

**Friedrich Riesz' Beiträge zur Herausbildung des
modernen mathematischen Konzepts abstrakter Räume
Synthesen intellektueller Kulturen
in Ungarn, Frankreich und Deutschland**

Dissertation
zur Erlangung des Grades
“Doktor der Naturwissenschaften”
am Fachbereich 08: Physik, Mathematik und Informatik
der Johannes Gutenberg-Universität
in Mainz

Laura Regina Rodríguez Hernández
geboren in Tulancingo, Hidalgo (Mexiko)

Mainz, den 10. Juni 2006

Zusammenfassung

Der ungarische Mathematiker Friedrich Riesz forschte zwischen 1899 und 1908 in den mathematischen Milieus von Budapest, Göttingen und Paris. Diese Tatsache motiviert die Suche nach Elementen aus den besagten mathematischen Kulturen, die zur Herausbildung eines abstrakten Raumbegriffes in dem von Riesz 1906 veröffentlichten Text „Die Genesis des Raumbegriffs“ beitrugen.

Sowohl für seine Fragestellungen als auch für seinen methodischen Zugang fand Riesz in Frankreich und in Göttingen Anregungen: Henri Poincarés Beiträge zur Raumdiskussion, Maurice Fréchet's Ansätze einer abstrakten Punktmengenlehre, David Hilbert's Charakterisierung der Stetigkeit des geometrischen Raumes. Diese Impulse aufgreifend wollte Riesz ein Konzept schaffen, das die Forderungen von Poincaré, Hilbert und Fréchet in entsprechendem Maße erfülle. So schlug Riesz einen allgemeineren Begriff des mathematischen Kontinuums vor, mit dem sich Fréchet's Konzept der L -Klasse, Hilbert's Mannigfaltigkeitsbegriff und Poincaré's erfahrungsgemäßes Konzept der Stetigkeit des ‚wirklichen‘ Raumes auf einen gemeinsamen Nenner bringen ließen. Für die Durchführung eines solchen Projekts wandte Riesz mengentheoretische und axiomatische Methoden an, die er der Analysis in Frankreich und der Geometrie bei Hilbert entnommen hatte. Riesz' aufnahmebereite Haltung spielte dabei eine wichtige Rolle. Diese Haltung kann wiederum als ein Element der ungarischen mathematischen Kultur gedeutet werden, welche sich damals ihrerseits stark an den Entwicklungen in Frankreich und Deutschland orientierte.

Darüber hinaus enthält Riesz' Arbeit Ansätze einer konstruktiven Mengenlehre, die auf René Baire zurückzuführen sind. Aus diesen unerwarteten Ergebnissen ergibt sich die Aufgabe, den Bezug von Riesz' und Baires Ideen zur späteren intuitionistischen Mengenlehre von L.E.J. Brouwer und Hermann Weyl weiter zu erforschen.

Inhaltsverzeichnis

Einleitung	1
Teil I	7
1 Sozial- und wissenschaftshistorischer Kontext	7
1.1 Zur Biographie von Friedrich Riesz	7
1.2 Ungarn, Deutschland und Frankreich um 1900	14
1.3 Zur Raumdiskussion um 1900	18
1.4 Zu Mengenlehre und Axiomatik um 1900	19
2 Zur ungarischen mathematischen Kultur	23
2.1 Institutionen, Forschung und Lehre	23
2.1.1 Ausbau des Bildungssystems und die Gründung der Ungarischen Akademie der Wissenschaften	23
2.1.2 Nationale und internationale Forschungsinteressen	27
2.1.3 Die Förderung des Nachwuchses	32
2.2 Mengenlehre, Axiomatik, Geometrie, Analysis	34
2.2.1 Mengenlehre	34
2.2.2 Axiomatik	35
2.2.3 Geometrie	36
2.2.4 Analysis	38
2.3 Wissenschaftliches Milieu	39
2.3.1 Gyula (Julius) König	41
2.3.2 József (Josef) Kürschák	43
2.3.3 Lipót (Leopold) Fejér	44
2.3.4 Alfréd Haar	46
2.3.5 Marcel Riesz	49
2.3.6 Dénes König	50

3	Zur französischen mathematischen Kultur	51
3.1	Institutionen, Forschung und Lehre	51
3.1.1	Universität versus ‚Grandes Écoles‘	51
3.1.2	Analysis: eine französische mathematische Tradition	54
3.1.3	Lehre und Lehrbücher	56
3.2	Axiomatik, Mengenlehre und moderne Analysis	57
3.2.1	Rezeption der Cantorsche Mengenlehre	57
3.2.2	Axiomatik und ‚deskriptive Definitionen‘	61
3.2.3	Borels Maßtheorie	67
3.2.4	Baires moderne Theorie der reellen Funktionen	75
3.2.5	Lebesgues Integrationstheorie	81
3.2.6	Fréchet’s ‚Calcul Fonctionnel‘	85
3.3	Poincaré über die Stetigkeit des Raumes	93
3.3.1	Poincaré’s Philosophie der Geometrie	94
3.3.2	Das ‚physikalische Kontinuum‘ bei Poincaré	99
4	Zur mathematischen Kultur in Göttingen	111
4.1	Institutionen, Forschung und Lehre	111
4.1.1	Göttingen als wissenschaftliches Zentrum	111
4.1.2	Forschungsschwerpunkte	113
4.1.3	Dozenten und Studenten	116
4.2	Axiomatik, Mengenlehre und Grundlagen der Geometrie	119
4.2.1	Mengenlehre	119
4.2.2	Axiomatik bei Hilbert (1894-1905)	124
4.2.3	Axiomatik und Mengenlehre: Ausblick	135
4.3	Hilbert über die Stetigkeit des Raumes	137
	Teil II	145
5	„Die Genesis des Raumbegriffs“	145
5.1	Probleme	147
5.2	Werkzeuge	151
5.2.1	Theorie des physikalischen Kontinuums	152
5.2.2	Theorie des mathematischen Kontinuums	154
5.2.3	Theorie der mehrfachen Ordnungstypen	162
5.3	Strategie	163

6	Das Problem der Stetigkeit des Raumes	169
6.1	Anschluß an Hilberts topologischen Zugang zu den Grundlagen der Geometrie	169
6.2	Anschluß an Poincarés Ideen über die Stetigkeit des Raumes . . .	178
6.2.1	Anschluß an Poincarés psychologische Ansichten zu Zeit und Raum I	180
6.2.2	Zu einem abstrakten Begriff des physikalischen Kontinuums	181
6.2.3	Anschluß an Poincarés psychologische Ansichten zu Zeit und Raum II	183
6.2.4	Zu Poincarés Problem der Stetigkeit des Raumes	184
7	Ansätze einer abstrakten Punktmengenlehre	189
7.1	Elemente aus Baires Punktmengenlehre für Folgen ganzer Zahlen	189
7.1.1	Gruppen ganzer Zahlen und physikalische Punkte n -ter Ordnung	190
7.1.2	System spezieller Umgebungen	197
7.2	Elemente aus Fréchet's Theorie der L-Klassen	201
8	Axiomatik bei Riesz	207
8.1	Anschluß an axiomatische Praxis in Frankreich	208
8.2	Anschluß an Axiomatik Hilbertscher Prägung	213
9	Rezeption	219
9.1	In Europa	221
9.1.1	Maurice Fréchet	221
9.1.2	Arthur Schoenflies	228
9.1.3	Leopold Vietoris	230
9.1.4	Heinrich Tietze	232
9.1.5	L.E.J. Brouwer und Hermann Weyl	232
9.2	In den USA	237
9.2.1	Mathematiker um Eliakim Hasting Moore	237
9.2.2	Ralph Eugene Root	239
9.2.3	Edward Wilson Chittenden	240
9.2.4	Robert Lee Moore	241
9.2.5	Theophil Henry Hildebrandt	242
9.3	Schlußbemerkungen zur Rezeption	243

10 Schlußbemerkungen zur Bedeutung der Rieszschen Synthesen	247
10.1 Zusammenfassung	247
10.2 Zur Bedeutung der Rieszschen Synthesen	249
10.3 Schlußwort	252
A Zitate	253
A.1 Aus „Die Genesis des Raumbegriffes“	253
B Tabellen	257
B.1 Tabellen zu Kapitel 2	257
B.2 Tabellen zu Kapitel 4	260
C Archivalien	265
C.1 Briefwechsel zwischen Riesz und Hilbert	267
C.2 Briefwechsel zwischen Riesz und Fréchet	270
Literaturverzeichnis	273
Verzeichnis der Archivalien	290

Abbildungsverzeichnis

7.1 Baumdiagramm für die Bairesche Struktur in Riesz' System	196
9.1 Brouwers ‚örtlich verschiedene‘ Punkte	233

Tabellenverzeichnis

7.1 Bairesche und Rieszsche Begriffe im Vergleich	190
B.1 Geometrie, Mengenlehre und Analysis in Ungarn	257
B.2 Professoren an den Universitäten in Budapest und Koloszvár	258
B.3 Auslandsaufenthalte ungarischer Mathematiker	259
B.4 Hilberts Assistenten	260
B.5 Hilberts Lehrveranstaltungen	260
B.6 Minkowskis Lehrveranstaltungen	263

Einleitung

Ihrem Titel nach verspricht diese Dissertation, Beiträge zur Herausbildung des modernen mathematischen Konzepts abstrakter Räume in den Arbeiten des ungarischen Mathematikers Friedrich Riesz aus der Zeit zwischen 1906 und 1908 aufzuzeigen. Die gewählte Perspektive stützt sich auf das wissenschaftshistorische Konzept lokaler mathematischer Kulturen. So besagt die zentrale These, daß Riesz' abstrakte Raumbegriffe als Synthesen lokaler mathematischer Kulturen in Ungarn, Deutschland und Frankreich entstand.

Zunächst sollen die eben benutzten Begriffe geklärt werden.

So gilt festzuhalten: Das Konzept des *mathematischen Raumes* als solches gibt es nicht. Stattdessen sind dem *modernen mathematischen Konzept abstrakter Räume* verschiedene Raumbegriffe in der modernen Mathematik untergeordnet: Vektorräume, topologische Räume, unendlich dimensionale Räume, normierte Räume, metrische Räume, Banach- und Hilbert-Räume und so weiter. Als konkrete Beispiele für diese abstrakten Raumbegriffe können unter anderem Folgenräume und Funktionenräume angegeben werden. Die abstrakten Raumbegriffe der modernen Mathematik beschreiben jeweils eine abstrakte Menge, versehen mit einer bestimmten Struktur, wobei diese Struktur typischerweise durch ein System von Axiomen definiert wird. So beschreibt zum Beispiel ein Vektorraum eine gewisse algebraische Struktur einer zugrunde gelegten Menge, ein topologischer Raum dagegen ihre Stetigkeitsstruktur. Gegenstand der Forschung in der heutigen Mathematik ist also nicht etwa der reelle Raum der alltäglichen Erfahrung, sondern vielmehr die eben erwähnten abstrakten mathematischen Strukturen. Anders als es die Bezeichnung ‚Raum‘ suggeriert, scheinen die Begriffe einander gar nicht ähnlich, die Gleichheit der Bezeichnungen zufällig bis willkürlich. Um 1900 verhielt es sich aber anders. Allein die damalige philosophische Raumdiskussion veranschaulicht, wie viele verschiedene Auffassungen über die Beziehung zwischen den Axiomen der Geometrie und den Eigenschaften des reellen Raumes der Erfahrung um 1900 vertreten wurden. Genau in dem Übergang von der Auffassung der Geometrie als einer Wissenschaft des reellen Raumes zur intellektuellen Konzeption abstrakter räumlicher Strukturen sind Riesz' Beiträge zu verorten. Sie bieten selbst eine Darstellung dieses Überganges, denn Riesz knüpfte einerseits an die Diskussion um das Wesen des uns umgebenden Raumes

an, gleichzeitig aber lieferte er sowohl ein mit dem heutigen Begriff des topologischen Raumes verwandtes Konzept als auch – modern ausgedrückt – konkrete Funktionen- und Folgenräume als Beispiele für unendlich dimensionale metrische Räume.

Mit den Konzepten des lokalen mathematischen Milieus und der lokalen mathematischen Kulturen schließe ich an den von Moritz Epple vorgeschlagenen wissenschaftshistorischen Entwurf der *mathematischen Werkstätten* an. Eine mathematische Werkstatt, von Epple auch epistemische Konfiguration genannt, besteht aus zwei von Ort und Zeit abhängigen Komponenten: Forschungsgegenständen (Konzepte, Ideen, mathematische Imaginationen, also Gegenstände auf intellektueller Ebene als Inhalte mathematischer Forschung, deren Behandlung bestimmte Fragen aufwirft) und Techniken (Verfahren, methodische Zugänge zur Behandlung jener Fragen, die sich auf die Forschungsgegenstände beziehen). Neben diesen sachlichen Komponenten erfaßt das Konzept der mathematischen Werkstatt auch eine sozialhistorische Dimension, nämlich die Interaktion der in dieser Werkstatt arbeitenden Wissenschaftler. Nur die Berücksichtigung beider Aspekte macht das Funktionieren einer solchen Werkstatt für die Mathematikgeschichte verständlich¹. Solche mathematischen Werkstätten existieren in der Regel innerhalb *eines mathematischen Milieus*, d.h. innerhalb einer Gemeinschaft von Wissenschaftlern, die an einem Ort und in einem begrenzten Zeitraum in ständigem wissenschaftlichen Austausch arbeiten. Zugleich war und ist die wissenschaftliche Praxis in solchen Milieus an die lokalen mathematischen Kulturen gebunden. Der Terminus *lokale mathematische Kultur* bezeichnet sowohl mathematisches Wissen als auch dessen Wertschätzung innerhalb des jeweiligen kulturellen und sozialen Umfeldes, d.h. die lokalen Gepflogenheiten, mathematisches Wissen zu kultivieren. Die kulturellen Bedingungen mathematischer Praxis tragen durch Festlegung von Schwerpunkten zur Gestaltung der Mathematik bei, die an einem Ort und innerhalb eines breiteren Zeitraumes entwickelt wird. So werden etwa reine bzw. angewandte Mathematik, Algebra, Analysis oder Geometrie bevorzugt, so daß in einigen Fällen sogar von nationalen Traditionen gesprochen werden kann, wie etwa von der französischen Tradition der Analysis².

¹Vgl. [Epp00b], §6.

²Zum Term ‚nationale Traditionen‘ vgl. [Row03]. Zur französischen Tradition der Analysis s. Abschnitt 3.1 der vorliegenden Arbeit. Es muß betont werden, daß der Blick nicht auf national sondern auf kulturell geprägte Wissenschaften gerichtet ist – obwohl sich manchmal diese Faktoren nicht sauber trennen lassen, s. Abschnitt 2.1 zur mathematischen Kultur in Ungarn. Der Grundgedanke, der zu einer Unterscheidung lokaler mathematischer Kulturen führt, ist die Idee, daß die Wissenschaften in verschiedenen Kulturen unterschiedliche Wertschätzung genießen, oft allein aufgrund ihrer Bedeutung für das soziale, wirtschaftliche oder religiöse alltägliche Leben. Während in Bezug auf antike Kulturen, etwa in Ägypten, Mesopotamien oder Griechenland, die Unterscheidung ihrer jeweiligen mathematischen Kulturen in diesem Sinne unmittelbar sinnvoll erscheint, ist ihre Notwendigkeit in bezug auf die modernen Kulturen weniger offensichtlich; und doch belegen Forschungen aus den letzten zwei Jahrzehnten das Potential dieser Konzepte, vgl. [CM90], [G+96a], [JK95], [Epp99].

Zwischen 1899 und 1908 bewegte sich Riesz in den mathematischen Milieus von Budapest, Göttingen und Paris. Auf dieser Grundlage basiert die Suche nach Elementen aus den jeweiligen mathematischen Kulturen, die zu den Rieszschen Synthesen in seiner Arbeit „Die Genesis des Raumbegriffs“ von 1906 beitrugen. Eine Inspirationsquelle für seine Fragestellungen fand Riesz in Frankreich zum einen in den Beiträgen zur Raumdiskussion von Henri Poincaré, zum anderen in Maurice Fréchet's Ansätzen einer abstrakten Punktmengenlehre im Interesse einer verallgemeinerten Analysis; in Göttingen kam er mit David Hilberts Ideen einer Grundlegung der Geometrie in Berührung, die von der Forderung nach der Stetigkeit des Raumes ausgeht. Riesz kombinierte diese Anregungen und entwickelte aus ihnen das Projekt, ein allgemeines Konzept des mathematischen Kontinuums zu liefern, das die Forderungen bzw. Bedürfnisse von Poincaré, Hilbert und Fréchet in entsprechendem Maße erfülle. So schlug Riesz in seinem allgemeinen Begriff des mathematischen Kontinuums einen Ansatz vor, der Fréchet's Konzept der L -Klasse, Hilbert's Konzept des stetigen Raumes in der Geometrie und Poincaré's erfahrungsgemäßes Konzept der Stetigkeit des ‚wirklichen‘ Raumes auf einen gemeinsamen Nenner zu bringen versuchte.

Die Realisierbarkeit eines solchen Projekts scheint nicht offensichtlich. Riesz' Vorschlag war vielmehr das Produkt vielschichtiger Abstraktionsanstrengungen und eines spezifischen strukturellen Denkens. Dafür wandte Riesz mengentheoretische und axiomatische Methoden an, die er der Analysis in Frankreich und der Geometrie bei Hilbert entnommen hatte. Riesz' Vorgehensweise zeichnete sich ferner durch eine gewisse Dichotomie in seiner Auffassung der Mathematik aus: Einem konstruktiven Aufbau des Raumes folgte dessen axiomatische Definition. Die Erklärung für diese Doppelorientierung liegt in Riesz' Rückgriff einerseits auf den Konstruktivismus der französischen Analytiker Émile Borel, René Baire und Henri Lebesgue, andererseits auf die Hilbert'sche Auffassung, daß die Existenz eines mathematischen Konzepts durch die Konsistenz des zugrunde gelegten Axiomensystems garantiert werde.

Zwei weiteren Punkten kommt an dieser Stelle eine nicht zu unterschätzende Bedeutung zu: zum einen Riesz' offener Haltung gegenüber den genannten mathematischen Entwicklungen in Frankreich und Deutschland, zum anderen seiner Position als Externer, der weder dem einen noch dem anderen Milieu angehörte. Denn gerade diese beiden Bedingungen begünstigten die Bildung von Synthesen aus Elementen der mathematischen Forschung in Frankreich und Göttingen. Riesz' aufnahmebereite Haltung wiederum kann als ein Element der ungarischen mathematischen Kultur gedeutet werden, welche sich damals ihrerseits stark an den Entwicklungen in Frankreich und Deutschland orientierte. So sind also sowohl Riesz' epistemische Gegenstände als auch seine epistemischen Techniken als Synthesen der mathematischen Kulturen in Ungarn, Frankreich und Göttingen zu erklären.

Was den Stand der Forschung betrifft, sind Aspekte des Riesz'schen Werkes im

Rahmen historischer Studien der allgemeinen Topologie und der Funktionalanalysis behandelt worden. Die Beziehung zur Geschichte der allgemeinen Topologie ist dadurch zu begründen, daß es gerade Riesz' allgemeines Konzept des mathematischen Kontinuums ist, welches sich als verwandt mit dem heutigen Begriff des topologischen Raumes herausstellt. Letzterer wurde 1914 von Felix Hausdorff geprägt und bildete den Grundbegriff, auf dem dieser Zweig der modernen Mathematik, die allgemeine Topologie, aufgebaut wurde. Im Rahmen der Herausgabe von Hausdorffs Gesammelten Werken sind in letzter Zeit umfangreiche Studien zur Entstehung der Hausdorffschen Theorie des topologischen Raumes erschienen, die auch die Rieszschen Beiträge diskutieren und Aufschluß über einen Teil ihrer mathematischen Inhalte geben. Da allerdings die Autoren aufgrund ihrer Recherchen bei Hausdorff keinen Hinweis auf einen Anschluß an die Rieszschen Ideen gefunden haben, gehen sie in ihren Beiträgen auf den spezifischen historischen Entstehungskontext der Rieszschen Ansätze nicht ein³. Zur Geschichte der allgemeinen Topologie liegen sonst relativ wenige Monographien vor⁴. Diese erwähnen zwar die Pionierarbeit von Riesz, sprechen ihr aber lediglich eine historische Bedeutung zu, d.h. ihrer Darstellungen nach hatte die Pionierarbeit von Riesz keine Auswirkung auf die damalige Forschung⁵. Anders verhielt es sich bei Angus Taylor, der in einer dreiteiligen Studie über die mathematische Arbeit von Maurice Fréchet zu Funktionalanalysis und allgemeiner Topologie den Einfluß der Rieszschen Ideen auf Fréchet ausführlich diskutierte⁶. Taylors Hauptanliegen waren aber die Arbeiten Fréchets. Daher erforschte Taylor die Herausbildung des Rieszschen Konzepts abstrakter Räume nur in dem Maße, in dem es für seinen Kontext von Interesse schien.

Mathematikhistorische Untersuchungen, die sich allgemein mit den Arbeiten von Riesz beschäftigen, tun dies vorwiegend aus der Perspektive der Geschichte der Funktionalanalysis⁷. Grund dafür ist die Tatsache, daß Riesz gerade in diesem Gebiet der Mathematik die bedeutendsten Resultate seiner Forschungskarriere erlangte, und zwar schon ab 1906. Von Interesse für die vorliegende Untersuchung sind auch frühe funktionalanalytische Resultate von Riesz aus den Jahren 1906 und 1907, aus denen hervorgeht, daß Riesz eine bestimmte Klasse von Funktionen als einen abstrakten Raum auffaßte. Es handelt sich hierbei um eine Episode in der Geschichte der Funktionalanalysis, die allgemein bekannt und gründlich erforscht ist⁸. Allerdings wird der Bezug auf die von Riesz kurz zuvor erbrachten

³Vgl. [Pur02b] und [P+02].

⁴Zu nennen sind neben [Man64] aus den 1960er Jahren auch [AL97] und [Jam99].

⁵Vgl. [Thr97] und [KM99].

⁶Vgl. [Tay82], [Tay85] und [Tay87].

⁷Zu nennen sind Grays umfassende Arbeit über Riesz' Darstellungssatz [Gra84] und Kreyszigs Überblick [Kre90] der Pionierarbeiten von Riesz sowohl in allgemeiner Topologie als auch in der Funktionalanalysis.

⁸Die Einführung des Funktionenraumes L^2 und deren Zusammenhang mit Hilberts Integralgleichungstheorie wurde erstmals in [Ber66] diskutiert. Bernkopfs historische Darstellung

Ansätze einer abstrakten Punktmengenlehre nicht hergestellt⁹. So richtet sich das Studium der Herausbildung des modernen Konzepts abstrakter Räume bei Riesz in bereits vorgelegten mathematikhistorischen Darstellungen vorwiegend auf die Einführung des L^2 -Funktionsraumes in seinen funktionalanalytischen Arbeiten und weniger auf seine Pionierarbeit im Bereich der allgemeinen Topologie. Dagegen versucht die vorliegende Arbeit, die Herausbildung abstrakter Raumbegriffe bei Riesz im komplexen Kontext der philosophischen Raumdiskussion, der Geometrie und der Analysis in den mathematischen Kulturen in Ungarn, Frankreich und Göttingen zu erforschen.

Die Hauptquelle für die vorliegende Untersuchung bildet Riesz' Artikel „Die Genesis des Raumbegriffs“ von 1906¹⁰. Daneben sind andere Arbeiten von Riesz aus dem Zeitraum von 1904 bis 1908 herangezogen worden¹¹, insbesondere die gedruckte Version seines Vortrags auf dem IV. Internationalen Mathematiker-Kongreß in Rom von 1908 „Stetigkeitsbegriff und abstrakte Mengenlehre“, da Riesz in diesem Vortrag auf das 1906 vorgeschlagene allgemeine Konzept des mathematischen Kontinuums zurückkam¹². Weitere wichtige gedruckte Quellen waren folgende: ein Artikel von Hilbert zu den Grundlagen der Geometrie von 1902¹³; vier Arbeiten von Poincaré, in denen dieser seinen Konventionalismus für die Geometrie erläuterte¹⁴; Fréchet's Dissertation sowie weitere sechs Arbeiten von ihm, aus denen jene hervorging¹⁵; von Baire zwei Artikel zur Punktmengenlehre von 1899¹⁶, von Borel seine Monographie *Leçons sur la théorie des fonctions*¹⁷ und von Lebesgue sein Kurs *Leçons sur l'intégration et la recherche des fonctions primitives*¹⁸. Darüber hinaus waren unveröffentlichte Briefe von Riesz an Hilbert und an Fréchet aus Archiven in Paris und Göttingen von zentraler Bedeutung¹⁹.

Der Aufbau der vorliegenden Arbeit erfolgt systematisch. Der Einstieg in Kapitel 1 enthält eine Biographie von Friedrich Riesz und versucht, einen Überblick über die Situation um 1900 im Hinblick auf die Entwicklung der Mengenlehre, auf verschiedene axiomatische Ansätze und auf die sozialen und wissenschaftlichen Beziehungen zwischen Ungarn, Frankreich und Deutschland zu geben. Die Kapi-

der Entstehung von Funktionenräumen diene als Grundlage für weitere Abhandlungen zur Geschichte der Funktionalanalysis, etwa [Kli72], [Mon73], [Die81], [SS82], [BK84], [Pie94] und [Kre97].

⁹Mit Ausnahme von Taylor und Purkert et al., die doch darauf verweisen.

¹⁰[Rie07b]

¹¹S. Literaturverzeichnis.

¹²[Rie09]

¹³[Hil02]

¹⁴„Le continu mathématique“ [Poi93], „Foundations of geometry“ [Poi98], *La Science et l'hypothèse* [Poi00] und *La valeur de la science* [Poi08].

¹⁵[Fré04], [Fré05e], [Fré05d], [Fré05a], [Fré05c], [Fré05b] und [Fré06]

¹⁶[Bai99a] und [Bai99b]

¹⁷[Bor28]

¹⁸[Leb04]

¹⁹S. Auskunft zu diesen Briefen im Anhang C.

tel 2, 3 und 4 sind jeweils der Diskussion bestimmter Aspekte der mathematischen Kulturen in Ungarn, Frankreich und Göttingen gewidmet: Einer allgemeinen Beschreibung lokaler mathematischer Milieus folgt eine Studie der Situation der Mengenlehre und Axiomatik, Analysis bzw. Geometrie. Den Hauptteil der Dissertation bilden die Kapitel 5 bis 9. In Kapitel 5 werden die Inhalte von „Die Genesis des Raumbegriffs“ diskutiert. Kapitel 6 ist dem Begriff des stetigen Raumes bei Poincaré, Hilbert und Riesz gewidmet, Kapitel 7 der Punktmengenlehre bei Baire, Fréchet und Riesz. In Kapitel 8 erfolgt die Besprechung der Axiomatik bei Borel, Lebesgue, Fréchet, Hilbert und Riesz, Kapitel 9 erläutert an ausgewählten Beispielen die Rezeption der Rieszschen Inhalte. Da die so gewählte Aufteilung der Kapitel 6 bis 8 eine saubere Trennung der Rieszschen Motivationen und Methoden nicht vorsieht, wird in den Schlußbemerkungen in Kapitel 10 versucht, diesen noch mal gesondert nachzuspüren.

Eine letzte Bemerkung: ‚Allgemeine Topologie‘ oder ‚punktmengentheoretische Topologie‘ sind heute Bezeichnungen für eine Subdisziplin der modernen Mathematik. Da um 1900 dieses Forschungsgebiet noch nicht in fest umrissenen Grenzen etabliert war, beschreibe ich die Beiträge von Fréchet und Riesz als Ansätze einer abstrakten Punktmengenlehre, und in diesem Sinne rede ich von Beiträgen im Bereich der heutigen ‚allgemeinen Topologie‘. So benutzte ich auch das Adjektiv ‚topologisch‘, um abstrakte, punktmengentheoretische Fragestellungen zu beschreiben, die von der heutigen Perspektive aus auch zur allgemeinen Topologie gehören. Es sind Fragen nach bestimmten Eigenschaften einer Menge, etwa, ob eine Menge offen, abgeschlossen, dicht, perfekt, zusammenhängend etc. sei. Diese und ähnliche einer Punktmenge zuzuschreibende Attribute gehören sowohl zur heutigen ‚allgemeinen Topologie‘ als auch zur zeitgenössischen abstrakten Punktmengenlehre.

Kapitel 1

Sozial- und wissenschaftshistorischer Kontext

1.1 Zur Biographie von Friedrich Riesz

Hauptfigur in der vorliegenden Arbeit ist der ungarische Mathematiker Friedrich Riesz, der sich zu Beginn des 20. Jahrhunderts auf Grund seiner Beiträge zu Entstehung und Weiterentwicklung der Funktionalanalysis einen vorrangigen Platz in der Geschichte der modernen Mathematik sicherte. Zu seinen bekanntesten Leistungen zählen der sogenannte Riesz-Fischer-Satz über die Vollständigkeit des Funktionenraumes L^2 (1907), seine Theorie der L^p -Räume ($p > 1$) (1910) und nicht zuletzt der Darstellungssatz für L^p -Räume ($p > 1$) (1910). In der vorliegenden Untersuchung richtet sich der Blick jedoch auf Riesz' frühere Forschung (1904-1907): seine Pionierarbeit im Bereich der abstrakten Punktmengenlehre als einer Erweiterung von Cantors Mengenlehre. Diese Arbeiten sind vor allem aus zwei Gründen von besonderem mathematikgeschichtlichen Interesse. Zum einen stellen sie inhaltlich als Theorie einen Vorentwurf zur allgemeinen Topologie dar, zum anderen sind sie in wissenschaftshistorischer Hinsicht in einem Spannungsfeld unterschiedlicher mathematischer Kulturen in Deutschland, Frankreich und Ungarn zu verorten. So läßt sich an Riesz Texten ausführlich belegen, daß er mit der zeitgenössischen mathematischen Diskussion sowohl in Deutschland als auch in Frankreich sehr vertraut war (siehe Kapitel 6 bis 8). Ergänzend versucht die einleitende Biographie zu Riesz, bekannte und neu erworbene Erkenntnisse zur sozialhistorischen Dimension von Riesz' wissenschaftlicher Arbeit zusammenzutragen. Es sollen konkret die Fragen erläutert werden, ob, wo und wann sich Riesz in Frankreich und Deutschland aufhielt und mit wem er in Kontakt und wissenschaftlichen Austausch trat.

Diese biographische Darstellung basiert auf den wissenschaftlichen Biographien von Friedrich Riesz im *Dictionary of Scientific Biography* und im *Lexikon*

der bedeutenden Mathematiker¹. Weitere Informationen stammen aus Nachrufen, Reden und Schriften, die im Andenken an Riesz von anderen Mathematikern verfaßt wurden sowie aus persönlichen Mitteilungen von Prof. János Horvath². Die Zuverlässigkeit der Informationen wird in den Fußnoten im einzelnen erläutert.

Friedrich (Frigyes) Riesz wurde am 22. Januar 1880 in Győr (Raab), Ungarn geboren. Seine Mutter war Szidódia Riesz, geborene Nagel, sein Vater Ignác Riesz. Ignác war Arzt. Er sorgte dafür, daß seine drei Söhne Friedrich, Marcel und Sándor eine gute Ausbildung genossen. Friedrich und Marcel entschieden sich für eine wissenschaftliche Laufbahn. Beide wurden weltbekannte Mathematiker. Sándor, der Jüngste, machte eine erfolgreiche Karriere als Jurist³.

Friedrich besuchte die Schule in seiner Heimatstadt Győr. 1897 immatrikulierte er sich im *Eidgenössischen Polytechnicum* in Zürich⁴, um eine Ingenieurslaufbahn aufzunehmen. Nach wenigen Semestern konzentrierte sich jedoch sein Interesse auf die Mathematik. 1899 setzte er sein Studium der Mathematik an der Universität von Budapest fort. Dort besuchte er die Vorlesungen von Gyula König und József Kürschák⁵. Anschließend verbrachte er ein Studienjahr in Göttingen, bevor er 1902 an der Universität von Budapest sein Studium als Lehrer der Mathematik und der Physik abschloß und mit einer Dissertation über Geometrie promovierte⁶.

Die genauen Zeiten von Riesz' Studienjahr in Göttingen sind nicht zu ermitteln. Es ist jedoch davon auszugehen, daß Riesz' einjähriger Studienaufenthalt in Göttingen zwischen 1899 und 1901 stattfand⁷.

¹Vgl. [Gil90] und [G+90].

²Der ungarische Mathematiker János Horvath ist Professor in den USA. Er war mit den Brüdern Riesz befreundet, vor allem aber mit Marcel Riesz hielt er eine enge Beziehung. Mit Prof. Horvath korrespondierte ich im März 2002 per e-mail.

³Über Riesz' Familienverhältnisse berichteten die Mathematiker W. W. Rogosinski sowie Béla Szőkefalvi-Nagy. Letzterer war Student und anschließend enger Mitarbeiter von Riesz in Ungarn gewesen. Szőkefalvi-Nagy wirkte in den 1950er Jahren als Koautor von Riesz' Monographie zur Funktionalanalysis [RS52]. Szőkefalvi-Nagy hielt 1980 eine Rede im Andenken an Riesz auf dem Mathematischen Kolloquium des János-Bolyai-Gesellschaft in Budapest, vgl. [SN83]. Rogosinski schrieb 1956 einen Nachruf, vgl. [Rog56].

⁴Das Züricher *Eidgenössische Polytechnicum* wurde 1911 in *Eidgenössische Technische Hochschule Zürich* umbenannt, vgl. die Webseite dieser Institution unter <http://www.gep.ethz.ch/geschichte.htm>.

⁵Vgl. den biographischen Abriß, verfaßt von dem ungarischen Mathematiker Ákos Császár, Herausgeber der Gesammelten Werke von Friedrich Riesz, [Rie60], 19ff.

⁶Vgl. [Rie60], 19ff. und [SN83], 70. Riesz' Dissertation erschien unter [Rie02] und [Rie04a]. Erwin Kreyszig nennt, unter Berufung auf Béla Szőkefalvi-Nagy, in einem auf Anregung von Marcel Riesz und Tibor Radó gehaltenen Vortrag auf dem XII. Österreichischen Mathematikerkongreß in Wien 1989 Gyula Vályi als Riesz' Doktorvater, vgl. [Kre90], 129, Anmerkung 4. Diese Vermutung belegt Kreyszig nicht.

⁷Vgl. Verzeichnis der Mitglieder der Deutschen Mathematiker-Vereinigung im *Jahresbericht der DMV* von 1912. Nachdem Riesz 1905 als Mitglied in die DMV eintritt, wurde ein kurzer Lebenslauf von ihm im Verzeichnis der Mitglieder aufgenommen. Riesz gab an, zwischen 1897

Nach seiner Promotion kam Riesz nach Göttingen zurück, wo er das Wintersemester 1903/04 als Gast der Mathematischen Gesellschaft zu Göttingen verbrachte⁸. In dieser Zeit besuchte er David Hilberts Vorlesung zu partiellen Differentialgleichungen sowie zwei Seminare, eins davon wurde gemeinsam von Hilbert und Hermann Minkowski geleitet⁹.

In der Zeit von 1904 bis 1908 war Riesz Lehrer an der Oberrealschule in Löcse. Von 1908 bis 1911 unterrichtete er an einem Gymnasium in Budapest¹⁰. Seine Lehrtätigkeiten erfolgten aber nicht ununterbrochen. Er fuhr oft nach Paris und Göttingen.

Wie oft und wann Riesz sich in Paris und Göttingen aufhielt, läßt sich nicht genau bestimmen. Prof. Horvath erinnert sich an ein Gespräch mit Friedrich Riesz, in dem dieser ihm erzählte, wie wenig Zeit er in Löcse verbracht hatte, obwohl er dort offiziell Lehrer am Gymnasium war. Prof. Horvath schätzt, daß Friedrich Riesz sich zwischen 1903 und 1912 mindestens einige Monate pro Jahr in Göttingen aufhielt. Prof. Horvath erinnert sich auch daran, daß Friedrich Riesz mit einem Stipendium ein Jahr in Paris verbrachte¹¹.

Sicher ist, daß Riesz sich im Frühjahr 1907 wieder mehrere Monate in Paris und Göttingen aufhielt. Darüberhinaus unterhielt Riesz eine wissenschaftliche Korrespondenz mit Hilbert (spätestens ab 1904) und Fréchet (spätestens ab 1907)¹².

und 1901 in Zürich, Budapest und Göttingen studiert zu haben. Dieses Verzeichnis erschien jedes Jahr in dem *Jahresbericht der DMV* bis sein Abdruck 1923 aus Kostengründen eingestellt wurde.

⁸Eine Liste der Mitglieder und Gäste der Mathematischen Gesellschaft zu Göttingen im Wintersemester 1903/04 befindet sich im Universitätsarchiv zu Göttingen. Ich danke David E. Rowe für diesen Hinweis.

⁹Vgl. [Kre90], 129, Anmerkung 4. Hilbert und Minkowski haben im WS1903/04 zwei Seminare gemeinsam geleitet, s. Tabellen B.5 und B.6 in Anhang B. Es scheint naheliegend, daß Riesz die Übungen aus dem Gebiet der Differentialgleichungen besuchte. Allerdings ist auch nicht auszuschließen, daß Riesz' späteres Interesse an Kettenbruchentwicklungen im Zusammenhang mit den algebraisch-arithmetischen Übungen (dem zweiten Seminar) entstand, denn diese begleiteten offenbar Minkowskis Vorlesung zur Geometrie der Zahlen. Mit dem Thema der Kettenbruchentwicklungen kam Riesz in seiner Arbeit „Die Genesis des Raumbegriffs“ in Berührung. Er verwies aber nur auf Arbeiten von Baire, s. Abschnitt 7.1. Allerdings bemerkte Császár, daß die Vorträge von Hermann Minkowski, neben denen von Hilbert, größten Einfluß auf Riesz ausübten, vgl. [Rie60], 19. Inwieweit Minkowski die Arbeit von Riesz tatsächlich beeinflusste, müßte noch erforscht werden. Auf diese Frage werde ich aber in der vorliegenden Arbeit nicht eingehen.

¹⁰Vgl. Riesz' kurzen Lebenslauf im *Jahresbericht der DMV* von 1912. Löcse, auf deutsch Letschau und auf slowakisch Levoča, lag damals in Nord-Ungarn, heute gehört die Stadt zur Slowakai.

¹¹Nach all den Jahren konnte Horvath mir leider genauere Zeitangaben nicht mehr nennen. Aber Császárs Verweis auf spätere Aufenthalte von Riesz in Göttingen paßt zu Horvaths Beschreibung, vgl. [Rie60], 19.

¹²S. Auflistung der Rieszschen Briefe an Fréchet und Hilbert in Anhang C. Seine Aufenthalte in Paris und Göttingen vom Jahr 1907 erwähnte Riesz selbst in seinen Briefen an Fréchet aus

Im Jahr 1911 wurde Riesz außerordentlicher Professor an der Universität von Kolozsvár in Ungarn¹³. Dort erhielt er 1913 das Ordinariat¹⁴. Um 1918, als der Erste Weltkrieg sich zu seinem Ende näherte, machten die politischen Umstände den weiteren Betrieb der ungarischen Universität von Kolozsvár unmöglich. Die Universität mußte nach einem Ort innerhalb der neu gezeichneten Grenze von Ungarn umziehen und dabei die ganzen Einrichtungen hinterlassen. 1920 fand die Universität in der Stadt Szeged ihren neuen Standort, wo es früher keine Universität gegeben hatte. Riesz, der seine Arbeit zunächst in Budapest fortgesetzt hatte, bemühte sich ab 1920 in Szeged zusammen mit Alfréd Haar und weiteren Kollegen, den Lehrbetrieb und die Forschung wieder im Gang zu setzen. Sie arbeiteten aber unter harten Bedingungen. Eine der Hauptschwierigkeiten bestand im Mangel an einer mathematischen Bibliothek¹⁵. In Zusammenarbeit mit Haar gründete Riesz 1922 als mathematische Forschungseinrichtung das János-Bolyai-Institut und dessen Zeitschrift *Acta Scientiarum Mathematicarum*. Mit Hilfe dieser Initiative gelang es ihnen, relativ schnell ein neues Zentrum mathematischer Aktivität in Szeged aufzubauen¹⁶. Darüber hinaus wirkte Riesz in den Jahren 1925/26 als Rektor der Universität Szeged.

Nachdem Szeged im Oktober 1944 befreit worden war, half Riesz, den Universitätsbetrieb wieder in Gang zu setzen. Für eine kurze Periode im Frühling 1945 übernahm er noch einmal die verantwortungsvolle Funktion des Rektors. Erst später, im Jahr 1947, verließ er Szeged, um einem Ruf an die Universität von Budapest zu folgen¹⁷.

Friedrich Riesz starb in Budapest am 28. Februar 1956.

Forschung

Seine Forschungsinteressen umfaßten im Laufe seiner Karriere die Geometrie, die abstrakte Punktmengenlehre, die Funktionalanalysis, die Maß- und Integrations-

demselben Jahr. Ende Mai schrieb Riesz an Fréchet von Paris aus, und im Juli war er noch in Göttingen, s. Anhang C.

¹³Vgl. Mitgliederverzeichnis der DMV im *Jahresbericht der DMV* von 1912. Kolozsvár heißt auf deutsch Klausenburg und auf rumänisch Cluj. Damals gehörte die Stadt zu Ungarn, bzw. zur k.u.k. Monarchie. Nach dem Ersten Weltkrieg kam sie zu Rumänien. Die Redaktion der Zeitschrift *Acta Scientiarum Mathematicarum* (Acta Szeged) von 1956 schrieb in dem Nachruf für Riesz, daß Riesz 1911 die Berufung nach Kolozsvár bekam. Andere Quellen widersprechen diesen Angaben, vgl. [Rie60], [Smi56], [SN83].

¹⁴Vgl. Mitgliederverzeichnis der DMV im *Jahresbericht der DMV* von 1913 und 1914. Im Verzeichnis vom 1. Januar 1914 steht Friedrich Riesz nicht mehr als ‚Suppl. Professor‘ sondern nur als ‚Prof.‘. D.h., daß er bereits 1913 das Ordinariat bekam und nicht erst 1914 wie Császár, Szökefalvi-Nagy und Smithies in [Rie60], [SN83] und [Smi56] behaupteten.

¹⁵Vgl. [SN83], 71ff. und [Rie60], 19ff. Vgl. auch die Webseite des Bolyai-Instituts der Universität in Szeged, <http://server.math.u-szeged.hu/general/bolyhist.htm>.

¹⁶[Rie60], [SN83].

¹⁷[SN83], 43ff.

theorie, die Funktionentheorie, die Theorie der subharmonischen Funktionen und die Ergodentheorie.

Bis 1905 arbeitete er im Bereich der Geometrie, der Analysis Situs und an Problemen der Cantorsche Mengenlehre. Neben Cantors Theorie der Ordnungstypen bemühte er sich auch um Anwendungen der Cantorsche Punktmengenlehre auf die Analysis und die Geometrie. Das führte ihn dazu, einen allgemeinen Raumbegriff vorzuschlagen, der sowohl für die Analysis als auch für die Geometrie gelte. Aus dieser ersten Forschungsperiode gingen unter anderem folgende Arbeiten hervor: „Über einen Satz der Analysis Situs“, „Über mehrfache Ordnungstypen“, „Sur un théorème de M. Borel“ und „Die Genesis des Raumbegriffes“¹⁸.

Bereits im November 1906 reichte er die erste einer Reihe von Arbeiten zur heute sogenannten Funktionalanalysis ein. Es handelte sich um Fragestellungen, die im Zusammenhang mit Hilberts Theorie der Integralgleichungen entstanden. Ein besonderes Interesse an der Integralgleichungstheorie und an unendlichen Systemen linearer Gleichungen gewann Riesz während seines Studiums in Göttingen. Gleichzeitig verfolgte er mit demselben großen Interesse die Entwicklungen der modernen Analysis in Frankreich bei Émile Borel, Henri Lebesgue, René Baire, Maurice Fréchet und Pierre Fatou. In dem erwähnten Artikel vom November 1906 definierte Riesz den heute als L^2 bezeichneten Raum der im Lebesgueschen Sinne quadrat-integrierbaren reellen Funktionen auf dem Intervall $[0, 2\pi]$. Riesz führte diesen Funktionenraum als eine E-Klasse im Fréchetischen Sinne ein, d.h. als metrischen Raum, und bewies ferner für den Raum L^2 einen Satz von Erhard Schmidt¹⁹. In den darauf folgenden vier Artikeln zeigte er Anwendungen seiner Resultate über den Raum L^2 auf Hilberts Theorie der Integralgleichungen. Ein wichtiges Ergebnis dieser Untersuchungen besagt, daß der Raum L^2 als metrischer Raum vollständig ist, d.h.: Jede im Sinne der L^2 -Metrik konvergierende Folge aus Elementen aus L^2 besitzt ein Grenzelement, das selbst Element aus L^2 ist. Dieses Resultat ist heute als der Riesz-Fischer-Satz in der Funktionalanalysis bekannt. Der Wiener Mathematiker Ernst Fischer legte gleichzeitig, aber von Riesz unabhängig dasselbe Resultat vor²⁰. Die Bedeutung des Riesz-Fischer-Satzes trug im hohem Maße dazu bei, daß Riesz um 1907 international anerkannt wurde. Zugleich legte Riesz damit einen Grundstein für die Funktionalanalysis.

Dem Riesz-Fischer-Satz folgte der sogenannte Darstellungssatz für L^2 , der gleichzeitig aber von Riesz unabhängig auch von Fréchet bewiesen wurde. 1910 publizierte Riesz die umfangreiche Arbeit „Untersuchungen über Systeme inte-

¹⁸[Rie04c], Göttingen, Februar 1904, s. Abschnitt 6.1; [Rie05d], s. Abschnitt 6.1; [Rie05c], s. Abschnitt 3.2.3; [Rie07b], s. Kapitel 5.

¹⁹Vgl. [Rie06].

²⁰Ernst Fischer, geb. 1875 in Wien, gest. 1954 in Köln, veröffentlichte seine Version des Riesz-Fischer-Satzes in „Sur la convergence en moyenne“, *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences*, 144 (1907), 1022-1024.

grierbarer Funktionen“²¹, in der er die allgemeineren L^p -Räume ($p > 1$) und die L^p -Notation einführte. Es handelte sich dabei um bahnbrechende Untersuchungen, die den Weg für die späteren Theorien der Hilbert- und Banachräume vorbereiteten und derentwegen der Name Friedrich Riesz heute noch mit der Funktionalanalysis in Verbindung gebracht wird. Diese bildete bis 1940 sein Hauptforschungsgebiet. Darüber hinaus wandte er sich in den 1920er Jahren als neuem Forschungsthema subharmonischen Funktionen zu. Im selben Zeitraum schlug Riesz einen ‚konstruktiven‘ Aufbau der Lebesgueschen Integrationstheorie vor, der unabhängig von der Maßtheorie war. Ab den 1940er Jahren beschäftigte er sich ausschließlich mit der Ergodentheorie.

Kontakte zu mathematischen Milieus

Von Interesse für die vorliegende Arbeit ist die Frage nach Riesz’ wissenschaftlichen Kontakten sowohl zu Göttinger Mathematikern um Hilbert als auch zu Poincaré und den französischen Analytikern Borel, Baire, Lebesgue und Fréchet. Da Riesz gewisse Arbeiten und Ideen dieser Wissenschaftler sehr gut kannte, ist davon auszugehen, daß er sie während seiner Aufenthalte in den mathematischen Milieus in Göttingen und Paris kennenlernte. Aber wie eng, wie intensiv war Riesz’ wissenschaftlicher Verkehr mit diesen Mathematikern?

Auf enge Kontakte von Riesz zu Göttinger Mathematikern um Hilbert zu Beginn des 20. Jahrhunderts haben mehrere Autoren verwiesen: neben Szókefalvi-Nagy, der, wie bereits erwähnt, enger Mitarbeiter von Riesz war, auch Császár und die französischen Mathematiker J. Pérèz und Gaston Julia²².

Julia berichtete 1956 in einem Nachruf, Riesz habe nach seiner Promotion eine Zeit lang an den Universitäten von Göttingen und Paris gearbeitet. Genauere Zeitangaben meldete Julia nicht. Dafür bezeichnete er die Göttinger Mathematiker Erhard Schmidt und Hermann Weyl als Freunde von Riesz. Ferner sprach Julia von Riesz’ persönlichen Beziehungen zu Jordan, Picard, Borel und Lebesgue²³.

²¹[Rie10]

²²Vgl. [SN83], [Pér54] und [Jul56]. Während Szókefalvi-Nagy und Császár sowohl König und Kürschák von ungarischer als auch Hilbert und Minkowski von Göttinger Seite her einen starken Einfluß auf Riesz zuschrieben, fällt auf, daß Pérèz und Julia zwar die Ungarn nicht erwähnten, dafür aber den Einfluß der französischen Analytiker Camille Jordan, Émile Picard, Émile Borel, Henri Lebesgue und René Baire betonten. Offensichtlich wollten die Autoren auch die Bedeutung ihrer eigenen mathematischen Kultur hervorheben. Pérèz’ Aufsatz über Riesz erschien 1954 anläßlich der Verleihung der Ehrendoktorwürde der Pariser Universität an Riesz. Pérèz’ Hervorhebung der französischen Analytiker ist aber keinesfalls nur eine Art patriotischer Rhetorik, denn, wie in den Kapiteln 6, 7 und 8 der vorliegenden Arbeit gezeigt wird, stützte sich Riesz tatsächlich auf die Ergebnisse gerade auch der französischen Analysis.

²³Julia schrieb: „Mais on peut penser aussi que son séjour à Paris, et ses relations notamment avec C. Jordan, É. Picard, É. Borel et H. Lebesgue, l’amenèrent à une nouvelle représentation de cet espace, celle que nous appelons la représentation fonctionnelle, à l’aide des fonctions commables à carré sommable, par laquelle il introduit l’intégrale de Lebesgue au cœur de la

Die Tatsache, daß Riesz Arbeiten von Borel und Lebesgue rezipierte, macht die persönlichen Beziehungen dieser drei Mathematiker untereinander interessant. Umgekehrt würden Kontakte zwischen Riesz auf der einen und Schmidt oder Weyl auf der anderen Seite Aufschluß über die Rezeption Rieszscher Ideen durch letztere geben. Solche Kontakte lassen sich aber bisher kaum nachweisen.

Riesz' persönliche Beziehungen zu all diesen Mathematikern lassen sich nicht nur meistens nicht belegen, sondern sind zum Teil sogar umstritten. Horvath behauptet beispielweise, Friedrich Riesz habe Lebesgue nie persönlich kennengelernt, obwohl Marcel Riesz Lebesgue gut kannte. Andererseits muß Riesz zwischen 1904 und 1913 mit Borel und Picard, wenn nicht persönlich zusammengetroffen, dann mindestens korrespondiert haben. Die Rieszschen Arbeiten, die in den *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences* in diesem Zeitraum erschienen, wurden oft von Picard der Akademie vorgelegt²⁴. Was Borel betrifft, erschien 1913 eine Monographie von Riesz in der Sammlung *Collection de Monographies sur la theorie des fonctions*, die von Borel gegründet und redigiert wurde. Zu einer Bekanntschaft mit Jordan gibt es dagegen keinen weiteren Hinweis außer Julias Bemerkung.

Im Gegensatz dazu ist die Bekanntschaft zu Erhard Schmidt höchst wahrscheinlich. Dafür sprechen mehrere Tatsachen: Zwischen 1906 und 1907 verfolgten beide Hilberts Integralgleichungstheorie, Schmidt promovierte 1907 bei Hilbert, und in demselben Jahr war Riesz in Göttingen zu Besuch²⁵, d.h. sie waren am selben Ort zur selben Zeit, und sie teilten ihre Forschungsinteressen; darüber hinaus deutet ein Verweis von Riesz auf einen Vortrag von Schmidt stark darauf hin, daß ein direkter wissenschaftlicher Austausch zwischen ihnen stattfand. Im November 1906 schrieb Riesz: „L'année dernière, dans une séance de la Société mathématique, à Göttingen, M. E. Schmidt a énoncé le théorème suivant [...]“.²⁶

Was Weyl betrifft, kann zunächst ähnlich wie bei Schmidt argumentiert werden: Sie waren am selben Ort zur selben Zeit, und sie teilten Forschungsinteressen. Weyl promovierte zwar erst 1908 (auch über Hilberts Theorie der Integralgleichungen), aber er studierte schon seit 1903 in Göttingen. Es scheint wahrscheinlich, daß Riesz und Weyl sich schon vor 1907 kennenlernten. Daß sie Freunde waren, ist dagegen wenig plausibel. Es gibt keinen Hinweis auf einen Briefwechsel²⁷.

question.“ Vgl. [Jul56].

²⁴Vgl. zum Beispiel [Rie07c], [Rie07d] und [Rie07e].

²⁵Vgl. die Reihe von fünf Arbeiten, in denen Riesz an Hilberts Theorie der Integralgleichungen anschloß, [Rie06], [Rie07c], [Rie07d], [Rie07e] und [Rie07f]. Schmidts Dissertation ist [Sch07].

²⁶Vgl. [Rie06]. Dieser Verweis wirft wiederum die Frage auf, ob Riesz auch im Jahr 1905 einen Forschungsaufenthalt in Göttingen absolvierte.

²⁷Weyls Nachlaß ist über die Webseite der ETH Zürich zugänglich. Ich danke Erhard Scholz, den Mathematikhistoriker und Spezialist in den wissenschaftlichen Arbeiten von Weyl, für seine Auskünfte. Scholz hat bei Weyl keine Hinweise auf Riesz gefunden. Zu Riesz' Nachlaß s. Einleitung zu Anhang C.

1.2 Kulturelle Beziehungen zwischen Ungarn, Deutschland und Frankreich um 1900

Ungarn um 1900

Um die Wende zum 20. Jahrhundert war das kulturelle Leben in Ungarn das Produkt von nationalen und modernisierenden Strömungen des 19. Jahrhunderts. Die kulturellen Beziehungen Ungarns zu Deutschland und Frankreich standen um 1900 in Spannung mit der Suche nach einer eigenen Identität als Nation. Insbesondere die Beziehung Ungarns zu Deutschland war zwiespältig, da Ungarn aus historisch-politischen Gründen unter dem Einfluß der deutsch-österreichischen Kultur stand.

Die Konstituierung der k.u.k. Monarchie im Jahr 1867 räumte Ungarn gewisse Autonomien ein, die eine allmähliche Emanzipation von der deutsch-österreichischen Kultur ermöglichte. Zunächst galt es für die führenden ungarischen Politiker, aus (oder in) der Vielvölkermonarchie eine Nation zu errichten. Da die sprachliche Hegemonie das Bekenntnis zur Sprachnation versprach, wurde auf den Unterricht der ungarischen Sprache Wert gelegt, der durch die Einführung von Schulgesetzen erzwungen wurde. In gleichem Sinne war bereits 1825 zur Förderung der ungarischen Sprache die Vorläuferin der Ungarischen Akademie der Wissenschaften gegründet worden²⁸.

Ein rasches Wachstum von Industrie, Wirtschaft und Verkehr – im Vergleich zur Landwirtschaft – charakterisierte die Zeit zwischen 1867 und 1914. Die Eisenbahn wurde ausgebaut, und ausländisches Kapital wurde in Großindustrie investiert. 1873 wurde durch Zusammenlegung dreier älterer Städte die Landeshauptstadt Budapest gegründet. Diese Metropole erfuhr in der zweiten Hälfte des 19. Jahrhunderts einen außerordentlichen Urbanisierungsprozeß. In dem Vorstadtgürtel Budapests siedelten ein Drittel der Arbeiter und zwei Drittel der Großbetriebe Ungarns. Nach Budapest war Szeged die zweitgrößte Stadt mit mehr als 100 000 Einwohnern²⁹.

Der Aufbau des Hochschulsystems durch die Etablierung weiterer Universitäten stand im Zeichen einer sich seit der Mitte des 19. Jahrhunderts um ein Vielfaches vergrößerten Anzahl von Studenten. Die Ausbildungsmöglichkeiten umfaßten juristische, medizinische, geisteswissenschaftliche, theologische, naturwissenschaftliche, technische und volkswirtschaftliche Studien. Das Kontingent der Studenten stammte fast ausschließlich entweder aus wohlhabenden adligen Familien oder aus dem Stadtbürgertum. Der Anteil von Studenten aus Arbeiter- und Bauernfamilien war sehr niedrig. Dagegen lag die Zahl der jüdischen Hoch-

²⁸[Hoe84], 38-53. Szénássy nennt sie ‚Hungarian Scholarly Society‘, [Szé92], 197.

²⁹Das Streckennetz der Eisenbahn wuchs zwischen 1867 und 1913 von 2200 km auf 22 000 km an, vgl. [Hoe84], 48ff. Zwischen 1867 und 1873 setzte in Österreich-Ungarn ein „Gründerboom“ ein, vgl. [Mat91], 121.

schulabsolventen überproportional hoch³⁰.

Die Wissenschaften entfalteten sich in den letzten drei Jahrzehnten des 19. Jahrhunderts zunächst als ‚nationale‘ Wissenschaften. Für die Mathematik bedeutete dies, die mathematische Praxis an eine ungarische Tradition zu binden. Die Mathematiker Farkas Bolyai und sein Sohn János Bolyai wurden als nationale Größen wiederentdeckt. Farkas war mit Gauß in Göttingen befreundet gewesen und hatte mit ihm lebenslang korrespondiert. János entdeckte die heute nach ihm und Lobatschewski benannte nicht-Euklidische Geometrie³¹. Die Ungarische Akademie der Wissenschaften förderte die Herausgabe der Werke der beiden Bolyai und damit die Anerkennung ihrer Werke als die ungarische Tradition, in der die Mathematik in Ungarn wurzelte³².

Darüber hinaus wurden neben der Mathematik auch die naturwissenschaftlichen und technischen Disziplinen durch Einrichtung von Forschungsinstituten und Laboratorien gefördert, die unter Rezeption der internationalen Entwicklung einen raschen Aufstieg erfuhren. Dabei waren die Verdienste der Physik und der Mathematik bemerkenswert³³.

Das ungarische Geistesleben war bis 1900 von der deutsch-österreichischen Kunst und Kultur stark beeinflusst³⁴. Diese Situation änderte sich nach der Jahrhundertwende infolge emanzipatorischer Strömungen, die die Aufmerksamkeit auf englische und französische Vorbilder lenkten³⁵.

Frankreich und Deutschland

Im Gegensatz zur dargestellten Situation in Ungarn, war die Mathematik das ganze 19. Jahrhundert hindurch fester Bestandteil sowohl der französischen als auch der deutschen intellektuellen Kulturen.

Institutionell war die Mathematik in Frankreich eng verbunden mit der Tradition der Grandes Écoles. Da diese die Hochschulausbildung im ganzen 19. Jahrhundert dominierten, machten sie zugleich – wegen des französischen Zentralismus – Paris zu Frankreichs mathematischem Zentrum. Im Gegensatz dazu gab es

³⁰Neben der Budapester Universität standen seit 1871 die Technische Universität in Budapest und seit 1872 die Universität von Kolozsvár. 1912 wurden die Universitäten von Debrecen und Preßburg gegründet, vgl. [Hoe84], 53.

³¹János Bolyai und Nikolai Lowatschewski entdeckten 1823 unabhängig von einander die nach ihnen benannte Nicht-Euklidische Geometrie.

³²[Szé92], 256ff.

³³[Hoe84], 53. S. Kapitel 2.

³⁴Der Studentenaustausch zwischen Österreich und Deutschland wurde ohne größere Unterbrechungen nach dem österreichisch-preußischen Krieg fortgesetzt, vgl. [Vie91], 203. Diese akademische und wissenschaftliche Kooperation dürfte nach der Etablierung der österreichisch-ungarischen Doppelmonarchie für ungarische Studenten und Wissenschaftler bei deren Beziehungen zu Akademie und Wissenschaft im Deutschen Reich vorteilhaft gewesen sein.

³⁵[Hoe84], 54. S. Abschnitt 2.1.2.

im historisch bedingt föderalistischen Deutschland nicht nur ein mathematisches Zentrum, vielmehr blühten im 19. Jahrhundert auf deutschem Boden gleichzeitig mehrere mathematische Forschungsinstitutionen: Berlin, Göttingen, Heidelberg und viele andere.

Um 1900 besaßen die mathematischen Wissenschaften in Frankreich eine hundertjährige Tradition in analytischer Mechanik, reeller Analysis und darstellender Geometrie. In Deutschland entwickelte sich dagegen bis 1900 eine Tradition in komplexer Analysis, Geometrie und Algebra³⁶.

Die dargestellten institutionellen Strukturen und wissenschaftlichen Interessen waren das Produkt der nationalen Bedingungen von mathematischer Kultur und waren insofern auch von den jeweiligen politischen Gegebenheiten abhängig³⁷.

War die Mathematik in Frankreich bis in den 1860er Jahren so weit entwickelt, daß sie sich ein gewisses Desinteresse an den Entwicklungen im Ausland leisten konnte, so brachte die französische Niederlage im franco-preußischen Krieg 1870/71 ein Umdenken. Der vermeintlich hohe Stand der Wissenschaften in Frankreich wurde in Frage gestellt. Es breitete sich ein Komplex der Minderwertigkeit und Rückständigkeit gegenüber dem Stand der Wissenschaften in Deutschland aus. Einige Wissenschaftler verlangten Reformen und Modernisierung im Bildungssystem. Andere öffneten sich den Entwicklungen in Deutschland³⁸.

Mitten in einer antideutschen Nachkriegsstimmung zeichnete sich Charles Hermite durch seine Bemühungen aus, die mathematischen Arbeiten der Berliner Mathematiker Karl Weierstraß und Leopold Kronecker in Frankreich bekannt zu machen³⁹. Auch in der anderen Richtung gab es Annäherungsversuche. In Deutschland förderte Felix Klein den wissenschaftlichen Austausch mit Frankreich. Nicht nur schickte er 1886 David Hilbert und Eduard Study als Austauschstudenten nach Paris, vor allem der Vorlesungen von Hermite und Poincaré wegen sondern er etablierte in Göttingen regelmäßige Berichte über mathematische Entwicklungen im Ausland, insbesondere in Frankreich⁴⁰.

Die Annäherungsbemühungen von Hermite und Klein fielen innerhalb eines Rahmens nationaler institutioneller Umstrukturierungen in der Mathematik: In Frankreich wurde 1872 die *Société mathématique de France* (SMF) gegründet, in Deutschland wurde 1890 die *Deutsche Mathematiker-Vereinigung* (DMV) ins Leben gerufen⁴¹. Diese Strukturen zeichnen zugleich aus, was Hermites und Kleins Bemühungen von sämtlichem früheren internationalen Wissenschaftstransfer un-

³⁶Vgl. [GT96].

³⁷Vgl. [Dho95], 317. Dhombres bietet eine sehr interessante Diskussion der nationalen Bedingungen mathematischer Kultur im Fall Deutschland und Frankreich um 1900.

³⁸S. Abschnitt 3.1.1.

³⁹Zu Hermites Bemühungen vgl. [Arc02].

⁴⁰Vgl. [Row94], 35.

⁴¹Zu Gründungsmotivationen vgl. [GT96].

terschied: Die Mathematik war institutionalisiert. Dadurch war sie auch an nationale Kulturen gebunden, an Länder, die noch 1870 Krieg gegeneinander geführt hatten. Das bedeutet hier, daß bei der Rezeption ein gewisses Feindseligkeitsgefühl überwunden werden mußte. Es kam nicht zu einer Ideologie der nationalen Wissenschaften – wie etwa später in Nazi-Deutschland. Ganz im Gegenteil: Das Interesse an der internationalen Zusammenarbeit wuchs⁴². So fand 1897 der erste Internationale Mathematiker-Kongreß in Paris vor allem auf Initiative von deutschen und französischen Mathematikern statt⁴³.

Kurz nach 1900 nahmen französische und deutsche Mathematiker die Arbeit an dem gemeinsamen Projekt einer *Encyclopédie des sciences mathématiques pures et appliquées* auf. Die Idee des Projekts ging auf Felix Klein zurück, der es als ein internationales Unternehmen konzipiert hatte. Klein war sehr interessiert daran, daß die Traditionen der britischen Mechanik, der italienischen Geometrie und der französischen Analysis in der *Encyklopédie* vertreten wären. Die deutsche Version, die von Klein redigiert wurde, erschien in Leipzig, die französische in Paris. Letztere wurde anhand der deutschen Ausgabe redigiert und unter der Leitung von Jules Molk herausgegeben. Keine der Ausgaben war aber eine einfache Übersetzung der anderen, vielmehr ergänzten sie sich gegenseitig. Die beiden Versionen der *Encyklopédie* verkörpern die kulturabhängigen, verschiedenen Auffassungen der Mathematik in Deutschland und Frankreich in der Zeit von 1895 bis 1935⁴⁴.

Was die wissenschaftlichen Beziehungen zwischen Ungarn und Frankreich bzw. Deutschland angeht, beteiligten sich, wie bereits angedeutet, nicht nur deutsche und französische Mathematiker an dem *Encyklopédie*-Projekt, sondern Spezialisten diverser Nationalitäten. So nahmen aus Ungarn Jozsef Kürschák und Marcel Riesz daran teil⁴⁵. Darüber hinaus zeigte die Präsenz ungarischer Mathematiker in Deutschland und Frankreich eine wachsende Tendenz. In der DMV nahm zwischen 1891 und 1913 die Anzahl der Mitglieder aus Ungarn rasant von 8 auf 93 zu. Dagegen traten in einem vergleichbaren Zeitraum von 1890 bis 1914 in der SMF nur 2 neue Mitglieder aus Ungarn ein, so daß es 1914 insgesamt 5 waren⁴⁶. Auch die Anzahl der ungarischen Studenten, die um 1900 Studienreisen in Deutschland bzw. Frankreich absolvierten, nahm zu, wobei auch hier

⁴²Georg Cantor warb für die Initiierung eines Internationalen Mathematiker-Kongresses. Er wies dabei auf dessen friedensfördernde Funktion hin und erinnerte an die Leistung Hermites bezüglich der Aufrechterhaltung des Wissenstransfers in den 1870er Jahren, vgl. [PI87], 127ff.

⁴³Felix Klein und Heinrich Weber auf deutscher, Laisant und Lemoine auf französischer Seite, vgl. [PI87], 128.

⁴⁴Die deutsche *Encyklopédie* erschien zwischen 1908 und 1935, die französische Ausgabe zwischen 1904 und 1916, vgl. [Dho95], 315. Die Arbeit an dem Projekt wurde 1895 aufgenommen, vgl. [Row89], 206ff.

⁴⁵S. Abschnitte 2.3.2 und 2.3.5.

⁴⁶Vgl. Tabelle in [GT96], 426.

Deutschland deutlich favorisiert wurde⁴⁷.

1.3 Zur Raumdiskussion um 1900

Zu Beginn des 19. Jahrhunderts war es üblich, die Geometrie als die Wissenschaft des Raumes zu verstehen, wobei der Raum als etwas Existierendes galt, so wirklich wie die räumlichen Gegenstände, die sich im Raum bewegen. Kaum jemand kam auf die Idee, geometrische Sätze empirisch zu bestätigen oder zu widerlegen⁴⁸. Die Entdeckung der nicht-Euklidischen Geometrie brachte neue Einsichten. Zum einen konnte die Euklidische Geometrie nun im Kontext der Naturwissenschaften als ein System betrachtet werden, das in Übereinstimmung mit der Erfahrung stand und das mit Hilfe von Experimenten bestätigt werden konnte. Zum anderen brachte die nicht-Euklidische Geometrie in der Philosophie ein Gegenargument zu Kants Auffassung des Raumes als reine Anschauungsform apriori. So entwickelten sich seit Mitte des 19. Jahrhunderts verschiedene Philosophien der Geometrie. Torretti gruppiert die entstandenen Auffassungen in drei Hauptströmungen: Empirismus, Apriorismus und Konventionalismus⁴⁹.

Das gemeinsame Ziel der verschiedenen empirischen Philosophien der Geometrie kann zusammenfassend folgendermaßen formuliert werden: Es sollten Argumente zu einer Begründung der Geometrie als Erfahrungswissenschaft aufgestellt werden. Dagegen ging es bei der aprioristischen Philosophie der Geometrie um die Verteidigung des apriorischen Charakters der Euklidischen Axiome im Sinne Kants, bzw. um die Bestimmung der Elemente der Geometrie, die ‚apriori‘, d.h. unabhängig von aller Erfahrung, sind. Gegen den Empirismus und den Apriorismus behauptete der Konventionalismus in seiner Hauptthese: Die Axiome der Geometrie sind weder falsch noch wahr im empirischen Sinne. Sie sind auch keine synthetischen Urteile apriori. Sie sind Übereinkommen, die auf Grund ihrer Zweckmäßigkeit ausgewählt wurden.

Vertreter empiristischer Philosophien der Geometrie waren unter anderem der britische Philosoph John Stuart Mill, aus dem deutschsprachigen Raum Friedrich Ueberweg, Benno Erdman und Ernst Mach. Aprioristische Positionen in der Philosophie der Geometrie wurden in Beiträgen von Wilhelm Wundt, Hermann Lotze, Joseph Delboeuf, Charles Renouvier und Bertrand Russell dargestellt. Konventionalistische Argumente wurden seit dem letzten Jahrzehnt des

⁴⁷S. Abschnitt 2.1.2.

⁴⁸Eine Ausnahme war Girolamo Saccheri (1667-1733), der im 18. Jahrhundert drei physikalisch-geometrische Experimente zur Bestätigung des fünften Euklidischen Postulates vorschlug, vgl. [Tor78], 48. Torrettis wissenschaftshistorische Arbeit „Philosophy of Geometry from Riemann to Poincaré“ bietet einen Überblick über die verschiedenen Philosophien der Geometrie im 19. Jahrhundert, [Tor78].

⁴⁹Andere Autoren verwenden andere Bezeichnungen bzw. Systematisierungen. Ich folge hier Torretti, vgl. [Tor78], 254ff.

19. Jahrhunderts in der philosophischen Raumdiskussion von dem französischen Mathematiker Henri Poincaré vertreten.

In zahlreichen philosophischen Texten setzte sich Poincaré mit Vertretern empiristischer bzw. aprioristischer Philosophien der Geometrie auseinander. Poincaré reagierte auf Positionen von Mill, Mach und Russell und auf den systematischen Konventionalismus von Edouard Le Roy. Im breiteren Rahmen der Wissenschaftsphilosophie diskutierte Poincaré auch die Ideen des Philosophen Henri Bergson.

Die Raumdiskussion um 1900 und insbesondere Poincarés philosophische Beiträge dazu standen im Entstehungskontext der Rieszschen Arbeit „Die Genesis des Raumbegriffs“. In Kapitel 3 der vorliegenden Untersuchung werden diejenigen Aspekte von Poincarés philosophischen Beiträgen näher erläutert, an die Riesz später angeschlossen.

Neben Riesz muß auch Felix Hausdorff erwähnt werden, als ein weiterer Mathematiker, der um 1900 zum Raumbegriff philosophisch nachdachte. Als Antrittsvorlesung hielt Hausdorff 1903 den Vortrag „Das Raumproblem“.

Nachdem Albert Einsteins spezielle Relativitätstheorie 1905 erschien, nahm die Raumdiskussion eine Wendung. In der daran anschließenden naturwissenschaftlichen Raumdiskussion zeichneten sich die mathematisch-physikalischen Beiträge von Hermann Minkowski in Göttingen und von Poincaré in Paris aus⁵⁰.

1.4 Zu Mengenlehre und Axiomatik um 1900

In der zweiten Hälfte des 19. Jahrhunderts fanden zwei Ereignisse in der Mathematik statt, die eine wichtige Rolle im Entstehungsprozeß der modernen Mathematik spielen sollten: Georg Cantor entwickelte die Mengenlehre, und die axiomatische Methode erfuhr in der Mathematik einen neuen Impuls.

Cantors Mengenlehre entstand im letzten Viertel des 19. Jahrhunderts⁵¹. Cantors Untersuchungen trigonometrischer Reihen führten ihn zu ersten mengentheoretischen Resultaten. 1878 bewies Cantor die Unmöglichkeit einer eins-zu-eins-Zuordnung zwischen den natürlichen und den reellen Zahlen. Daraus leitete er den Abzählbarkeitsbegriff ab: Eine Menge heißt abzählbar, wenn es eine eins-zu-eins-Zuordnung zwischen den Elementen der Menge und den natürlichen Zahlen gibt⁵². Die Erkenntnis, daß es überabzählbare Mengen gibt, lieferte die Grundlage für seine Mengenlehre der transfiniten Zahlen. In der Zeit zwischen 1879 und

⁵⁰Minkowski lieferte ab 1907 wichtige Beiträge zu Einsteins Theorie, vgl. [Cor97a], [Cor97b], [Sta98]. Poincaré gilt zusammen mit Einstein und Lorentz als Begründer der speziellen Relativitätstheorie, vgl. [Gil90].

⁵¹Vgl. zur Geschichte von Cantors Mengenlehre [Dau79], [PI87], [Moo89] und [Fer99].

⁵²Anschließend bewies er die Abzählbarkeit der algebraischen Zahlen, vgl. [Moo89], 82. Zur Genesis von Cantors Mengenlehre, vgl. [PI87], 29ff.

1884 entwickelte er in einer Reihe von sechs Mitteilungen „Über unendliche, lineare Punctmannichfaltigkeiten“ die Grundbegriffe der Punktmengenlehre sowie seine Theorien der Ordnungstypen und der transfiniten Zahlen⁵³.

1883 führte Cantor in der fünften der eben erwähnten Mitteilungen den Begriff der ‚Wohlordnung‘ für abstrakte Mengen ein⁵⁴. Anschließend formulierte er das sogenannte Wohlordnungsprinzip, wonach jede Menge wohlgeordnet werden kann⁵⁵. Von zentraler Bedeutung waren die allgemeine Einführung der transfiniten Ordinalzahlen und deren Zusammenhang mit den Kardinalzahlen⁵⁶. Cantor formulierte die Vermutung, die heute unter dem Namen ‚Kontinuumshypothese‘ bekannt ist⁵⁷. In der Aleph-Notation, die Cantor erst 1895 für die transfiniten Kardinalzahlen einführte und die seitdem Standard ist, besagt die Kontinuumshypothese, daß die Mächtigkeit der reellen Zahlen gleich \aleph_1 ist⁵⁸.

In einem Brief an David Hilbert schrieb Cantor 1912, die Mengenlehre bestehe aus mehreren Teilen, wobei der eine die reine Mengenlehre sei, der andere aus Anwendungen in erster Linie auf Zahlentheorie, Geometrie und Analysis bestehe⁵⁹. Während Cantors Punktmengenlehre gerade wegen ihrer Anwendungen sowohl in Deutschland als auch in Italien, Ungarn und Frankreich relativ schnell rezipiert wurde, stieß Cantors reine Mengenlehre bei manchen Mathematikern auf scharfe Kritik.

Die Auseinandersetzungen um das Kontinuumproblem und das Wohlordnungsprinzip erreichten 1904 einen Höhenpunkt: zuerst, als der ungarische Mathematiker Gyula König auf dem III. Internationalen Mathematiker-Kongreß (IMK) die Widerlegung der Kontinuumshypothese ankündigte, seinen Beweis sich jedoch als falsch herausstellte, und kurz danach, als Ernst Zermelo das Wohlordnungsprinzip unter Verwendung des neu von ihm eingeführten Auswahlaxioms bewies.

Die historische Bedeutung sowohl der Kontinuumshypothese als auch von Zermelos Auswahlaxiom liegt auch in ihrer Verbindung zu den Grundlagen der Mathematik begründet. Wegen der willkürlichen nicht-konstruktiven Natur des Auswahlaxioms war seine Zulässigkeit vor allem unter französischen Mathematikern umstritten. Die Kontinuumshypothese erwies sich als eine besondere Herausforderung einer Auffassung von Mathematik, der zufolge sich jeder mathematische

⁵³Alle sechs Mitteilungen sind in [Can32] wiederabgedruckt.

⁵⁴Eine geordnete Menge heißt wohlgeordnet, wenn sie selbst und jede ihrer Teilmengen ein erstes Element besitzen, vgl. [PI87], 63.

⁵⁵In seiner dritten Mitteilung behandelte Cantor zum ersten Mal abstrakte Mengen. Als Beispiele nannte er unter anderem Kurvenmengen und Flächen, vgl. [Moo89], 84-87.

⁵⁶In [PI87], 63ff. kurz beschrieben als die ‚Aufstellung der Aleph-Folge‘: \aleph_1 als die nächsthöhere auf \aleph_0 folgende Mächtigkeit, \aleph_2 als die nächsthöhere auf \aleph_1 etc., wobei \aleph_0 die Kardinalität der natürlichen Zahlen und \aleph_{i+1} die Kardinalität der i -ten Zahlklasse transfiniten Ordinalzahlen ist.

⁵⁷Vgl. [Moo89], 85ff.

⁵⁸Vgl. [Moo89], 88 und 99.

⁵⁹Vgl. [Moo89], 99.

Satz entweder beweisen oder widerlegen läßt. Diese Auffassung hatte Hilbert auf dem I. IMK 1900 vertreten. Als einzige Prämisse forderte Hilbert dabei die Sicherung der Grundlagen der Mengenlehre, wofür er den axiomatischen Zugang vorschlug. Hilberts Erwartung wurde widerlegt, denn die Kontinuumshypothese erwies sich in der Mengenlehre, die auf einem von Zermelo und Fraenkel aufgestellten Axiomensystem, das das Auswahlaxiom einschloß, aufgebaut wird, als vom Axiomensystem unabhängig⁶⁰.

Der Rezeption von Cantors Punktmengenlehre, die, wie bereits erwähnt, relativ schnell stattfand, folgten um 1904 erste Verallgemeinerungsansätze durch Maurice Fréchet und Friedrich Riesz in Richtung einer abstrakten Punktmengenlehre. Ein gemeinsames Merkmal der Ansätze von Fréchet und Riesz war dabei die Anwendung axiomatischer Methoden⁶¹.

Der axiomatische Zugang in der Mathematik war seit Euklids *Elementen* (2. Jh. v. Chr.) traditionell mit geometrischen Darstellungen verbunden. In den 1880er Jahren erhielt die Axiomatik einen neuen Impuls. 1882 legte Moritz Pasch in seinem Buch „Vorlesungen über neuere Geometrie“ einen ersten vollständigen axiomatischen Aufbau der Geometrie dar. Aus der Arbeit von Pasch gingen zwei Entwicklungslinien hervor: die eine in Italien, geleitet von Giuseppe Peano, die andere in Göttingen unter der Führung von Hilbert⁶². Auch in Frankreich entstanden kurz vor der Wende zum 20. Jahrhundert Arbeiten in verschiedenen mathematischen Gebieten, die sich systematisch der Axiomatik bedienten. Es handelte sich um Arbeiten zur abstrakten Gruppentheorie, Körpertheorie, Geometrie und Analysis⁶³.

Sowohl der axiomatische als auch der mengentheoretische Zugang führten um die Jahrhundertwende zu einer neuen Gestaltung der Mathematik in dem Sinne, daß sie spezifische Formen sowohl von Fragestellungen als auch von Lösungsmustern mit sich brachten. Sie förderten die Hinwendung zu abstraktem strukturellem Denken und somit die Entstehung und Entwicklung der modernen Mathematik.

⁶⁰Vgl. [PI87], 178. S. Abschnitt 4.2.2.

⁶¹S. Abschnitte 3.2.6 und 5.2.

⁶²Vgl. [Cor96], 155ff. Zu Hilbert s. 4.2.2.

⁶³S. Abschnitt 3.2.2.

Kapitel 2

Zur ungarischen mathematischen Kultur

2.1 Institutionen, Forschung und Lehre

Die sozialgeschichtlichen Ereignisse im Ungarn des 19. Jahrhunderts schufen gute Bedingungen für die starke Entwicklung der Mathematik in Ungarn. So genöß sie bereits 1912 internationale Anerkennung, die mit den Namen der Mathematiker Gyula Kónig, József Kürschák, Lipót Fejér, Friedrich Riesz und Alfréd Haar verbunden war¹.

Mit der Revolution von 1848 und der Konstituierung der Habsburgerischen k.u.k. Doppelmonarchie 1867 sind andere Faktoren in Verbindung zu setzen, die die Entwicklung und die Besonderheiten der Wissenschaften in Ungarn mitbestimmten. Zu diesen zählen der Liberalismus, die Industrialisierung, der Drang zur Modernisierung in allen Gebieten und ein starkes ungarisches Nationalgefühl².

2.1.1 Ausbau des Bildungssystems und die Gründung der Ungarischen Akademie der Wissenschaften

Unterrichtsreformen

Obgleich sich bereits nach der Revolution einige Modernisierungsansätze des Schulunterrichtswesens bemerkbar machten, kam es zu einer bedeutenden Unterrichtsreform erst nach der Konstituierung der Doppelmonarchie. In der Zeit des Neoabsolutismus zwischen 1849 und 1867 war deutsch die offizielle Dienst-

¹Auch in allgemeinen Darstellungen der modernen Geschichte Ungarns wird auf die bemerkenswerte Entwicklung der Budapester mathematischen Schule um die Wende zum 20. Jahrhundert hingewiesen, vgl. [Hoe84], 53.

²Vgl. [Hoe84], 15ff und s. Abschnitt 1.2.

und auch Unterrichtssprache bis in die Mittelschule im von vielen verschiedenen Ethnien bewohnten damaligen Ungarn³. Nach Gründung der Doppelmonarchie gelang dem zum ersten Kultus- und Erziehungsminister berufenen Baron József Eötvös 1868 die Einsetzung eines liberalen Schulgesetzes: Für alle Kinder vom sechsten bis zum zwölften Lebensjahr wurde die allgemeine Schulpflicht eingeführt. Ferner wurde nach diesem Gesetz die Gründung staatlicher Volksschulen neben den vorherrschenden Konfessionsschulen möglich⁴. Dabei wurde den verschiedensprachigen ungarischen Staatsbürgern der uneingeschränkte Gebrauch der Muttersprache in der Grund- und Mittelschule garantiert. Jedoch hielten sich die führenden Kreise nicht an diese Vereinbarungen. Im Laufe einer Intensivierung der Magyarisierungsmaßnahmen wurde in den Schulgesetzen von 1879, 1883 und 1891 der Unterricht der ungarischen Sprache in Kindergarten, Volks- und Mittelschulen obligatorisch⁵.

Parallel zu diesen Reformen wurden im Laufe der Zeit auch verschiedene Unterrichtspläne für die Mathematik verabschiedet, an deren Entwurf professionelle Fachwissenschaftler mitwirkten⁶. Mit den 1868 eingeführten Reformen im Unterrichtswesen entstand auch eine große Nachfrage nach Lehrern der Mathematik und nach Lehrbüchern, die den neuen Unterrichtsplänen angepaßt waren⁷. An der Ausbildung von Lehrern wirkten die Professoren der Mathematik und Physik aller drei Universitäten Ungarns mit: die etablierte Budapester Universität und die beiden neuen Hochschulen, die Technische Universität in Budapest und die Universität von Kolozsvár (Klausenburg). Dabei zeichneten sich König in der Hauptstadt und Valyi in Kolozsvár durch ihre didaktische Begabung aus, mit der sie oft die Lehramtskandidaten zu selbstständiger mathematischer Forschung motivierten⁸. Auch als Koautor des von 1879 bis 1899 wirksamen Unterrichtsplans und als Verfasser entsprechender Lehrbücher spielte König eine führende Rolle bei der Förderung der Mathematik in Ungarn bereits auf Schulniveau. Seine Lehrbücher wurden mehrere Jahrzehnte lang für den Schulunterricht benutzt⁹.

Ausbau des Hochschulsystems

Auch das Hochschulwesen erfuhr einen gewaltigen Modernisierungsschub, wofür in erster Linie die bereits angesprochenen Neugründungen zweier Universitäten noch im letzten Drittel des 19. Jahrhunderts stehen sollen: Neben der Budape-

³Vgl. [Hoe84], 22.

⁴Vgl. [Hoe84], 52.

⁵Vgl. [Hoe84], 37-38.

⁶Unter ihnen auch Gyula König, vgl. [Szé92], 217.

⁷Zu den Reformen des Mathematikunterrichts vgl. [Szé92], 217ff.

⁸Vgl. [Szé92], 326.

⁹Zu Königs umfangreiche Mitarbeit an Reformen des Mathematikunterrichts vgl. [Szé92], 217, 241-244, 334.

ster Universität der Künste und Wissenschaften¹⁰ stand seit 1871 die Technische Universität in Budapest, die aus einer technischen Fachschule hervorgegangen war¹¹, und außerhalb von Budapest wurde 1872 die Universität von Kolozsvár in der Hauptstadt von Transsilvanien ins Leben gerufen. Die Einrichtung weiterer Universitäten wurde erst 1912 fortgesetzt¹².

Bis 1900 spielten die Technische Universität in Budapest und die Universität von Kolozsvár eine führende Rolle für die Entwicklung der Mathematik in Ungarn. Erst in Folge der Berufung von Manó Beke 1900 und Fejér 1911 gewann die Budapester Universität der Künste und Wissenschaften im Bereich der Mathematik an Bedeutung. Dagegen wurde in Kolozsvár schon früh durch die Einrichtung einer eigenen Fakultät der Mathematik und Naturwissenschaften ein Schwerpunkt auf die Mathematik gelegt¹³.

Die Bedeutung der Technischen Universität von Budapest und der Universität von Kolozsvár für die Entwicklung der Mathematik in Ungarn ist darin begründet, daß an diesen Universitäten parallel zur Lehre der Mathematik auch mathematische Forschung getrieben und gefördert wurde. So trugen die Dozenten in qualitativhochwertigen Vorlesungen und Seminaren in Ergänzung zu den wesentlichen Resultaten der jeweiligen Gebiete der Mathematik auch eigene Resultate vor, unter anderem zu Themen der modernen Mathematik: In Budapest wurden Vorlesungen zu linearer Algebra, Funktionentheorie, Zahlentheorie, im 20. Jahrhundert auch zu Mengenlehre und neueren Aspekten der Geometrie gehalten. In Kolozsvár lagen die Schwerpunkte auf Zahlentheorie, Differentialgleichungen, Funktionentheorie, Vektoralgebra, Vektoranalysis, Quaternionen, elliptischen Funktionen und Bolyaischer Geometrie. Das hohe Niveau, das an diesen Universitäten in der mathematischen Forschung erreicht wurde, ist vor allem durch die vielen Veröffentlichungen sowohl in Ungarn als auch im Ausland belegt¹⁴.

¹⁰So meine Übersetzung von Császárs Bezeichnung „Budapest University of Arts and Sciences“, vgl. [Csá75], 146. Hoensch bezieht sich in seiner Beschreibung der Studienverhältnisse im Jahr 1851 auf der Pester Universität, vgl. [Hoe84], 53. Es handelt sich möglicherweise um dieselbe Einrichtung. Da Budapest 1873 als Landeshauptstadt durch die Zusammenlegung von Buda, Pest und Obuda (Ofen) entstand, ist es möglich, daß die Pester Universität zur Budapester Universität für Künste und Wissenschaften wurde. Nach Szénássy wurde in dieser Universität die Mathematik an der „Faculty of arts of the university of sciences“ gelehrt, [Szé92], 220.

¹¹Császár gibt 1871 als Gründungsjahr der Technischen Universität an, die auf der Basis einer seit 1845 betriebenden „industrial apprentice school“ entstand, vgl. [Csá75], 146. Bei Szénássy heißt es „the Joseph Technical University set up as the successor of a polytechnical school in 1871“, vgl. [Szé92], 218. Hoensch zufolge fand diese Umwandlung zur Gründung der Technischen Universität erst 1872 statt, vgl. [Hoe84], 53.

¹²Zum Ausbau des Hoch- und Fachschulwesens vgl. [Hoe84], 53

¹³Vgl. [Szé92], 217-219.

¹⁴Vgl. [Szé92], 219-220.

Mathematik als Kulturgut

Im Zuge des zu Beginn des 19. Jahrhunderts sich verbreitenden Nationalgefühles entstand 1825 aus privater Initiative die Vorläuferin der Ungarischen Akademie der Wissenschaften, die insbesondere die Geschichts- und Sprachwissenschaft fördern sollte¹⁵. Zunächst lag das Interesse auf der akademischen Kultivierung der ungarischen Sprache als Nationalsprache, im nachhinein bildete die Ungarische Akademie der Wissenschaften das Fundament, auf dem sich nach der Konstituierung der k.u.k. Monarchie die ‚nationalen‘ Wissenschaften entfalten konnten. Dies manifestierte sich in zahlreichen Quellen- und Materialsammlungen, in ersten Synthesen zur ungarischen Geschichte sowie zur Sprach- und Literaturgeschichte, meistens von einem konservativen Nationalismus geprägt¹⁶.

Die Aktivitäten der Ungarischen Akademie der Wissenschaften in ihren ersten 40 Jahren und die mangelhafte Vertretung der Mathematik unter ihren Mitgliedern deuten darauf hin, daß die Mathematik in Ungarn in der Zeit bis zur Konstituierung der k.u.k. Monarchie wenig gefördert wurde¹⁷.

Die Entdeckung der Mathematik als nationale Wissenschaft begann in den letzten zwei Jahrzehnten des 19. Jahrhunderts mit den Untersuchungen der Nachlässe von den großen ungarischen Mathematikern Farkas und János Bolyai. Das Projekt wurde im Auftrag der Ungarischen Akademie der Wissenschaften von König, Kürschák und anderen Mathematikern durchgeführt. Neben den 1897 erschienenen ungarischen Übersetzungen von Farkas Bolyais *Tentamon*¹⁸ und János Bolyais *Appendix* wurden bis zu Beginn des 20. Jahrhunderts viele weitere Beiträge publiziert und Vorlesungen gehalten, die mit den Leistungen der beiden Bolyai in Verbindung standen. Szénássy faßt alle diese Beiträge zur Hervorhebung der Leistungen der beiden Bolyai als „the emergence of the Bolyai cult“ zusammen. Dazu gehörten auch die erfolgreichen Bemühungen einer Gruppe von Mathematikern, zu denen Kürschák zählte, um eine Gleichstellung der Leistungen von János Bolyai zu denen von Lobatschewski bei der Entwicklung der Nichteuklidischen Geometrie¹⁹.

Anläßlich des 100. Geburtstags von János Bolyai im Jahr 1903 stiftete die Ungarische Akademie der Wissenschaften den ‚Bolyai-Preis‘ für die beste mathematische Forschung für sowohl ungarische als auch ausländische Arbeiten ohne Spracheinschränkung. Der Preis sollte alle fünf Jahre vergeben werden, aber auf-

¹⁵So ähnlich entstanden u.a. das Nationalmuseum und die Nationalbibliothek, vgl. [Hoe84], 53. Szénássy bezeichnet diese Vorläuferin der Ungarischen Akademie der Wissenschaften als die „Hungary Scholarly Society“, [Szé92], 197.

¹⁶Vgl. [Hoe84], 53.

¹⁷Szénássy widmet ein Kapitel seines Buches „History of Mathematics in Hungary until the 20th Century“ zur Darstellung der mathematischen Tätigkeiten der „Hungarian Scholarly Society“ in ihren ersten Jahrzehnten, [Szé92], 197ff.

¹⁸Der erste Band erschien 1897, der zweite 1904, vgl. [Szé92], 264.

¹⁹Vgl. [Szé92], 256ff.

grund der unterbrochenen internationalen wissenschaftlichen Kontakte während des Ersten Weltkrieges und der folgenden Inflation wurde das Projekt nach einer zweimaligen Vergabe schließlich aufgegeben²⁰. Über die Preisvergabe entschied eine Auswahlkommission, die aus zwei ungarischen und zwei ausländischen Mathematikern bestehen mußte. Mit König, Rados, Darboux und Klein im Auswahlkomitee erhielt Poincaré 1905 den ersten ‚Bolyai-Preis‘. 1910 wählten König, Rados, Mittag-Leffler und Poincaré Hilbert als Preisträger²¹.

Gemäß einem anderen zentralen Anliegen der Akademie, Förderung und Popularisierung der Wissenschaften, forcierte sie für die Mathematik bald das Projekt, eine ungarische mathematische Terminologie zu schaffen. Zwar war die Notwendigkeit einer Vereinheitlichung der chaotischen und unverständlichen mathematischen Sprache notwendig, jedoch erwies sich das 1834 von der Akademie herausgegebene mathematische Lexikon als mißlungen. Dessen Auswirkungen, die Förderung einer willkürlichen Magyarisierung der mathematischen Sprache, beschreibt Szénássy folgenderweise:

In this way [dadurch, daß die Herausgeber keine Vorschriften für die Bildung neuer ungarischer Terme angaben] the dictionary enhanced the fervour of haphazard Magyarization as after its publication every mathematician felt it his patriotic duty to coin one or more Hungarian equivalents to international mathematical terms.²²

2.1.2 Nationale und internationale Forschungsinteressen

Industrialisierung und der Bedarf an Ingenieuren

Die Industrialisierung Ungarns begann allmählich nach der Revolution von 1848. Ein relativ rasches Wachstum erfuhr sie aber erst nach der Konsolidierung der Doppelmonarchie²³. Die Industrialisierung des Landes bewirkte ein wachsendes Interesse für die Entwicklung und Modernisierung des Bildungssystems und vor allem für die Anwendungen der Wissenschaften²⁴. Auch in der Mathematik wurden Entwicklungen dringend erwartet. Ferner wurden Mathematiker für Ausbildung von Ingenieuren, Lehrern, Mathematikern und anderen Wissenschaftlern

²⁰Der Preis war mit 10 000 ungarische Kronen und einer Goldmedaille im Wert von 600 Kronen dotiert, vgl. [Szé92], 266.

²¹Vgl. [Szé92], 266.

²²[Szé92], 202. Jenes Phänomen der ständigen (Neu-)Entwicklung ungarischer Terme spiegelt sich im Buch von Szénássy, da der Autor oft auf terminologische Beiträge verschiedener Mathematiker (z.B. von Gyula König und Kálmán Szily) hinweist, vgl. [Szé92], 302ff.

²³Bis 1914 wurde ein Wachstum gemessen. Zur Wirtschaftsentwicklung in Ungarn, vgl. [Hoe84], 15-50.

²⁴Vgl. [Csá75], 145.

gebraucht²⁵.

Eine große Anzahl von gut qualifizierten Ingenieuren war für die industrielle Entwicklung notwendig²⁶. Für die Ingenieure wurden an der Technischen Universität von Budapest besondere mathematische Lehrveranstaltungen organisiert²⁷. Unter den Professoren der Mathematik und Physik, die sich sehr aktiv für die Ausbildung von Ingenieuren einsetzten, zeichneten sich Kálmán Szily, Jenő Hunyady und Gyula König aus²⁸.

Zwischen zwei Generationen

Im Folgenden werden zwei Generationen von ungarischen Mathematikern unterschieden: In einer ersten Generation sind diejenigen Mathematiker zusammengefaßt, die vor 1900 ihre Lehrtätigkeit aufgenommen haben. Zur zweiten Generation gehören diejenigen Mathematiker, die erst im 20. Jahrhundert in Ungarn oder im Ausland einen Lehrstuhl bekleideten²⁹. Zu diesen Gruppierungen lassen sich interessante Merkmale feststellen. Das so entstandene Bild zeigt Änderungen in den Forschungsrichtungen, in den Forschungsinteressen sowie einen Wechsel in der Orientierung in der internationalen mathematischen Landschaft³⁰.

Im ausgehenden 19. Jahrhundert war, wie gesehen, die Budapester Technische Universität das mathematische Zentrum Ungarns. Dieser folgte in Bedeutung die Universität von Kolozsvár. Kálmán Szily, Jenő Hunyady, Gyula König, Béla Tötössy, Mór Réthy, Gustáv Rados, József Kürschák, Gyula Vályi, Gyula Farkas und Lajos Schlesinger waren einige der bedeutendsten Professoren der Mathematik, die an diesen Universitäten wirkten³¹. Für diese Mathematiker der von mir sogenannten ersten Generation waren Studien- oder Forschungsaufenthalte im Ausland üblich. Sie begaben sich zu den damaligen deutschsprachigen wissenschaftlichen Zentren: Zürich, Wien, Berlin, Heidelberg und Göttingen. Oft kam es zu Studienaufenthalten an verschiedenen ausländischen Universitäten,

²⁵Szénássy schildert einige interessante Beispiele von Anwendungen der mathematischen Entwicklungen auf technische Probleme, vgl. [Szé92], 213ff.

²⁶Zum Einfluß der Industrialisierung Ungarns auf die Entwicklung der ungarischen Mathematik vgl. [Szé92], 213, 218 und [Csá75], 145.

²⁷Vgl. [Szé92], 218.

²⁸Vgl. die Biographien von Hunyady, Szily und König in [Szé92]. Königs Lehrveranstaltungen spielten eine wichtige Rolle für die späteren Forschungskarrieren von Kürschák, Fejér und F. Riesz, vgl. ihre Biographien in [G+90] und [Gil90].

²⁹Siehe die Liste ungarischer Mathematiker und ihre Lehr- und Professurperioden in der Tabelle B.2 in Anhang B.

³⁰In Budapest studierten Friedrich Riesz und Lipót Fejér - die selbst zu der zweiten Generation ungarischer Mathematiker gehören - bei Professoren der ersten Generation, unter denen Gyula König, József Kürschák und Gustáv Rados besonderen Einfluß auf sie ausübten. Vgl. die den *Gesammelten Arbeiten* vorangestellten biographischen Skizzen zu Fejér [Fej70] bzw. Friedrich Riesz [Rie60].

³¹Siehe ihre Lehr- und Professurperioden in der Tabelle B.2 in Anhang B.

wobei neben Berlin vor allem Wien und Heidelberg bevorzugt waren³². Dabei ist auffallend, daß niemand nach Frankreich ging.

Im Gegensatz dazu verbrachten Lipót Fejér, Friedrich und Marcel Riesz, also Mathematiker der zweiten Generation, Studienzeiten in Paris³³. Eine solche Bewegung heraus aus dem österreichisch-deutschen Einflußbereich zugunsten einer Annäherung an die französische Kultur fand gegen Ende des 19. Jahrhunderts in vielen Bereichen der ungarischen Kunst und Kultur statt³⁴. Für die mathematische Forschung ist insbesondere die Annäherung an die französische Mathematik hervorzuheben.

Nach wie vor fanden auch Forschungsaufenthalte im deutschen Sprachraum statt, doch ist hier eine Verschiebung der Interessen zu beobachten. Statt Berlin wurde nun Göttingen bevorzugt. So gingen Alfréd Haar und Friedrich Riesz nach Göttingen, während Fejér nur ein paar Jahre zuvor noch Berlin wählte³⁵.

Das Phänomen, daß um die Wende zum 20. Jahrhundert Göttingen gegenüber Berlin von den ungarischen Mathematikern favorisiert wurde, spiegelte die Verlagerung in der Bedeutung der mathematischen Zentren Berlin und Göttingen wider. Berlin hatte zwischen 1855 und 1892 mit Kummer, Weierstraß und Kronecker eine geradezu goldenes Zeitalter erlebt. Besonders ab den 1870er Jahren hatte der Ruf der Berliner Mathematik zahlreiche Studenten aus allen Teilen des jungen Deutschen Reiches und aus dem Ausland angezogen – darunter auch ungarische Studenten³⁶. Um die Jahrhundertwende war dagegen Göttingen schon das dominierende mathematische Zentrum Deutschlands³⁷.

Die zahlreichen Studien- und Forschungsaufenthalte im Ausland bewirkten, daß die Mathematik in Ungarn durch die Mathematik im Ausland stark beeinflusst wurde. Der Einfluß der Berliner Mathematik auf die Mathematik in Ungarn war bis um Wende zum 20. Jahrhundert groß. Die Berliner Mathematik der Kummer-Kronecker-Weierstraß Zeit hatte sich in Zahlentheorie, Algebra, Theorie der elliptischen Funktionen und Funktionentheorie ausgezeichnet³⁸. In Berlin hatten Hunyady, König und Vályi bei Kronecker, Weierstraß und Kummer Vorlesungen gehört³⁹. In Ungarn förderten Vályi und König mit ihren Vorlesungen zur

³²Réthy war der einzige in seiner Generation, der zu einem Forschungsaufenthalt nach Göttingen ging, s. Tabelle B.3 in Anhang B.

³³S. Tabelle B.3 in Anhang B. János Horváth bemerkte in seinem Artikel über Marcel Riesz für das „Dictionary of Scientific Biography“, daß Forschungsaufenthalte in Göttingen und Paris unter den ungarischen Mathematikern nicht ungewöhnlich waren, vgl. [Gil90].

³⁴Zum Einfluß der französischen und auch der englischen Kultur vgl. [Hoe84], 54.

³⁵S. Tabelle B.3 in Anhang B.

³⁶Göttingen empfing auch zahlreiche US-amerikanische Studenten, vgl. [PR94]. S. Abschnitt 4.1.

³⁷Zur Konkurrenz zwischen Berlin und Göttingen vgl. [Row00]. S. auch Abschnitt 4.1.1.

³⁸Zur damaligen Berliner Mathematik s. Abschnitt 4.1.1.

³⁹Szénássy berichtet, daß Hunyady die Vorlesungen von Kummer und Kronecker besuchte, König die von Kummer und Weierstraß und Vályi die von Kummer, Kronecker und Weierstraß.

Zahlentheorie einen Aufschwung dieser Subdisziplin, die bis dahin vernachlässigt worden war⁴⁰. Durch Anwendungen der Determinantentheorie und elementarer Resultate der Theorie elliptischer Funktionen auf geometrische Probleme erreichten Vályi und Hunyady einige Erfolge im Bereich der algebraischen Geometrie. Außerdem setzte Hunyady durch seine didaktischen Fähigkeiten und vor allem durch Anleitung der Forschung seiner Schüler den Grundstein einer Tradition in linearer Algebra⁴¹. König gelang mit seiner Monographie *Einleitung in die allgemeine Theorie der algebraischen Grössen* von 1903 ein wichtiger Beitrag zur Verbreitung der wesentlichen Ideen von Kroneckers algebraischen Methoden. Bei Königs Monographie handelte es sich um eine systematische Darstellung der abstrakten Algebra und der analytischen Zahlentheorie, basierend auf Arbeiten von Kronecker, die aber mit neuen Resultaten von Hilbert und anderen Mathematikern versehen war⁴². Auch in ihren Vorlesungen zur Analysis folgten Vályi und König den Grundlinien der Weierstraßschen Funktionentheorie und der Theorie der reellen Funktionen⁴³. In der Gründlichkeit ihrer Beweisführungen ließ sich ebenfalls der Einfluß Weierstraß' spüren⁴⁴. Aber im Gegensatz zu Idealen der damaligen Berliner Tradition, die die reine Mathematik zum Schwerpunkt machte, wurde in Ungarn aus den genannten Gründen die Entwicklung der angewandten Mathematik favorisiert.

Aus den Studenten jener Mathematiker der ersten Generation bildete sich die genannte zweite Generation jüngere Mathematiker. Das hatte den Effekt, daß junge Forscher wie Marcel Riesz und Fejér schon in ihren Studienzeiten in Ungarn indirekten Anschluß an die Berliner Mathematik fanden⁴⁵.

Anders als Marcel Riesz und Lipót Fejér orientierten sich Alfréd Haar und Friedrich Riesz an der Mathematik in Göttingen⁴⁶. Sie waren die ersten einer Reihe junger ungarischer Mathematiker, die in den ersten Jahrzehnten des 20. Jahr-

Vályi verbrachte zwei Jahre in Berlin mit einem Stipendium, König nur ein Semester. Vgl. [Szé92], 326, 333 und 353.

⁴⁰Szénássy hebt ihre Bemühungen um die Anwerbung junger Forscher in diesem Gebiet hervor, vgl. [Szé92], 272.

⁴¹Dieser Tradition ordnet Szénássy unter anderem Arbeiten von Dániel Arany, Manó Beke, Gyula Farkas, Gyula König, Gyula Vályi, József Kürschák und Gustáv Rados zu, vgl. [Szé92], 229.

⁴²Vgl. [Szé92], 243. Vgl. auch Grays Diskussion der Monographie Königs in [Gra97]. Gray sieht in Königs Buch einen wichtigen Beitrag zur algebraischen Geometrie und zur Verbreitung von Kroneckers Methoden, letzteres dadurch, daß König die schwer lesbaren Arbeiten von Kronecker ausarbeitete. Dabei schließt Gray jeden persönlichen Kontakt zwischen Kronecker und König aus, und anders als Szénássy scheint Gray nur die Studienreisen von König nach Wien und Heidelberg zu kennen, vgl. [Szé92], 333.

⁴³In seinen Lehrbüchern zur Analysis systematisierte König Resultate anderer Mathematiker, vgl. [Szé92], 247.

⁴⁴Vgl. [Szé92], 268 und 334.

⁴⁵Zu Marcel Riesz s. Abschnitt 2.3.5; zu Fejér s. Abschnitt 2.3.3

⁴⁶Siehe den Abschnitt 2.3.4 zu Alfréd Haar und die Biographie von Friedrich Riesz in Abschnitt 1.1.

hunderts den Anschluß an Göttingen, Paris und später auch an England suchten. Prominenteste Vertreter dieser Gruppe waren János (John) von Neumann und György (George) Pólya.

Zu Beginn des 20. Jahrhunderts hatten sich in den Universitäten in Budapest und Kolozsvár (Klausenburg) die algebraische Geometrie, die Algebra, die Analysis, die Theorie der Differentialgleichungen, die Variationsrechnung, die mathematische Physik, die Zahlentheorie und die Mengenlehre als feste Bestandteile der ungarischen Mathematik etabliert. Kürschák, ein vielseitig interessierter Mathematiker, lieferte wichtige Beiträge zu Variationsrechnung, Differentialgleichungstheorie und Algebra⁴⁷. Szily, Réthy und Farkas behandelten physikalische Fragestellungen⁴⁸. Farkas' Forschungsinteressen waren auch der Untersuchung algebraischer Gleichungen, elliptischer Funktionen und Integrale gewidmet. Darüber hinaus schreibt Szénássy ihm die Leistung zu, die Vektoralgebra und die Vektoranalysis in Ungarn bekannt gemacht zu haben⁴⁹. Gyula König stellte seit den 1880er Jahren in Vorlesungen und Lehrbüchern Anwendungen mengentheoretischer Betrachtungen auf analytische Untersuchungen vor⁵⁰.

Die Mathematische und Physikalische Gesellschaft

Gegen Ende des 19. Jahrhunderts beschlossen die Budapester Professoren auf Anregung von Loránd Eötvös, Jenő Hunyady, Gyula König, Ágoston Scholtz und Kálmán Szily eine „Mathematische Gesellschaft“ zu organisieren, zunächst in Form von privaten Treffen. Diese fanden ab 1885 statt. In ihren Sitzungen wurde vor allem über den Unterricht und die Popularisierung der Mathematik diskutiert. Nach einiger Zeit nahmen auch Physiker an diesen Sitzungen teil. Als auch Interesse an Veröffentlichung des Diskussionsmaterials entstand, wurde im Juni 1891 die Zeitschrift *Mathematikai és Fizikai Lapok* gegründet. Im November desselben Jahres wurde als Vorläuferin der „János-Bolyai-Gesellschaft“, die „Mathematische und Physikalische Gesellschaft“ etabliert⁵¹.

Mathematische Zeitschriften

Von mehreren wissenschaftlichen Zeitschriften für die Mathematik und die Naturwissenschaften, die im Laufe des 19. Jahrhundert ins Leben gerufen wurden⁵², waren die *Mathematikai és Természettudományi Értesítő* und *Értekezések a Mathematikai Tudományok Köréből* die bedeutendsten. Die *Értekezések a Mathema-*

⁴⁷Vgl. [Szé92], 269.

⁴⁸Vgl. [Szé92], 294.

⁴⁹Vgl. [Szé92], 319.

⁵⁰Vgl. [Szé92], 245.

⁵¹Vgl. [Szé92], 222-223.

⁵²Szénássy berichtet von Zeitschriften von der Ungarischen Akademie der Wissenschaften und anderen vergleichbaren Initiativen. Die wenigsten setzten sich durch, vgl. [Szé92], 198, 218-223.

tikai Tudományok Köréből wurde von der Ungarischen Akademie der Wissenschaften herausgegeben. Hunyady, König und Farkas veröffentlichten hier oft ihre Arbeiten. Sie erschien nur in dem relativ kurzen Zeitraum von 1867 bis 1894. Dagegen wirkte die 1882 gegründete *Mathematikai és Természettudományi Értesítő* bis 1941⁵³.

Trotz ihres hohen Qualitätsniveaus waren die *Mathematikai és Természettudományi Értesítő* und *Értekezések a Mathematikai Tudományok Köréből* für den internationalen Wissenschaftsaustausch nicht geeignet, denn alle Beiträge erschienen im Ungarischen und nicht einmal ihre Titel oder ihre Zusammenfassungen waren in einer anderen Sprache wiedergegeben. Die Erkenntnis, daß die Wirkung dieser Zeitschriften wegen der Unzugänglichkeit der Sprache auf den ungarischen Sprachraum beschränkt war, führte unter den Wissenschaftlern zu dem Entschluß, eine Zeitschrift in einer Sprache herauszugeben, die den internationalen Wissenschaftsbetrieb eher zu erreichen versprach. So entstand 1883 das deutschsprachige Organ *Mathematische und naturwissenschaftliche Berichte aus Ungarn*. Diese Zeitschrift, die 1932 eingestellt wurde, sollte dazu beitragen, die Mathematik in Ungarn aus der Isolation zu befreien. Ihre Beiträge wurden immer öfter in anderen Zeitschriften zitiert und rezensiert⁵⁴. Auch Bestandslisten von Bibliotheken zahlreicher deutscher Universitäten bezeugen ein breites Interesse an dieser Zeitschrift und somit an den wissenschaftlichen Entwicklungen in Ungarn⁵⁵.

Eine Entfaltung der internationalen wissenschaftlichen Kontakte fand gegen Ende des 19. Jahrhunderts auch dadurch statt, daß immer öfter Artikel ungarischer Mathematiker in führenden ausländischen Zeitschriften erschienen, so etwa in den *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences de Paris*, in den *Mathematischen Annalen* und in *Acta Mathematica*. Auch die *Göttinger Nachrichten* und andere deutsche und französische Periodika veröffentlichten zahlreiche ungarische Arbeiten⁵⁶.

2.1.3 Die Förderung des Nachwuchses

Das Interesse für die Mathematik wurde bereits in der Schule gefördert. Die neuen Unterrichtspläne und einige ausgezeichnete Lehrbücher trugen zur Gestaltung eines motivierenden Mathematikunterrichts bei. Gegen Ende des 19. Jahrhunderts trugen zwei weitere Faktoren zu einem größeren Interesse für die Mathematik

⁵³Vgl. [Szé92], 220.

⁵⁴Vgl. [Szé92], 221.

⁵⁵Vgl. „Zeitschriftendatenbank der deutschen Bibliotheken“ (ZDB) im Internet. Beispielsweise sind alle Ausgaben der Zeitschrift *Mathematische und naturwissenschaftliche Berichte aus Ungarn* in der Bibliothek der Universität von Göttingen vorhanden.

⁵⁶Darunter: *Archiv für Mathematik und Physik*, *Journal für die reine und angewandte Mathematik* und *Nouvelles Annales des Mathématiques*. Szénássy gibt mehr Informationen über Autoren und Anzahl von Publikationen in den jeweiligen Zeitschriften, [Szé92], 221.

unter den Schülern bei.

1894 gründete Dániel Arany die Zeitschrift *Középiskolai Matematikai Lapok*⁵⁷. Es handelte sich um eine Zeitschrift für Schüler, die diese zum Selbstlösen von mathematischen Problemen anregte⁵⁸. Einer der erfolgreichsten Aufgabenlöser dieser Zeitschrift war Fejér in seinen letzten Schuljahren und einige Jahre später, nachdem László Rátz die Herausgabe der Zeitschrift übernommen hatte, war Rátz' Schüler Alfréd Haar während seiner Mittelschuljahre ein „eifriger Mitarbeiter“ dieser Zeitschrift⁵⁹.

Ebenfalls 1894 wurde von der neu gegründeten Mathematischen und Physikalischen Gesellschaft das Projekt gestartet, einmal im Jahr mathematische und physikalische Wettbewerbe zu veranstalten, um das Lehren und Lernen dieser Wissenschaften erfolgreicher zu gestalten⁶⁰. Der Hauptorganisator war József Kürschák⁶¹. Neben ihm trugen König und Gusztáv Rados dazu bei, daß diese Wettbewerbe ein hohes Qualitätsniveau erreichten⁶². Zu den Teilnehmern und Gewinnern von diesen Wettbewerben zählen Lipót Fejér (1897), Alfréd Haar (1903) und Marcel Riesz (1904)⁶³.

Der Generation von Fejér, Haar, F. Riesz folgten andere mit auch hervorragenden Mathematikern. Jedoch konnte das herangewachsene intellektuelle Potential zu Beginn des 20. Jahrhunderts in Ungarn nicht beschäftigt werden. So begann die Emigration von Wissenschaftlern bereits vor dem Ersten Weltkrieg⁶⁴. Mathematiker wie Marcel Riesz, György Pólya und Tódor Kármán arbeiteten an ausländischen Universitäten. In der Zeit zwischen den Weltkriegen führten die verschlechterten politischen und wirtschaftlichen Umstände zu einer massiven Emigrationswelle von Wissenschaftlern⁶⁵.

⁵⁷Nach der Übersetzung von Ervin Deák: *Mathematikblätter für die Mittelschule*, vgl. [Fej70], 21.

⁵⁸Vgl. [Szé92], 218. Auch Pál Turán schätzte diese Zeitschrift als sehr erfolgreiche Motivation für die Beschäftigung mit der Mathematik, vgl. [Fej70], 21.

⁵⁹Vgl. [Fej70], 21 und [SN59], 11.

⁶⁰Vgl. [Szé92], 218.

⁶¹So seine Biographien, die ihm zuschreiben, mit Auswahl und Unterricht vieler ausgezeichneten Schüler dazu beigetragen zu haben, daß Budapest sich zum Zentrum für den wissenschaftlichen Nachwuchs entwickelte. Vgl. auch [Csá75], 148.

⁶²Vgl. [Szé92], 218.

⁶³Vgl. Biographien von Fejér, Haar und Marcel Riesz.

⁶⁴Vgl. [Csá75], 150.

⁶⁵Vgl. [Mik75], 307 und [Csá75]. Edgar R. Lorch, ein amerikanischer Mathematiker, der 1933 ein Jahr in Szeged bei F. Riesz verbrachte, schreibt der katastrophalen Situation in Ungarn nach dem Ersten Weltkrieg und dem Verlust von zwei Drittel des Territoriums auch eine psychologische Dimension zu, vgl. [Lor93], 223. Einige emigrierte Naturwissenschaftler wurden Nobelpreisträger. Zur Entwicklung der Wissenschaft in Ungarn vgl. [EGK75]. Stefan L. Wolff untersuchte das ungarische Emigrationsphänomen im Vorfeld des Zweiten Weltkrieges, konzentriert sich aber auf die jüdischen Wissenschaftler, [Wol91]. Die Bewunderung, mit der viele ungarische Wissenschaftler in den USA von ihren Kollegen betrachtet wurden, führte bis zum (ironischen) Mythos, die Ungarn seien Außerirdische, vgl. die Anekdote von George Marx,

2.2 Mengenlehre, Axiomatik, Geometrie und Analysis

2.2.1 Mengenlehre

In der Zeit bis 1904 waren Gyula Kónig und Friedrich Riesz die einzigen ungarischen Mathematiker, die sich mit Problemen der Mengenlehre beschäftigt hatten⁶⁶. Die Rezeption der Mengenlehre in Ungarn erfolgte zunächst durch Anwendungen auf die Analysis. Bereits in den 1880er Jahren verwendete Gyula Kónig mengentheoretische Methoden sowohl in Vorlesungen als auch in Lehrbüchern zur Analysis.

Ab dem letzten Jahrzehnt des 19. Jahrhunderts widmete sich Kónig der Forschung in der Mengenlehre und lieferte eigene Resultate. Um 1894 verbesserte Kónig einen Beweis von Cantor über die Existenz einer eindeutigen Zuordnung zwischen den Mengen $(0, 1] \times (0, 1]$ und $(0, 1]$ an Hand von Dezimaldarstellungen. Kónig präsentierte seinen Beweis vor der *Mathematischen und Physikalischen Gesellschaft* in Budapest, aber er publizierte ihn nicht. Durch mündliche Überlieferung wurde dieser Beitrag jedoch bekannt. Schoenflies besprach 1900 Kónigs Beweis in seinem Bericht zur damaligen Entwicklung der Mengenlehre⁶⁷.

Auf dem III. Internationalen Mathematikerkongreß (IMK) 1904 in Heidelberg hatte Kónig einen Beweis dafür angekündigt, daß die Mächtigkeit der reellen Zahlen kein Aleph sein kann. Diese Aussage hätte die Kontinuumshypothese widerlegt⁶⁸. Kónigs Beweis erwies sich jedoch als falsch. Es stellte sich heraus, daß Kónig ein Lemma von Bernstein nicht richtig angewendet hatte⁶⁹. Sein Beweis bestand aus zwei Teilen, von denen nur der zweite fehlerhaft war. Im ersten Teil lieferte er eine Ungleichung, welche heute als Kónigs Ungleichung bekannt ist. Eine Revidierung seines Vortrags ließ Kónig in den *Verhandlungen des III. Internationalen Mathematiker-Kongresses* erscheinen⁷⁰. Auf dem Kongreß war Kónig

Mitglied der Abteilung für atomische Physik der Eötvös Universität von Budapest, [Mar96].

⁶⁶Vgl. [Szé92]. Für Kónig gilt das spätestens seit 1894, *ibid.* 234. Von Riesz finden sich erste Anwendungen der Mengenlehre bereits in seinen Veröffentlichungen aus dem Jahr 1904.

⁶⁷Vgl. [Szé92], 234.

⁶⁸Vgl. [Moo89], 107.

⁶⁹Zu der Frage, wer den Fehler im Kónigs Beweis entdeckt hatte, stellen Moore und Ferreiros verschiedene Versionen vor. Nach Moore hatte Zermelo am Tag nach Kónigs Vortrag den Fehler gefunden, vgl. [Moo89], 107. Ferreiros lehnt dagegen diese Rekonstruktion ab, weil der angebliche Beitrag von Zermelo nicht in Felix Hausdorffs Artikel von 1904 erwähnt wurde, der „the only documentary evidence from that time“ ist, vgl. [Fer99], 312. Purkert hat kürzlich endgültig gezeigt, daß Kónigs Fehler von Hausdorff festgestellt wurde, vgl. [Pur02b], 10.

⁷⁰Vgl. [Kón05b]. Moore interpretiert Kónigs Argumentationsfehler als einen Hinweis auf ein grundsätzlich falsches Verständnis der Beziehungen zwischen einerseits der Existenz einer Wohlordnung für die reellen Zahlen und andererseits weiteren äquivalenten Aussagen, vgl. [Moo82], 88.

nicht der einzige, der sich mit einem Thema zur Mengenlehre beteiligte⁷¹, aber der umstrittenste. Mit seinem Vortrag gelang es ihm, die Aufmerksamkeit der Mathematiker noch einmal auf die Kontinuumshypothese und das Wohlordnungsprinzip zu lenken⁷². Nach dem Kongreß trafen sich Hilbert, Schoenflies, Hausdorff und Hensel zufällig in Wengen, wo sie weiter über den Beweis von König diskutierten⁷³. Zermelo publizierte kurz darauf seinen Beweis des Wohlordnungsprinzips, und Hausdorff schrieb noch im gleichen Jahr eine Revidierung von Bernsteins Lemma⁷⁴. Andere Arbeiten über Ordnungstypen in den folgenden Jahren folgten. Denn auch Hausdorff wollte die Kontinuumshypothese beweisen⁷⁵. Trotz der Enttäuschung auf dem III. IMK blieb die Mengenlehre eins der Hauptforschungsgebiete, mit denen König sich in der letzten Etappe seines Lebens befaßte. Der Kongreß trug dazu bei, daß König auf internationalem Niveau als ein Experte in Fragen der Mengenlehre anerkannt wurde.

Friedrich Riesz veröffentlichte 1904 in den *Mathematischen Annalen* seine Arbeit „Über einen Satz der Analysis Situs“, in der er mengentheoretische Methoden anwendete, um die Umkehrung des Jordanschen Kurvensatzes zu beweisen. Dieser Arbeit folgten in den nächsten vier Jahren weitere Publikationen, in denen Riesz sowohl reine mengentheoretische Fragestellungen als auch Anwendungen der Mengenlehre auf die Theorie der reellen Funktionen und auf Hilberts Theorie der Integralgleichungen behandelte⁷⁶.

2.2.2 Axiomatik

Verwendungen bzw. Untersuchungen von Axiomensystemen um 1900 finden sich ab 1905 in Arbeiten von König und von Friedrich Riesz⁷⁷. Bei Riesz kamen axiomatische Betrachtungen erst in seiner Arbeit „Die Genesis des Raumbegriffes“ von 1906 vor⁷⁸.

Hilberts Vortrag auf dem III. IMK „Über die Grundlagen der Logik und der Arithmetik“ lenkte Königs Aufmerksamkeit auf die Axiomatik⁷⁹. Spätestens ab

⁷¹Z.B. hatte auch Bernstein einen Vortrag angekündigt, vgl. [Moo89], 108.

⁷²Vgl. [Fer99], 312. Aus Beschreibungen von József Kürschák (erschieden in ungarisch in verschiedenen ungarischen Zeitschriften) berichtet Szénássy: „... what a sensation the announcement of the title of König's lecture had stirred among the participants of the congress. All section meetings were cancelled so that everyone could hear his contribution“, [Szé92], 235.

⁷³Vgl. [Pur02b], 11.

⁷⁴Vgl. [Fer99], 312.

⁷⁵Vgl. [Moo89], 109.

⁷⁶Z.B. „Über mehrfache Ordnungstypen“ [Rie05a], „Sur un théorème de M. Borel“ [Rie05c], „Über orthogonale Funktionensysteme“ [Rie07f]. Zu [Rie05a] s. Abschnitt 5.2.

⁷⁷In mathematikhistorischen Arbeiten, die das Thema Axiomatik in der Mathematik um die Wende zum 20. Jahrhundert behandeln, etwa [Cor97a], [Cor97c], [Pec90] und [Pec94], sind keine Hinweise auf bedeutende Beiträge aus Ungarn zu finden.

⁷⁸S. Kapitel 8.

⁷⁹Vgl. [Kön05a] und [Szé92], 238. Hilberts Vortrag ist [Hil05].

diesem Zeitpunkt widmete sich König ausschließlich dem Studium der Grundlagen von Logik, Arithmetik und Mengenlehre. Die leitende Idee in Königs Arbeit⁸⁰ war, die Konsistenz sowohl der Logik als auch anderer Gebiete der Mathematik zu erlangen, um anschließend die Mengenlehre frei von Antinomien aufbauen zu können.

Ab 1905 hielt König Vorlesungen über die Grundlagen der Logik, Arithmetik und Mengenlehre. Inwieweit Königs Ideen die Grundlagenforschung beeinflusste, ist unbekannt. Einige Aspekte der Axiomatisierung der Mengenlehre von János von Neumann, sowie die Würdigung in einem Beitrag von László Kalmár und Adolf Fraenkel deuten darauf hin, daß sie an Königs Ideen Anschluß nahmen⁸¹.

2.2.3 Geometrie

In der zweiten Hälfte des 19. Jahrhunderts betraf ein großer Teil der geometrischen Forschung in Ungarn, wie gesehen, die Nachlässe von Farkas und János Bolyai⁸². An der Popularisierung der Leistungen der beiden Bolyais beteiligten sich zahlreiche ungarische Mathematiker: Réthy, Vályi, Tötössy und Kürschák und andere⁸³.

Im Bereich der klassischen Geometrie forschte Kürschák seit 1887. Bis 1906 hatte er lediglich kleine Resultate geliefert⁸⁴. 1902 knüpfte er mit seiner Arbeit „Das Streckenabtragen“ an David Hilberts bahnbrechendes Werk *Grundlagen der Geometrie* von 1899 an. Kürschák löste, auf Anregung von König, ein Problem Hilberts. Kürscháks Resultat, daß jedes Segment durch Verwendung eines Eichmaßes übertragen werden kann, erschien in der von Hilbert redigierten Zeitschrift *Mathematische Annalen*⁸⁵. Kürscháks Beitrag war von großer Bedeutung für das Vorhaben Hilberts. Die zweite Ausgabe der *Grundlagen der Geometrie* von 1903 wurde von Hilbert mit dem zusätzlichen Kapitel „Die geometrischen Konstruktionen mittels Lineal und Eichmasses“ versehen, in dem Hilbert sich auf Kürscháks Resultate bezog⁸⁶.

Unter dem Einfluß von Hunyady und Vályi erlebte die algebraische Geometrie

⁸⁰Erst nach seinem Tod wurde sein unvollständiges Buch *Neue Grundlagen der Logik, Arithmetik und Mengenlehre* [Kön14] veröffentlicht, vgl. [Szé92], 235ff.

⁸¹Vgl. [Szé92], 235ff.

⁸²Vgl. [Szé92], 292.

⁸³Vgl. [Szé92], 256ff. In der Tabelle reftb-gma in Anhang B sind diejenigen ungarischen Mathematiker aufgelistet, die zwischen 1870-1910 bedeutende Beiträge zur Entwicklung von Geometrie, Analysis und Mengenlehre in Ungarn lieferten.

⁸⁴Vgl. [Szé92], 293 und Abschnitt reftkuerschak. Kürschák untersuchte dem Kreis ein- und umgeschriebene Vielecke, ferner verbesserte er Vályis Beweis des Satzes von Desargues.

⁸⁵[Kür02]. Vgl. [Szé92], 293.

⁸⁶In der achten Auflage von Hilberts *Grundlagen der Geometrie* [Hil99] von 1956 ist der gemeinte Abschnitt der §36, und auf Seite 116 befindet sich der Verweis auf Kürscháks Arbeit [Kür02]. S. auch Abschnitt reftg:ax, Seite 631.

in Ungarn einen Aufschwung⁸⁷. Die Anwendung elementarer Resultate aus der Theorie der elliptischen Funktionen bei der Untersuchung gewisser algebraischer Kurven war seit den 1860er Jahren in Deutschland von Clebsch, Harnack und anderen erfolgreich erforscht worden⁸⁸. In Ungarn erreichte Vályi interessante Resultate mit Hilfe dieser Methode, die Friedrich Riesz in seiner Dissertation als ‚analytische Methode‘ bezeichnete⁸⁹. Anhand dieser ‚analytischen Methode‘ ließ sich für eine gewisse Klasse algebraischer Kurven eine Theorie aufbauen. Riesz schlug in seiner Dissertation von 1902 vor, eine synthetische Methode der projektiven Geometrie zu entwickeln, die der ‚analytischen Methode‘ entspreche, so daß die bereits vorhandenen analytischen Aussagen über jene Klasse algebraischer Kurven sich – wenigstens zum Teil – als synthetische Aussagen im Kontext der projektiven Geometrie auffassen ließen. Zu diesem Zweck entwickelte er in seiner Dissertation eine Theorie von kongruenten Punktsystemen⁹⁰. Riesz’ Dissertationsvorhaben zeugt davon, daß er bereits 1902 ein strukturelles Denken entwickelt hatte. Daß sein einjähriger Aufenthalt in Göttingen bei Hilbert dabei eine wichtige Rolle gespielt hatte, scheint naheliegend.

⁸⁷Vgl. [Szé92], 272.

⁸⁸Szénássy verweist auch auf Arbeiten von Humbert, O. Schlesinger und Halphen, vgl. [Szé92], 275.

⁸⁹[Rie02] und [Rie04a], wiederabgedruckt in Riesz’ Gesammelten Arbeiten [Rie60], Bd. 2, 1529. Szénássy gibt Riesz’ Dissertation den englischen Titel: „The position-geometric treatment of point configurations on fourth-order space curves of the first kind“. Im Anhang von Riesz’ Gesammelten Arbeiten ist eine französische Übersetzung seiner Dissertation mit dem Titel: „Étude des configurations ponctuelles sur les courbes gauches de première espèce du quatrième ordre par la méthode synthétique de la géométrie projective“ abgedruckt worden, vgl. [Rie60] Band II, 1529ff.

⁹⁰Vgl. [Rie60] Band 2, 1531. Dort schrieb Riesz „C’est de cette façon, par pur raisonnement géométrique, que je traite les problèmes relatifs à la courbe gauche du quatrième ordre de première espèce. Cependant, vu la considération analytique, le problème de la considération géométrique peut se poser sous une toute autre forme, sous une forme nouvelle. [...] On peut demander s’il existe un système de théorèmes géométriques équivalent ou au moins partiellement équivalent à cette théorie, et si oui, ces théorèmes peuvent-ils être symbolisés dans une forme telle que leur structure extérieure et l’opération qui leur est appliquée coïncident, le cas échéant entre certaines limites, avec la forme des théorèmes analytiques cités ci-dessus et l’opération affectée à ces derniers? Par conséquent, peut-on, par voie géométrique, donner une représentation analytique des points de la courbe coïncident, en partie au moins, quant à la forme et aux propriétés, avec celle mentionnée ci-dessus? Si nous réussissions à répondre affirmativement à cette question, les discussions géométriques et analytiques se rencontreraient sur certains points et il serait facile de répondre aux questions qui admettent une réponse analytique facile, mais dont la solution géométrique semble se heurter à des difficultés, par un raisonnement analytique ayant recours à l’interprétation géométrique; et l’opération analytique deviendrait un symbole de l’opération géométrique transplantable au langage géométrique.“ Mit einer Zuordnung zwischen analytischen und synthetischen (geometrischen) Sätzen, die die äußere Struktur des Systems von Sätzen – d.h. die äußere Struktur der Theorie – und ‚Operationen‘ – d.h. die Beziehungen – zwischen den Sätzen des Systems erhält, erwartete Riesz, bei Problemen, die in einem System von Sätzen einfach gelöst werden können, die Lösung in das andere System übersetzen zu können.

Riesz beschäftigte sich mit geometrischen Fragestellungen nur bis 1907, also am Beginn seiner Forschungskarriere⁹¹. Nach seiner Dissertation, deren zweiter Teil erst 1904 in einer ungarischen Zeitschrift erschien, publizierte er 1904 in den *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences de Paris* und in den *Mathematischen Annalen* Untersuchungen geometrischer Probleme mittels mengentheoretischer Betrachtungen⁹². Am Ende seiner geometrischen Periode erschien „Die Genesis des Raumbegriffes“ in den *Mathematischen und Naturwissenschaftlichen Berichten aus Ungarn*. Es handelte sich dabei um eine umfangreiche Diskussion über den Raumbegriff, in deren Rahmen Riesz Begriffe einer abstrakten Punktmengenlehre entwickelte⁹³.

Auch Béla Szőkefalvi-Nagy, der in den 1950er Jahren als Koautor von Riesz' Monographie zur Funktionalanalysis⁹⁴ wirken sollte, schloß in seiner Dissertation an die geometrischen Untersuchungen Vályis an⁹⁵.

2.2.4 Analysis

Gegen Ende des 19. Jahrhunderts hatten sich klassische Gebiete der Analysis in der ungarischen mathematischen Kultur etabliert: komplexe und reelle Funktionentheorie, Variationsrechnung und Theorie der Differentialgleichungen. In Kolozsvár besorgten Vályi und Réthy⁹⁶, sowie in Budapest König ausgezeichnete Vorlesungen zur komplexen und reellen Funktionentheorie. Zur Entwicklung der Analysis in Ungarn waren ferner Königs Lehrbücher von großer Bedeutung. Vályi veröffentlichte wenig, in Kolozsvár verkehrten aber unter den Studenten Abschriften seiner Vorlesungen⁹⁷.

Um in der Industrie und Flußschifffahrt entstandene technische Probleme zu lösen, waren oft Forschungen in der Variationsrechnung und in der Theorie der Differentialgleichungen notwendig. Im Gebiet der Variationsrechnung zeichneten sich die Arbeiten von Kürschák aus, die zum Teil in den *Mathematischen Annalen* erschienen. In einigen von diesen Arbeiten verfolgte Kürschák ein mit der Flußschifffahrt verbundenes Problem, das Vályi in seiner Dissertation behandelt hatte⁹⁸. Auch im Zusammenhang mit technischen physikalischen Problemen lieferten König und Kürschák bedeutende Beiträge zur Entwicklung der Theorie der Differentialgleichungen⁹⁹. Auf internationalem Niveau erhielten jedoch Lajos

⁹¹Vgl. Riesz' Publikationenliste in Riesz' Gesammelten Arbeiten [Rie60].

⁹²[Rie04b] und [Rie04c]

⁹³S. Kapitel refk:genesis.

⁹⁴[RS52]

⁹⁵Vgl. [Szé92], 275.

⁹⁶Réthy befaßte sich dann in Budapest im wesentlichen mit theoretischer und mathematischer Physik, vgl. [Szé92], 346. S. Tabelle B.2 in Anhang B.

⁹⁷Zur Bedeutung von Königs Lehrbüchern vgl. [Szé92], 244ff; zu Vályi ibid, 268ff.

⁹⁸Vgl. [Szé92], 268.

⁹⁹Vgl. [Szé92], 248ff.

Schlesingers Beiträge zur Theorie der linearen Differentialgleichungen noch breitere Anerkennung. Zwischen 1895 und 1908 gab er ein Handbuch und ein Lehrbuch zu diesem Gebiet heraus. 1909 erschien sein Bericht „Über die Entwicklung der Theorie der linearen Differentialgleichungen seit 1865“ im *Jahresbericht der Deutschen Mathematikervereinigung*.

Parallel zur Beschäftigung mit Problemen der theoretischen Physik behandelte Farkas Vektoralgebra und Vektoranalysis in Vorlesungen, beides bis dahin in Ungarn unbekannte Bereiche der Mathematik¹⁰⁰.

Um die Wende zum 20. Jahrhundert erschienen die ersten Arbeiten der zweiten Generation ungarischer Mathematiker. Bereits 1900 publizierte Fejér in den *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences de Paris* seinen berühmten Satz über die Summierbarkeit von Fourierreihen. Verbunden mit den Namen von Friedrich Riesz, Marcel Riesz und Alfréd Haar erlangte die Analysis in Ungarn eine wichtige Stelle in der Geschichte der Mathematik.

2.3 Wissenschaftliches Milieu

Wie im vorigen Abschnitt gesehen, war die Orientierung an mathematischen Entwicklungen in Deutschland und Frankreich ein Merkmal des mathematischen Milieus in Budapest. Die damit verbundene hohe Aufnahmebereitschaft machte aus diesem Milieu ein fruchtbares Feld für die Rezeption, Weiterentwicklung und Synthetisierung der Mathematik aus Frankreich und Deutschland¹⁰¹. In dieser Hinsicht liefern die Leistungen von Friedrich Riesz aus den Jahren 1904 bis 1908 ein gutes Beispiel – siehe dazu Kapitel 5 bis 8 der vorliegenden Arbeit.

Von besonderem Interesse für diese Darstellung ist die Frage, ob die Mathematiker, mit denen Friedrich Riesz vor 1907, also im Entstehungskontext von „Die Genesis des Raumbegriffs“, in direktem Kontakt stand, sich mit der Mengenlehre beschäftigt haben und bzw. oder ob sie einen axiomatischen Zugang zur Mathematik pflegten. Friedrich Riesz studierte in Budapest bei Gyula König und József Kürschák und als Kommilitonen standen ihm Lipót Fejér, Alfréd Haar, Dénes König und sein Bruder Marcel Riesz nah¹⁰².

Zur Frage, inwieweit die mengentheoretischen Arbeiten Königs, seine Grundlagenforschung, oder Kürscháks Anschluß an Hilberts *Grundlagen der Geometrie* Riesz' Forschung motivierten, läßt sich folgendes sagen: Als Lehrer von Riesz dürften sie allein durch ihre rezeptive Haltung gegenüber mengentheoretischen

¹⁰⁰Vgl. [Szé92], 319.

¹⁰¹Ähnliches läßt sich von anderen jüngeren mathematischen Kulturen sagen. Parshall und Rowe beschreiben dieses Phänomen für die USA, vgl. [PR94].

¹⁰²Im kurzen Lebenslauf von Riesz aus seinen *Gesammelten Arbeiten* [Rie60], sowie in einer Rede anlässlich Riesz' 100. Geburtstags von Béla Szőkefalvi-Nagy [SN83] wird auf diese Kontakte hingewiesen.

und axiomatischen Methoden einen großen Einfluß auf ihn ausgeübt haben, indem sie dieselbe Haltung bei ihm kultivierten. Andererseits findet sich in der Arbeit von Riesz „Die Genesis des Raumbegriffs“ kein Hinweis darauf, daß Riesz an konkrete Ansätze von König oder von Kürschák Anschluß nahm.

Was Marcel Riesz und Alfréd Haar betrifft, so gehen ihre ersten Publikationen auf die Jahre 1906 bzw. 1907 zurück. Darüber hinaus forschten sie auf den Gebieten der Theorie der Reihenentwicklungen bzw. Differentialgleichungen¹⁰³. Sie begannen ihre Forschungskarrieren also zwei bis drei Jahre später als Friedrich Riesz, und zwar in anderen Forschungsrichtungen. Auch methodisch gingen sie anders vor. Bis 1910 sind in ihren wissenschaftlichen Arbeiten keine Anwendungen mengentheoretischer oder axiomatischer Methoden vorhanden. Es gibt keinen Hinweis darauf, daß sie ihn hätten beeinflussen können.

Fejér und Friedrich Riesz waren Kommilitonen gewesen¹⁰⁴. Bei Fejér finden sich in seinen bahnbrechenden Beiträgen zur Theorie der Fourierreihen keine ausschlaggebenden Anwendungen mengentheoretischer Methoden¹⁰⁵. Allerdings waren es genau jene Resultate von Fejér über die Konvergenz von Fourierreihen, die in den Mathematikern die Hoffnung erweckte, gewisse Funktionenmengen koordinatisieren zu können, d.h. eine eindeutige Zuordnung herstellen zu können, die jeder Funktion eine unendliche Folge von Koeffizienten, ihre Fourierkoeffizienten, zuordnet. Die dadurch entstandene Folgenmenge konnte als eine Teilmenge des unendlichdimensionalen Raumes aufgefaßt werden. Diesem Gedankengang folgend, läßt sich fragen, inwieweit Fejér die Rieszschen Ideen über abstrakte Räume beeinflusste¹⁰⁶. Auf diese letzte Frage wird hier nicht weiter eingegangen.

In diesem Abschnitt werden biographische Daten der prominentesten Mathematiker zusammengefaßt, die das wissenschaftliche Milieu bestimmten, in dem Friedrich Riesz sich in Ungarn bewegte: die Professoren Gyula König und József Kürschák, bei denen er in Budapest studierte; sein Kommilitone und späterer Kollege Lipót Fejér; Alfréd Haar, sein Arbeitskollege in Kolozsvár und Szeged und schließlich sein Bruder Marcel Riesz und Dénes König, der Sohn von Gyula König und ein weiterer Studienkamerad.

¹⁰³Zu Marcel Riesz vgl. [Gär70]. Zu Haar vgl. Publikationenliste in Haars Gesammelten Arbeiten [SN59].

¹⁰⁴Szökefalvi-Nagy schrieb über Fejér und F. Riesz: „They knew each other since their high school years, and subsequently developed close connection as colleagues and friends. Though their personalities differed in many respects and though they worked mostly in different areas of mathematical analysis [...]. They soon became world-renowned Masters of classical and modern analysis.“ [SN83], 69.

¹⁰⁵Vgl. [Fej70] und [Szé92], 289-291.

¹⁰⁶Die Idee hatten Fréchet und Friedrich Riesz, s. Abschnitte 3.2.6 und 9.1.1. In [Rie07e], 1409 verwies Riesz auf Fejér.

2.3.1 Gyula (Julius) König

(geb. am 16. Dezember 1849 in Győr, Ungarn; gest. am 8. April 1913 in Budapest, Ungarn)

König studierte Mathematik in Wien und in Heidelberg (1868-1870), wo er 1870 promovierte. Danach verbrachte er ein Semester in Berlin, wo er Vorlesungen bei Karl Weierstraß und Leopold Kronecker hörte. Sein Aufenthalt in Heidelberg war für seine wissenschaftliche Laufbahn entscheidend. Dort arbeitete er eine Zeit lang unter Helmholtz' Einfluß an der Theorie der elektrischen Simulation, bis er sich dann auf die Mathematik konzentrierte. Er war 22 Jahre alt, als er 1872 Privatdozent der Universität von Budapest wurde. 1874 wurde er Professor der dritten Abteilung der Technischen Universität Budapests, an der er bis zu seinem Tode lehrte, obwohl er sich 1905 emeritieren ließ¹⁰⁷.

Seine Hauptforschungsgebiete waren Analysis, Algebra, Zahlentheorie und Mengenlehre. Szénássy beschreibt Königs wissenschaftliche Laufbahn als aus Perioden bestehend, die den verschiedenen Gebieten gewidmet waren und in denen er jeweils in mehreren Aufsätzen ein Problem behandelte, um anschließend eine umfassende synthetisierende Arbeit zu veröffentlichen, bevor er zum nächsten Thema wechselte¹⁰⁸.

Den größten Einfluß auf die Entwicklung der mathematischen Kultur in Ungarn übte er im Bereich der Analysis aus und zwar eher durch seine Lehrbücher als durch seine eigene Forschung. Das erste dieser Lehrbücher *An introduction to higher Algebra* (1876) behandelt sowohl die Algebra als die Analysis. Der Stoff ist gemäß dem damaligen Stand der Forschung aktualisiert und in selbständiger Form dargestellt¹⁰⁹. Das zweite Buch *Analysis. An Introduction to the System of Mathematics*¹¹⁰ aus dem Jahr 1887 ist ein Lehrbuch für das klassische Infinitesimalkalkül mit einer ausgearbeiteten und aktualisierten systematischen Darstellung. Dieses Werk war nicht nur sehr erfolgreich als Lehrbuch sondern auch als Inspirations- und Informationsquelle für eigenständige Forschung der folgenden Generationen. Bemerkenswerterweise verwendete König, nur 10 Jahre nach der Entstehung der Cantorschen Mengenlehre, mengentheoretische Methoden¹¹¹. Dabei führte er die Terminologie für verschiedene Grundbegriffe der Mengenlehre ein¹¹².

1903 publizierte er ferner seine Monographie *Einleitung in die allgemeine*

¹⁰⁷Zahlreiche Informationen zur Biographie Königs finden sich in [Szé92]. Szénássy hat 1965 eine Biographie von Gyula König publiziert [Szé65], von der leider noch keine Übersetzung aus dem Ungarischen vorliegt.

¹⁰⁸Vgl. [Szé92], 233.

¹⁰⁹Vgl. [Szé92], 244.

¹¹⁰So Szénássys englische Übersetzung des Titels, [Szé92], 245.

¹¹¹Bei der Einführung der reellen Zahlen, bei der Diskussion über die Ableitung und in bezug auf die Kardinalität von Mengen, vgl. [Szé92], 245.

¹¹²Vgl. [Szé92], 245.

Theorie der algebraischen Größen, mit der er zu einem Vorreiter der modernen Algebra wurde¹¹³. Dieses Buch enthält viel von Königs eigener Forschung in abstrakter Algebra, darunter zwei neue algebraische Strukturen, die er mittels axiomatischer Definitionen einführte.

In der Zahlentheorie publizierte er nur kleine Resultate. Wichtiger waren seine Vorlesungen und die systematisch aufgebauten Darstellungen der zentralen Aspekte dieser Theorie, die er als Kapitel oder Abschnitte in seinen Monographien und Lehrbüchern erscheinen ließ. Solche Darstellungen waren die ersten ihrer Art in der ungarischen Literatur und trugen dazu bei, die Forschung in dem Gebiet anzuregen¹¹⁴.

Seine letzte Forschungsphase widmete er der Cantorsche Mengenlehre und der von ihr angeregten Diskussion über die Grundlagen der Mathematik¹¹⁵.

In seinen Vorlesungen behandelte er sowohl klassische als auch moderne mathematische Theorien: abstrakte Algebra, Analysis, Differentialgeometrie, Zahlentheorie, Mengenlehre, Wahrscheinlichkeitstheorie und die moderne Theorie der reellen Funktionen; darüber hinaus las er auch zur Geschichte der Mathematik¹¹⁶. Er gestaltete seine Vorlesungen frei. Dabei wies er auf Vereinfachungen, Mängel und weitere Forschungsrichtungen der Theorien hin. Oft waren seine Vorlesungen die Quelle der Probleme für seine Forschung oder die seiner Studenten. Besonders anregend für die Studenten waren seine praktischen Seminare, welche er unter anderem mit József Kürschák zusammen hielt¹¹⁷.

Der Einfluß von König auf die ungarische mathematische Kultur dehnte sich aus bis jenseits der Grenzen seiner Forschung und seines Lehrstuhls an der Universität. König beteiligte sich vierzig Jahre lang an der Ausbildung von Lehrern und Ingenieuren und bestimmte das intellektuelle Leben in Ungarn mit. Er vertrat die Meinung, daß die Professoren der Universitäten mehr auf den Unterricht am Gymnasium Einfluß nehmen sollten. Er selbst wirkte an dessen Planung mit und schrieb Lehrbücher für den Gymnasialunterricht¹¹⁸. Er beteiligte sich an einem Reformprojekt von der internationalen Kommission für den Mathematikunterricht. Er zählte zu den Begündern der mathematischen Gesellschaft und der Zeitschrift *Műegyetemi Lapok*, die allerdings aus finanziellen Gründen nur drei Jahre lang erschien¹¹⁹.

¹¹³Zur Bedeutung der algebraischen Beiträge von König und Kürschák vgl. [Gra97].

¹¹⁴Vgl. [Szé92], 239.

¹¹⁵S. Abschnitt 2.2.2.

¹¹⁶Szénássy erwähnt auch, ohne weitere Erläuterungen, Vorlesungen zur „political arithmetik“, vgl. [Szé92], 333

¹¹⁷Vgl. [Szé92], 333.

¹¹⁸Vgl. [Szé92], 241-244.

¹¹⁹Vgl. [Szé92], 333ff.

2.3.2 József (Josef) Kürschák

(geb. am 14. März 1864 in Buda, Ungarn; gest. am 26. März 1933 in Budapest, Ungarn)

Kürschák studierte in Budapest an der Technischen Universität Lehramt für Mathematik und Physik. Seine Promotion erfolgte 1890 in Budapest. Ab 1891 las er an der Technischen Universität, und 1900 wurde er dort Professor.

Seine mathematischen Interessen richteten sich besonders auf Variationsrechnung, Geometrie, Algebra und die Theorie der Differentialgleichungen.

Zwischen 1887 und 1906 erschienen verschiedene Beiträge zur Geometrie von Kürschák, so zunächst seine Untersuchungen über dem Kreis ein- und umgeschriebene Vielecke und seine Geschichte der Zyklometrie¹²⁰. Zu seinen bedeutendsten geometrischen Beiträgen zählte jedoch die bereits erwähnte Arbeit „Das Streckenabtragen“ von 1902¹²¹. 1906 publizierte er einen einfacheren Beweis des Satzes von Desargues¹²². Ferner beteiligte er sich an der Herausgabe der zweiten Auflage der zweibändigen Arbeit von Farkas Bolyai *Tentamen*, die 1897 und 1904 erschien¹²³. Zu den damaligen Bemühungen, die Bedeutung der mathematischen Leistung der beiden Bolyai für die Geschichte der Mathematik und der ungarischen Kultur hervorzuheben, trug Kürschák bei, indem er sich 1894 zusammen mit anderen ungarischen Mathematikern für die internationale Anerkennung von János Bolyai bei der Entdeckung der seitdem sogenannten Geometrie von Lobatschewski-Bolyai einsetzte¹²⁴.

Kürscháks Forschung in Algebra genöß internationale Anerkennung. Bereits Anfang der 1890er Jahren kam er in Kontakt mit Jaques Hadamard, als er Eigenschaften von Potenzreihen untersuchte. Im Auftrag von Jules Molk, Leiter der französischen Edition der *Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften mit Einschluss ihrer Anwendungen*, verfaßten Kürschák und Hadamard zusammen einen langen Artikel (1910-1911) für die *Encyklopädie*. Das deutsch-französische Projekt der *Encyklopädie* sah vor, daß der Artikel von Kürschák und Hadamard den entsprechenden Artikel aus der deutschen Ausgabe ergänzen sollte¹²⁵. Als seine Hauptleistung im Gebiet der Algebra gilt die Verallgemeinerung des Begriffs des Absolutbetrages durch die Begründung der Bewertungstheorie. Dabei stützte er sich auf Arbeiten von G. König, E. Steinitz und K. Hensel. Mit diesen Resultaten konnte er die Begriffe ‚Konvergenz‘, ‚Fundamentalfolge‘ und ‚Abstand‘ in die Theorie der abstrakten Körper einführen.

¹²⁰Vgl. [Szé92], 292ff.

¹²¹[Kür02]. S. Abschnitt 2.2.3.

¹²²Vgl. [Szé92], 275.

¹²³Vgl. [Szé92] Kapitel 14 und 15.

¹²⁴Szénássy faßte jene Anstrengungen im Kapitel „The emergence of the Bolyai cult“ zusammen, vgl. [Szé92], 256ff.

¹²⁵[KH11]. Vgl. [Gra97], 63 und [Szé92], 287. Zum deutsch-französischen *Encyklopädie*-Projekt, vgl. [Dho95].

In der Variationsrechnung ergänzte er zwischen 1889 und 1899 in einer Reihe von acht Artikeln die Arbeiten von Gyula Vályi und Gyula König und erlangte wichtige Verallgemeinerungen und neue Resultate. Diese erschienen zum Teil in den *Mathematischen Annalen*¹²⁶.

Als Dozent bemühte sich Kürschák darum, die Studenten zum Denken anzuregen. Wie Gyula König wirkte er in der Organisation des Gymnasialunterrichts mit. Er war der Hauptorganisator von mathematischen Wettbewerben und trug mit Auswahl und Unterricht zahlreicher ausgezeichneten Schüler dazu bei, daß Budapest sich zum Zentrum für den wissenschaftlichen Nachwuchs entwickelte.

2.3.3 Lipót (Leopold) Fejér

(geb. am 9. Februar 1880 in Pécs, Ungarn; gest. am 15. Oktober 1959 in Budapest, Ungarn)

Fejér begann 1897 sein Studium an der Fakultät für Maschinenbau der Technischen Universität von Budapest. Schon im zweiten Semester wechselte er erst zur allgemeinen Fakultät der Hochschule über, wo er als Lehramtskandidat für Mathematik und Physik die Vorlesungen von Gyula König, József Kürschák und Gusztáv Rados besuchte; bald darauf wechselte er an die Universität von Budapest¹²⁷.

Das Studienjahr 1899-1900 verbrachte er in Berlin und hörte Vorlesungen bei Lazarus Fuchs, Georg Ferdinand Frobenius und Hermann Armandus Schwarz. Hier lernte er auch Erhard Schmidt und Constantin Carathéodory kennen. Besonders wichtig war der Einfluß von Schwarz, der ihn auf Probleme der Theorie der Fourierreihen aufmerksam machte.

Noch im Jahr 1900, zurück in Budapest für das Studienjahr 1900-1901, publizierte er in den *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences de Paris* den Satz über die Summierbarkeit der Fourierreihe, der seinen Namen trägt und ihn auf einen Schlag berühmt machte. Ohne die Pädagogik-Prüfung abzulegen, arbeitete er seit September 1901 als Repetitor an der Universität von Budapest, wo er 1902 zum Doktor der Philosophie promovierte.

Im Wintersemester 1902/03 besuchte er in Göttingen Vorlesungen bei Hilbert und Minkowski und trug dort über seine eigenen Ergebnisse vor. In Paris hörte er im Sommersemester 1903 Vorlesungen bei Picard und Hadamard.

Fejér lehrte in Budapest bis März 1905, als er Repetitor an der Universität von Kolozsvár wurde. Im Juni 1905 wurde er hier Privatdozent für Analysis und analytische Mechanik und im September 1906 Oberassistent. 1911 wurde er außerordentlicher Professor in Kolozsvár und im September desselben Jahres ordentlicher Professor in der Universität von Budapest, wo er bis zu seinem Tode

¹²⁶Vgl. [Szé92], 215.

¹²⁷Vgl. den *Gesammelten Arbeiten* [Fej70] vorangestellten biographischen Abriß zu Fejér.

wirkte.

Der bahnbrechende Satz von Fejér über die Summierbarkeit von Fourierreihen erschien 1900 in dem Aufsatz „Sur les fonctions bornées et intégrables“ in den *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences in Paris*¹²⁸. Original von Fejér ist die Anwendung des arithmetischen Mittel auf Fourierreihen. Diese besteht darin, aus den Partialsummen

$$s_k(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{j=1}^k (a_j \cos jx + b_j \sin jx)$$

eine Folge arithmetischer Mittel

$$\delta_n(x) = \frac{1}{n} [s_0(x) + s_1(x) + \cdots + s_{n-1}(x)], \quad n = 1, 2, \dots,$$

zu bilden. Der Satz von Féjer besagt: Ist f eine reelle Funktion mit der Periode 2π auf dem Intervall I stetig, beschränkt und integrierbar, dann konvergiert die Folge $\delta_n(x)$ gleichmäßig gegen f ¹²⁹.

Mit seinem Satz lieferte Fejér einen wichtigen Beitrag zu einem klassischen Problem der Analysis: die Darstellbarkeit von Funktionen in trigonometrischen Reihen. Viele Mathematiker wie D'Alembert, Bernoulli, Euler, Cauchy, Dedekind, Cantor, Riemann und Weierstraß hatten sich im Laufe mehrerer Jahrhunderte damit beschäftigt. Wenn auch vom Ursprung her sehr eng verbunden mit dem Problem der schwingenden Saite erkannten Riemann und andere die Bedeutung dieses Problems für die Grundlagen der Infinitesimalrechnung. Fejérs Beitrag zur Theorie der Fourierreihen sicherte ihm die internationale Anerkennung der mathematischen Gemeinschaft. Seine Ergebnisse waren bahnbrechend nicht nur für die heute sogenannte Theorie der orthogonalen Entwicklungen sondern auch für die moderne allgemeine Theorie der divergenten Reihen und sigulären Integrale¹³⁰. Fejérs Resultate wurden unter anderem von Lebesgue und Marcel Riesz (1910-1911) weiterentwickelt und verallgemeinert¹³¹.

In diesem Zusammenhang ist zu bemerken, daß Fejér vor 1906 das Lebesgue-Integral nicht verwendete, obwohl er von den Entwicklungen der modernen franzö-

¹²⁸[Fej00]

¹²⁹Die Bedingung der Integrierbarkeit der Funktion bezieht sich noch auf den klassischen Riemannsches Integralbegriff. Lebesgues moderner Integralbegriff kam erst 1902 mit Lebesgues Dissertation ans Licht. Vgl. [Fej00], wieder abgedruckt in [Fej70], 37. Turán bemerkt, Fejérs Name erscheine in den *Comptes Rendus* falsch geschrieben ‚Tejér‘ statt ‚Fejér‘.

¹³⁰Vgl. biographischen Abriß zu Fejér in [Fej70], 21ff. und die „Bemerkungen“ zu [Fej00], 41 in [Fej70].

¹³¹Vgl. Lebesgues Arbeiten von 1905 über die Konvergenz von Fourierreihen abgedruckt in [Leb73] Band 3. Vgl. auch Miklós Mikolás in seinem Artikel zu Fejér für das *Dictionary of Scientific Biography*, [Gil90], sowie Gårdings Liste von Marcel Riesz' Publikationen in [Gär70].

sischen Analysis wußte und sogar auf Arbeiten von Borel und Lebesgue verwies¹³². Darüberhinaus unterhielt er bereits 1904 einen wissenschaftlichen Briefwechsel mit Borel¹³³. Fejérs Interesse an den modernen Entwicklungen der Analysis in Frankreich betraf insbesondere Borels Theorie der divergierenden Reihen und ihre Anwendungen auf klassische Probleme der Analysis¹³⁴.

Der frühe Einfluß der Berliner Mathematiker bestimmte Fejérs Forschungskarriere. Während seines Aufenthalts in Berlin 1899-1900 interessierte Fejér sich für eine der klassischen Fragestellungen der Weierstraßschen Analysis: die Konvergenz von trigonometrischen Reihen. In den Vorlesungen von Schwarz lernte Fejér Methoden von Schwarz und Carl Neumann für die Behandlung trigonometrischer Reihen kennen. Diese Methoden erwiesen sich dann als ausschlaggebend in Fejérs Beweis seines Satzes über die Konvergenz von Fourierreihen¹³⁵. Die harmonische Analysis blieb sein Hauptforschungsgebiet.

Bis 1906 standen in seinen Arbeiten fast ausschließlich klassische Begriffe im Mittelpunkt seiner Untersuchungen: stetige reelle Funktionen, punktweise und gleichmäßige Konvergenz und das Riemann-Integral. Begriffe der Mengenlehre wie ‚abzählbare‘ und ‚überall dichte Menge‘ verwendete er bereits in seiner Dissertation¹³⁶. Besonders nach seinem Aufenthalt in Paris 1903 benutzte er jedoch in seinen Untersuchungen auch moderne Methoden der französischen Analysis von Borel und Lebesgue¹³⁷.

2.3.4 Alfréd Haar

(geb. am 11. Oktober 1885 in Budapest, Ungarn; gest. am 16. März 1933 in Szeged, Ungarn)

Zu Ostern 1904 begann Haar sein Studium an der Universität von Budapest, wo er Vorlesungen in Mathematik, Physik und Astronomie bei Eötvös, Rados und Kürschák besuchte¹³⁸. Im Herbst 1905 setzte er sein Studium in Göttingen fort.

¹³² Bereits in seiner Dissertation verwies er auf Borels Monographie *Leçons sur les series divergentes* von 1901, vgl. [Fej70], 94. In seiner Arbeit „Über die Fourierreihe“ von 1906 bezog sich Fejér zum ersten Mal auf Lebesgues Arbeiten zur Integration. Hier benutzte er den Begriff der ‚Punktmenge vom Maß Null‘ und verwies auf Lebesgues Monographie *Leçons sur l'integration* von 1904.

¹³³ Im Archive de l'Académie des Sciences de Paris befindet sich in Borels Nachlaß ein Brief von Fejér an Borel aus dem Jahr 1904, in dem er einen mathematischen Beweis diskutierte.

¹³⁴ Vgl. [Fej70], 140.

¹³⁵ Vgl. [Fej70], 25.

¹³⁶ Vgl. [Fej70], 94ff.

¹³⁷ Vgl. Fußnote 132 und Fejérs Artikel in den *Comptes Rendus* „Sur les équations fonctionnelles et la théorie des séries divergentes“ von 1903, wieder abgedruckt in [Fej70], 140ff. In Fejérs Veröffentlichungen von 1900 und 1901 erscheint kein Verweis auf Arbeiten von Lebesgue und Borel, vgl. [Fej70].

¹³⁸ Aus Haars selbst verfaßtem kurzem Lebenslauf. Vgl. den den *Gesammelte Arbeiten* vorgestellten biographischen Abriß zu Alfréd Haar, [SN59], 11-12.

Hier nahm er an Lehrveranstaltungen von Carathéodory, Hilbert, Klein, Minkowski, Prandtl, Runge, Schwarzschild, Voigt und Zermelo teil. Am 16. Juni 1909 promovierte er bei Hilbert mit der Dissertation „Über orthogonale Funktionensysteme“. Einige Monate danach erfolgte seine Habilitation zum Privatdozenten an derselben Fakultät.

In seiner Göttinger Zeit hielt Haar gute Beziehungen zu Hilbert und zu einigen seiner bedeutendsten Schüler. Hilbert wählte ihn als Assistent für das akademische Jahr 1907-1908¹³⁹. Diese Stelle bedeutete eine enge Zusammenarbeit mit Hilbert und eine von Courant sogenannte ‚Familienverkehr‘¹⁴⁰. Ein Hinweis auf Haars enge persönliche Beziehung zu Hilbert läßt sich einem Brief von Friedrich Riesz an Frau Hilbert entnehmen¹⁴¹. Es handelt sich um Riesz’ Antwort auf ein Schreiben von Frau Hilbert, in dem sie sich nach Haar erkundigte. Am 23. März 1933 informierte Riesz Frau Hilbert über Haars Tod und beschrieb dabei die letzte Krankheitsphase seines „seeligen Freundes“. Anschließend bat er sie „um Ihre Meinung und Ihr gütiges Mitwirken in der Angelegenheit eines Nachrufes“, denn er dachte, „daß ein Nachruf aus der Feder seines geliebten Lehrers ein schönes und würdiges Andenken wäre“¹⁴².

Richard Courant, einer der bekanntesten Schüler Hilberts, war mit Haar während ihrer gemeinsamen Zeit in Göttingen gut befreundet. Courant beschrieb Haar als die führende Persönlichkeit einer Gruppe junger Göttinger Mathematiker der Hilbert-Schule, zu der Otto Toeplitz, Ernst Hellinger und Max Born gehörten¹⁴³. In Courants Erinnerungen war der aus einer sehr wohlhabenden Familien stammenden Haar „ein kleiner, zart gebauter, junger Mann, der sich mit charmanter Leichtigkeit überall auf der Welt wohl zu fühlen schien. Sein Talent war von der blitzschnellen, präzisen Art, wie Göttingen es später in John von Neumann erleben sollte. Mit seinem Wissen war er sogar Toeplitz überlegen“¹⁴⁴.

¹³⁹Vgl. [Rei79], 20. Vor ihm war Ernst Hellinger es gewesen und im Herbst 1908 übernahm Richard Courant die Stelle, s. Abschnitt 4.1.3 und Anhang B.

¹⁴⁰Zu diesem Terminus s. Abschnitt 4.1.3

¹⁴¹Dieser Brief bedindet sich in der ‚Abteilung für Handschriften und seltene Drucke‘ der ‚Niedersächsischen Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen‘ im Hilberts Nachlaß, Cod. Ms. Hilbert 772, No. 17.

¹⁴²Riesz’ Idee war, Hilberts Nachruf „an der Spitze des nächsten, bald erscheinenden Heftes der von uns beiden redigierten Acta Scientiarum etc.“ erscheinen zu lassen. Dies kam aber nie zustande. Zusammen mit anderen Trauerreden erschienen die „Abschiedsworte von Friedrich Riesz an der Bahre von Alfréd Haar“ in den „Berichten der Universität Szeged über das Studienjahr 1932/33“. Hätte Hilbert einen Nachruf auf Haar verfaßt, wäre dieser, wie Riesz’ Nachruf, in Haars *Gesammelten Arbeiten* wieder abgedruckt worden. Die Tatsache, daß dies nicht der Fall ist, deutet darauf hin, daß keine Nachruf Hilberts auf Haar existiert, vgl. [SN59], 659

¹⁴³Vgl. [Rei79], 24ff. Constance Reid verfaßte diese Biographie von Courant, basierend auf Interviews mit Richard Courant selbst, mit Personen aus Courants Bekanntenkreis sowie auf Courants Briefwechsel, vgl. [Rei79], 1-5.

¹⁴⁴Vgl. [Rei79], 24.

Am Beginn seiner Forschungskarriere wurde Haar für kurze Zeit stellvertretender Professor an der Technischen Hochschule in Zürich, bis er 1912 als Nachfolger von Lipót Fejér in Koloszvár nach Ungarn zurückging. In Koloszvár wurde er zunächst als außerordentlicher Professor angestellt. 1917 bekam er das Ordinariat. Sein Kollege dort war Friedrich Riesz, der seit 1912 außerordentlicher Professor in Koloszvár war.

Infolge der Abtrennung Siebenbürgens von Ungarn nach dem Ersten Weltkrieg mußten die Professoren der bisherigen Universität von Koloszvár die Stadt verlassen. Haar und Friedrich Riesz gingen erst nach Budapest, dann setzten sie 1920 ihre Lehrtätigkeit in der neu gegründeten Universität von Szeged fort. Dort riefen sie 1922 die Zeitschrift *Acta Scientiarum Mathematicarum* ins Leben und machten bald aus dem mathematischen Seminar, das später ‚Bolyai-Institut‘ benannt wurde, ein mathematisches Zentrum von internationalem Ruf¹⁴⁵.

An der Universität hielt Haar Vorlesungen zu Algebra, Zahlentheorie, analytischer Geometrie, Mechanik, partiellen Differentialgleichungen, Variationsrechnung und zur Theorie der kontinuierlichen Gruppen. Szókefalvi-Nagy beschrieb Haar als ausgezeichneten Vortragenden: „Hinsichtlich Klarheit und logischen Aufbaus waren seine Vorträge immer musterhaft“¹⁴⁶.

Sein Hauptforschungsgebiet war die Analysis. Mit seiner Dissertation „Über orthogonale Funktionensysteme“ schloß er an Hilberts damaliges Forschungsgebiet der Integralgleichungstheorie an, in der solche Funktionensysteme eine wichtige Rolle spielten¹⁴⁷. Dieses Thema verfolgte er zunächst bis 1914, kam aber 1929 darauf zurück. In anderen Arbeiten behandelte er Legendre’sche Reihen, Probleme der Variationsrechnung, Differentialgleichungen, und in den 1930er Jahren arbeitete er im Bereich der Maßtheorie, entwickelte das heute so genannte Haarsche Maß, untersuchte seine Anwendungen auf Gruppen und gewann sein Resultat, daß jede lokal kompakte Gruppe ein invariantes Maß besitzt, das allen offenen Mengen positive Zahlen zuordnet¹⁴⁸.

Der Mengenlehre widmete er eine einzige Arbeit, die er gemeinsam mit Dénes König schrieb. Es handelt sich um „Über einfach geordnete Mengen“ von 1909¹⁴⁹. Hier ging es darum, die Hauptsätze der Theorie der linearen Punktmengen auf die Theorie der einfach geordneten Mengen auszudehnen. Konkret kommen insbesondere der Bolzano-Weierstraßsche, der Heine-Borelsche und der Cantor-Bendixsonsche Satz in Betracht. Dabei verallgemeinerten die Autoren einen Satz aus Friedrich Riesz’ Arbeit „Über mehrfache Ordnungstypen“¹⁵⁰. Mit ihren Untersuchungen schlossen sie auch an Arbeiten von Lebesgue und Hausdorff an.

¹⁴⁵So Szókefalvi-Nagy in der Kurzbiographie von Haar, [SN59]. Vgl. auch [Lor93], 223.

¹⁴⁶Vgl. [SN59], 12.

¹⁴⁷[Haa10]

¹⁴⁸Vgl. Haars Publikationenliste in [SN59], 13-14.

¹⁴⁹Eine deutsche Version des ungarischen Originals erschien 1911. Vgl. [SN59].

¹⁵⁰Sie verweisen auf [Rie05d]. Vgl. [Haa11].

2.3.5 Marcel Riesz

(geb. am 16. November 1886 in Győr, Ungarn; gest. am 4. September 1969 in Lund, Schweden)

Marcel Riesz studierte von 1904 bis 1910 in Budapest, Göttingen und Paris¹⁵¹. In Göttingen verbrachte er das Sommersemester 1907¹⁵². Nach seiner Rückkehr nach Budapest beendete er 1908 seine Dissertation¹⁵³. Nach einem kurzen Aufenthalt in Göttingen verbrachte er das akademische Jahr 1910/11 in Paris¹⁵⁴. Dort bekam er eine Einladung von Gustav Mittag-Leffler, den er 1908 auf dem IV. IMK in Rom getroffen hatte, in Stockholm Vorlesungen zu halten. Von 1911 bis 1926 war er in Stockholm Privatdozent, bis er 1926 einen Lehrstuhl in Lund annahm. Bis auf mehrere Forschungsaufenthalte in den 1950er Jahren in den USA lehrte er sein Leben lang in Schweden.

Der schwedische Mathematiker Gårding kennzeichnete Marcel Riesz als den jüngste in einer Generation von ausgezeichneten ungarischen Mathematikern, zu der unter anderem Lipót Fejér, Friedrich Riesz und Alfréd Haar gehörten¹⁵⁵.

In seinem ersten veröffentlichten Artikel von 1906 behandelte Marcel Riesz ein Problem über Summierbarkeitsmethoden für Taylor-Reihen von analytischen Funktionen¹⁵⁶. Das Thema war damals wegen Fejérs Satz über die Summation von Fourierreihen aus dem Jahr 1900 sehr aktuell. Unter dem Einfluß von Fejér arbeitete Marcel Riesz dann weiter an trigonometrischen Reihen. 1908 verallgemeinerte er in seiner Dissertation einen Satz von Fejér über die Konvergenz von trigonometrischen Reihen¹⁵⁷. Bis 1916 forschte er erfolgreich über die Summierbarkeit von Potenzreihen, trigonometrischen Reihen und Dirichlet-Reihen¹⁵⁸.

Marcel Riesz interessierte sich bis in die 1920er Jahre im wesentlichen für Probleme der klassischen Analysis: Summationsmethoden, klassische Funktionentheorie und Theorie der trigonometrischen Reihen¹⁵⁹. Er war Koautor eines Artikels über trigonometrische Reihen für die *Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften*. In den 1920er Jahren wandte er sich unter dem Einfluß seines Bruders der Funktionalanalysis zu¹⁶⁰.

¹⁵¹Vgl. [Gär70].

¹⁵²In einem Brief an Maurice Fréchet vom 21. Mai 1907 bittet Friedrich Riesz darum, ihm bei seinem Bruder in Göttingen zurückzuschreiben. S. Anhang C.

¹⁵³Vgl. Marcel Riesz' Veröffentlichungenliste in [Gär70].

¹⁵⁴Vgl. [Pee88], 2. János Horváth bemerkt in seinem Artikel über Marcel Riesz für die *Dictionary of Scientific Biography*: „Like most young Hungarian mathematicians of the period, [Marcel] Riesz visited Göttingen regularly.“

¹⁵⁵Vgl. [Gär97], 142.

¹⁵⁶Vgl. [Gär70].

¹⁵⁷So Horváth in seinem Artikel über Marcel Riesz für die „Dictionary of Scientific Biography“

¹⁵⁸Vgl. [Gär70], ii.

¹⁵⁹Vgl. [Pee88], 4.

¹⁶⁰Vgl. [Gil90].

Mit seinem Bruder zusammen schrieb er 1916 eine einzige gemeinsame Arbeit, in der es um analytische Funktionen ging¹⁶¹. Im allgemeinen waren ihre Arbeitsgebiete aber sehr unterschiedlich¹⁶². Die Brüder hatten eine gute Beziehung zueinander. Regelmäßig trafen sie sich im Sommerurlaub. Marcel bewunderte Friedrich, der seinerseits auch sehr stolz auf seinen Bruder war¹⁶³. Sie sahen sich sehr ähnlich, unterschieden sich aber hinsichtlich ihres Charakters: Friedrich trat ruhig und souverän auf, Marcel dagegen wirkte hektisch und aufbrausend¹⁶⁴. Unter den Mathematikerkollegen wurde Friedrich zumeist als der einflußreichere der beiden Brüder eingeschätzt. Marcel selbst förderte diese Meinung¹⁶⁵.

Gårding beschreibt Marcel Riesz als einen ehrgeizigen Perfektionisten, der einen klaren klassischen Stil pflegte und besonderen Wert auf die Form legte. Er habe das Französische bevorzugt und wissenschaftliche Auseinandersetzungen wie ein Gentleman geführt¹⁶⁶.

2.3.6 Dénes König

Dénes König, geboren 1884 als Sohn von Gyula König, begann sein Mathematikstudium 1902 in Budapest; 1907 setzte er sein Studium in Göttingen fort, wo er anschließend promovierte. Bereits seit 1907 lehrte er an der Technischen Universität von Budapest, an der er 1911 Privatdozent, 1932 außerordentlicher Professor und 1935 ordentlicher Professor wurde. Sein Hauptforschungsgebiet wurde die Graphentheorie, an deren Etablierung als Subdisziplin der Mathematik er stark mitwirkte, auch indem er eine der ersten Monographien zu diesem Gebiet verfaßte. Auch später widmete er sich der Entwicklung der Graphentheorie. Dénes schloß 1908 an jene Untersuchungen seines Vaters an, die darauf zielten, Zermelos Beweis des Wohlordnungsprinzips zu widerlegen¹⁶⁷. Die Forschung von Dénes König wird in der vorliegenden Arbeit nicht weiter diskutiert. Da Dénes König ein Zeitgenosse von Friedrich Riesz war und da es Aspekte in der Riesz'schen Arbeit „Die Genesis des Raumbegriffs“ gibt, die gewisse Ähnlichkeiten mit der Graphentheorie nachweisen, wäre die Erforschung der Zusammenhänge ihrer Arbeiten wünschenswert.

¹⁶¹[RR16].

¹⁶²Gårding hält es für möglich, daß Marcel absichtlich andere Forschungsinteressen als die seines Bruders pflegte, vgl. [Går70], viii.

¹⁶³So Lorchs Beschreibung der Beziehungen zwischen den Brüdern Riesz, vgl. [Lor93], 226

¹⁶⁴Vgl. [Går70], viii.

¹⁶⁵Peetre zitiert Gårdings Erinnerung an einem Kommentar von Marcel Riesz: „Remember that I am just a brightly colored copy of my brother“, vgl. [Pee88], 2. Bei Lorch: „Marcel knew what the score was. Once at a meeting, a mathematician seeing them exclaimed, ‚Ah, here are the two Riesz!‘ ‚No‘, returned Marcel, ‚there is only one Riesz‘“, [Lor93], 226.

¹⁶⁶Vgl. [Går70], viii.

¹⁶⁷Vgl. [Moo82], 119-121.

Kapitel 3

Zur französischen mathematischen Kultur

3.1 Institutionen, Forschung und Lehre

3.1.1 Universität versus ‚Grandes Écoles‘

Die mathematische Landschaft Frankreichs im 19. Jahrhundert, d.h. die Gesamtheit aller Institutionen und Personen, die in der mathematischen Forschung oder Lehre tätig waren, war dominiert von der Tradition der *Grandes Écoles*. Personell setzte sie sich bis in den 1880er Jahren aus Ingenieurwissenschaftlern, Hochschullehrern und Gymnasiallehrern zusammen. Zur mathematischen Kultur in Frankreich zwischen 1872 und 1914 hat Hélène Gispert umfangreiche Arbeiten verfaßt¹. Folgende Darstellung stützt sich in erster Linie auf ihre Forschungen.

Lehrstühle für Mathematik an Universitäten gab es insgesamt wenig und diejenigen außerhalb von Paris waren darüberhinaus wenig attraktiv, so daß die Arbeit als Lehrer am Lycée oft bevorzugt wurde. Dagegen genossen die acht Lehrstühle der Sorbonne großes Prestige². Die Gruppe der Hochschullehrer umfaßte deshalb sowohl Gymnasiallehrer als auch Dozenten an den Fakultäten und an den *Grandes Écoles*: die *École polytechnique*, *École normale supérieure* oder eine der *Écoles d'application* (die unter dem Einfluß der *École polytechnique* standen) wie die *École des mines* und die *École des ponts et chaussées*.

In dieser mathematischen Landschaft zeichnete sich die *École polytechnique* als Frankreichs eigentliches mathematisches Forschungszentrum aus³. Dagegen

¹vgl. [Gis91], [Gis02], [GT96].

²Vgl. [Gis91], 24-26. Beispielweise haben Mathematiker wie Jean-Claude Bouquet und Jean Gaston Darboux Lehrstühle an Universitäten außerhalb von Paris abgelehnt, bzw. aufgegeben und anschließend als Lehrer im Lycée gearbeitet, *ibid.*

³Vgl. [Gis02], 109. Zur Bedeutung der *École polytechnique* vgl. [Gis91], 25ff.

war die Bedeutung der Universitäten eher gering, sowohl als Ausbildungseinrichtung als auch als Arbeitgeber, denn gemessen an den *Grandes Écoles* erhielten nur vergleichsweise wenige Vertreter des in Rede stehenden Personenkreises ihre Ausbildung an der Universität, und auch nur wenige waren Universitätsangestellte⁴.

Die Stellung der Universität als Institution veränderte sich in den letzten drei Jahrzehnten des 19. Jahrhunderts allmählich. Grund dafür waren Reformen in der Bildungspolitik, die der Universität die Aufgabe der Ausbildung des wissenschaftlichen Nachwuchses zuschrieben. Diese Reformen wurden im Rahmen der franco-preußischen Nachkriegszeit teilweise durch öffentliche Diskussionen motiviert⁵.

Frankreichs Niederlage im franco-preußischen Krieg (1870-1871) weckte unter den in ihrem Nationalstolz verletzten französischen Wissenschaftlern den Wunsch nach einer Verbesserung der Wissenschaften (und zwar aller Wissenschaften) und der Hochschulausbildung im Lande⁶. Der Kriegsausgang galt vielen als eine Niederlage auf Wissenschaftsgebiet. Es gab sogar einige Wissenschaftler, die, wie der Biologe Louis Pasteur, in der Öffentlichkeit die Frage debattierten, inwieweit die deutsche Wissenschaft der eigentliche Sieger des Krieges gewesen war⁷.

Solche Debatten führten zu einer Reflexion über den Wert der Wissenschaft und die Rolle der Universität als wissenschaftliche Institution, über den wissenschaftlichen Nachwuchs und die notwendigen Lehrkräfte. Diese Diskussionen fanden auch in Regierungskreisen statt. Die Regierung der jungen Dritten Republik, die infolge des Krieges gegründet wurde, setzte sich bald für eine starke Förderung der Wissenschaften ein und hob in ihrer Rhetorik deren ‚moralische Werte‘ hervor. Noch wichtiger war die Einleitung von Reformen, die für eine Umgestaltung der Struktur der Universitäten und deren Beziehung zur Wissenschaft sorgten, und damit für eine Umgestaltung der französischen mathematischen Landschaft insgesamt⁸.

In der Praxis bewirkten diese Reformen, daß der mathematische Lehrplan an den ‚*facultés de sciences*‘ sich nicht mehr ausschließlich an den Bedürfnissen der Ausbildung von Gymnasiallehrern orientierte, wie es bis 1870 der Fall gewesen war⁹. Ferner wurde 1877 eine neue Art Lehrstelle an den wissenschaftlichen Fakultäten geschaffen, die des ‚*maître de conférences*‘. Dazu ermöglichte die durch die Reformen hervorgerufene beträchtliche Erhöhung des Universitätsbudgets, daß viele solcher Lehrstellen an verschiedenen Universitäten Frankreichs geschaf-

⁴vgl. [Gis91], 22ff.

⁵Vgl. [Gis91], 54.

⁶Zu den Auswirkungen des franco-preußischen Krieges auf die Mathematik in Frankreich vgl. [Gis02].

⁷Es gab nur wenige Mathematiker, die sich an diese Debatte beteiligten, vgl. [Gis91] 16ff.

⁸Vgl. [Gis91], 53ff.

⁹Besonders schlecht war die Situation der Mathematik außerhalb von Paris, wo die Universitäten sich nicht einmal um die Ausbildung von Lehrern bemühten, vgl. [Gis91], 23ff.

fen werden konnten¹⁰. Die Universität als Institution erhielt damit eine große Bedeutung für die Entwicklung der Mathematik in Frankreich, indem sie als Arbeitgeber der neuen Generationen Mathematiker die mathematische Forschung förderte. Diese jungen Mathematiker hatten nach ihrer Promotion nun die Option, am Beginn ihrer Forschungskarriere ‚maître de conférences‘ zu werden, statt im Gymnasium (Lycée) zu arbeiten¹¹. Um Gisperts Formulierung zu verwenden: Die Universität wurde entscheidend für die ‚Professionalisierung der Mathematik‘¹².

Dagegen behielten die *École polytechnique* und die *École normale supérieure* bis zu Beginn des 20. Jahrhunderts ihre führende Position bei der Ausbildung von Mathematikern, trotz der wachsenden Bedeutung der Universitäten. In dieser Hinsicht erfolgte um 1900 jedoch eine Umgestaltung der ‚Machtverhältnisse‘ in der mathematischen Landschaft Frankreichs, als die seit Beginn des 19. Jahrhunderts dominierende *École polytechnique* durch die *École normale supérieure* überrundet wurde¹³. An der *École polytechnique* studierten Camille Jordan und Henri Poincaré¹⁴.

Zu den später bedeutenden Mathematikern, die ihr Studium in der *École normale supérieure* absolvierten, zählen Jaques Hadamard, Émile Borel, René Baire, Henri Lebesgue, Maurice Fréchet und Pierre Fatou. Diese jungen Mathematiker schlossen an die französische Tradition der Analysis an und bildeten im ersten Jahrzehnten des 20. Jahrhunderts ein wissenschaftliches Netzwerk, das ausschlaggebend für die Entwicklung der modernen französischen Analysis wurde – das wird in Abschnitt 3.2 näher erläutert.

Im Rahmen des Umwandlungsprozesses der Nachkriegszeit entstand als Institution die *Société mathématique de France* (SMF). Die SMF wurde 1872 ins Leben gerufen, zum einem, um die weitere Entwicklung der Mathematik in Frankreich zu fördern, zum anderen als Reaktion auf die damalige Entwicklung der Mathematik im Ausland. Auch andere Faktoren trugen dazu bei, die Notwendigkeit dieser Einrichtung als organisatorische Institution hervorzuheben: Die Anzahl der Mathematiker wuchs weiter, die Mathematik spaltete sich in spezialisierte und isolierte Subdisziplinen auf, und die Kommunikationsmöglichkeiten zwischen den Mathematikern waren unzureichend. Zur Linderung dieses letzten Problems sorg-

¹⁰Zwischen 1870 und 1910 wurden insgesamt 35 Stellen für ‚maître de conférences‘ geschaffen, die meisten außerhalb von Paris, [Gis91], 54-59.

¹¹Zwischen 1870 und 1900 wurde die Universitätsstruktur stark umgewandelt. Die Anzahl der Universitätsstellen für die Mathematik verdoppelte sich auf 60, vgl. [Gis02], 109. Zu den faktischen Folgen der Reformen in der französischen Bildungspolitik nach dem franco-preußischen Krieg vgl. [Gis91], 53-60.

¹²In Gisperts Auffassung ist der ‚professionelle Mathematiker‘ derjenige, der in seiner Disziplin an einer Hochschule lehrt und forscht, vgl. [Gis91] 65ff, [Gis02], 109, [GT96], 408.

¹³Vgl. [Gis02], 109. Zur früheren Dominanz der *École polytechnique* vgl. [Gis91], 25ff. Zum Anstieg der *École normale supérieure*, ibid. 66ff.

¹⁴Zu Poincaré s. Abschnitt 3.3.

te das *Bulletin der SMF*, jedoch mit der Einschränkung, daß nur Arbeiten von Mitgliedern der SMF zur Veröffentlichung angenommen wurden¹⁵.

3.1.2 Analysis: eine französische mathematische Tradition

Während des gesamten 19. Jahrhunderts hatte die Analysis in Frankreich eine privilegierte Stellung unter den mathematischen Forschungsgebieten. Zur Entwicklung einer französischen Tradition der Analysis trugen die institutionellen Strukturen des französischen Bildungssystem prägend bei, das zum einem durch die Dominanz der *École Polytechnique*, deren Lehrplan für die Ingenieurausbildung die Mathematik im Mittelpunkt setzte. Joseph Louis Lagrange, Pierre Simon Laplace und Gaspard Monge hatten an der Gestaltung dieses Lehrplanes mitgewirkt. Sie setzten eine mathematische Ausbildung mit Schwerpunkten in Analysis und deskriptiver Geometrie durch¹⁶. Zugleich sah das Universitätssystem die Existenz eines Lehrstuhls für Analysis an jeder wissenschaftlichen Fakultät im Land vor¹⁷.

In die französische Tradition der Analysis des frühen 19. Jahrhunderts ordnet sich eine Reihe heute berühmter Persönlichkeiten ein, die die Mathematik stark beeinflussten: Lagrange, Laplace, Adrien-Marie Legendre, Simeon Denis Poisson, Jean-Baptiste de Fourier, Augustin-Louis Cauchy und andere. Bis 1830 bildeten die französischen Mathematiker eine Welt für sich, die es sich leisten konnte, mathematische Entwicklungen jenseits der Grenzen Frankreichs zu ignorieren¹⁸.

Nachdem die Geometrie und die angewandte Mathematik in den 1860er Jahren mit Jean Hachette, Victor Poncelet, Michel Chasles, Charles Dupin und Pierre O. Bonnet und anderen die mathematische Forschung Frankreichs dominiert hatte, erfuhr die Analysis in den letzten zwei Jahrzehnten des 19. Jahrhunderts einen neuen Impuls. Die wissenschaftliche Produktion in Analysis stieg allmählich an und erreichte in den 1880er Jahren eine Spitzenposition¹⁹. So stand die Entwicklung der Geometrie und der angewandten Mathematik in Frankreich in den letzten Jahrzehnten des 19. Jahrhunderts im starken Kontrast zur Situation in Deutschland, denn während in Deutschland die angewandte Mathematik stark gefördert und zu verschiedenen Fragen der Geometrie viel publiziert wurde, waren in Frankreich die goldene Jahren der Geometrie vorbei. Darüberhinaus gingen lediglich von den Forschungen Poincarés noch Impulse für die mathematische

¹⁵Neben der SMF wurden auch andere Gesellschaften wie die *Société française de physique* und die *Association française pour l'avancement des sciences* gegründet, vgl. [GT96], 410 und [Gis02], 106ff.

¹⁶Vgl. [GG94b], 1432. Eine sehr interessante Beschreibung der *École Polytechnique* ist [Kle26].

¹⁷Vgl. [Gis91], 56-57.

¹⁸Vgl. [GG94b], 1438. Zur Mathematik in Frankreich zwischen 1800 und 1840 vgl. [GG90].

¹⁹Vgl. [GT96], 421. Die Hauptquelle der Autorinnen ist das *Jahrbuch für die Fortschritte der Mathematik*. Zur mathematischen Forschung in Frankreich zwischen 1872 und 1914 vgl. [Gis91].

Physik aus²⁰.

Im Gegensatz zu den Gewohnheiten der 1830er Jahre übten Joseph Liouville und Charles Hermite Ende des 19. Jahrhunderts eine offene Haltung gegenüber mathematischen Entwicklungen im Ausland²¹. Eine besondere Leistung zu Gunsten des Wissenstransfers von Deutschland nach Frankreich erbrachte Hermite, indem er junge Doktoranden anregte, die in Deutsch verfaßten analytischen Arbeiten von H.A. Schwarz, L.O. Hölder, B. Riemann und L. Fuchs in ihren Dissertationen auszuarbeiten, um diese dadurch einem breiteren Publikum zugänglich zu machen. In diesem Sinne erfolgte die Dissertation von Jules Tannery über Arbeiten von Fuchs²². Mit demselben Anspruch arbeitete Hermite mit seinen Schülern Paul Appell, Émile Picard und Henri Poincaré an der Übersetzung von Cantors frühen Veröffentlichungen zur Mengenlehre zusammen, was die Rezeption der Cantorsche Mengenlehre in Frankreich entscheidend beeinflussen sollte²³. Da Hermite eine Analysis pflegte, die sich an Weierstraß' Tradition orientierte, bemühte er sich besonders um die Verbreitung der Arbeiten von Weierstraß und dessen Schülern in Frankreich²⁴. Im Pariser Milieu der 1890er Jahre wirkten neben Hermite unter anderen Appell, Picard, Poincaré, Paul Painlevé, Gaston Darboux, Camille Jordan und Jules Tannery²⁵.

Um 1900 erfuhr die Analysis in Frankreich einen weiteren Impuls, der sich durch die Anwendung mengentheoretischer Methoden charakterisieren läßt. In dieser Zeit brachten Dissertationen zu Themen aus dem Bereich der Analysis viele originelle Resultate und Methoden hervor. Zwar wurzelten diese Arbeiten in Hermites Tradition und damit in der klassischen Analysis von Weierstraß, doch kündigten sie aufgrund ihres mengentheoretischen und oft auch axiomatischen Zugangs den Anfang der modernen französischen Analysis an²⁶. Ein weiteres Merkmal dieser modernen Untersuchungen war die besondere Bedeutung der Theorie der Funktionen von reellen Variablen. In dieser Zeit entstanden die Dissertationen von Émile Borel, René Baire, Henri Lebesgue und Maurice Fréchet, in denen die Autoren systematisch und vorbildlich Cantors Punktmengenlehre bei der Behandlung analytischer Probleme anwendeten.

Die Cantorsche Mengenlehre wurde aber nicht nur angewendet, sie wurde auch als neues Forschungsgebiet erschlossen. Allerdings war das Interesse an der Entwicklung weiterer mengentheoretischer Resultate im wesentlichen durch deren

²⁰Vgl. [Gis91], 86. Poincaré hatte an der Sorbonne den Lehrstuhl für mathematische Physik und Wahrscheinlichkeitstheorie inne. Zum Vergleich der Mathematik in Deutschland und Frankreich vgl. [GT96], 421.

²¹Zu Liouville vgl. [Lüt90]. Zu Hermite vgl. [Arc02].

²²Vgl. [Gis91], 81ff.

²³Vgl. [Moo89], 95ff.

²⁴Zu Hermites analytischer Tradition und deren Verbindung zu Weierstraß' Werk vgl. [Arc02], 134.

²⁵Auf Poincaré und Tannery werden wir im Abschnitt 3.3.1 zurückkommen.

²⁶S. Abschnitt 3.2.

Anwendungen auf die Analysis bedingt. Auch deshalb erhielt die Punktmengenlehre in den Händen der oben erwähnten jungen französischen Analytiker eine besondere Gestalt. Ihr im Sinne einer Orientierung auf Anwendungen beschränktes Interesse verringerte jedoch nicht die Tragweite der mengentheoretischen Entwicklungen, welche zusammen mit ihren Anwendungen im zweiten Teil des Berichtes über die Entwicklung der Mengenlehre von Schoenflies anerkannt wurden²⁷. Weitere Besonderheiten der Punktmengenlehre in Frankreich werden in Abschnitt 3.2.1 diskutiert.

3.1.3 Lehre und Lehrbücher

Um die Wende zum 20. Jahrhundert entstand im Pariser mathematischen Milieu eine breite Front junger Doktoren, die ihre Ausbildung an der *École normale supérieure* absolvierten. Anschließend gingen sie als Dozenten zumeist an Universitäten außerhalb von Paris, nur vereinzelt auch an die großen Institutionen der Hauptstadt, wie die *Sorbonne* oder die *Grandes Écoles* oder das *Collège de France*²⁸. So lehrten am Beginn ihrer Forschungskarriere Hadamard in Bordeaux, Borel in Lille, Baire in Montpellier, Lebesgue und Fréchet in Rennes²⁹.

Baire, Borel und Lebesgue erhielten abwechselnd zwischen 1899 und 1905 das Privileg, den sogenannten ‚Cours Peccot‘ am *Collège de France* halten zu dürfen³⁰. Die Stiftung Peccot finanzierte einsemestertige Vorlesungen am *Collège de France* mittels eines Stipendiums³¹. Die Bewerber sollten junge Mathematiker sein. Die Altersgrenze war dreizig³². Wer am *Collège de France* las, genoss gewisse Vorrechte: freie Forschung, keine Prüfungen, keine regelmäßigen Lehrverpflichtungen. Als Dozenten am *Collège de France* wurden Personen auf Grund ihrer wissenschaftlichen Leistung ohne Bindung an Titel und Grade ernannt. Die Vorlesungen durften von jedem kostenfrei besucht werden³³.

In Frankreich wurde im 19. Jahrhundert auf pädagogische Werte in der Gestaltung von Vorlesungen geachtet. In diesem Sinne war es eine Tradition, Lehrbücher

²⁷vgl. [Sch08b], 302ff.

²⁸Vgl. [Gis91], 58.

²⁹Zu Hadamard, Borel, Baire, Lebesgue, Fréchet s. Abschnitt 3.2.

³⁰Borel und Lebesgue hielten den ‚Cours Peccot‘ jeweils zwei Jahre lang; Borel zwischen 1899 und 1902, Lebesgue erst im akademischen Jahr 1902-1903, dann nochmal 1904-1905. Baire hielt diesen Cours nur ein Semester im Jahr 1904, vgl. ihre Biographien in [G⁺90], [Gil90] sowie [Haw70], 132 und 167 und [Dug76], 308.

³¹Der Name geht auf den Namen der Familie Peccot, die diese Stiftung gründete, zurück, vgl. Brief von Lebesgue, abgedruckt in [Dug76], 364.

³²Vgl. [Gis91], 123.

³³Ursprünglich als *Collège Royal* 1530 gegründet, erhielt das *Collège de France* seinen aktuellen Namen 1795. Seine Hauptfunktion vom Gründungsprinzip her war die Lehre an sich, ohne weitere Formalitäten wie Prüfungen oder Grade. André Marie Ampère lehrte dort in den 1820er Jahren Physik. Das Niveau der Mathematik wurde erst in den 1840er Jahren mit Liouville anspruchsvoll, vgl. [GG94b].

zu veröffentlichen, was im deutschen Nachbarland fremd war. Dazu gehörte etwa die Publikation mathematischer Vorlesungsskripte ('Cours'). Der Einfluß der gedruckten Vorlesungen konnte sich dann über mehrere Generationen Mathematiker hinaus erstrecken³⁴. Es gab keine Konkurrenz zwischen zwei Lehrbüchern, denn sie lösten sich gegenseitig ab: Cauchys *Cours d'analyse de l'École royale polytechnique* (1821), Jordans *Cours d'analyse* (1882), Picards dreibändigen *Traité d'analyse* (1891-1896)³⁵.

Dieser Tradition folgend gründete Borel 1898 die *Collection de monographies sur la théorie des fonctions*. Diese auch einfach als *Collection Borel* bekannte Edition gab in der Zeit bis 1913 insgesamt 18 Monographien heraus. Als erster Band erschien 1898 Borels *Leçons sur la théorie des fonctions*. Insgesamt publizierte Borel in seiner *Collection* zwischen 1898 und 1905 sechs Monographien. Von Baire erschienen 1905 die „Leçons sur les fonctions discontinues“ zu seiner Vorlesung am *Collège de France*. Lebesgue trug zwei Monographien (1903 und 1906) über seine Integrationstheorie bei. Fast alle Monographien basierten auf von den Autoren gehaltenen Vorlesungen an der *Sorbonne* oder am *Collège de France*³⁶. Diese *Collection* belegt die Produktivität im Bereich der modernen reellen Funktionentheorie.

Neben den Hauptvertretern der modernen französischen Analysis Baire, Borel und Lebesgue erschienen auch ausländische Autoren in der *Collection Borel* wie Vito Volterra und Friedrich Riesz. Riesz Monographie (1913) ist eine derjenigen, die nicht auf Vorlesungen an der *Sorbonne* oder am *Collège de France* basierte³⁷.

Die große Bedeutung, die der *Collection Borel* für die Rezeption und Entwicklung der Mengenlehre zuzuschreiben ist, wird in Abschnitt 3.2.1 erläutert.

3.2 Axiomatik, Mengenlehre und moderne Analysis

3.2.1 Rezeption der Cantorschen Mengenlehre

Die Geschichte der Rezeption der Cantorschen Mengenlehre in Frankreich ist eng verbunden mit der Geschichte ihrer Anwendungen auf die französische Analy-

³⁴Vgl. [Arc02], 131ff. Klein kommentierte im Zusammenhang mit der *École polytechnique*: „Nach außen wurde das Leben dieser Schule um so wirksamer, als es Gesetz war, die Vorlesungen zu veröffentlichen. Die große Mehrzahl der führenden Lehrbücher der höheren Mathematik zu Anfang des 19. Jahrhunderts ist aus dem Unterrichtsbetrieb der *École polytechnique* hervorgegangen, und aus dieser Quelle sind sozusagen alle unsere heutigen Lehrbücher abgeleitet“, [Kle26], 66.

³⁵Vgl. [Dho95]. Zur Bedeutung von Jordans *Cours d'analyse*, vgl. [Gis83] und [Gis95].

³⁶Vgl. [Gis91], 117-123.

³⁷Vgl. [Rie13].

sis³⁸. Entwicklungen der Mengenlehre als selbstständige Subdisziplin, d.h. ohne Rücksicht auf Anwendungen, kamen in Frankreich erst in der Zeit von 1905 bis 1909 vor, wie beispielsweise bei Fréchet³⁹.

Von großer Bedeutung für die Rezeption der Mengenlehre in Frankreich waren die Übersetzungen sowohl von Cantors Arbeiten als auch von P. Du Bois-Reymonds Buch *Die allgemeine Funktionentheorie* (1882)⁴⁰. Auf Anregung von Gösta Mittag-Leffler erschien 1883 in der schwedischen Zeitschrift *Acta Mathematica* die französische Version der Cantorschen Arbeit *Über unendliche, lineare Punktmannichfaltigkeiten V*⁴¹. In der Zeit nach dem franco-preußischen Krieg von 1870/71 beabsichtigte Mittag-Leffler mit der Gründung dieser Zeitschrift im Jahre 1882, den deutschen und französischen Mathematikern eine Alternative im wissenschaftlichen Austausch zu bieten. Mittag-Leffler hatte eine positive Aufnahme der mathematischen Inhalte von Cantors Theorie durch Charles Hermite und seinen Schülern Appell, Picard und Poincaré in Anwendungen auf ihre Forschungsgebiete erwartet, auch wenn diese 1883 hinsichtlich des philosophischen Aspekts seiner Theorie sehr kritisch reagiert hatten⁴². Mit Ausnahme von Poincaré, der die Meinung vertrat, mengentheoretische Methoden könnten von Bedeutung für die Analysis sein, und selber 1884 Cantorsche Begriffe in seinen Arbeiten über Kleinsche und Fuchsche Funktionen benutzte⁴³, blieb Cantors Mengenlehre für jene Generation von Mathematikern, einschließlich Darboux, Picard, Gourzat und Appell, jenseits der Grenzen ihrer Forschungsinteressen. Sie setzten ihre Forschungen in der Analysis ohne Einbeziehung der Mengenlehre fort. Sie mußten allerdings in den folgenden Jahrzehnten beobachten und manchmal sogar begutachten, wie die jüngeren Generationen von Mathematikern systematisch mengentheoretische Methoden auf die Analysis anwendeten⁴⁴.

³⁸Zu den Wechselwirkungen zwischen der Cantorschen Mengenlehre und der französischen Analysis vgl. [Gis95]. Moore diskutierte in [Moo82] und [Moo89] die zweideutige Position von Borel, Baire und Lebesgue im Hinblick auf die Kontinuumshypothese und Zermelos Auswahlaxiom. Allgemeine Hinweise auf die Bedeutung der modernen Entwicklungen der französische Theorie der reellen Funktionen für die Rezeption der Mengenlehre in Frankreich um 1900 geben auch Purkert und Ilgands in [PI87], 144, und Purkert in [Pur02b], 22-24. Die Auswirkungen der Mengenlehre auf die Entstehung der Funktionalanalysis diskutieren Birkhoff und Kreyszig in [BK84], 267; so wie Ferreiros in [Fer99], 300, und Siegmund-Schultze in [SS82], 50ff.

³⁹Vgl. [Gis95], 68.

⁴⁰Vgl. [Gis95], 39.

⁴¹Es handelt sich um [Can83a]. Zur Entstehung dieser Übersetzungen und ihrer frühen Rezeption in Frankreich vgl. [Moo89], 84-85 und 93-98.

⁴²Sie hielten seine Theorie der transfiniten Zahlen für ein Notationssystem ohne reelle Substanz, eine Theorie ohne aktuelles Interesse, und somit für etwas, was nicht zur „französischen Mentalität“ paßte, so Poincaré in einem Brief an Mittag-Leffler, zitiert in [Moo89], 96.

⁴³Vgl. [Moo89], 95ff. Poincaré benutzte Begriffe wie perfekte und zusammenhängende Menge und den der Ableitung einer unendlichen Menge. 1888 verwendete er Cantors Mächtigkeitslehre in der Theorie der analytischen Funktionen, [Gis95], 43ff.

⁴⁴Picard, Darboux, Poincaré und Appell reichten bei den *Comptes Rendus de l'Académie de sciences* Beiträge von jüngeren Kollegen ein, [Gis95], 69ff.

Bahnbrechend für diesen neuen methodischen Ansatz und einflußreich für eine ganze Generation Mathematiker war die zweite Auflage „entièrement refondue“ des *Cours d'analyse de l'École polytechnique* von Camille Jordan aus dem Jahr 1893, mit dem Jordan die erste globale und systematische Darstellung der Analysis, die sich der Mengenlehre erfolgreich bediente, lieferte. In dieser Auflage behandelte Jordan in einem neuen Kapitel Cantors Mengenlehre, allerdings beschränkte er sich auf jene Aspekte, die für seine Integrationstheorie nützlich waren⁴⁵.

In den letzten zehn Jahren vor der Jahrhundertwende lassen sich mengentheoretische Methoden in den Dissertationen von Painlevé (1887), Hadamard (1892), Borel (1895) und Baire (1899) finden, sowie in einigen der Beiträge zur Analysis in den *Comptes Rendus*. Allerdings waren solche Arbeiten, die auf die Mengenlehre zurückgriffen, bis 1899 noch ungewöhnlich. Zu Beginn des 20. Jahrhunderts änderte sich diese Situation grundlegend. In der Zeit zwischen 1900 und 1910 enthielt jede zweite Dissertation in Analysis (d.h. jede vierte in der Mathematik) Anwendungen der Mengenlehre, darunter die Dissertationen von Lebesgue, Fatou und Fréchet. Auch unter den Arbeiten, die in den *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences* erschienen, zeichnete sich ein ähnlicher Trend ab⁴⁶.

Der Aufnahmeprozeß der Mengenlehre wurde durch einen spezifischen Kontext der französischen Mathematik, nämlich der Entwicklung der modernen Analysis, begünstigt. Die von Borel gegründete *Collection de monographies sur la théorie des fonctions* belegte, wie fruchtbar der mengentheoretische Zugang für die Funktionentheorie war⁴⁷. Von diesen Monographien waren die von Borel, Baire und Lebesgue von größter Bedeutung, weil sie, auch wenn nur kapitelweise, Gesamtdarstellungen der Mengenlehre enthielten. In dieser Hinsicht dienten diese Monographien, so wie früher Jordans *Cours d'analyse*, als Lehrbücher für eine Einführung in die Mengenlehre.

Das allgemeine Interesse an Anwendungen der Mengenlehre auf die Analysis charakterisierte bis 1905 sowohl die Rezeption der Mengenlehre als auch die Beschäftigung mit der Mengenlehre als Forschungsgebiet durch die französischen Analytiker. Autoren wie Borel, Baire und Lebesgue, die Hauptvertreter der modernen französischen Analysis, legten eigene mengentheoretische Resultate vor, wobei sie sich nach den praktischen Bedürfnissen in ihren jeweiligen Forschungsarbeiten orientierten. Dieser Pragmatismus von Borel, Baire und Lebesgue stand in engem Verhältnis zu ihrer kritischen Haltung gegenüber jenen Aspekten der Cantorschen Theorien, für die sie keine unmittelbare Anwendung sahen⁴⁸. Zugleich hing ihr eingeschränkter Umgang mit der Mengenlehre mit ihrer (heute so

⁴⁵Vgl. [Gis95], 50.

⁴⁶Vgl. [Gis95], 64-67.

⁴⁷S. Abschnitt 3.1.3 und vgl. [Gis95], 52.

⁴⁸Vgl. [Gis95], 60.

bezeichneten) ‚konstruktivistischen Philosophie der Mathematik‘ zusammen⁴⁹. Noch 1904 ließ sich nach Borels und Lebesgues Verständnis ein mathematisches Objekt konstruieren, wenn es möglich war, das Objekt (explizit oder implizit) mit nur endlich vielen Wörtern vollständig zu charakterisieren⁵⁰. Dabei handelte es sich aber um keine detaillierte und ausgearbeitete Philosophie, sondern um allmähliche Antworten auf Cantors Mengenlehre sowie auf Fragen zu Existenzbeweisen, die vor allem nach dem Erscheinen von Zermelos Auswahlaxiom (1904) zu einer intensiven Diskussion geführt hatten⁵¹. In Briefwechseln tauschten Hadamard, Baire, Borel und Lebesgue ihre jeweiligen Ansichten über Zermelos Auswahlaxiom aus. Nur Hadamard befürwortete Zermelos Postulat⁵².

Ihr Pragmatismus, ihr Konstruktivismus und ihre kritische Haltung gegenüber Cantors transfiniten Mengenlehre bewirkte, daß die Mengenlehre in den Darstellungen von Borel, Baire und Lebesgue wichtige Unterschiede zur Cantorschen Mengenlehre beinhaltete. Beispielsweise schrieben sie einerseits, im Unterschied zu Cantor, dem abzählbaren Unendlichen eine privilegierte Rolle zu, andererseits ließen sie allgemeine Betrachtungen der Cantorschen Theorie außer Betracht⁵³. Ihre zweideutige Haltung gegenüber der Mengenlehre manifestierte sich dadurch, daß sie mengentheoretische Begriffe und Methoden verwendeten, die sie anderswo in Frage gestellt hatten. Solche Anwendungen kamen manchmal unbemerkt vor, manchmal aber auch bewußt, wobei sie sich dann verpflichtet sahen, ihre Vorgehensweise zu rechtfertigen⁵⁴. Die Nützlichkeit der Mengenlehre in den Anwendungen war für sie zugleich Antrieb wie Rechtfertigung, um sich mit der Mengenlehre weiter zu beschäftigen⁵⁵.

1906 entstanden mit der Dissertation von Fréchet die ersten Forschungsergebnisse einer abstrakten Punktmengenlehre⁵⁶. Das Interesse für solche Untersuchungen war bei Hadamard bereits 1897 auf dem ersten Internationalen Mathematiker-Kongreß in Zürich betont worden. Damals versuchte Hadamard, wegen der Bedeutung, die solche Mengen für die Theorie der partiellen Differentialgleichungen der mathematischen Physik und für die Variationsrechnung haben, die Mathema-

⁴⁹Vgl. [Moo82], 92ff.

⁵⁰Vgl. [Fré65], 41. Gispert bemerkte: Lebesgue drückte 1904 diese Auffassung einer konstruktiven Definition in seinen *Leçons sur l'intégration* aus. Er ließ aber in der 2. Auflage seines Buches diese Passage entfernen, [Gis95], 63.

⁵¹Auf Anfrage Hilberts reichte Borel 1904 in den *Mathematischen Annalen*, die von Hilbert redigierte mathematische Zeitschrift, den Artikel [Bor05] ein, in dem er sich zu Zermelos Entwicklungen äußerte, vgl. [Moo82], 92ff. In Briefwechseln diskutierten Borel und Hilbert Zermelos Beweis des Wohlordnungssatzes, vgl. Brief von Hilbert an Borel vom November 1904, in Archive de l'Académie des Sciences de Paris, *Fonds Borel*.

⁵²Diese wissenschaftliche Diskussion wurde in [Bai05a] veröffentlicht.

⁵³Vgl. [Gis95], 54ff.

⁵⁴Die zweideutige Haltung von Baire, Borel und Lebesgue und ihre ‚konstruktivistische Philosophie der Mathematik‘ diskutiert Moore in [Moo82] in den Abschnitten 1.7 und 2.3.

⁵⁵Vgl. [Gis95], 73.

⁵⁶Vgl. [Gis95], 68.

tiker dazu anzuregen, sich dem Studium von Funktionenmengen zu widmen⁵⁷.

3.2.2 Axiomatik und ‚deskriptive Definitionen‘

Um 1900 suchten junge französische Mathematiker einen heute sogenannten axiomatischen Zugang zur Behandlung verschiedener Aspekte von Algebra, Geometrie und Analysis. Sie nannten ihr Vorgehen nicht axiomatisch; sie waren sich aber der Anwendung einer von Postulaten ausgehenden Methode für den Entwurf neuer mathematischer Objekte bewußt. Sie sprachen von einer zweckmäßigen Anwendung ‚deskriptiver Definitionen‘ bzw. abstrakter allgemeiner Definitionen⁵⁸. Als Vorbild dienten eine Darstellung der Galois-Theorie durch Jules Drach⁵⁹ aus dem Jahr 1895, Hadamards Begriff der Fläche eines ebenen Polygons von 1897 sowie eine Behandlung der abstrakten Gruppentheorie durch J. A. de Séguier⁶⁰ aus dem Jahr 1904. Diesen musterhaften Arbeiten folgten 1898 Borels Maßbegriff, 1904 Lebesgues Maß- und Integralbegriff und 1906 Fréchets Konzepte der L-, V- und E-Klassen.

Das Thema einer axiomatischen Methode in der französischen Mathematik um 1900 ist meines Wissens nach in der wissenschaftshistorischen Literatur wenig exploriert worden. Den Einfluß von Drach auf Hadamard, Borel und Lebesgue haben Gispert, Gray und Hawkins kurz erwähnt⁶¹. Moore machte auch auf die Anwendung von Axiomen bei der Charakterisierung von mathematischen Objekten durch Borel, Lebesgue und Fréchet aufmerksam, aber Moores Interesse richtete sich mehr auf die konstruktiven als auf die deskriptiven Definitionen von Borel und Lebesgue⁶². Auf Fréchets abstrakten axiomatischen Zugang in sei-

⁵⁷Vgl. [Had98]. Hadamard nahm an diesem Kongreß nicht teil. Er schickte ein Vortragsmanuskript seiner Rede an Hurwitz, einen der Organisatoren. Dieser ließ es auf dem Kongreß von Picard vorlesen, vgl. [MS98], 73.

⁵⁸Vgl. [Leb28], 107; [Fré06], 5. Ich benutze die Ausgabe von 1928 der Lebesgueschen Monographie *Leçons sur l'intégration et la recherche des fonctions primitives*. Die Originalausgabe von 1904 [Leb04] war mir nicht zugänglich. Gispert behauptet, daß Lebesgue bereits 1904 von ‚deskriptiven Definitionen‘ sprach. Allerdings weist Gispert auf starke Änderungen in der zweiten Edition von 1928 hin, vgl. [Gis95], 62-63 und Fußnote 30. Andererseits belegt Fréchets Dissertation, daß die Bezeichnung „deskriptive Definitionen“ sich 1906 schon durchgesetzt hatte.

⁵⁹Jules Drach (1871-1941) studierte ab 1889 an der *École Normale Supérieure*. Nach seiner Promotion 1898 lehrte er an verschiedenen französischen Hochschulen, ab 1913 an der Sorbonne, wo er 1920 eine Professur für analytische Mechanik erhielt. Explizite Hinweise auf einen direkten Einfluß von Drachs Ideen finden sich bei Borel, Lebesgue und Fréchet in [Bor28], 48; [Leb28], 107 und [Fré06], 5.

⁶⁰J. A. de Séguier (1862-1937) war ein französischer Privatgelehrter. Wußing berichtet von de Séguiers *Éléments de la théorie des groupes abstraits* [De 04] als von einer der ersten monographischen Darstellungen der abstrakten Gruppentheorie. In seiner Dissertation machte Fréchet auf de Séguiers Ideen aufmerksam, [Fré06], 5.

⁶¹Vgl. [Gis95], [Gra84] und [Haw70].

⁶²Vgl. [Moo82].

ner Dissertation wies Taylor hin⁶³. Allerdings mangelt es an einer historischen Untersuchung aller dieser axiomatischen Zugänge in Frankreich und deren Beziehung zueinander; so wäre auch ein Studium des Zusammenhangs zwischen dieser französischen Axiomatik und den axiomatischen Impulsen aus Italien und Deutschland wünschenswert.

1895 veröffentlichte Jules Drach in Zusammenarbeit mit seinem Freund und Studienkollegen Émile Borel eine Monographie über Zahlentheorie und höhere Algebra, die auf Vorlesungen von Jules Tannery an der *École Normale Supérieure* basierte⁶⁴. Für den algebraischen Teil lieferte Drach erste Ansätze einer strukturalistisch aufgebauten Algebra, indem er versuchte, Arithmetik und Algebra durch einen abstrakten, von Postulaten ausgehenden Zugang auf das unbedingt Notwendige zurückzuführen⁶⁵. Drachs originelle Vorgehensweise wurde von Tannery selbst im Vorwort anerkannt⁶⁶. 1898 verwendete Drach dieselbe Methode in seiner Dissertation über Differentialgleichungen⁶⁷. Für die Charakterisierung und Klassifizierung der Integrallösungen stellte er apriori eine Reihe von wesentlichen Eigenschaften auf, die diese zu erfüllen hätten⁶⁸. Damit definierte er die Integrallösung durch das, was Lebesgue später eine deskriptive Definition nannte.

1898 erschien Hadamards Buch *Leçons de Géométrie élémentaire*, in dem er eine axiomatische Definition der Fläche von ebenen Polygonen formulierte. Das Kapitel dieses Buches über Polygonflächen hatte er getrennt bereits 1897 veröffentlicht. Hadamard verlangte anhand von Postulaten, daß die Polygonfläche endlich additiv sei und daß die Fläche kongruenter Polygonen gleich sei⁶⁹. Er rechtfertigte seine Verwendung einer Axiomatik in so einem elementaren Thema mit dem Argument, diese Vorgehensweise besitze den Vorteil einer übersichtlichen Darstellung, und darüber hinaus ließe sich auf diese Weise die Einbeziehung eines Limesverfahrens im Flächenbegriff vermeiden⁷⁰. An Hadamards Konzept der Polygonfläche schloß Lebesgue in seiner Dissertation an⁷¹.

In seiner Monographie *Leçons sur la théorie des fonctions* von 1898 beschrieb Borel seine Vorgehensweise bei der Einführung des Maßbegriffs folgenderweise: „définir les éléments nouveaux qu'on introduit, à l'aide de leurs propriétés essen-

⁶³Vgl. [Tay82]. Auch Koetsier erwähnte es kurz in [KM99].

⁶⁴Vgl. [Haw70], 103. Die Monographie von Borel und Drach ist [BD95].

⁶⁵Vgl. [Gra84] 153. Im Vorfeld seiner Darstellung der Galois-Theorie behandelte Drach unter anderem Gruppen- und Körpertheorie, vgl. [Gra84], 152.

⁶⁶Vgl. [Haw70], 103.

⁶⁷Drachs Dissertation erschien in [Dra98].

⁶⁸Vgl. [Haw70], 103.

⁶⁹Bei Hadamard: „Définir les aires des polygones plans, c'est faire correspondre à chaque polygone plan une grandeur (dite surface ou aire du polygone) possédant les propriétés suivantes. I. Deux polygones égaux ont la même aire, quelles que soient leurs situations dans l'espace. II. Le polygone P'' , somme de deux polygones adjacents P , P' , a pour aire la somme des aires P et P' .“, [Had47], 238.

⁷⁰Vgl. [Gra84], 153.

⁷¹Vgl. [Leb02], 14-15.

tielles, c'est-à-dire de celles qui sont strictement indispensables pour les raisonnements qui doivent suivre“. Anhand der wesentlichen und unbedingt notwendigen Eigenschaften, die zur Lösung eines Problems benötigt werden, werden die neu einzuführenden Elemente definiert, und zwar so, daß jene Eigenschaften postuliert werden: „nous avons posé *a priori* ces propriétés“. Eine solche Vorgehensweise hatte für Borel einen Zweck. Im Fall seiner Definition des Maßbegriffs dienten die Postulate dazu, die meßbaren Mengen zu definieren: „ce sont elles qui nous ont servi à définir la classe d'ensembles que nous regardons comme mesurables“⁷².

So ähnlich verstand Lebesgue in seinen *Leçons sur l'intégration et la recherche des fonctions primitives* von 1904 jene Definitionen, die er *descriptives* nannte: „dans ces définitions, on énonce des propriétés caractéristiques de l'être que l'on veut définir“⁷³. Lebesgue hatte bereits 1902 in seiner Dissertation das Integral und den Maßbegriff mittels deskriptiver Definitionen eingeführt⁷⁴.

Bei der Verwendung deskriptiver Definitionen ging es Borel und Lebesgue also um die Einführung neuer mathematischer Objekte, deren Charakterisierung nach Drachs Methode durch die *apriori* Zuschreibung gewisser wesentlicher Eigenschaften erfolge. Die Funktion, die sowohl Borel als auch Lebesgue den deskriptiven Definitionen zuschrieben, ist vergleichbar mit dem Zweck des architektonischen Modells eines noch zu konstruierenden Hauses: zu charakterisieren, was man haben will.

Im Vergleich mit Borels und Lebesgues Verwendung deskriptiver Definitionen betrachtete Fréchet seine eigene Vorgehensweise als abstrakter und allgemeiner. Als Vorbild für seinen axiomatischen Zugang in seiner Dissertation erwähnte Fréchet die Monographie von de Séguier *Éléments de la théorie des groupes abstraits*⁷⁵. De Séguier entwickelte aus damaligen Gruppenbegriffen ein abstraktes Konzept der Gruppe, mit dessen Hilfe er dann eine Gesamtdarstellung der Gruppentheorie zu liefern versuchte. Der Übergang von seiner abstrakten Gruppentheorie zu Resultaten für spezifische Gruppen, etwa für Permutationsgruppen, gelang ihm durch Spezialisierung theoretischer Sätze. Folgende Passage beleuchtet das Interesse von de Séguier an einem abstrakten Zugang:

Des divers groupes particuliers rencontrés en Algèbre, en Analyse et en Géométrie devait nécessairement se dégager l'idée du groupe abstrait, c'est-à-dire du groupe considéré en lui-même indépendamment de la nature de ses éléments. Beaucoup de recherches déjà faites dans divers domaines vinrent dès lors se fondre en une théorie plus générale qui depuis n'a cessé de se développer.⁷⁶

⁷²Vgl. [Bor28], 48 und hier Abschnitt 3.2.3, 71.

⁷³Vgl. [Leb28], 107. Beachte Fußnote 58.

⁷⁴Vgl. Abschnitt 3.2.5.

⁷⁵De Séguiers Monographie ist [De 04]. Vgl. [Fré06], 5.

⁷⁶[De 04], 1. Von Wußing so zitiert in [Wuß69], 189.

Von einer solchen Vorgehensweise erwartete de Séguier also, vorhandene Resultate, die sich alle auf spezifische Gruppen bezogen, in einer einzigen allgemeinen Theorie zusammenzufassen. Dabei stellte sich ein Umgang mit den bekannten Gruppen auf abstraktem Niveau als wesentlich, ja sogar als unvermeidlich heraus. Fréchet zeigte für die Entwicklung solch allgemeiner Theorien ein reges Interesse.

Fréchet lehnte sich in seiner Dissertation 1906 an die Vorgehensweise der abstrakten Gruppentheorie von de Séguier an, in der von der Natur der Elemente abstrahiert wird, um aus verschiedenen Bewegungs-, Transformations- und Substitutionsgruppen allgemein gültige Bedingungen zu entwickeln, mit deren Hilfe eine allgemeine Definition der Gruppenverknüpfung formuliert wird⁷⁷. Eine solche allgemeine Definition ähnelt einer deskriptiven Definition, sofern beide anhand von Postulaten gebildet werden. In Fréchets Augen lag ein wichtiger Unterschied zwischen den allgemeinen Definitionen der abstrakten Gruppentheorie und den deskriptiven Definitionen von Borel und Lebesgue darin, daß die ersten eher Klassen von Objekten charakterisierten, während mit den zweiten eine eindeutige Charakterisierung des definierten Objektes angestrebt wurde. Grund dafür ist nicht zuletzt die Tatsache, daß de Séguier und Fréchet in ihren allgemeinen Definitionen abstrakte Mengen zugrunde legten, während Borels und Lebesgues Definitionen sich auf die Menge der reellen Zahlen oder Teilmengen davon bezogen. Ich werde Fréchets Definitionen ‚abstrakte Definitionen‘ nennen, um sie von Borels und Lebesgues Verständnis der deskriptiven Definitionen zu unterscheiden. In diesem Sinne formulierte Fréchet in seiner Dissertation seine Konzepte der L-, V- und E-Klassen⁷⁸.

Der Umgang mit deskriptiven bzw. abstrakten Definitionen erfüllte eine bestimmte Funktion in den Arbeiten von Borel, Lebesgue und Fréchet. Gerade im Hinblick auf ihre Funktion lassen sich die axiomatischen Stile von Borel und Lebesgue, Fréchet und Hilbert am besten differenzieren. Borel führte ein neues mathematisches Objekt durch eine deskriptive Definition nur deshalb ein, weil dieses sich für die Behandlung eines bestimmten Problems als nützlich erwies. Aus diesem Grund ging es Borel nicht einfach darum, beliebige Eigenschaften unter einem Begriff zu fassen, ganz im Gegenteil: Ausgehend von einem bestimmten Problem, wählte er jene Eigenschaften, mit denen das neue mathematische Objekt charakterisiert werden sollte, als diejenigen aus, die sich für die Behandlung jenes Problems als unbedingt notwendig herausstellten. Das Problem oder die Probleme, in deren Kontext die deskriptiven Definitionen von Borel und Lebesgue entstanden, lieferten diejenigen Eigenschaften, die die neu einzuführenden mathematischen Objekte besitzen mußten. Die deskriptiven Definitionen halfen

⁷⁷Vgl. [Fré06], 5.

⁷⁸Vgl. Borels Definition des Maßbegriffs in [Bor28], 48; Lebesgues Definitionen des Integrals und des Maßbegriffes in [Leb02], 6 und 16, sowie in [Leb04], 105 und 110; Fréchets Definitionen der L-, V- und E-Klassen in [Fré06], 6, 18 und 30. Diese können zum Teil in den Abschnitten 3.2.3 und 3.2.6 nachgelesen werden.

ihnen, die zu behandelnden Probleme einzugrenzen.

Dies ist besonders deutlich bei Lebesgue, der in seinen *Leçons sur l'intégration et la recherche des fonctions primitives* die deskriptive Definition des Integrals und die des Maßes mit den Namen „Problem der Integration“ und „Problem des Maßes“ präsentierte⁷⁹. In diesem Zusammenhang machte Lebesgue folgende Bemerkung, mit der er die Verwendung deskriptiver Definitionen von Hilberts Axiomatik unterschied:

L'emploi de ces définitions descriptives est indispensable pour les premiers termes d'une science quand on veut construire cette science d'une façon purement logique et abstraite. Voir la Thèse de M. J. Drach (*Annales de l'École Normale*, 1898) et le Mémoire de M. Hilbert sur les fondements de la Géométrie (*Annales de l'École Normale*, 1900). La définition est dite alors axiomatique, parce qu'elle énumère les axiomes nécessaires. Elle se suffit ainsi à elle-même et forme un tout complet. Au contraire, les définitions descriptives posées au cours du développement d'une théorie, la définition de l'intégrale par exemple, ne prétendent pas énumérer tous les axiomes sur lesquels elles s'appuient; elles ne forment pas un tout complet et ne sauraient être isolées de l'exposé du reste de la théorie.⁸⁰

Wie Lebesgue richtig bemerkte, benutzte Hilbert axiomatische Definitionen im Zusammenhang mit der Grundlegung einer Wissenschaft, in dem hier erwähnten Fall der Grundlegung der Geometrie. Bei Hilbert diente das Axiomensystem zum logischen und abstrakten Aufbau der Geometrie, und es bildete sogar ein vollständiges System in dem Sinne, daß alle geometrischen Sätze aus dem Axiomensystem logisch abzuleiten waren. Dagegen wird mit denjenigen deskriptiven Definitionen, die im Aufbauprozess einer Theorie eingeführt werden, nicht beabsichtigt, ein vollständiges Axiomensystem in dem oben erklärten Sinne anzugeben.

Für Borel und Lebesgue war aber mit der Charakterisierung eines mathematischen Objekts mittels einer deskriptiven Definition nur die Hälfte der Arbeit getan. Der zweite Schritt bestand darin, eine „konstruktive Definition“ desselben Objektes zu liefern. Lebesgue erklärte: „Dans les définitions constructives, on énonce quelles opérations il faut faire pour obtenir l'être que l'on veut définir“⁸¹. Die genaue Angabe der notwendigen Schritte durch eine konstruktive Definition, um das gesuchte Objekt (einen Funktionenwert, eine Menge) zu gewinnen, war ein entscheidender Faktor in Borels und Lebesgues Theorien. Zum einen lieferten die-

⁷⁹Vgl. [Bor28], 48 und [Leb28], 107 und hier die Abschnitte 3.2.3, 71, und 3.2.5.

⁸⁰[Leb28], 106-107.

⁸¹Um die Unterschiede zu verdeutlichen, erwähnte er das Riemannsches Integral als Beispiel einer konstruktiven Definition und das Konzept der Stammfunktion als Beispiel einer deskriptiven Definition. Vgl. [Leb28], 107. Beachte Fußnote 58.

se Definitionen konkrete Lösungen zu den Problemen, die durch die deskriptiven Definitionen eingegrenzt wurden. Zum anderen legitimierten die konstruktiven Definitionen die Rede von der Existenz des mathematischen Objekts⁸².

Baire, Borel und Lebesgue wurden später auf Grund ihrer konstruktiven Ideen über die Grundlagen der Mathematik von einigen Autoren Semi-Intuitionisten und Konstruktivisten genannt⁸³. Es muß aber bemerkt werden, daß keiner von ihnen jemals eine in sich abgeschlossene Philosophie der Mathematik formulierte. Ihre kollektive Bezeichnung als Semi-Intuitionisten geht auf eher knappe Erläuterungen und Kommentare in ihren diversen Arbeiten zurück. In einem Versuch, die Bezeichnung ‚französische Semi-Intuitionisten‘ durch Feststellung einer Beziehung zwischen ihren Ideen und Brouwers Intuitionismus zu rechtfertigen, faßte Dennis E. Hesselring zunächst Ansichten von Borel, Baire und Lebesgue zur Mathematik, Logik und Existenz in der Mathematik zusammen⁸⁴.

Die philosophischen Ansichten über die Bedeutung von ‚Existenz‘ in der Mathematik von Borel, Lebesgue und auch Baire fanden einen klaren offensiven Ausdruck im Rahmen der Diskussion um Zermelos Auswahlaxiom von 1904⁸⁵. In Frankreich führte Zermelos Auswahlaxiom zu einer Diskussion per Brief zwischen Baire, Borel, Lebesgue und Hadamard, die unter den Titel „Cinq lettres sur la théorie des ensembles“ publiziert wurde⁸⁶. Nur Hadamard verteidigte das Zermelosche Axiom. Borel, Baire und Lebesgue dagegen lehnten es ab⁸⁷. Im Kern ihrer Kritik stand die reelle Möglichkeit der Ausführung der im Axiom postulierten Auswahl unendlich vieler Elemente. Kann die Auswahl nicht durchgeführt werden, kann also die Menge, die aus den ausgewählten Elementen besteht, nicht existieren. In diesem Sinne war das eigentliche Thema dieser fünf Briefe die Bedeutung von ‚Existenz‘ in der Mathematik⁸⁸.

Für Fréchet lag das Interesse an der Bildung abstrakter Definitionen darin, daß diese den Aufbau verallgemeinerter Theorien ermöglichten. Sehr nah an den Argumenten von de Séguier erklärte Fréchet in seiner Dissertation seine Erwartungen an einen abstrakten axiomatischen Zugang: Bei der Beweisführung werden jene Wiederholungen im deduktiven Gedankengang vermieden, die stattfinden würden, wenn dasselbe Resultat für jedes spezifische mathematische Objekt, das

⁸²Zu Borels und Lebesgues Ansichten zur ‚Existenz‘ in der Mathematik vor 1905 vgl. [Gis95], 60ff. Gray präsentiert in seiner historischen Untersuchung über sogenannte „synthetische“ und „analytische“ Funktionsbegriffe Borel und Lebesgue als Befürworter von analytischen Funktionsbegriffen. Als solche versteht Gray Funktionen, die explizit angegeben werden können, sei es durch eine Formel oder durch ein konstruktives Verfahren, [Gra84], 151.

⁸³Vgl. [Moo82], 92ff und [Hes03], 8.

⁸⁴Vgl. [Hes03], 8-18.

⁸⁵Zu Zermelos Auswahlaxiom s. Abschnitt 4.2.1.

⁸⁶Vgl. [Bai05a], [Moo82], 92ff, [Gra84], 151.

⁸⁷Sie haben es aber auch benutzt, manchmal implizit, vor allem in früheren Arbeiten, ‚anchmal explizit, wobei sie dann eine Rechtfertigung hinzufügten, vgl. [Moo82], 64-70.

⁸⁸Darauf haben Hadamard und Lebesgue selbst hingewiesen, vgl. [Bai05a], 265.

die abstrakte Definition erfüllt, durchgeführt wird. Darüber hinaus lassen sich durch Abstraktion wesentliche Beweiselemente erkennen, mit deren Hilfe entsprechende wesentliche Eigenschaften in den abstrakten Definitionen erkennbar werden. Die abstrakten Definitionen können dann einen vereinfachten Ausdruck erhalten, indem alle weiteren überflüssigen Anforderungen entfernt werden. In diesem Sinne entwickelte Fréchet abstrakte Definitionen mit der Absicht, eine abstrakte Punktmengenlehre und sein „Calcul fonctionnel“ als eine verallgemeinerte Funktionentheorie aufzubauen⁸⁹.

3.2.3 Borels Maßtheorie

Émile Borel wurde am 7. Januar 1871 in Aveyron (Frankreich) geboren. 1889 nahm er sein Studium an der *École Normale Supérieure* auf. 1894 promovierte er mit der Dissertation „Sur quelques points de la théorie des fonctions“. Schon in dieser Arbeit entwickelte Borel erste Elemente einer Maßtheorie⁹⁰. Maßtheoretische Resultate dienten hier zunächst als Werkzeuge für die Behandlung des Problems der analytischen Fortsetzung komplexer Reihen der Form:

$$(3.1) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_n}{(z - a_n)^{m_n}}, \quad z, A_n, a_n \in \mathbb{C}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} |A_n| < \infty,$$

wobei die Zahlen $m_n \in \mathbb{Z}$ nach oben beschränkt sind, und die abgeschlossene Hülle der Singularitätenmenge $\{a_n\}$ höchstens Kurven und isolierte Punkte bildet. Borel zeigte, daß unter bestimmten Bedingungen die analytische Fortsetzung über die Menge dicht liegender Singularitäten hinaus möglich ist⁹¹.

Mit diesen Untersuchungen schloß sich Borel an Hermites analytische Tradition an, denn Borel griff damit ein von Weierstraß 1880 gestelltes Problem auf, mit dem sich Hermites Schüler Appell und Poincaré in den frühen 1880er Jahren befaßt hatten⁹². Weierstraß hatte damals auf das besondere Verhalten einer konkreten komplexen Reihe hingewiesen. Zwei Jahre später lieferte Appell weitere Beispiele von Reihen, die sich ähnlich verhielten, und 1883 entwickelte Poincaré eine allgemeine Methode, mit deren Hilfe solche komplexen Reihen erzeugt werden können. Borel untersuchte in seiner Dissertation Poincarés Reihen mit den in der Formel 3.1 angegebenen Einschränkungen⁹³.

⁸⁹Vgl. [Fré06], 5.

⁹⁰Borels Dissertation ist [Bor95]. In dieser Darstellung stütze ich mich auf Hawkins' Geschichte der Lebesgueschen Integrationstheorie [Haw70] sowie auf Hochkirchens geschichtliche Darstellung der Maß- und Integrationstheorie von Riemann bis Lebesgue [Hoc99].

⁹¹Vgl. [Haw70], 99.

⁹²Um diese Zeit arbeiteten Appell und Poincaré auch unter Hermites Leitung an der Übersetzung von Cantorschen Arbeiten mit, s. Abschnitte 3.1.2 und 3.2.1.

⁹³Zu Poincarés Resultaten und deren Beziehung zu Borels Dissertation vgl. [Haw70], 97ff. Borel verwies in seiner Dissertation auf die Untersuchungen von Appell und Poincaré, vgl. [Bor72], Band 1, 239ff. Zu Borels Dissertation vgl. auch [Gis95], 53ff.

Wenn auch Borels Dissertation hinsichtlich der Problemstellung in Hermites analytischer Tradition wurzelte, barg sie in dem fruchtbaren mengen- und maßtheoretischen Methodenansatz auch Kennzeichen der modernen Analysis, denn Borel studierte die Punktmenge, auf der die Reihe absolut und gleichmäßig konvergiert, hinsichtlich sowohl ihres Maßes als auch weiterer mengentheoretischer Eigenschaften. Zwei wichtige Resultate im Bereich der Mengenlehre und der Maßtheorie gingen aus diesen Untersuchungen hervor: Zum einen kristallisierten sich Eigenschaften von Mengen heraus, mit denen Borel später seinen Begriff der Nullmenge (Menge mit Borel-Maß Null) charakterisierte, zum anderen formulierte er seine Version des heute sogenannten Heine-Borel-Satzes⁹⁴.

Borel zeigte in seiner Dissertation, daß eine dichte, abzählbare Teilmenge von \mathbb{R} durch abzählbar viele Intervalle überdeckt werden kann, deren Gesamtlänge beliebig klein ist. Modern ausgedrückt heißt das, daß das Borel-Maß einer solchen Teilmenge Null ist. Dieses Resultat führte ihn zu seinem Begriff der Nullmenge, den er erst 1898 unter dieser Bezeichnung definierte⁹⁵. In seiner „Notice sur les Travaux Scientifiques de M. Émile Borel“ von 1912 schrieb er zu seiner Maßtheorie: „Un rôle essentiel est joué dans une telle étude par la notion d’ensemble de mesure nulle, que j’ai introduite pour la première fois d’une manière implicite en 1894“⁹⁶.

Die Borelsche Version des Satzes von ‚Heine-Borel‘ erschien am Ende seiner Dissertation in einer ergänzenden Bemerkung⁹⁷. Für ihn handelte es sich zunächst um einen Lehrsatz, den er für ein zentrales Resultat seiner Dissertation gebraucht hatte. Borels Lehrsatz besagte:

Satz 3.1 (Borels ‚Heine-Borel‘)

„Si l’on a sur une droite une infinité d’intervalles partiels, tels que tout point de la droite soit intérieur à l’un au moins des intervalles, on peut déterminer effectivement un NOMBRE LIMITÉ d’intervalles choisis parmi les intervalles donnés et ayant la même propriété (tout point de la droite est intérieur à au moins l’un d’eux).“⁹⁸

Borels Verwendung des Wortes „droite“ ist hier irreführend, denn er meinte damit nicht eine gerade unbegrenzte Linie, sondern eine begrenzte Linie einschließlich ihrer Endpunkte. Das geht aus seinem Beweis hervor. Ebenfalls aufgrund seines Beweises ist festzustellen, daß er nur abzählbar unendlich viele Subintervalle betrachtete. Offenbar waren ihm diese Begriffe angesichts der Konstruktion, die er sich für den Beweis ausdachte, so selbstverständlich, daß er es nicht für notwendig hielt, sie zu spezifizieren. Anders ging es ihm mit der Idee des „point

⁹⁴Vgl. [Haw70], 101.

⁹⁵Nach Borels eigenen Angaben, vgl. [Haw70], 101.

⁹⁶[Bor72], Band I, 119ff. Die im Zitat gemeinte Arbeit ist [Bor72], Band I, 121ff.

⁹⁷Borels Dissertation auch in [Bor72], Band I, 239ff.

⁹⁸[Bor72], 281.

intérieur“, die er im Kontext des Satzes 3.1 ausdrücklich erläuterte: Unter einem inneren Punkt sei ein Punkt des Intervalles, jedoch keiner seiner Endpunkte zu verstehen. Ferner ist hier dem Kontext zu entnehmen, daß Borel seinen Lehrsatz nur für Teilmengen der reellen Zahlen bzw. für Segmente von in der komplexen Ebene eingebetteten geraden Linien formulierte⁹⁹.

Borels Einschränkung auf die Betrachtung abzählbar unendlich vieler Intervalle dürfte im Zusammenhang mit seiner Auffassung der Mathematik stehen, aufgrund derer er ‚nicht-konstruktive Methoden‘ ablehnte und folglich dem abzählbaren Unendlich eine privilegierte Rolle erteilte. Eine gewisse Skepsis gegenüber Cantors Theorie der transfiniten Zahlen hing mit Borels konstruktiven Ansichten zur Mathematik zusammen¹⁰⁰.

Jedenfalls war Borels Formulierung des Satzes 3.1 für seine Bedürfnisse ausreichend, denn bei dem Problem in seiner Dissertation, zu dessen Lösung er seinen Satz entwickelt hatte, handelte es sich um eine geometrische Konstruktion mit nur abzählbar vielen Intervallen¹⁰¹. Entwarf Borel seine Version des „Heine-Borel-Satzes“ als Werkzeug für diesen Beweisschritt, so war die Betrachtung beliebig vieler Intervalle zunächst überflüssig. Für Lebesgue und Friedrich Riesz dürfte es anders ausgesehen haben, denn sie sorgten für die Aufhebung dieser Einschränkung¹⁰². Riesz bemühte sich zwischen 1905 und 1906 um Verallgemeinerungen der Borelschen Fassung des ‚Heine-Borel Satzes‘ in drei verschiedenen Arbeiten: „Sur un théorème de M. Borel“, „Über mehrfache Ordnungstypen. I.“ und „Die Genesis des Raumbegriffs“¹⁰³. In der ersten ging es ihm in erster Linie um die Aufhebung der Einschränkung der Abzählbarkeit der Intervallmenge, in der zweiten schlug er Verallgemeinerungen des Borelschen Satzes auf Teilmengen geordneter abstrakter Mengen vor, in der dritten bewies er eine Version des Borelschen Satzes für Teilmengen seines konstruktiven Raumbegriffs. Das wird in Abschnitt 7.2 näher erörtert.

⁹⁹Vgl. [Haw70], 101, und [Bor72], 281ff.

¹⁰⁰S. Abschnitt 3.2.1. Gispert verweist auf weitere umfassende Studien zum Thema: Borels, Lebesgues und Baires Stellungnahme in der Zeit zwischen 1905 und 1907 gegenüber Zermelos Auswahlaxiom und dessen Zusammenhang zu den metamathematischen Begriffen der ‚Definition, Existenz und Konstruktion mathematischer Objekte‘, [Gis95], 60ff. Vgl. auch [Hoc99], 361 und [Moo82]. Dugac illustriert Borels Haltung in [Dug76], 320 und 323. Zu Borels Konstruktivismus äußerte sich Maurice Fréchet in „La vie et l’œuvre d’Émile Borel“, abgedruckt in [Bor72], Band I, 5ff.

¹⁰¹Vgl. Borels Beweis in [Bor72], 255ff. und in [Haw70], 100-101.

¹⁰²Jean-Paul Pier verweist auf diese Verallgemeinerungen sowie auf Borels Besprechung derselben in seiner Arbeit „Historique de la notion de compacité“. Hier präsentiert Pier die Entwicklungen der Sätze von ‚Bolzano-Weierstraß‘ und ‚Borel-Lebesgue‘ (letzter ist eine andere Bezeichnung für Lebesgues Verallgemeinerung des Satzes 3.1, die jedoch immer noch von vielen Mathematikern als ‚Satz von Heine-Borel‘ bezeichnet wird) im Zusammenhang mit dem Begriff der kompakten Mengen mit dem Argument, daß die von diesen Sätzen erfaßten Eigenschaften einer Menge die Grundlage für die Entwicklung des Begriffes einer kompakten Menge bildeten, vgl. [Pie80].

¹⁰³Diese Rieszschen Arbeiten sind [Rie05c], [Rie05d] und [Rie07b].

In seinem Bericht zur Entwicklung der Mengenlehre brachte Arthur Schoenflies 1900 Heines und Borels Sätze in Verbindung¹⁰⁴. Dort kündigte Schoenflies Borels Satz 3.1 mit der Bemerkung an, daß dieser „einen bekannten Satz von Heine erweitert“¹⁰⁵. Aber in der Version von Heine ging es nicht um Überdeckungen des Intervalls. Heinrich Heine hatte 1872 gezeigt, daß eine stetige reelle Funktion auf einem Intervall $[a, b]$ (d.h. modern ausgedrückt, auf einem beschränkten und abgeschlossenen Intervall) gleichmäßig stetig sei¹⁰⁶. Auch andere Autoren hatten schon vor Borel die in Satz 3.1 ausgedrückten Eigenschaft eines beschränkten und abgeschlossenen Intervalls indirekt bewiesen, etwa, wie Heine, im Zusammenhang mit der gleichmäßigen Stetigkeit einer stetigen Funktion oder, wie Weierstraß, in Verbindung mit der gleichmäßigen Konvergenz einer komplexen Reihe¹⁰⁷.

Nach dem Erscheinen von Schoenflies' Bericht lieferten weitere Mathematiker andere Varianten und Verallgemeinerungen des Borelschen Überdeckungssatzes. 1907 wies Schoenflies noch einmal nachdrücklich auf die intime Beziehung zwischen den Sätzen von Borel und Heine hin und brachte in Erinnerung, daß er derjenige gewesen war, der zum ersten Mal auf diese Beziehung aufmerksam gemacht hatte¹⁰⁸. Schoenflies' Bezeichnung des Borelschen Satzes als ‚Satz von Heine-Borel‘ löste hinter den Kulissen eine intensive Diskussion zwischen Borel, Lebesgue und dem jungen französischen Analytiker Paul Montel aus. Aus ihrer Korrespondenz geht hervor, daß sie mit Schoenflies' Bezeichnung grundsätzlich nicht einverstanden waren. Sie bevorzugten und pflegten den Name ‚Satz von Borel-Lebesgue‘, allein weil es sich beim Satz von Heine nicht um einen Überdeckungssatz handelte¹⁰⁹.

Zurück zu Borels Maßtheorie: Erste Ansätze präsentierte Borel 1898 in seiner Monographie *Leçons sur la théorie des fonctions*, welche als Ausarbeitung einer an der *École Normale Supérieure* im akademischen Jahr 1896/97 gehaltenen Vorlesung entstand¹¹⁰. Aufgegliedert in zwei Teile behandelte Borel im ersten Teil

¹⁰⁴Kenneth O. May behauptete in seiner Borel Biographie für das „Dictionary of Scientific Biography“, Schoenflies habe diesen Satz falsch benannt.

¹⁰⁵In Schoenflies' Bericht erschien der Borelsche ‚Heine-Borel‘ Satz im Teil „Allgemeine Theorie der unendlichen Mengen“, im Kapitel 7 „Die höheren Zahlklassen“: „Giebt es auf einer Geraden eine unendliche Reihe von Intervallen δ , so daß jeder Punkt des Intervalls $a \dots b$ innerer Punkt mindestens eines Intervalles δ ist, so giebt es auch stets eine endliche Teilmenge solcher Intervalle“, [Sch00], 51. Aus Schoenflies' Beweis geht hervor, daß er genauso wie Borel nur abzählbaren unendlichen Reihe von Intervallen betrachtete.

¹⁰⁶Vgl. [Dug89], 94.

¹⁰⁷Vgl. [Dug89], 91ff. Dugac diskutiert verschiedene frühere Versionen des ‚Heine-Borel-Satzes‘, sowie wo und wie deren Autoren die darin ausgedrückten Eigenschaften verwendeten, ggf. auch ohne Beweis. Unter diesen ‚frühen Autoren‘ zitiert Dugac Dirichlet, Weierstraß, Pincherle und Thomae. Vgl. auch [P⁺02] 681, wo die Autoren auf andere Quellen verweisen.

¹⁰⁸Vgl. [Dug89], 98ff.

¹⁰⁹S. Fußnote 102. Zur Korrespondenz zwischen Borel, Lebesgue und Montel um Schoenflies' Bezeichnung vgl. [Dug89], 104ff. Zu weiteren Verallgemeinerungen des Borelschen Satzes vgl. auch [Pie80].

¹¹⁰Diese erschien als erster Band der von ihm ins Leben gerufenen *Collection de monographies*

sowohl Grundelemente der Mengenlehre als auch seine Maßtheorie. Diese Inhalte bildeten eine knappe Darstellung der Werkzeuge, die Borel dann im zweiten, dem Hauptteil seiner *Leçons* auf die Funktionentheorie anwendete¹¹¹.

Borel wählte eine Darstellung bei der Einführung seines Maßbegriffs, die sowohl seinen Umgang mit der axiomatischen Methode als auch seine konstruktiven Einsichten zur Mathematik veranschaulichte: Er führte neben einem abstrakten auch einen konkreten Maßbegriff ein. Für den abstrakten Maßbegriff verwendete er eine ‚deskriptive Definition‘, d.h. er gab die allgemeinen, ‚wesentlichen‘ Bedingungen an, die eine nützliche Maßfunktion erfüllen muß¹¹². Anhand der deskriptiven Definition der Maßfunktion bestimmte er durch ein konstruktives Verfahren die meßbaren Teilmengen vom Intervall $[0, 1]$. Damit lieferte er für diese Teilmengen einen konkreten Maßbegriff¹¹³. Zu seiner axiomatischen Vorgehensweise erklärte Borel:

Le procédé que nous avons employé revient en réalité à ceci: nous avons reconnu qu’une définition de la mesure ne pouvait être utile que si elle avait certaines propriétés fondamentales: nous avons posé *a priori* ces propriétés et ce sont elles qui nous ont servi à définir la classe d’ensembles que nous regardons comme mesurables. Cette manière de procéder présente des grandes analogies avec les méthodes introduites par M. J. Drach, en Algèbre et dans la théorie des équations différentielles [voir, par exemple, l’Ouvrage cité (p. 23) et Comptes Rendus, janvier 1895]. Dans tout les cas, elle procède à la même idée fondamentale: définir les éléments nouveaux qu’on introduit, à l’aide de leurs propriétés *essentiels*, c’est-à-dire de celles qui sont strictement indispensables pour les raisonnements qui doivent suivre.¹¹⁴

Borel zufolge sind also als erstes die unbedingt notwendigen Eigenschaften festzulegen, die das neu zu definierende mathematische Objekt im Hinblick auf seinen Anwendungsbereich besitzen muß. Diese Eigenschaften werden dann *a priori* in der Definition des in Frage stehenden mathematischen Objektes eingeführt, oder anders gesagt, sie werden postuliert. Es handelt sich also um eine Verwendung axiomatischer Definitionen als Hilfsmittel für die Lösung eines Problems mittels der klassischen analytischen Methode. Dabei geht man von dem Gesuchten aus und versucht dann rückwärts die Lösung zu rekonstruieren.

Im Fall von Borels Maßbegriff war der Anwendungsbereich die Funktionen-

sur la théorie des fonctions. Zur Bedeutung dieser Sammlung s. Abschnitt 3.1.3. Vgl. auch [Hoc99], 359ff.

¹¹¹Zu Borels *Leçons* vgl. [Gis95], 53ff. Vgl. auch [Haw70], 97ff. und [Hoc99], 359ff.

¹¹²Zu Axiomatik bei den französischen Analytikern und zu den ‚deskriptiven‘ und den ‚konstruktiven‘ Definitionen s. Abschnitt 3.2.2.

¹¹³Vgl. [Hoc99], 361.

¹¹⁴[Bor28], 48.

theorie¹¹⁵. Zu Beginn dieses Abschnittes wurde bereits diskutiert, mit welchem Problem der Funktionentheorie sich Borel in seiner Dissertation beschäftigte. Dies war die Menge der Divergenzpunkte gewisser Reihen, wobei jene Menge die Eigenschaft besaß, durch abzählbar viele Intervalle überdeckt werden zu können, deren Gesamtlänge beliebig klein war, d.h. in moderner Terminologie, sie besaß das Borel-Maß Null¹¹⁶. Die Betrachtung abzählbar unendlich vieler überdeckender Intervalle, sowie die abzählbar unendliche Additivität des Maßes waren deshalb für Borel solche ‚wesentlichen‘ Eigenschaften, die beim Aufbau eines brauchbaren Maßbegriffes vorhanden sein mußten. Borel faßte diese Eigenschaften des Maßes folgendermaßen zusammen:

Definition 3.1 (deskriptive Definition des Maßes)

„Ces propriétés essentielles, que nous résumons ici parce qu’elles nous seront utiles, sont les suivantes: La mesure de la somme d’une infinité dénombrable d’ensembles est égale à la somme de leurs mesures; la somme [‚la mesure‘, LR .] de la différence de deux ensembles est égale à la différence de leurs mesures (2); la mesure n’est jamais négative; tout ensemble dont la mesure n’est pas nulle n’est pas dénombrable.“¹¹⁷

In der Fußnote „(2)“ bemerkte Borel, die Bezeichnung „somme de plusieurs ensembles“ setze voraus, daß die Mengen paarweise disjunkt seien; und die Bezeichnung „différence de deux ensembles“, daß eine der Mengen die andere enthalte¹¹⁸.

Wohlbemerkt sind in der Definition 3.1 nur allgemeine Eigenschaften des Maßes erfaßt, deren Gültigkeit für sogenannte meßbaren Menge verlangt wird. Welche diese Mengen sind, wird in Borels Rückverweis angedeutet: „Il est d’ailleurs expressément entendu que nous ne parlerons de mesure qu’à propos des ensembles que nous avons appelés *mesurables*.“¹¹⁹ Als meßbare Mengen betrachtete Borel jene Teilmengen des Intervalls $[0, 1]$, denen nach einem gewissen konstruktiven Verfahren ein Maß zugeordnet werden kann, das die in Definition 3.1 genannten Eigenschaften erfüllt. D.h. die meßbaren Mengen werden bis zu einem gewissen Grade durch die Maßfunktion bestimmt. Der Verdacht, daß eine Zirkularität in Borels Argumentation vorliegt, läßt sich beseitigen, wenn man Borels gleichzeitige Konstruktion der meßbaren Teilmengen des Intervalls $[0, 1]$ und deren Maße analysiert: Zunächst legte Borel das Maß eines Subintervalls des Intervalls $[0, 1]$ als seine Gesamtlänge fest, dann schrieb er:

¹¹⁵Im Gegensatz zu Jordan und Lebesgue ging es ihm nicht um die Integrationstheorie, s. Abschnitt 3.2.5.

¹¹⁶Vgl. [Haw70], 102.

¹¹⁷[Bor28], 48.

¹¹⁸Borel verstand die Differenz von zwei Mengen als die Menge der Elemente aus A , die in B nicht enthalten sind, vgl. [Bor28], 47.

¹¹⁹[Bor28], 48.

Definition 3.2 (konstruktive Definition des Maßes)

„Lorsqu'un ensemble sera formé de tous les points compris dans une infinité dénombrable d'intervalles n'empiétant pas les uns sur les autres et ayant une longueur totale s , nous dirons que l'ensemble a pour mesure s . Lorsque deux ensembles n'ont pas de point communs, et que leurs mesures sont s et s' , l'ensemble obtenu en les réunissant, c'est-à-dire leur somme, a pour mesure $s + s'$. [...] Plus généralement, si l'on a une infinité dénombrable d'ensembles n'ayant deux à deux aucun point commun et ayant respectivement pour mesures $s_1, s_2, \dots, s_n, \dots$, leur somme (ou ensemble formé par leur réunion) a pour mesure $s_1 + s_2 + \dots + s_n + \dots$. Tout cela est une conséquence de la définition de la mesure. Voici maintenant des définitions nouvelles: si un ensemble E a pour mesure s , et contient tous les points d'un ensemble E' dont la mesure est s' , l'ensemble $E - E'$, formé des points de E qui n'appartiennent pas à E' , sera dit avoir pour mesure $s - s'$.“¹²⁰

Diese Erläuterungen lassen sich als eine Reihe konstruktiver Anweisungen folgendermaßen interpretieren: Erstens ist für eine gegebene Teilmenge A des Intervalls $[0, 1]$ festzustellen, ob sie sich als die Vereinigung abzählbar unendlich vieler Intervalle mit Gesamtlänge s auffassen läßt. Wenn ja, dann ist das Maß der Teilmenge A gleich s zu setzen. So wird das System der im Borelschen Sinne meßbaren Teilmengen des Intervalls $[0, 1]$ (im Folgenden ‚Borelsche Mengen‘ genannt) schrittweise erweitert. Die Vereinigung zweier disjunkter, bereits im System enthaltener Borelscher Mengen C und D ergibt eine Borelsche Menge, indem das Maß $B = C \cup D$ als die Summe der Maße von C und D definiert wird. Weitere Borelsche Mengen konstruierte Borel durch Vereinigung abzählbar unendlich vieler, paarweise disjunkter Borelscher Mengen (ihr Maß definierte er als die abzählbare Summe der Maße) und durch Bildung der Differenzmenge zweier ineinander enthaltenen Mengen (ihr Maß definierte er als die Differenz der Maße)¹²¹.

Borels konstruktiver Ansatz zeigt, wie er sich die Anwendung der deskriptiven Definition des Maßes vorstellte, um gleichzeitig das Maß und die im Borelschen Sinne meßbaren Mengen konstruktiv definieren zu können. Anhand der in der Definition 3.1 allgemein gefaßten Eigenschaften des Maßes bestimmte Borel die in seinem Sinne ‚meßbaren Teilmengen‘ des Intervalles $[0, 1]$. Ihm war klar, daß

¹²⁰[Bor28], 46ff. In der Übersetzung von Hochkirchen: „Besteht eine Menge aus allen Punkten einer abzählbaren unendlichen Gesamtheit disjunkter Intervalle mit Gesamtlänge s , so sagen wir, diese Menge habe das Maß s . Haben zwei disjunkte Mengen die Maße s und s' , so hat ihre Vereinigungsmenge das Maß $s + s'$... Allgemeiner gilt: hat man abzählbar unendlich viele paarweise disjunkte Mengen mit den Maßen $s_1, s_2, \dots, s_n, \dots$, so hat ihre Vereinigung das Maß $s_1 + s_2 + \dots + s_n + \dots$. All dies ist eine Folge der Definition des Maßes. Hier sind nun einige neue Definitionen: Hat eine Menge E das Maß s und enthält sie alle Punkte einer Menge E' des Maßes s' , so hat die Menge $E - E'$ das Maß $s - s'$.“ Vgl. [Hoc99], 361.

¹²¹Hawkins und Hochkirchen weisen darauf hin, daß die Maße der so konstruierten Borelschen Mengen sich entsprechend aus den Intervalllängen bestimmen. Borels konstruktives Verfahren wird von ihnen aber kaum weiter erläutert, vgl. [Haw70], 99ff. und [Hoc99], 361.

für Teilmengen des Intervalls $[0, 1]$ das Maß auf mannigfaltige Weise bestimmt werden konnte, solange aber das Berechnungsverfahren die von ihm in seiner deskriptiven Definition angegebenen Eigenschaften nicht erfüllte, der entsprechende Maßbegriff unbrauchbar wäre. Zu seinen eben angegebenen Vorschriften zu einem konstruktiven Maßbegriff schrieb Borel:

*Les ensembles dont on peut définir la mesure en vertu des définitions précédentes seront dits par nous mesurables, sans que nous entendions impliquer par là qu'il n'est pas possible de donner une définition de la mesure d'autres ensembles; mais une telle définition nous serait inutile; elle pourrait même nous gêner, si elle ne laissait pas à la mesure les propriétés fondamentales que nous lui avons attribuées dans les définitions que nous avons données (1).*¹²²

Obwohl Borel in seinen *Leçons* noch keine durchformulierte Maßtheorie präsentierte, bildeten die deskriptiven Definition des Maßes und die Bestimmung der im Intervall $[0, 1]$ meßbaren Teilmengen doch wichtige Ansätze.

1900 gab Schoenflies in seinem Bericht zur Entwicklung der Mengenlehre den maßtheoretischen Ideen von Borel nicht die ihnen zustehende Anerkennung. Schoenflies kritisierte an die Borelsche Maßtheorie, daß die abzählbare Additivität des Maßes mittels eines Postulates in der Definition des Maßbegriffes verlangt wird. Darüber hinaus stellte Schoenflies die Anwendbarkeit der Borelschen Maßtheorie in Frage, sowohl auf Borels eigenes Anwendungsgebiet (die Theorie der analytischen Funktionen) als auch auf das klassische Anwendungsgebiet der Inhaltstheorie, die Riemannsche Integrationstheorie¹²³.

Borels Maßbegriff entsprang nicht dem Versuch einer Erweiterung derjenigen Inhaltstheorien, die Anwendungen in der Integrationstheorie vorsahen. Borel nahm keinen Bezug auf die Integrationstheorie. Als Anwendungsgebiet seiner Maßtheorie sah er die von der Integrationstheorie inhaltlich weit entfernte Theorie der analytischen Funktionen vor¹²⁴.

¹²²[Bor28], 48. Seine Fußnote „(1)“ enthält die oben zitierte Passage zu seiner Vorgehensweise. Der Text in Kursiv lautet in der Übersetzung von Hochkirchen: „Diejenigen Mengen, denen mit Hilfe der vorstehenden Definitionen ein Maß zugewiesen werden kann, nennen wir meßbar“, vgl. [Hoc99], 361.

¹²³Diese Eigenschaft des Maßes war von solcher Originalität, daß nicht jeder es zu schätzen wußte. Schoenflies ließ 1900 in seinem bereits erwähnten Bericht bei der Besprechung von Borels Anwendungen der Mengenlehre auf die Funktionentheorie Borels Maßtheorie unbehandelt. Daß Schoenflies aber mit Nachdruck bemerkte, die von Borel betrachtete Menge der Divergenzpunkte sei eine Menge der zweiten Kategorie in Baires Sinne, interpretierte Hawkins als Schoenflies' grundsätzliche Ablehnung der Idee, eine (topologisch) so ‚große‘ Menge könnte als ausdehnungslos aufgefaßt werden, vgl. [Haw70], 106ff.

¹²⁴Vgl. [Haw70], 105ff.

3.2.4 Baires moderne Theorie der reellen Funktionen

René Baire wurde am 21. Januar 1874 in Paris geboren. Er studierte in der *École Normale Supérieure* und promovierte im März 1899 mit der Dissertation „Sur les fonctions de variables réelles“¹²⁵. Diese wurde auf Einladung von Ulises Dini in der italienischen Zeitschrift *Annali di Matematica pura ed applicata* publiziert, deren Hauptherausgeber Dini damals war¹²⁶. Seiner Dissertation gingen vier Mitteilungen in den *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences* voraus, in denen er die Hauptresultate seiner Dissertation präsentierte¹²⁷. Baires bahnbrechende Beiträge zur modernen Theorie der reellen Funktionen waren in erster Linie durch folgende drei Aspekte gekennzeichnet: durch einen gewissen Perspektivenwechsel bei der Behandlung der Approximation von Funktionen durch Reihen, durch einen punktmengentheoretischen Zugang bei der Klassifikation unstetiger Funktionen und durch die zahlreichen Anwendungen der Cantorsche Mengenlehre auf die Analysis¹²⁸.

In der ersten der oben erwähnten Arbeiten „Sur la théorie générale des fonctions de variables réelles“ von 1897 behandelte Baire das Problem der reellen Funktionen mit zwei Variablen (x, y) , die in Bezug auf x und auf y stetig, jedoch in Bezug auf (x, y) unstetig sind¹²⁹. Baire versuchte, die Frage nach der Stetigkeit (bzw. Unstetigkeit) einer reellen Funktion mit zwei reellen Variablen auf die Frage nach der Stetigkeit einer reellen Funktion mit einer Variablen zurückzuführen. Das wiederum führte ihn zur Frage nach der Natur unstetiger Funktionen¹³⁰. Die Gesamtheit der unstetigen reellen Funktionen mit einer reellen Variablen bildete später in seiner Dissertation das innovative Forschungsobjekt, das er mit modernen mengentheoretischen Methoden erforschte.

Baires erste Mitteilung war außerdem Anlaß eines wissenschaftlichen Briefaustausches zwischen Baire und Volterra. Letzterer hatte sich bereits 1881 mit unstetigen Funktionen mit mehreren Variablen befaßt und war im Besitz unveröffentlichter Resultate, die zum Teil die Ergebnisse von Baire ergänzten¹³¹. Baire vertiefte seine Beziehungen zu den italienischen Analytikern, als er im Februar 1898 mit einem Stipendium für einen Forschungsaufenthalt nach Turin zu Volterra ging und von dort aus Arzelà und Pincherle in Bologna besuchte¹³². Baires wissenschaftlicher Verkehr mit diesen Mathematikern dürfte im Zusammenhang

¹²⁵Es handelt sich um [Bai99c].

¹²⁶Vgl. [Dug76], 321.

¹²⁷Vgl. [Bai99c], 3.

¹²⁸Zu Baires Arbeiten bietet Pierre Dugac eine interessante Studie in [Dug76]. Baires Entwicklungen zur Punktmengenlehre diskutiert Hélène Gispert in [Gis95].

¹²⁹Es handelt sich um [Bai97].

¹³⁰Vgl. [Dug76], 315-316.

¹³¹Vgl. [Dug76], 318.

¹³²Vgl. [Dug76], 343. Das Interesse der italienischen Analytiker für Baires Untersuchungen zeigte sich auch in der Tatsache, daß Baire seine Dissertation in einer italienischen Zeitschrift veröffentlichte und sie Volterra und Dini widmete, vgl. [Dug76], 305.

mit Hadamards und Fréchets Kontakten zu demselben italienischen mathematischen Milieu einen interessanten Beitrag zum Wissenstransfer zwischen den französischen und italienischen mathematischen Kulturen geliefert haben. Dieser ist bisher nur teilweise wissenschaftshistorisch studiert worden¹³³.

Während seines Aufenthalts in Turin verfaßte Baire seine zweite Mitteilung für die *Comptes Rendus*, „Sur les fonctions discontinues développables en séries de fonctions continues“¹³⁴. Hauptresultat war die Bestimmung aller unstetigen Funktionen, die sich bezüglich punktwiser Konvergenz durch Reihen stetiger Funktionen darstellen lassen. Mit diesen Untersuchungen distanzierte sich Baire vom klassischen Problem der Approximation von Funktionen durch Reihen, bei dem der Schwerpunkt auf der Erzeugung stetiger Grenzfunktionen lag. Seitdem festgestellt wurde, daß Cauchys Satz über die Stetigkeit der Grenzfunktion einer punktwise konvergierenden Reihe stetiger Funktionen falsch war, machten sich zahlreiche Mathematiker auf die Suche nach Bedingungen, die die Stetigkeit der Grenzfunktion gewährleisten würden¹³⁵. Der Approximationssatz von Weierstraß, demzufolge jede stetige Funktion auf einem Intervall $[a, b]$ sich durch eine gleichmäßig konvergierende Reihe von Polynomen darstellen läßt, ist ein Beispiel dieser Forschungstendenzen. Allerdings mußte Weierstraß dafür einen neuen Konvergenzbegriff entwickeln¹³⁶. Dagegen lag bei Baire der Schwerpunkt in der Erforschung der Natur aller stetigen und unstetigen Funktionen, die punktwise Grenzwerte von Reihen stetiger Funktionen sind. In dieser Arbeit bestimmte Baire notwendige Eigenschaften der Grenzfunktionen von punktwise konvergierenden Polynomenreihen; anschließend zeigte er, daß diese auch hinreichende Bedingungen sind¹³⁷.

¹³³Brigaglia diskutiert in [Bri84] den wissenschaftlichen Austausch zu Beginn des 20. Jahrhunderts im Bereich der Theorie der Lie-Gruppen, der Funktionalanalysis und der algebraischen Geometrie. Zu den italienischen Analytikern und deren Forschungskontakten zu Hadamard und Fréchet vgl. [Tay82].

¹³⁴Diese ist [Bai98a].

¹³⁵Vgl. [Dug76], 318.

¹³⁶Vgl. [Dug76], 324. Der russische Mathematiker N. Lusin beschrieb in seiner Dissertation von 1915 die Situation der Analysis folgenderweise: Vor Baire sei es eines der größten Probleme der Analysis gewesen, für eine gegebene Funktion mit einer bestimmten ‚strukturellen Eigenschaft‘ eine analytische Darstellung zu finden. Der Approximationssatz von Weierstraß sei ein Beispiel solcher Bemühungen. Dagegen sei Baire nicht von Eigenschaften der darzustellenden Funktion ausgegangen, sondern von einer bestimmten Klasse analytischer Ausdrücke (in diesem Fall Reihen stetiger Funktionen) und habe dann nach denjenigen ‚strukturellen Eigenschaften‘ gesucht, die notwendig und hinreichend sind, damit sich eine Funktion durch analytische Ausdrücke dieser Klasse darstellen läßt. Lusin schloß sich an Baires Fragestellungen an und untersuchte in seiner Dissertation ein ähnliches Problem in Bezug auf trigonometrische Reihen, vgl. [Dug76], 324. Lusin besuchte 1905/06 Vorlesungen bei Borel in Paris. Von Moskau aus ging er 1910 für drei weitere Studienjahre nach Göttingen und Paris. In seiner Dissertation „Integral und trigonometrische Reihen“ schloß er an die neuen Entwicklungen der Analysis in Frankreich von Baire, Borel und Lebesgue an, vgl. [G⁺90].

¹³⁷Vgl. [Dug76], 319.

In seiner dritten Mitteilung für die *Comptes Rendus* „Sur les fonctions discontinues qui se rattachent aux fonctions continues“ führte Baire eine spezifische Klassifikation von Funktionen ein¹³⁸. Die stetigen Funktionen bilden die Klasse 0. Die Klasse 1 besteht aus jenen unstetigen Funktionen, die punktweise Grenzfunktionen von Folgen stetiger Funktionen sind. Die Klasse n wird dann aus den Grenzfunktionen von Funktionen aus den Klassen $0, 1, \dots, n - 1$ gebildet, die selbst zu keiner dieser Klassen gehören, wobei n , die Ordnung der Funktionenklasse, über alle abzählbare Ordinalzahlen läuft¹³⁹. Um seine Klassen von Funktionen weiter zu charakterisieren, führte Baire hier den Begriff der Menge der ersten Kategorie ein¹⁴⁰.

In seiner vierten Mitteilung betrachtete er anschließend eine Anwendung seiner bisherigen Resultate auf partielle Differentialgleichungen, für die er die Stetigkeitsvoraussetzung der Ableitungen aufhob¹⁴¹.

Eins der Hauptprobleme der Baireschen Dissertation betraf die Frage nach denjenigen unstetigen Funktionen, die sich durch punktweise konvergierende Reihen stetiger Funktionen darstellen lassen¹⁴². Zu diesem Zweck verwendete Baire hier einige von Volterra und Dini entwickelte Begriffe und Resultate der Funktionentheorie. Eine entscheidende Rolle spielte hier auch die Cantorsche Mengenlehre. Baire benutzte sowohl die Punktmengenlehre als auch die transfinite Mengenlehre. So bewies er in seiner Dissertation neben den ausgearbeiteten Inhalten dieser vier Mitteilungen, daß die Menge E , bestehend aus Funktionen aus allen Baireschen Klassen, bezüglich punktweiser Konvergenz abgeschlossen ist¹⁴³.

Zu Baires mengentheoretischem Zugang bildeten die Arbeiten von Volterra, Dini, Arzelá und anderen Vertretern des italienischen Funktionalkalküls wichtige Quellen vorbildlicher Anwendungen mengentheoretischer Ansätze auf die Analysis. Diese italienischen Analytiker, mit denen Baire in Kontakt stand, praktizierten bereits seit den 1880er Jahren solche mengentheoretischen Methoden¹⁴⁴. Andererseits dürfte Baire auch durch Jordans „Cours d’analyse“ beeinflusst worden sein. Jordan hatte 1893 mit der zweiten Edition seines *Cours d’analyse de l’École polytechnique* die Bedeutung der Mengenlehre für die Analysis und speziell für die Integrationstheorie durch fruchtbare Anwendungen veranschaulicht. Jordans *Cours d’analyse* beinhaltet eine erste globale und systematische Darstellung der Grundelemente der Mengenlehre und ihrer Anwendungen¹⁴⁵.

Wie bereits in Abschnitt 3.2.1 diskutiert, waren die Anwendungen der Men-

¹³⁸Vgl. [Dug76], 320. Baires dritte Mitteilung war [Bai98b].

¹³⁹Vgl. [Coo92], 302.

¹⁴⁰Vgl. [Dug76], 320.

¹⁴¹Vgl. [Bai99c], 3.

¹⁴²Vgl. [Bai99c], 2.

¹⁴³Vgl. [Dug76], 321ff.

¹⁴⁴Vgl. [Kli72], 1077 und Sigmund-Schultzes Beitrag in [Jah99], 490ff.

¹⁴⁵Vgl. [Gis95], 50. Zu Jordans *Cours d’analyse* vgl. [Gis83]. S. auch die Abschnitte 3.1.3 und 3.2.1.

genlehre auf die Analysis sowohl für die Rezeption der Cantorschen Mengenlehre in Frankreich als auch für die Entwicklung der modernen Analysis von grundlegender Bedeutung. Für diese neue Generation französischer Analytiker galt es ferner, die Mengenlehre weiterzuentwickeln, wenn die Cantorschen Konzepte als Werkzeug für ihre Untersuchungen nicht mehr ausreichten¹⁴⁶. Kurz nach seiner Promotion publizierte Baire 1899 in den *Comptes Rendus* zwei Mitteilungen, die dieses Phänomen illustrieren: „Sur la théorie des ensembles“ und „Sur la théorie des fonctions discontinues“¹⁴⁷. Da Riesz sich in „Die Genesis des Raumbegriffs“ auf diese beiden Arbeiten von Baire stützte, werden ihre Inhalte hier näher besprochen.

Baire erklärte in der Mitteilung „Sur la théorie des ensembles“, die Mengenlehre von Cantor und Bendixon sei nicht mehr ausreichend für die Behandlung neuer Probleme, die mit den Untersuchungen seiner Dissertation verbunden seien. Deshalb müsse diese Mengenlehre durch eine allgemeinere ersetzt werden, eine, die auf den Begriff des „point limite“ (Häufungspunkt) aufgebaut sei und die die n -dimensionale Punktmengenlehre als speziellen Fall enthalte. Er nannte diese Theorie „théorie des ensembles de suites d’entiers“, was ich als ‚Mengenlehre der Folgen ganzer Zahlen‘ bezeichnen werde. Baire schrieb:

En poursuivant les recherches indiquées au Chapitre III de ce travail [seine Dissertation], c’est-à-dire en essayant d’obtenir toutes les fonctions discontinues développables en séries doubles, triples, etc., de polynomes, j’ai été conduit à reconnaître que la théorie des ensembles de points, telle qu’elle est envisagée dans les Mémoires de MM. Cantor et Bendixon (*Acta mathematica*, t. II) et dans ma Thèse, devient insuffisante pour étudier ces nouvelles questions. Il y a lieu de la remplacer par une théorie plus générale, construite sur des bases nouvelles, et qui comprendra, comme cas particulier, la théorie des ensembles de points dans un continu à n dimensions. Cette dernière théorie est dominée par la notion de *point limite*; c’est cette notion qu’il s’agit de transformer, de manière à la dégager, non seulement de l’intuition du continu, mais encore de la notion d’inégalité ou de grandeur relative de deux nombres.¹⁴⁸

Baire führte dann zwei Begriffe ein: „group d’entiers d’ordre p “ und „suite d’entiers“¹⁴⁹.

¹⁴⁶Vgl. [Gis95].

¹⁴⁷Es handelt sich um [Bai99a] und [Bai99b].

¹⁴⁸[Bai99a], 946ff.

¹⁴⁹Eine Gruppe ganzer Zahlen der Ordnung p ist ein System aus p positiven ganzen Zahlen, angeordnet in einer bestimmten Reihenfolge $g_p = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p)$. Eine Folge ganzer Zahlen ist dagegen eine unendliche Folge positiver ganzer Zahlen angeordnet in einer bestimmten Reihenfolge $A = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p, \dots)$.

Definition 3.3 (group d'entiers d'ordre p)

„On appelle groupe d'entiers d'ordre p un système de p nombres entiers positifs rangés dans un ordre déterminé, soit“

$$g_p = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p).$$

Definition 3.4 (suite d'entiers)

„On appelle suite d'entiers une suite infinie d'entiers positifs rangés dans un ordre déterminé, soit“

$$A = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p, \dots).$$

Für Mengen aus Folgen ganzer Zahlen formulierte er einen Begriff des Häufungspunktes („limite“), mit dessen Hilfe er eine spezielle Mengenlehre, nämlich die von ihm sogenannte „théorie des ensembles de suites d'entiers“, aufbaute. Den Begriff des Häufungspunktes bildete er mit Hilfe der Relation ‚enthalten sein‘, die er folgenderweise definierte:

Definition 3.5 (Beziehung „est contenue“)

„On convient de dire que le groupe d'ordre p $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p)$ est contenue dans chacun des groupes (α_1) , (α_1, α_2) , $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p)$. On convient de dire que cette suite

$$(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p, \dots)$$

est contenue dans chacun des groupes (α_1) , (α_1, α_2) , $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p)$, ...“¹⁵⁰

Eine Gruppe ganzer Zahlen der Ordnung p ist also in einer Gruppe ganzer Zahlen der Ordnung q mit $q < p$ enthalten, wenn die ersten q Zahlen beider Gruppen in ihren gegebenen Reihenfolgen übereinstimmen. Eine Folge ganzer Zahlen ist in jeder Gruppe ganzer Zahlen der Ordnung p enthalten, wenn die ersten p Zahlen der Folge in ihrer Reihenfolge mit denen der Gruppe übereinstimmen. So formulierte Baire den Begriff des Häufungspunktes einer Menge aus Folgen ganzer Zahlen, wie folgt:

Definition 3.6 („limite“)

„Si P est un ensemble de suites d'entiers, on dit qu'une suite A , faisant ou non partie de P , est limite pour P , si, quel que soit n , il y a dans P des suites autres que A contenues dans le même groupe d'ordre n que A (c'est-à-dire ayant en commun avec A les n premiers nombres).“¹⁵¹

¹⁵⁰Wir werden sagen, die Gruppe der Ordnung p $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p)$ ist in jeder der Gruppen (α_1) , (α_1, α_2) , $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p)$ enthalten. Wir werden sagen, die Reihe $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p, \dots)$ ist in jeder der Gruppen (α_1) , (α_1, α_2) , $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p)$ enthalten. Vgl. [Bai99a].

¹⁵¹Sei P eine Menge aus Folgen ganzer Zahlen und A eine Folge ganzer Zahlen, die nicht unbedingt zu P gehört. A ist ein Häufungspunkt von P , wenn es für jedes n von A verschiedene Folgen ganzer Zahlen in P gibt, die aber in derselben Gruppe der Ordnung n enthalten sind. Vgl. [Bai99a].

Für Mengen aus Folgen ganzer Zahlen übertrug Baire grundlegende Cantorsche Begriffe, wie die der ‚abgeschlossenen‘, ‚perfekten‘ und ‚abgeleiteten Menge‘. Eine Menge aus Folgen ganzer Zahlen heißt bei Baire abgeschlossen, wenn die Menge alle ihre „suites limites“ (Häufungspunkte) enthält; die Menge heißt perfekt, wenn jedes Element der Menge zugleich Häufungspunkt derselben ist, und schließlich heißt „l’ensemble dérivé“ von P , gekennzeichnet P' , die Menge aller „suites limites“ (Häufungspunkte) von P . Weitere wichtige Begriffe seiner Theorie waren die der Menge der ersten und zweiten Kategorie.

Die Anwendung dieser Theorie zeigte Baire in seiner nächsten Mitteilung „Sur la théorie des fonctions discontinues“¹⁵². Das Problem, das Baire im Anschluß an seine Dissertation verfolgte, bezog sich auf die Bestimmung der notwendigen Bedingungen, damit eine unstetige Funktion einer reellen Variablen in Baires zweite Funktionenklasse enthalten ist¹⁵³.

Als Riesz in „Die Genesis des Raumbegriffes“ auf Baire verwies, behauptete er, daß Baire spezielle Umgebungen „für die Vertiefung der Lehre über Irrationalzahlen“ benutzte, „die auf der Kettenbruchentwicklung jener Zahlen beruhen“¹⁵⁴. Auf eine Verbindung zwischen den ‚suites d’entiers‘ und der Kettenbruchentwicklung von Irrationalzahlen wies Baire erst in seiner zweiten Mitteilung hin:

D’autre part, considérons l’ensemble de tous les groupes d’entiers possibles; les nombres irrationnels compris entre 0 et 1 peuvent être assimilés aux éléments x contenus dans ces groupes: on considérera l’élément $x_{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p, \dots}$ comme définissant le nombre irrationnel dont la suite des quotients incompletes est $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p, \dots)$.¹⁵⁵

Der irrationalen Zahl $x \in (0, 1)$ mit der Kettenbruchentwicklung

$$\frac{1}{\alpha_1 + \frac{1}{\alpha_2 + \frac{1}{\alpha_3 + \dots}}}$$

ordnete Baire die Folge ganzer Zahlen $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p, \dots)$ zu, und kennzeichnete diese Zahl x als $x_{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p, \dots}$. Diese Zuordnung kann für jede reelle Zahl $x \in [0, 1]$ definiert werden. Ist x eine rationale Zahl, dann ist deren Kettenbruchentwicklung eine endliche. So ergibt sich, daß Gruppen ganzer Zahlen p -ter Ordnung rationalen Zahlen, Folgen ganzer Zahlen dagegen irrationalen Zahlen entsprechen¹⁵⁶.

¹⁵²D.h. [Bai99b].

¹⁵³Vgl. [Bai99b], 1013.

¹⁵⁴Vgl. [Rie07b], 320.

¹⁵⁵[Bai99b], 1012.

¹⁵⁶Vgl. [Pv94], 7. Die Kettenbruchentwicklung einer Zahl $x \in \mathbb{R}$ kann folgenderweise erreicht werden: Betrachtet man zunächst den ganzen Teil $[x] = a_0$. Dann ist $x = a_0 + x_1$, mit $x_1 \in (0, 1)$. So dann betrachtet man $[\frac{1}{x_1}] = a_1$. Dann ist $\frac{1}{x_1} = a_1 + x_2$, mit $x_2 \in (0, 1)$. Die Kettenbruchentwicklung kann man so mit den Formeln $[\frac{1}{x_i}] = a_i$ und $\frac{1}{x_i} = a_i + x_{i+1}$ mit $x_{i+1} \in (0, 1)$ fortsetzen, vgl. ibid., 28.

Baire führte in diesen Arbeiten keinen Umgebungsbegriff ein, zeichnete jedoch spezielle Teilmengen von Folgen ganzer Zahlen aus, die er mit Hilfe der Gruppen ganzer Zahlen der Ordnung p definiert hatte. Da Baire selbst daraus keinen Begriff bildete, kann lediglich von Baires ‚implizitem‘ Umgebungsbegriff gesprochen werden. Baires Begriffsbildungen übten einen großen Einfluß auf Riesz in seiner Arbeit „Die Genesis des Raumbegriffes“ aus. Baires ‚impliziter‘ Umgebungsbegriff wird in Abschnitt 7.1 studiert, wo Riesz’ Anschluß an Baire ausführlich diskutiert wird.

Im Januar und Februar 1904 hielt Baire eine Vorlesung am Collège de France. Vor einer kleinen Zuhörergruppe präsentierte er die Hauptergebnisse seiner Dissertation¹⁵⁷. Ein Jahr später erschien diese Vorlesung als Monographie *Leçons sur les fonctions discontinues* in Borels *Collection de monographies sur la théorie des fonctions*¹⁵⁸. Baire widmete einen Teil seiner *Leçons* der Mengenlehre, so wie Jordan und Borel es vor ihm getan hatten¹⁵⁹. Die Mengenlehre hatte nun ihre definitive Stelle in jeder modernen analytischen Arbeit angenommen.

3.2.5 Lebesgues Integrationstheorie

Henri Lebesgue wurde am 25. Juni 1875 in Paris geboren. Zwischen 1894 und 1897 studierte er an der *École Normale Supérieure* und 1902 promovierte er mit der Arbeit „Intégrale, longueur, aire“¹⁶⁰. Ausgangspunkte der Lebesgueschen Untersuchungen waren die maßtheoretischen Beiträge zur Integrationstheorie von Jordan sowie die maßtheoretischen Ansätze in der Funktionentheorie von Borel. Lebesgues größte Leistung in seiner Dissertation bestand darin, auf originelle Weise die Theorien von Jordan und Borel auf die Integrationstheorie anzuwenden¹⁶¹.

Wie in Jordans *Cours d’analyse* verfolgte Lebesgue einen maßtheoretischen Zugang zur Integrationstheorie. So behandelte er zunächst das Problem der Meßbarkeit von Mengen. In zwei Arbeiten, die seiner Dissertation vorausgingen, übernahm er Borels Ansicht, daß eine Maßfunktion abzählbar additiv sein muß. Auch Lebesgues methodische Vorgehensweise ähnelte der von Borel. Lebesgue stützte sich, wie früher Borel, an Drachs axiomatischen Zugang. So führte Lebesgue in seiner Dissertation 1902 das (Lebesgue-)Konzept des Maßes mittels einer ‚deskriptiven Definition‘ folgenderweise ein¹⁶²:

Definition 3.7 (Lebesgues deskriptive Definition des Maßes)

„Nous nous proposons d’attacher à chaque ensemble borné un nombre positif ou nul que nous appellerons sa mesure et satisfaisant aux conditions suivantes:

¹⁵⁷Vgl. [Dug76], 308.

¹⁵⁸Baires Monographie ist [Bai05b]. Zu Borels *Collection* s. Abschnitt 3.1.3.

¹⁵⁹Vgl. [Bai05b] und [Gis95].

¹⁶⁰Lebesgues Dissertation ist [Leb02].

¹⁶¹Vgl. [Hoc99], 363.

¹⁶²Vgl. [Haw70], 103, 121. Zu ‚deskriptive Definitionen‘ s. Abschnitt 3.2.2.

1. *Il existe des ensembles dont la mesure n'est pas nulle.*
2. *Deux ensembles égaux ont même mesure.*
3. *La mesure de la somme d'un nombre fini ou d'une infinité dénombrable d'ensembles, sans point commun, deux à deux, est la somme des mesures de ces ensembles.*¹⁶³

Wie zuvor in Borels Ansatz sollten die Eigenschaften des Maßes die Konstruktion der im Lebesgueschen Sinne meßbaren Mengen mitbestimmen. Lebesgue schrieb: „Nous ne résoudrons ce problème de la mesure que pour les ensembles que nous appellerons mesurables“.¹⁶⁴ Lebesgues Maßtheorie erwies sich als eine Erweiterung sowohl der Borelschen als auch der Jordanschen Maßtheorie, denn jede Jordan-meßbare und jede Borel-meßbare Menge ist Lebesgue-meßbar, und alle nicht Borel-meßbaren Teilmengen von Nullmengen sind sehr wohl Lebesgue-meßbar¹⁶⁵.

Bei der Anwendung maßtheoretischer Resultate auf die Integrationstheorie ging Lebesgue in seiner Dissertation konstruktiv vor¹⁶⁶. Er definierte das Integral einer beschränkten Funktion $f : (\alpha, \beta) \rightarrow \mathbb{R}$ mit dem Intervall (a, b) als Bildbereich folgenderweise: Modern beschrieben führte er zunächst eine Partition des Intervalls (a, b) durch, d.h. er betrachtete eine beliebige Auswahl endlich vieler verschiedener Werte $a = a_0 < a_1 < \dots < a_n = b$ innerhalb des Bildbereiches. Bei der Definition des Integrals hatten Riemann und Darboux auch Partitionen benutzt, aber nicht im Bildbereich sondern im Definitionsbereich der Funktion. Darin lag einer der originellen Aspekte des Lebesgueschen Zugangs, auf den in der modernen Mathematik mit dem Stichwort ‚quergedacht‘ verwiesen wird. Lebesgue induzierte dann mit Hilfe der Subintervalle (a_i, a_{i+1}) eine Aufteilung des Definitionsbereiches in einer Familie disjunkter meßbarer Teilmengen, indem er die Urbilder der Subintervalle (a_i, a_{i+1}) betrachtete¹⁶⁷. Lebesgue bildete folgende Teilmengen:

$$e'_i = \{\alpha < x < \beta \mid a_i < f(x) < a_{i+1}\} \quad \text{und} \\ e_i = \{\alpha < x < \beta \mid f(x) = a_i\}.$$

Anhand der Werte $a = a_0 < a_1 < \dots < a_n = b$ und der Maße $m(e_i)$ und $m(e'_i)$ der Teilmengen e_i und e'_i versuchte Lebesgue, sein Integral zu definieren. Dafür mußten die Teilmengen e_i und e'_i des Definitionsbereiches meßbar sein. Lebesgue nannte eine Funktion „summierbar“, wenn das Urbild jedes offenen Intervalls der reellen Zahlen eine Lebesgue-meßbare Menge ist. Diese Bezeichnung wurde aber

¹⁶³[Leb02], 6.

¹⁶⁴[Leb02], 6.

¹⁶⁵Vgl. [Hoc99], 365.

¹⁶⁶Zu Lebesgues Integrationstheorie vgl. [Haw70], 120ff. und [Hoc99].

¹⁶⁷Vgl. [Leb02], 18ff. und [Haw70], 125.

bald darauf von Lebesgue durch die der „meßbaren Funktion“ ersetzt¹⁶⁸.

Im zweiten Teil seine Dissertation diskutierte Lebesgue das Problem der Reversibilität von Integration und Differentiation. Dieses Problem war vor Lebesgue unter anderem in Arbeiten von Volterra, Dini, Peano und Jordan behandelt worden¹⁶⁹. Lebesgue wies auf ein Beispiel einer differenzierbaren Funktion „non intégrable au sens de Riemann“ von Volterra hin¹⁷⁰. Lebesgue gelang es, die Reversibilität von Integration und Differentiation bei Funktionen mit beschränkter Ableitung zu gewährleisten, wenn das Lebesgue-Integral anstelle des Riemann-Integrals verwendet wird. Er zeigte: Existiert die Ableitung f' einer Funktion f auf $[a, b]$, und ist sie beschränkt, dann ist f' Lebesgue-integrierbar, und es gilt $\int_a^b f'(x)dx = f(b) - f(a)$ ¹⁷¹.

Als Lebesgue im akademischen Jahr 1902-1903 den ‚Cours Peccot‘ am *Collège de France* hielt, las er dort über die Resultate seiner Dissertation sowie über die inzwischen erreichten Erweiterungen seiner Integrationstheorie. Auf dieser Vorlesung basierend erschien in der ‚Collection Borel‘ seine Monographie *Leçons sur l'intégration et la recherche des fonctions primitives*¹⁷². Lebesgues Monographie enthält unter anderem eine Erweiterung des Fundamentalsatzes sowie den Satz, der in moderner Terminologie besagt, daß jede stetige Funktion mit beschränkter Schwankung eine fast überall beschränkte Ableitung besitzt¹⁷³. Die Bedeutung dieses Satzes zeigte sich insbesondere in den Anwendungen auf die Theorie der trigonometrischen Reihen von Pierre Fatou und von Friedrich Riesz aus den Jahren 1906 bzw. 1907¹⁷⁴. Bei Riesz spielten sowohl Lebesgues Satz als auch die daraus abgeleiteten Resultate von Fatou eine zentrale Rolle im Beweis des in heutiger Funktionalanalysis sogenannten Riesz-Fischer Satzes¹⁷⁵.

Zurück zu Lebesgues Verständnis der deskriptiven und konstruktiven Defini-

¹⁶⁸Vgl. [Haw70], 125. Hawkins erklärt leider nicht, wann und warum Lebesgue seine Bezeichnung änderte. Während in seiner Dissertation die Definition einer ‚meßbaren‘ Funktion noch unter der Bezeichnung ‚summierbar‘ vorkam([Leb02], 28), hatte die Änderung zur Bezeichnung ‚meßbare Funktion‘ 1903 in ‚Sur une propriété des fonctions‘ (*Comptes Rendus* 137, 1228ff.) bereits stattgefunden, ohne einen expliziten Hinweis darauf. Jedoch unterschied Lebesgue in seiner Dissertation zwischen beschränkten und unbeschränkten Funktionen und bemerkte, daß eine ‚summierbare‘ [heute ‚meßbare‘] nicht-beschränkte Funktion nicht unbedingt ein Integral besitzt, während das bei beschränkten ‚summierbaren‘ [heute ‚meßbaren‘] Funktionen auf einem beschränkten Intervall doch der Fall ist ([Leb02], 29). Deshalb ist es naheliegend, daß bei Lebesgue ursprünglich ‚summierbare Funktion‘ [heute ‚meßbare Funktion‘] für ‚Lebesgue-integrierbare Funktion‘ stand. D.h. eine Unterscheidung zwischen ‚summierbar‘ [heute ‚meßbar‘] und [Lebesgue-] ‚integrierbar‘ konnte sich als notwendig erweisen, erst als Lebesgue auch nicht-beschränkte Funktionen bzw. Funktionen auf nicht beschränkten Intervallen betrachtete.

¹⁶⁹Vgl. [Haw70].

¹⁷⁰Vgl. [Leb02], 35.

¹⁷¹Vgl. [Haw70], 129.

¹⁷²[Leb28]. Die Originalausgabe erschien 1904.

¹⁷³Vgl. [Haw70], 142.

¹⁷⁴Bei Fatou in [Fat06] und bei Riesz in [Rie07f].

¹⁷⁵Vgl. Verweis auf Lebesgues Monographie in [Rie07f].

tionen: In seiner Monographie von 1904 führte er eine deskriptive Definition des Integrals ein, und im Anschluß daran diskutierte er die Motivationen für seine axiomatische Vorgehensweise.

Definition 3.8 (,deskriptive Definition‘ des Integrals)

„C’est pourquoi nous nous proposons d’attacher à toute fonction bornée [...] $f(x)$, définie dans un intervalle fini (a, b) , positif, négatif ou nul, un nombre fini $\int_a^b f(x)dx$, que nous appelons l’intégrale de $f(x)$ dans (a, b) et qui satisfait aux conditions suivantes:“

1. Quels que soient a, b, h , on a $\int_a^b f(x)dx = \int_{a+h}^{b+h} f(x-h)dx$;
2. Quels que soient a, b, c , on a $\int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx + \int_c^a f(x)dx = 0$;
3. $\int_a^b [f(x) + \phi(x)]dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b \phi(x)dx$;
4. Si l’on a $f \geq 0$ et $b > a$, on a aussi $\int_a^b f(x)dx \geq 0$;
5. On a $\int_0^1 1dx = 1$;
6. Si, quand l’indice n croît, $f_n(x)$ tend en croissant vers $f(x)$, l’intégrale de $f_n(x)$ tend vers celle de $f(x)$.¹⁷⁶

Die Auswahl dieser sechs Eigenschaften des Integrals war durch Lebesgues Anspruch motiviert, ein allgemeineres Konzept des Integrals zu liefern, das die Gültigkeit der klassischen Integrale stetiger Funktionen aufrecht erhält¹⁷⁷. Zu seiner Vorgehensweise erklärte Lebesgue, die deskriptive Definition des Integrals ginge aus der Aufstellung der sechs Bedingungen des Integrationsproblems hervor¹⁷⁸. Nützlicher fand Lebesgue die konstruktive Definition des Integrals, denn so können Integrale von Funktionen berechnet werden¹⁷⁹.

¹⁷⁷Lebesgue schrieb: „Les applications classiques de l’intégration des fonctions continues, les applications faites précédemment de l’intégration au sens de Riemann ou au sens de Duhamel et Serret, suffisent pour mettre en évidence le rôle de certaines propriétés simples, conséquences de toutes les définitions de l’intégrale déjà étudiées, et pour convaincre que ces propriétés doivent nécessairement appartenir à l’intégrale, si l’on veut qu’il y ait quelque analogie entre cette intégrale et l’intégrale des fonctions continues“, [Leb28], 105.

¹⁷⁸„En énonçant les six conditions du problème d’intégration, nous définissons l’intégrale. Cette définition appartient à la classe de celles que l’on peut appeler *descriptives*; dans ce définitions, on énonce des propriétés caractéristiques de l’être que l’on veut définir.“ [Leb28], 106ff.

¹⁷⁹„Ce sont les définitions constructives qui sont le plus souvent employées en Analyse.“ [Leb28], 107.

Um zu der konstruktiven Definition des Integrals zu gelangen, reichte jedoch dessen deskriptive Definition nicht aus. In einem Manuskript aus dem Jahr 1922 erläuterte Lebesgue im Hinblick auf die oben erwähnte Diskussion aus seiner Monographie von 1904, das Prinzip hinter der Aufstellung einer deskriptiven Definition sei gewesen, durch die Erforschung der dem Integral zugeschriebenen Eigenschaften den konstruktiven Integralbegriff abzuleiten. In Wirklichkeit, sagte er, gelangte er zur konstruktiven Definition des Integrals nicht allein durch ein logisches deduktives Verfahren, denn trotz der hilfreichen Methode Drachs stellten sich die aufgestellten Forderungen für das Integral als unzureichend für dessen Bestimmung heraus¹⁸⁰.

Lebesgue war sich dessen bewußt, daß seine Benutzung einer deskriptiven Definition sich mit einem axiomatischen Zugang zur Integrationstheorie vergleichen ließ. Deshalb fügte er in der oben diskutierten Darstellung aus seiner Monographie von 1904 eine Erklärung ein, in der er den Einfluß von Drach zugab, sich aber von Hilberts Verständnis der Axiomatik abgrenzte¹⁸¹.

3.2.6 Fréchet's ‚Calcul Fonctionnel‘

Maurice Fréchet wurde am 10. September 1878 in Maligny, Frankreich geboren. Er begann 1900 sein Studium an der *École Normale Supérieure*. Zwischen 1904 und 1906 veröffentlichte er eine Reihe von Arbeiten, deren Inhalte einen großen Teil seiner Dissertation ausmachten. Fréchet promovierte 1906 bei Hadamard mit der Arbeit „Sur quelques points du Calcul fonctionnel“¹⁸².

Motiviert durch theoretische Fragen der Variationsrechnung baute Fréchet zwischen 1904 und 1906 eine Theorie ‚allgemeinerer Funktionen‘ auf, die er „Calcul Fonctionnel“ nannte. Bei den allgemeineren Funktionen, von ihm als ‚opération fonctionnelle‘ bezeichnet, handelte es sich um reelle Funktionen auf abstrakten

¹⁸⁰Lebesgue schrieb: „M.J. Drach, puis M. Hilbert nous ont appris à considérer un être mathématique comme défini par ses propriétés essentielles assujetties à la seule condition de ne pas être contradictoires, aussi bien que par sa construction; celle-ci peut être recherchée comme conséquence des propriétés attribuées à cet être. Or pour qu’une généralisation de l’intégrale soit utile pour le but spécial que j’avais en vue, il fallait que cette intégrale jouisse de certaines propriétés; je pris ces propriétés comme définition et j’essayai d’en déduire la construction de l’intégrale. Dans mon livre sur l’intégration, j’ai exposé systématiquement après coup cette façon d’arriver à la définition; en réalité je ne suis pas arrivé à la définition constructive de l’intégrale par un simple effort de logique, car les propriétés que j’avais aperçues et que je voulais attribuer à l’intégrale, n’étaient pas suffisantes pour la déterminer. La méthode de M.J. Drach m’a cependant été des plus utiles.“ [Leb73], Bd. I, 89ff. Dieses Manuskript von Lebesgue aus dem Jahr 1922 belegt, daß Lebesgue bereits in der Originalausgabe seiner Monographie von 1904 sein Verständnis der deskriptiven und konstruktiven Definitionen diskutierte. Das Manuskript wurde in Lebesgues Gesammelten Werken unter dem Titel „Introduction inédite à la ‚Notice sur les travaux scientifiques de M. Henri Lebesgue‘ de 1922“ publiziert.

¹⁸¹Diese Erklärung Lebesgues wurde bereits in Abschnitt 3.2.2, S. 65 zitiert und diskutiert.

¹⁸²Fréchet's Dissertation erschien in [Fré06].

Mengen¹⁸³. Als Werkzeuge für den Aufbau seiner Theorie entwickelte Fréchet parallel eine abstrakte Punktmengenlehre. Diese frühen Arbeiten sind mathemathikhistorisch sehr interessant, sowohl im Hinblick auf ihre Bedeutung für die Entstehung der Funktionalanalysis als auch im Rahmen der frühen Geschichte der mengentheoretischen Topologie¹⁸⁴.

Friedrich Riesz knüpfte in „Die Genesis des Raumbegriffs“ an Konzepte von Fréchet an, die dieser im Rahmen seiner Dissertation entwickelte. Riesz verwies explizit auf folgende Fréchetsche Arbeiten: „Généralisation d’un théorème de Weierstrass“ von 1904, „Sur les fonctions limites et les opérations fonctionnelles“ von 1905 und „La notion d’écart dans le Calcul fonctionnel“ auch von 1905¹⁸⁵. Aus diesen Grund werden in diesem Abschnitt Aspekte der Dissertation Fréchets im Vergleich zu dessen Originalversion in jenen Arbeiten, die seiner Dissertation vorangingen, erörtert. Angus E. Taylor hat zwischen 1982 und 1987 in drei umfangreichen Artikeln das Werk Fréchets in Punktmengenlehre und Analysis ausführlich diskutiert¹⁸⁶. Die folgende Darstellung stützt sich stark auf Taylors Diskussion.

Hadamard, mit dem Fréchet eine auf seine Gymnasialjahre zurückgehende Lehrer-Schüler Beziehung hatte, hatte Fréchet angeregt, sich mit Problemen der Variationsrechnung zu beschäftigen. Auch auf Fréchets mengentheoretischen Zugang übte Hadamard großen Einfluß aus¹⁸⁷. Hadamard war ein bekannter Befürworter der damals noch teilweise umstrittenen Cantorsche Mengenlehre¹⁸⁸.

Den Begriff der „opération fonctionnelle“ führte Fréchet zum ersten Mal im November 1904 in seiner Arbeit „Généralisation d’un théorème de Weierstrass“ ein, als eine reelle Funktion auf einer Menge ‚beliebiger‘ Elemente¹⁸⁹. Die abstrakte Natur der Definitionsbereiche der zu untersuchenden Funktionen kommt deutlicher im folgenden Zitat aus Fréchets Dissertation hervor: „Pour cela, nous dirons qu’une opération fonctionnelle U est définie dans un ensemble E d’éléments de nature quelconque (nombres, courbes, points, etc.) lorsqu’à tout élément A de E correspond une valeur numérique déterminée de U : $U(A)$. La recherche des propriétés de ces opérations constitue l’objet du *Calcul Fonctionnel*“¹⁹⁰. Im Folgenden

¹⁸³Vgl. [Fré06], 1.

¹⁸⁴Zur Geschichte der Funktionalanalysis vgl. [Kre97], [BK84], [Tay82], [SS82], [Kli72], [Ber66]. Zur Geschichte der mengentheoretischen Topologie vgl. [P⁺02], [KM99], [Tay82].

¹⁸⁵Diese sind [Fré04], [Fré05e] und [Fré05a].

¹⁸⁶Vgl. Taylor in [Tay82], [Tay85] und [Tay87]. Der erste Artikel „A Study of Maurice Fréchet: I. His Early Work on Point Set Theory and the Theory of Functionals“ behandelt Fréchets frühe Forschungsperiode, von seiner Studienzeit bis 1908. In dem zweiten Artikel diskutiert Taylor Fréchets Beiträgen zur mengentheoretischen Topologie (1909-1928) und im dritten weitere Arbeiten Fréchets zur Analysis (1909-1930).

¹⁸⁷Vgl. [Tay82], 237, 260.

¹⁸⁸Bekannter Befürworter der Mengenlehre wurde er spätestens nach seinem Vortrag „Sur certaines applications possibles de la théorie des ensembles“ [Had98] auf dem ersten Internationalen Mathematikerkongreß in Zürich 1897, s. auch Abschnitt 3.2.1.

¹⁸⁹Vgl. [Fré04], 849.

¹⁹⁰Vgl. [Fré06], 1: „Eine funktionelle Operation U ist auf eine Menge E mit Elementen be-

wird der moderne Term ‚Funktional‘ für „opération fonctionnelle“ verwendet.

Fréchet's Arbeit „Généralisation d'un théorème de Weierstrass“ war die erste in der oben erwähnten Reihe von sechs Arbeiten, deren Resultate er in seiner Dissertation 1906 aufnahm und systematisch darstellte¹⁹¹. Die leitende Frage dieser ersten Arbeit stammt aus der Variationsrechnung: Unter welchen Bedingungen eine reelle Funktion auf einer abstrakten Menge ihre Extremwerte annimmt. Er schrieb:

On sait l'importance qu'il y aurait, dans un grand nombre de problèmes, à savoir si une quantité U dépendant de certains éléments (points, fonctions, etc.) atteint effectivement un minimum dans le champ considéré. Le principe de Dirichlet offre une des justifications les plus frappantes de cette remarque.¹⁹²

Dirichlet's Prinzip, so wie Riemann es Mitte des 19. Jahrhunderts in der komplexen Analysis prägte, behauptete die Existenz einer komplexen Funktion $u(x, y)$ in einer bestimmten Menge zulässiger Funktionen, so daß u den Wert des Integrals $D(u) = \iint ((\frac{\partial u}{\partial x})^2 + (\frac{\partial u}{\partial y})^2) dx dy$ minimiert. Riemann's Idee war, daß eine solche Funktion u existieren mußte, weil das Integral nie negative Werte annimmt¹⁹³. Die Aussage des Dirichlet'schen Prinzips ist aber nicht allgemein gültig. Weierstraß lieferte 1870 ein Gegenbeispiel¹⁹⁴. Erst Hilbert gelang es 1899, unter bestimmten Bedingungen die Gültigkeit des Dirichlet'schen Prinzips zu gewährleisten und es damit zu rehabilitieren¹⁹⁵.

Zurück zu Fréchet's Arbeit von 1904: Dort kündigte Fréchet eine Verallgemeinerung des Weierstraß'schen Satzes an, der besagt, daß eine stetige reelle Funktion $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ auf einem, modern ausgedrückt, abgeschlossenen Intervall ihre Extremwerte annimmt¹⁹⁶. Fréchet's Verallgemeinerung des Weierstraß'schen

liebiger Natur (Zahlen, Kurven, Punkten, etc.) definiert, wenn jedem Element A aus E ein bestimmter numerischer Wert von $U: U(A)$ entspricht. Die Untersuchung der Eigenschaften solcher Operationen bildet das Forschungsobjekt des funktionellen Kalküls.“ Taylor macht darauf aufmerksam, daß Fréchet in einem späteren Abschnitt seiner Dissertation das Wort „fonctionnelle“ als Name statt als Adjektiv benutzte, vgl. [Tay82], 250ff.

¹⁹¹Fréchet's Dissertation setzte sich aus [Fré04], [Fré05e], [Fré05d], [Fré05a], [Fré05c] und [Fré05b] zusammen, vgl. [Tay82], 242.

¹⁹²Vgl. [Fré04], 848.

¹⁹³Zur Geschichte von ‚Dirichlet's Prinzip‘ vgl. [Mon75], hier S. 29.

¹⁹⁴Vgl. [Thi97a], 24.

¹⁹⁵Vgl. [Mon75], 55. Es gibt zwei Arbeiten von Hilbert mit demselben Titel „Über das Dirichlet'sche Prinzip“ aus den Jahren 1889 und 1901, die aber erst 1904 und 1905 erschienen. Beide sind in Hilbert's Gesammelten Arbeiten wiederabgedruckt, [Hil35], Bd. 3, 10-14 und 15-37.

¹⁹⁶D.h. es gibt (mindestens) ein $x \in [a, b]$ und (mindestens) ein $y \in [a, b]$, so daß $f(x)$ der Minimalwert und $f(y)$ der Maximalwert der Funktion auf $[a, b]$ ist. Arzelà hatte für Funktionen auf Kurvenmengen bereits ähnliche Resultate geliefert. Einen Verweis auf Arzelà's Verallgemeinerung des Weierstraß'schen Satzes fügte Fréchet erst im März 1905 in „La notion d'écart dans le Calcul fonctionnel“ ein. Taylor schloß aber einen direkten Einfluß von Arzelà und Ascoli auf Fréchet aus, vgl. [Tay82], 248ff.

Satzes schlug hinreichende Bedingungen vor, unter denen ein Funktional seine Extremwerte annimmt. Einen Beweis gab er 1904 nicht an, sondern erst in seiner Dissertation. Für diese Untersuchungen wählte Fréchet einen mengentheoretischen Zugang. Modern ausgedrückt, studierte er mengentheoretische Eigenschaften des Definitionsbereiches der Funktionale (Abgeschlossenheit, Kompaktheit, Beschränktheit etc.), um analytische Eigenschaften der Funktionale (wie Stetigkeit und das Annehmen von Extremwerten) auf die mengentheoretische Eigenschaften des Definitionsbereiches zurückzuführen. Dafür entwickelte Fréchet bereits 1904 erste Grundbegriffe einer abstrakten Punktmengenlehre nach dem Vorbild der Cantorsche Theorie. Unter einer anderen Bezeichnung führte er das Konzept ein, das er später in seiner Dissertation mit dem Name ‚L-Klasse‘ definierte, nämlich eine abstrakte Menge, versehen mit einem Limesbegriff¹⁹⁷.

Nach dem Vorbild von Drach, Lebesgue, Hadamard, Borel und insbesondere der Darstellung der abstrakten Gruppentheorie von J.A. de Séguier, wie Fréchet selbst später in seiner Dissertation erklärte, wählte er einen abstrakten axiomatischen Zugang bei seiner Begriffsbildung¹⁹⁸. Fréchet schlug 1904 eine axiomatische Definition des Limeselements einer unendlichen Folge in einer abstrakten Menge vor. Dieselbe Definition erschien in seiner Dissertation in der Definition einer L-Klasse¹⁹⁹. Ich zitiere aus Fréchets Dissertation:

Definition 3.9 (L-Klasse)

„Dorénavant, nous nous limiterons donc à l'étude des ensembles tirés d'une classe (L) d'éléments quelconque mais satisfaisant aux conditions suivantes: on sait distinguer si deux éléments de la classe (L) sont distincts ou non. De plus, on a pu donner une définition de la limite d'une suite d'éléments de la classe (L). Nous supposons donc qu'étant choisie au hasard une suite infinie d'éléments (distincts ou non) de la classe (L), on puisse dire d'une façon certaine si cette suite $A_1, A_2, \dots, A_n \dots$ a ou non une limite A (d'ailleurs unique). Le procédé qui permettra de donner la réponse (autrement dit la définition de la limite) est d'ailleurs absolument quelconque, assujetti seulement à satisfaire aux conditions I et II dont nous avons parlé et qui sont les suivantes:“

- I) *„Si chacun des éléments de la suite infinie $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$ est identique à un même élément A , la suite a certainement une limite qui est A .“*
- II) *„Si une suite infinie $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$ a une limite A , tout suite d'éléments de la première suite pris dans le même ordre: $A_{n_1}, A_{n_2}, \dots, A_{n_p}, \dots$ (les*

¹⁹⁷Vgl. [Tay82], 244ff.

¹⁹⁸Vgl. [Fré06], 5. Zum Einfluß der Gruppentheorie und Borels Maßtheorie auf Fréchets axiomatische Begriffsbildung vgl. [Tay82], 252ff. Fréchets Verweis auf Drach, Lebesgue und Hadamard ist von Taylor nicht berücksichtigt worden. S. auch Abschnitt 3.2.2.

¹⁹⁹Fréchet ergänzte seine Definition des Limeselements von 1904 in seiner Dissertation mit der Bemerkung, daß das Limeselement eindeutig sein muß, vgl. [Tay82], 244.

*nombres entiers n_1, n_2, \dots, n_p iront donc en croissant) a une limite qui es aussi A .*²⁰⁰

Für eine L-Klasse entwickelte er dann erste mengentheoretische Grundbegriffe: ‚Limeselement einer abstrakten Menge‘, ‚abgeschlossene Menge‘ und ‚kompakte Menge‘, mit denen er versuchte, analoge Eigenschaften zu denen eines beschränkten und abgeschlossenen Intervalls zu fassen: Ein Element A aus einer abstrakten Menge E ist Limeselement von E , wenn es eine Folge $\{A_n\}$ aus unterschiedlichen Elementen aus E gibt, für die A Limeselement ist. Damit eine Menge E abgeschlossen sei, verlangte er, daß E alle seine Limeselemente enthalte. Schließlich führte er eine erste Version des neuen Begriffes der kompakten Menge ein. Die Bezeichnung ‚compact‘ ist originell von Fréchet²⁰¹. Er definierte 1904:

Definition 3.10 (Kompakte Menge Version 1904)

*„Enfin nous appellerons ensemble compact tout ensemble E tel qu’il existe toujours au moins un élément commun à une suite infinie quelconque d’ensembles $E_1, E_2, \dots, E_n, \dots$, contenus dans E , lorsque ceux-ci (possédant au moins un élément chacun) sont fermés et chacun contenu dans le précédent“*²⁰²

D.h. eine Menge E ist kompakt, wenn jede geschachtelte Folge nichtleerer, abgeschlossener Teilmengen von E mindestens ein gemeinsames Element besitzt. Wir werden auf dieses Fréchetsche Konzept zurückkommen. Auf einer L-Klasse definierte Fréchet: ein Funktional U ist stetig, wenn das Bild jeder konvergierenden Folge des Definitionsbereiches gegen das Bild des Limeselements der Folge konvergiert²⁰³. Mit Hilfe dieser mengentheoretischen Begriffe und der Definition des stetigen Funktionals formulierte Fréchet 1904 seine Verallgemeinerung des Satzes von Weierstraß folgenderweise:

Satz 3.2 (Verallgemeinerung des Satzes von Weierstraß)

*„Toute opération fonctionnelle U_A uniforme et continue dans un ensemble compact et fermé E : 1° est bornée dans E ; 2° y atteint au moins une fois sa limite supérieure.“*²⁰⁴

Das bis dahin von ihm entwickelte mengentheoretische Instrumentarium erwies sich als unzureichend für den weiteren Aufbau seines Funktionalkalküls. Er wollte über eine abstrakte Punktmengenlehre verfügen, in der sich grundlegende

²⁰⁰[Fré06], 6.

²⁰¹Vgl. [Tay82], 244ff. Arzelà hatte viel früher gleichmäßig beschränkte Mengen gleichstetiger Funktionen studiert, die die Eigenschaft ‚kompakt sein‘ in Fréchets Sinne besitzen, jedoch gab Arzelà dieser Eigenschaft keinen Namen, vgl. [Tay82], 255.

²⁰²[Fré04], 849.

²⁰³Vgl. [Tay82], 244.

²⁰⁴[Fré04], 849. Für jedes uniforme und stetige Funktional U_A auf einer kompakten und abgeschlossenen Menge E gilt: 1. U_A ist auf E beschränkt, 2. U_A nimmt mindestens einmal sein Supremum an. [LR]

Eigenschaften von Punktfolgen der Cantorschen Theorie in \mathbb{R}^n auf abstrakte Mengen übertragen ließen, damit Verallgemeinerungen von Sätzen über Punktfolgen und stetige reelle Funktionen reeller Variablen in sein Funktionalkalkül möglich wären. Er dachte etwa an den bereits erwähnten Satz von Weierstraß, an dessen Umkehrung und an die Sätze von Heine-Borel und Cantor-Bendixon. Erst in seiner Dissertation gelang es ihm, verwandte Sätze in seine Theorie einzubauen. Ein weiteres Ziel war, daß seine Theorie sich auf oft verwendete Funktionenklassen anwenden ließe. Sein axiomatischer Limesbegriff war dafür zu allgemein. In seinen nächsten zwei Arbeiten diskutierte er am Beispiel verschiedener L-Klassen aus der reellen Funktionentheorie von Baire, Borel und Lebesgue einen wichtigen Mangel seiner abstrakten Punktfolgenlehre, nämlich, daß die Ableitungsmenge E' einer Menge E (d.i. die Menge aller Limeselemente von E) nicht unbedingt abgeschlossen ist²⁰⁵.

In „Sur les fonctions limites et les opérations fonctionnelles“ vom Januar 1905 präsentierte er die Menge E aller reellen Polynome in x als L-Klasse, versehen mit dem Limesbegriff der punktweisen Konvergenz²⁰⁶. Fréchet behauptete ohne weitere Begründung, daß die Menge E' aller Limeselemente nicht abgeschlossen ist. Dies war aber ein bekanntes Resultat aus Baires Theorie der reellen Funktionen, denn es handelte sich um die erste Funktionenklasse von Baire²⁰⁷. Fréchet kannte diese Theorie, denn in einem anderen Beispiel, bei dem der Limesbegriff durch punktweise Konvergenz bis auf eine Nullmenge definiert war, stellte er ohne Beweisangabe fest, daß jede Funktion aus irgendeiner Baireschen Funktionenklasse Limeselement einer Polynomenfolge ist. Damit knüpfte er auch an Lebesgues Maßtheorie an²⁰⁸.

Im Februar 1905 führte Fréchet in „Sur les fonctions d’une infinité de variables“ die L-Klasse E_∞ aller reellen Folgen $\{a_n\}$, versehen mit dem Limesbegriff der punktweisen Konvergenz (er betrachtete jede Folge als eine Funktion (abzählbar) unendlich vieler Variablen), ein, d.h. $A = \{a_k\}$ ist Limeselement der Folge $\{A_n\} = \{a_k^{(n)}\}$ genau dann, wenn $\lim_{n \rightarrow \infty} a_k^{(n)} = a_k$. In seiner Dissertation nahm er dieses Beispiel unter der Bezeichnung E_ω auf. In dieser L-Klasse gilt für jede Teilmenge E , daß ihre ableitete Menge E' abgeschlossen ist. Ferner lieferte er für diese L-Klasse ein Kriterium, um kompakte Mengen zu charakterisieren²⁰⁹.

Die Überwindung einiger Einschränkungen seiner Theorie der L-Klassen ge-

²⁰⁵Vgl. [Tay82], 252ff.

²⁰⁶Vgl. [Fré05e].

²⁰⁷Vgl. [Tay82], 245; s. auch Abschnitt 3.2.4.

²⁰⁸Taylor verweist auf einen wissenschaftlichen Austausch zwischen Fréchet und Lebesgue in der Zeit zwischen 1904 und 1905. Infolge dessen bewiesen Fréchet und Lebesgue unabhängig voneinander folgenden Satz: Eine reelle Funktion einer reellen Variable, die auf einem endlichen abgeschlossenen Intervall meßbar ist, ist bis auf eine Nullmenge punktweise Grenzwert einer Folge stetiger Funktionen (und deshalb auch punktweise Grenzwert einer Polynomenfolge), vgl. [Tay82], 245; s. auch Abschnitt 3.2.5.

²⁰⁹Vgl. [Tay82], 246.

lang ihm zunächst durch Einführung des Konzepts der V-Klasse. Fréchet kehrte im März 1905 in „La notion d'écart dans le Calcul fonctionnel“ zu seiner abstrakten Punktmengenlehre zurück. Er führte hier seine erste Version des Begriffs des „écart“ ein, den er in seiner Dissertation in „voisinage“ umbenannte. Ich werde die Bezeichnungen seiner Dissertation verwenden.

Definition 3.11 (V-Klasse)

„Considérons une classe (V) d'éléments de nature quelconque, mais tels qu'on sache discerner si deux d'entre eux sont ou non identiques et tels, de plus, qu'à deux quelconques d'entre eux A, B , on puisse faire correspondre un nombre $(A, B) = (B, A) \leq 0$ qui jouit des deux propriétés suivantes:¹⁰ La condition nécessaire et suffisante pour que (A, B) soit nul est que A et B soient identiques. ²⁰ Il existe une fonction positive bien déterminée $f(\epsilon)$ tendant vers zéro avec ϵ , telle que les inégalités $(A, B) \leq \epsilon$, $(B, C) \leq \epsilon$ entraînant $(A, C) \leq f(\epsilon)$, quels que soient les éléments A, B, C “.²¹⁰

Eine V-Klasse ist eine spezielle L-Klasse, in der A ein Limeselement der Folge A_n ist, wenn $\lim_{n \rightarrow \infty} (A, A_n) = 0$. Im Gegensatz zu einer L-Klasse gilt in einer V-Klasse für jede Teilmenge E , daß ihre abgeleitete Menge E' abgeschlossen ist. Ferner konnte Fréchet mit Hilfe des „Voisinage“-Begriffs die Eigenschaft der gleichmäßigen Stetigkeit eines Funktionals definieren und Resultate von Ascoli und Arzelà verallgemeinern²¹¹.

In seiner Dissertation sind diese Resultate in einer zweiteiligen systematischen Darstellung eingebaut worden. Im zweiten Teil präsentierte er Beispiele, einschließlich Ergebnisse aus seinen Arbeiten vom Mai 1905 und November 1905 „Sur l'écart de deux courbes et sur les courbes limites“ und „Les ensembles de courbes continues“, in denen er auf der V-Klasse der räumlichen Kurven seine Punktmengenlehre aufbaute²¹². Im ersten Teil führte er schrittweise mengentheoretische Begriffe ein, zunächst für L-Klassen, dann für V-Klassen und normale V-Klassen und schließlich für E-Klassen. Von diesen sind die der Kompaktheit, Vollständigkeit und Separabilität besonders interessant, sowie Fréchets Verallgemeinerung der Sätze von Weierstraß, Heine-Borel so wie die Umkehrung des Satzes von Weierstraß und einen weiteren mengentheoretischen Satz, der in enger Verbindung mit dem Satz von Cantor-Bendixon steht.

Für den Begriff der kompakten Menge, den er bereits 1904 eingeführt hatte,

²¹⁰[Fré06], 18. In meiner Übersetzung: „Betrachten wir eine Klasse (V) aus Elementen beliebiger Natur, von denen man immer wissen kann, ob zwei Elemente identisch sind oder nicht, so daß außerdem jedem Elementenpaar A, B eine reelle Zahl $(A, B) = (B, A) \geq 0$ zugeordnet werden kann, die folgende zwei Bedingungen erfüllt: 1. (A, B) ist gleich Null genau dann, wenn A und B identisch sind. 2. Es existiert eine bestimmte positive reelle Funktion $f(\epsilon)$, die mit ϵ gegen Null läuft ($\lim_{\epsilon \rightarrow 0} f(\epsilon) = 0$), so daß für alle A, B, C die Ungleichung $(A, C) \leq f(\epsilon)$ aus den Ungleichungen $(A, B) \leq \epsilon$, $(B, C) \leq \epsilon$ folgt.“

²¹¹Vgl. [Tay82], 247.

²¹²Vgl. [Fré05c], [Fré05b] und [Tay82], 258. Zum Inhalt dieser Arbeiten vgl. [Tay82], 248ff.

wählte er in seiner Dissertation die Charakterisierung, die er 1904 als äquivalent zu der damaligen Definition präsentiert hatte:

Definition 3.12 (Kompakte Menge Version 1906)

„Nous dirons qu'un ensemble est compact lorsqu'il ne comprend qu'un nombre fini d'éléments ou lorsque tout infinité de ses éléments donne lieu à au moins un élément limite.“²¹³

D.h. eine kompakte Menge E besitzt entweder endlich viele Elemente oder jede unendliche Teilmenge besitzt ein Limeselement – in der L-Klasse, aber nicht unbedingt in E . Fréchet's Begriff der kompakten Menge ist mit dem heutigen nicht übereinstimmend, denn eine kompakte Menge im Fréchet'schen Sinne muß nicht abgeschlossen sein. Zu einer abgeschlossenen und kompakten Menge sagte er „extremal“, eine Bezeichnung, die sich nicht durchsetzte²¹⁴.

Für V-Klassen definierte er Separabilität und Vollständigkeit. Eine V-Klasse hieß für Fréchet ‚separable‘, wenn sie eine abzählbare Menge D enthält, deren abgeleitete Menge die ganze V-Klasse ist²¹⁵. Er benutzte nicht den Term ‚vollständig‘, sondern er sagte von einer V-Klasse, sie ist ‚normal‘, wenn jede Folge aus Elementen der Klasse, die im modernen Sinne eine Cauchy-Folge ist, ein Limeselement in der Klasse besitzt²¹⁶.

Die Übertragung des Heine-Borel Satzes auf eine normalen V-Klasse gelang ihm dagegen sehr wohl.

Satz 3.3 (Heine-Borel)

„Soit E un ensemble d'éléments d'une classe normale (V). Pour que de toute famille H DÉNOMBRABLE OU NON²¹⁷ d'ensembles I tels que tout élément de E soit intérieur au sens étroit à au moins l'un d'eux, on puisse extraire un nombre fini d'ensembles I formant une famille G jouissant de la même propriété que H , il faut et il suffit que E soit extrémal.“²¹⁸

D.h. eine Teilmenge E einer normalen V-Klasse ist abgeschlossen und kompakt genau dann, wenn (modern ausgedrückt) jede offene Überdeckung von E eine endliche Überdeckung von E enthält.

So weit konnte Fréchet seine abstrakte Punktmengenlehre und sein Funktionalkalkül auf einer normalen V-Klasse entwickeln. Nun führte er eine neue Klasse

²¹³[Fré06], 6

²¹⁴Vgl. [Tay82], 244, 255.

²¹⁵In der heutigen allgemeinen Topologie ist eine Menge A ‚separable‘, wenn A eine abzählbare Menge D enthält, so daß die abgeschlossene Hülle \overline{D} gleich A ist.

²¹⁶Vgl. [Tay82], 255.

²¹⁷Fréchet's Fußnote: „Dans le cas où E est un ensemble linéaire, on obtient la généralisation du théorème de M. Borel (voir la note du n^o 36) étendu par M. LEBESGUE au cas où la famille H est non dénombrable. Sa démonstration (IV, page 105) ne se généralise pas au cas actuel“

²¹⁸[Fré06], 26.

ein, die E-Klasse²¹⁹, in der im Unterschied zur V-Klasse für alle drei Elemente der Klasse A, B, C die Dreiecksungleichung $(A, B) \leq (A, C) + (C, B)$ gilt. Fréchet erklärte, daß er diese Ungleichung für die Umkehrung von seiner Verallgemeinerung des Weierstraßschen Satzes brauchte²²⁰.

Definition 3.13 (E-Klasse)

Der écart zweier Elemente A, B ist eine Zahl $(A, B) \geq 0$, „qui jouit des deux propriétés suivantes: a) L'écart (A, B) n'est nul que si A et B sont identiques. b) Si A, B, C sont trois éléments quelconques, on a toujours $(A, B) \leq (A, C) + (C, B)$. Lorsqu'on peut définir l'écart de deux éléments quelconques d'une certaine classe, nous dirons que celle-ci est une classe (E).“²²¹

Eine E-Klasse ist auch eine V-Klasse (mit $f(\epsilon) = 2\epsilon$) und somit auch eine L-Klasse, in der der Limesbegriff mittels des ‚écart‘ definiert wird. Fréchet's Begriff der E-Klasse ist äquivalent zum heutigen Begriff des metrischen Raumes, mit (A, B) als der Abstand zwischen A und B . Die Bezeichnung des metrischen Raumes stammt von Felix Hausdorff aus „Grundzüge der Mengenlehre“ von 1914. Im Zusammenhang mit abstrakten Mengen vermied Fréchet die geometrische Sprache. Er bezeichnete weder seine Klassen als Räume noch ihre Elemente als Punkte²²². Fréchet's Umkehrung des Satzes von Weierstraß lautet:

Satz 3.4 (Umkehrung des Satzes von Weierstraß)

„La condition nécessaire et suffisante pour que toute opération continue dans un ensemble E d'éléments d'une classe (E), I^o soit bornée dans cet ensemble, 2^o y atteigne sa limite supérieure, est que cet ensemble E soit extrémal“²²³

3.3 Poincaré über die Stetigkeit des Raumes

Henri Poincaré wurde 1854 in Nancy geboren. 1873 begann er sein Studium an der *École polytechnique*, seine Ingenieursausbildung absolvierte er an der *École de Mines*, und 1879 promovierte er in Mathematik. 1881 erhielt er einen Lehrstuhl an der Sorbonne, wo er bis zu seinem Tod 1912 tätig war. Poincaré war ein

²¹⁹Das E' steht für écart. Es bedeutet Abstand.

²²⁰Vgl. [Tay82], 254. In [Fré06], 30: „Cependant la théorie développée dans ce Chapitre montre qu'elle [die E-Klasse] n'est pas indispensable et qu'il suffit de se servir du voisinage sans avoir besoin pour cela de compliquer notablement le raisonnement.“ 50. [=nächste Abschnitt] „Une exception doit être faite cependant pour le théorème que nous allons établir maintenant: l'hypothèse qu'on opère sur une classe (E) intervient en effet d'une manière essentielle dans la démonstration“.

²²¹[Fré06], 30.

²²²vgl. [Tay82], 251.

²²³[Fré06], 31. In meiner Übersetzung: „Die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß jedes stetiges Funktional auf einer Teilmenge E einer E-Klasse erstens beschränkt sei, zweitens dort sein Supremum annehme, ist, daß E extremal [d.h. in heutiger Terminologie: abgeschlossen und kompakt] sei“.

vielseitiger Gelehrter. Nicht nur forschte er in verschiedenen Gebieten der Mathematik, sondern er lieferte auch bedeutende Beiträge in mathematischer Physik, Himmelsmechanik und zur Philosophie der Mathematik und der Geometrie. 1905 wurde Poincaré durch die Ungarische Akademie der Wissenschaften und eine internationale Jury als der bedeutendste Mathematiker Europas mit dem Bolyai-Preis ausgezeichnet – von vergleichbarer Bedeutung war lediglich David Hilbert (ihm wurde der Bolyai-Preis 1910 verliehen)²²⁴.

In diesem Abschnitt werden Aspekte von Poincarés philosophischen Beiträgen zur Raumdiskussion studiert. Es ist nicht beabsichtigt, einen vollständigen Überblick seiner philosophischen Ansichten über den Raum anzubieten; vielmehr soll der von Riesz übernommene Poincarésche Begriff des physikalischen Kontinuums im Kontext von Poincarés Philosophie der Geometrie dargestellt werden. So sind auch Poincarés Argumente gegen die mit seiner konventionalistischen Philosophie der Geometrie konkurrierenden Theorien zu präsentieren, denn vor dem Hintergrund dieser philosophischen Raumdiskussion kam Riesz auf die Idee, seine Arbeit „Die Genesis des Raumbegriffs“ zu verfassen.

3.3.1 Poincarés Philosophie der Geometrie

Poincarés zahlreiche philosophische Texte wurden zum Teil in den Büchern *La science et l'hypothèse* von 1902, *La valeur de la science* von 1905, *Science et methode* von 1908 und *Dernier Pensées* von 1912 aufgenommen²²⁵. Diese Bücher enthalten Poincarés Auseinandersetzungen mit verschiedenen empiristischen bzw. aprioristischen Positionen in der Philosophie der Geometrie²²⁶. Von den erwähnten Büchern wurden nur die ersten zwei für die vorliegende Darstellung in Betracht gezogen, da nur sie hinsichtlich Riesz' Rezeption der Poincaréschen Ideen in Frage stehen.

In seinen philosophischen Texten diskutierte Poincaré gewisse Positionen von Mill, Mach, Bergson, Le Roy und Russell²²⁷. Anhand von konventionalistischen Thesen versuchte er, sowohl zentrale Aussagen des Apriorismus als auch des Em-

²²⁴Zur Bolyai-Preis-Verleihung s. Abschnitt 2.1.

²²⁵Diese Bücher Poincarés bestehen zum größten Teil aus gesammelten Aufsätzen des Autors, die zuerst in der französischen Zeitschrift *Revue de métaphysique et de morale*, der englischen *The monist* und anderen erschienen waren, vgl. Vuillemins Vorwort zu [Poi00].

²²⁶Einen aufschlußreichen Einblick in die Raumdiskussion in Frankreich in den letzten drei Jahrzehnten des 19. Jahrhunderts gibt Nabonnand in „What is Qualitative Geometry?“ (demnächst zu erscheinen). Zu Poincarés philosophischen Beiträgen vgl. [G+96b].

²²⁷Vgl. zu Mill [Poi00], 70ff. bzw. [Poi14], 45ff.; zu Mach [Poi08], 133 bzw. [Poi10], 101ff.; zu Bergson [Poi08], 214, bzw. [Poi10], 160. Bergson (1859-1941) vertrat eine antimechanistische Philosophie, die Poincaré als antiintellektualistisch beurteilte. In *La valeur de la Science* widmete Poincaré der Philosophie von Le Roy (1870-1954) ein ganzes Kapitel, [Poi08], 213ff. bzw. [Poi10], 159ff. Vuillemin faßt *La Science et l'hypothèse* als eine kritische Studie in Antwort auf den systematischen Konventionalismus einiger Philosophen insbesondere von Le Roy auf, vgl. Vuillemins Vorworts zu [Poi00], 8.

pirismus zu widerlegen. In Termen seiner konventionalistischen Philosophie der Geometrie behauptete Poincaré, daß die Axiome der Geometrie weder wahr noch falsch, sondern lediglich aufgrund ihrer Zweckmäßigkeit ausgewählte Übereinkommen (Konventionen) seien²²⁸.

In seinem Buch *La science et l'hypothèse* schrieb Poincaré über die Euklidischen Axiome:

Les axiomes géométriques ne sont donc ni des jugements synthétiques à priori ni des faits expérimentaux. Ce sont des conventions; notre choix, parmi toutes les conventions possibles, est guidé par des faits expérimentaux; mais il reste libre et n'est limité que par la nécessité d'éviter toute contradiction.²²⁹

D.h. er betrachtete die Axiome der Euklidischen Geometrie als Konventionen, deren Auswahl frei aber nicht willkürlich ist. Die Erfahrung spielt dabei eine leitende Rolle. Das gewählte System von Konventionen darf nur keine Widersprüche hervorrufen.

Mit Russell führte Poincaré sogar eine öffentliche philosophische Debatte in der Zeitschrift *Revue de Métaphysique et de Morale*²³⁰. Russell hatte 1897 das Buch *An Essay on the Foundations of Geometry* veröffentlicht, in dem er zu zeigen versuchte, daß von den Axiomen der Euklidischen Geometrie eine bestimmte Gruppe synthetische Urteile apriori, der Rest aber Axiome empirischen Ursprungs seien. Dabei hatte Russell an einer Stelle Poincarés Konventionalismus direkt angegriffen. Russells Buch wurde 1898 in der Zeitschrift *Revue de Métaphysique et de Morale* rezensiert. Ein Jahr später erschien dort Poincarés Antwort auf Russells Kritik „Des fondements de la géométrie, à propos d'un livre de M. Russell“²³¹, wo Poincaré Russells Thesen widerlegte. Diese erste Debatte zwischen den beiden

²²⁸Der Konventionalismus ist eine philosophische Richtung, die den auf rein zweckmäßiger Übereinkunft der Wissenschaftler beruhenden Charakter von Begriffen, Definitionen, Axiomen, Hypothesen betont. So brauchen z.B. für den mathematischen Konventionalismus die Axiome keine evidenten Wahrheiten zu sein, sondern sie werden zweckmäßig ausgewählt und als Setzungen vereinbart und müssen nur dem formal widerspruchsfreien Aufbau eines Axiomensystems Genüge leisten.

²²⁹[Poi00], 75. „Die geometrischen Axiome sind also weder synthetische Urteile apriori noch experimentelle Tatsachen. Es sind auf Übereinkommen beruhende Festsetzungen; unter allen möglichen Festsetzungen wird unsere Wahl von experimentellen Tatsachen geleitet; aber sie bleibt frei und ist nur durch die Notwendigkeit begrenzt, jeden Widerspruch zu vermeiden.“ [Poi14], 51ff. Hier handelt es sich um ein Zitat aus dem Kapitel 3 von *La science et l'hypothèse*, das 1891 als Artikel in *Revue générale des Sciences pures et appliquées* unter dem Titel „Les Géométries non-euclidiennes“ erschien, vgl. Vuillemins Vorwort zu [Poi00].

²³⁰Poincarés Beiträge erschienen in den Heften vom Mai 1899 und Januar 1900, vgl. dazu Vuillemins Vorwort zu *La science et l'hypothèse* in [Poi00]. Zu Poincarés philosophischer Debatte mit Russell vgl. [Nab00].

²³¹Vgl. [Nab00], 222ff.

Wissenschaftlern setzte sich bis 1900 fort²³².

Poincarés Argumente gegen Russells Thesen waren von zweierlei Art. Die einen waren gegen den aprioristischen Charakter der geometrischen Axiome, die anderen gegen die Möglichkeit, geometrische Axiome empirisch zu belegen, gerichtet. Für Poincaré bedeutete ein synthetisches Urteil apriori, daß dieses Urteil sich uns derart als offensichtlich aufdrängt, daß wir seine Gegenaussage nicht begreifen, geschweige denn, sie im Aufbau einer Theorie benutzen können. D.h. Wären die Euklidischen Axiome synthetische Urteile apriori, dann könnten die nicht-Euklidischen Geometrien nicht als Theorien aufgebaut werden, und wir könnten sie nicht begreifen. Das ist für Poincaré offensichtlich nicht der Fall, denn, wie er zeigte, lassen sich die nicht-Euklidischen Geometrien in Termen der Euklidischen Geometrie als Sätze interpretieren. Nabonnand bemerkt richtig dazu, daß Poincarés Argumente lediglich die logische Konsistenz der Euklidischen Geometrie und der nicht-Euklidischen Geometrien zeigen, daß sich aber aus Poincarés Argumenten keine Konsequenzen hinsichtlich des in Poincarés Sinne nicht-apriorischen Charakters der Axiome der Euklidischen Geometrie ziehen lassen²³³.

Ein weiteres Argument Poincarés gegen den apriorischen Charakter der geometrischen Axiome bezieht sich auf die Rolle der Erfahrung im Entstehungsprozeß unserer Konzeption des Raumes. In diesem Zusammenhang entwickelte Poincaré eine Theorie der Genesis der Geometrie, basierend auf psycho-physiologischen Argumenten, mit der er seine konventionalistische Philosophie der Geometrie zu begründen versuchte. Auf Poincarés psycho-physiologische Theorie der Genesis der Geometrie werden wir zurückkommen. Zunächst werden Poincarés Argumente gegen den Empirismus besprochen.

Poincarés Hauptargument gegen die empiristischen Philosophien der Geometrie war, daß Informationen aus wissenschaftlichen Beobachtungen und Experimenten uns nichts über die wahre Struktur des geometrischen Raumes lehren. Zu dieser radikalen Auffassung wurde er durch seine wissenschaftliche Erfahrung im Bereich der Himmelsmechanik geleitet. Hier war er mit Newtons Konzept des absoluten Raumes konfrontiert. Zugleich bemerkte er, daß Beobachtungen absoluter Positionen und Bewegungen im Raum unmöglich sind. Er hielt deshalb die Idee des absoluten Raumes in wissenschaftlichen Beobachtungen und Experimenten für überflüssig²³⁴. Dagegen betonte er die empirische Zugänglichkeit der relativen Positionen und Bewegungen der beobachteten Körper. In diesem Zusammenhang formulierte Poincaré in *La science et l'hypothèse* sein „loi de relativité“²³⁵, das er

²³²Es erschienen noch jeweils ein Artikel von Russell bzw. Poincaré in der *Revue de Métaphysique et de Morale*. 1905 wurde die Diskussion wiederaufgenommen, vgl. [Nab00].

²³³Vgl. [Nab00], 228ff.

²³⁴Vgl. [Tor78], 325ff.

²³⁵„Les lois des phénomènes qui se produiront dans ce système pourront dépendre de l'état de ces corps et de leurs distances mutuelles; mais, à cause de la relativité et de la passivité de l'espace, elles ne dépendront pas de la position et de l'orientation absolutes du système. En d'autres termes, l'état des corps et leurs distances mutuelles à un instant quelconque dépendront

folgendermaßen erörterte:

Les expériences ne nous font connaître que les rapports des corps entre eux; aucune d'elles ne porte, ni ne peut porter, sur les rapports des corps avec l'espace, ou sur les rapports mutuels des diverses parties de l'espace.²³⁶

Mit seinem Relativitätsgesetz schlug er vor, daß die in einem isolierten System stattfindenden Phänomene nur vom Zustand der teilnehmenden Körper und von deren Beziehungen zueinander abhängen. Die wissenschaftshistorische Bedeutung von Poincarés Relativitätsgesetz kann innerhalb der Grenzen der vorliegenden Darstellung nicht im Detail diskutiert werden²³⁷. Poincarés physikalische Überlegungen über den Raum sind in diesem Zusammenhang wichtig wegen ihrer philosophischen Implikationen, daß nämlich die wahre geometrische Struktur des Raumes sich empirisch nicht ergründen läßt, d.h. wir können empirisch nicht feststellen, ob der Raum Euklidisch oder nicht-Euklidisch ist²³⁸. Daher ergibt sich die Wahl einer Geometrie für die Beschreibung physikalischer Phänomene als ein reines Übereinkommen. Es kann gleichwertig die Euklidische oder die nicht-Euklidische Geometrie von Bolya-Lobatschewski als beschreibende Geometrie gewählt werden²³⁹.

Obwohl Poincaré die Auffassung der Geometrie als empirische Wissenschaft stark bekämpfte, räumte er der Erfahrung eine Rolle bei der Entstehung der Geometrie ein: Eine unumgänglich notwendige, jedoch nur leitende, nicht determinierende Rolle²⁴⁰.

In seiner Arbeit „On the Foundations of Geometry“ aus dem Jahr 1898 entwickelte er eine psycho-physiologische Theorie der Genesis der Geometrie, in der er die Rolle der Erfahrung bei der Entstehung der Geometrie untersuchte. Diese Arbeit wird im nächsten Abschnitt (S. 105) näher diskutiert. Ausgehend von gewissen Angaben unserer Sinnesempfindungen baute Poincaré die Geometrie mit

seulement de l'état de ces mêmes corps et leurs distances mutuelles à l'instant initial, mais ne dépendront nullement de la position absolue initiale du système et de son orientation absolue initiale. C'est ce que je pourrai appeler, pour abrégé le langage, *la loi de relativité*“ [Poi00], 98. Vgl. Torrettis Diskussion [Tor78], 332ff.

²³⁶[Poi00], 101. „Die Erfahrungstatsachen lassen uns nur die gegenseitigen Beziehungen der Körper erkennen; keine von ihnen bezieht sich (oder kann sich auch nur beziehen) auf die Beziehungen der Körper zum Raume oder auf die wechselseitigen Beziehungen der verschiedenen Raumeile.“ Vgl. [Poi14], 81.

²³⁷Zu Poincarés Relativitätsgesetz verweise ich auf wissenschaftshistorische Arbeiten von Miller, Paty und Kamlah in [G+96b].

²³⁸„Ce qui importe, c'est la conclusion: l'expérience ne peut décider entre Euclide et Lobatschewsky“, [Poi00], 101.

²³⁹Daß die Wahl der Metrik ein Übereinkommen sei, hatte Poincaré 1887 in seiner Arbeit über die Axiome der Geometrie formuliert, als einen der ersten ausdrücklich formulierten Ansätze zu einer konventionalistischen Philosophie der Geometrie, vgl. [Tor78], 335ff.

²⁴⁰Vgl. [Poi14], 72.

Hilfe des Gruppenbegriffes auf. Seine Grundidee läßt sich folgendermaßen allgemein beschreiben: Auf der einen Seite steht die Erfahrung, auf der anderen ein gewisses System von Symbolen in unserem Verstand. Die Erfahrung lehrt uns durch die Wahrnehmung von Veränderungen in unserer Umgebung die Stetigkeit des Raumes²⁴¹. Dann gibt es aber einen Moment, in dem die groben Angaben der Erfahrung durch Symbole ersetzt werden müssen, um Widersprüche zu vermeiden. Bei der Auswahl von den zu verwendenden Symbolen werden wir von der Erfahrung geleitet. Jene Symbole (oder Ideen) werden von unserem Verstand geschaffen und in die geometrische Theorie eingebaut. Sie sind nicht das Produkt eines Abstraktionsverfahrens der Erfahrungsangaben, sondern gehen allein aus der Fähigkeit unseres Verstandes, Symbole zu schaffen, hervor²⁴². Diese Symbole entsprechen Übereinkommen. Für Poincaré waren es gerade diese Symbole, die die Geometrie von den empirischen Wissenschaften trennt.

Poincaré veranschaulichte die Einführung von Konventionen anhand seiner Begriffe des physikalischen und mathematischen Kontinuums: Das mathematische Kontinuum müsse das physikalische Kontinuum ersetzen, weil letzteres einen Widerspruch in sich enthalte²⁴³. In Kapitel 5 von Poincarés *La science et l'hypothèse*, das auf seiner Arbeit „On the Foundations of Geometry“ basierte, drückte er deutlich seine Folgerung gegen die empiristischen Philosophien der Geometrie aus:

On voit que l'expérience joue un rôle indispensable dans la genèse de la géométrie; mais ce serait une erreur d'en conclure que la géométrie est une science expérimentale, même en partie.²⁴⁴

Die leitende Rolle der Erfahrung beim Aufbau der Geometrie reiche nicht aus, um die Geometrie als empirische Wissenschaft auffassen zu können. Denn obwohl die Erfahrung uns bei der Auswahl der Konventionen leite, stehe uns die Auswahl selber frei (mit der einzigen Bedingung, daß sie keine Widersprüche hervorrufe). Die Zusammenführung von Konventionen kann deshalb zur Herausbildung verschiedener Systeme führen, die dennoch gleichermaßen zulässig für die Beschreibung wissenschaftlicher Tatsachen sind. Von den auf den jeweiligen Systemen aufgebauten Geometrien erweisen sich manche als weniger bequem. Poincaré war aber davon überzeugt, daß die Auswahl von Konventionen dem Prinzip des minimalen Widerstandes gegenüber den Erfahrungsangaben folge²⁴⁵.

²⁴¹Entscheidend war hier das Konzept der Gruppe der Verschiebungen, s. Diskussion ab Seite 105 zu „On the Foundations of Geometry“.

²⁴²Ich danke Philippe Nabonnand für seine Anmerkungen zu diesem Punkt.

²⁴³Vgl. [Nab00], 228ff. In der vorliegenden Arbeit s. Abschnitt 3.3.2 „Das ‚physikalische Kontinuum‘ in „On the foundations of Geometry““.

²⁴⁴[Poi00], 93. „Man sieht, daß die Erfahrung eine unumgängliche Rolle in der Genesis der Geometrie spielt; aber es würde ein Irrtum sein, daraus zu schließen, daß die Geometrie – wenn auch nur teilweise – eine Erfahrungswissenschaft sei.“ [Poi14], 72.

²⁴⁵Vgl. [Tor78], 351.

Poincarés Theorie der Genesis der Geometrie, welche er in *La science et la hypothèse* noch ein mal behandelte²⁴⁶, diente der Rieszschen Arbeit „Die Genesis des Raumbegriffs“ als Vorbild, nicht nur in Bezug auf die allgemeine Fragestellung nach der Rolle der Erfahrung in der Genesis des Raumbegriffs, sondern auch hinsichtlich ihres konzeptionellen und technischen Zugangs. Poincarés Unterscheidung zwischen den Begriffen des mathematischen und des physikalischen Kontinuums ist ein zentraler Aspekt in Riesz’ Anschluß an Poincaré. Deshalb werden diese Begriffe bei Poincaré hier näher erläutert.

3.3.2 Das ‚physikalische Kontinuum‘ bei Poincaré

Bereits 1893 hatte Poincaré in seiner Arbeit „Le continu mathématique“ das ‚physikalische‘ von dem ‚mathematischen Kontinuum‘ unterschieden²⁴⁷. In weiteren Beiträgen zu Raumdiskussion und Geometrie griff er auf diese Unterscheidung zurück. Unter anderem: 1898 in dem auf englischer Sprache erschienenen Artikel „On the Foundations of Geometry“, 1902 in seinem Buch *La science et l’hypothèse* und 1905 in der Arbeit *La valeur de la science*.

In diesem Abschnitt wird die Evolution des Poincaréschen Begriffs des physikalischen Kontinuums in den erwähnten Texten behandelt. Vorher aber werden Beiträge zur Meßbarkeit der Sinnesempfindungen diskutiert, auf die Poincaré sich bei der Definition des Begriffes des physikalischen Kontinuums stützte. Es handelt sich einerseits um psychophysikalische Experimente des Physikers Gustav Theodor Fechner, andererseits um Beiträge des Physikers und Philosophen Ernst Mach²⁴⁸, sowie des Mathematikers Jules Tannery zur Debatte über die Meßbarkeit der Sinnesempfindungen.

Nach Machs Philosophie entstand die Geometrie durch Intuition, Erfahrung und Überlegung. Für ihn entwickelt sich unsere räumliche Intuition durch Raumeempfindungen. Das bedeutet, daß unsere Raumvorstellung auf unserer physiologischen Beschaffenheit basiert. Dagegen sind geometrische Begriffe Idealisierungen unserer physikalischen Raumerfahrungen²⁴⁹. Mach las seit 1861 an der Universität Wien, sowie in öffentlichen Vorträgen über Physik für Mediziner, über physiologische Physik und über Psychophysik. Diese Vorträge enthielten eine sehr ausführliche Behandlung von Arbeiten zur Psychophysik des Mediziners, Physi-

²⁴⁶Dort im Kapitel 5, vgl. Vuillemins Vorwort zu [Poi00].

²⁴⁷In der Übersetzung von *Wissenschaft und Hypothese* von F. und L. Lindemann steht ‚physikalisches Kontinuum‘ für ‚continu physique‘; E. Weber wählte stattdessen ‚physisches Kontinuum‘ für die Übertragung der Poincaréschen Arbeit *Der Wert der Wissenschaft*. Vgl. [Poi14] und [Poi10]. Ich folge Lindemanns Übersetzung, weil diese mit der Bezeichnung von Friedrich Riesz in seiner Arbeit „Die Genesis des Raumbegriffs“ übereinstimmt, vgl. [Rie07b].

²⁴⁸Ernst Mach (1838-1916) war Professor der Physik in Graz, Prag und Wien. Er gilt heute als Vorbereiter der Relativitätstheorie. Seine Philosophie beeinflusste den Neopositivismus.

²⁴⁹Vgl. Torrettis Diskussion über Machs Philosophie der Geometrie, [Tor78], 279ff.

kers und Philosophen Gustav Theodor Fechner²⁵⁰.

Der Leipziger Universitätsprofessor Gustav Theodor Fechner²⁵¹ hatte 1860 in seinem Buch *Elemente der Psychophysik*²⁵² Resultate seiner physikalischen und psychologischen Untersuchungen präsentiert. Fechner hatte versucht, funktionelle Abhängigkeitsbeziehungen zwischen Körper und Seele exakt zu formulieren. Eines der Hauptresultate dieser Arbeit war die damals als ‚Fechnersches Gesetz‘ (später ‚Weber-Fechner-Gesetz‘) bekannte Formel, die eine logarithmische Abhängigkeitsbeziehung zwischen Reiz und Empfindung ausdrückte. Auf diese Gesetz bezog sich Poincaré 1893 in seinem Artikel „Le continu mathématique“ (ohne Fechner zu erwähnen) und später auch in seinem Buch *La science et l’hypothèse* (hier mit einem Verweis auf Fechner)²⁵³

Im Kern von Fechners psychophysischer Theorie stand ein originelles Konzept der Messung, das sich bald als umstritten erwies. Es löste eine Debatte unter den mechanistisch-neukantianisch denkenden Naturwissenschaftlern und Philosophen aus. Der Wissenschaftshistoriker Heidelberger betrachtet Fechners Meßtheorie als einen Beitrag zur Ablösung des mechanistischen Weltbilds²⁵⁴. Fechner schlug einen Begriff der Messung vor, der sich sowohl auf die Physik als auch auf die Psychophysik anwenden ließ. Er stellte allgemein notwendige und hinreichende Bedingungen für eine Größe psychischer oder physischer Natur auf, damit sie als meßbar betrachtet werden kann. Fechner nannte diese Bedingungen ‚allgemeines Meßprinzip‘²⁵⁵.

Zurück zu Machs Beziehung zu Fechners Psychophysik. Bereits in den frühen 1860er Jahren hielt Mach Fechners Theorie für fruchtbar²⁵⁶. Fechners Meßprinzip übte einen entscheidenden Einfluß auf Machs Meßtheorie aus – und damit auf die Entwicklung der modernen Physik²⁵⁷. Mach wurde zu einem bedeutenden Förderer von Fechners Psychophysik, indem er eine Position annahm, die

²⁵⁰Vgl. [Thi96], 222.

²⁵¹Fechner wurde 1801 in Särchen bei Halle geboren und starb 1887 in Leipzig. Zu Fechners Psychophysik vgl. [Hei93].

²⁵²[Fec60].

²⁵³S. folgende Unterabschnitte.

²⁵⁴Vgl. [Hei93], 218.

²⁵⁵Heidelberger faßte diese Bedingungen folgendermaßen zusammen: „**1.** Es muß gewährleistet sein, daß die Werte einer Größe in verschiedener kontinuierlicher Ausprägung vorkommen können; sie müssen als wachsend und abnehmend gedacht werden können. **2.** Es muß einen Wertunterschied geben, von dem zuverlässig beurteilt werden kann, ob er gleich ist dem Unterschied zwischen irgendwelchen zwei anderen Werten oder nicht. Dieser Unterschied muß in vielen Kopien herstellbar oder auffindbar sein. **3.** Es muß herausgefunden werden können, unter welchen Umständen sich eine Größe im „Nullzustand“ befindet.“ [Hei93], 217ff.

²⁵⁶Aus der Korrespondenz zwischen Mach und Fechner geht hervor, daß Mach bereits in den frühen 1860er Jahren beabsichtigte, Fechner eine seiner Veröffentlichungen zu widmen. Eine solche Widmung kam nicht zustande. Fechner hatte ihm in einem Brief davon abgeraten, und wahrscheinlich folgte Mach Fechners Rat, vgl. [Thi96], 223.

²⁵⁷Vgl. [Hei93], 218.

Fechners psychischer Messung Priorität gegenüber der physikalischen Messung einräumte. Heidelberger faßt Machs Position folgenderweise zusammen: „Nicht die Wissenschaft der Psychophysik ist physiologisch umzuinterpretieren, damit sie zur gängigen mechanistischen Wissenschaftstheorie paßt, sondern die gängige Wissenschaftstheorie muß sich ändern, damit sie zur Psychophysik paßt! Anstatt die psychische Messung nach den Prinzipien der physikalischen Messung zu beurteilen, muß die Messung physikalischer Größen im Sinne von Fechners Meßprinzip interpretiert werden.“²⁵⁸.

Während Fechners Theorie bei Mach Unterstützung fand, stieß sie in Frankreich auf starke Kritik, unter anderem von Jules Tannery.

Jules Tannery hatte 1875 eine Debatte in der Pariser *Revue Scientifique* über Fechners Idee der Messung psychischer Größen angefaßt²⁵⁹. Grundsätzlich kritisierte Tannery daran folgende Aspekte: Zum einem bemerkte er, daß sowohl der Begriff der Summe, als auch der der Differenz von Empfindungen keinen Sinn haben und daß Fechner deren Bedeutung nicht erkläre. Ferner wies Tannery darauf hin, daß es den Empfindungen an Homogenität mangle. Dies illustrierte er mit folgendem Beispiel: Bei der Erhöhung der Wassertemperatur ist die Ausgangsempfindung, nämlich Wärme, nicht derselben Art, wie nach der Überschreitung der Schmerzgrenze, wo die Empfindung dann Schmerz ist. Mit dem Hinweis auf diese Probleme begründete Tannery seine Meinung, Fechners logarithmische Gleichung sei nur sinnvoll, wenn sie als eine definitorische Konvention statt als ein empirisches Gesetz angenommen wird. Dadurch stellte sich Fechners Formel für Tannery nicht als völlig wertlos heraus. Deren Verwendung als Definition stellte sich Tannery so vor, wie in der Physik das Thermometer als Definition der Temperatur verwendet wird²⁶⁰.

Die von Tannery initiierte Debatte in der *Revue Scientifique* wurde in der *Revue Philosophique* eifrig weitergeführt. Auch Bergson nahm an dieser Debatte teil, so auch die Neukantianer Delboeuf und Wundt²⁶¹.

Das ‚physikalische Kontinuum‘ in „Le continu mathématique“

In seinem Artikel „Le continu mathématique“ beschäftigte sich Poincaré mit den Fragen, was eigentlich dieses Kontinuum sei, mit dem die Mathematiker arbeiten, und ob der Begriff des mathematischen Kontinuums der Erfahrung entnommen worden sein könne²⁶².

Poincaré verstand hier das ‚mathematische Kontinuum‘ als die Menge der re-

²⁵⁸Vgl. [Hei93], 271.

²⁵⁹Tannery (1848-1910) war 1875 ein frisch promovierter Mathematiker. Zu Tannerys Einwänden gegen die Quantifizierung des Psychischen vgl. [Hei93], 237ff.

²⁶⁰Vgl. [Hei93], 240.

²⁶¹Vgl. [Hei93], 238ff.

²⁶²Vgl. [Poi93], 26 und 29.

ellen Zahlen schlechthin. Er hielt deshalb die Begriffsbildung des mathematischen Kontinuums für eine Aufgabe der Analytiker und nicht der Geometer. Er verwies auf eine Monographie zur Analysis von seinem Kollegen Jules Tannery, in der der Autor sich mit dem Konzept des mathematischen Kontinuums auseinandersetzte²⁶³.

Nachdem Poincaré kurz die Definition der reellen Zahlen anhand von Dedekinds Schnitten erläuterte²⁶⁴, ging er zur Diskussion des Zusammenhangs zwischen dem mathematischen Kontinuum und der Erfahrung über. Poincaré betrachtete das mathematische Kontinuum, d.h. die reellen Zahlen, als ein besonderes System von Symbolen, das durch die Fähigkeit des Verstandes, Symbole zu schaffen, erfunden wurde. Dabei bestand die Rolle der Erfahrung lediglich darin, dem Verstand die Veranlassung zur Einführung von Symbolen (Konventionen) gegeben zu haben²⁶⁵. Wie er sich diese Veranlassung vorstellte, wird weiter unten erläutert. Für Poincaré kann das Konzept des mathematischen Kontinuums nicht der Erfahrung entnommen sein, denn das würde die Meßbarkeit unserer Empfindungen bedeuten. Letzteres hielt er für ausgeschlossen. Es ist möglich, daß Poincaré in dieser Hinsicht von Tannery beeinflußt wurde, der, wie oben erläutert, Fechners Versuche der Messung von Empfindungen scharf kritisierte. Ein genauer Hinweis liegt aber nicht vor.

Poincaré wies in „Le continu mathématique“ auf Fechners Experimente hin, jedoch ohne Fechners Namen zu erwähnen. Er bemerkte lediglich, daß es „in neuerer Zeit“ Versuche gegeben hatte, unsere Empfindungen zu messen, aus denen sogar ein Gesetz über die Abhängigkeit der Empfindung vom Reiz (das Fechnersche Gesetz) hergeleitet wurde. Zu diesen Bemühungen meinte Poincaré, eine genauere Überprüfung derselben Experimente könnte die Unmöglichkeit der Meßbarkeit unserer Empfindungen zeigen²⁶⁶. Um dies zu illustrieren, zog er als Beispiel ein solches Experiment heran:

On a observé par exemple qu'un poids A de 10 grammes et un poids B de 11 grammes produisaient des sensations identiques, que le poids

²⁶³Vgl. [Poi93], 26.

²⁶⁴Vgl. [Poi93], 28ff. In seinem Artikel „Le continu mathématique“ schrieb Poincaré ausgerechnet Kronecker dieses Konstruktionsverfahren zu, s. Abschnitt 4.2.1. Diesen Fehler revidierte er bei der Aufnahme des hier besprochenen Aufsatzes als Kapitel 2 seines Buches *La science et l'hypothèse*.

²⁶⁵Vgl. [Poi93], 32.

²⁶⁶„On en vient alors à se demander si la notion du continu mathématique n'est pas tout simplement tirée de l'expérience. Si cela était, les données brutes de l'expérience, qui sont nos sensations, seraient susceptibles de mesure. On pourrait être tenté de croire qu'il en est bien ainsi, puisque l'on s'est, dans ces derniers temps, efforcé de les mesurer et que l'on a même formulé une loi d'après laquelle la sensation serait proportionnelle au logarithme de l'excitation.“ [Poi93], 29. Das Zitat aus Poincarés Artikel „Le continu mathématique“ ist, bis auf die Ergänzung „[...] une loi, connue sous le nom de loi de Fechner...“, mit einer Passage aus *La science et l'hypothèse* ([Poi00], 51) identisch. Vgl. auch auf deutsch [Poi14], 22, sowie Lindemanns Anmerkungen, ibid. 255.

B ne pouvait non plus être discerné d'un poids C de 12 grammes, mais que l'on distinguait facilement le poids A du poids C. Les résultats bruts de l'expérience peuvent donc s'exprimer par les relations suivantes:

$$(3.2) \quad A = B, \quad B = C, \quad A < C$$

qui peuvent être regardées comme la formule du *continu physique*. Il y a là, avec le principe de contradiction, un désaccord intolérable et c'est la nécessité de le faire cesser qui nous a contraint à inventer le continu mathématique. On est donc forcé de conclure que cette notion a été créée de toutes pièces par l'esprit, mais que c'est l'expérience qui lui en a fourni l'occasion.²⁶⁷

An dieser Passage sind dreierlei Aspekte bemerkenswert. Der erste betrifft Poincarés Interpretation des hergeleiteten Widerspruchs. Er behauptete, der Widerspruch zeige den Widerstand unserer Empfindungen, sich Messungen zu fügen. Es ist daher möglich, daß Poincaré sich hier an Tannerys Kritik an Fechner orientierte, statt, wie Mach es vorgeschlagen hatte, den Fechnerschen Messungen Priorität gegenüber den klassischen physikalischen Messungen einzuräumen. Die Möglichkeit der Messung eines Phänomes hieß im klassischen Sinne, und so auch bei Poincaré, dem Phänomen einen eindeutigen Zahlenwert zuordnen zu können²⁶⁸. In seiner Argumentation setzte Poincaré dies mit den Werten von A, B und C voraus²⁶⁹. Dann versuchte er, die direkten Erfahrungsangaben mathematisch auszudrücken: Sind die Gewichte A und B erfahrungsgemäß ununterscheidbar, dann sind ihre numerischen Werte gleich, also $A=B$, sind die Gewichte A und C erfahrungsgemäß unterscheidbar, dann sind ihre numerischen Werte verschieden, und als Zahlen stehen sie in einer der Ordnungsrelationen $A < C$ oder $C < A$. Ohne weitere Rechtfertigungen setzte Poincaré die richtige

²⁶⁷Die Hervorhebung ist von Poincaré, vgl. [Poi93], 29. In *Wissenschaft und Hypothèse* heißt es: „Man hat z.B. beobachtet, daß ein Gewicht A von zehn Gramm und ein Gewicht B von elf Gramm identische Empfindungen hervorriefen, daß das Gewicht B ebensowenig von einem zwölf Gramm schweren Gewichte C unterschieden werden konnte, daß man aber leicht das Gewicht A vom Gewichte C auseinanderhielt. Die groben Erfahrungsergebnisse lassen sich also durch folgende Beziehungen ausdrücken: $A = B$, $B = C$, $A < C$, und diese können als Formulierung des physikalischen Kontinuums betrachtet werden. Das ist aber absolut unverträglich mit dem Prinzip des Widerspruchs, und die Notwendigkeit, diesen Mißklang zu beseitigen, hat uns dazu geführt, das mathematische Kontinuum zu erfinden. Man wird also zu dem Schlusse genötigt, daß dieser Begriff in allen seinen Teilen durch den Verstand geschaffen ist, aber daß die Erfahrung uns dazu Veranlassung gegeben hat.“ [Poi14], 22ff.

²⁶⁸Typischerweise ist dieser Zahlenwert eine Proportion bezüglich einer Maßeinheit.

²⁶⁹Poincaré setzte hier implizit voraus, es gäbe ein derart präzises Instrument bzw. irgend ein Meßverfahren, nachdem die Gewichte $A=10$ Gramm, $B=11$ Gramm und $C=12$ Gramm festgelegt wurden, d.h. er setzte die Meßbarkeit der Gewichte A, B und C und die Möglichkeit einer Zuordnung eines numerischen Wertes voraus.

Relation $A < C$ ein²⁷⁰. Die widersprüchliche Formel bedeute eine Verletzung der Transitivitätsrelation im Zahlensystem und impliziere damit die Unmöglichkeit der Messung unserer Empfindungen. Da aber die Beziehung der ‚Ununterscheidbarkeit‘ nicht transitiv ist, die Beziehung der ‚Gleichheit‘ aber schon, war Poincarés Übersetzung der Erfahrungsangaben in die mathematischen Beziehungen 3.2 von vornherein problematisch²⁷¹. Auf jedem Fall lernte Riesz von den Formeln 3.2, daß Poincarés Mathematisierung der direkten Erfahrungsangaben ‚unterscheidbar‘ und ‚ununterscheidbar‘ unglücklich war, und versuchte selbst, eine andere Mathematisierung zu finden²⁷².

Die zweite Bemerkung betrifft Poincarés Konzeption des ‚physikalischen Kontinuums‘, die er mit dem Beispiel über die Gewichte nur andeutete. Auch in späteren Arbeiten beschrieb er das physikalische Kontinuum im wesentlichen anhand von Beispielen. Am deutlichsten formulierte er es 1905 in *La valeur de la science*, aber eine genaue Definition gab er weder in „Le continu mathématique“ noch später. Wichtig ist zu bemerken, daß Poincaré das Experiment über die Gewichte ausnutzte, um die intrinsische Stetigkeitseigenschaft des physikalischen (Größen-)Kontinuums zu fassen. Damit stellte er eine Verbindung zwischen seiner Idee des physikalischen Kontinuums und dem Problem der Meßbarkeit unserer Empfindungen her.

Die dritte Bemerkung zur oben zitierten Passage bezieht sich auf Poincarés Behauptung, daß die Erfahrung die Erfindung des mathematischen Kontinuums veranlaßte. In Poincarés Darstellung wurde die Stetigkeitsform des physikalischen Kontinuums durch die Erfahrung vermittelt. Diese Stetigkeitsform ist eine ganz andere als die des mathematischen Kontinuums, denn für Poincaré ist letzteres der Inbegriff der reellen Zahlen, aufgefaßt als eine Ansammlung von Individuen, die voneinander ‚getrennt‘ sind, während die Elemente des physikalischen Kontinuums ‚aufeinander übergreifen‘ und dabei Widersprüche hervorrufen²⁷³. Aufgrund dieser Widersprüche sei es nicht vorstellbar, „daß zwei Größen, welche

²⁷⁰Er machte also dabei von seinen Kenntnissen der numerischen Werte von A und C gebraucht, während er bei der Gleichsetzung $A=B$ so tat, als wüßte er nicht, daß die entsprechenden numerischen Werte nicht gleich sind.

²⁷¹Dieser leicht festzustellenden Übersetzungsfehler Poincarés wird von Torretti eingehend diskutiert, vgl. [Tor78], 345ff. Torretti schlägt dabei eine umstrittene Charakterisierung von Poincarés physikalischem Kontinuum vor.

²⁷²S. Abschnitt 6.2. Durch eine Veränderung des Begriffs der Messung, beispielweise durch deren Entkopplung vom klassischen Größenbegriff oder, wie Torretti es vorgeschlagen hat, durch die Zulassung anderer Relationen, lassen sich Poincarés Formeln widerspruchsfrei umschreiben, vgl. [Tor78] 346.

²⁷³Um den Unterschied der zugrunde liegenden Stetigkeit des physikalischen Kontinuums zu veranschaulichen, verglich Poincaré dieses Kontinuum mit einem nicht aufgelösten Nebelfleck, „den auch die vollkommensten Instrumente nicht auflösen können“, während das mathematische Kontinuum eher mit einer Leiter vergleichbar ist, „deren unendlich viele Sprossen (kommensurable und inkommensurable Zahlen) voneinander getrennt sind, statt aufeinander überzugreifen“, vgl. [Poi10], 51.

einer und derselben dritten gleich sind, nicht untereinander gleich sein sollen, und dadurch werden wir dazu gebracht vorauszusetzen, daß A sowohl von B als von C verschieden sei, daß aber die Unvollkommenheit unserer Sinne uns nicht erlaube, sie auseinanderzuhalten“²⁷⁴. Es geht aus diesem Zitat hervor, wie Poincaré sich die Rolle der Erfahrung bei der Konzeption des mathematischen Kontinuums vorstellte, nämlich als veranlassend, während es die Rolle des Verstandes ist, Begriffe zu schaffen.

Das ‚physikalische Kontinuum‘ in „On the Foundations of Geometry“

In seiner Arbeit „On the foundations of geometry“²⁷⁵ aus dem Jahr 1898 versuchte Poincaré zu zeigen, wie der Raumbegriff in der Geometrie zwar mit Hilfe der Erfahrung entstanden, jedoch nicht ausschließlich der Erfahrung entnommen sei. Er entwarf eine Theorie der Genesis der Geometrie, die sich auf verschiedene Wahrnehmungstheorien stützte²⁷⁶.

Zu Beginn seiner Arbeit erläuterte Poincaré die Frage, warum Angaben unserer Sinnesempfindungen, einzeln betrachtet, keine Information über den Raum geben. Anschließend konstruierte er eine besondere Gruppe, die sogenannte Gruppe der Verschiebungen, mit deren Hilfe er eine Grundlegung der Geometrie vorschlug, die auf dem Gruppenbegriff basierte²⁷⁷.

Den Begriff der Verschiebung bildete er ausgehend von Überlegungen über die Wahrnehmung von Veränderungen in unserer Umgebung. Er differenzierte erst zwei Sorten von Veränderungen: die „external changes“ und die „internal changes“. Die ersten sind von unserem Willen unabhängig und nicht von Muskulaturempfindungen begleitet; bei der zweiten Sorte ist es umgekehrt. Dann behauptete Poincaré, in manchen Fällen lassen sich diejenigen Eindrücke, die durch äußere Veränderungen modifiziert worden sind, durch innere Veränderungen wiederherstellen. In solchen Fällen sagte er, die äußeren Veränderungen lassen sich durch die inneren korrigieren²⁷⁸. Diejenigen Veränderungen, die sich durch „internal changes“ korrigieren lassen, nannte er Verschiebungen. Ein Beispiel einer Verschiebung liefert ein beobachtetes Objekt, das sich nach links bewegt und das wir mit den Augen verfolgen können. Die Bewegung des Objekts bildet eine

²⁷⁴[Poi14], 23. Im Artikel „Le continu mathématique“ schrieb Poincaré: „Nous ne pouvons croire que deux quantités égales à une même troisième ne soient pas égales entre elles, et c’est ainsi que nous sommes amenés à supposer que A est différent de B et B de C, mais que l’imperfection de nos sens ne nous permet pas de les discerner,“ [Poi93], 30.

²⁷⁵[Poi98]. Poincarés französische Originalversion von „On the Foundations of Geometry“ wurde von T.J. McCormack ins Englische übersetzt.

²⁷⁶Vgl. Torrettis Diskussion dieser Arbeit in [Tor78], 340ff. Die Berücksichtigung der Psychologie und der Physiologie in der Raumdiskussion in den 1880er Jahren wird von Nabonnand in „What is Qualitative Geometry?“ (demnächst zu erscheinen) diskutiert.

²⁷⁷Vgl. [Tor78], 344.

²⁷⁸„The external change, accordingly, can be *corrected* by an internal change“, [Poi98], 7

äußere Veränderung und unsere Verfolgung mit den Augen eine innere, die die ursprüngliche Sehempfindung im Zentrum unserer Netzhaut wiederherstellt²⁷⁹. Poincarés Verknüpfung der Elemente der Gruppe, also die Beschreibung der Wirkung einer Verschiebung auf eine andere, erfolgte durch ein sehr komplexes Verfahren, das hier nicht weiter diskutiert wird. Seine Gruppenkonstruktion wurde von Torretti 1978 und kürzlich von Nabonnand erläutert²⁸⁰.

Poincaré wandte sich dann der Frage zu, wie ‚stetig‘ die Gruppe der Verschiebungen sei, d.h. wie stetig sich die Größen der Verschiebungen verändern. Er erläuterte: Nehmen wir an, nD bezeichne die n -malige Wiederholung der Verschiebung D . Ist D eine sehr kleine Verschiebung, dann kann es vorkommen, daß wir $9D$ von $10D$ sowie $10D$ von $11D$ nicht unterscheiden können, wohl aber $9D$ von $11D$. Dies übersetzt in eine Formel heiße:

$$(3.3) \quad 9D = 10D, \quad 10D = 11D, \quad 9D < 11D$$

Diese widersprüchliche Formel drücke die ‚physical continuity‘ (hier von ihm auch ‚sensible continuity‘ genannt) aus²⁸¹. Die Formeln 3.3 und 3.2 sind sich sehr ähnlich, aber aus der Formel 3.3 geht deutlicher hervor, daß Poincaré die Erfahrungsangaben als Größen interpretierte, die sich mittels der Relationen ‚=‘ und ‚<‘ vergleichen lassen müssen. Zugleich betont der Ausdruck 3.3, daß es an unseren groben Empfindungen liegt, unterschiedliche Dinge für ununterscheidbar zu halten²⁸². Das führte Poincaré schließlich dazu, die ‚physical continuity‘ der Gruppe der Verschiebungen durch ‚mathematical continuity‘ zu ersetzen²⁸³. Poincaré bemerkte, daß dieser Prozeß notwendigerweise stattfindet, immer wenn Messungen von Erfahrungstatsachen vorgenommen werden²⁸⁴. Er betrachtete hier zwei Formen von ‚mathematical continuity‘. Modern ausgedrückt entspricht die eine der Struktur der Menge der rationalen Zahlen gesehen als unendlicher, in sich dicht geordneter Körper. Die andere gleicht der der Menge der reellen Zahlen.

²⁷⁹Vgl. [Poi98], 7.

²⁸⁰Vgl. [Tor78], 340ff. und „La genèse psycho-physiologique de la géométrie selon Poincaré“ von Philippe Nabonnand (Archives H. Poincaré – Université de Nancy 2). Nabonnands Artikel ist eine Ausarbeitung gewisser Abschnitte seiner Veröffentlichung [Nab00].

²⁸¹Vgl. [Poi98], 14ff.

²⁸²Zur problematischen Herleitung beider Formeln s. Diskussion auf Seite 103.

²⁸³Aus McCormacks Bezeichnung „physical continuity“ geht klar hervor, daß die Formel 3.3 sich auf eine Eigenschaft der Gruppe der Verschiebungen bezieht. Hier ist also nicht die Rede von dem ‚physikalischen Kontinuum‘. Das Konzept des ‚physikalischen Kontinuums‘ kommt bei Poincaré erst im Abschnitt über den Begriff des Punktes vor, in dem er eine anschauliche und deshalb auch sehr vage Darstellung von dem, was er 1902 und 1903 als mehrdimensionales physikalisches Kontinuum auffaßte, lieferte. Vgl. [Poi98], 28ff. und [Joh81], 102ff. Zu den verschiedenen Dimmensionsbegriffen Poincarés vgl. [Joh81], 86ff.

²⁸⁴„Severing our sensation from that something which we call their cause, we assume that the something in question conforms to the model which we carry about in us, and that our sensations deviate from it only on consequence of their crudenes. The same process recurs every time we apply measurement to the data of the senses“, [Poi98], 14ff.

Weiterhin untersuchte Poincaré die Gruppe der Verschiebungen auf unterschiedliche Eigenschaften, die er als ‚durch die Erfahrung suggeriert‘ bezeichnete. Anschließend behauptete er, daß die Gruppe der Verschiebungen, versehen mit gewissen zusätzlichen Eigenschaften, jeweils isomorph zu einer jener drei Gruppen sei, die die klassischen Geometrien charakterisieren²⁸⁵.

Mit dieser Theorie der Genesis der Geometrie illustrierte Poincaré seine Philosophie der Geometrie: Die Geometrie sei keine empirische Wissenschaft, denn die Erfahrung spiele nur eine beschränkte Rolle beim Aufbau der Geometrie. Ihre leitende Funktion sei zwar wesentlich, jedoch müssen die Erfahrungsangaben durch Symbole ersetzt werden, um Widersprüche zu vermeiden. Die Einführung von Symbolen bedeutete die Einführung von Konventionen, wie jene, daß die Gruppe der Verschiebungen ähnlich stetig sei wie die Menge der reellen Zahlen mit der gewöhnlichen Topologie, d.h. mit ihrer gewöhnlichen Stetigkeitsstruktur. Dann seien auch weitere Konventionen miteinzubeziehen, um aus der aufgebauten Geometrie eine der drei klassischen Geometrien zu erhalten²⁸⁶. Dabei erfolge die Auswahl der Konventionen in Anlehnung an die Erfahrung und gemäß ihrer Zweckmäßigkeit²⁸⁷. Gegen die aprioristischen Philosophien der Geometrie betonte Poincaré in einer Schlußbemerkung, daß die Axiome der Geometrie keine Urteile apriori sondern eben Konventionen seien²⁸⁸.

Das ‚physikalische Kontinuum‘ in *La science et l’hypothèse*

In seinem Buch *La science et l’hypothèse*²⁸⁹ setzte Poincaré das Kapitel II „La grandeur mathématique et l’expérience“ aus dem fast unveränderten Inhalt seines oben besprochenen Artikels „Le continu mathématique“ und einem zusätzlichen vierreihigen Abschnitt über das physikalische und mathematische Kontinuum von mehreren Dimensionen zusammen. Neu in dieser Darstellung war zum einen der Verweis auf Fechner als Autor jenes Gewichtsexperimentes, mit dem Poincaré seine Idee des physikalischen Kontinuums in „Le continu mathématique“ illustriert hatte. Zum anderen spezifizierte Poincaré den Begriff des physikalischen Kontinuums und führte das Konzept des ‚Querschnittes‘ ein, mit dessen Hilfe er die Dimension eines physikalischen Kontinuums studierte. In diesem Zusammenhang sprach er zum ersten Mal von physikalischen Kontinua im Plural.

Poincaré grenzte seine Konzeption des physikalischen Kontinuums dadurch ein, daß er die Elemente und die Stetigkeitsstruktur des physikalischen Kontinuums charakterisierte. Diese Charakterisierungen dienten zur Verallgemeinerung desjenigen Konzepts des physikalischen Kontinuums, das er in „Le continu

²⁸⁵Vgl. [Tor78], 348ff. und [Nab00].

²⁸⁶Vgl. [Tor78], 340ff.

²⁸⁷Vgl. [Poi98], 42ff.

²⁸⁸Vgl. [Poi98], 38.

²⁸⁹[Poi02]

mathématique“ diskutiert hatte. Nach Poincaré besteht jedes Element des physikalischen Kontinuums aus einer Gesamtheit von Empfindungen. Somit gilt im physikalischen Kontinuum: Entweder können wir je zwei seiner Elemente voneinander unterscheiden, oder wir können es nicht. Er schrieb:

Considérons deux ensembles quelconques de sensations. Ou bien nous pourrons les discerner l'un de l'autre, ou bien nous ne le pourrons pas [...]. Appelons *élément* un de ces ensembles de sensations.²⁹⁰

Offen blieb hier, was er unter einer Gesamtheit von Empfindungen verstand, denn in diesem Kapitel gab er dazu keine weiteren Erklärungen oder Beispiele. Im übrigen argumentierte er in der Diskussion des mehrdimensionalen physikalischen Kontinuums eher abstrakt mathematisch als philosophisch. Poincarés Auffassung der Gesamtheiten von Empfindungen als ‚Elemente‘ in einem mengentheoretischen Sinne deutet klarerweise auf eine abstrakte mathematische Behandlung des Problems der Dimension eines physikalischen Kontinuums hin. Wichtig für seine Diskussion waren deshalb die ‚Gesamtheiten von Empfindungen‘ nicht in ihrer inhaltlichen Bedeutung, sondern deren Beziehungen untereinander.

Zur Stetigkeit des physikalischen Kontinuums formulierte Poincaré:

Cela posé, un système d'éléments formera un *continu*, si l'on peut passer d'un quelconque d'entre eux à un autre également quelconque, par une série d'éléments consécutifs enchaînés de telle sorte que chacun d'eux ne puisse se discerner du précédent.²⁹¹

Poincarés Charakterisierung der Kontinuität des physikalischen Kontinuums ähnelt Cantors Begriff der zusammenhängenden Punktmenge²⁹². Ein wichtiger Unterschied liegt jedoch darin, daß Poincaré von metrischen Betrachtungen abgesehen hatte.

Damit eine Teilmenge des physikalischen Kontinuums selbst ein Kontinuum bildet, verlangte Poincaré, daß es zu jedem Elementenpaar eine Reihe von aufeinander folgenden (miteinander verketteten) Elementen der Teilmenge gibt, mit

²⁹⁰[Poi00], 58. „Betrachten wir irgend zwei Gesamtheiten von Empfindungen. Entweder wir können sie voneinander unterscheiden, oder wir können es nicht [...]. Wir wollen eine dieser Gesamtheiten von Empfindungen *Element* nennen.“ [Poi14], 32.

²⁹¹[Poi00], 59. „Wenn wir an dieser Vorstellung festhalten [der zufolge sich die Elemente des physikalischen Kontinuums als ein Nebelflecke, die mathematischen Punkte aber wie Sterne verhalten], so wird ein System von Elementen ein Kontinuum bilden, wenn man von irgend einem Elemente zu irgend einem anderen durch eine Reihe von aufeinander folgenden Elementen hindurch übergehen kann, unter denen keines sich vom vorhergehenden unterscheiden läßt.“ [Poi14], 32.

²⁹²Für Cantor war eine Punktmenge T zusammenhängend, „wenn für je zwei Punkte t und t' derselben bei vorgegebener beliebig kleiner Zahl ϵ immer eine *endliche* Anzahl Punkte t_1, t_2, \dots, t_ν von T auf mehrfache Art vorhanden sind, sodaß die Entfernungen $\overline{tt_1}, \overline{t_1t_2}, \overline{t_2t_3}, \dots, \overline{t_\nu t'}$ sämtlich kleiner sind als ϵ .“ Vgl. Cantors „Über unendliche lineare Punktmannigfaltigkeiten“ 5. Teil (1883), hier aus [Can32], 194.

der Eigenschaft, daß keines sich vom vorhergehenden unterscheiden läßt. Mit dieser Bedingung der ‚Kettenbildung‘ (enchaînés) charakterisierte er nicht nur die Stetigkeit des physikalischen Kontinuums, sondern führte auch die Definition von ‚Subkontinua‘ ein²⁹³.

Poincaré nannte ‚Querschnitt‘ (coupure) eines Kontinuums C jede beliebige Teilmenge von C . Die Dimension des physikalischen Kontinuums C ist eins, wenn C durch einen Querschnitt zerlegt werden kann, der weder ein Kontinuum noch mehrere Kontinua bildet. ‚ C durch einen Querschnitt zu zerlegen‘ hieß für Poincaré, daß C ohne die Elemente des Querschnittes kein Kontinuum mehr bildet. Wenn C sich aber nur mittels eines Querschnittes zerlegen läßt, der selbst ein Kontinuum bildet, dann ist C ein Kontinuum von mehreren Dimensionen. C ist von Dimension n , wenn für die Zerlegung von C Querschnitte der Dimension $n - 1$ genügen. Poincaré arbeitete später diesen Dimensionsbegriff in seinen Beiträgen zur Analysis Situs aus²⁹⁴.

Das ‚physikalische Kontinuum‘ in *La valeur de la science*

1905 erschien Poincarés Buch *La valeur de la science*, nur drei Jahre nach *La science et l’hypothèse*. Im Kapitel III „La Notion d’Espace“ behandelte er nochmals das Thema des physikalischen Kontinuums von mehreren Dimensionen. Der Kontext diesmal war eine Diskussion dessen, was Poincaré ‚continuum amorphe‘ (gestaltloses Kontinuum) nannte, nämlich die gemeinsame Grundlage der Euklidischen und der nicht-Euklidischen Geometrie, denn aus diesem ursprünglich gestaltlosen Kontinuum könne sowohl die Euklidische als auch die nicht-Euklidische Raumform hervorgehen. Dieses Kontinuum besitze zahlreiche Eigenschaften, die von jedem Maßbegriff frei und die deshalb Studienobjekte der echten qualitativen Geometrie, der Analysis Situs seien²⁹⁵. Poincaré ging es also um die Diskussion eines mathematischen Objekts.

Nachdem er mit einem Verweis auf sein Buch *La science et l’hypothèse* den Unterschied zwischen dem mathematischen und dem physikalischen Kontinuum erläutert hatte, führte er unter der Bezeichnung des ‚zusammenhängenden Kontinuums‘ (d’un seul tenant) jene Stetigkeitseigenschaft ein, mit der er in *La science et l’hypothèse* das Kontinuum charakterisiert hatte, nämlich, daß für jedes Elementenpaar A, B des Kontinuums C sich eine Reihe von Elementen E_1, E_2, \dots, E_n aus C finden lasse, so daß E_i von E_{i-1} , A von E_1 und B von E_n

²⁹³Die Bezeichnung ‚Subkontinua‘ ist nicht von Poincaré. Vgl. [Poi00], 58ff; [Poi14], 32ff.

²⁹⁴Vgl. [Poi00], 59; [Poi14], 33. Nach Johnsons Darstellung der Entwicklung des Dimensionsbegriffes, entstand dieser Poincarésche Dimensionsbegriff im Zusammenhang mit Poincarés Arbeiten in Analysis Situs aus dem Zeitraum 1895-1904. Eine erste Ausarbeitung veröffentlichte Poincaré in „L’espace et ses 3 dimensions“ [Poi03]. Sein Rückgriff auf Methoden der Analysis Situs signalisierte einen, modern beschrieben, Übergang von seinem früheren gruppentheoretischen zu einem topologischen Zugang zum Dimensionsbegriff, vgl. [Joh81], 102ff.

²⁹⁵Vgl. [Poi08], 65ff. und [Poi10], 48ff.

ununterscheidbar seien. Anschließend definierte er seinen Begriff des Querschnittes und der Dimension *eines* physikalischen Kontinuums, so wie er es bereits drei Jahre zuvor in *La science et l'hypothèse* getan hatte.

Poincaré stellte hierbei nicht in Frage, daß das mehrdimensionale physikalische Kontinuum zusammenhängend ist. Seine Charakterisierung dieser Eigenschaft hatte einen konkreten Grund: Er benutzte diese Eigenschaft, um den Dimensionsbegriff eines physikalischen Kontinuums zu definieren.

Kapitel 4

Zur mathematischen Kultur in Göttingen

4.1 Institutionen, Forschung und Lehre

4.1.1 Göttingen als wissenschaftliches Zentrum

Im 19. Jahrhundert zeichneten sich Berlin und Göttingen unter den deutschen mathematischen Institutionen als führende Zentren auf hohem Forschungsniveau aus. Ihr Kampf um die Spitzenposition durchlief von der zweiten Hälfte des 19. und bis zu Beginn des 20. Jahrhunderts verschiedene Etappen, in denen ihr Einfluß und ihre Machtbeziehungen unterschiedlich ausgeprägt waren¹.

Zwischen 1855 und 1892 dominierte die Berliner Mathematik. In dieser Zeit glänzte Berlin aufgrund des Wirkens von Ernst Kummer, Karl Weierstraß und Leopold Kronecker, deren Forschung die Mathematik auf internationalem Niveau beeinflusste². Kummer zeichnete sich als Zahlentheoretiker aus, Weierstraß als Analytiker. Kronecker lieferte herausragende Ergebnisse in der Algebra, der Zahlentheorie und der Funktionentheorie. Entscheidend für den Bedeutungsgewinn der Berliner Mathematik war auch die Ausbildung zahlreicher Mathematiker. Viele bedeutende Mathematiker der folgenden Generation hatten in Berlin studiert. Allein zu Weierstraß' Schülern zählten Georg Cantor, Hermann Armandus Schwarz, Leo Königsberger, Gösta Mittag-Leffler und Sofia Kowalewskaja³. Kummer, Weierstraß und Kronecker vermittelten ihren Studenten die damaligen

¹Vgl. Rows Diskussion über die Göttinger und die Berliner mathematische Tradition und deren Konkurrenz in [Row00].

²Zum Einfluß auf die Mathematik in Frankreich vgl. [Arc02].

³Zur Geschichte der Mathematik an der Berliner Universität vgl. [Bie88]. Zum Einfluß von Kummer, Kronecker und Weierstraß vgl. [Edw98], [Böl98] und [Hau98] im Buch „Mathematics in Berlin“ [Beg98]. Vgl. dort auch [Row98], eine Studie zur Berliner mathematischen Kultur zwischen 1810 und 1933.

Ideale der Berliner Tradition, nämlich die Reinheit und Strenge der Mathematik, für die der sogenannte Berliner Stil berühmt wurde. Der mächtige Einfluß der Berliner Mathematiker dieses Zeitraumes manifestierte sich deutlich darin, daß etwa in Preußen fast alle Lehrstühle der Mathematik von Berliner Absolventen besetzt waren⁴.

In den 1890er Jahren fand eine Veränderung der Machtkonstellation innerhalb der mathematischen Landschaft in Deutschland statt, die durch verschiedene Faktoren hervorgerufen wurde. Zum einen wurde 1890 die Deutsche Mathematiker-Vereinigung (DMV) gegründet. Sie sollte dazu dienen, die Interessen der Mathematiker und der Mathematikdozenten an deutschen Universitäten auf nationaler Ebene zu organisieren⁵. Zum anderen hatten wichtige Ereignisse in Berlin eine Nachwirkung in Göttingen. Dem Tod Kroneckers im Jahr 1891 folgte unmittelbar die Emeritierung von Weierstraß. Kummer war bereits 1883 in den Ruhestand gegangen. Somit markierte das Jahr 1892 das Ende der Kummer-Weierstraß-Kronecker-Zeit in Berlin. Die Nachfolger von Kronecker und Weierstraß wurden Georg Ferdinand Frobenius und H.A. Schwarz, beide bedeutende Vertreter der Berliner Tradition. Frobenius war ein Student von Kronecker und Schwarz einer der besten Schüler von Weierstraß gewesen. Um dem Ruf nach Berlin zu folgen, verließ Schwarz Göttingen, wo er zu diesem Zeitpunkt eine Professur inne hatte. Dies bedeutete eine Verminderung des Berliner Einflusses auf die Göttinger Mathematik, womit sich für Felix Klein die Gelegenheit bot, die mathematische Forschung in Göttingen neu zu orientieren.

Felix Klein war seit 1886 Professor in Göttingen. Er war ein hervorragender vielfältig interessierter Mathematiker mit einem scharfen Sinn für Wissenschaftspolitik. Im Laufe seines Lebens forschte er in der Geometrie, der Theorie der algebraischen Gleichungen, der Funktionentheorie und der Pädagogik. In der Theorie der automorphen Funktionen konkurrierte er in den frühen 1880er Jahren mit dem hochrangigen französischen Mathematiker Henri Poincaré. Für den Aufstieg Göttingens spielte Kleins Wissenschaftsorganisation eine entscheidende Rolle. Klein wollte aus Göttingen ein Forschungszentrum machen, das sich, wie er behauptete, den Idealen der alten Göttinger Tradition von Gauß und Riemann näherte⁶. Nach Kleins Verständnis wurde in dieser Tradition, im Gegensatz zur Berliner Tradition, nicht ausschließlich in reiner Mathematik geforscht, sondern auch das Interesse für die Anwendungen der Mathematik auf benachbarte Disziplinen gefordert. Klein unterstützte die damaligen Berliner Ideale der Mathematik als „reine Disziplin“ nicht, im Gegenteil fand er, daß für die Mathematik die Zeit gekommen war, sich um die Bedürfnisse der modernen, exakten Wissenschaften und Ingenieurwissenschaften zu kümmern. Jedoch hielt er es auch für wichtig,

⁴Vgl. [Row00], 60ff.

⁵Vgl. [Row98], 19. Gispert und Tobies sehen die Gründung der DMV auch als einen Versuch, verschiedene mathematische Schulen und Traditionen zu vereinigen, vgl. [GT96], 408.

⁶Vgl. [Row89], 194.

die traditionelle, reine Mathematik nicht zu vernachlässigen. Seiner Auffassung nach sollten deshalb in Göttingen sowohl die reine als auch die angewandte Mathematik vertreten sein⁷.

1895 gelang es Klein, die Berufung Hilberts nach Göttingen durchzusetzen⁸. Zehn Jahre nach Hilberts Ankunft erreichte die Göttinger mathematische Fakultät die führende Position in Deutschland, und damit neben Paris eine führende Stellung in Europa. Ein wichtiger Faktor dafür war die Zusammenarbeit zwischen Klein und Hilbert in wissenschaftsorganisatorischen Aufgaben, wie etwa der Mitbestimmung bei der Besetzung von Lehrstühlen (wodurch sie auch die Forschungsschwerpunkte von Göttingen als Institution beeinflussten), die Leitung der Zeitschrift *Mathematische Annalen* und die Förderung vielversprechender Studenten durch Assistentenstellen⁹.

4.1.2 Forschungsschwerpunkte

Kleins Wissenschaftspolitik und seine intellektuelle Partnerschaft mit Hilbert waren entscheidend für Göttingens Entwicklung zu einem Forschungszentrum, in dem ein breites Spektrum von Disziplinen und Subdisziplinen vertreten war.

David Hilbert hatte neun Jahre in Königsberg gelehrt, als er 1895 nach Göttingen berufen wurde. Er war, wie Klein, ein hervorragender, vielfältig interessierter Mathematiker. Neben Poincaré war er einer der bedeutendsten Mathematiker des ausgehenden 19. und beginnenden 20. Jahrhunderts. Im Laufe seines Lebens forschte Hilbert auf zahlreichen Gebieten der Mathematik und zwar nacheinander in verschiedenen Zeiträumen: Invariantentheorie, Theorie der algebraischen Zahlkörper, Grundlagen der Geometrie, Variationsrechnung, Theorie der Integralgleichungen und mathematische Physik¹⁰. Klein kannte Hilberts Arbeiten zur Invariantentheorie und war sehr beeindruckt von deren Qualität¹¹. Er sah in Hilbert denjenigen Mathematiker, mit dessen Arbeit das wissenschaftliche Prestige Göttingens gesichert war. Mit der Berufung von Hilbert gelang Klein ein wichtiger Schritt zur Förderung der reinen Mathematik in Göttingen¹².

Klein und Hilbert wehrten sich gegen die von Berlin geförderte Tendenz zu einer Spezialisierung der mathematischen Forschung und gegen die These der Überlegenheit der reinen Mathematik. Sie unterstützten nicht nur das Interesse für Anwendungen der Mathematik in anderen Disziplinen wie der Physik. Sie förderten auch einen umfassenden Zugang zur mathematischen Forschung, der vereinende Konzepte benutzte, also solche Ideen, die nicht nur zwischen den ver-

⁷Vgl. [Row98], 20.

⁸Zu den Umständen von Hilberts Berufung vgl. [Gra00], 33ff.

⁹Zu Göttingen im Zeitalter von Klein und Hilbert vgl. [Row89].

¹⁰Vgl. Tabelle in [Thi97b], 26.

¹¹Zu Hilberts Forschungskarriere vgl. [Gra00].

¹²Vgl. [Row89], 195ff.

schiedenen Gebieten der Mathematik sondern auch zwischen der Mathematik und ihren benachbarten Disziplinen als Bindeglied vermittelten. Sie dachten, daß mit Hilfe solcher vereinernder Ideen existierende Theorien überholt oder vereinfacht werden könnten¹³. Ein Beitrag in diesem Sinne war Hilberts Werk *Grundlagen der Geometrie* von 1899, mit dem Hilbert eine Arithmetisierung der Geometrie erzielte¹⁴. Ein weiteres Beispiel bildete Hilberts Theorie der Integralgleichungen, für die er eine Theorie der quadratischen Formen unendlich vieler Variablen ganz in Anlehnung an die Algebra linearer Gleichungssysteme entwickelte¹⁵. Zu seiner Vorgehensweise in Bezug auf die Theorie der Integralgleichungen äußerte sich Hilbert 1909 in einem Artikel¹⁶. Der Gewinn aus diesem algebraischen Zugang, schrieb er, sei „der schöne Preis einer methodisch-einheitlichen Gestaltung von Algebra und Analysis“¹⁷.

Als Mathematiker hatte Klein bereits vor 1885 große Anerkennung gewonnen. Als Hilbert nach Göttingen kam, hatte Klein die Phase hoher wissenschaftlicher Produktivität bereits überschritten¹⁸. Jedoch entfaltete Klein die bereits angedeuteten wissenschaftsorganisatorischen Kräfte. Mit Hilfe seiner guten Beziehungen zum Ministerialrat Friedrich Althoff im Preußischen Kultusministerium weitete er seinen wissenschaftspolitischen Einfluß aus¹⁹.

Zu Kleins strategischen Erfolgen zählte neben der Berufung von Hilbert auch die Berufung 1904 von Carl Runge auf einen Lehrstuhl für angewandte Mathematik. Die anderen Professoren waren Karl Schwarzschild in Astronomie, Ludwig Prandtl (Pionier in der Luftfahrtforschung) und der Geophysiker Emil Wiechert. Die Berufungen von Runge und Prandtl erwiesen sich als entscheidend für die Entwicklung der angewandten Mathematik in Göttingen²⁰. Einen vergleichbaren Einfluß auf ein Berufungsverfahren übte Hilbert aus, als es ihm gelang, daß ein Lehrstuhl für seinen besten Freund Hermann Minkowski geschaffen wurde²¹. Minkowski kam 1902 nach Göttingen.

Mit der Zeitschrift *Mathematische Annalen* wurde 1868 in Göttingen von Alfred Clebsch und Carl Neumann eine Alternative zu dem von Berlin dominierten *Journal für die reine und angewandte Mathematik* (auch als *Crelles Journal* bekannt) gegründet. Nach Clebschs Tod wurde die Zeitschrift von Klein herausge-

¹³Vgl. [Row89], 187.

¹⁴Vgl. [Toe86], 250. S. auch Abschnitt 4.2.2 ab Seite 126.

¹⁵Zu Hilberts Theorie der Integralgleichungen vgl. [Ber66].

¹⁶Dieser war ursprünglich als Vortrag auf dem IV. Internationalen Mathematikerkongreß in Rom gedacht. Allem Anschein nach war Hilbert nicht auf diesem Kongreß. Sein Name steht nicht in der Teilnehmerliste. Bei der Veröffentlichung handelt es sich um [Hil09].

¹⁷Vgl. [Hil09], 60.

¹⁸Im Herbst 1882 erkrankte Klein. In den Jahren 1883 und 1884 litt er an starken Depressionen. Danach konzentrierte er seine Energien auf die Wissenschaftspolitik, vgl. [Row89], 194.

¹⁹Vgl. [Row98], 19.

²⁰Vgl. [Row89] und [Row98], 21.

²¹Vgl. [Bie88], 209, 221ff.

geben. 1902 wurde Hilbert zum Hauptherausgeber gewählt. Bereits unter Kleins Leitung hatte diese Zeitschrift eine führende Position in der Welt erreicht, so daß sie sogar *Crelles Journal* an Bedeutung überstieg²². Mit den *Mathematischen Annalen* besaßen die Göttinger Mathematiker ein mächtiges Instrument, um die mathematische Forschung auf internationaler Ebene beeinflussen.

In fachlicher Hinsicht suchten Klein und Hilbert die Entwicklung der Mathematik als Ganzes zu beeinflussen, indem sie Aktivitäten entfalteten, die zur Integration verschiedener Bereiche der mathematischen Forschung dienen sollten. Zur Förderung der Zusammenführung von reiner und angewandter Mathematik entwarf Klein das Projekt der *Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften mit Einschluss ihrer Anwendungen*²³. Klein beabsichtigte, die Spezialisierung und Isolierung der Mathematik zu bekämpfen und zugleich deren Zukunft zu beeinflussen. Aber in dieser Hinsicht scheiterte das Encyklopädieprojekt. Während viele Artikel über Anwendungen der Mathematik und über Entwicklungen auf dem Gebiet der Physik andauernden Wert behielten, waren die meisten Artikel zur reinen Mathematik in den ersten drei Bänden (mit Ausnahme des Artikels von Otto Toeplitz und Ernst Hellinger über Integralgleichungstheorie) bald obsolet²⁴.

Massiven Einfluß auf die Entwicklung der Mathematik auszuüben, gelang dagegen Hilbert durch seinen Pariser Vortrag mit dem Titel „Mathematische Probleme“ auf dem II. Internationalen Mathematik Kongreß (IMK)²⁵. Hilbert präsentierte vor der internationalen mathematischen Gemeinschaft eine Liste von Problemen, deren Studium er für entscheidend für den Fortschritt der Mathematik hielt. In den folgenden Jahrzehnten folgten Mathematiker auf der ganzen Welt den von Hilbert vorgeschlagenen Forschungslinien. Darüber hinaus erläuterte Hilbert in diesem Vortrag zum einen die Bedeutung, die er der Beschäftigung mit spezifischen Problemen zuschrieb, zum anderen die Rolle der Physik in der Entwicklung der Mathematik und seine Auffassung der Mathematik als ein unteilbares Ganzes. Im Hinblick auf die fortdauernde Aufspaltung der Mathematik in spezialisierte Gebiete schlug er vor, sich um einfachere Darstellungen von Theorien zu bemühen, damit vermieden werden könne, daß die einzelnen Spezialisten sich nicht mehr untereinander verständigen können. Dabei sah er die Bedeutung der Strenge in der Mathematik genau darin, daß das Streben nach Strenge zu einfacheren Darstellungen von Theorien zwingt. In diesem Zusammenhang schlug Hilbert einen axiomatischen Zugang als Mittel vor, um Strenge zu gewährleisten²⁶.

²²Vgl. [Row89], 192.

²³Bestehend aus 6 Bänden sollte die *Encyklopädie* das Wissen in Arithmetik und Algebra (1), Analysis (2), Geometrie (3), Mechanik (4), Physik (5), Geodäsie, Geophysik und Astronomie (6) einschließen, ohne eine bloße Ansammlung alten Wissens zu sein. Stattdessen sollten sich durch die Darstellung Zusammenhänge zwischen diesen Wissensgebieten sowie entsprechende Forschungslinien offenbaren.

²⁴Vgl. [Row89], 206ff.

²⁵Vgl. Zur Bedeutung von Hilberts Pariser Vortrag vgl. [Row95] und [Gra00].

²⁶Vgl. Hilberts Pariser Rede in [Ale98], 29.

4.1.3 Dozenten und Studenten

In den 1890er Jahren stieg die Anzahl der Mathematikstudenten in Göttingen an, nachdem sie in den vorherigen zwei Jahrzehnten stark zurückgegangen war. Diese Tendenz setzte sich nach der Jahrhundertwende und bis 1914 weiter fort²⁷. Viele waren ausländische Studenten, einige aus den USA, wie Oliver Dimon Kellogg und Max Mason²⁸, andere aus osteuropäischen Ländern, wie die Ungarn Alfréd Haar und Friedrich Riesz, und aus England wie William Henry Young und seine spätere Frau Grace Chisholm²⁹.

Grace Chisholm ging in die Geschichte der Universitätsausbildung von Frauen als die erste Frau ein, die an einer deutschen Hochschule mit regulärem Examen promovierte; dies geschah am 26. April 1895 in Göttingen. 1893 war sie eine der ersten drei Frauen, die in Göttingen zum Mathematik bzw. Physikstudium zugelassen wurde. Ihre Zulassung erfolgte dank Kleins Bemühungen im Kultusministerium. Die Nachricht dieses Erfolges verbreitete sich und um 1900 bewarben sich weitere Frauen auf Zulassung zur Promotion in Göttingen. In dieser Hinsicht war Göttingen Vorreiter, denn erst 1908 erhielten Frauen das allgemeine Recht zur Immatrikulation an deutschen Universitäten³⁰.

Die Studenten hatten Zugang zu einer Präsenzbibliothek, einer damals einzigartigen Bibliothek, die von den Studenten ‚Lesezimmer‘ genannt wurde. Die Idee einer solchen Bibliothek in der Mathematik ging auf Klein zurück, der damit auch informelle Kontakte zwischen den Bibliotheksnutzern fördern wollte³¹.

Eine weitere Göttinger Innovation gegenüber anderen deutschen Universitäten war die Einstellung von Assistenten für die Mathematikprofessoren. Solche Stellen gab es sonst nur in Verbindung mit experimentellen Wissenschaften. Kleins Assistent war für das ‚Lesezimmer‘ zuständig³². Zwar wurden die Assistenten schlecht bezahlt, jedoch war die Stelle als Assistent Hilberts aufgrund des engen wissenschaftlichen Kontaktes zu Hilbert sehr begehrt.

Aus den Reihen der Assistenten Hilberts gingen bedeutende Wissenschaftler hervor. Richard Courant, der später zusammen mit Hilbert das klassische Lehrbuch *Methoden der mathematischen Physik* verfaßte, war von 1908 bis 1910

²⁷Vgl. [Row89], 202. Rowe stützte sich auf die Studie: Wilhelm Lorey, *Das Studium der Mathematik an den deutschen Universitäten seit Anfang des 19. Jahrhunderts*, [Lor16]. Manche Studenten kamen auf Anregung von Freunden nach Göttingen: Ernst Hellinger und Otto Toepflitz übten einen solchen Einfluß auf Max Born in Breslau aus, Erhard Schmidt auf Constantin Carathéorody in Berlin, [Rei70], 87, 95.

²⁸Bis ins frühe 20. Jahrhundert hinein übte die Göttinger Mathematik auf Studenten aus den USA einige Anziehungskraft aus, vgl. [PR94], 444.

²⁹Vgl. [PR94], 442 und [Haw70], 148. Chisholm und Young heirateten 1896.

³⁰Vgl. das Kapitel „The women make their mark“ in [PR94], 239ff. Grace Chisholm forschte über die Differentiation meßbarer reeller Funktionen.

³¹Vgl. [Row89], 202.

³²Vgl. [Rei70], 103.

Hilberts Assistent. Courant bezeichnete den Umgang mit Hilbert als „Familienverkehr“, was auf den intensiven Austausch zwischen Assistent und Professor hinweist³³. Er berichtete, daß zu seinen Hauptaufgaben als Assistent Hilberts gehörte, wissenschaftliche Literatur zu studieren und diese anschließend für Hilbert zusammenzufassen, sowie morgens Hilbert zu Hause zu treffen, um zusammen mit ihm und Minkowski den Stoff seiner nächsten Vorlesung zu diskutieren³⁴. Courants Vorgänger war der spätere Nobelpreisträger für Physik Max Born. Hilbert rekrutierte seine Assistenten aus der Gruppe seiner Doktoranden (die zwischen 1900 und 1914 besonders groß war), also aus der Elite seiner engsten Schüler³⁵.

Um 1900 bestand der Lehrkörper der mathematischen Fakultät aus vier ordentlichen Professoren, einigen Stellen zur deskriptiven Geometrie, Versicherungsmathematik und Grundlagenforschung und mehreren Privatdozenten. Zwischen 1890 und 1914 gab es ständig um die 18 Privatdozenten, so viele wie nirgendwo sonst in Deutschland³⁶.

Von den Professoren las keiner in einem spezifischen Gebiet. Klein behandelte gewöhnlich Themen aus einem breiten Spektrum zwischen Mathematik (Geometrie, Funktionentheorie, Analysis, Wahrscheinlichkeitsrechnung), Physik und Technik; nach Minkowskis und Runges Ankunft widmete er aber seine Energie hauptsächlich organisatorischen Aufgaben. Zu dieser Zeit wurden seine Interessen für den Mathematikunterricht in der Schule und für sein Enzyklopädieprojekt auch Themen seiner Vorlesungen³⁷.

Minkowskis Zeit in Göttingen war kurz, denn er kam 1902 und starb bereits 1909. Er hatte ein besonderes Interesse für die Physik und bewirkte auch bei Hilbert ein wachsendes Interesse an dieser Disziplin, so daß sie gemeinsam Seminare zu physikalischen Themen leiteten³⁸. Die Freundschaft zwischen Minkowski und Hilbert ging auf ihre gemeinsame Studienzeit in Königsberg zurück, wo beide unter dem Einfluß von Adolf Hurwitz ein breites Interesse für viele verschiedene Zweige der Mathematik entwickelten. In Göttingen arbeitete Minkowski intensiv in Physik, behandelte in Vorlesungen und Seminaren aber auch viele verschiedene Themen der reinen Mathematik³⁹.

³³Vgl. [Rei79], 20.

³⁴Vgl. [Rei70], 103. Vgl. die Liste der Assistenten Hilberts B.4 im Anhang B.

³⁵Vgl. [Blu35], 407 und Courants Brief an seine Freundin zitiert in [Rei79], 36: „er pflegt sich nicht sehr viel um die Leute zu kümmern, die bei ihm arbeiten, und andere als sein Assistent haben selten den Vorzug einer direkten persönlichen Anregung von ihm.“

³⁶Vgl. [Row89], 202.

³⁷Vgl. [PR94], 440.

³⁸Vgl. [Cor97a], 87. Ein grundsätzliches Interesse an der Physik war bei Hilbert schon früher vorhanden. Das zeigt die Tatsache, daß Hilbert 1900 in seinem Pariser Vortrag das Problem der Axiomatisierung von Gebieten wie der Mechanik von starren Körpern und die Gastheorie als sein 6. Problem präsentierte, vgl. [Row01], 397.

³⁹Vgl. [Cor97a], 86ff.

Für Hilbert war die Lehrtätigkeit „ein gemeinsames Forschen mit jüngeren Schülern“⁴⁰. Anders als Kleins Vorlesungen waren seine nicht bis ins letzte Detail vorbereitet. Nach den Beschreibungen einiger seiner Schüler wirkte Hilbert in seinen Vorlesungen oft stockend und zögernd, er wiederholte gerne wichtige Sätze, manchmal blieb er im Vortrag stecken oder mußte sich später korrigieren, bis er eine schmucklose, jedoch klare und inhaltsreiche Darstellung erreichte⁴¹. Im Hinblick auf Hilberts besondere Art zu arbeiten, hob Courant dessen Taktik hervor: Erst Probleme in einer „vereinfachten, oft spezialisierten und trotzdem im wesentlichen vollständigen Form“ zu behandeln, denn auf diese Weise „konnte das Problem mit Konzentration auf den Kernpunkt erfolgreich attackiert werden; nachdem die Lösung so wirklich erreicht und verstanden war, konnte man sie danach ohne weiteres auf andere strukturell verwandte Gegenstände übertragen.“ Dabei unterstrich Courant, daß Hilbert „leere Allgemeinheit“ verabscheute, und daß die Probleme, die er studierte, keine Beispiele „hochfliegender allgemeiner Theorien“ waren⁴².

Hilberts originelle Denkweise zog viele Studenten an. Zwischen 1898 und 1914 promovierten 60 Mathematiker bei ihm, eine für die damaligen Verhältnisse unglaublich hohe Zahl⁴³. Viele von ihnen wurden später renommierte Mathematiker, etwa Erhard Schmidt, Ernst Hellinger, Otto Toeplitz, Hermann Weyl, Alfred Haar und Richard Courant⁴⁴. Der Kreis von Hilberts Assistenten, seinen Doktoranden und engsten Schülern bildete die sogenannte ‚Hilbert-Schule‘⁴⁵. Diese jungen Mathematiker um Hilbert beschäftigten sich in ihren Dissertationen bzw. in ihren Arbeiten mit Problemen, die oft in enger Verbindung mit Hilberts aktuellen Forschungsinteressen standen. Da Hilbert ein vielseitiger Mathematiker war, ist die Bezeichnung ‚Hilbert-Schule‘ prinzipiell nicht mit einem bestimmten Gebiet der Mathematik verbunden, sondern mit der Person Hilbert und seiner Forschungsmethode. Es läßt sich jedoch mit Recht von der ‚Hilbert-Schule der Integralgleichungstheorie‘ reden. Dazu gehören diejenige Schüler, die Hilberts Forschungsprogramm zur Integralgleichungstheorie folgten, d.h. die mit ihren Arbeiten zum Ausbau von Hilberts Theorie beitrugen und dabei seine Methode anwandten.

⁴⁰Vgl. [Row94], 36.

⁴¹Blumenthal [Blu35], 400ff. und Courant nach einem Zitat in [Row94], 37ff.

⁴²So zitiert (ohne Quellenangabe) in [Row94], 37.

⁴³Vgl. [Row94], 36.

⁴⁴Vgl. [Row94], 37ff und die Liste aller Doktoranden Hilberts erschienen im Band 3 von Hilberts *Gesammelte Abhandlungen*, [Hil35].

⁴⁵Vgl. [Row97], 552 und [Wey44], 612. Otto Toeplitz, der 1906 Assistent bei Klein wurde ([Rei79], 17), war weder Hilberts Assistent noch sein Doktorand, doch ein sehr enger Schüler von ihm, der zusammen mit Hellinger wichtige Beiträge zu Hilberts Integralgleichungstheorie lieferte.

4.2 Axiomatik, Mengenlehre und Grundlagen der Geometrie

4.2.1 Mengenlehre

Im Gegensatz zu Cantors Punktmengenlehre, die relativ rasch in der Analysis in Italien und Frankreich Anwendung fand, erfolgte die Rezeption der allgemeinen Cantorschen Mengenlehre zunächst sowohl in Deutschland als auch jenseits der deutschen Grenzen sehr langsam⁴⁶. In Deutschland gab es bis zum Ende des 19. Jahrhunderts nur wenige Mathematiker, die sich mit der Mengenlehre beschäftigten. Folgende Beispiele für eine frühe Rezeption von Cantors Mengenlehre in Deutschland lassen sich finden: Anwendungen auf die Theorie der reellen Funktionen von Du Bois-Reymond und Carl Harnack⁴⁷, Untersuchungen im Bereich der transfiniten Mengenlehre Cantors von Ernst Schröder⁴⁸, sowie jene Arbeiten von Thomae, Lüroth, Jürgens und Netto zum Problem der Invarianz der Dimension, die im Anschluß an den Cantorschen Beweis der Äquipotenz von \mathbb{R} und \mathbb{R}^n entstanden⁴⁹. Dedekind und Weierstraß verfolgten von Anfang an die Arbeit von Cantor, zeigten jedoch kein Interesse an Cantors Theorie der transfiniten Mengenlehre⁵⁰.

Einen negativen Einfluß auf die Rezeption der Mengenlehre hatte Kroneckers Kritik der Cantorschen Ideen. Kronecker, damals einer der einflußreichsten Mathematiker Deutschlands, vertrat Ansichten über die Grundlegung der Mathematik, die die Konstruierbarkeit der mathematischen Objekte durch ein endliches Verfahren verlangte, weshalb er die transfiniten Schlußfolgerungen der Cantorschen Theorie für ungültig hielt⁵¹. Zur langwierigen Rezeption der transfiniten Mengenlehre trug auch die Tatsache bei, daß Cantor selbst nie Vorlesungen darüber hielt. Die erste Vorlesung in Deutschland über Mengenlehre fand erst im Wintersemester 1900/1901 in Göttingen statt und wurde von Zermelo gehalten. Kurz darauf las Hausdorff in Leipzig über Mengenlehre vor drei Zuhörern im Sommersemester 1901⁵².

Anders als in Berlin, wo Cantors Arbeiten von Kronecker stark kritisiert wurden, wurde Cantor von den Göttinger Mathematikern hochgeschätzt. Göttingen trug auf zweierlei Weise stark zur Rezeption der Mengenlehre bei. Zum einem,

⁴⁶Ich verweise auf folgende ausführliche Studien zur Geschichte der Mengenlehre: [Dau79], [Pur87], [Fer99], [Moo82], [Moo89], [Pur02b].

⁴⁷Zu Du Bois-Reymond s. Abschnitt 3.2.1.

⁴⁸Zur frühen Entwicklung von Cantors transfiniten Mengenlehre vgl. [Moo82]. Zu Schröder vgl. *ibid.*, 48.

⁴⁹Zu den Anfängen der Mengenlehre vgl. [Fer99]. Zu den Beiträgen von Thomae, Lüroth, Jürgens und Netto vgl. [Fer99], 282ff.

⁵⁰[Fer99], 283.

⁵¹Zu Kroneckers Kritik an Cantor vgl. [PI87].

⁵²Vgl. [Pur02b], 3ff.

indem viele der Cantorschen Arbeiten in der an Göttingen gebundenen mathematischen Zeitschrift *Mathematische Annalen* erschienen. Zum anderen durch die Aufnahme der Cantorschen Theorien in Felix Kleins Enzyklopädieprojekt. Klein beauftragte 1898 Arthur Schoenflies, einen Artikel über die Mengenlehre für die *Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften* zu verfassen⁵³.

Eine Wende in der Geschichte der Rezeption der Cantorschen Mengenlehre zeichnete sich 1897 auf dem I. Internationalen Mathematikerkongreß (IMK) in Zürich ab. Dort machten Adolf Hurwitz und Jacques Hadamard die Zuhörer auf die Bedeutung der Mengenlehre für die Funktionentheorie und die Analysis aufmerksam. Die Vorträge von Hurwitz und Hadamard bedeuteten zugleich eine Anerkennung von Cantors Leistungen vor internationalem Publikum⁵⁴.

1900 erschien der erste Teil des im Auftrag der *Deutschen Mathematiker-Vereinigung* (DMV) verfaßten Schoenfliesschen Berichtes über „Die Entwicklung der Lehre von den Punktmannigfaltigkeiten“⁵⁵ (im folgenden kurz als ‚Schoenflies’ Bericht I‘ bezeichnet). Dieser Bericht war in drei Abschnitte aufgeteilt: I. Allgemeine Theorie der unendlichen Mengen, II. Theorie der Punktmengen, III. Anwendungen auf Funktionen reeller Variablen. Im dritten Abschnitt besprach Schoenflies einschlägige Resultate verschiedener Mathematiker, darunter auch Ergebnisse, die in Frankreich in Verbindung mit der modernen Theorie der reellen Funktionen von René Baire, Émile Borel und Henri Lebesgue entwickelt wurden⁵⁶. Schoenflies’ Bericht sowie dessen ausführliche Rezension im *Jahrbuch für die Fortschritte der Mathematik* trugen zur Verbreitung und Popularisierung der Mengenlehre bei.

Wer war der Autor dieses Berichts? Arthur Moritz Schoenflies hatte in Berlin studiert. Nach seiner Habilitation wurde er 1892 außerordentlicher Professor in Göttingen. 1899 bekam er in Königsberg eine ordentliche Professur und schließlich zog er 1911 nach Frankfurt am Main, wo er bis 1922 lehrte. Dort starb er 1928. Seine Forschungsgebiete waren die Geometrie, die Mengenlehre und die Kristallographie. Er verknüpfte seine moderneren Studien von Bewegungsgruppen mit seiner Forschung in Kristallographie, indem er die Kristallstruktur mit gruppentheoretischen Mitteln studierte. Bekannt wurde er unter den Mathematikern vorwiegend wegen seiner mathematischen Produktion im Bereich der Cantorschen Mengenlehre: der bereits erwähnte Enzyklopädie-Artikel und der zweiteilige Bericht für die DMV und andere Publikationen.

⁵³Vgl. [Pur02b], 24ff.

⁵⁴Vgl. [Pur02b], 6.

⁵⁵Erschienen im *Jahresbericht der DMV*, [Sch00].

⁵⁶Purkert weist darauf hin, daß sowohl dieser erste Bericht von Schoenflies als auch Schoenflies’ Artikel für die Enzyklopädie viele Fehler enthält, die Schoenflies nur zum Teil in seinem zweiten Bericht von 1908 korrigierte, vgl. [Pur02b], 24ff. Auch Dirk van Dalen weist auf mehrere Schoenfliessche Fehler hin, die 1909 zum Teil von dem niederländischen Mathematiker L.E.J. Brouwer behoben wurden und die für einen lebhaften Briefwechsel zwischen Brouwer und Schoenflies sorgten, [Dal99], 141ff.

Schoenflies lieferte sowohl Beiträge zur Mengenlehre als auch zur damals sogenannten Analysis Situs⁵⁷ (der heutigen geometrischen Topologie). Seit 1899 hatte Schoenflies an einer Reihe von Artikeln gearbeitet, darunter seine dreiteilige Veröffentlichung „Beiträge zur Theorie der Punktmengen“, in denen er eine systematische Behandlung grundlegender Begriffe versuchte, die aus den Arbeiten von Cantor und Jordan hervorgingen: das Konzept der Jordanschen Kurve, eineindeutige stetige Abbildungen und deren Invarianten. Seine gesammelten Resultate aus diesen Arbeiten veröffentlichte er im zweiten Teil seines Berichts für die DMV, welcher 1908 erschien.

Der zweiteilige Bericht von Schoenflies war um 1908 die einzige umfassende Monographie über die Mengenlehre⁵⁸. Die zeitgenössischen Monographien zur Analysis und zur Funktionentheorie von Baire und Borel behandelten dagegen lediglich grundlegende Begriffe und anwendbare Elemente der Mengenlehre⁵⁹.

In Göttingen verfolgte Hilbert die Entwicklung der Mengenlehre mit Interesse. Er schrieb der Mengenlehre große Bedeutung für die Mathematik zu und trug durch seinen öffentlichen Einsatz auch stark zu der internationalen Anerkennung der Mengenlehre bei – auch wenn er sich selbst mit der Mengenlehre kaum befaßte⁶⁰. In seinem berühmten Pariser Vortrag „Mathematische Probleme“ präsentierte Hilbert die später sogenannte Kontinuumshypothese als das erste seiner 23 aufgelisteten mathematischen Probleme. Die Kontinuumshypothese war Cantors Vermutung, daß jede unendliche Teilmenge des Kontinuums (\mathbb{R}) entweder abzählbar ist oder dieselbe Mächtigkeit wie das Kontinuum besitzt. Für die Behandlung dieses Problems schlug Hilbert vor, die Frage zu beantworten, ob die reellen Zahlen sich als wohlgeordnete Menge auffassen lassen. Hilbert, der noch 1899 die Mengenlehre in erster Linie als eine alternative Methode betrachtete, die bei der Grundlegung eines Wissensgebietes in Konkurrenz mit der axiomatischen Methode stand⁶¹, wurde über die Bedeutung des Wohlordnungsprinzips von Cantor erst kurz vor der Jahrhundertwende unterrichtet. Cantors Wohlordnungsprinzip war damals von den Mathematikern noch unbeachtet geblieben⁶². Die Reaktion auf Hilberts Vortrag war spektakulär. Konkret im Hinblick auf das erste Problem und damit implizit auf die Rezeption der Mengenlehre bewirkte Hilbert, daß sich in Deutschland und England verschiedene Mathematiker mit der Kontinuumshypothese und dem Wohlordnungsprinzip befaßten. Fortschritte

⁵⁷In [Sch03] beschrieb Schoenflies die Analysis Situs als die Wissenschaft, die sich mit dem Studium derjenigen Konzepte befaßt, die unter eineindeutigen stetigen Abbildungen invariant bleiben.

⁵⁸Vgl. [Pur02b], 26.

⁵⁹S. Abschnitt 3.2.1.

⁶⁰Zu Hilberts Verhältnis zur Mengenlehre vgl. [Row97], 540

⁶¹Vgl. [Pec90], 30.

⁶²Moore berichtet, Cantor habe Hilbert seinen Beweisversuch des Wohlordnungsprinzips brieflich zugesandt, vgl. [Moo82], 47, 51.

ließen sich zunächst aber kaum erkennen⁶³.

Nach diesen Entwicklungen läßt sich erst ab 1905, wie Purkert es vorschlägt⁶⁴, von einer allgemeinen Anerkennung der Mengenlehre als einer unabhängigen Subdisziplin der Mathematik reden, als die Einführung eines eigenen Abschnittes zur Mengenlehre unter den Rubriken im *Jahrbuch für die Fortschritte der Mathematik* erfolgte.

Zu der Generation jüngerer Mathematiker, die sich zu Beginn des 20. Jahrhunderts mit der Mengenlehre beschäftigten, gehörten neben Felix Bernstein vor allem Ernst Zermelo und Felix Hausdorff. Bernstein promovierte 1901 in Göttingen bei Hilbert. Seine Dissertation erfolgte unter dem direkten Einfluß von Cantor, bei dem er in Halle studiert hatte. In seiner Dissertation beschäftigte sich Bernstein mit dem Problem der Trichonomie der transfiniten Kardinalzahlen, d.h. mit der Frage, ob für jede zwei transfiniten Kardinalzahlen immer eindeutig festzulegen ist, daß die eine Zahl größer, kleiner oder gleich der zweiten Zahl ist⁶⁵. Aus Bernsteins Untersuchungen kristallisierten sich als dringende Angelegenheiten für die Weiterentwicklung der Mengenlehre heraus: a) die von Bernstein so benannte „Continuumshypothese“ zu beweisen⁶⁶ und b) die Grundlagen der Mengenlehre zu untersuchen. Von einer axiomatischen Grundlegung der Mengenlehre war aber bei Bernstein nicht die Rede⁶⁷.

Zermelo hatte in Berlin studiert. 1897 kam er nach Göttingen, wo er 1899 über theoretische Physik habilitierte. Dort lehrte er bis 1910 als Privatdozent. 1910 erhielt Zermelo eine ordentliche Professur in Zürich. Seine Forschungsgebiete waren die Variationsrechnung, die Physik, die Mengenlehre und später auch die mathematische Logik. International bekannt wurde Zermelo, nachdem er 1904 einen Beweis des Wohlordnungssatzes veröffentlicht hatte. Sein Beweis wurde deshalb so umstritten, weil er dafür das von ihm selbst explizit formulierte Auswahlaxiom verwendete⁶⁸. Dieses Axiom postuliert, daß für jede Menge bestehend aus nichtleeren Mengen (auch unendlich viele solcher Mengen) immer eine Auswahlfunktion existiert, die aus jeder Menge ein Element auswählt. Eine Diskussion auf internationaler Ebene entstand, die die Natur von Zermelos Axiom in Frage stellte: Wissenschaftler wie der niederländische Mathematiker Brouwer und die französischen Analytiker Baire, Borel und Lebesgue, die heute als Intuitionisten, Präintuitionisten oder Konstruktivisten bezeichnet werden, kritisierten die tatsächliche Ausführbarkeit der vom Axiom postulierten Auswahl, d.h. sie stell-

⁶³Vgl. [Moo82], 55ff.

⁶⁴Vgl. [Pur87], 145.

⁶⁵Heutzutage ist die Frage nach der Trichonomie der transfiniten Kardinalzahlen bekanntlich ein zum Wohlordnungsprinzip äquivalentes Problem, vgl. [Moo82], 330.

⁶⁶In Bernsteins Dissertation erschien zum ersten Mal die Bezeichnung „Continuumshypothese“. Moore vermutet, daß dies wahrscheinlich eine Abkürzung von Hilberts Formulierung „Cantors Problem von der Mächtigkeit des Continuum“ ist, vgl. [Moo89], 105.

⁶⁷Vgl. [Moo82], 56-57.

⁶⁸Eine Geschichte von Zermelos Auswahlaxiom bietet [Moo82].

ten die Existenz einer solchen Auswahlfunktion in Frage. Die Debatte um die Grundlagen der Mengenlehre bekam durch die Beiträge Zermelos neue Impulse. 1908 schlug Zermelo ein Axiomensystem für die Grundlegung der Mengenlehre vor⁶⁹.

Im III. IMK in Heidelberg standen die Kontinuumshypothese, das Wohlordnungsprinzip sowie Grundlagenfragen zur Mengenlehre im Mittelpunkt der Diskussion. Besondere Aufmerksamkeit erhielten dabei das Kontinuumsproblem und die Wohlordnungsfähigkeit der reellen Zahlen, nachdem der ungarische Mathematiker Julius König einen Vortrag gehalten hatte, mit dem er die Unmöglichkeit einer Wohlordnung für die reellen Zahlen zu zeigen versuchte. Lange Zeit wurde die Legende gepflegt, Zermelo hätte am Tag nach diesem Vortrag auf die Unhaltbarkeit von Königs Beweis hingewiesen. In Wirklichkeit war es Hausdorff, der die Lücke in Königs Beweis entdeckte⁷⁰.

Hausdorff wurde 1868 in Breslau geboren. Nach seiner Promotion in Leipzig 1891 arbeitete er mehrere Jahre an der Sternwarte der dortigen Universität. 1901 wurde er außerordentlicher Professor in Leipzig und ging 1910 nach Bonn, wo er 1921 eine ordentliche Professur erhielt. In Leipzig befaßte er sich seit dem Sommersemester 1901 mit der Mengenlehre, insbesondere mit dem Studium geordneter Mengen⁷¹. Zwischen 1906 und 1908 veröffentlichte er innovative Untersuchungen über Ordnungstypen, die ihm große Anerkennung von Cantor selbst einbrachten. Cantor betrachtete Hausdorff als denjenigen, der seine Forschungen weiterführte⁷². Hausdorffs bedeutendstes Werk war zweifellos sein Buch *Grundzüge der Mengenlehre*, das eine Einführung in die abstrakte Mengenlehre, die Theorie der Kardinalzahlen, Ordnungstypen, Ordnungszahlen, sowie in die Theorie des topologischen und metrischen Raumes enthielt. Den heutigen topologischen Raumbegriff hat Hausdorff 1914 in diesem Buch zum ersten Mal eingeführt. Diesen Begriff hatte er – nach den letzten Recherchen – unabhängig von Riesz entwickelt⁷³.

⁶⁹Zu diesem Thema vgl. [Moo82].

⁷⁰Die Aufklärung dieser Ereignisse geht auf Purkert zurück, vgl. [Pur02b], 10ff. S. auch Abschnitt 2.2 der vorliegenden Arbeit.

⁷¹Eine ausführliche Darstellung von Hausdorffs frühen Arbeiten zur Mengenlehre findet sich bei Purkert in [Pur02b], 5ff.

⁷²Vgl. [Pur02b], 11ff.

⁷³Purkert et al. schrieben in Bezug auf die Rieszschen Arbeiten [Rie07b] und [Rie09]: „Hausdorff blieben diese Arbeiten allem Anschein nach bis in das Jahr 1912 unbekannt. Weder in Hausdorffs Vorlesungen zur Mengenlehre (von 1910 oder 1912) noch in anderen Nachlaßfragmenten dieser Zeit finden sich Hinweise auf Riesz“, [P+02], 713.

4.2.2 Axiomatik bei Hilbert (1894-1905)

Ein Überblick

Hilberts frühes Verständnis der axiomatischen Methode um die Jahrhundertwende fand vor allem in folgenden drei Beiträgen Ausdruck⁷⁴: der Festschrift *Grundlagen der Geometrie* von 1899, dem Vortrag „Über den Zahlbegriff“, gehalten im September 1899 auf einer Tagung der Deutschen Mathematiker-Vereinigung (DMV) in München (im folgenden als Münchner Vortrag bezeichnet), und dem Pariser Vortrag „Mathematische Probleme“ von 1900 auf dem II. IMK.

Bei den *Grundlagen der Geometrie* handelt es sich um die erste Veröffentlichung, in der Hilbert sein Verständnis einer systematischen Anwendung der axiomatischen Methode beim Aufbau der Geometrie darstellte⁷⁵. Hilbert nahm sich hier vor, ein „einfaches“ und „vollständiges“ System von Axiomen aufzustellen, aus denen alle bekannten Sätze der Geometrie abgeleitet werden könnten⁷⁶. Nachdem er durch die Axiome die Beziehungen zwischen den drei Systemen undefinierter Objekte (Punkte, Geraden und Ebenen) festgelegt hatte, wobei er die Axiome in fünf Axiomengruppen klassifizierte, führte er Untersuchungen über die Widerspruchsfreiheit und gegenseitige Unabhängigkeit der Axiome durch. Die Widerspruchsfreiheit der geometrischen Axiome führte Hilbert auf die Widerspruchsfreiheit der Arithmetik zurück, indem er einen Zahlkörper konstruierte und auf diesem eine analytische Geometrie aufbaute, die die geometrischen Axiome erfüllte. Die Widerspruchsfreiheit der arithmetischen Axiome hatte Hilbert hier implizit vorausgesetzt. Aber aus diesem relativen Konsistenzbeweis ergab sich für Hilbert eine neue Herausforderung: die Widerspruchsfreiheit der arithmetischen Axiome zu beweisen⁷⁷.

In seinem Münchner Vortrag präsentierte Hilbert eine axiomatische Grundlegung der Arithmetik reeller Zahlen. Ohne Untersuchungen nach Unabhängigkeit,

⁷⁴Zu Hilberts frühem Verständnis der axiomatischen Methode vgl. [Pec90], [Row97] und [Cor97a].

⁷⁵Zur Entstehung dieser Arbeit vgl. [Toe86]. Corry und Rowe warnen vor rückblickenden Interpretationen der *Grundlagen der Geometrie* als frühes Manifest von Hilberts „Formalismus“, einer Position, die Hilbert in den 1920er Jahren vertreten hat. Nach einer solchen Interpretation wäre die Geometrie in Hilberts Auffassung ein aus den Axiomen deduziertes System ohne Bezug zur Wirklichkeit. Dagegen faßte Hilbert die Geometrie als eine Naturwissenschaft auf, vgl. [Cor97c], 256ff. und [Row97].

⁷⁶Corry bemerkt, daß die Forderung nach „Vollständigkeit“ keine Verbindung zur modernen Modelltheorie hat und sich nur darauf bezieht, daß alle bekannten Sätze der Geometrie aus den Axiomen abzuleiten sind. Mit dem Anspruch auf „Einfachheit“ meinte Hilbert, daß jedes Axiom nur eine Idee ausdrücken sollte, vgl. [Cor97a], 111ff.

⁷⁷Vgl. [Pec90], 26ff. Peckhaus vertritt die These, daß bereits in den *Grundlagen der Geometrie* ein umfassendes mathematisches Axiomatisierungsprogramm Hilberts implizit enthalten sei, vgl. [Pec90], 23ff. Diese Interpretation wird von Rowe relativiert unter dem Hinweis, daß Hilbert zu dieser Zeit viel mehr an der Entwicklung gewisser mathematischer Gebiete interessiert war als an Grundlagenforschung, vgl. [Row97], 548ff.

Widerspruchsfreiheit und Vollständigkeit des arithmetischen Axiomensystems auszuführen, äußerte er seine Überzeugung, daß für den Konsistenzbeweis nur eine geeignete Modifikation bekannter Schlußmethoden nötig wäre. Offensichtlich unterschätzte Hilbert zu diesem Zeitpunkt die Schwierigkeiten des Konsistenzbeweises⁷⁸. Anders verhielt es sich ein Jahr später, als Hilbert dieses Problem in seinem Pariser Vortrag auf die Agenda setzte.

Hilbert präsentierte in Paris das Problem der Konsistenz der Axiome der Arithmetik der reellen Zahlen als das zweite seiner 23 Probleme. Dies weist auf die große Bedeutung hin, die Hilbert ein Jahr nach seinem Münchner Vortrag diesem Problem zuschrieb⁷⁹. Bei der Beschreibung dieses Problems erläuterte Hilbert die Anwendung der axiomatischen Methode bei der Untersuchung der Grundlagen einer Wissenschaft⁸⁰: Erstens sei ein Axiomensystem aufzustellen. Dann müsse für das Axiomensystem festgestellt werden, ob die Axiome völlig unabhängig voneinander seien oder aber sich gegenseitig bedingen. Schließlich müsse bewiesen werden, daß die Axiome untereinander widerspruchsfrei seien⁸¹. Bereits in dieser frühen Phase von Hilberts Formalismus bestand für Hilbert die Bedeutung des Widerspruchsfreiheitsbeweises darin, daß dieser die Wahrheit der Axiome und die Existenz des durch die Axiome definierten Objekts garantiere⁸². Konkret für das arithmetische Axiomensystem reeller Zahlen schrieb Hilbert in seinem Pariser Vortrag dem Widerspruchsfreiheitsbeweis die Bedeutung zu, zugleich ein Beweis der mathematischen Existenz der Menge der reellen Zahlen zu sein⁸³.

Auch der historische Kontext von Hilberts sechstem mathematischem Problem, der „mathematischen Behandlung der Axiome der Physik“, trägt zu einem besseren Verständnis der Bedeutung bei, die Hilbert der Anwendung der axiomatischen Methode zuschrieb⁸⁴. Aus der historischen Untersuchung von Hilberts wissenschaftlichem Werk durch Leo Corry gehen zwei weitere charakteristische Aspekte von Hilberts früher Auffassung der axiomatischen Methode hervor⁸⁵. Der eine Aspekt betrifft die Beziehung zwischen den Axiomen der Geometrie (bzw. der Physik) und der Anschauung⁸⁶. Der andere Aspekt bezieht sich auf die epistemo-

⁷⁸Vgl. [Pec90], 34. Kurt Gödel bewies 1931 zwei sogenannte Unvollständigkeitssätze, die die Möglichkeit des Konsistenzbeweises für ein Axiomensystem nach den von Hilbert vorgeschlagenen Prinzipien stark einschränkten, vgl. [G⁺90].

⁷⁹Vgl. [Pec90], 34.

⁸⁰Diese Stelle in Hilberts Vortrag interpretiert Peckhaus als die Ausdehnung des axiomatischen Programms auf die gesamte Mathematik mit ihren Anwendungsgebieten, vgl. [Pec90], 35 und Fußnote 77.

⁸¹Peckhaus beobachtet, daß hier ein Vollständigkeitsbeweis für das Axiomensystem nicht mehr als Aufgabe angeführt wird, erklärt aber nicht, was mit der Forderung nach Vollständigkeit gemeint wäre, vgl. [Pec90], 35.

⁸²So Hilbert in einem Brief an Frege vom 29. Dezember 1899, vgl. Zitat auf Seite 135.

⁸³Vgl. [Pec90], 36, sowie [Ale98], 38.

⁸⁴Vgl. „Die Hilbertschen Probleme“ [Ale98], 47.

⁸⁵Vgl. [Cor97a].

⁸⁶Auch von Toepell diskutiert in [Toe86], 58.

logische Bedeutung, die Hilbert einer axiomatischen Behandlung der Geometrie (bzw. der Physik) zuschrieb, daß nämlich erst durch ihre Axiomatisierung die Geometrie eine reine mathematische Wissenschaft werde. Beide Aspekte sind für das Anliegen der vorliegenden Arbeit wichtig, weil Riesz sie berücksichtigte. Deshalb werden sie in Unterabschnitt *Die Rolle der Anschauung* (S. 130ff.) näher erläutert⁸⁷.

Zu Hilberts *Grundlagen der Geometrie* von 1899

Hilberts Werk *Grundlagen der Geometrie* erschien 1899 als Beitrag zu einer Festschrift, die anlässlich der Enthüllung des Göttinger Gauß-Weber Denkmals am 17. Juni 1899 herausgegeben wurde⁸⁸. Hilbert präsentierte es als einen erneuten Versuch, für die Geometrie ein „einfaches“ und „vollständiges“ System voneinander unabhängiger Axiome aufzustellen⁸⁹. Mit „vollständigem System“ meinte Hilbert hier lediglich, daß alle bekannten Sätze der Geometrie sich aus dem Axiomensystem ableiten lassen⁹⁰. Die Forderung nach Einfachheit des Systems bedeutete, daß jedes Axiom möglichst nur eine einzige Idee beinhalten sollte⁹¹.

Die Elemente der Geometrie führte er als abstrakte Objekte ein. Er schrieb:

Wir denken drei verschiedene Systeme von Dingen: die Dinge des ersten Systems nennen wir Punkte und bezeichnen sie mit A, B, C, \dots ; die Dinge des zweiten Systems nennen wir Geraden und bezeichnen sie mit a, b, c, \dots ; die Dinge des dritten Systems nennen wir Ebenen und bezeichnen sie mit $\alpha, \beta, \gamma, \dots$ ⁹²

Punkte, Geraden und Ebenen, die Elemente der Geometrie, sind in Hilberts Darstellung undefinierte „Dinge“, deren Beziehungen zueinander durch die Axiome bestimmt werden.

Hilbert stellte insgesamt 17 Axiome auf, welche er in fünf Axiomengruppen aufteilte und in Gruppen hintereinander folgendermaßen einführte: Verbindungs-, Anordnungs- und Kongruenzaxiome, das Parallelenaxiom und ein Stetigkeitsaxiom (das Archimedische Axiom). In den folgenden sechs Auflagen nahm Hilbert verschiedene Änderungen und Ergänzungen vor⁹³. Eine wichtige Änderung ab der

⁸⁷Dazu s. Abschnitt 8.2.

⁸⁸Zur Entstehungsgeschichte dieser Hilbertschen Arbeit siehe [Toe86].

⁸⁹Vgl. die Einleitung in [Hil56], auch [Toe86], 239

⁹⁰Corry warnt: „it should not be confused with the later, model-theoretical notion of completeness, which is totally foreign to Hilberts' early axiomatic approach“, [Cor97a], 112. Toepell bezeichnet diese Forderung als Vollständigkeit ‚nach unten‘, im Gegensatz zur Vollständigkeit ‚nach oben‘, die vom erst ab der 2. Auflage 1903 hinzugefügten Vollständigkeitsaxiom bedingt ist, vgl. [Toe86], 239.

⁹¹Vgl. [Cor97a], 111.

⁹²[Hil56], 2.

⁹³In der ersten Auflage stellte Hilbert nur 17 Axiome auf, vgl. [Toe86], 254. Zu berücksichtigen

zweiten Auflage von 1903 ist die Hinzufügung eines zweiten Axioms der Stetigkeit, das so genannte „Vollständigkeitsaxiom“⁹⁴, dessen Bedeutung im Folgenden diskutiert wird.

Hilbert untersuchte das Axiomensystem auf Widerspruchsfreiheit und auf gegenseitige Unabhängigkeit der Axiome.

Für den Nachweis der Konsistenz bediente sich Hilbert in der ersten Auflage eines von ihm konstruierten Körpers algebraischer Zahlen. Er baute über diesen Zahlenkörper eine analytische Geometrie auf, die sein Axiomensystem erfüllte – mit Ausnahme des Vollständigkeitsaxioms, denn dieses hatte er erst 1903 hinzugefügt⁹⁵. Nach der Hinzunahme des Vollständigkeitsaxioms benutzte er den Körper der reellen Zahlen, denn die Cartesische Geometrie auf \mathbb{R} erfüllt alle Hilbertschen Axiome einschließlich des Vollständigkeitsaxioms. In dieser Hilbertschen Entsprechung zwischen verschiedenen Zahlenkörpern und analytischen Geometrien läßt sich die Bedeutung des Vollständigkeitsaxioms am besten beschreiben. Ohne das Vollständigkeitsaxiom ging aus Hilberts Vorgehensweise hervor, daß sich verschiedene Zahlenkörper und entsprechend verschiedene analytische Geometrien konstruieren lassen, die sämtliche Axiome aus allen fünf Axiomengruppen erfüllen. Dagegen gib es nach Einschließung des Vollständigkeitsaxioms nur einen einzigen Zahlenkörper (den Körper der reellen Zahlen) und entsprechend eine einzige analytische Geometrie (nämlich die Cartesische), die sämtliche Axiome erfüllt⁹⁶. Das Vollständigkeitsaxiom und das Archimedische Axiom zusammen entsprechen anschaulich der Forderung einer eindeutigen Zuordnung zwischen den Punkten einer Geraden und den reellen Zahlen⁹⁷.

Hilbert argumentierte dann: Jede Inkonsistenz in den Folgerungen aus den Axiomen müßte demnach in der Arithmetik des Systems der reellen Zahlen erkennbar sein. Auf diese Weise führte er die Konsistenz der geometrischen Axiome auf die Konsistenz der Arithmetik reeller Zahlen zurück. Hilbert war sich dessen bewußt. Wie bereits erwähnt, behandelte er sowohl in München 1899 als auch in Paris 1900 die Frage nach der Widerspruchsfreiheit der arithmetischen Axiome der reellen Zahlen⁹⁸.

sind Änderungen in den verschiedenen Auflagen. Vor allem für die ersten sieben Auflagen, welche zu Lebzeiten Hilberts erschienen, gibt Toepell entsprechend Auskunft. In der ersten Auflage bestand beispielsweise die Gruppe der Kongruenzaxiome aus 6 Axiomen, von denen das 6. bei der 7. Auflage (da als entbehrlich anerkannt) gestrichen wurde, vgl. [Toe86], 240ff.

⁹⁴Vgl. [Toe86], 254ff und [Hil56], 32. Corry betont: „the property referred by this axiom bears no relation whatsoever to Hilbert’s general requirement of „completeness“ for any system of axioms“, [Cor97a], 113-114.

⁹⁵Zu diesen Entwicklungen vgl. [Toe86], 128ff.

⁹⁶Toepell schrieb dazu: „Erst mit diesem Axiom [ab der zweiten Auflage der *Grundlagen der Geometrie*] wird das polymorphe Axiomensystem (verschiedene nicht-isomorphe Modelle möglich) sogar monomorph“, [Toe86], 249 unten.

⁹⁷Vgl. [Toe86], 226 und 255.

⁹⁸Vgl. [Hil56], 36. Darüber hinaus verwies er in seinem Werk *Grundlagen der Geometrie* (ab der zweiten Auflage) auf beide Vorträge.

Seinem relativen Konsistenzbeweis schrieb Hilbert auf zweierlei Weise eine epistemische Bedeutung zu. Zum einem: Die Existenzsicherung der Geometrie durch die Anschauung entfiel, denn die Konsistenz der geometrischen Axiome war für ihn das Kriterium der Wahrheit und Existenz⁹⁹. Zum anderen betrachtete er die Auffassung der Geometrie als exakte Wissenschaft aufgrund ihres axiomatischen Aufbaus und ihrer Gleichsetzung zur Arithmetik als legitimiert. Diese epistemischen Bedeutungen bilden wichtige Merkmale von Hilberts damaligem Verständnis der axiomatischen Methode.

Beweise zur gegenseitigen Unabhängigkeit der Axiome faßte Hilbert im zweiten Kapitel zusammen¹⁰⁰. Er entwickelte folgende Strategie, um die Unabhängigkeit eines Axiomes oder einer Axiomengruppe zu zeigen: Er konstruierte jedesmal ein geometrisches System, das alle Axiome mit Ausnahme der in Frage stehenden Axiome erfüllte. Er beschränkte sich aber darauf, die Unabhängigkeit der Gruppe der Kongruenzaxiome, des Parallelaxioms und der Gruppe der Stetigkeitsaxiome zu zeigen und verzichtete auf Untersuchungen innerhalb einzelner Axiomengruppen¹⁰¹. Ihm ging es nur um belangvolle Unabhängigkeitsfragen, denn – und das muß betont werden – Hilbert erforschte die gegenseitige Unabhängigkeit der Axiome nicht wegen irgendeines Interesses an der durch die Axiome ausgedrückten abstrakten Beziehungen, sondern im Interesse der Geometrie selbst, d.h. im Hinblick auf ihre Bedeutung für die Geometrie. Auch deshalb war Hilberts Axiomensystem von einer logischen Perspektive her nicht das ökonomischste, wie andere Mathematiker bald feststellten¹⁰².

Die Bedeutung, die Hilbert der Erforschung der gegenseitigen Unabhängigkeit der Axiome zuschrieb, läßt sich mit folgendem Zitat aus dem Schlußwort illustrieren:

In der Tat sucht die vorstehende geometrische Untersuchung allgemein darüber Aufschluß zu geben, welche Axiome, Voraussetzungen oder Hilfsmittel zum Beweise einer elementargeometrischen Wahrheit nötig sind¹⁰³.

Im Zentrum seines Interesses stand die Frage, welche Sätze aus welchen Axio-

⁹⁹Vgl. [Toe86], 228.

¹⁰⁰Zu den Beweisen und Änderungen in den verschiedenen Auflagen vgl. [Toe86], 244

¹⁰¹Vgl. [Cor97a], 111, und [Toe86], 244. Er war nicht sehr erfolgreich mit der Bestimmung der gegenseitigen Unabhängigkeit der Axiome, und bald wurde er auf Fehler in seinen Unabhängigkeitsbeweisen hingewiesen, vgl. [Gra00], 52.

¹⁰²1901 hatte Friedrich Schur darauf hingewiesen, daß das Hilbertsche System logisch nicht ganz unabhängig war, [Toe86], 240. E.H. Moore zeigte 1902, daß eins der Hilbertschen Axiome aus den anderen folgt. Infolge dieser Anmerkungen modifizierte Hilbert die Einleitung der *Grundlagen der Geometrie*; so daß die Erstellung eines Systems untereinander unabhängiger Axiome nicht mehr als Zielsetzung erschien, [Cor97a], 111. Zu Hilberts Untersuchungen zur Unabhängigkeit der Axiome vgl. [Toe86], 245.

¹⁰³[Hil56], 125. Hilberts Schlußwort der ersten Auflage blieb in späteren Auflagen unverändert, vgl. [Toe86] 249.

men abgeleitet werden können. Er baute die Geometrie systematisch auf, indem er nach der Einführung jeder Axiomengruppe zunächst untersuchte, welche geometrischen Sätze aus der Axiomengruppe folgten bzw. welche Sätze aus den ersten Axiomengruppen oder aus gewissen Axiomen derselben folgten. Die Reihenfolge, in der die Axiomengruppen eingeführt wurden, war deshalb nicht zufällig¹⁰⁴. Auch die Klassifikation der Axiome in Axiomengruppen spielte eine entscheidende Rolle in seinem Projekt der Erforschung der inneren Architektur der Geometrie. Die Resultate zur gegenseitigen Unabhängigkeit der Axiome lieferten beim systematischen Aufbau der Geometrie ein System elementarer geometrischer Sätze, die sich je nach der Natur der Axiome (Verknüpfungs-, Kongruenzaxiome etc.), aus denen sie abgeleitet wurden, klassifizieren ließen.

Diese Systeme von Sätzen geben Auskunft über die verschiedenen Geometrien, die aus verschiedenen Axiomensystemen entstehen. Beispielsweise konnte Hilbert auf diese Weise untersuchen, welche Geometrie aus der Gesamtheit seiner Axiome mit Ausnahme der Stetigkeitsaxiome entsteht. Oder anders ausgedrückt, welche Rolle die Forderung nach Stetigkeit im Beweis der Fundamentalsätze spielt¹⁰⁵. Der Mathematiker Hans Freudenthal kommentierte: „Die sogenannten Stetigkeitsaxiome werden von Hilbert eingeführt, um zu zeigen, daß sie eigentlich entbehrlich sind“¹⁰⁶. Ohne Stetigkeitsaxiome erhielt Hilbert eine nicht-Archimedische Geometrie; ganz „entbehrlich“ waren diese Axiome von daher nicht. Wahr ist, daß Hilbert diese Axiome am Schluß einführte, um zu zeigen, wie weit die Geometrie ohne Stetigkeitsvoraussetzungen aufgebaut werden kann¹⁰⁷. Umgekehrt ging Hilbert 1902 vor, als er einen alternativen axiomatischen Aufbau der (ebenen) Geometrie vorschlug, und zwar einen, in dem die Forderung der Stetigkeit ganz am Anfang stand. Dieser Hilbertsche Zugang wird im Abschnitt 4.3 behandelt.

Das letzte Kapitel der *Grundlagen der Geometrie* widmete Hilbert geometrischen Konstruktionen. In der ersten Auflage lieferte Hilbert lediglich eine provisorische Form der Konstruktionsverfahren. Ferner setzte er hier das entbehrliche Archimedische Stetigkeitsaxiom voraus. Dagegen wurden Hilberts geometrische Konstruktionen ab der zweiten Auflage allein unter Zugrundelegung der ersten vier Axiomengruppen dargestellt. Die Möglichkeit des Streckenabtragens, die für die Konstruktionen notwendig ist, konnte er auch ab der zweiten Auflage dank eines Beitrags des ungarischen Mathematikers József Kürschák auf „Eichmaß“ reduzieren¹⁰⁸. Die erzeugbaren Strecken entsprechen den Zahlen eines von Hilbert

¹⁰⁴Gewisse Abhängigkeiten zwischen Axiomengruppen löste Hilbert in der zweiten Auflage, indem er die Reihenfolge der Axiomengruppen änderte, vgl. [Toe86], 245.

¹⁰⁵Vgl. [Cor97a], 110.

¹⁰⁶So zitiert in [Toe86], 199ff.

¹⁰⁷Hilbert baute die Streckenrechnung und die Flächenlehre unabhängig von Stetigkeitsvoraussetzungen auf, vgl. [Toe86], 201.

¹⁰⁸Zur Reduzierung des Streckenabtragens auf „Eichmaß“ und der Auswirkung auf spätere Auflagen der „Grundlagen“ vgl. [Toe86], 248. Auf Kürscháks Beitrag hat Hilbert hingewiesen,

konstruierten algebraischen Zahlkörper¹⁰⁹.

Die Rolle der Anschauung

Hilberts Interesse für die Grundlagen der Geometrie läßt sich bis zu seiner Zeit in Königsberg zurückverfolgen, wo er 1891 zum ersten Mal eine Vorlesung zur projektiven Geometrie hielt¹¹⁰. Schon damals faßte er die Geometrie als eine Naturwissenschaft auf, in der die Anschauung eine entscheidende Rolle spiele. Diese Auffassung der Geometrie blieb bei ihm auch später unverändert¹¹¹. Das gilt auch für die Zeit zwischen 1899 und 1902, in der Hilbert sich in Göttingen mit den Grundlagen der Geometrie beschäftigte¹¹².

Aus dem folgenden Zitat aus einer Hilbertschen Vorlesung zur Geometrie aus dem Jahr 1894 geht klar hervor, wie Hilbert sich den Übergang von der Anschauung zu einem formalen Aufbau der Geometrie vorstellte:

Unter den Erscheinungen oder Erfahrungsthat-sachen, die sich uns bei der Betrachtung der Natur bieten, giebt es eine besonders ausgezeichnete Gruppe, nämlich die Gruppe derjenigen That-sachen, welche die äußere Gestalt der Dinge bestimmen. Mit diesen That-sachen beschäftigt sich die Geometrie [...]. Die Geometrie ist eine Wissen-schaft, welche im Wesentlichen so weit fortgeschritten ist, dass alle ihre That-sachen bereits durch logische Schlüsse aus früheren abgelei-tet werden können.¹¹³

Dieser Vorstellung zufolge entstand die Geometrie zunächst aus der Beobachtung der Natur. Nach Hilberts Verständnis entsprach die Auszeichnung grundlegender Tatsachen der Festlegung eines Axiomensystems in einer formalen Behandlung der Geometrie. So gesehen haben die Axiome der Geometrie ihren Ursprung in der Anschauung.

Auch wenn seine Ausführungen die Ansicht enthielten, die Entstehung der Geometrie stehe in enger Beziehung zur Anschauung, ging es Hilbert definitiv nicht darum, eine empirische Philosophie der Geometrie zu vertreten, geschweige denn sie zu verteidigen. Hilbert war kein Philosoph. Er untersuchte nicht, welche psychologischen oder physiologischen Faktoren zur Auszeichnung jener grundlegenden Tatsachen führten. Ebenso wenig erforschte er, wie welche grundlegenden Tatsachen sich in Axiome umsetzen ließen. Diese Fragen standen jenseits seines Interessenhorizonts.

[Hil56], 116. Zu Kürscháks Beitrag vgl. Abschnitte 2.3.2 und 2.2.3.

¹⁰⁹Zu Hilberts geometrischen Konstruktionen vgl. [Toe86], 248ff.

¹¹⁰[Toe86], 11ff.

¹¹¹Vgl. [Cor97a], 104.

¹¹²Nach einem Bericht von Hilberts Schüler Blumenthal, vgl. [Blu35], 405.

¹¹³Aus Hilberts Vorlesungsmanuskript „Die Grundlagen der Geometrie“ SS 1894, zitiert in [Toe86], 58.

Hilberts Einstellung gegenüber der Anschauung diene vielmehr dazu, den Zugang zu einem axiomatischen Aufbau der Physik vorzubereiten. Mit Hilfe von Archivmaterial und vor allem anhand von Hilberts Vorlesungsmanuskripten revidiert Leo Corry das Bild Hilberts als reiner Formalist, indem er beschreibt, wie Hilbert seine Ideen über eine Axiomatisierung der Physik parallel zu seinen Untersuchungen zu den *Grundlagen der Geometrie* entwickelte. Systematisch verfolgt Corry dabei die Rolle der Anschauung in Hilberts Ideen zur Axiomatisierung der Physik¹¹⁴.

Hilberts Überlegungen zu einer Axiomatisierung der Physik basierten auf Analogien, die er zwischen der Geometrie und der Physik bzw. den Naturwissenschaften und deren Bezug zur Anschauung zog. Diese Analogien hatte Hilbert im WS 1898/99, als er zum ersten Mal in Mechanik vorlas, folgenderweise betont:

Auch die Geometrie ist aus der Betrachtung der Natur, aus der Erfahrung hervorgegangen und insofern eine Experimentalwissenschaft [...]. Aber diese experimentellen Grundlagen sind so unumstößlich und so allgemein anerkannt, haben sich so überall bewährt, dass es einer weiteren experimentellen Prüfung nicht mehr bedarf und vielmehr alles darauf ankommt diese Grundlagen auf ein geringstes Mass unabhängiger Axiome zurückzuführen und hierauf rein logisch den ganzen Bau der Geometrie aufzuführen. Also Geometrie ist dadurch eine rein mathematische Wiss. geworden. Auch in der Mechanik werden die Grundthatsachen von allen Physikern zwar anerkannt. Aber die Anordnung der Grundbegriffe ist dennoch dem Wechsel der Auffassungen unterworfen [...], so dass die Mechanik auch heute noch nicht, jedenfalls nicht in dem Maasse wie die Geometrie als eine rein mathematische Disciplin zu bezeichnen ist.¹¹⁵

Hilbert verglich die Geometrie mit den physikalischen Wissenschaften, insbesondere mit der Mechanik. Die Idee einer Axiomatisierung der Physik entstand aus der Beobachtung, daß in den physikalischen Theorien oft unendlich viele Phänomene auf endlich viele grundlegende und unerklärbare Phänomene zurückgeführt werden¹¹⁶. Eine solche Zurückführung ähnelt dem Vorgehen bei einer Axiomatisierung der Geometrie¹¹⁷. Dieser Vergleich ist für Hilbert auch

¹¹⁴Vgl. [Cor97a]. Vgl. auch den Aufsatz von Corry in [Gra99]. Corry beschreibt den Einfluß, den in diesem Zusammenhang die Arbeiten der Physiker Heinrich Herz, Carl Neumann und Paul Volkmann auf Hilbert ausübten, vgl. [Cor97a] 97. Kürzlich hat Corry seine Resultate in dem Buch [Cor04] zusammengeführt. Auf Hilberts Rezeption der Arbeiten von Herz hatte schon Toepell in [Toe86] hingewiesen.

¹¹⁵Aus Hilberts Vorlesungsmanuskript zum Kurs „Mechanik“, gehalten im Wintersemester 1898/99, zitiert in [Cor97a], 109. Die Unterstreichungen folgen dem Original.

¹¹⁶Vgl. [Cor97a], 98.

¹¹⁷Diese Ideen finden sich früher bei Carl Neumann, vgl. [Cor97a], 3.

naheliegend, da er die Geometrie als eine Naturwissenschaft auffaßte, deren Untersuchungsgegenstände die empirischen Eigenschaften des Raumes sind.

Für die Axiomatisierung der Geometrie, aufgefaßt als Naturwissenschaft, legte Hilbert viel Wert auf die allgemeine Anerkennung grundlegender experimenteller Tatsachen, solche, die im Labor nicht mehr nachgewiesen werden müssen. Auch aus diesem Grund erwiesen sich dann für Hilbert nur gut etablierte und weit fortgeschrittene Wissenschaften einer axiomatischen Behandlung zugänglich. Anders als für die Mechanik betrachtete Hilbert für die Geometrie diesen Prozeß, der von der Anschauung bis hin zur axiomatischen Grundlegung verläuft, als abgeschlossen¹¹⁸.

Der Bezug zur Anschauung einer axiomatisch aufgebauten Geometrie ging für Hilbert nicht verloren. Er bestand darin, daß die Axiome der Geometrie grundlegende Phänomene unserer Raumanschauung ausdrücken. Es muß deshalb betont werden, daß Hilbert mit seiner axiomatischen Grundlegung der Geometrie beabsichtigte, das Ableiten von Sätzen aus den Axiomen von der Raumanschauung zu trennen, nicht aber die Axiome von der Raumanschauung¹¹⁹.

Ein zweiter wichtiger Aspekt der Hilbertschen Überlegung, der auch in der oben zitierten Passage zum Ausdruck kam, betrifft die Mathematisierung der Naturwissenschaften. Hilbert schrieb einer axiomatischen Behandlung der Geometrie die epistemologische Bedeutung zu, daß die Geometrie erst durch ihre Axiomatisierung eine rein mathematische Wissenschaft wird¹²⁰.

Im Kontext der damaligen Debatte um die Forderung nach Strenge in der Mathematik interpretiert David Rowe Hilberts axiomatischen Zugang zu den Grundlagen der Geometrie als einen Versuch, einen strengen Aufbau der Geometrie zu liefern, mit dem dann die Geometrie dasselbe logische Fundament und damit dieselbe Legitimität als reine Mathematik erhalte, wie andere mathematische Wissensgebiete, etwa die Analysis¹²¹.

Aspekte von Hilberts frühem Verständnis der Axiomatik (1894-1905)

Dieser Abschnitt beabsichtigt, wichtige Merkmale von Hilberts Verständnis der axiomatischen Methode in der Zeit zwischen 1894 und 1905 zu erläutern, die behilflich sein werden, um Hilberts axiomatischen Zugang von zeitgenössischen Anwendungen der axiomatischen Methode durch seine Kollegen in Frankreich zu differenzieren. Eine fruchtbare Unterscheidung erfolgt hinsichtlich der Erwartungen an einen axiomatischen Zugang (bei Hilbert Grundlagenforschung), der Anwendungsbereiche (bei Hilbert ausschließlich bereits etablierte Wissenschaften) und schließlich der mit einem konsistenten Axiomensystem verbundenen episte-

¹¹⁸Vgl. [Cor97a], 107.

¹¹⁹Vgl. [Cor97a], 105ff.

¹²⁰[Cor97a], 104ff.

¹²¹[Row95], 9ff.

mologischen Implikationen (Existenz des durch die Axiome definierten Objekts, Legitimation der Wissenschaft als exakte Wissenschaft).

Hilberts damaliges Interesse an der axiomatischen Methode bezog sich vorwiegend auf deren Nutzen für die Grundlagenforschung von bereits etablierten Wissenschaften, wie etwa die Geometrie, die Arithmetik und die Mechanik. Dieses Interesse war vielfältig motiviert.

Zunächst sah Hilbert in der axiomatischen Grundlegung einer Wissenschaft einen praktischen Nutzen, nämlich die Sicherung des mathematischen Wissens. Hilberts Lieblingsmetapher des Mathematikers als Architekt illustriert diese Ansicht. Demnach sei der Mathematiker insofern dem Architekten vergleichbar, als daß er sowohl für den Aufbau des Wissensgebäudes als auch für dessen Fundamente verantwortlich zeichne. Diese Metapher hatte Hilbert oft ausgesprochen. Hilbert betonte in seiner Pariser Rede von 1900, daß eine sichere Grundlegung der Fundamente eines Wissensgebäudes nur von demjenigen Architekten durchgeführt werden könne, der die Struktur des Gebäudes gründlich und im Detail kenne¹²². Noch 1917 verglich er in seiner Vorlesung „Axiomatisches Denken“ die axiomatische Methode als Verfahren mit dem Bauen tieferer Fundamente für ein Gebäude, das sich noch im Aufbauprozess befinde¹²³. Allerdings erkannte Hilbert auch einen entscheidenden Unterschied zwischen dem Vorgehen des Mathematikers und dem des Architekten, den er im folgenden Zitat aus seiner Vorlesung vom Sommersemester 1905 über „Logische Prinzipien des mathematischen Denkens“ zusammenfaßte:

Es ist in der Entwicklungsgeschichte der Wissenschaft wohl immer so gewesen, daß man ohne viele Scrupel eine Disciplin zu bearbeiten begann und soweit vordrang wie möglich, daß man dabei aber, oft erst nach langer Zeit, auf Schwierigkeiten stieß, durch die man gezwungen wurde, umzukehren und sich auf die Grundlagen der Disciplin zu besinnen. Das Gebäude der Wissenschaft wird nicht aufgerichtet wie ein Wohnhaus, wo zuerst die Grundmauern fest fundamementiert werden und man dann erst zum Auf- und Ausbau der Wohnräume schreitet; die Wissenschaft zieht es vor, sich möglichst schnell wohnliche Räume zu verschaffen, in denen sie schalten kann, und erst nachträglich, wenn es sich zeigt, daß hier und da die locker gefügten Fundamente den Ausbau der Wohnräume nicht zu tragen vermögen, geht sie daran, dieselben zu stützen und zu befestigen. Das ist kein Mangel, sondern die richtige und gesunde Entwicklung.¹²⁴

¹²²Vgl. [Hil35], 308.

¹²³Zu dieser Interpretation der Metapher Hilberts vgl. [Row97], 548.

¹²⁴Zitiert in [Pec90], 51. Peckhaus entnimmt dieses Zitat der Hellinger-Mitschrift von Hilberts Vorlesung „Logische Prinzipien des mathematischen Denkens“ aus dem Sommersemester 1905. Das Zitat läßt sich mit Peckhaus auch in der Mitschrift von Max Born nachweisen.

Diese Passage beleuchtet Hilberts Verständnis der „richtigen und gesunden Entwicklung“ einer Wissenschaft. Demzufolge stelle sich die Frage nach den Grundlagen einer Wissenschaft erst nach deren Auf- und Ausbau. Aus diesem Grund beschränkte Hilbert den Anwendungsbereich der axiomatischen Methode auf die Grundlagenforschung von gut etablierten Wissenschaften.

Aus dieser Perspektive läßt sich die Bedeutung, die Hilbert seiner Forderung nach Vollständigkeit des Axiomensystems zuschrieb, besser nachvollziehen. Im Zusammenhang mit den *Grundlagen der Geometrie* von 1899 wurde diese Bedeutung bereits erwähnt: daß allen bekannte Sätze der Geometrie sich aus dem Axiomensystem ableiten lassen. Für die anderen Wissenschaften, für die er eine axiomatische Grundlegung vorschlug, verlangte er entsprechend dasselbe¹²⁵.

Die Wirkung von Hilberts späterem axiomatischen Forschungsprogramm zusammen mit der Assoziation von Hilbert mit dem Formalismus im Kontext der sogenannten Grundlagenkrise der 1920er Jahre hat zu einem verzerrten Bild von Hilbert als Befürworter von willkürlich definierten axiomatischen Begriffen und entsprechenden Theorien, die von diesen Begriffen ausgehend aufgebaut werden, beigetragen¹²⁶. Das Gegenteil war jedoch der Fall. Nie hatte Hilbert solche Ansichten geteilt und noch 1919 lehnte er sie explizit ab¹²⁷.

Eine starke Motivation für Hilberts Interesse an der axiomatischen Grundlagenforschung war die Perspektive, die innere logische Architektur der entsprechenden Wissenschaft zu verstehen. In dieser Hinsicht war er mit seinem Werk *Grundlagen der Geometrie* sehr erfolgreich. Sein systematischer Aufbau der Geometrie beanspruchte, die Abhängigkeiten zwischen Sätzen und Axiomen erkennbar zu machen. Dabei zeigte sich die relative Bedeutung, die Hilbert der Forderung der gegenseitigen Unabhängigkeit der Axiome zuschrieb. Ein rein formales Interesse hatte er damals nicht¹²⁸.

Diese Motivation war bei Hilbert deshalb so stark, weil sie mit seinen strukturalistischen Interessen verbunden war. Hilbert war ein Vorläufer der strukturalistischen Tradition in der modernen Mathematik, einer Entwicklungslinie, welche ihre Wurzeln in der Axiomatik, Cantors Mengenlehre und der modernen Algebra hat. Andererseits ist seine Auffassung der Mathematik oft mißverstanden und von Logikern und Philosophen mit seinem formalistischen Programm identifiziert worden¹²⁹. Anhand von zwei Beispielen läßt sich zeigen, wie Hilbert den axiomatischen Zugang mit seinen strukturalistischen Interessen kombinierte. Das erste Beispiel ist die Arithmetisierung der Geometrie in den *Grundlagen der Geome-*

¹²⁵Zu Hilberts Vorstellung der Axiomatisierung der Physik vgl. [Cor97a].

¹²⁶Corry erwähnt als Beispiele von Vertretern eines solchen Hilbert-Bildes: M. Resnik, „The Frege-Hilbert Controversy“ *Philosophy and Phenomenological Research* **34**, 306-403, 1974; und [Rei70]. Vgl. [Cor97a], 115.

¹²⁷Vgl. das Zitat aus einer Vorlesung von Hilbert von 1919 in [Cor97a], 116.

¹²⁸Vgl. [Cor97a], 111.

¹²⁹Vgl. [Row89].

trie. Das zweite Beispiel ist Hilberts Versuch einer Algebraisierung der Analysis, indem er seine Theorie der quadratische Formen unendlich vieler Variablen für die Auflösung von bestimmten Typen von Integralgleichungen entwickelte¹³⁰.

Die Axiomatik, so wie Hilbert sie 1900 in seinem Pariser Vortrag definierte, schrieb für die Grundlegung einer Wissenschaft die Aufstellung eines Axiomensystem vor, das folgende Bedingungen erfüllen mußte: Die Axiome sind völlig unabhängig voneinander und das System ist widerspruchsfrei¹³¹. Während die gegenseitige Unabhängigkeit der Axiome im Interesse eines Verständnisses der inneren logischen Struktur der Wissenschaft verlangt wird, schrieb Hilbert der Konsistenz des Axiomensystems eine epistemologische Bedeutung zu. Für Hilbert bedeutete die Konsistenz des Axiomensystems die mathematische Existenz desjenigen Objekts, das durch die Axiome definiert ist. In seinem Pariser Vortrag wies er darauf hin, daß ein konsistentes Axiomensystem für die Arithmetik der reellen Zahlen zugleich die Existenz dieses Zahlensystems impliziert. Auch in seinem Briefwechsel mit dem Philosophen Frege vertrat Hilbert diese Auffassung. In einem Brief an Frege vom 29. Dezember 1899 schrieb Hilbert:

Sie schreiben: „Axiome nenne ich Sätze . . . Aus der Wahrheit der Axiome folgt, dass sie einander nicht widersprechen.“ Es hat mich sehr interessirt, gerade diesen Satz bei Ihnen zu lesen, da ich nämlich, solange ich über solche Dinge denke, schreibe, vortrage, immer gerade umgekehrt sage: Wenn sich die willkürlich gesetzten Axiome nicht einander widersprechen mit sämtlichen Folgen, so sind sie wahr, so existieren die durch die Axiome definirten Dinge. Das ist für mich das Criterium der Wahrheit und der Existenz.¹³²

Aus der axiomatischen Grundlegung einer Naturwissenschaft zog Hilbert auch eine epistemologische Implikation. Für Hilbert wird die axiomatisch aufgebaute Naturwissenschaft zur exakten Wissenschaft, da ihre Axiomatisierung deren strengen logischen Aufbau ermöglicht¹³³.

4.2.3 Axiomatik und Mengenlehre: Ausblick

1903 erschien das Buch *The Principles of Mathematics* von Bertrand Russell, das dessen später berühmt gewordenen Antinomien der Mengenlehre enthielt. Diese Antinomien waren allerdings nicht allen Mathematikern unbekannt. Seit den

¹³⁰S. Abschnitt 4.1.2.

¹³¹Vgl. [Pec90], 35.

¹³²Briefwechsel Hilbert-Frege in [G⁺80], 12. Dazu schrieb Gray: „The polarity between Hilbert and Frege is a crucial one in modern mathematics. For Frege, existence was primarily a question of what objects there are in the world. Without objects, axiom systems were in his view void. Hilbert was radically of the other opinion: consistency implies existence.“ [Gra00], 103.

¹³³Vgl. [Cor97a], 110ff.

1880er Jahren wußte Cantor, daß sowohl die Gesamtheit der Ordinalzahlen als auch die der Kardinalzahlen keine konsistenten Mengen waren. Er hatte sogar als Versuch, solche antinomischen Mengen zu vermeiden, 1895 den Begriff der „fertigen Menge“ eingeführt¹³⁴. Hilbert schrieb 1903 an Frege, Zermelo habe bereits vor 1903 eine der Russellschen Antinomien entdeckt, und er selbst (Hilbert) habe auch noch vor der Jahrhundertwende andere Antinomien gefunden. Allerdings hatten bis 1903 weder Hilbert noch Zermelo auf die grundlegende Bedeutung der Antinomien hingewiesen. Dagegen gelang es Russell mit der Veröffentlichung von Antinomien, die Aufmerksamkeit der Mathematiker auf das Problem der Grundlagen der Mengenlehre zu lenken¹³⁵.

Die Frage, warum Hilbert sich von den ihm bekannten Beispielen von Antinomien nicht beunruhigen ließ, läßt sich folgenderweise beantworten: Nach Hilberts Auffassung der normalen Entwicklung einer Wissenschaft sind Widersprüche innerhalb dieser Wissenschaft ganz natürliche Erscheinungen, die allerdings auf die Notwendigkeit einer Analyse der Grundlagen jener Wissenschaft hindeuten¹³⁶. Die öffentliche Debatte um die Antinomien, die ja durch das Erscheinen von Russells Buch initiiert wurde, führte zu einer qualitativen Wendung von Hilberts Einschätzung der Antinomien der Mengenlehre und damit zu einer „philosophischen Wendung“ in Hilberts Forderungen zur axiomatischen Methode. Er kam zur Überzeugung, daß ein direkter Beweis der Konsistenz der Axiome der Arithmetik mit einer inkonsistenten Logik nicht möglich wäre¹³⁷.

Ferner hatte die öffentliche Debatte um die Antinomien zusammen mit der Diskussion um die Natur von Zermelos Auswahlaxiom den Effekt, daß die Axiomatisierung der Mengenlehre zu einem wichtigen Anliegen der Göttinger Mathematiker wurde¹³⁸.

1904 hielt Hilbert auf dem III. IMK in Heidelberg einen Vortrag „Über die Grundlagen der Logik und der Arithmetik“. Darin forderte er für die Grundlegung seiner axiomatischen Methode die gleichzeitige Entwicklung der Gesetze der Logik und der Arithmetik. Die so skizzierten Ideen arbeitete er in seiner im Sommersemester 1905 gehaltenen Vorlesung „Logische Prinzipien des mathematischen Denkens“ aus. Die gewünschte Reform der Logik und der Arithmetik gelang ihm jedoch nicht. Er erkannte dabei, daß diese Aufgabe mit schwierigen episte-

¹³⁴So Cantor 1897 in einem Brief an Hilbert, vgl. [Pur89], 56ff. Purkert behandelt die philosophischen Ansichten Cantors im Kontext der Entdeckung der von Russell später so genannten Antinomien.

¹³⁵Zu diesem Thema vgl. [Pec90], [Pur86] und [Moo82].

¹³⁶Vgl. [Pec90], 55.

¹³⁷Vgl. [Pec94], 94ff.

¹³⁸Vgl. [Pec90], 56ff. und [Moo82], 92ff. Peckhaus belegt mit Archivmaterial die Rolle der Diskussionen über die Grundlagenforschung innerhalb der Göttinger mathematischen Forschung um 1903. Beispielsweise besprachen Zermelo, Hilbert, H. Fleischer und W.H. Young in Vorträgen vor der Göttinger Mathematischen Gesellschaft Arbeiten von Frege, Peano, Russell und Hilbert zu Grundlagen der Arithmetik.

mologischen Problemen verbunden war¹³⁹. In besagter Vorlesung entwickelte er aber ein Logikkalkül und einen neuen Mengenbegriff als Hilfsmittel zum gleichzeitigen Aufbau von Logik und Mathematik¹⁴⁰. An einer Axiomatisierung der Mengenlehre und der Logik arbeitete Hilbert selbst nicht, jedoch hoffte er, daß Zermelo und der Philosoph Leonard Nelson diese Aufgaben ausführen würden. Hilbert bemühte sich sehr darum, Forschungsstellen für Zermelo und Nelson in Göttingen zu sichern¹⁴¹.

1908 machte Zermelo für die Axiomatisierung der Mengenlehre einen weitreichenden Vorschlag. Hilbert äußerte sich erst 1917 wieder zu Grundlagenfragen.

4.3 Hilbert über die Stetigkeit des Raumes

Im Jahr 1902 schlug Hilbert einen neuen axiomatischen Zugang zur Grundlegung der Geometrie vor. Im Gegensatz zu seinen *Grundlagen der Geometrie* von 1899, in denen die Stetigkeitsaxiome an letzter Stelle standen, ging er 1902 von der Forderung nach Stetigkeit aus, und zwar „vor allen übrigen Axiomen an erster Stelle durch die Definition der Ebene und der Bewegung“¹⁴². Eine knappe Darstellung seiner Untersuchungen publizierte er in den *Göttinger Nachrichten* unter dem Titel „Ueber die Grundlagen der Geometrie“¹⁴³. Die gleichnamige ausführliche Darstellung erschien kurz darauf in den *Mathematischen Annalen* (im Folgenden als Annalennote zitiert)¹⁴⁴. Hilbert ließ diese dann auch als Anhang in die zweite Auflage der *Grundlagen der Geometrie* (1903) aufnehmen. In seiner Arbeit „Die Genesis des Raumbegriffs“ knüpfte Riesz an diese Veröffentlichungen von Hilbert an. Riesz’ Anschluß an Hilberts Ideen und Methoden wird in den folgenden Kapiteln diskutiert¹⁴⁵.

In diesen Texten knüpfte Hilbert an die Beiträge des norwegischen Mathematikers Sophus Lie zum sogenannten Riemann-Helmholtz-Lie-Raumproblem an. Bei diesem Problem ging es um die Frage, welche von den unendlich vielen Geometrien, die sich aus Riemanns Mannigfaltigkeitsbegriff ergaben, sich für die Beschreibung der physikalischen Phänomene im Raum eignen¹⁴⁶. Hermann von Helmholtz war ein vielseitiger Naturwissenschaftler, der sich mit der Mathematik vorwiegend im Rahmen von physikalischer Forschung beschäftigte. Ausgehend von erkenntnistheoretischen und physiologischen Fragestellungen formulierte er

¹³⁹Vgl. [Pec94], 95 und auch [Row97], 550.

¹⁴⁰Vgl. [Pec94], 98. Eine ausführliche Darstellung von Hilberts Vorlesung gibt [Pec90], 61ff.

¹⁴¹Vgl. [Pec90] und [Pec94]. Zur Frage, inwieweit Zermelo und Nelson sich an Hilberts Forschungsprogramm anschliessen, siehe auch [Row97], 548-553.

¹⁴²[Hil56], Anhang IV, 230.

¹⁴³[Hil02]

¹⁴⁴[Hil03], datiert 10.5.1902, erschienen aber 1903.

¹⁴⁵S. Abschnitte 6.1 und 8.2.

¹⁴⁶Zum Riemann-Helmholtz-Lie-Raumproblem vgl. [Tor78], 153-179.

1868 das sogenannte Postulat der freien Beweglichkeit starrer Körper: Ein fester Körper erhält seine Form unabhängig von der Bewegung im Raum. Helmholtz' Bedingung beschränkte die Menge der Geometrien, die das genannte Raumproblem lösen, auf heute sogenannte einfach zusammenhängende dreidimensionale Mannigfaltigkeiten mit konstanter Krümmung (die Euklidische, die im Sinne von Bolyai/Lobatschewski hyperbolischen, die sphärischen und die elliptischen Geometrien). Helmholtz' Untersuchungen gingen von einem Begriff des Raumes als einer dreidimensional differenzierbaren Mannigfaltigkeit aus. Lies Zugang zum Raumproblem folgte der Kernidee von Kleins Charakterisierung der verschiedenen klassischen Geometrien als Klassen von Objekten und Begriffen, welche unter gewissen Transformationsgruppen invariant bleiben. Lies Beitrag basierte auf Anwendungen seiner damals neu entwickelten Theorie der „endlichen kontinuierlichen Gruppen“¹⁴⁷. Im Kontext von Lies geometrischer Forschung waren diese Gruppen Transformationsgruppen auf lokal Euklidischen Mannigfaltigkeiten, d.h. die Elemente der Gruppen waren Funktionen, die lokal Euklidische Mannigfaltigkeiten auf sich selbst abbildeten¹⁴⁸. Als Funktionen hingen diese Transformationen von einer endlichen Anzahl von Parametern ab. Lie stellte an diese Parameter zusätzliche Differenzierbarkeitsbedingungen.

Das kritisierte Hilbert an Lies Ansatz. Dagegen formulierte er die Vermutung, daß allein die Forderung nach Stetigkeit genüge. Diese Frage hatte Hilbert bereits in seinem Pariser Vortrag als sein fünftes Problem gestellt¹⁴⁹. Seine geometrischen Untersuchungen von 1902 betrachtete Hilbert als Teil einer Antwort auf diese Frage, nämlich für den speziellen Fall der ebenen Geometrie¹⁵⁰. Hilbert schrieb:

Durch die nachfolgende Untersuchung wird zugleich, wie ich glaube, eine allgemeine die Gruppentheorie betreffende Frage, die ich in meinem Vortrag „Mathematische Probleme“, Göttinger Nachrichten 1900, S. 17 aufgeworfen habe, für den speziellen Fall der Gruppe der Bewegungen in der Ebene beantwortet.¹⁵¹

Hilberts Lösung für dieses Problem für den Fall der ebenen Geometrie stützte sich aber auf Ergebnisse aus dem Bereich der Analysis Situs, die sich später

¹⁴⁷Mit einer allgemeineren Bedeutung bezeichnet man heute diese Gruppen als Lie-Gruppen.

¹⁴⁸Modern wird eine Gruppe definiert als eine Menge G , versehen mit einer binären Operation „ \cdot “, namens Produkt, für die gilt: a) es gibt ein Element $e \in G$ mit der Eigenschaft $a \cdot e = e \cdot a = a$, für jedes Element $a \in G$; b) das Produkt zweier Elemente der Gruppe ist wieder ein Element der Gruppe; c) das Produkt ist assoziativ, d.h. $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$; d) für jedes Element $a \in G \exists b \in G$, so daß $a \cdot b = b \cdot a = e$. Die Transformationen bilden eine Gruppe, wenn sie unter der Operation der Verknüpfung von Funktionen diese Eigenschaften erfüllen. Zur Geschichte der Theorie der Lie-Gruppen vgl. [Haw00].

¹⁴⁹Vgl. [Ale98]. Hilberts Vortrag wurde auch in [Hil35] Band 3, 290-329 abgedruckt.

¹⁵⁰Zu Beiträgen, die 1952 zur Lösung von Hilberts fünftem mathematischen Problem führten vgl. [Row95], 34f.

¹⁵¹[Hil03], 382.

als umstritten herausstellten¹⁵². Trotzdem erwiesen sich Hilberts Resultate als korrekt.

Im Gegensatz zu seinem algebraischen Zugang in den *Grundlagen der Geometrie* von 1899 arbeitete er in seiner neuen axiomatischen Grundlegung der ebenen Geometrie vorwiegend mit Methoden der Cantorsche Punktmengelehre sowie mit Resultaten aus dem Bereich der Analysis Situs. Der Jordansche Kurvensatz, dem zufolge jede ebene stetig geschlossene Kurve ohne Doppelpunkte die Zahlenebene in ein inneres und ein äußeres Gebiet teilt, spielte eine zentrale Rolle in Hilberts Darstellung. Unter einer Jordankurve verstand er eine „doppelpunktlose und einschließlich ihrer Endpunkte stetige Kurve“ in \mathbb{R}^2 . Die so gebildeten inneren Gebiete bezeichnete Hilbert als „Jordansche Gebiete“¹⁵³. Diese wurden in seiner allgemeinen Definition der Ebene charakteristisch für seinen grundlegenden Umgebungsbegriff:

Die Ebene ist ein System von Punkten. Jeder Punkt A bestimmt gewisse Theilsysteme von Punkten, zu denen er selbst gehört und welche Umgebungen des Punktes A heißen.

Die Punkte einer Umgebung lassen sich stets umkehrbar eindeutig auf die Punkte eines gewissen Jordanschen Gebietes in der Zahlenebene abbilden. Jedes in diesem Jordanschen Gebiete enthaltene Jordansche Gebiet, welches den Punkt A umschließt[,] ist wiederum eine Umgebung von A. Das Jordansche Gebiet wird ein Bild jener Umgebung genannt. Liegen verschiedene Bilder einer Umgebung vor, so ist die dadurch vermittelte umkehrbar eindeutige Transformation der betreffenden Jordanschen Gebiete aufeinander eine stetige.

Ist B irgend ein Punkt in einer Umgebung von A, so ist diese Umgebung auch zugleich eine Umgebung von B.

Zu irgend zwei Umgebungen eines Punktes A giebt es stets eine solche Umgebung des Punktes A, die beiden Umgebungen gemeinsam ist.

Wenn A und B irgend zwei Punkte unserer Geometrie sind, so giebt es

¹⁵²Im Oktober 1909 schrieb Brouwer einen langen Brief an Hilbert mit Bemerkungen, Berichtigungen und Ergänzungen zu [Hil03]. Im Mai 1909 hatte Brouwer Hilbert über die Unzuverlässigkeit der Schoenfliesschen Resultate informiert. Zu Brouwers Revision der Schoenfliesschen und der Hilbertschen Sätze vgl. [Dal99], 128ff., 143ff. Wie diese Kritiken zusammenhängen, ist nicht ganz klar. In [Hil03] findet sich kein expliziter Hinweis auf Anwendungen von Schoenflies' Resultaten, allerdings war die Angabe solcher Verweise keine Stärke Hilberts. Entweder betrafen Brouwers Kritiken voneinander unabhängige Resultate, oder es blieb, falls Hilbert sich auf Aussagen von Schoenflies stützte, deren Gültigkeit von Brouwer in Frage gestellt wurde, diese Verbindung unausgesprochen. Das damalige inhaltliche Problem faßt Gray folgendermaßen zusammen: 1908 gab es noch keinen gültigen Beweis für die wahre Aussage, daß eine Jordankurve die Ebene in zwei Bereiche aufteilt, wobei der eine homöomorph zum offenen Kreis, der andere homöomorph zum offenen Kreis ohne seinen Mittelpunkt ist. Die entsprechende Aussage gilt im dreidimensionalen Raum nicht, vgl. [Gra00], 111.

¹⁵³Vgl. [Hil03], 382.

stets eine Umgebung, die beide Punkte A und B gleichzeitig enthält.¹⁵⁴

Hilbert faßte zugleich diese Definition der Ebene als die „scharfe Definition“ des zweidimensionalen Mannigfaltigkeitsbegriffs auf¹⁵⁵. In der Tat handelt es sich um einen der ersten Versuche, diesen Begriff axiomatisch zu charakterisieren¹⁵⁶.

Entscheidend für die vorliegende Arbeit ist die Tatsache, daß Hilbert in dieser Definition die Existenz von bijektiven Abbildungen auf Jordangebiete in \mathbb{R}^2 mit stetigen Übergangsfunktionen postulierte, wodurch er die lokale Stetigkeitsstruktur der Mannigfaltigkeit auf die von \mathbb{R}^2 zurückführte. In moderner Terminologie faßte Erhard Scholz die Hilbertsche Vorgehensweise als eine Topologisierung der Ebene im Sinne einer zweidimensionalen C^0 -Mannigfaltigkeit auf¹⁵⁷. Scholz gab folgende moderne Übertragung dieser Hilbertschen Definition der Ebene¹⁵⁸:

Definition 4.1 (Hilberts Definition der Ebene (1902))

Die Ebene ist eine Punktmenge, die durch ein ausreichendes System von Umgebungen U_p für jeden Punkt $p \in E$ topologisiert ist. Dieses System besteht aus Teilmengen $U \subset E$, mit $p \in U$, und jede Umgebung U ist versehen mit mindestens einer bijektiven Koordinatenfunktion $\psi : U \rightarrow V$, mit V ein Jordangebiet $V \subset \mathbb{R}^2$, so daß folgende Bedingungen erfüllt werden:

- (a) *Ist $V' \subset V$ auch ein Jordangebiet mit $\psi(p) \in V'$, dann ist sein Urbild $\psi^{-1}(V')$ auch eine Umgebung von p .*
- (b) *Sind ψ und ψ' zwei bijektive Koordinatenfunktionen $\psi : U \rightarrow V$ und $\psi' : U \rightarrow V'$, dann ist die Koordinatenwechsel-Funktion $\psi' \cdot \psi^{-1} : V \rightarrow V'$ bijektiv und stetig.*
- (c) *Eine Umgebung von $p \in E$, welche auch den Punkt q enthält, ist zugleich eine Umgebung von q .*
- (d) *Sind V und V' zwei Umgebungen von p , dann gibt es eine Umgebung $V'' \subset V \cap V'$.*

¹⁵⁴[Hil02], 235.

¹⁵⁵Hilbert schrieb: „Diese Forderungen enthalten, wie ich glaube, für den Fall zweier Dimensionen die scharfe Definition des Begriffs, den Riemann und Helmholtz als ‚mehrfach ausgedehnte Mannigfaltigkeit‘ und Lie als ‚Zahlenmannigfaltigkeit‘ bezeichneten“, [Hil02], 235.

¹⁵⁶Zur Geschichte des Mannigfaltigkeitsbegriffes vgl. [Sch99]. Scholz schreibt zu Hilberts Definition der Ebene: „In fact, Hilbert’s sketch of an axiom system for two-dimensional manifolds containing all the conceptual components for the later refinement of both, the characterization of general topological spaces, by what would later be called neighbourhood basis as formulated by Hausdorff (1914) and the axiomatic definition of manifolds by coordinate systems and a regular atlas as elaborated by Veblen and Whitehead (1931)“, [Sch99], 47.

¹⁵⁷Scholz diskutiert diese Arbeiten von Hilbert im Zusammenhang mit der Herausbildung der Hausdorffschen Umgebungsaxiome, [P+02], 708ff.

¹⁵⁸Vgl. [Sch99], 47.

- (e) Für jede $p, q \in E$, zwei verschiedene Punkte, existiert eine gemeinsame Umgebung V .

Auf dieser, modern beschrieben, Topologisierung der Ebene beruhte Riesz' Kritik an Hilberts Mannigfaltigkeitsbegriff, denn Hilberts Kriterien für die Stetigkeit von Funktionen und für Konvergenzbetrachtungen erfolgten notwendigerweise in Bezug auf \mathbb{R}^2 . Hilbert versah die Ebene nicht mit einer eigenständigen Stetigkeitsstruktur. Beispielsweise konnte Hilbert keine stetige Koordinatenfunktionen verlangen, weil sich ohne eine eigenständige Stetigkeitsstruktur der Ebene die Stetigkeit einer Abbildung von der Ebene in \mathbb{R}^2 nicht charakterisieren ließ. Die Frage nach einer Charakterisierung der Stetigkeit der Ebene ohne Rückgriff auf die gewöhnliche Stetigkeitsstruktur (Topologie) von \mathbb{R}^2 , regte Riesz zu Untersuchungen an, aus denen seine Arbeit „Die Genesis des Raumbegriffs“ hervorging¹⁵⁹.

Für seine weiteren Ausführungen faßte Hilbert den Begriff der Ebene enger: Zu der oben zitierten Definition fügte er die Forderung hinzu, daß es eine „eindeutig umkehrbare“ injektive Abbildung von der Ebene auf ein Jordangebiet in \mathbb{R}^2 geben müsse¹⁶⁰ – wir geben dieser Abbildung den Name κ . Hilbert wies darauf hin, daß mit dieser Einschränkung die elliptische Geometrie ausgeschlossen wird¹⁶¹.

Hilbert definierte den Bewegungsbegriff als eine orientierungserhaltende stetige bijektive Abbildung von $\kappa(E)$ auf $\kappa(E)$ ¹⁶². Hilbert konnte den Bewegungsbegriff als eine stetige Abbildung der Ebene in sich selbst nicht definieren, weil er kein Kriterium besaß, um die Stetigkeit einer solchen Abbildung zu charakterisieren. Die Bewegungen werden nach seiner Definition zunächst sozusagen ‚unten‘ in \mathbb{R}^2 als solche erkannt: eine bijektive Abbildung $b : E \rightarrow E$ ist eine Bewegung, wenn $\kappa \cdot b \cdot \kappa^{-1} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ stetig ist¹⁶³. Die Bedingung der Stetigkeit der Abbildung in Hilberts Bewegungsbegriff läuft auf die bekannte Stetigkeitseigenschaft einer Abbildung von \mathbb{R}^2 in \mathbb{R}^2 hinaus. Dabei fällt es ferner auf, daß sein Bewegungsbegriff nicht-starre Bewegungen zuläßt. Hilberts Topologisierung der Ebene und seine Definition des Bewegungsbegriffs als eine topologische Abbildung (d.h. als eine Homöomorphismus im modernen Sinne) rechtfertigen Scholz' Bezeichnung von Hilberts Vorgehensweise als einen ‚topologischen Zugang‘ zu den Grundlagen der Geometrie¹⁶⁴. Scholz folgend übernehme ich den Ausdruck ‚Hilberts topologischen Zugang zu den Grundlagen der Geometrie‘ als (modern formulierte)

¹⁵⁹Zu Riesz' Kritik siehe Abschnitt 6.1.

¹⁶⁰Vgl. [P+02], 709 und [Hil03], 382.

¹⁶¹Ferner erweist sich damit die Ebene als homöomorph zu \mathbb{R}^2 . Torretti diskutiert ausführlich die Bedeutung dieser Definition der Ebene in der engeren Fassung und beweist die Homöomorphie der Ebene zu \mathbb{R}^2 , vgl. [Tor78], 187.

¹⁶²Bei Hilbert: „Eine Bewegung ist umkehrbar eindeutige und stetige Transformation der Bildpunkte der Zahlenebene in sich von der Art, daß dabei der Umlaufsinn einer geschlossenen Jordanschen Curve derselbe bleibt“, vgl. [Hil02], 236.

¹⁶³Vgl. [Tor78], 187 und [Gra00], 110ff.

¹⁶⁴Vgl. [P+02], 708ff.

Kurzbeschreibung, mit der ich im folgenden auf die in diesem Abschnitt diskutierten Vorgehensweise Hilberts verweisen werden.

Hilbert stellte folgende drei Forderungen für die Bewegungen der Ebene auf und zeigte, daß eine Geometrie, in der diese drei Axiome erfüllt sind, entweder die Euklidische oder die Bolyai-Lobatschewskische ist: Das erste Axiom fordert, daß die Bewegungen eine Gruppe bilden. Für jedes beliebige Punktpaar A und M verlangte er die Existenz unendlich vieler Bewegungen, die den Punkt M fest lassen, während sie A verschiedene Bilder zuordnen. Solche Bewegungen nannte er Drehungen um M . Die Gesamtheit der Bilder von A , die aus den Drehungen um M entstehen, nannte er „wahren Kreis“. Sein zweites Axiom verlangt, daß jeder wahre Kreis aus unendlich vielen Punkten besteht. Das bedeutet, daß die Standgruppen jedes Punktes (Rotationen) unendliche Kardinalität haben¹⁶⁵. Sein drittes Axiom lautete, daß die Bewegungen ein abgeschlossenes System bilden.

Die Bedeutung von Hilberts Zurückführung der Stetigkeit der Ebene auf die gewöhnliche Topologie in \mathbb{R}^2 zeigt sich besonders beim dritten Axiom, bei dem sich das Vorhandensein eines Konvergenzprinzips auf der Ebene als entscheidend erweist. Das dritte Axiom bedeutet: Konvergieren die Bilder eines Punkttripels (A, B, C) unter Anwendung einer Folge von Transformationen gegen ein Punkttripel (A', B', C') , so gibt es eine Transformation der Gruppen, die (A, B, C) auf (A', B', C') abbildet¹⁶⁶. In einer Fußnote wies Hilbert auf den Zusammenhang zwischen diesem Axiom und der Einschränkung auf starre Bewegungen hin¹⁶⁷.

Das Konvergenzprinzip läuft –modern beschrieben– auf die Übertragung der lokalen (sogar metrischen) Topologie von \mathbb{R}^2 auf die Umgebungen der Ebene hinaus. Anstelle einer scharfen Definition dieses Prinzips erklärte Hilbert:

Es sei A ein bestimmter Punkt in unserer Geometrie und A_1, A_2, A_3, \dots irgend ein unendliches System von Punkten; mit den nämlichen Buchstaben mögen auch die Bilder dieser Punkte in der Zahlenebene bezeichnet werden. Wir grenzen um den Punkt A in der Zahlenebene eine beliebig kleine Umgebung α ab; wenn dann jedesmal irgend welche Bildpunkte A_i in die Umgebung α fallen, so sagen wir, dass es in beliebiger Nähe des Punktes A Punkte A_i gäbe.¹⁶⁸

D.h. eine Punktfolge auf der Ebene konvergiert gegen den Punkt A , wenn ‘un-

¹⁶⁵Vgl. [P+02], 709.

¹⁶⁶Auf diese Umformulierung des dritten Axioms hat Scholz in [P+02], 709 hingewiesen. Torretti nennt die Punkttripel (A, B, C) und (A', B', C') kongruent, wenn es eine Bewegung gibt, die (A, B, C) in (A', B', C') abbildet. Ein solcher Kongruenzbegriff, bemerkt Torretti, entspricht weder dem Euklidischen noch dem Bolyai-Lobatschewskischen Kongruenzbegriff, vgl. [Tor78], 187. Torrettis Kongruenzbegriff kommt wahrscheinlich aus diesem Grund bei Hilbert nicht vor.

¹⁶⁷Vgl. [Hil03], 385. Der Extremfall einer Folge von Bewegungen, deren Bilder des Punkttripels (A, B, C) gegen das Punkttripel (A', B', B') konvergiert, läßt sich leicht ausschließen, denn nach dem dritten Axiom gäbe es einen Homöomorphismus von einem Dreieck in einer Strecke!

¹⁶⁸[Hil03], 384.

ten' auf \mathbb{R}^2 die Folge der Bildpunkte gegen das Bild von A konvergiert. Auf diese Weise konnte Hilbert von Konvergenz von Folgen, von Häufungsstellen und Verdichtungsstellen auf der Ebene sprechen. In moderner Terminologie: Hilbert induzierte die gewöhnliche Topologie von \mathbb{R}^2 in die Umgebungen der Ebene durch die Koordinatenfunktionen. Die Bezeichnung „Verdichtungsstelle“ verwendete er als gleichbedeutend zu Häufungsstelle¹⁶⁹. Die Anwendungen des dritten Axioms erfolgten in zahlreichen Konvergenzverfahren, die Hilbert im Laufe seiner Untersuchungen durchführte. Oft ging er nach folgendem Muster vor: Er konstruierte eine Reihe geometrischer Gebilde in \mathbb{R}^2 (zum Beispiel eine Reihe von Kreisen, deren Radius gegen Null konvergiert), leitete daraus eine Folge von Punkten in der Ebene her, betrachtete die Häufungsstellen der entsprechenden Folge von Bildpunkten in \mathbb{R}^2 , ordnete der Folge von Punkten in der Ebene die entsprechenden Verdichtungsstellen zu und wendete schließlich das dritte Axiom an¹⁷⁰. Die entscheidende Frage nach dem Begriff der Verdichtungsstelle (Häufungspunkte) bzw. nach einem Konvergenzprinzip auf der Ebene löste Hilbert in \mathbb{R}^2 . Die bijektiven Abbildungen und die stetigen Übergangsfunktionen seiner Definition der Ebene gewährleisteten eine angemessene Übertragung der Ergebnisse in \mathbb{R}^2 auf die Ebene.

¹⁶⁹Vgl. [Hil56], Anhang IV, Fußnote auf Seite 189. Die Bezeichnung hat Riesz später übernommen, s. Kapitel 5 und Abschnitt 6.1.

¹⁷⁰Vgl. zum Beispiel seine Vorgehensweise im ersten Paragraphen seiner Annalennote [Hil03], 388ff. In der Erläuterung seiner Beweisführung wies Hilbert auf solche Konvergenzverfahren hin, *ibid.*, 386ff.

Kapitel 5

„Die Genesis des Raumbegriffs“

Am 22. Januar 1906 legte Friedrich Riesz seine Arbeit „A t rfogalom genesis-e“, das ungarische Original von „Die Genesis des Raumbegriffs“, der Ungarischen Akademie der Wissenschaften vor¹. Die deutsche Version erschien 1907 in der deutschsprachigen ungarischen Zeitschrift *Mathematische und naturwissenschaftliche Berichte aus Ungarn*². Es handelt sich um eine für Riesz’ Verhältnisse umfangreiche Arbeit von 44 Seiten, in der er einen Raumbegriff vorschlug, der sich für eine Grundlegung der Geometrie als Erfahrungswissenschaft eignen sollte.

Die Arbeit entstand im Kontext der seit der zweiten Hälfte des 19. Jahrhunderts laufenden Raumdiskussion³. Mit seinen Überlegungen knüpfte Riesz an leitende Fragen dieser Philosophien der Geometrie an: Inwieweit sind die Axiome der Geometrie aus der Erfahrung abzuleiten, bzw. inwieweit erweisen sich diese als bloße Konventionen? Riesz hatte während seiner Studienaufenthalte in Zürich, Göttingen und Paris Gelegenheit gehabt, sich mit den mathematischen und mathematikphilosophischen Diskussionen Westeuropas vertraut zu machen. Dazu gehörten die philosophischen Schriften Poincarés, in denen dieser eine konventionalistische Philosophie der Geometrie darlegte. Riesz kannte nicht nur die Poincaréschen Schriften sehr gut, sondern gab auch an, mit Bertrand Russells Ansichten zur Raumdiskussion aus dessen *The Principles of Mathematics* vertraut zu sein⁴.

Zum historischen Kontext dieser Rieszschen Arbeit gehört auch das Aufkommen der modernen Mathematik um 1900. Gewisse Tendenzen zur Entwicklung allgemeiner abstrakter mathematischer Theorien, die sich der axiomatischen Methode, der Mengenlehre und strukturalistischer Ansätze bedienten, prägten auch die Rieszsche Vorgehensweise: aus Göttingen Hilberts Untersuchungen zu den Grundlagen der Geometrie, aus Frankreich verschiedene moderne Entwicklungen

¹Laut Riesz’ Angaben in [Rie07b], 309.

²Die Originalversion ist [Rie07a], die deutsche Version [Rie07b].

³S. Abschnitt 1.3.

⁴Vgl. Fußnote in [Rie07b], 310. *The Principles of Mathematics* von Russell erschien 1903.

in der Analysis: Borels Maßtheorie, Lebesgues Integrationstheorie, Baires Theorie der reellen Funktionen sowie Hadamards und Fréchets Funktionalkalkül.

Diese Vorreiter der modernen Mathematik prägten die Anwendung axiomatischer Methoden im Interesse systematischer Untersuchungen. Den Anspruch auf Allgemeinheit erhoben die genannten Ansätze dabei nicht um seiner selbst willen. Bei Hilbert sowie bei Fréchet war dieser vielmehr darin motiviert, Theorien mit Hilfe der ihnen zugrunde liegenden gemeinsamen Strukturen zu vereinigen. Der axiomatische Zugang half, einerseits jene Gemeinsamkeiten aufzuspüren, andererseits abstrakte Strukturen überhaupt erst zu definieren. Hilberts *Grundlagen der Geometrie* von 1899 wurde in diesem Sinne für die Vereinigung von Geometrie und Algebra konzipiert⁵. Fréchet verfolgte in seiner Dissertation Ansätze zur Entwicklung einheitlicher Methoden für die Analysis reeller Funktionen und die Variationsrechnung⁶. Borel und Lebesgue benutzten die axiomatische Methode, um ungelöste Probleme derart systematisch zu untersuchen, daß sie aus den hergeleiteten Lösungsbedingungen allgemeine Begriffe, die von ihnen so genannten deskriptiven Definitionen, entwarfen. Diese Definitionen markierten den roten Faden, entlang dessen die Lösung eines Problems konstruiert werden sollte. Der allgemeine Zugang hatte also für Borel und Lebesgue einen systematischen Wert⁷.

Von solchen Ansätzen motiviert versuchte Riesz, eine allgemeine Struktur zu definieren, unter der sich sowohl der geometrische Raumbegriff als auch ein für die Analysis geeigneter abstrakter Raumbegriff fassen ließe⁸. Riesz' Vorschlag für eine derartige Struktur war sein allgemeiner Begriff des mathematischen Kontinuums, ein mit dem heutigen Konzept des topologischen Raumes verwandtes Konzept⁹.

Als Riesz „Die Genesis des Raumbegriffs“ verfaßte, befand er sich am Beginn seiner Forscherkarriere. 1902 hatte er mit einer geometrischen Dissertation promoviert, und um 1904 hatten sich seine Interessen von geometrischen auf topologische (sowohl im Sinne der Analysis Situs als auch im Sinne der Punktmengelehre) und ordnungstheoretische Fragestellungen ausgedehnt. Zwischen 1904 und 1906 beschäftigte er sich intensiv mit Problemen der Analysis Situs und der Mengenlehre, zu denen er sowohl in ungarischen als auch in französischen und deutschen mathematischen Zeitschriften veröffentlichte. Riesz' Untersuchungen in „Die Genesis des Raumbegriffs“ knüpften an verschiedenen Resultate und Anregungen aus den lokalen mathematischen Kulturen in Frankreich und Deutschland an. Riesz' Anwendung einzelner Elemente aus diesen Kulturen wird in den Kapiteln 6, 7 und 8 diskutiert. Die Synthesen, die Riesz aus diesen Elementen vorschlug, werden im Kontext der damaligen wissenschaftlichen Fragestellungen in Kapitel 10 zusammengefaßt.

⁵S. Abschnitt 4.2.2.

⁶S. Abschnitte 3.2.2 und 3.2.6.

⁷S. Abschnitte 3.2.2, 3.2.3 und 3.2.5.

⁸S. Abschnitte 6.1, 7.2 und 8.1.

⁹S. Definition 5.4 und die Bemerkungen dazu in diesem Kapitel.

Diese Rieszsche Arbeit wird in wissenschaftshistorischen Abhandlungen im wesentlichen nur wegen der erwähnten Verwandtschaft zwischen Riesz' Konzept des mathematischen Kontinuums und dem heutigen Begriff des topologischen Raumes besprochen. Inwieweit Riesz' Arbeit zur Entstehung der allgemeinen Topologie beitrug, wird in Zusammenhang mit der Rezeption der Rieszschen Schrift in Kapitel 9 diskutiert.

Zuerst aber werden die Inhalte dieses Rieszschen Werkes zusammengefaßt, wobei sich die Aufgliederung in Problem, Werkzeuge¹⁰ und Strategie als geeignet für die darauf folgende historische Diskussion erweisen wird.

5.1 Probleme

Für Riesz stellte „Die Genesis des Raumbegriffs“ die Vorarbeit für das umfassendere Projekt einer axiomatischen Grundlegung der Geometrie als Erfahrungswissenschaft dar. In einer Schlußbemerkung schrieb Riesz:

Die axiomatische Erforschung der Geometrie als Erfahrungswissenschaft würde erst hierdurch eine gewisse Vollständigkeit erlangen.¹¹

Dieses allgemeine Ziel, das im übrigen Riesz in dieser Arbeit nicht erreichte und auch später nicht weiter verfolgte, muß von den anderen spezifischen Problemen, die Riesz hier behandelte, differenziert werden. Es lassen sich insgesamt vier Probleme feststellen, von denen das zweite und das dritte – nach meiner Nummerierung – aus dem ersten Problem hervorgingen. Das vierte Problem betraf dagegen andere Gebiete der Mathematik und ging insbesondere über Riesz' geometrische Interessen hinaus, so daß es, überschattet durch die Hauptdiskussion um die ersten drei Probleme, in den Hintergrund rückte.

Das **erste Problem** bildet das bereits erwähnte Projekt einer Grundlegung der Geometrie als Erfahrungswissenschaft. Dieses Projekt bestimmte die allgemeine Forschungsrichtung, in die sich größtenteils die Rieszschen Untersuchungen einfügten. Zum einen plante Riesz, analog zu Hilberts Grundlegung der Geometrie von 1902 vorzugehen¹². D.h. so wie Hilbert die Geometrie ausgehend von der Forderung nach Stetigkeit (implizit in der Definition der Ebene und des Bewegungsbegriffes) und mit den Grundbegriffen der ‚wahren Geraden‘ und des ‚wahren Kreises‘ aufbaute, so benötigte Riesz entsprechend in erster Linie neben einem Begriff des stetigen Raumes und der Bewegung auch weitere Grundbegriffe

¹⁰Die Verwendung des Wortes Werkzeug ist nicht zufällig. Es soll in jener Bedeutung verstanden werden, die Epple ihm für den wissenschaftshistorischen Kontext zugeschrieben hat. Im mathematikgeschichtlichen Kontext ist ein Werkzeug ein mathematischer Begriff, der im Hinblick auf seine Anwendungen auf bestimmte Probleme eingeführt wurde, vgl. [Epp00b].

¹¹[Rie07b], 353.

¹²Gemeint sind [Hil02] und [Hil03], s. Abschnitte 4.3 und 6.1.

wie den der Geraden und der Ebene. Solche Grundbegriffe konnte er aber nicht einführen. Er erklärte:

Aber auch durch eine eindeutige Festlegung desselben [d.h. des Verdichtungstypus (LR)] würden erst für die Analysis Situs die Fundamente gelegt sein. Die metrische, affine, ja schon die projektive Geometrie zeichnen gewisse Punktmen- gen über andere, die ihnen homöomorph sind, aus; welche weitere Voraussetzungen führen zu einer derartigen Unterscheidung homöomorpher Punktmen- gen, führen z.B. zu dem Begriffe der Geraden?¹³

Diese Passage entstammt der Einleitung. Im letzten Abschnitt, den er „Die Grundlegung der Geometrie“ benannte, diskutierte Riesz weitere Probleme, deren Lösungen erst eine „Erforschung der Geometrie als Erfahrungswissenschaft“ ermöglichen würden. Dort kam er zu dem im obigen Zitat erwähnten Problem zurück:

Zur Grundlegung dieser geometrischen Systeme genügt keineswegs die Festlegung des Verdichtungstypus. Man bedarf vielmehr neuer Begriffe, die es möglich machen, gewisse Punktmen- gen vor anderen auszuzeichnen.¹⁴

Riesz konnte „gewisse Punktmen- gen vor andern“ nicht auszeichnen. Was meinte er damit? Die Schwierigkeit, die Riesz für abstrakte Mengen und mit der Theorie des mathematischen Kontinuums als einzigem Instrumentarium zu überwinden hatte, ist vergleichbar mit der Situation für Punktmen- gen in \mathbb{R}^n , in der nur festgelegt werden kann, ob zwei Punktmen- gen homöomorph sind oder nicht, aber zwei homöomorphe Punktmen- gen nicht weiter auseinander gehalten werden können. In einer solchen Situation hätte er keine zwei Geraden oder keine zwei Ebenen auseinander halten, geschwiege denn definieren können. Dies waren einige der Schwierigkeiten, weshalb Riesz die Bedingungen nicht als gegeben sah, den Raum als Ort zu studieren, wo sich Objekte (Geraden, Ebenen) befinden und Transformationen stattfinden; d.h. den Aufbau der Geometrie à la Hilbert konnte Riesz nicht fortsetzen¹⁵.

Zum anderen sollte in einer Grundlegung der Geometrie als Erfahrungswissenschaft natürlich die Erfahrung berücksichtigt werden. Seine Resultate in Bezug auf den Raumbegriff deuten darauf hin, daß Riesz eine axiomatische Grundlegung der Geometrie, bei der alle Axiome sich direkt aus der Erfahrung herleiten ließen, nicht für möglich hielt, aber immerhin eine Grundlegung, in der entweder die Axiome aus der Erfahrung stammen oder dieser nicht widersprechen.

¹³[Rie07b], 314.

¹⁴[Rie07b], 350.

¹⁵Andere Schwierigkeiten werden in Abschnitt 6.1 diskutiert. S. auch Fußnote 24 in Kapitel 6.

Angesichts dieser allgemeinen Zielsetzung beschränkte sich Riesz hier zunächst darauf, einen Begriff des stetigen Raumes vorzuschlagen. Als Hauptproblem stellte sich Riesz die Aufgabe, die Rolle der Erfahrung beim Aufbau des mathematischen Begriffes des stetigen, dreidimensionalen Raumes zu untersuchen. Diese Aufgabe warf zwei weitere Fragen auf. Erstens: Was heißt es, daß der Raum – unsere Raumanschauung – empirisch stetig ist? Zweitens: Was heißt es, daß der geometrische Raum stetig ist? Daraus ergaben sich für ihn die zwei folgenden spezifischen Probleme.

Zweites Problem: Sich auf eine Charakterisierung der Stetigkeit des dreidimensionalen geometrischen Raumes rein im Sinne der abstrakten Punktmengenlehre festzulegen.

Drittes Problem: Ausgehend von unserer Erfahrung der Stetigkeit des Raumes in unserer Raumanschauung einen Raumbegriff derart aufzubauen, daß dieser auch die rein mathematische Charakterisierung des stetigen geometrischen Raumes erfüllt.

Der geometrische Raumbegriff, mit dem Riesz sich in „Die Genesis des Raumbegriffs“ beschäftigte, war kein metrischer Raum. Riesz ging es um den Raum ohne irgendeine Metrik, um den Begriff des stetigen Raumes, also um das, was Poincaré als das „gestaltlose Kontinuum“ bezeichnet hatte. Poincaré betrachtete den Raum als ein „gestaltloses Kontinuum“ lediglich hinsichtlich seiner Eigenschaften von Stetigkeit und Dimension. Auch bei Riesz standen diese beiden Begriffe (Stetigkeit und Dimension) im Mittelpunkt seiner Überlegungen, und zwar unabhängig von metrischen Eigenschaften.

Beim zweiten Problem orientierte sich Riesz an Hilberts Definition der Ebene als zweidimensionale Mannigfaltigkeit von 1902¹⁶. Allerdings kritisierte Riesz an dieser Definition die Abhängigkeit der Charakterisierung der Stetigkeit der Ebene von – modern ausgedrückt – der gewöhnlichen Topologie des \mathbb{R}^2 . Deshalb stellte sich Riesz die Aufgabe, die Stetigkeit des Raumes mit Hilfe von abstrakten mengentheoretischen Eigenschaften zu charakterisieren. Riesz’ Behandlung dieses Problems wird in Abschnitt 6.1 ausführlich diskutiert.

Im Zusammenhang mit dem dritten Problem knüpfte Riesz an die in Abschnitt 3.3 erläuterte Unterscheidung Poincarés zwischen der Stetigkeit des physikalischen und des geometrischen Raumes an. Für die Beschreibung der erfahrungsgemäßen Stetigkeit des wirklichen Raumes stützte sich Riesz auf Poincarés Idee des physikalischen Kontinuums. Darüber hinaus betrachtete Riesz, so wie Poincaré, den geometrischen Raum als ein mathematisches Kontinuum¹⁷. Aber um Poincarés Problem der Stetigkeit des Raumes zu vermeiden, das durch die Inkompatibilität zwischen Poincarés Begriffen des physikalischen und des mathematischen Kontinuums entstand, schlug Riesz einen allgemeineren Begriff des

¹⁶Vgl. [Hil02]. Zu dieser Hilbertschen Arbeit s. Abschnitt 4.3.

¹⁷Zu Riesz’ Anschluß an Poincaré s. Abschnitt 6.2.

mathematischen Kontinuums vor: ein abstraktes mengentheoretisches Konzept, das eine zentrale Rolle in Riesz' Behandlung sowohl des zweiten als auch des dritten Problems spielte¹⁸.

Nach diesen Betrachtungen läßt sich das dritte Problem folgenderweise umformulieren: Mit Hilfe von Poincarés Idee des physikalischen Kontinuums einen Raumbegriff aufzubauen, der sich zugleich als ein mathematisches Kontinuum – nach Riesz' Verständnis dieses Konzepts – auffassen läßt, und der ferner zusätzliche, mengentheoretische Eigenschaften erfüllt, die den Raum als stetig und dreidimensional charakterisieren. Riesz' Behandlung des dritten Problems wird in Abschnitt 5.3 skizziert. Aspekte davon werden ausführlicher in Abschnitte 6.2 und 7.1 erläutert.

Die Begriffe des physikalischen und des mathematischen Kontinuums allein reichten Riesz für sein Vorhaben nicht aus. Er baute auf der Basis dieser Konzepte unterschiedliche Theorien auf. Es sind diese Theorien, die die Riesz'sche Arbeit mathematisch so interessant machen, denn sie bilden erste Ansätze einer abstrakten Punktmengenlehre, die es damals, abgesehen von ähnlichen Unternehmungen der französischen Analytiker Baire und Fréchet, noch nicht gab. Wie genau Riesz diese Theorie für seine Zielsetzungen anwendete, wird in den nächsten Abschnitten diskutiert.

Als **viertes Problem** betrachte ich Riesz' Bemühungen um eine allgemeine Theorie des mathematischen Kontinuums im Interesse anderer Gebiete der Mathematik, insbesondere der mengentheoretischen Theorie der mehrfachen Ordnungstypen und der Analysis. Wie bereits erwähnt, gingen diese Bemühungen über seine geometrischen Interessen hinaus. Sie hingen eher mit Riesz eigener Entwicklung als Mathematiker zusammen.

Im Januar 1905, also ein Jahr vor der Anfertigung der ungarischen Originalversion der „Genesis des Raumbegriffs“, hatte Riesz eine umfangreiche Arbeit über die Theorie der mehrfachen Ordnungstypen in den *Mathematischen Annalen* eingereicht¹⁹. Inhaltlich wird diese Theorie in Abschnitt 5.2.3 besprochen, und in Abschnitt 6.1 wird gezeigt, wie Riesz mit seiner Theorie des mathematischen Kontinuums an seine früheren Untersuchungen zur Theorie der mehrfachen Ordnungstypen anknüpfte. Beide Theorien bildeten Ansätze zu einer abstrakten Punktmengenlehre, deshalb sorgte Riesz dafür, eine derart allgemeine Theorie des mathematischen Kontinuums zu entwickeln, daß mehrfache Ordnungstypen als spezielle mathematische Kontinua aufgefaßt werden können²⁰.

Neben mehrfachen Ordnungstypen interessierte sich Riesz für die Anwendbarkeit seiner Theorie des mathematischen Kontinuums auf Baires moderne Theorie der reellen Funktionen, das Fréchet'sche Funktionalkalkül und die Variationsrech-

¹⁸S. Definition 5.4 und die Abschnitte 5.3 und 6.2.

¹⁹[Rie05d]

²⁰S. Abschnitt 7.2.

nung²¹. Inwieweit diese sowie andere analytische Theorien die Arbeit von Riesz motivierten, wird in Abschnitt 8.1 diskutiert, und in diesem Zusammenhang werden die von Riesz erwähnten Beispiele mathematischer Kontinua erläutert.

Nun folgt eine Bemerkung zu den Inhalten der Rieszschen Arbeit und zu den Grenzen der vorliegenden Untersuchung: Bezüglich der technischen Vorgehensweise von Riesz läßt sich „Die Genesis des Raumbegriffs“ in zwei aufeinanderfolgende Teile gliedern. Im ersten Teil behandelte Riesz den Aufbau des mathematischen Begriffes des stetigen Raumes²², während er sich im zweiten Teil mit dem Problem der Dimension befaßte²³. In der vorliegenden Arbeit wird hauptsächlich der erste Teil der Rieszschen Arbeit analysiert²⁴.

Die Probleme der Stetigkeit und der Dimension wurden von Riesz jeweils mit zwei verschiedenen methodischen Zugängen behandelt: zum einen rein mathematisch, indem Riesz abstrakt, axiomatisch und mit mengentheoretischen Methoden vorging, zum anderen empirisch orientiert. Sein Vorgehen läßt sich in folgende Schritte untergliedern: Ausgehend von gewissen Erfahrungstatsachen und psychologischen Voraussetzungen über unsere Wahrnehmung der Stetigkeit des Raumes schlug Riesz mit Hilfe seiner Theorie des physikalischen Kontinuums einen konstruktiven Raumbegriff vor²⁵. Daraufhin lieferte er eine abstrakte axiomatische Definition seines konstruktiven Raumbegriffes²⁶. Dadurch sah er seinen konstruktiven Raumbegriff als mathematisches Objekt legitimiert. Schließlich versuchte Riesz, den so definierten Raumbegriff als ein mathematisches Kontinuum aufzufassen, das so ähnlich wie \mathbb{R}^n gewisse Stetigkeitseigenschaften besitzt: Es ist zusammenhängend, und es gelten verallgemeinerte Versionen der Sätze von Heine-Borel und von Bolzano-Weierstraß.

Im zweiten Teil versuchte er zu beweisen, daß der Raum, den seine konstruktive Definition beschreibt, und \mathbb{R}^3 (mit dem gewöhnlichen Begriff des Häufungspunktes), als mathematische Kontinua gleichartige Stetigkeitsstrukturen haben.

5.2 Werkzeuge

Für die Untersuchung der Rolle der Erfahrung beim Aufbau des Begriffes des stetigen Raumes bemühte sich Riesz einerseits um eine abstrakte, mengentheoretische Charakterisierung der Stetigkeit des geometrischen Raumes, die sich an den Hilbertschen Begriff der zweidimensionalen Mannigfaltigkeit und damit auch an die Eigenschaften der Zahlenkontinua \mathbb{R}^n orientierte. Andererseits versuchte er,

²¹Vgl. [Rie07b], 318ff.

²²Das sind die ersten zehn Abschnitte nach der Einleitung, [Rie07b], 309-340.

²³Der zweite Teil umfaßt die letzten vier Abschnitte, [Rie07b], 340-349.

²⁴Zum Problem der Dimension bei Riesz verweise ich auf [KM99], [CJ99], [Joh81], [Gis80] und [Dau75].

²⁵S. Abschnitte 5.3, 6.2 und 7.1.

²⁶S. Abschnitte 5.3 und 8.2.

die Stetigkeit ‚unserer Raumanschauung‘, oder anders ausgedrückt, die Stetigkeit des Raumes, so wie wir sie erfahren, mathematisch zu fassen.

Zu diesem Zweck führte er einerseits ein abstraktes Konzept des physikalischen Kontinuums ein und versuchte andererseits, den klassischen Begriff des mathematischen Kontinuums als Zahlenkontinuum allgemeiner (d.h. abstrakt und mengentheoretisch) zu fassen. Von diesen Konzepten ausgehend baute er ansatzweise eine Theorie des physikalischen und eine Theorie des mathematischen Kontinuums auf. Diese beiden Begriffsgebäude zusammen mit seiner 1905 entwickelten Theorie der mehrfachen Ordnungstypen bildeten die epistemischen Werkzeuge, mit denen er seine Untersuchungen durchführte. So stand die Theorie des physikalischen Kontinuums am Ausgangspunkt von Riesz' konstruktiver Definition des Raumes und bildete somit das theoretische Instrumentarium für die Behandlung des von mir so genannten dritten Problems. Demgegenüber lieferte die Theorie des mathematischen Kontinuums die Mittel für eine mengentheoretische Charakterisierung der Stetigkeit des geometrischen Raumes, also für den Zugang zum von mir so genannten zweiten Problem. Das Problem der Dimension behandelte er mit Hilfe seiner Theorie der mehrfachen Ordnungstypen. Wie Riesz diese Theorien anwendete, wird in Abschnitt 5.3 skizziert.

Zunächst werden die Riesz'schen Theorien des physikalischen und mathematischen Kontinuums zusammenfassend dargestellt. Besondere Aspekte ihrer Anwendungen werden ferner in den folgenden Kapiteln ausgeführt.

5.2.1 Theorie des physikalischen Kontinuums

Im folgenden wird die Theorie des physikalischen Kontinuums behandelt. Riesz definierte dieses Konzept folgendermaßen:

Definition 5.1 (physikalisches Kontinuum)

„Ich sage von einer Mannigfaltigkeit,²⁷ sie bilde ein physikalisches Kontinuum, wenn auf Grund irgend einer Vorschrift für jedes Paar von Elementen der Mannigfaltigkeit eine und nur eine der beiden Beziehungen besteht: a) die beiden Elemente sind unterscheidbar; b) die beiden Elemente sind ununterscheidbar.“²⁸

In dieser abstrakten Definition bezeichnen die Wörter ‚unterscheidbar‘ und ‚ununterscheidbar‘ zunächst lediglich die Werte einer binären mathematischen Relation zwischen den Elementen der Menge, wobei diese binäre Relation noch nicht festgelegt ist. Eine subjektive Interpretation der Relation ‚unterscheidbar‘ und ‚ununterscheidbar‘ kommt in Bezug auf Elemente einer abstrakten Menge nicht in Frage. Anders verhielt es sich bei Poincarés Konzept des physikalischen

²⁷Damals war es noch üblich, das Wort ‚Mannigfaltigkeit‘ gleichbedeutend zu ‚Menge‘ zu verwenden, vgl. [PI87], 157ff. und z.B. Schoenflies in [Sch08b].

²⁸[Rie07b], 315.

Kontinuums, an das Riesz hier anschloß²⁹.

Riesz führte mit dem Namen ‚physikalisches Kontinuum‘ ein modernes mathematisches Konzept ein. Es handelte sich bei Riesz offensichtlich nicht um ‚das‘ physikalische Kontinuum, also nicht um ein bestimmtes physikalisches Kontinuum, sondern um eine rein mathematische Struktur, die weiter charakterisiert werden konnte. Er differenzierte zunächst verschiedene Typen physikalischer Kontinua: ‚eigentliches‘, ‚diskretes‘ und ‚punktartiges‘ physikalisches Kontinuum: Ein physikalisches Kontinuum ist eigentlich, „wenn es wenigstens ein unterscheidbares und ein ununterscheidbares Paar von Elementen enthält“, diskret, „wenn jedes Paar von Elementen unterscheidbar ist“ und punktartig, „wenn jedes Paar ununterscheidbar ist“³⁰.

Daüber hinaus zeichnete Riesz unter den eigentlichen physikalischen Kontinua jene aus, die zusammenhängend sind. ‚Zusammenhang‘ ist in Riesz’ Theorie eine zusätzliche, aber nicht notwendige Eigenschaft eines physikalischen Kontinuums. Er definierte diese Eigenschaft folgenderweise:

Definition 5.2 (zusammenhängendes physikalisches Kontinuum)

„Das physikalische Kontinuum heißt zusammenhängend, wenn es nicht derart in zwei Teilmengen zerlegt werden kann, daß jedes Element der einen Teilmenge unterscheidbar sei von jedem Elemente der anderen Teilmenge“³¹.

Diese Eigenschaft eines physikalischen Kontinuums spielte eine wichtige Rolle in Riesz’ Untersuchungen, denn für Riesz war klar, daß der Zusammenhang als eine der Haupteigenschaften des Zahlenkontinuums \mathbb{R}^n in der Charakterisierung des stetigen Raumes einbezogen werden mußte³². Es ist bemerkenswert, daß Riesz diese Eigenschaft vom Begriff des physikalischen Kontinuums trennte, daß ein physikalisches Kontinuum im Riesz’schen Sinne nicht schon per Definition zusammenhängend ist. Riesz’ Konzept des physikalischen Kontinuums ist zu allgemein, daß die Bezeichnung ‚Kontinuum‘ ungeeignet zu sein scheint. Die theoretische Zulassung von diskreten physikalischen Kontinua veranschaulicht den Bedeutungsverlust der klassischen Bezeichnungen ‚diskret‘ und ‚Kontinuum‘. Die anschauliche Idee von Stetigkeit wird bis zu einem bestimmten Grad durch die Eigenschaft des Zusammenhangs wiedergewonnen. Beispielsweise kann ein zusammenhängendes physikalisches Kontinuum nicht diskret sein und umgekehrt. In Riesz’ Darstellung sind eigentlich nur zusammenhängende physikalische Kontinua von Interesse.

Aus Riesz’ Definition 5.1 des physikalischen Kontinuums geht hervor, daß die binäre Relation ‚ununterscheidbar‘ nicht unbedingt transitiv ist. Ein punktartiges physikalisches Kontinuum ist ein Beispiel, bei dem die Relation ununterscheidbar

²⁹S. Abschnitt 3.3.

³⁰Vgl. [Rie07b], 315.

³¹[Rie07b], 315.

³²S. Abschnitt 6.1.

transitiv ist. Eine nicht transitive Relation ‚ununterscheidbar‘ läßt Riesz’ Definition jedoch auch zu. Riesz bezeichnete als ‚logisch ununterscheidbar‘ diejenigen ununterscheidbaren Elemente eines physikalischen Kontinuums, für die die Relation ‚ununterscheidbar‘ sich transitiv verhält.

Definition 5.3 (logisch ununterscheidbar)

„Von zwei ununterscheidbaren Elementen sage ich, sie seien logisch ununterscheidbar, wenn es kein Element des physikalischen Kontinuums gibt, das von dem einen Elemente unterscheidbar, von dem andern Elemente ununterscheidbar wäre“³³.

Bei der Relation ‚logisch ununterscheidbar‘ handelt es sich um eine transitive binäre Relation und damit, in heutiger Terminologie, um eine Äquivalenzrelation³⁴. Diese Relation erwies sich als ein technisches Hilfsmittel in Riesz’ Konstruktion des Raumes aufgrund des folgenden Aspektes: Durch die Bildung von Äquivalenzklassen läßt sich ein physikalisches Kontinuum als ein diskretes physikalisches Kontinuum auffassen. Die Anwendung dieser Relation wird in Abschnitt 6.2 ausführlich behandelt.

5.2.2 Theorie des mathematischen Kontinuums

Einen zweiten wichtigen Bestandteil von Riesz’ theoretischem Werkzeug bildete seine Theorie des mathematischen Kontinuums. Im Gegensatz zu dem damals üblichen Verständnis des mathematischen Kontinuums als identisch mit dem Zahlenkontinuum \mathbb{R} schlug Riesz folgende allgemeinere Definition dieses Begriffes vor:

Definition 5.4 (mathematisches Kontinuum)

Ich sage von einer Mannigfaltigkeit, sie bilde ein mathematisches Kontinuum, wenn auf Grund irgend einer Vorschrift zwischen jedem Elemente und jeder Teilmenge derselben eine und nur eine der beide Beziehungen besteht: (a) das Element ist in bezug auf die Teilmenge isoliert; (b) das Element ist eine Verdichtungsstelle der Teilmenge, und dabei folgende Grundsätze befriedigt werden:

1. In bezug auf eine Teilmenge, die aus einer endlichen Anzahl von Elementen besteht, ist jedes Element isoliert.

³³[Rie07b], 317.

³⁴Daß die Relation ‚logisch ununterscheidbar‘ transitiv ist, läßt sich leicht beweisen. Ich führe erst folgende Notation ein: $A \sim B$ für ‚A von B ununterscheidbar‘ und $A \approx B$ für ‚A von B logisch ununterscheidbar‘. Sind $A \approx B$, $B \approx C$, dann ist $A \approx C$ zu zeigen. Ist D ein Element des physikalischen Kontinuums mit $A \sim D$, dann ist $D \sim B$, da $A \approx B$. Ist $D \sim B$, so ist $D \sim C$, da $B \approx C$. Daraus folgt $A \approx C$.

2. Ist ein Element Verdichtungsstelle einer Teilmenge, so ist es auch Verdichtungsstelle einer jeden weiteren Teilmenge, in welcher jene Teilmenge enthalten ist.
3. Wird eine Teilmenge in zwei weitere Teilmengen zerlegt, so ist jedes Element, das Verdichtungsstelle jener Teilmenge ist, zugleich Verdichtungsstelle wenigstens einer jener Teilmengen.
4. Ist A eine Verdichtungsstelle der Teilmenge t und B ein von A verschiedenes Element, so gibt es eine weitere Teilmenge t^* von t , in bezug auf welche A Verdichtungsstelle, B aber isoliert ist³⁵.

Wie bei der Definition des physikalischen Kontinuums handelt es sich hier um eine abstrakte Definition, in der ferner der Begriff des Häufungspunktes axiomatisch charakterisiert wird. Für eine abstrakte Menge wählte Riesz das Vorhandensein eines Begriffes des Häufungspunktes als das Kriterium, damit die Menge überhaupt auf Stetigkeitseigenschaften untersucht werden kann. Wie diese Entscheidung motiviert war, wird in Abschnitt 6.1 gezeigt. In der allgemeinen Topologie entspricht Riesz' Begriff des mathematischen Kontinuums der axiomatischen Definition eines prätopologischen Raumes mit dem ersten Trennungsaxiom und mit einer Abschwächung des zweiten Trennungsaxioms³⁶.

Vergleicht man Riesz' Begriff mit Cantors Konzept eines Punktkontinuums in \mathbb{R}^n als eine perfekt zusammenhängende Menge³⁷, so fällt auf, daß ein mathematisches Kontinuum nach Riesz nicht stetig im Cantorschen Sinn ist, denn die Bedingungen ‚perfekt und zusammenhängend‘ sind nicht in Riesz' Definition beinhaltet. Wieder distanzierte sich Riesz davon, daß die Bezeichnung ‚Kontinuum‘ auch Stetigkeit mit einschließt.

³⁵[Rie07b], 318. In der vorliegenden Arbeit wird die moderne Bezeichnung ‚Häufungspunkt‘ anstatt von ‚Verdichtungsstelle‘ durchlaufend verwendet. Mit modernen Symbolen läßt sich die Rieszsche Definition folgenderweise formulieren: Sei M' die Menge aller Häufungspunkte von M . X ist ein mathematisches Kontinuum, wenn für alle $x \in X$ und für alle $M \subset X$ gilt: Entweder (a) $x \notin M'$ (x ist isoliert in Bezug auf M), oder (b) $x \in M'$ (x ist Häufungspunkt von M), und dabei folgende Bedingungen erfüllt werden:

1. $M = \{x_1, \dots, x_n\}$, dann $M' = \emptyset$;
2. $x \in M'$ und $M \subset N$, dann $x \in N'$;
3. sei $M = P \cup Q$ mit $P \cap Q = \emptyset$; ist $x \in M'$, dann ist entweder $x \in P'$ oder $x \in Q'$;
4. ist $x \in M'$ und $y \neq x$, dann existiert $N \subset M$, so daß $x \in N'$ aber $y \notin N'$.

³⁶Darauf haben H. Herrlich et al. in [HHP02], 753 hingewiesen. Zum Konzept des prätopologischen Raumes vgl. [P+02], 731f. Das erste Trennungsaxiom für den topologischen Raum X lautet: Sind $p, q \in X$ und $p \neq q$, dann existiert eine offene Menge U mit $p \in U$ aber $q \notin U$. Das zweite Trennungsaxiom besagt: Sind $p, q \in X$ und $p \neq q$ dann existieren disjunkte offene Mengen U und V , so daß $p \in U$ und $q \in V$. Vgl. [Gre67].

³⁷Vgl. Cantor [Can83b], auch in seinen Gesammelten Abhandlungen [Can32], 194.

Mit dem Konzept des Häufungspunktes gelang Riesz der mengentheoretische Zugang zur Untersuchung von abstrakten Mengen. Er baute seine Theorie des mathematischen Kontinuums als eine abstrakte Punktmengenlehre auf, in der er zahlreiche Konzepte der Cantorschen Punktmengenlehre verallgemeinerte. Unter anderem führte er das Konzept des ‚Zusammenhangs‘ als eine zusätzliche Eigenschaft des mathematischen Kontinuums ein. Dagegen konnte er keine Charakterisierung für eine ‚perfekte Menge‘ liefern. Wie weiter unten gezeigt wird, lag das Problem in Riesz’ Definition des Ableitens.

Riesz schlug mit seiner Theorie des mathematischen Kontinuums einen allgemeinen Zugang zum Problem der Stetigkeit vor. In Riesz’ Theorie lassen sich einer Menge so viele verschiedene Stetigkeitsformen (Strukturen eines mathematischen Kontinuums) zuschreiben wie verschiedene Häufungspunktbeurteilungen definieren. Dadurch erhält die Frage ‚wie stetig ist die Menge?‘ eine zentrale Bedeutung (die entsprechende Frage in der allgemeinen Topologie lautet: ‚wie fein ist die Topologie der Menge?’). Aus diesem Grund führte Riesz die Relation ‚ähnlich verdichtet‘ und das Konzept des ‚Verdichtungstypus‘ ein, und zwar wie folgt:

Definition 5.5 (ähnlich verdichtet)

„Lassen sich die Elemente zweier mathematischer Kontinua einander eindeutig umkehrbar derart zuordnen, daß jedes beliebige Element und jede beliebige Teilmenge des einen Kontinuums und das entsprechende Element und die entsprechende Teilmenge des anderen Kontinuums in derselben Beziehung zueinander stehen, so sage ich, die beiden Kontinua seien *ähnlich verdichtet*“³⁸.

Zwei Mengen sind ‚ähnlich verdichtet‘, wenn ihre Stetigkeitsstrukturen gleichartig sind, wenn die Mengen hinsichtlich ihrer Struktur als mathematische Kontinua isomorph sind³⁹. Riesz definierte den Begriff des Verdichtungstypus mit Hilfe der Beziehung ‚ähnlich verdichtet‘:

Definition 5.6 (Verdichtungstypus)

Ein Verdichtungstypus ist „das Gemeinsame aller mathematischen Kontinua, die einander *ähnlich verdichtet* sind“⁴⁰.

Mit diesem Konzept klassifizierte Riesz mathematische Kontinua nach Gleichartigkeit. Der entsprechende Ansatz in der punktmengentheoretischen Topologie besteht in der Feststellung, ob die Topologien zweier topologische Räume gleich fein sind, ob die zugrunde liegenden Mengen homöomorph sind⁴¹. Um die grundlegende Bedeutung von verschiedenen Stetigkeitsformen auf ein und derselben Menge

³⁸[Rie07b], 319.

³⁹ In moderner Schreibweise: Zwei mathematische Kontinua M und N sind *ähnlich verdichtet*, wenn es eine bijektive Abbildung $\Phi : M \rightarrow N$ gibt, so daß Φ folgende Bedingungen erfüllt: $\forall x \in M$ und $\forall A \subset M$ gilt, $x \in A' \Leftrightarrow \Phi(x) \in \Phi(A)'$, $x \notin A' \Leftrightarrow \Phi(x) \notin \Phi(A)'$.

⁴⁰[Rie07b], 319.

⁴¹Sind M und N *ähnlich verdichtet*, und ist $\Phi : M \rightarrow N$ der Isomorphismus mit inverser Abbildung $\Psi : N \rightarrow M$ aus der Fußnote 39, dann zeigen wir, daß Φ und Ψ offene Teilmengen

zu illustrieren, wies Riesz auf die Begriffe der schwachen und starken Extrema in der Variationsrechnung hin⁴². Konkret bezogen auf seine Vorhaben in „Die Genesis des Raumbegriffs“ verwendete Riesz das Konzept des Verdichtungstypus, um die eigenständige Stetigkeitsstruktur seines konstruktiv definierten Raumbegriffes mit der Stetigkeitsstruktur des \mathbb{R}^3 (als mathematisches Kontinuum mit dem gewöhnlichen Konzept des Häufungspunktes) zu vergleichen⁴³.

Riesz nannte ein Element x des mathematischen Kontinuums M ‚Hauptelement‘, wenn eine Teilmenge von M existiert, zu der x Häufungspunkt ist. Er führte folgenden Umgebungsbegriff ein.

Definition 5.7 (Umgebung)

„Ich sage von einer Teilmenge des mathematischen Kontinuums, sie sei eine Umgebung des Elementes A , wenn sie A enthält, und überdies A in bezug auf die Komplementärmenge isoliert ist.“⁴⁴

Die enge Beziehung zwischen den Rieszschen Begriffen Häufungspunkt und Umgebung kommt in diesem Satz zum Ausdruck:

Satz 5.1 (Beziehung Verdichtungsstelle – Umgebung)

x ist Verdichtungsstelle der Teilmenge X genau dann, wenn jede Umgebung von x unendlich viele Elemente von X enthält⁴⁵.

Mit diesem Satz lieferte Riesz eine Vorschrift, um mit Hilfe sämtlicher Umgebungen eines Elementes x feststellen zu können, ob x Häufungspunkt einer Teilmenge X ist oder nicht. In der modernen Theorie des topologischen Raumes wird für T_1 -Räume der Begriff des Häufungspunktes genau wie im Theorem 5.1 mit Hilfe von Umgebungen definiert⁴⁶. Das zeigt, wie nahe Riesz an der modernen Theorie des topologischen Raumes war. Nur wählte Riesz als fundamentalen Begriff den des Häufungspunktes und nicht den der Umgebung. Letzterer kommt in seiner Theorie, motiviert durch Arbeiten von Baire und Hilbert, als sekundäres Konzept vor: Riesz benutzte Umgebungen einerseits, um seinen konstruktiven

in offenen Teilmengen abbilden. Für Riesz ist eine Menge offen, wenn jedes Element der Menge isoliert bezüglich der Komplementärmenge ist. Ist B eine offene Teilmenge von N und ist $x \in \Psi(B) \Rightarrow x = \Psi(y)$ für $y \in B$ eindeutig. Da B offen $\Rightarrow y \notin (N \setminus B)'$. Da $\Psi : N \rightarrow M$ Isomorphismus $\Rightarrow \Psi(y) \notin [\Psi(N \setminus B)]'$, wobei $\Psi(N \setminus B) = M \setminus \Psi(B)$, d.h. $x = \Psi(y) \notin [M \setminus \Psi(B)]'$, x ist isoliert bezüglich der Komplementärmenge von $\Psi(B)$. D.h. Ψ bildet offene Teilmengen von N in offene Teilmengen von M ab. So ähnlich folgt der Beweis für Ψ . Damit ist gezeigt, daß die Prätopologien, die aus den mathematischen Kontinua abzuleiten sind, isomorph sind.

⁴²Vgl. [Rie07b], 703.

⁴³S. Abschnitte 5.3 und 6.1.

⁴⁴[Rie07b], 319. In moderner Schreibweise: Sei M ein mathematisches Kontinuum. $A \subset M$ ist eine Umgebung von $x \in M$, wenn $x \in A$ und $x \notin (A^c)'$, wobei $A^c = M \setminus A$ die Komplementärmenge von A ist.

⁴⁵Vgl. [Rie07b], 319.

⁴⁶Vgl. [P+02], 725.

Raubegriff nach dem Satz 5.1 mit einem Begriff des Häufungspunktes zu versehen⁴⁷, andererseits um denselben lokal (d.h. in jeder Umgebung) als zu \mathbb{R}^3 ähnlich verdichtetes mathematisches Kontinuum zu charakterisieren⁴⁸

Von Satz 5.1 bewies Riesz nur die Aussage: Ist $x \in X'$, dann enthält jede Umgebung von x unendlich viele Elemente von X . Er behauptete anschließend, daß der Satz sich umkehren lasse. Auch wies er darauf hin, daß die Schnittmenge einer endlichen Anzahl von Umgebungen von x auch eine Umgebung von x bildet. Sowohl die Umkehrung des Satzes als auch die letzte Behauptung sind in der Tat leicht zu beweisen⁴⁹. Allerdings fällt auf, daß Riesz für die bisherigen Resultate seiner Theorie vom 4. Axiom der Definition 5.4 noch keinen Gebrauch machte⁵⁰.

Riesz betonte die Bedeutung des Umgebungsbegriffs mit einem Verweis auf mengentheoretische Forschungen von Baire, bei denen ‚spezielle Umgebungen‘ eine wichtige Rolle spielen. Riesz zeichnete entsprechend auch spezielle Umgebungen aus, die man heute Umgebungsbasen nennt⁵¹.

Definition 5.8 (ausreichendes System spezieller Umgebungen)

„Von einem System spezieller Umgebungen sage ich, es sei ausreichend, wenn es zu jeder Umgebung eines jeden Hauptelementes eine spezielle Umgebung des Elementes gibt, die in ihr enthalten ist“⁵².

Im Abschnitt 7.1 werden sowohl Baires Umgebungsbegriff als auch Riesz' Anwendungen von Umgebungsbasen diskutiert.

⁴⁷S. Abschnitt 7.1.

⁴⁸S. Abschnitt 6.1.

⁴⁹Der von Riesz nicht bewiesene Teil des Satzes 5.1: Ist x ein Element des mathematischen Kontinuums M , so daß jede Umgebung von x unendlich viele Elemente aus X enthält, dann ist $x \in X'$. Beweis: Fall 1: $x \notin X$. Nehmen wir ferner $x \notin X'$ an, dann ist $U_x := M \setminus X$ eine Umgebung von x , und U_x enthält unendlich viele Elemente aus X , was ein Widerspruch ist! Also $x \in X'$. Fall 2: $x \in X$. Nehmen wir noch einmal $x \notin X'$ an, dann folgt aus dem zweiten Axiom in der Definition 5.4, daß $U_x := (M \setminus X) \cup \{x\}$ eine Umgebung von x bildet. Dann müßte U_x unendlich viele Elemente aus X enthalten, aber $U_x \cap X = \{x\}$. Also $x \in X'$.

Der Beweis, daß die Schnittmenge einer endlichen Anzahl von Umgebungen von x auch eine Umgebung von x bildet, folgt – wie Riesz bemerkte – aus den Axiomen 2 und 3 mittels vollständiger Induktion, vgl. [Rie07b], 319. Sind U_1 und U_2 zwei Umgebungen von x , dann ist $x \in U := U_1 \cap U_2$. Zu zeigen: x ist isoliert bezüglich der Komplementärmenge von U , die als U^c bezeichnet wird. U^c kann in zwei disjunkte Teilmengen zerlegt werden: $U^c = U_1^c \cup (U_1 \cap U_2^c)$. Nach Axiom 2 kann x kein Häufungspunkt von $U_1 \cap U_2^c \subset U_2^c$ sein. Da x kein Häufungspunkt von U_1^c ist, folgt dann aus dem Axiom 3, daß x kein Häufungspunkt von $U^c = U_1^c \cup (U_1 \cap U_2^c)$ ist. U ist also eine Umgebung von x . Nehmen wir an, $U := \bigcap_{i=1}^{n-1} U_i \cap U_n$, U_i ist eine Umgebung von $x \forall i = 1, \dots, n$. Sei $V := \bigcap_{i=1}^{n-1} U_i$, also $U = V \cap U_n$. Da V per Induktionsannahme eine Umgebung von x ist, und da die Schnittmenge zweier Umgebungen wieder eine Umgebung ist, folgt der Satz.

⁵⁰Auf diese Tatsache hatte Taylor schon hingewiesen, vgl. [Tay82], 270.

⁵¹Vgl. [Rie07b], 320. Purkert et al. haben auf die Einführung von Umgebungsbasen hingewiesen, vgl. [P+02], 703.

⁵²[Rie07b], 320.

Nachdem Riesz diese Grundbegriffe eingeführt hatte, baute er eine abstrakte Punkt mengenlehre für mathematische Kontinua auf, indem er folgende Cantorsche Konzepte verallgemeinerte⁵³: Als ‚inneres Element‘ einer Teilmenge A bezeichnete Riesz jedes Element $x \in A$, für das A eine Umgebung ist. A bildet eine ‚offene‘ Teilmenge, wenn A nur aus inneren Elementen besteht. $x \in A$ heißt ein ‚Randelement‘ von A , wenn x Häufungspunkt der Komplementärmenge $M \setminus A$ ist. Die ‚Grenze‘ von A bilden alle Randelemente von A gemeinsam mit allen Randelementen von $M \setminus A$. Zwei Teilmengen A und B heißen in bezug aufeinander ‚separiert‘, wenn $A \cap B = \emptyset$. Darüber hinaus heißen sie in bezug aufeinander ‚isoliert‘, wenn $A \cup A'$ und $B \cup B'$ sich nicht schneiden, d.h. wenn $A \cup A'$ und $B \cup B'$ in bezug aufeinander separiert sind⁵⁴. In diesem Kontext machte Riesz darauf aufmerksam, daß in seiner Theorie die zweite Ableitung A'' einer Menge A nicht unbedingt in der ersten Ableitung A' enthalten ist⁵⁵. Hier stieß Riesz an eine Grenze bei seinem Versuch, die Cantorsche Punkt mengenlehre auf abstrakte Mengen zu verallgemeinern. Ein Konzept der abgeschlossenen Menge konnte Riesz nach Cantors Muster nicht definieren, denn anders als in Cantors Punkt mengenlehre erzeugt die Ableitung einer Menge nicht unbedingt eine abgeschlossene Menge. Riesz verzichtete deshalb auf eine Definition der abgeschlossenen Menge⁵⁶. Als Beispiele für Teilmengen eines mathematischen Kontinuums, bei denen die Relation $A'' \subset A'$ nicht gilt, kannte Riesz sicherlich Baires Funktionenklassen, denn Fréchet hatte diese bereits 1905 im Rahmen seiner Theorie der L-Klassen behandelt und darauf hingewiesen, und Riesz kannte diese Arbeit von Fréchet; sie ist eine von den drei Arbeiten von Fréchet, auf die Riesz verwies⁵⁷.

Zurück zu Riesz' Zusammenhangsbegriff als eine weitere Stetigkeitseigenschaft eines mathematischen Kontinuums: 1908 bemerkte Riesz in seinem Vortrag „Stetigkeitsbegriff und abstrakte Mengenlehre“ auf dem III. Internationalen Mathematikerkongreß in Rom, wo er seine Theorie des mathematischen Kontinuums präsentierte, daß die Idee der Kontinuität im Zusammenhangsbegriff sich nicht allein auf das Konzept des Häufungspunktes zurückführen lasse. Dazu gab er ein Beispiel zweier homöomorpher Mengen, von denen die eine zusammenhängend im Cantorschen Sinne ist, die andere aber nicht: die Mengen $M = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ und

⁵³In moderner Schreibweise paraphrasiert.

⁵⁴Vgl. [Rie07b], 320. Riesz benutzte $\{A, A'\}$, um die Vereinigungsmenge $A \cup A'$ zu bezeichnen.

⁵⁵Riesz schrieb: „Es ist nicht notwendig $t'' \equiv (t')'$ in t' enthalten. Die Abgeschlossenheit der Ableitung, die doch für die Theorie der Punkt mengen eine so fruchtbare Prämisse ist, muß somit in einer allgemeinen Theorie der mathematischen Kontinua vermißt werden“, [Rie07b], 320.

⁵⁶Vgl. [Tay82], 269.

⁵⁷Purkert et al. vermuten, Riesz habe damit beabsichtigt, seine Theorie des mathematischen Kontinuums auch für Baires Theorie über die punktweise Konvergenz von Folgen reeller Funktionen nützlich zu machen. In den Kapiteln 7 und 8 wird diese Vermutung unterstützt. Zu Fréchets Arbeit von 1905 s. Abschnitt 3.2.6.

$N = \mathbb{R} \setminus [0, 1]$ sind zwar homöomorph, M ist zusammenhängend⁵⁸, aber N nicht. Riesz lieferte drei verschiedene Zusammenhangsbegriffe: einen für das mathematische Kontinuum, zwei für Teilmengen:

Definition 5.9 (zusammenhängendes mathematisches Kontinuum)

„Das mathematische Kontinuum heie zusammenhängend, wenn es nicht in zwei offene Teilmengen zerlegt werden kann, die Komplementrmengen fur einander sind.“⁵⁹

Definition 5.10 (zusammenhängende Teilmenge)

„Die Teilmenge t heie zusammenhängend, wenn sie nicht in zwei Teilmengen zerlegt werden kann, die in bezug aufeinander isoliert sind.“⁶⁰

Definition 5.11 (absolut zusammenhängende Teilmenge)

„Die Teilmenge t heie absolut zusammenhängend, wenn es fur jede Zerlegung derselben in zwei Teilmengen, wenigstens ein Element gibt, das der einen Teilmenge angehort, in bezug auf die andere aber Verdichtungsstelle ist“⁶¹.

Die Definition 5.11 stimmt mit dem heutigen ublichen Zusammenhangsbegriff uberein, den N.J. Lennes 1911 und Hausdorff 1914 unabhängig von Riesz aufstellten⁶². Fur die verschiedenen Begriffe zusammenhängender Teilmengen lieferte Riesz weitere interessante Resultate. Ohne den Beweis durchzufuhren, kundigte er an, eine Teilmenge A sei absolut zusammenhängend, wenn diese selbständig aufgefat ein zusammenhängendes mathematisches Kontinuum bildet⁶³. Ferner bewies er folgenden Satz:

Satz 5.2

„Damit ein mathematisches Kontinuum zusammenhängend sei, ist es notwendig und hinreichend, da es fur jedes Paar von Elementen eine absolut zusammenhängende Teilmenge gebe, die das Elementenpaar enthält.“⁶⁴

Der Satz besagt, da ein zusammenhängendes mathematisches Kontinuum durch die Existenz gewisser absolut zusammenhängender Teilmengen charakterisiert wird. In Riesz’ Beweis folgt die Notwendigkeit der Bedingung daraus, da

⁵⁸Im Cantorschen Sinne ist M zusammenhängend, da fur je zwei Punkte t und t' aus M bei vorgegebener, beliebig kleiner Zahl ϵ immer eine endliche Anzahl Punkte t_1, \dots, t_ν aus M auf mehrfache Art vorhanden sind, so da die Entfernungen $\overline{tt_1}, \dots, \overline{t_\nu t'}$ sämtlich kleiner sind als ϵ , vgl. [Can32], 194.

⁵⁹[Rie07b], 320.

⁶⁰[Rie07b], 321.

⁶¹[Rie07b], 321.

⁶²Vgl. [HHP02], 753. Zur Geschichte des Zusammenhangsbegriffes s. auch [Wil78].

⁶³Der Beweis folgt leicht aus der Rieszschen Definition der offene Teilmenge, denn ist $A = B \cup C$, mit $B \cap C = \emptyset$, dann sind nicht beide B und C offenen Teilmengen. Nehmen wir o.B.d.A. an, B ist nicht offen. D.h. es gibt ein Element $x \in B$, das in bezug auf $A \setminus B$ Häufungspunkt ist. Somit ist $x \in B$ und $x \in C'$ und die A ist absolut zusammenhängend.

⁶⁴[Rie07b], 321.

das ganze mathematische Kontinuum als Teilmenge betrachtet eine absolut zusammenhängende Teilmenge darstellt. Für den Beweis, daß die Bedingung auch hinreichend ist, betrachte man eine beliebige Zerlegung des mathematischen Kontinuums M . Sei $M = A \cup B$, mit $A \cap B = \emptyset$. Betrachte man ferner zwei Elemente $a \in A$ und $b \in B$. Laut Voraussetzung gibt es eine absolut zusammenhängende Teilmenge C , die das Elementenpaar enthält. A und B zerlegen zugleich die Teilmenge C , und da diese absolut zusammenhängend ist, gibt es o.B.d.A. ein Element $x \in C \cap A$, das zugleich Häufungspunkt von $C \cap B$ ist. Aus dem Axiom 2 der Definition des mathematischen Kontinuums folgt $x \in A \cap B'$, und deshalb kann A keine offene Teilmenge sein. Das mathematische Kontinuum ist somit zusammenhängend.

Die Abschnitte in „Die Genesis des Raumbegriffs“, in denen diese Theorien dargestellt werden, sind bisher die einzigen Teile dieser Arbeit, die in der Mathematikgeschichte studiert worden sind⁶⁵. Dafür gibt es zwei Gründe. Erstens: In diesen Abschnitten entwickelte Riesz eine abstrakte Punktmengenlehre, was vor ihm nur Fréchet und Baire getan hatten⁶⁶. Zweitens: Es sind fast die einzigen Abschnitte, in denen es allem Anschein nach um reine Mathematik geht, da hier keine psychologischen Hypothesen oder ähnlich subjektiv klingende Begriffe wie Raumvorstellung vorkommen⁶⁷. Im übrigen sind die restlichen Abschnitte schwer lesbar, schon allein weil Riesz versuchte, bestimmte psychologische Hypothesen über die subjektive Wahrnehmung des Raumes mathematisch zu beschreiben. Diese Umstände machten „Die Genesis des Raumbegriffs“ seit der Zeit ihrer Veröffentlichung schwer zugänglich⁶⁸. Auch bei manchen Mathematikhistorikern hinterließ der Text den Eindruck, es handle sich dabei mehr um eine philosophische als um eine mathematische Arbeit⁶⁹. Das hat unter anderem den Effekt gehabt, daß die konstruktive Punktmengenlehre, die Riesz bei der Konstruktion des Raumes und bei der axiomatischen Grundlegung des Raumbegriffes verwendete, von Mathematikhistorikern bisher übersehen worden ist. Dieser konstruktive Ansatz wird in Abschnitt 7.1 studiert.

⁶⁵Vgl. [Man64], [Tay82], [AL97], [Jam99], [P⁺02].

⁶⁶Die hier gemeinten Arbeiten von Baire werden im Abschnitt 7.1 diskutiert. Sie sind nach meinen Kenntnissen in Studien zur Geschichte der Mengenlehre und der allgemeinen Topologie bisher unbeachtet geblieben.

⁶⁷Ausnahme sind zwei weitere Abschnitte über das physikalische bzw. mathematische Kontinuum als geordnete Menge, vgl. [Rie07b], 340-345.

⁶⁸S. Kapitel 9.

⁶⁹Taylor bezeichnete „Die Genesis des Raumbegriffs“ als ‚quasi-philosophical‘, [Tay82], 268. Für Thron argumentierte Riesz in ‚highly philosophical terms‘. Kreyszig sagte über Riesz’ Begriff des mathematischen Kontinuums: „The earliest definition of a *topological space* was given in 1906 (and somewhat obscurely published in 1907) by F. Riesz“, [Kre97], 369.

5.2.3 Theorie der mehrfachen Ordnungstypen

1905 war in den *Mathematischen Annalen* die Arbeit von Riesz „Über mehrfache Ordnungstypen I“ erschienen⁷⁰. Wie bereits erwähnt, verwendete Riesz seine damaligen Resultate, um das Problem der Dimension in seiner Charakterisierung des stetigen Raumes in „Die Genesis des Raumbegriffs“ zu behandeln. Riesz verwies nicht nur auf seine Annalennote, sondern fügte eine knappe Darstellung seiner Theorie der mehrfachen Ordnungstypen ein, die sich auf diejenigen Ergebnisse konzentrierte, die er benutzen wollte. Da sonst keine inhaltlichen Abweichungen bestehen, wird in der folgenden Besprechung direkt auf die Arbeit von 1905 Bezug genommen.

In Riesz' Arbeit „Über mehrfache Ordnungstypen I“ heißt eine abstrakte Menge n -fach geordnet, wenn für ihre Elemente n Ordnungsrelationen definiert sind⁷¹. Die i -te Ordnung wird mit $<_i$ gekennzeichnet. Ist M_k ($k = 1, \dots, n$) eine geordnete Menge, so bildet $M = M_1 \times \dots \times M_n$ das wichtigste Beispiel einer n -fach geordneten Menge, wobei für je zwei Elemente $a = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ und $b = (\beta_1, \dots, \beta_n)$ gilt, $a <_i b$, falls $\alpha_i < \beta_i$ in der Ordnung von M_i .

Riesz definierte in dieser Arbeit eine Reihe von mengentheoretischen Begriffen, die jene von Cantor verallgemeinerten. Riesz führte einen Umgebungs-begriff für n -fach geordnete Mengen ein, welcher im Fall des oben erwähnten Beispiels die n -dimensionalen Intervalle als Umgebungen definiert. Ist M eine n -fach geordnete Menge, $a \in M$, und gibt es n Paare $b_1 c_1, \dots, b_n c_n$ von Elementen von M , für die die Beziehungen $b_i <_i a <_i c_i$ gelten, dann bildet die Menge aller $u \in M$ mit $b_i <_i u <_i c_i$ eine Umgebung von a . Auch einseitige Umgebungen sind zugelassen, nämlich jene, in der a selbst einige b_i oder c_i ersetzt.

Ferner ließ Riesz Fundamentalreihen beliebiger Mächtigkeit zu. Den Begriff des Häufungspunktes definierte er mit Hilfe seines Umgebungs-begriffes: Ein Element a heißt Häufungspunkt einer Teilmenge T des n -fachen Ordnungstypus M , wenn es in jeder Umgebung von a Elemente aus T gibt, die von a verschieden sind⁷².

Die Zulassung von Fundamentalreihen beliebiger Mächtigkeit ergänzte er mit dem Begriff der Zugänglichkeit eines Häufungspunktes, mit dem er die Häufungspunkte folgenderweise klassifizierte: Gibt es für einen Häufungspunkt a von M im Umgebungssystem von a eine wohlgeordnete Reihe von Umgebungen derart, daß jede Umgebung in allen vorhergehenden enthalten ist, und deren Durchschnitt a ist, so heißt a zugänglich und die kleinste Mächtigkeit solcher wohlgeordneter Reihen von Umgebungen die Zugänglichkeit von a . Ist diese Mächtigkeit \aleph_0 , d.h. ist a der Durchschnitt einer abzählbaren Reihe von Umgebungen von a , so heißt

⁷⁰[Rie05d].

⁷¹Siehe auch die Besprechung dieser Riesz'schen Arbeit im Kontext des Hausdorff'schen topologischen Raumbegriffs, [P⁺02], 688ff.

⁷²Vgl. [Rie05d], 409.

a einfach zugänglich.

Riesz hatte hier also ansatzweise eine abstrakten Punktmengenlehre für Ordnungstypen aufgebaut. Eine effektive Verallgemeinerung zahlreicher Cantorscher Begriffe gelang ihm durch die Zulassung von Fundamentalreihen beliebiger Mächtigkeit aus⁷³. Zugleich lag es gerade daran, daß diese Theorie sich als eine allgemeinere abstrakte Punktmengelehre als die Theorie der L -Klassen von Frechet herausstellte. Das wird in Abschnitt 7.2 diskutiert.

5.3 Strategie

In diesem Abschnitt wird zusammenfassend dargestellt, wie Riesz seine Arbeit „Die Genesis des Raumbegriffs“ aufbaute. Da die hier unter den Bezeichnungen ‚Problem eins‘ und ‚Problem vier‘ subsummierten Fragestellungen von Riesz nur am Rande angesprochen wurden, geht es in der folgenden Erläuterung vorwiegend um das Hauptproblem, nämlich die Verknüpfung der Probleme 2 und 3: Riesz’ empirisch-psychologische Theorie der Herausbildung des Raumbegriffes.

Der Einleitung von „Die Genesis des Raumbegriffs“ folgen zwei theoretische Abschnitte, in denen Riesz jeweils die Theorie des physikalischen und die des mathematischen Kontinuums darstellte. Den ersten Schritt in Richtung einer empirisch-psychologischen Theorie des Raumes unternahm Riesz mit seinem Konzept der (momentanen) Raumvorstellung. Ausgangspunkt war die Ansicht, daß die Raumvorstellung aus Empfindungsgruppen bestehe, die sich vom Subjekt einerseits im Raum, andererseits in der Zeit entweder unterscheiden lassen oder nicht. In Termen seines Konzepts des physikalischen Kontinuums läßt sich seine Grundidee folgendermaßen ausdrücken: Unsere Raumvorstellung ist in zweierlei Hinsicht – räumlich und zeitlich – ein physikalisches Kontinuum, dessen Elemente Empfindungsgruppen heißen⁷⁴.

Bei Riesz blieb der Übergang von einer empirischen Idee ‚unserer Raumvorstellung‘ zu der Auffassung ‚unserer Raumvorstellung‘ als ein physikalisches Kontinuum letztlich ungeklärt. Unter anderem spezifizierte er die Bedeutung des Ausdrucks „System von Empfindungsgruppen“ gar nicht. Immer wenn es um diesen Übergang ging, verwies Riesz lediglich auf Poincarés Werk *La valeur de la science* von 1905⁷⁵.

Riesz’ Auffassung ‚unserer Raumvorstellung‘ erweist sich also als eine Definition. Es handelt sich zugleich um Riesz’ Vorschlag, die Stetigkeit des subjektiven Konzepts der Raumvorstellung zu mathematisieren: durch Anwendung seiner Theorie des physikalischen Kontinuums und durch die argumentative Behandlung des Systems von Empfindungsgruppen wie eine abstrakte Menge.

⁷³Vgl. [P⁺02], 689.

⁷⁴Vgl. [Rie07b], 311f.

⁷⁵Der Anschluß von Riesz an Poincaré wird in Abschnitt 6.2 behandelt.

Die Behauptung, ‚unsere Raumvorstellung‘ bilde *in der Zeit* ein physikalisches Kontinuum, erläuterte Riesz dann folgenderweise: Empfindungsgruppen gelten als in der Zeit ununterscheidbar, wenn über deren zeitliche Reihenfolge nicht entschieden werden kann. Anderenfalls sind sie in seiner Theorie als in der Zeit unterscheidbar anzunehmen. Die unterscheidbaren Empfindungsgruppen lassen sich also in der Zeit mittels der Beziehungen ‚früher‘ und ‚später‘ anordnen⁷⁶.

Die Frage, von welchen Empfindungsgruppen hier die Rede war, blieb bei Riesz, wie gesagt, unbeantwortet. In Riesz’ Text mag der empirisch-psychologische Aspekt der Rede von Empfindungen zwar einen, wenn auch vagen, anschaulichen Zugang zu Riesz’ Erläuterungen ermöglichen. In seinen mengentheoretischen Untersuchungen haben ‚Empfindungsgruppen‘ dennoch argumentativ einen rein formalen Charakter: Sie werden als Elemente einer abstrakten Mengen behandelt. Deshalb werde ich zur Beschreibung von Riesz’ Vorgehensweise eine moderne mathematische Terminologie benutzen: Mit Hilfe der Äquivalenzrelation „logisch ununterscheidbar“ definierte Riesz Äquivalenzklassen von ununterscheidbaren Empfindungsgruppen. D.h. er führte damit eine Partition des Systems von Empfindungsgruppen durch. Die Äquivalenzklassen nannte er Zeitpunkte. Die Gesamtheit der Zeitpunkte bildete mittels der Beziehungen „früher“ und „später“ eine einfach geordnete Menge, deren Elemente nach Riesz sogar wie die Reihe der natürlichen Zahlen angeordnet werden können.

Für seine Konstruktion des Raumes setzte Riesz des weiteren voraus: Vom Subjekt werden bis zu einem bestimmten Zeitpunkt nur endlich viele Empfindungen wahrgenommen:

Eine erste einschränkende Voraussetzung ist nun jene, daß die Anzahl der Empfindungen, die irgend einer Empfindung in der Zeit vorausgehen, die also bis zu einem Zeitpunkt in unser Bewußtsein eingetreten sind, eine endliche ist. Somit ist dann auch die Anzahl der Zeitpunkte, die irgend einem Zeitpunkte vorangehen, endlich. Jedem Zeitpunkte kommt daher ein bestimmter Rang zu.⁷⁷

Riesz betrachtete dies als „eine Voraussetzung psychologischer Natur“. Die Folgerung, daß jedem Zeitpunkt nur endlich viele Zeitpunkte vorangegangen sind, impliziert die Existenz eines ersten Zeitpunktes, und damit die Möglichkeit einer Anordnung der Zeitpunkte in einer Reihenfolge ähnlich der der natürlichen Zahlen. Hinsichtlich ihrer Beziehungen in der Zeit hatte Riesz auf diese Weise das System von Empfindungsgruppen als ein physikalisches Kontinuum aufgefaßt, welches sich nach den natürlichen Zahlen ordnen läßt.

Nun betrachtete Riesz das System von Empfindungsgruppen hinsichtlich ihrer Beziehungen *im Raum* als ein physikalisches Kontinuum, indem er bemerkte, je

⁷⁶Vgl. [Rie07b], 324.

⁷⁷[Rie07b], 325.

zwei Empfindungsgruppen des Systems können vom Subjekt im Raum entweder unterschieden werden oder nicht, d.h. je zwei Empfindungsgruppen sind im Raum entweder unterscheidbar oder ununterscheidbar⁷⁸.

Mit Hilfe der Beziehungen unterscheidbar und ununterscheidbar im Raum bzw. in der Zeit definierte Riesz das Konzept des *physikalischen Punktes n -ter Ordnung* als eine endliche Folge von Empfindungsgruppen, die im Raum ununterscheidbar sind, in der Zeit aufeinander folgen und die „bis zum n -ten Zeitpunkt (inklusive) in mein Bewußtsein eingetreten sind“⁷⁹. Dieser Begriff sowie weitere technische Aspekte von Riesz' Konstruktion des Raumes werden in Abschnitt 7 eingehender diskutiert.

Die Gesamtheit der physikalischen Punkte n -ter Ordnung nannte Riesz die *n -te momentane Raumvorstellung*. Durch Erweiterung der Beziehung ‚unterscheidbar‘ und ‚ununterscheidbar‘ für Elemente der n -ten momentanen Raumvorstellung gelang es Riesz, jede einzelne n -te momentane Raumvorstellung als ein physikalisches Kontinuum aufzufassen⁸⁰.

Die Reihe aller n -ten momentanen Raumvorstellungen bildete für Riesz den ersten Ansatz zum Raumbegriff. Damit schlug er eine Konstruktion des Raumes auf der Basis seines Konzepts des physikalischen Kontinuums vor, d.h. auf der Basis einer Mathematisierung der Stetigkeit des ‚wirklichen‘ Raumes⁸¹.

Für diesen Raumbegriff, d.h. für die Reihe aller n -ten momentanen Raumvorstellungen, lieferte Riesz anschließend ein Axiomensystem, das das Verhalten der Reihe regelte. Die Axiomatisierung seines Raumbegriffes stellte für ihn den Übergang vom empirisch-psychologischen zum mathematischen Zugang zur Herausbildung des Raumbegriffs dar. Riesz sah sich dann berechtigt, seinen axiomatisch definierten Raumbegriff als ein mathematisches Untersuchungsobjekt zu behandeln⁸². Riesz charakterisierte die Elemente des Raumes als unendliche Folgen physikalischer Punkte n -ter Ordnung (n von 1 bis unendlich), die gewisse zusätzliche Eigenschaften erfüllen. Er nannte die Elemente des Raumes *mathematische Punkte*⁸³.

Riesz führte nun auf den Raum als Menge mathematischer Punkte ein konstruktiven Konzept des Häufungspunktes (Verdichtungsstelle) ein, mit dessen Hilfe er diese Menge als ein mathematisches Kontinuum, in dem von ihm zuvor definierten Sinne, auffaßte⁸⁴.

Vor einer Erläuterung von Riesz' Lösung des von mir so genannten drit-

⁷⁸Vgl. [Rie07b], 325.

⁷⁹Vgl. [Rie07b], 325.

⁸⁰Vgl. [Rie07b], 325f.

⁸¹Vgl. [Rie07b], 326ff.

⁸²Vgl. [Rie07b], 328ff. Riesz' Axiomensystem wird in Anhang A wiedergegeben. Der formale Zweck dieses Axiomensystems wird in Abschnitt 8.2 diskutiert.

⁸³Vgl. [Rie07b], 331. S. die genaue Definition in Abschnitt 7.1.

⁸⁴Vgl. [Rie07b], 333.

ten Problems soll das bisher Beschriebene rekapituliert werden: Die Substanz des Riesz'schen konstruktiven Raumbegriffes bestand also aus den sogenannten „Empfindungsgruppen“, welche bei Riesz argumentationstechnisch eigentlich als inhaltsleere Objekte, als Elemente einer abstrakten Menge vorkamen. Gewisse Systeme von Empfindungsgruppen faßte Riesz begrifflich erst als physikalische Punkte n -ter Ordnung, dann als mathematische Punkte auf. In Riesz' Darstellung ist der Raum auf dieser Stufe eine unendliche Reihe n -ter momentaner Raumvorstellungen ($n \in \mathbb{N}$) und somit eine unendliche Reihe physikalischer Kontinua. Während die Stetigkeitsstruktur der n -ten momentanen Raumvorstellung durch die Struktur des physikalischen Kontinuums beschrieben wird, regelt das Axiomensystem die Stetigkeitsstruktur der gesamten Reihe n -ter momentaner Raumvorstellungen, also des Raumes. Zugleich ist der Raum auf dieser Stufe eine Menge wohl definierter mathematischer Punkte, die mit Riesz konstruktiven Begriff des Häufungspunktes ein mathematisches Kontinuum beschreibt. Das von Riesz vorgeschlagene Raumkonzept ist sowohl ein aus einer Reihe physikalischer Kontinua konstruktiv definierter Begriff als auch ein mathematisches Kontinuum.

Schließlich hatte Riesz zur Lösung des dritten Problems zwei Dinge nachzuweisen: erstens, daß der Raum als mathematisches Kontinuum sich für die Beschreibung ‚unserer Raumvorstellungen‘ eignet, zweitens, daß der Raum als mathematisches Kontinuum in jeder Umgebung gleichartig stetig wie \mathbb{R}^3 ist. Die erste Anforderung ist mit Riesz' Lösung von Poincarés Stetigkeitsproblem verbunden, die in Abschnitt 6.2 besprochen wird.

Zur zweiten Anforderung bemerkte Riesz, daß die bisherigen Untersuchungen für die Festlegung des Verdichtungstypus des Raumes noch nicht ausreichend seien. Auf dieser Stufe im Aufbau seiner Theorie konnte er nicht beweisen, daß der Raum als mathematisches Kontinuum lokal denselben Verdichtungstypus wie das dreidimensionale Zahlenkontinuum \mathbb{R}^3 besitzt. Das lag unter anderem daran, daß er das Problem der Dimension noch nicht behandelt hatte. Zunächst versuchte er zu zeigen, daß der Raum als mathematisches Kontinuum bestimmte Stetigkeitseigenschaften des Zahlenkontinuums besitzt: Er schlug entsprechende Versionen der Sätze von Bolzano-Weierstraß und von Borel vor⁸⁵. Darüber hinaus zeigte er, daß der Raum ein zusammenhängendes mathematisches Kontinuum ist⁸⁶.

Im Hinblick auf sein Projekt einer empirischen Grundlegung der Geometrie bemühte sich Riesz darum, weitere wichtige Eigenschaften des dreidimensionalen Zahlenkontinuums \mathbb{R}^3 für seinen konstruktiven Raumbegriff nachzuweisen. Eine dieser Eigenschaften betrifft die Dimension des Raumes. An dieser Stelle treffen sich Dimensions- und Stetigkeitsproblem. Durch Anwendung von Resultaten seiner früheren Arbeit über mehrfache Ordnungstypen faßte er den Raum als dreifach geordnete Menge auf⁸⁷. Da die dreifache Ordnungsrelation einen natürlichen

⁸⁵S. Abschnitt 7.2.

⁸⁶[Rie07b], 335ff.

⁸⁷Vgl. [Rie07b], 340-349.

Begriff des Häufungspunktes bestimmte, versah diese den Raum (also die Menge der mathematischen Punkte) mit einer zunächst anzunehmenden zusätzlichen Stetigkeitsstruktur. Riesz behauptete dann, daß die beiden Stetigkeitsstrukturen isomorph seien, und gab einen skizzenhaften Beweis dafür. Er nannte diese Eigenschaft: Das mathematische Kontinuum sei stetig dreifach geordnet⁸⁸.

Nach weiteren Untersuchungen behauptete er schließlich:

Der Verdichtungstypus des definierten mathematischen Kontinuums wurde zwar auf Grund unserer Voraussetzungen in gewissem Maße umgrenzt; er ist aber noch keineswegs eindeutig festgelegt. Unseren Voraussetzungen entspricht noch jedenfalls der Verdichtungstypus eines jeden zusammenhängenden, nur aus inneren Punkten bestehenden Bereiches des dreidimensionalen gewöhnlichen, resp. projektiven Zahlenraumes. Es ist bekannt, daß diese Bereiche nicht alle homöomorph sind; die Mächtigkeit der möglichen Verdichtungstypen ist vielmehr 2^{\aleph_0} .⁸⁹

Riesz behauptete hier, mit seiner empirisch-psychologischen Theorie der Herausbildung des Raumbegriffes den Raum derart als ein mathematisches Kontinuum definieren zu können, daß es zu einem ‚gewissen‘ dreidimensionalen Bereich des \mathbb{R}^3 ähnlich verdichtet ist⁹⁰. Da er den Zusammenhangstypus jenes (im Riesz-schen Sinne) offenen Bereiches nicht bestimmen konnte, ließ seine Charakterisierung unendlich viele Stetigkeitsformen für den Raum zu. Riesz behauptete, es gäbe 2^{\aleph_0} mögliche Verdichtungstypen für einen offenen Bereich des \mathbb{R}^3 .

Riesz beendete seine Arbeit mit dem Abschnitt „Die Grundlegung der Geometrie“, in dem er einige seiner Vorstellung nach noch zu überwindende Schwierigkeiten für den weiteren Aufbau der Geometrie als Erfahrungswissenschaft diskutierte⁹¹.

⁸⁸Riesz definierte: Das „mathematische Kontinuum sei stetig n -fach geordnet, wenn es derart n -fach geordnet ist, daß die durch die Anordnung bewirkte Verdichtung mit der Verdichtung des mathematischen Kontinuums übereinstimmt“, also wenn „die beiden Mengen ähnlich verdichtet sind“, [Rie07b], 345.

⁸⁹[Rie07b], 350.

⁹⁰Vgl. [Rie07b], 349.

⁹¹Vgl. [Rie07b], 350ff. S. dazu die Besprechung des ersten Problems in Abschnitt 5.1, sowie Abschnitt 6.1.

Kapitel 6

Das Problem der Stetigkeit des Raumes

6.1 Anschluß an Hilberts topologischen Zugang zu den Grundlagen der Geometrie

Im Wintersemester 1903/04 hielt sich Riesz als Gast der Göttinger Mathematischen Gesellschaft in Göttingen auf¹. In dieser Zeit beschäftigte er sich mit Problemen der Geometrie und der Analysis Situs. So verfaßte er die Arbeit „Über einen Satz der Analysis Situs“, die 1904 in den *Mathematischen Annalen* veröffentlicht wurde².

Seine Untersuchungen schlugen einen vereinfachten Beweis der Schoenflieschen Umkehrung des Jordanschen Satzes über geschlossene Kurven ohne Doppelpunkte vor³. Schoenflies' Satz besagt: Wenn eine perfekte Menge P der Zahlenebene die Komplementärmenge in zwei streckenzusammenhängende Gebiete zerlegt, ein inneres und ein äußeres, so daß „jeder Punkt der Menge P von jedem Außenpunkt und von jedem Innenpunkt aus durch einen äußeren oder inneren Streckenzug erreicht werden kann, dessen Endpunkt oder dessen einziger Grenzpunkt er ist“, so bildet die Menge P eine einfach geschlossene Kurve, d.h. P ist durch eine stetige Funktion $f(t) = (x(t), y(t)) : [t_0, t_1] \rightarrow \mathbb{R}^2$ darstellbar, wobei

¹Ich danke Prof. David E. Rowe für den Hinweis auf eine Liste der Mitglieder und Gäste der Mathematischen Gesellschaft zu Göttingen im Wintersemester 1903-04. Diese Liste befindet sich im Archiv der Göttinger Staats- und Universitätsbibliothek.

²Es handelt sich um [Rie04c], datiert „Göttingen im Februar 1904“.

³Schoenflies hatte seine Resultate in den an Göttingen gebundenen Zeitschriften *Göttinger Nachrichten* [Sch02] und *Mathematische Annalen* [Sch04a] veröffentlicht. Riesz verwies auf beide Veröffentlichungen, [Rie04c], 409. Aus einem Brief von Riesz an Hilbert vom November 1904 geht hervor, daß Schoenflies selbst Korrektur des Rieszschen Beitrags las. Jedenfalls erwähnte Schoenflies 1904 in einer anschließenden Untersuchung die Annalennote von Riesz, vgl. [Sch04c], 522.

$f(t_0) = f(t_1)$ und sonst $f(t_2) \neq f(t_3) \forall t_2, t_3 \in (t_0, t_1)$ mit $t_2 \neq t_3$ ⁴.

Für eine allgemeinere Formulierung des Schoenfliesschen Satzes lieferte Riesz einen Beweis, der sich auf ein von Hilbert benutztes Verfahren stützte. Dieses Verfahren, demzufolge die Punkte der Kurve ‚zyklisch angeordnet‘ werden, hatte Hilbert, wie Riesz bemerkte, in seiner Annalennote „Über die Grundlagen der Geometrie“ von 1902 verwendet⁵. Dabei handelt es sich um ein komplexes Verfahren, das hier nicht weiter erläutert werden muß. Riesz wies ferner darauf hin, daß Hilberts Arbeit als Anhang in der zweiten Auflage der Festschrift *Grundlagen der Geometrie* abgedruckt wurde⁶.

Dieser doppelte Verweis auf Hilbert deutet darauf hin, daß Riesz sich während seines Forschungsaufenthalts in Göttingen in die verschiedenen Hilbertschen Zugänge zur Erforschung der Grundlagen der Geometrie eingearbeitet hatte⁷. Sogar einzelne Beweisverfahren hatte Riesz sich angeeignet. Seine Veröffentlichungen zufolge war Geometrie sein einziges Forschungsgebiet in seiner bisherigen Forschungskarriere gewesen. Er hatte vor seiner Annalennote von 1904 nur seine Dissertation und eine kurze Note in den *Comptes Rendus* publiziert, beide zu geometrischen Fragen. Das legt die Vermutung nahe, daß die Auseinandersetzung mit Hilberts topologischem Zugang zur Geometrie die Aufmerksamkeit von Riesz auf Fragestellungen der Analysis Situs lenkte⁸.

Im November 1904 schickte Riesz einen Brief an Hilbert, zusammen mit einer „kürzeren Note“ und der Bitte, diese in den *Göttinger Nachrichten* zu veröffentlichen⁹. Ihrer Beschreibung nach handelte es sich um eine erste Fassung seiner 1905 publizierten Arbeit „Über mehrfache Ordnungstypen I“¹⁰. In einem zweiten

⁴Vgl. [Sch02], 186.

⁵Riesz verwies in [Rie04c] auf Hilberts Annalennote [Hil03] und deren Abdruck als Anhang in den *Grundlagen der Geometrie* und in [Rie07b] auf Hilberts Artikel in den *Göttinger Nachrichten*.

⁶S. Abschnitt 4.3.

⁷Die Unterschiede zwischen den *Grundlagen der Geometrie* von 1899 und den gleichnamigen Artikeln von 1902 wurden in den Abschnitten 4.2.2 und 4.3 diskutiert.

⁸Hilbert verwies auf Schoenflies' Arbeit [Sch02] in [Hil03], 386. Hilbert bemerkte in Bezug auf Schoenflies' Umkehrung des Jordanschen Kurvensatzes, daß er (Hilbert) einen ähnlichen Satz bewiesen hat. In [Sch04a], 197 bestätigte Schoenflies Hilberts Aussage. Ferner besprach Schoenflies kurz die Unterschiede zwischen seinem und Hilberts Resultat. Es handelt sich also um voneinander unabhängige ähnliche Sätze. Riesz versuchte in seinem Beitrag, eine verallgemeinerte Version des Schoenfliesschen Satzes mit einer auf Hilberts Verfahren stützenden Vorgehensweise zu beweisen. Brouwer kritisierte 1909 sowohl den Beweis von Hilbert als auch den von Schoenflies und lieferte selbst einen Beweis für die Umkehrung des Jordanschen Kurvensatzes, [Dal99], 129 und 142ff. Die Frage, ob bzw. inwieweit Riesz seine Version dieses Satzes mangelhaft bewies, muß noch geklärt werden.

⁹Die Note ist nicht erhalten, der Brief dagegen findet sich in Hilberts Nachlaß in der Handschriftenabteilung der Göttinger Staats- und Universitätsbibliothek. Zum Briefwechsel zwischen Riesz und Hilbert s. Anhang C.1.

¹⁰[Rie05d]. Zu den Inhalten dieser Rieszschen Arbeit s. Abschnitt 5.2.3. Zwischen 1904 und 1906 erschien kein Artikel von Riesz in den *Göttinger Nachrichten*.

Brief an Hilbert widerrief Riesz die Publikation jener Note, da er Änderungen einfügen wollte¹¹. In der Tat gab die endgültige Version keine kurze Note mehr ab, vielmehr umfasste sie 15 Seiten, was für Riesz' Verhältnisse eher eine umfangreiche Arbeit darstellte. Datiert im Januar 1905 erschien diese Arbeit jedoch nicht in den *Göttinger Nachrichten* sondern in den *Mathematischen Annalen*, der bedeutendsten zeitgenössischen mathematischen Zeitschrift Deutschlands, deren Hauptherausgeber damals Hilbert war¹².

In seinem Brief an Hilbert vom November 1904 stellte Riesz seine Untersuchungen als einen Versuch vor, geometrische Eigenschaften der Punktfolgen mit Hilfe des Begriffes der Fundamentalreihe auf Ordnungstypen zu übertragen. Er schrieb, den Verzicht auf einen Abstandsbegriff und damit auf gleichmäßige Stetigkeit könne durch die Erhaltung der Sätze von Heine-Borel und Bolzano-Weierstraß kompensiert werden¹³. Weiter schlug Riesz eine Verallgemeinerung des geometrischen Begriffes des Bereiches sowie Untersuchungen über dessen Zusammenhangseigenschaften nach den Methoden der Analysis Situs vor¹⁴. Für ein wichtiges Resultat hielt er die damit erhaltene Verallgemeinerung des Konzepts der Jordankurven. Ferner sei es ihm gelungen, „die Teilung des Bereiches durch dieselben nachzuweisen, wie auch die beiden Sinne für die Jordan-Kurven zu definieren“¹⁵. Damit hätte er an seinen eigenen Untersuchungen über Jordankurven in der Annalennote von 1904 angeknüpft¹⁶. So hatte Riesz es im Brief angekündigt. In der gedruckten Version dieser Note sah es aber zum Teil anders aus.

In „Ueber mehrfache Ordnungstypen“ zog Riesz die Behauptungen über Jordankurven zurück. Die Bezeichnung ‚Jordankurve‘ kommt gar nicht vor. Allerdings bemerkte Riesz kurz vor Schluß: „Die entwickelten Sätze bilden die Quelle für eine Reihe weiterer Sätze, besonders über Gebietsteilung, die analog lauten, wie die bekannten Sätze für Punktmannigfaltigkeiten“¹⁷. Anschließend verwies

¹¹Der Brief ist undatiert, muß jedoch aus der Zeit zwischen Dezember 1904 und Januar 1905 stammen: Riesz wünschte Hilbert „ein glückliches Neujahr“. S. eine Abschrift dieses Briefes im Anhang C.1.

¹²Zu den *Mathematischen Annalen* s. Abschnitt 4.1.2.

¹³So ähnlich formulierte er die Einleitung zu „Über mehrfache Ordnungstypen I.“, vgl. [Rie05d], 406f. Riesz faßte seine Arbeit als Verallgemeinerung der „Analysis Situs der linearen Räume“ auf. Die verallgemeinerte Version des Satzes von Heine-Borel stellte er auf den Seiten 415f. auf.

¹⁴In [Rie05d] verwendete er statt ‚Bereich‘ die Bezeichnung ‚Gebiet‘. Er definierte ein Gebiet als „jede zusammenhängende Teilmenge eines perfekten Ordnungstypus, deren Zusammenhang durch keine Teilmenge der Komplementärmenge gestört wird, die ausschließlich aus inneren Elementen besteht und keine Häufungsstelle der Komplementärmenge enthält“, *ibid.*, 417.

¹⁵S. die Abschrift dieses Briefes im Anhang C.1.

¹⁶Einen Abzug dieser Annalennote fügte er seinem Brief an Hilbert bei.

¹⁷[Rie05d], 421. Seine Konzepte der „geschlossenen Grenze“ eines Gebietes sowie der „Strecken“ zwischen Elementen des Ordnungstypus deuten auf ein Versuch hin, die Konzepte für die einfach geschlossenen ebenen Kurve und der Streckenwege zwischen Punkten der Ebene, wie diese in der Schoenflieschen Umkehrung des Jordanschen Satzes vorkommen, zu

er bezüglich der Sätze für Punktmannigfaltigkeiten auf Schoenflies' Artikel „Beiträge zur Theorie der Punktmengen II“, in dem der Autor sich mit den Begriffen der geschlossenen Kurve, Gebietsgrenze und Gebietsteilung befaßte¹⁸. Auf diese Hinweise reduzierten sich seine Ansprüche bezüglich einer Verallgemeinerung des Begriffes der Jordankurve. Zwischen seinem Brief vom November 1904 und der Zusendung der endgültigen Version der Arbeit „Ueber mehrfache Ordnungstypen I“ muß Riesz unüberwindbare Schwierigkeiten in seinen Resultaten entdeckt haben¹⁹.

Die Eigenschaften der geschlossenen Jordankurven, daß sie die Ebene in ein Inneres und ein Äußeres zerlegen und sich beide Durchlaufsinne der Kurve definieren lassen, bildeten ein wichtiges Werkzeug in Hilberts topologischem Zugang zu den Grundlagen der Geometrie von 1902. Hilbert verwendete Jordangebiete in seiner Definition der Ebene. Die Erhaltung des Durchlaufsinnes einer geschlossenen Jordankurve ist Bestandteil der Hilbertschen Charakterisierung der Bewegung. Schließlich bediente sich Hilbert einer eigenen Version der Umkehrung des Jordanschen Satzes, um seine Definition des ‚wahren Kreises‘ einzuführen²⁰. Dieser bildete eines der elementaren Konzepte in Hilberts topologisch aufgebauter Geometrie²¹. Nun muß hier an die Tragweite erinnert werden, die Hilbert seinem Beitrag zu den Grundlagen der Geometrie von 1902 zuschrieb, nämlich daß seine Untersuchungen eine Antwort auf das von ihm 1900 in seinem Pariser Vortrag aufgestellte fünfte Problem darstellten. Dieses Problem betraf Hilberts Vermutung, daß die Voraussetzung der Differenzierbarkeit in Lies gruppentheoretischer Behandlung der Grundlagen der Geometrie beseitigt werden könnte²². Für den speziellen Fall der Ebene löste Hilbert diese Frage. Für den allgemeinen Fall der räumlichen Geometrie schlug Hilbert ferner eine analoge Vorgehensweise vor²³.

Zurück zu Riesz' Brief vom November 1904: Aus dieser spezifisch an Hilbert adressierten Darstellung geht klar hervor, daß Riesz seine Untersuchungen als

verallgemeinern.

¹⁸Vgl. [Sch04b].

¹⁹Zwei Haupteigenschaften einer Jordankurven sind folgende: 1) Die Kurve teilt die Ebene in zwei getrennte Teile, das Innere und das Äußere, so daß jede stetige Kurve, die beide Gebiete verbindet, die Jordankurve schneidet. 2) Das Innere einer geschlossenen Jordankurve ist topologisch äquivalent zu einem offenen Kreis; das Äußere ist dagegen topologisch äquivalent zu einem offenen Kreis ohne den Punkt im Zentrum. 1908 gab es aber immer noch keinen gültigen Beweis dieser Eigenschaften. Verwandte Eigenschaften der Sphäre im dreidimensionalen Raum waren viel schwieriger zu beweisen. Das stetige Bild der Sphäre, das sich selbst nicht schneidet, teilt in der Tat den Raum in zwei Gebiete, ein Inneres und ein Äußeres, aber es gilt nicht, daß das eine topologisch äquivalent zur offenen Kugel, während das andere topologisch äquivalent zur offenen Kugel ohne Mittelpunkt ist. Das zeigte der Mathematiker James Alexander 1924 mit dem Gegenbeispiel der sogenannten ‚gehornten Sphäre‘, vgl. [Gra00], 112.

²⁰S. Fußnote 8.

²¹Zu den geometrischen Beiträgen Hilberts s. Abschnitt 4.3.

²²S. Abschnitt 4.3.

²³Vgl. erste Fußnote in [Hil03], 382.

derartig verallgemeinerte Werkzeuge präsentierte, mit denen es eventuell möglich wäre, Hilberts topologischen Zugang auf eine mehr als zweidimensionale Geometrie auszudehnen und dadurch sogar zur Lösung des fünften Hilbertschen Problems beizutragen – auch wenn Riesz sich nie explizit auf das fünfte Hilbertsche Problem bezog. Die weiter unten ausgeführten zwei Zitate aus dem Brief von Riesz an Hilbert unterstützen diese Interpretation. Auch Bemerkungen in seiner nächsten Arbeit „Die Genesis des Raumbegriffs“ deuten auf Riesz’ Überzeugung hin, daß seine Untersuchungen einen wichtigen Beitrag zu Hilberts Problem einer topologischen Grundlegung der Geometrie bildeten²⁴. Wie im folgenden gezeigt wird, ging Riesz’ Arbeit „Die Genesis des Raumbegriffs“ in der Tat maßgeblich aus seinen Auseinandersetzungen mit den geometrischen Arbeiten Hilberts von 1902 hervor.

Bereits in dem erwähnten Brief vom November 1904 schloß Riesz an Hilberts Untersuchungen zu den Grundlagen der Geometrie direkt an. Er setzte sich mit Hilberts Annalennote „Ueber die Grundlagen der Geometrie“ von 1902 und speziell mit dem dort entwickelten Begriff der Ebene als zweidimensionaler Mannigfaltigkeit auseinander:

Nun treten aber auch meine Untersuchungen in innigste Fühlung mit jenen über die Grundlagen der Geometrie. Jene Untersuchungen nämlich, die als primäre Eigenschaft des Raumes die Stetigkeit voraussetzen, bauen den Begriff der n -fach ausgedehnten Mannigfaltigkeit auf den Zahlenbegriff und stellen somit der Mächtigkeit des Raumes Schranken, die gewissermassen für gekünstelt erscheinen. (Riesz an Hilbert, November 1904)²⁵

Den Begriff der Ebene hatte Hilbert so spezifiziert, daß dieser die Eigenschaft der Stetigkeit schon per Definition besaß. Die Stetigkeit der Ebene charakterisierte Hilbert mittels seines Konzepts der zweidimensionalen Mannigfaltigkeit. Im vorherigen Zitat kritisierte Riesz an den damals geläufigen Definitionen der n -dimensionalen Mannigfaltigkeit, daß die lokale Stetigkeit der Mannigfaltigkeit implizit auf die Stetigkeitsstruktur des \mathbb{R}^n zurückgeführt werde. Auch Hilberts Präzisierung des Mannigfaltigkeitsbegriffs sah, modern ausgedrückt, eine solche Einbeziehung der Topologie des \mathbb{R}^2 vor²⁶. Riesz wies zunächst auf die Auswirkungen auf die mengentheoretische Eigenschaft der Mächtigkeit hin. Der Rückgriff

²⁴ Ende der 1920er und zu Beginn der 1930er Jahre wurde das Hilbert-Problem einer gruppentheoretischen Grundlegung der Geometrie, die nur auf Stetigkeitsvoraussetzungen zurückgreift und daher keine Differenzierbarkeitsbedingungen stellt (Hilberts fünftes mathematisches Problem) mit der modernen Theorie der topologischen Gruppen in Verbindung gebracht. Die daraus entstandene Frage, ob jede lokal Euklidische Gruppe eine Lie-Gruppe sei, wurde 1952 von Andrew Gleason, Deane Montgomery und Leo Zippin positiv beantwortet, vgl. [Row95], 34 und [Ale98], 126-144.

²⁵S. Abschrift dieses Briefes im Anhang C.1.

²⁶Zu Hilberts Definition der Ebene s. Abschnitt 4.3.

auf Zahlenmanigfaltigkeiten bedeutete für Riesz, von vornherein die Möglichkeit auszuschließen, daß sich der Raum durch Koordinaten beschreiben lasse, die zu einem Kontinuum mit einer größeren Mächtigkeit als 2^{\aleph_0} gehören. Riesz' Bemerkung zur Mächtigkeit des Raumes zeigt, wie allgemein sein Zugang zu dem Problem war. Ihm ging es um die Frage, wie die Stetigkeit des Raumes ohne impliziten Rückgriff auf den gewöhnlichen Begriff des Häufungspunktes in \mathbb{R}^3 , also ohne Rückgriff auf die gewöhnliche Stetigkeitsstruktur des \mathbb{R}^3 charakterisiert werden könne. Er lehnte die damals geläufigen Mannigfaltigkeitsbegriffe ab. In Riesz' Arbeit „Die Genesis des Raumbegriffs“ findet sich dieselbe Fragestellung:

Ja, eben jene Versuche zur Grundlegung der Geometrie, die der physikalischen Auffassung am nächsten stehen, operieren von Haus aus mit einer Art mathematischen Kontinuums; sie stellen doch an die Spitze den Begriff der n -fach ausgedehnten Mannigfaltigkeit*.

* Bei Riemann haftet noch etwas Mystisches an diesem Begriff; bei Lie ersetzt ihn ohne weiteres das Zahlenkontinuum; allgemeiner und scharf definiert erscheint er erst bei Hilbert (Göttinger Nachrichten, 1902, p.17)²⁷.

Die Ähnlichkeit der oben zitierten Passagen ist kein Zufall. Vielmehr bedeutet sie neben einem klaren Hinweis auf den Einfluß der Hilbertschen Ideen auf die Rieszsche Forschung auch einen Beleg dafür, daß Riesz sich schon Ende 1904 mit Untersuchungen beschäftigte, die später den Kern seiner Arbeit „Die Genesis des Raumbegriffs“ bilden würden. So stellt sich heraus, daß der Hilbertsche topologische Zugang zu den Grundlagen der Geometrie von 1902 Riesz dazu angeregt hatte, die Frage nach dem Begriff der Stetigkeit einer abstrakten Menge zu klären, um zu Hilberts Rückgriff auf den Mannigfaltigkeitsbegriff eine Alternative zu bieten. Den genannten Hilbertschen Arbeiten ist deshalb eine zentrale Rolle bei der Entstehung von „Die Genesis des Raumbegriffs“ zuzuordnen.

In seinem Brief schlug Riesz eine punktmengen- und ordnungstheoretische Charakterisierung der Menge \mathbb{R}^n vor, die unter anderem dazu dienen sollte, für den speziellen Fall von \mathbb{R}^3 eine abstrakte Charakterisierung der Stetigkeit des Raumes mittels mengentheoretischer Eigenschaften herzustellen²⁸:

²⁷[Rie07b], 310. Die von Riesz zitierte Hilbertsche Arbeit trägt den Titel „Ueber die Grundlagen der Geometrie“, [Hil02]. Riesz' Anerkennung als „allgemeiner und scharf“ definierten Mannigfaltigkeitsbegriff galt für Hilberts allgemeine Definition der Ebene, da diese nur in dem Artikel aus den *Göttinger Nachrichten* und nicht in der Annalennote vorkommt. Allerdings stand bei Hilbert eine Verallgemeinerung des Konzepts der zweidimensionalen Mannigfaltigkeit auf einer n -dimensionalen Mannigfaltigkeit noch aus.

²⁸Die von Riesz gewählten abstrakten punktmengentheoretischen Eigenschaften gehören in der heutigen Mathematik zum Begriffsgebäude der allgemeinen Topologie. Weder in seinem Brief an Hilbert noch in [Rie05d] verwendete Riesz die Bezeichnung „topologisch“. Riesz sprach dort von den Methoden der Analysis Situs. Aber in seinem auf französisch verfaßten Artikel „Sur

Meines Erachtens nach sollten die einzigen wesentlichen Merkmale der \mathbb{R}^n die n -fache Anordnung, das Überalldichte und die Stetigkeit (Perfektheit u. Zusammenhang), wie diese in Ihrem Ebenenbegriff, jedoch mit der obigen Beschränkung, klar hervortreten, bilden. Demgemäss wäre der \mathbb{R}^n als Bereich von n -fachem Ordnungstypus aufzufassen. (Riesz an Hilbert, November 1904)

Cantors Beispiel folgend schlug Riesz die mengentheoretischen Eigenschaften der Perfektheit und des Zusammenhangs als Bestandteil der Charakterisierung der Stetigkeit vor. Da Riesz von einem direkten Bezug auf die (modern ausgedrückt) metrische Topologie des \mathbb{R}^n wegen des damit implizierten Bezuges auf die reellen Zahlen absehen wollte, schlug er vor, eine aus der n -fachen Ordnungsrelation aufgebaute abstrakte Punktmengenlehre zu verwenden, wie die, die er für n -fache Ordnungstypen gerade entwickelt hatte. Die Merkmale Überalldichte, Perfektheit und Zusammenhang sind im Hinblick auf die abstrakte Punktmengenlehre für mehrfachen Ordnungstypen zu verstehen.

In einem Versuch, nach Hilberts Muster ausgehend vom Begriff des stetigen Raumes zur Grundlegung der räumlichen Geometrie beizutragen, konnte Riesz nicht von vornherein verlangen, daß die Menge, die als Grundlage für den Aufbau der Geometrie dienen sollte, über eine dreifache Ordnungsrelation verfügte, denn diese Voraussetzung beträfe viel mehr als nur Stetigkeit und bedeutete somit eine starke Einschränkung. Dagegen suchte Riesz, modern ausgedrückt, einen allgemeinen abstrakten Zugang zur Charakterisierung der Stetigkeit des Raumes, unabhängig sowohl von der gewöhnlichen Topologie der reellen Zahlen als auch von der natürlichen Topologie geordneter Mengen.

Aus diesem Impuls heraus entwickelte Riesz für allgemeine abstrakte Mengen die Theorie des mathematischen Kontinuums, die er in „Die Genesis des Raumbegriffs“ zum ersten Mal präsentierte. In der auf dem allgemeineren Konzept des mathematischen Kontinuums aufgebauten abstrakten Punktmengenlehre konnte Riesz jedoch keinen Begriff der perfekten Menge definieren²⁹. Daher mußte er sich bei seiner Charakterisierung der Stetigkeit des Raumes von Cantors Konzept des Punktkontinuums distanzieren und sich stattdessen auf den Begriff des Verdichtungstypus sowie auf andere Eigenschaften (Zusammenhang, Satz von Borel und Satz von Bolzano-Weierstraß) stützen³⁰.

les ensembles discontinus“ (auch von 1905) befaßte er sich mit dem, was er als „la topologie des ensembles discontinus“ bezeichnete, vgl. [Rie05b], 650. In diesem Artikel geht es um mengentheoretische Untersuchungen zu Zusammenhangseigenschaften mit Hilfe des Begriffs des Häufungspunktes. Anhand dieser Zusammenhangseigenschaften charakterisierte Riesz „la topologie des ensembles discontinus“. Unter „ensemble discontinu“ verstand er eine Menge, die keine zusammenhängende Teilmenge enthält. Er formulierte den Satz: „qu’au point de vue de l’analysis situs, tous les ensembles parfaits discontinus sont équivalents (homœomorphes)“, gab aber keinen Beweis.

²⁹S. Diskussion in 5.2.

³⁰S. Abschnitt 7.2.

Zurück zu Riesz' Anschluß an Hilberts Charakterisierung der Stetigkeit der Ebene. Als Alternative schlug Riesz in „Die Genesis des Raumbegriffs“ für den Raum vor, daß dieser als allererstes ein mathematisches Kontinuum sei. D.h. während für Hilbert die Ebene ein abstraktes System von Dingen war, das sich der Topologie von \mathbb{R}^2 bediente, war für Riesz der Raum zunächst eine abstrakte Menge mit einem eigenen Begriff der Verdichtungsstelle und deshalb mit einer eigenständigen Stetigkeitsstruktur. In den letzten Abschnitten von „Die Genesis des Raumbegriffs“ erläuterte er seinen Versuch, an Hilberts Grundlagen der Geometrie Anschluß zu nehmen:

Nach Analogie der Hilbertschen Definition der Ebene wird bei einer Grundlegung der exakten Geometrie, die aus dem Begriffe der Stetigkeit, nach unserer Ausdrucksweise aus dem Begriffe des mathematischen Kontinuums ausgeht, der Raum als ein mathematisches Kontinuum definiert, dessen Elemente Punkte heißen, und das den Verdichtungstypus eines Gebietes des dreidimensionalen projektiven Zahlenraumes besitzt³¹.

D.h. damit auf einer abstrakten Menge eine räumliche Geometrie aufgebaut werden kann, muß nach Riesz diese als mathematisches Kontinuum ähnlich verdichtet zu einem Gebiet von \mathbb{R}^3 sein. Anders ausgedrückt: Riesz stellte der Menge, die dem geometrischen Raum zugrunde liegt, die einschränkende Bedingung, eine zu einem Gebiet des \mathbb{R}^3 -Raumes gleichartige Stetigkeitsstruktur zu haben.

In den letzten Zeilen seines Briefes vom November 1904 erklärte Riesz seine Bereitschaft, in Göttingen zu diesen Themen zu veröffentlichen:

Wenn Ihnen eine Note über diese Untersuchungen willkommen ist, so bitte ich Sie, mir mittels einer Postkarte die Erlaubnis zur Einsendung derselben zu ertheilen. (Riesz an Hilbert, November 1904)

Über Hilberts Stellungnahme zu dem von Riesz' vorgelegten Forschungsprojekt können wir nur spekulieren³². Die umfangreiche 45-seitige Arbeit „Die Genesis des Raumbegriffs“ wurde jedenfalls nicht in Göttingen sondern in Ungarn publiziert³³.

³¹[Rie07b], 346.

³²In den erhaltenen Briefen gibt es keinen weiteren Hinweis. Zu Riesz' Nachlaß s. die Bemerkungen im Anhang C.

³³Auch läßt sich die Frage stellen, ob sich hinter der *eins* im Titel der Arbeit „Über mehrfache Ordnungstypen I“ Riesz' Absicht verbarg, „Die Genesis des Raumbegriffs“ oder genauer gesagt, seine Theorie des mathematischen Kontinuums, jene Untersuchungen zu einer abstrakten Charakterisierung der \mathbb{R}^n , an der er im November 1904 gerade arbeitete und die später einen zentralen Teil von „Die Genesis des Raumbegriffs“ bildeten, als ihren zweiten Teil herauszugeben.

Aufgrund der Verwandtschaft zwischen Riesz' Konzept des mathematischen Kontinuums und dem Begriff des topologischen Raumes mag es von heutiger Perspektive her verwunderlich sein, daß Riesz sich durch Hilberts Definition der Ebene, die Hilbert in Termen eines Umgebungssystems mit gewissen Eigenschaften formulierte, nicht dazu geleitet sah, den Umgebungsbegriff zu axiomatisieren³⁴. Die Erklärung liegt in der Möglichkeit der Verwendung von Konvergenzverfahren und in Riesz' Projekt einer Grundlegung der Geometrie nach Hilberts Muster³⁵, denn Riesz interessierte sich primär für Hilberts implizite Übertragung des Begriffs der Häufungspunkte in \mathbb{R}^2 auf die Ebene. Konvergenzverfahren spielten, wie gesehen, eine entscheidende Rolle in Hilberts Argumentation³⁶, und Riesz, der sich mit der Hilbertschen Arbeit intensiv beschäftigt hatte, erkannte, wie wichtig für sein Projekt das Vorhandensein eines Begriffs der Verdichtungsstelle war³⁷. So rückte das Vorhandensein eines Begriffs des Häufungspunktes in den Vordergrund seines Interesses, und das Konzept der Umgebung schob sich an den zweiten Platz³⁸.

1908 sagte Riesz in seinem Vortrag „Stetigkeitsbegriff und abstrakte Mengenlehre“ auf dem IV. Internationalen Mathematikerkongreß in Rom:

Das wesentliche Moment aber, nämlich dass es sich bei jener Begriffsbildung in erster Reihe um eine Definition des Grenzelements, oder allgemeiner, um eine Definition der Verdichtungsstelle handelt, tritt erst bei Hilbert genügend scharf hervor; die Festlegung des Begriffs der Verdichtungsstelle wird dort dadurch geleistet, dass eine Möglichkeit der Abbildung der zu betrachtenden Gebilde auf gewisse Zahlenmannigfaltigkeiten postuliert wird, welche Abbildung auch gewisse Bedingungen erfüllt; für jene Zahlenmannigfaltigkeiten ist aber der Begriff der Verdichtungsstelle bereits festgelegt³⁹.

Mit diesen Worten erklärte Riesz, daß seine Entscheidung, den Begriff des Häufungspunktes als ausschlaggebend für den Aufbau seiner Theorie des mathematischen Kontinuums zu wählen, durch Hilberts Begriff der Ebene als zweidimensionale Mannigfaltigkeit motiviert wurde.

Scholz hat vor kurzem gezeigt, daß Hausdorff seinen topologischen Raumbegriff ohne Rückgriff auf Hilberts Mannigfaltigkeitsbegriff entwickelte. Dabei hat

³⁴S. zum topologischen Raumbegriff Abschnitt 5.2.

³⁵S. Problem 1 in Abschnitt 5.1.

³⁶S. Abschnitt 4.3.

³⁷Auch Hilbert verwendete die Bezeichnung Verdichtungsstelle für Häufungspunkt. Als Ergänzung zu seiner Annalennote fügte er folgende Fußnote im Anhang seiner Festschrift *Grundlagen der Geometrie* ein: „Unter einer Verdichtungsstelle ist in diesem Anhang das verstanden, was man heute als Häufungsstelle zu bezeichnen pflegt“, [Hil56], 189. Schoenflies sprach 1900 von Verdichtungspunkt in [Sch00], 58.

³⁸Zu Riesz' Umgebungsbegriff s. Abschnitt 5.2.

³⁹S. [Rie09], 18.

Scholz die lange Zeit fälschlicherweise behauptete gegenteilige Aussage widerlegt⁴⁰. Im Fall von Riesz' Begriff des mathematischen Kontinuums läßt sich dagegen, wie gesehen, ein Einfluß des Hilbertschen Konzepts der zweidimensionalen Mannigfaltigkeit belegen. Die Bedeutung des Hilbertschen Begriffs der zweidimensionalen Mannigfaltigkeit für die Geschichte des topologischen Raumbegriffs muß neu bewertet werden.

6.2 Anschluß an Poincarés Ideen über die Stetigkeit des Raumes

Das Hauptproblem in „Die Genesis des Raumbegriffs“ betraf die Frage nach der Rolle der Erfahrung beim Aufbau des Begriffs des stetigen Raumes. In Abschnitt 5.1 habe ich dieses Hauptproblem in zwei spezifische Aufgaben gegliedert. Die eine ist das von mir sogenannte dritte Problem, in dem es Riesz darum ging, von unserer subjektiven Erfahrung der Stetigkeit des Raumes ausgehend einen Begriff des stetigen Raumes zu formulieren, so daß dieser sich auch unter seiner abstrakten punktmengentheoretischen Charakterisierung des stetigen geometrischen Raumes fassen läßt. Dazu eine Passage aus der Einleitung von „Die Genesis des Raumbegriffs“:

Gesetzt nun, es gebe ein geometrisches System, welches sich mit unseren räumlichen Vorstellungen vollständig verträgt, ja sogar für die Beschreibung derselben ausreicht, so wird noch die Frage zu beantworten sein, inwieweit dieses System durch jene Vorstellungen bedingt ist, ob es durch die Natur unserer Denkarbeit, unseres psychischen Lebens eindeutig festgelegt ist, oder aber verschiedene Systeme denselben Dienst leisten. Es ist die Frage nach der Entwicklung des Raumbegriffs.⁴¹

Riesz' Fragestellung fügte sich in die damalige Raumdiskussion ein, denn diese betraf die Frage, inwiefern die Axiome der Geometrie aus der Erfahrung abzuleiten wären. Bei der Behandlung dieses Problem orientierte sich Riesz an Poincarés Beiträgen zur Raumdiskussion in *La valeur de la science*. Insbesondere griff Riesz auf Poincarés Konzept des physikalischen Kontinuums sowie auf die philosophisch-psychologischen Ansichten Poincarés über den Raumbegriff zurück.

Poincaré hatte das Konzept des physikalischen von dem des mathematischen Kontinuums unterschieden. Er verwendete diese Unterscheidung in seiner Theorie zur Genesis der Geometrie, um der Erfahrung lediglich eine begrenzte Rolle

⁴⁰Vgl. [P⁺02], 708ff., inbs. 710.

⁴¹[Rie07b], 311. Riesz äußerte sein Interesse an der Rolle der Erfahrung in der Entwicklung des Raumbegriffes an verschiedenen Stellen seiner Arbeit. Vgl. *ibid.*, 353.

zuzusprechen, und so die Notwendigkeit der Einführung von Übereinkommen zu illustrieren. Auf diese Weise hatte er diese Ideen an seine konventionalistische Philosophie der Geometrie angefügt⁴².

Der Aufbau der Rieszschen Theorie der Genesis des Raumbegriffes besitzt schon in seiner Konzeption Analogien zu Poincarés Theorie der Genesis der Geometrie. Auch Riesz benutzte eine Unterscheidung zwischen dem physikalischen und dem mathematischen Kontinuum. Allerdings sind diese Begriffe bei Riesz anders belegt als bei Poincaré. Das gilt insbesondere für das Konzept des mathematischen Kontinuums, denn während Poincaré in *La valeur de la science* unter diesem Begriff die Menge der reellen Zahlen schlechthin verstand, schlug Riesz ein viel allgemeineres Konzept vor: eine abstrakte Menge, versehen mit einem Begriff des Häufungspunktes, der gewisse Axiome erfüllt. Auch den Begriff des physikalischen Kontinuums hatte Riesz allgemeiner formuliert. Darauf werden wir zurückkommen.

Riesz benutzte seinen abstrakten Begriff des physikalischen Kontinuums, um die subjektive Erfahrung der Stetigkeit des ‚wirklichen‘ Raumes, so wie Poincaré sie beschrieben hatte, unter einem abstrakten mathematischen Konzept zu fassen. Gleichzeitig schlug Riesz, wie bereits in Abschnitt 6.1 gesehen, mit Hilfe seiner Theorie des mathematischen Kontinuums eine mengentheoretische Charakterisierung der Stetigkeit des geometrischen Raumes vor.

Die Rolle der Erfahrung in der Entwicklung des Raumbegriffes wollte Riesz dadurch betonen, daß der von ihm in Anlehnung an die Erfahrung aufgebaute Raumbegriff sich als ein mathematisches Kontinuum auffassen läßt. Poincaré konnte die Stetigkeitsstruktur des physikalischen Kontinuums und die Stetigkeitsstruktur des mathematischen Kontinuums (bei ihm die gewöhnliche Ordnungsstruktur von \mathbb{R}) nicht in einander übersetzen, weil seine Mathematisierung der Erfahrungsangaben ‚unterscheidbar‘ und ‚ununterscheidbar‘ zu einem Widerspruch führte, woraus er die Inkompatibilität dieser Strukturen schloß. Das wird im folgenden als Poincarés Problem der Stetigkeit des Raumes bezeichnet. Riesz konnte Poincarés Stetigkeitsproblem überwinden, indem er einen abstrakten und allgemeineren Begriff des mathematischen Kontinuums einführte.

Riesz knüpfte in seiner Arbeit die „Genesis des Raumbegriffs“ an die Ideen von Poincaré auf dreierlei Weise an: Erstens übernahm Riesz gewisse psychologische Ansichten von Poincaré zu Zeit und Raum; zweitens baute Riesz Poincarés Konzept des physikalischen Kontinuums zu einem abstrakten Begriff aus; drittens schlug Riesz einen neuen Zugang zu Poincarés Problem der Stetigkeit vor.

⁴²Zu den hier angesprochenen Beiträgen Poincarés zur Raumdiskussion s. Abschnitt 3.3.2.

6.2.1 Anschluß an Poincarés psychologische Ansichten zu Zeit und Raum I

Am Ausgangspunkt der Rieszschen Betrachtungen zur Bildung eines Begriffes des stetigen Raumes, der sich auf die Erfahrung stützte, stand folgende Behauptung:

Unsere Raumvorstellungen [sind] physikalische Kontinua, Systeme von Dingen, die unterscheidbar oder ununterscheidbar sind⁴³.

Diese Behauptung hat in Riesz' empirisch-psychologischer Theorie der Herausbildung des Raumbegriffes, wie bereits in Abschnitt 5.3 erläutert, den Charakter einer Definition ‚unserer Raumvorstellungen‘. Deren Beziehung zur konkreten Erfahrung blieb jedoch ungeklärt. Riesz sprach lediglich ab einer späteren Stelle seiner Arbeit von „Gruppen von Empfindungen“ anstatt von „Systemen von Dingen“:

Unsere Gruppen von Empfindungen lassen sich zu je zwei entweder voneinander unterscheiden oder sie sind ununterscheidbar. Die Anlage, jene Gruppen in Zeit und Raum aufeinander zu beziehen, besteht nun darin, daß wir auf Grund inneren Bedürfnisses oder auf Grund von durch Erfahrung erwiesener Zweckmäßigkeit übereinkommen, auch solche Gruppen, die unterscheidbar sind, in Zeit, resp. Raum nicht zu unterscheiden.*

*Bezüglich der eingehenden Analyse der entsprechenden psychologischen Prozesse verweise ich auf Poincaré's *La valeur de la science*⁴⁴.

Aus dieser Passage geht hervor, daß es – da es sich um „unsere Raumvorstellungen“ handelt – uns, also dem menschlichen Intellekt, zusteht, jene Empfindungsgruppen als unterscheidbar oder ununterscheidbar zu beurteilen, und zwar zum einem in der Zeit, zum anderen im Raum. Aber wie findet das im Denkprozeß statt? Hinsichtlich welcher Sinnesempfindungen (Tastsinn, Sehvermögen, Geruch etc.) oder welcher Eigenschaften (Größe, Gewicht, Farbe etc.) wird geurteilt? Dazu gab Riesz keine weiteren Erläuterungen. Er verzichtete auf Diskussionen über den Verlauf unserer Denkprozesse. Stattdessen beschränkte sich Riesz darauf, summarisch auf Poincarés Buch *La valeur de la science* zu verweisen.

Dieser Verweis ist jedoch nur halb friedensstellend. In *La valeur de la science* hatte Poincaré bezüglich seines Verständnisses des physikalischen und des mathematischen Kontinuums auf *La Science et l'Hypothèse* hingewiesen. Dort findet sich zwar die oben erwähnte Behauptung von Riesz über ‚unsere Gruppen von Empfindungen‘ als jener Poincarésche Begriff des physikalischen Kontinuums von

⁴³[Rie07b], 310.

⁴⁴[Rie07b], 312ff.

mehreren Dimensionen, der in Abschnitt 3.3.2 (Seite 108) zitiert wurde, allerdings, wie dort besprochen, blieb die Beziehung dieses Begriffes zur Erfahrung auch bei Poincaré ungeklärt. D.h. Riesz übernahm das Konzept des mehrdimensionalen physikalischen Kontinuums Poincarés als ersten Ansatz seines eigenen Konzepts „unserer Raumvorstellungen“ mit der Annahme, der Bezug dieses Begriffes zur Erfahrung kann aus Poincarés Diskussion entlehnt werden.

Jedenfalls stand bei Poincaré fest, daß das Konzept des physikalischen Kontinuums und damit die Grundidee, aus der sein Konzept des mehrdimensionalen physikalischen Kontinuums hervorging, unter anderem auf Fechners psychophysikalische Experimente zurückging. Bei Riesz dagegen finden sich in „Die Genesis des Raumbegriffes“ keine Hinweise auf psychophysikalische Untersuchungen, auch kein Verweis auf Fechner. Poincaré hatte sich außerdem anhand von gewissen Wahrnehmungstheorien psychologische Ansichten angeeignet, mit deren Hilfe er eine Theorie die Genesis des Raumbegriffes als philosophischen Beitrag zur Raumdiskussion aufbaute⁴⁵. Riesz' Hauptinteresse lag jedoch nicht in der Psychologie der Erkenntnis, denn er setzte sich nicht einmal mit Poincarés Analyse des Raumbegriffes aus *La valeur de la science* auseinander.

In einem Versuch, eine auf die Erfahrung stützende Theorie der Herausbildung des Raumbegriffes darzustellen, betrachtete Riesz Poincarés psychologische Analyse über die subjektive Wahrnehmung der Stetigkeit des Raumes als dasjenige feste Fundament, auf dem seine (Riesz') Theorie basierte. Diese Riesz'sche Auffassung ist problematisch, da Riesz seine Theorie auf Poincarés Konzept des mehrdimensionalen physikalischen Kontinuums aufbaute, dieses bei Poincaré aber nicht unmittelbar aus der oben erwähnten Analyse entstand. Aus dieser ging Poincarés Begriff des physikalischen Kontinuums hervor, während der des mehrdimensionalen physikalischen Kontinuums erst als dessen Verallgemeinerung entstand, also nach einem Abstraktionsprozeß. Der grundlegende Unterschied zwischen diesen Poincaréschen Begriffen liegt darin, daß der eine eine psychologische Tatsache beschreibt, während der andere, auf dem Riesz' Theorie basiert, ein mathematischer Begriff ist.

6.2.2 Zu einem abstrakten Begriff des physikalischen Kontinuums

Riesz widmete einen Abschnitt von „Die Genesis des Raumbegriffes“ der Darstellung einer Theorie, die er auf dem Begriff des physikalischen Kontinuums aufbaute. Im Unterschied zu Poincaré faßte Riesz den Begriff des physikalischen

⁴⁵S. Abschnitt 3.3.2, S. 105. Poincaré hatte in „Foundations of Geometry“ den Verlauf unserer Denkprozesse ausführlich analysiert. Seine Betrachtungen fügte er dann auch in seinen späteren Arbeiten *La science et l'hypothèse* und *La valeur de la science* bei. Zu Wahrnehmungstheorien im Entstehungskontext von Poincarés „On Foundations of Geometry“ siehe Nabonnands „What is Qualitative Geometry?“ (demnächst zu erscheinen).

Kontinuums von vornherein unter einer abstrakten mathematischen Definition. Diese wurde als Definition 5.1 im Kapitel 5 wiedergegeben.

Zwar hatte Poincaré bereits in *La science et l'hypothèse* sein ursprünglich unmittelbar aus Erfahrungswerten formuliertes Konzept des physikalischen Kontinuums derart abstrakt aufgefaßt, daß er es als mathematisches Konzept nach Zusammenhangseigenschaften im Sinne der Analysis Situs untersuchte, jedoch blieb bei Poincaré die Bedeutung der Wörter ‚unterscheidbar‘ und ‚ununterscheidbar‘ so wie im normalen Sprachgebrauch mit der intellektuellen Bearbeitung unserer Empfindungen verbunden⁴⁶. Bei Riesz besitzen sie jedoch in Bezug auf Elemente einer abstrakten Menge diese Bedeutung nicht. Sie sind bloß Bezeichnungen für die Werte einer binären mathematischen Relation zwischen den Elementen der Menge, wobei diese binäre Relation noch nicht festgelegt ist. Bei Riesz' Definition handelte es sich um einen abstrakten mathematischen Begriff, formuliert in der Sprache der Mengenlehre, d.h. um ein modernes mathematisches Konzept.

Der Umgang mit dem Konzept des physikalischen Kontinuums verlief bei Poincaré und bei Riesz in entgegengesetzten Richtungen: Poincaré formulierte es erst anschaulich dann abstrakt. Dagegen stand bei Riesz der abstrakte Begriff am Anfang, und erst bei dessen Anwendung erhielt dieser einen anschaulichen Bezug. Erst durch die Einführung des Begriffes der momentanen Raumvorstellung, deren Elemente Riesz als Empfindungsgruppen bezeichnete (vgl. Definition auf Seite 165), rückten bei Riesz die Bezeichnungen ‚unterscheidbar‘ und ‚ununterscheidbar‘ näher an ihre ursprüngliche anschauliche Poincarésche Bedeutung heran.

Eine zentrale Eigenschaft des Poincaréschen Begriffes des physikalischen Kontinuums war die des Zusammenhangs. Poincaré hatte in *La valeur de la Science* das zusammenhängende physikalische Kontinuum charakterisiert und sich dabei auf die Idee der ‚Kettenbildung‘ gestützt⁴⁷. Riesz schloß auch hier an Poincarés Ideen an. Zwar wählte er für die Charakterisierung des zusammenhängenden physikalischen Kontinuums eine eigene Formulierung, nämlich die Definition 5.2, bewies aber auch folgenden Satz, der die Äquivalenz seiner Charakterisierung mit der Poincarés, wenn man die letzte entsprechend abstrakt umformuliert, behauptet:

Satz 6.1 (Äquivalenzsatz zu Poincarés Begriff des zshgs PK)

„Sind a und b zwei beliebige Elemente eines zusammenhängenden physikalischen Kontinuums, so gibt es eine endliche Kette $a, c_1, c_2, \dots, c_n, b$ von Elementen, derart, daß je zwei aufeinanderfolgende Elemente der Kette ununterscheidbar sind. Umgekehrt, gibt es für jedes beliebige Elementenpaar eines physikalischen Kontinuums eine endliche Kette der bezeichneten Eigenschaft, so ist das physikalische

⁴⁶S. Abschnitt 3.3.2.

⁴⁷S. Abschnitt 3.3.2, Seite 108.

*Kontinuum zusammenhängend.*⁴⁸

Riesz betrachtete die Eigenschaft des Zusammenhangs als eine zusätzliche Stetigkeitseigenschaft des physikalischen Kontinuums. In dieser Hinsicht erwies sich Riesz' Begriff des physikalischen Kontinuums als viel zu allgemein⁴⁹. Interessant für Riesz waren eigentlich zusammenhängende physikalische Kontinua, aber indem er den Zusammenhang als eine zusätzliche Stetigkeitseigenschaft betrachtete, betonte er seine Bedeutung. Anders als bei Poincaré war bei Riesz ein physikalisches Kontinuum nicht notwendigerweise zusammenhängend. Bei Poincaré war dagegen der Zusammenhang Bestandteil der Charakterisierung des mehrdimensionalen physikalischen Kontinuums in *La science et l'hypothèse*. Poincarés Formulierung eines Zusammenhangsbegriffs und seine Untersuchungen der Zusammenhangseigenschaften eines mehrdimensionalen physikalischen Kontinuums in *La valeur de la science* dienten lediglich dazu, einen Dimensionsbegriff einzuführen⁵⁰.

6.2.3 Anschluß an Poincarés psychologische Ansichten zu Zeit und Raum II

In „Die Genesis des Raumbegriffs“ schlug Riesz eine Konstruktion des Raumbegriffes ausgehend von Erfahrungstatsachen vor. Wie oben gesehen, übernahm Riesz Poincarés psychologische Analyse des Raumes als physikalisches Kontinuum als feste Erfahrungstatsache. Riesz baute darauf den Begriff der momentanen Raumvorstellung auf, indem er zunächst das System von Empfindungsgruppen als ein physikalisches Kontinuum zum einen in der Zeit, zum anderen im Raum betrachtete. Riesz' Vorgehensweise wurde bereits in Abschnitt 5.3 erläutert.

Wie dort gesehen, hatte Riesz eine Voraussetzung psychologischer Natur eingeführt, nämlich, daß die Anzahl der Empfindungen, die bis zu einem Zeitpunkt in unser Bewußtsein eingetreten ist, eine endliche ist. Auch wenn Riesz in Bezug auf diese Voraussetzung nicht explizit auf Poincaré verwies, ist es naheliegend, daß Poincarés Schrift „La mesure du temps“ Riesz zu dieser Annahme inspiriert hatte. „La mesure du temps“ ist ein Kapitel aus Poincarés Buch *La valeur de la science*, auf das Riesz bezüglich der Analyse psychologischer Prozesse oft verwies. In diesem Kapitel brachte Poincaré den psychologischen Zeitbegriff mit unserer Fähigkeit, Erinnerungen an Ereignisse nach den Beziehungen früher und später anordnen zu können, in Verbindung. Diesen Erinnerungen entsprechen Empfindungsgruppen, und damit diese in der Zeit eingereiht werden können, dürfen es nur endlich viele sein:

Pour qu'un ensemble de sensations soit devenu un souvenir susceptible

⁴⁸[Rie07b], 316. Den Beweis hat Riesz dort richtig und vollständig ausgeführt.

⁴⁹S. Diskussion in Abschnitt 5.2.1.

⁵⁰S. Abschnitt 3.3.2.

d'être classé dans le temps, il faut qu'il ait cessé d'être actuel, que nous ayons perdu le sens de son infinie complexité, sans quoi il serait resté actuel. Il faut qu'il ait pour ainsi dire cristallisé autour d'un centre d'associations d'idées qui sera comme une sorte d'étiquette. [...] Mais ces étiquettes ne peuvent être qu'en nombre fini. A ce compte, le temps psychologique serait discontinu.⁵¹

Die Reihe aller momentanen Raumvorstellungen bildete für Riesz den ersten Ansatz zum Raumbegriff. Für diesen konstruktiven Raumbegriff lieferte Riesz anschließend ein Axiomensystem, das das Verhalten der Reihe der momentanen Raumvorstellungen regelte⁵². Wichtig ist hier, darauf aufmerksam zu machen, daß Riesz seine ersten neun Axiome als Voraussetzungen psychologischen Charakters betrachtete⁵³. Das Axiom Nummer acht beinhaltet die oben zitierte Voraussetzung über die Anzahl der Empfindungsgruppen, die sich bis zu jedem Zeitpunkt gesammelt haben, und die auch durch Poincarés Texte beeinflusst wurde. Das Axiom heißt: „Jede momentane Raumvorstellung besteht aus einer endlichen Anzahl physikalischer Punkte“⁵⁴. Zu den restlichen Axiomen 10 bis 16 behauptete Riesz: Sie „folgen nicht aus der Erfahrung, sie widersprechen ihr aber auch nicht“⁵⁵. Auf die Frage, inwieweit die anderen Axiome aus Poincarés Ideen hervorgehen, wird hier nicht weiter eingegangen.

Auf dieser Stufe hat Riesz, basierend auf Erfahrungstatsachen und psychologischen Voraussetzungen, einen Raumbegriff konstruiert und anschließend für diesen ein Axiomensystem aufgestellt. Der letzte Schritt hin zu einer empirischen Grundlegung des Raumbegriffs bestand darin, diesen Raumbegriff als ein mathematisches Kontinuum aufzufassen. Damit war auch Poincarés Problem der Stetigkeit gelöst.

6.2.4 Zu Poincarés Problem der Stetigkeit des Raumes

In Bezug auf Poincarés Problem der Stetigkeit war sich Riesz bewußt, daß Poincarés Argumentation problematisch war. In einer Passage, in der Riesz erläuterte,

⁵¹[Poi08], 36. „Eine Summe von Empfindungen muß aufgehört haben, gegenwärtig zu sein, um eine Erinnerung werden zu können, die geeignet ist, in die Zeit eingeordnet zu werden; wir müssen das Gefühl ihrer unendlichen Verknüpfung verloren haben, sonst wäre sie gegenwärtig geblieben. Sie muß sich um einen Mittelpunkt von Ideenverbindungen sozusagen kristallisiert haben, der gleichsam eine Überschrift ist. [...] Aber diese Überschriften können nur in begrenzter Zahl vorhanden sein. Demnach müßte der psychologische Zeitbegriff die Vorstellung von Lücken in sich schließen“, vgl. [Poi10], 26.

⁵²Das Rieszsche Axiomensystem wird in Anhang A wiedergegeben und in Abschnitt 8.2 diskutiert.

⁵³Vgl. [Rie07b], 327.

⁵⁴[Rie07b], 328.

⁵⁵[Rie07b], 328.

wie Systeme von Empfindungsgruppen als physikalische Kontinua aufgefasst werden können, differenzierte er zwischen jenen Empfindungsgruppen, die wir nicht unterscheiden können, und jenen, die wir nicht unterscheiden wollen. Die letzten nannte er „ununterscheidbar nach Übereinkommen“. An dieser Stelle fügte Riesz eine Fußnote ein, in der er sich von Poincarés Verständnis der Bezeichnung „identisch nach Übereinkommen“ distanzierte:

* Die Poincarésche Ausdrucksweise: *identique par convention*, führt leicht zu Mißverständnis. Ich hebe es ausdrücklich hervor, daß auf Grund der Ununterscheidbarkeit zweier Gruppen nichts über ihre Identität ausgesagt werden kann; eine solche Aussage hätte überhaupt keinen Sinn. Der Identitätsbegriff entsteht erst auf einer höheren Stufe des logischen Denkens – nämlich während des wissenschaftlichen Denkens. Auf jener Stufe, wo sich erst die Vorstellungen entwickeln, kann nur von Ununterscheidbarkeit, jedoch nicht von Identität die Rede sein; höchstens in dem Sinne, indem jede Empfindung und jede Vorstellung mit sich selbst identisch ist.⁵⁶

Riesz kritisierte Poincarés Übergang von ununterscheidbar zu „*identique par convention*“, und stellte damit Poincarés Interpretation der Beziehung ununterscheidbar als ‚gleich‘-Relation in Frage, welche als Argumentationsschritt entscheidend in Poincarés Problem der Stetigkeit war. Dadurch, daß Riesz ununterscheidbare Elemente weiterhin als ununterscheidbar betrachtete, wandte er sich von Poincarés Rückgriff auf die Menge der reellen Zahlen ab – Poincaré hatte das mathematische Kontinuum der reellen Zahlen als Ersatz für das physikalische Kontinuum eingeführt, um Widersprüche wie den der Formel 3.2 zu vermeiden⁵⁷.

Wie bereits in Abschnitt 3.3.2 diskutiert, benutzte Poincaré ferner das Problem der Stetigkeit, um der Erfahrung eine begrenzte die Rolle in seiner Theorie der Genesis der Geometrie zuzuordnen. In Riesz’ Konstruktion des Raumbegriffs, die von Riesz’ Begriff des physikalischen Kontinuums ausging, verlief der Übergang zum mathematischen Kontinuum – ganz anders als bei Poincaré – gar ohne Rückgriff auf den Zahlbegriff. Riesz vermied Poincarés Problem zum einen, indem er einen allgemeineren Begriff des mathematischen Kontinuums⁵⁸ benutzte, der die reellen Zahlen als speziellen Fall umfaßte, zum anderen, dank seiner allgemeineren Auffassung des physikalischen Kontinuums, die ihn davon abhielt, genau das zu tun, was Poincaré in *Le continu mathématique* implizit getan hatte, nämlich das physikalische Kontinuum mit dem Kontinuum der physikalischen Größen gleichzusetzen, denn auf Grund dieser Gleichsetzung hatte Poincaré die widersprüchliche Formel 3.2 hergeleitet⁵⁹.

⁵⁶[Rie07b], 323.

⁵⁷S. Abschnitt 3.3.2.

⁵⁸S. Definition 5.4 in Abschnitt 5.2.

⁵⁹S. Abschnitt 3.3.2.

Zu der Frage, ob ein mathematisches Kontinuum als physikalisches Kontinuum aufgefaßt werden kann, schlug Riesz vor, ein System von Teilmengen des mathematischen Kontinuums als physikalisches Kontinuum zu betrachten, „wenn nämlich Teilmengen mit gemeinsamem Elemente für ununterscheidbar, Teilmengen ohne gemeinsames Element aber für unterscheidbar gelten“⁶⁰. Zur umgekehrten Frage, ob ein physikalisches Kontinuum als mathematisches Kontinuum aufgefaßt werden könne, gab Riesz keine allgemein gültige Antwort. Er bemerkte: „Die maßgebenden Beziehungen sind von jenen für mathematische Kontinua im Grunde verschieden“⁶¹. Dennoch gelang Riesz der Übergang von einem physikalischen zu einem mathematischen Kontinuum mittels eines konstruktiven Verfahrens. D.h. Riesz’ Lösung des Poincaréschen Problems der Stetigkeit bezog sich auf spezifischen Konstrukte: auf seinen in Abschnitt 5.3 beschriebenen konstruktiven Raumbegriff, samt der Konzepte des physikalischen und des mathematischen Punktes und deren Beziehungen zueinander.

Für das System mathematischer Punkte als mathematisches Kontinuum konnte Riesz folgende Behauptung beweisen:

Die einzelnen physikalischen Kontinua, wie auch die zugrunde liegenden Raumvorstellungen lassen sich eindeutig umkehrbar auf Systeme von Teilmengen des Raumes [als Menge mathematischer Punkte, LR] abbilden, derart, daß Teilmengen mit gemeinsamem Elemente ununterscheidbaren, Teilmengen ohne gemeinsames Element unterscheidbaren Punkte entsprechen⁶².

Mit dieser Abbildung zeigte Riesz, daß es doch möglich ist, die Stetigkeitsstruktur des physikalischen Kontinuums auf den Raum als mathematisches Kontinuum zu übertragen⁶³. Damit war Poincarés Problem der Stetigkeit gelöst.

Mit seinem Verfahren sprach Riesz der Erfahrung eine größere Bedeutung für die Herausbildung des Raumbegriffes zu, als es Poincaré getat hatte. Denn Riesz’ Theorie behauptet, daß sich der Raum bis zu einem gewissen Grade auf Erfahrungstatsachen aufbauen läßt. Allerdings konnte Riesz nicht von einer rein empirischen Grundlegung sprechen, denn er hatte im Aufbauprozeß seines Raumbegriffes, Poincarés Vorbild folgend, Übereinkommen (Konventionen) als Voraussetzungen psychologischer Natur in Betracht gezogen.

Die von Riesz betonte Rolle der Erfahrung in seiner empirisch-psychologischen Theorie der Herausbildung des Raumbegriffes bleibt jedoch umstritten, denn die empirische Begründung des Begriffes der n -ten momentanen Raumvorstellung fehlt. Die Erfahrungsakte, auf deren Basis die ‚Empfindungsgruppen‘ und die

⁶⁰[Rie07b], 310.

⁶¹[Rie07b], 310.

⁶²[Rie07b], 312.

⁶³Diese Abbildung wird in Abschnitt 7.1 im Anschluß an Riesz’ Konstruktion des Raumes erläutert.

Relationen ‚unterscheidbar‘ und ‚ununterscheidbar‘ bestimmt werden könnten, wurden von Riesz nicht geklärt. Damit blieb die Menge, die dem (von Riesz konstruierten) Raum zugrunde lag, unbestimmt.

Kapitel 7

Ansätze einer abstrakten Punktmengenlehre

7.1 Elemente aus Baires Punktmengenlehre für Folgen ganzer Zahlen

Wie bereits in Abschnitt 3.2.4 erwähnt, definierte Baire 1899 in seiner Arbeit „Sur la théorie des ensembles“¹ die Begriffe ‚Gruppe ganzer Zahlen der Ordnung p ‘ und ‚Folge ganzer Zahlen‘. Ferner führte er für eine Menge aus Folgen ganzer Zahlen den Begriff des Häufungspunktes (‚limite‘) ein. Diesen formulierte er mit Hilfe der Beziehung ‚enthalten sein‘ zwischen Gruppen verschiedener Ordnung und zwischen Gruppen und Folgen ganzer Zahlen. Damit war er imstande, solche Mengen als Forschungsgegenstände einer allgemeineren Punktmengenlehre zu untersuchen.

In diesem Abschnitt wird gezeigt, daß Riesz sich in seiner Arbeit „Die Genesis des Raumbegriffes“ beim konstruktiven Aufbau des Raum an Baires „théorie des ensembles de suites d’entiers“ orientierte². Riesz führte die Begriffe des physikalischen Punktes n -ter Ordnung und des mathematischen Punktes ein, definierte die Beziehung ‚enthalten sein‘ sowohl zwischen physikalischen Punkten verschiedener Ordnung als auch zwischen physikalischen und mathematischen Punkten und formulierte anschließend für Mengen mathematischer Punkte den Begriff der Verdichtungsstelle. Diese Definitionen hatten ihren Ursprung in den entsprechenden Baireschen Begriffen und Beziehungen (s. Tabelle 7.1). Darüber hinaus formulierte Riesz für die Definition der Verdichtungsstelle den Umgebungsbegriff, der implizit auch bei Baire vorkam.

¹[Bai99a].

²Baire präsentierte diese Theorie in den von Riesz zitiert Artikeln [Bai99a] und [Bai99b].

Baire		Riesz
group d'entiers d'ordre p	\longleftrightarrow	physikalischer Punkt n -ter Ordnung
suite d'entiers	\longleftrightarrow	mathematischer Punkt
Beziehung ‚est contenue‘ (implizit)	\longleftrightarrow	Beziehung ‚enthalten sein‘ Systeme spezieller Umgebungen
limite	\longleftrightarrow	Verdichtungsstelle

Tabelle 7.1: Die von Riesz eingeführten Begriffe und Beziehungen haben ihren Ursprung in den entsprechenden Baireschen Begriffen.

7.1.1 Gruppen ganzer Zahlen und physikalische Punkte n -ter Ordnung

Zunächst sind die Analogien festzuhalten, die zwischen dem Rieszschen Begriff des physikalischen Punktes n -ter Ordnung und dem Baireschen Begriff der Gruppe ganzer Zahlen p -ter Ordnung bestehen. Riesz formulierte folgenderweise:

Definition 7.1 (physikalischer Punkt n -ter Ordnung)

„Ich [nenne] nun jede Reihe von im Raume ununterscheidbaren, in der Zeit aufeinander folgenden Empfindungsgruppen, die ausschließlich aus Empfindungsgruppen besteht, welche bis zum n -ten Zeitpunkt (inklusive) in mein Bewußtsein eingetreten sind, physikalischen Punkt n -ter Ordnung.“³

Die in dieser Definition vorkommenden Begriffe wurden bereits in Kapitel 5 erläutert. In Abschnitt 5.3 wurde diskutiert, wie Riesz das System von Empfindungsgruppen jeweils im Raum und in der Zeit als ein physikalisches Kontinuum auffaßte. In der Zeit hatte Riesz ferner mit den Beziehungen ‚früher‘ und ‚später‘ eine Ordnungsrelation für dieses System eingeführt, mit der die Zeitpunkte eine einfach geordnete Menge bildeten. Anschließend setzte er für die Konstruktion des Raumes voraus, „daß die Anzahl der Empfindungen, die irgend einer Empfindung in der Zeit vorausgehen, die also bis zu einem Zeitpunkt in unser Bewußtsein eingetreten sind, eine endliche ist“⁴.

Diese letzte Voraussetzung hat als wichtige Implikation, daß ein physikalischer Punkt n -ter Ordnung eine endliche Folge von Empfindungsgruppen ist. Die Anordnung der Folgenglieder entsteht durch die Beziehungen ‚früher‘ und ‚später‘. In diesem Sinne sind die Empfindungsgruppen als in der Zeit aufeinanderfolgend zu verstehen.

Wie bereits in Abschnitt 5.3 diskutiert, beabsichtigte Riesz mit den hier zu erwähnenden Konzepten, das subjektive Konzept der Raumvorstellung zu mathematisieren. Da es ihm also um Mathematik ging, werde ich im Interesse ei-

³[Rie07b], 325.

⁴Zu den Implikationen dieser Voraussetzung s. Abschnitte 5.3 und 6.2.

ner übersichtlichen Darstellung Riesz' Erläuterungen in moderner Terminologie wiedergeben. Mit griechischen Buchstaben werden Empfindungsgruppen gekennzeichnet, mit lateinischen Buchstaben dagegen physikalische Punkte. So bezeichnet α_i eine Empfindungsgruppe aus dem i -ten Zeitpunkt, d.h. aus der i -ten Klasse der in der Zeit logisch ununterscheidbaren Empfindungsgruppen. α_i hat nur Empfindungselemente aus dem i -ten Zeitpunkt⁵. Ferner steht

$$\begin{aligned}\alpha_i &\sim \alpha_j \text{ für im Raum ununterscheidbar,} \\ \alpha_i &\approx \alpha_j \text{ für im Raum unterscheidbar.}\end{aligned}$$

Ein physikalischer Punkt n -ter Ordnung a_n ist somit eine endliche Folge

$$a_n = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n),$$

wobei $\alpha_i \sim \alpha_j \forall i, j = 1, \dots, n$. Das letzte Glied der zeitlich angeordneten Folge ist ein Element aus der n -ten Äquivalenzklasse der in der Zeit logisch ununterscheidbaren Empfindungsgruppen.

Der Einfachheit halber habe ich die Zählung der Alphas, die den physikalischen Punkt a_n bestimmen, mit eins begonnen und damit nahe gelegt, daß a_n aus Empfindungsgruppen besteht, die seit dem ersten Zeitpunkt aufgenommen wurden. In der Rieszschen Konstruktion des Raumes gibt es aber von solchen physikalischen Punkte nur endlich viele. Eine Durchzählung, die mit eins anfängt, ist jedoch zulässig, weil von den endlich vielen Empfindungsgruppen, die einen physikalischen Punkt n -ter Ordnung bestimmen, eine die ‚früheste‘ ist, d.h. zum frühesten Zeitpunkt aufgenommen wurde. Ist bei a_n die früheste Empfindungsgruppe zum Zeitpunkt p aufgenommen worden, so können wir weiterhin a_n durch die Folge $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p, \alpha_{p+1}, \dots, \alpha_n$ darstellen und dabei α_1 bis α_{p-1} als die ‚leeren Empfindungsgruppen‘ interpretieren. Der Begriff der ‚leeren Empfindungsgruppe‘ stammt nicht von Riesz; vielmehr führe ich ihn hier mit der Absicht ein, die Rieszsche Theorie so darzustellen, daß sich die Analogien zu Baires Theorie offenbaren.

Offensichtlich ist der Rieszsche Begriff des physikalischen Punktes n -ter Ordnung als endliche Folge ähnlich zu Baires Konzept der ‚Gruppe ganzer Zahlen p -ter Ordnung‘ (Definition 3.3). Der einzige und dennoch signifikante liegt darin, daß die Folgenglieder bei Baire ganze Zahlen, bei Riesz dagegen ‚Empfindungsgruppen‘ sind. Die Ähnlichkeit zu Baires Aufbau einer Punktmengenlehre für ‚Folgen ganzer Zahlen‘ wird dadurch betont, daß Riesz von der Bedingung der ‚Ununterscheidbarkeit der Empfindungsgruppen im Raume‘ in der Definition 7.1 keinen Gebrauch machte, jedenfalls nicht in den Ausführungen, die entlang der Baireschen Theorie verliefen.

Der weitere Aufbau der Theorie erfolgte bei Riesz in einer anderen Reihenfolge als bei Baire. Zunächst setzte Riesz physikalische Punkte verschiedener

⁵Vgl. [Rie07b], 325. Die α_i -Notation kommt bei Riesz nicht vor.

Ordnung zueinander in die Beziehung ‚enthalten sein‘, dann verwendete er diese Verhältnisse, um den Begriff des mathematischen Punktes zu formulieren.

Definition 7.2 (Beziehung ‚enthalten sein‘ für physikalische Punkte)

„Der physikalische Punkt n -ter Ordnung a_n heiÙe in dem physikalischen Punkt m -ter Ordnung a_m enthalten, wenn a_n entweder aus denselben Empfindungsgruppen wie a_m besteht, oder aber die Empfindungsgruppen, aus denen a_m besteht, auch zu a_n beitragen, und jede weitere Empfindungsgruppe, die zu a_n beiträgt, nach dem m -ten Zeitpunkte ins Bewußtsein aufgenommen wurde.“⁶

Riesz muß hier an eine Art Fortsetzung des physikalischen Punktes in bezug auf die Zeit gedacht haben: Ist der physikalische Punkt m -ter Ordnung a_m durch die Folge

$$a_m = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m)$$

bestimmt, und reihen sich weitere Elemente

$$\alpha_{m+1}, \alpha_{m+2}, \dots, \alpha_n$$

hinter das letzte Element α_m von a_m an, dann ist der physikalische Punkt n -ter Ordnung a_n , welcher durch die Folge

$$a_n = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m, \alpha_{m+1}, \dots, \alpha_n)$$

definiert ist, in a_m enthalten. Die oben eingeführte Kennzeichnung der physikalischen Punkte erfüllt hier ihren Zweck, denn sie stellt die Ähnlichkeit der Riesz'schen Beziehung ‚enthalten sein‘ zu Baires Beziehung ‚est contenue‘ für Gruppen ganzer Zahlen verschiedener Ordnung (Definition 3.5) klar heraus.

In Definition 7.2 ließ Riesz jedoch den Fall zu, daß a_n aus denselben Elementen wie a_m besteht. Das kommt vor, erklärte Riesz, wenn ab dem m -ten Zeitpunkt keine neuen Empfindungsgruppen hinzukommen. Dieser Fall kann folgenderweise beschrieben werden, wenn man den von mir eingeführten Begriff der leeren Empfindungsgruppe mit dem Symbol \emptyset bezeichnet:

$$\begin{aligned} a_m &= (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m) \text{ und} \\ a_n &= (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m, \alpha_{m+1}, \dots, \alpha_n) \\ \text{mit} \quad \alpha_i &= \emptyset \quad \forall i = m + 1, \dots, n \end{aligned}$$

Solche ‚unveränderten‘ physikalischen Punkte nannte Riesz ‚uneigentlich‘, um sie von den ‚eigentlichen‘ zu unterscheiden:

⁶[Rie07b], 326.

Definition 7.3 (eigentlicher physikalischer Punkt)

„Ich sage, der physikalische Punkt n -ter Ordnung a_n sei ein eigentlicher, wenn es unter den Empfindungsgruppen, aus denen a_n besteht, eine gibt, die im n -ten Zeitpunkte in mein Bewußtsein aufgenommen wurde; im entgegengesetzten Falle sage ich, a_n sei ein uneigentlicher physikalischer Punkt n -ter Ordnung“⁷.

Es läßt sich wiederum ein eigentlicher physikalischer Punkt n -ter Ordnung als die Folge $a_n = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ beschreiben, wobei $\alpha_n \neq \emptyset$. Ist dagegen $\alpha_n = \emptyset$, dann ist a_n uneigentlich.

Riesz führte zwei Arten von Beziehungen zwischen physikalischen Punkten ein: zum einen die Beziehung ‚enthalten sein‘ zwischen physikalischen Punkten verschiedener Ordnung, zum anderen die Beziehung ‚unterscheidbar‘ oder ‚ununterscheidbar‘ zwischen physikalischen Punkten gleicher Ordnung. Die Relationen für physikalische Punkte gleicher Ordnung standen in keinem Zusammenhang mit Baires Ausführungen. Dagegen bildeten sie einen wichtigen Bestandteil in Riesz’ Konstruktion des Raumes.

Definition 7.4 (ununterscheidbare physikalische Punkte)

„Ich [nehme] zwei physikalische Punkte derselben Ordnung für ununterscheidbar oder für unterscheidbar [an], je nachdem die entsprechenden Empfindungsgruppen sämtlich [im Raum] ununterscheidbar sind, oder aber es unter denselben [im Raum] unterscheidbare gibt.“⁸

Sind a_n und b_n zwei physikalische Punkte n -ter Ordnung, dann schreiben wir $a_n \sim b_n$ für ‚ a_n und b_n ununterscheidbar‘ und $a_n \approx b_n$ für ‚ a_n und b_n unterscheidbar‘. Die vorherige Definition kann folgenderweise formuliert werden:

$$\begin{aligned} a_n &= (\alpha_1, \dots, \alpha_n), \\ b_n &= (\beta_1, \dots, \beta_n), \quad \text{dann ist} \\ a_n \sim b_n &\Leftrightarrow \alpha_i \sim \beta_j, \quad \forall i, j = 1, \dots, n \end{aligned}$$

Gibt es dagegen ein $1 < i < n$ und ein $1 < j < n$ mit $\alpha_i \approx \beta_j$, dann ist $a_n \approx b_n$ ⁹.

So nannte Riesz die Gesamtheit der physikalischen Punkte n -ter Ordnung die n -te momentane Raumvorstellung. Versehen mit den binären Relationen ‚unterscheidbar‘ und ‚ununterscheidbar‘ bildete die n -te momentane Raumvorstellung ein im Riesz’schen Sinne physikalisches Kontinuum. Die unendliche Folge der n -ten momentanen Raumvorstellungen stellte Riesz’ konstruktiven Ansatz eines Raumbegriffes dar, den er anschließend mittels eines Axiomensystems definierte.

Zurück zu Riesz’ Anschluß an Baires Theorie. Riesz führte eine originelle Definition für den Begriff des mathematischen Punktes ein.

⁷[Rie07b], 326.

⁸[Rie07b], 326, Ergänzungen von mir, LR.

⁹Zur Erinnerung: Für einen physikalischen Punkt $a_n = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ gilt per Definition $\alpha_i \sim \alpha_j$ für alle $i, j = 1, \dots, n$.

Definition 7.5 (mathematischer Punkt)

„Ich definiere nun den mathematischen Punkt als eine unendliche Reihe

$$a_m, a_{m+1}, a_{m+2}, \dots$$

von physikalischen Punkten, für welche sich die Ordnungszahlen der aufeinander folgenden Punkte stets um 1 unterscheiden, jeder physikalische Punkt den auf ihn folgenden enthält, und in welcher für jedes n eigentliche physikalische Punkte höherer als der n -ten Ordnung vorkommen“¹⁰.

Die Analogie zu Baires Konzept der „suite d’entiers“ ist weniger direkt, denn obwohl es sich bei einem mathematischen Punkt um eine unendliche Folge handelt, sind bei Baire die Glieder sowohl der Gruppen als auch der Folgen ganze Zahlen, d.h. Elemente derselben Natur (s. Definitionen 3.3 und 3.4); dagegen sind bei Riesz physikalische Punkte endliche Folgen von Empfindungsgruppen, während mathematische Punkte unendliche Folgen physikalischer Punkte sind. Die Analogie läßt sich dennoch ziehen, wenn die Bedingung in Definition 7.5, daß jeder physikalische Punkt den auf ihn folgenden enthält, berücksichtigt wird, denn diese Bedingung bedeutet, daß der Folge physikalischer Punkte

$$A = \{a_m, a_{m+1}, a_{m+2}, \dots\},$$

die den mathematischen Punkt A definiert, eine unendliche Folge von Empfindungsgruppen

$$A = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n, \alpha_{n+1}, \alpha_{n+2} \dots)$$

entspricht, wobei gilt:

$$\begin{aligned} a_n &= (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \\ a_{n+1} &= (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n, \alpha_{n+1}) \\ &\vdots \quad \quad \quad \vdots \end{aligned}$$

Denn per Konstruktion ist jeder physikalische Punkt a_{n+1} $n + 1$ -ter Ordnung im physikalischen Punkt a_n n -ter Ordnung enthalten¹¹. Die letzte Bedingung in der Definition 7.5 schließt aus, daß ab einem gewissen Zeitpunkt, d.h. ab einer gewissen natürlichen Zahl N , die Folge, die A bestimmt, aus lauter leeren Empfindungsgruppen besteht. Im Folgenden werden große lateinische Buschstaben stets mathematische Punkte bezeichnen.

Nun setzte Riesz mathematische Punkte und physikalische Punkte zueinander in die Beziehung ‚enthalten sein‘, genauso wie Baire Gruppen und Folgen ganzer Zahlen zueinander in Beziehung gebracht hatte¹²:

¹⁰[Rie07b], 331.

¹¹Zur Zählung der Empfindungsgruppen gilt dieselbe Bemerkung wie auf Seite 191.

¹²‚pP‘ steht für ‚physikalischer Punkt‘ und ‚mP‘ für ‚mathematischer Punkt‘.

Definition 7.6 (Beziehung ‚enthalten sein‘ zwischen pP und mP)

„Ist $A \equiv \{a_m, a_{m+1}, \dots\}$ der durch die Reihe a_m, a_{m+1}, \dots definierte mathematische Punkt, und ist a_p ein Element der Reihe, so sage ich, der mathematische Punkt A sei in dem physikalischen Punkte a_p enthalten.“¹³

Ist $A \equiv \{a_m, a_{m+1}, \dots\}$, dann entspricht der Folge physikalischer Punkte a_m, a_{m+1}, \dots eindeutig die Folge von Empfindungsgruppen

$$\begin{aligned} a_m &= (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m) \\ a_{m+1} &= (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m, \alpha_{m+1}) \\ &\vdots \quad \vdots \end{aligned}$$

und so ist $A = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m, \alpha_{m+1}, \alpha_{m+2}, \dots)$ als Folge von Empfindungsgruppen darzustellen.

Es heißt dann, der mathematische Punkt A sei im physikalischen Punkt a_n enthalten, wenn die ersten n Empfindungsgruppen der unendlichen Folge A mit den n Empfindungsgruppen des physikalischen Punktes a_n in ihrer jeweiligen Anordnung übereinstimmen.

So weit läßt sich in Riesz’ System aus physikalischen Punkten n -ter Ordnung, mathematischen Punkten und den Beziehungen ‚enthalten sein‘ dieselbe Struktur wie in Baires Theorie finden: Die physikalischen Punkte von Riesz spielen die Rolle der Gruppen ganzer Zahlen von Baire und die Rieszschen mathematischen Punkte die der Baireschen Folgen ganzer Zahlen. Ich werde das bisher beschriebene System physikalischer und mathematischer Punkte einschließlich ihrer Relationen ‚enthalten sein‘ ‚Bairesche Struktur‘ nennen. Diese Struktur läßt sich mit einem Baumdiagramm (Abbildung 7.1) veranschaulichen. Der Pfeil nach oben in Abbildung 7.1 zeigt die Richtung, in der die Ordnung der Zeitpunkte zunimmt. Die Punkte auf dem Graphen stehen für physikalische Punkte, wobei deren Ordnung links auf der Leiste der Zeitpunkte abgelesen werden kann. Ein physikalischer Punkt a_n ist in einem anderen a_m ($n > m$) enthalten, wenn der Punkt a_n durch eine Folge von stets abfallenden Zweigen mit a_m verbunden ist.

Wird der Baireschen Struktur die darunter liegende Struktur der n -ten momentanen Raumvorstellungen als physikalische Kontinua hinzugefügt, so erscheint das gesammte Rieszsche System ein Stück komplexer. Man müßte sich zunächst die Äste des Baumes in Abbildung 7.1 dicker vorstellen, so daß ‚nahe‘ an dem physikalischen Punkt a_n ein physikalischer Punkt b_n liegt, der zu a_n ununterscheidbar ist¹⁴. Zur Veranschaulichung gab Riesz selbst keine Baumdiagramme an. Er beschrieb vielmehr ein System von Kreisen auf der Ebene, deren Zentren

¹³[Rie07b], 331.

¹⁴Da Riesz anschließend verlangte, daß das System eigentlicher physikalischer Punkte n -ter Ordnung zusammenhängend sei, erscheint ein Baumdiagramm nicht mehr geeignet für die Darstellung: Die Äste müßten derart dick dargestellt werden, daß sie ineinander übergreifen!

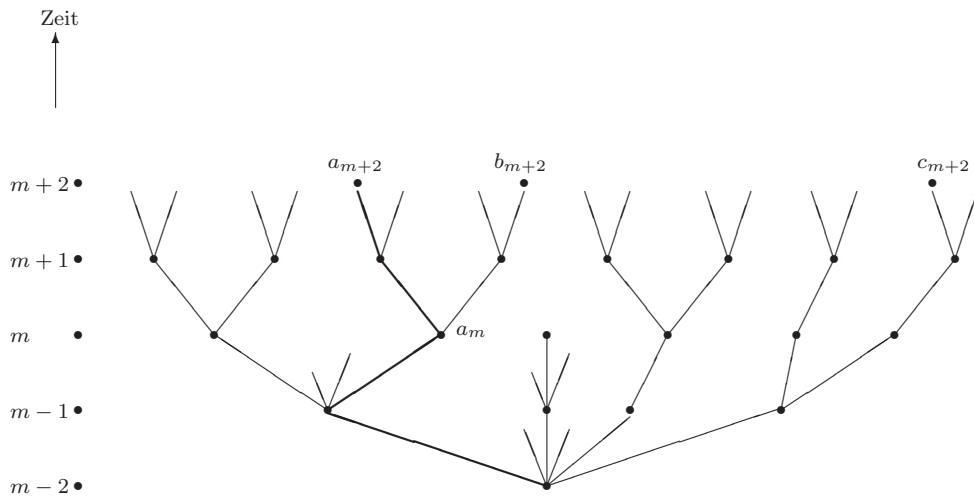


Abbildung 7.1: Baires Struktur im Rieszchen System physikalischer und mathematischer Punkte. Daß der physikalische Punkt $m+2$ -ter Ordnung a_{m+2} in dem Punkt m -ter Ordnung a_m enthalten ist, zeigt sich im Diagramm dadurch, daß a_{m+2} als Zweig von a_m erscheint. Auch b_{m+2} ist in a_m enthalten, dagegen ist c_{m+2} in a_m nicht enthalten.

und Radien in Termen von Brüchen der Form 2^{-n} ($n \in \mathbb{N}$) angegeben werden. Riesz' Beispiel wird in Abschnitt 8.2 näher erläutert.

Zurück zur Beziehung ‚enthalten sein‘ zwischen einem physikalischen Punkt n -ter Ordnung und einem mathematischen Punkt. Erst muß geklärt werden, was also ‚übereinstimmen‘ in der obigen Beschreibung heißt. Bei Empfindungsgruppen hatte Riesz zwischen ‚identisch‘ und ‚ununterscheidbar‘ – sowohl im Raum als auch in der Zeit – differenziert: Sind zwei Empfindungsgruppen im Raum oder in der Zeit ununterscheidbar, dann sind sie für Riesz nicht notwendigerweise ‚identisch‘. Von ‚Identität‘ zwischen Empfindungsgruppen redete er nur in dem Sinne, daß eine Empfindungsgruppe mit sich selbst identisch sei¹⁵. Daraus folgt: Sind zwei Empfindungsgruppen α und β ‚identisch‘, dann sind sie ein und dieselbe: Sie stimmen überein. Ich schreibe dann $\alpha = \beta$. Sind sie dagegen verschieden, dann gab es für Riesz zwei Möglichkeiten: Entweder sind α und β ununterscheidbar, d.h. $\alpha \sim \beta$, oder α und β sind unterscheidbar, d.h. $\alpha \approx \beta$. Genauso differenzierte Riesz ‚identische‘ von ‚ununterscheidbaren‘ physikalischen Punkten. Für mathematische Punkte wählte Riesz dagegen andere Kriterien, um ihre ‚Identität‘ zu charakterisieren:

¹⁵Vgl. [Rie07b], 323. S. auch Abschnitt 6.2.

Definition 7.7 ($A \equiv B$)

„Ich sage, die beiden mathematischen Punkte $A = \{a_m, a_{m+1}, \dots\}$ und $B = \{b_n, b_{n+1}, \dots\}$ seien identisch, wenn für jedes N ($N \geq m, N \geq n$) die [physikalischen] Punkte a_N und b_N ununterscheidbar oder identisch sind. Ich sage, die beiden mathematischen Punkte A und B seien verschieden, wenn sie nicht identisch sind.“¹⁶

Diese Relation bildet eine Äquivalenzrelation. Die Transitivität ist durch das 12. Axiom der Rieszschen Definition des Raumbegriffes garantiert¹⁷. Für je zwei mathematische Punkte gibt es somit nur zwei Möglichkeiten: Entweder sind sie identisch oder sie sind verschieden. Eine weitere Differenzierung in ‚ununterscheidbare mathematische Punkte‘ schloß Riesz mit der Definition 7.7 aus¹⁸.

Innerhalb Riesz’ Darstellung markiert die Definition 7.5 des mathematischen Punktes den Übergang von einem konstruktiven Aufbau des Raumes aus mathematisierten erfahrungsgemäßen Konzepten einerseits, zum Studium eines abstrakten mathematischen Systems andererseits, also sozusagen den Übergang von der Anschauung zur exakten Wissenschaft. Entsprechend schrieb Riesz seinen Begriffen unterschiedliche epistemische Bedeutung zu. So hatte er die Relationen ‚unterscheidbar‘ und ‚ununterscheidbar‘ für eine Mathematisierung der Stetigkeit menschlicher Empfindungen benutzt. Dagegen war die Menge aller mathematischen Punkte ein abstraktes System, dessen Stetigkeit für Riesz von dem Begriff des Häufungspunktes abhing und daher Forschungsgegenstand einer abstrakten Punktmengenlehre war.

7.1.2 System spezieller Umgebungen

Riesz verwendete die Beziehung ‚enthalten sein‘ von Definition 7.6, um spezielle Mengen mathematischer Punkte zu bestimmen und so ein System spezieller Umgebungen zu konstruieren. Den Umgebungsbegriff hatte Riesz im Rahmen seiner Theorie des mathematischen Kontinuums definiert, dort hatte er auch Systeme spezieller Umgebungen charakterisiert¹⁹. In diesem Zusammenhang hatte Riesz

¹⁶ [Rie07b], 331.

¹⁷Riesz selber wies darauf hin, er führte jedoch den Beweis nicht aus, [Rie07b], 331. Riesz’ axiomatische Definition des Raumbegriffes wird in Anhang A wiedergegeben. Für den Beweis wähle man erst $A = \{a_m, a_{m+1}, \dots\}$, $B = \{b_\ell, b_{\ell+1}, \dots\}$ und $C = \{c_n, c_{n+1}, \dots\}$ mit $A \equiv B$, $B \equiv C$. Angenommen, A sei nicht mit C identisch, dann gibt es ein $N \in \mathbb{N}$, so daß $a_N \not\sim c_N$. Aus dem 12. Axiom folgt: $\exists p > N$, so daß $\forall q > p$ gilt: $b_q \sim a_q$ und $b_q \not\sim c_q$ (oder $b_q \not\sim a_q$ und $b_q \sim c_q$). Das ist aber unmöglich, da $B \equiv C$ (bzw. $A \equiv B$). Da $a_n \not\sim c_n$ nie vorkommen kann, ist $A \equiv C$.

¹⁸Die natürliche Übertragung für mathematische Punkte der Relationen ‚unterscheidbar‘ und ‚ununterscheidbar‘ lautet: Für zwei mathematische Punkte A und B gilt: B ist von A ununterscheidbar, wenn $b_n \sim a_n$ oder $b_n = a_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$, sonst ist B von A unterscheidbar. Daran war Riesz offenbar nicht interessiert.

¹⁹S. Abschnitt 5.2, Definitionen 5.7 und 5.8.

auf die hier diskutierten Arbeiten von Baire hingewiesen. Riesz schrieb:

Für die Vertiefung der Lehre über Irrationalzahlen gebraucht R. Baire mit Erfolg spezielle Umgebungen, die auf der Kettenbruchentwicklung jener Zahlen beruhen. (Sur la théorie des ensembles; Sur la théorie des fonctions discontinues, Comptes Rendus 1899 (2)).²⁰

Auf das von Riesz konstruierte System spezieller Umgebungen werden wir zurückkommen, wenn wir Riesz' Definition der Verdichtungsstelle behandelt haben. Zunächst muß bemerkt werden, daß Baire in den oben erwähnten Arbeiten keinen Umgebungs-begriff definierte und auch keinen Gebrauch des Wortes ‚voisinage‘ machte. Dennoch lassen sich, ausgehend von Riesz' Ideen, gewisse ausgezeichnete Teilmengen von Folgen ganzer Zahlen in den Baireschen Arbeiten finden, die zweifellos diejenigen Teilmengen sind, die Riesz als ‚spezielle Umgebungen‘ bezeichnete. Wir werden erst Riesz' Ideen diskutieren.

Riesz bildete besondere Teilmengen mathematischer Punkte und nannte sie „Elementarmengen n -ter Ordnung“:

Definition 7.8 (Elementarmenge n -ter Ordnung)

„Die Gesamtheit aller mathematischen Punkte, die in einem eigentlichen physikalischen Punkte n -ter Ordnung enthalten sind, nenne ich eine Elementarmenge n -ter Ordnung.“²¹

Ist e_n ein eigentlicher physikalischer Punkt n -ter Ordnung, dann bestimmt e_n eine Elementarmenge E_n n -ter Ordnung, in moderner Schreibweise:

$$E_n = \{A \mid A \text{ in } e_n \text{ enthalten ist}\}.$$

Sind $A, B \in E_n$, dann ist der eigentliche physikalische Punkt n -ter Ordnung e_n ein Glied der jeweiligen Folgen, die die mathematischen Punkte A und B bestimmen. D.h.

$$\begin{aligned} A &= \{a_\ell, a_{\ell+1}, \dots, a_{n-1}, e_n, a_{n+1}, \dots\} & \text{und} \\ B &= \{b_m, b_{m+1}, \dots, b_{n-1}, e_n, b_{n+1} \dots\}. \end{aligned}$$

Da aber per Definition eines mathematischen Punktes gilt: e_n ist sowohl in a_{n-1} als auch in b_{n-1} enthalten, folgt in Termen von Empfindungsgruppen für

$$\begin{aligned} e_n &= (\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n), & \text{daß} \\ A &= (\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n, \alpha_{n+1} \dots) & \text{und} \\ B &= (\eta_2, \eta_2, \dots, \eta_n, \beta_{n+1} \dots). \end{aligned}$$

²⁰Vgl. [Rie07b], 320. Riesz zitierte [Bai99a] und [Bai99b].

²¹[Rie07b], 332.

So gesehen sind in der Elementarmenge E_n diejenigen mathematischen Punkte enthalten, deren ersten n Empfindungsgruppen mit den n Empfindungsgruppen des eigentlichen physikalischen Punktes e_n in ihrer jeweiligen Reihenfolge übereinstimmen.

Angesichts der Aufteilung mathematischer Punkte in Äquivalenzklassen erweiterte Riesz die Gültigkeit der Relation ‚enthalten sein‘ zwischen mathematischen und physikalischen Punkten: Aus der Definition 7.7 folgt, daß jeder mathematische Punkt durch verschiedene Folgen physikalischer Punkte dargestellt werden kann. Gehört b_n zu einer der Folgen, die A darstellen, dann ist A auch in b_n enthalten²².

Ist E_n die Elementarmenge, die durch den eigentlichen physikalischen Punkt e_n bestimmt wird, und ist $A \in E_n$, dann gehört e_n zu einer der Folgen, die A darstellen. Ist a_n auch ein eigentlicher physikalischer Punkt, der zu einer der Folgen, die A darstellen, gehört, dann ist $e_n \sim a_n$. Ist A_n die Elementarmenge, die durch den eigentlichen physikalischen Punkt a_n bestimmt wird, dann ist A sowohl Element aus E_n als auch Element aus A_n . Anders als bei Baire können deshalb mathematische Punkte verschiedenen Elementarmengen derselben Ordnung angehören. Die Elementarmengen n -ter Ordnung bilden so ein System von Teilmengen, die sich überlappen. Diese Überlappung wird, wie Riesz bemerkte, durch das 14. Axiom garantiert²³. Daß zwei ununterscheidbare eigentliche physikalische Punkte derselben Ordnung nicht notwendigerweise die gleiche Elementarmenge bestimmen, erläuterte Riesz nicht. Dafür bewies er, daß jede Elementarmenge unendlich viele verschiedene mathematische Punkte enthält²⁴. Würden zwei beliebige eigentliche physikalische Punkte $a_n \sim b_n$ dieselbe Elementarmenge bestimmen, dann läßt sich zeigen, daß der Raum in einem einzigen mathematischen Punkt zusammenfallen würde, was im Widerspruch mit dem oben erwähnten Rieszschen Resultat steht²⁵.

In Bezug auf den Begriff der Verdichtungsstelle (des Häufungspunktes) erwiesen sich die Elementarmengen n -ter Ordnung als Umgebungen jeder ihrer Elemente. Riesz brauchte die Elementarmengen n -ter Ordnung, weil der Begriff der Verdichtungsstelle einer Teilmenge mathematischer Punkte sich auf das Kon-

²²Vgl. [Rie07b], 332.

²³Riesz schrieb: „Mittels der Voraussetzung 14) folgert man leicht, daß irgend zwei ununterscheidbare physikalische Punkte wenigstens je einen mathematischen Punkt enthalten, die identisch sind“, [Rie07b], 332.

²⁴Das folgt aus den Axiomen 2, 11 und 12. S. Anhang A.

²⁵Gilt für alle eigentlichen physikalischen Punkte $a_n \sim b_n$, daß die entsprechenden Elementarmengen $E_{a_n} = E_{b_n}$, dann besitzt jeder mathematische Punkt $A \in E_{a_n}$ einen identischen mathematischen Punkt $B \in E_{b_n}$. Dasselbe gilt für jeden weiteren eigentlichen physikalischen Punkt $c_n \sim a_n$ und dessen entsprechende Elementarmenge E_{c_n} . D.h. für jedes $c_n \sim a_n$ existiert $C \equiv A$ mit $C \in E_{c_n}$. Da das System aus eigentlichen physikalischen Punkten n -ter Ordnung laut Axiom 9 zusammenhängend ist, und da die Relation ‚ \equiv ‘ transitiv ist, sind alle mathematischen Punkte, die in irgendeinem eigentlichen physikalischen Punkt n -ter Ordnung enthalten sind, identisch!

zept der Umgebung in der Art und Weise stützte, daß Riesz' Satz 5.1 gilt. D.h. x ist ein Häufungspunkt der Menge X genau dann, wenn jede Umgebung von x unendlich viele Elemente von X enthält.

Allerdings begnügte sich Riesz mit dem Begriff der Elementarmengen n -ter Ordnung nicht, um Baires Begriff des Häufungspunktes auf die Menge mathematischer Punkte zu übertragen. Nach Baires Vorgehensweise wäre erst dem mathematischen Punkt A eine Folge physikalischer Punkte $\{a_n\} n \in \mathbb{N}$ zuzuordnen. Bereits beim ersten Schritt hat man nach Definition 7.7 das Problem, daß diese Zuordnung nicht eindeutig ist. Weiter gibt es laut Definition 7.5 eine unendliche Teilfolge $\{a_{n_i}\} i \in \mathbb{N}$ aus ausschließlich eigentlichen physikalischen Punkten. Jedes a_{n_i} dieser Teilfolge bestimmt eine Elementarmenge A_{n_i} der n_i -ten Ordnung mit der Eigenschaft $A \in A_{n_i} \forall i \in \mathbb{N}$. Eine wörtliche Übertragung von Baires Begriff würde dann lauten: A ist ein Häufungspunkt der Menge M , wenn jede Elementarmenge A_{n_i} andere, von A ‚verschiedene‘ mathematische Punkte enthält, die zugleich Elemente aus der Menge M sind. Man bekommt den Eindruck, daß Riesz die Bedingung ‚von A verschieden‘ umgehen wollte, denn statt eine solche Definition zu formulieren, führte er folgendes Konzept ein:

Definition 7.9 (benachbart (n))

„Von irgend zwei mathematischen Punkten, sage ich, sie seien benachbart (n), wenn es eine Elementarmenge n -ter Ordnung, aber keine Elementarmenge höherer Ordnung gibt, die beide Punkte enthält.“²⁶

Es folgt daraus, daß der Punkt A nicht mit sich selbst und auch nicht mit einem anderen Element aus seiner Äquivalenzklasse benachbart (n) für $n < \infty$ ist. Eine notwendige Bedingung, damit A und B benachbart (n) sind, ist, daß A und B verschieden im Sinne der Definition 7.7 sind.

Nun legte Riesz das Konzept der Verdichtungsstelle einer Teilmenge mathematischer Punkte folgenderweise fest:

Definition 7.10 (Verdichtungsstelle)

„Der Punkt A ist eine Verdichtungsstelle der Menge t , wenn es für jede Zahl n wenigstens einen Punkt der Menge gibt, der zu A beachbart (p) ist, wo $p > n$; anderenfalls ist der Punkt A in bezug auf die Menge t isoliert.“²⁷

Die Analogien zwischen der von Baire vorgebrachten Struktur und Riesz' Theorie kommen deutlich zum Vorschein, wenn die Bairesche Definition 3.6 mit dem Rieszschen Konzept der Verdichtungsstelle verglichen werden. Nach Baires Strategie wird zu einer gegebenen Folge ganzer Zahlen A die Folge der Gruppen g_1, g_2, \dots der Ordnung $1, 2, \dots$ gebildet, die die Folge A enthalten. Dann definierte Baire, A sei ein Häufungspunkt der Menge P , wenn für jedes $n \in \mathbb{N}$

²⁶[Rie07b], 332.

²⁷[Rie07b], 333.

Folgen ganzer Zahlen A_n existieren, so daß diese einerseits Elemente von P sind, andererseits in g_n enthalten und ferner von A *verschieden* sind²⁸. Für diese Betrachtungen spielten bei Baire diejenigen Teilmengen von Folgen ganzer Zahlen eine wichtige Rolle, die in g_p enthalten sind. Diese sind die Teilmengen, die Riesz in seinem Verweis auf Baire als ‚spezielle Umgebungen‘ bezeichnete und die mit Riesz’ Elementarmengen verwandt sind²⁹.

Anhand der Beziehung ‚benachbart (n)‘ konnte Riesz also die Bairesche Definition des Häufungspunktes sinngemäß übertragen. Die Beziehung ‚ A und B sind verschieden‘ der Baireschen Theorie wird in der Rieszschen Theorie durch die Beziehung ‚ A und B sind benachbart (n)‘ ersetzt.

7.2 Elemente aus Fréchets Theorie der L-Klassen

Als Riesz „Die Genesis des Raumbegriffs“ verfaßte, kannte er bereits die Arbeiten von Fréchet aus den Jahren 1904 und 1905, aus denen Fréchets Dissertation hervorging. Im Rahmen seiner Theorie des mathematischen Kontinuums verwies Riesz auf folgende Arbeiten von Fréchet: „Généralisation d’un théorème de Weierstrass“, „Sur les fonctions limites et les opérations fonctionnelles“, und „La notion d’écart dans le Calcul fonctionnel“³⁰. Im folgenden wird die Frage zu beantworten sein, inwieweit Riesz an die Arbeiten von Fréchet aus den Jahren 1904 und 1905, die bereits in Abschnitt 3.2.6 besprochen wurden, anknüpfte.

Methodisch weisen die Untersuchungen von Fréchet und die von Riesz starke Ähnlichkeiten auf. Dies legt wiederum die Vermutung nahe, daß Riesz sich an Fréchets Arbeitsweise orientierte. Bei beiden handelte es sich um einen bahnbrechenden Versuch einer Verallgemeinerung der Cantorschen Punktmengenlehre durch einen axiomatischen, abstrakten Zugang. Beide schlugen allgemeinere punktmengentheoretische Konzepte für abstrakte Mengen vor. Beide formulierten die Grundkonzepte ihrer jeweiligen Theorien axiomatisch als ‚abstrakte deskriptive Definitionen‘³¹.

Riesz schrieb zu seinem Vorhaben im Vergleich mit Fréchets Leistungen:

Vor einer gründlichen Untersuchung mannigfacher Klassen spezieller Verdichtungstypen wäre ein Versuch einer allgemeinen Theorie der Verdichtungstypen – glaube ich – verfrüht. Eine ausgedehnte Klasse von Verdichtungstypen hat M. Fréchet untersucht, jene Verdichtungstypen, nämlich in denen es für jedes Hauptelement eine abzählbare

²⁸S. Definition 3.6.

²⁹In [SH13] beschrieb Schoenflies das mit Kettenbruchentwicklungen definierte Bairesche System geschachtelter Intervalle. Offenbar hatte Baire seinen Ansatz von 1899 ausgebaut, denn Schoenflies verwies auf eine Arbeit von Baire von 1906 in *Acta mathematica*, vgl. [SH13], 339ff.

³⁰D.h. [Fré04], [Fré05e] und [Fré05a].

³¹Riesz’ Anschluß an die axiomatische Praxis in Frankreich wird in Abschnitt 8.1 diskutiert.

Folge von Elementen gibt, die gegen das Hauptelement konvergiert. Besonders interessante Resultate ergeben sich für Verdichtungstypen, für welche ein Begriff des „*écart*“ konstruiert werden kann. (Comptes Rendus, 21 novembre 1904, 2 janvier 1905, 20 mars 1905)³²

Aus dieser Passage geht klar hervor, daß Riesz seine Theorie des mathematischen Kontinuums in dieselbe Forschungslinie wie Fréchet's Beiträge zum Aufbau einer abstrakten Punktmengenlehre einordnete. Darüber hinaus erkannte Riesz, daß Fréchet's Untersuchungen von L- und V-Klassen³³, betrachtet als die Einführung speziellerer Klassen, aus denselben Motivationen entstanden wie bei ihm die Einführung des Konzepts des Verdichtungstypus. Diese Motivationen bestanden darin, Stetigkeitsstrukturen zu vergleichen und zu klassifizieren, je nachdem, welche ‚interessanten Resultate‘ zu erwarten waren.

Riesz hatte in seiner Theorie des mathematischen Kontinuums die Konzepte ‚ähnlich verdichtet‘ und ‚Verdichtungstypus‘ eingeführt und damit epistemische Mittel geschaffen, mit denen verschiedene Stetigkeitsstrukturen sowohl auf verschiedene Mengen als auch auf ein und dieselbe Menge miteinander verglichen werden konnten. In diesem Kontext hatte Riesz auf die oben erwähnten Arbeiten von Fréchet verwiesen.

Im Fall von Fréchet war der Übergang von L-Klassen zu den spezielleren V- und E-Klassen in der Suche nach hinreichenden Bedingungen für die Gültigkeit gewisser Sachverhalte (z.B. $A'' \subset A'$) begründet, welche zugleich einen Beweis für Fréchet's Verallgemeinerung des Satzes von Weierstraß ermöglichen sollten³⁴. Der Satz von Weierstraß fällt unter die ‚interessanten Resultate‘, die Riesz im obigen Zitat meinte. Riesz selber versuchte in „Die Genesis des Raumbegriffs“, verallgemeinerte Versionen der Sätze von Borel und Bolzano-Weierstraß für seinen konstruktiven Raumbegriff zu beweisen³⁵. Riesz' Sätze werden weiter unten näher diskutiert. Die Bedeutung, die sowohl Fréchet als auch Riesz den erwähnten Sätzen von Weierstraß, von Bolzano-Weierstraß und von Borel zuschrieben, lag in den Anwendungen auf die Analysis begründet, und zwar auf eine Analysis von Funktionen auf abstrakten Mengen.

Riesz' war sich dessen bewußt, daß sein Begriff des mathematischen Kontinuums allgemeiner war als Fréchet's Konzept der L-Klasse, d.h. eine L-Klasse ist automatisch ein mathematisches Kontinuum, aber nicht jedes mathematische

³²[Rie07b], 322. Ein Element x des mathematischen Kontinuums M heißt ‚Hauptelement‘, wenn eine Teilmenge von M existiert, zu der x Häufungspunkt ist, s. Riesz' Konzepte in Kapitel 5, S. 157, der vorliegenden Arbeit.

³³Riesz sprach von E-Klassen, weil er Fréchet's frühe Bezeichnung benutzte. Was Fréchet 1905 E-Klassen nannte, hieß bei ihm 1906 V-Klasse. Ich verwende hier die Terminologie aus Fréchet's Dissertation, vgl. Abschnitt 3.2.6.

³⁴Gemeint ist der Weierstraßsche Satz über die Erreichbarkeit der Extremwerte einer stetigen Funktion auf einem beschränkten, abgeschlossenen Intervall. Zu Fréchet's Theorie vgl. Abschnitt 3.2.6.

³⁵S. Abschnitt 5.3.

Kontinuum im Rieszschen Sinne ist eine L-Klasse³⁶. Ein Beispiel dafür gab Riesz im oben erwähnten Vortrag von 1908. Er benutzte ein von Lindelöf formuliertes, spezifisches Konzept des Häufungspunktes: Ein Punkt p ist Häufungspunkt der Menge M , wenn jede Umgebung von p mehr als abzählbar viele Punkte der Menge M enthält³⁷. Daß Lindelöfs Konzept des Häufungspunktes die ersten drei Axiome von Riesz erfüllt, läßt sich leicht beweisen. Dagegen ist die Gültigkeit des Trennungsaxioms nicht offensichtlich. Für Riesz reichte die Erfüllbarkeit der ersten drei Axiome aus, um eine Menge, versehen mit Lindelöfs spezifischem Begriff des Häufungspunktes, als mathematisches Kontinuum aufzufassen, weil er in seinem Vortrag von 1908 das vierte Axiom in der Definition des mathematischen Kontinuums ausfallen ließ. Als Fréchet sich 1918 mit Riesz' allgemeinerem Konzept des mathematischen Kontinuums auseinandersetzte, präsentierte er genau dieses Rieszsche Exempel als Beispiel für ein mathematisches Kontinuum im Rieszschen Sinne, das keine L-Klasse ist³⁸. Fréchet behauptete die Gültigkeit der vier Axiome von Riesz, gab aber keinen Beweis³⁹. Jedenfalls kann eine Menge, deren Stetigkeitsstruktur durch Lindelöfs spezifischen Begriff des Häufungspunktes bestimmt wurde, keine L-Klasse sein, da in dieser Struktur eine abzählbare Menge nie einen Häufungspunkt besitzen kann.

Darüber hinaus betonte Riesz in seinem Vortrag:

Es genügt aber schon auf die verschiedenen Ordnungstypen hinzuweisen, bei denen das Schnittprinzip das natürlichste Verdichtungsprinzip ist, um zu sehen, dass die Fréchet-sche Voraussetzung eine sehr spezielle ist.⁴⁰

Was genau Riesz mit ‚Schnittprinzip‘ meinte, ist unklar, denn er gab keine weiteren Erläuterungen. Allerdings gab er in seinem Artikel „Ueber mehrfache Ordnungstypen I“ von 1905 ein konkretes ‚Verdichtungsprinzip‘ an, nämlich ein spezifisches Konzept des ‚Häufungspunktes‘. Dieses und andere Grundbegriffe der Rieszschen Theorie der mehrfachen Ordnungstypen wurden bereits in Abschnitt 5.2.3 eingeführt. Den oben zitierten Verweis auf die Theorie der Ordnungstypen nutzte Riesz, um den Bedarf an einer allgemeineren Theorie als die der ‚speziellen‘ L-Klassen zu veranschaulichen⁴¹.

³⁶Für eine L-Klasse definierte Fréchet: $x \in M'$, wenn es eine unendliche Folge unterschiedlicher Elemente $x_n \in M$ gibt, die gegen x konvergiert (s. Abschnitt 3.2.6). Die Gültigkeit der ersten drei Axiome der Definition 5.4 von Riesz ist leicht zu prüfen. Zum Nachweis des vierten Axioms: Ist $x \neq y$ und $x \in A'$. Dann existiert eine Folge $\{x_n\} \subset A$ mit den oben angegebenen Eigenschaften. Man setze $B := \{x_n\}$, so gilt $B \subset A$, $x \in B'$ und y in bezug auf B isoliert, da in Fréchets Theorie der Grenzwert einer Folge eindeutig bestimmt ist.

³⁷Vgl. [Rie09], 19.

³⁸Vgl. [Fré18], 146. Zu dieser Arbeit von Fréchet und im allgemeinen zu Fréchets Anschluß an Riesz' Theorie des mathematischen Kontinuums s. Abschnitt 9.1.1.

³⁹Zu dem von Fréchet betrachteten Rieszschen Axiomensystem s. Abschnitt 9.1.1.

⁴⁰[Rie09], 20.

⁴¹Als Beispiel nannte Riesz den Ordnungstypus der zweiten Zahlenklasse und einen Satz

In diesem Zusammenhang formulierte Riesz zwei Sätze, die mit Fréchts Begriff der kompakten Menge verwandt sind⁴². Das zeigt, daß Riesz sich mit dem Fréchtschen Konzept befaßt hatte. Die zwei Rieszschen Sätze beziehen sich auf sogenannte ‚im Endlichen gelegene‘ Mengen. Dieses Konzept definierte Riesz 1908 folgendermaßen:

Definition 7.11 (Rom 1908: Eine im Endlichen gelegene Menge)

Eine Menge M eines mathematischen Kontinuums heißt im Endlichen gelegen, wenn jede abzählbare Folge geschachtelter Teilmengen von M wenigstens eine gemeinsame Verdichtungsstelle besitzt⁴³.

Auch in „Die Genesis des Raumbegriffs“ hatte Riesz diesen Begriff eingeführt, aber ihn nur für Teilmengen des von ihm konstruierten Raumes – statt allgemein für beliebige mathematische Kontinua – definiert⁴⁴. Obwohl die Definition 7.11 mit der von 1906 schwer vergleichbar ist, läßt sich doch erkennen, daß Riesz 1908 unter diesem Konzept denselben Inhalt zu charakterisieren suchte. Das geht klar aus den Rieszschen Versionen von 1906 und 1908 des Bolzano-Weierstraß-Satzes hervor. Riesz brachte das Konzept der ‚im Endlichen gelegene Menge‘ und den Satz von Bolzano-Weierstraß in Verbindung. Interessant an dieser von ihm hergestellten Beziehung ist auch ihre Analogie zu der Beziehung zwischen dem Fréchtschen Konzept der (unendlichen) kompakten Menge und dem Satz von Bolzano-Weierstraß. In „Die Genesis des Raumbegriffs“ formulierte Riesz folgenden Satz, wie gesagt, nur für Teilmengen des von ihm konstruierten Raumes:

Satz 7.1 (Bolzano-Weierstraß in „Die Genesis des Raumbegriffs“)

„Für jede im Endlichen gelegene Menge, die unendlich viele Punkte enthält, gibt es wenigstens einen Punkt, der Verdichtungsstelle der Menge ist.“⁴⁵

Im \mathbb{R}^n besagt der Bolzano-Weierstraß-Satz, daß jede unendliche, beschränkte Teilmenge des \mathbb{R}^n wenigstens einen Häufungspunkt besitzt. Da der von Riesz konstruierte Raum mit keinem Abstandsbegriff versehen war, ersetzte Riesz die Idee

aus der Punktmengenlehre. Die zweite Zahlenklasse faßte er als L-Klasse auf, indem als Häufungspunkte „nur die Limeszahlen abzählbarer Folgen“ definiert wurden. Für diese L-Klasse behauptete Riesz, daß folgender Satz nicht gelte: Ist M eine Menge, für die gilt, daß jedes einfach geordnete System von geschachtelten im Endlichen gelegenen Teilmengen von M wenigstens einen gemeinsamen Häufungspunkt besitzt, dann besitzt jede transfinite Teilmenge von M wenigstens einen Häufungspunkt. Sein Vortrag enthält keine Beweise.

⁴²S. Fréchts Definitionen einer kompakten Menge in Abschnitt 3.2.6. Riesz führte in seiner Theorie des mathematischen Kontinuums keinen Begriff ein, der ‚kompakte Menge‘ hieß.

⁴³Vgl. [Rie09], 20.

⁴⁴In „Die Genesis des Raumbegriffs“ definierte Riesz: „Von einer Menge mathematischer Punkte (kurzwegs Punktmenge) sage ich, sie sei im Endlichen gelegen, wenn die Ordnung aller ihrer Punkte unterhalb einer endlichen Grenze liegt“ [Rie07b], 335. Wie gesehen, ist diese Definition gebunden an Riesz’ Konstruktion des Raumes, denn nur für die Punkte des Rieszschen Raumes ist eine Ordnung definiert.

⁴⁵[Rie07b], 335.

der beschränkten Menge durch das Konzept der im Endlichen gelegene Menge. Allgemeiner formulierte Riesz 1908 den Satz 7.1 für beliebige mathematische Kontinua – er gab aber keinen Beweis. Dieser Satz und dessen Umkehrung sind die oben erwähnten zwei Sätze von Riesz, die mit Fréchets Konzept der kompakten Menge verwandt sind. Zusammengefaßt besagen die Sätze von Riesz:

Satz 7.2 (Rom 1908: Bolzano-Weierstraß und M im Endlichen)

M ist eine Teilmenge eines mathematischen Kontinuums. M ist im Endlichen gelegen genau dann, wenn jede unendliche Teilmenge von M wenigstens einen Häufungspunkt besitzt⁴⁶.

Sagen wir, eine Menge M hat die Eigenschaft von Bolzano-Weierstraß, wenn jede unendliche Teilmenge N , $N \subset M$, wenigstens einen Häufungspunkt besitzt. Dann besagt der Satz 7.2: M ist im Endlichen gelegen genau dann, wenn M die Eigenschaft von Bolzano-Weierstraß besitzt. In denselben Termen umformuliert besagt Fréchets Definition 3.12: Eine unendliche Menge M ist kompakt genau dann, wenn die Menge die Eigenschaft von Bolzano-Weierstraß besitzt⁴⁷. So zeigt ein Vergleich des Satzes 7.2 mit Fréchets Definition 3.12 einer kompakten Menge, daß Riesz mit seinem Konzept einer im Endlichen gelegenen Menge eine andere Charakterisierung für Fréchets Begriff der (unendlichen) kompakten Menge vorschlug.

Zurück zu „Die Genesis des Raumbegriffs“: Wie in den Kapiteln 5 und 6 erwähnt, versuchte Riesz, den konstruktiv definierten Raumbegriff als ein mathematisches Kontinuum zu fassen, das gewisse Eigenschaften der \mathbb{R}^n -Räume besitzt. Eine der gewünschten Eigenschaften betraf den Satz von Bolzano-Weierstraß, eine weitere bezog sich auf die Gültigkeit des Satzes von Borel für gewisse Teilmengen des Raumes: für im Endlichen gelegene Mengen. Denn nur für im Endlichen gelegene Teilmengen des von ihm konstruierten Raumes hatte Riesz den Begriff der abgeschlossenen Menge definiert: Eine im Endlichen gelegene Menge hieß für Riesz abgeschlossen, wenn sie alle ihre Häufungspunkte enthielt. Riesz formulierte, wiederum nur für Teilmengen des von ihm konstruierten Raumes, folgende Version des Borelschen Satzes:

Satz 7.3 (Satz von Borel in „Die Genesis des Raumbegriffs“)

„Jedes System von Punktfolgen u , welches die Eigenschaft besitzt, daß es unter den Mengen u für jeden Punkt der abgeschlossenen [und im Endlichen gelegenen, LR] Menge a wenigstens eine gibt, die eine Umgebung für den Punkt ist, enthält ein endliches Teilsystem von derselben Eigenschaft.“⁴⁸

Auch in Fréchets Dissertation findet sich eine Version des Borelschen Satzes für von ihm sogenannte ‚extremale Mengen‘ einer V-Klasse, d.h. für abgeschlosse-

⁴⁶Vgl. [Rie09], 20.

⁴⁷Fréchets Definition 3.12 erschien bereits 1904 in [Fré04] als Satz, s. Abschnitt 3.2.6.

⁴⁸[Rie07b], 336.

ne und im Fréchet'schen Sinne kompakte Mengen. Interessant ist hier nun außerdem die Einbeziehung von Systemen geschachtelter Mengen. Riesz benutzte in „Die Genesis des Raumbegriffs“ solche Systeme für den Beweis des Satzes 7.3. Bei Fréchet kamen sie schon früher in seiner ersten Definition 3.10 der kompakten Menge vor. Deren Verwendung als methodischer Ansatz findet sich auch in den in Abschnitt 7.1 diskutierten Arbeiten von Baire. Dieser Ansatz ist deshalb interessant, weil er von den Intuitionisten Brouwer und Weyl konstruktiv interpretiert und angewandt wurde. Die Frage, ob eine Rezeption von Riesz durch die Intuitionisten stattfand, wird in Abschnitt 9.1.5 erläutert.

Riesz' Motivation, einen Begriff des Häufungspunktes zu liefern, der allgemeiner als der Fréchet'sche wäre, hing offenbar mit anderen Interessen zusammen. Riesz selber erwähnte in „Die Genesis des Raumbegriffs“ Anwendungen auf die Variationsrechnung, auf die Theorie der mehrfachen Ordnungstypen und die Funktionentheorie⁴⁹. Wie entscheidend jene Motivationen für die Entstehung der Riesz'schen Theorie des mathematischen Kontinuums waren, zeigt auch die Tatsache, daß der von Riesz konstruktiv definierte Raum sich als eine L-Klasse erwies. Dies zeigte Riesz folgendermaßen: Nachdem der konstruktive Aufbau des Raumbegriffes abgeschlossen war, und Riesz für den Raum ein System von Axiomen aufgestellt hatte, versuchte er, den Raum als mathematisches Kontinuum aufzufassen. Er führte einen Begriff des Häufungspunktes ein, erklärte die ersten drei Axiome der Definition des mathematischen Kontinuums für offenbar erfüllt und zeigte folgenden Satz: Ist a ein Häufungspunkt der Menge M , dann gibt es eine abzählbare Teilmenge der Menge M , für die a der einzige Häufungspunkt ist⁵⁰. Aus diesem Satz folgt unmittelbar das vierte Axiom der Definition 5.4 des mathematischen Kontinuums⁵¹, d.h. der Raum erweist sich als ein mathematisches Kontinuum. Zugleich aber folgt aus dem Satz, daß der Raum eine L-Klasse ist.

⁴⁹Vgl. [Rie07b], 318.

⁵⁰Vgl. Satz V in [Rie07b], 334.

⁵¹Die abzählbare Teilmenge selber ist die im vierten Axiom der Definition 5.4 gesuchte Teilmenge.

Kapitel 8

Axiomatik bei Riesz

In den Abschnitten 3.2.2 und 4.2.2 wurde diskutiert, wie die axiomatische Praxis von Borel, Lebesgue und Fréchet sich vom axiomatischen Stil Hilberts unterscheiden läßt: Die Anwendung der axiomatischen Methode erfüllte in Frankreich eine andere Funktion als bei Hilbert. Borel und Lebesgue benutzten deskriptive (axiomatische) Definitionen, um Probleme zunächst theoretisch einzugrenzen. Die so erzeugten Konzepte erfüllten für sie dann eine leitende pragmatische Aufgabe bei der Entwicklung konstruktiver Definitionen, welche die eigentlich gesuchten Lösungen der ursprünglichen Probleme bildeten. Bei Fréchet lag der Nutzen abstrakter deskriptiver Definitionen in ihrem Potential für die Verallgemeinerung von Theorien. Fréchet faßte in seinen abstrakten Definitionen grundlegende Eigenschaften bekannter spezifischer Begriffen zusammen, um Ansätze einer abstrakten Punktmengenlehre und einer verallgemeinerten Analysis zu liefern. Für Hilbert dagegen diente die axiomatische Grundlegung einer Wissenschaft dazu, die Struktur jener Wissenschaft zu erforschen. Deshalb kam für Hilbert die Anwendung der axiomatischen Methode in der Grundlagenforschung nur bei etablierten und sicheren Wissenschaften in Frage.

Im Folgenden soll anhand von zwei Beispielen der Einfluß sowohl der axiomatischen Praxis in Frankreich als auch des Hilbertschen axiomatischen Stils auf Riesz' „Genesis des Raumbegriffs“ diskutiert werden. Dazu wird die Diskussion sich auf die Betrachtung folgender zwei Begriffe beschränken: der Begriff des mathematischen Kontinuums (Definition 5.4) und der Begriff des Raumes (Definition A.1). In Riesz' Definition des mathematischen Kontinuums läßt sich der Einfluß des französischen axiomatischen Stils erkennen. Dagegen versuchte Riesz, den Raumbegriff durch ein Axiomensystem nach Hilbertscher Prägung axiomatisch zu begründen.

8.1 Anschluß an axiomatische Praxis in Frankreich

In Abschnitt 5.1 wurden vier Probleme hervorgehoben, aus denen „Die Genesis des Raumbegriffs“ hervorging. Von diesen stellten Probleme zwei und vier für Riesz die Aufgabe, Begriffe zu schaffen, die es ermöglichen, sämtliche Stetigkeitseigenschaften abstrakter Mengen, und speziell des Raumes, mathematisch zu studieren. So entstand Riesz' Theorie des mathematischen Kontinuums. Die Frage nach einer Charakterisierung des Konzepts des stetigen Raumes grenzte Riesz zunächst theoretisch ein: Der stetige Raum, der als Grundlage für den Aufbau der gewöhnlichen projektiven, Euklidischen oder nicht-Euklidischen Geometrie dient, ist ein mathematisches Kontinuum, das einen bestimmten Verdichtungstypus besitzt¹.

Den Hauptbegriff des mathematischen Kontinuums definierte Riesz axiomatisch und abstrakt (Definition 5.4). So ist für Riesz eine abstrakte Menge ein mathematisches Kontinuum, wenn sie mit einem Begriff des Häufungspunktes versehen ist, der gewissen Axiomen genügt. Riesz' Entscheidung, den Begriff des Häufungspunktes als grundlegendes Konzept anzunehmen, wurde, wie bereits in Abschnitt 6.1 erläutert, durch Hilberts Definition der Ebene als zweidimensionale Mannigfaltigkeit stark beeinflusst. Für den abstrakten axiomatischen Zugang hatte Riesz jedoch neben Hilbert auch Fréchet als Vorbild. Riesz kannte Arbeiten von Fréchet, in denen dieser außerdem den Nutzen einer abstrakten Punktmengelehre für die Analysis hervorhob².

Für die Auswahl der Axiome, die den abstrakten Begriff des Häufungspunktes charakterisieren sollten und die deshalb jedes spezifische Konzept des Häufungspunktes unbedingt nachzuweisen hat, mußte er sich zunächst an damals geläufigen Beispielen orientieren. Riesz gab folgendes an:

Eine Punktmannigfaltigkeit liefert das einfachste Beispiel eines mathematischen Kontinuums. Die vermittelnde Vorschrift kann dabei verschieden sein; sie kann z.B. auf dem Begriff der Distanz, wie auch auf dem Begriff des Ordnungstypus beruhen. Ein allgemeineres Beispiel liefern die einfachen und mehrfachen Ordnungstypen. Für die Behandlung der Funktionenmannigfaltigkeiten reichen auch die Ordnungstypen nicht aus; es muß je nach der Art der Problemstellung der Begriff der Reihenkonvergenz, oder auch der gleichmäßigen Konvergenz, oder endlich eine zweckmäßige Verallgemeinerung des Distanzbegriffes herangezogen werden; je nach den Vorschriften wechselt dann auch eventuell die Art der Verdichtung [...]. Ein Beispiel der Anwendung verschiedener Vorschriften auf dieselbe Mannigfaltigkeit

¹S. Definition 5.4 und Definition 5.5.

²S. Abschnitt 7.2.

liefern die Begriffe der schwachen und starken Extrema in der Variationsrechnung, deren scharfe Unterscheidung für jene Wissenschaft von grundlegender Bedeutung ist.³

Als ‚Punktmannigfaltigkeiten‘ wurden damals die \mathbb{R}^n -Räume oder deren Teilmengen bezeichnet. Das Wort Mannigfaltigkeit stand hier für Menge. Unter ‚Funktionsmannigfaltigkeiten‘ waren also Funktionenmengen zu verstehen. Bei einem ‚verallgemeinerten Distanzbegriff‘ dachte Riesz an Fréchets Beispiele von V-Klassen, denn Fréchet hatte in den von Riesz zitierten Veröffentlichungen Aspekte seiner Theorien der L- und V-Klassen präsentiert⁴. Riesz’ Beispiele sind also modern beschrieben:

1. die \mathbb{R}^n -Räume als metrische Räume mit ihrem gewöhnlichen Konzept des Häufungspunktes
2. mehrfache Ordnungstypen mit einem auf der mehrfachen Ordnungsrelation basierenden Begriff des Häufungspunktes, wie sie Riesz selber in seiner Arbeit „Ueber mehrfache Ordnungstypen“ von 1905 vorschlug⁵
3. Funktionenmengen, versehen mit den klassischen Prinzipien der gleichmäßigen bzw. punkweisen Konvergenz
4. Funktionenmengen als metrische Räume⁶
5. Funktionenmengen, versehen mit dem Prinzip der schwachen bzw. starken Konvergenz⁷

Außerdem kannte Riesz aus einer Arbeit von Fréchet auch das Beispiel der Funktionenklassen von Baire – obwohl er sie nicht explizit erwähnte⁸. Fréchet hatte die Baireschen Funktionenklassen auf zweierlei Weisen als L-Klassen aufgefaßt, zum einen, indem er sie mit dem Limesbegriff der punkweisen Konvergenz

³[Rie07b], 318ff.

⁴Die Bezeichnung V-Klasse führte Fréchet aber später ein, daher sprach Fréchet nicht von V-Klassen sondern von Funktionenmengen versehen mit einem Begriff des „écart“, und diesen beschrieb er als einen verallgemeinerten Abstandsbegriff. Vgl. [Fré05a], 773. Zu diesen Arbeiten Fréchets s. Abschnitt 3.2.6.

⁵Zu dieser Arbeit von Riesz s. Abschnitt 5.2.

⁶Aus den Arbeiten von Fréchet kannte Riesz das Beispiel der Menge aller stetigen Funktionen auf dem Intervall $[t_0, t_1]$, bei der der Abstand zwischen zwei Funktionen f, g durch $d(f, g) = \max_{t \in [t_0, t_1]} \{|f(t) - g(t)|\}$ definiert wurde.

⁷Es gelang mir nicht, herauszufinden, von wem Riesz die äußerst moderne Bezeichnung ‚schwache‘ und ‚starke Konvergenz‘ übernahm. Hilbert hatte zwar diese Extrema differenziert, nannte sie aber anders. Hadamard benutzte 1910 in [Had10] schon jene Bezeichnungen, gab aber keine Hinweise auf deren Herkunft.

⁸Diese Untersuchung der Baireschen Funktionenklassen führte Fréchet in [Fré05e] aus. Auf diese Fréchetsche Arbeit verwies Riesz in [Rie07b], 322. S. Abschnitt auch 3.2.6 und 7.2.

versah, und zum anderen, indem er als Limesbegriff das Prinzip der punktweisen Konvergenz bis auf eine Nullmenge benutzte. So stattete Fréchet die Baireschen Funktionenklassen mit zwei verschiedenen Stetigkeitsstrukturen aus. Für den ersten Fall stellte er fest, daß für eine Menge A als beliebiger Teilmenge einer Baireschen Funktionenklasse die Relation $A'' \subset A'$ nicht immer gilt. Im Gegensatz dazu konnte er für die zweite Stetigkeitsstruktur die unbedingte Gültigkeit der Relation nachweisen.

Ein weiteres nicht explizit erwähntes aber bestimmt von Riesz doch berücksichtigtes Beispiel für ein mathematisches Kontinuum lieferte die von Baire entwickelte abstrakte Punktmengenlehre für ‚Folgen ganzer Zahlen‘, denn wie in Abschnitt 7.1 erläutert, stützten sich einige Aspekte von „Die Genesis des Raumbegriffs“ stark auf diese Bairesche Theorie.

Freilich lag auch die Möglichkeit der Anwendung seiner Theorie auf die Geometrie in Riesz' Interesse. Er verlangte als Bedingung der Möglichkeit der Erforschung der Stetigkeitseigenschaften des Raumes, daß der Raum ein mathematisches Kontinuum ist⁹. Da er in „Die Genesis des Raumbegriffs“ beim Aufbau des Raumbegriffes von der Erfahrung ausging, und er deshalb ein gewisses System von Empfindungsgruppen, dessen Natur ungeklärt blieb, als die Menge wählte, die dem Raum als mathematisches Kontinuum zugrunde liegt, benötigte Riesz schon für die Geometrie auch den abstrakten mengentheoretischen Zugang¹⁰.

Zugleich deuten allein die von Riesz selber angegebenen Beispiele für mathematische Kontinua darauf hin, daß Riesz mit seiner Theorie des mathematischen Kontinuums viel mehr beabsichtigte, als nur das Problem der Stetigkeit des Raumes von „Die Genesis des Raumbegriffs“ zu lösen. Das wird offensichtlich angesichts der Tatsache, daß der Rieszsche Raumbegriff sich als eine L-Klasse im Fréchetschen Sinne herausstellte¹¹. D.h. für seine Theorie der Herausbildung des Raumbegriffes benötigte er keine allgemeinere abstrakte Punktmengenlehre als Fréchets Theorie der L-Klassen. Auch die meisten der bisher erwähnten Beispiele für mathematische Kontinua lassen sich als L-Klassen auffassen. Eine Ausnahme liefern die mehrfachen Ordnungstypen. Genau diese Ausnahme muß aber für Riesz ausschlaggebend dafür gewesen sein, eine im Vergleich zum Fréchetschen Ansatz noch allgemeinere abstrakte Punktmengenlehre zu entwickeln, die alle erwähnten Beispiele, auch Riesz' mehrfache Ordnungstypen, mit einschließt. Eine genaue Untersuchung des Zusammenhangs zwischen Riesz' Theorie der mehrfachen Ordnungstypen und seiner Theorie des mathematischen Kontinuums steht noch aus¹².

Auch aus den von Riesz selber angegebenen Beispielen für mathematische Kontinua geht hervor, daß er insbesondere an Anwendungen seiner Theorie auf

⁹S. Abschnitte 5.1 und 6.1.

¹⁰S. Abschnitte 5.3 und 6.2.

¹¹S. Abschnitt 7.2.

¹²S. Abschnitt 7.2.

Probleme aus dem Bereich der klassischen Analysis und verwandter Forschungsgebiete gedacht hatte. So kündigte Riesz' abstrakter punktmengentheoretischer Zugang sein künftiges Forschungsgebiet an: die heutige Funktionalanalysis.

Zurück zu Riesz' Anwendung der axiomatischen Methode: Wollte er einen allgemeinen Begriff schaffen, der alle ihm bekannten Beispiele für mathematische Kontinua mit einschließt, so mußte er deren spezifische Definitionen des Häufungspunktes erforschen und nach jenen allgemeinsten gemeinsamen Eigenschaften suchen, die als Axiome das abstrakte Konzept des Häufungspunktes charakterisieren sollten. Eine solche analytische Ergründung der wesentlichen Eigenschaften mathematischer Objekte wird von der axiomatischen Methode schlechthin vorgeschrieben. Sie ist daher sowohl für die axiomatische Praxis in Frankreich als auch für Hilbert charakteristisch. In Rom sagte Riesz über seine axiomatische Vorgehensweise:

Man gelangt zu solchen Forderungen, indem man die Hauptsätze, die für einzelne der schon bekannten mathematischen Kontinua gelten, in ihre einfachsten Aussagen zergliedert. Als Vorbild dienen dabei die mannigfachen Untersuchungen über die Grundlagen der Geometrie.¹³

Riesz suchte also nach den wesentlichen Eigenschaften, die den Begriff des Häufungspunktes charakterisieren, nicht nur bei den ihm bekannten mathematischen Kontinua. Er analysierte auch die Hauptsätze, die für einzelne jener mathematischen Kontinua gelten. Er suchte also, wie in Abschnitt 7.2 erwähnt, gewisse interessante Resultate nach Möglichkeit zu sichern. An diesen Parametern orientierte sich Riesz bei der Auswahl der vier Axiome seiner Definition 5.4 des mathematischen Kontinuums. Zu den interessanten Resultaten zählten bestimmt der Satz von Bolzano-Weierstraß und der Satz von Borel.

Zu seinem vierten Axiom äußerte Riesz in seinem Vortrag „Stetigkeitsbegriff und abstrakte Mengenlehre“ in Rom im Jahr 1908:

Die [ersten] drei Forderungen, die wir hier an jede zulässige Definition der Verdichtungsstelle stellten, sind so weit gefasst, dass man auf ihnen allein nur sehr wenig weiter bauen kann. Ich musste schon an anderer Stelle [in „Die Genesis des Raumbegriffs“, LR], wo ich nach den allgemeinsten Eigenschaften der mathematischen Kontinua suchte, eine weitere Forderung einführen. Diese Forderung [...] kommt im wesentlichen darauf hinaus, dass jede Verdichtungsstelle einer Menge durch die Gesamtheit jener Teilmengen, in bezug auf welche sie Verdichtungsstelle ist, eindeutig bestimmt sei.¹⁴

Riesz sprach von Eindeutigkeit. Sein viertes Axiom sollte dazu dienen, jedem Häufungspunkt eineindeutig die Gesamtheit der Teilmengen, zu denen der Punkt

¹³[Rie09], 20.

¹⁴[Rie09], 19f.

Häufungspunkt ist, zuzuordnen. Folgendes Beispiel veranschaulicht, was passieren kann, wenn das vierte Axiom nicht gilt: Sei M eine unendliche Menge. Man definiere, daß jeder Punkt aus M ein Häufungspunkt jeder unendlichen Teilmenge von M ist. Diese Definition des Häufungspunktes genügt den ersten drei Axiomen von Riesz, aber nicht dem vierten¹⁵. In diesem Fall wird aber jedem Element aus M dieselbe Gesamtheit der unendlichen Teilmengen von M zugeordnet, d.h. diese Gesamtheit bestimmt keinen eindeutigen Häufungspunkt.

Vor einem internationalen Publikum gab Riesz also an, in seiner Suche nach den geeignetsten Axiomen nach Hilberts Muster vorgegangen zu sein – seine letzte Bemerkung ist ein klarer Verweis auf Hilberts Werk *Grundlagen der Geometrie*. Riesz' Bemerkung wirft die Frage auf, inwieweit er selber sich eines Einflusses der axiomatischen Praxis in Frankreich von Borel, Lebesgue und Fréchet bewußt war¹⁶.

Daß Riesz sich in „Die Genesis des Raumbegriffs“ auch an der axiomatischen Praxis in Frankreich orientierte, geht eindeutig daraus hervor, daß der deskriptiven Definition des mathematischen Kontinuums eine konstruktive Definition eines mathematischen Kontinuums folgte. Dem konstruktiven Aufbau des Raumbegriffes, der in Abschnitt 5.3 skizziert wurde, folgte die Einführung der konstruktiven Definition 7.10 des Häufungspunktes, mit dem der Rieszsche Raum sich als ein mathematisches Kontinuum auffassen ließ¹⁷. Das so konstruierte mathematische Kontinuum bildete für Riesz die Lösung zum Problem der Stetigkeit des Raumes. In dieser Hinsicht ging er ähnlich wie Borel und Lebesgue vor¹⁸.

Riesz' Verweis auf Hilberts Axiomatik – und nicht etwa auf Lebesgues oder Fréchets deskriptive Definitionen – muß auch vor dem Hintergrund der großen Anerkennung, die sowohl Hilbert als Mathematiker als auch dessen Werk *Grundlagen der Geometrie* auf internationaler Ebene genossen, interpretiert werden¹⁹. Anders als in Frankreich war in Göttingen die axiomatische Methode nicht nur Mittel zum Zweck sondern selbst Gegenstand der Diskussion. Bei Borel und Lebesgue waren die deskriptiven Definitionen zwar axiomatisch begründet, spielten aber nur eine sekundäre Rolle. Sie erfüllten nämlich lediglich eine pragmatische Funktion bei der Entwicklung konstruktiver Definitionen mathematischer Objekte. Darüber hinaus machte der konstruktive Ansatz, der im Streit um Zermelos

¹⁵Dieses Beispiel wurde von Manheim gegeben, um zu zeigen, daß das vierte Axiom von Riesz von den ersten drei Axiomen unabhängig ist, vgl. [Man64], 120.

¹⁶Umgekehrt handelte es sich für Fréchet bei der Rieszschen abstrakten Definition des mathematischen Kontinuums offensichtlich um eine deskriptive Definition, vgl. [Fré17].

¹⁷Zu Riesz' konstruktivem Raumbegriff s. Abschnitt 5.3 und Abschnitt 7.1.

¹⁸Von ihnen kannte Riesz gewiß Lebesgues Monographie von 1904. Riesz' erster Verweis auf die Monographie von Lebesgue erschien zwar 1907 in [Rie07f], aber daß Riesz mit dem Werk von Lebesgue vertraut war, geht schon aus seiner Arbeit [Rie06] von 1906 hervor. Im allgemeinen zeigen die Publikationen von Riesz aus dem Zeitraum 1904 bis 1906, daß er die Arbeiten der französischen Analytiker gut kannte.

¹⁹S. Abschnitt 4.2.

Auswahlaxiom in der Öffentlichkeit von den genannten französischen Analytikern vertreten wurde, diese auf internationaler Ebenen als Befürworter konstruktiver Definitionen bekannt. Daß sie auch axiomatische Definitionen verwendeten, rückte in den Hintergrund. Daher war es für Riesz naheliegend, sich auf die allgemein bekanntesten Anwendungen der axiomatischen Methode, Hilbert, zu beziehen.

8.2 Anschluß an Axiomatik Hilbertscher Prägung

Vor seiner Promotion in Budapest verbrachte Riesz ein Studienjahr in Göttingen. Dort stand er unter dem Einfluß von Hilbert, bei dem er Lehrveranstaltungen besuchte²⁰. Im jenem Zeitraum beschäftigte sich Hilbert vorwiegend mit den Grundlagen der Geometrie und der Axiomatisierung der Physik²¹. In Abschnitt 6.1 wurde bereits der Einfluß der Hilbertschen Forschung zu den Grundlagen der Geometrie auf Riesz' Konzeption der Stetigkeit des Raumes in seiner Theorie der Genesis des Raumbegriffes untersucht. Der Einfluß von Hilberts Grundlagenforschung erstreckte sich darüber hinaus auf die Axiomatik als methodischen Ansatz. Folgende Aspekte des Hilbertschen axiomatischen Stils lassen sich in der Rieszschen Arbeit wiederfinden²²:

1. Übergang von einer empirischen anschaulichen zu einer exakten Wissenschaft aufgrund einer axiomatischen Grundlegung
2. Beziehung zwischen Axiomen und Anschauung
3. Notwendigkeit des Nachweises von Konsistenz, Unabhängigkeit und Vollständigkeit bei der axiomatischen Grundlegung einer Wissenschaft
4. Lösungsansatz für das Konsistenzproblem

Riesz begann „Die Genesis des Raumbegriffes“ mit einer Differenzierung zweier Verständnisse von Geometrie: Geometrie als exakte Wissenschaft im Gegensatz zu Geometrie als Naturwissenschaft. Riesz schrieb:

Als exakte Wissenschaft baut sich die Geometrie auf gewissen Voraussetzungen auf, die ihr als Axiome an die Spitze gestellt werden.

²⁰Vgl. die von Ákos Császár, dem Herausgeber der Rieszschen Gesammelten Arbeiten, vorgelegte Riesz-Kurzbiographie, [Rie60]. Die genauen Zeiten seines Aufenthalts ließen sich nicht herausfinden, er fiel aber wohl in dem Zeitraum zwischen 1899 und 1902.

²¹S. Abschnitt 4.2.2.

²²S. 4.2.2.

Jedes System der Geometrie ist berechtigt, wenn das System der zugrunde liegenden Axiome keinen inneren Widerspruch aufweist und wenn dabei das System vollständig ist [...]. Faßt man jedoch die Geometrie als Naturwissenschaft auf, so wird man von jedem System von Voraussetzungen, das als Grundlage für eine beschreibende Geometrie dienen soll, fragen müssen, ob es sich mit unserer Raumanschauung, mit unseren Raumvorstellungen verträgt, wie weit es aus denselben folgt, und ob die Geometrie, die auf Grund jener Voraussetzungen aufgebaut wird, für die Beschreibung unserer Raumvorstellungen geeignet ist?²³

Nach Riesz' Auffassung ist die Geometrie als exakte Wissenschaft also dadurch charakterisiert, daß sie sich aus einem vollständigen und widerspruchsfreien Axiomensystem aufbauen läßt. Bei Riesz, wie zuvor bei Hilbert, war mit der Bedingung der Vollständigkeit gemeint, daß alle bekannten Sätze der Geometrie sich aus dem Axiomensystem herleiten lassen²⁴. D.h. bei der Grundlegung der Geometrie als exakte Wissenschaft stehen allein formale Bedingungen für das Axiomensystem (Konsistenz und Vollständigkeit) im Mittelpunkt der Betrachtungen. Hinsichtlich der Geometrie als Naturwissenschaft erhält dagegen auch die Frage nach der Verträglichkeit der Axiome mit unserer Raumanschauung eine zentrale Bedeutung.

Die Anmerkungen von Riesz in der oben zitierten Passage standen in engem Zusammenhang mit seinem mittelfristigen, allerdings nie ausgeführten Projekt einer axiomatischen Grundlegung der Geometrie als Erfahrungswissenschaft²⁵. So folgte Riesz allein bei der Konzeption dieses Projekts der Hilbertschen Auffassung der Geometrie als Naturwissenschaft, die durch axiomatische Behandlung zu einer exakten Wissenschaft wird²⁶.

Riesz' Projekt einer axiomatischen Grundlegung der Geometrie als Erfahrungswissenschaft berührt auch den an zweiter Stelle aufgelisteten Aspekt von Hilberts Verständnis der Axiomatisierung der Geometrie: Die Axiome beruhen auf der Erfahrung, da die Geometrie auch eine Naturwissenschaft ist. Bei Riesz, wie zuvor bei Hilbert, stand diese Auffassung nicht im Widerspruch zu der axiomatischen Behandlung der Geometrie. Hilbert fand diese beiden Aspekte kompatibel, weil er sie als Etappen in der normalen Entwicklung einer Wissenschaft betrachtete²⁷. In diesem Sinne versuchte Riesz, Axiome zu formulieren, die mit den Erfahrungswerten kompatibel sind, um anschließend das so gebildete Axio-

²³[Rie07b], 309. In der Einleitung erwähnte Riesz die formale Bedingung der Unabhängigkeit der Axiome nicht. An einer späteren Stelle wurde diese jedoch auch berücksichtigt, vgl. [Rie07b], 330.

²⁴Das wird weiter unten erläutert.

²⁵S. Abschnitt 6.1.

²⁶Zu Hilberts Auffassung s. Abschnitt 4.2.2, Seite 130ff.

²⁷S. Abschnitt 4.2.2, Seite 132.

mensystem auf Vollständigkeit, Unabhängigkeit und Widerspruchsfreiheit hin zu überprüfen.

Riesz' Vorgehensweise spricht dafür, daß er Hilberts Verständnis der Axiomatisierung der Geometrie direkt von ihm lernte, denn Hilbert erläuterte seine Vorstellungen der Beziehung zwischen Axiomen und Anschauung nicht in Veröffentlichungen sondern in Vorlesungen. Die Belege von Corry beziehen sich auf Hilberts Vorlesungen zur ‚Mechanik‘ vom Wintersemester 1898/99 und zu den ‚Logischen Prinzipien des mathematischen Denkens‘ vom Sommersemester 1905²⁸. Zugang zu Hilberts Auffassung der Axiomatisierung der Geometrie hatte Riesz, wenn nicht direkt durch Besuch der oben erwähnten Vorlesungen, dann durch wissenschaftlichen Austausch mit Hilbert-Schülern oder über die Vorlesungsmanuskripte, denn diese wurden gewöhnlich im ‚Lesesaal‘ zur Verfügung gestellt²⁹.

Wie bereits erwähnt, führte Riesz nie sein Projekt einer axiomatischen Grundlegung der Geometrie als Erfahrungswissenschaft aus. Statt dessen konstruierte er ausgehend von gewissen Erfahrungstatsachen ein Konzept des stetigen Raumes³⁰. Anschließend stellte er 16 Axiome auf, um den Begriff des stetigen Raumes ‚exakt‘ zu definieren³¹. Damit ist gemeint, daß Riesz Hilberts Überzeugung über die epistemologischen Implikationen der Aufstellung eines Axiomensystem teilte: Läßt sich ein Konzept durch ein konsistentes Axiomensystem definieren, dann kann es als ein wohldefiniertes mathematisches Objekt aufgefaßt werden – erst 1931 wurden jene optimistischen Erwartungen von Kurt Gödel zurückgewiesen³². Hatte Riesz bis an diese Stelle eine anschauungsbezogene Terminologie beim Aufbau des Begriffs des stetigen Raumes (ununterscheidbar und unterscheidbare Empfindungsgruppen, physikalische Punkte, Zeitpunkte) verwendet, dann betonte er jetzt den Übergang zu einer rein mathematischen Beschäftigung dadurch, daß er direkt im Anschluß an die axiomatische Definition des Raumes den Begriff des *mathematischen* Punktes einführt³³. Anschließend richteten sich seine Bemühungen darauf hin, das von ihm im voraus aufgebaute punktmengentheoretische Instrumentarium – seine abstrakte Theorie des mathematischen Kontinuums – anzuwenden, um den konstruierten stetigen Raum als eine Menge mathematischer Punkte aufzufassen, die mit einem Begriff des Häufungspunktes und dadurch mit

²⁸S. Abschnitt 653 und[Cor97a], 123ff. Zu Hilberts Lehrveranstaltungen zwischen SS98 und WS07 s. Anhang B.

²⁹S. Abschnitt 4.1.3. Die vorhandenen Daten von Riesz' Aufhalten in Göttingen sind lückenhaft. Zum Wintersemester 1898/99 war er aber noch nicht in Göttingen. Dagegen ist es wahrscheinlich, daß er das Sommersemester 1905 dort verbrachte, s. Riesz-Biographie in Abschnitt 1.1.

³⁰Zu Riesz' Konstruktion des Konzepts des stetigen Raumes s. Abschnitte 5.3, 6.2 und 7.1. Zur Diskussion dieser ‚konstruktiven Definition‘ des Konzepts des stetigen Raumes s. Abschnitt 8.1.

³¹Die 16 Axiome werden in Anhang A.1 wiedergegeben.

³²S. Abschnitt 4.2.2.

³³S. Definition 7.5.

einer Stetigkeitsstruktur ausgestattet wird.

Im Anschluß an die axiomatische Definition des stetigen Raumes diskutierte Riesz die formalen Bedingungen für das Axiomensystem. Die Frage nach der Vollständigkeit des Axiomensystems bezog Riesz auf die Grundlegung der Geometrie. D.h. er fragte, ob die 16 aufgestellten Axiome ausreichen, um alle bekannten Sätze der Geometrie aus dem Axiomensystem herzuleiten. Dazu schrieb er:

Die bisher gegebenen Eigenschaften des Raumes bilden somit sicher kein vollständiges System von Voraussetzungen und definieren keine bestimmte Geometrie. Zur Grundlegung der Geometrie sind somit noch weitere Voraussetzungen notwendig. [...] Zur Grundlegung dieser geometrischen Systeme genügt keineswegs die Festlegung des Verdichtungstypus. Man bedarf vielmehr neuer Begriffe, die es möglich machen, gewisse Punktmengen vor anderen auszuzeichnen.³⁴

Das im letzten Satz angesprochene Problem bezieht sich darauf, daß Riesz, wie bereits in Abschnitt 5.1 erläutert, die geometrischen Grundkonzepte der Geraden und der Ebene neben anderen nicht definieren konnte. Deshalb stellte sich Riesz' Axiomensystem als unzureichend für den Aufbau der Geometrie heraus. Darüber hinaus reichte das Rieszsche Axiomensystem für die Herausbildung des Konzepts des stetigen Raumes auch nicht aus. Riesz schrieb: „Durch unsere Grundsätze ist somit der Verdichtungstypus des Raumes noch sicher nicht eindeutig festgelegt“³⁵. Hier lag das Problem darin, daß er sich als Ziel gesetzt hatte, den stetigen Raum so zu definieren, daß dieser sich als lokal homöomorph zu \mathbb{R}^3 herausstellen sollte. Das konnte er aber nicht beweisen³⁶.

Zur gegenseitigen Unabhängigkeit der Axiome gab Riesz zu, die Frage nach eventuellen Abhängigkeiten zwischen seinen 16 Axiomen nicht weiter zu untersuchen. Er merkte an:

Ich untersuche nicht, in wieweit die einzelnen Voraussetzungen voneinander abhängen. Es gibt darunter solche, die teilweise oder im ganzen aus den übrigen folgen; für Voraussetzung (10) z.B. leuchtet dies unmittelbar ein; dieselbe wurde nur der Bequemlichkeit halber als selbständige Voraussetzung eingeführt.³⁷

Mit der Frage nach der gegenseitigen Unabhängigkeit der Axiome untereinander ging er also ganz anderes um als Hilbert, dem es in seiner Monographie *Grundlagen der Geometrie* von 1899 wesentlich darum ging, eben Unabhängigkeitseigenschaften zu untersuchen³⁸.

³⁴[Rie07b], 350.

³⁵[Rie07b], 346.

³⁶S. Abschnitt 5.3.

³⁷[Rie07b], 330.

³⁸S. Abschnitt 4.2.2.

Bei der Frage nach der Konsistenz des Axiomensystems ging Riesz ähnlich wie Hilbert vor. Hilbert hatte in seinen „Grundlagen der Geometrie“ die Widerspruchsfreiheit des geometrischen Axiomensystems auf die Konsistenz der Arithmetik zurückgeführt, indem er die Menge der reellen Zahlen als ein Modell für das geometrische Axiomensystem auffaßte³⁹. Obwohl Riesz bezüglich Axiomatik keinen direkten Verweis auf Hilbert angab, machen seine Erläuterung unmittelbar klar, daß er, um die Widerspruchsfreiheit seines Axiomensystems zu garantieren, auf Hilberts Vorbild zurückgriff. Riesz behauptete:

Jedenfalls ist das [Axiomen-]System widerspruchsfrei; denn es können auf mannigfache Weise Systeme von Dingen definiert werden, die durch reelle Zahlen beschreibbar sind und sämtlichen Voraussetzungen genügen.⁴⁰

Riesz versuchte also ebenfalls die Konsistenz seines Axiomensystems auf die Konsistenz der Arithmetik der reellen Zahlen zurückzuführen. Anschließend gab Riesz in einer Fußnote folgendes Beispiel von einem System, das, so behauptete er, den 16 von ihm aufgestellten Axiomen genüge:

So z.B. können als eigentliche physikalische Punkte n -ter Ordnung jene Kreise der Zahlenebene angenommen werden, für welche die Koordinaten des Mittelpunktes Multipla von $\frac{1}{2^n}$ und kleiner als n sind, der Radius $\frac{1}{2^n}$ ist, als uneigentliche aber Kreise, die schon für irgend ein $m < n$ als eigentliche physikalische Punkte angenommen wurden. Es kann dann noch gewissermaßen frei über die Beziehungen „unterscheidbar“, resp. „ununterscheidbar“ und „enthalten“ verfügt werden. Man kann z.B. annehmen, daß zwei physikalische Punkte derselben Ordnung für unterscheidbar gelten, wenn die beiden Kreise keinen Punkt gemein haben, und daß ein physikalischer Punkt in einem niedrigerer Ordnung enthalten sei, wenn dies für die Kreise im gewöhnlichen Sinne stattfindet.⁴¹

Das ist zugleich das einzige Beispiel, das Riesz gab, um seine Konstruktion des Raumes zu veranschaulichen. Allerdings stellt sich Riesz' Versuch, mit diesem Kreisesystem einen relativen Konsistenzbeweis für sein Axiomensystem à la Hilbert zu liefern, als unhaltbar heraus. Der Nachweis, daß das Kreisesystem den 16 Axiomen genüge, scheidet bereits beim ersten Axiom.

Teilen wir das erste Rieszsche Axiom in zwei Aussagen:

a) Jeder physikalische Punkt m -ter Ordnung enthält einen und nur einen uneigentlichen physikalischen Punkt $m + 1$ -ter Ordnung, und

³⁹S. Abschnitt 4.2.2, 126.

⁴⁰[Rie07b], 331.

⁴¹[Rie07b], 331.

b) Jeder uneigentliche physikalische Punkt $m + 1$ -ter Ordnung ist in einem und nur einem physikalischen Punkte m -ter Ordnung enthalten.

Bezeichnen wir mit $K_n(x, y, \frac{1}{2^n})$ den Kreis mit Radius $\frac{1}{2^n}$, dessen Zentrum die Koordinaten (x, y) hat. Der Subindex n steht für die Ordnung des Kreises als eigentlicher physikalischer Punkt. Denn nach Riesz' Angaben ist der Kreis $K_1(0, 0, \frac{1}{2})$ als eigentlicher physikalischer Punkt erster Ordnung, aber auch als uneigentlicher physikalischer Punkt zweiter (und höherer) Ordnung zu betrachten.

Die Kreise $K_1(0, 0, \frac{1}{2})$, $K_2(0, 0, \frac{1}{4})$ und $K_2(\frac{1}{4}, 0, \frac{1}{4})$ liefern ein Gegenbeispiel für die Aussage a) des ersten Axioms, denn $K_1(0, 0, \frac{1}{2})$ ist ein uneigentlicher physikalischer Punkt zweiter Ordnung, die Punkte $K_2(0, 0, \frac{1}{4})$ und $K_2(\frac{1}{4}, 0, \frac{1}{4})$ sind uneigentliche physikalische Punkte dritter Ordnung und beide sind in $K_1(0, 0, \frac{1}{2})$ enthalten!

Bei der Aussage a) läßt sich das Problem beheben, wenn wir einen Tipfehler vermuten, und die Aussage ergänzen zu: ‚Jeder eigentliche physikalische Punkt m -ter Ordnung enthält einen und nur einen uneigentlichen physikalischen Punkt $m+1$ -ter Ordnung‘. Denn so ist $K_m(x, y, \frac{1}{2^m})$ ein eigentlicher physikalischer Punkt m -ter Ordnung und jeder uneigentliche physikalische Punkt $m + 1$ -ter Ordnung ist ein Kreis, dessen Radius $\frac{1}{2^m}$ oder größer ist. $K_m(x, y, \frac{1}{2^m})$ kann deshalb keinen anderen Kreis enthalten außer sich selbst als uneigentlicher physikalischer Punkt $m + 1$ -ter Ordnung.

Für die Aussage b) liefern die Kreise $K_2(0, 0, \frac{1}{4})$ und $K_1(0, 0, \frac{1}{2})$ ein Gegenbeispiel. $K_2(0, 0, \frac{1}{4})$ ist ein uneigentlicher physikalischer Punkt dritter Ordnung, der in den physikalischen Punkten zweiter Ordnung $K_2(0, 0, \frac{1}{4})$ und $K_1(0, 0, \frac{1}{2})$ enthalten ist! Die Aussage b) ist komplexer. Das Problem läßt sich durch eine einfache Ergänzung nicht beheben, denn es gilt auch nicht, daß jeder uneigentliche physikalische Punkt $m + 1$ -ter Ordnung in einem und nur einem eigentlichen physikalischen Punkt m -ter Ordnung enthalten ist. Gegenbeispiel: $K_1(0, 0, \frac{1}{2})$ ist ein uneigentlicher physikalischer Punkt dritter Ordnung, der in keinem eigentlichen physikalischen Punkt zweiter Ordnung enthalten ist, denn diese haben alle Radius $\frac{1}{4}$.

Für andere Axiome ist ihre Geltung dagegen offensichtlich, z.B. für das 2., 3., und 5. Axiom. Das 7. Axiom ist aber auch nicht eingehalten. Als Gegenbeispiel betrachten wir $a_1 = K_1(0, 0, \frac{1}{2})$ und $b_1 = K_1(\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2})$. a_1 und b_1 sind nicht identische aber ununterscheidbare physikalische Punkte erster Ordnung. Der physikalische Punkt $a_2 = K_2(\frac{1}{4}, 0, \frac{1}{4})$ ist aber sowohl in a_1 als auch in b_1 enthalten.

Kapitel 9

Rezeption und Wirkung des Beitrags von Riesz

Die Frage nach der Rezeption der Inhalte von „Die Genesis des Raumbegriffs“ ist bisher, wenn nicht ignoriert (Birkhoff, Kreyszig) oder oberflächlich beantwortet (Thron), dann lediglich auf die Rezeption durch einen bestimmten Mathematiker beschränkt behandelt worden (Taylor, Purkert et al.)¹. In Bezug auf die heutige ‚allgemeine Topologie‘ wird oft die Vermutung nahegelegt, daß Riesz’ Beiträge die Herausbildung jener Subdisziplin der Mathematik kaum beeinflussten, sei es, weil „Die Genesis des Raumbegriffs“ „obscurely published“ wurde², sei es, weil Riesz selbst seine Ansätze nicht weiter ausbaute³. Dafür spricht die Tatsache, daß Hausdorffs Begriff des topologischen Raumes sich durchsetzte, und als abstrakte Punktmengelehre sich die allgemeine Topologie auf Hausdorffs Begriff aufbaut.

Die Entstehungsgeschichte der allgemeinen Topologie als abstrakte Punktmengelehre berücksichtigt aber nicht nur Hausdorffs Entwicklungen, welche von der heutigen Perspektive den Erfolgsaspekt jener Geschichte darstellt. Vielmehr diskutiert sie auch alternative Entwicklungen, wie diejenigen von Riesz, die vor und nach Hausdorff stattfanden und die Auskunft über den Problemenkomplex geben, aus dem der Begriff des topologischen Raumes hervorging.

Riesz’ Theorie des mathematischen Kontinuum stellt aber nur einen Aspekt

¹Vgl. [BK84], 296f.; [Kre97], 369; [Thr97], 28. Purkert et al. betrachten die Rieszschen Beiträge in [P+02] in Bezug auf Hausdorff. Neben einer ausführlichen Diskussion der Rezeption durch Fréchet liefert Taylor dagegen auch wichtige Indizen zur Rezeption von Riesz’ abstrakter Punktmengelehre durch einen größeren Kreis Mathematiker, [Tay82], [Tay85] und [Tay87].

²So Kreyszig in [Kre97], 369. In Abschnitt 2.1.2 wurde aber im Rahmen der Besprechung der mathematischen Zeitschriften in Ungarn darauf hingewiesen, daß zahlreiche deutsche Universitäten den Besitz der Zeitschrift *Mathematische und naturwissenschaftliche Berichte aus Ungarn*, in der die deutsche Version der Genesis des Raumbegriffs erschien, nachweisen, unter anderem die Universität von Göttingen.

³Thron in [Thr97], 28. Thron folgend formulierten Purkert et al. eine ähnliche Aussage in [P+02], 703.

der Arbeit „Die Genesis des Raumbegriffs“ dar, deren Inhalte sich vielmehr folgenderweise aufteilen lassen:

- A. Die Theorie des mathematischen Kontinuum
- B. Die Theorie der mehrfachen Ordnungstypen
- C. Die konstruktive Definition des Raumes
- D. Die allgemeine Idee der Begriffsbildung abstrakter Räume

Der Frage, ob Hausdorff auf Riesz' Theorie des mathematischen Kontinuums zurückgriff, als er seinen Begriff des topologischen Raumes schuf, haben Purkert et al. eine negative Antwort beschieden⁴. Dagegen gibt es Beispiele von Auswirkungen des Rieszschen Beitrags auf andere parallellaufende Entwicklungen. Diese Entwicklungen sind Gegenstand der folgenden Untersuchung. Dabei ist einschränkend zu bemerken, daß es sich nicht um das Ergebnis einer systematischen Recherche der Rezeption des Rieszschen Beitrags handelt. Vielmehr werden ausgewählte Arbeiten verschiedener Mathematiker erläutert, für die aus verschiedenen Gründen Indizien für eine Rezeption vorlagen.

Die Frage der Rezeption des Rieszschen Beitrags, die dessen differenzierte Aspekte berücksichtigt, wirft weitere Fragen auf, zunächst an die Geschichte der intuitionistischen Mathematik⁵.

Ausgewählte Arbeiten, die den Punkt A betreffen, werden in den Abschnitten 9.1.1, 9.1.3 und 9.2 erläutert. Dabei wird neben „Die Genesis des Raumbegriffs“ auch Riesz' Vortrag auf dem IV. IMK in Rom von 1908 „Stetigkeitsbegriff und abstrakte Mengenlehre“ als Quelle in Betracht gezogen.

In diesem Vortrag präsentierte Riesz eine abgeänderte Version des Konzepts des ‚mathematischen Kontinuums‘. Er forderte die Gültigkeit nur der ersten drei Axiome von Definition 5.4, wobei er diese in einer anderen Reihenfolge angab. Ferner ersetzte er das erste Axiom von Definition 5.4 durch die inhaltlich äquivalente Forderung „dass eine Teilmenge, die aus einem einzigen Elemente besteht, keine Verdichtungsstelle besitze.“⁶ Riesz wies dann darauf hin, daß er in „Die Genesis des Raumbegriffs“ ein viertes Axiom eingeführt hatte. Dieses gab er aber nicht wörtlich wieder, sondern er beschrieb es folgenderweise:

Diese Forderung [...] kommt im wesentlichen darauf hinaus, dass jede Verdichtungsstelle einer Menge durch die Gesamtheit jener Teilmengen, in bezug auf welche sie Verdichtungsstelle ist, eindeutig bestimmt ist.⁷

⁴Vgl. [P⁺02], 713.

⁵Ich danke Moritz Epple und David Rowe für den Hinweis auf Ähnlichkeiten zwischen dem Beitrag von Riesz und den intuitionistischen Arbeiten von Brouwer. S. Abschnitt 9.1.5.

⁶[Rie09], 19.

⁷[Rie09], 19f.

Manche Autoren, die anscheinend nur den Rieszschen Vortrag kannten, haben diese Beschreibung als das vierte Rieszsche Axiom für die Definition des Konzepts des Häufungspunktes betrachtet. Die Aussage ist aber inhaltlich nicht äquivalent zum ursprünglichen vierten Axiom, welches restriktiver ist⁸.

Im folgenden werden diverse Beiträge zur abstrakten Punktmengenlehre bzw. zur allgemeinen Topologie aus dem Zeitraum von 1908 bis in die 1920er Jahre hinein diskutiert, in denen Indizien einer Rezeption vorliegen. Die Präsentation erfolgt erst geographisch aufgeteilt in der Rezeption in Europa und in den USA. Daraufhin werden Beiträge einzelner Mathematiker erläutert, wobei die gewählten Wissenschaftler chronologisch hinsichtlich ihrer jeweiligen (ersten) Bezüge auf Riesz präsentiert werden.

9.1 In Europa

9.1.1 Maurice Fréchet

Mit Maurice Fréchet hatte Riesz 1907 korrespondiert. Erhalten sind nur die Briefe von Riesz an Fréchet⁹. Thema des Briefwechsels waren ihre gemeinsamen funktionalanalytischen Interessen, die in ihren voneinander unabhängigen Beweise des Darstellungssatzes für den Funktionenraum L^2 kulminierten¹⁰. Diesen Funktionenraum hatte Riesz 1907 als die Menge der auf dem Intervall $[0, 2\pi]$ im Lebesgueschen Sinne quadrat-integrierbaren reellen Funktionen definiert, ohne ihn als Funktionenraum zu bezeichnen¹¹. Im Brief vom 21. Mai 1907 erwähnte Riesz, daß Fréchet ihm im vorherigen Jahr seine Dissertation zugeschickt hatte, und wünschte sich, auch in Fréchets andere Arbeiten Einblick zu erhalten. Riesz' Briefe zeigen, daß zwischen ihnen ein intensiver Austausch von Resultaten und Ideen stattfand. Es ist daher möglich, daß Riesz ihm auch seine Arbeiten zukommen ließ, d.h. auch „Die Genesis des Raumbegriffs“, wo Riesz an den Inhalten von Fréchets Dissertation anknüpfte. Darüber geben die drei Briefe von Riesz jedoch keine Auskunft.

Aufschulußreich sind diese Briefe dagegen im Hinblick auf Riesz' bereits 1907 entwickelte Auffassung abstrakter Räume. Im selben oben erwähnten Brief vom 21. Mai 1907 sprach Riesz vom ‚Funktionenraum‘ (l'espace des fonctions). Dabei meinte er etwa den Funktionenraum L^2 , mit dem er sich damals beschäftigte¹².

Um nachzuvollziehen, inwieweit Fréchet an Riesz' abstrakte Auffassung eines Funktionenraumes anschloß, muß kurz jene Arbeit, in der Riesz seine Version des

⁸S. Definition 5.4 und Diskussion zu Fréchets Arbeit von 1918 in 9.1.1.

⁹S. Bemerkungen im Anhang C.

¹⁰Vgl. [Fré07], [Rie07e] und [Tay82], 275ff

¹¹Vgl. [Rie06]. Die Bezeichnung L^2 führte er erst 1910 ein.

¹²Die vollständige Abschrift des Briefes kann im Anhang C.2 gelesen werden.

oben erwähnten Darstellungssatzes für den Funktionenraum L^2 veröffentlichte, besprochen werden. Riesz' Artikel trug den Titel „Sur une espèce de géométrie analytique des systèmes de fonctions sommables“. Dieser Arbeit waren drei andere vorangegangen, in denen Riesz den Funktionenraum L^2 als – modern ausgedrückt – ein metrischer Raum definierte und den sogenannten ‚Riesz-Fischer-Satz‘ bewies, welcher besagt, daß L^2 ein vollständiger metrischer Raum isomorph zu ℓ^2 ist. Nun erwog Riesz, wie der Titel seines Artikels es bereits ankündigte, die Möglichkeit, eine Art analytische Geometrie auf L^2 aufzubauen. Die Idee ging auf das auch von ihm bewiesene Resultat der Isometrie zwischen dem heute sogenannten Raum der quadrat-summierbaren Folgen ℓ^2 und dem Funktionenraum L^2 zurück und sah vor, die Folgenglieder eines Elements aus ℓ^2 als die (unendlich vielen) Koordinaten des zugeordneten Elements aus L^2 zu betrachten. Riesz sah in der Isometrie zwischen ℓ^2 und L^2 die Möglichkeit, die Funktionen aus L^2 durch ein unendliches Koordinatensystem zu repräsentieren.

An diese Idee knüpfte Fréchet 1908 in seinen „Essai de Géométrie analytique a une infinité de coordonnées“ an¹³. In dieser Arbeit baute Fréchet eine analytische Geometrie auf ℓ^2 für Geraden, Sphären, zweidimensionale Ebenen und dreidimensionale Hyperebenen auf¹⁴. In einer abschließenden Bemerkung wendete er den Isomorphismus zwischen ℓ^2 und L^2 an, um zu behaupten, daß die auf ℓ^2 aufgebaute Geometrie sich auf L^2 übertragen läßt¹⁵. Damit schloß Fréchet an Riesz' geometrischen Zugang zum Studium der L^2 -Funktionen an. Zwar hatte Fréchet bereits in seiner Dissertation sowohl von der Nützlichkeit der Darstellung von Funktionen durch ein unendliches Koordinatensystem als auch vom Raum „à une infinité dénombrable de dimensions“ gesprochen, jedoch hatte er zugleich die Bezeichnung ‚Raum‘ grundsätzlich vermieden und lediglich für heute sogenannte Folgenräumen benutzt, während er bei abstrakter Mengen von Klassen sprach¹⁶. Auch wenn Fréchet 1908 L^2 noch nicht als Raum bezeichnete, bedeutete die von ihm vorgeschlagene Geometrisierung von L^2 , daß Fréchet sich im Prozeß befand, seine beschränkte Anwendung des Terms ‚Raum‘, die von der Koordinatisierung der Elemente der in Frage stehende Menge abhing, auf L^2 , und damit auf allgemeinere Funktionenmengen, zu erweitern.

Zurück zu Fréchets Rezeption der Rieszschen Theorie des mathematischen Kontinuums. Spätestens im Juli 1909 erfuhr Fréchet von Riesz' Ansätzen zu einer abstrakten Punktmengenlehre. Mit diesem Datum unterschrieb Fréchet einen Artikel, der 1910 in Italien publiziert wurde. Es handelt sich um „Les ensembles

¹³Das ist [Fré08].

¹⁴Vgl. [Tay82], 283-284.

¹⁵Fréchet schrieb: „Ceci étant, on voit que tous les théorèmes énoncés plus haut s'expriment en prenant comme éléments, non des points, mais des fonctions“, [Fré08], 316-317. ‚Punkte‘ nannte er die Elemente aus ℓ^2 , ibid, 98.

¹⁶Vgl. [Fré06], 39. Taylor sagte dazu: „He [Fréchet] refrains in the thesis and for a number of years afterward from the free use of ordinary geometric terminology in connection with abstract sets“, [Tay82], 251.

abstraits et le Calcul fonctionnel“¹⁷, in dem Fréchet auf Riesz’ Vortrag auf dem IV. IMK in Rom von 1908 verwies.

Die Veröffentlichung des Rieszschen Vortrags „Stetigkeitsbegriff und abstrakte Mengenlehre“ in den *Atti del IV^o Congresso Internazionale dei Matematici* spielte eine wesentliche Rolle in der Verbreitung der Rieszschen Ansätze zu einer abstrakten Punktmengenlehre. Zunächst ermöglichte sie Fréchet den Zugang zu Riesz’ Beitrag, denn laut der Liste der Teilnehmer des erwähnten Kongresses war Fréchet dort nicht anwesend¹⁸. Die Abhandlungen des Kongresses waren aber allgemein zugänglicher, als die ungarische Zeitschrift, in der „Die Genesis des Raumbegriffs“ erschien. Wer jedoch an dem Kongreß im Rom teilnahm, war Hadamard. Es ist daher möglich, daß Hadamard vor Ort von Riesz’ Vortrag erfuhr und später Fréchet darüber unterrichtete. Zu dieser Vermutung liegen zwar keine Belege vor, jedoch scheint sie plausibel, denn Hadamard war an solchen Untersuchungen, wie sie Riesz hier präsentierte, sehr interessiert. Riesz selbst erinnerte am Ende seines Vortrags daran, daß Hadamard schon 1900 auf dem II. IMK in Paris für die Entwicklung einer abstrakten Punktmengenlehre im Interesse der Anwendungen auf die Variationsrechnung und auf andere Zweige der Analysis geworben hatte. Riesz sah sich definitiv als jemand, der Hadamards Anregungen folgte¹⁹.

In der oben erwähnten Arbeit von 1910 setzte Fréchet die punktmengentheoretischen Untersuchungen seiner Dissertation fort. Er studierte Eigenschaften dessen, was er in seiner Dissertation normale E-Klassen nannte, und was in moderner Terminologie als vollständiger metrischer Raum bezeichnet wird. Seine Hauptresultate betrafen Charakterisierungen kompakter Mengen²⁰. Ferner untersuchte er den heute als ℓ^∞ gekennzeichneten vollständigen metrischen Raum aller beschränkten unendlichen Folgen natürlicher Zahlen. In den letzten Seiten reflektierte Fréchet über den Status seiner Begriffe der L- und V-Klassen im Vergleich mit dem Status des Konzepts der E-Klassen. Er drückte seine Überzeugung aus, daß es keinen Unterschied zwischen E-Klassen und V-Klassen gebe. D.h. modern ausgedrückt, glaubte er, daß V-Klassen metrisierbar sind. Diese Vermutung konnte er 1910 nicht beweisen, aber er sah sie durch eine von Hans Hahn 1908 veröffentlichte Arbeit bestätigt, da in dieser Hahn gelungen war, einige Resultate von Fréchets Dissertation für E-Klasse auf V-Klassen zu erweitern²¹. Aus diesem

¹⁷Es handelt sich um [Fré10]. Zu dieser Arbeit von Fréchet vgl. [Tay85], 292-295.

¹⁸Vgl. [IMK09], Band I, 12-19.

¹⁹Riesz sagte: „Ich bin nicht der erste, der die Gelegenheit eines internationalen Mathematiker-Kongresses benützt, um der abstrakten Mengenlehre, und zwar jenem Zweige derselben von dem hier die Rede war, Propaganda zu machen. Vor acht Jahren hatte Herr Hadamard in Paris ein Problem, das diesem Zweige der abstrakten Mengenlehre angehört, gestellt; er hatte zugleich auf die Notwendigkeit einschlägiger Untersuchungen, die über die Theorie der Punktmengen hinausgehen, hingewiesen.“ [Rie09], 24.

²⁰Zu Fréchets Konzepten einer kompakten Menge sowie zu seiner Dissertation s. Abschnitt 3.2.6.

²¹Fréchets Vermutung wurde 1917 von Chittenden bewiesen, vgl. [Tay85], 294. Hans Hahn (1879-1934) war ein Wiener Mathematiker, der in den 1920er Jahren wichtige Beiträge zur

Grund sei es im Hinblick auf Anwendungen auf die Funktionalanalysis besser, bemerkte Fréchet, den zu allgemeinen Begriff der L-Klassen fallen zu lassen, und sich auf das Studium von V-Klassen und von E-Klassen zu konzentrieren. Allerdings sei er überzeugt, fügte er hinzu, daß die Beschäftigung mit L-Klassen oder noch allgemeineren Klassen nicht unfruchtbar sei. Als eine solche allgemeinere Klasse betrachtete Fréchet Riesz' Begriff des mathematischen Kontinuums. Fréchet schrieb:

Le théorème de M. Hahn, rappelé plus haut, semble bien confirmer qu'en vue des applications au Calcul fonctionnel il vaut mieux abandonner la considération trop générale des classes (L) et se borner à celles des classes (V) ou même des classes (E) normales. Mais je ne crois pas cependant qu'il serait vain d'étudier les classes (L) ou même des classes plus générales comme celles que M. Riesz a considérées récemment (F. Riesz *Stetigkeitsbegriff und abstrakte Mengenlehre* [Atti del IV^o Congresso Internazionale dei Matematici (Roma, 1908), vol. II (1909), pp. 18-24].)²²

Mit dieser Passage endete Fréchets Artikel. Weder gab er hier eine Charakterisierung der von ihm sogenannten Rieszschen Klasse noch erläuterte er die Ideen von Riesz.

Einige Jahre später befaßte sich Fréchet in mehreren Artikeln wiederum mit Riesz' Begriff des mathematischen Kontinuums. So erschien im September 1917 in den *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences de Paris* die Mitteilung von Fréchet: „Sur la notion de voisinage dans les ensembles abstraits“²³. Den Bezug auf Riesz stellte Fréchet ganz vorne in seiner Darstellung her. Als Einleitung schrieb er:

Dans une Communication au Congrès international des mathématiciens à Rome, M. F. Riesz avait généralisé la conception des classes (L) que j'avais présentée dans ma Thèse (Paris, 1906). Alors que celle-ci était basée sur la notion des suites convergentes, M. F. Riesz s'appuyait sur la notion d'élément-limite. Il supposait que dans ses classes, que nous appellerons classes (\mathcal{R}), une détermination quelconque des éléments-limites de chaque ensemble était donnée, satisfaisant seulement à quatre conditions très simples. [...] Je propose maintenant la définition suivante [...] qui fournit aussi la définition d'une

Begründung der linearen Funktionalanalysis lieferte. Die gemeinte Veröffentlichung von Hahn war: „Bemerkungen zu den Untersuchungen des Herrn Fréchet: Sur quelques points du Calcul fonctionnel“, *Monatshefte für Mathematik und Physik*, 19 (1908), 247-257. Zu Chittenden s. Abschnitt 9.2.3.

²²[Fré10], 26.

²³Es handelt sich um [Fré17].

classe plus générale que les classes de F. Riesz.²⁴

Fréchet wies hier zunächst auf die verschiedenen Fundamentalbegriffe seiner und Riesz' Theorie hin: bei Fréchet ‚Grenzwert einer Folge‘, bei Riesz ‚Verdichtungsstelle einer Menge‘, heute genannt Häufungspunkt. Der nächste Satz ist sehr interessant, weil er zeigt, wie sehr Fréchet den Rieszschen Beitrag als Baustein zum weiteren Aufbau seiner eigenen Theorie betrachtete: Er benannte den Rieszschen Begriff des ‚mathematischen Kontinuums‘ zu R-Klasse um. Im letzten Satz kündigte Fréchet an, ein neueres Konzept für eine noch allgemeinere Klasse einzuführen: die V-Klasse. Die Bezeichnung V-Klasse war bei Fréchet nicht neu. Er hatte sie noch vor seiner Dissertation benutzt. Aber während früher die Bezeichnung ‚voisinage‘ für eine zahlwertige Funktion stand, bezeichnete sie nun eine Menge. Fréchet definierte hier das Konzept der V-Klasse – ganz anders als in seiner Dissertation – als eine abstrakte Menge, in der gilt:

- 1) Jedem Element A ist ein beliebiges System von Teilmengen $\{V_A\}$ zugeordnet, welche Umgebungen von A („voisinages de A “) heißen.
- 2) Ein Element A ist ein ‚Limeselement einer Menge E ‘, wenn jede Umgebung von A ein von A verschiedenes Element der Menge E enthält.

Taylor macht darauf aufmerksam, daß Fréchets Konzept der Umgebung zu allgemein ist. Fréchet verlangte nicht einmal $A \in V_A$ ²⁵. Darüber hinaus enthält Fréchets zweiseitige Note nur Behauptungen zu den notwendigen Axiomen für einen Begriff des Häufungspunktes, so daß modern ausgedrückt die so topologisierte Menge sich als V-Klasse – in dem hier neu definierten Sinne – auffassen läßt. Das von ihm gegebene Axiomensystem verglich er mit dem Rieszschen. Ferner stellte Fréchet zusätzliche Forderungen an die Umgebungssysteme einer V-Klasse, die notwendig und hinreichend sind, damit die V-Klasse zugleich eine \mathcal{R} -Klasse ist²⁶. 1918 und 1921 präsentierte Fréchet in zwei weiteren Arbeiten diese Ideen in detaillierter Form.

1918 versuchte Fréchet einen von dem seiner Dissertation radikal verschiedenen Zugang zum Aufbau einer abstrakten Punktmengenlehre. In dem zu der Note von 1917 gleichnamigen Artikel benutzte er zwei unterschiedliche Axiomensysteme: das eine, um Riesz' Vorbild folgend einen primitiven Begriff des Häufungspunktes zu definieren, das andere, um Familien von Umgebungen zu bestimmen, wie die, die er in der oben besprochenen Note von 1917 eingeführt hatte. Wie ein Jahr zuvor versuchte Fréchet, die Beziehungen zwischen V-Klassen und R-Klassen zu klären. Für R-Klassen stellte Fréchet die Rieszschen Axiome in einer anderen Formulierung und in einer anderen Reihenfolge auf. Taylor hat bereits Fréchets Anschluß an Riesz ausführlich diskutiert, deshalb wird hierauf nicht tiefer eingegangen²⁷. Als viertes Rieszsches Axiom gab Fréchet die Übersetzung: „Si A est

²⁴[Fré17], 359.

²⁵Vgl. [Tay85], 308.

²⁶Vgl. [Fré17].

²⁷Vgl. [Tay85], 283 und 308ff.

élément-limite d'un ensemble E et si B est distinct de A , il y a toujours au moins un ensemble F qui a A pour élément-limite sans avoir B pour élément-limite"²⁸. Dieses Axiom ist schwächer als das originale Axiom, das in der Definition 5.4 des ‚mathematischen Kontinuums‘ in „Die Genesis des Raumbegriffs“ erschien, denn Riesz verlangte darüberhinaus $F \subset E$. Für R-Klassen übernahm Fréchet von Riesz auch das Konzept der ‚Umgebung‘ und das des ‚inneren Elements‘ sowie den Satz 5.1 als eine zweite äquivalente Definition des Begriffes des Häufungspunktes²⁹. Das deutet stark darauf hin, daß Fréchet spätestens zu diesem Zeitpunkt auch „Die Genesis des Raumbegriffs“ studiert hatte, denn weder das vierte Axiom noch die Begriffe der ‚Umgebung‘ und des ‚inneren Elements‘ kommen im Riesz' Vortrag von 1908 vor. Explizit verwies Fréchet auf die „Die Genesis des Raumbegriffs“ aber nicht. Taylor beschrieb Fréchets Diskussion des vierten Rieszschen Axioms als unklar und wies darauf hin, daß Fréchets Übersetzung desselben in Termen von zusätzlichen Bedingungen auf die Umgebungssysteme nicht stimmt. Fréchet korrigierte seine Aussagen in seinem Buch von 1928 *Les espaces abstraits et leur théorie considérée comme introduction à l'analyse générale*³⁰.

Zur naheliegenden Frage, ob Fréchet das 1914 erschienene Buch von Felix Hausdorff *Grundzüge der Mengenlehre* kannte, als er die oben diskutierten Artikel von 1917 und 1918 verfaßte, fand Taylor in seinen Recherchen keine positiven Hinweise. Fréchet erwähnte in einer Arbeit von 1921, die weiter unten besprochen wird, er habe erst nach Ende des Krieges das Buch von Hausdorff lesen können. Nicht unwahrscheinlich scheint die von Taylor vorsichtig ausgedrückte These: „General knowledge of Hausdorff's book by mathematicians in France may have been impeded by the Great War“³¹.

In der Zeit, in der Fréchet die letzten zwei besprochenen Arbeiten anfertigte, war er im Kriegsdienst als Übersetzer in der britischen Armee, bis er im November 1917 nach London als Mitglied der französischen Luftfahrtsmission ging. In den Kriegsjahren gelang es ihm, trotz seines sofortigen Einzuges in die Armee 1914, seine mathematische Forschung fortzusetzen³². Zwischen 1914 und 1919 publizierte er über zehn Artikel, darunter mehrere zur heute sogenannten allgemeinen Topologie. Die oben erwähnte Note von 1917 zusammen mit einem gleichnamigen Artikel von 1918 stellten Fréchets neuen Zugang zum Aufbau einer abstrakten Punktmengenlehre dar. Das Konzept der Umgebung war in diesen Untersuchungen grundlegend. Taylor entdeckte in zwei Notizheften, die Fréchet in den Kriegsjahren bei sich hatte, Material über V-Klassen in genau der neuen

²⁸[Fré18], 139.

²⁹Vgl. [Tay85], 309ff.

³⁰[Fré28]

³¹[Tay85], 284.

³²In die französische Armee wurde er im August 1914 eingezogen. Im Mai 1915 diente er als Leutnant bei der britischen Armee, und im November 1917 ging er nach London. 1919 war er noch offiziell in der Armee, als er den Auftrag erhielt, in Straßburg bei der Wiedereinrichtung der Universität zu helfen, vgl. [Tay85], 283.

Auffassung, die Fréchet in den erwähnten Artikeln von 1917 und 1918 benutzte³³.

In „Sur les ensembles abstraits“ von 1921 stellte Fréchet seine bisherigen Resultate zu Umgebungsaxiomen für V-Klassen systematisch zusammen³⁴. Fréchet modifizierte eins der im Artikel von 1918 gegebenen Umgebungsaxiome und definierte eine H-Klasse als eine V-Klasse, in der das modifizierte Axiom gilt. Das ‚H‘ stand für E. R. Hedrick, ein Mathematiker aus den Vereinigten Staaten, der in derselben Forschungslinie arbeitete³⁵. Taylors Studium zeigt, wie nah Fréchets H-Klasse, welche durch vier Umgebungsaxiome definiert war, Hausdorffs Begriff des topologischen Raumes war: Drei von vier Axiomen waren gleich, aber das Fréchetsche Trennungsaxiom war schwächer als das Hausdorffsche³⁶.

Diese Fréchetschen Entwicklungen kamen aber gewissermaßen zu spät: sieben Jahre nach Hausdorffs Umgebungsaxiomen. Fréchet spürte bald, daß Hausdorffs Theorie seine Theorie in den Schatten drängen würde³⁷. Bereits 1921 versuchte Fréchet, sein Werk – und nebenbei auch Riesz’ Konzept des mathematischen Kontinuums – zu verteidigen. Er schrieb:

Or, on verra dans le présent Mémoire qu’on peut étendre à peu près toutes les propriétés de l’espace topologique démontrées par F. Hausdorff à la classe (H). D’autre part, la définition de la classe (H) au moyen des conditions 1^o, 2^o, 3^o de F. Riesz qui s’imposent si naturellement à la notion d’élément d’accumulation et de la condition (5^o) dont l’importance est ainsi mise en valeur, paraît beaucoup plus naturelle que les conditions [de Hausdorff].³⁸

Derartige Hervorhebungen der Rieszschen Leistungen waren bei Fréchet nicht nur dadurch motiviert, sowohl seine eigene als auch Riesz’ Pionierarbeiten beim Aufbau einer abstrakten Punktmengenlehre zu begründen. Fréchet hatte im Vorfeld seiner Arbeiten von 1917, 1918 und 1921 die Ideen von Riesz in der Tat geschätzt, verwendet und ausgebaut.

In Fréchets Nachlaß befindet sich eine undatierte Notiz mit Fréchets Schrift in lila Tinte, in der er sich mit einem von Riesz in Rom 1908 formulierten Satz auseinandersetzte. Die Notiz entstand sicherlich nicht vor 1910, denn Fréchet verwies auf seine Arbeit von 1910 in den *Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo*, die am Anfang dieses Abschnittes besprochen wurde. Der Zettel hat als

³³Vgl. [Tay85], 289-290. Der gemeinte Artikel von 1918 ist [Fré18].

³⁴Vgl. [Fré21].

³⁵Zu E.R. Hedrick s. Abschnitt 9.2.

³⁶Vgl. [Tay85], 310-311.

³⁷Taylor schrieb über Fréchets Einschätzung: „that Hausdorff’s book had to some extent eclipsed his own pioneering work“, [Tay85], 285. Fréchet klagte über mangelnde Anerkennung seiner Leistungen zum Beispiel durch Hausdorff, der in seinem Buch *Grundzüge der Mengenlehre* Fréchet nicht als Begründer des Begriffes des metrischen Raumes anerkannte, *ibid*, 304 und 352

³⁸[Fré21], 366.

Überschrift³⁹

F. Riesz (Atti del IV Congresso int. dei Matematici, 1908) Vol II
énoncé p. 21 une note, sans démonstration

Fréchet bezog sich dabei auf folgenden Rieszschen Satz:

Hat ein System von Punktmenge, deren Vereinigungsmenge im Endlichen gelegen ist, die Eigenschaft, dass jede endliche Anzahl jener Mengen wenigstens eine gemeinsame Verdichtungsstelle besitzt, so besitzen auch sämtliche Mengen des Systems wenigstens eine gemeinsame Verdichtungsstelle.⁴⁰

Auf den Zettel skizzierte Fréchet einen Beweis des Rieszschen Satzes für den speziellen Fall einer V-Klasse und einer kompakten Menge, wobei er diese Begriffe noch im Sinne seiner Dissertation benutzte. Fréchets Version des Satzes ist verwandt mit der Definition der ‚ensembles parfaitement compacts‘, die Fréchet für L-Klassen im Anschluß an Robert Lee Moore in dem oben erwähnten Artikel von 1921 einführte⁴¹. Es ist daher naheliegend, daß die Notiz in lila Tinte in dessen Vorfeld entstand.

Auch in späteren Arbeiten zur allgemeinen Topologie verwies Fréchet auf die Rieszsche Beiträge, wie zum Beispiel in dem erwähnten Buch von 1928, in dem er die Entwicklung der fundamentalen Begriffe allgemein darstellte. Die dezidierte Anerkennung durch Fréchet trug stark zur Rezeption der Rieszschen Konzepte durch andere Mathematiker bei (siehe dazu den Abschnitt 9.2). Hadamard hatte Riesz einmal als „continueur“ von Fréchet bezeichnet⁴². Wie dargestellt, zeigte die weitere Entwicklung, daß Fréchet genauso auch als „continueur“ von Riesz angesehen werden kann.

9.1.2 Arthur Schoenflies

Die Frage, ob es überhaupt jemanden unter den damaligen führenden Mengentheoretikern gab, der von der Existenz von „Die Genesis des Raumbegriffs“ wußte, kann mit ‚ja‘ beantwortet werden. Schoenflies verwies im zweiten Teil seines Berichts *Die Entwicklung der Lehre von den Punktmannigfaltigkeiten* von 1908 explizit auf „Die Genesis des Raumbegriffs“⁴³. Die Frage nach der frühen Rezeption dieser Rieszschen Arbeit ist jedoch damit noch nicht gelöst, denn es bleibt zu klären, ob die Inhalte verstanden und angewendet bzw. weiterentwickelt wurden.

³⁹Eine Abschrift dieser ‚Notiz in lila Tinte‘ erscheint im Anhang C.

⁴⁰[Rie09], 21, Fußnote 2.b.

⁴¹Vgl. [Fré21], 343. Zu Robert Lee Moore s. Abschnitt 9.2.4.

⁴²Vgl. [Tay85], 286.

⁴³Vgl. [Sch08c], 135

Im Fall von Schoenflies läßt sich kaum von einer Rezeption in diesem Sinne reden. Jedenfalls hatte Schoenflies die Rieszschen Inhalte weder angewendet noch weiterentwickelt. Ob er überhaupt verstand, worum es Riesz ging, ist zweifelhaft.

Schoenflies verweist auf Riesz in einer Fußnote:

Hierüber liegen nur einige Beiträge von [...] F. Riesz vor (Math. Ann. 61 (1905) S. 406 und Math. und Naturw. Berichte aus Ungarn, 24 (1906) S. 340), die jedoch im wesentlichen nur Definitionen enthalten und daher dem obigen Bedürfnis nicht entsprechen.⁴⁴

Bei der zuerst zitierten Arbeit handelt es sich um „Über mehrfache Ordnungstypen I“. Die zweite ist „Die Genesis des Raumbegriffs“. Dieser doppelte Verweis deutet auf ein ausschließliches Interesse für Riesz' Theorie der mehrfachen Ordnungstypen hin. In der Tat bestätigt der Kontext, in dem auf Riesz verwiesen wird, diese Vermutung. Das Zitat erschien in Abschnitt §15 vom Kapitel IV über die Ausdehnung von Sätzen über Polygone auf den Raum. Die Sätze für die Ebene hatte Schoenflies zuvor in §1 als ‚Anordnungssätze‘ eingeführt. Diese bezogen sich zum Teil auf die Zerlegung der Ebene durch Polygone, zum Teil auf die Möglichkeit der zyklischen Anordnung endlich vieler ineinander geschachtelte Polygone. Schoenflies betrachtete sie „als die geometrische Grundlage für den Beweis der Umkehrung des Jordanschen Kurvensatzes“⁴⁵.

Wie bereits in Abschnitt 6.1 der vorliegenden Arbeit erwähnt, hatten Schoenflies, Hilbert und Riesz verschiedene spezielle Versionen der Umkehrung des Kurvensatzes von Jordan zu beweisen versucht. Der von Riesz vorgeschlagene Beweis stützte sich auf Hilberts Verfahren der zyklischen Anordnung der Punkte der Kurve. Dagegen verwendete Schoenflies eine Approximation der infrage stehenden perfekten Menge durch zwei Reihen von Polygone. Nun kombinierte Schoenflies beide Methoden.

Aus Schoenflies' Kritik an Riesz geht hervor, daß Schoenflies in den oben erwähnten Arbeiten Anwendungen der Rieszsche Theorie zur Gewinnung von verallgemeinerten Zerlegungssätzen vermisste, wie sie Riesz selbst in einem Brief an Hilbert angekündigt, dann aber in „Über mehrfache Ordnungstypen“ nur angedeutet hatte⁴⁶. Derartige Sätze fand Schoenflies auch in „Die Genesis des Raumbegriffs“ nicht.

Schoenflies kam jedoch nicht dazu, den von Riesz eingeschlagenen Weg zu verfolgen. Nicht einmal diskutierte er Riesz' Ideen ausführlicher, obwohl er sie schon in Verbindung mit solchen wichtigen Sätzen wie die Verallgemeinerung des Jordanschen Kurvensatzes für drei Dimensionen brachte. Das legt die Vermutung nahe, daß Schoenflies die Rieszschen Ausführungen nicht nachvollziehen konnte. Weitere Faktoren stützen diese Vermutung.

⁴⁴[Sch08c], 135.

⁴⁵Vgl. Fußnote 1 in [Sch08c], 98.

⁴⁶S. Abschnitt 6.1.

1908 hatte Schoenflies im zweiten Teil des Berichts die Entwicklungen einer abstrakten Punktmengenlehre in Fréchet's Dissertation ausführlich diskutiert. Es ist merkwürdig, daß er in diesem Kontext kein einziges Mal auf die Theorie des mathematischen Kontinuums aus „Die Genesis des Raumbegriffs“ hinwies, obwohl er ein paar Kapitel zuvor auf diese Riesz'sche Arbeit verwiesen hatte. Dafür gibt es zwei mögliche Erklärungen: Entweder hat er Riesz' Arbeit nicht gelesen, oder er hat nicht verstanden, daß Riesz, so wie Fréchet zuvor, Ansätze einer abstrakten Punktmengenlehre entwickelt hatte. Denn auch wenn Riesz außer im Fall seiner konstruktiven Definition des Raumes kein weiteres Beispiel eines mathematischen Kontinuums erläuterte, wodurch es seiner Theorie an Anwendungsbeispielen mangelte, hätte Schoenflies auf Riesz verweisen müssen, sowie er es im Fall der Riesz'schen Theorie der mehrfachen Ordnungstypen tat.

Autoren wie Dirk van Dalen und August Taylor haben auf die Kluft zwischen der mathematischen Denkweise von Schoenflies und jüngeren Vertretern der Punktmengenlehre wie Brouwer und Fréchet hingewiesen. Van Dalen und Taylor haben gezeigt, daß Schoenflies weder Brouwer's Arbeiten zur Analysis Situs noch Fréchet's abstrakte Punktmengenlehre ganz nachvollziehen konnte. Dieselbe Kluft bestand zwischen Schoenflies und Riesz.

9.1.3 Leopold Vietoris

Leopold Vietoris studierte zwischen 1910 und 1914 in Wien, wo er 1920 promovierte. In den Kriegsjahren war er Soldat und Kriegsgefangener bis 1919. Seine Dissertation erschien 1921 als Artikel mit dem Titel „Stetige Mengen“. Vietoris kommentierte in einer Fußnote, die Arbeit sei „in den Jahren 1913-1919, zum größten Teil im Felde entstanden und im Dezember 1919 in Wien als Dissertation eingereicht worden“⁴⁷. In seiner Dissertation schloß Vietoris an Riesz' Vortrag „Stetigkeitsbegriff und abstrakte Mengenlehre“ von 1908 an.

Ziel seiner Untersuchungen, formulierte Vietoris, war es, „möglichst allgemeine Grundlagen für eine rein punktmengentheoretische Behandlung der Linien und Flächen beliebig hoher Dimension“ zu liefern. Der Ausgangspunkt seiner Forschungen bildete Hausdorff's Monographie *Grundzüge der Mengenlehre* von 1914. Vietoris stellte fünf Umgebungsaxiome auf, von denen er drei wörtlich aus Hausdorff's Axiomensystem entnahm, eins eine Variante des entsprechenden Hausdorff'schen Axioms ist und das andere nicht bei Hausdorff vorkommt.

Vietoris definierte einen Punkt p als einen Häufungspunkt einer Menge M , wenn in jeder beliebigen Umgebung von p ein von p verschiedener Punkt von M liegt. Ähnlich zu Fréchet's Vorgehensweise untersuchte Vietoris die Beziehungen zwischen dem von ihm aufgestellten Umgebungsaxiomensystem und dem von Riesz 1908 gegebenen Axiomensystem, das den Begriff des Häufungspunktes de-

⁴⁷[[Vie21](#)], 173.

finierte⁴⁸. Fréchet selber wird in der Dissertation von Vietoris nicht erwähnt. Es scheint, daß Vietoris von Fréchets Arbeiten gar nicht wußte.

Vietoris formulierte dann eine Charakterisierung der Stetigkeit der Mengen, die darauf hinausläuft, eine Menge als stetig aufzufassen, wenn diese in modernen Sinne zusammenhängend ist⁴⁹. Vietoris vermied aber bewußt die Bezeichnung ‚zusammenhängende Menge‘ und schlug stattdessen die der ‚stetigen Menge‘ vor. In einer Fußnote wies er auf die Übereinstimmung seines Konzepts der stetigen Menge mit Lennes’ und Hausdorffs Zusammenhangsbegriffen hin. Interessanterweise enthält dieselbe Fußnote auch eine Kritik an Riesz, dem Vietoris paradoxerweise vorwarf, keinen Zusammenhangsbegriff eingeführt zu haben! In der Tat hatte Riesz seinen Begriff der absolut zusammenhängenden Teilmenge, den er in „Die Genesis des Raumbegriffs“ formulierte und welcher später von Lennes und Hausdorff wieder eingeführt wurde, in seinen Vortrag „Stetigkeitsbegriff und abstrakte Mengenlehre“ nicht präsentiert⁵⁰. Vietoris’ Kritik zeigt, daß er „Die Genesis des Raumbegriffs“ nicht kannte.

Auf seinen Vorwurf kam Vietoris, weil er selbst an sein Konzept der stetigen Menge (Riesz’ Zusammenhangsbegriff) gelangte, indem er an Riesz’ Verkettungsbegriff anküpfte. D.h. er fand bei Riesz alle notwendige Ideen vorhanden nur nicht den Zusammenhangsbegriff. Den Verkettungsbegriff hatte Riesz in seinem Vortrag „Stetigkeitsbegriff und abstrakte Mengenlehre“ mit dem Anspruch eingeführt, einen Begriff zu liefern, mit dem sich sämtliche Stetigkeitseigenschaften von Mengen charakterisieren liessen. Für Riesz hießen zwei Mengen verkettet, wenn folgende drei Axiome erfüllt werden: „Erstens verlangen wir, dass wenn zwei Mengen verkettet sind, auch jedes Paar von Mengen, die je eine jener Mengen enthalten, verkettet sei. Zweitens sei, wenn die Mengen M_1 und M_2 verkettet sind, und wenn man die Menge M_1 in zwei Teile spaltet, wenigstens eine dieser Teilmengen mit M_2 verkettet. Drittens sollen zwei Mengen, die nur aus je einem Elemente bestehen, niemals verkettet sein.“⁵¹ Seinerseits führte Vietoris das Konzept des ‚Aneinandergrenzens zweier Mengen‘ ein: Zwei Mengen grenzen in einem Punkt aneinander, wenn dieser der einen angehört und Häufungspunkt der anderen ist⁵². Für dieses Konzept behauptete er die Gültigkeit von drei zu den eben zitierten Rieszschen Axiomen äquivalenten Sätzen. Vietoris bemerkte: „Der Begriff des Aneinandergrenzens zweier Mengen ist infolge dieser Eigenschaften ein Verkettungsbegriff nach F. Rieß (a.a.O.)“⁵³. Vietoris definierte dann, eine Menge sei stetig, wenn sich jede Zerlegung der Menge in zwei Komplementärmengen als

⁴⁸Vgl. [Vie21], 176. Die Tragweite dieser Arbeit von Vietoris diskutieren Purkert et al. in [P+02], 727ff.

⁴⁹Vgl. [Vie21], 178. Der moderne Zusammenhangsbegriff wurde unabhängig von einander von Riesz, Lennes und Hausdorff formuliert.

⁵⁰S. Diskussion zu Definition 5.11 im Abschnitt 5.2.

⁵¹[Rie09], 22.

⁵²Vgl. [Vie21], 177.

⁵³[Vie21], 177.

eine Zerlegung in zwei aneinandergrenzende Teilmengen erweist⁵⁴.

9.1.4 Heinrich Tietze

Heinrich Tietze promovierte 1904 in Wien. In Erlangen erhielt er 1919 eine Professur. Dort wirkte er bis 1925, als er einer Berufung nach München folgte. Sein Hauptforschungsgebiet war die heute sogenannte allgemeine Topologie.

In Erlangen verfaßte er die Arbeit „Beiträge zur allgemeinen Topologie I. Axiome für verschiedene Fassungen des Umgebungsbegriffs“, die 1923 in den *Mathematischen Annalen* erschien⁵⁵. In einer allgemeinen Einleitung erwähnte er unter den Aufgaben der allgemeinen Topologie „die Untersuchung verschiedener Axiomensysteme für die genannten Limes-, Umgebungs- oder Abstandsbeziehungen hinsichtlich ihrer Tragweite und ihres gegenseitigen Zusammenhanges.“⁵⁶ In diesem Kontext wies er auf Riesz’ Vortrag „Stetigkeitsbegriff und abstrakte Mengenlehre“ und die dort von Riesz eingeführten drei Axiome für Häufungspunkte hin. Tietze setzte sich mit den Inhalten des Rieszschen Vortrags nicht auseinander. Er knüpfte an die Untersuchungen von Vietoris, Hahn, Sierpiński und andere Zeitgenossen an, die Hausdorffs Theorie des topologischen Raumes ausbauten, und oft auch an die Pionierbeiträge von Riesz und Fréchet anschlossen⁵⁷.

9.1.5 L.E.J. Brouwer und Hermann Weyl

Das spezielle, von Riesz bei der Konstruktion des Raumbegriffs herangezogene System physikalischer und mathematischer Punkte einschließlich ihrer Beziehungen ‚enthalten sein‘ definiert eine Struktur, die ich bereits in Abschnitt 7.1 ‚Bairsche Struktur‘ genannt habe. Diese Struktur des Rieszschen Systems kann, wie in Abschnitt 7.1 erläutert, durch ein Baumdiagramm (Abbildung 7.1) dargestellt werden. In Abbildung 7.1 zeigt das Rieszsche System starke Ähnlichkeiten zu denjenigen Baumdiagrammen, mit denen Brouwers System von Wahlfolgen gewöhnlich dargestellt wird⁵⁸. Unter einer Wahlfolge verstand Brouwer eine Folge hintereinander willkürlich ausgewählter, natürlicher Zahlen. Wahlfolgen waren ein zentrales Element in Brouwers Arbeit „Begründung der Mengenlehre unabhängig vom logischen Satz vom ausgeschlossenen Dritten. Erster Teil, Allgemeine Mengenlehre“ von 1918, in der er den systematischen Aufbau einer konstruktiven Mengenlehre unternahm. Ein zweiter und ein dritter Teil folgten 1919 und 1923⁵⁹. In dem

⁵⁴Vgl. [Vie21], 177-178.

⁵⁵Vgl. [Tie23].

⁵⁶[Tie23], 290. Er benutzte die Bezeichnung ‚allgemeinen Topologie‘.

⁵⁷Die Tragweite dieser Arbeit von Tietze diskutieren Purkert et al. in [P⁺02], 721ff.

⁵⁸Baumdiagramme für das Brouwer System von Wahlfolgen findet man zum Beispiel in [Dal99], 315 und [Epp00a].

⁵⁹Alle drei Teile sind in Brouwers *Collected Works* [Bro75] enthalten.

ersten Teil präsentierte er die Grundbegriffe der intuitionistischen Mathematik⁶⁰.

1919 gab Brouwer im zweiten Teil seiner Arbeit „Begründung der Mengenlehre unabhängig vom logischen Satz vom ausgeschlossenen Dritten“ eine konstruktive Definition für den Begriff des Punktes in der Ebene. Van Dalen beschreibt Brouwers Definition folgenderweise (s. Abbildung 9.1): Man betrachte die Ebene durch ein Gitter aus Quadraten κ_1 ($i \in \mathbb{N}$) zerlegt. Man teile jedes dieser Quadrate in vier kongruente Quadrate κ_2 und so weiter. Ein κ_i -Quadrat besteht aus vier kongruenten κ_{i+1} Quadraten für jedes $i \in \mathbb{N}$. Ein Punkt ist dann definiert als eine Wahlfolge von κ -Quadraten, d.h. Quadraten κ_i für gewisse $i \in \mathbb{N}$, der Art, daß jedes Quadrat ganz im Inneren seines Vorgängers liegt⁶¹. Sind P und Q durch die Quadratfolgen (p_i) und (q_i) definiert, dann hieß es bei Brouwer: P ist ‚örtlich verschieden‘ von Q , wenn $p_i \cap q_j = \emptyset$ für mindestens ein i und ein j gilt⁶². Brouwers Konzept der Beziehung ‚örtlich verschieden‘ wird in Abbildung 9.1 veranschaulicht.

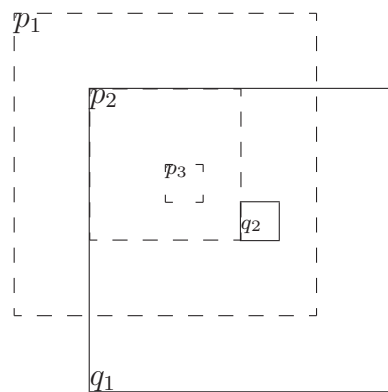


Abbildung 9.1: In diesem Beispiel schneiden sich die Quadrate p_3 und q_2 nicht. Daraus folgt, daß die Punkte P und Q , in deren Quadratfolgen p_3 beziehungsweise q_2 als Folgeglieder vorkommen, ‚örtlich verschieden‘ im Sinne Brouwers sind. Dieses Beispiel gab van Dalen in [Dal99], 329.

Brouwers Begriff des Punktes in der Ebene sowie die Beziehung ‚örtlich verschieden‘ zwischen Punkten erscheinen wiederum ähnlich zu Riesz’ System physikalischer und mathematischer Punkte. Wie verblüffend ähnlich ihre Punktbegriffe sind, kann am besten gezeigt werden, wenn das (einzige) Beispiel, das Riesz zur Veranschaulichung seiner Begriffe der physikalischen und mathematischen Punkte in „Die Genesis des Raumbegriffs“ gab, zum Vergleich gezogen wird. Es handelt sich um das System von Kreisen auf \mathbb{R}^2 , das in der in Abschnitt 8.2, Seite 217, zitierten Passage beschrieben wird.

⁶⁰Zu Brouwers konstruktiver Mengenlehre vgl. [Dal99], 312-317 und [Epp00a].

⁶¹Van Dalen benutzte auch die überflüssige Bezeichnung λ_i für die Quadrate, vgl. [Dal99], 329.

⁶²Vgl. [Dal99], 329.

Abgesehen davon, daß Riesz nicht von vornherein die Ebene zerlegte, sondern sie allmählich mit sich überlappenden Kreisen überdeckte, unterscheiden sich Brouwers und Riesz' Punktbegriffe lediglich dadurch, daß Brouwer Quadrate statt Kreise benutzte, denn Riesz' Konzept des mathematischen Punktes entspricht in dem eben zitierten Beispiel einer unendlichen Folge von eingeschachtelten Kreisen, wobei jeder Kreis in seinem Vorgänger enthalten ist⁶³. Darüberhinaus führt die von Riesz vorgeschlagene Definition der Beziehung ‚unterscheidbar‘ für physikalische Punkte gleicher Ordnung zur Übereinstimmung der Riesz'schen Beziehung ‚verschieden‘ für mathematische Punkte mit Brouwers Konzept der Relation ‚örtlich verschieden‘ für Punkte der Ebene.

Angesichts der oben besprochenen Ähnlichkeiten zwischen Riesz' und Brouwers Konzepten stellt sich die Frage nach der Rezeption der „Genesis des Raumbegriffs“ durch Brouwer. Es findet sich jedoch kein Hinweis, der eine positive Antwort begründen könnte. Die dreiteilige Arbeit „Begründung der Mengenlehre unabhängig vom logischen Satz vom ausgeschlossenen Dritten“ enthält keinen Verweis auf Riesz. Auch in keiner der früheren und späteren Arbeiten verwies Brouwer auf „Die Genesis des Raumbegriffs“⁶⁴. Am nächsten kam Brouwer zu Riesz in „Some remarks on the coherence type η “ von 1913, wo er Riesz' Theorie der mehrfachen Ordnungstypen verwendete und auf die entsprechend Riesz'sche Arbeit von 1905 verwies⁶⁵. Hans Freudenthal, der Herausgeber des zweiten Bandes von Brouwers *Collected Works*, fügte in den *Noten*⁶⁶ zu Brouwers Arbeiten „Beweis der Invarianz des n -dimensionalen Gebiets“ von 1911 und „Über den natürlichen Dimensionsbegriff“ von 1913 jeweils eine Fußnote mit einem Verweis auf „Die Genesis des Raumbegriffs“ ein⁶⁷. In der ersten von diesen beiden Arbeiten machte Freudenthal eine historische Bemerkung zu dem heutigen Zusammenhangsbegriff:

The present concept of connectedness is even older. It is already in F. Riesz 1906/07 (submitted to the Hungarian Academy of Sciences, 3d class, as early as 22 January 1906). This is a most remarkable paper, related to Fréchet's work in General Analysis (see for example M. Fréchet 1906) and to Poincaré's discussion of dimension (H. Poincaré 1903), and anticipating N.J. Lennes 1911 and F. Hausdorff 1914 with respect to connectedness and other general concepts. The paper, published at a somewhat unusual place, seems to have remained un-

⁶³S. Riesz' Definition 7.5.

⁶⁴Die Recherche umfaßte die beiden Bände von Brouwers *Collected Works* [Bro75] und [Bro76], sowie die von van Dalen herausgegebene Arbeit [Dal92], deren Inhalte aus Brouwers Nachlaß entstammen.

⁶⁵Vgl. Brouwer 1913B2 in [Bro76], 397.

⁶⁶Freudenthal kommentierte die in Band 2 abgedruckten Arbeiten Brouwers dadurch, daß er zu jeder einzelnen Arbeit eine Reihe von *Noten* als Begleittext hinzufügte.

⁶⁷Es geht um Brouwer 1911E und 1913A in Brouwers *Collected Works* Band 2, [Bro76], 475ff und 540ff.

noticed for a long time. As far as I see its first quotation is found in Tietze-Vietoris 1931 who consequently speaks of ‚Riesz-Lennes-Hausdorff connectedness‘.⁶⁸

Im Abschnitt 9.2 werden wir sehen, daß Freudenthal sich in Bezug auf die Rezeption des Rieszschen Zusammenhangsbegriffes irrte. Dagegen brachte er richtig die Rieszsche Arbeit mit Poincarés Diskussion des Dimensionsbegriffs in Verbindung. In der Fußnote zu den Kommentaren von Brouwers „Über den natürlichen Dimensionsbegriff“ schrieb Freudenthal: „F. Riesz 1909 (written 1906) witnesses a much earlier impact of Poincaré’s ideas on dimension.“⁶⁹ Ferner wies Freudenthal darauf hin, daß Riesz in „Die Genesis des Raumbegriffs“ Brouwers Kritik an dem von Poincaré in *La valeur de la Science* vorgeschlagenen Dimensionsbegriff vorweggenommen hatte⁷⁰. Brouwer hatte darauf aufmerksam gemacht, daß man nach Poincaré „einem Kegel des Cartesischen Raumes, der sich ja durch einen Punkt zerlegen läßt, nur eine Dimension zusprechen dürfen [würde].“⁷¹ Erstaunlich ist, daß Riesz genau dasselbe Beispiel gegeben hatte. Riesz schrieb: „Nach der Poincaréschen Definition wird ein Doppelkegel als physikalisches Kontinuum von einer Dimension sein.“⁷²

Hatte Brouwer Riesz’ Arbeit doch gekannt? Darüber liefern Freudenthals Kommentare keine aufschlußreiche Auskunft. Dirk van Dalen beschrieb Brouwer in seiner Brouwer-Biographie als einen Menschen, dessen Ehrlichkeit und obsessiver Gerechtigkeitssinn ihn oft zu Kontroversen mit anderen Persönlichkeiten geführt hatten. Stimmt van Dalens Bild von Brouwer, so muß die Vermutung ausgeschlossen werden, daß Brouwer die Rieszsche Arbeit doch kannte, obwohl er nie auf Riesz verwies.

In vorherigen Abschnitten wurde mehrmals auf gewisse Parallelitäten in den Forschungsinteressen von Brouwer und Riesz hingewiesen. Beide haben ihre Forschungskarriere mit Arbeiten begonnen, die an Hilberts „Ueber die Grundlagen der Geometrie“ von 1902 anknüpften. Beide haben sich mit den Ideen von Zorretti und Poincaré zum Dimensionsbegriff befaßt, sowie mit Schoenflies’ Analysis Situs und speziell mit jenen Resultaten, die mit dem Jordanschen Kurvensatz und dessen Umkehrung verwandt waren. Auch verfolgten beide mit großem Interesse die Entwicklungen in der Mengenlehre durch die französischen Analytiker Baire,

⁶⁸Hans Freudenthal in [Bro76], 488.

⁶⁹Hans Freudenthal in [Bro76], 548.

⁷⁰Vgl. [Bro76], 549.

⁷¹Vgl. [Bro76], 541.

⁷²Gegen Poincarés Dimensionsbegriff schrieb Riesz: „Wird man es aber versuchen, den Poincaréschen Dimensionsbegriff einer weiteren Untersuchung des Raumbegriffes zugrunde zu legen, so stößt man bald auf große Schwierigkeiten. Zunächst rechnet schon Poincaré bei der Einführung des Begriffes nicht mit den Merkmalen, die auch schon einer naiven Dimensionsvorstellung eigen sind, so z.B. daß ein System gewisser Dimension kein System höherer Dimension enthalten soll. Nach der Poincaréschen Definition wird ein Doppelkegel als physikalisches Kontinuum von einer Dimension sein.“ [Rie07b], 313.

Borel, Lebesgue, Hadamard und Fréchet. Schließlich pflegten beide, besonders zu Beginn ihrer Forschungskarriere, den Kontakt zu Göttingen.

In Göttingen lernte Brouwer Hermann Weyl kennen⁷³. Weyl hatte in Göttingen von 1903 bis 1907 studiert, und 1908 promovierte er bei Hilbert mit einer Arbeit über singuläre Integralgleichungen. Da Riesz 1907 zu Besuch in Göttingen war und selbst damals auch im Bereich der Integralgleichungstheorie forschte, scheint es unwahrscheinlich, daß Riesz und Weyl sich um 1907 nicht kannten. Daß es zu einer Freundschaft zwischen ihnen gekommen war, wie der Mathematiker Gaston Julia in seine „Notice nécrologique sur Frédéric Riesz“ erwähnte, läßt sich nicht belegen⁷⁴. Weder in Weyls noch in Riesz Nachlaß finden sich Spuren eines Briefwechsels⁷⁵.

Dagegen ist es gut bekannt, daß Brouwer und Weyl in den 1920er Jahren eine herzliche Freundschaft aufbauten⁷⁶. 1918 publizierte Weyl sein Werk *Das Kontinuum*, das sein eigenes Programm für eine konstruktive Mathematik darstellte⁷⁷. Durch persönlichen Kontakt erlangte Weyl einen direkten Zugang zu Brouwers tieferen konstruktiven Einsichten, für die er sich sehr interessierte, und die er bald versuchte, auf eigene Art und Weise aufzuarbeiten. Weyls Arbeit „Über die neue Grundlagenkrise der Mathematik“ von 1921 präsentierte zugleich Aspekte von Brouwers intuitionistischer Mathematik und Weyls eigenen konstruktiven Ideen. Berühmt ist diese Arbeit von Weyl unter anderem wegen des dort enthaltenen Ausrufs „Brouwer – das ist die Revolution“, die den Grundlagenstreit zwischen Brouwer und Hilbert auslöste⁷⁸.

Weyls Arbeit „Über die neue Grundlagenkrise der Mathematik“ enthält auch Begriffe, die Riesz' Konzept des mathematischen Punktes und dessen Auffassung als Äquivalenzklasse ähnlich sind⁷⁹. Aber auch bei Weyl findet man weder in dieser noch in früheren oder späteren Arbeiten einen Verweis auf Riesz⁸⁰.

⁷³Wann genau sie sich kennengelernt hatten, ist ungewiss. Van Dalen schrieb: „Brouwer and Weyl met no later than the summer of 1912, during Brouwer's visit to Göttingen“, [Dal99], 307.

⁷⁴Vgl. [Jul56].

⁷⁵Weyls Nachlaß ist über die Webseite der ETH Zürich zugänglich. Ich danke Erhard Scholz für Auskünfte zu Weyl und dessen Intuitionismus.

⁷⁶Vgl. [Dal99], 298, 308ff.

⁷⁷Vgl. [Dal99] 308, [Dal95] und [Sch00].

⁷⁸Vgl. [Dal99], 317ff und Van Dalens Beitrag „Der Grundlagenstreit zwischen Brouwer und Hilbert“ in [ET94].

⁷⁹Vgl. [Wey21], 172.

⁸⁰Die Recherche umfaßte folgende Arbeiten von Weyl: [Wey13], sowie Nr. 9, 26, 32,41, 45, 53 und 67 aus seinen Gesammelten Abhandlungen [Wey68].

9.2 In den USA

9.2.1 Mathematiker um Eliakim Hasting Moore

Eliakim Hasting Moore⁸¹ spielte eine zentrale Rolle bei der Etablierung der modernen Mathematik in den Vereinigten Staaten von Amerika (USA)⁸². Moore wirkte ab 1892 an der kurz zuvor gegründete Universität von Chicago. Unter Moores Betreuung forschte eine Reihe jünger Mathematiker, die in den folgenden Jahrzehnten die Entwicklung diverser mathematischer Gebiete in den USA bestimmen sollten. Zu den bedeutendsten zählen Oswald Veblen, Robert Lee Moore und George David Birkhoff.

Zu Beginn seiner Karriere forschte E. H. Moore in algebraischer Geometrie, in den 1890er Jahren wechselte er zu Gruppentheorie, und um die Jahrhundertwende befaßte er sich mit Axiomatik (Axiomensysteme für die Geometrie und für den Gruppenbegriff) und mit den Grundlagen der Analysis. Moore präsentierte sein Projekt einer ‚allgemeinen Analysis‘ (general analysis) 1906 in einem Kolloquium der American Mathematical Society und zwei Jahre später auf dem IV. IMK in Rom⁸³ – wo Riesz seinen Vortrag „Stetigkeitsbegriff und abstrakte Mengenlehre“ hielt. Moores Projekt einer allgemeinen Analysis stützte sich auf die Überzeugung, daß die existierenden Analogien zwischen zentralen Aspekten diverser Theorien die Existenz einer allgemeineren Theorie implizierten, die den spezifischen Theorien zugrunde liegt, und die diese bezüglich jener zentralen Aspekte vereint⁸⁴. Parshall und Rowe sehen in dieser Überzeugung Moores den modernen mathematischen Geist⁸⁵.

1904 war Moore Hauptherausgeber der mathematischen Zeitschrift *Transactions of the American Mathematical Society*, als er über Edwin Bidwell Wilson, der zwischen 1903 und 1919 auch Herausgeber derselben Zeitschrift war, eine Arbeit von Fréchet über lineare Operatoren zur Ansicht bekam. Zusammen mit D. Raymond Curtiss hatte Wilson Fréchet – die drei kannten sich aus ihrer gemeinsamen Studienzeit an der École Normale Supérieure – angeregt, Arbeiten in den USA zu publizieren. Fréchet veröffentlichte zwischen 1904 und 1907 drei Mitteilungen „Sur les opérations linéaires“ in den *Transactions of the American Mathematical Society*. Aus dem Briefwechsel zwischen Wilson und Fréchet geht hervor, daß Wilson die erste dieser Mitteilungen auch E.H. Moore zeigte. Wilson erzählte Fréchet von Moores Begeisterung über seine Arbeit, und davon, daß Moore sich wünschte,

⁸¹Moore wurde 1862 geboren. Er starb 1932.

⁸²Zur mathematischen Kultur in den Vereinigten Staaten von Amerika vgl. [PR94].

⁸³Vgl. [PR94], 372-384.

⁸⁴„The existence of analogies between central features of various theories implies the existence of a more fundamental general theory embracing the special theories as particular instances and unifying them as to those central features“, so zitiert in [SS98], 60.

⁸⁵Parshall und Rowe weisen auch auf die Ähnlichkeit zwischen Moores Denkweise über Mathematik und der von Klein und Hilbert hin, vgl. [PR94], 390.

weitere solche Arbeiten zu bekommen⁸⁶. Bereits zwischen den Jahren 1907 und 1908 leitete Moore Seminare über Fréchet's Theorie der heute sogenannten metrischen Räume⁸⁷. Allein dadurch wurde Fréchet im lokalen mathematischen Milieu um Moore gut bekannt. Fréchet's Veröffentlichungen in den USA waren für die Rezeption seiner Arbeit in den heute sogenannten mathematischen Gebiete ‚Funktionalanalysis‘ und ‚allgemeine Topologie‘ entscheidend. Auch Fréchet's Publikationen in Frankreich wurden von den jungen Mathematikern um Moore rezipiert. Die Rezeption von Fréchet ist in der vorliegenden Darstellung wichtig wegen der Wechselwirkung zwischen den Arbeiten von Fréchet und Riesz sowohl im Bereich der abstrakten Punktmengenlehre als auch im Gebiet der Funktionalanalysis⁸⁸. Das legt die Vermutung nahe, daß dieser Wechselwirkung stark zur Rezeption der Riesz'schen Beiträge im Kreis der Leser von Fréchet beitrug.

Für Moores Projekt einer allgemeinen Analysis war Hilbert's Theorie der linearen Integralgleichungen eine wichtigere Inspirationsquelle als Fréchet's Arbeiten über lineare Operatoren. Auf Grund der Anlehnung an bereits überholte Methoden und auch wegen der Kombination eines abstrakten Zugangs und der Einführung einer umfangreichen Symbolik gelang Moore die Etablierung seiner ‚general analysis‘ nicht⁸⁹. Sogar Moores Schüler Hildebrandt, Root und Chittenden haben in ihren Veröffentlichungen allmählich Abstand von Moores Terminologie und Symbolik genommen und sich dabei an die internationale und vor allem europäischen Terminologie angepaßt⁹⁰. Besser rezipiert als die Beiträge von Moore zur astrakten Punktmengenlehre wurden im allgemeinen die seines Schülers R.L. Moore⁹¹.

Im folgenden werden diverse Beiträge zur abstrakten Punktmengenlehre bzw. zur allgemeinen Topologie aus den 1910er und 1920er Jahren durch Moores Schüler Ralph E. Root, E.W. Chittenden, R.L. Moore und T.H. Hildebrand diskutiert, in denen Hinweise auf eine Rezeption der Riesz'schen Ideen gefunden wurden. Moores Schüler werden chronologisch hinsichtlich ihrer jeweiligen (ersten) Bezüge auf Riesz präsentiert.

⁸⁶Vgl. [Tay82], 241.

⁸⁷Vgl. [SS98], 73.

⁸⁸Zu Wechselwirkung zwischen den Arbeiten von Fréchet und Riesz s. Abschnitte 7.2 und 9.1.1.

⁸⁹Vgl. [SS98], 62. Moores ‚general analysis‘ der 1920er Jahren ähnelte Hilbert's Methode zur Lösung von Integralgleichungen mittels linearer Gleichungssysteme mit unendlich vielen Variablen. Diese Methode war aber bereits überholt durch modernere abstrakte Ansätze von S. Banach, F. Riesz, J. von Neumann, M.H. Stone unter anderen. Ibid, 56.

⁹⁰Vgl. [SS98], 68.

⁹¹Vgl. [SS98], 72.

9.2.2 Ralph Eugene Root

Ralph E. Root promovierte 1911 bei E.H. Moore an der Universität von Chicago mit der Dissertation „Iterated Limits in General Analysis“. Roots Doktorarbeit erschien erst 1914 in der Zeitschrift *American Journal of Mathematics*⁹².

Root knüpfte an Riesz' Konzept des mathematischen Kontinuums sowohl in seiner Dissertation als auch in der Arbeit „Limits in Terms of Order, with Example of Limiting Element not Approachable by a Sequence“ von April 1913, die aber erst ein Jahr später erschien⁹³. In beiden Arbeiten baute Root Strukturen auf, die heute als abstrakte topologische Räume betrachtet werden können und die dem Hausdorffschen Raumbegriff sehr nah kamen⁹⁴. Allerdings beabsichtigte Root in keiner dieser zwei Arbeiten, eine abstrakte punktmengentheoretische Theorie systematisch zu entwickeln. Sein Hauptinteresse richtete sich auf das analytische Studium von Funktionen, die auf einer abstrakten Menge definiert waren. Methodisch ging er so vor, daß er ein System von Umgebungsaxiomen für spezifische Familien von Mengen aufstellte, die als Umgebungen gewisser Elemente aufzufassen waren⁹⁵. Seiner Vorgehensweise kommentierte Root in der Einleitung seiner Dissertation:

A definite class of elements being assumed, the notion of „neighborhood“ of an element is essentially that of a subclass having a special relation to the element. In taking this relation as undefined and at the basis of our system of postulates we occupy a position intermediate, as regards generality, between the extrem position of those who take the notion of „limit“ itself as undefined.

[In einer Fußnote:] For example, Fréchet in the first chapter of the paper referred to above [Fréchet's Dissertation], and F. Riesz in his paper before the International Congress of Mathematicians at Rome, 1908 („Stetigkeitsbegriff und abstrakte Mengenlehre“ *Atti*, Vol. II, pp.18-24).⁹⁶

Ausgangspunkt der Untersuchungen von Root waren unter anderen Fréchet's Theorie der L-Klassen und Riesz' axiomatische Definition des Häufungspunktes von 1908. Root definierte anhand des Umgebungsbegriffes das Konzept des Häufungspunktes folgenderweise: Ein Element p ist ein Häufungspunkt der Menge E , wenn jede Umgebung von p ein von p verschiedenes Element aus E enthält. In seiner Dissertation zeigte Root, daß der so formulierte Begriff des Häufungspunktes

⁹²Vgl. [Roo14a].

⁹³[Roo14b].

⁹⁴Die Entwicklungen der Schule von E.H. Moore einschließlich Roots Arbeiten haben aber Hausdorff nicht beeinflußt, vgl. [P+02], 707.

⁹⁵Vgl. [Tay85], 298.

⁹⁶[Roo14a], 79.

den vier Axiomen von Riesz genüge⁹⁷. Als viertes Riesz'sches Axiom betrachtete Root die in Rom vage formulierte Forderung, „dass jede Verdichtungsstelle einer Menge durch die Gesamtheit jener Teilmengen, in bezug auf welche sie Verdichtungsstelle ist, eindeutig bestimmt sei.“⁹⁸.

In seiner Arbeit von 1913 führte Root Umgebungsaxiome für eine abstrakte Menge versehen mit einer Ordnungsrelation ein. Root zeigte, daß der hergeleitete Begriff des Häufungspunktes wiederum allen vier Riesz'schen Axiomen genügt⁹⁹. Darüber hinaus knüpfte Root an folgenden von Riesz formulierten Satz an: „Für eine Teilmenge eines mathematischen Kontinuums gelte der Bolzano-Weierstrass'sche Satz, d.h. jede transfinite Unterteilmenge desselben besitze wenigstens eine Verdichtungsstelle. Dann folgt [...] dass auch jede abzählbare Folge von transfiniten Unterteilmengen, von denen jede in der vorhergehenden enthalten ist, wenigstens eine gemeinsame Verdichtungsstelle besitzt.“¹⁰⁰

Root zeigte für die von ihm definierten (topologischen) Struktur den „after a theorem by Riesz“ formulierten Satz: „If every member of a sequence of infinite subclasses of a compact class contains the succeeding member, the members of the sequence have a common limiting element.“¹⁰¹. In Abschnitt 9.1.1 wurde darauf hingewiesen, daß Fréchet einen von Riesz formulierten Satz auch für (im damaligen Fréchet'schen Sinne) kompakte Mengen in einer Notiz in lila Tinte bewiesen hatte. Ähnliches versuchte Root in den hier besprochen Arbeit¹⁰². Die Sätze von Riesz, Fréchet und Root sind miteinander verwandt. Das zeigt, wie reif die Zeit für derartige Fragestellungen war, Fragen zu abstrakte punktmengentheoretische Eigenschaften, die heute als Aufgaben aus dem Bereich der allgemeinen Topologie bezeichnet werden können.

9.2.3 Edward Wilson Chittenden

E.W. Chittenden promovierte 1912 bei E. H. Moore an der Universität von Chicago mit der Dissertation „Infinite Developments and the Composition Property in General Analysis“.

Chittenden verfaßte zwischen 1915 und 1924 eine Reihe von Arbeiten, in denen er an Fréchet's Dissertation anknüpfte¹⁰³. Mit Fréchet's Konzept einer ‚kompakten Menge‘ befaßte er sich in den Artikeln „Converse of the Heine-Borel Theorem in a Riesz Domain“, datiert 1914, und „On the Heine-Borel Property in the Theory

⁹⁷Vgl. [Tay85], 299 und [Roo14a], 97-100.

⁹⁸[Rie09], 19-20; vgl. [Roo14a], 97-98.

⁹⁹Vgl. [Roo14b], 64-65.

¹⁰⁰[Rie09], 20.

¹⁰¹[Roo14b], 65.

¹⁰²Vgl. [Roo14b], 54.

¹⁰³Vgl. [Tay85], 305ff.

of Abstract Sets“ von 1918¹⁰⁴. Wie aus ihren Titeln hervorgeht, interessierte sich Chittenden für den Zusammenhang zwischen Fréchet's Konzept der ‚kompakten Menge‘ und dem Überdeckungssatz von Borel, den Chittenden aber Satz von Heine-Borel nannte¹⁰⁵.

In seinem Artikel von 1914 führte Chittenden das Konzept (in Englisch) ‚Riesz domain‘ ein. Bei einem ‚Riesz domain‘ handelte es sich um eine abstrakte Menge versehen mit einer Stetigkeitsstruktur, wobei diese, wie zuvor bei Riesz, durch ein abstraktes Konzept des Häufungspunktes bestimmt wird. Chittenden übernahm dafür die ersten drei Axiome von Riesz. Dabei verwies Chittenden auf den Vortrag von Riesz „Stetigkeitsbegriff und abstrakte Mengenlehre“¹⁰⁶. Chittenden bewies dann folgenden Satz: Gilt für eine Teilmenge eines ‚Riesz domain‘ der Satz von Borel, dann ist die Teilmenge ‚in sich kompakt‘ (self-compact). Hier benutzte er nur die original Borelsche Version für abzählbare Überdeckungen. Eine Menge hieß ‚in sich kompakt‘ für Chittenden, wenn jede unendliche Teilmenge einen Häufungspunkt der Menge besitzt¹⁰⁷. Hausdorff wird hier nicht erwähnt.

In dem Artikel von 1918 stellte Chittenden Riesz' Begriff des mathematischen Kontinuums an der Spitze seiner Untersuchungen, d.h. er übernahm alle vier Axiome von Riesz' Definition des Häufungspunktes. Zitiert wird nur Riesz' Vortrag, und als vierte Axiom übernahm Chittenden Riesz' Beschreibung des originalen vierte Axiom. Allerdings gab Chittenden hier der Riesz'schen Struktur keinen Namen, er sprach also weder von ‚mathematischem Kontinuum‘ noch von ‚Riesz domain‘. Chittenden suchte dann die hinreichenden Bedingungen zu bestimmen, unter denen der Satz von Borel für eine Teilmenge gilt. Im Gegensatz zu seiner Arbeit von 1914 betrachtete er die allgemeinere Version des Borelschen Satzes, den sogenannten Satz von Borel-Lebesgue. Ferner berücksichtigte er auch Hausdorffs *Grundzüge der Mengenlehre*¹⁰⁸.

9.2.4 Robert Lee Moore

R.L. Moore studierte an der Universität von Texas in Austin. Im Jahr 1903 ging er an die Universität von Chicago, wo er 1905 bei Oswald Veblen an mit der Dissertation „Sets of Metrical Hypotheses for Geometry“ promovierte¹⁰⁹. Sein zweiter Betreuer war E.H. Moore¹¹⁰. Zwischen 1911 und 1920 lehrte R.L. Moore an der Universität von Pennsylvania. Als er 1920 einen Lehrstuhl an der Universität von Texas übernahm, hatte er bereits 17 Artikel zur heutigen allgemeinen

¹⁰⁴Der erste erschien 1915 und der zweite 1919, vgl. [Chi15] und [Chi19].

¹⁰⁵S. Diskussion zur Bezeichnung des Borelschen Satzes in Abschnitt 3.2.3.

¹⁰⁶Zwei Axiome sind identisch mit den Riesz'schen, das dritte Riesz'sche Axiom folgt aber aus den Axiomen von Chittenden, vgl. [Chi15], 180.

¹⁰⁷Vgl. [Chi15], 180.

¹⁰⁸Vgl. [Chi19], 61-63.

¹⁰⁹*Transactions of the American Mathematical Society* **9** (1908) 487-512.

¹¹⁰Vgl. [PR94], 384.

Topologie veröffentlicht, und sich in diesem Fach als Experte etabliert¹¹¹.

1915 erschien seine Arbeit „The linear continuum in terms of point and limit“¹¹². Einen Teil derselben hatte er bereits im April 1914 der American Mathematical Society vorgelegt. R.L. Moore kündigte in der Einleitung seiner Arbeit:

F. Riesz has proposed a set of four postulates for a continuum in terms of point and limit in the non-sequential sense. [...] In the present paper I propose a categorical set of eight postulates for the linear continuum in terms of point and limit. The first three of these postulates (or axioms) are substantially equivalent to the first three of Riesz' system.¹¹³

Dabei verwies R.L. Moore auf Riesz' Vortrag „Stetigkeitsbegriff und abstrakte Mengenlehre“ von 1908. R.L. Moore beabsichtigte, eine axiomatische Definition des linearen Kontinuums zu liefern, die modern ausgedrückt das Kontinuum abstrakt und nur anhand von punktmengentheoretischen Eigenschaften charakterisierte.

Im ersten Abschnitt führte R.L. Moore acht Axiome und zwei Definitionen ein. Seine ersten drei Axiome entsprechen den ersten drei Riesz'schen Axiomen für den Begriff des Häufungspunktes; sein viertes und sechstes Axiom betreffen den Zusammenhang des linearen Kontinuums; das fünfte und achte beziehen sich auf die Ausdehnung und das siebte auf den modernen Begriff der Separabilität des Kontinuums. Den Zusammenhangsbegriff definierte er im Anschluß an N.J. Lennes¹¹⁴. Nachdem R.L. Moore einige Implikationen seines Axiomensystems untersucht hatte, diskutierte er in Anlehnung an E.H. Moore die Frage nach der gegenseitigen Unabhängigkeit der Axiome des Systems. Hausdorffs *Grundzüge der Mengenlehre* wurden von R.L. Moore nicht erwähnt.

9.2.5 Theophil Henry Hildebrandt

T.H. Hildebrandt promovierte 1910 bei E.H. Moore an der Universität von Chicago mit der Dissertation „A Contribution to the Foundations of Fréchet's Calcul Fonctionnel“¹¹⁵. Wie aus dem Titel seiner Dissertation hervorgeht, hatte sich Hildebrandt früh in seiner Karriere mit dem Aufbau der abstrakten Punktmengenlehre von Fréchet's Dissertation befaßt. Dagegen wird Riesz in Hildebrandt's Dissertation nicht zitiert.

¹¹¹Vgl. [PR94], 450.

¹¹²[Moo15].

¹¹³[Moo15], 123.

¹¹⁴Bereits in Kapitel 5 wurde darauf hingewiesen, daß Lennes 1911 einen Zusammenhangsbegriff einführte, der mit dem heutigen übereinstimmt. In Chicago hatte sich R.L. Moore und Lennes kennengelernt. Sie und Veblen waren gut befreundet. Alle drei teilten ein großes Interesse für die Axiomatik, vgl. [PR94], 384.

¹¹⁵*American Journal of Mathematics* 34 (1912) 237-290.

Spätestens Mitte der 1920er Jahren erfuhr Hildebrandt von den Riesz'schen Ansätzen einer abstrakten Punktmengenlehre. Er erwähnte Riesz' Pionierarbeit in einem Vortrag auf einer Tagung der American Mathematical Society und der Association for the Advancement of Science in Kansas City im Dezember des Jahres 1925. Hildebrandts Vortrag erschien fast ein Jahr später in dem *Bulletin of the AMS* unter dem Titel „The Borel theorem and its generalizations“¹¹⁶. Es handelte sich um eine systematische Darstellung diverser Verallgemeinerungen des Borelschen Satzes mit der Absicht, die Bedeutung des Satzes für die Analysis hervorzuheben, indem seine Beziehungen zu den Grundsätzen des linearen Kontinuums, seine Verbindung zu anderen Sätzen und schließlich seine zentrale Rolle in der Entwicklung der später sogenannten Funktionalanalysis diskutiert wurden. Hildebrandt ergänzte diese Darstellung mit historischen Notizen. In dem Abschnitt, in dem er die Version des Borelschen Satzes für topologische Räume oder ‚vicinity spaces‘, wie er sie nannte, behandelte, kommentierte er die Entstehung des topologischen Raumbegriffes:

The first suggestions of sets or vicinities as the basis for consideration in a general space are to be found in the paper of Hedrick. Another development based to some extent on the Riesz postulates for limiting element was given by R.E. Root. About the same time, Hausdorff in his book on Mengenlehre developed systematically the point set theory in a vicinity space. Later, in 1918, Fréchet gave an independent development of the same type of space showing in particular the relationship between the space characterized by the Riesz postulates and a space based upon vicinities.¹¹⁷

Im vorliegenden Fall kann also nicht von einer Rezeption der Riesz'schen Ansätze einer abstrakten Punktmengenlehre durch Hildebrandt gesprochen werden. Hildebrandts Vortrag zeigt aber immerhin, daß Riesz' Pionierarbeit in den 1920er Jahren in der Öffentlichkeit der American Mathematical Community anerkannt wurde.

9.3 Schlußbemerkungen zur Rezeption

Die angesprochenen Beispiele von Fréchet, Root, Vietoris, R.L. Moore und Chittenden belegen deutlich, daß es seit Anfang der 1910er Jahre durchaus ein lebhaftes Interesse an der Weiterentwicklung des Riesz'schen Beitrags zum Aufbau einer abstrakten Punktmengenlehre gab.

In Europa manifestierte sich dieses Interesse etwa in der Dissertation von Vietoris. In den USA lieferten zahlreiche im Einflußbereich E.H. Moores ent-

¹¹⁶Vgl. [Hil26].

¹¹⁷[Hil26], 464.

standene Arbeiten entsprechende Beispiele. E.H. Moore hatte die Rezeption der Fréchet'schen Arbeiten nicht nur durch Lehrveranstaltungen unterstützt, sondern auch deren Weiterentwicklung gefördert, indem er thematisch verwandte Dissertationen betreute, die an den Fréchet'schen und den Riesz'schen Ansätzen angeschlossen, zum Beispiel die von Root und Hildebrandt.

Es ist naheliegend, 1914, das Erscheinungsjahr von Hausdorffs *Grundzüge der Mengenlehre*, als Wendepunkt zwischen früher und späterer Rezeption der Riesz'schen Theorie des mathematischen Kontinuums anzusehen. In diesem Sinne stehen die diskutierten Arbeiten von Root für eine frühe Rezeption. Diese Betrachtungsweise erscheint jedoch nicht immer sinnvoll, denn die interessante Frage, die eine Unterscheidung von früher und späterer Rezeption begründet, ist vielmehr, ob die Rezeption von Riesz mit der Rezeption von Hausdorff unmittelbar konkurrierte. Das hing aber nicht allein mit dem Erscheinungsjahr von Hausdorffs *Grundzüge* zusammen, sondern auch mit der Frage, zu welchem Zeitpunkt Hausdorffs Buch den verschiedenen Forschergruppen tatsächlich zugänglich war. So sind die besprochenen Arbeiten von Chittenden, R.L. Moore und Fréchet aus den Jahren 1914, 1915 bzw. 1917 solche Beispiele, in denen die Autoren Hausdorffs Arbeit nicht berücksichtigten. Dieses Phänomen legt die Fragen nahe, ob es in den Vereinigten Staaten sowie in Frankreich eine verzögerte Rezeption der Hausdorff'schen Arbeit gab und inwieweit der erste Weltkrieg dabei eine Rolle spielte. Diese letzte Frage drängt sich vor allem bei der Betrachtung der Dissertation von Vietoris auf, die zwischen 1913 und 1919 entstand, also in einem Zeitraum, den Vietoris zwar zumeist an der Front verbrachte; dennoch rezipierte er in auffälligem Gegensatz zu Fréchet Hausdorffs *Grundzüge der Mengenlehre*.

Vietoris Dissertation erweist sich auch deshalb als ein interessantes Beispiel, weil sie neben den besprochenen Arbeiten von Chittenden und Fréchet (jeweils aus den Jahren 1918 und 1921) zeigen, daß die Autoren die Beschäftigung mit dem Riesz'schen Beitrag auch nach der Kenntnisnahme von Hausdorffs Theorie des topologischen Raumbegriffs für lohnend befanden. Vietoris, Chittenden und Fréchet erforschten die Erweiterungsmöglichkeiten der Riesz'schen Begriffe, mit denen ein zu Hausdorffs vergleichbares System erzeugt werden konnte. Die Auseinandersetzung mit Hausdorffs Theorie führte nicht zu einem sofortigen Desinteresse am Riesz'schen Beitrag. Die Möglichkeit, eine abstrakte Punktmengenlehre ausgehend von einer axiomatischen Definition des Konzepts des Häufungspunktes aufzubauen, wurde nicht sofort aufgegeben. Erst Vergleichsforschungen, wie die von Vietoris, Chittenden und Fréchet, trugen zur Durchsetzung von Hausdorffs Theorie bei.

Ferner fällt in den hier betrachteten Veröffentlichungen von den Schülern von E.H. Moores auf, daß die Autoren zugleich mit Fréchet's Arbeiten vertraut waren. Das wirft die Frage auf, wie entscheidend die dortige Rezeption der Fréchet'schen Arbeiten für die Rezeption des Riesz'schen Beitrags war.

Die diskutierten Arbeiten von Tietze und Hildebrandt deuten darauf hin, daß

es bis in die 1920er Jahre hinein die Pionierarbeit von Riesz und Fréchet beim Aufbau einer abstrakten Punktmengenlehre als Beitrag zur Entstehung des modernen mathematischen Gebiets der allgemeinen Topologie vor der wissenschaftlichen Gemeinschaft anerkannt wurde. Auch in Lehrbüchern zur allgemeinen Topologie aus den 1960er Jahren finden sich historische Anmerkungen zu den Leistungen von Riesz und Fréchet¹¹⁸. Bemerkenswert ist der Hinweis von Wolfgang J. Thron auf „Die Genesis des Raumbegriffs“ in seinem Buch *Topological Structures*¹¹⁹, denn dieser ist neben Schoenflies’ Verweis die einzige bekannte Referenz auf die „Genesis des Raumbegriffs“ in Publikationen zur allgemeinen Topologie oder verwandten mathematischen Gebieten. Das Bewußtsein für die Bedeutung der Rieszschen Leistungen hinsichtlich der Entstehung der allgemeinen Topologie scheint in der Folgezeit verloren gegangen zu sein.

Bemerkenswert scheint es, daß Riesz’ Theorie des mathematischen Kontinuums bis Mitte der 1920er Jahren in Rußland und Polen, also in zwei Länder, wo die damalige ‚allgemeine Topologie‘ als Forschungsgebiet einen fruchtbaren Boden fand, nicht rezipiert wurde¹²⁰. Der erste bekannte Verweis auf Riesz von Autoren aus diesen Ländern stammt von Waclaw Sierpiński im Jahr 1927¹²¹. Aber in Sierpińskis Lehrbuch *General Topology* (Toronto:University of Toronto Press, 1956) wird Riesz nicht mehr erwähnt.

Neben der Rezeption der Rieszschen Theorie des mathematischen Kontinuums soll auch die Rezeption der anderen Aspekte des Rieszschen Beitrags zusammenfassend kommentiert werden: Einer dieser Aspekte betraf Riesz’ Theorie der mehrfachen Ordnungstypen. Diese hatte Riesz ausführlich bereits in seiner Arbeit von 1905 „Ueber mehrfache Ordnungstypen I.“ behandelt. Die besprochenen Beispiele von Schoenflies und Brouwer deuten darauf hin, daß mögliche Interessenten an dieser Rieszschen Theorie den viel ergiebigeren Artikel von 1905 und nicht „Die Genesis des Raumbegriffs“ lasen.

Das Bild von Riesz als Nutzer konstruktiver Methoden war bisher meines Erachtens nach weitgehend unbekannt. Die hier aufgestellte Frage nach der Rezeption der Rieszschen konstruktiven Begriffe durch Brouwer und Weyl ist noch nicht endgültig beantwortet. Ihre Erforschung könnte die Frage klären, inwieweit Riesz als Vorreiter der intuitionistischen Mathematik angesehen werden kann, und damit einen Beitrag zur Geschichte der intuitionistischen Mathematik liefern.

Bezüglich der Idee der Begriffsbildung abstrakter Räume ist die Frage der Rezeption schwierig zu beantworten. Jedenfalls war Riesz ein Wegbereiter der

¹¹⁸Zum Beispiel in [Csá60], 7; [Gaa64], 170; [Gre67], 50; [Thr66], 17.

¹¹⁹Vgl. [Thr66], 14.

¹²⁰Die Untersuchung erfolgte nicht systematisch sondern umfaßte nur ausgewählte Arbeiten von Zygmunt Janiszewski (1911), Paul Alexandroff und Paul Urysohn (1923-1926), Kazimierz Kuratowski (1921) und Waclaw Sierpiński (1921, 1928).

¹²¹In: „La notion de dérivée comme base d’une théorie des ensembles abstraits“, *Mathematische Annalen*, 97 (1927) 321-337. Darauf haben Purkert et al. in [P+02], 727 hingewiesen.

abstrakten Konzeption des Raumbegriffes in der Mathematik. Das zeigt nicht nur seine Arbeit „Die Genesis des Raumbegriffs“ sondern auch sein Brief an Fréchet vom Mai 1907, in dem Riesz ausdrücklich von Funktionenräumen sprach. Aber er war nicht der einzige. Im August 1907 lies der Hilbert-Schüler Erhard Schmidt eine Arbeit veröffentlichen, in der er auch von Funktionenräumen sprach und sich dabei bei Kowalewski für die geometrische Deutung bedankte¹²².

¹²²Vgl. [Sch08a], 56.

Kapitel 10

Schlußbemerkungen zur Bedeutung der Rieszschen Synthesen

10.1 Zusammenfassung

Ziel der vorliegenden Untersuchung war es, den Entstehungskontext der Rieszschen Beiträge zur Herausbildung des mathematischen Konzepts abstrakter Räume zu studieren. Als Hauptquelle diente die Arbeit „Die Genesis des Raumbegriffs“, in der Riesz zwei Raumbegriffe formulierte. Der erste war ein allgemeines Konzept des mathematischen Kontinuums, das Riesz abstrakt, axiomatisch und in der Sprache der Mengenlehre definierte. Bei dem zweiten handelte es sich um einen konstruktiv aufgebauten und anschließend axiomatisch definierten Raumbegriff, der die Möglichkeit der Herleitung des geometrischen Raumbegriffs aus der Erfahrung heraus illustrieren sollte.

Die Diskussion in den Kapiteln fünf bis acht stellt „Die Genesis des Raumbegriffs“ als eine Verflechtung verschiedener Motivationen und Interessen dar. Sie reichen von der damaligen philosophischen Raumdiskussion über die Grundlagen der Geometrie und die Mengenlehre der Ordnungstypen bis in die Variationsrechnung und andere Bereiche der heutigen Funktionalanalysis hinein. Darüber hinaus verfolgte Riesz Fragestellungen, die zu einigen der Schwerpunkte in den damaligen mathematischen Milieus in Paris und Göttingen gehörten. Der Blick auf diese Milieus, sowohl auf die philosophische Reflexion über Mathematik, insbesondere über Geometrie, als auch auf die mathematische Praxis in Frankreich und Göttingen, macht sichtbar, daß die von Riesz vorgeschlagenen Raumkonzeptionen als eine Synthese lokaler intellektueller Kulturen in Ungarn, Frankreich und Deutschland betrachtet werden kann.

In einer epistemischen Konfiguration im Sinne Epples entstanden bei Riesz

sowohl das Konzept des mathematischen Kontinuums als auch der konstruktive Raumbegriff als epistemische Werkzeuge für die Lösung bestimmter mit Epple als epistemische Gegenstände zu beschreibende Aufgaben und Probleme. Bereits in den Fragestellungen kombinierte Riesz Interessen der mathematischen Kulturen in Frankreich und Göttingen. Er versuchte, zur Grundlegung der Geometrie als Erfahrungswissenschaft beizutragen. So bildete der Raumbegriff Riesz' Forschungsgegenstand in dreierlei Hinsicht: einerseits von der Perspektive der Göttinger Mathematik, nämlich der Grundlagen der Geometrie als Forschungsgebiet her, dann im Zusammenhang mit Poincarés philosophischen Beiträgen zur Raumdiskussion und speziell mit dessen konventionalistischer Auffassung der Stetigkeit des Raumes¹; drittens suchte Riesz nach einer Fréchets Konzept der L-Klasse übergeordneten Struktur, die eine Verallgemeinerung der Analysis der reellen Funktionen ermöglichen sollte. Ziel war es, einen Begriff zu schaffen, der den Forderungen dieser drei Ansätze genüge. So schlug Riesz ein allgemeines Konzept des mathematischen Kontinuums vor, das Hilberts Konzept des stetigen Raumes in der Geometrie (also den zweidimensionalen Mannigfaltigkeitsbegriff), Poincarés empirisch basiertes Konzept des stetigen Raumes und Fréchets L-Klasse im Sinne des strukturellen Denkens Hilbertscher Prägung vereinige: Analytische, geometrische und erfahrungsorientierte Raumauffassung sollten unter einem Begriff gefaßt werden können².

Auch die epistemischen Techniken, die Riesz benutzte, um die genannten Aufgaben zu behandeln, waren den mathematischen Werkstätten in Frankreich und Göttingen entliehen. Für den Zugang zum ersten erwähnten Problem der Grundlegung der Geometrie als Erfahrungswissenschaft kombinierte Riesz Ansätze von Poincaré, Baire, Fréchet und Hilbert³. Zunächst schloß Riesz an Hilberts Idee der Topologisierung der Ebene durch die Übertragung des Standardbegriffes des Häufungspunktes in \mathbb{R}^2 an. In diesem Verfahren folgte Riesz Fréchets Vorbild und baute selber ansatzweise eine abstrakte Punktmengenlehre auf. Dann übertrug Riesz den konstruktiven Ansatz von Baire, demzufolge mit Hilfe eines vorgegebenen Umgebungssystems ein Konzept des Häufungspunktes konstruktiv definiert werden konnte, auf sein System. Schließlich knüpfte er an Poincaré an, indem er dessen Mathematisierung eines aus der Erfahrung entnommenen Konzeptes der Stetigkeit des Raumes (Poincarés Konzept des mehrdimensionalen physikalischen Kontinuums) zu einem System ausbaute, auf das er die Techniken von Hilbert und Baire anwenden konnte.

Auf der Suche nach einer allgemeinen Struktur zum Nutzen sowohl der Geometrie als auch der Analysis orientierte sich Riesz an Techniken von Fréchet und Hilbert. Fréchets mengentheoretischer und axiomatischer Zugang diente Riesz als Muster, während er in Anschluß an Hilberts Topologisierung der Ebene den

¹S. Kapitel 6.

²S. Kapitel 7 und 8.

³S. Kapitel 6 und 7.

Begriff des Häufungspunktes als dasjenige Konzept wählte, welches die gesuchte Struktur charakterisieren sollte.

In diesem Prozeß spielte auch die mathematische Kultur in Ungarn eine wichtige Rolle. Innerhalb dieser Kultur fand der größte Teil der wissenschaftlichen Ausbildung von Riesz statt. Hier lernte er, aufmerksam die mathematischen Entwicklungen in Frankreich und Deutschland zu verfolgen. Diese Orientierung über den engeren nationalen Rahmen hinaus war ein Merkmal der damaligen ungarischen mathematischen Kultur. Daneben trat Riesz auf Grund seiner Abstammung in den mathematischen Milieus in Paris und Göttingen als Externer, also als jemand, der weder dem einen noch dem anderen Milieu angehörte, auf. Diese Voraussetzungen gewährleisteten eine Offenheit und eine im Vergleich zu den deutschen und französischen Kollegen ausgezeichnete Aufnahmebereitschaft, die die Bildung von Synthesen aus Elementen der mathematischen Forschung in Frankreich und Göttingen begünstigten. In diesem Sinne lassen sich sowohl die von Riesz verfolgten Fragestellungen als auch die von ihm geschaffenen epistemischen Techniken als Synthesen aus den lokalen mathematischen Kulturen in Ungarn, Frankreich und Göttingen auffassen.

10.2 Zur Bedeutung der Rieszschen Synthesen

Eine erste Synthese betrifft Riesz' allgemeines Konzept des mathematischen Kontinuums. Ihre Bedeutung hängt mit der Entwicklung zweier moderner Gebiete der Mathematik, nämlich der Funktionalanalysis und der allgemeinen Topologie zusammen.

Riesz' abstrakter Zugang zum Raumbegriff war in den Jahren 1906 und 1907 neu und bahnbrechend. Nicht einmal Fréchet hatte damals den Raumbegriff so abstrakt aufgefaßt. Während Fréchet, Schmidt und Schoenflies 1908 lediglich den Folgenraum ℓ^2 als Funktionenraum betrachteten und für ihn die Bezeichnung ‚Raum‘ verwendeten, hatte Riesz bereits zwei Jahre zuvor sein allgemeines Konzept des mathematischen Kontinuums als einen ‚mathematischen Raumbegriff‘ aufgefaßt, mit dem sowohl das Konzept des stetigen Raumes in der Geometrie als auch Funktionenräume beschrieben werden können⁴. Dabei muß bemerkt werden, daß Riesz schon unter ‚Funktionenräume‘ nicht nur Folgenräume, sondern auch etwa die Menge L^2 der auf dem Intervall $[0, 2\pi]$ im Lebesgueschen Sinne quadratintegrierbaren Funktionen verstand. Die Funktionenmenge L^2 hatte Riesz bereits

⁴Riesz schrieb: „Die Aufgabe ist schwierig; denn wir sind gewohnt, den physikalischen Raum mit dem mathematischen zu identifizieren; eine Trennung unserer Raumschauung von unseren exakt geometrischen Kenntnissen ist recht mühsam“, [Rie07b], 315. D.h.: Riesz setzte den geometrischen und den mathematischen Raum als gleichbedeutende Konzepte. Weiter schlug er vor, den geometrischen Raum als ein zusammenhängendes, zu \mathbb{R}^3 lokal homöomorphes mathematisches Kontinuum aufzufassen, vgl. [Rie07b], 346.

im November 1906 als einen, modern ausgedrückt, metrischen Raum beschrieben⁵.

Riesz benutzte bis 1910 die Bezeichnung ‚Funktionsraum‘ zwar nicht in seinen Publikationen, wohl aber in der Korrespondenz mit Fréchet, aus der eindeutig hervorgeht, daß er die Funktionenmenge L^2 als einen abstrakten Raum, nämlich einen Funktionsraum, auffaßte⁶. 1910 tauchte der Begriff erstmals in einer Veröffentlichung von Riesz auf⁷.

Riesz’ Artikel von 1906 war die erste einer Reihe von fünf Arbeiten, in denen er an Hilberts Theorie der Integralgleichungen anschloß. Hierbei ging es Hilbert weniger darum, konkrete Integralgleichungen aufzulösen, als vielmehr um die Entwicklung einer allgemeinen Theorie, in der das analytische Problem der Auflösung von Integralgleichungen eines bestimmten Typus auf ein algebraisches Problem zurückgeführt wird⁸. Dieses bestand darin, ein hergeleitetes unendliches Gleichungssystem mit unendlich vielen Unbekannten zu lösen. Hilbert versuchte dazu, das bekannte Lösungsmuster für den endlichen Fall, das auf Determinanten, Eigenwerte, Eigenvektoren und quadratische Formen zurückgreift, durch eine spezifische Erweiterung dieser Begriffe entsprechend zu verallgemeinern. Dem algebraischen Problem unendlicher Gleichungssysteme mit unendlich vielen Unbekannten entsprach in der Analysis die Integralgleichung selber, da die Lösung des algebraischen Problems die Fourierkoeffizienten genau derjenigen Funktion, die die Integralgleichung löste, lieferte. Eine 1906 noch offene Frage in Hilberts Theorie betraf die Existenz einer stetigen Funktion, die jene Fourierkoeffizienten besaß. In seiner Artikelreihe wandte sich Riesz dem so eröffneten Problemfeld zu. Allerdings erweiterte er die Hilbertschen Betrachtungen auf L^2 -Funktionen, statt sich wie Hilbert auf stetige Funktionen zu beschränken. Riesz bewies nicht nur die Lösbarkeit der Integralgleichungen des von Hilbert betrachteten Typus in L^2 . Er formulierte in diesem Zusammenhang auch seine Version des heute sogenannten Riesz-Fischer-Satzes, mit dem er einen geometrischen Zugang zum Studium der Funktionenmenge L^2 eröffnete, der deren Auffassung als Funktionsraum nahelegte; so verstand es Riesz, so verstand es nach ihm dann auch Fréchet. Der Rieszsche Beitrag spielte also infolge seiner Anwendungen auf die Integral-

⁵Vgl. [Rie06].

⁶S. Abschnitt 9.1.1 und zur Korrespondenz mit Fréchet Anhang C.2.

⁷In seiner Arbeit „Untersuchungen über Systeme integrierbarer Funktionen“ von 1910 schrieb Riesz: „Die Untersuchung dieser Funktionenklassen [L^p und L^q , mit $q = \frac{p}{p-1}$] wird auf die wirklichen und scheinbaren Vorteile des Exponenten $p = 2$ ein ganz besonderes Licht werfen; und man kann auch behaupten, daß sie für eine axiomatische Untersuchung der Funktionsräume brauchbares Material liefert“, [Rie10], 452 (Ergänzung und Hervorhebung von mir, LR).

⁸Vgl. das Protokoll der Sitzung vom 2. Februar 1904 der DMV, in der Hilbert sein Forschungsprogramm zur Theorie der Integralgleichungen präsentierte: „Es kommt ihm aber nicht so sehr auf die Auflösung dieser Gleichung an, [...] als darauf, die Theorie der Lösung zu entwickeln und eine Anwendung von ihr zu geben. Das beweisende Prinzip ist allemal der Übergang von einem algebraischen zu dem transzendenten Problem“, *Jahresbericht der DMV*, **13** (1904) 134.

gleichungstheorie eine Schlüsselrolle in der Etablierung des Konzepts abstrakter mathematischer Räume.

Zusammen mit Fréchet's ‚Calcul fonctionnel‘ legte Riesz' Publikationenreihe den Grundstein für die Entstehung der Funktionalanalysis und somit für die Erschließung eines neuen Forschungsgebietes der modernen Mathematik.

Hinsichtlich der allgemeinen Topologie wirft die Auseinandersetzung mit den Riesz'schen Beiträgen ein schärferes Licht auf den Prozeß der Herausbildung wesentlicher Begriffe und Grundüberlegungen in der Entstehungsphase dieser Disziplin: So ist Riesz' mathematisches Kontinuum unumstritten ein dem heutigen topologischen Raumbegriff verwandtes Konzept, auch wenn der Riesz'sche Ansatz einer abstrakten Punktmengenlehre sich in Konkurrenz mit Hausdorff's Theorie des topologischen Raumes nicht durchsetzen konnte. Die zeitgenössische Diskussion hatte sich aber zunächst mit beiden Ansätzen gleichberechtigt auseinandergesetzt. Zwar konnten Riesz' Ideen gegen Hausdorff nicht bestehen, aber bemerkenswerterweise spielte der punktmengentheoretische Ansatz von Riesz gerade als alternative Theorie bei der Etablierung der Hausdorff'schen Topologie eine wichtige Rolle⁹. Riesz selber kehrte nach 1908 zu seinem Ansatz einer abstrakten Punktmengenlehre nicht mehr zurück. In jenem Jahr hatte er seine Ideen über die Bedeutung seines allgemeinen Begriffes des mathematischen Kontinuums für die Behandlung von Stetigkeitsfragen für abstrakte Mengen auf dem IV. Internationalen Mathematiker-Kongreß (IMK) in Rom präsentiert. Dieser Vortrag auf dem IV. IMK erwies sich im nachhinein als der glücklicher Akt, der Riesz die Türen zu einem breiteren, ja auch transatlantischen Leserkreis öffnete. Riesz' Theorie des mathematischen Kontinuums motivierte bis in die 1920er Jahre die Forschung zum Aufbau einer abstrakten Punktmengenlehre in den USA nachhaltig. Diese Entwicklungen trugen zusammen mit Hausdorff's Monographie *Grundzüge der Mengenlehre* von 1914 und weiteren Beiträgen aus Österreich (Tietze und Vietoris), aus Polen (Kuratowski und andere) und aus Rußland (Urysohn und Alexandroff) zum Aufbau der allgemeinen Topologie bei.

Die andere Synthese betrifft Riesz' konstruktiven Raumbegriff. Die durch die vorliegenden Untersuchungen gewonnenen Erkenntnisse über Riesz' konstruktiven Ansatz und dessen Ähnlichkeit zu intuitionistischen Kontinuumskonzeptionen nach Brouwer und Weyl werfen die Frage nach der Rezeption der Riesz'schen Arbeit „Die Genesis des Raumbegriffs“ durch die Intuitionisten auf. Dieses Problem führt zugleich zu der Frage nach der Bedeutung von Riesz' konstruktivem Raumbegriff für die Entwicklung der intuitionistischen Mathematik, ein vorerst offenes Kapitel in der Mathematikgeschichte.

⁹S. Kapitel 9.

10.3 Schlußwort

Die vorliegende Arbeit zeigt, daß die Herausbildung von Riesz' Konzept des abstrakten Raumes, also des mathematischen Kontinuums, nicht allein im Rahmen der reinen Mathematik lag. Vielmehr war ein Komplex diverser Ideen und Motivationen aus verschiedenen kulturellen Kontexten im Entstehungsprozeß involviert: aus der mathematischen Kultur in Frankreich Poincarés Ideen über die Stetigkeit des Raumes sowie die Analysis von Borel, Baire, Lebesgue und Fréchet mit ihrer systematischen Anwendung der Mengenlehre und der axiomatischen Methode, aus der Göttinger mathematischen Kultur Hilberts Charakterisierung des Raumes in den Grundlagen der Geometrie. Es ist gerade der Blick auf dieses Umfeld, der Klarheit in den Fragen schafft, woher die Notwendigkeit eines abstrakten Raumbegriffs stammt und wie es zu jener spezifischen Gestaltung des Rieszschen Begriffes und der darauf ansatzweise aufgebauten Theorie kam. So stellt sich heraus, daß Riesz Poincarés philosophische Überlegungen über den reellen Raum der Erfahrung berücksichtigte und daß diese zur Herausbildung seines abstrakten Raumbegriffs beitrugen.

Die Entstehung des abstrakten Raumbegriffs bei Riesz bietet der Mathematikgeschichte ein hervorragendes Beispiel für die Herausbildung eines modernen mathematischen Begriffes als epistemisches Werkzeug für die Behandlung verschiedener epistemischer Gegenstände in Werkstätten verschiedener mathematischer Kulturen. Riesz' epistemischer Gegenstand war der Raum in dreierlei Hinsicht: für die Geometrie, für die Funktionalanalysis und für die Erfahrung. Riesz' modernes Konzept des mathematischen Kontinuums bildete das Werkzeug, mit dem Riesz einerseits das Problem einer Verallgemeinerung von Hilberts Begriff der zweidimensionalen Mannigfaltigkeit zu lösen versuchte. Riesz' Vorschlag hierzu: Der stetige dreidimensionale Raum ist ein dreifach geordnetes mathematisches Kontinuum, lokal gleichartig stetig wie \mathbb{R}^3 ¹⁰. Andererseits gelang es Riesz, Fréchets Konzept der L-Klasse als ein mathematisches Kontinuum zu interpretieren und so eine allgemeinere abstrakte Punktmengenlehre aufzubauen. Schließlich konnte Riesz zwar nicht Poincarés empirisch-basiertes Konzept des stetigen Raumes, wohl aber einen eigenen, auf Grundlage von Poincarés Konzept des mehrdimensionalen physikalischen Kontinuums konstruierten Raumbegriff als ein mathematisches Kontinuum auffassen.

¹⁰S. Abschnitt 6.1.

Anhang A

Zitate

A.1 Aus „Die Genesis des Raumbegriffes“

Definition A.1 (Riesz' axiomatischer Raumbegriff)

Ich habe im letzten Kapitel den Raum als unendliche Reihe gewisser physikalischer Kontinua, der momentanen Raumvorstellungen definiert. Die Elemente der einzelnen Raumvorstellung als physikalisches Kontinuum sind physikalische Punkte; die Elemente der n -ten momentanen Raumvorstellung nannte ich physikalische Punkte n -ter Ordnung. Ich unterschied eigentliche und uneigentliche physikalische Punkte n -ter Ordnung. Ist $n > m$, so besteht zwischen irgend einem Punkte m -ter Ordnung a_m und irgend einem Punkte n -ter Ordnung a_n immer eine und nur eine der beiden Beziehungen: 1) der Punkt a_m enthält den Punkt a_n ; 2) der Punkt a_m enthält den Punkt a_n nicht; [1) a_n ist in a_m enthalten; 2) a_n ist nicht in a_m enthalten]. Die momentanen Raumvorstellungen und ihre Beziehungen zueinander genügen nun folgende Voraussetzungen:

- 1. Jeder physikalische Punkt m -ter Ordnung enthält einen und nur einen uneigentlichen physikalischen Punkt $m+1$ -ter Ordnung, und jeder uneigentliche physikalische Punkt $m+1$ -ter Ordnung ist in einem und nur einem physikalischen Punkte m -ter Ordnung enthalten.*
- 2. Ist a_n in a_m und a_p in a_n enthalten, so ist auch a_p in a_m enthalten.*
- 3. Ist $m < n < p$ und ist a_p in a_m enthalten, so gibt es einen Punkt a_n , der a_p enthält und in a_m enthalten ist.*
- 4. Der in a_m enthaltene uneigentliche physikalische Punkt $m+1$ -ter Ordnung ist von jedem in a_m enthaltenen eigentlichen physikalischen Punkte $m+1$ -ter Ordnung ununterscheidbar.*
- 5. Sind a_m und b_n unterscheidbar, und sind die physikalischen Punkte n -ter*

Ordnung a_n und b_n in a_m resp. b_m enthalten, so sind auch diese unterscheidbar¹.

6. Sind a_m und b_m ununterscheidbar, so sind es auch die beiden in ihnen enthaltenen uneigentlichen physikalischen Punkte $m + 1$ -ter Ordnung a_{m+1} und b_{m+1} .
7. Sind a_m und b_m zwei verschiedene (nicht identische) physikalische Punkte m -ter Ordnung und ist der physikalische Punkt n -ter Ordnung a_n in a_m enthalten, so ist derselbe in b_m nicht enthalten.
8. Jede momentane Raumvorstellung besteht aus einer endlichen Anzahl physikalischer Punkte.
9. Das Kontinuum der eigentlichen physikalischen Punkte n -ter Ordnung ist zusammenhängend.
10. Die Reihe der momentanen Raumvorstellungen ist von Typus ω .
11. Jeder physikalische Punkt enthält eigentliche physikalische Punkte höherer Ordnung.
12. Sind die physikalischen Punkte m -ter Ordnung a_m und b_m unterscheidbar, so gibt es eine Zahl n derart, daß jeder eigentliche physikalische Punkt höherer als der n -ten Ordnung, der von irgend einem in a_m enthaltenen physikalischen Punkte ununterscheidbar ist, unterscheidbar ist von jedem in b_m enthaltenen physikalischen Punkte derselben Ordnung.
13. Sind die physikalischen Punkte m -ter Ordnung a_m und b_m ununterscheidbar, so gibt es eine Zahl n von der Eigenschaft, daß jeder eigentliche physikalische Punkt von höherer als der n -ten Ordnung, der in a_m enthalten ist, unterscheidbar ist von wenigstens einem in b_m enthaltenen physikalischen Punkte derselben Ordnung.
14. Sind die physikalischen Punkte m -ter Ordnung a_m und b_m ununterscheidbar, so gibt es zwei ununterscheidbare physikalische Punkte a und b , die in a_m resp. b_m und zugleich in eigentlichen physikalischen Punkten höherer als der m -ten Ordnung enthalten sind.
15. Für jeden physikalischen Punkt a gibt es eine Zahl n von der Eigenschaft, daß jeder physikalische Punkt, der in keinem physikalischen Punkte von niedriger als der n -ten Ordnung enthalten ist, unterscheidbar ist von jedem in a enthaltenen physikalischen Punkte derselben Ordnung.

¹S. Berichtigung.

16. Für jeden physikalischen Punkt m -ter Ordnung gibt es eine Zahl $n > m$, derart, daß die physikalischen Punkte n -ter Ordnung, die in a_m und zugleich in eigentlichen physikalischen Punkten höherer als der m -ten Ordnung enthalten sind, ein zusammenhängendes physikalisches Kontinuum bilden, und daß jeder in a_m enthaltene physikalische Punkt höherer als der n -ten Ordnung ununterscheidbar ist von wenigstens einem physikalischen Punkte, der in einem Punkte dieses Kontinuums enthalten ist.²

Berichtigung: Axiom 5 muß heißen: ‚Sind a_n und b_n unterscheidbar, und sind die physikalischen Punkte n -ter Ordnung a_n und b_n in a_m resp. b_m enthalten, so sind auch diese unterscheidbar.‘ Denn die Beziehung der Ununterscheidbarkeit ist nur für physikalische Punkte derselben Ordnung definiert.

²[Rie07b], 329ff.

Anhang B

Tabellen

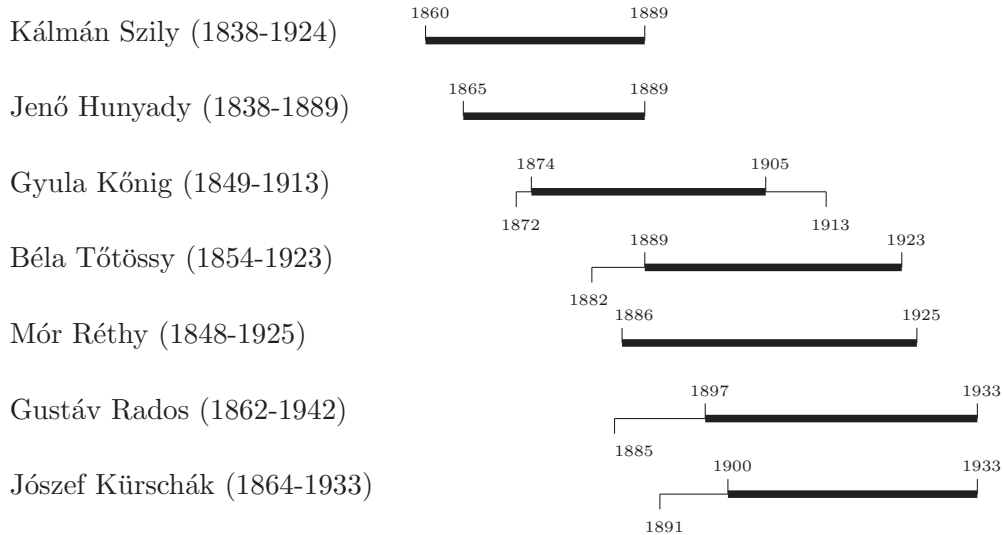
B.1 Tabellen zu Kapitel 2

Mitwirkende an der Entwicklung der Geometrie,
Mengenlehre und Analysis in Ungarn

Geometrie	Mengenlehre	Analysis
Jenő Hunyady		
	Gyula König	Gyula König
Mór Réthy		Mór Réthy
Béla Tóth		
József Kürschák		József Kürschák
Gyula Vályi		Gyula Vályi
		Gyula Farkas
		Lajos Schlesinger
		Lipót Fejér
Friedrich Riesz	Friedrich Riesz	Friedrich Riesz
		Alfréd Haar

Tabelle B.1: Die Daten stammen aus [Szé92] bzw. den jeweiligen Biographien.

An der Technischen Universität von Budapest



An der Universität von Kolozsvár (Klausenburg)



Tabelle B.2: Die Tabelle zeigt die Lehr- und Professurperioden der Professoren der Mathematik an den zwei wichtigsten Universitäten Ungarns von der zweiten Hälfte des 19. Jahrhunderts bis zu Beginn des 20. Jahrhunderts. Die Daten stammen aus [Sz692] bzw. den jeweiligen Biographien.

**Studien- und Forschungsaufenthalte
ungarischer Mathematiker im Ausland**

	Zürich	Wien	Heidelberg	Berlin	Göttingen	Paris
1850-1870		Jenő Hunyady		Jenő Hunyady		
		Kálmán Szily				
		Gyula Kónig	Gyula Kónig			
1870-1890		Mór Réthy	Mór Réthy	Gyula Kónig	Mór Réthy	
	Béla Tötössy					
				Gyula Vályi		
1890-1914			Lajos Schlesinger	Lajos Schlesinger		
	Friedrich Riesz			Lipót Fejér	Lipót Fejér	Lipót Fejér
					Friedrich Riesz	Friedrich Riesz
					Alfréd Haar	
					Marcel Riesz	Marcel Riesz
					Zoárd Géocze	

Tabelle B.3: In der zweiten Hälfte des 19. Jahrhunderts öffnete sich Ungarn zunehmend dem kulturellen Einfluß Frankreichs. Um die Wende zum 20. Jahrhundert wurde Berlin in seiner Stellung als dominierendes Zentrum der mathematischen Forschung in Deutschland von Göttingen abgelöst. Beide Phänomene spiegeln sich in der Ortswahl für Studien- und Forschungsaufenthalte ungarischer Mathematiker im Ausland wider. Die Daten stammen aus [Szé92] bzw. den jeweiligen Biographien, s. auch Abschnitt 2.2.

B.2 Tabellen zu Kapitel 4

Hilberts Assistenten

WS 1901/02	Albert Andrae ([Rei70], 87)
1904-1905	Max Born ([Rei70], 103)
1905-1907	Ernst Hellinger ([Rei70], 108)
1907-1908	Alfréd Haar ([Rei79], 20, 30)
1908-1910	Richard Courant ([Rei79], 30)

Tabelle B.4: Auf Grund der engen Zusammenarbeit mit Hilbert war die Stelle des Hilbert-Assistenten sehr begehrt, s. Abschnitt 4.1.3.

SS1898 - WS1907: Hilberts Lehrveranstaltungen

	Vorlesungen	Seminare
SS98	Einleitung in die Theorie der Differentialgleichungen, bestimmte Integrale und Fouriersche Reihen	Ausgewählte Fragen der Mechanik (mit F. Klein)
WS98	Determinantentheorie, Mechanik	Ausgewählte Fragen der Funktionentheorie reeller Variablen (mit F. Klein)
SS99	Differentialrechnung, ausgewählte Kapitel aus der Gruppentheorie, Einführung in die Variationsrechnung	Ausgewählte Fragen der Funktionentheorie reeller Variablen (mit F. Klein)
WS99	Integralrechnung, Zahlbegriff und Quadratur des Kreises, Theorie der Flächenkrümmung	Übungen zur Integralrechnung
SS00	Theorie der Differentialgleichungen, ausgewählte Kapitel aus der Flächentheorie	Übungen zur Flächentheorie
WS00	Theorie der analytischen Funktionen	Übungen zur Theorie der partiellen Differentialgleichungen

SS1898 - WS1907: Hilberts Lehrveranstaltungen

	Vorlesungen	Seminare
SS01	Algebra, Anwendungen der Theorie der partiellen Differentialgleichungen	Übungen zur Theorie der partiellen Differentialgleichungen
WS01	Zahlbegriff und Quadratur des Kreises, Potentialtheorie	Funktionentheoretische Übungen
SS02	Differential- und Integralrechnung I. Teil, Grundlagen der Geometrie, ausgewählte Kapitel der Potentialtheorie	Funktionentheoretische Übungen
WS02	Differential- und Integralrechnung II, Mechanik der Kontinua	Funktionentheoretische Übungen
SS03	Theorie der Differentialgleichungen, ausgewählte Kapitel aus der Mechanik der Kontinua	Funktionentheoretische Übungen
WS03	Theorie der partiellen Differentialgleichungen, Zahlbegriff und Quadratur des Kreises	Übungen aus dem Gebiet der Differentialgleichungen (mit Minkowski), algebraisch-arithmetische Übungen (mit Minkowski)
SS04	Funktionentheorie, Zahlbegriff und Quadratur des Kreises	N.N.
WS04	Variationsrechnung, bestimmte Integrale	Übungen zur Mechanik
SS05	Zahlentheorie, logische Prinzipien des mathematischen Denkens	Elektronentheorie
WS05	Mechanik, partielle Differentialgleichungen	Übungen zu partiellen Differentialgleichungen
SS06	Differential- und Integralrechnung I, Mechanik der Kontinua	
WS06	Differential- und Integralrechnung II, Mechanik der Kontinua	Übungen zu Differential- und Integralrechnung II geleitet durch Carathéodory, N.N.

SS1898 - WS1907: Hilberts Lehrveranstaltungen

	Vorlesungen	Seminare
SS07	Theorie der Differentialgleichungen mit einer unabhängigen Variable	N.N.
WS07	Theorie der partiellen Differentialgleichungen, Einführung in die Theorie der Funktionen unendlich vieler Variablen (Integralgleichungen)	N.N.

Tabelle B.5: Hilberts Lehrveranstaltungsangebote liefern ein Bild über Hilberts Interessen in der Zeit, als Friedrich Riesz sich in Göttingen aufhielt. Diese umfaßten die Grundlagen der Geometrie, die Theorie der Integralgleichungen, Variationsrechnung, spezifische mathematische und physikalische Fragestellungen sowie Fragen zur Grundlagenforschung. Informationsquellen: *Jahresbericht der DMV* und Vorlesungsverzeichnisse der Universität Göttingen.

WS02 - WS07: Minkowskis Lehrveranstaltungen

	Vorlesungen	Seminare
WS02	Algebra, Analysis situs,	N.N., funktionentheoretische Übungen
SS03	Algebra, Minimalflächen,	N.N. (mit Hilbert)
WS03	Mechanik I, Geometrie der Zahlen,	Übungen zur Theorie der Differentialgleichungen (mit Hilbert), algebraisch-arithmetische Übungen (mit Hilbert)
SS04	Linien- und Kugelgeometrie, Mechanik der Continua	N.N.
WS04	Differential- und Integralrechnung II, Analysis situs,	Übungen zur höheren Mechanik, Übungen zu Differential- und Integralrechnung II
SS05	Differentialgleichungen, automorphe Funktionen	Elektronentheorie
WS05	Zahlentheorie, algebraische Kurven und Flächen	Übungen mit Hilbert
SS06	Algebra, Kugel- und verwandte Funktionen	N.N.
WS06	Enzyklopädie der Elementarmathematik, Invariantentheorie	N.N.
SS07	Variationsrechnung, Wärmestrahlung	N.N.
WS07	Funktionentheorie, ausgewählte Kapitel der Zahlentheorie	N.N.

Tabelle B.6: Minkowski hielt in Göttingen ab dem Wintersemester 1902/03 Vorlesungen. In seinen Lehrveranstaltungen behandelte er sowohl physikalische als auch mathematische Themen. Hufig leitete er gemeinsam mit Hilbert Seminare. Informationsquellen: *Jahresbericht der DMV*.

Anhang C

Archivalien

Bemerkungen zum Nachlaß von Friedrich Riesz

Zu Riesz' Nachlaß wurde mir von Prof. Ákos Császár, dem Herausgeber von Riesz' Gesammelten Arbeiten, folgendes mitgeteilt:

Als Nachlass von F. Riesz besitzen wir eine Sammlung von Briefen, die von verschiedenen Mathematikern zu ihm geschrieben wurden. Ich selbst habe nach dem Tod von F. Riesz (also in den 1960er Jahren) eine kurze Liste von den Briefen zusammengestellt, die auch Anweisungen auf den Inhalt enthält (leider auf ungarisch).

Diese Briefe wurden später Prof. Barna Szénássy, dem Verfasser des Buches *History of Mathematics in Hungary until the 20th Century*¹ übergeben. Heute sind sie noch im Besitz der Witwe Frau B. Szénássy (Debrecen, Ungarn), die mir freundlicherweise Kopien einiger Briefe zuschickte. Dieser Teil des Nachlasses von Riesz, der bisher der einzige ist, dessen Existenz mir bekannt ist, enthält nur Briefe, die nach den 1920er Jahren verfaßt wurden – mit Ausnahme von zwei Briefen seines Bruders Marcel Riesz aus den Jahren 1913 und 1914. D.h. es handelt sich um seinen Briefwechsel nach der Flucht aus Koloszvar. Ob seine frühere Korrespondenz, die für diese Arbeit von größerer Bedeutung wäre, noch existiert, ist mir bisher leider nicht bekannt.

Zur Korrespondenz zwischen Friedrich Riesz und David Hilbert

In der Niedersächsischen Staats- und Universitätsbibliothek, Abteilung für Handschriften und seltene Drucke, Göttingen, befinden sich in Hilberts Nachlaß drei Briefe von Friedrich Riesz an David Hilbert und ein Brief von Riesz an Hilberts Frau.

¹[Szé92]

18.11.1904 Löcse. Brief von Riesz an Hilbert.

Dezember 1904/Januar 1905 undatiertes Brief von Riesz an Hilbert (vorgeschlagene Datierung von mir, LR).

04.02.1910 Budapest. Brief von Riesz an Hilbert.

23.03.1933 Szeged. Brief von Riesz an Frau Hilbert.

Zur Korrespondenz zwischen Friedrich Riesz und Maurice Fréchet

Der vorhandene Briefwechsel zwischen Riesz und Fréchet besteht aus zehn Briefen. Sieben von diesen befinden sich in Fréchets Nachlaß („Fond Fréchet“) im Archive de l'Académie des Sciences in Paris. Zusammen mit diesen liegt in Fréchets Nachlaß ein Zettel in Fréchets Handschrift mit Notizen in lila Tinte zu Riesz' Vortrag auf dem IV. Internationalen Mathematikerkongreß „Stetigkeitsbegriff und abstrakte Mengenlehre“. Zwei Briefe von Fréchet an Riesz befinden sich in Riesz' Nachlaß und sind im Besitz von Frau B. Szénássy.

Chronologisch angeordnet besteht die Korrespondenz zwischen Riesz und Fréchet einschließlich Fréchets Notizen in lila Tinte aus folgenden Briefen:

21. Mai 1907 Paris. Brief von Riesz an Fréchet.

19. Juni 1907 Göttingen. Brief von Riesz an Fréchet.

7. Juli 1907 Göttingen. Brief von Riesz an Fréchet.

nach 1910 Notizen zu Riesz' Vortrag auf dem 4. IMK (Notizen in lila Tinte)².

24. Dezember 1913 Győr. Brief von Riesz an Fréchet.

17. Mai 1914 Koloszvár. Brief von Riesz an Fréchet.

12. Dezember 1922 Szeged. Brief von Riesz an Fréchet.

10. Mai 1923 Strassbourg. Brief von Fréchet an Riesz.

16. Dezember 1929 Strassbourg. Brief von Fréchet an Riesz.

26. Februar 1935 Szeged. Brief von Riesz an Fréchet.

4. März 1935 Paris. Brief von Fréchet an Riesz.

Im folgenden werden von den hier aufgelisteten Archivmaterialien nur diejenigen wiedergegeben, die in dieser Arbeit teilweise zitiert wurden.

²Meine Datierung, LR, s. Abschnitt 9.1.1.

C.1 Briefwechsel zwischen Riesz und Hilbert

Brief von F. Riesz an David Hilbert vom 18. November 1904
Signatur/Mappe: Cod. Ms. D. Hilbert 332
Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen
- Abteilung für Handschriften und seltene Drucke -

Löcse, den 18. November 1904

Hochgeehrter Herr Professor!

Sie entschuldigen, wenn ich Sie störe. Es handelt sich um meine letzten Untersuchungen, über die ich vor ausführlicher Publikation gerne eine kürzere Note abgeben möchte und ich wende mich Ihnen mit der Bitte, dieselbe der Gesellschaft der Wissenschaften in Göttingen gütigst vorzulegen. Die Untersuchungen knüpfen an die Cantor'sche Idee an, dass die sogenannten geometrischen Eigenschaften der Punktmengen sich mit dem Begriffe der Fundamentalreihe auf Ordnungstypen übertragen lassen. Dies bezügliche Untersuchungen sind erst für lineare Ordnungstypen durchgeführt, ich unternahm es, dieselben für mehrfach geordnete transfinite Mengen weiterzuführen. Die Schwierigkeiten, die zu überwinden waren, bestanden darin, dass der Massbegriff und damit die gleichmässige Stetigkeit zu entbehren waren. Als Ersatz dafür diente die Übertragung des sogenannten Heine-Borelschen Satzes – dass nämlich aus jeder unendlichen Intervallmenge, die alle Punkte eines Intervalles im Inneren enthält, eine endliche Anzahl von Intervallen ähnlicher Eigenschaft sich auswählen lässt – auf lineare perfekte zusammenhängende Ordnungstypen. Damit liess sich auch der Bolzano-Weierstrass'schen Satz übertragen. Nach allgemeinen Definitionen gehe ich auf zweifache Ordnungstypen von perfektem, zusammenhängendem Charakter ein, speziell auf solche, die nach Ausscheidung von Randelementen in einen überall dichten zusammenhängenden Ordnungstypus – Verallgemeinerung des Bereiches der Geometrie – übergehen, und beschäftige mich mit den Zusammenhangs-, resp. Teilungseigenschaften derselben, d.h. mit der Analysis Situs der Ordnungstypen. Von den gebräuchlichen Instrumenten der Mengenlehre muss ich hier teilweise die gerade Strecke entbehren, und kann nur spezielle Strecken und Poligone definieren, die mir aber genügen, um die Untersuchungen über Jordan-Kurven zu übertragen, die Teilung des Bereiches durch dieselben nachzuweisen, wie auch die beiden Sinne für die Jordan-Kurven zu definieren. Auf weitere Teilungsfragen möchte ich in der Note nicht eingehen.

Nun treten aber auch meine Untersuchungen in innigste Fühlung mit jenen über die Grundlagen der Geometrie. Jene Untersuchungen nämlich, die als primäre Eigenschaft des Raumes die Stetigkeit voraussetzen, bauen den Begriff der n -fach ausgedehnten Mannigfaltigkeit auf den Zahlenbegriff und stellen somit der

Mächtigkeit des Raumes Schranken, die gewissermassen für gekünstelt erscheinen. Meines Erachtens nach sollten die einzigen wesentlichen Merkmale der \mathbb{R}^n die n-fache Anordnung, das Überalldichte und die Stetigkeit (Perfektheit u. Zusammenhang), wie diese in Ihrem Ebenenbegriff, jedoch mit der obigen Beschränkung, klar hervortreten, bilden. Demgemäss wäre der \mathbb{R}^n als Bereich von n-fachem Ordnungstypus aufzufassen. Nun halte ich Ihre Annalennote aus diesem Gesichtspunkte durchdacht und wenn ich mich nicht geirrt habe – was möglich ist, da ich die Sache nicht näher ausgearbeitet habe, so genügt schon meine Auffassung des \mathbb{R}^n , resp. der Ebene, um auf Grund Ihrer Bewegungsaxiome zur Euklidischen oder zur Bolyai-Lobatschewskyschen Geometrie zu gelangen. Also liesse keine Mannigfaltigkeit, welche von höherer Mächtigkeit als das Continuumm ist, eine Beweglichkeit im Lie'schen, resp. Ihrem Sinne zu.

Wenn Ihnen eine Note über diese Untersuchungen willkommen ist, so bitte ich Sie, mir mittels einer Postkarte die Erlaubnis zur Einsendung derselben zu ertheilen. Zugleich erlaube ich mir, Ihnen einen Abzug meiner Annalennote mit innigstem Dank für die Publikation einzusenden. Herr Schoenflies hatte mich brieflich auf einen Irrtum in Anmmerkung S. 410 aufmerksam gemacht, das aber auf die Sache nicht von Belang ist.

Hochachtungsvoll Ihr ganz ergebener
Riesz

Adresse: F. Riesz, Lócse /:Ungarn:/

* *
*

Brief von F. Riesz an David Hilbert, undatiert [wahrscheinlich Dez. 1904 oder Jan. 1905, LR]

Signatur/Mappe: Cod. Ms. D. Hilbert 332

Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen

- Abteilung für Handschriften und seltene Drucke -

Hochgeehrter Herr Professor!

Die eingehende Ausführung meiner Untersuchungen über mehrfache Ordnungstypen, namentlich jener, die die Verallgemeinerung der Analysis Situs des Bereiches der Funktionentheorie zum Ziele haben, zeigte mir, dass eine Verwendung der Fundamentalreihen oder wenigstens von Teilmengen mit einer einzigen Häufungsstelle eher zum Ziel führt, als der eingeschlagene Weg. Demgemäss wären auch die einleitenden Untersuchungen in einigen Punkten abzuändern. Ich bitte Sie deshalb, von der eingesandten Note vorläufig nicht Gebrauch zu machen. Ich werde sie demnächst ersetzen.

Ich benütze zugleich die Gelegenheit, Ihnen ein glückliches Neujahr zu wünschen.
Hochachtungsvoll Ihr ergebener
Riesz

* *
*

Brief von F. Riesz an Frau Hilbert vom 23. März 1933
Signatur/Mappe: Cod. Ms. D. Hilbert 772, Nr. 17, Bl. 29-30
Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen
- Abteilung für Handschriften und seltene Drucke -

Hochverehrte Frau Hilbert!

Ich danke für Ihren gütigen Brief und will Ihnen, soweit ich informiert bin, über die Krankheit unseres armen Freundes berichten. Bei Semesterbeginn, d.h. hier gegen Ende Jänner, klagte er über anhaltende [...] Es kam rascher als wir dachten; ich beabsichtige eben, Herrn Hilbert über die Krankheit zu berichten.

Darf ich Sie noch um Ihre Meinung und Ihr gütiges Mitwirken in der Angelegenheit eines Nachrufes bitten, der an der Spitze des nächsten, bald erscheinenden Heftes der von uns beiden redigierten Acta Scientiarum etc. erscheinen soll? Ich denke nämlich daran, daß ein Nachruf aus der Feder seines geliebten Lehrers ein schönes und würdiges Andenken wäre. Wäre es für Herrn Hilbert keine Anstrengung, 1-2 Seiten oder nach Belieben auch mehr für uns zu verfassen? Glauben Sie, daß dies möglich ist, so wollen Sie meine Bitte gütigst vermitteln. Erachten Sie es aber für besser, Herrn Hilbert nicht darüber zu sprechen, so bitte ich hierüber um eine kurze Nachricht.

[...] Gleichzeitig schicke ich für Herrn Hilbert die beiden letzten Arbeiten meines seeligen Freundes.

Mit ausgezeichnete Hochachtung und besten Grüßen an Herrn Hilbert

Ihr treu ergebender
F. Riesz

C.2 Briefwechsel zwischen Riesz und Fréchet

Brief von F. Riesz an M. Fréchet vom 21.5.1907

Quelle: Fond Fréchet, F2.10 (F. Riesz)

Institut de France, Académie des Sciences (Paris)

Paris 21 mai 1907

Monsieur et cher Collègue!

En quelques jours je quitte la France pour aller à l'Allemagne. Je serais été ravi de faire votre connaissance; mais, étant en mission, ma route est déterminée, et je ne peux pas passer à Besançon. Ce que je regrette bien.

Je vous remercie de votre aimable lettre. En ce que concerne les applications de mes résultats à la théorie des opérations fonctionelles, non seulement des opérations ordonnant à chaque fonction un nombre, mais aussi aux transformations linéaires (ou alors distributives) de l'espace des fonctions, moi je pensais bien que vos résultats et ceux de M. Hadamard peuvent être complétés et généralisés; en même temps, M. Hadamard m'avait communiqué le même espoir. J'aimerais bien de pouvoir lire prochainement une publication sur ce sujets. Naturellement, pour pouvoir appliquer la méthode, il faudra augmenter le domaine des fonctions et en même temps, élargir le sens de la notion de „opération continue“. Alors, les problèmes reviendront à la résolution des systèmes d'équations linéaires d'une infinité d'inconnues.

Je veux vous communiquer un théorème qui suit immédiatement de mes recherches mais que je n'avais pas encore communiqué. Pour la classe des fonctions sommables, de carré sommable et pour la notion de fonction limite que j'ai introduite dans ma publication antérieure sur les ensembles de fonctions (à l'aide de la notion de distance), pour qu'une série de fonctions f_n converge (au sens donné) vers une fonction limite il faut et il suffit que la distance de deux fonctions de rang assez élevé devienne tel petite que l'on veut. Donc l'ensemble considéré rentrera dans votre classification de „classe normale“.

Je vous remercie encore de votre observation grammaticale. N'étant pas français, votre belle langue me fait bien de difficultés.

Votre tout dévoué

Riesz

11.6. L'année dernière, Vous aviez la bonté de m'envoyer votre thèse. Je vous en remercie. Mais possédait quelque chose, on souhaite toujours à augmenter la fortune. Le qui veut dire que je serais heureux d'être en possession de vos autres travaux. Pendant mon voyage je reçois mes lettres par l'adresse de mon frère: M. Marcel Riesz, Göttingen, Gorslerstr. 6.

* *
*

Notiz in lila Tinte aus Fréchet's Nachlass (1908)
Quelle: Fond Fréchet, F2.10 (F. Riesz)
Institut de France, Académie des Sciences de Paris

F. Riesz (Atti del IV Congresso int. dei Matematici, 1908) Vol II énonce p. 21 an note, sans démonstration

Si un système d'ensembles de pts tous dans un même domaine borné sont tels que tout nombre fini de ces ensembles a au moins un pt limite commun, il en est de même de tous le système.

Je le démontre pour des ensembles tous dans un ensemble compact C d'une classe (V) quelconque.

I Le système donné est dénombrable; soit donc E_1, E_2, \dots ces ensembles. Il y a au moins un pt limite M_n des ensembles E_1, \dots, E_n . La suite M_1, M_2, \dots ? a au moins un él. limite $M = \lim M_{n_p}$. Or M_{n_p} est un élément limite de E_1, E_2, \dots, E_{n_p} . Donc réciproquement les éléments M_{n_p} sont limites de E_q pour $n_p > q$ M apportant donc aussi à E'_q qq soit q C.9.F.D.

II Cas général. D'après mon second memoire dans Rendiconto n° 5, C étant compact il existe un ens. den. N d'élé. de C A_1, A_2, \dots tel que tout élé. de C soit de N ou de $N!$ Soit alors (A_i, E) la borne infér. des $(A_i, B$ de $E)$ et $\rho(A_i)$ la borne super. de (A_i, E) ont on replace E pour d aucun des ensembles due système S donné.

1^e Je dis d'abord que les $\rho(A_i)$ n'ont pas une borne infér. > 0 . Car si tous les $\rho(A_i) > \epsilon > 0$ on pourrait trouver pour A_i, E_i tel que $(A_i, E) > \epsilon/2$ Or les ensembles E_1, E_2, \dots ont au moins un élé limite commun A d'après I A est soit un A_1 , mais alors (A_i, E_i) serait nul et non $> \epsilon/2 > 0$

Soit une limité $A = \lim A_{i_n}$ Mais, on a dans E_{i_n} un él. B_n tel que $(A, B_n) \leq (A, A_{i_n})$; donc $(A_{i_n}, B_n) \leq f(A, A_{i_n})$ et B_n apport á E_{i_n} , $(A_{i_n}, E_{i_n}) \leq f(A, A_{i_n})$ or ceci tend vers zero et non reste pas $> \epsilon/2$.

Alors des $\rho(A_i)$ un peut extraire une suite $\rho(A_{i_n}) \rightarrow 0$. Et C étant compact on peut supponer que ces A_{i_n} tendent vers un él. A . Or on peut trouver B_n dans E tel que $(A_{i_n}, B_n) < \rho(A_{i_n}) + 1/n$ donc $(A, B_n) < f(A, A_{i_n}) + \rho(A_{i_n}) + 1/n$ et pour suite L restant le même $(A, B_n) \rightarrow 0$ avec $1/n$ donc A est un él. limite de E qui est un qq des ens. donnés.

* *
*

Literaturverzeichnis

- [AL97] C.E. Aull und R. Lowen (Hg.), *Handbook of the History of General Topology*, Bd. 1, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1997.
- [Ale98] P.S. Aleksandrov (Hg.), *Die Hilbertschen Probleme*, Ostwalds Klassiker der exakten Wissenschaften, Bd. 252, Verlag Harri Deutsch, Frankfurt am Main, 1998.
- [Arc02] Thomas Archibald, *Charles Hermite and German Mathematics in France*, in Parshall und Rice [PR02], S. 123–137.
- [B+98] H.G.W. Begehr et al. (Hg.), *Mathematics in Berlin*, Birkhäuser, Basel, 1998.
- [Bai97] René Baire, *Sur la théorie générale des fonctions de variables réelles*, Comptes Rendus de l'Académie des Sciences de Paris **125** (1897), 691–694.
- [Bai98a] ———, *Sur les fonctions discontinues développables en séries de fonctions continues*, Comptes Rendus de l'Académie des Sciences de Paris **126** (1898), 884–887.
- [Bai98b] ———, *Sur les fonctions discontinues qui se rattachent aux fonctions continues*, Comptes Rendus de l'Académie des Sciences de Paris **126** (1898), 1621–1623.
- [Bai99a] ———, *Sur la théorie des ensembles*, Comptes Rendus de l'Académie des Sciences de Paris **129** (1899), 946–949.
- [Bai99b] ———, *Sur la théorie des fonctions discontinues*, Comptes Rendus de l'Académie des Sciences de Paris **129** (1899), 1010–1013.
- [Bai99c] ———, *Sur les fonctions de variables réelles*, Annali di matematica pura ed applicata (III) **3** (1899), 1–123.
- [Bai05a] ———, *Cinq lettres sur la théorie des ensembles*, Bulletin de la Société Mathématique de France **33** (1905), 261–273.

- [Bai05b] ———, *Leçons sur les fonctions discontinues*, Collection de monographies sur la théorie des fonctions, Gauthier-Villars, Paris, 1905.
- [BD95] Émile Borel und Jules Drach, *Introduction a l'étude de la théorie des nombres et de l'algèbre supérieure*, Nony, Paris, 1895.
- [Beg98] Heinrich Begehr, *Constantin Carathéodory*, in Begehr et al. [B⁺98], S. 105–109.
- [Ber66] Michael Bernkopf, *The Development of Function Spaces with Particular Reference to their origins in Integral Equation Theory*, Archive for History of Exact Sciences **3** (1966), 1–96.
- [Bie88] Kurt-R. Biermann, *Die Mathematik und ihre Dozenten an der Berliner Universität 1810-1933*, Akademie-Verlag, Berlin, 1988.
- [BK84] Garrett Birkhoff und Erwin Kreyszig, *The establishment of functional analysis*, Historia Mathematica **11** (1984), 258–321.
- [Blu35] Otto Blumenthal, *Lebensgeschichte*, in *Hilberts Gesammelte Abhandlungen* [Hil35], S. 388–429.
- [Böl98] Reinhard Bölling, *Weierstrass and some members of his circle: Kovalevskaja, Fuchs, Schwarz, Schottky*, in Begehr et al. [B⁺98], S. 71–82.
- [Bor95] Émile Borel, *Sur quelques points de la théorie des fonctions*, Annales scientifiques de l'École normale supérieure (III) **12** (1895), 9–55.
- [Bor05] ———, *Quelques remarques sur les principes de la théorie des ensembles*, Mathematische Annalen **60** (1905), 194–195.
- [Bor28] ———, *Leçons sur la théorie des fonctions*, (1. Aufl. 1898) dritte Aufl., Collection de monographies sur la théorie des fonctions, Gauthier-Villars, Paris, 1928.
- [Bor72] ———, *Œuvres de Émile Borel*, Éditions du Centre National de la Recherche Scientifique, Paris, 1972.
- [Bri84] Aldo Brigaglia, *Sur les Relations des Mathématiciens Français et Italiens au Début du XXe Siècle*, Cahiers du Seminaire d'Histoire des Mathématiques **5** (1984), 21–48.
- [Bro75] L.E.J. Brouwer, *Collected Works*, Bd. 1, North-Holland Publishing Company, Amsterdam, 1975, Hg. von Arend Heyting.
- [Bro76] ———, *Collected Works*, Bd. 2, North-Holland Publishing Company, Amsterdam, 1976, Hg. von Hans Freudenthal.

- [Can83a] Georg Cantor, *Fondements d'une théorie générale des ensembles*, Acta Mathematica **2** (1883), 381–408.
- [Can83b] ———, *Über unendliche, lineare Punktmannichfaltigkeiten V*, Mathematische Annalen **21** (1883), 545–591.
- [Can32] ———, *Gesammelte Abhandlungen mathematischen und philosophischen Inhalts*, Springer, Berlin, 1932, Hg. von Ernst Zermelo.
- [Chi15] Edward Wilson Chittenden, *The Converse of the Heine-Borel Theorem in a Riesz Domain*, Bulletin of the American Mathematical Society **21** (1915), 179–183.
- [Chi19] ———, *On the Heine-Borel Property in the Theory of Abstract Sets*, Bulletin of the American Mathematical Society **25** (1919), 60–66.
- [CJ99] Tony Crilly und Dale M. Johnson, *The Emergence of Topological Dimension Theory*, in James [Jam99], S. 1–24.
- [CM90] Yves Cohen und Klaus Manfrass (Hg.), *Frankreich und Deutschland: Forschung, Technologie und industrielle Entwicklung im 19. und 20. Jh.*, Beck, München, 1990.
- [Coo92] Roger Cooke, *Uniqueness of Trigonometric Series and Descriptive Sets Theory 1870-1985*, Archive for History of Exact Sciences **45** (1992), 281–334.
- [Cor96] Leo Corry, *Modern algebra and the rise of mathematical structures*, Birkhäuser, Basel, 1996.
- [Cor97a] ———, *David Hilbert and the axiomatization of physics (1894-1905)*, Archive for History of Exact Sciences **51** (1997), Nr. 2, 83–198.
- [Cor97b] ———, *Hermann Minkowski and the postulate of Relativity*, Archive for the History of Exact Sciences **51** (1997), 273–314.
- [Cor97c] ———, *The origins of eternal truth in modern mathematics: Hilbert to Bourbaki and beyond*, Science in Context **10** (1997), 253–296.
- [Cor04] ———, *David Hilbert and the axiomatization of physics (1898 - 1918) from Grundlagen der Geometrie to Grundlagen der Physik*, Kluwer, Dordrecht, 2004.
- [Csá60] Ákos Császár, *Fondements de la topologie générale*, Akadémiai Kiadó, Budapest, 1960.
- [Csá75] Ákos Császár, *Mathematical Sciences*, in Érdey-Grúz und Kulcsár [EGK75], S. 144–157.

- [Dal92] Dirk van Dalen (Hg.), *Intuitionismus von Luitzen Egbertus Jan Brouwer*, BI Wissenschaftsverlag, Mannheim, 1992.
- [Dal95] ———, *Hermann Weyl's intuitionistic mathematics*, *The Bulletin of Symbolic Logic* **1** (1995), Nr. 2, 145–169.
- [Dal99] ———, *Mystic, Geometer, and Intuitionist. The Life of L.E.J. Brouwer*, Clarendon Press, Oxford, 1999.
- [Dau75] Joseph W. Dauben, *The invariance of dimension: problems in the early development of set theory and topology*, *Historia Mathematica* **2** (1975), 273–288.
- [Dau79] ———, *Georg Cantor. His Mathematics and Philosophy of the Infinite*, Harvard University Press, Cambridge, 1979.
- [De 04] De Séguier, J.A., *Éléments de la théorie des groupes abstraits*, Gauthier-Villars, Paris, 1904.
- [Dho95] Jean Dhombres, *Nationale Bedingungen mathematischer Kultur in Deutschland und Frankreich in den Jahren um 1900*, in Jordan und Kortländer [JK95], S. 312–333.
- [Die81] Jean Dieudonné, *History of Functional Analysis*, North-Holland Publishing Company, Amsterdam, 1981.
- [Dra98] Jules Drach, *Essai sur une théorie générale de l'intégration et sur la classification des transcendentes*, *Annales scientifiques de l'École Normale supérieure (Série 3)* **15** (1898), 243–384.
- [Dug76] Pierre Dugac, *Notes et documents sur la vie et l'œuvre de René Baire*, *Archive for History of Exact Sciences* **15** (1976), 297–383.
- [Dug89] ———, *Sur la correspondance de Borel et le théorème de Dirichlet - Heine - Weierstrass - Borel - Schoenflies - Lebesgue*, *Archives Internationales d'Histoire des Sciences* **39** (1989), Nr. 122, 69–110.
- [Edw98] Harold M. Edwards, *Kummer and Kronecker*, in Begehr et al. [B+98], S. 61–69.
- [EGK75] Tibor Érdey-Grúz und Kálmán Kulcsár (Hg.), *Science and Scholarship in Hungary*, Corvina Press, Budapest, 1975.
- [Epp99] Moritz Epple, *Die Entstehung der Knotentheorie. Kontexte und Konstruktionen einer modernen mathematischen Theorie*, Vieweg, Wiesbaden, 1999.

- [Epp00a] ———, *Did Brouwer’s intuitionistic analysis satisfy its own epistemological standards?*, in Hendricks et al. [H⁺00], S. 131–163.
- [Epp00b] ———, *Genies, Ideen, Institutionen, mathematische Werkstätten: Formen der Mathematikgeschichte. Ein metahistorischer Essay*, Math. Semesterber. **47** (2000), Nr. 2, 131–163.
- [ET94] Eugen Eichhorn und Ernst-Jochen Thiele (Hg.), *Vorlesungen zum Gedenken an Felix Hausdorff*, Berliner Studienreihe zur Mathematik, Bd. 5, Heldermann, Berlin, 1994.
- [Fat06] Pierre Fatou, *Séries trigonométriques et séries de Taylor*, Acta Mathematica **30** (1906), 335–400.
- [Fec60] Gustav Theodor Fechner, *Elemente der Psychophysik*, Breitkopf & Haertel, Leipzig, 1860.
- [Fej00] Lipót Fejér, *Sur les fonctions bornées et intégrables*, Comptes Rendus de l’Académie des Sciences de Paris **131** (1900), 984–987.
- [Fej70] Leopold Fejér (Hg.), *Gesammelte Arbeiten*, Birkhäuser, Basel, 1970, Hg. von Pál Turán.
- [Fer99] José Ferreirós, *Labyrinth of Thought: A History of Set Theory and its Role in Modern Mathematics*, Birkhäuser, Basel, 1999.
- [Fré04] Maurice Fréchet, *Généralisation d’un théorème de Weierstrass*, Comptes Rendus de l’Académie des Sciences de Paris **139** (1904), 848–850.
- [Fré05a] ———, *La notion d’écart dans le Calcul fonctionnel*, Comptes Rendus de l’Académie des Sciences de Paris **140** (1905), 772–774.
- [Fré05b] ———, *Les ensembles de courbes continues*, Comptes Rendus de l’Académie des Sciences de Paris **141** (1905), 873–875.
- [Fré05c] ———, *Sur l’écart de deux courbes et sur les courbes limites*, Transactions of the American Mathematical Society **6** (1905), 435–449.
- [Fré05d] ———, *Sur les fonctions d’une infinité de variables*, Comptes Rendus de l’Académie des Sciences de Paris **140** (1905), 567–568.
- [Fré05e] ———, *Sur les fonctions limites et les opérations fonctionnelles*, Comptes Rendus de l’Académie des Sciences de Paris **140** (1905), 27–29.
- [Fré06] ———, *Sur quelques points du Calcul fonctionnel (thèse de doctorat, Paris, 1906)*, Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo **22** (1906), 1–74.

- [Fré07] ———, *Sur les ensembles de fonctions et les opération linéaires*, Comptes Rendus de l'Académie des Sciences de Paris **144** (1907), 1414–1416.
- [Fré08] ———, *Essai de Géométrie analytique à une infinité de coordonnées*, Nouvelles Annales de Mathématiques, 4-ième série **8** (1908), 97–116 und 289–317.
- [Fré10] ———, *Les ensembles abstraits et le Calcul fonctionnel*, Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo **30** (1910), 1–26.
- [Fré17] ———, *Sur la notion de voisinage dans les espaces abstraits*, Comptes Rendus de l'Académie des Sciences de Paris **165** (1917), 359–360.
- [Fré18] ———, *Sur la notion de voisinage dans les espaces abstraits*, Bulletin des Sciences Mathématiques **42** (1918), 138–156.
- [Fré21] ———, *Sur les ensembles abstraits*, Annales scientifiques de l'École Normale Supérieure **38** (1921), 341–388.
- [Fré28] ———, *Les espaces abstraits et leur théorie considérée comme introduction à l'analyse générale*, Gauthier-Villars, Paris, 1928.
- [Fré65] ———, *La vie et l'œuvre d'Émile Borel*, L'Enseignement Mathématique **11** (1965), 1–98.
- [G⁺80] Gottfried Gabriel et al. (Hg.), *Gottlob Freges Briefwechsel mit D. Hilbert, E. Husserl, B. Russel, sowie ausgewählte Einzelbriefe Freges*, Felix Meiner, Hamburg, 1980.
- [G⁺90] Siegfried Gottwald et al. (Hg.), *Lexikon bedeutender Mathematiker*, Verlag Harri Deutsch, Frankfurt am Main, 1990.
- [G⁺96a] Catherine Goldstein et al. (Hg.), *L'Europe mathématique: Histoires, mythes, identités*, Maison des Sciences de l'Homme, Paris, 1996.
- [G⁺96b] Jean-Louis Greffe et al. (Hg.), *Henri Poincaré. Science et Philosophie*, Albert Blanchard und Akademie-Verlag, Paris und Berlin, 1996.
- [Gaa64] Steven A. Gaal, *Point set topology*, Cademic Press, New York, 1964.
- [Går70] Lars Gårding, *Marcel Riesz in Memoriam*, Acta Mathematica **124** (1970), i–xi.
- [Går97] ———, *Mathematics in Sweden before 1950*, AMS and LMS, Providence, 1997.
- [GG90] Ivor Grattan-Guinness, *Convolution in French Mathematics 1800-1840*, Birkhäuser, Basel, 1990.

- [GG94a] Ivor Grattan-Guinness (Hg.), *Companion Encyclopedia on the History and Philosophy of the Mathematical Sciences*, Routledge, London, 1994.
- [GG94b] ———, *France*, in Guinness-Encyclopedia [GG94a], S. 1430–1441.
- [Gil90] Charles Coulston Gillispie (Hg.), *Dictionary of Scientific Biography*, Charles Scribner’s Sons, New York, 1970-1990.
- [Gis80] Hélène Gispert, *Correspondance de Fréchet (1907-1926) et son apport à la théorie de la dimension (avec 3 lettres de Brouwer à Baire)*, Cahiers du Séminaire d’Histoire des Mathématiques **1** (1980), 69–120.
- [Gis83] ———, *Sur les fondements de l’analyse en France*, Archive for History of Exact Sciences **28** (1983), 37–106.
- [Gis91] ———, *La France mathématique. La Société mathématique de France (1872-1914)*, Société Française d’Histoire des Sciences et des Techniques & Société Mathématique de France, Paris, 1991.
- [Gis95] ———, *La théorie des ensembles en France avant la crise de 1905: Baire, Borel, Lebesgue ... et tous les autres*, Revue d’Histoire des Mathématiques **1** (1995), 39–81.
- [Gis02] ———, *The Effects of War on France’s International Role in Mathematics, 1870-1914*, in Parshall und Rice [PR02], S. 105–121.
- [Gra84] J. D. Gray, *The Shaping of the Riesz Representation Theorem: A Chapter in the History of Analysis*, Archive for History of Exact Sciences **31** (1984), 127–187.
- [Gra97] Jeremy J. Gray, *König, Hadamard and Kürschak, and Abstract Algebra*, The Mathematical Intelligencer **19** (1997), Nr. 2, 61–64.
- [Gra99] Jeremy J. Gray (Hg.), *The Symbolic Universe; Geometry and Physics 1890-1930*, Oxford University Press, Oxford, 1999.
- [Gra00] ———, *The Hilbert Challenge*, Oxford University Press, New York, 2000.
- [Gre67] John Greever, *Theory and examples of Point-Set Topology*, Brooks and Cole Publishing Company, Belmont, 1967, Wiedergedruckt 1969.
- [GT96] Hélène Gispert und Renate Tobies, *A comparative study of the French and German Mathematical Societies before 1914*, in Goldstein et al. [G+96a], S. 407–430.
- [H+00] V.F. Hendricks et al. (Hg.), *Proof theory*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 2000.

- [Haa10] Alfréd Haar, *Zur Theorie der orthogonalen Funktionensysteme (Erste Mitteilung)*, *Mathematische Annalen* **69** (1910), 331–371.
- [Haa11] ———, *Über einfach geordnete Mengen*, *Journal für reine und angewandte Mathematik* **139** (1911), 16–28.
- [Had98] Jaques Hadamard, *Sur certaines applications possibles de la théorie des ensembles*, *Verhandlungen des ersten Internationalen Mathematiker-Kongresses in Zürich vom 9. bis 11. August 1897 (Leipzig)*, 1898, S. 201–202.
- [Had10] ———, *Leçons sur le calcul des variations*, Librairie scientifique A. Hermann et fils, Paris, 1910.
- [Had47] ———, *Leçons de Géométrie élémentaire*, 13. Aufl., Armand Colin, Paris, 1947, Erste Edition 1898.
- [Hau98] Ralf Haubrich, *Frobenius, Schur, and the Berlin Algebraic Tradition*, in Begehr et al. [B+98], S. 83–96.
- [Haw70] Thomas Hawkins, *Lebesgue's Theory of Integration. Its origins and Development*, The University of Wisconsin Press, Madison, 1970.
- [Haw00] ———, *Emergence of the Theory of Lie Groups. An Essay in the History of Mathematics 1869-1926*, Springer, New York, 2000.
- [Hei93] Michael Heidelberger, *Die innere Seite der Natur. Gustav Theodor Fechners wissenschaftlich-philosophische Weltauffassung*, Vittorio Klostermann, Frankfurt am Main, 1993.
- [Hes03] Dennis E. Hesselning, *Gnomes in the fog*, Birkhäuser, Basel, 2003.
- [HHP02] H. Herrlich, M. Hušek, und G. Preuß, *Zusammenhang*, in Purkert [Pur02a], S. 752ff.
- [Hil99] David Hilbert, *Grundlagen der Geometrie*, Teubner, Leipzig, 1899.
- [Hil02] ———, *Ueber die Grundlagen der Geometrie*, *Göttinger Nachrichten* (1902), 233–241.
- [Hil03] ———, *Ueber die Grundlagen der Geometrie*, *Mathematische Annalen* **56** (1903), 381–422.
- [Hil05] ———, *Über eine Anwendung der Integralgleichungen auf ein Problem der Funktionentheorie*, in IMK [IMK05], S. 233–240.

- [Hil09] ———, *Wesen und Ziele einer Analysis der unendlichvielen unabhängigen Variablen*, Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo **27** (1909), 59–74.
- [Hil26] Theophil H. Hildebrandt, *The Borel theorem and its generalizations*, Bulletin of the American Mathematical Society **32** (1926), 423–474.
- [Hil35] David Hilbert, *Gesammelte Abhandlungen*, Springer, Berlin, 1935.
- [Hil56] ———, *Grundlagen der Geometrie*, achte Aufl., Teubner, 1956.
- [Hoc99] Thomas Hochkirchen, *Maß- und Integrationstheorie von Riemann bis Lebesgue*, in Jahnke [Jah99], S. 329–369.
- [Hoe84] Jörg K. Hoensch, *Geschichte Ungarns 1867-1983*, Kohlhammer, Stuttgart, 1984.
- [IMK05] *Verhandlungen des III. Internationalen Mathematiker-Kongresses in Heidelberg von 8. bis 13. August 1904*, Leipzig, 1905.
- [IMK09] *Atti del IV Congresso Internazionale dei Matematici. Roma, 6 - 11 Aprile 1908*, Roma, 1909.
- [Jah99] H. Niels Jahnke (Hg.), *Geschichte der Analysis*, Spektrum Akademischer Verlag, Heidelberg, 1999.
- [Jam99] I. M. James (Hg.), *History of Topology*, Elsevier, Amsterdam, 1999.
- [JK95] Lothar Jordan und Bernd Kortländer (Hg.), *Nationale Grenzen und internationaler Austausch. Studien zur Kultur- und Wissenschaftstransfer in Europa*, Niemeyer, Tübingen, 1995.
- [Joh81] Dale M. Johnson, *The Problem of the Invariance of Dimension in the Growth of Modern Topology Part 2*, Archive for History of Exact Sciences **25** (1981), 85–267.
- [Jul56] Gaston Julia, *Notice nécrologique sur Frédéric Riesz, Correspondant pour la Section de Géométrie*, C.R. hebdomadaires des seances de l'Academie des Sciences **242** (1956), 2193–2195.
- [KH11] József Kürschák und Jaques Hadamard, *Propriétés générales des corps et des variétés algébriques*, Encyclopédie des Sciences Mathématiques pures et appliquées **1** (1910-1911), Nr. 2, 235–285.
- [Kle26] Felix Klein, *Vorlesungen über die Entwicklung der Mathematik im 19. Jahrhundert*, Julius Springer, Berlin, 1926.

- [Kli72] Morris Kline, *Mathematical Thought from Ancient to Modern Times*, Oxford University Press, New York, 1972.
- [KM99] Teun Koetsier und Jan van Mill, *By Their Fruits ye Shall Know Them: Some Remarks on the Interaction of General Topology with other Areas of Mathematics*, in James [Jam99], S. 199–239.
- [Kön05a] Gyula König, *Über die Grundlagen der Mengenlehre und das Kontinuumproblem*, *Mathematische Annalen* (1905), 156–160.
- [Kön05b] ———, *Zum Kontinuumproblem*, in IMK [IMK05], S. 144–147.
- [Kön14] ———, *Neue Grundlagen der Logik, Arithmetik und Mengenlehre*, Teubner, Leipzig, 1914.
- [Kre90] Erwin Kreyszig, *Friedrich Riesz als Wegbereiter der Funktionalanalysis*, *Elemente der Mathematik* **45** (1990), 117–130.
- [Kre97] ———, *Interaction between General Topology and Functional Analysis*, in Aull und Lowen [AL97], S. 357–389.
- [Kür02] József Kürschák, *Das Streckenabtragen*, *Mathematische Annalen* **55** (1902), 597–598.
- [Leb02] Henri Lebesgue, *Intégrale, longueur, aire*, *Ann. mat. pura appl.* **7** (1902), Nr. 3, 231–259.
- [Leb04] ———, *Leçons sur l'intégration et la recherche des fonctions primitives*, *Collection de monographies sur la théorie des fonctions*, Gauthier-Villars, Paris, 1904.
- [Leb28] ———, *Leçons sur l'intégration et la recherche des fonctions primitives*, (1. Aufl. 1904) zweite Aufl., *Collection de monographies sur la théorie des fonctions*, Gauthier Villars, Paris, 1928.
- [Leb73] ———, *Oeuvres scientifiques par Henri Lebesgue*, *L'Enseignement mathématiques*, Université de Genève, Genève, 1972/73, 5 Bände.
- [Lor16] Wilhelm Lorey, *Das Studium der Mathematik an den deutschen Universitäten seit Anfang des 19. Jahrhunderts*, Teubner, Leipzig, 1916.
- [Lor93] Edgar R. Lorch, *Szeged in 1934*, *Amer. Math. Mon.* **100** (1993), 219–230.
- [Lüt90] Jesper Lützen, *Joseph Liouville, 1809-1882*, Springer, New York, 1990.
- [Man64] J.H. Manheim, *The genesis of point set topology*, Pergamon Press, Oxford, 1964.

- [Mar96] Georg Marx, *The myth of the Martians and the golden age of Hungarian science*, *Sci. and Educ.* **5** (1996), 225–234.
- [Mat91] Herbert Matis, *Grundzüge der österreichischen Wirtschaftsentwicklung 1848-1914*, Innere Staatsbildung und gesellschaftliche Modernisierung in Österreich und Deutschland 1867/71 bis 1914 (Helmut Rumpler, Hg.), Oldenbourg, München, 1991, S. 107–124.
- [Mik75] M. Mikolás, *Some historical aspects of the development of mathematical analysis in Hungary*, *Historia Mathematica* **2** (1975), 304–308.
- [Mon73] A.F. Monna, *Functional Analysis in Historical Perspective*, Oosthoek Publishing Company, Utrecht, 1973.
- [Mon75] ———, *Dirichlet's Principle*, Oosthoek, Utrecht, 1975.
- [Moo15] Robert L. Moore, *The linear continuum in terms of point and limit*, *Annals of Mathematics* **16** (1915), Nr. 2, 123–133.
- [Moo82] Gregory H. Moore, *Zermelo's Axiom of Choice. Its origins, Development and Influence*, Springer, New York, 1982.
- [Moo89] ———, *Towards A History of Cantor's Continuum Problem*, in Rowe und McCleary [RM89], S. 79–121.
- [MS98] Vladimir Maz'ya und Tatyana Shaposhnikova, *Jacques Hadamard, a Universal Mathematician*, AMS, Providence, 1998.
- [Nab00] Philippe Nabonnand, *La polémique entre Poincaré et Russell au sujet du statut des axiomes de la géométrie*, *Revue d'histoire des mathématiques* **6** (2000), 219–269.
- [P⁺02] Walter Purkert et al., *Zum Begriff des topologischen Raumes*, in Purkert [Pur02a], S. 675–744.
- [Pec90] Volker Peckhaus, *Hilbertprogramm und kritische Philosophie. Das Göttinger Modell interdisziplinärer Zusammenarbeit zwischen Mathematik und Philosophie*, Vandenhoeck & Ruprecht, Göttingen, 1990.
- [Pec94] ———, *Hilbert's axiomatic programme and philosophy*, *The History of Modern Mathematics. Vol. III: Images, Ideas, and Communities* (David Rowe und Eberhard Knobloch, Hg.), Academic Press, Boston, 1994, S. 91–112.
- [Pee88] Jaak Peetre, *Marcel Riesz in Lund*, *Function spaces and applications*, *Proc. US-Swed. Semin.*, Bd. 1302, *Lect. Notes Math.*, Lund/Swe., 1988, S. 1–10.

- [Pér54] J. Pérèz, *Zur Biographie von Friedrich Riesz*, Annales Univ. Paris **24** (1954), 515–517.
- [PI87] Walter Purkert und Hans Joachim Ilgauds, *Georg Cantor*, Birkhäuser, Basel, 1987.
- [Pie80] Jean-Paul Pier, *Historique de la notion de compacité*, Historia Mathematica **7** (1980), Nr. 4, 425–443.
- [Pie94] Jean-Paul Pier (Hg.), *Development of Mathematics 1900-1950*, Birkhäuser, Basel, 1994.
- [Poi93] Henri Poincaré, *Le continu mathématique*, Revue de Métaphysique et de Morale **1** (1893), 26–34.
- [Poi98] ———, *On the foundations of geometry*, The Monist **9** (1898), 1–43.
- [Poi02] ———, *La science et l'hypothèse*, Flammarion, Paris, 1902.
- [Poi03] ———, *L'espace et ses trois dimensions*, Revue de métaphysique et de morale **11** (1903), 281–301, 407–429.
- [Poi08] ———, *La valeur de la science*, Flammarion, 1908.
- [Poi10] ———, *Der Wert der Wissenschaft*, zweite deutsche Aufl., Teubner, Leipzig, 1910.
- [Poi14] ———, *Wissenschaft und Hypothese*, dritte deutsche Aufl., Teubner, Leipzig, 1914.
- [Poi00] ———, *La science et l'hypothèse*, Champs Flammarion, Paris, 2000.
- [PR94] Karen Hunger Parshall und David E. Rowe, *The Emergence of the American Mathematical Research Community, 1876-1900*, AMS/LMS, Providence, 1994.
- [PR02] Karen Parshall und Adrian C. Rice (Hg.), *Mathematics Unbound: The Evolution of an International Mathematical Research Community 1800-1945*, AMS, Providence, 2002.
- [Pur86] Walter Purkert, *Georg Cantor und die Antinomien der Mengenlehre*, Bulletin de la Société Mathématique de Belgique [Sonderband Mathematics. Topology, History, Philosophy. In Honor of Guy Hirsch]. Ser. A **38** (1986), 313–327.
- [Pur87] ———, *Cantors Untersuchungen über die Eindeutigkeit der Fouriarentwicklung im Lichte seines Briefwechsels mit H. A. Schwarz*, Schriftenreihe für Geschichte der Naturwissenschaften, Technik, Medizin **24** (1987), Nr. 2, 19–28.

- [Pur89] ———, *Cantor's views on the Foundations of Mathematics*, in Rowe und McCleary [RM89], S. 48–65.
- [Pur02a] Walter Purkert (Hg.), *Felix Hausdorff. Gesammelte Werke Band II: Grundzüge der Mengenlehre*, Springer, Berlin, 2002.
- [Pur02b] ———, *Grundzüge der Mengenlehre. Historische Einführung*, in *Felix Hausdorff. Gesammelte Werke Band II: Grundzüge der Mengenlehre* [Pur02a], S. 1–89.
- [Pv94] Jan Plato von, *Creating Modern Probability. Its Mathematics, Physics and Philosophy in Historical Perspective*, University Press, Cambridge, 1994.
- [Rei70] Constance Reid, *Hilbert*, Springer, New York, 1970.
- [Rei79] ———, *Richard Courant 1888-1972*, Springer, New York, 1979.
- [Rie02] Friedrich Riesz, *A negyedrendű elsőfajú térgörbén levő pontkonfigurációk helyzetgeometriai tárgyalása (Doktori értekezés) Teil I*, *Mathematikai és Fizikai Lapok* **11** (1902), 293–309.
- [Rie04a] ———, *A negyedrendű elsőfajú térgörbén levő pontkonfigurációk helyzetgeometriai tárgyalása (Doktori értekezés) Teil II*, *Mathematikai és Fizikai Lapok* **13** (1904), 191–204.
- [Rie04b] ———, *Sur la résolution approchée de certaines congruences*, *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences de Paris* **139** (1904), 459–462.
- [Rie04c] ———, *Über einen Satz der Analysis situs*, *Mathematische Annalen* **59** (1904), 409–415.
- [Rie05a] ———, *Az analysis situsak egy tételéről*, *Mathematikai és Fizikai Lapok* **14** (1905), 13–24.
- [Rie05b] ———, *Sur les ensembles discontinus*, *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences de Paris* **141** (1905), 650–653.
- [Rie05c] ———, *Sur un théorème de M. Borel*, *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences de Paris* **140** (1905), 224–226.
- [Rie05d] ———, *Über mehrfache Ordnungstypen I*, *Mathematische Annalen* **61** (1905), 406–421.
- [Rie06] ———, *Sur les ensembles de fonctions*, *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences de Paris* **143** (1906), 738–741.

- [Rie07a] ———, *A térfogalom genesisise*, *Mathematikai és Fizikai Lapok* **15-16** (1906/1907), 97–122; 145–161.
- [Rie07b] ———, *Die Genesis des Raumbegriffes*, *Mathematische und naturwissenschaftliche Berichte aus Ungarn* **24** (1907), 309–353.
- [Rie07c] ———, *Sur les systèmes orthogonaux de fonctions*, *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences de Paris* **144** (1907), 615–619.
- [Rie07d] ———, *Sur les systèmes orthogonaux de fonctions et l'équation de Fredholm*, *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences de Paris* **144** (1907), 734–736.
- [Rie07e] ———, *Sur une espèce de géométrie analytique des systèmes de fonctions sommables*, *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences de Paris* **144** (1907), 1409–1411.
- [Rie07f] ———, *Ueber orthogonale Funktionensysteme*, *Göttinger Nachrichten* (1907), 116–122.
- [Rie09] ———, *Stetigkeitsbegriff und abstrakte Mengenlehre*, in *IMK* [IMK09], S. 18–24.
- [Rie10] ———, *Untersuchungen über Systeme integrierbarer Funktionen*, *Mathematische Annalen* **69** (1910), 449–497.
- [Rie13] ———, *Les systèmes d'équations linéaires à une infinité d'inconnues*, *Collection de monographies sur la théorie des fonctions*, Gauthier-Villars, Paris, 1913.
- [Rie60] ———, *Gesammelte Arbeiten*, *Ungarische Akademie der Wissenschaften*, Budapest, 1960, Hg. von Ákos Császár.
- [RM89] David E. Rowe und John McCleary (Hg.), *The History of Modern Mathematics, Vol. I: Ideas and Their Reception*, Academic Press, Boston, 1989.
- [Rog56] W.W. Rogosinski, *Frederic Riesz*, *The Journal of the London Mathematical Society* **31** (1956), 508–512.
- [Roo14a] Ralph E. Root, *Iterated Limits in General Analysis*, *American Journal of Mathematics* **36** (1914), 79–133.
- [Roo14b] ———, *Limits in Terms of Order, with Example of Limiting Element not Approachable by a Sequence*, *Transactions of the American Mathematical Society* **36** (1914), 51–57.

- [Row89] David E. Rowe, *Klein, Hilbert, and the Göttingen Mathematical Tradition*, Osiris (2nd series) **5** (1989), 186–213.
- [Row94] ———, *David Hilbert und seine mathematische Welt*, Forschungsmagazin der Johannes Gutenberg-Universität Mainz (1994), 34–39.
- [Row95] ———, *The Hilbert Problems and the Mathematics of a New Century*, Preprints-Reihe des FB Mathematik, Johannes Gutenberg-Universität Mainz (1995), 1–39.
- [Row97] ———, *Perspective on Hilbert*, Perspectives on Science **5** (1997), Nr. 4, 533–570.
- [Row98] ———, *Mathematics in Berlin, 1810-1933*, in Begehr et al. [B+98], S. 9–26.
- [Row00] ———, *Episodes in the Berlin–Göttingen Rivalry, 1870-1930*, The Mathematical Intelligencer **22** (2000), Nr. 1, 60–69.
- [Row01] ———, *Einstein Meets Hilbert: At the Crossroads of Physics and Mathematics*, Physics in Perspective **3** (2001), 379–424.
- [Row03] ———, *Mathematical Schools, Communities, and Networks*, The Cambridge History of Science (Mary Jo Nye, Hg.), Bd. 5, Cambridge University Press, Cambridge, 2003, S. 113–132.
- [RR16] Friedrich Riesz und Marcel Riesz, *Über die Randwerte einer analytischen Funktion*, Comptes Rendus du Quatrième Congrès des Math. Scand. (Stockholm), 1916, S. 27–44.
- [RS52] Friedrich Riesz und Béla Szőkefalvi-Nagy, *Leçons d'analyse fonctionnelle*, Akadémiai kiadó, Budapest, 1952.
- [Sch00] Arthur Schoenflies, *Die Entwicklung der Lehre von den Punktmannigfaltigkeiten. 1. Teil*, Jahresbericht der DMV **8** (1900), 1–251.
- [Sch02] ———, *Ueber einen grundlegenden Satz der Analysis Situs*, Göttinger Nachrichten (1902), 185–192.
- [Sch03] ———, *Über den Beweis eines Haupttheorems aus der Theorie der Punktmengen*, Göttinger Nachrichten (1903), 21–31.
- [Sch04a] ———, *Beiträge zur Theorie der Punktmengen. I*, Mathematische Annalen **58** (1904), 195–234.
- [Sch04b] ———, *Beiträge zur Theorie der Punktmengen. II*, Mathematische Annalen **59** (1904), 129–160.

- [Sch04c] ———, *Ueber die geometrischen Invarianten der Analysis Situs*, Göttinger Nachrichten (1904), 514–525.
- [Sch07] Erhard Schmidt, *Zur Theorie der linearen und nichtlinearen Integralgleichungen. I. Teil: Entwicklung willkürlicher Funktionen nach Systemen vorgeschriebener*, Mathematische Annalen **63** (1907), 433–476.
- [Sch08a] ———, *Über die Auflösung linearer Gleichungen mit unendlich vielen Unbekannten*, Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo **25** (1908), 53–77.
- [Sch08b] Arthur Schoenflies, *Bemerkungen zum 2. Teil des Berichtes über die Entwicklung der Lehre von den Punktmannigfaltigkeiten*, Jahresbericht der DMV **17** (1908), 274–275.
- [Sch08c] ———, *Die Entwicklung der Lehre von den Punktmannigfaltigkeiten II*, Jahresbericht der DMV (Ergänzungsband II), Teubner, Leipzig, 1908.
- [Sch99] Erhard Scholz, *The Concept of Manifold, 1850-1950*, in James [Jam99], S. 25–64.
- [Sch00] ———, *Herman Weyl on the concept of continuum*, in Hendricks et al. [H⁺00], S. 195–217.
- [SH13] Arthur Schoenflies und Hans Hahn, *Entwicklung der Mengenlehre und ihrer Anwendungen*, Teubner, Leipzig, 1913.
- [Smi56] F. Smithies, *Obituaries Prof. F. Riesz*, Nature **177** (1956), 870–871.
- [SN59] Béla Szőkefalvi-Nagy (Hg.), *Gesammelte Arbeiten von Alfréd Haar*, Ungarische Akademie der Wissenschaften, Budapest, 1959.
- [SN83] Béla Szőkefalvi-Nagy, *F. Riesz: his life and style*, Colloq. Math. Soc. János Bolyai: Proceedings of the International Conference on Functions, Series, Operators held in Budapest, August 22-28, 1980 **35** (1983), Nr. 1, 69–76.
- [SS82] Reinhard Siegmund-Schultze, *Die Anfänge der Funktionalanalysis und ihr Platz im Umwälzungsprozeß der Mathematik um 1900*, Archive for History of Exact Sciences **26** (1982), 13–71.
- [SS98] ———, *Eliakim Hastings Moore's "General Analysis"*, Archive for History of Exact Sciences **52** (1998), 51–89.
- [Sta98] Richard Staley, *On the Histories of Relativity*, Isis **89** (1998), 263–299.
- [Szé65] Barna Szénássy, *Gyula König 1849-1913*, Budapest, 1965, (ungar.).

- [Szé92] ———, *History of mathematics in Hungary until the 20th century*, Springer, Berlin, 1992.
- [Tay82] Angus E. Taylor, *A Study of Maurice Fréchet: I. His early Work on Point Set Theory and the Theory of Functionals*, *Archive for History of Exact Sciences* **27** (1982), 233–295.
- [Tay85] ———, *A Study of Maurice Fréchet: II. Mainly about his Work on General Topology*, *Archive for History of Exact Sciences* **34** (1985), 279–380.
- [Tay87] ———, *A study of Maurice Fréchet. III: Fréchet as analyst, 1909-1930.*, *Archive for History of Exact Sciences* **37** (1987), 25–76.
- [Thi96] Joachim Thiele, *Briefe von Gustav Theodor Fechner und Ludwig Boltzman an Ernst Mach*, *Centaurus* **11** (1996), 222–235.
- [Thi97a] Rüdiger Thiele, *Über die Variationsrechnung in Hilberts Werken zur Analysis*, *NTM* **5** (1997), 23–42.
- [Thi97b] ———, *Über die Variationsrechnung in Hilberts Werken zur Analysis*, *NTM* **5** (1997), 23–42.
- [Thr66] Wolfgang Thron, *Topological structures*, Holt, Rinehardt and Winston, New York, 1966.
- [Thr97] W.J. Thron, *Frederic Riesz' contributions to the foundations of general topology*, in Aull und Lowen [AL97], S. 21–29.
- [Tie23] Heinrich Tietze, *Beiträge zur allgemeinen Topologie I. Axiome für verschiedene Fassungen des Umgebungsbegriffs*, *Mathematische Annalen* **88** (1923), 290–312.
- [Toe86] Michael M. Toepell, *Über die Entstehung von David Hilberts "Grundlagen der Geometrie"*, Vandenhoeck & Ruprecht, Göttingen, 1986.
- [Tor78] Roberto Torretti, *Philosophy of Geometry from Riemann to Poincaré*, *Episteme*, Bd. 7, Reidel, Dordrecht, 1978.
- [Vie21] Leopold Vietoris, *Stetige Mengen*, *Monatshefte für Mathematik und Physik* **31** (1921), 173–204.
- [Vie91] Rudolf Vierhaus, *Zur Entwicklung der Wissenschaften im Deutschen Kaiserreich*, *Innere Staatsbildung und gesellschaftliche Modernisierung in Österreich und Deutschland 1867/71 bis 1914* (Helmut Rumpler, Hg.), Oldenbourg, München, 1991, S. 194–204.
- [Wey13] Hermann Weyl, *Die Idee der Riemannschen Fläche*, Teubner, 1913, Wiedergedruckt 1997.

- [Wey21] ———, *Über die neue Grundlagenkrise der Mathematik*, Mathematische Zeitschrift **10** (1921), 39–79.
- [Wey44] ———, *David Hilbert and his mathematical work*, Bulletin of the American Mathematical Society **50** (1944), 612–654.
- [Wey68] Hermann Weyl (Hg.), *Gesammelte Abhandlungen*, Springer, Heidelberg, 1968, Hg. von K. Chandrasekharan.
- [Wil78] R.L. Wilder, *Evolution of the topological concept of “connected”*, American mathematical monthly **85** (1978), 720–726.
- [Wol91] Stefan L. Wolff, *Das ungarische Phänomen: Ein Fallbeispiel zur Emigrationsforschung*, Deutsches Museum, Wissenschaftliches Jahrbuch (1991), 228–245.
- [Wuß69] Hans Wußing, *Die Genesis des abstrakten Gruppenbegriffes*, Deutscher Verlag, Berlin, 1969.

Verzeichnis der Archivalien

- Brief von Leopold Fejér an Émile Borel aus dem Jahr 1904.
In: Archive de l’Académie des Sciences de Paris,
Fonds Émile Borel, dossier 3.
- Maurice Fréchet’s Notizen zum Vortrag von Friedrich Riesz auf dem 4. IMK (Notizen in lila Tinte, entstanden nach 1910 LR)
In: Archive de l’Académie des Sciences de Paris,
Fonds Maurice Fréchet, F2.10.
- Brief von David Hilbert an Émile Borel. Poststempel vom 17.11.1904 (im Katalog falsch datiert auf den 17.11.1909 LR).
In: Archive de l’Académie des Sciences de Paris,
Fonds Émile Borel, dossier 3.
- Brief von Friedrich Riesz an David Hilbert vom 18.11.1904, Löcse.
In: Abteilung für Handschriften und seltene Drucke der Niedersächsischen Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen,
David Hilberts Nachlaß, Cod. Ms. Hilbert 332.
- Brief von Friedrich Riesz an David Hilbert, undatiert (wahrscheinlich von Dezember 1904/Januar 1905, LR)
In: Abteilung für Handschriften und seltene Drucke der Niedersächsischen Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen,
David Hilberts Nachlaß, Cod. Ms. Hilbert 332.

- Brief von Friedrich Riesz an Maurice Fréchet von 21.05.1907, Paris.
In: Archive de l'Académie des Sciences de Paris,
Fonds Maurice Fréchet, F2.10.
- Brief von Friedrich Riesz an Maurice Fréchet von 19.06.1907, Göttingen.
In: Archive de l'Académie des Sciences de Paris,
Fonds Maurice Fréchet, F2.10.
- Brief von Friedrich Riesz an Maurice Fréchet von 07.07.1907, Göttingen.
In: Archive de l'Académie des Sciences de Paris,
Fonds Maurice Fréchet, F2.10.
- Brief von Friedrich Riesz an Frau Hilbert vom 23.03.1933, Szeged.
In: Abteilung für Handschriften und seltene Drucke der Niedersächsischen
Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen,
David Hilberts Nachlaß, Cod. Ms. Hilbert 772, Nr. 17.
- Liste der Mitglieder und Gäste der Mathematischen Gesellschaft zu Göttingen
im Wintersemester 1903/04.
In: Universitätsarchiv zu Göttingen.