

Strahlungskorrekturen zu Polarisationsobservablen schwerer Quarks

DISSERTATION
zur Erlangung des Grades

„Doktor der Naturwissenschaften“

am Fachbereich Physik der
Johannes-Gutenberg-Universität in Mainz

ALFONSO LEYVA
geboren in Bogotá

MAINZ 2000



Datum der mündlichen Prüfung: **18.12.2000**

Zusammenfassung

Das Thema der Dissertation ist die analytische Berechnung von QCD-Strahlungskorrekturen erster Ordnung zur Polarisierung schwerer und leichter Quarks in der e^+e^- -Vernichtung, und der Polarisierung von Gluonen, die bei der Produktion von leichten oder schweren Quarkpaaren in der e^+e^- -Vernichtung abgestrahlt werden.

Der erste Teil der Arbeit (Kapitel 1 und 2) befaßt sich mit der vollständigen Analyse der Gluonpolarisation für den Prozeß $e^+e^- \rightarrow q\bar{q}G$ und $Q\bar{Q}G$, wobei q leichte oder masselose Quarks und Q schwere Quarks bezeichnen. Es werden Berechnungen der QCD-Bremsstrahlungskorrekturen zur ersten Ordnung in α_s zur Gluonpolarisation im Prozeß $e^+e^- \rightarrow q\bar{q}G$ und $Q\bar{Q}G$ durchgeführt. Ferner werden die lineare und die zirkulare Gluonpolarisation in der Hadronebene (Ereignisebene) und Leptonebene (Strahlebene) untersucht. Anschließend werden die Polarwinkelabhängigkeit und die Strahlpolarisationsabhängigkeit der Polarisierung des abgestrahlten Gluons analysiert.

Im zweiten Teil der Arbeit (Kapitel 3 und 4) finden sich die Berechnungen der QCD-Strahlungskorrekturen erster Ordnung für massive Quarks zur Longitudinal-Longitudinal Spin-Korrelation für die Prozesse $e^+e^- \rightarrow q\bar{q}$ und $Q\bar{Q}$. In Kapitel 3 wird eine Mittelung über die Polarwinkel durchgeführt, während in Kapitel 4 die Polarwinkel-Abhängigkeit explizit untersucht wird. Sowohl in Kapitel 3 als auch in Kapitel 4 wird der Effekt der $O(\alpha_s)$ -Korrektur zur *spin-flip*-Konfiguration der verschiedenen Komponenten der Hadrontensoren diskutiert. Es werden die verschiedenen *spin-flip* und *no-flip*-Konfigurationen betrachtet und damit untersucht, wie die Masseneffekte die Konfigurationen *spin-flip* und *no-flip* beeinflussen können. Es zeigt sich, daß sich die in der $O(\alpha_s)$ berechneten Resultate für die *spin-flip* und *no-flip* Beiträge unterscheiden, je nachdem ob man den $m \rightarrow 0$ Limes der QCD betrachtet oder in der masselosen QCD rechnet. Die Unterschiede der Beiträge werden als *anomale* Beiträge bezeichnet.

Bei der Berechnung der Strahlungskorrekturen treten Infrarotdivergenzen auf, die in der Berechnung der Gluonpolarisation durch einen *cut-off* regularisiert werden. Bei der Berechnung der Longitudinal-Longitudinal Spin-Korrelation im Fall massiver Quarks wird die Gluonmassenregularisierung gewählt, während im Fall masseloser Quarks die dimensionale Regularisierung verwendet wird.

Der vorgelegten Arbeit kommt im Rahmen der für die Zukunft geplanten Hochpräzisionsexperimente eine besondere Bedeutung zu, da sie Vorhersagen für Spinobservablen liefert, die in Experimenten an den geplanten e^+e^- -Linearbeschleunigern wie z.B. TESLA (DESY) gemessen werden können.

Inhaltsverzeichnis

Einleitung	1
1 Gluonpolarisation für $e^+e^- \rightarrow t\bar{t}G$	5
1.1 Einführung	5
1.2 Die Dichtematrix des Gluons	5
1.3 Die Gluonbremsstrahlung in $O(\alpha_s)$	7
1.4 Der Phasenraum des Gluons	8
1.5 Die lineare Polarisierung in der Hadronebene	8
1.5.1 Der Wirkungsquerschnitt und die Polarisierung	9
1.5.2 Die Projektoren	10
1.5.3 Die Strukturfunktionen	10
1.5.4 Die Phasenraumintegration	13
1.6 Numerische Resultate	14
2 Die Polarwinkelabhängigkeit der Gluonpolarisation in $e^+e^- \rightarrow t\bar{t}G$	21
2.1 Einführung	21
2.2 Die Dichtematrix des Gluons	22
2.3 Die $\cos\theta$ -Abhängigkeit der Gluonpolarisation	23
2.3.1 Die Strukturfunktionen	23
2.3.2 Numerische Resultate	27
2.4 Die Lineare Polarisierung in der Leptonebene	31
2.4.1 Die Rotation der Strukturfunktionen	31
2.4.2 Numerische Resultate	34
2.5 Zusammenfassung	35
3 Longitudinal-Longitudinal Spin-Korrelation in $e^+e^- \rightarrow q\bar{q}$	39
3.1 Einführung	39
3.2 Die Dichtematrix der Spin-Spin Korrelation	40
3.3 Die Longitudinal-Longitudinal Spin-Korrelation	41
3.3.1 Der Wirkungsquerschnitt und die Spin-Spin Korrelation	41
3.3.2 Die Feynman-Diagramme	43
3.3.3 Der Phasenraum für den $q\bar{q}G$ -Endzustand	44
3.3.4 Die Projektion	46
3.3.5 Strukturfunktionen	47
3.3.6 Die Phasenraumintegration	50

3.4	Numerische Resultate	52
3.5	Die Spin-Konfiguration	54
3.5.1	Der Fall masseloser Quarks	54
3.5.2	Der Grenzfall verschwindender Quarkmasse	57
4	Polarwinkelabhängigkeit der Longitudinal-Longitudinal Spin- Korrelation in $e^+e^- \rightarrow q\bar{q}$	59
4.1	Einführung	59
4.2	Die Dichtematrix	59
4.3	Die Polarwinkelabhängigkeit	60
4.3.1	Die Projektion	60
4.3.2	Strukturfunktionen	60
4.3.3	Die Phasenraumintegration	65
4.4	Numerische Resultate	69
4.5	Die Spin-Konfiguration	71
4.5.1	Der Fall masseloser Quarks	78
4.5.2	Der Grenzfall verschwindender Quarkmasse	80
A	Konventionen und Rechenregeln	83
A.1	Die natürlichen Einheiten	83
A.2	Der metrische Tensor	83
A.3	Die Koordinaten und Impulse	84
A.4	Die Pauli-Matrizen	84
A.5	Die Dirac-Matrizen	85
A.6	Die Dirac-Spinoren	85
A.7	Der Spinvektor	86
A.8	Die Relationen der Dirac γ Matrizen	86
A.9	Die $SU(N)$ Generatoren	88
A.10	Die Dilogarithmusfunktion	89
A.11	Gebräuchliche Integrationsformeln	90
B	Der Wirkungsquerschnitt	91
B.1	Der Leptontensor	93
B.2	Der Hadrontensor	93
B.3	Die Winkel-Korrelationen	93
C	Phasenraumintegration	97
C.1	Einführung	97
C.2	Die Integrale	97
C.3	Phasenraum und Substitution	98
C.3.1	Konstruktion einer Substitution	98
C.3.2	Der Knickpunkt der Funktion $[(1 - z)^2 - \xi]^{1/2}$	99
C.4	Die z -Integration	100
C.4.1	Berechnung der Integrale der ersten Klasse	101
C.4.2	Berechnung der Integrale der zweiten Klasse	101
C.4.3	Berechnung der Integrale der dritten Klasse	102

C.4.4	Berechnung der Integrale der vierten Klasse	102
C.4.5	Berechnung der Integrale der fünften Klasse	103
C.5	Berechnung der Integrale der Familie C	103
C.5.1	Berechnung des Integrals $C_1 = C[0, 0]$	104
C.5.2	Berechnung des Integrals $C_6 = C[0, -1]$	105
C.5.3	Berechnung des Integrals $C_7 = C[-1, -1]$	107
C.5.4	Berechnung des Integrals $C_{10} = C[0, -2]$	113
C.6	Berechnung der Integrale der Familie M	117
C.6.1	Berechnung der zugehörigen Integrale der ersten Klasse	117
C.6.2	Berechnung der zugehörigen Integrale der zweiten Klasse . . .	125
C.6.3	Berechnung der zugehörigen Integrale der dritten Klasse . . .	135
C.6.4	Berechnung der zugehörigen Integrale der vierten Klasse . . .	140
C.6.5	Berechnung der zugehörigen Integrale der fünften Klasse . . .	144
C.7	Berechnung der Integrale der Familie L	147
C.7.1	Berechnung der zugehörigen Integrale der ersten Klasse	147
C.7.2	Berechnung der zugehörigen Integrale der zweiten Klasse . . .	150
C.7.3	Berechnung der zugehörigen Integrale der dritten Klasse . . .	153
C.7.4	Berechnung der zugehörigen Integrale der vierten Klasse . . .	158
C.7.5	Berechnung der zugehörigen Integrale der fünften Klasse . . .	162
C.8	Die Transformation zu den <i>Zerfallsratenterme</i>	165
C.8.1	Transformationsregeln	165
C.8.2	Integrale der Familie C	168
C.8.3	Integrale der Familie M	169
C.8.4	Integrale der Familie L	174

Abbildungsverzeichnis

1.1	Einer der vier beitragenden Baumgraphen zum Prozeß $e^+e^- \rightarrow q\bar{q}G$.	7
1.2	Hadronischer Anteil der Gluonbremsstrahlungsgraphen in $O(\alpha_s)$. . .	8
1.3	Der Phasenraum des Gluons	9
1.4	Energieabhängigkeit der linearen Gluonpolarisation des Gluons in der Hadronebene	15
1.5	Energieabhängigkeit der Wirkungsquerschnitte für $e^+e^- \rightarrow t\bar{t}G$ und $e^+e^- \rightarrow c\bar{c}G$	16
1.6	Die lineare Gluonpolarisation im Fall des Topquarks	17
1.7	Die lineare Polarisation des Charmquarks	17
1.8	Wirkungsquerschnitt $e^+e^- \rightarrow t\bar{t}G$ für verschiedene <i>cut-off</i> -Energien .	18
1.9	Die Energieabhängigkeit der linearen Gluonpolarisation in der Ha- dronebene für verschiedene Energien im Fall des Topquarks	19
1.10	Die Energieabhängigkeit des Wirkungsquerschnitts für $e^+e^- \rightarrow t\bar{t}G$ für verschiedene Energien	19
1.11	Die Energieabhängigkeit des Wirkungsquerschnitts für $e^+e^- \rightarrow c\bar{c}G$ für verschiedene Energien	20
2.1	Polarwinkel θ und Azimutalwinkel χ	21
2.2	Die Energieabhängigkeit der zirkularen Gluonpolarisation im Fall des Topquarks	28
2.3	Die Energieabhängigkeit der zirkularen Gluonpolarisation für ver- schiedensten flavours des Quarks	28
2.4	Die Energieabhängigkeit der zirkularen Gluonpolarisation im Fall des Charmquarks	29
2.5	Die Energieabhängigkeit der zirkularen Gluonpolarisation in $e^+e^-(h_-) \rightarrow$ $t\bar{t}G$	30
2.6	Die Energieabhängigkeit des Wirkungsquerschnitts in $e^+e^-(h_-) \rightarrow t\bar{t}G$	30
2.7	Die Polarwinkelabhängigkeit der linearen Gluonpolarisation im Fall des Topquarks	31
2.8	Die Polarwinkelabhängigkeit der zirkularen Gluonpolarisation im Fall des Topquarks	32
2.9	Die Polarwinkelabhängigkeit des Wirkungsquerschnitts im Fall des Topquarks	32
2.10	Die Energieabhängigkeit der linearen Gluonpolarisation in der Lep- tonebene im Fall des Topquarks	34

2.11	Die Energieabhängigkeit der linearen Gluonpolarisation in der Leptonebene im Fall des Charmquarks	35
2.12	Vergleich von linearen Gluonpolarisation in der Leptonenben für Top- und Charmquark	36
2.13	Die Polarwinkelabhängigkeit von linearen Gluonpolarisation in der Leptonenben im Fall des Topquarks	37
2.14	Die Polarwinkelabhängigkeit von linearen Gluonpolarisation in der Leptonenben im Fall des Charmquarks	38
3.1	Polarwinkel θ und Azimutalwinkel χ	41
3.2	Bornsche Feynman-Diagramme	43
3.3	Baum-Feynman-Diagramme	43
3.4	Loop-Feynman-Diagramm	44
3.5	Der Dreiteilchen-Phasenraum für massive Quarks	47
3.6	Die Energieabhängigkeit des Wirkungsquerschnitts für $e^+e^- \rightarrow t\bar{t}(G)$	52
3.7	Die Energieabhängigkeit des Wirkungsquerschnitts für $e^+e^- \rightarrow b\bar{b}(G)$	53
3.8	Die Energieabhängigkeit der $\langle P^{\ell\ell} \rangle$ im Fall des Topquarks	53
3.9	Die Energieabhängigkeit der $\langle P^{\ell\ell} \rangle$ im Fall des Bottomquarks	54
3.10	Die Energieabhängigkeit der $\langle P^{\ell\ell} \rangle$ im Fall eines masselosen Upquarks	55
4.1	Die Polarwinkelabhängigkeit der $\langle P^{\ell\ell} \rangle$ im Fall des Topquarks	70
4.2	Die Polarwinkelabhängigkeit der $\langle P^{\ell\ell} \rangle$ im Fall des Bottomquarks	71
4.3	Die Polarwinkelabhängigkeit der $\langle P^{\ell\ell} \rangle$ im Fall des Charmquarks	72
4.4	$\langle \Delta P^{\ell\ell} \rangle$ im Fall des Topquarks	72
4.5	$\langle \Delta P^{\ell\ell} \rangle$ im Fall des Bottomquarks	73
4.6	$\langle \Delta P^{\ell\ell} \rangle$ im Fall des Charmquarks	73
4.7	Die Polarwinkelabhängigkeit der $\langle P^{\ell\ell} \rangle$ im Fall des Topquarks mit polarisiertem Strahl	74
4.8	Die Polarwinkelabhängigkeit der $\langle P^{\ell\ell} \rangle$ im Fall des Bottomquarks mit polarisiertem Strahl	74
4.9	Die Polarwinkelabhängigkeit der $\langle P^{\ell\ell} \rangle$ im Fall des Charmquarks mit polarisiertem Strahl	75
4.10	Die Polarwinkelabhängigkeit des Wirkungsquerschnitts im Fall des Topquarks	75
4.11	Die Polarwinkelabhängigkeit des Wirkungsquerschnitts im Fall des Bottomquarks	76
4.12	Die Polarwinkelabhängigkeit des Wirkungsquerschnitts im Fall des Charmquarks	76
4.13	Die Polarwinkelabhängigkeit des Wirkungsquerschnitts im Fall des Topquarks mit polarisiertem Strahl	77
4.14	Die Polarwinkelabhängigkeit des Wirkungsquerschnitts im Fall des Bottomquarks mit polarisiertem Strahl	77
4.15	Die Polarwinkelabhängigkeit des Wirkungsquerschnitts im Fall des Charmquarks mit polarisiertem Strahl	78
B.1	Die Eulersche Rotation	96

C.1	Die Funktion $\sqrt{(1 - z_+)^2 - \xi}$	100
-----	---	-----

Einleitung

Die Hochenergiephysik besitzt in den e^+e^- -Beschleunigern ein wesentliches Werkzeug, um die fundamentalen Konstituenten der Materie und ihre Wechselwirkungen zu untersuchen. Denn mit den experimentellen Beobachtungen im Hadronbeschleuniger sind Struktur und Eigenschaften der Elementarteilchen adäquat im Standardmodell beschrieben worden. Die Elementarteilchen, d.h. die *Leptonen* und *Quarks*, können in drei Generationen klassifiziert werden. Dabei ist bekannt, daß die elektroschwachen und die starken Kräfte durch eine Eichfeldtheorie beschrieben werden. Die starken Kräfte lassen sich durch die $SU(3)_C$ -Eichfeldtheorie beschreiben, welche *Quantenchromodynamik* genannt wird [1]. Die Vektorbosonen dieses Modells, die die starke Wechselwirkung vermitteln, sind in acht farbigen masselosen Gluonen gruppiert. Die QCD besitzt nur einen freien Parameter Λ_{QCD} . Sie ist ein guter Kandidat, um die Hadrondynamik, die asymptotische Freiheit sowie die nukleare Struktur und die Baryon- und Mesonspektroskopie zu erklären. Die elektroschwache Theorie hat auf der anderen Seite viele beliebige Parameter und wird mit der Eichgruppe $SU(2)_L \otimes U(1)_Y$ beschrieben [2], wobei $SU(2)_L$ die schwache Isospingruppe ist, die auf linkshändige Fermionen wirkt und $U(1)_Y$ die Hyperladungsgruppe ist. Bei niedriger Energie (bei der Skala $\simeq 250 \text{ GeV}$) wird die $SU(2)_L \otimes U(1)_Y$ -Symmetrie spontan gebrochen. Diesen Mechanismus nennt man Higgs-Mechanismus [3]. Er induziert die Masse der Eichbosonen, $W^\pm, Z$ und andere Fermionen. Die schweren Eichbosonen $W^\pm$ und Z wurden am CERN Mitte der 80er Jahre entdeckt. Dank dieses beeindruckenden Erfolges wurde die Eichfeldtheorie mit der Gruppe $SU(3)_C \otimes SU(2)_L \otimes U(1)_Y$ das *Standardmodell* genannt.

In den letzten zwei Jahrzehnten ist das Standardmodell durch Präzisionsexperimente mit erstaunlicher Übereinstimmung getestet worden. Mit den daraus entstehenden Daten war das Standardmodell äußerst erfolgreich bei der Beschreibung der Eigenschaften der Teilchen und der Struktur ihrer fundamentalen Wechselwirkungen. Trotz dieser Erfolge wird das Modell jedoch nicht als endgültige Theorie der Natur angesehen. Denn tatsächlich ist der Higgsmechanismus noch immer hypothetischer Natur und konnte experimentell noch nicht nachgewiesen werden¹.

Das Topquark ergänzte nach seiner Entdeckung im Jahre 1995 im Fermilab [6] die dritte Generation des Standardmodells und eröffnete so das neue Feld der Topquarkphysik. Das Topquark wird hauptsächlich in Hadron-Hadron-Kollisionen durch starke Wechselwirkung erzeugt und zerfällt fast immer durch den Zerfallskanal $t \rightarrow Wb$.

Das Topquark unterscheidet sich von den anderen Quarks durch seine große Mas-

¹In den letzten zwei Monaten sind neue Ergebnisse darüber publiziert worden [4, 5]

se, die mit 175 GeV etwa 35 mal größer als die Masse des nächsten schweren Quarks, des Bottomquarks und nahe der Skala der elektroschwachen Symmetriebrechung liegt. Diese einzigartige Eigenschaft läßt einige interessante Fragen aufkommen. Ist die Topquarkmasse von dem Higgsmechanismus generiert, so wie es das Standardmodell voraussagt, und steht sie in Beziehung zu der Top-Higgs-Yukawa-Kopplung? Oder spielt sie eine noch fundamentalere Rolle im elektroschwachen Symmetriebrechungsmechanismus? Bei Entdeckung von neuen, leichteren Teilchen: zerfällt das Topquark in diese Teilchen? Könnte sich die Nicht-Standardmodell-Physik zuerst in Nicht-Standardkopplungen des Topquarks manifestieren und so eine Anomalie der Topquarkproduktion und seines Zerfalls sein? Die Topquarkphysik versucht, diese Fragen zu beantworten [9].

Einige Eigenschaften des Topquarks wurden bereits im Tevatron untersucht. Es wurden Studien durchgeführt über die kinematischen Eigenschaften der Topquark-Produktion [10], die Messungen der Topquarkmasse [11, 12], der Wirkungsquerschnitt der Topquark-Produktion [13, 14], der Rekonstruktion der $t\bar{t}$ -Paare im hadronischen Endzustand [15, 16], die τ -Zerfälle des Topquarks in $p\bar{p}$ -Kollisionen (im Prozeß $t\bar{t} \rightarrow (\ell\nu_\ell)(\tau\nu_\tau)b\bar{b}$ wobei $\ell = e, \mu$) [17], der Rekonstruktion der hadronischen Zerfälle des W Bosons aus den Topzerfällen [18], der Suche nach Zerfällen mit *flavour changing neutral currents* [19], der Messung der W-Helizität in Topzerfällen [20] und Grenzen der $t\bar{t}$ Spin-Korrelationen [21]. Die meisten dieser Messungen sind durch die kleine Anzahl der Topquarks, die bisher im Tevatron gesammelt worden sind, limitiert. Das **LHC** ist im Vergleich dazu eine Topquarkfabrik: es produziert ungefähr 8 Millionen $t\bar{t}$ -Paare pro Experiment pro Jahr bei einer Luminosität von (10fb^{-1}) pro Jahr und zusätzlich einige wenige Millionen (Anti-)Topquarks in elektroschwachen Einzel(anti-) Topquarkereignissen. Daher wird erwartet, daß die Topquarkeigenschaften mit bedeutender Präzision im **LHC** untersucht werden können. Völlig neue Messungen können auf der Basis der zu erwartenden hohen Ereigniszahlen in Betracht gezogen werden.

In den zukünftigen Experimenten am Tevatron werden in seiner ersten im Jahre 2001 startenden Phase 5 bis 6×10^3 $t\bar{t}$ -Paare pro Experiment und pro Jahr bei einer Schwerpunktsenergie von $\sqrt{s} \simeq 1.8 \text{ TeV}$, und in der zweiten Phase (ab dem Jahre 2005) 3 bis 4×10^3 $t\bar{t}$ -Paare pro Experiment und pro Jahr bei einer Schwerpunktsenergie von $\sqrt{s} \simeq 2.0 \text{ TeV}$ erwartet. Im **LHC** werden 10^7 bis 10^8 $t\bar{t}$ -Paare pro Experiment und pro Jahr ab dem Jahre 2005 produziert. Im TESLA werden 1 bis 4×10^5 $t\bar{t}$ -Paare pro Experiment und pro Jahr ab dem Jahre 2005 erzeugt.

Das Topquark ist von besonderem Interesse, da es ein sehr schweres Teilchen ist. Seine große Masse bewirkt, daß es sehr schnell zerfällt (seine Lebensdauer beträgt circa $\tau_t \cong 5 \times 10^{-25}$ Sekunden [23]). Damit schliesst es die sogenannte *Long-distance-QCD-Dynamik* aus, die eine Skala von $\Lambda_{QCD}^{-1} \cong 10^{-23}$ Sekunden hat. Insbesondere können die Wechselwirkungen des Topquarks im Detail besser untersucht werden als die leichter Teilchen, da das Topquark sich grundsätzlich wie ein freies, aber extrem kurzlebiges Teilchen verhält. Ganz besonders die Polarisierung des Topquarks bleibt vom Hadronisierungsprozeß unbeeinflusst und wird dadurch zu einer zusätzlichen Observablen, um die QCD, oder allgemeiner die Physik der kurzen Abstände zu testen.

Diese Arbeit befasst sich mit den analytischen Berechnungen der QCD-Strahlungskorrekturen erster Ordnung zur Polarisierung schwerer und leichter Quarks und der Polarisierung von Gluonen, die bei der Produktion von leichten oder schweren Quarkpaaren abgestrahlt werden.

Im ersten Teil der Arbeit wird die vollständige Analyse zur Gluonpolarisation für den Prozeß $e^+e^- \rightarrow q\bar{q}G$ durchgeführt, im zweiten Teil wird die Spin-Spin Korrelation eines Quarks ebenfalls dargelegt.

Als Hintergrund dieser Arbeit stehen frühere Berechnungen für massive Quarks von ehemaligen Doktoranden (M. Tung, S. Groote) unserer Arbeitsgruppe zur Verfügung. Diese Arbeiten beinhalten analytische $O(\alpha_s)$ -Korrekturen zur Polarisationsabservablen in $e^+e^- \rightarrow q\bar{q}$. In diesen Arbeiten werden die longitudinale Polarisierung $\langle P^\ell \rangle$, die Polarwinkelabhängigkeit der longitudinalen Polarisierung $\langle P^\ell \rangle(\cos\theta)$ und die transversale $\langle P^t \rangle$ und normale Polarisierung $\langle P^N \rangle$ für massive Quarks untersucht.

Diese Arbeit gliedert sich wie folgt: Kapitel 1 und 2 befassen sich mit der Berechnung der QCD-Bremsstrahlungskorrekturen erster Ordnung $O(\alpha_s)$ zur Gluonpolarisation im Prozeß $e^+e^- \rightarrow q\bar{q}G$ und $Q\bar{Q}G$.

In Kapitel 1 wird die lineare Gluonpolarisation für leichte und schwere Quarks in der Hadronebene behandelt. Die zirkulare und die lineare Gluonpolarisation in der Leptonebene und die Polarwinkel-Abhängigkeit werden in Kapitel 2 betrachtet. Kapitel 3 enthält die Berechnung der QCD-Korrekturen erster Ordnung zur Longitudinal-Longitudinal Spin-Korrelation in der e^+e^- -Annihilation für massive Quarks.

In Kapitel 4 findet sich die $O(\alpha_s)$ -Korrektur im Fall massiver Quarks zur Polarwinkel-Abhängigkeit der Longitudinal-Longitudinal Spin-Korrelation auch im Prozeß $e^+e^- \rightarrow q\bar{q}$. Sowohl in Kapitel 3 als auch in Kapitel 4 wird der Effekt der $O(\alpha_s)$ -Korrektur zur Spin-Konfiguration der verschiedenen Komponenten der Hadrontensoren diskutiert. Ein ebenfalls wichtiger Teil dieser Arbeit befindet sich im Anhang C, in dem die benötigten Phasenraumintegrale explizit behandelt werden.

Kapitel 1

Gluonpolarisation für $e^+e^- \rightarrow t\bar{t}G$

1.1 Einführung

In diesem Kapitel wird die lineare Polarisierung eines abgestrahlten Gluons in der Hadronenebene berechnet. Hier wird eine Mittelung über die Polarwinkel durchgeführt, während im Kapitel 2 die Polarwinkelabhängigkeit angegeben wird.

Die Polarisierung von Gluonen ist in Arbeiten über die e^+e^- -Annihilation [24, 25], die tief inelastische Streuung [30] und die Quarkonium-Zerfälle [24, 31] untersucht worden. Es werden darin einige Vorschläge vorgelegt, wie die Polarisierung des Gluons gemessen werden kann. Mit Hilfe der azimuthalen Winkelkorrelationen in dem Aufspaltungsprozeß eines polarisierten Gluons in ein Paar von Gluonen oder Quarks [32] kann die Polarisierung des Gluons gemessen werden. Spätere Untersuchungen haben zu einer Bestätigung der auftretenden Drei-Gluonen-Vertizes in e^+e^- -Experimenten geführt [33, 34].

Diese frühere Berechnung der Gluonpolarisation in der Vernichtung war für masselose Fermionen erfolgt, was zur damaligen Zeit ausreichend war. Mittlerweile hat sich die Situation geändert, insofern als das schwere Topquark beim Fermilab [6, 7] 1995 entdeckt worden ist und dessen Produktionseigenschaften in der e^+e^- -Vernichtung im vorgeschlagenen Next-Linear-Collider (NLC) studiert wird. In seiner ersten Phase wird der NLC eine Schwerpunktsenergie bis zu 500 GeV besitzen, die später bis auf ca. 1000 GeV erhöht werden soll.

Es ist klar geworden, daß die Masseneffekte in diesem Energiebereich nicht vernachlässigt werden können. Deshalb ist es wichtig, die Berechnungen [24, 25] für schwere Quarks nochmals durchzuführen, um den Einfluß der Effekte der schweren Quarkmasse auf die Polarisationsobservablen des Gluons zu untersuchen.

1.2 Die Dichtematrix des Gluons

Die normierte Dichtematrix, die masselose Teilchen mit Spin 1 beschreibt und die auch die allgemeinsten statistischen Mischungszustände enthält, lautet [25]:

$$\sigma_{\lambda\lambda'} = \frac{1}{2}(1 + \Xi_x\sigma_x + \Xi_y\sigma_y + \Xi_z\sigma_z), \quad (1-1)$$

wobei λ und λ' die beiden Helizitätszustände eines masselosen Teilchens kennzeichnen. Die Größen σ_i sind die Pauli-Matrizen, und der Vektor Ξ ist der sogenannte Stokes-Vektor in der Helizitätsbasis¹. Er besteht aus reellen Komponenten, die [39] :

$$\Xi_i = \text{Tr}(\Xi \sigma_i) \quad i = x, y, z. \quad (1-2)$$

Der Polarisationsgrad ist durch den Betrag $P = (\Xi_x^2 + \Xi_y^2 + \Xi_z^2)^{\frac{1}{2}}$ gegeben. Im allgemeinen kann der Polarisationsgrad $0 \leq P \leq 1$ betragen, und für die Polarisierungen kann die folgende Klassifikation eingeführt werden:

$$\text{Polarisation} \begin{cases} \text{Lineare Polarisation} & \Rightarrow \Xi_z = 1 \\ \text{Zirkulare Polarisation} & \Rightarrow \Xi_x = \Xi_y = 0 \\ \text{Elliptische Polarisation} & \Rightarrow \Xi_z \neq 0 \quad \& \quad \Xi_x^2 + \Xi_y^2 \neq 0 \end{cases}$$

Schließlich wird von einem *reinen* und *gemischten* Polarisationszustand gesprochen. $P = 1$ entspricht einem reinen Zustand und $P \neq 1$ einem gemischten Zustand. Man spricht von $P_{zirk} = |\Xi_z|$ als dem zirkularen Polarisationsgrad und von $P_{lin} = (\Xi_x^2 + \Xi_y^2)^{\frac{1}{2}}$ als dem maximalen linearen Polarisationsgrad. Der gesamte Polarisationsgrad ist durch $(P_{zirk}^2 + P_{lin}^2)^{\frac{1}{2}}$ gegeben.

Für die Polarisation des Gluons kann der differentielle Wirkungsquerschnitt $d\sigma$ zu einer differentiellen $2 \otimes 2$ Dichtematrix $d\sigma = d\sigma_{\lambda_G \lambda'_G}$ erweitert werden, und zwar mit Hilfe der Gluonhelizitäten $\lambda_g = \pm 1$, deren Komponenten durch die Einheitsmatrix und die drei Pauli-Matrizen ausgedrückt werden:

$$d\sigma = \frac{1}{2}(d\sigma \mathbb{1} + d\sigma^x \sigma_x + d\sigma^y \sigma_y + d\sigma^z \sigma_z), \quad (1-3)$$

wobei $d\sigma$ die unpolarisierte differentielle Rate ist und $d\vec{\sigma} = (d\sigma^x, d\sigma^y, d\sigma^z)$ die drei Anteile des unnormierten, differentiellen Stokes-Vektors sind.

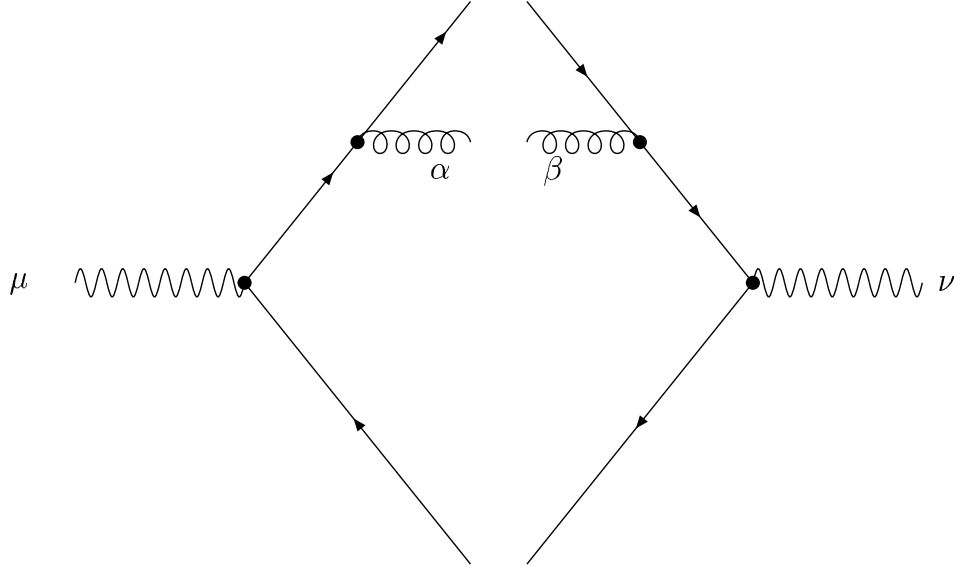
Die Berechnung der Gluonpolarisation auf Baum-Niveau benötigt die Evaluierung von vier Feymann-Graphen. Einer der vier Feymann-Graphen ist in Abbildung (1.1) dargestellt. Es ergibt sich

$$\sigma_{\lambda_Z \lambda'_Z; \lambda_G \lambda'_G} = \sigma_{\mu\nu; \alpha\beta} \quad \epsilon^\mu(\lambda_Z) \epsilon^{*\nu}(\lambda'_Z) \epsilon^{*\alpha}(\lambda_G) \epsilon^\beta(\lambda'_G), \quad (1-4)$$

wobei die Polarisationsvektoren wie folgt definiert sind:

$$\begin{aligned} \epsilon^\mu(+) &= \frac{1}{\sqrt{2}}(0; -1, -i, 0), \\ \epsilon^\mu(-) &= \frac{1}{\sqrt{2}}(0; 1, -i, 0). \end{aligned} \quad (1-5)$$

¹Der Stokes-Vektor transformiert nicht wie ein echter Vektor [39], deshalb wird er auch als Pseudovektor bezeichnet

Abbildung 1.1: Einer der vier beitragenden Baumgraphen zum Prozeß $e^+e^- \rightarrow q\bar{q}G$

Wie bereits erwähnt, wird in diesem Kapitel die normierte Linearpolarisation P^x des Gluons in der Hadronebene berechnet. Die Polarisation wird als Quotient des polarisierten und des unpolarisierten Wirkungsquerschnitts,

$$P^x := \frac{\sigma^x}{\sigma}, \quad (1-6)$$

definiert. Der Wirkungsquerschnitt wird im Anhang B ausführlich behandelt.

1.3 Die Gluonbremsstrahlung in $O(\alpha_s)$

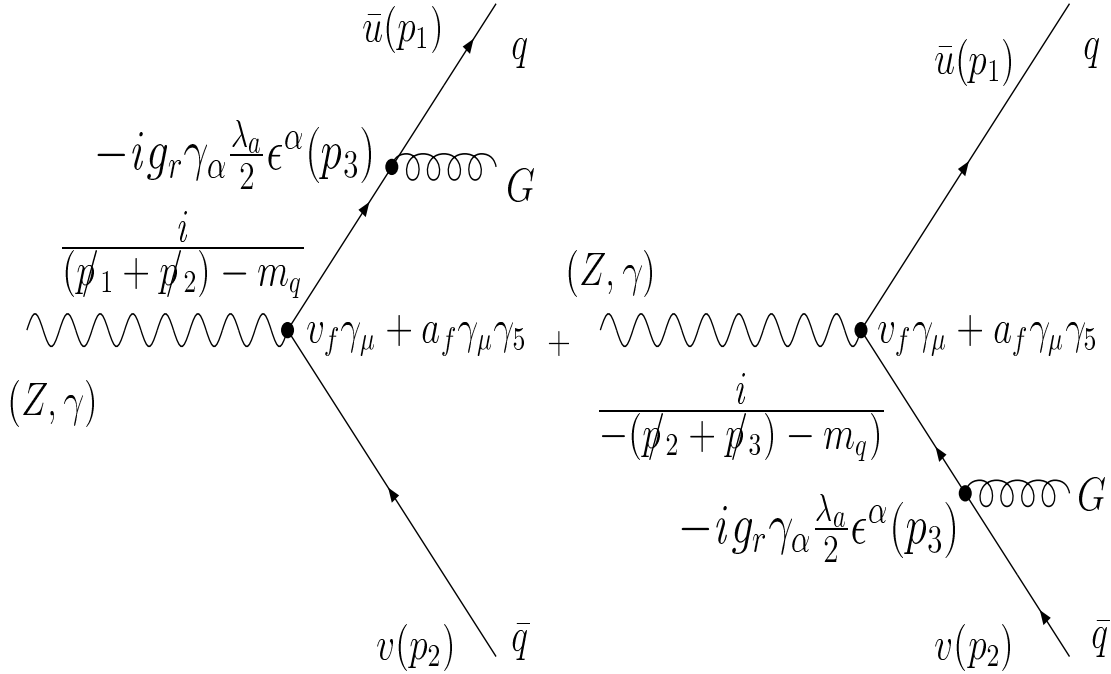
Die relevanten Feynman-Graphen, die man für die Berechnung der Polarisation des Gluons zur Ordnung $O(\alpha_s)$ benötigt, sind in der Abbildung (1.2) dargestellt.

Die dazugehörigen Vektor- und Axialvektor-Amplituden lauten

$$\begin{aligned} V_\mu &= g_s \frac{\lambda_a}{2} \bar{u}(p_1) \left[\gamma_\alpha \frac{\not{p}_1 + \not{p}_3 + m_q}{2p_1 \cdot p_3} \gamma_\mu - \gamma_\mu \frac{\not{p}_2 + \not{p}_3 + m_q}{2p_2 \cdot p_3} \gamma_\alpha \right] v(p_2), \\ A_\mu &= g_s \frac{\lambda_a}{2} \bar{u}(p_1) \left[\gamma_\alpha \frac{\not{p}_1 + \not{p}_3 + m_q}{2p_1 \cdot p_3} \gamma_\mu \gamma_5 - \gamma_\mu \gamma_5 \frac{\not{p}_2 + \not{p}_3 + m_q}{2p_2 \cdot p_3} \gamma_\alpha \right] v(p_2). \end{aligned} \quad (1-7)$$

Die zugehörige Dichtematrix des Gluons erhält man durch Quadrieren und Kontraktion mit den Polarisationsvektoren gemäß Gl. (1-4).

Die Berechnung der notwendigen Spuren ist mit Hilfe des symbolischen Algebraprogramms MATHEMATICA [26, 27] und des speziellen Hochenergie-Packets **HIP** [28] durchgeführt worden.

Abbildung 1.2: *Hadronischer Anteil der Gluonbremsstrahlungsgraphen in $O(\alpha_s)$*

1.4 Der Phasenraum des Gluons

Der Wirkungsquerschnitt besteht aus drei Faktoren [siehe Anhang B]. Einer davon ist der sogenannte Phasenraum-Faktor dPS , der für drei Teilchen im Endzustand durch

$$dPS_3 = \frac{1}{(2\pi)^5} \delta^4(p_1 + p_2 + p_3 - q) \frac{d^3 p_1}{2E_1} \frac{d^3 p_3}{2E_3} \delta(p_2^2 - m_q^2) \theta(E_2) d^4 p_2 \quad (1-8)$$

definiert ist.

Die Grenzen des Phasenraums sind durch

$$\begin{aligned} w_{\pm} &= \pm x \sqrt{\frac{1-x-\xi}{1-x}}, \\ x_- &= 2\lambda, \\ x_+ &= 1-\xi. \end{aligned} \quad (1-9)$$

gegeben. Der Phasenraum wird in der Abbildung (1.3) gezeigt.

1.5 Die lineare Polarisation in der Hadronebene

In diesem Abschnitt sollen die einzelnen Schritte erläutert werden, die vom Wirkungsquerschnitt zur Polarisation führen.

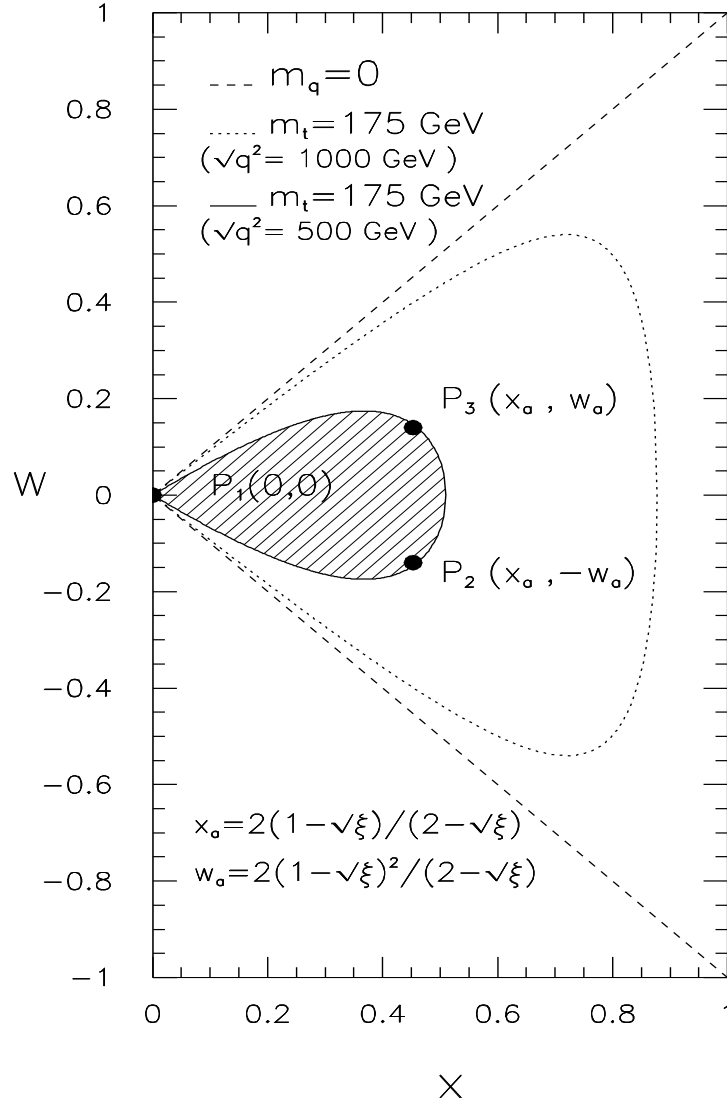


Abbildung 1.3: Der Phasenraum des Gluons

1.5.1 Der Wirkungsquerschnitt und die Polarisation

Die lineare Polarisation in der Hadronebene ist durch [25]

$$P^x = \frac{\sigma^x}{\sigma} = \frac{-(\sigma_U^x + \sigma_L^x)}{\sigma_{U+L}} \quad (1-10)$$

definiert. Die Indizes U und L bezeichnen jeweils die unpolarisierte transversale Komponente und L die longitudinale Komponente der totalen Rate, $U + L$ ist die totale Rate [siehe Anhang B]. Der Wirkungsquerschnitt ist durch

$$\sigma^{i(x)} = \frac{\alpha^2}{24\pi q^2} H^{i(x)} \quad (1-11)$$

gegeben. Er ist proportional zum Hadrontensor, deshalb kann man sich zunächst nur auf ihn konzentrieren. Der Hadrontensor ist durch

$$H_{\mu\nu}(p_1, p_2, p_3, s) = \sum_{q, \bar{q} \text{ spins}} \langle q \bar{q} g | j_\mu | 0 \rangle \langle 0 | j_\nu^\dagger | q \bar{q} g \rangle \quad (1-12)$$

definiert, wobei für den Gesamtimpuls $q = p_1 + p_2 + p_3$ gilt.

Er enthält zwei verschiedene Ströme, den Vektor-Strom V (γ_μ) und den Axialvektor-Strom A ($\gamma_\mu \gamma_5$). Damit können vier verschiedene Tensoren $H_{\mu\nu}^i$ ($i = 1, 2, 3, 4$) durch ihre Linearkombination definiert werden, nämlich

$$\begin{aligned} H_{\mu\nu}^1 &= \frac{1}{2}(H_{\mu\nu}^{VV} + H_{\mu\nu}^{AA}) & H_{\mu\nu}^2 &= \frac{1}{2}(H_{\mu\nu}^{VV} - H_{\mu\nu}^{AA}) \\ H_{\mu\nu}^3 &= \frac{i}{2}(H_{\mu\nu}^{VA} - H_{\mu\nu}^{AV}) & H_{\mu\nu}^4 &= \frac{1}{2}(H_{\mu\nu}^{VA} + H_{\mu\nu}^{AV}). \end{aligned} \quad (1-13)$$

1.5.2 Die Projektoren

Die entsprechenden Komponenten der verschiedenen $H_{\mu\nu}^i$, die man braucht, um den Wirkungsquerschnitt für die lineare Polarisation des Gluons zu erhalten, können mit Hilfe der folgenden Projektoren berechnet werden:

$$\hat{\Pi}_{U+L}^{\mu\nu} = -\hat{g}^{\mu\nu}, \quad (1-14)$$

wobei

$$\hat{g}^{\mu\nu} = g^{\mu\nu} - \frac{q_\mu q_\nu}{q^2}. \quad (1-15)$$

Die projizierten Beiträge erhält man durch Anwendung des Projektors auf den Hadrontensor

$$H_\alpha^{i(x)} := \hat{\Pi}_\alpha^{\mu\nu} H_{\mu\nu}^{i(x)} \quad \text{wobei } \alpha = U, L \text{ und } i = 1, \dots, 4 \quad (1-16)$$

1.5.3 Die Stukturfunktionen

Die verschiedenen Teile des Hadrontensors können aus den relevanten Feynman-Diagrammen (Abbildung 1.2) berechnet werden.

$$\begin{aligned} H_{U+L}^1(x, w) &= -16 - 16(4 - \xi)t_+(x, w) + \left(\frac{16}{x}(4 - 3\xi) + \right. \\ &\quad \left. 8(4 + \xi)(x + \xi - 2) \right) t_+^\ell(x, w), \end{aligned} \quad (1-17 \text{ a})$$

$$H_{U+L}^2(x, w) = -48\xi t_+(x, w) + 24\xi \left(\frac{2 - \xi}{x} - 2 - \frac{x}{3} \right) t_+^\ell(x, w), \quad (1-17 \text{ b})$$

$$\begin{aligned} H_{U+L}^{1x}(x, w) &= -16(4 - \xi)t_+(x, w) + 8 \left(\frac{(4 - \xi)(2 - \xi)}{x} + \right. \\ &\quad \left. 2\xi - 8 \right) t_+^\ell(x, w), \end{aligned} \quad (1-17 \text{ c})$$

$$H_{U+L}^{2x}(x, w) = -24\xi t_+(x, w) + 24\xi \left(\frac{2 - \xi}{x} - 2 \right) t_+^\ell(x, w), \quad (1-17 \text{ d})$$

wobei $t_{\pm}(x, w)$ und $t_{\pm}^{\ell}(x, w)$ definiert sind als

$$t_{\pm}(x, w) := \frac{\xi}{4} \left(\frac{1}{(x-w)^2} \pm \frac{1}{(x+w)^2} \right), \quad t_{\pm}^{\ell}(x, w) := \frac{1}{2} \left(\frac{1}{x-w} \pm \frac{1}{x+w} \right). \quad (1-18)$$

Nach der Integration über die Quark- (oder Antiquark-) Energie erhält man

$$H_{U+L}^1(x) = N \left[-2 \left(\frac{4-\xi}{x} - (4-\xi) + 2x \right) \frac{1}{x} w_+(x) + \left(\frac{(4-\xi)(2-\xi)}{x} - 2(4-\xi) + (4+\xi)x \right) t_{\ell+}(x) \right], \quad (1-19 \text{ a})$$

$$H_{U+L}^2(x) = \xi N \left[-6 \left(\frac{1}{x} - 1 \right) \frac{1}{x} w_+(x) + \left(3 \frac{2-\xi}{x} - 6 - x \right) t_{\ell+}(x) \right], \quad (1-19 \text{ b})$$

$$H_{U+L}^{1x}(x) = (4-\xi) N \left[-2 \left(\frac{1}{x} - 1 \right) \frac{1}{x} w_+(x) + \left(\frac{2-\xi}{x} - 2 \right) t_{\ell+}(x) \right], \quad (1-19 \text{ c})$$

$$H_{U+L}^{2x}(x) = 3\xi N \left[-2 \left(\frac{1}{x} - 1 \right) \frac{1}{x} w_+(x) + \left(\frac{2-\xi}{x} - 2 \right) t_{\ell+}(x) \right], \quad (1-19 \text{ d})$$

wobei $\xi = 4m_q^2/q^2$, $v = \sqrt{1-\xi}$, $N = 2\alpha_s N_C C_F q^2 / \pi v$ mit dem Farbfaktor $N_C = 3$ und der Casimir-Invarianten $C_F = 4/3$ sowie

$$w_+(x) = x \sqrt{\frac{1-x-\xi}{1-x}} \quad (1-20)$$

und

$$t_{\ell+}(x) = \ln \left(\frac{\sqrt{1-x} + \sqrt{1-x-\xi}}{\sqrt{1-x} - \sqrt{1-x-\xi}} \right). \quad (1-21)$$

Im Limes $\xi \rightarrow 0$ ergibt sich aus den Gln. ((1-19 a)–(1-19 d))

$$H_{U+L}^1(x) \rightarrow -32N \left(\frac{2}{x} - 2 + x \right) \ln \xi, \quad (1-22 \text{ a})$$

$$H_{U+L}^{1x}(x) \rightarrow -32N \left(\frac{2}{x} - 2 \right) \ln \xi, \quad (1-22 \text{ b})$$

$$H_{U+L}^2(x) \rightarrow 0, \quad (1-22 \text{ c})$$

$$H_{U+L}^{2x}(x) \rightarrow 0. \quad (1-22 \text{ d})$$

Der letzte Schritt ist die Integration über den zweiten Phasenraum-Parameter x . Es wird ein *cut-off* für die Gluonenergie eingeführt, um eine endliche Rate zu

erhalten. Die *cut-off* Energie ist durch $E_c = \lambda\sqrt{q^2}$ gegeben. Die Integration wird von $x = 2\lambda = E_c/\sqrt{q^2}$ bis $x = 1 - \xi$ durchgeführt. Es ergibt sich

$$H_{U+L}^1 = N \left[- (4 - \xi) \left[2G(-1) - 2G(0) - (2 - \xi)G_\ell(-1) + 2G_\ell(0) \right] - 4G(1) + (4 + \xi)G_\ell(1) \right], \quad (1-23 \text{ a})$$

$$H_{U+L}^2 = \xi N \left[- 3 \left[2G(-1) - 2G(0) - (2 - \xi)G_\ell(-1) + 2G_\ell(0) \right] - G_\ell(1) \right], \quad (1-23 \text{ b})$$

$$H_{U+L}^{1x} = -(4 - \xi)N \left[2G(-1) - 2G(0) - (2 - \xi)G_\ell(-1) + 2G_\ell(0) \right], \quad (1-23 \text{ c})$$

$$H_{U+L}^{2x} = -3\xi N \left[2G(-1) - 2G(0) - (2 - \xi)G_\ell(-1) + 2G_\ell(0) \right] \quad (1-23 \text{ d})$$

wobei die Integrale in der Form

$$G(m) := \int_{2\lambda}^{1-\xi} x^{m-1} w_+(x) dx, \quad (1-24)$$

$$G(-1) = -\ln \left(\frac{1+A}{1-A} \right) - v \ln \left(\frac{v-A}{v+A} \right), \quad (1-25)$$

$$G(0) = \frac{\xi A}{1-A^2} - \frac{\xi}{2} \ln \left(\frac{1+A}{1-A} \right), \quad (1-26)$$

$$G(1) = \frac{\xi A}{4(1-A^2)^2} (4 - \xi - (4 + \xi)A^2) - \frac{\xi}{8} (4 - \xi) \ln \left(\frac{1+A}{1-A} \right), \quad (1-27)$$

$$G_\ell(m) := \int_{2\lambda}^{1-\xi} x^m t_{\ell+}(x) dx, \quad (1-28)$$

$$G_\ell(-1) = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1-A^2}{4} \right) \ln \left(\frac{1+A}{1-A} \right) - \ln \left(\frac{1+v}{1-v} \right) \ln \left(\frac{v-A}{v+A} \right) + \text{Li}_2 \left(\frac{1+A}{2} \right) - \text{Li}_2 \left(\frac{1-A}{2} \right) + \text{Li}_2 \left(-\frac{v+A}{1-v} \right) - \text{Li}_2 \left(-\frac{v-A}{1-v} \right) + \text{Li}_2 \left(\frac{v-A}{1+v} \right) - \text{Li}_2 \left(\frac{v+A}{1+v} \right), \quad (1-29)$$

$$G_\ell(0) = \frac{\xi}{2} \left(\frac{1+A^2}{1-A^2} \right) \ln \left(\frac{1+A}{1-A} \right) - \frac{\xi A}{1-A^2}, \quad (1-30)$$

$$G_\ell(-1) = \frac{\xi}{16(1-A^2)^2} (8 - 5\xi - 6\xi A^2 - (8 - 3\xi)A^4) \times$$

$$\times \ln \left(\frac{1+A}{1-A} \right) + \frac{\xi A}{8(1-A^2)^2} (-8 + 5\xi + (8-3\xi)A^2)$$

definiert sind mit

$$A = \sqrt{\frac{1-2\lambda-\xi}{1-2\lambda}}. \quad (1-31)$$

1.5.4 Die Phasenraumintegration

In diesem Abschnitt wird explizit gezeigt, wie die benötigten Integrale gelöst werden. Die Integrale lassen sich in zwei verschiedene Klassen einteilen: Die erste Klasse G , die proportional zur Wurzelfunktion $w_+(x)$ ist, und die zweite Klasse, die proportional zum Logarithmusfunktion $t_{l+}(x)$ ist.

Für die Lösung der Integrale wird im allgemeinen die Substitution

$$r = \frac{1-x-\xi}{1-x} \quad (1-32)$$

verwendet, wobei sich das Integralmaß folgendermaßen transformiert:

$$dx = \frac{-2\xi r}{(1-r^2)^2} dr. \quad (1-33)$$

Für jede Klasse soll das jeweils schwierigste Integral explizit gelöst werden.

Integrale der Ersten Klasse

Die Integrale dieser Klasse sind in der Form

$$G(m) := \int_{2\lambda}^{1-\xi} x^{m-1} w_+(x) dx \quad (1-34)$$

definiert. Das komplizierteste Integral dieser Klasse ist dasjenige für $m = -1$,

$$G(-1) = \int_{2\lambda}^{1-\xi} \frac{1}{x} \sqrt{\frac{1-x-\xi}{1-x}} dx. \quad (1-35)$$

Dieses Integral geht nach der Substitution (1-32-1-33) über in

$$\begin{aligned} G(-1) &= \int_0^A dr \frac{2\xi r^2}{(1-r^2)(1-\xi-r^2)} \\ &= \int_0^A dr \left(\frac{-1}{(1-r)} - \frac{1}{(1+r)} + \frac{2(1-\xi)}{1-\xi-r^2} \right) \\ &= \left[\ln \left(\frac{1-r}{1+r} \right) + v \ln \left(\frac{v+r}{v-r} \right) \right]_0^A \\ &= -\ln \left(\frac{1+A}{1-A} \right) - v \ln \left(\frac{v-A}{v+A} \right). \end{aligned} \quad (1-36)$$

Integrale der Zweiten Klasse

Die Integrale dieser Klasse sind in der Form

$$G_l(m) := \int_{2\lambda}^{1-\xi} x^{m_{t_{l+}}}(x) dx \quad (1-37)$$

definiert. Das Integral, das hier gelöst wird, lautet

$$G_\ell(-1) = \int_{2\lambda}^{1-\xi} \frac{1}{x} \ln \left(\frac{\sqrt{1-x} + \sqrt{1-x-\xi}}{\sqrt{1-x} - \sqrt{1-x-\xi}} \right) dx \quad (1-38)$$

Nach der Substitution erhält man²:

$$\begin{aligned} G_\ell(-1) &= \int_0^A dr \frac{2\xi r}{(1-r^2)(v^2-r^2)} \ln \left(\frac{1+r}{1-r} \right) \\ &= \int_0^A dr \left(\frac{1}{(1+r)} - \frac{1}{(1-r)} - \frac{1}{(v+r)} + \frac{1}{(v-r)} \right) \ln \left(\frac{1+r}{1-r} \right) \\ &= \left[\frac{\ln^2(1+r)}{2} + \ln \left(\frac{1-r}{2} \right) \ln(1+r) + \text{Li}_2 \left(\frac{1+r}{2} \right) \right. \\ &\quad \left. - \ln(1-r) \ln \left(\frac{1+r}{2} \right) - \text{Li}_2 \left(\frac{1-r}{2} \right) - \frac{\ln^2(1-r)}{2} \right]_0^A \\ &= \frac{\ln^2(1+A)}{2} - \frac{\ln^2(1-A)}{2} - \ln 2 \ln \left(\frac{1+A}{1-A} \right) - \ln \left(\frac{v-A}{v+A} \right) \ln \left(\frac{1+v}{1-v} \right) \\ &\quad + \text{Li}_2 \left(\frac{1+A}{2} \right) - \text{Li}_2 \left(\frac{1-A}{2} \right) + \text{Li}_2 \left(-\frac{v+A}{1-v} \right) \\ &\quad - \text{Li}_2 \left(-\frac{v-A}{1-v} \right) + \text{Li}_2 \left(\frac{v-A}{1+v} \right) - \text{Li}_2 \left(\frac{v+A}{1+v} \right) \\ &= \frac{1}{2} \ln \left(\frac{(1-A^2)}{4} \right) \ln \left(\frac{1+A}{1-A} \right) - \ln \left(\frac{v-A}{v+A} \right) \ln \left(\frac{1+v}{1-v} \right) \\ &\quad + \text{Li}_2 \left(\frac{1+A}{2} \right) - \text{Li}_2 \left(\frac{1-A}{2} \right) + \text{Li}_2 \left(-\frac{v+A}{1-v} \right) \\ &\quad - \text{Li}_2 \left(-\frac{v-A}{1-v} \right) + \text{Li}_2 \left(\frac{v-A}{1+v} \right) - \text{Li}_2 \left(\frac{v+A}{1+v} \right). \end{aligned} \quad (1-39)$$

1.6 Numerische Resultate

Die lineare Polarisation des Gluons als Funktion der normierten Gluonenergie $x/x_{\max}$ ($x_{\max} = 1 - \xi$),

$$P^x(x) = \frac{d\sigma^x/dx}{d\sigma/dx}, \quad (1-40)$$

ist in der Abbildung (1.4) für das Top- und für das Charmquark dargestellt. Die

²Für die Integration dieser Funktionen wird die *Dilogarithmusfunktion* verwendet, die in Anhang A definiert ist.

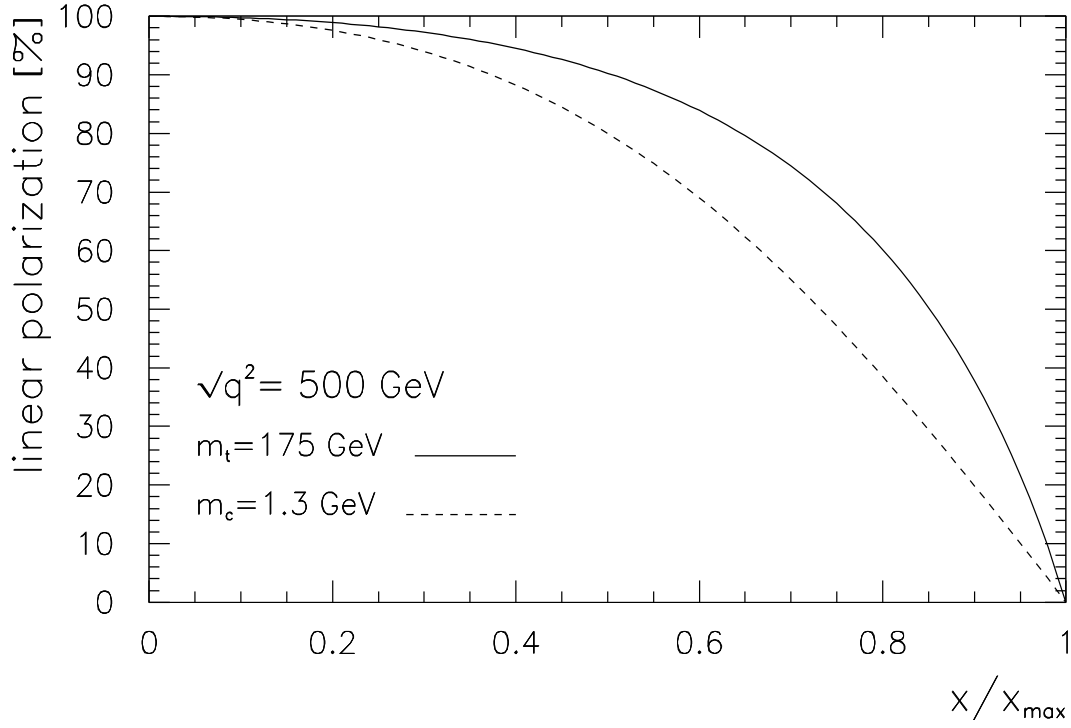


Abbildung 1.4: *Energieabhängigkeit der linearen Gluonpolarisation in der Hadronebene*

Schwerpunktsenergie beträgt 500 GeV. Es ist bekannt, daß die lineare Polarisati-on des weichen Gluons am Ende des Spektrums 100% ist [29], während für harte Gluonen am Ende des Spektrums die lineare Polarisati-on verschwindet, weil man keine Hadronebene in dieser kollinearen Konfiguration mehr definieren kann. Diese Grenzwerte können leicht überprüft werden, indem man die entsprechenden Limites $x \rightarrow 0$ und $x \rightarrow 1 - \xi$ in Gln. ((1-19 a) – (1-19 d)) betrachtet. Die Polarisati-on des Gluons für das Top- und Charmquark wird bei der gleichen normierten Energie $E_G/E_G^{\max} = x/x_{\max}$ verglichen. Für eine gegebene normierte Energie $x/x_{\max}$ ist die lineare Polarisati-on des Gluons im Fall des Topquarks immer höher als im Fall des Charmquarks oder im masselosen Fall. Dieses Verhalten dreht sich bei höheren Polarisationsgraden um, wenn man die lineare Polarisati-on für festgelegte Gluonenergien vergleicht. Jedoch ist ein Vergleich an einer lokal festgelegten, nor-mierten Energie des Gluons physikalisch sinnvoller, insbesondere, wenn man an der durchschnittlichen linearen Polarisati-on des Gluons interessiert ist.

Die Rate für die Topquark-Produktion ist bei kleineren Gluonenergien am größten, wo die lineare Polarisati-on groß ist, wie die Abbildung (1.5) zeigt.

Die lineare Polarisati-on des Gluons im Fall des Topquarks ist im Mittel bemerkenswert groß. Für das Charmquark ist die lineare Polarisati-on des Gluons dem masselosen Fall sehr ähnlich. Der entsprechende Grenzwert in Gl. (1-22 a) lautet ³

³Die lineare Polarisati-on stimmt mit dem entsprechenden Resultat in Gln. (4 – 9) in [24] (zweite Referenz) im Limes $x_0, \delta \rightarrow 0$ überein.

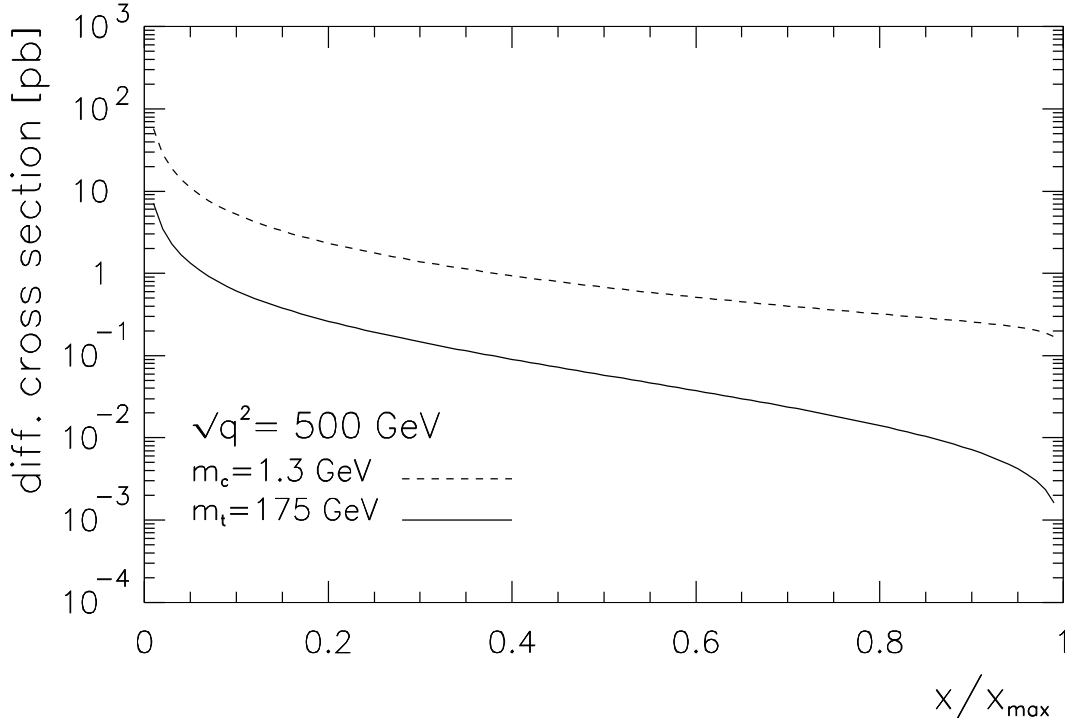


Abbildung 1.5: Energieabhängigkeit der Wirkungsquerschnitte für $e^+e^- \rightarrow t\bar{t}G$ und $e^+e^- \rightarrow c\bar{c}G$

$$P^x(x) = \frac{1-x}{1-x+\frac{1}{2}x^2}. \quad (1-41)$$

Die Formel in Gl. (1-41) ist hinreichend genau, wenn sie auf das Charmquark ($\sqrt{q^2} = 500 \text{ GeV}$ und $m_c = 1.3 \text{ GeV}$) angewendet wird.

Die lineare Polarisation ist unabhängig von dem Flavour, da der flavourabhängige Faktor g_{11} in das Verhältnis in Gl. (1-40) eingeht. Dieses ist im massiven Fall anders, wo die Flavourabhängigkeit aus dem Anteil $H^2 = \frac{1}{2}(H^{VV} - H^{AA})$ des Hadrontensors kommt. Es kann jedoch gezeigt werden, daß die elektroschwache Abhängigkeit auch im massiven Fall klein ist. Es gibt zwei Gründe dafür. Zum einen werden die Beiträge H^2 und H^{2x} (sogar für Topquarks) unterdrückt. Zum anderen wird die Rate durch den Photonaustausch bei der Energie $\sqrt{q^2} = 500 \text{ GeV}$ dominiert.

In der Abbildung (1.6) ist die durchschnittliche, lineare Polarisation des Gluons im Fall des Topquarks als Funktion der Schwerpunktennergie $\sqrt{q^2}$ für drei verschiedene *cut-off*-Werte $E_c = \lambda\sqrt{q^2} = 5, 10$ und 15 GeV gezeigt, und in der Abbildung (1.7) für den Fall des Charmquarks.

Die durchschnittliche, lineare Polarisation des Gluons steigt steil vom Schwellenwert an und erreicht schnell hohe Werte um 95% für das Topquark. Für das Charmquark ist die durchschnittliche lineare Polarisation auch groß, aber etwas kleiner als für das Topquark. Die lineare Polarisation P^x wird für kleinere Werte von $E_c = \lambda\sqrt{q^2}$ groß und hat die Tendenz, gegen Eins zu gehen, falls λ gegen Null

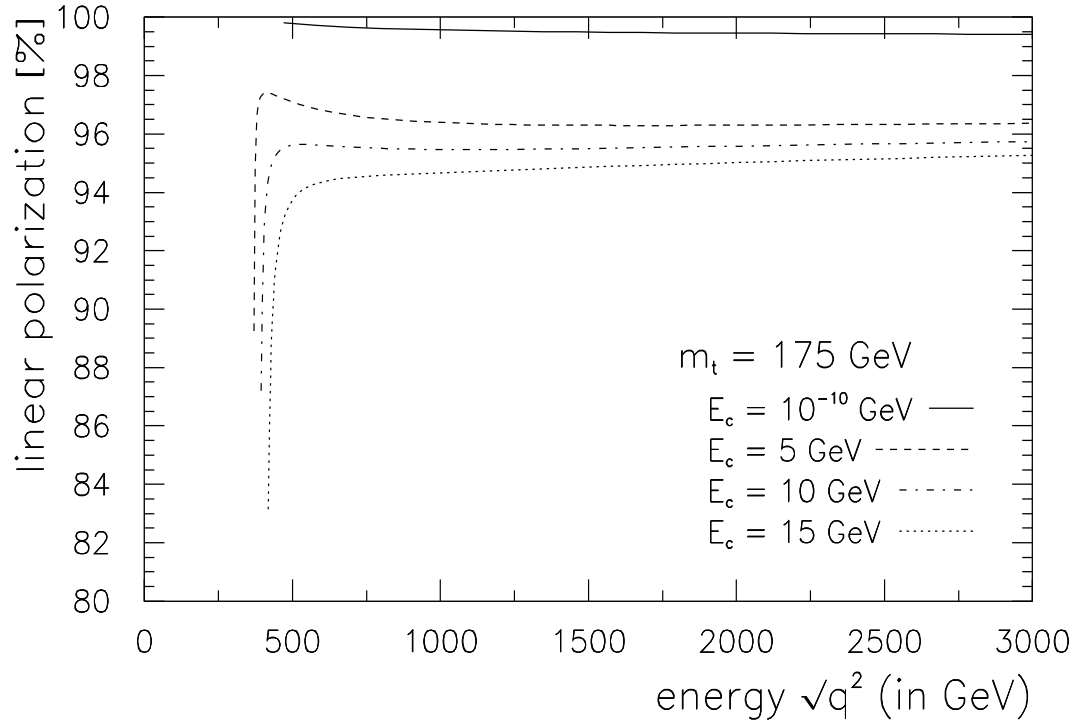


Abbildung 1.6: Die lineare Gluonpolarisation im Fall des Topquarks

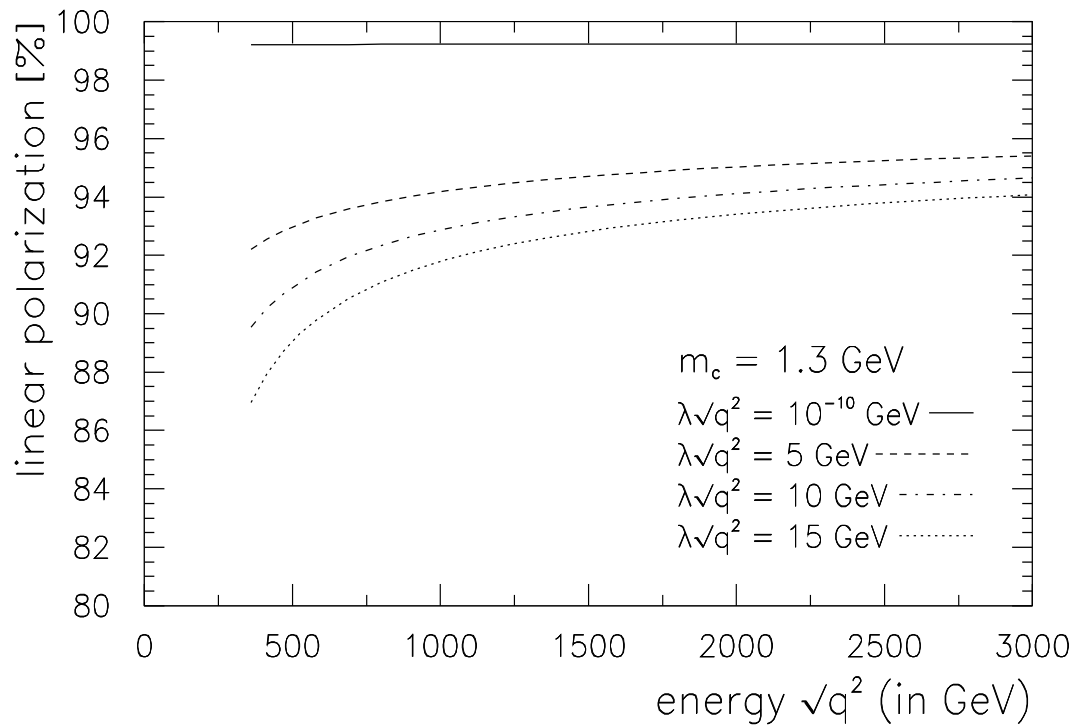


Abbildung 1.7: Die lineare Polarisation des Charmquarks

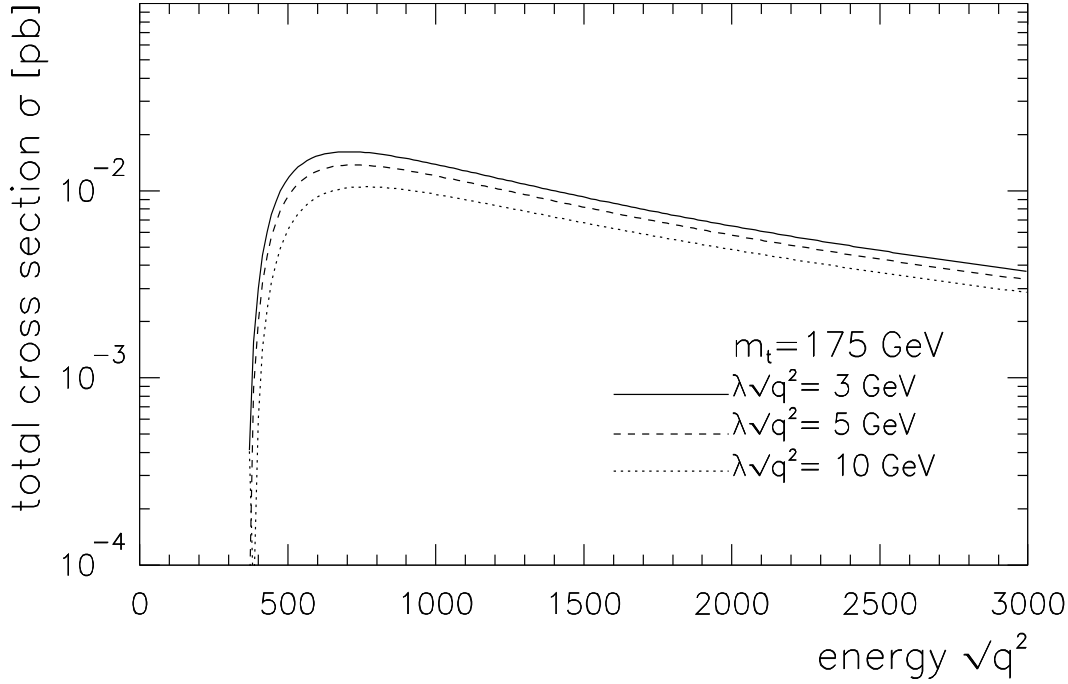


Abbildung 1.8: Der Wirkungsquerschnitt $e^+e^- \rightarrow t\bar{t}G$ für verschiedene cut-off-Energien

geht. Die Konvergenz gegen den asymptotischen Wert $P^x = 1$ ist jedoch langsam. In der führenden logarithmischen Näherung, d.h. für $\lambda \rightarrow 0$, wird die Formel für die lineare Polarisation einfach, und die führenden Terme können in den Ausdrücken für $G(-1)$ und $G_\ell(-1)$ leicht erkannt werden. Diese Terme werden durch die Ersetzung

$$\ln\left(\frac{v-A}{v+A}\right) \rightarrow \ln\left(\frac{\lambda\xi}{2v^2}\right) \quad \text{für } \lambda \rightarrow 0 \quad (1-42)$$

bestimmt.

In den anderen Termen kann man für $\lambda \rightarrow 0$ A mit v gleichsetzen. Es ist interessant zu bemerken, daß der führende Logarithmus der linearen Polarisation ein sehr gut übereinstimmendes numerisches Resultat für die oben genannten Bereiche des cut-offs ergibt, aber nicht für die Energie, die nahe an der Schwelle liegt.

Zusammenfassend kann man sagen: Die Polarisationseffekte für das Gluon mit massiven Quarks sind relativ groß im Vergleich zu denen mit masselosen Quarks. Wenn man darauf abzielt, Gluonpolarisationseffekte im aufspaltenden $e^+e^- \rightarrow t\bar{t}G (\rightarrow GGq\bar{q})$ Prozess zu studieren, sollte die *on-shell* Berechnung genügen, um die wesentlichen Effekte der Gluonpolarisation zu erkennen, ohne die volle Berechnung von $O(\alpha_s^2)$ für $e^+e^- \rightarrow t\bar{t}G$ und $e^+e^- \rightarrow t\bar{t}q\bar{q}$ [32] durchführen zu müssen.

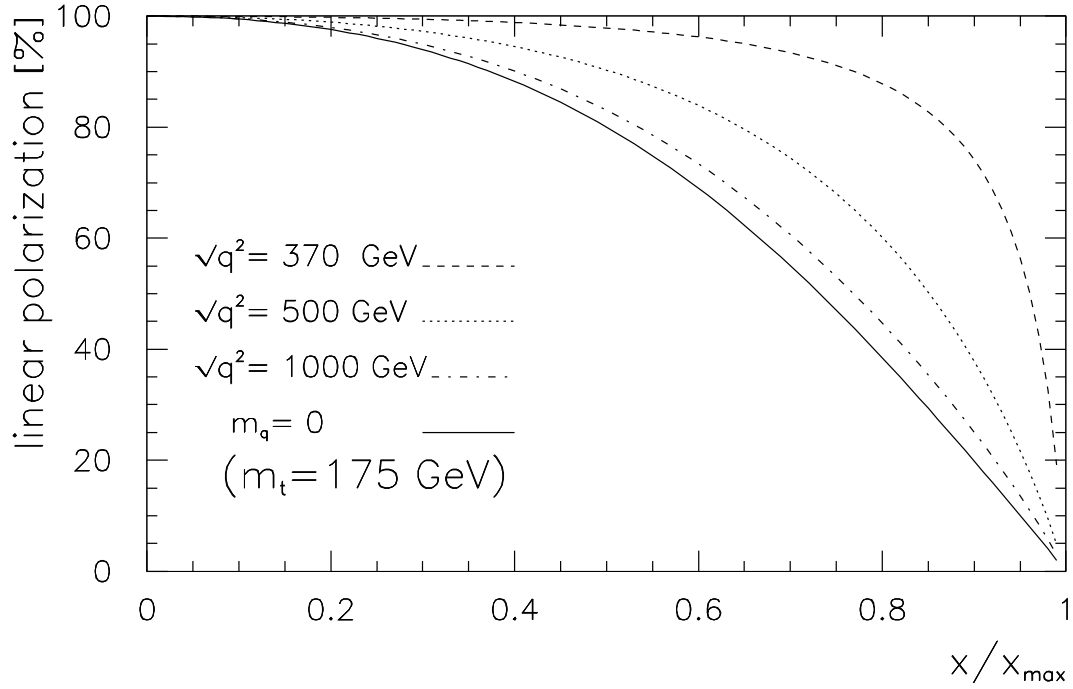


Abbildung 1.9: Die Energieabhängigkeit der linearen Gluonpolarisation in der Hadronenebene für verschiedene Energien im Fall des Topquarks

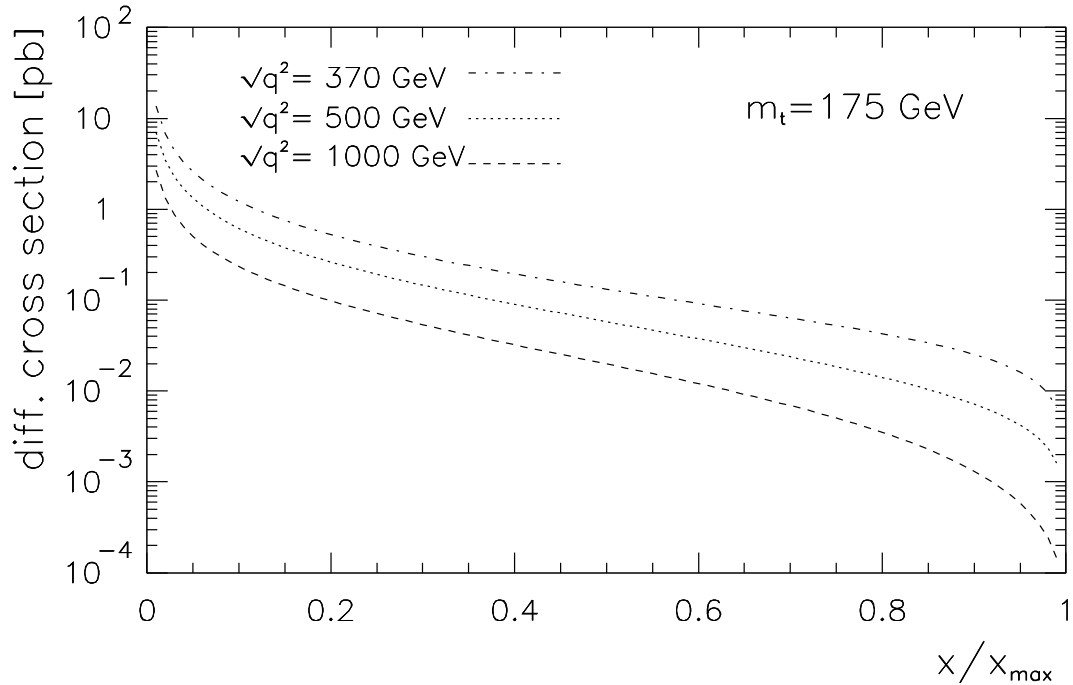


Abbildung 1.10: Die Energieabhängigkeit des Wirkungsquerschnitts für $e^+e^- \rightarrow t\bar{t}G$ für verschiedene Energien

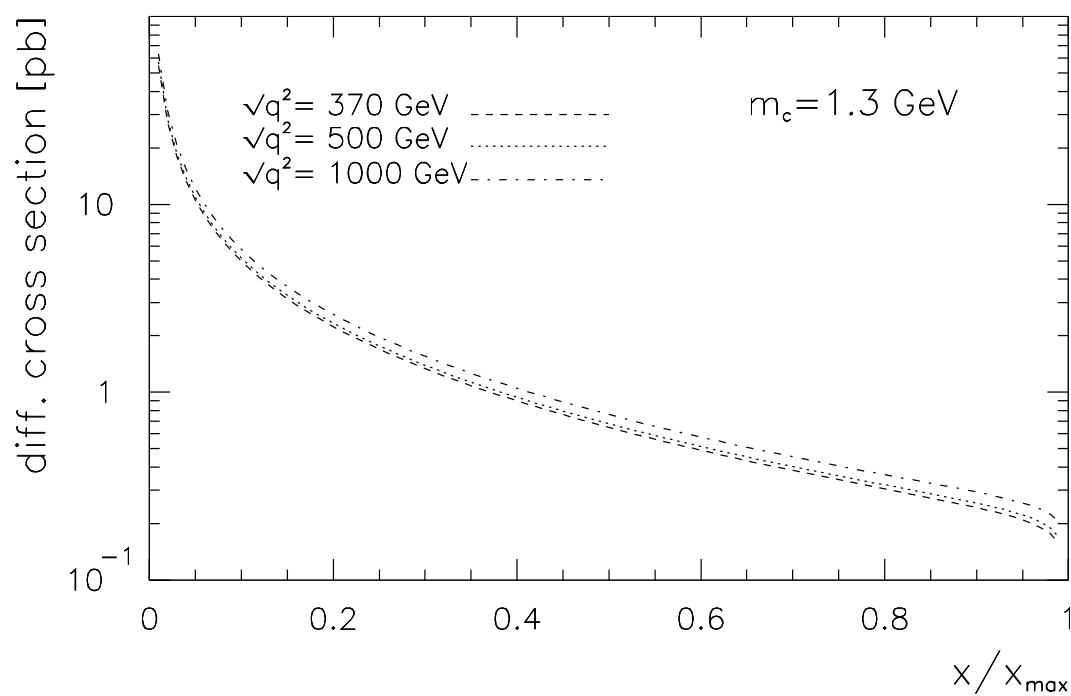


Abbildung 1.11: Die Energieabhängigkeit des Wirkungsquerschnitts für $e^+e^- \rightarrow c\bar{c}G$ für verschiedene Energien

Kapitel 2

Die Polarwinkelabhängigkeit der Gluonpolarisation in $e^+e^- \rightarrow t\bar{t}G$

2.1 Einführung

In diesem Kapitel werden die Polarwinkelabhängigkeit und die Strahlpolarisation eines abgestrahlten Gluons untersucht, anschließend werden die lineare und zirkulare Polarisation in der Leptonebene berechnet.

In der Abbildung (2.1) werden die Lepton- und die Hadronebene gezeigt. Die Leptonebene ist als die (e^+e^-G) -Ebene definiert und die Hadronebene durch die $(q\bar{q}G)$ -Ebene gebildet, wobei der Gluonimpuls in z -Richtung zeigt.

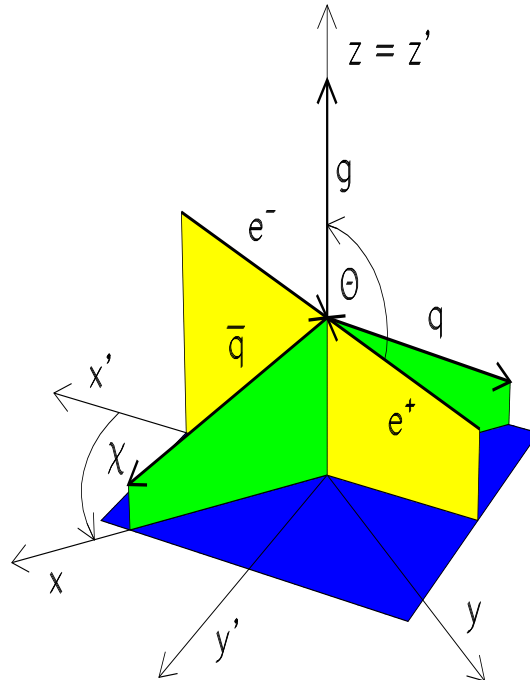


Abbildung 2.1: Polarwinkel θ und Azimutalwinkel χ

2.2 Die Dichtematrix des Gluons

Die Dichtematrix ist, wie vorher, durch [25]

$$\sigma_{\lambda_Z \lambda'_Z; \lambda_G \lambda'_G} = \sigma_{\mu\nu; \alpha\beta} \quad \epsilon^\mu(\lambda_Z) \epsilon^{*\nu}(\lambda'_Z) \epsilon^{*\alpha}(\lambda_G) \epsilon^\beta(\lambda'_G) \quad (2-1)$$

gegeben, wobei die Polarisationsvektoren in Gl. (1-5) definiert sind. Die Winkelabhängigkeit des Wirkungsquerschnitts tritt aufgrund der Kontraktion des Leptontensors mit dem Hadrontensor auf, bzw. wegen der Euler-Rotation, die gebraucht wird, um den Leptontensor in der Hadronebene darzustellen [25, 43]. An dieser Stelle ist zu bemerken, daß die y -Komponente des Stokes-Vektors $d\sigma^y$ nach der Integration über den Azimutalwinkel χ verschwindet. Die verbleibenden x - und z -Komponenten des Stokes-Vektors bezeichnen jeweils die lineare und die zirkulare Polarisation.

Der Wirkungsquerschnitt läßt sich letztendlich als

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma^{(x)}}{d \cos \theta \, dx \, dw} &= \frac{3}{8} (1 + \cos^2 \theta) \left(g_{11} \frac{d\sigma_U^{1(x)}}{dx \, dw} + g_{12} \frac{d\sigma_U^{2(x)}}{dx \, dw} \right) + \\ &+ \frac{3}{4} \sin^2 \theta \left(g_{11} \frac{d\sigma_L^{1(x)}}{dx \, dw} + g_{12} \frac{d\sigma_L^{2(x)}}{dx \, dw} \right) + \frac{3}{4} \cos \theta \, g_{44} \frac{d\sigma_F^{4(x)}}{dx \, dw} \end{aligned} \quad (2-2)$$

für die lineare Polarisation schreiben und als

$$\frac{d\sigma^z}{d \cos \theta \, dx \, dw} = \frac{3}{8} (1 + \cos^2 \theta) g_{14} \frac{d\sigma_U^{4z}}{dx \, dw} + \frac{3}{4} \cos \theta \left(g_{41} \frac{d\sigma_F^{1z}}{dx \, dw} + g_{42} \frac{d\sigma_F^{2z}}{dx \, dw} \right) \quad (2-3)$$

für die zirkulare Polarisation, wobei die Wirkungsquerschnitte durch

$$\frac{d\sigma_\alpha^{i(x)}}{dx \, dw} = \frac{\alpha^2}{6\pi q^2} H_\alpha^{i(x)}(x, w) \quad \text{und} \quad \frac{d\sigma_\alpha^{iz}}{dx \, dw} = \frac{\alpha^2}{6\pi q^2} H_\alpha^{iz}(x, w) \quad (2-4)$$

gegeben sind und x und w die Energievariablen sind, die durch

$$x = 2p_3 \cdot q/q^2 \quad \text{und} \quad w = 2(p_1 - p_2) \cdot q/q^2 \quad \text{mit} \quad q = p_1 + p_2 + p_3 \quad (2-5)$$

definiert sind (siehe Abbildung 1.2).

Im allgemeinen wird die folgende Definition für die lineare und zirkulare Polarisation des Gluons verwendet:

$$P^a := \frac{\sigma^a}{\sigma} \quad \text{wobei} \quad \begin{cases} a = x \Rightarrow \text{lineare Polarisation} \\ a = z \Rightarrow \text{zirkulare Polarisation} \end{cases} \quad (2-6)$$

Diese Definition wird nach dem gleichen Muster der Definition in Gl. (1-6) konstruiert, d.h. als Quotient des polarisierten und des unpolarisierten Wirkungsquerschnitts.

2.3 Die $\cos\theta$ -Abhängigkeit der Gluonpolarisation

In diesem Abschnitt werden die einzelnen, projizierten Strukturfunktionen eingeführt. Danach werden sie integriert und schließlich die verschiedenen Polarisationsobservablen eingebaut.

2.3.1 Die Strukturfunktionen

Die verschiedenen Teile des Hadrontensors können aus den relevanten Baum-Feynman-Diagrammen (siehe Abbildung 1.2) berechnet werden. Sie sind für die unpolarisierte Beiträge durch

$$H_U^1(x, w) = -16\left(\frac{2}{x} - 2 + x\right)\frac{1}{x} - 64t_+(x, w) + 32\left(\frac{2}{x} - 2 + x\right)t_+^\ell(x, w), \quad (2-7 \text{ a})$$

$$H_U^2(x, w) = -32\xi t_+(x, w) + 16\xi\left(\frac{2-\xi}{x} - 2\right)t_+^\ell(x, w), \quad (2-7 \text{ b})$$

$$H_L^1(x, w) = 32\left(\frac{1}{x} - 1\right)\frac{1}{x} + 16\xi t_+(x, w) - 8\xi\left(\frac{6-\xi}{x} - 2 - x\right)t_+^\ell(x, w), \quad (2-7 \text{ c})$$

$$H_L^2(x, w) = -16\xi t_+(x, w) + 8\xi\left(\frac{2-\xi}{x} - 2 - x\right)t_+^\ell(x, w), \quad (2-7 \text{ d})$$

$$H_F^4(x, w) = 64t_-(x, w) - 32\left(\frac{2}{x} - 2 + x\right)t_-^\ell(x, w) \quad (2-7 \text{ e})$$

gegeben. Für die linear polarisierten Beiträge ergibt sich

$$H_U^{1x}(x, w) = -32\left(\frac{1}{x} - 1\right)\frac{1}{x} - 64t_+(x, w) + 64\left(\frac{1}{x} - 1\right)t_+^\ell(x, w), \quad (2-8 \text{ a})$$

$$H_U^{2x}(x, w) = -32\xi t_+(x, w) + 16\xi\left(\frac{2-\xi}{x} - 2\right)t_+^\ell(x, w), \quad (2-8 \text{ b})$$

$$H_L^{1x}(x, w) = 32\left(\frac{1}{x} - 1\right)\frac{1}{x} + 16\xi t_+(x, w) - 8\xi\left(\frac{6-\xi}{x} - 2\right)t_+^\ell(x, w), \quad (2-8 \text{ c})$$

$$H_L^{2x}(x, w) = -16\xi t_+(x, w) + 8\xi\left(\frac{2-\xi}{x} - 2\right)t_+^\ell(x, w) \quad (2-8 \text{ d})$$

und für die zirkular polarisierten Beiträge ergibt sich schließlich

$$H_F^{4x}(x, w) = 64t_-(x, w) - 64\left(\frac{1}{x} - 1\right)t_-^\ell(x, w), \quad (2-9 \text{ a})$$

$$H_U^{4z}(x, w) = 64xt_-(x, w) - 32(2-x)t_-^\ell(x, w), \quad (2-9 \text{ b})$$

$$H_L^{4z}(x, w) = 0, \quad (2-9 \text{ c})$$

$$H_F^{1z}(x, w) = -16(2-x)\frac{1}{x} - 64xt_+(x, w) + 32(2-x)t_+^\ell(x, w), \quad (2-9 \text{ d})$$

$$H_F^{2z}(x, w) = 0 \quad (2-9 \text{ e})$$

mit $\xi = 4m_q^2/q^2$, wobei die folgenden Abkürzungen benutzt worden sind:

$$t_{\pm}(x, w) := \frac{\xi}{4} \left(\frac{1}{(x-w)^2} \pm \frac{1}{(x+w)^2} \right), \quad (2-10 \text{ a})$$

$$t_{\pm}^{\ell}(x, w) := \frac{1}{2} \left(\frac{1}{x-w} \pm \frac{1}{x+w} \right). \quad (2-10 \text{ b})$$

Das Verschwinden der Hadrontensoren $H_L^{4z}(x, w)$ und $H_F^{2z}(x, w)$ auf Baumniveau ist eine Folge der CP -Invarianz des Standardmodells. Es ist zu bemerken, daß unter Quark-Antiquark austausch, d.h. Ladungskonjugation, $t_{\pm} \rightarrow \pm t_{\pm}$ und $t_{\pm}^{\ell} \rightarrow \pm t_{\pm}^{\ell}$ gilt. Dieses bedeutet, daß die Beiträge t_{-} und t_{-}^{ℓ} aufgrund der Ladungskonjugation verschwinden, wenn man nicht zwischen Quarks und Antiquarks unterscheidet. Im folgenden möchte man zwischen den beiden Fällen unterscheiden, in denen *quark-flavour* gekennzeichnet oder nicht gekennzeichnet werden. Diese zwei Fälle werden als *flavour tag* und *flavour no-tag* bezeichnet.

Im Grenzfall verschwindender Masse können die Hadrontensoren in Gln (2-7 a-2-7 e, 2-8 a-2-8 d und 2-9 a-2-9 e) mit der Ersetzung $\xi = 0$ ausgerechnet werden. Die übrigbleibenden Terme im Limes $\xi = 0$ sind proportional zu $t_{\pm}^{\ell}(x, w)$. Dieses ist wichtig, weil sie im Limes $\xi \rightarrow 0$ massensingulär sind. Wenn man die w -Integration mit *flavour-tag* durchführt, integriert man tatsächlich die massensinguläre Funktion $t_{\pm}^{\ell}(x, w)$ zu einem x -unabhängigen logarithmischen Faktor und einem endlichen Teil (x -abhängig) auf, d.h. $\int t_{\pm}^{\ell}(x, w) dw \rightarrow -\ln \xi + c_{\pm}$ (siehe Gln. (2-10 a-2-10 b)). Die dominierenden logarithmischen Terme, die nach dem Limes $\xi \rightarrow 0$ übrigbleiben, sind:

$$\begin{aligned} H_U^1(x) &\rightarrow -32 \left(\frac{2}{x} - 2 + x \right) \ln \xi, \\ H_F^4(x) &\rightarrow 32 \left(\frac{2}{x} - 2 + x \right) \ln \xi, \\ H_U^{1x}(x) &\rightarrow -64 \left(\frac{1}{x} - 1 \right) \ln \xi, \\ H_F^{4x}(x) &\rightarrow 64 \left(\frac{1}{x} - 1 \right) \ln \xi, \\ H_U^{4z}(x) &\rightarrow 32(2 - x) \ln \xi, \\ H_F^{1z}(x) &\rightarrow -32(2 - x) \ln \xi. \end{aligned} \quad (2-11)$$

Die restlichen Terme in Gln. (2-7 a-2-7 e, 2-8 a-2-8 d und 2-9 a-2-9 e) sind subdominant. Die Ausdrücke in Gln. (2-11) bestimmen die Energieabhängigkeit der linearen und zirkularen Gluonpolarisationen im masselosen Limes. Sie werden benutzt, um einen Vergleich mit den entsprechenden Ausdrücken im massiven Fall anzustellen.

Zurück zum Fall der massiven Quarks. Die Integration kann über den Phasenraumparameter w ohne Probleme durchgeführt werden. Wie bereits erwähnt wurde, verschwinden jedoch die in C ungeraden Observablen in dieser Integration, wenn nicht der *flavour-tag* verwendet wird. So verschwinden z.B. die Beiträge zur

zirkularen Polarisation, wenn über den vollständigen w -Bereich integriert wird. An dieser Stelle sind die Integrationsvariablen für die Quark- und Antiquarkvariablen antisymmetrisch. Nichtverschwindende Werte der zirkularen Polarisation werden nur dann erhalten, wenn man den *flavour-tag* verwendet. Dies bedeutet, daß man zwischen den Quark- und Antiquarkenergien in der Integration unterscheiden muß. Man integriert für einen örtlich festgelegten Wert der Gluonenergie über positive Werte von w -Variablen und zieht dannach das Integral über negativen Werten der w ab. Eine andere und gleichwertige Möglichkeit ist, den doppelten Wert der zirkularen Polarisation für positiv berechnete w zu nehmen.

Es werden die notwendigen Integrale aufgelistet, die man für diese Berechnung benötigt. Die Integrale sollen zwischen den symmetrischen Phasenraumgrenzen $-w_+$ und w_+ ausgerechnet werden, wobei

$$w_+(x) = x\sqrt{\frac{1-x-\xi}{1-x}}. \quad (2-12)$$

Es ergibt sich:

$$\begin{aligned} \int_{-w_+(x)}^{+w_+(x)} t_+(x, w) dw &= \left(\frac{1}{x} - 1\right) \frac{1}{x} w_+(x), \\ \int_{-w_+(x)}^{+w_+(x)} t_+^\ell(x, w) dw &= \ln \left(\frac{\sqrt{1-x} + \sqrt{1-x-\xi}}{\sqrt{1-x} - \sqrt{1-x-\xi}} \right) =: t_+^\ell(x), \\ 2 \int_0^{+w_+(x)} t_-(x, w) dw &= \frac{1-\xi}{x} - 1, \\ 2 \int_0^{+w_+(x)} t_-^\ell(x, w) dw &= \ln \left(\frac{1-x}{\xi} \right) =: t_-^\ell(x) \end{aligned} \quad (2-13)$$

wobei für die zwei letzten C -geraden-Integrale der *flavour-tag* verwendet wird. Mit diesen Integralen erhält man die Strukturfunktionen $H_\alpha^i(x)$, $H_\alpha^{ix}(x)$ und $H_\alpha^{iz}(x)$. Somit ergibt sich

$$\begin{aligned} H_U^1(x) &= -32\left(\frac{4}{x} - 4 + x\right) \frac{1}{x} w_+(x) + 32\left(\frac{2}{x} - 2 + x\right) t_+^\ell(x), \\ H_U^2(x) &= -32\xi\left(\frac{1}{x} - 1\right) \frac{1}{x} w_+(x) + 16\xi\left(\frac{2-\xi}{x} - 2\right) t_+^\ell(x), \\ H_L^1(x) &= 16(4 + \xi)\left(\frac{1}{x} - 1\right) \frac{1}{x} w_+(x) - 8\xi\left(\frac{6-\xi}{x} - 2 - x\right) t_+^\ell(x), \\ H_L^2(x) &= -16\xi\left(\frac{1}{x} - 1\right) \frac{1}{x} w_+(x) + 8\xi\left(\frac{2-\xi}{x} - 2 - x\right) t_+^\ell(x), \\ H_F^4(x) &= 64\left(\frac{1-\xi}{x} - 1\right) - 32\left(\frac{2}{x} - 2 + x\right) t_-^\ell(x), \\ H_U^{1x}(x) &= -128\left(\frac{1}{x} - 1\right) \frac{1}{x} w_+(x) + 64\left(\frac{1}{x} - 1\right) t_+^\ell(x), \\ H_U^{2x}(x) &= -32\xi\left(\frac{1}{x} - 1\right) \frac{1}{x} w_+(x) + 16\xi\left(\frac{2-\xi}{x} - 2\right) t_+^\ell(x), \\ H_L^{1x}(x) &= 16(4 + \xi)\left(\frac{1}{x} - 1\right) \frac{1}{x} w_+(x) - 8\xi\left(\frac{6-\xi}{x} - 2\right) t_+^\ell(x), \end{aligned} \quad (2-14)$$

$$H_L^{1x}(x) = 16(4 + \xi)\left(\frac{1}{x} - 1\right) \frac{1}{x} w_+(x) - 8\xi\left(\frac{6-\xi}{x} - 2\right) t_+^\ell(x), \quad (2-15)$$

$$\begin{aligned}
H_L^{2x}(x) &= -16\xi\left(\frac{1}{x} - 1\right)\frac{1}{x}w_+(x) + 8\xi\left(\frac{2-\xi}{x} - 2\right)t_+^\ell(x), \\
H_F^{4x}(x) &= 64\left(\frac{1-\xi}{x} - 1\right) - 64\left(\frac{1}{x} - 1\right)t_-^\ell(x), \\
H_U^{4z}(x) &= 64(1 - \xi - x) - 32(2 - x)t_-^\ell(x), \\
H_L^{4z}(x) &= 0, \\
H_F^{1z}(x) &= -32(4 - 3x)\frac{1}{x}w_+(x) + 32(2 - x)t_+^\ell(x), \\
H_F^{2z}(x) &= 0.
\end{aligned} \tag{2-16}$$

In dieser Notation ist $H(x) = \int H(x, w)dw$. Der dominierende, logarithmische Term $\ln \xi$ im Grenzfall verschwindender Masse kommt aus dem masselosen Limes von den Funktionen $t_+^\ell(x)$ und $t_-^\ell(x)$. Sie sind in Gl.(2-11) angegeben.

Der letzte Schritt ist die Integration über den zweiten Phasenraumparameter x . Es ist klar, daß wie vorher ein *cut-off* für die Gluonenergie eingeführt werden muß, um die Funktionen zu regularisieren. Der *cut off* wird durch $E_c = \lambda\sqrt{q^2}$ definiert. Die Integration wird von $x = 2\lambda = 2E_c/\lambda\sqrt{q^2}$ bis $x = 1 - \xi$ durchgeführt. Man erhält:

$$\begin{aligned}
H_U^1 &= -128\mathcal{G}(-1) + 128\mathcal{G}(0) - 32\mathcal{G}(1) + 64\mathcal{G}_\ell(-1) - 64\mathcal{G}_\ell(0) + 32\mathcal{G}_\ell(1), \\
H_U^2 &= -32\xi\mathcal{G}(-1) + 32\xi\mathcal{G}(0) + 16\xi(2 - \xi)\mathcal{G}_\ell(-1) - 32\xi\mathcal{G}_\ell(0), \\
H_L^1 &= 16(4 + \xi)\mathcal{G}(-1) - 16(4 + \xi)\mathcal{G}(0) - 8\xi(6 - \xi)\mathcal{G}_\ell(-1) + 16\xi\mathcal{G}_\ell(0) + 8\xi\mathcal{G}_\ell(1), \\
H_L^2 &= -16\xi\mathcal{G}(-1) + 16\xi\mathcal{G}(0) + 8\xi(2 - \xi)\mathcal{G}_\ell(-1) - 16\xi\mathcal{G}_\ell(0) - 8\xi\mathcal{G}_\ell(1), \\
H_F^4 &= -8(13 - 12\xi - \xi^2 - 8\text{Li}_2(1 - \xi)) - 48\ln \xi - 64(1 - \xi + \ln \xi) \ln\left(\frac{2\lambda}{v^2}\right),
\end{aligned} \tag{2-17}$$

$$\begin{aligned}
H_U^{1x} &= -128\mathcal{G}(-1) + 128\mathcal{G}(0) + 64\mathcal{G}_\ell(-1) - 64\mathcal{G}_\ell(0), \\
H_U^{2x} &= -32\xi\mathcal{G}(-1) + 32\xi\mathcal{G}(0) + 16\xi(2 - \xi)\mathcal{G}_\ell(-1) - 32\xi\mathcal{G}_\ell(0), \\
H_L^{1x} &= 16(4 + \xi)\mathcal{G}(-1) - 16(4 + \xi)\mathcal{G}(0) - 8\xi(6 - \xi)\mathcal{G}_\ell(-1) + 16\xi\mathcal{G}_\ell(0), \\
H_L^{2x} &= -16\xi\mathcal{G}(-1) + 16\xi\mathcal{G}(0) + 8\xi(2 - \xi)\mathcal{G}_\ell(-1) - 16\xi\mathcal{G}_\ell(0), \\
H_F^{4x} &= -64(2(1 - \xi) - \text{Li}_2(1 - \xi)) - 64\ln \xi - 64(1 - \xi + \ln \xi) \ln\left(\frac{2\lambda}{v^2}\right),
\end{aligned} \tag{2-18}$$

$$\begin{aligned}
H_U^{4z} &= 24(1 - \xi)(3 - \xi) + 48\ln \xi, \\
H_L^{4z} &= 0, \\
H_F^{1z} &= -128\mathcal{G}(0) + 96\mathcal{G}(1) + 64\mathcal{G}_\ell(0) - 32\mathcal{G}_\ell(1), \\
H_F^{2z} &= 0,
\end{aligned} \tag{2-19}$$

wobei

$$\mathcal{G}(m) := \int_{2\lambda}^{1-\xi} x^{m-1} w_+(x) dx. \quad (2-20)$$

Die vollständigen analytischen Ergebnisse der Integrale sind bereits im Kapitel 1 erwähnt. Für die vorliegenden Berechnungen dieses Kapitels tauchen keine neuen Integraltypen auf. Im Gegensatz zu den Ergebnissen im Kapitel 1 ist hier eine Entwicklung nach kleinen λ durchgeführt, und man behält nur die führenden Terme. Diese Entwicklung vereinfacht die Ausdrücke ohne ihre numerische Genauigkeit zu verlieren, die nachgeprüft worden ist. Die Integrale nach der λ -Entwicklung lauten

$$\mathcal{G}(-1) = -\ln\left(\frac{1+v}{1-v}\right) - v \ln\left(\frac{\lambda\xi}{2v^2}\right), \quad (2-21)$$

$$\mathcal{G}(0) = v - \frac{1}{2}\xi \ln\left(\frac{1+v}{1-v}\right), \quad (2-22)$$

$$\mathcal{G}(1) = \frac{1}{4}(2+\xi)v - \frac{\xi}{8}(4-\xi) \ln\left(\frac{1+v}{1-v}\right), \quad (2-23)$$

$$\mathcal{G}_\ell(m) := \int_{2\lambda}^{1-\xi} x^m t_+^\ell(x) dx, \quad (2-24)$$

$$\mathcal{G}_\ell(-1) = -\ln\left(\frac{1+v}{1-v}\right) \ln\left(\frac{\lambda(1+v)^2}{2v^2}\right) - \text{Li}_2\left(\frac{4v}{(1+v)^2}\right), \quad (2-25)$$

$$\mathcal{G}_\ell(0) = -v + \frac{1}{2}(2-\xi) \ln\left(\frac{1+v}{1-v}\right), \quad (2-26)$$

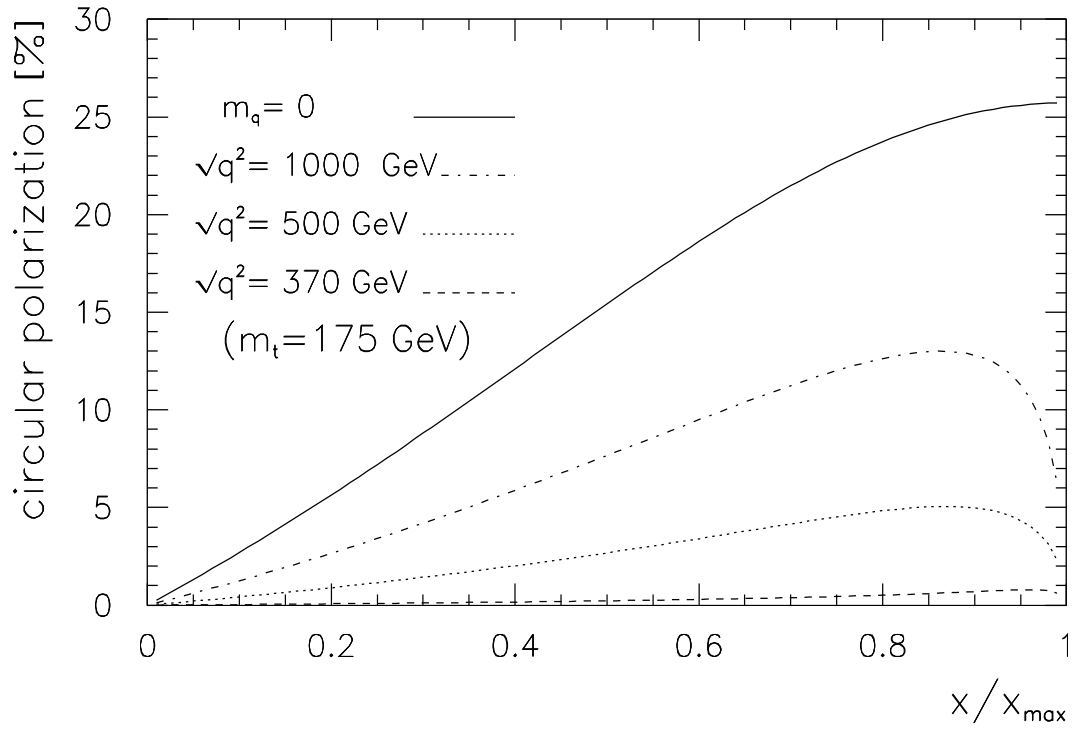
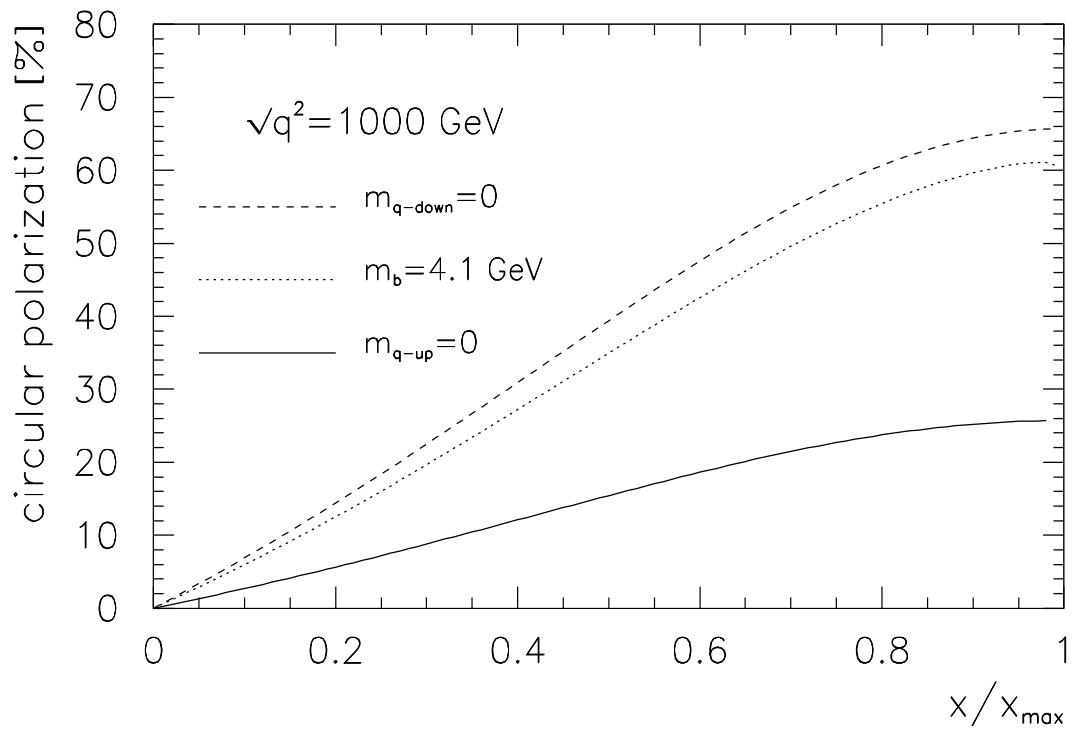
$$\mathcal{G}_\ell(1) = -\frac{3}{8}(2-\xi)v + \frac{1}{16}(8-8\xi+3\xi^2) \ln\left(\frac{1+v}{1-v}\right). \quad (2-27)$$

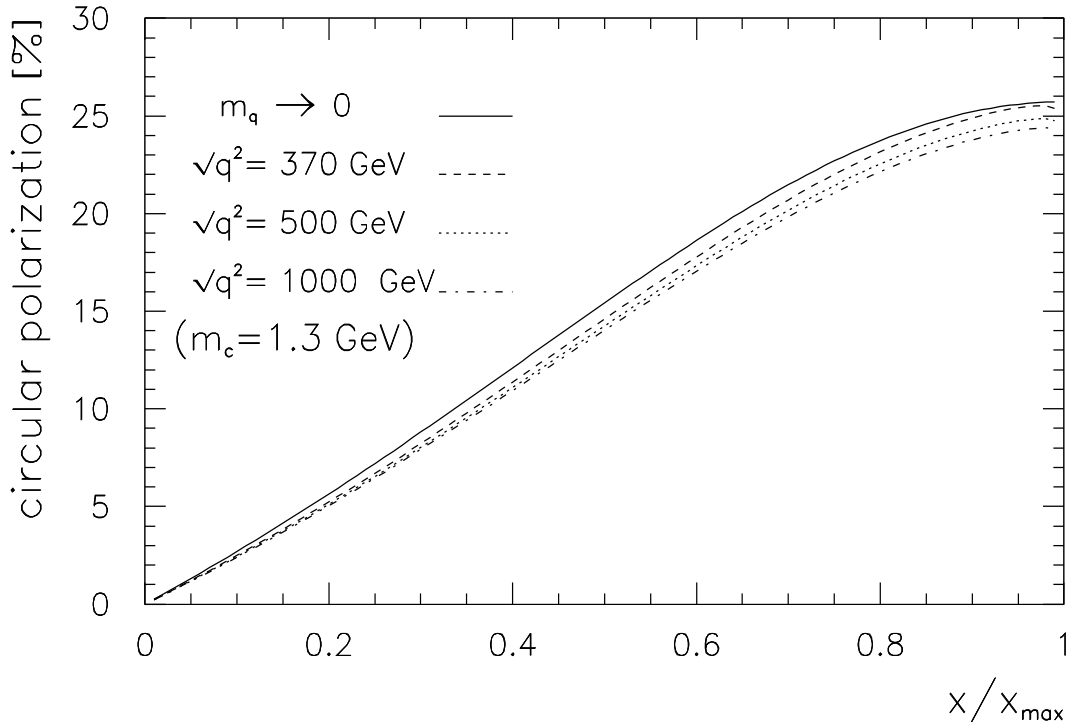
2.3.2 Numerische Resultate

Die Abbildung (2.2) zeigt die zirkulare Gluonpolarisation im Fall des Topquarks. Die zirkulare Polarisation ist positiv in dem gesamten Energiebereich und erhöht sich am Ende des Gluonspektrums (in dem sogenannte *hard gluon* Bereich), bevor sie verschwindet. Dieses ist einfach zu verstehen, da die lineare Polarisation 100% ist. Im allgemeinen ist die zirkulare Polarisation klein, mit Ausnahme des masselosen Falls. Der Grenzwert verschwindender Masse ist durch die kollineare Konfiguration durch die $\ln \xi$ -Beiträge bestimmt. Es ergibt sich

$$P^z(x) = -\frac{g_{14}}{g_{11}} \frac{x(2-x)}{2-2x+x^2}. \quad (2-28)$$

Für die numerischen Werte der masselosen Formel (2-28) für die zirkulare Polarisation ist es interessant zu bemerken, daß durch den Quotienten der elektroschwachen Faktoren $-\frac{g_{14}}{g_{11}}$ die zirkulare Polarisation für *down*-Typ-Quarks größer wird. Die Abbildung (2.3) zeigt die zirkulare Gluonpolarisation für die *down-type* Quarks und *up-type* Quarks bei einer Schwerpunktsenergie von $\sqrt{q^2} = 1000 \text{ GeV}$. Der Effekt des Quotienten $-\frac{g_{14}}{g_{11}}$ kann am harten Ende des Spektrums gesehen werden. Der Fall des Bottomquarks ist auch graphisch dargestellt. Die Abbildung (2.3) zeigt die zir-

Abbildung 2.2: Energieabhängigkeit von P^z im Fall des TopquarksAbbildung 2.3: Energieabhängigkeit von P^z für verschiedenen flavours

Abbildung 2.4: Energieabhängigkeit von P^z im Fall des Charmquarks

kulare Gluonpolarisation für das Charmquark, um einen Eindruck von dem Effekt der Masse des Quarks zu bekommen. Schließlich ist in den Abbildungen (2.2,2.3) zu bemerken, daß die zirkulare Polarisation im massiven Fall relativ weit weg von dem Wert des masselosen Falls ist.

Die Abbildung (2.5) zeigt die Abhängigkeit der zirkularen Polarisation im Fall eines polarisierten Elektrons.¹ Der Effekt der Strahlpolarisation ist für die zirkulare Gluonpolarisation bemerkenswert, was bedeutet, daß eine starke Polarisationsübertrag von der Helizitätspolarisation des Elektrons zur zirkularen Gluonpolarisation stattfindet. Die zirkulare Gluonpolarisation kann sich bis um einen Faktor 10 als Folge dieser Polarisationsübertragung erhöhen.

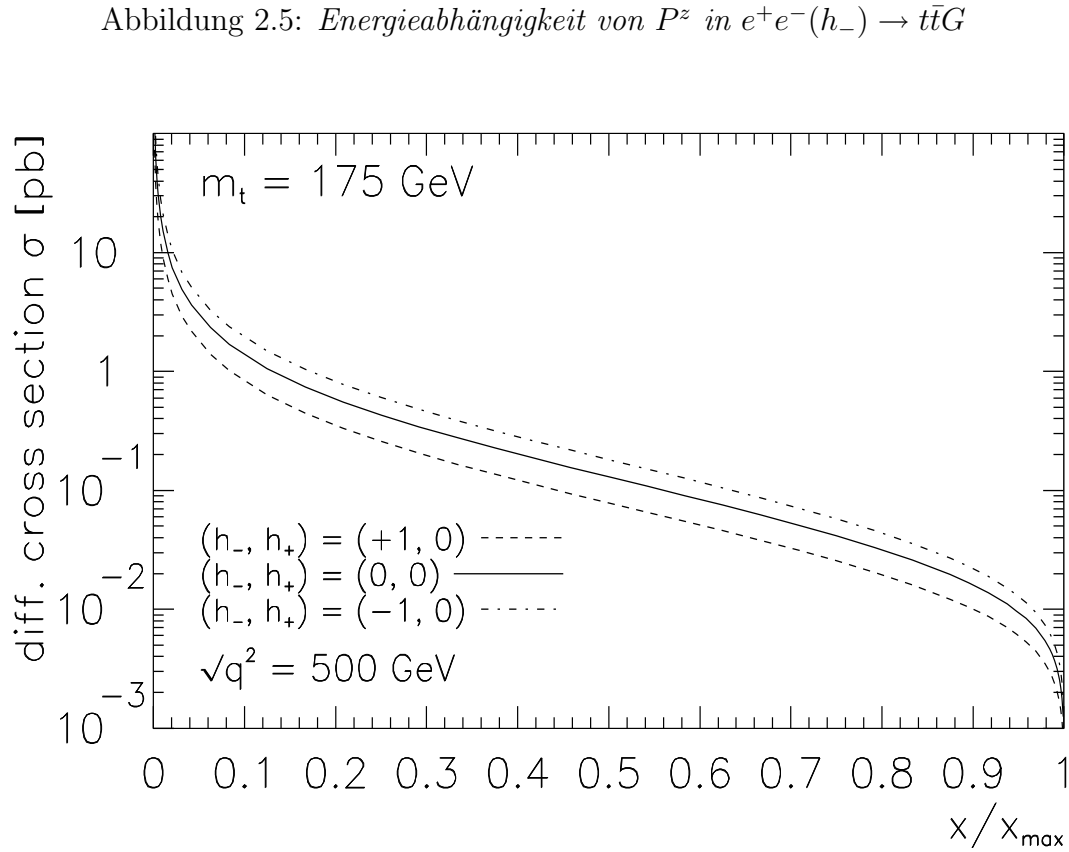
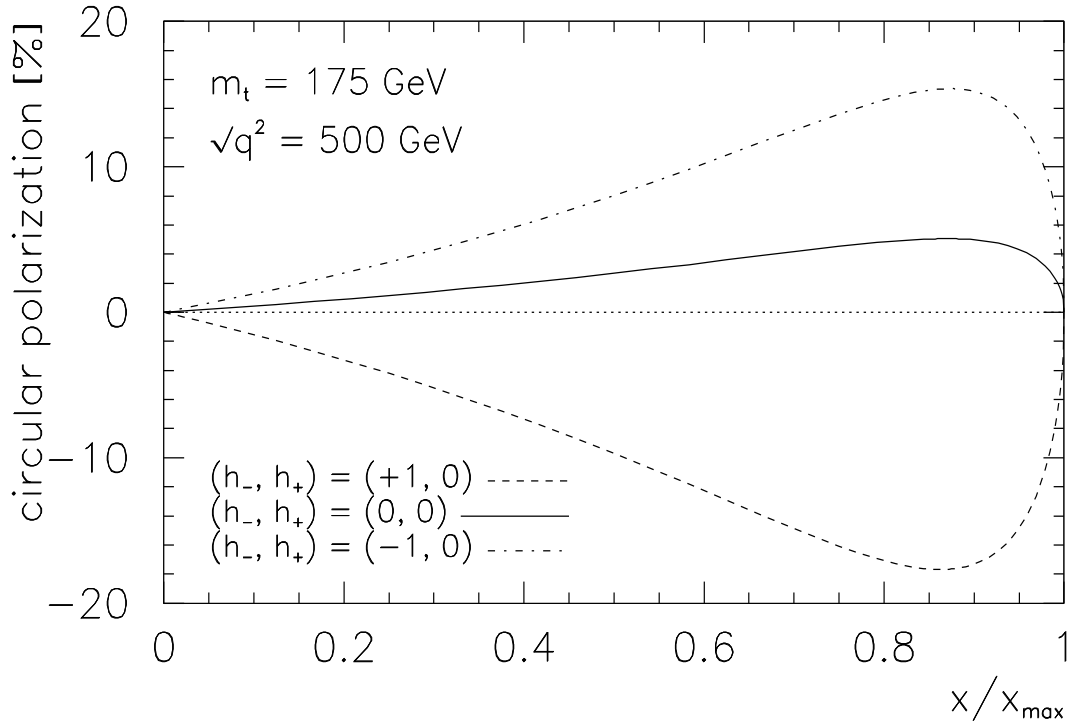
Die Abbildung (2.6) zeigt die Abhängigkeit des Wirkungsquerschnitts von der Strahlpolarisation. Sie ist um bis zu 50% für negative Helizitäten des Elektrons vergrößert und auch um ca. 50% für positive Helizitäten des Elektrons verkleinert.

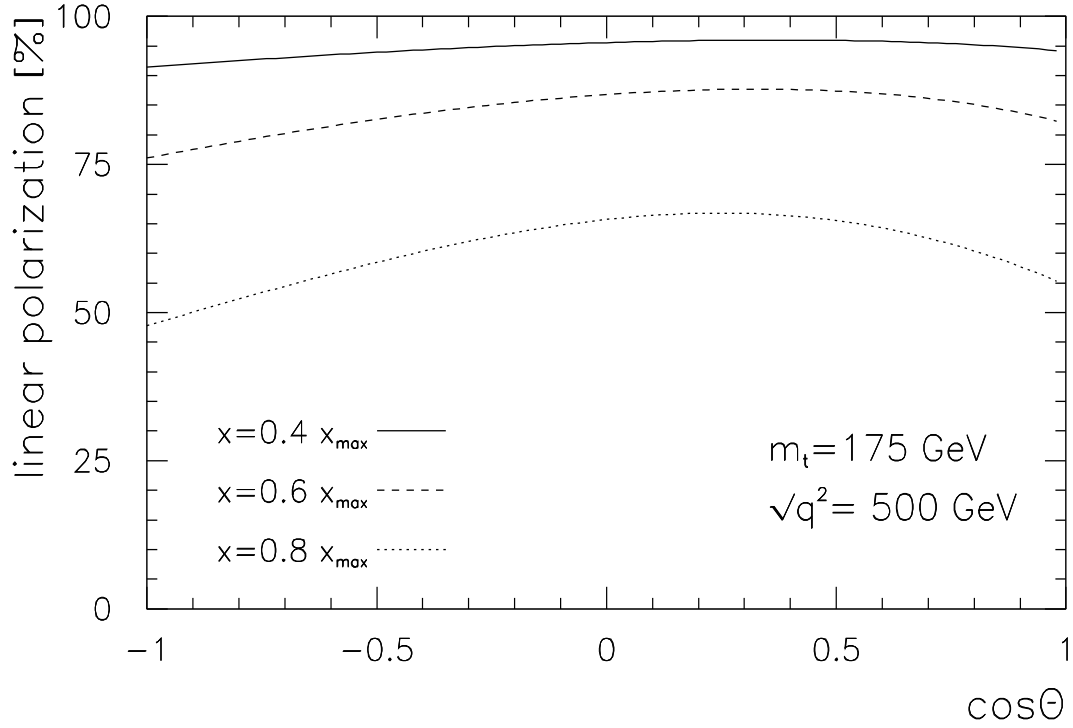
Zunächst werden die Ergebnisse der Polarwinkelabhängigkeit präsentiert. Die Abbildung (2.7) zeigt die Polarwinkelabhängigkeit der linearen Gluonpolarisation im Fall des Topquarks. Diese Abhängigkeit ist klein, da die Asymmetrie der Polarisation bezüglich des Winkels gering ist.

Die Abbildung (2.8) zeigt die Polarwinkelabhängigkeit der zirkularen Gluonpolarisation im Fall des Topquarks. Diese Abhängigkeit ist bemerkenswert, da die Asymmetrie der Polarisation bezüglich des Winkels groß ist.

Schließlich wird in der Abbildung (2.9) die Abhängigkeit des Wirkungsquer-

¹Diese Strahlpolarisation-Abhängigkeit ist für die lineare Polarisation sehr klein.



Abbildung 2.7: Polarwinkelabhängigkeit von P^x

schnitts vom Polarwinkel gezeigt, die auch klein ist.

2.4 Die Lineare Polarisation in der Leptonebene

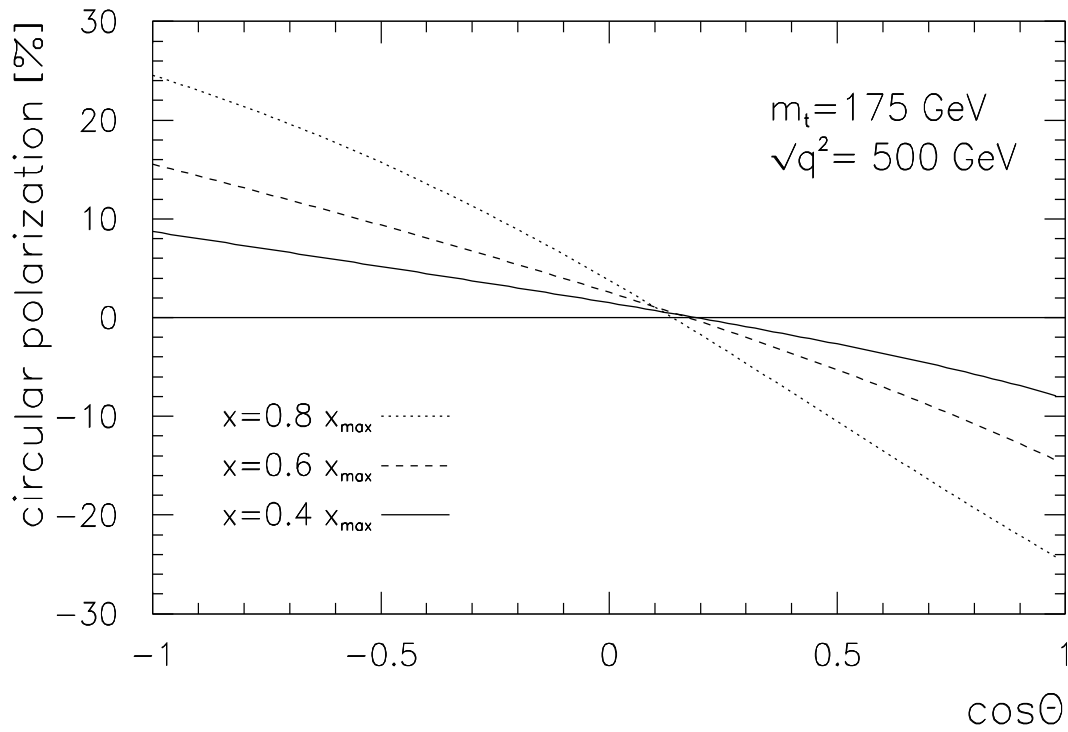
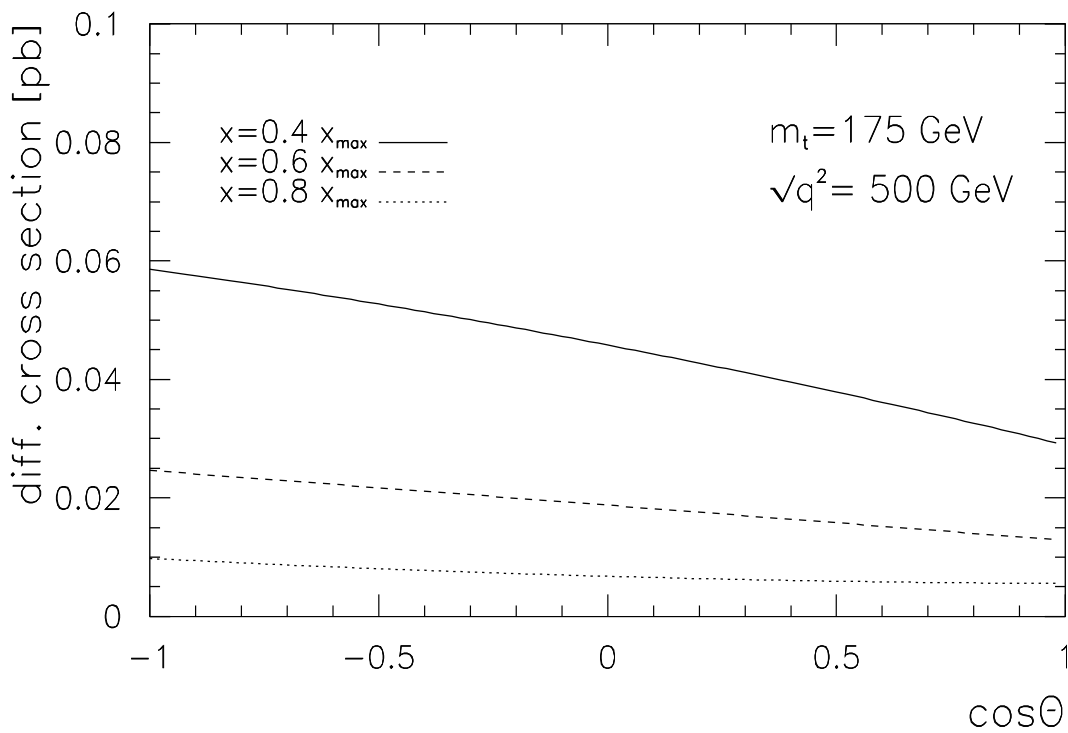
Die bisherigen Berechnungen der Gluonpolarisation sind in der Hadronebene durchgeführt worden, d.h. die Komponenten des Stokes-Vektors liegen in der Hadronebene. Deshalb muß man seine Komponenten drehen, um die entsprechende Polarisationsobservablen in der Leptonebene ausdrücken zu können.

2.4.1 Die Rotation der Strukturfunktionen

Die Leptonebene (auch als Gluon-strahl-Ebene bezeichnet), in der Abbildung (2.1) als (x', z) -Ebene darstellt, bildet den Winkel χ mit der (x, z) -Ebene. Der Stokes-Vektor muß um die z -Achse bzw. die Gluonimpuls-Richtung um den azimuthalen Winkel χ gedreht werden.

Die Komponenten des Stokes-Vektor transformieren sich als

$$\begin{aligned}
 H^{x'} &= \cos 2\chi H^x - \sin 2\chi H^y, \\
 H^{y'} &= \sin 2\chi H^x + \cos 2\chi H^y, \\
 H^{z'} &= H^z,
 \end{aligned} \tag{2-29}$$

Abbildung 2.8: Polarwinkelabhängigkeit von P^z Abbildung 2.9: Polarwinkelabhängigkeit von σ

wobei $(H^{x'}, H^{y'}, H^{z'})$ die Komponenten des Stokes-Vektors in der Leptonebene darstellen. Da man um die z -Achse dreht, ändert sich die z -Komponente H^z nicht.² Es ergibt sich

$$\begin{aligned} H_T^{x'} &= -\frac{1}{2}(H_T^x + H_4^y), \\ H_T^{y'} &= 0, \end{aligned} \quad (2-30)$$

wobei die y' -Komponent $H^{y'}$ nach der azimuthalen Mittelung herausfällt. Die hadronischen Anteile „ T “ und „ 4 “ auf der rechten Seite werden in der Hadronebene spezifiziert und werden durch [36]

$$\begin{aligned} H_T^x &= \frac{1}{2}(H_{+-}^x + H_{-+}^x) = \frac{1}{2}(-H_{11}^x + H_{22}^x), \\ H_4^y &= -\frac{1}{2}(H_{+-}^y - H_{-+}^y) = -\frac{1}{2}(H_{12}^y + H_{21}^y) \end{aligned} \quad (2-31)$$

gegeben. Diese Anteile können aus dem den relevanten Feynman-Diagrammen 1.2 berechnet werden. So ergibt sich

$$\begin{aligned} H_T^{1x'}(x, w) &= \frac{8}{x^2} + 8\xi t_+(x, w) - 4\xi \frac{4-\xi}{x} t_+^\ell(x, w), \\ H_T^{2x'}(x, w) &= 0. \end{aligned} \quad (2-32)$$

Hier ist man an der Energieabhängigkeit der linearen Polarisation interessiert. Deshalb wird ihre einfachintegrierte Formel

$$\begin{aligned} H_T^{1x'}(x) &= 8 \left(\frac{2+\xi}{x} - \xi \right) \frac{w_+(x)}{x} - 4\xi \frac{4-\xi}{x} t_+^\ell(x), \\ H_T^{2x'}(x) &= 0 \end{aligned} \quad (2-33)$$

angegeben.

Im Grenzwert verschwindender Masse verschwinden die Strukturfunktionen $H_T^{x'}(x, w)$. Dieses bedeutet, daß sie keine kollinearen Singularitäten haben (2-32). Dieses Verhalten steht im Gegensatz zu den entsprechenden Strukturfunktionen für die lineare Polarisation in der Hadronebene, die eine kollineare Singularität besitzen (Gl. (2-11)).

Der allgemeine Ausdruck für die lineare Gluonpolarisation in der Leptonebene lautet

$$P^{x'} = \frac{g_{11}H_T^{1x'} + g_{12}H_T^{2x'}}{g_{11}(H_U^1 + H_L^1) + g_{12}(H_U^1 + H_L^2)}. \quad (2-34)$$

Zur Vollständigkeit ist $H_T^{2x'}$ im Zähler angegeben, obwohl sein Beitrag verschwindet.

²In Gl. (2-29) sind die Indizes weggelassen worden, um die Notation zu vereinfachen.

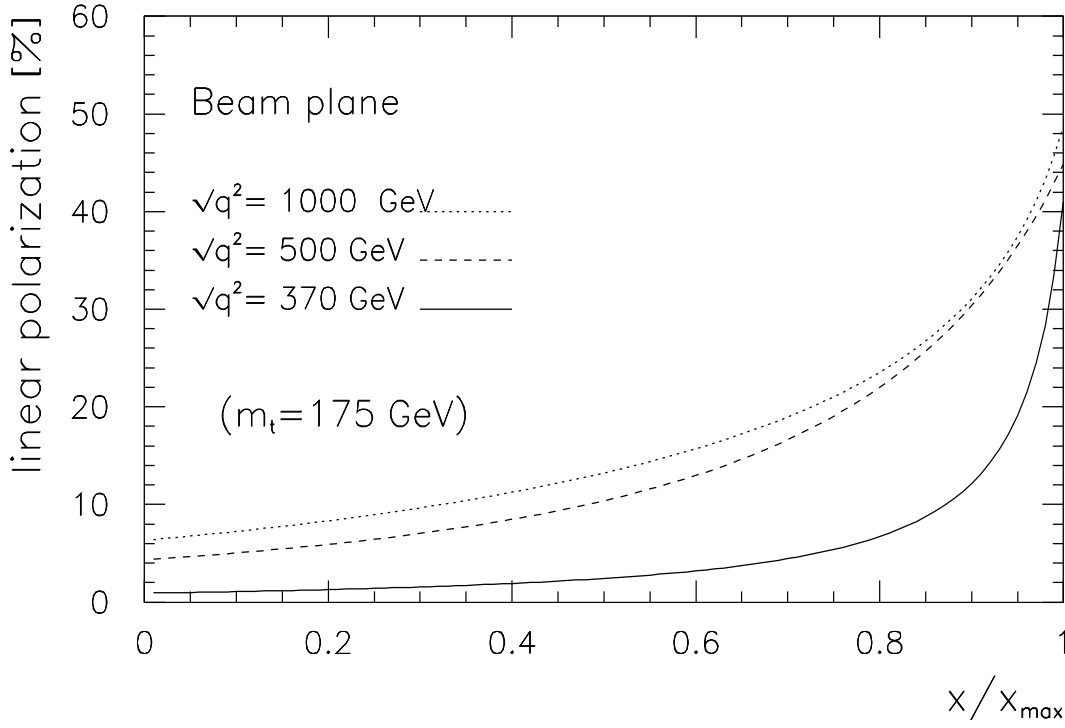


Abbildung 2.10: Die Energieabhängigkeit der P^l in der Leptonebene im Fall des Topquarks

2.4.2 Numerische Resultate

Die Abbildung (2.10) zeigt die $(x/x_{\max})$ -Abhängigkeit der linearen Gluonpolarisation in der Leptonebene im Fall des Topquarks bei drei unterschiedlichen Schwerpunktsenergien.

Die lineare Polarisation ist im allgemeinen klein und hat die Tendenz, am Ende des Spektrums schnell zu steigen. Die lineare Polarisation wird auch größer, wenn die Schwerpunktsenergie erhöht wird. Dieses Verhalten widerspricht der Intuition, weil man aufgrund der Abwesenheit der kollinearen Singularität in der polarisierten Strukturfunktionen für $v \rightarrow 1$ etwas anderes erwarten würde. Es ist zu bemerken, daß die lineare Polarisation weder am *weichen* Ende des Spektrums noch am *harten* Ende verschwindet. Tatsächlich erhält man

$$P^{x'}(x=0) = \frac{g_{11}(-2(3-v^2)v + (1-v^2)(3+v^2)t_l)}{2((3+v^2)g_{11} + 3(1-v^2)g_{12})(2v - (1+v^2)t_l)} \quad (2-35)$$

am *soft gluon*-Punkt, wobei

$$v = \sqrt{1-\xi}, \quad t_l = \ln\left(\frac{1+v}{1-v}\right). \quad (2-36)$$

Als Grenzwert verschwindender Masse erhält man wie erwartet $P^{x'}(0) \rightarrow 0$. Am Ende des Spektrums wird die lineare Polarisation durch

$$P^{x'}(x_{\max}) = \frac{g_{11}}{(3-v^2)g_{11} - (1-v^2)g_{12}} \quad (2-37)$$

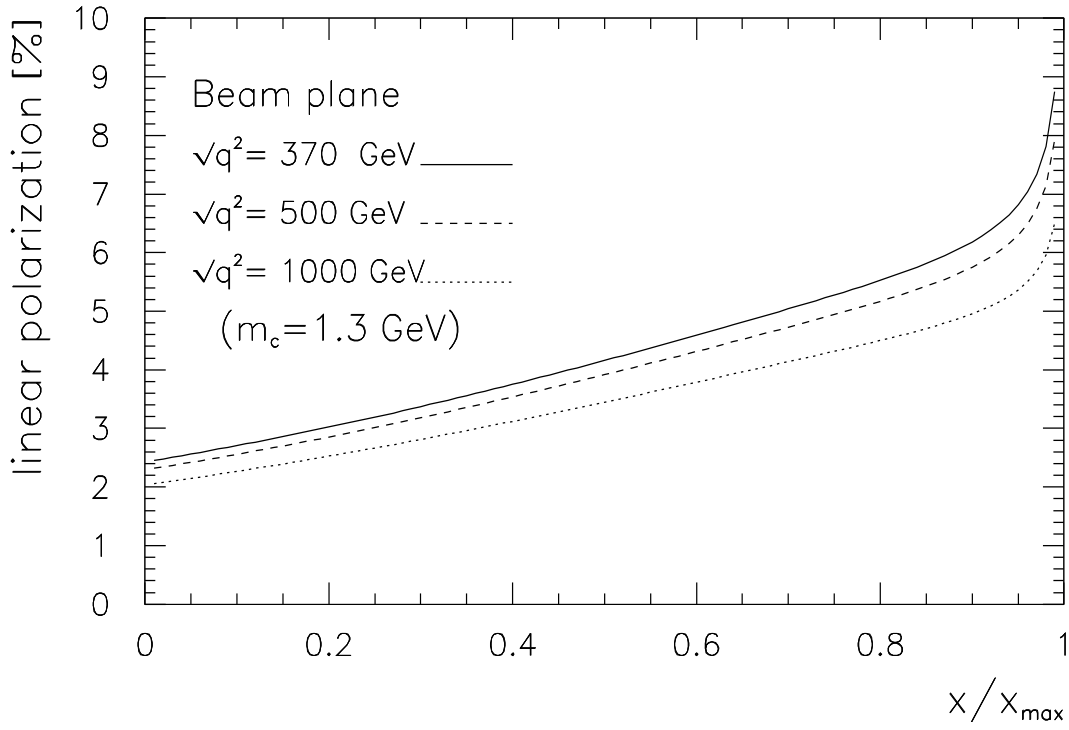


Abbildung 2.11: *Energieabhängigkeit der P^l in der Leptonebene im Fall des Charmquarks*

für $x = x_{\max} = 1 - \xi$ gegeben.

Es ist zu bemerken, daß der Grenzwert für $m \rightarrow 0$ in Gl. (2-37) endlich wird, d.h. die lineare Polarisation ist $P^{x'}(x_{\max}) \rightarrow 1/2$ für $v \rightarrow 1$. In diesem Limes hätte man naiv $P^{x'} \rightarrow 0$ erwartet. Jedoch wird die Null wegen des Phasenraums im Nenner durch die kollineare Singularität aufgehoben.

Der gesamte Effekt der Aufhebung ist, daß die Polarisation auf einen endlichen Wert zustrebt, wenn $v \rightarrow 0$ geht. Wenn man die Energieabhängigkeit der linearen Polarisation für sehr kleine Masse des Quarks plottet, geht die lineare Polarisation für den gesamten Energiebereich gegen Null, aber sie wächst schnell zu einem Wert 0.5 nahe des Endpunktes des Spektrums an.

Die Abbildung(2.11) zeigt die $(x/x_{\max})$ -Abhängigkeit der linearen Gluonpolarisation in der Leptonebene im Fall des Charmquarks ebenfalls bei drei unterschiedlichen Schwerpunktsenergien. Die Abbildung(2.12) stellt einen Vergleich der linearen Gluonpolarisation von Top- und Charmquark dar.

2.5 Zusammenfassung

Es wurden ausführlich die lineare und die zirkulare Polarisation des Gluons in Top- und Charmquarkproduktion in der e^-e^+ -Annihilation diskutiert. Außerdem wurden die Effekte der Strahlpolarisation und der polaren Winkelabhängigkeit auf die

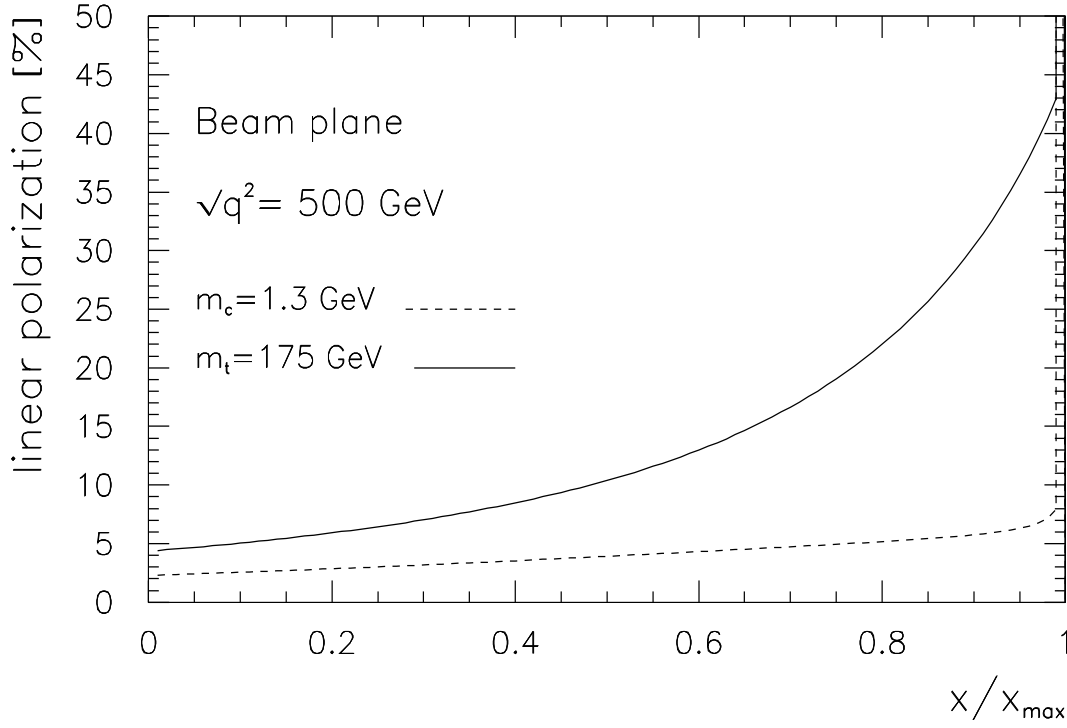


Abbildung 2.12: Vergleich von P^l in der Leptonebene für Top- und Charmquark

Gluonpolarisation untersucht.

Die lineare Polarisation des Gluons bleibt über den größeren Teil der Gluonenergie nahe an ihrem klassischen *soft gluon*-Wert von 100% [29] und ist nur wenig von der Polarisation des Strahls, von der polaren Orientierung des Gluons und vom *flavour* des schweren Quarkpaares abhängig, das zusammen mit dem Gluon produziert wird.

Die zirkulare Polarisation des Gluons hängt stark von der Polarisation des Strahls, der polaren Orientierung des Gluons und dem *Flavour* des schweren Quarkpaares ab, das zusammen mit dem Gluon produziert wird.

Die Abhängigkeit von diesen Effekten kann ausgenutzt werden, um die zirkulare Polarisation des Gluons optimal zu justieren. Um jedoch eine nicht verschwindende zirkulare Polarisation des Gluons zu sehen, muß man den *flavour* des dazugehörigen Quark/Antiquarks kennzeichnen, da die zirkulare Polarisation unter Ladungskonjugation ungerade ist und im Mittel Null wird. Um eine Messung der zirkularen Polarisation von Gluonen durchführen zu können, muß man ihre Zerfälle in polarisierte Teilchen untersuchen, deren Polarisation gemessen werden kann.

Wenn man darauf abzielt, Gluonpolarisationseffekte im aufspaltenden Prozeß $e^+e^- \rightarrow t\bar{t}G(G \rightarrow GG, q\bar{q})$ zu untersuchen, sollte die obige on-shell-Rechnung ausreichen, die führenden Effekte der Gluonpolarisation zu kennzeichnen und zu behandeln, ohne eine volle Berechnung $O(\alpha_s^2)$ von $e^+e^- \rightarrow t\bar{t}GG$ und von $e^+e^- \rightarrow t\bar{t}q\bar{q}$ [32] durchführen zu müssen.

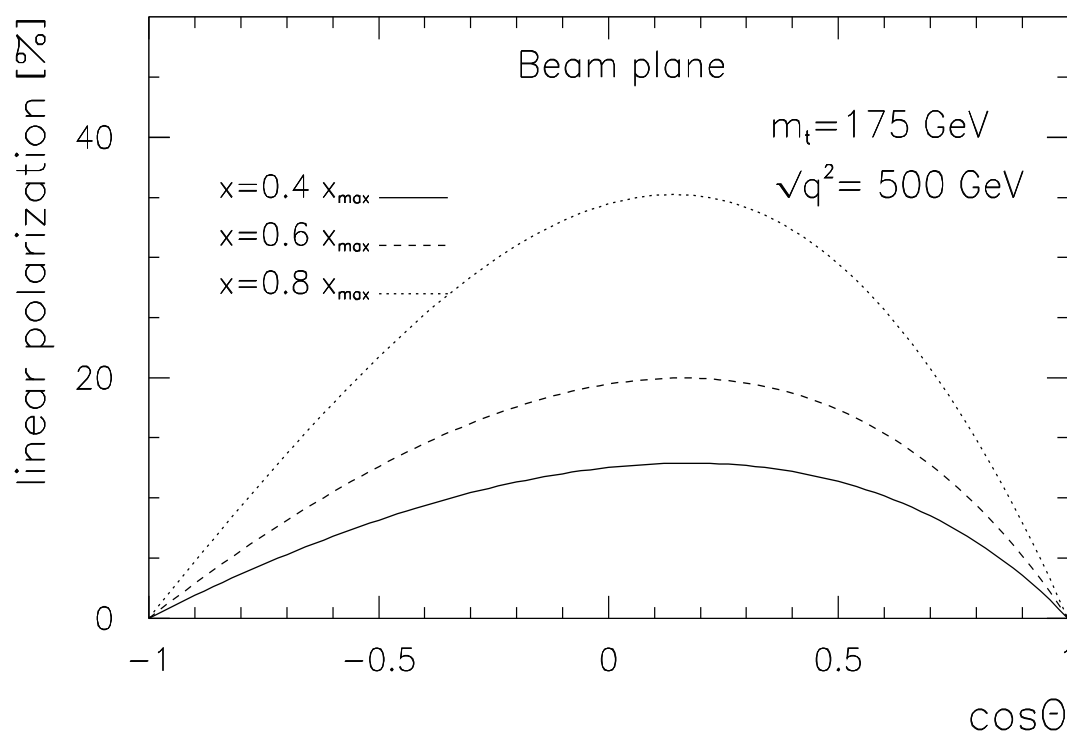


Abbildung 2.13: *Polarwinkelabhängigkeit von P^l in der Leptonebene im Fall des Topquarks*

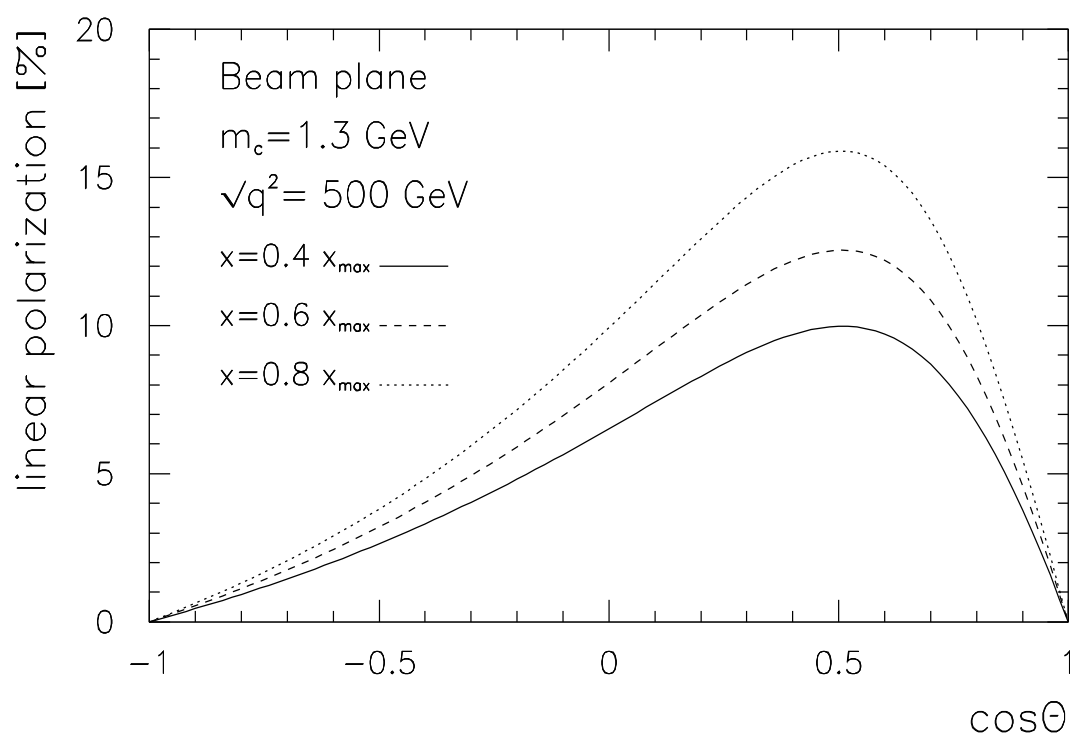


Abbildung 2.14: Polarwinkelabhängigkeit von P^l in der Leptonebene im Fall des Charmquarks

Kapitel 3

Longitudinal-Longitudinal Spin-Korrelation in $e^+e^- \rightarrow q\bar{q}$

3.1 Einführung

In den letzten Jahren seit der Entdeckung des Topquarks hat das Interesse an der Rolle der Quarkmasseneffekte in der Produktion von Quarks und Gluonen in der e^+e^- -Annihilation zugenommen. Die Untersuchung solcher Effekte ist wesentlich, da die Auswirkung durch die Masse des Quarks auf das Definitionsschema für *Jets* signifikant ist. Die *heavy flavour* Impuls-Korrelation und die Gluonpolarisation [44] werden ebenfalls durch die Quarkmasse beeinflusst. Diese Effekte treten auch für das Charmquark und das Bottomquark auf, wenn sie für die Skala der Masse des Z -Bosons produziert werden [45, 46, 47].

Eine detaillierte Untersuchung der Quarkmasseneffekte in den Vernichtungen e^+e^- kann sogar zu einer alternativen Bestimmung des Quarkmassenwertes führen [45, 46, 47, 48, 58]. Verständlicherweise ist die Bedeutung für die Quarkmasseneffekte bei $t\bar{t}$ -Produktion in den zukünftigen Linearbeschleunigern groß, weil dort im geplanten Energiebereich die Quarkmasseneffekte nicht vernachlässigt werden können.

Die Quarkmasseneffekte sind auch wichtig im Limes $m \rightarrow 0$ bei den Strahlungskorrekturen zur Polarisation des Quarks, weil die residualen Masseneffekte die naive *spin-flip*-Konfiguration des masselosen Falls $m = 0$ ändern [53, 36, 55, 56].

Die longitudinale Polarisation der massiven Quarks beeinflusst die Form des Energiespektrums ihrer leptonischen Zerfallsprodukte [57].

Andere Autoren [49, 50] untersuchen die Spin-Korrelationen des Topquarks. Sie verwenden eine andere Basis für die Quantisierung des Spins, die sogenannte *beam-line basis*, die sich als die optimalste Basis für das Tevatron erweist.

Eine andere Möglichkeit für die Berechnung der Spin-Korrelationen des Topquarks ist die von A. Brandenburg und Mitarbeitern [51, 52] betrachtete, in der eine gemeinsame Achse für die Quantisierung des Spins verwendet wird. Allerdings sind dies numerische Berechnungen.

Man kann beweisen, daß die Polarisationsobservablen, die man in der *beam-line basis* definiert, als eine lineare Kombination der Polarisationsobservablen in [9]

ausdrückbar sind.

In diesem Kapitel werden die $O(\alpha_s)$ -Korrekturen zur longitudinal-longitudinal Spin-Korrelation für massive Quarkpaare analytisch berechnet, die in der e^+e^- -Annihilation produziert werden.

Die Vorteile der hier durchgeführten Berechnungen gegenüber der Berechnungen in [49, 50, 51, 52] sind:

- Die analytische Berechnungen erlauben es, auf eine einfache Weise das Grenzwertverhalten zu diskutieren.
- Die analytische Berechnungen erlauben es, eine vollständig *spin-flip*, *no-flip*-Analyse durchzuführen.
- Die numerische Implementierung ist schnell.

Die Berechnung wird sowohl für das Topquark als auch für das Bottomquark durchgeführt. Es wird gezeigt, wie die Masseneffekte die verschiedenen Konfigurationen *spin-flip* und *no-flip* beeinflussen können.

3.2 Die Dichtematrix der Spin-Spin Korrelation

Die differentielle Dichtematrix $d\sigma = d\sigma_{\lambda_1\lambda_2;\lambda'_1\lambda'_2}$, die Quarks mit Helizität λ_1 und Antiquarks mit Helizität λ_2 beinhaltet, ist definiert als

$$d\sigma = \frac{1}{4} \left(d\sigma \mathbb{1} \otimes \mathbb{1} + d\sigma^{(\ell_1)} \sigma_3 \otimes \mathbb{1} + d\sigma^{(\ell_2)} \mathbb{1} \otimes \sigma_3 + d\sigma^{(\ell_1\ell_2)} \sigma_3 \otimes \sigma_3 \right). \quad (3-1)$$

Das Hauptinteresse dieses Kapitels betrifft die longitudinale Polarisation des Quarks und des Antiquarks und ihre Spin-Spin-Korrelation, die durch die Hauptdiagonalelemente der Dichtematrix gegeben ist. Diese Matrixelemente werden mit den Helizitäten $\lambda_1 = \lambda'_1$ und $\lambda_2 = \lambda'_2$ bezeichnet.

In der Dichtematrix der Gl. (3-1) ist $\sigma_3 = \hat{p}_1 \vec{\sigma}$ für das Quark und $\sigma_3 = \hat{p}_2 \vec{\sigma}$ für das Antiquark einzusetzen, wobei $\hat{p}_i = \vec{p}_i / |\vec{p}_i|$.

Eine alternative und äquivalente Darstellung der Dichtematrix kann mit der Hilfe der longitudinalen Spinkomponente $s_1^\ell = 2\lambda_1$ und $s_2^\ell = 2\lambda_2$ mit $s_1^\ell, s_2^\ell = \pm 1$ (oder $s_1^\ell, s_2^\ell \in \{\uparrow, \downarrow\}$) ausgedrückt werden. Damit ergibt sich

$$d\sigma(s_1^\ell, s_2^\ell) = \frac{1}{4} \left(d\sigma + d\sigma^{(\ell_1)} s_1^\ell + d\sigma^{(\ell_2)} s_2^\ell + d\sigma^{(\ell_1\ell_2)} s_1^\ell s_2^\ell \right). \quad (3-2)$$

Aus der CP -Invarianz des Standardmodells kann abgeleitet werden, daß $d\sigma$ und $d\sigma^{(\ell_1\ell_2)}$ Beiträge gerader Parität der VV - und AA -Ströme erhalten, während $d\sigma^{(\ell_1)}$ und $d\sigma^{(\ell_2)}$ Beiträge ungerader Parität der VA - und AV -Ströme erhalten. Die Terme gerader Parität $d\sigma$ und $d\sigma^{(\ell_1\ell_2)}$ sind C -gerade, d.h. sie sind invariant unter dem Quark-Antiquark Austausch ($q \leftrightarrow \bar{q}$). Dagegen sind die Terme ungerader Parität $d\sigma^{(\ell_1)}$ und $d\sigma^{(\ell_2)}$ C -ungerade, daraus folgt $d\sigma^{(\ell_1)}(p_1, p_2) = -d\sigma^{(\ell_2)}(p_2, p_1)$.

Die Umkehrung der Gl.(3-2) lautet

$$\begin{aligned}
 d\sigma &= d\sigma(\uparrow\uparrow) + d\sigma(\uparrow\downarrow) + d\sigma(\downarrow\uparrow) + d\sigma(\downarrow\downarrow) \\
 d\sigma^{(\ell_1)} &= d\sigma(\uparrow\uparrow) + d\sigma(\uparrow\downarrow) - d\sigma(\downarrow\uparrow) - d\sigma(\downarrow\downarrow) \\
 d\sigma^{(\ell_2)} &= d\sigma(\uparrow\uparrow) - d\sigma(\uparrow\downarrow) + d\sigma(\downarrow\uparrow) - d\sigma(\downarrow\downarrow) \\
 d\sigma^{(\ell_1\ell_2)} &= d\sigma(\uparrow\uparrow) - d\sigma(\uparrow\downarrow) - d\sigma(\downarrow\uparrow) + d\sigma(\downarrow\downarrow).
 \end{aligned} \tag{3-3}$$

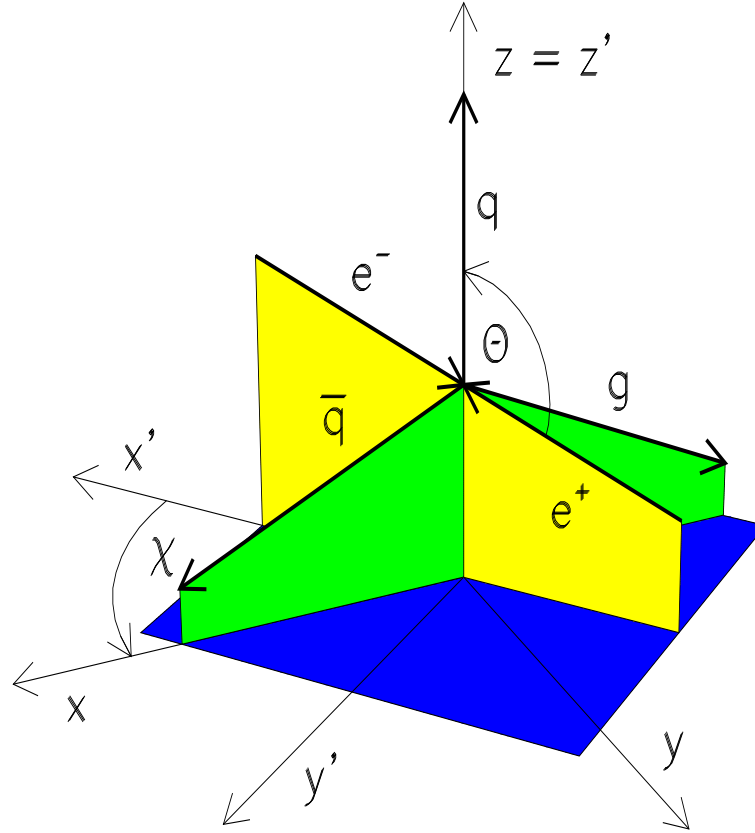


Abbildung 3.1: Polarwinkel θ und Azimutalwinkel χ

3.3 Die Longitudinal-Longitudinal Spin-Korrelation

3.3.1 Der Wirkungsquerschnitt und die Spin-Spin Korrelation

Der Wirkungsquerschnitt lässt sich als

$$\begin{aligned}
 d\sigma(s_1^\ell, s_2^\ell) &= \frac{1}{4} \left(g_{11}(d\sigma_1 + d\sigma_1^{(\ell_1\ell_2)} s_1^\ell s_2^\ell) + g_{12}(d\sigma_2 + d\sigma_2^{(\ell_1\ell_2)} s_1^\ell s_2^\ell) \right. \\
 &\quad \left. + g_{14}(d\sigma_4^{(\ell_1)} s_1^\ell + d\sigma_4^{(\ell_2)} s_2^\ell) \right)
 \end{aligned} \tag{3-4}$$

schreiben. Die Indizes in den Raten $i = 1, 2, 4$ gehören zur den entsprechenden beitragenden Hadrontensoren, wobei sich der totale Wirkungsquerschnitt im Fall $e^+e^- \rightarrow q(p_1)\bar{q}(p_2)$ als

$$\sigma^i = \frac{\pi\alpha^2 v}{3q^4} H_{U+L}^i \quad (3-5)$$

schreiben läßt.

Die Vierervektoren sind durch

$$\begin{aligned} p_1 &= \frac{\sqrt{q^2}}{2}(1; 0, 0, v) \\ p_2 &= \frac{\sqrt{q^2}}{2}(1; 0, 0, -v) \\ q &= \sqrt{q^2}(1; 0, 0, 0) \end{aligned} \quad (3-6)$$

gegeben.

Im Fall $e^+e^- \rightarrow q(p_1)\bar{q}(p_2)g(p_3)$ wird der differentielle Wirkungsquerschnitt als

$$\frac{d\sigma^i}{dydz} = \frac{\alpha}{48\pi q^2} H_{U+L}^i(y, z) \quad (i = 1, 2) \quad (3-7)$$

geschrieben. Als kinematische Variablen werden y und z verwendet. Sie sind durch

$$y = 1 - 2\frac{p_1 q}{q^2} \quad \text{und} \quad z = 1 - 2\frac{p_2 q}{q^2} \quad (3-8)$$

definiert.

Die Vierervektoren sind hier durch

$$\begin{aligned} p_1 &= \frac{\sqrt{q^2}}{2}(1 - y; 0, 0, R_v) \\ p_2 &= \frac{\sqrt{q^2}}{2}(1 - z; 0, R_z \sin \theta_{12}, R_z \cos \theta_{12}) \\ p_3 &= \frac{\sqrt{q^2}}{2}(y + z)(1; 0, -\sin \theta_{13}, \cos \theta_{13}) \\ q &= \sqrt{q^2}(1; 0, 0, 0) \end{aligned} \quad (3-9)$$

gegeben mit

$$\cos \theta_{12} = \frac{yz + y + z - 1 + \xi}{\sqrt{(1-y)^2 - \xi} \sqrt{(1-z)^2 - \xi}}. \quad (3-10)$$

Die Hadrontensoren gerader Parität sind

$$H_{\mu\nu}^1 = \frac{1}{2}(H_{\mu\nu}^{VV} + H_{\mu\nu}^{AA}) \quad H_{\mu\nu}^2 = \frac{1}{2}(H_{\mu\nu}^{VV} - H_{\mu\nu}^{AA}). \quad (3-11)$$

Der beitragende Hadrontensor ungerader Parität ist

$$H_{\mu\nu}^4 = \frac{1}{2}(H_{\mu\nu}^{VA} + H_{\mu\nu}^{AV}). \quad (3-12)$$

Die Notation ($U+L$) in Gln. (3-5,3-7) bezeichnet die totale Rate (U : unpolarisiert transversal , L : longitudinal) nach der Winkel-Mittelung [36].

Die Verallgemeinerung der obigen Ausdrücke für die Wirkungsquerschnitte für den Fall des longitudinal polarisierten Strahles ist durch die Ersetzung

$$g_{14} \rightarrow [(1 - h^- h^+)g_{14} + (h^- - h^+)g_{44}] \quad (3-13)$$

$$g_{1i} \rightarrow [(1 - h^- h^+)g_{1i} + (h^- - h^+)g_{4i}] \quad (i = 1, 2) \quad (3-14)$$

für die g_{ij} -Faktoren gegeben, wobei h^- und h^+ ($-1 \leq h^\pm \leq +1$) die Polarisation des Elektron- und des Positron-Strahls bezeichnen.

3.3.2 Die Feynman-Diagramme

Die beitragenden Feynman-Diagramme auf Born-Niveau sind in der Abbildung (3.2) dargestellt. Die beitragenden Baum-Graphen sind in der Abbildung (3.3) gezeigt.

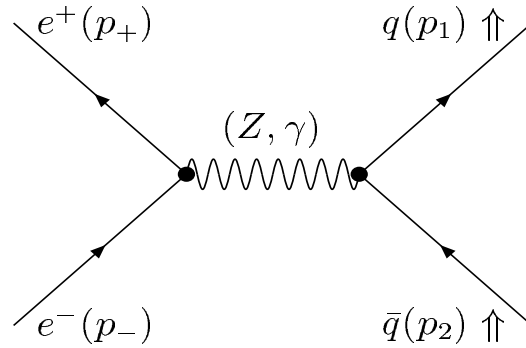


Abbildung 3.2: Bornsche Feynman-Diagramme

Die beitragenden Schleifen-Graphen sind in der Abbildung (3.4) dargestellt.

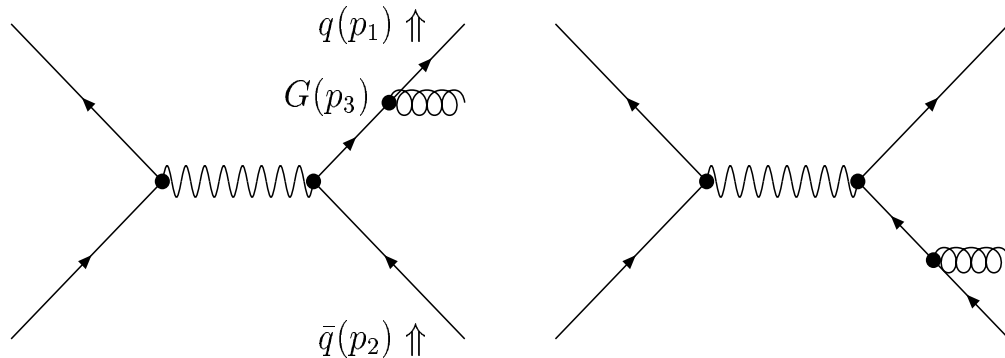
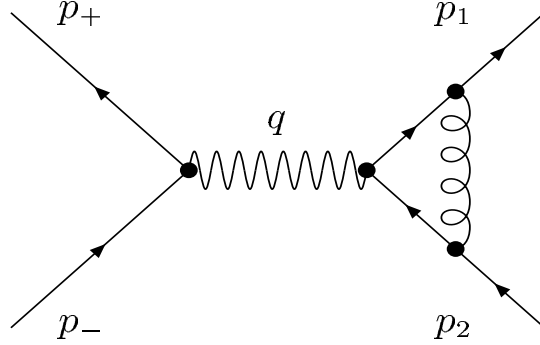


Abbildung 3.3: Baum-Feynman-Diagramme

Abbildung 3.4: *Loop-Feynman-Diagramm*

Die Berechnung der notwendigen Spuren ist, wie in den vorherigen Kapitel, mit Hilfe des symbolischen Algebraprogramms MATHEMATICA [26, 27] und des speziellen Hochenergie-Packets **HIP** [28] durchgeführt worden.

3.3.3 Der Phasenraum für den $q\bar{q}G$ -Endzustand

Der Wirkungsquerschnitt besteht aus drei Faktoren [siehe Anhang B]. Einer davon ist der Phasenraumfaktor dPS , der für drei Teilchen im Endzustand durch

$$dPS_3 = \frac{1}{(2\pi)^5} \delta^4(p_1 + p_2 + p_3 - q) \frac{d^3 p_1}{2E_1} \frac{d^3 p_2}{2E_2} \delta(p_3^2 - \Lambda q^2) \theta(E_3) d^4 p_3 \quad (3-15)$$

definiert ist. Mit Hilfe des Energie-Impuls-Erhaltungssatzes für die 4-Impulse p_i kann dieser Faktor weiter bestimmt werden. Im ersten Schritt wird die Integration über die δ^4 -Funktion ausgeführt, die die Energie-Impulserhaltung mit $p_3 = q - p_1 - p_2$ repräsentiert. Es ergibt sich dann

$$dPS_3 = \frac{1}{(2\pi)^5} \delta((q - p_1 - p_2)^2 - \Lambda q^2) \frac{d^3 \vec{p}_1}{2E_1} \frac{d^3 \vec{p}_2}{2E_2}, \quad (3-16)$$

und für das Argument der verbliebenen δ -Funktion erhält man

$$(q - p_1 - p_2)^2 = q^2 + p_1^2 + p_2^2 - 2p_1 q - 2p_2 q + 2p_1 p_2 \quad (3-17)$$

mit

$$\begin{aligned} p_i^2 &= E_i^2 - |\vec{p}_i|^2 = m_q^2, & \text{für } i &= 1, 2, \\ p_3^2 &= E_3^2 - |\vec{p}_3|^2 = \Lambda q^2, \end{aligned} \quad (3-18)$$

wobei m_q die Masse des Quarks und $\Lambda\sqrt{q^2}$ die Masse des Gluons darstellt, das für die Renormierung gebraucht wird. Statt der Energien E_1 und E_2 führt man die dimensionslosen Parameter x_1 und x_2 ein, welche durch

$$x_i = \frac{E_i}{\frac{\sqrt{s}}{2}} = \frac{2p_i \cdot q}{q^2} \quad i = 1, 2 \quad (3-19)$$

definiert sind. Mit diesen Parametern folgt für den Phasenraumfaktor

$$dPS_3 = \frac{1}{(2\pi)^5} \delta(q^2(1 - \Lambda - x_1 - x_2) + 2p_1p_2 + 2m_q^2) \frac{d^3\vec{p}_1}{2E_1} \frac{d^3\vec{p}_2}{2E_2}. \quad (3-20)$$

Das Differential $\frac{d^3\vec{p}_i}{2E_i}$ kann in Kugelkoordinaten umgeschrieben werden:

$$d^3\vec{p}_i = |\vec{p}_i|^2 d|\vec{p}_i| d\Omega_i = |\vec{p}_i|^2 d|\vec{p}_i| d\chi_i d(\cos\theta_i). \quad (3-21)$$

Aus $E_i^2 = \vec{p}_i^2 + m_i^2$ erhält man $E_i dE_i = |\vec{p}_i| d|\vec{p}_i|$ und damit insgesamt :

$$d^3\vec{p}_i = |\vec{p}_i|^2 \frac{E_i}{|\vec{p}_i|} dE_i d\chi_i d(\cos\theta_i), \quad (3-22)$$

und mit $|\vec{p}_i| = \sqrt{E_i^2 - m_i^2}$ und $dE_i = \frac{\sqrt{q^2}}{2} dx_i$ erhält man schließlich:

$$\frac{d^3p_i}{2E_i} = \frac{1}{2} \sqrt{E_i^2 - m_i^2} \frac{\sqrt{q^2}}{2} dx_i d\chi_i d(\cos\theta_i). \quad (3-23)$$

Für $m_1^2 = m_q^2$ kann man die Masse des Quarks als $m_q^2 = \frac{1}{4}\xi q^2$ parametrisieren, und so ergibt sich letztendlich:

$$dPS_3 = \frac{1}{(2\pi)^5} \delta(q^2(1 - \Lambda - x_1 - x_2) + 2p_1p_2 + \frac{1}{2}\xi) \times \quad (3-24)$$

$$\frac{1}{8} q^2 \sqrt{x_1^2 - \xi} d\chi_1 d(\cos\theta_1) \frac{1}{8} q^2 \sqrt{x_2^2 - \xi} d\chi_2 d(\cos\theta_2)$$

Die Achsen der Koordinatensysteme sind beliebig wählbar, so daß man die z -Achse in Richtung des Quarkimpulses festlegen kann und die Winkel relativ zum Quarkimpuls betrachtet. Schließlich ergibt die Integration über einen Winkel zusammen mit der Delta-Funktion die Beschränkung des Integrationsbereiches für x . Der Phasenraum ist durch die Bedingung

$$\cos\theta_{ij} \leq 1 \quad i \neq j, \quad i, j = 1, 2, 3 \quad (3-25)$$

auf ein Gebiet in der (y, z) -Ebene beschränkt. Die Phasenraumgrenze ist somit durch die Bedingung

$$\cos\theta_{ij} = \pm 1 \quad i \neq j, \quad i, j = 1, 2, 3 \quad (3-26)$$

festgelegt. Es werden neue skalierte Energievariablen für das Quark und das Anti-quark durch

$$\begin{aligned} 1 - y &= x_1 & \text{und} \\ 1 - z &= x_2 \end{aligned} \quad (3-27)$$

eingeführt. Damit sind die Energien durch

$$\begin{aligned} E_1 &= \frac{1}{2}(1 - y)\sqrt{q^2}, \\ E_2 &= \frac{1}{2}(1 - z)\sqrt{q^2}, \end{aligned} \quad (3-28)$$

und die Impulsprodukte durch

$$\begin{aligned} p_1 q &= \frac{1}{2}(1-y)q^2, \\ p_2 q &= \frac{1}{2}(1-z)q^2, \quad \text{und} \\ p_1 p_2 &= E_1 E_2 - \vec{p}_1 \vec{p}_2 \cos \theta_{12} \end{aligned} \quad (3-29)$$

gegeben. Anschließend kann man die Beziehung für das 4-Produkt $p_1 p_2$ umschreiben:

$$p_1 p_2 = \frac{1}{4}(1-y)(1-z)q^2 - \frac{q^2}{4} \sqrt{(1-y)^2 - \xi} \sqrt{(1-z)^2 - \xi} \cos \theta_{12}. \quad (3-30)$$

Nach der Ersetzung von Gl. (3-30) erhält man:

$$\begin{aligned} dPS_3 &= \frac{1}{2\pi^5} \delta(q^2(1-\Lambda + \frac{\xi}{2} - (1-y) - (1-z) + \frac{1}{2}(1-y)(1-z) \\ &\quad - \sqrt{(1-y)^2 - \xi} \sqrt{(1-z)^2 - \xi} \cos \theta_{12})) \frac{d^3 \vec{p}_1}{2E_1} \frac{d^3 \vec{p}_2}{2E_2}. \end{aligned} \quad (3-31)$$

Die Integration kann anschließend über den Winkel $\cos \theta_{12}$ zusammen mit der δ -Funktion durchgeführt werden. Die Bedingung, daß $\cos \theta_{12} \leq 1$ sein muß, führt zu den folgenden Grenzen

$$\begin{aligned} y_- &= \sqrt{\Lambda \xi} + \Lambda, \quad y_+ = 1 - \sqrt{\xi}, \\ z_{\pm}(y) &= \frac{2y}{4y + \xi} \left\{ 1 - y - \frac{1}{2}\xi + \Lambda + \frac{\Lambda}{y} \pm \frac{1}{y} \sqrt{(y - \Lambda)^2 - \Lambda \xi} \sqrt{(1-y)^2 - \xi} \right\}. \end{aligned} \quad (3-32)$$

Der Phasenraum wird in der Abbildung (3.5) dargestellt. Die durchgezogene Linie stellt den Phasenraum für massive Quarks in der (y, z) -Ebene dar. Die gestrichelte Linie gibt zusammen mit den Koordinatenachsen die Phasenraumgrenze im masselosen Fall an.

Die *Soft*-Gluon-Singularität wird durch die Einführung einer Gluonmasse reguliert.

3.3.4 Die Projektion

Die entsprechenden Komponenten der verschiedenen $H_{\mu\nu}^i$, die gebraucht werden, um den Wirkungsquerschnitt für die Longitudinal-Longitudinal Spin-Korrelation zu erhalten, können mit Hilfe des folgenden Projektors berechnet werden:

$$\hat{\Pi}_{U+L}^{\mu\nu} = -\hat{g}^{\mu\nu}, \quad (3-34)$$

wobei

$$\hat{g}^{\mu\nu} = g^{\mu\nu} - \frac{q_\mu q_\nu}{q^2}. \quad (3-35)$$

Die projizierten Beiträge erhält man durch Anwendung des Projektors auf den Hadrontensor

$$H_\alpha^{i(x)} := \hat{\Pi}_\alpha^{\mu\nu} H_{\mu\nu}^{i(x)} \quad \text{wobei } \alpha = U + L \text{ und } i = 1, \dots, 4 \quad (3-36)$$

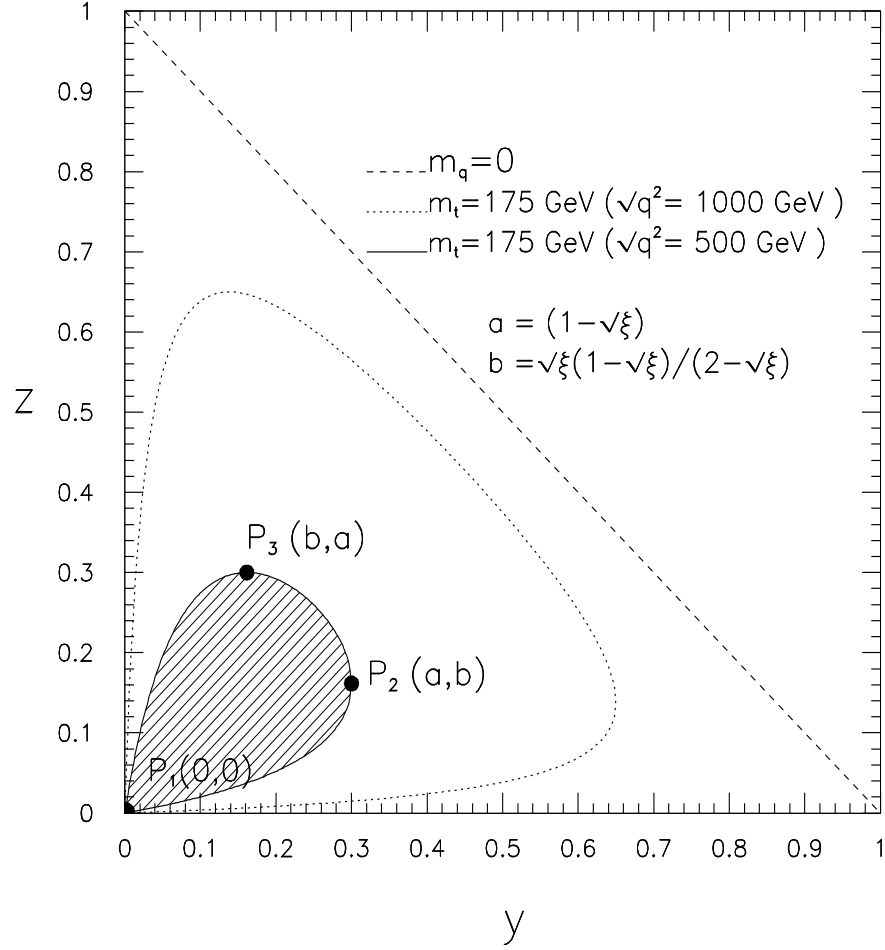


Abbildung 3.5: Der Dreiteilchen-Phasenraum für massive Quarks

3.3.5 Strukturfunktionen

Die verschiedenen Beiträge auf Born-Niveau lassen sich als

$$\begin{aligned}
 H_{U+L}^1(Born) &= (4 - \xi) N_C q^2, \\
 H_{U+L}^2(Born) &= 3\xi N_C q^2, \\
 H_{U+L}^{1(\ell_1 \ell_2)}(Born) &= -(4 - 3\xi) N_C q^2, \\
 H_{U+L}^{2(\ell_1 \ell_2)}(Born) &= -\xi N_C q^2, \\
 H_{U+L}^{4(\ell_1)}(Born) &= 4v N_C q^2, \\
 H_{U+L}^{4(\ell_2)}(Born) &= -4v N_C q^2
 \end{aligned} \tag{3-37}$$

schreiben, wobei ξ und v als

$$\xi = 4m_q^2/q^2 \quad \text{und} \quad v = \sqrt{1 - \xi} \tag{3-38}$$

definiert sind.

Der spinabhängige $O(\alpha_s)$ -Hadrontensor ist definiert als

$$H_{\mu\nu}(p_1, p_2, p_3, s_1, s_2) = \sum_{\text{gluonspin}} \langle q\bar{q}g | j_\mu | 0 \rangle \langle 0 | j_\nu^\dagger | q\bar{q}g \rangle. \quad (3-39)$$

Er kann aus den relevanten Feynman-Diagrammen ausgerechnet werden. Die longitudinale Spin-Spin-Komponente des Hadrontensors kann mit Hilfe der jeweiligen longitudinalen Komponenten des Spinvektors herausprojiziert werden. Sie sind durch

$$\begin{aligned} (s_1^\ell)^\mu &= \frac{s_1^\ell}{\sqrt{\xi}} (\sqrt{(1-y)^2 - \xi}; 0, 0, 1-y) \\ (s_2^\ell)^\mu &= \frac{s_2^\ell}{\sqrt{\xi}} (\sqrt{(1-z)^2 - \xi}; (1-z) \sin \theta_{12}, 0, (1-z) \cos \theta_{12}) \end{aligned} \quad (3-40)$$

gegeben.

Die resultierenden spinunabhängigen Hadrontensorkomponenten lauten

$$\begin{aligned} H_{U+L}^1(y, z) &= 4\pi\alpha_s N_C C_F \left[2\xi - \xi(2 - \frac{\xi}{2})(\frac{1}{y^2} + \frac{1}{z^2}) - 2(4 - \xi)(\frac{1}{y} + \frac{1}{z}) \right. \\ &\quad \left. + (8 + 6\xi + \xi^2)\frac{1}{yz} + (4 + \xi)(\frac{y}{z} + \frac{z}{y}) \right] \end{aligned} \quad (3-41)$$

$$\begin{aligned} H_{U+L}^2(y, z) &= 4\pi\alpha_s N_C C_F \left[-2\xi - \frac{3}{2}\xi^2(\frac{1}{y^2} + \frac{1}{z^2}) - 6\xi(\frac{1}{y} + \frac{1}{z}) + 3\xi(2 - \xi)\frac{1}{yz} \right. \\ &\quad \left. - \xi(\frac{y}{z} + \frac{z}{y}) \right] \end{aligned} \quad (3-42)$$

und die spinabhängigen Hadrontensorkomponenten lauten

$$\begin{aligned} H_{U+L}^{1(\ell_1 \ell_2)}(y, z) &= \frac{4\pi\alpha_s N_C C_F}{R_y R_z} \left[-4(12 - 10\xi + \xi^2) + (1 - \xi)(4 - 3\xi)\xi \left(\frac{1}{y^2} + \frac{1}{z^2} \right) \right. \\ &\quad + (4 - 3\xi)(8 - 7\xi) \left(\frac{1}{y} + \frac{1}{z} \right) + 2(12 - 5\xi)(y + z) \\ &\quad - 2(4 - \xi)(y^2 + z^2) - (4 - 3\xi)\xi \left(\frac{y}{z^2} - \frac{y^2}{z^2} + \frac{z}{y^2} - \frac{z^2}{y^2} \right) \\ &\quad - 2(1 - \xi)(2 - \xi)(4 - 3\xi)\frac{1}{yz} - (4 - \xi)(6 - 5\xi) \left(\frac{y}{z} + \frac{z}{y} \right) \\ &\quad \left. + 2(4 - 5\xi) \left(\frac{y^2}{z} + \frac{z^2}{y} \right) + 4\xi yz \right], \end{aligned} \quad (3-43)$$

$$\begin{aligned} H_{U+L}^{2(\ell_1 \ell_2)}(y, z) &= \frac{4\pi\alpha_s N_C C_F \xi}{R_y R_z} \left[-4\xi + (1 - \xi)\xi \left(\frac{1}{y^2} + \frac{1}{z^2} \right) + (8 - 7\xi) \left(\frac{1}{y} + \frac{1}{z} \right) \right. \\ &\quad - 6(y + z) - 2(y^2 + z^2) - \xi \left(\frac{y}{z^2} - \frac{y^2}{z^2} + \frac{z}{y^2} - \frac{z^2}{y^2} \right) \\ &\quad \left. - 2(2 - \xi)(1 - \xi)\frac{1}{yz} - (6 + \xi) \left(\frac{y}{z} + \frac{z}{y} \right) + 2 \left(\frac{y^2}{z} + \frac{z^2}{y} \right) - 4yz \right], \end{aligned} \quad (3-44)$$

wobei

$$R_y := \sqrt{(1-y)^2 - \xi} \quad \text{und} \quad R_z := \sqrt{(1-z)^2 - \xi}. \quad (3-45)$$

Die Einschleifenbeiträge können mit Hilfe einer allgemeinen Substitution aus den Bornschen Terme berechnet werden. Diese Substitution lautet

$$\gamma_\mu \rightarrow (1+A) \gamma_\mu - B \frac{(p_1 - p_2)_\mu}{2m} =: \Gamma_\mu^V(p_1, p_2) \quad (3-46)$$

$$\gamma_\mu \gamma_5 \rightarrow (1+C) \gamma_\mu \gamma_5 + D \frac{(p_1 + p_2)_\mu}{2m} =: \Gamma_\mu^A(p_1, p_2). \quad (3-47)$$

Die explizite reellen Anteile der *Einschleifenfaktoren* A , B , C und D sind durch

$$\begin{aligned} \text{Re } A = & -\frac{\alpha_s C_F}{4\pi} \left[\left(2 + \frac{1+v^2}{v} \ln \left(\frac{1-v}{1+v} \right) \right) \ln \left(\frac{\Lambda q^2}{m^2} \right) + 3v \ln \left(\frac{1-v}{1+v} \right) + 4 \right. \\ & \left. + \frac{1+v^2}{v} \left(\text{Li}_2 \left(\frac{2v}{1+v} \right) + \frac{1}{4} \ln^2 \left(\frac{1-v}{1+v} \right) - \frac{\pi^2}{2} \right) \right] \end{aligned} \quad (3-48)$$

$$\text{Re } B = \frac{\alpha_s C_F}{4\pi} \frac{1-v^2}{v} \ln \left(\frac{1-v}{1+v} \right) \quad (3-49)$$

$$\text{Re } C = \text{Re } A - 2 \text{Re } B \quad (3-50)$$

$$\text{Re } D = \frac{\alpha_s C_F}{4\pi} \frac{1-v^2}{v} \left[2v + (2+v^2) \ln \left(\frac{1-v}{1+v} \right) \right] \quad (3-51)$$

gegeben [53]. Um die IR-Singularitäten in den *Einschleifenfaktoren* zu regularisieren, wird den Parameter Λ für die Masse des Gluons verwendet. Die UV-Divergenzen der Vertexfunktionen $\Gamma_\mu^V(p_1, p_2)$ und $\Gamma_\mu^A(p_1, p_2)$ werden durch die Anwendung der renormalisierte Konstante der Wellenfunktion des Endquarkzustände aufgehoben

$$\delta Z_q = -\frac{\partial}{\partial \not{p}} \sum_q (\not{p}) \Big|_{\not{p}=m} \quad (3-52)$$

$$= -\frac{\alpha_s C_F}{4\pi} \left[\left(\frac{1}{\varepsilon_{UV}} - \gamma_E + \ln \left(\frac{4\pi\mu^2}{m^2} \right) \right) + 2 \left(\frac{1}{\varepsilon_{IR}} - \gamma_E + \ln \left(\frac{4\pi\mu^2}{m^2} \right) \right) + 4 \right], \quad (3-53)$$

wobei γ_E die *Eulersche Konstante* ist. Es wird die *Korrespondenzformel*

$$\ln \left(\frac{\Lambda q^2}{m^2} \right) \Longleftrightarrow \frac{1}{\varepsilon_{IR}} - \gamma_E + \ln \left(\frac{4\pi\mu^2}{m^2} \right) \quad (3-54)$$

zwischen der Regularisierung mit Gluonmasse und der dimesionalen Regularisierung benutzt.

Nach Faltung mit den Borntermbeiträgen erhält man

$$\begin{aligned} H_{U+L}^1(\text{loop}) &= (2)N_c q^2 ((2+\xi) \text{Re } A + (1-\xi) \text{Re } B + 2(1-\xi) \text{Re } C), \\ H_{U+L}^2(\text{loop}) &= (2)N_c q^2 ((2+\xi) \text{Re } A + (1-\xi) \text{Re } B - 2(1-\xi) \text{Re } C), \\ H_{U+L}^{1(\ell_1 \ell_2)}(\text{loop}) &= (-2)N_c q^2 ((2-\xi) \text{Re } A + 2(1-\xi) \text{Re } C - (1-\xi) \text{Re } B), \\ H_{U+L}^{2(\ell_1 \ell_2)}(\text{loop}) &= (-2)N_c q^2 ((2-\xi) \text{Re } A - 2(1-\xi) \text{Re } C - (1-\xi) \text{Re } B). \end{aligned} \quad (3-55)$$

Der totale $O(\alpha_s)$ -Beitrag ist durch die Summe des integrierten Baumbeitrags und des Schleifenbeitrags gegeben.

3.3.6 Die Phasenraumintegration

Nach Integration über y und z die Hadrontensorkomponenten (3-41,3-42,3-43, 3-44) sehen folgendermaßen aus:

$$H_{U+L}^1(\alpha_s) = N \left[\frac{3}{2}(4-\xi)(2-\xi)v + \frac{1}{4}(192 - 104\xi - 4\xi^2 + 3\xi^3)t_3 - 2(4-\xi) \left((2-\xi)(t_8 - t_9) + 2v(t_{10} + 2t_{12}) \right) \right], \quad (3-56)$$

$$H_{U+L}^2(\alpha_s) = N\xi \left[\frac{3}{2}(18-\xi)v + \frac{3}{4}(24 - 8\xi - \xi^2)t_3 - 6 \left((2-\xi)(t_8 - t_9) + 2v(t_{10} + 2t_{12}) \right) \right], \quad (3-57)$$

$$H_{U+L}^{1(\ell_1\ell_2)}(\alpha_s) = N \left[(88 - 78\xi - 5\xi^2 + 3\xi^3) \frac{1}{2v} - 40 + 32\sqrt{\xi} - 14\xi + 12\xi\sqrt{\xi} + 3\xi^2 + 3\xi^2\sqrt{\xi} - \left(16 - 42\xi + 31\xi^2 - 4\xi^3 + 8(4 - 3\xi)v^3 \right) \frac{t_3}{v^2} + 2(4 - 3\xi) \left((2-\xi)(t_8 - t_{16}) + 2v(t_{10} + 2t_{12}) - (4-\xi)(8 - 3\xi - \xi^2) \frac{t_{13}}{4v^2} \right) - 2(8 - 10\xi + \xi^2)t_{14} + (32 - 88\xi + 76\xi^2 - 19\xi^3) \frac{t_{15}}{v^3} \right], \quad (3-58)$$

$$H_{U+L}^{2(\ell_1\ell_2)}(\alpha_s) = N\xi \left[- (54 - 65\xi + 3\xi^2) \frac{1}{2v} + 58 - 56\sqrt{\xi} - 3\xi - 3\xi\sqrt{\xi} + \left(2 + \xi - 4\xi^2 - 8v^3 \right) \frac{t_3}{v^2} + 2 \left((2-\xi)(t_8 - t_{16}) + 2v(t_{10} + 2t_{12}) \right) + (96 - 140\xi + 35\xi^2 - 3\xi^3) \frac{t_{13}}{2v^2} - 2(10 + 3\xi)t_{14} + (8 - 20\xi + 13\xi^2) \frac{t_{15}}{v^3} \right] \quad (3-59)$$

mit den Konstanten $N = \alpha_s N_C C_F q^2 / 4\pi v$, wobei die Abkürzungen t_i als *Zerfallsraten* bezeichnet werden. Sie stellen die Integrale der unpolarisierten Hadrontensoren

$$I[k, l] = \int dy \int dz \quad y^k z^l \quad (3-60)$$

und die Integrale der polarisierten Hadrontensoren

$$C[k, l] = \int dy \int dz \frac{y^k z^l}{\sqrt{((1-y)^2 - \xi)} \sqrt{((1-z)^2 - \xi)}} \quad (3-61)$$

dar mit

$$-2 \leq l \leq 2 \quad \text{und} \quad -2 \leq k \leq 2. \quad (3-62)$$

Die Integrale für die unpolarisierten Hadrontensoren $I[k, l]$ sind bereits in der Doktorarbeit von M. M. Tung [54] berechnet worden¹. Bei der Berechnung der polarisierten Hadrontensoren tritt ein neues Integral vom Typ (3-61) auf, das in dieser Arbeit ausgerechnet wird. Die Berechnung der Integrale $C[k, l]$ wird im Anhang C ausführlich dargelegt. Die komplette Reihe der *Zerfallsratenterme*, die die Integrale (3-60, 3-61) zusammenfaßt², lautet

$$\begin{aligned}
t_3 &= \ln\left(\frac{1+v}{1-v}\right), \\
t_8 &= \ln\left(\frac{\xi}{4}\right) \ln\left(\frac{1+v}{1-v}\right) + \text{Li}_2\left(\frac{2v}{1+v}\right) - \text{Li}_2\left(-\frac{2v}{1-v}\right) - \pi^2, \\
t_9 &= 2 \ln\left(\frac{2(1-\xi)}{\sqrt{\xi}}\right) \ln\left(\frac{1+v}{1-v}\right) + 2 \left(\text{Li}_2\left(\frac{1+v}{2}\right) - \text{Li}_2\left(\frac{1-v}{2}\right) \right) + \\
&\quad + 3 \left(\text{Li}_2\left(-\frac{2v}{1-v}\right) - \text{Li}_2\left(\frac{2v}{1+v}\right) \right), \\
t_{10} &= \ln\left(\frac{4}{\xi}\right), \quad t_{12} = \ln\left(\frac{4(1-\xi)}{\xi}\right), \quad t_{13} = \ln\left(\frac{1+v}{2-\sqrt{\xi}}\right), \\
t_{14} &= \ln\left(\frac{4}{\xi}\right) \ln\left(\frac{1+v}{2-\sqrt{\xi}}\right) \\
&\quad + 2 \text{Li}_2\left(\frac{2-\sqrt{\xi}}{2}\right) - 2 \text{Li}_2\left(\frac{\sqrt{\xi}}{2}\right) + \text{Li}_2\left(\frac{1-v}{2}\right) - \text{Li}_2\left(\frac{1+v}{2}\right), \\
t_{15} &= \left(\ln\left(\frac{1+v}{1-v}\right) + \ln\left(\frac{\sqrt{\xi}}{2-\sqrt{\xi}}\right) \right)^2 \\
&\quad - 4 \text{Li}_2\left(\sqrt{\frac{1-v}{1+v}}\right) + 2 \text{Li}_2\left(\frac{2-\sqrt{\xi}}{1+v}\right) + 2 \text{Li}_2\left(\frac{1-v}{2-\sqrt{\xi}}\right), \\
t_{16} &= \ln\left(\frac{1+v}{1-v}\right) \ln\left(\frac{4v^4}{\xi(1+v)^2}\right) - \text{Li}_2\left(\frac{2v}{(1+v)^2}\right) + \text{Li}_2\left(\frac{-2v}{(1-v)^2}\right) \\
&\quad + \frac{1}{2} \text{Li}_2\left(-\frac{(1-v)^2}{(1+v)^2}\right) - \frac{1}{2} \text{Li}_2\left(-\frac{(1+v)^2}{(1-v)^2}\right). \quad (3-63)
\end{aligned}$$

Mit den integrierten Hadrontensoren in der Ordnung $O(\alpha_s)$ und den Bornschen Beiträgen kann der gesamte Wirkungsquerschnitt konstruiert werden. Die

¹Eine andere Quelle ist [48], in der ein anderes Ergebnis für das Integral $I[1, -2] = I[-2, 1]$ steht.

²Es sei bemerkt, daß die *Zerfallsratenterme* eine geschickte Zusammenfassung der vielen logarithmischen und dilogarithmischen Terme darstellen, die bei der zweidimensionalen Integration des zweifachdifferentiellen Hadrontensors auftauchen. Sie wurden zum ersten Mal in der Doktorarbeit von Stefan Groote eingeführt.

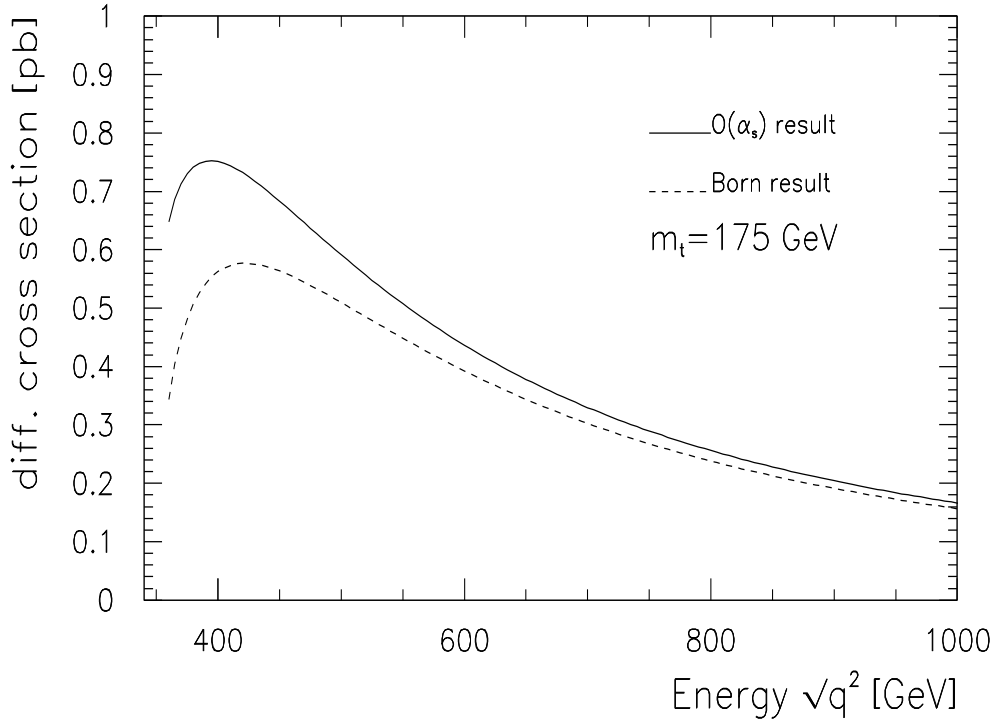


Abbildung 3.6: Die Energieabhängigkeit des Wirkungsquerschnitts für $e^+e^- \rightarrow t\bar{t}(G)$

longitudinal-longitudinal Spin Asymmetrie $\langle P^{\ell\ell} \rangle$ ist als

$$\langle P^{\ell\ell} \rangle = \frac{\sigma^{(\ell_1\ell_2)}}{\sigma} = \frac{\sigma(\uparrow\uparrow) - \sigma(\uparrow\downarrow) - \sigma(\downarrow\uparrow) + \sigma(\downarrow\downarrow)}{\sigma(\uparrow\uparrow) + \sigma(\uparrow\downarrow) + \sigma(\downarrow\uparrow) + \sigma(\downarrow\downarrow)} \quad (3-64)$$

definiert.

3.4 Numerische Resultate

Als erstes werden die Wirkungsquerschnitte und danach die longitudinale Spin-Spin Asymmetrie $\langle P^{\ell\ell} \rangle$ jeweils für das Top- und das Bottomquark präsentiert.

In Abbildungen (3.6) und (3.7) werden der Wirkungsquerschnitt für die $t\bar{t}$ - und $b\bar{b}$ -Produktion dargestellt. Die $O(\alpha_s)$ -Korrektur erhöht den Wirkungsquerschnitt an der $q\bar{q}$ -Schwelle, für höhere Energien ist die $O(\alpha_s)$ -Korrektur klein.

Die Abbildung (3.8) zeigt die longitudinale Spin-Spin Asymmetrie $\langle P^{\ell\ell} \rangle$ als Funktion der Schwerpunktsenergie $\sqrt{q^2}$ für die Topquarkpaar-Produktion. Die longitudinale Spin-Spin Asymmetrie wächst von dem Wert $\langle P^{\ell\ell} \rangle = -1/3$ an der $t\bar{t}$ -Schwelle bis zum Wert $\langle P^{\ell\ell} \rangle = -0.9$ bei einer Schwerpunktsenergie von $\sqrt{q^2} = 1000 \text{ GeV}$ an. Die $O(\alpha_s)$ -Korrektur zur dieser Asymmetrie ist in dem gezeigten q^2 -Bereich kleiner als 1%. Die Abbildung (3.9) stellt die Asymmetrie $\langle P^{\ell\ell} \rangle$ für die Bottomquarkpaar-Produktion dar. Hier ist der Wert bei der $b\bar{b}$ -Schwelle ebenfalls $\langle P^{\ell\ell} \rangle = -1/3$. Für niedrigere q^2 -Werte von Schwellenwert bis zu ca. 30 GeV sind die $O(\alpha_s)$ -Korrekturen

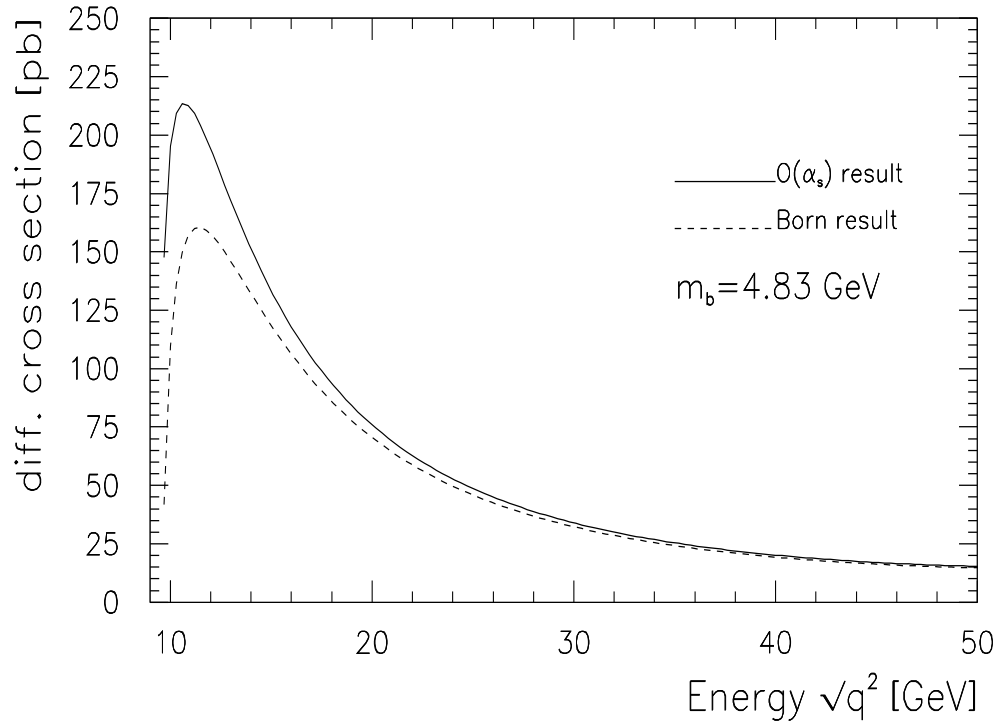


Abbildung 3.7: Die Energieabhängigkeit des Wirkungsquerschnitts für $e^+e^- \rightarrow b\bar{b}(G)$

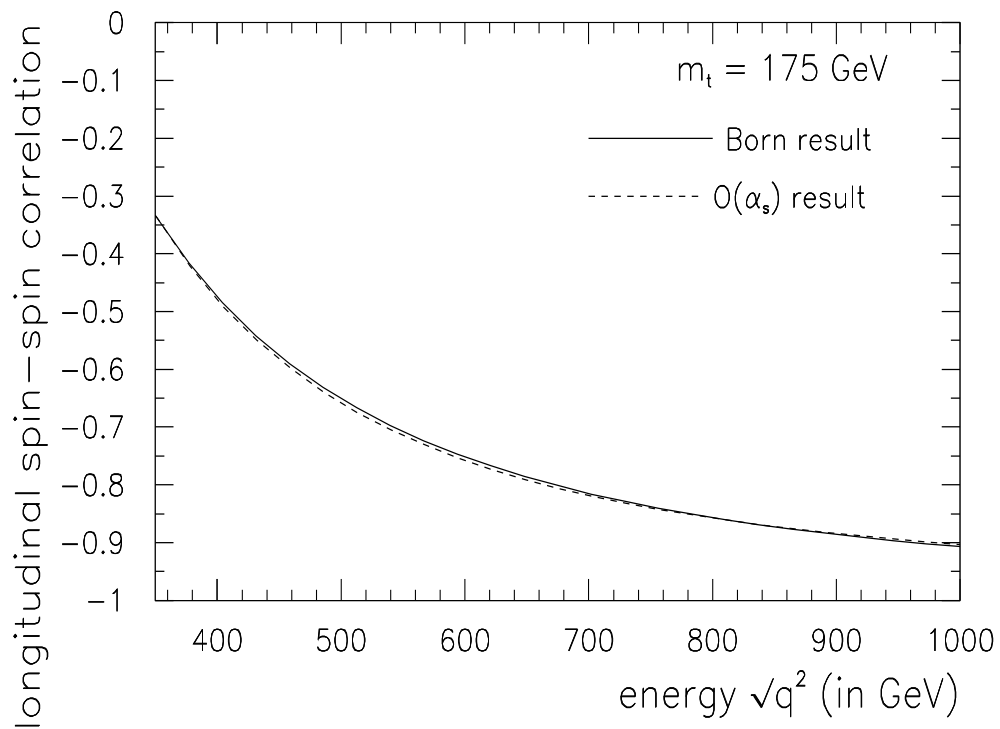


Abbildung 3.8: Energieabhängigkeit von $\langle P^{\ell\ell} \rangle$ im Fall des Topquarks

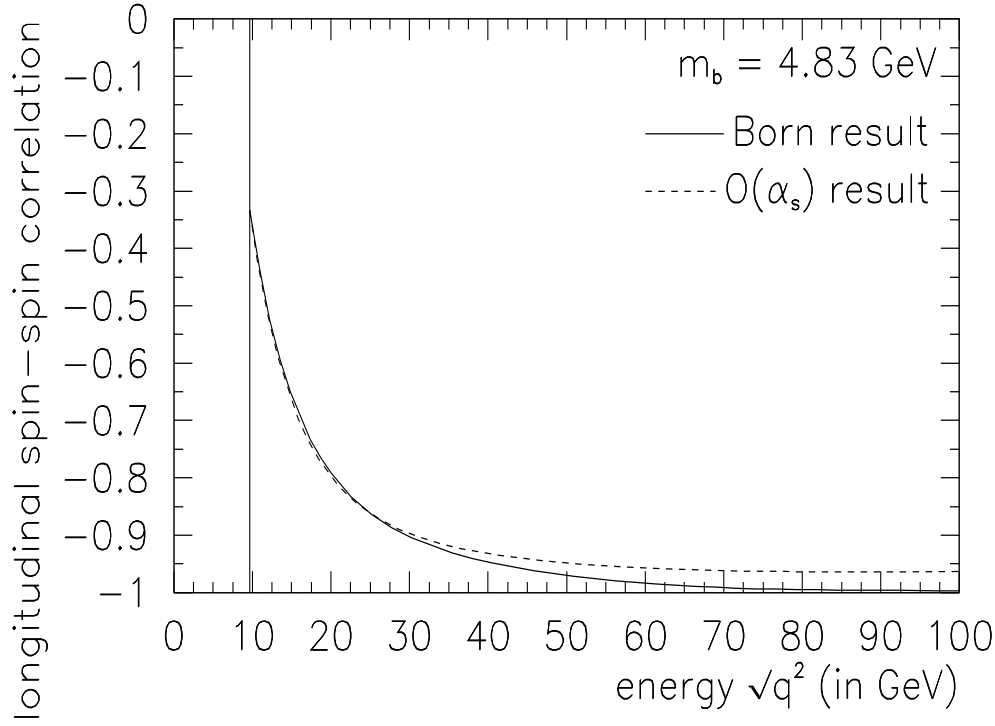


Abbildung 3.9: Energieabhängigkeit von $\langle P^{\ell\ell} \rangle$ im Fall des Bottomquarks. Die senkrechte Linie zeigt die $b\bar{b}$ -Schwelle an

ziemlich klein. Die Abbildung (3.10) zeigt die Asymmetrie $\langle P^{\ell\ell} \rangle$ im Fall eines masselosen *up-type* Quarks. Die longitudinale Spin-Spin Asymmetrie bleibt konstant bei dem Wert -0.95 im gesamten gezeigten Bereich.

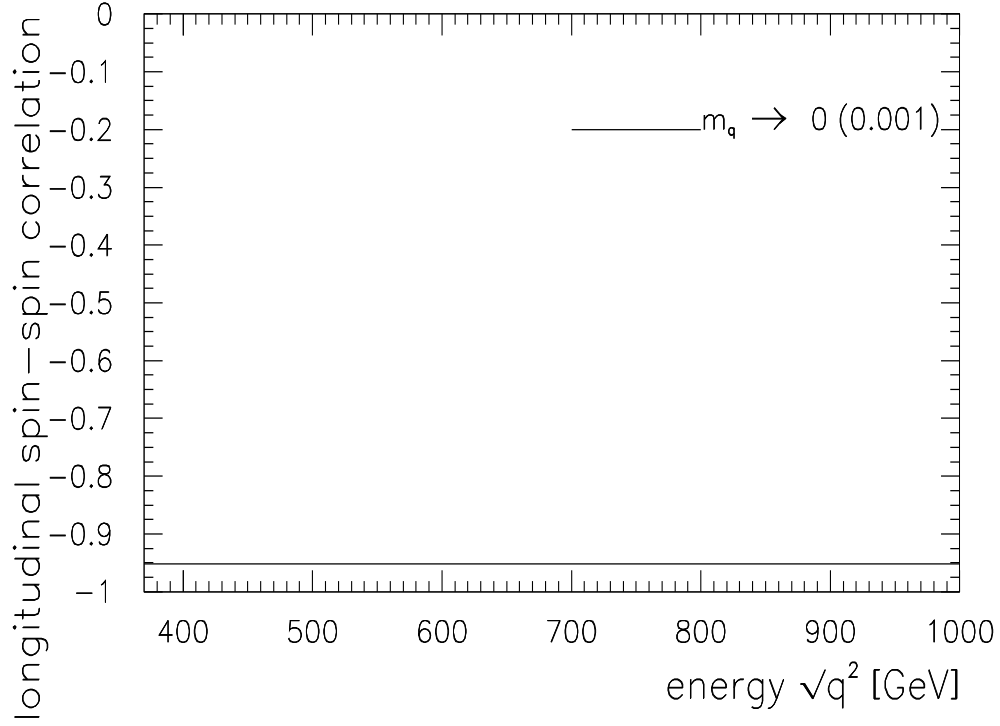
3.5 Die Spin-Konfiguration

In diesem Abschnitt wird die Untersuchung der verschiedenen Spin-Konfigurationen durchgeführt.

3.5.1 Der Fall masseloser Quarks

Um die *spin-flip*- und *no-flip*-Effekte zu untersuchen, soll eine Parallelrechnung durchgeführt werden. Diese Berechnung soll für „exakt“ masselose Quarks erfolgen. Dafür soll das Verfahren für die γ_5 -Matrix von Dirk Kreimer verwendet werden [62]. Im Gegensatz zu den bisher durchgeführten Berechnungen wird die soft-Gluonsingularität und die kollineare Singularität mit Hilfe der dimensionalen Regularisierungsschema [64, 65] mit Hilfe des bei Stefan Groote beschriebenen Integrationsverfahren integriert [63].

Gemäß der Regel in [62] wird ein solches γ_5 als „naiv antivertauschendes γ_5 “

Abbildung 3.10: Energieabhängigkeit von $\langle P^{\ell\ell} \rangle$ im Fall eines masselosen Upquarks

bezeichnet. Man erhält man für die Spin-Spin-Korrelation im Fall masseloser Quarks

$$\begin{aligned}
 H_{U+L}^1 &= 128\pi\alpha_s N_C C_F \left(\frac{-\varepsilon (y+z)^2}{y z} + \frac{(2-2y+y^2-2z+z^2)}{y z} \right) \\
 H_{U+L}^2 &= 0 \\
 H_{U+L}^{1(\ell_1\ell_2)} &= 128\pi\alpha_s N_C C_F \left(\frac{\varepsilon (y+z)^2}{y z} - \frac{(2-2y+y^2-2z+z^2)}{y z} \right) \\
 H_{U+L}^{2(\ell_1\ell_2)} &= 0
 \end{aligned} \tag{3-65}$$

Die Integration der Baum-Beiträge (3-65) soll in $(4-2\varepsilon)$ Dimensionen durchgeführt werden. Dafür muß das folgende Integrationsmaß zur Regularisierung verwendet werden [66]:

$$d\tilde{P}S_{32} = \frac{q^2}{16\pi^2} \left(\frac{4\pi\mu^2}{q^2} \right)^\varepsilon \frac{(yz(1-y-z))^{-\varepsilon}}{\Gamma(1-\varepsilon)} dydz \quad 0 \leq z \leq 1-y, \quad 0 \leq y \leq 1 \tag{3-66}$$

Dieses ersetzt das Phasenraummaß (3-16). Um die Integration zu vereinfachen, wird ein neuer Parameter ν eingeführt werden, der als

$$\nu = \frac{z}{(1-y)} \tag{3-67}$$

definiert ist. Dadurch wird das geschachtelte Zweifachintegral in ein entkoppeltes

Produkt von 2 Integralen überführt. Somit wird das Integrationsmaß

$$d\tilde{P}S_{32} = \frac{q^2}{16\pi^2} \left(\frac{4\pi\mu^2}{q^2} \right)^\varepsilon \frac{(y^{-\varepsilon}(1-y))^{1-2\varepsilon} \nu^{-\varepsilon}(1-\nu))^{-\varepsilon}}{\Gamma(1-\varepsilon)} dy d\nu \quad 0 \leq \nu \leq 1, \quad 0 \leq y \leq 1. \quad (3-68)$$

Die Integrale lassen sich als Eulersche Betafunktionen schreiben. Die auftretenden Eulerschen Betafunktionen lassen sich mit Hilfe der Rekursionsformel [67] $\Gamma(x) = (x-1)\Gamma(x-1)$ auf Terme der Form $\Gamma(1+k\varepsilon)$ bringen. Die Integration liefert

$$\begin{aligned} H_{U+L}^1(tree) &= q^2 C \left(\frac{4}{\varepsilon^2} + \frac{6}{\varepsilon} + 19 \right) \\ H_{U+L}^{1(\ell_1\ell_2)}(tree) &= -q^2 C \left(\frac{4}{\varepsilon^2} + \frac{6}{\varepsilon} + 19 \right) \end{aligned} \quad (3-69)$$

mit

$$C = \frac{\alpha_s N_C C_F}{4\pi} \left(\frac{4\pi\mu^2}{q^2} \right)^\varepsilon \frac{\Gamma^2(1-\varepsilon)}{\Gamma(1-3\varepsilon)} \quad (3-70)$$

Die Schleifenbeiträge lauten

$$\begin{aligned} H_{U+L}^1(loop) &= q^2 C' \left(-\frac{4}{\varepsilon^2} - \frac{6}{\varepsilon} - 16 \right) \\ H_{U+L}^{1(\ell_1\ell_2)}(loop) &= q^2 C' \left(\frac{4}{\varepsilon^2} + \frac{6}{\varepsilon} + 16 \right) \end{aligned} \quad (3-71)$$

mit

$$C' = \frac{\alpha_s N_C C_F}{4\pi} \left(\frac{4\pi\mu^2}{-q^2} \right)^\varepsilon \frac{\Gamma^2(1-\varepsilon)\Gamma(1+\varepsilon)}{\Gamma(1-2\varepsilon)}. \quad (3-72)$$

Bei der Addition von Schleifen- und Baumbeiträgen müssen die Faktoren C und C' bis zur Ordnung $O(\varepsilon^2)$ zueinander in Beziehung gesetzt werden. Mit Hilfe der Entwicklungen

$$x^\varepsilon = 1 + \varepsilon \ln x + \frac{1}{2} \varepsilon^2 \ln^2 x + O(\varepsilon^3), \quad (3-73)$$

$$(-x)^\varepsilon = 1 + \varepsilon \ln x + \frac{1}{2} \varepsilon^2 (\ln^2 x - \pi^2) + O(\varepsilon^3) \quad (3-74)$$

erhält man somit

$$\frac{\alpha_s N_C C_F}{4\pi} \left(\frac{4\pi\mu^2}{-q^2} \right)^\varepsilon = \frac{\alpha_s N_C C_F}{4\pi} \left(\frac{4\pi\mu^2}{q^2} \right)^\varepsilon \left(1 - \frac{1}{2} \pi^2 \varepsilon^2 \right) + O(\varepsilon^3). \quad (3-75)$$

Auf der anderen Seite ist

$$\frac{\Gamma^2(1-\varepsilon)\Gamma(1+\varepsilon)}{\Gamma(1-2\varepsilon)} = \frac{\Gamma^2(1-\varepsilon)}{\Gamma(1-3\varepsilon)} \left(1 + \frac{1}{2} \pi^2 \varepsilon \right) + O(\varepsilon^3), \quad (3-76)$$

und damit wird letztendlich $C' = C + O(\varepsilon^3)$. So ergeben sich im masselosen Fall für die $O(\alpha_s)$ -Beiträge

$$\begin{aligned} H_{U+L}^1(\alpha_s) &= (3)q^2 C \\ H_{U+L}^{1(\ell_1\ell_2)}(\alpha_s) &= (-3)q^2 C. \end{aligned} \quad (3-77)$$

3.5.2 Der Grenzfall verschwindender Quarkmasse

Im diesen Abschnitt soll der Grenzfall verschwindender Quarkmasse in den Hadrontensoren diskutiert werden. Dies ist wichtig, um die *spin-flip*- und *no-flip*-Konfigurationen für $m = 0$ und $m \rightarrow 0$ vergleichen zu können. Dafür sollen als erstes die Limites der Zerfallsratenterme ausgerechnet werden. Danach können sie in die Hadrontensoren (3-56) eingesetzt werden.

Im Grenzfall verschwindender Quarkmasse $m_q \rightarrow 0$ ($\xi \rightarrow 0$) oder äquivalent im Limes $q^2 \rightarrow \infty$ erhält man für die Limites der Zerfallsratenterme die folgende Ausdrücke:

$$\begin{aligned}
 t_3 &\rightarrow \ln\left(\frac{4}{\xi}\right) \\
 t_8 &\rightarrow -\left(\ln\left(\frac{4}{\xi}\right)\right)^2 - \text{Li}_2\left(-\frac{4}{\xi}\right) + \text{Li}_2(1) - \pi^2 \\
 &= -\left(\ln\left(\frac{\xi}{4}\right)\right)^2 + \frac{\pi^2}{6} + \frac{\pi^2}{6} + \frac{1}{2}\left(\ln\left(\frac{\xi}{4}\right)\right)^2 - \pi^2 \\
 &= -\frac{2\pi^2}{3} - \left(\ln\left(\frac{\xi}{4}\right)\right)^2 \\
 t_9 &\rightarrow \left(\ln\left(\frac{4}{\xi}\right)\right)^2 + 3\text{Li}_2\left(\frac{-4}{\xi}\right) - 2\text{Li}_2\left(\frac{\xi}{4}\right) - \text{Li}_2(1) \\
 &= -\frac{2\pi^2}{3} - \left(\ln\left(\frac{\xi}{4}\right)\right)^2
 \end{aligned} \tag{3-78}$$

$$t_{10} \rightarrow \ln\left(\frac{4}{\xi}\right) \tag{3-79}$$

$$t_{12} \rightarrow \ln\left(\frac{4}{\xi}\right)$$

$$t_{13} \rightarrow 0$$

$$\begin{aligned}
 t_{14} &\rightarrow \text{Li}_2(1) \\
 &= \frac{\pi^2}{6}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 t_{15} &\rightarrow \left(\frac{1}{2} \ln\left(\frac{4}{\xi}\right)\right)^2 - 4\text{Li}_2\left(\sqrt{\frac{\xi}{4}}\right) + 2\text{Li}_2\left(\frac{\xi}{4}\right) + 2\text{Li}_2(1) \\
 &= \frac{\pi^2}{3} + \frac{1}{4} \ln\left(\frac{\xi}{4}\right)^2
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 t_{16} &\rightarrow -\ln(\xi) \ln\left(\frac{4}{\xi}\right) + \text{Li}_2\left(-\frac{8}{\xi^2}\right) - \frac{1}{2}\text{Li}_2\left(\frac{-16}{\xi^2}\right) - \text{Li}_2\left(\frac{1}{2}\right) \\
 &= \frac{-\pi^2}{6}
 \end{aligned}$$

Somit ergibt sich:

$$\begin{aligned}
 H_{U+L}^1(\alpha_s) &= 12 \frac{\alpha_s N_C C_F q^2}{4\pi} \\
 H_{U+L}^{1(\ell)}(\alpha_s) &= 4 \frac{\alpha_s N_C C_F q^2}{4\pi}
 \end{aligned}$$

Spin Konfig.	VV		VA	
	$m = 0$	$m \rightarrow 0$	$m = 0$	$m \rightarrow 0$
$(\uparrow\uparrow)$	0	$\frac{4}{3} = 0 + [\frac{4}{3}]$	0	0
$(\uparrow\downarrow)$	2	$\frac{2}{3} = 2 - [\frac{4}{3}]$	2	$\frac{2}{3} = 2 - [\frac{4}{3}]$
$(\downarrow\uparrow)$	2	$\frac{2}{3} = 2 - [\frac{4}{3}]$	-2	$-\frac{2}{3} = -2 + [\frac{4}{3}]$
$(\downarrow\downarrow)$	0	$\frac{4}{3} = 0 + [\frac{4}{3}]$	0	0

Tabelle 3.1: $O(\alpha_s)$ -Korrekturen zur spezifische Spin-Konfiguration in QCD($m = 0$) und QCD($m \rightarrow 0$). Die Einheit dieser Beiträge ist $3\alpha_s C_F N_C q^2 / 4\pi$

$$H_{U+L}^{1(\ell_1, \ell_2)}(\alpha_s) = 4 \frac{\alpha_s N_C C_F q^2}{4\pi}. \quad (3-80)$$

Mit Hilfe von Gl. (3-3) lassen sich die Hadrontensoren folgendermaßen schreiben

$$\begin{aligned} H_{U+L}^1(s_1^\ell, s_2^\ell) &= \frac{1}{4} (H_{U+L}^1 + H_{U+L}^{1(\ell_1 \ell_2)} s_1^\ell s_2^\ell) \\ &= N_C q^2 \left((1 - s_1^\ell s_2^\ell) \left(1 + \frac{3\alpha_s}{4\pi} C_F \right) + \left[\frac{4}{3} \cdot \frac{3\alpha_s}{4\pi} C_F s_1^\ell s_2^\ell \right] \right). \end{aligned} \quad (3-81)$$

Es ergibt sich

$$H_{U+L}^4(s_1^\ell, s_2^\ell) = \frac{1}{4} (H_{U+L}^{4(\ell_1)} s_1^\ell + H_{U+L}^{4(\ell_2)} s_2^\ell) \quad (3-82)$$

$$= N_C q^2 \left(1 + \frac{3\alpha_s}{4\pi} C_F - \left[\frac{2}{3} \cdot \frac{3\alpha_s}{4\pi} C_F \right] \right) (s_1^\ell - s_2^\ell). \quad (3-83)$$

Die Abweichung zwischen dem Grenzwert $m \rightarrow 0$ der Berechnung mit massiven Quarks und dem exakten Wert der masselosen QCD wird als *Anomalie* bezeichnet.

In der Tabelle 3.1 finden sich alle ($m \rightarrow 0$) Beiträge für die verschiedenen Spin-Konfigurationen. Die *anormalen*-Beiträge sind in eckigen Klammern geschrieben.

Die Einträge sind durch die Hadrontensorenkomponente $H_{U+L}^{VV}(s_1^\ell, s_2^\ell)$ ($= H_{U+L}^{AA}(s_1^\ell, s_2^\ell)$) und $H_{U+L}^{VA}(s_1^\ell, s_2^\ell)$ ($= H_{U+L}^{AV}(s_1^\ell, s_2^\ell)$) ausgedrückt.

An der Schwelle ist der Wirkungsquerschnitt bei der s -Welle (Vektorstrom-Beitrag). Somit ergibt sich

$$H_{U+L}^1(s_1^\ell, s_2^\ell) = H_{U+L}^2(s_1^\ell, s_2^\ell) \quad (3-84)$$

und

$$H_{U+L}^1(\uparrow\uparrow) = \frac{1}{2} H_{U+L}^1(\uparrow\downarrow) = \frac{1}{2} H_{U+L}^1(\downarrow\uparrow) = H_{U+L}^1(\downarrow\downarrow). \quad (3-85)$$

Aus Gl. (3-2) erhält man, daß an der Schwelle $\langle P^{\ell\ell} \rangle = -1/3$ ist.

Kapitel 4

Polarwinkelabhängigkeit der Longitudinal-Longitudinal Spin-Korrelation in $e^+e^- \rightarrow q\bar{q}$

4.1 Einführung

Die Untersuchung der Polarwinkel-Struktur der polarisierten Observablen ist wichtig, da die zukünftigen Linearbeschleuniger (NLC, TESLA) in der Lage sein werden, relevante Ergebnisse zu produzieren. Insbesondere sind die Effekte der Masse des Quarks auf diese Ergebnisse wichtig.

In diesem Kapitel werden die $O(\alpha_s)$ -Korrekturen zur Polarwinkelabhängigkeit der Longitudinal-Longitudinal Spin-Korrelation für massive Quarks berechnet.

Die Berechnungen werden für die Top-, Bottom- und Charmquark durchgeführt. Das Ende dieses Kapitels zeigt, wie auch Kapitel 3, wie die Masseneffekte die verschiedenen Konfigurationen *spin-flip* und *no-flip* beeinflussen können.

4.2 Die Dichtematrix

Die differentielle Dichtematrix $d\sigma = d\sigma_{\lambda_1\lambda_2;\lambda'_1\lambda'_2}$, die in diesem Kapitel benötigt wird, ist diejenige, die auch in Kapitel 3 benutzt wurde und die in Gl. (3-1) angegeben ist.

Hier liegt das Hauptinteresse auf der Polarwinkelabhängigkeit des Wirkungsquerschnitts, der durch

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma^{(\ell_1\ell_2)}}{d\cos\theta dy dz} &= \frac{3}{8}(1 + \cos^2\theta) \left(g_{11} \frac{d\sigma_U^{1(\ell_1\ell_2)}}{dy dz} + g_{12} \frac{d\sigma_U^{2(\ell_1\ell_2)}}{dy dz} \right) \\ &\quad + \frac{3}{4}\sin^2\theta \left(g_{11} \frac{d\sigma_L^{1(\ell_1\ell_2)}}{dy dz} + g_{12} \frac{d\sigma_L^{2(\ell_1\ell_2)}}{dy dz} \right) \\ &\quad + \frac{3}{4}\cos\theta \left(g_{43} \frac{d\sigma_F^{3(\ell_1\ell_2)}}{dy dz} + g_{44} \frac{d\sigma_F^{4(\ell_1\ell_2)}}{dy dz} \right) \end{aligned} \quad (4-1)$$

$$\begin{aligned}
\frac{d\sigma}{d\cos\theta\,dy\,dz} = & \frac{3}{8}(1 + \cos^2\theta) \left(g_{11} \frac{d\sigma_U^1}{dy\,dz} + g_{12} \frac{d\sigma_U^2}{dy\,dz} \right) \\
& + \frac{3}{4} \sin^2\theta \left(g_{11} \frac{d\sigma_L^1}{dy\,dz} + g_{12} \frac{d\sigma_L^2}{dy\,dz} \right) \\
& + \frac{3}{4} \cos\theta \left(g_{43} \frac{d\sigma_F^3}{dy\,dz} + g_{44} \frac{d\sigma_F^4}{dy\,dz} \right)
\end{aligned} \tag{4-2}$$

gegeben ist, wobei θ der Polarwinkelabhängigkeit ist [siehe Abbildung (3.1)] und y und z als kinematische Variablen verwendet werden, die in Gl. (3-8) definiert sind. Hier wie im Kapitel 1 bezeichnen die Indizes U die unpolarisierte transversale Komponente, L die longitudinale Komponente, und das hinzukommende F die Vorwärts/Rückwärts Komponente der totalen Rate.

Die Definitionen für die Wirkungsquerschnitte im Fall zweier und dreier Teilchen sind in Gl. (3-5) und Gl. (3-7) jeweils gegeben.

Die Verallgemeinerung der Ausdrücke für die Wirkungsquerschnitte für den Fall des longitudinal polarisierten Strahles ist durch die Ersetzung in Gln. (3-13) und (3-14) gegeben

4.3 Die Polarwinkelabhängigkeit

4.3.1 Die Projektion

Die entsprechenden Komponenten der verschiedenen $H_{\mu\nu}^i$ können mit Hilfe der folgenden Projektoren berechnet werden:

$$\begin{aligned}
H_U^{i(\ell_1\ell_2)} &= \left(-\hat{g}^{\mu\nu} - \frac{\hat{p}_1^\mu \hat{p}_1^\nu}{p_{1z}^2} \right) H_{\mu\nu}^{i(\ell_1\ell_2)} & H_L^{i(\ell_1\ell_2)} &= \frac{\hat{p}_1^\mu \hat{p}_1^\nu}{p_{1z}^2} H_{\mu\nu}^{i(\ell_1\ell_2)} \\
H_F^{i(\ell_1\ell_2)} &= i\varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta} \frac{\hat{p}_{1\alpha} q_\beta}{p_{1z} \sqrt{q^2}} H_{\mu\nu}^{i(\ell_1\ell_2)},
\end{aligned} \tag{4-3}$$

wobei $\hat{g}_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} - q_\mu q_\nu / q^2$ der vierer-transversale metrische Tensor und $\hat{p}_{1\mu} = p_{1\mu} - (p_1 \cdot q) q_\mu / q^2$ der vierer-transversale Impuls des Quarks ist. Es ist zu bemerken, daß die kovarianten Projektoren in Gl. (4-3) (y, z) unabhängig sind. Deshalb dürfen sie mit den später durchzuführenden y - und z -Integrationen vertauscht werden.

4.3.2 Strukturfunktionen

Die verschiedenen Beiträge auf Born-Niveau lauten:

$$\begin{aligned}
H_U^1(Born) &= 2(2 - \xi) N_C q^2, \\
H_U^2(Born) &= 2\xi N_C q^2, \\
H_L^1(Born) &= \xi N_C q^2, \\
H_L^2(Born) &= \xi N_C q^2, \\
H_F^4(Born) &= 4\sqrt{1 - \xi} N_C q^2,
\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
H_U^{1(\ell_1 \ell_2)}(Born) &= -2(2 - \xi)N_C q^2, \\
H_U^{2(\ell_1 \ell_2)}(Born) &= -2\xi N_C q^2, \\
H_L^{1(\ell_1 \ell_2)}(Born) &= \xi N_C q^2, \\
H_L^{2(\ell_1 \ell_2)}(Born) &= \xi N_C q^2, \\
H_F^{4(\ell_1 \ell_2)}(Born) &= -4\sqrt{1 - \xi} N_C q^2,
\end{aligned}$$

wobei ξ und v in Gl. (3-38) definiert sind.

Die spinunabhängige $O(\alpha_s)$ -Hadrontensorkomponenten lauten nach der Projektion

$$\begin{aligned}
H_U^1(y, z) &= \frac{1}{R_y^2} \left[16 - 4\xi - 4\xi^2 - \frac{4\xi}{y^2} + \frac{6\xi^2}{y^2} - \frac{2\xi^3}{y^2} \right. \\
&\quad - \frac{16}{y} + \frac{32\xi}{y} - \frac{12\xi^2}{y} - 8\xi y \\
&\quad - \frac{4\xi}{z^2} + \frac{6\xi^2}{z^2} - \frac{2\xi^3}{z^2} + \frac{8\xi y}{z^2} - \frac{4\xi^2 y}{z^2} \\
&\quad - \frac{4\xi y^2}{z^2} - \frac{48}{z} + \frac{56\xi}{z} - \frac{16\xi^2}{z} + \frac{16}{yz} - \frac{32\xi}{yz} + \frac{20\xi^2}{yz} \\
&\quad - \frac{4\xi^3}{yz} + \frac{56y}{z} - \frac{28\xi y}{z} - \frac{2\xi^2 y}{z} - \frac{32y^2}{z} + \frac{8y^3}{z} \\
&\quad \left. - 8\xi z + \frac{8z}{y} - \frac{4\xi z}{y} - \frac{2\xi^2 z}{y} + 8yz \right] \quad (4-4)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
H_U^2(y, z) &= \frac{\xi}{R_y^2} \left[8 + 2\xi - \frac{2\xi}{y^2} + \frac{2\xi^2}{y^2} - \frac{8}{y} + \frac{12\xi}{y} \right. \\
&\quad - \frac{2\xi}{z^2} + \frac{2\xi^2}{z^2} + \frac{4\xi y}{z^2} - \frac{2\xi y^2}{z^2} - \frac{24}{z} + \frac{16\xi}{z} \\
&\quad \left. + \frac{8}{yz} - \frac{12\xi}{yz} + \frac{4\xi^2}{yz} + \frac{24y}{z} - \frac{2\xi y}{z} - \frac{8y^2}{z} + 8z + \frac{2\xi z}{y} \right] \quad (4-5)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
H_L^1(y, z) &= \frac{1}{R_y^2} \left[16 - 4\xi + \xi^2 - \frac{\xi^2}{y^2} + \frac{\xi^3}{y^2} - \frac{4\xi}{y} + \frac{6\xi^2}{y} - 16y + 4\xi y \right. \\
&\quad + 4\xi y^2 - \frac{\xi^2}{z^2} + \frac{\xi^3}{z^2} + \frac{2\xi^2 y}{z^2} + \frac{\xi^2 y^2}{z^2} - \frac{12\xi}{z} + \frac{8\xi^2}{z} + \frac{4\xi}{yz} \\
&\quad - \frac{6\xi^2}{yz} + \frac{2\xi^3}{yz} + \frac{2\xi y}{z} + \frac{2\xi^2 y}{z} + \frac{2\xi y^3}{z} - 16z + 4\xi z \\
&\quad \left. - \frac{2\xi z}{y} + 2\xi yz \right] \quad (4-6)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
H_L^2(y, z) = & \frac{\xi}{R_y^2} \left[12\xi - \xi^2 - \frac{\xi^2}{y^2} + \frac{\xi^3}{y^2} - \frac{4\xi}{y} + \frac{6\xi^2}{y} - 4\xi y - 4\xi y^2 \right. \\
& - \frac{\xi^2}{z^2} + \frac{\xi^3}{z^2} + \frac{2\xi^2 y}{z^2} - \frac{\xi^2 y^2}{z^2} - \frac{12\xi}{z} + \frac{8\xi^2}{z} + \frac{4\xi}{yz} - \frac{6\xi^2}{yz} \\
& \left. + \frac{2\xi^3}{yz} + \frac{10\xi y}{z} - \frac{2\xi^2 y}{z} - \frac{2\xi y^3}{z} - 4\xi z - \frac{2\xi z}{y} - 2\xi y z \right] \quad (4-7)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
H_F^4(y, z) = & \frac{4}{R_y} \left[-\frac{\xi}{y^2} + \frac{\xi^2}{y^2} - \frac{4}{y} + \frac{5\xi}{y} - \frac{\xi}{z^2} + \frac{\xi^2}{z^2} + \frac{\xi y}{z^2} - \frac{8}{z} + \frac{6\xi}{z} \right. \\
& \left. + \frac{4}{yz} - \frac{6\xi}{yz} + \frac{2\xi^2}{yz} + \frac{6y}{z} - \frac{2y^2}{z} + 2z + \frac{2z}{y} \right] \quad (4-8)
\end{aligned}$$

Die spinabhängigen $O(\alpha_s)$ -Hadrontensorkomponenten sind wie in Gl. (3-39) definiert und lauten nach der Projektion

$$\begin{aligned}
H_U^{1(\ell_1 \ell_2)}(y, z) = & \frac{1}{R_y^3 R_z} \left[-2(2-\xi)(24-23\xi+\xi^2) \right. \\
& + \frac{2(8-9\xi)(1-\xi)(2-\xi)}{y} + 4(30-24\xi+4\xi^2)y \\
& - 2(44-26\xi+3\xi^2)y^2 + 8(5-\xi)y^3 - 8y^4 \\
& + 2(2-\xi)(1-\xi)^2 \xi \left(\frac{1}{y^2} + \frac{1}{z^2} \right) - \frac{6(1-\xi)(2-\xi)\xi y}{z^2} \\
& + \frac{4(2-\xi)^2 \xi y^2}{z^2} - \frac{4(3-2\xi)\xi y^3}{z^2} \\
& + \frac{2(2-\xi)\xi y^4}{z^2} + \frac{2(16-11\xi)(1-\xi)(2-\xi)}{z} \\
& - \frac{4(1-\xi)^2(2-\xi)^2}{yz} - \frac{2(2-\xi)(26-27\xi+3\xi^2)y}{z} \\
& + \frac{8(11-13\xi+4\xi^2)y^2}{z} - \frac{4(1-\xi)(10-\xi)y^3}{z} \\
& + \frac{8(1-\xi)y^4}{z} + 8(5-3\xi)z - \frac{2(1-\xi)(2-\xi)\xi z}{y^2} \\
& - \frac{2(2-\xi)(6-9\xi+\xi^2)z}{y} - 4(6-3\xi+2\xi^2)yz \\
& + 8(1-2\xi)y^2 z - 4(2-2\xi+\xi^2)z^2 + \frac{2(1-\xi)(2-\xi)\xi z^2}{y^2} \\
& \left. + \frac{4(2-\xi)(1-2\xi)z^2}{y} + 8yz^2 - 16\xi y z^2 - 8y^2 z^2 \right] \quad (4-9)
\end{aligned}$$

$$H_U^{2(\ell_1 \ell_2)}(y, z) = \frac{1}{R_y^3 R_z} \left[40\xi - 36\xi^2 - \frac{2(1-\xi)^2 \xi^2}{y^2} - \frac{2(8-9\xi)(1-\xi)\xi}{y} \right]$$

$$\begin{aligned}
& -2 (12 - \xi) \xi y - 2 (4 - \xi) \xi y^2 + 8 \xi y^3 - \frac{2 (1 - \xi)^2 \xi^2}{z^2} \\
& + \frac{6 (1 - \xi) \xi^2 y}{z^2} - \frac{2 (3 - \xi) \xi^2 y^2}{z^2} + \frac{2 \xi^2 y^3}{z^2} \\
& - \frac{2 (16 - 11 \xi) (1 - \xi) \xi}{z} + \frac{4 (1 - \xi)^2 (2 - \xi) \xi}{y z} \\
& + \frac{2 \xi (24 - 23 \xi + \xi^2) y}{z} - \frac{2 (16 - 5 \xi) \xi y^2}{z} \\
& + \frac{2 \xi (4 + \xi) y^3}{z} - 2 (16 - 3 \xi) \xi z + \frac{2 (1 - \xi) \xi^2 z}{y^2} \\
& + \frac{2 \xi (8 - 11 \xi + \xi^2) z}{y} + 2 (8 - \xi) \xi y z \\
& + 2 (8 - \xi) \xi z^2 - \frac{2 (1 - \xi) \xi^2 z^2}{y^2} - \frac{4 (2 - 3 \xi) \xi z^2}{y} - 8 \xi y z^2 \Big]
\end{aligned} \tag{4-10}$$

$$\begin{aligned}
H_L^{1(\ell_1 \ell_2)}(y, z) &= \frac{1}{R_y^3 R_z} \Bigg[-16 + 56 \xi - 43 \xi^2 + 5 \xi^3 - \frac{(1 - \xi)^2 \xi^2}{y^2} \\
& - \frac{(8 - 9 \xi) (1 - \xi) \xi}{y} + (32 - 70 \xi + 23 \xi^2) y \\
& - 2 (8 - 9 \xi) y^2 - 6 \xi y^3 + 2 \xi y^4 - \frac{(-1 + \xi)^2 \xi^2}{z^2} \\
& + \frac{3 (1 - \xi) \xi^2 y}{z^2} - \frac{2 (2 - \xi) \xi^2 y^2}{z^2} + \frac{\xi^2 y^3}{z^2} - \frac{\xi^2 y^4}{z^2} \\
& - \frac{(16 - 11 \xi) (1 - \xi) \xi}{z} + \frac{2 (1 - \xi)^2 (2 - \xi) \xi}{y z} \\
& + \frac{\xi (30 - 33 \xi + 5 \xi^2) y}{z} - \frac{9 (2 - \xi) \xi y^2}{z} \\
& + \frac{(2 - \xi) \xi y^3}{z} - \frac{2 \xi y^4}{z} + (32 - 66 \xi + 23 \xi^2) z \\
& + \frac{(1 - \xi) \xi^2 z}{y^2} + \frac{\xi (10 - 15 \xi + 3 \xi^2) z}{y} - (48 - 38 \xi + \xi^2) y z \\
& + 2 (8 - \xi) y^2 z + 4 \xi y^3 z - (16 - 26 \xi + \xi^2) z^2 \\
& - \frac{(1 - \xi) \xi^2 z^2}{y^2} - \frac{2 (3 - 4 \xi) \xi z^2}{y} + 2 (8 + \xi) y z^2 + 2 \xi y^2 z^2 \Big]
\end{aligned} \tag{4-11}$$

$$\begin{aligned}
H_L^{2(\ell_1 \ell_2)}(y, z) &= \frac{1}{R_y^3 R_z} \Bigg[24 \xi - 25 \xi^2 + 3 \xi^3 - \frac{(1 - \xi)^2 \xi^2}{y^2} - \frac{(8 - 9 \xi) (1 - \xi) \xi}{y} \\
& - (22 - 9 \xi) \xi y + 2 \xi y^2 + 6 \xi y^3 - 2 \xi y^4 \\
& - \frac{(1 - \xi)^2 \xi^2}{z^2} + \frac{3 (1 - \xi) \xi^2 y}{z^2} - \frac{2 \xi^2 y^2}{z^2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{\xi^2 y^3}{z^2} + \frac{\xi^2 y^4}{z^2} - \frac{(16 - 11\xi)(1 - \xi)\xi}{z} \\
& + \frac{2(1 - \xi)^2(2 - \xi)\xi}{yz} + \frac{\xi(22 - 21\xi + \xi^2)y}{z} \\
& - \frac{(10 - 3\xi)\xi y^2}{z} - \frac{(2 - \xi)\xi y^3}{z} + \frac{2\xi y^4}{z} \\
& - 13(2 - \xi)\xi z + \frac{(1 - \xi)\xi^2 z}{y^2} + \frac{\xi(10 - 15\xi + 3\xi^2)z}{y} \\
& + \xi(18 + \xi)yz + 2\xi y^2 z - 4\xi y^3 z + \xi(10 + \xi)z^2 \\
& - \frac{(1 - \xi)\xi^2 z^2}{y^2} - \frac{2(3 - 4\xi)\xi z^2}{y} - 2\xi y z^2 - 2\xi y^2 z^2 \Big]
\end{aligned} \tag{4-12}$$

$$\begin{aligned}
H_F^{4(\ell_1 \ell_2)}(y, z) &= \frac{2}{R_y^2 R_z} \Bigg[-32 + 26\xi + \xi^2 + \frac{2(1 - \xi)^2 \xi}{y^2} + \frac{16(1 - \xi)^2}{y} \\
& + 4(7 - \xi)y - 4(4 - \xi)y^2 + 4y^3 + \frac{2(1 - \xi)^2 \xi}{z^2} \\
& - \frac{4(1 - \xi)\xi y}{z^2} + \frac{(4 - 3\xi)\xi y^2}{z^2} - \frac{(2 - \xi)\xi y^3}{z^2} \\
& + \frac{6(4 - 3\xi)(1 - \xi)}{z} - \frac{4(1 - \xi)^2(2 - \xi)}{yz} - \frac{(28 - 32\xi + 3\xi^2)y}{z} \\
& + \frac{2(1 - \xi)(8 - \xi)y^2}{z} - \frac{4(1 - \xi)y^3}{z} + 2(4 - \xi)(1 + \xi)z \\
& - \frac{2(1 - \xi)\xi z}{y^2} - \frac{(12 - 16\xi + \xi^2)z}{y} + 4(1 - \xi)yz - 4\xi z^2 \\
& + \frac{2(1 - \xi)\xi z^2}{y^2} + \frac{(4 - 6\xi - \xi^2)z^2}{y} - 4yz^2 \Big]
\end{aligned} \tag{4-13}$$

Die Schleifenbeiträge sind durch

$$\begin{aligned}
H_U^1(loop) &= 4q^2 N_C (Re A + v^2 Re C) \\
H_U^2(loop) &= 4q^2 N_C (Re A - v^2 Re C) \\
H_L^1(loop) &= 4q^2 N_C \left(\frac{1}{2}\right) (\xi Re A + v^2 Re B) \\
H_L^2(loop) &= 4q^2 N_C \left(\frac{1}{2}\right) (\xi Re A + v^2 Re B) \\
H_F^3(loop) &= 4q^2 N_C (-2v) Im B \\
H_F^4(loop) &= 4q^2 N_C (v) (Re A + Re C) \\
H_U^{1(\ell_1 \ell_2)}(loop) &= -4q^2 N_C (Re A + v^2 Re C) \\
H_U^{2(\ell_1 \ell_2)}(loop) &= -4q^2 N_C (Re A - v^2 Re C) \\
H_L^{1(\ell_1 \ell_2)}(loop) &= 4q^2 N_C \left(\frac{1}{2}\right) (\xi Re A + v^2 Re B) \\
H_L^{2(\ell_1 \ell_2)}(loop) &= 4q^2 N_C \left(\frac{1}{2}\right) (\xi Re A + v^2 Re B)
\end{aligned} \tag{4-14}$$

$$\begin{aligned}
H_F^{3(\ell_1 \ell_2)}(loop) &= 4q^2 N_C(2v) \operatorname{Im} B \\
H_F^{4(\ell_1 \ell_2)}(loop) &= -4q^2 N_C(v)(\operatorname{Re} A + \operatorname{Re} C)
\end{aligned}$$

gegeben, wobei die Einschleifenfaktoren $\operatorname{Re} A$, $\operatorname{Re} B$ und $\operatorname{Re} C$ in Gl. (3-48) angegeben sind. Dazu kommt der Einschleifenfaktor $\operatorname{Im} B$, der durch

$$\operatorname{Im} B = \frac{\pi \xi}{v} \quad (4-15)$$

gegeben ist. Dieser Einschleifenfaktor trägt in der Hadrontensorkomponente $H_F^{3(\ell_1 \ell_2)}$ bei. Der Hadrontensor $H_{\mu\nu}^3$ ist proportional zu den Vektor-Strom und den Axialvektor-Strom und deshalb taucht der Imaginärteil von B auf.

4.3.3 Die Phasenraumintegration

Die Infrarot-Singularität wird durch die Einführung einer Gluonmasse reguliert [53]. Die Infrarot-Singularität der Baum-Graphen und der Einschleifebeiträge heben sich auf. Es ist klar, daß die endlichen Ergebnisse unabhängig vom Regularisierungsverfahren sind.

Nach der Integration über y und z sehen die Hadrontensorkomponenten folgendermaßen aus:

$$\begin{aligned}
H_U^1(\alpha_s) &= N \left[2(2 + 7\xi)v - 8(2 - \xi)vt_{10} - 16(2 - \xi)vt_{12} \right. \\
&\quad + (48 - 48\xi + 7\xi^2)t_3 + 2(1 - \sqrt{\xi})(2 + 4\sqrt{\xi} - 3\xi)\sqrt{\xi}t_4 \\
&\quad \left. - 2\xi(2 + 3\xi)t_5 - 4(2 - \xi)^2(t_8 - t_9) \right], \quad (4-16)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
H_U^2(\alpha_s) &= \xi N \left[12v - 8vt_{10} - 16vt_{12} + 2(6 - \xi)t_3 + 2(1 - \sqrt{\xi})\sqrt{\xi}t_4 \right. \\
&\quad \left. + 2\xi t_5 - 4(2 - \xi)(t_8 - t_9) \right], \quad (4-17)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
H_L^1(\alpha_s) &= N \left[\left(8 - 23\xi + \frac{3\xi^2}{2} \right)v - 4\xi vt_{10} - 8\xi vt_{12} + \right. \\
&\quad \xi \left(22 - 8\xi + \frac{3\xi^2}{4} \right)t_3 - 2(1 - \sqrt{\xi})(2 + 4\sqrt{\xi} - 3\xi)\sqrt{\xi}t_4 \\
&\quad \left. + 2\xi(2 + 3\xi)t_5 - 2(2 - \xi)\xi(t_8 - t_9) \right], \quad (4-18)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
H_L^2(\alpha_s) &= \xi N \left[\frac{3(10 - \xi)v}{2} - 4vt_{10} - 8vt_{12} + \left(6 - 4\xi - \frac{3\xi^2}{4} \right)t_3 \right. \\
&\quad \left. - 2(1 - \sqrt{\xi})\sqrt{\xi}t_4 - 2\xi t_5 - 2(2 - \xi)(t_8 - t_9) \right], \quad (4-19)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
H_F^4(\alpha_s) &= N \left[-16(1 - \sqrt{\xi})\sqrt{\xi} - 16v^2(t_{10} + t_{11}) - 16(t_1 - t_2) \right. \\
&\quad \left. + 8(2 - 3\xi)vt_3 - 4(4 - 5\xi)t_6 + 8(2 - \xi)v(t_7 - t_8) \right]. \quad (4-20)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
H_U^{1(\ell_1 \ell_2)}(\alpha_s) = & N \left[8 + 13\xi - \sqrt{\xi}(4 + 25\xi) - \frac{1}{2v}(10 - 7\xi - 19\xi^2) \right. \\
& - v\xi \left(t_1 + t_{12} - \frac{1}{2}t_{11} - \ln 4 \right) + \\
& + 2(2 - \xi) \left(\frac{2 - \xi}{2}(t_8 - t_{16}) + v(t_{10} + 2t_{12}) \right) \\
& - \frac{1}{2}(8 + 2\xi + 3\xi^2)t_{14} \\
& + \frac{1}{v^3}(8 - 15\xi + 13\xi^2 - 4\xi^3)t_{15} \\
& - \frac{1}{2v^2}(16 - 36\xi + 55\xi^2 - 11\xi^3 - 4v^3\xi)t_{13} + \\
& \left. - \frac{1}{v^2} \left(4 - 3\xi + \xi^2 + v^3(8 - 3\xi) \right) t_3 \right], \tag{4-21}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
H_U^{2(\ell_1 \ell_2)}(\alpha_s) = & \xi N \left[6 - 5\sqrt{\xi} - \frac{1}{v} - v \left(t_1 + t_{12} - \frac{1}{2}t_{11} - \ln 4 \right) \right. \\
& - \frac{1}{2}(8 + \xi)t_{14} + \frac{1}{2v^2}(4 - \xi + 4v^3)t_{13} \\
& + 2 \left(\frac{2 - \xi}{2}(t_8 - t_{16}) + v(t_{10} + 2t_{12}) \right) \\
& \left. + \frac{1}{4v^3}(2 - 3\xi)(8 - 7\xi)t_{15} + \frac{1}{4v^2} \left(\xi(9 - 8\xi) - 20v^3 \right) t_3 \right], \tag{4-22}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
H_L^{1(\ell_1 \ell_2)}(\alpha_s) = & N \left[-\frac{3}{4}(24 + 22\xi - \xi^2) + \frac{1}{4}\sqrt{\xi}(48 + 112\xi + 3\xi^2) \right. \\
& + \frac{1}{8v}(128 - 106\xi - 81\xi^2 + 3\xi^3) \\
& + v\xi \left(t_1 + t_{12} - \frac{1}{2}t_{11} - \ln 4 \right) \\
& - \xi \left(\frac{2 - \xi}{2}(t_8 - t_{16}) + v(t_{10} + 2t_{12}) \right) + \xi(6 + \xi)t_{14} \\
& - \frac{1}{8v^2}(64 - 32\xi - 164\xi^2 + 51\xi^3 - 3\xi^4 + 16v^3\xi)t_{13} + \\
& - \frac{\xi}{4v^3}(28 - 24\xi + 3\xi^2)t_{15} \\
& \left. + \frac{\xi}{4v^2}(30 - 27\xi + 4\xi^2 + 12v^3)t_3 \right], \tag{4-23}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
H_L^{2(\ell_1 \ell_2)}(\alpha_s) = & \xi N \left[\frac{1}{4}(34 - 3\xi) - \frac{3}{4}\sqrt{\xi}(12 + \xi) \right. \\
& - \frac{1}{8v}(46 - 65\xi + 3\xi^2) + v \left(t_1 + t_{12} - \frac{1}{2}t_{11} - \ln 4 \right) \\
& - \left(\frac{2 - \xi}{2}(t_8 - t_{16}) + v(t_{10} + 2t_{12}) \right) - (1 + \xi)t_{14} \\
& \left. + \frac{1}{8v^2}(80 - 136\xi + 35\xi^2 - 3\xi^3 - 16v^3)t_{13} \right] \tag{4-24}
\end{aligned}$$

$$H_F^{3(\ell_1 \ell_2)}(\alpha_s) = N \left[2\pi v \xi \right], \quad (4-25)$$

$$\begin{aligned}
H_F^{4(\ell_1 \ell_2)}(\alpha_s) = & N \left[2\sqrt{\xi} + 4v^2 + \frac{2\xi}{v^2}(5 - 3\xi)(t_1 - \ln 4) \right. \\
& + 2v^2 t_{11} - (4 + \xi)t_{14} + 2v(2 - \xi)(t_8 - t_{16} + t_{22}) \\
& + \frac{1}{4v^2}(16 - 32\xi + 18\xi^2 - \xi^3)t_{21} + \\
& + \frac{\xi}{v^3}(5 - 8\xi + 4\xi^2)(t_{20} - t_{19}) \\
& + \frac{\sqrt{\xi}}{2v^3}(8 - 11\xi + 3\xi^2 + 2\xi^3)(t_{20} + t_{19}) + \\
& + \frac{\xi}{4v^2}(20 - 22\xi + \xi^2)(t_{18} - t_{17}) \\
& + \frac{\sqrt{\xi}}{4v^2}(16 - 10\xi - 5\xi^2)(t_{18} + t_{17}) + \\
& - \frac{\sqrt{\xi}}{2v^2}(2 + 7\xi - 5\xi^2)(t_{12} - t_{10}) \\
& + \frac{1}{v^2}(2 - \xi)(1 + \xi)(t_{12} + t_{10}) + \\
& + \frac{1}{v^3}(4 - 5\xi + 2\xi^3)t_{15} + \frac{1}{2v^2}(8 - 18\xi + \xi^2 + 5\xi^3)t_{13} + \\
& \left. - \frac{1}{4v^2}(8 - 18\xi + \xi^2 + 5\xi^3 + 2v(8 - 14\xi + 7\xi^2))t_3 \right]. \quad (4-26)
\end{aligned}$$

mit den Konstanten $N = \alpha_s N_C C_F q^2 / 4\pi v$, wobei einige neue *Zerfallsratenterme* t_i auftauchen, die durch die Integrale der unpolarisierten Hadrontensoren

$$J[k, l] = \int dy \int dz \frac{y^k z^l}{\sqrt{(1-y)^2 - \xi}} \quad (4-27)$$

$$T[k, l] = \int dy \int dz \frac{y^k z^l}{((1-y)^2 - \xi)} \quad (4-28)$$

und die neue Integrale für die polarisierten Hadrontensoren

$$M[m, l] = \int dy \int dz \frac{y^m z^l}{[(1-y)^2 - \xi] \sqrt{((1-z)^2 - \xi)}} \quad (4-29)$$

$$L[m, l] = \int dy \int dz \frac{y^m z^l}{[\sqrt{((1-y)^2 - \xi)}]^3 \sqrt{((1-z)^2 - \xi)}} \quad (4-30)$$

gegeben sind, mit

$$-2 \leq l \leq 2 \quad \text{und} \quad -2 \leq k \leq 2, \quad (4-31)$$

$$-2 \leq m \leq 4 \quad \text{und} \quad n = 2, 3. \quad (4-32)$$

Die Integrale für die unpolarisierten Hadrontensoren $J[k, l]$ und $T[k, l]$ sind bereits in der Doktorarbeit von Stefan Groote [63] berechnet worden. Bei der Berechnung der polarisierten Hadrontensoren treten zwei neue Integrale vom Typ (4-29) und vom Typ (4-30) auf, die in dieser Arbeit ausgerechnet werden. Die Rechnung der Integrale $M[k, l]$ und der $L[k, l]$ wird im Anhang C ausführlich dargelegt.

Die zusätzliche *Zerfallsratenterme*, die die Integrale vom Typ (4-29) und vom Typ (4-30) zusammenfassen, lauten

$$t_1 = \ln \left(\frac{2\xi^{3/2}}{(2 - \sqrt{\xi})^2 (1 + \sqrt{\xi})} \right), \quad (4-33)$$

$$t_2 = \ln \left(\frac{2\sqrt{\xi}}{1 + \sqrt{\xi}} \right), \quad (4-34)$$

$$t_4 = \text{Li}_2(w) - \text{Li}_2(-w) + \text{Li}_2\left(\frac{a}{b}w\right) - \text{Li}_2\left(-\frac{a}{b}w\right), \quad (4-35)$$

$$t_5 = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{a\sqrt{\xi}}{4(1 + \sqrt{\xi})} \right) \ln \left(\frac{1+v}{1-v} \right) + \text{Li}_2 \left(\frac{2\sqrt{\xi}}{a(1+w)} \right) - \text{Li}_2 \left(\frac{2\sqrt{\xi}}{a(1-w)} \right) + \\ + \text{Li}_2 \left(\frac{1+w}{2} \right) - \text{Li}_2 \left(\frac{1-w}{2} \right) + \text{Li}_2 \left(\frac{a(1+w)}{4} \right) - \text{Li}_2 \left(\frac{a(1-w)}{4} \right), \quad (4-36)$$

$$t_6 = \ln^2(1+w) + \ln^2(1-w) + \ln \left(\frac{a}{8} \right) \ln(1-w^2) + \\ + \text{Li}_2 \left(\frac{2\sqrt{\xi}}{a(1+w)} \right) + \text{Li}_2 \left(\frac{2\sqrt{\xi}}{a(1-w)} \right) - 2\text{Li}_2 \left(\frac{2\sqrt{\xi}}{a} \right) + \\ + \text{Li}_2 \left(\frac{1+w}{2} \right) + \text{Li}_2 \left(\frac{1-w}{2} \right) - 2\text{Li}_2 \left(\frac{1}{2} \right) + \\ + \text{Li}_2 \left(\frac{a(1+w)}{4} \right) + \text{Li}_2 \left(\frac{a(1-w)}{4} \right) - 2\text{Li}_2 \left(\frac{a}{4} \right), \quad (4-37)$$

$$t_7 = 2 \ln \left(\frac{1-\xi}{2\xi} \right) \ln \left(\frac{1+v}{1-v} \right) - \text{Li}_2 \left(\frac{2v}{(1+v)^2} \right) + \text{Li}_2 \left(-\frac{2v}{(1-v)^2} \right) + \\ - \frac{1}{2} \text{Li}_2 \left(-\left(\frac{1+v}{1-v} \right)^2 \right) + \frac{1}{2} \text{Li}_2 \left(-\left(\frac{1-v}{1+v} \right)^2 \right) + \\ + \text{Li}_2 \left(\frac{2w}{1+w} \right) - \text{Li}_2 \left(-\frac{2w}{1-w} \right) - 2\text{Li}_2 \left(\frac{w}{1+w} \right) + 2\text{Li}_2 \left(-\frac{w}{1-w} \right) + \\ + \text{Li}_2 \left(\frac{2aw}{b+aw} \right) - \text{Li}_2 \left(-\frac{2aw}{b-aw} \right) - 2\text{Li}_2 \left(\frac{aw}{b+aw} \right) + 2\text{Li}_2 \left(-\frac{aw}{b-aw} \right), \quad (4-38)$$

$$t_{11} = \ln \left(\frac{4(1 - \sqrt{\xi})^2}{\xi} \right), \quad (4-39)$$

$$t_{17} = \frac{5}{2} \ln \left(\frac{1+v}{2 - \sqrt{\xi}} \right) \ln \left(\frac{2 - \sqrt{\xi}}{2} \right) + \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1-v}{2 - \sqrt{\xi}} \right) \ln \left(\frac{1+v}{2} \right) + \\ + \text{Li}_2(1) - \text{Li}_2 \left(\sqrt{\frac{1-v}{1+v}} \right) + -2\text{Li}_2 \left(\frac{\xi}{(2 - \sqrt{\xi})^2} \right) + \quad (4-40)$$

$$\begin{aligned}
& +2\text{Li}_2\left(\frac{\sqrt{\xi}}{2-\sqrt{\xi}}\right) + \text{Li}_2\left(\frac{(1-v)^2}{\sqrt{\xi}(2-\sqrt{\xi})}\right) - \text{Li}_2\left(\frac{2-\sqrt{\xi}}{1+v}\right), \\
t_{18} = & \ln\left(\frac{1+v}{2-\sqrt{\xi}}\right) \ln\left(\frac{2}{\sqrt{\xi}}\right) + \ln\left(\frac{\sqrt{\xi}(1+v)}{(2-\sqrt{\xi})^2}\right) \ln\left(\frac{2}{2+\sqrt{\xi}}\right) + \\
& + \text{Li}_2(-1) + \text{Li}_2\left(\frac{2-\sqrt{\xi}}{2+\sqrt{\xi}}\right) - \text{Li}_2\left(-\frac{2-\sqrt{\xi}}{2+\sqrt{\xi}}\right) + \\
& -2\text{Li}_2\left(\frac{-\sqrt{\xi}}{2-\sqrt{\xi}}\right) + 2\text{Li}_2\left(\frac{-\xi}{4-\xi}\right) - \text{Li}_2\left(\frac{-(1-v)^2}{\sqrt{\xi}(2+\sqrt{\xi})}\right) + \\
& -\text{Li}_2\left(\frac{1+v}{2+\sqrt{\xi}}\right) + \text{Li}_2\left(-\sqrt{\frac{1-v}{1+v}}\right),
\end{aligned} \tag{4-41}$$

$$\begin{aligned}
t_{19} = & \ln\left(\frac{1+v}{1-v}\right) \ln\left(\frac{1+v}{2-\sqrt{\xi}}\right) + \ln^2\left(\frac{1+v}{2-\sqrt{\xi}}\right) + \\
& +2\text{Li}_2\left(\frac{1-v}{2-\sqrt{\xi}}\right) + 2\text{Li}_2\left(\frac{2-\sqrt{\xi}}{1+v}\right) - 4\text{Li}_2(1),
\end{aligned} \tag{4-42}$$

$$\begin{aligned}
t_{20} = & \ln\left(\frac{1+v}{1-v}\right) \ln\left(\frac{2-\sqrt{\xi}}{1+v}\right) + 2\text{Li}_2(-w) - 2\text{Li}_2(w) + \\
& -2\text{Li}_2\left(-\frac{1-v}{2-\sqrt{\xi}}w\right) + 2\text{Li}_2\left(\frac{1+v}{2-\sqrt{\xi}}w\right),
\end{aligned} \tag{4-43}$$

$$\begin{aligned}
t_{21} = & 3\left(\frac{1}{2}\ln^2\left(\frac{1+v}{1-v}\right) + \ln\left(\frac{4}{\xi}\sqrt{\frac{1-v}{1+v}}\right) \ln\left(\frac{\sqrt{\xi}}{2-\sqrt{\xi}}\right)\right) + \\
& +3\left(\text{Li}_2\left(\frac{2-\sqrt{\xi}}{1+v}\right) - \text{Li}_2\left(\frac{2-\sqrt{\xi}}{1+v}\sqrt{\frac{1-v}{1+v}}\right) + \right. \\
& +\text{Li}_2\left(\frac{1-v}{2-\sqrt{\xi}}\sqrt{\frac{1-v}{1+v}}\right) - \text{Li}_2\left(\frac{1-v}{2-\sqrt{\xi}}\right) \Big) + \\
& +\text{Li}_2\left(\frac{4v}{(1+v)^2}\right) + \text{Li}_2\left(\frac{-2v}{1-v}\right) - \text{Li}_2\left(\frac{2v}{1+v}\right),
\end{aligned} \tag{4-44}$$

$$\begin{aligned}
t_{22} = & 2\ln\left(\frac{1+v}{2-\sqrt{\xi}}\right) \ln\left(\frac{2(1+\sqrt{\xi})(2-\sqrt{\xi})}{(1+v)^2}\right) + \\
& +4\text{Li}_2\left(\frac{\sqrt{\xi}-1+v}{2v}\right) - 4\text{Li}_2\left(\frac{(1-v)(\sqrt{\xi}-1+v)}{2v(2-\sqrt{\xi})}\right).
\end{aligned} \tag{4-45}$$

mit $a := 2 + \sqrt{\xi}$, $b := 2 - \sqrt{\xi}$ und $w := \sqrt{(1-\sqrt{\xi})/(1+\sqrt{\xi})}$.

4.4 Numerische Resultate

Die Abbildungen (4.1, 4.2, 4.3) zeigen die Polarwinkelabhängigkeit der Longitudinal-Longitudinal Spin-Korrelation $\langle P^{\ell\ell} \rangle(\cos\theta)$ für verschiedene Schwerpunktsenergien jeweils im Fall des Topquarks, des Bottomquarks und des Charmquarks. Die Longi-

tudinal-Longitudinal Spin-Korrelation $\langle P^{\ell\ell} \rangle(\cos\theta)$ zeigt ein ähnliches Verhalten für die drei verschiedene Quarks. Sie hat die Tendenz, für eine Schwerpunktsenergie in der Nähe der $q\bar{q}$ -Schwelle und $\cos\theta = 0$ gegen Null und für $\cos\theta = \pm 1$ gegen -1 zu gehen. Für Schwerpunktsenergien oberhalb der $q\bar{q}$ -Schwelle tritt für das Topquark und das Bottomquark eine starke Asymmetrie bezüglich des Polarwinkels auf. Für das Charmquark ist diese Asymmetrie unterdrückt. Im Fall des Topquarks ist die Longitudinal-Longitudinal Spin-Korrelation $\langle P^{\ell\ell} \rangle(\cos\theta)$ in der unteren Hemisphäre größer als in den oberen Hemisphäre. Das Verhalten des Bottomquarks ist entgegengesetzt zu demjenigen des Topquarks.

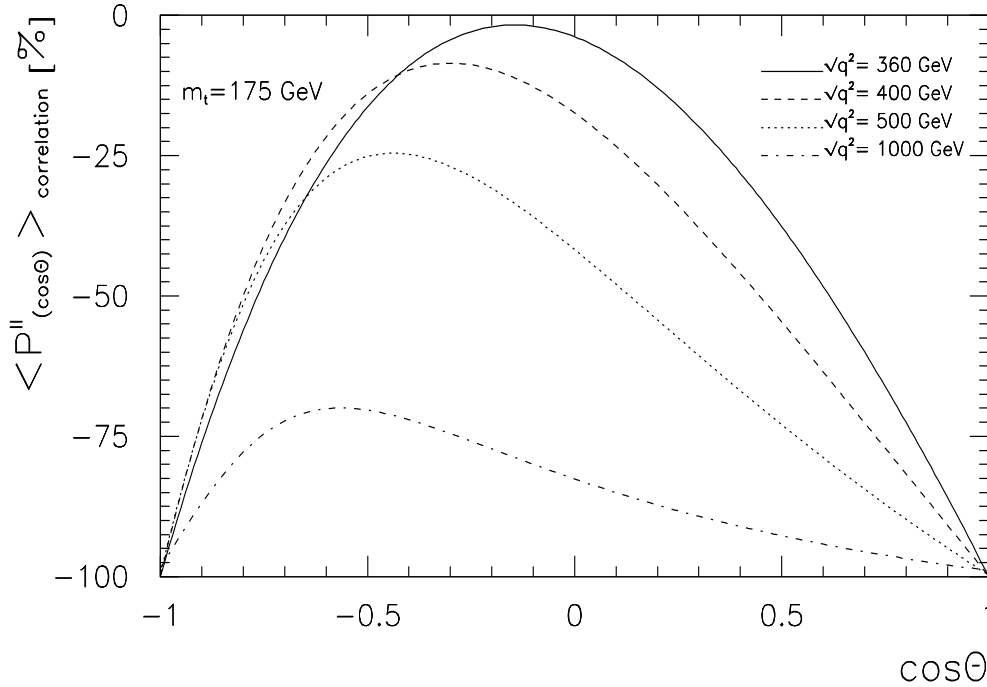


Abbildung 4.1: Polarwinkelabhängigkeit von $\langle P^{\ell\ell} \rangle$ im Fall des Topquarks

Um die $O(\alpha_s)$ -Korrektur besser sehen zu können, wird $\langle \Delta P^{\ell\ell} \rangle$ als

$$\langle \Delta P^{\ell\ell} \rangle = \frac{\langle P^{\ell\ell} \rangle(\text{Born}) - \langle P^{\ell\ell} \rangle(\text{Born} + O(\alpha_s))}{\langle P^{\ell\ell} \rangle(\text{Born})} \quad (4-46)$$

definiert.

Die Abbildungen (4.4, 4.5, 4.6) stellen $\langle \Delta P^{\ell\ell} \rangle$ für verschiedene Schwerpunktsenergien jeweils im Fall des Topquarks, des Bottomquarks und des Charmquarks dar. Im Fall des Topquarks oszilliert $\langle \Delta P^{\ell\ell} \rangle$ zwischen -3.5 % und 2.5 %. Es ist zu bemerken, daß das Maximum und Minimum von $\langle \Delta P^{\ell\ell} \rangle$ sich innerhalb der unteren Hemisphäre befinden. Im Limes $q^2 \rightarrow \infty$ wird $\langle \Delta P^{\ell\ell} \rangle$ eine Konstante, die den anomalen Beitrag darstellt. Im Fall des Bottomquarks und des Charmquarks oszilliert $\langle \Delta P^{\ell\ell} \rangle$ jeweils zwischen -3.5 % und 9 % und zwischen -13 % und 8 %.

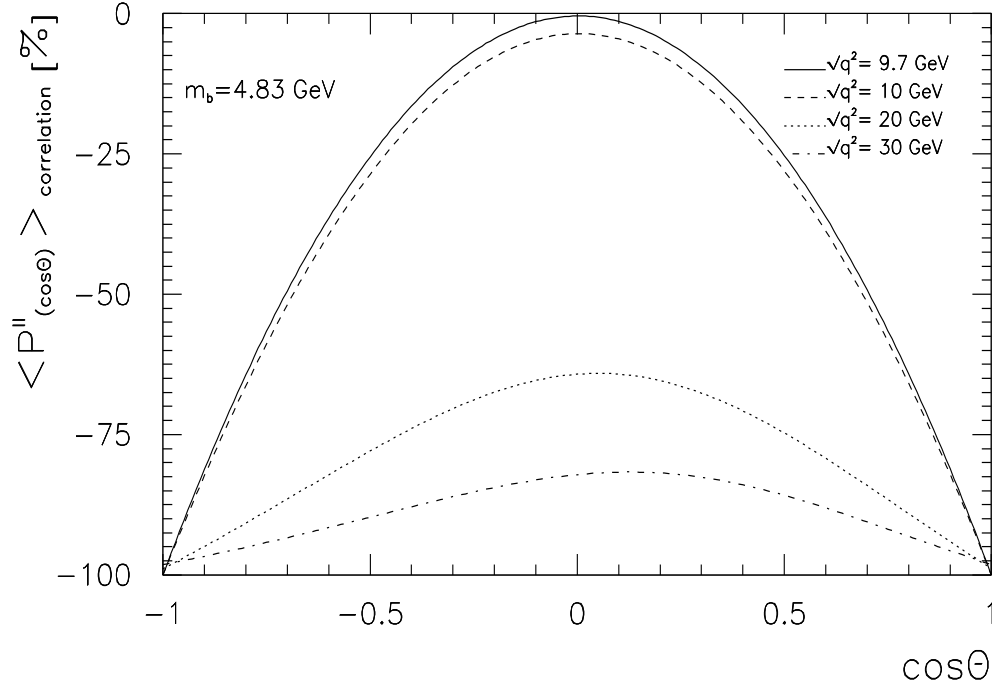


Abbildung 4.2: Polarwinkelabhängigkeit von $\langle P^{\ell\ell} \rangle$ im Fall des Bottomquarks

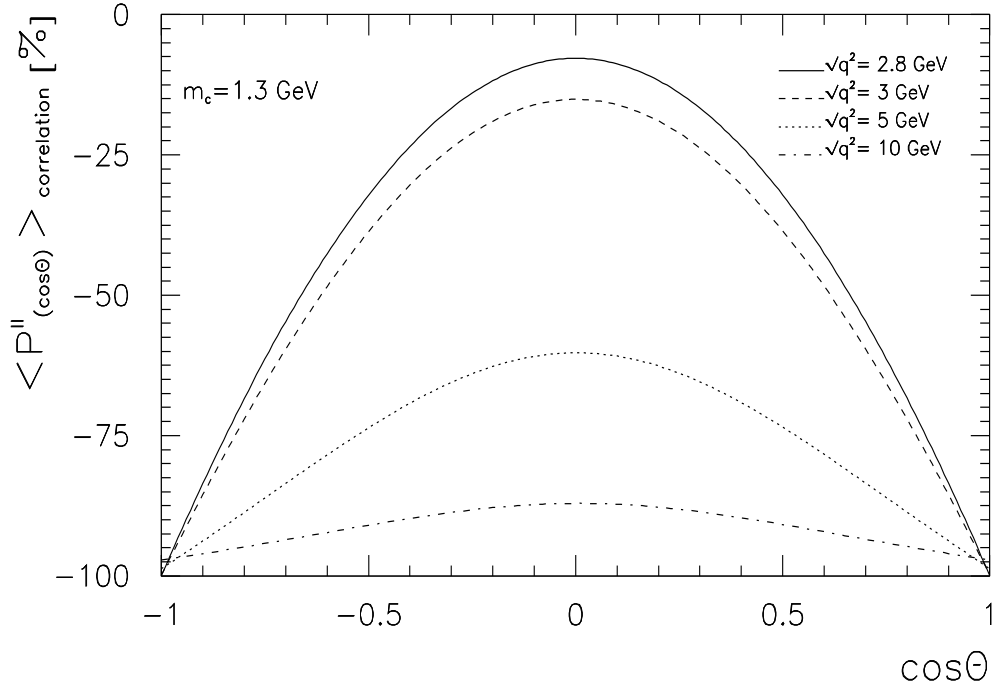
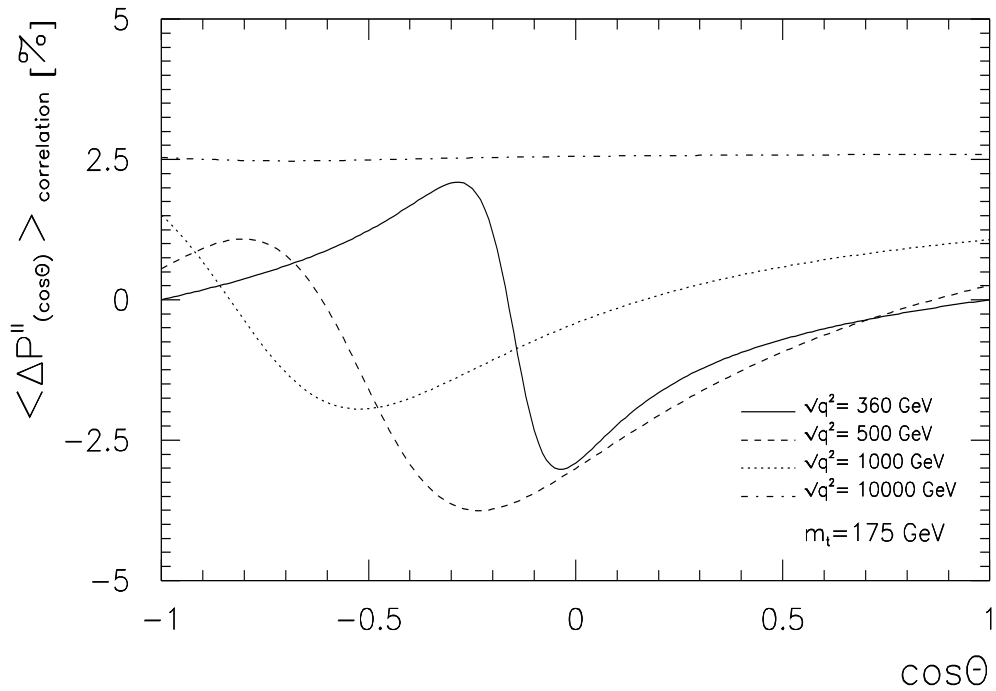
Die Abbildungen (4.7, 4.8, 4.9) zeigen die Polarwinkelabhängigkeit der Longitudinal-Longitudinal Spin-Korrelation $\langle P^{\ell\ell} \rangle$ für einen polarisierten Strahl einer bestimmten Schwerpunktsenergie jeweils im Fall des Topquarks, des Bottomquarks und des Charmquarks. Der Einfluss des polarisierten Strahls ist bedeutend nur in den Fall des Topquarks, wo er eine Verschiebung von $\langle P^{\ell\ell} \rangle$ bezüglich des unpolarisierten Falls erzeugt.

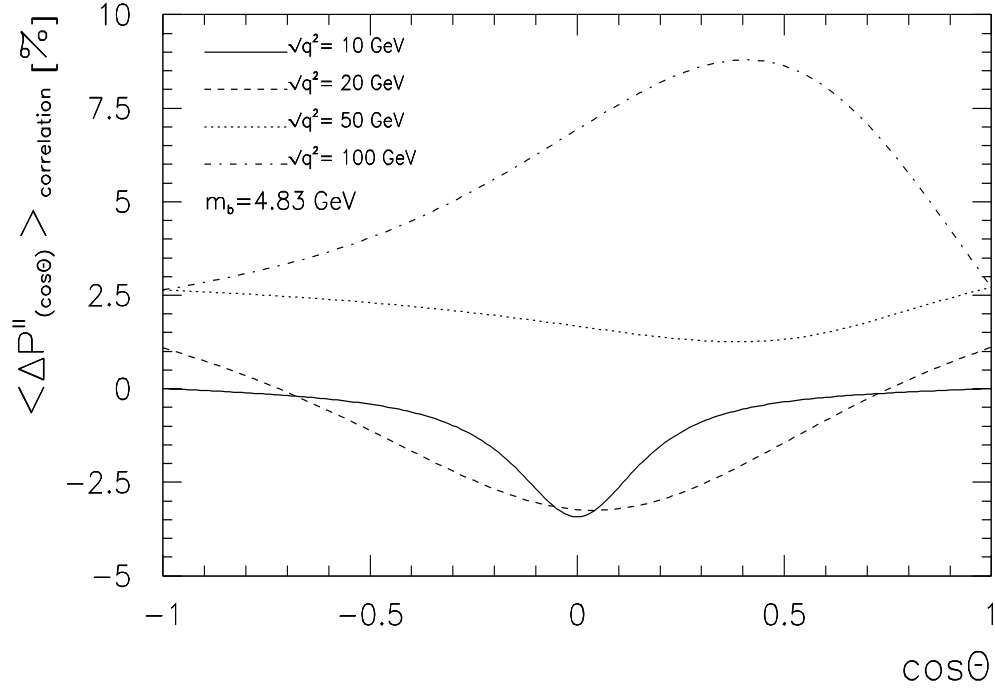
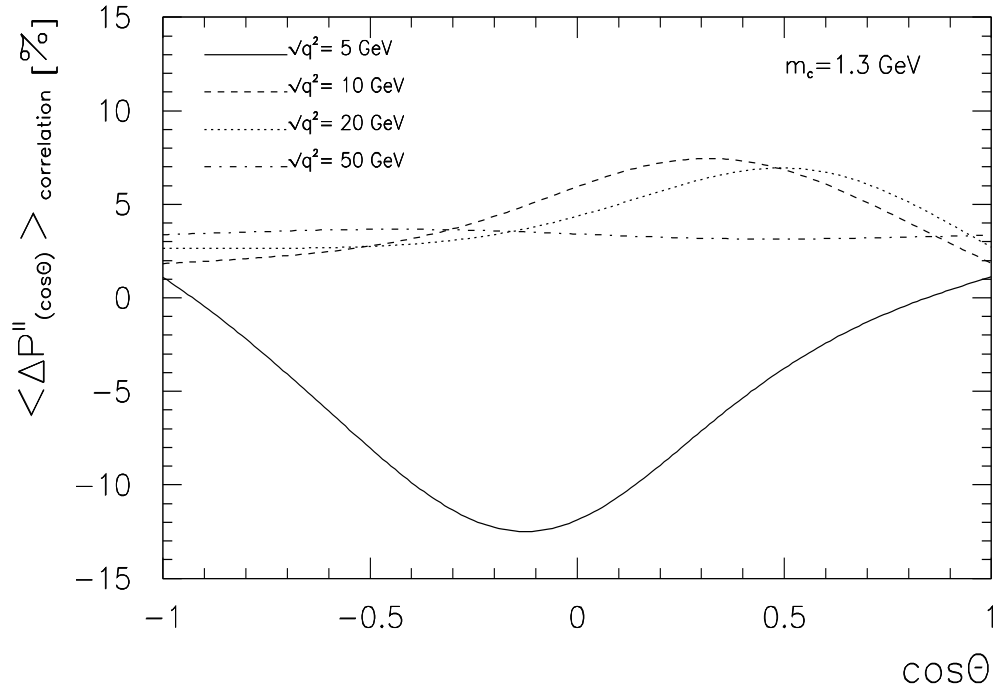
Die Abbildungen (4.10, 4.11, 4.12) zeigen die Polarwinkelabhängigkeit der Wirkungsquerschnitte für verschiedene Schwerpunktsenergien jeweils für die $t\bar{t}$ -, $b\bar{b}$ - und die $c\bar{c}$ -Produktion.

Die Abbildungen (4.13, 4.14, 4.15) zeigen die Polarwinkelabhängigkeit der Wirkungsquerschnitte für eine bestimmte Schwerpunktsenergie jeweils für die $t\bar{t}$ -, $b\bar{b}$ - und die $c\bar{c}$ -Produktion mit polarisiertem Strahl. Hier wiederholt sich dieser Effekt der Verschiebung des Wirkungsquerschnitts bezüglich des unpolarisierten Falls.

4.5 Die Spin-Konfiguration

In diesem Abschnitt wird die Behandlung der Spin Konfiguration analog zum Kapitel 3 durchgeführt.

Abbildung 4.3: Polarwinkelabhängigkeit von $\langle P^{\ell\ell} \rangle$ im Fall des CharmquarksAbbildung 4.4: $\langle \Delta P^{\ell\ell} \rangle$ im Fall des Topquarks

Abbildung 4.5: $\langle \Delta P^{\ell\ell} \rangle$ im Fall des BottomquarksAbbildung 4.6: $\langle \Delta P^{\ell\ell} \rangle$ im Fall des Charmquarks

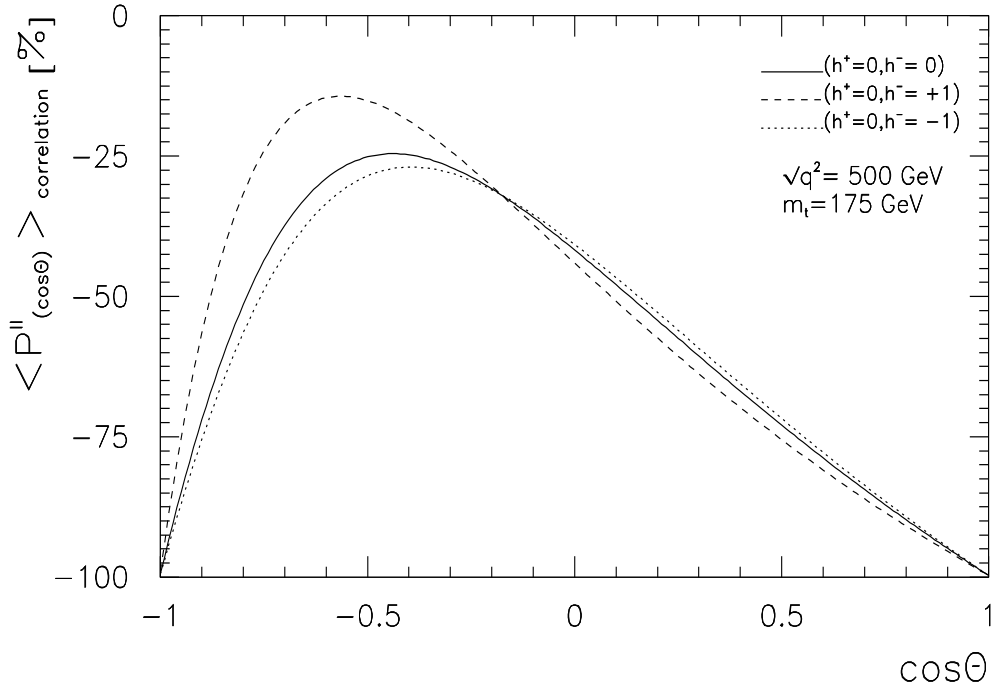


Abbildung 4.7: Polarwinkelabhängigkeit von $\langle P^{\ell\ell} \rangle$ im Fall des Topquarks mit polarisiertem Strahl

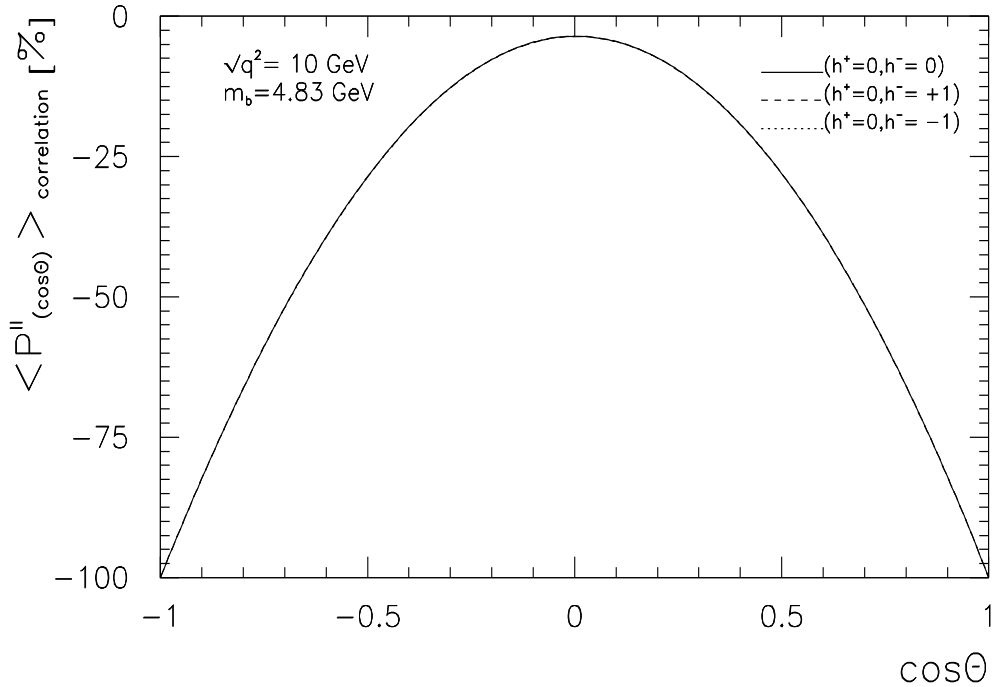


Abbildung 4.8: Polarwinkelabhängigkeit von $\langle P^{\ell\ell} \rangle$ im Fall des Bottomquarks mit polarisiertem Strahl

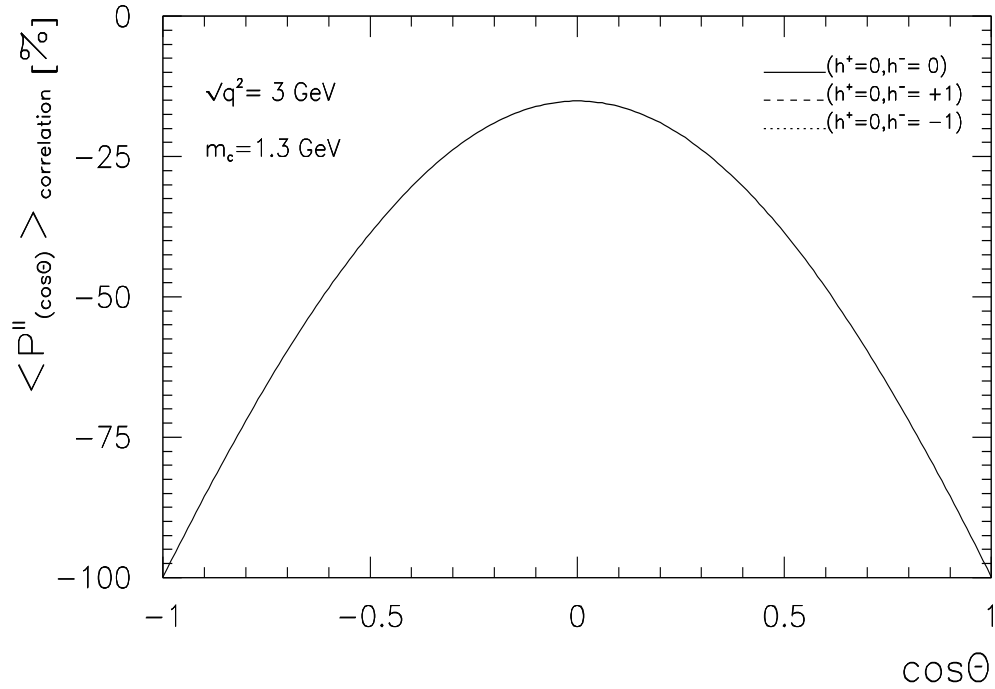


Abbildung 4.9: Polarwinkelabhängigkeit von $\langle P^{\ell\ell} \rangle$ im Fall des Charmquarks mit polarisiertem Strahl

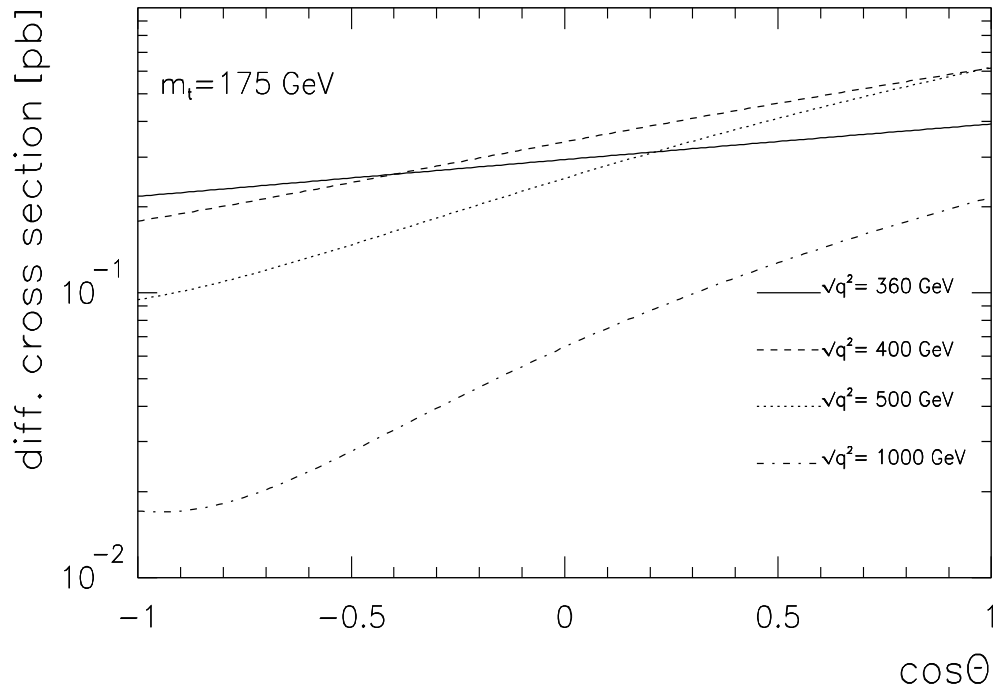


Abbildung 4.10: Polarwinkelabhängigkeit des Wirkungsquerschnitts im Fall des Topquarks

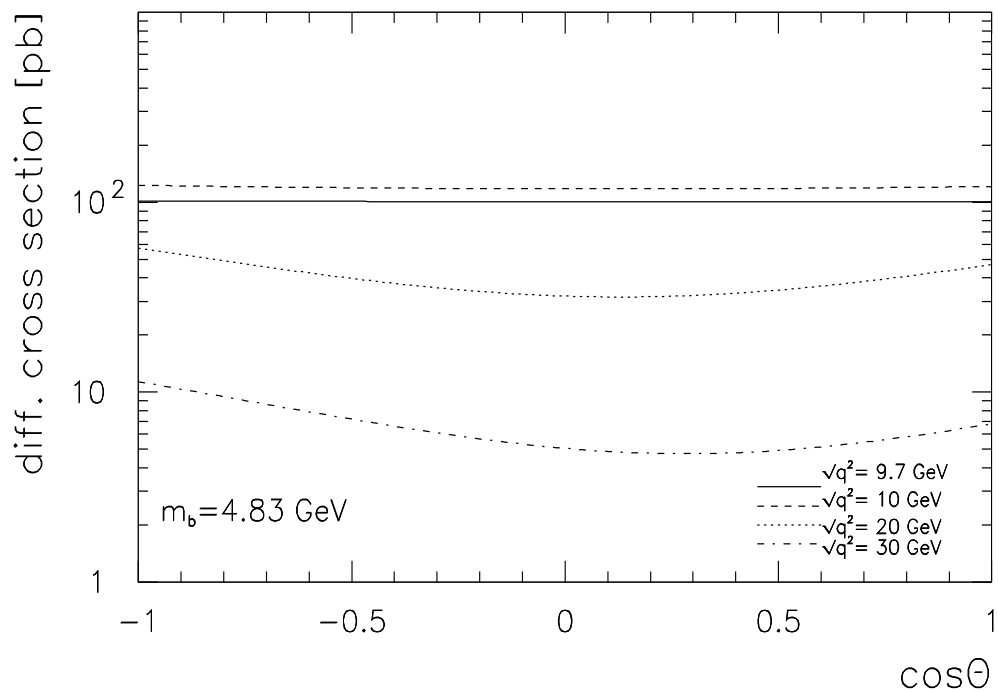


Abbildung 4.11: Polarwinkelabhängigkeit des Wirkungsquerschnitts im Fall des Bottomquarks

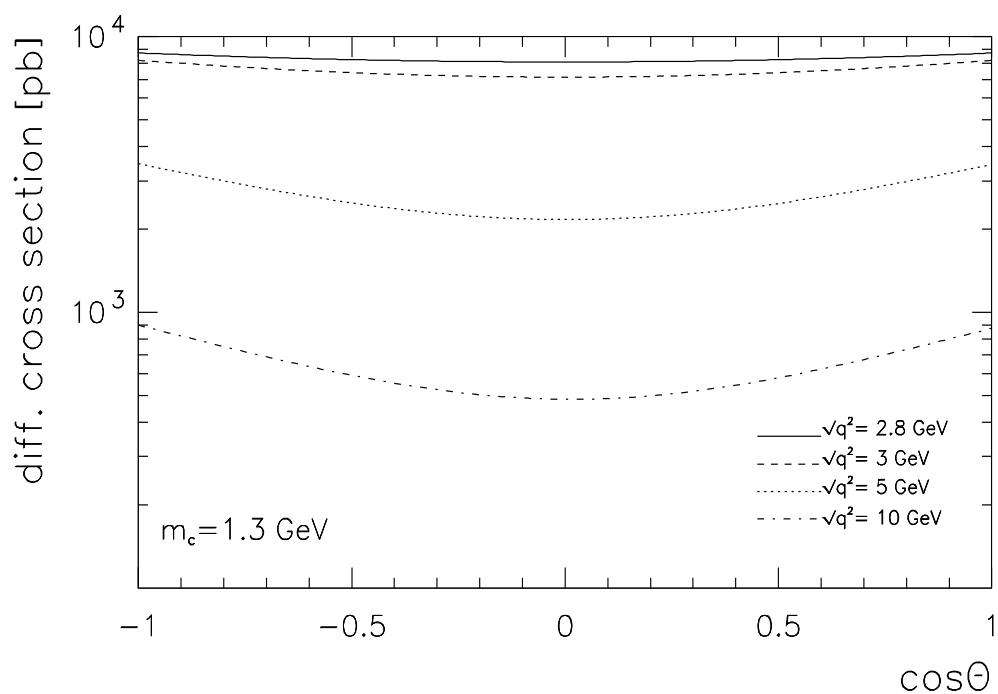


Abbildung 4.12: Polarwinkelabhängigkeit des Wirkungsquerschnitts im Fall des Charmquarks

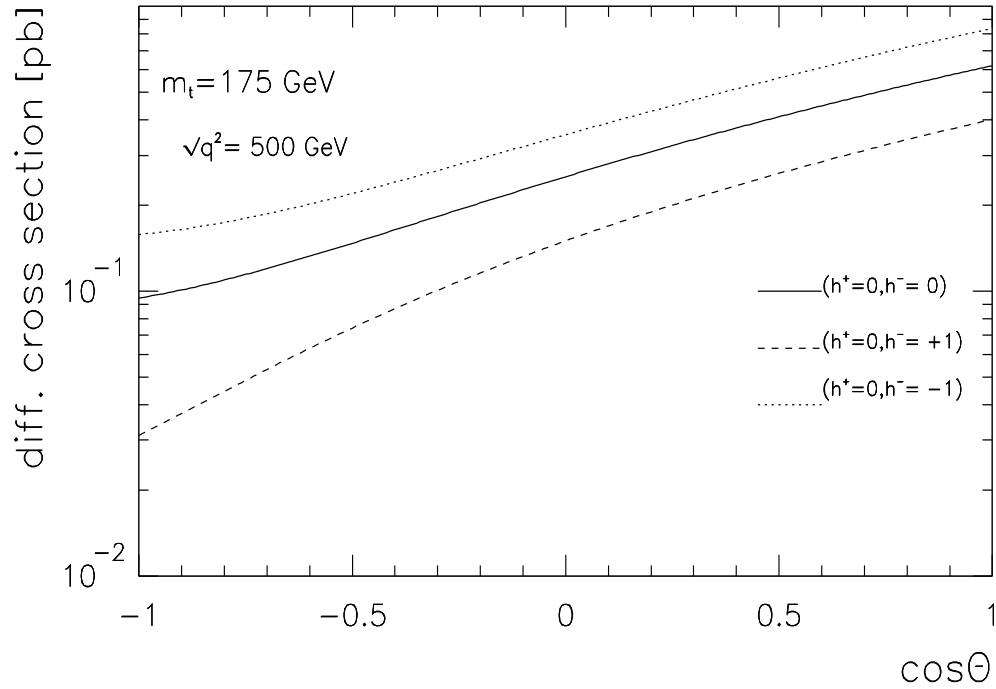


Abbildung 4.13: Polarwinkelabhängigkeit des Wirkungsquerschnitts im Fall des Topquarks mit polarisiertem Strahl

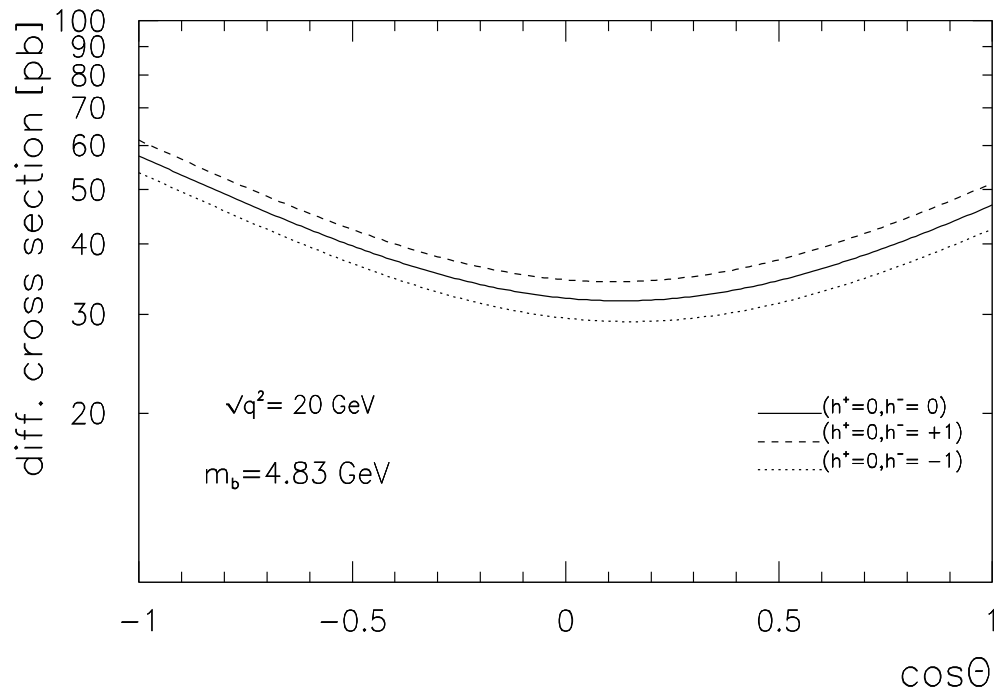


Abbildung 4.14: Polarwinkelabhängigkeit des Wirkungsquerschnitts im Fall des Bottomquarks mit polarisiertem Strahl

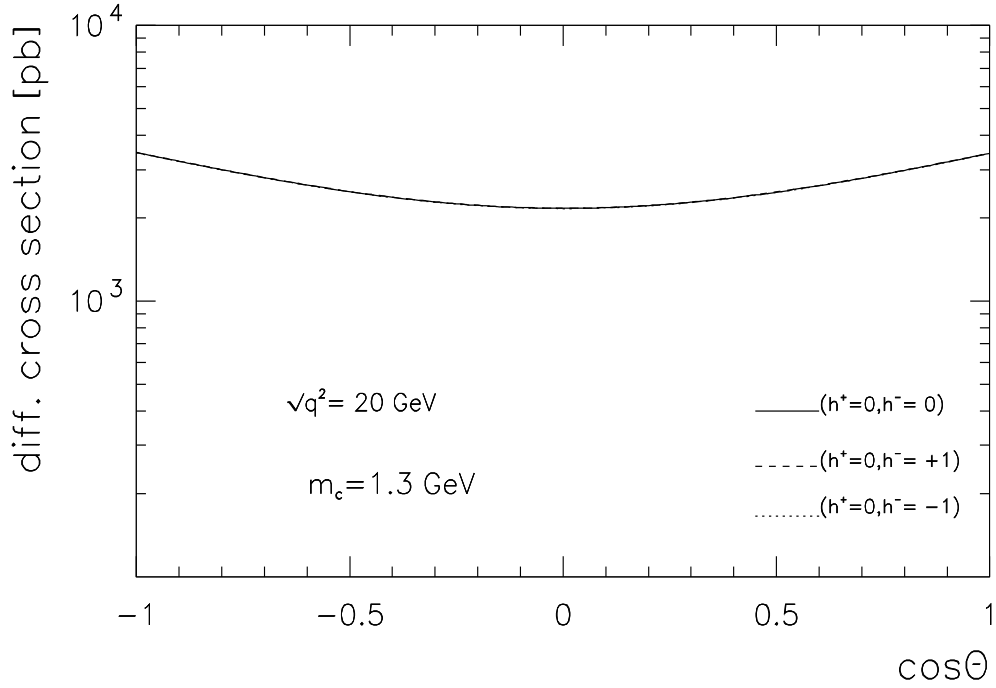


Abbildung 4.15: *Polarwinkelabhängigkeit des Wirkungsquerschnitts im Fall des Charmquarks mit polarisiertem Strahl*

4.5.1 Der Fall masseloser Quarks

Nach der Berechnung für „exakt“ masselose Quarks, wie vorher im Kapitel 3, erhält man

$$H_U^1(tree) = (-2) \left(\frac{-2(-1+y+z)}{(-1+y)^2} + \frac{2\varepsilon(-1+y+z)}{(-1+y)^2} + \frac{\varepsilon(y+z)^2}{yz} - \frac{2-2y+y^2-2z+z^2}{yz} \right) \quad (4-47)$$

$$H_U^2(tree) = 0 \quad (4-48)$$

$$H_U^{1(\ell_1\ell_2)}(tree) = 2 \left(\frac{-2(-1+y+z)}{(-1+y)^2} + \frac{2\varepsilon(-1+y+z)}{(-1+y)^2} + \frac{\varepsilon(y+z)^2}{yz} - \frac{2-2y+y^2-2z+z^2}{yz} \right) \quad (4-49)$$

$$H_U^{2(\ell_1\ell_2)}(tree) = 0 \quad (4-50)$$

$$H_F^4(tree) = \frac{1}{2} \left(\frac{4(-2+4y-3y^2+y^3+2z-z^2-yz^2)}{(-1+y)yz} - \frac{4\varepsilon(-y^2+y^3+2y^2z-z^2+yz^2)}{(-1+y)yz} \right) \quad (4-51)$$

$$H_F^{4(\ell_1\ell_2)}(tree) = \frac{1}{2} \left(\frac{-4(-2 + 4y - 3y^2 + y^3 + 2z - z^2 - yz^2)}{(-1 + y)yz} + \frac{4\varepsilon(-y^2 + y^3 + 2y^2z - z^2 + yz^2)}{(-1 + y)yz} \right) \quad (4-52)$$

Die Integration liefert

$$\begin{aligned} H_U^1(tree) &= q^2 C \left(\frac{4}{\varepsilon^2} + \frac{6}{\varepsilon} + 17 \right) \\ H_L^1(tree) &= (2) q^2 C \\ H_F^4(tree) &= q^2 C \left(\frac{4}{\varepsilon^2} + \frac{6}{\varepsilon} + 16 \right) \\ H_U^{4\ell}(tree) &= q^2 C \left(\frac{4}{\varepsilon^2} + \frac{6}{\varepsilon} + 17 \right) \\ H_F^{1\ell}(tree) &= q^2 C \left(\frac{4}{\varepsilon^2} + \frac{6}{\varepsilon} + 16 \right) \\ H_U^{1(\ell_1\ell_2)}(tree) &= -q^2 C \left(\frac{4}{\varepsilon^2} + \frac{6}{\varepsilon} + 17 \right) \\ H_L^{1(\ell_1\ell_2)}(tree) &= (2) q^2 C \\ H_F^{4(\ell_1\ell_2)}(tree) &= -q^2 C \left(\frac{4}{\varepsilon^2} + \frac{6}{\varepsilon} + 16 \right) \end{aligned} \quad (4-53)$$

Die Schleifenbeiträge lauten

$$\begin{aligned} H_U^1(loop) &= q^2 C' \left(-\frac{4}{\varepsilon^2} - \frac{6}{\varepsilon} - 16 \right) \\ H_L^1(loop) &= 0 \\ H_F^4(loop) &= q^2 C' \left(-\frac{4}{\varepsilon^2} - \frac{6}{\varepsilon} - 16 \right) \\ H_U^{4\ell}(loop) &= q^2 C' \left(-\frac{4}{\varepsilon^2} - \frac{6}{\varepsilon} - 16 \right) \\ H_F^{1\ell}(loop) &= q^2 C' \left(-\frac{4}{\varepsilon^2} - \frac{6}{\varepsilon} - 16 \right) \\ H_U^{1(\ell_1\ell_2)}(loop) &= q^2 C' \left(\frac{4}{\varepsilon^2} + \frac{6}{\varepsilon} + 16 \right) \\ H_L^{1(\ell_1\ell_2)}(loop) &= 0 \\ H_F^{4(\ell_1\ell_2)}(loop) &= q^2 C' \left(\frac{4}{\varepsilon^2} + \frac{6}{\varepsilon} + 16 \right) \end{aligned} \quad (4-54)$$

Danach werden die Baumbeiträge mit den Schleifenbeiträge addiert, um die $O(\alpha_s)$ -Beiträge ausrechnen zu können. Es ergibt sich

$$\begin{aligned} H_U^1(\alpha_s) &= 4 q^2 C \\ H_L^1(\alpha_s) &= 8 q^2 C \end{aligned} \quad (4-55)$$

$$\begin{aligned}
H_F^4(\alpha_s) &= 0 \\
H_U^{4\ell}(\alpha_s) &= 4 q^2 C \\
H_F^{1\ell}(\alpha_s) &= 0 \\
H_U^{1(\ell_1\ell_2)}(\alpha_s) &= -4 q^2 C \\
H_L^{1(\ell_1\ell_2)}(\alpha_s) &= -8 q^2 C \\
H_F^{4(\ell_1\ell_2)}(\alpha_s) &= 0
\end{aligned}$$

4.5.2 Der Grenzfall verschwindender Quarkmasse

Bei dieser Berechnung das bemerkenswerte ist, daß der Grenzwert $m \rightarrow 0$ für Polarisationsobservablen vom Wert der Polarisationsobservablen abweicht, der in der masselosen QCD berechnet wird. Um das explizit auszurechnen, wird einerseits den Fall $m \rightarrow 0$ und andererseits dem Fall $m = 0$ betrachtet.

Im Grenzfall verschwindender Quarkmasse $m_q \rightarrow 0$ ($\xi \rightarrow 0$) erhält man für die Limites der Zerfallsratenterme die folgende Ausdrücke:

$$t_1 \rightarrow 2 \ln(2) + \frac{3}{2} \ln\left(\frac{\xi}{4}\right) \quad (4-56)$$

$$t_2 \rightarrow 2 \ln(2) + \frac{1}{2} \ln\left(\frac{\xi}{4}\right) \quad (4-57)$$

$$t_4 \rightarrow \frac{\pi^2}{2} \quad (4-58)$$

$$t_5 \rightarrow \frac{\pi^2}{6} - \frac{1}{4} \ln^2\left(\frac{\xi}{4}\right) \quad (4-59)$$

$$t_6 \rightarrow \frac{\pi^2}{6} + \frac{1}{4} \ln^2\left(\frac{\xi}{4}\right) \quad (4-60)$$

$$t_7 \rightarrow -\frac{\pi^2}{2} - \frac{1}{4} \ln^2\left(\frac{\xi}{4}\right) \quad (4-61)$$

$$t_{11} \rightarrow -\ln\left(\frac{\xi}{4}\right) \quad (4-62)$$

$$t_{17} \rightarrow 0 \quad (4-63)$$

$$t_{18} \rightarrow 0 \quad (4-64)$$

$$t_{19} \rightarrow -\frac{\pi^2}{3} \quad (4-65)$$

$$t_{20} \rightarrow -\frac{\pi^2}{6} \quad (4-66)$$

$$t_{21} \rightarrow \frac{\pi^2}{3} + \frac{1}{4} \ln^2\left(\frac{\xi}{4}\right) \quad (4-67)$$

$$t_{22} \rightarrow 0 \quad (4-68)$$

Somit ergibt sich:

$$\begin{aligned}
H_U^1(\alpha_s) &= 4 \frac{\alpha_s N_C C_F q^2}{4\pi} \\
H_L^1(\alpha_s) &= 8 \frac{\alpha_s N_C C_F q^2}{4\pi} \\
H_F^4(\alpha_s) &= 0 \frac{\alpha_s N_C C_F q^2}{4\pi} \\
H_U^{1(\ell_1, \ell_2)}(\alpha_s) &= 12 \frac{\alpha_s N_C C_F q^2}{4\pi} \\
H_L^{1(\ell_1, \ell_2)}(\alpha_s) &= -8 \frac{\alpha_s N_C C_F q^2}{4\pi} \\
H_F^{4(\ell_1, \ell_2)}(\alpha_s) &= 16 \frac{\alpha_s N_C C_F q^2}{4\pi}
\end{aligned} \tag{4-69}$$

Mit Hilfe von Gl. (3-3) lassen sich die Hadrontensorkomponenten folgendermaßen schreiben

$$\begin{aligned}
H_U^1(s_1^\ell, s_2^\ell) &= \frac{1}{4} (H_U^1 + H_U^{1(\ell_1 \ell_2)} s_1^\ell s_2^\ell) \\
&= N_C q^2 \left((1 - s_1^\ell s_2^\ell) \left(1 + \frac{1}{3} \frac{3\alpha_s}{4\pi} C_F \right) + \left[\frac{4}{3} \cdot \frac{3\alpha_s}{4\pi} C_F s_1^\ell s_2^\ell \right] \right), \tag{4-70}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
H_L^1(s_1^\ell, s_2^\ell) &= \frac{1}{4} (H_L^1 + H_L^{1(\ell_1 \ell_2)} s_1^\ell s_2^\ell) \\
&= N_C q^2 (1 - s_1^\ell s_2^\ell) \left(0 + \frac{2}{3} \frac{3\alpha_s}{4\pi} C_F + [0] \right), \tag{4-71}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
H_F^1(s_1^\ell, s_2^\ell) &= \frac{1}{4} (H_F^{1(\ell_1)} s_1^\ell + H_F^{1(\ell_2)} s_2^\ell) \\
&= N_C q^2 (s_1^\ell - s_2^\ell) \left(1 + 0 \times \frac{3\alpha_s}{4\pi} C_F - \left[\frac{2}{3} \frac{3\alpha_s}{4\pi} C_F \right] \right), \tag{4-72}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
H_U^4(s_1^\ell, s_2^\ell) &= \frac{1}{4} (H_U^{1(\ell_1)} s_1^\ell + H_U^{1(\ell_2)} s_2^\ell) \\
&= N_C q^2 (s_1^\ell - s_2^\ell) \left(1 + \frac{1}{3} \frac{3\alpha_s}{4\pi} C_F - \left[\frac{2}{3} \frac{3\alpha_s}{4\pi} C_F \right] \right), \tag{4-73}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
H_L^4(s_1^\ell, s_2^\ell) &= \frac{1}{4} (H_L^{1(\ell_1)} s_1^\ell + H_L^{1(\ell_2)} s_2^\ell) \\
&= N_C q^2 (s_1^\ell - s_2^\ell) \left(0 + \frac{2}{3} \frac{3\alpha_s}{4\pi} C_F + [0] \right), \tag{4-74}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
H_F^4(s_1^\ell, s_2^\ell) &= \frac{1}{4} (H_F^4 + H_F^{4(\ell_1 \ell_2)} s_1^\ell s_2^\ell) \\
&= N_C q^2 \left((1 - s_1^\ell s_2^\ell) \left(1 + 0 \times \frac{3\alpha_s}{4\pi} C_F \right) + \left[\frac{4}{3} \cdot \frac{3\alpha_s}{4\pi} C_F s_1^\ell s_2^\ell \right] \right) \tag{4-75}
\end{aligned}$$

In der Tabellen 4.1 und 4.2 finden sich alle $m \rightarrow 0$ -Beiträge für die verschiedenen Spin-Konfigurationen. Die *anormalen*-Beiträge sind in eckigen Klammern geschrieben.

VV Spin-Konf.	U		L		F	
	$m = 0$	$m \rightarrow 0$	$m = 0$	$m \rightarrow 0$	$m = 0$	$m \rightarrow 0$
$(\uparrow\uparrow)$	0	$\frac{4}{3} = 0 + [\frac{4}{3}]$	0	$0 = 0 + [0]$	0	$0 = 0 + [0]$
$(\uparrow\downarrow)$	$\frac{2}{3}$	$-\frac{2}{3} = \frac{2}{3} - [\frac{4}{3}]$	$\frac{4}{3}$	$\frac{4}{3} = \frac{4}{3} + [0]$	0	$-\frac{4}{3} = 0 - [\frac{4}{3}]$
$(\downarrow\uparrow)$	$\frac{2}{3}$	$-\frac{2}{3} = \frac{2}{3} - [\frac{4}{3}]$	$\frac{4}{3}$	$\frac{4}{3} = \frac{4}{3} + [0]$	0	$\frac{4}{3} = 0 + [\frac{4}{3}]$
$(\downarrow\downarrow)$	0	$\frac{4}{3} = 0 + [\frac{4}{3}]$	0	$0 = 0 + [0]$	0	$0 = 0 + [0]$

Tabelle 4.1: $O(\alpha_s)$ -Korrekturen zur spezifische Spin-Konfiguration in QCD($m = 0$) und QCD($m \rightarrow 0$). Die Einheit dieser Beiträge ist $3\alpha_s C_F N_C q^2 / 4\pi$

VA Spin-Konf.	U		L		F	
	$m = 0$	$m \rightarrow 0$	$m = 0$	$m \rightarrow 0$	$m = 0$	$m \rightarrow 0$
$(\uparrow\uparrow)$	0	$0 = 0 + [0]$	0	$0 = 0 + [0]$	0	$\frac{4}{3} = 0 + [\frac{4}{3}]$
$(\uparrow\downarrow)$	$\frac{2}{3}$	$-\frac{2}{3} = \frac{2}{3} - [\frac{4}{3}]$	$\frac{4}{3}$	$\frac{4}{3} = \frac{4}{3} + [0]$	0	$-\frac{4}{3} = 0 - [\frac{4}{3}]$
$(\downarrow\uparrow)$	$-\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3} = -\frac{2}{3} + [\frac{4}{3}]$	$-\frac{4}{3}$	$-\frac{4}{3} = -\frac{4}{3} + [0]$	0	$-\frac{4}{3} = 0 - [\frac{4}{3}]$
$(\downarrow\downarrow)$	0	$0 = 0 + [0]$	0	$0 = 0 + [0]$	0	$\frac{4}{3} = 0 + [\frac{4}{3}]$

Tabelle 4.2: $O(\alpha_s)$ -Korrekturen zur spezifische Spin-Konfiguration in QCD($m = 0$) und QCD($m \rightarrow 0$). Die Einheit dieser Beiträge ist $3\alpha_s C_F N_C q^2 / 4\pi$

Anhang A

Konventionen und Rechenregeln

A.1 Die natürlichen Einheiten

- Natürliche Einheit:

$$\hbar = c = 1, \quad (\hbar = \frac{h}{2\pi}) . \quad (\text{A-1})$$

- Transformationsregeln der Einheiten:

$$\begin{aligned} 1 \text{ kg} &= 5.61 \times 10^{26} \text{ GeV} : \left(\frac{\text{GeV}}{c^2} \right), \\ 1 \text{ m} &= 5.07 \times 10^{15} \text{ GeV}^{-1} : \left(\frac{\hbar c}{\text{GeV}} \right), \\ 1 \text{ sec} &= 1.52 \times 10^{24} \text{ GeV}^{-1} : \left(\frac{\hbar}{\text{GeV}} \right), \\ 1 \text{ TeV} &= 10^3 \text{ GeV} = 10^6 \text{ MeV} = 10^9 \text{ KeV} = 10^{12} \text{ eV}, \\ 1 \text{ fermi} &= 1 \text{ fm} = 10^{-13} \text{ cm} = 10^{-15} \text{ m} = 5.07 \text{ GeV}^{-1}, \\ (1 \text{ fermi})^2 &= 10 \text{ mb} = 10^4 \mu\text{b} = 10^7 \text{ nb} = 10^{10} \text{ pb} = 10^{13} \text{ fb}, \\ 1 b &= 10^2 \text{ fm}^2 = 10^{-24} \text{ cm}^2 = 10^{-28} \text{ m}^2, \\ (1 \text{ GeV})^{-2} &= 0.389 \text{ mb} = 3.89 \times 10^8 \text{ pb} . \end{aligned} \quad (\text{A-2})$$

A.2 Der metrische Tensor

Der Metrische Tensor $g_{\mu\nu}$ in Minkowski-Raum $\{x^\mu : (\mu = 0, 1, 2, 3)\}$ ist definiert durch

$$g_{\mu\nu} = g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} +1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} . \quad (\text{A-3})$$

A.3 Die Koordinaten und Impulse

Zur Bezeichnung der Raum-Zeit-Koordinaten wird der kontravariante Vierervektor

$$\begin{aligned} x^\mu &\equiv (x^0, x^1, x^2, x^3) \\ &\equiv (t, x, y, z) . \end{aligned} \quad (\text{A-4})$$

verwendet. Für den kovarianten Vierervektor x_μ gilt

$$\begin{aligned} x_\mu &\equiv (x_0, x_1, x_2, x_3) \\ &\equiv (t, -x, -y, -z) \\ &= g_{\mu\nu} x^\nu . \end{aligned} \quad (\text{A-5})$$

Das Skalar-Produkt ist gegeben durch

$$\begin{aligned} x \cdot x &\equiv x_\mu x^\mu \\ &= t^2 - \mathbf{x}^2 . \end{aligned} \quad (\text{A-6})$$

Die Definition der Impulsvektoren ist analog

$$\begin{aligned} p^\mu &\equiv (p^0, p^1, p^2, p^3) \\ &\equiv (E, p_x, p_y, p_z) \\ &= g^{\mu\nu} p_\nu . \end{aligned} \quad (\text{A-7})$$

Ihr Skalar-Produkt ist

$$\begin{aligned} p_1 \cdot p_2 &\equiv p_1^\mu p_{2\mu} \\ &= E_1 E_2 - \mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{p}_2 . \end{aligned} \quad (\text{A-8})$$

und ebenso

$$x \cdot p = tE - \vec{x} \cdot \vec{p} \quad (\text{A-9})$$

A.4 Die Pauli-Matrizen

- Die Pauli-Matrizen:

$$\begin{aligned} \sigma_0 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} , \quad \sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} , \\ \sigma_2 &= \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} , \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} . \end{aligned} \quad (\text{A-10})$$

- Relationen zwischen den Pauli-Matrizen:

$$\begin{aligned} \{\sigma_i, \sigma_j\} &= 2\delta_{ij}, \\ [\sigma_i, \sigma_j] &= 2i\varepsilon_{ijk}\sigma_k \end{aligned} \quad (\text{A-11})$$

- Eigenschaften der Pauli-Matrizen:

$$\sigma_i^\dagger = \sigma_i, \det(\sigma_i) = -1, \text{Tr}[\sigma_i] = 0. \quad (\text{A-12})$$

- Nützliche Relationen:

$$(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{a})(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{b}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) + i \boldsymbol{\sigma} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b}). \quad (\text{A-13})$$

A.5 Die Dirac-Matrizen

- Die Dirac-Matrizen: $\gamma^\mu = (\gamma^0, \boldsymbol{\gamma})$:

$$\begin{aligned} \{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} &= \gamma^\mu \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma^\mu = 2 g^{\mu\nu}, \\ [\gamma^\mu, \gamma^\nu] &= \gamma^\mu \gamma^\nu - \gamma^\nu \gamma^\mu = -2i \sigma^{\mu\nu}, \\ \gamma_\mu &= g_{\mu\nu} \gamma^\nu = (\gamma^0, -\boldsymbol{\gamma}). \end{aligned} \quad (\text{A-14})$$

- γ_5 -Matrix:
($d = 4$)

$$\begin{aligned} \gamma_5 &\equiv \gamma^5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 = -\frac{i}{4!}\varepsilon_{\mu\nu\lambda\sigma}\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\lambda\gamma^\sigma, \\ \varepsilon^{0123} &= -\varepsilon_{0123} = +1. \end{aligned} \quad (\text{A-15})$$

- Relationen mit der γ_5 Matrix:

$$\begin{aligned} \gamma_5^2 &= 1, \\ \{\gamma_5, \gamma^\mu\} &= 0. \end{aligned} \quad (\text{A-16})$$

- Diracdarstellung von γ :

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\gamma} = \begin{pmatrix} 0 & \boldsymbol{\sigma} \\ -\boldsymbol{\sigma} & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma_5 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{A-17})$$

wobei $\boldsymbol{\sigma}$ ist:

$$\boldsymbol{\sigma} = (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3). \quad (\text{A-18})$$

A.6 Die Dirac-Spinoren

Die Dirac-Spinoren $u_\lambda(p)$ für Fermionen und $v_\lambda(p)$ für Antifermionen erfüllen die folgenden Gleichungen, wobei p der 4-Impuls, λ die Spinprojektion und m die Masse des Fermiones sind.

- Bewegungsgleichungen:

$$\begin{aligned} (\not{p} - m)u_\lambda(p) &= 0, \\ (\not{p} + m)v_\lambda(p) &= 0. \end{aligned} \quad (\text{A-19})$$

- Normierungsbedingung:

$$\begin{aligned}\bar{u}_\lambda(p)u_{\lambda'}(p) &= 2m \delta_{\lambda\lambda'}, \\ \bar{v}_\lambda(p)v_{\lambda'}(p) &= -2m \delta_{\lambda\lambda'} .\end{aligned}\tag{A-20}$$

- Energie-Projektionsoperatoren:

$$\begin{aligned}\sum_\lambda u_\lambda(p)\bar{u}_\lambda(p) &= \not{p} + m, \\ \sum_\lambda v_\lambda(p)\bar{v}_\lambda(p) &= \not{p} - m .\end{aligned}\tag{A-21}$$

A.7 Der Spinvektor

Der Spin-Vektor s^μ im Ruhesystem für ein Fermion ist durch

$$s^\mu = (0, \vec{s})\tag{A-22}$$

gegeben mit $\vec{s} \cdot \vec{s} = 1$.

Der Spin-Vektor s^μ für ein Fermion mit physikalischem Impuls $p = (E, \vec{p})$ ist durch:

$$s^\mu = \left(\frac{\vec{p} \cdot \vec{s}}{m}, \vec{s} + \frac{\vec{p}(\vec{p} \cdot \vec{s})}{m(E + m)} \right) .\tag{A-23}$$

gegeben mit

$$s^2 = s^\mu s_\mu = -1, \quad s^\mu p_\mu = s \cdot p = 0 .\tag{A-24}$$

- Projektionsoperatoren:

$$\begin{aligned}u(p, s)\bar{u}(p, s) &= (\not{p} + m) \frac{1 + \gamma_5 \not{s}}{2}, \\ v(p, s)\bar{v}(p, s) &= (\not{p} - m) \frac{1 + \gamma_5 \not{s}}{2} .\end{aligned}\tag{A-25}$$

A.8 Die Relationen der Dirac γ Matrizen

- $\gamma^\dagger$ und $\bar{\gamma}$:

$$\begin{aligned}\gamma^{\mu\dagger} &= \gamma^0 \gamma^\mu \gamma^0, \\ \gamma^{0\dagger} &= \gamma^0, \quad \gamma^{k\dagger} = -\gamma^k \quad (\text{wobei } k = 1, 2, 3), \\ \gamma^{5\dagger} &= \gamma^5, \quad \sigma_{\mu\nu}^\dagger = \sigma_{\mu\nu}, \\ \bar{\Gamma} &\equiv \gamma^0 \Gamma^\dagger \gamma^0, \\ \bar{\gamma}^\mu &= \gamma^0 \gamma^{\mu\dagger} \gamma^0 = \gamma^\mu, \quad \overline{\gamma^\mu \gamma^5} = \gamma^\mu \gamma^5, \\ \overline{\sigma^{\mu\nu}} &= \gamma^0 \sigma^{\mu\nu\dagger} \gamma^0 = \sigma^{\mu\nu}, \\ \overline{i\gamma_5} &= \gamma^0 (i\gamma_5) \gamma^0 = i\gamma_5, \\ \overline{\not{a} \not{b} \not{c} \not{d} \cdots \not{p}} &= \not{p} \cdots \not{c} \not{b} \not{a} .\end{aligned}\tag{A-26}$$

- Matrix Element:

$$[\bar{u}(p', s') \Gamma u(p, s)]^\dagger = \bar{u}(p, s) \bar{\Gamma} u(p', s') , \quad (\text{A-27})$$

- Spuren-Theoreme:
($d = 4$)

$$\begin{aligned} \text{Tr} [\gamma^{\mu_1} \gamma^{\mu_2} \dots \gamma^{\mu_n}] &= 0 \quad (\text{für } n = \text{ungerade}) , \\ \text{Tr} 1 &= 4 , \\ \text{Tr} [\gamma^\mu \gamma^\nu] &= 4g^{\mu\nu} , \\ \text{Tr} [\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\lambda \gamma^\sigma] &= 4(g^{\mu\nu} g^{\lambda\sigma} - g^{\mu\lambda} g^{\nu\sigma} + g^{\mu\sigma} g^{\nu\lambda}) , \\ \text{Tr} [\gamma^\lambda \gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho \gamma^\sigma \gamma^\tau] &= g^{\lambda\mu} \text{Tr} [\gamma^\nu \gamma^\rho \gamma^\sigma \gamma^\tau] - g^{\lambda\nu} \text{Tr} [\gamma^\mu \gamma^\rho \gamma^\sigma \gamma^\tau] \\ &\quad + g^{\lambda\rho} \text{Tr} [\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\sigma \gamma^\tau] - g^{\lambda\sigma} \text{Tr} [\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho \gamma^\tau] \\ &\quad + g^{\lambda\tau} \text{Tr} [\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho \gamma^\sigma] , \\ \text{Tr} [\gamma^{\mu_1} \gamma^{\mu_2} \dots \gamma^{\mu_n}] &= g^{\mu_1 \mu_2} \text{Tr} [\gamma^{\mu_3} \gamma^{\mu_4} \dots \gamma^{\mu_n}] - g^{\mu_1 \mu_3} \text{Tr} [\gamma^{\mu_2} \gamma^{\mu_4} \dots \gamma^{\mu_n}] \\ &\quad + \dots + g^{\mu_1 \mu_n} \text{Tr} [\gamma^{\mu_1} \gamma^{\mu_2} \dots \gamma^{\mu_{n-1}}] \quad (\text{für } n = \text{gerade}) , \\ \text{Tr} [\gamma_5 \gamma^{\mu_1} \gamma^{\mu_2} \dots \gamma^{\mu_n}] &= 0 \quad (\text{für } n \leq 3) \\ \text{Tr} [\gamma_5 \gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\lambda \gamma^\sigma] &= -4i \varepsilon^{\mu\nu\lambda\sigma} , \\ \text{Tr} [\gamma_5 \gamma^\lambda \gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho \gamma^\sigma \gamma^\tau] &= -4i(\varepsilon^{\lambda\mu\nu\rho} g^{\sigma\tau} - \varepsilon^{\lambda\mu\nu\sigma} g^{\rho\tau} + \varepsilon^{\lambda\mu\nu\tau} g^{\rho\sigma} \\ &\quad - \varepsilon^{\nu\tau\sigma\rho} g^{\lambda\mu} + \varepsilon^{\mu\tau\sigma\rho} g^{\lambda\nu} - \varepsilon^{\lambda\tau\sigma\rho} g^{\mu\nu}) . \end{aligned} \quad (\text{A-28})$$

- γ Identitäten:
($d = 4$)

$$\begin{aligned} \gamma_\mu \gamma^\mu &= 4 , \\ \gamma_\mu \gamma^\nu \gamma^\mu &= -2\gamma^\nu , \\ \gamma_\mu \gamma^\lambda \gamma^\nu \gamma^\mu &= 4g_{\lambda\nu} , \\ \gamma_\mu \gamma^\lambda \gamma^\nu \gamma^\sigma \gamma^\mu &= -2\gamma^\sigma \gamma^\nu \gamma^\lambda , \\ \gamma_\mu \gamma^\lambda \gamma^\nu \gamma^\sigma \gamma^\rho \gamma^\mu &= 2(\gamma^\rho \gamma^\lambda \gamma^\nu \gamma^\sigma + \gamma^\sigma \gamma^\nu \gamma^\lambda \gamma^\rho) , \end{aligned} \quad (\text{A-29})$$

- γ -Matrizen und Vektoren:

$$\begin{aligned} \gamma_\mu \not{a} \gamma^\mu &= -2 \not{a} , \\ \gamma_\mu \not{a} \not{b} \gamma^\mu &= 4a \cdot b , \\ \gamma_\mu \not{a} \not{b} \not{c} \gamma^\mu &= -2 \not{c} \not{b} \not{a} , \\ \gamma_\mu \not{a} \not{b} \not{c} \not{d} \gamma^\mu &= 2(\not{d} \not{a} \not{b} \not{c} + \not{c} \not{b} \not{a} \not{d}) \end{aligned} \quad (\text{A-30})$$

- Schouten Identität

$$\begin{aligned} g^{\mu\nu} \varepsilon^{\lambda\sigma\tau\rho} - g^{\mu\lambda} \varepsilon^{\nu\sigma\tau\rho} + g^{\mu\sigma} \varepsilon^{\nu\lambda\tau\rho} - g^{\mu\tau} \varepsilon^{\nu\lambda\sigma\rho} + g^{\mu\rho} \varepsilon^{\nu\lambda\sigma\tau} &= 0 , \\ (g^{\mu\nu} \varepsilon^{\lambda\sigma\tau\rho} &= g^{\mu\lambda} \varepsilon^{\nu\sigma\tau\rho} + g^{\mu\sigma} \varepsilon^{\lambda\nu\tau\rho} + g^{\mu\tau} \varepsilon^{\lambda\sigma\nu\rho} + g^{\mu\rho} \varepsilon^{\lambda\sigma\tau\nu}) . \end{aligned} \quad (\text{A-31})$$

A.9 Die $SU(N)$ Generatoren

Die $SU(N)$ Generatoren T^a ($a = 1, 2, \dots, N^2 - 1$) sind hermitesche und spurlosse Matrizen. Die Generatoren der $SU(N)$ bilden eine abgeschlossene Lie-Algebra.

$$[T^a, T^b] = if^{abc}T^c. \quad (\text{A-32})$$

Die Fundamentaldarstellung ist N -dimensional. Die T^a -Generatoren erfüllen die Relation:

$$\{T^a, T^b\} = \frac{1}{N}\delta_{ab} + d^{abc}T^c. \quad (\text{A-33})$$

Diese Darstellung ist konsistent mit der Normierung:

$$\text{Tr}(T^a T^b) = \frac{1}{2}\delta_{ab}. \quad (\text{A-34})$$

Die d^{abc} ist total symmetrisch in a, b und c .

$$d^{abc} = 2\text{Tr}[\{T^a, T^b\}T^c]. \quad (\text{A-35})$$

Daraus ergeben sich die Beziehungen:

$$T^a T^b = \frac{1}{2N}\delta_{ab} + \frac{1}{2}d^{abc}T^c + \frac{1}{2}if^{abc}T^c. \quad (\text{A-36})$$

Die $SU(N)$ Strukturre-Konstanten erfüllen die Relation:

$$f^{ade}f^{bef}f^{cfd} = \frac{N}{2}f^{abc}. \quad (\text{A-37})$$

und auch die Jacobi-Identitäten

$$\begin{aligned} f^{abe}f^{cde} + f^{cbe}f^{dae} + f^{dbe}f^{ace} &= 0, \\ f^{abe}d^{cde} + f^{cbe}d^{dae} + f^{dbe}d^{ace} &= 0. \end{aligned} \quad (\text{A-38})$$

Im Fall der $SU(3)$ lauten die Generatoren und die Strukturkonstanten (3×3 -Darstellung)

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \lambda_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ \lambda_3 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \lambda_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ \lambda_5 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix}, \lambda_6 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \\ \lambda_7 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}, \lambda_8 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (\text{A-39})$$

wobei $T^a = \frac{\lambda^a}{2}.$

Die nicht verschwindenden Komponenten der Strukturkonstanten sind:

$$\begin{aligned} f^{123} &= 1, \\ f^{147} &= -f^{156} = f^{246} = f^{257} = f^{345} = -f^{367} = \frac{1}{2}, \\ f^{458} &= f^{678} = \frac{\sqrt{3}}{2}. \end{aligned} \quad (\text{A-40})$$

Einige gebräuchliche Relationen sind:

$$\begin{aligned} (T^c T^c)_{ij} &= C_2(R) \delta_{ij}, \\ T^c T^a T^c &= \left[-\frac{1}{2} C_2(G) + C_2(R) \right] T^a, \\ \text{Tr} [T^a T^b] &= \frac{1}{2} \delta^{ab}, \\ \text{Tr} [T^a T^b T^c] &= \frac{1}{4} (d^{abc} + i f^{abc}), \\ \text{Tr} [T^a T^b T^c T^d] &= \frac{1}{4N} \delta^{ab} \delta^{cd} + \frac{1}{8} (d^{abe} + i f^{abe})(d^{cde} + i f^{cde}), \\ f^{abc} T^b T^c &= \frac{i}{2} f^{abc} f^{bcd} T^d \\ &= \frac{i}{2} C_2(G) T^a. \end{aligned} \quad (\text{A-41})$$

wobei

$$\begin{aligned} C_2(R) &= \frac{N^2 - 1}{2N} \\ f^{acd} f^{bcd} &= C_2(G) \delta^{ab} = N \delta^{ab}. \end{aligned} \quad (\text{A-42})$$

A.10 Die Dilogarithmusfunktion

Der Dilogarithmus $\text{Li}_2(z)$ ist über seine Integraldarstellung definiert:

$$\text{Li}_2(z) = - \int_0^z \frac{dz'}{z'} \ln(1 - z') = \int_0^z \frac{dz'}{z'} \int_0^{z'} \frac{dz''}{z''} \quad (\text{A-43})$$

Die Eigenschaften der Polylogarithmen $\text{Li}_n(z)$ werden ausführlich in [73] behandelt. Zwei Transformationsformeln für Dilogarithmen sind von besonderer Bedeutung [74]:

$$\text{Li}_2(z) = -\text{Li}_2(1 - z) - \ln(z) \ln(1 - z) + \frac{\pi^2}{6} \quad (\text{A-44})$$

$$\text{Li}_2(z) = -\text{Li}_2\left(\frac{1}{z}\right) - \frac{1}{2} \left[\ln(-z) \right]^2 - \frac{\pi^2}{6}. \quad (\text{A-45})$$

A.11 Gebräuchliche Integrationsformeln

$$\begin{aligned}
\int \tau \ln(\alpha\tau + \beta) d\tau &= \frac{1}{2} \left(\tau^2 - \frac{\beta^2}{\alpha^2} \right) \ln(\alpha\tau + \beta) - \frac{1}{4} \tau^2 + \frac{\beta\tau}{2\alpha} \\
\int \ln(\alpha\tau + \beta) d\tau &= \left(\tau + \frac{\beta}{\alpha} \right) \ln(\alpha\tau + \beta) - \tau \\
\int \ln(\alpha\tau + \beta) \frac{d\tau}{\tau} &= \ln \beta \ln \tau - \text{li}_2 \left(-\frac{\alpha}{\beta} \tau \right) \\
\int \ln(\alpha\tau + \beta) \frac{d\tau}{\tau^2} &= \frac{\alpha}{\beta} \ln \tau - \left(\frac{1}{\tau} + \frac{\alpha}{\beta} \right) \ln(\alpha\tau + \beta) \\
\int \ln(\alpha\tau + \beta) \frac{2 d\tau}{\tau^3} &= -\frac{\alpha}{\beta\tau} - \frac{\alpha^2}{\beta^2} \ln \tau - \left(\frac{1}{\tau^2} - \frac{\alpha^2}{\beta^2} \right) \ln(\alpha\tau + \beta) \\
\int \ln \tau d\tau &= \tau \ln \tau - \tau \\
\int \ln \tau \frac{d\tau}{\tau} &= \frac{1}{2} \ln^2 \tau \\
\int \ln \tau \frac{d\tau}{\tau^2} &= -\frac{1}{\tau} \ln \tau - \frac{1}{\tau} \\
\int \ln \tau \frac{2 d\tau}{\tau^3} &= -\frac{1}{\tau^2} \ln \tau - \frac{1}{2\tau^2}
\end{aligned} \tag{A-46}$$

Anhang B

Der Wirkungsquerschnitt

In diesem Anhang wird der Ausdruck für den Wirkungsquerschnitt, der im Haupttext vorkommt, im Detail betrachtet. Der Wirkungsquerschnitt kann in folgender faktorisierten Form geschrieben werden [25]:

$$d\sigma = \left(\frac{2\pi\alpha}{q^2} \right)^2 \sum_{i,j=1}^4 g_{ij}(q^2) L^i \cdot H^j dPS, \quad (\text{B-1})$$

wobei $\alpha = 1/137$ die Feinstrukturkonstante ist, $q^2 = 4E_{\text{beam}}^2$ die gesamte Schwerpunktsenergie und dPS das Lorentzinvariante Phasenraumelement ist. $L \cdot H$ steht für $L_{\mu\nu} H^{\mu\nu}$. Die Indices i und j ($i, j = 1, 2, 3, 4$) laufen über die vier unabhängigen Anteile des Hadrontensors $H_{\mu\nu}^i$, der folgendermaßen definiert ist:

$$\begin{aligned} H_{\mu\nu}^1 &= \frac{1}{2}(H_{\mu\nu}^{VV} + H_{\mu\nu}^{AA}) & H_{\mu\nu}^2 &= \frac{1}{2}(H_{\mu\nu}^{VV} - H_{\mu\nu}^{AA}) \\ H_{\mu\nu}^3 &= \frac{i}{2}(H_{\mu\nu}^{VA} - H_{\mu\nu}^{AV}) & H_{\mu\nu}^4 &= \frac{1}{2}(H_{\mu\nu}^{VA} + H_{\mu\nu}^{AV}). \end{aligned} \quad (\text{B-2})$$

Der Leptontensor ist analog zum Hadrontensor definiert. Der Hadrontensor $H_{\mu\nu}^i$ steht für den entsprechenden Endzustand, unabhängig davon, ob man polarisierte oder unpolarisierte Endzustände betrachtet. Im Fall eines polarisierten Quarks sollte der Hadrontensor einen zusätzlichen Index tragen, der die drei unabhängigen Polarisationsanteile des Quarks darstellt.

Die Koeffizienten $g_{ij}(q^2)$ der energieabhängigen elektroschwachen-Theorie werden als

$$\begin{aligned} g_{11} &= Q_f^2 - 2Q_f v_e v_f \operatorname{Re} \chi_z + (v_e^2 + a_e^2)(v_f^2 + a_f^2) |\chi_z|^2, \\ g_{12} &= Q_f^2 - 2Q_f v_e v_f \operatorname{Re} \chi_z + (v_e^2 + a_e^2)(v_f^2 - a_f^2) |\chi_z|^2, \\ g_{13} &= -2Q_f v_e a_f \operatorname{Im} \chi_z, \\ g_{14} &= 2Q_f v_e a_f \operatorname{Re} \chi_z - 2(v_e^2 + a_e^2) v_f a_f |\chi_z|^2, \end{aligned} \quad (\text{B-3})$$

$$\begin{aligned} g_{21} &= q_f^2 - 2Q_f v_e v_f \operatorname{Re} \chi_z + (v_e^2 - a_e^2)(v_f^2 + a_f^2) |\chi_z|^2, \\ g_{22} &= q_f^2 - 2Q_f v_e v_f \operatorname{Re} \chi_z + (v_e^2 - a_e^2)(v_f^2 - a_f^2) |\chi_z|^2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g_{23} &= -2Q_f v_e a_f \operatorname{Im} \chi_Z, \\ g_{24} &= 2Q_f v_e a_f \operatorname{Re} \chi_Z - 2(v_e^2 - a_e^2) v_f a_f |\chi_Z|^2, \end{aligned} \quad (\text{B-4})$$

$$\begin{aligned} g_{31} &= -2Q_f a_e v_f \operatorname{Im} \chi_Z, \\ g_{32} &= -2Q_f a_e v_f \operatorname{Im} \chi_Z, \\ g_{33} &= 2Q_f a_e a_f \operatorname{Re} \chi_Z, \\ g_{34} &= 2Q_f a_e a_f \operatorname{Im} \chi_Z, \end{aligned} \quad (\text{B-5})$$

$$\begin{aligned} g_{41} &= 2Q_f a_e v_f \operatorname{Re} \chi_Z - 2v_e a_e (v_f^2 + a_f^2) |\chi_Z|^2, \\ g_{42} &= 2Q_f a_e v_f \operatorname{Re} \chi_Z - 2v_e a_e (v_f^2 - a_f^2) |\chi_Z|^2, \\ g_{43} &= 2Q_f a_e a_f \operatorname{Im} \chi_Z, \\ g_{44} &= -2Q_f a_e a_f \operatorname{Re} \chi_Z + 4v_e a_e v_f a_f |\chi_Z|^2 \end{aligned} \quad (\text{B-6})$$

geschrieben, wobei $\chi_Z(q^2) = gM_Z^2 q^2 / (q^2 - M_Z^2 + iM_Z \Gamma_Z)$ ist, mit der Masse M_Z und der Breite Γ_Z des Z^0 , und $g = G_F(8\sqrt{2}\pi\alpha)^{-1} \approx 4.49 \cdot 10^{-5} \text{GeV}^{-2}$, $\sin^2 \theta_w = 0.23$. Q_f ist die Ladung des Endzustandes des Quarks. v_e und a_e , v_f und a_f sind die elektroschwachen Vektor- und Axialvektor-Kopplungskonstanten. Im Weinberg-Salam-Modell hat man:

$$\text{Für Leptonen:} \quad \begin{cases} v_e = -1 + 4 \sin^2 \theta_W \\ a_e = -1 \end{cases} \quad (\text{B-7})$$

$$\text{Für Up-Quarks:} \quad \begin{cases} Q_f = \frac{2}{3} \\ v_f = 1 - \frac{8}{3} \sin^2 \theta_W \\ a_f = 1 \end{cases} \quad (\text{B-8})$$

$$\text{Für Down-Quarks:} \quad \begin{cases} Q_f = -\frac{1}{3} \\ v_f = -1 + \frac{4}{3} \sin^2 \theta_W \\ a_f = -1 \end{cases} \quad (\text{B-9})$$

$$\text{Kopplungskonstanten:} \quad \begin{cases} g_L = v + a & \text{linkshändig} \\ g_R = v - a & \text{rechtshändig.} \end{cases} \quad (\text{B-10})$$

Im reinen elektromagnetischen Fall ergibt sich $g_{11} = g_{12} = g_{21} = g_{22} = Q_f^2$ und $g_{r'r} = 0$. Die linearen Terme in $\operatorname{Re} \chi_Z$ und $\operatorname{Im} \chi_Z$ kommen aus der $\gamma - Z^0$ -Interferenz, und die Terme, die proportional zu $|\chi_Z|^2$ sind, kommen aus dem Z -Austausch.

Die Darstellung von Gl. (B-1) hat den Vorteil, daß die verschiedenen Anteile, die den Wirkungsquerschnitt bestimmen, in drei unabhängige Faktoren geschrieben werden können: $L_{\mu\nu}^i$ enthält die Winkelabhängigkeiten und die Parameter der Strahlpolarisation. $H_{\mu\nu}^i$ enthält die Hadrondynamik des Endzustandes, und die Konstanten $g_{ij}(q^2)$ enthalten die Abhängigkeit von der zugrundeliegenden elektroschwachen Theorie.

B.1 Der Leptontensor

Es wird zuerst den Leptontensor im Laborsystem spezifiziert, das mit einem Strich bezeichnet wird. Die nicht verwindenden Elemente des Leptontensors $L'_{\mu\nu}$ (mit $i = 1, 2, 3, 4$ analog zum Hadrontensor) werden gegeben durch:

$$\begin{aligned}
L'_{11} &= L'_{22} = (1 - h^- h^+), & \text{s} \\
L'_{12} &= -L'_{21} = -i(h^- - h^+), & \text{a} \\
L'^2_{11} &= L'^2_{22} = -(\xi_{x'}^- \xi_{x'}^+ - \xi_{y'}^- \xi_{y'}^+), & \text{s} \\
L'^2_{12} &= L'^2_{21} = -(\xi_{x'}^- \xi_{y'}^+ + \xi_{y'}^- \xi_{x'}^+), & \text{s} \\
L'^3_{11} &= -L'^3_{22} = (\xi_{x'}^- \xi_{y'}^+ + \xi_{y'}^- \xi_{x'}^+), & \text{s} \\
L'^3_{12} &= L'^3_{21} = -(\xi_{x'}^- \xi_{x'}^+ - \xi_{y'}^- \xi_{y'}^+), & \text{s} \\
L'^4_{11} &= L'^4_{22} = (h^- - h^+), & \text{s} \\
L'^4_{12} &= -L'^4_{21} = -i(1 - h^- h^+), & \text{a}
\end{aligned} \tag{B-11}$$

Hier wurden die $\mu \leftrightarrow \nu$ -Symmetrieeigenschaften (s=symmetrisch, a=antisymmetrisch) der verschiedenen Anteile aufgezeigt, $\xi_{x'}^\pm$ und $\xi_{y'}^\pm$ bezeichnen die transversale Polarisation des Strahls in der Beschleunigerebene und senkrecht dazu $\xi_{z'}^\pm (= \mp h^\pm)$ die longitudinale Polarisation (Helizität) von $e^\pm$. Für eine natürliche Transversal-Polarisation des Strahls von Grad P für einen kreisförmigen-Beschleunigers hat man $\vec{\xi}^\pm = (0, \pm P, 0)$.

B.2 Der Hadrontensor

Von dem gesamten Schwerpunktsystem werden nur die drei raumartigen Komponenten des Hadrontensors H^i_{mn} ($m, n = 1, 2, 3$) betrachtet, die zum Wirkungsquerschnitt in Gl. (B-1) beitragen. Der Hadrontensor H^i_{mn} ist hermitisch, deshalb gibt es neun reelle unabhängige Anteile H^i_{mn} für jedes $i = 1, 2, 3, 4$. Man hat sechs symmetrische und drei antisymmetrische reelle Kombinationen unter dem Austausch von m und n (der obere Index i wird wegen der Einfachheit ausgelassen) in Tabelle (B.2), mit $H_{\sigma\sigma'} = \varepsilon^\mu(\sigma) H_{\mu\nu} \varepsilon^{*\nu}(\sigma')$ aufgeführt, wobei

$$\varepsilon^\mu(\pm) = \frac{1}{\sqrt{2}}(0; \mp 1, -i, 0), \quad \varepsilon^\mu(0) = (0; 0, 0, 1). \tag{B-12}$$

Die Tabelle (B.2) enthält die sphärischen sowie die kartesischen Anteile der neun unabhängigen Hadrontensoren im Schwerpunktsystem. Es wird auch die Symmetrieeigenschaften der Anteile bezüglich μ und ν sowie die Parität des Produktes der Ströme im Helizität-System (z -Achse auf der Ereignis-Ebene) geschrieben.

B.3 Die Winkel-Korrelationen

Aus der Kontraktion des Leptontensors mit dem Hadrontensor entstehen Korrelationen zwischen der Leptonebene und der Hadronebene, die durch ihre Winkel be-

	Sphärische Komponenten	Kartesische Komponenten		
H_U	$H_{++} + H_{--}$	$H_{11} + H_{22}$	s	$pc(pv)$
H_L	H_{00}	H_{33}	s	$pc(pv)$
H_T	$\frac{1}{2}(H_{+-} + H_{-+})$	$\frac{1}{2}(-H_{11} + H_{22})$	s	$pc(pv)$
H_I	$\frac{1}{4}(H_{+0} + H_{0+} - H_{-0} - H_{0-})$	$\frac{-1}{2\sqrt{2}}(H_{31} + H_{13})$	s	$pc(pv)$
H_9	$-\frac{i}{4}(H_{+0} - H_{0+} - H_{-0} + H_{0-})$	$\frac{-i}{2\sqrt{2}}(H_{31} - H_{13})$	a	$pc(pv)$
H_F	$H_{++} - H_{--}$	$-i(H_{12} - H_{21})$	a	$pv(pc)$
H_A	$\frac{1}{4}(H_{+0} + H_{0+} + H_{-0} + H_{0-})$	$\frac{-i}{2\sqrt{2}}(H_{23} - H_{32})$	a	$pv(pc)$
H_4	$-\frac{i}{2}(H_{+-} - H_{-+})$	$-\frac{1}{2}(H_{12} + H_{21})$	s	$pv(pc)$
H_5	$-\frac{i}{4}(H_{+0} - H_{0+} + H_{-0} - H_{0-})$	$\frac{-1}{2\sqrt{2}}(H_{23} + H_{32})$	s	$pv(pc)$

Tabelle B.1:

schrieben werden können. Dafür muß man zuerst den Leptontensor, der in Gl. (B-11) gegeben ist, in die Hadronebene drehen. Diese Drehung wird in Abbildung (B.1) illustriert und gehorcht der folgenden Beziehung:

$$L_{kl}(\varphi, \theta, \chi) = R_{km}(\varphi, \theta, \chi) R_{ln}(\varphi, \theta, \chi) L'_{mn}, \quad (\text{B-13})$$

wobei φ , θ und χ die Eulerwinkel sind, die die Rotation vom Lepton-System zum Hadron-System beschreiben. Die Euler-Rotationsmatrix ist gegeben durch:

$$R = \begin{pmatrix} \cos \varphi \cos \theta \cos \chi - \sin \varphi \sin \chi & \sin \varphi \cos \theta \cos \chi + \cos \varphi \sin \chi & -\sin \theta \cos \chi \\ -\cos \varphi \cos \theta \sin \chi - \sin \varphi \cos \chi & -\sin \varphi \cos \theta \sin \chi + \cos \varphi \cos \chi & \sin \theta \sin \chi \\ \cos \varphi \sin \theta & \sin \varphi \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}. \quad (\text{B-14})$$

Es ist zu beachten, daß die Kontraktion $L_{mn}(\varphi, \theta, \chi) H_{mn}$ stark vereinfacht wird, wenn man die symmetrischen und antisymmetrischen Anteile der Tensoren L_{mn} und H_{mn} getrennt nach der gegebenen Klassifikation der Tabelle betrachtet. Diese Symmetrien sind sehr hilfreich, wenn man den Einfluß der Strahl-Polarisation auf die Messung der verschiedenen Hadrontensor-Anteile schnell feststellen möchte. Man bekommt (der obere Index ist wieder weggelassen):

$$\begin{aligned} \frac{3}{4} L_{mn}^1 H_{mn} &= (1 - h^- h^+) H_A + (h^- - h^+) H_D, \\ \frac{3}{4} L_{mn}^2 H_{mn} &= X(\varphi) H_B + Y(\varphi) H_C, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{3}{4}L_{mn}^3 H_{mn} &= X(\varphi)H_C - Y(\varphi)H_B, \\
\frac{3}{4}L_{mn}^4 H_{mn} &= (1 - h^- h^+)H_D + (h^- - H^+)H_A,
\end{aligned} \tag{B-15}$$

wobei

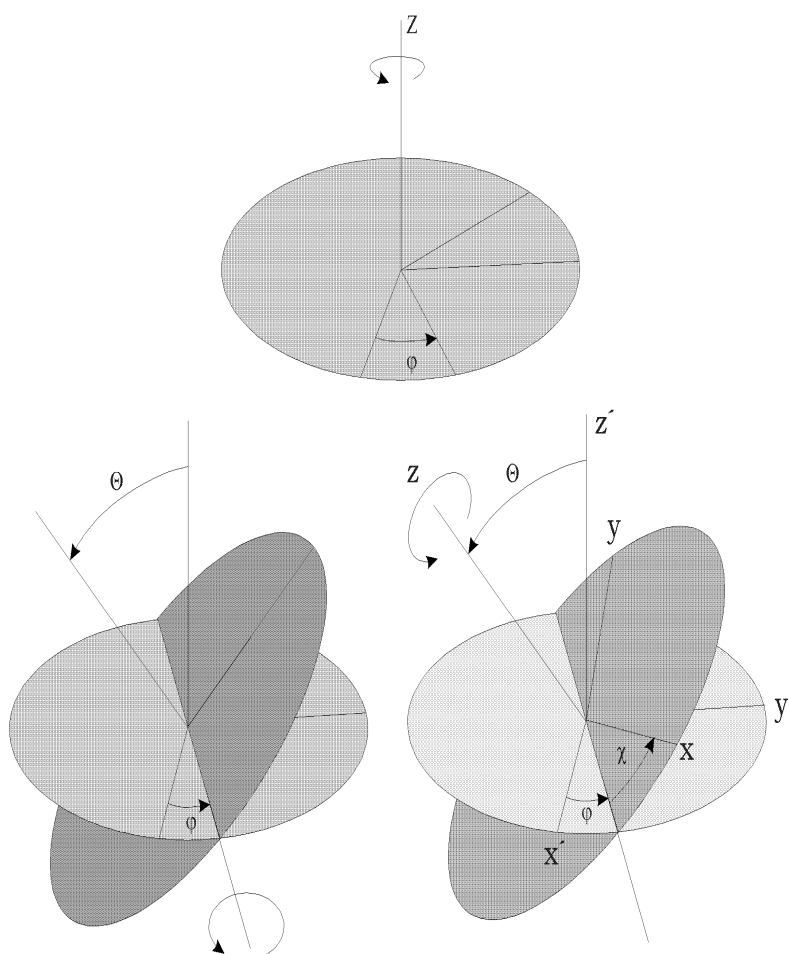
$$\begin{aligned}
H_A &= \frac{3}{8}(1 + \cos^2 \theta)H_U + \frac{3}{4}\sin^2 \theta H_L + \frac{3}{4}\sin^2 \theta \cos 2\chi H_T \\
&\quad - \frac{3}{4}\sin^2 \theta \sin 2\chi H_4 - \frac{3}{2\sqrt{2}}\sin 2\theta \cos \chi H_I + \frac{3}{2\sqrt{2}}\sin 2\theta \sin \chi H_5, \\
H_B &= \frac{3}{8}\sin^2 \theta H_U - \frac{3}{4}\sin^2 \theta H_L + \frac{3}{4}(1 + \cos^2 \theta) \cos 2\chi H_T \\
&\quad - \frac{3}{4}(1 + \cos^2 \theta) \sin 2\chi H_4 + \frac{3}{2\sqrt{2}}\sin 2\theta \cos \chi H_I - \frac{3}{2\sqrt{2}}\sin 2\theta \sin \chi H_5, \\
H_C &= \frac{3}{2}\cos \theta \sin 2\chi H_T + \frac{3}{2}\cos \theta \cos 2\chi H_4 \\
&\quad + \frac{3}{\sqrt{2}}\sin \theta \sin \chi H_I + \frac{3}{\sqrt{2}}\sin \theta \cos \chi H_5, \\
H_D &= \frac{3}{4}\cos \theta H_F - \frac{3}{\sqrt{2}}\sin \theta \cos \chi H_A + \frac{3}{\sqrt{2}}\sin \theta \sin \chi H_9,
\end{aligned} \tag{B-16}$$

mit allen Hadrontensor in bezug auf das hadronische (Ereignis-) System und

$$\begin{aligned}
X(\varphi) &= (\xi_{x'}^-\xi_{x'}^+ - \xi_{y'}^-\xi_{y'}^+) \cos 2\varphi + (\xi_{x'}^-\xi_{y'}^+ + \xi_{y'}^-\xi_{x'}^+) \sin 2\varphi, \\
Y(\varphi) &= -(\xi_{x'}^-\xi_{x'}^+ - \xi_{y'}^-\xi_{y'}^+) \sin 2\varphi + (\xi_{x'}^-\xi_{y'}^+ + \xi_{y'}^-\xi_{x'}^+) \cos 2\varphi.
\end{aligned} \tag{B-17}$$

Die Gl. (B-15) beschreibt die allgemeinste Struktur der möglichen Strahl-Event-Korrelationen in Anwesenheit der Strahlpolarisation und der Endzustandspolarisationseffekte. Die gesamte Winkelabhängigkeit zwischen den beiden Ebenen ist durch die Winkel φ , θ und χ gegeben und in Gln. (B-15) und (B-16) dargestellt. Die hadronischen Helizitätstrukturfunktionen H_α werden im Hadron-System ausgerechnet. Deshalb sind sie unabhängig von den Winkeln und φ , θ und χ .

Die totale Rate ist durch σ_{U+L} gegeben. Der differentielle Wirkungsquerschnitt $d\sigma_L$ ist zuständig für die Produktion durch ein longitudinales (virtuelles) Photon, der differentielle Wirkungsquerschnitt $d\sigma_T$ beschreibt die Produktion durch ein transversal polarisiertes Photon [75].

Abbildung B.1: *Die Eulersche Rotation*

Anhang C

Phasenraumintegration

C.1 Einführung

In diesem Anhang werden die vorkommende Integrale der Kapitel 3 und 4 gelöst, da dieser Berechnung etwas auswendig ist. Ebenfalls wird die Relation zwischen den Integrale und den *Zerfallsratenterme* illustriert.

Die (y, z) -Integration des unpolarisierten und polarisierten Hadrontensores läßt sich durch die Integrale vom Typ I , J , T , C , M und L ausdrücken. Die hier durchgeführten Berechnungen werden sich nur mit den Integralen vom Typ C , M und L beschäftigen, da diejenigen Integrale vom Typ I , J und T wie bereits erwähnt bei M. Tung [54] und S. Groote [63] zu finden sind.

Auf Grund des zweifach vorkommenden Spins in den Berechnungen der Longitudinal-Longitudinal Spin-Korrelation und ihrer Polarwinkelabhängigkeit besitzen die Integrale vom Typ C , M und L zwei Wurzeln bzw. deren Potenzen im Nenner, die die Berechnung der Integrale komplizieren. Die Integration über z ist durch Standard-Stammfunktionen berechenbar während die Integration über y mit Hilfe einer Speziellen Substitution erfolgt. Diese wird Zunächst erklärt, danach werden die Berechnungen der Integrale präsentiert.

Alle Integrale wurden gleichzeitig numerisch mit VEGAS ausgewertet, um zu und prüfen, ob die numerische Auswertung der analytischen Ausdrücke mit den Ergebnisse der numerische Integration übereinstimmen.

C.2 Die Integrale

Zu bestimmen sind die Integrale

$$C[l, m] = \int_{y_-}^{y_+} \int_{z_-}^{z_+} \frac{y^l z^m}{\sqrt{(1-y)^2 - \xi} \sqrt{(1-z)^2 - \xi}} dy dz \quad (\text{C-1})$$

$$M[l, m] = \int_{y_-}^{y_+} \int_{z_-}^{z_+} \frac{y^l z^m}{((1-y)^2 - \xi) \sqrt{(1-z)^2 - \xi}} dy dz \quad (\text{C-2})$$

$$L[l, m] = \int_{y_-}^{y_+} \int_{z_-}^{z_+} \frac{y^l z^m}{\left[\sqrt{(1-y)^2 - \xi} \right]^3 \sqrt{(1-z)^2 - \xi}} dy dz \quad (\text{C-3})$$

Der Integrationsbereich ist durch $z_-(y) \leq z \leq z_+(y)$ und $y_- \leq y \leq y_+$ mit

$$\begin{aligned} y_- &= \sqrt{\Lambda\xi} + \Lambda, & y_+ &= 1 - \sqrt{\xi} \\ z_{\pm}(y) &= \frac{2y}{4y + \xi} \left\{ 1 - y - \frac{1}{2}\xi + \Lambda + \frac{\Lambda}{y} \pm \frac{1}{y} \sqrt{(y - \Lambda)^2 - \Lambda\xi} \sqrt{(1-y)^2 - \xi} \right\} \end{aligned} \quad (\text{C-4})$$

gegeben.

C.3 Phasenraum und Substitution

C.3.1 Konstruktion einer Substitution

Die später zu bildenden Integrale enthalten immer die Wurzel $\sqrt{(1-y)^2 - \xi}$. Es erweist sich als nützlich, diese Wurzel durch ein Polynom darstellen zu können. Dies ist möglich mit Hilfe einer Kette von Substitutionen. Beachtet man nämlich, daß

$$\sqrt{(1-y)^2 - \xi} = \sqrt{1-y + \sqrt{\xi}} \sqrt{1-y - \sqrt{\xi}} \quad (\text{C-5})$$

ist und substituiert dann $\tau := 1 - y + \sqrt{\xi}$ und anschließend $\tau = \sqrt{2\sqrt{\xi}} \cosh \zeta$, so ergibt sich

$$\sqrt{(1-y)^2 - \xi} = \tau \sqrt{\tau^2 - 2\sqrt{\xi}} = 2\sqrt{\xi} \sinh \zeta \cosh \zeta = \frac{1}{2} \sqrt{\xi} (e^{2\zeta} - e^{-2\zeta}). \quad (\text{C-6})$$

Für y ergibt sich mit dieser Substitution

$$y = 1 + \sqrt{\xi} - 2\sqrt{\xi} \cosh^2 \zeta \quad (\text{C-7})$$

$$= 1 + \sqrt{\xi} - \frac{1}{2} \sqrt{\xi} (e^{2\zeta} + 2 + e^{-2\zeta}) \quad (\text{C-8})$$

$$= 1 - \frac{1}{2} \sqrt{\xi} (e^{2\zeta} + e^{-2\zeta}). \quad (\text{C-9})$$

Da in allen Ausdrücken (die entweder die besagte Wurzel oder aber Potenzen von y enthalten können) stets nur Potenzen von $e^{2\zeta}$ auftreten werden, wird nun $e^{2\zeta} = t$ gesetzt. Damit ergibt sich als endgültige Substitution

$$y(t) = 1 - \frac{1}{2} \sqrt{\xi} \left(t + \frac{1}{t} \right). \quad (\text{C-10})$$

Als Konvention wird $\zeta \leq 0$ (also $t \leq 1$) festgelegt, so gilt umgekehrt

$$t(y) = \frac{1}{\sqrt{\xi}}(1 - y - \sqrt{(1 - y)^2 - \xi}) \quad (\text{C-11})$$

$$t(0) = \frac{1 - \sqrt{1 - \xi}}{\sqrt{\xi}} = \frac{1 - v}{\sqrt{\xi}} = \sqrt{\frac{1 - v}{1 + v}}, \quad t(1 - \sqrt{\xi}) = 1. \quad (\text{C-12})$$

Mit dieser Substitution erhält man für $z_{\pm}$

$$z_+ = \sqrt{\xi} \frac{2t - \sqrt{\xi}(1 + t^2)}{2t(2t - \sqrt{\xi})}, \quad z_- = \sqrt{\xi} \frac{2t - \sqrt{\xi}(1 + t^2)}{2(2 - \sqrt{\xi}t)} \quad (\text{C-13})$$

(man beachte, daß z_+ und z_- durch die Ersetzung $t \leftrightarrow 1/t$ ineinander übergehen).

C.3.2 Der Knickpunkt der Funktion $[(1 - z)^2 - \xi]^{1/2}$

Als nächstes soll die Wurzel $\sqrt{(1 - z)^2 - \xi}$ an den Grenzen $z_{\pm}$ bestimmt werden. Der Radikand faktorisiert in Quadrate. Vorsicht ist jedoch hier beim Ziehen der Wurzel geboten, ist diese doch als positiv definiert, wohingegen die Argumente der Quadrate und damit der späteren Beträge durchaus auch das Vorzeichen wechseln können. So ergibt sich zunächst

$$\sqrt{(1 - z_+)^2 - \xi} = \frac{|2t + \sqrt{\xi}t - \sqrt{\xi}||2t - \sqrt{\xi}t - \sqrt{\xi}|}{2t|2t - \sqrt{\xi}|}, \quad (\text{C-14})$$

$$\sqrt{(1 - z_-)^2 - \xi} = \frac{|\sqrt{\xi}t - 2 - \sqrt{\xi}t||\sqrt{\xi}t - 2 + \sqrt{\xi}t|}{2|2 - \sqrt{\xi}t|}. \quad (\text{C-15})$$

Im Fall der Grenze z_+ ergibt sich für den Wert $y = \sqrt{\xi}(1 - \sqrt{\xi})/(2 - \sqrt{\xi})$ ein Knickpunkt in der Wurzelfunktion, der sich über eine Fallunterscheidung ausdrückt,

$$\sqrt{(1 - z_+)^2 - \xi} = \begin{cases} \frac{\xi t^2 - (2t - \sqrt{\xi})^2}{2t(2t - \sqrt{\xi})} & \text{für } t_b \leq t \leq t_c \\ \frac{(2t - \sqrt{\xi})^2 - \xi t^2}{2t(2t - \sqrt{\xi})} & \text{für } t_c \leq t \leq t_d \end{cases} \quad (\text{C-16})$$

Dabei ist

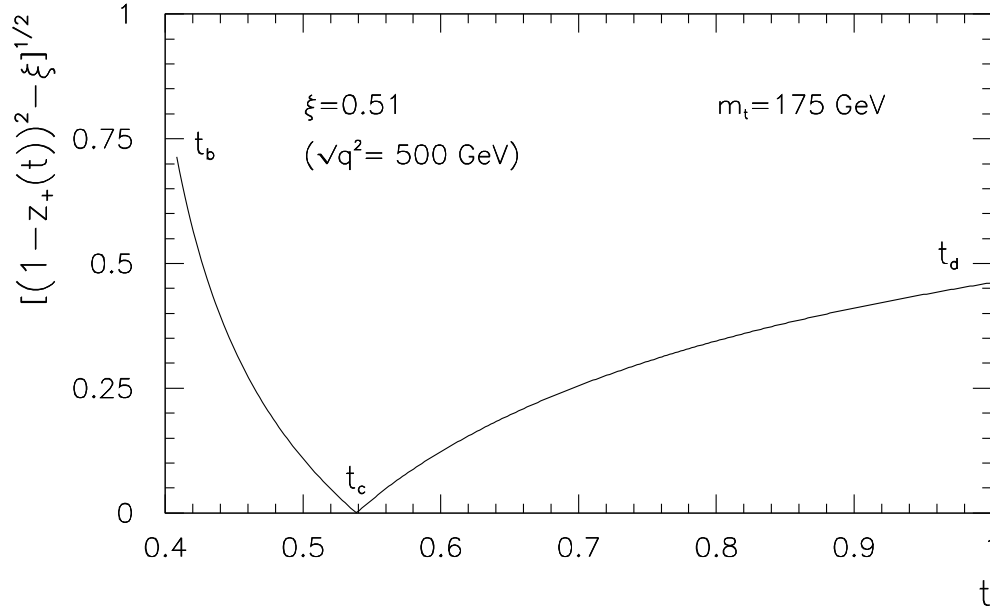
$$t_c = \frac{\sqrt{\xi}}{2 - \sqrt{\xi}}. \quad (\text{C-17})$$

Die Abbildung (C.1) zeigt den Knickpunkt t_c der Funktion $\sqrt{(1 - z_+)^2 - \xi}$. Im Fall der Grenze z_- ergibt sich dagegen ein geschlossener Ausdruck,

$$\sqrt{(1 - z_-)^2 - \xi} = \frac{(2 - \sqrt{\xi}t)^2 - \xi}{2(2 - \sqrt{\xi}t)}. \quad (\text{C-18})$$

Das Auftreten dieses Unterschiedes wird verständlich, wenn man berücksichtigt, daß z_- streng monoton wachsend ist, während z_+ eben ein Maximum besitzt. Neben

$$t_b := t(0) = \frac{1 - v}{\sqrt{\xi}} = \sqrt{\frac{1 - v}{1 + v}} \quad \text{und} \quad t_d := t(1 - \sqrt{\xi}) = 1 \quad (\text{C-19})$$

Abbildung C.1: Die Funktion $\sqrt{(1 - z_+)^2 - \xi}$

wird aus praktischen Erwägungen noch der Wert

$$t_a := \frac{1 + v}{\sqrt{\xi}} \quad (\text{C-20})$$

eingeführt, welcher außerhalb des Intervalls liegt. Man beachte, daß

$$t_a := \frac{1 + v}{\sqrt{\xi}} = \sqrt{\frac{1 + v}{1 - v}} = \frac{1}{t_b}. \quad (\text{C-21})$$

Für spätere Anwendungen sei bereits hier der Integrand für die Integration über y angefügt, der sich stark vereinfacht. Es ist

$$\sqrt{(1 - y)^2 - \xi} = \sqrt{\frac{1}{4}\xi\left(t - \frac{1}{t}\right)^2 - \xi} = \frac{1}{2}\sqrt{\xi}\sqrt{t^2 + 2 + t^{-2} - 4} = \frac{1}{2}\sqrt{\xi}\left(\frac{1}{t} - t\right) \quad (\text{C-22})$$

und

$$dy = -\frac{1}{2}\sqrt{\xi}\left(1 - \frac{1}{t^2}\right)dt, \quad (\text{C-23})$$

C.4 Die z -Integration

Die Integrale $C[l, m]$, $M[l, m]$, $L[l, m]$ besitzen die gleiche Struktur in der Variablen z . Deshalb kann die z -Integration gemeinsam behandelt werden [71, 72]. Es wird nach der z -Potenz des Integrands in fünf verschiedenen Klassen sortiert.

C.4.1 Berechnung der Integrale der ersten Klasse

Die Integrale dieser Klasse sind diejenigen, die als Gewicht eine Konstante besitzen, z^0 . Es gilt

$$\int_{z_-}^{z_+} \frac{dz}{\sqrt{(1-z)^2 - \xi}} = \ln \left(\frac{1 - z_+ - \sqrt{(1-z_+)^2 - \xi}}{1 - z_- - \sqrt{(1-z_-)^2 - \xi}} \right) \quad (\text{C-24})$$

$$= \begin{cases} \ln \left(\frac{(2t - \sqrt{\xi})(2 - \sqrt{\xi}t)}{\xi t} \right) & \text{für } t_b \leq t \leq t_c, \\ \ln \left(\frac{t(2 - \sqrt{\xi}t)}{2t - \sqrt{\xi}} \right) & \text{für } t_c \leq t \leq t_d, \end{cases} \quad (\text{C-25})$$

wobei

$$1 - z_+ - \sqrt{(1-z_+)^2 - \xi} = \begin{cases} \frac{2t - \sqrt{\xi}}{t} & \text{für } t_b \leq t \leq t_c, \\ \frac{\xi t}{2t - \sqrt{\xi}} & \text{für } t_c \leq t \leq t_d, \end{cases} \quad (\text{C-26})$$

$$1 - z_- - \sqrt{(1-z_-)^2 - \xi} = \frac{\xi}{2 - \sqrt{\xi}t} \quad (\text{C-27})$$

verwendet wurde.

C.4.2 Berechnung der Integrale der zweiten Klasse

Die Integrale der zweiten Klasse sind diejenigen mit dem Gewicht z^{-1} . Die z -Integration liefert

$$\int_{z_-}^{z_+} \frac{dz}{z\sqrt{(1-z)^2 - \xi}} = -\frac{1}{\sqrt{1-\xi}} \ln \left(\frac{\sqrt{1-\xi}\sqrt{(1-z)^2 - \xi}}{z} - \frac{1-\xi}{z} - 1 \right) \Bigg|_{z_-}^{z_+}. \quad (\text{C-28})$$

Nach der Substitution (C-18) ergibt sich

$$\frac{v\sqrt{(1-z_-)^2 - \xi}}{z_-} + \frac{v^2}{z_-} - 1 = \frac{(1+v)(1+v - \sqrt{\xi}t)^2}{\sqrt{\xi}(2t - \sqrt{\xi}(1+t^2))} \quad (\text{C-29})$$

und mit (C-16) erhält man

$$\frac{v\sqrt{(1-z_+)^2 - \xi}}{z_+} + \frac{v^2}{z_+} - 1 = \begin{cases} \frac{(1-v)((1-v)t - \sqrt{\xi})^2}{\sqrt{\xi}(2t - \sqrt{\xi}(1+t^2))} & \text{für } t_b \leq t \leq t_c, \\ \frac{(1+v)((1+v)t - \sqrt{\xi})^2}{\sqrt{\xi}(2t - \sqrt{\xi}(1+t^2))} & \text{für } t_c \leq t \leq t_d, \end{cases} \quad (\text{C-30})$$

also

$$\int_{z_-}^{z_+} \frac{dz}{z\sqrt{(1-z)^2 - \xi}} = -\frac{1}{v} \begin{cases} 2 \ln \left(\frac{\sqrt{\xi} - (1-v)t}{1+v - \sqrt{\xi}t} \right) - \ln \left(\frac{1+v}{1-v} \right) & \text{für } t_b \leq t \leq t_c, \\ 2 \ln \left(\frac{(1+v)t - \sqrt{\xi}}{1+v - \sqrt{\xi}t} \right) & \text{für } t_c \leq t \leq t_d. \end{cases} \quad (\text{C-31})$$

Wieder war die Wurzel eines Quadrates zu bilden, welches dazu verwendet wird

$$\sqrt{\xi} - (1-v)t > 0 \quad \Leftrightarrow \quad t < \frac{\sqrt{\xi}}{1-v} = \sqrt{\frac{1+v}{1-v}}, \quad (\text{C-32})$$

$$(1+v)t - \sqrt{\xi} \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad t \geq \frac{\sqrt{\xi}}{1+v} = \sqrt{\frac{1-v}{1+v}}, \quad (\text{C-33})$$

$$1+v - \sqrt{\xi}t > 0 \quad \Leftrightarrow \quad t < \frac{1+v}{\sqrt{\xi}} = \sqrt{\frac{1+v}{1-v}}. \quad (\text{C-34})$$

C.4.3 Berechnung der Integrale der dritten Klasse

Die Integrale der dritten Klasse besitzen das Gewicht z^{-2} . Nach der z -Integration erhält man

$$\int \frac{dz}{z^2 \sqrt{(1-z)^2 - \xi}} = \frac{1}{v^2} \int \frac{dz}{z \sqrt{(1-z)^2 - \xi}} - \left[\frac{\sqrt{(1-z)^2 - \xi}}{z} \right]_{z_-}^{z_+}. \quad (\text{C-35})$$

Die Integrale der dritten Klasse bestehen also aus den Integralen der zweiten Klasse (C-31) und einem Zusatzterm. Für den zweiten Term ergibt sich in den Grenzen

$$\left[\frac{\sqrt{(1-z)^2 - \xi}}{z} \right]_{z_-}^{z_+} = \begin{cases} \frac{4(t^2 - 2\sqrt{\xi}t + 1)}{\xi(t^2 - \frac{2t}{\sqrt{\xi}} + 1)} & \text{für } t_b \leq t \leq t_c, \\ -\frac{2(2-\xi)(t^2 - 1)}{\xi(t^2 - \frac{2t}{\sqrt{\xi}} + 1)} & \text{für } t_c \leq t \leq t_d. \end{cases} \quad (\text{C-36})$$

C.4.4 Berechnung der Integrale der vierten Klasse

Die Integrale der vierten Klasse sind diejenigen mit dem Gewicht z . Die z -Integration liefert

$$\int \frac{z dz}{\sqrt{(1-z)^2 - \xi}} = \left[\sqrt{(1-z)^2 - \xi} + \ln(1-z - \sqrt{(1-z)^2 - \xi}) \right]_{z_-}^{z_+}. \quad (\text{C-37})$$

Damit konstruieren sich diese Integrale aus Integralen der ersten Klasse (C-25) und einem Zusatzterm. Für den Integranden dieses Anteils ergibt sich in den Grenzen

$$\left[\sqrt{(1-z)^2 - \xi} \right]_{z_-}^{z_+} = \begin{cases} -\frac{(4t - \sqrt{\xi}(1+t^2))(2t - \sqrt{\xi}(1+t^2))}{(2t - \sqrt{\xi})(2 - \sqrt{\xi}t)t} & \text{für } t_b \leq t \leq t_c, \\ -\frac{\sqrt{\xi}(1-t^2)((2+\xi)t - \sqrt{\xi}(1+t^2))}{(2t - \sqrt{\xi})(2 - \sqrt{\xi}t)t} & \text{für } t_c \leq t \leq t_d. \end{cases} \quad (\text{C-38})$$

C.4.5 Berechnung der Integrale der fünften Klasse

Die Integrale der fünften Klasse stehen am Ende der Berechnungen. Sie besitzen das Gewicht z^2 . Nach der z -Integration ergibt sich

$$\begin{aligned} \int \frac{z^2 dz}{\sqrt{(1-z)^2 - \xi}} &= \\ &= \frac{z}{2} \sqrt{(1-z)^2 - \xi} + \frac{3}{2} \int \frac{z dz}{\sqrt{(1-z)^2 - \xi}} - \frac{v^2}{2} \int \frac{dz}{\sqrt{(1-z)^2 - \xi}} \end{aligned} \quad (\text{C-39})$$

Zu den Integralen tragen daher einem Zusatzterm und Integrale der ersten (C-25) und vierten (C-38) Klasse bei. Der Zusatzterm wird berechnet. In den Grenzen ergibt sich

$$\begin{aligned} \left[\frac{z}{2} \sqrt{(1-z)^2 - \xi} \right]_{z_-}^{z_+} &= \\ &= -\frac{\sqrt{\xi}}{8} (2t - \sqrt{\xi}(1+t^2)) \left(\frac{(2 - \sqrt{\xi}t)^2 - \xi}{(2 - \sqrt{\xi})^2} \pm \frac{(2t - \sqrt{\xi})^2 - \xi t^2}{t^2(2 - \sqrt{\xi})^2} \right) \end{aligned} \quad (\text{C-40})$$

für $t_b \leq t \leq t_c$ (oberes Vorzeichen) bzw. $t_c \leq t \leq t_d$ (unteres Vorzeichen).

C.5 Berechnung der Integrale der Familie C

Die Integrale dieser Familie sind als

$$\mathcal{C}[l, m] = \int \int \frac{y^l z^m}{\sqrt{(1-y)^2 - \xi} \sqrt{(1-z)^2 - \xi}} dy dz \quad \text{mit} \quad -2 \leq l, m \leq 2 \quad (\text{C-41})$$

definiert. Eine vollständige Liste der Integrale und die ihnen zugewiesenen Namen ist in der Tabelle (C.1) dargestellt.

z^m	y^l				
	-2	-1	0	+1	+2
-2			C_{10}	C_{11}	C_{12}
-1		C_7	C_6	C_8	C_9
0	C_3	C_2	C_1	C_4	C_5
+1	C_{15}	C_{14}	C_{13}	C_{16}	
+2	C_{19}	C_{18}	C_{17}		

Tabelle C.1: Integrale der Familie C

C.5.1 Berechnung des Integrals $C_1 = C[0, 0]$

Das Integral C_1 ist gegeben durch

$$C_1 = \int \int \frac{dy dz}{\sqrt{(1-y)^2 - \xi} \sqrt{(1-z)^2 - \xi}} \quad (\text{C-42})$$

Die z -Integration liefert

$$C_1 = \int \frac{dy}{\sqrt{(1-y)^2 - \xi}} \ln \left(\frac{1 - z_+ - \sqrt{(1 - z_+)^2 - \xi}}{1 - z_- - \sqrt{(1 - z_-)^2 - \xi}} \right). \quad (\text{C-43})$$

Mit Hilfe der Substitutionen (C-10) und (C-23) erhält man

$$\frac{dy}{\sqrt{(1-y)^2 - \xi}} = \frac{dt}{t} \quad (\text{C-44})$$

erhält man für C_1

$$C_1 = \left[\int_{t_b}^{t_c} \ln \left(\frac{2t - \sqrt{\xi}}{t} \right) \frac{dt}{t} + \int_{t_c}^{t_d} \ln \left(\frac{\xi t}{2t - \sqrt{\xi}} \right) \frac{dt}{t} - \int_{t_b}^{t_d} \ln \left(\frac{2 - \sqrt{\xi} t}{\xi} \right) \frac{dt}{t} \right] \quad (\text{C-45})$$

$$= \left[\ln(-\sqrt{\xi}) \ln(t) - \frac{1}{2} \ln^2(t) - \text{Li}_2((t_b + t_a)t) \right]_{t_b}^{t_c} + \left[(\ln(\xi) - \ln(-\sqrt{\xi})) \ln(t) + \frac{1}{2} \ln^2(t) + \text{Li}_2((t_b + t_a)t) \right]_{t_c}^{t_d} + \left[(\ln(2) - \ln(\xi)) \ln(t) - \text{Li}_2\left(\frac{t}{t_b + t_a}\right) \right]_{t_b}^{t_d} \quad (\text{C-46})$$

Unter Berücksichtigung von

$$\ln(-\sqrt{\xi}) - \text{Li}_2((t_b + t_a)t) = \ln(2) \ln(t) + \frac{1}{2} \ln^2(t) + \text{Li}_2\left(\frac{1}{(t_b + t_a)t}\right) \quad (\text{C-47})$$

erhält man damit

$$C_1 = \left[\ln(2) \ln(t) + \operatorname{Li}_2 \left(\frac{1}{(t_b + t_a) t} \right) \right]_{t_b}^{t_c} + \ln \left(\frac{\xi}{2} \right) \ln(t) - \operatorname{Li}_2 \left(\frac{1}{(t_b + t_a) t} \right) \Big|_{t_c}^{t_d} + \ln \left(\frac{2}{\xi} \right) \ln(t) - \operatorname{Li}_2 \left(\frac{1}{(t_b + t_a) t} \right) \Big|_{t_b}^{t_d} \right] \quad (\text{C-48})$$

$$= \ln(2) \ln \left(\frac{t_c}{t_b} \right) + \operatorname{Li}_2 \left(\frac{1}{(t_b + t_a) t_c} \right) - \operatorname{Li}_2 \left(\frac{1}{(t_b + t_a) t_b} \right) + \ln \left(\frac{\xi}{2} \right) \ln \left(\frac{t_d}{t_c} \right) - \operatorname{Li}_2 \left(\frac{1}{(t_b + t_a) t_d} \right) + \operatorname{Li}_2 \left(\frac{1}{(t_b + t_a) t_c} \right) + \ln \left(\frac{2}{\xi} \right) \ln \left(\frac{t_d}{t_b} \right) - \operatorname{Li}_2 \left(\frac{1}{(t_b + t_a) t_d} \right) + \operatorname{Li}_2 \left(\frac{1}{(t_b + t_a) t_b} \right) \quad (\text{C-49})$$

$$= 2 \operatorname{Li}_2 \left(\frac{2 - \sqrt{\xi}}{2} \right) - 2 \operatorname{Li}_2 \left(\frac{\sqrt{\xi}}{2} \right) + \operatorname{Li}_2 \left(\frac{1 - v}{2} \right) - \operatorname{Li}_2 \left(\frac{1 + v}{2} \right) + \ln \left(\frac{4}{\xi} \right) \ln \left(\frac{1 + v}{2 - \sqrt{\xi}} \right). \quad (\text{C-50})$$

C.5.2 Berechnung des Integrals $C_6 = C[0, -1]$

Das Integral C_6 ist gegeben durch

$$C_6 = \int \int \frac{dy dz}{z \sqrt{(1 - y)^2 - \xi} \sqrt{(1 - z)^2 - \xi}} \quad (\text{C-51})$$

Die z -Integration liefert

$$C_6 = -\frac{1}{v} \int \frac{dy}{\sqrt{(1 - y)^2 - \xi}} \ln \left(\frac{z_-(v^2 - z_+ + v \sqrt{(1 - z_+)^2 - \xi})}{z_+(v^2 - z_- + v \sqrt{(1 - z_-)^2 - \xi})} \right). \quad (\text{C-52})$$

Mit Hilfe von Gln .(C-10) und Substitution (C-23)

$$\frac{dy}{\sqrt{(1 - y)^2 - \xi}} = \frac{dt}{t} \quad (\text{C-53})$$

erhält man für C_6

$$C_6 = \left(\frac{-1}{v} \right) \left[\int_{t_b}^{t_c} \left(\ln \left(\frac{(1 - v)((1 - v) t - \sqrt{\xi})^2}{\sqrt{\xi} (2t - \sqrt{\xi} (1 + t^2))} \right) \right) \frac{dt}{t} + \int_{t_c}^{t_d} \left(\ln \left(\frac{(1 + v)((1 + v) t - \sqrt{\xi})^2}{\sqrt{\xi} (2t - \sqrt{\xi} (1 + t^2))} \right) \right) \frac{dt}{t} - \int_{t_b}^{t_d} \left(\ln \left(\frac{(1 + v)((1 + v) t - \sqrt{\xi})^2}{\sqrt{\xi} (2t - \sqrt{\xi} (1 + t^2))} \right) \right) \frac{dt}{t} \right] \quad (\text{C-54})$$

Mit

$$\begin{aligned}
(2t - \sqrt{\xi}(1 + t^2)) &= -\sqrt{\xi}(t^2 - \frac{2}{\sqrt{\xi}}t + 1) \\
&= -\sqrt{\xi}(t^2 - (t_b + t_a)t + 1) \\
&= -\sqrt{\xi}(t - t_a)(t - t_b)
\end{aligned} \tag{C-55}$$

ist

$$\begin{aligned}
C_6 &= \left(\frac{-1}{v}\right) \left[\int_{t_b}^{t_c} \left(\ln \left(\frac{t_b((1-v)t - \sqrt{\xi})^2}{\sqrt{\xi}(t_a - t)(t - t_b)} \right) \right) \frac{dt}{t} \right. \\
&\quad + \int_{t_c}^{t_d} \left(\ln \left(\frac{t_a((1+v)t - \sqrt{\xi})^2}{\sqrt{\xi}(t_a - t)(t - t_b)} \right) \right) \frac{dt}{t} \\
&\quad \left. - \int_{t_b}^{t_d} \left(\ln \left(\frac{t_a((1+v)t - \sqrt{\xi})^2}{\sqrt{\xi}(t_a - t)(t - t_b)} \right) \right) \frac{dt}{t} \right]
\end{aligned} \tag{C-56}$$

beachte man

$$\begin{aligned}
& - \int_{t_b}^{t_c} (\ln((t_a - t)(t - t_b))) \frac{dt}{t} \\
& - \int_{t_c}^{t_d} (\ln((t_a - t)(t - t_b))) \frac{dt}{t} \\
& + \int_{t_b}^{t_d} (\ln((t_a - t)(t - t_b))) \frac{dt}{t} = 0,
\end{aligned} \tag{C-57}$$

So ergibt sich

$$\begin{aligned}
C_6 &= \left(\frac{-1}{v}\right) \left[\int_{t_b}^{t_c} \left(\ln \left(\frac{t_b}{\sqrt{\xi}} \right) + 2 \ln((1-v)t - \sqrt{\xi}) \right) \frac{dt}{t} \right. \\
&\quad + \int_{t_c}^{t_d} \left(\ln \left(\frac{t_a}{\sqrt{\xi}} \right) + 2 \ln((1+v)t - \sqrt{\xi}) \right) \frac{dt}{t} \\
&\quad \left. - \int_{t_b}^{t_d} \left(\ln \left(\frac{t_a}{\sqrt{\xi}} \right) + 2 \ln((1+v)t - \sqrt{\xi}) \right) \frac{dt}{t} \right]
\end{aligned} \tag{C-58}$$

$$\begin{aligned}
&= \left(\frac{-1}{v}\right) \left[\left(\left(\ln \left(\frac{t_b}{\sqrt{\xi}} \right) + 2 \ln(\sqrt{\xi}) \right) \ln t - 2 \text{Li}_2(t_b t) \right) \Big|_{t_b}^{t_c} + \right. \\
&\quad \left(\left(\ln \left(\frac{t_a}{\sqrt{\xi}} \right) + 2 \ln(\sqrt{\xi}) \right) \ln t - 2 \text{Li}_2(t_a t) \right) \Big|_{t_c}^{t_d} + \\
&\quad \left(\left(-\ln \left(\frac{t_a}{\sqrt{\xi}} \right) - 2 \ln(1+v) \right) \ln t + 2 \text{Li}_2 \left(\frac{t}{t_a} \right) \right) \Big|_{t_b}^{t_d} \right]
\end{aligned} \tag{C-59}$$

für

$$\begin{aligned}
-2\text{Li}_2(t_a t) &= 2\text{Li}_2 \left(\frac{1}{t_a t} \right) + \frac{\pi^2}{3} + \ln^2(-t_a t) \\
&= 2\text{Li}_2 \left(\frac{1}{t_a t} \right) + \frac{\pi^2}{3} + \left(\ln(-t_a) + \ln t \right)^2
\end{aligned} \tag{C-60}$$

Schließlich bekommt man

$$\begin{aligned}
C_6 = & \left(\frac{-1}{v} \right) \left[\ln \left(\frac{t_b}{\sqrt{\xi}} \right) \left(\ln(t_c) - \ln(t_b) \right) - 2 \operatorname{Li}_2 \left(\frac{t_b}{t_c} \right) + 2 \operatorname{Li}_2 \left(\frac{t_b}{t_a} \right) + \right. \\
& \ln(\xi) \left(\ln(t_c) - \ln(t_b) \right) - \ln \left(\frac{t_a}{\sqrt{\xi}} \right) \ln(t_c) - 2 \ln(t_a) \ln(1+v) - \\
& \ln^2(t_c) + 2 \operatorname{Li}_2 \left(\frac{1}{t_a} \right) - 2 \operatorname{Li}_2 \left(\frac{t_c}{t_a} \right) + \ln \left(\frac{t_a}{\sqrt{\xi}} \right) \ln(t_b) + \\
& \left. 2 \ln(1+v) \ln(t_b) + 2 \operatorname{Li}_2 \left(\frac{1}{t_a} \right) - 2 \operatorname{Li}_2 \left(\frac{t_b}{t_a} \right) \right] \quad (C-61)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
= & \left(\frac{-1}{v} \right) \left[4 \operatorname{Li}_2 \left(\frac{1}{t_a} \right) - 2 \operatorname{Li}_2 \left(\frac{t_b}{t_c} \right) - 2 \operatorname{Li}_2 \left(\frac{t_c}{t_a} \right) + \ln \left(\frac{t_a}{t_b} \right) \ln \left(\frac{t_b}{t_c} \right) - \right. \\
& \left. \ln^2(t_c) + \ln \left(\frac{t_b}{t_c} \right) \ln \left(\frac{t_a}{t_b} \right) \right] \quad (C-62)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
= & \left(\frac{-1}{v} \right) \left[4 \operatorname{Li}_2 \left(\frac{\sqrt{\xi}}{1+v} \right) - 2 \operatorname{Li}_2 \left(\frac{1-v}{2-\sqrt{\xi}} \right) - 2 \operatorname{Li}_2 \left(\frac{2-\sqrt{\xi}}{1+v} \right) + \right. \\
& \left. 2 \ln \left(\frac{1+v}{1-v} \right) \ln \left(\frac{2-\sqrt{\xi}}{1+v} \right) - \ln^2 \left(\frac{\sqrt{\xi}}{2-\sqrt{\xi}} \right) \right]. \quad (C-63)
\end{aligned}$$

C.5.3 Berechnung des Integrals $C_7 = C[-1, -1]$

Das Integral C_7 ist gegeben durch

$$C_7 = \int \int \frac{dy dz}{yz \sqrt{(1-y)^2 - \xi} \sqrt{(1-z)^2 - \xi}} \quad (C-64)$$

Die z -Integration liefert

$$C_7 = -\frac{1}{v} \int \frac{dy}{y \sqrt{(1-y)^2 - \xi}} \ln \left(\frac{z_-(v^2 - z_+ + v \sqrt{(1-z_+)^2 - \xi})}{z_+(v^2 - z_- + v \sqrt{(1-z_-)^2 - \xi})} \right). \quad (C-65)$$

Dieses Integral ist divergent für verschwindende Gluonmasse, d.h. für $\Lambda \rightarrow 0$. Das für $\Lambda \rightarrow 0$ divergente Integral wird für kleine Werte von Λ ausgewertet, d.h. es werden nur endliche Terme und Terme proportional zu $\ln \Lambda$ behaltet. Dazu wird der Grenzfall $y \rightarrow 0$ betrachtet. In diesem Grenzfall werden auch $z_{\pm}^s(y)$ gegen Eins zu vernachlässigen sein. In diese Größen entwickelt, ist

$$v \sqrt{(1-z_{\pm})^2 - \xi} \rightarrow v^2 - z_{\pm}^s. \quad (C-66)$$

Damit ist

$$\int_{z_-}^{z_+} \frac{dz}{z \sqrt{(1-z)^2 - \xi}} = -\frac{1}{v} \ln \left(\frac{z_-(v^2 - z_+ + v \sqrt{(1-z_+)^2 - \xi})}{z_+(v^2 - z_- + v \sqrt{(1-z_-)^2 - \xi})} \right)$$

$$\begin{aligned}
& \rightarrow -\frac{1}{v} \ln \left(\frac{z_-^s - (v^2 - z_+^s + v^2 - z_+^s)}{z_+^s(v^2 - z_-^s - v^2 - z_-^s)} \right) \\
& = -\frac{1}{v} \ln \left(\frac{z_-^s}{z_+^s} \right) - \frac{1}{v} \ln \left(\frac{1 - z_+^s/v^2}{1 - z_-^s/v^2} \right) \\
& \approx \frac{1}{v} \ln \left(\frac{z_+^s}{z_-^s} \right) + \frac{z_+^s - z_-^s}{v^3} \\
& = \frac{1}{v} \ln \left(\frac{(1+v^2)y - 2v\sqrt{(y-\Lambda)^2 - \Lambda\xi}}{(1+v^2)y + 2v\sqrt{(y-\Lambda)^2 - \Lambda\xi}} \right) + \frac{4}{v^2\xi} \sqrt{(y-\Lambda)^2 - \Lambda\xi}
\end{aligned} \tag{C-67}$$

Für $\Lambda \rightarrow 0$ ist

$$\int_{z_-^s}^{z_+^s} \frac{dz}{y z \sqrt{(1-z)^2 - \xi}} \rightarrow \frac{2}{y v} \ln \left(\frac{1+v}{1-v} \right) + \frac{4y}{y v^2 \xi}. \tag{C-68}$$

Zu erkennen ist, daß der zweite Anteil konvergent ist, da sich dort die $1/y$ -Singularität herauskürzt. Im divergenten Anteil muß also nur der erste Term betrachtet werden.

Berechnung des divergenten Anteils

Es wird die Substitution $y = \Lambda + \sqrt{\Lambda\xi} \cosh \zeta$ verwendet. Dann ist

$$\begin{aligned}
\mathcal{D} & = \frac{1}{v^2} \int_{\Lambda+\sqrt{\Lambda\xi}}^{1-\sqrt{\xi}} \ln \left(\frac{(1+v^2)y + 2v\sqrt{(y-\Lambda)^2 - \Lambda\xi}}{(1+v^2)y - 2v\sqrt{(y-\Lambda)^2 - \Lambda\xi}} \right) \frac{dy}{y} \\
& = \frac{1}{v^2} \int_c^{\ln \sqrt{\eta}} \ln \left(\frac{(1+v^2) \cosh \zeta + 2v \sinh \zeta}{(1+v^2) \cosh \zeta - 2v \sinh \zeta} \right) \tanh \zeta d\zeta \\
& = \frac{1}{v^2} \int_c^{\ln \sqrt{\eta}} \ln \left(\frac{(1+v)^2 e^\zeta + (1-v)^2 e^{-\zeta}}{(1-v)^2 e^\zeta + (1+v)^2 e^{-\zeta}} \right) \frac{e^\zeta - e^{-\zeta}}{e^\zeta + e^{-\zeta}} d\zeta \\
& = \frac{1}{v^2} \int_c^{\ln \sqrt{\eta}} \ln \left(\frac{(1+v)^2 e^{2\zeta} + (1-v)^2}{(1-v)^2 e^{2\zeta} + (1+v)^2} \right) \frac{e^{2\zeta} - 1}{e^{2\zeta} + 1} d\zeta \\
& = \frac{1}{v^2} \int_b^\eta \ln \left(\frac{(1+v)^2 \tau + (1-v)^2}{(1-v)^2 \tau + (1+v)^2} \right) \frac{(\tau-1)d\tau}{2\tau(\tau+1)}.
\end{aligned} \tag{C-69}$$

Im letzten Schritt wird $\tau = e^{2\zeta}$ substituiert. Es ist $\eta = 4(1 - \sqrt{\xi})^2/\Lambda\xi$. Mit Hilfe der Partialbruchzerlegung

$$\frac{\tau-1}{2\tau(\tau+1)} = \frac{1}{\tau+1} - \frac{1}{2\tau} \tag{C-70}$$

und einer weiteren Substitution im ersten Integralanteils ergibt sich

$$v^2 \mathcal{D} = \int_d^{1+\eta} \ln \left(\frac{(1+v)^2 \tau - 4v}{(1-v)^2 \tau + 4v} \right) \frac{d\tau}{\tau} +$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{1}{2} \int_b^\eta \ln \left(\frac{(1+v)^2 \tau + (1-v)^2}{(1-v)^2 \tau + (1+v)^2} \right) \frac{d\tau}{\tau} = \tag{C-71} \\
& = \left[\ln(-4v) \ln \tau - \text{Li}_2 \left(\frac{(1+v)^2}{4v} \tau \right) - \ln(4v) \ln \tau + \text{Li}_2 \left(-\frac{(1-v)^2}{4v} \tau \right) \right]_2^{1+\eta} + \\
& \quad -\frac{1}{2} \left[2 \ln(1-v) \ln \tau - \text{Li}_2 \left(-\frac{(1+v)^2}{(1-v)^2} \tau \right) \right. \\
& \quad \left. + 2 \ln(1+v) \ln \tau + \text{Li}_2 \left(-\frac{(1-v)^2}{(1+v)^2} \tau \right) \right]_1^\eta \\
& = \ln \left(\frac{1+v}{1-v} \right) \ln \left(\frac{(1-\sqrt{\xi})^2}{\Lambda \xi} \right) - \text{Li}_2 \left(\frac{2v}{(1+v)^2} \right) + \text{Li}_2 \left(\frac{-2v}{(1-v)^2} \right) + \\
& \quad + \frac{1}{2} \text{Li}_2 \left(-\frac{(1-v)^2}{(1+v)^2} \right) - \frac{1}{2} \text{Li}_2 \left(-\frac{(1+v)^2}{(1-v)^2} \right). \tag{C-72}
\end{aligned}$$

Berechnung des konvergenten Anteils

Der konvergente Anteil ist gegeben durch

$$\begin{aligned}
\mathcal{C} = & -\frac{1}{v} \int_c^{1-\sqrt{\xi}} \ln \left(\frac{z_-(v^2 - z_+ + v\sqrt{(1-z_+)^2 - \xi})}{z_+(v^2 - z_- + v\sqrt{(1-z_-)^2 - \xi})} \right) \frac{dy}{y\sqrt{(1-y)^2 - \xi}} + \\
& -\frac{2}{v^2} \int_c^{1-\sqrt{\xi}} \ln \left(\frac{1+v}{1-v} \right) \frac{dy}{y}. \tag{C-73}
\end{aligned}$$

Mit der Substitution und den Partialbruchzerlegungen

$$\frac{dy}{y\sqrt{(1-y)^2 - \xi}} = \frac{1}{v} \left(\frac{dt}{t-t_b} - \frac{dt}{t-t_a} \right), \tag{C-74}$$

$$\frac{dy}{y} = \frac{dt}{t-t_b} + \frac{dt}{t-t_a} - \frac{dt}{t} \tag{C-75}$$

ergibt sich

$$\begin{aligned}
\mathcal{C} = & \frac{1}{v^2} \int_{t_b}^{t_c} \left(2 \ln \left(\frac{(1-v)t - \sqrt{\xi}}{(1+v) - \sqrt{\xi}t} \right) + \ln \left(\frac{1-v}{1+v} \right) \right) \left(\frac{dt}{t-t_a} - \frac{dt}{t-t_b} \right) + \\
& + \frac{1}{v^2} \int_{t_c}^{t_d} 2 \ln \left(\frac{(1+v)t - \sqrt{\xi}}{1+v - \sqrt{\xi}t} \right) \left(\frac{dt}{t-t_a} - \frac{dt}{t-t_b} \right) + \tag{C-76}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{2}{v^2} \int_{t_b}^{t_d} \ln \left(\frac{1+v}{1-v} \right) \left(\frac{dt}{t} - \frac{dt}{t-t_a} - \frac{dt}{t-t_b} \right) \\
& = \frac{1}{v^2} \int_{t_b}^{t_c} \left(2 \ln \left(\frac{(1-v)t - \sqrt{\xi}}{(1+v) - \sqrt{\xi}t} \right) + \ln \left(\frac{1-v}{1+v} \right) \right) \left(\frac{dt}{t-t_a} - \frac{dt}{t-t_b} \right) + \\
& + \frac{2}{v^2} \int_{t_b}^{t_c} \ln \left(\frac{1+v}{1-v} \right) \left(\frac{dt}{t} - \frac{dt}{t-t_a} - \frac{dt}{t-t_b} \right) \\
& + \frac{1}{v^2} \int_{t_c}^{t_d} 2 \ln \left(\frac{(1+v)t - \sqrt{\xi}}{1+v - \sqrt{\xi}t} \right) \left(\frac{dt}{t-t_a} - \frac{dt}{t-t_b} \right) + \tag{C-77}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{2}{v^2} \int_{t_c}^{t_d} \ln \left(\frac{1+v}{1-v} \right) \left(\frac{dt}{t} - \frac{dt}{t-t_a} - \frac{dt}{t-t_b} \right) \\
= & \underbrace{\frac{1}{v^2} \int_{t_b}^{t_c} \left(2 \ln \left(\frac{(1-v)t - \sqrt{\xi}}{(1+v) - \sqrt{\xi}t} \right) + 3 \ln \left(\frac{1-v}{1+v} \right) \right) \left(\frac{dt}{t-t_a} \right)}_{=C_{7a}} + \\
& - \underbrace{\frac{1}{v^2} \int_{t_b}^{t_c} \left(2 \ln \left(\frac{(1-v)t - \sqrt{\xi}}{(1+v) - \sqrt{\xi}t} \right) - \ln \left(\frac{1-v}{1+v} \right) \right) \left(\frac{dt}{t-t_b} \right)}_{=C_{7b}} + \\
& + \underbrace{\frac{2}{v^2} \int_{t_c}^{t_d} \left(\ln \left(\frac{(1+v)t - \sqrt{\xi}}{(1+v) - \sqrt{\xi}t} \right) - \ln \left(\frac{1+v}{1-v} \right) \right) \left(\frac{dt}{t-t_a} \right)}_{=C_{7c}} + \\
& - \underbrace{\frac{2}{v^2} \int_{t_c}^{t_d} \left(\ln \left(\frac{(1+v)t - \sqrt{\xi}}{(1+v) - \sqrt{\xi}t} \right) + \ln \left(\frac{1+v}{1-v} \right) \right) \left(\frac{dt}{t-t_b} \right)}_{=C_{7d}} + \\
& + \underbrace{\frac{2}{v^2} \int_{t_b}^{t_d} \ln \left(\frac{1+v}{1-v} \right) \frac{dt}{t}}_{=C_{7e}} \tag{C-78}
\end{aligned}$$

$$= C_{7a} + C_{7b} + C_{7c} + C_{7d} + C_{7e}. \tag{C-79}$$

Das Integral C_{7a} kann wie folgt berechnet werden

$$\begin{aligned}
C_{7a} &= \frac{1}{v^2} \int_{t_b}^{t_c} \left(2 \ln \left(\frac{(1-v)t - \sqrt{\xi}}{(1+v) - \sqrt{\xi}t} \right) + 3 \ln \left(\frac{1-v}{1+v} \right) \right) \left(\frac{dt}{t-t_a} \right) \\
&= \frac{1}{v^2} \int_{t_b}^{t_c} \left(2 \ln \left(\frac{\left(\frac{(1-v)}{\sqrt{\xi}}t - 1 \right) \sqrt{\xi}}{\left(\frac{(1+v)}{\sqrt{\xi}} - t \right) \sqrt{\xi}} \right) + 3 \ln \left(\frac{\frac{1-v}{\sqrt{\xi}}}{\frac{1+v}{\sqrt{\xi}}} \right) \right) \left(\frac{dt}{t-t_a} \right) \\
&= \frac{1}{v^2} \int_{t_b}^{t_c} \left(2 \ln \left(\frac{t_b t - 1}{t_a - t} \right) + 3 \ln \left(\frac{t_b}{t_a} \right) \right) \left(\frac{dt}{t-t_a} \right) \\
&\quad \text{mit der Substitution } t' := t_a - t \Rightarrow dt = -dt' \\
&= \frac{1}{v^2} \int_{t_a-t_b}^{t_a-t_c} \left(2 \ln(t_b) + 3 \ln \left(\frac{t_b}{t_a} \right) \right) \frac{dt'}{t'} \\
&= \frac{1}{v^2} \left(2 \ln(t_b) + 3 \ln \left(\frac{t_b}{t_a} \right) \right) \ln \left(\frac{t_a - t_c}{t_a - t_b} \right). \tag{C-80}
\end{aligned}$$

Für das Integral C_{7b} erhält man

$$C_{7b} = \frac{1}{v^2} \int_{t_b}^{t_c} \left(2 \ln \left(\frac{(1-v)t - \sqrt{\xi}}{(1+v) - \sqrt{\xi}t} \right) - \ln \left(\frac{1-v}{1+v} \right) \right) \left(\frac{dt}{t-t_b} \right)$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{v^2} \int_{t_b}^{t_c} \left(2 \ln \left(\frac{\left(\frac{(1-v)}{\sqrt{\xi}} t - 1 \right) \sqrt{\xi}}{\left(\frac{(1+v)}{\sqrt{\xi}} - t \right) \sqrt{\xi}} \right) - \ln \left(\frac{\frac{1+v}{\sqrt{\xi}}}{\frac{1-v}{\sqrt{\xi}}} \right) \right) \left(\frac{dt}{t - t_b} \right) \\
&= \frac{1}{v^2} \int_{t_b}^{t_c} \left(2 \ln \left(\frac{t_b t - 1}{t_a - t} \right) - \ln \left(\frac{t_b}{t_a} \right) \right) \left(\frac{dt}{t - t_b} \right) \\
&\quad \text{mit } t' := t_a - t \Rightarrow dt = -dt' \\
&= \frac{1}{v^2} \int_{t_a - t_b}^{t_a - t_c} \left(2 \ln \left(\frac{t_b (t_a - t') - 1}{t'} \right) - \ln \left(\frac{t_b}{t_a} \right) \right) \left(\frac{dt'}{t - (t_a + t_b)} \right) \\
&= \frac{1}{v^2} \int_{t_a - t_b}^{t_a - t_c} \left(2 \ln(t_b) - \underbrace{\ln \left(\frac{t_b}{t_a} \right)}_{\substack{t_b = \frac{1}{t_a} \\ = 0}} \right) \left(\frac{dt'}{t - (t_a + t_b)} \right) \\
&= 0.
\end{aligned} \tag{C-81}$$

Für das Integral C_{7c} bekommt man

$$\begin{aligned}
C_{7c} &= \frac{2}{v^2} \int_{t_c}^{t_d} \left(\ln \left(\frac{(1+v)t - \sqrt{\xi}}{(1+v) - \sqrt{\xi}t} \right) - \ln \left(\frac{1+v}{1-v} \right) \right) \left(\frac{dt}{t - t_a} \right) \\
&= \frac{2}{v^2} \int_{t_c}^{t_d} \left(\ln \left(\frac{\left(\frac{(1+v)}{\sqrt{\xi}} t - 1 \right) \sqrt{\xi}}{\left(\frac{(1+v)}{\sqrt{\xi}} - t \right) \sqrt{\xi}} \right) - \ln \left(\frac{\frac{1+v}{\sqrt{\xi}}}{\frac{1-v}{\sqrt{\xi}}} \right) \right) \left(\frac{dt}{t - t_a} \right) \\
&= \frac{2}{v^2} \int_{t_c}^{t_d} \left(\ln \left(\frac{t_a t - 1}{t_a - t} \right) - \ln \left(\frac{t_a}{t_b} \right) \right) \left(\frac{dt}{t - t_a} \right) \\
&\quad \text{mit } t' := t_a - t \Rightarrow dt = -dt' \\
&= \frac{2}{v^2} \int_{t_a - t_c}^{t_a - t_d} \left(\ln \left(\frac{t_a (t_a - t') - 1}{t'} \right) - \ln \left(\frac{t_a}{t_b} \right) \right) \frac{dt'}{t'} \\
&= \frac{2}{v^2} \left[\left(\ln(t_a^2 - 1) - \ln \left(\frac{t_a}{t_b} \right) \right) \ln(t') - \frac{1}{2} \ln^2(t') - \text{Li}_2 \left(\left(\frac{t_a}{t_a^2 - 1} \right) t' \right) \right]_{t_a - t_c}^{t_a - t_d} \\
&= \frac{2}{v^2} \left[\left(\ln(t_a^2 - 1) - \ln \left(\frac{t_a}{t_b} \right) \right) \ln \left(\frac{t_a - t_c}{t_a - t_d} \right) - \frac{1}{2} \ln^2(t_a - t_d) + \frac{1}{2} \ln^2(t_a - t_c) + \right. \\
&\quad \left. - \text{Li}_2 \left(\frac{t_a}{t_a + 1} \right) + \text{Li}_2 \left(\frac{t_a (t_a - t_c)}{t_a^2 - 1} \right) \right].
\end{aligned} \tag{C-82}$$

Für das Integral C_{7d} erhält man

$$\begin{aligned}
C_{7d} &= \frac{2}{v^2} \int_{t_c}^{t_d} \left(\ln \left(\frac{(1+v)t - \sqrt{\xi}}{(1+v) - \sqrt{\xi}t} \right) - \ln \left(\frac{1+v}{1-v} \right) \right) \left(\frac{dt}{t - t_b} \right) \\
&= \frac{2}{v^2} \int_{t_c}^{t_d} \left(\ln \left(\frac{\left(\frac{(1+v)}{\sqrt{\xi}} t - 1 \right) \sqrt{\xi}}{\left(\frac{(1+v)}{\sqrt{\xi}} - t \right) \sqrt{\xi}} \right) - \ln \left(\frac{\frac{1+v}{\sqrt{\xi}}}{\frac{1-v}{\sqrt{\xi}}} \right) \right) \left(\frac{dt}{t - t_b} \right) \\
&= \frac{2}{v^2} \int_{t_c}^{t_d} \left(\ln \left(\frac{t_a t - 1}{t_a - t} \right) - \ln \left(\frac{t_a}{t_b} \right) \right) \left(\frac{dt}{t - t_b} \right) \\
&\quad \text{mit } t' := t - t_b \quad \Rightarrow \quad dt = dt' \\
&= \frac{2}{v^2} \int_{t_c - t_b}^{t_d - t_b} \left(\ln \left(\frac{t_a(t' + t_b) - 1}{t_a - (t' + t_b)} \right) - \ln \left(\frac{t_a}{t_b} \right) \right) \frac{dt'}{t'} \\
&= \frac{2}{v^2} \left[\frac{1}{2} \ln^2(t_a t') + \left(\ln \left(\frac{t_a}{t_b} \right) - \ln(t_a - t_b) \right) \ln(t') + \text{Li}_2 \left(\left(\frac{1}{t_a - t_b} \right) t' \right) \right]_{t_c - t_b}^{t_d - t_b} \\
&= \frac{2}{v^2} \left[\frac{1}{2} \ln^2(t_a(t_d - t_b)) - \frac{1}{2} \ln^2(t_a(t_c - t_b)) + \left(\ln \left(\frac{t_a}{t_b} \right) - \ln(t_a - t_b) \right) \times \right. \\
&\quad \left. \ln \left(\frac{t_d - t_b}{t_c - t_b} \right) + \text{Li}_2 \left(\frac{t_d - t_b}{t_a - t_b} \right) - \text{Li}_2 \left(\frac{t_c - t_b}{t_a - t_b} \right) \right]. \tag{C-83}
\end{aligned}$$

Für das Integral C_{7e} erhält man

$$\begin{aligned}
C_{7e} &= \frac{2}{v^2} \int_{t_b}^{t_d} \ln \left(\frac{1+v}{1-v} \right) \frac{dt}{t} \\
&= \frac{2}{v^2} \int_{t_b}^{t_d} \ln \left(\frac{\frac{1+v}{\sqrt{\xi}}}{\frac{1-v}{\sqrt{\xi}}} \right) \frac{dt}{t} = \frac{2}{v^2} \int_{t_b}^{t_d} \ln \left(\frac{t_a}{t_b} \right) \frac{dt}{t} \\
&= \frac{2}{v^2} \ln \left(\frac{t_a}{t_b} \right) \ln \left(\frac{t_d}{t_b} \right). \tag{C-84}
\end{aligned}$$

Zusammenfassung

$$\begin{aligned}
C_7 &= \frac{2}{v^2} \left[\left(2 \ln(t_b) + 3 \ln \left(\frac{t_b}{t_a} \right) \right) \ln \left(\frac{t_a - t_c}{t_a - t_b} \right) + 2 \ln \left(\frac{t_a}{t_b} \right) \ln \left(\frac{t_d}{t_b} \right) + \right. \\
&\quad + \left(\ln(t_a^2 - 1) - \ln \left(\frac{t_a}{t_b} \right) \right) \ln \left(\frac{t_a - t_c}{t_a - t_d} \right) - \frac{1}{2} \ln^2(t_a - t_d) + \frac{1}{2} \ln^2(t_a - t_c) + \\
&\quad + \frac{1}{2} \ln^2(t_a(t_d - t_b)) - \frac{1}{2} \ln^2(t_a(t_c - t_b)) + \left(\ln \left(\frac{t_a}{t_b} \right) - \ln(t_a - t_b) \right) \ln \left(\frac{t_d - t_b}{t_c - t_b} \right) \\
&\quad \left. - \text{Li}_2 \left(\frac{t_a}{t_a + 1} \right) + \text{Li}_2 \left(\frac{t_a(t_a - t_c)}{t_a^2 - 1} \right) + \text{Li}_2 \left(\frac{t_d - t_b}{t_a - t_b} \right) - \text{Li}_2 \left(\frac{t_c - t_b}{t_a - t_b} \right) \right] \tag{C-85}
\end{aligned}$$

C.5.4 Berechnung des Integrals $C_{10} = C[0, -2]$

Das Integral C_{10} ist gegeben durch

$$C_{10} = C(0, -2) = \int \frac{dy dz}{z^2 \sqrt{(1-y)^2 - \xi} \sqrt{(1-z)^2 - \xi}}. \quad (\text{C-86})$$

Die partielle Integration über z liefert

$$\int_{z_-}^{z_+} \frac{dz}{z^2 \sqrt{(1-z)^2 - \xi}} = \frac{1}{v^2} \left[\int \frac{dz}{z \sqrt{(1-z)^2 - \xi}} - \frac{\sqrt{(1-y^2) - \xi}}{z} \right]_{z_-}^{z_+} \quad (\text{C-87})$$

Die Integrale der dritten Klasse bestehen also aus den Integralen der zweiten Klasse (C-25) und einem Zusatzterm. Für den Integranden dieses Anteils ergibt sich in den Grenzen

$$\left[\frac{\sqrt{(1-z)^2 - \xi}}{z} \right]_{z_-}^{z_+} = \begin{cases} \frac{4(t^2 - 2\sqrt{\xi}t + 1)}{\xi(t^2 - \frac{2t}{\sqrt{\xi}} + 1)} & \text{für } t_b \leq t \leq t_c, \\ -\frac{2(2-\xi)(t^2 - 1)}{\xi(t^2 - \frac{2t}{\sqrt{\xi}} + 1)} & \text{für } t_c \leq t \leq t_d. \end{cases} \quad (\text{C-88})$$

somit kann das Integral C_{10} als

$$C_{10} = \int \int \frac{dy dz}{z^2 \sqrt{(1-y)^2 - \xi} \sqrt{(1-z)^2 - \xi}} = \frac{1}{v^2} (C_6 - \tilde{C}_{10}) \quad (\text{C-89})$$

geschrieben werden, mit

$$\tilde{C}_{10} = \int_{\Lambda + \sqrt{\Lambda\xi}}^{1-\sqrt{\xi}} \frac{dy}{\sqrt{(1-y)^2 - \xi}} \left[\frac{\sqrt{(1-z)^2 - \xi}}{z} \right]_{z_-(y)}^{z_+(y)} \quad (\text{C-90})$$

Das Integral ist divergent. Durch Entwicklung in kleine Werte von $z_{\pm}$ wie für C_7 ergibt sich

$$\sqrt{(1-z_{\pm})^2 - \xi} \rightarrow v - \frac{z_{\pm}^s}{v} \quad (\text{C-91})$$

und damit

$$\left[\frac{\sqrt{(1-z)^2 - \xi}}{z} \right]_{z_-}^{z_+} \rightarrow v \left(\frac{1}{z_+^s} - \frac{1}{z_-^s} \right) \quad (\text{C-92})$$

mit $\xi z_{\pm}^s = (1+v^2)y \pm 2v\sqrt{(y-\Lambda)^2 - \Lambda\xi}$ und für $\Lambda \rightarrow 0$

$$\frac{dy}{\sqrt{(1-y)^2 - \xi}} \left[\frac{\sqrt{(1-z)^2 - \xi}}{z} \right]_{z_-^s}^{z_+^s} \rightarrow \left(\frac{\xi}{(1+v)^2 y} - \frac{\xi}{(1-v)^2 y} \right) dy = -\frac{4v}{\xi} \frac{dy}{y}. \quad (\text{C-93})$$

Berechnung des divergenten Anteils

Mit der Substitution $y = \Lambda + \sqrt{\Lambda\xi} \cosh \zeta$ ist

$$\begin{aligned}
\mathcal{D} &= \int_{\Lambda+\sqrt{\Lambda\xi}}^{1-\sqrt{\xi}} \frac{dy}{v} \left[\frac{\sqrt{(1-z)^2 - \xi}}{z} \right]_{z_-^s}^{z_+^s} = \int_{\Lambda+\sqrt{\Lambda\xi}}^{1-\sqrt{\xi}} \left(\frac{1}{z_+^s} - \frac{1}{z_-^s} \right) dy \\
&= \int_c^{\ln \sqrt{\eta}} \frac{\xi \sqrt{\Lambda\xi} \sinh \zeta d\zeta}{(1+v^2)\Lambda + (1+v^2)\sqrt{\Lambda\xi} \cosh \zeta + 2v\sqrt{\Lambda\xi} \sinh \zeta} + \\
&\quad - \int_c^{\ln \sqrt{\eta}} \frac{\xi \sqrt{\Lambda\xi} \sinh \zeta d\zeta}{(1+v^2)\Lambda + (1+v^2)\sqrt{\Lambda\xi} \cosh \zeta - 2v\sqrt{\Lambda\xi} \sinh \zeta} \\
&\approx \int_c^{\ln \sqrt{\eta}} \left(\frac{\xi \sinh \zeta d\zeta}{(1+v^2) \cosh \zeta + 2v \sinh \zeta} - \frac{\xi \sinh \zeta d\zeta}{(1+v^2) \cosh \zeta - 2v \sinh \zeta} \right) \\
&= \int_c^{\ln \sqrt{\eta}} \left(\frac{\xi(e^\zeta - e^{-\zeta})d\zeta}{(1+v)^2 e^\zeta + (1-v)^2 e^{-\zeta}} - \frac{\xi(e^\zeta - e^{-\zeta})d\zeta}{(1-v)^2 e^\zeta + (1+v)^2 e^{-\zeta}} \right) \\
&= \int_b^\eta \left(\frac{\xi(\tau - 1)}{(1+v)^2 \tau + (1-v)^2} - \frac{\xi(\tau - 1)}{(1-v)^2 \tau + (1+v)^2} \right) \frac{d\tau}{2\tau}. \tag{C-94}
\end{aligned}$$

Dabei wird die Substitution $\tau = e^{2\zeta}$ verwendet. Mit Hilfe der Partialbruchzerlegung

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{\xi(\tau - 1)}{(1+v)^2 \tau + (1-v)^2} - \frac{\xi(\tau - 1)}{(1-v)^2 \tau + (1+v)^2} \right) \frac{d\tau}{2\tau} \\
&= -\frac{2v d\tau}{\xi \tau} + \frac{1+v^2}{\xi} \left(\frac{d\tau}{\tau + \frac{(1-v)^2}{(1+v)^2}} - \frac{d\tau}{\tau + \frac{(1+v)^2}{(1-v)^2}} \right) \tag{C-95}
\end{aligned}$$

ergibt sich

$$\begin{aligned}
\mathcal{D} &= -\frac{1+v^2}{\xi} \int_b^\eta \left(\frac{2v d\tau}{(1+v^2)\tau} - \frac{d\tau}{\tau - \frac{(1-v)^2}{(1+v)^2}} + \frac{d\tau}{\tau - \frac{(1+v)^2}{(1-v)^2}} \right) \\
&= -\frac{1+v^2}{\xi} \left[\frac{2v}{1+v^2} \ln \tau - \ln \left(\tau + \frac{(1-v)^2}{(1+v)^2} \right) + \ln \left(\tau + \frac{(1+v)^2}{(1-v)^2} \right) \right]_1^\eta \\
&= -\frac{1+v^2}{\xi} \left(\frac{2v}{1+v^2} \ln \eta + \ln \left(1 + \frac{(1-v)^2}{(1+v)^2} \right) - \ln \left(1 - \frac{(1+v)^2}{(1-v)^2} \right) \right) \\
&= -\frac{2v}{\xi} \ln \left(\frac{4(1-\sqrt{\xi})^2}{\Lambda\xi} \right) + 2\frac{1+v^2}{\xi} \ln \left(\frac{1+v}{1-v} \right). \tag{C-96}
\end{aligned}$$

Berechnung des konvergenten Anteils

Wie bereits für das Integral C_7 berechnet wurde, ist

$$\mathcal{D} \rightarrow -\frac{4v}{\xi} \int_c^{1-\sqrt{\xi}} \frac{dy}{y} = \frac{4v}{\xi} \int_{t_b}^{t_d} \left(\frac{dt}{t} - \frac{dt}{t-t_b} - \frac{dt}{t-t_a} \right). \tag{C-97}$$

Andererseits ergibt die Partialbruchzerlegung des substituierten und ungenäherten Integranden (C-36)

$$\frac{dy}{\sqrt{(1-y)^2 - \xi}} \left[\frac{\sqrt{(1-z)^2 - \xi}}{z} \right]_{z_-}^{z_+} = \frac{4}{\xi} \left(\frac{dt}{t} - \frac{v dt}{t - t_b} + \frac{v dt}{t - t_a} \right) \quad (\text{C-98})$$

für $t \leq t_c$ und

$$\frac{dy}{\sqrt{(1-y)^2 - \xi}} \left[\frac{\sqrt{(1-z)^2 - \xi}}{z} \right]_{z_-}^{z_+} = -\frac{2(2-\xi)}{\xi} \left(\frac{dt}{t} - \frac{dt}{t - t_b} - \frac{dt}{t - t_a} \right) \quad (\text{C-99})$$

für $t \geq t_c$. Der konvergente Anteil spaltet sich daher in sechs Anteile auf,

$$\mathcal{C} = C_{10a} + C_{10b} + C_{10c} + C_{10d} + C_{10e} + C_{10f}. \quad (\text{C-100})$$

Für das Integral C_{10a} erhält man

$$C_{10a} = \frac{4}{\xi} (1-v) \int_{t_b}^{t_c} \frac{dt}{t} = \frac{4}{1+v} \ln \left(\frac{1+v}{2-\sqrt{\xi}} \right) \quad (\text{C-101})$$

Für das Integral C_{10b} bekommt man

$$C_{10b} = \frac{4v}{\xi} \int_{t_b}^{t_c} \left(-\frac{dt}{t - t_b} + \frac{dt}{t - t_b} \right) = 0 \quad (\text{C-102})$$

Für das Integral C_{10c} ergibt sich

$$\begin{aligned} C_{10c} &= \frac{8v}{\xi} \int_{t_b}^{t_c} \frac{dt}{t - t_a} = \frac{8v}{\xi} \ln \left(\frac{1+v}{\sqrt{\xi}} - t \right) \Big|_{t_b}^{t_c} = \\ &= \frac{8v}{\xi} \ln \left(\frac{1+v}{\sqrt{\xi}} - \frac{\sqrt{\xi}}{2-\sqrt{\xi}} \right) - \frac{8v}{\xi} \ln \left(\frac{2v}{\sqrt{\xi}} \right) \end{aligned} \quad (\text{C-103})$$

Für das Integral C_{10d} erhält man

$$C_{10d} = \frac{2}{\xi} ((2-\xi) - 2v) \int_{t_c}^{t_d} \frac{dt}{t} = \frac{2(1-v)^2}{\xi} \ln \left(\frac{2-\sqrt{\xi}}{\sqrt{\xi}} \right) \quad (\text{C-104})$$

Für das Integral C_{10e} ergibt sich

$$\begin{aligned} C_{10e} &= -\frac{2}{\xi} ((2-\xi) - 2v) \int_{t_c}^{t_d} \frac{dt}{t - t_b} = -\frac{2(1-v)^2}{\xi} \ln \left(t - \frac{1-v}{\sqrt{\xi}} \right) \Big|_{t_c}^{t_d} = \\ &= -\frac{2(1-v)^2}{\xi} \ln \left(1 - \frac{1-v}{\sqrt{\xi}} \right) + \frac{2(1-v)^2}{\xi} \ln \left(\frac{\sqrt{\xi}}{2-\sqrt{\xi}} - \frac{1-v}{\sqrt{\xi}} \right) \end{aligned} \quad (\text{C-105})$$

Für das Integral C_{10f} bekommt man

$$\begin{aligned} C_{10f} &= -\frac{2}{\xi} ((2-\xi) - 2v) \int_{t_c}^{t_d} \frac{dt}{t - t_a} = -\frac{2(1-v)^2}{\xi} \ln \left(\frac{1+v}{\sqrt{\xi}} - t \right) \Big|_{t_c}^{t_d} = \\ &= -\frac{2(1-v)^2}{\xi} \ln \left(\frac{1+v}{\sqrt{\xi}} - 1 \right) + \frac{2(1-v)^2}{\xi} \ln \left(\frac{1+v}{\sqrt{\xi}} - \frac{\sqrt{\xi}}{2-\sqrt{\xi}} \right) \end{aligned} \quad (\text{C-106})$$

Zusammenfassung

$$\begin{aligned}
\tilde{C}_{10} &= -\frac{2v}{\xi} \ln \left(\frac{4(1-\sqrt{\xi})^2}{\Lambda\xi} \right) + 2\frac{1+v^2}{\xi} \ln \left(\frac{1+v}{1-v} \right) + \\
&+ \frac{4}{1+v} \ln \left(\frac{1+v}{2-\sqrt{\xi}} \right) + \frac{2(1-v)^2}{\xi} \ln \left(\frac{2-\sqrt{\xi}}{\sqrt{\xi}} \right) + \\
&+ \frac{8v}{\xi} \ln \left(\frac{1+v}{\sqrt{\xi}} - \frac{\sqrt{\xi}}{2-\sqrt{\xi}} \right) - \frac{8v}{\xi} \ln \left(\frac{2v}{\sqrt{\xi}} \right) + \\
&- \frac{2(1-v)^2}{\xi} \ln \left(1 - \frac{1-v}{\sqrt{\xi}} \right) + \frac{2(1-v)^2}{\xi} \ln \left(\frac{\sqrt{\xi}}{2-\sqrt{\xi}} - \frac{1-v}{\sqrt{\xi}} \right) + \\
&- \frac{2(1-v)^2}{\xi} \ln \left(\frac{1+v}{\sqrt{\xi}} - 1 \right) + \frac{2(1-v)^2}{\xi} \ln \left(\frac{1+v}{\sqrt{\xi}} - \frac{\sqrt{\xi}}{2-\sqrt{\xi}} \right) = \\
&= -\frac{2v}{\xi} \ln \left(\frac{4(1-\sqrt{\xi})^2}{\Lambda\xi} \right) + 2\frac{1+v^2}{\xi} \ln \left(\frac{1+v}{1-v} \right) + \\
&+ \frac{4(1-v)}{\xi} \ln \left(\frac{1+v}{2-\sqrt{\xi}} \right) + \frac{2(1-v)^2}{\xi} \ln \left(\frac{2-\sqrt{\xi}}{\sqrt{\xi}} \right) + \\
&+ \frac{8v}{\xi} \ln \left(\frac{1+v}{2-\sqrt{\xi}} \left(\frac{1+v-\sqrt{\xi}}{\sqrt{\xi}} \right) \right) - \frac{8v}{\xi} \ln \left(\frac{2v}{\sqrt{\xi}} \right) + \\
&- \frac{2(1-v)^2}{\xi} \ln \left(\frac{\sqrt{\xi}-1+v}{\sqrt{\xi}} \right) + \frac{2(1-v)^2}{\xi} \ln \left(\frac{1-v}{2-\sqrt{\xi}} \left(\frac{\sqrt{\xi}-1+v}{\sqrt{\xi}} \right) \right) + \\
&- \frac{2(1-v)^2}{\xi} \ln \left(\frac{1+v-\sqrt{\xi}}{\sqrt{\xi}} \right) + \frac{2(1-v)^2}{\xi} \ln \left(\frac{1+v}{2-\sqrt{\xi}} \left(\frac{1+v-\sqrt{\xi}}{\sqrt{\xi}} \right) \right) = \\
&= \frac{2v}{\xi} \ln \Lambda + \frac{2}{\xi} \ln \left(\frac{(1+v)^2 \xi \sqrt{\xi}}{(1-v)^2 (2-\sqrt{\xi})^3} \right) + \\
&+ \frac{4v}{\xi} \ln \left(\frac{(1+v)(1+v-\sqrt{\xi})^2}{8v^2(1-\sqrt{\xi})} \right) + \frac{2v^2}{\xi} \ln \left(\frac{(1+v)\sqrt{\xi}}{(1-v)(2-\sqrt{\xi})} \right) = \\
&= \frac{2v}{\xi} \ln \Lambda + \frac{2}{\xi} \ln \left(\frac{(1+v)^2 \xi \sqrt{\xi}}{(1-v)^2 (2-\sqrt{\xi})^3} \right) + \\
&+ \frac{4v}{\xi} \ln \left(\frac{(1+v)^2 (1-\sqrt{\xi})}{4v^2(1-\sqrt{\xi})} \right) + \frac{2v^2}{\xi} \ln \left(\frac{(1+v)\sqrt{\xi}}{(1-v)(2-\sqrt{\xi})} \right) = \\
&= \frac{2v}{\xi} \ln \Lambda + \frac{4}{\xi} \ln \left(\frac{1+v}{1-v} \right) + \frac{6}{\xi} \ln \left(\frac{\sqrt{\xi}}{2-\sqrt{\xi}} \right) + \\
&+ \frac{8v}{\xi} \ln \left(\frac{1+v}{2v} \right) + \frac{2v^2}{\xi} \ln \left(\frac{1+v}{1-v} \right) + \frac{2v^2}{\xi} \ln \left(\frac{\sqrt{\xi}}{2-\sqrt{\xi}} \right), \tag{C-107}
\end{aligned}$$

also

$$\begin{aligned}
\tilde{C}_{10} &= \frac{2v}{\xi} \ln \Lambda + \frac{8v}{\xi} \ln \left(\frac{1+v}{2v} \right) + \\
&+ 2\frac{3-\xi}{\xi} \ln \left(\frac{1+v}{1-v} \right) + 2\frac{4-\xi}{\xi} \ln \left(\frac{\sqrt{\xi}}{2-\sqrt{\xi}} \right). \tag{C-108}
\end{aligned}$$

Dabei wird folgende Faktorisierung verwendet:

$$\begin{aligned} (1 + v - \sqrt{\xi})^2 &= 1 + 2v - 2\sqrt{\xi} + v^2 - 2v\sqrt{\xi} + \xi \\ &= 2(1 + v) - 2(1 + v)\sqrt{\xi} = 2(1 + v)(1 - \sqrt{\xi}). \end{aligned} \quad (\text{C-109})$$

C.6 Berechnung der Integrale der Familie M

Die Integrale dieser Familie sind als

$$M[l, m] = \int_{y_-}^{y_+} \int_{z_-}^{z_+} \frac{y^l z^m}{((1 - y)^2 - \xi) \sqrt{(1 - z)^2 - \xi}} dy dz \quad \text{mit} \quad \begin{cases} -2 \leq m \leq 2 \\ -2 \leq l \leq 4 \end{cases} \quad (\text{C-110})$$

definiert. Eine vollständige Liste der Integrale und die ihnen zugewiesenen Namen ist in der Tabelle (C.2) dargestellt.

z^m	y^l						
	-2	-1	0	+1	+2	+3	+4
-2			M_{11}	M_{12}	M_{13}	M_{14}	M_{15}
-1		M_{23}	M_6	M_7	M_8	M_9	M_{10}
0	M_{24}	M_{25}	M_1	M_2	M_3	M_4	M_5
+1	M_{26}	M_{27}	M_{16}	M_{17}	M_{18}	M_{19}	
+2	M_{28}	M_{29}	M_{20}	M_{21}	M_{22}		

Tabelle C.2: Integrale der Familie M

C.6.1 Berechnung der zugehörigen Integrale der ersten Klasse

Die Integrale der Familie M, die zur ersten Klasse gehören (C-25), sind M_1 , M_2 , M_3 , M_4 , M_5 , M_{24} und M_{25} .

Berechnung des Integrals $M_1 = M[0, 0]$

Das Integral M_1 ist gegeben durch

$$M_1 = \int \int \frac{dy dz}{((1 - y)^2 - \xi) \sqrt{(1 - z)^2 - \xi}}. \quad (\text{C-111})$$

Die z -Integration liefert

$$M_1 = \int \frac{dy}{((1-y)^2 - \xi)} \ln \left(\frac{1 - z_+ - \sqrt{(1 - z_+)^2 - \xi}}{1 - z_- - \sqrt{(1 - z_-)^2 - \xi}} \right). \quad (\text{C-112})$$

Mit Hilfe der Substitution (C-10), der Gl. (C-23) und anschliessender Partialbruchzerlegung

$$\frac{dy}{((1-y)^2 - \xi)} = \left(\frac{1}{1+t} + \frac{1}{1-t} \right) \frac{dt}{\sqrt{\xi}} \quad (\text{C-113})$$

wird das Integral M_1 durch

$$\begin{aligned} M_1 = & \frac{1}{\sqrt{\xi}} \left(\left[\int_{t_b}^{t_c} \ln \left(\frac{(2t - \sqrt{\xi})(2 - \sqrt{\xi}t)}{\xi t} \right) \frac{dt}{(1+t)} + \int_{t_c}^{t_d} \ln \left(\frac{(2t - \sqrt{\xi})t}{2t - \sqrt{\xi}} \right) \frac{dt}{(1+t)} \right] \right. \\ & \left. + \left[\int_{t_b}^{t_c} \ln \left(\frac{(2t - \sqrt{\xi})(2 - \sqrt{\xi}t)}{\xi t} \right) \frac{dt}{(1-t)} + \int_{t_c}^{t_d} \ln \left(\frac{(2t - \sqrt{\xi})t}{2t - \sqrt{\xi}} \right) \frac{dt}{(1-t)} \right] \right) \end{aligned} \quad (\text{C-114})$$

gegeben, wobei der Integrand durch (C-25) ersetzt wird. Danach werden M_{1a} als

$$\begin{aligned} M_{1a} = & \left[\int_{t_b}^{t_c} \ln \left(\frac{(2t - \sqrt{\xi})(2 - \sqrt{\xi}t)}{\xi t} \right) \frac{dt}{(1+t)} + \int_{t_c}^{t_d} \ln \left(\frac{(2t - \sqrt{\xi})t}{2t - \sqrt{\xi}} \right) \frac{dt}{(1+t)} \right] \\ = & -\ln(2t_b - \sqrt{\xi}) \ln\left(\frac{2(1+t_b)}{2 + \sqrt{\xi}}\right) + 2 \ln(2t_c - \sqrt{\xi}) \ln\left(\frac{2(1+t_c)}{2 + \sqrt{\xi}}\right) - \\ & \ln(2 - \sqrt{\xi}) \ln\left(\frac{2}{\sqrt{\xi}}\right) - \ln(2 - t_b \sqrt{\xi}) \ln\left(\frac{(1+t_b)\sqrt{\xi}}{2 + \sqrt{\xi}}\right) + \\ & \ln(1+t_b) \ln(t_b \xi) - \ln(1+t_c) \ln(t_c^2 \xi) - \text{Li}_2(t_b) + \\ & \frac{\text{Li}_2(t_b^2)}{2} + 2 \text{Li}_2(t_c) - \text{Li}_2(t_c^2) + \text{Li}_2\left(\frac{2 - \sqrt{\xi}}{2 + \sqrt{\xi}}\right) - \text{Li}_2\left(-\frac{2 - \sqrt{\xi}}{2 + \sqrt{\xi}}\right) - \\ & \text{Li}_2\left(-\frac{2t_b - \sqrt{\xi}}{2 + \sqrt{\xi}}\right) + 2 \text{Li}_2\left(-\frac{2t_c - \sqrt{\xi}}{2 + \sqrt{\xi}}\right) - \text{Li}_2\left(\frac{2 - t_b \sqrt{\xi}}{2 + \sqrt{\xi}}\right) - \frac{\pi^2}{12} \end{aligned} \quad (\text{C-115})$$

und M_{1b} als

$$\begin{aligned} M_{1b} = & \left[\int_{t_b}^{t_c} \ln \left(\frac{(2t - \sqrt{\xi})(2 - \sqrt{\xi}t)}{\xi t} \right) \frac{dt}{(1-t)} + \int_{t_c}^{t_d} \ln \left(\frac{(2t - \sqrt{\xi})t}{2t - \sqrt{\xi}} \right) \frac{dt}{(1-t)} \right] \\ = & \frac{\pi^2}{6} + \frac{\ln(2 - \sqrt{\xi})^2}{2} + \ln(2t_b - \sqrt{\xi}) \ln\left(\frac{2(1-t_b)}{2 - \sqrt{\xi}}\right) - \\ & 2 \ln(2t_c - \sqrt{\xi}) \ln\left(\frac{2(1-t_c)}{2 - \sqrt{\xi}}\right) - \frac{\ln(2 - t_b \sqrt{\xi})^2}{2} + \\ & \ln(2 - \sqrt{\xi}) \ln\left(\frac{2}{(2 - \sqrt{\xi})\sqrt{\xi}}\right) + \ln(2 - t_b \sqrt{\xi}) \ln((1-t_b)\sqrt{\xi}) - \\ & \ln(1-t_b) \ln(t_b \xi) + \ln(1-t_c) \ln(t_c^2 \xi) - \text{Li}_2(t_b) + \\ & 2 \text{Li}_2(t_c) + \text{Li}_2\left(\frac{2t_b - \sqrt{\xi}}{2 - \sqrt{\xi}}\right) - 2 \text{Li}_2\left(\frac{2t_c - \sqrt{\xi}}{2 - \sqrt{\xi}}\right) - \text{Li}_2\left(\frac{2 - \sqrt{\xi}}{2 - t_b \sqrt{\xi}}\right) \end{aligned} \quad (\text{C-116})$$

bezeichnet. Damit wird M_1 zu

$$M_1 = \frac{1}{\sqrt{\xi}} (M_{1a} + M_{1b}). \quad (\text{C-117})$$

Berechnung des Integrals $M_2 = M[1, 0]$

Das Integral M_2 ist gegeben durch

$$M_2 = \int \int \frac{y \, dy \, dz}{((1-y)^2 - \xi) \sqrt{(1-z)^2 - \xi}}. \quad (\text{C-118})$$

Die z -Integration liefert

$$M_2 = \int \frac{y \, dy}{((1-y)^2 - \xi)} \ln \left(\frac{1 - z_+ - \sqrt{(1-z_+)^2 - \xi}}{1 - z_- - \sqrt{(1-z_-)^2 - \xi}} \right). \quad (\text{C-119})$$

Mit Hilfe der Substitution (C-10), der Gl. (C-23) und anschliessender Partialbruchzerlegung

$$\frac{y \, dy}{((1-y)^2 - \xi)} = \left(\frac{1 - \sqrt{\xi}}{\sqrt{\xi}} \frac{1}{1-t} + \frac{1 + \sqrt{\xi}}{\sqrt{\xi}} \frac{1}{1+t} - \frac{1}{t} \right) dt \quad (\text{C-120})$$

wird das Integral M_2 durch

$$\begin{aligned} M_2 = & \frac{1 + \sqrt{\xi}}{\sqrt{\xi}} \left[\int_{t_b}^{t_c} \ln \left(\frac{(2t - \sqrt{\xi})(2 - \sqrt{\xi}t)}{\xi t} \right) \frac{dt}{(1+t)} + \int_{t_c}^{t_d} \ln \left(\frac{(2t - \sqrt{\xi})t}{2t - \sqrt{\xi}} \right) \frac{dt}{(1+t)} \right] \\ & + \frac{1 - \sqrt{\xi}}{\sqrt{\xi}} \left[\int_{t_b}^{t_c} \ln \left(\frac{(2t - \sqrt{\xi})(2 - \sqrt{\xi}t)}{\xi t} \right) \frac{dt}{(1-t)} + \int_{t_c}^{t_d} \ln \left(\frac{(2t - \sqrt{\xi})t}{2t - \sqrt{\xi}} \right) \frac{dt}{(1-t)} \right] \\ & - \left[\int_{t_b}^{t_c} \ln \left(\frac{(2t - \sqrt{\xi})(2 - \sqrt{\xi}t)}{\xi t} \right) \frac{dt}{t} + \int_{t_c}^{t_d} \ln \left(\frac{(2t - \sqrt{\xi})t}{2t - \sqrt{\xi}} \right) \frac{dt}{t} \right] \end{aligned} \quad (\text{C-121})$$

ausgedrückt, wobei der Integrand durch (C-25) ersetzt wird. Danach werden die ersten beiden Integrale durch M_{1a} und M_{1b} ersetzt und als zusätzliches Integral

$$\begin{aligned} M_{2a} = & \left[\int_{t_b}^{t_c} \ln \left(\frac{(2t - \sqrt{\xi})(2 - \sqrt{\xi}t)}{\xi t} \right) \frac{dt}{t} + \int_{t_c}^{t_d} \ln \left(\frac{(2t - \sqrt{\xi})t}{2t - \sqrt{\xi}} \right) \frac{dt}{t} \right] \\ = & -\frac{\ln(t_b) \ln(16t_b)}{2} - \frac{\ln(t_b) \ln(t_c)}{2} + \frac{\ln(16t_b) \ln(t_c)}{2} + \frac{\ln(t_b \xi)^2}{2} - \\ & \frac{\ln(\xi) \ln(t_c^2 \xi)}{2} - 2 \text{Li}_2\left(\frac{\sqrt{\xi}}{2}\right) - \text{Li}_2\left(\frac{\sqrt{\xi}}{2t_b}\right) + \text{Li}_2\left(\frac{t_b \sqrt{\xi}}{2}\right) + 2 \text{Li}_2\left(\frac{\sqrt{\xi}}{2t_c}\right) \end{aligned} \quad (\text{C-122})$$

bezeichnet. Damit ergibt sich für M_2

$$M_2 = \left(\frac{1 + \sqrt{\xi}}{\sqrt{\xi}} M_{1a} + \frac{1 - \sqrt{\xi}}{\sqrt{\xi}} M_{1b} - M_{2a} \right). \quad (\text{C-123})$$

Berechnung des Integrals $M_3 = M[2, 0]$

Das Integral M_3 ist gegeben durch

$$M_3 = \int \int \frac{y^2 dy dz}{((1-y)^2 - \xi) \sqrt{(1-z)^2 - \xi}}. \quad (\text{C-124})$$

Die z -Integration liefert

$$M_3 = \int \frac{y^2 dy}{((1-y)^2 - \xi)} \ln \left(\frac{1 - z_+ - \sqrt{(1-z_+)^2 - \xi}}{1 - z_- - \sqrt{(1-z_-)^2 - \xi}} \right). \quad (\text{C-125})$$

Mit Hilfe von Gln. (C-10), (C-23) und der Partialbruchzerlegung

$$\frac{y^2 dy}{((1-y)^2 - \xi)} = \left(\frac{(1 - \sqrt{\xi})^2}{\sqrt{\xi}} \frac{1}{1-t} + \frac{(1 + \sqrt{\xi})^2}{\sqrt{\xi}} \frac{1}{1+t} - \frac{2}{t} + \frac{\sqrt{\xi}}{2} \left(\frac{1}{t^2} - 1 \right) \right) dt \quad (\text{C-126})$$

wird das Integral M_3 durch

$$\begin{aligned} M_3 = & \frac{(1 + \sqrt{\xi})^2}{\sqrt{\xi}} \left[\int_{t_b}^{t_c} \ln \left(\frac{(2t - \sqrt{\xi})(2 - \sqrt{\xi}t)}{\xi t} \right) \frac{dt}{(1+t)} + \int_{t_c}^{t_d} \ln \left(\frac{(2t - \sqrt{\xi})t}{2t - \sqrt{\xi}} \right) \frac{dt}{(1+t)} \right] \\ & + \frac{(1 - \sqrt{\xi})^2}{\sqrt{\xi}} \left[\int_{t_b}^{t_c} \ln \left(\frac{(2t - \sqrt{\xi})(2 - \sqrt{\xi}t)}{\xi t} \right) \frac{dt}{(1-t)} + \int_{t_c}^{t_d} \ln \left(\frac{(2t - \sqrt{\xi})t}{2t - \sqrt{\xi}} \right) \frac{dt}{(1-t)} \right] \\ & - 2 \left[\int_{t_b}^{t_c} \ln \left(\frac{(2t - \sqrt{\xi})(2 - \sqrt{\xi}t)}{\xi t} \right) \frac{dt}{t} + \int_{t_c}^{t_d} \ln \left(\frac{(2t - \sqrt{\xi})t}{2t - \sqrt{\xi}} \right) \frac{dt}{t} \right] \\ & + \frac{\sqrt{\xi}}{2} \left[\int_{t_b}^{t_c} \ln \left(\frac{(2t - \sqrt{\xi})(2 - \sqrt{\xi}t)}{\xi t} \right) \frac{dt}{t^2} + \int_{t_c}^{t_d} \ln \left(\frac{(2t - \sqrt{\xi})t}{2t - \sqrt{\xi}} \right) \frac{dt}{t^2} \right] \\ & - \left[\int_{t_b}^{t_c} \ln \left(\frac{(2t - \sqrt{\xi})(2 - \sqrt{\xi}t)}{\xi t} \right) dt + \int_{t_c}^{t_d} \ln \left(\frac{(2t - \sqrt{\xi})t}{2t - \sqrt{\xi}} \right) dt \right] \quad (\text{C-127}) \end{aligned}$$

gegeben, wobei der Integrand durch (C-25) ersetzt wird. Danach werden die ersten zwei Integrale durch M_{1a} und M_{1b} , das dritte Integral durch M_{2a} ersetzt und als zusätzliche Integrale

$$\begin{aligned} M_{3a} = & \left[\int_{t_b}^{t_c} \ln \left(\frac{(2t - \sqrt{\xi})(2 - \sqrt{\xi}t)}{\xi t} \right) \frac{dt}{t^2} + \int_{t_c}^{t_d} \ln \left(\frac{(2t - \sqrt{\xi})t}{2t - \sqrt{\xi}} \right) \frac{dt}{t^2} \right] \\ = & -1 - \frac{1}{t_b} + \frac{2}{t_c} + \frac{2 \ln(t_b)}{\sqrt{\xi}} + \frac{\sqrt{\xi} \ln(t_b)}{2} + \frac{\ln(t_c)}{t_c} - \frac{4 \ln(t_c)}{\sqrt{\xi}} - \\ & \frac{2 \ln(2 - \sqrt{\xi})}{\sqrt{\xi}} + \frac{\sqrt{\xi} \ln(2 - \sqrt{\xi})}{2} + \frac{\ln(2t_b - \sqrt{\xi})}{t_b} - \frac{2 \ln(2t_b - \sqrt{\xi})}{\sqrt{\xi}} \\ & - \frac{2 \ln(2t_c - \sqrt{\xi})}{t_c} + \frac{4 \ln(2t_c - \sqrt{\xi})}{\sqrt{\xi}} + \frac{\ln(2 - t_b \sqrt{\xi})}{t_b} - \end{aligned}$$

$$\frac{\sqrt{\xi} \ln(2 - t_b \sqrt{\xi})}{2} - \frac{\ln(t_b \xi)}{t_b} + \frac{\ln(t_c \xi)}{t_c} \quad (\text{C-128})$$

$$\begin{aligned} M_{3b} &= \left[\int_{t_b}^{t_c} \ln \left(\frac{(2t - \sqrt{\xi})(2 - \sqrt{\xi}t)}{\xi t} \right) dt + \int_{t_c}^{t_d} \ln \left(\frac{(2t - \sqrt{\xi})t}{2t - \sqrt{\xi}} \right) dt \right] \\ &= -1 + t_b + \left(\frac{\sqrt{\xi}}{2} - \frac{2}{\sqrt{\xi}} \right) \ln(2 - \sqrt{\xi}) + \left(\frac{\sqrt{\xi}}{2} - t_b \right) \ln(2t_b - \sqrt{\xi}) + \\ &\quad \left(2t_c - \sqrt{\xi} \right) \ln(2t_c - \sqrt{\xi}) + \left(\frac{2}{\sqrt{\xi}} - t_b \right) \ln(2 - t_b \sqrt{\xi}) + \\ &\quad t_b \ln(t_b \xi) - t_c \ln(\xi t_c^2) \end{aligned} \quad (\text{C-129})$$

bezeichnet. Damit kann M_3 als

$$M_3 = \left(\frac{(1 + \sqrt{\xi})^2}{\sqrt{\xi}} M_{1a} + \frac{(1 - \sqrt{\xi})^2}{\sqrt{\xi}} M_{1b} - 2 M_{2a} + \frac{\sqrt{\xi}}{2} (M_{3a} - M_{3b}) \right) \quad (\text{C-130})$$

geschrieben werden.

Berechnung des Integrals $M_4 = M[3, 0]$

Das Integral M_4 ist gegeben durch

$$M_4 = \int \int \frac{y^3 dy dz}{((1 - y)^2 - \xi) \sqrt{(1 - z)^2 - \xi}}. \quad (\text{C-131})$$

Die z -Integration liefert

$$M_4 = \int \frac{y^3 dy}{((1 - y)^2 - \xi)} \ln \left(\frac{1 - z_+ - \sqrt{(1 - z_+)^2 - \xi}}{1 - z_- - \sqrt{(1 - z_-)^2 - \xi}} \right). \quad (\text{C-132})$$

Mit Hilfe von Gln. (C-10), (C-23) und der Partialbruchzerlegung

$$\begin{aligned} \frac{y^3 dy}{((1 - y)^2 - \xi)} &= \left(\frac{(1 - \sqrt{\xi})^3}{\sqrt{\xi}} \frac{1}{1 - t} + \frac{(1 + \sqrt{\xi})^3}{\sqrt{\xi}} \frac{1}{1 + t} - \frac{(3 + \xi)}{t} + \frac{3\sqrt{\xi}}{2} \left(\frac{1}{t^2} - 1 \right) \right. \\ &\quad \left. + \frac{\xi}{4} \left(t - \frac{1}{t^3} \right) \right) dt \end{aligned} \quad (\text{C-133})$$

wird das Integral M_4 durch

$$\begin{aligned} M_4 &= \frac{(1 + \sqrt{\xi})^3}{\sqrt{\xi}} \left[\int_{t_b}^{t_c} \ln \left(\frac{(2t - \sqrt{\xi})(2 - \sqrt{\xi}t)}{\xi t} \right) \frac{dt}{(1 + t)} + \int_{t_c}^{t_d} \ln \left(\frac{(2t - \sqrt{\xi})t}{2t - \sqrt{\xi}} \right) \frac{dt}{(1 + t)} \right] \\ &\quad + \frac{(1 - \sqrt{\xi})^3}{\sqrt{\xi}} \left[\int_{t_b}^{t_c} \ln \left(\frac{(2t - \sqrt{\xi})(2 - \sqrt{\xi}t)}{\xi t} \right) \frac{dt}{(1 - t)} + \int_{t_c}^{t_d} \ln \left(\frac{(2t - \sqrt{\xi})t}{2t - \sqrt{\xi}} \right) \frac{dt}{(1 - t)} \right] \\ &\quad - (3 + \xi) \left[\int_{t_b}^{t_c} \ln \left(\frac{(2t - \sqrt{\xi})(2 - \sqrt{\xi}t)}{\xi t} \right) \frac{dt}{t} + \int_{t_c}^{t_d} \ln \left(\frac{(2t - \sqrt{\xi})t}{2t - \sqrt{\xi}} \right) \frac{dt}{t} \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{3\sqrt{\xi}}{2} \left[\int_{t_b}^{t_c} \ln \left(\frac{(2t - \sqrt{\xi})(2 - \sqrt{\xi}t)}{\xi t} \right) \frac{dt}{t^2} + \int_{t_c}^{t_d} \ln \left(\frac{(2t - \sqrt{\xi})t}{2t - \sqrt{\xi}} \right) \frac{dt}{t^2} \right] \\
& - \frac{3\sqrt{\xi}}{2} \left[\int_{t_b}^{t_c} \ln \left(\frac{(2t - \sqrt{\xi})(2 - \sqrt{\xi}t)}{\xi t} \right) dt + \int_{t_c}^{t_d} \ln \left(\frac{(2t - \sqrt{\xi})t}{2t - \sqrt{\xi}} \right) dt \right] \\
& + \frac{\sqrt{\xi}}{4} \left[\int_{t_b}^{t_c} \ln \left(\frac{(2t - \sqrt{\xi})(2 - \sqrt{\xi}t)}{\xi t} \right) t dt + \int_{t_c}^{t_d} \ln \left(\frac{(2t - \sqrt{\xi})t}{2t - \sqrt{\xi}} \right) t dt \right] \\
& - \frac{\sqrt{\xi}}{4} \left[\int_{t_b}^{t_c} \ln \left(\frac{(2t - \sqrt{\xi})(2 - \sqrt{\xi}t)}{\xi t} \right) \frac{dt}{t^3} + \int_{t_c}^{t_d} \ln \left(\frac{(2t - \sqrt{\xi})t}{2t - \sqrt{\xi}} \right) \frac{dt}{t^3} \right] \tag{C-134}
\end{aligned}$$

gegeben, wobei der Integrand durch (C-25) ersetzt wird. Danach werden die ersten zwei Integrale durch M_{1a} und M_{1b} , das dritte Integral durch M_{2a} , das vierte Integral durch M_{3a} , das fünfte Integral durch M_{3b} ersetzt und als zusätzliche Integrale

$$\begin{aligned}
M_{4a} &= \left[\int_{t_b}^{t_c} \ln \left(\frac{(2t - \sqrt{\xi})(2 - \sqrt{\xi}t)}{\xi t} \right) t dt + \int_{t_c}^{t_d} \ln \left(\frac{(2t - \sqrt{\xi})t}{2t - \sqrt{\xi}} \right) t dt \right] \\
&= \frac{-4 - \sqrt{\xi} + t_b^2 \sqrt{\xi} + \xi - 2t_c \xi + t_b(4 + \xi)}{4\sqrt{\xi}} - \frac{t_c^2 \ln(t_c)}{2} + \\
&\quad \left(\frac{\xi}{8} - \frac{2}{\xi} \right) \ln(2 - \sqrt{\xi}) + \left(\frac{\xi}{8} - \frac{t_b^2}{2} \right) \ln(2t_b - \sqrt{\xi}) + \\
&\quad \left(t_c^2 - \frac{\xi}{4} \right) \ln(2t_c - \sqrt{\xi}) + \left(\frac{2}{\xi} - \frac{t_b^2}{2} \right) \ln(2 - t_b \sqrt{\xi}) + \\
&\quad \frac{t_b^2 \ln(t_b \xi)}{2} - \frac{t_c^2 \ln(t_c \xi)}{2} \tag{C-135}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
M_{4b} &= \left[\int_{t_b}^{t_c} \ln \left(\frac{(2t - \sqrt{\xi})(2 - \sqrt{\xi}t)}{\xi t} \right) \frac{dt}{t^3} + \int_{t_c}^{t_d} \ln \left(\frac{(2t - \sqrt{\xi})t}{2t - \sqrt{\xi}} \right) \frac{dt}{t^3} \right] \\
&= -\frac{(19 + v^2)}{4\sqrt{\xi}} + \frac{19 - 7v - v^2 + v^3}{4\xi} \\
&\quad \left(\frac{2}{\xi} + \frac{\xi}{8} \right) \ln(t_b) + \left(\frac{1}{2t_c^2} - \frac{4}{\xi} \right) \ln(t_c) + \left(\frac{\xi}{8} - \frac{2}{\xi} \right) \ln(2 - \sqrt{\xi}) + \\
&\quad \left(\frac{1}{2t_b^2} - \frac{2}{\xi} \right) \ln(2t_b - \sqrt{\xi}) + \left(\frac{4}{\xi} - \frac{1}{t_c^2} \right) \ln(2t_c - \sqrt{\xi}) + \\
&\quad \left(\frac{1}{2t_b^2} - \frac{\xi}{8} \right) \ln(2 - t_b \sqrt{\xi}) - \frac{\ln(t_b \xi)}{2t_b^2} + \frac{\ln(t_c \xi)}{2t_c^2} \tag{C-136}
\end{aligned}$$

bezeichnet. Damit wird M_4 als

$$\begin{aligned}
M_4 &= \left(\frac{(1 + \sqrt{\xi})^3}{\sqrt{\xi}} M_{1a} + \frac{(1 - \sqrt{\xi})^3}{\sqrt{\xi}} M_{1b} - (3 + \xi) M_{2a} \right. \\
&\quad \left. + \frac{3\sqrt{\xi}}{2} (M_{3a} - M_{3b}) + \frac{\xi}{4} (M_{4a} - M_{4b}) \right) \tag{C-137}
\end{aligned}$$

geschrieben.

Berechnung des Integrals $M_5 = M[4, 0]$

Das Integral M_5 ist gegeben durch

$$M_5 = \int \int \frac{y^4 dy dz}{((1-y)^2 - \xi) \sqrt{(1-z)^2 - \xi}}. \quad (\text{C-138})$$

Die z -Integration liefert

$$M_5 = \int \frac{y^4 dy}{((1-y)^2 - \xi)} \ln \left(\frac{1 - z_+ - \sqrt{(1-z_+)^2 - \xi}}{1 - z_- - \sqrt{(1-z_-)^2 - \xi}} \right). \quad (\text{C-139})$$

Mit Hilfe von Gln.(C-10), (C-23) und der Partialbruchzerlegung

$$\begin{aligned} \frac{y^4 dy}{((1-y)^3 - \xi)} = & \left(\frac{(1 - \sqrt{\xi})^4}{\sqrt{\xi}} \frac{1}{1-t} + \frac{(1 + \sqrt{\xi})^4}{\sqrt{\xi}} \frac{1}{1+t} - \frac{\xi^{3/2}}{8} (t^2 - \frac{1}{t^4}) + \xi(t - \frac{1}{t^3}) \right. \\ & \left. + \frac{\sqrt{\xi}(24 + 5\xi)}{8} (\frac{1}{t^2} - 1) - 4(1 + \xi) \frac{1}{t} \right) dt \end{aligned} \quad (\text{C-140})$$

kann man erkennen, daß zwei zusätzliche Integrale auftreten, die als

$$\begin{aligned} M_{5a} = & \left[\int_{t_b}^{t_c} \ln \left(\frac{(2t - \sqrt{\xi})(2 - \sqrt{\xi}t)}{\xi t} \right) t^2 dt + \int_{t_c}^{t_d} \ln \left(\frac{(2t - \sqrt{\xi})t}{2t - \sqrt{\xi}} \right) t^2 dt \right] \\ = & -\frac{1-t_b^3}{9} - \frac{4(1-t_b)}{3\xi} - \frac{1-t_b^2}{3\sqrt{\xi}} + \frac{(1+t_b^2-2t_c^2)\sqrt{\xi}}{12} + \\ & \frac{(1+t_b-2t_c)\xi}{12} - \frac{t_c^3 \ln(t_c)}{3} + \left(\frac{\xi^{3/2}}{24} - \frac{8}{3\xi^{3/2}} \right) \ln(2 - \sqrt{\xi}) + \\ & \left(\frac{\xi^{3/2}}{24} - \frac{t_b^3}{3} \right) \ln(2t_b - \sqrt{\xi}) + \left(\frac{2t_c^3}{3} - \frac{\xi^{3/2}}{12} \right) \ln(2t_c - \sqrt{\xi}) + \\ & \left(\frac{8}{3\xi^{3/2}} - \frac{t_b^3}{3} \right) \ln(2 - t_b\sqrt{\xi}) + \frac{t_b^3 \ln(t_b\xi)}{3} - \frac{t_c^3 \ln(t_c\xi)}{3} \end{aligned} \quad (\text{C-141})$$

und M_{5b} als

$$\begin{aligned} M_{5b} = & \left[\int_{t_b}^{t_c} \ln \left(\frac{(2t - \sqrt{\xi})(2 - \sqrt{\xi}t)}{\xi t} \right) \frac{dt}{t^4} + \int_{t_c}^{t_d} \ln \left(\frac{(2t - \sqrt{\xi})t}{2t - \sqrt{\xi}} \right) \frac{dt}{t^4} \right] \\ = & -\frac{\sqrt{\xi}(-345 + 93v + 84v^2 - 8v^3 - 3v^4 + 3v^5)}{36\xi^2} - \\ & \frac{(115 - 2v^2 - v^4)}{12\xi} + \left(\frac{8}{3\xi^{3/2}} + \frac{\xi^{3/2}}{24} \right) \ln(t_b) + \\ & \left(\frac{1}{3t_c^3} - \frac{16}{3\xi^{3/2}} \right) \ln(t_c) + \left(\frac{\xi^{3/2}}{24} - \frac{8}{3\xi^{3/2}} \right) \ln(2 - \sqrt{\xi}) + \\ & \left(\frac{1}{3t_b^3} - \frac{8}{3\xi^{3/2}} \right) \ln(2t_b - \sqrt{\xi}) + \left(\frac{16}{3\xi^{3/2}} - \frac{2}{3t_c^3} \right) \ln(2t_c - \sqrt{\xi}) + \\ & \left(\frac{1}{3t_b^3} - \frac{\xi^{3/2}}{24} \right) \ln(2 - t_b\sqrt{\xi}) - \frac{\ln(t_b\xi)}{3t_b^3} + \frac{\ln(t_c\xi)}{3t_c^3} \end{aligned} \quad (\text{C-142})$$

definiert werden. Damit ergibt sich für M_5

$$\begin{aligned} M_5 = & \left(\frac{(1 + \sqrt{\xi})^4}{\sqrt{\xi}} M_{1a} + \frac{(1 - \sqrt{\xi})^4}{\sqrt{\xi}} M_{1b} - 4(1 + \xi) M_{2a} \right. \\ & \left. + \frac{\sqrt{\xi}(24 + 5\xi)}{8} (M_{3a} - M_{3b}) + \xi (M_{4a} - M_{4b}) - \frac{\xi^{3/2}}{8} (M_{5a} - M_{5b}) \right). \end{aligned} \quad (\text{C-143})$$

Berechnung des Integrals $M_{25} = M[-1, 0]$

Das Integral M_{25} ist gegeben durch

$$M_{25} = \int \int \frac{dy dz}{y ((1-y)^2 - \xi) \sqrt{(1-z)^2 - \xi}}. \quad (\text{C-144})$$

Die z -Integration liefert

$$M_{25} = \int \frac{dy}{y ((1-y)^2 - \xi)} \ln \left(\frac{1 - z_+ - \sqrt{(1 - z_+)^2 - \xi}}{1 - z_- - \sqrt{(1 - z_-)^2 - \xi}} \right). \quad (\text{C-145})$$

Mit Hilfe von Gln.(C-10), (C-23) und der Partialbruchzerlegung

$$\frac{dy}{y ((1-y)^3 - \xi)} = \left(\frac{1}{\sqrt{\xi}(1 - \sqrt{\xi})} \frac{1}{1-t} + \frac{1}{\sqrt{\xi}(1 + \sqrt{\xi})} \frac{1}{1+t} + \frac{1}{v^2(t - t_b)} + \frac{1}{v^2(t - t_a)} \right) dt \quad (\text{C-146})$$

kann man erkennen, daß zwei zusätzliche Integrale auftreten, die als

$$\begin{aligned} M_{25a} = & \left[\int_{t_b}^{t_c} \ln \left(\frac{(2t - \sqrt{\xi})(2 - \sqrt{\xi}t)}{\xi t} \right) \frac{dt}{t - t_b} + \int_{t_c}^{t_d} \ln \left(\frac{(2t - \sqrt{\xi})t}{2t - \sqrt{\xi}} \right) \frac{dt}{t - t_b} \right] \\ = & -\text{Li}_2 \left(\frac{2}{1-v} \left(1 - \frac{1+v}{2 - \sqrt{\xi}} \right) \right) - \text{Li}_2 \left(\frac{1-v}{2 - \sqrt{\xi}} - \frac{1-v}{1+v} \right) + \text{Li}_2 \left(1 - \frac{1+v}{2 - \sqrt{\xi}} \right) \\ & + \ln \left(\frac{1+v}{1-v} \right) \ln \left(\frac{1-v}{2 - \sqrt{\xi}} \right) - \text{Li}_2 \left(1 - \frac{\sqrt{\xi}}{1-v} \right) + \text{Li}_2 \left(1 - \frac{1+v}{2 - \sqrt{\xi}} \right) \\ & - \text{Li}_2 \left(\frac{\sqrt{\xi}}{1+v} - \frac{1-v}{1+v} \right) + \text{Li}_2 \left(\frac{1-v}{2 - \sqrt{\xi}} - \frac{1-v}{1+v} \right) \\ & + \text{Li}_2 \left(\frac{2}{1-v} \left(1 - \frac{\sqrt{\xi}}{1+v} \right) \right) - \text{Li}_2 \left(\frac{2}{1-v} \left(1 - \frac{1+v}{2 - \sqrt{\xi}} \right) \right) \end{aligned} \quad (\text{C-147})$$

und M_{25b} als

$$\begin{aligned} M_{25b} = & \left[\int_{t_b}^{t_c} \ln \left(\frac{(2t - \sqrt{\xi})(2 - \sqrt{\xi}t)}{\xi t} \right) \frac{dt}{t - t_a} + \int_{t_c}^{t_d} \ln \left(\frac{(2t - \sqrt{\xi})t}{2t - \sqrt{\xi}} \right) \frac{dt}{t - t_a} \right] \\ = & \text{Li}_2 \left(1 - \frac{1-v}{2 - \sqrt{\xi}} \right) - \text{Li}_2 \left(\frac{2v}{1+v} \right) - \text{Li}_2 \left(\frac{2}{1+v} \left(1 - \frac{1-v}{2 - \sqrt{\xi}} \right) \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +\text{Li}_2\left(\frac{4v}{(1+v)^2}\right) - \text{Li}_2\left(\frac{1+v}{2-\sqrt{\xi}} - \frac{1+v}{1-v}\right) - \text{Li}_2\left(\frac{-2v}{1-v}\right) \\
& + \ln\left(\frac{1+v}{1-v}\right) \ln\left(\frac{1+v}{2-\sqrt{\xi}}\left(1 - \frac{1+v}{\sqrt{\xi}}\right)\right) \\
& - \text{Li}_2\left(\frac{2}{1+v}\left(1 - \frac{1-v}{2-\sqrt{\xi}}\right)\right) + \text{Li}_2\left(\frac{2}{1+v}\left(1 - \frac{\sqrt{\xi}}{1+v}\right)\right) \\
& + \text{Li}_2\left(1 - \frac{1-v}{2-\sqrt{\xi}}\right) - \text{Li}_2\left(1 - \frac{\sqrt{\xi}}{1-v}\right) \\
& + \text{Li}_2\left(\frac{1+v}{2-\sqrt{\xi}} - \frac{1+v}{1-v}\right) - \text{Li}_2\left(\frac{\sqrt{\xi}}{1-v} - \frac{1+v}{1-v}\right)
\end{aligned} \tag{C-148}$$

definiert werden. Damit ergibt sich für M_{25}

$$M_{25} = \left(\frac{1}{\sqrt{\xi}(1-\sqrt{\xi})} M_{1b} + \frac{1}{\sqrt{\xi}(1+\sqrt{\xi})} M_{1a} + \frac{1}{v^2} M_{25a} + \frac{1}{v^2} M_{25b} \right).$$

C.6.2 Berechnung der zugehörigen Integrale der zweiten Klasse

Die Integrale der Familie M, die zur zweiten Klasse gehören (C-31), sind M_6 , M_7 , M_8 , M_9 , M_{10} und M_{23} . Die Partialbruchzerlegung ist für die Integrale dieser Klasse analog zu der für die Integrale der ersten Klasse. Deshalb werden die Integrale der der zweiten Klasse analog gelöst.

Berechnung des Integrals $M_6 = M[0, -1]$

Das Integral M_6 ist gegeben durch

$$M_6 = \int \int \frac{dy dz}{z((1-y)^2 - \xi) \sqrt{(1-z)^2 - \xi}}. \tag{C-149}$$

Die z -Integration liefert

$$M_6 = -\frac{1}{v} \int \frac{dy}{((1-y)^2 - \xi)} \ln \left(\frac{z_-(v^2 - z_+ + v\sqrt{(1-z_+)^2 - \xi})}{z_+(v^2 - z_- + v\sqrt{(1-z_-)^2 - \xi})} \right). \tag{C-150}$$

Mit Hilfe von Gln. (C-10), (C-23) und der Partialbruchzerlegung

$$\frac{dy}{((1-y)^2 - \xi)} = \left(\frac{1}{1+t} + \frac{1}{1-t} \right) \frac{dt}{\sqrt{\xi}} \tag{C-151}$$

wird das Integral M_6 durch

$$\begin{aligned}
M_6 = & -\frac{1}{v\sqrt{\xi}} \left(\left[\int_{t_b}^{t_c} \left(2 \ln \left(\frac{1-t_b t}{t_a - t} \right) - \ln \left(\frac{t_a}{t_b} \right) \right) \frac{dt}{(1+t)} + \int_{t_c}^{t_d} 2 \ln \left(\frac{t_a t - 1}{t_a - t} \right) \frac{dt}{(1+t)} \right] \right. \\
& + \left. \left[\int_{t_b}^{t_c} \left(2 \ln \left(\frac{1-t_b t}{t_a - t} \right) - \ln \left(\frac{t_a}{t_b} \right) \right) \frac{dt}{(1-t)} + \int_{t_c}^{t_d} 2 \ln \left(\frac{t_a t - 1}{t_a - t} \right) \frac{dt}{(1-t)} \right] \right)
\end{aligned} \tag{C-152}$$

gegeben, wobei der Integrand durch (C-31) ersetzt wird. Danach werden M_{6a} als

$$\begin{aligned}
 M_{6a} &= \left[\int_{t_b}^{t_c} \left(2 \ln \left(\frac{1-t_b t}{t_a-t} \right) - \ln \left(\frac{t_a}{t_b} \right) \right) \frac{dt}{(1+t)} + \int_{t_c}^{t_a} 2 \ln \left(\frac{t_a t-1}{t_a-t} \right) \frac{dt}{(1+t)} \right] \\
 &= 2 \ln(t_a-1) \ln\left(\frac{1+t_a}{1+t_b}\right) + 4 \ln(t_a) \ln\left(\frac{1+t_b}{1+t_c}\right) + 2 \ln(t_a-t_c) \ln\left(\frac{1+t_c}{1+t_a}\right) \\
 &\quad - 2 \ln\left(\frac{1+t_c}{1+t_b}\right) \ln\left(\frac{t_c-t_b}{t_b}\right) - 2 \operatorname{Li}_2\left(-\left(\frac{1-t_a}{1+t_a}\right)\right) + 2 \operatorname{Li}_2\left(\frac{1-t_a}{1+t_a}\right) + \\
 &\quad 2 \operatorname{Li}_2\left(\frac{t_a-t_c}{1+t_a}\right) - 2 \operatorname{Li}_2\left(\frac{t_b-t_c}{1+t_b}\right) \tag{C-153}
 \end{aligned}$$

und M_{6b} als

$$\begin{aligned}
 M_{6b} &= \left[\int_{t_b}^{t_c} \left(2 \ln \left(\frac{1-t_b t}{t_a-t} \right) - \ln \left(\frac{t_a}{t_b} \right) \right) \frac{dt}{(1-t)} + \int_{t_c}^{t_a} 2 \ln \left(\frac{t_a t-1}{t_a-t} \right) \frac{dt}{(1-t)} \right] \\
 &= -\frac{2\pi^2}{3} - 4 \ln(t_a) \ln\left(\frac{1-t_b}{1-t_c}\right) + \ln\left(\frac{t_a-t_c}{t_a-1}\right) \ln((t_a-1)(t_a-t_c)) + \\
 &\quad 2 \ln(1-t_b) \ln\left(\frac{1-t_b}{t_c-t_b}\right) - 2 \ln(1-t_c) \ln\left(\frac{t_b(t_a-t_c)}{t_c-t_b}\right) + \\
 &\quad 2 \operatorname{Li}_2\left(\frac{t_a-1}{t_a-t_c}\right) + 2 \operatorname{Li}_2\left(\frac{t_c-t_b}{1-t_b}\right) \tag{C-154}
 \end{aligned}$$

bezeichnet. Damit wird M_6 als

$$M_6 = -\frac{1}{v\sqrt{\xi}} (M_{6a} + M_{6b}) \tag{C-155}$$

geschrieben.

Berechnung des Integrals $M_7 = M[1, -1]$

Das Integral M_7 ist gegeben durch

$$M_7 = \iint \frac{y \, dy \, dz}{z((1-y)^2 - \xi) \sqrt{(1-z)^2 - \xi}}. \tag{C-156}$$

Die z -Integration liefert

$$M_7 = -\frac{1}{v} \int \frac{y \, dy}{((1-y)^2 - \xi)} \ln \left(\frac{z_-(v^2 - z_+ + v\sqrt{(1-z_+)^2 - \xi})}{z_+(v^2 - z_- + v\sqrt{(1-z_-)^2 - \xi})} \right). \tag{C-157}$$

Mit Hilfe von Gln. (C-10), (C-23) und der Partialbruchzerlegung

$$\frac{y \, dy}{((1-y)^2 - \xi)} = \left(\frac{1-\sqrt{\xi}}{\sqrt{\xi}} \frac{1}{1-t} + \frac{1+\sqrt{\xi}}{\sqrt{\xi}} \frac{1}{1+t} - \frac{1}{t} \right) dt \tag{C-158}$$

kann man erkennen, daß ein neues Integral aus Spiel kommt, das als

$$\begin{aligned}
 M_{7a} &= \left[\int_{t_b}^{t_c} \left(2 \ln \left(\frac{1-t_b t}{t_a-t} \right) - \ln \left(\frac{t_a}{t_b} \right) \right) \frac{dt}{t} + \int_{t_c}^{t_d} 2 \ln \left(\frac{t_a t - 1}{t_a - t} \right) \frac{dt}{t} \right] \\
 &= 4 \ln(t_a) \ln(t_b) - 2 \ln(t_a (t_c - t_b)) \ln(t_c) + 2 \ln(t_b) \ln\left(\frac{t_c(t_c - t_b)}{1 - t_b}\right) + \\
 &\quad 2 \operatorname{Li}_2\left(\frac{1}{t_a}\right) + 2 \operatorname{Li}_2\left(-\frac{1-t_b}{t_b}\right) - 2 \operatorname{Li}_2\left(-\frac{t_c-t_b}{t_b}\right) - 2 \operatorname{Li}_2\left(\frac{t_c}{t_a}\right) \quad (C-159)
 \end{aligned}$$

definiert wird. Damit ergibt sich für M_7

$$M_7 = -\frac{1}{v} \left(\frac{1+\sqrt{\xi}}{\sqrt{\xi}} M_{6a} + \frac{1-\sqrt{\xi}}{\sqrt{\xi}} M_{6b} - M_{7a} \right). \quad (C-160)$$

Berechnung des Integrals $M_8 = M[2, -1]$

Das Integral M_8 ist gegeben durch

$$M_8 = \int \int \frac{y^2 dy dz}{z ((1-y)^2 - \xi) \sqrt{(1-z)^2 - \xi}}. \quad (C-161)$$

Die z -Integration liefert

$$M_8 = -\frac{1}{v} \int \frac{y^2 dy}{((1-y)^2 - \xi)} \ln \left(\frac{z_-(v^2 - z_+ + v\sqrt{(1-z_+)^2 - \xi})}{z_+(v^2 - z_- + v\sqrt{(1-z_-)^2 - \xi})} \right). \quad (C-162)$$

Mit Hilfe von Gln. (C-10), (C-23) und der Partialbruchzerlegung

$$\frac{y^2 dy}{((1-y)^2 - \xi)} = \left(\frac{(1-\sqrt{\xi})^2}{\sqrt{\xi}} \frac{1}{1-t} + \frac{(1+\sqrt{\xi})^2}{\sqrt{\xi}} \frac{1}{1+t} - \frac{2}{t} + \frac{\sqrt{\xi}}{2} \left(\frac{1}{t^2} - 1 \right) \right) dt \quad (C-163)$$

kann man erkennen, daß zwei neue Integrale auftreten, die als

$$\begin{aligned}
 M_{8a} &= \left[\int_{t_b}^{t_c} \left(2 \ln \left(\frac{1-t_b t}{t_a-t} \right) - \ln \left(\frac{t_a}{t_b} \right) \right) \frac{dt}{t^2} + \int_{t_c}^{t_d} 2 \ln \left(\frac{t_a t - 1}{t_a - t} \right) \frac{dt}{t^2} \right] \\
 &= -4 \left(\frac{1}{t_b} - \frac{1}{t_c} \right) \ln(t_a) + 2 \ln\left(\frac{t_b(t_a-1)}{1-t_b}\right) + \frac{2}{t_a} \ln\left(\frac{t_a-t_c}{(-1+t_a)t_c}\right) \\
 &\quad + \frac{2}{t_b} \ln\left(\frac{(-1+t_b)t_c}{t_b-t_c}\right) - \frac{2}{t_c} \ln\left(\frac{t_b(-t_a+t_c)}{t_b-t_c}\right) \quad (C-164)
 \end{aligned}$$

$$(C-165)$$

und als

$$\begin{aligned}
 M_{8b} &= \left[\int_{t_b}^{t_c} \left(2 \ln \left(\frac{1-t_b t}{t_a-t} \right) - \ln \left(\frac{t_a}{t_b} \right) \right) dt + \int_{t_c}^{t_d} 2 \ln \left(\frac{t_a t - 1}{t_a - t} \right) dt \right] \\
 &= 4(t_b - t_c) \ln(t_a) + 2 \ln\left(\frac{1-t_b}{(t_a-1)t_b}\right) + 2 t_a \ln\left(\frac{t_a-1}{t_a-t_c}\right) - \\
 &\quad 2 t_b \ln\left(\frac{1-t_b}{t_c-t_b}\right) + 2 t_c \ln\left(\frac{t_b(t_a-t_c)}{t_c-t_b}\right) \quad (C-166)
 \end{aligned}$$

bezeichnet werden. Damit ergibt sich für M_8

$$M_8 = -\frac{1}{v} \left(\frac{(1 + \sqrt{\xi})^2}{\sqrt{\xi}} M_{6a} + \frac{(1 - \sqrt{\xi})^2}{\sqrt{\xi}} M_{6b} + \frac{\sqrt{\xi}}{2} (M_{8a} - M_{8b}) - 2 M_{7a} \right). \quad (\text{C-167})$$

Berechnung des Integrals $M_9 = M[3, -1]$

Das Integral M_9 ist gegeben durch

$$M_9 = \int \int \frac{y^3 dy dz}{z ((1-y)^2 - \xi) \sqrt{(1-z)^2 - \xi}}. \quad (\text{C-168})$$

Die z -Integration liefert

$$M_9 = -\frac{1}{v} \int \frac{y^3 dy}{((1-y)^2 - \xi)} \ln \left(\frac{z_-(v^2 - z_+ + v\sqrt{(1-z_+)^2 - \xi})}{z_+(v^2 - z_- + v\sqrt{(1-z_-)^2 - \xi})} \right). \quad (\text{C-169})$$

Mit Hilfe von Gln. (C-10), (C-23) und der Partialbruchzerlegung

$$\begin{aligned} \frac{y^3 dy}{((1-y)^3 - \xi)} &= \left(\frac{(1 - \sqrt{\xi})^3}{\sqrt{\xi}} \frac{1}{1-t} + \frac{(1 + \sqrt{\xi})^3}{\sqrt{\xi}} \frac{1}{1+t} - \frac{(3 + \xi)}{t} + \frac{3\sqrt{\xi}}{2} \left(\frac{1}{t^2} - 1 \right) \right. \\ &\quad \left. + \frac{\xi}{4} \left(t - \frac{1}{t^3} \right) \right) dt \end{aligned} \quad (\text{C-170})$$

kann man erkennen, daß zwei neue Integrale auftreten, die als

$$\begin{aligned} M_{9a} &= \left[\int_{t_b}^{t_c} \left(2 \ln \left(\frac{1 - t_b t}{t_a - t} \right) - \ln \left(\frac{t_a}{t_b} \right) \right) t dt + \int_{t_c}^{t_d} 2 \ln \left(\frac{t_a t - 1}{t_a - t} \right) t dt \right] \\ &= (t_a - t_b)(1 - t_c) + 2(t_b^2 - t_c^2) \ln(t_a) + \ln\left(\frac{1 - t_b}{(t_a - 1) t_b}\right) + \\ &\quad t_a^2 \ln\left(\frac{t_a - 1}{t_a - t_c}\right) - t_b^2 \ln\left(\frac{1 - t_b}{t_c - t_b}\right) + t_c^2 \ln\left(\frac{t_b (t_a - t_c)}{t_c - t_b}\right) \end{aligned} \quad (\text{C-171})$$

und als

$$\begin{aligned} M_{9b} &= \left[\int_{t_b}^{t_c} \left(2 \ln \left(\frac{1 - t_b t}{t_a - t} \right) - \ln \left(\frac{t_a}{t_b} \right) \right) \frac{dt}{t^3} + \int_{t_c}^{t_d} 2 \ln \left(\frac{t_a t - 1}{t_a - t} \right) \frac{dt}{t^3} \right] \\ &= \frac{(1 - t_a^2)(1 - t_c)}{t_a t_c} - 2\left(\frac{1}{t_b^2} - \frac{1}{t_c^2}\right) \ln(t_a) + \ln\left(\frac{(t_a - 1) t_b}{1 - t_b}\right) + \\ &\quad \frac{1}{t_a^2} \ln\left(\frac{t_a - t_c}{(t_a - 1) t_c}\right) + \frac{1}{t_b^2} \ln\left(\frac{(1 - t_b) t_c}{t_c - t_b}\right) - \frac{1}{t_c^2} \ln\left(\frac{t_b (t_a - t_c)}{t_c - t_b}\right) \end{aligned} \quad (\text{C-172})$$

bezeichnet werden. Damit ergibt sich für M_9

$$\begin{aligned} M_9 &= -\frac{1}{v} \left(\frac{(1 + \sqrt{\xi})^3}{\sqrt{\xi}} M_{6a} + \frac{(1 - \sqrt{\xi})^3}{\sqrt{\xi}} M_{6b} - (3 + \xi) M_{7a} \right. \\ &\quad \left. + \frac{3\sqrt{\xi}}{2} (M_{8a} - M_{8b}) + \frac{\xi}{4} (M_{9a} - M_{9b}) \right). \end{aligned} \quad (\text{C-173})$$

Berechnung des Integrals $M_{10} = M[4, -1]$

Das Integral M_{10} ist gegeben durch

$$M_{10} = \int \int \frac{y^3 dy dz}{z ((1-y)^2 - \xi) \sqrt{(1-z)^2 - \xi}}. \quad (\text{C-174})$$

Die z -Integration liefert

$$M_{10} = -\frac{1}{v} \int \frac{y^3 dy}{((1-y)^2 - \xi)} \ln \left(\frac{z_-(v^2 - z_+ + v\sqrt{(1-z_+)^2 - \xi})}{z_+(v^2 - z_- + v\sqrt{(1-z_-)^2 - \xi})} \right). \quad (\text{C-175})$$

Mit Hilfe von Gln. (C-10), (C-23) und der Partialbruchzerlegung

$$\begin{aligned} \frac{y^4 dy}{((1-y)^3 - \xi)} &= \left(\frac{(1-\sqrt{\xi})^4}{\sqrt{\xi}} \frac{1}{1-t} + \frac{(1+\sqrt{\xi})^4}{\sqrt{\xi}} \frac{1}{1+t} - \frac{\xi^{3/2}}{8} (t^2 - \frac{1}{t^4}) + \xi(t - \frac{1}{t^3}) \right. \\ &\quad \left. + \frac{\sqrt{\xi}(24+5\xi)}{8} (\frac{1}{t^2} - 1) - 4(1+\xi)\frac{1}{t} \right) dt \end{aligned} \quad (\text{C-176})$$

kann man erkennen, daß zwei neue Integrale auftauchen, die als

$$\begin{aligned} M_{10a} &= \left[\int_{t_b}^{t_c} \left(2 \ln \left(\frac{1-t_b t}{t_a - t} \right) - \ln \left(\frac{t_a}{t_b} \right) \right) t^2 dt + \int_{t_c}^{t_d} 2 \ln \left(\frac{t_a t - 1}{t_a - t} \right) t^2 dt \right] \\ &= -\frac{(1-t_a^2)(1-t_c)(2(1+t_a^2)+t_a(1+t_c))}{3t_a^3} + \frac{4}{3}(t_b^3 - t_c^3) \ln(t_a) + \\ &\quad + \frac{2}{3} \ln\left(\frac{1-t_b}{(t_a-1)t_b}\right) + \frac{2t_a^3}{3} \ln\left(\frac{t_a-1}{t_a-t_c}\right) - \\ &\quad - \frac{2t_b^3}{3} \ln\left(\frac{1-t_b}{t_c-t_b}\right) + \frac{2t_c^3}{3} \ln\left(\frac{t_b(t_a-t_c)}{t_c-t_b}\right) \end{aligned} \quad (\text{C-177})$$

und als

$$\begin{aligned} M_{10b} &= \left[\int_{t_b}^{t_c} \left(2 \ln \left(\frac{1-t_b t}{t_a - t} \right) - \ln \left(\frac{t_a}{t_b} \right) \right) \frac{dt}{t^4} + \int_{t_c}^{t_d} 2 \ln \left(\frac{t_a t - 1}{t_a - t} \right) \frac{dt}{t^4} \right] \\ &= \frac{(t_a - t_b)(-1+t_c)(2t_b t_c + t_a(t_b + 2t_c + t_b t_c))}{3t_a^2 t_b^2 t_c^2} - \frac{4}{3} \left(\frac{1}{t_b^3} - \frac{1}{t_c^3} \right) \ln(t_a) + \\ &\quad + \frac{2}{3} \ln\left(\frac{t_b(t_a-1)}{1-t_b}\right) + \frac{2}{3t_a^3} \ln\left(\frac{t_a-t_c}{(t_a-1)t_c}\right) + \frac{2}{3t_b^3} \ln\left(\frac{t_c(1-t_b)}{t_c-t_b}\right) - \\ &\quad - \frac{2}{3t_c^3} \ln\left(\frac{t_b(t_a-t_c)}{t_c-t_b}\right) \end{aligned} \quad (\text{C-178})$$

bezeichnet werden. Damit ergibt sich für M_{10}

$$\begin{aligned} M_{10} &= -\frac{1}{v} \left(\frac{(1+\sqrt{\xi})^4}{\sqrt{\xi}} M_{6a} + \frac{(1-\sqrt{\xi})^4}{\sqrt{\xi}} M_{6b} - 4(1+\xi) M_{7a} \right. \\ &\quad \left. + \frac{\sqrt{\xi}(24+5\xi)}{8} (M_{8a} - M_{8b}) + \xi (M_{9a} - M_{9b}) - \frac{\xi^{3/2}}{8} (M_{10a} - M_{10b}) \right). \end{aligned} \quad (\text{C-179})$$

Berechnung des Integrals $M_{23} = M[-1, -1]$

Das Integral M_{23} ist gegeben durch

$$M_{23} = \int \int \frac{dy dz}{y z ((1-y)^2 - \xi) \sqrt{(1-z)^2 - \xi}}. \quad (\text{C-180})$$

Die z -Integration liefert

$$M_{23} = -\frac{1}{v} \int \frac{dy}{y ((1-y)^2 - \xi)} \ln \left(\frac{z_-(v^2 - z_+ + v\sqrt{(1-z_+)^2 - \xi})}{z_+(v^2 - z_- + v\sqrt{(1-z_-)^2 - \xi})} \right). \quad (\text{C-181})$$

Das Integral ist divergent. Der divergente Anteil ist aus verständlichen Gründen derselbe wie für das entsprechende Integral C_7 aus der Integralfamilie C , dividiert durch v (im Grenzfall kleiner Werte für y geht der zusätzliche Nennerfaktor $\sqrt{(1-y)^2 - \xi}$ ja in v über).

Der divergente Anteil ist damit bis auf einen doppeltlogarithmischen Anteil, der für C_7 gegen den konvergenten Anteil herausfiel, durch den Zerfallsratenterm t_{16} gegeben,

$$\begin{aligned} v^3 \mathcal{D} &= \ln \left(\frac{1+v}{1-v} \right) \ln \left(\frac{(1-\sqrt{\xi})^2}{\Lambda \xi} \right) - \text{Li}_2 \left(\frac{2v}{(1+v)^2} \right) + \text{Li}_2 \left(\frac{-2v}{(1-v)^2} \right) + \\ &\quad + \frac{1}{2} \ln_2 \left(-\frac{(1-v)^2}{(1+v)^2} \right) - \frac{1}{2} \text{Li}_2 \left(-\frac{(1+v)^2}{(1-v)^2} \right) = \\ &= \ln \left(\frac{1+v}{1-v} \right) \ln \left(\frac{(1+v)^2 (1-\sqrt{\xi})^2}{4\Lambda v^4} \right) + t_{16}. \end{aligned} \quad (\text{C-182})$$

Im Grenzfall $\Lambda \rightarrow 0$ ist der divergente Anteil gegeben durch

$$D \rightarrow \frac{2}{v^3} \int_c^{1-\sqrt{\xi}} \ln \left(\frac{1+v}{1-v} \right) \frac{dy}{y} = \frac{2}{v^3} \ln \left(\frac{1+v}{1-v} \right) \int_{t_b}^{t_d} \left(\frac{dt}{t-t_b} + \frac{dt}{t-t_a} - \frac{dt}{t} \right) \quad (\text{C-183})$$

und muß vom Gesamtintegral abgezogen werden, um den konvergenten Anteil zu ergeben. Die Partialbruchzerlegung des Gesamtintegrals ist gegeben durch

$$\frac{dy}{y((1-y)^2 - \xi)} = \frac{1}{\sqrt{\xi}} \left(\frac{dt}{(1-\sqrt{\xi})(1-t)} + \frac{dt}{(1+\sqrt{\xi})(1+t)} \right) + \frac{1}{v^2} \left(\frac{dt}{t-t_b} + \frac{dt}{t-t_a} \right), \quad (\text{C-184})$$

womit sich für das Integral zunächst formal

$$\begin{aligned} M_{23} &= -\frac{1}{v\sqrt{\xi}} \left(\frac{t_{19}}{1-\sqrt{\xi}} + \frac{t_{20}}{1+\sqrt{\xi}} \right) + \frac{1}{v^3} \left(t_{16} - \ln \left(\frac{1+v}{1-v} \right) \ln \Lambda \right) + \tilde{M}_{23}, \quad (\text{C-185}) \\ \tilde{M}_{23} &= M_{23a} + M_{23b} + M_{23c} + M_{23d} + M_{23e} + \frac{2}{v^3} \ln \left(\frac{1+v}{1-v} \right) \ln \left(\frac{(1+v)(1-\sqrt{\xi})}{2v^2} \right) \end{aligned}$$

ergibt. Nun sind die Bestandteile zu berechnen.

$$\begin{aligned}
-v^3 M_{23a} &= \int_{t_b}^{t_c} \frac{dt}{t-t_b} \left(2 \ln \left(\frac{\sqrt{\xi} - (1-v)t}{1+v-\sqrt{\xi}t} \right) - \ln \left(\frac{1+v}{1-v} \right) + 2 \ln \left(\frac{1+v}{1-v} \right) \right) = \\
&= \int_c^{t_c-t_b} \frac{dt'}{t'} \left(2 \ln \left(\frac{\sqrt{\xi} - (1-v)t_b - (1-v)t'}{1+v-\sqrt{\xi}t_b - \sqrt{\xi}t'} \right) + \ln \left(\frac{1+v}{1-v} \right) \right) = \\
&= \int_c^{t_c-t_b} \frac{dt'}{t'} \left(2 \ln \left(\frac{2v(1-v) - (1-v)\sqrt{\xi}t'}{\sqrt{\xi}(2v-\sqrt{\xi}t')} \right) + \ln \left(\frac{1+v}{1-v} \right) \right) = \\
&= \int_c^{t_c-t_b} \frac{dt'}{t'} \left(2 \ln \left(\frac{1-v}{\sqrt{\xi}} \right) + \ln \left(\frac{1+v}{1-v} \right) \right) = \\
&= \int_c^{t_c-t_b} \frac{dt'}{t'} \left(-\ln \left(\frac{1+v}{1-v} \right) + \ln \left(\frac{1+v}{1-v} \right) \right) = 0.
\end{aligned} \tag{C-186}$$

Die Verwendung von

$$\sqrt{\xi} - (1-v)t_b = \frac{2v}{\sqrt{\xi}}(1-v), \quad 1+v-\sqrt{\xi}t_b = 2v \tag{C-187}$$

hat den Integranden selbst also bereits zum Verschwinden gebracht. Etwas ähnliches ist übrigens auch für C_7 aufgetreten. Und dasselbe tritt auch bei M_{23b} unter Verwendung von

$$\sqrt{\xi} - (1-v)t_a = 0, \quad 1+v-\sqrt{\xi}t_a = 0 \tag{C-188}$$

auf,

$$\begin{aligned}
-v^3 M_{23b} &= \int_{t_b}^{t_c} \frac{dt}{t-t_a} \left(2 \ln \left(\frac{\sqrt{\xi} - (1-v)t}{1+v-\sqrt{\xi}t} \right) + \ln \left(\frac{1+v}{1-v} \right) \right) = \\
&= \int_{t_b-t_a}^{t_c-t_a} \frac{dt'}{t'} \left(2 \ln \left(\frac{\sqrt{\xi} - (1-v)t_a - (1-v)t'}{1+v-\sqrt{\xi}t_a - \sqrt{\xi}t'} \right) + \ln \left(\frac{1+v}{1-v} \right) \right) = \\
&= \int_{t_b-t_a}^{t_c-t_a} \frac{dt'}{t'} \left(2 \ln \left(\frac{-(1-v)t'}{-\sqrt{\xi}t'} \right) + \ln \left(\frac{1+v}{1-v} \right) \right) = 0,
\end{aligned} \tag{C-189}$$

Für M_{23c} wird

$$(1+v)t_b - \sqrt{\xi} = 0, \quad 1+v-\sqrt{\xi}t_b = 2v \tag{C-190}$$

verwendet und damit erhält man

$$\begin{aligned}
-v^3 M_{2c} &= \int_{t_c}^{t_d} \frac{dt}{t-t_b} \left(2 \ln \left(\frac{(1+v)t - \sqrt{\xi}}{1+v-\sqrt{\xi}t} \right) + 2 \ln \left(\frac{1+v}{1-v} \right) \right) = \\
&= \int_{t_c-t_b}^{t_d-t_b} \frac{dt'}{t'} \left(2 \ln \left(\frac{(1+v)t' + (1+v)t_b - \sqrt{\xi}}{1+v-\sqrt{\xi}t_b - \sqrt{\xi}t'} \right) + 2 \ln \left(\frac{1+v}{1-v} \right) \right) = \\
&= \int_{t_c-t_b}^{t_d-t_b} \frac{dt'}{t'} \left(2 \ln \left(\frac{(1+v)t'}{2v-\sqrt{\xi}t'} \right) + 2 \ln \left(\frac{1+v}{1-v} \right) \right) = \\
&= \left[2 \ln(1+v) \ln t' + \ln^2 t' - 2 \ln(2v) \ln t' + 2 \text{Li}_2 \left(\frac{\sqrt{\xi}t'}{2v} \right) + 2 \ln \left(\frac{1+v}{1-v} \right) \ln t' \right]_{t_c-t_b}^{t_d-t_b} =
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \left[2 \ln \left(\frac{(1+v)^2}{2v(1-v)} \right) \ln t' + \ln^2 t' + 2\text{Li}_2 \left(\frac{\sqrt{\xi} t'}{2v} \right) \right]_{t_c-t_b}^{t_d-t_b} = \\
&= \left[\ln^2 \left(\frac{(1+v)^2 t'}{2v(1-v)} \right) + 2\text{Li}_2 \left(\frac{\sqrt{\xi} t'}{2v} \right) \right]_{t_c-t_b}^{t_d-t_b} = \\
&= \ln^2 \left(\frac{(1+v)^2 (t_d - t_b)}{2v(1-v)} \right) - \ln^2 \left(\frac{(1+v)^2 (t_c - t_b)}{2v(1-v)} \right) + \\
&\quad + 2\text{Li}_2 \left(\frac{\sqrt{\xi} (t_d - t_b)}{2v} \right) - 2\text{Li}_2 \left(\frac{\sqrt{\xi} (t_c - t_b)}{2v} \right). \tag{C-191}
\end{aligned}$$

Die Verwendung von

$$t_c - t_b = \frac{(1-v)(\sqrt{\xi} - 1 + v)}{(2 - \sqrt{\xi})\sqrt{\xi}}, \quad t_d - t_b = \frac{\sqrt{\xi} - 1 + v}{\sqrt{\xi}} \tag{C-192}$$

liefert

$$\begin{aligned}
-v^3 M_{23c} &= \ln^2 \left(\frac{(1+v)^2 (\sqrt{\xi} - 1 + v)}{2v\sqrt{\xi}(1-v)} \right) - \ln^2 \left(\frac{(1+v)^2 (\sqrt{\xi} - 1 + v)}{2v\sqrt{\xi}(2 - \sqrt{\xi})} \right) + \\
&\quad + 2\text{Li}_2 \left(\frac{\sqrt{\xi} - 1 + v}{2v} \right) - 2\text{Li}_2 \left(\frac{(1-v)(\sqrt{\xi} - 1 + v)}{2v(2 - \sqrt{\xi})} \right). \tag{C-193}
\end{aligned}$$

Schliesslich kann man den doppeltlogarithmischen Anteil noch etwas vereinfachen,

$$\begin{aligned}
&\ln^2 \left(\frac{(1+v)^2 (\sqrt{\xi} - 1 + v)}{2v\sqrt{\xi}(1-v)} \right) - \ln^2 \left(\frac{(1+v)^2 (\sqrt{\xi} - 1 + v)}{2v\sqrt{\xi}(2 - \sqrt{\xi})} \right) = \\
&= \ln^2 \left(\frac{(1+v)^2 (\sqrt{\xi} - 1 + v)}{2v\sqrt{\xi}(1-v)} \right) - \left(\ln \left(\frac{(1+v)^2 (\sqrt{\xi} - 1 + v)}{2v\sqrt{\xi}(1-v)} \right) - \ln \left(\frac{2 - \sqrt{\xi}}{1-v} \right) \right)^2 = \\
&= 2 \ln \left(\frac{(1+v)^2 (\sqrt{\xi} - 1 + v)}{2v\sqrt{\xi}(1-v)} \right) \ln \left(\frac{2 - \sqrt{\xi}}{1-v} \right) - \ln^2 \left(\frac{2 - \sqrt{\xi}}{1-v} \right) = \\
&= \ln \left(\frac{(1+v)^4 2(1-v)(1 - \sqrt{\xi})}{4v^2 \xi (1-v)^2} \right) \ln \left(\frac{2 - \sqrt{\xi}}{1-v} \right) - \ln^2 \left(\frac{2 - \sqrt{\xi}}{1-v} \right) = \\
&= \ln \left(\frac{(1+v)^3 (1 - \sqrt{\xi})}{2v^2 (1-v)^2} \right) \ln \left(\frac{2 - \sqrt{\xi}}{1-v} \right) - \ln \left(\frac{2 - \sqrt{\xi}}{1-v} \right), \tag{C-194}
\end{aligned}$$

damit

$$\begin{aligned}
-v^3 M_{23c} &= \ln \left(\frac{(1+v)^3 (1 - \sqrt{\xi})}{2v^2 (1-v)^2} \right) \ln \left(\frac{2 - \sqrt{\xi}}{1-v} \right) - \ln \left(\frac{2 - \sqrt{\xi}}{1-v} \right) + \\
&\quad + 2\text{Li}_2 \left(\frac{\sqrt{\xi} - 1 + v}{2v} \right) - 2\text{Li}_2 \left(\frac{(1-v)(\sqrt{\xi} - 1 + v)}{2v(2 - \sqrt{\xi})} \right) \tag{C-195}
\end{aligned}$$

Für den letzten Integralanteil verwendet man

$$(1+v)t_a = \frac{2v}{\sqrt{\xi}}(1+v), \quad 1+v - \sqrt{\xi}t_a = 0 \tag{C-196}$$

und hier im Gegensatz zu allen anderen Malen die Substitution $t' = t_a - t$, um sehen zu können, welches Argument wirklich negativ ist. Es ergibt sich

$$\begin{aligned}
-v^3 M_{23d} &= \int_{t_c}^{t_d} \frac{dt}{t - t_a} \left(2 \ln \left(\frac{(1+v)t - \sqrt{\xi}}{1+v - \sqrt{\xi}t} \right) + 2 \ln \left(\frac{1+v}{1-v} \right) \right) = \\
&= \int_{t_a-t_c}^{t_a-t_d} \frac{dt'}{t'} \left(2 \ln \left(\frac{(1+v)t_a - \sqrt{\xi} - (1+v)t'}{1+v - \sqrt{\xi}t_a + \sqrt{\xi}t'} \right) + 2 \ln \left(\frac{1+v}{1-v} \right) \right) = \\
&= \int_{t_a-t_c}^{t_a-t_d} \frac{dt'}{t'} \left(2 \ln \left(\frac{2v - \sqrt{\xi}t'}{(1-v)t'} \right) + 2 \ln \left(\frac{1+v}{1-v} \right) \right) = \\
&= \left[2 \ln(2v) \ln t' - 2 \text{Li}_2 \left(\frac{\sqrt{\xi}t'}{2v} \right) - 2 \ln(1-v) \ln t' - \ln^2 t' + 2 \ln \left(\frac{1+v}{1-v} \right) \ln t' \right]_{t_a-t_c}^{t_a-t_d} = \\
&= \left[2 \ln \left(\frac{2v(1+v)}{(1-v)^2} \right) \ln t' - \ln^2 t' - 2 \text{Li}_2 \left(\frac{\sqrt{\xi}t'}{2v} \right) \right]_{t_a-t_c}^{t_a-t_d} = \\
&= \left[-\ln^2 \left(\frac{2v(1+v)}{(1-v)^2 t'} \right) - 2 \text{Li}_2 \left(\frac{\sqrt{\xi}t'}{2v} \right) \right]_{t_a-t_c}^{t_a-t_d} = \\
&= -\ln^2 \left(\frac{2v(1+v)}{(1-v)^2(t_a - t_d)} \right) + \ln^2 \left(\frac{2v(1+v)}{(1-v)^2(t_a - t_c)} \right) + \\
&\quad -2 \text{Li}_2 \left(\frac{\sqrt{\xi}(t_a - t_d)}{2v} \right) + 2 \text{Li}_2 \left(\frac{\sqrt{\xi}(t_a - t_c)}{2v} \right). \tag{C-197}
\end{aligned}$$

Mit

$$t_a - t_c = \frac{(1+v)(1+v - \sqrt{\xi})}{(2 - \sqrt{\xi})\sqrt{\xi}}, \quad t_a - t_d = \frac{1+v - \sqrt{\xi}}{\sqrt{\xi}} \tag{C-198}$$

erhält man

$$\begin{aligned}
-v^3 M_{23d} &= -\ln^2 \left(\frac{2v(1+v)\sqrt{\xi}}{(1-v)^2(1+v - \sqrt{\xi})} \right) + \ln^2 \left(\frac{2v(2 - \sqrt{\xi})\sqrt{\xi}}{(1-v)^2(1+v - \sqrt{\xi})} \right) + \\
&\quad -2 \text{Li}_2 \left(\frac{1+v - \sqrt{\xi}}{2v} \right) + 2 \text{Li}_2 \left(\frac{(1+v)(1+v - \sqrt{\xi})}{2v(2 - \sqrt{\xi})} \right). \tag{C-199}
\end{aligned}$$

Auch hier lässt sich der doppeltlogarithmische Anteil vereinfachen,

$$\begin{aligned}
&\ln^2 \left(\frac{2v(2 - \sqrt{\xi})\sqrt{\xi}}{(1-v)^2(1+v - \sqrt{\xi})} \right) - \ln^2 \left(\frac{2v(1+v)\sqrt{\xi}}{(1-v)^2(1+v - \sqrt{\xi})} \right) = \\
&= \left(\ln \left(\frac{2v(1+v)\sqrt{\xi}}{(1-v)^2(1+v - \sqrt{\xi})} \right) - \ln \left(\frac{1+v}{2 - \sqrt{\xi}} \right) \right)^2 - \ln^2 \left(\frac{2v(1+v)\sqrt{\xi}}{(1-v)^2(1+v - \sqrt{\xi})} \right) = \\
&= \ln^2 \left(\frac{1+v}{2 - \sqrt{\xi}} \right) - 2 \ln \left(\frac{1+v}{2 - \sqrt{\xi}} \right) \ln \left(\frac{2v(1+v)\sqrt{\xi}}{(1-v)^2(1+v - \sqrt{\xi})} \right) = \\
&= \ln^2 \left(\frac{1+v}{2 - \sqrt{\xi}} \right) - \ln \left(\frac{1+v}{2 - \sqrt{\xi}} \right) \ln \left(\frac{4v^2(1+v)^2\xi}{2(1-v)^4(1+v)(1 - \sqrt{\xi})} \right) = \\
&= \ln^2 \left(\frac{1+v}{2 - \sqrt{\xi}} \right) - \ln \left(\frac{1+v}{2 - \sqrt{\xi}} \right) \ln \left(\frac{2v^2(1+v)^2}{(1-v)^3(1 - \sqrt{\xi})} \right), \tag{C-200}
\end{aligned}$$

damit erhält man

$$\begin{aligned} -v^3 M_{23d} = & \ln^2 \left(\frac{1+v}{2-\sqrt{\xi}} \right) - \ln \left(\frac{1+v}{2-\sqrt{\xi}} \right) \ln \left(\frac{2v^2(1+v)^2}{(1-v)^3(1-\sqrt{\xi})} \right) + \\ & -2\text{Li}_2 \left(\frac{1+v-\sqrt{\xi}}{2v} \right) + 2\text{Li}_2 \left(\frac{(1+v)(1+v-\sqrt{\xi})}{2v(2-\sqrt{\xi})} \right) \end{aligned} \quad (\text{C-201})$$

Schliesslich ist

$$-v^3 M_{23e} = -2 \ln \left(\frac{1+v}{1-v} \right) \int_{t_b}^{t_d} \frac{dt}{t} = -2 \ln \left(\frac{1+v}{1-v} \right) \ln \left(\frac{t_d}{t_b} \right) = -\ln^2 \left(\frac{1+v}{1-v} \right). \quad (\text{C-202})$$

Zusammengesetzt ergibt sich der Zerfallsratenterm t_{22} ,

$$\begin{aligned} t_{22} = & -v^3 \left(M_{23a} + M_{23b} + M_{23c} + M_{23d} + M_{23e} + \frac{2}{v^3} \ln \left(\frac{1+v}{1-v} \right) \ln \left(\frac{(1+v)(1-\sqrt{\xi})}{2v^2} \right) \right) = \\ = & \ln^2 \left(\frac{1+v}{1-v} \right) + \ln \left(\frac{(1+v)^3(1-\sqrt{\xi})}{2v^2(1-v)^2} \right) \ln \left(\frac{2-\sqrt{\xi}}{1-v} \right) - \ln^2 \left(\frac{2-\sqrt{\xi}}{1-v} \right) + \ln^2 \left(\frac{1+v}{2-\sqrt{\xi}} \right) + \\ & - \ln \left(\frac{1+v}{2-\sqrt{\xi}} \right) \ln \left(\frac{2v^2(1+v)^2}{(1-v)^3(1-\sqrt{\xi})} \right) - 2 \ln \left(\frac{1+v}{1-v} \right) \ln \left(\frac{(1+v)(1-\sqrt{\xi})}{2v^2} \right) + \\ & + 2\text{Li}_2 \left(\frac{\sqrt{\xi}-1+v}{2v} \right) - 2\text{Li}_2 \left(\frac{(1-v)(1+v-\sqrt{\xi})}{2v(2-\sqrt{\xi})} \right) + \\ & - 2\text{Li}_2 \left(\frac{1+v-\sqrt{\xi}}{2v} \right) + 2\text{Li}_2 \left(\frac{(1+v)(1+v-\sqrt{\xi})}{2v(2-\sqrt{\xi})} \right). \end{aligned} \quad (\text{C-203})$$

Auch hier lassen sich die Dilogarithmen zusammenfassen, denn es ist

$$\begin{aligned} -2\text{Li}_2 \left(\frac{1+v-\sqrt{\xi}}{2v} \right) = & -\frac{\pi^2}{3} + 2 \ln \left(\frac{1+v-\sqrt{\xi}}{2v} \right) \ln \left(\frac{\sqrt{\xi}-1+v}{2v} \right) + 2\text{Li}_2 \left(\frac{\sqrt{\xi}-1+v}{2v} \right) = \\ = & -\frac{\pi^2}{3} + \frac{1}{2} \ln \left(\frac{(1+v)(1-\sqrt{\xi})}{2v^2} \right) \ln \left(\frac{(1-v)(1-\sqrt{\xi})}{2v^2} \right) + 2\text{Li}_2 \left(\frac{\sqrt{\xi}-1+v}{2v} \right), \end{aligned} \quad (\text{C-204})$$

$$\begin{aligned} 2\text{Li}_2 \left(\frac{(1+v)(1+v-\sqrt{\xi})}{2v(2-\sqrt{\xi})} \right) = & \\ = & \frac{\pi^2}{3} - 2 \ln \left(\frac{(1+v)(1+v-\sqrt{\xi})}{2v(2-\sqrt{\xi})} \right) \ln \left(\frac{(1-v)(\sqrt{\xi}-1+v)}{2v(2-\sqrt{\xi})} \right) + \\ & - 2\text{Li}_2 \left(\frac{(1-v)(\sqrt{\xi}-1+v)}{2v(2-\sqrt{\xi})} \right) = \quad (\text{C-205}) \\ = & \frac{\pi^2}{3} - \frac{1}{2} \ln \left(\frac{(1+v)^3(1-\sqrt{\xi})}{2v^2(2-\sqrt{\xi})^2} \right) \ln \left(\frac{(1-v)^3(1-\sqrt{\xi})}{2v^2(2-\sqrt{\xi})^2} \right) - 2\text{Li}_2 \left(\frac{(1-v)(\sqrt{\xi}-1+v)}{2v(2-\sqrt{\xi})} \right). \end{aligned}$$

Dies alles ausgewertet, ergibt sich das erstaunlich einfache Ergebnis

$$\begin{aligned} t_{22} = & 2 \ln \left(\frac{1+v}{2-\sqrt{\xi}} \right) \ln \left(\frac{2(1+\sqrt{\xi})(2-\sqrt{\xi})}{(1+v)^2} \right) + \\ & + 4\text{Li}_2 \left(\frac{\sqrt{\xi}-1+v}{2v} \right) - 4\text{Li}_2 \left(\frac{(1-v)(\sqrt{\xi}-1+v)}{2v(2-\sqrt{\xi})} \right). \end{aligned} \quad (\text{C-206})$$

Damit sind alle neuen Zerfallsratenterme bestimmt, und man kann nun zusammenstellen, wie die dilogaritmischen Anteile der Integrale L_{23} bis L_{29} und M_{23} bis M_{29} aussehen.

C.6.3 Berechnung der zugehörigen Integrale der dritten Klasse

Die Integrale der Familie M, die zur dritten Klasse gehören (C-36), sind M_{11} , M_{12} , M_{13} , M_{14} und M_{15} . Die Partialbruchzerlegung ist für die Integrale dieser Klasse analog zu der für die Integrale der ersten und zweiten Klasse. Deshalb werden die Integrale der dritten Klasse analog gelöst.

Berechnung des Integrals $M_{11} = M[0, -2]$

Das Integral M_{11} ist gegeben durch

$$M_{11} = \int \int \frac{dy dz}{z^2 ((1-y)^2 - \xi) \sqrt{(1-z)^2 - \xi}}. \quad (\text{C-207})$$

Die z -Integration liefert

$$\int \frac{dz}{z^2 \sqrt{(1-z)^2 - \xi}} = \frac{1}{v^2} \left[\int \frac{dz}{z \sqrt{(1-z)^2 - \xi}} - \frac{\sqrt{(1-y^2) - \xi}}{z} \right]. \quad (\text{C-208})$$

Siehe Abschnitt C.4.5. Somit kann das Integral M_{11} als

$$M_{11} = \int \int \frac{dy dz}{z^2 ((1-y)^2 - \xi) \sqrt{(1-z)^2 - \xi}} = \frac{1}{v^2} (M_6 - \tilde{M}_{11}) \quad (\text{C-209})$$

geschrieben werden, mit

$$\tilde{M}_{11} = \int_{\Lambda + \sqrt{\Lambda\xi}}^{1-\sqrt{\xi}} \frac{dy}{((1-y)^2 - \xi)} \left[\frac{\sqrt{(1-z)^2 - \xi}}{z} \right]_{z_-(y)}^{z_+(y)}. \quad (\text{C-210})$$

Das Integral ist divergent. Durch Entwicklung in kleine Werte von $z_{\pm}$ ergibt sich

$$\sqrt{(1-z_{\pm})^2 - \xi} \rightarrow v - \frac{z_{\pm}^s}{v} \quad (\text{C-211})$$

und damit

$$\left[\frac{\sqrt{(1-z)^2 - \xi}}{z} \right]_{z_-}^{z_+} \rightarrow v \left(\frac{1}{z_+^s} - \frac{1}{z_-^s} \right) \quad (\text{C-212})$$

mit $\xi z_{\pm}^s = (1+v^2)y \pm 2v\sqrt{(y-\Lambda)^2 - \Lambda\xi}$. Für $\Lambda \rightarrow 0$ wird der konvergente Anteil

$$\tilde{M}_{11a} = \int_0^{1-\sqrt{\xi}} \frac{dy}{((1-y)^2 - \xi)} \left[\frac{\sqrt{(1-z)^2 - \xi}}{z} \right]_{z_-(y)}^{z_+(y)} - \int_0^{1-\sqrt{\xi}} \frac{dy}{v^2} \left(\frac{-4v^2}{\xi y} \right) \quad (\text{C-213})$$

Mit Hilfe von Gln. (C-10), (C-23) und der Partialbruchzerlegung

$$\frac{dy}{((1-y)^2 - \xi)} = \left(\frac{1}{1+t} + \frac{1}{1-t} \right) \frac{dt}{\sqrt{\xi}} \quad (\text{C-214})$$

$$\frac{dy}{y} = \left(\frac{1}{t-t_a} + \frac{1}{t-t_b} - \frac{1}{t} \right) dt \quad (\text{C-215})$$

wird das Integral $\tilde{M}_{11a}$ durch

$$\begin{aligned} \tilde{M}_{11a} &= \left[\int_{t_b}^{t_c} \frac{4(t^2 - 2\sqrt{\xi}t + 1)}{\xi(t-t_b)(t-t_a)} \left(\frac{1}{1+t} + \frac{1}{1-t} \right) \frac{dt}{\sqrt{\xi}} + \right. \\ &\quad \left. \int_{t_c}^{t_d} \frac{2(1-t^2)(2-\xi)}{\xi(t-t_b)(t-t_a)} \left(\frac{1}{1+t} + \frac{1}{1-t} \right) \frac{dt}{\sqrt{\xi}} \right] - \\ &\quad \left[\int_{t_b}^{t_d} \left(\frac{-4}{\xi} \right) \left(\frac{1}{t-t_a} + \frac{1}{t-t_b} - \frac{1}{t} \right) dt \right] \\ &= \frac{2}{v} \left(1 - \frac{2}{\xi} \right) \ln \left(\frac{(1-t_b)(t_a-t_c)}{(t_a-1)(t_c-t_b)} \right) - \\ &\quad \frac{4}{\xi} \ln \left(\frac{(1-t_b^2)(2t_c - \sqrt{\xi}(1+t_c^2))}{2t_b(1-t_c^2)(1-\sqrt{\xi})} \right). \end{aligned} \quad (\text{C-216})$$

gegeben, wobei der Integrand durch (C-36) ersetzt wird. Die Berechnung des divergenten Anteils ist analog zur Berechnung des divergenten Anteils der Integral C_{10}

$$\begin{aligned} \tilde{M}_{11b} &= \frac{1}{v} \int_{\Lambda+\sqrt{\Lambda\xi}}^{1-\sqrt{\xi}} \frac{dy}{v^2} \left[\frac{\sqrt{(1-z)^2 - \xi}}{z} \right]_{z_-^s}^{z_+^s} = \int_{\Lambda+\sqrt{\Lambda\xi}}^{1-\sqrt{\xi}} \left(\frac{1}{z_+^s} - \frac{1}{z_-^s} \right) \frac{dy}{v} \\ &= -\frac{2}{\xi} \ln \left(\frac{4(1-\sqrt{\xi})^2}{\Lambda\xi} \right) + \frac{2(1+v^2)}{\xi v} \ln \left(\frac{1+v}{1-v} \right) \end{aligned} \quad (\text{C-217})$$

$$(\text{C-218})$$

Damit wird M_{11} als

$$M_{11} = \frac{1}{v^2} \left(M_6 - \tilde{M}_{11a} - \tilde{M}_{11b} \right) \quad (\text{C-219})$$

geschrieben.

Berechnung des Integrals $M_{12} = M[1, -2]$

Das Integral M_{12} ist gegeben durch

$$M_{12} = \int \int \frac{y \, dy \, dz}{z^2 ((1-y)^2 - \xi) \sqrt{(1-z)^2 - \xi}}. \quad (\text{C-220})$$

Die z -Integration liefert

$$\int \frac{dz}{z^2 \sqrt{(1-z)^2 - \xi}} = \frac{1}{v^2} \left[\int \frac{dz}{z \sqrt{(1-z)^2 - \xi}} - \frac{\sqrt{(1-y^2) - \xi}}{z} \right]. \quad (\text{C-221})$$

Somit kann das Integral M_{12} als

$$M_{12} = \int \int \frac{y \, dy \, dz}{z^2 ((1-y)^2 - \xi) \sqrt{(1-z)^2 - \xi}} = \frac{1}{v^2} (M_7 - \tilde{M}_{12}) \quad (\text{C-222})$$

geschrieben werden, mit

$$\tilde{M}_{12} = \int_0^{1-\sqrt{\xi}} \frac{y \, dy}{((1-y)^2 - \xi)} \left[\frac{\sqrt{(1-z)^2 - \xi}}{z} \right]_{z_-(y)}^{z_+(y)}. \quad (\text{C-223})$$

Mit Hilfe von Gln. (C-10), (C-23) und (C-36) wird $\tilde{M}_{12}$ durch

$$\begin{aligned} \tilde{M}_{12} &= \left[\int_{t_b}^{t_c} y(t) \frac{4(t^2 - 2\sqrt{\xi}t + 1)}{\xi(t-t_b)(t-t_a)} \left(\frac{1}{1+t} + \frac{1}{1-t} \right) \frac{dt}{\sqrt{\xi}} + \right. \\ &\quad \left. \int_{t_c}^{t_d} y(t) \frac{2(1-t^2)(2-\xi)}{\xi(t-t_b)(t-t_a)} \left(\frac{1}{1+t} + \frac{1}{1-t} \right) \frac{dt}{\sqrt{\xi}} \right] \\ &= \frac{4 \ln(t_b)}{\xi} - 2 \ln(t_c) - \frac{4(1-\sqrt{\xi})}{\xi} \ln\left(\frac{1-t_b}{1-t_c}\right) - \\ &\quad \frac{4(1+\sqrt{\xi})}{\xi} \ln\left(\frac{1+t_b}{1+t_c}\right) \end{aligned} \quad (\text{C-224})$$

gegeben. Damit ergibt sich für M_{12}

$$M_{12} = \frac{1}{v^2} (M_7 - \tilde{M}_{12}). \quad (\text{C-225})$$

Berechnung des Integrals $M_{13} = M[2, -2]$

Das Integral M_{13} ist gegeben durch

$$M_{13} = \int \int \frac{y^2 \, dy \, dz}{z^2 ((1-y)^2 - \xi) \sqrt{(1-z)^2 - \xi}}. \quad (\text{C-226})$$

Die z -Integration liefert

$$\int \frac{dz}{z^2 \sqrt{(1-z)^2 - \xi}} = \frac{1}{v^2} \left[\int \frac{dz}{z \sqrt{(1-z)^2 - \xi}} - \frac{\sqrt{(1-y^2) - \xi}}{z} \right]. \quad (\text{C-227})$$

Somit kann das Integral M_{13} als

$$M_{13} = \int \int \frac{y^2 dy dz}{z^2 ((1-y)^2 - \xi) \sqrt{(1-z)^2 - \xi}} = \frac{1}{v^2} (M_8 - \tilde{M}_{13}) \quad (\text{C-228})$$

geschrieben werden, mit

$$\tilde{M}_{13} = \int_0^{1-\sqrt{\xi}} \frac{y^2 dy}{((1-y)^2 - \xi)} \left[\frac{\sqrt{(1-z)^2 - \xi}}{z} \right]_{z_-(y)}^{z_+(y)}. \quad (\text{C-229})$$

Mit Hilfe von Gln. (C-10), (C-23) und (C-36) wird $\tilde{M}_{13}$ durch

$$\begin{aligned} \tilde{M}_{13} &= \left[\int_{t_b}^{t_c} [y(t)]^2 \frac{4(t^2 - 2\sqrt{\xi}t + 1)}{\xi(t-t_b)(t-t_a)} \left(\frac{1}{1+t} + \frac{1}{1-t} \right) \frac{dt}{\sqrt{\xi}} + \right. \\ &\quad \left. \int_{t_c}^{t_d} [y(t)]^2 \frac{2(1-t^2)(2-\xi)}{\xi(t-t_b)(t-t_a)} \left(\frac{1}{1+t} + \frac{1}{1-t} \right) \frac{dt}{\sqrt{\xi}} \right] \\ &= \frac{4-4\xi}{\xi} + \left(\frac{4+4\xi}{\xi} \right) \ln(t_b) - 6 \ln(t_c) - \\ &\quad \frac{4(1+\sqrt{\xi})^2}{\xi} \ln\left(\frac{1+t_b}{1+t_c}\right) - \frac{4(1-\sqrt{\xi})^2}{\xi} \ln\left(\frac{1-t_b}{1-t_c}\right) \end{aligned} \quad (\text{C-230})$$

gegeben. Damit ergibt sich für M_{13}

$$M_{13} = \frac{1}{v^2} (M_8 - \tilde{M}_{13}). \quad (\text{C-231})$$

Berechnung des Integrals $M_{14} = M[3, -2]$

Das Integral M_{14} ist gegeben durch

$$M_{14} = \int \int \frac{y^3 dy dz}{z^2 ((1-y)^2 - \xi) \sqrt{(1-z)^2 - \xi}}. \quad (\text{C-232})$$

Die z -Integration liefert

$$\int \frac{dz}{z^2 \sqrt{(1-z)^2 - \xi}} = \frac{1}{v^2} \left[\int \frac{dz}{z \sqrt{(1-z)^2 - \xi}} - \frac{\sqrt{(1-y^2) - \xi}}{z} \right]. \quad (\text{C-233})$$

Somit kann das Integral M_{14} als

$$M_{14} = \int \int \frac{y^3 dy dz}{z^2 ((1-y)^2 - \xi) \sqrt{(1-z)^2 - \xi}} = \frac{1}{v^2} (M_9 - \tilde{M}_{14}) \quad (\text{C-234})$$

geschrieben werden, mit

$$\tilde{M}_{14} = \int_0^{1-\sqrt{\xi}} \frac{y^3 dy}{((1-y)^2 - \xi)} \left[\frac{\sqrt{(1-z)^2 - \xi}}{z} \right]_{z_-(y)}^{z_+(y)}. \quad (\text{C-235})$$

Mit Hilfe von Gln. (C-10), (C-23) und (C-36) wird $\tilde{M}_{14}$ durch

$$\begin{aligned} \tilde{M}_{14} &= \left[\int_{t_b}^{t_c} [y(t)]^3 \frac{4(t^2 - 2\sqrt{\xi}t + 1)}{\xi(t-t_b)(t-t_a)} \left(\frac{1}{1+t} + \frac{1}{1-t} \right) \frac{dt}{\sqrt{\xi}} + \right. \\ &\quad \left. \int_{t_c}^{t_d} [y(t)]^3 \frac{2(1-t^2)(2-\xi)}{\xi(t-t_b)(t-t_a)} \left(\frac{1}{1+t} + \frac{1}{1-t} \right) \frac{dt}{\sqrt{\xi}} \right] \\ &= \frac{2(1-v)^2 (6(1-\xi) - \sqrt{\xi}(3-4\xi) - \xi^2)}{(1-v)^2 (2-\sqrt{\xi}) \xi} + \\ &\quad 4 \left(\frac{1+3\xi}{\xi} \right) \ln(t_b) - (12+\xi) \ln(t_c) - \\ &\quad \frac{4(1-\sqrt{\xi})^3}{\xi} \ln\left(\frac{1-t_b}{1-t_c}\right) \end{aligned} \quad (\text{C-236})$$

gegeben. Damit ergibt sich für M_{14}

$$M_{14} = \frac{1}{v^2} (M_9 - \tilde{M}_{14}). \quad (\text{C-237})$$

Berechnung des Integrals $M_{15} = M[4, -2]$

Das Integral M_{15} ist gegeben durch

$$M_{15} = \int \int \frac{y^4 dy dz}{z^2 ((1-y)^2 - \xi) \sqrt{(1-z)^2 - \xi}}. \quad (\text{C-238})$$

Die z -Integration liefert

$$\int \frac{dz}{z^2 \sqrt{(1-z)^2 - \xi}} = \frac{1}{v^2} \left[\int \frac{dz}{z \sqrt{(1-z)^2 - \xi}} - \frac{\sqrt{(1-y^2) - \xi}}{z} \right]. \quad (\text{C-239})$$

Somit kann das Integral M_{14} als

$$M_{15} = \int \int \frac{y^4 dy dz}{z^2 ((1-y)^2 - \xi) \sqrt{(1-z)^2 - \xi}} = \frac{1}{v^2} (M_{10} - \tilde{M}_{15}) \quad (\text{C-240})$$

geschrieben werden, mit

$$\tilde{M}_{15} = \int_0^{1-\sqrt{\xi}} \frac{y^4 dy}{((1-y)^2 - \xi)} \left[\frac{\sqrt{(1-z)^2 - \xi}}{z} \right]_{z_-(y)}^{z_+(y)}. \quad (\text{C-241})$$

Mit Hilfe von Gln. (C-10), (C-23) und (C-36) wird $\tilde{M}_{15}$ durch

$$\begin{aligned} \tilde{M}_{15} &= \left[\int_{t_b}^{t_c} [y(t)]^4 \frac{4(t^2 - 2\sqrt{\xi}t + 1)}{\xi(t - t_b)(t - t_a)} \left(\frac{1}{1+t} + \frac{1}{1-t} \right) \frac{dt}{\sqrt{\xi}} + \right. \\ &\quad \left. \int_{t_c}^{t_d} [y(t)]^4 \frac{2(1-t^2)(2-\xi)}{\xi(t - t_b)(t - t_a)} \left(\frac{1}{1+t} + \frac{1}{1-t} \right) \frac{dt}{\sqrt{\xi}} \right] \\ &= \frac{2(44(1 - \sqrt{\xi}) - \xi(17 - 49\xi - 3\xi^2) - 23\xi^{3/2}(2 - \xi))}{3(2 - \sqrt{\xi})^2 \xi} + \\ &\quad \frac{4}{\xi} (1 + 6\xi + \xi^2) \ln(t_b) - (20 + 7\xi) \ln(t_c) - \\ &\quad \frac{4(1 - \sqrt{\xi})^4}{\xi} \ln\left(\frac{1 - t_b}{1 - t_c}\right) - \frac{4(1 + \sqrt{\xi})^4}{\xi} \ln\left(\frac{1 + t_b}{1 + t_c}\right) \end{aligned} \quad (\text{C-242})$$

gegeben. Damit ergibt sich für M_{15}

$$M_{15} = \frac{1}{v^2} (M_{10} - \tilde{M}_{15}). \quad (\text{C-243})$$

C.6.4 Berechnung der zugehörigen Integrale der vierten Klasse

Die Integrale der Familie M, die zur vierten Klasse gehören (C-38), sind M_{16} , M_{17} , M_{18} , und M_{19} .

Berechnung des Integrals $M_{16} = M[0, 1]$

Das Integral M_{16} ist gegeben durch

$$M_{16} = \int \int \frac{z dy dz}{((1-y)^2 - \xi) \sqrt{(1-z)^2 - \xi}}. \quad (\text{C-244})$$

Die z -Integration liefert

$$\int \frac{z dz}{\sqrt{(1-z)^2 - \xi}} = \left[\sqrt{(1-z)^2 - \xi} + \ln(1 - z - \sqrt{(1-z)^2 - \xi}) \right]_{z_-}^{z_+}. \quad (\text{C-245})$$

Somit kann das Integral M_{16} als

$$M_{16} = \int \int \frac{z dy dz}{((1-y)^2 - \xi) \sqrt{(1-z)^2 - \xi}} = M_1 + \tilde{M}_{16} \quad (\text{C-246})$$

geschrieben werden, mit

$$\tilde{M}_{16} = \int_0^{1-\sqrt{\xi}} \frac{dy}{((1-y)^2 - \xi)} \left[\sqrt{(1-z)^2 - \xi} \right]_{z_-(y)}^{z_+(y)} \quad (\text{C-247})$$

Mit Hilfe von Gln. (C-10), (C-23) und (C-38) wird $\tilde{M}_{16}$ durch

$$\begin{aligned} \tilde{M}_{16} &= \left[\int_{t_b}^{t_c} KU_+(t) \left(\frac{1}{1+t} + \frac{1}{1-t} \right) \frac{dt}{\sqrt{\xi}} + \right. \\ &\quad \left. \int_{t_c}^{t_d} KU_-(t) \left(\frac{1}{1+t} + \frac{1}{1-t} \right) \frac{dt}{\sqrt{\xi}} \right] \\ &= -\frac{4(1-\sqrt{\xi})}{\sqrt{\xi}(2-\sqrt{\xi})} \ln\left(\frac{1-t_b}{1-t_c}\right) - \ln(t_b) + \frac{4(1+\sqrt{\xi})}{\sqrt{\xi}(2+\sqrt{\xi})} \ln\left(\frac{1+t_b}{1+t_c}\right) + \\ &\quad 2 \ln(t_c) + \frac{\xi}{4-\xi} \ln\left(\frac{(2t_c - \sqrt{\xi})^2}{(2t_b - \sqrt{\xi})(2 - t_b \sqrt{\xi})}\right) \end{aligned} \quad (\text{C-248})$$

gegeben. Mit

$$KU_+(t) = \left(\frac{(2t - \sqrt{\xi}(1+t^2))(\sqrt{\xi}(1+t^2) - 4t)}{t(2t - \sqrt{\xi})(2 - \sqrt{\xi}t)} \right) \quad (\text{C-249})$$

und

$$KU_-(t) = \left(\frac{\sqrt{\xi}(1-t^2)(\sqrt{\xi}(1+t^2) - (2+\xi)t)}{t(2t - \sqrt{\xi})(2 - \sqrt{\xi}t)} \right). \quad (\text{C-250})$$

Damit ergibt sich für M_{16}

$$M_{16} = (M_1 + \tilde{M}_{16}). \quad (\text{C-251})$$

Berechnung des Integrals $M_{17} = M[1, 1]$

Das Integral M_{17} ist gegeben durch

$$M_{17} = \int \int \frac{y z dy dz}{((1-y)^2 - \xi) \sqrt{(1-z)^2 - \xi}}. \quad (\text{C-252})$$

Die z -Integration liefert

$$\int \frac{z dz}{\sqrt{(1-z)^2 - \xi}} = \left[\sqrt{(1-z)^2 - \xi} + \ln(1-z - \sqrt{(1-z)^2 - \xi}) \right]_{z_-}^{z_+}. \quad (\text{C-253})$$

Somit kann das Integral M_{17} als

$$M_{17} = \int \int \frac{y z dy dz}{((1-y)^2 - \xi) \sqrt{(1-z)^2 - \xi}} = M_2 + \tilde{M}_{17} \quad (\text{C-254})$$

geschrieben werden, mit

$$\tilde{M}_{17} = \int_0^{1-\sqrt{\xi}} \frac{y \, dy}{((1-y)^2 - \xi)} \left[\sqrt{(1-z)^2 - \xi} \right]_{z_-(y)}^{z_+(y)}. \quad (\text{C-255})$$

Mit Hilfe von Gln. (C-10), (C-23) und (C-38) wird $\tilde{M}_{17}$ durch

$$\begin{aligned} \tilde{M}_{17} &= \left[\int_{t_b}^{t_c} [y(t)] \, KU_+(t) \left(\frac{1}{1+t} + \frac{1}{1-t} \right) \frac{dt}{\sqrt{\xi}} + \right. \\ &\quad \left. \int_{t_c}^{t_d} [y(t)] \, KU_-(t) \left(\frac{1}{1+t} + \frac{1}{1-t} \right) \frac{dt}{\sqrt{\xi}} \right] \\ &= 1 - \sqrt{\xi} - \left(3 - \frac{\xi}{4} \right) \ln(t_b) + 4 \ln(t_c) - \\ &\quad \frac{4(1-\sqrt{\xi})^2}{(2-\sqrt{\xi})} \ln\left(\frac{1-t_b}{1-t_c}\right) + \frac{4(1+\sqrt{\xi})^2}{\sqrt{\xi}(2+\sqrt{\xi})} \ln\left(\frac{1+t_b}{1+t_c}\right) - \\ &\quad \frac{\xi^2}{4(4-\xi)} \ln\left(\frac{(2t_c-\sqrt{\xi})^2}{(2t_b-\sqrt{\xi})(2-t_b\sqrt{\xi})}\right) \end{aligned} \quad (\text{C-256})$$

gegeben. Damit ergibt sich für M_{17}

$$M_{17} = (M_2 + \tilde{M}_{17}). \quad (\text{C-257})$$

Berechnung des Integrals $M_{18} = M[2, 1]$

Das Integral M_{18} ist gegeben durch

$$M_{18} = \int \int \frac{y^2 z \, dy \, dz}{((1-y)^2 - \xi) \sqrt{(1-z)^2 - \xi}}. \quad (\text{C-258})$$

Die z -Integration liefert

$$\int \frac{z \, dz}{\sqrt{(1-z)^2 - \xi}} = \left[\sqrt{(1-z)^2 - \xi} + \ln(1-z - \sqrt{(1-z)^2 - \xi}) \right]_{z_-}^{z_+}. \quad (\text{C-259})$$

Somit kann das Integral M_{18} als

$$M_{18} = \int \int \frac{y^2 z \, dy \, dz}{((1-y)^2 - \xi) \sqrt{(1-z)^2 - \xi}} = M_3 + \tilde{M}_{18} \quad (\text{C-260})$$

geschrieben werden, mit

$$\tilde{M}_{18} = \int_0^{1-\sqrt{\xi}} \frac{y^2 \, dy}{((1-y)^2 - \xi)} \left[\sqrt{(1-z)^2 - \xi} \right]_{z_-(y)}^{z_+(y)}. \quad (\text{C-261})$$

Mit Hilfe von Gln. (C-10), (C-23) und (C-38) wird $\tilde{M}_{18}$ durch

$$\begin{aligned}
\tilde{M}_{18} &= \left[\int_{t_b}^{t_c} [y(t)]^2 KU_+(t) \left(\frac{1}{1+t} + \frac{1}{1-t} \right) \frac{dt}{\sqrt{\xi}} + \right. \\
&\quad \left. \int_{t_c}^{t_d} [y(t)]^2 KU_-(t) \left(\frac{1}{1+t} + \frac{1}{1-t} \right) \frac{dt}{\sqrt{\xi}} \right] \\
&= \frac{6 + \xi - \sqrt{\xi} (8 - \xi)}{4} - \frac{(80 + 4\xi + \xi^2) \ln(t_b)}{16} - \\
&\quad \frac{4(1 - \sqrt{\xi})^3}{\sqrt{\xi}(2 - \sqrt{\xi})} \ln\left(\frac{1 - t_b}{1 - t_c}\right) + (6 + \xi) \ln(t_c) + \frac{4(1 + \sqrt{\xi})^3}{\sqrt{\xi}(2 + \sqrt{\xi})} \ln\left(\frac{1 + t_b}{1 + t_c}\right) \\
&\quad + \frac{\xi^3}{16(4 - \xi)} \ln\left(\frac{(2t_c - \sqrt{\xi})^2}{(2t_b - \sqrt{\xi})(2 - t_b\sqrt{\xi})}\right) \quad (C-262)
\end{aligned}$$

gegeben. Damit ergibt sich für M_{18}

$$M_{18} = (M_3 + \tilde{M}_{18}). \quad (C-263)$$

Berechnung des Integrals $M_{19} = M[3, 1]$

Das Integral M_{19} ist gegeben durch

$$M_{19} = \int \int \frac{y^3 z dy dz}{((1-y)^2 - \xi) \sqrt{(1-z)^2 - \xi}}. \quad (C-264)$$

Die z -Integration liefert

$$\int \frac{z dz}{\sqrt{(1-z)^2 - \xi}} = \left[\sqrt{(1-z)^2 - \xi} + \ln(1 - z - \sqrt{(1-z)^2 - \xi}) \right]_{z_-}^{z_+}. \quad (C-265)$$

Somit kann das Integral M_{18} als

$$M_{19} = \int \int \frac{y^3 z dy dz}{((1-y)^2 - \xi) \sqrt{(1-z)^2 - \xi}} = M_4 + \tilde{M}_{19} \quad (C-266)$$

geschrieben werden, mit

$$\tilde{M}_{19} = \int_0^{1-\sqrt{\xi}} \frac{y^3 dy}{((1-y)^2 - \xi)} \left[\sqrt{(1-z)^2 - \xi} \right]_{z_-(y)}^{z_+(y)}. \quad (C-267)$$

Mit Hilfe von Gln. (C-10), (C-23) und (C-38) wird $\tilde{M}_{19}$ durch

$$\tilde{M}_{19} = \left[\int_{t_b}^{t_c} [y(t)]^3 KU_+(t) \left(\frac{1}{1+t} + \frac{1}{1-t} \right) \frac{dt}{\sqrt{\xi}} + \right.$$

$$\begin{aligned}
& \int_{t_c}^{t_d} [y(t)]^3 KU_-(t) \left(\frac{1}{1+t} + \frac{1}{1-t} \right) \frac{dt}{\sqrt{\xi}} \Big] \\
&= 1 - \sqrt{\xi} - \left(3 - \frac{\xi}{4} \right) \ln(t_b) + 4 \ln(t_c) - \\
&= -\frac{\sqrt{\xi} (441 + 145 v^2 - 13 v^4 + 3 v^6)}{48 (4 - \xi)} + \frac{441 - 53 v^2 - 33 v^4 - 3 v^6}{48 (4 - \xi)} - \\
&\quad \frac{(448 + 240 \xi - 4 \xi^2 - \xi^3) \ln(t_b)}{64} - \frac{4 (1 - \sqrt{\xi})^4}{\sqrt{\xi} (2 - \sqrt{\xi})} \ln\left(\frac{1 - t_b}{1 - t_c}\right) + \\
&\quad \left(8 + \frac{11 \xi}{2} \right) \ln(t_c) + \frac{4 (1 + \sqrt{\xi})^4}{\sqrt{\xi} (2 + \sqrt{\xi})} \ln\left(\frac{1 + t_b}{1 + t_c}\right) - \\
&\quad \frac{\xi^4}{64 (4 - \xi)} \ln\left(\frac{(2 t_c - \sqrt{\xi})^2}{(2 t_b - \sqrt{\xi}) (2 - t_b \sqrt{\xi})}\right) \tag{C-268}
\end{aligned}$$

gegeben. Damit ergibt sich für M_{19}

$$M_{19} = (M_4 + \tilde{M}_{19}). \tag{C-269}$$

C.6.5 Berechnung der zugehörigen Integrale der fünften Klasse

Die Integrale der Familie M, die zur fünften Klasse gehören, sind M_{20} , M_{21} , und M_{22} .

Berechnung des Integrals $M_{20} = M[0, 2]$

Das Integral M_{20} ist gegeben durch

$$M_{20} = \int \int \frac{z^2 dy dz}{((1-y)^2 - \xi) \sqrt{(1-z)^2 - \xi}}. \tag{C-270}$$

Die z -Integration liefert

$$\begin{aligned}
& \int \frac{z^2 dz}{\sqrt{(1-z)^2 - \xi}} = \\
&= \frac{z}{2} \sqrt{(1-z)^2 - \xi} + \frac{3}{2} \int \frac{z dz}{\sqrt{(1-z)^2 - \xi}} - \frac{v^2}{2} \int \frac{dz}{\sqrt{(1-z)^2 - \xi}} \\
&= \frac{z}{2} \sqrt{(1-z)^2 - \xi} + \frac{3}{2} \sqrt{(1-z)^2 - \xi} + \frac{2 + \xi}{2} \ln(1 - z - \sqrt{(1-z)^2 - \xi}).
\end{aligned} \tag{C-271}$$

Somit kann das Integral M_{20} als

$$M_{20} = \int \int \frac{z^2 dy dz}{((1-y)^2 - \xi) \sqrt{(1-z)^2 - \xi}} = \left(\frac{2 + \xi}{2} \right) M_1 + \frac{3}{2} \tilde{M}_{16} + \frac{1}{2} \tilde{M}_{20} \tag{C-272}$$

geschrieben werden, mit

$$\tilde{M}_{20} = \int_0^{1-\sqrt{\xi}} \frac{dy}{((1-y)^2 - \xi)} \left[z \sqrt{(1-z)^2 - \xi} \right]_{z_-(y)}^{z_+(y)}. \quad (\text{C-273})$$

Mit Hilfe von Gln. (C-10), (C-23) und (C-38) wird $\tilde{M}_{20}$ durch

$$\begin{aligned} \tilde{M}_{20} &= \left[\int_{t_b}^{t_c} KW_+(t) \left(\frac{1}{1+t} + \frac{1}{1-t} \right) \frac{dt}{\sqrt{\xi}} + \right. \\ &\quad \left. \int_{t_c}^{t_d} KW_-(t) \left(\frac{1}{1+t} + \frac{1}{1-t} \right) \frac{dt}{\sqrt{\xi}} \right] \\ &= -\frac{4(1-\sqrt{\xi})}{4-\xi} + \ln(t_b) - 2 \ln(t_c) - \\ &\quad \frac{4(1-\sqrt{\xi})^2}{(2-\sqrt{\xi})^2} \ln\left(\frac{1-t_b}{1-t_c}\right) - \frac{4(1+\sqrt{\xi})^2}{(2+\sqrt{\xi})^2} \ln\left(\frac{1+t_b}{1+t_c}\right) + \\ &\quad \frac{(4-3\xi)\xi}{(4-\xi)^2} \ln\left(\frac{(2t_c-\sqrt{\xi})^2}{(2t_b-\sqrt{\xi})(2-t_b\sqrt{\xi})}\right) \end{aligned} \quad (\text{C-274})$$

gegeben. Mit

$$\begin{aligned} KW_{\pm}(t) &= \frac{\sqrt{s}(-2t + \sqrt{s}(1+t^2))}{4} \times \\ &\quad \left(\frac{(\sqrt{s} - (2-\sqrt{s})t)(-\sqrt{s} + (2+\sqrt{s})t)}{t^2(-\sqrt{s} + 2t)^2} \pm \right. \\ &\quad \left. \frac{(2+\sqrt{s}(1-t))(2-\sqrt{s}(1+t))}{(2-\sqrt{s}t)^2} \right). \end{aligned} \quad (\text{C-275})$$

Damit ergibt sich für M_{20}

$$M_{20} = \left(\frac{2+\xi}{2} M_1 + \frac{3}{2} \tilde{M}_{16} + \frac{1}{2} \tilde{M}_{20} \right). \quad (\text{C-276})$$

Berechnung des Integrals $M_{21} = M[1, 2]$

Das Integral M_{21} ist gegeben durch

$$M_{21} = \int \int \frac{y z^2 dy dz}{((1-y)^2 - \xi) \sqrt{(1-z)^2 - \xi}}. \quad (\text{C-277})$$

Nach der z -Integration kann das Integral M_{21} als

$$M_{21} = \int \int \frac{y z^2 dy dz}{((1-y)^2 - \xi) \sqrt{(1-z)^2 - \xi}} = \left(\frac{2+\xi}{2} \right) M_2 + \frac{3}{2} \tilde{M}_{17} + \frac{1}{2} \tilde{M}_{21} \quad (\text{C-278})$$

geschrieben werden, mit

$$\tilde{M}_{21} = \int_0^{1-\sqrt{\xi}} \frac{y \, dy}{((1-y)^2 - \xi)} \left[z \sqrt{(1-z)^2 - \xi} \right]_{z_-(y)}^{z_+(y)}. \quad (\text{C-279})$$

Mit Hilfe von Gln. (C-10), (C-23) und (C-38) wird $\tilde{M}_{21}$ durch

$$\begin{aligned} \tilde{M}_{21} &= \left[\int_{t_b}^{t_c} [y(t)] \, KW_+(t) \left(\frac{1}{1+t} + \frac{1}{1-t} \right) \frac{dt}{\sqrt{\xi}} + \right. \\ &\quad \left. \int_{t_c}^{t_d} [y(t)] \, KW_-(t) \left(\frac{1}{1+t} + \frac{1}{1-t} \right) \frac{dt}{\sqrt{\xi}} \right] \\ &= - \frac{(11 + 12 v^2 + v^4 - \sqrt{\xi} (11 + 6 v^2 - v^4))}{4 (4 - \xi)} \\ &\quad + \frac{(16 + 12\xi - \xi^2) \ln(t_b)}{16} - \frac{4 (1 - \sqrt{\xi})^3}{(2 - \sqrt{\xi})^2} \ln\left(\frac{1 - t_b}{1 - t_c}\right) - \\ &\quad (2 + \xi) \ln(t_c) - \frac{4 (1 + \sqrt{\xi})^3}{(2 + \sqrt{\xi})^2} \ln\left(\frac{1 + t_b}{1 + t_c}\right) - \\ &\quad \frac{\xi^2 (32 - 20\xi + \xi^2)}{16 (4 - \xi)^2} \ln\left(\frac{(2t_c - \sqrt{\xi})^2}{(2t_b - \sqrt{\xi}) (2 - t_b \sqrt{\xi})}\right) \end{aligned} \quad (\text{C-280})$$

gegeben. Damit ergibt sich für M_{21}

$$M_{21} = \left(\frac{2 + \xi}{2} M_2 + \frac{3}{2} \tilde{M}_{17} + \frac{1}{2} \tilde{M}_{21} \right). \quad (\text{C-281})$$

Berechnung des Integrals $M_{22} = M[2, 2]$

Das Integral M_{22} ist gegeben durch

$$M_{22} = \int \int \frac{y^2 z^2 \, dy \, dz}{((1-y)^2 - \xi) \sqrt{(1-z)^2 - \xi}}. \quad (\text{C-282})$$

Nach der z -Integration kann das Integral M_{20} als

$$M_{22} = \int \int \frac{y^2 z^2 \, dy \, dz}{((1-y)^2 - \xi) \sqrt{(1-z)^2 - \xi}} = \left(\frac{2 + \xi}{2} \right) M_3 + \frac{3}{2} \tilde{M}_{18} + \frac{1}{2} \tilde{M}_{22} \quad (\text{C-283})$$

geschrieben werden, mit

$$\tilde{M}_{22} = \int_0^{1-\sqrt{\xi}} \frac{y^2 \, dy}{((1-y)^2 - \xi)} \left[z \sqrt{(1-z)^2 - \xi} \right]_{z_-(y)}^{z_+(y)}. \quad (\text{C-284})$$

Mit Hilfe von Gln. (C-10), (C-23) und (C-38) wird $\tilde{M}_{22}$ durch

$$\begin{aligned}
\tilde{M}_{22} &= \left[\int_{t_b}^{t_c} [y(t)]^2 KW_+(t) \left(\frac{1}{1+t} + \frac{1}{1-t} \right) \frac{dt}{\sqrt{\xi}} + \right. \\
&\quad \left. \int_{t_c}^{t_d} [y(t)]^2 KW_-(t) \left(\frac{1}{1+t} + \frac{1}{1-t} \right) \frac{dt}{\sqrt{\xi}} \right] \\
&= -\frac{(129 + 29v^2 + 15v^4 + 3v^6)}{24(4-\xi)} + \frac{\sqrt{\xi}(129 - 13v^2 - 17v^4 - 3v^6)}{24(4-\xi)} \\
&\quad - \frac{(32 + 88\xi - 6\xi^2 + \xi^3) \ln(t_b)}{32} - \frac{4(1 - \sqrt{\xi})^4}{(2 - \sqrt{\xi})^2} \ln\left(\frac{1 - t_b}{1 - t_c}\right) - \\
&\quad (2 + 4\xi) \ln(t_c) - \frac{4(1 + \sqrt{\xi})^4}{(2 + \sqrt{\xi})^2} \ln\left(\frac{1 + t_b}{1 + t_c}\right) + \\
&\quad \frac{\xi^3(24 - 14\xi + \xi^2)}{32(4-\xi)^2} \ln\left(\frac{(2t_c - \sqrt{\xi})^2}{(2t_b - \sqrt{\xi})(2 - t_b\sqrt{\xi})}\right) \tag{C-285}
\end{aligned}$$

gegeben. Damit ergibt sich für M_{21}

$$M_{22} = \left(\frac{2+\xi}{2} M_3 + \frac{3}{2} \tilde{M}_{18} + \frac{1}{2} \tilde{M}_{22} \right). \tag{C-286}$$

C.7 Berechnung der Integrale der Familie L

Die Integrale dieser Familie sind als

$$L[l, m] = \int_{y_-}^{y_+} \int_{z_-}^{z_+} \frac{y^l z^m}{\left[\sqrt{(1-y)^2 - \xi} \right]^3 \sqrt{(1-z)^2 - \xi}} dy dz \quad \text{mit} \quad \begin{cases} -2 \leq m \leq 2 \\ -2 \leq l \leq 4 \end{cases} \tag{C-287}$$

definiert. Die benötigten Integralen und ihre Bezeichnungen werden in der Tabelle (C.3) dargestellt.

C.7.1 Berechnung der zugehörigen Integrale der ersten Klasse

Die Integrale der Familie L, die zur ersten Klasse gehören, sind $L_1, L_2, L_3, L_4, L_5, L_{24}$ und L_{25} .

Berechnung des Integrals $L_1 = L[0, 0]$

Das Integral L_1 ist gegeben durch

$$L_1 = \int \int \frac{dy dz}{\left[((1-y)^2 - \xi) \right]^{3/2} \sqrt{(1-z)^2 - \xi}}. \tag{C-288}$$

z^m	y^l						
	-2	-1	0	+1	+2	+3	+4
-2			L_{11}	L_{12}	L_{13}	L_{14}	L_{15}
-1		L_{23}	L_6	L_7	L_8	L_9	L_{10}
0	L_{24}	L_{25}	L_1	L_2	L_3	L_4	L_5
+1	L_{26}	L_{27}	L_{16}	L_{17}	L_{18}	L_{19}	
+2	L_{28}	L_{29}	L_{20}	L_{21}	L_{22}		

Tabelle C.3: Integrale der Familie L

Die z -Integration liefert

$$L_1 = \int \frac{dy}{[(1-y)^2 - \xi]^{3/2}} \ln \left(\frac{1 - z_+ - \sqrt{(1 - z_+)^2 - \xi}}{1 - z_- - \sqrt{(1 - z_-)^2 - \xi}} \right). \quad (\text{C-289})$$

Mit Hilfe von Gln. (C-10), (C-23) und der Partialbruchzerlegung für das Integral L_1

$$\frac{dy}{[(1-y)^2 - \xi]^{3/2}} = \left(\frac{1}{(1-t)^2} - \frac{1}{(1+t)^2} \right) \frac{dt}{\xi} \quad (\text{C-290})$$

wird das Integral L_1 durch

$$\begin{aligned} L_1 = & \frac{1}{\xi} \left(\left[\int_{t_b}^{t_c} \ln \left(\frac{(2t - \sqrt{\xi})(2 - \sqrt{\xi}t)}{\xi t} \right) \frac{dt}{(1-t)^2} + \int_{t_c}^{t_d} \ln \left(\frac{(2t - \sqrt{\xi})t}{2t - \sqrt{\xi}} \right) \frac{dt}{(1-t)^2} \right] \right. \\ & \left. - \left[\int_{t_b}^{t_c} \ln \left(\frac{(2t - \sqrt{\xi})(2 - \sqrt{\xi}t)}{\xi t} \right) \frac{dt}{(1+t)^2} + \int_{t_c}^{t_d} \ln \left(\frac{(2t - \sqrt{\xi})t}{2t - \sqrt{\xi}} \right) \frac{dt}{(1+t)^2} \right] \right) \end{aligned} \quad (\text{C-291})$$

gegeben, wobei der Integrand durch (C-25) ersetzt wird. Danach werden L_{1a} als

$$\begin{aligned} L_{1a} = & \left[\int_{t_b}^{t_c} \ln \left(\frac{(2t - \sqrt{\xi})(2 - \sqrt{\xi}t)}{\xi t} \right) \frac{dt}{(1-t)^2} + \int_{t_c}^{t_d} \ln \left(\frac{(2t - \sqrt{\xi})t}{2t - \sqrt{\xi}} \right) \frac{dt}{(1-t)^2} \right] \\ = & \frac{2\sqrt{\xi}}{2 - \sqrt{\xi}} - \ln(t_b) + \frac{(1 - 2t_c) \ln(t_c)}{1 - t_c} + \frac{(2 + \sqrt{\xi}) \ln(2 - \sqrt{\xi})}{2 - \sqrt{\xi}} - \\ & \frac{(2t_b - \sqrt{\xi}) \ln(2t_b - \sqrt{\xi})}{(1 - t_b)(2 - \sqrt{\xi})} + \frac{2(2t_c - \sqrt{\xi}) \ln(2t_c - \sqrt{\xi})}{(1 - t_c)(2 - \sqrt{\xi})} - \\ & \frac{(2 - t_b \sqrt{\xi}) \ln(2 - t_b \sqrt{\xi})}{(1 - t_b)(2 - \sqrt{\xi})} + \frac{\ln(t_b \xi)}{1 - t_b} - \frac{\ln(t_c \xi)}{1 - t_c} + \frac{2\sqrt{\xi}}{2 - \sqrt{\xi}} \ln\left(\frac{1 - t_c}{1 - x}\right) \end{aligned} \quad (\text{C-292})$$

und L_{1b} als

$$\begin{aligned}
 L_{1b} &= \left[\int_{t_b}^{t_c} \ln \left(\frac{(2t - \sqrt{\xi})(2 - \sqrt{\xi}t)}{\xi t} \right) \frac{dt}{(1+t)^2} + \int_{t_c}^{t_d} \ln \left(\frac{(2t - \sqrt{\xi})t}{2t - \sqrt{\xi}} \right) \frac{dt}{(1+t)^2} \right] \\
 &= \frac{2\sqrt{\xi}}{2 - \sqrt{\xi}} - \ln(t_b) + \frac{(1 + 2t_c) \ln(t_c)}{1 - t_c} + \frac{(2 + \sqrt{\xi}) \ln(2 - \sqrt{\xi})}{2 - \sqrt{\xi}} - \\
 &\quad \frac{(2t_b - \sqrt{\xi}) \ln(2t_b - \sqrt{\xi})}{(1 - t_b)(2 - \sqrt{\xi})} + \frac{2(2t_c - \sqrt{\xi}) \ln(2t_c - \sqrt{\xi})}{(1 - t_c)(2 - \sqrt{\xi})} + \\
 &\quad \frac{(2 - t_b\sqrt{\xi}) \ln(2 - t_b\sqrt{\xi})}{(1 - t_b)(2 - \sqrt{\xi})} + \frac{\ln(t_b\xi)}{1 - t_b} - \frac{\ln(t_c\xi)}{1 - t_c} + \frac{2\sqrt{\xi}}{2 - \sqrt{\xi}} \ln\left(\frac{1 - t_c}{1 - x}\right) \quad (C-293)
 \end{aligned}$$

bezeichnet. Damit wird L_1 durch

$$L_1 = \frac{1}{\xi} (L_{1a} - L_{1b}) \quad (C-294)$$

ausgedrückt.

Berechnung des Integrals $L_2 = L[1, 0]$, $L_3 = L[2, 0]$, $L_4 = L[3, 0]$ **und** $L_5 = L[4, 0]$

Diese Integrale sind gegeben durch

$$L_j = \int \int \frac{y^{j-1} dy dz}{[(1-y)^2 - \xi]^{3/2} \sqrt{(1-z)^2 - \xi}} \quad j = 2, \dots, 5. \quad (C-295)$$

Mit Hilfe von Gln. (C-10), (C-23), (C-289) und der Partialbruchzerlegung

$$\frac{y dy}{[(1-y)^2 - \xi]^{3/2}} = \left(\frac{1 - \sqrt{\xi}}{\xi} \frac{1}{(1-t)^2} - \frac{1 + \sqrt{\xi}}{\xi} \frac{1}{(1+t)^2} \right) dt \quad (C-296)$$

wird das Integral L_2 durch

$$L_2 = \frac{1}{\xi} \left((1 - \sqrt{\xi}) L_{1a} - (1 + \sqrt{\xi}) L_{1b} \right) \quad (C-297)$$

gegeben.

Das Integral L_3 hat die Partialbruchzerlegung

$$\frac{y^2 dy}{[(1-y)^2 - \xi]^{3/2}} = \left(\frac{(1 - \sqrt{\xi})^2}{\xi} \frac{1}{(1-t)^2} - \frac{(1 + \sqrt{\xi})^2}{\xi} \frac{1}{(1+t)^2} + \frac{1}{t} \right) dt, \quad (C-298)$$

mit der das Integral L_3 als

$$L_3 = \frac{1}{\xi} \left((1 - \sqrt{\xi})^2 L_{1a} - (1 + \sqrt{\xi})^2 L_{1b} + \xi M_{2a} \right) \quad (C-299)$$

geschrieben wird. Für das Integral L_4 ist die Partialbruchzerlegung

$$\begin{aligned} \frac{y^3 dy}{[(1-y)^3 - \xi]^{3/2}} = & \left(\frac{(1-\sqrt{\xi})^3}{\xi} \frac{1}{(1-t)^2} - \frac{(1+\sqrt{\xi})^3}{\xi} \frac{1}{(1+t)^2} \right. \\ & \left. + \frac{3}{t} + \frac{\sqrt{\xi}}{2} \left(\frac{1}{t^2} + 1 \right) \right) dt. \end{aligned} \quad (\text{C-300})$$

Damit erhält man für L_4

$$\begin{aligned} L_4 = & \left(\frac{(1-\sqrt{\xi})^3}{\xi} L_{1a} - \frac{(1+\sqrt{\xi})^3}{\xi} L_{1b} \right. \\ & \left. + 3 M_{2a} + \frac{\sqrt{\xi}}{2} (M_{3a} + M_{3b}) \right). \end{aligned} \quad (\text{C-301})$$

Das Integral L_5 besitzt die Partialbruchzerlegung

$$\begin{aligned} \frac{y^4 dy}{[(1-y)^3 - \xi]^{3/2}} = & \left(\frac{(1-\sqrt{\xi})^4}{\xi} \frac{1}{(1-t)^2} - \frac{(1+\sqrt{\xi})^4}{\xi} \frac{1}{(1+t)^2} + \frac{\xi}{4} \left(t + \frac{1}{t^3} \right) \right. \\ & \left. + \frac{3(4+\xi)}{2} \frac{1}{t} - 2\sqrt{\xi} \left(\frac{1}{t^2} + 1 \right) \right) dt. \end{aligned} \quad (\text{C-302})$$

Somit ergibt sich für L_5

$$\begin{aligned} L_5 = & \frac{1}{\xi} \left(\frac{(1-\sqrt{\xi})^4}{\xi} L_{1a} - \frac{(1+\sqrt{\xi})^4}{\xi} L_{1b} + \frac{3(4+\xi)}{2} M_{2a} \right. \\ & \left. - 2\sqrt{\xi} (M_{3a} + M_{3b}) + \frac{\xi}{4} (M_{4a} + M_{4b}) \right). \end{aligned} \quad (\text{C-303})$$

C.7.2 Berechnung der zugehörigen Integrale der zweiten Klasse

Die Integrale der Familie M, die zur zweiten Klasse gehören, sind L_6 , L_7 , L_8 , L_9 , L_{10} und L_{23} . Die Partialbruchzerlegung ist für die Integrale dieser Klasse analog zu der für die Integrale der ersten Klasse.

Berechnung des Integrals $L_6 = L[0, -1]$

Das Integral L_6 ist gegeben durch

$$L_6 = \int \int \frac{dy dz}{z [(1-y)^2 - \xi]^{3/2} \sqrt{(1-z)^2 - \xi}}. \quad (\text{C-304})$$

Die z -Integration liefert

$$L_6 = -\frac{1}{v} \int \frac{dy}{[(1-y)^2 - \xi]^{3/2}} \ln \left(\frac{z_-(v^2 - z_+ + v\sqrt{(1-z_+)^2 - \xi})}{z_+(v^2 - z_- + v\sqrt{(1-z_-)^2 - \xi})} \right). \quad (\text{C-305})$$

Mit Hilfe von Gln. (C-10), (C-23) und der Partialbruchzerlegung

$$\frac{dy}{[(1-y)^2 - \xi]^{3/2}} = \left(\frac{1}{(1-t)^2} - \frac{1}{(1+t)^2} \right) \frac{dt}{\xi} \quad (\text{C-306})$$

wird das Integral L_6 durch

$$\begin{aligned} L_6 = & -\frac{1}{v\xi} \left(\left[\int_{t_b}^{t_c} \left(2 \ln \left(\frac{1-t_b t}{t_a - t} \right) - \ln \left(\frac{t_a}{t_b} \right) \right) \frac{dt}{(1-t)^2} + \int_{t_c}^{t_d} 2 \ln \left(\frac{t_a t - 1}{t_a - t} \right) \frac{dt}{(1-t)^2} \right] \right. \\ & \left. - \left[\int_{t_b}^{t_c} \left(2 \ln \left(\frac{1-t_b t}{t_a - t} \right) - \ln \left(\frac{t_a}{t_b} \right) \right) \frac{dt}{(1+t)^2} + \int_{t_c}^{t_d} 2 \ln \left(\frac{t_a t - 1}{t_a - t} \right) \frac{dt}{(1+t)^2} \right] \right) \end{aligned} \quad (\text{C-307})$$

gegeben, wobei der Integrand durch (C-31) ersetzt wird. Danach werden L_{6a} als

$$\begin{aligned} L_{6a} = & \left[\int_{t_b}^{t_c} \left(2 \ln \left(\frac{1-t_b t}{t_a - t} \right) - \ln \left(\frac{t_a}{t_b} \right) \right) \frac{dt}{(1-t)^2} + \int_{t_c}^{t_d} 2 \ln \left(\frac{t_a t - 1}{t_a - t} \right) \frac{dt}{(1-t)^2} \right] \\ = & -\frac{2(t_a - t_b)}{(t_a - 1)(1 - t_b)} + \frac{4(t_b - t_c) \ln(t_a)}{(1 - t_b)(1 - t_c)} - \frac{(1-v)}{1 - \sqrt{\xi}} \ln \left(\frac{t_a - t_c}{t_a - 1} \right) + \\ & \frac{2}{1 - t_c} \ln \left(\frac{t_b(t_a - t_c)}{t_c - t_b} \right) + \frac{(1+v)}{1 - \sqrt{\xi}} \ln \left(\frac{t_c - t_b}{1 - t_b} \right) - \\ & \frac{\sqrt{\xi}}{1 - \sqrt{\xi}} \ln \left(\frac{(t_a - 1)(t_c - t_b)}{(1 - t_b)(t_a - t_c)} \right) - \frac{2v}{1 - \sqrt{\xi}} \ln \left(\frac{1 - t_c}{1 - x} \right) \end{aligned} \quad (\text{C-308})$$

und L_{6b} als

$$\begin{aligned} L_{6b} = & \left[\int_{t_b}^{t_c} \left(2 \ln \left(\frac{1-t_b t}{t_a - t} \right) - \ln \left(\frac{t_a}{t_b} \right) \right) \frac{dt}{(1+t)^2} + \int_{t_c}^{t_d} 2 \ln \left(\frac{t_a t - 1}{t_a - t} \right) \frac{dt}{(1+t)^2} \right] \\ = & -\frac{2v(1-v) \ln(t_a)}{1 + \sqrt{\xi}} + \ln \left(\frac{(t_a - 1)t_b}{1 - t_b} \right) + \frac{2}{1 + t_a} \ln \left(\frac{2(t_a - t_c)}{(t_a - 1)(1 + t_c)} \right) - \\ & \frac{2}{1 + t_c} \ln \left(\frac{t_b(t_a - t_c)}{t_c - t_b} \right) - \frac{2}{1 + t_b} \ln \left(\frac{2(t_c - t_b)}{(1 - t_b)(1 + t_c)} \right) \end{aligned} \quad (\text{C-309})$$

bezeichnet. Damit wird L_6 als

$$L_6 = -\frac{1}{v\xi} (L_{6a} - L_{6b}) \quad (\text{C-310})$$

geschrieben.

Berechnung des Integrals $L_7 = L[1, -1]$, $L_8 = L[2, -1]$, $L_9 = L[3, -1]$ und $L_{10} = L[4, -1]$

Diese Integrale sind gegeben durch

$$L_i = \int \int \frac{y^{i-1} dy dz}{z [(1-y)^2 - \xi]^{3/2} \sqrt{(1-z)^2 - \xi}} \quad j = 2, \dots, 5. \quad (\text{C-311})$$

Mit Hilfe von Gln. (C-10), (C-23), (C-289) und der Partialbruchzerlegung

$$\frac{y dy}{[(1-y)^2 - \xi]^{3/2}} = \left(\frac{1 - \sqrt{\xi}}{\xi} \frac{1}{(1-t)^2} - \frac{1 + \sqrt{\xi}}{\xi} \frac{1}{(1+t)^2} \right) dt \quad (\text{C-312})$$

wird das Integral L_7 durch

$$L_7 = -\frac{1}{v\xi} \left((1 - \sqrt{\xi}) L_{6a} - (1 + \sqrt{\xi}) L_{6b} \right) \quad (\text{C-313})$$

gegeben.

Das Integral L_8 hat die Partialbruchzerlegung

$$\frac{y^2 dy}{[(1-y)^2 - \xi]^{3/2}} = \left(\frac{(1 - \sqrt{\xi})^2}{\xi} \frac{1}{(1-t)^2} - \frac{(1 + \sqrt{\xi})^2}{\xi} \frac{1}{(1+t)^2} + \frac{1}{t} \right) dt, \quad (\text{C-314})$$

mit der das Integral L_8 als

$$L_8 = \frac{1}{\xi} \left((1 - \sqrt{\xi})^2 L_{6a} - (1 + \sqrt{\xi})^2 L_{6b} + \xi M_{7a} \right) \quad (\text{C-315})$$

geschrieben wird.

Für das Integral L_9 ist die Partialbruchzerlegung

$$\begin{aligned} \frac{y^3 dy}{[(1-y)^3 - \xi]^{3/2}} &= \left(\frac{(1 - \sqrt{\xi})^3}{\xi} \frac{1}{(1-t)^2} - \frac{(1 + \sqrt{\xi})^3}{\xi} \frac{1}{(1+t)^2} \right. \\ &\quad \left. + \frac{3}{t} + \frac{\sqrt{\xi}}{2} \left(\frac{1}{t^2} + 1 \right) \right) dt. \end{aligned} \quad (\text{C-316})$$

Damit erhält man für L_9

$$\begin{aligned} L_9 &= \left(\frac{(1 - \sqrt{\xi})^3}{\xi} L_{6a} - \frac{(1 + \sqrt{\xi})^3}{\xi} L_{6b} \right. \\ &\quad \left. + 3 M_{7a} + \frac{\sqrt{\xi}}{2} (M_{8a} + M_{8b}) \right). \end{aligned} \quad (\text{C-317})$$

Das Integral L_{10} besitzt die Partialbruchzerlegung

$$\begin{aligned} \frac{y^4 dy}{[(1-y)^3 - \xi]^{3/2}} &= \left(\frac{(1 - \sqrt{\xi})^4}{\xi} \frac{1}{(1-t)^2} - \frac{(1 + \sqrt{\xi})^4}{\xi} \frac{1}{(1+t)^2} + \frac{\xi}{4} \left(t + \frac{1}{t^3} \right) \right. \\ &\quad \left. + \frac{3(4 + \xi)}{2} \frac{1}{t} - 2\sqrt{\xi} \left(\frac{1}{t^2} + 1 \right) \right) dt. \end{aligned} \quad (\text{C-318})$$

So ergibt sich für L_{10}

$$\begin{aligned} L_{10} &= \frac{1}{\xi} \left(\frac{(1 - \sqrt{\xi})^4}{\xi} L_{6a} - \frac{(1 + \sqrt{\xi})^4}{\xi} L_{6b} + \frac{3(4 + \xi)}{2} M_{7a} \right. \\ &\quad \left. - 2\sqrt{\xi} (M_{8a} + M_{8b}) + \frac{\xi}{4} (M_{9a} + M_{9b}) \right). \end{aligned} \quad (\text{C-319})$$

C.7.3 Berechnung der zugehörigen Integrale der dritten Klasse

Die Integrale der Familie L, die zur dritten Klasse gehören, sind L_{11} , L_{12} , L_{13} , L_{14} und L_{15} . Die Partialbruchzerlegung ist für die Integrale dieser Klasse analog zu der für die Integrale der ersten und zweiten Klasse. Deshalb werden die Integrale der dritten Klasse analog gelöst.

Berechnung des Integrals $L_{11} = L[0, -2]$

Das Integral L_{11} ist gegeben durch

$$L_{11} = \int \int \frac{dy dz}{z^2 [(1-y)^2 - \xi]^{3/2} \sqrt{(1-z)^2 - \xi}}. \quad (\text{C-320})$$

Die z -Integration liefert

$$\int \frac{dz}{z^2 \sqrt{(1-z)^2 - \xi}} = \frac{1}{v^2} \left[\int \frac{dz}{z \sqrt{(1-z)^2 - \xi}} - \frac{\sqrt{(1-y^2) - \xi}}{z} \right] \quad (\text{C-321})$$

Siehe Abschnitt C.4.5. Somit kann das Integral L_{11} als

$$L_{11} = \int \int \frac{dy dz}{z^2 [(1-y)^2 - \xi]^{3/2} \sqrt{(1-z)^2 - \xi}} = \frac{1}{v^2} (L_6 - \tilde{L}_{11}) \quad (\text{C-322})$$

geschrieben werden, mit

$$\tilde{L}_{11} = \int_{\Lambda + \sqrt{\Lambda \xi}}^{1 - \sqrt{\xi}} \frac{dy}{((1-y)^2 - \xi)} \left[\frac{\sqrt{(1-z)^2 - \xi}}{z} \right]_{z_-(y)}^{z_+(y)}. \quad (\text{C-323})$$

Das Integral ist divergent. Durch Entwicklung in kleine Werte von $z_{\pm}$ ergibt sich

$$\sqrt{(1-z_{\pm})^2 - \xi} \rightarrow v - \frac{z_{\pm}^s}{v} \quad (\text{C-324})$$

und damit

$$\left[\frac{\sqrt{(1-z)^2 - \xi}}{z} \right]_{z_-}^{z_+} \rightarrow v \left(\frac{1}{z_+^s} - \frac{1}{z_-^s} \right) \quad (\text{C-325})$$

mit $\xi z_{\pm}^s = (1 + v^2)y \pm 2v\sqrt{(y - \Lambda)^2 - \Lambda\xi}$. Für $\Lambda \rightarrow 0$ wird der konvergente Anteil

$$\tilde{L}_{11a} = \int_0^{1 - \sqrt{\xi}} \frac{dy}{[(1-y)^2 - \xi]^{3/2}} \left[\frac{\sqrt{(1-z)^2 - \xi}}{z} \right]_{z_-(y)}^{z_+(y)} - \int_0^{1 - \sqrt{\xi}} \frac{dy}{v^3} \left(\frac{-4v^2}{\xi y} \right). \quad (\text{C-326})$$

Mit Hilfe von Gln. (C-10), (C-23) und der Partialbruchzerlegung

$$\frac{dy}{[(1-y)^2 - \xi]^{3/2}} = \left(\frac{1}{(1-t)^2} - \frac{1}{(1+t)^2} \right) \frac{dt}{\xi} \quad (\text{C-327})$$

$$\frac{dy}{y} = \left(\frac{1}{t-t_a} + \frac{1}{t-t_b} - \frac{1}{t} \right) dt \quad (\text{C-328})$$

ist das Integral L_{11a} durch

$$\begin{aligned} \tilde{L}_{11a} &= \left[\int_{t_b}^{t_c} \frac{4(t^2 - 2\sqrt{\xi}t + 1)}{\xi(t-t_b)(t-t_a)} \left(\frac{1}{(1-t)^2} - \frac{1}{(1+t)^2} \right) \frac{dt}{\xi} + \right. \\ &\quad \left. \int_{t_c}^{t_d} \frac{2(1-t^2)(2-\xi)}{\xi(t-t_b)(t-t_a)} \left(\frac{1}{(1-t)^2} - \frac{1}{(1+t)^2} \right) \frac{dt}{\xi} \right] - \\ &\quad \left[\int_{t_b}^{t_d} \left(\frac{-4}{v\xi} \right) \left(\frac{1}{t-t_a} + \frac{1}{t-t_b} - \frac{1}{t} \right) dt \right] \\ &= -\frac{2(1-v)}{v^2(1+v)} - \frac{2}{v^2\sqrt{\xi}} + \frac{4 \ln(t_a - t_b)}{v^2(1+v)} - \\ &\quad \frac{2(2-\xi)}{(1+\sqrt{\xi})\xi^{3/2}} \ln\left(\frac{2}{1+t_c}\right) - \frac{8}{\xi v^2} \ln\left(\frac{1-t_b}{t_c-t_b}\right) + \\ &\quad \frac{2(\xi+2v)}{\xi v^2} \ln\left(\frac{(t_a-1)(1-t_b)}{(t_a-t_c)(t_c-t_b)}\right) - \frac{4}{v\xi} \ln\left(\frac{t_a-t_b}{t_b(t_a-t_c)(t_c-t_b)}\right) - \\ &\quad \frac{2}{(1+v)v^2} \ln\left(\frac{(t_a-1)(t_a-t_c)}{(1-t_b)(t_c-t_b)}\right) + \frac{2}{(1-v)v^2} \ln\left(\frac{(1-t_b)(t_a-t_c)}{(t_a-1)(t_c-t_b)}\right) \\ &\quad + \frac{4}{v^2\xi} \ln\left(\frac{t_a-t_c}{(t_a-t_b)(t_c-t_b)}\right) - \frac{2(2-\xi)}{(1-\sqrt{\xi})\xi^{3/2}} \ln\left(\frac{1-t_c}{1-x}\right) \quad (\text{C-329}) \end{aligned}$$

gegeben, wobei der Integrand durch (C-36) ersetzt wird. Die Berechnung des divergenten Anteils ist analog zur Berechnung des divergenten Anteils des Integrals C_{10}

$$\begin{aligned} \tilde{L}_{11b} &= \frac{1}{v} \int_{\Lambda+\sqrt{\Lambda\xi}}^{1-\sqrt{\xi}} \frac{dy}{v^3} \left[\frac{\sqrt{(1-z)^2 - \xi}}{z} \right]_{z_-^s}^{z_+^s} = \int_{\Lambda+\sqrt{\Lambda\xi}}^{1-\sqrt{\xi}} \left(\frac{1}{z_+^s} - \frac{1}{z_-^s} \right) \frac{dy}{v^2} \\ &= -\frac{2}{\xi v} \ln\left(\frac{4(1-\sqrt{\xi})^2}{\xi}\right) + \frac{2(1+v^2)}{\xi v^2} \ln\left(\frac{1+v}{1-v}\right). \quad (\text{C-330}) \end{aligned}$$

Damit wird L_{11} als

$$L_{11} = \frac{1}{v^2} (L_6 - \tilde{L}_{11a} - \tilde{L}_{11b}). \quad (\text{C-331})$$

geschrieben.

Berechnung des Integrals $L_{12} = L[1, -2]$

Das Integral L_{12} ist gegeben durch

$$L_{12} = \int \int \frac{y \, dy \, dz}{z^2 [((1-y)^2 - \xi)]^{3/2} \sqrt{(1-z)^2 - \xi}}. \quad (\text{C-332})$$

Die z -Integration liefert

$$\int \frac{dz}{z^2 \sqrt{(1-z)^2 - \xi}} = \frac{1}{v^2} \left[\int \frac{dz}{z \sqrt{(1-z)^2 - \xi}} - \frac{\sqrt{(1-y^2) - \xi}}{z} \right]. \quad (\text{C-333})$$

Somit kann das Integral L_{12} als

$$L_{12} = \int \int \frac{y \, dy \, dz}{z^2 [((1-y)^2 - \xi)]^{3/2} \sqrt{(1-z)^2 - \xi}} = \frac{1}{v^2} (L_7 - \tilde{L}_{12}) \quad (\text{C-334})$$

geschrieben werden, mit

$$\tilde{L}_{12} = \int_0^{1-\sqrt{\xi}} \frac{y \, dy}{[((1-y)^2 - \xi)]^{3/2}} \left[\frac{\sqrt{(1-z)^2 - \xi}}{z} \right]_{z_-(y)}^{z_+(y)}. \quad (\text{C-335})$$

Mit Hilfe von Gln. (C-10), (C-23) und (C-36) ist $\tilde{L}_{12}$ durch

$$\begin{aligned} \tilde{L}_{12} &= \left[\int_{t_b}^{t_c} [y(t)] \, KT_+(t) \frac{dy(t)}{[(1-y(t))^2 - \xi]^{3/2}} + \right. \\ &\quad \left. \int_{t_c}^{t_d} [y(t)] \, KT_-(t) \frac{dy(t)}{[(1-y(t))^2 - \xi]^{3/2}} \right] \\ &= -\frac{2}{\sqrt{\xi}} + -\frac{2(2-\xi)}{\xi^{3/2}} \ln\left(\frac{2}{1+t_c}\right) - \frac{2(2-\xi)}{\xi^{3/2}} \ln\left(\frac{1-t_c}{1-x}\right) \end{aligned} \quad (\text{C-336})$$

gegeben, wobei

$$\begin{aligned} KT_+(t) &= \frac{4(t^2 - 2\sqrt{\xi}t + 1)}{\xi(t-t_b)(t-t_a)} \\ KT_-(t) &= \frac{2(1-t^2)(2-\xi)}{\xi(t-t_b)(t-t_a)}. \end{aligned} \quad (\text{C-337})$$

Damit ergibt sich für L_{12}

$$L_{12} = \frac{1}{v^2} (L_7 - \tilde{L}_{12}). \quad (\text{C-338})$$

Berechnung des Integrals $L_{13} = L[2, -2]$

Das Integral L_{13} ist gegeben durch

$$L_{13} = \int \int \frac{y^2 dy dz}{z^2 [(1-y)^2 - \xi]^{3/2} \sqrt{(1-z)^2 - \xi}}. \quad (\text{C-339})$$

Die z -Integration liefert (C-333). Somit kann das Integral L_{13} als

$$L_{13} = \int \int \frac{y^2 dy dz}{z^2 [(1-y)^2 - \xi]^{3/2} \sqrt{(1-z)^2 - \xi}} = \frac{1}{v^2} (L_8 - \tilde{L}_{13}) \quad (\text{C-340})$$

geschrieben werden mit

$$\tilde{L}_{13} = \int_0^{1-\sqrt{\xi}} \frac{y^2 dy}{[(1-y)^2 - \xi]^{3/2}} \left[\frac{\sqrt{(1-z)^2 - \xi}}{z} \right]_{z_-(y)}^{z_+(y)}. \quad (\text{C-341})$$

Mit Hilfe von Gln. (C-10), (C-23) und (C-337) wird $\tilde{L}_{13}$ durch

$$\begin{aligned} \tilde{L}_{13} &= \left[\int_{t_b}^{t_c} [y(t)]^2 KT_+(t) \frac{dy(t)}{[(1-y(t))^2 - \xi]^{3/2}} + \right. \\ &\quad \left. \int_{t_c}^{t_d} [y(t)]^2 KT_-(t) \frac{dy(t)}{[(1-y(t))^2 - \xi]^{3/2}} \right] \\ &= -\frac{2(1-v)}{(1+v)} - \frac{2}{\sqrt{\xi}} - \frac{4 \ln(t_b)}{\xi} + 2 \ln(t_c) - \\ &\quad \frac{(1+\sqrt{\xi})(2-\xi)}{\xi^{3/2}} \ln\left(\frac{2}{1+t_c}\right) - \frac{2(1-\sqrt{\xi})(2-\xi)}{\xi^{3/2}} \ln\left(\frac{1-t_c}{1-x}\right) \end{aligned} \quad (\text{C-342})$$

gegeben. Damit ergibt sich für L_{13}

$$L_{13} = \frac{1}{v^2} (L_8 - \tilde{L}_{13}). \quad (\text{C-343})$$

Berechnung des Integrals $L_{14} = L[3, -2]$

Das Integral L_{14} ist gegeben durch

$$L_{14} = \int \int \frac{y^3 dy dz}{z^2 [(1-y)^2 - \xi]^{3/2} \sqrt{(1-z)^2 - \xi}}. \quad (\text{C-344})$$

Die z -Integration liefert (C-333). Somit kann das Integral L_{14} als

$$L_{14} = \int \int \frac{y^3 dy dz}{z^2 [(1-y)^2 - \xi]^{3/2} \sqrt{(1-z)^2 - \xi}} = \frac{1}{v^2} (L_9 - \tilde{L}_{14}) \quad (\text{C-345})$$

geschrieben werden mit

$$\tilde{L}_{14} = \int_0^{1-\sqrt{\xi}} \frac{y^3 dy}{[(1-y)^2 - \xi]^{3/2}} \left[\frac{\sqrt{(1-z)^2 - \xi}}{z} \right]_{z_-(y)}^{z_+(y)}. \quad (\text{C-346})$$

Mit Hilfe von Gln. (C-10), (C-23) und (C-337) wird $\tilde{L}_{14}$ durch

$$\begin{aligned} \tilde{L}_{14} &= \left[\int_{t_b}^{t_c} [y(t)]^3 KT_+(t) \frac{dy(t)}{[(1-y(t))^2 - \xi]^{3/2}} + \right. \\ &\quad \left. \int_{t_c}^{t_d} [y(t)]^3 KT_-(t) \frac{dy(t)}{[(1-y(t))^2 - \xi]^{3/2}} \right] \\ &= \frac{4(1-3v+v^2)}{\xi} - \frac{2(2-3v^2)}{\sqrt{\xi}} - \frac{4(2+\xi) \ln(t_b)}{\xi} + 8 \ln(t_c) \\ &\quad - \frac{2(1+\sqrt{\xi})^2(2-\xi)}{\xi^{3/2}} \ln\left(\frac{2}{1+t_c}\right) - \frac{2(1-\sqrt{\xi})^2(2-\xi)}{\xi^{3/2}} \ln\left(\frac{1-t_c}{1-x}\right) \end{aligned} \quad (\text{C-347})$$

gegeben. Damit ergibt sich für L_{14}

$$L_{14} = \frac{1}{v^2} (L_9 - \tilde{L}_{14}). \quad (\text{C-348})$$

Berechnung des Integrals $L_{15} = L[4, -2]$

Das Integral L_{15} ist gegeben durch

$$L_{15} = \int \int \frac{y^4 dy dz}{z^2 [(1-y)^2 - \xi]^{3/2} \sqrt{(1-z)^2 - \xi}}. \quad (\text{C-349})$$

Die z -Integration liefert (C-333). Somit kann das Integral L_{15} als

$$L_{15} = \int \int \frac{y^4 dy dz}{z^2 [(1-y)^2 - \xi]^{3/2} \sqrt{(1-z)^2 - \xi}} = \frac{1}{v^2} (L_{10} - \tilde{L}_{15}) \quad (\text{C-350})$$

geschrieben werden mit

$$\tilde{L}_{15} = \int_0^{1-\sqrt{\xi}} \frac{y^4 dy}{[(1-y)^2 - \xi]^{3/2}} \left[\frac{\sqrt{(1-z)^2 - \xi}}{z} \right]_{z_-(y)}^{z_+(y)}. \quad (\text{C-351})$$

Mit Hilfe von Gln. (C-10), (C-23) und (C-337) wird $\tilde{L}_{15}$ durch

$$\tilde{L}_{15} = \left[\int_{t_b}^{t_c} [y(t)]^4 KT_+(t) \frac{dy(t)}{[(1-y(t))^2 - \xi]^{3/2}} + \right.$$

$$\begin{aligned}
& \int_{t_c}^{t_d} [y(t)]^4 KT_-(t) \frac{dy(t)}{[(1-y(t))^2 - \xi]^{3/2}} \Big] \\
&= -\frac{2\sqrt{\xi}(14-25v^2-9v^4)}{3-2v^2-v^4} + \\
& \quad \frac{2(14-45v+13v^2-3v^3-2v^4+4v^5-v^6)}{3-2v^2-v^4} - \\
& \quad \frac{6(2+3\xi)\ln(t_b)}{\xi} + 2(10+\xi)\ln(t_c) - \\
& \quad \frac{2(1+\sqrt{\xi})^3(2-\xi)}{\xi^{3/2}} \ln\left(\frac{2}{1+t_c}\right) - \frac{2(1-\sqrt{\xi})^3(2-\xi)}{\xi^{3/2}} \ln\left(\frac{1-t_c}{1-x}\right) \\
& \hspace{15em} \text{(C-352)}
\end{aligned}$$

gegeben. Damit ergibt sich für L_{15}

$$L_{15} = \frac{1}{v^2} (L_{10} - \tilde{L}_{15}). \quad \text{(C-353)}$$

C.7.4 Berechnung der zugehörigen Integrale der vierten Klasse

Die Integrale der Familie L, die zur vierten Klasse gehören, sind L_{16} , L_{17} , L_{18} , und L_{19} .

Berechnung des Integrals $L_{16} = L[0, 1]$

Das Integral L_{16} ist gegeben durch

$$L_{16} = \int \int \frac{z dy dz}{[(1-y)^2 - \xi]^{3/2} \sqrt{(1-z)^2 - \xi}}. \quad \text{(C-354)}$$

Die z -Integration liefert

$$\int \frac{z dz}{\sqrt{(1-z)^2 - \xi}} = \left[\sqrt{(1-z)^2 - \xi} + \ln(1-z - \sqrt{(1-z)^2 - \xi}) \right]_{z_-}^{z_+}. \quad \text{(C-355)}$$

Somit kann das Integral L_{16} als

$$L_{16} = \int \int \frac{z dy dz}{[(1-y)^2 - \xi]^{3/2} \sqrt{(1-z)^2 - \xi}} = L_1 + \tilde{L}_{16} \quad \text{(C-356)}$$

geschrieben werden mit

$$\tilde{L}_{16} = \int_0^{1-\sqrt{\xi}} \frac{dy}{[(1-y)^2 - \xi]^{3/2}} \left[\sqrt{(1-z)^2 - \xi} \right]_{z_-(y)}^{z_+(y)}. \quad \text{(C-357)}$$

Mit Hilfe von Gln. (C-10), (C-23), (C-38) und (C-249) wird $\tilde{L}_{16}$ durch

$$\begin{aligned} \tilde{L}_{16} &= \left[\int_{t_b}^{t_c} KU_+(t) \frac{dy(t)}{[(1-y(t))^2 - \xi]^{3/2}} + \right. \\ &\quad \left. \int_{t_c}^{t_d} KU_-(t) \frac{dy(t)}{[(1-y(t))^2 - \xi]^{3/2}} \right] \\ &= -\frac{2\sqrt{\xi}}{4-\xi} - \frac{4(1-v)}{(1+v)(4-\xi)} - \frac{2(2+2\sqrt{\xi}+\xi)}{(2+\sqrt{\xi})^2\sqrt{\xi}} \ln\left(\frac{2}{1+t_c}\right) - \\ &\quad \frac{4\xi}{(4-\xi)^2} \ln\left(\left(\frac{2t_b-\sqrt{\xi}}{2-t_b\sqrt{\xi}}\right)\left(\frac{2-\sqrt{\xi}}{2t_c-\sqrt{\xi}}\right)^2\right) - \frac{2(2-2\sqrt{\xi}+\xi)}{(2-\sqrt{\xi})^2\sqrt{\xi}} \ln\left(\frac{1-t_c}{1-x}\right) \end{aligned} \quad (\text{C-358})$$

gegeben. Damit ergibt sich für L_{16}

$$L_{16} = (L_1 + \tilde{L}_{16}). \quad (\text{C-359})$$

Berechnung des Integrals $L_{17} = L[1, 1]$

Das Integral L_{17} ist gegeben durch

$$L_{17} = \int \int \frac{y z dy dz}{[(1-y)^2 - \xi]^{3/2} \sqrt{(1-z)^2 - \xi}}. \quad (\text{C-360})$$

Die z -Integration liefert (C-355). Somit kann das Integral L_{17} als

$$L_{17} = \int \int \frac{y z dy dz}{[(1-y)^2 - \xi]^{3/2} \sqrt{(1-z)^2 - \xi}} = L_2 + \tilde{L}_{17} \quad (\text{C-361})$$

geschrieben werden mit

$$\tilde{L}_{17} = \int_0^{1-\sqrt{\xi}} \frac{y dy}{[(1-y)^2 - \xi]^{3/2}} \left[\sqrt{(1-z)^2 - \xi} \right]_{z_-(y)}^{z_+(y)}. \quad (\text{C-362})$$

Mit Hilfe von Gln. (C-10), (C-23), (C-38) und (C-249) wird $\tilde{L}_{17}$ durch

$$\begin{aligned} \tilde{L}_{17} &= \left[\int_{t_b}^{t_c} [y(t)] KU_+(t) \frac{dy(t)}{[(1-y(t))^2 - \xi]^{3/2}} + \right. \\ &\quad \left. \int_{t_c}^{t_d} [y(t)] KU_-(t) \frac{dy(t)}{[(1-y(t))^2 - \xi]^{3/2}} \right] \\ &= \frac{2\sqrt{\xi}}{4-\xi} - \frac{2(1-v)(1+v^2)}{(1+v)(4-\xi)} - \frac{2(2+4\sqrt{\xi}+3\xi+\xi^{3/2})\ln(2)}{(2+\sqrt{\xi})^2\sqrt{\xi}} + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \ln(t_b) - 2 \ln(t_c) + \frac{2 \left(4 + \frac{2}{\sqrt{\xi}} + 3 \sqrt{\xi} + \xi \right)}{(2 + \sqrt{\xi})^2} \ln(1 + t_c) + \\
& \frac{\xi^2}{(4 - \xi)^2} \ln\left(\left(\frac{2t_b - \sqrt{\xi}}{2 - t_b \sqrt{\xi}}\right)\left(\frac{2 - \sqrt{\xi}}{2t_c - \sqrt{\xi}}\right)^2\right) + \frac{2 \left(4 - \frac{2}{\sqrt{\xi}} - 3 \sqrt{\xi} + \xi \right)}{(2 - \sqrt{\xi})^2} \ln\left(\frac{1 - t_c}{1 - x}\right)
\end{aligned} \tag{C-363}$$

gegeben. Damit ergibt sich für L_{17}

$$L_{17} = (L_2 + \tilde{L}_{17}). \tag{C-364}$$

Berechnung des Integrals $L_{18} = L[2, 1]$

Das Integral L_{18} ist gegeben durch

$$L_{18} = \int \int \frac{y^2 z \, dy \, dz}{[(1 - y)^2 - \xi]^{3/2} \sqrt{(1 - z)^2 - \xi}}. \tag{C-365}$$

Die z -Integration liefert (C-355). Somit kann das Integral L_{18} als

$$L_{18} = \int \int \frac{y^2 z \, dy \, dz}{[(1 - y)^2 - \xi]^{3/2} \sqrt{(1 - z)^2 - \xi}} = L_3 + \tilde{L}_{18} \tag{C-366}$$

geschrieben werden mit

$$\tilde{L}_{18} = \int_0^{1-\sqrt{\xi}} \frac{y^2 \, dy}{[(1 - y)^2 - \xi]^{3/2}} \left[\sqrt{(1 - z)^2 - \xi} \right]_{z_-(y)}^{z_+(y)} \tag{C-367}$$

Mit Hilfe von Gln. (C-10), (C-23), (C-38) und (C-249) wird $\tilde{L}_{18}$ durch

$$\begin{aligned}
\tilde{L}_{18} &= \left[\int_{t_b}^{t_c} [y(t)]^2 KU_+(t) \frac{dy(t)}{[(1 - y(t))^2 - \xi]^{3/2}} + \right. \\
& \quad \left. \int_{t_c}^{t_d} [y(t)]^2 KU_-(t) \frac{dy(t)}{[(1 - y(t))^2 - \xi]^{3/2}} \right] \\
&= \frac{2 \sqrt{\xi} (5 + 2 v^2)}{4 - \xi} - \frac{10 - 2 v^2 - v \xi (1 - v)}{(1 + v) (4 - \xi)} + \\
& \quad \left(4 - \frac{\xi}{4} \right) \ln(t_b) - 6 \ln(t_c) - \frac{2 (1 + \sqrt{\xi})^2 (2 + 2 \sqrt{\xi} + \xi)}{(2 + \sqrt{\xi})^2 \sqrt{\xi}} \ln\left(\frac{2}{1 + t_c}\right) - \\
& \quad \frac{\xi^3}{4 (4 - \xi)^2} \ln\left(\left(\frac{2t_b - \sqrt{\xi}}{2 - t_b \sqrt{\xi}}\right)\left(\frac{2 - \sqrt{\xi}}{2t_c - \sqrt{\xi}}\right)^2\right) - \\
& \quad \frac{2 (-1 + \sqrt{\xi})^2 (2 - 2 \sqrt{\xi} + \xi)}{(-2 + \sqrt{\xi})^2 \sqrt{\xi}} \ln\left(\frac{1 - t_c}{1 - x}\right)
\end{aligned} \tag{C-368}$$

gegeben. Damit ergibt sich für L_{18}

$$L_{18} = (L_3 + \tilde{L}_{18}). \quad (\text{C-369})$$

Berechnung des Integrals $L_{19} = L[3, 1]$

Das Integral L_{19} ist gegeben durch

$$L_{19} = \int \int \frac{y^3 z \, dy \, dz}{[((1-y)^2 - \xi)^{3/2} \sqrt{(1-z)^2 - \xi}]} . \quad (\text{C-370})$$

Die z -Integration liefert (C-355). Somit kann das Integral L_{19} als

$$L_{19} = \int \int \frac{y^3 z \, dy \, dz}{[((1-y)^2 - \xi)^{3/2} \sqrt{(1-z)^2 - \xi}]} = L_4 + \tilde{L}_{19} \quad (\text{C-371})$$

geschrieben werden mit

$$\tilde{L}_{19} = \int_0^{1-\sqrt{\xi}} \frac{y^3 \, dy}{[((1-y)^2 - \xi)^{3/2}]} \left[\sqrt{(1-z)^2 - \xi} \right]_{z-(y)}^{z_+(y)} . \quad (\text{C-372})$$

Mit Hilfe von Gln. (C-10), (C-23), (C-38) und (C-249) wird $\tilde{L}_{19}$ durch

$$\begin{aligned} \tilde{L}_{19} &= \left[\int_{t_b}^{t_c} [y(t)]^3 KU_+(t) \frac{dy(t)}{[(1-y(t))^2 - \xi]^{3/2}} + \right. \\ &\quad \left. \int_{t_c}^{t_d} [y(t)]^3 KU_-(t) \frac{dy(t)}{[(1-y(t))^2 - \xi]^{3/2}} \right] \\ &= -\frac{\sqrt{\xi} (-55 - 14v^2 + v^4)}{2(4 - \xi)} + \\ &\quad \frac{-110 + 5v + 27v^2 - 20v^3 + 26v^4 - 9v^5 + v^6}{4(1+v)(4 - \xi)} + \\ &\quad \frac{(144 + 8\xi + \xi^2) \ln(t_b)}{16} - 2(6 + \xi) \ln(t_c) - \\ &\quad \frac{2(1 + \sqrt{\xi})^3 (2 + 2\sqrt{\xi} + \xi)}{(2 + \sqrt{\xi})^2 \sqrt{\xi}} \ln\left(\frac{2}{1 + t_c}\right) + \\ &\quad \frac{\xi^4}{16(4 - \xi)^2} \ln\left(\left(\frac{2t_b - \sqrt{\xi}}{2 - t_b \sqrt{\xi}}\right) \left(\frac{2 - \sqrt{\xi}}{2t_c - \sqrt{\xi}}\right)^2\right) - \\ &\quad \frac{2(1 - \sqrt{\xi})^3 (2 - 2\sqrt{\xi} + \xi)}{(2 - \sqrt{\xi})^2 \sqrt{\xi}} \ln\left(\frac{1 - t_c}{1 - x}\right) \end{aligned} \quad (\text{C-373})$$

gegeben. Damit ergibt sich für L_{19}

$$L_{19} = (L_4 + \tilde{L}_{19}). \quad (\text{C-374})$$

C.7.5 Berechnung der zugehörigen Integrale der fünften Klasse

Die Integrale der Familie L, die zur fünften Klasse gehören, sind L_{20} , L_{21} , und L_{22} .

Berechnung des Integrals $L_{20} = L[0, 2]$

Das Integral L_{20} ist gegeben durch

$$L_{20} = \int \int \frac{z^2 dy dz}{[(1-y)^2 - \xi]^{3/2} \sqrt{(1-z)^2 - \xi}}. \quad (\text{C-375})$$

Die z -Integration liefert

$$\begin{aligned} \int \frac{z^2 dz}{\sqrt{(1-z)^2 - \xi}} &= \\ &= \frac{z}{2} \sqrt{(1-z)^2 - \xi} + \frac{3}{2} \int \frac{z dz}{\sqrt{(1-z)^2 - \xi}} - \frac{v^2}{2} \int \frac{dz}{\sqrt{(1-z)^2 - \xi}} \\ &= \frac{z}{2} \sqrt{(1-z)^2 - \xi} + \frac{3}{2} \sqrt{(1-z)^2 - \xi} + \frac{2+\xi}{2} \ln(1-z - \sqrt{(1-z)^2 - \xi}). \end{aligned} \quad (\text{C-376})$$

Somit kann das Integral L_{20} als

$$L_{20} = \int \int \frac{z^2 dy dz}{[(1-y)^2 - \xi]^{3/2} \sqrt{(1-z)^2 - \xi}} = \left(\frac{2+\xi}{2} \right) L_1 + \frac{3}{2} \tilde{L}_{16} + \frac{1}{2} \tilde{L}_{20} \quad (\text{C-377})$$

geschrieben werden mit

$$\tilde{L}_{20} = \int_0^{1-\sqrt{\xi}} \frac{dy}{[(1-y)^2 - \xi]^{3/2}} \left[z \sqrt{(1-z)^2 - \xi} \right]_{z_-(y)}^{z_+(y)}. \quad (\text{C-378})$$

Mit Hilfe von Gln. (C-10), (C-23), (C-38) und (C-275) wird $\tilde{L}_{20}$ durch

$$\begin{aligned} \tilde{L}_{20} &= \left[\int_{t_b}^{t_c} KW_+(t) \frac{dy(t)}{[(1-y(t))^2 - \xi]^{3/2}} + \right. \\ &\quad \left. \int_{t_c}^{t_d} KW_-(t) \frac{dy(t)}{[(1-y(t))^2 - \xi]^{3/2}} \right] \\ &= \frac{2\sqrt{\xi}(1-10v^2-7v^4)}{(4-\xi)^3} - \\ &\quad \frac{2(1-v)(1+13v+4v^2-4v^3+3v^4-v^5)}{(4-\xi)^3} \\ &\quad - \ln(t_b) + 2\ln(t_c) + \frac{2(4+10\sqrt{\xi}+8\xi+3\xi^{3/2}+\xi^2)}{(2+\sqrt{\xi})^3\sqrt{\xi}} \ln\left(\frac{2}{1+t_c}\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{\xi (16 - 16\xi - \xi^2)}{(4 - \xi)^3} \ln\left(\left(\frac{2t_b - \sqrt{\xi}}{2 - t_b\sqrt{\xi}}\right)\left(\frac{2 - \sqrt{\xi}}{2t_c - \sqrt{\xi}}\right)^2\right) + \\
& \frac{2(4 - 10\sqrt{\xi} + 8\xi - 3\xi^{3/2} + \xi^2)}{(2 - \sqrt{\xi})^3 \sqrt{\xi}} \ln\left(\frac{1 - t_c}{1 - x}\right)
\end{aligned} \tag{C-379}$$

gegeben. Damit ergibt sich für L_{20}

$$L_{20} = \left(\frac{2 + \xi}{2} L_1 + \frac{3}{2} \tilde{L}_{16} + \frac{1}{2} \tilde{L}_{20} \right). \tag{C-380}$$

Berechnung des Integrals $L_{21} = L[1, 2]$

Das Integral L_{21} ist gegeben durch

$$L_{21} = \int \int \frac{y z^2 dy dz}{[(1 - y)^2 - \xi]^{3/2} \sqrt{(1 - z)^2 - \xi}}. \tag{C-381}$$

Die z -Integration liefert (C-376). Somit kann das Integral L_{21} als

$$L_{21} = \int \int \frac{y z^2 dy dz}{[(1 - y)^2 - \xi]^{3/2} \sqrt{(1 - z)^2 - \xi}} = \left(\frac{2 + \xi}{2} \right) L_2 + \frac{3}{2} \tilde{L}_{17} + \frac{1}{2} \tilde{L}_{21} \tag{C-382}$$

geschrieben werden mit

$$\tilde{L}_{21} = \int_0^{1-\sqrt{\xi}} \frac{y dy}{[(1 - y)^2 - \xi]^{3/2}} \left[z \sqrt{(1 - z)^2 - \xi} \right]_{z_-(y)}^{z_+(y)}. \tag{C-383}$$

Mit Hilfe von Gln. (C-10), (C-23), (C-38) und (C-275) wird $\tilde{L}_{21}$ durch

$$\begin{aligned}
\tilde{L}_{21} &= \left[\int_{t_b}^{t_c} [y(t)] KW_+(t) \frac{dy(t)}{[(1 - y(t))^2 - \xi]^{3/2}} + \right. \\
& \quad \left. \int_{t_c}^{t_d} [y(t)] KW_-(t) \frac{dy(t)}{[(1 - y(t))^2 - \xi]^{3/2}} \right] \\
&= \frac{4(17 - 12v + 19v^2 - 16v^3 + 11v^4 - 4v^5 + v^6)}{(3 + v^2)^3} - \\
& \quad \frac{2\sqrt{\xi}(34 + 31v^2 + 12v^4 + 3v^6)}{(3 + v^2)^3} \\
& \quad - 2 \ln(t_b) + 4 \ln(t_c) + \frac{2(1 + \sqrt{\xi})^2 (4 + 6\sqrt{\xi} + 2\xi + \xi^{3/2})}{(2 + \sqrt{\xi})^3 \sqrt{\xi}} \ln\left(\frac{2}{1 + t_c}\right) \\
& \quad + \frac{2\xi^2(4 - 3\xi)}{(4 - \xi)^3} \ln\left(\left(\frac{2t_b - \sqrt{\xi}}{2 - t_b\sqrt{\xi}}\right)\left(\frac{2 - \sqrt{\xi}}{2t_c - \sqrt{\xi}}\right)^2\right) + \\
& \quad \frac{2(1 - \sqrt{\xi})^2 (4 - 6\sqrt{\xi} + 2\xi - \xi^{3/2})}{(2 - \sqrt{\xi})^3 \sqrt{\xi}} \ln\left(\frac{1 - t_c}{1 - x}\right)
\end{aligned} \tag{C-384}$$

gegeben. Damit ergibt sich für L_{21}

$$L_{21} = \left(\frac{2+\xi}{2} L_2 + \frac{3}{2} \tilde{L}_{17} + \frac{1}{2} \tilde{L}_{21} \right). \quad (\text{C-385})$$

Berechnung des Integrals $L_{22} = L[2, 2]$

Das Integral L_{22} ist gegeben durch

$$L_{22} = \int \int \frac{y^2 z^2 dy dz}{[(1-y)^2 - \xi]^{3/2} \sqrt{(1-z)^2 - \xi}}. \quad (\text{C-386})$$

Die z -Integration liefert (C-376). Somit kann das Integral L_{22} als

$$L_{22} = \int \int \frac{y^2 z^2 dy dz}{[(1-y)^2 - \xi]^{3/2} \sqrt{(1-z)^2 - \xi}} = \left(\frac{2+\xi}{2} \right) L_3 + \frac{3}{2} \tilde{L}_{18} + \frac{1}{2} \tilde{L}_{22} \quad (\text{C-387})$$

geschrieben werden mit

$$\tilde{L}_{22} = \int_0^{1-\sqrt{\xi}} \frac{y^2 dy}{[(1-y)^2 - \xi]^{3/2}} \left[z \sqrt{(1-z)^2 - \xi} \right]_{z_-(y)}^{z_+(y)}. \quad (\text{C-388})$$

Mit Hilfe von Gln. (C-10), (C-23), (C-38) und (C-275) wird $\tilde{L}_{22}$ durch

$$\begin{aligned} \tilde{L}_{22} &= \left[\int_{t_b}^{t_c} [y(t)]^2 KW_+(t) \frac{dy(t)}{[(1-y(t))^2 - \xi]^{3/2}} + \right. \\ &\quad \left. \int_{t_c}^{t_d} [y(t)]^2 KW_-(t) \frac{dy(t)}{[(1-y(t))^2 - \xi]^{3/2}} \right] \\ &= \frac{15}{2} + \frac{3v^2}{2} - \frac{28}{3+v^2} - \frac{(\sqrt{\xi} (317 + 300v^2 + 82v^4 + 4v^6 + v^8))}{2(4-\xi)^3} + \\ &\quad + \frac{-512 - 1152v + 928\xi v - 264\xi^2 v + 22\xi^3 v + \xi^4 v}{4(3+v^2)^3} + \frac{112}{(3+v^2)^2} \\ &\quad - \frac{(48 + 20\xi - \xi^2) \ln(t_b)}{16} + 2(3+\xi) \ln(t_c) + \\ &\quad \frac{2(1+\sqrt{\xi})^3 (4 + 6\sqrt{\xi} + 2\xi + \xi^{3/2})}{(2+\sqrt{\xi})^3 \sqrt{\xi}} \ln\left(\frac{2}{1+t_c}\right) \\ &\quad - \frac{\xi^3 (48 - 32\xi + \xi^2)}{16(4-\xi)^3} \ln\left(\left(\frac{2t_b - \sqrt{\xi}}{2 - t_b \sqrt{\xi}}\right) \left(\frac{2 - \sqrt{\xi}}{2t_c - \sqrt{\xi}}\right)^2\right) \\ &\quad + \frac{2(1-\sqrt{\xi})^3 (4 - 6\sqrt{\xi} + 2\xi - \xi^{3/2})}{(2-\sqrt{\xi})^3 \sqrt{\xi}} \ln\left(\frac{1-t_c}{1-x}\right) \end{aligned} \quad (\text{C-389})$$

gegeben. Damit ergibt sich für L_{22}

$$L_{22} = \left(\frac{2+\xi}{2} L_3 + \frac{3}{2} \tilde{L}_{18} + \frac{1}{2} \tilde{L}_{22} \right). \quad (\text{C-390})$$

C.8 Die Transformation zu den Zerfallsratenterme

Da die in diesem Anhang insgesamt berechneten 62 Integrale nur eine begrenzte Zahl von Logarithmen, Produkten von Logarithmen und Dilogarithmusfunktionen enthalten, ist es naheliegend, einen Satz von Standardintegralformen t_i einzuführen, die als *Zerfallsratenterme* bezeichnet werden und die im Kapitel 3 und 4 definiert sind.

C.8.1 Transformationsregeln

Zur Illustration des Umschreibens werden die entsprechenden Ausdrücke wie folgt gesetzt:

$$\begin{aligned}
\ln \xi &= \ln 4 - t_{10} = 2 \ln 2 - t_{10}, \\
\ln(\sqrt{\xi}) &= \ln 2 - \frac{1}{2} t_{10}, \\
\ln t_a &= \frac{1}{2} \ln \left(\frac{(1+v)^2}{\xi} \right) = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{(1+v)^2}{(1+v)(1-v)} \right) \\
&= \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1+v}{1-v} \right) = \frac{1}{2} t_3, \\
\ln t_b &= \frac{1}{2} \ln \left(\frac{(1-v)^2}{\xi} \right) = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{(1-v)^2}{(1+v)(1-v)} \right) \\
&= \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1-v}{1+v} \right) = -\frac{1}{2} t_3, \\
\ln t_c &= \ln \left(\frac{\sqrt{\xi}}{2 - \sqrt{\xi}} \right) = \ln \left(\frac{1+v}{2 - \sqrt{\xi}} \right) + \ln \left(\frac{\sqrt{\xi}}{1+v} \right) = t_{13} - \frac{1}{2} t_3, \\
\ln(2 - \sqrt{\xi}) &= \ln(\sqrt{\xi}) + \ln \left(\frac{2 - \sqrt{\xi}}{\sqrt{\xi}} \right) = \ln 2 - \frac{1}{2} t_{10} - t_{13} + \frac{1}{2} t_3, \\
\ln(2 t_b - \sqrt{\xi}) &= \ln \left(\frac{2(1-v) - \xi}{\sqrt{\xi}} \right) = \ln \left(\frac{(1-v)^2}{\sqrt{\xi}} \right) = \\
&= \ln(\sqrt{\xi}) + \ln \left(\frac{(1-v)^2}{\xi} \right) = \ln 2 - \frac{1}{2} t_{10} - t_3, \\
\ln(2 t_c - \sqrt{\xi}) &= \ln \left(\frac{2\sqrt{\xi} - \sqrt{\xi}(2 - \sqrt{\xi})}{2 - \sqrt{\xi}} \right) = \ln \left(\frac{\xi}{2 - \sqrt{\xi}} \right) = \\
&= \ln(\sqrt{\xi}) + \ln \left(\frac{\sqrt{\xi}}{2 - \sqrt{\xi}} \right) = \ln 2 - \frac{1}{2} t_{10} + t_{13} - \frac{1}{2} t_3, \\
\ln(2 - t_b \sqrt{\xi}) &= \ln(2 - 1 + v) = \ln(1 + v) = \\
&= \ln(\sqrt{\xi}) + \ln \left(\sqrt{\frac{1+v}{1-v}} \right) = \ln 2 - \frac{1}{2} t_{10} + \frac{1}{2} t_3,
\end{aligned}$$

$$\ln(2 - t_c \sqrt{\xi}) = \ln\left(\frac{4 - 2\sqrt{\xi} - \xi}{2 - \sqrt{\xi}}\right).$$

Für die Kombinationen von 1 mit $\pm t_a$ und $\pm t_b$ führt erst eine Quadrierung auf eine einfachere Form. Es ergibt sich

$$\begin{aligned} (t_a \pm 1)^2 &= \frac{1}{\xi} \left((1+v) \pm \sqrt{\xi} \right)^2 = \frac{1}{\xi} \left((1+v)^2 \pm 2(1+v)\sqrt{\xi} + \xi \right) = \\ &= \frac{1}{\xi} \left(1 + 2v + v^2 \pm 2(1+v)\sqrt{\xi} + 1 - v^2 \right) = \\ &= \frac{1}{\xi} \left(2 + 2v \pm 2(1+v)\sqrt{\xi} \right) = \\ &= \frac{2}{\xi} (1+v)(1 \pm \sqrt{\xi}) = \frac{2}{\sqrt{\xi}} \frac{1+v}{\sqrt{\xi}} (1 \pm \sqrt{\xi}), \\ (1 \pm t_b)^2 &= \frac{1}{\xi} \left(\sqrt{\xi} \pm (1-v) \right)^2 = \frac{1}{\xi} \left(\xi \pm 2(1-v)\sqrt{\xi} + (1-v)^2 \right) = \\ &= \frac{1}{\xi} \left(1 - v^2 \pm 2(1-v)\sqrt{\xi} + 1 - 2v + v^2 \right) \\ &= \frac{1}{\xi} \left(2 - 2v \pm 2(1-v)\sqrt{\xi} \right) = \\ &= \frac{2}{\xi} (1-v)(1 \pm \sqrt{\xi}) = \frac{2}{\sqrt{\xi}} \frac{1-v}{\sqrt{\xi}} (1 \pm \sqrt{\xi}). \end{aligned}$$

Definiert man nun

$$t'_{17} = \ln\left(\frac{1+\sqrt{\xi}}{1-\sqrt{\xi}}\right), \quad (\text{C-391})$$

so ergibt sich mit $\ln(1 - \xi) = \ln(v^2) = t_{12} - t_{10}$

$$\ln(1 \pm \sqrt{\xi}) = \frac{1}{2} \left(\ln(1 - \xi) \pm \ln\left(\frac{1+\sqrt{\xi}}{1-\sqrt{\xi}}\right) \right) = \frac{1}{2} (t_{12} - t_{10} \pm t'_{17}) \quad (\text{C-392})$$

und folglich

$$\begin{aligned} 2 \ln(t_a \pm 1) &= \ln\left(\frac{2}{\sqrt{\xi}}\right) + \ln\left(\frac{1+v}{\sqrt{\xi}}\right) + \ln(1 \pm \sqrt{\xi}) = \\ &= \frac{1}{2} t_{10} + \frac{1}{2} t_3 + \frac{1}{2} (t_{12} - t_{10} \pm t'_{17}) = \frac{1}{2} t_{12} + \frac{1}{2} t_3 \pm \frac{1}{2} t'_{17}, \quad (\text{C-393}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2 \ln(1 \pm t_b) &= \ln\left(\frac{2}{\sqrt{\xi}}\right) + \ln\left(\frac{1-v}{\sqrt{\xi}}\right) + \ln(1 \pm \sqrt{\xi}) = \\ &= \frac{1}{2} t_{10} - \frac{1}{2} t_3 + \frac{1}{2} (t_{12} - t_{10} \pm t'_{17}) = \frac{1}{2} t_{12} - \frac{1}{2} t_3 \pm \frac{1}{2} t'_{17} \quad (\text{C-394}) \end{aligned}$$

und daher schliesslich

$$\ln(t_a \pm 1) = \frac{1}{4} t_{12} + \frac{1}{4} t_3 \pm \frac{1}{4} t'_{17}, \quad (\text{C-395})$$

$$\ln(1 \pm t_b) = \frac{1}{4}t_{12} - \frac{1}{4}t_3 \pm \frac{1}{4}t'_{17}, \quad (\text{C-396})$$

$$\begin{aligned} \ln(1 + t_c) &= \ln\left(\frac{2 - \sqrt{\xi} + \sqrt{\xi}}{2 - \sqrt{\xi}}\right) = \ln\left(\frac{2}{2 - \sqrt{\xi}}\right) = \\ &= \ln\left(\frac{2}{\sqrt{\xi}}\right) + \ln\left(\frac{\sqrt{\xi}}{2 - \sqrt{\xi}}\right) = \frac{1}{2}t_{10} + t_{13} - \frac{1}{2}t_3, \end{aligned} \quad (\text{C-397})$$

$$\begin{aligned} \ln(1 - t_c) &= \ln\left(\frac{2 - \sqrt{\xi} - \sqrt{\xi}}{2 - \sqrt{\xi}}\right) = \ln\left(\frac{2(1 - \sqrt{\xi})}{2 - \sqrt{\xi}}\right) = \\ &= \ln 2 - \ln(2 - \sqrt{\xi}) + \ln(1 - \sqrt{\xi}) = \\ &= \ln 2 - \ln 2 - \frac{1}{2}t_{10} + t_{13} - \frac{1}{2}t_3 + \frac{1}{2}(t_{12} - t_{10} - t'_{17}) = \\ &= t_{13} + \frac{1}{2}t_{12} - \frac{1}{2}t_3 - \frac{1}{2}t'_{17}. \end{aligned} \quad (\text{C-398})$$

Ohne lange Rechnung ergibt sich klarerweise

$$\ln(t_a^2 - 1) = \frac{1}{2}t_{12} + \frac{1}{2}t_3, \quad \ln(1 - t_b^2) = \frac{1}{2}t_{12} - \frac{1}{2}t_3. \quad (\text{C-399})$$

Die verbleibenden Logarithmen lassen sich auf die bisher bestimmten zurückführen,

$$\begin{aligned} t_a - t_c &= \frac{1+v}{\sqrt{\xi}} - \frac{\sqrt{\xi}}{2 - \sqrt{\xi}} = \frac{(1+v)(2 - \sqrt{\xi}) - \xi}{\sqrt{\xi}(2 - \sqrt{\xi})} = \\ &= \frac{(1+v)(2 - \sqrt{\xi} - 1 + v)}{\sqrt{\xi}(2 - \sqrt{\xi})} = \frac{1+v}{2 - \sqrt{\xi}} \frac{1+v - \sqrt{\xi}}{\sqrt{\xi}} = \\ &= \frac{1+v}{2 - \sqrt{\xi}}(t_a - 1) \Rightarrow \\ \ln(t_a - t_c) &= t_{13} + \ln(t_a - 1) = t_{13} + \frac{1}{4}t_{12} + \frac{1}{4}t_3 - \frac{1}{4}t'_{17}, \\ t_c - t_b &= \frac{\sqrt{\xi}}{2 - \sqrt{\xi}} - \frac{1-v}{\sqrt{\xi}} = \frac{\xi - (1-v)(2 - \sqrt{\xi})}{\sqrt{\xi}(2 - \sqrt{\xi})} = \\ &= \frac{(1-v)(1+v - 2 + \sqrt{\xi})}{\sqrt{\xi}(2 - \sqrt{\xi})} = \frac{1+v}{2 - \sqrt{\xi}} \frac{1-v}{1+v} \frac{\sqrt{\xi} - 1 + v}{\sqrt{\xi}} = \\ &= \frac{1+v}{2 - \sqrt{\xi}} \frac{1-v}{1+v}(1 - t_b) \Rightarrow \\ \ln(t_c - t_b) &= t_{13} - t_3 + \ln(1 - t_b) = t_{13} + \frac{1}{4}t_{12} - \frac{5}{4}t_3 - \frac{1}{4}t'_{17}, \\ \ln(t_a - t_b) &= \ln\left(\frac{1+v}{\sqrt{\xi}} - \frac{1-v}{\sqrt{\xi}}\right) = \ln\left(\frac{2v}{\sqrt{\xi}}\right) = \frac{1}{2}t_{12}, \\ 2t_c - \sqrt{\xi}(1 + t_c^2) &= \frac{2\sqrt{\xi}}{2 - \sqrt{\xi}} - \sqrt{\xi} \frac{(2 - \sqrt{\xi})^2 + \xi}{(2 - \sqrt{\xi})^2} = \\ &= \frac{2\sqrt{\xi}(2 - \sqrt{\xi}) - \sqrt{\xi}(4 - 4\sqrt{\xi} + 2\xi)}{(2 - \sqrt{\xi})^2} = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{2\sqrt{\xi}(2 - \sqrt{\xi} - 2 + 2\sqrt{\xi} - \xi)}{(2 - \sqrt{\xi})^2} = \\
&= \frac{2\sqrt{\xi}(\sqrt{\xi} - \xi)}{(2 - \sqrt{\xi})^2} = \frac{2\xi(1 - \sqrt{\xi})}{(2 - \sqrt{\xi})^2} = \frac{2\xi}{(2 - \sqrt{\xi})^2}(1 - \sqrt{\xi}), \\
\ln\left(2t_c - \sqrt{\xi}(1 + t_c^2)\right) &= \ln 2 + 2 \ln\left(\frac{\sqrt{\xi}}{2 - \sqrt{\xi}}\right) + \ln(1 - \sqrt{\xi}) = \\
&= \ln 2 + 2t_{13} - t_3 + \frac{1}{2}(t_{12} - t_{10} - t'_{17}). \tag{C-400}
\end{aligned}$$

Für die dilogarithmischen Anteile der L -Integrale erhält man

$$\begin{aligned}
L_{23}^{\text{dilog}} &= \frac{1}{v^4}t_{16}, \\
L_{24}^{\text{dilog}} &= \frac{3}{v^5}t_{15}, & L_{26}^{\text{dilog}} &= L_{24}^{\text{dilog}}, & L_{28}^{\text{dilog}} &= \frac{3}{2}L_{26}^{\text{dilog}} - \frac{v^2}{2}L_{24}^{\text{dilog}}, \\
L_{25}^{\text{dilog}} &= \frac{1}{v^3}t_{15}, & L_{27}^{\text{dilog}} &= L_{25}^{\text{dilog}}, & L_{29}^{\text{dilog}} &= \frac{3}{2}L_{27}^{\text{dilog}} - \frac{v^2}{2}L_{25}^{\text{dilog}}. \tag{C-401}
\end{aligned}$$

Für die M -Integrale bekommt man

$$\begin{aligned}
M_{23}^{\text{dilog}} &= -\frac{1}{v} \left(\frac{1}{v^2}(t_{22} - t_{16}) + \frac{1}{\sqrt{\xi}} \left(\frac{t_{19}}{1 - \sqrt{\xi}} + \frac{t_{20}}{1 + \sqrt{\xi}} \right) \right), \\
M_{24}^{\text{dilog}} &= \frac{2t_{21}}{v^4} + \frac{1}{\sqrt{\xi}} \left(\frac{t_{17}}{(1 - \sqrt{\xi})^2} + \frac{t_{18}}{(1 + \sqrt{\xi})^2} \right), \\
M_{25}^{\text{dilog}} &= \frac{t_{21}}{v^2} + \frac{1}{\sqrt{\xi}} \left(\frac{t_{17}}{1 - \sqrt{\xi}} + \frac{t_{18}}{1 + \sqrt{\xi}} \right), \\
M_{26}^{\text{dilog}} &= M_{24}^{\text{dilog}}, & M_{28}^{\text{dilog}} &= \frac{3}{2}M_{26}^{\text{dilog}} - \frac{v^2}{2}M_{24}^{\text{dilog}}, \\
M_{27}^{\text{dilog}} &= M_{25}^{\text{dilog}}, & M_{29}^{\text{dilog}} &= \frac{3}{2}M_{27}^{\text{dilog}} - \frac{v^2}{2}M_{25}^{\text{dilog}}. \tag{C-402}
\end{aligned}$$

Mit diesen Ersetzungen lässt sich der gesamte logarithmische Anteil der im Anhang gelösten Integrale auf die vorhandenen *Zerfallsratenterme* zurückführen. Dadurch lassen sich die Ergebnisse in der Kompakten Form im Kapitel 3 und 4 darstellen.

C.8.2 Integrale der Familie C

$$\begin{aligned}
C[0, 0] &:= t_{14}, \\
C[-1, 0] &:= C[0, -1], \\
C[0, -1] &:= \frac{1}{v}t_{15}, \\
C[-2, 0] &:= C[0, -2], \\
C[0, -2] &:= (C[0, -1] - (4v(t_3 - t_{12}) + (4 - \xi)(t_1 - t_2))
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +2(3-\xi)t_3)/\xi)/v^2 - \frac{2}{v\xi} \ln \Lambda, \\
C[1,0] &:= C[0,0] + v - 2(1-\sqrt{\xi}) - (2-\xi)(t_1-t_2+t_3)/2 \\
C[2,0] &:= 2C[1,0] - (2-\xi)C[0,0]/2 + \\
& \quad + (6+\sqrt{\xi\xi}/(2-\sqrt{\xi}))(1-\sqrt{\xi})/4 - (6+\xi)v/8 + \\
& \quad + (8-\xi^2)(t_1-t_2+t_3)/16 \\
C[-1,-1] &:= t_{16}/v^2 - \ln[(1+v)/(1-v)] \ln \Lambda/v^2 \\
C[1,-1] &:= C[0,-1] - t_1 + t_2 - 2t_3 \\
C[2,-1] &:= (1+\xi/2)C[0,-1] + 2(1-\sqrt{\xi})^2/(2-\sqrt{\xi}) \\
& \quad - 3(t_1-t_2+2t_3)/2 \\
C[1,-2] &:= (C[1,-1] + 4v(1-v\sqrt{\xi})/\xi - 2(t_1-t_2+t_3))/v^2 \\
C[2,-2] &:= (C[2,-1] - (v-(1-\sqrt{\xi})^2)(1+(1-v)^2/(2-\sqrt{\xi})^2)/\xi + \\
& \quad - 2(1+\xi)(1-v-\sqrt{\xi})(1+(1-v)/(2-\sqrt{\xi}))/\xi + \\
& \quad + 4(2-\xi)(1-\sqrt{\xi})^3/\xi/(2-\sqrt{\xi})^2 + -3(t_1-t_2+t_3))/v^2 \\
C[0,1] &:= C[1,0] \\
C[-1,1] &:= C[1,-1] \\
C[-2,1] &:= C[1,-2] \\
C[1,1] &:= C[1,0] + (10-\xi)v/4 + -(6+2\sqrt{\xi}+\xi)(1-\sqrt{\xi})/2 \\
& \quad - (8+\xi^2)(t_1-t_2+t_3)/8 \\
C[0,2] &:= C[2,0] \\
C[-1,2] &:= C[2,-1] \\
C[-2,2] &:= C[2,-2]
\end{aligned}$$

C.8.3 Integrale der Familie M

$$\begin{aligned}
M[0,0] &:= \frac{t_{17}}{\sqrt{\xi}} + \frac{t_{18}}{\sqrt{\xi}} \\
M[1,0] &:= -t_{14} + \frac{(1-\sqrt{\xi})t_{17}}{\sqrt{\xi}} + \frac{(1+\sqrt{\xi})t_{18}}{\sqrt{\xi}} \\
M[2,0] &:= 1 - \sqrt{\xi} + \frac{\xi t_{13}}{2} - 2t_{14} + \frac{(1-\sqrt{\xi})^2 t_{17}}{\sqrt{\xi}} + \frac{(1+\sqrt{\xi})^2 t_{18}}{\sqrt{\xi}} - \frac{\xi t_3}{4} \\
M[3,0] &:= \frac{(1-\sqrt{\xi})(36-14\sqrt{\xi}+\xi^{\frac{3}{2}})}{8(2-\sqrt{\xi})} + \frac{(24-\xi)\xi t_{13}}{16} - (3+\xi)t_{14} \\
& \quad + \frac{(1-\sqrt{\xi})^3 t_{17}}{\sqrt{\xi}} + \frac{(1+\sqrt{\xi})^3 t_{18}}{\sqrt{\xi}} - \frac{(24-\xi)\xi t_3}{32}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
M[4, 0] &:= \frac{(1 - \sqrt{\xi})}{144 (2 - \sqrt{\xi})^2} (2080 - 1728 \sqrt{\xi} + 1168 \xi - 648 \xi^{\frac{3}{2}} + 106 \xi^2 \\
&\quad - 6 \xi^{\frac{5}{2}} + 3 \xi^3) + \frac{\xi (12 + \xi) (24 + \xi) t_{13}}{96} - 4 (1 + \xi) t_{14} \\
&\quad + \frac{(1 - \sqrt{\xi})^4 t_{17}}{\sqrt{\xi}} + \frac{(1 + \sqrt{\xi})^4 t_{18}}{\sqrt{\xi}} - \frac{\xi (12 + \xi) (24 + \xi) t_3}{192} \\
M[0, -1] &:= -\frac{t_{19}}{\sqrt{\xi} v} - \frac{t_{20}}{\sqrt{\xi} v} \\
M[1, -1] &:= -\frac{t_{15}}{v} - \frac{(1 - \sqrt{\xi}) t_{19}}{\sqrt{\xi} v} - \frac{(1 + \sqrt{\xi}) t_{20}}{\sqrt{\xi} v} \\
M[2, -1] &:= -2 t_{13} + t_3 - \frac{2 t_{15}}{v} - \frac{(1 - \sqrt{\xi})^2 t_{19}}{\sqrt{\xi} v} - \frac{(1 + \sqrt{\xi})^2 t_{20}}{\sqrt{\xi} v} \\
M[3, -1] &:= -\frac{2 (1 - \sqrt{\xi})}{2 - \sqrt{\xi}} - 5 t_{13} + \frac{5 t_3}{2} - \frac{(3 + \xi) t_{15}}{v} - \frac{(1 - \sqrt{\xi})^3 t_{19}}{\sqrt{\xi} v} \\
&\quad - \frac{(1 + \sqrt{\xi})^3 t_{20}}{\sqrt{\xi} v} \\
M[4, -1] &:= -\frac{2 (1 - \sqrt{\xi}) (-18 + 8 \sqrt{\xi} + \xi)}{3 (2 - \sqrt{\xi})^2} - \frac{(26 + 7 \xi) t_{13}}{3} \\
&\quad + \frac{(26 + 7 \xi) t_3}{6} - \frac{4 (1 + \xi) t_{15}}{v} - \frac{(1 - \sqrt{\xi})^4 t_{19}}{\sqrt{\xi} v} - \frac{(1 + \sqrt{\xi})^4 t_{20}}{\sqrt{\xi} v} \\
\\
M[0, -2] &:= -\frac{t_{19}}{\sqrt{\xi} v^3} - \frac{t_{20}}{\sqrt{\xi} v^3} + \frac{8 \ln(2)}{\xi v^2} \\
&\quad - \frac{2 t_{10}}{\xi v^2} + \frac{2 t_{11}}{\xi v^2} - \frac{2 t_{12}}{\xi v^2} - \frac{4 t_2}{\xi v^2} \\
M[1, -2] &:= \frac{-2 t_{12}}{(1 + \sqrt{\xi}) \xi} - \frac{t_{15}}{v^3} - \frac{(1 + \sqrt{\xi}) t_{20}}{\sqrt{\xi} v^3} + \frac{8 \ln(2)}{\xi v^2} \\
&\quad - \frac{2 (1 + \sqrt{\xi}) t_{10}}{\xi v^2} - \frac{2 (4 - \xi) t_{13}}{\xi v^2} - \frac{4 t_2}{\xi v^2} \\
&\quad + \frac{(4 - \xi) t_3}{\xi v^2} - \frac{t_{19}}{(1 + \sqrt{\xi}) \sqrt{\xi} v} \\
M[2, -2] &:= \frac{-4}{\xi} - \frac{2 (1 - \sqrt{\xi}) t_{12}}{(1 + \sqrt{\xi}) \xi} - \frac{2 t_{15}}{v^3} - \frac{(1 + \sqrt{\xi})^2 t_{20}}{\sqrt{\xi} v^3} \\
&\quad + \frac{8 (1 + \xi) \ln(2)}{\xi v^2} - \frac{2 (1 + \sqrt{\xi})^2 t_{10}}{\xi v^2} - \frac{4 (2 + \xi) t_{13}}{\xi v^2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{4(1+\xi)t_2}{\xi v^2} + \frac{2(2+\xi)t_3}{\xi v^2} - \frac{(1-\sqrt{\xi})t_{19}}{(1+\sqrt{\xi})\sqrt{\xi}v} \\
M[3, -2] &:= \frac{2(6-3\sqrt{\xi}+\xi)(2-2v-2\xi+v\xi)}{(1-v)^2(2-\sqrt{\xi})v\xi} \\
& -\frac{2(1-\sqrt{\xi})^2t_{12}}{(1+\sqrt{\xi})\xi} - \frac{(3+\xi)t_{15}}{v^3} - \frac{(1+\sqrt{\xi})^3t_{20}}{\sqrt{\xi}v^3} \\
& +\frac{8(1+3\xi)\ln(2)}{\xi v^2} - \frac{2(1+\sqrt{\xi})^3t_{10}}{\xi v^2} + \frac{(-8-17\xi+\xi^2)t_{13}}{\xi v^2} \\
& -\frac{4(1+3\xi)t_2}{\xi v^2} - \frac{(-8-17\xi+\xi^2)t_3}{2\xi v^2} - \frac{(1-\sqrt{\xi})^2t_{19}}{(1+\sqrt{\xi})\sqrt{\xi}v} \\
M[4, -2] &:= \frac{2(4-4v-5\xi+3v\xi+\xi^2)(44-44\sqrt{\xi}+45\xi-24\xi^{\frac{3}{2}}+3\xi^2)}{3(1-v)^3(2-\sqrt{\xi})^2v\xi} \\
& -\frac{2(1-\sqrt{\xi})^3t_{12}}{(1+\sqrt{\xi})\xi} - \frac{4(1+\xi)t_{15}}{v^3} - \frac{(1+\sqrt{\xi})^4t_{20}}{\sqrt{\xi}v^3} \\
& +\frac{8(1+6\xi+\xi^2)\ln(2)}{\xi v^2} - \frac{2(1+\sqrt{\xi})^4t_{10}}{\xi v^2} - \frac{2(12+55\xi+5\xi^2)t_{13}}{3\xi v^2} \\
& -\frac{4(1+6\xi+\xi^2)t_2}{\xi v^2} + \frac{(12+55\xi+5\xi^2)t_3}{3\xi v^2} - \frac{(1-\sqrt{\xi})^3t_{19}}{(1+\sqrt{\xi})\sqrt{\xi}v} \\
M[0, 1] &:= \frac{8\ln(2)}{4-\xi} - \frac{2(1+\sqrt{\xi})t_{10}}{(2+\sqrt{\xi})\sqrt{\xi}} + \frac{2(1-\sqrt{\xi})t_{12}}{(2-\sqrt{\xi})\sqrt{\xi}} + \frac{t_{17}}{\sqrt{\xi}} + \frac{t_{18}}{\sqrt{\xi}} - \frac{4t_2}{4-\xi} \\
M[1, 1] &:= 1 - \sqrt{\xi} + \frac{8(-3+\xi)\ln(2)}{-4+\xi} - \frac{2(1+\sqrt{\xi})^2t_{10}}{(2+\sqrt{\xi})\sqrt{\xi}} - \frac{2(-1+\sqrt{\xi})^2t_{12}}{(-2+\sqrt{\xi})\sqrt{\xi}} \\
& +\frac{(-4+\xi)t_{13}}{2} - t_{14} - \frac{(-1+\sqrt{\xi})t_{17}}{\sqrt{\xi}} + \frac{(1+\sqrt{\xi})t_{18}}{\sqrt{\xi}} \\
& -\frac{4(-3+\xi)t_2}{-4+\xi} + \frac{(4-\xi)t_3}{4} \\
M[2, 1] &:= \frac{(-1+\sqrt{\xi})(-10+2\sqrt{\xi}+\xi)}{4} + \frac{8(-5+\xi)\ln(2)}{-4+\xi} - \frac{2(1+\sqrt{\xi})^3t_{10}}{(2+\sqrt{\xi})\sqrt{\xi}} \\
& +\frac{2(-1+\sqrt{\xi})^3t_{12}}{(-2+\sqrt{\xi})\sqrt{\xi}} + \frac{(-32+8\xi-\xi^2)t_{13}}{8} - 2t_{14} + \frac{(-1+\sqrt{\xi})^2t_{17}}{\sqrt{\xi}}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{(1 + \sqrt{\xi})^2 t_{18}}{\sqrt{\xi}} - \frac{4(-5 + \xi) t_2}{-4 + \xi} + \frac{(32 - 8\xi + \xi^2) t_3}{16} \\
M[3, 1] := & \frac{(1 - \sqrt{\xi}) (392 - 284\sqrt{\xi} + 52\xi - 4\xi^{\frac{3}{2}} - 3\xi^{\frac{5}{2}})}{48(2 - \sqrt{\xi})} \\
& + \frac{8(7 + 2\xi - \xi^2) \ln(2)}{4 - \xi} - \frac{2(1 + \sqrt{\xi})^4 t_{10}}{(2 + \sqrt{\xi})\sqrt{\xi}} + \frac{2(1 - \sqrt{\xi})^4 t_{12}}{(2 - \sqrt{\xi})\sqrt{\xi}} \\
& - \frac{(6 - \xi)(32 + 8\xi + \xi^2) t_{13}}{32} - (3 + \xi) t_{14} + \frac{(1 - \sqrt{\xi})^3 t_{17}}{\sqrt{\xi}} \\
& + \frac{(1 + \sqrt{\xi})^3 t_{18}}{\sqrt{\xi}} + \frac{4(7 + 2\xi - \xi^2) t_2}{4 - \xi} + \frac{(6 - \xi)(32 + 8\xi + \xi^2) t_3}{64}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
M[0, 2] := & \frac{-4(-8 + \xi^2) \ln(2)}{(-4 + \xi)^2} + \frac{(1 + \sqrt{\xi})(-6 - 2\sqrt{\xi} + \xi) t_{10}}{(2 + \sqrt{\xi})^2 \sqrt{\xi}} \\
& + \frac{(-1 + \sqrt{\xi})(-6 + 2\sqrt{\xi} + \xi) t_{12}}{(-2 + \sqrt{\xi})^2 \sqrt{\xi}} + \frac{(2 + \xi) t_{17}}{2\sqrt{\xi}} + \frac{(2 + \xi) t_{18}}{2\sqrt{\xi}} \\
& + \frac{2(-8 + \xi^2) t_2}{(-4 + \xi)^2} + \frac{2(-1 + \sqrt{\xi})(-2 + \xi)(1 + v)^2}{(-4 + \xi)\xi^2} \\
& + \frac{4(-1 + \sqrt{\xi})v(1 + v)^2}{(-4 + \xi)\xi^2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
M[1, 2] := & \frac{8(16 - 11\xi + 2\xi^2) \ln(2)}{(-4 + \xi)^2} + \frac{(1 + \sqrt{\xi})^2(-6 - 2\sqrt{\xi} + \xi) t_{10}}{(2 + \sqrt{\xi})^2 \sqrt{\xi}} \\
& - \frac{(-1 + \sqrt{\xi})^2(-6 + 2\sqrt{\xi} + \xi) t_{12}}{(-2 + \sqrt{\xi})^2 \sqrt{\xi}} - \frac{(-12 + \xi)(-4 + \xi) t_{13}}{16} \\
& + \frac{(-2 - \xi) t_{14}}{2} - \frac{(-1 + \sqrt{\xi})(2 + \xi) t_{17}}{2\sqrt{\xi}} + \frac{(1 + \sqrt{\xi})(2 + \xi) t_{18}}{2\sqrt{\xi}} \\
& - \frac{4(16 - 11\xi + 2\xi^2) t_2}{(-4 + \xi)^2} + \frac{(-12 + \xi)(-4 + \xi) t_3}{32} \\
& - \frac{(-1 + \sqrt{\xi})(-2 + \xi)(24 - 8\sqrt{\xi} - 6\xi + 2\xi^{\frac{3}{2}} + \xi^2)(1 + v)^2}{8(-4 + \xi)\xi^2} \\
& - \frac{(-1 + \sqrt{\xi})(24 - 8\sqrt{\xi} - 6\xi + 2\xi^{\frac{3}{2}} + \xi^2)v(1 + v)^2}{4(-4 + \xi)\xi^2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
M[2, 2] := & \frac{-4 (-56 + 36 \xi - 9 \xi^2 + \xi^3) \ln(2)}{(-4 + \xi)^2} + \frac{(1 + \sqrt{\xi})^3 (-6 - 2 \sqrt{\xi} + \xi) t_{10}}{(2 + \sqrt{\xi})^2 \sqrt{\xi}} \\
& + \frac{(-1 + \sqrt{\xi})^3 (-6 + 2 \sqrt{\xi} + \xi) t_{12}}{(-2 + \sqrt{\xi})^2 \sqrt{\xi}} + \frac{(-192 + 64 \xi - 4 \xi^2 + \xi^3) t_{13}}{32} \\
& + (-2 - \xi) t_{14} + \frac{(-1 + \sqrt{\xi})^2 (2 + \xi) t_{17}}{2 \sqrt{\xi}} + \frac{(1 + \sqrt{\xi})^2 (2 + \xi) t_{18}}{2 \sqrt{\xi}} \\
& + \frac{2 (-56 + 36 \xi - 9 \xi^2 + \xi^3) t_2}{(-4 + \xi)^2} + \frac{(192 - 64 \xi + 4 \xi^2 - \xi^3) t_3}{64} \\
& + \frac{(-1 + \sqrt{\xi}) (-2 + \xi) (1 + v)^2}{48 (-4 + \xi) \xi^2} (-448 + 224 \sqrt{\xi} + 144 \xi \\
& - 80 \xi^{\frac{3}{2}} - 14 \xi^2 + 6 \xi^{\frac{5}{2}} + 3 \xi^3) \\
& + \frac{(-1 + \sqrt{\xi}) v (1 + v)^2}{24 (-4 + \xi) \xi^2} (-448 + 224 \sqrt{\xi} \\
& + 144 \xi - 80 \xi^{\frac{3}{2}} - 14 \xi^2 + 6 \xi^{\frac{5}{2}} + 3 \xi^3)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
M[-1, -1] := & -\frac{1}{v \sqrt{\xi}} \left(\frac{t_{19}}{1 - \sqrt{\xi}} + \frac{t_{20}}{1 + \sqrt{\xi}} \right) + \frac{t_{16} - t_{22}}{v^3} \\
M[-2, 0] := & \frac{1}{\sqrt{\xi}} \left(\frac{t_{17}}{(1 - \sqrt{\xi})^2} + \frac{t_{18}}{(1 + \sqrt{\xi})^2} \right) + \frac{2 t_{21}}{v^4} + \frac{2 (-2 + \xi) t_3}{\xi v^3} \\
& - \frac{8 \ln(2)}{\xi v^2} + \frac{4 t_{12}}{\xi v^2} + \frac{4 t_2}{\xi v^2} \\
M[-1, 0] := & \frac{1}{\sqrt{\xi}} \left(\frac{t_{17}}{1 - \sqrt{\xi}} + \frac{t_{18}}{1 + \sqrt{\xi}} \right) + \frac{t_{21}}{v^2} \\
M[-2, 1] := & \frac{4}{(1 + \sqrt{\xi}) \xi} - \frac{2 t_{10}}{(1 + \sqrt{\xi}) (2 + \sqrt{\xi}) \sqrt{\xi}} \\
& + \frac{1}{\sqrt{\xi}} \left(\frac{t_{17}}{(1 - \sqrt{\xi})^2} + \frac{t_{18}}{(1 + \sqrt{\xi})^2} \right) + \frac{2 t_{21}}{v^4} \\
& - \frac{4 t_3}{v^3} + \frac{24 \ln(2)}{(-4 + \xi) v^2} - \frac{2 (1 + \sqrt{\xi}) t_{12}}{(-2 + \sqrt{\xi}) \sqrt{\xi} v^2} - \frac{12 t_2}{(-4 + \xi) v^2} \\
M[-1, 1] := & \frac{8 \ln(2)}{-4 + \xi} - \frac{2 t_{10}}{(2 + \sqrt{\xi}) \sqrt{\xi}} - \frac{2 t_{12}}{(-2 + \sqrt{\xi}) \sqrt{\xi}} \\
& + \frac{1}{\sqrt{\xi}} \left(\frac{t_{17}}{1 - \sqrt{\xi}} + \frac{t_{18}}{1 + \sqrt{\xi}} \right) - \frac{4 t_2}{-4 + \xi} + \frac{t_{21}}{v^2} - \frac{2 t_3}{v}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
M[-2, 2] &:= \frac{-2 \left(4 - 4\sqrt{\xi} + 2\xi + \xi^{\frac{3}{2}}\right)}{(1 + \sqrt{\xi}) (-4 + \xi) \xi} + \frac{(-6 - 2\sqrt{\xi} + \xi) t_{10}}{(1 + \sqrt{\xi}) (2 + \sqrt{\xi})^2 \sqrt{\xi}} \\
&\quad + \frac{3}{2} \left(\frac{1}{\sqrt{\xi}} \left(\frac{t_{17}}{(1 - \sqrt{\xi})^2} + \frac{t_{18}}{(1 + \sqrt{\xi})^2} \right) + \frac{2t_{21}}{v^4} \right) \\
&\quad - \frac{6t_3}{v^3} + \frac{4(-40 + 12\xi + \xi^2) \ln(2)}{(-4 + \xi)^2 v^2} \\
&\quad - \frac{(1 + \sqrt{\xi}) (-6 + 2\sqrt{\xi} + \xi) t_{12}}{(-2 + \sqrt{\xi})^2 \sqrt{\xi} v^2} - \frac{2(-40 + 12\xi + \xi^2) t_2}{(-4 + \xi)^2 v^2} \\
&\quad - \frac{v^2}{2} \left(\frac{1}{\sqrt{\xi}} \left(\frac{t_{17}}{(1 - \sqrt{\xi})^2} + \frac{t_{18}}{(1 + \sqrt{\xi})^2} \right) + \frac{2t_{21}}{v^4} \right) \\
M[-1, 2] &:= \frac{2(-1 + \sqrt{\xi})}{-4 + \xi} + \frac{8(-8 + 3\xi) \ln(2)}{(-4 + \xi)^2} + \frac{(-6 - 2\sqrt{\xi} + \xi) t_{10}}{(2 + \sqrt{\xi})^2 \sqrt{\xi}} \\
&\quad - \frac{(-6 + 2\sqrt{\xi} + \xi) t_{12}}{(-2 + \sqrt{\xi})^2 \sqrt{\xi}} - \frac{4(-8 + 3\xi) t_2}{(-4 + \xi)^2} \\
&\quad + \frac{3}{2} \left(\frac{1}{\sqrt{\xi}} \left(\frac{t_{17}}{1 - \sqrt{\xi}} + \frac{t_{18}}{1 + \sqrt{\xi}} \right) + \frac{t_{21}}{v^2} \right) \\
&\quad - \frac{3t_3}{v} - \frac{v^2}{2} \left(\frac{1}{\sqrt{\xi}} \left(\frac{t_{17}}{1 - \sqrt{\xi}} + \frac{t_{18}}{1 + \sqrt{\xi}} \right) + \frac{t_{21}}{v^2} \right)
\end{aligned}$$

C.8.4 Integrale der Familie L

$$\begin{aligned}
L[0, 0] &:= \frac{2}{(2 - \sqrt{\xi}) \sqrt{\xi}} + \frac{2}{(2 - \sqrt{\xi}) \sqrt{\xi}} \ln \left(\frac{1 - c}{1 - x} \right) + \frac{2 \ln(2)}{(2 + \sqrt{\xi}) \sqrt{\xi}} \\
&\quad - \frac{t_{10}}{(2 + \sqrt{\xi}) \sqrt{\xi}} - \frac{4(2 + \sqrt{\xi} + \xi) t_{13}}{(4 - \xi) \xi} + \frac{2t_3}{(4 - \xi) \sqrt{\xi}} \\
L[1, 0] &:= \frac{2(1 - \sqrt{\xi})}{(2 - \sqrt{\xi}) \sqrt{\xi}} + \frac{2(1 - \sqrt{\xi})}{(2 - \sqrt{\xi}) \sqrt{\xi}} \ln \left(\frac{1 - c}{1 - x} \right) + \frac{2(1 + \sqrt{\xi}) \ln(2)}{(2 + \sqrt{\xi}) \sqrt{\xi}} \\
&\quad - \frac{(1 + \sqrt{\xi}) t_{10}}{(2 + \sqrt{\xi}) \sqrt{\xi}} - \frac{2(4 + 2\sqrt{\xi} - 4\xi - \xi^{\frac{3}{2}}) t_{13}}{(4 - \xi) \xi} + \frac{(2 - \xi) t_3}{(4 - \xi) \sqrt{\xi}} \\
L[2, 0] &:= \frac{2(1 - \sqrt{\xi})^2}{(2 - \sqrt{\xi}) \sqrt{\xi}} + \frac{2(1 - \sqrt{\xi})^2}{(2 - \sqrt{\xi}) \sqrt{\xi}} \ln \left(\frac{1 - c}{1 - x} \right) + \frac{2(1 + \sqrt{\xi})^2 \ln(2)}{(2 + \sqrt{\xi}) \sqrt{\xi}}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{(1+\sqrt{\xi})^2 t_{10}}{(2+\sqrt{\xi})\sqrt{\xi}} - \frac{4(2+\sqrt{\xi}-3\xi+\xi^2)t_{13}}{(4-\xi)\xi} + t_{14} + \frac{2t_3}{(4-\xi)\sqrt{\xi}} \\
L[3, 0] &:= \frac{2(1-\sqrt{\xi})^3}{(2-\sqrt{\xi})\sqrt{\xi}} \ln\left(\frac{1-c}{1-x}\right) + \frac{2(1-\sqrt{\xi})(1-4\sqrt{\xi}+2\xi)}{(2-\sqrt{\xi})\sqrt{\xi}} \\
& + \frac{2(1+\sqrt{\xi})^3 \ln(2)}{(2+\sqrt{\xi})\sqrt{\xi}} - \frac{(1+\sqrt{\xi})^3 t_{10}}{(2+\sqrt{\xi})\sqrt{\xi}} + \frac{(2+3\xi+\xi^2)t_3}{(4-\xi)\sqrt{\xi}} \\
& - \frac{(8+4\sqrt{\xi}+6\xi^{\frac{3}{2}}-6\xi^2-2\xi^{\frac{5}{2}}+\xi^3)t_{13}}{(4-\xi)\xi} + 3t_{14} + v \\
L[4, 0] &:= \frac{2(1-\sqrt{\xi})^4}{(2-\sqrt{\xi})\sqrt{\xi}} \ln\left(\frac{1-c}{1-x}\right) + \frac{(1-\sqrt{\xi})(8-76\sqrt{\xi}+50\xi-8\xi^{\frac{3}{2}}+\xi^2)}{4(2-\sqrt{\xi})\sqrt{\xi}} \\
& + \frac{2(1+\sqrt{\xi})^4 \ln(2)}{(2+\sqrt{\xi})\sqrt{\xi}} - \frac{(1+\sqrt{\xi})^4 t_{10}}{(2+\sqrt{\xi})\sqrt{\xi}} \\
& - \frac{(64+32\sqrt{\xi}+256\xi+128\xi^{\frac{3}{2}}-312\xi^2-32\xi^{\frac{5}{2}}+68\xi^3-\xi^4)t_{13}}{8(4-\xi)\xi} \\
& + \frac{3(4+\xi)t_{14}}{2} + \frac{2(1+4\xi-\xi^2)t_3}{(4-\xi)\sqrt{\xi}} + \frac{(26-\xi)v}{8} \\
L[0, -1] &:= \frac{2(1+\sqrt{\xi})}{\xi v^2} + \frac{2(1+\sqrt{\xi})}{\xi v^2} \left(\ln\left(\frac{1-c}{1-x}\right) - t_{13} \right) \\
& + \frac{2}{\sqrt{\xi}(1+\sqrt{\xi}-v)(1+\sqrt{\xi}+v)} (t_{10} - 2\ln(2)) \\
& - t_3 \left(\frac{1}{\xi(1+\sqrt{\xi}+v)} \right) \left(1 + \frac{v}{(1+\sqrt{\xi})} \right) \\
L[1, -1] &:= \frac{2}{\xi} + \frac{2}{\xi} \ln\left(\frac{1-c}{1-x}\right) - \frac{2t_{13}}{\xi} - t_3 \left(\frac{1+\sqrt{\xi}+v}{\xi(1+\sqrt{\xi}+v)} \right) \\
& + \frac{2(1+\sqrt{\xi})}{\sqrt{\xi}(1+\sqrt{\xi}-v)(1+\sqrt{\xi}+v)} (t_{10} - 2\ln(2)) \\
L[2, -1] &:= \frac{2(1-\sqrt{\xi})}{\xi} + \frac{2(1-\sqrt{\xi})}{\xi} \left(\ln\left(\frac{1-c}{1-x}\right) - t_{13} \right) \\
& + \frac{t_{15}}{v} + \frac{2(1+\sqrt{\xi})^2}{\sqrt{\xi}(1+\sqrt{\xi}-v)(1+\sqrt{\xi}+v)} (t_{10} - 2\ln(2))
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -t_3 \left(\left(\frac{(1+\sqrt{\xi})^2}{\xi(1+\sqrt{\xi}+v)} \right) + \frac{(1+\sqrt{\xi})v}{\xi(1+\sqrt{\xi}+v)} \right) \\
L[3, -1] &:= \frac{2(1-\sqrt{\xi})^2}{\xi} + \frac{2(1-\sqrt{\xi})^2}{\xi} \ln\left(\frac{1-c}{1-x}\right) - \frac{2(1-2\sqrt{\xi}+2\xi)t_{13}}{\xi} \\
& + \frac{3t_{15}}{v} - \frac{4(1+\sqrt{\xi})^3 \ln(2)}{\sqrt{\xi}(1+\sqrt{\xi}-v)(1+\sqrt{\xi}+v)} \\
& + \frac{2(1+\sqrt{\xi})^3 t_{10}}{\sqrt{\xi}(1+\sqrt{\xi}-v)(1+\sqrt{\xi}+v)} \\
& + t_3 \left(- \left(\frac{(1+\sqrt{\xi})(1+2\sqrt{\xi}+2\xi)}{\xi(1+\sqrt{\xi}+v)} \right) - \frac{(1+2\sqrt{\xi}+2\xi)v}{\xi(1+\sqrt{\xi}+v)} \right) \\
L[4, -1] &:= \frac{2(1-\sqrt{\xi})^3}{\xi} \ln\left(\frac{1-c}{1-x}\right) + \frac{2(1-\sqrt{\xi})^2(2-3\sqrt{\xi}+2\xi)}{(2-\sqrt{\xi})\xi} \\
& + \frac{(-2+6\sqrt{\xi}-13\xi+2\xi^{\frac{3}{2}})t_{13}}{\xi} + \frac{3(4+\xi)t_{15}}{2v} \\
& - \frac{4(1+\sqrt{\xi})^4 \ln(2)}{\sqrt{\xi}(1+\sqrt{\xi}-v)(1+\sqrt{\xi}+v)} + \frac{2(1+\sqrt{\xi})^4 t_{10}}{\sqrt{\xi}(1+\sqrt{\xi}-v)(1+\sqrt{\xi}+v)} \\
& - \frac{(2+6\sqrt{\xi}+13\xi+2\xi^{\frac{3}{2}})t_3}{2\xi} \\
\\
L[0, -2] &:= \frac{2((2-\sqrt{\xi})(1+\sqrt{\xi})^2)}{\xi^{3/2}v^4} \ln\left(\frac{1-c}{1-x}\right) - \frac{2(2-\sqrt{\xi})(1+\sqrt{\xi})^2 t_{13}}{\xi^{3/2}v^4} \\
& + \frac{2t_{11}}{\xi v^3} - \frac{4t_2}{\xi v^3} - \frac{2(2+\sqrt{\xi})t_{10}}{(1+\sqrt{\xi})\xi(1+\sqrt{\xi}-v)(1+\sqrt{\xi}+v)} \\
& + \frac{2(-1-4\sqrt{\xi}+\xi-v+\sqrt{\xi}v)}{\xi(-1+\sqrt{\xi}-v)v^3} \\
& + \frac{t_3(2-5\sqrt{\xi}-7\xi+\xi^{3/2}+\xi^2+2v-5\sqrt{\xi}v-5\xi v)}{(1+\sqrt{\xi})\xi^{3/2}v^3(1+v)} \\
& + \frac{\ln(2)}{(1+\sqrt{\xi}-v)(1+\sqrt{\xi}+v)} \left(\frac{4(2+\sqrt{\xi})}{(1+\sqrt{\xi})\xi} + \frac{16(1+\sqrt{\xi})}{\sqrt{\xi}v^3} \right) \\
L[1, -2] &:= \frac{2(2-\sqrt{\xi})(1+\sqrt{\xi})}{\xi^{\frac{3}{2}}v^2} \ln\left(\frac{1-c}{1-x}\right) + \frac{2(1+\sqrt{\xi})}{\xi v^2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{2 \left(-2 + \sqrt{\xi} \right) \left(1 + \sqrt{\xi} \right) t_{13}}{\xi^{\frac{3}{2}} v^2} + \frac{4 \left(2 + \sqrt{\xi} \right) \ln(2)}{\xi \left(1 + \sqrt{\xi} - v \right) \left(1 + \sqrt{\xi} + v \right)} \\
& - \frac{2 \left(2 + \sqrt{\xi} \right) t_{10}}{\xi \left(1 + \sqrt{\xi} - v \right) \left(1 + \sqrt{\xi} + v \right)} \\
& + t_3 \left(\frac{2 + \sqrt{\xi}}{\xi^{\frac{3}{2}} \left(1 + \sqrt{\xi} + v \right)} + \frac{\left(2 + \sqrt{\xi} \right) v}{\left(1 + \sqrt{\xi} \right) \xi^{\frac{3}{2}} \left(1 + \sqrt{\xi} + v \right)} \right) \\
L[2, -2] := & \frac{2 \left(2 - \sqrt{\xi} \right)}{\xi^{\frac{3}{2}}} \ln \left(\frac{1-c}{1-x} \right) + \frac{t_{15}}{v^3} + \frac{2 \left(-2 + \sqrt{\xi} \right) \left(1 + 2 \sqrt{\xi} \right) t_{13}}{\xi^{\frac{3}{2}} v^2} \\
& + \frac{4 \left(1 + \sqrt{\xi} \right) \left(2 + \sqrt{\xi} \right) \ln(2)}{\xi \left(1 + \sqrt{\xi} - v \right) \left(1 + \sqrt{\xi} + v \right)} - \frac{2 \left(1 + \sqrt{\xi} \right) \left(2 + \sqrt{\xi} \right) t_{10}}{\xi \left(1 + \sqrt{\xi} - v \right) \left(1 + \sqrt{\xi} + v \right)} \\
& - \frac{2 \left(1 - 2 \sqrt{\xi} + \xi + v + \sqrt{\xi} v \right)}{\xi \left(-1 + \sqrt{\xi} - v \right) v} \\
& + t_3 \left(- \left(\frac{\left(1 + \sqrt{\xi} \right) \left(-2 + \sqrt{\xi} + 2 \xi \right)}{\xi^{\frac{3}{2}} v^2 \left(1 + \sqrt{\xi} + v \right)} \right) - \frac{-2 + \sqrt{\xi} + 2 \xi}{\xi^{\frac{3}{2}} v \left(1 + \sqrt{\xi} + v \right)} \right) \\
L[3, -2] := & \frac{2 \left(2 - \sqrt{\xi} \right) \left(1 - \sqrt{\xi} \right)}{\xi^{\frac{3}{2}}} \ln \left(\frac{1-c}{1-x} \right) + \frac{3 t_{15}}{v^3} \\
& + \frac{2 \left(-2 - 5 \sqrt{\xi} + \xi - 4 \xi^{\frac{3}{2}} + \xi^2 \right) t_{13}}{\xi^{\frac{3}{2}} v^2} + \frac{4 \left(1 + \sqrt{\xi} \right)^2 \left(2 + \sqrt{\xi} \right) \ln(2)}{\xi \left(1 + \sqrt{\xi} - v \right) \left(1 + \sqrt{\xi} + v \right)} \\
& - \frac{2 \left(1 + \sqrt{\xi} \right)^2 \left(2 + \sqrt{\xi} \right) t_{10}}{\xi \left(1 + \sqrt{\xi} - v \right) \left(1 + \sqrt{\xi} + v \right)} - \frac{6 \left(1 - 3 \sqrt{\xi} + \xi + \xi^{\frac{3}{2}} + v + \xi v \right)}{\xi \left(-1 + \sqrt{\xi} - v \right) v} \\
& - t_3 \left(\left(\frac{\left(1 + \sqrt{\xi} \right)}{v} + 1 \right) \frac{\left(2 + \sqrt{\xi} \right) \left(-1 + \sqrt{\xi} + \xi^{\frac{3}{2}} \right)}{\xi^{\frac{3}{2}} v \left(1 + \sqrt{\xi} + v \right)} \right) \\
L[4, -2] := & \frac{2 \left(2 - \sqrt{\xi} \right) \left(1 - \sqrt{\xi} \right)^2}{\xi^{\frac{3}{2}}} \ln \left(\frac{1-c}{1-x} \right) + \frac{3 \left(4 + \xi \right) t_{15}}{2 v^3} \\
& + \frac{\left(-4 - 14 \sqrt{\xi} - 4 \xi - 31 \xi^{\frac{3}{2}} + 8 \xi^2 \right) t_{13}}{\xi^{\frac{3}{2}} v^2} \\
& + \frac{4 \left(1 + \sqrt{\xi} \right)^3 \left(2 + \sqrt{\xi} \right) \ln(2)}{\xi \left(1 + \sqrt{\xi} - v \right) \left(1 + \sqrt{\xi} + v \right)} - \frac{2 \left(1 + \sqrt{\xi} \right)^3 \left(2 + \sqrt{\xi} \right) t_{10}}{\xi \left(1 + \sqrt{\xi} - v \right) \left(1 + \sqrt{\xi} + v \right)} \\
& - \frac{2 \left(-12 + 44 \sqrt{\xi} - 34 \xi + \xi^2 + \xi^{\frac{5}{2}} - 12 v + 12 \sqrt{\xi} v - 24 \xi v + 8 \xi^{\frac{3}{2}} v + \xi^2 v \right)}{\left(-2 + \sqrt{\xi} \right) \xi \left(-1 + \sqrt{\xi} - v \right) v}
\end{aligned}$$

$$-t_3 \left(\frac{(1 + \sqrt{\xi})}{v} + 1 \right) \frac{(2 + \sqrt{\xi}) (-2 + 2\sqrt{\xi} - 3\xi + 8\xi^{\frac{3}{2}})}{2\xi^{\frac{3}{2}}v(1 + \sqrt{\xi} + v)}$$

$$\begin{aligned} L[0, 1] := & \frac{-2 \ln\left(\frac{1-c}{1-x}\right) (-1 + \sqrt{\xi})}{(-2 + \sqrt{\xi})^2} - \frac{2(1 + \sqrt{\xi}) \ln(2)}{(2 + \sqrt{\xi})^2} + \frac{(1 + \sqrt{\xi}) t_{10}}{(2 + \sqrt{\xi})^2} \\ & + \frac{2(-16 - 4\xi + 8\xi^2 + \xi^{\frac{5}{2}}) t_{13}}{(-4 + \xi)^2 \xi} - \frac{\xi^{\frac{3}{2}} t_3}{(-4 + \xi)^2} \\ & + \frac{2(-1 + \sqrt{\xi}) (4 + 4\sqrt{\xi} - 4v - 2\sqrt{\xi}v + \xi v)}{(-4 + \xi) \xi v} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} L[1, 1] := & \frac{2 \ln\left(\frac{1-c}{1-x}\right) (-1 + \sqrt{\xi})^2}{(-2 + \sqrt{\xi})^2} - \frac{2(1 + \sqrt{\xi})^2 \ln(2)}{(2 + \sqrt{\xi})^2} + \frac{(1 + \sqrt{\xi})^2 t_{10}}{(2 + \sqrt{\xi})^2} \\ & - \frac{4(8 - 6\xi - 2\xi^{\frac{3}{2}} + \xi^{\frac{5}{2}} + \xi^3) t_{13}}{(-4 + \xi)^2 \xi} + \frac{2(-2 + \xi) \sqrt{\xi} t_3}{(-4 + \xi)^2} \\ & + \frac{2(-1 + \sqrt{\xi}) (4 + 4\sqrt{\xi} - 2\xi - 2\xi^{\frac{3}{2}} - 4v - 2\sqrt{\xi}v + \xi v + \xi^{\frac{3}{2}}v)}{(-4 + \xi) \xi v} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} L[2, 1] := & \frac{-2 \ln\left(\frac{1-c}{1-x}\right) (-1 + \sqrt{\xi})^3}{(-2 + \sqrt{\xi})^2} - \frac{2(1 + \sqrt{\xi})^3 \ln(2)}{(2 + \sqrt{\xi})^2} + \frac{(1 + \sqrt{\xi})^3 t_{10}}{(2 + \sqrt{\xi})^2} \\ & + \frac{(-32 - 8\xi + 16\xi^{\frac{3}{2}} + 8\xi^2 - 10\xi^{\frac{5}{2}} - 2\xi^3 + 2\xi^{\frac{7}{2}} + \xi^4) t_{13}}{(-4 + \xi)^2 \xi} \\ & + t_{14} - \frac{\sqrt{\xi} (8 - 5\xi + \xi^2) t_3}{(-4 + \xi)^2} - \frac{(1 - \sqrt{\xi})}{(4 - \xi) \xi v} \times (-8 - 8\sqrt{\xi} \\ & - 4\xi - 4\xi^{\frac{3}{2}} + \xi^2 + \xi^{\frac{5}{2}} + 8v + 4\sqrt{\xi}v + 14\xi v - 4\xi^2 v) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} L[3, 1] := & \frac{2 \ln\left(\frac{1-c}{1-x}\right) (-1 + \sqrt{\xi})^4}{(-2 + \sqrt{\xi})^2} - \frac{2(1 + \sqrt{\xi})^4 \ln(2)}{(2 + \sqrt{\xi})^2} + \frac{(1 + \sqrt{\xi})^4 t_{10}}{(2 + \sqrt{\xi})^2} \\ & - \frac{(128 + 544\xi - 96\xi^{\frac{3}{2}} - 352\xi^2 + 32\xi^{\frac{5}{2}} + 64\xi^3 - 4\xi^4 + \xi^5) t_{13}}{4(-4 + \xi)^2 \xi} \\ & + 3t_{14} - \frac{4(3 - \xi) \sqrt{\xi} t_3}{(4 - \xi)^2} + \frac{(1 - \sqrt{\xi})}{4(4 - \xi) \xi v} (32 + 32\sqrt{\xi} \\ & + 136\xi + 136\xi^{\frac{3}{2}} - 42\xi^2 - 42\xi^{\frac{5}{2}} + \xi^3 + \xi^{\frac{7}{2}} - 32v \\ & - 16\sqrt{\xi}v - 232\xi v - 40\xi^{\frac{3}{2}}v + 52\xi^2 v + 12\xi^{\frac{5}{2}}v + 2\xi^3 v) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
L[0, 2] &:= \frac{-2 \ln\left(\frac{1-c}{1-x}\right) (-1 + \sqrt{\xi})^2 \sqrt{\xi}}{(-2 + \sqrt{\xi})^3} + \frac{(1 + \sqrt{\xi})^2 \sqrt{\xi}}{(2 + \sqrt{\xi})^3} (2 \ln(2) - t_{10}) \\
&\quad + \frac{4 \left(32 + 8\xi + 4\xi^{\frac{3}{2}} - 24\xi^2 - 5\xi^{\frac{5}{2}} + 7\xi^3 + 2\xi^{\frac{7}{2}} + \xi^4\right) t_{13}}{(-2 + \sqrt{\xi})^3 (2 + \sqrt{\xi})^3 \xi} \\
&\quad + \frac{2\sqrt{\xi} (4 - 5\xi + 2\xi^2) t_3}{(2 - \sqrt{\xi})^3 (2 + \sqrt{\xi})^3} + \frac{2 (1 - \sqrt{\xi}) (1 + v)^2}{(2 - \sqrt{\xi})^3 (2 + \sqrt{\xi})^2 \xi^3 v} \\
&\quad (192 + 64\sqrt{\xi} - 272\xi - 40\xi^{\frac{3}{2}} + 100\xi^2 - 20\xi^{\frac{5}{2}} + 12\xi^{\frac{7}{2}} - 4\xi^4 \\
&\quad - 192v - 64\sqrt{\xi}v + 176\xi v + 8\xi^{\frac{3}{2}}v - 36\xi^2v + 20\xi^{\frac{5}{2}}v \\
&\quad - 4\xi^3v - 5\xi^{\frac{7}{2}}v + \xi^4v) \\
L[1, 2] &:= \frac{2 (1 - \sqrt{\xi})^3 \sqrt{\xi}}{(2 - \sqrt{\xi})^3} \ln\left(\frac{1-c}{1-x}\right) + \frac{(1 + \sqrt{\xi})^3 \sqrt{\xi} \ln(2)}{(2 + \sqrt{\xi})^3} (2 \ln(2) - t_{10}) \\
&\quad - \frac{2 \left(-64 + 48\xi - 8\xi^{\frac{3}{2}} + 24\xi^2 + 6\xi^{\frac{5}{2}} - 32\xi^3 - 3\xi^{\frac{7}{2}} + 9\xi^4 + \xi^{\frac{9}{2}}\right) t_{13}}{(-2 + \sqrt{\xi})^3 (2 + \sqrt{\xi})^3 \xi} \\
&\quad + \frac{(2 - \xi) \sqrt{\xi} (4 - \xi + \xi^2) t_3}{(2 - \sqrt{\xi})^3 (2 + \sqrt{\xi})^3} - \frac{2 (1 - \sqrt{\xi}) (2 - \xi) (1 + v)^2}{(2 - \sqrt{\xi})^3 (2 + \sqrt{\xi})^2 \xi^3 v} \times \\
&\quad (-96 - 32\sqrt{\xi} + 160\xi + 40\xi^{\frac{3}{2}} - 84\xi^2 - 11\xi^{\frac{5}{2}} + 15\xi^3 - 2\xi^{\frac{7}{2}} + 96v \\
&\quad + 32\sqrt{\xi}v - 112\xi v - 24\xi^{\frac{3}{2}}v + 40\xi^2v + \xi^{\frac{5}{2}}v - 4\xi^3v + \xi^{\frac{7}{2}}v) \\
L[2, 2] &:= \frac{-2 \ln\left(\frac{1-c}{1-x}\right) (-1 + \sqrt{\xi})^4 \sqrt{\xi}}{(-2 + \sqrt{\xi})^3} + \frac{(1 + \sqrt{\xi})^4 \sqrt{\xi}}{(2 + \sqrt{\xi})^3} (2 \ln(2) - t_{10}) \\
&\quad - \frac{t_{13}}{8 (-2 + \sqrt{\xi})^3 (2 + \sqrt{\xi})^3 \xi} (-1024 - 768\xi - 128\xi^{\frac{3}{2}} \\
&\quad + 1920\xi^2 - 96\xi^{\frac{5}{2}} - 1152\xi^3 + 128\xi^{\frac{7}{2}} + 360\xi^4 - 32\xi^{\frac{9}{2}} - 60\xi^5 + \xi^6) \\
&\quad + \frac{(2 + \xi) t_{14}}{2} - \frac{2\sqrt{\xi} (4 + 3\xi - 4\xi^2 + \xi^3) t_3}{(-2 + \sqrt{\xi})^3 (2 + \sqrt{\xi})^3} \\
&\quad - \frac{(-1 + \sqrt{\xi}) (1 + v)^2}{8 (-2 + \sqrt{\xi})^3 (2 + \sqrt{\xi})^2 \xi^3 v} \times (-3072 - 1024\sqrt{\xi} \\
&\quad + 3968\xi + 2240\xi^{\frac{3}{2}} - 1600\xi^2 - 2208\xi^{\frac{5}{2}} + 712\xi^3 + 868\xi^{\frac{7}{2}} \\
&\quad - 292\xi^4 - 112\xi^{\frac{9}{2}} + 42\xi^5 - 5\xi^{\frac{11}{2}} + \xi^6 + 3072v + 1024\sqrt{\xi}v \\
&\quad - 2432\xi v - 1728\xi^{\frac{3}{2}}v + 768\xi^2v + 1408\xi^{\frac{5}{2}}v - 360\xi^3v)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
L[-1, -1] &:= \frac{-468 \xi^{\frac{7}{2}} v + 128 \xi^4 v + 46 \xi^{\frac{9}{2}} v - 14 \xi^5 v + 2 \xi^{\frac{11}{2}} v}{\xi v^4} + \frac{2 \ln\left(\frac{1-c}{1-x}\right) (1 + \sqrt{\xi})^2}{\xi v^4} - \frac{2 (1 + \sqrt{\xi})^2 t_{13}}{\xi v^4} \\
&\quad + \frac{t_{16}}{v^4} - \frac{4 \ln(2)}{(1 + \sqrt{\xi}) \sqrt{\xi} (1 + \sqrt{\xi} - v) (1 + \sqrt{\xi} + v)} \\
&\quad + \frac{2 t_{10}}{(1 + \sqrt{\xi}) \sqrt{\xi} (1 + \sqrt{\xi} - v) (1 + \sqrt{\xi} + v)} \\
&\quad - \frac{2 t_3}{(1 + \sqrt{\xi}) \sqrt{\xi} (1 + \sqrt{\xi} - v) (1 + \sqrt{\xi} + v)} \\
L[-2, 0] &:= \frac{2 \ln(2)}{(1 + \sqrt{\xi})^2 (2 + \sqrt{\xi}) \sqrt{\xi}} - \frac{t_{10}}{(1 + \sqrt{\xi})^2 (2 + \sqrt{\xi}) \sqrt{\xi}} + \frac{4 t_{12}}{(1 - \xi)^{\frac{3}{2}} \xi} \\
&\quad + \frac{3 t_{15}}{v^5} - \frac{2 (1 + \sqrt{\xi})^2}{(-2 + \sqrt{\xi}) \sqrt{\xi} v^4} - \frac{2 \ln\left(\frac{1-c}{1-x}\right) (1 + \sqrt{\xi})^2}{(-2 + \sqrt{\xi}) \sqrt{\xi} v^4} \\
&\quad + \frac{2 (20 + 2 \sqrt{\xi} + 10 \xi + 4 \xi^{\frac{3}{2}} + 3 \xi^2) t_{13}}{(-4 + \xi) \xi v^4} \\
&\quad + \frac{t_3 (16 - 20 \xi + 4 \xi^2 + 8 v - 2 \sqrt{\xi} v - 6 \xi v - 4 \xi^{\frac{3}{2}} v + \xi^2 v)}{(-4 + \xi) \xi v^5} \\
L[-1, 0] &:= \frac{2 \ln(2)}{(1 + \sqrt{\xi}) (2 + \sqrt{\xi}) \sqrt{\xi}} - \frac{t_{10}}{(1 + \sqrt{\xi}) (2 + \sqrt{\xi}) \sqrt{\xi}} + \frac{t_{15}}{v^3} \\
&\quad - \frac{2 (1 + \sqrt{\xi})}{(-2 + \sqrt{\xi}) \sqrt{\xi} v^2} - \frac{2 \ln\left(\frac{1-c}{1-x}\right) (1 + \sqrt{\xi})}{(-2 + \sqrt{\xi}) \sqrt{\xi} v^2} \\
&\quad + \frac{2 (4 + 2 \sqrt{\xi} + 8 \xi + \xi^{\frac{3}{2}}) t_{13}}{(-4 + \xi) \xi v^2} - \frac{(2 + \xi) t_3}{(-4 + \xi) \sqrt{\xi} v^2} \\
L[-2, 1] &:= \frac{-2 \ln(2)}{(1 + \sqrt{\xi}) (2 + \sqrt{\xi})^2} + \frac{t_{10}}{(1 + \sqrt{\xi}) (2 + \sqrt{\xi})^2} + \frac{3 t_{15}}{v^5} \\
&\quad + \frac{2 (-16 - 132 \xi - 8 \xi^{\frac{3}{2}} + 60 \xi^2 + 7 \xi^{\frac{5}{2}} + 7 \xi^3 + \xi^{\frac{7}{2}}) t_{13}}{(-4 + \xi)^2 \xi v^4} \\
&\quad - \frac{(48 - 8 \sqrt{\xi} - 24 \xi + 7 \xi^{\frac{3}{2}} + 3 \xi^2 + \xi^{\frac{5}{2}}) t_3}{(-4 + \xi)^2 v^4} \\
&\quad - \frac{4 t_{12} ((1 - \xi)^{\frac{3}{2}} - v + \xi v)}{(1 - \xi)^{\frac{3}{2}} \xi v^3} + \frac{2 (1 + \sqrt{\xi})}{(2 - \sqrt{\xi})^2 v^2} \ln\left(\frac{1-c}{1-x}\right) \\
&\quad + \frac{2 (12 + 6 \xi - 4 v - 6 \sqrt{\xi} v - 5 \xi v + 3 \xi^{\frac{3}{2}} v)}{(4 - \xi) \xi v^3}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
L[-1, 1] &:= \frac{2}{(-2 + \sqrt{\xi})^2} \ln\left(\frac{1-c}{1-x}\right) - \frac{2 \ln(2)}{(2 + \sqrt{\xi})^2} + \frac{t_{10}}{(2 + \sqrt{\xi})^2} \\
&\quad + \frac{2 \left(-16 - 36\xi - 4\xi^{\frac{3}{2}} + 24\xi^2 + 4\xi^{\frac{5}{2}} + \xi^3\right) t_{13}}{(-4 + \xi)^2 \xi v^2} \\
&\quad - \frac{\left(16 - 4\sqrt{\xi} - 8\xi + 4\xi^{\frac{3}{2}} + \xi^2\right) t_3}{(-4 + \xi)^2 v^2} + \frac{t_{15}}{v^3} \\
&\quad + \frac{2 \left(-4 - 2\xi + 4v - 2\sqrt{\xi}v + \xi v\right)}{(-4 + \xi) \xi v} \\
L[-2, 2] &:= \frac{2 \sqrt{\xi}}{(2 - \sqrt{\xi})^3} \ln\left(\frac{1-c}{1-x}\right) + \frac{2 \sqrt{\xi} \ln(2)}{(2 + \sqrt{\xi})^3} - \frac{\sqrt{\xi} t_{10}}{(2 + \sqrt{\xi})^3} + \frac{9 t_{15}}{2 v^5} \\
&\quad - \frac{t_{13}}{(2 - \sqrt{\xi})^3 (2 + \sqrt{\xi})^3 \xi v^4} (128 + 1376\xi + 16\xi^{\frac{3}{2}} \\
&\quad - 880\xi^2 - 20\xi^{\frac{5}{2}} + 40\xi^3 - 8\xi^{\frac{7}{2}} + 61\xi^4 + 12\xi^{\frac{9}{2}} + 4\xi^5) \\
&\quad - \frac{t_3}{2(-2 + \sqrt{\xi})^3 (2 + \sqrt{\xi})^3 v^4} (-576 + 16\sqrt{\xi} + 432\xi \\
&\quad - 20\xi^{\frac{3}{2}} - 108\xi^2 - 8\xi^{\frac{5}{2}} + 9\xi^3 + 12\xi^{\frac{7}{2}}) - \frac{3 t_{15}}{2 v^3} \\
&\quad + \frac{2 \left(48 + 24\sqrt{\xi} + 76\xi - 46\xi^{\frac{3}{2}} - 36\xi^2 + 21\xi^{\frac{5}{2}} - 7\xi^3 + \xi^{\frac{7}{2}}\right)}{(-2 + \sqrt{\xi})^3 (2 + \sqrt{\xi})^2 \xi v^2} \\
&\quad - \frac{2(-40 - 82\xi + 41\xi^2) v}{(-4 + \xi)^2 (-1 + \xi)^2 \xi} - \frac{2(2 + \xi) t_{12} \left((1 - \xi)^{\frac{3}{2}} - v + \xi v\right)}{(1 - \xi)^{\frac{3}{2}} \xi v^3} \\
L[-1, 2] &:= \frac{2(1 - \sqrt{\xi}) \sqrt{\xi}}{(2 - \sqrt{\xi})^3} \ln\left(\frac{1-c}{1-x}\right) + \frac{(1 + \sqrt{\xi}) \sqrt{\xi}}{(2 + \sqrt{\xi})^3} (2 \ln(2) - t_{10}) \\
&\quad + \frac{2 \left(48 - 40\sqrt{\xi} + 28\xi + 10\xi^{\frac{3}{2}} - 24\xi^2 + 5\xi^{\frac{5}{2}}\right)}{(-2 + \sqrt{\xi})^3 (2 + \sqrt{\xi})^2 \xi} + \frac{3 t_{15}}{2 v^3} \\
&\quad - \frac{t_{13}}{(2 - \sqrt{\xi})^3 (2 + \sqrt{\xi})^3 \xi v^2} \times \\
&\quad \left(128 + 352\xi + 16\xi^{\frac{3}{2}} - 288\xi^2 - 28\xi^{\frac{5}{2}} + 28\xi^3 + 10\xi^{\frac{7}{2}} + 23\xi^4 + 2\xi^{\frac{9}{2}}\right) \\
&\quad + \frac{\left(-192 + 16\sqrt{\xi} + 144\xi - 28\xi^{\frac{3}{2}} - 36\xi^2 + 10\xi^{\frac{5}{2}} + 3\xi^3 + 2\xi^{\frac{7}{2}}\right) t_3}{2(2 - \sqrt{\xi})^3 (2 + \sqrt{\xi})^3 v^2} \\
&\quad + \frac{2(24 + 14\xi - 11\xi^2)}{(4 - \xi)^2 \xi v} - \frac{t_{15}}{2 v}
\end{aligned}$$

Literaturverzeichnis

- [1] H. Fritzsch, M. Gell-Mann and H. Leutwyler, *Phys. Lett.* **47 B** (1973) 365.
- [2] S.L. Glashow, *Nucl. Phys.* **22** (1961) 579; S. Weinberg, *Phys. Rev. Lett* **19** (1967) 1264; A. Salam, in: N. Svartholm (Ed.), *Elementary particle Theory*, Almqvistand Wiksells, Stockholm, (1968).
- [3] P.W. Higgs, *Phys. Rev. Lett.* **12** (1964) 132; *Phys. Rev.* **145** (1966) 1156; F. Englert and R. Brout, *Phys. Rev. Lett.* **13** (1964) 321; G.S. Guralnik, C.R. Hagen and T.W. Kibble, *Phys. Rev. Lett.* **13** (1964) 585.
- [4] J. Ellis, G. Ganis, D. V. Nanopoulos and K. A. Olive, hep-ph/0009355.
- [5] G. L. Kane, S. F. King and L. Wang, hep-ph/0010312.
- [6] F. Abe *et al.* [CDF Collaboration], *Phys. Rev. Lett.* **74** (1995) 2626.
- [7] S. Abachi *et al.* [D0 Collaboration], *Phys. Rev. Lett.* **74** (1995) 2632.
- [8] C. Caso *et al.*, *Eur. Phys. J.* **C3** (1998) 1.
- [9] M. Beneke *et al.*, hep-ph/0003033.
- [10] F. Abe *et al.* [CDF Collaboration], *Phys. Rev.* **D59**, 092001 (1999).
- [11] S. Abachi *et al.* [D0 Collaboration], *Phys. Rev. Lett.* **79**, 1197 (1997); B. Abbott *et al.* [D0 Collaboration], *Phys. Rev. Lett.* **80**, 2063 (1998); *Phys. Rev.* **D58**, 052001 (1998); *Phys. Rev.* **D60**, 052001 (1999).
- [12] F. Abe *et al.* [CDF Collaboration], *Phys. Rev. Lett.* **80**, 2767 (1998); *Phys. Rev. Lett.* **80**, 2779 (1998); *Phys. Rev. Lett.* **82**, 271 (1999).
- [13] S. Abachi *et al.* [D0 Collaboration], *Phys. Rev. Lett.* **79**, 1203 (1997).
- [14] F. Abe *et al.* [CDF Collaboration], *Phys. Rev. Lett.* **80**, 2773 (1998).
- [15] F. Abe *et al.* [CDF Collaboration], *Phys. Rev. Lett.* **79**, 1992 (1997).
- [16] B. Abbott *et al.* [D0 Collaboration], *Phys. Rev.* **D60**, 012001 (1999); *Phys. Rev. Lett.* **83**, 1908 (1999).
- [17] F. Abe *et al.* [CDF Collaboration], *Phys. Rev. Lett.* **79**, 3585 (1997).

- [18] F. Abe *et al.* [CDF Collaboration], Phys. Rev. Lett. **80**, 5720 (1998).
- [19] F. Abe *et al.* [CDF Collaboration], Phys. Rev. Lett. **80**, 2525 (1998).
- [20] T. Affolder *et al.* [CDF Collaboration], Phys. Rev. Lett. **84**, 216 (2000).
- [21] B. Abbott *et al.* [D0 Collaboration], hep-ex/0002058.
- [22] J. Bagger *et al.* [American Linear Collider Working Group Collaboration], hep-ex/0007022.
- [23] A. Brandenburg, M. Flesch and P. Uwer, Phys. Rev. **D59** (1999) 014001.
- [24] H.A. Olsen, P. Osland and I. Øverbø, Phys. Lett. **89 B** (1980) 221; Nucl. Phys. **B192** (1981) 33.
- [25] J.G. Körner and D.H. Schiller, DESY preprint DESY-81-043 (1981), unpublished.
- [26] S. Wolfram, *The Mathematica Book*, Cambridge University Press, 1999.
- [27] R. Maeder, *Programming in Mathematica*, Addison-Wesley, Redwood City, 1990.
- [28] A. Hsieh and E. Yehudai, Comput. Phys. **6** (1992) 253.
- [29] V.B. Berestetskii, E.M. Lifshitz and L.P. Pitaevskii, *Quantum Electrodynamics Landau & Lifshitz Course of Theoretical Physics*, Pergamon Press 1982.
- [30] O.E. Olsen and H.A. Olsen, Phys. Scripta **29** (1984) 12.
- [31] S.J. Brodsky, T.A. DeGrand and R. Schwitters, Phys. Lett. **79 B** (1978) 255.
- [32] M. Bengtsson and P.M. Zerwas, Phys. Lett. **208 B** (1988) 306; M. Bengtsson, Z. Phys. **C42** (1989) 75; S. Bethke, A. Richter and P. Zerwas, Z. Phys. **C49** (1991) 59.
- [33] B. Adeva *et al.*, [L3 Collaboration], Phys. Lett. **248 B** (1990) 227.
- [34] D. Decamp *et al.* [ALEPH Collaboration], Phys. Lett. **284 B** (1992) 163; P. Abreu *et al.* [DELPHI Collaboration], Z. Phys. **C59** (1993) 357; R. Akers *et al.* [OPAL Collaboration], Z. Phys. **C65** (1995) 367; R. Barate *et al.* [ALEPH Collaboration], CERN-PPE/97-002.
- [35] S. Groote, J.G. Körner and J.A. Leyva, Phys. Rev. **D56** (1997) 6031.
- [36] S. Groote, J.G. Körner and M.M. Tung, Z. Phys. **C74** (1997) 615.
- [37] Yu.L. Dokshitzer, V.A. Khoze and S.I. Troyan, in Proc. 6th Int. Conf. “Physics in Collision”, ed. M. Derrick (World Scientific, Singapore, 1987), p. 417; R. Barlow *et al.*, J. Phys. **G17** (1991) 1605.

- [38] S. Groote, J. G. Körner and J. A. Leyva, Nucl. Phys. **B527** (1998) 3.
- [39] A.B. Robson, *The Theory of polarization phenomena*, Oxford University press 1974.
- [40] C. Itzykson & J.B. Zuber, *Quantum Field Theory*, McGraw-Hill 1985.
- [41] J.D. Bjorken & S.D. Drell, *Relativistic Quantum Mechanics*, McGraw-Hill, New York, 1964.
- [42] M. E. Peskin and D. V. Schroeder, *An Introduction to quantum field theory*, USA ,Addison-Wesley 1995.
- [43] G. Schierholz and D.H. Schiller, DESY Preprint DESY-80-88 (1980), unpublished; H.A. Olsen, P. Osland and I. Øverbø, Nucl. Phys. **B171** (1980) 209.
- [44] S. Groote, J.G. Körner and J.A. Leyva, Phys. Rev. **D56** (1997) 6031.
- [45] W. Bernreuther, A. Brandenburg and P. Uwer, Phys. Rev. Lett. **79** (1997) 189.
- [46] G. Rodrigo and A. Santamaria, Phys. Rev. Lett. **79** (1997) 193.
- [47] P. Nason and C. Oleari, Phys. Lett. **407 B** (1997) 57.
- [48] G. Grunberg, Y.J. Ng and S.H.H. Tye, Phys. Rev. **D21** (1980) 62.
- [49] G. Mahlon and S. Parke, Phys. Lett. **411 B** (1997) 173.
- [50] Y. Kiyo, J. Kodaira, K. Morii, T. Nasuno and S. Parke, in Nucl. Phys. Proc. Suppl. **89** (2000) 37.
- [51] A. Brandenburg, M. Flesch and P. Uwer, Phys. Rev. **D59** (1999) 014001.
- [52] W. Bernreuther, A. Brandenburg and Z. G. Si, Phys. Lett. **483 B** (2000) 99
- [53] J.G. Körner, A. Pilaftsis and M.M. Tung, Z. Phys. **C63** (1994) 575.
- [54] M.M. Tung, Dissertation, Johannes-Gutenberg-Universität, Mainz 1993. Z. Phys. **C63** (1994) 575.
- [55] T.D. Lee and M. Nauenberg, Phys. Rev. **B6** (1964) 1594; A.V. Smilga, Comm. Nucl. Part. Phys. **20** (1991) 69.
- [56] B. Falk and L.M. Sehgal, Phys. Lett. **325 B** (1994) 509.
- [57] M. Fischer, S. Groote, J.G. Körner, M.C. Mauser and B. Lampe, Phys. Lett. **451 B** (1999) 406.
- [58] O. Yakovlev and S. Groote, hep-ph/0008156.
- [59] J.G. Körner, A. Pilaftsis and M.M. Tung, Z. Phys. **C63** (1994) 575.

- [60] M.M. Tung, Phys. Rev. **D52** (1995) 1353.
- [61] S. Groote, J.G. Körner and M.M. Tung, Z. Phys. **C70** (1996) 281.
- [62] D. Kreimer, Phys. Lett. **237 B** (1990) 59.
- [63] S. Groote, Dissertation, Johannes-Gutenberg-Universität, Mainz 1997.
- [64] G. 't Hooft and M. Veltman, Nucl. Phys. **B44** (1972) 189.
- [65] C. G. Bollini and J. J. Giambiagi, Nuovo Cim. **B12** (1972) 20.
- [66] T. Muta, *Foundations of Quantum Chromodynamics*, World Scientific, Singapore 1987.
- [67] M. Abramowitz and I. A. Stegun, *Handbook of Mathematical Functions*, Dover Publications, New York 1964.
- [68] M.M. Tung, J. Bernabéu and J. Peñarrocha, Nucl. Phys. **B470** (1996) 41.
- [69] H.A. Olsen and J.B. Stav, Phys. Rev. **D56** (1997) 407.
- [70] M. M. Tung, J. Bernabéu and J. Peñarrocha, Phys. Lett. **418 B** (1998) 181.
- [71] I.N. Bronstein, K.A. Semendjajew, G. Musiol und H. Mühlig, *Taschenbuch der Mathematik*, Verlag Harri Deutsch. 3. Auflage, Frankfurt am Main 1997.
- [72] A.P. Prudnikov, Y.A. Brychkov and O.I. Marichev, *Integrals and Series Vol. 1*, Gordan and Breach Science Publishers, 1986.
- [73] L. Lewin, *Polylogarithms and Associated Functions*, North Holland 1981.
- [74] G. 't Hooft and M. Veltman, Nucl. Phys. **B153** (1979) 365.
- [75] A.C. Hirshfeld and G. Kramer, Nucl. Phys. **B74** (1974) 211.