Parameterschätzung in Verzweigungsprozessen mit Immigration

Diplomarbeit in Mathematik

vorgelegt dem Fachbereich Physik, Mathematik und Informatik
der Johannes Gutenberg-Universität Mainz
von

Patrick Jahn

Mainz, im Oktober 2005

Inhaltsverzeichnis

Abkürzungen

CLS	conditional least squares
cadlag	continuité à droite et limites à gauche (rechtsstetig mit linkem Grenzwert)
GW	Galton-Watson Prozess
GWI	Galton-Watson Prozess mit Immigration
iid	independent, identically distributed (unabhängig, identisch verteilt)
p.g.f.	probability generating funktion
WCLS	weighted conditional least squares
ZV	Zufallsvariable

Symbole und Bezeichnungen

$\mathbb{N}$	Menge der natürlichen Zahlen
$\mathbb{N}_0$	$\mathbb{N} \cup \{0\}$
$\mathbb{Z}$	Menge der ganzen Zahlen
$\mathbb{R}$	Menge der reellen Zahlen
$\mathbb{R}^+$	Menge der nicht negativen reellen Zahlen
$[r]$	$= \max\{k \in \mathbb{Z} \| k \leq r\}$
$L^p(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$	$= \{f : \Omega \to \mathbb{R},\ \mathfrak{A}$-messbar mit $\\|f\\|_p < \infty\}$, für $p \in [1, \infty]$
$\\|f\\|_p$	$= (\int_\Omega \|f\|^p \mathrm{d}\mu)^{1/p}$, für $p \in [1, \infty)$
$\\|f\\|_\infty$	$= \sup_{x \in \Omega} \|f(x)\|$
$C(E)$	$= \{f : E \to \mathbb{R}$ stetig$\}$, wobei $E \subset \mathbb{R}$
$\hat{C}(E)$	$= \{f : E \to \mathbb{R}$ stetig und $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = 0\}$, wobei $E \subset \mathbb{R}^+$ unbeschränkt
$C_c^\infty(\mathbb{R}^+)$	$= \{f : R^+ \to \mathbb{R}$ unendlich oft differenzierbar mit kompaktem Träger$\}$
$D^+[0, \infty)$	Raum der cadlag-Funktionen von $\mathbb{R}^+$ nach $\mathbb{R}^+$
$\mu(f)$	$= \int f \mathrm{d}\mu$
$\mathscr{B}(E)$	Borelsche σ-Algebra eines metrischen Raumes E
$\mathfrak{P}(\mathbb{M})$	Potenzmenge der Menge $\mathbb{M}$
$\mathbb{1}_\mathbb{M}$	Indikatorfunktion der Menge $\mathbb{M}$
$\mathbb{M}^c$	Komplement der Menge $\mathbb{M}$
$\xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{L}}$	schwache bzw. Verteilungs-Konvergenz für $n \to \infty$
$\xrightarrow[n\to\infty]{P}$	P-stochastische Konvergenz für $n \to \infty$
$\xrightarrow[n\to\infty]{f.s.}$	P-fast sichere Konvergenz für $n \to \infty$
$\mathcal{L}(Z \| P)$	$= P^Z$, die Verteilung der ZV Z unter dem Wahrscheinlichkeitsmaß P
$\langle M \rangle_n$	vorhersehbare quadratische Variation eines Martingals M bis zur Zeit n
$\mathrm{o}(\cdot)$, $\mathrm{O}(\cdot)$	*Landau Symbole*
$\mathrm{o}_p(\cdot)$	*Landau Symbol*, mit P-stochastischer Konvergenz
$\ll$	absolutstetig (dominiert)

X	Galton-Watson Prozess mit Immigration (GWI)
X_n	Anzahl der Individuen eines GWI in der n-ten Generation
Z	Galton-Watson Prozess (ohne Immigration) (GW)
Z_n	Anzahl der Individuen eines GW in der n-ten Generation
$X_n^{(i)}$	Anzahl der Individuen eines GWI in der n-ten Generation mit $X_0 = i$
$Z_n^{(i)}$	Anzahl der Individuen eines GW in der n-ten Generation mit $Z_0 = i$
$Y_{n,i}$	Anzahl der Kinder des i-ten Individuums aus der $(n-1)$-ten Generation
I_n	Anzahl der Immigranten in der n-ten Generation
$\mathscr{F}_n$	$:= \sigma(X_0, X_1, ..., X_n)$, die von $X_0, ..., X_n$ erzeugte σ-Algebra
$\mathcal{F}$	$:= (\mathscr{F}_n)_{n\geq 0}$
$p_n(i,j)$	$:= P(X_n = j \| X_0 = i)$ die n-Schritt Übergangswahrscheinlichkeit von X
$q_n(i,j)$	$:= P(Z_n = j \| Z_0 = i)$ die n-Schritt Übergangswahrscheinlichkeit von Z
$P_x[\,\cdot\,]$	$:= P[\,\cdot\, \| X_0 \equiv x]$
m	Erwartungswert von $Y_{1,1}$, $E[Y_{1,1}]$
λ	Erwartungswert von I_1, $E[I_1]$
σ^2	Varianz von $Y_{1,1}$
b^2	Varianz von I_1
τ	$:= 2\lambda/\sigma^2$
$\tilde{m}_n$	WCLS-Schätzer für m, nachdem X bis zur Zeit n beobachtet wurde
$\tilde{\lambda}_n$	WCLS-Schätzer für λ, nachdem X bis zur Zeit n beobachtet wurde
ε_n	$:= X_n - mX_{n-1} - \lambda$
δ_n	$:= \varepsilon_n (X_{n-1}+1)^{-1/2}$
A_n	$:= \sum_{i=1}^n X_i$
$\tilde{A}_n$	$:= \sum_{i=1}^n X_{i-1}$
B_n	$:= \sum_{i=1}^n \frac{1}{X_{i-1}+1}$
C_n	$:= \sum_{i=1}^n \frac{X_i}{X_{i-1}+1}$
$\tilde{C}_n$	$:= \sum_{i=1}^n \frac{X_{i-1}}{X_{i-1}+1}$

Konventionen

$$\sum_{i=n+1}^{n} \cdots \equiv 0 \qquad \text{und} \qquad \prod_{i=n+1}^{n} \cdots \equiv 1$$

$$F \cdot \mathbb{1}_{\mathbb{M}} = \begin{cases} F & \text{auf der Menge } \mathbb{M} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Einleitung

Die Theorie der Verzweigungsprozesse hat ihren Ursprung im 19. Jahrhundert. 1873 formulierte Francis Galton ein mathematisches Problem über das Aussterben von Adelsfamilien. Galton bat den Priester Henry-William Watson, der nebenbei auch Alpinist und Mathematiker war, sich dieses Problems anzunehmen. Watsons Untersuchungen gelten als ein Ursprung der Theorie über Verzweigungsprozesse. Ein Abriss der interessanten Entstehungsgeschichte dieser Theorie findet sich im Artikel [Ken] von Kendall. 1972 wurde dann eine Arbeit von I.J. Bienaymé aus dem Jahre 1845 entdeckt (vgl. [HS]). Aus dieser geht hervor, dass Bienaymé in der Lage war, die Aussterbewahrscheinlichkeit und den Zusammenhang mit der erwarteten Nachkommenschaft korrekt zu bestimmen. Neben „Verzweigungsprozess" hat sich auch die Bezeichnung *Galton-Watson Prozess* (GW) durchgesetzt. Die Bezeichnung *Bienaymé-Galton-Watson Prozess* taucht in der Literatur nur selten auf.

Der einfachste Verzweigungsprozess, der GW, ist ein zeitdiskreter Prozess, der nur Werte in den natürlichen Zahlen annimmt. Er läuft nach folgenden Regeln ab: Der Prozess startet mit einer bestimmten, eventuell zufälligen Anzahl Individuen. Jedes Individuum vermehrt sich unabhängig von allen anderen, jedoch vermehren sich alle nach der gleichen Wahrscheinlichkeitsverteilung. Jede weitere Generation vermehrt sich wieder nach denselben Regeln. Man beobachtet nach jedem Zeitschritt die Anzahl der Individuen einer Generation. Wir bezeichnen mit m die erwartete Anzahl an Nachkommen eines Individuums. Es ist bekannt, dass der Prozess ausstirbt, wenn $m \leq 1$ ist. Selbst wenn $m > 1$ ist, hat der Prozess immer noch eine gewisse Aussterbewahrscheinlichkeit. Aus diesem Grund kann ein Schätzer für den Parameter m, ohne dass Einschränkungen an das Modell oder an die Verteilung der Nachkommen gemacht werden, unmöglich konsistent sein. Damit der Prozess nicht ausstirbt, kann das Modell erweitert werden, indem für jede Generation unabhängig und stets nach derselben Wahrscheinlichkeitsverteilung Einwanderungen zugelassen werden. Die erwartete Anzahl an Immigranten in einer Generation wird mit λ bezeichnet.

In der vorliegenden Arbeit, die sich an den Ideen und Ergebnissen von Wei und Winnicki [W1], [W2] orientiert, betrachten wir den Verzweigungsprozess mit Immigration beziehungsweise den *Galton-Watson Prozess mit Immigration* (GWI). Wir unterscheiden dabei drei Fälle, den subkritischen Fall ($m < 1$), den superkritischen Fall ($m > 1$) und den kritischen Fall ($m = 1$). Ziel dieser Arbeit ist es, Schätzer für m und λ zu finden, die aufgrund von Beobachtungen der Populationsgröße einer jeden Generation ohne Vorkenntnis über den vorliegenden Fall konsistent sind. Des Weiteren soll die Konvergenzgeschwindigkeit und die asymptotische Verteilung der Schätzfehler untersucht werden. Die Untersuchungen des Schätzproblems für die Parameter m und λ wurden von Smoluchowski [Smo] 1916 eingeleitet. Wei und Winnicki entwickelten in ihrer Arbeit [W2] 1990 erstmals eine einheitliche Schätztheorie für m und λ, die alle drei Fälle abdeckt.

In Kapitel 1 werden wir nach der mathematischen Modellbeschreibung, allgemeinen Voraussetzungen und einigen Vorbereitungen Schätzer konstruieren. Diese Schätzer werden WCLS-Schätzer (**W**eighted **C**onditional **L**east **S**quares Estimators) genannt und ergeben sich nach einer Reskalierung des GWI aus der „**C**onditional **L**east **S**quares"-Methode von Klimko und Nelson [KN]. In den darauf folgenden Kapiteln untersuchen wir die WCLS-Schätzer, aufgeteilt in die drei Fälle, auf Konsistenz und Verteilung der Schätzfehler. Wir werden sehen, dass die Schätzer in allen Fällen konsistent sind, außer für λ im Falle $m > 1$. Es stellt sich nun die Frage, ob überhaupt ein konsistenter Schätzer für λ im superkritischen Fall existiert. In der Tat werden wir zeigen, dass in diesen Fall kein konsistenter Schätzer für λ existiert. Das heißt also, dass die WCLS-Schätzer für m und λ, wann immer es möglich ist, konsistent sind.
Im subkritischen Fall wird die Rekurrenz und die damit verbundene Ergodizität des GWI ausgenutzt, um mit bekannten Grenzwertsätzen zu zeigen, dass die Schätzer stark konsistent sind und die Schätzfehler für m und λ gemeinsam asymptotisch normalverteilt sind. Hingegen fordert das exponentielle Wachstum des GWI im superkritischen Fall eigene Methoden, um die starke Konsistenz des WCLS-Schätzers für m und die asymptotische Normalität seiner Schätzfehler einzusehen. Im kritischen Fall lassen sich mit Hilfe einer Approximation durch Diffusionsprozesse asymptotische Resultate beweisen, welche die Konsistenz der WCLS-Schätzer sichern und die asymptotische Verteilung der Schätzfehler für m bestimmen. Setzt man zusätzlich $2\lambda > \sigma^2$ voraus, wobei σ^2 die Varianz der Nachkommenverteilung ist, so sind die Schätzfehler des WCLS-Schätzers für λ im kritischen Fall asymptotisch normalverteilt. Es wird deutlich, dass sich die Methoden zur Untersuchung der WCLS-Schätzer im subkritischen, superkritischen und kritischen Fall gänzlich unterscheiden. Daher sind die Kapitel 2 bis 4 im Wesentlichen in sich geschlossen.

Mainz, im Oktober 2005

Patrick Jahn

Kapitel 1

Allgemeines zum GWI und das Schätzproblem

1.1 Definitionen und Vorbereitungen

Sei $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ der zugrunde liegende Wahrscheinlichkeitsraum. Seien $\{Y_{n,i}\}$ und $\{I_n\}$, wobei $n, i \in \mathbb{N}$, unabhängige Folgen von iid ZVen auf $(\Omega, \mathscr{F})$ mit Werten in $(\mathbb{N}_0, \mathfrak{P}(\mathbb{N}_0))$. Dabei seien $E[Y_{1,1}] = m$, $Var[Y_{1,1}] = \sigma^2$, $E[I_1] = \lambda$ und $Var[I_1] = b^2$. Wir definieren den *Galton Watson Prozess mit Immigration* (GWI) $X = (X_n)_{n \geq 0}$ rekursiv durch

$$X_n := \sum_{i=1}^{X_{n-1}} Y_{n,i} + I_n, \qquad n = 1, 2, \ldots, \tag{1.1.1}$$

wobei $X_0 : \Omega \longrightarrow \mathbb{N}_0$ eine $\mathscr{F}$-messbare ZV, die für alle $i, n \in \mathbb{N}$ von $Y_{n,i}$ und I_n unabhängig ist. Interpretiert man X_n als die Anzahl der Individuen in der n-ten Generation, so stellt $Y_{n,i}$ die Anzahl der Kinder des i-ten Individuums aus der (n-1)-ten Generation und I_n die Anzahl der Immigranten in der n-ten Generation dar. Setzt man $I_k \equiv 0$ für alle $k \geq 1$, so ergibt sich der „gewöhnliche“ *Galton Watson Prozess* (GW) $Z = (Z_n)_{n \geq 0}$ durch

$$Z_n := \sum_{i=1}^{Z_{n-1}} Y_{n,i}, \qquad n = 1, 2, \ldots, \tag{1.1.2}$$

wobei Z_0, ebenso wie X_0 definiert ist. Sei $\mathscr{F}_n = \sigma(X_0, X_1, ..., X_n)$, die von $X_0, X_1, ..., X_n$ erzeugte σ-Algebra und $\mathcal{F} = (\mathscr{F}_n)_n$. Nach Konstruktion sind X und Z homogene Markoff-Ketten bezüglich $\mathcal{F}$ mit Zustandsraum $\mathbb{N}_0$. Wir bezeichnen mit $p_n(i,j) = P(X_n = j | X_0 = i)$ und $q_n(i,j) = P(Z_n = j | Z_0 = i)$ die n-Schritt Übergangswahrscheinlichkeiten von X bzw. Z. Dabei schreiben wir $p(i,j)$ für $p_1(i,j)$ bzw. $q(i,j)$ für $q_1(i,j)$. Des Weiteren schreiben wir $X_n^{(i)}$ bzw. $Z_n^{(i)}$ für die Anzahl der Individuen in der n-ten Generation, wenn wir verdeutlichen wollen, dass diese von i Urvätern erzeugt wurden, also $X_0 = i$ bzw. $Z_0 = i$ ist. Da nach Konstruktion sich alle Individuen einer Generation voneinander unabhängig vermehren, erzeugt jedes Individuum einer Generation einen unabhängigen GW. Also gilt die Zerlegung

$$Z_n^{(j)} = \sum_{k=1}^{j} {}_kZ_n^{(1)}, \qquad n, j \in \mathbb{N}_0, \tag{1.1.3}$$

wobei ${}_kZ$, $k = 0, 1, \ldots$ voneinander unabhängige Galton-Watson Prozesse mit Nachkommenverteilung $\mathcal{L}(Y_{1,1}|P)$ sind. Genauso erzeugt jede Immigration einen unabhängigen GW. Da die Immigrationen jeder Generation voneinander, sowie von der Startverteilung unabhängig sind, gilt somit auch die Zerlegung

$$X_n = {}_0Z_n^{(X_0)} + \sum_{k=1}^{n} {}_kZ_{n-k}^{(I_k)}, \qquad n \in \mathbb{N}_0. \tag{1.1.4}$$

Wir führen nun weitere Kurzschreibweisen und Voraussetzungen ein, die Kapitelübergreifend gelten sollen:

$$\begin{aligned}
\varepsilon_n &:= X_n - mX_{n-1} - \lambda & \delta_n &:= \frac{X_n - mX_{n-1} - \lambda}{(X_{n-1}+1)^{1/2}} \\
A_n &:= \sum_{i=1}^{n} X_i & \tilde{A}_n &:= \sum_{i=1}^{n} X_{i-1} \\
B_n &:= \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{X_{i-1}+1} & & \\
C_n &:= \sum_{i=1}^{n} \frac{X_i}{X_{i-1}+1} & \tilde{C}_n &:= \sum_{i=1}^{n} \frac{X_{i-1}}{X_{i-1}+1} = n - B_n
\end{aligned} \tag{1.1.5}$$

Generelle Voraussetzungen

- $E[X_0^2] < \infty$
- $0 < \sigma^2, b^2 < \infty$, d.h. wir betrachten stets nicht degenerierte Nachkommen- und Immigrationsverteilungen mit endlichen zweiten Momenten.
- Wir fordern, dass X mit Zustandsraum $\mathbb{N}_0$ irreduzibel und aperiodisch ist.

Das folgende Lemma zeigt, unter welchen Bedingungen die letzte Voraussetzung erfüllt ist.

Lemma 1.1.1 *Gilt $P[Y_{1,1} = 0] > 0$, $P[Y_{1,1} = 1] > 0$ und $P[I_1 = 0] > 0$, so ist X irreduzibel und aperiodisch mit Zustandsraum $\mathbb{N}_0$.*

Beweis: Aufgrund unserer Voraussetzungen ist klar, dass $p(j,0) > 0$ für alle $j \in \mathbb{N}_0$. Denn wegen der Unabhängigkeit aller $\{Y_{n,i}\}$ und $\{I_n\}$ gilt, dass

$$p(j,0) = P\left[\sum_{i=1}^{j} Y_{1,i} + I_1 = 0\right] = \prod_{i=1}^{j} P[Y_{1,i} = 0]P[I_1 = 0] > 0.$$

Insbesondere ist $p(0,0) > 0$, so dass der Zustand 0 die Periode 1 hat. Da dies eine Klasseneigenschaft ist, hat also jeder mit 0 verbundene Zustand Periode 1. Es bleibt also noch zu zeigen, dass für alle $j \in \mathbb{N}_0$ ein $n \in \mathbb{N}_0$ existiert mit $p_n(0,j) > 0$. Sei dazu ein beliebiges $j \in \mathbb{N}_0$ vorgegeben. Da $Y_{1,1}$ und I_1 nach unseren generellen Voraussetzungen nicht degenerierte ZVen sind, existieren $l_1, l_2 \geq 1$, so dass $P(Y_{1,1} = l_1) > 0$ und $P(I_1 = l_2) > 0$. Daher ist es möglich von 0 ausgehend mit X jede vorgegebene Schranke zu überschreiten, d.h. es existiert ein $j_0 \geq j$, so dass $p_n(0,j_0) > 0$ für ein $n \geq 1$. Nun gilt aber nach Voraussetzung auch, dass

$$p(j_0,j) = P\left[\sum_{i=1}^{j_0} Y_{1,i} + I_1 = j\right] \geq \prod_{i=1}^{j} P[Y_{1,i} = 1] \prod_{i=j+1}^{j_0} P[Y_{1,i} = 0]P[I_1 = 0] > 0.$$

Mit der Chapman-Kolmogorov-Gleichung erhalten wir dann

$$p_{n+1}(0,j) \geq p_n(0,j_0)p(j_0,j) > 0$$

und die Behauptung ist gezeigt.

□

Lemma 1.1.2 *Sei $n \geq 1$ und setze $\varepsilon_n := X_n - mX_{n-1} - \lambda$. Dann gilt*

$$E[X_n|\mathscr{F}_{n-1}] = mX_{n-1} + \lambda \quad \textit{bzw.} \quad E[\varepsilon_n|\mathscr{F}_{n-1}] = 0 \tag{1.1.6}$$

und

$$E[\varepsilon_n^2|\mathscr{F}_{n-1}] = \sigma^2 X_{n-1} + b^2. \tag{1.1.7}$$

Beweis: Da $\mathbb{1}_{\{X_{n-1}=k\}}$ eine $\mathscr{F}_{n-1}$-messbare Funktion und da $Y_{n,i}$ sowie I_n unabhängig von $\mathscr{F}_{n-1}$ sind, gilt

$$\begin{aligned} E[X_n|\mathscr{F}_{n-1}] &= \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{1}_{\{X_{n-1}=k\}}}_{=1} E\left[\sum_{i=1}^{X_{n-1}} Y_{n,i} + I_n \middle| \mathscr{F}_{n-1}\right] \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} E\left[\mathbb{1}_{\{X_{n-1}=k\}}\left(\sum_{i=1}^{k} Y_{n,i} + I_n\right) \middle| \mathscr{F}_{n-1}\right] \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{1}_{\{X_{n-1}=k\}} E\left[\sum_{i=1}^{k} Y_{n,i} + I_n \middle| \mathscr{F}_{n-1}\right] \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\overset{unabh.}{=} \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{1}_{\{X_{n-1}=k\}} E\left[\sum_{i=1}^{k} Y_{n,i} + I_n\right] \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{1}_{\{X_{n-1}=k\}} (mk+\lambda) \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{1}_{\{X_{n-1}=k\}} (mX_{n-1}+\lambda) \\
&= mX_{n-1}+\lambda.
\end{aligned}
$$

Daraus folgt nun wegen der $\mathscr{F}_{n-1}$-Messbarkeit von X_{n-1}, dass

$$
E[\varepsilon_n|\mathscr{F}_{n-1}] = E[X_n - mX_{n-1} - \lambda|\mathscr{F}_{n-1}] = E[X_n|\mathscr{F}_{n-1}] - mX_{n-1} - \lambda = 0
$$

und (1.1.6) ist gezeigt. Mit denselben Argumenten wie eben erhält man (1.1.7), da

$$
\begin{aligned}
E[\varepsilon_n^2|\mathscr{F}_{n-1}] &= \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{1}_{\{X_{n-1}=k\}} E\left[\left(\sum_{i=1}^{k}(Y_{n,i}-m) + (I_n-\lambda)\right)^2 \middle| \mathscr{F}_{n-1}\right] \\
&\overset{unabh.}{=} \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{1}_{\{X_{n-1}=k\}} E\left[\left(\sum_{i=1}^{k}(Y_{n,i}-m) + (I_n-\lambda)\right)^2\right] \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{1}_{\{X_{n-1}=k\}} E\Bigg[\sum_{i=1}^{k}(Y_{n,i}-m)^2 + (I_n-\lambda)^2 \\
&\qquad + 2\sum_{i>j}(Y_{n,i}-m)(Y_{n,j}-m) + 2(I_n-\lambda)\sum_{i=1}^{k}(Y_{n,i}-m)\Bigg] \\
&\overset{unabh.}{=} \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{1}_{\{X_{n-1}=k\}} \Bigg(\sum_{i=1}^{k} E[(Y_{n,i}-m)^2] + E[(I_n-\lambda)^2] \\
&\qquad \underbrace{+ 2\sum_{i>j} E[(Y_{n,i}-m)]E[(Y_{n,j}-m)] + 2E[I_n-\lambda]\sum_{i=1}^{k} E[Y_{n,i}-m]\Bigg)}_{=0} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{1}_{\{X_{n-1}=k\}} (\sigma^2 k + b^2) = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{1}_{\{X_{n-1}=k\}} (\sigma^2 X_{n-1} + b^2) \\
&= \sigma^2 X_{n-1} + b^2.
\end{aligned}
$$

□

1.2 Konstruktion der WCLS-Schätzer

Sei $(X_n)_n$ ein stochastischer Prozess auf dem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathscr{F}, P_\theta)$ dessen Wahrscheinlichkeitsmaß vom Parameter $\theta \in \Theta$ abhängt, wobei $\Theta \subset \mathbb{R}^d$ offen. Wir bezeichnen mit $E_\theta[\,\cdot\,]$ den Erwartungswert unter P_θ. Sei weiterhin $X_n \in L^1(\Omega, \mathscr{F}, P_\theta)$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$. Eine Methode Schätzer für θ zu erhalten, ist die Summe der Quadrate

$$Q_n(\theta) := \sum_{i=1}^{n} (X_i - E_\theta[X_i|\mathscr{F}_{i-1}])^2, \qquad \theta \in \Theta,$$

in θ zu minimieren, indem man das Gleichungssystem

$$\frac{\partial Q_n(\theta)}{\partial \theta_j} = 0, \qquad j = 1, ..., d \tag{1.2.1}$$

löst, vorausgesetzt die partiellen Ableitungen existieren. Existiert die Minimalstelle $\hat{\theta}$, so ist sie ein Schätzer für θ. Man nennt dies die ***C**onditional **L**east **S**quares - Methode* (Methode der bedingt kleinsten Quadrate) von Klimko und Nelson [KN]. Diese Methode ist sinnvoll, da die „beste“ Prognose für X_n gegeben $\mathscr{F}_{n-1}$ unter P_θ gerade $E_\theta[X_n|\mathscr{F}_{n-1}]$ ist.

In unserem Fall ist der Parameter $\theta = (m, \lambda) \in \Theta = \mathbb{R}^2$ und wegen (1.1.6) ist

$$Q_n(m, \lambda) = \sum_{i=1}^{n} (X_i - mX_{i-1} - \lambda)^2$$

in m und λ zu minimieren. Das entspricht der Methode der kleinsten Quadrate bei linearer Regression bezüglich der Regressionsgleichung

$$X_n = mX_{n-1} + \lambda + \varepsilon_n \tag{1.2.2}$$

mit $\varepsilon_n := X_n - mX_{n-1} - \lambda$.
Sei nun

$$\hat{\mathbb{N}}_n := \left\{ \left(\sum_{i=1}^{n} X_{i-1} \right)^2 \geq n \sum_{i=1}^{n} X_{i-1}^2 \right\} \subset \Omega.$$

Mit einer Kurvendiskussion, analog zu der auf den nächsten Seiten, zeigt man leicht, dass (1.2.1) auf der Menge $\hat{\mathbb{N}}_n^c$ die eindeutige Lösung $(\hat{m}_n, \hat{\lambda}_n) \in \mathbb{R}^2$ besitzt, wobei

$$\hat{m}_n = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i \sum_{i=1}^{n} X_{i-1} - n \sum_{i=1}^{n} X_i X_{i-1}}{\left(\sum_{i=1}^{n} X_{i-1} \right)^2 - n \sum_{i=1}^{n} X_{i-1}^2} \cdot \mathbb{1}_{\hat{\mathbb{N}}_n^c}$$

und

$$\hat{\lambda}_n = \frac{\sum_{i=1}^n X_{i-1}X_i \sum_{i=1}^n X_{i-1} - \sum_{i=1}^n X_{i-1}^2 \sum_{i=1}^n X_i}{\left(\sum_{i=1}^n X_{i-1}\right)^2 - n\sum_{i=1}^n X_{i-1}^2} \cdot \mathbb{1}_{\hat{\mathbb{N}}_n^c}.$$

Darüber hinaus zeigt die Kurvendiskussion auch, dass $(\hat{m}_n, \hat{\lambda}_n)$ auf der Menge $\hat{\mathbb{N}}_n^c$ eine globale Minimalstelle von Q_n ist. Somit sind $\hat{m}_n$ und $\hat{\lambda}_n$ die CLS-Schätzer für m und λ (vgl. [HH] S.178). Sie wurden von Venkataraman [Ven] und Wei und Winnicki [WW] untersucht. Es stellte sich jedoch heraus, dass diese Schätzer nicht in allen Fällen konsistent sind. Daher sind sie für unsere Betrachtungen nicht weiter relevant.

Auf dem Weg bessere Schätzer zu finden, fällt auf, dass wegen (1.1.6) und (1.1.7), die bedingte Varianz der Fehlerterme ε_n in (1.2.2),

$$Var[\varepsilon_n|\mathscr{F}_{n-1}] = E[\varepsilon_n^2|\mathscr{F}_{n-1}] - E[\varepsilon_n|\mathscr{F}_{n-1}]^2 = \sigma^2 X_{n-1} + b^2,$$

unbeschränkt ist, da X unbeschränkt ist. Um die Fehlerterme besser kontrollieren zu können, schreiben wir nun (1.2.2) um zu

$$\frac{X_n}{(X_{n-1}+1)^{1/2}} = \frac{mX_{n-1}}{(X_{n-1}+1)^{1/2}} + \frac{\lambda}{(X_{n-1}+1)^{1/2}} + \frac{\varepsilon_n}{(X_{n-1}+1)^{1/2}}$$

bzw.

$$\frac{X_n}{(X_{n-1}+1)^{1/2}} = m(X_{n-1}+1)^{1/2} + \frac{\eta}{(X_{n-1}+1)^{1/2}} + \delta_n, \tag{1.2.3}$$

wobei

$$\delta_n := \frac{X_n - mX_{n-1} - \lambda}{(X_{n-1}+1)^{1/2}} \quad \text{und} \quad \eta := \lambda - m.$$

Hier gilt mit (1.1.6), dass $E[\delta_n|\mathscr{F}_{n-1}] = \frac{1}{(X_{n-1}+1)^{1/2}} E[\varepsilon_n|\mathscr{F}_{n-1}] = 0$. Die bedingte Varianz der Fehlerterme δ_n aus der „umgewichteten" Regressionsgleichung (1.2.3) ist somit beschränkt, denn

$$E[\delta_n^2|\mathscr{F}_{n-1}] = \frac{1}{X_{n-1}+1} E[\varepsilon_n^2|\mathscr{F}_{n-1}] \overset{(1.1.7)}{=} \frac{\sigma^2 X_{n-1} + b^2}{X_{n-1}+1} \leq \sigma^2 + b^2 \tag{1.2.4}$$

Wir können also hoffen, bessere Schätzer für m und λ zu finden, indem wir nun die CLS-Methode auf den reskalierten Prozess $\left(\frac{X_n}{(X_{n-1}+1)^{1/2}}\right)_n$ für den Parameter $\theta = (m, \eta)$ anwenden:

$$\begin{aligned} Q_n(m,\eta) &= \sum_{i=1}^n \left(\frac{X_i}{(X_{i-1}+1)^{1/2}} - E_\theta\left[\frac{X_i}{(X_{i-1}+1)^{1/2}} \middle| \mathscr{F}_{i-1} \right] \right)^2 \\ &= \sum_{i=1}^n \left(\frac{X_i}{(X_{i-1}+1)^{1/2}} - m(X_{i-1}+1)^{1/2} - \frac{\eta}{(X_{i-1}+1)^{1/2}} \right)^2 \end{aligned}$$

ist nach m und η stetig differenzierbar, und das Gleichungssystem (1.2.1) ist gegeben durch

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial Q_n(m,\eta)}{\partial m} = 2\sum_{i=1}^{n} \left(-X_i + m(X_{i-1}+1) + \eta\right), \\ 0 &= \frac{\partial Q_n(m,\eta)}{\partial \eta} = 2\sum_{i=1}^{n} \left(-\frac{X_i}{X_{i-1}+1} + m + \frac{\eta}{X_{i-1}+1}\right). \end{aligned} \tag{1.2.5}$$

Schreibt man (1.2.5) um, so ergibt sich mit den Bezeichnungen aus (1.1.5), dass

$$m = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i - n\eta}{\sum_{i=1}^{n}(X_{i-1}+1)} = \frac{A_n - n\eta}{\tilde{A}_n + n}$$

und

$$\eta = \frac{\sum_{i=1}^{n} \frac{X_i}{X_{i-1}+1} - nm}{\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{X_{i-1}+1}} = \frac{C_n - nm}{B_n}.$$

Wir setzen nun die untere Gleichung für η in die obere Gleichung ein und erhalten unter der Voraussetzung $(\tilde{A}_n + n)B_n - n^2 \neq 0$,

$$m = \frac{A_n B_n - nC_n + n^2 m}{(\tilde{A}_n + n)B_n}$$

$\iff$

$$m \cdot \frac{(\tilde{A}_n + n)B_n - n^2}{(\tilde{A}_n + n)B_n} = \frac{A_n B_n - nC_n}{(\tilde{A}_n + n)B_n}$$

$\iff$

$$m = \frac{A_n B_n - nC_n}{(\tilde{A}_n + n)B_n - n^2} = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{X_{i-1}+1} - n\sum_{i=1}^{n} \frac{X_i}{X_{i-1}+1}}{\sum_{i=1}^{n}(X_{i-1}+1)\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{X_{i-1}+1} - n^2} =: \tilde{m}.$$

Setzen wir nun umgekehrt m ein, so ist

$$\begin{aligned} \eta =& \frac{C_n}{B_n} - n\frac{A_n B_n - nC_n}{((\tilde{A}_n + n)B_n - n^2)B_n} \\ =& \frac{C_n((\tilde{A}_n + n)B_n - n^2) - nA_n B_n + n^2 C_n}{((\tilde{A}_n + n)B_n - n^2)B_n} \\ =& \frac{C_n(\tilde{A}_n + n) - nA_n}{(\tilde{A}_n + n)B_n - n^2} =: \tilde{\eta}. \end{aligned}$$

Da $\eta = \lambda - m$ und $\tilde{C}_n = B_n - n$, erhalten wir

$$\begin{aligned}
\tilde{\lambda} &= \tilde{m} + \tilde{\eta} \\
&= \frac{A_nB_n - nC_n + C_n(\tilde{A}_n + n) - nA_n}{(\tilde{A}_n + n)B_n - n^2} \\
&= \frac{\tilde{A}_nC_n + A_n(B_n - n)}{(\tilde{A}_n + n)B_n - n^2} \\
&= \frac{\sum_{i=1}^{n} X_{i-1} \sum_{i=1}^{n} \frac{X_i}{X_{i-1}+1} - \sum_{i=1}^{n} X_i \sum_{i=1}^{n} \frac{X_{i-1}}{X_{i-1}+1}}{\sum_{i=1}^{n}(X_{i-1}+1) \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{X_{i-1}+1} - n^2}.
\end{aligned}$$

Nach obiger Rechnung existiert also auf der Menge $\{(\tilde{A}_n + n)B_n - n^2 \neq 0\}$ mit $(\tilde{m}, \tilde{\eta})$ eine eindeutige Extremstelle von Q_n. Damit in $(\tilde{m}, \tilde{\eta})$ auch ein globales Minimum vorliegt, reicht es aus, dass die Hessematrix von Q_n

$$\mathrm{Hess}Q_n(m, \eta) = \begin{pmatrix} 2(\tilde{A}_n + n) & 2n \\ 2n & 2B_n \end{pmatrix},$$

in $(\tilde{m}, \tilde{\eta})$ strikt positiv definit ist. Da $\mathrm{Hess}Q_n(m, \eta)$ nicht mehr von m und η abhängt und alle Einträge strikt positiv sind, ist sie genau dann strikt positiv definit, wenn ihre Determinante $4(\tilde{A}_n + n)B_n - 4n^2 > 0$ bzw. $\sum_{i=1}^{n}(X_{i-1}+1) \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{X_{i-1}+1} - n^2 > 0$ ist.

Definition 1.2.1 *Die Ausnahmemenge ist durch*

$$\mathbb{N}_n := \left\{ \sum_{i=1}^{n}(X_{i-1}+1) \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{X_{i-1}+1} \leq n^2 \right\} \in \mathscr{F}_{n-1}$$

definiert. Die eben konstruierten Schätzer

$$\boxed{\tilde{m}_n := \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{X_{i-1}+1} - n \sum_{i=1}^{n} \frac{X_i}{X_{i-1}+1}}{\sum_{i=1}^{n}(X_{i-1}+1) \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{X_{i-1}+1} - n^2} \cdot \mathbb{1}_{\mathbb{N}_n^c}}$$

und

$$\boxed{\tilde{\lambda}_n := \frac{\sum_{i=1}^{n} X_{i-1} \sum_{i=1}^{n} \frac{X_i}{X_{i-1}+1} - \sum_{i=1}^{n} X_i \sum_{i=1}^{n} \frac{X_{i-1}}{X_{i-1}+1}}{\sum_{i=1}^{n}(X_{i-1}+1) \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{X_{i-1}+1} - n^2} \cdot \mathbb{1}_{\mathbb{N}_n^c}}$$

heißen WCLS-Schätzer *(**W**eighted **C**onditional **L**east **S**quares Estimators) für m und λ.*

Kapitel 2

Der subkritische Fall

Auf den folgenden Seiten werden die WCLS-Schätzer im subkritischen Fall des GWI untersucht. Sei also in diesem Kapitel $m < 1$ vorausgesetzt. Es bedarf nun einiger Vorüberlegungen.

2.1 Grenzverteilung und Ergodizität des GWI

Satz 2.1.1 *X ist rekurrent und es existiert eine $\mathbb{N}_0$-wertige ZV X_∞, so dass unabhängig von der Startverteilung X_0,*

$$X_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{L}} X_\infty \tag{2.1.1}$$

gilt. Außerdem ist $P[X_\infty = i] > 0$ für alle $i \in \mathbb{N}_0$ also ist X_∞ nicht degeneriert und es gilt

$$E[X_\infty] = \frac{\lambda}{1-m}. \tag{2.1.2}$$

Beweis: Nach (1.1.4) können wir X_n folgendermaßen schreiben,

$$X_n = \tilde{X}_n^{(0)} + Z_n^{(X_0)}.$$

Dabei ist $(Z_n^{(X_0)})_n$ ein subkritischer GW und $(\tilde{X}_n^{(0)})_n$ ein davon unabhängiger, subkritischer GWI mit derselben Übergangswahrscheinlichkeit wie X, der aber in 0 startet und somit in der ersten Generation von einer Immigrationsverteilung erzeugt wird. Nach [Jag], Theorem 2.3.1 auf S.22, stirbt jeder subkritische GW, der von einem Urvater erzeugt wurde, fast sicher aus. Daher gilt mit der Zerlegung (1.1.3), dass

$$Z_n^{(X_0)} = \sum_{i=1}^{X_0} {}_iZ_n^{(1)} \xrightarrow[n\to\infty]{f.s.} 0.$$

Da $E[I^2] = b^2 < \infty$ ist, gibt es außerdem nach [Jag], Theorem 3.1.1 auf S.55, eine $\mathbb{N}_0$-wertige ZV X_∞, so dass

$$\tilde{X}_n^{(0)} \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{L}} X_\infty.$$

Mit dem Satz von Slutsky folgt nun

$$X_n = \tilde{X}_n^{(0)} + Z_n^{(X_0)} \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{L}} X_\infty$$

und (2.1.1) ist gezeigt.

Wegen der Verteilungskonvergenz (2.1.1) für einen beliebigen Startwert, gilt für jedes k und $i \in \mathbb{N}_0$

$$\lim_{n\to\infty} p_n(k,i) = P[X_\infty = i].$$

Da X_∞ ein $\mathbb{N}_0$-wertige ZV ist, existiert ein $i_0 \in \mathbb{N}_0$, so dass $P[X_\infty = i_0] > 0$ und es gilt

$$\lim_{n\to\infty} p_n(i_0, i_0) > 0.$$

Somit ist i_0 ein positiv rekurrenter Zustand. Positive Rekurrenz ist eine Klasseneigenschaft. Da X nach Voraussetzung irreduzibel ist, folgt daher, dass X eine positiv rekurrente Markoff-Kette ist. Deshalb gilt auch

$$P[X_\infty = i] = \lim_{n\to\infty} p_n(i,i) > 0$$

für alle $i \in \mathbb{N}_0$. Insbesondere ist X_∞ nicht degeneriert.

Sei nun $f(s) := E\left[s^{Y_{1,1}}\right]$ die p.g.f. von $Y_{1,1}$ und $h(s) := E\left[s^{I_1}\right]$ die p.g.f. von I_1. [Jag], Theorem 3.1.1 auf S.55, besagt auch, dass $g(s) := E\left[s^{X_\infty}\right]$, die p.g.f. von X_∞, die Funktionalgleichung

$$g(s) = g(f(s))h(s)$$

erfüllt. Daher gilt

$$E[X_\infty] = g'(1) = f'(1)g'(f(1))h(1) + g(f(1))h'(1) = mE[X_\infty] + \lambda. \tag{2.1.3}$$

Wegen (1.1.6) ergibt sich induktiv, dass

$$\begin{aligned}\liminf_{n\to\infty} E[X_n] &= \liminf_{n\to\infty} mE[X_{n-1}] + \lambda = \dots \\ &= \liminf_{n\to\infty} \left(m^n E[X_0] + \lambda \sum_{k=0}^{n-1} m^k \right) = \frac{\lambda}{1-m} < \infty.\end{aligned}$$

Mit [Bil] Theorem 3.4 auf S.31, ist daher

$$E[X_\infty] \le \liminf_{n\to\infty} E[X_n] < \infty.$$

Also können wir (2.1.3) nach $E[X_\infty]$ auflösen und es folgt (2.1.2).

□

Definition 2.1.2 *Sei $(\hat{X}_n)_n$ eine Markoff-Kette mit Zustandsraum $(E, \mathscr{E})$. Existiert für $(\hat{X}_n)_n$ ein σ-endliches, invariantes Maß μ, wobei für alle $A \in \mathscr{E}$ mit $\mu(A) > 0$ gilt, dass*

$$P_x \left[\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}_A(\hat{X}_n) = \infty \right] = 1 \quad \textit{für alle } x \in E,$$

so ist $(\hat{X}_n)_n$ Harris-rekurrent*. (vgl. [Rev], Ch.3, §2, Definition 2.8)*

Lemma 2.1.3 *Sei $\mu = \mathcal{L}(X_\infty | P)$, mit X_∞ aus Satz 2.1.1, dann ist X Harris-rekurrent bezüglich μ.*

Beweis: Wegen Satz 2.1.1 gilt für jedes k und $i \in \mathbb{N}_0$, dass

$$\lim_{n \to \infty} p_n(k, i) = \mu(i) > 0.$$

Da $\mathbb{N}_0$ die Topologie $\mathfrak{P}(\mathbb{N}_0)$ trägt, ist $i \mapsto p(i, j)$ eine stetige und beschränkte Funktion. Mit der Definition der Verteilungskonvergenz gilt daher für alle $j \in \mathbb{N}_0$, dass

$$\mu(j) = \lim_{n \to \infty} p_{n+1}(k, j) = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=0}^{\infty} p_n(k, i) p(i, j) = \sum_{i=0}^{\infty} \mu(i) p(i, j),$$

was gerade die Invarianz von μ zeigt. Nach Voraussetzung ist X mit Zustandsraum $\mathbb{N}_0$ irreduzibel. Also ist $\mathbb{N}_0$ eine verbundene Klasse und wegen [Rev] Ch.3, §1, Theorem 1.7 folgt die Behauptung.

□

Satz 2.1.4 *Ist ein Markoff-Prozess $(\hat{X}_n)_{n \geq 0}$ mit Zustandsraum $(E, \mathscr{E})$ Harris-rekurrent bezüglich eines invarianten Maßes μ, so gilt für jedes f und g aus $L^1(E, \mathscr{E}, \mu)$ mit $f, g \geq 0$ und $\mu(g) > 0$, dass*

$$\frac{\sum_{i=0}^{n} f(\hat{X}_i)}{\sum_{i=0}^{n} g(\hat{X}_i)} \xrightarrow[n \to \infty]{f.s.} \frac{\mu(f)}{\mu(g)}.$$

Beweis: Siehe [Rev], Ch.4, §3, Theorem 3.6.

Lemma 2.1.5 *Sei X_∞ wie in Satz 2.1.1, dann gelten folgende Aussagen:*

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_{i-1} \xrightarrow[n\to\infty]{f.s.} E[X_\infty] = \frac{\lambda}{1-m} \tag{2.1.4}$$

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_{i} \xrightarrow[n\to\infty]{f.s.} E[X_\infty] = \frac{\lambda}{1-m} \tag{2.1.5}$$

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{X_{i-1}+1} \xrightarrow[n\to\infty]{f.s.} E\left[\frac{1}{X_\infty+1}\right] \tag{2.1.6}$$

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \frac{X_{i-1}}{X_{i-1}+1} \xrightarrow[n\to\infty]{f.s.} E\left[\frac{X_\infty}{X_\infty+1}\right] \tag{2.1.7}$$

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \frac{X_{i}}{X_{i-1}+1} \xrightarrow[n\to\infty]{f.s.} E\left[\frac{mX_\infty+\lambda}{X_\infty+1}\right] = m + (\lambda-m)E\left[\frac{1}{X_\infty+1}\right] \tag{2.1.8}$$

Beweis: Wegen Lemma 2.1.3 ist X bezüglich dem invarianten Maß $\mu = \mathcal{L}(X_\infty|P)$ Harris-rekurrent und wir können Satz 2.1.4 anwenden. Sei dabei im gesamten Beweis stets $g \equiv 1$, also $\mu(g) = 1$. Sei zuerst $f(x) = x$, dann ist wegen (2.1.2) $\mu(f) = E[X_\infty] = \frac{\lambda}{1-m}$ bzw. $f(x) \in L^1(N_0, \mathfrak{P}(N_0), \mu)$. Daher gilt mit Satz 2.1.4, dass

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_{i-1} = \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} X_{i} \xrightarrow[n\to\infty]{f.s.} E[X_\infty] = \frac{\lambda}{1-m}$$

und

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_{i} = \underbrace{\frac{n+1}{n}}_{\to 1}\frac{1}{n+1}\sum_{i=0}^{n} X_{i} - \underbrace{\frac{X_0}{n}}_{\to 0\ f.s.} \xrightarrow[n\to\infty]{f.s.} E[X_\infty].$$

Also sind (2.1.4) und (2.1.5) gezeigt. Setzen wir $f(x) = \frac{1}{x+1}$, so ist $f(x) \leq 1$ für $x \geq 0$, also gilt $f(x) \in L^1(N_0, \mathfrak{P}(N_0), \mu)$. Es folgt wieder wegen Satz 2.1.4, dass

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{X_{i-1}+1} = \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{X_{i}+1} \xrightarrow[n\to\infty]{f.s.} E\left[\frac{1}{X_\infty+1}\right]$$

und (2.1.6) ist bewiesen. (2.1.7) folgt daraus direkt, da

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \frac{X_{i-1}}{X_{i-1}+1} = 1 - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{X_{i-1}+1} \xrightarrow[n\to\infty]{f.s.} 1 - E\left[\frac{1}{X_\infty+1}\right] = E\left[\frac{X_\infty}{X_\infty+1}\right].$$

Um (2.1.8) einzusehen, betrachten wir nun den Prozess

$$\tilde{X} = (\tilde{X}_n)_{n\geq 1} := (X_{n-1}, X_n)_n$$

mit Zustandsraum $\mathbb{N}_0^2$ und zeigen, dass dieser ein invariantes Maß besitzt und bezüglich diesem Harris-rekurrent ist. Sei $p(i,j)$ die Übergangswahrscheinlichkeit von X, wobei $i,j \in \mathbb{N}_0$. Wir zeigen nun, dass durch

$$\tilde{p}((x,y),C) := \sum_{j=0}^{\infty} p(y,j)\mathbb{1}_C(y,j) \qquad (x,y) \in \mathbb{N}_0^2, \quad C \in \mathfrak{P}(\mathbb{N}_0^2)$$

der Übergangskern von $\tilde{X}$ gegeben ist. Dazu müssen wir prüfen, ob

$$P[\tilde{X}_{n+1} \in C|\mathscr{F}_n] = \tilde{p}(\tilde{X}_n, C) \quad \text{für alle } C \in \mathfrak{P}(\mathbb{N}_0^2). \tag{2.1.9}$$

Es reicht aus, die Aussage für jeden Punkt $(a,b) \in \mathbb{N}_0^2$ zu zeigen, da diese die σ-Algebra $\mathfrak{P}(\mathbb{N}_0^2)$ erzeugen. Da X eine Markoff-Kette ist, gilt $P[X_{n+1} = b|\mathscr{F}_n] = p(X_n, b)$. Daher erhalten wir mit

$$\begin{aligned}
P[\tilde{X}_{n+1} \in \{(a,b)\}|\mathscr{F}_n] =& E\left[\mathbb{1}_{\{X_n = a\}} \cdot \mathbb{1}_{\{X_{n+1} = b\}}|\mathscr{F}_n\right] \\
=& \mathbb{1}_{\{X_n = a\}} \cdot E\left[\mathbb{1}_{\{X_{n+1} = b\}}|\mathscr{F}_n\right] \\
=& \mathbb{1}_{\{X_n = a\}} \cdot P\left[X_{n+1} = b|\mathscr{F}_n\right] \\
=& \mathbb{1}_{\{X_n = a\}} \cdot p(X_n, b) \\
=& \sum_{j=0}^{\infty} p(X_n, j)\mathbb{1}_{(a,b)}(X_n, j) \\
=& \tilde{p}(\tilde{X}_n, \{(a,b)\})
\end{aligned}$$

die Gleichung (2.1.9). $\tilde{p}(\cdot,\cdot)$ ist also der Übergangskern von $\tilde{X}$. Sei durch

$$\tilde{\mu}(x,y) := \mu(x)p(x,y),$$

ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf $(\mathbb{N}_0^2, \mathfrak{P}(\mathbb{N}_0^2))$ definiert. Weil $\mu = \mathcal{L}(X_\infty|P)$ das invariante Maß zu X ist, gilt $\mu(j) = \sum_{i=0}^{\infty} \mu(i)p(i,j)$, für alle $j \in \mathbb{N}_0$. Es folgt

$$\begin{aligned}
\sum_{x=0}^{\infty}\sum_{y=0}^{\infty} \tilde{\mu}(x,y)\tilde{p}((x,y),C) =& \sum_{y=0}^{\infty}\sum_{x=0}^{\infty} \mu(x)p(x,y) \sum_{z=0}^{\infty} p(y,z)\mathbb{1}_C(y,z) \\
=& \sum_{y=0}^{\infty} \mu(y) \sum_{z=0}^{\infty} p(y,z)\mathbb{1}_C(y,z) \\
=& \tilde{\mu}(C)
\end{aligned}$$

für alle $C \in \mathfrak{P}(\mathbb{N}_0^2)$. Daher ist $\tilde{\mu}$ das invariante Maß zu $\tilde{X}$. Um die Harris-Rekurrenz von $\tilde{X}$ zu zeigen, sei nun $(x,y) \in \mathbb{N}_0^2$ mit $\tilde{\mu}(x,y) > 0$. Somit ist $\mu(x) > 0$ und $p(x,y) > 0$ und es gilt wegen der Harris-Rekurrenz von X, dass für alle $z = (z_1, z_2) \in \mathbb{N}_0^2$

$$\begin{aligned}
1 =&P\left[\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}_{\{X_{n-1}=x\}} \cdot p(x,y) = \infty \middle| X_0 = z_1, X_1 = z_2\right] \\
=&P\left[\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}_{\{X_{n-1}=x\}} \cdot p(X_{n-1},y) = \infty \middle| X_0 = z_1, X_1 = z_2\right] \\
=&P\left[\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}_{\{X_{n-1}=x\}} \cdot E\left[\mathbb{1}_{\{X_n=y\}}|\mathscr{F}_{n-1}\right] = \infty \middle| X_0 = z_1, X_1 = z_2\right] \\
=&P\left[\sum_{n=1}^{\infty} E\left[\mathbb{1}_{\{X_{n-1}=x\}} \cdot \mathbb{1}_{\{X_n=y\}}|\mathscr{F}_{n-1}\right] = \infty \middle| X_0 = z_1, X_1 = z_2\right] \\
=&P\left[\sum_{n=1}^{\infty} E\left[\mathbb{1}_{\{(x,y)\}}(\tilde{X}_n)|\mathscr{F}_{n-1}\right] = \infty \middle| \tilde{X}_1 = z\right].
\end{aligned}$$

Nach [HH], Korollar 2.3 auf S.32, bedeutet dies aber auch, dass

$$P\left[\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}_{\{(x,y)\}}(\tilde{X}_n) = \infty \middle| \tilde{X}_1 = z\right] = 1 \tag{2.1.10}$$

ist, was die Harris-Rekurrenz von $\tilde{X}$ bezüglich $\tilde{\mu}$ zeigt. Setzen wir nun $f(x,y) = \frac{y}{x+1}$, so ist $f(x,y) \in L^1(N_0^2, \mathfrak{P}(N_0^2), \tilde{\mu})$, denn

$$\begin{aligned}
\tilde{\mu}(f) =&\sum_{x=0}^{\infty} \mu(x) \sum_{y=0}^{\infty} p(x,y) \frac{y}{x+1} = \sum_{x=0}^{\infty} \mu(x) \frac{1}{x+1} \underbrace{E\left[\sum_{i=1}^{x} Y_i + I\right]}_{= mx+\lambda} \\
=&E\left[\frac{mX_\infty + \lambda}{X_\infty + 1}\right] = E\left[\frac{m(X_\infty + 1) - m + \lambda}{X_\infty + 1}\right] = m + (\lambda - m)E\left[\frac{1}{X_\infty + 1}\right] < \infty.
\end{aligned}$$

Wegen Satz 2.1.4 folgt nun, dass

$$\begin{aligned}
\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \frac{X_i}{X_{i-1}+1} &= \underbrace{\frac{n+1}{n}}_{\to 1} \frac{1}{n+1} \sum_{i=0}^{n} f(\tilde{X}_i) - \underbrace{\frac{X_0}{n}}_{\to 0} \\
&\xrightarrow[n\to\infty]{f.s.} \tilde{\mu}(f) = m + (\lambda - m)E\left[\frac{1}{X_\infty + 1}\right]
\end{aligned}$$

und (2.1.8) ist gezeigt.

□

2.2 Asymptotische Normalität und Konsistenz

Lemma 2.2.1 *Seien $Z_n \in \mathbb{R}^2$ und $W \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ gegeben durch*

$$Z_n = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i \\ \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^{n} \frac{\varepsilon_i}{X_{i-1}+1} \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad W = \begin{pmatrix} E[\sigma^2 X_\infty + b^2] & E\left[\frac{\sigma^2 X_\infty + b^2}{X_\infty + 1}\right] \\ E\left[\frac{\sigma^2 X_\infty + b^2}{X_\infty + 1}\right] & E\left[\frac{\sigma^2 X_\infty + b^2}{(X_\infty + 1)^2}\right] \end{pmatrix}. \tag{2.2.1}$$

Dann gilt

$$Z_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}\left(\vec{0}, W\right). \tag{2.2.2}$$

Beweis: Mit dem „Trick“ von Cramér-Wold reicht es zu zeigen, dass für jedes feste $c = (c_1, c_2)' \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$

$$c' Z_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}\left(\vec{0}, c' W c\right). \tag{2.2.3}$$

Wir möchten nun den Zentralen Grenzwertsatz für Martingale ([HH] Theorem 3.2 / Corollary 3.1, S.58) anwenden. Dazu zeigen wir nun, dass die Voraussetzungen dafür erfüllt sind. Setze

$$M_k^{(n)} := \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^{k} \left(c_1 + \frac{c_2}{X_{i-1}+1}\right) \varepsilon_i \quad \text{für } 0 \le k \le n \in \mathbb{N}$$

und definiere $\mathscr{F}_k^{(n)} := \mathscr{F}_k$ für alle $n \in \mathbb{N}$. $M_k^{(n)}$ ist $\mathscr{F}_k^{(n)}$-$\mathfrak{P}(\mathbb{N}_0)$-messbar. Weiterhin gilt für alle $0 \le k-1 < k \le n$, dass

$$\begin{aligned} E\left[M_k^{(n)} | \mathscr{F}_{k-1}^{(n)}\right] &= \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^{k-1} \left(c_1 + \frac{c_2}{X_{i-1}+1}\right) \varepsilon_i + \frac{1}{\sqrt{n}} \left(c_1 + \frac{c_2}{X_{k-1}+1}\right) \underbrace{E\left[\varepsilon_k | \mathscr{F}_{k-1}^{(n)}\right]}_{\overset{(1.1.6)}{=} 0} \\ &= M_{k-1}^{(n)} \end{aligned}$$

und daher, dass

$$E\left[M_k^{(n)}\right] = E\left[M_{k-1}^{(n)}\right] = \dots = E\left[M_0^{(n)}\right] = 0.$$

Also ist

$$\left\{M_k^{(n)}, \mathscr{F}_k^{(n)}, 0 \le k \le n, n \ge 1\right\}$$

ein Martingalfeld mit $E\left[M_k^{(n)}\right] = 0$ für alle $0 \le k \le n, n \ge 1$ und wegen (1.1.7) auch quadratintegrabel. Seien nun

$$d_{n,k} := M_k^{(n)} - M_{k-1}^{(n)} = \frac{1}{\sqrt{n}} \left(c_1 + \frac{c_2}{X_{k-1}+1}\right) \varepsilon_k$$

die Martingaldifferenzen des Martingalfeldes. Um die bedingte Lindeberg-Bedingung nachzuprüfen, sei $\delta > 0$ vorgegeben. Setze $\tilde{c} := (c_1 + c_2)^2$ und sei $K \in \mathbb{R}^+$ beliebig, dann ist mit Gleichung (1.1.7)

$$
\begin{aligned}
L_n(\delta) &:= \sum_{k=1}^{n} E\left[(d_{n,k})^2 \, \mathbb{1}_{\{|d_{n,k}| > \delta\}} \middle| \mathscr{F}_{k-1}^{(n)}\right] \\
&= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(c_1 + \frac{c_2}{X_{k-1}+1}\right)^2 E\left[\varepsilon_k^2 \mathbb{1}_{\{(d_{n,k})^2 > \delta^2\}} \middle| \mathscr{F}_{k-1}\right] \\
&\leq \tilde{c}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} E\left[\varepsilon_k^2 \mathbb{1}_{\{\varepsilon_k^2 > \delta^2 n/\tilde{c}\}} \middle| \mathscr{F}_{k-1}\right] \\
&= \tilde{c}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} E\left[\varepsilon_k^2 \mathbb{1}_{\{\varepsilon_k^2 > \delta^2 n/\tilde{c}\}} \middle| \mathscr{F}_{k-1}\right] \cdot \mathbb{1}_{\{X_{k-1} > K\}} \\
&\quad + \tilde{c}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} E\left[\left(\sum_{i=1}^{X_{k-1}}(Y_{k,i}-m) + (I_k - \lambda)\right)^2 \mathbb{1}_{\{\varepsilon_k^2 > \delta^2 n/\tilde{c}\}} \middle| \mathscr{F}_{k-1}\right] \cdot \mathbb{1}_{\{X_{k-1} \leq K\}} \\
&\leq \tilde{c}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} E\left[\varepsilon_k^2 \middle| \mathscr{F}_{k-1}\right] \cdot \mathbb{1}_{\{X_{k-1} > K\}} \\
&\quad + \tilde{c}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} E\left[\left(\sum_{i=1}^{K}|Y_{k,i}-m| + |I_k - \lambda|\right)^2 \mathbb{1}_{\left\{\left(\sum_{i=1}^{K}|Y_{k,i}-m|+|I_k-\lambda|\right)^2 > \delta^2 n/\tilde{c}\right\}} \middle| \mathscr{F}_{k-1}\right] \\
&= \tilde{c}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(\sigma^2 X_{k-1} + b^2) \cdot \mathbb{1}_{\{X_{k-1} > K\}} \\
&\quad + \tilde{c} \cdot E\left[\left(\sum_{i=1}^{K}|Y_{k,i}-m| + |I_k - \lambda|\right)^2 \mathbb{1}_{\left\{\left(\sum_{i=1}^{K}|Y_{k,i}-m|+|I_k-\lambda|\right)^2 > \delta^2 n/\tilde{c}\right\}}\right],
\end{aligned}
$$

da $\{Y_{k,i}\}$ und $\{I_k\}$ unabhängige iid-Folgen sind. Weil $Y_{1,1}$ und I_1 nach Voraussetzung quadratisch integrierbar sind, gilt $E\left[\left(\sum_{i=1}^{K}|Y_{k,i}-m| + |I_k-\lambda|\right)^2\right] < \infty$. Demnach ist

$$
\lim_{n\to\infty} E\left[\left(\sum_{i=1}^{K}|Y_{k,i}-m| + |I_k - \lambda|\right)^2 \mathbb{1}_{\left\{\left(\sum_{i=1}^{K}|Y_{k,i}-m|+|I_k-\lambda|\right)^2 > \delta^2 n/\tilde{c}\right\}}\right] = 0.
$$

Setze $f(x) := (\sigma^2 x + b^2) \cdot \mathbb{1}_{\{x>K\}}$, $g \equiv 1$ und sei $\mu = \mathcal{L}(X_\infty|P)$ wie in Lemma 2.1.3. Da $E[|f(X_\infty)|] \leq \sigma^2 E[X_\infty] + b^2 < \infty$ ist, gilt $f, g \in L^1(N_0, \mathfrak{P}(N_0), \mu)$. Wegen Satz 2.1.4 folgt nun, dass

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(\sigma^2 X_{k-1}+b^2)\cdot \mathbb{1}_{\{X_{k-1}>K\}} \xrightarrow[n\to\infty]{f.s.} E\left[(\sigma^2 X_\infty + b^2)\cdot \mathbb{1}_{\{X_\infty > K\}}\right].$$

Also gilt für alle $K \in \mathbb{R}^+$, dass

$$\begin{aligned} 0 \le \lim_{n\to\infty} L_n(\delta) &\le \lim_{n\to\infty} \tilde{c}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(\sigma^2 X_{k-1}+b^2)\cdot \mathbb{1}_{\{X_{k-1}>K\}} \\ &\quad + \lim_{n\to\infty} \tilde{c}\cdot E\left[\left(\sum_{i=1}^{K}|Y_i-m|+|I-\lambda|\right)^2 \mathbb{1}_{\left\{\left(\sum\limits_{i=1}^{K}|Y_i-m|+|I-\lambda|\right)^2 > \delta^2 n/\tilde{c}\right\}}\right] \\ &= \tilde{c}\cdot E\left[(\sigma^2 X_\infty + b^2)\cdot \mathbb{1}_{\{\sigma^2 X_\infty + b^2 > \sigma^2 K + b^2\}}\right] \qquad \text{f.s..} \end{aligned}$$

Sei nun $\varepsilon > 0$ beliebig. Wegen $E[\sigma^2 X + b^2] < \infty$ kann K so gewählt werden, dass

$$0 \le \lim_{n\to\infty} L_n(\delta) \le E\left[(\sigma^2 X + b^2)\cdot \mathbb{1}_{\{\sigma^2 X + b^2 > \sigma^2 K + b^2\}}\right] < \varepsilon \qquad \text{f.s..}$$

Da $\varepsilon > 0$ beliebig war, gilt $\lim\limits_{n\to\infty} L_n(\delta) = 0$ f.s. und die bedingte Lindeberg-Bedingung ist erfüllt. Wir setzen jetzt $f(x) = \left(c_1 + \frac{c_2}{x+1}\right)^2 \cdot (\sigma^2 x + b^2)$. Dann ist $f \in L^1(N_0, \mathfrak{P}(N_0), \mu)$, da $E[|f(X_\infty)|] \le \tilde{c}(\sigma^2 E[X_\infty] + b^2) < \infty$ und wieder gilt wegen Satz 2.1.4, dass

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n} E\left[(d_{n,k})^2 \,|\mathscr{F}_{k-1}\right] &= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(c_1 + \frac{c_2}{X_{k-1}+1}\right)^2 E\left[\varepsilon_k^2|\mathscr{F}_{k-1}\right] \\ &= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(c_1 + \frac{c_2}{X_{k-1}+1}\right)^2 (\sigma^2 X_{k-1}+b^2) \\ &\xrightarrow[n\to\infty]{f.s} \quad E\left[\left(c_1 + \frac{c_2}{X_\infty + 1}\right)^2 (\sigma^2 X_\infty + b^2)\right] \\ &= c_1^2 E\left[\sigma^2 X_\infty + b^2\right] + 2c_1c_2 E\left[\frac{\sigma^2 X_\infty + b^2}{X_\infty + 1}\right] + c_2^2 E\left[\frac{\sigma^2 X_\infty + b^2}{(X_\infty+1)^2}\right] \\ &= c'Wc. \end{aligned}$$

Also sind die Voraussetzungen von [HH], Theorem 3.2 / Corollary 3.1 auf S.58, erfüllt. Deshalb gilt

$$c'Z_n = M_n^{(n)} \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}\left(\vec{0}, c'Wc\right)$$

und die Behauptung ist gezeigt.

□

Wir kommen nun zum Hauptresultat des Kapitels.

Theorem 2.2.2 *Im Falle $m < 1$ sind die Schätzer $\tilde{m}_n$ und $\tilde{\lambda}_n$ stark konsistent und es gilt*

$$\begin{pmatrix} \left(\sum_{i=1}^{n}(X_{i-1}+1)\right)^{1/2} (\tilde{m}_n - m) \\ \left(\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{X_{i-1}+1}\right)^{1/2} (\tilde{\lambda}_n - \lambda) \end{pmatrix} \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}(\vec{0}, V^{-1}WV'^{-1}), \tag{2.2.4}$$

wobei V und $W \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ durch

$$V = \begin{pmatrix} \dfrac{E[X_\infty]}{(E[X_\infty+1])^{1/2}} & \left(E\left[\dfrac{1}{X_\infty+1}\right]\right)^{-1/2} \\ \dfrac{E[X_\infty/(X_\infty+1)]}{(E[X_\infty+1])^{1/2}} & \left(E\left[\dfrac{1}{X_\infty+1}\right]\right)^{1/2} \end{pmatrix},$$

$$W = \begin{pmatrix} E[\sigma^2 X_\infty + b^2] & E\left[\dfrac{\sigma^2 X_\infty + b^2}{X_\infty+1}\right] \\ E\left[\dfrac{\sigma^2 X_\infty + b^2}{X_\infty+1}\right] & E\left[\dfrac{\sigma^2 X_\infty + b^2}{(X_\infty+1)^2}\right] \end{pmatrix}$$

gegeben sind, mit X_∞ wie in Satz 2.1.1.

Beweis: Zunächst einige Vorüberlegungen. Da $x \mapsto \frac{1}{x+1}$ eine konvexe Funktion ist und nach Satz 2.1.1 X_∞ nicht degeneriert ist, gilt mit der Jensen-Ungleichung (vgl. [LL] Theorem 2.2(ii)), dass

$$E\left[\frac{1}{X_\infty+1}\right] > \frac{1}{E[X_\infty]+1}. \tag{2.2.5}$$

Nach Lemma 2.1.5 gilt

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_{i-1}+1)\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{X_{i-1}+1} \xrightarrow[n\to\infty]{f.s.} (E[X_\infty]+1)E\left[\frac{1}{X_\infty+1}\right] \overset{(2.2.5)}{>} 1$$

und mit $\mathbb{N}_n$ aus Definition 1.2.1 folgt daher, dass

$$\mathbb{1}_{\mathbb{N}_n^c} \xrightarrow[n\to\infty]{f.s.} 1. \tag{2.2.6}$$

Schreiben wir $\tilde{m}_n$ um zu

$$\tilde{m}_n = \frac{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{X_{i-1}+1} - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{X_i}{X_{i-1}+1}}{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_{i-1}+1)\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{X_{i-1}+1} - 1} \cdot \mathbb{1}_{\mathbb{N}_n^c}$$

und wenden darauf Lemma 2.1.5 an, so ergibt sich mit (2.2.6), dass

$$\begin{aligned}\tilde{m}_n \xrightarrow[n\to\infty]{f.s.} & \frac{\frac{\lambda}{1-m}E\left[\frac{1}{X_\infty+1}\right]-\left(m+(\lambda-m)E\left[\frac{1}{X_\infty+1}\right]\right)}{\left(\frac{\lambda}{1-m}+1\right)E\left[\frac{1}{X_\infty+1}\right]-1} \qquad (2.2.7)\\ &= \frac{E\left[\frac{1}{X_\infty+1}\right]\frac{\lambda m+m-m^2}{1-m}-m}{\frac{\lambda+1-m}{1-m}E\left[\frac{1}{X_\infty+1}\right]-1}\\ &= \frac{m\left(E\left[\frac{1}{X_\infty+1}\right]\frac{\lambda+1-m}{1-m}-1\right)}{E\left[\frac{1}{X_\infty+1}\right]\frac{\lambda+1-m}{1-m}-1}=m.\end{aligned}$$

$\tilde{m}_n$ ist somit stark konsistent. Man beachte, dass der Nenner des Grenzwertes in (2.2.7) wegen (2.2.5) größer 0 ist. Genauso wie eben schreiben wir nun $\tilde{\lambda}_n$ um zu

$$\tilde{\lambda}_n = \frac{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_{i-1}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{X_i}{X_{i-1}+1}-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{X_{i-1}}{X_{i-1}+1}}{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_{i-1}+1)\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{X_{i-1}+1}-1}\cdot \mathbb{1}_{\mathbb{N}_n^c} \qquad (2.2.8)$$

und erhalten wegen Lemma 2.1.5 und (2.2.6), dass

$$\tilde{\lambda}_n \xrightarrow[n\to\infty]{f.s.} \frac{\frac{\lambda}{1-m}\left(m+(\lambda-m)E\left[\frac{1}{X_\infty+1}\right]\right)-\frac{\lambda}{1-m}\left(1-E\left[\frac{1}{X_\infty+1}\right]\right)}{\left(\frac{\lambda}{1-m}+1\right)E\left[\frac{1}{X_\infty+1}\right]-1} \qquad (2.2.9)$$

$$= \frac{\lambda\left(E\left[\frac{1}{X_\infty+1}\right]\frac{\lambda-m+1}{1-m}+\frac{m}{1-m}-\frac{1}{1-m}\right)}{E\left[\frac{1}{X_\infty+1}\right]\frac{\lambda+1-m}{1-m}-1}=\lambda, \qquad (2.2.10)$$

was die starke Konsistenz von $\tilde{\lambda}_n$ zeigt.

Um die Behauptung (2.2.4) einzusehen, invertieren wir zunächst die Matrix V.

$$\begin{aligned}\det(V) =&\frac{E[X_\infty]}{(E[X_\infty+1])^{1/2}}\left(E\left[\frac{1}{X_\infty+1}\right]\right)^{1/2} - \frac{E[X_\infty/(X_\infty+1)]}{(E[X_\infty+1])^{1/2}}\left(E\left[\frac{1}{X_\infty+1}\right]\right)^{-1/2}\\
=&\frac{E[X_\infty]E\left[\frac{1}{X_\infty+1}\right]-1+E\left[\frac{1}{X_\infty+1}\right]}{\left(E[X_\infty+1]E\left[\frac{1}{X_\infty+1}\right]\right)^{1/2}}\\
=&\frac{E\left[\frac{1}{X_\infty+1}\right]E[X_\infty+1]-1}{\left(E[X_\infty+1]E\left[\frac{1}{X_\infty+1}\right]\right)^{1/2}} > 0,\end{aligned}$$

wegen Gleichung (2.2.5). Also ist

$$\begin{aligned}V^{-1} =&\frac{1}{\det(V)}\begin{pmatrix}\left(E\left[\frac{1}{X_\infty+1}\right]\right)^{1/2} & -\left(E\left[\frac{1}{X_\infty+1}\right]\right)^{-1/2}\\ -\frac{E[X_\infty/(X_\infty+1)]}{(E[X_\infty+1])^{1/2}} & \frac{E[X_\infty]}{(E[X_\infty+1])^{1/2}}\end{pmatrix}\\
=&\begin{pmatrix}\frac{(E[X_\infty+1])^{1/2}E\left[\frac{1}{X_\infty+1}\right]}{E[X_\infty+1]E\left[\frac{1}{X_\infty+1}\right]-1} & \frac{-(E[X_\infty+1])^{1/2}}{E[X_\infty+1]E\left[\frac{1}{X_\infty+1}\right]-1}\\ \frac{-E\left[\frac{X_\infty}{X_\infty+1}\right]\left(E\left[\frac{1}{X_\infty+1}\right]\right)^{1/2}}{E[X_\infty+1]E\left[\frac{1}{X_\infty+1}\right]-1} & \frac{E[X_\infty]\left(E\left[\frac{1}{X_\infty+1}\right]\right)^{1/2}}{E[X_\infty+1]E\left[\frac{1}{X_\infty+1}\right]-1}\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Wir betrachten nun mit den Bezeichnungen aus (1.1.5) die Matrix $\tilde{V}_n \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ gegeben durch

$$\tilde{V}_n := \begin{pmatrix}\frac{n^{-1}B_n\left(n^{-1}\tilde{A}_n+1\right)^{1/2}}{\left(n^{-1}\tilde{A}_n+1\right)n^{-1}B_n-1}\cdot \mathbb{1}_{\mathbb{N}_n^c} & \frac{-\left(n^{-1}\tilde{A}_n+1\right)^{1/2}}{\left(n^{-1}\tilde{A}_n+1\right)n^{-1}B_n-1}\cdot \mathbb{1}_{\mathbb{N}_n^c}\\ \frac{-n^{-1}\tilde{C}_n(n^{-1}B_n)^{1/2}}{\left(n^{-1}\tilde{A}_n+1\right)n^{-1}B_n-1}\cdot \mathbb{1}_{\mathbb{N}_n^c} & \frac{n^{-1}\tilde{A}_n(n^{-1}B_n)^{1/2}}{\left(n^{-1}\tilde{A}_n+1\right)n^{-1}B_n-1}\cdot \mathbb{1}_{\mathbb{N}_n^c}\end{pmatrix}$$

und erkennen mit Hilfe von Lemma 2.1.5 und (2.2.6), dass

$$\tilde{V}_n \xrightarrow[n\to\infty]{f.s.} V^{-1} \tag{2.2.11}$$

gilt. Durch Erweiterung der Einträge von $\tilde{V}_n$ mit n^2 ergibt sich mit Z_n aus Lemma 2.2.1, dass

$$\begin{aligned}\tilde{V}_n Z_n =& \mathbb{1}_{\mathbb{N}_n^c} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{n} B_n \left(\tilde{A}_n + n\right)^{1/2}}{\left(\tilde{A}_n + n\right) B_n - n^2} & \frac{-n^{3/2} \left(\tilde{A}_n + n\right)^{1/2}}{\left(\tilde{A}_n + n\right) B_n - n^2} \\ \frac{-\sqrt{n} \tilde{C}_n B_n^{1/2}}{\left(\tilde{A}_n + n\right) B_n - n^2} & \frac{\sqrt{n} \tilde{A}_n B_n^{1/2}}{\left(\tilde{A}_n + n\right) B_n - n^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n \varepsilon_i \\ \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n \frac{\varepsilon_i}{X_{i-1}+1} \end{pmatrix} \\ =& \mathbb{1}_{\mathbb{N}_n^c} \cdot \begin{pmatrix} \left(\tilde{A}_n + n\right)^{1/2} \frac{B_n \sum_{i=1}^n \varepsilon_i - n \sum_{i=1}^n \frac{\varepsilon_i}{X_{i-1}+1}}{\left(\tilde{A}_n + n\right) B_n - n^2} \\ B_n^{1/2} \frac{-\tilde{C}_n \sum_{i=1}^n \varepsilon_i + \tilde{A}_n \sum_{i=1}^n \frac{\varepsilon_i}{X_{i-1}+1}}{\left(\tilde{A}_n + n\right) B_n - n^2} \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Wir betrachten nun einzeln Terme der beiden Vektorkomponenten von $\tilde{V}_n Z_n$ und erhalten

$$\begin{aligned}(\tilde{V}_n Z_n)^{(1)} &= \left(\tilde{A}_n + n\right)^{1/2} \frac{B_n \sum_{i=1}^n (X_i - mX_{i-1} - \lambda) - n \sum_{i=1}^n \frac{X_i - mX_{i-1} - \lambda}{X_{i-1}+1}}{\left(\tilde{A}_n + n\right) B_n - n^2} \cdot \mathbb{1}_{\mathbb{N}_n^c} \\ &= \left(\tilde{A}_n + n\right)^{1/2} \frac{B_n \left(A_n - m\tilde{A}_n - n\lambda\right) - n \left(C_n - m\tilde{C}_n - \lambda B_n\right)}{\left(\tilde{A}_n + n\right) B_n - n^2} \cdot \mathbb{1}_{\mathbb{N}_n^c} \\ &= \left(\tilde{A}_n + n\right)^{1/2} \frac{A_n B_n - m\tilde{A}_n B_n - n\lambda B_n - nC_n + nm(n - B_n) + n\lambda B_n}{\left(\tilde{A}_n + n\right) B_n - n^2} \cdot \mathbb{1}_{\mathbb{N}_n^c} \\ &= \left(\tilde{A}_n + n\right)^{1/2} \frac{A_n B_n - nC_n - m\left(B_n \left(\tilde{A}_n + n\right) - n^2\right)}{\left(\tilde{A}_n + n\right) B_n - n^2} \cdot \mathbb{1}_{\mathbb{N}_n^c} \\ &= \left(\tilde{A}_n + n\right)^{1/2} (\tilde{m}_n - m) \cdot \mathbb{1}_{\mathbb{N}_n^c}\end{aligned} \tag{2.2.12}$$

und

$$
\begin{aligned}
(\tilde{V}_n Z_n)^{(2)} &= B_n^{1/2} \frac{-\tilde{C}_n \sum_{i=1}^{n} (X_i - mX_{i-1} - \lambda) + \tilde{A}_n \sum_{i=1}^{n} \frac{X_i - mX_{i-1} - \lambda}{X_{i-1}+1}}{\left(\tilde{A}_n + n\right) B_n - n^2} \cdot \mathbb{1}_{\mathbb{N}_n^c} \\
&= B_n^{1/2} \frac{-\tilde{C}_n \left(A_n - m\tilde{A}_n - n\lambda\right) + \tilde{A}_n \left(C_n - m\tilde{C}_n - \lambda B_n\right)}{\left(\tilde{A}_n + n\right) B_n - n^2} \cdot \mathbb{1}_{\mathbb{N}_n^c} \\
&= B_n^{1/2} \frac{-A_n\tilde{C}_n + m\tilde{A}_n\tilde{C}_n + \lambda n(n - B_n) + \tilde{A}_n C_n - m\tilde{A}_n\tilde{C}_n - \lambda\tilde{A}_n B_n}{\left(\tilde{A}_n + n\right) B_n - n^2} \cdot \mathbb{1}_{\mathbb{N}_n^c} \\
&= B_n^{1/2} \frac{\tilde{A}_n C_n - A_n\tilde{C}_n - \lambda \left(B_n \left(\tilde{A}_n + n\right) - n^2\right)}{\left(\tilde{A}_n + n\right) B_n - n^2} \cdot \mathbb{1}_{\mathbb{N}_n^c} \\
&= B_n^{1/2} (\tilde{\lambda}_n - \lambda) \cdot \mathbb{1}_{\mathbb{N}_n^c}.
\end{aligned}
\tag{2.2.13}
$$

Es folgt also, dass

$$
\tilde{V}_n Z_n = \begin{pmatrix} \left(\tilde{A}_n + n\right)^{1/2} (\tilde{m}_n - m) \\ (B_n)^{1/2} (\tilde{\lambda}_n - \lambda) \end{pmatrix} \cdot \mathbb{1}_{\mathbb{N}_n^c}. \tag{2.2.14}
$$

Nach Lemma 2.2.1 gilt

$$
Z_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{L}} Z \quad \text{mit} \quad \mathcal{L}(Z|P) = \mathcal{N}(\vec{0}, W).
$$

Wegen (2.2.11) erhalten wir daher mit dem Satz von Slutsky und der Definition der multivariaten Normalverteilung, dass

$$
\tilde{V}_n Z_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{L}} V^{-1} Z, \quad \text{wobei} \quad \mathcal{L}(V^{-1}Z|P) = \mathcal{N}(\vec{0}, V^{-1} W V'^{-1}).
$$

Schließlich folgt daraus, wegen Gleichung (2.2.14) und (2.2.6), erneut mit Satz von Slutsky, dass

$$
\begin{aligned}
\begin{pmatrix} \left(\tilde{A}_n + n\right)^{1/2} (\tilde{m}_n - m) \\ (B_n)^{1/2} (\tilde{\lambda}_n - \lambda) \end{pmatrix} &= \tilde{V}_n Z_n + \underbrace{\begin{pmatrix} \left(\tilde{A}_n + n\right)^{1/2} (\tilde{m}_n - m) \\ (B_n)^{1/2} (\tilde{\lambda}_n - \lambda) \end{pmatrix} \cdot \mathbb{1}_{\mathbb{N}_n}}_{\to 0 \ f.s.} \\
&\xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}(\vec{0}, V^{-1} W V'^{-1})
\end{aligned}
$$

und Behauptung (2.2.4) ist gezeigt.

$\square$

Kapitel 3

Der superkritische Fall

In diesem Kapitel sei nun $m > 1$ vorausgesetzt.

3.1 Vorbereitungen

Lemma 3.1.1

$$\frac{X_n}{m^n} \xrightarrow[n\to\infty]{f.s} L, \textit{ wobei } L \textit{ eine ZV mit } 0 < L < \infty \textit{ f.s.} \tag{3.1.1}$$

Beweis: $\left(\frac{X_n}{m^n}\right)_{n\geq 0}$ ist ein $\mathcal{F}$-Submartingal, da mit (1.1.6) gilt, dass für alle $n \geq 1$

$$E\left[\frac{X_n}{m^n}\middle| F_{n-1}\right] = \frac{mX_{n-1} + \lambda}{m^n} \geq \frac{X_{n-1}}{m^{n-1}}$$

ist. Da

$$\begin{aligned}
\sup_{n\in N_0} E\left[\left|\frac{X_n}{m^n}\right|\right] &= \sup_{n\in\mathbb{N}_0} E\left[E\left[\frac{X_n}{m^n}\middle|\mathscr{F}_{n-1}\right]\right] = \sup_{n\in\mathbb{N}_0} E\left[\frac{X_{n-1}}{m^{n-1}} + \frac{\lambda}{m^n}\right] = \dots \\
&= \sup_{n\in\mathbb{N}_0} E\left[X_0 + \sum_{k=1}^{n}\frac{\lambda}{m^k}\right] = E\left[X_0\right] + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{\lambda}{m^k} \\
&= E\left[X_0\right] + \frac{\lambda}{m-1} < \infty
\end{aligned}$$

ist, existiert wegen des Martingal-Konvergenzsatzes von Doob ([HH], Theorem 2.5, S.17), eine ZV L, so dass $\frac{X_n}{m^n} \xrightarrow[n\to\infty]{f.s} L$ und $E[L] \leq \liminf_{n\to\infty} E\left[\frac{X_n}{m^n}\right] < \infty$. Also ist auch $L < \infty$ f.s.. Es bleibt also noch zu zeigen, dass $L > 0$ f.s. gilt. Dazu zerlegen wir X wie in (1.1.4) in unabhängige Galton-Watson Prozesse ${}_kZ$, $k = 0, 1, \dots$, so dass

$$X_n = {}_0Z_n^{(X_0)} + \sum_{k=1}^{n} {}_kZ_{n-k}^{(I_k)}. \tag{3.1.2}$$

Bezeichne $q = P[Z_n^{(1)} = 0 \text{ für ein } n \in \mathbb{N}]$ die Aussterbewahrscheinlichkeit eines superkritischen Galton-Watson Prozesses, der mit einem Individuum startet. Es gilt $q < 1$ (vgl. [Jag], Theorem 2.3.1, S.22). Wegen (1.1.3), folgt mit [AN], Ch.I.6, Theorem 2 (iii) auf S.9, dass

$$P\left[\lim_{n\to\infty} \frac{Z_{n-k}^{(i)}}{m^n} = 0\right] \leq P\left[\lim_{n\to\infty} \frac{Z_{n-k}^{(1)}}{m^{n-k}} = 0\right] = q < 1$$

für alle $k, i \geq 1$. Setze $\alpha := P[I_1 = 0]$, dann gilt

$$\begin{aligned}
P[L=0] = P\left[\lim_{n\to\infty} \frac{X_n}{m^n} = 0\right] &= P\left[\lim_{n\to\infty} \frac{{}_0Z_n^{(X_0)}}{m^n} + \sum_{k=1}^{n} \frac{{}_kZ_{n-k}^{(I_k)}}{m^n} = 0\right] \\
&\leq P\left[\bigcap_{k=1}^{\infty} \left\{\lim_{n\to\infty} \frac{{}_kZ_{n-k}^{(I_k)}}{m^n} = 0\right\}\right] \overset{unabh.}{=} \prod_{k=1}^{\infty} P\left[\lim_{n\to\infty} \frac{{}_kZ_{n-k}^{(I_k)}}{m^n} = 0\right] \\
&= \prod_{k=1}^{\infty} \left(P\left[\lim_{n\to\infty} \frac{{}_kZ_{n-k}^{(I_k)}}{m^n} = 0, I_k = 0\right] + P\left[\lim_{n\to\infty} \frac{{}_kZ_{n-k}^{(I_k)}}{m^n} = 0, I_k > 0\right]\right) \\
&\leq \prod_{k=1}^{\infty} \left(\alpha + P\left[\lim_{n\to\infty} \frac{{}_kZ_{n-k}^{(I_k)}}{m^n} = 0 \,\middle|\, I_k > 0\right] \cdot P[I_k > 0]\right) \\
&\leq \prod_{k=1}^{\infty} \underbrace{(\alpha + q \cdot (1-\alpha))}_{<1} = 0.
\end{aligned}$$

Somit ist $L > 0$ f.s. und die Behauptung ist gezeigt.

□

Lemma 3.1.2 *Sei L die ZV aus Lemma 3.1.1. Es existieren reelle ZVen K und $\tilde{K}$, wobei $0 < K < \infty$ f.s., so dass Folgendes gilt:*

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{X_{i-1}+1} \xrightarrow[n\to\infty]{f.s} K \tag{3.1.3}$$

$$\frac{1}{m^n} \sum_{i=1}^{n} X_i \xrightarrow[n\to\infty]{f.s.} \frac{mL}{m-1} \tag{3.1.4}$$

$$\frac{1}{m^n} \sum_{i=1}^{n} (X_{i-1}+1) \xrightarrow[n\to\infty]{f.s.} \frac{L}{m-1} \tag{3.1.5}$$

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\varepsilon_i}{X_{i-1}+1} \xrightarrow[n\to\infty]{f.s.} \tilde{K} \tag{3.1.6}$$

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \frac{X_i}{X_{i-1}+1} \xrightarrow[n\to\infty]{f.s.} m \tag{3.1.7}$$

Beweis: Sei $\omega \in \mathbb{M} := \left\{\omega | m^{-n} X_n(\omega) \xrightarrow{n\to\infty} L(\omega),\, 0 < L(\omega) < \infty\right\}$. Also existiert für $L(\omega) > \varepsilon > 0$ ein $n_0(\omega) \in \mathbb{N}$, so dass für alle $n \geq n_0$

$$0 < L(\omega) - \varepsilon \leq \frac{X_n(\omega)}{m^n} \leq L(\omega) + \varepsilon < \infty.$$

Deshalb gilt

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{X_{i-1}(\omega)+1} &= \sum_{i=1}^{n_0} \frac{1}{X_{i-1}(\omega)+1} + \sum_{i=n_0}^{\infty} \frac{m^{-i}}{m^{-i}X_i(\omega) + m^{-i}} \\ &\leq n_0 + \sum_{i=n_0}^{\infty} \frac{m^{-i}}{L(\omega)-\varepsilon} < \infty.\end{aligned}$$

Wegen der Monotonie der Folge, existiert für alle $\omega \in \mathbb{M}$ ein Grenzwert $K(\omega)$. Nach Lemma 3.1.1 ist $P[\mathbb{M}] = 1$, also existiert f.s. der Grenzwert K. Da $X_0 < \infty$ $f.s.$, folgt auch

$$0 < \frac{1}{X_0+1} \leq \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{X_{i-1}+1} = K \quad f.s.$$

und (3.1.3) ist bewiesen. Sei nun $\varepsilon > 0$ beliebig und $\omega \in \mathbb{M}$. Dann existiert ein $n_0(\omega)$, so dass für alle $n \geq n_0$: $|L(\omega)m^n - X_n(\omega)| < \varepsilon \cdot m^n$. Somit ist

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\left|\frac{1}{m^n}\sum_{i=1}^{n} X_i(\omega) - \frac{mL(\omega)}{m-1}\right| &= \lim_{n\to\infty}\left|\frac{1}{m^n}\sum_{i=1}^{n}\left[X_i(\omega) - L(\omega)m^i + L(\omega)m^i\right] - \frac{mL(\omega)}{m-1}\right| \\ &\leq \lim_{n\to\infty}\left|L(\omega)\sum_{i=1}^{n} m^{i-n} - \frac{mL(\omega)}{m-1}\right| + \left|\frac{1}{m^n}\sum_{i=1}^{n}(L(\omega)m^i - X_i(\omega))\right| \\ &= L(\omega)\underbrace{\lim_{n\to\infty}\left|\sum_{i=0}^{n-1} m^{-i} - \frac{m}{m-1}\right|}_{=0} + \lim_{n\to\infty}\left|\frac{1}{m^n}\sum_{i=1}^{n}(L(\omega)m^i - X_i(\omega))\right| \\ &\leq \underbrace{\lim_{n\to\infty}\left|\frac{1}{m^n}\sum_{i=1}^{n_0}(L(\omega)m^i - X_i(\omega))\right|}_{=0} + \lim_{n\to\infty}\left|\frac{1}{m^n}\sum_{i=n_0}^{n}\varepsilon\cdot m^i\right| \\ &\leq \varepsilon\frac{m}{m-1}.\end{aligned}$$

Da $\varepsilon > 0$ beliebig war und $P[\mathbb{M}] = 1$ gilt, folgt (3.1.4). Aussage (3.1.5) ist eine direkte Konsequenz aus (3.1.4), denn

$$\frac{1}{m^n}\sum_{i=1}^{n}(X_{i-1}+1) = \frac{1}{m^n}\sum_{i=1}^{n} X_i + m^{-n}\cdot n - m^{-n}\cdot X_n + m^{-n}X_0 \tag{3.1.8}$$

$$\xrightarrow[n\to\infty]{f.s.} \frac{mL}{m-1} + 0 - L + 0 = \frac{L}{m-1}. \tag{3.1.9}$$

Als nächstes beobachten wir wegen (1.1.6), dass $\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\varepsilon_i}{X_{i-1}+1}\right)_n$ ein $(\mathscr{F}_n)_n$-Martingal mit Martingaldifferenz $\frac{\varepsilon_i}{X_{i-1}+1}$ ist. Außerdem gilt

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{\infty} E\left[\frac{\varepsilon_i^2}{(X_{i-1}+1)^2}\middle|\mathscr{F}_{i-1}\right] &\overset{(1.1.7)}{=} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\sigma^2 X_{i-1}+b^2}{(X_{i-1}+1)^2} \leq (\sigma^2+b^2)\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{X_{i-1}+1} \\ &\overset{(3.1.3)}{<} \infty \quad f.s.,\end{aligned}$$

woraus wir mit [HH], Theorem 2.17 auf S.35, (3.1.6) folgern. Wegen (3.1.3) und (3.1.6) gilt dann

$$\begin{aligned}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{X_i}{X_{i-1}+1} &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{X_i - mX_{i-1}-\lambda}{X_{i-1}+1} + \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{m(X_{i-1}+1)-m+\lambda}{X_{i-1}+1} \\ &= \underbrace{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{\varepsilon_i}{X_{i-1}+1}}_{\to 0\ f.s.} + m + (\lambda - m)\underbrace{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{X_{i-1}+1}}_{\to 0\ f.s.} \\ &\xrightarrow[n\to\infty]{f.s.} m,\end{aligned}$$

wodurch Aussage (3.1.7) bewiesen ist.

□

Satz 3.1.3 *Sei $d \in \mathbb{N}$ beliebig. Setze $\Delta_n := (\delta_n^1, \ldots, \delta_n^d)$ und $\Delta := (\delta^1, \ldots, \delta^d)$, wobei für $j = 1, \ldots, d$*

$$\delta_n^j := \begin{cases} \dfrac{X_{n-j+1} - mX_{n-j} - \lambda}{(X_{n-j}+1)^{1/2}} & \text{für } j \leq n \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \tag{3.1.10}$$

und δ^j unabhängige, $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$-verteilte ZVen sind. Dann gilt

$$\Delta_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{L}} \Delta \text{ in } \mathbb{R}^d. \tag{3.1.11}$$

Beweis: Wir zeigen dazu die punktweise Konvergenz in $t \in \mathbb{R}^d$ der zugehörigen Charakteristischen Funktionen $\varphi_{\Delta_n}(t)$ gegen $\varphi_{\Delta}(t)$ für $n \to \infty$. Daher sei ohne Einschränkung $n \geq d$. Wir definieren zunächst die Zufallsvariablen

$$U_n^j := \exp\left(it_j\delta_n^j\right) \tag{3.1.12}$$

und

$$R_n := \prod_{j=1}^{d} U_n^j - \exp\left(-\frac{1}{2}\sigma^2\sum_{j=1}^{d} t_j^2\right). \tag{3.1.13}$$

Setzen wir

$$V_n^j := \left(\prod_{l=1}^{j-1} U_n^l\right) \exp\left(-\frac{1}{2}\sigma^2 \sum_{l=j+1}^{d} t_l^2\right) \cdot \left(U_n^j - \exp\left(-\frac{1}{2}\sigma^2 t_j^2\right)\right), \tag{3.1.14}$$

so können wir mit Hilfe einer Teleskopsumme R_n umschreiben zu

$$\begin{aligned} R_n &= \sum_{j=1}^{d} \left\{ \left(\prod_{l=1}^{j} U_n^l\right) \exp\left(-\frac{1}{2}\sigma^2 \sum_{l=j+1}^{d} t_l^2\right) - \left(\prod_{l=1}^{j-1} U_n^l\right) \exp\left(-\frac{1}{2}\sigma^2 \sum_{l=j}^{d} t_l^2\right) \right\} \\ &= \sum_{j=1}^{d} V_n^j. \end{aligned} \tag{3.1.15}$$

Seien $\varphi_Y(s) := E[\exp(is(Y-m))]$ und $\varphi_I(s) := E[\exp(is(I-\lambda))]$ mit $s \in \mathbb{R}$ die Charakteristischen Funktionen der zentrierten Nachkommen- bzw. Immigrationsverteilung. Da $\{Y_{n,i}\}$ und $\{I_n\}$ zwei voneinander unabhängige iid Folgen von ZVen sind, gilt nun

$$\begin{aligned} E[U_n^j|\mathscr{F}_{n-j}] &= \sum_{l=0}^{\infty} \mathbb{1}_{\{X_{n-j}=l\}} E\left[\exp\left(it_j \frac{X_{n-j+1} - mX_{n-j} - \lambda}{(X_{n-j}+1)^{1/2}}\right) \middle| \mathscr{F}_{n-j}\right] \\ &= \sum_{l=0}^{\infty} \mathbb{1}_{\{X_{n-j}=l\}} E\left[\exp\left(it_j \frac{\sum_{k=1}^{l}(Y_{k,n-j+1} - m) + (I_{n-j+1} - \lambda)}{(l+1)^{1/2}}\right) \middle| \mathscr{F}_{n-j}\right] \\ &= \sum_{l=0}^{\infty} \mathbb{1}_{\{X_{n-j}=l\}} E\left[\prod_{k=1}^{l} \exp\left(it_j \frac{(Y_{k,n-j+1} - m)}{(l+1)^{1/2}}\right) \exp\left(it_j \frac{I_{n-j+1} - \lambda}{(l+1)^{1/2}}\right)\right] \\ &= \sum_{l=0}^{\infty} \mathbb{1}_{\{X_{n-j}=l\}} \prod_{k=1}^{l} E\left[\exp\left(it_j \frac{(Y_{1,1} - m)}{(l+1)^{1/2}}\right)\right] E\left[\exp\left(it_j \frac{I_1 - \lambda}{(l+1)^{1/2}}\right)\right] \\ &= \sum_{l=0}^{\infty} \mathbb{1}_{\{X_{n-j}=l\}} \prod_{k=1}^{l} \varphi_Y\left(\frac{t_j}{(l+1)^{1/2}}\right) \varphi_I\left(\frac{t_j}{(l+1)^{1/2}}\right) \\ &= \left[\varphi_Y\left(\frac{t_j}{(X_{n-j}+1)^{1/2}}\right)\right]^{X_{n-j}} \varphi_I\left(\frac{t_j}{(X_{n-j}+1)^{1/2}}\right). \end{aligned}$$

Nach dem zentralen Grenzwertsatz für iid ZVen und dem Satz von Slutsky gilt, dass

$$\frac{1}{(l+1)^{1/2}} \sum_{i=1}^{l} (Y_{1,i} - m) = \underbrace{\frac{l^{1/2}}{(l+1)^{1/2}}}_{\to 1} \frac{1}{l^{1/2}} \sum_{i=1}^{l} (Y_{1,i} - m) \xrightarrow[l\to\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0,\sigma^2)$$

und somit auch

$$\left[\varphi_Y\left(\frac{s}{(l+1)^{1/2}}\right)\right]^l \xrightarrow{l\to\infty} \varphi_{\mathcal{N}(0,\sigma^2)} = \exp\left(-\frac{1}{2}\sigma^2 s^2\right)$$

punktweise für jedes feste $s \in \mathbb{R}$. Wegen Lemma 3.1.1 gilt $X_n \xrightarrow{f.s.} \infty$ für $n \to \infty$ und $s \mapsto \varphi_I(s)$ ist stetig. Daher folgt nun aus den obigen Überlegungen, dass

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} E[U_n^j|\mathscr{F}_{n-j}] &= \lim_{n\to\infty}\left[\varphi_Y\left(\frac{t_j}{(X_{n-j}+1)^{1/2}}\right)\right]^{X_{n-j}} \varphi_I\Bigg(\underbrace{\lim_{n\to\infty}\frac{t_j}{(X_{n-j}+1)^{1/2}}}_{=0\ f.s.}\Bigg) \\ &\overset{f.s.}{=} \exp\left(-\frac{1}{2}\sigma^2 t_j^2\right).\end{aligned} \tag{3.1.16}$$

Da

$$\begin{aligned}\left|E[V_n^j|\mathscr{F}_{n-j}]\right| &= \left|E\left[\left(\prod_{l=1}^{j-1} U_n^l\right)\exp\left(-\frac{1}{2}\sigma^2\sum_{l=j+1}^{d} t_l^2\right)\cdot\left(U_n^j - \exp\left(-\frac{1}{2}\sigma^2 t_j^2\right)\right)\middle|\mathscr{F}_{n-j}\right]\right| \\ &= \left|\left(\prod_{l=1}^{j-1} U_n^l\right)\exp\left(-\frac{1}{2}\sigma^2\sum_{l=j+1}^{d} t_l^2\right)\right|\cdot\left|E\left[U_n^j|\mathscr{F}_{n-j}\right] - \exp\left(-\frac{1}{2}\sigma^2 t_j^2\right)\right| \\ &\le \left|E\left[U_n^j|\mathscr{F}_{n-j}\right] - \exp\left(-\frac{1}{2}\sigma^2 t_j^2\right)\right|,\end{aligned}$$

folgt aus (3.1.16), dass

$$\lim_{n\to\infty}\left|E[V_n^j|\mathscr{F}_{n-j}]\right| = 0 \quad \text{f.s.}. \tag{3.1.17}$$

Mit den Definitionen von U_n^j in (3.1.12) und R_n in (3.1.13) ergibt sich aus (3.1.15), dass

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\{\varphi_{\Delta_n}(t) - \varphi_\Delta(t)\} &= \lim_{n\to\infty}\left\{E\left[\exp\left(it'\Delta_n\right)\right] - \exp\left(-\frac{1}{2}\sigma^2\sum_{j=1}^{d} t_j^2\right)\right\} \\ &= \lim_{n\to\infty} E\left[\exp\left(i\sum_{j=1}^{d} t_j\delta_n^j\right) - \exp\left(-\frac{1}{2}\sigma^2\sum_{j=1}^{d} t_j^2\right)\right] \\ &= \lim_{n\to\infty} E\left[\prod_{j=1}^{d}\exp\left(it_j\delta_n^j\right) - \exp\left(-\frac{1}{2}\sigma^2\sum_{j=1}^{d} t_j^2\right)\right] \\ &= \lim_{n\to\infty} E\left[\prod_{j=1}^{d} U_n^j - \exp\left(-\frac{1}{2}\sigma^2\sum_{j=1}^{d} t_j^2\right)\right] \\ &= \lim_{n\to\infty} E\left[R_n\right] \\ &= \lim_{n\to\infty} E\left[\sum_{j=1}^{d} V_n^j\right].\end{aligned}$$

Daraus folgt wegen der Beschränktheit der Folge $(V_n^j)_n$ mit dem Satz von der majorisierten Konvergenz und (3.1.17), dass

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\{\varphi_{\Delta_n}(t)-\varphi_\Delta(t)\} &= \sum_{j=1}^{d}\lim_{n\to\infty} E\left[E\left[V_n^j|\mathscr{F}_{n-j}\right]\right]\\ &= \sum_{j=1}^{d} E\left[\lim_{n\to\infty} E\left[V_n^j|\mathscr{F}_{n-j}\right]\right]\\ &= 0,\end{aligned}$$

womit die Behauptung bewiesen ist.

□

Satz 3.1.4 *Sei $(c_j)_j$ eine reelle Folge, so dass $\sum_{j=1}^\infty c_j^2 < \infty$. Dann gilt*

$$\sum_{j=1}^{n} c_j \frac{X_{n-j+1}-mX_{n-j}-\lambda}{(X_{n-j}+1)^{1/2}} \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}\left(0,\sigma^2\sum_{j=1}^{\infty}c_j^2\right)$$

Beweis: Wir definieren mit Hilfe von δ_n^j und δ^j aus Satz 3.1.3 die ZVen

$$W_{d,n} := \sum_{j=1}^{d} c_j\delta_n^j \qquad \text{und} \qquad W_d := \sum_{j=1}^{d} c_j\delta^j \qquad n,d\in\mathbb{N}.$$

Da $x\mapsto\sum_{j=1}^d c_jx_j$ eine stetige Abbildung von $\mathbb{R}^d$ nach $\mathbb{R}$ ist, folgt mit dem Satz von der stetigen Abbildung direkt aus Satz 3.1.3, dass

$$W_{d,n} \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{L}} W_d. \tag{3.1.18}$$

Nach Definition der Normalverteilung ist

$$\mathcal{L}(W_d|P) = \mathcal{N}\left(0,\sigma^2\sum_{j=1}^{d}c_j^2\right).$$

Mit Hilfe der Charakteristischen Funktionen und dem Stetigkeitssatz von P.Lévy folgt dann wegen

$$\lim_{d\to\infty} E\left[\exp\left(itW_d\right)\right] = \lim_{d\to\infty}\exp\left(-\frac{1}{2}\sigma^2\sum_{j=1}^{d}c_j^2t^2\right) = \exp\left(-\frac{1}{2}\sigma^2\sum_{j=1}^{\infty}c_j^2t^2\right)$$

für jedes $t\in\mathbb{R}$, dass

$$W_d \xrightarrow[d\to\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}\left(0,\sigma^2\sum_{j=1}^{\infty}c_j^2\right). \tag{3.1.19}$$

Sei nun $\varepsilon > 0$ vorgegeben und ohne Einschränkung $n \geq d$. Dann ergibt sich mit der Tschebyscheff-Ungleichung und (1.2.4), dass

$$\begin{aligned}
P[|W_{d,n} - W_{n,n}| > \varepsilon] &\leq \frac{1}{\varepsilon^2} E\left[|W_{d,n} - W_{n,n}|^2\right] = \frac{1}{\varepsilon^2} E\left[\left|\sum_{j=d+1}^{n} c_j \delta_n^j\right|^2\right] \\
&= \frac{1}{\varepsilon^2} E\left[\sum_{j=d+1}^{n} (c_j \delta_n^j)^2\right] + \frac{2}{\varepsilon^2} E\left[\sum_{0 \leq i < j \leq n} c_i \delta_n^i c_j \delta_n^j\right] \\
&= \frac{1}{\varepsilon^2} \sum_{j=d+1}^{n} c_j^2 E\left[E\left[(\delta_n^j)^2 | \mathscr{F}_{n-j}\right]\right] + \frac{2}{\varepsilon^2} E\left[\sum_{0 \leq i < j \leq n} c_j \delta_n^j c_i \cdot \underbrace{E[\delta_n^i | \mathscr{F}_{n-i}]}_{=0}\right] \\
&\leq \frac{1}{\varepsilon^2} \sum_{j=d+1}^{n} c_j^2 (\sigma^2 + b^2)
\end{aligned}$$

ist. Deshalb gilt für alle $\varepsilon > 0$, dass

$$\lim_{d \to \infty} \limsup_{n \to \infty} P[|W_{d,n} - W_{n,n}| > \varepsilon] \leq \lim_{d \to \infty} \frac{\sigma^2 + b^2}{\varepsilon^2} \sum_{j=d+1}^{\infty} c_j^2 = 0. \tag{3.1.20}$$

Wegen (3.1.18), (3.1.19) und (3.1.20) sind die Voraussetzungen von [Bil], Theorem 3.2 auf S.28 erfüllt, weshalb nun

$$\sum_{j=1}^{n} c_j \frac{X_{n-j+1} - m X_{n-j} - \lambda}{(X_{n-j} + 1)^{1/2}} = W_{n,n} \xrightarrow[n \to \infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}\left(0, \sigma^2 \sum_{j=1}^{\infty} c_j^2\right)$$

gilt. Somit ist die Behauptung gezeigt.

□

Theorem 3.1.5 *Für jedes $\alpha > -\frac{1}{2}$ gilt*

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} (X_{i-1} + 1)^{\alpha} (X_i - m X_{i-1} - \lambda)}{\left(\sum_{i=1}^{n} (X_{i-1} + 1)\right)^{\alpha + 1/2}} \xrightarrow[n \to \infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}\left(0, \sigma^2 \frac{(m-1)^{2\alpha+1}}{m^{2\alpha+1} - 1}\right).$$

Beweis: Wir zeigen zuerst, dass

$$\sum_{i=1}^{n} \left[(X_{i-1} + 1)^{\alpha + 1/2} - (m^{i-1} L)^{\alpha + 1/2}\right] \frac{X_i - m X_{i-1} - \lambda}{(X_{i-1} + 1)^{1/2}} = \mathrm{o}_p(m^{n(\alpha + 1/2)}) \tag{3.1.21}$$

für $n \to \infty$, wobei L die ZV aus Lemma 3.1.1 ist. Mit der Cauchy-Schwarz Ungleichung gilt

$$\begin{aligned}
&m^{-n(\alpha+\frac{1}{2})}\left|\sum_{i=1}^{n}\left[(X_{i-1}+1)^{\alpha+\frac{1}{2}}-(m^{i-1}L)^{\alpha+\frac{1}{2}}\right]\frac{X_i-mX_{i-1}-\lambda}{(X_{i-1}+1)^{\frac{1}{2}}}\right| \\
&= m^{-n(\alpha+\frac{1}{2})}\left|\sum_{i=1}^{n} m^{\frac{1}{2}(i-1)(\alpha+\frac{1}{2})}\left[\left(\frac{X_{i-1}+1}{m^{i-1}}\right)^{\alpha+\frac{1}{2}}-L^{\alpha+\frac{1}{2}}\right] m^{\frac{1}{2}(i-1)(\alpha+\frac{1}{2})}\frac{X_i-mX_{i-1}-\lambda}{(X_{i-1}+1)^{\frac{1}{2}}}\right| \\
&\le m^{-n(\alpha+\frac{1}{2})}U_n^{1/2}\cdot V_n^{1/2},
\end{aligned} \tag{3.1.22}$$

wobei

$$U_n := \sum_{i=1}^{n} m^{(i-1)(\alpha+1/2)}\left[\left(\frac{X_{i-1}+1}{m^{i-1}}\right)^{\alpha+1/2}-L^{\alpha+1/2}\right]^2$$

und

$$V_n := \sum_{i=1}^{n} m^{(i-1)(\alpha+1/2)}\frac{(X_i-mX_{i-1}-\lambda)^2}{X_{i-1}+1}.$$

Sei $\varepsilon > 0$ beliebig. Dann existiert nach Lemma 3.1.1 für fast alle $\omega \in \Omega$ ein i_0, so dass für alle $i \ge i_0$

$$\left[\left(\frac{X_{i-1}(\omega)+1}{m^{i-1}}\right)^{\alpha+1/2}-L^{\alpha+1/2}(\omega)\right]^2 < \varepsilon$$

ist. Daher gilt für fast alle $\omega \in \Omega$, dass

$$\begin{aligned}
\limsup_{n\to\infty} m^{-n(\alpha+\frac{1}{2})}U_n &= \limsup_{n\to\infty} m^{-n(\alpha+\frac{1}{2})}\sum_{i=1}^{i_0} m^{(i-1)(\alpha+\frac{1}{2})}\left[\left(\frac{X_{i-1}+1}{m^{i-1}}\right)^{\alpha+\frac{1}{2}}-L^{\alpha+\frac{1}{2}}\right]^2 \\
&\quad + \limsup_{n\to\infty} m^{-n(\alpha+\frac{1}{2})}\sum_{i=i_0}^{n} m^{(i-1)(\alpha+\frac{1}{2})}\left[\left(\frac{X_{i-1}+1}{m^{i-1}}\right)^{\alpha+\frac{1}{2}}-L^{\alpha+\frac{1}{2}}\right]^2 \\
&\le 0 + \lim_{n\to\infty} m^{-n(\alpha+\frac{1}{2})}\sum_{i=0}^{n} m^{(i-1)(\alpha+\frac{1}{2})}\cdot\varepsilon \\
&= \varepsilon \lim_{n\to\infty} m^{-n(\alpha+\frac{1}{2})}\frac{m^{n(\alpha+\frac{1}{2})}-1}{m^{(\alpha+\frac{1}{2})}-1} \\
&= \frac{\varepsilon}{m^{(\alpha+1/2)}-1}.
\end{aligned}$$

Da $\varepsilon > 0$ beliebig ist, folgt

$$m^{-n(\alpha+1/2)}U_n \xrightarrow[n\to\infty]{f.s.} 0, \quad \text{bzw.} \quad m^{-\frac{1}{2}n(\alpha+\frac{1}{2})}U_n^{1/2} \xrightarrow[n\to\infty]{f.s.} 0. \tag{3.1.23}$$

Weiterhin gilt wegen (1.2.4), dass

$$\begin{aligned}
\limsup_{n\to\infty} E[m^{-n(\alpha+1/2)}V_n] &= \limsup_{n\to\infty} m^{-n(\alpha+1/2)} \sum_{i=1}^{n} m^{(i-1)(\alpha+1/2)} E\left[\frac{(X_i - mX_{i-1} - \lambda)^2}{X_{i-1}+1}\right] \\
&\leq \lim_{n\to\infty} m^{-n(\alpha+1/2)} \sum_{i=1}^{n} m^{(i-1)(\alpha+1/2)} (\sigma^2 + b^2) \\
&= (\sigma^2 + b^2) \lim_{n\to\infty} m^{-n(\alpha+1/2)} \frac{m^{n(\alpha+1/2)} - 1}{m^{(\alpha+1/2)} - 1} \\
&= \frac{\sigma^2 + b^2}{m^{(\alpha+1/2)} - 1}.
\end{aligned}$$

Dies impliziert:

$$\left(m^{-n(\alpha+1/2)}V_n\right)_n \quad \text{bzw.} \quad \left(m^{-\frac{1}{2}n(\alpha+\frac{1}{2})}V_n^{1/2}\right)_n \quad \text{ist straff in } \mathbb{R}_{\geq 0}. \tag{3.1.24}$$

Da aus (3.1.23) und (3.1.24)

$$m^{-\frac{1}{2}n(\alpha+\frac{1}{2})}U_n^{1/2} \cdot m^{-\frac{1}{2}n(\alpha+\frac{1}{2})}V_n^{1/2} \xrightarrow[n\to\infty]{P} 0$$

folgt, ist (3.1.21) mit Abschätzung (3.1.22) gezeigt.

Um nun die Behauptung des Theorems einzusehen setzen wir

$$W_n^\alpha := \left(m^{-n} \sum_{i=1}^{n} (X_{i-1}+1)\right)^{-(\alpha+1/2)}$$

für $\alpha > -\frac{1}{2}$ und schreiben

$$\begin{aligned}
&\left(\sum_{i=1}^{n}(X_{i-1}+1)\right)^{-(\alpha+1/2)} \sum_{i=1}^{n}(X_{i-1}+1)^\alpha (X_i - mX_{i-1} - \lambda) \\
&= W_n^\alpha \cdot m^{-n(\alpha+\frac{1}{2})} \sum_{i=1}^{n} \left[(X_{i-1}+1)^{\alpha+\frac{1}{2}} - (m^{i-1}L)^{\alpha+\frac{1}{2}}\right] \frac{X_i - mX_{i-1} - \lambda}{(X_{i-1}+1)^{\frac{1}{2}}} \\
&\quad + W_n^\alpha \cdot m^{-n(\alpha+\frac{1}{2})} \sum_{i=1}^{n} (m^{i-1}L)^{\alpha+\frac{1}{2}} \frac{X_i - mX_{i-1} - \lambda}{(X_{i-1}+1)^{\frac{1}{2}}}.
\end{aligned} \tag{3.1.25}$$

Da W_n^α wegen (3.1.5) fast sicher gegen eine reelle ZV konvergiert, gilt mit (3.1.21) und Satz von Slutsky, dass

$$W_n^\alpha \cdot m^{-n(\alpha+\frac{1}{2})} \sum_{i=1}^{n} \left[(X_{i-1}+1)^{\alpha+\frac{1}{2}} - (m^{i-1}L)^{\alpha+\frac{1}{2}}\right] \frac{X_i - mX_{i-1} - \lambda}{(X_{i-1}+1)^{\frac{1}{2}}} \xrightarrow[n\to\infty]{P} 0. \tag{3.1.26}$$

Außerdem folgt aus Satz 3.1.4 mit $c_i := ((m-1)m^{-i})^{\alpha+\frac{1}{2}}$ wegen (3.1.5) und dem Satz von Slutsky, dass

$$\begin{aligned}
&W_n^\alpha \cdot m^{-n(\alpha+\frac{1}{2})} \sum_{i=1}^{n} (m^{i-1}L)^{\alpha+\frac{1}{2}} \frac{X_i - mX_{i-1} - \lambda}{(X_{i-1}+1)^{\frac{1}{2}}} \\
&= W_n^\alpha \cdot \left(\frac{L}{m-1}\right)^{\alpha+\frac{1}{2}} \sum_{i=1}^{n} ((m-1)m^{i-1-n})^{\alpha+\frac{1}{2}} \frac{X_i - mX_{i-1} - \lambda}{(X_{i-1}+1)^{\frac{1}{2}}} \\
&= \underbrace{W_n^\alpha \cdot \left(\frac{L}{m-1}\right)^{\alpha+\frac{1}{2}}}_{\to 1} \sum_{i=1}^{n} c_i \frac{X_{n-i+1} - mX_{n-i} - \lambda}{(X_{n-i}+1)^{\frac{1}{2}}} \\
&\xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}\left(0, \sigma^2 \sum_{i=1}^{\infty} c_i^2\right) = \mathcal{N}\left(0, \sigma^2 \frac{(m-1)^{2\alpha+1}}{m^{2\alpha+1}-1}\right).
\end{aligned} \tag{3.1.27}$$

Wendet man wieder Satz von Slutsky an, so folgt aus (3.1.25), (3.1.26) und (3.1.27) die Behauptung.

□

3.2 Asymptotische Normalität und Konsistenz

Theorem 3.2.1 *Im Falle $m > 1$ ist $\tilde{m}_n$ ein stark konsistenter Schätzer und es gilt*

$$\left(\sum_{i=1}^{n} (X_{i-1}+1)\right)^{1/2} (\tilde{m}_n - m) \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, \sigma^2). \tag{3.2.1}$$

Beweis: Wir zeigen zunächst die starke Konsistenz von $\tilde{m}_n$. Wegen Lemma 3.1.2 gilt

$$\begin{aligned}
\frac{1}{m^n}\left(\sum_{i=1}^{n}(X_{i-1}+1)\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{X_{i-1}+1} - n^2\right) &= \frac{1}{m^n}\sum_{i=1}^{n}(X_{i-1}+1)\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{X_{i-1}+1} - \frac{n^2}{m^n} \\
&\xrightarrow[n\to\infty]{f.s.} \frac{L\cdot K}{m-1} > 0 \quad f.s..
\end{aligned}$$

Daher gilt für $\mathbb{N}_n$ aus Definition 1.2.1

$$\mathbb{1}_{\mathbb{N}_n^c} \xrightarrow[n\to\infty]{f.s.} 1. \tag{3.2.2}$$

Schreiben wir $\tilde{m}_n$ um zu

$$\tilde{m}_n = \frac{\frac{1}{m^n}\sum_{i=1}^{n} X_i \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{X_{i-1}+1} - \frac{n^2}{m^n}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{X_i}{X_{i-1}+1}}{\frac{1}{m^n}\sum_{i=1}^{n}(X_{i-1}+1)\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{X_{i-1}+1} - \frac{n^2}{m^n}} \cdot \mathbb{1}_{\mathbb{N}_n^c}.$$

und wenden darauf Lemma 3.1.2 an, so erhalten wir mit (3.2.2), dass

$$\tilde{m}_n \xrightarrow[n\to\infty]{f.s.} \frac{\frac{mL}{m-1}\cdot K - 0\cdot m}{\frac{L}{m-1}\cdot K - 0} = m$$

und die starke Konsistenz von $\tilde{m}_n$ ist gezeigt. Wir zeigen nun (3.2.1) und definieren dazu mit den Bezeichnungen aus (1.1.5)

$$W_n := \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i \left(\tilde{A}_n + n\right)^{-1/2},$$

$$U_n := n \sum_{i=1}^{n} \frac{\varepsilon_i}{X_{i-1}+1} B_n^{-1} \left(\tilde{A}_n + n\right)^{-1/2}$$

und

$$V_n := n^2 B_n^{-1} \left(\tilde{A}_n + n\right)^{-1}.$$

Es gilt

$$\begin{aligned}
\frac{W_n - U_n}{1 - V_n} \cdot \mathbb{1}_{\mathbb{N}_n^c} &= \frac{\sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i \left(\tilde{A}_n + n\right)^{-1/2} - n \sum_{i=1}^{n} \frac{\varepsilon_i}{X_{i-1}+1} B_n^{-1} \left(\tilde{A}_n + n\right)^{-1/2}}{1 - n^2 B_n^{-1} \left(\tilde{A}_n + n\right)^{-1}} \cdot \mathbb{1}_{\mathbb{N}_n^c} \\
&= \frac{\sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i B_n - n \sum_{i=1}^{n} \frac{\varepsilon_i}{X_{i-1}+1}}{B_n \left(\tilde{A}_n + n\right) - n^2} \cdot \frac{\left(\tilde{A}_n + n\right)^{-1/2} B_n^{-1}}{B_n^{-1} \left(\tilde{A}_n + n\right)^{-1}} \cdot \mathbb{1}_{\mathbb{N}_n^c} \\
&= \left(\tilde{A}_n + n\right)^{1/2} \frac{\sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i B_n - n \sum_{i=1}^{n} \frac{\varepsilon_i}{X_{i-1}+1}}{B_n \left(\tilde{A}_n + n\right) - n^2} \cdot \mathbb{1}_{\mathbb{N}_n^c}
\end{aligned}$$

und mit analoger Rechnung zu (2.2.12) folgt nun

$$\left(\tilde{A}_n + n\right)^{1/2} (\tilde{m}_n - m) \cdot \mathbb{1}_{\mathbb{N}_n^c} = \frac{W_n - U_n}{1 - V_n} \cdot \mathbb{1}_{\mathbb{N}_n^c}. \tag{3.2.3}$$

Wegen Lemma 3.1.2 gilt

$$V_n = n^2 m^{-n} \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{X_{i-1}+1} m^{-n} \sum_{i=1}^{n} (X_{i-1}+1) \right)^{-1} \xrightarrow[n\to\infty]{f.s} 0 \cdot \left(K \cdot \frac{L}{m-1}\right)^{-1} = 0 \tag{3.2.4}$$

und

$$U_n = \frac{m^{-n/2} n \sum_{i=1}^{n} \frac{\varepsilon_i}{X_{i-1}+1}}{\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{X_{i-1}+1} \left(m^{-n} \sum_{i=1}^{n} (X_{i-1}+1) \right)^{1/2}} \xrightarrow[n\to\infty]{f.s} \frac{0 \cdot \tilde{K}}{K \cdot \left(\frac{L}{m-1} \right)^{1/2}} = 0. \tag{3.2.5}$$

Nach Satz 3.1.5 gilt mit $\alpha = 0$

$$W_n = \frac{\sum_{i=1}^{n} (X_i - mX_{i-1} - \lambda)}{\left(\sum_{i=1}^{n} (X_{i-1}+1) \right)^{1/2}} \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}\left(0, \sigma^2\right). \tag{3.2.6}$$

Mit dem Satz von Slutsky folgt nun aus (3.2.4), (3.2.5), (3.2.6) und (3.2.2), dass

$$\frac{W_n - U_n}{1 - V_n} \cdot \mathbb{1}_{\mathbb{N}_n^c} \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}\left(0, \sigma^2\right)$$

bzw. wegen (3.2.3), dass

$$\left(\tilde{A}_n + n \right)^{1/2} (\tilde{m}_n - m) \cdot \mathbb{1}_{\mathbb{N}_n^c} \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}\left(0, \sigma^2\right).$$

Schließlich folgt daraus mit (3.2.2) und erneut mit Satz von Slutsky, dass

$$\begin{aligned} &\left(\sum_{i=1}^{n} (X_{i-1}+1) \right)^{1/2} (\tilde{m}_n - m) \\ &= \left(\tilde{A}_n + n \right)^{1/2} (\tilde{m}_n - m) \cdot \mathbb{1}_{\mathbb{N}_n^c} + \underbrace{\left(\tilde{A}_n + n \right)^{1/2} (\tilde{m}_n - m) \cdot \mathbb{1}_{\mathbb{N}_n}}_{\to 0 \; f.s.} \\ &\xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}\left(0, \sigma^2\right), \end{aligned}$$

also (3.2.1).

□

Bemerkung Der Schätzer $\tilde{\lambda}_n$ ist nicht konsistent, denn im superkritischen Fall existiert kein konsistenter Schätzer für λ. Ein anschauliches Argument dafür ist, dass die Zahl der Individuen wegen Lemma 3.1.1 exponentiell ansteigt und die Immigration dann nur noch eine geringe Auswirkung auf den Prozess hat. Für eine rigorose Argumentation verweisen wir auf den nächsten Abschnitt.

3.3 Die Nichtexistenz konsistenter Schätzer im superkritischen Fall

Ziel dieses Abschnittes ist zu untersuchen, für welche Parameter des GWI im Fall $m > 1$ keine konsistenten Schätzfolgen existieren. Dazu leiten wir zunächst ein Kriterium her, welches erfüllt sein muß, falls konsistente Schätzfolgen für einen Parameter existieren.

Sei $\mathscr{P}$ die Menge aller Wahrscheinlichkeitsmaße auf $(\Omega, \mathscr{F})$, unter denen der Prozess $X = (X_n)_{n\geq 0}$ ein GWI mit den in Kapitel 1 gemachten Voraussetzungen ist. Sei auch hier $\mathcal{F} = (\mathscr{F}_n)_{n\geq 0}$, wobei $\mathscr{F}_n = \sigma(X_0, X_1, ..., X_n)$ und setze $\mathscr{F}_\infty := \sigma\left(\bigcup_{n\geq 0} \mathscr{F}_n\right) \subset \mathscr{F}$. Für ein $P \in \mathscr{P}$ setzen wir, $P_n := P|_{\mathscr{F}_n}$ die Restriktion von P auf $\mathscr{F}_n$. Da die Verteilung einer Markoff-Kette unter P durch die Startverteilung ρ und die Übergangswahrscheinlichkeit p festgelegt ist, gilt

$$P_n^{(X_0,\dots,X_n)}(x_0, \dots, x_n) = \rho(x_0) \prod_{k=0}^{n-1} p(x_k, x_{k+1})$$

für $(x_0, \dots, x_n) \in \mathbb{N}_0^{n+1}$. Seien P und Q aus $\mathscr{P}$ zwei Wahrscheinlichkeitsmaße mit den induzierten Startverteilungen und Übergangswahrscheinlichkeiten ρ und p bzw. γ und g. Dann ist der Dichtequotient (likelihood ratio) von P_n bezüglich Q_n gegeben durch

$$L_n^{Q/P} := \frac{\gamma(X_0) \prod_{k=0}^{n-1} g(X_k, X_{k+1})}{\rho(X_0) \prod_{k=0}^{n-1} p(X_k, X_{k+1})},$$

wobei

$$L_n^{Q/P}(\omega) := \infty \quad \text{für} \quad \rho(X_0) \prod_{k=0}^{n-1} p(X_k, X_{k+1})(\omega) = 0.$$

Denn es gilt $P_n\left[L_n^{Q/P} = \infty\right] = 0$. Außerdem ergibt sich für alle Rechteckmengen $A \in \mathscr{F}_n$ der Form $A = \{X_0 \in B_0, \dots, X_n \in B_n\}$ mit $B_0, \dots, B_n \in \mathfrak{P}(\mathbb{N}_0)$, dass

$$\begin{aligned}
\int_A L_n^{Q/P} \mathrm{d}P_n &= \int_{A\cap\left\{L_n^{Q/P}=\infty\right\}} L_n^{Q/P} \mathrm{d}P_n + \int_{A\cap\left\{L_n^{Q/P}<\infty\right\}} L_n^{Q/P} \mathrm{d}P_n \\
&= \int_{A\cap\left\{L_n^{Q/P}<\infty\right\}} \frac{\gamma(X_0) \prod_{k=0}^{n-1} g(X_k, X_{k+1})}{\rho(X_0) \prod_{k=0}^{n-1} p(X_k, X_{k+1})} \mathrm{d}P_n \\
&= \int_{B_0} \cdots \int_{B_n} \mathbb{1}_{\left\{\rho(x_0) \prod_{k=0}^{n-1} p(x_k,x_{k+1})>0\right\}} \frac{\gamma(x_0) \prod_{k=0}^{n-1} g(x_k, x_{k+1})}{\rho(x_0) \prod_{k=0}^{n-1} p(x_k, x_{k+1})} \mathrm{d}P_n^{(X_0,\dots,X_n)} \\
&= \int_{B_0} \cdots \int_{B_n} \mathbb{1}_{\left\{\rho(x_0) \prod_{k=0}^{n-1} p(x_k,x_{k+1})>0\right\}} \gamma(x_0) \prod_{k=0}^{n-1} g(x_k, x_{k+1}) \mathrm{d}(x_0, \dots, x_n) \\
&= \int_{B_0} \cdots \int_{B_n} \mathbb{1}_{\left\{\rho(x_0) \prod_{k=0}^{n-1} p(x_k,x_{k+1})>0\right\}} \mathrm{d}Q_n^{(X_0,\dots,X_n)} \\
&= Q_n\left(A \cap \left\{L_n^{Q/P} < \infty\right\}\right),
\end{aligned}$$

wobei $\mathrm{d}(x_0, \ldots, x_n)$ die Integration bezüglich des Zählmaßes auf $\mathbb{N}_0^{n+1}$ andeutet. Da die Rechteckmengen ein Erzeuger von $\mathscr{F}_n$ sind, gilt für alle $A \in \mathscr{F}_n$, dass

$$Q_n(A) = Q_n\left(A \cap \left\{L_n^{Q/P} = \infty\right\}\right) + \int_A L_n^{Q/P} \mathrm{d}P_n, \tag{3.3.1}$$

was zeigt, dass $L_n^{Q/P}$ der Dichtequotienten von P_n bezüglich Q_n ist.

Zur Erinnerung: Eine $\mathcal{F}$-adaptierte Folge von $\mathbb{R}^d$-wertigen ZVen $(\hat{\theta}_n)_{n\geq 0}$ ist konsistent für ein statistisches Funktional $\theta : \mathscr{P} \to \mathbb{R}^d$, wenn

$$\hat{\theta}_n \xrightarrow[n\to\infty]{P} \theta(P) \quad \text{für alle } P \in \mathscr{P}.$$

Lemma 3.3.1 *Seien P und Q aus $\mathscr{P}$. Existiert eine konsistente Schätzfolge für das statistisches Funktional θ, und ist $\theta(P) \neq \theta(Q)$, dann gilt*

$$L_n^{Q/P} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \quad P\text{-f.s.}.$$

Beweis: Da wegen der Konsistenz $\hat{\theta}_n \xrightarrow[n\to\infty]{P} \theta(P)$ gilt, kann man eine Teilfolge $(n_k)_k$ auswählen, so dass $\hat{\theta}_{n_k} \xrightarrow[k\to\infty]{} \theta(P)$ P-f.s.. Wieder wegen der Konsistenz gilt dann auch $\hat{\theta}_{n_k} \xrightarrow[k\to\infty]{Q} \theta(Q)$. Es gibt nun eine weitere Teilfolge $(n_l)_l \subset (n_k)_k$, so dass $\hat{\theta}_{n_l} \xrightarrow[l\to\infty]{} \theta(Q)$ Q-f.s. und insbesondere $\hat{\theta}_{n_l} \xrightarrow[l\to\infty]{} \theta(P)$ P-f.s. gilt. Wir definieren die Menge

$$\mathbb{M} := \left\{\hat{\theta}_{n_l} \xrightarrow[l\to\infty]{} \theta(P)\right\} \in \mathscr{F}_\infty.$$

Da $\theta(P) \neq \theta(Q)$, folgt nach den obigen Überlegungen, dass

$$P(\mathbb{M}) = 1 \quad \text{und} \quad Q(\mathbb{M}) = 0. \tag{3.3.2}$$

Die Maße P und Q sind also singulär zueinander.

Als nächstes beobachten wir, dass für alle $k < n$

$$\begin{aligned} Q_k\left(L_k^{Q/P} = \infty\right) = Q_n\left(L_k^{Q/P} = \infty\right) &= Q_n\left(\rho(X_0)\prod_{k=0}^{k-1} p(X_k, X_{k+1}) = 0\right) \\ &\leq Q_n\left(\rho(X_0)\prod_{k=0}^{n-1} p(X_k, X_{k+1}) = 0\right) \\ &= Q_n\left(L_n^{Q/P} = \infty\right) \end{aligned}$$

gilt. Somit ergibt sich wegen (3.3.1), dass für beliebige $k < n$ und $A \in \mathscr{F}_k$

$$\begin{aligned}\int_A L_n^{Q/P} \mathrm{d}P = \int_A L_n^{Q/P} \mathrm{d}P_n &= Q_n(A) - Q_n\left(A \cap \left\{L_n^{Q/P} = \infty\right\}\right) \\ &= Q_k(A) - Q_n\left(A \cap \left\{L_n^{Q/P} = \infty\right\}\right) \\ &= \int_A L_k^{Q/P} \mathrm{d}P_k + Q_k\left(A \cap \left\{L_k^{Q/P} = \infty\right\}\right) - Q_n\left(A \cap \left\{L_n^{Q/P} = \infty\right\}\right) \\ &\leq \int_A L_k^{Q/P} \mathrm{d}P,\end{aligned}$$

was zeigt, dass $\left(L_n^{Q/P}\right)_n$ ein nichtnegatives $(P, \mathcal{F})$-Supermartingal ist. Nach dem Martingal-Konvergenzsatz ([HH], Theorem 2.5, S.17) existiert nun eine nichtnegative ZV $L_\infty^{Q/P} \in L^1(\Omega, \mathscr{F}_\infty, P)$, so dass

$$L_n^{Q/P} \xrightarrow[n\to\infty]{} L_\infty^{Q/P} \quad P\text{-f.s..} \tag{3.3.3}$$

Sei nun $A \in \bigcup_{n\geq 0} \mathscr{F}_n$ beliebig, dann gibt es ein $n_0 \geq 0$, so dass $A \in \mathscr{F}_{n_0}$. Wegen des Lemmas von Fatou und der Supermartingaleigenschaft gilt dann, dass

$$\begin{aligned}\int_A L_\infty^{Q/P} \mathrm{d}P &\leq \liminf_{n\to\infty} \int_A L_n^{Q/P} \mathrm{d}P = \liminf_{n\to\infty} \int_A L_{n_0+n}^{Q/P} \mathrm{d}P \\ &\leq \int_A L_{n_0}^{Q/P} \mathrm{d}P = \int_A L_{n_0}^{Q/P} \mathrm{d}P_{n_0} = Q_{n_0}(A) \\ &= Q(A).\end{aligned}$$

Da $\bigcup_{n\geq 0} \mathscr{F}_n$ eine Algebra ist, gilt aufgrund der Eindeutigkeit im Fortsetzungssatz für σ-endliche Prämaße, dass auch

$$\int_A L_\infty^{Q/P} \mathrm{d}P \leq Q(A) \quad \text{für alle } A \in \mathscr{F}_\infty.$$

Insbesondere folgt für $\mathbb{M}$ wegen (3.3.2), dass

$$E_P\left[L_\infty^{Q/P}\right] = \int_\Omega L_\infty^{Q/P} \mathrm{d}P = \int_{\mathbb{M}} L_\infty^{Q/P} \mathrm{d}P \leq Q(\mathbb{M}) = 0,$$

woraus wir $L_\infty^{Q/P} = 0$ P-f.s. schließen. Zusammen mit (3.3.3) folgt die Behauptung.

□

Für eine ZV Y bezeichnen wir mit $\mathrm{span}_P(Y)$ die größte Zahl $a \in \mathbb{N}$, so dass $Y = b \mod a$ P-f.s. für irgendeine Zahl $b \in \{0, \dots a-1\}$ gilt. $\mathrm{span}_P(Y)$ ist also die Gitterweite der Verteilung $\mathcal{L}(Y|P)$. Des Weiteren definieren wir für $m > 1$ und $\sigma^2 > 0$ eine Klasse von Wahrscheinlichkeitsmaßen:

$$\begin{aligned}\mathscr{C}(m, \sigma^2) := \Bigg\{P \in \mathscr{P} \,\Bigg|\, &E_P[Y_{1,1}] = m,\ Var_P[Y_{1,1}] = \sigma^2,\ E_P[Y_{1,1}^3] < \infty, \\ &\mathrm{span}_P(Y_{1,1}) = 1 \text{ und } E_P[I_1] < \infty\Bigg\}\end{aligned} \tag{3.3.4}$$

Lemma 3.3.2 *Seien P und Q, nicht notwendigerweise verschieden, aus $\mathscr{C}(m,\sigma^2)$ mit $m>1$ und g die durch Q induzierte Übergangswahrscheinlichkeit von X. Dann existiert eine Folge von $\mathcal{F}$-adaptierten ZVen $(F_n)_n$, so dass*

$$g(X_n, X_{n+1})\mathbb{1}_{\{X_n>0\}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2 X_n}} \exp\left[-\frac{(X_{n+1}-mX_n)^2}{2\sigma^2 X_n}\right][1+F_{n+1}]\,\mathbb{1}_{\{X_n>0\}},$$

und für P-fast alle $\omega \in \Omega$ ist $F_{n+1}(\omega) = \mathrm{O}\left(\frac{n}{m^{n/2}}\right)$, $n \to \infty$.

Beweis: Wir definieren für $k \in \mathbb{N}_0$, $l \in \mathbb{N}$ und $x \in \mathbb{R}$

$$y_{k,l} := \frac{k-ml}{\sigma\sqrt{l}}, \quad \phi(x) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2} \quad \text{und} \quad \alpha(x) := \phi(x)\cdot(x^3-3x)(\sigma^3 3!)^{-1}\kappa,$$

wobei κ eine geeignete reelle Konstante ist. Dann gilt nach [Pet] Ch.VII, §3, Theorem 13 auf S.205, dass

$$\sigma\sqrt{l}Q\left[\sum_{j=1}^{l} Y_{1,j} = k\right] = \phi(y_{k,l}) + \frac{\alpha(y_{k,l})}{\sqrt{l}} + f_1(k,l),$$

wobei $f_1(k,l) = \mathrm{o}\left(l^{-1/2}\right)$ für $l\to\infty$ gleichmäßig in k ist. Weil $\sup_{x\in\mathbb{R}}|\alpha(x)| < \infty$, folgt nun, dass

$$Q\left[\sum_{j=1}^{l} Y_{1,j} = k\right] = \frac{1}{\sigma\sqrt{l}}\phi(y_{k,l}) + f_2(k,l),$$

wobei $f_2(k,l) = \mathrm{O}\left(l^{-1}\right)$ für $l\to\infty$ gleichmäßig in k ist. Da $\{Y_{1,j}\}$ und I_1 unabhängig sind und $Y_{1,1}\geq 0$ gilt auch, dass

$$\begin{aligned} g(l,k) &= Q\left[\sum_{j=1}^{l} Y_{1,j} + I_1 = k\right] \\ &= \sum_{i=0}^{\infty} Q\left[\left\{\sum_{j=1}^{l} Y_{1,j} = k-i\right\} \cap \{I_1 = i\}\right] \\ &= \sum_{i=0}^{k} Q\left[\sum_{j=1}^{l} Y_{1,j} = k-i\right] Q[I_1 = i] \\ &= \sum_{i=0}^{k}\left(\frac{1}{\sigma\sqrt{l}}\phi(y_{k-i,l}) + f_2(k,l)\right)Q[I_1=i] \\ &= \sum_{i=0}^{k}\frac{1}{\sigma\sqrt{l}}\phi(y_{k-i,l})Q[I_1=i] + f_3(k,l), \end{aligned} \tag{3.3.5}$$

wobei $f_3(k,l) = \mathrm{O}\left(l^{-1}\right)$ für $l\to\infty$ gleichmäßig in k ist. Da $c_1 := \sup_{x\in\mathbb{R}}|\phi'(x)| < \infty$, gilt nach dem Mittelwertsatz, dass

$$\left|\phi(x_{k-i,l}) - \phi\left(\frac{k-ml}{\sigma\sqrt{l}}\right)\right| \leq c_1\frac{i}{\sigma\sqrt{l}} \quad \text{für } i = 0,\dots,k$$

und somit auch, dass

$$\begin{aligned}
&\left|\frac{1}{\sigma\sqrt{l}}\sum_{i=1}^{k}\left[\phi(x_{k-i,l})-\phi\left(\frac{k-ml}{\sigma\sqrt{l}}\right)\right]Q[I_1=i]\right| \\
&\le \frac{1}{\sigma\sqrt{l}}\sum_{i=1}^{k}\left|\phi(x_{k-i,l})-\phi\left(\frac{k-ml}{\sigma\sqrt{l}}\right)\right|Q[I_1=i] \\
&\le \frac{c_1}{\sigma^2 l}\sum_{i=1}^{\infty} iQ[I_1=i] \\
&\le \frac{c_1\lambda_Q}{\sigma^2 l},
\end{aligned}$$

wobei $\lambda_Q = E_Q[I_1] < \infty$ ist. Also gilt

$$\frac{1}{\sigma\sqrt{l}}\sum_{i=1}^{k}\left[\phi(x_{k-i,l})-\phi\left(\frac{k-ml}{\sigma\sqrt{l}}\right)\right]Q[I_1=i] = f_4(k,l), \tag{3.3.6}$$

wobei $f_4(k,l) = \mathrm{O}\left(l^{-1}\right)$ für $l \to \infty$ gleichmäßig in k ist. Des Weiteren gilt

$$k\sum_{i=k+1}^{\infty} Q[I_1=i] \le \sum_{i=k+1}^{\infty} iQ[I_1=i] \xrightarrow[k\to\infty]{} 0,$$

da $E_Q[I_1] < \infty$ und wegen $\sup_{k,l\ge 1}\left|\phi\left(\frac{k-ml}{\sigma\sqrt{l}}\right)\right| =: c_2 < \infty$ ist

$$\frac{1}{\sigma\sqrt{l}}\phi\left(\frac{k-ml}{\sigma\sqrt{l}}\right)\sum_{i=k+1}^{\infty} Q[I_1=i] \le \frac{c_2}{\sigma}\sum_{i=k+1}^{\infty} Q[I_1=i].$$

Daher gilt

$$\frac{1}{\sigma\sqrt{l}}\phi\left(\frac{k-ml}{\sigma\sqrt{l}}\right)\sum_{i=k+1}^{\infty} Q[I_1=i] = f_5(k,l), \tag{3.3.7}$$

wobei $f_5(k,l) = \mathrm{o}\left(k^{-1}\right)$ für $k \to \infty$ gleichmäßig in l ist. Mit den Gleichungen (3.3.5), (3.3.6) und (3.3.7) ergibt sich, dass

$$\begin{aligned}
g(l,k) &= \sum_{i=0}^{k}\frac{1}{\sigma\sqrt{l}}\left[\phi(y_{k-i,l})-\phi\left(\frac{k-ml}{\sigma\sqrt{l}}\right)+\phi\left(\frac{k-ml}{\sigma\sqrt{l}}\right)\right]Q[I_1=i]+f_3(k,l) \\
&= \frac{1}{\sigma\sqrt{l}}\phi\left(\frac{k-ml}{\sigma\sqrt{l}}\right)-\frac{1}{\sigma\sqrt{l}}\phi\left(\frac{k-ml}{\sigma\sqrt{l}}\right)\sum_{i=k+1}^{\infty}Q[I_1=i] \\
&\quad+\sum_{i=0}^{k}\frac{1}{\sigma\sqrt{l}}\left[\phi(y_{k-i,l})-\phi\left(\frac{k-ml}{\sigma\sqrt{l}}\right)\right]Q[I_1=i]+f_3(k,l) \\
&= \frac{1}{\sigma\sqrt{l}}\phi\left(\frac{k-ml}{\sigma\sqrt{l}}\right)+f_5(k)+f_6(l),
\end{aligned}$$

wobei $f_5(k) = f_5(k,l) = \mathrm{o}\left(k^{-1}\right)$ für $k \to \infty$ gleichmäßig in l und $f_6(l) = f_6(k,l) = \mathrm{O}\left(l^{-1}\right)$ für $l \to \infty$ gleichmäßig in k ist.

Wegen Lemma 3.1.1 gilt für P-fast alle $\omega \in \Omega$, dass $X_n(\omega) = \mathrm{O}\left(m^n\right)$ für $n \to \infty$ und daher auch für P-fast alle $\omega \in \Omega$, dass $X_n(\omega) \xrightarrow{n\to\infty} \infty$. Somit ist

$$g(X_n, X_{n+1})\mathbb{1}_{\{X_n>0\}} = \left(\frac{1}{\sigma\sqrt{X_n}}\phi\left(\frac{X_{n+1} - mX_n}{\sigma\sqrt{X_n}}\right) + f_5(X_{n+1}) + f_6(X_n)\right)\mathbb{1}_{\{X_n>0\}}, \tag{3.3.8}$$

wobei für P-fast alle $\omega \in \Omega$ gilt, dass $f_5(X_{n+1}(\omega)) + f_6(X_n(\omega)) = \mathrm{O}\left(m^{-n}\right)$ für $n \to \infty$. Nach einem Analogon zum Gesetz vom iterierten Logarithmus für den GWI ([HL], Theorem 4) gilt für P-fast alle $\omega \in \Omega$, dass

$$\frac{X_{n+1}(\omega) - mX_n(\omega)}{\sqrt{2\sigma^2 X_n(\omega)}} = \mathrm{O}\left(\sqrt{\log n}\right), \quad n \to \infty.$$

Also gilt auch für P-fast alle $\omega \in \Omega$, dass

$$\exp\left[\frac{(X_{n+1}(\omega) - mX_n(\omega))^2}{2\sigma^2 X_n(\omega)}\right] = \mathrm{O}(n), \quad n \to \infty. \tag{3.3.9}$$

Wir definieren

$$F_{n+1} := (f_5(X_{n+1}) + f_6(X_n)) \cdot \sqrt{2\pi\sigma^2 X_n}\exp\left[\frac{(X_{n+1} - mX_n)^2}{2\sigma^2 X_n}\right] \cdot \mathbb{1}_{\{X_n>0\}}.$$

Dann ist F_n eine $\mathscr{F}_n$-messbare ZV. Da für P-fast alle $\omega \in \Omega$ gilt, dass $\sqrt{X_n(\omega)} = \mathrm{O}\left(m^{n/2}\right)$ für $n \to \infty$ und $f_5(X_{n+1}(\omega)) + f_6(X_n(\omega)) = \mathrm{O}\left(m^{-n}\right)$ für $n \to \infty$, ergibt sich mit (3.3.9) für P-fast alle $\omega \in \Omega$, dass

$$F_{n+1}(\omega) = \mathrm{O}\left(\frac{n}{m^{n/2}}\right), \quad n \to \infty.$$

Schreiben wir (3.3.8) um zu

$$g(X_n, X_{n+1})\mathbb{1}_{\{X_n>0\}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2 X_n}}\exp\left[-\frac{(X_{n+1} - mX_n)^2}{2\sigma^2 X_n}\right][1 + F_{n+1}]\,\mathbb{1}_{\{X_n>0\}},$$

so folgt die Behauptung.

□

Satz 3.3.3 *Sei θ ein statistisches Funktional auf $\mathscr{P}$ und sei $\mathscr{C}(m,\sigma^2)$ wie in* (3.3.4)*. Existieren für beliebiges $m > 1$ und $\sigma^2 > 0$ zwei Wahrscheinlichkeitsmaße $P, Q \in \mathscr{C}(m,\sigma^2)$ mit $\theta(P) \neq \theta(Q)$, so dass für deren induzierten Startverteilungen und Übergangswahrscheinlichkeiten ρ und p bzw. γ und g gilt, dass $\rho \ll \gamma$ und $p(x,\cdot) \ll q(x,\cdot)$ für alle $x \in \mathbb{N}_0$, dann existiert kein konsistenter Schätzer für θ.*

Beweis: Nach Lemma 3.3.1 genügt es zu zeigen, dass $\lim_{n\to\infty} L_n^{Q/P} > 0$ P-f.s.. Da ρ die Startverteilung und p die Übergangswahrscheinlichkeit von X unter P ist, gilt dass

$$\rho(X_0)\prod_{k=0}^{n-1} p(X_k, X_{k+1}) > 0 \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}_0 \quad P\text{-f.s..}$$

Und weil $\rho \ll \gamma$ und $p(x,\cdot) \ll q(x,\cdot)$ für alle $x \in \mathbb{N}_0$, gilt auch, dass

$$L_n^{Q/P} = \frac{\gamma(X_0)\prod_{k=0}^{n-1} g(X_k, X_{k+1})}{\rho(X_0)\prod_{k=0}^{n-1} p(X_k, X_{k+1})} > 0 \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}_0 \quad P\text{-f.s..}$$

Aus Lemma 3.3.2 folgt, dass

$$g(X_n, X_{n+1})\mathbb{1}_{\{X_n>0\}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2 X_n}} \exp\left[-\frac{(X_{n+1}-mX_n)^2}{2\sigma^2 X_n}\right]\left[1+F_{n+1}\right]\mathbb{1}_{\{X_n>0\}}, \tag{3.3.10}$$

wobei für $\mathbb{A} := \left\{\omega \in \Omega \mid F_{n+1}(\omega) = \mathrm{O}\left(\frac{n}{m^{n/2}}\right),\ n \to \infty\right\}$ gilt, dass $P[\mathbb{A}] = 1$. Da dass Lemma auch im Falle $P = Q$ gilt, folgt insbesondere, dass

$$p(X_n, X_{n+1})\mathbb{1}_{\{X_n>0\}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2 X_n}} \exp\left[-\frac{(X_{n+1}-mX_n)^2}{2\sigma^2 X_n}\right]\left[1+\tilde{F}_{n+1}\right]\mathbb{1}_{\{X_n>0\}}, \tag{3.3.11}$$

wobei für $\tilde{\mathbb{A}} := \left\{\omega \in \Omega \mid \tilde{F}_{n+1}(\omega) = \mathrm{O}\left(\frac{n}{m^{n/2}}\right),\ n \to \infty\right\}$ gilt, dass $P[\tilde{\mathbb{A}}] = 1$.
Sei nun $\omega \in \mathbb{A} \cap \tilde{\mathbb{A}} \cap \left\{X_n \xrightarrow{n\to\infty} \infty\right\} \cap \left\{L_n^{Q/P} > 0 \text{ für alle } n \in \mathbb{N}_0\right\}$, dann existiert ein $n_0 = n_0(\omega)$ und ein $C = C(\omega) \in \mathbb{R}$, so dass

$$X_n(\omega) > 0, \quad |\tilde{F}_{n+1}(\omega)| < 1/2 \quad \text{und} \quad |\tilde{F}_{n+1}(\omega) - F_{n+1}(\omega)| \leq C\frac{n}{m^{n/2}} \tag{3.3.12}$$

für alle $n \geq n_0$. Mit (3.3.10) und (3.3.11), erhalten wir dann, dass

$$L_n^{Q/P}(\omega) = \frac{\gamma(X_0(\omega))}{\rho(X_0(\omega))}\prod_{k=0}^{n_0-1}\frac{g(X_k(\omega), X_{k+1}(\omega))}{p(X_k(\omega), X_{k+1}(\omega))}\prod_{k=n_0}^{n}\frac{1+F_{k+1}(\omega)}{1+\tilde{F}_{k+1}(\omega)} > 0 \quad \text{für alle } n \geq n_0. \tag{3.3.13}$$

Wegen (3.3.12) gilt nun, dass

$$\sum_{k=n_0}^{\infty}\left|1 - \frac{1+F_{k+1}(\omega)}{1+\tilde{F}_{k+1}(\omega)}\right| = \sum_{k=n_0}^{\infty}\left|\frac{\tilde{F}_{k+1}(\omega) - F_{k+1}(\omega)}{1+\tilde{F}_{k+1}(\omega)}\right| \leq \sum_{k=n_0}^{\infty} 2C\frac{k}{m^{k/2}} < \infty \quad P\text{-f.s.,}$$

was äquivalent zu

$$\lim_{n\to\infty}\prod_{k=n_0}^{n}\frac{1+F_{k+1}(\omega)}{1+\tilde{F}_{k+1}(\omega)} > 0$$

ist. Mit (3.3.13) folgt somit, dass $\lim_{n\to\infty} L_n^{Q/P}(\omega) > 0$. Da

$$P\left[\mathbb{A} \cap \tilde{\mathbb{A}} \cap \left\{X_n \xrightarrow{n\to\infty} \infty\right\} \cap \left\{L_n^{Q/P} > 0 \text{ für alle } n \in \mathbb{N}_0\right\}\right] = 1$$

folgt $\lim_{n\to\infty} L_n^{Q/P} > 0$ P-f.s., was wegen Lemma 3.3.1 die Behauptung impliziert.

$\square$

Korollar 3.3.4 *Ist $m > 1$, so existiert kein konsistenter Schätzer für λ.*

Beweis: Die Behauptung folgt direkt aus Satz 3.3.3, denn es gibt zweifelsohne eine Vielzahl von Wahrscheinlichkeitsmaßen $P, Q \in \mathscr{P}$, welche die Voraussetzungen von Satz 3.3.3 für das Funktional $\lambda(P) := E_P[I_1]$ erfüllen. Gelte zum Beispiel $\mathcal{L}(X_0|P) = \mathcal{L}(X_0|Q)$ und $\mathcal{L}(Y_{1,1}|P) = \mathcal{L}(Y_{1,1}|Q)$, wobei $E[Y_{1,1}^3] < \infty$ und $\operatorname{span}(Y_{1,1}) = 1$. Seien darüber hinaus die Immigrationsverteilungen $\mathcal{L}(I_1|P)$ und $\mathcal{L}(I_1|Q)$ äquivalent, jedoch mit unterschiedlichen Erwartungswerten. Dann gilt $P, Q \in \mathscr{C}(m, \sigma^2)$, $p(x, \cdot)$ ist äquivalent zu $g(x, \cdot)$ für alle $x \in \mathbb{N}_0$, ρ ist äquivalent zu γ aber $\lambda(P) \neq \lambda(Q)$. Damit sind alle Voraussetzungen erfüllt.

$\square$

Kapitel 4

Der kritische Fall

Im folgenden Kapitel ist stets $m = 1$ vorausgesetzt, und es gelten die Bezeichnungen aus den Kapiteln zuvor. Sei $E \subset \mathbb{R}^+$ unbeschränkt, dann ist

$$\hat{C}(E) := \left\{ f : E \to \mathbb{R} \text{ stetig mit } \lim_{x\to\infty} f(x) = 0 \right\}$$

mit der Norm $\|f\|_\infty := \sup_{x\in E} |f(x)|$ ein reeller Banachraum. Bezeichne $C_c^\infty(\mathbb{R}^+)$ den Raum der unendlich oft differenzierbaren Funktionen mit kompaktem Träger auf $\mathbb{R}^+$, dann ist $C_c^\infty(\mathbb{R}^+) \subset \hat{C}(\mathbb{R}^+)$ ein dichter, linearer Unterraum. Wir definieren nun den Operator $\mathcal{A} : C_c^\infty(\mathbb{R}^+) \to C_c^\infty(\mathbb{R}^+)$ durch

$$\mathcal{A} = \frac{1}{2}\sigma^2 x \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} + \lambda \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}. \tag{4.0.1}$$

Nach [EK] Ch.8, Theorem 2.1 auf S.371 generiert $\mathcal{A}$ eine Feller-Halbgruppe $\{\mathcal{T}(t)\}$ auf $\hat{C}(\mathbb{R}^+)$. Wegen [EK] Ch.4, Proposition 2.9/2.10 auf S.171 nimmt der zu $\{\mathcal{T}(t)\}$ gehörende Markoff-Prozess $\mathcal{X}$ mit Startwert $\mathcal{X}_0$ fast sicher stetige Pfade an. Also ist $(\mathcal{X}_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$ eine Diffusion mit Generator $\mathcal{A}$.

Ziel des gesamten Kapitels ist folgendes Theorem zu beweisen.

Theorem 4.1 *Ist $m = 1$ und $E[Y_{1,1}^2 \log^+ Y_{1,1}] < \infty$, dann sind die Schätzer $\tilde{m}_n$ und $\tilde{\lambda}_n$ konsistent, also*

$$\tilde{m}_n \xrightarrow[n\to\infty]{P} m \quad \textit{und} \quad \tilde{\lambda}_n \xrightarrow[n\to\infty]{P} \lambda.$$

Außerdem gilt

$$\left(\sum_{i=1}^{n} (X_{i-1} + 1) \right)^{1/2} (\tilde{m}_n - m) \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{L}} (\mathcal{X}_1 - \lambda) \left(\int_0^1 \mathcal{X}_t \mathrm{d}t \right)^{-1/2}, \tag{4.0.2}$$

wobei $(\mathcal{X}_t)_t$ eine Diffusion mit Generator $\mathcal{A}$ aus (4.0.1) *und Startwert $\mathcal{X}_0 = 0$ ist. Sind ferner $2\lambda/\sigma^2 > 1$ und $E[Y_{1,1}^{2+\delta}] < \infty$ für ein $\delta > 0$, dann gilt auch*

$$\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{X_{i-1} + 1} \right)^{1/2} (\tilde{\lambda}_n - \lambda) \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, \sigma^2). \tag{4.0.3}$$

Im ersten Abschnitt dieses Kapitels untersuchen wir den Zusammenhang zwischen dem GWI X und der Diffusion $\mathcal{X}$ mit Generator $\mathcal{A}$.

4.1 Approximierende Diffusionen

Sei $D^+[0,\infty)$ der Raum der positiven rechtsstetigen Funktionen auf $[0,\infty)$ mit linkem Grenzwert (cadlag). $(D^+[0,\infty), d)$ mit der Skorohod-Metrik d ist nach [EK] Ch.3, Theorem 5.6, S.121 ein vollständiger und separabeler metrischer Raum. Die genaue Definition des Raumes und seiner Metrik ist in [EK] Ch.3, §5, auf den Seiten 116 ff zu finden. Des Weiteren definieren wir die Folge $(\mathcal{X}^n)_{n\geq 1}$ von zeitstetigen Prozessen durch

$$\mathcal{X}_t^n := \frac{X_{[nt]}}{n} \quad t \in \mathbb{R}^+, \tag{4.1.1}$$

wobei $[nt] := \max\{k \in \mathbb{Z} | k \leq n \cdot t\}$. Sei $(\mathscr{G}_t^n)_t := \mathscr{F}_{[nt]}$, dann ist $(\mathcal{X}_t^n)_t$ $(\mathscr{G}_t^n)_t$-adaptiert. Aufgrund ihrer Konstruktion können wir $\mathcal{X}_\bullet^n$ als $D^+[0,\infty)$-wertige Zufallsvariable auffassen. Nach [RY] Ch.I, Proposition 4.8 auf S.44 ist $\mathcal{X}^n$ daher auch *progressiv*-messbar.

Theorem 4.1.1 *Sei $\mathcal{X}^n$ wie in* (4.1.1) *definiert und sei $\mathcal{X}$ eine Diffusion mit Generator $\mathcal{A}$ aus* (4.0.1) *und $\mathcal{X}_0 = 0$, dann gilt*

$$\mathcal{X}^n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{X} \quad \textit{in } D^+[0,\infty).$$

Beweis: <u>1. Schritt:</u> Definiere $\mathbb{E}_n := \{\frac{i}{n} | i \in \mathbb{N}_0\}$ und sei $\|\cdot\|_{\mathbb{E}_n} = \sup_{x\in\mathbb{E}_n} |\cdot|$ die Norm von $\hat{C}(\mathbb{E}_n)$. Definiere für alle $f \in \hat{C}(\mathbb{R}^+)$

$$\mathcal{T}_n f(x) := E\left[f\left(\mathcal{X}_{1/n}^n\right) | \mathcal{X}_0^n = x\right] = E\left[f\left(\frac{1}{n}\left(\sum_{j=1}^{nx} Y_{1,j} + I_1\right)\right)\right] \quad \text{mit } x \in \mathbb{E}_n$$

und

$$\mathcal{A}_n f(x) := n\left(\mathcal{T}_n f(x) - f(x)\right) \quad \text{mit } x \in \mathbb{E}_n.$$

Um das Theorem zu beweisen, reicht es zu zeigen, dass

$$\lim_{n\to\infty} \|\mathcal{A}_n f - \mathcal{A} f\|_{\mathbb{E}_n} = 0 \quad \text{für alle } f \in C_c^\infty(\mathbb{R}^+). \tag{4.1.2}$$

Denn nach [EK] Ch.1, Theorem 6.5 auf S.31 ist (4.1.2) äquivalent dazu, dass für alle $f \in \hat{C}(\mathbb{R}^+)$

$$\lim_{n\to\infty} \|\mathcal{T}_n^{[nt]} f - \mathcal{T}(t) f\|_{\mathbb{E}_n} = 0 \quad \text{für alle } t \geq 0.$$

Dabei ist für $\alpha > 0$ $\mathcal{T}_n^\alpha := \alpha\mathcal{T}_n(\alpha - \mathcal{T}_n)^{-1}$ die *Yosida Approximation* von $\mathcal{T}_n$ und $\{\mathcal{T}(t)\}$ die Feller-Halbgruppe zur Diffusion $(\mathcal{X}_t)_t$. Da auch

$$\mathcal{X}_0^n = \frac{X_0}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{f.s.} 0 = \mathcal{X}_0$$

gilt, sind schließlich alle Voraussetzungen von [EK] Ch.4, Korollar 8.9 auf S.233/234 mit seinen Bedingungen (i) erfüllt und es folgt die Behauptung des Theorems.

2. Schritt: Es bleibt also noch die Aussage (4.1.2) zu zeigen. Da wegen der Unabhängigkeit aller $\{Y_{n,i}\}$ und $\{I_n\}$ $E\left[(Y_{1,j}-1)I_1\right] = E\left[Y_{1,j}-1\right]E\left[I_1\right] = 0$ gilt, erhalten wir für $x \in \mathbb{E}_n$ und $f \in C_c^\infty(\mathbb{R}^+)$, dass

$$\begin{aligned}
&\mathcal{A}_n f(x) - \mathcal{A} f(x) \\
&= n\left(\mathcal{T}_n f(x) - f(x)\right) - \frac{1}{2}\sigma^2 x f''(x) - \lambda f'(x) \\
&= nE\left[f\left(\frac{1}{n}\left(\sum_{j=1}^{nx} Y_{1,j} + I_1\right)\right) - f(x)\right] - \frac{1}{2n}E\left[\sum_{j=1}^{nx}(Y_{1,j}-1)^2 + I_1^2\right] f''(x) \\
&\quad + \frac{1}{2}E\left[\frac{I_1^2}{n}\right] f''(x) - E\left[\sum_{j=1}^{nx}(Y_{1,j}-1) + I_1\right] f'(x) \\
&= nE\left[f\left(x + \frac{1}{n}\left(\sum_{j=1}^{nx}(Y_{1,j}-1) + I_1\right)\right) - f(x)\right] - \frac{1}{2n}E\left[\left(\sum_{j=1}^{nx}(Y_{1,j}-1) + I_1\right)^2\right] f''(x) \\
&\quad - E\left[\sum_{j=1}^{nx}(Y_{1,j}-1) + I_1\right] f'(x) + \frac{b^2+\lambda^2}{2n} f''(x) \\
&= E\left[n\left(f\left(x + \frac{1}{n}S_{nx}\right) - f(x)\right) - \frac{1}{2n}S_{nx}^2 f''(x) - S_{nx} f'(x)\right] + \frac{b^2+\lambda^2}{2n} f''(x),
\end{aligned} \tag{4.1.3}$$

wobei

$$S_k := \sum_{j=1}^{k}(Y_{1,j}-1) + I_1 \qquad \text{für } k \in \mathbb{N}_0.$$

Wir definieren

$$\epsilon_n(x) := E\left[\int_0^1 \frac{1}{n}S_{nx}^2(1-v)\left(f''\left(x + v\frac{1}{n}S_{nx}\right) - f''(x)\right) \mathrm{d}v\right]. \tag{4.1.4}$$

Mit partieller Integration ist

$$-\int_0^1 \frac{1}{n}S_{nx}^2 v f''\left(x + v\frac{1}{n}S_{nx}\right) \mathrm{d}v = -S_{nx} f'\left(x + \frac{1}{n}S_{nx}\right) + n\int_0^1 \frac{1}{n}S_{nx} f'\left(x + v\frac{1}{n}S_{nx}\right) \mathrm{d}v,$$

so dass

$$\begin{aligned}\epsilon_n(x) =&E\left[\int_0^1 \frac{1}{n}S_{nx}^2 f''\left(x+v\frac{1}{n}S_{nx}\right)\mathrm{d}v - \int_0^1 \frac{1}{n}S_{nx}^2 v f''\left(x+v\frac{1}{n}S_{nx}\right)\mathrm{d}v\right.\\ &\left.+\int_0^1 v\frac{1}{n}S_{nx}^2 f''(x)\mathrm{d}v - \int_0^1 \frac{1}{n}S_{nx}^2 f''(x)\mathrm{d}v\right]\\ =&E\left[\int_0^1 \frac{1}{n}S_{nx}^2 f''\left(x+v\frac{1}{n}S_{nx}\right)\mathrm{d}v - S_{nx}f'\left(x+\frac{1}{n}S_{nx}\right)\right.\\ &\left.+n\int_0^1 \frac{1}{n}S_{nx}f'\left(x+v\frac{1}{n}S_{nx}\right)\mathrm{d}v + \int_0^1 v\frac{1}{n}S_{nx}^2 f''(x)\mathrm{d}v - \int_0^1 \frac{1}{n}S_{nx}^2 f''(x)\mathrm{d}v\right]\end{aligned}$$

gilt. Integrieren wir nun die Terme bezüglich v aus, so ergibt sich

$$\begin{aligned}\epsilon_n(x) =&E\left[S_{nx}\left(f'\left(x+\frac{1}{n}S_{nx}\right)-f'(x)\right) - S_{nx}f'\left(x+\frac{1}{n}S_{nx}\right)\right.\\ &\left.+n\left(f\left(x+\frac{1}{n}S_{nx}\right)-f(x)\right)+\frac{1}{2n}S_{nx}^2 f''(x) - \frac{1}{n}S_{nx}^2 f''(x)\right]\\ =&E\left[-S_{nx}f'(x)+n\left(f\left(x+\frac{1}{n}S_{nx}\right)-f(x)\right)-\frac{1}{2n}S_{nx}^2 f''(x)\right].\end{aligned}$$

Dies liefert nach Einsetzen in (4.1.3), dass

$$\mathcal{A}_n f(x) - \mathcal{A}f(x) = \epsilon_n(x) + \frac{b^2+\lambda^2}{2n}f''(x). \tag{4.1.5}$$

3. Schritt: Unsere Aufgabe ist es nun zu zeigen, dass $\sup_{x\in\mathbb{E}_n}|\epsilon_n(x)| \xrightarrow{n\to\infty} 0$. Dazu untersuchen wir zunächst die ZV

$$U_n(x) := \left|\int_0^1 \frac{1}{n}S_{nx}^2(1-v)\left(f''\left(x+v\frac{1}{n}S_{nx}\right)-f''(x)\right)\mathrm{d}v\right|.$$

Da f kompakten Träger hat, gibt es ein $c>0$, so dass $\mathrm{supp}(f)\subset[0,c]$. Ist $v\in[0,1]$, so gilt für $x(1-v)\geq c$ bzw. $v\leq 1-(c/x)$ auch $x\geq c$. Wegen der Abschätzung

$$x+v\frac{1}{n}S_{nx} = x+v\frac{1}{n}\left(\sum_{j=1}^{nx}(Y_{1,j}-1)+I_1\right)\geq x+v\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{nx}-1 = x(1-v)$$

haben wir somit für $v\in[0,1]$ und $v\leq 1-(c/x)$, dass

$$f''\left(x+v\frac{1}{n}S_{nx}\right)-f''(x)=0.$$

Also ist mit $\alpha(x,c) := (1-(c/x))\mathbb{1}_{\{x\neq 0\}}$

$$\begin{aligned}
U_n(x) &= \left| \int_{0\vee\alpha(x,c)}^1 \frac{1}{n} S_{nx}^2 (1-v) \left(f''\left(x + v\frac{1}{n} S_{nx}\right) - f''(x)\right) \mathrm{d}v \right| \\
&\leq \int_{0\vee\alpha(x,c)}^1 \frac{1}{n} S_{nx}^2 (1-v) 2\|f''\|_\infty \mathrm{d}v \\
&= \frac{1}{n} S_{nx}^2 \|f''\|_\infty \int_{0\vee\alpha(x,c)}^1 2(1-v)\mathrm{d}v
\end{aligned} \tag{4.1.6}$$

und es gilt

$$\begin{aligned}
\int_{0\vee\alpha(x,c)}^1 2(1-v)\mathrm{d}v &= \left[2v - v^2\right]_{0\vee\alpha(x,c)}^1 \\
&= \begin{cases} 1 & \text{für } 0 \geq (1-(c/x))\mathbb{1}_{\{x\neq 0\}} \\ 1 - 2(1-(c/x)) + (1-(c/x))^2 & \text{für } 0 < (1-(c/x))\mathbb{1}_{\{x\neq 0\}} \end{cases} \\
&= \begin{cases} 1 & \text{für } \mathbb{1}_{\{x\neq 0\}} \leq (c/x)\mathbb{1}_{\{x\neq 0\}} \\ (c/x)^2 & \text{für } \mathbb{1}_{\{x\neq 0\}} > (c/x)\mathbb{1}_{\{x\neq 0\}} \end{cases} \\
&= (1\wedge(c/x))^2 \mathbb{1}_{\{x\neq 0\}} + \mathbb{1}_{\{x=0\}}.
\end{aligned}$$

Definieren wir

$$V_n(x) := \frac{1}{n} S_{nx}^2 \|f''\|_\infty \left[(1\wedge(c/x))^2 \mathbb{1}_{\{x\neq 0\}} + \mathbb{1}_{\{x=0\}}\right],$$

so folgt zusammen mit (4.1.6)

$$U_n(x) \leq V_n(x). \tag{4.1.7}$$

Außerdem ist

$$\begin{aligned}
E[V_n(x)] &= \frac{1}{n} E\left[\left(\sum_{j=1}^{nx} (Y_{1,j} - 1) + I_1 \right)^2 \right] \|f''\|_\infty \left[(1\wedge(c/x))^2 \mathbb{1}_{\{x\neq 0\}} + \mathbb{1}_{\{x=0\}}\right] \\
&= \frac{1}{n} \left(nx\sigma^2 + (b^2 + \lambda^2)\right) \|f''\|_\infty \left[(1\wedge(c/x))^2 \mathbb{1}_{\{x\neq 0\}} + \mathbb{1}_{\{x=0\}}\right] \\
&= \left(x\sigma^2 + \frac{b^2+\lambda^2}{n}\right) \|f''\|_\infty \left[(1\wedge(c/x))^2 \mathbb{1}_{\{x\neq 0\}} + \mathbb{1}_{\{x=0\}}\right],
\end{aligned} \tag{4.1.8}$$

da wieder wegen der Unabhängigkeit aller $\{Y_{n,i}\}$ und $\{I_n\}$ die gemischten Terme der quadrierten Summe verschwinden.

<u>4. Schritt:</u> Es gilt Folgendes:

$$\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in\mathbb{E}_n} |\epsilon_n(x)| = 0 \text{ genau dann, wenn } \lim_{n\to\infty} |\epsilon_n(x_n)| = 0 \text{ für jede} \\
&\text{konvergente Folge } (x_n)_n \text{ mit } x_n \in \mathbb{E}_n \text{ und Grenzwert } x \in [0,\infty].
\end{aligned} \tag{4.1.9}$$

Die Hinrichtung gilt offensichtlich. Die Rückrichtung beweisen wir per Widerspruch. Angenommen $\sup_{x\in\mathbb{E}_n}|\epsilon_n(x)|$ hat nicht den Grenzwert 0, dann existiert ein $\varepsilon > 0$ und eine Teilfolge $(n_k)_k \subset \mathbb{N}$, so dass $\sup\{|\epsilon_{n_k}(x)| : x \in \mathbb{E}_{n_k}\} > \varepsilon$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Dann existiert aber eine Folge $(x_{n_k})_k$ mit $x_{n_k} \in \mathbb{E}_{n_k}$, so dass $|\epsilon_{n_k}(x_{n_k})| \geq \varepsilon$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Nach dem Satz von Bolzano Weierstraß hat jede beschränkte Folge eine konvergente Teilfolge und jede unbeschränkte Folge eine Teilfolge, die gegen ∞ strebt. Daher existiert eine Teilfolge $(m_i)_i := (n_{k_i})_i \subset (n_k)_k$ und ein $x \in [0,\infty]$, so dass $\lim_{i\to\infty} x_{m_i} = x$ und $|\epsilon_{m_i}(x_{m_i})| \geq \varepsilon$ für alle $i \in \mathbb{N}$. Dies ist aber ein Widerspruch Voraussetzung. q.e.d.

<u>5. Schritt:</u> Um zu zeigen, dass $\sup_{x\in\mathbb{E}_n}|\epsilon_n(x)| \xrightarrow{n\to\infty} 0$ reicht es wegen (4.1.9) für jede konvergente Folge $(x_n)_n$ mit $x_n \in \mathbb{E}_n$ und $x := \lim_{n\to\infty} x_n \in [0,\infty]$ nachzuprüfen, ob $\lim_{n\to\infty}|\epsilon_n(x_n)| = 0$.

1. Fall: Für $x \in \{0,\infty\}$ ist diese Bedingung erfüllt. Denn wegen der Definition von $\epsilon_n(x)$ in (4.1.4) folgt aus der Dreiecksungleichung und (4.1.7), dass $|\epsilon_n(x)| \leq E[V_n(x)]$. Aus (4.1.8) folgt somit

$$\lim_{n\to\infty}|\epsilon_n(x_n)| \leq \lim_{n\to\infty}\left(x_n\sigma^2 + \frac{b^2+\lambda^2}{n}\right)\|f''\|_\infty\left[(1\wedge(c/x_n))^2\mathbb{1}_{\{x_n\neq 0\}} + \mathbb{1}_{\{x_n=0\}}\right] = 0.$$

2. Fall: Sei also nun $x \in (0,\infty)$. Da $f \in C_c^\infty(\mathbb{R}^+)$, ist $f''(\cdot)$ Lipschitz-stetig und es existiert ein $K \geq 0$, so dass

$$\begin{aligned} U_n(x_n) &= \left|\int_0^1 \frac{1}{n}S_{nx}^2(1-v)\left(f''\left(x+v\frac{1}{n}S_{nx}\right)-f''(x)\right)\mathrm{d}v\right| \\ &\leq \frac{1}{n}S_{nx_n}^2\int_0^1\left|f''\left(x_n+v\frac{1}{n}S_{nx_n}\right)-f''(x_n)\right|\mathrm{d}v \\ &\leq \frac{1}{n}S_{nx_n}^2\int_0^1 K\cdot\left|v\frac{1}{n}S_{nx_n}\right|\mathrm{d}v \\ &= \frac{1}{2n^2}K|S_{nx_n}|^3. \end{aligned} \tag{4.1.10}$$

Da $nx_n \to \infty$ für $n \to \infty$, gilt wegen des Zentralen Grenzwertsatzes und des Satzes von Slutsky, dass

$$\frac{1}{\sqrt{nx_n}}S_{nx_n} = \frac{1}{\sqrt{nx_n}}\sum_{j=1}^{nx_n}(Y_{1,j}-1) + \frac{I_1}{\sqrt{nx_n}} \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{L}} W,$$

wobei $\mathcal{L}(W|P) = \mathcal{N}(0,\sigma^2)$. Wendet man nun den Satz von der stetigen Abbildung und erneut Satz von Slutsky an, so ist

$$\frac{1}{2n^2}K|S_{nx_n}|^3 = \frac{x_n^{3/2}}{2\sqrt{n}}K\left|\frac{1}{\sqrt{nx_n}}S_{nx_n}\right|^3 \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{L}} 0$$

und wegen (4.1.10) gilt dann auch

$$U_n(x_n) \xrightarrow[n\to\infty]{P} 0. \tag{4.1.11}$$

Sei ohne Einschränkung $x_n > 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$, dann erhält man erneut mit dem Satz von der stetigen Abbildung und dem Satz von Slutsky, dass

$$\begin{aligned} V_n(x_n) &= \left(\frac{1}{\sqrt{nx_n}} S_{nx_n}\right)^2 x_n \|f''\|_\infty \left[(1 \wedge (c/x_n))^2 \mathbb{1}_{\{x_n \neq 0\}} + \mathbb{1}_{\{x_n = 0\}}\right] \\ &\xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{L}} W^2 x \|f''\|_\infty \left[(1 \wedge (c/x))^2\right]. \end{aligned} \tag{4.1.12}$$

Aus (4.1.8) folgt auch die Konvergenz der Erwartungswerte, da

$$\begin{aligned} E[V_n(x_n)] &= \left(x_n \sigma^2 + \frac{b^2 + \lambda^2}{n}\right) \|f''\|_\infty \left[(1 \wedge (c/x_n))^2 \mathbb{1}_{\{x_n \neq 0\}} + \mathbb{1}_{\{x_n = 0\}}\right] \\ &\xrightarrow[n\to\infty]{} \sigma^2 x \|f''\|_\infty \left[(1 \wedge (c/x))^2\right] \\ &= E\left[W^2 x \|f''\|_\infty \left[(1 \wedge (c/x))^2\right]\right]. \end{aligned} \tag{4.1.13}$$

Die Folge $(U_n(x_n))_n$ ist positiv und wird wegen Abschätzung (4.1.7) durch die Folge $(V_n(x_n))_n$ majorisiert. Diese konvergiert wegen (4.1.12) in Verteilung, wobei auch ihre Erwartungswerte wegen (4.1.13) gegen den Erwartungswert der Grenzvariablen konvergieren. [EK] Theorem 1.2 im Anhang auf S.492 besagt dann, dass wegen (4.1.11), auch

$$E\left[U_n(x_n)\right] \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

Da $|\epsilon_n(x_n)| \leq E\left[U_n(x_n)\right]$ gilt dann auch

$$|\epsilon_n(x_n)| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

Nimmt man beide Fälle zusammen, so folgt wegen (4.1.9), dass

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x \in \mathbb{E}_n} |\epsilon_n(x)| = 0.$$

Schließlich ergibt sich damit wegen Gleichung (4.1.5), dass

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} \|\mathcal{A}_n f - \mathcal{A} f\|_{\mathbb{E}_n} &= \lim_{n\to\infty} \sup_{x \in \mathbb{E}_n} |\mathcal{A}_n f(x) - \mathcal{A} f(x)| \\ &\leq \lim_{n\to\infty} \sup_{x \in \mathbb{E}_n} |\epsilon_n(x)| + \lim_{n\to\infty} \frac{b^2 + \lambda^2}{2n} \|f''(x)\|_\infty \\ &= 0, \end{aligned}$$

da $f \in C_c^\infty(\mathbb{R}^+)$ und Gleichung (4.1.2) ist gezeigt.

□

Satz 4.1.2 *Für $k \in \mathbb{N}$ gilt*

$$\left(\frac{X_n}{n}, n^{-2}\sum_{i=0}^{n-1} X_i, \dots, n^{-k-1}\sum_{i=0}^{n-1} X_i^k\right) \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{L}} \left(\mathcal{X}_1, \int_0^1 \mathcal{X}_t \mathrm{d}t, \dots, \int_0^1 (\mathcal{X}_t)^k \mathrm{d}t\right),$$

wobei $\mathcal{X}$ eine Diffusion mit Generator $\mathcal{A}$ aus (4.0.1) *und $\mathcal{X}_0 = 0$ ist.*

Beweis: Wir zeigen zunächst, dass die Abbildung

$$F : D^+[0,\infty) \to \mathbb{R}^{k+1}, \quad x(\cdot) \mapsto \left(x(1), \int_0^1 x(t)\mathrm{d}t, \dots, \int_0^1 (x(t))^k \mathrm{d}t\right)$$

stetig in den Punkten $x \in D^+[0,\infty) \cap C(\mathbb{R}^+)$ ist. Sei nun $x \in D^+[0,\infty)$ und $(x_n)_n \subset D^+[0,\infty)$ eine Folge, die gegen x konvergiert, also $\lim_{n\to\infty} d(x_n, x) = 0$, wobei d die *Skorohod-Metrik* bezeichne. Da $\{x_n\}$ relativ kompakt ist, ist nach [EK] Ch.3, Theorem 6.3 bzw. Bemerkung 6.4 auf Seite 123/124 die Folge $(x_n(t))_n$ für $t \in [0,1]$ gleichmäßig beschränkt. Nach dem Satz von der majorisierten Konvergenz gilt daher, dass

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 (x_n(t))^k \mathrm{d}t = \int_0^1 (x(t))^k \mathrm{d}t$$

für alle $k \in \mathbb{N}$. Also sind die Komponenten $F^{(2)}$ bis $F^{(k+1)}$ von F stetig. Insbesondere ist nach [EK] Ch.3, Proposition 7.1 auf Seite 127 F bezüglich der Borel σ-Algebren von $D^+[0,\infty)$ und $\mathbb{R}^{k+1}$ messbar. Sei nun ferner $x : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ stetig, dann gilt nach [EK] Ch.3, Proposition 5.2 auf Seite 118 von , dass $\lim_{n\to\infty} x_n(1) = x(1)$. Somit ist F stetig in den Punkten $x \in D^+[0,\infty) \cap C(\mathbb{R}^+)$.
Nach Theorem 4.1.1 gilt, dass $\mathcal{X}^n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{X}$ in $D^+[0,\infty)$. Da $P[\mathcal{X} \in D^+[0,\infty) \cap C(\mathbb{R}^+)] = 1$ und F in den Punkten $x \in D^+[0,\infty) \cap C(\mathbb{R}^+)$ stetig ist, gilt nach dem Satz von der stetigen Abbildung ([EK] Ch.3, Corollary 1.9, S.103), dass

$$F(\mathcal{X}^n) \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{L}} F(\mathcal{X}).$$

Außerdem haben wir, dass

$$\begin{aligned}
F(\mathcal{X}^n) &= \left(\mathcal{X}_1^n, \int_0^1 \mathcal{X}_t^n \mathrm{d}t, \dots, \int_0^1 (\mathcal{X}_t^n)^k \mathrm{d}t\right) \\
&= \left(\frac{X_n}{n}, \int_0^1 \frac{X_{[nt]}}{n}\mathrm{d}t, \dots, \int_0^1 \left(\frac{X_{[nt]}}{n}\right)^k \mathrm{d}t\right) \\
&= \left(\frac{X_n}{n}, n^{-1}\sum_{i=0}^{n-1} \int_{[\frac{i}{n}, \frac{i+1}{n})} X_{[nt]}\mathrm{d}t, \dots, n^{-k}\sum_{i=0}^{n-1} \int_{[\frac{i}{n}, \frac{i+1}{n})} X_{[nt]}^k \mathrm{d}t\right) \\
&= \left(\frac{X_n}{n}, n^{-2}\sum_{i=0}^{n-1} X_i, \dots, n^{-k-1}\sum_{i=0}^{n-1} X_i^k\right)
\end{aligned}$$

und die Behauptung ist bewiesen.

□

Bemerkung Sei $\mathcal{X}$ eine Diffusion mit Generator $\mathcal{A}$ aus (4.0.1) und $\mathcal{X}_0 = 0$, dann gilt

$$\int_0^1 (\mathcal{X}_t)^k \mathrm{d}t > 0 \quad f.s. \quad \text{für alle } k \in \mathbb{N}. \tag{4.1.14}$$

Beweis: Es gilt, dass $\mathcal{X}_t \geq 0$ für alle $t \in \mathbb{R}^+$ und nach [Jag] Theorem 3.1.2 auf S.56 ist $\mathcal{X}_1$ Gamma-verteilt. Daher ist $\mathcal{X}_1 > 0$ f.s.. Wegen der Stetigkeit von $t \mapsto \mathcal{X}_t(\omega)$ für fast alle $\omega \in \Omega$, gibt es ein $\varepsilon = \varepsilon(\omega) > 0$, so dass $\mathcal{X}_t(\omega) > 0$ für alle $t \in U_\varepsilon(1)$, wobei $U_\varepsilon(1)$ eine ε-Umgebung um 1 ist. Somit ist auch $(\mathcal{X}_t)^k(\omega) > 0$ für alle $t \in U_\varepsilon(1)$ und alle $k \in \mathbb{N}$ und es folgt (4.1.14).

□

4.2 Weitere asymptotische Resultate

Sei im Folgenden $\tau := 2\lambda/\sigma^2$. Wir werden nun weitere Grenzwertsätze für Funktionale des Prozesses X herleiten. Dazu listen wir zuerst die für uns wichtigen, aus der Literatur bekannten Resultate für den kritischen GW bzw. GWI auf.

Satz 4.2.1 *Seien $p_n(i,j)$ und $q_n(i,j)$ wieder die Übergangswahrscheinlichkeiten eines kritischen GWI bzw. GW. Gelte $0 < \sigma^2, b^2 < \infty$ und $E[Y_{1,1}^2 \log^+ Y_{1,1}] < \infty$, dann existieren Konstanten $C_1, C_2 > 0$, so dass*

$$\lim_{n\to\infty} p_n(0,0) \cdot n^\tau = C_1 \tag{4.2.1}$$

und

$$\sup_{j\geq 1} q_n(i,j) \leq \frac{C_2 \cdot i}{n^2}. \tag{4.2.2}$$

Bezeichne für $i, j \in \mathbb{N}_0$

$$G(i,j) := \sum_{n=0}^{\infty} p_n(i,j)$$

die Green-Funktion *von X. Ist $\tau > 1$ dann gilt*

$$\lim_{j\to\infty, i/j\to 0} G(i,j) = \left(\lambda - \frac{\sigma^2}{2}\right)^{-1} < \infty. \tag{4.2.3}$$

Beweis: (4.2.1) ist [Zub] Lemma 4, (4.2.2) ist [KNS] Theorem 7 und (4.2.3) ist [Mel] Theorem 2.

□

Satz 4.2.2 *Sei $E[Y_{1,1}^2 \log^+ Y_{1,1}] < \infty$, dann ist X nullrekurrent für $\tau \leq 1$ und transient für $\tau > 1$.*

Beweis: Da X nach Voraussetzung irreduzibel ist, reicht es zu zeigen, dass 0 ein nullrekurrenter Zustand für $\tau \leq 1$ bzw. ein transienter Zustand für $\tau > 1$ ist. Nach (4.2.1) existiert für alle $\varepsilon > 0$ ein n_0, so dass für alle $n \geq n_0$,

$$n^{-\tau}(C - \varepsilon) \leq p_n(0,0) \leq n^{-\tau}(C + \varepsilon).$$

Daher gilt

$$\sum_{n=0}^{\infty} p_n(0,0) \leq \sum_{n=0}^{n_0-1} p_n(0,0) + \sum_{n=n_0}^{\infty} n^{-\tau}(C+\varepsilon) < \infty \quad \text{für } \tau > 1$$

und

$$\sum_{n=0}^{\infty} p_n(0,0) \geq \sum_{n=0}^{n_0-1} p_n(0,0) + \sum_{n=n_0}^{\infty} n^{-\tau}(C-\varepsilon) = \infty \quad \text{für } \tau \leq 1.$$

0 ist demnach rekurrent für $\tau \leq 1$ und transient für $\tau \leq 1$. Weil $\tau > 0$ ist, gilt wegen (4.2.1), dass $\lim_{n\to\infty} p_n(0,0) = 0$. Also ist 0 im rekurrenten Fall nullrekurrent.

□

Satz 4.2.3 *Sei $E[Y_{1,1}^2 \log^+ Y_{1,1}] < \infty$, dann gilt*

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{X_{i-1}+1} \xrightarrow[n\to\infty]{f.s.} \infty.$$

Beweis: Nach Satz 4.2.2 ist X entweder transient oder nullrekurrent. Der rekurrente Fall ist einfach einzusehen, da

$$\begin{aligned}
P\left[\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{X_{i-1}+1} = \infty\right] &= \sum_{k=0}^{\infty} P\left[\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{X_{i-1}+1} = \infty \middle| X_0 = k\right] \cdot P[X_0 = k] \\
&\geq \sum_{k=0}^{\infty} P\left[\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{k+1} \mathbb{1}\{X_{i-1} = k\} = \infty \middle| X_0 = k\right] \cdot P[X_0 = k] \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \underbrace{P\left[\sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{1}\{X_{i-1} = k\} = \infty \middle| X_0 = k\right]}_{=1} \cdot P[X_0 = k] \\
&= 1.
\end{aligned}$$

Wir betrachten nun den transienten Fall und definieren

$$\mathcal{M}_n := (X_n + 1) \cdot \prod_{i=0}^{n-1} \left(1 + \frac{\lambda}{X_i + 1}\right)^{-1}.$$

$(\mathcal{M}_n)_n$ ist ein positives $(\mathscr{F}_n)_n$-Martingal, denn für $n \geq 0$ ist

$$\begin{aligned}
E[\mathcal{M}_{n+1}|\mathscr{F}_n] =& \prod_{i=0}^{n} \left(1 + \frac{\lambda}{X_i + 1}\right)^{-1} E\left[X_{n+1} + 1 \middle| \mathscr{F}_n\right] \\
=& \prod_{i=0}^{n} \left(1 + \frac{\lambda}{X_i + 1}\right)^{-1} (X_n + \lambda + 1) \\
=& (X_n + 1) \prod_{i=0}^{n} \left(1 + \frac{\lambda}{X_i + 1}\right)^{-1} \left(1 + \frac{\lambda}{X_n + 1}\right) \\
=& \mathcal{M}_n.
\end{aligned}$$

Nach dem Martingal-Konvergenzsatz ([HH] Theorem 2.5, S.17) konvergiert $\mathcal{M}_n$ fast sicher gegen eine reelle ZV $\mathcal{M}_\infty$. Da aber im transienten Fall $X_n \xrightarrow[n\to\infty]{f.s.} \infty$ gilt, muß dann auch

$$\prod_{i=0}^{n} \left(1 + \frac{\lambda}{X_i + 1}\right) \xrightarrow[n\to\infty]{f.s.} \infty$$

gelten. Deshalb folgt wegen

$$\infty = \log \left(\prod_{i=0}^{\infty} \left(1 + \frac{\lambda}{X_i + 1}\right) \right) = \sum_{i=0}^{\infty} \log \left(1 + \frac{\lambda}{X_i + 1}\right) \leq \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\lambda}{X_i + 1} \quad f.s.$$

die Behauptung.

□

Satz 4.2.4 *Sei $E[Y_{1,1}^2 \log^+ Y_{1,1}] < \infty$ und $\tau > 1$. Sei weiter $F : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{R}^+$ eine positive Funktion mit $\sum_{n=0}^{\infty} F(n) < \infty$, dann gilt*

$$\sum_{n=0}^{\infty} E[F(X_n)] < \infty \tag{4.2.4}$$

und

$$\sum_{n=0}^{\infty} F(X_n) < \infty \quad f.s.. \tag{4.2.5}$$

Beweis: Wegen des Satzes von der monotonen Konvergenz gilt

$$E\left[\sum_{n=0}^{\infty} F(X_n)\right] = \sum_{n=0}^{\infty} E[F(X_n)].$$

Es reicht also (4.2.4) zu zeigen, da dies (4.2.5) impliziert. Wegen der Zerlegung von X in (1.1.4) können wir X_n folgendermaßen schreiben:

$$X_n^{(i)} = \tilde{X}_n^{(0)} + Z_n^{(i)}$$

Dabei ist $(Z_n^{(i)})_n$ ein kritischer GW mit Startwert i und $(\tilde{X}_n^{(0)})_n$ eine Kopie von X mit Startwert 0. Also können wir die n-Schritt Übergangswahrscheinlichkeit $p_n(i,j)$ von X stets als Faltung der n-Schritt Übergangswahrscheinlichkeiten $p_n(0,j)$ und $q_n(i,j)$ schreiben:

$$p_n(i,j) = \sum_{k=0}^{j} p_n(0,k) q_n(i, j-k).$$

Wegen (4.2.2) existiert ein $C > 0$, so dass

$$\begin{aligned} p_n(i,j) &= \sum_{k=0}^{j-1} p_n(0,k) q_n(i, k-j) + p_n(0,j) q_n(i,0) \\ &\leq \sum_{k=0}^{j-1} p_n(0,k) \frac{C \cdot i}{n^2} + p_n(0,j) q_n(i,0) \\ &\leq \frac{C \cdot i}{n^2} + p_n(0,j). \end{aligned} \tag{4.2.6}$$

Sei für $i, j \in \mathbb{N}_0$

$$G(i,j) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n(i,j)$$

die *Green-Funktion* von X. Nach (4.2.3) existiert ein $\tilde{C} > 0$, so dass $G(0,j) \leq \tilde{C}$ für alle $j \in \mathbb{N}_0$. Also folgt mit der Voraussetzung an F und (4.2.6), dass

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} E[F(X_n)] &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{i=0}^{\infty} F(j) P[X_n = j, X_0 = i] \\ &= \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} F(j) p_n(i,j) P[X_0 = i] \\ &\leq \sum_{i=0}^{\infty} P[X_0 = i] \sum_{j=0}^{\infty} F(j) \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{C \cdot i}{n^2} + p_n(0,j) \right) \\ &= \sum_{i=0}^{\infty} i P[X_0 = i] \sum_{j=0}^{\infty} F(j) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{C}{n^2} + \sum_{j=0}^{\infty} F(j) G(0,j) \\ &\leq E[X_0] \sum_{j=0}^{\infty} F(j) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{C}{n^2} + \tilde{C} \sum_{j=0}^{\infty} F(j) \\ &< \infty \end{aligned}$$

ist. Dabei ist die Vertauschung der Summen gerechtfertigt, da alle Summanden nicht negativ sind. Somit ist (4.2.4) gezeigt.

$\square$

Lemma 4.2.5 *Sei $\tau > 1$, $E[Y_{1,1}^2 \log^+ Y_{1,1}] < \infty$ und $B_n = \sum_{i=1}^n \frac{1}{X_{i-1}+1}$. Dann gilt*

$$\sum_{i=1}^n \frac{I_i^2}{(X_{i-1}+1)^2} \quad \text{konvergiert f.s. für } n \to \infty, \tag{4.2.7}$$

$$\mathcal{M}_n^{(1)} := \sum_{i=1}^n \frac{I_i \sum_{j=1}^{X_{i-1}} (Y_{i,j}-1)}{(X_{i-1}+1)^2} \quad \text{konvergiert f.s. für } n \to \infty \tag{4.2.8}$$

und

$$\mathcal{M}_n^{(2)} := \sum_{i=1}^n \frac{\sum_{l=2}^{X_{i-1}} \sum_{j=1}^{l-1} (Y_{i,l}-1)(Y_{i,j}-1)}{(X_{i-1}+1)^2} \quad \text{konvergiert f.s. für } n \to \infty. \tag{4.2.9}$$

Ist ferner $E[Y_{1,1}^{2+\delta}] < \infty$ für ein $\delta > 0$, so gilt auch

$$\mathcal{M}_n^{(3)} := \sum_{i=1}^n \frac{\sum_{j=1}^{X_{i-1}} (Y_{i,j}-1)^2 - \sigma^2 X_{i-1}}{(X_{i-1}+1)^2} \quad \text{konvergiert f.s. für } n \to \infty. \tag{4.2.10}$$

Beweis: Es gilt wegen des Satzes von der monotonen Konvergenz und Satz 4.2.4 mit $F(n) = (n+1)^{-2}$, dass

$$E\left[\sum_{i=1}^\infty \frac{I_i^2}{(X_{i-1}+1)^2}\right] = \sum_{i=1}^\infty E\left[\frac{1}{(X_{i-1}+1)^2} E\left[I_i^2 | \mathscr{F}_{i-1}\right]\right] = E\left[I_1^2\right] \sum_{i=1}^\infty E\left[\frac{1}{(X_{i-1}+1)^2}\right] < \infty.$$

Daraus folgt nun

$$\sum_{i=1}^\infty \frac{I_i^2}{(X_{i-1}+1)^2} < \infty \quad \text{f.s.}$$

und somit (4.2.7). Da alle $\{Y_{n,i}\}$ und $\{I_n\}$ unabhängig sind, gilt für $n \geq 0$

$$\begin{aligned}
E\left[\mathcal{M}_{n+1}^{(1)} | \mathscr{F}_n\right] &= \sum_{i=1}^n \frac{I_i \sum_{j=1}^{X_{i-1}} (Y_{i,j}-1)}{(X_{i-1}+1)^2} + \frac{1}{(X_n+1)^2} E\left[I_{n+1} \sum_{j=1}^{X_n} (Y_{n+1,j}-1) \Big| \mathscr{F}_n\right] \\
&= \sum_{i=1}^n \frac{I_i \sum_{j=1}^{X_{i-1}} (Y_{i,j}-1)}{(X_{i-1}+1)^2} + \frac{\lambda}{(X_n+1)^2} \sum_{k=1}^\infty \left(\mathbb{1}_{\{X_{n-1}=k\}} \cdot \sum_{j=1}^k \underbrace{E\left[Y_{n+1,j}-1\right]}_{=0} \right) \\
&= \mathcal{M}_n^{(1)}.
\end{aligned}$$

Also ist $\left(\mathcal{M}_n^{(1)}\right)_n$ ein $(\mathscr{F}_n)_n$-Martingal. Wegen der Unabhängigkeit aller $\{Y_{n,i}\}$ und $\{I_n\}$ verschwinden wieder die gemischten Terme der quadrierten Summe, so dass

$$\begin{aligned}
\langle\mathcal{M}^{(1)}\rangle_n &= \sum_{i=1}^n E\left[\frac{\left(I_i\sum_{j=1}^{X_{i-1}}(Y_{i,j}-1)\right)^2}{(X_{i-1}+1)^4}\middle|\mathscr{F}_{i-1}\right] \\
&= \sum_{i=1}^n \frac{E[I_1^2]}{(X_{i-1}+1)^4} E\left[\sum_{j=1}^{X_{i-1}}(Y_{i,j}-1)^2 + 2\sum_{l=2}^{X_{i-1}}\sum_{j=1}^{l-1}(Y_{i,j}-1)(Y_{i,l}-1)\middle|\mathscr{F}_{i-1}\right] \\
&= \sum_{i=1}^n \frac{E[I_1^2]}{(X_{i-1}+1)^4} E\left[\sum_{j=1}^{X_{i-1}} E\left[(Y_{i,j}-1)^2\right] + 2\sum_{j<l} E\left[Y_{i,j}-1\right]E\left[Y_{i,l}-1\right]\middle|\mathscr{F}_{i-1}\right] \\
&= \sum_{i=1}^n \frac{E[I_1^2]}{(X_{i-1}+1)^4}\sigma^2 X_{i-1}
\end{aligned}$$

gilt. Daraus folgt wegen Satz 4.2.4 mit $F(n) = n(n+1)^{-4}$, dass

$$\langle\mathcal{M}^{(1)}\rangle_\infty < \infty \quad \text{f.s..}$$

Nach [HH] Theorem 2.17 auf S.35 impliziert dies (4.2.8). Analog zu den obigen Rechnungen, erhalten wir durch

$$\begin{aligned}
E\left[\mathcal{M}_{n+1}^{(2)}|\mathscr{F}_n\right] =& \sum_{i=1}^n \frac{\sum_{l=2}^{X_{i-1}}\sum_{j=1}^{l-1}(Y_{i,l}-1)(Y_{i,j}-1)}{(X_{i-1}+1)^2} \\
&+ \frac{1}{(X_n+1)^2}\underbrace{E\left[\sum_{l=2}^{X_n}\sum_{j=1}^{l-1}(Y_{n+1,l}-1)(Y_{n+1,j}-1)\middle|\mathscr{F}_n\right]}_{=0} \\
=&\mathcal{M}_n^{(2)},
\end{aligned}$$

dass auch $\left(\mathcal{M}_n^{(2)}\right)_n$ ein $(\mathscr{F}_n)_n$-Martingal ist und es gilt

$$\begin{aligned}
\langle\mathcal{M}^{(2)}\rangle_n =& \sum_{i=1}^n E\left[\frac{\left(\sum_{l=2}^{X_{i-1}}\sum_{j=1}^{l-1}(Y_{i,l}-1)(Y_{i,j}-1)\right)^2}{(X_{i-1}+1)^4}\middle|\mathscr{F}_{i-1}\right] \\
=& \sum_{i=1}^n \frac{1}{(X_{i-1}+1)^4}\sum_{\nu=0}^\infty \mathbb{1}_{\{X_{i-1}=\nu\}}\cdot E\left[\left(\sum_{l=2}^{\nu}\sum_{j=1}^{l-1}(Y_{i,l}-1)(Y_{i,j}-1)\right)^2\middle|\mathscr{F}_{i-1}\right]
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{(X_{i-1}+1)^4} \sum_{\nu=0}^{\infty} \Bigg\{ \mathbb{1}_{\{X_{i-1}=\nu\}} \cdot E\left[\sum_{l=2}^{\nu} \sum_{j=1}^{l-1} (Y_{i,l}-1)^2 (Y_{i,j}-1)^2 \middle| \mathscr{F}_{i-1} \right] \\
&\quad + \mathbb{1}_{\{X_{i-1}=\nu\}} \cdot E\left[\sum_{j<l,\iota<k,(k\neq l \vee j\neq \iota)} (Y_{i,l}-1)(Y_{i,j}-1)(Y_{i,k}-1)(Y_{i,\iota}-1) \middle| \mathscr{F}_{i-1} \right] \Bigg\} \\
&= \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{(X_{i-1}+1)^4} \sum_{\nu=0}^{\infty} \Bigg\{ \mathbb{1}_{\{X_{n-1}=\nu\}} \cdot \sum_{l=2}^{\nu} \sum_{j=1}^{l-1} E\left[(Y_{i,l}-1)^2\right] E\left[(Y_{i,j}-1)^2\right] \\
&\quad + \mathbb{1}_{\{X_{n-1}=\nu\}} \cdot \sum_{j<l,\iota<k,(k\neq l \vee j\neq \iota)} \underbrace{E\left[(Y_{i,l}-1)(Y_{i,j}-1)(Y_{i,k}-1)(Y_{i,\iota}-1)\right]}_{=0} \Bigg\} \\
&= \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{(X_{i-1}+1)^4} \sum_{\nu=0}^{\infty} \mathbb{1}_{\{X_{n-1}=\nu\}} \cdot \frac{\nu(\nu-1)}{2} \sigma^4 \\
&= \frac{\sigma^4}{2} \sum_{i=1}^{n} \frac{X_{n-1}(X_{n-1}-1)}{(X_{i-1}+1)^4}.
\end{aligned}
$$

Also folgt wegen Satz 4.2.4 mit $F(n) = n(n-1)(n+1)^{-4}$, dass

$$
\langle \mathcal{M}^{(2)} \rangle_\infty < \infty \quad \text{f.s..}
$$

Wie eben ist nach [HH] Theorem 2.17 auf S.35 (4.2.9) gezeigt. Auch $\left(\mathcal{M}_n^{(3)}\right)_n$ ist ein $(\mathscr{F}_n)_n$-Martingal, denn

$$
\begin{aligned}
E\left[\mathcal{M}_{n+1}^{(3)} | \mathscr{F}_n\right] &= \sum_{i=1}^{n} \frac{\sum_{j=1}^{X_{i-1}} (Y_{i,j}-1)^2 - \sigma^2 X_{i-1}}{(X_{i-1}+1)^2} \\
&\quad + \frac{1}{(X_n+1)^2} \left(E\left[\sum_{j=1}^{X_n} (Y_{n+1,j}-1)^2 \middle| \mathscr{F}_n \right] - \sigma^2 X_n \right) \\
&= \mathcal{M}_n^{(3)} + \frac{1}{(X_n+1)^2} \left(\sum_{j=1}^{X_n} \underbrace{E\left[(Y_{n+1,j}-1)^2\right]}_{=\sigma^2} - \sigma^2 X_n \right) \\
&= \mathcal{M}_n^{(3)}
\end{aligned}
$$

für alle $n \in \mathbb{N}_0$. Setze $p = 1 + \delta/2 > 1$. Nach Voraussetzung ist $Y_{1,1}^2 \in L^p(\Omega, \mathscr{F}, P)$, so dass

$$
\left\| (Y_{1,1}-1)^2 - \sigma^2 \right\|_p =: K < \infty.
$$

Da die $\{Y_{i,j}\}$ iid Zufallsvariablen und unabhängig von $\mathscr{F}_{i-1}$ sind, gilt wegen Satz 4.2.4 mit $F(n) = (n+1)^{-(1+\delta/2)}$, dass

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{\infty} E\left[\left|\frac{\sum_{j=1}^{X_{i-1}}(Y_{i,j}-1)^2 - \sigma^2 X_{i-1}}{(X_{i-1}+1)^2}\right|^p \middle| \mathscr{F}_{i-1}\right] \\
&= \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{(X_{i-1}+1)^{2p}} \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{1}_{\{X_{i-1}=k\}} \cdot E\left[\left|\sum_{j=1}^{X_{i-1}}[(Y_{i,j}-1)^2 - \sigma^2]\right|^p \middle| \mathscr{F}_{i-1}\right] \\
&= \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{(X_{i-1}+1)^{2p}} \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{1}_{\{X_{i-1}=k\}} \cdot \left\|\sum_{j=1}^{k}[(Y_{i,j}-1)^2 - \sigma^2]\right\|_p^p \\
&\leq \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{(X_{i-1}+1)^{2p}} \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{1}_{\{X_{i-1}=k\}} \cdot \left(\sum_{j=1}^{k} \left\|(Y_{i,j}-1)^2 - \sigma^2\right\|_p\right)^p \\
&= \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{(X_{i-1}+1)^{2p}} \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{1}_{\{X_{i-1}=k\}} (k \cdot K)^p \\
&= K^p \sum_{i=1}^{\infty} \frac{X_{i-1}^p}{(X_{i-1}+1)^{2p}} \leq K^p \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{(X_{i-1}+1)^p} \\
&< \infty.
\end{aligned}$$

Die fast sichere Konvergenz von $\left(\mathcal{M}_n^{(3)}\right)_n$ in (4.2.10) folgt nun wieder mit [HH] Theorem 2.17 auf S.35.

□

Lemma 4.2.6 *Sei* $E[Y_{1,1}^2 \log^+ Y_{1,1}] < \infty$. *Setze*

$$M_n := \sum_{i=1}^{n} \frac{\varepsilon_i}{X_{i-1}+1}, \quad B_n := \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{X_{i-1}+1} \quad \textit{und} \quad u_i := \frac{X_i - X_{i-1}}{X_{i-1}+1}.$$

Dann gilt

$$B_n^{-1} M_n \xrightarrow[n\to\infty]{f.s.} 0 \tag{4.2.11}$$

und

$$B_n^{-1} \sum_{i=1}^{n} u_i \xrightarrow[n\to\infty]{f.s.} \lambda. \tag{4.2.12}$$

Gilt ferner $\tau > 1$ *und* $E[Y_{1,1}^{2+\delta}] < \infty$ *für ein* $\delta > 0$, *so gilt auch*

$$B_n^{-1} \sum_{i=1}^{n} u_i^2 \xrightarrow[n\to\infty]{f.s.} \sigma^2 \tag{4.2.13}$$

und

$$B_n^{-1} \sum_{i=1}^{n} u_i^2 v_i \xrightarrow[n\to\infty]{f.s.} 0 \tag{4.2.14}$$

für jede Folge reeller Zufallsvariablen $(v_i)_i$ *auf* $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ *mit* $v_i \xrightarrow[i\to\infty]{f.s.} 0.$

Beweis: Wir beobachten zunächst, dass $(M_n)_n$ wegen (1.1.6) ein $(\mathscr{F}_n)_n$-Martingal mit Martingaldifferenz $\frac{\varepsilon_i}{X_{i-1}+1}$ ist. Da

$$\langle M \rangle_n = \sum_{i=1}^{n} E\left[\frac{\varepsilon_i^2}{(X_{i-1}+1)^2}\middle|\mathscr{F}_{i-1}\right] \overset{(1.1.7)}{=} \sum_{i=1}^{n} \frac{\sigma^2 X_{i-1} + b^2}{(X_{i-1}+1)^2} \quad \text{f.s.}$$

und

$$\min\{\sigma^2, b^2\} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{X_{i-1}+1} \leq \sum_{i=1}^{n} \frac{\sigma^2 X_{i-1} + b^2}{(X_{i-1}+1)^2} \leq (\sigma^2 + b^2) \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{X_{i-1}+1} \quad \text{f.s.}$$

gilt, sind B_n und $\langle M \rangle_n$ asymptotisch äquivalent und mit Satz 4.2.3 gilt

$$\langle M \rangle_n \xrightarrow[n\to\infty]{f.s.} \infty.$$

Aus [Cho] Corollary 7 folgt nun, dass

$$\langle M \rangle_n^{-1} M_n \xrightarrow[n\to\infty]{f.s.} 0$$

und wegen der asymptotischen Äquivalenz von B_n und $\langle M \rangle_n$, ist (4.2.11) gezeigt. (4.2.12) folgt direkt aus (4.2.11), da

$$B_n^{-1} \sum_{i=1}^{n} u_i = B_n^{-1} \left(M_n + \sum_{i=1}^{n} \frac{\lambda}{X_{i-1}+1} \right) = B_n^{-1} M_n + \lambda \xrightarrow[n\to\infty]{f.s.} \lambda.$$

Satz 4.2.3 besagt, dass $B_n^{-1} \xrightarrow[n\to\infty]{f.s.} 0$. Also gilt wegen Lemma 4.2.5 und Satz 4.2.4 mit $F(n) = (n+1)^{-2}$, dass

$$\begin{aligned}
B_n^{-1}\sum_{i=1}^n u_i^2 =& B_n^{-1}\sum_{i=1}^n \left(\frac{\sum_{j=1}^{X_{i-1}}(Y_{i,j}-1)+I_i}{X_{i-1}+1}\right)^2 \\
=& B_n^{-1}\sum_{i=1}^n \frac{\sum_{j=1}^{X_{i-1}}(Y_{i,j}-1)^2}{(X_{i-1}+1)^2} + 2B_n^{-1}\sum_{i=1}^n \frac{I_i\sum_{j=1}^{X_{i-1}}(Y_{i,j}-1)}{(X_{i-1}+1)^2} \\
&+ 2B_n^{-1}\sum_{i=1}^n \frac{\sum_{l=2}^{X_{i-1}}\sum_{j=1}^{l-1}(Y_{i,l}-1)(Y_{i,j}-1)}{(X_{i-1}+1)^2} + B_n^{-1}\sum_{i=1}^n \frac{I_i^2}{(X_{i-1}+1)^2} \\
=& \underbrace{B_n^{-1}\sum_{i=1}^n \frac{\sum_{j=1}^{X_{i-1}}(Y_{i,j}-1)^2-\sigma^2X_{i-1}}{(X_{i-1}+1)^2}}_{\to 0} + \sigma^2\underbrace{B_n^{-1}\sum_{i=1}^n \frac{X_{i-1}+1}{(X_{i-1}+1)^2}}_{=1} \\
&- \sigma^2\underbrace{B_n^{-1}\sum_{i=1}^n \frac{1}{(X_{i-1}+1)^2}}_{\to 0} + \underbrace{2B_n^{-1}\sum_{i=1}^n \frac{I_i\sum_{j=1}^{X_{i-1}}(Y_{i,j}-1)}{(X_{i-1}+1)^2}}_{\to 0} \\
&+ \underbrace{2B_n^{-1}\sum_{i=1}^n \frac{\sum_{l=2}^{X_{i-1}}\sum_{j=1}^{l-1}(Y_{i,l}-1)(Y_{i,j}-1)}{(X_{i-1}+1)^2}}_{\to 0} + \underbrace{B_n^{-1}\sum_{i=1}^n \frac{I_i^2}{(X_{i-1}+1)^2}}_{\to 0}
\end{aligned}$$

und man erhält (4.2.13). Schließlich folgt aus dem Toeplitz Lemma ([HH] Abschnitt 2.6, S.31), dass

$$\left(\sum_{i=1}^n u_i^2\right)^{-1}\sum_{i=1}^n u_i^2 v_i \xrightarrow[n\to\infty]{f.s.} 0.$$

Dann gilt wegen (4.2.13) auch

$$B_n^{-1}\sum_{i=1}^n u_i^2 v_i = B_n^{-1}\sum_{i=1}^n u_i^2\left(\sum_{i=1}^n u_i^2\right)^{-1}\sum_{i=1}^n u_i^2 v_i \xrightarrow[n\to\infty]{f.s.} 0$$

und somit (4.2.14).

□

Lemma 4.2.7 *Ist $\tau > 1$ und $E[Y_{1,1}^{2+\delta}] < \infty$ für ein $\delta > 0$, so gilt*

$$\frac{X_n}{X_{n-1}+1} \xrightarrow[n\to\infty]{f.s.} 1.$$

Beweis: Da $E[Y_{1,1}^{2+\delta}] < \infty$ ist auch insbesondere $E[Y_{1,1}^2 \log^+ Y_{1,1}] < \infty$. Und da $\tau > 1$ gilt nach Satz 4.2.2, dass $X_n \xrightarrow[n\to\infty]{f.s.} \infty$ und somit auch, dass

$$\frac{X_{n-1}}{X_{n-1}+1} = 1 - \frac{1}{X_{n-1}+1} \xrightarrow[n\to\infty]{f.s.} 1.$$

Um die Behauptung einzusehen, genügt es also

$$\frac{X_n - X_{n-1}}{X_{n-1}+1} = \sum_{i=1}^{X_{n-1}} \frac{Y_{n,i}-1}{X_{n-1}+1} + \frac{I_n}{X_{n-1}+1} \xrightarrow[n\to\infty]{f.s.} 0 \tag{4.2.15}$$

zu zeigen. Es gilt nach der bedingten Version der Markoff-Ungleichung und Satz 4.2.4 mit $F(n) = (n+1)^{-2}$, dass für alle $\varepsilon > 0$

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} P\left[\frac{I_n}{X_{n-1}+1} > \varepsilon \middle| \mathscr{F}_{n-1}\right] &\le \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^{-2} E\left[\frac{I_n^2}{(X_{n-1}+1)^2} \middle| \mathscr{F}_{n-1}\right] \\
&= \varepsilon^{-2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{E\left[I_n^2 | \mathscr{F}_{n-1}\right]}{(X_{n-1}+1)^2} \\
&= \varepsilon^{-2} E\left[I_1^2\right] \sum_{n=1}^{\infty} (X_{n-1}+1)^{-2} < \infty \quad \text{f.s..}
\end{aligned}$$

Aus dem bedingten Borel-Cantelli Lemma ([HH] Corollary 2.3, S.32) folgt dann, dass

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}_{\left\{\frac{I_n}{X_{n-1}+1} > \varepsilon\right\}} < \infty \quad \text{f.s.}$$

für alle $\varepsilon > 0$. Daher muß auch

$$\frac{I_n}{X_{n-1}+1} \xrightarrow[n\to\infty]{f.s.} 0 \tag{4.2.16}$$

gelten. Um zu zeigen, dass auch die Summe auf der rechten Seite in (4.2.15) asymptotisch verschwindet, beobachten wir zunächst, dass nach [CT] Kap.10.3, Corollary 2 eine Konstante $K \in [0, \infty)$ existiert, so dass

$$E\left[\left|\sum_{i=1}^{k} (Y_{n,i}-1)\right|^{2+\delta}\right] \le K \cdot k^{1+\delta/2} \tag{4.2.17}$$

gilt. Also ist

$$
\begin{aligned}
E\left[\left|\sum_{i=1}^{X_{n-1}}(Y_{n,i}-1)\right|^{2+\delta}\middle|\mathscr{F}_{n-1}\right] &= \sum_{k=1}^{\infty}\mathbb{1}_{\{X_{n-1}=k\}}\cdot E\left[\left|\sum_{i=1}^{X_{n-1}}(Y_{n,i}-1)\right|^{2+\delta}\middle|\mathscr{F}_{n-1}\right]\\
&= \sum_{k=1}^{\infty}\mathbb{1}_{\{X_{n-1}=k\}}\cdot E\left[\left|\sum_{i=1}^{k}(Y_{n,i}-1)\right|^{2+\delta}\right]\\
&\le \sum_{k=1}^{\infty}\mathbb{1}_{\{X_{n-1}=k\}}\cdot K\cdot k^{1+\delta/2}\\
&= K\cdot X_{n-1}^{1+\delta/2}.
\end{aligned}
\tag{4.2.18}
$$

Es ergibt sich wieder mit Hilfe der bedingten Version der Markoff-Ungleichung und Satz 4.2.4 mit $F(n) = (n+1)^{-(1+\delta/2)}$, dass für jedes $\varepsilon > 0$

$$
\begin{aligned}
&\sum_{n=1}^{\infty} P\left[\left|\sum_{i=1}^{X_{n-1}}\frac{Y_{n,i}-1}{X_{n-1}+1}\right| > \varepsilon\middle|\mathscr{F}_{n-1}\right]\\
&\le \sum_{n=1}^{\infty}\varepsilon^{-(2+\delta)}E\left[\left|\sum_{i=1}^{X_{n-1}}\frac{Y_{n,i}-1}{X_{n-1}+1}\right|^{2+\delta}\middle|\mathscr{F}_{n-1}\right]\\
&\le \varepsilon^{-(2+\delta)}\sum_{n=1}^{\infty}(X_{n-1}+1)^{-(2+\delta)}\cdot E\left[\left|\sum_{i=1}^{X_{n-1}}(Y_{n,i}-1)\right|^{2+\delta}\middle|\mathscr{F}_{n-1}\right]\\
&\overset{(4.2.18)}{\le} \varepsilon^{-(2+\delta)}\sum_{n=1}^{\infty}(X_{n-1}+1)^{-(2+\delta)}\cdot K\cdot X_{n-1}^{1+\delta/2}\\
&\le \varepsilon^{-(2+\delta)}K\sum_{n=1}^{\infty}(X_{n-1}+1)^{-(1+\delta/2)} < \infty
\end{aligned}
$$

ist. Wenden wir erneut das bedingte Borel-Cantelli Lemma ([HH] Corollary 2.3, S.32) an, so erhalten wir wie eben, dass auch

$$
\sum_{i=1}^{X_{n-1}}\frac{Y_{n,i}-1}{X_{n-1}+1}\xrightarrow[n\to\infty]{f.s.} 0. \tag{4.2.19}
$$

Schließlich folgt aus (4.2.16) und (4.2.19) die Aussage (4.2.15) und somit die Behauptung. $\square$

Mit den Lemmata 4.2.5, 4.2.6 und 4.2.7 haben wir nun alle Vorbereitungen getroffen, um einen für uns sehr wichtigen Satz zu beweisen.

Satz 4.2.8 *Sei $\tau > 1$ und $E[Y_{1,1}^{2+\delta}] < \infty$ für ein $\delta > 0$, dann gilt*

$$(\log n)^{-1} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{X_{i-1}+1} \xrightarrow[n\to\infty]{P} \left(\lambda - \frac{\sigma^2}{2}\right)^{-1}.$$

Beweis: Sei wieder $B_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{X_{i-1}+1}$. Wir zeigen zunächst, dass

$$\frac{\log(X_n+1)}{B_n} \xrightarrow[n\to\infty]{f.s.} \lambda - \frac{\sigma^2}{2}. \tag{4.2.20}$$

Setze $u_i := \frac{X_i - X_{i-1}}{X_{i-1}+1}$. Es gilt $0 < \frac{X_i+1}{X_{i-1}+1}$ f.s. und es ergibt sich mit der Taylorentwicklung, dass

$$\log\left(\frac{X_i+1}{X_{i-1}+1}\right) = \log(1+u_i) = u_i - \frac{1}{2}u_i^2 + \frac{1}{3}u_i^3(1+s_i)^{-3},$$

wobei $|s_i| \leq |u_i|$ ist. Da wegen (4.2.15) aus Lemma 4.2.7 $u_i \xrightarrow[i\to\infty]{f.s.} 0$, gilt dann insbesondere $s_i \xrightarrow[i\to\infty]{f.s.} 0$ und somit auch $u_i(1+s_i)^{-3} \xrightarrow[i\to\infty]{f.s.} 0$. Aus (4.2.12), (4.2.13) und (4.2.14) von Lemma 4.2.6 und Satz 4.2.3, ergibt sich dann

$$\begin{aligned}
\frac{\log(X_n+1)}{B_n} &= B_n^{-1} \sum_{i=1}^{n} (\log(X_i+1) - \log(X_{i-1}+1)) + B_n^{-1}\log(X_0+1) \\
&= B_n^{-1} \sum_{i=1}^{n} \log\left(\frac{X_i+1}{X_{i-1}+1}\right) + B_n^{-1}\log(X_0+1) \\
&= \underbrace{B_n^{-1} \sum_{i=1}^{n} u_i}_{\to \lambda} - \frac{1}{2}\underbrace{B_n^{-1} \sum_{i=1}^{n} u_i^2}_{\to \sigma^2} + \frac{1}{3}\underbrace{B_n^{-1} \sum_{i=1}^{n} u_i^2 u_i(1+s_i)^{-3}}_{\to 0} + \underbrace{B_n^{-1}\log(X_0+1)}_{\to 0},
\end{aligned}$$

bzw. (4.2.20).

Wegen Satz 4.1.2 und Satz von Slutsky gilt, dass

$$\frac{X_n+1}{n} = \frac{X_n}{n} + \frac{1}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{X}_1,$$

wobei nach [Jag] Theorem 3.1.2 auf S.56 $\mathcal{X}_1$ Gamma verteilt ist. Also ist $\mathcal{X}_1 > 0$ f.s. und mit dem Satz von der stetigen Abbildung folgt

$$\log(X_n+1) - \log n = \log\left(\frac{X_n+1}{n}\right) \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{L}} \log \mathcal{X}_1.$$

Dividiert man diesen Term durch $\log n$, so ergibt sich mit dem Satz von Slutsky, dass

$$\frac{\log(X_n+1)}{\log n} \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{L}} 1. \tag{4.2.21}$$

Da X wegen Satz 4.2.2 transient ist, folgt

$$\mathbb{1}_{\{X_n = 0\}} \xrightarrow[n\to\infty]{f.s.} 0 \quad \text{bzw.} \quad \mathbb{1}_{\{X_n > 0\}} \xrightarrow[n\to\infty]{f.s.} 1. \tag{4.2.22}$$

Schließlich ergibt sich wegen (4.2.20), dem Satz von der stetigen Abbildung, (4.2.21), (4.2.22) und dem Satz von Slutsky aus

$$\begin{aligned}(\log n)^{-1} B_n &= \frac{\log(X_n+1)}{\log n} \frac{B_n}{\log(X_n+1)} \cdot \mathbb{1}_{\{X_n > 0\}} + (\log n)^{-1} B_n \cdot \mathbb{1}_{\{X_n = 0\}} \\ &\xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{L}} 1 \cdot \left(\lambda - \frac{\sigma^2}{2}\right)^{-1} + 0\end{aligned}$$

die Behauptung.

$\square$

4.3 Konsistenz und Asymptotische Verteilungen

Wir werden einen zentralen Grenzwertsatz, mit Hilfe des zentralen Grenzwertsatzes für Martingale beweisen. Dazu benötigen wir zunächst ein Lemma welches sicherstellt, dass die bedingte Lindeberg-Bedingung erfüllt ist.

Lemma 4.3.1 *Sei $\tau > 1$ und $E[Y_{1,1}^{2+\delta}] < \infty$ für ein $\delta > 0$ und setze*

$$d_{n,k} := (\log n)^{-1/2} \frac{\varepsilon_k}{X_{k-1}+1}$$

für $n \geq 2$. Dann gilt, dass für jedes vorgegebene $\epsilon > 0$

$$\sum_{k=1}^{n} E\left[(d_{n,k})^2 \mathbb{1}_{\{|d_{n,k}| > \epsilon\}} \middle| \mathscr{F}_{k-1}^{(n)} \right] \xrightarrow[n\to\infty]{f.s.} 0.$$

Beweis: Wegen Satz 4.2.4 mit $F(k) = (k+1)^{-2}$ gilt, dass

$$(\log n)^{-1} \sum_{k=1}^{n} \frac{b^2}{(X_{k-1}+1)^2} \xrightarrow[n\to\infty]{f.s.} 0. \tag{4.3.1}$$

Wir setzen nun

$$c_k := \frac{\sum_{i=1}^{X_{k-1}} (Y_{k,i} - 1)}{X_{k-1}+1}.$$

Es gilt mit der Aussage (4.2.17) bzw. (4.2.18), dass für eine Konstante $K > 0$

$$
\begin{aligned}
&(\log n)^{-1} \sum_{k=1}^{n} E\left[(c_k)^2 \mathbb{1}_{\{|c_k| > 1\}} \middle| \mathscr{F}_{k-1} \right] \\
&\le (\log n)^{-1} \sum_{k=1}^{n} E\left[(c_k)^{2+\delta} \middle| \mathscr{F}_{k-1} \right] \\
&= (\log n)^{-1} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(X_{k-1}+1)^{2+\delta}} E\left[\left(\sum_{i=1}^{X_{k-1}} (Y_{k,i}-1) \right)^{2+\delta} \middle| \mathscr{F}_{k-1} \right] \\
&\le (\log n)^{-1} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(X_{k-1}+1)^{2+\delta}} K \cdot X_{k-1}^{1+\delta/2} \\
&\le (\log n)^{-1} K \sum_{k=1}^{n} (X_{k-1}+1)^{-(1+\delta/2)} \xrightarrow[n\to\infty]{f.s.} 0,
\end{aligned}
$$

wobei die Konvergenz aus Satz 4.2.4 mit $F(k) = (k+1)^{-(1+\delta/2)}$ folgt. Somit gilt auch

$$
(\log n)^{-1} \sum_{k=1}^{n} E\left[(c_k)^2 \mathbb{1}_{\{|c_k| > 1\}} \middle| \mathscr{F}_{k-1} \right] \xrightarrow[n\to\infty]{f.s.} 0. \tag{4.3.2}
$$

Als nächstes beobachten wir, dass

$$
\sum_{k=0}^{\infty} P[|I_1 - \lambda| > k] = E[|I_1 - \lambda|] \le E[I_1] + \lambda < \infty.
$$

Nach Satz 4.2.4 mit $f(k) := P[|I_1 - \lambda| > k]$, gilt daher

$$
\sum_{k=0}^{\infty} f(X_k) < \infty. \tag{4.3.3}
$$

Sei nun $\epsilon > 0$ beliebig, dann gilt für alle hinreichend große n, etwa $n > \exp(4/\epsilon^2)$, dass

$$
\begin{aligned}
&(\log n)^{-1} \sum_{k=1}^{n} E\left[\mathbb{1}_{\{|c_k| \le 1\}} \cdot \mathbb{1}_{\{|d_{n,k}| > \epsilon\}} \middle| \mathscr{F}_{k-1} \right] \\
&\le (\log n)^{-1} \sum_{k=1}^{n} P\left[\left\{ \left| \sum_{i=1}^{X_{k-1}} (Y_{k,i}-1) \right| \le X_{k-1}+1 \right\} \right. \\
&\qquad\qquad \left. \cap \left\{ \frac{\left| \sum_{i=1}^{X_{k-1}} (Y_{k,i}-1) \right| + |I_k - \lambda|}{X_{k-1}+1} > \epsilon\sqrt{\log n} \right\} \middle| \mathscr{F}_{k-1} \right] \\
&\le (\log n)^{-1} \sum_{k=1}^{n} P\left[\frac{X_{k-1}+1+|I_k-\lambda|}{X_{k-1}+1} > \epsilon\sqrt{\log n} \middle| \mathscr{F}_{k-1} \right] \\
&\le (\log n)^{-1} \sum_{k=1}^{n} P\left[|I_k - \lambda| > \left(\epsilon\sqrt{\log n} - 1 \right) (X_{k-1}+1) \middle| \mathscr{F}_{k-1} \right]
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\leq (\log n)^{-1} \sum_{k=1}^{n} P\left[|I_k - \lambda| > X_{k-1} | \mathscr{F}_{k-1}\right] \\
&= (\log n)^{-1} \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{\infty} \mathbb{1}_{\{X_{k-1} = j\}} P\left[|I_k - \lambda| > j\right] \\
&= (\log n)^{-1} \sum_{k=1}^{n} f(X_{k-1}) \xrightarrow[n\to\infty]{f.s.} 0,
\end{aligned}
$$

wobei die Konvergenz aus (4.3.3) folgt. Demnach gilt für jedes $\epsilon > 0$

$$
(\log n)^{-1} \sum_{k=1}^{n} E\left[\mathbb{1}_{\{|c_k| \leq 1\}} \cdot \mathbb{1}_{\{|d_{n,k}| > \epsilon\}} \middle| \mathscr{F}_{k-1}\right] \xrightarrow[n\to\infty]{f.s.} 0. \tag{4.3.4}
$$

Schließlich ist

$$
\begin{aligned}
&\sum_{k=1}^{n} E\left[(d_{n,k})^2 \mathbb{1}_{\{|d_{n,k}| > \epsilon\}} \middle| \mathscr{F}_{k-1}^{(n)}\right] \\
&= (\log n)^{-1} \sum_{k=1}^{n} E\left[\frac{\left(\sum_{i=1}^{X_{k-1}} (Y_{k,i} - 1) + (I_k - \lambda)\right)^2}{(X_{k-1} + 1)^2} \cdot \mathbb{1}_{\{|d_{n,k}| > \epsilon\}} \middle| \mathscr{F}_{k-1}\right] \\
&\leq (\log n)^{-1} \sum_{k=1}^{n} E\left[\frac{2\left(\sum_{i=1}^{X_{k-1}} (Y_{k,i} - 1)\right)^2 + 2(I_k - \lambda)^2}{(X_{k-1} + 1)^2} \cdot \mathbb{1}_{\{|d_{n,k}| > \epsilon\}} \middle| \mathscr{F}_{k-1}\right] \\
&= 2(\log n)^{-1} \sum_{k=1}^{n} E\left[(c_k)^2 \cdot \mathbb{1}_{\{|d_{n,k}| > \epsilon\}} \left(\mathbb{1}_{\{|c_k| > 1\}} + \mathbb{1}_{\{|c_k| \leq 1\}}\right) \middle| \mathscr{F}_{k-1}\right] \\
&\quad + 2(\log n)^{-1} \sum_{k=1}^{n} E\left[\frac{(I_k - \lambda)^2}{(X_{k-1} + 1)^2} \cdot \mathbb{1}_{\{|d_{n,k}| > \epsilon\}} \middle| \mathscr{F}_{k-1}\right] \\
&\leq 2(\log n)^{-1} \sum_{k=1}^{n} E\left[(c_k)^2 \cdot \mathbb{1}_{\{|c_k| > 1\}} \middle| \mathscr{F}_{k-1}\right] \\
&\quad + 2(\log n)^{-1} \sum_{k=1}^{n} E\left[(c_k)^2 \cdot \mathbb{1}_{\{|d_{n,k}| > \epsilon\}} \cdot \mathbb{1}_{\{|c_k| \leq 1\}} \middle| \mathscr{F}_{k-1}\right] \\
&\quad + 2(\log n)^{-1} \sum_{k=1}^{n} \frac{E\left[(I_k - \lambda)^2 | \mathscr{F}_{k-1}\right]}{(X_{k-1} + 1)^2},
\end{aligned}
$$

woraus mit (4.3.1), (4.3.2) und (4.3.4) die Behauptung folgt.

□

Satz 4.3.2 *Sei $\tau > 1$ und $E[Y_{1,1}^{2+\delta}] < \infty$ für ein $\delta > 0$, dann gilt*

$$(\log n)^{-1/2} \sum_{i=1}^{n} \frac{\varepsilon_i}{X_{i-1}+1} \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}\left(0, \sigma^2 \left(\lambda - \frac{\sigma^2}{2}\right)^{-1}\right).$$

Beweis: Um den Zentralen Grenzwertsatz für Martingale ([HH] Theorem 3.2 / Corollary 3.1, S.58) anzuwenden, müssen wir zunächst dessen Voraussetzungen nachprüfen. Setze

$$M_k^{(n)} := (\log n)^{-1/2} \sum_{i=1}^{k} \frac{\varepsilon_i}{X_{i-1}+1} \qquad \text{für } 0 \le k \le n,\ n \ge 2$$

und definiere $\mathscr{F}_k^{(n)} := \mathscr{F}_k$ für alle $n \ge 2$. $M_k^{(n)}$ ist $\mathscr{F}_k^{(n)} - \mathfrak{P}(\mathbb{N}_0)-$messbar. Weiterhin ist wegen (1.1.6) $(M_k^{(n)})_k$ ein $(\mathscr{F}_k^{(n)})_k$-Martingal mit Martingaldifferenzen

$$d_{n,k} = (\log n)^{-1/2} \frac{\varepsilon_k}{X_{k-1}+1} = M_k^{(n)} - M_{k-1}^{(n)},$$

wie in Lemma 4.3.1, für jedes feste $n \ge 2$. Es gilt

$$E\left[M_k^{(n)}\right] = E\left[M_{k-1}^{(n)}\right] = ... = E\left[M_0^{(n)}\right] = 0.$$

Also ist

$$\left\{M_k^{(n)}, \mathscr{F}_k^{(n)}, 0 \le k \le n, n \ge 2\right\}$$

ein Martingalfeld mit $E\left[M_k^{(n)}\right] = 0$ für alle $0 \le k \le n, n \ge 2$ und wegen (1.1.7) auch quadratintegrabel. Die bedingte Lindeberg-Bedingung ist wegen Lemma 4.3.1 erfüllt.

Für die Bedingung an die vorhersehbare quadratische Variation gilt mit (1.1.7), Satz 4.2.8, Satz 4.2.4 und Satz von Slutsky, dass

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} E\left[(d_{n,k})^2 | \mathscr{F}_{k-1}^{(n)}\right] &= (\log n)^{-1} \sum_{k=1}^{n} E\frac{\left[\varepsilon_k^2 | \mathscr{F}_{k-1}^{(n)}\right]}{(X_{k-1}+1)^2} \\
&= (\log n)^{-1} \sum_{k=1}^{n} \frac{\sigma^2 X_{k-1} + b^2}{(X_{k-1}+1)^2} \\
&= (\log n)^{-1} \left[\sum_{k=1}^{n} \frac{\sigma^2 (X_{k-1}+1)}{(X_{k-1}+1)^2} + \sum_{k=1}^{n} \frac{b^2 - \sigma^2}{(X_{k-1}+1)^2}\right] \\
&= \sigma^2 (\log n)^{-1} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{X_{k-1}+1} + \underbrace{(\log n)^{-1} \sum_{k=1}^{n} \frac{b^2 - \sigma^2}{(X_{k-1}+1)^2}}_{\to 0\ f.s.} \\
&\xrightarrow[n\to\infty]{P} \sigma^2 \left(\lambda - \frac{\sigma^2}{2}\right)^{-1}.
\end{aligned}$$

Schließlich sind alle Voraussetzungen von [HH] Theorem 3.2 / Corollary 3.1, S.58 erfüllt und es folgt

$$(\log n)^{-1/2} \sum_{i=1}^{n} \frac{\varepsilon_i}{X_{i-1}+1} = M_n^{(n)} \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}\left(0, \sigma^2 \left(\lambda - \frac{\sigma^2}{2}\right)^{-1}\right),$$

also die Behauptung des Satzes.

□

Satz 4.3.3 *Sei* $B_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{X_{i-1}+1}$*. Ist* $\tau > 1$ *und* $E[Y_{1,1}^{2+\delta}] < \infty$ *für ein* $\delta > 0$*, dann gilt*

$$B_n^{-1/2} \sum_{i=1}^{n} \frac{\varepsilon_i}{X_{i-1}+1} \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}\left(0, \sigma^2\right).$$

Beweis: Schreiben wir

$$B_n^{-1/2} \sum_{i=1}^{n} \frac{\varepsilon_i}{X_{i-1}+1} = \left((\log n)^{-1} B_n\right)^{-1/2} (\log n)^{-1/2} \sum_{i=1}^{n} \frac{\varepsilon_i}{X_{i-1}+1},$$

so folgt die Behauptung direkt aus Satz 4.2.8 und Satz 4.3.2 mit dem Satz von Slutsky.

□

Wir sind nun in der Lage unser Hauptresultat für den kritischen Fall zu beweisen.

Beweis von Theorem 4.1:

Wir benutzen wieder die Bezeichnungen aus (1.1.5) und zeigen zunächst (4.0.2). Wegen Satz 4.1.2 gilt mit dem Satz von Slutsky

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i \\ \frac{1}{n^2}\left(\tilde{A}_n + n\right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{n}\left(X_n - X_0 - n\lambda\right) \\ \frac{\tilde{A}_n}{n^2} + \frac{1}{n} \end{pmatrix} \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{L}} \begin{pmatrix} \mathcal{X}_1 - \lambda \\ \int_0^1 \mathcal{X}_t \mathrm{d}t \end{pmatrix}, \tag{4.3.5}$$

wobei wegen (4.1.14) $\int_0^1 \mathcal{X}_t \mathrm{d}t > 0$ f.s. gilt. Es folgt nun direkt mit dem Satz von der stetigen Abbildung, dass

$$W_n := \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i \left[\frac{1}{n^2}\left(\tilde{A}_n + n\right)\right]^{-1/2} \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{L}} (\mathcal{X}_1 - \lambda)\left(\int_0^1 \mathcal{X}_t \mathrm{d}t\right)^{-1/2}. \tag{4.3.6}$$

Außerdem gilt nach Satz 4.2.3, dass $B_n^{-1} \xrightarrow[n\to\infty]{f.s.} 0$. Also folgt wegen (4.3.5), des Satzes von der stetigen Abbildung und Satz von Slutsky, dass

$$V_n := B_n^{-1} n^2 \left(\tilde{A}_n + n\right)^{-1} \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{L}} 0 \cdot \left(\int_0^1 \mathcal{X}_t \mathrm{d}t\right)^{-1} = 0. \tag{4.3.7}$$

Da für $\mathbb{N}_n$ aus Definition 1.2.1

$$\{V_n \geq 1\} = \left\{B_n \left(\tilde{A}_n + n\right) \leq n^2\right\} = \mathbb{N}_n$$

gilt, impliziert (4.3.7), dass

$$\mathbb{1}_{\mathbb{N}_n} \xrightarrow[n\to\infty]{P} 0 \quad \text{bzw.} \quad \mathbb{1}_{\mathbb{N}_n^c} \xrightarrow[n\to\infty]{P} 1. \tag{4.3.8}$$

Weiterhin zeigt Lemma 4.2.6, dass $\sum_{i=1}^n \frac{\varepsilon_i}{X_{i-1}+1} B_n^{-1} \xrightarrow[n\to\infty]{f.s.} 0$ und somit gilt erneut wegen (4.3.5), des Satzes von der stetigen Abbildung und Satz von Slutsky, dass

$$U_n := \sum_{i=1}^n \frac{\varepsilon_i}{X_{i-1}+1} B_n^{-1} \left[n^{-2} \left(\tilde{A}_n + n\right)\right]^{-1/2} \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{L}} 0 \cdot \left(\int_0^1 \mathcal{X}_t \mathrm{d}t\right)^{-1/2} = 0. \tag{4.3.9}$$

Wegen der Darstellung in (3.2.3) gilt, dass

$$\left(\tilde{A}_n + n\right)^{1/2} (\tilde{m}_n - m) = \left(\tilde{A}_n + n\right)^{1/2} (\tilde{m}_n - m) \cdot \mathbb{1}_{\mathbb{N}_n} + \frac{W_n - U_n}{1 - V_n} \cdot \mathbb{1}_{\mathbb{N}_n^c}.$$

Daraus ergibt sich mit (4.3.6), (4.3.7), (4.3.8), (4.3.9) und Satz von Slutsky, dass

$$\left(\tilde{A}_n + n\right)^{1/2} (\tilde{m}_n - m) \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{L}} (\mathcal{X}_1 - \lambda) \left(\int_0^1 \mathcal{X}_t \mathrm{d}t\right)^{-1/2}.$$

Somit ist Behauptung (4.0.2) bewiesen. Da $\left(\tilde{A}_n + n\right)^{1/2} \xrightarrow[n\to\infty]{f.s.} \infty$ folgt daraus direkt die Konsistenz von $\tilde{m}_n$.

Wir zeigen als nächstes die Konsistenz von $\tilde{\lambda}_n$, und definieren dazu mit den Bezeichnungen aus (1.1.5)

$$T_n := \frac{\tilde{A}_n}{\tilde{A}_n + n} B_n^{-1/2} \sum_{i=1}^n \frac{\varepsilon_i}{X_{i-1}+1}$$

und

$$R_n := \tilde{C}_n \left(\tilde{A}_n + n\right)^{-1} B_n^{-1/2} \sum_{i=1}^n \varepsilon_i.$$

Wegen

$$\frac{T_n - R_n}{1-V_n}\cdot \mathbb{1}_{\mathbb{N}_n^c} = \frac{\frac{\tilde{A}_n}{\tilde{A}_n+n}B_n^{-1/2}\sum_{i=1}^n \frac{\varepsilon_i}{X_{i-1}+1} - \tilde{C}_n\left(\tilde{A}_n+n\right)^{-1}B_n^{-1/2}\sum_{i=1}^n \varepsilon_i}{1-B_n^{-1}n^2\left(\tilde{A}_n+n\right)^{-1}}\cdot \mathbb{1}_{\mathbb{N}_n^c}$$
$$= B_n^{1/2}\frac{\tilde{A}_n\sum_{i=1}^n \frac{\varepsilon_i}{X_{i-1}+1} - \tilde{C}_n\sum_{i=1}^n \varepsilon_i}{\left(\tilde{A}_n+n\right)B_n - n^2}\cdot \mathbb{1}_{\mathbb{N}_n^c},$$

erhalten wir mit analoger Rechnung zu (2.2.13), dass

$$B_n^{1/2}(\tilde{\lambda}_n - \lambda)\cdot \mathbb{1}_{\mathbb{N}_n^c} = \frac{T_n - R_n}{1-V_n}\cdot \mathbb{1}_{\mathbb{N}_n^c}. \tag{4.3.10}$$

Da $0 \le n^{-1}\sum_{i=1}^n \frac{X_{i-1}}{X_{i-1}+1} = n^{-1}\tilde{C}_n \le 1$ und $B_n^{-1/2} \xrightarrow[n\to\infty]{f.s.} 0$, gilt $B_n^{-1/2}n^{-1}\tilde{C}_n \xrightarrow[n\to\infty]{f.s.} 0$. Also folgt aus (4.3.5), dem Satz von der stetigen Abbildung und Satz von Slutsky, dass

$$R_n = B_n^{-1/2}\frac{\tilde{C}_n}{n}\left[\frac{1}{n^2}\left(\tilde{A}_n+n\right)\right]^{-1}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \varepsilon_i \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{L}} 0\cdot\left(\int_0^1 \mathcal{X}_t \mathrm{d}t\right)^{-1}(\mathcal{X}_1 - \lambda) = 0. \tag{4.3.11}$$

Insbesondere gilt dann

$$B_n^{-1/2}R_n \xrightarrow[n\to\infty]{P} 0. \tag{4.3.12}$$

Da $\tilde{A}_n = \sum_{i=1}^n X_{i-1}$ beobachten wir als nächstes wegen Satz 4.1.2, des Satzes von der stetigen Abbildung und des Satzes von Slutsky, dass

$$\frac{\tilde{A}_n}{\tilde{A}_n+n} = \frac{\frac{1}{n^2}\tilde{A}_n}{\frac{1}{n^2}\tilde{A}_n + \frac{1}{n}} \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{L}} 1. \tag{4.3.13}$$

Des Weiteren wurde in Lemma 4.2.6 gezeigt, dass $B_n^{-1}\sum_{i=1}^n \frac{\varepsilon_i}{X_{i-1}+1} \xrightarrow[n\to\infty]{f.s.} 0$. Also gilt wieder mit Satz von Slutsky, dass

$$B_n^{-1/2}T_n = \frac{\tilde{A}_n}{\tilde{A}_n+n}B_n^{-1}\sum_{i=1}^n \frac{\varepsilon_i}{X_{i-1}+1} \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{L}} 0. \tag{4.3.14}$$

Mit der Darstellung in (4.3.10) und Satz von Slutsky erhalten wir wegen (4.3.12), (4.3.14), (4.3.7) und (4.3.8), dass

$$(\tilde{\lambda}_n - \lambda) = (\tilde{\lambda}_n - \lambda)\cdot \mathbb{1}_{\mathbb{N}_n} + \frac{B^{-1/2}T_n - B^{-1/2}R_n}{1-V_n}\cdot \mathbb{1}_{\mathbb{N}_n^c} \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{L}} 0.$$

Somit ist die Konsistenz von $\tilde{\lambda}_n$ gezeigt.

Es bleibt (4.0.3) zu zeigen. Die zusätzlichen Voraussetzungen, $\tau > 1$ und $E[Y_{1,1}^{2+\delta}] < \infty$ für ein $\delta > 0$, erlauben Satz 4.3.3 anzuwenden, so dass wegen (4.3.13) mit Satz von Slutsky

$$T_n = \frac{\tilde{A}_n}{\tilde{A}_n + n} B_n^{-1/2} \sum_{i=1}^{n} \frac{\varepsilon_i}{X_{i-1} + 1} \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}\left(0, \sigma^2\right) \tag{4.3.15}$$

gilt. Aus (4.3.10), (4.3.11), (4.3.15), (4.3.7) und (4.3.8) folgt nun mit Satz von Slutsky, dass

$$B^{1/2}(\tilde{\lambda}_n - \lambda) = B^{1/2}(\tilde{\lambda}_n - \lambda) \cdot \mathbb{1}_{\mathbb{N}_n} + \frac{T_n - R_n}{1 - V_n} \cdot \mathbb{1}_{\mathbb{N}_n^c} \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}\left(0, \sigma^2\right)$$

und (4.0.3) ist gezeigt. $\square$

Literaturverzeichnis

[AN] K.B.Athreya and P.E.Ney: „Branching Processes“. Springer (1972).

[Bil] P.Billingsley: „Convergence of Probability Measures“. Second Edition, Wiley (1999).

[Cho] Y.S.Chow: „Local convergence of martingales and the law of large numbers“. Ann. Math. Statist. 36 (1965), S.552-558.

[CT] Y.S.Chow and H.Teicher: „Probability Theory“. Springer (1978).

[EK] S.N.Ethier and T.G.Kurtz: „Markov Processes - Characterization and Convergence“. Wiley (1986).

[HH] P.Hall and C.C.Heyde: „Martingale Limit Theory and its Application“. Academic Press (1980).

[HL] C.C.Heyde and J.R.Leslie: „Improved classical limit analogues for Galton-Watson processes with or without immigration “. Bull. Austral. Math. Soc. 5 (1971), S.145-155.

[HS] C.C.Heyde and E.Seneta: „The simple branching process, a turning point test and a fundamental identity: a historical note on I.J.Bienaymé“. Biometrika 59 (1972), S.680-683.

[Jag] P.Jagers: „Branching Processes with Biological Applications“. Wiley (1975).

[Ken] D.G.Kendall: „Branching Processes since 1873“. Journal London Math. Soc. 41 (1966), S.385-406.

[KN] L.A.Klimko, P.I.Nelson: „On conditional least squares estimation for stochastic processes“. The Annals of Statistics 6 (1978), S.629-642.

[KNS] H.Kesten, P.Ney, F.Spitzer: „The Galton-Watson process with mean one and finite variance“. Theory Prob. Appl. 11 (1966), S.513-540.

[LL] E.H.Lieb and M.Loss: „Analysis“. Second Edition, American Mathematical Society (2001).

[Mel] B.Mellein: „Green function behavior of critical Galton-Watson processes with immigration“. Bol.Soc.Bras.Mat 14 N.°1 (1983), S.17-25.

[Pet] V.V.Petrov: „Sums of Independent Random Variables“. Springer (1975).

[Rev] D.Revuz: „Markov Chains“. North-Holland (1975).

[RY] D.Revuz, M.Yor: „Continuous Martingales and Brownian Motion“. Third Edition, Springer (1999).

[Smo] M.Smoluchowski: „Drei Vorträge über Diffusion, Brownsche Bewegung und Wagulation von Kolloidteilchen“. Physik. Z. 17 (1916), S.557-585.

[Ven] K.N.Venkataraman: „A time series approach to the study of the simple subcritical Galton-Watson process with immigration“. Adv. in. Appl. Prob. 14 (1982), S.1-20.

[WW] C.Z.Wei, J.Winnicki: „A Unified Estimation Theory for the Branching Process with Immigration“. Technical Report, Univ. Maryland (1987).

[W1] C.Z.Wei, J.Winnicki: „Some Asymptotic Results for the Branching Process with Immigration“. Stochastic Process. Appl. 31 (1989), S.261-282.

[W2] C.Z.Wei, J.Winnicki: „Estimation of the Means in the Branching Process with Immigration“. The Annals of Statistics 18 (1990), S.1757-1773.

[Zub] A.M.Zubkov: „Life-Periods of a Branching Process with Immigration“. Theory Prob. Appl. 17 (1972), S.174-183.