Konstruktion symmetrischer Designs

Dissertation
zur Erlangung des Grades
„Doktor der Naturwissenschaften“

am Fachbereich Mathematik
der Johannes Gutenberg-Universität
in Mainz

Wolfram Wirth
geboren in Limburg/Lahn

Mainz, 2000

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung **3**

2 Grundlagen **10**

2.1 Inzidenzstrukturen 10

2.2 Symmetrische Designs 12

2.3 Automorphismen 14

2.4 Semidirekte Produkte von E_{16} mit A_5 19

2.5 Das symmetrische (11,5,2) Design und die Gruppe $L_2(11)$ . . . 21

3 Symmetrische (176,50,14) Designs **23**

3.1 Das symmetrische (176,50,14) Design von G. Higman 24

3.2 $E_{16} : A_5$ (intransitiv) 26

3.3 $E_{16} : A_5$ (transitiv) 42

3.4 $E_8 : GL_3(2)$ 76

3.5 $Z_5 \times A_5$ 94

3.6 $L_2(11)$ (2 Bahnen) 104

3.7 $L_2(11)$ (3 Bahnen) 132

3.8 Übersicht 142

4 Ein symmetrisches (144,66,30) Design in M_{12} 144

4.1 Definition des Designs . . . 144

4.2 Definierende Relationen und Operation von M_{12} . . . 144

4.3 Konstruktion des Designs . . . 147

Kapitel 1

Einleitung

Seien v, k und λ positive ganze Zahlen und A eine $(v \times v)$-Matrix mit Einträgen aus $\{0, 1\}$. Die Matrix A heißt *Inzidenzmatrix* zu einem *symmetrischen* (v, k, λ) *Design*, falls gelten:

(1) In jeder Zeile und in jeder Spalte sind genau k Einträge gleich 1

(2) Je zwei Spalten haben an genau λ Positionen beide den Eintrag 1.

Um Trivialitäten auszuschließen, fordert man meistens noch $2 \leq k \leq v - 2$.

Ein Beispiel für eine Inzidenzmatrix zu einem symmetrischen $(7, 3, 1)$ Design:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad .$$

Die Bedingungen bleiben erfüllt, wenn man eine solche Inzidenzmatrix beliebigen Zeilen- und Spaltenpermutationen unterwirft. Zwei Inzidenzmatrizen A und B heißen *äquivalent*, falls es Permutationsmatrizen P und Q gibt mit

$A = PBQ$. Ein *symmetrisches* (v, k, λ) *Design* ist nun eine Äquivalenzklasse derartiger Matrizen bezüglich simultaner Zeilen- und Spaltenpermutation.

Die übliche Definition eines symmetrischen Designs beginnt am anderen Ende: Gegeben seien zwei endliche nichtleere Mengen $\mathcal{P}$ und $\mathcal{B}$ mit $\mathcal{P} \cap \mathcal{B} = \emptyset$; die Elemente von $\mathcal{P}$ heißen Punkte, die Elemente von $\mathcal{B}$ heißen Blöcke. Ferner sei I eine Relation zwischen $\mathcal{P}$ und $\mathcal{B}$. Gilt $(P, x) \in I$ für einen Punkt P und einen Block x, so heißen P und x inzident; man schreibt dann auch PIx oder xIP.

Das Tripel $\mathcal{D} = (\mathcal{P}, \mathcal{B}, I)$ ist ein *symmetrisches* (v, k, λ) *Design*, falls gelten:

(1) $|\mathcal{P}| = |\mathcal{B}| = v$

(2) Mit jedem Block sind genau k Punkte inzident

(3) Mit jedem Punkt sind genau k Blöcke inzident

(4) Mit je zwei Punkten sind genau λ Blöcke gemeinsam inzident.

Dem Design $\mathcal{D}$ ordnet man nun eine Inzidenzmatrix A zu: Zunächst nummeriert man die Punkte und Blöcke; etwa $\mathcal{P} = \{P_1, \ldots, P_v\}$ und $\mathcal{B} = \{x_1, \ldots, x_v\}$. Dann definiert man Einträge a_{ij} durch

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & , \quad \text{falls}\, x_i \, I \, P_j \\ 0 & , \quad \text{sonst} \end{cases}$$

für alle $1 \leq i, j \leq v$ und setzt $A = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq v}$. Die Gestalt von A hängt natürlich von der vorgenommenen Nummerierung ab; verschiedene Nummerierungen liefern allerdings stets äquivalente Inzidenzmatrizen. Zwei symmetrische (v, k, λ) Designs heißen *isomorph*, falls sie äquivalente Inzidenzmatrizen haben.

Eine grundlegende Frage zu symmetrischen (v, k, λ) Designs lautet nun:

Zu welchen positiven ganzen Zahlen v, k und λ existieren symmetrische (v, k, λ) Designs?

Die folgenden notwendigen Bedingungen für die Existenz sind bekannt:

(1) $\lambda\,(v-1) \quad = \quad k\,(k-1)$

(2) Ist v gerade, so ist $k-\lambda$ eine Quadratzahl

(3) Ist v ungerade, so gibt es ganze Zahlen x, y, z mit $(x,y,z) \neq (0,0,0)$, die

$$(k-\lambda)x^2 + (-1)^{\frac{v-1}{2}}\lambda y^2 = z^2$$

erfüllen.

Eine alte Vermutung besagte, dass diese Bedingungen auch hinreichend seien. Erst im Jahr 1989 wurde dies widerlegt [17]. Mit codierungstheoretischen Methoden und massivem Computereinsatz wurde gezeigt, dass es kein symmetrisches $(111, 11, 1)$ Design gibt (dies wäre eine projektive Ebene der Ordnung 10). Dies ist zur Zeit allerdings das einzige bekannte Gegenbeispiel.

Eine andere Vermutung besagt, dass es zu jedem festen $\lambda > 1$ nur endlich viele Tripel (v, k, λ) gibt, zu denen ein symmetrisches (v, k, λ) Design existiert. Doch auch diese Vermutung steht derzeit nur auf schwachen Füßen, vgl. [18], Seite 45, Conjecture 2.4 und Seite 223, Conjecture 6.1.

Zu $\lambda = 1$ existieren unendlich viele symmetrische Designs: Sei q eine Primzahlpotenz und V ein dreidimensionaler $GF(q)$-Vektorraum. Nenne die eindimensionalen Unterräume von V Punkte und die zweidimensionalen Blöcke. Man rechnet leicht nach :

- es gibt jeweils genau $q^2 + q + 1$ Punkte und Blöcke,
- jeder Block enthält genau $q + 1$ Punkte,
- jeder Punkt liegt in genau $q + 1$ Blöcken,
- je zwei Punkte liegen gemeinsam in genau einem Block,
- je zwei Blöcke schneiden sich in genau einem Punkt.

Verwendet man die Inklusion als Inzidenzrelation, so ist diese Struktur also ein symmetrisches $(q^2+q+1, q+1, 1)$ Design. (Natürlich ist dies genau die desarguessche projektive Ebene der Ordnung q.)

Diese unendliche Serie symmetrischer Designs kann noch verallgemeinert werden. Für $n \geq 3$ nenne man in n-dimensionalen $GF(q)$-Vektorräumen die Unterräume der Dimension 1 Punkte und diejenigen der Dimension $n-1$ Blöcke. Wieder erhält man ein symmetrisches Design.

Eine andere unendliche Serie symmetrischer Designs erhält man wie folgt: Man bilde das Tensorprodukt (auch Kroneckerprodukt genannt) von $m \geq 2$ Kopien der Matrix

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad .$$

In der Ergebnismatrix ersetze man jede 1 durch eine 0 und dann jede -1 durch eine 1. Das Resultat ist eine Inzidenzmatrix für ein symmetrisches $(2^{2m}, 2^{2m-1}-2^{m-1}, 2^{2m-2}-2^{m-1})$ Design.

Außer diesen beiden Serien sind noch weitere Familien bekannt, vgl. die Übersicht in [7], Seite 78f.

Die Designs der beiden oben genannten unendlichen Serien haben eine interessante Eigenschaft. Um sie zu erklären, benötigen wir den Begriff *Automorphismus*. Sei $\mathcal{D}$ ein symmetrisches (v, k, λ) Design mit Punktmenge $\mathcal{P}$ und Blockmenge $\mathcal{B}$. Sei nun π eine Permutation auf $\mathcal{P} \cup \mathcal{B}$, die Punkte auf Punkte und Blöcke auf Blöcke abbildet. Die Permutation π heißt *Automorphismus* von $\mathcal{D}$, falls

$$P\ I\ x \quad \Leftrightarrow \quad P^\pi\ I\ x^\pi$$

für alle $P \in \mathcal{P}$ und alle $x \in \mathcal{B}$ gilt. Die Menge aller Automorphismen eines symmetrischen Designs bildet bezüglich Hintereinanderausführung eine Gruppe, die sogenannte *(volle) Automorphismengruppe* des Designs.

E. F. Assmus Jr. und J. D. Key schreiben in ihrem Buch „Designs and Their Codes“[1] auf Seite 296 völlig zu Recht, dass mächtige gruppentheoretische Methoden in den frühen Stadien der Theorie das meiste zur Entdeckung und Klassifikation von Designs beitrugen. Daraus allerdings den von den Autoren suggerierten Umkehrschluss zu ziehen, dass dem später nicht mehr so gewesen wäre, scheint verfehlt.

Denn: Das bisher erfolgreichste Mittel zur Konstruktion symmetrischer Designs ist die Vorgabe einer Automorphismengruppe. Das heißt, man gibt ein Tripel (v, k, λ) und eine Gruppe G vor sowie eine Permutationsdarstellung von G nach $\Sigma_v \times \Sigma_v$. Nun fragt man, welche symmetrischen (v, k, λ) Designs die Gruppe G als Automorphismengruppe bezüglich der vorgegebenen Permutationsdarstellung auf den jeweils v Punkten und Blöcken zulassen.

Ein Blick auf die Liste in [7], Seite 78ff., zeigt, dass die meisten bekannten symmetrischen Designs mit Hilfe von Automorphismengruppen entdeckt wurden. Dabei ist noch zu berücksichtigen, dass sogenannte Differenzmengen gleichbedeutend sind zu symmetrischen Designs, die eine reguläre Gruppe von Automorphismen zulassen. Auch der Beweis der Nichtexistenz einer projektiven Ebene der Ordnung 10 wurde erst dann mit codierungstheoretischen Methoden versucht, als bekannt war, dass eine solche Struktur nur die triviale Automorphismengruppe zulassen würde.

Zurück zu unseren unendlichen Serien: Jedes Design dieser beiden Serien hat eine volle Automorphismengruppe, die zweifach transitiv auf dessen Punkten operiert. Mit Hilfe der Klassifikation der endlichen einfachen Gruppen hat W. M. Kantor [15] gezeigt: Ist $\mathcal{D}$ ein symmetrisches (v, k, λ) Design, das eine solche Automorphismengruppe zulässt, so ist $\mathcal{D}$ entweder zu einem Design der beiden Serien isomorph oder die Parameter sind $(11, 5, 2)$ (in diesem Fall ist das Design bis auf Isomorphie durch seine Parameter eindeutig bestimmt; die Automorphismengruppe ist $PSL(2, 11)$; vgl. auch 2.5) oder die Parameter sind $(176, 50, 14)$ und die volle Automorphismengruppe ist die sporadische einfache Gruppe HS der Ordnung 44.352.000 von D. G. Higman und C. C. Sims.

Das letztgenannte symmetrische $(176, 50, 14)$ Design wurde - unabhängig von D. G. Higman und C. C. Sims - von G. Higman [11] gefunden. Lange Zeit blieb es das einzige bekannte symmetrische Design mit diesen Parametern. So blieb die Frage offen, ob es weitere solche Designs gibt. Die Vermutung, dass dies nicht der Fall sei, schien einigermaßen plausibel; denn das Higman-Design kann aus dem sogenannten großen Steiner-Blockplan konstruiert werden - und diese Struktur ist durch ihre Parameter bis auf Isomorphie eindeutig bestimmt.

Erst Z. Janko fand ein weiteres symmetrisches $(176, 50, 14)$ Design [13]. Dabei ging er von der Beobachtung aus, dass die Automorphismengruppe des Higman-Designs eine Gruppe H enthält, die isomorph zu $(Z_4 \times Z_4 \times Z_4) : F_{21}$ ist. Nun berechnete Janko die Operation dieser Gruppe auf dem Higman-Design und erhielt, dass H sowohl auf den Punkten als auch auf den Blöcken in jeweils zwei Bahnen der Längen 64 (Stabilisator ist F_{21}) und 112 (Stabilisator ist Z_{12}) operiert. Nun fragte er, welche symmetrischen $(176, 50, 14)$ Designs die Operation von H mit diesen Stabilisatoren zulassen und erhielt neben dem Higman-Design ein neues Design, dessen volle Automorphismengruppe isomorph zu H ist.

Kurz gesagt: Bekannt war die große Anzahl der inneren Symmetrien des Higman-Designs. Janko fragte, ob es weitere Designs gibt, die nur einen bestimmten Teil dieser Symmetrien haben.

In dieser Arbeit wird dieselbe Frage für andere Untergruppen von HS beantwortet; nämlich für $E_{16} : A_5$ (transitive und intransitive Erweiterung), $E8 : GL(3, 2)$, $Z_5 \times A_5$ und $PSL(2, 11)$. Für $PSL(2, 11)$ werden darüber hinaus alle symmetrischen $(176, 50, 14)$ Designs angegeben, die die Operation dieser Gruppe in zwei oder drei Bahnen auf den Punkten zulassen. Insgesamt werden so zehn neue symmetrische $(176, 50, 14)$ Designs konstruiert.

Ferner wird die Existenz eines symmetrischen $(144, 66, 30)$ Designs gezeigt, dessen volle Automorphismengruppe isomorph zu $Aut\, M_{12}$ (Ordnung 190.080) ist und als Rang-5-Gruppe auf den Punkten operiert. Mit diesem Design und seiner Gruppe ist nun dasselbe Vorgehen möglich wie für das Higman-Design und die Higman-Sims-Gruppe - man wählt eine Untergruppe von $Aut\, M_{12}$ und sucht nach Designs, die diese Untergruppe zulassen.

Bei allen Konstruktionen spielten definierende Relationen für die jeweils vorgegebene Gruppe eine zentrale Rolle. Mit Hilfe des Programmes ENUM [9] von Jörg Hřabé de Angelis konnten die benötigten Permutationsdarstellungen dieser Gruppen berechnet werden. Umfangreiche eigene Programme verwendeten diese Darstellungen zur Konstruktion der Designs. Ein Nebenprodukt dieser Arbeit sind definierende Relationen für die transitive Erweiterung von E_{16} durch A_5 (manchmal auch als M_{20} bezeichnet) und für die Gruppe $Aut\, M_{20} \cong M_{20} : \Sigma_4$. Auch für $AGL(3, 2) = E_8 : GL(3, 2)$ und $Aut\, AGL(3, 2) \cong AGL(3, 2) : Z_2$ werden definierende Relationen angegeben.

Die verwendeten Schreibweisen und Begriffe entsprechen weitgehend dem Standard und sind so z. B. in [12], [21] und [7] zu finden. Mit Σ_n, A_n, F_n, D_n, E_n bzw. Z_n bezeichnen wir die symmetrische Gruppe auf n Ziffern, die alternierende Gruppe auf n Ziffern, eine Frobeniusgruppe der Ordnung n, die Diëdergruppe der Ordnung n, die elementarabelsche Gruppe der Ordnung n bzw. die zyklische Gruppe der Ordnung n. Für die projektive spezielle lineare Gruppe $PSL_n(q)$ schreiben wir auch kurz $L_n(q)$; ebenso schreiben wir für die projektive spezielle unitäre Gruppe $PSU_n(q)$ auch $U_n(q)$. Operiert eine Gruppe G auf einer Menge Ω, so schreiben wir G_ω für den Stabilisator von $\omega \in \Omega$ in G und ω^G für die Bahn von $\omega \in \Omega$ unter G. Ist $g \in G$, so schreiben wir $ccl_G(g)$ für die G-Konjugiertenklasse von g.

Kapitel 2

Grundlagen

Hier werden Informationen über symmetrische Designs zusammengestellt. Dabei wird sich im Wesentlichen auf das beschränkt, was für das Verständnis der folgenden Kapitel nötig ist. Ausführlichere Darstellungen sind z. B. in [1], [3], [4], [8] und [18] zu finden. Einen guten Überblick bieten auch die Abschnitte über 2-(v, k, λ) Designs und über symmetrische Designs in [7].

2.1 Inzidenzstrukturen

Eine *Inzidenzstruktur* ist ein Tripel $\mathcal{I} = (\mathcal{P}, \mathcal{B}, I)$ von Mengen $\mathcal{P}$, $\mathcal{B}$ und I mit $\mathcal{P} \neq \emptyset \neq \mathcal{B}$, $\mathcal{P} \cap \mathcal{B} = \emptyset$ und $I \subseteq \mathcal{P} \times \mathcal{B}$. Die Elemente von $\mathcal{P}$ heißen *Punkte*, die Elemente von $\mathcal{B}$ heißen *Blöcke*, I heißt *Inzidenzrelation*. Gilt $(P, x) \in I$ für ein $P \in \mathcal{P}$ und ein $x \in \mathcal{B}$, so schreiben wir auch PIx oder xIP und sagen „P und x sind inzident“, „P und x inzidieren“, „P liegt auf x“, „x geht durch P“ usw. Eine Inzidenzstruktur $\mathcal{I}$ heißt *endlich*, falls $\mathcal{P}$ und $\mathcal{B}$ endliche Mengen sind; nur solche wollen wir im Folgenden betrachten.

Sei $\mathcal{I} = (\mathcal{P}, \mathcal{B}, I)$ eine Inzidenzstruktur. Für $P \in \mathcal{P}$ bezeichnen wir mit $\langle P \rangle$ die Menge der mit P inzidierenden Blöcke; für die Menge der mit $x \in \mathcal{B}$ inzidierenden Punkte schreiben wir $\langle x \rangle$. Offenbar gilt

$$\sum_{P \in \mathcal{P}} |\langle P \rangle| \quad = \quad \sum_{x \in \mathcal{B}} |\langle x \rangle| \quad = \quad |I| \quad .$$

Zur Darstellung von Inzidenzstrukturen verwenden wir gelegentlich Matrizen. Seien dazu die Punkte und Blöcke von $\mathcal{I}$ nummeriert, etwa $\mathcal{P} = \{P_1, \ldots, P_v\}$ und $\mathcal{B} = \{x_1, \ldots, x_b\}$. Ist $A = (a_{ij})$, $1 \leq i \leq b$, $1 \leq j \leq v$, die $(b \times v)$-Matrix mit

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & , \quad \text{falls}\, x_i\, I\, P_j \\ 0 & , \quad \text{sonst} \end{cases} \qquad ,$$

so heißt A eine *Inzidenzmatrix* zu $\mathcal{I}$. Natürlich hängt die Gestalt von A im Allgemeinen von der vorgenommenen Nummerierung ab.

Seien $\mathcal{I}_1 = (\mathcal{P}_1, \mathcal{B}_1, I_1)$ und $\mathcal{I}_2 = (\mathcal{P}_2, \mathcal{B}_2, I_2)$ Inzidenzstrukturen. Eine bijektive Abbildung $\varphi : \mathcal{P}_1 \cup \mathcal{B}_1 \longmapsto \mathcal{P}_2 \cup \mathcal{B}_2$, die Punkte auf Punkte und Blöcke auf Blöcke abbildet, heißt *Isomorphismus* von $\mathcal{I}_1$ nach $\mathcal{I}_2$, falls sie inzidenzerhaltend ist; d. h., für alle $P \in \mathcal{P}_1$ und für alle $x \in \mathcal{B}_1$ gilt:

$$P\, I_1\, x \quad \Leftrightarrow \quad P^{\varphi}\, I_2\, x^{\varphi} \quad .$$

Falls ein Isomorphismus von $\mathcal{I}_1$ nach $\mathcal{I}_2$ existiert, so heißen $\mathcal{I}_1$ und $\mathcal{I}_2$ *isomorph.* Wir schreiben dann $\mathcal{I}_1 \cong \mathcal{I}_2$.

Sei $\mathcal{I}$ eine Inzidenzstruktur. Ein Isomorphismus von $\mathcal{I}$ nach $\mathcal{I}$ heißt *Automorphismus* von $\mathcal{I}$. Stets ist die identische Permutation der Punkte und Blöcke von $\mathcal{I}$ ein Automorphismus von $\mathcal{I}$. Die Menge aller Automorphismen von $\mathcal{I}$ bildet bezüglich Hintereinanderausführung eine Gruppe, die sogenannte *Automorphismengruppe* von $\mathcal{I}$, die wir mit $Aut\,\mathcal{I}$ bezeichnen.

Ist A eine Inzidenzmatrix zur Inzidenzstruktur $\mathcal{I}$, so entsprechen die Automorphismen von $\mathcal{I}$ offenbar genau denjenigen Kombinationen von Zeilen- und Spaltenpermutationen, die A invariant lassen.

Sei $\mathcal{I} = (\mathcal{P}, \mathcal{B}, I)$ eine Inzidenzstruktur. Die *zu* $\mathcal{I}$ *duale Inzidenzstruktur* $\mathcal{I}^T = (\mathcal{P}^T, \mathcal{B}^T, I^T)$ ist definiert durch $\mathcal{P}^T := \mathcal{B}$, $\mathcal{B}^T := \mathcal{P}$ sowie $I^T := \{\ (x, P) \mid (P, x) \in I\ \}$. Falls $\mathcal{I} \cong \mathcal{I}^T$, so heißt $\mathcal{I}$ *selbstdual.*

Ist A eine Inzidenzmatrix zur Inzidenzstruktur $\mathcal{I}$, so ist A^T eine Inzidenzmatrix zu $\mathcal{I}^T$.

2.2 Symmetrische Designs

Seien v, k und λ natürliche Zahlen. Eine Inzidenzstruktur $\mathcal{D} = (\mathcal{P}, \mathcal{B}, I)$ heißt *symmetrisches* (v, k, λ) *Design* oder auch *symmetrisches Design mit Parametern* (v, k, λ), falls gilt:

(1)	es gibt genau v Punkte
(1^T)	es gibt genau v Blöcke
(2)	jeder Punkt inzidiert mit genau k Blöcken
(2^T)	jeder Block inzidiert mit genau k Punkten
(3)	je zwei Punkte inzidieren gemeinsam mit genau λ Blöcken
(3^T)	je zwei Blöcke inzidieren gemeinsam mit genau λ Punkten .

Um triviale Fälle auszuschließen, fordern wir noch

(4) $2 \leq k \leq v - 2\,.$

Da zu jeder Bedingung auch deren duales Pendant gefordert ist, ist mit $\mathcal{D}$ auch $\mathcal{D}^T$ ein symmetrisches (v, k, λ) Design; im Allgemeinen gilt jedoch nicht unbedingt $\mathcal{D} \cong \mathcal{D}^T$.

Die Bedingungen sind nicht unabhängig voneinander. Zum Beispiel folgen aus der Gültigkeit von (1), (1^T), (2^T) und (3) schon (2) und (3^T).

Wir vermerken noch, dass jede endliche projektive Ebene der Ordnung n ein symmetrisches $(n^2 + n + 1, n + 1, 1)$ Design ist.

2.2.1 Lemma *Ist $\mathcal{D} = (\mathcal{P}, \mathcal{B}, I)$ ein symmetrisches (v, k, λ) Design, so gilt* $\lambda\,(v - 1) = k\,(k - 1)\,.$

Beweis. Die Aussage folgt durch doppeltes Abzählen der Menge

$$\{\,(x, P, Q) \,|\, x \in \mathcal{B};\; P, Q \in \langle x \rangle;\; P \neq Q\,\}\,.$$

□

Oft ist es zweckmäßig, neben v, k und λ noch einen vierten Parameter zu definieren. Ist $\mathcal{D} = (\mathcal{P}, \mathcal{B}, I)$ ein symmetrisches (v, k, λ) Design, so heißt $n := k - \lambda$ die *Ordnung* von $\mathcal{D}$.

Ist $\lambda = 1$, so ist $k = n + 1$. Aus obigem Lemma folgt $v = n^2 + n + 1$. Aus $v - 2 \geq k$ erhalten wir dann $k \geq 3$. Es ist jetzt leicht, die Existenz eines Vierecks zu zeigen; d. h., es gibt vier Punkte, von denen keine drei auf einem Block liegen. Jedes symmetrische $(v, k, 1)$ Design kann also als projektive Ebene der Ordnung $n = k - 1$ aufgefasst werden. Der Begriff der Ordnung eines symmetrischen Designs mit $\lambda = 1$ verträgt sich demnach mit der üblichen Definition der Ordnung einer projektiven Ebene.

2.2.2 Lemma *(Schützenberger) Ist $\mathcal{D} = (\mathcal{P}, \mathcal{B}, I)$ ein symmetrisches (v, k, λ) Design und v eine gerade Zahl, so ist n, die Ordnung von $\mathcal{D}$, eine Quadratzahl.*

Beweis. Sei A eine Inzidenzmatrix zu $\mathcal{D}$. Unmittelbar aus der Definition eines symmetrischen (v, k, λ) Designs folgt

$$\begin{aligned} AA^T &= \begin{pmatrix} k & & & & & & \\ & k & & & & \lambda & \\ & & k & & & & \\ & & & \dots & & & \\ & & & & \dots & & \\ & \lambda & & & & \dots & \\ & & & & & & k \end{pmatrix} \\ &= (k - \lambda)\mathbf{I} + \lambda\mathbf{J}. \end{aligned}$$

Dabei ist $\mathbf{I}$ die Einheitsmatrix und $\mathbf{J}$ die alles-1-Matrix. Wir berechnen nun $det\,(AA^T)$ und subtrahieren dabei zunächst die erste Spalte von allen anderen.

$$det\,(AA^T) = det \begin{pmatrix} k & \lambda - k & \dots & & & \dots & \lambda - k \\ \lambda & k - \lambda & 0 & \dots & & \dots & 0 \\ \lambda & 0 & k - \lambda & 0 & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \ddots & & & \vdots \\ & & & & & & \\ \vdots & \vdots & & & & \ddots & 0 \\ \lambda & 0 & & & & & k - \lambda \end{pmatrix}$$

Addieren wir nun zur ersten Zeile die Summe der übrigen, so erhalten wir

$$\begin{aligned} det\,(AA^T) &= det \begin{pmatrix} k+\lambda(v-1) & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ \lambda & k-\lambda & 0 & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & & & \vdots \\ & & & & & \\ \vdots & \vdots & & & \ddots & \vdots \\ \lambda & 0 & \dots & & \dots & k-\lambda \end{pmatrix} \\ &= (\,k+\lambda(v-1)\,)\,(\,k-\lambda\,)^{v-1} \\ &= k^2\,n^{v-1} \quad . \end{aligned}$$

Da v eine gerade Zahl ist, folgt mit $det\,(AA^T) = (detA)^2$, dass n eine Quadratzahl ist. □

2.2.3 Lemma *(Bruck, Ryser, Chowla) Ist $\mathcal{D} = (\mathcal{P}, \mathcal{B}, I)$ ein symmetrisches (v, k, λ) Design und v eine ungerade Zahl, so gibt es ganze Zahlen x, y, z mit $(x, y, z) \neq (0, 0, 0)$, die*

$$nx^2 + (-1)^{\frac{v-1}{2}} \lambda y^2 = z^2$$

erfüllen.

Beweis. Ein Beweis ergibt sich aus [5] und [6]; auch die im Anhang genannten Standardwerke enthalten Beweise. □

2.3 Automorphismen

Sei $\mathcal{D} = (\mathcal{P}, \mathcal{B}, I)$ ein symmetrisches Design und $\varphi \in Aut\,\mathcal{D}$. Ein Punkt $P \in \mathcal{P}$ heißt *Fixpunkt von* φ, falls $P^\varphi = P$. Ein Block $x \in \mathcal{B}$ heißt *Fixblock von* φ, falls $x^\varphi = x$.

2.3.1 Lemma *Sei $\mathcal{D} = (\mathcal{P}, \mathcal{B}, I)$ ein symmetrisches Design und $\varphi \in Aut\,\mathcal{D}$. Dann ist die Anzahl der Fixpunkte von φ gleich der Anzahl der Fixblöcke von φ.*

Beweis. Man bestimme die Mächtigkeit der Menge

$$\{ \quad (P, P^\varphi, x) \quad | \quad P \in \mathcal{P},\ x \in \mathcal{B},\ PIx,\ P^\varphi Ix \quad \}$$

auf zwei verschiedene Weisen. □

Das nächste Lemma wird in der Literatur mal Burnside, mal Cauchy und Frobenius zugeschrieben.

2.3.2 Lemma *Die endliche Gruppe G operiere auf der endlichen Menge Ω. Für $g \in G$ sei $\chi(g)$ die Anzahl der Elemente $\omega \in \Omega$ mit $\omega^g = \omega$. (Man nennt χ den* Permutationscharakter.*) Ist t die Anzahl der Bahnen, in die Ω bei der Operation von G zerfällt, so gilt*

$$t\,|G| \quad = \quad \sum_{g \in G} \chi(g)\ .$$

Beweis. Sei X die Menge der Paare $(g, \omega) \in G \times \Omega$ mit $\omega^g = \omega$. Offenbar gilt

$$\sum_{g \in G} \chi(g) \quad = \quad |X| \quad = \quad \sum_{\omega \in \Omega} |G_\omega|\ .$$

Sind nun $\Omega_1, \ldots, \Omega_t$ die Bahnen von G auf Ω und sind $\omega_i \in \Omega_i$ Repräsentanten dieser Bahnen, so folgt

$$\begin{aligned} \sum_{\omega \in \Omega} |G_\omega| \quad &= \quad \sum_{i=1}^{t} |\Omega_i|\,|G_{\omega_i}| \\ &= \quad \sum_{i=1}^{t} |G| \\ &= \quad t\,|G|\ . \end{aligned}$$

□

2.3.3 Lemma *Sei $\mathcal{D} = (\mathcal{P}, \mathcal{B}, I)$ ein symmetrisches (v, k, λ) Design und G eine Untergruppe von $\mathrm{Aut}\,\mathcal{D}$. Dann hat G auf den Punkten von $\mathcal{D}$ dieselbe Anzahl von Bahnen wie auf den Blöcken von $\mathcal{D}$.*

Beweis. Dies folgt aus 2.3.1 zusammen mit 2.3.2. □

Im Folgenden sei stets $\mathcal{D} = (\mathcal{P}, \mathcal{B}, I)$ ein symmetrisches (v, k, λ) Design und G eine Untergruppe von $Aut\,\mathcal{D}$. Ferner sei t die Anzahl der Punktbahnen bei der Operation von G auf $\mathcal{D}$. Nach obigem Lemma ist t auch die Anzahl der entsprechenden Blockbahnen. Die Punkt- bzw. Blockbahnen bezeichnen wir mit $\mathcal{P}_1, \ldots, \mathcal{P}_t$ bzw. $\mathcal{B}_1, \ldots, \mathcal{B}_t$. Für $1 \leq i \leq t$ seien $P_i \in \mathcal{P}_i$ und $x_i \in \mathcal{B}_i$ Repräsentanten dieser Bahnen.

Wir definieren für $1 \leq i, r \leq t$ die Zahlen $\gamma_{ir} := \mid \langle x_i \rangle \cap \mathcal{P}_r \mid$ und $\Gamma_{ir} := \mid \langle P_r \rangle \cap \mathcal{B}_i \mid$. Offenbar spielt dabei die spezielle Wahl der Repräsentanten x_i und P_r keine Rolle. Die Matrix $(\gamma_{ir})_{1 \leq i, r \leq t}$ heißt auch *Blockorbitalstruktur*, *Blockorbitalmatrix* oder auch einfach *Orbitalstruktur* bzw. *Orbitalmatrix* von $\mathcal{D}$ bezüglich G.

Unmittelbar aus den Definitionen folgt

2.3.4 Lemma *Für alle* $1 \leq i, r \leq t$ *gilt* $\gamma_{i1} + \ldots + \gamma_{it} = k = \Gamma_{1r} + \ldots \Gamma_{tr}$.

Schließlich setzen wir noch $\Omega_i := \mid \mathcal{B}_i \mid$ und $\omega_i := \mid \mathcal{P}_i \mid$ für alle $1 \leq i \leq t$.

2.3.5 Lemma *Für alle* $1 \leq i, r \leq t$ *gilt* $\Omega_i\, \gamma_{ir} = \omega_r\, \Gamma_{ir}$.

Beweis.

$$
\begin{aligned}
\Omega_i\, \gamma_{ir} &= \sum_{x \in \mathcal{B}_i} \gamma_{ir} \\
&= \sum_{x \in \mathcal{B}_i} \mid \langle x \rangle \cap \mathcal{P}_r \mid \\
&= \sum_{x \in \mathcal{B}_i} \mid \{\, (P, x) \in I \mid P \in \mathcal{P}_r \,\} \mid \\
&= \sum_{P \in \mathcal{P}_r} \mid \{\, (P, x) \in I \mid x \in \mathcal{B}_i \,\} \mid \\
&= \sum_{P \in \mathcal{P}_r} \mid \langle P \rangle \cap \mathcal{B}_i \mid \\
&= \sum_{P \in \mathcal{P}_r} \Gamma_{ir} \\
&= \omega_r\, \Gamma_{ir} \quad .
\end{aligned}
$$

□

2.3.6 Lemma *Für alle* $1 \leq i, j \leq t$ *gilt*

$$\sum_{r=1}^{t} \gamma_{ir} \, \Gamma_{jr} \quad = \quad \lambda \, \Omega_j + n \, \delta_{ij} \quad .$$

Beweis. Sei $x \in \mathcal{B}_i$. Dann gilt

$$\begin{aligned}
\sum_{y \in \mathcal{B}_j} \mid \langle x \rangle \cap \langle y \rangle \mid \quad &= \quad \sum_{r=1}^{t} \sum_{y \in \mathcal{B}_{\S j}} \mid \langle x \rangle \cap \mathcal{P}_r \cap \langle y \rangle \mid \\
&= \quad \sum_{r=1}^{t} \sum_{P \in \langle x \rangle \cap \mathcal{P}_{\S r}} \mid \{ \, (P, y) \in I \mid y \in \mathcal{B}_j \, \} \mid \\
&= \quad \sum_{r=1}^{t} \sum_{P \in \langle x \rangle \cap \mathcal{P}_{\S r}} \Gamma_{jr} \\
&= \quad \sum_{r=1}^{t} \gamma_{ir} \, \Gamma_{jr} \quad .
\end{aligned}$$

Für $i \neq j$ gilt

$$\sum_{y \in \mathcal{B}_{\S j}} \mid \langle x \rangle \cap \langle y \rangle \mid \quad = \quad \sum_{y \in \mathcal{B}_{\S j}} \lambda \quad = \quad \Omega_j \, \lambda \, .$$

Ist dagegen $i = j$, so erhalten wir

$$\begin{aligned}
\sum_{y \in \mathcal{B}_{\S j}} \mid \langle x \rangle \cap \langle y \rangle \mid \quad &= \quad \mid \langle x \rangle \cap \langle x \rangle \mid + \sum_{y \in \mathcal{B}_{\S j} - \{x\}} \mid \langle x \rangle \cap \langle y \rangle \mid \\
&= \quad k + \lambda(\Omega_j - 1) \\
&= \quad \lambda \, \Omega_j + n \quad .
\end{aligned}$$

□

Völlig analog zeigt man

2.3.7 Lemma *Für alle* $1 \leq i, j \leq t$ *gilt*

$$\sum_{i=1}^{t} \Gamma_{ir} \gamma_{is} \quad = \quad \lambda \, \omega_s + n \, \delta_{rs} \quad .$$

Aus 2.3.5, 2.3.6 und 2.3.7 folgt schließlich

2.3.8 Satz *Für $1 \leq i, j \leq t$ gelten*

(a)

$$\sum_{r=1}^{t} \frac{\Omega_j}{\omega_r} \gamma_{ir} \gamma_{jr} \quad = \quad \lambda \, \Omega_j + n \, \delta_{ij}$$

(b)

$$\sum_{i=1}^{t} \frac{\Omega_i}{\omega_r} \gamma_{ir} \gamma_{is} \quad = \quad \lambda \, \omega_s + n \, \delta_{rs} \quad .$$

Wesentlich für die Konstruktion symmetrischer Designs durch Vorgabe einer Gruppe von Automorphismen sind die folgenden beiden Lemmata. Die Beweise ergeben sich jeweils durch Nachrechnen.

2.3.9 Lemma *Sei $P \in \mathcal{P}$. Dann ist $\varphi : P^G \mapsto \{ \ G_P \, g \ | \ g \in G \ \}$ mit $(P^g)^\varphi \quad = \quad G_P \, g$ eine bijektive Abbildung. Die Punkte in P^G und die Nebenklassen von G_P in G entsprechen sich also eineindeutig, und diese Zuordnung bleibt unter der Operation von G erhalten.*

2.3.10 Lemma *Sei $x \in \mathcal{B}_i$ und $\langle x \rangle \cap \mathcal{P}_r = \{P_r^{g_1}, \ldots, P_r^{g_{\gamma_{ir}}}\}$; $g_1, \ldots, g_{\gamma_{ir}} \in G$ geeignet. Dann gilt für alle $g \in G$*

$$\langle x^g \rangle \quad = \quad \{P_r^{g_1 \, g}, \ldots, P_r^{g_{\gamma_{ir}} \, g}\} \quad .$$

2.4 Semidirekte Produkte von E_{16} mit A_5

2.4.1 Satz *Es gibt bis auf Isomorphie genau zwei Gruppen, die sich als semidirektes Produkt einer Gruppe $E \cong E_{16}$ mit einer Gruppe $A \cong A_5$ darstellen lassen.*

Beweis. Wir zeigen zunächst, dass es in $Aut\, E_{16} \cong L_4(2) \cong A_8$ genau zwei Konjugiertenklassen von zu A_5 isomorphen Untergruppen gibt. Wir verwenden im Folgenden die Listen der maximalen Untergruppen von A_8 bzw. A_7 bzw. A_6, wie sie in [2] auf Seite 22 bzw. Seite 10 bzw. Seite 4 stehen. Ferner schreiben wir $A_{\{1,\ldots,n\}}$ für die alternierende Gruppe auf den Ziffern $1, \ldots, n$, die wir so von den abstrakt gedachten Gruppen A_n unterscheiden wollen.

Sei $X \cong A_5$ eine Untergruppe von $A_{\{1,\ldots,8\}}$. Dann liegt ein Konjugiertes von X in einer der folgenden maximalen Untergruppen von $A_{\{1,\ldots,8\}}$:

- $A_{\{1,\ldots,7\}}$
- $A_{\{1,\ldots,6\}} : \langle (1\,2)\,(7\,8) \rangle \quad \cong \quad \Sigma_6$
- $(A_{\{1,\ldots,5\}} \times \langle (6\,7\,8) \rangle) : \langle (1\,2)\,(7\,8) \rangle \quad \cong \quad (A_5 \times Z_3) : Z_2$.

Die letzte der genannten Gruppen hat nur eine zu A_5 isomorphe Untergruppe, nämlich $A_{\{1,\ldots,5\}}$.

Jede zu A_5 isomorphe Untergruppe von Σ_6 liegt bereits in $\Sigma_6' \cong A_6$. In $A_{\{1,\ldots,6\}}$ gibt es genau zwei Konjugiertenklassen von zu A_5 isomorphen Untergruppen mit Vertretern $A_{\{1,\ldots,5\}}$ und $\langle (1\,2)\,(3\,4)\,, (1\,2)\,(5\,6)\,, (1\,3\,5)\,(2\,4\,6)\,, (1\,2\,3\,5\,4) \rangle$.

Liegt ein Konjugiertes von X in $A_{\{1,\ldots,7\}}$, so liegt auch eines in $A_{\{1,\ldots,6\}}$ oder in $A_{\{1,\ldots,5\}} : \langle (1\,2)\,(6\,7) \rangle \cong \Sigma_5$. Der A_6-Fall wurde bereits behandelt; der Σ_5-Fall liefert nur die Möglichkeit, dass X zu $A_{\{1,\ldots,5\}}$ konjugiert ist.

Jede zu A_5 isomorphe Untergruppe von $A_{\{1,\ldots,8\}}$ ist also entweder zu $A_{\{1,\ldots,5\}}$ oder zu $\langle (1\,2)\,(3\,4)\,, (1\,2)\,(5\,6)\,, (1\,3\,5)\,(2\,4\,6)\,, (1\,2\,3\,5\,4) \rangle$ konjugiert.

Diese beiden Konjugiertenklassen unterscheiden sich offenbar in der Gestalt der Elemente der Ordnung 3; in A_8 gibt es davon genau zwei Klassen mit Vertretern $(1\,2\,3)$ und $(1\,2\,3)\,(4\,5\,6)$.

In $L_4(2) \cong A_8$ spiegelt sich das in der Ordnung des jeweils größten punktweise fixierten Unterraums von $GF(2)^4$ wieder; wir finden

$$d_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad d_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

als Vertreter der Klassen der Elemente der Ordnung 3. Das Element d_1 operiert fixpunktfrei auf den Vektoren in $GF(2)^4 - \{0\}$, dagegen fixiert d_2 einen zweidimensionalen Unterraum punktweise.

Ist $f \in L_4(2)$ ein Element der Ordnung 5, so operiert f fixpunktfrei auf $GF(2)^4 - \{0\}$. Das Element $(1\,2\,3)$ wird in A_8 von Elementen der Ordnung 5 zentralisiert. Also wird $(1\,2\,3)$ von jedem Isomorphismus $\varphi : A_8 \mapsto L_4(2)$ auf ein Element vom Typ d_1 abgebildet. Die Permutation $(1\,2\,3)\,(4\,5\,6)$ geht folglich auf ein Element vom Typ d_2 über. Insbesondere liefern die beiden Konjugiertenklassen von zu A_5 isomorphen Untergruppen von A_8 nichtisomorphe Erweiterungen von E_{16} durch A_5. Die Behauptung folgt. $\square$

Werden beim semidirekten Produkt von $E \cong E_{16}$ mit A_5 also Elemente der Form $(1\,2\,3)$ bzw. vom Typ d_1 verwendet, so hat der Zentralisator jeder Involution $e \in E \cong E_{16}$ im Produkt den Index 15; die Gruppe operiert also transitiv auf den Involutionen von $E \cong E_{16}$. Wir nennen diesen Isomorphietyp daher die *transitive Erweiterung von* E_{16} *durch* A_5 .

Beim anderen Isomorphietyp werden Involutionen aus $E \cong E_{16}$ von Elementen der Ordnung 3 zentralisiert; diese Gruppe kann also nicht transitiv auf den Involutionen in E_{16} operieren. Wir nennen diesen Typ die *intransitive Erweiterung von* E_{16} *durch* A_5 .

2.5 Das symmetrische (11,5,2) Design und die Gruppe $L_2(11)$

Wir benutzen die Existenz eines symmetrischen (11,5,2) Designs, um Aussagen über dessen Automorphismengruppe $L_2(11)$ zu belegen. In 3.1 werden wir den umgekehrten Weg gehen, wenn wir die Existenz des symmetrischen (176,50,14) Designs von G. Higman beweisen. Dann werden wir nur Informationen über dessen volle Automorphismengruppe (die sporadische einfache Gruppe HS von D. G. Higman und C. C. Sims der Ordnung 44.352.000) benutzen, wie sie in [2], Seite 80 vorliegen.

2.5.1 Satz *Es gibt bis auf Isomorphie genau ein symmetrisches (11,5,2) Design; wir bezeichnen dieses Design mit H_{11}. Die Automorphismengruppe dieses Designs ist isomorph zu $L_2(11)$ und operiert sowohl auf den Punkten als auch auf den Blöcken von H_{11} zweifach transitiv.*

Beweis. [7], table I.1.28, No. 7; [15]; [18], 3.2, Seite 83f. □

2.5.2 Bemerkung *Wir definieren Punkte $P_1, \ldots, P_{11}$ und Blöcke $B_1, \ldots, B_{11}$ sowie eine Permutation $\pi = (P_1\ P_2\ \ldots\ P_{11})\,(B_1\ B_2\ \ldots\ B_{11})$. Wir vereinbaren B_1 als inzident mit P_1, P_3, P_4, P_5 und P_9. Alle weiteren Inzidenzen seien durch die Anwendung von π erklärt, d. h., wir verlangen, dass π ein Automorphismus der Inzidenzstruktur ist. Es ergibt sich das symmetrische (11,5,2) Design (siehe auch [7], table IV.12.22, $n = 3$).*

2.5.3 Korollar *In $L_2(11)$ gibt es genau zwei Klassen von zu A_5 isomorphen Untergruppen. Seien U, V zwei zu A_5 isomorphe Untergruppen von $L_2(11)$. Sind U und V zueinander konjugiert, so ist entweder $U = V$ oder $U \cap V \cong \Sigma_3$. Sind U und V nicht zueinander konjugiert, so gilt entweder $U \cap V \cong A_4$ oder $U \cap V \cong D_{10}$, und beide Fälle kommen in $L_2(11)$ vor.*

Beweis. Der Liste der maximalen Untergruppen von $L_2(11)$ in [2], Seite 7, entnehmen wir, dass als Punkt- und Blockstabilisatoren bei der Operation dieser Gruppe auf dem symmetrischen (11,5,2) Design nur die zu A_5 isomorphen Untergruppen in Frage kommen. Da $L_2(11)$ sowohl auf den Punkten als auch auf den Blöcken zweifach transitiv operiert, gibt es zunächst wenigstens eine Untergruppe $U \cong A_5$ von $L_2(11)$, auf deren Konjugierten die Gruppe $L_2(11)$ ebenfalls zweifach transitiv operiert. Das heißt: U operiert auf seinen eigenen Konjugierten in Bahnen der Längen 1 und 10. Ist U^* also ein von U verschiedenes Konjugiertes von U, so hat der Schnitt von U und U^* die Ordnung 6; d. h., $U \cap U^* \cong \Sigma_3$. Ist U o. E. Stabilisator eines Punktes P des symmetrischen $(11, 5, 2)$ Designs, so sind die Blockstabilisatoren aus der anderen Klasse von zu A_5 isomorphen Untergruppen, denn U muss die Menge der 5 mit P inzidenten Blöcke invariant lassen. Da U auf den Punkten in zwei Bahnen operiert, operiert U auch auf den Blöcken in zwei Bahnen (siehe 2.3.3). Die Bahnlängen bei der Operation von U auf den Blöcken sind also 5 und 6. Ist V ein Blockstabilisator, so ist demnach $|U : (U \cap V)| \in \{5, 6\}$, d. h., $U \cap V \cong A_4$ oder $U \cap V \cong D_{10}$. $\square$

Kapitel 3

Symmetrische (176,50,14) Designs

Das erste symmetrische Design mit Parametern (176,50,14) fand G. Higman im Jahr 1969 [11] . Die Automorphismengruppe dieses Designs $\mathcal{D}_{Higman}$ ist die sporadische einfache Gruppe HS der Ordnung 44.352.000. Diese war zu diesem Zeitpunkt bereits von D. G. Higman und C. C. Sims entdeckt [10]. Erst Z. Janko fand ein weiteres symmetrisches Design $\mathcal{D}_{Janko}$ mit denselben Parametern. Dabei ging er von folgender Fragestellung aus:

Sei G eine Untergruppe von HS. Welche symmetrischen (176,50,14) Designs gibt es, auf denen G so operiert (d. h., mit denselben Stabilisatoren) wie auf dem Higman-Design?

Janko beantwortete diese Fragestellung für $G \cong (Z_4 \times Z_4 \times Z_4) : F_{21}$ und erhielt neben dem Higman-Design ein neues Design $\mathcal{D}_{Janko}$, dessen volle Automorphismengruppe die angesetzte Gruppe war [13]. Analoges Vorgehen für $Ex_{5^3} : Z_8$ soll inzwischen ein weiteres Design $\mathcal{D}_{1000}$ geliefert haben [14].

Wir werden ähnliche Fragestellungen für einige weitere Untergruppen von HS beantworten. Nicht immer werden wir die Stabilisatoren so wählen, wie sie sich bei der Operation von G auf dem Higman-Design ergeben.

3.1 Das symmetrische (176,50,14) Design von G. Higman

Hier weisen wir die Existenz eines symmetrischen Designs mit Parametern (176,50,14) nach, dessen volle Automorphismengruppe die sporadische einfache Gruppe HS der Ordnung 44.352.000 ist. Wir benutzen lediglich die in [2] enthaltenen Informationen über HS, nehmen also die Gruppe als gegeben und konstruieren das Design.

3.1.1 Lemma *In HS gibt es maximale Untergruppen U_1, U_2 mit den folgenden Eigenschaften:*

(a) $U_1 \cong U_2 \cong U_3(5):2$

(b) U_1 *und* U_2 *sind in* HS *nicht zueinander konjugiert*

(c) $D := U_1 \cap U_2$ *ist isomorph zu* Σ_7 *.*

Beweis. Wir entnehmen aus [2], Seite 80, dass es in HS Untergruppen V_1 und V_2 gibt, die die Eigenschaften haben, die in (a) und (b) für U_1 und U_2 behauptet werden. Wir betrachten nun, wie V_1 durch Konjugation auf $ccl_{HS}(V_2)$ operiert.

Als maximale Untergruppen in der einfachen Gruppe HS sind alle Konjugierten von V_2 dort normalisatorgleich. Für $x \in HS$ ist also die Länge der V_1-Bahn, die V_2^x enthält, gegeben durch

$$| \quad V_1 \ : \ (V_1 \cap V_2^x) \quad | \quad .$$

Aus der Liste der maximalen Untergruppen von $U_3(5)$ in [2], Seite 34, geht hervor, dass als Bahnlängen nur 50, 100, 126 und 175 in Frage kommen. Da die Summe der Bahnlängen 176 ergeben muss, gibt es eine Bahn der Länge 50 und eine Bahn der Länge 126. Daraus folgt bereits, dass es $y \in G$ gibt mit $V_1 \cap V_2^y \cong \Sigma_7$. Also haben $U_1 := V_1$ und $U_2 := V_2^y$ die verlangten Eigenschaften. $\square$

Im Folgenden seien U_1, U_2 und D wie in 3.1.1.

3.1.2 Lemma *Sei* $i \in \{1, 2\}$.

(a) HS *operiert zweifach transitiv auf den* HS*-Konjugierten von* U_i .

(b) *Der Schnitt von je zwei verschiedenen* HS*-Konjugierten von* U_i *ist isomorph zu* $Aut\, A_6$.

Beweis. Völlig analog zu obigem Beweis; operiere mit U_i auf $ccl_{HS}(U_i)$.
$\square$

3.1.3 Lemma *Sei* $i \in \{1, 2\}$. *Jedes Element aus* $ccl_{HS}(D)$ *liegt in genau einer zu* U_i *konjugierten Untergruppe von* HS .

Beweis. Sei $g \in HS$. Dann gilt $D^g = U_1^g \cap U_2^g$. Die Annahme, dass D^g im Schnitt von zwei verschiedenen HS-Konjugierten von U_i liegt, ergibt einen Widerspruch zur Ordnung von $Aut\, A_6$. $\square$

3.1.4 Lemma *Es gilt* $\mathbf{N}_{HS}(D) \; = \; D$.

Beweis. Die Untergruppe D ist normalisatorgleich in U_1 ; also liegen in jedem der HS-Konjugierten von U_1 genau 50 HS-Konjugierte von D. Lemma 3.1.3 liefert nun $|\, ccl_{HS}(D)\, | \; = \; 50 \cdot 176$, woraus die Behauptung folgt. $\square$

Wir definieren eine Inzidenzstruktur $\mathcal{D}_{Higman} = (\mathcal{P}, \mathcal{B}, I)$ durch $\mathcal{P} = ccl_{HS}(U_1)$, $\mathcal{B} = ccl_{HS}(U_2)$ und $I = \{\, (P, x) \in \mathcal{P} \times \mathcal{B} \mid P \cap x \in ccl_{HS}(D)\, \}$. Wir wollen zeigen, dass $\mathcal{D}$ ein symmetrisches $(176, 50, 14)$ Design ist. Aus der Definition folgt sofort

3.1.5 Lemma *Es gilt* $|\, \mathcal{P}\, | \; = \; |\, \mathcal{B}\, | \; = \; 176$.

3.1.6 Lemma *Jeder Punkt inzidiert mit genau 50 Blöcken. Jeder Block inzidiert mit genau 50 Punkten.*

Beweis. Sei P ein Punkt. In P gibt es genau 50 HS-Konjugierte von D, wir bezeichnen diese mit $D_1, \ldots, D_{50}$. Für alle $i \in \{1, \ldots, 50\}$ sei x_i derjenige eindeutig bestimmte Block, der D_i enthält. Die Blöcke $x_1, \ldots, x_{50}$ sind nach 3.1.3 paarweise verschieden. Die zweite Aussage zeigt man völlig analog. $\square$

3.1.7 Lemma *Zu jedem geordneten Paar (P_1, P_2) zweier Punkte von $\mathcal{D}$ gibt es genau 14 Blöcke, die sowohl mit P_1 als auch mit P_2 inzidieren. Zu jedem geordneten Paar (x_1, x_2) zweier Blöcke von $\mathcal{D}$ gibt es genau 14 Punkte, die sowohl mit x_1 als auch mit x_2 inzidieren.*

Beweis. Seien P_1 und P_2 zwei verschiedene Punkte von $\mathcal{D}_{Higman}$. Offenbar gibt es Blöcke, die mit beiden Punkten inzidieren; deren Anzahl sei λ. Da HS zweifach transitiv auf den Punkten operiert, hängt λ nicht von der speziellen Wahl der P_i ab.

Wir zählen die Tripel (P, Q, x) mit $x \in \mathcal{B}$; $P, Q \in \langle x \rangle$ und $P \neq Q$ auf zwei Arten und erhalten

$$176 \cdot 175 \cdot \lambda \quad = \quad 176 \cdot 50 \cdot 49 \quad ,$$

woraus $\lambda = 14$ folgt. Die zweite Aussage ergibt sich genauso. □

Insgesamt erhalten wir

3.1.8 Satz *Die Inzidenzstruktur $\mathcal{D}_{Higman} = (\mathcal{P}, \mathcal{B}, I)$ ist ein symmetrisches (176,50,14) Design.*

3.2 $E_{16} : A_5$ (intransitiv)

Folgende Fragestellung wollen wir in diesem Abschnitt betrachten:

3.2.1 Problem *Sei G ein semidirektes Produkt einer Gruppe $E \cong E_{16}$ mit einer Gruppe $A \cong A_5$. Ein Element $d \in A$ der Ordnung 3 zentralisiere in E eine Gruppe der Ordnung 4. (Dadurch ist G bis auf Isomorphie eindeutig bestimmt; G ist die intransitive Erweiterung von E_{16} durch A_5.)*

Sei $\mathcal{D} = (\mathcal{P}, \mathcal{B}, I)$ ein symmetrisches (176,50,14) Design mit nachstehenden Eigenschaften:

(1) $G \leq Aut\,\mathcal{D}$

(2) *Es gibt $P_1 \in \mathcal{P}$ und $x_1 \in \mathcal{B}$ mit $G_{P_1} \cong G_{x_1} \cong (\,E_4 \times Z_3\,) : Z_2$ (dabei sei $E_4 : Z_2 \cong D_8$ und $Z_3 : Z_2 \cong \Sigma_3$)*

(3) Es gibt $P_2 \in \mathcal{P}$ *und* $x_2 \in \mathcal{B}$ *mit* $G_{P_2} \cong G_{x_2} \cong \Sigma_4$

(4) Es gibt $P_3 \in \mathcal{P}$ *und* $x_3 \in \mathcal{B}$ *mit* $G_{P_3} \cong G_{x_3} \cong D_{10}$ *.*

Welche Möglichkeiten gibt es dann für den Isomorphietyp von $\mathcal{D}$ *?*

Seien im Folgenden alle Bezeichnungen wie in obiger Problemstellung.

Die Gruppe G hat die Ordnung $16 \cdot 60 = 960$. Die verlangten Stabilisatoren haben die Ordnungen 24, 24 und 10, also in G die Indizes 40, 40 und 96. Da $40 + 40 + 96 = 176$, operiert G auf den Punkten und Blöcken jedes Designs, das die Bedingungen erfüllt, in jeweils drei Bahnen.

Zur Lösung gelangen wir in folgenden Schritten:

(1) Wir klären die Struktur von G und verschaffen uns definierende Relationen für diese Gruppe.

Die Eindeutigkeit von G bis auf Isomorphie ist aus dem Abschnitt 2.4 bekannt. Wir geben nun Erzeuger und Relationen für eine Gruppe an, die die für G verlangten Eigenschaften hat; mit dieser Gruppe wird G dann identifiziert.

(2) Wir zeigen, dass die geforderten Stabilisatoren bis auf Konjugiertheit eindeutig in G sind und drücken jeweils einen Repräsentanten mit den verwendeten Erzeugern für G aus.

Die Eindeutigkeit erlaubt uns, eine beliebige Untergruppe vom jeweiligen Isomorphietyp zum Stabilisator eines Punktes oder Blocks zu erklären.

(3) Wir bestimmen die möglichen Orbitalstrukturen.

Damit wissen wir beispielsweise, dass jeder Block aus der G-Bahn von x_3 mit genau 10 Punkten aus der G-Bahn von P_1 inzidiert.

(4) Mit dem Nebenklassenabzählalgorithmus von Todd und Coxeter rechnen wir aus, wie G auf den Nebenklassen der Punktstabilisatoren operiert.

Nach 2.3.9 wissen wir dann schon, wie G auf den Punkten der Designs operiert.

(5) Wir berechnen die Bahnen, die entstehen, wenn Blockstabilisatoren auf den Punkten operieren.

Zum Beispiel operiert G_{x_3} auf P_1^G in 2 Bahnen der Länge 10 und 4 Bahnen der Länge 5. Da $\langle x_3\rangle \cap P_1^G$ eine G_{x_3}-invariante Menge von Punkten ist, kommt dafür nur eine der beiden Bahnen der Länge 10 oder die Vereinigung zweier Bahnen der Länge 5 in Frage. Analoges Vorgehen liefert alle Möglichkeiten für $\langle x_i\rangle \cap P_j^G$ und damit via Konjugation die vollständigen Designs; die Operation von G ist ja bekannt. Hier verwenden wir 2.3.10 . Nicht jede Möglichkeit wird zu einem Design führen.

(6) Für alle Möglichkeiten wird überprüft, ob die konstruierte Inzidenzstruktur ein symmetrisches (176,50,14) Design ist.

3.2.1 Definierende Relationen

Sei $E = \langle w, x, y, z\rangle \cong E_{16}$. Bezüglich dieser angeordneten Basis beschreiben wir gewisse Elemente a, b, d, f aus $GL_4(2)$ in Matrizenform:

$$a := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad b := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$d := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad f := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Es gelten $1 = a^2 = b^2 = d^3 = f^5 = (ab)^2 = (af)^2 = (bf)^3 = (df)^2$ sowie $a^d = b$. Definiert man eine abstrakte Gruppe $\langle a, b, d, f\rangle$ mit obigen Relationen, so zeigt eine Nebenklassenabzählung mit [9], dass $|\langle a, b, d, f\rangle| = 60$. Andererseits bleiben die Relationen bei folgender Zuordnung erhalten:

$$a \mapsto (1\,2)\,(3\,4)\ ,\ b \mapsto (1\,3)\,(2\,4)\ ,\ d \mapsto (1\,2\,4)\ ,\ f \mapsto (1\,3\,4\,2\,5)\ .$$

Die von a, b, d und f erzeugte Untergruppe von $GL_4(2)$ ist also zu A_5 isomorph. Wir vermerken noch, dass d von af^2 invertiert wird.

Wir bilden das semidirekte Produkt $G := \langle w, x, y, z \rangle \, : \, \langle a, b, d, f \rangle$. Da d in E eine Gruppe der Ordnung 4 zentralisiert, ist G eine intransitive Erweiterung von E_{16} durch A_5 . Wir erhalten folgende Konjugiertentafel:

g	$o(g)$	$\mathbf{C}_G(g)$	$\lvert \mathbf{C}_G(g) \rvert$	$\lvert ccl_G(g) \rvert$
1	1	G	$2^6 \cdot 3 \cdot 5$	1
wxz	2	$E : \langle a, b, d \rangle$	$2^6 \cdot 3$	5
w	2	$E : \langle ad^{-1}, af \rangle$	$2^5 \cdot 3$	10
a	2	$\langle x, wz \rangle : \langle a, b \rangle$	2^4	60
ay	4	$\langle x, wz \rangle : \langle ay, b \rangle$	2^4	60
aw	4	$\langle x, wz \rangle : \langle aw \rangle$	2^3	120
d	3	$\langle wy, wxz \rangle \times \langle d \rangle$	$2^2 \cdot 3$	80
dw	6	$\langle wy, wxz \rangle \times \langle dw \rangle$	$2^2 \cdot 3$	80
dx	6	$\langle wy, wxz \rangle \times \langle dx \rangle$	$2^2 \cdot 3$	80
dwy	6	$\langle wy, wxz \rangle \times \langle d \rangle$	$2^2 \cdot 3$	80
f	5	$\langle f \rangle$	5	192
f^2	5	$\langle f \rangle$	5	192
				960

3.2.2 Stabilisatoren

In der Problemstellung wurden bestimmte Isomorphietypen für die Punkt- und Blockstabilisatoren verlangt. Nun werden wir solche Untergruppen explizit in G angeben und zeigen, dass diese bis auf Konjugiertheit in G eindeutig sind.

Wir definieren folgende Untergruppen von G:

$$\begin{aligned} S_1 &:= \langle wy, wxz \rangle : \langle d, af^2 \rangle, \\ S_2 &:= \langle wz, xy \rangle : \langle d, af^2 \rangle, \\ S_3 &:= \langle f, a \rangle. \end{aligned}$$

Offenbar ist $S_1 \cong (E_4 \times Z_3) : Z_2$, wobei $E_4 : Z_2 \cong D_8$ und $Z_3 : Z_2 \cong \Sigma_3$; ferner ist $S_2 \cong \Sigma_4$ und $S_3 \cong D_{10}$.

3.2.2 Lemma *Die Gruppen S_1, S_2 und S_3 sind in G bis auf Konjugiertheit die einzigen Untergruppen ihres Isomorphietyps.*

Beweis. Für S_1 und S_3 ist dies klar, weil diese Untergruppen Sylow-3- bzw. Sylow-5-Normalisatoren in G sind. Sei $S \cong \Sigma_4$ eine Untergruppe von G; o. E. verlangen wir $\langle d \rangle \leq S$. Es ist klar, dass $S \cap E = O_2(S) \cong E_4$ gilt. Nun ist $\langle wz, xy \rangle$ die einzige Untergruppe der Ordnung 4 in E, auf der d nichttrivial operiert. Mithin liegt $A := \langle wz, xy \rangle : \langle d \rangle \cong A_4$ in S; d. h. $S = \langle A, caf^2 \rangle$ mit $c \in \mathbf{C}_G(A)$ und $o(caf^2) = 2$. Da mit caf^2 auch $dcaf^2$ in S liegt und $\mathbf{C}_G(A) \subseteq \mathbf{C}_G(d)$, genügt es, $c \in \langle wy, wxz \rangle$ zu betrachten. Die Behauptung folgt mit $o(wxzaf^2) = o(xyzaf^2) = 4$ und $(af^2)^{wxz} = wyaf^2$. □

3.2.3 Orbitalstrukturen

Die Indizes der verlangten Stabilisatoren in G liefern uns bereits die Längen der Punkt- bzw. Blockbahnen; die Längen sind 40, 40 und 96. Aus 2.3.4 und 2.3.8(a) erhalten wir:

3.2.3 Lemma *Operiert eine Gruppe G^* auf einem symmetrischen Design mit Parametern (176,50,14) derart, dass sowohl die Punkte als auch die Blöcke in jeweils drei Bahnen der Längen $\Omega_1 = \omega_1 = 40$, $\Omega_2 = \omega_2 = 40$ und $\Omega_3 = \omega_3 = 96$ zerfallen, so ist die dazugehörige Blockorbitalstruktur $(\gamma_{ij})_{1 \leq i,j \leq 3}$ gegeben durch*

$$\begin{pmatrix} 16 & 10 & 24 \\ 10 & 16 & 24 \\ 10 & 10 & 30 \end{pmatrix} \quad \textit{oder} \quad \begin{pmatrix} 10 & 16 & 24 \\ 16 & 10 & 24 \\ 10 & 10 & 30 \end{pmatrix} .$$

Beweis. Aus 2.3.4 entnehmen wir $\gamma_{11} + \gamma_{12} + \gamma_{13} = 50$; 2.3.8 (a) liefert mit $i = j = 1$:

$$12\,\gamma_{11}^2 \quad + \quad 12\,\gamma_{12}^2 \quad + \quad 5\,\gamma_{13}^2 \quad = \quad 7152\,,$$

beide Gleichungen können simultan nur mit den behaupteten Lösungen erfüllt werden. Analog bestimmt man die möglichen zweiten und dritten Zeilen der Orbitalstrukturen. □

3.2.4 Die Operation von G

Im Folgenden seien $\mathcal{D} = (\mathcal{P}, \mathcal{B}, I)$, P_1, P_2, P_3, x_1, x_2 und x_3 wie in der Problemstellung 3.2.1; die Gruppe G sei eine Untergruppe der vollen Automorphismengruppe von $\mathcal{D}$. Die Untergruppen S_1, S_2 und S_3 seien wie im Abschnitt 3.2.2 definiert.

Sei $1 \leq i \leq 3$. Wir können o. B. d. A. $G_{P_i} = G_{x_i} = S_i$ verlangen. Via 2.3.9 ordnen wir den Punkten in P_i^G die Nebenklassen von S_i in G zu.

Um die Designs konstruieren zu können, werden wir nun Darstellungen von G als Permutationsgruppe auf den Nebenklassen von S_1, S_2 und S_3 angeben. Diese wurden mit Hilfe von [9] erhalten. Mit 2.3.9 wissen wir dann schon, wie G auf den Punkten und Blöcken der Designs operiert; Lemma 2.3.10 wird dann der Schlüssel zur Konstruktion sein.

Die Operation der Erzeuger von G auf den Nebenklassen von S_1:

w →(1 2)(3 6)(4 9)(5 8)(7 32)(10 11)(12 26)(13 34)(14 31)(16 23)(19 29)(20 27)(21 24)(25 37)(28 30)(33 38)(35 40)(36 39)

x →(1 6)(2 3)(4 10)(5 8)(9 11)(12 26)(13 19)(14 25)(15 17)(16 23)(18 22)(20 27)(21 24)(29 34)(31 37)(33 38)(35 40)(36 39)

y →(1 2)(3 6)(4 11)(5 20)(7 28)(8 27)(9 10)(12 33)(14 25)(15 18)(16 21)(17 22)(23 24)(26 38)(30 32)(31 37)(35 39)(36 40)

z →(1 3)(2 6)(4 11)(5 8)(7 28)(9 10)(12 38)(13 19)(14 25)(15 17)(18 22)(20 27)(26 33)(29 34)(30 32)(31 37)(35 39)(36 40)

a →(1 4)(2 11)(3 9)(6 10)(12 14)(13 35)(15 16)(17 23)(18 21)(19 40)(20 27)(22 24)(25 26)(28 32)(29 36)(31 38)(33 37)(34 39)

b →(1 15)(2 18)(3 22)(4 16)(5 7)(6 17)(8 30)(9 24)(10 23)(11 21)(12 14)(19 29)(20 28)(25 33)(26 37)(27 32)(31 38)(36 40)

d →(2 3 6)(4 15 16)(5 35 14)(7 13 12)(8 39 31)(9 17 21)
(10 18 24)(11 22 23)(19 33 32)(20 40 25)(26 28 29)
(27 36 37)(30 34 38)

f →(1 14 12 4 5)(2 25 26 11 8)(3 31 33 10 27)(6 37 38 9 20)
(7 35 16 15 13)(17 34 28 40 21)(18 19 32 39 23)
(22 29 30 36 24)

Die Operation der Erzeuger von G auf den Nebenklassen von S_2:

w →(1 2)(3 6)(4 8)(5 22)(7 23)(9 24)(10 11)(13 15)(14 16)
(17 18)(20 26)(25 27)(30 38)(31 39)

x →(1 3)(2 6)(4 7)(8 23)(12 19)(17 39)(18 31)(20 27)(21 33)
(25 26)(28 29)(32 34)(35 36)(37 40)

y →(1 3)(2 6)(5 22)(9 24)(10 15)(11 13)(12 19)(17 18)(20 25)
(21 29)(26 27)(28 33)(31 39)(32 34)

z →(1 2)(3 6)(4 8)(5 24)(7 23)(9 22)(10 13)(11 15)(12 34)
(14 38)(16 30)(19 32)(35 37)(36 40)

a →(1 4)(2 8)(3 7)(6 23)(10 16)(11 30)(12 31)(13 14)(15 38)
(17 32)(18 19)(20 36)(22 24)(25 37)(26 40)(27 35)(28 29)
(34 39)

b →(1 13)(2 10)(3 11)(4 14)(5 21)(6 15)(7 30)(8 16)(9 33)
(12 17)(18 19)(22 29)(23 38)(24 28)(26 27)(31 32)(34 39)
(35 40)

d →(4 13 14)(5 36 18)(7 11 30)(8 10 16)(9 37 39)(12 29 27)
(15 38 23)(17 24 35)(19 21 20)(22 40 31)(25 34 33)(26 32 28)

f →(1 18 19 4 5)(2 17 12 7 24)(3 31 32 8 22)(6 39 34 23 9)
(10 26 29 35 30)(11 27 28 40 16)(13 20 21 36 14)
(15 25 33 37 38)

Die Operation der Erzeuger von G auf den Nebenklassen von S_3:

w →(1 2)(3 6)(4 7)(5 8)(9 19)(10 29)(11 26)(12 13)(14 15)
(16 44)(17 35)(18 52)(20 89)(21 23)(22 34)(24 46)(25 45)
(27 59)(28 41)(30 88)(31 38)(32 54)(33 65)(36 37)(39 64)
(40 79)(42 56)(43 66)(47 50)(48 58)(49 57)(51 82)(53 62)

(55 70)(60 81)(61 74)(63 68)(67 78)(69 85)(71 84)(72 80)
(73 77)(75 92)(76 90)(83 91)(86 95)(87 93)(94 96)

x →(1 3)(2 6)(4 9)(5 10)(7 19)(8 29)(11 13)(12 26)(14 16)
(15 44)(17 37)(18 62)(20 85)(21 24)(22 65)(23 46)(25 28)
(27 61)(30 90)(31 54)(32 38)(33 34)(35 36)(39 82)(40 83)
(41 45)(42 57)(43 84)(47 48)(49 56)(50 58)(51 64)(52 53)
(55 63)(59 74)(60 77)(66 71)(67 95)(68 70)(69 89)(72 94)
(73 81)(75 93)(76 88)(78 86)(79 91)(80 96)(87 92)

y →(1 4)(2 7)(3 9)(5 11)(6 19)(8 26)(10 13)(12 29)(14 17)
(15 35)(16 37)(18 31)(20 55)(21 25)(22 56)(23 45)(24 28)
(27 50)(30 78)(32 53)(33 57)(34 42)(36 44)(38 52)(39 40)
(41 46)(43 81)(47 59)(48 74)(49 65)(51 91)(54 62)(58 61)
(60 66)(63 85)(64 79)(67 88)(68 69)(70 89)(71 77)(72 92)
(73 84)(75 80)(76 95)(82 83)(86 90)(87 94)(93 96)

z →(1 5)(2 8)(3 10)(4 11)(6 29)(7 26)(9 13)(12 19)(14 18)
(15 52)(16 62)(17 31)(20 40)(21 27)(22 43)(23 59)(24 61)
(25 50)(28 58)(30 72)(32 36)(33 71)(34 66)(35 38)(37 54)
(39 55)(41 48)(42 60)(44 53)(45 47)(46 74)(49 73)(51 68)
(56 81)(57 77)(63 82)(64 70)(65 84)(67 75)(69 91)(76 96)
(78 92)(79 89)(80 88)(83 85)(86 87)(90 94)(93 95)

a →(2 5)(4 12)(6 10)(7 19)(9 26)(11 13)(15 18)(17 32)(20 30)
(21 22)(23 43)(24 65)(25 77)(27 34)(28 60)(31 54)(33 61)
(35 36)(37 38)(39 87)(40 88)(41 42)(44 62)(45 57)(46 84)
(47 49)(48 56)(50 73)(51 78)(55 93)(58 81)(59 66)(63 75)
(64 86)(67 68)(69 94)(70 95)(71 74)(72 89)(76 83)(79 80)
(82 92)(85 90)(91 96)

b →(1 14)(2 35)(3 52)(4 17)(5 36)(6 31)(7 15)(8 16)(9 38)
(10 54)(11 44)(12 32)(13 62)(18 19)(21 22)(23 42)(24 66)
(25 56)(26 37)(27 57)(28 60)(29 53)(33 50)(34 45)(39 69)
(40 68)(41 43)(46 81)(47 49)(48 77)(58 84)(59 65)(61 73)
(63 64)(67 88)(70 89)(71 74)(72 95)(75 86)(76 92)(79 85)
(80 90)(82 83)(87 94)

d →(1 20 21)(2 40 41)(3 55 47)(4 64 24)(5 68 23)(6 39 61)
(7 70 45)(8 51 28)(9 79 48)(10 69 50)(11 83 46)(12 63 59)

(13 82 58)(14 30 22)(15 72 57)(16 78 60)(17 75 65)(18 95 34)
(19 89 27)(25 26 85)(29 91 74)(31 94 33)(32 86 66)(35 67 42)
(36 88 43)(37 80 77)(38 90 56)(44 92 84)(49 52 93)(53 96 71)
(54 87 73)(62 76 81)

f →(2 4 3 12 5)(6 29 10 13 11)(7 9 26 19 8)(14 22 30 20 21)
(15 56 90 51 27)(16 77 72 89 25)(17 65 93 40 23)(18 34 78 85 48)
(24 32 43 88 55)(28 38 57 80 70)(31 33 96 83 58)(35 49 75 68 59)
(36 66 67 63 47)(37 60 95 79 45)(39 46 53 84 87)(41 52 42 86 64)
(44 71 94 82 50)(54 81 76 91 61)(62 73 92 69 74)

Nach 2.3.10 die Menge $\langle x_1 \rangle$ unter S_1 invariant; nach 2.3.9 sind es also auch die entsprechenden Mengen von Nebenklassen der Punktstabilisatoren.

Wir berechnen daher die Bahnen, die bei der Operation der S_i auf den Nebenklassen von S_1, S_2 und S_3 entstehen. Jede S_i-invariante Punktmenge entspricht einer Vereinigung einiger dieser Bahnen; umgekehrt gehört zu jeder Vereinigung einiger dieser Bahnen eine S_i-invariante Punktmenge.

Die S_1-Bahnen auf den Nebenklassen von S_1 sind
$\{1\}$; $\{2, 3, 6\}$; $\{4, 10, 15, 18, 16, 24, 12, 38, 7, 30, 13, 34\}$;
$\{5, 27, 8, 20, 35, 36, 39, 40, 14, 37, 31, 25\}$;
$\{9, 11, 17, 22, 21, 23, 33, 26, 32, 28, 19, 29\}$.
Diese Bahnen haben die Längen 1, 3 und 12 (3×).

Die S_1-Bahnen auf den Nebenklassen von S_2 sind
$\{1, 6, 3, 2\}$; $\{5, 9, 36, 37, 18, 39\}$; $\{17, 31, 24, 22, 35, 40\}$;
$\{4, 8, 7, 23, 13, 10, 11, 15, 14, 16, 30, 38, 19, 12, 34, 32, 21, 29, 33, 28, 20, 27, 25, 26\}$.
Diese Bahnen haben die Längen 4, 6 (2×) und 24.

Die S_1-Bahnen auf den Nebenklassen von S_3 sind
$\{1, 7, 29, 13, 20, 70, 91, 82, 21, 45, 74, 58\}$;
$\{2, 4, 10, 12, 40, 64, 69, 63, 41, 24, 50, 59\}$;
$\{14, 35, 53, 54, 30, 67, 96, 87, 22, 42, 71, 73\}$;
$\{18, 38, 44, 37, 95, 90, 92, 80, 34, 56, 84, 77\}$;
$\{3, 19, 8, 11, 55, 89, 51, 83, 47, 27, 28, 46, 5, 26, 6, 9, 68, 85, 39, 79, 23, 25, 61, 48\}$;
$\{15, 17, 62, 32, 72, 75, 76, 86, 57, 65, 81, 66, 78, 88, 93, 94, 60, 43, 49, 33, 16, 36, 52, 31\}$.
Diese Bahnen haben die Längen 12 (4×) und 24 (2×).

Wir sehen jetzt bereits, dass die erste Zeile der Blockorbitalmatrix nur 16, 10, 24 lauten kann.

Die S_2-Bahnen auf den Nebenklassen von S_1 sind
$\{1,6,3,2\}$; $\{5,27,35,36,14,37\}$; $\{8,20,39,40,31,25\}$;
$\{4,10,9,11,15,17,22,18,16,23,24,21,12,33,38,26,7,30,28,32,13,29,19,34\}$.
Diese Bahnen haben die Längen 4, 6 (2×) und 24.

Die S_2-Bahnen auf den Nebenklassen von S_2 sind
$\{1\}$; $\{6\}$; $\{2,3\}$;
$\{4,7,13,11,14,30,19,32,21,28,20,26\}$;
$\{5,9,22,24,36,40,35,37,18,17,39,31\}$;
$\{8,23,10,15,16,38,12,34,29,33,27,25\}$.
Diese Bahnen haben die Längen 1 (2×), 2 und 12 (3×).

Die S_2-Bahnen auf den Nebenklassen von S_3 sind
$\{1,8,9,12,20,79,63,51,21,59,28,48\}$;
$\{6,10,7,11,39,70,83,69,61,46,50,45\}$;
$\{14,52,37,32,30,80,86,93,22,66,49,77\}$;
$\{31,35,62,44,94,76,92,67,33,84,42,81\}$;
$\{2,5,19,13,40,89,82,68,41,58,23,27,4,26,3,29,64,55,91,85,24,74,25,47\}$;
$\{15,18,36,54,72,88,87,95,57,73,34,43,78,75,90,96,60,56,71,65,16,53,17,38\}$;
$\{31,35,62,44,94,76,92,67,33,84,42,81\}$.
Diese Bahnen haben die Längen 12 (4×) und 24 (2×).

Die S_3-Bahnen auf den Nebenklassen von S_1 sind
$\{1,14,12,4,5\}$; $\{2,25,26,11,8\}$; $\{7,35,16,15,13\}$; $\{22,29,30,36,24\}$;
$\{3,31,33,10,27,9,20,6,37,38\}$; $\{17,34,28,40,21,23,18,19,32,39\}$.
Diese Bahnen haben die Längen 5 (4×) und 10 (2×).

Die S_3-Bahnen auf den Nebenklassen von S_2 sind
$\{1,18,19,4,5\}$; $\{6,39,34,23,9\}$;$\{13,20,21,36,14\}$;$\{15,25,33,37,38\}$;
$\{2,17,12,7,24,8,22,3,31,32\}$; $\{10,26,29,35,30,16,11,27,28,40\}$.
Diese Bahnen haben die Längen 5 (4×) und 10 (2×).

Die S_3-Bahnen auf den Nebenklassen von S_3 sind
$\{1\}$; $\{2,4,3,12,5\}$; $\{6,29,10,13,11\}$; $\{7,9,26,19,8\}$; $\{14,22,30,20,21\}$;
$\{16,77,72,89,25\}$; $\{39,46,53,84,87\}$; $\{41,52,42,86,64\}$;

$\{15, 56, 90, 51, 27, 18, 34, 78, 85, 48\}$; $\{17, 65, 93, 40, 23, 32, 43, 88, 55, 24\}$; $\{28, 38, 57, 80, 70, 60, 95, 79, 45, 37\}$; $\{31, 33, 96, 83, 58, 54, 81, 76, 91, 61\}$; $\{35, 49, 75, 68, 59, 36, 66, 67, 63, 47\}$; $\{44, 71, 94, 82, 50, 62, 73, 92, 69, 74\}$.
Diese Bahnen haben die Längen 1, 5 ($7\times$) und 10 ($6\times$).

3.2.5 Konstruktion der Designs

3.2.4 Lemma *Mit den Bezeichnungen der Problemstellung 3.2.1 ist die zugehörige Blockorbitalstruktur gegeben durch*

$$\begin{pmatrix} 16 & 10 & 24 \\ 10 & 16 & 24 \\ 10 & 10 & 30 \end{pmatrix} .$$

Beweis. Nach 3.2.3 ist $\gamma_{11} \in \{10, 16\}$. Da S_1 auf den Nebenklassen von S_1 in G in Bahnen der Längen 1, 3 und 12 operiert, ist $\gamma_{11} = 10$ nicht möglich. Die entsprechende Orbitalstruktur ist also zu verwerfen. $\Box$

Am Beispiel von x_1 werden wir jetzt sehen, welche Möglichkeiten es zur Konstruktion der Designs gibt. Kennen wir $\langle x_1 \rangle$, so können wir für alle $g \in G$ die Punktmenge $\langle x_1^g \rangle$ bestimmen; wir kennen dann also für jeden Block der ersten Bahn die mit ihm inzidenten Punkte. Wir überlegen also, wie $\langle x_1 \rangle$ aussehen kann.

Wir haben $\gamma_{11} = 16$. Da die 16 Punkte in $\langle x_1 \rangle \cap P_1^G$ eine S_1-invariante Menge sein müssen, entspricht ihnen eine Vereinigung von Bahnen, die bei der Operation von $G_{x_1} = S_1$ auf den Nebenklassen von $G_{P_1} = S_1$ entstehen. Diese Bahnen haben wir oben bereits berechnet und als Bahnlängen 1, 3, 12, 12 und 12 erhalten. Die Menge $\langle x_1 \rangle \cap P_1^G$ besteht also aus der Bahn der Länge 1, aus der Bahn der Länge 3 und einer der drei Bahnen der Länge 12. Demnach haben wir hier genau drei Möglichkeiten.

Analoge Überlegungen zeigen, dass es für $\langle x_1 \rangle \cap P_2^G$ genau zwei und für $\langle x_1 \rangle \cap P_3^G$ genau acht Möglichkeiten gibt. Damit sind für $\langle x_1 \rangle$ insgesamt genau $3 \cdot 2 \cdot 8 = 48$ Möglichkeiten zu testen. Entsprechend sind für $\langle x_2 \rangle$ genau $2 \cdot 3 \cdot 8 = 48$ und für $\langle x_3 \rangle$ genau $8 \cdot 8 \cdot 552 = 35328$ Fälle zu prüfen.

Diese Berechnungen wurden mit einem Computer durchgeführt. Zu jedem Blockrepräsentanten wurde die zugehörige G-Blockbahn per Konjugation berechnet und geprüft, ob je zwei Blöcke mit genau $\lambda = 14$ Punkten gemeinsam inzidieren. Dies war bei den Kandidaten für $\langle x_1 \rangle$ bzw. $\langle x_2 \rangle$ bzw. $\langle x_3 \rangle$ in genau 4 bzw. 8 bzw. 12 Fällen erfüllt.

Diese vollständigen Blockbahnen wurden dann miteinander zu Inzidenzstrukturen mit jeweils 176 Punkten und Blöcken kombiniert. Wieder wurde überprüft, ob die Bedingungen für symmetrische (176,50,14) Designs erfüllt sind; dies war bei genau 8 der Kombinationen der Fall.

Wir geben nun die erhaltenen Designs $\mathcal{D}_1, \ldots, \mathcal{D}_8$ an, indem wir für die Blockrepräsentanten x_1, x_2, x_3 jeweils die mit ihnen inzidenten Punkte angeben; diese Punkte bezeichnen wir durch die Nummer ihrer zugeordneten Nebenklasse.

Design $\mathcal{D}_1$:

$$\begin{aligned}
\langle x_1 \rangle \cap P_1^G &= \{1,2,3,4,6,7,10,12,13,15,16,18,24,30,34,38\} \\
\langle x_1 \rangle \cap P_2^G &= \{1,2,3,5,6,9,18,36,37,79\} \\
\langle x_1 \rangle \cap P_3^G &= \{2,4,10,12,18,24,34,37,38,40,41,44,50,56, \\
&\quad\ 59,63,64,69,77,80,84,90,92,95\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\langle x_2 \rangle \cap P_1^G &= \{1,2,3,5,6,14,27,35,36,37\} \\
\langle x_2 \rangle \cap P_2^G &= \{1,2,3,4,6,7,11,13,14,19,20,21,26,28,30,32\} \\
\langle x_2 \rangle \cap P_3^G &= \{1,8,9,12,20,21,28,31,33,35,42,44,48,51, \\
&\quad\ 59,62,63,67,76,79,81,84,92,94\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\langle x_3 \rangle \cap P_1^G &= \{2,8,11,22,24,25,26,29,30,36\} \\
\langle x_3 \rangle \cap P_2^G &= \{1,4,5,15,18,19,25,33,37,38\} \\
\langle x_3 \rangle \cap P_3^G &= \{14,15,18,20,21,22,27,30,34,35,36,39,46,47, \\
&\quad\ 48,49,51,53,56,59,63,66,67,68,75,78,84,85, \\
&\quad\ 87,90\}
\end{aligned}$$

Design $\mathcal{D}_2$:

$$\langle x_1 \rangle \cap P_1^G = \{1,2,3,4,6,7,10,12,13,15,16,18,24,30,34,38\}$$

$$
\begin{aligned}
\langle x_1\rangle \cap P_2^G &= \{1,2,3,5,6,9,18,36,37,39\}\\
\langle x_1\rangle \cap P_3^G &= \{2,4,10,12,18,24,34,37,38,40,41,44,50,56,59\\
&\quad 63,64,69,77,80,84,90,92,95\}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\langle x_2\rangle \cap P_1^G &= \{1,2,3,5,6,14,27,35,36,37\}\\
\langle x_2\rangle \cap P_2^G &= \{1,2,3,4,6,7,11,13,14,19,20,21,26,28,30,32\}\\
\langle x_2\rangle \cap P_3^G &= \{1,8,9,12,20,21,28,31,33,35,42,44,48,51,59\\
&\quad 62,63,67,76,79,81,84,92,94\}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\langle x_3\rangle \cap P_1^G &= \{2,8,11,22,24,25,26,29,30,36\}\\
\langle x_3\rangle \cap P_2^G &= \{6,9,13,14,20,21,23,34,36,39\}\\
\langle x_3\rangle \cap P_3^G &= \{2,3,4,5,7,8,9,12,14,16,19,20,21,22,25,26,\\
&\quad 30,39,41,42,46,52,53,64,72,77,84,86,87,89\}
\end{aligned}
$$

Design $\mathcal{D}_3$:

$$
\begin{aligned}
\langle x_1\rangle \cap P_1^G &= \{1,2,3,4,6,7,10,12,13,15,16,18,24,30,34,38\}\\
\langle x_1\rangle \cap P_2^G &= \{1,2,3,5,6,9,18,36,37,39\}\\
\langle x_1\rangle \cap P_3^G &= \{2,4,10,12,18,24,34,37,38,40,41,44,50,56,\\
&\quad 59,63,64,69,77,80,84,90,92,95\}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\langle x_2\rangle \cap P_1^G &= \{1,2,3,5,6,14,27,35,36,37\}\\
\langle x_2\rangle \cap P_2^G &= \{1,2,3,4,6,7,11,13,14,19,20,21,26,28,30,32\}\\
\langle x_2\rangle \cap P_3^G &= \{6,7,10,11,14,22,30,32,37,39,45,46,49,50,52,61,66,69,\\
&\quad 70,77,80,83,86,93\}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\langle x_3\rangle \cap P_1^G &= \{2,8,11,22,24,25,26,29,30,36\}\\
\langle x_3\rangle \cap P_2^G &= \{1,4,5,15,18,19,25,33,37,38\}\\
\langle x_3\rangle \cap P_3^G &= \{2,3,4,5,7,8,9,12,14,16,19,20,21,22,25,26,30,39,41,42,\\
&\quad 46,52,53,64,72,77,84,86,87,89\}
\end{aligned}
$$

Design $\mathcal{D}_4$:

$$
\begin{aligned}
\langle x_1\rangle \cap P_1^G &= \{1,2,3,4,6,7,10,12,13,15,16,18,24,30,34,38\}\\
\langle x_1\rangle \cap P_2^G &= \{1,2,3,5,6,9,18,36,37,39\}\\
\langle x_1\rangle \cap P_3^G &= \{2,4,10,12,18,24,34,37,38,40,41,44,50,56,59,63,64,69,\\
&\quad 77,80,84,90,92,95\}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\langle x_2\rangle \cap P_1^G &= \{1,2,3,5,6,14,27,35,36,37,\}\\
\langle x_2\rangle \cap P_2^G &= \{1,2,3,4,6,7,11,13,14,19,20,21,26,28,30,32\}\\
\langle x_2\rangle \cap P_3^G &= \{6,7,10,11,14,22,30,32,37,39,45,46,49,50,52,61,66,69,\\
&\quad 70,77,80,83,86,93\}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\langle x_3\rangle \cap P_1^G &= \{2,8,11,22,24,25,26,29,30,36\}\\
\langle x_3\rangle \cap P_2^G &= \{6,9,13,14,20,21,23,34,36,39\}\\
\langle x_3\rangle \cap P_3^G &= \{14,15,18,20,21,22,27,30,34,35,36,39,46,47,48,49,51,\\
&\quad 53,56,59,63,66,67,68,75,78,84,85,87,90\}
\end{aligned}
$$

Design $\mathcal{D}_5$:

$$
\begin{aligned}
\langle x_1\rangle \cap P_1^G &= \{1,2,3,4,6,7,10,12,13,15,16,18,24,30,34,38\}\\
\langle x_1\rangle \cap P_2^G &= \{1,2,3,5,6,9,18,36,37,39\}\\
\langle x_1\rangle \cap P_3^G &= \{2,4,10,12,18,24,34,37,38,40,41,44,50,56,59,63,64,69,\\
&\quad 77,80,84,90,92,95\}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\langle x_2\rangle \cap P_1^G &= \{1,2,3,5,6,14,27,35,36,37\}\\
\langle x_2\rangle \cap P_2^G &= \{1,2,3,6,8,10,12,15,16,23,25,27,29,33,34,38\}\\
\langle x_3\rangle \cap P_3^G &= \{1,8,9,12,20,21,28,31,33,35,42,44,48,51,59,62,63,67,\\
&\quad 76,79,81,84,92,94\}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\langle x_3\rangle \cap P_1^G &= \{2,8,11,22,24,25,26,29,30,36\}\\
\langle x_3\rangle \cap P_2^G &= \{1,4,5,15,18,19,25,33,37,38\}\\
\langle x_3\rangle \cap P_3^G &= \{2,3,4,5,7,8,9,12,14,16,19,20,21,22,25,26,30,39,41,42,\\
&\quad 46,52,53,64,72,77,84,86,87,89\}
\end{aligned}
$$

Design $\mathcal{D}_6$:

$$
\begin{aligned}
\langle x_1 \rangle \cap P_1^G &= \{1,2,3,4,6,7,10,12,13,15,16,18,24,30,34,38\}\\
\langle x_1 \rangle \cap P_2^G &= \{1,2,3,5,6,9,18,36,37,39\}\\
\langle x_1 \rangle \cap P_3^G &= \{2,4,10,12,18,24,34,37,38,40,41,44,50,56,59,63,64,69,\\
&\quad 77,80,84,90,92,95\}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\langle x_2 \rangle \cap P_1^G &= \{1,2,3,5,6,14,27,35,36,37\}\\
\langle x_2 \rangle \cap P_2^G &= \{1,2,3,6,8,10,12,15,16,23,25,27,29,33,34,38\}\\
\langle x_2 \rangle \cap P_3^G &= \{1,8,9,12,20,21,28,31,33,35,42,44,48,51,59,62,63,67,\\
&\quad 76,79,81,84,92,94\}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\langle x_3 \rangle \cap P_1^G &= \{2,8,11,22,24,25,26,29,30,36\}\\
\langle x_3 \rangle \cap P_2^G &= \{6,9,13,14,20,21,23,34,36,39\}\\
\langle x_3 \rangle \cap P_3^G &= \{14,15,18,20,21,22,27,30,34,35,36,39,46,47,48,49,51,\\
&\quad 53,56,59,63,66,67,68,75,78,84,85,87,90\}
\end{aligned}
$$

Design $\mathcal{D}_7$:

$$
\begin{aligned}
\langle x_1 \rangle \cap P_1^G &= \{1,2,3,4,6,7,10,12,13,15,16,18,24,30,34,38\}\\
\langle x_1 \rangle \cap P_2^G &= \{1,2,3,5,6,9,18,36,37,39\}\\
\langle x_1 \rangle \cap P_3^G &= \{2,4,10,12,18,24,34,37,38,40,41,44,50,56,59,63,64,69,\\
&\quad 77,80,84,90,92,95\}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\langle x_2 \rangle \cap P_1^G &= \{1,2,3,5,6,14,27,35,36,37\}\\
\langle x_2 \rangle \cap P_2^G &= \{1,2,3,6,8,10,12,15,16,23,25,27,29,33,34,38\}\\
\langle x_2 \rangle \cap P_3^G &= \{6,7,10,11,14,22,30,32,37,39,45,46,49,50,52,61,66,69,\\
&\quad 70,77,80,83,86,93\}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\langle x_3 \rangle \cap P_1^G &= \{2,8,11,22,24,25,26,29,30,36\}\\
\langle x_3 \rangle \cap P_2^G &= \{1,4,5,15,18,19,25,33,37,38\}\\
\langle x_3 \rangle \cap P_3^G &= \{14,15,18,20,21,22,27,30,34,35,36,39,46,47,48,49,51,\\
&\quad 53,56,59,63,66,67,68,75,78,84,85,87,90\}
\end{aligned}
$$

Design $\mathcal{D}_8$:

$$\begin{aligned}
\langle x_1\rangle \cap P_1^G &= \{1,2,3,4,6,7,10,12,13,15,16,18,24,30,34,38\}\\
\langle x_1\rangle \cap P_2^G &= \{1,2,3,5,6,9,18,36,37,39\}\\
\langle x_1\rangle \cap P_3^G &= \{2,4,10,12,18,24,34,37,38,40,41,44,50,56,59,63,64,69,\\
&\quad 77,80,84,90,92,95\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\langle x_2\rangle \cap P_1^G &= \{1,2,3,5,6,14,27,35,36,37\}\\
\langle x_2\rangle \cap P_2^G &= \{1,2,3,6,8,10,12,15,16,23,25,27,29,33,34,38\}\\
\langle x_2\rangle \cap P_3^G &= \{6,7,10,11,14,22,30,32,37,39,45,46,49,50,52,61,66,69,\\
&\quad 70,77,80,83,86,93\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\langle x_3\rangle \cap P_1^G &= \{2,8,11,22,24,25,26,29,30,36\}\\
\langle x_3\rangle \cap P_2^G &= \{6,9,13,14,20,21,23,34,36,39\}\\
\langle x_3\rangle \cap P_3^G &= \{2,3,4,5,7,8,9,12,14,16,19,20,21,22,25,26,30,39,41,42,\\
&\quad 46,52,53,64,72,77,84,86,87,89\}
\end{aligned}$$

Mit einem Programm von V. Tonchev [22] wurden die Automorphismengruppen von $\mathcal{D}_1,\ldots,\mathcal{D}_8$ berechnet. Es gelten

$$\begin{aligned}
|Aut\mathcal{D}_1| = |Aut\mathcal{D}_4| = |Aut\mathcal{D}_6| = |Aut\mathcal{D}_7| &= 11.520\,;\\
|Aut\mathcal{D}_2| = |Aut\mathcal{D}_3| = |Aut\mathcal{D}_5| = |Aut\mathcal{D}_8| &= 44.352.000\,.
\end{aligned}$$

Mit GAP [20] konnte ferner berechnet werden, dass die Gruppen der Ordnung 44.352.000 einfach sind und transitiv auf den Punkten und Blöcken der zugehörigen Designs operieren; damit sind diese Designs isomorph zum Higman-Design $\mathcal{D}_{Higman}$. Ferner: $Aut\,\mathcal{D}_1 \cong Aut\,\mathcal{D}_4 \cong Aut\,\mathcal{D}_6 \cong Aut\,\mathcal{D}_7 \cong E_{16}.\Sigma_6$. Die letztere Gruppe ist eine nicht zerfallende Erweiterung einer elementarabelschen Gruppe der Ordnung 16 durch die symmetrische Gruppe auf sechs Ziffern. Es gibt in der Higman-Sims-Gruppe maximale Untergruppen dieses Typs.

Es gilt $(Aut\,\mathcal{D}_1)' \cong E_{16} : A_6$, wir finden also auch die transitive Erweiterung von E_{16} durch A_5 in den Automorphismengruppen von $\mathcal{D}_1$, $\mathcal{D}_4$, $\mathcal{D}_6$ und $\mathcal{D}_7$. Mit GAP wurde gezeigt, dass eine solche transitive Erweiterung wie folgt auf den Punkten und Blöcken dieser Designs operiert:

3.2.5 Lemma *Sei $\mathcal{D}^* = (\mathcal{P}^*, \mathcal{B}^*, I^*)$ eines der Designs $\mathcal{D}_1$, $\mathcal{D}_4$, $\mathcal{D}_6$, $\mathcal{D}_7$. Dann gibt es in $Aut\,\mathcal{D}^*$ eine Untergruppe H, die isomorph zur transitiven zerfallenden Erweiterung von E_{16} durch A_5 ist, und es gilt:*

(1) Es gibt $Q_1 \in \mathcal{P}^*$ und $y_1 \in \mathcal{B}^*$ mit $H_{Q_1} \cong H_{y_1} \cong A_5$

(2) Es gibt $Q_2 \in \mathcal{P}^*$ und $y_2 \in \mathcal{B}^*$ mit $H_{Q_2} \cong H_{y_2} \cong A_4$, dabei ist $H_{Q_2} \cap O_2(H) = H_{y_2} \cap O_2(H) = \{1\}$

(3) Es gibt $Q_3 \in \mathcal{P}^*$ und $y_3 \in \mathcal{B}^*$ mit $H_{Q_3} \cong H_{y_3} \cong \Sigma_4$

(4) Es gibt $Q_4 \in \mathcal{P}^* \setminus Q_3^H$ und $y_4 \in \mathcal{B}^* \setminus y_3^H$ mit $H_{Q_4} \cong H_{y_4} \cong \Sigma_4$.

Ist also $\mathcal{D} = (\mathcal{P}, \mathcal{B}, I)$ ein symmetrisches (176,50,14) Design, das den Bedingungen der Problemstellung 3.2.1 genügt, so ist $\mathcal{D}$ entweder zum Higman-Design isomorph oder es hat die im obigen Lemma genannten Eigenschaften. Solche Designs werden wir im nächsten Abschnitt bestimmen. Dies wird die Frage nach den Isomorphietypen der Designs $\mathcal{D}_1$, $\mathcal{D}_4$, $\mathcal{D}_6$ und $\mathcal{D}_7$ klären: Es wird sich nämlich zeigen, dass diese vier Designs zueinander isomorph sind.

3.3 $E_{16} : A_5$ (transitiv)

Folgende Fragestellung wollen wir in diesem Abschnitt betrachten:

3.3.1 Problem *Sei G ein semidirektes Produkt einer Gruppe $E \cong E_{16}$ mit einer Gruppe $A \cong A_5$. Ein Element $d \in A$ der Ordnung 3 operiere fixpunktfrei auf $E - \{1\}$. (Dadurch ist G bis auf Isomorphie eindeutig bestimmt; G ist die transitive Erweiterung von E_{16} durch A_5 .)*

Sei $\mathcal{D} = (\mathcal{P}, \mathcal{B}, I)$ ein symmetrisches (176,50,14) Design mit nachstehenden Eigenschaften:

(1) $G \leq Aut\,\mathcal{D}$

(2) Es gibt $P_1 \in \mathcal{P}$ und $x_1 \in \mathcal{B}$ mit $G_{P_1} \cong G_{x_1} \cong A_5$

*(3) Es gibt $P_2 \in \mathcal{P}$ und $x_2 \in \mathcal{B}$ mit $G_{P_2} \cong G_{x_2} \cong A_4$,
dabei sei $G_{P_2} \cap E = G_{x_2} \cap E = \{1\}$*

(4) Es gibt $P_3 \in \mathcal{P}$ und $x_3 \in \mathcal{B}$ mit $G_{P_3} \cong G_{x_3} \cong \Sigma_4$

(5) Es gibt $P_4 \in \mathcal{P} \setminus P_3^G$ und $x_4 \in \mathcal{B} \setminus x_3^G$ mit $G_{P_4} \cong G_{x_4} \cong \Sigma_4$.

Welche Möglichkeiten gibt es dann für den Isomorphietyp von $\mathcal{D}$?

Seien im Folgenden alle Bezeichnungen wie in obiger Problemstellung.

Die Gruppe G hat die Ordnung $16 \cdot 60 = 960$. Die verlangten Stabilisatoren haben die Ordnungen 60, 12, 24 und 24 , also in G die Indizes 16, 80, 40 und 40 . Da $16 + 80 + 40 + 40 = 176$, operiert G auf den Punkten und Blöcken jedes Designs, das die Bedingungen erfüllt, in jeweils vier Bahnen.

Wir gehen hier zunächst wie im Abschnitt über die intransitive Erweiterung vor.

3.3.1 Definierende Relationen

Sei $E = \langle w, x, y, z \rangle \cong E_{16}$. Bezüglich dieser Basis beschreiben wir gewisse Elemente a, b, d, f aus $GL_4(2)$ in Matrizenform:

$$a := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad b := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$d := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad f := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Es gelten $1 = a^2 = b^2 = d^3 = f^5 = (ab)^2 = (af)^2 = (bf)^3 = (df)^2$ sowie $a^d = b$. Definiert man eine abstrakte Gruppe $\langle a, b, d, f \rangle$ mit obigen Relationen, so zeigt eine Nebenklassenabzählung mit [9], dass $|\langle a,b,d,f\rangle| = 60$. Andererseits bleiben die Relationen bei folgender Zuordnung erhalten:

$$a \mapsto (1\,2)\,(3\,4)\ ,\ b \mapsto (1\,3)\,(2\,4)\ ,\ d \mapsto (1\,2\,4)\ ,\ f \mapsto (1\,3\,4\,2\,5)\ .$$

Die von a, b, d und f erzeugte Untergruppe von $GL_4(2)$ ist also zu A_5 isomorph. Wir vermerken noch, dass d von af^2 invertiert wird.

Wir bilden das semidirekte Produkt $G := \langle w,x,y,z\rangle : \langle a,b,d,f\rangle$; da d fixpunktfrei auf den Involutionen von E operiert, ist G isomorph zur transitiven Erweiterung von E_{16} durch A_5. Wir erhalten folgende Konjugiertentafel:

g	$o(g)$	$\mathbf{C}_G(g)$	$\lvert\,\mathbf{C}_G(g)\,\rvert$	$\lvert\,ccl_G(g)\,\rvert$
1	1	G	$2^6 \cdot 3 \cdot 5$	1
x	2	$E : \langle a,b\rangle$	2^6	15
a	2	$\langle x,z\rangle : \langle a,b\rangle$	2^4	60
aw	4	$\langle x,z\rangle : \langle aw,bwy\rangle$	2^4	60
ay	4	$\langle x,z\rangle : \langle ay,bw\rangle$	2^4	60
awy	4	$\langle x,z\rangle : \langle awy,by\rangle$	2^4	60
d	3	$\langle d\rangle$	3	320
f	5	$\langle f\rangle$	5	192
f^2	5	$\langle f\rangle$	5	192
				960

3.3.2 Stabilisatoren

Wir suchen nun nach den G-Konjugiertenklassen von Untergruppen der verlangten Isomorphietypen A_5, A_4 und Σ_4.

3.3.2 Lemma *In G gibt es genau vier Konjugiertenklassen von zu A_5 isomorphen Untergruppen. Repräsentanten dieser Klassen sind*

$$\begin{aligned} X_1 &= \langle a,b,d,f\rangle\ , \\ X_2 &= \langle a,bx,dxyz,f\rangle\ , \\ X_3 &= \langle a,bz,dwy,f\rangle\ , \\ X_4 &= \langle a,bxz,dwxz,f\rangle\ . \end{aligned}$$

Ferner gilt: Sind X, X' zu A_5 isomorphe Untergruppen von G, so sind X und X' genau dann in G konjugiert, wenn eine Sylow-2-Untergruppe von X in G zu einer Sylow-2-Untergruppe von X' konjugiert ist.

Beweis. Es wurde bereits mit Relationen gezeigt, dass X_1 zu A_5 isomorph ist. Durch Nachrechnen bestätigt man, dass die Erzeuger von X_2, X_3 und X_4 entsprechende Relationen erfüllen; mithin sind also alle vier Untergruppen $X_1, \ldots, X_4$ zu A_5 isomorph. Ferner ist $\langle a, b, d\rangle \cong \langle a, bx, dxyz\rangle \cong \langle a, bz, dwy\rangle \cong \langle a, bxz, dwxz\rangle \cong A_4$.

Da Sylow-2-Untergruppen von A_5 elementarabelsch der Ordnung 4 sind, können X_1 und X_2 nur dann in G konjugiert sein, falls $\langle a, b\rangle$ und $\langle a, bx\rangle$ es sind. Da $\langle a, b, d\rangle \cong A_4$, wäre dann sogar b in $\mathbf{C}_G(a)$ zu bx oder abx konjugiert. Wegen $\mathbf{C}_G(a) = \mathbf{C}_G(b)$ kann dies nicht sein; also sind X_1 und X_2 in G nicht zueinander konjugiert. Analog zeigt man, dass keine zwei der vier genannten Untergruppen in G zueinander konjugiert sind.

Sylow-5-Normalisatoren in G sind isomorph zu D_{10}. In jeder G-Konjugiertenklasse von zu A_5 isomorphen Untergruppen gibt es also einen Vertreter, der $\langle f, a\rangle$ enthält. Sei X ein solcher Vertreter. Da $\langle f, a\rangle$ maximal in X liegt, ist X vollständig bestimmt, wenn wir $\mathbf{C}_X(a)$ kennen. Wir haben bereits $\mathbf{C}_G(a) = \langle x, z, a, b\rangle \cong E_{16}$; zusammen mit $X \cap E = \langle 1\rangle$ erhalten wir $\mathbf{C}_X(a) = \langle a, be\rangle$ mit $e \in \langle x, z\rangle$. Zu jeder dieser vier Möglichkeiten gibt es also höchstens eine G-Klasse von zu A_5 isomorphen Untergruppen. Die Behauptung folgt. □

3.3.3 Lemma *In G gibt es genau vier Konjugiertenklassen von zu A_4 isomorphen Untergruppen, die mit E einen Schnitt der Ordnung 1 haben. Repräsentanten dieser Klassen sind*

$$\begin{aligned} Y_1 &= \langle a, b, d\rangle\ , \\ Y_2 &= \langle a, bx, dxyz\rangle\ , \\ Y_3 &= \langle a, bz, dwy\rangle\ , \\ Y_4 &= \langle a, bxz, dwxz\rangle\ . \end{aligned}$$

Ferner gilt: Sind Y, Y' zu A_4 isomorphe Untergruppen von G, so sind Y und Y' genau dann in G konjugiert, wenn $O_2(Y)$ in G zu $O_2(Y')$ konjugiert ist.

Beweis. Man rechnet leicht nach, dass alle vier Untergruppen zu A_4 isomorph sind. Wäre Y_1 in G zu Y_2 konjugiert, so wäre b in $\mathbf{C}_G(a)$ zu bx oder zu abx konjugiert; dies ist jedoch wegen $\mathbf{C}_G(a) = \mathbf{C}_G(b)$ nicht der Fall. Mit analogen Argumenten zeigt man, dass keine zwei dieser vier Untergruppen in G zueinander konjugiert sind.

Sei Y Vertreter einer G-Konjugiertenklasse von zu A_4 isomorphen Untergruppen, die E trivial schneiden. Da es in G nur eine Involutionenklasse außerhalb von E gibt, können wir $a \in Y$ verlangen. Dann ist $\mathbf{C}_Y(a) = \langle a, be\rangle$ mit $e \in \langle x, z\rangle$.

Nun ist $\mathbf{C}_G(\langle a, b\rangle) = \langle x, z, a, b\rangle \cong E_{16}$ eine 2-Gruppe; Elemente der Ordnung 3, die $\langle a, b\rangle$ normalisieren, finden wir also in $d\langle x, z, a, b\rangle$. Dies liefert vier verschiedene zu A_4 isomorphe Gruppen, die $\langle a, b\rangle$ enthalten, nämlich $\langle a, b, de\rangle$ mit $e \in \langle x, z\rangle$. Aber d ist in $\mathbf{C}_G(\langle a, b\rangle)$ zu dx, dz und dxz konjugiert, also ist jede zu A_4 isomorphe Untergruppe von G, die $\langle a, b\rangle$ enthält, zu $\langle a, b, d\rangle$ konjugiert. Analoge Aussagen zeigt man nun für $\langle a, bx\rangle$, $\langle a, bz\rangle$ und $\langle a, bxz\rangle$. Die Behauptung folgt. $\square$

3.3.4 Lemma *In G gibt es genau drei Konjugiertenklassen von zu Σ_4 isomorphen Untergruppen. Vertreter dieser Klassen sind*

$$\begin{aligned} Z_1 &= \langle w, y\rangle : \langle d, af^2\rangle , \\ Z_2 &= \langle wx, xyz\rangle : \langle d, af^2\rangle , \\ Z_3 &= \langle wxz, yz\rangle : \langle d, af^2\rangle . \end{aligned}$$

Beweis. Man bestätigt leicht, dass $Z_1 \cong Z_2 \cong Z_3 \cong \Sigma_4$. Wäre Z_1 in G zu Z_2 konjugiert, so wäre $\mathbf{O}_2(Z_1) = \langle w, y\rangle$ in $\mathbf{N}_G(\langle d\rangle) = \langle d, af^2\rangle$ zu $\mathbf{O}_2(Z_2) = \langle wx, xyz\rangle$ konjugiert, was nicht der Fall ist. Analog zeigt man, dass keine zwei der drei Untergruppen in G zueinander konjugiert sind.

Sei Z Vertreter einer G-Konjugiertenklasse von zu Σ_4 isomorphen Gruppen. Wir können ohne Einschränkung $\langle d\rangle \leq Z$ verlangen. Damit ist auch $\mathbf{N}_G(\langle d\rangle) = \langle d, af^2\rangle \leq Z$. Offenbar gilt $Z \cap E = \mathbf{O}_2(Z)$. Die Gruppe $\langle d, af^2\rangle$ normalisiert in E genau die folgenden Vierergruppen: $\langle w, y\rangle$, $\langle wx, xyz\rangle$ und $\langle yz, wxz\rangle$. Die Behauptung folgt. $\square$

3.3.5 Lemma *In $\mathrm{Aut}\, G$ gibt es Elemente u, v, t, s, so dass $\langle u, v, t, s\rangle$ eine zu Σ_4 isomorphe Gruppe äußerer Automorphismen ist, die als Σ_4 auf den G-Konjugiertenklassen von $X_1, \dots, X_4$ bzw. $Y_1, \dots, Y_4$ operiert. Dabei operiert $\langle t, s\rangle \cong \Sigma_3$ als Σ_3 auf den G-Konjugiertenklassen von $Z_1, \dots, Z_3$.*

Beweis. Sei $F := \langle w, x, y, z, a, b, d, f, u, v, t, s \rangle$, wobei zwischen w, x, y, z, a, b, d und f die in G geltenden Relationen erfüllt seien. Ferner gelte:

(1) $u^2 = v^2 = (uv)^2 = t^3 = s^2 = 1$, $u^t = v$, $v^t = uv$, $t^s = t^{-1}$, $(su)^2 = 1$, $v^s = uv$

(2) $[\,\langle u, v \rangle\,,\, E\langle a, f \rangle\,] = \langle 1 \rangle$, $b^u = bx$, $b^v = bz$

(3) Bezüglich der Basis $\{w, x, y, z\}$ operiert t auf E wie

$$t := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(4) $[\, t, \langle a, b, d, f \rangle\,] = \langle 1 \rangle$

(5) Bezüglich der Basis $\{w, x, y, z\}$ operiert s auf E wie

$$s := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(6) $[\, s, a\,] = 1$, $b^s = ab$, $d^s = d^{-1}$, $f^s = (f^b)^3$.

Die Relationen in (1) sind solche, wie sie zwischen geeigneten Elementen in Σ_4 bestehen. Da $\langle w, x, y, z, a, f \rangle$ maximal in G liegt, ist $\langle w, x, y, z, a, b, f \rangle = G$ wegen (2) unter $\langle u, v \rangle$ invariant. Zusammen mit (3), (4), (5) und (6) erhalten wir, dass G normal in F liegt. Dabei gilt $F/G \cong \langle u, v, t, s \rangle$ sowie $\mathbf{C}_F(G) = \langle 1 \rangle$. Eine Nebenklassenabzählung von F nach G liefert $|F| = 960 \cdot 24 = 23.040$. Damit ist $\langle u, v, t, s \rangle$ eine zu Σ_4 isomorphe äußere Automorphismengruppe von G.

Wir rechnen leicht nach , dass $X_1^u = X_2$, $X_3^u = X_4$, $X_1^v = X_3$, $X_2^v = X_4$, $X_1^t = X_1$, $X_2^t = X_3$ und $X_3^t = X_4$ gelten, außerdem ist $X_1^s = X_1$.

Wir betrachten Sylow-2-Untergruppen von X_2, X_3 und X_4 unter Konjugation mit s und Elementen aus G:

$$\langle a, bx \rangle^{sdwy} = \langle a, abz \rangle^{dwy} = \langle a, bz \rangle$$

$$\langle a, bz\rangle^{sdy} = \langle a, abx\rangle^{dy} = \langle a, bx\rangle$$
$$\langle a, bxz\rangle^{sdw} = \langle a, abxz\rangle^{dw} = \langle a, bxz\rangle$$

Mit 3.3.2 folgt, dass s die G-Konjugiertenklassen von X_1 und X_4 jeweils invariant lässt und die Klassen von X_2 und X_3 vertauscht.

Bezeichnen wir die G-Konjugiertenklasse von X_i mit $\underline{i}$ für $1 \leq i \leq 4$, so können wir den Elementen u, v, t und s also die folgenden Permutationen zuordnen:

$$u \to (\,\underline{1}\,\underline{2}\,)(\,\underline{3}\,\underline{4}\,)\,, \quad v \to (\,\underline{1}\,\underline{3}\,)(\,\underline{2}\,\underline{4}\,)\,, \quad t \to (\,\underline{2}\,\underline{3}\,\underline{4}\,)\,, \quad s \to (\,\underline{2}\,\underline{3}\,)\,.$$

Entsprechendes gilt für die G-Klassen von $Y_1, \ldots, Y_4$.

Die Operation von t auf Z_1 , Z_2 und Z_3 kann mit den Relationen in (3) und (4) direkt berechnet werden. Dasselbe gilt für die Operation von s auf diesen Gruppen, hier ist jedoch zu beachten, dass wegen $\langle d\rangle^s = \langle d\rangle$ das Element s auch $\mathbf{N}_G(\langle d\rangle) = \langle d, af^2\rangle$ invariant läßt. Man erhält

$$Z_1^t = Z_3\,, \quad Z_3^t = Z_2\,, \quad Z_2^t = Z_1\,, \quad Z_1^s = Z_1\,, \quad Z_2^s = Z_3\,, \quad Z_3^s = Z_2\,.$$

□

3.3.3 Orbitalstrukturen

G operiere nun auf den Punkten und Blöcken eines symmetrischen (176,50,14) Designs in jeweils vier Bahnen der Längen $\Omega_1 = \omega_1 = 16$, $\Omega_2 = \omega_2 = 80$, $\Omega_3 = \omega_3 = 40$ und $\Omega_4 = \omega_4 = 40$. Wir verwenden die Bezeichnungen aus 2.3 .

3.3.6 Lemma *Für die erste Spalte der Blockorbitalstruktur* $(\gamma_{ij})_{1\leq i,j\leq 4}$ *gibt es nur die folgenden Möglichkeiten:*

$$A_1: \quad (\;0 \quad 4 \quad 6 \quad 6\;)^T$$
$$A_2: \quad (\;0 \quad 6 \quad 4 \quad 4\;)^T$$
$$A_3: \quad (\;10 \quad 4 \quad 4 \quad 4\;)^T\,.$$

Beweis. Satz 2.3.8(b) liefert für $r = s = 1$:

$$2\gamma_{11}^2 \quad + \quad 10\gamma_{21}^2 \quad + \quad 5\gamma_{31}^2 \quad + 5\gamma_{41}^2 \quad = \quad 520 \quad .$$

Aus 2.3.4 entnehmen wir $\Gamma_{11} + \Gamma_{21} + \Gamma_{31} + \Gamma_{41} = 50$, zusammen mit 2.3.5 wird dies zu

$$2\gamma_{11} \quad + \quad 10\gamma_{21} \quad + \quad 5\gamma_{31} \quad + \quad 5\gamma_{41} \quad = \quad 100 \quad .$$

Diese Gleichungen können simultan nur mit den behaupteten Möglichkeiten erfüllt werden. $\square$

3.3.7 Lemma *Für die erste Zeile der Blockorbitalstruktur $(\gamma_{ij})_{1\leq i,j\leq 4}$ gibt es nur die folgenden Möglichkeiten:*

$$\begin{array}{llllll}
a_1: & (& 0 & 20 & 15 & 15 &) \\
a_2: & (& 0 & 30 & 10 & 10 &) \\
a_3: & (& 10 & 20 & 10 & 10 &) .
\end{array}$$

Beweis. Aus 2.3.4 entnehmen wir $\gamma_{11} + \gamma_{12} + \gamma_{13} + \gamma_{14} = 50$, Satz 2.3.8(a) liefert für $i = j = 1$:

$$5\gamma_{11}^2 \quad + \gamma_{12}^2 \quad + \quad 2\gamma_{13}^2 \quad + 2\gamma_{14}^2 \quad = \quad 1300 \quad .$$

Nach 3.3.6 gilt $\gamma_{11} \in \{0, 10\}$; damit bleiben für die vorgenannten Gleichungen nur die behaupteten Lösungen. $\square$

3.3.8 Lemma *Für die zweite Spalte der Blockorbitalstruktur $(\gamma_{ij})_{1\leq i,j\leq 4}$ gibt es bis auf Permutation der jeweils letzten beiden Einträge nur die folgenden Möglichkeiten:*

$$\begin{array}{lllllll}
B_1: & (& 20 & 20 & 26 & 26 &)^T \\
B_2: & (& 20 & 22 & 20 & 28 &)^T \\
B_3: & (& 20 & 24 & 18 & 26 &)^T \\
B_4: & (& 20 & 26 & 20 & 20 &)^T
\end{array}$$

$$B_5: \quad (\quad 30 \quad 20 \quad 24 \quad 24 \quad)^T$$

$$B_6: \quad (\quad 30 \quad 24 \quad 20 \quad 20 \quad)^T .$$

Beweis. Satz 2.3.8(b) liefert für $r = s = 2$:

$$2\,\gamma_{12}^2 \quad + \quad 10\,\gamma_{22}^2 \quad + \quad 5\,\gamma_{32}^2 \quad + 5\,\gamma_{42}^2 \quad = \quad 11560 \quad .$$

Aus 2.3.4 entnehmen wir $\Gamma_{12} + \Gamma_{22} + \Gamma_{32} + \Gamma_{42} = 50$, zusammen mit 2.3.5 wird dies zu

$$2\,\gamma_{12} \quad + \quad 10\,\gamma_{22} \quad + \quad 5\,\gamma_{32} \quad + \quad 5\,\gamma_{42} \quad = \quad 500 \quad .$$

Diese Gleichungen können simultan nur mit den behaupteten Möglichkeiten erfüllt werden. □

3.3.9 Lemma *Für die zweite Zeile der Blockorbitalstruktur $(\gamma_{ij})_{1\leq i,j\leq 4}$ gibt es bis auf Permutation der jeweils letzten beiden Einträge nur die folgenden Möglichkeiten:*

$$b_1: \quad (\quad 4 \quad 20 \quad 13 \quad 13 \quad)$$

$$b_2: \quad (\quad 4 \quad 22 \quad 10 \quad 14 \quad)$$

$$b_3: \quad (\quad 4 \quad 24 \quad 9 \quad 13 \quad)$$

$$b_4: \quad (\quad 4 \quad 26 \quad 10 \quad 10 \quad)$$

$$b_5: \quad (\quad 6 \quad 20 \quad 12 \quad 12 \quad)$$

$$b_6: \quad (\quad 6 \quad 24 \quad 10 \quad 10 \quad) .$$

Beweis. Lemma 2.3.4 liefert $\gamma_{21} + \gamma_{22} + \gamma_{23} + \gamma_{24} = 50$, Satz 2.3.8(a) ergibt für $i = j = 2$:

$$5\,\gamma_{21}^2 \quad + \gamma_{22}^2 \quad + \quad 2\,\gamma_{23}^2 \quad + 2\,\gamma_{24}^2 \quad = \quad 1156 \quad .$$

Diese Gleichungen können simultan nur mit den behaupteten Lösungen erfüllt werden. □

3.3.10 Lemma *Für die dritte und vierte Spalte der Blockorbitalstruktur* $(\gamma_{ij})_{1\le i,j\le 4}$ *gibt es bis auf Permutation der jeweils letzten beiden Einträge nur die folgenden Möglichkeiten:*

$$
\begin{array}{llllll}
C_1: & (& 10 & 9 & 13 & 15 &)^T \\
C_2: & (& 10 & 10 & 10 & 16 &)^T \\
C_3: & (& 10 & 13 & 7 & 13 &)^T \\
C_4: & (& 10 & 14 & 8 & 10 &)^T \\
C_5: & (& 15 & 10 & 9 & 15 &)^T \\
C_6: & (& 15 & 12 & 13 & 7 &)^T .
\end{array}
$$

Beweis. Satz 2.3.8(b) liefert für $r = s = 3$:

$$2\,\gamma_{13}^2 \quad + \quad 10\,\gamma_{23}^2 \quad + \quad 5\,\gamma_{33}^2 \quad + 5\,\gamma_{43}^2 \quad = \quad 2980 \quad .$$

Aus 2.3.4 entnehmen wir $\Gamma_{13} + \Gamma_{23} + \Gamma_{33} + \Gamma_{43} = 50$, zusammen mit 2.3.5 wird dies zu

$$2\,\gamma_{13} \quad + \quad 10\,\gamma_{23} \quad + \quad 5\,\gamma_{33} \quad + \quad 5\,\gamma_{43} \quad = \quad 250 \quad .$$

Diese Gleichungen können simultan nur mit den behaupteten Möglichkeiten erfüllt werden. Die Aussage über $\gamma_{14}, \ldots, \gamma_{44}$ zeigt man analog. □

3.3.11 Lemma *Für die dritte und vierte Zeile der Blockorbitalstruktur* $(\gamma_{ij})_{1\le i,j\le 4}$ *gibt es bis auf Permutation der jeweils letzten beiden Einträge nur die folgenden Möglichkeiten:*

$$
\begin{array}{llllll}
c_1: & (& 4 & 18 & 13 & 15 &) \\
c_2: & (& 4 & 20 & 10 & 16 &) \\
c_3: & (& 4 & 26 & 7 & 13 &) \\
c_4: & (& 4 & 28 & 8 & 10 &)
\end{array}
$$

$$c_5: \quad (\; 6 \quad 20 \quad 9 \quad 15 \;)$$
$$c_6: \quad (\; 6 \quad 24 \quad 7 \quad 13 \;).$$

Beweis. Aus 2.3.4 erhalten wir $\gamma_{31} + \gamma_{32} + \gamma_{33} + \gamma_{34} = 50$, Satz 2.3.8(a) ergibt für $i = j = 3$:

$$5\,\gamma_{31}^2 \quad + \gamma_{32}^2 \quad + \quad 2\,\gamma_{33}^2 \quad + 2\,\gamma_{34}^2 \quad = \quad 1192 \quad .$$

Diese Gleichungen können simultan nur mit den behaupteten Lösungen erfüllt werden. Die Aussage über $\gamma_{41}, \ldots, \gamma_{44}$ zeigt man analog. □

3.3.12 Satz *Operiert eine Gruppe G^* auf einem symmetrischen (176,50,14) Design derart, dass sowohl die Punkte als auch die Blöcke in jeweils vier Bahnen der Längen $\Omega_1 = \omega_1 = 16$, $\Omega_2 = \omega_2 = 80$, $\Omega_3 = \omega_3 = 40$ und $\Omega_4 = \omega_4 = 40$ zerfallen, so ist die dazugehörige Blockorbitalstruktur $(\gamma_{ij})_{1 \le i,j \le 4}$ bis auf simultane Permutation der jeweils letzten beiden Zeilen und Spalten eine der acht folgenden:*

$$O_1 = \begin{pmatrix} 0 & 20 & 15 & 15 \\ 4 & 26 & 10 & 10 \\ 6 & 20 & 15 & 9 \\ 6 & 20 & 9 & 15 \end{pmatrix}, \quad O_2 = \begin{pmatrix} 0 & 30 & 10 & 10 \\ 4 & 20 & 13 & 13 \\ 6 & 24 & 13 & 7 \\ 6 & 24 & 7 & 13 \end{pmatrix},$$

$$O_3 = \begin{pmatrix} 0 & 20 & 15 & 15 \\ 6 & 20 & 12 & 12 \\ 4 & 26 & 13 & 7 \\ 4 & 26 & 7 & 13 \end{pmatrix}, \quad O_4 = \begin{pmatrix} 0 & 30 & 10 & 10 \\ 6 & 24 & 10 & 10 \\ 4 & 20 & 16 & 10 \\ 4 & 20 & 10 & 16 \end{pmatrix},$$

$$O_5 = \begin{pmatrix} 10 & 20 & 10 & 10 \\ 4 & 20 & 13 & 13 \\ 4 & 26 & 13 & 7 \\ 4 & 26 & 7 & 13 \end{pmatrix}, \quad O_6 = \begin{pmatrix} 10 & 20 & 10 & 10 \\ 4 & 22 & 10 & 14 \\ 4 & 20 & 16 & 10 \\ 4 & 28 & 10 & 8 \end{pmatrix},$$

$$O_7 = \begin{pmatrix} 10 & 20 & 10 & 10 \\ 4 & 24 & 9 & 13 \\ 4 & 18 & 15 & 13 \\ 4 & 26 & 13 & 7 \end{pmatrix}, \quad O_8 = \begin{pmatrix} 10 & 20 & 10 & 10 \\ 4 & 26 & 10 & 10 \\ 4 & 20 & 16 & 10 \\ 4 & 20 & 10 & 16 \end{pmatrix}.$$

Beweis. Wir übernehmen die Nummerierungen der Möglichkeiten aus 3.3.6 bis 3.3.11 und betrachten zunächst die möglichen Kombinationen der ersten Spalte und der ersten Zeile. Dabei sind A_1 und A_2 beide mit a_1 und a_2 kombinierbar, A_3 kann mit a_3 ergänzt werden.

Wir wenden 3.3.8 an und haben dann bis auf Permutation der letzten beiden Zeilen folgende Teilmatrizen:

$$A_1a_1B_1 : \begin{pmatrix} 0 & 20 & 15 & 15 \\ 4 & 20 & * & * \\ 6 & 26 & * & * \\ 6 & 26 & * & * \end{pmatrix}, \quad A_1a_1B_2 : \begin{pmatrix} 0 & 20 & 15 & 15 \\ 4 & 22 & * & * \\ 6 & 20 & * & * \\ 6 & 28 & * & * \end{pmatrix},$$

$$A_1a_1B_3 : \begin{pmatrix} 0 & 20 & 15 & 15 \\ 4 & 24 & * & * \\ 6 & 18 & * & * \\ 6 & 26 & * & * \end{pmatrix}, \quad A_1a_1B_4 : \begin{pmatrix} 0 & 20 & 15 & 15 \\ 4 & 26 & * & * \\ 6 & 20 & * & * \\ 6 & 20 & * & * \end{pmatrix},$$

$$A_1a_2B_5 : \begin{pmatrix} 0 & 30 & 10 & 10 \\ 4 & 20 & * & * \\ 6 & 24 & * & * \\ 6 & 24 & * & * \end{pmatrix}, \quad A_1a_2B_6 : \begin{pmatrix} 0 & 30 & 10 & 10 \\ 4 & 24 & * & * \\ 6 & 20 & * & * \\ 6 & 20 & * & * \end{pmatrix},$$

$$A_2a_1B_1 : \begin{pmatrix} 0 & 20 & 15 & 15 \\ 6 & 20 & * & * \\ 4 & 26 & * & * \\ 4 & 26 & * & * \end{pmatrix}, \quad A_2a_1B_2 : \begin{pmatrix} 0 & 20 & 15 & 15 \\ 6 & 22 & * & * \\ 4 & 20 & * & * \\ 4 & 28 & * & * \end{pmatrix}.$$

$$A_2a_1B_3 : \begin{pmatrix} 0 & 20 & 15 & 15 \\ 6 & 24 & * & * \\ 4 & 18 & * & * \\ 4 & 20 & * & * \end{pmatrix}, \quad A_2a_1B_4 : \begin{pmatrix} 0 & 20 & 15 & 15 \\ 6 & 26 & * & * \\ 4 & 20 & * & * \\ 4 & 20 & * & * \end{pmatrix},$$

$$A_2a_2B_5 : \begin{pmatrix} 0 & 30 & 10 & 10 \\ 6 & 20 & * & * \\ 4 & 24 & * & * \\ 4 & 24 & * & * \end{pmatrix}, \quad A_2a_2B_6 : \begin{pmatrix} 0 & 30 & 10 & 10 \\ 6 & 24 & * & * \\ 4 & 20 & * & * \\ 4 & 20 & * & * \end{pmatrix},$$

$$A_3a_3B_1 : \begin{pmatrix} 10 & 20 & 10 & 10 \\ 4 & 20 & * & * \\ 4 & 26 & * & * \\ 4 & 26 & * & * \end{pmatrix}, \quad A_3a_3B_2 : \begin{pmatrix} 10 & 20 & 10 & 10 \\ 4 & 22 & * & * \\ 4 & 24 & * & * \\ 4 & 24 & * & * \end{pmatrix},$$

$$A_3a_3B_3 : \begin{pmatrix} 10 & 20 & 10 & 10 \\ 4 & 24 & * & * \\ 4 & 18 & * & * \\ 4 & 26 & * & * \end{pmatrix}, \quad A_3a_3B_4 : \begin{pmatrix} 10 & 20 & 10 & 10 \\ 4 & 26 & * & * \\ 4 & 20 & * & * \\ 4 & 20 & * & * \end{pmatrix}.$$

Zu $A_2a_1B_2$ und $A_2a_1B_4$ gibt es nach 3.3.9 keine Möglichkeit, die zweite Zeile zu ergänzen. Für die übrigen Teilmatrizen finden wir folgende Fortsetzungen, die bis auf Permutation der jeweils letzten beiden Zeilen und Spalten eindeutig sind:

$$A_1a_1B_1b_1 : \begin{pmatrix} 0 & 20 & 15 & 15 \\ 4 & 20 & 13 & 13 \\ 6 & 26 & * & * \\ 6 & 26 & * & * \end{pmatrix}, \quad A_1a_1B_2b_2 : \begin{pmatrix} 0 & 20 & 15 & 15 \\ 4 & 22 & 10 & 14 \\ 6 & 20 & * & * \\ 6 & 28 & * & * \end{pmatrix},$$

$$A_1a_1B_3b_3 : \begin{pmatrix} 0 & 20 & 15 & 15 \\ 4 & 24 & 9 & 13 \\ 6 & 18 & * & * \\ 6 & 26 & * & * \end{pmatrix}, \quad A_1a_1B_4b_4 : \begin{pmatrix} 0 & 20 & 15 & 15 \\ 4 & 26 & 10 & 10 \\ 6 & 20 & * & * \\ 6 & 20 & * & * \end{pmatrix},$$

$$A_1a_2B_5b_1 : \begin{pmatrix} 0 & 30 & 10 & 10 \\ 4 & 20 & 13 & 13 \\ 6 & 24 & * & * \\ 6 & 24 & * & * \end{pmatrix}, \quad A_1a_2B_6b_3 : \begin{pmatrix} 0 & 30 & 10 & 10 \\ 4 & 24 & 9 & 13 \\ 6 & 20 & * & * \\ 6 & 20 & * & * \end{pmatrix},$$

$$A_2a_1B_1b_5 : \begin{pmatrix} 0 & 20 & 15 & 15 \\ 6 & 20 & 12 & 12 \\ 4 & 26 & * & * \\ 4 & 26 & * & * \end{pmatrix}, \quad A_2a_1B_3b_4 : \begin{pmatrix} 0 & 20 & 15 & 15 \\ 6 & 24 & 10 & 10 \\ 4 & 18 & * & * \\ 4 & 20 & * & * \end{pmatrix},$$

$$A_2a_2B_5b_5 : \begin{pmatrix} 0 & 30 & 10 & 10 \\ 6 & 20 & 12 & 12 \\ 4 & 24 & * & * \\ 4 & 24 & * & * \end{pmatrix}, \quad A_2a_2B_6b_4 : \begin{pmatrix} 0 & 30 & 10 & 10 \\ 6 & 24 & 10 & 10 \\ 4 & 20 & * & * \\ 4 & 20 & * & * \end{pmatrix},$$

$$A_3a_3B_1b_1 : \begin{pmatrix} 10 & 20 & 10 & 10 \\ 4 & 20 & 13 & 13 \\ 4 & 26 & * & * \\ 4 & 26 & * & * \end{pmatrix}, \quad A_3a_3B_2b_2 : \begin{pmatrix} 10 & 20 & 10 & 10 \\ 4 & 22 & 10 & 14 \\ 4 & 24 & * & * \\ 4 & 24 & * & * \end{pmatrix},$$

$$A_3a_3B_3b_3 : \begin{pmatrix} 10 & 20 & 10 & 10 \\ 4 & 24 & 9 & 13 \\ 4 & 18 & * & * \\ 4 & 26 & * & * \end{pmatrix}, \quad A_3a_3B_4b_4 : \begin{pmatrix} 10 & 20 & 10 & 10 \\ 4 & 26 & 10 & 10 \\ 4 & 20 & * & * \\ 4 & 20 & * & * \end{pmatrix}.$$

Mit 3.3.10 und 3.3.11 sehen wir, dass $A_1a_2B_6b_3$ und $A_2a_1B_3b_4$ nicht ergänzt werden können; die übrigen Teilmatrizen finden bis auf simultane Permutation der jeweils letzten beiden Zeilen und Spalten eine eindeutige Fortsetzung. Die Behauptung folgt. □

3.3.4 Die Operation von G

Im Folgenden seien $\mathcal{D} = (\mathcal{P}, \mathcal{B}, I)$, P_1, P_2, P_3, P_4, x_1, x_2, x_3 und x_4 wie in der Problemstellung 3.3.1; die Gruppe G sei eine Untergruppe der vollen Automorphismengruppe von $\mathcal{D}$.

Anders als im Abschnitt über die intransitive Erweiterung von E_{16} durch A_5 ist hier nicht bis auf Konjugiertheit klar, welche Untergruppen von G als Stabilisatoren der Punkt- und Blockrepräsentanten auftreten. Aus dem Abschnitt 3.3.2 entnehmen wir vielmehr, dass es bis auf Konjugiertheit für die Stabilisatoren von P_1, P_2, x_1 und x_2 jeweils genau vier Möglichkeiten gibt und für die Stabilisatoren von P_3, P_4, x_3 und x_4 jeweils genau drei. Es gibt also bis auf Konjugiertheit $(4 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 3)^2 = 20.736$ Möglichkeiten für die Operation von G auf $\mathcal{D}$; ferner ist bei jeder dieser Möglichkeiten jede der acht Orbitalstrukturen zu verwenden.

Glücklicherweise wird diese Zahl durch die Kenntnis einiger Automorphismen von G deutlich verringert. Wir argumentieren dabei wie folgt:

Ist G eine Untergruppe von $Aut\,\mathcal{D}$, so trivialerweise auch $G^\varphi = G$ für jeden Automorphismus φ von G. Sind nun in G sämtliche Stabilisatoren bekannt, so sind es in G^φ deren Bilder unter φ.

Seien nun X_1, X_2, X_3, X_4, Y_1, Y_2, Y_3, Y_4, Z_1, Z_2 und Z_3 wie im Abschnitt 3.3.2. Da G eine Gruppe äußerer Automorphismen besitzt, die als Σ_4 - d. h., insbesondere zweifach transitiv - auf den G-Klassen von $X_1, \ldots, X_4$ und $Y_1, \ldots, Y_4$ operiert, ist es für unser Problem hinreichend, $G_{P_1} \in \{X_1, X_2\}$ und $G_{P_2} = Y_1$ zu betrachten.

Alle anderen Kombinationen können nur Designs liefern, die zu den so erhaltenen isomorph sind.

Ansonsten gehen wir genauso wie im Abschnitt über die intransitive Erweiterung von E_{16} durch A_5 vor. Um die Designs konstruieren zu können, stellen wir mit Hilfe von [9] die Gruppe G als Permutationsgruppe auf den Nebenklassen von X_1, X_2, X_3, X_4, Y_1, Y_2, Y_3, Y_4, Z_1, Z_2 und Z_3 dar. Mit 2.3.9 wissen wir dann schon, wie G auf den Punkten und Blöcken der Designs operiert.

Die Operation der Erzeuger von G auf den Nebenklassen von X_1:

w →(1 2)(3 6)(4 7)(5 8)(9 13)(10 12)(11 16)(14 15)

x →(1 3)(2 6)(4 9)(5 10)(7 13)(8 12)(11 14)(15 16)

y →(1 4)(2 7)(3 9)(5 11)(6 13)(8 16)(10 14)(12 15)

z →(1 5)(2 8)(3 10)(4 11)(6 12)(7 16)(9 14)(13 15)

a →(2 6)(4 11)(7 15)(8 12)(9 14)(13 16)

b →(2 12)(4 9)(6 8)(7 16)(11 14)(13 15)

d →(2 7 4)(3 5 10)(6 16 14)(8 15 9)(11 12 13)

f →(2 5 6 15 7)(3 13 9 14 16)(4 8 12 11 10)

Die Operation der Erzeuger von G auf den Nebenklassen von X_2:

w →(1 6)(2 8)(3 16)(4 15)(5 10)(7 9)(11 13)(12 14)

x →(1 2)(3 4)(5 12)(6 8)(7 11)(9 13)(10 14)(15 16)

y →(1 7)(2 11)(3 12)(4 5)(6 9)(8 13)(10 15)(14 16)

z →(1 5)(2 12)(3 11)(4 7)(6 10)(8 14)(9 15)(13 16)

a →(3 11)(4 7)(6 8)(9 16)(10 14)(13 15)

b →(1 2)(5 12)(6 10)(8 14)(9 16)(13 15)

d →(1 3 15)(2 11 13)(4 9 12)(5 7 16)(6 14 10)

f →(2 13 11 3 15)(4 12 7 10 14)(5 8 16 9 6)

Die Operation der Erzeuger von G auf den Nebenklassen von Y_1:

w →(1 2)(3 6)(4 7)(5 8)(9 16)(10 12)(11 25)(13 14)(15 49)
(17 27)(18 30)(19 43)(20 66)(21 50)(22 80)(23 28)(24 72)
(26 34)(29 64)(31 53)(32 62)(33 38)(35 54)(36 69)(37 44)
(39 58)(40 76)(41 45)(42 56)(46 71)(47 68)(48 75)(51 52)
(55 79)(57 65)(59 74)(60 63)(61 77)(67 78)(70 73)

x →(1 3)(2 6)(4 9)(5 10)(7 16)(8 12)(11 23)(13 15)(14 49)
(17 62)(18 51)(19 68)(20 69)(21 75)(22 29)(24 77)(25 28)
(26 33)(27 32)(30 52)(31 55)(34 38)(35 57)(36 66)(37 42)
(39 76)(40 58)(41 59)(43 47)(44 56)(45 74)(46 70)(48 50)
(53 79)(54 65)(60 67)(61 72)(63 78)(64 80)(71 73)

y →(1 4)(2 7)(3 9)(5 11)(6 16)(8 25)(10 23)(12 28)(13 17)
(14 27)(15 62)(18 26)(19 64)(20 77)(21 71)(22 47)(24 69)
(29 43)(30 34)(31 74)(32 49)(33 51)(35 40)(36 72)(37 63)
(38 52)(39 65)(41 79)(42 78)(44 60)(45 55)(46 50)(48 70)
(53 59)(54 76)(56 67)(57 58)(61 66)(68 80)(73 75)

z →(1 5)(2 8)(3 10)(4 11)(6 12)(7 25)(9 23)(13 18)(14 30)
(15 51)(16 28)(17 26)(19 35)(20 53)(21 67)(22 39)(24 41)
(27 34)(29 76)(31 66)(32 38)(33 62)(36 55)(37 70)(40 64)
(42 46)(43 54)(44 73)(45 72)(47 65)(48 63)(49 52)(50 78)
(56 71)(57 68)(58 80)(59 77)(60 75)(61 74)(69 79)

a →(2 6)(4 11)(7 28)(8 12)(9 23)(13 19)(14 47)(15 68)(16 25)
(17 40)(18 35)(20 21)(22 34)(24 44)(26 64)(27 39)(29 38)
(30 65)(31 63)(32 76)(33 80)(36 50)(37 61)(41 73)(42 72)
(43 49)(45 46)(48 66)(51 57)(52 54)(53 67)(55 78)(56 77)
(58 62)(59 71)(60 79)(69 75)(70 74)

b →(2 12)(4 9)(6 8)(7 25)(11 23)(13 21)(14 63)(15 75)(16 28)
(17 73)(18 67)(19 20)(22 45)(24 64)(26 44)(27 42)(29 74)
(30 48)(31 47)(32 37)(33 56)(34 46)(35 53)(36 54)(38 70)
(39 72)(40 41)(43 55)(49 78)(50 52)(51 60)(57 79)(58 59)
(61 76)(62 71)(65 66)(68 69)(77 80)

d →(2 7 4)(3 5 10)(6 25 23)(8 28 9)(11 12 16)(13 21 19)
(14 46 64)(15 67 57)(17 50 29)(18 60 68)(22 26 63)(24 31 45)
(27 71 43)(30 37 80)(32 56 65)(33 48 76)(34 44 47)(35 51 75)

(36 74 41)(38 73 54)(39 62 78)(40 52 70)(42 58 49)(53 79 69) (55 72 59)(61 77 66)

f →(1 19 20 21 13)(2 35 36 37 27)(3 22 24 44 34)(4 54 55 56 51) (5 47 45 46 14)(6 39 61 50 18)(7 43 53 48 38)(8 65 59 60 17) (9 58 74 75 32)(10 64 31 63 26)(11 57 77 78 52)(12 40 79 71 30) (15 16 80 41 42)(23 76 69 70 62)(25 68 72 73 33)(28 29 66 67 49)

Die Operation der Erzeuger von G auf den Nebenklassen von Z_1:

w →(2 7)(3 14)(8 21)(9 10)(11 13)(15 29)(17 26)(18 22) (19 23)(20 31)(24 25)(27 36)(28 37)(30 40)(32 33)(38 39)

x →(1 4)(2 7)(3 15)(5 6)(8 21)(9 11)(10 13)(12 35)(14 29) (16 34)(17 26)(18 24)(20 32)(22 25)(27 36)(31 33)

y →(2 8)(3 14)(7 21)(9 11)(10 13)(12 34)(15 29)(16 35) (17 27)(18 25)(19 28)(20 33)(22 24)(23 37)(26 36)(31 32)

z →(1 5)(2 8)(3 15)(4 6)(7 21)(9 13)(10 11)(14 29)(18 22) (19 28)(20 32)(23 37)(24 25)(30 39)(31 33)(38 40)

a →(1 2)(4 7)(5 8)(6 21)(9 18)(10 25)(11 24)(12 36)(13 22) (14 29)(16 17)(19 30)(23 40)(26 34)(27 35)(28 39)(31 33) (37 38)

b →(1 9)(2 18)(3 20)(4 11)(5 13)(6 10)(7 24)(8 22)(12 27) (14 31)(15 32)(16 17)(21 25)(23 37)(26 34)(29 33)(35 36) (38 40)

d →(2 9 18)(3 30 16)(4 5 6)(7 13 25)(8 10 24)(11 22 21) (12 29 38)(14 40 35)(15 39 34)(17 20 19)(23 36 33)(26 32 28) (27 31 37)

f →(1 16 17 2 3)(4 12 36 7 15)(5 34 27 21 14)(6 35 26 8 29) (9 19 20 30 18)(10 28 33 38 24)(11 37 31 39 25) (13 23 32 40 22)

Die Operation der Erzeuger von G auf den Nebenklassen von Z_2:

w →(1 2)(3 4)(6 16)(7 22)(8 29)(11 12)(14 31)(15 18)(17 23) (19 32)(21 28)(24 40)(25 36)(30 37)(33 39)(34 35)

x →(1 2)(3 4)(5 9)(6 17)(7 11)(10 13)(12 22)(16 23)(19 25)
(20 38)(21 33)(24 40)(26 27)(28 39)(32 36)(34 35)

y →(1 3)(2 4)(5 9)(6 17)(7 22)(8 31)(10 13)(11 12)(14 29)
(15 18)(16 23)(20 27)(24 34)(26 38)(30 37)(35 40)

z →(1 4)(2 3)(5 10)(7 22)(8 14)(9 13)(11 12)(15 30)(18 37)
(19 36)(20 38)(24 40)(25 32)(26 27)(29 31)(34 35)

a →(1 5)(2 9)(3 13)(4 10)(7 25)(8 18)(11 19)(12 36)(14 37)
(15 29)(16 23)(20 24)(22 32)(26 34)(27 35)(28 39)(30 31)
(38 40)

b →(1 11)(2 7)(3 22)(4 12)(5 19)(6 21)(8 18)(9 25)(10 36)
(13 32)(14 37)(15 31)(16 39)(17 33)(23 28)(26 27)(29 30)
(34 35)

d →(2 4 3)(5 11 19)(6 24 8)(7 36 13)(9 12 32)(10 22 25)
(14 17 40)(15 28 27)(16 35 31)(18 21 20)(23 34 29)(26 30 39)
(33 38 37)

f →(1 8 18 5 6)(2 14 15 10 23)(3 31 30 13 17)(4 29 37 9 16)
(7 26 33 34 25)(11 20 21 24 19)(12 38 39 35 32)
(22 27 28 40 36)

Die Operation der Erzeuger von G auf den Nebenklassen von Z_3:

w →(1 2)(3 6)(4 8)(5 16)(7 9)(10 30)(12 29)(17 23)(18 35)
(19 26)(21 37)(22 31)(24 36)(25 33)(27 34)(39 40)

x →(1 6)(2 3)(4 9)(7 8)(10 37)(11 13)(12 22)(14 15)(18 35)
(19 34)(21 30)(24 40)(25 33)(26 27)(29 31)(36 39)

y →(1 3)(2 6)(5 17)(11 14)(12 22)(13 15)(16 23)(18 35)
(19 26)(20 38)(24 39)(25 33)(27 34)(28 32)(29 31)(36 40)

z →(1 3)(2 6)(4 8)(5 16)(7 9)(10 37)(11 15)(12 22)(13 14)
(17 23)(18 33)(20 32)(21 30)(25 35)(28 38)(29 31)

a →(1 4)(2 7)(3 8)(6 9)(10 12)(11 18)(13 35)(14 25)(15 33)
(17 23)(19 24)(21 29)(22 37)(26 39)(27 36)(28 38)(30 31)
(34 40)

b →(1 11)(2 14)(3 15)(4 18)(5 20)(6 13)(7 25)(8 33)(9 35)
(10 12)(16 32)(17 38)(21 31)(22 37)(23 28)(26 27)(29 30)
(36 39)

d →(2 6 3)(4 11 18)(5 24 12)(7 13 33)(8 14 35)(9 15 25)
(10 20 19)(16 40 22)(17 36 31)(21 28 27)(23 39 29)(26 30 38)
(32 34 37)

f →(1 12 10 4 5)(2 22 21 9 23)(3 31 30 8 16)(6 29 37 7 17)
(11 19 20 24 18)(13 34 38 36 33)(14 26 32 39 25)
(15 27 28 40 35)

Nach 2.3.10 die Menge $\langle x_1 \rangle$ unter G_{x_1} invariant; nach 2.3.9 sind es also auch die entsprechenden Mengen von Nebenklassen der Punktstabilisatoren.

Wir berechnen daher für jeden potenziellen Blockstabilisator, wie er auf den Nebenklassen aller eventuellen Punktstabilisatoren operiert; vor allem sind wir an den Längen der dabei entstehenden Bahnen interessiert.

Die X_1-Bahnen auf den Nebenklassen von X_1 sind
$\{1\}$; $\{2, 6, 12, 8, 7, 15, 16, 13, 4, 11, 9, 14, 5, 10, 3\}$.
Diese Bahnen haben die Längen 1 und 15.

Die X_1-Bahnen auf den Nebenklassen von X_2 sind
$\{1, 2, 3, 11, 15, 13\}$; $\{4, 7, 9, 16, 12, 5, 10, 14, 6, 8\}$.
Diese Bahnen haben die Längen 6 und 10.

Die X_1-Bahnen auf den Nebenklassen von Y_1 sind
$\{1, 19, 13, 20, 21\}$; $\{3, 5, 10, 22, 34, 45, 46, 26, 64, 44, 24, 63, 31, 14, 47\}$;
$\{2, 6, 12, 8, 7, 28, 25, 16, 4, 11, 9, 23, 35, 18, 53, 67, 51, 57, 60, 79, 75, 69, 15, 68, 36, 50, 54, 52, 74, 70, 29, 38, 41, 73, 40, 17, 37, 61, 32, 76, 80, 33, 77, 56, 30, 65, 48, 66, 27, 39, 42, 72, 71, 59, 62, 58, 43, 49, 55, 78\}$.
Diese Bahnen haben die Längen 5, 15 und 60.

Die X_1-Bahnen auf den Nebenklassen von Z_1 sind
$\{1, 2, 9, 18, 16, 17, 3, 20, 30, 19\}$;
$\{4, 7, 11, 24, 5, 8, 13, 22, 6, 21, 10, 25, 12, 36, 27, 35, 29, 14, 33, 31, 38, 37, 40, 23, 15, 32, 39, 28, 34, 26\}$.
Diese Bahnen haben die Längen 10 und 30.

Die X_1-Bahnen auf den Nebenklassen von Z_2 sind
$\{1, 5, 11, 19, 8, 18, 6, 21, 24, 20\}$;

$\{2, 9, 7, 25, 4, 10, 12, 36, 3, 13, 22, 32, 14, 37, 17, 33, 40, 38, 15, 29, 31, 30, 28, 39, 23, 16, 27, 35, 26, 34\}$.
Diese Bahnen haben die Längen 10 und 30.

Die X_1-Bahnen auf den Nebenklassen von Z_3 sind
$\{1, 4, 11, 18, 12, 10, 5, 20, 24, 19\}$;
$\{2, 7, 14, 25, 6, 9, 13, 35, 3, 8, 15, 33, 22, 37, 16, 32, 40, 34, 21, 29, 31, 30, 28, 38, 23, 17, 27, 36, 26, 39\}$.
Diese Bahnen haben die Längen 10 und 30.

Die X_2-Bahnen auf den Nebenklassen von X_1 sind
$\{1, 3, 14, 9, 16, 13\}$; $\{2, 6, 8, 12, 5, 10, 4, 11, 15, 7\}$.
Diese Bahnen haben die Längen 6 und 10.

Die X_2-Bahnen auf den Nebenklassen von X_2 sind
$\{1\}$; $\{2, 5, 12, 13, 15, 16, 9, 4, 7, 3, 11, 14, 10, 6, 8\}$.
Diese Bahnen haben die Längen 1 und 15.

Die X_2-Bahnen auf den Nebenklassen von Y_1 sind
$\{2, 6, 8, 12, 35, 18, 79, 60, 17, 40, 71, 59, 37, 61, 27, 39, 36, 50, 65, 30\}$;
$\{1, 3, 23, 9, 25, 16, 19, 13, 69, 75, 33, 80, 44, 24, 42, 72, 32, 76, 20, 21, 68, 15, 41, 73, 58, 62, 74, 70, 22, 34\}$;
$\{4, 11, 28, 7, 5, 10, 54, 52, 66, 48, 14, 47, 78, 55, 63, 31, 49, 43, 56, 77, 26, 64, 29, 38, 45, 46, 51, 57, 67, 53\}$.
Diese Bahnen haben die Längen 20 und 30 ($2\times$).

Die X_2-Bahnen auf den Nebenklassen von Z_1 sind
$\{4, 7, 9, 18, 12, 36, 15, 20, 30, 19\}$;
$\{1, 2, 11, 24, 6, 21, 13, 22, 5, 8, 10, 25, 16, 17, 26, 34, 14, 29, 33, 31, 38, 37, 40, 23, 3, 32, 39, 28, 35, 27\}$.
Diese Bahnen haben die Längen 10 und 30.

Die X_2-Bahnen auf den Nebenklassen von Z_2 sind
$\{1, 5, 7, 25, 8, 18, 6, 33, 34, 26\}$;
$\{2, 9, 11, 19, 4, 10, 22, 32, 3, 13, 12, 36, 14, 37, 17, 21, 35, 27, 15, 29, 31, 30, 39, 28, 23, 16, 38, 40, 20, 24\}$.
Diese Bahnen haben die Längen 10 und 30.

Die X_2-Bahnen auf den Nebenklassen von Z_3 sind
$\{3, 8, 14, 25, 31, 30, 16, 32, 39, 26\}$;

$\{1, 4, 13, 35, 6, 9, 11, 18, 2, 7, 15, 33, 12, 10, 37, 22, 23, 17, 28, 38, 40, 34, 24, 19, 5, 20, 36, 27, 29, 21\}$.
Diese Bahnen haben die Längen 10 und 30.

Die X_3-Bahnen auf den Nebenklassen von X_1 sind
$\{1, 5, 7, 15, 2, 6\}$; $\{3, 10, 16, 13, 12, 8, 9, 14, 11, 4\}$.
Diese Bahnen haben die Längen 6 und 10.

Die X_3-Bahnen auf den Nebenklassen von X_2 sind
$\{1, 12, 14, 10, 4, 7\}$; $\{2, 5, 8, 6, 11, 3, 13, 15, 9, 16\}$.
Diese Bahnen haben die Längen 6 und 10.

Die X_3-Bahnen auf den Nebenklassen von Y_1 sind
$\{4, 11, 23, 9, 54, 52, 55, 78, 51, 57, 75, 69, 70, 74, 32, 76, 56, 77, 62, 58\}$;
$\{1, 5, 7, 28, 2, 6, 19, 13, 53, 67, 27, 39, 46, 45, 50, 36, 49, 43, 20, 21, 35, 18, 61, 37, 29, 38, 66, 48, 47, 14\}$;
$\{3, 10, 25, 16, 12, 8, 22, 34, 72, 42, 30, 65, 63, 31, 60, 79, 15, 68, 24, 44, 40, 17, 59, 71, 80, 33, 41, 73, 64, 26\}$.
Diese Bahnen haben die Längen 20 und 30 ($2\times$).

Die X_3-Bahnen auf den Nebenklassen von Z_1 sind
$\{1, 2, 13, 22, 16, 17, 3, 32, 40, 23\}$;
$\{4, 7, 10, 25, 5, 8, 9, 18, 6, 21, 11, 24, 12, 36, 27, 35, 29, 14, 31, 33, 39, 28, 30, 19, 15, 20, 38, 37, 34, 26\}$.
Diese Bahnen haben die Längen 10 und 30.

Die X_3-Bahnen auf den Nebenklassen von Z_2 sind
$\{3, 13, 7, 25, 31, 30, 17, 33, 34, 26\}$;
$\{1, 5, 12, 36, 4, 10, 11, 19, 2, 9, 22, 32, 8, 18, 37, 14, 23, 16, 28, 39, 40, 38, 24, 20, 6, 21, 35, 27, 29, 15\}$.
Diese Bahnen haben die Längen 10 und 30.

Die X_3-Bahnen auf den Nebenklassen von Z_3 sind
$\{3, 8, 11, 18, 31, 30, 16, 20, 24, 19\}$;
$\{1, 4, 15, 33, 6, 9, 14, 25, 2, 7, 13, 35, 12, 10, 37, 22, 23, 17, 38, 28, 36, 27, 39, 26, 5, 32, 40, 34, 29, 21\}$.
Diese Bahnen haben die Längen 10 und 30.

Die X_4-Bahnen auf den Nebenklassen von X_1 sind
$\{1, 10, 12, 8, 11, 4\}$; $\{2, 6, 14, 9, 5, 3, 15, 7, 16, 13\}$.
Diese Bahnen haben die Längen 6 und 10.

Die X_4-Bahnen auf den Nebenklassen von X_2 sind
$\{1, 5, 9, 16, 6, 8\}$; $\{2, 12, 15, 13, 14, 10, 11, 3, 4, 7\}$.
Diese Bahnen haben die Längen 6 und 10.

Die X_4-Bahnen auf den Nebenklassen von Y_1 sind
$\{7, 28, 16, 25, 43, 49, 66, 48, 33, 80, 73, 41, 67, 53, 15, 68, 38, 29, 42, 72\}$;
$\{1, 10, 12, 8, 11, 4, 19, 13, 79, 60, 52, 54, 63, 31, 56, 77, 17, 40, 20, 21, 57, 51, 55, 78, 65, 30, 59, 71, 64, 26\}$;
$\{2, 6, 23, 9, 5, 3, 35, 18, 69, 75, 14, 47, 50, 36, 44, 24, 62, 58, 37, 61, 34, 22, 76, 32, 45, 46, 27, 39, 70, 74\}$.
Diese Bahnen haben die Längen 20 und 30 ($2\times$).

Die X_4-Bahnen auf den Nebenklassen von Z_1 sind
$\{4, 7, 13, 22, 12, 36, 15, 32, 40, 23\}$;
$\{1, 2, 10, 25, 6, 21, 9, 18, 5, 8, 11, 24, 16, 17, 26, 34, 14, 29, 31, 33, 39, 28, 30, 19, 3, 20, 38, 37, 35, 27\}$.
Diese Bahnen haben die Längen 10 und 30.

Die X_4-Bahnen auf den Nebenklassen von Z_2 sind
$\{3, 13, 11, 19, 31, 30, 17, 21, 24, 20\}$;
$\{1, 5, 22, 32, 4, 10, 7, 25, 2, 9, 12, 36, 8, 18, 37, 14, 23, 16, 39, 28, 35, 27, 34, 26, 6, 33, 40, 38, 29, 15\}$.
Diese Bahnen haben die Längen 10 und 30.

Die X_4-Bahnen auf den Nebenklassen von Z_3 sind
$\{1, 4, 14, 25, 12, 10, 5, 32, 39, 26\}$;
$\{2, 7, 11, 18, 6, 9, 15, 33, 3, 8, 13, 35, 22, 37, 16, 20, 36, 27, 21, 29, 31, 30, 38, 28, 23, 17, 34, 40, 19, 24\}$.
Diese Bahnen haben die Längen 10 und 30.

Die Y_1-Bahnen auf den Nebenklassen von X_1 sind
$\{1\}$; $\{3, 5, 10\}$; $\{2, 6, 12, 8, 7, 15, 16, 13, 4, 11, 9, 14\}$.
Diese Bahnen haben die Längen 1, 3 und 12.

Die Y_1-Bahnen auf den Nebenklassen von X_2 sind
$\{6, 8, 10, 14\}$; $\{1, 2, 3, 11, 15, 13\}$; $\{4, 7, 9, 16, 12, 5\}$.
Diese Bahnen haben die Längen 4 und 6 ($2\times$).

Die Y_1-Bahnen auf den Nebenklassen von Y_1 sind
$\{1\}$; $\{3, 5, 10\}$; $\{13, 19, 21, 20\}$;

$\{2,6,12,8,7,28,25,16,4,11,9,23\}$;
$\{14,47,63,31,46,45,34,22,64,26,24,44\}$;
$\{15,68,75,69,67,53,18,35,57,51,79,60\}$;
$\{17,40,73,41,50,36,52,54,29,38,74,70\}$;
$\{27,39,42,72,71,59,62,58,43,49,55,78\}$;
$\{30,65,48,66,37,61,32,76,80,33,77,56\}$.
Diese Bahnen haben die Längen 1, 3, 4, und 12 (6 $\times$).

Die Y_1-Bahnen auf den Nebenklassen von Z_1 sind
$\{1,2,9,18\}$; $\{3,20,30,19,16,17\}$; $\{15,32,39,28,34,26\}$;
$\{4,7,11,24,5,8,13,22,6,21,10,25\}$;
$\{12,36,27,35,29,14,33,31,38,37,40,23\}$.
Diese Bahnen haben die Längen 4, 6 (2$\times$) und 12 (2$\times$).

Die Y_1-Bahnen auf den Nebenklassen von Z_2 sind
$\{1,5,11,19\}$; $\{6,21,24,20,8,18\}$; $\{14,37,17,33,40,38\}$;
$\{2,9,7,25,4,10,12,36,3,13,22,32\}$;
$\{15,29,31,30,28,39,23,16,27,35,26,34\}$.
Diese Bahnen haben die Längen 4, 6 (2$\times$) und 12 (2$\times$).

Die Y_1-Bahnen auf den Nebenklassen von Z_3 sind
$\{1,4,11,18\}$; $\{5,20,24,19,12,10\}$; $\{16,32,40,34,22,37\}$;
$\{2,7,14,25,6,9,13,35,3,8,15,33\}$;
$\{17,23,38,28,36,27,39,26,31,30,21,29\}$.
Diese Bahnen haben die Längen 4, 6 (2$\times$) und 12 (2$\times$).

Die Y_2-Bahnen auf den Nebenklassen von X_1 sind
$\{2,6,8,12\}$; $\{1,3,14,9,16,13\}$; $\{4,11,15,7,5,10\}$.
Diese Bahnen haben die Längen 4 und 6 (2$\times$).

Die Y_2-Bahnen auf den Nebenklassen von X_2 sind
$\{1\}$; $\{2,5,12\}$; $\{3,11,4,7,8,6,10,14,15,13,9,16\}$.
Diese Bahnen haben die Längen 1, 3 und 12.

Die Y_2-Bahnen auf den Nebenklassen von Y_1 sind
$\{2,6,8,12\}$; $\{30,65,50,36\}$; $\{1,3,23,9,25,16\}$; $\{4,11,28,7,5,10\}$;
$\{13,19,75,69,44,24,33,80,76,32,72,42\}$;
$\{14,47,78,55,63,31,49,43,54,52,66,48\}$;
$\{15,68,21,20,73,41,62,58,22,34,74,70\}$;
$\{17,40,71,59,37,61,27,39,35,18,79,60\}$;

$\{26, 64, 56, 77, 46, 45, 38, 29, 57, 51, 53, 67\}$.
Diese Bahnen haben die Längen 4 (2×), 6 (2×) und 12 (5×).

Die Y_2-Bahnen auf den Nebenklassen von Z_1 sind
$\{4, 7, 9, 18\}$; $\{3, 32, 39, 28, 35, 27\}$; $\{12, 36, 15, 20, 30, 19\}$;
$\{1, 2, 11, 24, 6, 21, 13, 22, 5, 8, 10, 25\}$;
$\{14, 29, 33, 31, 38, 37, 40, 23, 16, 17, 26, 34\}$.
Diese Bahnen haben die Längen 4, 6 (2×) und 12 (2×).

Die Y_2-Bahnen auf den Nebenklassen von Z_2 sind
$\{1, 5, 7, 25\}$; $\{6, 33, 34, 26, 8, 18\}$; $\{14, 37, 17, 21, 35, 27\}$;
$\{15, 29, 31, 30, 39, 28, 23, 16, 38, 40, 20, 24\}$;
$\{2, 9, 11, 19, 4, 10, 22, 32, 3, 13, 12, 36\}$.
Diese Bahnen haben die Längen 4, 6 (2×) und 12 (2×).

Die Y_2-Bahnen auf den Nebenklassen von Z_3 sind
$\{3, 8, 14, 25\}$; $\{5, 20, 36, 27, 29, 21\}$; $\{16, 32, 39, 26, 31, 30\}$;
$\{10, 12, 22, 37, 28, 38, 23, 17, 19, 24, 34, 40\}$;
$\{1, 4, 13, 35, 6, 9, 11, 18, 2, 7, 15, 33\}$.
Diese Bahnen haben die Längen 4, 6 (2×) und 12 (2×).

Die Y_3-Bahnen auf den Nebenklassen von X_1 sind
$\{4, 11, 14, 9\}$; $\{1, 5, 7, 15, 2, 6\}$; $\{3, 10, 16, 13, 12, 8\}$.
Diese Bahnen haben die Längen 4 und 6 (2×).

Die Y_3-Bahnen auf den Nebenklassen von X_2 sind
$\{9, 16, 13, 15\}$; $\{1, 12, 14, 10, 4, 7\}$; $\{2, 5, 8, 6, 11, 3\}$.
Diese Bahnen haben die Längen 4 und 6 (2×).

Die Y_3-Bahnen auf den Nebenklassen von Y_1 sind
$\{4, 11, 23, 9\}$; $\{56, 77, 62, 58\}$; $\{1, 5, 7, 28, 2, 6\}$; $\{3, 10, 25, 16, 12, 8\}$;
$\{13, 19, 67, 53, 46, 45, 27, 39, 43, 49, 36, 50\}$;
$\{14, 47, 48, 66, 21, 20, 18, 35, 29, 38, 61, 37\}$;
$\{15, 68, 60, 79, 42, 72, 34, 22, 65, 30, 31, 63\}$;
$\{17, 40, 44, 24, 71, 59, 33, 80, 64, 26, 41, 73\}$;
$\{32, 76, 70, 74, 78, 55, 52, 54, 57, 51, 69, 75\}$.
Diese Bahnen haben die Längen 4 (2×), 6 (2×) und 12 (5×).

Die Y_3-Bahnen auf den Nebenklassen von Z_1 sind
$\{1, 2, 13, 22\}$; $\{3, 32, 40, 23, 16, 17\}$; $\{15, 20, 38, 37, 34, 26\}$;

$\{4, 7, 10, 25, 5, 8, 9, 18, 6, 21, 11, 24\}$;
$\{12, 36, 27, 35, 29, 14, 31, 33, 39, 28, 30, 19\}$.
Diese Bahnen haben die Längen 4, 6 (2×) und 12 (2×).

Die Y_3-Bahnen auf den Nebenklassen von Z_2 sind
$\{3, 13, 7, 25\}$; $\{6, 21, 35, 27, 29, 15\}$; $\{17, 33, 34, 26, 31, 30\}$;
$\{1, 5, 12, 36, 4, 10, 11, 19, 2, 9, 22, 32\}$;
$\{8, 18, 37, 14, 23, 16, 28, 39, 40, 38, 24, 20\}$.
Diese Bahnen haben die Längen 4, 6 (2×) und 12 (2×).

Die Y_3-Bahnen auf den Nebenklassen von Z_3 sind
$\{3, 8, 11, 18\}$; $\{5, 32, 40, 34, 29, 21\}$; $\{16, 20, 24, 19, 31, 30\}$;
$\{1, 4, 15, 33, 6, 9, 14, 25, 2, 7, 13, 35\}$;
$\{10, 12, 22, 37, 38, 28, 23, 17, 26, 39, 27, 36\}$.
Diese Bahnen haben die Längen 4, 6 (2×) und 12 (2×).

Die Y_4-Bahnen auf den Nebenklassen von X_1 sind
$\{7, 15, 13, 16\}$; $\{1, 10, 12, 8, 11, 4\}$; $\{2, 6, 14, 9, 5, 3\}$.
Diese Bahnen haben die Längen 4 und 6 (2×).

Die Y_4-Bahnen auf den Nebenklassen von X_2 sind
$\{3, 11, 7, 4\}$; $\{1, 5, 9, 16, 6, 8\}$; $\{2, 12, 15, 13, 14, 10\}$.
Diese Bahnen haben die Längen 4 und 6 (2×).

Die Y_4-Bahnen auf den Nebenklassen von Y_1 sind
$\{29, 38, 72, 42\}$; $\{7, 28, 16, 25\}$; $\{1, 10, 12, 8, 11, 4\}$; $\{2, 6, 23, 9, 5, 3\}$;
$\{13, 19, 60, 79, 63, 31, 52, 54, 40, 17, 77, 56\}$;
$\{14, 47, 50, 36, 44, 24, 62, 58, 35, 18, 69, 75\}$;
$\{15, 68, 67, 53, 48, 66, 49, 43, 80, 33, 41, 73\}$;
$\{20, 21, 57, 51, 55, 78, 65, 30, 59, 71, 64, 26\}$;
$\{22, 34, 61, 37, 32, 76, 46, 45, 70, 74, 27, 39\}$.
Diese Bahnen haben die Längen 4 (2×), 6 (2×) und 12 (5×).

Die Y_4-Bahnen auf den Nebenklassen von Z_1 sind
$\{4, 7, 13, 22\}$; $\{12, 36, 15, 32, 40, 23\}$; $\{3, 20, 38, 37, 35, 27\}$;
$\{1, 2, 10, 25, 6, 21, 9, 18, 5, 8, 11, 24\}$;
$\{14, 29, 31, 33, 39, 28, 30, 19, 16, 17, 26, 34\}$.
Diese Bahnen haben die Längen 4, 6 (2×) und 12 (2×).

Die Y_4-Bahnen auf den Nebenklassen von Z_2 sind
$\{3, 13, 11, 19\}$; $\{6, 33, 40, 38, 29, 15\}$; $\{17, 21, 24, 20, 31, 30\}$;

$\{1, 5, 22, 32, 4, 10, 7, 25, 2, 9, 12, 36\}$;
$\{8, 18, 37, 14, 23, 16, 39, 28, 35, 27, 34, 26\}$.
Diese Bahnen haben die Längen 4, 6 (2×) und 12 (2×).

Die Y_4-Bahnen auf den Nebenklassen von Z_3 sind
$\{1, 4, 14, 25\}$; $\{5, 32, 39, 26, 12, 10\}$; $\{16, 20, 36, 27, 22, 37\}$;
$\{2, 7, 11, 18, 6, 9, 15, 33, 3, 8, 13, 35\}$;
$\{17, 23, 28, 38, 40, 34, 24, 19, 31, 30, 21, 29\}$.
Diese Bahnen haben die Längen 4, 6 (2×) und 12 (2×).

Die Z_1-Bahnen auf den Nebenklassen von X_1 sind
$\{1, 2, 4, 7\}$; $\{3, 6, 9, 13, 5, 8, 11, 16, 10, 12, 14, 15\}$.
Diese Bahnen haben die Längen 4 und 12.

Die Z_1-Bahnen auf den Nebenklassen von X_2 sind
$\{2, 8, 11, 13\}$; $\{1, 6, 7, 9, 3, 16, 12, 14, 15, 4, 10, 5\}$.
Diese Bahnen haben die Längen 4 und 12.

Die Z_1-Bahnen auf den Nebenklassen von Y_1 sind
$\{1, 2, 4, 7, 20, 66, 77, 61\}$; $\{13, 14, 17, 27, 21, 50, 71, 46, 19, 43, 64, 29\}$;
$\{18, 30, 26, 34, 60, 63, 44, 37, 68, 47, 80, 22\}$;
$\{3, 6, 9, 16, 5, 8, 11, 25, 10, 12, 23, 28, 24, 72, 69, 36, 31, 53, 74, 59, 45, 41, 55, 79\}$;
$\{15, 49, 62, 32, 67, 78, 56, 42, 57, 65, 58, 39, 73, 70, 75, 48, 54, 35, 76, 40, 38, 33, 52, 51\}$;
Diese Bahnen haben die Längen 8, 12 (2×) und 24 (2×).

Die Z_1-Bahnen auf den Nebenklassen von Z_1 sind
$\{1\}$; $\{4, 5, 6\}$; $\{3, 14, 30, 40, 16, 35\}$; $\{12, 34, 29, 15, 38, 39\}$;
$\{2, 7, 8, 21, 9, 10, 11, 13, 18, 22, 25, 24, 17, 26, 27, 36, 20, 31, 33, 32, 19, 23, 28, 37\}$;
Diese Bahnen haben die Längen 1, 3, 6 (2×) und 24.

Die Z_1-Bahnen auf den Nebenklassen von Z_2 sind
$\{1, 2, 3, 4\}$; $\{5, 9, 11, 12, 19, 32, 18, 15, 21, 28, 20, 27\}$;
$\{6, 16, 17, 23, 24, 40, 34, 35, 8, 29, 31, 14\}$;
$\{7, 22, 36, 25, 13, 10, 26, 38, 30, 37, 39, 33\}$.
Diese Bahnen haben die Längen 4 und 12 (3×).

Die Z_1-Bahnen auf den Nebenklassen von Z_3 sind
$\{1, 2, 3, 6\}$; $\{4, 8, 11, 14, 18, 35, 10, 30, 20, 38, 19, 26\}$;

$\{5, 16, 17, 23, 24, 36, 39, 40, 12, 29, 22, 31\}$;
$\{7, 9, 13, 15, 33, 25, 21, 37, 28, 32, 27, 34\}$.
Diese Bahnen haben die Längen 4 und 12 (3×).

Die Z_2-Bahnen auf den Nebenklassen von X_1 sind
$\{1, 6, 14, 16\}$; $\{2, 3, 15, 11, 7, 9, 12, 5, 4, 13, 10, 8\}$.
Diese Bahnen haben die Längen 4 und 12.

Die Z_2-Bahnen auf den Nebenklassen von X_2 sind
$\{1, 8, 3, 15\}$; $\{2, 6, 4, 16, 11, 9, 5, 14, 13, 7, 10, 12\}$.
Diese Bahnen haben die Längen 4 und 12.

Die Z_2-Bahnen auf den Nebenklassen von Y_1 sind
$\{1, 6, 23, 25, 20, 36, 41, 74\}$; $\{13, 49, 33, 34, 21, 48, 44, 42, 19, 47, 58, 76\}$;
$\{14, 15, 38, 26, 46, 73, 63, 67, 64, 22, 57, 54\}$;
$\{2, 3, 28, 11, 7, 9, 12, 5, 4, 16, 10, 8, 61, 24, 55, 53, 77, 72, 79, 31, 66, 69, 45, 59\}$;
$\{17, 32, 51, 30, 50, 75, 37, 56, 29, 80, 65, 35, 71, 70, 60, 78, 43, 68, 39, 40, 27, 62, 52, 18\}$.
Diese Bahnen haben die Längen 8, 12 (2×) und 24 (2×).

Die Z_2-Bahnen auf den Nebenklassen von Z_1 sind
$\{1, 4, 6, 5\}$; $\{2, 7, 9, 13, 18, 25, 17, 36, 20, 33, 19, 23\}$;
$\{3, 29, 14, 15, 30, 40, 39, 38, 16, 34, 12, 35\}$;
$\{8, 21, 10, 11, 24, 22, 27, 26, 31, 32, 37, 28\}$.
Diese Bahnen haben die Längen 4 und 12 (3×).

Die Z_2-Bahnen auf den Nebenklassen von Z_2 sind
$\{1\}$; $\{2, 4, 3\}$; $\{6, 23, 24, 34, 8, 29\}$; $\{14, 31, 17, 16, 40, 35\}$;
$\{5, 9, 10, 13, 11, 22, 7, 12, 19, 36, 32, 25, 18, 15, 30, 37, 21, 39, 33, 28, 20, 38, 27, 26\}$.
Diese Bahnen haben die Längen 1, 3, 6 (2×) und 24.

Die Z_2-Bahnen auf den Nebenklassen von Z_3 sind
$\{1, 3, 6, 2\}$; $\{4, 7, 11, 13, 18, 33, 10, 21, 20, 28, 19, 27\}$;
$\{5, 16, 23, 17, 24, 39, 36, 40, 12, 31, 22, 29\}$;
$\{8, 9, 14, 15, 35, 25, 30, 37, 38, 32, 26, 34\}$.
Diese Bahnen haben die Längen 4 und 12 (3×).

Die Z_3-Bahnen auf den Nebenklassen von X_1 sind

$\{1, 12, 11, 13\}$; $\{2, 10, 16, 9, 7, 14, 8, 3, 4, 15, 5, 6\}$.
Diese Bahnen haben die Längen 4 und 12.

Die Z_3-Bahnen auf den Nebenklassen von X_2 sind
$\{5, 8, 7, 16\}$; $\{1, 14, 4, 13, 3, 9, 2, 10, 15, 11, 6, 12\}$.
Diese Bahnen haben die Längen 4 und 12.

Die Z_3-Bahnen auf den Nebenklassen von Y_1 sind
$\{1, 12, 11, 16, 20, 55, 59, 72\}$; $\{13, 52, 26, 32, 21, 63, 56, 70, 19, 65, 40, 22\}$;
$\{14, 51, 34, 62, 46, 44, 78, 75, 64, 39, 35, 47\}$;
$\{2, 10, 25, 9, 7, 23, 8, 3, 4, 28, 5, 6, 61, 41, 31, 69, 77, 45, 53, 36, 66, 79, 74, 24\}$;
$\{15, 30, 33, 27, 67, 48, 71, 37, 57, 43, 80, 76, 73, 42, 60, 50, 54, 68, 29, 58, 38, 17, 49, 18\}$.
Diese Bahnen haben die Längen 8, 12 (2×) und 24 (2×).

Die Z_3-Bahnen auf den Nebenklassen von Z_1 sind
$\{1, 6, 5, 4\}$; $\{2, 8, 9, 10, 18, 24, 17, 27, 20, 31, 19, 37\}$;
$\{3, 14, 29, 15, 30, 38, 39, 40, 16, 34, 35, 12\}$;
$\{7, 21, 13, 11, 25, 22, 36, 26, 33, 32, 23, 28\}$.
Diese Bahnen haben die Längen 4 und 12 (3×).

Die Z_3-Bahnen auf den Nebenklassen von Z_2 sind
$\{1, 4, 2, 3\}$; $\{5, 13, 11, 7, 19, 36, 18, 30, 21, 39, 20, 26\}$;
$\{6, 23, 17, 16, 24, 40, 35, 34, 8, 31, 29, 14\}$;
$\{9, 10, 12, 22, 32, 25, 15, 37, 28, 33, 27, 38\}$.
Diese Bahnen haben die Längen 4 und 12 (3×).

Die Z_3-Bahnen auf den Nebenklassen von Z_3 sind
$\{1\}$; $\{2, 6, 3\}$; $\{5, 23, 24, 39, 12, 29\}$; $\{16, 17, 40, 36, 22, 31\}$;
$\{4, 9, 8, 7, 11, 14, 13, 15, 18, 33, 25, 35, 10, 30, 37, 21, 20, 32, 28, 38, 19, 27, 26, 34\}$.
Diese Bahnen haben die Längen 1, 3, 6 (2×) und 24.

3.3.5 Konstruktion der Designs

Die Kenntnis der Bahnlängen aus dem obigen Abschnitt eliminiert einige der Orbitalmatrizen. So lesen wir an der Operation der X_i auf den Nebenklassen der Z_j ab, dass $\gamma_{13} = 15$ nicht zu realisieren ist; dies schließt die

Orbitalmatrizen O_1 und O_3 aus. Ebenso können O_2, O_5 und O_7 verworfen werden, da $\gamma_{24} = 13$ durch die Bahnlängen der Operation der Y_i auf den Nebenklassen der Z_j nicht erreicht werden kann. Schließlich kann O_6 keine Anwendung finden, weil $\gamma_{42} = 28$ nicht als Summe von Bahnlängen, die bei der Operation der Z_i auf den Nebenklassen von Y_1 entstehen, dargestellt werden kann. Somit verbleiben O_4 und O_8 als mögliche Orbitalstrukturen. Der Übersichtlichkeit wegen seien diese hier noch einmal angegeben:

$$O_4 = \begin{pmatrix} 0 & 30 & 10 & 10 \\ 6 & 24 & 10 & 10 \\ 4 & 20 & 16 & 10 \\ 4 & 20 & 10 & 16 \end{pmatrix}, \quad O_8 = \begin{pmatrix} 10 & 20 & 10 & 10 \\ 4 & 26 & 10 & 10 \\ 4 & 20 & 16 & 10 \\ 4 & 20 & 10 & 16 \end{pmatrix}.$$

Wir sagen im Folgenden „die Punktstabilisatoren sind $[X_i,Y_1,Z_k,Z_l]$“, falls $G_{P_1} = X_i$, $G_{P_3} = Z_k$ und $G_{P_4} = Z_l$ für geeignete natürliche Zahlen i, k und l. Im Abschnitt über Stabilisatoren haben wir bereits gesehen, dass es genügt, $i \in \{1,2\}$ und $G_{P_2} = Y_1$ zu betrachten. Analog sagen wir „die Blockstabilisatoren sind $[[X_i,Y_j,Z_k,Z_l]]$“, falls $G_{x_1} = X_i$, $G_{x_2} = Y_j$, $G_{x_3} = Z_k$ und $G_{x_4} = Z_l$ für geeignete natürliche Zahlen i, j, k und l. Spielt einer der jeweils vier betrachteten Stabilisatoren keine Rolle, so machen wir das im Rahmen dieser Schreibweise durch „$*$“ kenntlich.

Wir betrachten noch einmal die Operation von Z_1, Z_2 und Z_3 auf den Nebenklassen von Z_1, Z_2 und Z_3. Da in beiden Orbitalmatrizen $\gamma_{34} = \gamma_{43} = 10$ gilt, können wir folgende Aussage treffen:

3.3.13 Lemma *Sind die Punktstabilisatoren $[*,*,Z_k,Z_l]$, so sind die Blockstabilisatoren $[[*,*,Z_l,Z_k]]$; $k,l \in \{1,2,3\}$.*

Wir untersuchen zunächst den Fall, dass $G_{P_3} = G_{P_4}$; die möglichen Punktstabilisatoren sind hier also $[X_1,Y_1,Z_k,Z_k]$ oder $[X_2,Y_1,Z_k,Z_k]$; $k \in \{1,2,3\}$. Nach obigem Lemma ist dann $G_{x_3} = Z_k$. Wir konstruieren die entsprechenden Möglichkeiten für $\langle x_3 \rangle$ und erzeugen die zugehörigen G-Orbits, jedoch ist die notwendige Bedingung

$$\langle x_3^g \rangle \cap \langle x_3^h \rangle = \lambda = 14$$

nicht für alle $g,h \in G$ erfüllt. Somit können wir das obige Lemma verbessern:

3.3.14 Lemma *Sind die Punktstabilisatoren [$*$,$*$,Z_k,Z_l], so sind die Blockstabilisatoren [[$*$,$*$,Z_l,Z_k]], und es gilt $k \neq l$; $k, l \in \{1, 2, 3\}$;*

Die Orbitalmatrizen O_4 und O_8 bleiben beide bei simultanem Vertauschen der jeweils letzten beiden Zeilen und Spalten invariant. Erhalten wir also für Punktstabilisatoren [$*$,$*$,Z_k,Z_l] Designs, so erhalten wir mit [$*$,$*$,Z_l,Z_k] isomorphe Designs.

Ferner: Sind die Punktstabilisatoren [X_1,Y_1,$*$,$*$] so können wir mit Hilfe des Elementes $t \in Aut\, G$, das sowohl X_1 als auch Y_1 invariant lässt, die Möglichkeiten für G_{P_3} und G_{P_4} weiter einschränken. Nach 3.3.5 operiert t als 3-Zyklus auf den G-Klassen von Z_1, Z_2 und Z_3; es genügt also, $G_{P_3} = Z_1$ und $G_{P_4} \in \{Z_1, Z_2\}$ zu betrachten. Es bleiben noch genau vier Möglichkeiten für die Punktstabilisatoren, nämlich

- [X_1,Y_1,Z_1,Z_2]
- [X_2,Y_1,Z_1,Z_2]
- [X_2,Y_1,Z_1,Z_3]
- [X_2,Y_1,Z_2,Z_3] .

Drei davon ergeben keine Designs, egal, welche Blockstabilisatoren verwendet werden. Nur [X_2,Y_1,Z_1,Z_2] liefert die gewünschten Strukturen, und zwar mit folgenden Blockstabilisatoren:

- [[X_1,Y_2,Z_2,Z_1]] genau ein Design $\mathcal{D}_9$
- [[X_2,Y_1,Z_2,Z_1]] genau ein Design $\mathcal{D}_{10}$
- [[X_3,Y_4,Z_2,Z_1]] genau ein Design $\mathcal{D}_{11}$
- [[X_4,Y_3,Z_2,Z_1]] genau ein Design $\mathcal{D}_{12}$.

$\mathcal{D}_9$ wird mit der Orbitalmatrix O_4 erhalten, die anderen Designs mit O_8.

Der äußere Automorphismus s^t von G lässt die G-Klassen von X_1, X_2, Y_1 und Y_2 invariant und vertauscht die G-Klassen von X_3 und X_4 sowie von Y_3 und Y_4. Wir sehen also, dass $\mathcal{D}_{11}$ und $\mathcal{D}_{12}$ isomorph sind.

Wir geben nun die erhaltenen Designs an, indem wir für die Blockrepräsentanten jeweils die mit ihnen inzidenten Punkte angeben; diese Punkte bezeichnen wir durch die Nummer ihrer zugeordneten Nebenklasse.

Design $\mathcal{D}_9$:

$$\begin{aligned}
\langle x_1 \rangle \cap P_1^G &= \{4,5,6,7,8,9,10,12,14,16\} \\
\langle x_1 \rangle \cap P_2^G &= \{1,3,5,10,13,14,19,20,21,22,24,26,31,34,44,45,46,47, \\
&\quad 63,64\} \\
\langle x_1 \rangle \cap P_3^G &= \{1,2,3,9,16,17,18,19,20,30\} \\
\langle x_1 \rangle \cap P_4^G &= \{1,5,6,8,11,18,19,20,21,24\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\langle x_2 \rangle \cap P_1^G &= \{1,2,5,12\} \\
\langle x_2 \rangle \cap P_2^G &= \{2,4,5,6,7,8,10,11,12,26,28,29,30,36,38,45,46,50,51, \\
&\quad 53,56,57,64,65,67,77\} \\
\langle x_2 \rangle \cap P_3^G &= \{3,4,7,9,18,27,28,32,35,39\} \\
\langle x_2 \rangle \cap P_4^G &= \{1,5,7,14,17,21,25,27,35,37\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\langle x_3 \rangle \cap P_1^G &= \{1,3,8,15\} \\
\langle x_3 \rangle \cap P_2^G &= \{1,6,14,15,20,22,23,25,26,36,38,41,46,54,57,63,64, \\
&\quad 67,73,74\} \\
\langle x_3 \rangle \cap P_3^G &= \{1,4,5,6,8,10,11,21,22,24,26,27,28,31,32,37\} \\
\langle x_3 \rangle \cap P_4^G &= \{1,2,3,4,6,8,23,24,29,34\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\langle x_4 \rangle \cap P_1^G &= \{2,8,11,13\} \\
\langle x_4 \rangle \cap P_2^G &= \{1,2,4,7,18,20,22,26,30,34,37,44,47,60,61,63,66,68, \\
&\quad 77,80\} \\
\langle x_4 \rangle \cap P_3^G &= \{1,3,4,5,6,14,16,30,35,40\} \\
\langle x_4 \rangle \cap P_4^G &= \{1,2,3,4,7,10,13,22,25,26,30,33,36,37,38,39\}
\end{aligned}$$

Design $\mathcal{D}_{10}$:

$$\langle x_1 \rangle \cap P_1^G = \{\ \}$$

$$\begin{aligned}
\langle x_1\rangle \cap P_2^G &= \{1,3,9,13,15,16,19,20,21,22,23,24,25,32,33,34,41,42,\\
&\quad 44,58,62,68,69,70,72,73,74,75,76,80\}\\
\langle x_1\rangle \cap P_3^G &= \{4,7,9,12,15,18,19,20,30,36\}\\
\langle x_1\rangle \cap P_4^G &= \{1,5,6,7,8,18,25,26,33,34\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\langle x_2\rangle \cap P_1^G &= \{1,2,3,11,13,15\}\\
\langle x_2\rangle \cap P_2^G &= \{17,29,30,32,33,36,37,38,40,41,48,50,52,54,56,61,65,\\
&\quad 66,70,73,74,76,77,80\}\\
\langle x_2\rangle \cap P_3^G &= \{1,2,9,15,18,26,28,32,34,39\}\\
\langle x_2\rangle \cap P_4^G &= \{1,5,11,14,17,19,33,37,38,40\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\langle x_3\rangle \cap P_1^G &= \{1,3,8,15\}\\
\langle x_3\rangle \cap P_2^G &= \{1,6,14,15,20,22,23,25,26,36,38,41,46,54,57,63,64,\\
&\quad 67,73,74\}\\
\langle x_3\rangle \cap P_3^G &= \{1,4,5,6,8,10,11,21,22,24,26,27,28,31,32,37\}\\
\langle x_3\rangle \cap P_3^G &= \{1,2,3,4,6,8,23,24,29,34\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\langle x_4\rangle \cap P_1^G &= \{2,8,11,13\}\\
\langle x_4\rangle \cap P_2^G &= \{1,2,4,7,18,20,22,26,30,34,37,44,47,60,61,63,66,68,\\
&\quad 77,80\}\\
\langle x_4\rangle \cap P_3^G &= \{1,3,4,5,6,14,16,30,35,40\}\\
\langle x_4\rangle \cap P_4^G &= \{1,2,3,4,7,10,13,22,25,26,30,33,36,37,38,39\}
\end{aligned}$$

Design $\mathcal{D}_{11}$:

$$\begin{aligned}
\langle x_1\rangle \cap P_1^G &= \{\ \}\\
\langle x_1\rangle \cap P_2^G &= \{1,2,5,6,7,13,14,18,19,20,21,27,28,29,35,36,37,38,39,\\
&\quad 43,45,46,47,48,49,50,53,61,66,67\}\\
\langle x_1\rangle \cap P_3^G &= \{1,2,3,13,16,17,22,23,32,40\}\\
\langle x_1\rangle \cap P_4^G &= \{3,7,13,17,25,26,30,31,33,34\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\langle x_2\rangle \cap P_1^G &= \{1,5,6,8,9,16\} \\
\langle x_2\rangle \cap P_2^G &= \{14,18,20,21,24,26,30,35,36,44,47,50,51,55,57,58,59, \\
&\quad 62,64,65,69,71,75,78 \\
\langle x_2\rangle \cap P_3^G &= \{3,4,7,13,20,22,27,35,37,38\} \\
\langle x_2\rangle \cap P_4^G &= \{3,6,11,13,15,19,29,33,38,40\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\langle x_3\rangle \cap P_1^G &= \{1,3,8,15\} \\
\langle x_3\rangle \cap P_2^G &= \{1,6,14,15,20,22,23,25,26,36,38,41,46,54,57,63,64,67, \\
&\quad 73,74\} \\
\langle x_3\rangle \cap P_3^G &= \{1,4,5,6,8,10,11,21,22,24,26,27,28,31,32,37\} \\
\langle x_3\rangle \cap P_4^G &= \{1,2,3,4,14,16,17,31,35,40\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\langle x_4\rangle \cap P_1^G &= \{2,8,11,13\} \\
\langle x_4\rangle \cap P_2^G &= \{1,2,4,7,18,20,22,26,30,34,37,44,47,60,61,63,66,68, \\
&\quad 77,80\} \\
\langle x_4\rangle \cap P_3^G &= \{1,3,4,5,6,14,16,30,35,40\} \\
\langle x_4\rangle \cap P_4^G &= \{1,2,3,4,5,9,11,12,15,18,19,20,21,27,28,32\}
\end{aligned}$$

Mit einem Programm von V. Tonchev [22] wurden die vollen Automorphismengruppen von $\mathcal{D}_9$, $\mathcal{D}_{10}$ und $\mathcal{D}_{11}$ berechnet. Es gilt

$$\begin{aligned}
|Aut\mathcal{D}_9| &= 44.352.000\,, \\
|Aut\mathcal{D}_{10}| &= 11.520\,, \\
|Aut\mathcal{D}_{11}| &= 960\,.
\end{aligned}$$

Mit GAP [20] konnte ferner berechnet werden, dass die Gruppe der Ordnung 44.352.000 einfach ist und transitiv auf den Punkten und Blöcken von $\mathcal{D}_9$ operiert; damit ist dieses Design isomorph zum Higman-Design $\mathcal{D}_{Higman}$.

Die Gruppe der Ordnung 11.520 muss nun isomorph zu den Gruppen derselben Ordnung aus dem vorherigen Abschnitt über die intransitive Erweiterung sein, denn die dort erhaltenen Designs erfüllen die Voraussetzungen dieses Abschnitts. Es ergibt sich ebenfalls sofort, dass $\mathcal{D}_1 \cong \mathcal{D}_4 \cong \mathcal{D}_6 \cong \mathcal{D}_7 \cong \mathcal{D}_{10}$. Das heißt: die vier Designs mit voller Automorphismengruppe der Ordnung 11.520 aus dem vorherigen Abschnitt sind alle zueinander und zu $\mathcal{D}_{10}$ isomorph. Die Gruppe $Aut\,\mathcal{D}_{11}$ schließlich ist G selbst, die transitive Erweiterung von E_{16} durch A_5.

Wir fassen die Ergebnisse zusammen:

3.3.15 Satz *Sei G ein semidirektes Produkt einer Gruppe $E \cong E_{16}$ mit einer Gruppe $A \cong A_5$. Ein Element $d \in A$ der Ordnung 3 zentralisiere in E eine Gruppe der Ordnung 4.*

Sei $\mathcal{D} = (\mathcal{P}, \mathcal{B}, I)$ ein symmetrisches (176,50,14) Design mit nachstehenden Eigenschaften:

(1) $G \leq Aut\,\mathcal{D}$

(2) Es gibt $P_1 \in \mathcal{P}$ und $x_1 \in \mathcal{B}$ mit $G_{P_1} \cong G_{x_1} \cong (\,E_4 \times Z_3\,) : Z_2$
(dabei sei $E_4 : Z_2 \cong D_8$ und $Z_3 : Z_2 \cong \Sigma_3$)

(3) Es gibt $P_2 \in \mathcal{P}$ und $x_2 \in \mathcal{B}$ mit $G_{P_2} \cong G_{x_2} \cong \Sigma_4$

(4) Es gibt $P_3 \in \mathcal{P}$ und $x_3 \in \mathcal{B}$ mit $G_{P_3} \cong G_{x_3} \cong D_{10}$.

Dann ist $\mathcal{D}$ entweder zum symmetrischen Higman-Design $\mathcal{D}_{Higman}$ oder zu $\mathcal{D}_1$ isomorph. $Aut\,\mathcal{D}_1$ ist eine nicht zerfallende Erweiterung einer elementarabelschen Gruppe der Ordnung 16 *durch die symmetrische Gruppe auf sechs Ziffern und hat die Ordnung* 11.520.

3.3.16 Satz *Sei G ein semidirektes Produkt einer Gruppe $E \cong E_{16}$ mit einer Gruppe $A \cong A_5$. Ein Element $d \in A$ der Ordnung 3 operiere fixpunktfrei auf $E - \{1\}$.*

Sei $\mathcal{D} = (\mathcal{P}, \mathcal{B}, I)$ ein symmetrisches (176,50,14) Design mit nachstehenden Eigenschaften:

(1) $G \leq Aut\,\mathcal{D}$

(2) Es gibt $P_1 \in \mathcal{P}$ und $x_1 \in \mathcal{B}$ mit $G_{P_1} \cong G_{x_1} \cong A_5$

(3) Es gibt $P_2 \in \mathcal{P}$ und $x_2 \in \mathcal{B}$ mit $G_{P_2} \cong G_{x_2} \cong A_4$,
dabei sei $G_{P_2} \cap E = G_{x_2} \cap E = \{1\}$

(4) Es gibt $P_3 \in \mathcal{P}$ und $x_3 \in \mathcal{B}$ mit $G_{P_3} \cong G_{x_3} \cong \Sigma_4$

(5) Es gibt $P_4 \in \mathcal{P} \setminus P_3^G$ und $x_4 \in \mathcal{B} \setminus x_3^G$ mit $G_{P_4} \cong G_{x_4} \cong \Sigma_4$.

Dann ist $\mathcal{D}$ zum symmetrischen Higman-Design $\mathcal{D}_{Higman}$ oder zu $\mathcal{D}_1$ oder zu $\mathcal{D}_{11}$ isomorph. Die Gruppe $Aut\,\mathcal{D}_1$ ist eine nicht zerfallende Erweiterung einer elementarabelschen Gruppe der Ordnung 16 durch die symmetrische Gruppe auf sechs Ziffern und hat die Ordnung 11.520. Die Gruppe $Aut\,\mathcal{D}_{11}$ ist isomorph zur transitiven Erweiterung von E_{16} durch A_5 und hat die Ordnung 960.

3.4 $E_8 : GL_3(2)$

Folgende Fragestellung wollen wir in diesem Abschnitt betrachten:

3.4.1 Problem *Sei G das semidirekte Produkt einer Gruppe $E \cong E_8$ mit einer Gruppe $L \cong GL_3(2)$. Sei $\mathcal{D} = (\mathcal{P}, \mathcal{B}, I)$ ein symmetrisches (176,50,14) Design mit nachstehenden Eigenschaften:*

(1) $G \leq Aut\,\mathcal{D}$

(2) Es gibt $P_1 \in \mathcal{P}$ und $x_1 \in \mathcal{B}$ mit $G_{P_1} \cong G_{x_1} \cong GL_3(2)$

(3) Es gibt $P_2 \in \mathcal{P}$ und $x_2 \in \mathcal{B}$ mit $G_{P_2} \cong G_{x_2} \cong \Sigma_4$,
dabei sei $G_{P_2} \cap E = G_{x_2} \cap E = \{1\}$

(4) Es gibt $P_3 \in \mathcal{P}$ und $x_3 \in \mathcal{B}$ mit $G_{P_3} \cong G_{x_3} \cong Z_2 \times \Sigma_3$.

Welche Möglichkeiten gibt es dann für den Isomorphietyp von $\mathcal{D}$?

Die Gruppe G hat die Ordnung $8 \cdot 168 = 1.344$. Die verlangten Stabilisatoren haben die Ordnungen 168, 24 und 12, also in G die Indizes 8, 56 und 112. Da $8 + 56 + 112 = 176$, operiert G auf den Punkten und Blöcken jedes Designs, das die Bedingungen erfüllt, in jeweils drei Bahnen.

Unser Vorgehen ist völlig analog zu den vorherigen Abschnitten.

3.4.1 Definierende Relationen

Sei $E = \langle x, y, z\rangle \cong E_8$. Bezüglich dieser Basis beschreiben wir gewisse Elemente a, b, c, d, k aus $GL_3(2)$ in Matrizenform:

$$a := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad b := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$c := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad d := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad k := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Wegen $o(a) = 2,\ o(c) = 3$ und $o(kc) = 7$ ist $L := \langle a, b, c, d, k\rangle$ isomorph zu einer $\{2, 3, 7\}$-Untergruppe von $GL_3(2)$, also ist $L \cong GL_3(2)$. Wir bilden das semidirekte Produkt $G = \langle x, y, z\rangle : \langle a, b, c, d, k\rangle \cong E_8 : GL_3(2)$.

Es gelten $1 = a^2 = b^2 = c^3 = d^2 = k^3 = (ab)^2 = (ad)^2$ sowie $a^c = ab,\ b^c = a$, $a^k = d,\ \ d^k = ad,\ \ b^d = ab,\ \ c^d = c^{-1},\ \ k^b = k^{-1}$ sowie $(kc)^7 = (kc^{-1})^4 = 1$.

Zusammen mit den Relationen zwischen den Erzeugern von E und den durch die Matrizen beschriebenen Relationen sind dies definierende Relationen für G, wie eine Nebenklassenabzählung mit [9] zeigt.

Wir erhalten folgende Konjugiertentafel für G:

g	g^2	$o(g)$	$\mathbf{C}_G(g)$	$\mid \mathbf{C}_G(g) \mid$	$\mid ccl_G(g) \mid$
1		1	G	$2^6 \cdot 3 \cdot 7$	1
x		2	$E : \langle a, b, c, d\rangle$	$2^6 \cdot 3$	7
a		2	$\langle x, y\rangle : \langle a, b, d\rangle$	2^5	42
ay		2	$\langle x, y\rangle : \langle a, bz, d\rangle$	2^5	42
az	x	4	$\langle az, y, b\rangle$	2^4	84
bd	a	4	$\langle x\rangle \times \langle bd\rangle$	2^3	168
bdz	ay	4	$\langle x\rangle \times \langle bdz\rangle$	2^3	168
c		3	$\langle x\rangle \times \langle c\rangle$	$2 \cdot 3$	224
cx		6	$\langle x\rangle \times \langle c\rangle$	$2 \cdot 3$	224
kc		7	$\langle kc\rangle$	7	192
$(kc)^{-1}$		7	$\langle kc\rangle$	7	192
					1.344

3.4.2 Stabilisatoren

Wir suchen nun nach den G-Konjugiertenklassen von Untergruppen der verlangten Isomorphietypen $GL_3(2)$, Σ_4 und $Z_2 \times \Sigma_3$.

3.4.2 Lemma *In G gibt es genau zwei Konjugiertenklassen von zu $GL_3(2)$ isomorphen Untergruppen. Repräsentanten dieser Klassen sind*

$$\begin{aligned} X_1 &= \langle (kc)^b, c, d\rangle \ , \\ X_2 &= \langle (kc)^b, c, dx\rangle \ . \end{aligned}$$

Beweis. Offenbar ist X_1 eine $\{2, 3, 7\}$-Untergruppe von L, dies zeigt $X_1 = L \cong GL_3(2)$. - Eine Abzählung der Nebenklassen von X_2 in G ergibt $|X_2| = 168$. Also gilt $X_2 \cong GL_3(2)$ oder $X_2 \cong E_8 : F_{21}$. Im letzteren Fall wäre $dx \in O_2(X_2) = O_2(G)$, dies ist sicher falsch. Wir haben $X_2 \cong GL_3(2)$ gezeigt.

Sei M eine beliebige zu $GL_3(2)$ isomorphe Untergruppe von G. Da $F := \langle (kc)^b, c\rangle \cong F_{21}$ der Normalisator einer Sylow-7-Untergruppe in G ist, gibt es $g \in G$ mit $F < M^g$. Da F in M^g maximal liegt, ist M^g vollständig bestimmt, wenn wir $\mathbf{N}_{M^g}(\langle c\rangle) \cong \Sigma_3$ kennen. Nun ist $\mathbf{N}_G(\langle c\rangle) = \langle x\rangle \times \langle c, d\rangle \cong$

$Z_2 \times \Sigma_3$, darin finden wir - bis auf Konjugiertheit in dieser Gruppe - genau die Involutionen d und dx, die c invertieren. Also gibt es höchstens zwei Konjugiertenklassen von zu $GL_3(2)$ isomorphen Untergruppen in G, und X_1 bzw. X_2 sind Vertreter dafür.

Falls X_1 und X_2 in G konjugiert wären, so wären es auch d und dx im Normalisator von F, was nicht der Fall ist. Die Behauptung folgt. $\Box$

3.4.3 Lemma *In G gibt es genau acht Konjugiertenklassen von zu Σ_4 isomorphen Untergruppen, die mit E einen Schnitt der Ordnung 1 haben. Repräsentanten dieser Klassen sind*

$$\begin{aligned}
Y_1 &= \langle a,b,c,d\rangle\ , \\
Y_2 &= \langle a,b,c,dx\rangle\ , \\
Y_3 &= \langle ay,bz,cy,dy\rangle\ , \\
Y_4 &= \langle ay,bz,cy,dxy\rangle\ , \\
Y_5 &= \langle a,d,k,b\rangle\ , \\
Y_6 &= \langle ax,dy,k,b\rangle\ , \\
Y_7 &= \langle ay,dxy,k,bz\rangle\ , \\
Y_8 &= \langle axy,dx,k,bz\rangle\ .
\end{aligned}$$

Beweis. Ist $Y \cong \Sigma_4$ eine Untergruppe von G, die E trivial schneidet, so ist YE als Untergruppe von G/E ebenfalls zu Σ_4 isomorph. In $G/E \cong GL_3(2)$ gibt es genau zwei Konjugiertenklassen von zu Σ_4 isomorphen Untergruppen; diese entsprechen den Punkt- und Geradenstabilisatoren bei der Operation auf $PG(2,2)$. Wir finden Vertreter dieser Klassen hier gegeben durch $\langle a,b,c,d\rangle\, E$ und $\langle a,d,k,b\rangle\, E$.

Betrachten wir zunächst diejenigen Untergruppen $Y \cong \Sigma_4$, die wir aus $\langle a,b,c,d\rangle\, E$ erhalten. Ohne Einschränkung können wir $O_2(Y) = \langle ae_a, be_b\rangle$ mit $e_a, e_b \in E$ annehmen. Man erhält genau acht Kandidaten für Paare $(e_a, e_b) \in E^2$ mit $\langle ae_a, be_b\rangle \cong E_4$. Konjugation mit Elementen aus $\langle y,z\rangle$ fusioniert je vier dieser Gruppen, es bleiben $\langle a,b\rangle$ und $\langle ay,bz\rangle$ als Vertreter übrig. Unter der Annahme $O_2(Y) = \langle a,b\rangle$ können wir $\langle a,b,c\rangle \le Y$ verlangen, denn $\langle c\rangle$ ist Sylow-3-Untergruppe von $\mathbf{N}_G(\langle a,b\rangle)$. Ferner ist $\mathbf{N}_G(\langle c\rangle) = \langle x\rangle \times \langle c,d\rangle \cong Z_2 \times \Sigma_3$. Dies liefert - bis auf Konjugation - genau die Gruppen Y_1 und Y_2. Genauso erhält man mit der Annahme $O_2(Y) = \langle ay,bz\rangle$ die Gruppen Y_3 und Y_4.

Sei nun $Y \cong \Sigma_4$ eine Untergruppe von G mit $YE = \langle a,d,k,b\rangle\, E$. Ohne Einschränkung sei $\langle k\rangle$ eine Sylow-3-Untergruppe von Y und $O_2(Y)E = \langle a,d\rangle E$. In $\langle a,d\rangle E$ finden wir genau die folgenden Vierergruppen, die von $\langle k\rangle$ normalisiert werden und E trivial schneiden: $\langle a,d\rangle$, $\langle ax,dy\rangle$, $\langle ay,dxy\rangle$ und $\langle axy,dx\rangle$. Zusammen mit $\mathbf{N}_G(\langle k\rangle) = \langle z\rangle \times \langle k,b\rangle$ folgt der Rest der Behauptung. □

3.4.4 Lemma *In G gibt es genau eine Konjugiertenklasse von zu $Z_2 \times \Sigma_3$ isomorphen Untergruppen. Ein Repräsentant dieser Klasse ist*

$$Z_1 = \langle x,c,d\rangle\ .$$

Beweis. Dies folgt daraus, dass Sylow-3-Normalisatoren in G isomorph zu $Z_2 \times \Sigma_3$ sind; die angegebene Untergruppe von G ist offenbar von diesem Isomorphietyp. □

3.4.5 Lemma *Die Gruppe $G \cong E_8 : GL_3(2)$ besitzt einen äußeren Automorphismus t der Ordnung 2, der die beiden Klassen von zu $GL_3(2)$ isomorphen Untergruppen von G vertauscht.*

Beweis. Wir definieren eine Gruppe F durch

$$F := \langle x,y,z,a,b,c,d,k,t\rangle\,,$$

wobei zwischen x, y, z, a, b, c, d und k die in G geltenden Relationen erfüllt seien. Ferner gelte $t^2 = 1 = [x,t] = [y,t] = [z,t] = [(kc)^b,t] = [c,t]$ sowie $d^t = dx$.

Da $G = \langle x,y,z,(kc)^b,c,d\rangle$, folgt sofort, dass G normal in F liegt; ferner ist $F/G \cong \langle t\rangle \cong Z_2$. Ebenfalls folgt unmittelbar aus den Relationen, dass $X_1^t = X_2$ gilt. Eine Nebenklassenabzählung von F liefert $|F| = 2.688 = 2 \cdot |G|$. Die Behauptung folgt. □

3.4.3 Orbitalstrukturen

Die Indizes der verlangten Stabilisatoren in G liefern uns bereits die Längen der Punkt- bzw. Blockbahnen; die Längen sind $\Omega_1 = \omega_1 = 8$, $\Omega_2 = \omega_2 = 56$ und $\Omega_3 = \omega_3 = 112$. Aus 2.3.4 und 2.3.8(a) erhalten wir:

3.4.6 Lemma *Operiert eine Gruppe G^* auf einem symmetrischen (176,50,14) Design derart, dass sowohl die Punkte als auch die Blöcke in jeweils drei Bahnen der Längen $\Omega_1 = \omega_1 = 8$, $\Omega_2 = \omega_2 = 56$ und $\Omega_3 = \omega_3 = 112$ zerfallen, so gibt es genau zwei Möglichkeiten für die dazugehörige Blockorbitalstruktur $(\gamma_{ij})_{1\leq i,j\leq 3}$, nämlich*

$$\begin{pmatrix} 8 & 14 & 28 \\ 2 & 20 & 28 \\ 2 & 14 & 34 \end{pmatrix} \quad \textit{und} \quad \begin{pmatrix} 8 & 14 & 28 \\ 2 & 12 & 36 \\ 2 & 18 & 30 \end{pmatrix} \quad .$$

Beweis. Aus 2.3.4 entnehmen wir $\gamma_{11}+\gamma_{12}+\gamma_{13} = 50$; Satz 2.3.8 (a) liefert mit $i = j = 1$:

$$112\,\gamma_{11}^2 \quad + \quad 16\,\gamma_{12}^2 \quad + \quad 8\,\gamma_{13}^2 \quad = \quad 18.144\ ,$$

beide Gleichungen können simultan nur mit $\gamma_{11} = 8$, $\gamma_{12} = 14$ und $\gamma_{13} = 28$ erfüllt werden.

Wir bestimmen nun die möglichen ersten Spalten einer Orbitalmatrix. Aus 2.3.4 verwenden wir $\Gamma_{11} + \Gamma_{21} + \Gamma_{31} = 50$; mit 2.3.5 wird dies zu

$$\gamma_{11} \quad + \quad 7\,\gamma_{21} \quad + \quad 14\,\gamma_{31} \quad = \quad 50\ .$$

Satz 2.3.8 (b) liefert für $r = s = 1$:

$$\gamma_{11}^2 \quad + \quad 7\,\gamma_{21}^2 \quad + \quad 14\,\gamma_{31}^2 \quad = \quad 148\ ,$$

die beiden letzten Gleichungen können simultan nur mit $\gamma_{11} = 8$, $\gamma_{21} = 2$ und $\gamma_{31} = 2$ erfüllt werden.

Analog erhält man nun $(\,2 \quad 12 \quad 36\,)$ und $(\,2 \quad 20 \quad 28\,)$ als mögliche zweite Zeilen, denn $\gamma_{21} = 2$ ist schon bekannt. Die jeweils dritte Zeile ergibt sich jeweils eindeutig aus 2.3.4 zusammen mit 2.3.5. $\square$

3.4.4 Die Operation von G

Im Folgenden seien $\mathcal{D} = (\mathcal{P}, \mathcal{B}, I)$, P_1, P_2, P_3, x_1, x_2 und x_3 wie in der Problemstellung 3.4.1; die Gruppe G sei eine Untergruppe der vollen Automorphismengruppe von $\mathcal{D}$. Die Gruppen X_1, X_2, $Y_1, \ldots, Y_8$ und Z_1 seien wie im Abschnitt 3.4.2.

Wie im Abschnitt über die transitive Erweiterung von E_{16} durch A_5 ist hier nicht bis auf Konjugiertheit klar, welche Untergruppen von G als Stabilisatoren der Punkt- und Blockrepräsentanten auftreten. Aus dem Abschnitt 3.4.2 entnehmen wir vielmehr, dass es bis auf Konjugiertheit für die Stabilisatoren von P_1 und x_1 jeweils genau zwei Möglichkeiten gibt und für die Stabilisatoren von P_2 und x_2 jeweils genau acht. Es gibt also bis auf Konjugiertheit $2 \cdot 2 \cdot 8 \cdot 8 = 256$ Möglichkeiten für die Operation von G auf $\mathcal{D}$; ferner ist bei jeder dieser Möglichkeiten jede der beiden Orbitalstrukturen zu verwenden.

Die Kenntnis des Automorphismus, der die beiden G-Klassen von zu $GL(3,2)$ isomorphen Untergruppen vertauscht, verringert diese Zahl. Analog zu unserem Vorgehen bei der transitiven Erweiterung von E_{16} durch A_5 sind wir frei, $G_{x_1} = X_1$ zu wählen. Designs mit $G_{x_1} = X_2$ sind notwendigerweise zu den anderen isomorph.

Wieder stellen wir mit Hilfe von [9] die Gruppe G als Permutationsgruppe auf den Nebenklassen von allen Kandidaten für Stabilisatoren dar. Mit 2.3.9 wissen wir dann schon, wie G auf den Punkten und Blöcken der Designs operiert.

Die Operation der Erzeuger von G auf den Nebenklassen von X_1:

x → (1 2)(3 5)(4 6)(7 8)

y → (1 3)(2 5)(4 7)(6 8)

z → (1 4)(2 6)(3 7)(5 8)

a → (4 6)(7 8)

b → (3 5)(7 8)

c → (3 7 4)(5 8 6)

d → (4 7)(6 8)

k → (2 3 5)(6 7 8)

Die Operation der Erzeuger von G auf den Nebenklassen von X_2:

x → (1 3)(2 5)(4 6)(7 8)

y → (1 4)(2 8)(3 6)(5 7)

z $\rightarrow$ (1 5)(2 3)(4 7)(6 8)

a $\rightarrow$ (1 6)(2 8)(3 4)(5 7)

b $\rightarrow$ (1 2)(3 5)(4 7)(6 8)

c $\rightarrow$ (2 6 8)(4 7 5)

d $\rightarrow$ (1 3)(2 7)(4 6)(5 8)

k $\rightarrow$ (1 3 6)(2 8 5)

Die Operation der Erzeuger von G auf den Nebenklassen von Y_1:

x $\rightarrow$ (1 2)(3 5)(4 6)(7 17)(8 30)(9 10)(11 19)(12 27)(13 39)(14 38)(15 46)(16 55)(18 28)(20 29)(21 31)(22 35)(23 49)(24 25)(26 53)(32 44)(33 45)(34 52)(36 51)(37 54)(40 41)(42 47)(43 56)(48 50)

y $\rightarrow$ (1 3)(2 5)(4 7)(6 17)(8 18)(9 11)(10 19)(12 29)(13 40)(14 33)(15 52)(16 54)(20 27)(21 32)(22 50)(23 36)(24 43)(25 56)(26 47)(28 30)(31 44)(34 46)(35 48)(37 55)(38 45)(39 41)(42 53)(49 51)

z $\rightarrow$ (1 4)(2 6)(3 7)(5 17)(8 43)(9 12)(10 27)(11 29)(13 21)(14 50)(15 51)(16 53)(18 24)(19 20)(22 33)(23 34)(25 28)(26 55)(30 56)(31 39)(32 40)(35 45)(36 46)(37 47)(38 48)(41 44)(42 54)(49 52)

a $\rightarrow$ (4 6)(7 17)(12 27)(13 16)(14 15)(20 29)(21 26)(22 23)(24 25)(31 53)(32 47)(33 52)(34 45)(35 49)(36 50)(37 41)(38 46)(39 55)(40 54)(42 44)(43 56)(48 51)

b $\rightarrow$ (3 5)(7 17)(8 9)(10 30)(11 28)(12 43)(14 15)(18 19)(20 24)(22 23)(25 29)(27 56)(32 44)(33 34)(35 49)(36 48)(37 54)(38 46)(40 41)(42 47)(45 52)(50 51)

c $\rightarrow$ (3 7 4)(5 17 6)(8 14 13)(9 15 16)(10 46 55)(11 49 53)(12 52 42)(18 22 21)(19 23 26)(20 36 37)(24 50 40)(25 48 41)(27 34 47)(28 35 31)(29 51 54)(30 38 39)(32 43 33)(44 56 45)

d $\rightarrow$ (4 7)(6 17)(12 29)(13 14)(15 16)(20 27)(21 22)(23 26)(24 43)(25 56)(31 35)(32 50)(33 40)(34 37)(36 47)(38 39)(41 45)(42 51)(44 48)(46 55)(49 53)(52 54)

k → (1 8 9)(2 18 19)(3 28 10)(4 43 12)(5 30 11)(6 24 20)
(7 25 27)(14 15 16)(17 56 29)(22 23 26)(31 32 44)(33 34 55)
(35 36 42)(37 38 52)(39 40 41)(45 46 54)(47 48 49)(50 51 53)

Die Operation der Erzeuger von G auf den Nebenklassen von Y_2:

x → (1 2)(3 5)(4 6)(7 22)(8 31)(9 10)(11 13)(12 30)(14 49)
(15 52)(16 39)(17 47)(18 36)(19 32)(20 29)(21 44)(23 42)
(24 27)(25 48)(26 28)(33 35)(34 54)(37 45)(38 56)(40 53)
(41 46)(43 51)(50 55)

y → (1 3)(2 5)(4 7)(6 22)(8 20)(9 11)(10 13)(12 42)(14 50)
(15 24)(16 28)(17 56)(18 51)(19 33)(21 37)(23 30)(25 46)
(26 39)(27 52)(29 31)(32 35)(34 40)(36 43)(38 47)(41 48)
(44 45)(49 55)(53 54)

z → (1 4)(2 6)(3 7)(5 22)(8 40)(9 12)(10 30)(11 42)(13 23)
(14 19)(15 51)(16 45)(17 48)(18 24)(20 34)(21 26)(25 47)
(27 36)(28 44)(29 54)(31 53)(32 49)(33 50)(35 55)(37 39)
(38 46)(41 56)(43 52)

a → (4 6)(7 22)(8 20)(9 13)(10 11)(12 42)(14 25)(15 16)
(17 19)(18 21)(23 30)(24 28)(26 27)(29 31)(32 47)(33 56)
(34 53)(35 38)(36 44)(37 51)(39 52)(40 54)(41 55)(43 45)
(46 50)(48 49)

b → (3 5)(7 22)(8 9)(10 31)(11 29)(12 40)(13 20)(14 19)
(15 21)(16 18)(17 25)(23 34)(24 45)(26 51)(27 37)(28 43)
(30 53)(32 49)(33 55)(35 50)(36 39)(38 46)(41 56)(42 54)
(44 52)(47 48)

c → (3 7 4)(5 22 6)(8 15 14)(9 16 17)(10 39 47)(11 44 48)
(12 28 41)(13 21 25)(18 19 20)(23 37 38)(24 33 40)(26 46 30)
(27 35 53)(29 36 32)(31 52 49)(34 51 50)(42 45 56)(43 55 54)

d → (1 2)(3 5)(4 22)(6 7)(9 13)(10 11)(12 30)(14 15)(16 25)
(17 21)(18 19)(23 42)(24 50)(26 41)(27 55)(28 46)(32 36)
(33 51)(34 40)(35 43)(37 56)(38 45)(39 48)(44 47)(49 52)
(53 54)

k → (1 8 9)(2 20 13)(3 29 10)(4 40 12)(5 31 11)(6 34 23)

(7 54 30)(15 16 25)(17 18 21)(22 53 42)(24 26 48)(27 39 46) (28 41 52)(32 33 35)(36 37 38)(43 44 56)(45 47 51)(49 50 55)

s $\rightarrow$ (1 15 17 19 20 21 9)(2 18 25 14 8 16 13)(3 36 38 32 40 28 12) (4 24 46 35 29 39 30)(5 52 41 49 34 37 23)(6 51 56 55 31 44 42) (7 43 48 33 53 45 10)(11 22 27 47 50 54 26)

Die Operation der Erzeuger von G auf den Nebenklassen von Y_3:

x $\rightarrow$ (1 4)(2 5)(3 6)(7 11)(8 16)(9 49)(10 15)(12 37)(13 36) (14 17)(18 26)(19 50)(20 52)(21 35)(22 34)(23 30)(24 25) (27 51)(28 53)(29 39)(31 40)(32 47)(33 48)(38 46)(41 56) (42 55)(43 54)(44 45)

y $\rightarrow$ (1 2)(3 7)(4 5)(6 11)(8 12)(9 36)(10 14)(13 49)(15 17) (16 37)(18 38)(19 44)(20 23)(21 47)(22 48)(24 39)(25 29) (26 46)(27 41)(28 42)(30 52)(31 54)(32 35)(33 34)(40 43) (45 50)(51 56)(53 55)

z $\rightarrow$ (1 3)(2 7)(4 6)(5 11)(8 10)(9 18)(12 14)(13 46)(15 16) (17 37)(19 39)(20 43)(21 51)(22 55)(23 40)(24 44)(25 45) (26 49)(27 35)(28 33)(29 50)(30 31)(32 41)(34 42)(36 38) (47 56)(48 53)(52 54)

a $\rightarrow$ (1 2)(3 11)(4 5)(6 7)(10 15)(14 17)(18 26)(19 28)(20 32) (21 30)(22 24)(23 35)(25 34)(27 31)(29 33)(38 46)(39 48) (40 51)(41 54)(42 44)(43 56)(45 55)(47 52)(50 53)

b $\rightarrow$ (1 3)(2 11)(4 6)(5 7)(8 9)(10 18)(12 13)(14 46)(15 26) (16 49)(17 38)(20 32)(21 23)(22 34)(24 25)(27 31)(30 35) (36 37)(40 51)(41 43)(42 55)(44 45)(47 52)(54 56)

c $\rightarrow$ (1 2 3)(4 5 6)(8 32 28)(9 20 19)(10 35 34)(12 27 33) (13 31 29)(14 41 42)(15 21 22)(16 47 53)(17 56 55) (18 23 24)(25 26 30)(36 40 39)(37 51 48)(38 43 44) (45 46 54)(49 52 50)

d $\rightarrow$ (1 2)(4 5)(8 12)(9 13)(16 37)(18 26)(19 31)(20 29) (21 22)(23 25)(24 30)(27 28)(32 33)(34 35)(36 49)(38 46) (39 52)(40 50)(41 42)(43 45)(44 54)(47 48)(51 53)(55 56)

k → (1 9 10)(2 13 15)(3 18 8)(4 36 17)(5 49 14)(6 38 37)
(7 46 16)(11 26 12)(20 21 34)(22 23 32)(24 25 29)(27 28 31)
(30 35 33)(40 41 55)(42 43 51)(44 45 50)(47 48 52)(53 54 56)

s → (1 20 22 24 26 27 8)(2 31 33 25 13 21 10)(3 23 28 29 18 32 15)
(4 40 42 44 46 47 37)(5 52 53 45 49 41 17)(6 43 48 50 38 51 14)
(7 54 55 39 36 56 16)(9 35 12 11 30 34 19)

Die Operation der Erzeuger von G auf den Nebenklassen von Y_4:

x → (1 5)(2 4)(3 6)(7 11)(8 10)(9 40)(12 17)(13 52)(14 43)
(15 53)(16 19)(18 21)(20 22)(23 39)(24 46)(25 45)(26 42)
(27 38)(28 29)(30 47)(31 34)(32 50)(33 44)(35 49)(36 48)
(37 55)(41 56)(51 54)

y → (1 2)(3 7)(4 5)(6 11)(8 19)(9 52)(10 16)(12 21)(13 40)
(14 53)(15 43)(17 18)(20 30)(22 47)(23 28)(24 33)(25 31)
(26 55)(27 49)(29 39)(32 54)(34 45)(35 38)(36 41)(37 42)
(44 46)(48 56)(50 51)

z → (1 3)(2 7)(4 11)(5 6)(8 17)(9 22)(10 12)(13 30)(14 28)
(15 39)(16 21)(18 19)(20 40)(23 53)(24 27)(25 48)(26 51)
(29 43)(31 56)(32 37)(33 49)(34 41)(35 44)(36 45)(38 46)
(42 54)(47 52)(50 55)

a → (1 2)(3 11)(4 5)(6 7)(8 19)(9 52)(10 16)(12 18)(13 40)
(14 54)(15 50)(17 21)(20 47)(22 30)(23 55)(24 34)(25 44)
(26 28)(27 56)(29 42)(31 46)(32 53)(33 45)(35 36)(37 39)
(38 41)(43 51)(48 49)

b → (1 3)(2 11)(4 7)(5 6)(8 20)(9 12)(10 22)(13 21)(14 29)
(15 39)(16 30)(17 40)(18 52)(19 47)(23 53)(24 48)(25 27)
(26 51)(28 43)(31 35)(32 55)(33 41)(34 49)(36 46)(37 50)
(38 45)(42 54)(44 56)

c → (1 2 3)(4 6 5)(8 25 26)(9 24 23)(10 45 42)(12 34 32)
(13 35 15)(14 22 33)(16 41 54)(17 31 50)(18 48 55)
(19 56 51)(20 44 43)(21 36 37)(27 28 47)(29 30 38)
(39 40 46)(49 53 52)

d → (1 4)(2 5)(3 6)(7 11)(8 16)(9 13)(10 19)(12 17)(14 44)
(15 24)(18 21)(20 22)(23 35)(25 54)(26 41)(27 29)(28 38)

(30 47)(31 32)(33 43)(34 50)(36 55)(37 48)(39 49)(40 52)
(42 56)(45 51)(46 53)

k $\rightarrow$ (1 9 10)(2 13 8)(3 22 12)(4 40 16)(5 52 19)(6 47 18)
(7 30 17)(11 20 21)(14 43 15)(24 25 51)(26 27 48)(28 29 39)
(31 32 46)(33 34 54)(35 36 55)(37 38 56)(41 42 49)(44 45 50)

s $\rightarrow$ (1 24 26 28 30 31 12)(2 35 37 29 40 41 10)(3 33 32 39 47 48 8)
(4 46 50 43 13 25 19)(5 49 54 14 20 36 18)(6 27 55 15 22 34 16)
(7 38 51 23 9 45 17)(11 44 42 53 52 56 21)

Die Operation der Erzeuger von G auf den Nebenklassen von Y_5:

x $\rightarrow$ (1 2)(3 5)(4 6)(7 17)(8 18)(9 10)(11 19)(12 20)(13 47)
(14 42)(15 43)(16 54)(21 55)(22 41)(23 36)(24 56)(25 34)
(26 30)(27 49)(28 31)(29 48)(32 39)(33 51)(35 50)(37 45)
(38 53)(40 46)(44 52)

y $\rightarrow$ (1 3)(2 5)(4 7)(6 17)(8 38)(9 11)(10 19)(12 32)(13 28)(14 48)
(15 56)(16 52)(18 53)(20 39)(21 22)(23 51)(24 43)(25 40)
(26 35)(27 45)(29 42)(30 50)(31 47)(33 36)(34 46)(37 49)
(41 55)(44 54)

z $\rightarrow$ (1 4)(2 6)(3 7)(5 17)(8 40)(9 12)(10 20)(11 32)(13 21)
(14 33)(15 49)(16 50)(18 46)(19 39)(22 28)(23 29)(24 45)
(25 38)(26 44)(27 43)(30 52)(31 41)(34 53)(35 54)(36 48)
(37 56)(42 51)(47 55)

a $\rightarrow$ (4 6)(7 17)(12 20)(13 16)(14 15)(21 35)(22 26)(23 37)
(24 29)(25 34)(27 33)(28 52)(30 41)(31 44)(32 39)(36 45)
(40 46)(42 43)(47 54)(48 56)(49 51)(50 55)

b $\rightarrow$ (3 5)(7 17)(11 19)(13 14)(15 16)(21 33)(22 23)(24 52)
(25 34)(26 37)(27 35)(28 29)(30 45)(31 48)(32 39)(36 41)
(38 53)(42 47)(43 54)(44 56)(49 50)(51 55)

c $\rightarrow$ (1 8 9)(2 18 10)(3 25 12)(4 38 32)(5 34 20)(6 53 39)
(7 40 11)(14 16 15)(17 46 19)(21 28 22)(23 35 24)(26 27 29)
(30 49 48)(31 41 55)(33 52 37)(36 50 56)(42 54 43)(44 45 51)

d $\rightarrow$ (4 7)(6 17)(8 9)(10 18)(11 38)(12 25)(14 15)(19 53)
(20 34)(21 22)(23 27)(24 29)(26 35)(30 50)(32 40)(33 37)
(36 49)(39 46)(41 55)(42 43)(45 51)(48 56)

k $\rightarrow$ (2 3 5)(6 7 17)(8 16 15)(9 13 14)(10 28 29)(11 31 42) (12 21 33)(18 52 24)(19 47 48)(20 22 23)(25 26 27)(30 45 46) (32 41 51)(34 35 37)(36 39 55)(38 44 43)(40 50 49)(53 54 56)

s $\rightarrow$ (1 8 15 9 13 16 14)(2 25 27 12 28 26 29)(3 34 24 10 22 35 33) (4 38 45 19 47 30 51)(5 18 37 20 21 52 23)(6 40 56 39 31 54 36) (7 46 49 11 41 44 42)(17 53 43 32 55 50 48)

Die Operation der Erzeuger von G auf den Nebenklassen von Y_6:

x $\rightarrow$ (1 2)(3 5)(4 6)(7 26)(8 27)(9 10)(11 28)(12 21)(13 20) (14 45)(15 51)(16 39)(17 40)(18 55)(19 42)(22 38)(23 52) (24 49)(25 56)(29 44)(30 46)(31 47)(32 54)(33 41)(34 37) (35 50)(36 43)(48 53)

y $\rightarrow$ (1 3)(2 5)(4 7)(6 26)(8 36)(9 11)(10 28)(12 34)(13 48) (14 29)(15 22)(16 52)(17 47)(18 33)(19 50)(20 53)(21 37) (23 39)(24 32)(25 46)(27 43)(30 56)(31 40)(35 42)(38 51) (41 55)(44 45)(49 54)

z $\rightarrow$ (1 4)(2 6)(3 7)(5 26)(8 48)(9 12)(10 21)(11 34)(13 36) (14 15)(16 25)(17 50)(18 49)(19 47)(20 43)(22 29)(23 30) (24 55)(27 53)(28 37)(31 42)(32 41)(33 54)(35 40)(38 44) (39 56)(45 51)(46 52)

a $\rightarrow$ (1 2)(3 5)(9 10)(11 28)(13 20)(14 24)(15 18)(16 17) (19 30)(22 33)(23 31)(25 35)(29 32)(38 41)(39 40)(42 46) (44 54)(45 49)(47 52)(48 53)(50 56)(51 55)

b $\rightarrow$ (3 5)(7 26)(8 27)(9 10)(12 21)(14 30)(15 23)(16 22) (17 33)(18 31)(19 24)(25 29)(32 35)(38 39)(40 41)(42 49) (44 56)(45 46)(47 55)(48 53)(50 54)(51 52)

c $\rightarrow$ (1 8 9)(2 27 10)(3 13 12)(4 36 34)(5 20 21)(6 43 37) (7 48 11)(14 29 15)(16 33 17)(18 19 25)(23 24 35)(26 53 28) (30 32 31)(39 41 40)(42 56 55)(44 51 45)(46 54 47)(49 50 52)

d $\rightarrow$ (1 3)(2 5)(8 12)(9 13)(10 20)(11 48)(14 29)(16 17) (19 25)(21 27)(23 31)(24 32)(28 53)(30 35)(34 36)(37 43) (39 40)(42 56)(44 45)(46 50)(47 52)(49 54)

k $\rightarrow$ (2 3 5)(6 7 26)(8 18 17)(9 14 25)(10 29 30)(11 44 56)
(12 15 16)(13 32 35)(19 20 24)(21 22 23)(27 33 31)(28 45 46)
(34 38 39)(36 41 40)(37 51 52)(42 53 54)(43 55 47)(48 49 50)

s $\rightarrow$ (1 8 19 21 22 24 25)(2 13 31 10 15 33 30)(3 20 35 12 14 18 16)
(4 36 40 34 38 41 39)(5 27 17 9 29 32 23)(6 48 50 11 51 49 52)
(7 53 47 37 45 54 56)(26 43 42 28 44 55 46)

Die Operation der Erzeuger von G auf den Nebenklassen von Y_7:

x $\rightarrow$ (1 5)(2 3)(4 6)(7 16)(8 34)(9 13)(10 18)(11 48)(12 21)
(14 19)(15 17)(20 29)(22 41)(23 49)(24 43)(25 51)(26 56)
(27 37)(28 40)(30 33)(31 52)(32 47)(35 42)(36 50)(38 53)
(39 46)(44 55)(45 54)

y $\rightarrow$ (1 2)(3 5)(4 7)(6 16)(8 11)(9 14)(10 15)(12 28)(13 19)
(17 18)(20 22)(21 40)(23 35)(24 50)(25 47)(26 31)(27 46)
(29 41)(30 45)(32 51)(33 54)(34 48)(36 43)(37 39)(38 44)
(42 49)(52 56)(53 55)

z $\rightarrow$ (1 4)(2 7)(3 16)(5 6)(8 28)(9 15)(10 14)(11 12)(13 17)
(18 19)(20 23)(21 48)(22 35)(24 45)(25 27)(26 53)(29 49)
(30 50)(31 55)(32 39)(33 36)(34 40)(37 51)(38 56)(41 42)
(43 54)(44 52)(46 47)

a $\rightarrow$ (1 2)(3 5)(4 16)(6 7)(8 11)(9 19)(10 15)(12 40)(13 14)
(17 18)(20 55)(21 28)(22 53)(23 52)(24 25)(26 42)(27 54)
(29 44)(30 39)(31 49)(32 36)(33 46)(34 48)(35 56)(37 45)
(38 41)(43 51)(47 50)

b $\rightarrow$ (1 4)(2 16)(3 7)(5 6)(8 40)(9 15)(10 19)(11 12)(13 17)
(14 18)(20 24)(21 48)(22 36)(23 45)(25 55)(26 39)(27 31)
(28 34)(29 43)(30 42)(32 53)(33 35)(37 52)(38 47)(41 50)
(44 51)(46 56)(49 54)

c $\rightarrow$ (1 8 9)(2 12 15)(3 21 17)(4 11 10)(5 34 13)(6 48 18)
(7 28 14)(16 40 19)(22 35 23)(24 55 25)(26 27 50)(30 31 47)
(32 33 52)(36 56 37)(38 39 54)(41 42 49)(43 44 51)(45 53 46)

d $\rightarrow$ (1 3)(2 5)(4 6)(7 16)(8 17)(9 21)(10 48)(11 18)(12 13)
(14 40)(15 34)(19 28)(20 29)(22 41)(23 42)(24 51)(25 43)

(26 52)(27 33)(30 37)(31 56)(32 50)(35 49)(36 47)(38 53)
(39 45)(44 55)(46 54)

k → (2 3 5)(6 7 16)(8 26 25)(9 22 33)(10 49 50)(11 52 51)
(12 44 37)(13 20 45)(14 29 30)(15 35 36)(17 23 24)(18 42 43)
(19 41 54)(21 38 46)(27 28 53)(31 32 34)(39 40 55)(47 48 56)

s → (1 8 27 14 29 31 33)(2 21 39 19 42 44 36)(3 34 47 18 49 26 24)
(4 11 32 13 20 53 50)(5 12 51 10 41 38 45)(6 28 46 17 22 52 43)
(7 40 25 9 35 56 30)(15 23 55 54 16 48 37)

Die Operation der Erzeuger von G auf den Nebenklassen von Y_8:

x → (1 4)(2 3)(5 6)(7 10)(8 21)(9 12)(11 13)(14 15)(16 18)
(17 33)(19 45)(20 40)(22 39)(23 41)(24 43)(25 54)(26 47)
(27 44)(28 49)(29 34)(30 56)(31 37)(32 46)(35 50)(36 53)
(38 51)(42 55)(48 52)

y → (1 3)(2 4)(5 7)(6 10)(8 44)(9 15)(11 18)(12 14)(13 16)
(17 51)(19 49)(20 22)(21 27)(23 46)(24 26)(25 36)(28 45)
(29 48)(30 42)(31 50)(32 41)(33 38)(34 52)(35 37)(39 40)
(43 47)(53 54)(55 56)

z → (1 5)(2 10)(3 7)(4 6)(8 38)(9 13)(11 12)(14 18)(15 16)
(17 27)(19 22)(20 49)(21 51)(23 34)(24 37)(25 55)(26 35)
(28 40)(29 41)(30 53)(31 43)(32 48)(33 44)(36 56)(39 45)
(42 54)(46 52)(47 50)

a → (1 2)(3 4)(5 7)(6 10)(8 44)(9 15)(11 16)(12 14)(13 18)
(17 38)(19 56)(20 54)(21 27)(22 53)(23 24)(25 40)(26 46)
(28 42)(29 37)(30 45)(31 34)(32 47)(33 51)(35 48)(36 39)
(41 43)(49 55)(50 52)

b → (1 5)(2 7)(3 10)(4 6)(8 38)(9 11)(12 13)(14 18)(15 16)
(17 44)(19 32)(20 34)(21 51)(22 48)(23 49)(24 55)(25 37)
(26 30)(27 33)(28 41)(29 40)(31 54)(35 53)(36 50)(39 52)
(42 43)(45 46)(47 56)

c → (1 8 9)(2 17 11)(3 33 13)(4 21 12)(5 44 16)(6 27 18)
(7 38 15)(10 51 14)(19 22 20)(23 55 24)(25 26 52)(29 30 50)
(31 32 53)(34 56 35)(36 37 46)(39 40 45)(41 42 43)(47 48 54)

d → (1 4)(2 3)(5 10)(6 7)(8 12)(9 21)(11 33)(13 17)(14 44)
(15 27)(16 51)(18 38)(19 45)(20 39)(22 40)(23 43)(24 41)
(25 53)(26 32)(28 49)(29 35)(30 56)(31 52)(34 50)(36 54)
(37 48)(42 55)(46 47)

k → (2 4 3)(6 7 10)(8 25 24)(9 20 32)(11 19 34)(12 22 23)
(13 49 48)(14 40 41)(15 39 46)(16 45 52)(17 42 35)(18 28 29)
(21 36 47)(26 27 54)(30 31 33)(37 38 55)(43 44 53)(50 51 56)

s → (1 8 26 18 28 30 32)(2 21 37 15 40 42 34)(3 17 43 16 39 36 48)
(4 33 50 14 45 25 23)(5 44 31 13 49 54 52)(6 38 24 9 19 56 29)
(7 51 35 11 22 55 46)(10 27 47 12 20 53 41)

Die Operation der Erzeuger von G auf den Nebenklassen von Z_1:

x → (7 30)(8 13)(14 33)(16 37)(17 38)(18 39)(19 72)(20 73)
(21 59)(22 43)(23 67)(24 76)(25 46)(26 47)(27 65)(28 66)
(29 80)(36 53)(40 57)(41 58)(42 74)(44 61)(45 62)(48 64)
(49 78)(50 79)(51 68)(54 69)(55 70)(56 71)(60 75)(63 77)
(81 91)(82 89)(83 93)(84 94)(85 95)(86 103)(87 110)(88 111)
(90 108)(92 109)(96 101)(97 102)(98 106)(99 104)(100 107)
(105 112)

y → (1 2)(3 4)(5 9)(6 11)(8 13)(10 31)(12 32)(14 33)(15 34)
(16 37)(18 56)(19 40)(20 41)(21 74)(22 60)(23 44)(24 62)
(25 77)(26 48)(28 66)(29 68)(35 52)(39 71)(42 59)(43 75)
(45 76)(46 63)(47 64)(50 79)(51 80)(54 69)(57 72)(58 73)
(61 67)(82 89)(83 93)(84 98)(85 100)(86 96)(87 102)(88 104)
(90 105)(94 106)(95 107)(97 110)(99 111)(101 103)(108 112)

z → (1 3)(2 4)(5 10)(6 12)(7 36)(8 14)(9 31)(11 32)(13 33)
(15 35)(16 69)(17 55)(20 41)(21 42)(22 60)(23 61)(24 76)
(25 77)(27 49)(28 50)(29 80)(30 53)(34 52)(37 54)(38 70)
(43 75)(44 67)(45 62)(46 63)(51 68)(58 73)(59 74)(65 78)
(66 79)(81 92)(82 93)(83 89)(85 100)(86 101)(87 110)(88 111)
(90 112)(91 109)(95 107)(96 103)(97 102)(99 104)(105 108)

a → (1 5)(2 9)(3 10)(4 31)(6 15)(7 81)(11 34)(12 35)(14 33)
(18 24)(19 29)(20 21)(22 90)(23 85)(25 86)(26 87)(28 89)
(30 91)(32 52)(36 109)(39 76)(40 68)(41 74)(42 58)(43 108)

(44 100)(45 71)(46 103)(47 110)(48 102)(49 78)(50 93)(51 57) (53 92)(54 69)(55 70)(56 62)(59 73)(60 105)(61 107)(63 101) (64 97)(66 82)(67 95)(72 80)(75 112)(77 96)(79 83)(84 88) (94 111)(98 104)(99 106)

b → (1 6)(2 11)(3 12)(4 32)(5 15)(7 89)(8 17)(9 34)(10 35) (13 38)(14 55)(16 27)(18 84)(20 21)(22 23)(24 88)(25 86) (28 81)(30 82)(31 52)(33 70)(36 83)(37 65)(39 94)(40 57) (41 42)(43 67)(44 75)(45 104)(46 103)(48 64)(49 69)(50 92) (51 68)(53 93)(54 78)(56 106)(58 74)(59 73)(60 61)(62 99) (63 96)(66 91)(71 98)(76 111)(77 101)(79 109)(85 90)(95 108) (97 102)(100 112)(105 107)

c → (2 4 3)(5 15 6)(7 22 18)(8 21 29)(9 52 12)(10 34 32) (11 31 35)(13 59 80)(14 74 51)(16 86 87)(17 20 19) (23 24 28)(25 26 27)(30 43 39)(33 42 68)(36 60 56)(37 103 110) (38 73 72)(40 55 41)(44 45 50)(46 47 65)(48 49 77)(53 75 71) (54 101 102)(57 70 58)(61 62 79)(63 64 78)(66 67 76)(69 96 97) (81 85 84)(82 108 111)(83 105 99)(88 89 90)(91 95 94)(92 100 98) (93 112 104)(106 109 107)

d → (3 4)(6 15)(7 81)(8 16)(10 31)(11 34)(12 52)(13 37) (14 54)(17 27)(18 85)(19 25)(20 26)(21 87)(22 84)(23 24) (29 86)(30 91)(32 35)(33 69)(36 92)(38 65)(39 95)(40 77) (41 48)(42 97)(43 94)(44 62)(45 61)(46 72)(47 73)(49 55) (50 79)(51 101)(53 109)(56 100)(57 63)(58 64)(59 110)(60 98) (67 76)(68 96)(70 78)(71 107)(74 102)(75 106)(80 103)(83 93) (88 90)(99 112)(104 105)(108 111)

k → (1 7 8)(2 30 13)(3 36 14)(4 53 33)(5 81 16)(6 17 89) (9 91 37)(10 92 69)(11 38 82)(12 55 83)(15 27 28)(18 19 84) (20 21 87)(22 23 29)(24 25 90)(31 109 54)(32 70 93)(34 65 66) (35 49 50)(39 40 106)(41 42 110)(43 44 51)(45 46 105)(47 48 64) (52 78 79)(56 57 94)(58 59 102)(60 61 80)(62 63 108)(67 68 75) (71 72 98)(73 74 97)(76 77 112)(85 86 88)(95 96 99)(100 101 111) (103 104 107)

s → (1 22 24 26 27 23 8)(2 43 45 47 49 44 14)(3 60 62 64 65 67 33) (4 75 76 48 78 61 13)(5 85 87 19 81 86 89)(6 20 29 18 17 90 28)

(7 21 16 15 25 88 84)(9 95 97 72 92 96 83)(10 100 102 57 91 103 93)
(11 73 51 39 55 105 50)(12 41 68 71 38 108 79)(30 59 54 35 77 104 106)
(31 107 110 40 109 101 82)(32 58 80 56 70 112 66)
(34 46 99 94 36 74 69)(37 52 63 111 98 53 42)

3.4.5 Konstruktion der Designs

Es zeigt sich, dass lediglich das Higman-Design die Voraussetzungen dieses Abschnitts erfüllt. Die weitere Konstruktion wird daher in Kurzform dargestellt. Analog zu den vorherigen Abschnitten wurden jeweils die Operationen der Blockstabilisatoren X_1, Y_1, …, Y_8, Z_1 auf den Nebenklassen der Punktstabilisatoren berechnet. Die erhaltenen Bahnlängen lieferten alle Möglichkeiten für die Inzidenz von Blöcken und Punkten, und zwar für jede der beiden Orbitalstrukturen. Diese Möglichkeiten wurden alle getestet.

Insgesamt wurden vier Inzidenzmatrizen gefunden, die symmetrische Designs repräsentieren. Alle vier zugehörigen Designs haben die sporadische einfache Gruppe HS der Ordnung 44.352.000 als zweifach transitive Automorphismengruppe, sind also zum Higman-Design isomorph. Alle vier Designs wurden mit der ersten Orbitalmatrix O_1 und folgenden Stabilisatoren konstruiert:

$$G_{x_1} = G_{P_1} = X_1\,, \quad G_{x_2} = G_{P_2} = Y_2\,, \quad G_{x_3} = G_{P_3} = Z_1\,.$$

Stellvertretend sei eines der vier Designs angegeben; wieder seien die Punkte durch die Nummer ihrer Stabilisatornebenklasse bezeichnet.

$$\begin{aligned}
\langle x_1 \rangle \cap P_1^G &= \{1,2,3,4,5,6,7,8\} \\
\langle x_1 \rangle \cap P_2^G &= \{1,2,8,9,13,14,15,16,17,18,19,20,21,25\} \\
\langle x_1 \rangle \cap P_3^G &= \{1,5,6,7,8,15,16,17,18,19,20,21,22,23,24,25,26,27,28, \\
&\quad\ 29,81,84,85,86,87,88,89,90\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\langle x_2 \rangle \cap P_1^G &= \{1,2\} \\
\langle x_2 \rangle \cap P_2^G &= \{1,2,3,4,5,6,7,12,22,24,28,33,40,41,42,43,45,54,55,56\}
\end{aligned}$$

$$\langle x_2 \rangle \cap P_3^G = \{1, 5, 6, 8, 15, 17, 19, 20, 21, 29, 37, 44, 45, 46, 47, 50, 53, 65, 71, 75, 92, 93, 98, 100, 103, 104, 110, 112\}$$

$$\begin{aligned} \langle x_3 \rangle \cap P_1^G &= \{1, 2\} \\ \langle x_3 \rangle \cap P_2^G &= \{1, 2, 8, 14, 15, 23, 31, 37, 38, 42, 45, 49, 52, 56\} \\ \langle x_3 \rangle \cap P_3^G &= \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 9, 12, 15, 23, 24, 28, 40, 41, 48, 49, 52, 55, 57, 58, \\ &\quad 63, 64, 66, 67, 70, 76, 77, 78, 83, 93, 99, 104, 105, 112\} \end{aligned}$$

Wir haben gezeigt:

3.4.7 Satz *Sei G das semidirekte Produkt einer Gruppe $E \cong E_8$ mit einer Gruppe $L \cong GL_3(2)$. Sei $\mathcal{D} = (\mathcal{P}, \mathcal{B}, I)$ ein symmetrisches (176,50,14) Design mit nachstehenden Eigenschaften:*

(1) $G \leq Aut\,\mathcal{D}$

(2) Es gibt $P_1 \in \mathcal{P}$ und $x_1 \in \mathcal{B}$ mit $G_{P_1} \cong G_{x_1} \cong L_3(2)$

(3) Es gibt $P_2 \in \mathcal{P}$ und $x_2 \in \mathcal{B}$ mit $G_{P_2} \cong G_{x_2} \cong \Sigma_4$,
dabei sei $G_{P_2} \cap E = G_{x_2} \cap E = \{1\}$

(4) Es gibt $P_3 \in \mathcal{P}$ und $x_3 \in \mathcal{B}$ mit $G_{P_3} \cong G_{x_3} \cong Z_2 \times \Sigma_3$.

Dann ist $\mathcal{D}$ isomorph zum symmetrischen Higman-Design $\mathcal{D}_{Higman}$.

3.5 $Z_5 \times A_5$

Folgende Fragestellung wollen wir in diesem Abschnitt betrachten:

3.5.1 Problem *Sei G das direkte Produkt einer zyklischen Gruppe der Ordnung 5 mit einer Gruppe $A \cong A_5$. Sei $\mathcal{D} = (\mathcal{P}, \mathcal{B}, I)$ ein symmetrisches (176,50,14) Design mit nachstehenden Eigenschaften:*

(1) $G \leq Aut\,\mathcal{D}$

(2) Es gibt $P_1 \in \mathcal{P}$ und $x_1 \in \mathcal{B}$ mit $G_{P_1} \cong G_{x_1} \cong Z_5 \times D_{10}$

(3) Es gibt $P_2 \in \mathcal{P}$ und $x_2 \in \mathcal{B}$ mit $G_{P_2} \cong G_{x_2} \cong \Sigma_3$

(4) Es gibt $P_3 \in \mathcal{P}$ und $x_3 \in \mathcal{B}$ mit $G_{P_3} \cong G_{x_3} \cong Z_5$

(5) Es gibt $P_4 \in \mathcal{P}$ und $x_4 \in \mathcal{B}$ mit $G_{P_4} \cong G_{x_4} \cong Z_5$.

Welche Möglichkeiten gibt es dann für den Isomorphietyp von $\mathcal{D}$?

Die Gruppe G hat die Ordnung $5 \cdot 60 = 300$. Die verlangten Stabilisatoren haben die Ordnungen 50, 6, 5 und 5 , also in G die Indizes 6, 50, 60 und 60 . Da $6 + 50 + 60 + 60 = 176$, operiert G auf den Punkten und Blöcken jedes Designs, das die Bedingungen erfüllt, in jeweils vier Bahnen.

Unser Vorgehen ist völlig analog zu den vorherigen Abschnitten.

3.5.1 Definierende Relationen

Wir erklären eine abstrakte Gruppe A durch $A = \langle a, b, d, f \rangle$, wobei zwischen den Erzeugern folgende Relationen gelten sollen:

$$a^2 = b^2 = d^3 = f^5 = 1\,,$$

$$[a, b] = 1\,,\ a^d = b\,,\ b^d = ab\,,\ f^a = f^{-1}\,,$$
$$(bf)^3 = (af)^2 = (affd)^2 = 1\,.$$

Eine Nebenklassenabzählung mit [9] zeigt, dass $|\langle a, b, d, f \rangle| = 60$. Andererseits bleiben die Relationen bei folgender Zuordnung erhalten:

$$a \mapsto (1\,2)\,(3\,4)\ ,\ b \mapsto (1\,3)\,(2\,4)\ ,\ d \mapsto (1\,2\,4)\ ,\ f \mapsto (1\,3\,4\,2\,5)\ .$$

Also gilt $A \cong A_5$. Wir vermerken noch, dass d von af^2 invertiert wird.

Wir erklären die Gruppe G nun durch $G = \langle g \rangle \times A$, wobei g ein Element der Ordnung 5 sei. Wir erhalten nachstehende Konjugiertentafel für G:

x	$o(x)$	$\mathbf{C}_G(x)$	$\lvert\, \mathbf{C}_G(x) \,\rvert$	$\lvert\, ccl_G(x) \,\rvert$
1	1	G	$2^2 \cdot 3 \cdot 5^2$	1
g	5	G	$2^2 \cdot 3 \cdot 5^2$	1
g^2	5	G	$2^2 \cdot 3 \cdot 5^2$	1
g^3	5	G	$2^2 \cdot 3 \cdot 5^2$	1
g^4	5	G	$2^2 \cdot 3 \cdot 5^2$	1
a	2	$\langle g \rangle \times \langle a, b \rangle$	$2^2 \cdot 5$	15
ga	10	$\langle g \rangle \times \langle a, b \rangle$	$2^2 \cdot 5$	15
g^2a	10	$\langle g \rangle \times \langle a, b \rangle$	$2^2 \cdot 5$	15
g^3a	10	$\langle g \rangle \times \langle a, b \rangle$	$2^2 \cdot 5$	15
g^4a	10	$\langle g \rangle \times \langle a, b \rangle$	$2^2 \cdot 5$	15
d	3	$\langle g \rangle \times \langle d \rangle$	$3 \cdot 5$	20
gd	15	$\langle g \rangle \times \langle d \rangle$	$3 \cdot 5$	20
g^2d	15	$\langle g \rangle \times \langle d \rangle$	$3 \cdot 5$	20
g^3d	15	$\langle g \rangle \times \langle d \rangle$	$3 \cdot 5$	20
g^4d	15	$\langle g \rangle \times \langle d \rangle$	$3 \cdot 5$	20
f	5	$\langle g \rangle \times \langle f \rangle$	5^2	12
gf	5	$\langle g \rangle \times \langle f \rangle$	5^2	12
g^2f	5	$\langle g \rangle \times \langle f \rangle$	5^2	12
g^3f	5	$\langle g \rangle \times \langle f \rangle$	5^2	12
g^4f	5	$\langle g \rangle \times \langle f \rangle$	5^2	12
f^2	5	$\langle g \rangle \times \langle f \rangle$	5^2	12
gf^2	5	$\langle g \rangle \times \langle f \rangle$	5^2	12
g^2f^2	5	$\langle g \rangle \times \langle f \rangle$	5^2	12
g^3f^2	5	$\langle g \rangle \times \langle f \rangle$	5^2	12
g^4f^2	5	$\langle g \rangle \times \langle f \rangle$	5^2	12
				300

3.5.2 Stabilisatoren

Wir suchen nun nach den G-Konjugiertenklassen von Untergruppen der verlangten Isomorphietypen. Wie im Abschnitt über die transitive Erweiterung von E_{16} durch A_5 sind wir auch daran interessiert, wie diese Klassen unter äußeren Automorphismen von G fusionieren.

3.5.2 Lemma *Es gibt in G genau eine Konjugiertenklasse von zu $Z_5 \times D_{10}$*

isomorphen Untergruppen. Ein Repräsentant ist

$$X_1 = \langle g \rangle \times \langle f, a \rangle .$$

Beweis. Dies liegt daran, dass Normalisatoren von Sylow-5-Untergruppen von G vom genannten Isomorphietyp sind. □

3.5.3 Lemma *Es gibt in G genau eine Konjugiertenklasse von zu Σ_3 isomorphen Untergruppen. Ein Repräsentant ist*

$$Y_1 = \langle d \rangle : \langle af^2 \rangle .$$

Beweis. Normalisatoren von Sylow-3-Untergruppen von G sind isomorph zu $Z_5 \times \Sigma_3$. Sie enthalten also genau eine zu Σ_3 isomorphe Untergruppe. □

3.5.4 Lemma *Es gibt in G genau vier Konjugiertenklassen von zu Z_5 isomorphen Untergruppen. Repräsentanten für diese Klassen sind*

$$\begin{aligned} Z_1 &= \langle g \rangle , \\ Z_2 &= \langle f \rangle , \\ Z_3 &= \langle gf \rangle , \\ Z_4 &= \langle gf^2 \rangle . \end{aligned}$$

Beweis. Wir betrachten die G-Klassen von Elementen der Ordnung 5. Die verschiedenen Potenzen von g erzeugen natürlich alle dieselbe charakteristische Untergruppe von G. Ebenso ist $\langle f \rangle = \langle f^2 \rangle$ ein Vertreter für alle zyklischen Untergruppen der Ordnung 5, die in $A = G'$ liegen. - Es gilt $\langle gf \rangle = \langle g^2 f^2 \rangle = \langle g^3 f^3 \rangle = \langle g^4 f^4 \rangle$, und die notierten Erzeuger der beiden letztgenannten Gruppen sind in G zu $g^3 f^2$ bzw. $g^4 f$ konjugiert. Genauso sieht man, dass die von $g^2 f$, $g^3 f$, gf^2, $g^4 f^2$ und deren Konjugierten erzeugten Gruppen alle in G zueinander konjugiert sind. □

3.5.5 Lemma *G besitzt eine zu $Z_4 \times Z_2$ isomorphe äußere Automorphismengruppe, die die G-Klassen $\langle gf \rangle$ und $\langle gf^2 \rangle$ vertauscht.*

Beweis. Dies folgt sofort aus $Aut\, Z_5 \cong Z_4$ und $Aut\, A_5 \cong \Sigma_5$. □

3.5.3 Orbitalstrukturen

Die Indizes der verlangten Stabilisatoren in G liefern uns bereits die Längen der Punkt- bzw. Blockbahnen; die Längen sind 6, 50, 60 und 60. Aus 2.3.4 und 2.3.8(a) erhalten wir:

3.5.6 Lemma *Operiert eine Gruppe G^* auf einem symmetrischen (176,50,14) Design derart, dass sowohl die Punkte als auch die Blöcke in jeweils vier Bahnen der Längen $\Omega_1 = \omega_1 = 6$, $\Omega_2 = \omega_2 = 50$, $\Omega_3 = \omega_3 = 60$ und $\Omega_4 = \omega_4 = 60$ zerfallen, so ist die dazugehörige Blockorbitalstruktur $(\gamma_{ij})_{1 \leq i,j \leq 4}$ gegeben durch*

$$\begin{pmatrix} 5 & 25 & 10 & 10 \\ 3 & 11 & 18 & 18 \\ 1 & 15 & 20 & 14 \\ 1 & 15 & 14 & 20 \end{pmatrix} \quad \textit{oder} \quad \begin{pmatrix} 5 & 25 & 10 & 10 \\ 3 & 11 & 18 & 18 \\ 1 & 15 & 14 & 20 \\ 1 & 15 & 20 & 14 \end{pmatrix} .$$

Beweis. Analog zu 3.3.3. □

3.5.4 Die Operation von G

Im Folgenden seien $\mathcal{D} = (\mathcal{P}, \mathcal{B}, I)$, P_1, P_2, P_3, P_4, x_1, x_2, x_3 und x_4 wie in der Problemstellung 3.5.1; die Gruppe G sei eine Untergruppe der vollen Automorphismengruppe von $\mathcal{D}$.

Wieder stellen wir mit Hilfe von [9] die Gruppe G als Permutationsgruppe auf den Nebenklassen von allen Kandidaten für Repräsentanten von Stabilisatoren dar. Mit 2.3.9 wissen wir dann schon, wie G auf den Punkten und Blöcken der Designs operiert.

Die Operation der Erzeuger von G auf den Nebenklassen von X_1:

a $\to$ (3 6)(4 5)

b $\to$ (1 2)(4 5)

d $\to$ (1 3 4)(2 6 5)

f $\to$ (2 5 6 3 4)

g $\to$ (1)

Die Operation der Erzeuger von G auf den Nebenklassen von Y_1:

a → (1 2)(4 7)(5 6)(8 17)(10 14)(11 18)(12 19)(13 20)(15 21) (16 35)(27 31)(28 39)(29 40)(30 41)(32 36)(33 37)(34 38) (42 50)(43 49)(44 48)

b → (1 4)(2 7)(3 9)(5 6)(10 15)(11 28)(12 29)(13 30)(14 21) (16 35)(18 39)(19 40)(20 41)(22 26)(23 45)(24 46)(25 47) (32 36)(33 37)(34 38)

d → (2 4 7)(3 17 5)(6 9 8)(14 15 21)(16 22 27)(18 28 39) (19 29 40)(20 30 41)(23 49 32)(24 48 33)(25 50 34)(26 31 35) (36 45 43)(37 46 44)(38 47 42)

f → (1 5 6 2 3)(4 8 9 17 7)(10 16 35 14 22)(11 32 36 18 23) (12 33 37 19 24)(13 34 38 20 25)(15 31 26 27 21)(28 43 45 49 39) (29 44 46 48 40)(30 42 47 50 41)

g → (1 10 11 12 13)(2 14 18 19 20)(3 22 23 24 25)(4 15 28 29 30) (5 16 32 33 34)(6 35 36 37 38)(7 21 39 40 41)(8 31 43 44 42) (9 26 45 46 47)(17 27 49 48 50)

Die Operation der Erzeuger von G auf den Nebenklassen von Z_1:

a → (1 2)(3 10)(4 41)(5 11)(6 24)(7 23)(8 17)(9 13)(12 22) (14 59)(15 53)(16 54)(18 19)(20 48)(21 31)(25 34)(26 36) (27 35)(28 29)(30 49)(32 50)(33 37)(38 39)(40 47)(42 45) (43 58)(44 52)(46 51)(55 60)(56 57)

b → (1 3)(2 10)(4 21)(5 12)(6 35)(7 47)(8 56)(9 16)(11 22) (13 54)(14 15)(17 57)(18 55)(19 60)(20 50)(23 40)(24 27) (25 26)(28 45)(29 42)(30 33)(31 41)(32 48)(34 36)(37 49) (38 43)(39 58)(44 46)(51 52)(53 59)

d → (1 4 5)(2 21 22)(3 31 11)(6 20 51)(7 28 15)(8 55 34) (9 33 43)(10 41 12)(13 30 39)(14 40 29)(16 49 58)(17 18 26) (19 25 56)(23 45 59)(24 50 44)(27 48 52)(32 46 35)(36 57 60) (37 38 54)(42 53 47)

f → (1 6 7 8 9)(2 13 17 23 24)(3 14 32 33 34)(4 43 35 36 42) (5 47 38 19 20)(10 25 37 50 59)(11 48 18 39 40)(12 49 28 51 56) (15 16 52 31 55)(21 44 54 53 60)(22 57 46 29 30)(26 27 58 41 45) g → (1)

Die Operation der Erzeuger von G auf den Nebenklassen von Z_2:

a → (1 2)(3 6)(4 19)(5 7)(8 18)(9 10)(11 15)(12 20)(13 21)
(14 22)(16 23)(17 33)(24 28)(25 40)(26 41)(27 42)(29 35)
(30 58)(31 59)(32 60)(34 39)(36 43)(37 44)(38 45)(46 47)
(48 57)(49 56)(50 53)(51 54)(52 55)

b → (1 3)(2 6)(4 9)(5 8)(7 18)(10 19)(11 16)(12 25)(13 26)
(14 27)(15 23)(17 24)(20 40)(21 41)(22 42)(28 33)(29 34)
(30 50)(31 51)(32 52)(35 39)(36 47)(37 48)(38 49)(43 46)
(44 57)(45 56)(53 58)(54 59)(55 60)

d → (1 4 5)(2 9 18)(3 10 7)(6 19 8)(11 17 34)(12 30 36)
(13 31 37)(14 32 38)(15 24 35)(16 28 39)(20 50 46)
(21 51 57)(22 52 56)(23 33 29)(25 53 43)(26 54 44)
(27 55 45)(40 58 47)(41 59 48)(42 60 49)

f → (3 8 10 4 5)(6 7 19 9 18)(16 29 28 17 34)(23 39 33 24 35)
(25 47 53 30 36)(26 48 54 31 37)(27 49 55 32 38)(40 43 58 50 46)
(41 44 59 51 57)(42 45 60 52 56)

g → (1 11 12 13 14)(2 15 20 21 22)(3 16 25 26 27)(4 17 30 31 32)
(5 34 36 37 38)(6 23 40 41 42)(7 39 43 44 45)(8 29 47 48 49)
(9 24 50 51 52)(10 28 53 54 55)(18 35 46 57 56)(19 33 58 59 60)

Die Operation der Erzeuger von G auf den Nebenklassen von Z_3:

a → (1 3)(2 13)(4 10)(5 52)(6 11)(7 21)(8 31)(9 17)(12 34)
(14 59)(15 58)(16 25)(18 19)(20 55)(22 44)(23 26)(24 49)
(27 50)(28 53)(29 54)(30 57)(32 33)(35 45)(36 60)(37 47)
(38 48)(39 42)(40 41)(43 51)(46 56)

b → (1 4)(2 16)(3 10)(5 35)(6 12)(7 42)(8 51)(9 30)(11 34)
(13 25)(14 15)(17 57)(18 36)(19 60)(20 56)(21 39)(22 24)
(23 27)(26 50)(28 29)(31 43)(32 40)(33 41)(37 38)(44 49)
(45 52)(46 55)(47 48)(53 54)(58 59)

d → (1 5 6)(2 24 23)(3 35 34)(4 45 11)(7 20 29)(8 40 15)
(9 36 47)(10 52 12)(13 22 50)(14 43 41)(16 44 26)(17 18 38)

(19 37 30)(21 56 53)(25 49 27)(28 39 55)(31 32 59)(33 58 51) (42 46 54)(48 57 60)

f → (1 7 8 9 2)(3 13 17 31 21)(4 14 46 24 47)(5 23 42 48 33) (6 51 27 19 20)(10 37 49 56 59)(11 55 18 50 43)(12 44 40 29 30) (15 16 28 45 36)(22 34 57 54 41)(25 58 60 35 53)(26 52 32 38 39)

g → (1 2 9 8 7)(3 13 17 31 21)(4 16 30 51 42)(5 24 36 40 20) (6 23 47 15 29)(10 25 57 43 39)(11 26 37 58 54)(12 27 48 14 28) (18 32 56 35 22)(19 33 46 45 44)(34 50 38 59 53)(41 55 52 49 60)

Die Operation der Erzeuger von G auf den Nebenklassen von Z_4:

a → (1 4)(2 17)(3 13)(5 10)(6 54)(7 11)(8 33)(9 31)(12 23) (14 60)(15 53)(16 39)(18 19)(20 58)(21 37)(22 30)(24 55) (25 28)(26 57)(27 29)(32 49)(34 35)(36 51)(38 40)(41 52) (42 56)(43 44)(45 50)(46 59)(47 48)

b → (1 5)(2 25)(3 16)(4 10)(6 45)(7 12)(8 37)(9 32)(11 23) (13 39)(14 15)(17 28)(18 26)(19 57)(20 34)(21 33)(22 29) (24 42)(27 30)(31 49)(35 58)(36 46)(38 41)(40 52)(43 48) (44 47)(50 54)(51 59)(53 60)(55 56)

d → (1 6 7)(2 26 27)(3 36 38)(4 45 23)(5 50 11)(8 20 42) (9 48 15)(10 54 12)(13 46 52)(14 49 47)(16 59 40)(17 18 22) (19 29 25)(21 58 24)(28 57 30)(31 43 60)(32 44 53)(33 34 55) (35 56 37)(39 51 41)

f → (1 8 9 2 3)(4 13 17 31 33)(5 14 35 36 27)(6 38 37 30 44) (7 32 41 19 20)(10 29 51 34 60)(11 58 18 52 49)(12 59 48 42 25) (15 16 24 50 26)(21 40 54 43 22)(23 28 56 47 46)(39 53 57 45 55)

g → (1 2 8 3 9)(4 17 33 13 31)(5 25 37 16 32)(6 26 20 36 48) (7 27 42 38 15)(10 28 21 39 49)(11 29 56 40 53)(12 30 24 41 14) (18 34 46 43 45)(19 35 59 44 50)(22 55 52 60 23)(47 54 57 58 51)

3.5.5 Konstruktion der Designs

Es zeigt sich, dass lediglich das Higman-Design die Voraussetzungen dieses Abschnitts erfüllt. Die weitere Konstruktion wird daher auch hier in Kurzform dargestellt. Analog zu vorherigen Abschnitten werden die Operationen der Blockstabilisatoren X_1, Y_1, $Z_1, \ldots, Z_4$ auf den Nebenklassen der Punktstabilisatoren berechnet.

Wir greifen eine bereits in anderen Kapiteln verwendete Schreibweise für Punkt- und Blockstabilisatoren wieder auf: Wir sagen „die Punktstabilisatoren sind $[Z_i, Z_j]$“, falls $G_{P_3} = Z_i$ und $G_{P_4} = Z_j$; $1 \leq i, j \leq 4$. Ohnehin gelten ja o. B. d. A. $G_{P_1} = X_1$ und $G_{P_2} = Y_1$. Entsprechendes sei durch die Aussage „die Blockstabilisatoren sind $[[Z_i, Z_j]]$“ausgedrückt.

Leider wird das kombinatorische Problem der Designkonstruktion durch die angenommene Gruppenoperation nicht immer so weit eingeschränkt, wie dies wünschenswert ist; zum Beispiel operiert $Z_1 = \langle g \rangle$ auf einigen in Frage kommenden Nebenklassen von Punktstabilisatoren trivial. Daher wurden einige Vorüberlegungen angestellt, um das Problem in sinnvoller Zeit bearbeiten zu können.

Wenn wir die Existenz eines äußeren Automorphismus von G berücksichtigen, der $\langle gf \rangle$ auf $\langle gf^2 \rangle$ abbildet, und darüber hinaus bemerken, dass wir in der Anordnung von G_{P_3} und G_{P_4} frei sind, verbleiben genau sieben Möglichkeiten für die Wahl der Punktstabilisatoren, nämlich $[Z_1, Z_1]$, $[Z_1, Z_2]$, $[Z_1, Z_3]$, $[Z_2, Z_2]$, $[Z_2, Z_3]$, $[Z_3, Z_3]$ und $[Z_3, Z_4]$.

Um einige davon zu eliminieren, wurde zunächst versucht, diejenigen Blöcke zu konstruieren, die zum zweiten Blockorbit gehören und von G-Konjugierten von Y_1 stabilisiert werden. Nur die Wahl von $[Z_3, Z_3]$ oder $[Z_3, Z_4]$ als Punktstabilisatoren lieferte dabei Blockorbits, die den Designaxiomen nicht widersprechen; d. h., der Schnitt von je zwei Blöcken enthielt genau $\lambda = 14$ Punkte.

Dies zeigt auch, dass Z_1 und Z_2 nicht als Blockstabilisatoren in Frage kommen; andernfalls wären diese Untergruppen Punktstabilisatoren in den jeweiligen dualen Designs.

Wir betrachten zunächst den Fall, dass $[Z_3, Z_3]$ als Punktstabilisatoren angenommen werden. Da Z_4 auf den Nebenklassen von Z_3 in zwölf Bahnen der Länge fünf operiert, kann keine vierzehnelementige Z_3-invariante Menge von Punkten des dritten oder vierten Punktorbits gewählt werden; eine solche Menge wird aber durch die Orbitalmatrizen verlangt. Sind die Punktstabilisatoren also $[Z_3, Z_3]$, so sind die Blockstabilisatoren ebenfalls $[[Z_3, Z_3]]$. Für diesen Fall ergibt sich jedoch kein Design.

Analog sehen wir, dass unter der Annahme von $[Z_3, Z_4]$ als Punktstabilisatoren nur $[[Z_3, Z_4]]$ als Blockstabilisatoren in Frage kommen; wieder sind es die dualen Designs, die jede andere Annahme sofort widerlegen. Da die beiden Orbitalmatrizen durch simultanes Vertauschen der jeweils letzten beiden Zeilen und Spalten auseinander hervorgehen, muss der Fall $[[Z_4, Z_3]]$ nicht separat betrachtet werden, sondern liefert ggf. nur Designs, die zu denen der Wahl $[[Z_3, Z_4]]$ isomorph sind.

Der verbleibende Fall $[Z_3, Z_4]$ und $[[Z_3, Z_4]]$ führt zur Konstruktion von 6.250 Inzidenzmatrizen zu symmetrischen $(176, 50, 14)$ Designs, die die Voraussetzungen des Kapitels erfüllen. Alle zugehörigen Designs sind isomorph zum Higman-Design. Stellvertretend sei eines dieser Designs angegeben; wieder seien die Punkte durch die Nummer der entsprechenden Stabilisatornebenklasse bezeichnet.

$$
\begin{aligned}
\langle x_1 \rangle \cap P_1^G &= \{2, 3, 4, 5, 6\} \\
\langle x_1 \rangle \cap P_2^G &= \{1, 2, 3, 5, 6, 10, 11, 12, 13, 14, 16, 18, 19, 20, 22, 23, 24, 25, 27, \\
&\quad 31, 32, 33, 36, 37, 38\} \\
\langle x_1 \rangle \cap P_3^G &= \{1, 2, 3, 7, 8, 9, 13, 17, 23, 32\} \\
\langle x_1 \rangle \cap P_4^G &= \{1, 2, 3, 4, 8, 9, 13, 17, 23, 24\} \\
\langle x_2 \rangle \cap P_1^G &= \{2, 5, 6\} \\
\langle x_2 \rangle \cap P_2^G &= \{1, 2, 4, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13\} \\
\langle x_2 \rangle \cap P_3^G &= \{1, 5, 6, 10, 12, 14, 17, 18, 19, 24, 31, 36, 37, 40, 46, 50, 53, 54\} \\
\langle x_2 \rangle \cap P_4^G &= \{1, 6, 7, 10, 12, 14, 17, 18, 19, 22, 26, 28, 32, 34, 38, 49, 55, 57\} \\
\langle x_3 \rangle \cap P_1^G &= \{1\} \\
\langle x_3 \rangle \cap P_2^G &= \{1, 3, 4, 10, 14, 16, 20, 21, 31, 32, 37, 38, 43, 44, 47\} \\
\langle x_3 \rangle \cap P_3^G &= \{1, 2, 7, 9, 21, 25, 28, 35, 46, 47, 48, 50, 51, 52\} \\
\langle x_3 \rangle \cap P_4^G &= \{5, 7, 10, 12, 16, 19, 21, 27, 29, 36, 38, 39, 40, 43, 44, 46, 49, 54, \\
&\quad 55, 57\} \\
\langle x_4 \rangle \cap P_1^G &= \{1\} \\
\langle x_4 \rangle \cap P_2^G &= \{1, 3, 4, 12, 14, 19, 22, 24, 31, 33, 34, 35, 36, 41, 46\} \\
\langle x_4 \rangle \cap P_3^G &= \{14, 19, 21, 26, 27, 28, 31, 36, 37, 40, 41, 44, 49, 50, 51, 54, 55, \\
&\quad 56, 57, 59\}
\end{aligned}
$$

$$\langle x_4 \rangle \cap P_4^G \quad = \quad \{1, 2, 3, 8, 21, 25, 29, 33, 34, 38, 42, 44, 48, 53\}$$

Wir haben gezeigt:

3.5.7 Satz *Sei G das direkte Produkt einer zyklischen Gruppe der Ordnung 5 mit einer Gruppe $A \cong A_5$. Sei $\mathcal{D} = (\mathcal{P}, \mathcal{B}, I)$ ein symmetrisches (176,50,14) Design mit nachstehenden Eigenschaften:*

(1) $G \leq Aut\,\mathcal{D}$

(2) Es gibt $P_1 \in \mathcal{P}$ *und* $x_1 \in \mathcal{B}$ *mit* $G_{P_1} \cong G_{x_1} \cong Z_5 \times D_{10}$

(3) Es gibt $P_2 \in \mathcal{P}$ *und* $x_2 \in \mathcal{B}$ *mit* $G_{P_2} \cong G_{x_2} \cong \Sigma_3$

(4) Es gibt $P_3 \in \mathcal{P}$ *und* $x_3 \in \mathcal{B}$ *mit* $G_{P_3} \cong G_{x_3} \cong Z_5$

(5) Es gibt $P_4 \in \mathcal{P}$ *und* $x_4 \in \mathcal{B}$ *mit* $G_{P_4} \cong G_{x_4} \cong Z_5$.

Dann ist $\mathcal{D}$ isomorph zum symmetrischen Higman-Design $\mathcal{D}_{Higman}$.

3.6 $L_2(11)$ (2 Bahnen)

Folgende Fragestellung wollen wir in diesem Abschnitt betrachten:

3.6.1 Problem *Sei $G \cong L_2(11)$. Sei $\mathcal{D} = (\mathcal{P}, \mathcal{B}, I)$ ein symmetrisches (176,50,14) Design mit $G \leq Aut\,\mathcal{D}$. Die Gruppe G operiere auf den Punkten von $\mathcal{D}$ in zwei Bahnen. Welche Möglichkeiten gibt es dann für den Isomorphietyp von $\mathcal{D}$?*

Seien im Folgenden G und $\mathcal{D}$ wie in obiger Problemstellung.

3.6.1 Definierende Relationen

Im Atlas [2] finden wir auf Seite 7 nachstehende Präsentation für $G \cong L_2(11)$:

$$\begin{array}{rclcrcl} G & = & \langle & a,b,c,d & \mid & 1 & = & a^2 = b^2 = c^2 = d^2 \\ & & & & & & = & (ab)^3 = (ac)^2 = (ad)^2 = (bc)^5 \\ & & & & & & = & (bd)^2 = (cd)^3 = (abc)^5 = (bcd)^5 \quad \rangle \quad . \end{array}$$

3.6.2 Orbitalstrukturen

Wir verwenden die Notation aus Kapitel 2.3.

3.6.2 Lemma *Für die Bahnlängen von G auf den Punkten und Blöcken von $\mathcal{D}$ und für die zugehörige Orbitalstruktur gibt es bis auf Anordnung der Bahnen nur die folgenden Möglichkeiten:*

(1) Die Blockbahnlängen haben dieselben Längen wie die Punktbahnen, nämlich $\Omega_1 = \omega_1 = 66$ und $\Omega_2 = \omega_2 = 110$. Die Orbitalstruktur ist

$$\begin{pmatrix} 15 & 35 \\ 21 & 29 \end{pmatrix} \quad .$$

(2) Die Blockbahnlängen sind $\Omega_1 = 66$ und $\Omega_2 = 110$; die Längen der Punktbahnen sind $\omega_1 = 11$ und $\omega_2 = 165$. Die Orbitalstruktur ist

$$\begin{pmatrix} 5 & 45 \\ 2 & 48 \end{pmatrix} \quad .$$

(3) Die Blockbahnlängen sind $\Omega_1 = 11$ und $\Omega_2 = 165$; die Längen der Punktbahnen sind $\omega_1 = 66$ und $\omega_2 = 110$. Die Orbitalstruktur ist

$$\begin{pmatrix} 30 & 20 \\ 18 & 32 \end{pmatrix} \quad .$$

Beweis. Ist U eine Untergruppe von G, so ist der Index von U in G eine der folgenden Zahlen: 1, 11, 12, 55, 60, 66, 110, 132, 165, 220, 330 oder 660. Die Längen der Bahnen von G auf den Punkten von $\mathcal{D}$ sind also entweder 11 und 165 - oder 66 und 110. Entsprechendes gilt für die Operation auf den Blöcken.

Wir nehmen zunächst an, dass die Punktbahnlängen $\omega_1 = 11$ und $\omega_2 = 165$ sind. Gäbe es nun eine Blockbahn der Länge 11, so hätte nach 2.3.8 a) (mit $i = j = 1$) die Gleichung

$$\gamma_{11}^2 \quad + \quad \frac{1}{15}\gamma_{12}^2 \quad = \quad 14 \cdot 11 \; + \; 36$$

eine Lösung in nichtnegativen ganzen Zahlen γ_{11}, γ_{12} mit $\gamma_{11} + \gamma_{12} = 50$, was nicht der Fall ist. Also sind die Blockbahnlängen 66 und 110; dies führt zu den Gleichungen

$$6\,\gamma_{11}^2 \quad + \quad \frac{6}{15}\gamma_{12}^2 \quad = \quad 14 \cdot 66 \; + \; 36$$

für die Blockbahn der Länge 66 und

$$10\,\gamma_{21}^2 \quad + \quad \frac{2}{3}\gamma_{22}^2 \quad = \quad 14 \cdot 110 \; + \; 36$$

für die Blockbahn der Länge 110. Die sinnvollen Lösungen dieser Gleichungen ergeben die unter (2) genannte Matrix.

Seien nun die Punktbahnlängen $\omega_1 = 66$ und $\omega_2 = 110$. Sind die Blockbahnlängen $\Omega_1 = 11$ und $\Omega_2 = 165$, so sind wir in der zu (2) dualen Situation und erhalten in analoger Weise die Matrix unter (3). Sind die Blockbahnlängen $\Omega_1 = 66$ und $\Omega_2 = 110$, so führen die Lösungen der entsprechenden Gleichungen zur Matrix bei (1). $\square$

3.6.3 Bemerkung *Jedes Design, das mit einem Ansatz nach Situation (3) konstruiert wird, ist dual zu einem Design, das nach Situation (2) konstruiert wird. Wir werden daher nur die ersten beiden Situationen behandeln. Die Blockbahnlängen sind also* 66 *und* 110, *die Punktbahnlängen entweder* 66 *und* 110 *oder* 11 *und* 165. *Situation (1) nennen wir den symmetrischen Fall, Situation (2) den unsymmetrischen Fall.*

3.6.3 Stabilisatoren

Wir suchen nun nach den G-Konjugiertenklassen von Untergruppen, die in $G \cong L_2(11)$ den Index 11, 66, 110 oder 165 haben.

3.6.4 Lemma *(a) Untergruppen von G vom Index 11 sind zu A_5 isomorph. Es gibt in G genau zwei Konjugiertenklassen von zu A_5 isomorphen Untergruppen. Repräsentanten dafür sind*

$$\begin{aligned} W_1 &= \langle a, b, c \rangle \quad , \\ W_2 &= \langle b, c, d \rangle \quad . \end{aligned}$$

(b) Untergruppen von G vom Index 66 sind zu D_{10} isomorph. Es gibt in G genau eine Konjugiertenklasse von zu D_{10} isomorphen Untergruppen. Ein Repräsentant dafür ist

$$X_1 = \langle b, c \rangle \quad .$$

(c) Untergruppen von G vom Index 110 sind zu Σ_3 oder Z_6 isomorph. Es gibt in G genau zwei Konjugiertenklassen von zu Σ_3 isomorphen Untergruppen und genau eine Konjugiertenklasse von zu Z_6 isomorphen Untergruppen. Repräsentanten dafür sind

$$\begin{aligned} Y_1 &= \langle a, b \rangle = \langle ab, b \rangle \cong \Sigma_3 \quad , \\ Y_2 &= \langle ad, bd \rangle = \langle ab, bd \rangle \cong \Sigma_3 \quad , \\ Y_3 &= \langle abd \rangle \cong Z_6 \quad . \end{aligned}$$

(d) Untergruppen von G vom Index 165 sind zu E_4 isomorph. Es gibt in G jeweils genau eine Konjugiertenklasse von zu E_4 isomorphen Untergruppen. Ein Repräsentant dafür ist

$$Z_1 = \langle a, c \rangle \quad .$$

Beweis.

(a) Die Richtigkeit der ersten beiden Aussagen entnehmen wir der Liste der maximalen Untergruppen von $L_2(11)$ in [2], Seite 7. Eine Abzählung der Nebenklassen von G nach W_1 bzw. W_2 zeigt $|G : W_1| = |G : W_2| = 11$, also gilt $W_1 \cong W_2 \cong A_5$. Die Darstellung von G auf den Konjugierten jeder zu A_5 isomorphen Untergruppe ist zweifach transitiv. Eine zu A_5 isomorphe Untergruppe schneidet also jedes von ihr selbst verschiedene Konjugierte in einer Gruppe der Ordnung 6. Offenbar ist aber $W_1 \cap W_2 = \langle b, c\rangle \cong D_{10}$, also sind W_1 und W_2 in G nicht zueinander konjugiert. Die Behauptung folgt.

(b) Es gibt in G keine Elemente der Ordnung 10, 15 oder 55 und keine Untergruppen der Ordnung 20. Normalisatoren von Sylow-5-Untergruppen von G sind also zu D_{10} isomorph. Da das Produkt der Involutionen b und c die Ordnung 5 hat, ist $X_1 \cong D_{10}$. Die Behauptung folgt.

(c) Beide Isomorphietypen von Gruppen der Ordnung 6 kommen in G vor. Zentralisatoren von Sylow-3-Untergruppen sind zyklisch der Ordnung 6, also gibt es genau eine Klasse von zu Z_6 isomorphen Untergruppen. Das Element ab der Ordnung 3 wird von der Involution d zentralisiert, also ist $o(abd) = 6$.

Normalisatoren von Sylow-3-Untergruppen in G sind zu $D_{12} \cong Z_2 \times \Sigma_3$ isomorph. Die Involution d zentralisiert die Involutionen a und b, ferner ist $o(ab) = 3$. Also ist $\langle a, b, d\rangle \cong D_{12}$. In D_{12} finden wir genau zwei Klassen von Involutionen außerhalb des zyklischen Normalteilers vom Index 2; dies liefert genau zwei Klassen von zu Σ_3 isomorphen Untergruppen. In $\langle a, b, d\rangle$ sind b und bd Vertreter für die Klassen nichtzentraler Involutionen und ab ist ein Element der Ordnung 3. Die Behauptung folgt.

(d) Sylow-2-Untergruppen von G sind elementarabelsch der Ordnung 4. Das Produkt der Involutionen a und c ist wieder eine Involution. Die Behauptung folgt.

□

3.6.5 Lemma *Es gibt in* $Aut\, G \cong PGL_2(11)$ *Elemente* α, β *mit* $W_1^\alpha = W_2$ *und* $Y_1^\alpha = Y_2$.

Beweis. Die Fusion der G-Klassen von W_1 und W_2 durch Automorphismen von G ist in der Liste der maximalen Untergruppen von G in [2], Seite 7, abzulesen. Dort lesen wir auch ab, dass Sylow-3-Normalisatoren in $Aut\,G$ isomorph zu D_{24} sind. Man rechnet nun leicht nach, dass Y_1 und Y_2 in $\mathbf{N}_{Aut\,G}(\langle ab\rangle)$ zueinander konjugiert sind. $\square$

3.6.4 Die Operation von G

Wieder stellen wir mit Hilfe von [9] die Gruppe G als Permutationsgruppe auf den Nebenklassen von allen Kandidaten für Stabilisatoren dar. Mit 2.3.9 wissen wir dann schon, wie G auf den Punkten und Blöcken der Designs operiert.

Die Operation der Erzeuger von G auf den Nebenklassen von W_1 :

a → (4 5)(6 8)(7 11)(9 10)

b → (3 4)(6 7)(8 10)(9 11)

c → (2 3)(4 6)(5 8)(9 10)

d → (1 2)(6 7)(8 11)(9 10)

Die Operation der Erzeuger von G auf den Nebenklassen von W_2 :

a → (1 2)(4 6)(7 8)(10 11)

b → (2 3)(4 6)(5 7)(9 10)

c → (3 5)(4 10)(6 11)(7 8)

d → (4 6)(5 9)(7 10)(8 11)

Die Operation der Erzeuger von G auf den Nebenklassen von X_1 :

a → (1 2)(3 6)(5 11)(7 51)(10 56)(12 44)(13 36)(14 60) (15 62)(16 61)(17 47)(18 50)(19 43)(20 57)(23 24)(25 26) (27 41)(28 58)(29 30)(31 33)(32 54)(34 48)(35 55)(37 38) (39 49)(40 59)(42 63)(45 46)(52 66)(64 65)

b → (2 4)(6 8)(7 15)(9 11)(10 42)(12 59)(13 49)(14 44) (16 17)(18 62)(19 22)(20 21)(23 41)(24 25)(26 27)(28 29)

(30 31)(33 58)(34 35)(36 37)(38 39)(40 60)(45 47)(46 61)
(48 65)(50 51)(52 63)(53 54)(55 64)(56 66)

c → (3 7)(4 9)(5 11)(6 51)(8 22)(10 20)(12 19)(13 50)(14 45)
(15 16)(18 36)(21 53)(23 42)(24 63)(25 26)(27 28)(29 48)
(30 34)(31 32)(33 54)(37 38)(39 40)(41 58)(43 44)(46 60)
(49 59)(52 65)(56 57)(61 62)(64 66)

d → (1 3)(2 6)(4 8)(5 32)(9 53)(10 42)(11 54)(12 23)(13 35)
(14 25)(16 17)(19 20)(21 22)(24 44)(26 60)(27 40)(28 29)
(30 58)(31 33)(34 49)(36 55)(37 64)(38 65)(39 48)(41 59)
(43 57)(45 46)(47 61)(52 66)(56 63)

Die Operation der Erzeuger von G auf den Nebenklassen von Y_1:

a → (4 9)(5 13)(6 99)(7 14)(8 18)(15 16)(17 40)(19 100)
(20 77)(21 30)(22 39)(23 104)(24 92)(25 95)(26 28)(27 29)
(31 38)(32 37)(33 34)(35 36)(41 106)(42 44)(43 63)(45 71)
(46 72)(47 53)(48 54)(49 50)(51 89)(52 88)(55 87)(56 61)
(57 60)(58 59)(62 82)(64 65)(66 81)(67 68)(69 80)(70 79)(73 74)
(75 109)(76 91)(78 93)(83 103)(84 105)(85 96)(86 108)(90 98)
(94 107)(97 102)(101 110)

b → (2 4)(5 6)(7 99)(10 18)(11 26)(12 27)(13 14)(15 17)
(16 106)(19 22)(20 31)(21 107)(23 97)(24 25)(30 69)(32 33)
(34 35)(36 37)(38 91)(39 98)(40 41)(42 79)(43 49)(44 45)
(46 47)(48 84)(50 51)(52 53)(54 103)(55 56)(57 86)(58 108)
(59 60)(61 62)(63 89)(64 68)(65 66)(67 81)(70 71)(72 88)(73 96)
(74 75)(76 77)(78 95)(80 94)(82 87)(83 105)(85 109)(90 100)
(92 93)(101 102)(104 110)

c → (1 2)(3 12)(4 5)(7 14)(8 77)(9 13)(10 11)(15 86)(16 108)
(17 100)(18 20)(19 40)(21 62)(22 23)(24 33)(25 26)(27 67)
(28 95)(29 68)(30 82)(31 32)(34 92)(35 36)(37 38)(39 104)
(41 42)(43 55)(44 106)(45 46)(47 48)(49 90)(50 98)(51 52)
(53 54)(56 57)(58 84)(59 105)(60 61)(63 87)(64 65)(69 70)
(71 72)(75 76)(78 96)(79 80)(83 101)(85 93)(88 89)(91 109)
(94 97)(102 107)(103 110)

d → (1 3)(2 10)(4 18)(5 40)(6 41)(7 16)(8 9)(11 12)(13 17)
(14 15)(19 20)(21 64)(22 31)(23 24)(25 97)(26 27)(28 29)

(30 65)(32 33)(34 37)(35 36)(38 39)(43 84)(46 74)(47 75)
(48 49)(50 54)(51 103)(52 85)(53 109)(55 56)(57 58)(59 60)
(61 87)(62 82)(63 105)(66 69)(67 94)(68 107)(72 73)(76 90)
(77 100)(78 101)(80 81)(83 89)(86 108)(88 96)(91 98)(92 104)
(93 110)(95 102)(99 106)

Die Operation der Erzeuger von G auf den Nebenklassen von Y_2:

a → (1 2)(3 4)(5 31)(6 17)(7 65)(8 64)(9 21)(10 16)(11 12)
(13 14)(15 19)(18 55)(20 83)(22 68)(23 90)(24 76)(25 103)
(26 109)(27 73)(28 88)(29 38)(30 47)(32 67)(33 75)(34 74)
(35 40)(36 37)(39 52)(41 42)(43 110)(45 86)(46 50)(51 53)
(54 104)(56 57)(58 59)(60 61)(62 108)(63 66)(72 100)(77 102)
(78 99)(79 80)(81 94)(82 91)(84 93)(85 106)(87 89)(92 105)
(95 98)(96 97)(101 107)

b → (1 2)(3 10)(4 5)(6 7)(8 9)(11 33)(12 24)(13 65)(14 17)
(15 21)(16 31)(18 80)(19 64)(20 32)(23 25)(26 27)(28 91)
(29 89)(34 35)(36 87)(37 38)(39 54)(40 86)(41 92)(42 43)
(44 93)(45 74)(47 48)(49 50)(51 104)(52 53)(55 56)(57 79)
(58 108)(59 60)(61 62)(63 83)(66 67)(68 69)(70 78)(71 72)
(73 94)(75 76)(77 82)(81 109)(85 103)(88 102)(90 106)(95 107)
(96 101)(97 98)(105 110)

c → (1 3)(2 4)(5 6)(7 8)(9 10)(11 12)(13 15)(14 19)(16 21)
(17 31)(18 104)(20 43)(22 32)(23 87)(24 25)(26 91)(28 30)
(33 34)(35 36)(37 40)(39 81)(44 71)(45 72)(46 53)(47 88)
(48 49)(50 51)(52 94)(54 55)(56 57)(58 107)(59 101)(60 61)
(62 63)(64 65)(66 108)(67 68)(69 70)(74 75)(76 103)(77 79)
(78 95)(80 102)(82 109)(83 110)(84 106)(85 93)(86 100)(89 90)
(92 97)(96 105)(98 99)

d → (1 2)(3 11)(4 12)(5 24)(6 91)(7 28)(8 32)(9 20)(10 33)
(13 102)(14 77)(15 63)(16 75)(17 82)(18 61)(19 66)(21 83)
(22 30)(23 27)(25 26)(31 76)(34 43)(35 42)(39 51)(40 41)
(44 49)(45 105)(46 84)(47 68)(48 69)(50 93)(52 53)(54 104)
(55 60)(56 59)(57 58)(62 80)(64 67)(65 88)(70 71)(72 78)
(73 90)(74 110)(79 108)(81 85)(86 92)(94 106)(95 96)(97 98)
(99 100)(101 107)(103 109)

Die Operation der Erzeuger von G auf den Nebenklassen von Y_3:

a → (1 2)(3 4)(5 6)(7 25)(8 17)(9 12)(10 15)(11 18)(13 24) (14 70)(16 23)(19 82)(20 44)(21 110)(22 36)(26 90)(27 45) (28 94)(29 103)(30 102)(31 32)(33 76)(34 106)(35 46)(37 101) (38 43)(39 40)(47 104)(48 88)(49 100)(50 51)(52 95)(53 81) (54 60)(55 61)(56 57)(58 96)(59 79)(62 75)(63 84)(64 67) (65 99)(66 98)(68 105)(69 71)(72 73)(74 108)(77 87)(78 83) (80 86)(85 109)(89 92)(91 97)(93 107)

b → (1 2)(3 24)(4 9)(5 16)(6 11)(7 10)(8 29)(12 13)(14 15) (17 33)(18 23)(19 71)(20 32)(21 26)(22 35)(25 70)(27 47) (28 50)(30 80)(31 75)(34 99)(36 37)(40 41)(42 43)(44 62) (45 87)(46 101)(48 97)(49 98)(51 52)(53 54)(55 91)(56 63) (57 58)(59 60)(61 88)(64 65)(66 68)(67 106)(69 78)(72 93) (73 74)(76 103)(77 104)(79 81)(82 83)(84 96)(85 110)(86 89) (90 109)(92 102)(94 95)(100 105)(107 108)

c → (1 5)(2 6)(3 7)(4 25)(9 18)(10 23)(11 12)(13 14)(15 16) (19 51)(20 38)(21 83)(22 47)(24 70)(26 27)(28 35)(29 30) (31 76)(32 33)(34 37)(36 104)(39 80)(40 86)(41 42)(43 44) (45 90)(46 94)(48 77)(49 97)(50 82)(52 53)(54 55)(56 85) (57 109)(58 59)(60 61)(62 108)(63 64)(65 66)(67 84)(68 69) (71 105)(72 73) (74 75)(78 110)(79 96)(81 95)(87 88)(89 107) (91 100)(92 93)(98 99)(101 106)(102 103)

d → (3 71)(4 69)(5 17)(6 8)(7 37)(9 78)(10 36)(11 29)(12 83) (13 82)(14 35)(15 22)(16 33)(18 103)(19 24)(20 27)(21 30) (23 76)(25 101)(26 80)(28 50)(31 104)(32 47)(34 105)(38 39) (40 43)(41 42)(44 45)(46 70)(48 96)(49 65)(51 94)(52 95) (53 72)(54 93)(55 56)(57 61)(58 88)(59 108)(60 107)(62 87) (63 91)(64 98)(66 67)(68 106)(73 81)(74 79)(75 77)(84 97) (85 92)(86 90)(89 109)(99 100)(102 110)

Die Operation der Erzeuger von G auf den Nebenklassen von Z_1:

a → (2 4)(5 11)(6 12)(7 48)(8 20)(9 16)(10 17)(15 144) (18 116)(19 91)(22 23)(24 123)(25 49)(26 152)(27 44)(28 157) (29 74)(30 127)(31 128)(32 132)(34 69)(35 158)(36 68)(37 72) (38 39)(40 70)(41 71)(42 134)(43 93)(45 97)(46 150)(47 92)

(50 121)(51 122)(52 111)(53 112)(54 55)(56 57)(58 113)(59 114) (60 61)(62 160)(63 146)(64 151)(65 142)(66 67)(73 124) (75 120)(76 81)(77 78)(79 104)(80 103)(82 83)(84 126) (85 162)(86 89)(87 100)(88 129)(94 95)(96 133)(98 118) (101 102)(105 154)(106 155)(107 108)(109 159)(110 149) (115 117)(119 156)(125 165)(130 138)(131 161)(135 153) (136 137)(139 140)(141 147)(145 163)(148 164)

b → (1 2)(3 12)(5 7)(9 48)(11 16)(13 31)(14 17)(15 99) (18 21)(19 22)(20 90)(23 24)(25 93)(26 27)(28 165)(29 30) (32 117)(33 103)(34 38)(35 36)(37 151)(39 40)(41 42)(43 121) (44 135)(45 71)(46 89)(49 50)(51 52)(53 148)(54 113)(55 56) (57 58)(59 132)(60 98)(61 62)(63 88)(64 124)(65 87)(66 158) (67 68)(69 70)(72 73)(74 75)(76 126)(77 154)(78 79)(81 82) (83 84)(85 86)(91 123)(92 143)(94 145)(95 96)(97 134)(100 102) (101 142)(104 105)(106 147)(107 131)(108 109)(110 111) (112 137)(114 115)(118 160)(119 125)(120 127)(122 149) (129 130)(133 163)(136 164)(138 146)(139 155)(140 141) (150 162)(152 153)(156 157)(159 161)

c → (2 5)(3 13)(4 11)(6 86)(7 8)(9 10)(12 89)(15 100)(16 17) (18 115)(19 35)(20 48)(21 143)(22 129)(23 88)(24 25)(26 47) (27 28)(29 124)(30 31)(32 119)(33 99)(34 36)(37 72)(38 131) (39 161)(40 41)(42 43)(44 157)(45 133)(46 64)(49 123)(50 51) (52 53)(54 153)(55 135)(56 57)(58 59)(60 142)(61 65)(63 95) (66 148)(67 164)(68 69)(70 71)(73 74)(75 76)(77 98)(78 118) (79 80)(81 120)(84 85)(87 144)(91 158)(92 152)(93 134) (94 146)(96 97)(101 141)(102 147)(103 104)(105 106)(107 130) (108 138)(109 110)(111 112)(113 114)(116 117)(121 122) (126 162)(127 128)(132 156)(136 163)(137 145)(139 140) (149 159)(150 151)(154 155)

d → (1 3)(2 12)(4 6)(5 23)(7 24)(8 47)(9 91)(10 144)(11 22) (14 99)(15 17)(16 19)(20 92)(25 26)(27 93)(28 29)(30 165) (32 118)(34 38)(35 100)(36 102)(37 71)(39 69)(40 70)(41 72) (42 73)(43 44)(45 151)(46 63)(48 123)(49 152)(50 153)(51 52) (53 54)(55 112)(56 137)(57 136)(58 164)(59 60)(61 114)(62 115) (64 97)(65 66)(67 142)(68 101)(74 157)(75 156)(76 77)(78 81)

(79 82)(83 104)(84 105)(85 130)(86 129)(87 158)(88 89)
(90 143)(94 133)(95 96)(98 132)(106 107)(108 155)
(109 139)(110 149)(111 122)(113 148)(117 160)(119 120)
(121 135)(124 134)(125 127)(126 154)(131 147)(138 162)
(140 159)(141 161)(145 163)(146 150)

Wir geben nun an, wie die Blockstabilisatoren auf den Punkten operieren. Wie bereits bemerkt, ziehen wir als Blockbahnlängen nur 66 und 110 in Betracht; d. h., als Blockstabilisatoren kommen nur X_1, Y_1, Y_2 und Y_3 in Frage.

Die X_1-Bahnen auf den Nebenklassen von W_1 sind
$\{1\}$; $\{2,3,6,7,4\}$; $\{5,8,9,11,10\}$.
Diese Bahnen haben die Lngen 1 und 5 (2×).

Die X_1-Bahnen auf den Nebenklassen von W_2 sind
$\{1\}$; $\{2,5,8,7,3\}$; $\{4,11,6,10,9\}$.
Diese Bahnen haben die Lngen 1 und 5 (2×).

Die X_1-Bahnen auf den Nebenklassen von X_1 sind
$\{1\}$; $\{2,9,5,11,4\}$; $\{3,7,16,17,15\}$;
$\{14,43,44,45,47\}$; $\{30,32,31,34,35\}$; $\{55,66,57,56,64\}$;
$\{6,22,12,49,50,8,51,13,59,19\}$; $\{10,23,58,54,21,42,20,53,33,41\}$;
$\{18,61,60,39,37,62,36,38,40,46\}$; $\{24,26,28,48,52,25,63,65,29,27\}$.
Diese Bahnen haben die Lngen 1, 5 (5×), und 10 (4×).

Die X_1-Bahnen auf den Nebenklassen von Y_1 sind
$\{1,2,5,6,4\}$; $\{3,12,67,81,27\}$; $\{7,99,14,9,13\}$;
$\{8,77,75,74,76\}$; $\{28,95,96,73,78\}$; $\{29,68,65,66,64\}$;
$\{10,20,32,24,26,18,11,25,33,31\}$; $\{15,100,49,55,57,17,86,56,43,90\}$;
$\{16,44,46,48,58,106,108,84,47,45\}$; $\{19,23,94,79,41,22,40,42,80,97\}$;
$\{21,102,83,59,61,107,62,60,105,101\}$; $\{30,70,72,89,87,69,82,63,88,71\}$;
$\{34,36,38,109,93,35,92,85,91,37\}$; $\{39,50,52,54,110,98,104,103,53,51\}$.
Diese Bahnen haben die Lngen 5 (6×) und 10 (8×).

Die X_1-Bahnen auf den Nebenklassen von Y_2 sind
$\{20,22,32,43,42\}$; $\{26,27,91,30,28\}$;$\{29,90,84,106,89\}$;
$\{37,38,40,100,86\}$; $\{41,97,99,98,92\}$; $\{46,53,94,73,52\}$;
$\{1,4,6,8,10,2,3,9,7,5\}$; $\{11,34,36,23,24,33,12,25,87,35\}$;
$\{13,64,14,31,21,65,15,16,17,19\}$; $\{18,102,47,49,51,80,104,50,48,88\}$;

$\{39, 55, 57, 77, 109, 54, 81, 82, 79, 56\}$; $\{44, 85, 76, 74, 72, 93, 71, 45, 75, 103\}$;
$\{58, 66, 68, 70, 95, 108, 107, 78, 69, 67\}$; $\{59, 61, 63, 110, 96, 60, 101, 105, 83, 62\}$.
Diese Bahnen haben die Lngen 5 ($6\times$) und 10 ($8\times$).

Die X_1-Bahnen auf den Nebenklassen von Y_3 sind
$\{8, 30, 39, 80, 29\}$; $\{17, 32, 38, 20, 33\}$; $\{1, 6, 12, 14, 16, 2, 5, 15, 13, 11\}$;
$\{3, 70, 4, 18, 10, 24, 7, 23, 9, 25\}$; $\{19, 105, 91, 54, 52, 71, 51, 53, 55, 100\}$;
$\{21, 27, 22, 28, 82, 26, 83, 50, 35, 47\}$; $\{31, 74, 72, 92, 103, 75, 76, 102, 93, 73\}$;
$\{34, 98, 97, 77, 36, 99, 37, 104, 48, 49\}$; $\{40, 42, 44, 108, 89, 41, 86, 107, 62, 43\}$;
$\{45, 88, 60, 58, 109, 87, 90, 57, 59, 61\}$; $\{46, 106, 84, 79, 95, 101, 94, 81, 96, 67\}$;
$\{56, 64, 66, 69, 110, 63, 85, 78, 68, 65\}$.
Diese Bahnen haben die Lngen 5 ($2\times$) und 10 ($10\times$).

Die X_1-Bahnen auf den Nebenklassen von Z_1 sind
$\{1, 5, 8, 7, 2\}$; $\{4, 11, 17, 14, 16\}$; $\{6, 86, 84, 83, 85\}$;
$\{9, 20, 90, 48, 10\}$; $\{26, 28, 165, 27, 47\}$; $\{32, 116, 117, 119, 125\}$;
$\{61, 62, 65, 144, 87\}$; $\{78, 80, 79, 118, 160\}$; $\{81, 82, 120, 128, 127\}$;
$\{3, 89, 64, 29, 31, 12, 13, 30, 124, 46\}$;
$\{15, 33, 104, 106, 102, 99, 100, 147, 105, 103\}$;
$\{19, 129, 107, 38, 36, 22, 35, 34, 131, 130\}$;
$\{23, 25, 134, 96, 63, 24, 88, 95, 97, 93\}$;
$\{37, 150, 126, 75, 73, 151, 72, 74, 76, 162\}$;
$\{39, 41, 43, 122, 159, 40, 161, 149, 121, 42\}$;
$\{44, 55, 57, 59, 156, 135, 157, 132, 58, 56\}$;
$\{45, 70, 68, 164, 163, 71, 133, 136, 67, 69\}$;
$\{49, 51, 53, 66, 91, 50, 123, 158, 148, 52\}$;
$\{60, 77, 155, 140, 101, 98, 142, 141, 139, 154\}$;
$\{94, 137, 111, 109, 138, 145, 146, 108, 110, 112\}$;
$\{18, 143, 152, 54, 114, 21, 115, 113, 153, 92\}$.
Diese Bahnen haben die Lngen 5 ($9\times$) und 10 ($12\times$).

Die Y_1-Bahnen auf den Nebenklassen von W_1 sind
$\{1\}$; $\{2\}$; $\{3, 4, 5\}$; $\{6, 10, 11, 7, 9, 8\}$.
Diese Bahnen haben die Lngen 1 ($2\times$), 3 und 6.

Die Y_1-Bahnen auf den Nebenklassen von W_2 sind
$\{4, 6\}$; $\{1, 3, 2\}$; $\{5, 7, 8\}$; $\{9, 10, 11\}$.
Diese Bahnen haben die Lngen 2 und 3 ($3\times$).

Die Y_1-Bahnen auf den Nebenklassen von X_1 sind
$\{1,4,2\}$; $\{3,8,6\}$; $\{5,9,11\}$; $\{19,43,22\}$; $\{20,57,21\}$; $\{32,53,54\}$;
$\{10,66,63,42,52,56\}$; $\{12,14,40,59,60,44\}$; $\{13,37,39,49,38,36\}$;
$\{16,46,47,17,45,61\}$; $\{23,25,27,41,26,24\}$; $\{28,33,30,29,31,58\}$;
$\{34,65,55,35,64,48\}$; $\{7,50,62,15,18,51\}$.
Diese Bahnen haben die Lngen 3 (6×) und 6 (8×).

Die Y_1-Bahnen auf den Nebenklassen von Y_1 sind
$\{1\}$; $\{3\}$; $\{2,4,9\}$; $\{8,10,18\}$; $\{11,26,28\}$; $\{12,27,29\}$;
$\{5,14,99,6,7,13\}$; $\{15,106,40,17,41,16\}$; $\{19,90,39,22,98,100\}$;
$\{20,76,38,31,91,77\}$; $\{21,69,94,107,80,30\}$; $\{23,110,102,97,101,104\}$;
$\{24,93,95,25,78,92\}$; $\{32,36,34,33,35,37\}$; $\{42,45,70,79,71,44\}$;
$\{43,89,50,49,51,63\}$; $\{46,88,53,47,52,72\}$; $\{48,103,105,84,83,54\}$;
$\{55,82,61,56,62,87\}$; $\{57,59,108,86,58,60\}$; $\{64,66,67,68,81,65\}$;
$\{73,75,85,96,109,74\}$.
Diese Bahnen haben die Lngen 1 (2×), 3 (4×) und 6 (16×).

Die Y_1-Bahnen auf den Nebenklassen von Y_2 sind
$\{1,2\}$; $\{22,69,68\}$; $\{30,48,47\}$; $\{44,93,84\}$;
$\{46,49,50\}$; $\{70,78,99\}$; $\{71,72,100\}$;
$\{3,5,16,10,31,4\}$; $\{6,14,65,7,13,17\}$; $\{8,19,21,9,15,64\}$;
$\{11,24,75,33,76,12\}$; $\{18,56,79,80,57,55\}$; $\{20,63,67,32,66,83\}$;
$\{23,106,103,25,85,90\}$; $\{26,81,73,27,94,109\}$; $\{28,102,82,91,77,88\}$;
$\{29,37,87,89,36,38\}$; $\{34,45,40,35,86,74\}$; $\{39,53,104,54,51,52\}$;
$\{41,43,105,92,110,42\}$; $\{58,60,62,108,61,59\}$; $\{95,97,101,107,96,98\}$.
Diese Bahnen haben die Lngen 2, 3 (6 ×) und 6 (15×).

Die Y_1-Bahnen auf den Nebenklassen von Y_3 sind
$\{1,2\}$; $\{38,42,43,\}$; $\{39,41,40,\}$;
$\{3,9,13,24,12,4\}$; $\{5,11,23,16,18,6\}$; $\{7,70,15,10,14,25\}$;
$\{8,33,103,29,76,17\}$; $\{19,83,69,71,78,82\}$; $\{20,62,31,32,75,44\}$;
$\{21,85,90,26,109,110\}$; $\{22,37,46,35,101,36\}$; $\{27,87,104,47,77,45\}$;
$\{28,95,51,50,52,94\}$; $\{30,92,86,80,89,102\}$; $\{34,67,65,99,64,106\}$;
$\{48,61,91,97,55,88\}$; $\{49,105,66,98,68,100\}$; $\{53,79,60,54,59,81\}$;
$\{56,58,84,63,96,57\}$; $\{72,74,107,93,108,73\}$.
Diese Bahnen haben die Lngen 2, 3 (2×) und 6 (17×).

Die Y_1-Bahnen auf den Nebenklassen von Z_1 sind
$\{1,2,4\}$; $\{3,12,6\}$; $\{8,90,20\}$; $\{10,14,17\}$;

$\{13, 31, 128\}$; $\{15, 144, 99\}$; $\{18, 116, 21\}$; $\{33, 103, 80\}$;
$\{47, 143, 92\}$; $\{51, 149, 111, 52, 110, 122\}$;
$\{5, 16, 48, 7, 9, 11\}$; $\{19, 123, 23, 22, 24, 91\}$; $\{25, 50, 43, 93, 121, 49\}$;
$\{26, 153, 44, 27, 135, 152\}$; $\{28, 156, 125, 165, 119, 157\}$;
$\{29, 75, 127, 30, 120, 74\}$; $\{32, 59, 115, 117, 114, 132\}$; $\{34, 70, 39, 38, 40, 69\}$;
$\{35, 66, 68, 36, 67, 158\}$; $\{37, 73, 64, 151, 124, 72\}$; $\{41, 45, 134, 42, 97, 71\}$;
$\{46, 162, 86, 89, 85, 150\}$; $\{53, 137, 164, 148, 136, 112\}$; $\{54, 56, 58, 113, 57, 55\}$;
$\{60, 62, 118, 98, 160, 61\}$; $\{63, 138, 129, 88, 130, 146\}$;
$\{65, 101, 100, 87, 102, 142\}$; $\{76, 82, 84, 126, 83, 81\}$; $\{77, 79, 105, 154, 104, 78\}$;
$\{94, 96, 163, 145, 133, 95\}$; $\{106, 139, 141, 147, 140, 155\}$;
$\{107, 109, 161, 131, 159, 108\}$.
Diese Bahnen haben die Lngen 3 ($9\times$) und 6 ($23\times$).

Die Y_2-Bahnen auf den Nebenklassen von W_1 sind
$\{1, 2\}$; $\{3, 4, 5\}$; $\{6, 10, 11\}$; $\{7, 9, 8\}$.
Diese Bahnen haben die Lngen 2 und 3 ($2\times$).

Die Y_2-Bahnen auf den Nebenklassen von W_2 sind
$\{4\}$; $\{6\}$; $\{1, 3, 2\}$; $\{5, 7, 8, 9, 10, 11\}$.
Diese Bahnen haben die Lngen 1 ($2\times$), 3 und 6.

Die Y_2-Bahnen auf den Nebenklassen von X_1 sind
$\{10, 66, 63\}$; $\{16, 46, 47\}$; $\{17, 45, 61\}$;
$\{28, 33, 30\}$; $\{29, 31, 58\}$; $\{42, 52, 56\}$;
$\{1, 4, 2, 6, 3, 8\}$; $\{5, 9, 11, 54, 32, 53\}$;
$\{7, 50, 62, 51, 15, 18\}$; $\{12, 14, 40, 24, 41, 26\}$;
$\{13, 37, 39, 55, 34, 65\}$; $\{19, 43, 22, 57, 21, 20\}$;
$\{23, 25, 27, 44, 59, 60\}$; $\{35, 64, 48, 36, 49, 38\}$.
Diese Bahnen haben die Lngen 3 ($6\times$) und 6 ($8\times$).

Die Y_2-Bahnen auf den Nebenklassen von Y_1 sind
$\{1, 3\}$; $\{32, 36, 34\}$; $\{33, 35, 37\}$; $\{55, 82, 61\}$;
$\{56, 62, 87\}$; $\{57, 59, 108\}$; $\{58, 60, 86\}$;
$\{2, 4, 9, 10, 18, 8\}$; $\{5, 14, 99, 17, 41, 16\}$; $\{6, 7, 13, 106, 40, 15\}$;
$\{11, 26, 28, 12, 27, 29\}$; $\{19, 90, 39, 77, 31, 91\}$; $\{20, 76, 38, 100, 22, 98\}$;
$\{21, 69, 94, 65, 68, 81\}$; $\{23, 110, 102, 92, 25, 78\}$; $\{24, 93, 95, 104, 97, 101\}$;
$\{30, 107, 80, 64, 66, 67\}$; $\{42, 45, 70, 44, 79, 71\}$; $\{43, 89, 50, 105, 48, 103\}$;
$\{46, 88, 53, 73, 75, 85\}$; $\{47, 52, 72, 109, 74, 96\}$; $\{49, 51, 63, 54, 84, 83\}$.
Diese Bahnen haben die Lngen 2, 3 ($6\times$) und 6 ($15\times$).

Die Y_2-Bahnen auf den Nebenklassen von Y_2 sind
$\{1\}$; $\{2\}$; $\{39, 53, 104\}$; $\{51, 52, 54\}$; $\{95, 97, 101\}$; $\{96, 98, 107\}$;
$\{3, 5, 16, 12, 33, 76\}$; $\{4, 10, 31, 11, 24, 75\}$; $\{6, 14, 65, 82, 28, 102\}$;
$\{7, 13, 17, 88, 91, 77\}$; $\{8, 19, 21, 67, 20, 63\}$; $\{9, 15, 64, 83, 32, 66\}$;
$\{18, 56, 79, 60, 62, 58\}$; $\{22, 69, 68, 47, 30, 48\}$; $\{23, 106, 103, 73, 26, 81\}$;
$\{25, 85, 90, 109, 27, 94\}$; $\{29, 37, 87, 38, 89, 36\}$; $\{34, 45, 40, 110, 42, 92\}$;
$\{35, 86, 74, 41, 43, 105\}$; $\{44, 93, 84, 49, 50, 46\}$; $\{55, 80, 57, 61, 59, 108\}$;
$\{70, 78, 99, 71, 72, 100\}$.
Diese Bahnen haben die Lngen 1 ($2\times$), 3 ($4\times$) und 6 ($16\times$).

Die Y_2-Bahnen auf den Nebenklassen von Y_3 sind
$\{1, 2\}$; $\{28, 95, 51\}$; $\{50, 52, 94\}$;
$\{3, 9, 13, 69, 19, 83\}$; $\{4, 24, 12, 71, 78, 82\}$; $\{5, 11, 23, 8, 33, 103\}$;
$\{6, 16, 18, 17, 29, 76\}$; $\{7, 70, 15, 101, 36, 35\}$; $\{10, 14, 25, 22, 37, 46\}$;
$\{20, 62, 31, 45, 47, 77\}$; $\{21, 85, 90, 102, 80, 89\}$; $\{26, 109, 110, 86, 30, 92\}$;
$\{27, 87, 104, 44, 32, 75\}$; $\{34, 67, 65, 68, 100, 98\}$; $\{38, 42, 43, 40, 39, 41\}$;
$\{48, 61, 91, 58, 84, 56\}$; $\{49, 105, 66, 99, 64, 106\}$; $\{53, 79, 60, 73, 93, 108\}$;
$\{54, 59, 81, 107, 72, 74\}$; $\{55, 88, 97, 57, 63, 96\}$.
Diese Bahnen haben die Lngen 2, 3 ($2\times$) und 6 ($17\times$).

Die Y_2-Bahnen auf den Nebenklassen von Z_1 sind
$\{13, 31, 128\}$; $\{18, 116, 21\}$; $\{33, 103, 80\}$; $\{34, 70, 39\}$; $\{38, 40, 69\}$;
$\{51, 149, 111\}$; $\{52, 110, 122\}$; $\{94, 96, 163\}$; $\{95, 145, 133\}$;
$+\{1, 2, 4, 3, 12, 6\}$; $\{5, 16, 48, 22, 24, 91\}$; $\{7, 9, 11, 123, 23, 19\}$;
$\{8, 90, 20, 92, 47, 143\}$; $\{10, 14, 17, 15, 144, 99\}$; $\{25, 50, 43, 152, 27, 135\}$;
$\{26, 153, 44, 49, 93, 121\}$; $\{28, 156, 125, 74, 30, 120\}$;
$\{29, 75, 127, 157, 165, 119\}$; $\{32, 59, 115, 98, 160, 61\}$;
$\{35, 66, 68, 87, 102, 142\}$; $\{36, 67, 158, 101, 100, 65\}$;
$\{37, 73, 64, 41, 45, 134\}$; $\{42, 97, 71, 124, 72, 151\}$;
$\{46, 162, 86, 146, 88, 130\}$; $\{53, 137, 164, 55, 113, 57\}$;
$\{54, 56, 58, 112, 148, 136\}$; $\{60, 62, 118, 114, 132, 117\}$;
$\{63, 138, 129, 150, 89, 85\}$; $\{76, 82, 84, 78, 154, 104\}$;
$\{77, 79, 105, 81, 126, 83\}$; $\{106, 139, 141, 108, 131, 159\}$;
$\{107, 109, 161, 155, 147, 140\}$.
Diese Bahnen haben die Lngen 3 ($9\times$) und 6 ($23\times$).

Die Y_3-Bahnen auf den Nebenklassen von W_1 sind
$\{1, 2\}$; $\{3, 4, 5\}$; $\{6, 9, 11, 7, 10, 8\}$.

Diese Bahnen haben die Lngen 2, 3 und 6.

Die Y_3-Bahnen auf den Nebenklassen von W_2 sind
$\{4,6\}$; $\{1,3,2\}$; $\{5,10,8,9,7,11\}$.
Diese Bahnen haben die Lngen 2, 3 und 6.

Die Y_3-Bahnen auf den Nebenklassen von X_1 sind
$\{7,50,62\}$; $\{15,18,51\}$; $\{1,8,2,3,4,6\}$;
$\{5,53,11,32,9,54\}$; $\{10,52,63,42,66,56\}$; $\{12,25,40,23,14,27\}$;
$\{13,64,39,35,37,48\}$; $\{16,45,47,17,46,61\}$; $\{19,57,22,20,43,21\}$;
$\{24,59,26,44,41,60\}$; $\{28,31,30,29,33,58\}$; $\{34,38,55,49,65,36\}$.
Diese Bahnen haben die Lngen 3 (2×) und 6 (10×).

Die Y_3-Bahnen auf den Nebenklassen von Y_1 sind
$\{1,3\}$; $\{42,45,70\}$; $\{44,79,71\}$;
$\{2,18,9,10,4,8\}$; $\{5,15,99,40,14,106\}$; $\{6,16,13,41,7,17\}$;
$\{11,27,28,12,26,29\}$; $\{19,76,39,20,90,38\}$; $\{21,66,94,64,69,67\}$;
$\{22,91,100,31,98,77\}$; $\{23,93,102,24,110,95\}$; $\{25,101,92,97,78,104\}$;
$\{30,68,80,65,107,81\}$; $\{32,35,34,33,36,37\}$; $\{43,83,50,84,89,54\}$;
$\{46,96,53,74,88,109\}$; $\{47,85,72,75,52,73\}$; $\{48,51,105,49,103,63\}$;
$\{55,62,61,56,82,87\}$; $\{57,60,108,58,59,86\}$.
Diese Bahnen haben die Lngen 2, 3 (2×) und 6 (17×).

Die Y_3-Bahnen auf den Nebenklassen von Y_2 sind
$\{1,2\}$; $\{29,37,87\}$; $\{36,38,89\}$;
$\{3,24,16,11,5,75\}$; $\{4,33,31,12,10,76\}$; $\{6,77,65,91,14,88\}$;
$\{7,102,17,28,13,82\}$; $\{8,66,21,32,19,83\}$; $\{9,63,64,20,15,67\}$;
$\{18,59,79,61,56,108\}$; $\{22,48,68,30,69,47\}$; $\{23,94,103,27,106,109\}$;
$\{25,81,90,26,85,73\}$; $\{34,105,40,43,45,41\}$; $\{35,92,74,42,86,110\}$;
$\{39,52,104,51,53,54\}$; $\{44,50,84,49,93,46\}$; $\{55,62,57,60,80,58\}$;
$\{70,72,99,71,78,100\}$; $\{95,98,101,96,97,107\}$.
Diese Bahnen haben die Lngen 2, 3 (2×) und 6 (17×).

Die Y_3-Bahnen auf den Nebenklassen von Y_3 sind
$\{1\}$; $\{2\}$; $\{3,78,13,71,9,82\}$; $\{4,19,12,69,24,83\}$;
$\{5,29,23,17,11,76\}$; $\{6,33,18,8,16,103\}$; $\{7,46,15,37,70,22\}$;
$\{10,35,25,36,14,101\}$; $\{20,87,31,27,62,104\}$; $\{21,92,90,30,85,86\}$;
$\{26,89,110,80,109,102\}$; $\{28,52,51,50,95,94\}$; $\{32,77,44,47,75,45\}$;
$\{34,66,65,105,67,49\}$; $\{38,41,43,39,42,40\}$; $\{48,57,91,96,61,63\}$;

$\{53, 74, 60, 72, 79, 107\}$; $\{54, 108, 81, 93, 59, 73\}$; $\{55, 58, 97, 56, 88, 84\}$;
$\{64, 68, 99, 98, 106, 100\}$.
Diese Bahnen haben die Lngen 1 ($2\times$) und 6 ($18\times$).

Die Y_3-Bahnen auf den Nebenklassen von Z_1 sind
$\{13, 31, 128\}$; $\{18, 116, 21\}$; $\{33, 103, 80\}$;
$\{1, 12, 4, 3, 2, 6\}$; $\{5, 19, 48, 23, 16, 123\}$; $\{7, 91, 11, 24, 9, 22\}$;
$\{8, 143, 20, 47, 90, 92\}$; $\{10, 99, 17, 144, 14, 15\}$; $\{25, 153, 43, 26, 50, 44\}$;
$\{27, 121, 152, 93, 135, 49\}$; $\{28, 75, 125, 29, 156, 127\}$;
$\{30, 119, 74, 165, 120, 157\}$; $\{32, 60, 115, 118, 59, 62\}$;
$\{34, 40, 39, 38, 70, 69\}$; $\{35, 65, 68, 100, 66, 101\}$;
$\{36, 142, 158, 102, 67, 87\}$; $\{37, 42, 64, 71, 73, 97\}$;
$\{41, 151, 134, 72, 45, 124\}$; $\{46, 138, 86, 63, 162, 129\}$;
$\{51, 110, 111, 52, 149, 122\}$; $\{53, 56, 164, 54, 137, 58\}$;
$\{55, 148, 57, 112, 113, 136\}$; $\{61, 132, 160, 114, 98, 117\}$;
$\{76, 79, 84, 77, 82, 105\}$; $\{78, 126, 104, 81, 154, 83\}$;
$\{85, 146, 89, 130, 150, 88\}$; $\{94, 95, 163, 133, 96, 145\}$;
$\{106, 109, 141, 107, 139, 161\}$; $\{108, 147, 159, 155, 131, 140\}$.
Diese Bahnen haben die Lngen 3 ($3\times$) und 6 ($26\times$).

3.6.5 Der symmetrische Fall: $\omega_1 = 66,\ \omega_2 = 110$

Sei also $\mathcal{D} = (\mathcal{P}, \mathcal{B}, I)$ ein symmetrisches (176,50,14) Design, auf dessen Punkten und Blöcken die Gruppe $G \cong L_2(11)$ in jeweils zwei Bahnen der Längen $\omega_1 = \Omega_1 = 66$ und $\omega_2 = \Omega_2 = 110$ operiert. Sei P_1 ein Repräsentant der ersten Punktbahn und P_2 einer der zweiten; ebenso seien x_1 bzw. x_2 Repräsentanten der ersten bzw. zweiten Blockbahn.

Wir können $G_{P_1} = G_{x_1} = X_1$ wählen. - Als Stabilisator von P_2 bzw. x_2 kommen die Untergruppen vom Index 110 in Frage; ohne Einschränkung ziehen wir nur deren Repräsentanten Y_1, Y_2 und Y_3 in Betracht. Alle Möglichkeiten, die sich daraus ergeben, wurden getestet. Designs ergaben sich nur für $G_{P_2} = G_{x_2} = Y_1$ und für $G_{P_2} = G_{x_2} = Y_2$. Da G einen äußeren Automorphismus besitzt, der Y_1 und Y_2 vertauscht, sind die mit Y_2 erhaltenen Designs isomorph zu denen, die mit Y_1 konstruiert wurden. Wir notieren hier die 16 Designs, die mit Y_1 berechnet wurden:

Design $\mathcal{D}_{12}$:

$$
\begin{aligned}
\langle x_1\rangle \cap P_1^G &= \{2,3,4,5,7,9,11,14,15,16,17,43,44,45,47\}\\
\langle x_1\rangle \cap P_2^G &= \{8,15,17,19,22,23,28,29,40,41,42,43,49,55,56,57,64,65,\\
&\quad 66,68,73,74,75,76,77,78,79,80,86,90,94,95,96,97,100\}\\
\langle x_2\rangle \cap P_1^G &= \{1,2,4,12,14,20,21,28,29,30,31,32,33,40,44,53,54,57,\\
&\quad 58,59,60\}\\
\langle x_2\rangle \cap P_2^G &= \{1,2,3,4,9,20,31,38,43,49,50,51,57,58,59,60,63,64,65,\\
&\quad 66,67,68,76,77,81,86,89,91,108\}
\end{aligned}
$$

Design $\mathcal{D}_{13}$:

$$
\begin{aligned}
\langle x_1\rangle \cap P_1^G &= \{2,3,4,5,7,9,11,14,15,16,17,43,44,45,47\}\\
\langle x_1\rangle \cap P_2^G &= \{8,15,17,19,22,23,28,29,40,41,42,43,49,55,56,57,\\
&\quad 64,65,66,68,73,74,75,76,77,78,79,80,86,90,94,95,96,\\
&\quad 97,100\}\\
\langle x_2\rangle \cap P_1^G &= \{3,5,6,8,9,11,19,22,23,24,25,26,27,28,29,30,31,33,41,\\
&\quad 43,58\}\\
\langle x_2\rangle \cap P_2^G &= \{1,3,8,10,18,19,21,22,30,39,48,54,57,58,59,60,69,80,\\
&\quad 83,84,86,90,94,98,100,103,105,107,108\}
\end{aligned}
$$

Design $\mathcal{D}_{14}$:

$$
\begin{aligned}
\langle x_1\rangle \cap P_1^G &= \{2,3,4,5,7,9,11,14,15,16,17,43,44,45,47\}\\
\langle x_1\rangle \cap P_2^G &= \{7,8,9,13,14,19,21,22,23,28,40,41,42,59,60,61,62,73,\\
&\quad 74,75,76,77,78,79,80,83,94,95,96,97,99,101,102,105,\\
&\quad 107\}\\
\langle x_2\rangle \cap P_1^G &= \{1,2,4,12,14,20,21,28,29,30,31,32,33,40,44,53,54,57,\\
&\quad 58,59,60\}\\
\langle x_2\rangle \cap P_2^G &= \{1,3,5,6,7,12,13,14,24,25,27,29,48,54,55,56,61,62,78,\\
&\quad 82,83,84,87,92,93,95,99,103,105\}
\end{aligned}
$$

Design $\mathcal{D}_{15}$:

$$
\begin{aligned}
\langle x_1\rangle \cap P_1^G &= \{2,3,4,5,7,9,11,14,15,16,17,43,44,45,47\}\\
\langle x_1\rangle \cap P_2^G &= \{7,8,9,13,14,19,21,22,23,28,40,41,42,59,60,61,62,73,\\
&\quad 74,75,76,77,78,79,80,83,94,95,96,97,99,101,102,105,\\
&\quad 107\}\\
\langle x_2\rangle \cap P_1^G &= \{3,5,6,8,9,11,19,22,23,24,25,26,27,28,29,30,31,33,41,\\
&\quad 43,58\}\\
\langle x_2\rangle \cap P_2^G &= \{1,3,11,15,16,17,23,26,28,40,41,43,49,50,51,55,56,61,\\
&\quad 62,63,82,87,89,97,101,102,104,106,110\}
\end{aligned}
$$

Design $\mathcal{D}_{16}$:

$$
\begin{aligned}
\langle x_1\rangle \cap P_1^G &= \{2,3,4,5,7,9,11,15,16,17,30,31,32,34,35\}\\
\langle x_1\rangle \cap P_2^G &= \{1,2,4,5,6,16,28,29,34,35,36,37,38,44,45,46,47,48,\\
&\quad 58,64,65,66,68,73,78,84,85,91,92,93,95,96,106,108,\\
&\quad 109\}\\
\langle x_2\rangle \cap P_1^G &= \{13,16,17,19,20,21,22,32,36,37,38,39,43,45,46,47,49,\\
&\quad 53,54,57,61\}\\
\langle x_2\rangle \cap P_2^G &= \{1,2,3,4,9,15,16,17,20,31,38,40,41,43,49,50,51,63,73,\\
&\quad 74,75,76,77,85,89,91,96,106,109\}
\end{aligned}
$$

Design $\mathcal{D}_{17}$:

$$
\begin{aligned}
\langle x_1\rangle \cap P_1^G &= \{2,3,4,5,7,9,11,15,16,17,30,31,32,34,35\}\\
\langle x_1\rangle \cap P_2^G &= \{1,2,4,5,6,16,28,29,34,35,36,37,38,44,45,46,47,48,58,\\
&\quad 64,65,66,68,73,78,84,85,91,92,93,95,96,106,108,109\}\\
\langle x_2\rangle \cap P_1^G &= \{5,9,11,16,17,19,20,21,22,34,35,43,45,46,47,48,55,57,\\
&\quad 61,64,65\}\\
\langle x_2\rangle \cap P_2^G &= \{1,3,5,6,7,8,10,13,14,18,19,22,39,46,47,48,52,53,54,\\
&\quad 72,83,84,88,90,98,99,100,103,105\}
\end{aligned}
$$

Design $\mathcal{D}_{18}$:

$$
\begin{aligned}
\langle x_1\rangle \cap P_1^G &= \{2,3,4,5,7,9,11,15,16,17,30,31,32,34,35\}\\
\langle x_1\rangle \cap P_2^G &= \{3,7,8,9,12,13,14,27,30,34,35,36,37,38,63,67,69,70,71,\\
&\quad 72,74,75,76,77,81,82,85,87,88,89,91,92,93,99,109\}\\
\langle x_2\rangle \cap P_1^G &= \{13,16,17,19,20,21,22,32,36,37,38,39,43,45,46,47,49,\\
&\quad 53,54,57,61\}\\
\langle x_2\rangle \cap P_2^G &= \{1,3,12,21,24,25,27,29,30,48,54,69,73,74,75,78,80,83,\\
&\quad 84,85,92,93,94,95,96,103,105,107,109\}
\end{aligned}
$$

Design $\mathcal{D}_{19}$:

$$
\begin{aligned}
\langle x_1\rangle \cap P_1^G &= \{2,3,4,5,7,9,11,15,16,17,30,31,32,34,35\}\\
\langle x_1\rangle \cap P_2^G &= \{3,7,8,9,12,13,14,27,30,34,35,36,37,38,63,67,69,70,71,\\
&\quad 72,74,75,76,77,81,82,85,87,88,89,91,92,93,99,109\}\\
\langle x_2\rangle \cap P_1^G &= \{5,9,11,16,17,19,20,21,22,34,35,43,45,46,47,48,55,57,\\
&\quad 61,64,65\}\\
\langle x_2\rangle \cap P_2^G &= \{1,3,11,23,26,28,43,46,47,49,50,51,52,53,63,64,65,66,\\
&\quad 67,68,72,81,88,89,97,101,102,104,110\}
\end{aligned}
$$

Design $\mathcal{D}_{20}$:

$$
\begin{aligned}
\langle x_1\rangle \cap P_1^G &= \{2,4,5,9,11,14,43,44,45,47,55,56,57,64,66\}\\
\langle x_1\rangle \cap P_2^G &= \{1,2,4,5,6,10,11,18,20,24,25,26,28,29,31,32,33,39,50,\\
&\quad 51,52,53,54,64,65,66,68,73,78,95,96,98,103,104,110\}\\
\langle x_2\rangle \cap P_1^G &= \{3,6,8,12,14,19,20,21,22,34,35,40,43,44,48,55,57,59,\\
&\quad 60,64,65\}\\
\langle x_2\rangle \cap P_2^G &= \{1,3,5,6,7,12,13,14,21,24,25,27,29,30,57,58,59,60,69,\\
&\quad 78,80,86,92,93,94,95,99,107,108\}
\end{aligned}
$$

Design $\mathcal{D}_{21}$:

$$
\begin{aligned}
\langle x_1\rangle \cap P_1^G &= \{2,4,5,9,11,14,43,44,45,47,55,56,57,64,66\}\\
\langle x_1\rangle \cap P_2^G &= \{1,2,4,5,6,10,11,18,20,24,25,26,28,29,31,32,33,39,50,\\
&\quad 51,52,53,54,64,65,66,68,73,78,95,96,98,103,104,110\}\\
\langle x_2\rangle \cap P_1^G &= \{1,2,4,13,19,20,21,22,23,24,25,26,27,36,37,38,39,41,\\
&\quad 43,49,57\}\\
\langle x_2\rangle \cap P_2^G &= \{1,3,11,15,16,17,23,26,28,40,41,57,58,59,60,64,65,66,\\
&\quad 67,68,81,86,97,101,102,104,106,108,110\}
\end{aligned}
$$

Design $\mathcal{D}_{22}$:

$$
\begin{aligned}
\langle x_1\rangle \cap P_1^G &= \{2,4,5,9,11,14,43,44,45,47,55,56,57,64,66\}\\
\langle x_1\rangle \cap P_2^G &= \{3,7,8,9,10,11,12,13,14,18,20,24,25,26,27,31,32,33,39,\\
&\quad 50,51,52,53,54,67,74,75,76,77,81,98,99,103,104,110\}\\
\langle x_2\rangle \cap P_1^G &= \{3,6,8,12,14,19,20,21,22,34,35,40,43,44,48,55,57,59,60,\\
&\quad 64,65\}\\
\langle x_2\rangle \cap P_2^G &= \{1,2,3,4,9,15,16,17,20,31,38,40,41,55,56,61,62,64,65,\\
&\quad 66,67,68,76,77,81,82,87,91,106\}
\end{aligned}
$$

Design $\mathcal{D}_{23}$:

$$
\begin{aligned}
\langle x_1\rangle \cap P_1^G &= \{2,4,5,9,11,14,43,44,45,47,55,56,57,64,66\}\\
\langle x_1\rangle \cap P_2^G &= \{3,7,8,9,10,11,12,13,14,18,20,24,25,26,27,31,32,33,39,\\
&\quad 50,51,52,53,54,67,74,75,76,77,81,98,99,103,104,110\}\\
\langle x_2\rangle \cap P_1^G &= \{1,2,4,13,19,20,21,22,23,24,25,26,27,36,37,38,39,41,43,\\
&\quad 49,57\}\\
\langle x_2\rangle \cap P_2^G &= \{1,3,5,6,7,8,10,13,14,18,19,21,22,30,39,55,56,61,62,69,\\
&\quad 80,82,87,90,94,98,99,100,107\}
\end{aligned}
$$

Design $\mathcal{D}_{24}$:

$$\begin{aligned}
\langle x_1\rangle \cap P_1^G &= \{2,4,5,9,11,30,31,32,34,35,55,56,57,64,66\}\\
\langle x_1\rangle \cap P_2^G &= \{1,2,4,5,6,8,15,17,28,30,43,49,55,56,57,63,69,70,71,\\
&\quad 72,73,74,75,76,77,78,82,86,87,88,89,90,95,96,100\}\\
\langle x_2\rangle \cap P_1^G &= \{1,2,4,7,10,15,18,20,21,32,42,50,51,52,53,54,56,57,62,\\
&\quad 63,66\}\\
\langle x_2\rangle \cap P_2^G &= \{1,3,11,15,16,17,23,26,28,40,41,64,65,66,67,68,73,74,\\
&\quad 75,81,85,96,97,101,102,104,106,109,110\}
\end{aligned}$$

Design $\mathcal{D}_{25}$:

$$\begin{aligned}
\langle x_1\rangle \cap P_1^G &= \{2,4,5,9,11,30,31,32,34,35,55,56,57,64,66\}\\
\langle x_1\rangle \cap P_2^G &= \{1,2,4,5,6,8,15,17,28,30,43,49,55,56,57,63,69,70,71,\\
&\quad 72,73,74,75,76,77,78,82,86,87,88,89,90,95,96,100\}\\
\langle x_2\rangle \cap P_1^G &= \{3,5,6,7,8,9,10,11,15,18,19,22,42,43,50,51,52,56,62,\\
&\quad 63,66\}\\
\langle x_2\rangle \cap P_2^G &= \{1,3,5,6,7,12,13,14,21,24,25,27,29,30,46,47,52,53,69,\\
&\quad 72,78,80,88,92,93,94,95,99,107\}
\end{aligned}$$

Design $\mathcal{D}_{26}$:

$$\begin{aligned}
\langle x_1\rangle \cap P_1^G &= \{2,4,5,9,11,30,31,32,34,35,55,56,57,64,66\}\\
\langle x_1\rangle \cap P_2^G &= \{3,8,12,16,21,27,28,44,45,46,47,48,58,59,60,61,62,67,\\
&\quad 73,74,75,76,77,78,81,83,84,95,96,101,102,105,106,107,\\
&\quad 108\}\\
\langle x_2\rangle \cap P_1^G &= \{1,2,4,7,10,15,18,20,21,32,42,50,51,52,53,54,56,57,62,\\
&\quad 63,66\}\\
\langle x_2\rangle \cap P_2^G &= \{1,3,5,6,7,8,10,13,14,18,19,21,22,30,39,69,73,74,75,\\
&\quad 80,85,90,94,96,98,99,100,107,109\}
\end{aligned}$$

Design $\mathcal{D}_{27}$:

$$\begin{aligned}
\langle x_1\rangle \cap P_1^G &= \{2,4,5,9,11,30,31,32,34,35,55,56,57,64,66\}\\
\langle x_1\rangle \cap P_2^G &= \{3,8,12,16,21,27,28,44,45,46,47,48,58,59,60,61,62,67,\\
&\quad 73,74,75,76,77,78,81,83,84,95,96,101,102,105,106,107,108\}\\
\langle x_2\rangle \cap P_1^G &= \{3,5,6,7,8,9,10,11,15,18,19,22,42,43,50,51,52,56,62,63,\\
&\quad 66\}\\
\langle x_2\rangle \cap P_2^G &= \{1,2,3,4,9,15,16,17,20,31,38,40,41,46,47,52,53,64,65,\\
&\quad 66,67,68,72,76,77,81,88,91,106\}
\end{aligned}$$

Mit Hilfe des Programmes incfilter [16] konnte gezeigt werden: $\mathcal{D}_{12} \cong \mathcal{D}_{13} \cong \mathcal{D}_{14} \cong \mathcal{D}_{15}$; $\mathcal{D}_{16} \cong \mathcal{D}_{17} \cong \mathcal{D}_{18} \cong \mathcal{D}_{19}$; $\mathcal{D}_{20} \cong \mathcal{D}_{21} \cong \mathcal{D}_{22} \cong \mathcal{D}_{23}$; $\mathcal{D}_{24} \cong \mathcal{D}_{25} \cong \mathcal{D}_{26} \cong \mathcal{D}_{27}$. Ferner: Die Designs $\mathcal{D}_{12}$, $\mathcal{D}_{16}$, $\mathcal{D}_{20}$ und $\mathcal{D}_{24}$ sind paarweise nichtisomorph; allerdings ist $\mathcal{D}_{12}^T \cong \mathcal{D}_{16}$ und $\mathcal{D}_{20}^T \cong \mathcal{D}_{24}$.

Mit [22] wurde gezeigt: Die volle Automorphismengruppe aller dieser Designs $\mathcal{D}_{12}, \ldots, \mathcal{D}_{27}$ hat die Ordnung 660 und ist daher isomorph zu $L_2(11)$.

3.6.6 Der unsymmetrische Fall: $\omega_1 = 11, \quad \omega_2 = 165$

Sei jetzt also $\mathcal{D} = (\mathcal{P}, \mathcal{B}, I)$ ein symmetrisches (176,50,14) Design, auf dessen Punkten $G \cong L_2(11)$ in zwei Bahnen der Längen $\omega_1 = 11$ und $\omega_2 = 165$ operiert. Sei P_1 ein Repräsentant der ersten Punktbahn und P_2 einer der zweiten. Sei ferner x_1 ein Repräsentant der Blockbahn der Länge $\Omega_1 = 66$ und x_2 einer der Blockbahn der Länge $\Omega_2 = 110$.

Für P_1 kommt als Stabilisator ein G-Konjugiertes von W_1 oder W_2 in Frage. Da G einen äußeren Automorphismus besitzt, der die Konjugiertenklassen von W_1 und W_2 vertauscht, können wir o. B. d. A. $G_{P_1} = W_1$ annehmen. Weiterhin sind wir frei, $G_{P_2} = Z_1$ und $G_{x_1} = X_1$ zu wählen.

Mit Hilfe eines Computers wurden für $G_{x_2} \in \{Y_1, Y_2, Y_3\}$ alle Möglichkeiten getestet. Mit $G_{x_2} \in \{Y_2, Y_3\}$ konnten keine symmetrischen Designs konstruiert werden. Die Wahl $G_{x_2} = Y_1$ lieferte zwlf Inzidenzmatrizen für symmetrische Designs. Wir nennen die dazugehörigen Designs $\mathcal{D}_1, \ldots, \mathcal{D}_{12}$ und beschreiben sie, indem wir die Punkte angeben, die jeweils mit x_1 bzw. x_2 inzidieren; dabei sei jeder Punkt mit der Nummer seiner zugehörigen Nebenklasse identifiziert, wie sie auch bei der Darstellung von G als Permutationsgruppe verwendet wurde.

Design $\mathcal{D}_{28}$:

$$\begin{aligned}
\langle x_1\rangle \cap P_1^G &= \{2,3,4,6,7\}\\
\langle x_1\rangle \cap P_2^G &= \{3,4,6,9,10,11,12,13,14,16,17,20,29,30,31,32,46,48,64,\\
&\quad 78,79,80,83,84,85,86,89,90,94,108,109,110,111,112,116,\\
&\quad 117,118,119,124,125,137,138,145,146,160\}\\
\langle x_2\rangle \cap P_1^G &= \{1,2\}\\
\langle x_2\rangle \cap P_2^G &= \{3,5,6,7,8,9,11,12,16,18,20,21,33,34,38,39,40,41,42,\\
&\quad 45,48,54,55,56,57,58,63,69,70,71,80,88,90,97,103,106,\\
&\quad 113,116,129,130,134,138,139,140,141,146,147,155\}
\end{aligned}$$

Design $\mathcal{D}_{29}$:

$$\begin{aligned}
\langle x_1\rangle \cap P_1^G &= \{2,3,4,6,7\}\\
\langle x_1\rangle \cap P_2^G &= \{3,4,6,9,10,11,12,13,14,16,17,20,29,30,31,32,46,48,64,\\
&\quad 78,79,80,83,84,85,86,89,90,94,108,109,110,111,112,116,\\
&\quad 117,118,119,124,125,137,138,145,146,160\}\\
\langle x_2\rangle \cap P_1^G &= \{1,2\}\\
\langle x_2\rangle \cap P_2^G &= \{1,2,4,18,19,21,22,23,24,33,34,37,38,39,40,46,47,53,64,\\
&\quad 69,70,72,73,80,85,86,89,91,92,103,107,108,109,112,116,\\
&\quad 123,124,131,136,137,143,148,150,151,159,161,162,164\}
\end{aligned}$$

Design $\mathcal{D}_{30}$:

$$\begin{aligned}
\langle x_1\rangle \cap P_1^G &= \{2,3,4,6,7\}\\
\langle x_1\rangle \cap P_2^G &= \{1,2,5,7,8,9,10,15,20,32,33,45,48,61,62,65,67,68,69,\\
&\quad 70,71,81,82,87,90,99,100,102,103,104,105,106,116,117,
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
& \quad 119, 120, 125, 127, 128, 133, 136, 144, 147, 163, 164\} \\
\langle x_2 \rangle \cap P_1^G &= \{1, 2\} \\
\langle x_2 \rangle \cap P_2^G &= \{1, 2, 4, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 16, 18, 21, 31, 35, 36, 37, 48, 51, 52, \\
& \quad 54, 55, 56, 57, 58, 64, 66, 67, 68, 72, 73, 99, 107, 108, 109, 110, \\
& \quad 111, 113, 116, 122, 124, 128, 131, 144, 149, 151, 158, 159, 161\}
\end{aligned}
$$

Design $\mathcal{D}_{31}$:

$$
\begin{aligned}
\langle x_1 \rangle \cap P_1^G &= \{2, 3, 4, 6, 7\} \\
\langle x_1 \rangle \cap P_2^G &= \{1, 2, 5, 7, 8, 9, 10, 15, 20, 32, 33, 45, 48, 61, 62, 65, 67, 68, 69, \\
& \quad 70, 71, 81, 82, 87, 90, 99, 100, 102, 103, 104, 105, 106, 116, 117, \\
& \quad 119, 120, 125, 127, 128, 133, 136, 144, 147, 163, 164\} \\
\langle x_2 \rangle \cap P_1^G &= \{1, 2\} \\
\langle x_2 \rangle \cap P_2^G &= \{3, 6, 10, 12, 13, 14, 17, 18, 19, 21, 22, 23, 24, 31, 41, 42, 45, 51, \\
& \quad 52, 53, 65, 71, 87, 91, 97, 100, 101, 102, 106, 110, 111, 112, 116, \\
& \quad 122, 123, 128, 134, 136, 137, 139, 140, 141, 142, 147, 148, 149, \\
& \quad 155, 164\}
\end{aligned}
$$

Design $\mathcal{D}_{32}$:

$$
\begin{aligned}
\langle x_1 \rangle \cap P_1^G &= \{2, 3, 4, 6, 7\} \\
\langle x_1 \rangle \cap P_2^G &= \{1, 2, 4, 5, 7, 8, 11, 14, 16, 17, 18, 21, 26, 27, 28, 39, 40, 41, \\
& \quad 42, 43, 47, 54, 78, 79, 80, 81, 82, 92, 113, 114, 115, 118, 120, 121, \\
& \quad 122, 127, 128, 143, 149, 152, 153, 159, 160, 161, 165\} \\
\langle x_2 \rangle \cap P_1^G &= \{1, 2\} \\
\langle x_2 \rangle \cap P_2^G &= \{5, 7, 9, 10, 11, 13, 14, 16, 17, 25, 31, 33, 37, 43, 47, 48, 49, 50, \\
& \quad 53, 64, 72, 73, 80, 92, 93, 94, 95, 96, 103, 106, 112, 121, 124, 128, \\
& \quad 133, 136, 137, 139, 140, 141, 143, 145, 147, 148, 151, 155, 163, \\
& \quad 164\}
\end{aligned}
$$

Design $\mathcal{D}_{33}$:

$$
\begin{aligned}
\langle x_1\rangle \cap P_1^G &= \{2,3,4,6,7\}\\
\langle x_1\rangle \cap P_2^G &= \{1,2,4,5,7,8,11,14,16,17,18,21,26,27,28,39,40,41,42,43,\\
&\quad 47,54,78,79,80,81,82,92,113,114,115,118,120,121,122,\\
&\quad 127,128,143,149,152,153,159,160,161,165\}\\
\langle x_2\rangle \cap P_1^G &= \{1,2\}\\
\langle x_2\rangle \cap P_2^G &= \{8,13,15,19,20,22,23,24,26,27,31,33,41,42,44,45,54,55,\\
&\quad 56,57,58,71,80,90,91,94,95,96,97,99,103,107,108,109,\\
&\quad 113,123,128,131,133,134,135,144,145,152,153,159,161,\\
&\quad 163\}
\end{aligned}
$$

Design $\mathcal{D}_{34}$:

$$
\begin{aligned}
\langle x_1\rangle \cap P_1^G &= \{5,8,9,10,11\}\\
\langle x_1\rangle \cap P_2^G &= \{1,2,5,6,7,8,9,10,19,20,22,32,34,35,36,38,44,48,55,56,\\
&\quad 57,58,59,61,62,65,83,84,85,86,87,90,107,116,117,119,\\
&\quad 125,129,130,131,132,135,144,156,157\}\\
\langle x_2\rangle \cap P_1^G &= \{1,2\}\\
\langle x_2\rangle \cap P_2^G &= \{1,2,4,5,7,9,11,13,16,25,31,33,34,38,39,40,43,47,48,\\
&\quad 49,50,60,61,62,69,70,76,80,81,82,83,84,92,93,98,103,107,\\
&\quad 108,109,118,121,126,128,131,143,159,160,161\}
\end{aligned}
$$

Design $\mathcal{D}_{35}$:

$$
\begin{aligned}
\langle x_1\rangle \cap P_1^G &= \{5,8,9,10,11\}\\
\langle x_1\rangle \cap P_2^G &= \{1,2,5,6,7,8,9,10,19,20,22,32,34,35,36,38,44,48,55,56,\\
&\quad 57,58,59,61,62,65,83,84,85,86,87,90,107,116,117,119,\\
&\quad 125,129,130,131,132,135,144,156,157\}\\
\langle x_2\rangle \cap P_1^G &= \{1,2\}\\
\langle x_2\rangle \cap P_2^G &= \{3,6,8,12,13,19,20,22,23,24,26,27,31,32,33,34,38,39,
\end{aligned}
$$

40, 44, 59, 69, 70, 77, 78, 79, 80, 90, 91, 103, 104, 105, 106, 114, 115, 117, 123, 128, 132, 135, 139, 140, 141, 147, 152, 153, 154, 155}

Design $\mathcal{D}_{36}$:

$$
\begin{aligned}
\langle x_1\rangle \cap P_1^G &= \{5,8,9,10,11\}\\
\langle x_1\rangle \cap P_2^G &= \{4,6,9,10,11,14,16,17,20,23,24,25,26,27,28,47,48,60,\\
&\quad 63,77,78,79,80,83,84,85,86,88,90,93,95,96,97,98,101,\\
&\quad 118,134,139,140,141,142,154,155,160,165\}\\
\langle x_2\rangle \cap P_1^G &= \{1,2\}\\
\langle x_2\rangle \cap P_2^G &= \{5,7,8,9,11,13,15,16,18,20,21,28,31,35,36,41,42,45,48,\\
&\quad 66,67,68,71,76,81,82,83,84,90,94,95,96,97,99,116,119,\\
&\quad 125,126,128,133,134,144,145,156,157,158,163,165\}
\end{aligned}
$$

Design $\mathcal{D}_{37}$:

$$
\begin{aligned}
\langle x_1\rangle \cap P_1^G &= \{5,8,9,10,11\}\\
\langle x_1\rangle \cap P_2^G &= \{4,6,9,10,11,14,16,17,20,23,24,25,26,27,28,47,48,60,\\
&\quad 63,77,78,79,80,83,84,85,86,88,90,93,95,96,97,98,101,\\
&\quad 118,134,139,140,141,142,154,155,160,165\}\\
\langle x_2\rangle \cap P_1^G &= \{1,2\}\\
\langle x_2\rangle \cap P_2^G &= \{10,13,14,17,18,19,21,22,23,24,29,30,31,37,47,64,65,72,\\
&\quad 73,74,75,77,78,79,87,91,92,94,95,96,100,101,102,104,\\
&\quad 105,116,120,123,124,127,128,133,142,143,145,151,154,\\
&\quad 163\}
\end{aligned}
$$

Design $\mathcal{D}_{38}$:

$$
\langle x_1\rangle \cap P_1^G = \{5,8,9,10,11\}
$$

$$\begin{aligned}
\langle x_1\rangle \cap P_2^G &= \{1,2,4,5,7,8,11,14,16,17,26,27,28,37,47,49,50,51,52,\\
&\quad 53,61,62,65,66,72,73,74,75,76,81,82,87,91,120,123,126,\\
&\quad 127,128,144,148,150,151,158,162,165\}\\
\langle x_2\rangle \cap P_1^G &= \{1,2\}\\
\langle x_2\rangle \cap P_2^G &= \{3,5,6,7,9,10,11,12,14,16,17,18,21,28,33,48,51,52,53,\\
&\quad 60,61,62,63,80,88,98,103,110,111,112,116,118,119,122,\\
&\quad 125,129,130,136,137,138,146,148,149,156,157,160,164,\\
&\quad 165\}
\end{aligned}$$

Design $\mathcal{D}_{39}$:

$$\begin{aligned}
\langle x_1\rangle \cap P_1^G &= \{5,8,9,10,11\}\\
\langle x_1\rangle \cap P_2^G &= \{1,2,4,5,7,8,11,14,16,17,26,27,28,37,47,49,50,51,52,\\
&\quad 53,61,62,65,66,72,73,74,75,76,81,82,87,91,120,123,126,\\
&\quad 127,128,144,148,150,151,158,162,165\}\\
\langle x_2\rangle \cap P_1^G &= \{1,2\}\\
\langle x_2\rangle \cap P_2^G &= \{1,2,4,15,18,19,21,22,23,24,29,30,32,33,46,51,52,54,\\
&\quad 55,56,57,58,59,74,75,80,85,86,89,91,99,103,110,111,\\
&\quad 113,114,115,116,117,120,122,123,127,132,144,149,150,\\
&\quad 162\}
\end{aligned}$$

Mit Hilfe des Programmes incfilter [16] konnte gezeigt werden: $\mathcal{D}_{28} \cong \mathcal{D}_{29} \cong \mathcal{D}_{30} \cong \mathcal{D}_{31} \cong \mathcal{D}_{32} \cong \mathcal{D}_{33}$ und $\mathcal{D}_{34} \cong \mathcal{D}_{35} \cong \mathcal{D}_{36} \cong \mathcal{D}_{37} \cong \mathcal{D}_{38} \cong \mathcal{D}_{39}$; ferner: Die Designs $\mathcal{D}_{28}$ und $\mathcal{D}_{34}$ sind nichtisomorph. Letzteres ergibt sich auch durch die Statistik der Schnitte je dreier Blöcke.

Die volle Automorphismengruppe aller dieser Designs $\mathcal{D}_{28}, \ldots, \mathcal{D}_{39}$ ist isomorph zu $L_2(11)$ und hat die Ordnung 660. Mithin sind alle diese Designs nicht selbstdual, denn kein Blockstabilisator ist zu einem Punktstabilisator isomorph.

Insgesamt haben wir bewiesen:

3.6.6 Satz *Ist $\mathcal{D}$ ein symmetrisches $(176, 50, 14)$ Design, auf dessen Punkten eine Gruppe $G \cong L_2(11)$ in genau zwei Bahnen operiert, so ist G die volle Automorphismengruppe von $\mathcal{D}$, und es tritt genau einer der drei folgenden Fälle auf:*

(1) Die Punktbahnen haben die Längen $\omega_1 = 66$ und $\omega_2 = 110$. Zu jeder Blockbahn von G gibt es eine Punktbahn gleicher Länge. Alle Punkt- und Blockstabilisatoren sind isomorph zu D_{10} oder Σ_3. Das Design $\mathcal{D}$ ist zu genau einem der Designs $\mathcal{D}_{12}$, $\mathcal{D}_{16}$, $\mathcal{D}_{20}$ und $\mathcal{D}_{24}$ isomorph. Es gilt $\mathcal{D}_{12}^T \cong \mathcal{D}_{16}$ und $\mathcal{D}_{20}^T \cong \mathcal{D}_{24}$.

(2) Die Punktbahnen haben die Längen $\omega_1 = 11$ und $\omega_2 = 165$; die Blockbahnlängen sind $\Omega_1 = 66$ und $\Omega_2 = 110$. Punktstabilisatoren sind isomorph zu A_5 oder E_4, Blockstabilisatoren sind isomorph zu D_{10} oder Σ_3. Das Design $\mathcal{D}$ ist zu genau einem der Designs $\mathcal{D}_{28}$ und $\mathcal{D}_{34}$ isomorph.

(3) $\mathcal{D}^T$ ist zu einem der Designs in Fall (2) isomorph.

3.7 $L_2(11)$ (3 Bahnen)

Folgende Fragestellung wollen wir in diesem Abschnitt betrachten:

3.7.1 Problem *Sei $G \cong L_2(11)$. Sei $\mathcal{D} = (\mathcal{P}, \mathcal{B}, I)$ ein symmetrisches (176,50,14) Design mit $G \leq Aut\,\mathcal{D}$. Die Gruppe G operiere auf den Punkten von $\mathcal{D}$ in drei Bahnen. Welche Möglichkeiten gibt es dann für den Isomorphietyp von $\mathcal{D}$?*

Seien im Folgenden G und $\mathcal{D}$ wie in obiger Problemstellung.

3.7.1 Definierende Relationen

Im Atlas [2] finden wir auf Seite 7 nachstehende Präsentation für $G \cong L_2(11)$:

$$\begin{aligned} G \quad = \quad \langle \quad a,b,c,d \quad | \quad 1 \quad &= \quad a^2 = b^2 = c^2 = d^2 \\ &= \quad (ab)^3 = (ac)^2 = (ad)^2 = (bc)^5 \\ &= \quad (bd)^2 = (cd)^3 = (abc)^5 = (bcd)^5 \quad \rangle \, . \end{aligned}$$

3.7.2 Orbitalstrukturen

Wir verwenden die Notation aus Kapitel 2.3.

3.7.2 Lemma *Die Bahnlängen bei der Operation von G auf den Punkten und Blöcken von $\mathcal{D}$ sind $\Omega_1 = \omega_1 = 11$, $\Omega_2 = \omega_2 = 55$ und $\Omega_3 = \omega_3 = 110$. Die diesbezügliche Orbitalstruktur ist eine der drei folgenden:*

$$O_1 = \begin{pmatrix} 5 & 25 & 20 \\ 5 & 13 & 32 \\ 2 & 16 & 32 \end{pmatrix}, \; O_2 = \begin{pmatrix} 5 & 25 & 20 \\ 1 & 17 & 32 \\ 4 & 14 & 32 \end{pmatrix}, \; O_3 = \begin{pmatrix} 5 & 5 & 40 \\ 5 & 17 & 28 \\ 2 & 16 & 32 \end{pmatrix}.$$

Beweis. Ist U eine Untergruppe von G, so ist der Index von U in G eine der folgenden Zahlen: 1, 11, 12, 55, 60, 66, 110, 132, 165, 220, 330 oder 660. Die Längen der Bahnen von G auf den Punkten von $\mathcal{D}$ sind also entweder 11, 55 und 110 oder 55, 55 und 66. Entsprechendes gilt für die Operation auf den Blöcken.

Wir nehmen zunächst an, dass die Punktbahnlängen $\omega_1 = \omega_2 = 55$ und $\omega_3 = 66$ sind. In jedem Fall gibt es eine Blockbahn der Länge 55. Aber die Gleichung (vgl. 2.3.8(a))

$$\gamma_{11}^2 \quad + \quad \gamma_{12}^2 \quad + \quad \frac{5}{6}\gamma_{13}^2 \quad = \quad 14 \cdot 55 \; + \; 36$$

hat keine Lösung in nichtnegativen ganzen Zahlen γ_{11}, γ_{12} und γ_{13} mit $\gamma_{11} + \gamma_{12} + \gamma_{13} = 50$. Also sind die Punktbahnlängen $\omega_1 = 11$, $\omega_2 = 55$ und $\omega_3 = 110$. Durch Dualisieren erhalten wir, dass die Blockbahnlängen ebenfalls $\Omega_1 = 11$, $\Omega_2 = 55$ und $\Omega_3 = 110$ sind.

Lösen der Gleichung 2.3.8(a) liefert für die erste Zeile einer Orbitalstruktur die folgenden Möglichkeiten:

$a_1: \quad (\quad 5 \quad 25 \quad 20 \quad)$

$a_2: \quad (\quad 5 \quad 5 \quad 40 \quad) .$

Für die erste Spalte erhalten wir aus $\Gamma_{11} + \Gamma_{21} + \Gamma_{31}$ mit 2.3.5 zunächst die Nebenbedingung $\gamma_{11} + 5\,\gamma_{21} + 10\,\gamma_{31} = 50$; berücksichtigen wir dies, so liefert 2.3.8(b) die folgenden Möglichkeiten:

$A_1: \quad (\quad 5 \quad 5 \quad 2 \quad)^T$

$A_2: \quad (\quad 5 \quad 1 \quad 4 \quad)^T .$

Die möglichen zweiten Zeilen der Orbitalstruktur sind:

$b_1: \quad (\quad 5 \quad 13 \quad 32 \quad)$

$b_2: \quad (\quad 5 \quad 17 \quad 28 \quad)$

$b_3: \quad (\quad 1 \quad 17 \quad 32 \quad) .$

Die Nebenbedingung für die zweite Spalte ist $\frac{1}{5}\,\gamma_{12} + \gamma_{22} + 2\,\gamma_{32} = 50$; die Gleichung aus 2.3.8(b) hat damit die Lösungen

$B_1: \quad (\quad 5 \quad 17 \quad 16 \quad)^T$

$B_2: \quad (\quad 25 \quad 13 \quad 16 \quad)^T$

$B_3: \quad (\quad 25 \quad 17 \quad 14 \quad)^T .$

Kombinieren wir Zeile a_1 mit Spalte A_1, so können wir als zweite Zeile b_1 oder b_2 wählen. Entscheiden wir uns für b_1, so bleibt für die zweite Spalte nur B_2, und wir erhalten $\gamma_{33} = 32$. Dies ergibt die Matrix O_1. Wählen wir b_2 für die zweite Zeile, so müsste die zweite Spalte B_3 sein; es würde $\gamma_{33} = 34$ folgen. Damit wäre die dritte Zeile gegeben durch $(\,2\ 14\ 34\,)$. Aber

$$10 \cdot 2^2 \;+\; 2 \cdot 14^2 \;+\; 34^2 \quad \neq \quad 14 \cdot 110 \;+\; 36 \,,$$

das ist ein Widerspruch zu 2.3.8(a).

Kombinieren wir Zeile a_1 mit Spalte A_2, so können wir dies nur mit Zeile b_3 und Spalte B_3 ergänzen. Es folgt $\gamma_{33} = 32$; wir haben die Matrix O_2 konstruiert.

Ist die erste Zeile wie in a_2, so kann die zweite Spalte nur B_1 sein. Wählen wir nun für die erste Spalte A_1, so ist b_2 die zweite Zeile. Es folgt $\gamma_{33} = 32$; wir haben die Matrix O_3 konstruiert. Wäre die erste Spalte A_2, so ergäbe sich b_3 für die zweite Zeile und $\gamma_{33} = 30$ würde folgen. Damit wäre die dritte Zeile gegeben durch $(\,4\ 16\ 30\,)$. Aber

$$10 \cdot 4^2 + 2 \cdot 16^2 + 30^2 \quad \neq \quad 14 \cdot 110 + 36\,,$$

das ist ein Widerspruch zu 2.3.8(a). $\square$

3.7.3 Stabilisatoren

Wir suchen nun nach den G-Konjugiertenklassen von Untergruppen der verlangten Indizes 11, 55 und 110.

3.7.3 Lemma *Es gibt in G genau zwei Konjugiertenklassen von Untergruppen vom Index* 11. *Repräsentanten dafür sind*

$$\begin{aligned} X_1 &= \langle a, b, c\rangle\,, \\ X_2 &= \langle b, c, d\rangle\,. \end{aligned}$$

Beweis. Wie in 3.6.4(a). $\square$

3.7.4 Lemma *Es gibt in G genau zwei Konjugiertenklassen von Untergruppen vom Index* 55. *Repräsentanten dafür sind*

$$\begin{aligned} Y_1 &= \langle a, b, d\rangle \cong D_{12}\,, \\ Y_2 &= \langle a, c, cbcbacbc\rangle \cong A_4\,. \end{aligned}$$

Beweis. Normalisatoren von Sylow-3-Untergruppen in G sind isomorph zu D_{12}. An den Relationen für G lesen wir $\langle a, b\rangle \cong \Sigma_3$ und $[a, d] = [b, d] = 1$ ab. Also gilt $Y_1 \cong Z_2 \times \Sigma_3 \cong D_{12}$, und alle Untergruppen dieses Isomorphietyps sind zu Y_1 konjugiert.

Ist U eine Untergruppe von G der Ordnung 12, die nicht zu D_{12} isomorph ist, so liegt U in einer zu A_5 isomorphen Untergruppe. Also gilt $U \cong A_4$, und jede maximale Untergruppe von G, die U enthält, ist zu A_5 isomorph. In A_5 gibt es genau eine Klasse von zu A_4 isomorphen Untergruppen. Da es in G zu A_5 isomorphe Untergruppen B, C gibt, die in G nicht zueinander konjugiert sind und deren Schnitt zu A_4 isomorph ist (2.5.3), gibt es in G nur eine Klasse von zu A_4 isomorphen Untergruppen. Eine Nebenklassenabzählung mit [9] von G nach Y_2 ergibt $|G : Y_2| = 55$; da $Y_2 \leq X_1 \cong A_5$, ist $Y_2 \cong A_4$. $\square$

3.7.5 Lemma *Es gibt in G genau drei Konjugiertenklassen von Untergruppen vom Index* 110. *Repräsentanten dafür sind*

$$\begin{aligned} Z_1 &= \langle ab, a\rangle \cong \Sigma_3\,, \\ Z_2 &= \langle ab, ad\rangle \cong \Sigma_3\,, \\ Z_3 &= \langle abd\rangle \cong Z_6\,. \end{aligned}$$

Beweis. Wie in 3.6.4(c). $\square$

3.7.4 Die Operation von G

Im Folgenden seien $\mathcal{D} = (\mathcal{P}, \mathcal{B}, I)$, P_1, P_2, P_3, x_1, x_2, und x_3 wie in der Problemstellung 3.7.1; die Gruppe G sei eine Untergruppe der vollen Automorphismengruppe von $\mathcal{D}$.

Wieder stellen wir mit Hilfe von [9] die Gruppe G als Permutationsgruppe auf den Nebenklassen von allen Kandidaten für Stabilisatoren dar. Mit 2.3.9 wissen wir dann schon, wie G auf den Punkten und Blöcken der möglichen Designs operiert.

Die Operation der Erzeuger von G auf den Nebenklassen von X_1 :

a → (4 5)(6 8)(7 11)(9 10)

b → (3 4)(6 7)(8 10)(9 11)

c → (2 3)(4 6)(5 8)(9 10)

d → (1 2)(6 7)(8 11)(9 10)

Die Operation der Erzeuger von G auf den Nebenklassen von X_2:

a → (1 2)(4 6)(7 8)(10 11)

b → (2 3)(4 6)(5 7)(9 10)

c → (3 5)(4 10)(6 11)(7 8)

d → (4 6)(5 9)(7 10)(8 11)

Die Operation der Erzeuger von G auf den Nebenklassen von Y_1:

a → (3 8)(4 11)(5 24)(6 12)(7 10)(13 14)(15 26)(16 19) (17 51)(18 50)(20 33)(21 37)(22 32)(25 48)(27 42)(28 40) (29 31)(30 43)(34 36)(35 45)(44 46)(47 52)(49 54)(53 55)

b → (2 3)(4 5)(6 24)(9 10)(11 12)(13 15)(14 48)(17 20) (18 22)(19 41)(23 31)(25 26)(27 30)(28 32)(33 55)(34 43) (35 47)(36 42)(37 38)(39 49)(40 50)(44 45)(46 52)(51 53)

c → (1 2)(3 4)(6 12)(7 50)(8 11)(10 18)(13 47)(14 52)(15 51) (16 25)(17 26)(19 48)(21 27)(22 29)(28 54)(30 55)(31 32) (34 44)(35 45)(36 46)(37 42)(38 41)(40 49)(43 53)

d → (2 9)(3 10)(4 26)(5 25)(6 14)(7 8)(11 15)(12 13)(17 18) (20 22)(21 54)(24 48)(27 30)(28 55)(32 33)(34 36)(35 46) (37 49)(38 39)(40 53)(42 43)(44 45)(47 52)(50 51)

Die Operation der Erzeuger von G auf den Nebenklassen von Y_2:

a → (2 7)(3 4)(5 8)(9 22)(10 50)(11 14)(12 21)(15 26)(16 27) (17 45)(18 34)(19 42)(20 53)(23 36)(24 28)(25 43)(29 46) (30 31)(32 47)(33 48)(35 44)(37 55)(38 39)(40 41)(49 51)(52 54)

b → (1 2)(3 4)(6 8)(9 17)(10 16)(12 21)(13 14)(15 51)(18 37) (19 38)(20 23)(22 44)(24 27)(25 26)(28 50)(29 30)(31 32) (33 34)(35 45)(36 52)(39 40)(41 42)(43 49)(46 47)(48 55)(53 54)

c → (2 3)(4 7)(5 20)(6 13)(8 53)(9 12)(10 51)(11 15)(14 26) (17 29)(18 44)(19 25)(21 22)(23 24)(28 36)(30 37)(31 55) (32 33)(34 35)(38 54)(39 52)(40 41)(42 43)(45 46)(47 48)(49 50)

d → (1 6)(2 8)(3 12)(4 21)(5 7)(9 53)(10 51)(15 16)(17 54) (18 19)(20 22)(23 44)(24 25)(26 27)(28 43)(29 30)(31 46) (32 47)(33 41)(34 42)(35 36)(37 38)(39 55)(40 48)(45 52)(49 50)

Die Operation der Erzeuger von G auf den Nebenklassen von Z_1:

a → (4 9)(5 13)(6 99)(7 14)(8 18)(15 16)(17 40)(19 100)
(20 77)(21 30)(22 39)(23 104)(24 92)(25 95)(26 28)(27 29)
(31 38)(32 37)(33 34)(35 36)(41 106)(42 44)(43 63)(45 71)
(46 72)(47 53)(48 54)(49 50)(51 89)(52 88)(55 87)(56 61)
(57 60)(58 59)(62 82)(64 65)(66 81)(67 68)(69 80)(70 79)
(73 74)(75 109)(76 91)(78 93)(83 103)(84 105)(85 96)(86 108)
(90 98)(94 107)(97 102)(101 110)

b → (2 4)(5 6)(7 99)(10 18)(11 26)(12 27)(13 14)(15 17)
(16 106)(19 22)(20 31)(21 107)(23 97)(24 25)(30 69)(32 33)
(34 35)(36 37)(38 91)(39 98)(40 41)(42 79)(43 49)(44 45)
(46 47)(48 84)(50 51)(52 53)(54 103)(55 56)(57 86)(58 108)
(59 60)(61 62)(63 89)(64 68)(65 66)(67 81)(70 71)(72 88)
(73 96)(74 75)(76 77)(78 95)(80 94)(82 87)(83 105)(85 109)
(90 100)(92 93)(101 102)(104 110)

c → (1 2)(3 12)(4 5)(7 14)(8 77)(9 13)(10 11)(15 86)(16 108)
(17 100)(18 20)(19 40)(21 62)(22 23)(24 33)(25 26)(27 67)
(28 95)(29 68)(30 82)(31 32)(34 92)(35 36)(37 38)(39 104)
(41 42)(43 55)(44 106)(45 46)(47 48)(49 90)(50 98)(51 52)
(53 54)(56 57)(58 84)(59 105)(60 61)(63 87)(64 65)(69 70)
(71 72)(75 76)(78 96)(79 80)(83 101)(85 93)(88 89)(91 109)
(94 97)(102 107)(103 110)

d → (1 3)(2 10)(4 18)(5 40)(6 41)(7 16)(8 9)(11 12)(13 17)
(14 15)(19 20)(21 64)(22 31)(23 24)(25 97)(26 27)(28 29)
(30 65)(32 33)(34 37)(35 36)(38 39)(43 84)(46 74)(47 75)
(48 49)(50 54)(51 103)(52 85)(53 109)(55 56)(57 58)(59 60)
(61 87)(62 82)(63 105)(66 69)(67 94)(68 107)(72 73)(76 90)
(77 100)(78 101)(80 81)(83 89)(86 108)(88 96)(91 98)(92 104)
(93 110)(95 102)(99 106)

Die Operation der Erzeuger von G auf den Nebenklassen von Z_2:

a → (1 2)(3 4)(5 31)(6 17)(7 65)(8 64)(9 21)(10 16)(11 12)
(13 14)(15 19)(18 55)(20 83)(22 68)(23 90)(24 76)(25 103)
(26 109)(27 73)(28 88)(29 38)(30 47)(32 67)(33 75)(34 74)
(35 40)(36 37)(39 52)(41 42)(43 110)(45 86)(46 50)(51 53)

(54 104)(56 57)(58 59)(60 61)(62 108)(63 66)(72 100)(77 102) (78 99)(79 80)(81 94)(82 91)(84 93)(85 106)(87 89)(92 105) (95 98)(96 97)(101 107)

b → (1 2)(3 10)(4 5)(6 7)(8 9)(11 33)(12 24)(13 65)(14 17) (15 21)(16 31)(18 80)(19 64)(20 32)(23 25)(26 27)(28 91) (29 89)(34 35)(36 87)(37 38)(39 54)(40 86)(41 92)(42 43) (44 93)(45 74)(47 48)(49 50)(51 104)(52 53)(55 56)(57 79) (58 108)(59 60)(61 62)(63 83)(66 67)(68 69)(70 78)(71 72) (73 94)(75 76)(77 82)(81 109)(85 103)(88 102)(90 106) (95 107)(96 101)(97 98)(105 110)

c → (1 3)(2 4)(5 6)(7 8)(9 10)(11 12)(13 15)(14 19)(16 21) (17 31)(18 104)(20 43)(22 32)(23 87)(24 25)(26 91)(28 30) (33 34)(35 36)(37 40)(39 81)(44 71)(45 72)(46 53)(47 88) (48 49)(50 51)(52 94)(54 55)(56 57)(58 107)(59 101)(60 61) (62 63)(64 65)(66 108)(67 68)(69 70)(74 75)(76 103)(77 79) (78 95)(80 102)(82 109)(83 110)(84 106)(85 93)(86 100) (89 90)(92 97)(96 105)(98 99)

d → (1 2)(3 11)(4 12)(5 24)(6 91)(7 28)(8 32)(9 20)(10 33) (13 102)(14 77)(15 63)(16 75)(17 82)(18 61)(19 66)(21 83) (22 30)(23 27)(25 26)(31 76)(34 43)(35 42)(39 51)(40 41) (44 49)(45 105)(46 84)(47 68)(48 69)(50 93)(52 53)(54 104) (55 60)(56 59)(57 58)(62 80)(64 67)(65 88)(70 71)(72 78) (73 90)(74 110)(79 108)(81 85)(86 92)(94 106)(95 96)(97 98) (99 100)(101 107)(103 109)

Die Operation der Erzeuger von G auf den Nebenklassen von Z_3:

a → (1 2)(3 4)(5 6)(7 25)(8 17)(9 12)(10 15)(11 18)(13 24) (14 70)(16 23)(19 82)(20 44)(21 110)(22 36)(26 90)(27 45) (28 94)(29 103)(30 102)(31 32)(33 76)(34 106)(35 46)(37 101) (38 43)(39 40)(47 104)(48 88)(49 100)(50 51)(52 95)(53 81) (54 60)(55 61)(56 57)(58 96)(59 79)(62 75)(63 84)(64 67) (65 99)(66 98)(68 105)(69 71)(72 73)(74 108)(77 87)(78 83) (80 86)(85 109)(89 92)(91 97)(93 107)

b → (1 2)(3 24)(4 9)(5 16)(6 11)(7 10)(8 29)(12 13)(14 15) (17 33)(18 23)(19 71)(20 32)(21 26)(22 35)(25 70)(27 47)

(28 50)(30 80)(31 75)(34 99)(36 37)(40 41)(42 43)(44 62)
(45 87)(46 101)(48 97)(49 98)(51 52)(53 54)(55 91)(56 63)
(57 58)(59 60)(61 88)(64 65)(66 68)(67 106)(69 78)(72 93)
(73 74)(76 103)(77 104)(79 81)(82 83)(84 96)(85 110)(86 89)
(90 109)(92 102)(94 95)(100 105)(107 108)

c $\rightarrow$ (1 5)(2 6)(3 7)(4 25)(9 18)(10 23)(11 12)(13 14)(15 16)
(19 51)(20 38)(21 83)(22 47)(24 70)(26 27)(28 35)(29 30)
(31 76)(32 33)(34 37)(36 104)(39 80)(40 86)(41 42)(43 44)
(45 90)(46 94)(48 77)(49 97)(50 82)(52 53)(54 55)(56 85)
(57 109)(58 59)(60 61)(62 108)(63 64)(65 66)(67 84)(68 69)
(71 105)(72 73)(74 75)(78 110)(79 96)(81 95)(87 88)(89 107)
(91 100)(92 93)(98 99)(101 106)(102 103)

d $\rightarrow$ (3 71)(4 69)(5 17)(6 8)(7 37)(9 78)(10 36)(11 29)(12 83)
(13 82)(14 35)(15 22)(16 33)(18 103)(19 24)(20 27)(21 30)
(23 76)(25 101)(26 80)(28 50)(31 104)(32 47)(34 105)(38 39)
(40 43)(41 42)(44 45)(46 70)(48 96)(49 65)(51 94)(52 95)
(53 72)(54 93)(55 56)(57 61)(58 88)(59 108)(60 107)(62 87)
(63 91)(64 98)(66 67)(68 106)(73 81)(74 79)(75 77)(84 97)
(85 92)(86 90)(89 109)(99 100)(102 110)

3.7.5 Konstruktion der Designs

Es zeigt sich, dass lediglich das Higman-Design die Voraussetzungen dieses Abschnitts erfüllt. Die weitere Konstruktion wird daher auch hier in Kurzform dargestellt. Analog zu den vorherigen Abschnitten werden die Operationen der Blockstabilisatoren X_1, X_2, Y_1, Y_2, Z_1, Z_2 und Z_3 auf den Nebenklassen der Punktstabilisatoren berechnet.

Wir greifen eine schon früher verwendete Schreibweise für Punkt- und Blockstabilisatoren wieder auf: Wir sagen „die Punktstabilisatoren sind $[X_i, Y_j, Z_k]$“, falls $G_{P_1} = X_i$, $G_{P_2} = Y_j$ und $G_{P_3} = Z_k$; $1 \leq i, j, k \leq 2$. Entsprechendes sei durch die Aussage „die Blockstabilisatoren sind $[[X_i, Y_j, Z_k]]$“ausgedrückt.

Wir klären zunächst die Frage nach denjenigen Punktstabilisatoren, die zu A_5 isomorph sind. Bereits erwähnt wurde, dass $L_2(11)$ zweifach transitiv auf den Konjugierten jeder zu A_5 isomorphen Untergruppe operiert. Es gibt also insbesondere keine X_1-invariante 5-elementige Menge von G-Nebenklassen von X_1; dasselbe gilt für X_2. Ein Blick auf die möglichen Orbitalstrukturen zeigt, dass die zu A_5 isomorphen Punktstabilisatoren also nicht in G zu den zu A_5 isomorphen Blockstabilisatoren konjugiert sein können. Da G einen äußeren Automorphismus besitzt, der X_1 und X_2 vertauscht, können wir ohne Einschränkung $G_{P_1} = X_2$ und $G_{x_1} = X_1$ annehmen.

Die verbleibenden Möglichkeiten für Punkt- und Blockstabilisatoren wurden alle getestet; Designs ergaben sich nur für $G_{P_3} = Z_2$ und $G_{x_3} = Z_1$. Von den drei genannten Orbitalmatrizen konnten die letzten beiden verworfen werden, da die Einträge in der zweiten Zeile sich nicht durch Kombination von Y_1-Bahnen realisieren lassen.

Schließlich wurden genau vier symmetrische (176,50,14) Designs konstruiert, die den Bedingungen der Problemstellung genügen. Alle sind isomorph zum Higman-Design. Wir geben stellvertretend eines dieser Designs durch Repräsentanten der Blockbahnen an; wieder seien die Punkte durch die Nummer ihrer zugehörigen Stabilisatornebenklasse bezeichnet.

$$
\begin{aligned}
\langle x_1\rangle \cap P_1^G &= \{6,8,9,10,11\}\\
\langle x_1\rangle \cap P_2^G &= \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12,16,18,19,22,23,36,37,42,43,\\
&\quad\ 44,45,48,52\}\\
\langle x_1\rangle \cap P_3^G &= \{1,2,3,4,5,6,7,9,12,13,14,27,29,30,37,38,45,46,47,57\}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\langle x_2\rangle \cap P_1^G &= \{1,2,3,6,9\}\\
\langle x_2\rangle \cap P_2^G &= \{1,18,21,27,33,37,39,44,45,48,52,53,54\}\\
\langle x_2\rangle \cap P_3^G &= \{1,3,11,12,19,20,22,26,27,28,29,34,41,51,54,56,61,62,\\
&\quad\ 63,65,67,72,73,74,77,78,80,81,82,90,92,98\}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\langle x_3\rangle \cap P_1^G &= \{6,9\}\\
\langle x_3\rangle \cap P_2^G &= \{1,16,18,20,24,30,31,34,36,37,40,43,46,51,52,55\}\\
\langle x_3\rangle \cap P_3^G &= \{1,3,6,7,13,15,24,28,31,40,41\}
\end{aligned}
$$

Wir haben bewiesen:

3.7.6 Satz *Sei* $G \cong L_2(11)$ *und* $\mathcal{D} = (\mathcal{P}, \mathcal{B}, I)$ *ein symmetrisches (176,50,14) Design mit* $G \leq Aut\,\mathcal{D}$ *. Die Gruppe* G *operiere auf den Punkten von* $\mathcal{D}$ *in drei Bahnen. Dann ist* $\mathcal{D}$ *isomorph zum symmetrischen Higman-Design* $\mathcal{D}_{Higman}$.

3.8 Übersicht

Wir stellen die bisher bekannten symmetrischen (176,50,14) Designs in einer Tabelle zusammen. Leider konnte der 2-Rang von $\mathcal{D}_{1000}$ [14] nicht in Erfahrung gebracht werden.

Design $\mathcal{D}$	$Aut\,\mathcal{D}$	$\lvert Aut\,\mathcal{D}\rvert$	$\mathcal{D}^T$	$rank_2(\mathcal{D})$	Konstruktion
$\mathcal{D}_{Higman}$	HS	44.352.000	$\mathcal{D}_{Higman}$	22	[11], 3.1
$\mathcal{D}_{Janko}$	$(Z_4)^3 : F_{21}$	1.344	$\mathcal{D}_{Janko}$	48	[13]
$\mathcal{D}_{1000}$	$Ex_{125} : Z_8$	1.000	$\mathcal{D}_{1000}$	?	[14]
$\mathcal{D}_1$	$E_{16}.\Sigma_6$	11.520	$\mathcal{D}_1$	46	3.2
$\mathcal{D}_{11}$	$E_{16} : A_5$	960	$\mathcal{D}_{11}$	64	3.3
$\mathcal{D}_{12}$	$L_2(11)$	660	$\mathcal{D}_{16}$	66	3.6
$\mathcal{D}_{16}$	$L_2(11)$	660	$\mathcal{D}_{12}$	66	3.6
$\mathcal{D}_{20}$	$L_2(11)$	660	$\mathcal{D}_{24}$	66	3.6
$\mathcal{D}_{24}$	$L_2(11)$	660	$\mathcal{D}_{20}$	66	3.6
$\mathcal{D}_{28}$	$L_2(11)$	660	$\mathcal{D}_{28}^T$	66	3.6
$\mathcal{D}_{28}^T$	$L_2(11)$	660	$\mathcal{D}_{28}$	66	3.6
$\mathcal{D}_{34}$	$L_2(11)$	660	$\mathcal{D}_{34}^T$	66	3.6
$\mathcal{D}_{34}^T$	$L_2(11)$	660	$\mathcal{D}_{34}$	66	3.6

Nun seien noch die Statistiken der Schnitte je dreier Blöcke genannt. Für alle $\binom{176}{3} = 893.200$ ungeordneten Tripel von Blöcken x, y und z wird die Anzahl der mit x und y und z inzidenten Punkte bestimmt. Dann wird gezählt, wie oft jede Anzahl vorkommt. Dies ist oft ein praktisches Kriterium, um Nichtisomorphie festzustelllen. Wieder fehlen die Angaben zu $\mathcal{D}_{1000}$ [14].

Design $\mathcal{D}$	0	1	2	3	4
$\mathcal{D}_{Higman}$	0	0	0	369.600	462.000
$\mathcal{D}_{Janko}$	1.344	11.200	73.920	264.768	331.632
$\mathcal{D}_{1000}$	?	?	?	?	?
$\mathcal{D}_{1}$	5.760	14.400	75.200	243.840	317.040
$\mathcal{D}_{11}$	960	12.640	90.880	244.720	301.760
$\mathcal{D}_{12}$	110	17.160	85.140	246.400	302.280
$\mathcal{D}_{16}$	0	26.840	60.060	260.480	308.660
$\mathcal{D}_{20}$	110	5.940	81.840	300.300	267.300
$\mathcal{D}_{24}$	110	5.940	81.840	300.300	267.300
$\mathcal{D}_{28}$	55	26.400	61.600	257.400	312.510
$\mathcal{D}_{28}^T$	110	17.160	85.140	246.400	302.280
$\mathcal{D}_{34}$	7.095	11.220	64.900	261.580	326.370
$\mathcal{D}_{34}^T$	7.040	11.660	63.360	264.660	322.520

Design $\mathcal{D}$	5	6	7	8	≥ 9
$\mathcal{D}_{Higman}$	0	0	0	61.600	0
$\mathcal{D}_{Janko}$	133.056	49.728	14.336	13.216	0
$\mathcal{D}_{1000}$	?	?	?	?	?
$\mathcal{D}_{1}$	156.480	66.240	8.640	5.600	0
$\mathcal{D}_{11}$	164.640	60.800	8.400	8.400	0
$\mathcal{D}_{12}$	166.760	49.500	23.760	2.090	0
$\mathcal{D}_{16}$	169.400	38.500	25.520	3.740	0
$\mathcal{D}_{20}$	148.940	58.960	27.060	2.750	0
$\mathcal{D}_{24}$	148.940	58.960	27.060	2.750	0
$\mathcal{D}_{28}$	166.320	40.040	25.080	3.795	0
$\mathcal{D}_{28}^T$	166.760	49.500	23.760	2.090	0
$\mathcal{D}_{34}$	147.180	44.660	27.060	3.135	0
$\mathcal{D}_{34}^T$	150.260	43.120	27.500	3.080	0

Kapitel 4

Ein symmetrisches (144,66,30) Design in M_{12}

4.1 Definition des Designs

Folgenden Satz werden wir in diesem Kapitel beweisen:

4.1.1 Satz *Sei* $G \cong M_{12}$. *Sei* $L \cong L_2(11)$ *eine maximale Untergruppe von* G . *Seien* $L_1, L_2, \ldots, L_{144}$ *die verschiedenen* G*-Konjugierten von* L.

Definiere eine Inzidenzstruktur $\mathcal{D} = (\mathcal{P}, \mathcal{B}, I)$ *durch* $\mathcal{P} = \{P_1, P_2, \ldots, P_{144}\}$, $\mathcal{B} = \{B_1, B_2, \ldots, B_{144}\}$ *und* $P_i \, I \, B_j \iff L_i \cap L_j \cong D_{10}$; $1 \leq i, j \leq 144$.

Dann ist $\mathcal{D}$ *ein symmetrisches* $(144, 66, 30)$ *Design mit* $G \leq Aut\, \mathcal{D}$.

Zum Beweis werden wir eine Permutationsdarstellung von M_{12} auf den Nebenklassen einer zu $L_2(11)$ isomorphen maximalen Untergruppe verwenden.

4.2 Definierende Relationen und Operation von M_{12}

Im Atlas [2] finden wir auf Seite 32 nachstehende definierende Relationen für M_{12} :

$$\begin{aligned} M_{12} \cong G &= \langle a, b, c, d \,|\, a^{11} = b^5 = c^2 = d^2 = (bc)^2 = \\ &\qquad = (bd)^2 = (ac)^3 = (ad)^3 = (dcb)^2 = 1\,, a^b = a^3 \rangle\,. \end{aligned}$$

Zählen wir diese Gruppe nach den Nebenklassen von $L := \langle a, b, c \rangle$ ab, so erhalten wir $|G : L| = 144$. Also gilt $L \cong L_2(11)$. Die Erzeuger von G operieren wie folgt auf diesen Nebenklassen:

a → (2 3 5 6 7 8 9 10 11 12 4)
(13 14 40 29 15 46 49 55 35 38 21)
(16 52 33 59 84 105 81 115 56 34 62)
(17 22 27 69 31 37 19 20 28 43 48)
(18 36 63 60 24 30 39 47 32 78 23)
(25 66 89 96 65 61 98 53 26 42 76)
(41 80 139 116 132 104 143 138 134 144 103)
(44 110 125 126 137 79 121 129 111 120 71)
(45 51 131 94 95 83 93 106 128 127 72)
(50 57 107 133 73 136 142 119 97 86 140)
(54 141 113 75 74 123 91 85 82 70 88)
(58 77 124 90 92 101 102 122 100 99 67)
(64 118 135 130 114 117 109 68 112 87 108)

b → (3 6 12 8 7)(4 11 5 9 10)(13 26 16 22 18)
(14 25 34 19 24)(15 42 59 48 30)(17 32 40 96 115)
(20 47 21 61 33)(23 35 76 81 28)(27 60 38 89 84)
(29 98 105 37 36)(31 78 46 66 52)(39 55 53 56 69)
(41 134 103 104 80)(43 63 49 65 62)(44 126 110 121 71)
(45 54 73 77 68)(50 58 114 131 91)(51 75 107 102 64)
(57 90 135 106 88)(67 118 95 141 119)(70 86 101 112 94)
(72 82 142 122 130)(74 136 92 117 83)(79 129 125 120 111)
(85 133 99 87 93)(97 124 108 127 123)(100 109 128 113 140)
(116 143 132 144 139)

c → (3 13)(4 14)(5 19)(6 18)(7 26)(8 16)(9 34)(10 25) (11 24)
(12 22)(15 35)(17 40)(20 21)(23 42)(27 60) (28 59)(29 105)
(30 76)(31 55)(33 61)(36 37)(38 84) (39 78)(41 103)(43 65)

(44 110)(45 54)(46 69)(48 81) (49 63)(51 70)(52 53)(56 66)
(57 106)(58 91)(64 86) (68 73)(71 121)(72 83)(74 130)(75 94)
(79 125)(80 104) (82 117)(85 99)(87 93)(90 135)(92 142)(95 141)
(96 115)(100 109)(101 102)(107 112)(108 127)(111 120) (114 131)
(116 139)(118 119)(122 136)(123 124)(128 140) (143 144)

d $\rightarrow$ (1 2)(3 4)(5 8)(6 10)(7 11)(9 12)(13 34)(14 16) (15 112)
(17 95)(18 19)(20 45)(21 77)(22 24)(23 51) (25 26)(27 41)
(28 75)(29 121)(30 94)(31 53)(32 118) (33 54)(35 64)(36 71)
(37 44)(38 104)(39 46)(40 67) (42 101)(43 50)(47 68)(48 70)
(49 131)(52 56)(55 78) (57 113)(58 62)(59 86)(60 80)(61 73)
(63 91)(65 114) (66 69)(72 74)(76 102)(79 87)(81 107)(82 83)
(84 134) (85 120)(88 140)(89 103)(90 128)(92 122)(93 111)
(96 119)(97 144)(98 110)(99 129)(100 106)(105 126) (108 143)
(109 135)(115 141)(116 127)(117 142)(123 139) (124 132)
(125 133)(130 136)(137 138)

Die obige Permutationsdarstellung wurde verwendet, um in der Gruppe $G \cong M_{12}$ mit GAP [20] rechnen zu können. Zunächst wurde gezeigt, dass L tatsächlich maximal in G liegt. (Es gibt in M_{12} auch nichtmaximale zu $L_2(11)$ isomorphe Untergruppen.)

Lässt man nun die Elemente von L auf diesen Nebenklassen operieren, so erhält man Bahnen der Längen 1, 11, 11, 55 und 66. Die Gruppe M_{12} ist hier also als Rang-5-Permutationsgruppe vom Grade 144 dargestellt.

An den Bahnlängen lesen wir sofort die Ordnungen der Schnitte $L \cap L_j$, $1 \leq j \leq 144$, ab; sie sind 660, 60, 60, 12 und 10. Insbesondere schneidet L genau 66 G-Konjugierte von L in einer zu D_{10} isomorphen Untergruppe.

4.3 Konstruktion des Designs

Mit nachstehendem Programm wurde mit Hilfe von GAP [20] eine Inzidenzmatrix zur Inzidenzstruktur $\mathcal{D}$ erzeugt:

```
for i in [1..144] do
for j in [1..144] do
if Size(Intersection(G,Stabilizer[i],Stabilizer[j]))=10
   then Print("1 ");
   else Print("0 ");
fi;
od;
Print("\n");
od;
```

Nun ist es leicht, die Behauptung des Satzes anhand der berechneten Matrix zu beweisen.

4.3.1 Bemerkung *(1) Wir identifizieren wieder die Punkte des Designs mit den Nummern ihrer zugehörigen Nebenklassen aus der Permutationsdarstellung von G. Ein „base block“ ist mit folgenden Punkten inzident:* $2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 32, 33, 34, 35, 36, 37, 38, 39, 40, 42, 43, 46, 47, 48, 49, 52, 53, 55, 56, 59, 60, 61, 62, 63, 65, 66, 69, 76, 78, 81, 84, 89, 96, 98, 105, 115.$

(2) Mit [22] und GAP [20] wurde gezeigt: $Aut\mathcal{D} \cong Aut\, M_{12}$.

(3) Kürzlich konstruierte W. Lempken zwei weitere symmetrische (144,66,30) Designs mit M_{12} [19] .

Literaturverzeichnis

[1] E. F. Assmus Jr., J. D. Key. Designs and Their Codes. Cambridge: Cambridge University Press, 1992

[2] J. H. Conway, R. T. Curtis, S. P. Norton, R. A. Parker, R. A. Wilson. Atlas of Finite Groups. Oxford: Clarendon Press, 1985.

[3] Th. Beth, D. Jungnickel und H. Lenz. Design Theory. Mannheim, Wien, Zürich: Bibliographisches Institut Wissenschaftsverlag, 1985.

[4] A. Beutelspacher. Einführung in die endliche Geometrie. Mannheim, Wien, Zürich: Bibliographisches Institut Wissenschaftsverlag, 1982.

[5] R. H. Bruck und H. J. Ryser. The nonexistence of certain finite projective planes, Canad. J. Math. 1 (1949), 88-93.

[6] S. Chowla und H. J. Ryser. Combinatorial problems. Canad. J. Math. 2 (1950), 93-99.

[7] C. J. Colbourn, J. H. Dinitz. The CRC Handbook of combinatorial designs. Boca Raton: CRC Press Onc, 1996.

[8] P. Dembowski. Finite Geometries. Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, Band 44. Berlin, Heidelberg, New York : Springer-Verlag, 1968.

[9] J. Hřabé de Angelis. ENUM. Ein Computerprogramm zur Abzählung von Nebenklassen in endlichen Gruppen, das den Todd-Coxeter-Algorithmus verwendet. Persönlich mitgeteilt durch J. Hřabé de Angelis.

[10] D. G. Higman and C. C. Sims. A Simple Group of Order 44.352.000. Math. Z. 105 (1968), 110-113.

[11] G. Higman. On the Simple Group of D. G. Higman and C. C. Sims, Ill. J. Math 13 (1969), 74-80.

[12] B. Huppert, Endliche Gruppen I, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, Tokyo, 1983.

[13] Z. Janko. On Symmetric Designs with Parameters (176,50,14), J. Combin. Theory, Ser. A 72 (1995), 310-314.

[14] Z. Janko. Persönliche Mitteilung.

[15] W. M. Kantor. Classification of 2-transitive symmetric designs. Graphs Combin. 1 (1985), 165-166.

[16] V. Krčadinac. Incfilter.exe. Programm zur Bestimmung von Isomorphieklassen von Inzidenzstrukturen. Persönlich mitgeteilt durch D. Held.

[17] C. W. H. Lam, L. Thiel, S. Swiercz. The non-existence of finite projective planes of order 10. Canad. J. Math. 41 (1989), 1117-1123.

[18] E. S. Lander. Symmetric Designs : An Algebraic Approach. Cambridge: Cambridge University Press, 1983. London Mathematical Society Lecture Notes Series 74.

[19] W. Lempken. Two new symmetric (144,66,30) designs. Preprint Nr. 7 (1999), Institut für experimentelle Mathematik Essen.

[20] A. Niemeyer, N. Nickel et al., Computational Group Theory System Gap, Lehrstuhl D für Mathematik, RWTH Aachen, 1993.

[21] M. Suzuki. Group Theory I. Springer Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1982.

[22] V. Tonchev. Automo.c. Programm zur Berechnung der Automorphismengruppen von Inzidenzstrukturen. Persönlich mitgeteilt durch Z. Janko, Heidelberg.