

# Untersuchungen zur Strahldynamik am Mainzer Mikrotron

Dissertation  
zur Erlangung des Grades  
„Doktor  
der Naturwissenschaften“  
am Fachbereich Physik  
der Johannes Gutenberg-Universität  
in Mainz

Marcus Seidl  
geb. in München

Mainz 2003

Jahr der mündlichen Prüfung: 2003

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Einleitung</b>	<b>5</b>
1.1	Strahldynamische Untersuchungen . . . . .	5
1.2	Mainzer Mikrotron MAMI . . . . .	6
<b>2</b>	<b>Theorie der strahldynamischen Untersuchungen</b>	<b>10</b>
2.1	Grundlagen der Einteilchenbewegung . . . . .	10
2.1.1	Klassische Hamilton-Funktion . . . . .	10
2.1.2	Elektrische und magnetische Felder . . . . .	15
2.1.3	Synchrotronstrahlung . . . . .	17
2.1.4	Störungstheorie . . . . .	18
2.2	Kohärenzbedingungen . . . . .	21
2.2.1	Dynamische und statische Kohärenzbedingung im RTM	21
2.2.2	Dynamische und statische Kohärenzbedingung im HDSM	22
2.3	Lineare Teilchenbewegung . . . . .	24
2.3.1	Bewegung in einer Driftstrecke . . . . .	24
2.3.2	Bewegung in einem dünnen Quadrupol . . . . .	25
2.3.3	Bewegung in einem Dipol . . . . .	26
2.3.4	Bewegung im Linac . . . . .	36
<b>3</b>	<b>Beschreibung der Mikrotronmodelle für die strahldynamischen Untersuchungen</b>	<b>44</b>
3.1	Modell für die Longitudinalbewegung im RTM . . . . .	44
3.1.1	Periodische Näherung . . . . .	44
3.1.2	Stabilität der Longitudinaloptik . . . . .	45
3.1.3	1/3-Resonanz . . . . .	53
3.2	Modell für die Longitudinalbewegung im HDSM . . . . .	56
3.2.1	Quasiperiodische Näherung . . . . .	57
3.2.2	Relation zwischen den Sollphasen der beiden Linacs im HDSM . . . . .	63
3.2.3	Entwicklung der Sollparameter nach kleinen Störungen	65

3.3	Modell für die Transversalbewegung im RTM . . . . .	68
3.3.1	Quasiperiodische Näherung . . . . .	68
3.3.2	Verkopplung des horizontalen, vertikalen und longitudinalen Phasenraums . . . . .	70
<b>4</b>	<b>Untersuchungen zur transversalen Strahldynamik</b>	<b>73</b>
4.1	Instrumente zur Strahldiagnose . . . . .	73
4.2	Meßverfahren zur Bestimmung der transversalen Transfermatrix im RTM . . . . .	76
4.3	Messung der transversalen Transfermatrix am RTM3 . . . . .	77
4.4	Messung der transversalen Transfermatrix am RTM2 . . . . .	83
<b>5</b>	<b>Korrektur antisymmetrischer Feldfehler in den Mikrotrondipolen</b>	<b>85</b>
5.1	Prinzip der Feldkorrektur . . . . .	87
5.2	Identifizierung antisymmetrischer Feldfehler . . . . .	87
5.3	Verfahren zur Korrektur antisymmetrischer Feldfehler . . . . .	91
5.4	Simulationsrechnungen mit TOSCA . . . . .	94
<b>6</b>	<b>Untersuchungen zur longitudinalen Strahldynamik</b>	<b>99</b>
6.1	Auswertung der Phasensignale eines Diagnosepulses . . . . .	99
6.2	Messung der Sollphasenbewegung am RTM3 . . . . .	102
6.3	Untersuchung zur Nichtlinearität der Longitudinalbewegung im RTM3 . . . . .	103
6.4	Messung der Schwankungen der Endenergie am RTM3 . . . . .	105
6.5	Automatische Optimierung der Longitudinaloptik von RTM1-RTM3 . . . . .	109
6.6	Messung der long. Eigenschaften der Transfersysteme zwischen den RTM's . . . . .	113
6.7	Messung der Stabilität des longitudinalen $Q$ -Werts im RTM3 .	116
6.7.1	$Q$ -Wert Messung mit Diagnosepulsen . . . . .	116
6.7.2	Messung des $Q$ -Werts mit Hilfe der Korrelation zwischen Endenergie und Anfangsphase . . . . .	116
6.8	Einfluß der Resonanzabstimmung der Linac-Sektionen auf die Stabilität des $Q$ -Werts in den RTM's . . . . .	119
6.9	Test der Langzeitstabilität des $Q$ -Werts im RTM3 . . . . .	121
<b>7</b>	<b>Zusammenfassung</b>	<b>125</b>
<b>A</b>	<b>Veröffentlichungen</b>	<b>127</b>

# Kapitel 1

## Einleitung

### 1.1 Strahldynamische Untersuchungen

In der Planungsphase eines Beschleunigers werden die Strahleigenschaften mit Hilfe von speziellen Simulationsprogrammen [1, 2] untersucht und hinsichtlich der Anforderungen der Strahlnutzer optimiert. Am Ende der Planungsphase stehen die zur Erzeugung des Strahls notwendigen Eigenschaften der Beschleunigerkomponenten fest.

Während dem Bau des Beschleunigers werden die Komponenten unter Laborbedingungen vermessen und auf die Spezifikationen überprüft.

Nach der Inbetriebnahme des Beschleunigers werden mit Hilfe von strahldynamischen Messungen die Strahleigenschaften getestet, mit den Vorgaben aus der Planungsphase verglichen und evtl. Fehleinstellungen behoben.

Zur Auswertung der strahldynamischen Untersuchungen ist ein Modell des Beschleunigers notwendig, da i.A. die gemessenen Strahleigenschaften nicht auf Anhieb mit den Spezifikationen übereinstimmen. Durch Simulation plausibler Fehlerquellen wird dann mit Hilfe des Modells versucht, die Meßdaten mit den Vorhersagen des Modells in Übereinstimmung zu bringen. Schließlich werden vor Ort die vermutlich fehlerhaften Komponenten untersucht und ggf. optimiert.

Die Anzahl der mit dem Strahl wechselwirkenden Komponenten eines Beschleunigers liegt heute in der Größenordnung  $10^2 - 10^3$  und ein in allen Aspekten realistisches Modell scheint nahezu unmöglich zu sein. Daher ist es wichtig, möglichst redundant die Vorhersagen eines Modells zu prüfen.

Strahldynamische Untersuchungen sind mittlerweile an Beschleunigeranlagen fest etabliert. Ihre Anwendungen reichen dabei von der klassischen Fehlersuche nach falsch gepolten Strahlführungselementen [3] und deren Kalibration [4, 5] bis zur Untersuchung von wirbelstromabhängigen Sextupolanteilen

in supraleitenden Magneten [6]. Darüber hinaus existieren auch ungewöhnliche Untersuchungen, wie etwa die Messung der Strahlenergie in Abhängigkeit von der Mondphase [7] am LEP.

## 1.2 Mainzer Mikrotron MAMI

Das Mainzer Mikrotron MAMI B [8] liefert einen kontinuierlichen Elektronenstrahl bis zu einer Maximalenergie von 855 MeV. Die Elektronen stammen wahlweise aus einer thermischen [9] oder einer polarisierten Elektronenquelle [10]. Nach einer Vorbeschleunigung auf 3.5 MeV werden sie in einer Kaskade aus drei Rennbahn-Mikrotronen RTM1-3 stufenweise auf 855 MeV beschleunigt (vgl. Abb. 1.1). Mit den verwendeten normalleitenden HF-Strukturen [11] lassen sich im Dauerstrichbetrieb Feldgradienten von etwa 1 MeV/m erreichen. Damit kann den Elektronen beispielsweise im RTM3 ein Energiegewinn von 7.5 MeV pro Umlauf übertragen werden. Zum Erreichen der Maximalenergie wird der Strahl hier 90-mal rezirkuliert.

Mikrotrone gehören zur Klasse der phasenfokussierenden Rezirkulatoren [12]. Sie zeichnen sich durch eine zur Variation der Teilchenenergie proportionalen Änderung in der Bahnlänge der Rezirkulation und durch eine Beschleunigung der Elektronen an der ansteigenden Flanke der HF-Welle aus. Teilchen mit zu hoher (niedriger) Energie kommen bei ihrer nächsten Linac-Passage zu spät (früh) an und werden etwas abgebremst (stärker beschleunigt). Durch die Phasenfokussierung können sich beispielsweise Fehler im Energieübertrag nicht über die Umläufe aufaddieren [13]. Im RTM3 tragen HF-Amplitudenschwankungen von  $10^{-3}$  nur zu Endenergieschwankungen in der Größenordnung  $855 \cdot 10^{-3} \text{ MeV}/90 \approx 10 \text{ keV}$  bei.

In der Ausbaustufe MAMI C soll die Mikrotronkaskade durch eine vierte Stufe in Form eines harmonischen doppelseitigen Mikrotrons HDSM [14, 15] erweitert werden, um die Strahlenergie auf 1.5 GeV zu erhöhen. Da die Magnetmasse von einem RTM bei festem Magnetfeld etwa mit der dritten Potenz der Endenergie ansteigt, wäre ein viertes RTM äußerst aufwendig. Die installierten 900 t Magneteisen im RTM3 würden bei 1.5 GeV auf etwa 2500 t anwachsen. Ein doppelseitiges Mikrotron liefert im Vergleich zu einem RTM bei gleicher Magnetmasse und gleichem Magnetfeld etwa die doppelte Endenergie. Die Gesamtmasse der Magnete am HDSM beträgt etwa 1000 t.

Während das Funktionsprinzip der drei Rennbahn-Mikrotrone von MAMI zum Standardwissen gehört [16], basiert das HDSM auf einer Weiterentwicklung des Prinzips des doppelseitigen Mikrotrons. Der Strahl tritt bei diesem Mikrotrontyp unter  $45^\circ$  in die Umlenkdiode ein und aus. Die daraus resultierende starke vertikale Defokussierung des Strahls muß kompen-

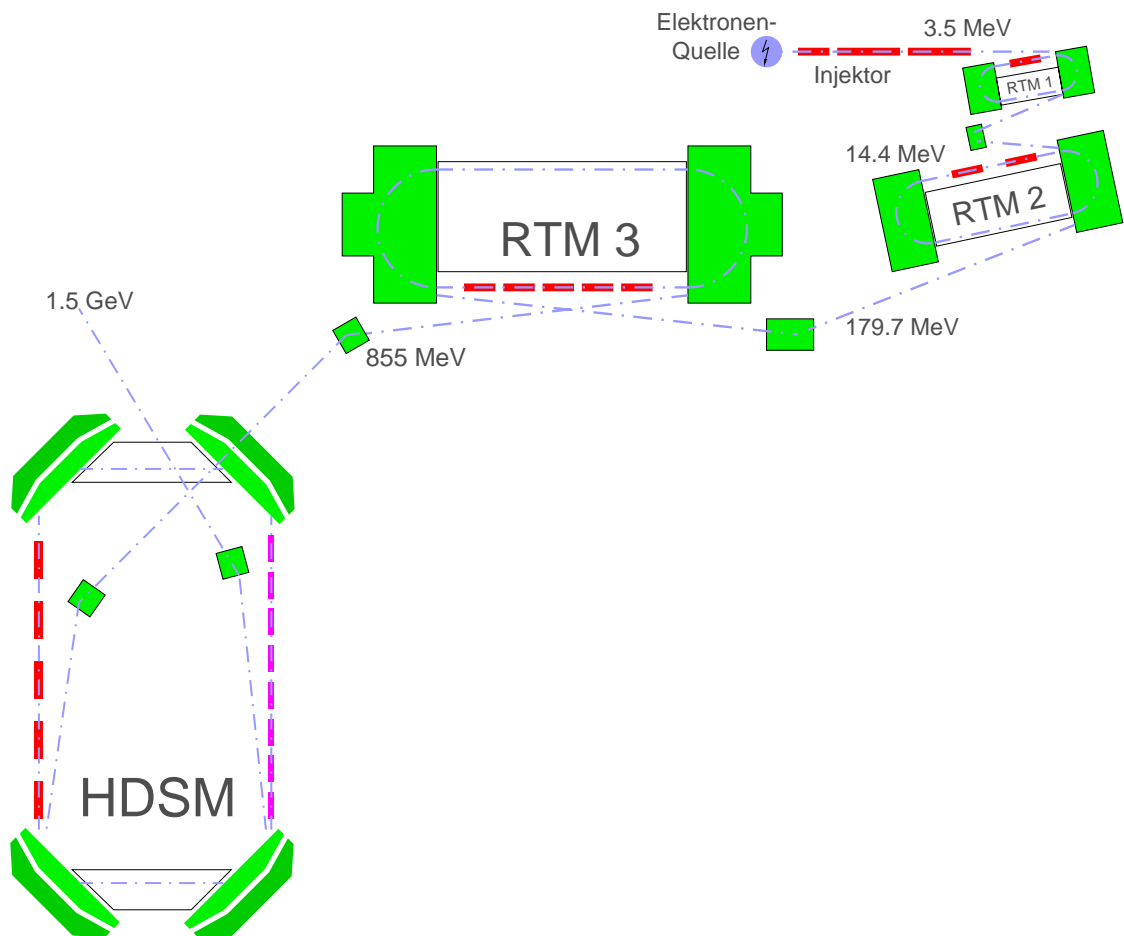


Abbildung 1.1: Schema der Mainzer Mikrotronkaskade (der Strahl ist in blau, die Magnete in grün und die Linacs in rot (2.45 GHz) bzw. lila (4.90 GHz) gekennzeichnet).

Die wichtigsten Parameter von MAMI C

		Injektor	RTM1	RTM2	RTM3	HDSM
<b>Allgemein</b>						
Einschuss- / Maximalenergie (total)	[GeV]	0.611/3.97 · 10 <sup>-3</sup>	3.97/14.86 · 10 <sup>-3</sup>	14.86/180 · 10 <sup>-3</sup>	0.180 / 0.855	0.855 / 1.5
Anzahl der Umläufe		-	18	51	90	43
Gesamter Leistungsbedarf (Netz)	[kW]	92	92	220	650	1500
<b>HF-System</b>						
Energie bzw. Energiegewinn/Umlauf	[MeV]	3.36	0.599	3.24	7.50	16.58-13.66
Frequenz	[GHz]	2.4495	2.4495	2.4495	2.4495	4.8990   2.4495
Linaclänge (el.)	[m]	4.93	0.80	3.55	8.87	8.57   10.10
Anzahl der Sektionen/Klystrone		3 / 1	1 / 1	2 / 2	5 / 5	8 / 4   5 / 5
Dissipierte HF-/Strahlleistung	[kW]	33.2 / 0.35	7.9 / 1.1	48.4/16.6	102.5 / 67.5	299 / 65
Leistungsbedarf	[kW]	90	90	180	450	1100 <sup>1)</sup>
<b>Magnetsystem</b>						
Flussdichte im Luftspalt	[T]	-	0.1026	0.5550	1.2842	1.53 - 0.95
Luftspalthöhe	[cm]	-	6	7	10	8.5 - 13.8
min./max. Bahnradius	[m]	-	0.129 - 0.482	0.089 - 1.083	0.467 - 2.216	2.23 - 4.60
Eisen-/Kupfergewicht der Magnete	[t]	-	4 / 0.2	90 / 2.3	900 / 11.6	1000 / 30
Anz. d. Korrekturdipole		48	72	204	360	2 · 172 + 2 · 4
Anz. d. Quadrupole u. Solenoide		23	2	4	4	2 · 4
Leistungsbedarf	[kW]	2	2	40	200	400
<b>Strahlparameter</b>						
Energieunschärfe (1σ)	[keV]	1.2	1.2	2.8	13	110 <sup>2)</sup>
Norm. Emittanz hor./vert. (1σ)	[π · 10 <sup>-6</sup> m]	0.05 / 0.04	0.07 / 0.07	0.25 / 0.13	13 / 0.84	27 <sup>2)</sup> / 1.2 <sup>2)</sup>
Standard-Energien für Experimente				180MeV	195 - 855MeV	0.855-1.5 GeV <sup>3)</sup>

<sup>1)</sup> einschließlich der Leistung für eine Matching- (MS) und eine Vermiersektion (VS) zwischen RTM3 und HDSM

<sup>2)</sup>nach Simulationsrechnungen

<sup>3)</sup>wählbar in Stufen von etwa 15MeV

Tabelle 1.1: MAMI C Parametertabelle.

siert werden. Im HDSM wird sie durch einen speziellen Feldabfall innerhalb der Dipole für alle Teilchenenergien zwischen 855 MeV und 1.5 GeV aufgehoben [17, 18].

Der Feldabfall in den HDSM-Dipolen senkt das Magnetfeld von maximal 1.5 T auf etwa 0.9 T ab. Dadurch sinkt im Gegensatz zu einem Standardmikrotron der Sollenergiegewinn im Laufe der Beschleunigung von etwa 16.5 MeV auf 13.5 MeV pro Umlauf. Die Elektronen werden nicht mehr bei einer festen Phase beschleunigt, sondern gleiten quasi kontinuierlich die HF-Flanke herab und würden dabei einen im Idealfall punktförmigen Bereich instabiler Beschleunigung passieren, wenn die beiden Linacs identisch wären [15].

Die Grundfrequenz im HDSM wurde von 2.45 GHz im RTM1-3 auf 4.90 GHz erhöht, um den erforderlichen Energiegewinn pro Umlauf zu halbieren. Damit paßt die Maschine unter Verwendung der bewährten normalleitenden HF-Beschleunigungsstrukturen in die vorhandenen Hallen. Da in das HDSM aber nur mit 2.45 GHz injiziert werden kann, läßt sich einer der beiden 4.90 GHz Linacs durch eine 2.45 GHz Version ersetzen. Die größere Wellenlänge hat eine geringere longitudinale Fokussierung zur Folge, so daß die Beschleunigung in allen benutzten Phasenlagen stabil verläuft.

Das Mainzer Mikrotron besitzt als Forschungsgerät eine Vielzahl von Diagnosemöglichkeiten für den Elektronenstrahl und bietet so im Vergleich zu kommerziellen Maschinen erst die Voraussetzung für eingehende strahldynamische Untersuchungen.

In Kapitel 2 werden zunächst die theoretischen Grundlagen für die durchgeführten strahldynamischen Untersuchungen vorgestellt. Die zur Auswertung der Messungen benötigten Mikrotron-Modelle werden in Kapitel 3 beschrieben. Kapitel 4 befaßt sich mit der Messung und Interpretation der Transversalbewegung in den Mikrotronen. Als Konsequenz wird in Kapitel 5 ein Verbesserungsvorschlag für die Magnetfeldkorrektur an den HDSM-Dipolen diskutiert. Die Longitudinalbewegung in den Mikrotronen wird in Kapitel 6 untersucht. In Anhang A ist schließlich die als Anwendung aus den strahldynamischen Untersuchungen im Rahmen dieser Arbeit aufgebaute Stabilisierung für die Endenergieschwankungen vom RTM3 beschrieben.

# Kapitel 2

## Theorie der strahldynamischen Untersuchungen

Für die Herleitung der Mikrotronmodelle wird im folgenden der Hamilton-Formalismus für ein Einzelteilchen benutzt. Dieser Ansatz bietet den einfachsten Zugang zu der in diesem Kapitel entwickelten Störungstheorie, mit deren Hilfe sich auf einfache Weise der Einfluß von superponierten Dipol- und Quadrupolfeldern in den Strahlführungselementen der Mikrotrone studieren läßt. Da der Schwerpunkt der Arbeit auf der Untersuchung von Feldfehlern in den Strahlführungselementen liegt, werden kollektive Effekte (z.B. Beam Blowup [19], Raumladungseffekte [20], Ion-Trapping [21, 22]) im weiteren nicht berücksichtigt.

### 2.1 Grundlagen der Einteilchenbewegung

#### 2.1.1 Klassische Hamilton-Funktion

Die relativistische Lagrange-Funktion [23] der Punktmechanik für ein Teilchen mit der Ruhemasse  $m_0$ , der Ladung  $e$  und der Ortskoordinate  $\vec{q}$  lautet in Anwesenheit eines elektromagnetischen Feldes mit dem Vektorpotential  $\vec{A}$  und dem Skalarpotential  $\phi$ :

$$L(\vec{q}, \dot{\vec{q}}, t) = -m_0 c^2 \sqrt{1 - \frac{\dot{\vec{q}} \cdot \dot{\vec{q}}}{c^2}} + e \dot{\vec{q}} \cdot \vec{A} - e\phi, \quad (2.1)$$

wobei Ableitungen nach der Zeit  $t$  mit einem Punkt gekennzeichnet sind. Die Bewegungsgleichungen folgen aus der Bedingung, daß die Wirkung  $I$

stationär ist:

$$\delta I = \delta \int_{t_1}^{t_2} dt L(\vec{q}, \dot{\vec{q}}, t) = 0. \quad (2.2)$$

Es wird eine Sollbahn  $\vec{q}_0(z)$  definiert [24], die als Funktion der Bahnlänge  $z$  parametrisiert ist. Die Sollbahn ist im Mikrotron zweidimensional. An jedem Ort  $\vec{q}_0(z)$  wird ein lokales Dreibein  $(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z})$  eingeführt und in dessen Koordinaten die Bewegung der Teilchen beschrieben (vgl. Abb. 2.1). Der Einheitsvektor  $\hat{z}$  liegt tangential zur Sollbahn und ist in Flugrichtung der Elektronen orientiert,  $\hat{y}$  steht senkrecht auf der durch die Sollbahn definierten Ebene und zeigt entgegengesetzt zur Feldrichtung in der Mittelebene der Umlenkdiode, und  $\hat{x}$  ist das Vektorprodukt  $\hat{y} \times \hat{z}$ .

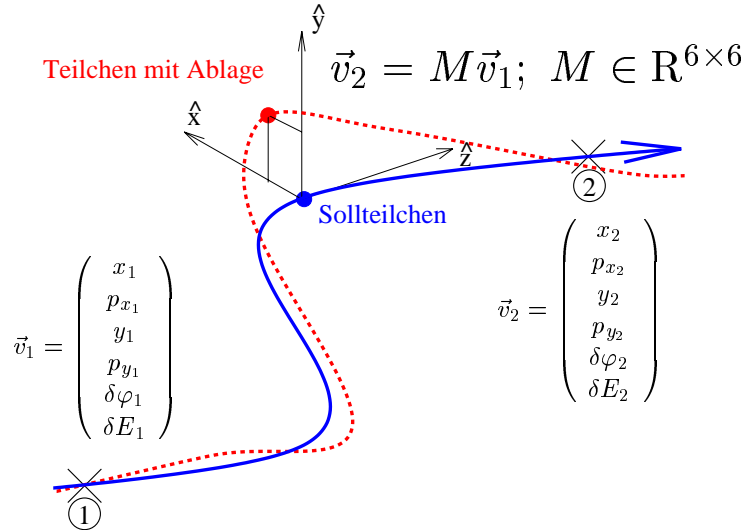


Abbildung 2.1: Beschreibung der Bewegung eines Teilchens mit Hilfe eines lokalen Koordinatensystems entlang der Sollbahn.

Der Ortsvektor eines Teilchens ist

$$\vec{q} = \vec{q}_0 + \delta\vec{q} \quad (2.3)$$

und wird in den Koordinaten des Dreibeins zu

$$\vec{q} = \vec{q}_0 + (\delta\vec{q} \cdot \hat{x}) \hat{x} + (\delta\vec{q} \cdot \hat{y}) \hat{y} = \vec{q}_0 + x \hat{x} + y \hat{y}. \quad (2.4)$$

Das Dreibein ändert sich längs der Sollbahn gemäß

$$\frac{d\hat{z}}{dz} = -k\hat{x}; \quad \frac{d\hat{x}}{dz} = +k\hat{z}; \quad \frac{d\hat{y}}{dz} = 0, \quad (2.5)$$

wobei  $k$  die Krümmung der Bahn ist. Wenn das Vektorpotential in die Komponenten des Dreibeins zerlegt wird, lautet die Lagrange-Funktion 2.1 in den neuen Teilchenkoordinaten:

$$L(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, t) = -m_0 c^2 \sqrt{1 - \frac{1}{c^2} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + (1 + kx)^2 \dot{z}^2)} + e(\dot{x}A_x + \dot{y}A_y + \dot{z}(1 + kx)A_z) - e\phi. \quad (2.6)$$

Die Bahnlänge  $z$  soll anstelle der Zeit  $t$  die Rolle einer unabhängigen Variablen übernehmen. Aus der Bedingung 2.2 folgt somit:

$$0 = \delta \int_{z_1}^{z_2} dz \frac{dt}{dz} L(x, y, z, x', y', z', t(z)) = \delta \int_{z_1}^{z_2} dz \tilde{L}(x, y, t, x', y', t', z), \quad (2.7)$$

wobei

$$x' = \frac{dx}{dz}; \quad y' = \frac{dy}{dz}; \quad t' = \frac{dt}{dz}; \quad (2.8)$$

definiert wurde. Das Vektorpotential sei in der zeitlichen Eichung [25] dargestellt (vgl. Gl. 2.34, 2.35), so daß

$$\phi = 0 \quad (2.9)$$

gilt. Dann ist

$$\tilde{L}(x, y, t, x', y', t', z) = -m_0 c^2 t' \gamma^{-1} + e(A_x x' + A_y y' + h A_z) \quad (2.10)$$

mit

$$t' \gamma^{-1} = \sqrt{t'^2 - \frac{1}{c^2} (x'^2 + y'^2 + h^2)} \quad (2.11)$$

und

$$h = (1 + kx). \quad (2.12)$$

Für die kanonischen Impulse folgt:

$$p_x = \frac{\partial \tilde{L}}{\partial x'} = m_0 \frac{\gamma}{t'} x' + e A_x \quad (2.13)$$

$$p_y = \frac{\partial \tilde{L}}{\partial y'} = m_0 \frac{\gamma}{t'} y' + e A_y \quad (2.14)$$

$$p_t = \frac{\partial \tilde{L}}{\partial t'} = -m_0 \gamma c^2. \quad (2.15)$$

Der Transversalimpuls in  $x$ - bzw.  $y$ - Richtung ist  $p_x$  bzw.  $p_y$ . Die Teilchenenergie ist  $-p_t$ . Die Hamilton-Funktion lautet damit

$$\begin{aligned}\tilde{H} &= p_x x' + p_y y' + p_t t' - \tilde{L} = \\ &= t' \gamma^{-1} \frac{1}{m_0 c^2} \left( c^2 (p_x - eA_x)^2 + c^2 (p_y - eA_y)^2 + m_0^2 c^4 - p_t^2 \right) - ehA_z.\end{aligned}\quad (2.16)$$

Um  $\gamma$  aus  $\tilde{H}$  zu eliminieren, wird die bekannte Energie-Impuls Beziehung

$$m_0^2 \gamma^2 c^4 = m_0^2 c^4 + \left( \frac{m_0 c \gamma x'}{t'} \right)^2 + \left( \frac{m_0 c \gamma y'}{t'} \right)^2 + \left( \frac{m_0 c \gamma h}{t'} \right)^2 \quad (2.17)$$

verwendet. Mit ihrer Hilfe folgt

$$t' \gamma^{-1} = \frac{hm_0 c}{\sqrt{p_t^2 - m_0^2 c^4 - c^2 (p_x - eA_x)^2 - c^2 (p_y - eA_y)^2}}, \quad (2.18)$$

und damit wird die Hamilton-Funktion zu

$$\tilde{H} = -\frac{h}{c} \sqrt{p_t^2 - m_0^2 c^4 - (p_x c - ecA_x)^2 - (p_y c - ecA_y)^2} - ehA_z. \quad (2.19)$$

Für die Betrachtungen am Mikrotron ist es zweckmäßig, eine kanonische Variablentransformation [26] durchzuführen, so daß  $t$  und  $p_t$  in

$$t \rightarrow \delta\varphi = t(z) - \frac{z}{c} \quad (2.20)$$

$$p_t \rightarrow \delta E = E_n + p_t \quad (2.21)$$

übergeführt werden, wobei  $E_n$  die Sollenergie des Teilchens in Umlauf  $n$  ist. Der Zeitversatz  $\delta\varphi$  wird später (vgl. Gl. 3.1) in Einheiten der HF-Periode diskutiert und ist daher mit diesem -für eine Zeitkoordinate- unkonventionellen Symbol bezeichnet. Die beiden Transformationen werden jeweils durch eine erzeugende Funktion [27]  $F_3(Q, p, z)$  bzw.  $F_2(q, P, z)$

$$F_3(x, y, \delta\varphi, p_x, p_y, p_t, z) = -p_x x - p_y y - p_t \delta\varphi - \frac{z}{c} p_t \quad (2.22)$$

$$F_2(x, y, \delta\varphi, p_x, p_y, \delta E, z) = p_x x + p_y y + \delta E \delta\varphi - E_n \delta\varphi \quad (2.23)$$

ausgeführt. Die Hamilton-Funktion lautet schließlich:

$$\begin{aligned}H &= \frac{E_n - \delta E}{c} - \\ &-\frac{h}{c} \sqrt{(E_n - \delta E)^2 - m_0^2 c^4 - (p_x c - ecA_x)^2 - (p_y c - ecA_y)^2} - ehA_z.\end{aligned}\quad (2.24)$$

Mit dem Vektor  $\vec{v}$  und der Matrix  $S$

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} x \\ p_x \\ y \\ p_y \\ \delta\varphi \\ \delta E \end{pmatrix}; \quad S = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (2.25)$$

ergibt sich die Bewegungsgleichung [28]:

$$\frac{d\vec{v}}{dz} = S \frac{\partial H}{\partial \vec{v}}. \quad (2.26)$$

Wenn nur der in  $\vec{v}$  lineare Anteil  $J$  vom Gradienten von  $H(\vec{v})$ , also die Jacobi-Matrix von  $H$ , berücksichtigt wird, kann die Lösung als

$$\vec{v}(z) = \vec{v}(0) + \int_0^z ds S J(s) \vec{v}(s) \quad (2.27)$$

geschrieben werden. Falls  $J$  keine Funktion von  $z$  ist, läßt sich die Transfermatrix  $M$  explizit angeben [29]:

$$\vec{v}(z) = e^{S J z} \vec{v}(0) = M(z) \vec{v}(0). \quad (2.28)$$

Die Jacobi-Matrix von  $H$  ist symplektisch [30], und damit gilt für  $M$ :

$$M^T S M = S. \quad (2.29)$$

Es sei  $\vec{m}_j$  ein Spaltenvektor von  $M$ . Die Bedingung 2.29 ist dann äquivalent mit der Darstellung in Tab. 2.1. Die  $6 \times 6$ -Matrix  $M$  unterliegt mit Gl. 2.29 insgesamt 15 unabhängigen Nebenbedingungen, so daß sie maximal  $36-15=21$  unabhängige Parameter haben kann. Unter den 15 Nebenbedingungen in Tab. 2.1 ist der Satz von Liouville implizit enthalten. Wenn beispielsweise die horizontale, vertikale und longitudinale Teilchenbewegung entkoppelt sind, dann ist die erste Zeile in der Tabelle identisch mit der Bedingung, daß die Determinante von  $M$  Eins ist.

Für die späteren Berechnungen zur linearen Optik ist es ausreichend,  $H$  bis zur zweiten Ordnung in den Komponenten von  $\vec{v}$  zu entwickeln. Unter der Annahme, daß  $E_n \gg m_0 c^2$  ist, folgt:

$$H = \frac{1}{c} (E_n - \delta E)(1-h) + \frac{h}{2E_n c} \left( (p_x c - e c A_x)^2 + (p_y c - e c A_y)^2 \right) - e h A_z + \dots \quad (2.30)$$

Gl. 2.30 ist die Basis für die weitere Diskussion der Einteilchenbewegung im Mikrotron.

Tabelle 2.1: Explizite Darstellung von Bedingung Gl. 2.29

$$\begin{aligned}
\vec{m}_1^T S \vec{m}_2 &= 1; & \vec{m}_3^T S \vec{m}_4 &= 1; & \vec{m}_5^T S \vec{m}_6 &= 1; \\
\vec{m}_1^T S \vec{m}_3 &= 0; & \vec{m}_3^T S \vec{m}_5 &= 0; \\
\vec{m}_1^T S \vec{m}_4 &= 0; & \vec{m}_3^T S \vec{m}_6 &= 0; \\
\vec{m}_1^T S \vec{m}_5 &= 0; & \vec{m}_4^T S \vec{m}_5 &= 0; \\
\vec{m}_1^T S \vec{m}_6 &= 0; & \vec{m}_4^T S \vec{m}_6 &= 0; \\
\vec{m}_2^T S \vec{m}_3 &= 0; \\
\vec{m}_2^T S \vec{m}_4 &= 0; \\
\vec{m}_2^T S \vec{m}_5 &= 0; \\
\vec{m}_2^T S \vec{m}_6 &= 0.
\end{aligned}$$

## 2.1.2 Elektrische und magnetische Felder

Das Vektorpotential  $\vec{A}$  ist über die folgenden beiden Gleichungen mit dem elektrischen und magnetischen Feld  $\vec{E}$  und  $\vec{B}$  verknüpft [25]:

$$\vec{E} = -\nabla\phi - \frac{\partial\vec{A}}{\partial t} \quad (2.31)$$

$$\vec{B} = \nabla \times A. \quad (2.32)$$

Das differentielle Wegelement lautet in den Komponenten des oben eingeführten Dreibeins (vgl. Gl. 2.4):

$$dq^2 = dx^2 + dy^2 + (1 + kx)^2 dz^2 = dx^2 + dy^2 + h^2 dz^2. \quad (2.33)$$

Damit wird das  $\vec{E}$ - und  $\vec{B}$ -Feld nach [28] und mit Bedingung 2.9 zu:

$$\vec{E} = -\dot{A}_x \hat{x} - \dot{A}_y \hat{y} - \dot{A}_z \hat{z} \quad (2.34)$$

$$\begin{aligned}
\vec{B} &= \left( \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{1}{h} \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) \hat{x} + \frac{1}{h} \left( \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial(hA_z)}{\partial x} \right) \hat{y} + \\
&\quad + \left( \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) \hat{z}.
\end{aligned} \quad (2.35)$$

Im stromfreien Raum läßt sich das Magnetfeld im statischen Fall als Gradient eines Potentials  $\Psi$  darstellen [25]. Es wird allgemein als Reihenentwicklung angesetzt:

$$\Psi(x, y, z) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} a_{k,l}(z) \frac{x^k}{k!} \frac{y^l}{l!}. \quad (2.36)$$

Mit der Laplace-Bedingung an das Potential

$$\frac{1}{h} \frac{\partial}{\partial x} \left[ h \frac{\partial \Psi}{\partial x} \right] + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} + \frac{1}{h} \frac{\partial}{\partial z} \left[ \frac{1}{h} \frac{\partial \Psi}{\partial z} \right] = 0, \quad (2.37)$$

ergibt sich folgende Rekursion

$$\begin{aligned} 0 = & k^3(n-2)(n-3)(n-4)a_{n-5,m+2} + k^3(n-2)(n-3)^2a_{n-3,m} + \\ & + k(n-2)a''_{n-3,m} - k'(n-2)a'_{n-3,m} \\ & + 3k^2(n-2)(n-3)a_{n-4,m+2} + k^2(3n-7)(n-2)a_{n-2,m} + a''_{n-2,m} \\ & + 3k(n-2)a_{n-3,m+2} + k(3n-5)a_{n-1,m} \\ & + a_{n-2,m+2} + a_{n,m}; \end{aligned} \quad n \geq 2; m \geq 0. \quad (2.38)$$

Wenn der Dipolanteil verschwindet, d.h.  $h = 1 = \text{const.}$ , vereinfacht sich Gl. 2.38 zu:

$$a_{n,m} + a_{n-2,m+2} + a''_{n-2,m} = 0; \quad n \geq 2; m \geq 0. \quad (2.39)$$

Koeffizienten mit negativen Indizes sind Null.

Das Potential eines allgemeinen  $2N$ -Pols ist als

$$\Psi^{(2N)} = \sum_{n=0}^N a_{n,N-n} \frac{x^n y^{N-n}}{n!(N-n)!} \quad (2.40)$$

definiert. Gl. 2.38 gibt für  $N \geq 2$  insgesamt  $N + 1 - 2$  Beziehungen zwischen den Koeffizienten des  $2N$ -Pols vor. Die beiden verbleibenden Koeffizienten sind im Prinzip frei wählbar [31]. Üblicherweise werden sie so gewählt, daß der eine den zur Bahnebene vollkommen symmetrischen Anteil des Potentials und der andere den zur Bahnebene vollkommen antisymmetrischen Anteil des Potentials beschreibt. Beispielsweise ist der symmetrische Anteil des Vierpols  $\Psi^{(4)}$  der Quadrupolanteil und der antisymmetrische Anteil der  $45^\circ$ -Quadrupolanteil.

Unter der Voraussetzung, daß sich die Felder und der Bahnradius mit  $z$  nur schwach ändern, d.h.

$$h' = 0 \text{ und } \Psi'' = 0, \quad (2.41)$$

ergibt sich nach Einsetzen der Reihenentwicklung 2.36 in Gl. 2.32 und partieller Integration folgender Zusammenhang zwischen dem Skalarpotential  $\Psi$  und dem Vektorpotential  $\vec{A}$  [32] :

$$\vec{A} = 0 \cdot \hat{x} + 0 \cdot \hat{y} + \frac{1}{h} \left( \int_0^y ds \left[ h \frac{\partial \Psi}{\partial x} \right] (0, s, z) - \int_0^x ds \left[ h \frac{\partial \Psi}{\partial y} \right] (s, y, z) \right) \hat{z}. \quad (2.42)$$

Mit Hilfe von Gl. 2.42 kann nun die Hamilton-Funktion in Gl. 2.30 für die einzelnen strahloptischen Elemente im Mikrotron berechnet werden.

### 2.1.3 Synchrotronstrahlung

Beschleunigte Ladungen strahlen Energie in Form von elektromagnetischen Quanten ab. Um später bei der Untersuchung der Teilchenbewegung im Dipol den Einfluß der Synchrotronstrahlung [33] abschätzen zu können, werden im folgenden kurz ihre wichtigsten Eigenschaften zusammengefaßt.

Die Strahlungsleistung  $P_\gamma$  ist nach [24]

$$P_\gamma = \frac{e^2 c}{6\pi\epsilon_0} \frac{1}{(m_0 c^2)^2} \left[ \left( \frac{d(\gamma m_0 \dot{\vec{q}})}{d\tau} \right)^2 - \frac{1}{c^2} \left( \frac{dE_n}{d\tau} \right)^2 \right]; d\tau = \frac{1}{\gamma} dt. \quad (2.43)$$

Bei einer Beschleunigung parallel zur Bewegungsrichtung spielen Synchrotronstrahlungsverluste z.B. selbst bei der TESLA Test Facility [34] mit Beschleunigungsgradienten von etwa 30 MeV/m keine Rolle. Dagegen ist nach Gl. 2.43 eine Kreisbewegung in einem Magnetfeld von 1 T bei relativistischen Elektronenenergien schon mit einer Beschleunigung von  $\gamma \cdot 300$  MeV/m äquivalent. Merkliche Synchrotronstrahlungsverluste treten bei MAMI ab dem RTM3 auf.

Die Strahlungsleistung bei der Kreisbewegung ist

$$P_\gamma = \frac{e^2 c}{6\pi\epsilon_0} \frac{1}{R^2} \gamma^4. \quad (2.44)$$

Als mittlerer Energieverlust der Elektronen auf einer Kreisbahn kann  $P_\gamma$  in der Hamiltonfunktion 2.24 durch folgenden Zusatzterm [35]

$$H = \dots + \frac{\delta\varphi}{c} P_\gamma \quad (2.45)$$

berücksichtigt werden.

Während der mittlere Energieverlust durch die Synchrotronstrahlung am RTM3 aufgrund der Phasenfokussierung automatisch durch eine leichte Verschiebung des Sollphasenwinkels ausgeglichen wird, führt die quantenhafte Natur der Photonenemission zu einer Aufweitung der horizontalen und longitudinalen Strahlemittanz. Dieser Effekt kann einerseits mit Hilfe von Monte-Carlo Rechnungen simuliert werden (vgl. [36]), oder mit der in [37] vorgestellten Approximation klassisch behandelt werden. Beispielsweise vergrößert die Synchrotronstrahlung im RTM3 bei Maximalenergie die horizontale  $1\sigma$ -Emittanz von  $2 \cdot 10^{-9} \pi \text{ m} \cdot \text{rad}$  um einen Faktor 6 auf  $12 \cdot 10^{-9} \pi \text{ m} \cdot \text{rad}$  [38].

Die stochastischen Effekte der Synchrotronstrahlung spielen allerdings bei der Ermittlung der Abbildungseigenschaften der Strahlführungselemente keine Rolle, da die hier benutzten Strahlmonitore nur den Ladungsschwerpunkt detektieren.

### 2.1.4 Störungstheorie

Ein mögliches analytisches Verfahren zur Berechnung der Teilchenbewegung in Strahlführungselementen mit einer in Strahlrichtung inhomogenen Feldverteilung, d.h.  $\vec{A}(z) \neq \text{const.}$ , besteht darin, die Rechnung in quasi-homogene Abschnitte aufzuteilen, in denen das Vektorpotential als konstant angenommen wird [27]. Bei Komponenten mit einer komplizierten Feldverteilung, wie z.B. bei den inhomogenen HDSM-Dipolen, liefert dieses Verfahren nur bei sehr kleinen Intervallbreiten brauchbare Ergebnisse. Der Aufwand ist dann bereits vergleichbar mit dem ray-tracing Verfahren und damit für analytische Untersuchungen zu aufwendig.

Zur Berechnung der Wirkung des Randfeldverlaufs auf die Strahloptik in den RTM-Dipolen, zur Berechnung des Feldabfalls in den HDSM-Dipolen und zur Untersuchung von Feldstörungen in den Mikrotrondipolen wird die Lösung von Gl. 2.27 im folgenden störungstheoretisch (vgl. [39]) behandelt. Diese Methode hat den Vorteil, daß in jede Approximation die exakte Feldverteilung eingeht. Sie liefert daher schon bei einer relativ niedrigen Ordnung der Störungsrechnung Ergebnisse mit brauchbarer Genauigkeit. Weiterhin erlaubt sie die analytische Behandlung von Feldfehlern, ohne ein konkretes Modell für die Verteilung der Feldfehler annehmen zu müssen.

Es sei

$$J(z) = J_0 + \delta J(z). \quad (2.46)$$

$J_0$  ist keine Funktion von  $z$ . Wenn  $\vec{v}(z)$  eine Lösung der Integralgleichung 2.27 ist, dann wird

$$\vec{v}(z) = e^{-SJ_0z} \vec{v}(z) \quad (2.47)$$

definiert. Für  $\vec{v}$  ergibt sich folgende Differentialgleichung:

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{v}(z)}{dz} &= (-SJ_0)e^{-SJ_0z} \vec{v}(z) + e^{-SJ_0z} (SJ_0 + S\delta J(z)) \vec{v}(z) \\ &= e^{-SJ_0z} (S\delta J(z)) e^{SJ_0z} \vec{v}(z) \\ &= \delta \tilde{J}(z) \vec{v}(z); \end{aligned} \quad (2.48)$$

$$\delta \tilde{J}(z) = e^{-SJ_0z} (S\delta J(z)) e^{SJ_0z}. \quad (2.49)$$

Die Lösung von  $\vec{v}$  lautet analog zu Gl. 2.27:

$$\vec{v}(z) = \vec{v}(0) + \int_0^z ds_1 \delta \tilde{J}(s_1) \vec{v}(s_1). \quad (2.50)$$

Wenn die Störungen klein sind, wird Gl. 2.50 iterativ gelöst [40]:

$$\begin{aligned}\vec{v}(z) &= \left( 1 + \int_0^z ds_1 \delta\tilde{J}(s_1) + \int_0^z ds_1 \delta\tilde{J}(s_1) \int_0^{s_1} ds_2 \delta\tilde{J}(s_2) + \dots \right) \vec{v}(0) \\ &= \mathfrak{R}(z) \vec{v}(0).\end{aligned}\quad (2.51)$$

Die Heaviside-Funktion [41] sei mit  $\Theta$  bezeichnet. Mit Hilfe einer Zeitordnungsfunktion  $T$  (vgl. [42])

$$\begin{aligned}T(\delta\tilde{J}(s_1)) &= \delta\tilde{J}(s_1) \\ T(\delta\tilde{J}(s_1)\delta\tilde{J}(s_2)) &= \Theta(s_1 - s_2)\delta\tilde{J}(s_1)\delta\tilde{J}(s_2) + \Theta(s_2 - s_1)\delta\tilde{J}(s_2)\delta\tilde{J}(s_1) \\ &\vdots\end{aligned}\quad (2.52)$$

kann die Transfermatrix  $\mathfrak{R}$  für  $\vec{v}$  in 2.51 vereinfacht geschrieben werden:

$$\mathfrak{R}(z) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \int_0^z ds_1 \dots ds_n T(\delta\tilde{J}(s_1) \dots \delta\tilde{J}(s_n)). \quad (2.53)$$

Zur Interpretation von Gl. 2.53 sei der vertikale  $(y, p_y)$  Phasenraum betrachtet, der im folgenden vom übrigen Phasenraum als entkoppelt angenommen wird. In diesem Fall ist die ungestörte Transfermatrix (vgl. Kap. 2.3.1)

$$e^{SJ_0z} = \begin{pmatrix} 1 & z \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = D(z) \quad (2.54)$$

eine einfache Driftstrecke. Die defokussierende Wirkung des Randfeldes oder die fokussierende Wirkung des Feldabfalls im Inneren eines HDSM-Dipols führt nach Gl. 2.49 auf eine Korrektur

$$\delta\tilde{J}(z) = \begin{pmatrix} 1 & -z \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ g(z) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & z \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = D(-z) F(z) D(z). \quad (2.55)$$

Die Transfermatrix  $M$  für eine Wegstrecke  $L$  ist nach Gl 2.47:

$$M = D(L) \mathfrak{R}(L) = M_0 + M_1 + M_2 + \dots \quad (2.56)$$

Die Beiträge bis zur zweiten Ordnung in der Entwicklung 2.53 sind:

$$\begin{aligned}0. \text{ Ordnung} \quad M_0 &= D(L) \\ 1. \text{ Ordnung} \quad M_1 &= \int_0^L ds_1 T(D(L - s_1) F(s_1) D(s_1)) \\ 2. \text{ Ordnung} \quad M_2 &= \frac{1}{2} \int_0^L ds_2 ds_1 T(D(L - s_2) F(s_2) D(s_2 - s_1) F(s_1) D(s_1))\end{aligned}\quad (2.57)$$

$M_0$  ist die Transfermatrix für einen „wechselwirkungslosen“ Teilchentransfer.  $M_1$  beschreibt den Beitrag zur Transfermatrix, der aus einer Driftstrecke, einer einfachen Linsenwechselwirkung und einer zweiten Driftstrecke besteht.  $M_n$  ist analog der Beitrag für eine  $n$ -fache Linsenwechselwirkung während dem Strahltransport, der eine Korrektur in der Größenordnung  $g^n$  zur Transfermatrix  $M$  darstellt.

In den Beiträgen  $M_n$  wird über alle möglichen Linsenpositionen gemittelt, wobei die Zeitordnungsfunktion  $T$  die Kausalität erhält: eine Wechselwirkung des Strahls an den Positionen  $z = s_1$  und  $z = s_2$  mit  $s_2 > s_1$  wird z.B. im Beitrag  $M_2$  nur dann mitgerechnet, wenn der Strahl zuerst bei  $s_1$  und dann bei  $s_2$  wechselwirkt. Die umgekehrte Reihenfolge wird von  $T$  nicht zugelassen. Dies ist physikalisch konsequent, da der Strahl sich immer in die positive  $z$ -Richtung bewegt. Anschaulich sind die Beiträge  $M_n$  in Abb. 2.2 dargestellt.

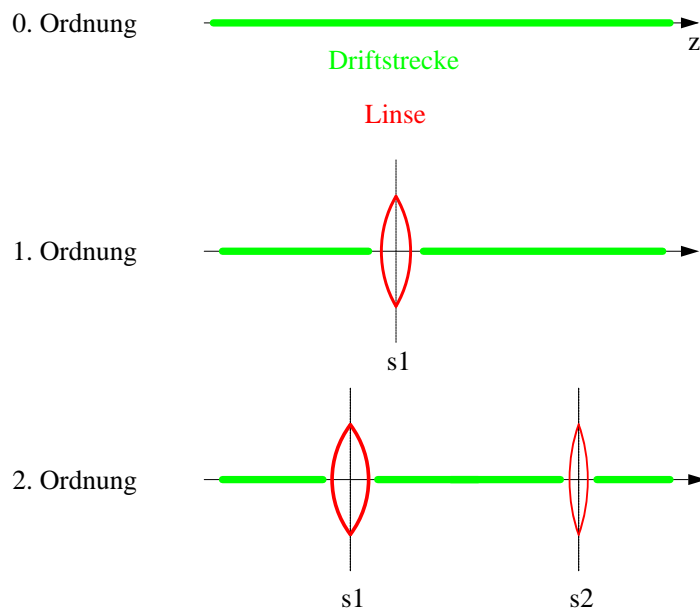


Abbildung 2.2: Analog zu den Feynman-Diagrammen für die Darstellung von Elementarprozessen können die Beiträge  $M_0, M_1, \dots$  aus der Störungstheorie nach der Anzahl der Linsenwechselwirkungen des Strahls geordnet werden.

## 2.2 Kohärenzbedingungen

Für eine stabile Beschleunigung im Mikrotron muß das Sollteilchen eine statische und eine dynamische Kohärenzbedingung einhalten.

### 2.2.1 Dynamische und statische Kohärenzbedingung im RTM

In Abb. 2.3 ist das Rennbahn-Mikrotron schematisch dargestellt. Der Linac ist in rot und die Rezirkulationsbahnen in grün angedeutet. Das Sollteilchen wird mit der Energie  $E_0$  zur Sollphase  $\varphi_s$  auf die Linac-Achse des Mikrotrons injiziert. Die statische Kohärenzbedingung verlangt, daß die Weglänge der ersten Rezirkulation  $N = 1$  ein ganzzahliges Vielfaches der HF-Wellenlänge  $\lambda$  ist:

$$\oint_{N=1} dz = n_0 \lambda; \quad n_0 = 1, 2, \dots \quad (2.58)$$

Auf diese Weise kehrt das Teilchen nach dem ersten Umlauf zur gleichen Phasenlage  $\varphi_s$  wie bei der Injektion auf die Linac-Achse zurück.

Die dynamische Kohärenzbedingung fordert, daß sich die Teilchenbahn um genau eine HF-Wellenlänge (oder ein ganzzahliges Vielfaches) im zweiten Umlauf verlängert:

$$\oint_{N=2} dz - \oint_{N=1} dz = \lambda. \quad (2.59)$$

Nach Gl. 2.59 kehrt das Teilchen auch nach dem zweiten Umlauf zur Phasenlage  $\varphi_s$  in den Linac zurück. Mit Induktion nach  $N$  folgt daraus, daß bei einem homogenen Umlenksystem die Bahnlänge auf allen weiteren Umläufen um jeweils  $\lambda$  anwächst und die Teilchenenergie  $E$  im  $N$ -ten Umlauf

$$E = E_0 + N \Delta E \quad (2.60)$$

ist. Bei vorgegebenem Energiegewinn  $\Delta E$  und HF-Wellenlänge  $\lambda$  ist durch Gl. 2.59 das Magnetfeld der Umlenk dipole bestimmt. Für relativistische Teilchengeschwindigkeiten gilt:

$$\frac{2\pi}{ecB_y} = \frac{\partial}{\partial E} \oint_{(2.59)} dz = \frac{\lambda}{\Delta E}. \quad (2.61)$$

Bei vorgegebenem  $n_0$  in Gl. 2.58 ergibt sich dann die Einschubenergie bei einem Dipolabstand von  $l$  aus der Beziehung

$$\frac{2\pi}{ecB_y} E_0 + 2l = \oint_{N=1} dz = n_0 \lambda. \quad (2.62)$$

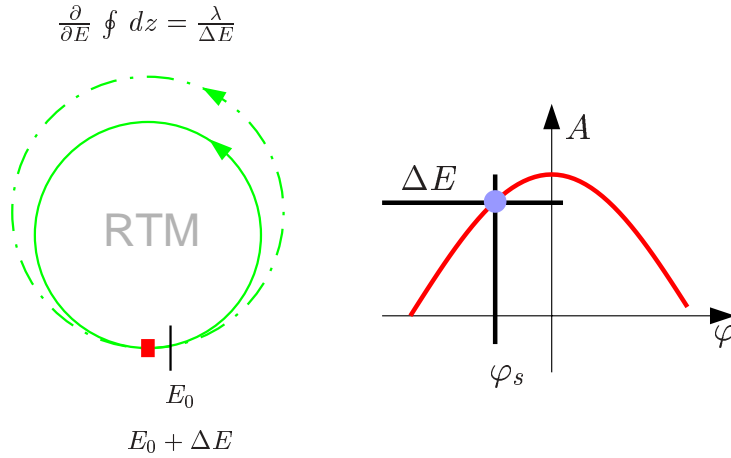


Abbildung 2.3: Schema der Sollteilchenbewegung im RTM, wobei der Linac in rot und die Rückführungsbahnen in grün angedeutet sind.

## 2.2.2 Dynamische und statische Kohärenzbedingung im HDSM

Ein Schema vom HDSM ist in Abb. 2.4 gezeigt. Das Sollteilchen wird mit der Energie  $E_0$  zur Sollphase  $\varphi_{s1}$  in den Linac 1 injiziert. Die statische Kohärenzbeziehung verlangt, daß die Bahnlänge der ersten vollen Rezirkulation einem ganzen Vielfachen der HF-Wellenlänge  $\lambda$  entspricht:

$$\oint_{N=1} dz = \int_{N=1} dz + \int_{N=1} dz = n_0 \lambda; \quad n_0 = 1, 2, \dots \quad (2.63)$$

Die beiden Integrale bzw. beziehen sich dabei auf jeweils eine Bahnhälfte, nämlich von Linac 1 nach Linac 2 bzw. von Linac 2 zurück zu Linac 1. Nach Gl. 2.63 kehren die Elektronen nach dem ersten Umlauf wieder zur Phase  $\varphi_{s1}$  in Linac 1 zurück.

Die dynamische Kohärenzbedingung fordert, daß im zweiten Umlauf die Weglänge in den beiden 180°-Passagen jeweils um  $\lambda$  größer ist:

$$\int_{N=2} dz - \int_{N=1} dz = \lambda; \quad \int_{N=2} dz - \int_{N=1} dz = \lambda. \quad (2.64)$$

Somit folgt für die Weglänge des zweiten ganzen Umlaufs

$$\oint_{N=2} dz = \int_{N=1} dz + \lambda + \int_{N=1} dz + \lambda, \quad (2.65)$$

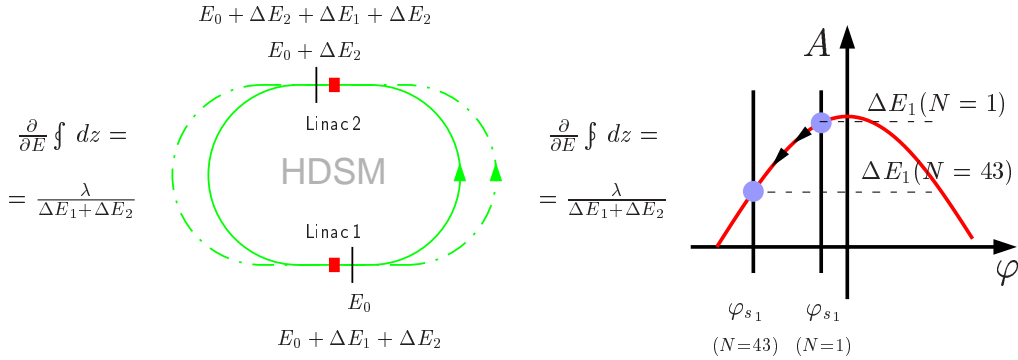


Abbildung 2.4: Schema der Sollteilchenbewegung im HDSM, wobei die beiden Linacs in rot und die Rückführbahnen in grün angedeutet sind.

so daß die Elektronen wieder zur Phase  $\varphi_{s_1}$  in Linac 1 zurückkehren.

Während der ersten Rezirkulation treffen die Elektronen zur Phase  $\varphi_{s_2}$  bei Linac 2 ein. Das zweite Mal treffen sie nach einer Wegstrecke

$$dz + \underset{N=2}{dz} = \oint_{N=1} dz + \lambda \quad (2.66)$$

auf Linac 2. Die Phasenlage ist dann nach Gl. 2.63 ebenfalls  $\varphi_{s_2}$ . Mit Induktion nach  $N$  folgt daraus, daß bei homogen angenommenen HDSM-Dipolen die Elektronen bei allen weiteren Umläufen zur gleichen Phasenlage  $\varphi_{s_1}$  bzw.  $\varphi_{s_2}$  in Linac 1 bzw. Linac 2 beschleunigt werden (vgl. [15]).

Es gilt [15]

$$\frac{\partial}{\partial E} dz = \frac{\pi - 2}{ecB_y} \quad (2.67)$$

und zusammen mit Gl. 2.64 folgt für das Magnetfeld

$$B_y = \frac{\pi - 2}{ec\lambda} (\Delta E_1 + \Delta E_2). \quad (2.68)$$

Aufgrund des zur Kompensation der vertikalen Defokussierung im HDSM eingeführten Feldabfalls [17] im Inneren der Umlenkdiode ist das mittlere Ablenkkfeld  $B_y$  eine Funktion der Umlaufnummer  $N$ . Nach Gl. 2.68 sind daher im HDSM die Sollenergiegewinne und Sollphasen ebenfalls eine Funktion von  $N$ , wie es in Abb. 2.4 angedeutet ist. Dies hat zur Folge, daß die oben formulierten Kohärenzbedingungen vom Sollteilchen nicht exakt eingehalten werden, da es sonst z.B. nach Gl. 2.65 in Linac 1 Umlauf für Umlauf den gleichen Energiegewinn erhalten würde. Im Grunde ist es nur notwendig, daß der

Verlauf des Energiegewinns und damit der Sollphasen so gewählt wird, daß die Endenergie erreicht wird. Abweichungen von einer festen Sollphasenlage ergeben sich bereits beim RTM durch die Randfeldeinflüsse bei kleinen Umlenkradien, durch nichtrelativistische Elektronengeschwindigkeiten oder im geringeren Maße auch durch den mittleren Energieverlust durch Synchrotronstrahlung. Wie die numerische Simulation vom HDSM zeigt, kann dank der starken Phasenfokussierung selbst bei relativ großen Abweichungen vom homogenen Umlenkkfeld leicht eine Kombination von Einschußphase und Einschußenergie gefunden werden, die zu einem nahezu schwingungsfreien Verlauf der Sollphase während des Beschleunigungsprozesses führt.

## 2.3 Lineare Teilchenbewegung

Im folgenden wird die Lösung der Bewegungsgleichung 2.26 mit der Hamilton-Funktion 2.30 für paraxiale Strahlen für die wichtigsten Elemente der Strahlführung diskutiert. Dabei wird zuerst die Matrix  $M_0$  (vgl. Gl. 2.57) aus der Störungstheorie für alle Elemente exakt berechnet, da sie später für die Berechnung der höheren Beiträge  $M_1$ ,  $M_2$  etc. benötigt wird.

### 2.3.1 Bewegung in einer Driftstrecke

Der Gradient der Hamilton-Funktion  $H$  wird unter den Bedingungen

$$h = 1; A_x = A_y = A_z = 0; \quad (2.69)$$

mit Hilfe von Gl. 2.30 zu

$$\nabla H(x, p_x, y, p_y, \delta\varphi, \delta E) = \left( 0, \frac{p_x c}{E_n}, 0, \frac{p_y c}{E_n}, 0, 0 \right)^T. \quad (2.70)$$

Damit ergibt sich für  $J$  in Gl. 2.28:

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{c}{E_v} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{c}{E_v} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.71)$$

Es ist

$$(SJ)^n = 0 \text{ für } n > 1. \quad (2.72)$$

Demnach lautet die Transfermatrix für eine Driftstrecke der Länge  $L$ :

$$M = \exp(SJL) = 1 + SJL + 0 = \begin{pmatrix} 1 & \frac{c}{E_n} L & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{c}{E_n} L & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (2.73)$$

### 2.3.2 Bewegung in einem dünnen Quadrupol

In einer dünnen Linse ist die Krümmung der Sollbahn konstant Null

$$h = 1 = \text{const.} \quad (2.74)$$

Das Skalarpotential eines reinen 4-Pols mit beliebiger azimuthaler Orientierung lautet nach Gl. 2.40:

$$\begin{aligned} \Psi^{(4)} &= \left( \frac{\partial B_y}{\partial x} \right) xy + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial B_y}{\partial y} \right) (y^2 - x^2) \\ &= g_n xy + \frac{1}{2} g_s (y^2 - x^2). \end{aligned} \quad (2.75)$$

Die Koeffizienten werden unabhängig von  $z$  angenommen. Die Stärke des Quadrupolanteils bzw. des 45°-Quadrupolanteils ist  $g_n$  bzw.  $g_s$ . Mit Hilfe von Gl. 2.42 lautet das Vektorpotential:

$$\vec{A} = \left( -g_s xy + \frac{1}{2} g_n (y^2 - x^2) \right) \hat{z}. \quad (2.76)$$

Damit wird in linearer Ordnung der Gradient der Hamilton-Funktion aus 2.30:

$$\nabla H(x, p_x, y, p_y, \delta\varphi, \delta E) = \left( eg_s y + eg_n x, \frac{p_x c}{E_n}, eg_s x - eg_n y, \frac{p_y c}{E_n}, 0, 0 \right)^T \quad (2.77)$$

und somit

$$SJ = \begin{pmatrix} 0 & \frac{c}{E_n} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -eg_n & 0 & -eg_s & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{c}{E_n} & 0 & 0 \\ -eg_s & 0 & eg_n & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.78)$$

Für eine dünne Linse der Länge  $L \approx 0$  wird die Exponentialfunktion in Gl. 2.28 nur bis zur ersten Ordnung entwickelt und dann der Limes  $L \rightarrow 0$  bei konstanten Brechkraften genommen:

$$M = \exp(SJL) \approx \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -eg_n L & 1 & -eg_s L & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -eg_s L & 0 & eg_n L & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (2.79)$$

### 2.3.3 Bewegung in einem Dipol

#### Homogener Sektordipol

Es ist

$$h = 1 + \frac{x}{R}; \quad R = \frac{E_n}{ecB_y}, \quad (2.80)$$

wobei  $B_y$  das Magnetfeld senkrecht zur Sollbahn ist. Aus Gl. 2.35 folgt

$$A_x = A_y = 0; \quad -\frac{1}{h} \frac{\partial(hA_z)}{\partial x} = B_y. \quad (2.81)$$

Da in den Bewegungsgleichungen nur die partielle Ableitung von  $hA_z$  nach  $x$  auftritt, muß das Vektorpotential nicht explizit ausgerechnet werden. Demnach ist in linearer Ordnung in  $\vec{v}$  nach Gl. 2.30

$$\nabla H(x, p_x, y, p_y, \delta\varphi, \delta E) = \left( \frac{eB_y x}{R} + \frac{\delta E}{Rc}, \frac{p_x c}{E_n}, 0, \frac{p_y c}{E_n}, 0, \frac{x}{Rc} \right)^T \quad (2.82)$$

und somit

$$SJ = \frac{1}{R} \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{eB_y} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -eB_y & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{c} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{eB_y} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{c} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.83)$$

Es gilt:

$$(SJ)^{2k} = \frac{(-1)^k}{R^{2k}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{ecB_y} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{ecB_y} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad k > 0; \quad (2.84)$$

$$(SJ)^{2k+1} = \frac{(-1)^k}{R^{2k+1}} \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{eB_y} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -eB_y & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{c} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{c} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{ec^2B_y} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad k > 0; \quad (2.85)$$

Damit ergibt sich schließlich nach Gl. 2.28 bei einer Laufstrecke  $L$  durch den Dipol

$$\begin{aligned} M = e^{SJL} &= 1 + (SJ)L + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{L^{2k}}{(2k)!} (SJ)^{2k} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{L^{2k+1}}{(2k+1)!} (SJ)^{2k+1} = \\ &= \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{L}{R}\right) & \beta \sin\left(\frac{L}{R}\right) & 0 & 0 & 0 & \frac{\beta}{c} \left(\cos\left(\frac{L}{R}\right) - 1\right) \\ -\frac{1}{\beta} \sin\left(\frac{L}{R}\right) & \cos\left(\frac{L}{R}\right) & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{c} \sin\left(\frac{L}{R}\right) \\ 0 & 0 & 1 & \frac{c}{E_n} L & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{c} \sin\left(\frac{L}{R}\right) & \frac{\beta}{c} \left(1 - \cos\left(\frac{L}{R}\right)\right) & 0 & 0 & 1 & \frac{\beta}{c^2} \left(\sin\left(\frac{L}{R}\right) - \frac{L}{R}\right) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (2.86)$$

wobei

$$\beta = \frac{Rc}{E_n} \quad (2.87)$$

ist. In linearer Ordnung ist die vertikale ( $y, p_y$ ) Teilchenbewegung von den übrigen Freiheitsgraden entkoppelt.

Unter Berücksichtigung des mittleren Synchrotronstrahlungsverlustes lautet der Gradient der modifizierten Hamilton-Funktion aus Gl. 2.45

$$\nabla H(x, p_x, y, p_y, \delta\varphi, \delta E) = \left( \frac{eB_y x}{R} + \frac{\delta E}{Rc}, \frac{p_x c}{E_n}, 0, \frac{p_y c}{E_n}, \frac{P_\gamma}{c}, \frac{x}{Rc} \right)^T \quad (2.88)$$

und somit wird die Bewegungsgleichung 2.26 mit  $SJ$  aus Gl. 2.83 zu

$$\frac{d\vec{v}}{dz} = \vec{k} + SJ\vec{v}; \quad \vec{k}^T = (0, 0, 0, 0, 0, -P_\gamma/c). \quad (2.89)$$

Die Lösung ist

$$\vec{v}(z) = e^{SJz} \vec{v}(0) + \int_0^z ds e^{SJs} \vec{k}, \quad (2.90)$$

und mit Hilfe von Gl. 2.86 folgt:

$$\vec{v}(L) = M\vec{v}(0) - \frac{P_\gamma}{c} \begin{pmatrix} \frac{R^2}{E_n} \left( \sin\left(\frac{L}{R}\right) - \left(\frac{L}{R}\right) \right) \\ \frac{R}{c} \left( \cos\left(\frac{L}{R}\right) - 1 \right) \\ 0 \\ 0 \\ -\frac{R^2}{cE_n} \left( \cos\left(\frac{L}{R}\right) - 1 + \frac{1}{2} \left(\frac{L}{R}\right)^2 \right) \\ L \end{pmatrix}. \quad (2.91)$$

Beispielsweise führt bei einer Energie von 1 GeV, einem Ablenkwinkel von  $\pi$  und einem Radius von 3 m die Synchrotronstrahlung zu einem horizontalen Winkelfehler von kleiner als 0.01 mrad. Er liegt unterhalb der von unvermeidbaren Feldfehlern in den Umlenk dipolen erzeugten Winkelfehler, die im praktischen Betrieb der Mikrotrone von Korrekturdipolen auf den Rückführungsbahnen kompensiert werden.

### 180°-Dipol mit Gegenfeld

In Abb. 2.5 ist der Verlauf des Magnetfeldes von einem der beiden 180°-Dipole am RTM3 gezeigt. Die vertikal defokussierende Wirkung des Randfeldes (vgl. Abb. 2.6) wird hier mit Hilfe eines Gegenfeldstreifens [43] kompensiert. Für das Potential  $\Psi$  längs der Sollbahn gilt mit Hilfe der Rekursion 2.38

$$\begin{aligned} \Psi &= a_{1,0}x + a_{0,1}y + \\ &+ a_{1,1}xy + \frac{1}{2} \left( a_{0,2} + \frac{ka_{1,0}}{2} \right) (y^2 - x^2) - \frac{ka_{1,0}}{4} (y^2 + x^2) + \\ &+ \dots \end{aligned} \quad (2.92)$$

Der Koeffizient  $a_{0,1}$  bzw.  $a_{1,1}$  bestimmt den Dipol- bzw. Quadrupolanteil im Magneten. Die Koeffizienten  $a_{1,0}$  und  $a_{0,2}$  sind nur dann von Null verschieden, wenn das Magnetfeld entlang der Sollbahn  $B_x$ - oder  $B_z$ -Komponenten besitzt. In der Design-Rechnung tragen daher nur  $a_{0,1}$  bzw.  $a_{1,1}$  zu  $\Psi$  bei.

Für die Bewegungsgleichungen spielen in linearer Ordnung die Komponenten  $A_x$  und  $A_z$  des Vektorpotentials keine Rolle, da sie mindestens quadratische Beiträge in der Bewegungsgleichung 2.26 liefern. Daher kann  $\vec{A}$  wieder mit Hilfe von Gl. 2.42 berechnet werden:

$$\begin{aligned} h\vec{A} &= \left( -a_{0,1}x \left( 1 + \frac{k}{2}x \right) + \frac{a_{1,1}}{2} (y^2 - x^2) \right) \hat{z} + \\ &+ \left( a_{1,0}y - a_{0,2}xy \left( 1 + \frac{k}{2}x \right) \right) \hat{z} + \dots \end{aligned} \quad (2.93)$$

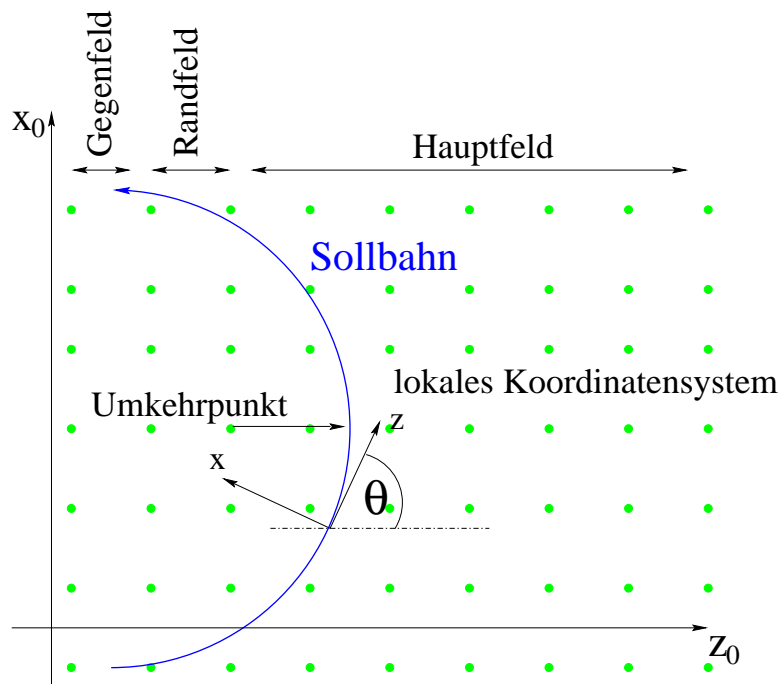
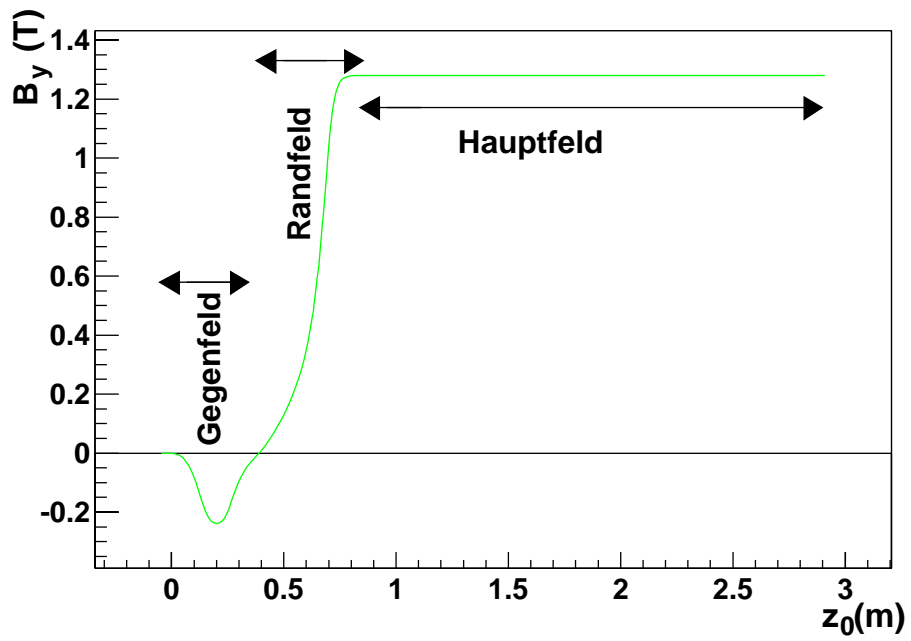


Abbildung 2.5: Feldverlauf  $B_y(z_0)$ , Sollbahn und lokales Koordinatensystem in einem  $180^\circ$ -Dipol vom RTM3.

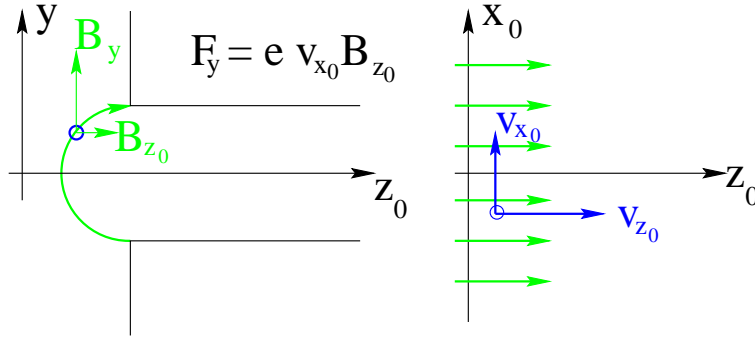


Abbildung 2.6: Defokussierende Wirkung der Lorentzkraft auf ein Elektron mit einer Ablage in  $y$ -Richtung im Randfeldbereich.

Es ist

$$a_{0,1} = B_y(z); a_{1,1} = \frac{\partial B_y}{\partial x}(z); a_{1,0} = a_{0,2} = 0. \quad (2.94)$$

Mit der Bedingung

$$eB_y(z) = \frac{E_n}{cR(z)} \quad (2.95)$$

lautet die Jacobi-Matrix von  $H$  in einem RTM-Dipol:

$$SJ = \begin{pmatrix} 0 & \frac{c}{E_n} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{eB_y}{R} - e\partial_x B_y & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{Rc} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{c}{E_n} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e\partial_x B_y & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{Rc} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.96)$$

Die störungstheoretische Behandlung der Vertikalbewegung wurde schon in Kap. 2.1.4 vorbereitet. In 0. Ordnung ist die Transfermatrix für die Strecke  $L$

$$M_0 = \begin{pmatrix} 1 & \frac{c}{E_n}L \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; L = \int_0^L dz. \quad (2.97)$$

Der Beitrag 1. Ordnung ist nach Gl. 2.57

$$M_1 = \int_0^L dz e\partial_x B_y(z) \begin{pmatrix} \frac{c}{E_n}(L-z) & \left(\frac{c}{E_n}\right)^2 z(L-z) \\ 1 & \frac{c}{E_n}z \end{pmatrix}. \quad (2.98)$$

Numerisch können die Beiträge  $M_n$  wie folgt bestimmt werden. Es ist

$$\frac{\partial B_y}{\partial x} = \frac{\partial B_y}{\partial x_0} \frac{dx_0}{dx} + \frac{\partial B_y}{\partial z_0} \frac{dz_0}{dx} = -\frac{\partial B_y}{\partial z_0} \sin \theta \quad (2.99)$$

und

$$\begin{aligned} Rd\theta &= dz \\ \Rightarrow \cos \theta d\theta &= \frac{ecB_y}{E_n} dz_0 \\ \Rightarrow \sin \theta_L - \sin \theta_0 &= \frac{ec}{E_n} \int_0^{z_0(L)} dz_0 B_y. \end{aligned} \quad (2.100)$$

Als Integrand treten dann nach einer Variablentransformation von  $z$  nach  $z_0$  nur Ausdrücke der Form

$$\left( \frac{\partial B_y}{\partial z_0} \right)^{k_1} (\tan \theta)^{k_2} z^{k_3} dz_0; \quad k_1, k_2, k_3 = 0, 1, \dots \quad (2.101)$$

auf. Die Ableitung von  $B_y$  nach  $z_0$  als Funktion von  $z_0$  wird aus dem vorgegebenem Feldverlauf  $B_y(z_0)$  extrahiert. Mit Hilfe von Gl. 2.100 kann der Bahnwinkel  $\theta(z_0)$  als Funktion von  $z_0$  berechnet werden und damit aus

$$z(z_0) = \int_0^{z_0(z)} \frac{dz_0}{\cos \theta(z_0)} \quad (2.102)$$

die zurückgelegte Wegstrecke  $z(z_0)$  als Funktion von  $z_0$ .

In Abb. 2.7 ist exemplarisch für eine willkürlich gewählte Energie von 130 MeV die auf diese Weise berechnete vertikale Transfermatrix zwischen Eintritt in den Dipol und Umkehrpunkt als Funktion von  $z_0$  mit Beiträgen bis zur dritten Ordnung gezeigt. Die Korrekturen 2. und 3. Ordnung zur Transfermatrix sind kleiner als 0.1%.

Für die gekoppelte Bewegung im horizontalen und longitudinalen Phasenraum wird

$$SJ_0 = \begin{pmatrix} 0 & \frac{c}{E_n} & 0 & 0 \\ -\frac{E_n}{R_\infty^2 c} & 0 & 0 & -\frac{1}{R_\infty c} \\ \frac{1}{R_\infty c} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad (2.103)$$

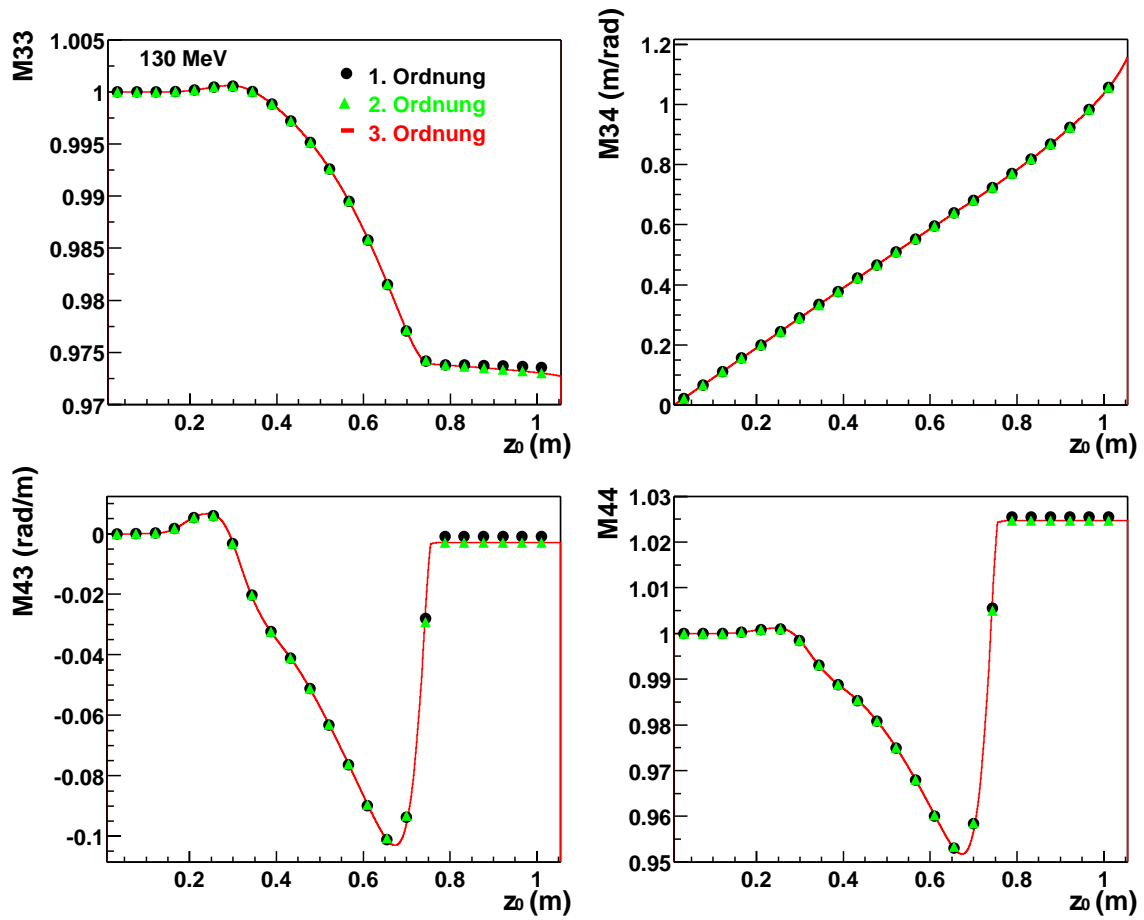


Abbildung 2.7: Mit Hilfe der Störungstheorie berechnete vertikale Matrixelemente  $M_{33}$ ,  $M_{34}$ ,  $M_{43}$  und  $M_{44}$  als Funktion der Bahnposition bis zum Umkehrpunkt in einem  $180^\circ$  RTM-Dipol bei einer Energie von 130 MeV.

$$S\delta J(z) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{E_n}{c} \left( \frac{1}{R^2} - \frac{1}{R_\infty^2} \right) - e\partial_x B_y & 0 & 0 & -\frac{1}{Rc} + \frac{1}{R_\infty c} \\ \frac{1}{Rc} - \frac{1}{R_\infty c} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad (2.104)$$

angesetzt, wobei der Krümmungsradius  $R_\infty$  mit Hilfe der Bahnlänge für die gesamte 180°-Bewegung definiert ist:

$$\pi R_\infty = \int_{0^\circ}^{180^\circ} dz(\theta). \quad (2.105)$$

Nach Gl. 2.86 ergibt sich für die Transfermatrix in nullter Ordnung

$$M_0 = \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{L}{R_\infty}\right) & \beta \sin\left(\frac{L}{R_\infty}\right) & 0 & \frac{\beta}{c} \left( \cos\left(\frac{L}{R_\infty}\right) - 1 \right) \\ -\frac{1}{\beta} \sin\left(\frac{L}{R_\infty}\right) & \cos\left(\frac{L}{R_\infty}\right) & 0 & -\frac{1}{c} \sin\left(\frac{L}{R_\infty}\right) \\ \frac{1}{c} \sin\left(\frac{L}{R_\infty}\right) & \frac{\beta}{c} \left( 1 - \cos\left(\frac{L}{R_\infty}\right) \right) & 1 & \frac{\beta}{c^2} \left( \sin\left(\frac{L}{R_\infty}\right) - \frac{L}{R_\infty} \right) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (2.106)$$

und

$$\beta = \frac{R_\infty c}{E_n}, \quad (2.107)$$

wobei  $L$  aus Gl. 2.97 stammt. Wenn die Matrizen für die Driftstrecken in Gl. 2.57 durch die Dipolmatrix 2.106 ersetzt werden, ergibt sich für den Beitrag 1. Ordnung

$$M_1 = \int_0^L dz \left( -\frac{E_n}{c} \left( \frac{1}{R^2} - \frac{1}{R_\infty^2} \right) - e\partial_x B_y \right) \cdot \begin{pmatrix} \beta \sin\left(\frac{L-z}{R_\infty}\right) \cos\left(\frac{z}{R_\infty}\right) & \beta^2 \sin\left(\frac{L-z}{R_\infty}\right) \sin\left(\frac{z}{R_\infty}\right) & & \\ \cos\left(\frac{L-z}{R_\infty}\right) \cos\left(\frac{z}{R_\infty}\right) & \beta \cos\left(\frac{L-z}{R_\infty}\right) \sin\left(\frac{z}{R_\infty}\right) & & \\ -\frac{\beta}{c} \left( \cos\left(\frac{L-z}{R_\infty}\right) - 1 \right) \cos\left(\frac{z}{R_\infty}\right) & -\frac{\beta^2}{c} \left( \cos\left(\frac{L-z}{R_\infty}\right) - 1 \right) \sin\left(\frac{z}{R_\infty}\right) & \dots & \\ 0 & 0 & & \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
& \left. \begin{array}{cccc}
0 & \frac{\beta^2}{c} \sin\left(\frac{L-z}{R_\infty}\right) \left(\cos\left(\frac{z}{R_\infty}\right) - 1\right) & & \\
0 & \frac{\beta}{c} \cos\left(\frac{L-z}{R_\infty}\right) \left(\cos\left(\frac{z}{R_\infty}\right) - 1\right) & & \\
\dots & & & \\
0 & -\frac{\beta^2}{c^2} \left(\cos\left(\frac{z}{R_\infty}\right) - 1\right) \left(\cos\left(\frac{L-z}{R_\infty}\right) - 1\right) & & \\
0 & & 0 & 
\end{array} \right) + \\
& + \int_0^L dz \left( \frac{1}{Rc} - \frac{1}{R_\infty c} \right) \cdot \\
& \left( \begin{array}{cccc}
0 & 0 & 0 & -\beta \sin\left(\frac{L-z}{R_\infty}\right) \\
0 & 0 & 0 & -\cos\left(\frac{L-z}{R_\infty}\right) \\
\cos\left(\frac{z}{R_\infty}\right) & \beta \sin\left(\frac{z}{R_\infty}\right) & 0 & \frac{\beta}{c} \left(\cos\left(\frac{z}{R_\infty}\right) + \cos\left(\frac{L-z}{R_\infty}\right) - 2\right) \\
0 & 0 & 0 & 0
\end{array} \right).
\end{aligned} \tag{2.108}$$

Die numerische Berechnung der Beiträge  $M_n$  erfolgt in gleicher Weise wie für den vertikalen Phasenraum. Die horizontale Transfermatrix als Funktion von  $z_0$  zwischen Eintritt und Umkehrpunkt ist in Abb. 2.8 ebenfalls bei 130 MeV mit Beiträgen bis zur zweiten Ordnung gezeigt. Die Beiträge  $M_1$  und  $M_2$  tragen im Mittel weniger als 1.0% zur Transfermatrix bei.

### 90°-HDSM Dipol

Die vertikal defokussierende Wirkung des Randfeldes wird im HDSM, wie in Abb. 2.9 gezeigt ist, durch einen ortsabhängigen Feldgradienten [18] im Inneren der 90°-Dipole für alle Strahlenergien zwischen 855 MeV und 1.5 GeV kompensiert.

Als Startwert zur Berechnung der Transfermatrizen mit Hilfe der Störungstheorie werden wieder die Matrizen  $M_0$  aus Gl. 2.97 und 2.106 verwendet, nachdem für den Startwinkel in Gl. 2.100 anstelle von  $0^\circ$  jetzt  $45^\circ$  gesetzt wurde. Für den Krümmungsradius in Gl. 2.105 gilt dann

$$\frac{\pi}{2} R_\infty = \int_{45^\circ}^{135^\circ} dz(\theta). \tag{2.109}$$

Die Ergebnisse sind bis zur dritten Ordnung bei einer exemplarischen Energie von 1018 MeV in Abb. 2.10, 2.11 und 2.12 gezeigt. Dabei wurde über die ganze

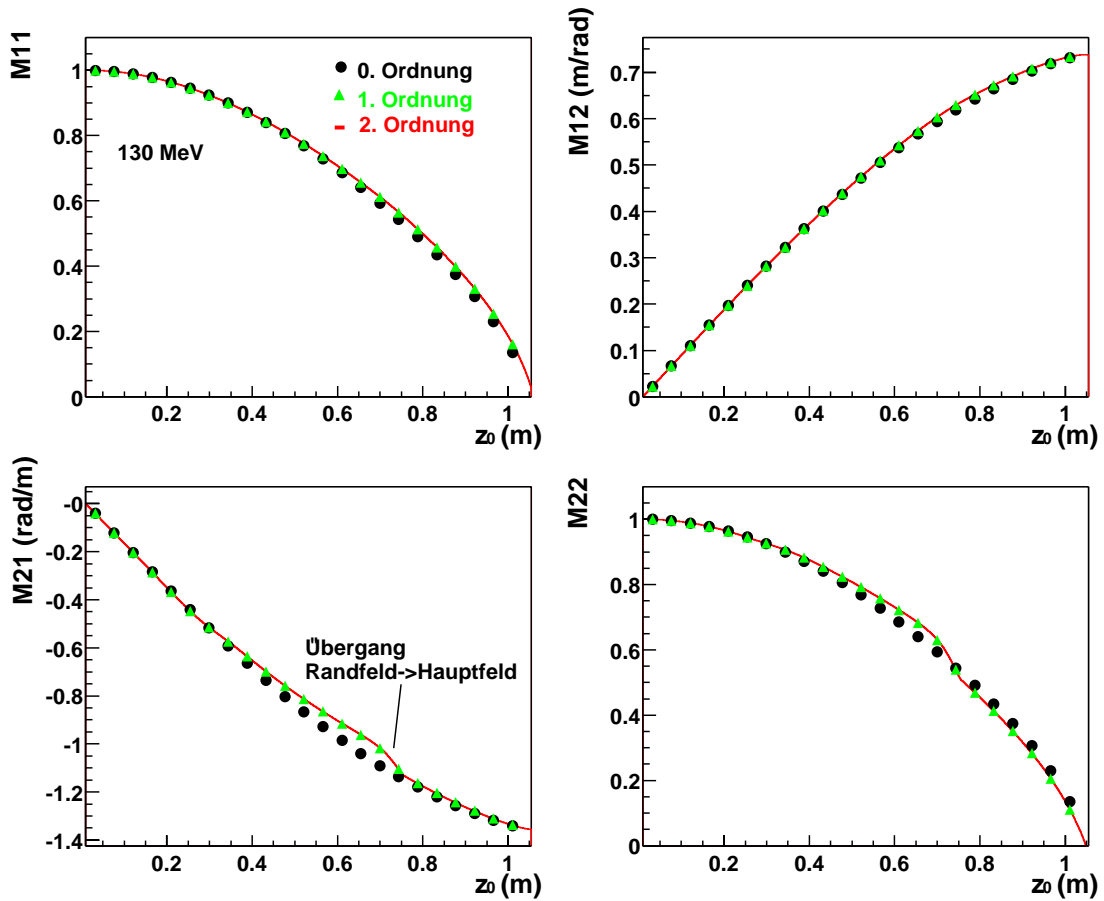


Abbildung 2.8: Mit Hilfe der Störungstheorie berechnete horizontale Matrixelemente  $M_{11}$ ,  $M_{12}$ ,  $M_{21}$  und  $M_{22}$  als Funktion der Bahnposition bis zum Umkehrpunkt in einem  $180^\circ$  RTM-Dipol bei einer Energie von 130 MeV.

Bahn zwischen Ein- und Austritt integriert und die  $z'_0$ -Koordinate wie folgt definiert:

$$\begin{aligned} z'_0(\theta) &= z_0(\theta); & 45^\circ \leq \theta \leq 90^\circ \\ z'_0(\theta) &= 2z_0(90^\circ) - z_0(\theta); & 90^\circ < \theta \leq 135^\circ \end{aligned} \quad (2.110)$$

Ab der dritten Ordnung sind die Korrekturen zur Transfermatrix kleiner als 0.5%.

Der Feldverlauf  $B_y(z_0)$  innerhalb eines  $90^\circ$ -Dipols ist nach [15] bei vorgegebenem Randfeld durch die Bedingung bestimmt, daß für alle Teilchenenergien zwischen 855 MeV und 1.5 GeV die Vertikalbewegung telezentrisch ist:

$$M43(\theta = 90^\circ) = M43(\theta = 135^\circ) = 0. \quad (2.111)$$

Für das Matricelement  $M21$  ist diese Bedingung automatisch erfüllt, da das Magnetfeld zweidimensional ist, d.h. nur eine Funktion von  $z_0$  ist.

Die Störungstheorie liefert neben der ray-tracing Methode mit Hilfe von PTRACE [1] eine weitere Möglichkeit, den Feldverlauf innerhalb des Magneten zu berechnen. Zur Optimierung kann beispielsweise das gleiche Verfahren wie in [15] verwendet werden, wenn die dort verwendeten ray-tracing Routinen zur Berechnung der Matricelemente durch die oben vorgestellten Routinen der Störungstheorie ersetzt werden. Die Abbildung 2.13 zeigt das auf diese Weise bestimmte Feldprofil bis zur dritten Ordnung. Die Abweichungen im Vergleich zu den ray-tracing Rechnungen sind bei der 3. Ordnung kleiner als 0.07%.

In einem weiteren Test wurden die horizontalen und vertikalen Laufstrecken, also die Matricelemente  $M12$  und  $M34$ , für alle Teilchenenergien zwischen 855 MeV und 1500 MeV mit Hilfe der Störungstheorie berechnet und mit den PTRACE-Rechnungen verglichen, siehe Abb. 2.14. Die beiden Rechnungen stimmen mit einer mittleren Genauigkeit von 0.3% überein.

### 2.3.4 Bewegung im Linac

Der Sollenergiegewinn  $\Delta E$  im Linac der Länge  $L$  wird bei einer Sollphasenlage  $\varphi_s$  übertragen. Die HF-Wellenlänge sei mit  $\lambda$  bezeichnet. Das elektrische Feld  $E_z$  in Bewegungsrichtung variiert gemäß einer Cosinus-Funktion:

$$E_z = \frac{\Delta E}{eL \cos(\varphi_s)} \cos\left(\varphi_s + \frac{2\pi c}{\lambda} \delta\varphi\right). \quad (2.112)$$

Für kleine Abweichungen von der Sollphase gilt:

$$E_z(\delta\varphi) = \frac{\Delta E}{eL \cos(\varphi_s)} \left( \cos(\varphi_s) - \sin(\varphi_s) \frac{2\pi c}{\lambda} \delta\varphi - \cos(\varphi_s) \frac{1}{2} \left( \frac{2\pi c}{\lambda} \delta\varphi \right)^2 + \dots \right). \quad (2.113)$$

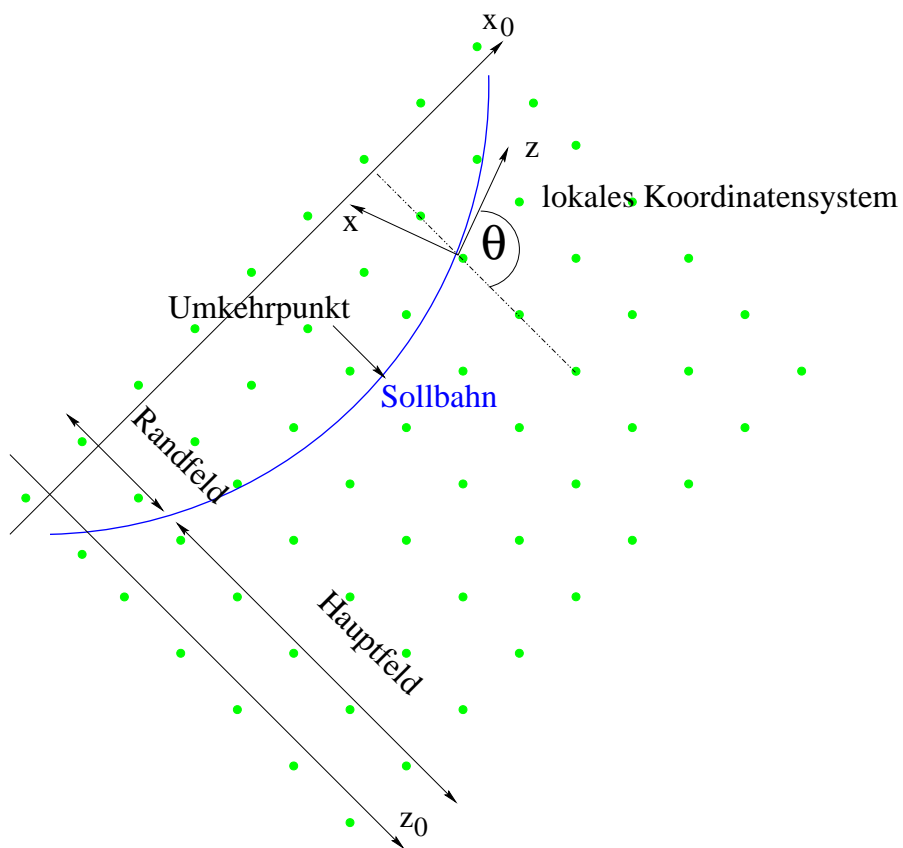
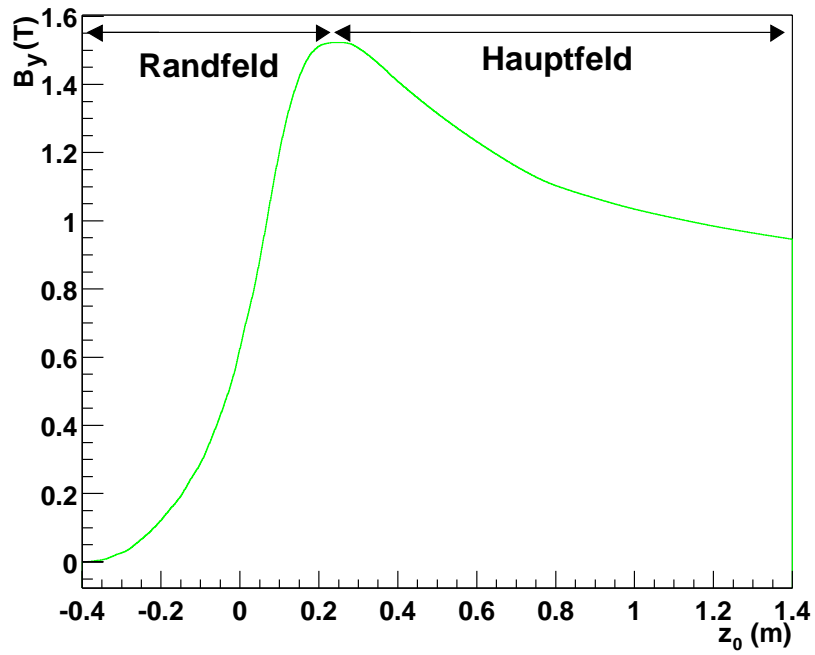


Abbildung 2.9: Feldverlauf  $B_y(z_0)$ , Sollbahn und lokales Koordinatensystem in einem 90°-HDSM Dipol.

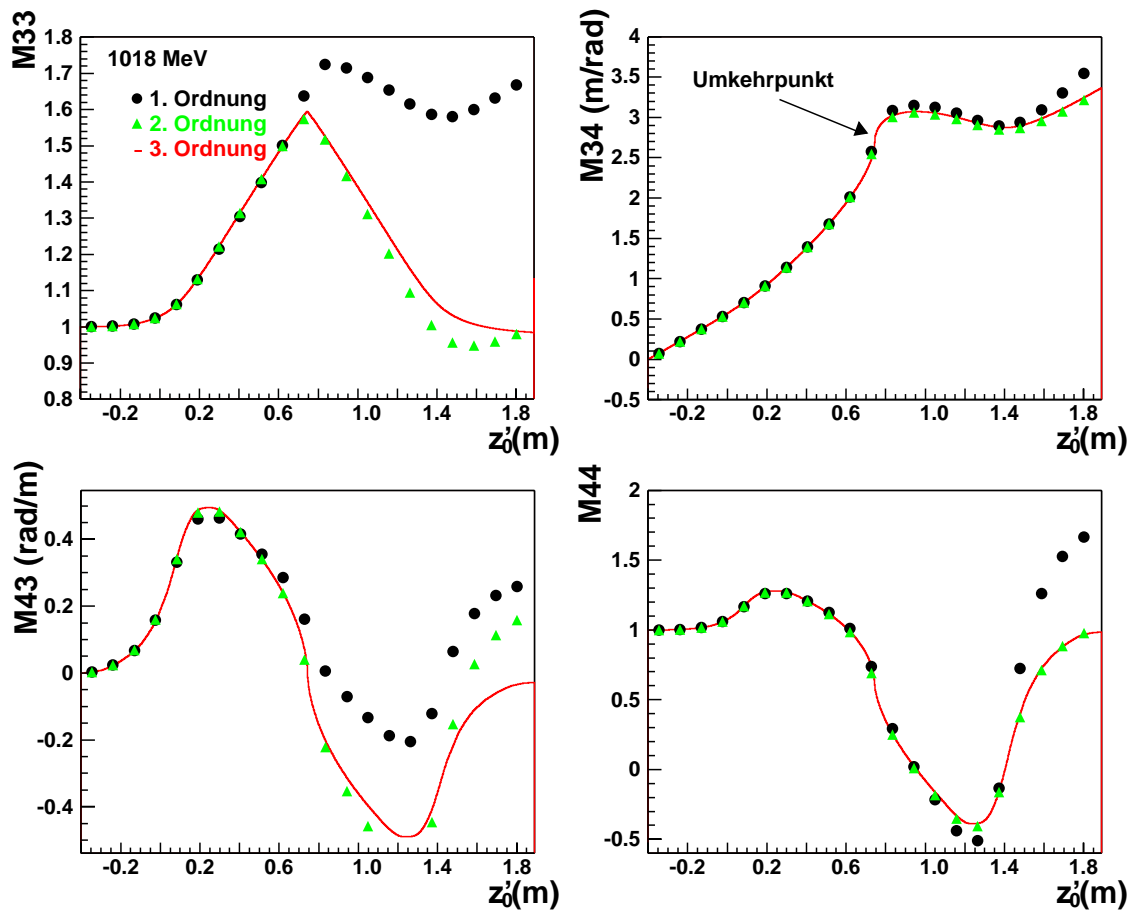


Abbildung 2.10: Mit Hilfe der Störungstheorie berechnete vertikale Matrixelemente  $M_{33}$ ,  $M_{34}$ ,  $M_{43}$  und  $M_{44}$  als Funktion der Bahnposition in einem 90°-HDSM Dipol bei einer Energie von 1018 MeV.

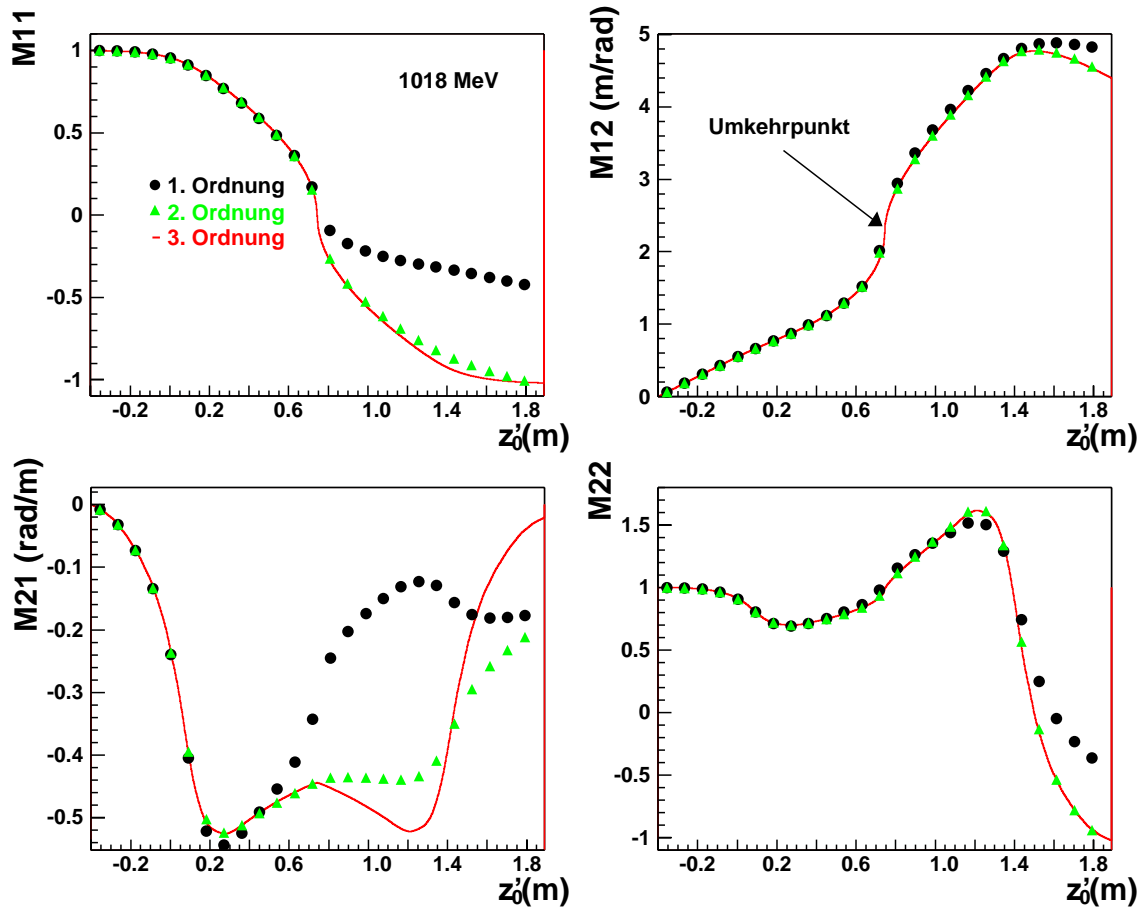


Abbildung 2.11: Mit Hilfe der Störungstheorie berechnete horizontale Matrixelemente  $M_{11}$ ,  $M_{12}$ ,  $M_{21}$  und  $M_{22}$  als Funktion der Bahnposition in einem  $90^\circ$ -HDSM Dipol bei einer Energie von 1018 MeV.

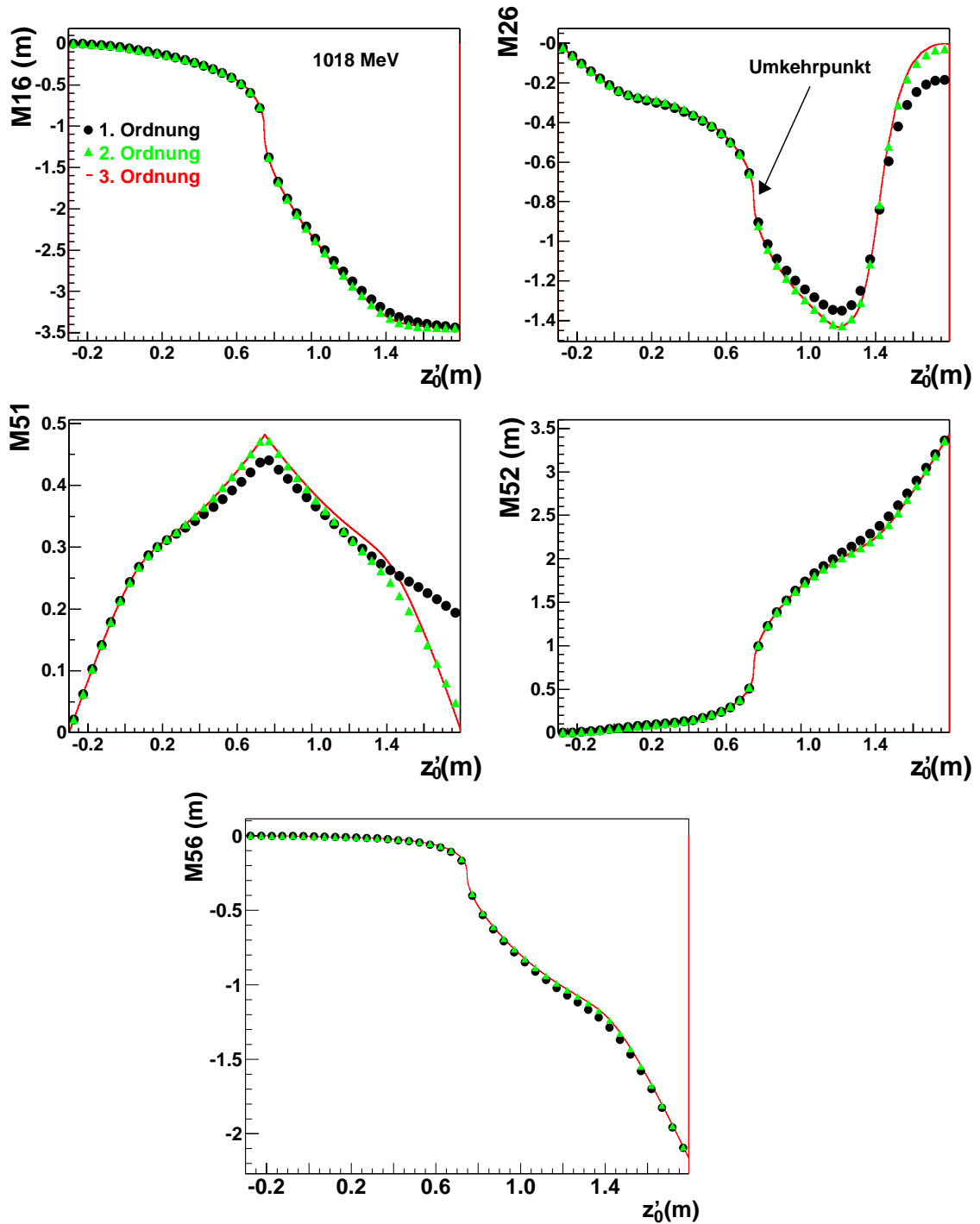


Abbildung 2.12: Mit Hilfe der Störungstheorie berechnete longitudinale Matrixelemente  $M_{16}$ ,  $M_{26}$ ,  $M_{51}$ ,  $M_{52}$  und  $M_{56}$  als Funktion der Bahnposition in einem  $90^\circ$ -HDSM Dipol bei einer Energie von 1018 MeV.

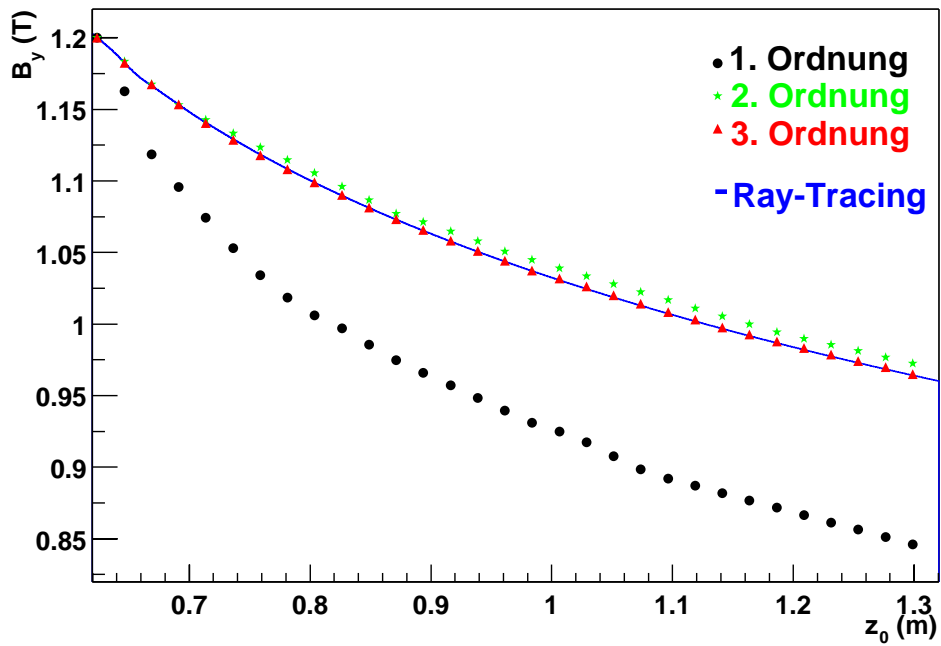


Abbildung 2.13: Mit Hilfe der Störungstheorie bzw. mit Hilfe von PTRACE berechnetes Feldprofil  $B_y(z_0)$  im Inneren eines telezentrischen  $90^\circ$ -HDSM Dipols.

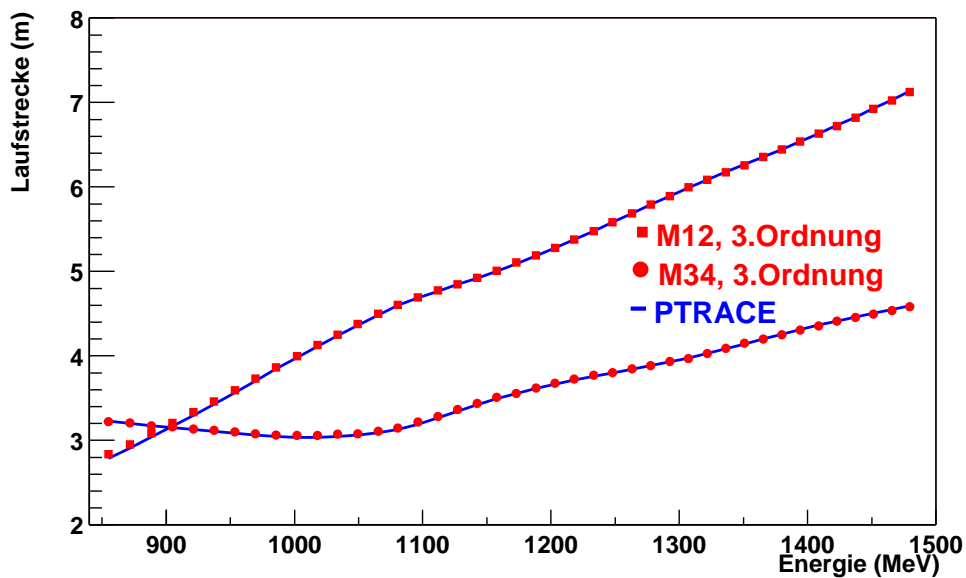


Abbildung 2.14: Mit Hilfe der Störungstheorie bzw. mit Hilfe von PTRACE berechnete horizontale und vertikale Laufstrecke  $M12$  und  $M34$  in einem  $90^\circ$ -HDSM Dipol für Teilchenenergien zwischen 855 MeV und 1.5 GeV.

Das Vektorpotential lautet demnach [44]

$$\begin{aligned}\vec{A} &= \left( \int_0^{\delta\varphi} ds \left( E_z(s) - \frac{\Delta E}{eL} \right) \right) \hat{z} = \\ &= \left( -\frac{\Delta E}{eL} \left( \frac{2\pi c}{\lambda} \right) (\tan \varphi_s) \frac{1}{2} \delta\varphi^2 - \frac{\Delta E}{eL} \left( \frac{2\pi c}{\lambda} \right)^2 \frac{1}{6} \delta\varphi^3 + \dots \right) \hat{z}.\end{aligned}\quad (2.114)$$

Im folgenden sei nur der lineare Term  $\delta\varphi$  in  $E_z$  berücksichtigt. Der quadratische Term wird in Abschnitt 3.1.3 über Resonanzen diskutiert. Der Gradient der Hamilton Funktion Gl. 2.30 ist

$$\nabla H(x, p_x, y, p_y, \delta\varphi, \delta E) = \left( 0, \frac{p_x c}{E_n}, 0, \frac{p_y c}{E_n}, \frac{\Delta E}{L} \frac{2\pi c}{\lambda} \tan \varphi_s \delta\varphi, 0 \right)^T. \quad (2.115)$$

Somit folgt für die Jacobi-Matrix:

$$SJ = \begin{pmatrix} 0 & \frac{c}{E_n} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{c}{E_n} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{\Delta E}{L} \frac{2\pi c}{\lambda} \tan \varphi_s & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.116)$$

Die Abbildungsmatrix ist dann für einen sehr kurzen Linac ( $L \rightarrow 0$ )

$$M = e^{SJL} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\Delta E \frac{2\pi c}{\lambda} \tan \varphi_s & 1 \end{pmatrix}. \quad (2.117)$$

In obiger Herleitung wurde angenommen, daß das elektrische Feld nicht von  $x$  oder  $y$  abhängt. Da die Hohlraumresonatoren des Linacs in  $x$ - bzw.  $y$ -Richtung nicht unendlich ausgedehnt sind, ist dies nur eine Idealisierung. Nach dem Panofsky-Wenzel Theorem [45] gilt für den transversalen Impulsübertrag  $\Delta p_\perp$  im Linac

$$\Delta p_\perp = e \int_0^L dz \nabla_\perp A_z. \quad (2.118)$$

Für rotationssymmetrische Resonatormoden verschwindet das Integral bei relativistischen Teilchenenergien [46] und obige Annahme ist gerechtfertigt.

Wenn die Symmetrie gestört ist, wie z.B. durch die Koppelschlitze in den MAMI-Resonatoren [47], hat nach Gl. 2.118 der Resonator auch eine Linsenwirkung. Beispielsweise wurde im Rahmen einer Diplomarbeit [48] an den MAMI-Resonatoren die Feldasymmetrie gemessen und daraus eine Quadrupolstärke  $p_{\perp}/p_{\parallel}$  von etwa  $10^{-3}$  abgeschätzt. Zur Kompensation dieses Effekts wurden bei MAMI B am Injektor-Linac und am RTM2 die einzelnen Sektionen gegeneinander um  $90^{\circ}$  gedreht und am RTM3 jeweils eine ganze Sektionshälfte um  $90^{\circ}$  gegen die andere gedreht, so daß im Mittel die fokussierende Wirkung nahezu aufgehoben wird [49, 50].

# Kapitel 3

## Beschreibung der Mikrotronmodelle für die strahldynamischen Untersuchungen

In diesem Kapitel werden die in Kap. 2 berechneten Transfermatrizen für einzelne strahloptische Elemente zu einem kompletten Modell für die Mikrotrone zusammengesetzt. Die RTM-Modelle werden für die Auswertung der später vorgestellten strahldynamischen Untersuchungen an MAMI B benötigt, das HDSM-Modell für die Planung ähnlicher Untersuchungen an MAMI C.

### 3.1 Modell für die Longitudinalbewegung im RTM

#### 3.1.1 Periodische Näherung

Im folgenden wird der Zeitversatz  $\delta\varphi$  in Einheiten der HF-Periode ausgedrückt

$$\delta\varphi \equiv \frac{2\pi c}{\lambda} \delta\varphi \quad (3.1)$$

und als Phasenlage bezeichnet. Die  $180^\circ$ -Dipole seien als ideale Sektormagnete ohne Berücksichtigung von Synchrotronstrahlungsverlusten betrachtet. Nach Gl. 2.86 und 2.61 gilt für die Transfermatrix in einem  $180^\circ$ -Dipol:

$$\begin{pmatrix} \delta\varphi_1 \\ \delta E_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{\pi}{\Delta E} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta\varphi_0 \\ \delta E_0 \end{pmatrix}. \quad (3.2)$$

Für hochrelativistische Teilchen und bei einer Phasengeschwindigkeit der HF-Welle von  $c$  kann der Linac nach Gl. 2.117 als infinitesimal dünn angenommen werden. Für eine Linac-Hälfte gilt dann

$$\begin{pmatrix} \delta\varphi_1 \\ \delta E_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{\Delta E}{2} \tan \varphi_s & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta\varphi_0 \\ \delta E_0 \end{pmatrix}. \quad (3.3)$$

Für ein periodisches System lautet allgemein die Transfermatrix für  $N$  Re-zirkulationen [51]:

$$\begin{pmatrix} \delta\varphi_N \\ \delta E_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(N\Phi) + \alpha \sin(N\Phi) & \beta \sin(N\Phi) \\ -\frac{1+\alpha^2}{\beta} \sin(N\Phi) & \cos(N\Phi) - \alpha \sin(N\Phi) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta\varphi_0 \\ \delta E_0 \end{pmatrix}. \quad (3.4)$$

Die Matrizen in Gl. 3.2, 3.3 und 3.4 seien mit  $M_D$ ,  $M_L$  und  $M(N)$  bezeichnet. Der Phasenvorschub  $\Phi$ , die longitudinalen Twissparameter  $\beta$  und  $\alpha$  ergeben sich durch einen Vergleich der Matrixelemente in  $M(N)$  mit denen in dem Produkt aus  $M_D$  und  $M_L$  für  $N = 1$ . Der Parameter  $\beta$  wird im folgenden auch als Betafunktion bezeichnet. Zum Beispiel gilt für die Transfermatrix von Mitte Linac bis Mitte Linac:

$$M(N) = (M_L M_D M_D M_L)^N. \quad (3.5)$$

Es ist

$$\cos \Phi = 1 + \pi \tan \varphi_s. \quad (3.6)$$

Die Parameter  $\beta$  und  $\alpha$  sind in Tabelle 3.1 dargestellt. Die wichtigsten Daten zur Longitudinaloptik für MAMI B sind in Tabelle 3.2 zusammengefaßt.

Die Twissparameter  $\beta$  und  $\alpha$  und die Emittanz  $\epsilon$  definieren eine Eigenellipse der Fläche  $\pi\epsilon$  durch die Gleichung [51]

$$\beta \delta E_N^2 + 2\alpha \delta\varphi_N \delta E_N + \frac{1 + \alpha^2}{\beta} \delta\varphi_N^2 = \epsilon. \quad (3.7)$$

Die Teilchenkoordinaten  $\delta\varphi_N$  und  $\delta E_N$  liegen auf dem Rand dieser Ellipse und werden nach jedem Umlauf wieder auf diesen geometrischen Ort abgebildet, vgl. Abb. 3.1.

### 3.1.2 Stabilität der Longitudinaloptik

Im folgenden wird anhand des Modells aus Abschnitt 3.1.1 diskutiert, welchen Einfluß

- Schwankungen der HF-Amplitude des Linacs, der HF-Wellenlänge und des Umlenkfeldes

Tabelle 3.1: Longitudinale Twissparameter  $\beta$  und  $\alpha$  als Funktion von  $\Delta E$ ,  $\varphi_s$  und  $\Phi$  im RTM für einige wichtige Referenzpunkte, sowie die zugehörigen Matrixprodukte für einen Umlauf.

Referenz	$\beta$	$\alpha$	M(1)
Mitte Linac	$\frac{-2\pi}{\Delta E \sin \Phi}$	0	$M_L M_D M_D M_L$
Anfang Linac	$\frac{-2\pi}{\Delta E \sin \Phi}$	$\pi \frac{\tan \varphi_s}{\sin \Phi}$	$M_D M_D M_L M_L$
Mitte Rückführung	$\frac{\sin \Phi}{\Delta E \tan \varphi_s}$	0	$M_D M_L M_L M_D$

Tabelle 3.2: Daten zur Longitudinaloptik für MAMI B

	RTM1	RTM2	RTM3
$\Delta E$ (MeV)	0.60	3.24	7.50
$\varphi_s$ (°)	-21.5	-16.0	-16.0
$\Phi$ (°)	-103.7	-84.3	-84.3
Mitte Linac			
$\beta$ (1/MeV)	10.80	1.95	0.84
Anfang Linac			
$\beta$ (1/MeV)	10.80	1.95	0.84
$\alpha$	1.27	0.91	0.91
Mitte Rückführung			
$\beta$ (1/MeV)	4.12	1.07	0.46

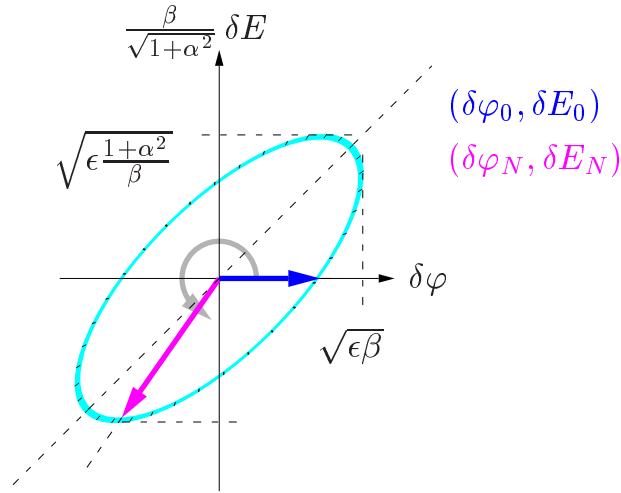


Abbildung 3.1: Bedeutung der Twissparameter und Beispiel für die Transformation eines Teilchenvektors.

- Driften der Phase der HF-Welle in den einzelnen Sektionen des Linacs
- die Resonanzabstimmung der Linac-Sektionen

auf den Phasenvorschub  $\Phi$  haben.

### **Einfluß der HF-Amplitude des Linacs, der HF-Wellenlänge und des Umlenkfeldes auf den Phasenvorschub $\Phi$**

Der Energiegewinn  $a$  am Linac ist:

$$a(\varphi) = A \cos \varphi; \quad A = \frac{\Delta E}{\cos \varphi_s}. \quad (3.8)$$

Mit Hilfe von Gl. 3.8 läßt sich Gl. 3.6 wie folgt umschreiben:

$$\cos \Phi = 1 - \frac{\pi}{\Delta E} \frac{\partial a}{\partial \varphi_s}. \quad (3.9)$$

Daraus folgt für die Änderung von  $\Phi$  als Funktion von  $\delta\varphi$  und  $\delta A$

$$\delta\Phi = \frac{\pi}{\Delta E} \frac{1}{\sin \Phi} \left( \frac{\partial^2 a}{\partial \varphi_s^2} \delta\varphi_s + \frac{\partial^2 a}{\partial A \partial \varphi_s} \delta A \right). \quad (3.10)$$

Bei vorgegebenem Sollenergiegewinn  $\Delta E$  gilt

$$\Delta E = A \cos(\varphi_s) = (A + \delta A) \cos(\varphi_s + \delta\varphi_s) \quad (3.11)$$

und somit

$$\delta\varphi_s = \frac{\delta A}{A} \frac{1}{\tan \varphi_s}. \quad (3.12)$$

Einsetzen von Gl. 3.12 in Gl. 3.10 liefert

$$\delta\Phi = -\pi \frac{1}{\sin \Phi \sin \varphi_s \cos \varphi_s} \frac{\delta A}{A}. \quad (3.13)$$

Am RTM3 führt z.B. eine Amplitudenänderung von 1 Promille zu einer Schwankung von  $\Phi$  um  $0.68^\circ$ .

Um in Gl. 3.13 auch Schwankungen des Magnetfeldes oder der HF-Frequenz zu berücksichtigen, wird Gl. 3.9 mit Hilfe von 3.8 und 2.61 zu

$$\cos \Phi = 1 - \pi \sqrt{\left(2\pi \frac{A}{ec\lambda B_y}\right)^2 - 1} \quad (3.14)$$

umgeformt. Daraus folgt, daß

$$\frac{\partial \cos \Phi}{\partial \lambda} = -\frac{\partial \cos \Phi}{\partial A} \frac{A}{\lambda}; \quad \frac{\partial \cos \Phi}{\partial B_y} = -\frac{\partial \cos \Phi}{\partial A} \frac{A}{B_y}; \quad (3.15)$$

ist. Somit lautet die Verallgemeinerung von Gl. 3.13

$$\delta\Phi = -\pi \frac{1}{\sin \Phi \sin \varphi_s \cos \varphi_s} \left( \frac{\delta A}{A} - \frac{\delta \lambda}{\lambda} - \frac{\delta B_y}{B_y} \right). \quad (3.16)$$

Für das RTM3 gilt insbesondere:

$$\delta\Phi = -681.8^\circ \cdot \left( \frac{\delta A}{A} - \frac{\delta \lambda}{\lambda} - \frac{\delta B_y}{B_y} \right). \quad (3.17)$$

### **Einfluß von Driften der Phase der HF-Welle in den einzelnen Sektionen des Linacs auf den Phasenvorschub $\Phi$**

Im folgenden wird der Einfluß der Schwankungen der HF-Phase in den einzelnen Sektionen eines RTM-Linacs auf die Synchrotronschwingung diskutiert. Dabei wird insbesondere der Fall behandelt, daß bereits die Grundeinstellung der Sektionsphasen unkorrekt ist. Als Beispiel dient der RTM3-Linac, der aus  $m = 5$  Sektionen besteht, die jeweils von einem Klystron und einem HF-Regelkreis versorgt werden [47].

Im folgenden sei angenommen, daß die Amplituden der Sektionen alle identisch sind, so daß anstelle von Gl. 3.8 jetzt

$$a = \frac{A}{m} \sum_{j=1}^m \cos(\varphi_j) \quad (3.18)$$

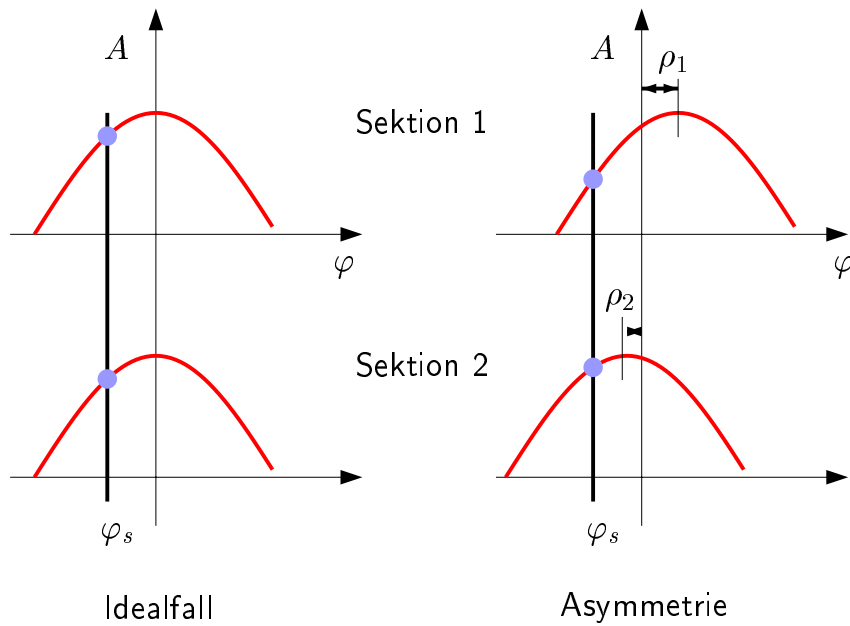


Abbildung 3.2: Im Idealfall wird das Sollteilchen an allen Linac-Sektionen bei der gleichen Phase beschleunigt (links), während in der Praxis auch der asymmetrische Fall rechts im Bild möglich ist.

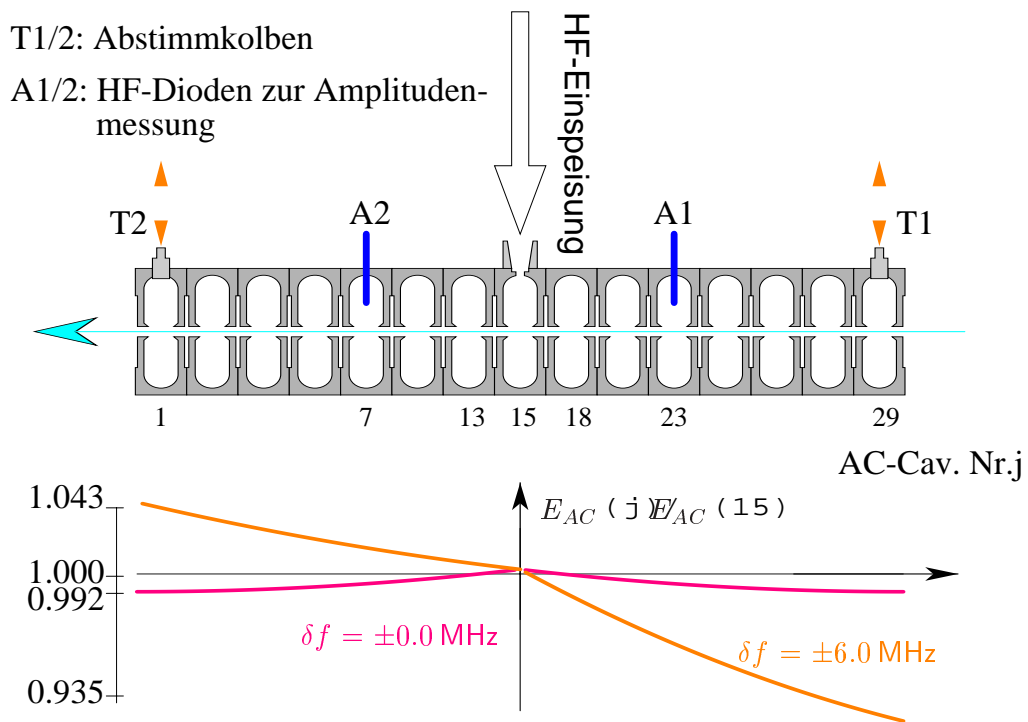


Abbildung 3.3: Schema einer Beschleunigungssektion von MAMI B und Darstellung des Amplitudenverlaufs (gelb) in den Beschleunigungszellen nach Korrektur einer thermisch verursachten Änderung der Resonanzfrequenz durch die Abstimmkolben T1 und T2 im Vergleich zum Amplitudenverlauf (lila) bei idealer Temperatur der Sektion.

gilt. Dabei werden die Elektronen zur Phase  $\varphi_j$  in Sektion Nr.  $j$  beschleunigt. Die Phasen  $\varphi_j$  müssen zwei Randbedingungen erfüllen. Erstens muß analog zu Gl. 3.8 der Sollenergiegewinn  $\Delta E$  übertragen werden:

$$\frac{A}{m} \sum_{j=1}^m \cos(\varphi_j) = A \cos \varphi_s \quad (3.19)$$

und zweitens muß bei einem durch Gl. 3.6 definierten Phasenvorschub

$$\frac{A}{m} \sum_{j=1}^m \sin(\varphi_j) = A \sin \varphi_s \quad (3.20)$$

gelten. Die Phasen  $\varphi_j$  werden wie folgt zerlegt:

$$\varphi_j = \varphi_s + \rho_j. \quad (3.21)$$

Im Idealfall sind alle Phasenfehler  $\rho_j$  Null, siehe Abb. 3.2. Bei einer Schwankung der Sektionsphasen um  $\delta\rho_j$  muß weiterhin Gl. 3.19 erfüllt bleiben:

$$\frac{A}{m} \sum_{j=1}^m \cos(\varphi_s + \delta\varphi_s + \rho_j + \delta\rho_j) = A \cos \varphi_s \quad (3.22)$$

und somit folgt in linearer Näherung

$$\delta\varphi_s = - \frac{\sum_{j=1}^m \delta\rho_j \sin(\varphi_s + \rho_j)}{\sum_{j=1}^m \sin(\varphi_s + \rho_j)}. \quad (3.23)$$

Es sei

$$\epsilon_j = \cos(\varphi_s + \rho_j) - \sin(\varphi_s + \rho_j) \frac{\sum_{k=1}^m \cos(\varphi_s + \rho_k)}{\sum_{k=1}^m \sin(\varphi_s + \rho_k)} \quad (3.24)$$

definiert. Dann resultiert für die Schwankung im Phasenvorschub

$$\delta\Phi = \frac{-\pi}{m \cos \varphi_s \sin \Phi} \sum_{j=1}^m \epsilon_j \delta\rho_j. \quad (3.25)$$

Für den Fall, daß alle  $\rho_j$  Null sind, folgt auch  $\epsilon_j = 0$ . In diesem Fall hat eine Schwankung der Sektionsphasen gegeneinander in linearer Näherung keinen Einfluß auf den Phasenvorschub. Wenn die Sektionen jedoch einen statischen Phasenfehler  $\rho_j$  besitzen, führen Phasenschwankungen i.A. auch

zu einer Änderung von  $\Phi$ . Wenn beispielsweise, wie in Abb. 3.2 rechts angedeutet ist, die statischen Phasenversätze  $\rho_1 = -4^\circ$  und  $\rho_2 = +4^\circ$  betragen, folgt mit den RTM3-Parametern daraus

$$\delta\Phi = 0.4(\delta\rho_2 - \delta\rho_1). \quad (3.26)$$

Eine asymmetrische Drift der Sektionen um z.B.  $1^\circ$  gegeneinander ändert  $\Phi$  um  $0.4^\circ$ . Dies ist mit einer mittleren HF-Amplitudenänderung von 0.6 Promille äquivalent.

### **Einfluß der Resonanzabstimmung der Linac-Sektionen auf den Phasenvorschub $\Phi$**

Das Schema einer Linac-Sektion vom RTM3 ist in Abb. 3.3 gezeigt. Es handelt sich hierbei um eine biperiodische achsengekoppelte  $\frac{\pi}{2}$ -Struktur, die im Stehwellenbetrieb arbeitet [16].

An der Sektion arbeiten zwei Regelkreise, siehe [52]. Die HF-Amplitudenregelung hält den Mittelwert der in den Zellen Nr. 7 und Nr. 23 gemessenen Amplitude konstant. Weiterhin wird die Resonanzfrequenz der Sektion mit Hilfe von zwei fahrbaren Abstimmkolben an den beiden Endzellen als Ganzes konstant gehalten.

Wenn die Güte aller Zellen und ihre Kopplung identisch wäre, würde der Mittelwert der Amplitudenmessung an den Zellen Nr. 7 und Nr. 23 die mittlere Sektionsamplitude repräsentieren. Dies ist nur eine Idealisierung, da zum einen aufgrund der Herstellung die Güten der Zellen nicht alle identisch sind und zum anderen die Endzellen wegen der Resonanzabstimmung der Sektion im Strahlbetrieb ständig aufgrund von Schwankungen der Kühlwassertemperatur verstimmt werden und sich damit die Feldverteilung entlang der Sektion verändert.

Im folgenden wird die Abhängigkeit der mittleren HF-Amplitude und des Phasenvorschubs von der Verstimmung der Endzellen untersucht. Dabei wird angenommen, daß die HF-Amplitudenregelung wie oben beschrieben arbeitet. Zum Beispiel ist in Abb. 3.3 die HF-Amplitude als Funktion von der Zellenummer in lila gezeichnet, wobei die beiden Endzellen nicht verstimmt sind. Die orange Kurve entsteht, wenn die Endzelle Nr.1 um -6 MHz und die Endzelle Nr.29 um +6 MHz verstimmt wird. Dabei ändert sich -wie im folgenden gezeigt wird- die mittlere HF-Amplitude stärker als der Mittelwert der Amplitudenmessung an Zelle Nr. 7 und Nr. 23.

Es sei  $A_j(\delta f_1, \delta f_{29})$  die HF-Amplitude in der Beschleunigungszelle Nr.  $j$  als Funktion von der Verstimmung der Endzelle Nr. 1 und Nr. 29 und  $\rho_j(\delta f_1, \delta f_{29})$

der statische Phasenversatz in Bezug auf die Sollphase. Für die totale, unregelte HF-Amplitude  $a$  gilt in Analogie zu Gl. 3.18 und 3.21:

$$a(\varphi_s, \delta f_1, \delta f_{29}) = \sum_{j=1}^{29} A_j(\delta f_1, \delta f_{29}) \cos(\varphi_s + \rho_j(\delta f_1, \delta f_{29})) \quad (3.27)$$

und der Meßwert der HF-Amplitudenregelung sei

$$r(\delta f_1, \delta f_{29}) = \frac{1}{2}(A_7(\delta f_1, \delta f_{29}) + A_{23}(\delta f_1, \delta f_{29})). \quad (3.28)$$

Wenn  $\delta f_1 = 0$ ,  $\delta f_{29} = 0$  die Referenz ist, dann gilt für die geregelte HF-Amplitude  $a_r$

$$a_r(\varphi_s, \delta f_1, \delta f_{29}) = \frac{r(0, 0)}{r(\delta f_1, \delta f_{29})} a(\varphi_s, \delta f_1, \delta f_{29}). \quad (3.29)$$

Der Sollenergiegewinn  $\Delta E$  ist nach Gl. 2.61 weiterhin konstant, da das Magnetfeld fest vorgegeben ist:

$$a_r(\varphi_s + \delta\varphi_s(\delta f_1, \delta f_{29}), \delta f_1, \delta f_{29}) = a_r(\varphi_s, 0, 0) = \Delta E. \quad (3.30)$$

Daraus folgt die Phasenverschiebung  $\delta\varphi_s$  als Funktion von  $\delta f_1$  und  $\delta f_{29}$ . Mit ihr und Gl. 3.9 kann dann der Phasenvorschub  $\Phi$  als Funktion von  $\delta f_1$  und  $\delta f_{29}$  berechnet werden:

$$\cos(\Phi(\delta f_1, \delta f_{29})) = 1 - \frac{\pi}{\Delta E} \frac{\partial}{\partial \varphi_s} a_r(\varphi_s + \delta\varphi_s(\delta f_1, \delta f_{29}), \delta f_1, \delta f_{29}). \quad (3.31)$$

Zur Berechnung der HF-Amplitude  $A_j$  und der Phase  $\rho_j$  als Funktion von der Verstimmung der Endzellen wurde das Programm LOOP [53] benutzt. Das Ergebnis einer entsprechenden Simulation mit den mittleren Kenndaten [47] für die aus Kupfer gefertigten RTM3-Sektionen ist in Tabelle 3.3 dargestellt. Dabei wurde verwendet, daß nach [47] die Sektionen pro 1°C Temperaturänderung um 40 kHz verstimmt werden. Die Simulation zeigt, daß sich durch die Resonanzabstimmung die mittlere HF-Amplitude der Sektion trotz aktiver HF-Amplitudenregelung in der Größenordnung von etwa 1% pro 1°C ändert. Ferner erkennt man, daß bei einer symmetrischen Bewegung der Abstimmkolben im Vergleich zur Abstimmung der Sektion mit nur einem Kolben der Effekt auf den Phasenvorschub etwa um einen Faktor 4 geringer ist.

Tabelle 3.3: LOOP Simulation zur Berechnung der Abhängigkeit der mittleren HF-Amplitude und des Phasenvorschubs von der Kühlwassertemperatur bei aktiver HF-Amplitudenregelung und Resonanzabstimmung an der Sektion.

$\delta f_1$	$\delta f_{29}$	$\delta\Phi$	$\delta A/\delta T$
1 kHz	0 kHz	$\delta\Phi = 0.12^\circ$	$0.7\%/1^\circ\text{C}$
0.5 kHz	0.5 kHz	$\delta\Phi = 0.03^\circ$	$0.2\%/1^\circ\text{C}$

### 3.1.3 1/3-Resonanz

Um die Bedeutung der nichtlinearen Terme bei der Bewegung im Linac (vgl. Gl. 2.113) abschätzen zu können, wurde in Abb. 3.4 mit Hilfe von PTRACE [1] die Abhängigkeit der Endenergie  $\delta E_{90}$  von der Amplitude der Synchrotronschwingung  $\delta\varphi_0$  und des Phasenvorschubs  $\Phi$  in der Umgebung der Solleinstellung der Longitudinaloptik vom RTM3 untersucht. Im Zentrum des Graphen kann die Teilchenbewegung gut in linearer Näherung beschrieben werden. Nach Gl. 3.4 gilt für die Endenergie

$$\delta E_{90} = -\frac{1 + \alpha^2}{\beta} \sin(90\Phi) \delta\varphi_0. \quad (3.32)$$

Der periodische Wechsel zwischen Tälern und Gipfeln entspricht jeweils einer Änderung von  $180^\circ$  im totalen Phasenvorschub über alle 90 Umläufe. Bis zu einer Amplitude der Synchrotronschwingung von etwa  $\pm 1^\circ$  beschreibt Gl. 3.32 die mit PTRACE berechnete Funktion  $\delta E_{90}(\delta\varphi_0)$  bei festem  $\Phi$  mit einer Genauigkeit von besser als 5%.

Um den Einfluß der nichtlinearen Terme quantitativ beschreiben zu können, wird folgende Hamilton-Funktion eingeführt:

$$\hat{H}(\delta e, \delta\varphi) = \frac{1}{2}(\delta e)^2 + \frac{1}{2}k_2(s)(\delta\varphi)^2 + \frac{1}{6}k_3(s)(\delta\varphi)^3, \quad (3.33)$$

wobei

$$\delta e = -\frac{\delta E}{\Delta E} \quad (3.34)$$

ist. Es sei  $\delta_{2\pi}(s)$  die Dirac-Deltafunktion [41] mit der Periode  $2\pi$  und

$$k_2 = -\delta_{2\pi}(s) \tan \varphi_s; \quad k_3 = -\delta_{2\pi}(s). \quad (3.35)$$

Im folgenden wird zunächst verifiziert, daß die Hamilton-Funktion  $\hat{H}$  die longitudinalen Abbildungseigenschaften von Dipol und Linac reproduziert.

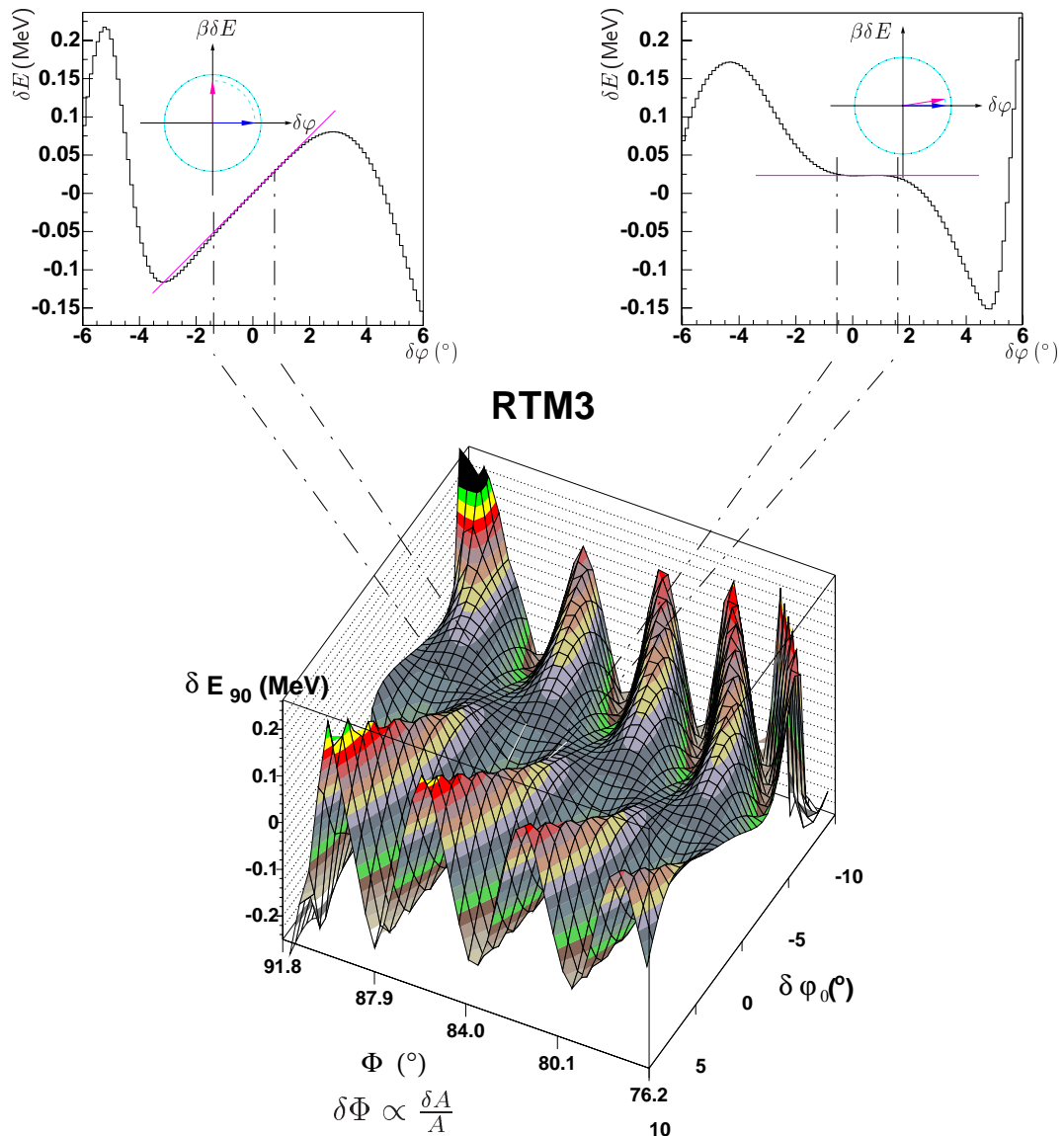


Abbildung 3.4: PTRACE Simulation zur Abhängigkeit der Endenergie  $\delta E_{90}$  von der Amplitude der Synchrotronschwingung  $\delta\varphi_0$  und des Phasenvorschubs  $\Phi$  in der Umgebung der Solleinstellung der Longitudinaloptik vom RTM3.

Es bezeichne  $0^\pm, 2\pi^\pm \dots$  den Limes gegen  $0, 2\pi$  etc. von links bzw. von rechts. Die Bewegungsgleichungen für  $\delta\varphi$  und  $\delta e$  lauten:

$$\delta\dot{\varphi} = \frac{\partial \hat{H}}{\partial \delta e} = -\frac{\delta E}{\Delta E} \quad (3.36)$$

und

$$\delta\dot{e} = -\frac{\partial \hat{H}}{\partial \delta\varphi} = -k_2\delta\varphi - \frac{k_3}{2}\delta\varphi^2. \quad (3.37)$$

Nach Integration von Gl. 3.36 und 3.37 folgt für die Transformation der Phase und der Energie im Dipol:

$$\delta\varphi(2\pi^-) = \delta\varphi(0^+) - \frac{2\pi}{\Delta E}\delta E(0^+) \quad (3.38)$$

und

$$\delta E(2\pi^-) = \delta E(0^+). \quad (3.39)$$

Die Transformation im Linac hat als Ergebnis

$$\delta\varphi(0^+) = \delta\varphi(0^-) \quad (3.40)$$

und

$$\delta E(0^+) = \delta E(0^-) - \Delta E \tan \varphi_s \delta\varphi(0^-) - \frac{\Delta E}{2}\delta\varphi^2(0^-). \quad (3.41)$$

Sowohl Gl. 3.38 und Gl. 3.39 bzw. Gl. 3.40 und Gl. 3.41 stimmen in linearer Näherung mit den in Kap. 3.1.1 bzw. Kap. 2.3.4 berechneten Abbildungseigenschaften für Dipol bzw. Linac überein.

Eine wichtige Konsequenz der Hamilton-Funktion  $\hat{H}$  aus Gl. 3.33 mit einer periodischen Sextupolstörung  $k_3$  ist nach [54] die Existenz einer  $1/3$ -Resonanz. Sie tritt nach Gl. 3.6 für  $\Phi_{1/3} = -120^\circ$  bei einer Sollphase von  $\varphi_s = -25.523^\circ$  auf. In der Umgebung der Resonanz ist die Separatrix dreiecksförmig mit folgenden Eckpunkten (vgl. Abb. 3.5), die aus Formel (1.96) in [54] entnommen wurden:

$$-\frac{2\sqrt{3}}{\pi}(\Phi - \Phi_{1/3})(1, 0); \frac{\sqrt{3}}{\pi}(\Phi - \Phi_{1/3})\left(1, \pm \frac{3}{4\pi}\Delta E\right). \quad (3.42)$$

Beim praktischen Betrieb der RTM's wird die Resonanz durch Wahl eines von  $-25.5^\circ$  deutlich verschiedenen Sollphasenwinkels vermieden (siehe Tab. 3.2).

In Kap. 6.3 wird  $\hat{H}$  sich als nützlich erweisen, um die gemessene Abhängigkeit von  $\Phi$  von der Amplitude der Synchrotronschwingung zu erklären.

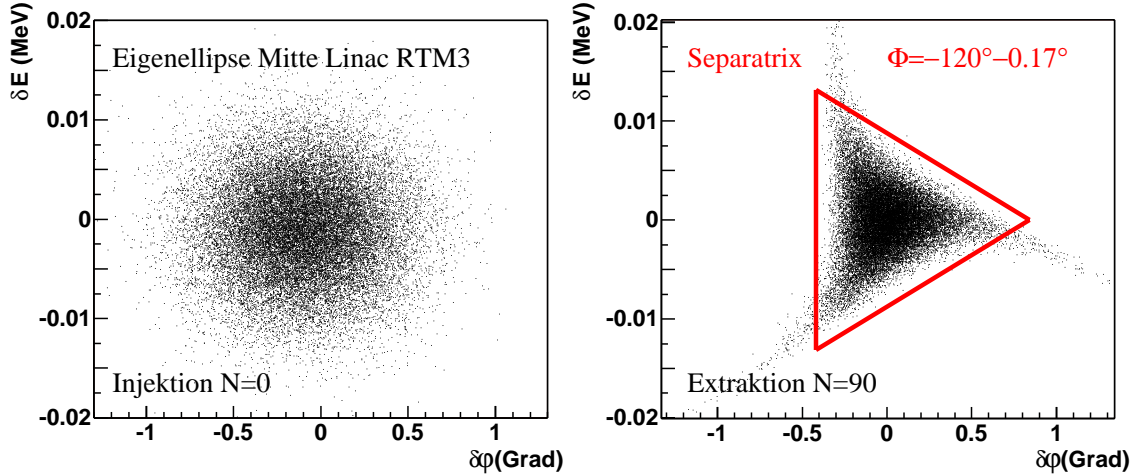


Abbildung 3.5: Simulierte Transformation der longitudinalen Eigenellipse vom RTM3 in der Nähe der 1/3-Resonanz.

### 3.2 Modell für die Longitudinalbewegung im HDSM

Während in einem RTM nach Gl. 2.61 die longitudinale Dispersion in einem  $180^\circ$ -Umlauf  $\pi/ecB_y$  beträgt, ist sie im HDSM nach Gl. 2.67 nur  $(\pi-2)/ecB_y$ . Daher benötigen hier die Elektronen bei gleichem Ablenkwinkel, Magnetfeld und HF-Frequenz für dieselbe Weglängenzunahme einen Faktor  $\pi/(\pi-2)$  mehr an Energiegewinn im Vergleich zum RTM. Mit einer Verdopplung der Grundfrequenz auf 4.90 GHz halbiert sich dieser Betrag. Phase und Wellenlänge im HDSM sind im folgenden immer auf diese Frequenz bezogen.

Nach Gl. 3.3 transformiert der Linac den longitudinalen Phasenraum wie eine dünne Linse und der Dipol nach Gl. 3.2 wie eine Driftstrecke. Abb. 3.6 veranschaulicht in diesem Sinne die Longitudinaloptik von RTM und HDSM.

Linac 1 arbeitet bei 4.90 GHz, während Linac 2 im Hinblick auf eine stabilere Longitudinalbewegung [15] bei 2.45 GHz betrieben wird. Die beiden Linacs haben zueinander einen festen Phasenversatz  $\rho$ , siehe Abb. 3.9.

Die Möglichkeit, Linac 2 bei 2.45 GHz zu betreiben, ergibt sich aus der maximalen Injektionsfrequenz von 2.45 GHz aus MAMI B. Da die Zeitdauer des ersten Umlaufs aus der Sicht von Linac 2 ein geradzahliges Vielfaches der HF-Grundperiode (4.90 GHz) ist und sich pro Umlauf die Weglänge um  $2\lambda$  vergrößert, werden die Elektronen in Linac 2 bei einer Injektionsfrequenz von 2.45 GHz nur zu jeder zweiten Periode der HF-Grundfrequenz beschleunigt.

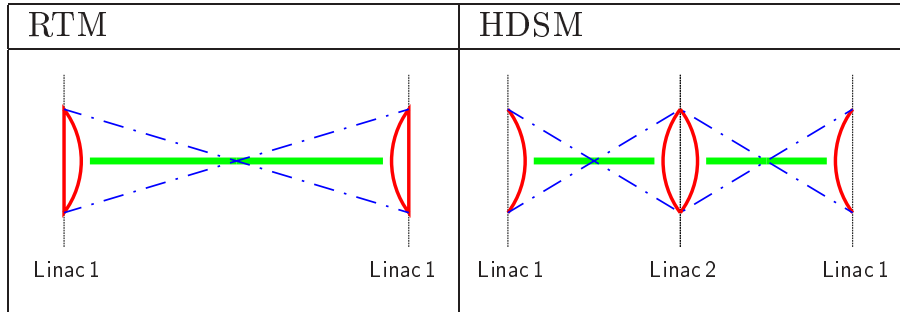


Abbildung 3.6: Vergleich der Longitudinaloptik von RTM und HDSM, jeweils als Abfolge aus longitudinaler Linse (rot) und Laufstrecke (grün) dargestellt.

Daher kann Linac 2 mit einer Frequenz von 2.45 GHz arbeiten.

### 3.2.1 Quasiperiodische Näherung

Aufgrund der von der Umlaufnummer  $N$  abhängigen Phasenlagen und Energiegewinne des Sollteilchens ist die Bewegung im HDSM nicht mehr rein periodisch. Daher läßt sich die Transfermatrix  $M(N)$  für  $N$  Rezirkulationen für  $N > 1$  nicht mehr durch die in Gl. 3.4 dargestellte Matrix ausdrücken. Ziel der folgenden Betrachtung ist es, eine Approximation für  $M(N)$  zu finden, die der Matrix in Gl. 3.4 möglichst ähnlich ist. Damit soll das Verständnis der Teilchenbewegung im HDSM und die Analyse seines Verhaltens im praktischen Betrieb erleichtert werden.

Bei der Berechnung der Twissparameter für den Umlauf Nr.  $N$  wird zunächst angenommen, daß das HDSM ein periodisches System ist. Sie ergeben sich dann aus der Transformationsmatrix für einen einzigen Umlauf. Zur besseren Übersicht wird in den folgenden Formeln auf eine explizite Angabe der Umlaufnummer verzichtet.

Der Gesamtenergiegewinn  $2\Delta E$  pro Umlauf sei als

$$\Delta E_1 + \Delta E_2 = 2\Delta E \quad (3.43)$$

definiert, wobei  $\Delta E_1$  bzw.  $\Delta E_2$  die Sollenergiegewinne an Linac 1 bzw. Linac 2 zur Sollphase  $\varphi_{s_1}$  bzw.  $\varphi_{s_2}$  sind.

Die longitudinale Transfermatrix für eine  $90^\circ$ -Bewegung zwischen den bei-

den Linacs ist:

$$\begin{pmatrix} \delta\varphi_1 \\ \delta E_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{\pi}{2\Delta E} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta\varphi_0 \\ \delta E_0 \end{pmatrix}. \quad (3.44)$$

Für eine Hälfte von Linac 1 bzw. Linac 2 gilt

$$\begin{pmatrix} \delta\varphi_1 \\ \delta E_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{\Delta E_1}{2} \tan \varphi_{s_1} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta\varphi_0 \\ \delta E_0 \end{pmatrix} \quad (3.45)$$

bzw.

$$\begin{pmatrix} \delta\varphi_1 \\ \delta E_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{\Delta E_2}{4} \tan(\frac{1}{2}(\varphi_{s_2} - \rho)) & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta\varphi_0 \\ \delta E_0 \end{pmatrix}. \quad (3.46)$$

Die Matrizen in Gl. 3.44, 3.45 und 3.46 seien mit  $M_D$ ,  $M_{L_1}$  und  $M_{L_2}$  bezeichnet. Ihr Produkt kann wieder in der Form  $M(1)$  aus Gl. 3.4 geschrieben werden. Es sei

$$\tilde{\varphi}_{s_2} = (\varphi_{s_2} - \rho) \quad (3.47)$$

definiert. Für den Phasenvorschub einer vollen Rezirkulation gilt dann:

$$\cos \Phi = 1 + \pi \frac{\Delta E_1}{\Delta E} \tan \varphi_{s_1} + \frac{\pi}{2} \frac{\Delta E_2}{\Delta E} \tan \frac{\tilde{\varphi}_{s_2}}{2} + \frac{\pi^2}{4} \frac{\Delta E_1 \Delta E_2}{\Delta E^2} \tan \varphi_{s_1} \tan \frac{\tilde{\varphi}_{s_2}}{2}. \quad (3.48)$$

Die longitudinalen Twissparameter  $\beta$  und  $\alpha$  sind für einige Referenzpunkte in Tabelle 3.4 als Funktion von  $\Delta E_1$ ,  $\Delta E_2$ ,  $\varphi_{s_1}$ ,  $\frac{\tilde{\varphi}_{s_2}}{2}$  und  $\Phi$  berechnet. Die Sollenergiegewinne und Sollphasen werden mit Hilfe von PTRACE [1] bestimmt. In Abb. 3.7 sind die wichtigsten Parameter der Longitudinaloptik im HDSM als Funktion des Umlaufs in der Mitte von Linac 1 und Linac 2 dargestellt.

Es bezeichne  $\beta_n$  die longitudinale Betafunktion und  $\Phi_n$  den Phasenvorschub in Umlauf  $n$  in der Mitte von Linac 1. Die Transfermatrix  $M_n$  für Umlauf Nr.  $n$  lautet analog zu Gl. 3.4:

$$M_n = \begin{pmatrix} \cos \Phi_n & \beta_n \sin \Phi_n \\ -\frac{1}{\beta_n} \sin \Phi_n & \cos \Phi_n \end{pmatrix} = e^{J_n \cdot \Phi_n}, \quad (3.49)$$

wobei

$$J_n = \begin{pmatrix} 0 & \beta_n \\ -\frac{1}{\beta_n} & 0 \end{pmatrix} \quad (3.50)$$

ist. Die totale Transfermatrix von Umlauf 1 bis  $N$  ist dann

$$M(N) = e^{J_N \cdot \Phi_N} \dots e^{J_1 \cdot \Phi_1}. \quad (3.51)$$

Tabelle 3.4: Longitudinale Twissparameter  $\beta$  und  $\alpha$  im HDSM als Funktion von  $\Delta E_1$ ,  $\Delta E_2$ ,  $\varphi_{s_1}$ ,  $\frac{\tilde{\varphi}_{s_2}}{2}$  und  $\Phi$  an einigen wichtigen Referenzpunkten, sowie die zugehörigen Matrixprodukte für einen Umlauf.

Anfang Linac 1: $M(1) = M_D M_D M_{L_2} M_{L_2} M_D M_D M_{L_1} M_{L_1}$
$\beta \sin \Phi = -\frac{2\pi}{\Delta E} - \frac{\pi^2}{2} \frac{\Delta E_2}{\Delta E^2} \tan \frac{\tilde{\varphi}_{s_2}}{2}$ $\alpha \sin \Phi = \pi \frac{\Delta E_1}{\Delta E} \tan \varphi_{s_1} + \frac{\pi^2}{4} \frac{\Delta E_1 \Delta E_2}{\Delta E^2} \tan \varphi_{s_1} \tan \frac{\tilde{\varphi}_{s_2}}{2}$
Mitte Linac 1: $M(1) = M_{L_1} M_D M_D M_{L_2} M_{L_2} M_D M_D M_{L_1}$
$\beta \sin \Phi = -\frac{2\pi}{\Delta E} - \frac{\pi^2}{2} \frac{\Delta E_2}{\Delta E^2} \tan \frac{\tilde{\varphi}_{s_2}}{2}$ $\alpha = 0$
Mitte Rückführung 1: $M(1) = M_D M_{L_1} M_{L_1} M_D M_D M_{L_2} M_{L_2} M_D$
$\beta \sin \Phi = -\frac{2\pi}{\Delta E} - \frac{3\pi^2}{4} \frac{\Delta E_1}{\Delta E^2} \tan \varphi_{s_1} - \frac{3\pi^2}{8} \frac{\Delta E_2}{\Delta E^2} \tan \frac{\tilde{\varphi}_{s_2}}{2} - \frac{\pi^3}{8} \frac{\Delta E_1 \Delta E_2}{\Delta E^3} \tan \varphi_{s_1} \tan \frac{\tilde{\varphi}_{s_2}}{2}$ $\alpha \sin \Phi = \frac{\pi}{4} \frac{\Delta E_2}{\Delta E} \tan \frac{\tilde{\varphi}_{s_2}}{2} - \frac{\pi}{2} \frac{\Delta E_1}{\Delta E} \tan \varphi_{s_1}$
Anfang Linac 2: $M(1) = M_D M_D M_{L_1} M_{L_1} M_D M_D M_{L_2} M_{L_2}$
$\beta \sin \Phi = -\frac{2\pi}{\Delta E} - \pi^2 \frac{\Delta E_1}{\Delta E^2} \tan \varphi_{s_1}$ $\alpha \sin \Phi = \frac{\pi}{2} \frac{\Delta E_2}{\Delta E} \tan \frac{\tilde{\varphi}_{s_2}}{2} + \frac{\pi^2}{4} \frac{\Delta E_1 \Delta E_2}{\Delta E^2} \tan \varphi_{s_1} \tan \frac{\tilde{\varphi}_{s_2}}{2}$
Mitte Linac 2: $M(1) = M_{L_2} M_D M_D M_{L_1} M_{L_1} M_D M_D M_{L_2}$
$\beta \sin \Phi = -\frac{2\pi}{\Delta E} - \pi^2 \frac{\Delta E_1}{\Delta E^2} \tan \varphi_{s_1}$ $\alpha = 0$
Mitte Rückführung 2: $M(1) = M_D M_{L_2} M_{L_2} M_D M_D M_{L_1} M_{L_1} M_D$
$\beta \sin \Phi = -\frac{2\pi}{\Delta E} - \frac{3\pi^2}{8} \frac{\Delta E_2}{\Delta E^2} \tan \frac{\tilde{\varphi}_{s_2}}{2} - \frac{3\pi^2}{4} \frac{\Delta E_1}{\Delta E^2} \tan \varphi_{s_1} - \frac{\pi^3}{8} \frac{\Delta E_1 \Delta E_2}{\Delta E^3} \tan \varphi_{s_1} \tan \frac{\tilde{\varphi}_{s_2}}{2}$ $\alpha \sin \Phi = \frac{\pi}{2} \frac{\Delta E_1}{\Delta E} \tan \varphi_{s_1} - \frac{\pi}{4} \frac{\Delta E_2}{\Delta E} \tan \frac{\tilde{\varphi}_{s_2}}{2}$

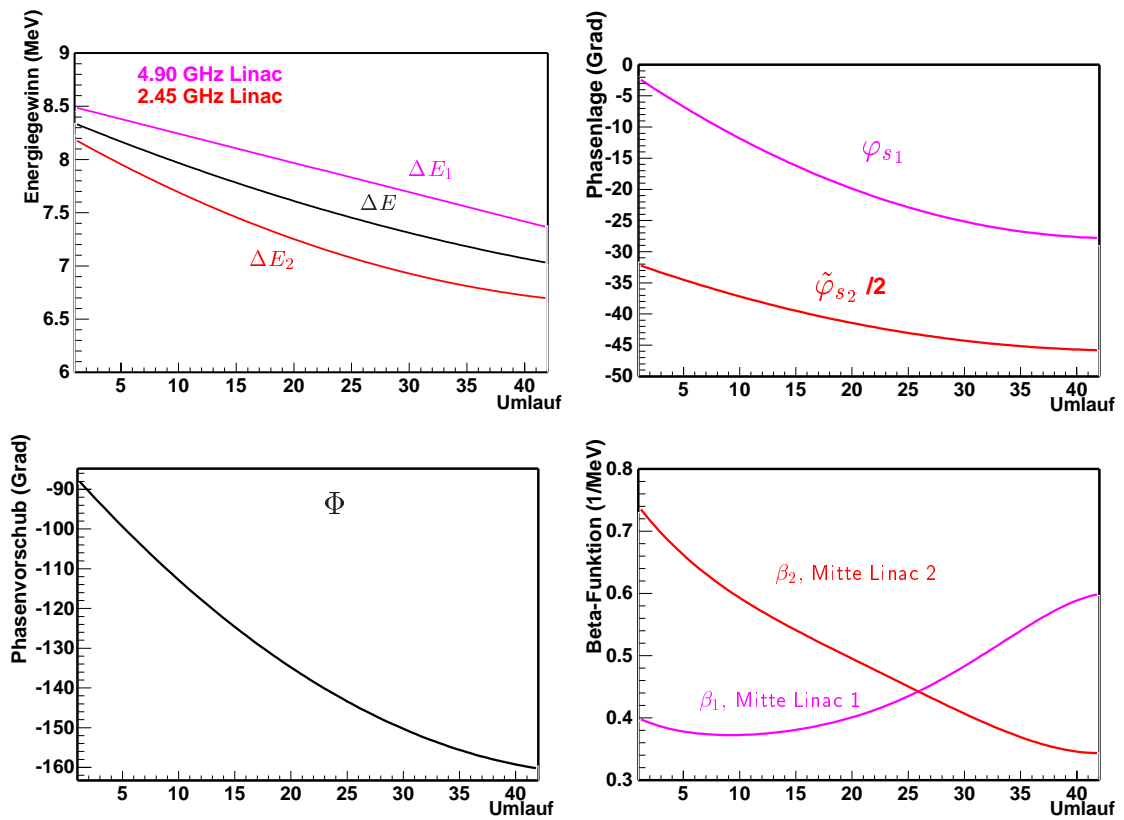


Abbildung 3.7: Die longitudinalen Parameter  $\Phi$ ,  $\Delta E_1$ ,  $\Delta E_2$ ,  $\varphi_{s1}$  und  $\frac{\tilde{\varphi}_{s2}}{2}$  und die longitudinale Betafunktion in der Mitte von Linac 1 und Linac 2 im HDSM wurden mit Hilfe von PTRACE und Tabelle 3.4 berechnet.

Im folgenden seien  $u_n, \bar{u}_n$  die zueinander konjugiert komplexen Eigenvektoren von  $M_n$ :

$$u_n = \begin{pmatrix} \beta_n \\ i \end{pmatrix}; \quad \bar{u}_n = \begin{pmatrix} \beta_n \\ -i \end{pmatrix}; \quad (3.52)$$

$$M_n u_n = e^{i\Phi_n} u_n; \quad M_n \bar{u}_n = e^{-i\Phi_n} \bar{u}_n; \quad (3.53)$$

Die Berechnung der Transfermatrix  $M(N)$  wird nun mit Hilfe der Transformation für diese beiden Eigenvektoren ausgeführt. Die Transformation von  $u_1, \bar{u}_1$  im ersten Umlauf ist trivial:

$$u_1 \mapsto e^{i\Phi_1} u_1; \quad \bar{u}_1 \mapsto e^{-i\Phi_1} \bar{u}_1; \quad (3.54)$$

Für alle weiteren Umläufe wird die Transformation als

$$u_n \mapsto e^{J_{n+1}\Phi_{n+1}} u_n = \sqrt{\frac{\beta_n}{\beta_{n+1}}} e^{i\Phi_{n+1}} u_{n+1} + e^{J_{n+1}\Phi_{n+1}} (u_n - \sqrt{\frac{\beta_n}{\beta_{n+1}}} u_{n+1}); \quad n > 1 \quad (3.55)$$

und analog für  $\bar{u}_n$

$$\bar{u}_n \mapsto e^{J_{n+1}\Phi_{n+1}} \bar{u}_n = \sqrt{\frac{\beta_n}{\beta_{n+1}}} e^{-i\Phi_{n+1}} \bar{u}_{n+1} + e^{J_{n+1}\Phi_{n+1}} (\bar{u}_n - \sqrt{\frac{\beta_n}{\beta_{n+1}}} \bar{u}_{n+1}); \quad n > 1 \quad (3.56)$$

geschrieben. Der zweite Summand in Gl. 3.55 bzw. 3.56 wird im folgenden vernachlässigt, da bei der relativ langsamen Variation der Betafunktion im HDSM die Terme von der Ordnung  $\delta\beta_{n+1}/\beta_{n+1}$  und höher keine wesentliche Rolle spielen:

$$u_n - \sqrt{\frac{\beta_n}{\beta_{n+1}}} u_{n+1} = -\frac{1}{2} \frac{\delta\beta_{n+1}}{\beta_{n+1}} \bar{u}_{n+1} + O\left(\frac{\delta\beta_{n+1}}{\beta_{n+1}}\right)^2; \quad \frac{\delta\beta_{n+1}}{\beta_{n+1}} = \frac{\beta_{n+1} - \beta_n}{\beta_{n+1}}. \quad (3.57)$$

Somit folgt für die totale Transformation:

$$u_1 \mapsto \sqrt{\frac{\beta_1}{\beta_N}} e^{i \sum_{n=1}^N \Phi_n} u_N; \quad \bar{u}_1 \mapsto \sqrt{\frac{\beta_1}{\beta_N}} e^{-i \sum_{n=1}^N \Phi_n} \bar{u}_N. \quad (3.58)$$

Zur Bestimmung der Abbildungsmatrix müssen die beiden Einheitsvektoren  $(1, 0)^T$  und  $(0, 1)^T$  transformiert werden. Die resultierenden Vektoren entsprechen dann der ersten bzw. zweiten Spalte der gesuchten Matrix  $M(N)$ . Es gilt:

$$(1, 0)^T = \frac{1}{2\beta_1} (u_1 + \bar{u}_1) \quad (3.59)$$

und

$$(0, 1)^T = \frac{1}{2i} (u_1 - \bar{u}_1) \quad (3.60)$$

und somit folgt:

$$M(N) = \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{\beta_N}{\beta_1}} \cos\left(\sum_{n=1}^N \Phi_n\right) & \sqrt{\beta_1 \beta_N} \sin\left(\sum_{n=1}^N \Phi_n\right) \\ -\frac{1}{\sqrt{\beta_1 \beta_N}} \sin\left(\sum_{n=1}^N \Phi_n\right) & \sqrt{\frac{\beta_1}{\beta_N}} \cos\left(\sum_{n=1}^N \Phi_n\right) \end{pmatrix}. \quad (3.61)$$

Gleichung 3.61 kann auch noch kompakter in der Form

$$M(N) = e^{-\lambda_N \cdot D} e^{J_1 \cdot \sum_{n=1}^N \Phi_n}; \quad \lambda_N = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{\beta_1}{\beta_N}\right); \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (3.62)$$

geschrieben werden. Abbildung 3.8 vergleicht die hergeleitete Approximation in Gl. 3.61 Umlauf für Umlauf mit der exakten Transfermatrix, die mit Hilfe von PTRACE berechnet wurde. Die Abweichungen liegen bei maximal 4%.

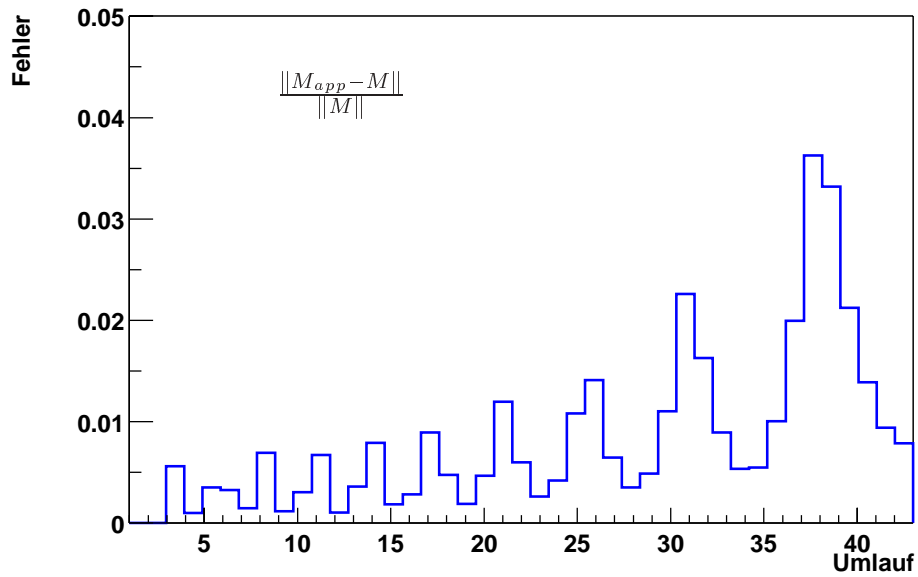


Abbildung 3.8: Relativer Fehler der quasiperiodischen Näherung für die longitudinale Transfermatrix im HDSM als Funktion des Umlaufs im Vergleich zu PTRACE.

### 3.2.2 Relation zwischen den Sollphasen der beiden Linacs im HDSM

Während im RTM die Eigenschaften der Longitudinaloptik durch den Sollenergiegewinn und der Sollphase festgelegt sind, gibt es im HDSM die doppelte Anzahl von Parametern: die Sollenergiegewinne  $\Delta E_1$  bzw.  $\Delta E_2$  und die Sollphasen  $\varphi_{s_1}$  und  $\tilde{\varphi}_{s_2}$  an Linac 1 bzw. Linac 2. Angenommen, das HDSM wird bei der Konfiguration

$$\vec{k} = (\varphi_{s_1}, \tilde{\varphi}_{s_2}, \Delta E_1, \Delta E_2) \quad (3.63)$$

betrieben und die Maschine soll in die Konfiguration

$$\vec{k}' = (\varphi'_{s_1}, \tilde{\varphi}'_{s_2}, \Delta E'_1, \Delta E'_2) \quad (3.64)$$

umgestellt werden. Es wird im folgenden vorausgesetzt, daß beide Konfigurationen die statische und die dynamische Kohärenzbedingung erfüllen. Da in diesem Abschnitt die Sollenergiegewinne an den beiden Linacs als freie Variable angenommen werden, ist der Sollenergiegewinn pro Umlauf  $2\Delta E$  bzw.  $2\Delta E'$  durch

$$\Delta E_1 + \Delta E_2 = 2\Delta E \quad (3.65)$$

bzw.

$$\Delta E'_1 + \Delta E'_2 = 2\Delta E' . \quad (3.66)$$

gegeben. Gesucht ist die für die Umstellung notwendige Änderung in der Einschußenergie  $E_0$  und der Phasenlage  $\rho$ . Die neue Einschußenergie sei mit  $E'_0$  bezeichnet und der Phasenversatz mit  $\delta\rho$ . Zur Vereinfachung der Rechnung wird die Injektion in der Mitte von Linac 1 angenommen.

Die in den Dipolen mit Konfiguration  $\vec{k}$  zurückgelegte Wegstrecke (abzüglich konstanter Beiträge) in der ersten Rezirkulation ist

$$\oint dz = \frac{\lambda}{2\Delta E}(E_0 + \frac{1}{2}\Delta E_1) + \frac{\lambda}{2\Delta E}(E_0 + \frac{1}{2}\Delta E_1 + \Delta E_2) = \frac{\lambda}{\Delta E}(E_0 + \Delta E) . \quad (3.67)$$

Analog gilt für die Konfiguration  $\vec{k}'$

$$\oint dz' = \frac{\lambda}{2\Delta E'}(E'_0 + \frac{1}{2}\Delta E'_1) + \frac{\lambda}{2\Delta E'}(E'_0 + \frac{1}{2}\Delta E'_1 + \Delta E'_2) = \frac{\lambda}{\Delta E'}(E'_0 + \Delta E') . \quad (3.68)$$

Die statische Kohärenzbedingung verlangt nach Gl. 2.63

$$\oint dz = \oint dz' = n_0\lambda \quad (3.69)$$

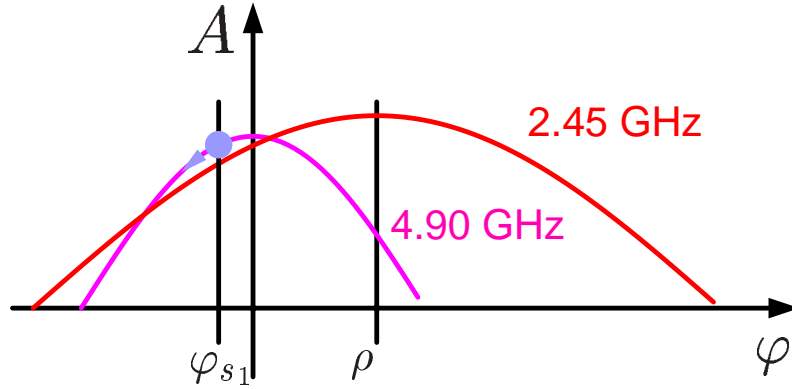


Abbildung 3.9: Die beiden Linacs im HDSM haben einen statischen Phasenversatz von  $\rho$ .

und somit folgt aus Gl. 3.67 und 3.68

$$E'_0 = \frac{\Delta E'}{\Delta E} E_0. \quad (3.70)$$

Daher ist der Weglängenunterschied zwischen den beiden Konfigurationen in der ersten  $180^\circ$ -Passage:

$$dz' - dz = \frac{\lambda}{4} \left( \frac{\Delta E'_1}{\Delta E'} - \frac{\Delta E_1}{\Delta E} \right). \quad (3.71)$$

Somit gilt für die Phasenabweichung  $\delta\varphi$  an Linac 2 nach der ersten  $180^\circ$ -Passage, wenn die Teilchen zur Phase  $\varphi'_{s1}$  in der Mitte von Linac 1 injiziert werden

$$\delta\varphi = \varphi'_{s1} - \varphi_{s1} - \frac{\pi}{2} \left( \frac{\Delta E'_1}{\Delta E'} - \frac{\Delta E_1}{\Delta E} \right). \quad (3.72)$$

Da nach Voraussetzung die Teilchen bei Linac 2 zur Phase  $\tilde{\varphi}'_{s2}$  beschleunigt werden sollen, muß Linac 2 gegenüber Linac 1 in der Phase um  $\delta\rho$  verschoben werden, so daß die Verzögerung  $\delta\varphi$  von der Differenz  $\tilde{\varphi}'_{s2} - \tilde{\varphi}_{s2}$  und  $\delta\rho$

$$\delta\varphi = \tilde{\varphi}'_{s2} - \tilde{\varphi}_{s2} + \delta\rho \quad (3.73)$$

ausgeglichen wird. Aus dem Vergleich von Gl. 3.72 mit 3.73 folgt die gesuchte Bedingungsgleichung für  $\delta\rho$ :

$$\tilde{\varphi}'_{s2} - \tilde{\varphi}_{s2} + \delta\rho = \varphi'_{s1} - \varphi_{s1} - \frac{\pi}{2} \left( \frac{\Delta E'_1}{\Delta E'} - \frac{\Delta E_1}{\Delta E} \right). \quad (3.74)$$

Gl. 3.74 wurde für den Spezialfall  $\Delta E = \Delta E'$  auf andere Weise in [15] hergeleitet und ist in diesem Fall mit der dort angegebenen Formel äquivalent.

Mit Hilfe von Gl. 3.43 und Gl. 3.74 ist es nun im folgenden Abschnitt möglich, die Abhängigkeit der Longitudinalbewegung von Schwankungen der Linac-Amplituden und der gegenseitigen Phasenlage der Linacs zu studieren.

### 3.2.3 Entwicklung der Sollparameter nach kleinen Störungen

Das HDSM sei mit der Konfiguration  $\vec{k}$  in Gl. 3.63 eingestellt. Gesucht ist die Änderung in den Sollphasenlagen bei konstanten Einschubbedingungen und konstanter longitudinaler Dispersion nach einer Änderung der Amplitude von Linac 1 bzw. Linac 2 um  $\delta A_1$  bzw.  $\delta A_2$  und einem Versatz ihrer gegenseitigen Phasenlage um  $\delta\rho$ . Es sei

$$\vec{k}' = (\varphi_{s_1} + \delta\varphi_{s_1}, \tilde{\varphi}_{s_2} + \delta\tilde{\varphi}_{s_2}, \Delta E_1 + \delta\Delta E_1, \Delta E_2 + \delta\Delta E_2). \quad (3.75)$$

Mit Hilfe von Gl. 3.74 folgt sofort für  $\Delta E = \Delta E'$ :

$$\delta\tilde{\varphi}_{s_2} + \delta\rho = \delta\varphi_{s_1} - \frac{\pi}{2\Delta E} \delta\Delta E_1. \quad (3.76)$$

Ferner gilt für die Energiegewinne:

$$\Delta E_1 + \delta\Delta E_1 = (A_1 + \delta A_1) \cos(\varphi_{s_1} + \delta\varphi_{s_1}) = \Delta E_1 + \frac{\delta A_1}{A_1} \Delta E_1 - \Delta E_1 \tan \varphi_{s_1} \delta\varphi_{s_1} \quad (3.77)$$

und

$$\Delta E_2 + \delta\Delta E_2 = (A_2 + \delta A_2) \cos\left(\frac{\tilde{\varphi}_{s_2}}{2} + \frac{\delta\tilde{\varphi}_{s_2}}{2}\right) = \Delta E_2 + \frac{\delta A_2}{A_2} \Delta E_2 - \frac{1}{2} \Delta E_2 \tan \frac{\tilde{\varphi}_{s_2}}{2} \delta\tilde{\varphi}_{s_2}. \quad (3.78)$$

Nach Gl. 2.68 gilt

$$\Delta E_1 + \Delta E_2 = \Delta E_1 + \delta\Delta E_1 + \Delta E_2 + \delta\Delta E_2 = 2\Delta E \quad (3.79)$$

und mit Hilfe von Gl. 3.77 und 3.78 folgt

$$\Delta E_1 \left( \frac{\delta A_1}{A_1} - \tan \varphi_{s_1} \delta\varphi_{s_1} \right) + \Delta E_2 \left( \frac{\delta A_2}{A_2} - \frac{1}{2} \tan \frac{\tilde{\varphi}_{s_2}}{2} \delta\tilde{\varphi}_{s_2} \right) = 0. \quad (3.80)$$

Es sei

$$T = \begin{pmatrix} \Delta E_1 \tan \varphi_{s_1} & \frac{1}{2} \Delta E_2 \tan \frac{\tilde{\varphi}_{s_2}}{2} \\ 1 + \frac{\pi \Delta E_1}{2 \Delta E} \tan \varphi_{s_1} & -1 \end{pmatrix} \quad (3.81)$$

definiert. Dann lassen sich Gl. 3.76 und 3.80 zu folgender Matrix-Gleichung zusammenfassen:

$$T \cdot \begin{pmatrix} \delta\varphi_{s_1} \\ \delta\tilde{\varphi}_{s_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\delta A_1}{A_1} \Delta E_1 + \frac{\delta A_2}{A_2} \Delta E_2 \\ \delta\rho + \frac{\pi}{2} \frac{\Delta E_1}{\Delta E} \frac{\delta A_1}{A_1} \end{pmatrix}. \quad (3.82)$$

Mit Hilfe von Gl. 3.48 und Tabelle 3.4 folgt die Umkehrung von  $T$ :

$$T^{-1} = \frac{\pi}{\Delta E (\cos \Phi - 1)} \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \Delta E_2 \tan \frac{\tilde{\varphi}_{s_2}}{2} \\ 1 + \frac{\pi}{2} \frac{\Delta E_1}{\Delta E} \tan \varphi_{s_1} & -\Delta E_1 \tan \varphi_{s_1} \end{pmatrix} \quad (3.83)$$

und daraus die gesuchten Änderungen in der Sollphasenlage:

$$\delta\varphi_{s_1} = \frac{\pi}{(\cos \Phi - 1)} \left( \frac{\delta A_1}{A_1} \frac{\Delta E_1}{\Delta E} \left( 1 + \frac{\pi}{4} \frac{\Delta E_2}{\Delta E} \tan \frac{\tilde{\varphi}_{s_2}}{2} \right) + \frac{\delta A_2}{A_2} \frac{\Delta E_2}{\Delta E} + \frac{1}{2} \frac{\Delta E_2}{\Delta E} \delta\rho \tan \frac{\tilde{\varphi}_{s_2}}{2} \right) \quad (3.84)$$

und

$$\delta\tilde{\varphi}_{s_2} = \frac{\pi}{(\cos \Phi - 1)} \left( \frac{\delta A_2}{A_2} \frac{\Delta E_2}{\Delta E} \left( 1 + \frac{\pi}{2} \frac{\Delta E_1}{\Delta E} \tan \varphi_{s_1} \right) + \frac{\delta A_1}{A_1} \frac{\Delta E_1}{\Delta E} - \frac{\Delta E_1}{\Delta E} \delta\rho \tan \varphi_{s_1} \right). \quad (3.85)$$

Die Änderungen in den Sollenergiegewinnen  $\delta\Delta E_1$ ,  $\delta\Delta E_2$  ergeben sich durch Einsetzen von Gl. 3.84 bzw. 3.85 in Gl. 3.77 bzw. Gl. 3.78. Sie werden im weiteren jedoch nicht benötigt.

Mit Hilfe von Gl. 3.48 folgt noch für die Änderung im Phasenvorschub:

$$\begin{aligned} \delta\Phi = & -\frac{\pi}{\Delta E \sin \Phi} \left( \Delta E_1 \left( 1 + \frac{\pi}{4} \frac{\Delta E_2}{\Delta E} \tan \frac{\tilde{\varphi}_{s_2}}{2} \right) \left( \delta\varphi_{s_1} + \tan \varphi_{s_1} \frac{\delta A_1}{A_1} \right) \right) - \\ & -\frac{\pi}{\Delta E \sin \Phi} \left( \frac{1}{2} \Delta E_2 \left( 1 + \frac{\pi}{2} \frac{\Delta E_1}{\Delta E} \tan \varphi_{s_1} \right) \left( \frac{1}{2} \delta\tilde{\varphi}_{s_2} + \tan \frac{\tilde{\varphi}_{s_2}}{2} \frac{\delta A_2}{A_2} \right) \right). \end{aligned} \quad (3.86)$$

Die Gleichungen 3.84, 3.85 und 3.86 lassen sich zu einer Matrix-Gleichung zusammenfassen:

$$\begin{pmatrix} \delta\varphi_{s_1} \\ \delta\tilde{\varphi}_{s_2} \\ \delta\Phi \end{pmatrix} = Q_a \cdot Q_b \begin{pmatrix} \frac{\delta A_1}{A_1} \\ \frac{\delta A_2}{A_2} \\ \delta\rho \end{pmatrix}, \quad (3.87)$$

wobei gilt:

$$\begin{aligned} Q_{a,11} &= 1; \quad Q_{a,12} = 0; \quad Q_{a,13} = 0 \\ Q_{a,21} &= 0; \quad Q_{a,22} = 1; \quad Q_{a,23} = 0 \\ Q_{a,31} &= -\frac{\pi \Delta E_1}{\Delta E \sin \Phi} \left( 1 + \frac{\pi}{4} \frac{\Delta E_2}{\Delta E} \tan \frac{\tilde{\varphi}_{s_2}}{2} \right) \\ Q_{a,32} &= -\frac{\pi \Delta E_2}{4 \Delta E \sin \Phi} \left( 1 + \frac{\pi}{2} \frac{\Delta E_1}{\Delta E} \tan \varphi_{s_1} \right) \\ Q_{a,33} &= 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Q_{b,11} &= \frac{\pi}{(\cos \Phi - 1)} \frac{\Delta E_1}{\Delta E} \left( 1 + \frac{\pi}{4} \frac{\Delta E_2}{\Delta E} \tan \frac{\tilde{\varphi}_{s_2}}{2} \right) \\
Q_{b,12} &= \frac{\pi}{(\cos \Phi - 1)} \frac{\Delta E_2}{\Delta E} \\
Q_{b,13} &= \frac{\pi}{(\cos \Phi - 1)} \frac{\Delta E_2}{2\Delta E} \tan \frac{\tilde{\varphi}_{s_2}}{2} \\
Q_{b,21} &= \frac{\pi}{(\cos \Phi - 1)} \frac{\Delta E_1}{\Delta E} \\
Q_{b,22} &= \frac{\pi}{(\cos \Phi - 1)} \frac{\Delta E_2}{\Delta E} \left( 1 + \frac{\pi}{2} \frac{\Delta E_1}{\Delta E} \tan \varphi_{s_1} \right) \\
Q_{b,23} &= -\frac{\pi}{(\cos \Phi - 1)} \frac{\Delta E_1}{\Delta E} \tan \varphi_{s_1} \\
Q_{b,31} &= Q_{a,31} \tan \varphi_{s_1} \\
Q_{b,32} &= Q_{a,32} \tan \frac{\tilde{\varphi}_{s_2}}{2} \\
Q_{b,33} &= 0.
\end{aligned} \tag{3.88}$$

Beispielsweise gilt mit den Parametern aus 3.7 am Eintritt

$$Q_a \cdot Q_b|_{N=1} = \begin{pmatrix} -0.10 & -0.18 & 0.97 \\ -0.19 & -0.18 & -0.05 \\ -0.45 & -0.62 & 1.55 \end{pmatrix} \tag{3.89}$$

bzw. bei der Extraktion des Strahls:

$$Q_a \cdot Q_b|_{N=43} = \begin{pmatrix} -0.02 & -0.09 & 0.79 \\ -0.10 & -0.01 & -0.89 \\ -0.17 & -0.24 & 1.23 \end{pmatrix}, \tag{3.90}$$

wobei die Amplitudenschwankungen in Promille und die Phasen in Grad einzusetzen sind. Während z.B. im RTM3 nach Gl. 3.12 und 3.13 die funktionale Abhängigkeit der Sollphase und des Phasenvorschubs von der HF-Amplitude eindimensional in der Form

$$\begin{pmatrix} \delta\varphi_s \\ \delta\Phi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.20(^{\circ}/\text{‰}) \\ -0.68(^{\circ}/\text{‰}) \end{pmatrix} \frac{\delta A}{A} \tag{3.91}$$

ist, wird sie nach Gl. 3.87 im HDSM dreidimensional. Der Vektor auf der rechten Seite von Gl. 3.91 ist mit der zweiten und dritten Komponente des zweiten Spaltenvektors in Gl. 3.89 bzw. 3.90 zu vergleichen. Während am Beginn der Beschleunigung im HDSM die Abhängigkeit des Phasenvorschubs von einer Amplitudenschwankung ähnlich wie im RTM3 ist, ist sie bei Maximalenergie etwa um einen Faktor 3 kleiner.

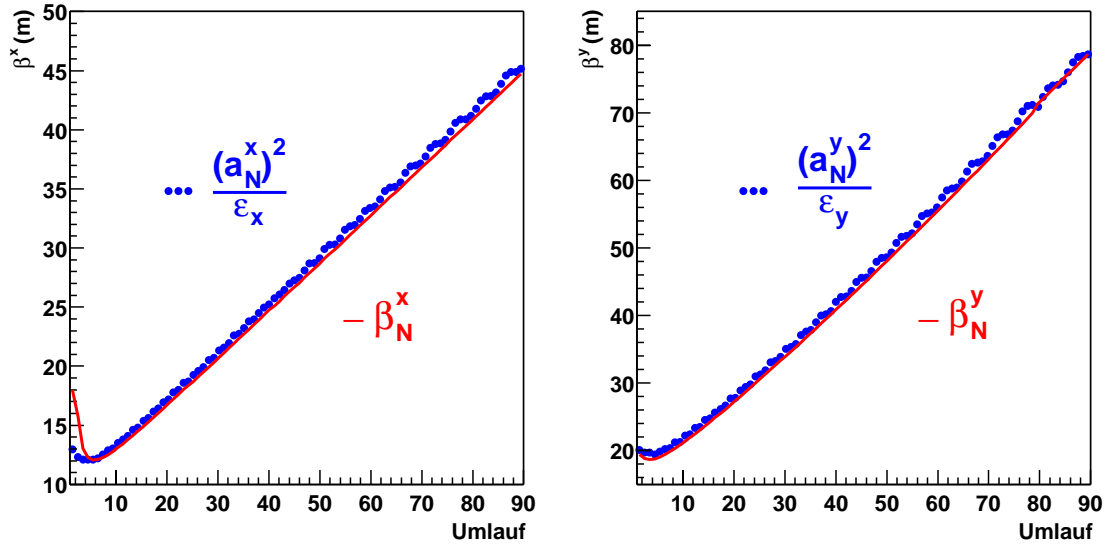


Abbildung 3.10: Die Beschreibung der Transversalbewegung im RTM mit der quasiperiodischen Näherung (rot) reproduziert die Teilchenbewegung (blau) mit einer mittleren Genauigkeit von 4%.

### 3.3 Modell für die Transversalbewegung im RTM

#### 3.3.1 Quasiperiodische Näherung

Die Elemente zur Strahlführung und Strahlfokussierung in einem RTM sind in Abb. 4.1 gezeigt. Zur Strahlfokussierung werden ausschließlich zwei Quadrupoldoublets auf der Linac-Achse verwendet. Auf den Rückführungsbahnen befinden sich lediglich kleine Korrekturdipole, die die Strahlrichtung aufgrund der restlichen Inhomogenität der Umlenkdiode (etwa  $10^{-4}$ ) korrigieren.

Die Transversaloptik wird bezüglich der Elementfolge im folgenden daher als periodisch angenommen. Die Transfermatrizen selbst sind aber eine Funktion der Sollenergie des jeweiligen Umlaufs, vgl. Gl 2.73, 2.79 und 2.86.

Zur Berechnung des Produkts der Transfermatrizen der einzelnen Umläufe kann das gleiche Verfahren wie in Abschnitt 3.2.1 benutzt werden. Dort wurde es zur Berechnung des Matrizenprodukts für die nichtperiodische Longitudinaloptik im HDSM verwendet. Die transversale Transfermatrix von Mitte

Linac bis Mitte Linac nach  $N$  Rezirkulationen lautet somit in Analogie zu Gl. 3.61

$$M(N) \approx \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{\beta_N^x}{\beta_1^x}} \cos \Psi_N^x & \sqrt{\beta_1^x \beta_N^x} \sin \Psi_N^x & 0 & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{\beta_1^x \beta_N^x}} \sin \Psi_N^x & \sqrt{\frac{\beta_1^x}{\beta_N^x}} \cos \Psi_N^x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{\frac{\beta_N^y}{\beta_1^y}} \cos \Psi_N^y & \sqrt{\beta_1^y \beta_N^y} \sin \Psi_N^y \\ 0 & 0 & -\frac{1}{\sqrt{\beta_1^y \beta_N^y}} \sin \Psi_N^y & \sqrt{\frac{\beta_1^y}{\beta_N^y}} \cos \Psi_N^y \end{pmatrix}. \quad (3.92)$$

Dabei ist  $\Phi_n^x$  bzw.  $\Phi_n^y$  der horizontale bzw. vertikale Phasenvorschub in Umlauf  $n$  und  $\beta_n^x$  bzw.  $\beta_n^y$  die horizontale bzw. vertikale Betafunktion und

$$\Psi_N^x = \sum_{n=1}^N \Phi_n^x; \quad \Psi_N^y = \sum_{n=1}^N \Phi_n^y. \quad (3.93)$$

Die Betafunktion kann wieder mit Hilfe von PTRACE für die einzelnen Umläufe berechnet werden. Dabei werden z.B. bei der Horizontalbewegung Umlauf für Umlauf zwei linear unabhängige Vektoren der Form

$$\vec{u}_{1,2}^T = (x, p_x)_{1,2} \quad (3.94)$$

nur bis zum jeweils nächsten Umlauf in  $\vec{u}'_{1,2}$  transformiert und dann die Transfermatrix  $M$  aus

$$M = \begin{pmatrix} x'_1 & x'_2 \\ p'_{x1} & p'_{x1} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ p_{x1} & p_{x1} \end{pmatrix}^{-1}. \quad (3.95)$$

berechnet. Die Betafunktion ist dann im untersuchten Umlauf  $n$  (siehe Gl. 3.4 mit  $\alpha = 0$ )

$$\beta_n^x = \sqrt{-\frac{M12}{M21}}. \quad (3.96)$$

In analoger Weise wird  $\beta_n^y$  bestimmt.

Aus der Näherung Gl. 3.92 folgt, daß die Eigenellipse des ersten Umlaufs auf die Eigenellipse des  $N$ -ten Umlaufs transformiert wird. Um diese Vorhersage am RTM3 zu testen, wurden in PTRACE zwei orthogonale Teilchen mit den Parametern der Eigenellipse bei Maximalenergie injiziert und rückwärts durch das Mikrotron transformiert. Im Bereich der Maximalenergie sind die Transfermatrizen praktisch periodisch und die untersuchte Näherung wird hier nahezu exakt. Die Betafunktion in Umlauf  $n$  ergibt sich dann aus der

von den beiden orthogonalen Teilchen „aufgespannten“ Emittanzfläche  $\epsilon$  und der Teilchenablage  $a_n$  in Umlauf  $n$ :

$$\beta_n^x = \frac{(a_n^x)^2}{\epsilon_x}; \quad \beta_n^y = \frac{(a_n^y)^2}{\epsilon_y}. \quad (3.97)$$

Nach Gl. 3.92 müssen die nach Gl. 3.97 bzw. 3.96 berechneten Betafunktionen identisch sein. In Abb. 3.10 werden sie sowohl für die Vertikalbewegung als auch für die Horizontalbewegung miteinander verglichen. Vertikal ist die Übereinstimmung sehr gut, während horizontal in den ersten drei Umläufen die Abweichungen bis zu 30% betragen. Gl. 3.92 wurde unter der Bedingung hergeleitet, daß sich die Betafunktion Umlauf für Umlauf nur wenig ändert, vgl. Gl. 3.57. Diese Voraussetzung ist offensichtlich bei der Horizontalbewegung in den ersten Umläufen nicht besonders gut erfüllt. Im Mittel reproduziert die quasiperiodische Approximation jedoch die Teilchenbewegung mit einer Genauigkeit von besser als 4%.

### 3.3.2 Verkopplung des horizontalen, vertikalen und longitudinalen Phasenraums

Eine Verkopplung der Transversalbewegung ist durch einen azimuthalen Winkelfehler bei der Aufstellung der Quadrupole auf der Linac-Achse, durch die Restfokussierung der Linac-Sektionen (vgl. Kap. 2.3.4) und durch unkorrigierte Magnetfeldfehler in den Umlenkdiolen möglich. Da eine Verkopplung auf der Linac-Achse mit zusätzlichen 45°-Quadrupolen eliminiert werden kann [55], wird im folgenden nur die Überkopplung innerhalb eines Umlenkdiols untersucht.

In Anknüpfung an Kap. 2.3.3 wird in Gl. 2.93 anstelle eines Quadrupols ein 45°-Quadrupol angenommen:

$$a_{0,1} = B_y; \quad a_{0,2} = \frac{\partial B_y}{\partial y}(z); \quad a_{1,1} = a_{1,0} = 0. \quad (3.98)$$

Die Jacobi-Matrix der Hamilton-Funktion in Gl. 2.30 lautet dann mit Hilfe von Gl. 2.93 und 3.98

$$SJ = \begin{pmatrix} 0 & \frac{c}{E_n} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{eB_y}{R} & 0 & -e\partial_y B_y & 0 & 0 & -\frac{1}{Rc} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{c}{E_n} & 0 & 0 \\ -e\partial_y B_y & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{Rc} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.99)$$





# Kapitel 4

## Untersuchungen zur transversalen Strahldynamik

In diesem Kapitel wird die Transversalbewegung im RTM2 und RTM3 untersucht. Die folgende kurze Rechnung demonstriert, daß die Bewegung des Schwerpunkts eines Elektronenpakets in linearer Näherung der eines einzelnen Elektrons entspricht. Der Vektor  $\vec{v}_j$  enthalte gemäß Gl. 2.25 die Phasenraumkoordinaten des  $j$ -ten Elektrons in einem Paket aus  $M$  Elektronen. Unter Vernachlässigung intrinsischer Effekte, wie z.B. Raumladungseffekte oder Synchrotronstrahlung, lautet die Bewegungsgleichung in linearer Näherung nach Gl. 2.26

$$\frac{d}{dz} \vec{v}_j = SJ \vec{v}_j. \quad (4.1)$$

Summation über  $M$  und anschließende Division durch  $M$  liefert

$$\frac{d}{dz} \vec{V} = \frac{d}{dz} \left( \frac{1}{M} \sum_{j=1}^M \vec{v}_j \right) = SJ \left( \frac{1}{M} \sum_{j=1}^M \vec{v}_j \right) = SJ \vec{V}. \quad (4.2)$$

Der Vektor  $\vec{V}$  beschreibt dabei die Bewegung eines virtuellen Elektrons mit den Koordinaten des Schwerpunkts des Elektronenpakets.

### 4.1 Instrumente zur Strahldiagnose

Für die Diagnose der Elektronenbewegung stehen auf der Linac-Achse eines RTM's jeweils zwei HF-Lagemonitore und ein HF-Phasenmonitor [56] zur Verfügung, siehe Abb. 4.1. Mit ihrer Hilfe kann die horizontale und vertikale Ortsablage sowie die Phasenablage des Strahlschwerpunkts in Bezug zur

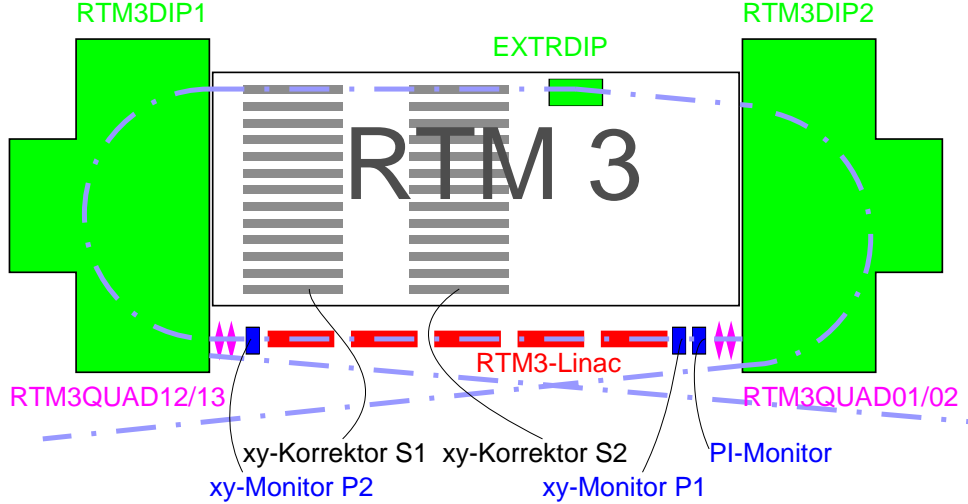


Abbildung 4.1: Elemente zur Strahlführung und Diagnose am RTM3.

Sollbahn gemessen werden, die nach Gl. 4.2 mit den in Kap. 3 berechneten Transfermatrizen der Einteilchentheorie berechnet werden können. Zur Identifizierung der einzelnen Umläufe im Signal der Monitore kann dem Strahl ein Auftastpuls mit einer Dauer von 10 ns und einem Momentstrom von  $100 \mu\text{A}$  sowie einer Repetitionsrate von 10 kHz aufgeprägt werden (im folgenden als Diagnosepuls bezeichnet).

Das Schema der Signalverarbeitung ist in Abb. 4.2 am Beispiel eines „low- $Q$ “ Lagemonitors [57] gezeigt, dessen belastete Güte  $Q_L$  durch eine stark überkritische Ankopplung der Antennen im Hinblick auf eine höhere Zeitaufösung auf etwa 500 gesenkt wurde. Die maximal auskoppelbare Meßleistung ist [58]

$$P \approx \frac{I^2 r}{Q/Q_L - 1}, \quad (4.3)$$

wobei  $Q \approx 8000$  die unbelastete Güte,  $I$  der Strahlstrom und  $r$  die shunt impedance ist. Für die Phasenmonitore liegt  $r$  bei etwa  $0.2 \text{ M}\Omega$  und die mit einem  $50 \Omega$ -Abschluß meßbare Spannung beträgt etwa 8 mV bei  $100 \mu\text{A}$  Strahlstrom. Bei den Lagemonitoren gilt [56]

$$r \approx 134 \frac{\text{M}\Omega}{\text{m}^2} y^2. \quad (4.4)$$

Typische Ausgangssignale liegen daher bei  $2 \text{ mV/mm}$ . Für die folgenden Messungen zur Transversalbewegung wurden die verstärkten Signale des Mixers mit Hilfe von einem  $0.5 \text{ GSa/s}$  VME-ADC [59] mit einer Auflösung von 8 bit

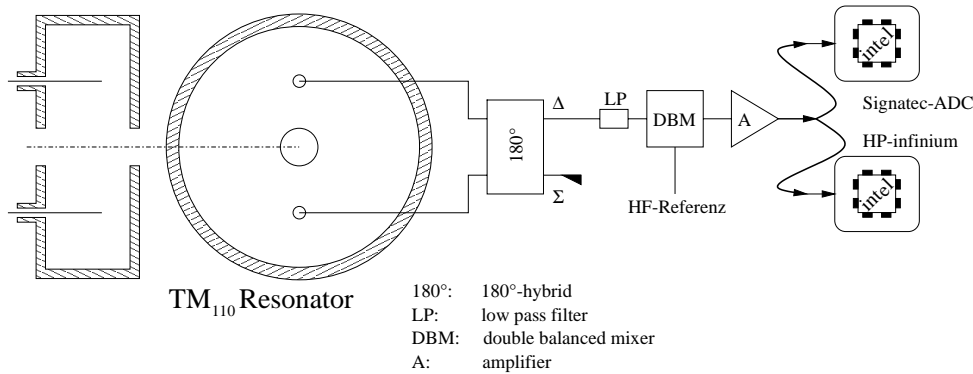


Abbildung 4.2: Schema eines „low- $Q$ “ Lagemonitors und der sich z.B. für das vertikale Lagesignal daran anschließenden Signalverarbeitung.

digitalisiert, der auch im Routinebetrieb des Beschleunigers eingesetzt wird. Für spezielle Untersuchungen kann anstelle des VME-ADCs ein 2 GSa/s Digitaloszilloskop [60] mit einer Auflösung von 12 bit verwendet werden. Die Kalibration der gemessenen Lagesignale ist im Detail im Rahmen einer Diplom- und Doktorarbeit [61, 62] erarbeitet worden und wird im folgenden als bekannt vorausgesetzt.

In Abb. 6.1 sind exemplarisch die 90 Phasensignale eines Diagnosepulses im RTM3 gezeigt. Das natürliche Rauschen der Monitore ist so klein, daß es nicht den unregelmäßigen Untergrund erklären kann [63]. Er wurde in [61] mit nicht optimal angepaßten Impedanzen in der Signalübertragungsstrecke zwischen Monitor und ADC erklärt. Da er bislang nicht beseitigt werden konnte, mußte er mit der in Kap. 6.1 beschriebenen Prozedur eliminiert werden.

In der Hamilton-Theorie in Kap. 2 treten die kanonischen Impulse  $p_x$  und  $p_y$  auf, die am Beschleuniger nicht direkt gemessen werden können. Nach Gl. 2.13 und 2.14 gilt für eine Driftstrecke bei relativistischen Energien:

$$x' = \frac{p_x c}{E_n}; \quad y' = \frac{p_y c}{E_n}. \quad (4.5)$$

Wenn z.B. mit Hilfe der beiden Lagemonitore auf der Linac-Achse die Abweichung der Strahlrichtung  $x'$  bzw.  $y'$  von der Sollbahn gemessen wird, kann der Transversalimpuls nach Gl. 4.5 berechnet werden. Die Absolutenergie  $E_n$  des Strahls in der  $n$ -ten Rezirkulation ist dabei auf etwa  $10^{-4}$  bekannt und kann mit einem im Rahmen einer Diplomarbeit [64] entwickelten Verfahren gemessen werden.



Beispielsweise folgt das Matrixelement  $m_{12}$  aus der Messung der Korrelation zwischen  $x_{P_1}$  und  $p_{x,S_2}$ :

$$x_{P_1} = m_{12} p_{x,S_2} . \quad (4.9)$$

### 4.3 Messung der transversalen Transfermatrix am RTM3

In Abb. 4.4 ist exemplarisch das Ergebnis der Messung von  $m_{12}$  nach Gl. 4.9 nach 88 Rezirkulationen gezeigt. Dabei wurde die horizontale Strahlrichtung an  $S_2$  quasi kontinuierlich in dem Intervall  $[-0.08; +0.08]$  mrad variiert und die zugehörigen Ortsablagen an  $P_1$  nach 88 Rezirkulationen gemessen. Aus der Genauigkeit der Monitor- und Korrektorkalibration [62] ergibt sich ein Fehler von etwa 5% in der Bestimmung der Matrixelemente. Das Ergebnis zeigt, daß die Transversalbewegung im Rahmen dieses Fehlers linear ist und rechtfertigt somit die Benutzung der Matrixrechnung zur Beschreibung der Optik.

Abbildung 4.6 zeigt die Meßergebnisse für die 16 Matrixelemente von  $M_j$  inklusive Fit für die standardmäßig eingestellte Optik im RTM3. Dabei wurde das in Abschnitt 3.3 beschriebene Modell für die Transversaloptik angenommen.

Um die Aussagekraft des Fits zu überprüfen, wurde für verschiedene Einstellungen von RTM3QUAD01 die Transfermatrix gemessen und das Modell angefitet. In Abb. 4.7 sind die gefitteten Quadrupolstärken  $g_M$  für RTM3QUAD01,02 und RTM3QUAD12,13 in Abhängigkeit von der nominal vom Kontrollsystem [65] eingestellten Quadrupolstärke  $g_N$  gezeigt, wobei jeweils die relative Änderung von  $g_M$  bezogen auf den Wert bei der Solleinstellung des Mikrotrons aufgetragen ist. Der Fit detektiert die Änderung des Gradienten von RTM3QUAD01 mit einer Genauigkeit von etwa 4%. Die übrigen Quadrupolwerte schwanken dabei um maximal 2%, so daß insgesamt der Fehler bei der Bestimmung des Gradienten bei etwa 6% liegt.

In Abb. 4.8 wurde im Gegensatz zu oben nur der Gradient von RTM3QUAD01 als Fitparameter bei der Anpassung des Modells an die bei unterschiedlichen Einstellungen von RTM3QUAD01 gemessenen Transfermatrizen zugelassen. Für die Abhängigkeit  $g_M(g_N)$  sollte im Idealfall

$$g_M(0) = 0; \quad \frac{\delta g_M}{\delta g_N} = 1 \quad (4.10)$$

gelten. Die gemessene Steigung ist 1.03. Der Nulldurchgang lag bei den ersten Fitversuchen bei -0.14 T/m. Er konnte exakt auf Null verschoben werden,

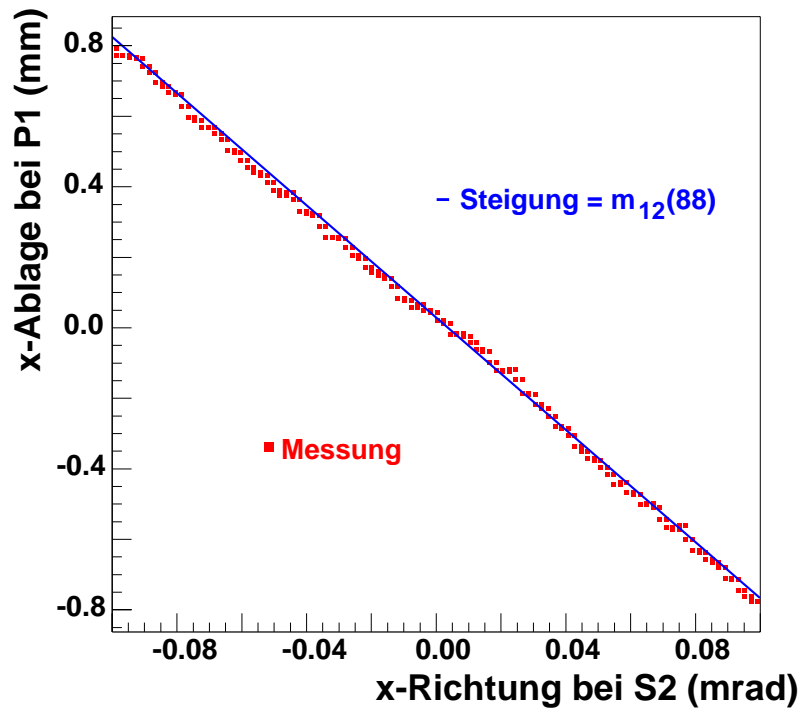


Abbildung 4.4: Meßdaten für  $m_{12}(88)$  am RTM3.

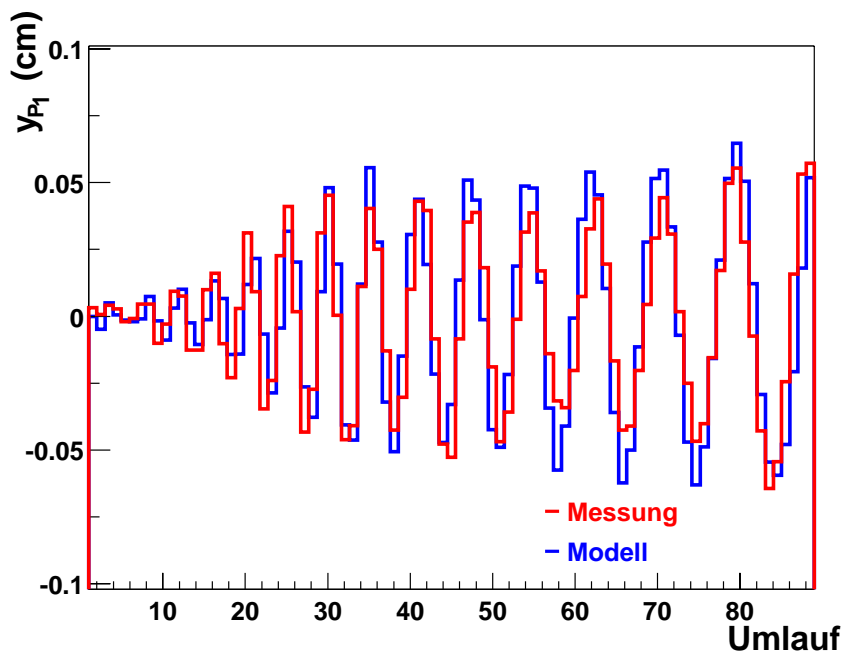


Abbildung 4.5: Gemessene und simulierte vertikale Betatronschiwingung bei einer Phasenschwingung von  $11.7^\circ$  im RTM3, wobei die Verkopplung der Longitudinal- und Vertikalbewegung im Mikrotron-Modell durch  $45^\circ$ -Quadrupolkomponenten in den Umlenkdiolen simuliert wurde.

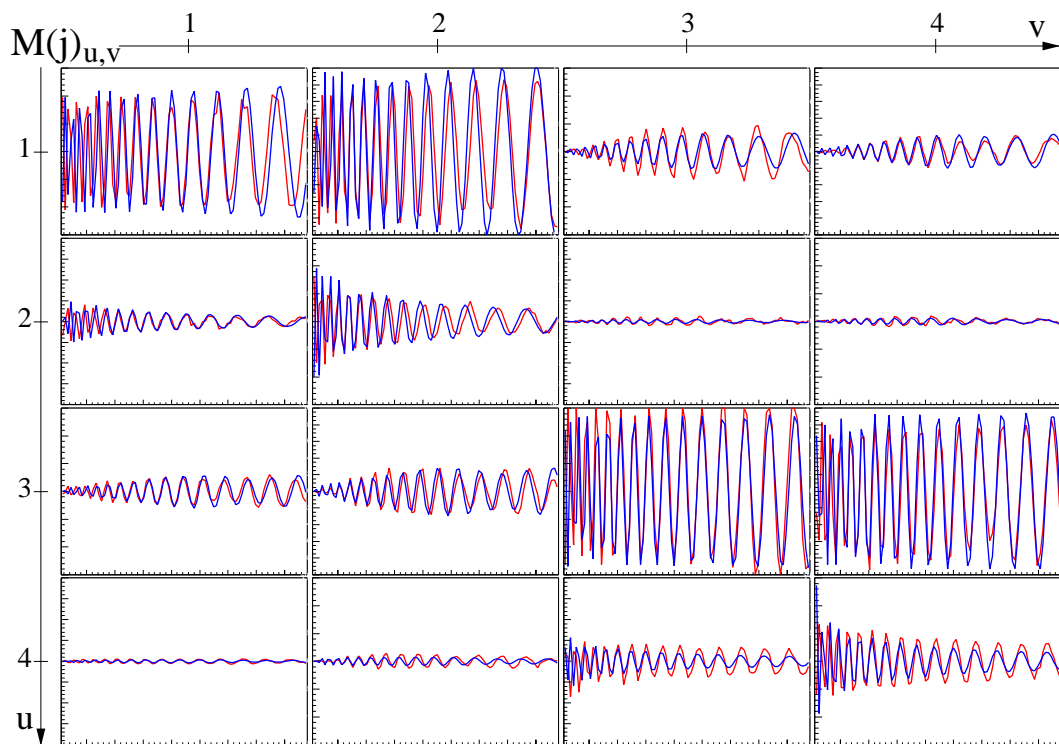


Abbildung 4.6: Transversale Matrixelemente von  $M_j$  ( $1 < j < 90$ ) im RTM3 als Funktion des Umlaufs (rot: Messung; blau: Fit des Modells). Die halbe Kastenhöhe ist für  $(M_{11}, M_{13}, M_{31}, M_{33})$  und  $(M_{22}, M_{24}, M_{42}, M_{44})$  1.5 bzw. für  $(M_{12}, M_{14}, M_{32}, M_{34})$  10 m/rad bzw. für  $(M_{21}, M_{23}, M_{41}, M_{43})$  0.4 rad/m.

nachdem im Modell die Brechkraft des Gegenfeldes von einem RTM-Dipol um  $0.02 \text{ m}^{-1}$  bei  $180 \text{ MeV}$  verkleinert wurde. Die Messungen deuten daher darauf hin, daß die Amplitude des Gegenfeldes bezogen auf die letzte Feldvermessung 1992 um etwa 3% abgenommen hat.

Eine weitere Möglichkeit, die Messungen zu überprüfen, bietet die Bedingungsgleichung (2.29). Für eine  $(4 \times 4)$ - Matrix gibt es demnach 6 Nebenbedingungen. Zur Kontrolle wurden die Bedingungen der Form  $\vec{m}_j^T S \vec{m}_i$  aus Tabelle 2.1 Umlauf für Umlauf ausgewertet und anschließend histogrammiert. Das Ergebnis ist in Abb. 4.9 zu sehen. Der Mittelwert der einzelnen Produkte  $\vec{m}_j^T S \vec{m}_i$  weicht bei allen Tests um weniger als 0.05 von der Theorie ab. Damit wird die Abschätzung unterstützt, daß z.B. die gefitteten Quadrupolwerte einen Fehler von etwa 5% besitzen.

Wenn keine  $45^\circ$ -Quadrupolanteile als Störung vorhanden wären, müßten die Matrixelemente von  $M_j$  in Abb. 4.6 im rechten oberen und linken unteren  $(2 \times 2)$ - Block Null sein. Im Rahmen der Meßgenauigkeit kann der Fit des Modells zur Transversalbewegung die Überkopplungen entweder mit einer azimuthalen Fehlstellung der Quadrupole auf der Linac-Achse oder mit  $45^\circ$ -Quadrupolkomponenten in den Umlenk dipolen erklären. Um zwischen diesen beiden Fällen zu unterscheiden, wurden Phasenschwingungen im RTM3 angeregt und die Ortsablagen an  $P_1$  und  $P_2$  gemessen. Dabei waren vertikale Betatronschwingungen zu beobachten, die nach den Überlegungen in Kap. 3.3.2 nur dann entstehen können, wenn in den Umlenk dipolen  $45^\circ$ -Quadrupolkomponenten vorhanden sind.

In Abb. 4.5 ist eine gemessene vertikale Betatronschwingung gezeigt, die bei einer Amplitude der Phasenschwingung von  $11.7^\circ$  entstanden ist. Für das RTM3 als Ganzes ergibt sich daraus eine vertikale Dispersion von maximal  $|10^{-3}| \text{ m/MeV}$ . Die Überkopplung in den Dipolen wurde in diesem Fall dadurch simuliert, daß an den beiden Enden der Rückführungsbahnen jeweils dünne  $45^\circ$ -Quadrupole angenommen wurden. Sie hatten eine Länge von  $10 \text{ cm}$ . Wenn ihr Gradient umlaufunabhängig an die gemessene transversale Transfermatrix (vgl. Abb. 4.6) angefitet wird, ergibt sich bei  $0.02 \text{ T/m}$  eine befriedigende Übereinstimmung mit der Messung. Bei einer mittleren Weglänge von etwa  $4 \text{ m}$  in einem  $180^\circ$ -Dipol vom RTM3 ergibt sich ein mittlerer Gradient von  $0.5 \text{ mT/m}$  entlang der Bahn. Dies unterstützt das Ergebnis der Meßversuche der Querkomponenten des Magnetfeldes beim Bau der Dipole, wobei maximale Gradienten von etwa  $1 \text{ mT/m}$  beobachtet wurden [66].

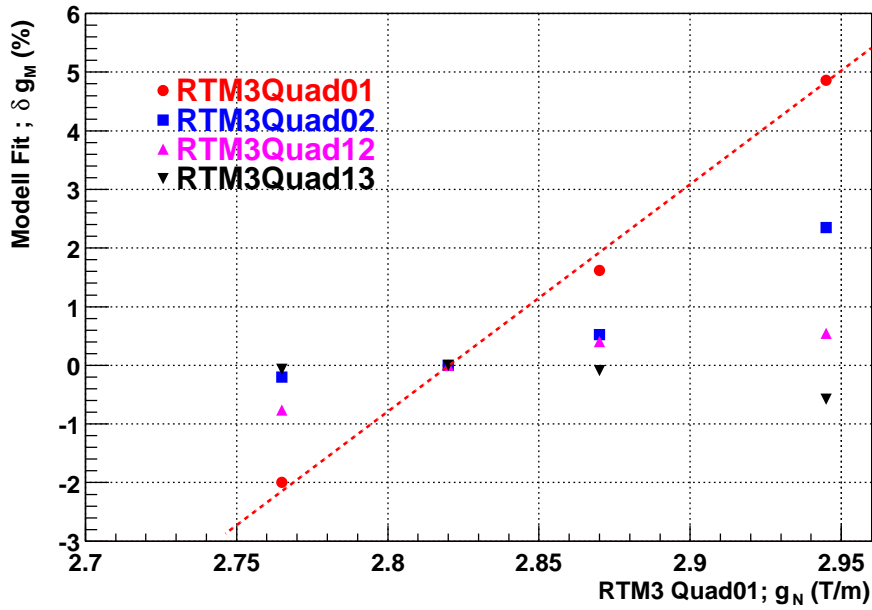


Abbildung 4.7: Fitergebnis  $g_M$  für die Gradienten der vier Quadrupole auf der Linac-Achse vom RTM3 für verschiedene Einstellungen des Gradienten  $g_N$  von RTM3QUAD01, wobei die Gradienten  $g_M$  als relative Änderung bezogen auf ihren Wert bei der Solleinstellung dargestellt sind.

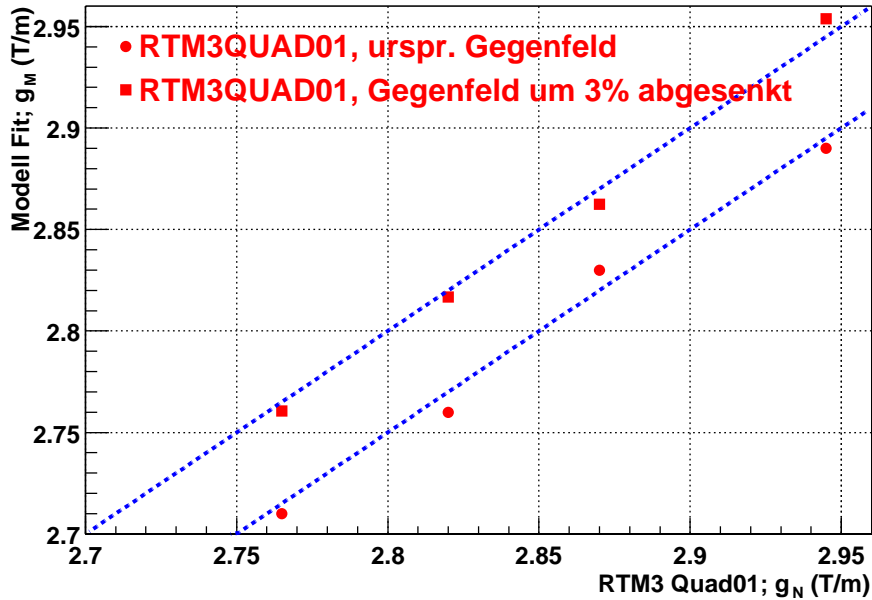


Abbildung 4.8: Fitergebnis für den Gradienten  $g_M$  von RTM3QUAD01 bei verschiedenen Einstellungen  $g_N$  von RTM3QUAD01 am Beschleuniger und bei zwei unterschiedlichen Brechkräften des Gegenfeldes im Mikrotron-Modell.

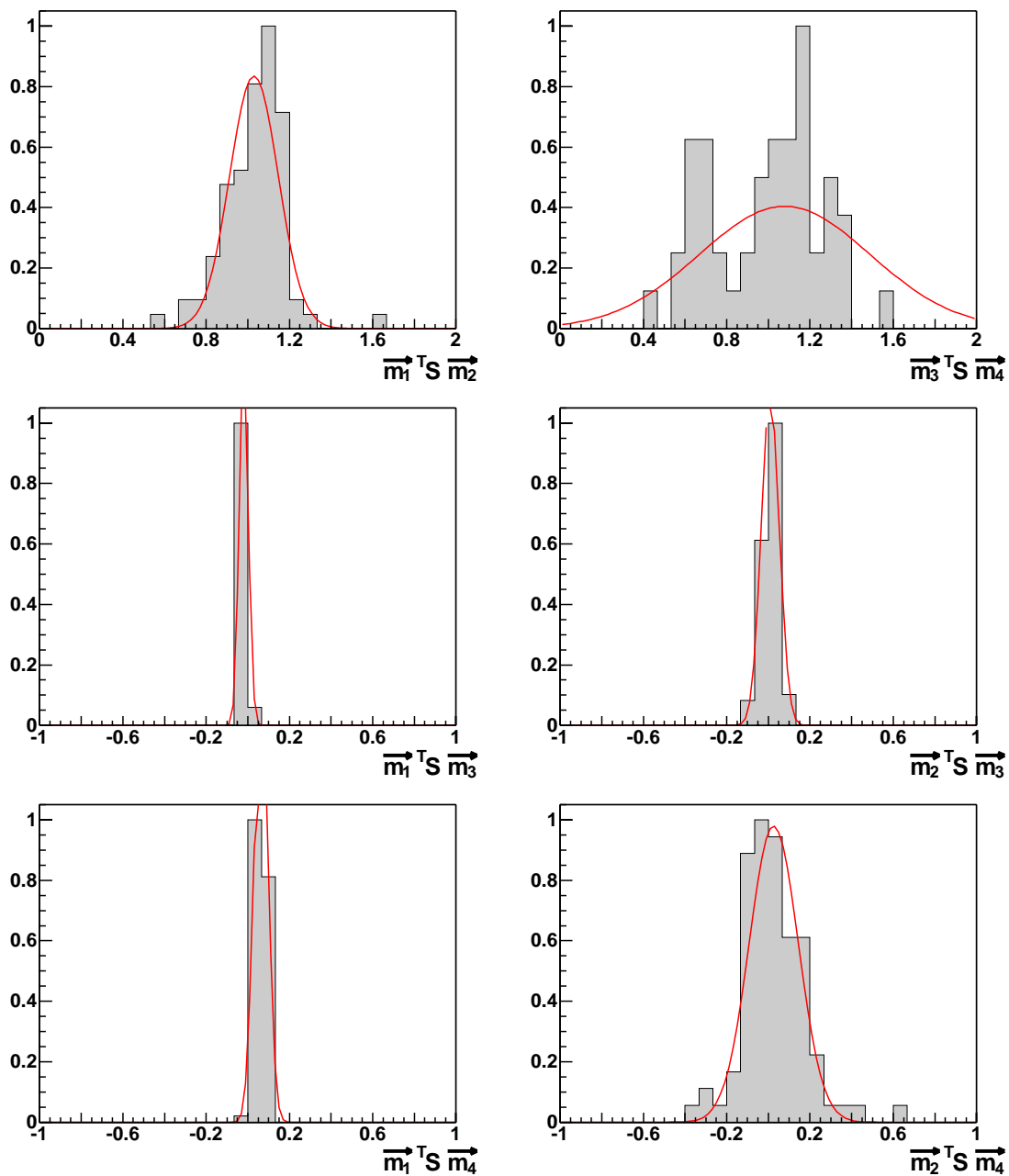


Abbildung 4.9: Zum Test der symplektischen Eigenschaften der gemessenen Transfermatrix vom RTM3 ist in den Diagrammen jeweils die relative Häufigkeit für das Ergebnis aus dem Produkt  $\vec{m}_j^T S \vec{m}_i$  nach Gl. 2.29 im Vergleich zum jeweiligen Sollwert aufgetragen, das jeweils aus den Spaltenvektoren der einzelnen Umläufe berechnet wurde.

## 4.4 Messung der transversalen Transfermatrix am RTM2

In gleicher Weise wie am RTM3 wurde die transversale Transfermatrix am RTM2 gemessen, siehe Abb. 4.10. Während die Überkopplung im RTM3 nur etwa 10% der Teilchenbewegung ausmacht, ist sie am RTM2 fast 100%. Versuche, sie mit Hilfe von 45°-Quadrupolen auf der Linac-Achse zu beseitigen, waren bisher nicht erfolgreich [55]. Dies deutet darauf hin, daß die Überkopplungen in den Dipolen entstehen.

Um die Überkopplungen simulieren zu können, wurden zuerst die unverkoppelten Transfermatrizen der 180°-Dipole mit Hilfe von PTRACE berechnet und dann weitere Matrixelemente zur Berücksichtigung der Verkopplung gemäß Gl. 3.105 hinzuaddiert. Als Modell für die Überkopplung wurden jeweils zwei identische 45°-Quadrupole von 10 cm Länge am Eintritt und Austritt der 180°-Dipole und jeweils einer am Umkehrpunkt bei 90° Ablenkung angenommen. Die Gradienten seien jeweils mit  $g_a$  und  $g_b$  (vgl. Gl. 3.102) bezeichnet. Nach Gl. 3.105 folgt dann für die Korrektur  $M_1$  zur PTRACE-Matrix eines 180°-Dipols:

$$M_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \beta R g_b & \frac{\pi}{2} R \beta^2 g_b \\ 0 & 0 & 0 & \pi R \beta g_a \\ \pi R \beta g_a & \frac{\pi}{2} R \beta^2 g_b & 0 & 0 \\ 0 & R \beta g_b & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (4.11)$$

Die Struktur der Matrix 4.11 macht deutlich, daß die Überkopplungen in einem RTM-Dipol nicht mit Hilfe von einem 45°-Quadrupol auf der Rückführungsbahn beseitigt werden können. Eine dünne 45° Linse am Austritt des ersten Dipols oder am Eintritt des zweiten Dipols beeinflußt ausschließlich die Matrixelemente (2,3) und (3,1) von  $M_1$ . Damit kann weder der Einfluß von  $g_a$  oder  $g_b$  eliminiert werden.

Die Fitparameter  $g_a$  bzw.  $g_b$  wurden umlaufunabhängig angenommen. Da der Strahl in der Mitte der 180°-Dipole jeweils einen horizontalen Fokus besitzt, können  $g_a$  und  $g_b$  nicht gleichzeitig angepaßt werden. Daher wurde zuerst nur  $g_b$  angepaßt und dann  $g_a$  bei konstantem  $g_b$  variiert. Dabei ergaben sich die in Tab. 4.1 dargestellten Werte.

Als Konsequenz dieser Untersuchungen bleibt festzuhalten, daß in den RTM-Dipolen 45°-Quadrupolanteile nachgewiesen wurden, die infolge der Beschränkung auf symmetrische Oberflächen-Korrekturspulen beim Aufbau der Maschine nicht beseitigt werden konnten.

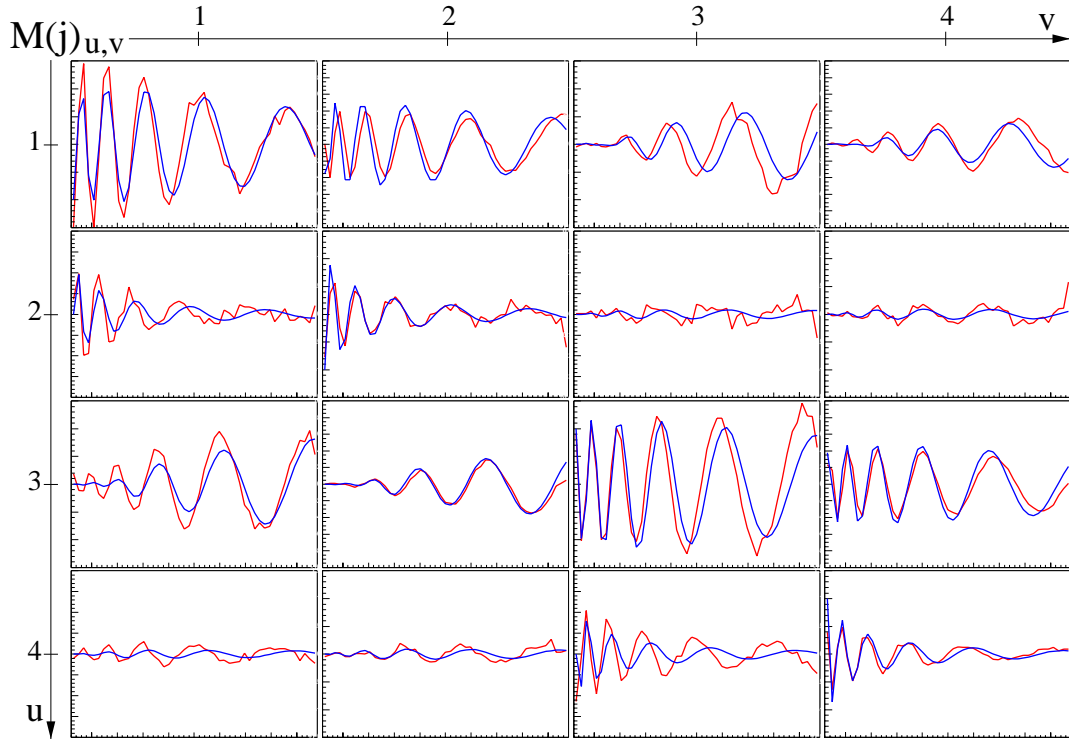


Abbildung 4.10: Transversale Matrixelemente von  $M_j$  ( $1 < j < 50$ ) im RTM2 als Funktion des Umlaufs (rot: Messung; blau: Fit des Modells). Die halbe Kastenhöhe ist für  $(M_{11}, M_{13}, M_{31}, M_{33})$  und  $(M_{22}, M_{24}, M_{42}, M_{44})$  1.5 bzw. für  $(M_{12}, M_{14}, M_{32}, M_{34})$  10 m/rad bzw. für  $(M_{21}, M_{23}, M_{41}, M_{43})$  0.4 rad/m.

Tabelle 4.1: Fitergebnis für die Überkopplung in den  $180^\circ$ -Dipolen vom RTM2, wobei jeweils ein 10 cm langer  $45^\circ$ -Quadrupol der Stärke  $g_b$  am Umkehrpunkt bei  $90^\circ$  Ablenkung und zwei identische der Stärke  $g_a$  am Eintritt und Austritt angenommen wurden.

	RTM2DIP1	RTM2DIP2
$g_a$ (T/m)	0.03	0.02
$g_b$ (T/m)	0.02	0.05

## Kapitel 5

# Korrektur antisymmetrischer Feldfehler in den Mikrotrondipolen

Das bisher bei MAMI angewandte Verfahren [67, 68] zur Feldkorrektur der Mikrotrondipole berücksichtigt lediglich symmetrische Feldfehler, d.h. Abweichungen in der Feldkomponente  $B_y$  senkrecht zur Mittelebene der Magnete. Nur im Idealfall, wenn die beiden Pole vollkommen symmetrisch sind, existieren keine antisymmetrischen Feldfehler mit den Feldkomponenten  $B_x$  und  $B_z$  in der Mittelebene. Andererseits zeigen die in Kap. 4 besprochenen Untersuchungen, daß sowohl die Umlenkdiplane vom RTM2 als auch vom RTM3 antisymmetrische Feldfehler besitzen, die zu einer unerwünschten Verkopplung der horizontalen, vertikalen und longitudinalen Teilchenbewegung führen. Daher wurde im Rahmen dieser Arbeit ein Verfahren entwickelt, mit dem alle Feldkomponenten  $B_x$ ,  $B_z$  und  $B_y$  in der Mittelebene korrigiert werden können. Dies ist besonders wichtig im Hinblick auf den Bau vom HDSM [69], das aufgrund des speziellen Feldabfalls im Inneren der  $90^\circ$ -Dipole und wegen der durch kürzere Rückführungsbahnen erschwerten Korrektur von Ablenkfehlern auf eine hohe Feldqualität angewiesen ist.

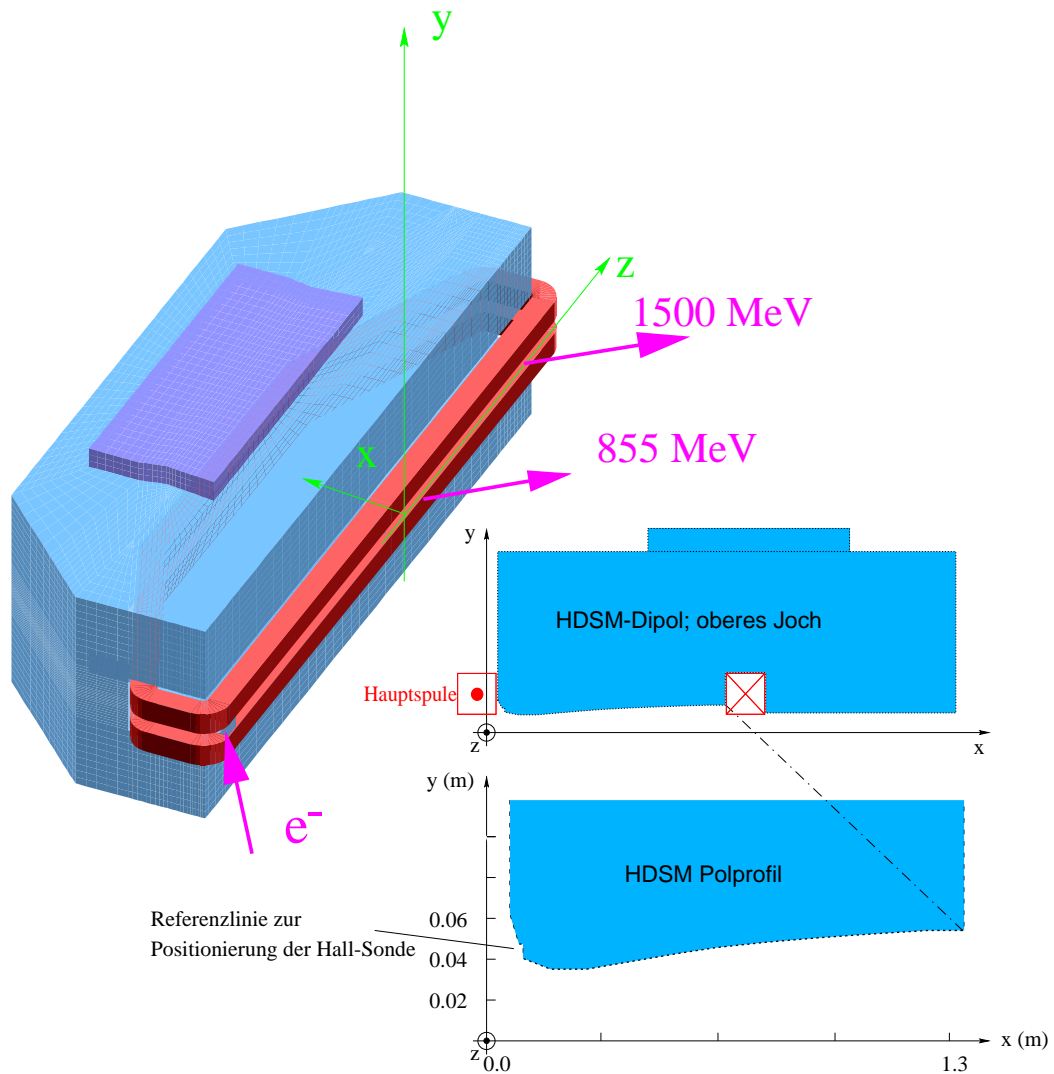


Abbildung 5.1: Schemazeichnung eines 90°-HDSM Dipols und Darstellung des speziellen Polprofils zur Kompensation der defokussierenden Wirkung des Randfeldes.

## 5.1 Prinzip der Feldkorrektur

Das Vektorpotential  $\vec{A}$  sei im folgenden in der Coulomb-Eichung dargestellt. Wenn  $\vec{j}(\vec{q})$  die Stromdichte am Ort  $\vec{q}$  bezeichnet, dann gilt [25]

$$\vec{A}(\vec{q}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2} \int d\vec{q}' \frac{\vec{j}(\vec{q}')}{|\vec{q} - \vec{q}'|}. \quad (5.1)$$

Es sei  $\vec{M}$  die makroskopische Magnetisierungsdichte in den Polen. Nach [25] ist damit ein Strom

$$\vec{j}_M = \nabla \times \vec{M} \quad (5.2)$$

verknüpft und das zugehörige Vektorpotential  $\vec{A}_M$  ist nach Integration über das Magnetvolumen  $V$  und dessen Oberfläche  $S$ :

$$\vec{A}_M(\vec{q}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2} \left( \int_V dV(\vec{q}') \frac{\nabla' \times \vec{M}(\vec{q}')}{|\vec{q} - \vec{q}'|} + \oint_S dS(\vec{q}') \frac{\vec{M}(\vec{q}') \times \vec{n}'(\vec{q}')}{|\vec{q} - \vec{q}'|} \right). \quad (5.3)$$

Dabei ist  $\vec{n}'$  die nach außen gerichtete Flächennormale von  $S$ . Im folgenden wird angenommen, daß die Magnetisierung innerhalb der Magnete homogen ist. Dann wird das Volumenintegral in Gl. 5.3 Null. Die Feldkorrektur besteht nun darin, die tatsächlich vorhandene Magnetisierung  $\vec{M}_E$  an der Polschuhoberfläche zu ermitteln und mit der in der Design-Rechnung in Übereinstimmung zu bringen. Nach Gl. 5.2 ist der erforderliche Korrekturstrom  $\delta\vec{j}$ :

$$\delta\vec{j} = \nabla \times (\vec{M} - \vec{M}_E). \quad (5.4)$$

In der Magnetostatik gilt [25]:

$$\nabla \times \left( \vec{B} - \frac{1}{\epsilon_0 c^2} \vec{M} \right) = 0 \quad (5.5)$$

und somit

$$\delta\vec{j} = \epsilon_0 c^2 \nabla \times (\vec{B} - \vec{B}_E). \quad (5.6)$$

Praktisch muß also zur Berechnung des Korrekturstroms das Magnetfeld an der Polschuhoberfläche bestimmt und mit der Design-Rechnung verglichen werden.

## 5.2 Identifizierung antisymmetrischer Feldfehler

Das Magnetfeld  $B_y$  in der Mittelebene des Magneten kann direkt gemessen werden. Die Messung der Querkomponenten, die in der Größenordnung von

einigen Gauss erwartet werden, ist aufgrund der hohen  $B_y$ -Feldstärke von etwa  $10^4$  Gauss experimentell schwierig, da sie eine Winkelgenauigkeit der Hallsonde von besser als 0.1 mrad erfordern würde. Das in [66] beschriebene Verfahren mit einer schwimmenden Sonde ist sehr zeitaufwendig und nicht zur Erstellung einer Feldkarte geeignet. Zur Bestimmung von  $B_x$  und  $B_z$  in der Mittelebene gibt es folgende Möglichkeit. Aus Gl. 5.1 folgt zusammen mit (2.32) im Vakuum die Beziehung [25]:

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \quad (5.7)$$

und

$$\nabla \times \vec{B} = 0. \quad (5.8)$$

Die partielle Ableitung von Gl. 5.7 nach  $x$  bzw.  $z$  liefert

$$\frac{\partial^2 B_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 B_z}{\partial z \partial x} = -\frac{\partial^2 B_y}{\partial y \partial x} \quad (5.9)$$

bzw.

$$\frac{\partial^2 B_z}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 B_x}{\partial z \partial x} = -\frac{\partial^2 B_y}{\partial y \partial z} \quad (5.10)$$

Aus Gl. 5.8 folgt

$$\frac{\partial B_x}{\partial z} = \frac{\partial B_z}{\partial x}. \quad (5.11)$$

Wenn Gl. 5.11 in (5.9) bzw. (5.10) eingesetzt wird, resultiert

$$\frac{\partial^2 B_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 B_x}{\partial z^2} = -\frac{\partial^2 B_y}{\partial y \partial x} \quad (5.12)$$

bzw.

$$\frac{\partial^2 B_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 B_z}{\partial z^2} = -\frac{\partial^2 B_y}{\partial y \partial z}. \quad (5.13)$$

Der Gradient von  $B_y$  in  $y$ -Richtung als Funktion von  $(x, z)$  kann praktisch durch eine Messung von  $B_y$  oberhalb ( $y = +h_y/2$ ) und unterhalb ( $y = -h_y/2$ ) der Mittelebene angenähert werden:

$$\frac{\partial B_y}{\partial y}(x, 0, z) \approx \frac{1}{h_y} \left( B_y \left( x, \frac{h_y}{2}, z \right) - B_y \left( x, -\frac{h_y}{2}, z \right) \right). \quad (5.14)$$

Die rechte Seite von Gl. 5.12 bzw. 5.13 wird dann gemäß

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 B_y}{\partial y \partial x}(x, 0, z) &\approx \frac{1}{h_y h_x} \left( B_y \left( x + \frac{h_x}{2}, \frac{h_y}{2}, z \right) - B_y \left( x + \frac{h_x}{2}, -\frac{h_y}{2}, z \right) + \right. \\ &\quad \left. + B_y \left( x - \frac{h_x}{2}, -\frac{h_y}{2}, z \right) - B_y \left( x - \frac{h_x}{2}, \frac{h_y}{2}, z \right) \right) \end{aligned} \quad (5.15)$$

bzw.

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 B_y}{\partial y \partial z}(x, 0, z) \approx & \frac{1}{h_y h_z} \left( B_y \left( x, \frac{h_y}{2}, z + \frac{h_z}{2} \right) - B_y \left( x, -\frac{h_y}{2}, z + \frac{h_z}{2} \right) + \right. \\ & \left. + B_y \left( x, -\frac{h_y}{2}, z - \frac{h_z}{2} \right) - B_y \left( x, \frac{h_y}{2}, z - \frac{h_z}{2} \right) \right) \end{aligned} \quad (5.16)$$

aus den Messungen berechnet.

Bei Gl. 5.12 bzw. 5.13 handelt es sich um eine sog. Dirichletsche Randwertaufgabe [32]. Wenn  $B_x$  bzw.  $B_z$  am Rand des Integrationsgebiets bekannt ist, existiert jeweils eine eindeutige Lösung für die partielle Differentialgleichung (5.12) bzw. (5.13). Im folgenden wird angenommen, daß  $B_x$  und  $B_z$  am Rand Null ist.

Für die numerischen Lösungen von Gl. 5.12 bzw. 5.13 gibt es eine Vielzahl von Methoden [70]. In den folgenden Simulationsrechnungen wurde ein direktes Verfahren mit Hilfe der LR-Zerlegung [71] ausgewählt.

Die Mittelebene werde in  $N_x \times N_z$  Gitterpunkte unterteilt, die auch die Meßpunkte von  $B_y$  sein sollen. Die Maschenweiten  $h_x$  und  $h_z$  seien identisch. Der Differentialoperator auf der linken Seite von Gl. 5.12 bzw. 5.13 wird jeweils diskretisiert

$$\begin{aligned} \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) B_x(x_i, 0, z_j) \approx & \\ \approx & \frac{B_x(x_{i-1}, 0, z_j) - 4B_x(x_i, 0, z_j) + B_x(x_{i+1}, 0, z_j)}{h_x^2} + \\ & + \frac{B_x(x_{i+1}, 0, z_{j-1}) + B_x(x_i, 0, z_{j-1})}{h_x^2} \end{aligned} \quad (5.17)$$

und analog für  $B_z$ . Es seien die gesuchten Vektoren  $\vec{v}_x$  und  $\vec{v}_z$  als

$$\begin{aligned} \vec{v}_x^T = & (B_x(x_1, 0, z_1), \dots, B_x(x_{N_x}, 0, z_1), \dots \\ & \dots, B_x(x_1, 0, z_{N_z}), \dots, B_x(x_{N_x}, 0, z_{N_z})), \end{aligned} \quad (5.18)$$

und

$$\begin{aligned} \vec{v}_z^T = & (B_z(x_1, 0, z_1), \dots, B_z(x_{N_x}, 0, z_1), \dots \\ & \dots, B_z(x_1, 0, z_{N_z}), \dots, B_z(x_{N_x}, 0, z_{N_z})) \end{aligned} \quad (5.19)$$

definiert. Zur Berücksichtigung der rechten Seite in Gl. 5.12 bzw. 5.13 werden die beiden Vektoren  $\vec{b}_x$  und  $\vec{b}_z$

$$\begin{aligned} \vec{b}_x^T = & -h_x^2 (\partial_{yx} B_y(x_1, 0, z_1), \dots, \partial_{yx} B_y(x_{N_x}, 0, z_1), \dots \\ & \dots, \partial_{yx} B_y(x_1, 0, z_{N_z}), \dots, \partial_{yx} B_y(x_{N_x}, 0, z_{N_z})), \end{aligned} \quad (5.20)$$

und

$$\vec{b}_z^T = -h_z^2 (\partial_{yz} B_y(x_1, 0, z_1), \dots, \partial_{yz} B_y(x_{N_x}, 0, z_1), \dots, \partial_{yz} B_y(x_1, 0, z_{N_z}), \dots, \partial_{yz} B_y(x_{N_x}, 0, z_{N_z})) \quad (5.21)$$

gebildet. Es sei  $I_{N_x}$  die  $N_x \times N_x$  Einheitsmatrix und  $A_{N_x}$  die folgende  $N_x \times N_x$  Tridiagonalmatrix

$$A_{N_x} = \begin{pmatrix} 4 & -1 & \dots & 0 \\ -1 & 4 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & -1 \\ 0 & \dots & -1 & 4 \end{pmatrix}. \quad (5.22)$$

Als letztes wird noch eine  $(N_x \cdot N_z) \times (N_x \cdot N_z)$ -Blocktridiagonalmatrix  $A$  definiert:

$$A = \begin{pmatrix} A_{N_x} & -I_{N_x} & \dots & 0 \\ -I_{N_x} & A_{N_x} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & -I_{N_x} \\ 0 & \dots & -I_{N_x} & A_{N_x} \end{pmatrix}. \quad (5.23)$$

Dann wird die Approximation der partiellen Differentialgleichung (5.12) bzw. (5.13) zu einer Matrixgleichung der Form

$$A\vec{v}_x = \vec{b}_x \quad (5.24)$$

bzw.

$$A\vec{v}_z = \vec{b}_z. \quad (5.25)$$

Multiplikation der Inversen von  $A$  mit  $\vec{b}_x$  bzw.  $\vec{b}_z$  ergibt die gesuchten Feldkomponenten  $B_x$  bzw.  $B_z$  in der Mittelebene. Praktisch kann die Lösung der Gleichungssysteme Gl. 5.24 bzw. 5.25 mit Hilfe der LR-Zerlegung gefunden werden.

Zur Abschätzung des Fehlers bei der Bestimmung von  $B_x$  bzw.  $B_z$  wird angenommen, daß  $B_x$  in Gl. 5.12 keine Funktion von  $z$  ist bzw.  $B_z$  in Gl. 5.13 keine Funktion von  $x$  ist. Integration von Gl. 5.12 nach  $x$  bzw. von Gl. 5.13 nach  $z$  und Division durch  $|\vec{B}|$  ergibt dann

$$\frac{\delta B_x}{|\vec{B}|} = \frac{\delta x}{\delta y} \frac{\delta B_y}{|\vec{B}|} \quad \text{bzw.} \quad \frac{\delta B_z}{|\vec{B}|} = \frac{\delta z}{\delta y} \frac{\delta B_y}{|\vec{B}|}. \quad (5.26)$$

Wenn die Maschenweite  $h_x$  bzw.  $h_z$  kleiner als der Abstand  $h_y$  der beiden Meßebenen ist, dann ist bezogen auf das Hauptfeld der relative Fehler bei der

Bestimmung von  $B_x$  bzw. von  $B_z$  identisch mit dem Meßfehler von  $B_y$ . Moderne Hallsonden-Magnetometer bieten eine Auflösung von etwa  $10^{-4}$ . Bei der Messung von  $B_y$  mit einer Genauigkeit von z.B. 1 Gauss muß die Hallsonde lediglich auf etwa 10 mrad genau bzgl. der Hauptfeldrichtung justiert werden. Die direkte Messung der Querkomponenten mit einer Genauigkeit von 1 Gauss würde hingegen eine Justierung des Normalenvektors der Sonde auf etwa 0.1 mrad senkrecht zur Hauptfeldrichtung erfordern.

### 5.3 Verfahren zur Korrektur antisymmetrischer Feldfehler

Wenn das komplette Magnetfeld  $B_x$ ,  $B_y$  und  $B_z$  in der Mittelebene bekannt ist, kann mit Hilfe der Rekursionsformel 2.39 das Potential  $\Psi$  in Gl. 2.36 bestimmt werden. Wenn zusätzlich  $a_{jk}(z)$  in Gl. 2.36 in eine Potenzreihe entwickelt wird, lautet das Potential in der Umgebung eines Maschenpunktes  $(x_j, 0, z_i)$  bis zur Quadrupolordnung:

$$\begin{aligned}
\Psi(x, y, z) &= a_{100}(x - x_j) + a_{010}y + a_{001}(z - z_i) + \\
&+ \frac{1}{2} a_{200}(x - x_j)^2 + \frac{1}{2} a_{020}(y)^2 + \frac{1}{2} a_{002}(z - z_i)^2 + \\
&+ a_{110}(x - x_j)y + a_{101}(x - x_j)(z - z_i) + a_{011}y(z - z_i) + \\
&+ \dots
\end{aligned} \tag{5.27}$$

Dabei ist:

$$\begin{aligned}
a_{100} &= B_x(x_j, 0, z_i) \\
a_{010} &= B_y(x_j, 0, z_i) \\
a_{001} &= B_z(x_j, 0, z_i) \\
a_{200} &= \frac{\partial B_x}{\partial x}(x_j, 0, z_i) \approx \frac{1}{h_x}(B_x(x_j + h_x, 0, z_i) - B_x(x_j, 0, z_i)) \\
a_{020} &= -a_{200} - a_{002} \\
a_{002} &= \frac{\partial B_z}{\partial z}(x_j, 0, z_i) \approx \frac{1}{h_z}(B_z(x_j, 0, z_i + h_z) - B_z(x_j, 0, z_i)) \\
a_{101} &= \frac{\partial B_x}{\partial z}(x_j, 0, z_i) \approx \frac{1}{h_z}(B_x(x_j, 0, z_i + h_z) - B_x(x_j, 0, z_i)) \\
a_{110} &= \frac{\partial B_y}{\partial x}(x_j, 0, z_i) \approx \frac{1}{h_x}(B_y(x_j + h_x, 0, z_i) - B_y(x_j, 0, z_i)) \\
a_{011} &= \frac{\partial B_y}{\partial z}(x_j, 0, z_i) \approx \frac{1}{h_z}(B_y(x_j, 0, z_i + h_z) - B_y(x_j, 0, z_i)) . \tag{5.28}
\end{aligned}$$

(5.29)

Das Potential wird in der Umgebung jedes Maschenpunktes bis zur zweiten Ordnung entwickelt und damit das Magnetfeld  $B_x$ ,  $B_y$  und  $B_z$  an der Poloberfläche  $(x_j, y_{\text{Pol}}, z_i)$  berechnet.

Die gesuchte Oberflächenstromdichte  $\sigma_x$  und  $\sigma_z$  zur Magnetfeldkorrektur ist somit nach Gl. 5.6 am oberen Pol

$$\begin{aligned}\sigma_x &= +\epsilon_0 c^2 (B_z - B_{z,E}) \\ \sigma_z &= -\epsilon_0 c^2 (B_x - B_{x,E}),\end{aligned}\quad (5.30)$$

und mit jeweils entgegengesetztem Vorzeichen am unteren Pol. Dabei wurde die Neigung der Poloberfläche zur Vereinfachung der Formeln vernachlässigt und die rel. Permeabilität des Eisens als unendlich angenommen.

Zur Konstruktion der Korrekturspulen kann ein ähnliches Verfahren wie in [67] angewendet werden. Die einzelnen Leiter sollen gleichen Strom  $\Delta I$  aber variablen Abstand zur Annäherung an die berechnete Oberflächenstromdichte haben. Bei konstanter Koordinate  $x$  wird das Integral

$$I_x(x, z) = \int_{-\infty}^z \sigma_x(x, s_z) ds_z \quad (5.31)$$

berechnet. Werden nun die Leiter in Abständen von  $\delta z$  mit Strom in  $x$ -Richtung angeordnet, so daß

$$\Delta I = I_x(x, z + \delta z) - I_x(x, z) \approx \delta z \sigma_x(x, z) \quad (5.32)$$

ist, hat man die gewünschte Oberflächenstromdichte  $\sigma_x$  angenähert. Analog folgt  $\sigma_z$ . Allgemein bildet man eine Funktion  $I(x, z)$  mit folgender Eigenschaft:

$$I(x, z) = \int_0^x ds_x \sigma_z(s_x, z) - \int_0^z ds_z \sigma_x(0, s_z). \quad (5.33)$$

Dann gilt:

$$\frac{\partial I}{\partial x} = \sigma_z \quad (5.34)$$

bzw.

$$\frac{\partial I}{\partial z} = -\sigma_x. \quad (5.35)$$

Daher kann man die Korrekturströme entlang den Äquipotentiallinien von  $I$  verlegen.

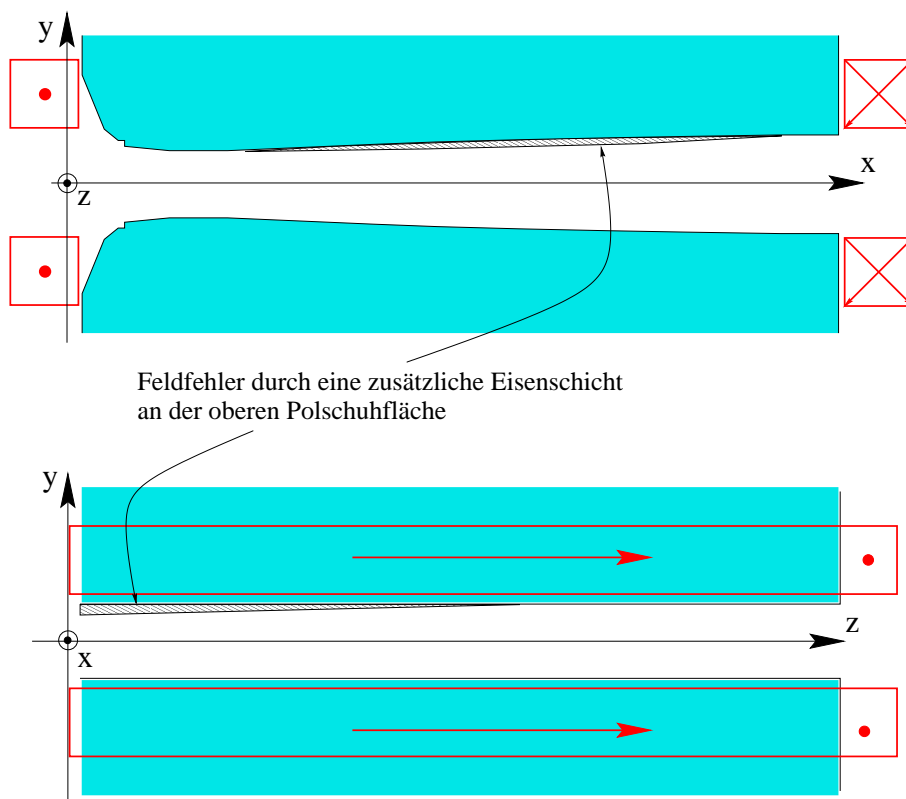


Abbildung 5.2: Zur Simulation asymmetrischer Feldfehler in einem 90°-HDSM Dipol wurde eine maximal 0.3 mm dicke Eisenschicht am oberen Pol aufgetragen.

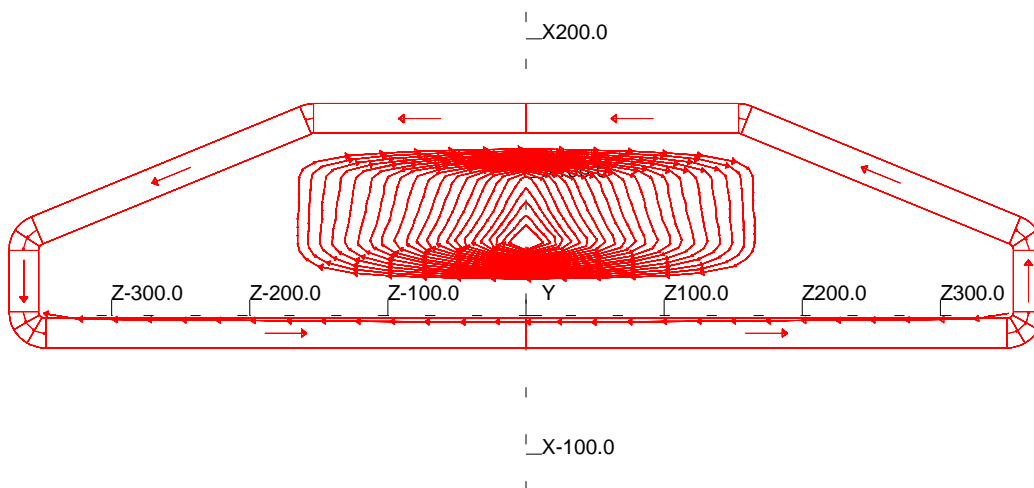


Abbildung 5.3: Hauptspule und berechnete Korrekturspule am oberen Pol zur Kompensation der simulierten Feldfehler des 90°-HDSM Dipols.

## 5.4 Simulationsrechnungen mit TOSCA

Um das vorgeschlagene Verfahren zu testen, wurden mit Hilfe von TOSCA [72] asymmetrische Feldfehler in einem 90°-HDSM Dipol simuliert, indem an die obere Polschuhfläche eine maximal etwa 0.3 mm dicke Eisenschicht aufgetragen wurde, siehe Abb. 5.2. Wie aus Abb. 5.6 zu entnehmen ist, wurden auf diese Weise  $B_x$  bzw.  $B_z$  Komponenten in der Mittelebene in der Größenordnung von  $\pm 8$  Gauss bzw.  $\pm 1$  Gauss erzeugt. Die Abweichungen von  $B_y$  vom Referenzfeld lagen bei maximal 28 Gauss. Diese Fehler würden am Dipolaustritt schon zu einer merklichen Strahlablenkung von einigen  $100 \mu\text{m}$  führen.

In den folgenden Rechnungen war  $N_x = 200$  und  $N_z = 700$  gewählt. Zuerst wurde aus den TOSCA-Rechnungen das  $B_y$ -Feld in der Mittelebene und bei  $0.5h_y = 2 \text{ cm}$  oberhalb und unterhalb entnommen. Die Maschenweite war  $h_x = h_z = 1 \text{ cm}$ . Mit Hilfe von Gl. 5.15 und Gl. 5.16 konnten damit die Vektoren  $\vec{b}_x$  und  $\vec{b}_z$  bestimmt werden. Durch Einsetzen in Gl. 5.24 und Gl. 5.25 und Auflösen nach  $\vec{v}_x$  und  $\vec{v}_z$  folgten die gesuchten Feldkomponenten  $B_x$  und  $B_z$  in der Mittelebene. Abbildung 5.4 bzw. 5.5 vergleicht die so berechnete  $B_x$  bzw.  $B_z$  Komponente mit der TOSCA-Rechnung für einen Schnitt senkrecht und parallel zur Polschuhkante. Das TOSCA-Ergebnis wird mit einer Genauigkeit von etwa 5% reproduziert.

Dann wurde nach Gl. 5.27 das Magnetfeld an der Polschuhoberfläche berechnet und daraus die Oberflächenstromdichte nach Gl. 5.30 bestimmt. Dabei wurde zur Vereinfachung angenommen, daß das Sollfeld an der Oberfläche keine  $B_x$  bzw.  $B_z$  Komponenten besitzt. In Abb. 5.3 ist schließlich die mit Hilfe von Gl. 5.33 berechnete Korrekturspule gezeigt. Im Rahmen der Rechengenauigkeit sind am unteren Pol keine Korrekturströme notwendig gewesen. Dies ist konsequent, da die Feldfehler nur durch einen Fehler am oberen Polschuh erzeugt wurden. In Abb. 5.7 ist das korrigierte  $B_x$ ,  $B_y$  und  $B_z$  Feld gezeigt, das mit TOSCA inklusive Korrekturspule berechnet wurde. In allen Fällen konnten die Feldfehler in der Mittelebene mindestens um einen Faktor 10 unterdrückt werden.

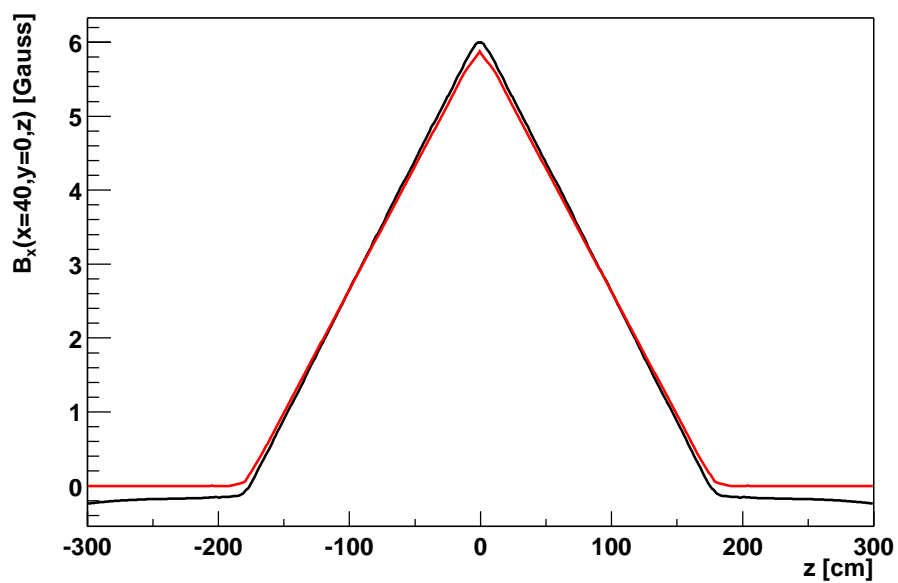
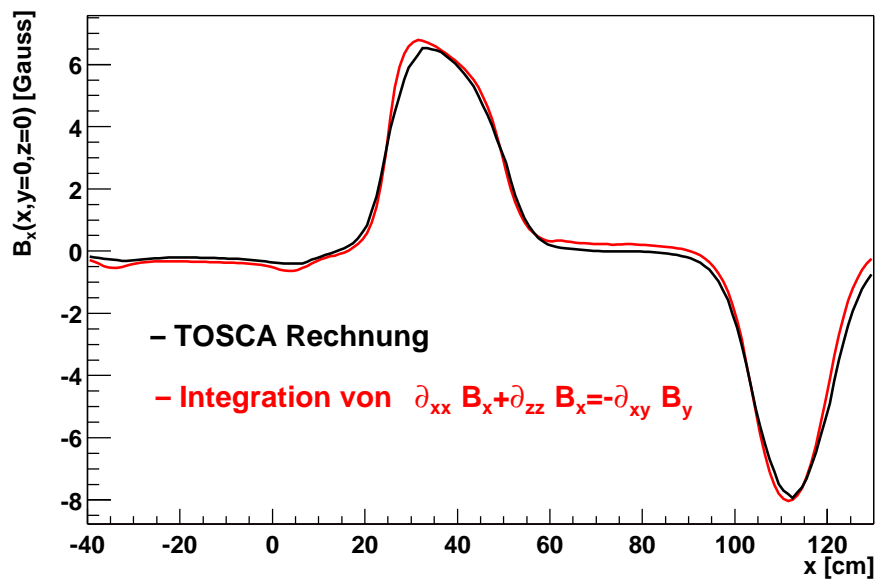


Abbildung 5.4: Verlauf der durch den in Abb. 5.2 skizzierten Geometriefehler erzeugten Feldkomponente  $B_x$  in der Mittelebene nach Simulation mit TOSCA und nach Berechnung aus den von TOSCA entnommenen Werten von  $B_y$  oberhalb und unterhalb der Mittelebene.

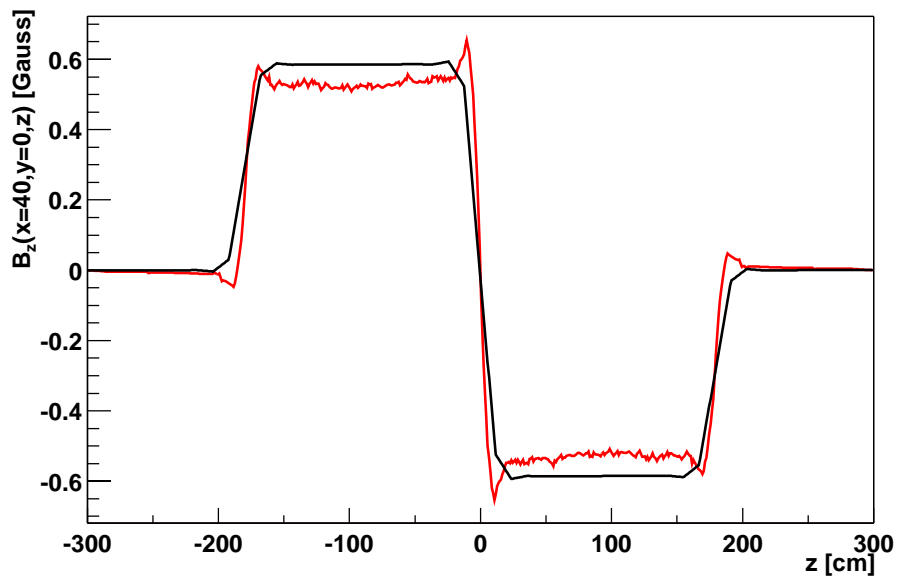
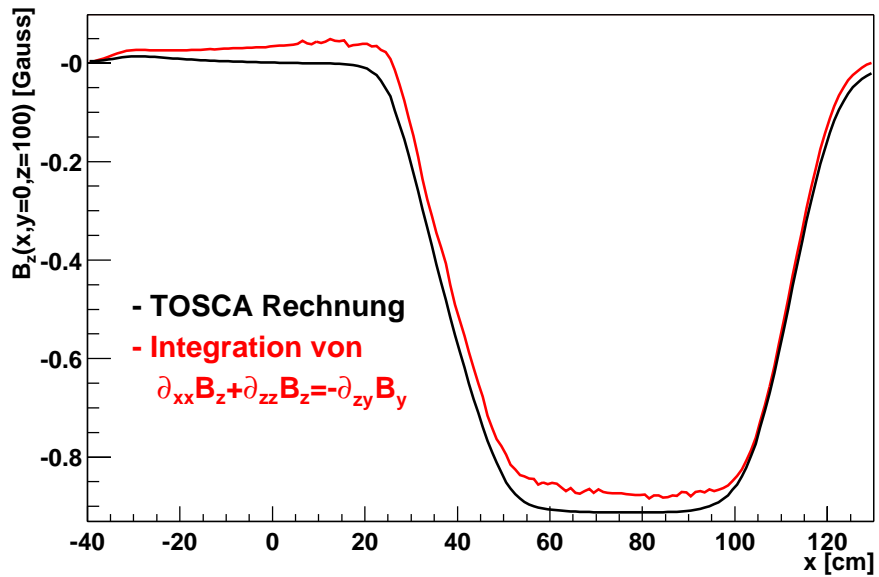


Abbildung 5.5: Verlauf der durch den in Abb. 5.2 skizzierten Geometriefehler erzeugten Feldkomponente  $B_z$  in der Mittelebene nach Simulation mit TOSCA und nach Berechnung aus den von TOSCA entnommenen Werten von  $B_y$  oberhalb und unterhalb der Mittelebene.

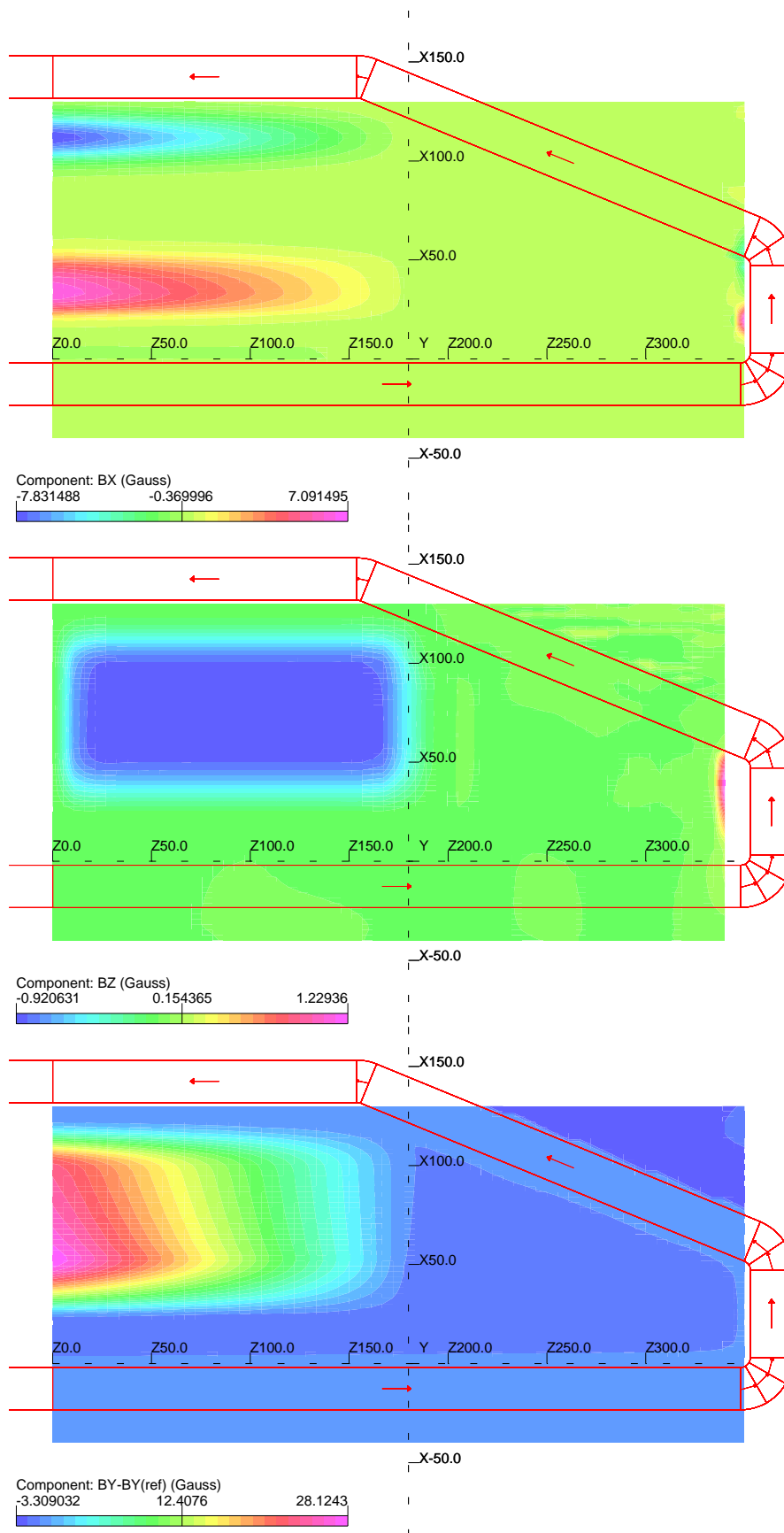


Abbildung 5.6: Darstellung von  $B_x$ ,  $B_z$  und der Abweichung der Komponente  $B_y$  vom Verlauf bei idealer Symmetrie in der Mittelebene für den in Abb. 5.2 skizzierten Geometriefehler.

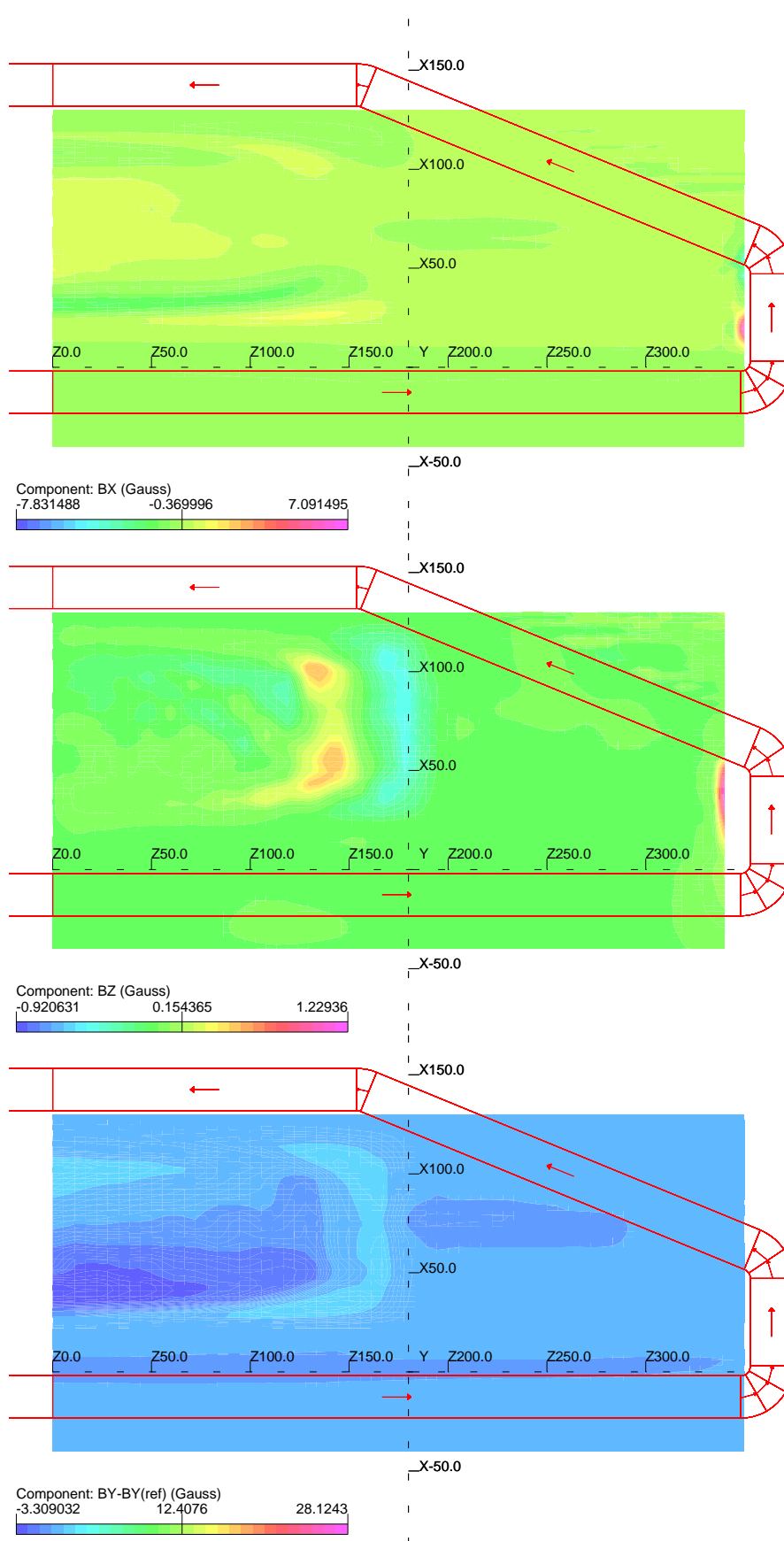


Abbildung 5.7: Darstellung von  $B_x$ ,  $B_z$  und der Abweichung der Komponente  $B_y$  vom Verlauf bei idealer Symmetrie in der Mittelebene nach Korrektur des in Abb. 5.2 skizzierten Geometriefehlers durch eine Korrekturspule am oberen Pol.

# Kapitel 6

## Untersuchungen zur longitudinalen Strahldynamik

Im folgenden wird die Longitudinalbewegung im RTM1, RTM2 und RTM3 untersucht. Dabei wird die Longitudinaloptik im Mikrotron-Modell jeweils mit einer periodischen Abfolge von longitudinaler Linse (Linac) und longitudinaler Laufstrecke (Umlenkdiol) beschrieben. Da der Absolutwert des Magnetfeldes auf  $10^{-4}$  bekannt ist und dessen zeitliche Stabilität durch eine Regelung mit Hilfe von NMR-Sonden besser als  $10^{-6}$  ist, konzentrieren sich die folgenden Untersuchungen auf die Abbildungseigenschaften des Linacs und die Stabilität der HF-Amplitude.

### 6.1 Auswertung der Phasensignale eines Diagnosepulses

In diesem Abschnitt wird ein Verfahren beschrieben, um aus den gemessenen Phasensignalen eines Diagnosepulses (vgl. Abschnitt 4.1) die Amplitude, die Frequenz und die Anfangsphase der Synchrotronschwingung zu extrahieren. Im folgenden wurde zur Digitalisierung der Phasensignale das in Kap. 4 erwähnte Oszilloskop vom Typ HP-Infinium [60] verwendet.

Beispielsweise sind in Abb. 6.1 die 90 Signale eines Diagnosepulses, der mit einer Phasenablage und Energieablage  $\delta\varphi_0$  und  $\delta E_0$  in das RTM3 injiziert wurde, gezeigt. Nach Gl. 3.4 gilt für die Phasenabweichung  $\delta\varphi_n$  als Funktion des Umlaufs  $n$ :

$$\delta\varphi_n = \delta\varphi_0 \cos(n\Phi) + (\beta\delta E_0 + \alpha\delta\varphi_0) \sin(n\Phi). \quad (6.1)$$

Wenn an die gemessene Amplitudenoszillation der Phasensignale eine Funktion der Form

$$\delta\varphi_n = a \sin(n\Phi + \rho) = a(\cos \rho \sin(n\Phi) + \sin \rho \cos(n\Phi)) \quad (6.2)$$

angefittet wird, kann aus der Frequenz der Phasenvorschub  $\Phi$  und durch Koeffizientenvergleich zwischen Gl. 6.1 und 6.2 die Ablage  $\delta E_0$  bzw.  $\delta\varphi_0$  bestimmt werden. Dies wird im Detail in Abschnitt 6.5 beschrieben.

Die Auswertung der Phasensignale erfolgt in drei Schritten. Zuerst wird

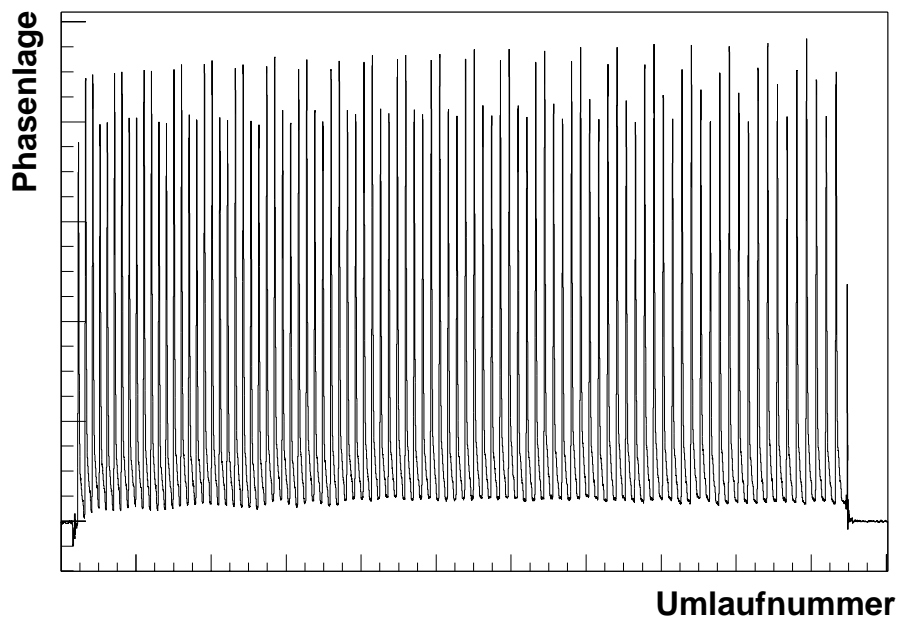


Abbildung 6.1: Digitalisierte Phasensignale eines Diagnosepulses im RTM3 für alle 90 Umläufe am Phasenmonitor auf der Linac-Achse.

mit einem Parabelfit die Position und die Höhe des Maximums des Phasensignals für jeden Umlauf bestimmt. Dann wird an die Maxima der Phasensignale als Funktion der Umlaufnummer eine Sinus-Funktion inklusive Untergrund (Polynom 1. Grades) angepaßt (vgl. Abb. 6.2). Der Fit erstreckt sich dabei abschnittsweise auf eine empirisch bestimmte Intervall-Länge. Sie beträgt 10, 7 und 4 Umläufe im RTM3, RTM2 und RTM1. Schließlich wird der Untergrund Intervall für Intervall von den Meßdaten subtrahiert und eine Sinus-Funktion über alle Umläufe gemeinsam angepaßt (vgl. Abb. 6.3). Tabelle 6.1 gibt die für die drei Mikrotrone erreichbare Auflösung des Sinus-Fits für Frequenz  $\Phi$ , Amplitude  $a$  und Phasenlage  $\rho$  (vgl. Gl. 6.2) der Synchronschwingung an.

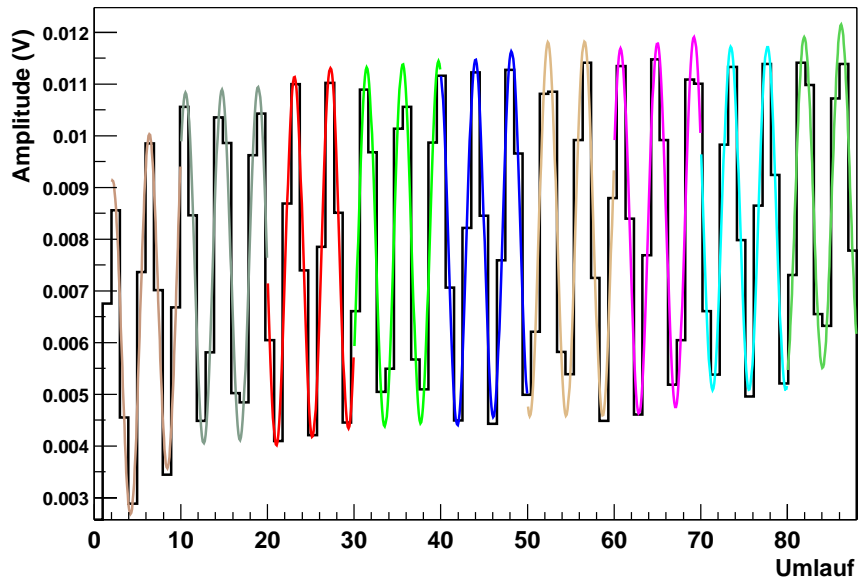


Abbildung 6.2: Maxima der Phasensignale eines Diagnosepulses im RTM3 und partielle Anpassung einer sin-Funktion an die Meßdaten.

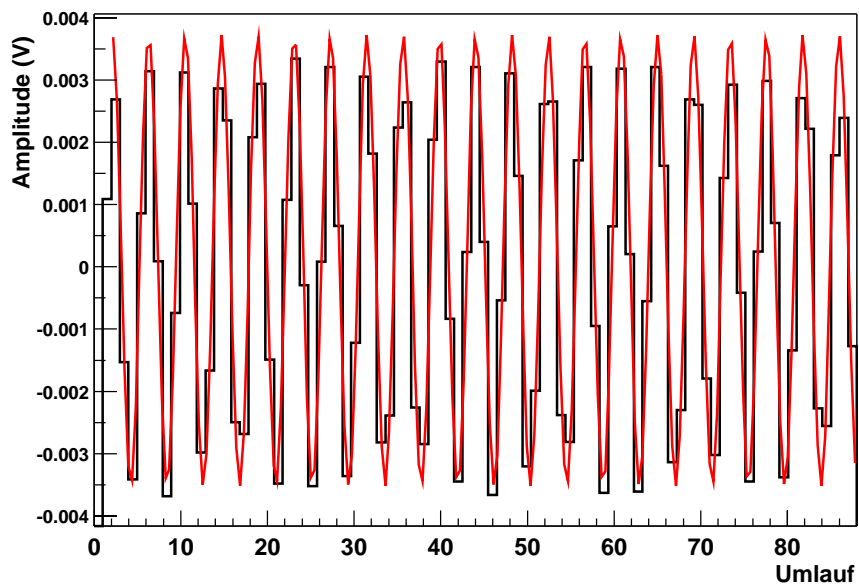


Abbildung 6.3: Untergrundfreie Maxima der Phasensignale aus Abb. 6.2 und Anpassung durch eine einzige sin-Funktion.

Tabelle 6.1: Auflösungsvermögen der Diagnosepuls-Messung zur Bestimmung von Frequenz  $\Phi$ , Amplitude  $a$  und Phasenlage  $\rho$  einer Synchrotronschwingung, wobei die Eichung der Amplitude aus Abschnitt 6.5 stammt.

	RTM1	RTM2	RTM3
$\delta\Phi$ (Grad)	3.7	0.8	0.4
$\delta a$ (Grad)	0.3	0.2	0.2
$\delta\rho$ (Grad)	30	15	10

## 6.2 Messung der Sollphasenbewegung am RTM3

Es gibt drei Ursachen für eine Störung der Periodizität der Longitudinaloptik vom RTM3. Erstens ist das Magnetfeld innerhalb der Dipole „nur“ auf  $10^{-4}$  homogenisiert [66]. Zweitens weicht die Elektronenbahn besonders in den ersten Umläufen von der idealen Kreisbahn aufgrund des Gegen- und Randfeldstreifens ab [67]. Drittens verlieren die Elektronen auf den Kreisbahnen Energie infolge von Synchrotronstrahlung (vgl. Kap. 2.1.3).

Diese drei Effekte sind in Abb. 6.4 für das RTM3 gezeigt. Dabei wurde mit Hilfe von PTRACE [1] der Verlauf der Sollphase mit und ohne Synchrotronstrahlungsverlust simuliert.

Für die Messung des Sollphasenverlaufs wurde von Hand ein glatter Phasenverlauf im RTM3 eingestellt und dann die Höhe der einzelnen Phasensignale eines Diagnosepulses analog zu Abschnitt 6.1 gemessen.

Die Phasenwanderung aufgrund des Gegen- und Randfeldes beträgt insgesamt etwa  $0.4^\circ$  und ist ab Umlauf 30 praktisch unbedeutend. Im Gegensatz dazu sind in den ersten Umläufen die Synchrotronstrahlungsverluste vernachlässigbar, während sie am Ende der Beschleunigung die Phasenwanderung dominieren.

Die unregelmäßigen Schwankungen der in Abb. 6.4 gezeigten Phasensignale sind zum einen auf den restlichen Untergrund nach der Auswertung der Daten nach Abschnitt 6.1 und zum anderen auf die Inhomogenität des Magnetfeldes zurückzuführen, da im mittleren Energiebereich des RTM3 sich bereits ein Phasensprung von  $0.2^\circ$  bei einem Fehler von  $10^{-5}$  im mittleren Ablenkefeld der Dipole ergibt.

## 6.3 Untersuchung zur Nichtlinearität der Longitudinalbewegung im RTM3

Abbildung 6.5 zeigt eine Messung des Phasenvorschubs  $\Phi$  als Funktion der Amplitude der Synchrotronschwingung  $\delta\varphi_0$  am RTM3. Im folgenden wird untersucht, inwiefern die gemessene quadratische Abhängigkeit  $\Phi(\delta\varphi_0)$  mit Hilfe von einem longitudinalen Sextupol beschrieben werden kann. Die entsprechende Hamilton-Funktion 3.33 wurde schon in Kap. 3.1.3 hergeleitet.

Der Phasenvorschub zur Amplitude Null sei mit  $\Phi_0$  bezeichnet. Die Hamilton-Funktion  $\hat{H}$  in 3.33 kann durch eine kanonische Transformation als Funktion der Wirkungs- und Winkel-Variablen  $J$  und  $\Phi$  dargestellt werden [26]. Die Einzelheiten der Rechnung sind in Kap. 5.3 in [54] vorgeführt:

$$\hat{H}(J, \Phi) = \nu_0 J + p_3 J^{3/2} \cos^3 \Phi, \quad (6.3)$$

wobei

$$p_3 = \frac{\sqrt{2\nu_0}}{3} k_3 \beta^{5/2}; \quad \nu_0 = \Phi_0/2\pi \quad (6.4)$$

ist. Für die Definition der Variablen siehe Abschnitt 3.1.3.

Wenn kein Sextupol vorhanden ( $k_3=0$ ) ist, dann ist  $J$  eine Invariante der Bewegung, nämlich proportional zur Emittanz  $\epsilon$  (zur Herleitung siehe [54])

$$J = \frac{1}{2} \nu_0 \epsilon. \quad (6.5)$$

Da die Funktion  $\cos^3 \Phi$  in Gl. 6.3 keinen Fourieranteil 0-ter Ordnung besitzt, kann es keine lineare Abhängigkeit von  $\Phi$  von der Synchrotronschwingungsamplitude geben [27, 73, 51]. Die Berücksichtigung des Fourierpektrums von  $J$ , das bei endlichen Sextupolanteilen keine Konstante der Bewegung ist, führt nach [74, 54] weit von Resonanzen entfernt auf folgende Darstellung von  $\hat{H}$ :

$$\hat{H}(J, \Phi) = \nu_0 J + T_{00,3} J^2 + \dots \quad (6.6)$$

Mit Hilfe von Formel (5.86) aus [54] ist der Koeffizient  $T_{00,3}$ :

$$T_{00,3} = -\frac{27\nu_0}{64} p_{3,0}^2 \sum_{q=-\infty}^{+\infty} \left[ \frac{1}{\nu_0^2 - q^2} + \frac{1}{(3\nu_0)^2 - q^2} \right]. \quad (6.7)$$

Der Fourier-Koeffizient 0-ter Ordnung von  $p_3$  ist

$$p_{3,0} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} p_3 ds = \frac{\sqrt{2\nu_0}}{6\pi} \beta^{5/2}. \quad (6.8)$$

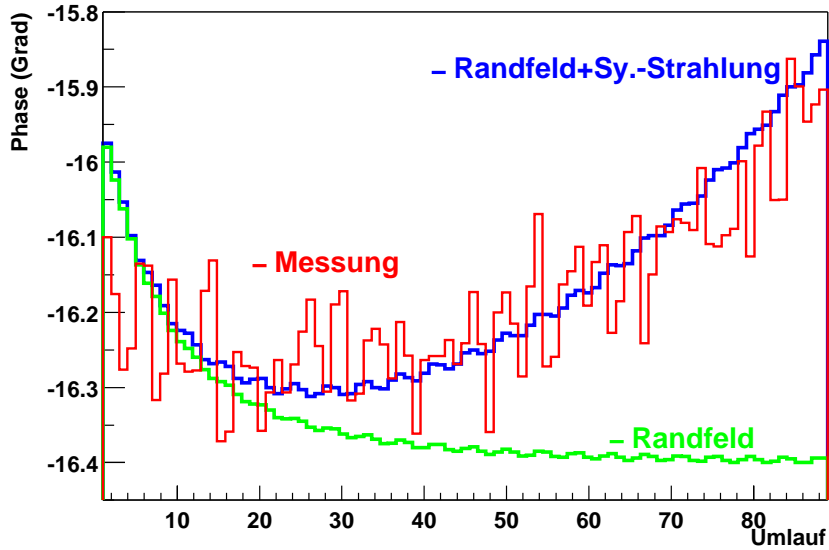


Abbildung 6.4: Gemessener Verlauf der Sollphase am RTM3 als Funktion des Umlaufs und Vorhersage des Mikrotron-Modells mit und ohne Synchrotronstrahlung.

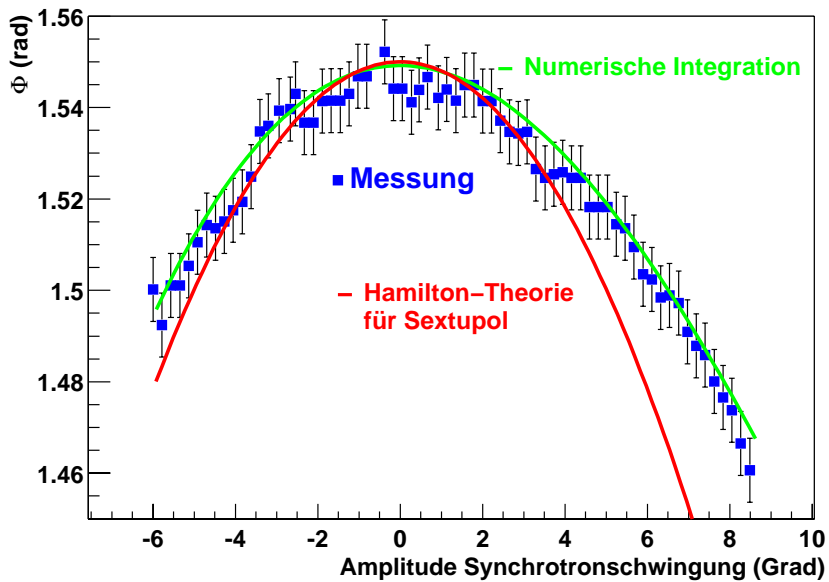


Abbildung 6.5: Phasenvorschub  $\Phi$  in Abhängigkeit der Amplitude der Synchrotron-schwingung am RTM3 bei einem Sollphasenwinkel  $\varphi_s = -16^\circ$ .

Aus der Hamilton-Funktion 6.6 folgt für die Änderung von  $\Phi$ :

$$\dot{\Phi} = \frac{\partial \hat{H}}{\partial J} = \nu_0 + 2T_{00,3}J. \quad (6.9)$$

Und aus Integration von 6.9 ergibt sich mit Hilfe von 6.5 die gesuchte quadratische Abhängigkeit von  $\Phi$  von  $\delta\varphi_0$

$$\Phi(2\pi) - \Phi(0) = \Phi_0 + \Phi_0 T_{00,3}\epsilon = \Phi_0 + \Phi_0 T_{00,3} \frac{\delta\varphi_0^2}{\beta}. \quad (6.10)$$

Die Funktion 6.10 ist in Abb. 6.5 in rot dargestellt. Die grüne Kurve ist das Ergebnis einer numerischen Integration der Bewegungsgleichungen, die mit den gemessenen Daten sehr gut übereinstimmt. Die Verringerung des Unterschieds zwischen Gl. 6.10 und der numerischen Rechnung würde die Berücksichtigung höherer Multipolkomponenten erfordern, deren Einarbeitung in Gl. 6.6 analytisch sehr aufwendig wäre.

Als Ergebnis bleibt festzuhalten, daß das lineare Modell für kleine Amplituden ( $< 1^\circ$ ) der Synchrotronschwingung sehr gut zur Beschreibung der Longitudinalbewegung geeignet ist, da der Sextupol nur quadratische Korrekturen und höher liefert.

## 6.4 Messung der Schwankungen der Endenergie am RTM3

Zur Erfassung von Schwankungen der Strahlenergie werden die Laufzeit-schwankungen des Strahls bei der letzten  $180^\circ$ -Ablenkung im RTM3 gemessen. In Abb. 6.6 sind die wichtigsten Komponenten der hierzu installierten Meßanordnung gezeigt.

Mit Hilfe eines Phasenmonitors auf der 90. Bahn und in der Extraktion können Laufzeitschwankungen in RTM3DIP2 mit einer Auflösung von bis zu 30 Femtosekunden gemessen werden [75]. In Abb. 6.7 ist der Verlauf der für die Lauflängenänderung relevanten Matrixelemente dargestellt. Neben Energieschwankungen tragen in geringerem Maße auch Orts- und Winkelablagen zu Laufzeitschwankungen bei.

Es bezeichne  $\delta\varphi_{90}$  bzw.  $\delta\varphi_E$  die Phasenabweichung eines Teilchens am Phasenmonitor auf der 90. Bahn bzw. in der Extraktion und sinngemäß  $x_{90}$ ,  $x'_{90}$  die horizontale Ablage in Ort und Richtung. Die Energieabweichung vom Sollteilchen ist  $\delta E_{90}$ .

Der Ausgang des Mixers liefert eine Spannung proportional zu  $\delta\varphi_E - \delta\varphi_{90}$ . Die Matrixrechnung (vgl. Abb. 6.7) liefert für die Standardeinstellung der

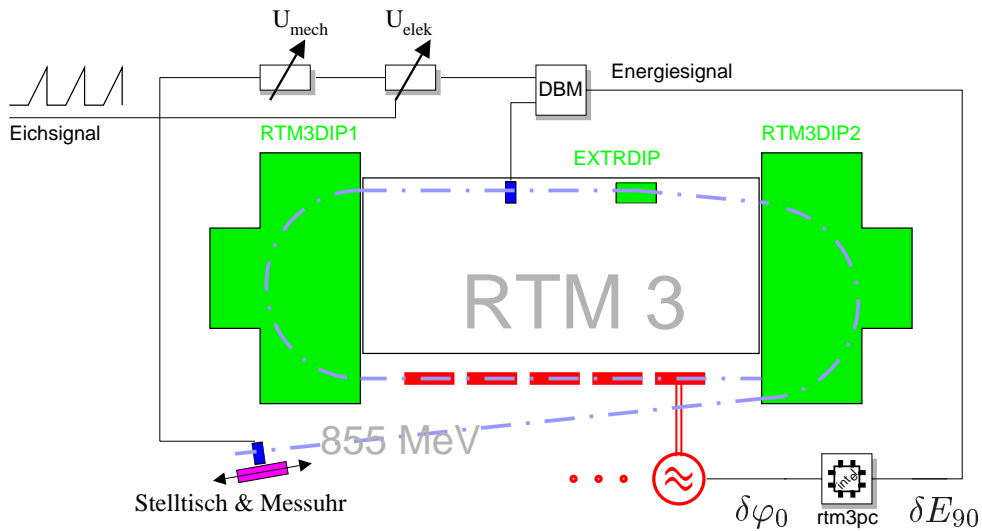


Abbildung 6.6: Schema des Aufbaus zur Messung, Kalibrierung und Korrektur der Schwankungen der RTM3 Endenergie.

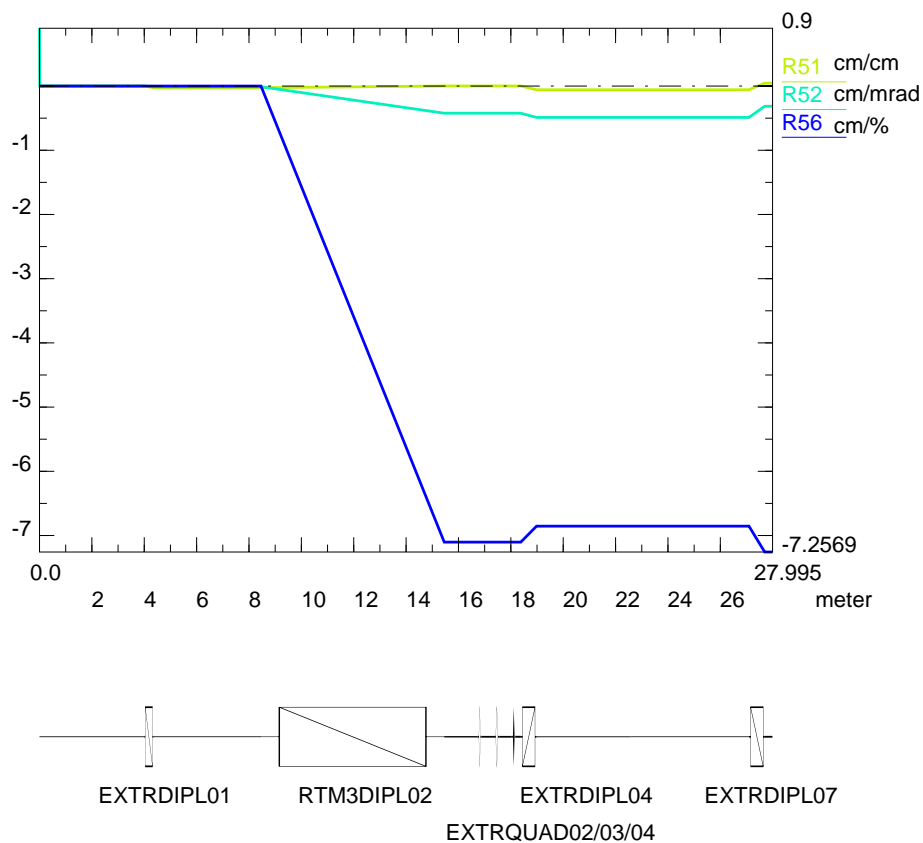


Abbildung 6.7: Strahl-optik der RTM3 Extraktion (TRANSPORT-Rechnung [2]) zwischen den beiden Phasenmonitoren zur Messung von Schwankungen der RTM3 Endenergie.

Strahlführungskomponenten folgenden Zusammenhang:

$$\delta\varphi_E - \delta\varphi_{90} = -2.4 \frac{1}{\text{m}} x_{90} + 168 x'_{90} + 0.44 \frac{\text{rad}}{\text{MeV}} \delta E_{90}. \quad (6.11)$$

Die Spannung am Mixerausgang kann auf einfache Weise mit Hilfe eines elektronischen Phasenschiebers kalibriert werden, der zuvor durch eine definierte Längsverschiebung des Phasenmonitors in der Extraktion geeicht wurde [76]. Die beiden ersten Terme auf der rechten Seite von Gl. 6.11 stellen den störenden Einfluß der Orts- und Richtungsschwankungen auf das Meßsignal dar. Die typischen Fluktuationen liegen kurzfristig (Minuten) bei etwa  $100\mu\text{m}$  bzw.  $1\mu\text{rad}$ . Damit begrenzen sie die Auflösung der Energiemessung auf etwa  $1\text{keV}$ .

Da das Ausgangssignal des Mixers von der Amplitude der Eingangsspannungen abhängt, ergibt sich weiterhin eine Abhängigkeit vom Strahlstrom  $I$ , die in Abb. 6.8 für die in dieser Arbeit verwendeten Strahlströme von  $3\mu\text{A}$  und  $20\mu\text{A}$  dargestellt ist. Dazu wurde die Strahlenergie mit einem konstanten Hub  $\Delta E$  moduliert und die Spannung  $\Delta U$  am Mixerausgang von einem ADC am rtm3pc für verschiedene Einstellungen von  $I$  gemessen.

Die Ausgangsspannung des Mixers ist proportional zum Produkt der beiden Eingangsspannungen. Demnach gilt für die gemessene Spannung  $\Delta U$ :

$$\Delta U = kI^2 \Delta E, \quad (6.12)$$

wobei  $k$  ein Proportionalitätsfaktor ist. Pro Meßkanal wird eine Spannung  $\delta u$  nachgewiesen. Die Zahl  $N$  der benutzten Meßkanäle ist daher

$$N = \frac{\Delta U}{\delta u} \quad (6.13)$$

und die Energie pro Meßkanal ist

$$\frac{\Delta E}{N} = \frac{\delta u}{kI^2}. \quad (6.14)$$

Die durchgezogenen Linien in Abb. 6.8 stammen aus einem  $I^{-2}$ -Fit an die Meßdaten und stimmen sehr gut mit ihnen überein. Der relative Meßfehler ist demnach

$$d\left(\frac{\Delta E}{N}\right) / \left(\frac{\Delta E}{N}\right) = -2 \frac{dI}{I}. \quad (6.15)$$

Dabei ergibt sich ein mittlerer Fehler von 2% in der Energiemessung bei einer für den Betrieb mit polarisierten Elektronen typischen Stromschwankung von 1%.

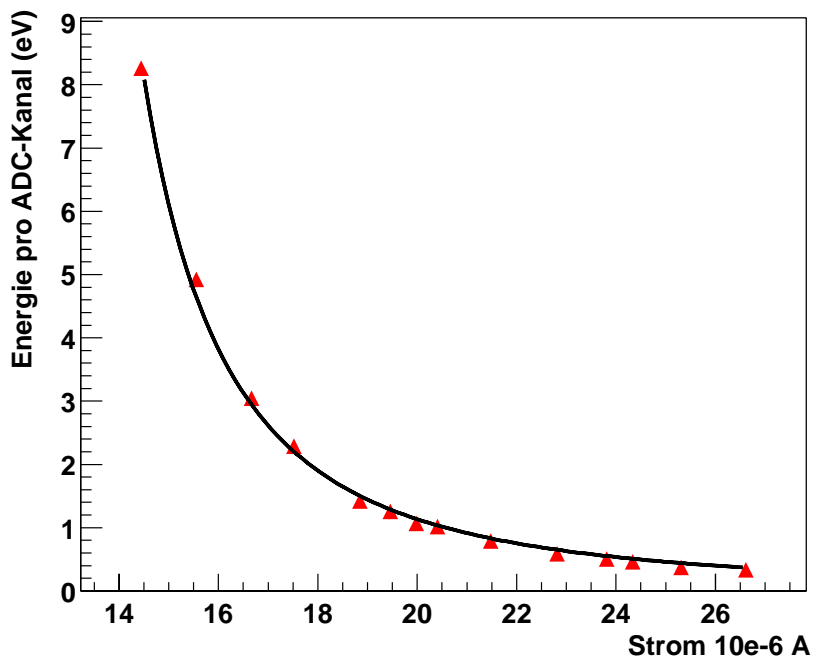
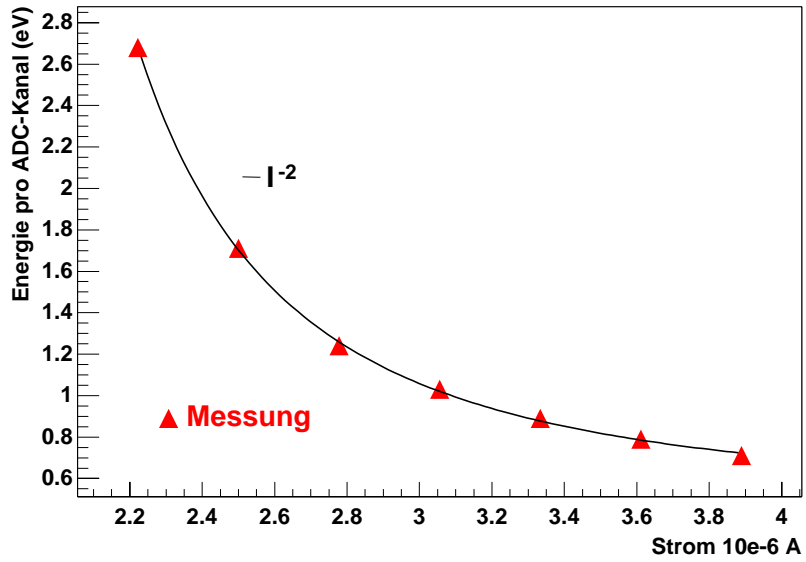


Abbildung 6.8: Stromabhängigkeit des Energiesignals am rtm3pc.

Die Koeffizienten für Ort und Richtung in Gl. 6.11 wurden experimentell überprüft. Die horizontale Strahlrichtung kann auf der 90. Bahn mit Hilfe eines geeichten Korrekturdipols (RTM3WEDL90first) periodisch variiert werden. Die dazu korrelierte Änderung des Energiesignals ergab einen Meßwert von 220 im Vergleich zu 168 in Gl. 6.11.

Für die Variation des Strahlorts auf der 90. Bahn wurde mit einem Korrekturdipol auf der 1. Rezirkulationsbahn (RTM3WEDL01first) eine horizontale Betatronschwingung erzeugt. Die Feldstärke von RTM3QUAD01 war dabei so eingestellt, daß nach dem in Kap. 4.3 verwendeten Beschleunigermodell auf der 90. Bahn eine reine Ortsablage vorhanden war. Die Auswertung der Korrelation zwischen der Amplitude der Betatronschwingung und des Energiesignals ergab einen Wert von  $-2.2/m$  im Vergleich zu  $-2.4/m$  in Gl. 6.11.

## 6.5 Automatische Optimierung der Longitudinaloptik von RTM1-RTM3

Die Durchführung der strahldynamischen Messungen an MAMI und der Betrieb für die Experimente erfordern häufig die exakte Grundeinstellung der Mikrotronkaskade. Zu diesem Zweck wurde eine Routine entwickelt, die die longitudinalen Sollparameter in allen drei Stufen automatisch einstellt. Sie benutzt zur Analyse der Longitudinalbewegung die Diagnosepulse.

Im nicht optimierten Zustand eines Mikrotrons wird Gl. 6.2 an die mit Hilfe von Diagnosepulsen gemessene Synchrotronschwingung angefügt. Anschließend wird durch einen Koeffizientenvergleich zwischen Gl. 6.2 und Gl. 6.1 die Energie- und Phasenablage der Elektronen am Eintritt des Mikrotrons berechnet.

Zur Korrektur der Phasenablage wird der Globalphasenschieber des Mikrotron-Linacs verwendet, der einen variablen Offset zwischen Linac-Phase und HF-Referenz einstellt. In dem Strahltransportsystem vor dem Mikrotron befindet sich jeweils eine HF-Sektion (im weiteren als Interface-Sektion bezeichnet), mit der die Strahlenergie am Einschub variiert werden kann.

Die Realisierung dieser Prozedur setzt die Eichung der gemessenen Amplitude der Synchrotronschwingung und der Amplitude der Interface-Sektion voraus. Nach einer „Glättung“ der Synchrotronschwingung von Hand mit Hilfe des Globalphasenschiebers und der Interface-Sektion wird zuerst die Amplitude der Synchrotronschwingung für verschiedene Einstellungen des Globalphasenschiebers gemessen. Der Globalphasenschieber wurde bereits beim Bau des Mikrotrons kalibriert. Damit ist auch die Amplitude der Synchro-

tronschwingung kalibriert, siehe Abb. 6.9.

Als nächstes wird die Amplitude der Synchrotronschwingung für verschiedene Einstellungen der Amplitude der Interface-Sektion gemessen. Aus der Amplitude der Synchrotronschwingung kann die durch die Interface-Sektion erzeugte Energieänderung wie folgt berechnet werden: da die Elektronen zwischen Interface-Sektion und Mikrotron-Linac i.A. dispersive Transportstrecken durchlaufen, lautet Gl. 6.1 unter Berücksichtigung der longitudinalen Laufstrecke zwischen Interface-Sektion und Mikrotron-Linac:

$$\begin{aligned} \delta\varphi_n = & \left( \delta\varphi_0 - \frac{2\pi\kappa}{\Delta E} \delta E_0 \right) \cos(n\Phi) + \\ & + \left( \left( \beta - \alpha \frac{2\pi\kappa}{\Delta E} \right) \delta E_0 + \alpha \delta\varphi_0 \right) \sin(n\Phi). \end{aligned} \quad (6.16)$$

Die Energieänderung durch die Interface-Sektion ist  $\delta E_0$ , der Phasenversatz durch den Globalphasenschieber ist  $\delta\varphi_0$  und die Amplitude der Phasenschwingung auf der Linac-Achse im  $n$ -ten Umlauf ist  $\delta\varphi_n$ . Der Faktor  $\kappa$  ist durch die longitudinale Laufstrecke zwischen Interface-Sektion und Mikrotron-Linac gegeben und beträgt am RTM3 und RTM1 etwa 1.0 und am RTM2 etwa 2.3. Die longitudinalen Twissparameter  $\beta$  und  $\alpha$  und der Solenergiegewinn  $\Delta E$  sind in Tabelle 3.2 angegeben. Bei der Kalibration der Interface-Sektion ist  $\delta\varphi_0 = 0$  und gesucht ist  $\delta E_0$ . Die Energieablage kann nun aus einem Fit von Gl. 6.2 an die gemessene Synchrotronschwingung und anschließendem Koeffizientenvergleich zwischen Gl. 6.2 und Gl. 6.16 bestimmt werden, siehe Abb. 6.10.

Für spätere Anwendungen sei an dieser Stelle noch die Eichung des Amplituden-Knopfs der Mikrotron-Linacs erwähnt. Hierzu wird eine Synchrotronschwingung mit Hilfe der Globalphase mit einer Amplitude von etwa  $1.0^\circ$  eingestellt und die Frequenz der Phasenschwingung, die ein direktes Maß für die Amplitude darstellt, in Abhängigkeit der Amplitudenanzeige gemessen, siehe Abb. 6.11.

Zur automatischen Korrektur der Energie- und Phasenablage wurde folgende Prozedur verwendet. Der Koeffizientenvergleich zwischen Gl. 6.2 und Gl. 6.16 kann als Gleichungssystem der Form

$$\begin{pmatrix} a \cos \rho \\ a \sin \rho \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta - \kappa \frac{2\pi}{\Delta E} \alpha \\ 1 & -\kappa \frac{2\pi}{\Delta E} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta\varphi_0 \\ \delta E_0 \end{pmatrix}. \quad (6.17)$$

formuliert werden. Für jedes Mikrotron werden zwei virtuelle Knöpfe (als Software-Routine zur simultanen Steuerung der Amplitude der Interface-Sektion und der Globalphase des Linacs) mit den Amplituden  $h_1$  und  $h_2$  definiert:

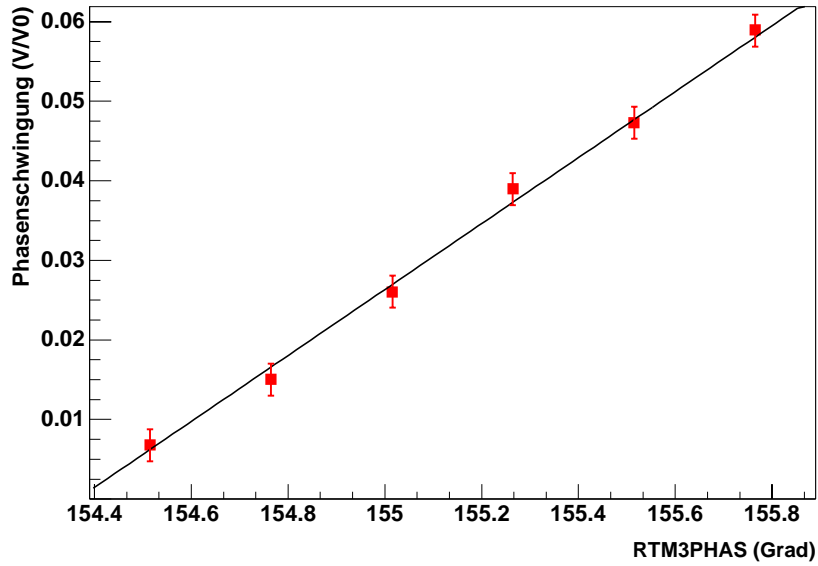


Abbildung 6.9: Amplitude der Synchrotronschwingung im RTM3 für verschiedene Einstellungen des Globalphasenschiebers am RTM3-Linac.

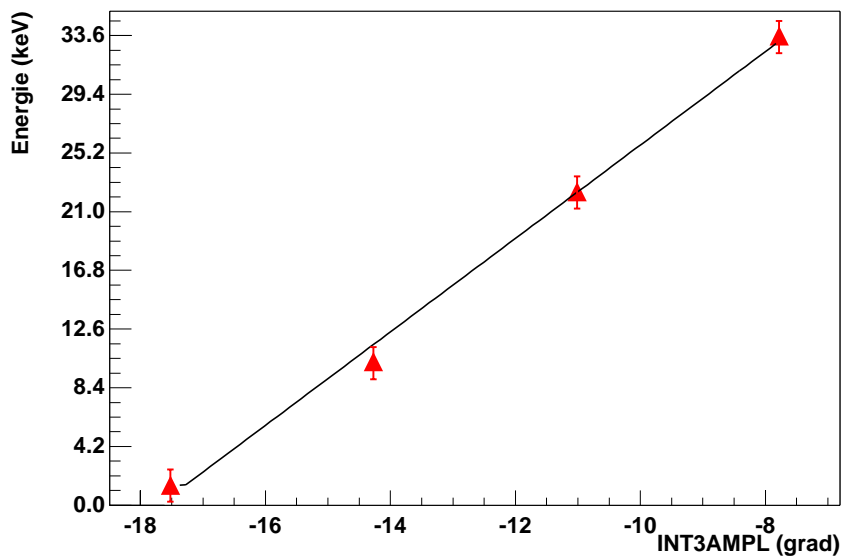


Abbildung 6.10: Energieablage bei der Injektion in den RTM3-Linac für verschiedene Einstellungen der Amplitude der Interface-Sektion vor dem RTM3.

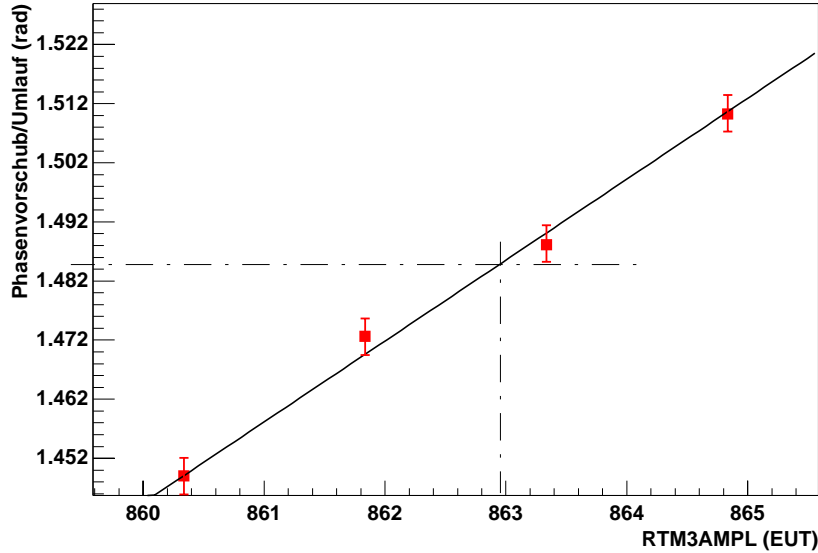


Abbildung 6.11: Phasenvorschub  $\Phi$  für verschiedene Einstellungen der Amplitude des RTM3-Linacs.

$$1. \text{ Knopf : } \begin{pmatrix} \delta\varphi \\ \delta E \end{pmatrix}_1 = h_1 \begin{pmatrix} \frac{1}{\beta} \frac{2\pi\kappa}{\Delta E} \\ \frac{1}{\beta} \end{pmatrix}$$

$$2. \text{ Knopf : } \begin{pmatrix} \delta\varphi \\ \delta E \end{pmatrix}_2 = h_2 \begin{pmatrix} 1 - \frac{\alpha}{\beta} \frac{2\pi\kappa}{\Delta E} \\ -\frac{\alpha}{\beta} \end{pmatrix}.$$

Der erste Knopf erzeugt nach Gl. 6.17 eine reine Sinus-Schwingung mit der Amplitude  $h_1$  und der zweite eine reine Cosinus-Schwingung der Amplitude  $h_2$ .

Aus einem Fit an die gemessene Synchrotronschwingung wird die Amplitude  $h_1$  des Sinus-Anteils und die Amplitude  $h_2$  des Cosinus-Anteils extrahiert und mit Hilfe der beiden Knöpfe korrigiert. In der Praxis hat sich gezeigt, daß durchschnittlich etwa 5-10 Iterationen notwendig sind. Dies liegt zum einen im RTM1 und RTM2 an der relativ geringen Auflösung bei der Bestimmung von  $\rho$  aus Gl. 6.2 (vgl. Tab. 6.1). Wenn zum anderen die Amplitude der Synchrotronschwingung in der Größenordnung von etwa  $0.2^\circ$  liegt, kann der Fit aufgrund der in Abb. 6.4 gezeigten unregelmäßigen Phasenschwankungen nicht mehr zuverlässig zwischen dem Cosinus- und Sinus-Anteil unterscheiden.

In Abb. 6.12 ist das Ergebnis eines Strahltests gezeigt, bei dem etwa

alle 5 Minuten aus einem Fit an die Synchrotronschwingungen im RTM1, RTM2 und RTM3 die Knopf-Amplituden  $h_1$  und  $h_2$  bestimmt wurden, um damit die Phasenablagen und Energieablagen zu korrigieren. Man erkennt im RTM1 und RTM3 eine korrigierte Phasenablage von insgesamt etwa  $0.4^\circ$  und eine korrigierte Energieablage von etwa 6 keV während einer Zeitspanne von 8-Std. Im RTM2 waren offenbar im Mittel keine Korrekturen nötig. Der asymptotische Charakter der Korrekturen deutet darauf hin, daß sich nach dem Schließen der Beschleunigerhallen allmählich eine deutlich stabilere Betriebstemperatur einstellt.

Nach Gl. 2.61 und 2.62 ist eine Abstandsänderung  $\delta l$  der beiden Umlenkendipole im Mikrotron mit folgender Änderung der Einschubenergie  $\delta E_0$  verknüpft:

$$\delta l = -\frac{1}{2} \frac{\delta E_0}{\Delta E} \lambda. \quad (6.18)$$

Mit  $l \approx 10$  m bedeutet dies im RTM3 nach den Messungen eine relative Vergrößerung des Dipolabstandes von etwa  $5 \cdot 10^{-6}$ . Dies ist mit der gleichzeitig beobachteten Phasenkorrektur konsistent, die bei einer Längenänderung von  $5 \cdot 10^{-6}$  der etwa 20 m langen HF-Referenzleitung zwischen dem RTM2 und RTM3 etwa  $0.4^\circ$  groß ist.

Nach Gl. 6.18 resultiert eine relative Längenänderung von  $5 \cdot 10^{-6}$  im RTM1 bzw. RTM2 in einer Änderung der Einschubenergie von etwa 0.03 keV bzw. 1.3 keV. Dies führt zu dem Schluß, daß die gemessene Energieablage am RTM1 im wesentlichen nur von der Elektronenkanone bzw. dem Injektorlinac stammen kann.

## 6.6 Messung der long. Eigenschaften der Transfersysteme zwischen den RTM's

Die Strahlführungssysteme zwischen RTM1 und RTM2 bzw. RTM2 und RTM3 sind so gebaut, daß die Eigenellipse vom RTM1 auf die Eigenellipse vom RTM2 bzw. RTM3 abgebildet wird. Ziel der folgenden Messung war die Überprüfung dieser Eigenschaft und die Beseitigung evtl. Fehleinstellungen.

In einem Strahltest wurden am Eintritt vom RTM1 mit Hilfe der Eichungen aus Kap. 6.5 Phasen- und Energieablagen auf der RTM1-Eigenellipse mit der Emittanz 0.52 mrad MeV erzeugt. Durch Auswertung der resultierenden Phasenschwingungen wurden die Phasen- und Energieablagen am Eintritt vom RTM2 bzw. RTM3 gemessen. Zur Verbesserung der Statistik wurden dann RTM1-Eigenellipsen mit Emittanzen zwischen 0 und 0.52 mrad MeV injiziert und unter Annahme eines linearen Verhaltens alle Messungen auf

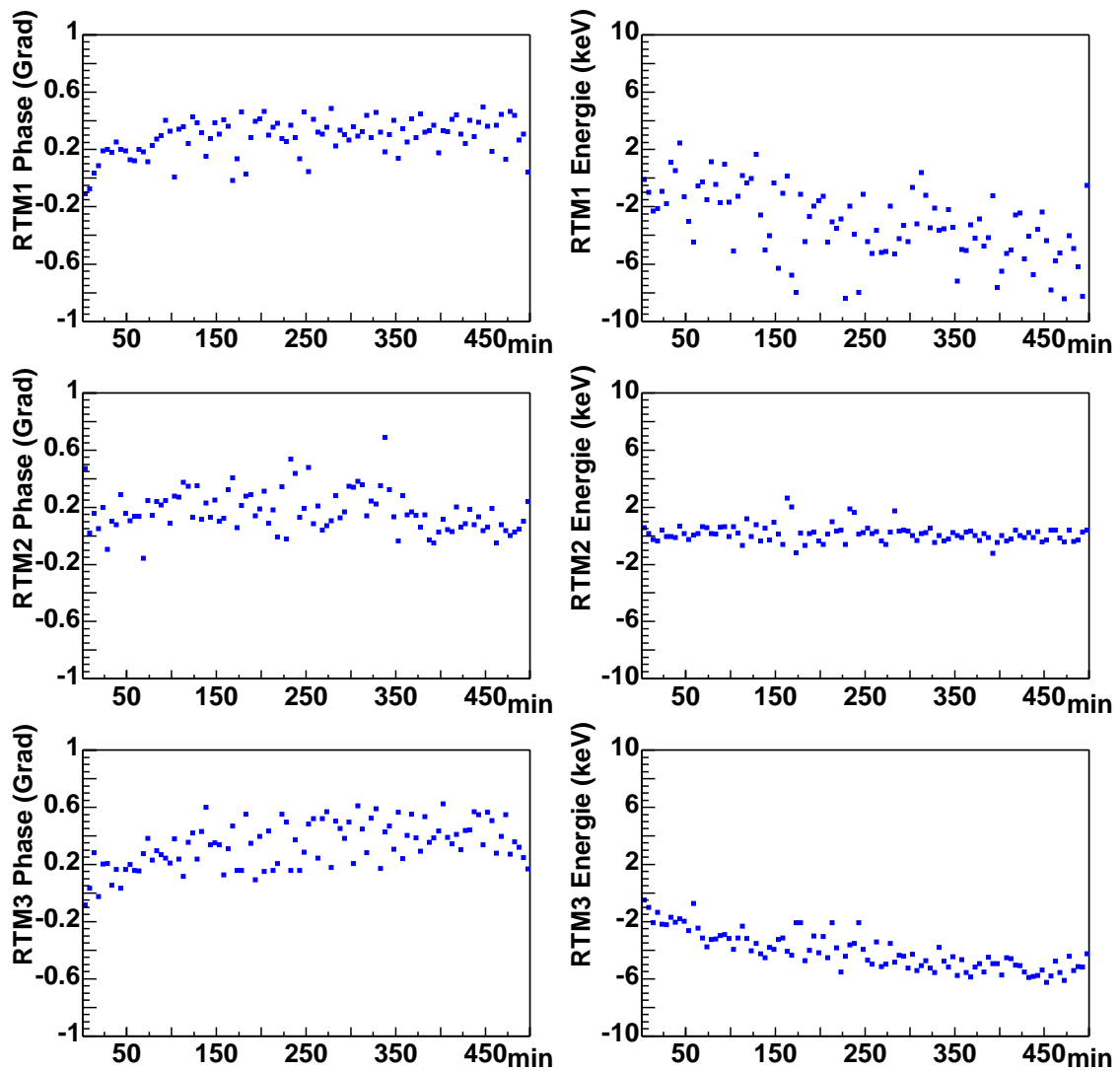


Abbildung 6.12: Korrektur der Einschußphase und Einschußenergie der drei Mikrotrone während eines 8-Std. Strahltests mit automatischer Optimierung hinsichtlich eines glatten Phasenverlaufs in den einzelnen Stufen.

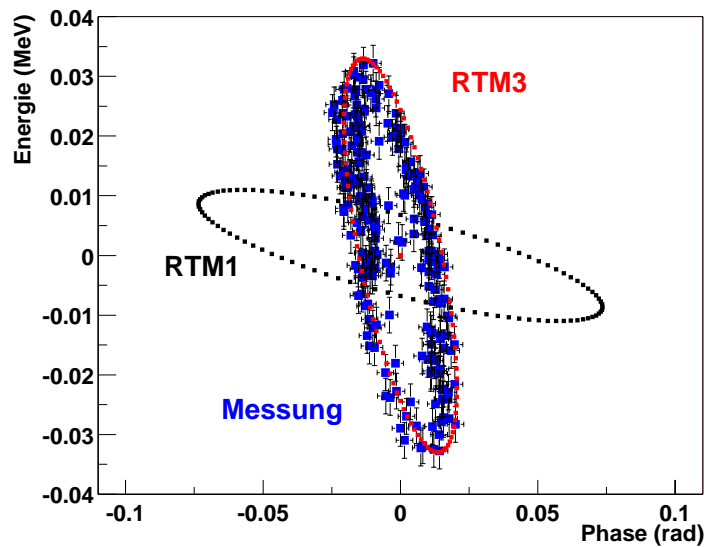
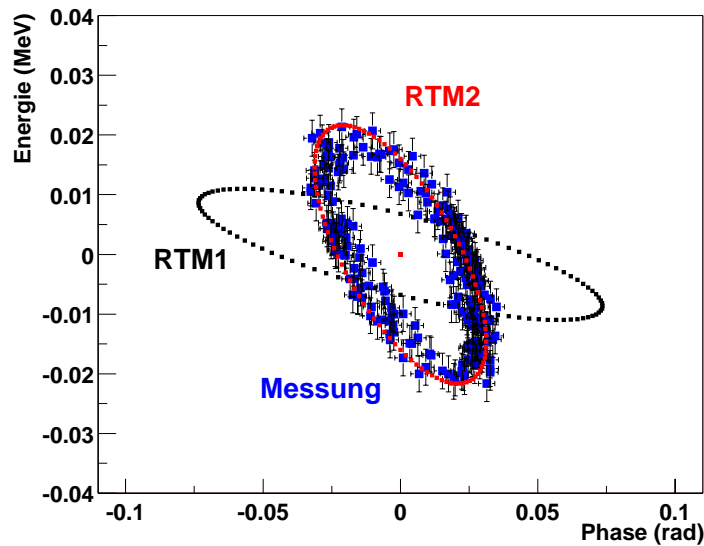


Abbildung 6.13: Gemessene Transformation der injizierten RTM1-Eigenellipse mit der Emittanz 0.52 mrad MeV (schwarz) zum Einschluß vom RTM2 (blau, oben) und RTM3 (blau, unten) und die Eigenellipsen vom RTM2 und RTM3 (rot).

die Emittanz 0.52 mrad MeV normiert. In Abb. 6.13 ist die gemessene Transformation dieser Eigenellipse vom RTM1 zum RTM2 und vom RTM1 zum RTM3 gezeigt. Im Rahmen der Meßgenauigkeit ist die Optik der Strahltransportsysteme zwischen RTM1 und RTM2 bzw. RTM2 und RTM3 richtig justiert.

## 6.7 Messung der Stabilität des longitudinalen $Q$ -Werts im RTM3

### 6.7.1 $Q$ -Wert Messung mit Diagnosepulsen

Wenn die Diagnosepulse bei kleiner konstanter SynchrotronSchwingungsamplitude ( $\approx 1^\circ$ ) kontinuierlich ausgewertet werden, kann damit die zeitliche Stabilität des Phasenvorschubs  $\Phi$  oder des  $Q$ -Werts

$$Q = \frac{\Phi}{2\pi} \quad (6.19)$$

beobachtet werden.

Nach den Design-Rechnungen für die HF-Regelung des Linacs am RTM3 und nach Messungen der HF-Amplitude an den Sektionssonden bei aktiver Regelung [52] sollte die HF-Amplitude eine Stabilität von kurzzeitig  $10^{-4}$  haben. Demnach dürften nach Gl. 3.17 die Schwankungen von  $\Phi$  nicht größer als  $\delta\Phi = 0.06^\circ$  sein.

In Abb. 6.14 ist das Ergebnis eines Strahltests im Frühjahr und im Sommer 2000 gezeigt. In beiden Tests lagen die Schwankungen von  $\Phi$  deutlich über obiger Vorhersage. Dies führte zu den Untersuchungen zum Einfluß der Schwankungen der HF-Phase in den Sektionen auf die mittlere HF-Amplitude, siehe Abschnitt 6.7.2, und zu den Messungen der mittleren HF-Amplitude in Abhängigkeit der Eintauchtiefe der Abstimmkolben an den HF-Sektionen, siehe Kap. 6.8.

### 6.7.2 Messung des $Q$ -Werts mit Hilfe der Korrelation zwischen Endenergie und Anfangsphase

Unabhängig von den Diagnosepulsen kann die Stabilität des  $Q$ -Werts am RTM3 geprüft werden, wenn die Korrelation  $\langle \delta E_{90}; \delta\varphi_0 \rangle$  zwischen der Energievariation am Austritt und der Phasenabweichung am Eintritt gemessen wird. Nach Gl. 3.4 und Gl. 3.17 gilt am RTM3:

$$\langle \delta E_{90}; \delta\varphi_0 \rangle = -37.9 \text{ (keV/}^\circ) \cdot \sin(90 \Phi). \quad (6.20)$$

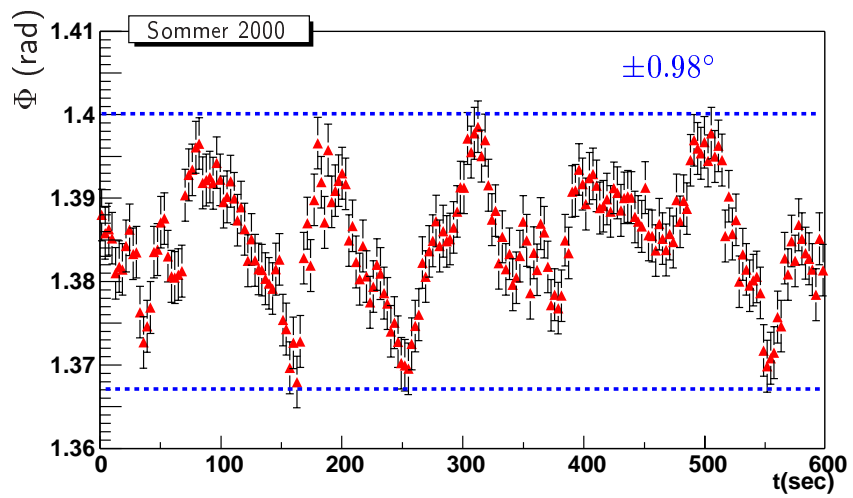
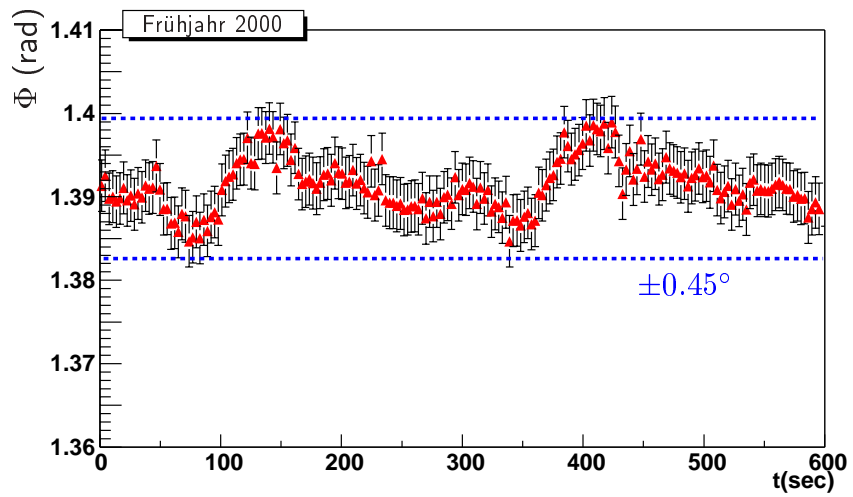


Abbildung 6.14: Messungen des Phasenvorschubs  $\Phi$  als Funktion der Zeit mit Diagnosepulsen im RTM3.

Der experimentelle Aufbau ist in Abb. 6.6 zu sehen. Der rtm3pc variiert die Eintrittsphase  $\delta\varphi_0$  sägezahnförmig und mißt korreliert dazu die Endenergieschwankungen. Zur Variation der Phase wird bei allen 5 Sektionen vom RTM3 ein Spannungsoffset an den PIN-Phasenschieber in der HF-Regelung angelegt, siehe [52]. Zur Eichung wurde der damit erzeugte Phasenversatz mit Hilfe der Autodyn-Phasenmessung [77] an jeder Sektion nachgemessen. Im Mittel beträgt sie  $0.21^\circ/\text{V}$ . Zur Energiemessung wird die in Kap. 6.4 vorgestellte Anordnung benutzt.

Die Sägezahnmodulation von  $\delta\varphi_0$  hatte in den Messungen eine Frequenz von 10 Hz. In Abb. 6.15 wurde die Korrelation 1 Sekunde lang aufgenommen. Die Steigung des Graphen ( $30 \text{ keV}/0.8^\circ$ ) stimmt sehr gut mit dem Maximalwert von Gl. 6.20 überein, d.h. in diesem Fall  $\Phi = 85.0^\circ$ . Aus der Änderung der Steigung können mit Hilfe von Gl. 6.20 Änderungen im Phasenverschub  $\Phi$  mit einer Genauigkeit von etwa  $0.2^\circ$  bestimmt werden.

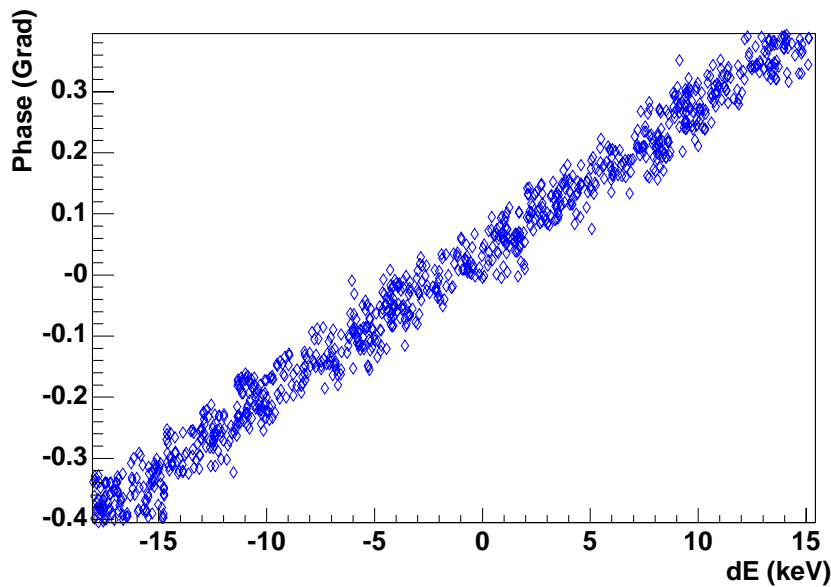


Abbildung 6.15: Messung der Korrelation zwischen  $\delta E_{90}$  und  $\delta\varphi_0$  am RTM3.

Mit dieser Meßanordnung wurde die Korrelation  $\langle \delta E_{90}; \delta\varphi_0 \rangle_k$  bei getrennter Variation der Phasen der einzelnen Sektionen ( $k=1, \dots, 5$ ) untersucht. Nach Gl. 3.25 sollten alle Korrelationen identisch und  $1/5$  des Gesamteffekts sein, wenn die Elektronen an jeder Sektion mit der gleichen Phasenlage beschleunigt werden.

Bei einem Strahltest wurden für die 5 Sektionen  $6 \text{ keV}/^\circ$ ,  $5 \text{ keV}/^\circ$ ,  $18 \text{ keV}/^\circ$ ,

4 keV/°, 5 keV/° mit einer Unsicherheit von 2 keV/° gemessen. Unter der Voraussetzung, daß die Amplituden der Sektionen alle identisch sind, folgt aus Gl. 3.23 z.B. bei der Variation von Sektion 3 um  $\delta\rho_3$ :

$$\delta\varphi_0 = -\delta\rho_3 \frac{\sin(\varphi_s + \rho_3)}{\sum_{k=1}^5 \sin(\varphi_s + \rho_k)} \quad (6.21)$$

und daher mit Gl. 6.20 für die gemessene Korrelation:

$$\langle \delta E_{90}; \delta\varphi_0 \rangle_3 = 2.17 \text{ (MeV/rad)} \frac{\sin(\varphi_s + \rho_3)}{\sum_{k=1}^5 \sin(\varphi_s + \rho_k)} \quad (6.22)$$

bei  $\sin(90\Phi) = 1$ . Auflösen von Gl. 6.22 nach  $\rho_3$  liefert

$$\rho_3 \approx - \left( 1 - \frac{5}{2.17} \frac{1}{\text{MeV}} \langle \delta E_{90}; \delta\varphi_0 \rangle_3 \right) \tan \varphi_s. \quad (6.23)$$

Mit der gemessenen Korrelation von 18 keV/° ergab sich damit ein statischer Phasenfehler  $\rho_3$  von 21°. Nach einer Überprüfung vor Ort wurde ein nachträglich eingebauter Richtkoppler in der Hohlleiterzuführung zur Sektion 3 entdeckt, der etwas länger als das ursprüngliche Zwischenstück war. Er wurde daraufhin entfernt.

## 6.8 Einfluß der Resonanzabstimmung der Linac-Sektionen auf die Stabilität des $Q$ -Werts in den RTM's

Ziel der in diesem Abschnitt vorgestellten strahldynamischen Untersuchungen war die Messung der Änderung der mittleren HF-Amplitude bei einer Änderung der Eintauchtiefe der Abstimmkolben an den HF-Sektionen und der Vergleich mit den Vorhersagen des Modells aus Kap. 3.1.2.

In einem Strahltest wurde die Eintauchtiefe der Abstimmkolben durch Ändern der Kühlwassertemperatur für die HF-Sektionen variiert. Der Zusammenhang ist etwa linear, nämlich 0.4 mm/°C [47]. Zur Bestimmung der Änderung von  $\Phi$  am RTM3 wurde der gleiche Meßaufbau wie in Abschnitt 6.7.2 benutzt. Mit Hilfe von Gl. 3.17 wurde daraus die Änderung in der mittleren HF-Amplitude berechnet.

In Abbildung 6.16 ist das Ergebnis der Messungen gezeigt. Dabei wurde im ersten Fall ein Abstimmkolben arretiert, während sie sich im zweiten Fall

nur parallel bewegen konnten. Der gemessene Zusammenhang zwischen relativer Amplitudenänderung und Änderung der Kühlwassertemperatur beträgt  $0.50\%/1^\circ\text{C}$  bzw.  $0.13\%/1^\circ\text{C}$ .

Bei typischen Schwankungen der Kühlwassertemperatur im Strahlbetrieb von  $0.2^\circ\text{C}$  ändert sich dabei die mittlere HF-Amplitude im ersten Fall um 1.0 Promille und im anderen Fall nur um 0.3 Promille.

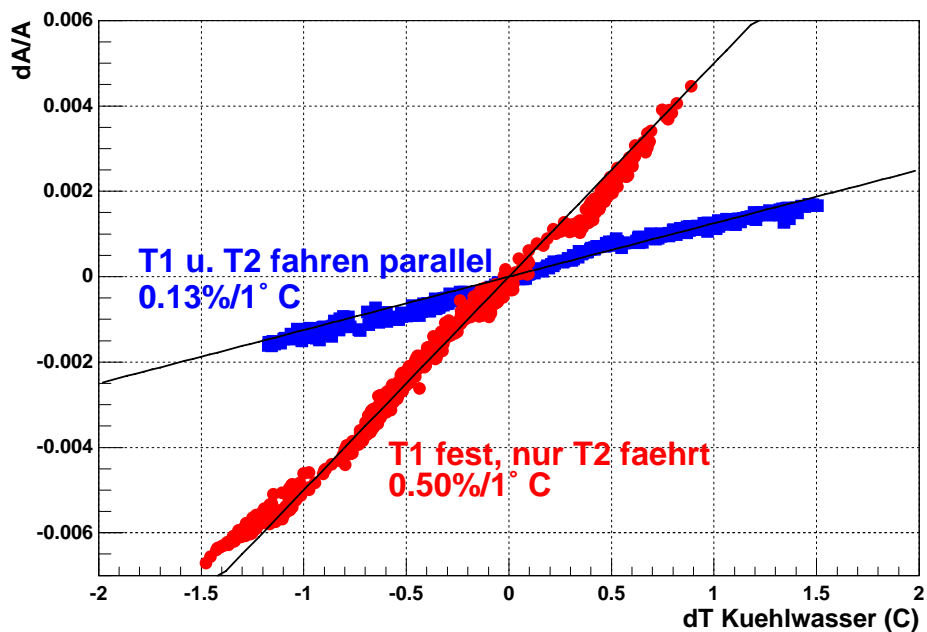


Abbildung 6.16: Relative mittlere Amplitudenänderung des RTM3-Linacs als Funktion der Kühlwassertemperatur, gemessen mit Hilfe der Korrelation zwischen Endenergie und Eintrittsphase.

Der Regelkreis zur Resonanzabstimmung der Sektionen bewegte bisher im Strahlbetrieb im wesentlichen nur einen Kolben und benutzte den zweiten lediglich zur Grobabstimmung. Durch Parallelschalten der Kolben konnte damit die durch ihre Positionsänderung bewirkte Änderung der mittleren HF-Amplitude um einen Faktor 4 verringert werden.

In Abb. 6.17 und Abb. 6.18 wurden obige Messungen mit Hilfe von Diagnosepulsen am RTM1, RTM2 und RTM3 wiederholt. Dabei war bereits am RTM3 und RTM2 die Parallelschaltung der Kolben eingeführt worden, während am RTM1 weiterhin nur ein Kolben die Feinabstimmung der Sektion übernahm. Für das RTM3 und RTM2 ergab sich übereinstimmend eine

Abhängigkeit von  $0.1\%/1^\circ\text{C}$  und für das RTM1  $0.4\%/1^\circ\text{C}$ . Die Abweichungen zur obigen Messung resultieren aus der geringeren Auflösung dieses Meßverfahrens.

Damit sind die Vorhersagen aus Tabelle 3.3 mit einer Genauigkeit von etwa 30% bestätigt. Dies ist unter Berücksichtigung des dort verwendeten äußerst einfachen Linac-Modells befriedigend.

Mit Hilfe dieser Eichmessungen wurde außerdem eine weitere Regelschleife im Kontrollsystem von MAMI integriert, die die HF-Amplitude am RTM3 bei einer Änderung der Eintauchtiefe der Kolben korrigiert. Die Position von Kolben 1 an der Sektion RTM3SEK1 wird mit einer Frequenz von 0.03 Hz ausgelesen, die Änderung in der mittleren HF-Amplitude nach obiger Eichung bestimmt und dann der Wert der RTM3-Linac Amplitude mit Hilfe der Kalibration aus Kap. 6.5 nachgestellt.

## 6.9 Test der Langzeitstabilität des $Q$ -Werts im RTM3

Alle bisher vorgestellten Verfahren zur Messung der Stabilität von  $\Phi$  setzen einen speziellen Betriebszustand (Diagnosepulse oder modulierte RTM3-Endenergie) voraus und können i.A. nicht während der kernphysikalischen Experimente angewandt werden. Im folgenden wird daher eine Methode vorgestellt, die die Kontrolle von  $\Phi$  mit Hilfe des Prinzips der Phasenfokussierung auch während des Strahlbetriebs erlaubt.

Der Phasenvorschub  $\Phi$  wird zu Beginn der Strahlzeit so eingestellt, daß die Korrelation  $\langle \delta E_{90}; \delta \varphi_0 \rangle$  maximal ist, also z.B.

$$\sin(N\Phi) = -1. \quad (6.24)$$

Im RTM3 mit  $N = 90$  bietet sich die Wahl von  $\Phi = -85^\circ$  bei  $\varphi_s = -16.21^\circ$  an.

Wenn in der Extraktion vom RTM3 der Strahl eine Energieablage und eine Phasenablage ( $\delta\varphi_{90}, \delta E_{90}$ ) besitzt, dann kann nach Gl. 3.4 die Energieablage mit einer zusätzlichen Korrekturphase  $\delta\varphi_k$  am Eintritt

$$\delta\varphi_k = -\frac{\beta}{1 + \alpha^2} \delta E_{90} \quad (6.25)$$

beseitigt werden. Diese Rückkopplung funktioniert solange, bis durch eine Drift in  $\Phi$  die sin-Funktion in Gl. 6.24 Null wird oder ihr Vorzeichen ändert. In letzterem Fall würde aus der Rückkopplung eine Mitkopplung werden

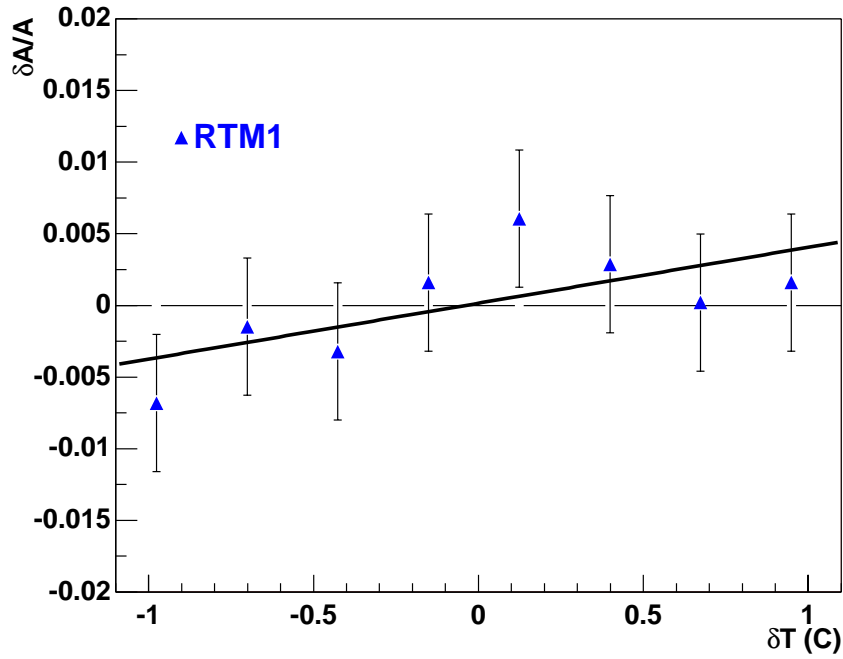


Abbildung 6.17: Relative Amplitudenänderung des RTM1-Linacs als Funktion der Kühlwassertemperatur, gemessen mit Hilfe von Diagnosepulsen.

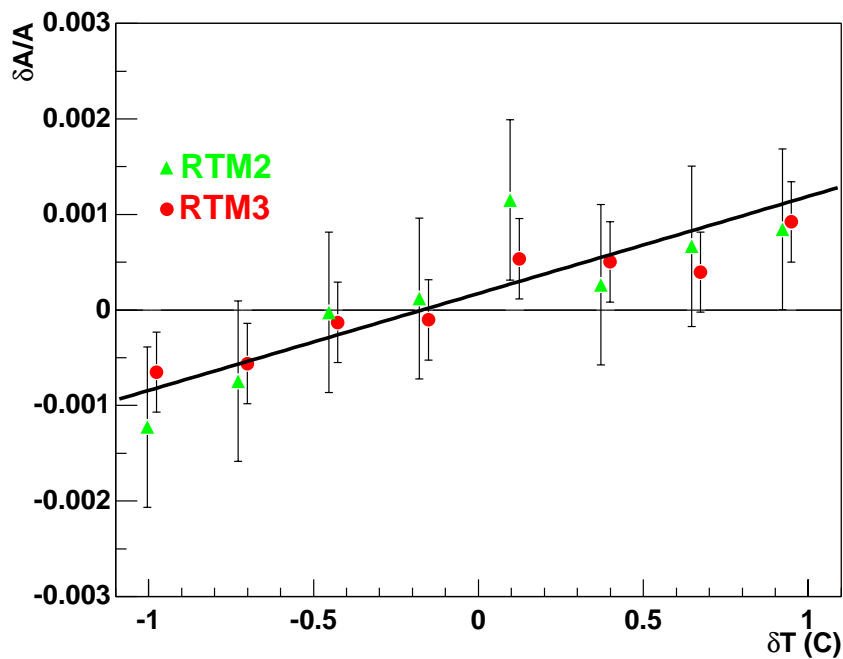


Abbildung 6.18: Relative Amplitudenänderung des RTM2- und RTM3-Linacs als Funktion der Kühlwassertemperatur, gemessen mit Hilfe von Diagnosepulsen.

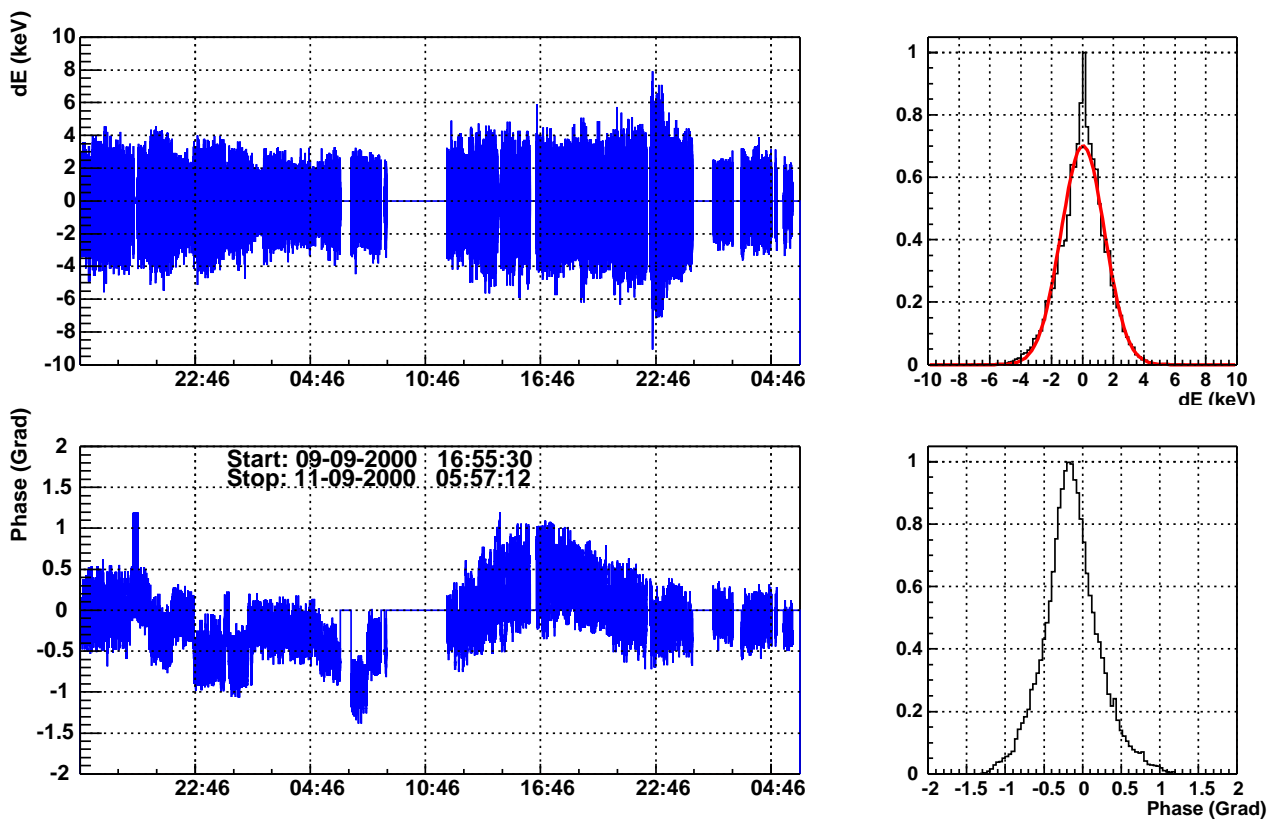


Abbildung 6.19: Endenergieschwankungen und Phasenkorrekturen am RTM3 bei aktiver Rückkopplung (die leeren Bereiche sind Unterbrechungen des Experiments).

und die Endenergie würde destabilisiert werden. Dieses Ereignis markiert die durch dieses Verfahren meßbare Änderung im Phasenvorschub.

Der aktuelle Phasenvorschub  $\Phi'$  ist beim Übergang von der Rückkopplung zur Mitkopplung im RTM3 durch

$$\sin(90 \Phi') = 0 \quad (6.26)$$

gekennzeichnet, also

$$|\Phi' - \Phi| = 1^\circ. \quad (6.27)$$

Dies ist nach Gl. 3.17 mit einer Schwankung der mittleren HF-Amplitude von 1.5 Promille äquivalent.

Der Aufbau der Rückkopplung ist identisch wie in Kap. 6.7.2 zur Korrelationsmessung. Der rtm3pc mißt während des Strahlbetriebs die Endenergieschwankungen und erzeugt eine Korrekturphase gemäß Gl. 6.25. Als Regelalgorithmus wurde eine digitale I-Regelung benutzt (1 kHz Abtast- und Korrekturrate), vgl. [78, 79].

Abbildung 6.19 zeigt das stabilisierte Energiesignal und die Phasenkorrekturen während des Experimentierbetriebs über 24 Std. Dabei waren die Kolbenbewegung der Linac-Sektionen und die Phasenlagen der Sektionen bereits nach Kap. 6.7.2 und 6.8 optimiert. Das Energiesignal hat dabei eine  $\sigma$ -Breite von etwa 2 keV. Die Korrekturphasen liegen unterhalb von  $1^\circ$ . Daraus resultiert eine mittlere Drift von  $\Phi$  von kleiner als  $0.04^\circ/\text{h}$  bzw. eine mittlere HF-Amplitudenstabilität von besser als  $10^{-4}$ .

Die beobachtete Langzeitstabilität ermöglicht es, die beschriebene Rückkopplung als Energiestabilisierung [80] (vgl. Anhang A) einzusetzen. Sie kann erfahrungsgemäß etwa 24 Std. lang ohne Eingriff durch den Operateur betrieben werden. Sie wurde Anfang 2001 in den Routinebetrieb integriert und wird seither für die Experimente der A4-Kollaboration zur paritätsverletzenden Elektronenstreuung am Proton benutzt.

# Kapitel 7

## Zusammenfassung

In der vorliegenden Arbeit wurden die Transversalbewegung und die Longitudinalbewegung im Mikrotron mit Hilfe strahldynamischer Untersuchungen an MAMI B studiert. Der Vergleich der Vorhersagen des Mikrotron-Modells mit den Meßdaten führte zu einer weiteren Verbesserung der Strahlqualität. Ferner konnten die hierbei gewonnenen Erkenntnisse und Erfahrungen direkt in den Bau und die Planung vom HDSM einfließen.

Zum einen wurde ein Meßverfahren entwickelt, um die transversalen Transfermatrizen als Funktion des Umlaufs im RTM2 und RTM3 zu bestimmen. Zur Anpassung des Mikrotron-Modells an die Meßdaten wurde die Theorie des Mikrotrons in Form einer Störungstheorie erweitert. Sie erlaubt in einfacher Weise den Einfluß von superponierten Dipol- und Quadrupolfehlern in den Strahlführungselementen zu berücksichtigen. Der Vergleich der transversalen Transfermatrizen mit dem Mikrotron-Modell führte zu dem Ergebnis, daß in den  $180^\circ$ -Dipolen das Magnetfeld antisymmetrische Komponenten besitzt, die mit den bisher verwendeten symmetrischen Korrekturspulen nicht korrigiert werden können. Als Konsequenz wurde ein Verfahren zur Identifizierung und Korrektur von antisymmetrischen Feldfehlern in den Dipolen entwickelt und die experimentelle Realisierbarkeit mit Hilfe von Simulationsrechnungen an den  $90^\circ$ -HDSM Dipolen demonstriert.

Zum anderen wurden hochpräzise Meßmethoden zur Überprüfung der Stabilität der Longitudinaloptik entwickelt. Mit ihrer Hilfe war es möglich, den Einfluß der Schwankungen der HF-Phase in den einzelnen Linac-Sektionen und den Einfluß der Temperaturschwankungen des Kühlwassers auf die mittlere HF-Amplitude des Linacs unter Strahlbedingungen zu messen. Dies führte bei MAMI B zu einer Optimierung der Regelung zur Resonanzabstimmung der Sektionen und am HDSM zu einer Optimierung der Position der Abstimmkolben an den Sektionen hinsichtlich eines geringeren Einflusses auf

die mittlere HF-Amplitude.

Als Anwendung der entwickelten Meßverfahren konnte ein PC gestütztes System zur Verfügung gestellt werden, das die Schwankungen der Endenergie vom RTM3 auf etwa  $\pm 1$  keV reduziert. Dies kam insbesondere der A4-Kollaboration bei ihrem Experiment zur paritätsverletzenden Elektronenstreuung am Proton zu Gute. Bei 855 MeV Strahlenergie wird eine Stabilität von etwa  $10^{-6}$  erreicht.

# Anhang A

## Veröffentlichungen

- M. Seidl, H. Euteneuer, K.-H. Kaiser, W. Klag, H.-J. Kreidel, F. Maas, J. Röthgen, G. Stephan, High Precision Beam Energy Stabilisation of the Mainz Microtron MAMI, Proc. EPAC2000, p.1930 .
- M. Seidl, Perturbation treatment of linear beam optics of combined function magnets, Phys. Rev. ST Accel. Beams 5, 064001 (2002) .
- M. Seidl, Identification and correction of antisymmetric field components in combined function magnets, Phys. Rev. ST Accel. Beams 5, 062402 (2002) .

# High Precision Beam Energy Stabilisation of the Mainz Microtron MAMI\*

M. Seidl, H. Euteneuer, K.-H. Kaiser, W. Klag, H.-J. Kreidel, F. Maas,  
J. Röthgen, G. Stephan, IKPH Mainz University, Germany

## Abstract

To satisfy the demands of the parity violation experiment at MAMI, the energy of the 855 MeV c.w. electron beam delivered by three cascaded racetrack microtrons (RTM1-3) has to be stabilized to about  $10^{-6}$ . For this purpose a fast and a slow feedback loop has been installed. Provided that the longitudinal tune is well adjusted, the fast loop eliminates output energy deviations by acting on the RF-phase of RTM3. The slow loop stabilizes the online measured tune of this last stage by small changes of the RTM3 linac amplitude. To get the beam energy and the tune with the necessary accuracy, two features unique to an RTM are exploited, namely the large longitudinal dispersion of the  $180^\circ$  bending magnets and the large number of recirculations. In this paper the principal setup of the high precision beam energy stabilisation is shown and first results are presented.

## 1 INTRODUCTION

The Mainz Microtron MAMI [1] consists of three cascaded racetrack microtrons (RTM1-3) delivering an 855 MeV c.w. beam of both polarized and unpolarized electrons (cf. Fig. 1). Using normal conducting accelerating structures [2], the RTM3 linac for example provides an energy gain of 7.5 MeV, resulting in a total number of 90 recirculations. The RF-feedback [3] for one individual accelerating section is made up of three loops. The first one stabilizes the mean RF-amplitude, the second one locks the phase of the klystron output to the RF-master frequency and the third one tunes the resonance frequency of the whole section (cf. Fig. 2). Typical short term energy drifts of the 855 MeV beam are in the order of  $10^{-5}$ . But to determine the contribution of the strange quarks to the vector form-factor of the nucleon with the planned precision, the parity violation experiment [4] demands an energy stability of about  $10^{-6}$ . Taking advantage of the large longitudinal dispersion of the  $180^\circ$  bending magnets, a time-of-flight method [5] resolves output energy deviations with an accuracy of about 1 keV. The resolution is limited because fluctuations of the slope of the particles' trajectory contribute on the same level to the energy signal. The longitudinal tune of the RTMs is measured with the help of short and intense pulses superimposed on the c.w. beam (diagnostic pulse). A phase sensitive cavity on the linac axis then reveals the phase oscillation of the bunch centre (cf. Fig. 3).

\* Work supported by DFG (Graduiertenkolleg "Physik und Technik von Beschleunigern")

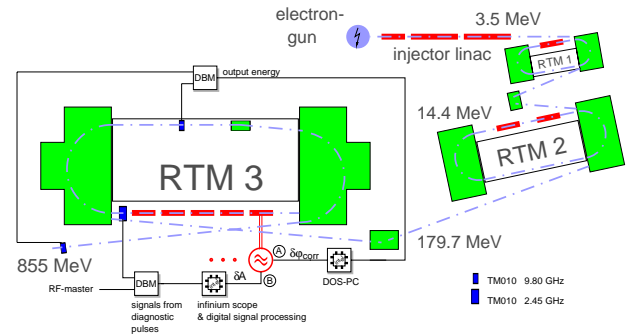


Figure 1: The Mainz Microtron cascade. Ⓐ: fast feedback loop. Ⓑ: slow feedback loop.

## 2 OPERATION PRINCIPLE

The injection into RTM3 guides the electron bunches parallel to the first recirculation path. A small phase and energy deviation  $\vec{x}_0^T = (\delta\varphi(0), \delta E(0))$  from the reference particle in the middle of the recirculation region is assumed. Considering only linear terms and relativistic energies, the transformation [6] becomes

$$\vec{x}_n = M_n \vec{x}_0; M_n = \begin{pmatrix} \cos(n\Phi) & \beta \sin(n\Phi) \\ -\frac{1}{\beta} \sin(n\Phi) & \cos(n\Phi) \end{pmatrix} \quad (1)$$

for  $n$  full recirculations. Typical values are 0.43 rad/MeV for the longitudinal  $\beta$ -function and  $\Phi = 85^\circ$  for the phase advance in RTM3 ( $n \leq 90$ ). The tune is defined as  $\Phi/2\pi$ .

To compensate for errors  $\delta E_{err}$  of the output energy a fast feedback loop changes the input phase according to eq. 1 by an amount  $\delta\varphi(0)$  such that

$$\delta E(90) = -\frac{1}{\beta} \sin(90\Phi) \delta\varphi(0) + \delta E_{err} = 0. \quad (2)$$

The necessary phase shifts  $\delta\varphi(0)$  are realized by offsetting the phase of the RTM3 linac. To keep them as small as possible, we have chosen

$$\sin(90\Phi) = 1. \quad (3)$$

Hence the fast feedback is satisfied, if  $\Phi = 85^\circ$ , because  $90 \cdot 85^\circ = 21 \cdot 360^\circ + 90^\circ$ .

Given the amplitude  $A$  of the linac, its length  $L$  and the energy  $\Delta E$  the electrons gain, it follows from microtron theory [6], that

$$\cos \Phi = 1 - \pi \sqrt{\left(\frac{eLA}{\Delta E}\right)^2 - 1}. \quad (4)$$

The resonance condition of the microtron relates the magnetic field  $B$  of the main dipoles and the RF-wavelength  $\lambda$  to the energy gain:

$$\Delta E = \frac{\lambda e c B}{2\pi}. \quad (5)$$

Calculating the total differential of the function  $\Phi(A, B, \lambda)$  results in the following equation for RTM3:

$$\delta\Phi = -681.8^\circ \cdot \left( \frac{\delta A}{A} - \frac{\delta B}{B} - \frac{\delta\lambda}{\lambda} \right). \quad (6)$$

The magnetic field  $B$  and the wavelength  $\lambda$  are stabilized to about  $10^{-6}$  by means of a NMR probe and a quartz oscillator, respectively. The most volatile parameter is the linac amplitude which in the scale of minutes fluctuates in the order of  $10^{-3}$ . A  $1.5 \cdot 10^{-3}$  change results in an unacceptable change of  $90^\circ$  of the phase function at the output of RTM3. Therefore, a slow feedback loop is needed to measure the tune of RTM3 and to apply a correction to the RTM3 linac amplitude to satisfy eq. 3.

### 3 IMPLEMENTATION

We have installed both loops as digital feedback loops due to the greater flexibility in improving the control algorithm. In a preliminary setup the fast loop consists of an interrupt driven DOS-PC which digitizes the energy signal and off-sets the linac phase according to eq. 2. Technically this is achieved by simultaneously shifting the phases in the RF-circuits of all five klystrons (input A in Fig. 2). Up to now we use the fast feedback at 100 Hz.

The slow feedback is realized with the help of diagnostic pulses. They are periodically injected into the cascade. The reference particle intentionally performs a phase oscillation of about  $1^\circ$  in RTM3 so that the tune can be measured at any time. The RTM3 linac amplitude is then corrected according to eq. 6. The digitalisation of the phase signals from the diagnostic pulses is done by an 8GSa/s HP-infinium scope. Due to the large number of recirculations in RTM3 it is possible to measure  $\Phi$  to about  $\pm 0.3^\circ$  which determines the product  $90\Phi$  better than  $\pm 27^\circ$ . The slow loop usually works at 0.2 Hz.

Both the DOS-PC and the scope are connected via Ethernet and GBIB to another PC which is integrated into the MAMI control system and provides the operator-interface of the energy stabilisation.

### 4 RESULTS

In a first test the fast loop digitized the energy at a rate of 1 kHz and averaged over 10 samples, applying a correction every 10 ms. As shown by the histograms in Fig. 4, both at  $2.5\mu\text{A}$  and  $20\mu\text{A}$ , which is the design current for the parity violation experiment, the stabilized output energy has a sigma-width of about 1.4 keV.

In Fig. 5 the stabilized energy, the action of the fast loop and the online measured tune are shown under favourable

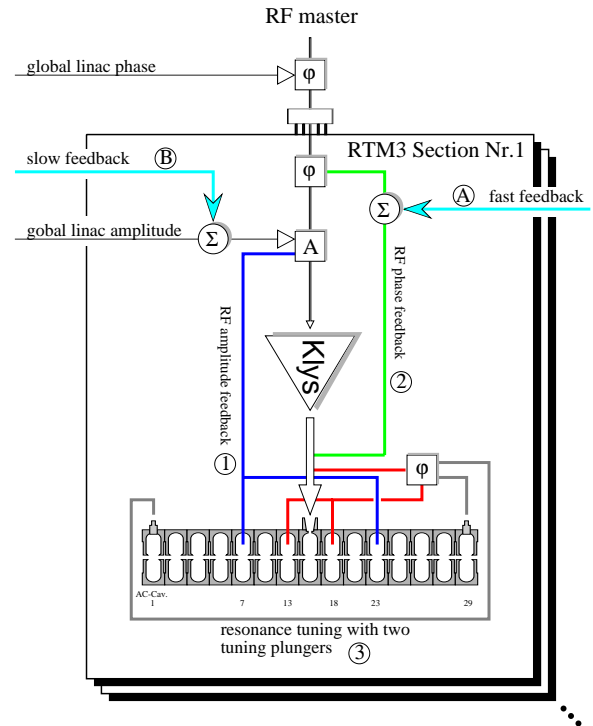


Figure 2: RF-feedback of RTM3. For clarity neither all 5 accelerating sections nor all 29 AC-cavities of a section are shown.

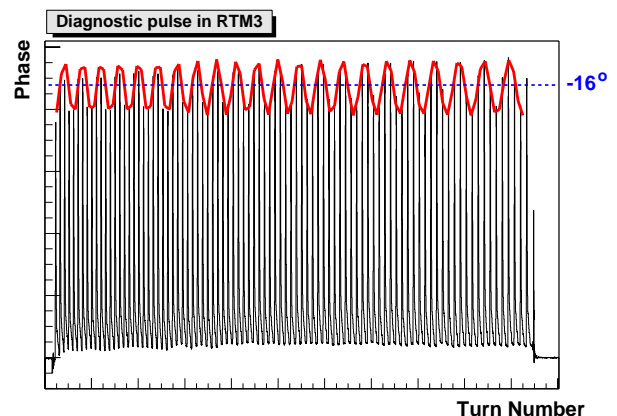


Figure 3: Phase oscillation in RTM3. The frequency of the amplitude modulation of the signals is proportional to the tune.

conditions, i.e. the tune is stable enough that no action of the slow loop was necessary. The dotted lines mark the region wherein  $\sin(90\Phi)$  does not fall below 0.5. Thus in this example the overall linac amplitude has been stable on the  $1 \cdot 10^{-3}$  level for about one hour. Since the presence of the diagnostic pulses has some disadvantages for the parity violation experiment, we made some extensive tests to find out how long one can do without the slow loop. It emerged that the adjusted tune is sometimes stable for several hours and sometimes does not last 5 minutes long. As

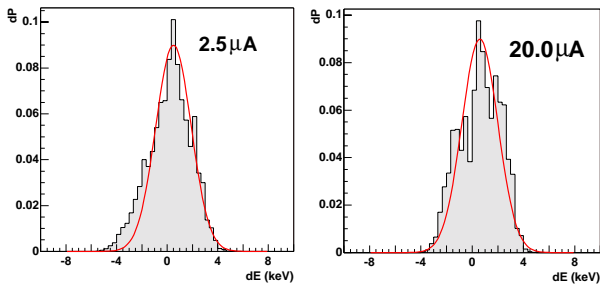


Figure 4: Histogram of the stabilized output energy sampled at 500 Hz over a period of 50 seconds.

pointed out in section 2 only a change of the linac amplitude can be responsible for this. On the one hand the RF amplitude feedback circuit (see ① in Fig. 2) itself is stable in the order of  $10^{-4}$ , which can't explain the observed behaviour. On the other hand we suspect that the movement of the tuning plungers changes the RF distribution in the linac sections in such a manner, that the field-probes no longer sense the mean value of the overall field.

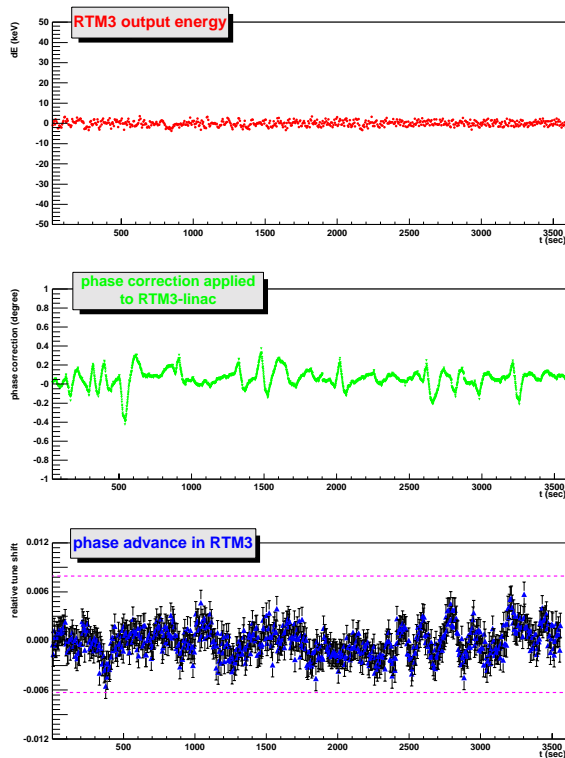


Figure 5: Both loops in action at  $2.5 \mu A$  under favourable conditions, i.e. the longitudinal tune does not demand any correction of the linac amplitude.

## 5 CONCLUSION

We have shown that it is possible to improve the short term energy stability by a factor of about 10 with the help of a fast feedback loop, provided that the longitudinal tune is

well adjusted. The fast loop was tested up to a beam current of  $20 \mu A$ , which fulfills the requirements of the parity violation experiment. The slow loop was successfully tested at  $2.5 \mu A$ . A test at high currents will be conducted in the near future. Here, the enhanced noise level from intensity fluctuations of the c.w. beam makes it more difficult to extract the tune from the signals of the diagnostic pulses. A further objective will be to understand the reason for the sometimes larger than expected tune shifts. In order to check if a change of the RF-distribution in the accelerating sections is responsible, we will measure the temperature of the cooling water and the movement of the tuning plungers in correlation with the tune of RTM3. In case of clear and reproduceable correlations, the position of the tuning plungers will be used to calculate a correction value for the overall RTM3 linac amplitude. We hope that this will make it possible to omit the diagnostic pulses, which would be the preferred solution for the parity violation experiment.

## REFERENCES

- [1] H. Herminghaus et al., First Operation of the 850 MeV c.w. Electron Accelerator MAMI, Proc. 1990 Linear Acc. Conf., p.362
- [2] H. Euteneuer, H. Schöler, Experiences in Fabricating and Testing the RF-Sections of the Mainz Microtron, SLAC Report-303, p.508
- [3] G. Stephan, Überlegungen zur Regelung der Amplitude und Phase der Klystrons TH 2075 an MAMI, MAMI internal report 02/94
- [4] Mainz Proposal A4/1-93, D. von Harrach spokesperson, F. Maas contact.
- [5] K.-H. Kaiser et al., New Installations and Beam Measurements at MAMI, Proc. EPAC98, p.523.
- [6] R.E. Rand, Recirculating electron accelerators, Harwood Academic Publishers, OPA, Amsterdam 1984

## Perturbation treatment of linear beam optics of combined function magnets

M. Seidl\*

*Institut für Kernphysik, Universität Mainz, D-55099 Mainz, Germany*

(Received 23 October 2001; published 12 June 2002)

In this paper, a perturbation theory is developed for calculating the 6D transfer matrix of a combined function magnet. Starting from the linear part of the Hamiltonian, the transfer matrix  $M$  is decomposed into an infinite sum over matrices  $M_n$ , which represent an  $n$ -fold interaction of the beam with the quadrupole content of the magnet. Given the magnetic field in the vicinity of the reference path, each matrix  $M_n$  can be calculated either analytically or by numerical integration. As an example, the transfer matrix is calculated of the  $90^\circ$  bending magnet of the double sided microtron HDSM at the MAMI-C electron scattering facility, which so far has been possible only by means of particle tracking.

DOI: 10.1103/PhysRevSTAB.5.064001

PACS numbers: 29.20.-c, 41.85.Lc

### I. INTRODUCTION

Particle tracking [1,2] and power series tracking [3] are two widely used tools for investigating the beam dynamics of combined function magnets. For general purpose fields, both approaches use sophisticated techniques to integrate the equation of motion, e.g., high-order Runge Kutta [4] integrators or differential algebra [5] integrators. Only in very rare cases can these integrators calculate the map between the initial and final coordinates in one step. Usually the transformations of several steps are concatenated. For example, a very rough estimate of the transfer matrix  $M$  of a combined function magnet is obtained by writing  $M$  as a product of matrices  $M_c \cdot M_b \cdot M_a$ , where  $M_b$  is the transfer matrix of a uniform-field sector dipole, and  $M_a$  and  $M_c$ , respectively, represent the entrance and exit fringe fields [6]. The disadvantage of this approach is that one must completely recalculate the map if, for example, the accuracy of the model is refined, or if the magnetic field is modified. For such advanced combined function magnets as the  $90^\circ$  bending magnets of the double sided microtron HDSM at MAMI-C (cf. Sec. IV), the map typically has to be calculated for several thousand different field profiles when designing the magnet. Only modest accuracy in accordance with manufacturing tolerance is required for  $M$ . Here perturbation theory offers several advantages. Most importantly, the maps for different field profiles can be derived in a systematic manner from a reference map, thereby reducing calculation time. Moreover, perturbation theory offers a clear physical picture of what kind of interactions dominate the particle motion and what kind of interactions can be neglected in practice.

In the following, the linear beam dynamics of a combined function magnet will be considered. In Sec. II, it will be shown that  $M$  can be expressed as an infinite sum over matrices  $M_n$ , which amounts to a perturbative solu-

tion of the Hamiltonian equation of motion. The matrices  $M_n$  successively increase the accuracy of  $M$  by an order of magnitude and can be calculated analytically or by numerical integration, given the magnetic field in the vicinity of the reference path. Implementation of perturbation theory on a computer is discussed in Sec. III. As an example, the matrices  $M_n$  are calculated for a  $90^\circ$  HDSM magnet and compared with the result from particle tracking in Sec. V. Furthermore, the effect of field errors on the map  $M$  is investigated within the framework of perturbation theory in Sec. VI. Finally, in Sec. VII, perturbation theory is combined with differential algebra techniques to calculate higher order aberrations.

The horizontal and vertical deviations of a particle from the reference path [7] are called  $x$  and  $y$ , respectively. The corresponding canonical momentum is  $p_x$  and  $p_y$ . In the following, it is assumed that the particle interacts only with the vector potential  $\vec{A}$  of the magnet, and that its synchrotron radiation losses are negligible. Introducing the path length  $z$  instead of time  $t$  as an independent variable leads to the following Hamiltonian [8]:

$$H = -h\sqrt{\frac{p_t^2}{c^2} - m_0^2 c^2 - (p_x - eA_x)^2 - (p_y - eA_y)^2} - ehA_z. \quad (1)$$

The rest mass of the particle with charge  $e$  is  $m_0$  and its total energy is  $p_t$ . The bending radius  $R$  usually is a function of  $z$  and

$$h = 1 + \frac{x}{R}, \quad (2)$$

if the reference path lies entirely in the horizontal plane. The following two generating functions  $F_3(Q, p, z)$  and  $F_2(q, P, z)$

$$F_3(x, y, \delta\varphi, p_x, p_y, p_t, z) = -p_x x - p_y y + p_t \delta\varphi - \frac{z}{c} p_t, \quad (3)$$

$$F_2(x, y, \delta\varphi, p_x, p_y, \delta E, z) = p_x x + p_y y + \delta E \delta\varphi - E \delta\varphi, \quad (4)$$

\*Present address: TÜV Süddeutschland Bau und Betrieb GmbH, D-80686 München, Germany.

This work constitutes part of the doctoral thesis of M.Seidl at Universität Mainz, Germany.

replace  $z$  with  $\delta\varphi$  and  $p_t$  with  $\delta E$ :

$$\delta\varphi = \frac{z}{c} - t, \quad (5)$$

$$\delta E = E - p_t, \quad (6)$$

where  $E$  is the reference energy. Neglecting  $m_0c$ , the new Hamiltonian is

$$H = \frac{E - \delta E}{c} - h\sqrt{\frac{1}{c^2}(E - \delta E)^2 - (p_x - eA_x)^2 - (p_y - eA_y)^2} - ehA_z. \quad (7)$$

Considering only linear beam dynamics and particles at relativistic energies, it suffices to develop  $H$  to second order

$$H = \frac{1}{c}(E - \delta E)(1 - h) + \frac{hc}{2E} \times [(p_x - eA_x)^2 + (p_y - eA_y)^2] - ehA_z + \dots. \quad (8)$$

Defining

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} x \\ p_x \\ y \\ p_y \\ \delta\varphi \\ \delta E \end{pmatrix}; \quad S = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (9)$$

yields the following equation of motion [9]:

$$\frac{d\vec{v}}{dz} = S \frac{\partial H}{\partial \vec{v}}. \quad (10)$$

Only taking the Jacobian matrix  $J$  of  $H$  into account, the solution of Eq. (10) can be written as

$$\vec{v}(z) = \vec{v}(0) + \int_0^z ds SJ(s)\vec{v}(s). \quad (11)$$

If  $J$  is not a function of  $z$ , the solution for  $M$  is trivially [10] found to be

$$\vec{v}(z) = e^{SJz}\vec{v}(0) := M\vec{v}(0). \quad (12)$$

## II. PERTURBATION THEORY

To calculate the solution of Eq. (11) in a perturbative manner, it is assumed that  $J$  can be separated as follows:

$$J(z) = J_0 + \delta J(z), \quad (13)$$

where  $J_0$  does not depend on  $z$ . If  $\vec{v}(z)$  is a solution of Eq. (11), a new vector  $\vec{v}(z)$  is defined according to

$$\vec{v}(z) = e^{-SJ_0z}\vec{v}(z). \quad (14)$$

The equation of motion for  $\vec{v}$  is

$$\frac{d\vec{v}(z)}{dz} = \delta\tilde{J}(z)\vec{v}(z), \quad (15)$$

where

$$\delta\tilde{J}(z) = e^{-SJ_0z}[S\delta J(z)]e^{SJ_0z}. \quad (16)$$

Analogous to Eq. (11), the solution of (15) is

$$\vec{v}(z) = \vec{v}(0) + \int_0^z ds_1 \delta\tilde{J}(s_1)\vec{v}(s_1). \quad (17)$$

If the perturbation  $\delta\tilde{J}$  is small, the integral equation Eq. (17) can be solved iteratively [11]:

$$\begin{aligned} \vec{v}(z) &= \left(1 + \int_0^z ds_1 \delta\tilde{J}(s_1) \right. \\ &\quad \left. + \int_0^z ds_1 \delta\tilde{J}(s_1) \int_0^{s_1} ds_2 \delta\tilde{J}(s_2) + \dots\right)\vec{v}(0) \\ &:= \mathcal{R}(z)\vec{v}(0). \end{aligned} \quad (18)$$

Introducing a time-ordered product

$$\begin{aligned} T[\delta\tilde{J}(s_1)] &= \delta\tilde{J}(s_1) \\ T[\delta\tilde{J}(s_1)\delta\tilde{J}(s_2)] &= \Theta(s_1 - s_2)\delta\tilde{J}(s_1)\delta\tilde{J}(s_2) \\ &\quad + \Theta(s_2 - s_1)\delta\tilde{J}(s_2)\delta\tilde{J}(s_1) \\ &\quad \vdots \end{aligned} \quad (19)$$

the matrix  $\mathcal{R}(z)$  can be rewritten in more compact form as [12]

$$\mathcal{R}(z) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \int_0^z ds_1 \dots ds_n T[\delta\tilde{J}(s_1)\dots\delta\tilde{J}(s_n)]. \quad (20)$$

To gain some insight into the meaning of  $\mathcal{R}(z)$ , consider the vertical phase space  $(y, p_y)$ . In the absence of skew quadrupoles, it is decoupled from the horizontal  $(x, p_x)$  and longitudinal  $(\delta\varphi, \delta E)$  phase spaces. The unperturbed Jacobian  $J_0$  in this case generates a simple drift space (see Sec. V):

$$M_0(z) = e^{SJ_0z} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{c}{E}z \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (21)$$

The quadrupole strength of the combined function magnet leads to a perturbation of the form

$$S\delta J(z) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ g(z) & 0 \end{pmatrix}. \quad (22)$$

This is just the transfer matrix of a thin lens quadrupole with the diagonal elements stripped away. The vertical transfer matrix  $M$  of the magnet according to Eqs. (14) and (20) is then

$$M = M_0(z)\mathcal{R}(z) = M_0 + M_1 + M_2 + \dots \quad (23)$$

The contributions  $M_n$  are

$$\begin{aligned} M_0 &= M_0(z) \\ M_1 &= \int_0^z ds_1 T[M_0(z-s_1)S\delta J(s_1)M_0(s_1)] \\ M_2 &= \frac{1}{2} \int_0^z ds_2 ds_1 T[M_0(z-s_2)S\delta J(s_2) \\ &\quad \times M_0(s_2-s_1)S\delta J(s_1)M_0(s_1)] \\ &\quad \vdots \end{aligned} \quad (24)$$

Obviously the matrix  $M_n$  represents an  $n$ -fold interaction of the beam with the quadrupole perturbation  $\delta J$ , contributing a correction on the order of  $g^n$  to  $M$ . The integrals in Eq. (24) average over all possible locations  $s_1, s_2, \dots$ , whereby the time-ordered product  $T$  preserves causality. Since the beam moves straight from 0 to  $z$ , an interaction at  $s_2 > s_1$  is possible only if the beam has already passed  $s_1$ . Just as in elementary particle physics, the contributions  $M_n$  can be ordered according to the number of interactions  $n$  of the beam with the quadrupole content of the magnet and can be visualized by some sort of Feynman diagrams, as shown in Fig. 1.

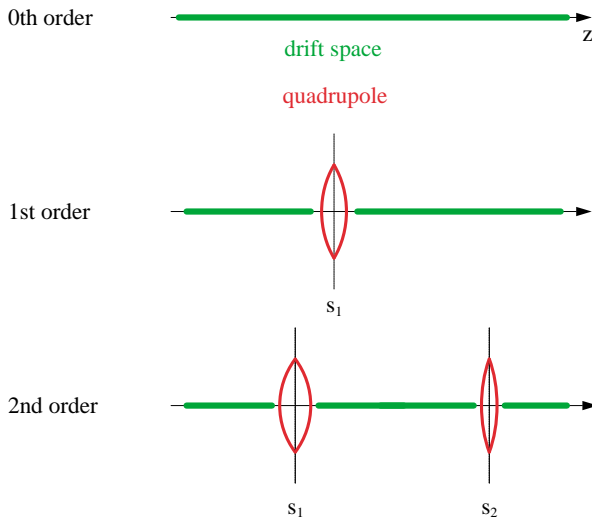


FIG. 1. (Color) Visualization of the contributions  $M_n$  from perturbation theory according to the number of interactions  $n$  of the beam with the quadrupole strength of the magnet.

### III. IMPLEMENTATION OF PERTURBATION THEORY ON A COMPUTER

Perturbation theory can be implemented on a computer in the following way. Assume that  $0 \leq s \leq z$ , and define functions  $r_n$  according to

$$r_1(s) = \int_0^s d\sigma \delta\tilde{J}(\sigma), \quad (25)$$

and

$$r_n(s) = \int_0^s d\sigma \delta\tilde{J}(\sigma)r_{n-1}(\sigma); \quad n \geq 2. \quad (26)$$

Then according to Eq. (18)

$$\mathcal{R}(z) = 1 + r_1(z) + r_2(z) + \dots \quad (27)$$

If the value of  $\delta\tilde{J}(\sigma)$  is evaluated and stored at  $k$  points in the interval  $[0, z]$ , the value of the function  $r_1$  at these points can be calculated in  $k$  steps. Generally, if the value of the function  $r_{n-1}$  has been stored at these points,  $r_n$  can be calculated in  $k$  steps. Therefore the computational effort of calculating  $M_n$  is independent of  $n$  and the total effort of calculating  $M$  to  $n$ th order is proportional to  $n$ .

### IV. MAMI-C

A double sided microtron HDSM is currently being built at the MAMI-C electron scattering facility [13]. Up to now, three racetrack microtrons have been cascaded to provide a cw electron beam at 855 MeV [14]. In a fourth stage, the HDSM will raise the beam energy to 1500 MeV in 43 cycles.

The magnetic field  $B_y$  in the midplane of the  $90^\circ$  HDSM dipoles (cf. Fig. 2) depends only on  $z_0$  and is perpendicular

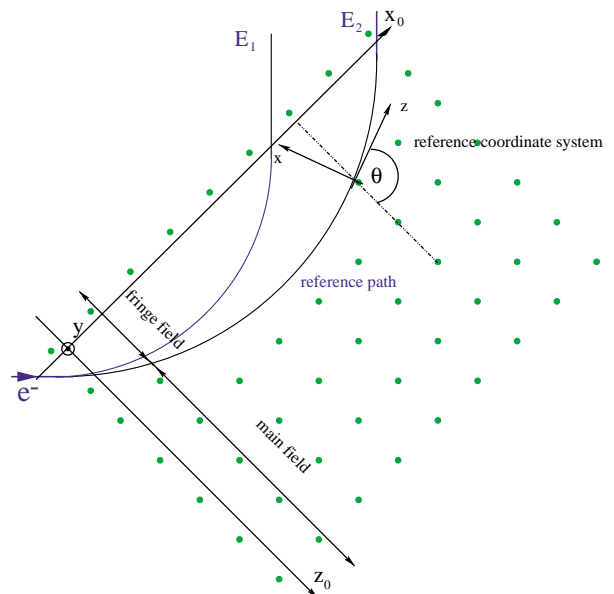


FIG. 2. (Color) Fringe field and main field regions of a  $90^\circ$  HDSM bending magnet.

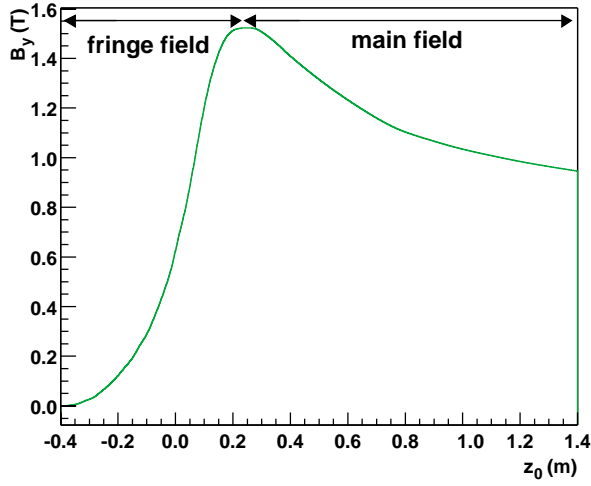


FIG. 3. (Color) Magnetic field  $B_y(z_0)$  in the midplane of a  $90^\circ$  HDSM bending magnet.

to the reference path. Thus the matrix element  $M_{21}$  of the transfer matrix of the whole magnet is independent of  $B_y(z_0)$  and is consistently zero. To nullify the strong vertical defocusing forces of the fringe field, the magnets have an additional field gradient [15] in the main field region (cf. Fig. 3). Given the fringe field, the field  $B_y(z_0)$  in the main field region is determined by the condition that the matrix element  $M_{43}$  of the transfer matrix of the whole magnet be zero [16] for all beam energies between 855 and 1500 MeV. Therefore the HDSM dipoles are designed to have no focusing properties in both the horizontal and vertical phase spaces.

## V. PERTURBATION TREATMENT OF THE HDSM MAGNETS

To calculate  $M$ , the vector potential  $\vec{A}$  is needed. In the vicinity of the reference path, the magnetic field  $\vec{B}$  is equal to the gradient of a scalar function  $\Psi$  [17]. Assuming that the magnetic field changes only slowly with  $z$ , we have

$$\begin{aligned} \Psi = & a_{1,0}x + a_{0,1}y \\ & + a_{1,1}xy + \frac{1}{2} \left( a_{0,2} + \frac{a_{1,0}}{2R} \right) (y^2 - x^2) \\ & - \frac{a_{1,0}}{4R} (y^2 + x^2) + \dots, \end{aligned} \quad (28)$$

where

$$a_{0,1} = B_y(z); \quad a_{1,1} = \frac{\partial B_y}{\partial x}(z), \quad (29)$$

and

$$a_{1,0} = B_x(z); \quad a_{0,2} = \frac{\partial B_y}{\partial y}(z). \quad (30)$$

Neglecting the solenoid fields, the vector potential can be found by partial integration of  $\Psi$

$$\begin{aligned} \vec{A} = & 0 \cdot \hat{x} + 0 \cdot \hat{y} \\ & + \frac{1}{h} \left( \int_0^y ds \left[ h \frac{\partial \Psi}{\partial x} \right] (0, s, z) \right. \\ & \left. - \int_0^x ds \left[ h \frac{\partial \Psi}{\partial y} \right] (s, y, z) \right) \hat{z}, \end{aligned} \quad (31)$$

and thus

$$\begin{aligned} h\vec{A} = & \left[ -a_{0,1}x \left( 1 + \frac{x}{2R} \right) + \frac{a_{1,1}}{2} (y^2 - x^2) \right] \hat{z} \\ & + \left[ a_{1,0}y - a_{0,2}xy \left( 1 + \frac{x}{2R} \right) \right] \hat{z} + \dots \end{aligned} \quad (32)$$

In the following, it is assumed that both  $a_{1,0}$  and  $a_{0,2}$  are zero. Field errors of this kind are discussed in Sec. VI. Under the condition that

$$eB_y(z) = \frac{E}{cR(z)}, \quad (33)$$

the Jacobian matrix  $J_0 + \delta J$  of  $H$  becomes

$$SJ_0 = \begin{pmatrix} 0 & \frac{c}{E} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{E}{cR_z^2} & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{cR_z} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{c}{E} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{cR_z} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (34)$$

and

$$S\delta J = \begin{pmatrix} -\frac{E}{c} \left( \frac{1}{R^2} - \frac{1}{R_z^2} \right) - e\partial_x B_y & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{Rc} + \frac{1}{R_z c} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e\partial_x B_y & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{Rc} - \frac{1}{R_z c} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (35)$$

where  $R_\infty$  is defined by

$$\frac{\pi}{2} R_\infty = \int_{\theta=45^\circ}^{\theta=135^\circ} dz. \quad (36)$$

The unperturbed matrix  $M_0$  is [7]

$$M_0(z) = e^{S J_0 z} = \begin{pmatrix} \cos\phi & \beta \sin\phi & 0 & 0 & 0 & \frac{\beta}{c}(\cos\phi - 1) \\ -\frac{1}{\beta} \sin\phi & \cos\phi & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{c} \sin\phi \\ 0 & 0 & 1 & \frac{c}{E}z & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{c} \sin\phi & \frac{\beta}{c}(1 - \cos\phi) & 0 & 0 & 1 & \frac{\beta}{c^2}(\sin\phi - \phi) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (37)$$

where

$$\beta = \frac{R_\infty c}{E}; \quad \phi = \frac{z}{R_\infty}. \quad (38)$$

To calculate the matrices  $M_1, M_2, \dots$ , the partial derivative  $\partial_x B_y$  is expressed as

$$\frac{\partial B_y}{\partial x} = \frac{\partial B_y}{\partial x_0} \frac{dx_0}{dx} + \frac{\partial B_y}{\partial z_0} \frac{dz_0}{dx} = -\frac{\partial B_y}{\partial z_0} \sin\theta(z_0). \quad (39)$$

Since

$$R d\theta = dz, \quad (40)$$

it follows that

$$\sin\theta(z_0) = \sin(45^\circ) + \frac{ec}{E} \int_0^{z_0} dz_0 B_y(z_0). \quad (41)$$

Finally, the path length  $z(z_0)$  can be calculated from

$$z(z_0) = \int_0^{z_0} \frac{dz_0}{\cos\theta(z_0)}. \quad (42)$$

Therefore, if  $B_y(z_0)$  is given as in Fig. 2, the matrices  $M_n$  can be calculated by numerical integration of Eq. (24) after a change of variables from  $z$  to  $z_0$ . Figure 4 shows the vertical matrix elements of  $M$  up to third order in perturbation theory at 1018 MeV beam energy. There the abscissa is defined as follows:

$$z'_0(\theta) = z_0(\theta); \quad 45^\circ \leq \theta \leq 90^\circ, \\ z'_0(\theta) = 2z_0(90^\circ) - z_0(\theta); \quad 90^\circ < \theta \leq 135^\circ.$$

To test the accuracy of perturbation theory, the field  $B_y(z_0)$  in the main field region was recalculated given the field in the fringe field region. The optimization procedure

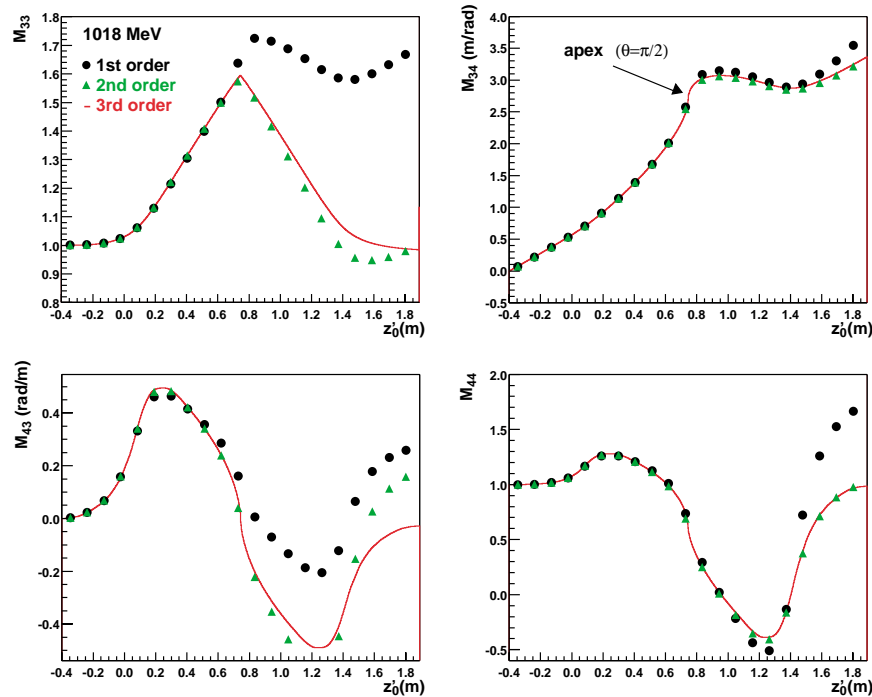


FIG. 4. (Color) Vertical matrix elements of a  $90^\circ$  HDSM magnet.

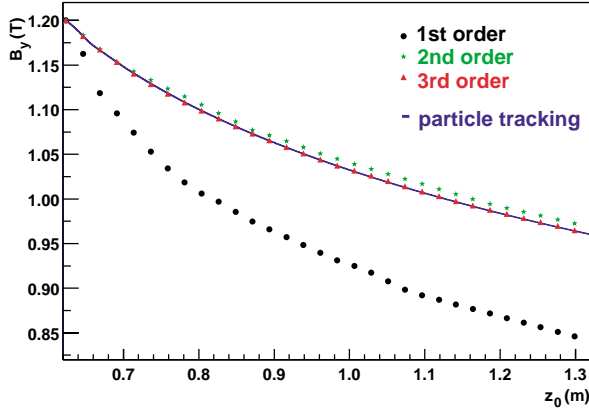


FIG. 5. (Color)  $B_y(z_0)$  in the main field region of a  $90^\circ$  HDSM magnet calculated by particle tracking and by perturbation theory.

was identical to that used by Ratschow [16], but particle tracking was replaced by perturbation theory. In short, assume that at  $E_1 = 855$  MeV the particle trajectory reaches its apex ( $\theta = \pi/2$ ) at  $z_{0,1}$ . The energy is then slightly increased by the amount  $\Delta E = 5$  MeV to  $E_2$ . The field in the interval between  $z_{0,1}$  and  $z_{0,2}$  is taken to be

$$B_y(z_0) = B_y(z_{0,1}) + \epsilon \frac{\partial B_y}{\partial z_{0,1}} (z_0 - z_{0,1}), \quad (43)$$

and  $\epsilon$  is varied until the matrix element  $M_{43}$  is zero for  $E_2$ . These steps are repeated until the maximum beam energy of 1500 MeV is reached. Figure 5 shows  $B_y(z_0)$  in the main field region for calculations up to third order in perturbation theory. The third order calculation deviates less than 0.07% from the results of particle tracking, which is sufficient for most practical purposes.

## VI. INVESTIGATION OF FIELD ERRORS

If the magnetic field is not symmetrical with respect to the midplane of the magnet, the derivative  $\partial_y B_y$  is not equal to zero as assumed in Sec. V. Since the two poles of a HDSM magnet cannot be manufactured completely identical, it is of interest to note how  $\partial_y B_y$  changes the transfer matrix. Thus an additional perturbation of

$$S \delta J' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -e \partial_y B_y & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -e \partial_y B_y & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (44)$$

has to be added to Eq. (35). The first order contribution of  $\delta J'$  to  $M$  is

$$M'_1 = \int_0^z ds M_0(z-s) S \delta J'(s) M_0(s). \quad (45)$$

To investigate its impact on a  $90^\circ$  HDSM magnet, we define

$$g_q = -e \frac{R_\infty}{2} \int_0^{\pi/2} d\phi \frac{\partial B_y}{\partial y} e^{iq\phi}; \quad g'_q = \frac{dg_q}{dq}, \quad (46)$$

where  $q = -1, 0, 1$ . If one makes the simplifying assumption that

$$\frac{\partial B_y}{\partial y}(z) = \frac{\partial B_y}{\partial y} \left( \frac{\pi}{2} R_\infty - z \right), \quad (47)$$

then one obtains

$$\begin{aligned} M'_1 &= \begin{pmatrix} 0 & G_{12} & 0 \\ G_{21} & 0 & G_{23} \\ 0 & G_{32} & 0 \end{pmatrix}, \\ G_{12} &= \begin{pmatrix} \beta(g_1 + g_{-1}) & -i\beta^2(g'_1 + g'_{-1}) \\ -i(g_1 - g_{-1}) & -\beta(g'_1 - g'_{-1}) \end{pmatrix}, \\ G_{21} &= \begin{pmatrix} -\beta(g'_1 - g'_{-1}) & -i\beta^2(g'_1 + g'_{-1}) \\ g_1 + g_{-1} & -i\beta(g_1 - g_{-1}) \end{pmatrix}, \\ G_{23} &= \begin{pmatrix} 0 & \frac{\beta^2}{c}(2ig'_0 - g'_1 + g'_{-1}) \\ 0 & (-2g_0 + g_1 + g_{-1})\frac{\beta}{c} \end{pmatrix}, \\ G_{32} &= \begin{pmatrix} \frac{\beta}{c}(2g_0 + ig_1 - ig_{-1}) & \frac{\beta^2}{c}(-2ig_0 + g'_1 - g'_{-1}) \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (48)$$

Obviously, the skew quadrupole content of the magnet leads to a coupling between the horizontal, vertical, and longitudinal phase spaces. A characteristic feature of the coupling is that an energy deviation  $\delta E$  at the entrance of the magnet excites only vertical betatron oscillations, if

observed in a region with zero horizontal dispersion. This can be helpful to distinguish between azimuthal alignment errors of quadrupoles used for beam focusing and skew quadrupole contributions stemming from the bending magnets. Moreover, if one wants to model the skew quadrupole

content of the magnet without assuming a certain field distribution and without recalculating the design map  $M$ , all possible first order effects can be accounted for, if the matrix  $M'_1$  is added to  $M$ .

## VII. PERTURBATION THEORY AND DIFFERENTIAL ALGEBRA TECHNIQUES

In this section, we dispense with the assumption that the perturbation  $\delta\tilde{J}$  is a linear function of  $\vec{v}$ . Then Eq. (17) becomes

$$\vec{v}(z, \vec{v}_0) = \vec{v}_0 + \int_0^z ds_1 \delta\tilde{J}[s_1, \vec{v}(s_1, \vec{v}_0)]. \quad (49)$$

The linear part of the map  $M$  between  $\vec{v}_0$  and  $\vec{v}(z)$  is

$$\frac{\partial \vec{v}(z, \vec{v}_0)}{\partial \vec{v}_0} = 1 + \int_0^z ds_1 D_2 \delta\tilde{J}[s_1, \vec{v}(s_1, \vec{v}_0)] \frac{\partial \vec{v}(s_1, \vec{v}_0)}{\partial \vec{v}_0}, \quad (50)$$

where

$$D_2 \delta\tilde{J} = \frac{\partial}{\partial \vec{v}} \delta\tilde{J}(s_1, \vec{v}). \quad (51)$$

The integral equation (50) is again solved iteratively

$$\begin{aligned} \frac{\partial \vec{v}(z, \vec{v}_0)}{\partial \vec{v}_0} = & \left( 1 + \int_0^z ds_1 D_2 \delta\tilde{J}[s_1, \vec{v}(s_1, \vec{v}_0)] \right. \\ & + \int_0^z ds_1 D_2 \delta\tilde{J}[s_1, \vec{v}(s_1, \vec{v}_0)] \\ & \times \left. \int_0^{s_1} ds_2 D_2 \delta\tilde{J}[s_2, \vec{v}(s_2, \vec{v}_0)] + \dots \right). \end{aligned} \quad (52)$$

Because of the special choice of the reference path, we know that for all  $z$

$$\vec{v}(z, 0) = \vec{0}. \quad (53)$$

Therefore the map  $M$  can be calculated in the vicinity of the reference path by inserting Eq. (53) into (52). Nonlinear terms of  $M$  can now be investigated by considering  $\vec{v}$  as a DA vector [18], which in the following is written as  $[\vec{v}]$ . The  $n$ th order derivative of  $\vec{v}$  with respect to  $\vec{v}_0$  is symbolically written as  $\partial_{\vec{v}_0}^n \vec{v}$ . It can be calculated iteratively with the help of Eq. (52). To this end we assume  $[\vec{v}_0]$  to be the following  $n$ -dimensional DA vector

$$[\vec{v}_0] = (0, 1, 0, \dots, 0). \quad (54)$$

Insertion of Eq. (54) into  $\vec{v}(z, \vec{v}_0)$  and into the left-hand side of Eq. (52) yields

$$\vec{v}(z, [\vec{v}_0]) = (0, \partial_{\vec{v}_0}^1 \vec{v}(z, 0), \dots, \partial_{\vec{v}_0}^{n-1} \vec{v}(z, 0)), \quad (55)$$

and

$$\partial_{\vec{v}_0}^1 \vec{v}(z, [\vec{v}_0]) = (\partial_{\vec{v}_0}^1 \vec{v}(z, 0), \partial_{\vec{v}_0}^2 \vec{v}(z, 0), \dots, \partial_{\vec{v}_0}^n \vec{v}(z, 0)). \quad (56)$$

Therefore the  $n$ th order derivative  $\partial_{\vec{v}_0}^n \vec{v}(z, 0)$  can be calculated from the knowledge of all lower order derivatives, if Eq. (55) is inserted into the right-hand side of Eq. (52) and

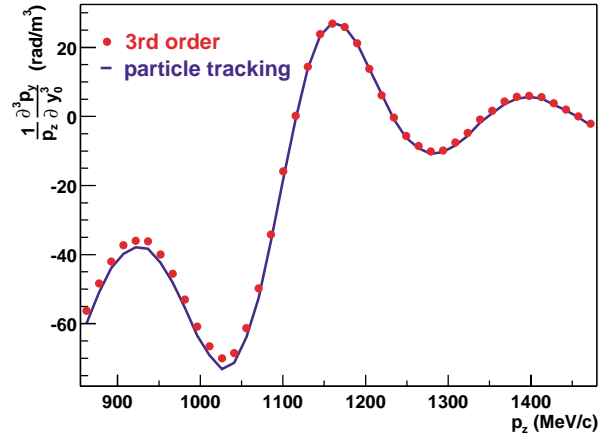


FIG. 6. (Color) Total octupole strength of a  $90^\circ$  HDSM dipole calculated by particle tracking and by perturbation theory using differential algebra.

the result is compared with Eq. (56). The actual computation of the integrals can be done, for example, with the DA package COSY [19].

Because of its symmetry, the overall sextuple strength of a  $90^\circ$  HDSM dipole is zero. As an application, its overall octupole strength  $m_3$  was calculated according to

$$m_3 = \frac{1}{p_z} \frac{\partial^3 p_y}{\partial y_0^3}. \quad (57)$$

For this purpose the potential  $\Psi$  in Eq. (28) was expanded to fourth order and the unperturbed solution was again chosen to be the transfer matrix of a hard edge  $90^\circ$  dipole as given by Eq. (37). In Fig. 6, the result for  $m_3$  from a third order perturbation theory calculation using differential algebra is shown and compared with the result from particle tracking. Both results agree within 6%.

## VIII. CONCLUSION

Perturbation theory offers yet another way to calculate the transfer matrix  $M$  of combined function magnets. Its main advantage over particle tracking is its ability to derive the map between the initial and final coordinates in a systematic manner from a known reference map, thereby reducing calculation time. It is most useful when the magnetic field in the vicinity of the reference path can be calculated without the help of particle tracking, as has been demonstrated for the  $90^\circ$  dipoles of the double sided microtron HDSM at MAMI-C. Here the calculation time to optimize the field profile  $B_y(z_0)$  is significantly reduced by the fact, for example, that the overall deflection angle of  $90^\circ$  is independent of the field profile and is already determined by the reference map  $M_0$ . While the established integrators seek to solve the equation of motion step by step along the reference trajectory, perturbation theory uses an integral approach. Since each contribution  $M_n$  is expressed as an integral along the whole reference trajectory, all field properties of the magnet are taken into account at

every stage of the calculation. Therefore the sum over  $M_n$  can approximate  $M$  even at a low  $n$  with reasonable accuracy, e.g.,  $n = 3$  is sufficient for the HDSM magnets for almost all practical purposes. Finally, perturbation theory can even be used in conjunction with differential algebra techniques to effectively calculate higher order aberrations.

### IX. ACKNOWLEDGMENT

I am indebted to K.-H. Kaiser and U. Ludwig-Mertin at the Institut für Kernphysik, Universität Mainz for their cooperation. This work was supported by DFG (Graduiertenkolleg “Physik und Technik von Beschleunigern”).

- 
- [1] K.-H. Kaiser, Institut für Kernphysik Universität Mainz MAMI Report No. 8, 1986.
  - [2] S. Kowalski and H. A. Enge, LNS-MIT Technical Report No. 156, 1986.
  - [3] M. Berz, Nucl. Instrum. Methods Phys. Res., Sect. A **258**, 431 (1987).
  - [4] G. W. E. Hairer and S. P. Norsett, *Solving Ordinary Differential Equations* (Springer-Verlag, Berlin, 1993), Vol. I.
  - [5] M. Berz and K. Makino, *Reliable Computing* **4**, 361 (1998).
  - [6] S. Humphries, *Principles of Charged Particle Acceleration* (Wiley, New York, 1986).
  - [7] H. Wiedemann, *Particle Accelerator Physics* (Springer-Verlag, Berlin, 1993), Vol. I.
  - [8] G. Ripken, DESY Report No. 85-084, 1985.
  - [9] V.I. Arnold, *Mathematical Methods of Classical Mechanics* (Springer-Verlag, Berlin, 1989).
  - [10] V.I. Arnold, *Ordinary Differential Equations* (Springer-Verlag, Berlin, 1992).
  - [11] R. Courand and D. Hilbert, *Methods of Mathematical Physics* (Wiley, New York, 1989), Vol. I.
  - [12] F. Dyson, *Phys. Rev.* **75**, 486 (1949); **75**, 1736 (1949).
  - [13] DFG Collaborative Research Centre No. 443, 2001.
  - [14] H. Herminghaus, A. Feder, K.-H. Kaiser, W. Manz, and H. v. d. Schmitt, *Nucl. Instrum. Methods* **138**, 1 (1976).
  - [15] U. Ludwig-Mertin, H. Euteneuer, K.-H. Kaiser, H.-J. Kreidel, and S. Ratschow, in *Proceedings of the 6th European Particle Accelerator Conference*, edited by J. Pool and C. Petit (Institute of Physics, Bristol, U.K., 1998).
  - [16] S. Ratschow, Ph.D. thesis, Institut für Kernphysik Universität Mainz, 2000.
  - [17] H. Wiedemann, *Particle Accelerator Physics* (Springer-Verlag, Berlin, 1998), Vol. II.
  - [18] M. Berz, *Nucl. Instrum. Methods Phys. Res., Sect. A* **363**, 100 (1995).
  - [19] K. Makino and M. Berz, *Nucl. Instrum. Methods Phys. Res., Sect. A* **427**, 338 (1999).

# Identification and correction of antisymmetric field components in combined function magnets

M. Seidl\*

*Institut für Kernphysik, Universität Mainz, D-55099 Mainz, Germany*

(Received 23 October 2001; published 12 June 2002)

This paper investigates the identification and correction of antisymmetric field components in combined function magnets. A measurement procedure is developed to identify small field components on the order of  $10^{-3}$  in the plane of the reference path. Furthermore, a method is proposed to compensate them by surface correction coils on the poles of the magnet. As an example, the measurement and compensation of antisymmetric field components in a  $90^\circ$  bending magnet of the double sided microtron HDSM at the MAMI-C electron scattering facility is simulated with the help of the electromagnetic design code TOSCA.

DOI: 10.1103/PhysRevSTAB.5.062402

PACS numbers: 29.20.-c, 41.85.Lc

## I. INTRODUCTION

Field components in the plane of the reference path lead to a coupling between the horizontal, vertical, and longitudinal phase spaces in combined function magnets [1,2]. They are typically on the order of  $10^{-3}$  if the magnet is carefully designed and manufactured. To the author's knowledge, they were hitherto neglected in the identification and correction of field errors when hall probes were the only option for field measurement [3–5]. However, the construction of more advanced combined function magnets such as the  $90^\circ$  dipoles of the double sided microtron HDSM at MAMI-C (see Sec. IV) makes it necessary to compensate even those small field errors over an area greater than  $6 \text{ m}^2$ .

In Sec. II, a procedure is proposed to experimentally determine antisymmetric field components. A method to compensate them by surface correction coils is given in Sec. III. Finally, the identification and compensation of antisymmetric field components in a  $90^\circ$  HDSM magnet is simulated with the help of TOSCA [6] in Sec. V.

If  $\vec{j}(\vec{q})$  is the current density at location  $\vec{q}$ , the vector potential  $\vec{A}$  is [7]

$$\vec{A}(\vec{q}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2} \int d\vec{q}' \frac{\vec{j}(\vec{q}')}{|\vec{q} - \vec{q}'|}. \quad (1)$$

The magnetization vector within the magnet is  $\vec{M}$ . It is equivalent to the following current density  $\vec{j}_M$ :

$$\vec{j}_M = \nabla \times \vec{M}. \quad (2)$$

Inserting  $\vec{j}_M$  into Eq. (1) and integrating over the volume  $V$  and surface  $S$  of the magnet yields [7]

$$\vec{A}_M(\vec{q}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2} \left( \int_V dV(\vec{q}') \frac{\nabla' \times \vec{M}(\vec{q}')}{|\vec{q} - \vec{q}'|} + \oint_S dS(\vec{q}') \frac{\vec{M}(\vec{q}') \times \vec{n}'(\vec{q}')}{|\vec{q} - \vec{q}'|} \right), \quad (3)$$

where  $\vec{n}'$  is the surface normal vector of  $S$ . In the following, it is assumed that the magnetization  $\vec{M}$  is homogeneous in  $V$ , or that the gap of the magnet is much smaller than  $V$ . Then the volume integral in Eq. (3) can be considered as a constant. Assume that the magnetization  $\vec{M}_e$  on the surface of the real magnet is somehow known. To bring it in accordance with the design calculation for  $\vec{M}$ , a correction current  $\delta\vec{j}$  is needed:

$$\delta\vec{j} = \nabla \times (\vec{M} - \vec{M}_e). \quad (4)$$

In magnetostatics we have

$$\nabla \times \left( \vec{B} - \frac{1}{\epsilon_0 c^2} \vec{M} \right) = 0, \quad (5)$$

and thus

$$\delta\vec{j} = \epsilon_0 c^2 \nabla \times (\vec{B} - \vec{B}_e). \quad (6)$$

Therefore the magnetic field  $\vec{B}_e$  at the surface of the poles of the magnet has to be determined experimentally. From a comparison of  $\vec{B}_e$  with the design calculation for  $\vec{B}$ , surface correction coils can be constructed as shown in Eq. (6). For (anti)symmetrical field errors, the correction current  $\delta\vec{j}$  is (anti)symmetrical with respect to the midplane. The corresponding field components are perpendicular to the midplane in the case of symmetry and are parallel to it in the case of antisymmetry.

## II. MEASUREMENT OF ANTISYMMETRIC FIELD COMPONENTS

Assume that the reference path lies in the  $x$ - $z$  plane, which is also the median plane of the magnet, and that the main field component is parallel to the  $y$  axis. It is not experimentally feasible to directly measure the  $B_x$  and  $B_z$  components of the field as a function of  $(x, z)$  in the presence of a  $B_y$  component that is approximately  $10^3$  times larger. Therefore, the procedure proposed by Wind [8] is not applicable. Harmonic coils [9] would be another option if the field errors are expected to be invariant with  $x$  or  $z$ , which is not assumed here.

\*Present address: TÜV Süddeutschland Bau und Betrieb GmbH, D-80686 München, Germany.

This work constitutes part of the doctoral thesis of M.Seidl at Universität Mainz, Germany.

The following procedure circumvents a direct measurement of  $B_x$  and  $B_z$ . In the gap of the magnet, Maxwell's equations yield for the magnetostatic case:

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0, \quad (7)$$

and

$$\nabla \times \vec{B} = 0. \quad (8)$$

Differentiation of Eq. (7) with respect to  $x$  and  $z$  gives

$$\frac{\partial^2 B_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 B_z}{\partial z \partial x} = -\frac{\partial^2 B_y}{\partial y \partial x}, \quad (9)$$

and

$$\frac{\partial^2 B_z}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 B_x}{\partial z \partial x} = -\frac{\partial^2 B_y}{\partial y \partial z}, \quad (10)$$

respectively. From Eq. (8), it follows that

$$\frac{\partial B_x}{\partial z} = \frac{\partial B_z}{\partial x}. \quad (11)$$

Inserting this relation into Eqs. (9) and (10) results in

$$\frac{\partial^2 B_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 B_x}{\partial z^2} = -\frac{\partial^2 B_y}{\partial y \partial x}, \quad (12)$$

and

$$\frac{\partial^2 B_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 B_z}{\partial z^2} = -\frac{\partial^2 B_y}{\partial y \partial z}. \quad (13)$$

The right-hand sides of Eqs. (12) and (13) can be determined by a measurement of  $B_y$  below and above the median plane of the magnet. If  $h_y/2$  is the distance from the median plane, then

$$\frac{\partial B_y}{\partial y}(x, 0, z) \approx \frac{1}{h_y} \left[ B_y\left(x, \frac{h_y}{2}, z\right) - B_y\left(x, -\frac{h_y}{2}, z\right) \right]. \quad (14)$$

Thus if  $B_y$  is measured on a grid with spacing  $h_x$  and  $h_z$ , one can determine  $\partial_{yx} B_y$  and  $\partial_{yz} B_y$  with the help of Eq. (14) as follows:

$$\frac{\partial^2 B_y}{\partial y \partial x} \approx \frac{1}{h_y h_x} \left[ B_y\left(x + \frac{h_x}{2}, \frac{h_y}{2}, z\right) - B_y\left(x + \frac{h_x}{2}, -\frac{h_y}{2}, z\right) + B_y\left(x - \frac{h_x}{2}, -\frac{h_y}{2}, z\right) - B_y\left(x - \frac{h_x}{2}, \frac{h_y}{2}, z\right) \right], \quad (15)$$

and

$$\frac{\partial^2 B_y}{\partial y \partial z} \approx \frac{1}{h_y h_z} \left[ B_y\left(x, \frac{h_y}{2}, z + \frac{h_z}{2}\right) - B_y\left(x, -\frac{h_y}{2}, z + \frac{h_z}{2}\right) + B_y\left(x, -\frac{h_y}{2}, z - \frac{h_z}{2}\right) - B_y\left(x, \frac{h_y}{2}, z - \frac{h_z}{2}\right) \right]. \quad (16)$$

In mathematical terms, both Eqs. (12) and (13) are partial differential equations of the Dirichlet type. Assume that  $B_x$  and  $B_z$  are zero at the boundary of the measurement region, and that in the median plane  $\partial_{yx} B_y$  and  $\partial_{yz} B_y$  are known from measurement. Then each equation has a unique solution for  $B_x$  and  $B_z$  in the median plane. In general, both field components can be determined by numerical integrations of Eqs. (12) and (13). There exists an abundance of methods for this task [10]. Having solved both equations for  $B_x$  and  $B_z$  and additionally hav-

ing measured  $B_y$  in the median plane, all components of the magnetic field in the median plane of the magnet are determined.

### III. SURFACE CORRECTION COILS

Now that  $\vec{B}_e$  is known in the median plane of the real magnet, one can determine the magnetic field in the whole gap. In free space,  $\vec{B}_e$  can be expressed as a gradient of a scalar potential  $\Psi$  [7]. In the vicinity of a point  $(x_j, 0, z_i)$  on the measurement grid,  $\Psi$  can be expressed as follows:

$$\begin{aligned} \Psi = & a_{100}(x - x_j) + a_{010}y + a_{001}(z - z_i) + \frac{1}{2} a_{200}(x - x_j)^2 + \frac{1}{2} a_{020}(y)^2 + \frac{1}{2} a_{002}(z - z_i)^2 \\ & + a_{110}(x - x_j)y + a_{011}y(z - z_i) + a_{101}(x - x_j)(z - z_i) + \dots \end{aligned} \quad (17)$$

All coefficients are now known:

$$\begin{aligned} a_{100} &= B_x(x_j, 0, z_i), \\ a_{010} &= B_y(x_j, 0, z_i), \\ a_{001} &= B_z(x_j, 0, z_i), \end{aligned} \quad (18)$$

and

$$\begin{aligned}
 a_{200} &= \frac{\partial B_x}{\partial x}(x_j, 0, z_i) \approx \frac{1}{h_x} [B_x(x_j + h_x, 0, z_i) - B_x(x_j, 0, z_i)], \\
 a_{020} &= -a_{200} - a_{002}, \\
 a_{002} &= \frac{\partial B_z}{\partial z}(x_j, 0, z_i) \approx \frac{1}{h_z} [B_z(x_j, 0, z_i + h_z) - B_z(x_j, 0, z_i)],
 \end{aligned} \tag{19}$$

and

$$\begin{aligned}
 a_{101} &= \frac{\partial B_x}{\partial z}(x_j, 0, z_i) \approx \frac{1}{h_z} [B_x(x_j, 0, z_i + h_z) - B_x(x_j, 0, z_i)], \\
 a_{110} &= \frac{\partial B_y}{\partial x}(x_j, 0, z_i) \approx \frac{1}{h_x} [B_y(x_j + h_x, 0, z_i) - B_y(x_j, 0, z_i)], \\
 a_{011} &= \frac{\partial B_y}{\partial z}(x_j, 0, z_i) \approx \frac{1}{h_z} [B_y(x_j, 0, z_i + h_z) - B_y(x_j, 0, z_i)].
 \end{aligned} \tag{20}$$

Using this approach,  $\Psi$  and thus  $\vec{B}_e$  can be determined at the poles of the magnet. Neglecting a possible curvature of the poles, the surface current density  $\vec{\sigma}$  at the upper pole can be calculated from Eq. (6)

$$\begin{aligned}
 \sigma_x &= +\epsilon_0 c^2 (B_z - B_{z,e}), \\
 \sigma_z &= -\epsilon_0 c^2 (B_x - B_{x,e}),
 \end{aligned} \tag{21}$$

if the relative permeability of the magnet is assumed to be infinite. The current density at the lower pole has a reversed sign. If a function  $I(x, z)$  is defined as

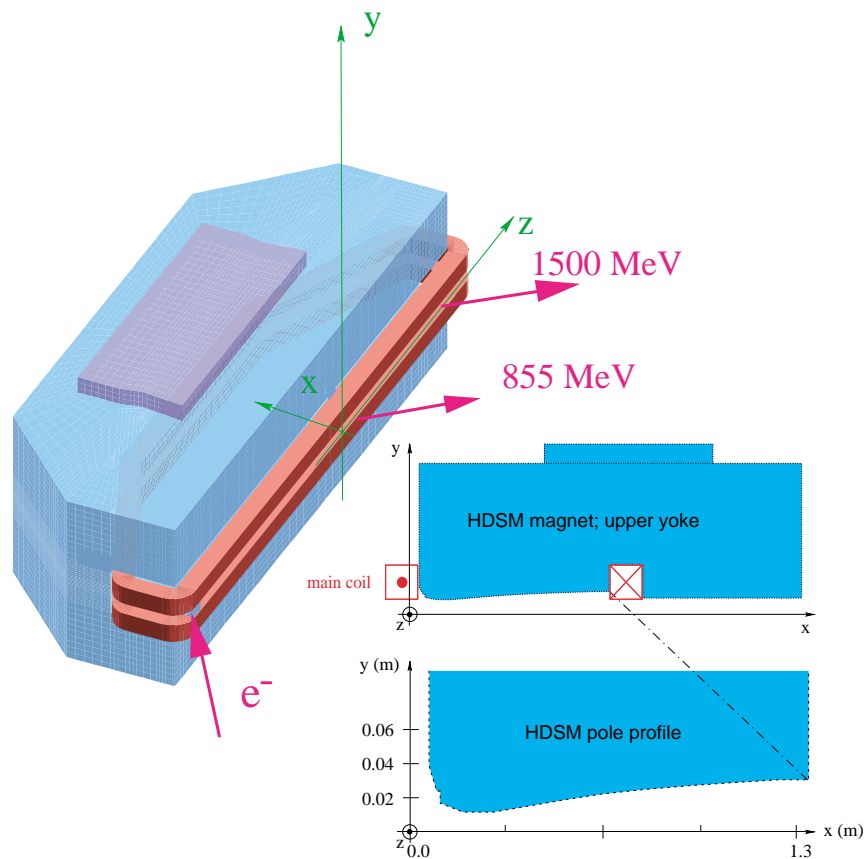


FIG. 1. (Color) Artist's view and pole profile of a 90° HDSM bending magnet.

$$I(x, z) = \int_0^x ds_x \sigma_z(s_x, z) - \int_0^z ds_z \sigma_x(0, s_z), \quad (22)$$

one gets

$$\frac{\partial I}{\partial x} = \sigma_z; \quad \frac{\partial I}{\partial z} = -\sigma_x. \quad (23)$$

Therefore the surface correction coils have to run along the equipotential lines of  $I$  with a current equal to the level distance  $\Delta I$ .

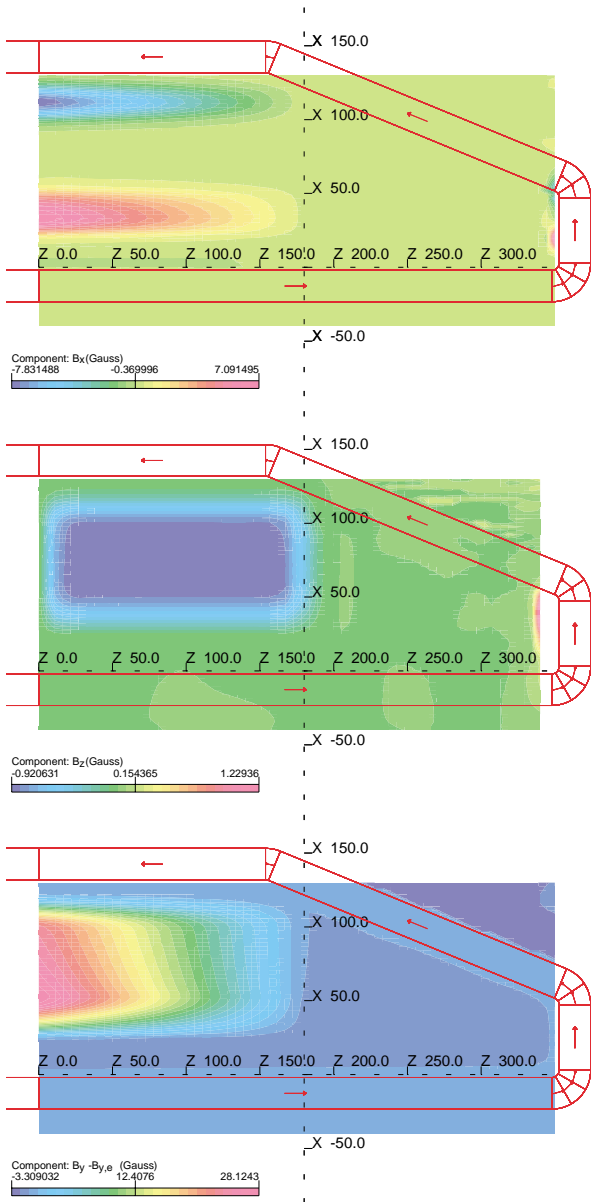


FIG. 2. (Color) Simulated field errors  $B_x$ ,  $B_z$ , and  $B_y - B_{y,e}$  in the median plane of a  $90^\circ$  HDSM bending magnet with a slightly misaligned upper yoke.

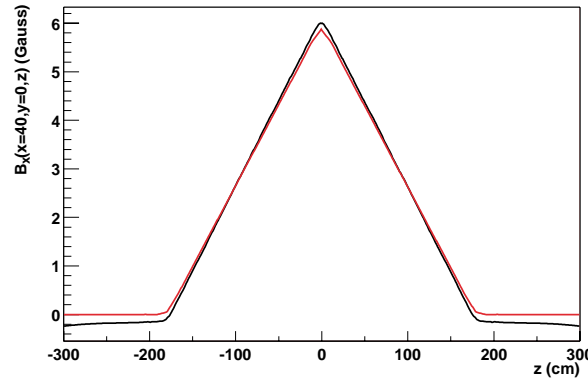
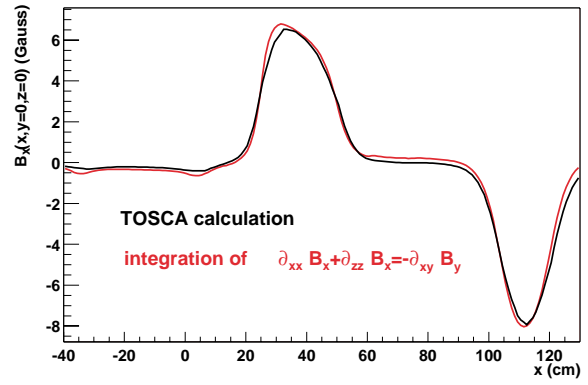


FIG. 3. (Color) TOSCA calculation of  $B_x$  compared with the results of a simulated measurement of  $\partial_{xy} B_y$  and subsequent integration of Eq. (12).

#### IV. MAMI-C

At the MAMI [11] electron scattering facility, three race-track microtrons are cascaded to provide a cw electron beam at 855 MeV. In a fourth stage, a double sided microtron HDSM is currently being built [12] to raise the beam energy to 1500 MeV in 43 cycles. A 250 ton  $90^\circ$  HDSM bending magnet [13] is shown in Fig. 1. Its field maximum for  $B_y$  is 1.5 T. To nullify the strong vertical defocusing forces of the fringe field for all beam energies between 855 and 1500 MeV, the magnets have an additional field gradient in the main field region [14]. Because of construction constraints on the sophisticated pole profile, it is expected that antisymmetric field components

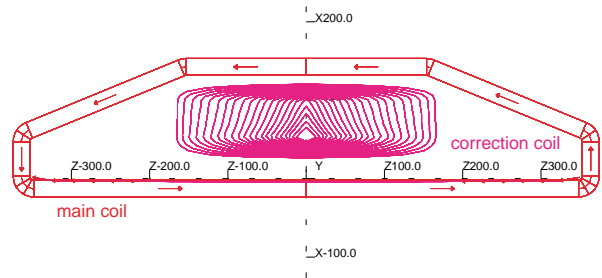


FIG. 4. (Color) Surface correction coils for the upper pole of a  $90^\circ$  HDSM bending magnet.

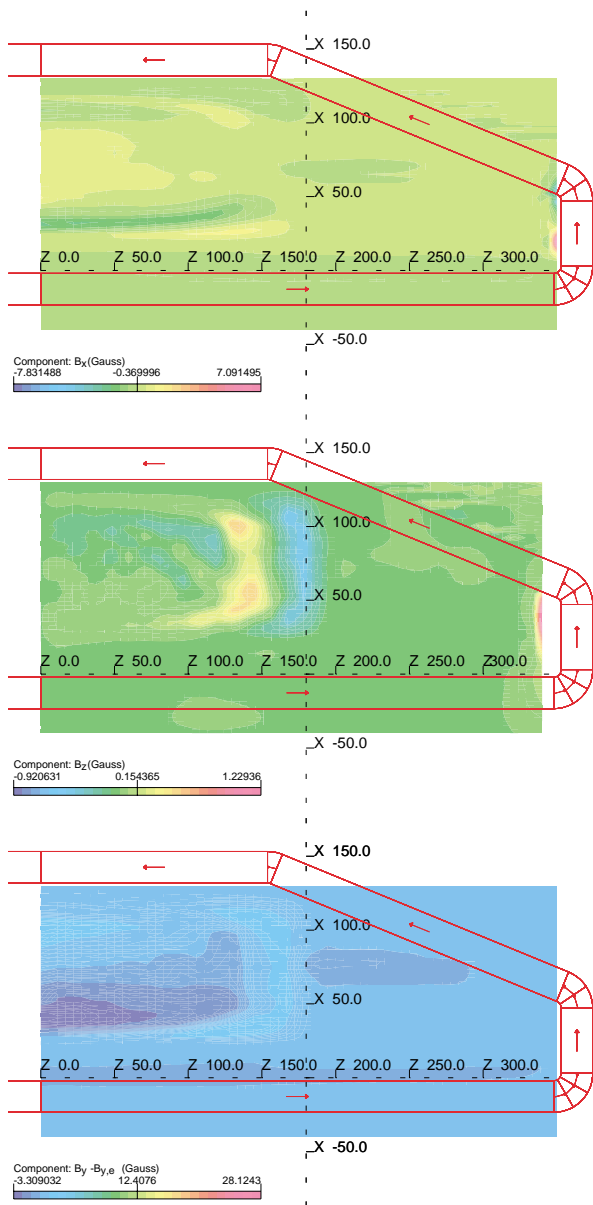


FIG. 5. (Color) Field components  $B_x$ ,  $B_z$ , and  $B_y - B_{y,e}$  in the midplane of a  $90^\circ$  HDSM bending magnet with surface correction coils to compensate field errors due to a slightly misaligned upper yoke.

in the median plane of the order of  $10^{-3}$  have to be compensated.

## V. TOSCA SIMULATION

To simulate antisymmetric field components in the median plane of a  $90^\circ$  HDSM magnet, its upper yoke was not correctly aligned with respect to the lower yoke, but the maximum deviations of 0.3 mm were still within the manufacturing tolerance. The ensuing field errors were calculated with TOSCA and are shown in Fig. 2. From the TOSCA calculation, the main field component  $B_y$  in

TABLE I. Deviation of  $B_x$  and  $B_z$  from the TOSCA results  $B_{xT}$  and  $B_{zT}$  for various noise levels of  $B_y$ .

$\sigma_{B_y}$ (Gauss)	0.0	0.5	1.0	2.0	4.0	8.0
$\sigma_{B_x - B_{xT}}$ (Gauss)	0.05	0.15	0.26	0.47	0.91	1.78
$\sigma_{B_z - B_{zT}}$ (Gauss)	0.03	0.17	0.22	0.44	0.86	1.71

the median plane and at  $h_y/2 = 2$  cm above and below the median plane was extracted on a grid with spacing  $h_x = 1$  cm and  $h_z = 1$  cm. Then the field components  $B_x$  and  $B_z$  in the median plane were calculated according to Sec. II. In Fig. 3, the result for  $B_x$  is compared with the original data given by TOSCA. They agree within 5%. Finally, surface correction coils were calculated as described in Sec. III. On the lower pole, no correction coils were necessary in this example since the field errors were exclusively produced by the misaligned upper yoke. The surface correction coils for the upper pole are shown in Fig. 4. The magnetic field in the median plane was again calculated by TOSCA with the correction coils turned on. The result is shown in Fig. 5. In all cases, the field quality was improved by a factor of about 10.

To estimate the robustness of the proposed procedure, assume in the following that  $B_x$  is not a function of  $z$  and  $B_z$  is not a function of  $x$ . Then Eqs. (12) and (13) can be integrated with respect to  $x$  and  $z$ , respectively:

$$\delta B_x \approx -\frac{\delta x}{\delta y} \delta B_y, \quad (24)$$

and

$$\delta B_z \approx -\frac{\delta z}{\delta y} \delta B_y. \quad (25)$$

Therefore the error in determining  $B_x$  and  $B_z$  is proportional to the measurement error of  $B_y$ . To verify this relationship numerically, Gaussian noise was added to the TOSCA data for  $B_y$ , and then  $B_x$  and  $B_z$  were recalculated according to Eqs. (12) and (13). Table I shows the sigma width of the ensuing deviation from the original TOSCA result for  $B_x$  and  $B_z$ . The linear relationship as predicted by Eqs. (24) and (25) is well verified. For the used spacing  $h_y = 4$  cm and  $h_x = 1$ ,  $h_z = 1$  cm, one would expect a slope of  $1/4.0$ . The simulation yields  $1/4.4$ , which is probably due to the simplifying assumption leading to Eqs. (24) and (25).

## VI. CONCLUSION

In this paper, we demonstrated that it is possible to identify and compensate small antisymmetric field components on the order of  $10^{-3}$  in combined function magnets. By measuring the main field components both in the median plane and below and above the median plane, one can derive all components of the magnetic field in the median plane. Thus the field in the whole gap of the magnet can be calculated from measurements. Surface correction coils

can be constructed from a comparison of the experimentally determined magnetic field at the poles with the field of the design calculation.

#### ACKNOWLEDGMENT

I am indebted to K.-H. Kaiser and U. Ludwig-Mertin at Institut für Kernphysik, Universität Mainz for their cooperation. This work was supported by DFG (Graduiertenkolleg "Physik und Technik von Beschleunigern").

- 
- [1] D. Sagan and D. Rubin, *Phys. Rev. ST Accel. Beams* **2**, 074001 (1999).
  - [2] H. Wiedemann, *Particle Accelerator Physics* (Springer-Verlag, Berlin, 1998), Vol. II.
  - [3] H. Herminghaus, K.-H. Kaiser, and U. Ludwig, *Nucl. Instrum. Methods Phys. Res.* **187**, 103 (1981).
  - [4] L. R. P. Kassab and P. Gouffon, *Phys. Rev. ST Accel. Beams* **1**, 012401 (1998).
  - [5] A. Morita, A. Noda, H. Tonguu, T. Shirai, and Y. Iwashita, in *Proceedings of the 7th European Particle Accelerator Conference*, edited by J. Pool and C. Petit (Institute of Physics, Bristol, U.K., 2000).
  - [6] TOSCA, software for Electromagnetic Design, Vector Fields Limited, Oxford, 1998.
  - [7] J. Jackson, *Classical Electrodynamics* (Wiley, New York, 1975).
  - [8] H. Wind, *Nucl. Instrum. Methods* **84**, 117 (1970).
  - [9] A. Jain, U.S. Particle Accelerator School, Houston, 2001.
  - [10] A. Quarteroni and A. Valli, *Numerical Approximation of Partial Differential Equations* (Springer-Verlag, Berlin, 1994).
  - [11] H. Herminghaus, A. Feder, K.-H. Kaiser, W. Manz, and H. v. d. Schmitt, *Nucl. Instrum. Methods* **138**, 1 (1976).
  - [12] DFG Collaborative Research Centre No. 443, 2001.
  - [13] U. Ludwig-Mertin, H. Euteneuer, K.-H. Kaiser, H.-J. Kreidel, and S. Ratschow, in *Proceedings of the 6th European Particle Accelerator Conference*, edited by J. Pool and C. Petit (Institute of Physics, Bristol, U.K., 1998).
  - [14] S. Ratschow, Ph.D. thesis, Institut für Kernphysik Universität Mainz, 2000.

# Literaturverzeichnis

- [1] K.-H. Kaiser et al., PTRACE-Bedienungsanleitung, Interne Notiz MAMI8/86, Institut für Kernphysik, Universität Mainz.
- [2] K.L. Brown, TRANSPORT, SLAC Report-75, 1982.
- [3] A. Ropert et al., Accelerator physics trends at the ERSF, Proc. PAC95, p.167.
- [4] J. Corbett, M. Lee, V. Ziemann, A Fast Model Calibration Procedure for Storage Rings, Proc. PAC93, p.108.
- [5] J. Corbett, V. Ziemann, Procedure for Determining Quadrupole and BPM Offset Values in Storage Rings, Proc. PAC93, p.114.
- [6] W. Fischer, A. Jain, S. Tepikian, Beam-Based Measurements of Persistent Current Decay in RHIC, Proc. PAC2001.
- [7] S. Myers, Twelve Years of Beam in LEP: the Good, the Bad, and the Unforeseen, Proc. EPAC2000.
- [8] H. Herminghaus et al., First Operation of the 850 MeV c.w. Electron Accelerator MAMI, Proc. 1990 Linear Acc. Conf., p.362.
- [9] A. Streun, Die 100 keV-Elektronenkanone für MAMI B, Diplomarbeit, Institut für Kernphysik, Universität Mainz, 1988.
- [10] K. Aulenbacher et al., Operational Experience with the MAMI-Source of Polarized Electrons, Proc. EPAC96, p.1502.
- [11] H. Euteneuer, Experiences in Fabricating and Testing the RF-Sections of the Mainz Microtron, SLAC Report-303, p.508.
- [12] H. Herminghaus, Continuous Beam Electron Accelerators, Proc. EPAC88.

- [13] H. Herminghaus, On the inherent stability of non-isochronous recirculating accelerators, Nucl. Instr. and Meth. A314 (1992), p.209.
- [14] H. Herminghaus, The polytron as a cw electron accelerator in the 10 GeV range, Nucl. Instr. and Meth. A305 (1991), p. 1.
- [15] S. Ratschow, Strahldynamische Untersuchungen zu einem Doppelseitigen Mikrotron als vierte Stufe von MAMI, Doktorarbeit, Institut für Kernphysik, Universität Mainz, 2000.
- [16] R.E. Rand, Recirculating electron accelerators, Harwood Academic Publishers, Amsterdam, 1984.
- [17] K.-H. Kaiser, A possible magnet field configuration for cw accelerators in the GeV region, Proc. Charlottesville Acc. Conf., 1979.
- [18] U. Ludwig-Mertin et al., Three Dimensional Design of the Bending Magnets for a 1.5 GeV Double Sided Microtron, Proc. EPAC98.
- [19] H. Herminghaus, H. Euteneuer, Beam Blowup in Race Track Microtrons, Nucl. Instr. and Meth. 163 (1979), p.299.
- [20] V.I. Shvedunov et al., Bunch Space Charge Limits in an RTM, Proc. PAC97.
- [21] A. Poncet, Ion Trapping and Clearing, CERN Accelerator School 95-06, 1995.
- [22] A. Poncet, Ion Trapping, Clearing, Beam-Ion Interactions, CERN Accelerator School 99-06, 1999.
- [23] L.D. Landau, E.M. Lifschitz, Lehrbuch der theoretischen Physik, Klassische Feldtheorie, Akademie-Verlag Berlin, 1992.
- [24] H. Wiedemann, Particle Accelerator Physics Vol.1, Springer-Verlag Berlin, 1993.
- [25] J.D. Jackson, Klassische Elektrodynamik, de Gruyter Berlin, 1986.
- [26] L.D. Landau, E.M. Lifschitz, Lehrbuch der theoretischen Physik, Mechanik, Akademie-Verlag Berlin, 1976.
- [27] D.A. Edwards, M.J. Syphers, An Introduction to the Theory of Charged Particle Accelerators, John Wiley & Sons, 1993.

- [28] V.I. Arnold, *Mathematical Methods of Classical Mechanics*, Springer-Verlag Berlin, 1989.
- [29] V.I. Arnold, *Ordinary Differential Equations*, Springer-Verlag Berlin, 1992.
- [30] E. Hairer, S. P. Norsett, G. Wanner, *Solving Ordinary Differential Equations I*, Springer-Verlag Berlin, 1993.
- [31] A. Jane, *Superconducting Accelerator Magnets*, US Particle Accelerator School, Houston 2001.
- [32] R. Courand, D. Hilbert, *Methods of Mathematical Physics Vol.II*, John Wiley & Sons, 1989.
- [33] A. Hofmann, *Theory of Synchrotron Radiation*, 38, SSRL ACD-Note, 1986.
- [34] TESLA Technical Design Report, DESY-Report 2001-011.
- [35] D.P. Barber et al., *Nonlinear Theory of Coupled Synchro-Betatron Motion*, DESY-Report 86-147, 1986.
- [36] J. Herrmann et al., *Emittance Growth by Synchrotron Radiation in a Double-Sided Microtron*, Proc. PAC99, p. 2915.
- [37] E.A. Crosbie, *Synchrotron Radiation Effects in the Argonne Hexatron*, ANL-GEM-40-83, 1983.
- [38] H. Euteneuer et al., *Beam Measurements and Operating Experience at MAMI*, Proc. EPAC94, p.506.
- [39] L.I. Schiff, *Quantum Mechanics*, McGraw-Hill, 1968.
- [40] R. Courand, D. Hilbert, *Methods of Mathematical Physics Vol.I*, John Wiley & Sons, 1989.
- [41] G. B. Folland, *Fourier Analysis and its Applications*, Wadsworth and Brooks/Cole, 1992.
- [42] F. Dyson *Phys. Rev.*, vol. 75, pp. 486, 1736, 1949.
- [43] H. Herminghaus et al., *The Design of a Cascaded 800 MeV Normal Conducting c.w. Race Track Microtron*, *Nucl. Instr. and Meth.* 138 (1976).

- [44] G. Ripken, Non-Linear Canonical Equations of Coupled Synchro-Betatron Motion and their Solution within the Framework of a Non-Linear 6-Dimensional (Symplectic) Tracking Program for Ultra-Relativistic Protons, DESY-Report 85-084, 1985.
- [45] W.K.H. Panofsky, W.A. Wenzel, Rev. Sci. Instrum. 27, p.967, 1956.
- [46] V.N. Melekhin, New considerations concerning the high-frequency focusing of relativistic particles and Panofsky-Wenzel theorem, Nucl. Instr. and Meth. A400 (1997), p. 170.
- [47] H. Euteneuer, H. Schöler, Das Design der HF-Sektionen für MAMI B, Interne Notiz MAMI 14/85, Institut für Kernphysik, Universität Mainz.
- [48] R. Klein, Messung der Shuntimpedanz und der Feldasymmetrie von Beschleunigerresonatoren, Diplomarbeit, Institut für Kernphysik, Universität Mainz, 1981.
- [49] H. Euteneuer, Notiz zur Drehung der MAMI Beschleunigungssektionen um ihre Längsachse, Interne Notiz MAMI 1/89, Institut für Kernphysik, Universität Mainz.
- [50] H. Euteneuer, H. Schöler, MAMI 2 Sektionsherstellung und Tuning der MAMI-Resonatoren, Interne Notiz MAMI 4/82, Institut für Kernphysik, Universität Mainz.
- [51] K. Wille, Physik der Teilchenbeschleuniger und Synchrotronstrahlungsquellen, Teubner, Stuttgart, 1992.
- [52] G. Stephan, Überlegungen zur Regelung der Amplitude und Phase der Klystrons TH 2075 an MAMI, Interne Notiz MAMI 02/94, Institut für Kernphysik, Universität Mainz.
- [53] H. Schriber, LOOP, Chalk River Nuclear Labs.
- [54] H. Wiedemann, Particle Accelerator Physics Vol.2, Springer-Verlag Berlin, 1999.
- [55] Jahresbericht des Instituts für Kernphysik Mainz 90/91, Mainz 1992.
- [56] H. Euteneuer et al., Beam monitors at the Mainz Microtron, Proc. LINAC92, p.356.
- [57] H. Euteneuer, A.Alimov, Bemerkungen und Daten zu den HF-Monitoren in den MAMI-Strahlführungen, Interne Notiz MAMI 2/98, Institut für Kernphysik, Universität Mainz.

- [58] H. Herminghaus, „Low- $Q$ “ Strahllageмонitore, Interne Notiz MAMI 8/80, Institut für Kernphysik, Universität Mainz.
- [59] VDA500 Operator's Manual, Signatec 1997.
- [60] HP Infinium Oscilloscopes, 54845A Programmer's Reference Guide, Hewlett-Packard 1997.
- [61] H.-J. Kreidel, Das System zur selbsttätigen Optimierung der Strahllage im Mainzer Mikrotron - seine Entwicklung und Erprobung an der 14 MeV-Stufe, Diplomarbeit, Institut für Kernphysik, Universität Mainz, 1981.
- [62] H.-J. Kreidel, Methoden zur Erkennung und Beseitigung von strahl optischen Störungen am Beispiel des Mainzer Mikrotrons, Doktorarbeit, Institut für Kernphysik, Universität Mainz, 1987.
- [63] W. Heyne, Rechnergestützte Erfassung schneller Strahlmonitorsignale und die Steuerung von Teilgeräten des Mainzer Mikrotron-Projekts, Diplomarbeit, Institut für Kernphysik, Universität Mainz, 1981.
- [64] K. Herter, Entwicklung und Erprobung eines Verfahrens zur Messung der absoluten Energie des Elektronenstrahls von MAMI, Diplomarbeit, Institut für Kernphysik, Universität Mainz 04/92.
- [65] H.-J. Kreidel et al., Present State of the MAMI Control System, Nucl. Instr. and Meth. A293 (1990), p. 74.
- [66] P. Zinneker, Eigenschaften und Korrektur der Umlenkmagnete der dritten Stufe von MAMI, Diplomarbeit, Institut für Kernphysik, Universität Mainz, 1989.
- [67] H. Herminghaus et al., Beam Optics and Magnet Technology of the Microtron in Mainz, Nucl. Instr. and Meth. 187 (1981), p. 103.
- [68] L.R.P. Kassab, P. Gouff, Correcting coils in end magnets of accelerators, Phys. Rev. ST Accel. Beams 1, 012401 (1998).
- [69] P. Jennewein et al., Statusbericht für die 250to-Umlenkmagnete von MAMI C, MAMI-Seminar SS 2001, Universität Mainz.
- [70] A. Quarteroni, A. Valli, Numerical Approximation of Partial Differential Equations, Springer-Verlag Berlin, 1994.

- [71] J. Werner, Numerische Mathematik Bd.1, Vieweg Verlag, Braunschweig/Wiesbaden, 1992.
- [72] Software for Electromagnetic Design, Vector Fields Limited, Oxford.
- [73] E. Wilson, Non-linearities and Resonances, CERN Accelerator School 94-01, 1994.
- [74] F.T. Cole, Nonlinear Transformation in Action-Angle Variables, Int. Note Fermilab TM-179 (2040), 1969.
- [75] K.-H. Kaiser et al., New Installations and Beam Measurements at MAMI, Proc. EPAC98, p.523.
- [76] Jahresbericht des Instituts für Kernphysik Mainz 98/99, Mainz 2000.
- [77] Jahresbericht des Instituts für Kernphysik Mainz 88/89, Mainz 1990.
- [78] G.F. Franklin, J.D. Powell, M. Workman, Digital Control of Dynamic Systems, Addison Wesley Longman, 1998.
- [79] T. Himel, Feedback: Theory and Accelerator Applications, SLAC-PUB-7398, 1997.
- [80] M. Seidl et al., High Precision Beam Energy Stabilisation of the Mainz Microtron MAMI, Proc. EPAC2000, p.1930.



