $[s_n, S_n]$ immer wieder auftretenden Verhältnisse bezüglich genannter Mächtigkeiten ist.

Daher ist es naheliegend zu fragen, ob wir eine Menge A mit endlicher Pseudo-Dichte $\delta_h(A)$ zu einer gleichmäßig dünnen Menge $A \cup E_A$ ergänzen können, indem wir in schwächer besetzten Intervallen derart Elemente hinzufügen, daß die Menge $A \cup E_A$ stets der Abschätzung

$$\frac{|(A \cup E_A) \cap (s_n, S_n]|}{|P \cap (s_n, S_n]|} \geq \delta_h(A) - \varepsilon \quad \forall n \geq n_0(S, s), \quad \forall (S, s) \quad (45)$$

genügt. Dann bleibt allerdings zunächst offen, ob die Menge $A \cup E_A$ noch die Ungleichung 1.4.12 (44)

$$\frac{|(A \cup E_A) \cap (s_n, S_n]|}{|P \cap (s_n, S_n]|} \leq \delta_h(A) + \varepsilon \quad \forall n \geq n_0(S, s), \quad \forall (S, s)$$

erfüllt. Sollte die Menge $A \cup E_A$ allerdings (45) und 1.4.12 (44) genügen, so hätte sie die Pseudo-Dichte $\delta_h(A)$. Aus den beiden Abschätzungen (45) und 1.4.12 (44) folgte insbesondere auch die Aussage 1.4.12 (43) mit der Pseudo-Dichte $\delta_h(A)$. Die Menge $A \cup E_A$ wäre also gleichmäßig dünn und besäße die asymptotische Dichte $d_h(A \cup E_A) = \delta_h(A)$. Ferner wäre die Menge E_A eine optimale asymptotische Ergänzung zu A . Wir zeigen die Existenz dieser optimalen asymptotischen Ergänzung im Abschnitt 2.2.2. Ferner erhalten wir im Abschnitt 2.2.6, daß die Pseudo-Dichte als Verallgemeinerung der asymptotischen Dichte angesehen werden kann.

Im Abschnitt 2.3 gehen wir näher auf das Lemma von Cassels 1.2.7 ein. Wir betrachten es in leicht abgewandelter Form. Dabei verschärfen wir die Aussage 1.2.7 (15) in der Weise, wie wir sie im letzten Kapitel bei der Konstruktion von gleichmäßig dünnen Basen zweiter Ordnung benötigen werden. Außerdem zeigen wir in Beispiel 2.3.5 auf, daß die Pseudo-Dichte ein geeignetes Mittel sein kann, die asymptotische Ergänzbarkeit einer dünnen Menge auch dann festzustellen, wenn das Lemma von Cassels 1.2.7 versagt.

Gegen Ende des Abschnitts 2.3 betrachten wir die Pseudo-Dichte der in 2.3.6 eingeführten separierten Progressionenschar. Mit der Pseudo-Dichte der separierten Progressionenschar können wir zum einen für die gleichmäßig dünne Basis zweiter Ordnung von J. W. S. Cassels[2] im Abschnitt 3.4 nachweisen, daß deren asymptotische Dichte optimal in dem Sinne ist, daß die innerhalb der Konstruktion von J. W. S. Cassels[2] verwendete asymptotische Ergänzung optimal zur benutzten dünnen Basis ist. Zum anderen können wir auch für die im dritten Kapitel vorgestellten PR-Basen zeigen, daß die von uns erzielte asymptotische Dichte in der Klasse der PR-Basen nicht mehr zu verbessern ist.

2.2 Optimale asymptotische Ergänzungen

2.2.1 Einleitung

Im Abschnitt 2.2.2 weisen wir für jedes $h > 1$ nach, daß zu jeder Menge A mit endlicher Pseudo-Dichte $\delta_h(A)$ eine optimale asymptotische Ergänzung E_A existiert, die den in der Einführung 2.1 geforderten Eigenschaften genügt. Beachten wir, daß gleichmäßig dünne Mengen stets den Abschätzungen 1.4.12 (44) und 2.1 (45) genügen, so liegt es auf der Hand, nur die Intervalle $[0, n]$ zu betrachten und mit deren Hilfe die optimale asymptotische Ergänzung E_A induktiv zu konstruieren. Die Menge E_A besteht ausschließlich aus natürlichen Zahlen und genügt der Gleichung $d_h(A \cup E_A) = \delta_h(A)$. Daher ist sie für (gleichmäßig) dünne Mengen nicht negativer ganzer Zahlen von Interesse.

Anschließend betrachten wir die Konstruktionsvorschrift der optimalen asymptotischen Ergänzung E_A beispielhaft an unserer Menge P_t . Wir geben ferner für $h > 1$ zu jeder reellen Zahl $d > \delta_h(A)$ eine natürliche asymptotische Ergänzung F_A zu A an, die der Äquivalenz $d_h(A \cup F_A) = d$ genügt.

Aufgrund von Satz 2.2.2 können wir dann Abschnitt 2.2.6 die Pseudo-Dichte h -ter Ordnung als Verallgemeinerung der asymptotischen Dichte h -ter Ordnung auf beliebige Teilmengen $A \subseteq [0, \infty)$ für jedes $h > 1$ betrachten, mit dem Hinweis in 2.2.7 auch für positive $h \leq 1$.

Damit ist ein erstes wesentliches Ziel dieser Arbeit erreicht, nämlich die Übertragung der asymptotischen Dichte gleichmäßig dünner Mengen auf beliebige (dünne) Mengen nicht negativer Zahlen.

2.2.2 Erstes Resultat: Eine optimale asymptotische Ergänzung für Mengen mit endlicher Pseudo-Dichte

Voraussetzung. $A \subseteq [0, \infty)$ sei eine Menge mit endlicher Pseudo-Dichte $\delta_h(A) = \delta > 0$. Ferner sei $h > 1$. Mit $\min \emptyset = \infty$ setzen wir

$$e_1 = \min \left\{ n \in \mathbb{N} \mid n \notin A, \frac{A(n)}{\sqrt[h]{n}} < \delta - \frac{1}{\sqrt[h]{n}} \right\}, \quad (46)$$

und rekursiv im Falle $e_k < \infty$

$$e_{k+1} = \min \left\{ n \in \mathbb{N} \mid n > e_k, n \notin A, \frac{A(n) + k}{\sqrt[h]{n}} < \delta - \frac{1}{\sqrt[h]{n}} \right\}. \quad (47)$$

Behauptung. Mit

$$e_A = \min \left\{ k \in \mathbb{N}_0 \mid e_{k+1} = \infty \right\} \quad (48)$$

ist die durch

$$E_A = \bigcup_{k=1}^{e_A} \{e_k\} \quad (49)$$

gegebene Menge E_A eine optimale asymptotische Ergänzung zur Menge A . Die asymptotische Dichte der Menge $A \cup E_A$ beträgt

$$d_h(A \cup E_A) = \delta_h(A). \quad (50)$$

Beweis zur optimalen Ergänzung. Ist $F_A \subseteq [0, \infty)$ eine asymptotische Ergänzung zu A , so ist die Pseudo-Dichte $\delta_h(A)$ der Menge A eine untere Abschätzung der asymptotischen Dichte der Menge $A \cup F_A$ aufgrund ihrer Definition in 1.3.5 (28). Also ist die Menge E_A , wenn sie denn (50) genügt, eine optimale asymptotische Ergänzung zu A .

Beweis zur asymptotischen Dichte. Beachtet man, daß $\sqrt[h]{n} = o(n)$ gilt, so folgt unmittelbar, daß

$$\frac{(A \cup E_A)(n)}{\sqrt[h]{n}} \geq \delta_h(A) - \frac{1}{\sqrt[h]{n}} \quad \forall n \geq n_0$$

erfüllt ist. Damit sind die Definitionen (46)-(49) sinnvoll. Wir erhalten bereits

$$\underline{d}_h(A \cup E_A) = \liminf_{x \rightarrow \infty} \frac{(A \cup E_A)(x)}{\sqrt[h]{x}} \geq \delta_h(A) .$$

Also muß nur noch

$$\bar{d}_h(A \cup E_A) = \limsup_{x \rightarrow \infty} \frac{(A \cup E_A)(x)}{\sqrt[h]{x}} \leq \delta_h(A)$$

gezeigt werden. Denn dann ist

$$d_h(A \cup E_A) = \delta_h(A) .$$

Wir führen die folgende Annahme zum Widerspruch.

Annahme. Die obere asymptotische Dichte der Menge $A \cup E_A$ genügt

$$\bar{d}_h(A \cup E_A) = \limsup_{x \rightarrow \infty} \frac{(A \cup E_A)(x)}{\sqrt[h]{x}} > \delta_h(A) .$$

Damit ist auch

$$\bar{d}_h(A \cup E_A) = \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{(A \cup E_A)(n)}{\sqrt[h]{n}} > \delta_h(A) .$$

Anschauliche Widerlegung. Die Annahme besagt, daß die Mächtigkeit der Menge $A \cup E_A$ als Vielfaches der Mächtigkeit der h -ten Potenzen in den Intervallen $[0, n]$ für unendlich viele n größer ist als die Pseudo-Dichte der Menge A . Wir haben aber nur dann der Menge A Elemente hinzugefügt, wenn dieses Vielfache nicht einmal *nach* dem Ergänzen erreicht ist. Daher ist die Annahme anschaulich betrachtet offensichtlich falsch.

Deshalb suchen wir Bereiche, in denen einerseits keine Elemente ergänzt werden, andererseits aber der Quotient $\frac{(A \cup E_A)(n)}{\sqrt[n]{n}}$ über die Pseudo-Dichte hinausschießt. Ist $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge, für die der obige Quotient die Pseudo-Dichte übersteigt, und wählen wir geeignete $s_n < c_n$ aus, so können wir schließen, daß bereits die Mächtigkeit der Menge A in immer wieder auftretenden Intervallen größer ist als das $(\delta_h(A) + \varepsilon)$ -fache der Mächtigkeit der h -ten Potenzen. Das ist ein Widerspruch zur Definition der Pseudo-Dichte.

Aufgrund der Annahme existiert ein $\varepsilon > 0$, so daß

$$\bar{d}_h(A \cup E_A) = \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{(A \cup E_A)(n)}{\sqrt[n]{n}} > \delta_h(A) + 2\varepsilon \quad (51)$$

erfüllt ist. Dann gibt es wegen Satz 1.2.7 (7) eine Folge $(c_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq (A \cup E_A)$, die den Bedingungen

$$\frac{(A \cup E_A)(c_n)}{\sqrt[n]{c_n}} > \delta_h(A) + \varepsilon, \quad (52)$$

$$c_n \uparrow \infty, \quad (53)$$

$$c_n \in A, c_n \notin E_A \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad (54)$$

genügt. Die Bedingungen (52) und (53) sind aufgrund der Aussage (51) erfüllbar. Aus (52) folgt nun (54). Dazu betrachten wir ein beliebiges $e \in E_A$ und beachten die Konstruktionsvorschrift (47):

$$\begin{aligned} e \in E_A &\implies \frac{(A \cup E_A)(e) - 1}{\sqrt[e]{e}} < \delta_h(A) - \frac{1}{\sqrt[e]{e}} \\ &\implies e \neq c_n \quad \forall n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Weil die obere asymptotische Dichte nach Satz 1.4.2 eine untere Schranke der Pseudo-Dichte ist, erhalten wir wegen Aussage (51) außerdem

$$0 \leq \bar{d}_h(A) \leq \delta_h(A) < \bar{d}_h(A \cup E_A) - 2\varepsilon. \quad (55)$$

Für beliebige Mengen $B_1, B_2 \subseteq [0, \infty)$ genügt die obere asymptotische Dichte aufgrund ihrer Definition $\bar{d}_h(B_1 \cup B_2) \leq \bar{d}_h(B_1) + \bar{d}_h(B_2)$. Also liefert uns die Ungleichung (55) bereits $\bar{d}_h(E_A) > 2\varepsilon$, und damit

$$|E_A| = \infty.$$

Dann enthält die Folge $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Teilfolge $(c_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ mit der Eigenschaft

$$[c_{n_k}, c_{n_{k+1}}] \cap E_A \neq \emptyset \quad \forall k \in \mathbb{N}. \quad (56)$$

Wir setzen

$$\begin{aligned} S_k &= c_{n_{k+1}} \quad \forall k \in \mathbb{N}, \\ s_k &= \max([c_{n_k}, c_{n_{k+1}}] \cap E_A) \quad \forall k \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Mit den Eigenschaften (52)-(54) und (56) der Folge $(c_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ genügt das Folgenpaar $(S, s) = ((S_k)_{k \in \mathbb{N}}, (s_k)_{k \in \mathbb{N}})$ den Bedingungen

$$(s_k, S_k) \cap E_A = \emptyset \quad \forall k \in \mathbb{N}, \quad (57)$$

$$s_k \in E_A, S_k \notin E_A \quad \forall k \in \mathbb{N}, \quad (58)$$

$$\frac{(A \cup E_A)(S_k)}{\sqrt[h]{S_k}} > \delta_h(A) + \varepsilon \quad \forall k \in \mathbb{N}, \quad (59)$$

$$\frac{(A \cup E_A)(s_k)}{\sqrt[h]{s_k}} < \delta_h(A) \quad \forall k \in \mathbb{N}. \quad (60)$$

1. Fall: $\frac{S_k}{s_k} \rightarrow q$. Die Folge $\frac{S_k}{s_k}$ konvergiere gegen ein $q \leq 1$. Dann genügt das Folgenpaar (S, s) den Eigenschaften (16)-(18) aus Satz 1.3.2, und wir können Satz 1.3.2 anwenden. Allerdings werden wir dabei die Größen (19) und (20) aus Satz 1.3.2

$$\delta_h^o(A, S, s) = \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{A(S_k) - A(s_k)}{\sqrt[h]{S_k}}, \quad (61)$$

$$\delta_h(A, S, s) = \frac{\delta_h^o(A, S, s)}{1 - \sqrt[q]{q}} \quad (62)$$

nur abschätzen. Für den Quotienten aus (61) erhalten wir wegen (57)-(60)

$$\begin{aligned}
\frac{A(S_k) - A(s_k)}{\sqrt[h]{S_k}} &= \frac{(A \cup E_A)(S_k) - (A \cup E_A)(s_k)}{\sqrt[h]{S_k}} \\
&= \frac{(A \cup E_A)(S_k)}{\sqrt[h]{S_k}} - \sqrt[h]{\frac{s_k}{S_k}} \frac{(A \cup E_A)(s_k)}{\sqrt[h]{s_k}} \\
&> \delta_h(A) + \varepsilon - \sqrt[h]{\frac{s_k}{S_k}} \delta_h(A)
\end{aligned}$$

Dann ist

$$\delta_h^o(A, S, s) \geq (1 - \sqrt[h]{q}) \delta_h(A) + \varepsilon . \quad (63)$$

Im Falle $q < 1$ ist (S, s) ein Minorantenerzeuger. Gemäß Definition ist $\delta_h(A, S, s)$ untere Abschätzung der Pseudo-Dichte der Menge A . Also ist

$$\delta_h(A, S, s) \leq \delta_h(A) . \quad (64)$$

Mit der in (62) wiederholten Definition von $\delta_h(A, S, s)$ und der Abschätzung (63) genügt der Minorantenerzeuger (S, s) aber

$$\delta_h(A, S, s) \geq \delta_h(A) + \frac{\varepsilon}{1 - \sqrt[h]{q}} > \delta_h(A) ,$$

im Widerspruch zu (64).

Im Falle $q = 1$ ist nach (63) $\delta_h^o(A, S, s) > 0$. Dann liefern Satz 1.3.2 und die Bemerkung 1.3.6 zur Definition der Pseudo-Dichte, daß die Pseudo-Dichte der Menge A nicht endlich ist, im Widerspruch zur Voraussetzung.

2. Fall: $\frac{S_k}{S_k} \not\rightarrow q$. Die Folge $\frac{S_k}{S_k}$ sei divergent. Weil $0 < \frac{S_k}{S_k} < 1 \ \forall k \in \mathbb{N}$ ist, liefert der Satz von Bolzano-Weierstraß ein $q \in [0, 1]$ und eine Teilfolge $\frac{S_{k_l}}{S_{k_l}}$, die gegen q konvergiert. Auf diese Teilfolge können wir wieder den ersten Fall anwenden und erhalten schließlich auch hier einen Widerspruch.

2.2.3 Berechnung einer optimalen asymptotischen Ergänzung E_{P_t}

Im Satz 2.2.2 haben wir eine optimale asymptotische Ergänzung theoretisch konstruiert. Nun bestimmen wir für unser Beispiel P_t die optimale asymptotische Ergänzung E_{P_t} gemäß Satz 2.2.2 für natürliche $h > 1$. Es war

$$\begin{aligned} P_t &= \{(2^n + m)^h \mid m < 2^{n-1}, n, m \in \mathbb{N}_0\} \\ &= \{1^h, 2^h, 4^h, 5^h, 8^h, 9^h, 10^h, 11^h, 16^h, 17^h, \dots\} \end{aligned}$$

Nach Abschnitt 2.2.2 werden die Elemente der asymptotischen Ergänzung E_{P_t} gemäß der Vorschrift (47)

$$e_{k+1} = \min \left\{ n \in \mathbb{N} \mid n > e_k, n \notin P_t, \frac{P_t(n) + k}{\sqrt[h]{n}} < 1 - \frac{1}{\sqrt[h]{n}} \right\}$$

ausgewählt. Man überlegt sich leicht, daß das gerade für all diejenigen $m \in \mathbb{N}$ zutreffend ist, die $m = n^h + 1$ und $n^h \notin P_t$ erfüllen: Angenommen, wir haben k Elemente der asymptotischen Ergänzung bestimmt. Es sei $\ell = P_t(e_k) + k$. Dann ist für alle $n \geq e_k$ mit $P_t(n) = P_t(e_k)$

$$\frac{P_t(n) + k}{\sqrt[h]{n}} = \frac{\ell}{\sqrt[h]{n}} \geq 1 - \frac{1}{\sqrt[h]{n}} \iff n \leq (\ell + 1)^h.$$

Die Menge P_t ist Teilmenge der h -ten Potenzen. Also tritt entweder der Fall ein, daß $(\ell + 1)^h$ Element der Menge P_t ist, und die Zählfunktion $P_t(n)$ für $n = (\ell + 1)^h$ um eins wächst, oder wir müssen $e_{k+1} = (\ell + 1)^h + 1$ wählen. Ist $(\ell + 1)^h$ Element der Menge P_t , so erhalten wir die Ungleichung oben rechts mit $\ell + 2$ anstelle von $\ell + 1$. Induktiv ergibt sich, daß für jede in der Menge P_t nicht enthaltene h -te Potenz n^h gerade $n^h + 1$ in die asymptotische Ergänzung aufgenommen wird. Also ist durch

$$\begin{aligned} E_{P_t} &= \{(2^n + m)^h + 1 \mid 2^{n-1} \leq m < 2^n, n, m \in \mathbb{N}_0\} \\ &= \{3^h + 1, 6^h + 1, 7^h + 1, 12^h + 1, 13^h + 1, 14^h + 1, 15^h + 1, 24^h + 1, \dots\} \end{aligned}$$

die nach dem Resultat 2.2.2 konstruierte optimale asymptotische Ergänzung E_{P_t} der Menge P_t gegeben.

2.2.4 Weitere asymptotische Ergänzungen für Mengen mit endlicher Pseudo-Dichte

Voraussetzung. Für $h > 1$ sei durch $A \subseteq [0, \infty)$ eine Menge mit endlicher Pseudo-Dichte $\delta_h(A) > 0$ gegeben. Ferner sei $\delta \geq \delta_h(A)$. Wir setzen mit $\min \emptyset = \infty$

$$f_1 = \min \left\{ n \in \mathbb{N} \mid n \notin A, \frac{A(n)}{\sqrt[h]{n}} < \delta - \frac{1}{\sqrt[h]{n}} \right\}, \quad (65)$$

und rekursiv im Falle $f_k < \infty$

$$f_{k+1} = \min \left\{ n \in \mathbb{N} \mid n > f_k, n \notin A, \frac{A(n) + k}{\sqrt[h]{n}} < \delta - \frac{1}{\sqrt[h]{n}} \right\}. \quad (66)$$

Behauptung. Mit

$$f_A = \min \left\{ k \in \mathbb{N}_0 \mid f_{k+1} = \infty \right\} \quad (67)$$

ist die durch

$$F_A = \bigcup_{k=1}^{f_A} \{f_k\} \quad (68)$$

gegebene Menge F_A eine asymptotische Ergänzung zu A . Die asymptotische Dichte der Menge $A \cup F_A$ beträgt

$$d_h(A \cup F_A) = \delta. \quad (69)$$

Beweis. Wir wenden den Beweis des ersten Resultates 2.2.2 an. Dabei ist anstelle der Pseudo-Dichte $\delta_h(A)$ für die asymptotische Dichte der Menge $A \cup F_A$ stets δ anzusetzen. Wir beachten dabei einerseits, daß jede untere Abschätzung der Pseudo-Dichte auch eine untere Schranke von δ ist, und andererseits, daß nach Voraussetzung $\delta \geq \delta_h(A)$ gewählt ist.

2.2.5 Bemerkung

Satz 2.2.4 besagt, daß wir für jedes $h > 1$ zu jeder Menge A mit endlicher Pseudo-Dichte $\delta_h(A)$ bei beliebig gewähltem $\delta \geq \delta_h(A)$ eine aus natürlichen Zahlen bestehende asymptotische Ergänzung F_A konstruieren können, so daß die Menge $A \cup F_A$ die asymptotische Dichte $d_h(A \cup F_A) = \delta$ besitzt.

2.2.6 Zweites Resultat: Pseudo-Dichte als Verallgemeinerung der asymptotischen Dichte

Aufgrund des ersten Resultates 2.2.2 genügt eine optimale asymptotische Ergänzung E_A zu einer Menge $A \subseteq [0, \infty)$ mit endlicher Pseudo-Dichte für $h > 1$ der Gleichung

$$d_h(A \cup E_A) = \delta_h(A) ,$$

und stets existiert eine solche zur Menge A . Nach Satz 1.4.4 sind Pseudo-Dichte und asymptotische Dichte für gleichmäßig dünne Mengen identisch:

$$d_h(A) = \delta_h(A) .$$

Also ist die Pseudo-Dichte eine Verallgemeinerung der asymptotischen Dichte gleichmäßig dünner Mengen auf beliebige Teilmengen $A \subseteq [0, \infty)$.

2.2.7 Bemerkung

Die Sätze 2.2.2 und 2.2.4 können mit etwas Mehraufwand auch für $h \leq 1$ gezeigt werden. Allerdings müssen wir dann auch nicht natürliche Elemente innerhalb der asymptotischen Ergänzung E_A zulassen: Man beachte, daß für $h \leq 1$ nun $\frac{n}{\sqrt[h]{n}} = n^{1-\frac{1}{h}} \leq 1$ ist. Die Definition (47) der Elemente der

asymptotischen Ergänzung E_A können wir in etwa durch

$$e_{k+1} = \inf \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x > e_k, x \notin A, \frac{A(x) + k}{\sqrt[h]{x}} < \delta - \frac{1}{\sqrt[h]{x}} \right\} \quad (70)$$

ersetzen. Wir beachten, daß die Menge A wegen ihrer endlichen Pseudo-Dichte diskret ist. Mit $e_{k+1} \in A$ wäre bei hinreichend kleinem $\varepsilon > 0$ auch

$$e_{k+1} - \varepsilon \in \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x > e_k, x \notin A, \frac{A(x) + k}{\sqrt[h]{x}} < \delta - \frac{1}{\sqrt[h]{x}} \right\},$$

im Widerspruch zur Definition von e_{k+1} . Also ist Definition (70) als Ansatz für eine asymptotische Ergänzung im Falle $h \leq 1$ durchaus sinnvoll.

2.3 Pseudo-Dichte und Lemma von Cassels. Separierte Progressionenschar

2.3.1 Einleitung

Im Abschnitt 2.3 verschärfen wir das Lemma von Cassels in der Form, wie wir es bei der Konstruktion gleichmäßig dünner Mengen benötigen werden. Mit Korollar 2.3.3 stellen wir eine weitere Version des Lemmas von Cassels zur Verfügung, mit der wir die etwas mühsame Bestimmung der asymptotischen Dichte umgehen.

Anschließend betrachten wir in 2.3.4 die Aussagekraft des Lemmas von Cassels als obere Abschätzung der Pseudo-Dichte. Dabei sehen wir, daß das Lemma von Cassels selbst für Mengen, deren asymptotische Dichte verschwindet, versagen kann.

Danach definieren wir den Begriff der separierten Progressionenschar und bestimmen für geeignete Fälle deren Pseudo-Dichte. Wir weisen nach, daß das Lemma von Cassels als obere Abschätzung der Pseudo-Dichte für diese Art der separierten Progressionenschar scharf ist.

Die separierte Progressionenschar wird später bei der Konstruktion gleichmäßig dünner Basen zweiter Ordnung eine wesentliche Rolle spielen. Insbesondere versetzt uns die explizite Berechnung der Pseudo-Dichte der separierten Progressionenschar in die Lage, für die gleichmäßig dünnen Basen zweiter Ordnung von J. W. S. Cassels nachzuweisen, daß die asymptotische Dichte dieser Basen nicht verbessert werden kann.

2.3.2 Satz (Lemma von Cassels)

Voraussetzung. Die Menge $A = \{a_0 < a_1 < a_2 < \dots\} \subseteq [0, \infty)$ genüge

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1} - a_n}{a_n^{\frac{h-1}{h}}} \geq \lambda \quad (71)$$

für ein $h \in \mathbb{N}$, $h \geq 2$ und ein $\lambda > 0$.

Behauptung. Dann besitzt die Menge A eine aus natürlichen Zahlen bestehende asymptotische Ergänzung E_A , so daß die asymptotische Dichte der Menge $A \cup E_A = \{\tilde{a}_0 < \tilde{a}_1 < \tilde{a}_2 < \dots\}$ der Gleichung

$$d_h(A \cup E_A) = \frac{h}{\lambda} \quad (72)$$

genügt. Ist die Ungleichung (71) aus der Voraussetzung echt, so können wir die asymptotische Ergänzung E_A so wählen, daß sie ferner

$$\tilde{a}_n \in \left[\left(\frac{\lambda}{h} \right)^h n^h, \left(\frac{\lambda}{h} \right)^h (n+1)^h \right) \quad \forall n \geq n_0 \quad (73)$$

mit einem hinreichend großen $n_0 \in \mathbb{N}$ genügt.

Bemerkung. Bestimmen wir den Grenzwert aus Ungleichung (71) für die Menge P der h -ten Potenzen, so erhalten wir

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^h - n^h}{n^{h-1}} = h .$$

Also wäre die Aussage des Lemmas, daß wir die h -ten Potenzen zu einer gleichmäßig dünnen Menge mit asymptotischer Dichte eins ergänzen können. Insofern liegt es zum Beweis von Aussage (73) nahe, $\mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ in die Intervalle

$$I_\ell = [y_\ell, y_{\ell+1}) = \left[\left(\frac{\lambda}{h} \right)^h \ell^h, \left(\frac{\lambda}{h} \right)^h (\ell+1)^h \right) \quad \forall \ell \in \mathbb{N}_0 \quad (74)$$

zu zerlegen und die Mächtigkeit der Mengen $I_\ell \cap A$ zu untersuchen.

Beweis. Sei zunächst

$$\lambda < \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1} - a_n}{a_n^{\frac{h-1}{h}}} \quad (75)$$

erfüllt. Zu Beginn untersuchen wir die Intervalle I_ℓ . Sie genügen den Aussagen

$$|I_\ell \cap A| \leq 1 \quad \forall \ell \geq \ell_0, \quad (76)$$

$$|I_\ell \cap A| = 0 \quad \text{für unendlich viele } \ell, \quad (77)$$

$$|I_\ell \cap \mathbb{N}| \geq 2 \quad \forall \ell \geq \hat{\ell}_0. \quad (78)$$

Die Randpunkte der Intervalle $I_\ell = [y_\ell, y_{\ell+1})$ erfüllen $y_{\ell+1} - y_\ell \geq (\frac{\lambda}{h})^h h \ell^{h-1}$. Mit $h > 1$ folgt die Behauptung (78). Wir zeigen die Aussagen (76) und (77), indem wir die gegenteiligen Annahmen widerlegen.

Annahme 1. Die Menge A genügt

$$|I_\ell \cap A| \geq 2 \quad \text{für unendlich viele } \ell. \quad (79)$$

Annahme 2. Die Menge A erfüllt

$$|I_\ell \cap A| = 0 \quad \text{für maximal endlich viele } \ell. \quad (80)$$

Zu Annahme 1. Aus Aussage (79) folgt die Existenz von Teilfolgen $(n_k)_{k \in \mathbb{N}}$ und $(\ell_k)_{k \in \mathbb{N}}$, die der Bedingung

$$\{a_{n_k}, a_{n_k+1}\} \subseteq I_{\ell_k} = [y_{\ell_k}, y_{\ell_k+1}) \quad \forall k \in \mathbb{N}, \quad (81)$$

und damit erst recht der Abschätzung

$$a_{n_k+1} - a_{n_k} \leq y_{\ell_k+1} - y_{\ell_k} \quad \forall k \in \mathbb{N} \quad (82)$$

genügen. Mit den Aussagen (81) und (82) erfüllen diese beiden Teilfolgen

$$\begin{aligned}
\frac{a_{n_k+1} - a_{n_k}}{(a_{n_k})^{\frac{h-1}{h}}} &< \frac{y_{\ell_k+1} - y_{\ell_k}}{(y_{\ell_k})^{\frac{h-1}{h}}} \\
&= \frac{\left(\frac{\lambda}{h}\right)^h \sum_{\nu=1}^h \binom{h}{\nu} \ell_k^{h-\nu}}{\left(\frac{\lambda}{h} \ell_k\right)^{h-1}} \\
&\cong \frac{\lambda}{h} \frac{h \ell_k^{h-1} + o(\ell_k^{h-1})}{\ell_k^{h-1}} \\
&\cong \lambda .
\end{aligned}$$

Daraus folgt insbesondere

$$\lambda \geq \liminf_{k \rightarrow \infty} \frac{a_{n_k+1} - a_{n_k}}{(a_{n_k})^{\frac{h-1}{h}}} ,$$

im Widerspruch zur Voraussetzung (75): Der Limes inferior einer Teilfolge ist stets größer gleich dem Limes inferior der zugehörigen Folge. Daher ist nach Voraussetzung (75)

$$\lambda < \liminf_{k \rightarrow \infty} \frac{a_{n_k+1} - a_{n_k}}{(a_{n_k})^{\frac{h-1}{h}}} .$$

Also ist Annahme 1 zum Widerspruch geführt, und die Menge A genügt der Behauptung (76).

Zu Annahme 2. Die Kombination der Aussagen (76) und (80) ergibt

$$\left| I_\ell \cap A \right| = 1 \quad \forall \ell \geq \ell_0^{(1)} .$$

Damit genügt die Zählfunktion der Menge A für beliebige $t \in \mathbb{N}$ und $k \geq \ell_0^{(1)}$ den Abschätzungen

$$A(y_{(k+1)(t+1)}) - A(y_{k(t+1)}) \leq t + 2 , \quad (83)$$

$$A(y_{(k+1)(t+1)}) - A(y_{k(t+1)}) \geq t , \quad (84)$$

weil einerseits die $t + 2$ Intervalle $I_{k(t+1)}, I_{k(t+1)+1}, \dots, I_{(k+1)(t+1)}$ das Intervall $(y_{k(t+1)}, y_{(k+1)(t+1)})$ umgeben, andererseits aber auch dieses Intervall die t Intervalle $I_{k(t+1)+1}, I_{k(t+1)+2}, \dots, I_{(k+1)(t+1)-1}$ umfaßt.

Für hinreichend großes $t \in \mathbb{N}$, $t \geq 3$, ist wegen Voraussetzung (75) auch $\frac{t+1}{t-2}\lambda < \liminf_{k \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1} - a_n}{a_n^{\frac{h-1}{h}}}$. Sei nun ein solches t fest gewählt. Dann genügt $\lambda^* = \frac{t+1}{t-2}\lambda$ der Voraussetzung (75), und Aussage (76) liefert uns mit

$$y_\ell^* = \left(\frac{\lambda^*}{h}\right)^h \ell^h ,$$

$$I_\ell^* = [y_\ell^*, y_{\ell+1}^*) ,$$

daß die Menge A auch

$$|I_\ell^* \cap A| \leq 1 \quad \forall \ell \geq \ell_0^*$$

erfüllt. Damit erhalten wir, daß die Menge A für $k \geq \ell_0^*$ der Abschätzung

$$A(y_{(k+1)(t+1)}^*) - A(y_{k(t+1)}^*) \leq t + 2 \quad (85)$$

genügt. Nun ist

$$\begin{aligned} y_{k(t+1)} &= \left(\frac{\lambda}{h}\right)^h k^h (t+1)^h \\ &= \left(\frac{(t+1)\lambda}{(t-2)h}\right)^h k^h (t-2)^h \\ &= \left(\frac{\lambda^*}{h}\right)^h k^h (t-2)^h \\ &= y_{k(t-2)}^* . \end{aligned}$$

Weil t in Aussage (84) beliebig gewählt werden kann, erhalten wir mit der Abschätzung (84) vermöge der obigen Gleichheit

$$A(y_{(k+1)(t+1)}^*) - A(y_{k(t+1)}^*) = A(y_{(k+1)(t+4)}^*) - A(y_{k(t+4)}^*) \geq t + 3 ,$$

im Widerspruch zu (85). Also ist auch Annahme 2 falsch, und A genügt (77).

Anschauliche Beweisskizze des verbleibenden Teils. Mit den Aussagen (76)-(78) ist es uns möglich, derart Elemente zur Menge A hinzuzufügen, daß die Zählfunktion der um diese Elemente ergänzten Menge $\tilde{A}$

$$\tilde{A}(y_\ell) + 1_{\tilde{A}}(0) - 1_A(y_\ell) = \ell \quad \forall \ell \geq \ell^* \quad (86)$$

genügt. Weil $\bigcup_{j=0}^{\ell-1} I_j = [0, y_\ell)$ ist, entsprechen sich die Aussagen (86) und (73). Aus (86) leiten wir dann auch Behauptung (72) ab.

Fortführung des Beweises. O.B.d.A. können wir $\ell_0 \geq \hat{\ell}_0$ annehmen: Ist $\ell_0 < \hat{\ell}_0$, so setzen wir $\ell_0 = \hat{\ell}_0$.

Sei $k_0 = A(y_{\ell_0}) - 1_A(y_{\ell_0}) + 1_A(0)$. Dann entspricht k_0 der Anzahl der in der Menge A enthaltenen Elemente, die kleiner als y_{ℓ_0} sind. Diese entsprechen den in den Intervallen $I_0, I_1, \dots, I_{\ell_0-1}$ enthaltenen Elementen.

Ist $k_0 \leq \ell_0$, so wählen wir $(\ell_0 - k_0)$ nicht in der Menge A enthaltene, natürliche Zahlen

$$e_j \in ((I_{\ell_0+j-1} \cap \mathbb{N}) \setminus A), \quad j = 0, \dots, \ell_0 - k_0 - 1 \quad (87)$$

aus. Das ist wegen (76) und (78) möglich. Sei nun

$$J = \{j \in \mathbb{N} \mid j \geq \ell_0, \mid I_j \cap A \mid = 0\}. \quad (88)$$

Dann wählen wir für jedes $j \in J$ ein beliebiges

$$e_j \in ((I_j \cap \mathbb{N}) \setminus (\bigcup_{t=0}^{\ell_0-k_0-1} \{e_t\})) \quad (89)$$

aus. Man beachte, daß ein solches e_j aufgrund der Definition von J und unserer Wahl von ℓ_0 nach (78) stets existiert. Wir setzen

$$E_A = \left(\bigcup_{j=0}^{\ell_0-k_0-1} \{e_j\} \right) \cup \left(\bigcup_{j \in J} \{e_j\} \right). \quad (90)$$

Mit $\ell^* = 2\ell_0$ genügt dann die Zählfunktion von $A \cup E_A$ der Gleichung

$$(A \cup E_A)(y_\ell) = \ell - 1_{(A \cup E_A)}(0) + 1_{(A \cup E_A)}(y_\ell) \quad \forall \ell \geq \ell^* : \quad (91)$$

Weil $\ell \geq \ell^* = 2\ell_0 \geq \ell_0 + \ell_0 - k_0$ ist, ist e_j für $j \in \{0, 1, \dots, \ell_0 - k_0 - 1\}$ nach Definition (87) kleiner als y_ℓ . Ferner beinhaltet jedes Intervall I_ℓ aufgrund der Definition (88) und der Wahl (89) der e_j für $\ell \geq \ell_0$ entweder genau ein Element aus A und kein e_j mit $j \in J$ oder kein Element aus A und genau ein Element e_j mit $j \in J$. Mit $\bigcup_{j=0}^{\ell-1} I_j = [0, y_\ell)$ ist also

$$\begin{aligned} (A \cup E_A)(y_\ell) &= k_0 + (\ell_0 - k_0) + (\ell - 1 - (\ell_0 - 1)) \\ &\quad + 1_{(A \cup E_A)}(y_\ell) - 1_{(A \cup E_A)}(0) \\ &= \ell + 1_{(A \cup E_A)}(y_\ell) - 1_{(A \cup E_A)}(0) . \end{aligned}$$

Die Äquivalenz (91) entspricht der Aussage (86) mit $\tilde{A} = A \cup E_A$.

Ist $k_0 > \ell_0$, so definieren wir wieder $J = \{j_0 < j_1 < \dots\}$ gemäß (88).

Jetzt wählen wir für jedes $i \geq (k_0 - \ell_0)$ ein beliebiges

$$e_i \in (I_{j_i} \cap \mathbb{N}) \quad (92)$$

aus. Man beachte, daß ein solches e_i aufgrund der Definition von J und unserer Wahl von ℓ_0 nach (78) stets existiert. Wir setzen

$$E_A = \bigcup_{i=k_0-\ell_0}^{\infty} \{e_i\} . \quad (93)$$

Mit den oben bereits aufgeführten Argumenten liefern (92) und (93) mit $\ell^* = j_{(k_0-\ell_0)}$ für die Menge $A \cup E_A$

$$(A \cup E_A)(y_\ell) = \ell - 1_{(A \cup E_A)}(0) + 1_{(A \cup E_A)}(y_\ell) \quad \forall \ell \geq \ell^* . \quad (94)$$

Die Gleichung (94) entspricht wiederum (86) mit $\tilde{A} = A \cup E_A$. Also ist die Aussage (86) und damit auch die Behauptung (73) in beiden Fällen gezeigt.

Wir müssen noch Behauptung (72) zeigen. Dazu sei die Menge E_A wie zuvor. Dann genügt die Menge $A \cup E_A$ nach den Aussagen (91) und (94)

$$(A \cup E_A)(y_\ell) = \ell + 1_{(A \cup E_A)}(y_\ell) - 1_{(A \cup E_A)}(0) \quad \forall \ell \geq \ell^* .$$

Zu jedem $x \in \mathbb{R}$, $x > 0$, existiert ein $\ell \in \mathbb{N}_0$, das $y_\ell < x \leq y_{\ell+1}$ erfüllt. Mit x strebt auch ℓ gegen unendlich. Daher genügt die Menge $A \cup E_A$ für hinreichend große x einerseits

$$\frac{(A \cup E_A)(x)}{\sqrt[h]{x}} \leq \frac{(A \cup E_A)(y_{\ell+1})}{\sqrt[h]{y_\ell}} \leq \frac{\ell + 2}{\frac{\lambda}{h}\ell} \implies \bar{d}_h(A \cup E_A) \leq \frac{h}{\lambda}$$

und andererseits auch

$$\frac{(A \cup E_A)(x)}{\sqrt[h]{x}} \geq \frac{(A \cup E_A)(y_\ell)}{\sqrt[h]{y_{\ell+1}}} \geq \frac{\ell - 2}{\frac{\lambda}{h}(\ell + 1)} \implies \underline{d}_h(A \cup E_A) \geq \frac{h}{\lambda} .$$

Also ist die Menge $A \cup E_A$ gleichmäßig dünn mit asymptotischer Dichte

$$d_h(A \cup E_A) = \frac{h}{\lambda} .$$

Insbesondere ist die Menge E_A eine asymptotische Ergänzung zu A . Damit ist die Behauptung (72) für den Fall (75) gezeigt.

Es verbleibt, Behauptung (72) für den Fall

$$\lambda = \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1} - a_n}{\frac{h-1}{a_n^{\frac{1}{h}}}}$$

zu zeigen. Wir wählen dazu

$$\lambda_k = \frac{k}{k+1} \lambda \quad \forall k \in \mathbb{N} .$$

Dann genügt die Folge $(\lambda_k)_{k \in \mathbb{N}}$ den Bedingungen

$$\begin{aligned} \lambda_k &> 0 , \\ \lambda_k &< \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1} - a_n}{\frac{h-1}{a_n^{\frac{1}{h}}}} , \end{aligned}$$

und wir können den Fall (75) auf jedes λ_k anwenden. Wir erhalten asymptotische Ergänzungen $E_{A,k}$ zu A , die

$$d_h(A \cup E_{A,k}) = \frac{h}{\lambda_k}$$

erfüllen. Weil die Pseudo-Dichte der Menge A gemäß ihrer Definition 1.3.5 eine untere Schranke der asymptotischen Dichten der Mengen $A \cup E_{A,k}$ ist, erhalten wir

$$\delta_h(A) \leq d_h(A \cup E_{A,k}) = \frac{h}{\lambda_k}.$$

Also genügt die Pseudo-Dichte der Menge A der Abschätzung

$$\delta_h(A) \leq \frac{h}{\lambda}.$$

Dann liefert uns Satz 2.2.3 eine asymptotische Ergänzung E_A , so daß die Menge $A \cup E_A$ die asymptotische Dichte $d_h(A) = \frac{h}{\lambda}$ besitzt, und die Behauptung (72) ist auch in diesem Fall gezeigt.

2.3.3 Korollar

Voraussetzung. Die Menge $A = \{a_0 < a_1 < a_2 < \dots\} \subseteq [0, \infty)$ erfülle für ein $h \in \mathbb{N}$, $h \geq 2$ und ein $\mu < \infty$

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n^{\frac{h-1}{h}}}{a_{n+1} - a_n} \leq \frac{\mu}{h}. \quad (95)$$

Behauptung. Die Menge A hat eine asymptotische Ergänzung $E_A \subseteq \mathbb{N}_0$, so daß die Menge $A \cup E_A = \{\tilde{a}_0 < \tilde{a}_1 < \tilde{a}_2 < \dots\}$ die asymptotische Dichte

$$d_h(A \cup E_A) = \mu \quad (96)$$

besitzt. Ist Ungleichung (95) echt, kann E_A so gewählt werden, daß $(\tilde{a}_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$

$$\tilde{a}_n \in \left[\left(\frac{1}{\mu} \right)^h n^h, \left(\frac{1}{\mu} \right)^h (n+1)^h \right) \quad \forall n \geq n_0 \quad (97)$$

genügt.

Beweis. Die Voraussetzung impliziert im Falle $\mu > 0$

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1} - a_n}{a_n^{\frac{h-1}{h}}} \geq \frac{h}{\mu} > 0.$$

Dann können wir das Lemma von Cassels in der Form 2.3.2 mit $\lambda = \frac{h}{\mu}$ anwenden und erhalten die Behauptung.

Im Falle $\mu = 0$ wählen wir $\mu_k = \frac{1}{k}$ und wenden das Lemma von Cassels in der Form 2.3.2 mit $\lambda_k = hk$ an. Wir erhalten asymptotische Ergänzungen $E_{A,k}$, die $d_h(A \cup E_{A,k}) = \frac{1}{k}$ genügen. Analog zum letzten Teil des Beweises in 2.3.2 erhalten wir, daß die Pseudo-Dichte der Menge A null beträgt. Weil die Pseudo-Dichte nach Satz 1.4.2 eine obere Schranke der oberen asymptotischen Dichte ist, ist $\bar{d}_h(A) = 0$, und die Behauptung ist trivial. Man wähle $E_A = \emptyset$ und beachte, daß Ungleichung (95) für $\mu = 0$ nicht echt sein kann.

2.3.4 Bemerkung zu Satz 2.3.2 und Korollar 2.3.3

Die Originalfassung des Lemmas von Cassels findet sich in 1.2.7. Dabei entsprechen sich die Voraussetzungen 1.2.7 (12) und 2.3.2 (71). Aussage 1.2.7 (13) korrespondiert mit $A \subseteq A \cup E_A$ und 1.2.7 (14) mit 2.3.2 (72). Ferner ist die Behauptung 2.3.2 (73) schärfer als 1.2.7 (15). Allerdings ist die exaktere Bestimmung des Restgliedes in 2.3.2 (73) auch unter Zuhilfenahme des von Cassels in [2] angegebenen Beweises möglich.

Das Lemma von Cassels 1.2.7 läßt negative Elemente in der Menge A zu. Weil $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ streng monoton wachsend ist, ist deren Anzahl $m(A)$ beschränkt. Also können wir 2.3.2 auf die Menge $A \cap [0, \infty)$ anwenden. Nun gilt (73) zunächst nicht. Berücksichtigen wir aber im Beweis die $m(A)$ negativen Elemente der Menge A , so erhalten wir auch in diesen Fällen Aussage (73).

2.3.5 Lemma von Cassels und Pseudo-Dichte

Weil die Bestimmung des Limes superior aus 2.3.3 (95)

$$s = \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n^{\frac{h-1}{h}}}{a_{n+1} - a_n} \quad (98)$$

in der Regel mit erheblich weniger Aufwand verbunden ist als der für die Berechnung der Pseudo-Dichte benötigte, liefert uns das Lemma von Cassels ein durchaus gut geeignetes Hilfsmittel zur Bestimmung von asymptotischen Ergänzungen E_A zu einer Menge A und den zugehörigen asymptotischen Dichten der Mengen $A \cup E_A$. Für $s < \infty$ liefert das Lemma von Cassels 1.2.7 in der Form 2.3.3 gemäß (96) stets die obere Abschätzung der Pseudo-Dichte

$$\delta_h(A) \leq hs .$$

Allerdings kann diese Abschätzung ein Vielfaches der Pseudo-Dichte sein.

Beispiel 1. Wählen wir $A = \{k^h - 1, k^h \mid k \in \mathbb{N}\}$, so ist

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n^{\frac{h-1}{h}}}{a_{n+1} - a_n} = \limsup_{k \rightarrow \infty} \frac{k^{h-1}}{1} = \infty .$$

Dann existiert kein μ , das (95) genügt, und das Lemma von Cassels liefert keine asymptotische Ergänzung zu A . Die Menge A ist aber gleichmäßig dünn:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{A(n)}{\sqrt[h]{n}} = 2 .$$

Nach Satz 1.4.4 stimmt die Pseudo-Dichte für gleichmäßig dünne Mengen mit der asymptotischen Dichte überein. Also ist $\delta_h(A) = 2$.

Zwar ließe sich das Lemma von Cassels in dem Sinne verallgemeinern, daß man anstelle von (98) für beliebige, fest gewählte natürliche k

$$s_k = \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n^{\frac{h-1}{h}}}{a_{n+k} - a_n} \quad (99)$$

betrachtet. Aber auch dann kann aus dem Lemma von Cassels im allgemeinen keine exaktere Aussage bezüglich der Pseudo-Dichte getroffen werden.

Beispiel 2. Wir betrachten die Menge

$$P_0 = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{n^{3h}, n^{3h} + 1, \dots, n^{3h} + n - 1\}$$

aus Beispiel 1.3.11. Dort haben wir gezeigt, daß die asymptotische Dichte der Menge P_0 – und damit auch die Pseudo-Dichte – verschwindet. Die Menge P_0 genügt aber bei fest gewähltem natürlichen k

$$\begin{aligned} s_k &= \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n^{\frac{h-1}{h}}}{a_{n+k} - a_n} \\ &\geq \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{n^{3(h-1)}}{k} \\ &= \infty, \end{aligned}$$

weil die Elemente $a_{n_l} = l^{3h}$ der Menge P_0 für hinreichend große l gerade $a_{n_l+k} - a_{n_l} = k$ erfüllen.

Den Beispielen 1 und 2 entnehmen wir, daß das Lemma von Cassels im allgemeinen nicht zur Berechnung der Pseudo-Dichte herangezogen werden kann. Vielmehr dient es unter geeigneten Voraussetzungen dazu, zumindest eine obere Abschätzung der Pseudo-Dichte angeben zu können.

Die beiden Beispiele mögen zwar von einfacher Bauart sein, können aber stets Bestandteil einer Menge mit endlicher Pseudo-Dichte sein.

In Abschnitt 2.3.8 sehen wir, daß das Lemma von Cassels bisweilen nicht nur asymptotische Ergänzungen sondern bereits optimale asymptotische Ergänzungen liefert.

2.3.6 Definition

Gegeben seien $a, b \in \mathbb{N}_0$, $a \leq b$ sowie ein Teiler $m \in \mathbb{N}$ von $(b - a)$: $m \mid (b - a)$. Ferner gelte $\frac{b-a}{m} \geq 2$.

Arithmetische Progression. Die durch

$$P_0 = [a, (m), b] = \left\{ a + km \mid k \in \mathbb{N}_0, k \leq \frac{b-a}{m} \right\} \quad (100)$$

gegebene Menge P_0 heißt *arithmetische Progression der Schrittweite m mit Anfangspunkt a und Endpunkt b* . Speziell für $m = 1$ vereinbaren wir auch die Schreibweise

$$[a, b] = [a, (1), b]. \quad (101)$$

Separierte Progressionenschar. Zu jedem $n \in \mathbb{N}$ sei eine arithmetische Progression $P_n = [a_n, (m_n), b_n]$ gegeben. Genügt die Vereinigung der arithmetischen Progressionen

$$P = \bigcup_{n=1}^{\infty} P_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} [a_n, (m_n), b_n] \quad (102)$$

für jedes $n \in \mathbb{N}$ der Bedingung

$$a_{n+1} = b_n \quad \text{oder} \quad a_{n+1} \geq b_n + m_{n+1}, \quad (103)$$

so nennen wir die Menge P *separierte Progressionenschar*.

Bemerkung. Im weiteren Verlauf werden wir durch die Bezeichnung $[a, b]$ stets auf die arithmetische Progression der Schrittweite eins mit Anfangspunkt a und Endpunkt b verweisen. Ist das geschlossene Intervall $[a, b]$ gemeint, so wird darauf explizit hingewiesen.

Weil die Menge der natürlichen Zahlen abzählbar ist, stellt die Indizierung $n \in \mathbb{N}$ keine Einschränkung für die Auswahlmöglichkeiten der arithmetischen Progressionen innerhalb einer separierten Progressionenschar dar.

2.3.7 Bemerkung

Wir bestimmen nun die Pseudo-Dichte h -ter Ordnung einer jeden separierten Progressionenschar P , die $q_P = \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} < 1$ genügt. Anhand unseres Beispiels P_0 aus 1.3.11 bzw. 2.3.5 haben wir bereits gesehen, daß auf die Forderung $q_P < 1$ in Satz 2.3.8 nicht verzichtet werden kann.

2.3.8 Pseudo-Dichte einer separierten Progressionenschar

Voraussetzung. Durch

$$P = \bigcup_{n=1}^{\infty} P_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} [a_n, (m_n), b_n] \quad (104)$$

sei eine separierte Progressionenschar P gegeben, die der Bedingung

$$q_P = \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} < 1 \quad (105)$$

genügt.

Behauptung. Die separierte Progressionenschar besitzt die Pseudo-Dichte

$$\delta_h(P) = h \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[h]{b_n^{h-1}}}{m_n}. \quad (106)$$

Beweis. Zum Beweis der Behauptung schätzen wir die Pseudo-Dichte der separierten Progressionenschar P sowohl nach oben als auch nach unten durch den in der Behauptung (106) gegebenen Term ab. Die obere Schranke erhalten wir durch Anwendung des Lemmas von Cassels in der Form 2.3.3, während wir die untere mit Hilfe eines Minorantenerzeugers bestimmen.

Obere Schranke. Wir berechnen die asymptotische Dichte der Menge $P \cup E_P$ mit einer asymptotischen Ergänzung E_P nach Cassels Lemma in der Form 2.3.3. Dazu haben wir zu $P = \{p_0 < p_1 < p_2 < \dots\}$ gemäß Korollar 2.3.3 (95) den folgenden Limes superior zu bestimmen:

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[h]{p_n^{h-1}}}{p_{n+1} - p_n}.$$

Weil die Differenz der in der Menge P aufeinander folgenden Elemente jeweils innerhalb einer arithmetischen Progression konstant ist, ist mit der Forderung 2.3.6 (103) an die separierte Progressionenschar P

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[h]{p_n^{h-1}}}{p_{n+1} - p_n} = \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[h]{(b_n - m_n)^{h-1}}}{m_n}. \quad (107)$$

Nun enthält jede arithmetische Progression per Definition mindestens drei Elemente. Daher ist die Folge $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ unbeschränkt. Ist $m_n = o(b_n)$, so gilt

$$\sqrt[h]{b_n^{h-1}} \cong \sqrt[h]{(b_n - m_n)^{h-1}}.$$

Andernfalls ist $b_n = O(m_n)$, also auch $b_n - m_n = O(m_n)$. Dann ist der Limes superior in Gleichung (107) null, auch wenn man $b_n - m_n$ durch b_n ersetzt. Damit können wir in beiden Fällen in der Äquivalenz (107) $b_n - m_n$ durch b_n ersetzen, ohne den Wert des Limes superior zu verändern. Die separierte Progressionenschar P genügt daher

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[h]{p_n^{h-1}}}{p_{n+1} - p_n} = \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[h]{b_n^{h-1}}}{m_n}. \quad (108)$$

Ist der Grenzwert in Gleichung (108) reellwertig, so liefert das Lemma von Cassels in der Form 2.3.3 eine asymptotische Ergänzung E_P zu P , die

$$d_h(P \cup E_P) = h \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[h]{b_n^{h-1}}}{m_n}.$$

erfüllt. Damit gilt bereits

$$\delta_h(P) \leq h \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[h]{b_n^{h-1}}}{m_n}. \quad (109)$$

Untere Schranke. Wir wählen nun eine reelle Zahl q aus, die $q_P < q < 1$ genügt und setzen

$$\begin{aligned} S_n &= b_n , \\ s_n &= qb_n , \\ (S, s) &= ((S_n)_{n \in \mathbb{N}}, (s_n)_{n \in \mathbb{N}}) . \end{aligned}$$

Dann ist das Folgenpaar (S, s) gemäß Definition 1.3.5 (23)-(25) ein Minorantenerzeuger und genügt für alle hinreichend großen n der Äquivalenz

$$\frac{P(S_n) - P(s_n)}{\sqrt[h]{S_n}} = \left\lceil \frac{b_n - qb_n}{m_n} \right\rceil \frac{1}{\sqrt[h]{S_n}} \geq \frac{(1-q)b_n}{m_n \sqrt[h]{b_n}} = (1-q) \frac{\sqrt[h]{b_n^{h-1}}}{m_n} .$$

Nach den Definitionen 1.3.5 (26) und (27) sind dann

$$\begin{aligned} \delta_h^o(P, S, s) &\geq (1-q) \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[h]{b_n^{h-1}}}{m_n} , \\ \delta_h(P, S, s) &\geq \frac{1-q}{1-\sqrt[h]{q}} \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[h]{b_n^{h-1}}}{m_n} . \end{aligned}$$

Mit Hilfe der l'Hospitalschen Regel erhalten wir

$$\lim_{q \uparrow 1} \delta_h(P, S, s) \geq h \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[h]{b_n^{h-1}}}{m_n} . \quad (110)$$

Mit Aussage (110) und Definition 1.3.5 (28) folgt, daß die Pseudo-Dichte der separierten Progressionenschar P der Ungleichung

$$\delta_h(P) \geq h \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[h]{b_n^{h-1}}}{m_n} \quad (111)$$

genügt. Aus den beiden Abschätzungen (109) und (111) folgt die Gleichheit und damit die Behauptung (106).

2.3.9 Bemerkung

Die separierte Progressionenschar $P = \{p_1 < p_2 < \dots\}$ aus Satz 2.3.8 ist eine Menge, für die die Abschätzung der Pseudo-Dichte durch das Lemma von Cassels scharf ist. Wir haben nämlich im Beweis von Satz 2.3.8 gesehen, daß die separierte Progressionenschar P der Gleichung

$$\delta_h(P) = h \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[h]{b_n^{h-1}}}{m_n} = h \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[h]{p_n^{h-1}}}{p_{n+1} - p_n}$$

genügt. Dabei entspricht die rechte Seite der Gleichung der asymptotischen Dichte, die mit Hilfe einer asymptotischen Ergänzung E_P von der Menge $P \cup E_P$ gemäß dem Lemma von Cassels in der Form 2.3.3 nach (96) erzielt werden kann. Insbesondere liefert das Lemma von Cassels damit eine optimale asymptotische Ergänzung E_P zur separierten Progressionenschar P aus Satz 2.3.8.

3 Dünne Basen zweiter Ordnung

3.1 Einführung

In diesem Kapitel wollen wir den Begriff der Basis h -ter Ordnung einführen. Wir werden sehen, daß gerade die in den ersten beiden Kapiteln untersuchten asymptotischen Dichten geeignet sind, die Güte von Basen h -ter Ordnung zu bemessen. Dabei nennen wir eine Menge B nicht negativer ganzer Zahlen Basis h -ter Ordnung, wenn sich jede nicht negative ganze Zahl als Summe $b_1 + b_2 + \dots + b_h$ von exakt h nicht notwendig verschiedenen Elementen der Menge B darstellen läßt.

Die additive Zahlentheorie untersucht insbesondere Basen h -ter Ordnung, die aus möglichst wenigen Elementen bestehen. Dabei unterscheidet man drei Arten von Basen: teilweise dünne, dünne und gleichmäßig dünne Basen h -ter Ordnung. Wir geben in diesem Kapitel einen Überblick über den aktuellen Kenntnisstand. Dabei wollen wir auf Basen zweiter Ordnung näher eingehen. Zur Vorbereitung des Hauptresultats im vierten Kapitel – der Verbesserung der asymptotischen Dichte von gleichmäßig dünnen Basen zweiter Ordnung von $4,638\dots$ auf $3,464\dots$ – werden wir uns gegen Ende des Kapitels mit den gleichmäßig dünnen Basen von J. W. S. Cassels[2] und G. Hofmeister[4] detaillierter auseinandersetzen.

Dieses Kapitel beinhaltet zwei weitere Ziele. Zum einen zeigt uns das erste Hauptresultat auf, daß weder die dünne Basis zweiter Ordnung von D. Raikov[6] und A. Stöhr[8] noch die von G. Hofmeister[4] asymptotisch ergänzbar ist. Damit scheiden diese beiden Basen bei der Betrachtung von

gleichmäßig dünnen Basen zweiter Ordnung aus. Zum anderen können die von J. W. S. Cassels[2] bzw. G. Hofmeister[4] erzielten asymptotischen Dichten nach dem zweiten Hauptresultat ohne einen schwerwiegenden Eingriff innerhalb der jeweiligen Konstruktion nicht verbessert werden. Denn in beiden Basen ist eine dünne Basis zweiter Ordnung enthalten, deren Pseudodichte der jeweils erzielten asymptotischen Dichte entspricht. Damit sind die von J. W. S. Cassels[2] bzw. G. Hofmeister[4] verwendeten asymptotischen Ergänzungen optimal zur jeweiligen dünnen Basis, und die asymptotische Dichte einer jeden gleichmäßig dünnen Menge, die die jeweilige dünne Basis enthält, ist mindestens genauso groß.

3.2 Dünne Basen

3.2.1 Einleitung

Im Abschnitt 3.2 führen wir den Begriff der Basis h -ter Ordnung ein. Wir betrachten in 3.2.5 eine untere Abschätzung für die Zählfunktion einer jeden Basis h -ter Ordnung. In 3.2.6 lernen wir die Stöhrschen Basen[6, 8] kennen. Aus den für die Stöhrschen Basen gültigen Aussagen folgt dann, daß gerade die in den ersten beiden Kapiteln untersuchten asymptotischen Wurzeldichten die für Basen h -ter Ordnung geeigneten asymptotischen Dichten sind.

D. Raikov[6] und A. Stöhr[8] geben die Stöhrschen Basen 1937 unabhängig voneinander an. Bis in das jetzige Jahrhundert waren die Stöhrschen Basen[9] diejenigen, deren obere und untere asymptotische Dichte unter den uns bekannten Basen am kleinsten war. Im Jahre 2001 gelingt G. Hofmeister[4] zumindest für den Fall $h = 2$ eine Verbesserung der unteren und oberen asymptotischen Dichte.

Zum Abschluß von Abschnitt 3.2 stellen wir noch diejenigen Basen h -ter Ordnung vor, deren obere asymptotische Dichte unter den uns heute bekannten Basen am geringsten ist: die UR-Basen. Sie wurden 2003 von V. Blomer[1] eingeführt.

Weil wir uns hier intensiv mit gleichmäßig dünnen Basen zweiter Ordnung beschäftigen wollen, verzichten wir auf eine eingehendere Betrachtung der Konstruktion von V. Blomer.

3.2.2 Definition

Gegeben seien $A, B \subseteq \mathbb{N}_0$ und $h \in \mathbb{N}$.

A + B. Wir nennen die Menge

$$A + B = \left\{ a + b \mid a \in A, b \in B \right\} \quad (112)$$

Summenmenge aus A und B.

hA. Wir setzen ferner

$$hA = \sum_{j=1}^h A = \left\{ \sum_{j=1}^h a^{(j)} \mid a^{(j)} \in A \forall 1 \leq j \leq h \right\}. \quad (113)$$

Basis h-ter Ordnung. Genügt die Menge B der Aussage

$$hB = \sum_{j=1}^h B = \mathbb{N}_0, \quad (114)$$

so heißt die Menge B *Basis h-ter Ordnung* oder auch kurz *h-Basis*. Also ist die Menge B eine Basis h-ter Ordnung genau dann, wenn hB alle nicht negativen ganzen Zahlen umfaßt. Offensichtlich kann eine Menge nur dann Basis h-ter Ordnung sein, wenn die Null in ihr enthalten ist.

3.2.3 Beispiel

Die Vereinigung U_2 der positiven, ungeraden ganzen Zahlen mit der Null bildet eine Basis zweiter Ordnung, während die nicht negativen, geraden keine Basis zweiter Ordnung sind. Allgemeiner ist für jedes $h \in \mathbb{N}$

$$U_h = \left\{ n \in \mathbb{N} \mid n \equiv 1 \pmod{h} \right\} \cup \{0\} \quad (115)$$

eine Basis h-ter Ordnung. Allerdings besitzt U_h die asymptotische Dichte

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{U_h(n)}{n} = \frac{1}{h}. \quad (116)$$

3.2.4 Bemerkung

Erstes Anliegen dieses Abschnittes ist es, zu veranschaulichen, daß die in den beiden ersten Kapiteln eingehender betrachteten asymptotischen Wurzeldichten die für Basen h -ter Ordnung geeigneten asymptotischen Dichten sind. Damit können gerade die asymptotischen Wurzeldichten die Güte einer Basis h -ter Ordnung bemessen. Dafür ist es notwendig, einerseits zu zeigen, daß jede Basis B h -ter Ordnung

$$\frac{B(n)}{\sqrt[h]{n}} \geq c_h$$

für ein geeignet gewähltes $c_h > 0$ genügt. Andererseits müssen auch Basen B h -ter Ordnung existieren, für die der Quotient

$$\frac{B(n)}{\sqrt[h]{n}}$$

beschränkt ist. Die erste Eigenschaft lernen wir in Lemma 3.2.5 kennen, die zweite erhalten wir mit Hilfe der Stöhrschen Basen in 3.2.6.

3.2.5 Lemma

Jede Basis $B = \{b_0 < b_1 < b_2 < \dots\}$ h -ter Ordnung erfüllt

$$b_n \leq \binom{n+h-1}{h}. \quad (117)$$

Dann genügt jede Basis B h -ter Ordnung der Abschätzung

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{B(n)}{\sqrt[h]{n}} \geq \sqrt[h]{h!}. \quad (118)$$

Insbesondere gilt für jede Basis B zweiter Ordnung die Abschätzung

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{B(n)}{\sqrt{n}} \geq \sqrt{2}. \quad (119)$$

Beweis. Betrachten wir das $(n+1)$ -te Element b_n einer Basis B h -ter Ordnung, so muß jedes $k < b_n$ eine Darstellung als Summe $k = b_{k_1} + \dots + b_{k_h}$ besitzen. Sonst wäre die Menge B keine Basis h -ter Ordnung. Daher können wir eine untere Schranke für das $(n+1)$ -te Element einer Basis h -ter Ordnung erzielen, indem wir schlicht die Anzahl $m(n)$ der verschiedenen Summen

$$b_{k_1} + \dots + b_{k_h}, \quad k_1, \dots, k_h \in \{0, 1, \dots, n-1\}, \quad (120)$$

aus h Summanden, von denen jeder einzelne aus n Elementen ausgewählt werden darf, abschätzen. Weil auch die Null dargestellt werden muß, genügt die Basis B der Aussage

$$b_n \leq m(n). \quad (121)$$

Wegen der Kommutativität der Addition spielt die Anordnung der Summanden in (120) keine Rolle. Entscheidend ist vielmehr die Häufigkeit des Auftretens eines jeden Elements in der Summe (120). Diese können wir wie folgt in einer Strichliste darstellen:

Element	b_0	b_1	b_2	$\dots$	b_{n-2}	b_{n-1}
Häufigkeit	—	—	—	$\dots$	—	— .

Dabei entsprechen die Trennzeichen den zur Auswahl stehenden Elementen und jede römische Eins jedem einzelnen Auftreten des Elementes in der Summe (120). Wir erhalten genau dann verschiedene Strichlisten, wenn die Häufigkeit mindestens eines Elementes in der Summe (120) verschieden ist. Deshalb stimmt die Anzahl der verschiedenen Strichlisten gerade mit der Anzahl $m'(n)$ der ohne Berücksichtigung der Anordnung formell verschiedenen Summen (120) überein. Wir zählen die verschiedenen Strichlisten ab. Jede Liste besteht aus $n+h$ Strichen und beginnt mit einem Trennzeichen. Danach können wir entweder die h römischen Einsen oder die $n-1$ Trennzeichen

aus den $(n + h - 1)$ verbleibenden Strichen frei auswählen. Also existieren $m'(n) = \binom{n+h-1}{h}$ verschiedene Listen, und die Anzahl $m(n)$ der verschiedenen Summen $b_{k_1} + \dots + b_{k_h}$, $k_1, \dots, k_h \in \{0, 1, \dots, n-1\}$ genügt der Abschätzung

$$m(n) \leq m'(n) = \binom{n+h-1}{h}.$$

Damit erhalten wir aus der Ungleichung (121) die obere Schranke (117). Man beachte, daß wir zum Nachweis der Abschätzung (117) nur die Kommutativität der Addition verwendet haben. Jede Basis B h -ter Ordnung genügt gemäß (117) der Ungleichung

$$\frac{B(b_n)}{\sqrt[h]{b_n}} \geq \frac{n}{\sqrt[h]{\binom{n+h-1}{h}}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \sqrt[h]{h!}.$$

Wir können nun zu jedem $m \in \mathbb{N}$ ein $n_m \in \mathbb{N}$ finden, so daß

$$b_{n_m} \leq \binom{n_m+h-1}{h} \leq m \leq \binom{n_m+h}{h}$$

erfüllt ist. Dann sind $B(m) \geq n_m$ und $m \leq \binom{n_m+h}{h}$. Also genügt die Basis B auch der Abschätzung

$$\frac{B(m)}{\sqrt[h]{m}} \geq \frac{B(b_{n_m})}{\sqrt[h]{m}} \geq \frac{n_m}{\sqrt[h]{\binom{n_m+h}{h}}}.$$

Mit $m \rightarrow \infty$ folgt auch $n_m \rightarrow \infty$. Wir erhalten

$$\liminf_{m \rightarrow \infty} \frac{B(m)}{\sqrt[h]{m}} \geq \sqrt[h]{h!},$$

und damit Abschätzung (118). Setzen wir $h = 2$, so ergibt sich

$$\liminf_{m \rightarrow \infty} \frac{B(m)}{\sqrt{m}} \geq \sqrt{2}.$$

Also ist auch Ungleichung (119) gezeigt.

3.2.6 Die Stöhrschen Basen (A. Stöhr, D. Raikov)

In den dreißiger Jahren geben A. Stöhr[8] und D. Raikov[6] unabhängig voneinander die folgende Konstruktion einer Basis h -ter Ordnung an. Setzt man für jedes $i \in \{1, \dots, h\}$

$$B^{(i)} = \left\{ \sum_{j=1}^n \alpha_j 2^j \mid n \in \mathbb{N}_0, \alpha_j \in \{0, 1\}, \alpha_j = 0, \text{ falls } j \not\equiv i \pmod{h} \right\},$$

so besitzt jedes $n \in \mathbb{N}_0$ genau eine Darstellung

$$n = \sum_{i=1}^h b^{(i)}, \quad b^{(i)} \in B^{(i)}.$$

Damit ist die Vereinigung der Mengen $B^{(i)}$

$$B = \bigcup_{i=1}^h B^{(i)}$$

eine Basis h -ter Ordnung. Sie erfüllt die Äquivalenzen

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{B(n)}{\sqrt[h]{n}} = h, \quad (122)$$

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{B(n)}{\sqrt[h]{n}} = \max_{1 \leq i \leq h} \left((i+h) \left(\frac{1-2^{-h}}{2^{i-1}} \right)^{\frac{1}{h}} \right). \quad (123)$$

Weil wir uns hier mit Basen zweiter Ordnung beschäftigen wollen, geben wir obige Werte noch explizit für den Fall $h = 2$ an:

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{B(n)}{\sqrt{n}} = 2, \quad (124)$$

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{B(n)}{\sqrt{n}} = \frac{3}{2}\sqrt{3} = 2,598\dots \quad (125)$$

Beweise für die Aussagen (122)-(125) gibt A. Stöhr[9] an.

Definition. Wir nennen die obige Basis B *Stöhrsche Basis h -ter Ordnung*.

3.2.7 Definition

Wegen der Eigenschaft (123) der Stöhrschen Basis aus 3.2.6 und der für jede Basis h -ter Ordnung gültigen Abschätzung (118) aus 3.2.5 sind also die in den ersten beiden Kapiteln näher betrachteten asymptotischen Dichten die für Basen h -ter Ordnung geeigneten Dichtefunktionen. Daher nehmen wir für Basen B h -ter Ordnung die folgenden Definitionen vor.

Teilweise dünne Basen. Wir nennen die Basis B *teilweise dünn*, wenn ihre untere asymptotische Dichte $\underline{d}_h(B)$ reell ist:

$$\underline{d}_h(B) = \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{B(n)}{\sqrt[h]{n}} < \infty . \quad (126)$$

Dünne Basen. Wir nennen die Basis B *dünn*, wenn ihre obere asymptotische Dichte $\overline{d}_h(B)$ reell ist:

$$\overline{d}_h(B) = \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{B(n)}{\sqrt[h]{n}} < \infty . \quad (127)$$

Gleichmäßig dünne Basen. Wir nennen die Basis B *gleichmäßig dünn*, wenn sie dünn ist und die obere asymptotische Dichte der unteren entspricht:

$$\begin{aligned} \overline{d}_h(B) &= \underline{d}_h(B) < \infty , \\ d_h(B) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{B(n)}{\sqrt[h]{n}} < \infty . \end{aligned} \quad (128)$$

Bemerkung. Die in 3.2.7 vorgenommenen Definitionen von dünnen Basen entsprechen damit den in 1.2.2 für beliebige Mengen benannten und sind deshalb konsistent zur bisherigen Nomenklatur.

3.2.8 Bemerkung

Im weiteren Verlauf untersuchen wir ausschließlich Basen zweiter Ordnung. Wir wollen hier noch die UR-Basen vorstellen, die zurzeit die besten Ergebnisse für die obere asymptotische Dichte von Basen h -ter Ordnung liefern. Sie wurden im Jahr 2003 von V. Blomer[1] eingeführt. Einen detaillierten Beweis zu 3.2.10 findet man ebenfalls in [1].

3.2.9 UR-Basen (V. Blomer)

Eine Basis B h -ter Ordnung heißt *UR-Basis (unique representation basis)*, wenn wir die Basis B in Teilmengen $B^{(1)}, \dots, B^{(h)}$ zerlegen können, die den Bedingungen

$$B = \bigcup_{j=1}^h B^{(j)}, \quad (129)$$

$$|B^{(j)}| = \infty \quad \forall j \in \{1, \dots, h\}, \quad (130)$$

$$\forall n \in \mathbb{N}_0 \text{ gibt es genau eine Darstellung } n = \sum_{j=1}^h b^{(j)}, \quad b^{(j)} \in B^{(j)} \quad (131)$$

genügen. Wegen der eindeutigen Darstellung ist insbesondere $B^{(i)} \cap B^{(j)} = \{0\}$ $\forall i \neq j$. Ein Beispiel für UR-Basen sind die Stöhrschen Basen aus 3.2.6.

3.2.10 Obere asymptotische Dichte von UR-Basen (V. Blomer)

Zu jedem $\varepsilon > 0$ existiert eine UR-Basis B h -ter Ordnung, deren obere asymptotische Dichte der Abschätzung

$$\bar{d}_h(B) \leq \frac{\sqrt[h]{2^h - 1}}{(\sqrt[h]{2} - 1)^{2h} \sqrt[h]{8^{h-1}}} + \varepsilon \quad (132)$$

genügt. Im Falle $h = 2$ erfüllt jede UR-Basis B außerdem

$$\bar{d}_2(B) \geq \frac{\sqrt[2]{2^2 - 1}}{(\sqrt[2]{2} - 1)^{2 \cdot 2} \sqrt[2]{8^{2-1}}} = \frac{\sqrt{3}}{(\sqrt{2} - 1)^4 \sqrt{8}} = 2,486 \dots \quad (133)$$

3.3 Dünne Basen zweiter Ordnung

3.3.1 Einleitung

Wir haben im vorhergehenden Abschnitt dünne Basen kennen gelernt. Bis heute ist nicht bekannt, inwieweit die Stöhrsche Basis B zu einer gleichmäßig dünnen Basis $B \cup E_B$ ergänzt werden kann bzw. welche asymptotische Dichte eine die Stöhrsche Basis umfassende gleichmäßig dünne Basis $B \cup E_B$ mindestens besäße — wenn man einmal die triviale Aussage, daß die asymptotische Dichte der Menge $B \cup E_B$ natürlich größer sein muß als die obere asymptotische Dichte der Stöhrschen Basis B , außer Acht läßt. In diesem Abschnitt wollen wir in 3.3.2 für die Stöhrsche Basis zweiter Ordnung und in 3.3.4 für die von G. Hofmeister[4] in Anlehnung an die Stöhrsche Basis konstruierte dünne Basis zweiter Ordnung zeigen, daß beide Konstruktionen nicht einmal asymptotisch ergänzbar sind.

Offen bleibt allerdings die Frage, ob man die UR-Basen zweiter Ordnung von V. Blomer zu gleichmäßig dünnen Basen ergänzen kann. Vermutlich besitzen UR-Basen zweiter Ordnung keine asymptotischen Ergänzungen.

Bereits mit den Betrachtungen aus den ersten beiden Kapiteln ist die Untersuchung gleichmäßig dünner Basen zweiter Ordnung eine von den dünnen Basen losgelöste, eigenständige Fragestellung. Denn zum einen ist die Forderung nach der Existenz des Limes des Quotienten $\frac{B(n)}{\sqrt{n}}$ eine erheblich stärkere Bedingung als die schlichte Beschränktheit dessen. Zum anderen zeigen die bereits benannten Basen, daß die Minimalisierung der oberen asymptotischen Dichte bisweilen im Widerspruch zur asymptotischen Ergänzzbarkeit steht.

Abschließend stellen wir Resultate von W. Klotz[5] und G. Hofmeister[4] für teilweise dünne Basen zweiter Ordnung sowie eine Abschätzung der oberen asymptotischen Dichte von J. W. S. Cassels[2] vor.

3.3.2 Erstes Hauptresultat I: Zur Stöhrschen Basis

Betrachten wir die Stöhrschen Basen aus 3.2.6 für den Fall $h = 2$, so erhalten wir

$$B^{(1)} = \left\{ \sum_{j=0}^k \beta_j 4^j \mid k \in \mathbb{N}_0, \beta_j \in \{0, 2\} \forall 0 \leq j \leq k \right\},$$

$$B^{(2)} = \left\{ \sum_{j=0}^k \alpha_j 4^j \mid k \in \mathbb{N}_0, \alpha_j \in \{0, 1\} \forall 0 \leq j \leq k \right\},$$

$$B = B^{(1)} \cup B^{(2)},$$

und die Menge B entspricht der Stöhrschen Basis zweiter Ordnung. Wie wir gesehen haben, ist die Stöhrsche Basis eine dünne Basis. Sie besitzt gemäß 3.2.6 (124), (125) die untere bzw. obere asymptotische Dichte

$$\begin{aligned} \underline{d}_2(B) &= 2, \\ \overline{d}_2(B) &= \frac{3\sqrt{3}}{2} = 2,598\dots \end{aligned}$$

Behauptung. Die Pseudo-Dichte der Stöhrschen Basis zweiter Ordnung beträgt unendlich. Also besitzt sie keine asymptotische Ergänzung.

Beweis. Wir wenden die Sätze 1.4.6 und 1.3.2 an. Aus Satz 1.4.6 erhalten wir zunächst eine Abschätzung der Pseudo-Dichte. Durch weitere Überlegungen erhalten wir eine Folge $\left((S_n, s_n)\right)_{n \in \mathbb{N}}$ von Minorantenerzeugern, für die $\delta_2(B, S_n, s_n)$ unbeschränkt ist. Also ist die Pseudo-Dichte der Stöhrschen Basis zweiter Ordnung unendlich, und die Stöhrsche Basis zweiter Ordnung ist nicht asymptotisch ergänzbar.

Wir wollen zunächst die untere Abschätzung (39) der Pseudo-Dichte aus Satz 1.4.6 auf die Stöhrsche Basis zweiter Ordnung anwenden. Dafür benötigen wir einen Minorantenerzeuger (S, s) , der den Konvergenzen

$$\frac{B(s_n)}{\sqrt{s_n}} \rightarrow \underline{d}_2(B) ,$$

$$\frac{B(S_n)}{\sqrt{S_n}} \rightarrow \bar{d}_2(B)$$

genügt. Setzen wir $S_n = \sum_{j=0}^n 4^j$ und $s_n = 4^n$, so erfüllt das Folgenpaar (S, s) die Aussagen

$$S_n = \frac{4^{n+1} - 1}{3} ,$$

$$B(S_n) = B(4^n - 1) + 2^n = 2 \cdot (2^n - 1) + 2^n = 3 \cdot 2^n - 2 ,$$

$$\frac{B(S_n)}{\sqrt{S_n}} \rightarrow \bar{d}_2(B) ,$$

$$s_n = 4^n ,$$

$$B(s_n) = 2 \cdot (2^n - 1) + 1 = 2^{n+1} - 1 ,$$

$$\frac{B(s_n)}{\sqrt{s_n}} \rightarrow \underline{d}_2(B) ,$$

$$\frac{s_n}{S_n} \rightarrow \frac{3}{4} .$$

Damit ist (S, s) ein Minorantenerzeuger, der den in Satz 1.4.6 geforderten Bedingungen genügt. Die untere Abschätzung (39) der Pseudo-Dichte aus Satz 1.4.6 liefert für die Stöhrsche Basis zweiter Ordnung mit $q = \frac{3}{4}$

$$\begin{aligned} \delta_2(B) &\geq \bar{d}_2(B) + \frac{\sqrt{q}}{1 - \sqrt{q}} (\bar{d}_2(B) - \underline{d}_2(B)) \\ &= \frac{3}{2}\sqrt{3} + 2\sqrt{3} \left(1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \left(\frac{3}{2}\sqrt{3} - 2\right) \\ &= 3 + 2\sqrt{3} \\ &> 2\bar{d}_2(B) . \end{aligned}$$

Besäße die Stöhrsche Basis zweiter Ordnung eine asymptotische Ergänzung E_B , so genüge die asymptotische Dichte von $B \cup E_B$ bereits der Abschätzung

$$d_2(B \cup E_B) \geq \delta_2(B) \geq 3 + 2\sqrt{3} .$$

Die Interpretation 1.3.10 der Pseudo-Dichte besagt, daß die Pseudo-Dichte die Mächtigkeit einer Menge gewissermaßen als die maximale, abschnittsweise immer wieder auftretende Vielfachheit der Mächtigkeit der h -ten Potenzen – hier der Quadratzahlen – darstellt. Wir suchen Bereiche der Stöhrschen Basis zweiter Ordnung, in denen diese Vielfachheit möglichst große Werte annimmt. Betrachtet man für beliebige $k, n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned}\Psi_n^{(k)} &= 4^n + \sum_{j=0}^{k-1} 4^j , \\ \psi_n^{(k)} &= 4^n - 1 ,\end{aligned}$$

so enthält die Stöhrsche Basis zweiter Ordnung für $n \geq k$

$$B(\Psi_n^{(k)}) - B(\psi_n^{(k)}) = 2^k$$

Elemente zwischen $\psi_n^{(k)}$ und $\Psi_n^{(k)}$. Wählt man oben ein $k \in \mathbb{N}$ fest aus, so genügt das Folgenpaar $(\Psi^{(k)}, \psi^{(k)})$ der Konvergenz ($n \geq k$)

$$\sqrt{\Psi_n^{(k)}} - \sqrt{\psi_n^{(k)}} = \sqrt{4^n + \frac{4^k - 1}{3}} - \sqrt{4^n - 1} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 .$$

Wir erhalten also für $n \geq k$

$$\frac{B(\Psi_n^{(k)}) - B(\psi_n^{(k)})}{\sqrt{\Psi_n^{(k)}} - \sqrt{\psi_n^{(k)}}} = \frac{2^k}{\sqrt{4^n + \frac{4^k - 1}{3}} - \sqrt{4^n - 1}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty .$$

Damit haben wir Intervalle $[\psi_n^{(k)}, \Psi_n^{(k)}]$ gefunden, in denen die Mächtigkeit der Stöhrschen Basis zweiter Ordnung beliebig vielfach größer ist als die Mächtigkeit der Quadratzahlen. Allerdings ist das Folgenpaar $(\Psi^{(k)}, \psi^{(k)})$ wegen

$$\frac{\psi_n^{(k)}}{\Psi_n^{(k)}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1$$

kein Minorantenerzeuger. Man beachte, daß die $\Psi_n^{(k)}$ im Falle $k = n$ gerade den zuvor für die Anwendung von Satz 1.4.6 gewählten S_n entsprechen. Denn es ist $S_n = \Psi_n^{(n)}$. Anstelle von $(\Psi^{(k)}, \psi^{(k)})$ wählen wir

$$S_n^{(k)} = 4^n + \sum_{j=0}^{n-(k+1)} 4^j ,$$

$$s_n^{(k)} = 4^n - 1 .$$

Dann beinhalten auch die Folgenpaare $(S^{(k)}, s^{(k)})$ die zuvor benannten Intervalle mit beliebig großer Vielfachheit der Mächtigkeit für geeignete k und n .

Weil jedes Folgenpaar $(S^{(k)}, s^{(k)})$ den Aussagen

$$S_n^{(k)} = 4^n + \frac{1}{3} (4^{n-k} - 1) \quad \forall n \geq k ,$$

$$\frac{s_n^{(k)}}{S_n^{(k)}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{3} 4^{-k}\right)^{-1} < 1$$

genügt, ist es ein Minorantenerzeuger, der die Äquivalenzen

$$B(S_n^{(k)}) - B(s_n^{(k)}) = 2^{n-k} \quad \forall n \geq k ,$$

$$q^{(k)} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{s_n^{(k)}}{S_n^{(k)}} = \left(1 + \frac{1}{3} 4^{-k}\right)^{-1}$$

erfüllt. Wir bestimmen nun $\delta_2(B, S^{(k)}, s^{(k)})$ aus Satz 1.3.2. Zunächst ist

$$\begin{aligned} \delta_2^o(B, S^{(k)}, s^{(k)}) &= \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{B(S_n^{(k)}) - B(s_n^{(k)})}{\sqrt{S_n^{(k)}}} \\ &= \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{n-k}}{2^n \sqrt{1 + \frac{1}{3} (4^{-k} - 4^{-n})}} \\ &= \left(4^k + \frac{1}{3}\right)^{-\frac{1}{2}} , \end{aligned}$$

und wir erhalten

$$\delta_2(B, S^{(k)}, s^{(k)}) = \frac{\delta_2^o(B, S^{(k)}, s^{(k)})}{1 - \sqrt{q^{(k)}}}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{\sqrt{4^k + \frac{1}{3}}} \cdot \frac{1}{1 - (1 + \frac{1}{3}4^{-k})^{-\frac{1}{2}}} \\
&= \left(\sqrt{4^k + \frac{1}{3}} - \sqrt{4^k} \right)^{-1} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \infty.
\end{aligned}$$

Aufgrund der Definition 1.3.5 der Pseudo-Dichte ist $\delta_2(B, S^{(k)}, s^{(k)})$ für jedes $k \in \mathbb{N}$ eine untere Abschätzung der Pseudo-Dichte der Stöhrschen Basis zweiter Ordnung. Also beträgt die Pseudo-Dichte der Stöhrschen Basis zweiter Ordnung wegen der obigen Konvergenz

$$\delta_2(B) = \infty.$$

Insbesondere kann die Stöhrsche Basis zweiter Ordnung keine asymptotische Ergänzung besitzen.

3.3.3 Bemerkung

Bezeichnen wir eine Menge C als dünner als eine Menge D , wenn sie $\bar{d}_h(C) < \bar{d}_h(D)$ genügt, so war die Stöhrsche Basis zweiter Ordnung für lange Zeit die dünnste, uns bekannte Basis zweiter Ordnung. Sie wurde erst 2001 durch die Konstruktion 3.3.4 von G. Hofmeister[4] übertroffen. Schließlich gelingt es V. Blomer[1] 2003 mit Hilfe der UR-Basen aus 3.2.9 und 3.2.10 die bis heute dünnste, uns bekannte Basis zweiter Ordnung zu konstruieren.

3.3.4 Erstes Hauptresultat II: Zu einer von G. Hofmeister konstruierten dünnen Basis

G. Hofmeister[4] wandelt die Stöhrsche Basis wie folgt ab. Er setzt

$$B^{(1)} = \left\{ \sum_{j=0}^k \alpha_j 4^j \mid k \in \mathbb{N}_0, \alpha_{2j} \in \{0, 1\}, \alpha_{2j+1} \in \{0, 2\} \right\},$$

$$B^{(2)} = \left\{ \sum_{j=0}^k \beta_j 4^j \mid k \in \mathbb{N}_0, \beta_{2j} \in \{0, 2\}, \beta_{2j+1} \in \{0, 1\} \right\},$$

$$B = B^{(1)} \cup B^{(2)}.$$

Im Vergleich zur Stöhrschen Basis wird gewissermaßen nur die Verteilung der Koeffizienten zwischen den Grundmengen verändert. Wie die Stöhrsche Basis ist auch die Menge B aufgrund der 4-adischen Darstellbarkeit ganzer Zahlen eine Basis zweiter Ordnung. Die untere bzw. obere asymptotische Dichte der Basis B beträgt

$$\underline{d}_2(B) = 2,$$

$$\overline{d}_2(B) = 2 \sqrt{\frac{5}{3}} = 2,581 \dots$$

G. Hofmeister[4] zeigt, daß keine andere Anordnung der Koeffizienten innerhalb der Grundmengen $B^{(1)}$ und $B^{(2)}$ zu einer Verringerung der oberen asymptotischen Dichte führt. Also ist der 4-adische Ansatz bezüglich der oberen asymptotischen Dichte erschöpft.

Behauptung. Auch die Pseudo-Dichte der Basis B ist unendlich. Damit ist die Basis B nicht asymptotisch ergänzbar.

Beweis. Wählen wir in Anlehnung zu Satz 3.3.2

$$S_n^{(k)} = 4^n + 4^{n-2k} + 2 \cdot 4^{n-(2k+1)} + 4^{n-(2k+2)} + 2 \cdot 4^{n-(2k+3)} + \dots,$$

$$s_n^{(k)} = 4^n - 1 \quad \forall n \geq 2k,$$

so ist das Folgenpaar $(S^{(k)}, s^{(k)})$ wiederum für jedes $k \in \mathbb{N}$ ein Minoranten-erzeuger. Denn es sind

$$S_n^{(k)} = 4^n + \frac{2}{5} 4^{n+1-2k} - \frac{\delta_n + 2}{5} \quad \forall n \geq 2k,$$

$$q^{(k)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{s_n^{(k)}}{S_n^{(k)}} = \left(1 + \frac{2}{5} 4^{-2k+1}\right)^{-1} < 1,$$

wobei $\delta_n \in \{0, 1\}$ ist. Wir bestimmen erneut die gemäß Satz 1.3.2 durch die Minorantenerzeuger $(S^{(k)}, s^{(k)})$ gegebenen, unteren Schranken $\delta_2(B, S^{(k)}, s^{(k)})$ der Pseudo-Dichte der Basis B. Dabei beachten wir, daß die Minorantenerzeuger $(S^{(k)}, s^{(k)})$ für $n \geq 2k$ den Aussagen

$$B(S_n^{(k)}) - B(s_n^{(k)}) = 2^{n+1-2k} ,$$

$$S_n^{(k)} \cong 4^n \frac{1}{q_n^{(k)}} ,$$

$$\delta_2^o(B, S^{(k)}, s^{(k)}) = 2 \cdot 4^{-k} \sqrt{q^{(k)}}$$

genügen. Dann erhalten wir

$$\begin{aligned} \delta_2(B, S^{(k)}, s^{(k)}) &= 2 \cdot 4^{-k} \frac{\sqrt{q^{(k)}}}{1 - \sqrt{q^{(k)}}} \\ &= 2 \cdot 4^{-k} \left(\frac{1}{\sqrt{q^{(k)}}} - 1 \right)^{-1} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \infty , \end{aligned}$$

wenn man dabei noch die folgende Schlußkette beachtet:

$$\begin{aligned} q^{(k)} &= \left(1 + \frac{2}{5} 4^{-2k+1} \right)^{-1} < 1 \\ \Rightarrow \quad 1 &< \frac{1}{q^{(k)}} < 1 + \frac{2}{5} 4^{-2k+1} + \left(\frac{1}{5 \cdot 4^{2k-1}} \right)^2 \\ \Rightarrow \quad 1 &< \frac{1}{\sqrt{q^{(k)}}} < 1 + \frac{1}{5 \cdot 4^{2k-1}} \\ \Leftrightarrow \quad 0 &< 4^k \left(\frac{1}{\sqrt{q^{(k)}}} - 1 \right) < \frac{1}{5 \cdot 4^{k-1}} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0 \\ \Rightarrow \quad \delta_2(B, S^{(k)}, s^{(k)}) &\xrightarrow{k \rightarrow \infty} \infty . \end{aligned}$$

Also ist auch die Pseudo-Dichte der dünnen Basis B zweiter Ordnung von G. Hofmeister unbeschränkt, d.h. es gilt $\delta_2(B) = \infty$. Insbesondere besitzt die Basis B keine asymptotische Ergänzung.

3.3.5 Bemerkung

Für die in 3.2.9 und 3.2.10 vorgestellten UR-Basen zweiter Ordnung bleibt die Frage nach der asymptotischen Ergänzzbarkeit im allgemeinen offen. Man beachte allerdings, daß sowohl die in 3.3.2 betrachtete Stöhrsche Basis zweiter Ordnung als auch die in 3.3.4 untersuchte Konstruktion von G. Hofmeister den Voraussetzungen 3.2.9 (129)-(131) genügen und daher UR-Basen sind. Wie zuvor gesehen sind diese beiden Basen nicht asymptotisch ergänzbar. Wir wollen daher folgende Vermutung aufstellen:

3.3.6 Zur asymptotischen Ergänzzbarkeit von UR-Basen zweiter Ordnung

Hypothese. UR-Basen zweiter Ordnung sind nicht asymptotisch ergänzbar.

3.3.7 Bemerkung

Zum Abschluß dieses Abschnitts wollen wir ergänzend zu Abschnitt 3.2 Abschätzungen der unteren und oberen asymptotischen Dichte für Basen zweiter Ordnung vorstellen. Der Vollständigkeit halber seien die Ergebnisse für Basen zweiter Ordnung von V. Blomer[1] aus 3.2.10 nochmals genannt:

Zu jedem $\varepsilon > 0$ existiert eine dünne UR-Basis B zweiter Ordnung, deren obere asymptotische Dichte der Abschätzung

$$\bar{d}_2(B) \leq \frac{\sqrt{3}}{(\sqrt{2}-1)\sqrt[4]{8}} + \varepsilon = 2,486\dots + \varepsilon$$

genügt. Jede UR-Basis B zweiter Ordnung erfüllt

$$\bar{d}_2(B) \geq \frac{\sqrt{3}}{(\sqrt{2}-1)\sqrt[4]{8}} = 2,486\dots$$

Bereits die Stöhrsche Basis B weist eine gegenüber den dünnsten UR-Basen nur unwesentlich größere obere asymptotische Dichte auf. Sie beträgt $\bar{d}_2(B) = 2,598\dots$ und liegt damit nicht einmal fünf Prozent oberhalb der oberen asymptotischen Dichte $2,486\dots$ der dünnsten UR-Basen. Allerdings betrug die durch G. Hofmeister erzielte Verbesserung der oberen asymptotischen Dichte auf $2,581\dots$ weniger als ein Prozent. Insofern ist die V. Blomer gelungene Verringerung der oberen asymptotischen Dichte um mehr als dreieinhalb Prozent nicht zu unterschätzen.

Gemäß 3.3.8 (134) beträgt die obere asymptotische Dichte einer Basis zweiter Ordnung mindestens $1,595\dots$. Die bis heute mit den UR-Basen erreichte obere asymptotische Dichte liegt mehr als fünfzig Prozent darüber. Zwischen der Abschätzung und der erzielten oberen asymptotischen Dichte klafft also eine durchaus große Lücke. Allerdings erhält man die untere Schranke mit Hilfe eines leicht zugänglichen, kombinatorischen Argumentes ähnlich der Abschätzung 3.2.5 (119). Von daher sollten wir die untere Abschätzung $1,595\dots$ der oberen asymptotischen Dichte als eine eher grobe Orientierung ansehen. Insbesondere sollten wir die mit den UR-Basen erzielte obere asymptotische Dichte näher an der bestenfalls erreichbaren vermuten als Abschätzung 3.3.8 (134).

3.3.8 Eine untere Schranke für die obere asymptotische Dichte von Basen zweiter Ordnung (J. W. S. Cassels)

Im Jahre 1957 gibt J. W. S. Cassels[2] die folgende untere Abschätzung für die obere asymptotische Dichte einer Basis B zweiter Ordnung an:

$$\bar{d}_2(B) \geq \sqrt{\frac{8}{\pi}} = 1,595\dots \quad (134)$$

3.3.9 Eine Abschätzung für die untere asymptotische Dichte von Basen zweiter Ordnung (W. Klotz)

W. Klotz[5] gibt im Rahmen der Betrachtung von Extremalbasen zweiter Ordnung die beste bis heute uns bekannte, untere Abschätzung für die untere asymptotische Dichte Basis B zweiter Ordnung an:

$$\underline{d}_2(B) \geq \sqrt{\frac{2}{1 - 0,0369\dots}} = 1,441\dots \quad (135)$$

3.3.10 Bemerkung

Die Abschätzung 3.3.9 (135) entwickelte W. Klotz[5] im Jahre 1969 bei der Untersuchung der Reichweite der benannten Extremalbasen zweiter Ordnung. Sie ist gerade einmal circa zwei Prozent besser als die offensichtlich gegebene untere Schranke 3.2.5 (119). Der für diese recht bescheidene Verbesserung benötigte Aufwand ist allerdings extensiv. Ein weiterer Fortschritt ist bis heute nicht gelungen. Man beachte auch, daß die Abschätzung 3.3.8 (134) für die obere asymptotische Dichte nur ungefähr zehn Prozent größer ist als die untere Schranke 3.3.9 (135) für die untere asymptotische Dichte.

3.3.11 Teilweise dünne Basen zweiter Ordnung (G. Hofmeister)

G. Hofmeister[4] gelingt es 2001, zu jedem $\varepsilon > 0$ dünne Basen C zweiter Ordnung mit unterer asymptotischen Dichte

$$\underline{d}_2(C) = 3\sqrt{\frac{2}{5}} + \varepsilon = 1,897\dots + \varepsilon \quad (136)$$

anzugeben. Ferner konstruiert er eine teilweise dünne Basis B mit unterer asymptotischen Dichte

$$\underline{d}_2(B) = \sqrt{\frac{7}{2}} = 1,870\dots \quad (137)$$

3.3.12 Bemerkung

Die untere asymptotische Dichte der Basen aus 3.3.11 liegt circa dreißig Prozent über der Schranke 3.3.9 (135) und ungefähr sechseinhalb Prozent unter der unteren asymptotischen Dichte der Stöhrschen Basis. Bis heute ist es noch nicht gelungen, eine teilweise dünne Basis zu finden, deren untere asymptotische Dichte zumindest unterhalb der Abschätzung 3.3.8 (134) für die obere asymptotische Dichte liegt: Die untere asymptotische Dichte der Basen aus 3.3.11 ist ungefähr siebzehn Prozent größer als die untere Schranke 3.3.8 (134) für die obere asymptotische Dichte. Man beachte dabei allerdings, daß 3.3.8 (134) nur als grobe Orientierung angesehen werden kann.

Das abschließende Ziel dieser Arbeit ist es, die asymptotische Dichte von gleichmäßig dünnen Basen zweiter Ordnung zu verbessern. Mit den Betrachtungen über die Stöhrsche Basis 3.3.2 und über die Konstruktion 3.3.4 von G. Hofmeister besitzen die zwei ehemals dünnsten, uns bekannten Basen zweiter Ordnung nicht einmal eine asymptotische Ergänzung. Also ist die Forderung nach der Existenz der asymptotischen Dichte bei der Untersuchung von Basen zweiter Ordnung nicht nur in der Theorie sondern auch in der Praxis eine wesentlich stärkere Bedingung als die bloße Beschränktheit des Quotienten $\frac{B(n)}{\sqrt{n}}$ einer dünnen Basis.

3.4 Gleichmäßig dünne Basen zweiter Ordnung

3.4.1 Einleitung

Im Abschnitt 3.4 wollen wir näher auf gleichmäßig dünne Basen zweiter Ordnung eingehen. Während für dünne Basen B zweiter Ordnung nur die Beschränktheit des Quotienten $\frac{B(n)}{\sqrt{n}}$ benötigt wird, resultiert aus der Forderung der Existenz des Grenzwertes - wie in den ersten beiden Kapiteln gesehen - eine den Quadratzahlen ähnelnde Verteilung der Elemente für gleichmäßig dünne Basen. Insofern ist die Anordnung der Elemente bei gleichmäßig dünnen Basen von einer natürlicheren Art, da Häufungen von und Lücken zwischen Elementen nur in eingeschränktem Umfang möglich sind. Ferner haben wir im letzten Abschnitt gesehen, daß dünne Basen im allgemeinen nicht zu gleichmäßig dünnen Basen ergänzt werden können.

Wir wollen hier einen kurzen Überblick in die Konstruktionsweise der gleichmäßig dünnen Basen von J. W. S. Cassels[2] und G. Hofmeister[4] vermitteln. Dann folgt das zweite Hauptresultat: Beiden Basen unterliegt eine dünne Basis, deren Pseudo-Dichte mit der asymptotischen Dichte der gleichmäßig dünnen Basis übereinstimmt. Die asymptotische Ergänzung der Konstruktionen ist also jeweils optimal zur enthaltenen dünnen Basis. Sowohl J. W. S. Cassels als auch G. Hofmeister verwenden zur Erzeugung der asymptotischen Ergänzung das Lemma von Cassels 1.2.7.

Wir betrachten zu Beginn des Abschnitts, wie man mit Hilfe der Addition zweier arithmetischer Progressionen einen geschlossenen Bereich natürlicher Zahlen erzeugen kann. Dieses Konzept fließt letztlich in die Konstruktionen von J. W. S. Cassels und G. Hofmeister ein.

3.4.2 Lemma

Voraussetzung. Es seien teilerfremde $m_1, m_2 \in (\mathbb{N} \setminus \{1\})$ sowie $\tilde{b}_1, \tilde{b}_2 \in \mathbb{N}$ mit $m_1 \mid \tilde{b}_1$ und $m_2 \mid \tilde{b}_2$ gegeben. Ferner seien $\frac{\tilde{b}_1}{m_1} \geq m_2 - 1$ und $\frac{\tilde{b}_2}{m_2} \geq m_1 - 1$.

Behauptung. Die durch

$$\begin{aligned}\tilde{P}_1 &= [0, (m_1), \tilde{b}_1] , \\ \tilde{P}_2 &= [0, (m_2), \tilde{b}_2] , \\ \tilde{I} &= [m_1 m_2, \tilde{b}_1 + \tilde{b}_2 - m_1 m_2]\end{aligned}$$

gegebenen arithmetischen Progressionen $\tilde{P}_1$, $\tilde{P}_2$ und $\tilde{I}$ genügen der Aussage

$$\tilde{I} \subseteq \tilde{P}_1 + \tilde{P}_2 . \quad (138)$$

Bemerkung. Durch Translation der arithmetischen Progression $\tilde{P}_1$ um $a_1 \in \mathbb{N}_0$ und von $\tilde{P}_2$ um $a_2 \in \mathbb{N}_0$ erhalten wir vermöge $b_1 = \tilde{b}_1 + a_1$, $b_2 = \tilde{b}_2 + a_2$ mit den Definitionen

$$\begin{aligned}P_1 &= [a_1, (m_1), b_1] , \\ P_2 &= [a_2, (m_2), b_2] , \\ I &= [a_1 + a_2 + m_1 m_2, b_1 + b_2 - m_1 m_2]\end{aligned}$$

die Gültigkeit der Aussage

$$I \subseteq P_1 + P_2 . \quad (139)$$

Man beachte, daß wir die Aussagen der Bemerkung unter der entsprechend anzupassenden Voraussetzung $m_1 \mid (b_1 - a_1)$, $m_2 \mid (b_2 - a_2)$ direkt anwenden können. Es sei vermerkt, daß die arithmetische Progression I bei genauerer Untersuchung noch etwas umfassender gewählt werden kann.

Beweis. Für teilerfremde Tupel $(c_1, \dots, c_r) \in \mathbb{N}^r$ wird die größte ganze Zahl $g(c_1, \dots, c_r)$, die keine Darstellung

$$\sum_{i=1}^r x_i c_i, \quad x_i \in \mathbb{N}_0, \quad i = 1, \dots, r$$

besitzt, als *Frobeniuszahl* von $c_1, \dots, c_r$ bezeichnet. Für $r = 2$ lautet sie

$$g(c_1, c_2) = (c_1 - 1)(c_2 - 1) - 1 < c_1 c_2.$$

Also besitzt jede Zahl $t > g(m_1, m_2)$ eine Darstellung

$$t = x_1 m_1 + x_2 m_2, \quad x_1, x_2 \in \mathbb{N}_0.$$

Wir schließen für jedes t nun $t \in (\tilde{P}_1 + \tilde{P}_2)$ oder $t \notin \tilde{I}$. Dann folgt (138).

1.Fall: $\mathbf{x}_1 \mathbf{m}_1 \leq \tilde{\mathbf{b}}_1$, $\mathbf{x}_2 \mathbf{m}_2 \leq \tilde{\mathbf{b}}_2$. Dann sind $x_1 m_1 \in \tilde{P}_1$ und $x_2 m_2 \in \tilde{P}_2$. Also ist $t = x_1 m_1 + x_2 m_2 \in (\tilde{P}_1 + \tilde{P}_2)$.

2.Fall: $\mathbf{x}_1 \mathbf{m}_1 > \tilde{\mathbf{b}}_1$. Wir unterscheiden weiter

2.1 $\mathbf{x}_2 \mathbf{m}_2 > \tilde{\mathbf{b}}_1 + \tilde{\mathbf{b}}_2 - (\mathbf{x}_1 + \mathbf{m}_2) \mathbf{m}_1$. Dann ist $t \notin \tilde{I}$:

$$t = x_1 m_1 + x_2 m_2 > x_1 m_1 + \tilde{b}_1 + \tilde{b}_2 - (x_1 + m_2) m_1 = \tilde{b}_1 + \tilde{b}_2 - m_1 m_2.$$

2.2 $\mathbf{x}_2 \mathbf{m}_2 \leq \tilde{\mathbf{b}}_1 + \tilde{\mathbf{b}}_2 - (\mathbf{x}_1 + \mathbf{m}_2) \mathbf{m}_1$. Wir wählen $k \in \mathbb{N}$ minimal, für das $(x_1 - k m_2) m_1 \leq \tilde{b}_1$ erfüllt ist. Dann besitzt t auch die Darstellung

$$t = (x_1 - k m_2) m_1 + (x_2 + k m_1) m_2.$$

Ist nun $(x_2 + k m_1) m_2 \notin \tilde{P}_2$, so folgt $(x_2 + k m_1) m_2 > \tilde{b}_2$. Aufgrund der Wahl von k ist $(x_1 - k m_2) m_1 > \tilde{b}_1 - m_1 m_2$. Wir erhalten

$$t = (x_1 - k m_2) m_1 + (x_2 + k m_1) m_2 > \tilde{b}_1 + \tilde{b}_2 - m_1 m_2,$$

also $t \notin \tilde{I}$. Ist $(x_2 + k m_1) m_2 \in \tilde{P}_2$, so ist wegen $(x_1 - k m_2) m_1 \in \tilde{P}_1$ wieder $t \in (\tilde{P}_1 + \tilde{P}_2)$ erfüllt.

3.Fall: $\mathbf{x}_2 \mathbf{m}_2 > \tilde{\mathbf{b}}_2$. Durch Vertauschen auf Fall 2 zurück zu führen.

3.4.3 Zur gleichmäßig dünnen Basis von J. W. S. Cassels

Im Jahre 1957 gelingt es erstmals, die Existenz einer gleichmäßig dünnen Basis zweiter Ordnung zu zeigen. J. W. S. Cassels[2] konstruiert eine Basis C zweiter Ordnung mit asymptotischer Dichte

$$d_2(C) = 3\sqrt{3} = 5,196 \dots \quad (140)$$

Mit Hilfe einer Folge $(q_n)_{n \in \mathbb{N}}$ von natürlichen Zahlen, die den Bedingungen

$$q_1 = 1, \quad (141)$$

$$(q_j, q_{j+1}) = (q_j, q_{j+2}) = 1, \quad (142)$$

$$q_{j-1}(q_j + q_{j+1}) + q_j(q_{j+1} + q_{j+2}) \leq q_{j+1}(q_{j+2} + q_{j+3}) \quad (143)$$

für alle $j \geq 2$ genügen, setzt J. W. S. Cassels

$$\begin{aligned} Q_1 &= 0, \\ Q_j &= \sum_{1 \leq i \leq j} q_{i-1}(q_i + q_{i+1}), \\ c_j^{(k)} &= Q_j + kq_j \quad \forall k \in \{0, 1, \dots, q_{j+1} + q_{j+2} - 1\}, \\ C_0 &= \bigcup_{j=1}^{\infty} \{c_j^{(k)} \mid k \in \{0, 1, \dots, q_{j+1} + q_{j+2} - 1\}\}. \end{aligned} \quad (144)$$

Dann ist die Menge C_0 eine Basis zweiter Ordnung.

Beweis. Betrachten wir die gemäß Definition (144) gegebenen Zahlen $c_j^{(k)}$, so entsprechen diese für jedes $j \in \mathbb{N}$ der arithmetischen Progression

$$P_j = [Q_j, (q_j), Q_{j+1}],$$

wenn wir dabei noch die Definition der Zahlen Q_{j+1} berücksichtigen. Setzen wir ferner für $j \geq 2$

$$\begin{aligned} I_j^{(1)} &= [a_j^{(1)}, b_j^{(1)}] = [Q_j + Q_{j+1} + q_j q_{j+1}, Q_{j+1} + Q_{j+2} - q_j q_{j+1}], \\ I_j^{(2)} &= [a_j^{(2)}, b_j^{(2)}] = [Q_j + Q_{j+2} + q_j q_{j+2}, Q_{j+1} + Q_{j+3} - q_j q_{j+2}], \end{aligned}$$

so sind die arithmetischen Progressionen $I_j^{(1)}$ und $I_j^{(2)}$ gemäß Lemma 3.4.2 in den Additionen $P_j + P_{j+1}$ und $P_j + P_{j+2}$ enthalten:

$$\begin{aligned} I_j^{(1)} &= [a_j^{(1)}, b_j^{(1)}] \subseteq P_j + P_{j+1} , \\ I_j^{(2)} &= [a_j^{(2)}, b_j^{(2)}] \subseteq P_j + P_{j+2} . \end{aligned}$$

Dabei ist zum einen

$$\begin{aligned} b_j^{(1)} &= Q_{j+1} + Q_{j+2} - q_j q_{j+1} \\ &= Q_j + Q_{j+2} + q_j(q_{j+1} + q_{j+2}) - q_j q_{j+1} \\ &= Q_j + Q_{j+2} + q_j q_{j+2} \\ &= a_j^{(2)} \end{aligned}$$

und zum anderen

$$\begin{aligned} b_j^{(2)} &= Q_{j+1} + Q_{j+3} - q_j q_{j+2} \\ &= Q_{j+1} + Q_{j+2} + q_{j+2}(q_{j+3} + q_{j+4}) - q_j q_{j+2} \\ &\geq Q_{j+1} + Q_{j+2} + q_{j+1}(q_{j+2} + q_{j+3}) + q_j(q_{j+1} + q_{j+2}) - q_j q_{j+2} \\ &\geq Q_{j+1} + Q_{j+2} + q_{j+1} q_{j+2} \\ &= a_{j+1}^{(1)} . \end{aligned}$$

Also entspricht der Endpunkt $b_j^{(1)}$ der arithmetischen Progression $I_j^{(1)}$ dem Anfangspunkt $a_j^{(2)}$ der arithmetischen Progression $I_j^{(2)}$, und der Endpunkt $b_j^{(2)}$ der arithmetischen Progression $I_j^{(2)}$ ist größer gleich dem Anfangspunkt $a_{j+1}^{(1)}$ der arithmetischen Progression $I_{j+1}^{(1)}$. Mit den arithmetischen Progressionen $P_1 = [0, Q_2]$, $P_2 = [Q_2, (q_2), Q_3]$ und $P_3 = [Q_3, (q_3), Q_4]$ ist unter Beachtung von $Q_2 = q_2 + q_3$ nun $I_1 = [0, Q_4 + q_2 + q_3] \subseteq (P_1 + (P_2 \cup P_3))$. Mit der Voraussetzung (143) ist schließlich $Q_4 \geq a_2^{(1)}$. Wir erhalten daher

$$I_0 \subseteq \left(I_1 \cup \left(\bigcup_{j=2}^{\infty} (I_j^{(1)} \cup I_j^{(2)}) \right) \right) \subseteq (C_0 + C_0) .$$

Also ist die Menge C_0 unter den gegebenen Voraussetzungen eine Basis zweiter Ordnung. Allerdings muß für die Existenz solcher Basen noch das Vorhandensein von Folgen $(q_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit den Eigenschaften (141)-(143) gezeigt werden.

J. W. S. Cassels gelingt es, zu jedem $q < 1$ Folgen $(q_n)_{n \in \mathbb{N}}$ nachzuweisen, die den Bedingungen $\frac{q_{n-1}}{q_n} \rightarrow q$ und (141)-(143) genügen. Ferner zeigt er, daß die mit solchen Folgen erzeugten Basen $C_0 = \{c_0^* < c_1^* < \dots\}$ die Aussage

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{c_n^*}{(c_{n+1}^* - c_n^*)^2} = \frac{1}{q^2(1-q)}$$

erfüllen.

Die arithmetischen Progressionen P_j bilden eine separierte Progressionenschar $P = \bigcup_{j=1}^{\infty} P_j$, die den Voraussetzungen des Satzes 2.3.8 genügt. Wir beachten die Bemerkung 2.3.9 zum Satz 2.3.8. Danach ist die Abschätzung der Pseudo-Dichte durch das Lemma von Cassels für die separierte Progressionenschar scharf. Also können wir es auch in der Form 2.3.3 zur Berechnung der Pseudo-Dichte heranziehen. Wir erhalten mit den Aussagen 2.3.3 (95) und (96)

$$\delta_2(C_0) = 2 \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{c_n^*}}{c_{n+1}^* - c_n^*} = \frac{2}{q\sqrt{1-q}}.$$

Damit können wir die von J. W. S. Cassels betrachteten Basen C_0 gerade zu gleichmäßig dünnen Basen C ergänzen, die die asymptotische Dichte

$$d_2(C) = \frac{2}{q\sqrt{1-q}}.$$

besitzen. Dabei ist die asymptotische Ergänzung $E_{C_0} = C \setminus C_0$ bereits optimal zur Basis C_0 gewählt.

Untersuchen wir die Pseudo-Dichte als Funktion in q , so erhalten wir die minimale Pseudo-Dichte genau für den Fall $q = \frac{2}{3}$. Sie beträgt dann

$$\delta_2(C_0) = 3\sqrt{3} = 5,196 \dots$$

Also erhalten wir aus der Konstruktion von J. W. S. Cassels gleichmäßig dünne Basen C mit einer minimalen asymptotischen Dichte von

$$d_2(C) = 3\sqrt{3} = 5,196 \dots$$

Wir betrachten abschließend die ersten zehn arithmetischen Progressionen einer mit Hilfe des obigen Verfahrens konstruierten Basis zweiter Ordnung. Dabei wollen wir q gerade so wählen, daß die Basis die asymptotische Dichte $d_2(C) = 3\sqrt{3}$ besitzt. Dann müssen wir $q = \frac{2}{3}$ setzen und als mögliche Wahl der q_i ergeben sich zum Beispiel $q_1 = 1, q_2 = 2, q_3 = 3, q_4 = 5, q_5 = 7, q_6 = 8, q_7 = 11, q_8 = 17, q_9 = 26, q_{10} = 37, q_{11} = 57$ und $q_{12} = 86$. Wir erhalten die folgenden arithmetischen Progressionen:

$$\begin{aligned} P_1 &= [0, (1), 5] , & P_6 &= [265, (8), 489] , \\ P_2 &= [5, (2), 21] , & P_7 &= [489, (11), 962] , \\ P_3 &= [21, (3), 57] , & P_8 &= [962, (17), 2033] , \\ P_4 &= [57, (5), 132] , & P_9 &= [2033, (26), 4477] , \\ P_5 &= [132, (7), 265] , & P_{10} &= [4477, (37), 9768] . \end{aligned}$$

Wir beachten insbesondere, daß mit den von Cassels nachgewiesenen Folgen $(q_n)_{n \in \mathbb{N}}$ keine weitere Verbesserung der asymptotischen Dichte möglich ist, weil die hier erzielte asymptotische Dichte mit der Pseudo-Dichte der zur Konstruktion benutzten dünnen Basis übereinstimmt. Dieses Resultat wollen wir auch explizit festhalten.

3.4.4 Zweites Hauptresultat I: Pseudo-Dichte gleichmäßig dünner Basen zweiter Ordnung nach J. W. S. Cassels

Jede nach J. W. S. Cassels gemäß 3.4.3 mit Hilfe eines $q = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{q_{n-1}}{q_n} < 1$ konstruierte (gleichmäßig) dünne Basis C zweiter Ordnung genügt bezüglich ihrer Pseudo-Dichte (asymptotischen Dichte) der Gleichung

$$\begin{aligned} \delta_2(C) &= \frac{2}{q\sqrt{1-q}} \\ \left(d_2(C) &= \frac{2}{q\sqrt{1-q}} \right). \end{aligned} \quad (145)$$

Insbesondere erhält man die stets gültige untere Schranke

$$\begin{aligned} \delta_2(C) &\geq 3\sqrt{3} = 5,196\dots \\ \left(d_2(C) &\geq 3\sqrt{3} = 5,196\dots \right). \end{aligned} \quad (146)$$

3.4.5 Zur gleichmäßig dünnen Basis von G. Hofmeister

Im Jahre 2001 gelingt es G. Hofmeister[4], eine gleichmäßig dünne Basis H zweiter Ordnung mit asymptotischer Dichte $d(H) = \frac{10}{\sqrt{6}} \sqrt[4]{\frac{5}{3}} = 4,638\dots$ anzugeben. Wie J. W. S. Cassels betrachtet auch G. Hofmeister Summenmengen einer Folge $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ von arithmetischen Progressionen. Dabei wählt auch G. Hofmeister eine Folge von Schrittweiten m_n , die der Konvergenz $\frac{m_n}{m_{n+1}} \rightarrow q < 1$ genügt. Allerdings betrachtet G. Hofmeister nicht nur die Summenmengen der Form $P_n + P_{n+1}$ und $P_n + P_{n+2}$ sondern allgemeiner bei vorgegebenem natürlichen $k \geq 3$ die Summenmengen

$$P_n + P_{n-i} \quad \forall i = 1, \dots, k.$$

Zu gegebenem $\beta > 1$ sei dazu

$$q_n = \max_{p \in \mathbb{P}} \{p \leq \beta^n - 1\} \quad \forall n \in \mathbb{N} .$$

Dann existiert ein $n_0 \in \mathbb{N}$, so daß

$$\left(1 - \frac{1}{\sqrt{n \log \beta}}\right) \beta^n \leq q_n \leq \beta^n \quad \forall n \geq n_0$$

erfüllt ist. Also ist die Folge $(q_n)_{n \in \mathbb{N}}$ für hinreichend große n eine Folge streng monoton wachsender Primzahlen. Einen Ansatz zum Beweis findet man zum Beispiel bei H. Scheid[7]. Mit einem $\alpha > 0$ und den Definitionen

$$\begin{aligned} l_n &= \left\lfloor \frac{\beta^k \beta^{2n}}{q_n} \right\rfloor - 1 , \\ a_n &= \lceil \alpha \beta^{2n} \rceil , \\ b_n &= a_n + l_n q_n \end{aligned}$$

für alle $n \geq n_0$ setzen wir

$$P_n = [a_n, (q_n), b_n] \quad \forall n \geq n_0 .$$

Dann gelten für alle $n \geq n_0 + k$ zunächst die Aussagen

$$q_n \cong \beta^n , \tag{147}$$

$$(q_n, q_{n-i}) = 1 , \quad i = 1, \dots, k ,$$

$$|P_n| \geq q_{n+k} ,$$

$$a_n \cong \alpha \beta^{2n} , \tag{148}$$

$$b_n \cong (\alpha + \beta^k) \beta^{2n} . \tag{149}$$

Für alle $n \geq n_0 + k$ können wir also auf die Summenmengen aus P_n und P_{n-i} für $i = 1, \dots, k$ das Lemma 3.4.2 anwenden und erhalten im n -ten Schritt k arithmetische Progressionen

$$I_n^{(i)} = [a_n^{(i)}, b_n^{(i)}] \supseteq P_n + P_{n-i} , \quad i = 1, \dots, k ,$$

die unter geeigneten Voraussetzungen zum einen $b_n^{(i)} \geq a_n^{(i-1)}$, $i = 2, \dots, k$, und zum anderen $b_n^{(1)} \geq a_{n+1}^{(k)}$ erfüllen. Setzt man nun

$$I_n = \bigcup_{i=1}^k I_n^{(i)} = [a_n^{(k)}, b_n^{(1)}]$$

für alle $n \geq n_0 + k$, so ist die Menge

$$A = \mathbb{N}_0 \setminus \left(\bigcup_{n=n_0+k}^{\infty} I_n \right)$$

endlich. Dann ist die Menge

$$H_0 = A \cup \left(\bigcup_{n=n_0}^{\infty} P_n \right)$$

eine Basis zweiter Ordnung. Dabei entsprechen sich die Pseudo-Dichten der Basis H_0 und der Menge $P = \bigcup_{n=n_0}^{\infty} P_n$, weil die Menge A endlich ist. Um nun die Pseudo-Dichte der Basis H_0 abschätzen zu können, genügt es also, die Pseudo-Dichte der aus arithmetischen Progressionen bestehenden Menge $P = \bigcup_{n=n_0}^{\infty} P_n$ bezüglich unterer Schranken zu untersuchen.

Zunächst erfüllen die Anfangs- und Endpunkte der arithmetischen Progressionen P_n die Konvergenz

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\alpha}{\alpha + \beta^k}.$$

Wählen wir nun ein $q > 0$ aus, das $\frac{\alpha}{\alpha + \beta^k} < q < 1$ genügt, und setzen

$$S_n = b_{n_0+n},$$

$$s_n = qS_n$$

für alle $n \in \mathbb{N}$, so ist (S, s) ein Minorantenerzeuger, der für hinreichend große n die Gleichung

$$P(S_n) - P(s_n) = \left\lceil \frac{(1-q)S_n}{q_{n_0+n}} \right\rceil$$

erfüllt. Wir wenden nun Satz 1.3.2 an. Mit der obigen Aussage erhalten wir

$$\begin{aligned}\delta_2^o(P, S, s) &= (1 - q) \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{S_n}}{q_{n_0+n}} = (1 - q) \sqrt{\alpha + \beta^k}, \\ \delta_2(P, S, s) &= \frac{1 - q}{1 - \sqrt{q}} \sqrt{\alpha + \beta^k}.\end{aligned}$$

Dabei ist durch $\delta_2(P, S, s)$ eine untere Abschätzung der Pseudo-Dichte der Menge P gegeben. Unter Anwendung der L'Hospitalschen Regel folgt aus dem Grenzübergang $q \rightarrow 1$, daß die Pseudo-Dichte der Menge P die untere Schranke

$$\delta_2(P) \geq 2\sqrt{\alpha + \beta^k}$$

besitzt. Wir erhalten bereits die Abschätzung

$$\delta_2(H_0) = \delta_2(P) \geq 2\sqrt{\alpha + \beta^k}$$

für die Pseudo-Dichte der Menge H_0 .

Damit G. Hofmeister das Lemma von Cassels anwenden kann, fordert er ferner, daß die arithmetischen Progressionen P_n der Bedingung $a_{n+1} \geq b_n + q_n$ genügen. Aufgrund der Definition der a_n und b_n muß dann insbesondere für alle $n \geq n_0$

$$\alpha\beta^{2n+2} + 1 \geq (\alpha + \beta^k)\beta^{2n} - 2q_n$$

erfüllt sein. Daraus folgt unmittelbar die Aussage

$$\alpha \geq \frac{\beta^k}{\beta^2 - 1}.$$

Wir erhalten deshalb für die Pseudo-Dichte der Menge P bzw. der Basis H_0 die untere Schranke

$$\delta_2(H_0) = \delta_2(P) \geq 2\sqrt{\frac{\beta^k}{\beta^2 - 1} + \beta^k} = 2\sqrt{\frac{\beta^{k+2}}{\beta^2 - 1}}.$$

Weil $\beta > 1$ ist, ist die obige untere Schranke streng monoton wachsend in k . Es war ferner $k \geq 3$ vorausgesetzt. Dann ist die Abschätzung gerade für $k = 3$ minimal. Nun ist

$$\begin{aligned}\delta_2(P) &= 2 \frac{\sqrt{\beta^5}}{\sqrt{\beta^2 - 1}}, \quad \beta > 1, \quad \text{minimal} \\ \Leftrightarrow f(\beta) &= \frac{\beta^5}{\beta^2 - 1}, \quad \beta > 1, \quad \text{minimal}.\end{aligned}$$

Die Funktion $f : (1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(\beta) = \frac{\beta^5}{\beta^2 - 1}$ nimmt ihr globales Minimum genau für $\beta = \sqrt{\frac{5}{3}}$ an. Damit erhalten wir für die Pseudo-Dichte der Menge P bzw. der Basis H_0 die untere Abschätzung

$$\begin{aligned}\delta_2(H_0) &= \delta_2(P) \\ &\geq 2 \frac{5}{3} \sqrt{\frac{3}{2}} \sqrt[4]{\frac{5}{3}} \\ &= \frac{10}{\sqrt{6}} \sqrt[4]{\frac{5}{3}} \\ &= 4,638 \dots\end{aligned}$$

Also können wir die von G. Hofmeister angegebenen Basen H_0 zu gleichmäßig dünnen Basen H ergänzen, deren asymptotische Dichte mindestens

$$d_2(H) \geq 2 \sqrt{\frac{\beta^{k+2}}{\beta^2 - 1}}$$

beträgt. Im Falle der Gleichheit ist die asymptotische Ergänzung $E_{H_0} = H \setminus H_0$ bereits optimal zur Basis H_0 gewählt.

Die von G. Hofmeister aus dieser Konstruktion erzielte asymptotische Dichte ist daher nicht mehr zu verbessern, und dieser Ansatz ist bezüglich der asymptotischen Dichte ausgeschöpft. Wir wollen auch dieses Ergebnis gesondert festhalten:

3.4.6 Zweites Hauptresultat II: Pseudo-Dichte gleichmäßig dünner Basen zweiter Ordnung nach G. Hofmeister

Voraussetzung. Gegeben sei eine nach G. Hofmeister gemäß 3.4.5 konstruierte (gleichmäßig) dünne Basis H zweiter Ordnung. Dann enthält die Basis H eine Folge von arithmetischen Progressionen $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$, so daß für ein (minimales) natürliches $k \geq 3$ mit Hilfe der Summenmengen der Form $P_n + P_{n-i}$, $i = 1, \dots, k$, $n \geq n_0$ die Baseneigenschaft gezeigt werden kann. Ferner werden zur Konstruktion der arithmetischen Progressionen P_n zwei reelle Zahlen $\beta > 1$ und $\alpha \geq \frac{\beta^k}{\beta^2 - 1}$ gewählt.

Behauptung. Dann genügt die Pseudo-Dichte (asymptotische Dichte) der (gleichmäßig) dünnen Basis H zweiter Ordnung der unteren Abschätzung

$$\delta_2(H) \geq 2\sqrt{\alpha + \beta^k} \quad (150)$$

$$\left(d_2(H) \geq 2\sqrt{\alpha + \beta^k} \right).$$

Insbesondere erhalten wir für die Pseudo-Dichte (asymptotische Dichte) der (gleichmäßig) dünnen Basis H stets die untere Schranke

$$\delta_2(H) \geq \frac{10}{\sqrt{6}} \sqrt[4]{\frac{5}{3}} = 4,638 \dots \quad (151)$$

$$\left(d_2(H) \geq \frac{10}{\sqrt{6}} \sqrt[4]{\frac{5}{3}} = 4,638 \dots \right).$$

3.4.7 Bemerkung

Den beiden betrachteten gleichmäßig dünnen Basen von J. W. S. Cassels und G. Hofmeister liegen dünne Basen zugrunde, deren (endliche) Pseudo-Dichte der erzielten asymptotischen Dichte entspricht. Dabei werden den dünnen Basen jeweils Elemente hinzugefügt, die für die Baseneigenschaft nicht benutzt werden.

Beachten wir die ersten beiden Kapitel dieser Arbeit, so entsprechen die ergänzten Elemente in beiden Fällen gerade einer optimalen asymptotischen Ergänzung. Wäre es üblich, anstelle der asymptotischen Dichte schlicht die Pseudo-Dichte zu betrachten, so wäre ein Ergänzen der dünnen Basen nicht mehr notwendig.

Allerdings ist es bei beiden Basen nicht möglich, einzelne Elemente der zugrunde liegenden dünnen Basen auszutauschen. Denn zur Überdeckung der natürlichen Zahlen werden sämtliche Elemente der arithmetischen Progressionen herangezogen. Fehlt auch nur ein einziges Element einer arithmetischen Progression, so geht die Baseneigenschaft verloren.

Wir versuchen nun eine Klasse von Basen zu definieren, deren Elemente in dem Sinne nicht fixiert sind, daß wir sie relativ frei wählen können. Unser Ziel wird dabei sein, eine Klasse von dünnen Basen zu erstellen, die nach Konstruktion bereits gleichmäßig dünn sind.

4 PR-Basen

4.1 Einführung

Im vierten Kapitel führen wir eine neue Klasse von Basen zweiter Ordnung ein: die PR-Basen. Die PR-Basen ermöglichen es uns, eine Klasse dünner Basen, die bereits aufgrund ihrer Konstruktion gleichmäßig dünn sind, zu erstellen. Diese Klasse von Basen enthält eine gleichmäßig dünne Basis zweiter Ordnung mit asymptotischer Dichte $2\sqrt{3} = 3,464\dots$. Im Gegensatz zu den gleichmäßig dünnen Basen von J. W. S. Cassels und G. Hofmeister werden also bei dieser Klasse von Basen keine Elemente hinzugefügt, um aus einer dünnen Basis eine gleichmäßig dünne Basis zu erzeugen.

Im ersten Abschnitt des Kapitels zeigen wir, daß die obere asymptotische Dichte für PR-Basen nach unten durch $2\sqrt{3} = 3,464\dots$ beschränkt ist. Dann können die PR-Basen zwar für dünne Basen zweiter Ordnung keine Verbesserung der oberen asymptotischen Dichte liefern.

Allerdings sehen wir im nächsten Abschnitt, daß eine gleichmäßig dünne PR-Basis mit asymptotischer Dichte $2\sqrt{3} = 3,464\dots$ existiert. Also ist für PR-Basen gezeigt, daß sie insbesondere zur Konstruktion gleichmäßig dünner Basen geeignet sind. Außerdem ist die asymptotische Dichte innerhalb der Klasse der PR-Basen dann nicht mehr zu verbessern.

Man beachte, daß wir gegenüber der bisher erreichten asymptotischen Dichte von $4,638\dots$ eine deutliche Verbesserung erzielen, und zwar eine Verringerung der asymptotischen Dichte von ungefähr 25 Prozent, während die bereits erwähnten Fortschritte bei der unteren und oberen asymptotischen

Dichte deutlich weniger als zehn Prozent und bei der gleichmäßig dünnen Basis von G. Hofmeister ungefähr zehn Prozent betragen.

Insgesamt ist nun gegenüber der gleichmäßig dünnen Basis zweiter Ordnung von J. W. S. Cassels eine Verringerung der asymptotischen Dichte von exakt einem Drittel zu verzeichnen.

Damit ist das abschließende Ziel dieser Arbeit erreicht.

4.2 PR-Basen und ihre obere asymptotische Dichte

4.2.1 Einleitung

In diesem Abschnitt führen wir die PR-Basen ein und ermitteln die von ihnen erzielbare obere asymptotische Dichte. Zunächst untersuchen wir, wie man mit Hilfe von Summenmengen aus arithmetischen Progressionen und vollen Restsystemen geschlossene Abschnitte der natürlichen Zahlen darstellen kann. Dann ist es uns möglich, unter Zuhilfenahme einer separierten Progressionenschar $P = \bigcup_{n=1}^{\infty} [a_n, (m^n), b_n]$ mit $a_{n+1} = b_n$ und voller Restsysteme R_n modulo m^n die Baseneigenschaft aus deren Summenmengen zu folgern.

Bevor wir in der Lage sind, die PR-Basen zu definieren, lernen wir noch einige einfache Eigenschaften von vollen Restsystemen und arithmetischen Progressionen kennen. So besagt Lemma 4.2.7, daß wir volle Restsysteme R_n modulo m^n induktiv aufbauen können, das heißt, daß $R_n \subseteq R_{n+1}$ gewählt werden kann. Ferner zeigt uns Lemma 4.2.8, daß wir anstelle der arithmetischen Progressionen $[a_n, (m^n), b_n]$ stets die arithmetischen Progressionen $[a_1, (m^n), b_n]$ in unsere Berechnungen einbeziehen können.

Beide Lemmata verringern daher die Anzahl der Elemente. Nach der Definition der PR-Basen gehen wir zur Betrachtung der für diese Basen minimal möglichen oberen asymptotischen Dichte über. Gegen Ende des Abschnitts untersuchen wir noch die untere asymptotische Dichte von PR-Basen.

Zunächst wiederholen wir die Definition von Restklassen und vollen Restsystemen.

4.2.2 Definition

Gegeben sei eine natürliche Zahl $m \geq 2$.

Restklasse. Setzt man für $k \in \{0, 1, \dots, m-1\}$

$$R^{(k)} = \{z \in \mathbb{Z} \mid z \equiv k \pmod{m}\},$$

so heißt die Menge $R^{(k)}$ *Restklasse modulo m mit Rest k* . Wir bezeichnen die Restklasse $R^{(0)}$ auch durch $R^{(m)}$. Offensichtlich sind

$$R^{(i)} \cap R^{(j)} = \emptyset, \quad i \neq j,$$

$$\mathbb{Z} = \bigcup_{k=1}^m R^{(k)}.$$

Repräsentant. Für $k \in \{0, 1, \dots, m-1\}$ heißt jedes Element $r^{(k)} \in R^{(k)}$ *Repräsentant der Restklasse $R^{(k)}$ modulo m mit Rest k* .

Volles Restsystem modulo m . Eine aus m nicht negativen Zahlen bestehende Menge $R = \{r^{(1)}, r^{(2)}, \dots, r^{(m)}\}$ heißt *volles Restsystem modulo m* , wenn die Menge R genau einen Repräsentanten $r^{(k)}$ aus jeder Restklasse $R^{(k)}$ modulo m mit Rest k , $1 \leq k \leq m$, enthält.

4.2.3 Bemerkung

Im allgemeinen betrachtet man volle Restsysteme aus beliebigen ganzen Zahlen. Wir benötigen hier nicht negative Zahlen. Für jede natürliche Zahl $m \geq 2$ ist die Menge $R = \{0, 1, \dots, m-1\}$ ein volles Restsystem modulo m . Für jede arithmetische Progression $P = [a, (m), b]$ entspricht die arithmetische Progression $I = [a, b+m-1]$ offensichtlich der Summenmenge aus P und R . Wir betrachten nun Summenmengen aus vollen Restsystemen und arithmetischen Progressionen von allgemeinerer Form.

4.2.4 Satz

Voraussetzung. Seien $b, m \in \mathbb{N}_0$, $m \geq 2$, $m \mid b$. Ferner sei R ein volles Restsystem modulo m .

Behauptung. Setzt man

$$P = [0, (m), b] ,$$

$$r^- = \min R ,$$

$$r^+ = \max R ,$$

so enthält die Summenmenge aus P und R im Falle $r^+ \leq b + r^-$ die arithmetische Progression $I = [r^+, b + r^-]$:

$$I \subseteq (P + R) .$$

Beweis. Sei $i \in I$. Durch

$$i = sm + t , \quad 0 \leq t \leq m - 1 , \quad s, t \in \mathbb{N}_0 ,$$

sei die Euklidische Division modulo m von i gegeben. Damit ist $i \in R^{(t)}$.

Das volle Restsystem R enthält genau einen Repräsentanten $r^{(t)}$ der Restklasse $R^{(t)}$ modulo m mit Rest t . Dann enthält die Summenmenge aus P und R gerade die Repräsentanten $r^{(t)}$, $m + r^{(t)}$, $2m + r^{(t)}$, $\dots$, $\frac{b}{m}m + r^{(t)}$ der Restklasse $R^{(t)}$. Ferner ist

$$r^- \leq r^{(t)} \leq r^+ .$$

Also enthält die Summenmenge aus P und R alle Repräsentanten der Restklasse $R^{(t)}$, die zwischen $r^{(t)} \leq r^+$ und $b + r^{(t)} \geq b + r^-$ liegen. Dann ist auch der Repräsentant i der Restklasse $R^{(t)}$ unter den benannten Repräsentanten zu finden. Damit ist $i \in (P + R)$. Weil $i \in I$ frei gewählt war, erhalten wir

$$I \subseteq (P + R) .$$

4.2.5 Lemma

Voraussetzung. Seien $a, b, m \in \mathbb{N}_0$, $b \geq a$, $m \geq 2$, $m \mid (b - a)$. Ferner sei R ein volles Restsystem modulo m .

Behauptung. Setzt man

$$P = [a, (m), b] ,$$

$$r^- = \min R ,$$

$$r^+ = \max R ,$$

so enthält die Summenmenge aus P und R im Falle $a + r^+ \leq b + r^-$ die arithmetische Progression $I = [a + r^+, b + r^-]$:

$$I \subseteq (P + R) . \quad (152)$$

Beweis. Setzen wir $P_0 = [0, (m), b - a]$, so können wir Satz 4.2.4 anwenden. Dann erhalten wir im Falle $r^+ \leq b - a + r^-$ die Aussage

$$[r^+, b - a + r^-] \subseteq (P_0 + R) .$$

Betrachten wir nun anstelle der Summenmenge aus P_0 und R die Summenmenge aus P und R , so folgt offensichtlich im Falle $a + r^+ \leq b + r^-$

$$[a + r^+, b + r^-] \subseteq (P + R) .$$

4.2.6 Bemerkung

Die Eigenschaft (152) aus Lemma 4.2.5 von arithmetischen Progressionen der Schrittweite m und vollen Restsystemen modulo m dient uns später dazu, die Baseneigenschaft der Klasse der PR-Basen nachzuweisen. Denn es werden Summenmengen aus arithmetischen **P**rogressionen und vollen **R**estssystemen gebildet. Deshalb nennen wir diese Klasse von Basen PR-Basen.

Es sei bemerkt, daß wir in Satz 4.2.4 sogar $I = [r^+ - m + 1, b + r^- + m - 1]$ wählen können, denn die kleinste bzw. größte nicht in der Summenmenge aus P und R enthaltene ganze Zahl ist gerade $r^+ - m$ bzw. $b + r^- + m$. Dann können wir in Lemma 4.2.5 auch $I = [a + r^+ - m + 1, b + r^- + m - 1]$ wählen.

Wir betrachten nun noch zwei weitere Lemmata, die bei der Konstruktion der PR-Basen Berücksichtigung finden.

4.2.7 Lemma

Voraussetzung. Zu einer natürlichen Zahl $m \geq 2$ sei für jedes $n \in \mathbb{N}$ ein volles Restsystem R_n modulo m^n gegeben.

Behauptung. Für natürliche Zahlen $k \leq n$ ist das volle Restsystem R_k modulo m^k stets eine Menge von Repräsentanten aus paarweise verschiedenen Restklassen modulo m^n .

Beweis. Seien $s, t \in R_k$ Repräsentanten derselben Restklasse modulo m^n . Ferner seien durch $s = q_s m^n + r_n$ und $t = q_t m^n + r_n$ die Euklidischen Divisionen modulo m^n von s und t gegeben. Nun ist $q_s m^n = q_s m^{n-k} m^k$ und $q_t m^n = q_t m^{n-k} m^k$. Ist $r_n = q m^k + r_k$ die Euklidische Division modulo m^k von r_n , so erhalten wir

$$\begin{aligned} s &= (q_s m^{n-k} + q) m^k + r_k, \\ t &= (q_t m^{n-k} + q) m^k + r_k \end{aligned}$$

als Euklidische Divisionen modulo m^k von s und t . Also sind s und t Repräsentanten der Restklasse modulo m^k mit Rest r_k . Weil die Menge R_k ein volles Restsystem modulo m^k ist, muß $s = t$ sein.

4.2.8 Lemma

Voraussetzung. Seien eine natürliche Zahl $m \geq 2$ und eine streng monoton wachsende Folge natürlicher Zahlen $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$, die $m^n \mid b_n \forall n \in \mathbb{N}$ genügt, gegeben.

Behauptung. Setzt man $P_n = [0, (m^n), b_n] \forall n \in \mathbb{N}$, so gilt für jedes natürliche $k \leq n$

$$(P_n \cap [0, b_k]) \subseteq P_k.$$

Beweis. Sei $p \in (P_n \cap [0, b_k])$. Dann ist p ein Vielfaches von m^n sowie von m^k und kleiner gleich b_k . Nun ist $P_k = [0, (m^k), b_k]$. Dann enthält die arithmetische Progression P_k alle Vielfachen von m^k , die kleiner gleich b_k sind. Also ist insbesondere $p \in P_k$.

4.2.9 Bemerkung

Mit Hilfe der Lemmata 4.2.5, 4.2.7 sowie 4.2.8 können wir nun ein neues Verfahren zur Konstruktion von Basen zweiter Ordnung angeben, das auf arithmetischen Progressionen und vollen Restsystemen beruht. Die daraus entstehende Klasse der PR-Basen ermöglicht es uns, die asymptotische Dichte für Basen zweiter Ordnung von $4,638 \dots$ auf $3,464 \dots$ zu reduzieren. Außerdem können wir nachweisen, daß die asymptotische Dichte innerhalb der Klasse der PR-Basen nicht mehr verbessert werden kann.

Ferner zeigen wir, daß die Klasse der PR-Basen weder für die untere noch für die obere asymptotische Dichte eine Verbesserung erbringen kann.

4.2.10 PR-Basen

Voraussetzung. Gegeben seien eine natürliche Zahl $m \geq 2$ und eine streng monoton wachsende Folge natürlicher Zahlen $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$, die der Bedingung $m^{n+1} \mid b_n \forall n \in \mathbb{N}$ genügt. Man setze $b_0 = 0$ und für jedes $n \in \mathbb{N}$

$$P_n = [0, (m^n), b_n] . \quad (153)$$

Ferner sei R_n ein volles Restsystem mod m^n für jedes $n \in \mathbb{N}$. Es gebe ein $n_0 \geq 2$, so daß für alle $n \geq n_0$ die Aussagen (154)-(156) gelten:

$$r_n^+ = \max R_n < b_{n-1} , \quad (154)$$

$$R_{n-1} \subseteq R_n , \quad (155)$$

$$(R_n \setminus R_{n-1}) \subseteq [b_{n-2}, b_{n-1}] . \quad (156)$$

Behauptung. Dann ist die durch

$$Q = [0, m^{n_0-1} - 1] \cup \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} P_n \right) \cup \left(\bigcup_{n=n_0}^{\infty} R_n \right) \quad (157)$$

gegebene Menge Q eine Basis zweiter Ordnung.

Definition von PR-Basen. Jede gemäß den Aussagen (153)-(157) konstruierte Basis zweiter Ordnung besteht aus arithmetischen **P**rogressionen und vollen **R**estsystemen. Deshalb nennen wir jede solche Basis *PR-Basis*.

Bemerkung. Aus der Voraussetzung (154) folgt, daß die Summenmengen aus P_n und R_n sich überlappende Bereiche der natürlichen Zahlen enthalten. Die Aussage (155) reduziert die Mächtigkeit der Menge Q und kann wegen Lemma 4.2.7 gestellt werden. Die Forderung (156) besagt, daß die Repräsentanten der Restklassen erst dann der Menge Q hinzugefügt werden, wenn sie benötigt werden. Die Bedingung $m^{n+1} \mid b_n$ erleichtert uns das Abzählen der

Elemente der PR-Basen. Man beachte, daß die Menge $P = \bigcup_{n=1}^{\infty} P_n$ mit Lemma 4.2.8 der separierten Progressionenschar $\bigcup_{n=1}^{\infty} [b_{n-1}, (m^n), b_n]$ entspricht.

Beweis. Mit der Definition

$$r_n^- = \min R_n \quad \forall n \geq n_0$$

und Voraussetzung (154) folgt aus Lemma 4.2.5 (152) zunächst

$$[r_n^+, b_n + r_n^-] \subseteq (P_n + R_n) \quad \forall n \geq n_0 .$$

Damit liefert Voraussetzung (154)

$$[b_{n-1}, b_n] \subseteq (P_n + R_n) \quad \forall n \geq n_0 . \quad (158)$$

Für jedes n , das $1 \leq n \leq n_0 - 1$ genügt, ist die in der Menge Q enthaltene arithmetische Progression $[0, m^n - 1]$ trivialerweise ein volles Restsystem mod m^n . Dabei ist sogar

$$[0, b_n + m^n - 1] \subseteq (P_n + [0, m^n - 1]) \quad \forall n < n_0 \quad (159)$$

offensichtlich erfüllt. Aus den Aussagen (158) und (159) folgt unmittelbar, daß die Menge Q eine Basis zweiter Ordnung ist.

4.2.11 Lemma

Voraussetzung. Gegeben sei eine nach 4.2.10 konstruierte PR-Basis Q mit der dort gewählten Bezeichnungsweise.

Behauptung. Ist die PR-Basis Q dünn, so genügt sie den Eigenschaften

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{b_n}{m^{2n}} > 0 , \quad (160)$$

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{b_n}{m^{2n}} < \infty . \quad (161)$$

Also erfüllt jede dünne PR-Basis $m^n = O(\sqrt{b_n})$ und $b_n = O(m^{2n})$.

Bemerkung. Um die obere asymptotische Dichte dünner PR-Basen in 4.2.12 abschätzen zu können, benötigen wir die Aussagen (160) und (161). Denn dann ist der Grenzwert

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{b_n}{m^{2n}}$$

positiv reellwertig. Mit Hilfe dieses Grenzwertes sind wir in der Lage, die untere Abschätzung 4.2.12 (165) nachzuweisen.

Beweis. Wir zeigen, daß die PR-Basis Q nicht dünn ist, wenn sie eine der beiden Ungleichungen nicht erfüllt.

Zunächst genüge die PR-Basis Q

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{b_n}{m^{2n}} = 0 . \quad (162)$$

Gemäß der Definition von PR-Basen ist $r_{n+1}^+ < b_n$. Also genügt die Menge Q der Abschätzung $Q(b_n) \geq m^{n+1} - 1$. Deshalb ist mit Aussage (162)

$$\bar{d}_2(Q) = \limsup_{x \rightarrow \infty} \frac{Q(x)}{\sqrt{x}} \geq \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{Q(b_n)}{\sqrt{b_n}} \geq \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{m^{n+1} - 1}{\sqrt{b_n}} = \infty .$$

Dann ist die PR-Basis Q nicht dünn.

Jetzt erfülle die PR-Basis Q

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{b_n}{m^{2n}} = \infty . \quad (163)$$

Die arithmetische Progression P_n enthält stets $\frac{b_n}{m^n} + 1$ Elemente. Also ist $Q(b_n) \geq \frac{b_n}{m^n}$. Wegen Bedingung (163) erhalten wir auch hier

$$\bar{d}_2(Q) = \limsup_{x \rightarrow \infty} \frac{Q(x)}{\sqrt{x}} \geq \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{Q(b_n)}{\sqrt{b_n}} \geq \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{b_n}}{m^n} = \infty .$$

Dann ist die PR-Basis Q auch unter der Voraussetzung (163) nicht dünn.

4.2.12 Drittes Hauptergebnis: Obere asymptotische Dichte von PR-Basen

Voraussetzung. Gegeben sei eine nach 4.2.10 konstruierte PR-Basis Q mit der dort gewählten Bezeichnungsweise. Die PR-Basis Q sei dünn. Man setze

$$s = \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{b_n}{m^{2n}} . \quad (164)$$

Dann ist s gemäß Lemma 4.2.11 positiv reellwertig.

Behauptung. Die obere asymptotische Dichte der PR-Basis Q genügt der unteren Abschätzung

$$\bar{d}_2(Q) \geq \left(\frac{m}{s} + \frac{1}{m} + 1 \right) \sqrt{s} . \quad (165)$$

Dabei nimmt die untere Schranke (165) ihr Minimum $2\sqrt{m+1}$ in s genau für den Fall $s = \frac{m^2}{m+1}$ an. Für alle $s \neq \frac{m^2}{m+1}$ erfüllt die obere asymptotische Dichte der PR-Basis Q also die echte Ungleichung

$$\bar{d}_2(Q) > 2\sqrt{m+1} . \quad (166)$$

Dann folgt offensichtlich, daß die PR-Basis Q sowohl für jedes $m > 2$ als auch für jedes $s \neq \frac{m^2}{m+1}$ der echten Ungleichung

$$\bar{d}_2(Q) > 2\sqrt{3} \quad (167)$$

genügt. Insbesondere kann die PR-Basis Q die obere asymptotische Dichte $2\sqrt{3}$ nur dann besitzen, wenn $m = 2$ und $s = \frac{m^2}{m+1} = \frac{4}{3}$ gewählt werden.

Bemerkung. Wir werden später eine gleichmäßig dünne PR-Basis mit asymptotischer Dichte $2\sqrt{3}$ konstruieren. Damit ist zum einen die hier angegebene untere Abschätzung der oberen asymptotischen Dichte von PR-Basen scharf. Zum anderen kann es keine PR-Basis geben, deren asymptotische Dichte kleiner als $2\sqrt{3}$ ist.

Beweis. Wollen wir eine untere Abschätzung für die obere asymptotische Dichte erhalten, so können wir die Zählfunktion $Q(x)$ an den Endpunkten b_n der arithmetischen Progressionen abschätzen. Mit Lemma 4.2.8 und dem n_0 und b_0 aus Satz 4.2.10 erfüllt die PR-Basis $Q \forall n \geq n_0$

$$Q(b_n) \geq |R_{n+1}| + \sum_{\ell=1}^n \frac{b_\ell - b_{\ell-1}}{m^\ell} - |R_{n+1} \cap \left(\bigcup_{k=1}^n P_k \right)|. \quad (168)$$

Dabei beachten wir zum einen, daß für PR-Basen $m^{\ell+1} \mid b_\ell$ für alle $\ell \in \mathbb{N}$ gilt, und zum anderen, daß mit $0 \in R_{n+1}$ auch $0 \in (R_{n+1} \cap (\bigcup_{k=1}^n P_k))$ gilt.

Wir untersuchen zunächst den letzten Term. Die Menge Q ist PR-Basis. Also ist nach Satz 4.2.10 (156)

$$(R_\ell \setminus R_{\ell-1}) \subseteq [b_{\ell-2}, b_{\ell-1}] \quad \forall \ell \in \{n_0, n_0 + 1, \dots, n + 1\}.$$

Außerdem ist unter Berücksichtigung von Lemma 4.2.8

$$\left(\bigcup_{k=1}^n P_k \right) \cap [b_{\ell-2}, b_{\ell-1}] = [b_{\ell-2}, (m^{\ell-1}), b_{\ell-1}] \quad \forall \ell \in \{2, 3, \dots, n + 1\}.$$

Weil die arithmetische Progression $[b_{\ell-2}, (m^{\ell-1}), b_{\ell-1}]$ die Schrittweite $m^{\ell-1}$ besitzt und jede PR-Basis per Definition $m^{\ell-1} \mid b_{\ell-2}$ genügt, kann die arithmetische Progression $[b_{\ell-2}, (m^{\ell-1}), b_{\ell-1}]$ höchstens Repräsentanten aus den m Restklassen modulo m^ℓ mit den Resten $0, m^{\ell-1}, 2m^{\ell-1}, \dots, (m-1)m^{\ell-1}$ enthalten. Wir erhalten deshalb

$$|(R_\ell \setminus R_{\ell-1}) \cap \left(\bigcup_{k=1}^n P_k \right)| \leq m \quad \forall \ell \in \{n_0, n_0 + 1, \dots, n + 1\},$$

und mit der disjunkten Vereinigung $R_{n+1} = R_{n_0-1} \cup \left(\bigcup_{\ell=n_0-1}^n (R_{\ell+1} \setminus R_\ell) \right)$

$$\begin{aligned} |R_{n+1} \cap \left(\bigcup_{k=1}^n P_k \right)| &\leq |R_{n_0-1}| + \sum_{\ell=n_0-1}^n \left| (R_{\ell+1} \setminus R_\ell) \cap \left(\bigcup_{k=1}^n P_k \right) \right| \\ &\leq m^{n_0-1} + (n - n_0 + 2)m. \end{aligned} \quad (169)$$

Wir setzen die Abschätzung (169) in die Ungleichung (168) ein und erhalten

$$Q(b_n) \geq m^{n+1} + \sum_{\ell=1}^n \frac{b_\ell - b_{\ell-1}}{m^\ell} - (m^{n_0-1} + (n - n_0 + 2)m) .$$

Unter Anwendung Abelscher Summation genügt der Quotient $\frac{Q(b_n)}{\sqrt{b_n}}$

$$\begin{aligned} \frac{Q(b_n)}{\sqrt{b_n}} &\geq \frac{m^{n+1}}{\sqrt{b_n}} + \frac{\sqrt{b_n}}{m^n} + \frac{m-1}{\sqrt{b_n}} \sum_{\ell=1}^{n-1} \frac{b_\ell}{m^{\ell+1}} \\ &\quad - \frac{(m^{n_0-1} + (n - n_0 + 2)m)}{\sqrt{b_n}} . \end{aligned} \quad (170)$$

Um die gewünschte Abschätzung (165) für die obere asymptotische Dichte zu zeigen, genügt es, eine Teilfolge $(b_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ zu untersuchen, die

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{b_{n_k}}{m^{2n_k}} = s$$

erfüllt. Wir beachten, daß eine solche Folge nach Voraussetzung (164) existiert. Dabei betrachten wir jeden Term der aus vier Gliedern bestehenden Abschätzung (170) bezüglich des Limes inferior für sich. Die Summe d_0 der vier unteren Grenzwerte ist dann kleiner oder gleich dem Limes inferior d der Summe. Der Limes superior der Abschätzung (170) ist wiederum natürlich größer als der Limes inferior d , der wiederum größer als die Summe d_0 ist. Insbesondere genügt dann die obere asymptotische Dichte der PR-Basis Q wegen Ungleichung (170) der Abschätzung

$$\bar{d}_2(Q) = \limsup_{x \rightarrow \infty} \frac{Q(x)}{\sqrt{x}} \geq d_0 .$$

Also ist die Behauptung (165) gezeigt, wenn wir mit $d_0 = \left(\frac{m}{s} + 1 + \frac{1}{m}\right)\sqrt{s}$ die folgenden vier Aussagen bewiesen haben:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{m^{n_k+1}}{\sqrt{b_{n_k}}} = \frac{m}{\sqrt{s}} , \quad (171)$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{b_{n_k}}}{m^{n_k}} = \sqrt{s} , \quad (172)$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{m^{n_0-1} + (n_k - n_0 + 2)m}{\sqrt{b_{n_k}}} = 0 , \quad (173)$$

$$\liminf_{k \rightarrow \infty} \frac{m-1}{\sqrt{b_{n_k}}} \sum_{\ell=1}^{n_k-1} \frac{b_\ell}{m^{\ell+1}} \geq \frac{\sqrt{s}}{m} . \quad (174)$$

Die Grenzwerte (171)-(173) folgen unmittelbar aus der Wahl unserer Teilfolge, die ja gerade $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{b_{n_k}}{m^{2n_k}} = s$ genügt. Es verbleibt der Beweis von (174). Zu jedem $\varepsilon > 0$ existiert nun wegen Aussage (164) ein $\ell_0 = \ell_0(\varepsilon)$, so daß

$$b_\ell \geq (1 - \varepsilon)sm^{2\ell} \quad \forall \ell \geq \ell_0$$

erfüllt ist. Weil natürlich $n_k \geq k$ ist, erhalten wir

$$\begin{aligned} (m-1) \sum_{\ell=1}^{n_k-1} \frac{b_\ell}{m^{\ell+1}} &\geq (1 - \varepsilon)(m-1) \sum_{\ell=\ell_0}^{n_k-1} \frac{sm^{2\ell}}{m^{\ell+1}} \\ &= (1 - \varepsilon)(m^{n_k-1} - m^{\ell_0-1})s \quad \forall k \geq \ell_0 + 1 . \end{aligned}$$

Daraus folgt insbesondere

$$\liminf_{k \rightarrow \infty} \frac{m-1}{\sqrt{b_{n_k}}} \sum_{\ell=1}^{n_k-1} \frac{b_\ell}{m^{\ell+1}} \geq (1 - \varepsilon) \frac{\sqrt{s}}{m} .$$

Mit $\varepsilon \rightarrow 0$ ist damit auch die Ungleichung (174) bewiesen. Also ist die Abschätzung (165) gezeigt.

Zum Beweis der Aussagen (166) und (167) betrachten wir die Funktion

$$\begin{aligned} f &: [2, +\infty) \times (0, \infty) \mapsto (0, \infty) , \\ f(m, s) &= \left(\frac{m}{s} + \frac{1}{m} + 1 \right) \sqrt{s} \quad \forall (m, s) \in [2, +\infty) \times (0, \infty) . \end{aligned}$$

bezüglich ihrer Minima. Ist m_0 fix gewählt, erhalten wir

$$\begin{aligned} f_{m_0} &: (0, \infty) \mapsto (0, \infty) , \\ f_{m_0}(s) &= \frac{m_0}{\sqrt{s}} + \frac{\sqrt{s}}{m_0} + \sqrt{s} \quad \forall s \in (0, \infty) . \end{aligned}$$

Offensichtlich gilt $f_{m_0}(s) \rightarrow \infty$ für $s \rightarrow 0$ bzw. $s \rightarrow \infty$. Ferner ist die erste Ableitung von f_{m_0} in s durch

$$f'_{m_0}(s) = \frac{1}{2\sqrt{s}} \left(\frac{m_0 + 1}{m_0} - \frac{m_0}{s} \right) \quad \forall s \in (0, \infty)$$

gegeben. Dabei gilt

$$f'_{m_0}(s) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad s = s_0 = \frac{m_0^2}{m_0 + 1}.$$

Also besitzt die Funktion f_{m_0} das globale Minimum

$$f_{m_0}(s_0) = \sqrt{m_0 + 1} + \frac{m_0 + 1}{\sqrt{m_0 + 1}} = 2\sqrt{m_0 + 1}, \quad (175)$$

das sie ausschließlich an der Stelle

$$s = s_0 = \frac{m_0^2}{m_0 + 1}$$

annimmt. Damit sind die Abschätzung (166) und die ihr vorangestellten Aussagen gezeigt. Weiterhin ist die Gleichung (175) offensichtlich streng monoton wachsend in m_0 . Dann nimmt die Funktion f ihr globales Minimum genau für den Fall $m_0 = 2$ und $s_0 = \frac{m_0^2}{m_0 + 1} = \frac{4}{3}$ an. Das globale Minimum der Funktion f beträgt deshalb

$$f(m_0, s_0) = 2\sqrt{3},$$

und die untere Schranke (167) ist ebenfalls nachgewiesen.

4.2.13 Bemerkung

V. Blomer[1] gibt 2003 dünne Basen B zweiter Ordnung an, deren obere asymptotische Dichte $\bar{d}_2(B) = 2,486 \dots + \varepsilon$ beträgt. Also können PR-Basen für die obere asymptotische Dichte keine Verbesserung liefern.

4.2.14 Untere asymptotische Dichte von PR-Basen

Behauptung. Die untere asymptotische Dichte einer PR-Basis Q genügt stets der Abschätzung

$$\underline{d}_2(Q) \geq 2 . \quad (176)$$

Andererseits existiert zu jedem $\varepsilon > 0$ eine PR-Basis Q , deren untere asymptotische Dichte die Ungleichung

$$\underline{d}_2(Q) \leq 2 + \varepsilon \quad (177)$$

erfüllt.

Beweis. Durch Q sei eine PR-Basis mit der in Satz 4.2.10 gewählten Bezeichnungsweise gegeben. Zu jedem $x > 0$ existiert nun ein $n \in \mathbb{N}$, das $b_{n-1} \leq x < b_n$ genügt. Dann ist gemäß 4.2.10 (153) und (154)

$$Q(x) \geq \frac{x}{m^n} - 1 + m^n - 2$$

für hinreichend große x erfüllt. Denn zum einen kann höchstens ein Element einer Progression mit Schrittweite m^n in einem vollem Restsystem modulo m^n enthalten sein. Zum anderen ist $|P_n \cap (0, x]| \geq \frac{x}{m^n} - 1$. Also ist

$$\frac{Q(x)}{\sqrt{x}} \geq \frac{\sqrt{x}}{m^n} + \frac{m^n}{\sqrt{x}} - \frac{3}{\sqrt{x}} \cong \frac{\sqrt{x}}{m^n} + \frac{m^n}{\sqrt{x}} . \quad (178)$$

Betrachten wir die Funktion

$$\begin{aligned} f &: (0, \infty) \mapsto (0, \infty) , \\ f(y) &= y + \frac{1}{y} \quad \forall y \in (0, \infty) , \end{aligned}$$

so ist bekanntlich

$$f(y) \geq 2 \quad \forall y \in (0, \infty) . \quad (179)$$

Deshalb erhalten wir aus den Aussagen (178) und (179) unmittelbar die Behauptung (176):

$$\underline{d}_2(Q) = \liminf_{x \rightarrow \infty} \frac{Q(x)}{\sqrt{x}} \geq 2 .$$

Zum Beweis der Behauptung (177) wählen wir für eine beliebige natürliche Zahl $m \geq 2$ zum einen die arithmetischen Progressionen

$$P_n = [0, (m^n), m^{2n}] \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

und zum anderen sukzessive volle Restsysteme modulo m^n , die den Aussagen

$$R_1 = [0, m-1] ,$$

$$R_{n+1} \setminus R_n \subseteq [b_n - m^{n+1}, b_n] \quad \forall n \geq 2$$

genügen. Dann ist die Menge

$$Q = \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} P_n \right) \cup \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} R_n \right)$$

eine PR-Basis. Dabei ist die Wahl der vollen Restsysteme R_n möglich, weil $b_n - m^{n+1} > b_{n-1}$ für jedes $n \geq 2$ gilt.

Wollen wir eine Abschätzung der unteren asymptotischen Dichte einer Menge finden, so ist es sinnvoll, eine Folge natürlicher Zahlen $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ zu betrachten, oberhalb derer jeweils gehäuft Elemente in der Menge liegen. Deshalb schätzen wir die Zählfunktion der PR-Basis Q gerade an den Stellen $y_n = b_n - m^{n+1} - 1$ ab. Es ist

$$\begin{aligned} Q(y_n) &\leq |R_n| + \sum_{\ell=1}^n \frac{b_\ell - b_{\ell-1}}{m^\ell} \\ &= m^n + m + \sum_{\ell=2}^n \frac{m^{2\ell} - m^{2\ell-2}}{m^\ell} \\ &= m^n + m + (m^2 - 1) \sum_{\ell=0}^{n-2} m^\ell \\ &= m^n + m + (m+1)(m^{n-1} - 1) \\ &= \left(2 + \frac{1}{m}\right)m^n + o(m^n) . \end{aligned}$$

Beachten wir, daß $\sqrt{y_n} = m^n + o(m^n)$ erfüllt ist, so erhalten wir unmittelbar den Grenzwert

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{Q(y_n)}{\sqrt{y_n}} = 2 + \frac{1}{m} .$$

Insbesondere genügt dann die untere asymptotische Dichte der PR-Basis Q der Abschätzung

$$\underline{d}_2(Q) \leq 2 + \frac{1}{m} .$$

Wählen wir nun eine natürliche Zahl $m \geq 2$ aus, die $m > \frac{1}{\varepsilon}$ genügt, so erfüllt die untere asymptotische Dichte der PR-Basis Q die Aussage (177).

4.2.15 Bemerkung

G. Hofmeister[4] gibt 2001 teilweise dünne Basen B zweiter Ordnung an, deren untere asymptotische Dichte $\underline{d}_2(B) = 1,870 \dots$ beträgt. Also können PR-Basen für die untere asymptotische Dichte keine Verbesserung liefern.

4.3 Gleichmäßig dünne PR-Basen

4.3.1 Einleitung

In diesem Abschnitt wollen wir zu jeder natürlichen Zahl $m \geq 2$ eine gleichmäßig dünne PR-Basis Q mit asymptotischer Dichte $d_2(Q) = 2\sqrt{m+1}$ konstruieren. Dabei werden wir in mehreren Schritten vorgehen.

Zunächst betrachten wir nur die in einer dünnen PR-Basis Q enthaltene separierte Progressionenschar $P = \bigcup_{n=1}^{\infty} P_n$, beschränken uns allerdings auf den Fall $s = c = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_n}{m^{2n}}$. Gemäß 4.2.12 ist die Kenntnis der Progressionenschar P bereits ausreichend, um die obere asymptotische Dichte der PR-Basis Q abschätzen zu können. Mit Hilfe des Lemmas von Cassels in der Form 2.3.3 gewinnen wir eine die Progressionenschar P umfassende, gleichmäßig dünne Menge D , deren asymptotische Dichte gerade der Abschätzung aus 4.2.12 entspricht. Dabei untersuchen wir zwar alle m , aber nicht mehr alle $s = c$. Allerdings ist der Fall $s = c = \frac{m^2}{m+1}$ für jedes natürliche $m \geq 2$ berücksichtigt. Für jedes m ist also die kleinste untere Abschätzung der oberen asymptotischen Dichte gemäß 4.2.12 in den Betrachtungen eingeschlossen.

Im nächsten Schritt betrachten wir für jede natürliche Zahl $m \geq 2$ genau eine Progressionenschar P , deren umfassende, gleichmäßig dünne Menge D gerade die asymptotische Dichte $2\sqrt{m+1}$ besitzt. Dabei untersuchen wir die Anzahl der durch das Lemma von Cassels zur Progressionenschar P hinzugefügten Elemente, das heißt, die Mächtigkeit der Menge $(D \setminus P)$. Wir zeigen, daß die Anzahl der Elemente in der Menge $(D \setminus P)$, die jeweils zwischen den Endpunkten b_n und b_{n+1} zweier arithmetischer Progressionen liegen, jeweils

asymptotisch der Mächtigkeit der Menge $(R_{n+2} \setminus R_{n+1})$ entspricht. Dabei bezeichnen die Mengen R_n die für PR-Basen benötigten vollen Restsysteme.

Danach zeigen wir, daß wir für hinreichend große n die Elemente d aus $(D \setminus P) \cap [b_n, b_{n+1}]$ gegen Elemente $r_d \in [b_n, b_{n+1}]$ aus beliebig vorgegebenen Restklassen modulo m^{n+2} , die keinen Repräsentanten in der arithmetischen Progression P_{n+1} besitzen, austauschen können. Wir ersetzen die Elemente derart, daß die so entstandene Menge Q_0 ebenfalls gleichmäßig dünn ist und die asymptotische Dichte der Menge D besitzt: $d_2(Q_0) = d_2(D)$.

Im letzten Schritt weisen wir nach, daß zu jeder natürlichen Zahl $m \geq 2$ eine gleichmäßig dünne PR-Basis Q existiert, deren asymptotische Dichte gerade $d_2(Q) = 2\sqrt{m+1}$ beträgt. Nach unserem dritten Hauptergebnis 4.2.12 entspricht $2\sqrt{m+1}$ der bei gegebenem m von PR-Basen kleinsten erreichbaren, oberen asymptotischen Dichte. Insbesondere erhalten wir im Falle $m = 2$ eine gleichmäßig dünne PR-Basis Q mit asymptotischer Dichte $d_2(Q) = 2\sqrt{3} = 3,464\dots$. Dann ist die obere asymptotische bzw. asymptotische Dichte in der Klasse der PR-Basen nicht mehr zu verringern.

Mit den obigen Ergebnissen ist auch das letzte Ziel dieser Arbeit, die Verbesserung der asymptotischen Dichte $d_2(B)$ von Basen zweiter Ordnung um etwa ein Viertel von $d_2(B) = 4,638\dots$ auf $d_2(B) = 3,464\dots$, erreicht.

Zum Abschluß des Abschnitts konstruieren wir die ersten 125 Elemente einer PR-Basis Q mit asymptotischer Dichte $d_2(Q) = 2\sqrt{3}$. Dabei zeigt sich, daß die Elemente dieser Basen nicht allzu schwer zu bestimmen sind.

4.3.2 Gleichmäßig dünne Mengen D, die die separierte Progressionenschar P umfassen

Voraussetzung. Gegeben seien eine natürliche Zahl $m \geq 2$, eine reelle Zahl c , $0 < c < \frac{m^2}{m-1}$, sowie eine streng monoton wachsende Folge $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ natürlicher Zahlen, die den Bedingungen

$$m^{n+1} \mid b_n \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_n}{m^{2n}} = c$$

genügt. Wir setzen

$$P_n = [0, (m^n), b_n] \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

$$P = \bigcup_{n=1}^{\infty} P_n = \{p_0 < p_1 < \dots\}.$$

Behauptung. Dann existieren eine natürliche Zahl k_0 und eine gleichmäßig dünne Menge

$$D = \{d_0 < d_1 < \dots\}, \quad (180)$$

die den Aussagen

$$P \subseteq D, \quad (181)$$

$$d_2(D) = \left(\frac{m}{c} + \frac{1}{m} + 1\right)\sqrt{c}, \quad (182)$$

$$d_k = \frac{1}{d_2^2(D)} k^2 + r_k, \quad 0 \leq r_k < \frac{1}{d_2^2(D)}(2k+1) \quad \forall k \geq k_0, \quad (183)$$

genügen. Weil $0 \in P$ ist, ist dabei stets $d_0 = 0$.

Beweis. Wir wenden das Lemma von Cassels in der Fassung 2.3.3 auf die separierte Progressionenschar P an. Dann erhalten wir

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{p_n}}{p_{n+1} - p_n} = \sqrt{c}.$$

Wollen wir nun in 2.3.3 gerade

$$\mu = \left(\frac{m}{c} + \frac{1}{m} + 1 \right) \sqrt{c}$$

wählen, so benötigen wir

$$\sqrt{c} < \frac{\mu}{2}.$$

Nun gelten die Äquivalenzen

$$\begin{aligned} \sqrt{c} &< \frac{1}{2} \left(\frac{m}{c} + \frac{1}{m} + 1 \right) \sqrt{c} \\ \iff c \left(1 - \frac{1}{m} \right) &< m \\ \iff c &< \frac{m^2}{m-1}. \end{aligned}$$

Wir beachten noch, daß die Behauptung (183) der Aussage

$$d_k \in \left[\frac{1}{d_2^2(D)} k^2, \frac{1}{d_2^2(D)} (k+1)^2 \right) \quad \forall k \geq k_0$$

entspricht. Dann folgen sämtliche Behauptungen aus dem Lemma von Cassels in der Fassung 2.3.3.

4.3.3 Bemerkung

Bei fest gewähltem m erhalten wir für PR-Basen gemäß Satz 4.2.12 genau dann die minimale untere Abschätzung der oberen asymptotischen Dichte, wenn wir $s = c = \frac{m^2}{m+1}$ wählen. In Satz 4.3.2 benötigen wir nur $c < \frac{m^2}{m-1}$. Also können wir die obige Aussage auf die separierte Progressionenschar P derjenigen PR-Basen anwenden, deren obere asymptotische Dichte bestenfalls der kleinsten unteren Abschätzung entsprechen kann. Wir sehen später, daß in der Tat PR-Basen existieren, deren asymptotische Dichte gerade dieser Abschätzung gleicht. Wir schränken uns nun weiter ein und betrachten zu jedem $m \in \mathbb{N}$ eine konkret ausgewählte separierte Progressionenschar.

4.3.4 Zur Mächtigkeit der Menge, die zur separierten Progressionenschar P hinzugefügt wird

Voraussetzung. Gegeben sei eine natürliche Zahl $m \geq 2$. Wir setzen für jedes $n \in \mathbb{N}$

$$x_n = \left[\frac{\frac{m^2}{m+1} m^{2n}}{m^{n+1}} \right] m^{n+1} - \frac{m^2}{m+1} m^{2n}, \quad (184)$$

$$b_n = \left[\frac{m^{n+1}}{m+1} \right] m^{n+1} = \frac{m^2}{m+1} m^{2n} + x_n. \quad (185)$$

Dann entspricht jedes b_n gerade dem kleinsten Vielfachen v_n von m^{n+1} , das

$$v_n \geq \frac{m^2}{m+1} m^{2n}$$

genügt. Insbesondere ist

$$0 \leq x_n < m^{n+1} \quad (186)$$

für jedes $n \in \mathbb{N}$. Wir setzen ferner

$$P_n = [0, (m^n), b_n] \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Weil m^{n+1} für jedes $n \in \mathbb{N}$ ein Teiler von b_n ist, ist die Menge

$$P = \bigcup_{n=1}^{\infty} P_n$$

eine separierte Progressionenschar, die den Voraussetzungen aus Satz 4.3.2 genügt. Ferner seien dann gemäß 4.3.2 eine die separierte Progressionenschar P umfassende, gleichmäßig dünne Menge D und eine natürliche Zahl k_0 gegeben, die den Aussagen 4.3.2 (180)-(183) genügen. Dabei besagt Satz 4.3.2 (182), daß die asymptotische Dichte der Menge D gerade $d_2(D) = 2\sqrt{m+1}$ beträgt.

Behauptung. Setzt man für jedes $n \in \mathbb{N}$

$$S^{(n+2)} = (D \setminus P) \cap [b_n, b_{n+1}] , \quad (187)$$

so genügen die Mengen $S^{(n+2)}$ für alle $n \geq k_0$ den Aussagen

$$|S^{(n+2)}| \geq (m-1)m^{n+1} - (2m-1) , \quad (188)$$

$$|S^{(n+2)}| \leq (m-1)m^{n+1} + m . \quad (189)$$

Bemerkung. Damit werden zwischen den Endpunkten b_n und b_{n+1} der arithmetischen Progressionen P_n und P_{n+1} asymptotisch betrachtet gerade $(m-1)m^{n+1}$ Elemente zur separierten Progressionenschar P hinzugefügt. Diese Anzahl entspricht asymptotisch exakt derjenigen, die wir benötigen würden, um ein volles Restsystem R_{n+1} modulo m^{n+1} zu einem vollen Restsystem R_{n+2} modulo m^{n+2} zu vervollständigen.

Beweis. Beachtet man, daß $P \cap [b_n, b_{n+1}] = P_{n+1} \cap [b_n, b_{n+1}]$ für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt, so erhält man aus der Definition (187) der Mengen $S^{(n+2)}$

$$|S^{(n+2)}| = D(b_{n+1}) - D(b_n) - \frac{b_{n+1} - b_n}{m^{n+1}} \quad \forall n \in \mathbb{N} . \quad (190)$$

Dabei beachten wir, daß m^{n+1} Teiler von b_n ist. Die Definition (185) der b_n liefert unmittelbar

$$\begin{aligned} \frac{b_{n+1} - b_n}{m^{n+1}} &= \frac{m^2}{m+1} (m^{n+1} - m^{n-1}) + \frac{x_{n+1} - x_n}{m^{n+1}} \\ &= (m-1)m^{n+1} + \frac{x_{n+1} - x_n}{m^{n+1}} \quad \forall n \in \mathbb{N} . \end{aligned}$$

Beachten wir, daß $\frac{b_{n+1} - b_n}{m^{n+1}}$ ganzzahlig ist und nach (186) $0 \leq x_n < m^{n+1}$ sowie $0 \leq x_{n+1} < m^{n+2}$ gelten, so erhalten wir die Abschätzungen

$$\frac{b_{n+1} - b_n}{m^{n+1}} \leq (m-1)m^{n+1} + (m-1) \quad \forall n \in \mathbb{N} , \quad (191)$$

$$\frac{b_{n+1} - b_n}{m^{n+1}} \geq (m-1)m^{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N} . \quad (192)$$

Um nun die Behauptungen (188) und (189) zeigen zu können, benötigen wir ferner eine Abschätzung der Zählfunktion der Menge D an den Endpunkten b_n der arithmetischen Progressionen. Dazu nutzen wir die Aussage 4.3.2 (183) aus. Es ist nämlich für jedes $k \geq k_0$

$$d_k = \frac{1}{4(m+1)}k^2 + r_k, \quad 0 \leq r_k < \frac{1}{4(m+1)}(2k+1).$$

Zunächst ist

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{m^2}{m+1} m^{2n} + x_n \\ &= \frac{1}{4(m+1)} (2m^{n+1})^2 + x_n \\ &> d_{2m^{n+1}-1}, \end{aligned}$$

und deshalb ist mit $k_n = 2m^{n+1}$

$$b_n \geq d_{k_n}$$

für alle hinreichend großen n , insbesondere für alle $n \geq k_0$. Also genügt die Zählfunktion der Menge D bereits der unteren Abschätzung

$$D(b_n) \geq 2m^{n+1} \quad \forall n \geq k_0. \quad (193)$$

Andererseits ist mit Voraussetzung (186)

$$b_n < \frac{1}{4(m+1)} (2m^{n+1})^2 + m^{n+1}. \quad (194)$$

Dann können wir eine obere Schranke für die Zählfunktion der Menge D an den Stellen b_n für hinreichend große n ermitteln, indem wir b_n durch ein $d_{k_n+\ell}$ nach oben abschätzen. Nun gilt folgende Schlußkette:

$$\begin{aligned} &\ell \geq m+1 \\ \iff &\frac{\ell m^{n+1}}{m+1} \geq m^{n+1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\implies \frac{1}{4(m+1)}(4\ell m^{n+1} + \ell^2) \geq m^{n+1} \\ &\iff \frac{1}{4(m+1)}(2m^{n+1} + \ell)^2 \geq \frac{1}{4(m+1)}(2m^{n+1})^2 + m^{n+1} . \end{aligned}$$

Beachten wir, daß für alle $n \geq k_0$

$$d_{k_n+\ell} \geq \frac{1}{4m+1}(2m^{n+1} + \ell)^2 \quad \forall \ell \in \mathbb{N}$$

ist, so folgt mit der oberen Abschätzung (194) für alle $n \geq k_0$ unmittelbar

$$d_{k_n+\ell} > b_n \quad \forall \ell \geq m+1 .$$

Also erhalten wir mit $\ell_n = 2m^{n+1} + m$ für alle $n \geq k_0$ die Aussage

$$b_n \leq d_{\ell_n} ,$$

weil b_n Element der Menge D ist. Damit besitzt die Zählfunktion der Menge D an den Stellen b_n die obere Schranke

$$D(b_n) \leq 2m^{n+1} + m \quad \forall n \geq k_0 . \quad (195)$$

Mit den Aussagen (190)-(193) und (195) genügen die Mengen $S^{(n+2)}$ für alle $n \geq k_0$ den Behauptungen (188) und (189).

4.3.5 Bemerkung

Wir haben damit gezeigt, daß asymptotisch betrachtet hinreichend viele Elemente in den Mengen $(D \setminus P) \cap [b_n, b_{n+1}]$ liegen, um bei einem geeigneten Ersetzen dieser Elemente aus einem vollen Restsystem $R_{n+1} \subseteq [0, b_n]$ modulo m^{n+1} ein volles Restsystem $R_{n+2} \subseteq [0, b_{n+1}]$ modulo m^{n+2} zu erzeugen, das der Aussage $(R_{n+2} \setminus R_{n+1}) \subseteq [b_n, b_{n+1}]$ genügt. Mit einem geeigneten n_0 ist es unter Umständen möglich, aus der Menge D eine PR-Basis Q zu gewinnen, indem wir die ergänzten Mengen $S^{(n+2)}$ durch die benötigten Restsysteme ersetzen. In der Tat ist es möglich, auf diese Weise eine gleichmäßig dünne PR-Basis mit asymptotischer Dichte $2\sqrt{m+1}$ zu konstruieren.

Zunächst zeigen wir, daß wir die Mengen $(D \setminus P) \cap [b_n, b_{n+1}]$ für hinreichend große n durch Mengen $\mathfrak{R}^{(n+2)}$ ersetzen können, deren Elemente aus geeignet gewählten Restklassen modulo m^{n+2} , die keinen Repräsentanten in der arithmetischen Progression P_{n+1} besitzen, entnommen werden, ohne dabei die asymptotische Dichte zu verändern.

4.3.6 Zum Austausch der zur separierten Progressionenschar P hinzugefügten Elemente

Voraussetzung. Für eine natürliche Zahl $m \geq 2$ sei die in Satz 4.3.4 definierte separierte Progressionenschar $P = \bigcup_{n=1}^{\infty} P_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} [0, (m^n), b_n]$ mit der dortigen Bezeichnungsweise gegeben. Ferner sei

$$D = \{d_0 < d_1 < \dots\}$$

wieder die gleichmäßig dünne Menge aus Satz 4.3.4 gemäß Satz 4.3.2. Also erfüllt die Menge D mit einer natürlichen Zahl k_0

$$P \subseteq D,$$

$$d_2(D) = 2\sqrt{m+1},$$

$$d_k = \frac{1}{4(m+1)} k^2 + r_k, \quad 0 \leq r_k < \frac{1}{4(m+1)} (2k+1) \quad \forall k \geq k_0.$$

Schließlich seien für alle $n \geq k_0$

$$S^{(n+2)} = (D \setminus P) \cap [b_n, b_{n+1}],$$

$$s_{n+2} = |S^{(n+2)}|,$$

$$S^{(n+2)} = \{s_1^{(n+2)} < s_2^{(n+2)} < \dots < s_{s_{n+2}}^{(n+2)}\}.$$

Ferner seien mit einer natürlichen Zahl $k_1 \geq k_0$ für jedes natürliche $n \geq k_1$ jeweils s_{n+2} Restklassen $\rho_1^{(n+2)}, \rho_2^{(n+2)}, \dots, \rho_{s_{n+2}}^{(n+2)}$ modulo m^{n+2} vorgegeben,

die zum einen keinen Repräsentanten in $[b_n, (m^{n+1}), b_{n+1}]$ besitzen und von denen zum anderen jeweils $2m(m+1)+2$ aufeinanderfolgende Restklassen paarweise verschieden sind.

Behauptung. Für jedes $n \geq k_1$ können die Mengen $S^{(n+2)}$ durch Mengen

$$\mathfrak{R}^{(n+2)} = \{r_1^{(n+2)}, r_2^{(n+2)}, \dots, r_{s_{n+2}}^{(n+2)}\}$$

ersetzt werden, die den Aussagen

$$\mathfrak{R}^{(n+2)} \subseteq ([b_n, b_{n+1}] \setminus P_{n+1}), \quad (196)$$

$$|\mathfrak{R}^{(n+2)}| = |S^{(n+2)}|, \quad (197)$$

$$r_i^{(n+2)} \in \rho_i^{(n+2)} \quad \forall 1 \leq i \leq s_{n+2} \quad (198)$$

genügen. Setzen wir

$$Q_0 = \left(D \setminus \bigcup_{n=k_1}^{\infty} S^{(n+2)} \right) \cup \bigcup_{n=k_1}^{\infty} \mathfrak{R}^{(n+2)},$$

so ist die Menge Q_0 gleichmäßig dünn. Dabei entspricht die asymptotische Dichte der Menge Q_0 der asymptotischen Dichte der Menge D :

$$d_2(Q_0) = d_2(D). \quad (199)$$

Beweis. Sei $n \geq k_1$ beliebig. Weil m^{n+1} Teiler von m^{n+2} und b_n ist, enthält die arithmetische Progression $[b_n, (m^{n+1}), b_{n+1}]$ nur Repräsentanten der m Restklassen modulo m^{n+2} mit den Resten $0, m^{n+1}, 2m^{n+1}, \dots, (m-1)m^{n+1}$. Andererseits ist mit Abschätzung 4.3.4 (192)

$$\begin{aligned} b_{n+1} - b_n &\geq (m-1)m^{2n+2} \\ &> m^{n+2}. \end{aligned}$$

Also sind in der arithmetischen Progression $[b_n, (m^{n+1}), b_{n+1}]$ Repräsentanten aller m genannten Restklassen modulo m^{n+2} zu finden. Dann verbleiben $m^{n+2} - m > 0$ verschiedene Restklassen modulo m^{n+2} , aus denen Repräsentanten für die Menge $\mathfrak{R}^{(n+2)}$ gewählt werden können. Insbesondere ist $m^{n+2} - m > 2m(m+1) + 2$ für hinreichend große n , das heißt, die Voraussetzung kann erfüllt werden. Für jedes natürliche $i \leq s_{n+2}$ und jedes $r \in \mathbb{R}$, $0 \leq r < m^{n+2}$, ist die Menge

$$\{s_i^{(n+2)} - (m^{n+2} - r), s_i^{(n+2)} + r\} \cap [b_n, b_{n+1}] \neq \emptyset.$$

Damit existiert für jedes natürliche $i \leq s_{n+2}$ ein $t_i^{(n+2)}$, $|t_i^{(n+2)}| < m^{n+2}$, das den Bedingungen

$$\begin{aligned} r_i^{(n+2)} &= s_i^{(n+2)} + t_i^{(n+2)} \in [b_n, b_{n+1}], \\ r_i^{(n+2)} &\in \rho_i^{(n+2)} \end{aligned}$$

genügt. Wir setzen

$$\mathfrak{R}^{(n+2)} = \{r_1^{(n+2)}, r_2^{(n+2)}, \dots, r_{s_{n+2}}^{(n+2)}\}.$$

Dann enthält die Menge $\mathfrak{R}^{(n+2)}$ gerade die Repräsentanten $r_i^{(n+2)}$ aus den vorgegebenen Restklassen $\rho^{(n+2)} = (\rho_1^{(n+2)}, \rho_2^{(n+2)}, \dots, \rho_{s_{n+2}}^{(n+2)})$ modulo m^{n+2} für alle $n \geq k_1$, und die Behauptungen (196) und (198) sind gezeigt.

Nach Voraussetzung werden die $r_i^{(n+2)}$ stets aus jeweils $2m(m+1) + 2$ aufeinanderfolgend paarweise verschiedenen Restklassen entnommen. Zum Nachweis der Aussage (197) genügt es zu zeigen, daß jedes durch $r_i^{(n+2)}$ ersetzte $d_k = s_i^{(n+2)}$ mit $p = m(m+1) + 1$ der Abschätzung

$$\max\{d_{k-p}, b_n\} < r_i^{(n+2)} < \min\{d_{k+p}, b_{n+1}\} \quad (200)$$

genügt. Dann ist nämlich für jedes durch $r_j^{(n+2)}$ ausgetauschte $d_{k+\ell} = s_j^{(n+2)}$ mit $\ell \geq 2p$

$$r_j^{(n+2)} > d_{k+\ell-p} \geq d_{k+p} > r_i^{(n+2)},$$

und für jedes durch $r_j^{(n+2)}$ ausgetauschte $d_{k-\ell} = s_j^{(n+2)}$ mit $\ell \geq 2p$

$$r_j^{(n+2)} < d_{k-\ell+p} \leq d_{k-p} < r_i^{(n+2)} .$$

Insgesamt müssen dann die $r_i^{(n+2)}$ paarweise verschieden sein.

Für jedes $k \geq k_1 (\geq k_0)$ liegen die Elemente d_k der Menge D innerhalb der in der Voraussetzung angegebenen Bereiche. Anhand des Restgliedes r_k erkennt man, daß die Länge des Intervalls, in dem das Element d_k enthalten ist, mit k streng monoton wächst. Deshalb ist es uns möglich, mit Hilfe der Länge der Intervalle die Ungleichung (200) nachzuweisen. Wir beachten, daß jedes $r_i^{(n+2)}$ aus der m^{n+2} -Umgebung von $s_i^{(n+2)}$ entnommen wird und in $[b_n, b_{n+1}]$ liegt. Ferner ist nach Voraussetzung $n \geq k_0$. Dann können wir die in der Umgebung des Elementes d_k zu untersuchenden Intervalllängen durch die zu b_n gehörige nach unten abschätzen. Nach dem Beweis zu 4.3.4 ist

$$b_n \geq d_{2m^{n+1}} .$$

Jedes Element $d_k \in [b_n, b_{n+1}]$ genügt bezüglich aller $\ell > m(m+1)$, die $d_{k \pm \ell} \in [b_n, b_{n+1}]$ erfüllen, der Abschätzung

$$|d_{k \pm \ell} - d_k| \geq \frac{(\ell - 1)}{4(m+1)} (2 \cdot 2m^{n+1} + 1) > m^{n+2} , \quad (201)$$

weil wir $\ell - 1$ Intervalle der Form $\left[\frac{1}{4(m+1)} v^2, \frac{1}{4(m+1)} (v+1)^2 \right)$ überschreiten müssen, um von d_k zu $d_{k \pm \ell}$ zu gelangen. Beachten wir dabei, daß $D(b_n) \geq 2m^{n+1}$ erfüllt ist, so folgt $v \geq 2m^{n+1}$. Damit beträgt die minimale Länge der Intervalle $\frac{1}{4(m+1)} (4m^{n+1} + 1)$. Wir erhalten also für jedes durch $r_i^{(n+2)}$ ausgetauschte $d_k = s_i^{(n+2)}$ vermöge Ungleichung (201) mit $p = m(m+1) + 1$ die Abschätzung (200)

$$\max\{d_{k-p}, b_n\} < r_i^{(n+2)} < \min\{d_{k+p}, b_{n+1}\} .$$

Damit verbleibt noch der Nachweis, daß die Menge Q_0 gleichmäßig dünn ist und ihre asymptotische Dichte derjenigen der Menge D entspricht. Wollen wir den Quotienten $\frac{Q_0(j)}{\sqrt{j}}$ bezüglich seines asymptotischen Verhaltens untersuchen, so können wir anstelle der Zählfunktion der Menge Q_0 auf die Zählfunktion der Menge D zurückgreifen, wenn wir zeigen können, daß die beiden Abschätzungen

$$Q_0(j) \leq D(j) + (p+1) , \quad (202)$$

$$Q_0(j) \geq D(j) - p \quad (203)$$

mit $p = m(m+1) + 1$ für hinreichend große $j \in \mathbb{N}$ gelten. Denn dann entsprechen sich die asymptotischen Dichten der Mengen Q_0 und D . Die Menge Q_0 ist also gleichmäßig dünn mit asymptotischer Dichte

$$d_2(Q_0) = d_2(D) ,$$

wenn die Ungleichungen (202) und (203) erfüllt sind. Zum Nachweis der Aussagen (202) und (203) beachten wir, daß der jeweils zu einem Element $d_k = s_i^{(n+2)} \in S^{(n+2)}$ ausgewählte Repräsentant $r_i^{(n+2)}$ wegen Abschätzung (200) stets der Aussage

$$d_{k-p} \leq r_i^{(n+2)} \leq d_{k+p} \quad (204)$$

genügt. Die Ungleichung (204) bedeutet folgendes: Betrachten wir alle Elemente d_ℓ kleiner gleich d_k der Menge D , so ist jedes bis dahin auch eventuell für die Menge Q_0 ausgetauschte Element zum einen kleiner gleich $d_{\ell+p}$ und zum anderen größer gleich $d_{\ell-p}$. Wir erhalten deshalb für die Zählfunktion der Menge Q_0 die Abschätzungen

$$Q_0(d_k) \leq D(d_{k+p}) = k + p ,$$

$$Q_0(d_k) \geq D(d_{k-p}) = k - p .$$

Zu jedem $j \in \mathbb{N}$ existiert genau ein $k \in \mathbb{N}$, das $d_{k-1} \leq j < d_k$ genügt. Aus den obigen Abschätzungen folgen daher die Ungleichungen

$$Q_0(j) \leq Q_0(d_k) \leq D(d_{k+p}) = D(j) + p + 1 ,$$

$$Q_0(j) \geq Q_0(d_{k-1}) \geq D(d_{k-p-1}) = D(j) - p ,$$

die gerade den Aussagen (202) und (203) entsprechen. Damit genügt auch die asymptotische Dichte der Menge Q_0 der Behauptung (199)

$$d_2(Q_0) = d_2(D) = 2\sqrt{m+1} .$$

4.3.7 Bemerkung

Bevor wir zum abschließenden vierten Hauptresultat gelangen, benötigen wir noch eine Aussage, die es uns ermöglicht, in kleinerem Umfang Elemente zu gleichmäßig dünnen Mengen hinzuzufügen bzw. zu entfernen, ohne die asymptotische Dichte der Menge zu verändern. Das Lemma 4.3.8 wird uns in die Lage versetzen, den Mengen $\mathfrak{R}^{(n+2)}$ derart Elemente zuzuführen bzw. aus diesen Mengen Elemente derart zu entfernen, daß wir gerade die für PR-Basen benötigten vollen Restsysteme R_n modulo m^n mit $(R_{n+2} \setminus R_{n+1}) \subseteq [b_n, b_{n+1}]$ erhalten. Also erzeugen wir mit Hilfe der Mengen Q_0 aus Satz 4.3.6 die gewünschten gleichmäßig dünnen PR-Basen Q mit asymptotischer Dichte $d_2(Q) = 2\sqrt{m+1}$.

4.3.8 Lemma

Voraussetzung. Gegeben seien eine dünne Menge A , eine natürliche Zahl $m \geq 2$ sowie eine reelle Zahl $c > 0$ und ein $M \in \mathbb{N}$. Ferner sei eine Menge T gegeben, die für jedes $n \in \mathbb{N}_0$ der folgenden Bedingung genügt:

$$T(cm^{2(n+1)}) - T(cm^{2n}) < M . \quad (205)$$

Behauptung. Dann besitzt die Menge T die asymptotische Dichte

$$d_2(T) = 0 , \quad (206)$$

und die untere und obere asymptotische Dichte der Mengen $(A \cup T)$ bzw. $(A \setminus T)$ genügen den Aussagen

$$\bar{d}_2(A \cup T) = \bar{d}_2(A \setminus T) = \bar{d}_2(A) , \quad (207)$$

$$\underline{d}_2(A \cup T) = \underline{d}_2(A \setminus T) = \underline{d}_2(A) . \quad (208)$$

Beweis. Für jedes hinreichend große $k \in \mathbb{N}$ existiert eine natürliche Zahl n , die der Ungleichung $cm^{2n} \leq k < cm^{2(n+1)}$ genügt. Dann ist die Abschätzung $T(k) \leq (n+1)M + T(c)$ wegen Voraussetzung (205) erfüllt und wir erhalten

$$\frac{T(k)}{\sqrt{k}} \leq \frac{(n+1)M + T(c)}{\sqrt{c} m^n} .$$

Mit k wächst auch n über alle Schranken. Also beträgt die asymptotische Dichte der Menge T gerade $d_2(T) = \bar{d}_2(T) = 0$, und Behauptung (206) ist gezeigt. Weiterhin ist

$$\begin{aligned} \bar{d}_2(A) &= \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{A(n)}{\sqrt{n}} \\ &\leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{(A \cup T)(n)}{\sqrt{n}} = \bar{d}_2(A \cup T) \\ &\leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{A(n)}{\sqrt{n}} + \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{T(n)}{\sqrt{n}} = \bar{d}_2(A) . \end{aligned}$$

Damit beträgt die obere asymptotische Dichte der Menge $A \cup T$

$$\bar{d}_2(A \cup T) = \bar{d}_2(A) .$$

Ersetzen wir in der obigen Schlußkette in den ersten beiden Zeilen den Limes superior durch den Limes inferior sowie in der dritten Zeile nur den ersten

Limes superior durch den Limes inferior, so erhalten wir dieselbe Schlußkette für die untere asymptotische Dichte. Also ist auch

$$\underline{d}_2(A \cup T) = \underline{d}_2(A) .$$

Mit A ist auch $A \setminus T$ dünn. Unter Beachtung von $A = (A \setminus T) \cup T$ ist

$$\bar{d}_2(A \setminus T) \leq \bar{d}_2(A) \leq \bar{d}_2(A \setminus T) + \bar{d}_2(T) = \bar{d}_2(A \setminus T) ,$$

$$\underline{d}_2(A \setminus T) \leq \underline{d}_2(A) \leq \underline{d}_2(A \setminus T) + \bar{d}_2(T) = \underline{d}_2(A \setminus T) .$$

Damit genügen die untere und obere asymptotische Dichte der Menge $A \setminus T$ den Gleichungen $\bar{d}_2(A \setminus T) = \bar{d}_2(A)$ und $\underline{d}_2(A \setminus T) = \underline{d}_2(A)$. Insgesamt sind nun auch die Behauptungen (207) und (208) gezeigt.

4.3.9 Viertes Hauptresultat: PR-Basen mit asymptotischer Dichte $2\sqrt{m+1}$

Voraussetzung. Gegeben sei eine natürliche Zahl $m \geq 2$. Wir betrachten die uns aus Satz 4.3.4 bekannte, separierte Progressionenschar

$$P = \bigcup_{n=1}^{\infty} P_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} [0, (m^n), b_n]$$

mit den Endpunkten

$$b_n = \left\lceil \frac{m^{n+1}}{m+1} \right\rceil m^{n+1} .$$

Dann genügt die separierte Progressionenschar P den Anforderungen der Sätze 4.3.2, 4.3.4 und 4.3.6.

Behauptung. Zur separierten Progressionenschar P existiert eine Menge R derart, daß die Menge

$$Q = P \cup R \tag{209}$$

eine gleichmäßig dünne PR-Basis ist, deren asymptotische Dichte

$$d(Q) = 2\sqrt{m+1} \quad (210)$$

beträgt. Ist A ebenfalls eine PR-Basis, deren separierte Progressionenschar aus arithmetischen Progressionen der Schrittweite m^n besteht, so genügt ihre obere asymptotische Dichte der unteren Abschätzung

$$\bar{d}_2(A) \geq d_2(Q) . \quad (211)$$

Insbesondere erhalten wir im Falle $m = 2$ eine gleichmäßig dünne PR-Basis Q mit asymptotischer Dichte

$$d(Q) = 2\sqrt{3} = 3,464 \dots . \quad (212)$$

Beweis. Zunächst wenden wir Satz 4.3.2 auf die separierte Progressionenschar P an. Dann erhalten wir eine gleichmäßig dünne Menge Q, die den Voraussetzungen der Sätze 4.3.4 und 4.3.6 entspricht. Zunächst überlegen wir uns, daß wir bei induktiver Konstruktion der Restsysteme R_n einer PR-Basis in jedem Schritt hinreichend viele Restklassen benötigen, um den Voraussetzungen des Satzes 4.3.6 zu genügen. Wollen wir ein volles Restsystem R_{n+1} modulo m^{n+1} zu einem vollen Restsystem R_{n+2} modulo m^{n+2} ergänzen, so müssen wir insgesamt $(m-1)m^{n+1}$ Elemente hinzufügen. Wie zu Beginn des Beweises von 4.3.6 gesehen, sind die Restklassen mit Rest $0, m^{n+1}, 2m^{n+1}, \dots, (m-1)m^{n+1}$ durch Repräsentanten in der arithmetischen Progression $[b_n, (m^{n+1}), b_{n+1}]$ vertreten. Wir beachten, daß bereits ein Vielfaches von m^{n+1} im Restsystem R_{n+1} modulo m^{n+1} enthalten ist. Daher benötigen wir Repräsentanten von exakt $(m-1)(m^{n+1}-1)$ verschiedenen Restklassen modulo m^{n+2} , die nicht in der arithmetischen Progression P_{n+1} vertreten sind. Dabei ist offensichtlich für ein hinreichend großes $k_1 \geq k_0$

$$(m-1)(m^{k+1}-1) \geq 2m(m+1)+2 \quad \forall k \geq k_1, \quad k \in \mathbb{N} .$$

Wir setzen

$$R_{k_1+1} = [0, m^{k_1+1} - 1]$$

und wenden mit k_1 Satz 4.3.6 auf die separierte Progressionenschar P an. Dann erhalten wir eine gleichmäßig dünne Menge

$$Q_0 = \{q_0^{(0)} < q_1^{(0)} < \dots\}$$

mit asymptotischer Dichte

$$d_2(Q_0) = 2\sqrt{m+1},$$

die die separierte Progressionenschar P enthält. Für jedes $n \geq k_1$ sind dabei die Elemente der Menge

$$\mathfrak{R}^{(n+2)} = (Q_0 \setminus P) \cap [b_n, b_{n+1}]$$

Repräsentanten aus nicht in der arithmetischen Progression P_{n+1} vertretene Restklassen modulo m^{n+2} , von denen jeweils $2m(m+1) + 2$ aufeinanderfolgende verschieden sind. Man beachte, daß Restklassen modulo m^{n+2} mit Repräsentanten in $[b_n, (m^{n+1}), b_{n+1}]$ natürlich keine Repräsentanten in $(Q_0 \setminus P)$ besitzen können. Betrachten wir nun die Menge

$$Q_1 = P \cup [0, m^{k_1+1} - 1] \cup \left(\bigcup_{n=k_1}^{\infty} \mathfrak{R}^{(n+2)} \right),$$

so können wir uns fragen, welche Veränderungen noch an der Menge Q_1 vorgenommen werden müssen, damit sie in eine PR-Basis Q überführt ist. Für jedes $n \geq k_1$ genügt die Mächtigkeit der Mengen $\mathfrak{R}^{(n+2)}$ nach den Sätzen 4.3.4 und 4.3.6 den Abschätzungen

$$|\mathfrak{R}^{(n+2)}| \geq (m-1)m^{n+1} - (2m-1), \quad (213)$$

$$|\mathfrak{R}^{(n+2)}| \leq (m-1)m^{n+1} + m. \quad (214)$$

Wir setzen für jedes $n \geq k_1$

$$r_{n+2} = \left| \mathfrak{R}^{(n+2)} \right|$$

und unterscheiden zwischen den zwei Fällen $r_{n+2} \leq (m-1)(m^{n+1}-1)$ und $r_{n+2} > (m-1)(m^{n+1}-1)$.

1. Fall: $r_{n+2} \leq (m-1)(m^{n+1}-1)$. Für die Menge $\mathfrak{R}^{(n+2)}$ wählen wir r_{n+2} paarweise verschiedene Restklassen $\rho_i^{(n+2)}$ modulo m^{n+2} aus, deren Repräsentanten beim Ergänzen des Restsystems R_{n+1} modulo m^{n+1} zu einem vollen Restsystem R_{n+2} modulo m^{n+2} benötigt werden. Für die jetzt immer noch fehlenden $t_{n+2} = (m-1)(m^{n+1}-1) - r_{n+2}$ Restklassen modulo m^{n+2} wählen wir jeweils einen beliebigen Repräsentanten $r_{r_n+i}^{(n+2)}$ aus $[b_n, b_{n+1}]$ für jedes natürliche $i \leq t_{n+2}$ aus. Wir setzen

$$\begin{aligned} \mathfrak{R}_1^{(n+2)} &= \{r_{r_{n+2}+1}^{(n+2)}, \dots, r_{(m-1)(m^{n+1}-1)}^{(n+2)}\}, \\ \mathfrak{R}_2^{(n+2)} &= \emptyset. \end{aligned}$$

2. Fall: $r_{n+2} > (m-1)(m^{n+1}-1)$. Alle $(m-1)(m^{n+1}-1)$ benötigten Restklassen $\rho_i^{(n+2)}$ modulo m^{n+2} können für die Menge $\mathfrak{R}^{(n+2)}$ gewählt werden. Diese seien dann durch $\rho_1^{(n+2)}, \dots, \rho_{(m-1)(m^{n+1}-1)}^{(n+2)}$ gegeben. Wir setzen

$$\begin{aligned} \mathfrak{R}_1^{(n+2)} &= \emptyset, \\ \mathfrak{R}_2^{(n+2)} &= \{r_{(m-1)(m^{n+1}-1)+1}^{(n+2)}, \dots, r_{r_{n+2}}^{(n+2)}\}. \end{aligned}$$

Behauptung ist nun, daß die Menge

$$Q = \left(Q_1 \cup \left(\bigcup_{n=n_0}^{\infty} \mathfrak{R}_1^{(n+2)} \right) \right) \setminus \left(\bigcup_{n=n_0}^{\infty} \mathfrak{R}_2^{(n+2)} \right)$$

eine PR-Basis mit asymptotischer Dichte $d_2(Q) = 2\sqrt{m+1}$ ist.

Zunächst entsprechen sich gemäß unserer Konstruktion alle Elemente der Mengen Q_0 und Q_1 , die größer als $m^{k_1+1} - 1$ und größer als b_{k_1} sind. Deshalb sind die asymptotischen Dichten der Mengen Q_0 und Q_1 gleich:

$$d_2(Q_1) = d_2(Q_0) = 2\sqrt{m+1} . \quad (215)$$

Beachten wir die Abschätzungen (213) und (214) sowie die Tatsache, daß wir jeweils gerade Repräsentanten von $(m-1)(m^{n+1}-1)$ verschiedenen Restklassen modulo m^{n+2} benötigen, die nicht in der arithmetischen Progression P_{n+1} vertreten sind, so genügen die Mengen $\mathfrak{R}_1^{(n+2)}$ und $\mathfrak{R}_2^{(n+2)}$ für jedes $n \geq k_1$ den beiden Abschätzungen

$$\begin{aligned} |\mathfrak{R}_1^{(n+2)}| &\leq m , \\ |\mathfrak{R}_2^{(n+2)}| &\leq 2m - 1 . \end{aligned}$$

Unter Anwendung von Lemma 4.3.8 erhalten wir zunächst, daß die Menge $\left(Q_1 \cup \left(\bigcup_{n=k_1}^{\infty} \mathfrak{R}_1^{(n+2)}\right)\right)$ gleichmäßig dünn mit asymptotischer Dichte

$$d_2\left(Q_1 \cup \left(\bigcup_{n=k_1}^{\infty} \mathfrak{R}_1^{(n+2)}\right)\right) = d_2(Q_1) = 2\sqrt{m+1}$$

ist. Wir wenden das Lemma 4.3.8 nochmals an. Dann ist auch die Menge Q gleichmäßig dünn und besitzt die asymptotische Dichte

$$\begin{aligned} d_2(Q) &= d_2\left(\left(Q_1 \cup \left(\bigcup_{n=k_1}^{\infty} \mathfrak{R}_1^{(n+2)}\right)\right) \setminus \left(\bigcup_{n=k_1}^{\infty} \mathfrak{R}_2^{(n+2)}\right)\right) \\ &= d_2\left(Q_1 \cup \left(\bigcup_{n=k_1}^{\infty} \mathfrak{R}_1^{(n+2)}\right)\right) \\ &= d_2(Q_1) \\ &= 2\sqrt{m+1} . \end{aligned}$$

Also ist der Beweis bezüglich der asymptotischen Dichte bereits erbracht.

Daher verbleibt nur noch zu zeigen, daß die Menge Q eine PR-Basis ist. Dazu setzen wir zunächst noch für jedes $n \leq k_1$

$$R_n = [0, m^n - 1]$$

sowie

$$\mathfrak{R}_3^{(k_1+1)} = R_{k_1+1} ,$$

und für jedes $n \geq k_1$ induktiv

$$\begin{aligned} P_{n+2}^{(n+2)} &= \left\{ b_n + im^{n+1} \mid 0 \leq i \leq m-1, i \in \mathbb{N}_0 \right\} , \\ \mathfrak{R}_3^{(n+2)} &= \left\{ r_3^{(n+2)} \in P_{n+2}^{(n+2)} \mid r_3^{(n+2)} \not\equiv r \pmod{m^{n+2}} \forall r \in \mathfrak{R}_3^{(\ell+2)} \dots \right. \\ &\quad \left. \dots \forall \ell : k_1 - 1 \leq \ell \leq n-1, \ell \in \mathbb{N}_0 \right\} . \end{aligned}$$

Dann enthalten die Mengen $\mathfrak{R}_3^{(n+2)}$ für jedes $n \geq k_1$ gerade die benötigten Repräsentanten der Restklassen, die in der arithmetischen Progression P_{n+1} liegen. Denn der (später) in R_{n+1} enthaltene Repräsentant, dessen Restklasse auch in einer der arithmetischen Progression P_ℓ für ein $\ell \leq n+1$ vertreten ist, muß ein Vielfaches von m^{n+1} sein, weil m^{n+1} Teiler von b_n ist. Also ist er ein Element der Menge $\mathfrak{R}_3^{(\ell+2)}$ für ein ℓ mit $k_1 - 1 \leq \ell \leq n-1$, weil diese Mengen alle Repräsentanten von Restklassen enthalten, die bis hierhin in der separierten Progressionenschar P enthalten sind. Wir setzen für jedes $n \geq k_1$

$$\begin{aligned} \mathfrak{R}_0^{(n+2)} &= \left(\mathfrak{R}^{(n+2)} \cup \mathfrak{R}_1^{(n+2)} \cup \mathfrak{R}_3^{(n+2)} \right) \setminus \mathfrak{R}_2^{(n+2)} , \\ R_{n+2} &= [0, m^{k_0+1} - 1] \cup \left(\bigcup_{\ell=k_0}^n \mathfrak{R}_0^{(\ell+2)} \right) . \end{aligned}$$

Dann sind die Mengen R_n nach Konstruktion volle Restsysteme modulo m^n , die für jedes natürliche $n \geq k_0 + 2$ den Bedingungen

$$\begin{aligned} r_n^+ &= \max R_n \leq b_{n-1} , \\ R_{n-1} &\subseteq R_n , \\ R_n \setminus R_{n-1} &\subseteq [b_{n-2}, b_{n-1}] \end{aligned}$$

genügen. Die obigen Aussagen entsprechen den Forderungen (154)-(156) aus Satz 4.2.10. Ferner ist das in Satz 4.2.10 hinzugefügte Intervall bereits in der Menge Q enthalten. Auch die arithmetische Progressionenschar P entspricht den Bedingungen aus Satz 4.2.10. Also ist die Menge Q eine PR-Basis mit asymptotischer Dichte $d_2(Q) = 2\sqrt{m+1}$. Schließlich folgt die Behauptung (211) unmittelbar aus unserem dritten Hauptresultat 4.2.12.

4.3.10 Bemerkung

Damit haben wir das letzte Ziel dieser Arbeit erreicht, nämlich den Nachweis einer gleichmäßig dünnen Basis zweiter Ordnung mit asymptotischer Dichte $2\sqrt{3}$. Wir beachten, daß die asymptotische Dichte innerhalb der Klasse der PR-Basen nicht mehr verbessert werden kann. Abschließend betrachten wir den Beginn einer Konstruktion einer PR-Basis Q mit asymptotischer Dichte $d_2(Q) = 2\sqrt{3}$ nach dem vierten Hauptresultat 4.3.9. Dazu überlegen wir uns zunächst in 4.3.11, welche Schritte bei der Berechnung dieser Basen in der Praxis überhaupt benötigt werden.

4.3.11 Zur Konstruktion von gleichmäßig dünnen PR-Basen mit asymptotischer Dichte $2\sqrt{m+1}$

Wir haben in diesem Abschnitt mit Hilfe der gewählten arithmetischen Progressionen eine gleichmäßig dünne PR-Basis Q mit asymptotischer Dichte $d(Q) = 2\sqrt{m+1}$ für jede natürliche Zahl $m \geq 2$ nachgewiesen. Wenn wir nun den Beginn einer solchen Basis explizit konstruieren wollen, so benötigen wir nicht einmal die explizite Berechnung der gleichmäßig dünnen Menge D , die die separierte Progressionenschar P umfaßt.

Vielmehr ist für uns die Tatsache von Interesse, daß die der Menge P hinzugefügten Elemente wiederum durch die für die vollen Restsysteme notwendigen Repräsentanten ausgetauscht werden. Dabei wird ein induktives Vorgehen gewählt. Die Mengen $S^{(n+2)}$ aus $[b_n, b_{n+1}]$ werden durch Mengen $\mathfrak{R}_0^{(n+2)}$, die ebenfalls in $[b_n, b_{n+1}]$ enthalten sind, ersetzt: Für jede benötigte Restklasse wird gerade der unter- oder oberhalb des auszutauschenden Elements gelegene Repräsentant der Restklasse ausgewählt. Dieser Repräsentant ist dann Element der arithmetischen Progression $[b_n, b_{n+1}]$. Sind schließlich alle benötigten Restklassen belegt, so werden die überschüssigen Elemente schlicht entfernt. Fehlen nach dem Austausch noch Restklassen, so können wir für diese beliebige Repräsentanten aus der arithmetischen Progression $[b_n, b_{n+1}]$ auswählen.

Wir beachten, daß bei der Konstruktion der gleichmäßig dünnen Menge D schließlich genau dann ein Element der Menge P hinzugefügt wird, wenn das Intervall I_k kein Element der separierten Progressionenschar P enthält, das heißt, wenn

$$P \cap I_k = P \cap \left[\frac{1}{4(m+1)}k^2, \frac{1}{4(m+1)}(k+1)^2 \right) = \emptyset.$$

Dann wird eine beliebige natürliche Zahl des Intervalls ausgewählt und der Progressionenschar hinzugefügt. Anstelle dieser Zahl wählen wir direkt einen Repräsentanten einer benötigten Restklasse aus.

Beginnen wir diese Verfahrensweise anstelle des Intervalls mit dem Index k_0 bereits zuvor oder später, so wird die asymptotische Dichte der Menge nicht verändert. Denn es handelt sich hierbei nur um eine konstante Veränderung der Zählfunktion.

Damit können wir eine gleichmäßig dünne PR-Basis konstruieren, indem wir schlicht die Schnitte

$$P \cap \left[\frac{1}{4(m+1)} k^2, \frac{1}{4(m+1)} (k+1)^2 \right)$$

betrachten. Für jeden leeren Schnitt fügen wir einen Repräsentanten einer noch fehlenden Restklasse zur Progressionenschar P hinzu. Dabei gehen wir in dem Sinne induktiv vor, daß wir in jedem Schritt diejenigen Intervalle betrachten, die zwischen b_n und b_{n+1} liegen, und mit Hilfe der ergänzten Elemente die Mengen $\mathfrak{R}_0^{(n+2)}$ erzeugen.

4.3.12 Eine Konstruktion einer gleichmäßig dünnen PR-Basis mit asymptotischer Dichte $2\sqrt{3}$

Wir haben dann den Fall $m = 2$ zu betrachten. Zunächst bestimmen wir die ersten fünf arithmetischen Progressionen gemäß 4.3.9. Für $n = 1, \dots, 5$ sind also die Endpunkte der arithmetischen Progressionen zu bestimmen:

$$b_n = \left\lceil \frac{2^{n+1}}{3} \right\rceil 2^{n+1},$$

$$P_n = [0, (2^n), b_n].$$

Wir erhalten damit

$$b_1 = 8, \quad b_4 = 352,$$

$$b_2 = 24, \quad b_5 = 1408.$$

$$b_3 = 96,$$

Wir wollen hier noch die ersten sechs Restsysteme bestimmen. Zunächst untersuchen wir allerdings zum einen, in welchen Intervallen I_k die Endpunkte $b_1, \dots, b_5$ enthalten sind, und zum anderen die Mächtigkeit der separierten Progressionenschar an diesen Punkten. Dann haben wir unsere zuvor gezeigten Sätze auch in der Praxis grob nachvollzogen.

Man rechnet nach, daß die separierte Progressionenschar zum einen den Aussagen

$$\begin{aligned} b_1 &\in I_9, & b_4 &\in I_{64}, \\ b_2 &\in I_{16}, & b_5 &\in I_{129}. \\ b_3 &\in I_{33}, \end{aligned}$$

genügt und daß deren Zählfunktion die Gleichungen

$$\begin{aligned} P(b_1) &= 4, & P(b_4) &= 33, \\ P(b_2) &= 8, & P(b_5) &= 66 \\ P(b_3) &= 17, \end{aligned}$$

erfüllt. Damit stehen uns bereits zu Beginn genügend leere Schnitte zur Verfügung, um die gewünschten Restsysteme erzeugen zu können. Wir setzen

$$R_2 = [0, 3] .$$

Nun sind

$$\begin{aligned} P \cap [0, b_2] &= \{0, 2, 4, 6, 8, 12, 16, 20, 24\} , \\ P \cap I_9 &= P \cap \left[\frac{81}{12}, \frac{100}{12} \right) = \{8\} , \\ P \cap I_{10} &= P \cap \left[\frac{100}{12}, \frac{121}{12} \right) = \emptyset \implies 13 \equiv 5 \pmod{8} , \\ P \cap I_{11} &= P \cap \left[\frac{121}{12}, \frac{144}{12} \right) = \emptyset \implies 14 \equiv 6 \pmod{8} , \\ P \cap I_{12} &= P \cap \left[\frac{144}{12}, \frac{169}{12} \right) = \{12\} \implies 12 \equiv 4 \pmod{8} , \\ P \cap I_{13} &= P \cap \left[\frac{169}{12}, \frac{196}{12} \right) = \{16\} , \\ P \cap I_{14} &= P \cap \left[\frac{196}{12}, \frac{225}{12} \right) = \emptyset \implies 23 \equiv 7 \pmod{8} , \\ P \cap I_{15} &= P \cap \left[\frac{225}{12}, \frac{256}{12} \right) = \{20\} , \\ P \cap I_{16} &= P \cap \left[\frac{256}{12}, \frac{289}{12} \right) = \{24\} . \end{aligned}$$

Wir erhalten also

$$(R_3 \setminus R_2) = \{12, 13, 14, 23\} ,$$

und damit

$$R_3 = \{0, 1, 2, 3, 12, 13, 14, 23\} .$$

Weiterhin sind

$$\begin{aligned} P \cap [b_2, b_3] &= \{24, 32, 40, 48, 56, 64, 72, 80, 88, 96\} , \\ P \cap I_{17} &= P \cap \left[\frac{289}{12}, \frac{324}{12} \right) = \emptyset \implies 36 \equiv 4 \pmod{16} , \\ P \cap I_{18} &= P \cap \left[\frac{324}{12}, \frac{361}{12} \right) = \emptyset \implies 37 \equiv 5 \pmod{16} , \\ P \cap I_{19} &= P \cap \left[\frac{361}{12}, \frac{400}{12} \right) = \{32\} , \\ P \cap I_{20} &= P \cap \left[\frac{400}{12}, \frac{441}{12} \right) = \emptyset \implies 38 \equiv 6 \pmod{16} , \\ P \cap I_{21} &= P \cap \left[\frac{441}{12}, \frac{484}{12} \right) = \{40\} \implies 40 \equiv 8 \pmod{16} , \\ P \cap I_{22} &= P \cap \left[\frac{484}{12}, \frac{529}{12} \right) = \emptyset \implies 41 \equiv 9 \pmod{16} , \\ P \cap I_{23} &= P \cap \left[\frac{529}{12}, \frac{576}{12} \right) = \emptyset \implies 42 \equiv 10 \pmod{16} , \\ P \cap I_{24} &= P \cap \left[\frac{576}{12}, \frac{625}{12} \right) = \{48\} , \\ P \cap I_{25} &= P \cap \left[\frac{625}{12}, \frac{676}{12} \right) = \{56\} , \\ P \cap I_{26} &= P \cap \left[\frac{676}{12}, \frac{729}{12} \right) = \emptyset \implies 59 \equiv 11 \pmod{16} , \\ P \cap I_{27} &= P \cap \left[\frac{729}{12}, \frac{784}{12} \right) = \{64\} , \\ P \cap I_{28} &= P \cap \left[\frac{784}{12}, \frac{841}{12} \right) = \emptyset \implies 79 \equiv 15 \pmod{16} , \\ P \cap I_{29} &= P \cap \left[\frac{841}{12}, \frac{900}{12} \right) = \{72\} , \\ P \cap I_{30} &= P \cap \left[\frac{900}{12}, \frac{961}{12} \right) = \{80\} , \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
P \cap I_{31} &= P \cap \left[\frac{961}{12}, \frac{1024}{12} \right) = \emptyset, \\
P \cap I_{32} &= P \cap \left[\frac{1024}{12}, \frac{1089}{12} \right) = \{88\}, \\
P \cap I_{33} &= P \cap \left[\frac{1089}{12}, \frac{1156}{12} \right) = \{96\}.
\end{aligned}$$

Wir erhalten also

$$\begin{aligned}
(R_4 \setminus R_3) &= \{36, 37, 38, 40, 41, 42, 59, 79\}, \\
R_4 &= \{0, 1, 2, 3, 12, 13, 14, 23, 36, 37, 38, 40, 41, 42, 59, 79\}.
\end{aligned}$$

Dann sind die Restklassen modulo 32 mit Rest r ,

$$r \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 12, 13, 14, 15, 23, 27\},$$

im vollen Restsystem R_4 modulo 16 bereits enthalten. Weiterhin sind

$$\begin{aligned}
P \cap [b_3, b_4] &= \{96, 112, 128, 144, 160, 176, 192, 208, 224, 240\} \\
&\quad \cup \{256, 272, 288, 304, 320, 332, 348, 354\}, \\
P \cap I_{34} &= P \cap \left[\frac{1156}{12}, \frac{1225}{12} \right) = \emptyset \implies 103 \equiv 7 \pmod{32}, \\
P \cap I_{35} &= P \cap \left[\frac{1225}{12}, \frac{1296}{12} \right) = \emptyset \implies 107 \equiv 11 \pmod{32}, \\
P \cap I_{36} &= P \cap \left[\frac{1296}{12}, \frac{1369}{12} \right) = \{112\} \implies 112 \equiv 16 \pmod{32}, \\
P \cap I_{37} &= P \cap \left[\frac{1369}{12}, \frac{1444}{12} \right) = \emptyset \implies 113 \equiv 17 \pmod{32}, \\
P \cap I_{38} &= P \cap \left[\frac{1444}{12}, \frac{1521}{12} \right) = \emptyset \implies 114 \equiv 18 \pmod{32}, \\
P \cap I_{39} &= P \cap \left[\frac{1521}{12}, \frac{1600}{12} \right) = \{128\}, \\
P \cap I_{40} &= P \cap \left[\frac{1600}{12}, \frac{1681}{12} \right) = \emptyset \implies 147 \equiv 19 \pmod{32}, \\
P \cap I_{41} &= P \cap \left[\frac{1681}{12}, \frac{1764}{12} \right) = \{144\}, \\
P \cap I_{42} &= P \cap \left[\frac{1764}{12}, \frac{1849}{12} \right) = \emptyset \implies 148 \equiv 20 \pmod{32},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
P \cap I_{43} &= P \cap \left[\frac{1849}{12}, \frac{1936}{12} \right) = \{160\}, \\
P \cap I_{44} &= P \cap \left[\frac{1936}{12}, \frac{2025}{12} \right) = \emptyset \implies 181 \equiv 21 \pmod{32}, \\
P \cap I_{45} &= P \cap \left[\frac{2025}{12}, \frac{2116}{12} \right) = \{176\}, \\
P \cap I_{46} &= P \cap \left[\frac{2116}{12}, \frac{2209}{12} \right) = \emptyset \implies 182 \equiv 22 \pmod{32}, \\
P \cap I_{47} &= P \cap \left[\frac{2209}{12}, \frac{2304}{12} \right) = \emptyset \implies 184 \equiv 24 \pmod{32}, \\
P \cap I_{48} &= P \cap \left[\frac{2304}{12}, \frac{2401}{12} \right) = \{192\}, \\
P \cap I_{49} &= P \cap \left[\frac{2401}{12}, \frac{2500}{12} \right) = \{208\}, \\
P \cap I_{50} &= P \cap \left[\frac{2500}{12}, \frac{2601}{12} \right) = \emptyset \implies 217 \equiv 25 \pmod{32}, \\
P \cap I_{51} &= P \cap \left[\frac{2601}{12}, \frac{2704}{12} \right) = \{224\}, \\
P \cap I_{52} &= P \cap \left[\frac{2704}{12}, \frac{2809}{12} \right) = \emptyset \implies 218 \equiv 26 \pmod{32}, \\
P \cap I_{53} &= P \cap \left[\frac{2809}{12}, \frac{2916}{12} \right) = \{240\}, \\
P \cap I_{54} &= P \cap \left[\frac{2916}{12}, \frac{3025}{12} \right) = \emptyset \implies 252 \equiv 28 \pmod{32}, \\
P \cap I_{55} &= P \cap \left[\frac{3025}{12}, \frac{3136}{12} \right) = \{256\}, \\
P \cap I_{56} &= P \cap \left[\frac{3136}{12}, \frac{3249}{12} \right) = \emptyset \implies 253 \equiv 29 \pmod{32}, \\
P \cap I_{57} &= P \cap \left[\frac{3249}{12}, \frac{3364}{12} \right) = \{272\}, \\
P \cap I_{58} &= P \cap \left[\frac{3364}{12}, \frac{3481}{12} \right) = \{288\}, \\
P \cap I_{59} &= P \cap \left[\frac{3481}{12}, \frac{3600}{12} \right) = \emptyset \implies 286 \equiv 30 \pmod{32}, \\
P \cap I_{60} &= P \cap \left[\frac{3600}{12}, \frac{3721}{12} \right) = \{304\}, \\
P \cap I_{61} &= P \cap \left[\frac{3721}{12}, \frac{3844}{12} \right) = \{320\}, \\
P \cap I_{62} &= P \cap \left[\frac{3844}{12}, \frac{3969}{12} \right) = \emptyset \implies 319 \equiv 31 \pmod{32},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P \cap I_{63} &= P \cap \left[\frac{3969}{12}, \frac{4096}{12} \right) = \{336\} , \\ P \cap I_{64} &= P \cap \left[\frac{4096}{12}, \frac{4225}{12} \right) = \{352\} . \end{aligned}$$

Wir erhalten also

$$\begin{aligned} (R_5 \setminus R_4) &= \{103, 107, 112, 113, 114, 147, 148, 181, 182, 184\} \\ &\cup \{217, 218, 252, 253, 286, 319\} , \\ R_5 &= \{0, 1, 2, 3, 12, 13, 14, 23, 36, 37, 38, 40, 41, 42, 59, 79\} \\ &\cup \{103, 107, 112, 113, 114, 147, 148, 181, 182, 184\} \\ &\cup \{217, 218, 252, 253, 286, 319\} . \end{aligned}$$

Dann sind die Restklassen modulo 64 mit Rest r ,

$$\begin{aligned} r \in & \{0, 1, 2, 3, 12, 13, 14, 15, 19, 20, 23, 25, 26, 30, 36, 37, 38, 39\} \\ &\cup \{40, 41, 42, 43, 48, 49, 50, 53, 54, 56, 59, 60, 61, 63\} , \end{aligned}$$

im vollen Restsystem R_5 modulo 32 bereits enthalten. Weiter ist

$$\begin{aligned} P \cap [b_4, b_5] &= \{352, 384, 416, 448, 480, 512, 544, 576, 608, 640, 672\} \\ &\cup \{704, 736, 768, 800, 832, 864, 896, 928, 960, 992\} \\ &\cup \{1024, 1056, 1088, 1120, 1152, 1184, 1216\} \\ &\cup \{1248, 1280, 1312, 1344, 1376, 1408\} , \\ P \cap I_{65} &= P \cap \left[\frac{4225}{12}, \frac{4356}{12} \right) = \emptyset \implies 388 \equiv 4 \pmod{64} , \\ P \cap I_{66} &= P \cap \left[\frac{4356}{12}, \frac{4489}{12} \right) = \emptyset \implies 389 \equiv 5 \pmod{64} , \\ P \cap I_{67} &= P \cap \left[\frac{4489}{12}, \frac{4624}{12} \right) = \{384\} , \\ P \cap I_{68} &= P \cap \left[\frac{4624}{12}, \frac{4761}{12} \right) = \emptyset \implies 390 \equiv 6 \pmod{64} , \\ P \cap I_{69} &= P \cap \left[\frac{4761}{12}, \frac{4900}{12} \right) = \emptyset \implies 391 \equiv 7 \pmod{64} , \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
P \cap I_{70} &= P \cap \left[\frac{4900}{12}, \frac{5041}{12} \right) = \{416\} \implies 416 \equiv 32 \pmod{64}, \\
P \cap I_{71} &= P \cap \left[\frac{5041}{12}, \frac{5184}{12} \right) = \emptyset \implies 456 \equiv 8 \pmod{64}, \\
P \cap I_{72} &= P \cap \left[\frac{5184}{12}, \frac{5329}{12} \right) = \emptyset \implies 457 \equiv 9 \pmod{64}, \\
P \cap I_{73} &= P \cap \left[\frac{5329}{12}, \frac{5476}{12} \right) = \{448\}, \\
P \cap I_{74} &= P \cap \left[\frac{5476}{12}, \frac{5625}{12} \right) = \emptyset \implies 458 \equiv 10 \pmod{64}, \\
P \cap I_{75} &= P \cap \left[\frac{5625}{12}, \frac{5776}{12} \right) = \{480\}, \\
P \cap I_{76} &= P \cap \left[\frac{5776}{12}, \frac{5929}{12} \right) = \emptyset \implies 523 \equiv 11 \pmod{64}, \\
P \cap I_{77} &= P \cap \left[\frac{5929}{12}, \frac{6084}{12} \right) = \emptyset \implies 528 \equiv 16 \pmod{64}, \\
P \cap I_{78} &= P \cap \left[\frac{6084}{12}, \frac{6241}{12} \right) = \{512\}, \\
P \cap I_{79} &= P \cap \left[\frac{6241}{12}, \frac{6400}{12} \right) = \emptyset \implies 529 \equiv 17 \pmod{64}, \\
P \cap I_{80} &= P \cap \left[\frac{6400}{12}, \frac{6561}{12} \right) = \{544\}, \\
P \cap I_{81} &= P \cap \left[\frac{6561}{12}, \frac{6724}{12} \right) = \emptyset \implies 530 \equiv 18 \pmod{64}, \\
P \cap I_{82} &= P \cap \left[\frac{6724}{12}, \frac{6889}{12} \right) = \emptyset \implies 533 \equiv 21 \pmod{64}, \\
P \cap I_{83} &= P \cap \left[\frac{6889}{12}, \frac{7056}{12} \right) = \{576\}, \\
P \cap I_{84} &= P \cap \left[\frac{7056}{12}, \frac{7225}{12} \right) = \emptyset \implies 598 \equiv 22 \pmod{64}, \\
P \cap I_{85} &= P \cap \left[\frac{7225}{12}, \frac{7396}{12} \right) = \{608\}, \\
P \cap I_{86} &= P \cap \left[\frac{7396}{12}, \frac{7569}{12} \right) = \emptyset \implies 600 \equiv 24 \pmod{64}, \\
P \cap I_{87} &= P \cap \left[\frac{7569}{12}, \frac{7744}{12} \right) = \{640\}, \\
P \cap I_{88} &= P \cap \left[\frac{7744}{12}, \frac{7921}{12} \right) = \emptyset \implies 667 \equiv 27 \pmod{64}, \\
P \cap I_{89} &= P \cap \left[\frac{7921}{12}, \frac{8100}{12} \right) = \{672\},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
P \cap I_{90} &= P \cap \left[\frac{8100}{12}, \frac{8281}{12} \right) = \emptyset \implies 668 \equiv 28 \pmod{64}, \\
P \cap I_{91} &= P \cap \left[\frac{8281}{12}, \frac{8464}{12} \right) = \{704\}, \\
P \cap I_{92} &= P \cap \left[\frac{8464}{12}, \frac{8649}{12} \right) = \emptyset \implies 733 \equiv 29 \pmod{32}, \\
P \cap I_{93} &= P \cap \left[\frac{8649}{12}, \frac{8836}{12} \right) = \{736\}, \\
P \cap I_{94} &= P \cap \left[\frac{8836}{12}, \frac{9025}{12} \right) = \emptyset \implies 735 \equiv 31 \pmod{64}, \\
P \cap I_{95} &= P \cap \left[\frac{9025}{12}, \frac{9216}{12} \right) = \emptyset \implies 737 \equiv 33 \pmod{64}, \\
P \cap I_{96} &= P \cap \left[\frac{9216}{12}, \frac{9409}{12} \right) = \{768\}, \\
P \cap I_{97} &= P \cap \left[\frac{9409}{12}, \frac{9604}{12} \right) = \{800\}, \\
P \cap I_{98} &= P \cap \left[\frac{9604}{12}, \frac{9801}{12} \right) = \emptyset \implies 802 \equiv 34 \pmod{64}, \\
P \cap I_{99} &= P \cap \left[\frac{9801}{12}, \frac{10000}{12} \right) = \{832\}, \\
P \cap I_{100} &= P \cap \left[\frac{10000}{12}, \frac{10201}{12} \right) = \emptyset \implies 867 \equiv 35 \pmod{64}, \\
P \cap I_{101} &= P \cap \left[\frac{10201}{12}, \frac{10404}{12} \right) = \{864\}, \\
P \cap I_{102} &= P \cap \left[\frac{10404}{12}, \frac{10609}{12} \right) = \emptyset \implies 876 \equiv 44 \pmod{64}, \\
P \cap I_{103} &= P \cap \left[\frac{10609}{12}, \frac{10816}{12} \right) = \{896\}, \\
P \cap I_{104} &= P \cap \left[\frac{10816}{12}, \frac{11025}{12} \right) = \emptyset \implies 877 \equiv 45 \pmod{64}, \\
P \cap I_{105} &= P \cap \left[\frac{11025}{12}, \frac{11236}{12} \right) = \{928\}, \\
P \cap I_{106} &= P \cap \left[\frac{11236}{12}, \frac{11449}{12} \right) = \emptyset \implies 942 \equiv 46 \pmod{64}, \\
P \cap I_{107} &= P \cap \left[\frac{11449}{12}, \frac{11664}{12} \right) = \{960\}, \\
P \cap I_{108} &= P \cap \left[\frac{11664}{12}, \frac{11881}{12} \right) = \emptyset \implies 1007 \equiv 47 \pmod{64}, \\
P \cap I_{109} &= P \cap \left[\frac{11881}{12}, \frac{12100}{12} \right) = \{992\},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
P \cap I_{110} &= P \cap \left[\frac{12100}{12}, \frac{12321}{12} \right) = \{1024\}, \\
P \cap I_{111} &= P \cap \left[\frac{12321}{12}, \frac{12544}{12} \right) = \emptyset \implies 1011 \equiv 51 \pmod{64}, \\
P \cap I_{112} &= P \cap \left[\frac{12544}{12}, \frac{12769}{12} \right) = \{1056\}, \\
P \cap I_{113} &= P \cap \left[\frac{12769}{12}, \frac{12996}{12} \right) = \emptyset \implies 1076 \equiv 52 \pmod{64}, \\
P \cap I_{114} &= P \cap \left[\frac{12996}{12}, \frac{13225}{12} \right) = \{1088\}, \\
P \cap I_{115} &= P \cap \left[\frac{13225}{12}, \frac{13456}{12} \right) = \{1120\}, \\
P \cap I_{116} &= P \cap \left[\frac{13456}{12}, \frac{13689}{12} \right) = \emptyset \implies 1143 \equiv 55 \pmod{64}, \\
P \cap I_{117} &= P \cap \left[\frac{13689}{12}, \frac{13924}{12} \right) = \{1152\}, \\
P \cap I_{118} &= P \cap \left[\frac{13924}{12}, \frac{14161}{12} \right) = \emptyset \implies 1145 \equiv 57 \pmod{64}, \\
P \cap I_{119} &= P \cap \left[\frac{14161}{12}, \frac{14400}{12} \right) = \{1184\}, \\
P \cap I_{120} &= P \cap \left[\frac{14400}{12}, \frac{14641}{12} \right) = \{1216\}, \\
P \cap I_{121} &= P \cap \left[\frac{14641}{12}, \frac{14884}{12} \right) = \emptyset \implies 1210 \equiv 58 \pmod{64}, \\
P \cap I_{122} &= P \cap \left[\frac{14884}{12}, \frac{15129}{12} \right) = \{1248\}, \\
P \cap I_{123} &= P \cap \left[\frac{15129}{12}, \frac{15376}{12} \right) = \{1280\}, \\
P \cap I_{124} &= P \cap \left[\frac{15376}{12}, \frac{15625}{12} \right) = \emptyset \implies 1278 \equiv 62 \pmod{64}, \\
P \cap I_{125} &= P \cap \left[\frac{15625}{12}, \frac{15876}{12} \right) = \{1312\}, \\
P \cap I_{126} &= P \cap \left[\frac{15876}{12}, \frac{16129}{12} \right) = \{1344\}, \\
P \cap I_{127} &= P \cap \left[\frac{16129}{12}, \frac{16384}{12} \right) = \emptyset, \\
P \cap I_{128} &= P \cap \left[\frac{16384}{12}, \frac{16641}{12} \right) = \{1376\}, \\
P \cap I_{129} &= P \cap \left[\frac{16641}{12}, \frac{16900}{12} \right) = \{1408\}.
\end{aligned}$$

Wir erhalten also als zum Restsystem modulo 32 zu ergänzende Elemente die Menge

$$\begin{aligned} (R_6 \setminus R_5) &= \{388, 389, 390, 391, 416, 456, 457, 458, 523, 528\} \\ &\cup \{529, 530, 533, 598, 600, 667, 668, 733, 735, 737\} \\ &\cup \{802, 867, 876, 877, 942, 1007, 1011, 1076, 1143\} \\ &\cup \{1145, 1210, 1278\} \end{aligned}$$

und damit als volles Restsystem modulo 64

$$\begin{aligned} R_6 &= \{0, 1, 2, 3, 12, 13, 14, 23, 36, 37, 38, 40, 41, 42, 59, 79, 103\} \\ &\cup \{107, 112, 113, 114, 147, 148, 181, 182, 184, 217\} \\ &\cup \{218, 252, 253, 286, 319, 388, 389, 390, 391, 416\} \\ &\cup \{456, 457, 458, 523, 528, 529, 530, 533, 598, 600\} \\ &\cup \{667, 668, 733, 735, 737, 802, 867, 876, 877, 942\} \\ &\cup \{1007, 1011, 1076, 1143, 1145, 1210, 1278\} . \end{aligned}$$

Damit lautet eine mögliche Wahl $Q^{(0)}$ für die ersten 125 Elemente einer PR-Basis mit asymptotischer Dichte $2\sqrt{3}$

$$\begin{aligned} Q^{(0)} &= [0, 3] \cup [0, (2), 8] \cup [8, (4), 24] \cup [24, (8), 96] \\ &\cup [96, (16), 352] \cup [352, (32), 1408] \cup R_6 . \end{aligned}$$

Literatur

- [1] V. Blomer. Thin bases of order h . J. Number Theory 98 (2003), 34-46.
- [2] J. W. S. Cassels. Über Basen der natürlichen Zahlenreihe. Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg 21 (1957), 247-257.
- [3] H. Halberstam, K.F. Roth. Sequences. Springer. Berlin. 1983.
- [4] G. Hofmeister. Thin bases of order two. J. Number Theory 86 (2001), 118-132.
- [5] W. Klotz. Eine obere Schranke für die Reichweite einer Extremalbasis zweiter Ordnung. J. Reine Angew. Math. 238 (1969), 161-168.
- [6] D. Raikov. Über die Basen der natürlichen Zahlenreihe. Mat.Sb.N.S. 2 (1937), 595-597.
- [7] H. Scheid. Zahlentheorie. Kapitel VI. BI-Wiss. Mannheim/Wien/Zürich. 1991.
- [8] A. Stöhr. Eine Basis n -ter Ordnung für die Menge aller natürlichen Zahlen. Math. Z. 42 (1937), 739-743.
- [9] A. Stöhr. Anzahlabschätzung einer bekannten Basis n -ter Ordnung. Math. Z. 47 (1942), 778-787; 48 (1942/43), 792.

Register

ARITHMETISCHE PROGRESSION ... 73
 ASYMPTOTISCHE (WURZEL-)
 DICHTEN 7, 39
 ASYMPTOTISCH ERGÄNZBAR 8, 43, 46
 ASYMPTOTISCHE ERGÄNZUNG .. 8, 58
 BASIS h -TER ORDNUNG 82
 BEISPIELE
 ASYMPTOTISCHE ERGÄNZUNG .. 10
 BASIS h -TER ORDNUNG 82
 NICHT ASYMPTOTISCH
 ERGÄNZBARE MENGE 43
 OPTIMALE ASYMPTOTISCHE
 ERGÄNZUNG 57
 PSEUDO-DICHTE ... 26, 28, 71, 72
 BLOMER, V. . 81, 88, 89, 97, 98, 130
 CASSELS, J. W. S. .. 3, 6, 14, 50, 62
 79, 80, 98, 101, 104, 108, 115, 116
 DÜNNE MENGEN 7
 GLEICHMÄSSIG DÜNNE MENGEN 7, 39
 HOFMEISTER, G. 4, 48, 79, 80
 81, 89, 94, 98, 99, 101
 108, 113, 115, 116, 133
 KLOTZ, W. 90, 99
 LEMMA VON CASSELS 14, 15, 50
 .. 61, 62, 70, 71, 72, 75, 101, 135
 MINORANTENERZEUGER
 23, 30, 32, 34

OBERE ASYMPTOTISCHE (WURZEL-)
 DICHTEN 7, 30, 38, 41, 42, 46
 OPTIMALE ASYMPTOTISCHE
 ERGÄNZUNG 8, 9, 52
 PR-BASEN
 ASYMPTOTISCHE DICHTEN . 150, 156
 DEFINITION..... 123
 KONSTRUKTION 156, 158
 OBERE ASYMPT. DICHTEN 126
 UNTERE ASYMPT. DICHTEN 131
 SONSTIGES 115, 117, 120, 122, 135
 .. 137, 138, 139, 142, 143, 148
 PSEUDO-DICHTE 23, 25, 27, 34
 38, 39, 40, 41, 42, 59, 74
 REPRÄSENTANT 118
 RESTKLASSE 118
 RAIKOV, D. 3, 48, 79, 81, 86
 SCHEID, H. 109
 SEPARIERTE PROGRESSIONENSCHAR
 73, 74
 STÖHR, A. 3, 48, 79, 81, 86, 90
 STÖHRSCHE BASIS 81, 86, 89, 90, 98
 SUMMENMENGE 82
 TEILWEISE DÜNNE MENGEN 7
 UNTERE ASYMPTOTISCHE (WURZEL-)
 DICHTEN 7, 41, 42, 46
 UR-BASEN 81, 88, 89, 97, 98
 VOLLES RESTSYSTEM 118
 ZÄHLFUNKTION 7