Effektive Feldtheorie für elektromagnetische Übergänge zwischen pseudoskalaren und Vektor-Mesonen

Dissertation
zur Erlangung des Grades
„Doktor der Naturwissenschaften“

am Fachbereich Physik, Mathematik und Informatik
der Johannes Gutenberg-Universität
in Mainz

Hans Christian Lange
geb. in Wiesbaden-Dotzheim

Mainz, September 2020

Erster Berichterstatter:

Zweiter Berichterstatter:

Datum der mündlichen Prüfung: 10.12.2020
D77 (Dissertation der Johannes Gutenberg-Universität Mainz)

Zusammenfassung

Die vorliegende Dissertation befasst sich mit der Berechnung von elektromagnetischen Übergängen zwischen pseudoskalaren und Vektor-Mesonen $(PV\gamma^{(*)})$. Die Rechnungen werden auf dem Baumgraphenniveau einschließlich von Korrekturen in nächstführender Ordnung in einer simultanen Entwicklung nach externen Impulsen, Quarkmassen und $1/N_C$ durchgeführt. Hierbei steht N_C für die Anzahl der Farbfreiheitsgrade in der Quantenchromodynamik.
Zunächst wird für die elektromagnetischen Übergänge $PV\gamma$ mit einem reellen Photon die Wechselwirkungs-Lagrange-Dichte in führender Ordnung aufgestellt. Darauf aufbauend werden nächstführende Korrekturterme in $1/N_C$ und den Quarkmassen entwickelt. Ausgehend von der Lagrange-Dichte bestimmt sich über das invariante Matrixelement eine allgemeine Formel für die Zerfallsrate der elektromagnetischen Übergänge. Die numerische Anpassung der Parameter an experimentelle Zerfallsraten beginnt mit den Beiträgen führender Ordnung; sukzessive werden Korrekturen in $1/N_C$ (SU(3)-Grenzfall) und den Quarkmassen hinzugenommen. In diesem Zusammenhang werden die Beiträge einzelner Übergänge in den Kopplungskonstanten in Verbindung mit den ω-ϕ- und η-η'- Mischungen untersucht.
Der zweite Teil dieser Arbeit beschäftigt sich mit der Erweiterung des Modells zur Beschreibung der elektromagnetischen Übergänge $PV\gamma$ mit reellen Photonen auf die Dalitz-Zerfälle $PV\ell^+\ell^-$. Hierzu ist zur Berücksichtigung der elektromagnetischen Struktur der Mesonen zusätzlich zu der Punktwechselwirkung der Beitrag eines Feynman-Diagramms mit einem virtuellen Vektor-Meson im Zwischenzustand zu berücksichtigen. Somit sind die Wechselwirkungs-Lagrange-Dichten der in diesem Diagramm enthaltenen Vertices der Wechselwirkung eines Vektor-Mesons mit einem Photon ($V\gamma$) und der Wechselwirkung zwischen einem pseudoskalaren und zwei Vektor-Mesonen (PVV) aufzustellen. Zur Bestimmung der Kopplungskonstanten des PVV-Vertex muss in der Folge der *Gell−Mann-Sharp-Wagner-Prozess* beim Zerfall eines Vektor-Mesons in drei pseudoskalare Mesonen herangezogen werden. Das invariante Matrixelement der Dalitz-Zerfälle $PV\ell^+\ell^-$ setzt sich nun aus dem aus den Wechselwirkungs-Lagrange-Dichten der Prozesse $V\gamma$ und PVV bestimmten Anteil sowie dem bekannten invarianten Matrixelement der Punktwechselwirkung $PV\gamma$ zusammen. Aus diesem lassen sich dann die Zerfallsraten der einzelnen Prozesse numerisch berechnen. Beginnend mit dem Zerfall $\omega \to \pi^0\ell^+\ell^-$ werden sukzessive alle Ergebnisse zu *Übergangsformfaktoren* der Dalitz-Zerfälle der neutralen pseudoskalaren (π^0, η, η') und Vektor-Mesonen (ρ^0, ω, ϕ) dieser Dissertation mit vorhandenen experimentellen Datenreihen und Vorhersagen anderer theoretischer Modelle verglichen.

Abstract

This thesis presents calculations for electromagnetic transitions between pseudoscalar and vector mesons ($PV\gamma^{(*)}$) in the framework of a chiral effective theory. The calculations are performed at the tree-level up to and including corrections of next-to-leading order in a simultaneous expansion in external momenta, quark masses, and $1/N_C$. Here, N_C denotes the number of colors in quantum chromodynamics.

First, the leading-order term of the interaction Lagrangian for electromagnetic transitions $PV\gamma$ with real photons between a single pseudoscalar and a vector meson is constructed. On that basis, the next-to-leading-order corrections in $1/N_C$ and the quark masses are generated. The general formula for the decay rate is calculated starting from the Lagrangian, via the invariant matrix element as an intermediate step. The numerical fitting of the parameters to experimental decay rates begins with the leading-order contributions and corrections in $1/N_C$ (SU(3)-limit) and the quark masses are successively applied. The contribution of single transitions and concurrently of the ω-ϕ and η-η' mixings is analyzed.

The second part of the thesis deals with the extension of the model for the electromagnetic transitions $PV\gamma$ with real photons to the Dalitz decays $PV\ell^+\ell^-$. To that end, the electromagnetic structure which results in an additional Feynman diagram containing a virtual vector meson in an intermediate state has to be considered. Consequently, for this diagram the Lagrangians for the vertices of an interaction between a single vector meson and a photon ($V\gamma$) as well as an interaction between a pseudoscalar and two vector mesons (PVV) have to be constructed. For the calculation of the coupling in the PVV vertex one has to take into account the *Gell–Mann-Sharp-Wagner process* for the decay of a single vector meson into three pseudoscalar mesons ($VPPP$). The invariant matrix element of the Dalitz decays $PV\ell^+\ell^-$ is a composite of the matrix element calculated from the interaction Lagrangians of the vertices $V\gamma$ and PVV as well as the known invariant matrix element of the point interaction $PV\gamma$. From this, the decay rates of all processes are numerically calculated. Starting with the decay $\omega \to \pi^0\ell^+\ell^-$ and successively for all Dalitz decays of the neutral pseudoscalar (π^0, η, η') and vector mesons (ρ^0, ω, ϕ), the calculated *transition form factors* are compared to experimental datasets and other theoretical predictions.

Inhaltsverzeichnis

1. Einleitung

Der Beginn des 21. Jahrhunderts sah mit dem experimentellen Nachweis des Higgs-Bosons [Aad+12; Cha+12] die Vervollständigung des Standardmodells der Elementarteilchenphysik (SM). Dieses Modell beschreibt die bekannten Elementarteilchen, Quarks, Leptonen und (Eich-)Bosonen sowie die Wechselwirkungen zwischen ihnen, die starke, schwache und elektromagnetische Wechselwirkung. Sowohl die starke als auch schwache und elektromagnetische Wechselwirkung sind Quantenfeldtheorien. Die beiden letztgenannten wurden in der elektroschwachen $\mathrm{SU}(2)_L \times \mathrm{U}(1)$-Symmetrie zusammengefasst, aus der mit der durch das Higgs-Boson verursachten Symmetriebrechung die Massen von W- und Z-Bosonen entstehen. Einzig die Gravitation entzieht sich bislang einer Einbeziehung in eine gemeinsame Theorie. Zur Erklärung der Stabilität von Atomkernen als gebundene Zustände von Neutronen und positiv geladenen Protonen wurde mit der Theorie der starken Wechselwirkung eine Gegenkraft kurzer Reichweite zur Kompensation der elektromagnetischen Abstoßung der Protonen entwickelt. Mit Streuexperimenten konnte dann gezeigt werden, dass die als Nukleonen bezeichneten Protonen und Neutronen keine Elementarteilchen sondern zusammengesetzte Systeme mit punktartigen Konstituenten, den Quarks und Gluonen, sind [Blo+69; Bre+69]. Bereits vor ihrer Entdeckung wurde die Existenz von Quarks als hypothetische Teilchen zur Erklärung der Vielzahl stark wechselwirkender Teilchen postuliert [Gel64; Zwe64; LR80]. Innerhalb des Standardmodells ist die starke Wechselwirkung, beschrieben durch eine $\mathrm{SU}(3)_C$-Eichtheorie, die Quantenchromodynamik (QCD) genannt wird [FGL73; GW73a; Wei73], ein fester Bestandteil. Die der Theorie zugehörigen Materiefelder, die Quarks, tragen zusätzlich zu einer elektrischen noch eine sogenannte „Farb-“Ladung, kurz „Farbe“ oder aus dem Englischen „Color“, die drei Werte (rot, grün und blau) annehmen kann. Vermittelt wird die starke Wechselwirkung durch die Gluonen als Austauschteilchen der Theorie, die, im Gegensatz zu den Photonen der elektromagnetischen Wechselwirkung, die elektromagnetisch neutral sind, eine Farbladung annehmen. Daraus herrührend ist eine Selbstwechselwirkung der Gluonen untereinander in Vertices, die aus drei oder vier Gluonen bestehen, zu beobachten.

Obwohl sie die Bausteine der Materie sind, wurden bislang keine freien Quarks, sondern ausschließlich farbneutrale gebundene Zustände aus Quarks, Antiquarks und Gluonen, die sogenannten Hadronen, beobachtet. Dieses „Confinement“ genannte Phänomen [GW73b] entzieht sich bislang im Rahmen der QCD einer mathematisch rigorosen Beschreibung. Eine weitere Eigenschaft der QCD, die mit dem Confinement in Verbindung stehen könnte, ist die sogenannte asymptotische Freiheit [GW73b; GW73a; Pol73]. Beschrieben wird dadurch das Verhalten der Kopplungskonstante der starken Wechselwirkung α_s, gezeigt in Abbildung 1.1, die bei großen Energien kleine Werte annimmt. Dies ermöglicht für die QCD bei großen Energien eine Entwicklung in einer Störungsreihe mit kleinem Parameter α_s. Für niedrigen Energien ist dies allerdings ausgeschlossen, da im Gegensatz zum Verhalten bei großen Energien die Kopplungskonstante hier kein kleiner Parameter ist sondern größere Werte annimmt. Allerdings bedeutet dieses Verhalten der Kopplungskonstanten eine mögliche Erklärung für das beobachtete Confinement. Da bislang eine analytische Lösung der QCD nicht bekannt ist, muss nach Alternativen gesucht werden, die eine Beschreibung der QCD bei niedrigen Energien ermöglichen.

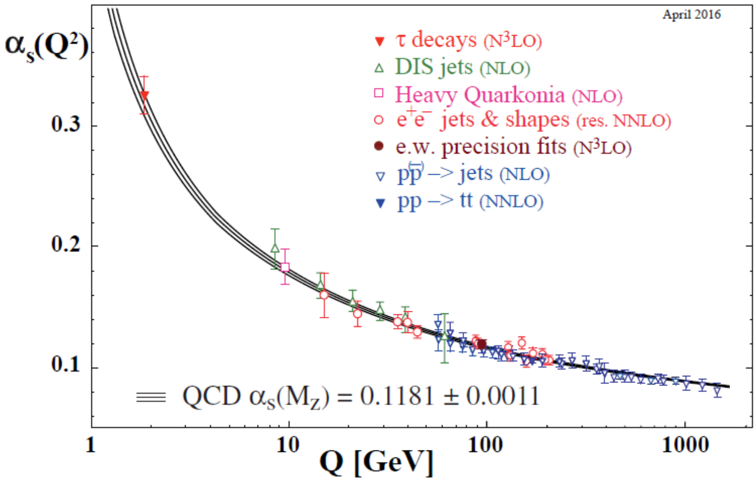

Abbildung 1.1.: Graph der Kopplungskonstanten der starken Wechselwirkung α_s in Abhängigkeit von der Energie Q, entnommen aus [Tan+18].

Eine Möglichkeit für eine nicht-störungstheoretische Berechnung in Quantenfeldtheorien sind die Gittereichtheorien, Einführungen hierzu finden sich in [Wit08; MW19] sowie in den dort genannten Referenzen. Ausgehend von einer Gitterregularisierung, der Einführung eines minimalen Abstands im Raum zur Regularisierung der Theorie, lassen sich numerisch Lösungen bestimmen. In den vergangenen Jahren konnten Rechnungen in Gittereichtheorien große Fortschritte aufweisen, auch wenn sie in Teilen durch die verfügbaren Rechenkapazitäten begrenzt werden, nichtsdestoweniger bleibt eine analytische Methode zum Vergleich wünschenswert. Zur Erfassung von elektromagnetischen Übergängen arbeitet die vorliegende Dissertation mit der Verwendung einer effektiven Feldtheorie (EFT), einer weiteren Variante der Beschreibung der QCD bei niedrigen Energien. Anstelle von Quarks und Gluonen nutzt die EFT die Niederenergiefreiheitsgrade der starken Wechselwirkung, Mesonen und Baryonen. Im Allgemeinen ist eine effektive Feldtheorie die Näherung einer zugrundeliegenden Theorie bei niedrigen Energien und wird mittels einer allgemeinst möglichen, mit der Symmetrie der zugrundeliegenden Theorie konsistenten Lagrange-Dichte formuliert [Wei79]. Obwohl die Symmetrie der Struktur der allgemeinsten Lagrange-Dichte Zwangsbedingungen auferlegt, existiert eine unendliche Anzahl an Termen, von denen jedem eine Niederenergiekonstante (englisch: „low-energy constant“, LEC) zugeordnet ist. Mit einer Lösung der zugrundeliegenden Theorie sollten sich diese auf der Dynamik beruhenden Konstanten berechnen lassen. Sollte allerdings keine direkte Verbindung zur Theorie bestehen, müssen die LEC anhand experimenteller Daten bestimmt werden. Die Aussagekraft der Resultate kann, auch im Hinblick auf die Gültigkeit von Vorhersagen, hergestellt werden, indem die Ergebnisse der EFT in einer Störungsreihe in q/Λ, mit q Impulsen oder Massen und Λ einer intrinsischen Skala, organisiert werden. Wird diese Entwicklung an einer gewählten Ordnung abgebrochen, hat dies eine endliche Anzahl von Kopplungskonstanten zur Folge. Die Anwendung der EFT ist allerdings auf den Bereich niedriger Energien deutlich unterhalb der Skala Λ beschränkt und in Folge der Notwendigkeit des gewählten Abbruchs der Entwicklung nur von begrenzter Genauigkeit.

Die effektive Feldtheorie der starken Wechselwirkung ist die sogenannte chirale Störungstheorie (englisch: „chiral perturbation theory", ChPT) [Wei79; GL84; GL85]. Diese beruht auf der Annahme, dass die $\mathrm{SU}(3)_L \times \mathrm{SU}(3)_R$-Symmetrie der QCD im chiralen Grenzfall, im Limes der Massen der leichten Quarks gegen null und Vernachlässigung der schweren Quarks, spontan zur Untergruppe $\mathrm{SU}(3)_V$ hin gebrochen wird. Infolgedessen treten in der ChPT acht masselose Goldstone-Bosonen als dynamische Freiheitsgrade auf, die mit dem Oktett der pseudoskalaren Mesonen (π, K, η) identifiziert werden. Im Gegensatz zum für die Kopplung der starken Wechselwirkung beobachteten Verhalten bei niedrigen Energien nimmt die Stärke der Wechselwirkung zwischen den Goldstone-Bosonen bei niedrigen Energien ab, womit die Störungsreihe eine Entwicklung in kleinen Impulsen der Goldstone-Bosonen und Massen der Quarks ist. Zur Entscheidung, welche Feynman-Diagramme zu der Berechnung von Amplituden bis zu einer gewählten Ordnung relevant sind, müssen Zählschemata herangezogen werden, Beispiel hierfür ist Weinbergs „power counting" [Wei79]. In diesem wird jedem Diagramm, in Abhängigkeit von dessen Verhalten unter einer Reskalierung der äußeren Impulse und Quark-Massen, eine chirale Ordnung D zugewiesen. Die Selektion ergibt sich dann daraus, dass für genügend kleine Impulse und Massen Diagramme mit größeren D weniger wichtig werden und jene mit kleinem D dominieren. Es ist allerdings zu beachten, dass die ChPT nicht im traditionellen Sinne renormierbar ist, d. h. Divergenzen die aus der Berechnung von Schleifendiagrammen entstehen, können nicht über eine Renormierung einer endlichen Anzahl von Niederenergiekonstanten bis zu eine bestimmten endlichen Ordnung kompensiert werden. Da allerdings Berechnungen in einer EFT nur bis zu einer gewählten Ordnung durchgeführt werden, wird die Renormierbarkeit nur bis zur betrachteten Ordnung gefordert, die Theorie wird somit als renormierbar im „modernen" Sinne bezeichnet [Wei79]. Weiterhin ist es möglich, die Grundprinzipien der ChPT zu einer chiralen effektiven Feldtheorie zu erweitern, die schwere Freiheitsgrade wie Baryonen oder Vektor-Mesonen mit berücksichtigt.

Innerhalb der ChPT ist das η'-Meson in Folge einer Anomalie der $\mathrm{U}(1)_A$-Symmetrie kein Goldstone-Boson. Grund für das Auftreten von Anomalien, die eine Brechung der Symmetrie zur Folge haben, sind Quantenkorrekturen. Im Umkehrschluss bedeutet dies, dass nur auf dem Niveau der klassischen Physik die $\mathrm{U}(1)_A$-Symmetrie erhalten ist. Allerdings wird beobachtet, dass die Anomalie der $\mathrm{U}(1)_A$-Symmetrie für

den Grenzfall einer Annahme einer großen Anzahl von Farbfreiheitsgraden (englisch: „large N_C“, LN_C) in der QCD [t H74; Wit79a] verschwindet und das η' somit zum neunten Goldstone-Boson wird. In der entsprechenden EFT, die LN_CChPT genannt wird [Mou95; Leu96; Her+97; KL; Her98; KL00], kann das η'-Meson demzufolge mittels einer simultanen Entwicklung in den Impulsen, Quark-Massen und $1/N_C$ integriert werden [BMS17].
Bereits vor der Etablierung der QCD wurden Vektor-Mesonen als Zwischenzustände im sogenannten Vektor-Meson-Dominanz-(VMD-)Modell zur Beschreibung der Wechselwirkung energiereicher Photonen mit hadronischer Materie genutzt [Sak69]. Für niedrige Energien bietet die ChPT ein Grundgerüst zur Beschreibung der pseudoskalaren Mesonen. Soll die Theorie hin zu höheren Energien erweitert werden, ist die Inklusion von Vektor-Mesonen als dynamische Freiheitsgrade zwingend erforderlich. Die Grundlage für eine ChPT mit Vektor-Mesonen wurde durch die Konstruktion der nicht-linearen Realisierung der chiralen Symmetrie geschaffen [Wei68; Cal+69; CWZ69]. Seitdem wurden viele Ansätze zur Konstruktion einer effektiven Theorie für Mesonen mit Spin 1 entwickelt [Mei88]. In der vorliegenden Arbeit werden die Vektor-Mesonen mittels einer Darstellung in Vektor-Feldern [Ryd96; Wei05] und in analoger Weise zu den Goldstone-Bosonen in die LN_CChPT integriert.
Das Ziel dieser Arbeit ist die Untersuchung der Wechselwirkung zwischen einem Vektor-Meson V, einem pseudoskalaren Meson P und einem Photon γ, die maßgeblich für den strahlenden Zerfall eines Vektor-Mesons in ein pseudoskalares Meson verantwortlich ist, mittels einer chiralen effektiven Lagrange-Dichte für alle zwölf theoretisch möglichen Zerfälle dieser Art. Die elektromagnetischen Übergänge $PV\gamma$ stellen eine wertvolle Ergänzung zum Studium hadronischer Zerfälle eines Vektor-Mesons in ein Paar pseudoskalarer Mesonen dar, da sie den sogenannten Sektor ungrader-intrinsischer Parität[1] ausloten. Beginnend mit frühen, auf Überlegungen der SU(3)-Symmetrie basierenden Vorhersagen [Gla63], wurden strahlende Zerfälle von Vektor-Mesonen in pseudoskalare Mesonen in einer Vielzahl von Vorgehensweisen studiert. Ein Überblick über frühe Veröffentlichungen findet sich in [ODo81]. Dazu gehören unter anderem Untersuchungen im Rahmen des Quark-Modells [Ani+65; BM65], mittels phänomenologischer [Dur87; DDV17] oder chiraler effektiver Lagrange-Dichten [GKS84; Haj93; KKW96; Ben+99; RPP03; LL08; TLL12; CGZ14], Summenregeln der QCD [ZHY98; GY02; ABY10] und Gittereichtheorien [Wol86; CL92; Owe+15; SDE15; Ale+18].
Als eine Erweiterung der Untersuchung der elektromagnetischen Übergänge $PV\gamma$ und Anwendung des entwickelten Modells, werden die Dalitz-Zerfälle $PV\ell^+\ell^-$ mit ihren Übergangsformfaktoren (englisch: „transition form factor“, TFF) betrachtet. Die elektromagnetischen Formfaktoren leichter Mesonen spielen zum Einen für das Verständnis der Eigenschaften dieser Mesonen eine wichtige Rolle. Zum Anderen bietet eine genau Bestimmung dieser TFF bei niedrigen Energien die Möglichkeit einer Verbesserung des hadronischen Beitrags der Streuung von Licht an Licht (englisch:

[1]Dies verweist darauf, dass in den in dieser Dissertation betrachteten elektromagnetischen Übergängen nur ein einzelnes pseudoskalares Meson in der Wechselwirkung auftritt.

„hadronic light by light scattering“, HLbL) zur Berechnung von $(g-2)_\mu$. Im Umkehrschluss kann die Genauigkeit von Berechnungen der HLbL-Beiträge zu $(g-2)_\mu$ direkt an ihren Vorhersagen zu elektromagnetischen Formfaktoren leichter Mesonen gemessen werden. Eine genau Kenntnis von Formfaktoren leichter Mesonen ist zudem für die akkurate Bestimmung der Zerfallsraten dieser Mesonen in seltenen Dilepton-Zerfällen (e^+e^- oder $\mu^+\mu^-$) notwendig [HL15; MS16]. Der nach aktuellem Stand am besten untersuchte Prozess $\omega \to \pi^0\ell^+\ell^-$ zeigte bislang eine große Diskrepanz zwischen experimentellen und theoretischen Ergebnissen. Eines der Ziele dieser Dissertation besteht darin, diesen und andere Dalitz-Zerfälle simultan darstellen zu können.
Die Gliederung dieser Dissertation gestaltet sich wie folgt: Im ersten Teil werden in Kapitel 2 die Theoretischen Grundlagen, angefangen mit der Quantenchromodynamik und chiralen Störungstheorie über den Grenzfall einer großen Anzahl an Farbfreiheitsgraden und der LN_CChPT hin zu der Inklusion von Vektor-Mesonen und der Betrachtung der Mischung aufgrund der Brechung der Flavor-Symmetrie, eingeführt. Der darauf folgende Hauptteil mit dem Thema der elektromagnetischen Übergänge ist in zwei Teile weiter unterteilt. In Kapitel 3 wird die chirale effektive Lagrange-Dichte zu allen zwölf Übergängen $PV\gamma$ bis NLO entwickelt, und bis zu sechs zugehörige Kopplungkonstanten werden an experimentelle Zerfallsraten angepasst. Die Ergebnisse werden dann sowohl mit experimentell ermittelten Werten als auch theoretischen Ansätzen verglichen. Daran anschließend wird in Kapitel 4 das für die Zerfälle $PV\gamma$ entwickelte Modell ausgehend von der bislang diskutierten Punktwechselwirkung für die Dalitz-Zerfälle $PV\ell^+\ell^-$ um die Berücksichtigung der elektromagnetischen Struktur der Teilchen erweitert. Als Zwischenschritt zur Bestimmung der Kopplungskonstanten zum Vertex PVV wird die Betrachtung der Zerfälle eines Vektor-Meson in drei pseudoskalare Mesonen notwendig und durchgeführt. Bestimmte Zerfallsraten und Übergangsformfaktoren der Dalitz-Zerfälle zeigen sich verglichen zu anderen theoretischen Modellen als denen ebenbürtig und spiegeln sich in den verfügbaren experimentellen Datenreihen wieder. Der Gliederung des Hauptteils dieser Dissertation folgend, finden sich in den einzelnen Kapiteln des Appendix sowohl Gleichungen, Tabellen als auch Abbildungen zu den einzelnen Kapiteln von Theorie und elektromagnetischen Übergängen. Appendix A gibt neben den Gell-Mann-Matrizen sowohl zur Bestimmung des η-η'-Mischungswinkels zugehörige Formeln, als auch ergänzende Tabellen zu Transformationseigenschaften der Bausteine der Lagrange-Dichte und dem Zählschema der LN_CChPT. In Appendix B wird die Konstruktion der Lagrange-Dichte an Beispielen ausführlich demonstriert, die Berechnung der Amplituden der Zerfälle $PV\gamma$ aufgezeigt und zusätzliche Tabellen und Abbildungen zu den Ergebnissen der Anpassung der Kopplungskonstanten angegeben. Abschließend listet Appendix C die vollständigen NLO-Lagrange-Dichten sowie die Bestimmung der zugehörigen Amplituden der Zerfälle $V\gamma$, VPP und $VPPP$, sowie die in den Dalitz-Zerfällen $PV\ell^+\ell^-$ gegebenen Flavor-Spuren auf. Die zugehörigen Ergebnisse sind jeweils in Tabellen angegeben. Zudem wird die Integration über den Phasenraum eines Zerfalls von einem in drei Teilchen ausgeführt und zuletzt zusätzliche Tabellen und Abbildungen zu der Diskussion der Dalitz-Zerfälle angefügt.

2. Theoretische Grundlagen

In diesem Kapitel werden im Überblick die theoretischen Grundlagen vorgestellt, auf denen die Diskussion der elektromagnetischen Übergänge $PV\gamma^{(*)}$ dieser Dissertation aufbauen. Der erste Abschnitt ist der Einführung in die Theorie der starken Wechselwirkung, der sogenannten Quantenchromodynamik (QCD) gewidmet. Ausgehend davon wird die chirale Störungstheorie für Mesonen (ChPT), eine Näherung der QCD für niedrigen Energien, eingeführt. Dabei richten sich die in den beiden ersten Abschnitten präsentieren Inhalte und verwendeten Konventionen in großem Maße nach [Sch03; SS12]. Anschließend werden Aspekte einer Entwicklung in $1/N_C$, einer Entwicklung in der Inversen der Anzahl der Farbfreiheitsgerade N_C, wie sie von t'Hooft [t H74] vorgeschlagen wurde, vorgestellt. Zum Abschluss dieses Kapitels steht die Einführung der Vektor-Mesonen als explizite Freiheitsgrade einer chiralen effektiven Theorie.

2.1. Quantenchromodynamik

Dieser Abschnitt stellt die Eigenschaften der QCD als Eichtheorie der starken Wechselwirkung vor. Dazu wird zunächst die Lagrange-Dichte der QCD, gefolgt von deren Eigenschaften im chiralen Grenzfall, erläutert. Weiterhin werden ausgehend von der chiralen Symmetrie sowohl die spontane Brechung der Symmetrie und das Goldstone-Theorem, als auch Green'sche Funktionen und Ward-Identitäten diskutiert.

2.1.1. Die Lagrange-Dichte der QCD

Wie bereits erwähnt lässt sich die starke Wechselwirkung durch die Quantenchromodynamik beschreiben, mit zugehöriger nicht-abelscher Eichgruppe $\mathrm{SU}(3)_C$. Die Lagrange-Dichte der QCD ist gegeben durch [Alt82; MP78]

$$\mathcal{L}_{QCD} = \sum_{f=1}^{6} \bar{q}_f \left(i\not{D} - m_f\right) q_f - \frac{1}{4} \mathcal{G}_{a,\mu\nu} \mathcal{G}_a^{\mu\nu} \,. \tag{2.1}$$

Dabei sind die Materie-Felder der Theorie, die sogenannten Quarks, Fermion-Felder mit Spin $1/2$. Quarks kommen in sechs Quark-Arten vor, den sogenannten Quark-„Flavor“,

$$f \in \{u\,(\mathrm{up})\,,\ d\,(\mathrm{down})\,,\ s\,(\mathrm{strange})\,,\ c\,(\mathrm{charm})\,,\ b\,(\mathrm{bottom})\,,\ t\,(\mathrm{top})\} \tag{2.2}$$

mit je drei verschiedenen Farbladungen rot(r), blau(b) und grün(g). Demzufolge werden die Quark-Flavor f mittels Dirac-Spinoren in den Quark-Feldern

$$q_f = \begin{pmatrix} q_{f,1} \\ q_{f,2} \\ q_{f,3} \end{pmatrix} \tag{2.3}$$

als ein Triplett der Farbladung dargestellt. Die Wechselwirkung zwischen den Quark-Feldern findet mittels des Austauschs von acht massenlosen Eichbosonen statt, den sogenannten Gluonen, repräsentiert durch das Feld[1]

$$\mathcal{A}_\mu \equiv \mathcal{A}_{a,\mu} \frac{\lambda_a}{2} \tag{2.4}$$

in einer Darstellung mit den acht Gell-Mann-Matrizen λ_a[2] als Erzeuger der Lie-Gruppe $\mathrm{SU}(3)$. Die dem kinetischen Term der Gluon-Felder zugehörigen Feldstärke-Tensoren schreiben sich wie folgt

$$\mathcal{G}_{\mu\nu} \equiv \mathcal{G}_{a,\mu\nu} \frac{\lambda_a}{2} = \left(\partial_\mu \mathcal{A}_{a,\nu} - \partial_\nu \mathcal{A}_{a,\mu} - g f_{abc} \mathcal{A}_{b,\mu} \mathcal{A}_{c,\nu}\right) \frac{\lambda_a}{2} \; . \tag{2.5}$$

Dabei gibt die Konstante g die Stärke der von dem Quark-Flavor unabhängigen Kopplung zwischen Quark- und Gluon-Feldern an und f_{abc} sind die Strukturkonstanten der Gruppe $\mathrm{SU}(3)$. Der nicht-abelsche Anteil der Gluon-Feldstärke-Tensoren $-g f_{abc} \mathcal{A}_{b,\mu} \mathcal{A}_{c,\nu}$ ist für die Selbstwechselwirkung der Gluonen verantwortlich. Die Kopplung der Quark- an die Gluon-Felder ist eine direkte Folge der kovarianten Ableitung

$$D_\mu q_f \equiv \left(\partial_\mu + ig\mathcal{A}_\mu\right) q_f \; , \tag{2.6}$$

die auf die Quark-Felder q_f wirkt und die gewöhnliche partielle Ableitung $\partial_\mu q_f$ ersetzt.

Die kovariante Ableitung hat per Definition dieselben Transformationseigenschaften wie das Objekt, auf das sie wirkt. Dies ist eine wichtige Eigenschaft, denn ein Konstruktionsprinzip der QCD-Lagrange-Dichte ist, dass sie invariant unter einer *lokalen* $\mathrm{SU}(3)_C$-Eichtransformation der Quark-Felder ist, gegeben durch $\Theta(x) = [\Theta_1(x), \ldots, \Theta_8(x)]$ mit

$$q_f \mapsto q'_f = \exp\left[-i\Theta_a(x)\frac{\lambda_a}{2}\right] q_f = U(x)\, q_f \; . \tag{2.7}$$

[1]Innerhalb dieser Dissertation findet implizit die Einstein'sche Summenkonvention Anwendung.

[2]Die Gell-Mann-Matrizen sind in Appendix A, Abschnitt A.1 angegeben.

Die Forderung nach lokaler Invarianz unter Eichtransformationen führt auf das folgende Transformationsverhalten der Gluon-Felder

$$\mathcal{A}_\mu(x) \mapsto \mathcal{A}'(x) = U(x)\mathcal{A}_\mu(x)U^\dagger(x) + \frac{i}{g}\partial_\mu U(x)U^\dagger(x) \; , \tag{2.8}$$

sodass die kovariante Ableitung angewandt auf q_f sich dann wie folgt verhält:

$$D_\mu q_f \mapsto D'_\mu q'_f = U(x)D_\mu q_f \; . \tag{2.9}$$

2.1.2. QCD im chiralen Grenzfall

Tabelle 2.1.: Ladungen und Massen der Quarks, nach [Tan+18].

Flavor	u	d	s
Ladung [e]	$\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$
Masse [MeV]	$2.2^{+0.5}_{-0.4}$	$4.7^{+0.5}_{-0.3}$	95^{+9}_{-3}
Flavor	c	b	t
Ladung [e]	$\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$
Masse [GeV]	$1.275^{+0.025}_{-0.035}$	$4.18^{+0.04}_{-0.03}$	173.0 ± 0.4

Mit Blick auf ihre in Tabelle 2.1 gegebenen Massen lassen sich die sechs Quarks in die drei leichten Quarks u, d und s sowie die drei schweren c, b und t unterteilen. Für deren Massen gilt dann die Relation $m_u, m_d, m_s \ll 1$ GeV $\leq m_c, m_b, m_t$. Die hier zur Trennung der beiden Gruppen verwendete Skala von 1 GeV steht im Zusammenhang mit der Masse der leichtesten Hadronen, die leichte Quarks enthalten und keine Goldstone-Bosonen sind, beispielsweise das Rho-Meson mit $m_\rho \simeq 775$ MeV, sowie der Skala der spontanen Symmetriebrechung [MG84]

$$\Lambda_\chi = 4\pi F_\pi \approx 1170 \text{ MeV} \; . \tag{2.10}$$

Dies ist ein Hinweis darauf, dass die Lagrange-Dichte der QCD für den sogenannten chiralen Grenzfall, in dem die schweren Quarks vernachlässigt und die Massen der leichten Quarks gleich null gesetzt werden,

$$\mathcal{L}^0_{QCD} = \sum_{f=u,d,s} \bar{q}_f i \not{D} q_f - \frac{1}{4}\mathcal{G}_{a,\mu\nu}\mathcal{G}^{\mu\nu}_a \; , \tag{2.11}$$

eine gute Näherung als Ausgangspunkt für die Beschreibung der QCD im Bereich niedriger Energien ist. Mit der Definition der Projektionsoperatoren

$$P_R = \frac{1}{2}(\mathbb{1} + \gamma_5) \; , \quad P_L = \frac{1}{2}(\mathbb{1} - \gamma_5) \; , \tag{2.12}$$

die die Quark-Felder q jeweils auf ihre links-, $q_L = P_L q$, oder rechtshändigen, $q_R = P_R q$, Anteile projizieren, kann die Lagrange-Dichte wie folgt umgeschrieben werden:

$$\mathcal{L}^0_{QCD} = \sum_{f=u,d,s} \left(\bar{q}_{R,f} i \not{D} q_{R,f} + \bar{q}_{L,f} i \not{D} q_{L,f} \right) - \frac{1}{4} \mathcal{G}_{a,\mu\nu} \mathcal{G}^{\mu\nu}_a \ . \tag{2.13}$$

Als Folge der Unabhängigkeit der kovarianten Ableitung von dem Quark-Flavor weist $\mathcal{L}^0_{QCD}$ im Flavor-Raum eine *globale* $\mathrm{U}(3)_L \times \mathrm{U}(3)_R$-Symmetrie auf, welche zu der Symmetriegruppe $\mathrm{SU}(3)_L \times \mathrm{SU}(3)_R \times \mathrm{U}(1)_V \times \mathrm{U}(1)_A$ lokal isomorph ist. Eine Anwendung des Noether-Theorems [Noe18] auf diese Symmetriegruppe führt zu den mit den $SU(3)$-Transformationen der links- und rechtshändigen Quarks assoziieren Strömen

$$\begin{aligned} L^\mu_a &= \bar{q}_L \gamma^\mu \frac{\lambda_a}{2} q_L \ , \quad \partial_\mu L^\mu_a = 0 \ , \\ R^\mu_a &= \bar{q}_R \gamma^\mu \frac{\lambda_a}{2} q_R \ , \quad \partial_\mu R^\mu_a = 0 \ . \end{aligned} \tag{2.14}$$

Eine zu diesen chiralen Strömen alternative Darstellung sind die Linearkombinationen

$$\begin{aligned} V^\mu_a &= R^\mu_a + L^\mu_a = \bar{q} \gamma_\mu \frac{\lambda_a}{2} \ , \\ A^\mu_a &= R^\mu_a - L^\mu_a = \bar{q} \gamma_\mu \gamma_5 \frac{\lambda_a}{2} \ , \end{aligned} \tag{2.15}$$

die unter Paritätstransformationen Eigenschaften von jeweils Vektor- oder Axial-Vektorströmen zeigen. Zudem resultiert aus der Transformation aller links- und rechtshändigen Quark-Felder mit der gleichen Phase ein erhaltener Singulett-Vektorstrom wie folgt

$$V^\mu = \bar{q}_R \gamma^\mu q_R + \bar{q}_L \gamma^\mu q_L = \bar{q} \gamma^\mu q \ , \quad \partial_\mu V^\mu = 0 \ . \tag{2.16}$$

Im Gegensatz dazu gilt für den aus der Transformation aller linkshändigen Quark-Felder mit einer Phase und aller rechtshändigen Quark-Felder mit der entgegengesetzten Phase entstehenden Singulett-Axial-Vektorstrom

$$A^\mu = \bar{q}_R \gamma^\mu q_R - \bar{q}_L \gamma^\mu q_L = \bar{q} \gamma^\mu q \ , \quad \partial_\mu A^\mu = \frac{3g^2}{32\pi^2} \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} \mathcal{G}^{\mu\nu}_a \mathcal{G}^{\rho\sigma}_a \ , \tag{2.17}$$

dass dieser nur auf dem Niveau *klassischer* Physik erhalten ist. Auf dem Niveau der *Quanten*-Physik ist eine sogenannte Anomalie zu beobachten [AB69; Adl69; BJ69]. Demzufolge ist die Lagrange-Dichte $\mathcal{L}^0_{QCD}$ im chiralen Grenzfall nur unter globalen Transformationen der Symmetriegruppe $\mathrm{SU}(3)_L \times \mathrm{SU}(3)_R \times \mathrm{U}(1)_V$ invariant.
Auf Grundlage der erhaltenen Ströme in den Gleichungen (2.14) und (2.16), und genauer aus ihren Ladungsdichten, lassen sich unter Anwendung eines Raumintegrals

zu ihnen zugehörige „Ladungsoperatoren“

$$
\begin{aligned}
Q_{L,a} &= \int d^3x q_L^\dagger(t,\vec{x}) \frac{\lambda_a}{2} q_L(t,\vec{x}) \ , \\
Q_{R,a} &= \int d^3x q_R^\dagger(t,\vec{x}) \frac{\lambda_a}{2} q_R(t,\vec{x}) \ , \\
Q_V &= \int d^3x q^\dagger(t,\vec{x}) \frac{\lambda_a}{2} q(t,\vec{x})
\end{aligned}
\tag{2.18}
$$

definieren. Darauf aufbauend können in einer analogen Vorgehensweise wie bei der Addition oder Subtraktion der chiralen Ströme in Gleichung (2.15) auch die Linearkombinationen der links- und rechtshändigen Ladungsoperatoren mit zueinander gegenläufiger Parität

$$
Q_{V,a} = Q_{R,a} + Q_{L,a} \ , \quad Q_{A,a} = Q_{R,a} - Q_{L,a} \tag{2.19}
$$

gebildet werden. Im Hinblick auf die Wirkung dieser Ladungsoperatoren auf den Grundzustand im chiralen Grenzfall, $|0\rangle_0$, wurde von Vafa und Witten [VW84] gezeigt, dass dieser notwendigerweise unter der Symmetriegruppe $\mathrm{SU}(3) \times \mathrm{U}(1)$ invariant ist. Demzufolge wirken die Ladungsoperatoren $Q_{V,a}$ und Q_V auf den Grundzustand wie Vernichtungsoperatoren

$$
Q_{V,a}\,|0\rangle = Q_{V,a}\,|0\rangle = 0 \ . \tag{2.20}
$$

Wäre der Grundzustand unter der vollständigen Symmetriegruppe $G \times \mathrm{U}(1)_V$ der zu $\mathcal{L}^0_{QCD}$ gehörenden Hamilton-Dichte, mit der sogenannten chiralen Gruppe $G = \mathrm{SU}(3)_L \times \mathrm{SU}(3)_R$ und der für die Erhaltung der Baryonenzahl B verantwortlichen Gruppe $\mathrm{U}(1)_V$[3] invariant, so wäre die Anordnung der Hadronen in näherungsweise entartete Multipletts entsprechend der Dimension der irreduziblen Darstellung der Symmetriegruppe zu erwarten. Zudem würde in Ergänzung dessen für jedes Multiplett die Existenz eines zugehörigen Multipletts entgegengesetzter Parität vorausgesetzt. Da dies nicht zu beobachten ist, wird angenommen, dass die Ladungsoperatoren $Q_{A,a}$ nicht als Vernichtungsoperatoren wirken und demzufolge der Grundzustand unter den zugehörigen axialen Transformationen nicht invariant ist. In Folge davon ist der Grundzustand nicht unter Tranformationen der vollen Symmetriegruppe der Hamilton-Dichte invariant, sondern nur unter jenen einer Untergruppe $H = \mathrm{SU}(3)_V \times \mathrm{U}(1)_V$. Es ist also festzuhalten, dass die betrachtete massenlose QCD somit eine spontane Brechung der Symmetrie erfährt, bei der die Symmetriegruppe G spontan zur Untergruppe H gebrochen wird. Dem Goldstone-Theorem [Gol61] folgend werden für die beiden Gruppen, dabei hat G $n_G = 16$ und H $n_H = 8$ Erzeuger, insgesamt

$$
n_G - n_H = 8 \tag{2.21}
$$

masselose Goldstone-Bosonen ϕ_a erwartet. Diese sind Pseudoskalare, da sie unter

[3] Diese teilt die Hadronen mit den Baryonenzahlen $B = 0$ in Mesonen und $B = 1$ in Baryonen auf.

Paritätstransformationen die gleichen Eigenschaften wie ihre Erzeuger $Q_{A,a}$ aufweisen

$$\phi_a(t,\vec{x}) \mapsto -\phi_a(t,-\vec{x}) \ . \tag{2.22}$$

Die in der physikalischen Realität auftretenden von null verschiedenen Massen des pseudoskalaren Oktetts resultieren aus einer Symmetriebrechung in Folge nichtverschwindender Quark-Massen. Die beobachtete $\mathrm{SU}(3)_V$-Symmetrie erklärt sich daraus [Col66], dass die Symmetrie des Spektrums nicht von der Symmetrie der Hamilton-Dichte, sondern von der des Grundzustands bestimmt wird.

2.1.3. QCD in Anwesenheit externer Felder

Von besonderem Interesse sind in der Quantenfeldtheorie sogenannte Green'sche Funktionen. Diese stellen Erwartungswerte zeitgeordneter Produkte von Operatoren dar, die im Vakuum-Zustand, dem Zustand tiefstmöglicher Energie, ausgewertet werden. Mittels der Lehmann-Symanzik-Zimmermann-(LSZ-)Reduktionsformel [LSZ55] stehen diese in einer direkten Verbindung mit physikalischen Streuamplituden. Die in dem vorangegangenen Abschnitt betrachtete globale chirale Symmetrie hat Relationen der Green'schen Funktionen untereinander zur Folge. Erste derartige Relationen, die sogenannten Ward-Identitäten, wurden innerhalb der Quantenelektrodynamik mit Bezug auf die Eichinvarianz der $\mathrm{U}(1)$-Symmetrie entdeckt [War50]. Der Formalismus der Pfadintegrale bietet mit der Betrachtung funktionaler Ableitungen in Bezug auf externe Felder eine elegante Vorgehensweise zur Bestimmung Green'scher Funktionen. Zu diesem Zweck wird, den Darstellungen von Gasser und Leutwyler folgend [GL84; GL85], die Lagrange-Dichte der QCD aus Gleichung (2.13) wie folgt erweitert

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}^0_{\mathrm{QCD}} + \mathcal{L}_{\mathrm{ext}} = \mathcal{L}^0_{\mathrm{QCD}} + \overline{q}\gamma_\mu \left(v^\mu + \gamma_5 a^\mu\right) q + \overline{q}\left(s - i\gamma_5 p\right) q \ . \tag{2.23}$$

Die externen Felder [4]

$$v^\mu = \sum_{a=1}^{8} v^\mu_a \frac{\lambda_a}{2} \ , \quad a^\mu = \sum_{a=1}^{8} a^\mu_a \frac{\lambda_a}{2} \ , \quad s = \sum_{a=0}^{8} s_a \lambda_a \ , \quad p = \sum_{a=0}^{8} p_a \lambda_a \ , \tag{2.24}$$

sind definiert als farbneutrale, hermitesche 3×3-Matrizen im Flavor-Raum, die an Vektor-, Axialvektor-, skalare und pseudoskalare Quark-Ströme koppeln.
Um die bekannte Lagrange-Dichte der QCD für drei Flavor u, d und s zu erhalten, muss in Gleichung (2.23) für die externen Felder $v^\mu = a^\mu = p = 0$ und $s = \mathrm{diag}\left(m_s, m_d, m_s\right) = \mathcal{M}$ [5] gesetzt werden.

[4] Dabei ist es notwendig mit $\lambda_0 = \sqrt{2/3}\mathbb{1}_{3\times 3}$ eine „neunte“ Gell-Mann-Matrix als Erzeuger einzuführen.

[5] Die Matrix $\mathcal{M}$ ist die Quark-Massen-Matrix der drei leichten Quarks.

Das erzeugende Funktional ergibt sich dann zu

$$\exp\left(iZ\left[v,a,s,p\right]\right) = \langle 0|\,T\exp\left[i\int \mathrm{d}^4x\mathcal{L}_{\mathrm{ext}}\right]|0\rangle_{\text{chiraler Grenzfall}} \;. \tag{2.25}$$

Die aus der chiralen Symmetrie, in Abwesenheit von Anomalien, entstehenden Ward-Identitäten sind äquivalent zur Invarianz des erzeugenden Funktionals unter lokalen chiralen Transformationen der äußeren Felder [Leu94]. Tatsächlich ist es, vorausgesetzt die äußeren Felder erfüllen die folgenden Transformationseigenschaften

$$\begin{aligned} v_\mu + a_\mu \equiv r_\mu &\mapsto V_R r_\mu V_R^\dagger + iV_R\partial_\mu V_R^\dagger \\ v_\mu - a_\mu \equiv l_\mu &\mapsto V_l l_\mu V_L^\dagger + iV_L\partial_\mu V_L^\dagger \\ s + ip &\mapsto V_R\left(s+ip\right)V_L^\dagger \\ s - ip &\mapsto V_L\left(s-ip\right)V_R^\dagger \;, \end{aligned} \tag{2.26}$$

mit $(V_R(x), V_L(x)) \in \mathrm{SU}(3)_R \times \mathrm{SU}(3)_L$ möglich, die globale chirale Symmetrie der in Gleichung (2.23) gegeben Lagrange-Dichte zu einer lokalen Symmetrie zu erweitern. Zusätzlich erlaubt ein solches Vorgehen die Kopplung der effektiven Freiheitsgrade an externe Eichfelder [GL84; GL85]. So ist beispielsweise die Kopplung an das elektromagnetische Vektorpotential A_μ mittels

$$r_\mu = l_\mu = -eQA_\mu \tag{2.27}$$

definiert. Dabei ist $Q = \mathrm{diag}\left(2/3, -1/3, -1/3\right)$ die Ladungsmatrix der leichten Quarks.

2.2. Chirale Störungstheorie für Mesonen

Die Einführung der QCD im vorangegangenen Abschnitt liefert das notwendige Grundgerüst für die Konstruktion der zur QCD der Hadronen niedriger Energie zugehörigen effektiven Feldtheorie, der sogenannten chiralen Störungstheorie (englisch: „chiral perturbation theory“, ChPT)[6]. Eine effektive Feldtheorie (englisch: „effective field theory“, EFT) ist eine nicht renormierbare Feldtheorie mit relativ zur zugrundeliegenden „vollen“ Theorie eingeschränktem Gültigkeitsbereich. Im konkreten Fall der ChPT als EFT der QCD ist dies die Skala der spontanen Symmetriebrechung $\Lambda \approx O(1\ \mathrm{GeV})$. Grundsätzlich ist es dabei für die EFT nicht notwendig, alle Details der vollen Theorie zu kennen. Grund dafür ist, dass in effektiven Theorien sämtliche Parameter der vollen Theorie, die bei der entsprechenden Energieskala keine Rolle mehr spielen, beseitigt werden. Die Grundidee der chiralen Störungstheorie ist es, anstelle der Quarks und Gluonen als Freiheitsgraden der QCD eine Störungstheorie, die dieselben Symmetrien erfüllt wie die QCD, mit experimentell direkt beobachtbaren Hadronen, den Goldstone-Bosonen π, η, K, zu entwickeln. Die Mechanismen

[6] Eine ausführliche Einführung in die ChPT findet sich in [SS12].

der ChPT wurden von Gasser und Leutwyler [GL84; GL85] systematisch erarbeitet und fußen im Grunde auf die auf Weinberg [Wei79] zurückgehende Idee einer effektiven Feldtheorie. Um sicher zu stellen, dass die in der EFT berechneten Werte der Observablen mit denen der zugrunde liegenden Theorie in Verbindung stehen, muss die allgemeinste, mit den Symmetrien der vollen Theorie konsistente Lagrange-Dichte konstruiert werden. Dies führt dann, nach Weinberg [Wei79], zu der „allgemein möglichsten S-Matrix, die mit Analytizität, perturbativer Unitarität, Cluster-Zerlegung und den angenommenen Symmetrieeigenschaften konsistent ist".
Ist die QCD die zugrundeliegende Theorie, muss die allgemeinste Lagrange-Dichte der ChPT somit im Hinblick auf die spontan gebrochene chirale Symmetrie und in gleichem Maße den diskreten Symmetrien der Ladungskonjugation, Parität und Zeitumkehr invariant sein. Zudem ist es erforderlich, dass die Lagrange-Dichte ein hermitescher Lorentz-Skalar ist. Als Folge der Forderung dieser Eigenschaften sind die möglichen Terme der Lagrange-Dichte begrenzt, dennoch enthält die allgemeinste mögliche Lagrange-Dichte immer noch eine unendliche Anzahl an Termen. Demzufolge und aufgrund der Notwendigkeit einer systematischen Methode der Gewichtung von Diagrammen, die aus den Wechselwirkungstermen der effektiven Lagrange-Dichte bei den Berechnungen für konkrete physikalische Matrixelemente aus der S-Matrix entstehen, ist ein Muster zur Sortierung der effektiven Lagrange-Dichte gefordert.

2.2.1. Weinbergs Power-Counting

Die allgemeinste, die Dynamik der Goldstone-Bosonen beschreibende, Lagrange-Dichte kann in Bezug auf die Anzahl der in ihren Termen enthaltenen Ableitungen und Quark-Massen

$$\mathcal{L}_{\text{eff}} = \mathcal{L}_2 + \mathcal{L}_4 + \mathcal{L}_6 + \cdots \tag{2.28}$$

geordnet werden. Dabei gibt der Index jeweils die Ordnung in der Entwicklung basierend auf den Impulsen und Quark-Massen an. Die relative Gewichtung von Feynman-Diagrammen lässt sich durch Weinbergs Zählschema [Wei79] beschreiben, das jedem Diagramm eine chirale Ordnung D zuordnet. Wird das Verhalten der zu einem Diagramm zugehörigen invarianten Amplitude $\mathcal{M}\left(p_i, m_q\right)$ unter der simultanen linearen Reskalierung der externen Impulse, $p_i \mapsto t p_i$, und quadratischer Reskalierung der Massen der leichten Quarks, $m_q \mapsto t^2 m_q$ untersucht,

$$\mathcal{M}\left(p_i, m_q\right) \mapsto \mathcal{M}\left(t p_i, t^2 m_q\right) = t^D \mathcal{M}\left(p_i, m_q\right) \,, \tag{2.29}$$

so wird dieses von der chiralen Ordnung beschrieben. Die chirale Ordnung D bestimmt sich mittels der Formel

$$\begin{aligned} D &= 2 + 2N_L + \sum_{n=1}^{\infty} 2(n-1)N_{2n} \\ &= 4N_L - 2N_I + \sum_{n=1}^{\infty} 2nN_{2n} \; . \end{aligned} \tag{2.30}$$

Mit Blick auf einen Term $\mathcal{L}_{2n}$ sei dabei N_{2n} die Anzahl der Vertices, N_L die unabhängiger Schleifen und N_I die interner Linien von Goldstone-Bosonen. Eine Integration über eine Schleife zählt Gleichung (2.30) als $D = 4$, ein interner Propagator eines Goldstone-Boson, als $D = 2$ und ein Vertex aus $\mathcal{L}_{2n}$ als $D = 2n$. Zudem lässt sich aus dieser Gleichung auch folgern, dass nur Terme mit einer geradzahligen chiralen Ordnung in der effektiven Lagrange-Dichte der ChPT für Mesonen auftreten. Für genügend kleine Impulse und Massen tragen Feynman-Diagramme mit einer großen chiralen Ordnung weniger bei und diejenigen mit kleinem D dominieren. Demzufolge kann die invariante Amplitude, indem nur Diagramme bis zu einer gewählten maximalen chiralen Ordnung berücksichtigt werden, systematisch angenähert werden.

2.2.2. LN_C-Grenzfall und LN_CChPT

Bislang wurde für die ChPT, in Folge des Goldstone-Theorems [Gol61], ein Oktett von acht masselosen pseudoskalaren Bosonen (π, K, η_8) erwartet. Aufgrund der Anomalie in der $\mathrm{U}(1)_A$-Symmetrie ist das Singulett-Eta η_1 auch im chiralen Grenzfall masseloser Quarks mit einer Masse behaftet [t H76; Ven79; Wit79a]. Zur Inklusion des Singulett-Eta in eine chirale effektive Feldtheorie muss die chirale Störungstheorie für einen Grenzfall einer großen Anzahl an Farbfreiheitsgraden N_C, dem sogenannte „Large N_C“- (LN_C)-Grenzfall, betrachtet werden. Diese notwendige Erweiterung der ChPT wird kurz LN_CChPT genannt. Eine Einführung in die Methodologie der QCD im LN_C-Grenzfall findet sich in [Wit79b; Man98; Leb99], das hieraus abgeleitete Zählschema und die nach diesen Prinzipien konstruierte Lagrange-Dichte wurden in großer Ausführlichkeit in [BMS17] und den dort genannten Referenzen diskutiert. Im Folgenden sind einige Aspekte des LN_C-Grenzfall für die QCD und der Konstruktion der Lagrange-Dichte der LN_CChPT ausgewählt. Für ausführlichere Darstellungen sei auf die genannten Referenzen verwiesen.
Der Grenzfall einer abzählbar unendlichen Anzahl an Farbladungen vereinfacht die Physik der starken Wechselwirkung und bietet einen guten Ausgangspunkt für theoretische Überlegungen zu vielen ihrer Eigenschaften. Im LN_C-Grenzfall wird die QCD ausgehend von einer $\mathrm{SU}(3)$-Eichgruppe mit $N_C = 3$ auf eine $\mathrm{SU}(N_C)$-Eichgruppe mit N_C Farben erweitert und im Limes $N_C \to \infty$ betrachtet. Physikalische Größen werden dann im Bezug auf diese Grenzwertbetrachtung berechnet und ihre Korrekturen ergeben sich aus einer systematischen Entwicklung in der Inversen der Farbfreiheitsgrade, $1/N_C$. Zur Bestimmung des für den LN_C-Grenzfall benötigten Zählschemas werden

die Feynman-Diagramme in diesem Grenzfall betrachtet. Im Limes für große N_C entstehen dann kombinatorische Faktoren, welche die Eigenschaften der Entwicklung in $1/N_C$ bestimmen.
Eine wichtige Erkenntnis, die aus der Betrachtung von Gluon-Beiträgen zur Vakuumpolarisation der Gluonen resultiert, ist, dass die Kopplungskonstante g der starken Wechselwirkung mit N_C skaliert. Dies kann auch durch eine Betrachtung der Renormalisierungsgruppengleichung der Kopplungskonstante,

$$\mu\frac{dg}{d\mu} = -b_0\frac{g^3}{16\pi^2} + O\left(g^5\right) , \tag{2.31}$$

gezeigt werden. Dabei ist der führende Koeffizient der β-Funktion gegeben durch

$$b_0 = \frac{11}{3}N_C - \frac{2}{3}N_f , \tag{2.32}$$

mit N_f als Anzahl der Quark-Flavor. Für $N_C \to \infty$ ist die Gleichung (2.31) divergent, da $b_0 \sim O(N_C)$. Wird jedoch die Kopplungskonstante g mit N_C skaliert, $g/\sqrt{N_C}$, so lässt sich die Gleichung wie folgt umschreiben

$$\mu\frac{dg}{d\mu} = -\left(\frac{11}{3} - \frac{2}{3}\frac{N_f}{N_C}\right)\frac{g^3}{16\pi^2} + O\left(g^5\right) . \tag{2.33}$$

Für den Limes $N_C \to \infty$ nimmt die β-Funktion somit einen wohldefinierten Grenzwert an. Da N_C für ein laufendes g aus der Gleichung entfällt, ist die Skala der starken Wechselwirkung, Λ_{QCD}, für die Betrachtung des Grenzwerts $N_C \to \infty$ auf einen Wert festgelegt.
Im Weiteren sei den obigen Überlegungen folgend für die Kopplungskonstante der starken Wechselwirkung $g/\sqrt{N_C}$ gesetzt. Diese skaliert für fest gewähltes g mit $1/\sqrt{N_C}$. Aus einer Betrachtung der kombinatorischen Faktoren von Feynman-Diagrammen resultiert, dass eine bestimmte Klasse von Diagrammen, sogenannte planare Diagramme, aufgrund ihrer geringeren Potenzen in $1/\sqrt{N_C}$ im LN_C-Grenzfall im Vergleich zu allen anderen dominiert. Planare Diagramme zeichnen sich darin aus, dass sie nur eine minimale Anzahl an Quark-Schleifen aufweisen.
Im vorangegangenen Abschnitt wurde erläutert, dass die $\mathrm{U}(1)_A$-Symmetrie durch eine Anomalie gebrochen wird. Im chiralen Grenzfall ist die Divergenz des Singulett-Axial-Vektorstroms durch den Ausdruck in Gleichung (2.17)

$$\partial_\mu A^\mu = \frac{3g^2}{32\pi^2}\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\mathcal{G}_a^{\mu\nu}\mathcal{G}_a^{\rho\sigma}$$

gegeben.
Bei einer Betrachtung der Gleichung des LN_C-Grenzfall verschwindet diese Anomalie, da g^2 wie $1/N_C$ skaliert. Somit wird in diesem Grenzfall die $\mathrm{U}(1)_A$-Symmetrie wiederhergestellt und die spontane Brechung der chiralen Symmetrie führt auf ein Nonett von masselosen Goldstone-Bosonen (π, K, η_8, η_1) [CW80; DV80].

Für Überlegungen innerhalb der LN_CChPT wird eine Entwicklung von Feynman-Diagrammen in simultaner Abhängigkeit von den Impulsen p, Quark-Massen m und $1/N_C$ durchgeführt [BMS17]. Die drei Variablen dieser Entwicklung werden dabei als kleine Parameter mit Ordnungen

$$p = O\left(\sqrt{\delta}\right) , \quad m = O(\delta) , \quad \frac{1}{N_C} = O(\delta) \tag{2.34}$$

gezählt [Leu96].
Die allgemeinste, mögliche Lagrange-Dichte der LN_CChPT ist, der Skalierung aus Gleichung (2.34) folgend, als eine unendliche Summe von Termen in den Ableitungen, Quark-Massen und implizierten Potenzen von $1/N_C$ gemäß

$$\mathcal{L}_{\text{eff}} = \mathcal{L}^{(0)} + \mathcal{L}^{(1)} + \mathcal{L}^{(2)} + \cdots \tag{2.35}$$

angeordnet. Dabei geben die Superskripte (i) die Ordnung in δ an.
Die pseudoskalaren dynamischen Freiheitsgrade werden in der unitären 3×3-Matrix

$$U(x) = \exp\left(i\frac{\Phi(x)}{F}\right) \tag{2.36}$$

zusammengefasst. In diesem Ausdruck steht F für die Pion-Zerfallskonstante im drei-flavor chiralen Grenzfall verschwindender Quark-Massen, $m_u = m_d = m_s = 0$, und wird als $F = O\left(\sqrt{N_C}\right) = O(1/\sqrt{\delta})$ gezählt. Die hermitesche 3×3-Matrix der pseudoskalaren Felder,

$$\Phi = \sum_{a=1}^{8} \lambda_a \phi_a + \lambda_0 \phi_0 = \hat{\Phi} + \tilde{\Phi} \tag{2.37}$$

$$= \begin{pmatrix} \pi^0 + \frac{1}{\sqrt{3}}\eta_8 + \sqrt{\frac{2}{3}}\eta_1 & \sqrt{2}\pi^+ & \sqrt{2}K^+ \\ \sqrt{2}\pi^- & -\pi^0 + \frac{1}{\sqrt{3}}\eta_8 + \sqrt{\frac{2}{3}}\eta_1 & \sqrt{2}K^0 \\ \sqrt{2}K^- & \sqrt{2}\overline{K}^0 & -\frac{2}{\sqrt{3}}\eta_8 + \sqrt{\frac{2}{3}}\eta_1 \end{pmatrix} , \tag{2.38}$$

enthält sowohl die Oktett-Felder π, K und η_8, als auch das Singulett-Feld η_1. Es wird dabei die übliche Konvention der Benennung der acht Gell-Mann Matrizen λ_a $(a = 1, \ldots, 8)$ sowie der notwendige Zusatz einer neunten Lambda-Matrix, $\lambda_0 = \sqrt{2/3}\,\mathbb{1}$ beibehalten. Die pseudoskalaren Felder ϕ_a zählen wie $O(\sqrt{\delta})$, sodass für das Argument der Exponentialfunktion $O\left(\delta^0\right)$ gilt und demzufolge $U = O\left(N_C^0\right)$ ist.
Zum Zweck der Konstruktion der Lagrange-Dichte wird die globale $\mathrm{U}(3)_L \times \mathrm{U}(3)_R$-Symmetrie der QCD zu einer lokalen Symmetrie erweitert [GL85], eine ausführliche Diskussion findet sich in [SS12]. Dieser Prozess beinhaltet die Einführung externer Felder s, p, l_μ und r_μ (skalare, pseudoskalare und links- bzw. rechtshändige externe Felder). Diese werden als hermitesche, farblose (color-neutral)

3×3-Matrizen dargestellt, die an die entsprechenden Quark-Bilinearformen koppeln. Die externen skalaren und pseudoskalaren Felder s und p werden in der Definition von $\chi \equiv 2B(s+ip)$ kombiniert. Dabei steht die Niederenergiekonstante B in Relation zum skalaren Quarkkondensat $\langle\bar{q}q\rangle_0$ im chiralen Grenzfall dreier Flavor und ist von Ordnung $O\left(N_C^0\right)$.
Wird die Schreibweise $u=\sqrt{U}$ eingeführt, so sind das chirale Vielbein u_μ sowie die Feldstärke-Tensoren $f_{\pm\mu\nu}$ über die Gleichungen [SS12; Eck+89a; Eck+89b]

$$\begin{aligned} u_\mu &= i\left[u^\dagger\left(\partial_\mu - ir_\mu\right)u - u\left(\partial_\mu - il_\mu\right)u^\dagger\right] \quad \text{und} \\ f_{\pm\mu\nu} &= uf_{L\mu\nu}u^\dagger \pm u^\dagger f_{R\mu\nu}u\ , \end{aligned} \tag{2.39}$$

definiert. Dabei stehen l_μ und r_μ für externe Felder, die an zugehörige Ströme in der QCD dreier Flavor koppeln [GL85]. Innerhalb dieser Arbeit werden die externen Felder zur Beschreibung der betrachteten Zerfälle nur das elektromagnetische Viererpotential enthalten. Die dem äußeren elektromagnetischen Potential zugehörigen Feldstärke-Tensoren $f_{L\mu\nu}$ und $f_{R\mu\nu}$ sind durch die Definitionen

$$\begin{aligned} f_{L\mu\nu} =& \partial_\mu l_\nu - \partial_\nu l_\mu - i\left[l_\mu, l_\nu\right] \quad \text{und} \\ f_{R\mu\nu} =& \partial_\mu r_\nu - \partial_\nu r_\mu - i\left[r_\mu, r_\nu\right] \end{aligned} \tag{2.40}$$

gegeben. Des Weiteren werden in der Wechselwirkungs-Lagrange-Dichte dieser Arbeit Korrekturen aufgrund von Quark-Massen betrachtet, die mittels der Bausteine

$$\chi_\pm = u^\dagger \chi u^\dagger \pm u\chi^\dagger u \tag{2.41}$$

berücksichtigt werden. In [JGW14] wurde die der ChPT zugrundeliegende SU(3)-Symmetrie auf eine U(3)-Symmetrie erweitert. Für die in dieser Dissertation betrachteten Prozesse der Wechselwirkungen zwischen pseudoskalaren, Vektor-Mesonen und elektromagnetischen Feldern weisen alle präsentierten Bausteine ein wohldefiniertes Transformationsverhalten auf [BMS17]. Demzufolge besitzen alle Singulett- und Oktett-Felder in u_μ die gleichen Transformationseigenschaften.
Zur Bestimmung des invarianten Matrixelements müssen einige Bausteine in den Feldern der Goldstone-Bosonen entwickelt werden. Innerhalb dieser Arbeit genügt es dabei, nur den linearen Anteil der Entwicklung zu berücksichtigen. Mit dem elektromagnetischen Feldstärke-Tensor $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ und der Matrix der Quark-Massen $\mathcal{M} = \mathrm{diag}\left(m_u, m_d, m_s\right)$ gelten für die Bausteine die folgenden Ersetzungen [SS12]:

$$\begin{aligned} f_{+\mu\nu} &\to -2eQF_{\mu\nu}\ , \\ f_{-\mu\nu} &\to i\frac{e}{F}F_{\mu\nu}\left[Q,\Phi\right]\ , \\ u_\mu &\to -\frac{\partial_\mu\Phi}{F}\ , \\ \chi_+ &\to 4B_0\mathcal{M}\ , \end{aligned} \tag{2.42}$$

$$\chi_- \to -2i\frac{B_0}{F}\left\{\mathcal{M},\Phi\right\} \ .$$

Schlussendlich muss noch die Invarianz potentieller Terme der Lagrange-Dichte unter Lorentz-Transformationen, Parität und Ladungskonjugationen unter Beachtung der Transformationseigenschaften der Bausteine, gegeben in Tabelle A.1 und unter Ausnutzung der zyklischen Eigenschaft der Spur, sicher gestellt werden. Terme die diese Bedingungen erfüllen und die notwendigen Felder für die zu betrachtenden Prozesse enthalten, tragen zur gesuchten Wechselwirkungs-Lagrange-Dichte bei.[7].

2.2.3. Inklusion von Vektor-Mesonen

Ziel dieser Dissertation ist, elektromagnetische Übergänge von pseudoskalaren und Vektor-Mesonen mit einer chiralen effektiven Lagrange-Dichte zu untersuchen. Zu diesem Zweck ist es notwendig, die Inklusion von Vektor-Mesonen als dynamische Freiheitsgrade in einer chiralen EFT zu diskutieren.
Bereits vor der Entwicklung der QCD wurden die Wechselwirkungen von Vektor-Mesonen mit Hilfe phänomenologischer Lagrange-Dichten [Sch67; WZ67; Wei68] untersucht. Zudem wurden Vektor-Mesonen als Zwischenzustände im sogenannten Vektor-Meson-Dominanz-Modell von J.J. Sakurai [Sak60; Sak69] zur Beschreibung von Wechselwirkungen zwischen energiereichen Photonen und hadronischer Materie verwendet.
Für den Bereich niedriger Energien bietet die ChPT ein Grundgerüst zur Beschreibung von Goldstone-Bosonen. Soll dieser Formalismus hin zu höheren Energien erweitert werden, ist die Einbeziehung von Vektor-Mesonen zwingend erforderlich, da die mit der spontanen Symmetriebrechung assoziierte Skala, Λ in Gleichung (2.10), von der gleichen Größenordnung ist, wie die typische Masse eines Vektor-Mesons, beispielsweise $m_{K^{*\pm}} = 891.8$ MeV.
Im Prinzip sind Vektor-Mesonen in der ChPT bereits implizit als Anregungen, die durch „Herausintegrieren“ von expliziten Freiheitsgraden erzeugt wurden, berücksichtigt. Einem phänomenologischen Ansatz folgend führt der Austausch von Vektor-Mesonen, bei einer Entwicklung für kleiner Impulse $|q^2| \ll m_V^2$, zu einem Propagator [Sch03]

$$\frac{1}{q^2 - m_V^2} = -\frac{1}{m_V^2}\left[1 + \left(\frac{q^2}{m_V^2}\right) + \left(\frac{q^2}{m_V^2}\right)^2 + O\left(q^6\right)\right] \ . \tag{2.43}$$

Demzufolge müssen die Beiträge Ordnung für Ordnung in den zugeordneten Niederenergiekonstanten der Störungstheorie absorbiert werden. Eine faktische Sättigung der Niederenergiekonstanten der effektiven chiralen Lagrange-Dichte von Ordnung q^4 durch Austausch von Mesonen, eine Vorstellung des VMD-Modells, wurde in [Eck+89b] gezeigt.

[7] Explizite Terme der Wechselwirkungs-Lagrange-Dichten zu den in dieser Dissertation diskutierten Prozessen sind in den Kapiteln 3 und 4 zu finden.

Die Grundlage zur Konstruktion einer chiralen effektiven Lagrange-Dichte mit Vektor-Mesonen wurde mit der Entwicklung der nicht-linearen Realisierung chiraler Symmetrie geschaffen [Wei68; Cal+69; CWZ69]. Seitdem wurde mit einer Vielzahl von Ansätzen die Konstruktion einer effektiven Theorie für Mesonen mit Spin 1 angestrebt. Ein ausführlicher Überblick findet sich in [Mei88]. Die Wahl der Felder, die homogen unter einer nicht-linearen Darstellung der chiralen Symmetrie transformieren, legt den Varianten der Kopplungen der Mesonen keine Einschränkungen auf [Bir96].

Im sogenannten „Hidden-Gauge"-Formalismus wird das Rho-Meson als Eichboson einer künstlich erstellten lokalen Symmetrie, die dem nicht-linearen Sigma-Modell hinzugefügt wird, eingeführt [BKY88]. Diese zusätzliche lokale Symmetrie steht in keiner Verbindung zu physikalischen Phänomenen und kann durch eine Anpassung der Eichung entfernt werden [Geo90]. Auch wenn Spin-1-Mesonen zuerst im Formalismus antisymmetrischer Tensor-Felder [Kyr72; Eck+89b] beschrieben wurden, wird in [SGS05] eine Darstellung mit Vektor-Feldern [Ryd96; Wei05] verwendet. Die beiden Ansätze unterscheiden sich in der Wirkung der chiralen Gruppe auf die Flavor-Freiheitsgrade der Vektor-Mesonen. Im ersten Ansatz werden die dynamischen Freiheitsgrade mit Hilfe antisymmetrischer Tensor-Felder $T_{\mu\nu}$ zweiten Rangs mit sechs Freiheitsgraden und im zweiten Ansatz mittels Vektor-Feldern V_μ mit vier Freiheitsgraden dargestellt. Da massive Spin-1-Teilchen nur drei Freiheitsgrade aufweisen, müssen sowohl den Tensor- als auch den Vektor-Feldern zusätzliche Zwangsbedingungen auferlegt werden. Es wurde allerdings in [Eck+89a] gezeigt, dass unter der Voraussetzung bestimmter Bedingungen die Beschreibung der Vektor-Mesonen mit Vektor-Feldern gleichwertig zu jener mit Tensor-Feldern ist. Innerhalb dieser Dissertation wird vor diesem Hintergrund der Vektor-Formalismus zur Darstellung der Vektor-Mesonen gewählt.

Die in den vorangegangenen Abschnitten eingeführte Inklusion des η'-Mesons in die ChPT soll als Muster für die gleichzeitige Darstellung des Singulett-Vektor-Felds $V_{0,\mu}$ mit den Oktett-Vektor-Feldern $V_{a,\mu}$, $a \in \{1,\ldots,8\}$, in einer hermiteschen 3×3-Matrix

$$
\begin{aligned}
V_\mu &= \left(\sum_{a=1}^{8} \frac{\lambda_a}{2} V_a + \frac{\lambda_0}{2} V_0\right)_\mu = \hat{V}_\mu + \tilde{V}_\mu \\
&= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \rho^0 + \frac{1}{\sqrt{3}}\omega_8 + \sqrt{\frac{2}{3}}\omega_1 & \sqrt{2}\rho^+ & \sqrt{2}K^{*+} \\ \sqrt{2}\rho^- & -\rho^0 + \frac{1}{\sqrt{3}}\omega_8 + \sqrt{\frac{2}{3}}\omega_1 & \sqrt{2}K^{*0} \\ \sqrt{2}K^{*-} & \sqrt{2}\overline{K}^{*0} & -\frac{2}{\sqrt{3}}\omega_8 + \sqrt{\frac{2}{3}}\omega_1 \end{pmatrix}_\mu
\end{aligned}
\tag{2.44}
$$

sein. An dieser Stelle sei auf ein, im Unterschied zum pseudoskalaren Nonett, zusätzlichen Faktor $1/2$ in Gleichung (2.44) hingewiesen. Dieser ist eine Frage der verwendeten Konvention.

Die allgemeinste, mit allen Symmetrien konforme, effektive Lagrange-Dichte für

Vektor-Mesonen schreibt sich wie folgt [DGS10]

$$\mathcal{L}_V = \mathcal{L}_{\text{frei}} + \mathcal{L}_3 + \mathcal{L}_4 + \ldots \quad . \tag{2.45}$$

Dabei weisen die Punkte auf eine Anzahl „nicht-renormierbarer“ Terme hin, welche mit Blick auf Potenzen einer genügend großen Skala als unterdrückt angesehen werden, oder auf Beiträge aus der Wechselwirkung mit anderen Freiheitsgraden. In letzteren finden sich auch die der in dieser Dissertation gesuchten Wechselwirkungs-Lagrange-Dichten zu elektromagnetischen Übergängen zwischen pseudoskalaren und Vektor-Mesonen $PV\gamma$.
Die erste Lagrange-Dichte der Reihe in Gleichung (2.45) kann in eine Summe aus der kinetischen Lagrange-Dichte der Vektor-Mesonen und einem Masseterm aufgespalten werden:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{frei}} &= \mathcal{L}_{\text{kin}} + \mathcal{L}_{\text{mass}} \\ &= -\frac{1}{2}\left\langle V_{\mu\nu}V^{\mu\nu}\right\rangle + m_V^2\left\langle V_\mu V^\mu\right\rangle \\ &= -\frac{1}{4}\sum_{a=0}^{8} V_{a,\mu\nu}V_a^{\mu\nu} + \frac{1}{2}m_V^2\sum_{a=0}^{8} V_{a,\mu}V_a^\mu \ . \end{aligned} \tag{2.46}$$

Aufgrund des Masseterms $\mathcal{L}_{\text{mass}}$ weisen Vektor-Mesonen im chiralen Grenzfall weiterhin eine Masse auf. Für den Feldstärke-Tensor gilt

$$V_{\mu\nu} = \sum_{a=0}^{8}\left(\partial_\mu V_{a,\nu} - \partial_\nu V_{a,\mu}\right)\frac{\lambda_a}{2} \ . \tag{2.47}$$

Die verbleibenden Terme $\mathcal{L}_3$ und $\mathcal{L}_4$ in Gleichung (2.45) stehen stellvertretend für Wechselwirkungen zwischen drei beziehungsweise vier Vektor-Mesonen und bringen jeweils dimensionslose Kopplungskonstanten, g_{abc} und h_{abcd}, mit sich. Demzufolge kann Gleichung (2.45) wie folgt umgeschrieben werden

$$\mathcal{L}_V = -\frac{1}{4}\sum_{a=0}^{8} V_{a,\mu\nu}V_a^{\mu\nu} + \frac{1}{2}m_V^2\sum_{a=0}^{8} V_{a,\mu}V_a^\mu - g_{abc}V_{a,\mu}V_{b,\nu}\partial^\mu V_c^\nu - h_{abcd}V_{a,\mu}V_{b,\nu}V_c^\mu V_d^\nu \ . \tag{2.48}$$

In Verbindung mit der Forderung, dass die Lagrange-Dichte aus Gleichung (2.48) sowohl invariant unter einer $\mathrm{U}(1)$-Ladungstransformation und globalen infinitesimalen $\mathrm{SU}(3)$-Transformationen als auch selbstkonsistent im Sinne perturbativer Renormalisierbarkeit ist, kann für das Oktett der Vektor-Mesonen das Resultat für die Kopplungen

$$g_{abc} = g f_{abc} \ , \quad h_{abcd} = \frac{1}{4}g_{abe}g_{ecd} \tag{2.49}$$

gezeigt werden [Nei11]. Infolgedessen wird Gleichung (2.48) zu einer Yang-Mills-Theorie für Vektor-Felder mit zusätzlichem Masse-Term reduziert [DGS10].
In einer chiralen effektiven Feldtheorie, die pseudoskalare und Vektor-Mesonen ent-

hält, müssen die chiral invarianten Kopplungen der Vektor-Mesonen an die Goldstone-Bosonen bei niedriger Energie mit Blick auf die ChPT ein geeignetes Verhalten aufweisen. Zu diesem Zweck eignet sich ein Wechsel in die nicht-lineare Realisierung der chiralen Symmetrie [Wei68]. In diesem Fall ergibt sich die Repräsentation von G aus den Transformationseigenschaften von u, der unitären Wurzel aus U mit $u(x)^2 = U(x)$ als[8]

$$u \mapsto u' = \sqrt{V_R U V_L^\dagger} \equiv V_R u K\left(V_L, V_R, U\right)^\dagger = K\left(V_L, V_R, U\right) u V_L^\dagger \ . \tag{2.50}$$

Die ausgleichende SU(3)-Transformation K, der sogenannte *Kompensator*, ist somit durch

$$K\left(V_L, V_R, U\right) = \sqrt{V_R U V_L^\dagger}^{-1} V_R \sqrt{U} \tag{2.51}$$

gegeben. In Folge der Konstruktion wird angenommen, dass die Vektor-Felder in Bezug auf den Kompensator homogen transformieren

$$V_\mu \mapsto K V_\mu K^\dagger \ . \tag{2.52}$$

Im Rahmen dieser Dissertation gilt für das externe Feld einer elektromagnetischen Wechselwirkung der Fall $r_\mu = l_\mu$, woraus $V_L = V_R = V$ folgt. Somit ist

$$K = \left(u'\right)^{-1} V u \tag{2.53}$$

und da sich unter den gleichen Voraussetzungen für das transformierte u

$$u' = V u V^\dagger \tag{2.54}$$

ergibt, folgt für den Kompensator

$$K\left(V, V, U\right) = V \ . \tag{2.55}$$

2.2.4. Organisationsschema der Lagrange-Dichte

Bisher wurden die benötigten Bausteine und ihre Entwicklungen in den pseudoskalaren Feldern vorgestellt. Zur Konstruktion der Lagrange-Dichte eines Prozesses ist es weiterhin notwendig, die Hierarchie der einzelnen Beiträge zu klären. Die Methodologie des Zählschemas, angepasst auf die in dieser Arbeit betrachteten Zusammenhänge, fußt auf der Ausarbeitung des Zählschemas der LN_CChPT in [BMS17]. Als explizite Beispiele zur Illustration der Erklärungen finden Terme aus Kapitel 3 Verwendung.
Um das in Gleichung (2.34) gegebene Zählschema auf die Konstruktion einer Lagrange-Dichte im Rahmen der LN_C-Entwicklung anzuwenden, werden zwei Organisationsschemata miteinander kombiniert. Anwednung findet um Einen das klas-

[8]Eine Einführung findet sich in [SS12]

sische Zählschema der konventionellen ChPT für Impulse und Massen [GL85], so zählen kovariante Ableitungen als $O(p)$, χ als $O\left(p^2\right)$, usw. Die zugehörige chirale Ordnung sei im Folgenden mit D_p bezeichnet. Zum Anderen wird die relative Gewichtung verschiedener Terme in LN_C durch Regeln aus [Her+97; KL00] vorgegeben. In der Zählweise der LN_C-Entwicklung ist die führende Ordnung einer Quark-Korrelationsfunktion durch eine einzige Flavor-Spur von Ordnung N_C gegeben [t H74; Wit79a; Man98] und allgemein sind Diagramme mit r Quark-Schleifen und somit r Flavor-Spuren von Ordnung N_C^{2-r}. Weist ein Term keine Flavor-Spur auf, so entstammt dieser aus dem reinen Sektor der Gluonen und zählt in führender Ordnung als N_C^2. Wird die vorangegangene Argumentation auf das Niveau der effektiven Lagrange-Dichte übertragen, kann gefolgert werden, dass Terme mit einzelnen Spuren von Ordnung N_C sind und Terme mit zwei Spuren von Ordnung $O(1)$. Die Reihe ließe sich beliebig fortsetzen, für die Rechnungen dieser Arbeit genügt jedoch die Betrachtung von maximal zwei Spuren in einem Term der Lagrange-Dichte. Demzufolge lässt sich mit der Anzahl der Spuren N_{tr} die Ordnung der LN_C-Entwicklung mit der Formel

$$D_{N_C^{-1}} = -2 + N_{\text{tr}} \tag{2.56}$$

bestimmen. Die Ordnung eines einzelnen Operators berechnet sich dann aus der Kombination der beiden Ordnungsschemata mittels

$$D_\delta = \frac{1}{2} D_p + D_{N_C^{-1}} \; . \tag{2.57}$$

Zudem erlaubt Gleichung (2.57) auch die Identifikation des Verhaltens der zu den Operatoren zugehörigen Niederenergiekonstanten in der LN_C-Skalierung. Die einzelnen Ordnungen der den Lagrange-Dichten zugehörigen Bausteine sind in Tabelle A.2 aufgeführt.

Das verfeinerte Zählschema zur Organisation der Terme der Wechselwirkungs-Lagrange-Dichte wird im Folgenden anhand einiger Terme zu den elektromagnetischen Übergängen $PV\gamma$ aus Kapitel 3 illustriert.

Der Term führender Ordnung[9]

$$\left\langle f_{+\mu\nu} \left\{ V_\rho, u_\sigma \right\} \right\rangle \tag{2.58}$$

hat nach dem Zählschema der ChPT, bei Inklusion von Vektor-Mesonen, die Ordnung $O\left(p^3\right)$. Der Übersicht wegen wird in diesem und den folgenden Beispielen ein für Lorentz-Invarianz und Parität notwendiger Epsilon-Tensor in den Termen nicht gezeigt. Mit den Ordnungen der Bausteine oder alternativ Gleichung (2.57) ergibt sich mit $D_p = 3$ und $N_{N_C^{-1}}$ für diesen Term mit einer Flavor-Spur die Ordnung $O(\delta^{1/2})$. In Relation zu dem Term führender Ordnung ist der folgende Term mit zwei Flavor-Spuren

$$\left\langle f_{+\mu\nu} \right\rangle \left\langle V_\rho u_\sigma \right\rangle \tag{2.59}$$

[9] Innerhalb dieser Dissertation seien die folgenden Konventionen zur Darstellung einer Flavor-Spur $\langle \ldots \rangle$, eines Kommutators $[\ldots, \ldots]$ und eines Antikommutators $\{\ldots, \ldots\}$ gewählt.

mit $1/N_C$ unterdrückt. Folglich ergibt das Zählschema die Ordnung $O(\delta^{3/2})$. Dieser und Terme, die aufgrund von der Hinzunahme von Korrekturen in den Quark-Massen entstehen, beispielsweise

$$\left\langle f_{+\mu\nu}\chi_{+}\left\{V_{\rho},u_{\sigma}\right\}\right\rangle \ , \tag{2.60}$$

nehmen im Zählschema der LN_CChPT dieselbe Ordnung an und sind somit relativ zum Term führender Ordnung als Korrekturen in nachfolgender Ordnung (englisch: „next to leading order“, NLO) gegeben. Entsprechend ergeben sich bei Aufspaltung des Terms aus Gleichung (2.60) in zwei oder des Term aus Gleichung (2.59) in drei Flavor-Spuren Korrekturen höherer Ordnung als NLO.
Ein Blick auf die Parameter der Entwicklung

$$\frac{1}{N_C} \quad \text{und} \quad \frac{M^2}{(4\pi F)^2}\ , \tag{2.61}$$

bestätigt die Annahme gleichwertiger NLO-Korrekturen zur führenden Ordnung. Für den physikalischen Fall von drei Farbfreiheitsgraden $N_C = 3$, der Kaonmasse $M = M_K$ und der Pion-Zerfallskonstante F_π, nehmen die Parameter dieselbe Größenordnung an:

$$\frac{1}{N_C} = \frac{1}{3} \tag{2.62}$$

$$\frac{M_K^2}{(4\pi F)^2} \simeq 0.24\ . \tag{2.63}$$

2.3. Mischung

Die Mischung von Zuständen ist ein Phänomen der Quantenmechanik, das direkt mit den Symmetrien der Dynamik und ihrer möglichen Mechanismen zur Brechung in Verbindung steht. Innerhalb des Niedrigenergiesektors der QCD lässt sich ein Wechselspiel zwischen der dynamischen Brechung der chiralen Symmetrie, der expliziten Symmetriebrechung in Folge der Quark-Massen und der axialen Anomalie der $\mathrm{U}(1)_A$ beobachten. Die Untersuchung von pseudoskalaren und Vektor-Mesonen bietet ein geeignetes Versuchsfeld zu den Mechanismen der Symmetriebrechungen innerhalb der QCD.
Ein Ziel der vorliegenden Arbeit ist die Inklusion der Mischung zwischen Singulett- und Oktett-Feldern der Meson-Paare ϕ-ω und η-η'. Explizit gründet sich diese Mischung in der Brechung der SU(3)-Symmetrie aufgrund der Quark-Massen und, im Falle der pseudoskalaren Mesonen, der chiralen Anomalie. Da innerhalb dieser Arbeit im Grenzfall einer vollständig erhaltenen Isospin-Symmetrie gearbeitet wird, d. h. für die Quark-Massen der u- und d-Quarks gilt $m_u = m_d = \hat{m}$, werden Effekte, die bei einer Brechung der genannten Symmetrie eine Rolle spielen, vernachlässigt.
Werden die Felder, die den physikalischen Zuständen $|\eta\rangle$, $|\eta'\rangle$, $|\omega\rangle$ und $|\phi\rangle$ entsprechen, durch kartesische, d. h. die Oktett-Felder η_8 und ω_8, beziehungsweise Singulett-

Felder η_1 und ω_1 ausgedrückt, so ergibt sich (vgl. beispielsweise [Tan+18])

$$\begin{aligned} \eta &= \cos(\theta_P)\,\eta_8 - \sin(\theta_P)\,\eta_1\ , \\ \eta' &= \sin(\theta_P)\,\eta_8 + \cos(\theta_P)\,\eta_1\ , \\ \phi &= \cos(\theta_V)\,\omega_8 - \sin(\theta_V)\,\omega_1\ , \\ \omega &= \sin(\theta_V)\,\omega_8 + \cos(\theta_V)\,\omega_1\ . \end{aligned} \tag{2.64}$$

Dabei sind θ_P und θ_V die Mischungswinkel der pseudoskalaren und der Vektor-Mesonen.

Die hier angegebenen Relationen und deren zugehörige Mischungswinkel gelten in führender Ordnung und sind aus der Diagonalisierung der Massen-Matrizen der Mesonen mittels einer Drehung, charakterisiert durch den Winkel, zu ermitteln. Für eine sogenannte *ideale* Mischung, einem mathematischen Idealzustand, in dem die Oktett- und Sigulett-Felder voneinander vollständig entkoppelt sind, würde der Mischungswinkel der Vektormesonen einen Wert von $\theta_V \approx 35.3°$ annehmen und es gilt dann

$$\begin{aligned} \phi_{\text{ideal}} &= \sqrt{\frac{2}{3}}\omega_8 - \frac{1}{\sqrt{3}}\omega_1 \quad \text{und} \\ \omega_{\text{ideal}} &= \frac{1}{\sqrt{3}}\omega_8 + \sqrt{\frac{2}{3}}\omega_1\ . \end{aligned} \tag{2.65}$$

Alternativ lässt sich sagen, in einer Darstellung der Quark-Basis gilt $\phi = -s\bar{s}$ und $\omega = \left(u\bar{u} + d\bar{d}\right)/\sqrt{2}$. Diese mathematische Idealisierung entspricht allerdings nicht der Realität, sondern stellt nur eine Näherung dar. Wird die Diagonalisierung mit physikalischen Massen durchgeführt, so ergibt sich für die in dieser Arbeit verwendeten Werte für die Mischungswinkel in führender Ordnung $\theta_V = 36.4°$[10] [Tan+18] sowie mit der aus [BMS17] entnommenen Formel für den Mischungswinkel führender Ordnung $\theta_P^{[0]} = -19.7°$.

Die Betrachtung der Mischung der Mesonen beschränkt sich bislang auf die führende Ordnung in der kinetischen und Massen-Lagrange-Dichte. Bei Erweiterung des theoretischen Fundaments auf eine LN_C chiraler Störungstheorie kommen zur Wechselwirkungs-Lagrange-Dichten Korrekturterme zusätzlich zur führenden Ordnung (NLO) hinzu.

In [BMS17] wurde die η-η'-Mischung innerhalb des Zählschemas der LN_CChPT inklusive von Korrekturen auf dem Ein-Schleifen-Niveau in NNLO untersucht. Ausgangspunkt hierfür ist eine effektive Lagrange-Dichte der Oketett- und Singulett-Felder, die durch Anwendung sukzessiver Transformationen in eine diagonalisierte Lagrange-Dichte der physikalischen Felder umgewandelt wird. Dieser Formalismus wurde in [Kra20] auf die ϕ-ω-Mischung der Vektor-Mesonen angewandt. Innerhalb dieser Dissertation beschränken sich die Betrachtungen auf das Niveau der Baumgraphen, bei Berücksichtigung von Korrekturen zur führenden Ordnung in $1/N_C$ und

[10] Fehler der Mischungswinkel werden in den Rechnungen dieser Arbeit vernachlässigt.

aufgrund der Quark-Massen bis inklusive NLO. Zugehörige, aus [BMS17] entnommene Formeln und Rechnungen sind in Appendix A.2 skizziert.
Werden die Rechnungen ausgeführt, so ergibt sich in NLO für den Mischungswinkel der pseudoskalaren Mesonen der Wert $\theta_P^{[1]} = -12.4°$. Zudem bedeutet die aufgrund der Korrekturen notwendige Redefinition der pseudoskalaren Felder auch, dass die physikalischen Felder, ausgedrückt durch kartesischen Felder, eine modifizierte Form annehmen. Vereinfacht dargestellt werden in der Gleichung des η-Meson die folgenden Ersetzungen

$$\begin{aligned} \cos_\eta\left(\Theta_P^{[0]}\right) &\mapsto \left(1-\frac{1}{2}\delta_8^{(1)}\right)\cos\left(\Theta_P^{[1]}\right)+\frac{1}{2}\delta_{81}^{(1)}\sin\left(\Theta_P^{[1]}\right) \\ \sin_\eta\left(\Theta_P^{[0]}\right) &\mapsto -\frac{1}{2}\delta_{81}^{(1)}\cos\left(\Theta_P^{[1]}\right)-\left(1-\frac{1}{2}\delta_1^{(1)}\right)\sin\left(\Theta_P^{[1]}\right)\ , \end{aligned} \tag{2.66}$$

verwendet, um den Übergang zwischen der Mischung in führender Ordnung und NLO anzuzeigen und entsprechend gilt für das η'-Meson

$$\begin{aligned} \sin_{\eta'}\left(\Theta_P^{[0]}\right) &\mapsto \left(1-\frac{1}{2}\delta_8^{(1)}\right)\sin\left(\Theta_P^{[1]}\right)-\frac{1}{2}\delta_{81}^{(1)}\cos\left(\Theta_P^{[1]}\right) \\ \cos_{\eta'}\left(\Theta_P^{[0]}\right) &\mapsto -\frac{1}{2}\delta_{81}^{(1)}\sin\left(\Theta_P^{[1]}\right)+\left(1-\frac{1}{2}\delta_1^{(1)}\right)\cos\left(\Theta_P^{[1]}\right)\ . \end{aligned} \tag{2.67}$$

Dabei sind die aus der Renormierung des kinetischen Terms und der Redefinition der pseudoskalaren Felder folgenden Korrekturen $\delta_i^{(1)}$ in Gleichung (A.11) angegeben.
Somit ist die Betrachtung Mischung der pseudoskalaren Mesonen mit dem Organisationsschema der Lagrange-Dichte in Einklang gebracht. Die zu [BMS17] analoge Vorgehensweise im Fall der Vektor-Mesonen, wie sie in [Kra20] gezeigt wird, führt für den Mischungswinkel in NLO auf das Ergebnis $\Theta_V^{[1]} = 39.5°$.

2.4. Konstanten und Konventionen

In diesem Abschnitt werden verwendete Konstanten, Werte und Konventionen vorgestellt, die noch nicht in der vorangegangenen Einführung in die theoretischen Grundlangen Erwähnung fanden. Dabei handelt es sich unter anderem um die verwendeten physikalischen Massen der Teilchen oder Modellgrößen, die über experimentelle Angaben bestimmt und dann während der Ausarbeitung in dieser Arbeit implizit Verwendung finden.
Alle experimentell fundierten Werte und Angaben zu Größen werden im Folgenden, soweit nicht explizit anders genannt, der Veröffentlichung der Particle Data Group, gekennzeichnet mit PDG, [Tan+18] entnommen.

2.4.1. Massen und Breiten

In Tabelle 2.2 sind die Massen der pseudoskalaren und Vektormesonen angegeben. Für deren Schreibweise wird die Konvention verwendet, dass die Massen der pseudoskalaren Mesonen (Goldstone-Boson) mit großem M und die der Vektormesonen mit kleinem m mit dem jeweils zugehörigen Meson im tief gestellten Index gekennzeichnet werden. Aufgrund der begrenzten Genauigkeit, mit der im Modell gearbeitet werden kann, werden die Massen in dessen Rahmen als fehlerfrei angenommen.

Tabelle 2.2.: Massen der pseudoskalaren und Vektor-Meson in MeV.

$M_{\pi^\pm}$	M_{π^0}	$M_{K^\pm}$	$M_{K^0/\overline{K}^0}$	M_η	$M_{\eta'}$
193.6	135.0	493.7	497.6	547.9	957.8
$m_{\rho^\pm}$	m_{ρ^0}	$m_{K^{*\pm}}$	$m_{K^{*0}/\overline{K}^{*0}}$	m_ω	m_ϕ
775.3	775.3	891.8	895.6	782.7	1019.5

Des weiteren finden die Zerfallskonstanten von Pion und Kaon Verwendung. Die Werte werden aus [Tan+18] entnommen und sind in Tabelle 2.3 aufgeführt.

Tabelle 2.3.: Vergleich der Zerfallskonstanten von Pion, Kaon und der chiralen Zerfallskonstante, angegeben in MeV.

F_π	F_K	F_0 [BE14]
92.2	110.	81.

Dabei zeigen ganze Zahlen, die von einem Punkt gefolgt werden[11], einen gerundeten Wert an und stehen nicht für die exakte Zahl.
Zusätzlich zu diesen Werten wird noch das Verhältnis der Quarkmassen

$$r = \frac{m_s}{\hat{m}} = 27.46 \tag{2.68}$$

zur Bestimmung einiger Größen genutzt, die für die Rechnungen innerhalb unseres Modells Verwendung finden. Diese sind die allgemeine Zerfallskonstante F, die quadrierten Pion- und Kaonmassen in führender Ordnung $\mathring{M}_\pi^2$ beziehungsweise $\mathring{M}_K^2$, sowie die Kopplungskonstanten L_5, L_8, Λ_1 und Λ_2. Für die Kopplungskonstanten gilt dabei: $\tilde{\Lambda} = \Lambda_1 - 2\Lambda_2$, Formeln zur Berechnung hierzu siehe [BMS17], bzw. in Ansätzen Appendix A. Die Kopplungen und in der Folge der Mischungswinkel der η-η'-Mischung in NLO $\Theta_P^{[1]}$, entstammen $1/N_C$- sowie Quark-Massen-Korrekturen zu den

[11] Dezimalstellen werden in dieser Dissertation, in Anpassung an internationale Konventionen, mit Punkten anstelle von Kommata markiert.

kinetischen und Massentermen der Lagrange-Dichte der pseudoskalaren Mesonen. In den Rechnungen finden die folgenden Formeln und Relationen Verwendung [SS12]

$$
\begin{aligned}
\mathring{M}_\pi^2 &= \frac{r+1}{r-1}\overline{M}_\pi^2 + 4\frac{\overline{M}_K^2}{1-r^2} \\
\mathring{M}_K^2 &= \frac{(1+r)^2\,\overline{M}_\pi^2 - 4\overline{M}_K^2}{2\,(r-1)} \\
F &= \frac{\mathring{M}_K^2 F_\pi - \mathring{M}_\pi^2 F_K}{\mathring{M}_K^2 - \mathring{M}_\pi^2} \\
L_5 &= \frac{F\,(F_\pi - F)}{4\mathring{M}_\pi^2} \\
L_8 &= \frac{F^2}{4\,(1-r^2)\,\mathring{M}_\pi^4}\left(\frac{1+r}{2}\overline{M}_\pi^2 - \overline{M}_K^2\right) + \frac{L_5}{2}
\end{aligned}
\tag{2.69}
$$

mit den gemittelten Massen der Pionen und Kaonen[12]

$$
\begin{aligned}
\overline{M}_\pi &= \frac{M_{\pi^0} + M_{\pi^\pm}}{2} \quad \text{und} \\
\overline{M}_K &= \frac{M_{K^0} + M_{K^\pm}}{2} \;.
\end{aligned}
\tag{2.70}
$$

Werden nun innerhalb des Modells die Ergebnisse der Formeln aus (2.69) berechnet, so ergeben sich die in Tabelle 2.4 angegebenen Werte.

Tabelle 2.4.: Massen von Pion und Kaon in führender Ordnung, Zerfallskonstante F sowie Kopplungskonstanten L_5, L_8 und $\tilde{\Lambda}$.

$\mathring{M}_\pi$	$\mathring{M}_K$	F
137.7 MeV	519.6 MeV	90.7 MeV
L_5	L_8	$\tilde{\Lambda}$
$1.60\cdot 10^{-3}$	$0.64\cdot 10^{-3}$	-0.394

[12] Unter der Annahme, dass das π^0 sein eigenes Antiteilchen ist.

Elektromagnetische Übergänge von Mesonen

3. Elektromagnetische Übergänge ($PV\gamma$)

Auf den in Kapitel 2 vorgestellten theoretischen Rahmenbedingungen aufbauend wird in diesem Kapitel ein Modell zur Beschreibung der elektromagnetischen Übergänge $PV\gamma$ zwischen einem pseudoskalaren Meson P und einem Vektor-Meson V ausgearbeitet. Mit den vorliegenden Messwerten physikalischer Zerfälle der pseudoskalaren und Vektor-Meson-Nonets steht zur Anpassung der Parameter des Modells eine gute Grundlage zur Verfügung. In schrittweiser Konstruktion des Modells, beginnend mit der Bestimmung der Wechselwirkungs-Lagrange-Dichte, gefolgt von der Berechnung von Übergangs- und invariantem Matrixelement und Integration über den Phasenraum, enthält man eine allgemeine, mit entsprechender Ersetzung der Massen und Amplituden für alle Übergänge $PV\gamma$ gültige Formel für die Zerfallsrate. Mit dieser lassen sich dann die Kopplungskonstanten bestimmen und unterschiedliche Näherungen innerhalb des Modells untersuchen und vergleichen. Zum Abschluss steht ein Vergleich mit den Ergebnissen aus ausgewählten Referenzen, die sich beispielsweise in ihrem Ansatz der Betrachtung der Vektor-Meson-Felder unterscheiden.

3.1. Die physikalischen Zerfälle

Der nachfolgende Abschnitt zeigt die Eigenschaften der physikalisch erfassten Zerfälle $PV\gamma$ auf und leitet deren Anzahl schematisch her.
Elektromagnetische Übergänge zwischen einem einzelnen pseudoskalaren (Gesamtdrehimpuls $J = 0$ und Parität $P = -$) und Vektor-Meson (Gesamtdrehimpuls $J = 1$ und Parität $P = -$) zeichnen sich dadurch aus, dass in diesen Prozessen keine Änderung in Strangeness und Isospin-Projektion auftritt.
Abbildung 3.1 zeigt das pseudoskalare und das Vektor-Meson-Nonet, eingezeichnet in einem Koordinatensystem mit der Isospin-Projektion I_3 auf der Abszisse und der Hyperladung Y auf der Ordinate. Im äußeren Ring sind sechs Teilchen ($\pi^{\pm}$, $K^{\pm}$, $K^0/\overline{K}^0$), nach Berücksichtigung der Ladungskonjugation verbleiben davon drei voneinander echt verschiedene, angegeben. Für diese gilt bei elektromagnetischen Übergängen, dass die Prozesse aufgrund der Differenz in den Massen immer von den Vektor-Mesonen aus in Richtung der pseudoskalaren Mesonen erfolgen. Zudem verbleibt man bei einem elektromagnetischen Übergang beim Wechsel der Nonets an den ursprünglichen Koordinaten des $(I_3,\ Y)$-Diagramms, da sich, wie bereits angesprochen, Strangeness und Ispospin-Projektion nicht ändern. Somit ergeben sich bei Berücksichtigung der Ladungskonjugation drei voneinander echt verschiedene

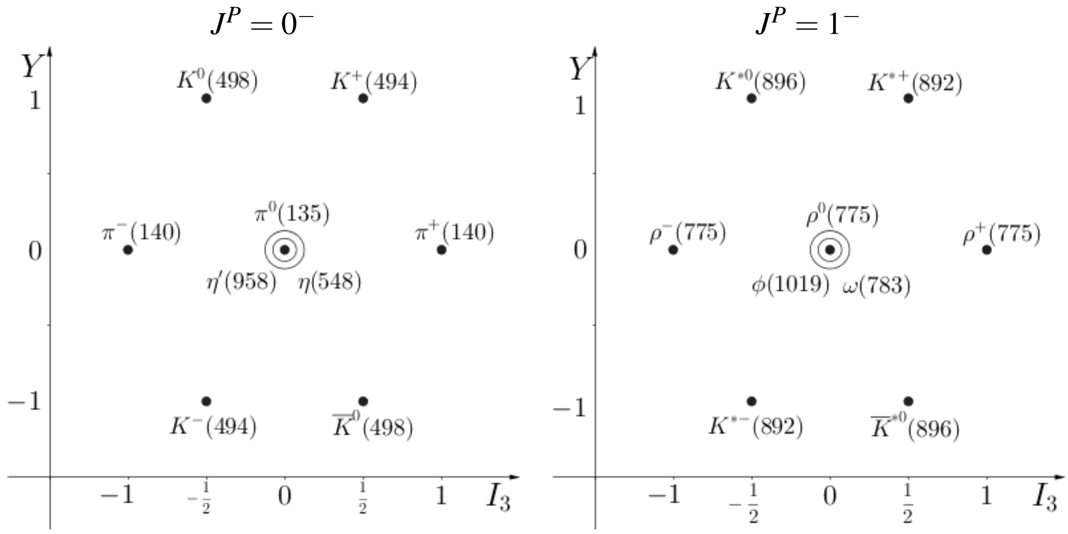

Abbildung 3.1.: Nonets der pseudoskalaren und Vektor-Mesonen zur Linken, respektive Rechten. Angegeben sind Isospin-Projektion I_3 auf der Abszissenachse und Hyperladung Y auf der Ordinatenachse. Jedem Meson beigeordnet ist die genäherte Masse in MeV.

Zerfälle:

$$\rho^+ \to \pi^+\gamma\,, \qquad K^{*0} \to K^0\gamma\,, \qquad K^{*+} \to K^+\gamma\,.$$

Für jedes der neutralen Mesonen, pseudoskalaren wie Vektor-Mesonen mit Isospinprojektion $I_3 = 0$ und Hyperladung $Y = 0$, besteht die Möglichkeit, mit jeweils drei Vektor- respektive pseudoskalaren Mesonen in Wechselwirkung zu treten. Dabei ist die Entscheidung über das Teilchen im Ausgangszustand von den jeweiligen Massen abhängig. Insgesamt ergeben sich die neun Zerfälle

$$\begin{array}{ccc} \rho^0 \to \pi^0\gamma\,, & \rho^0 \to \eta\gamma\,, & \omega \to \pi^0\gamma\,, \\ \omega \to \eta\gamma\,, & \phi \to \pi^0\gamma\,, & \phi \to \eta\gamma\,, \\ \phi \to \eta'\gamma\,, & \eta' \to \rho^0\gamma\,, & \eta' \to \omega\gamma\,. \end{array}$$

Dabei ist zu beachten, dass in dieser Dissertation die Isospin-Brechung in den Modellüberlegungen nicht explizit berücksichtigt wird und somit formell gesehen die Übergänge von Rho-Mesonen in Pionen nicht in neutrale und geladene Zerfälle unterscheidbar sind. Innerhalb dieser Arbeit werden dennoch beide Zerfälle als echt verschieden berücksichtigt, da die experimentell ermittelten Werte für die Zerfallsraten einen größeren Unterschied aufweisen als durch den geringen Einfluss der Brechung der Isospin-Symmetrie[1] zu erwarten ist. Wobei anzumerken ist, dass sich diese Diskrepanz in den vergangenen Jahren deutlich reduziert hat, wie beispielsweise anhand

[1] So geben beispielsweise [Rus09] und [Div+12] mit Blick auf den Einfluss der Quarkmassen auf die Zerfallskonstanten der Pionen und Kaonen eine Größenordnung von $< 1\%$ für den Effekt der Isospin-Brechung an.

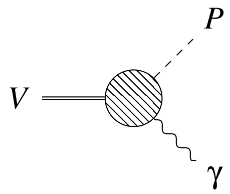

Abbildung 3.2.: Allgemeines Zerfallsschema für die elektromagnetischen Übergänge zwischen einem pseudoskalaren und einem Vektor-Meson.

der Veröffentlichungen der *Particle Data Group* aus den Jahren 2016 [Pat+16] und 2018 [Tan+18] für die entsprechenden Zerfälle nachgeprüft werden kann.
Abschließend ist festzuhalten, dass alle der zwölf theoretisch möglichen Zerfälle $PV\gamma$ auch experimentell mit ihren Verzweigungs- bzw. Zerfallsraten gemessen wurden. Es existiert somit für den Entwurf und die Anpassung des Modells zur Beschreibung der elektromagnetischen Übergänge eine gute Datenlage, was es im Verlauf der Arbeit unter anderem ermöglicht, die Integration der Mischungen von ϕ-ω- und η-η'-Mesonen in das Modell als Vorgabe zu setzen.

3.2. Die Lagrange-Dichte

In diesem Abschnitt wird die Konstruktion der Lagrange-Dichte für die Übergänge $PV\gamma$ sukzessive in den einzelnen Ordnungen skizziert. Die Rechnungen werden der Übersicht halber vereinfacht dargestellt, ergänzend dazu sind in Appendix B, Abschnitt B.1, Details und Zwischenschritte zu den Rechnungen in größerer Ausführlichkeit zu finden.
In einem ersten Schritt wird gezeigt, welche Vertices der Wechselwirkung in der Konstruktion der Lagrange-Dichte mit Beiträgen berücksichtigt werden müssen. Hiernach finden die im ersten Kapitel dieser Arbeit in Abschnitt 2.2.2 vorgestellten Bausteine zur Konstruktion einer invarianten chiralen Lagrange-Dichte auf dem Niveau der Baumgraphen Verwendung. Die zur Aufwertung des Modells notwendigen Quantenkorrekturen (d. h. Schleifendiagramme) werden in der Masterarbeit von A. Krasniqi [Kra20] vorgestellt.

3.2.1. Feynman-Diagramme

Das allgemeine Schema der Zerfälle $PV\gamma$ ist in Abbildung 3.2 gegeben. Unter der Annahme der Dominanz von Vektor-Mesonen [Sak69] müssen die beiden in Abbildung 3.3 gezeigten Diagramme berücksichtigt werden.
Zu folgern ist, dass von den in Abbildung 3.3 gezeigten Diagrammen innerhalb des Vektorformalismus für ein reelles Photon im Endzustand, nur das Diagramm der Punktwechselwirkung auf der linken Seite beiträgt. Der Fall eines propagierenden

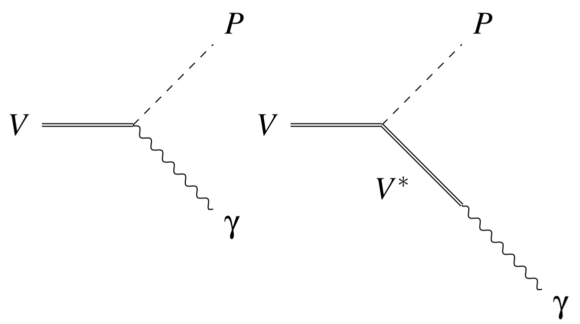

Abbildung 3.3.: Feynman-Diagramme der elektromagnetischen Übergänge zwischen einem pseudoskalaren und einem Vektor-Meson. Linker Hand die Punktwechselwirkung, zur Rechten der Zerfall mittels eines Vektor-Mesons im Zwischenzustand in ein reelles Photon im Endzustand.

(virtuellen) Vektor-Mesons im Zwischenzustand erbringt keinen Beitrag zu den Zerfällen $PV\gamma$. Käme anstelle des Vektorformalismus zur Darstellung der Felder der Vektor-Mesonen hingegen der Tensorformalismus mit der Darstellung der Felder mittels antisymmetrischer Tensoren zur Anwendung, würde auch das rechte der beiden Diagramme einen Beitrag liefern. Ein Beispiel dafür sind die Modellüberlegungen von Lutz und Leupold [LL08], in denen der entsprechende Formalismus zur Anwendung kommt. Im Appendix in Abschnitt B.1 wird die Konstruktion der Terme der Lagrange-Dichte genauer präsentiert.

3.2.2. Die Lagrange-Dichte führender Ordnung

Unter Nutzung der Bausteine für das elektromagnetische Feld $f_{+\mu\nu}$, das Vektor-Meson-Feld V_μ und das Feld des pseudoskalaren Mesons u_μ lässt sich in führender Ordnung die Wechselwirkungs-Lagrange-Dichte

$$\mathcal{L}_{LO} = c_1 \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \left\langle f_{+\mu\nu} \left\{ V_\rho, u_\sigma \right\} \right\rangle \ , \quad \varepsilon_{0123} = 1 \ , \tag{3.1}$$

für elektromagnetische Übergänge zwischen einem pseudoskalaren und einem Vektor-Meson konstruieren. Aus den Eigenschaften des chiralen Vielbeins u_σ als Pseudotensor erster Stufe und des Feldstärke-Tensors sowie Vektorfelds als Tensoren zweiter respektive erster Stufe ist die Notwendigkeit zum Erhalt der Invarianz unter Paritätstransformation Grund für die Hinzunahme des Epsilon-Tensors, welcher sich unter Lorentz-Transformationen wie ein Pseudotensor vierter Stufe verhält. Zudem wird aufgrund der Anforderung an das Transformationsverhalten der Lagrange-Dichte unter Ladungskonjugation der Antikommutator benötigt.
Nach der Entwicklung der Bausteine in den Feldern der Goldstone-Bosonen, gezeigt in Gleichung (2.42), werden allein die linearen Terme behalten, weil Terme höherer Ordnung in den Goldstone-Bosonen mehr als ein pseudoskalares Meson beschreiben

würden. Abschließend erhält man die Wechselwirkungs-Langrange-Dichte der elektromagnetischen Übergänge $PV\gamma$ in führender Ordnung

$$\mathcal{L}_{LO}^{PV\gamma} = 2\mathrm{e}\frac{c_1}{F}\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}F_{\mu\nu}\left\langle Q\left\{V_\rho,\partial_\sigma\Phi\right\}\right\rangle \ . \tag{3.2}$$

3.2.3. Korrekturen zur führenden Ordnung

Ergänzend zum bisher diskutierten Beitrag zur Lagrange-Dichte in führender Ordnung existieren zwei Arten von Beiträgen an Korrektur zur führenden Ordnung. Die ersten sind die Korrekturen in $1/N_C$, die aus insgesamt drei Termen mit jeweils zwei Flavor-Spuren bestehen und die gleichen Bausteine wie im Fall der führenden Ordnung beinhalten,

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{\mathrm{NLO},1/N_C} =& c_2\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\left\langle V_\rho\right\rangle\left\langle f_{+\mu\nu}u_\sigma\right\rangle + c_3\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\left\langle f_{+\mu\nu}V_\rho\right\rangle\left\langle u_\sigma\right\rangle \\ &+ c_4\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\left\langle f_{+\mu\nu}\right\rangle\left\langle V_\rho u_\sigma\right\rangle \ .\end{aligned} \tag{3.3}$$

Nach der Durchführung der Entwicklung der Bausteine in den Feldern der Goldstone-Bosonen für diesen Term erhält man die $1/N_C$-Korrekturen zur $PV\gamma$-Wechselwirkungs-Lagrange-Dichte,

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{NLO,1/N_C}^{PV\gamma} = 2\mathrm{e}\frac{c_1}{F}\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}F_{\mu\nu}\big(& c_2\left\langle V_\rho\right\rangle\left\langle Q\partial_\sigma\Phi\right\rangle + c_3\left\langle QV_\rho\right\rangle\left\langle\partial_\sigma\Phi\right\rangle \\ &+ c_4\left\langle Q\right\rangle\left\langle V_\rho\partial_\sigma\Phi\right\rangle\big) \ .\end{aligned} \tag{3.4}$$

Die zweite Art der Beiträge zur Lagrange-Dichte nachfolgender Ordnung sind Terme einzelner Spuren die Quarkmassen-Korrekturen enthalten. Zu beachten ist, dass zusätzlich zu den bereits verwendeten Bausteinen noch zwei weitere, $\chi_\pm$ und $f_{-\mu\nu}$, berücksichtigt werden. Somit ergeben sich die vier Terme der Quarkmassen-Korrekturen zu

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{NLO,\chi} =& c_5\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\left\langle\chi_+ f_{+\mu\nu}\left\{V_\rho,u_\sigma\right\}\right\rangle + c_6\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\left\langle\chi_+ V_\rho f_{+\mu\nu}u_\sigma + \chi_+ u_\sigma f_{+\mu\nu}V_\rho\right\rangle \\ &+ ic_7\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\left\langle\left\{f_{+\mu\nu},\partial_\rho V_\sigma\right\}\chi_-\right\rangle + ic_8\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\left\langle f_{-\mu\nu}\left[\partial_\rho V_\sigma,\chi_+\right]\right\rangle \ .\end{aligned} \tag{3.5}$$

Nach der nun folgenden Entwicklung der Bausteine und einer partiellen Integration der letzten beiden Terme ist zu erkennen, dass die Terme der Quarkmassen-Korrekturen mit den Redefinitionen der Kopplungskonstanten $c_+ = c_5 + c_6 - c_7$ und $c_- = c_5 - c_6 - c_8$ umgeschrieben werden können. Dies eignet sich insofern, als dass schlussendlich für die Quarkmassen-Korrekturen in erster Ordnung der $PV\gamma$-Wechselwirkung die folgenden beiden Terme

$$\mathcal{L}_{NLO,\chi}^{PV\gamma} = 4B_0\frac{\mathrm{e}}{F}\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}F_{\mu\nu}\left(c_+\left\langle\left\{Q,V_\rho\right\}\left\{\mathcal{M},\partial_\sigma\Phi\right\}\right\rangle + c_-\left\langle\left[Q,\partial_\sigma\Phi\right]\left[V_\rho,\mathcal{M}\right]\right\rangle\right) \tag{3.6}$$

erhalten werden.

An diesem Punkt sind nun alle relevanten Beiträge zur Wechselwirkungs-Lagrange-Dichte der elektromagnetischen Übergängen $PV\gamma$ aufgestellt, inklusive der Korrekturen in $1/N_C$ und aufgrund der Quarkmassen. Wird die führende Ordnung mitgezählt, so ergeben sich zusammen mit den drei Termen aus den $1/N_C$-Korrekturen und den zwei vereinfachten Termen der Quarkmassen-Korrekturen insgesamt sechs Terme. Es ist zu beachten, dass nach dem in dieser Arbeit verwendeten Organisationsschema Korrekturen des Typs $1/N_C \times \chi$ als Korrekturen höherer Ordnung relativ zu den Korrekturen der Quarkmassen gesehen werden, vergleichbar dem Fall der Korrekturen $LO \times 1/N_C \sim 1/N_C$ gegenüber der führenden Ordnung, und folglich nicht berücksichtigt werden.

3.3. Invariantes Matrixelement und Zerfallsbreite

In diesem Abschnitt wird, ausgehend von den in einem ersten Schritt vorgestellten Feynman-Regeln zur Ersetzung der allgemeinen Felder mit expliziten physikalischen Teilchen und deren Benennungen für die zugehörigen Impulse, das invariante Matrixelement und damit schlussendlich die Zerfallsbreite der physikalischen Zerfälle $PV\gamma$ bestimmt.
Es ist anzumerken, dass die Behandlung der Spin-Zustände des Vektor-Mesons nur schematisch dargestellt wird, für eine genauere Diskussion wird auf [Ryd96] verwiesen. Die Bestimmung der invarianten Amplitude ausgehend von $i\mathcal{L}_{int}$ richtet sich nach den Konventionen aus [BD65], gleiches gilt für die differentielle Zerfallsbreite.

3.3.1. Feynman-Regeln

Beteiligte Teilchen an den untersuchten Wechselwirkungen sind

- ein Vektor-Meson V im Anfangs- oder Endzustand, mit Masse m_V, Impuls p, Polarisation $\varepsilon_V(p)$,
- ein pseudoskalares Meson P im Anfangs- oder Endzustand, mit Masse M_P, Impuls k,
- ein Photon γ im Endzustand, mit Impuls q, und Polarisation $\varepsilon^*(k)$.

Für die zugehörigen, in den pseudokalaren Meson-Feldern entwickelten Bausteine gelten die folgenden Ersetzungen durch die Feynman-Regeln eines Vertex $PV\gamma$

$$\begin{aligned}
\Phi &\sim \mathrm{e}^{\pm iq\cdot z} \,, \\
\partial_\mu \Phi &\mapsto \pm i q_\mu \mathrm{e}^{\pm iq\cdot z} \,, \\
V_\mu &\mapsto \varepsilon^{(*)}_{V\mu}(p)\mathrm{e}^{\pm ip\cdot z} \,, \\
A_\mu &\sim \varepsilon^*_\mu(q)\mathrm{e}^{iq\cdot z} \,, \\
F_{\mu\nu} &\mapsto i\left(q_\mu \varepsilon^*_\nu(q) - q_\nu \varepsilon^*_\mu(q)\right)\mathrm{e}^{iq\cdot z} \,,
\end{aligned} \tag{3.7}$$

am Wechselwirkungsort z. Das Vorzeichen in den Exponentialfunktionen ist jeweils durch die Festlegung des Teilchens auf Anfangs- oder Endzustand, respektive $-$ oder $+$, vorgegeben.

3.3.2. Vom Matrixelement hin zur Zerfallsbreite

Mit der Anwendung der Ersetzungen aus dem vorangegangenen Abschnitt ergibt sich aus der Lagrange-Dichte die invariante Amplitude der Zerfälle $PV\gamma$. Der Übersichtlichkeit wegen wird für den Zerfall eines Vektor-Meson im Ausgangs- und einem pseudoskalaren Meson im Endzustand $V(p,\varepsilon_V) \mapsto P(k) + \gamma(q,\varepsilon^*)$ mit der Konvention aus [BD65] die folgende Parametrisierung für das Übergangs-Matrixelement gewählt

$$\mathcal{M} = -2ie\mathcal{A}\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} q_\mu \varepsilon^*_\nu(q)\,\varepsilon_{V\rho}(p)\,k_\sigma\ , \tag{3.8}$$

wobei sich die Amplitude $\mathcal{A}$ in Einheiten von $2/F$ aus den Lagrange-Dichten in den Gleichungen (3.2), (3.4) und (3.6) in Abschnitt 3.2 ergibt. In Appendix B.2 sind die zu den jeweiligen Zerfällen zugehörigen Amplituden und deren Bestimmung in aller Ausführlichkeit aufgeführt. Den umgekehrten Fall eines pseudoskalaren Mesons im Anfangs- und eines Vektor-Mesons im Endzustand, $P(k) \mapsto V(p,\varepsilon_V) + \gamma(q,\varepsilon^*)$, ergibt sich aus Gleichung (3.8) mittels der beiden Ersetzungen $\varepsilon_V \to \varepsilon^*_V$ und $k \to -k$.
Im Folgenden sei der Fall eines Vektor-Mesons im Ausgangszustand gewählt. Das Übergangsmatrixelement aus Gleichung (3.8) muss, um in einem nächsten Schritt das quadrierte Matrixelement zu erhalten, mit seinem komplex konjugierten multipliziert werden und es ergibt sich

$$\left|\mathcal{M}\right|^2 = 4e^2\left|\mathcal{A}\right|^2 \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\varepsilon^{\mu'\nu'\rho'\sigma'} q_\mu q_{\mu'} \varepsilon^*_\nu(q)\,\varepsilon_{\nu'}(q)\,\varepsilon_{V\rho}(p)\,\varepsilon^*_{V\rho'}(p)\,k_\sigma k_{\sigma'}\ . \tag{3.9}$$

Für die Polarisationsvektoren von Photon und Vektor-Meson finden nun die folgenden Vollständigkeitsrelationen [Ryd96] Anwendung:

$$\begin{aligned} \sum_{\lambda=\pm1} \varepsilon^*_\nu(q,\lambda)\,\varepsilon_{\nu'}(q,\lambda) &= -g_{\nu\nu'}\ , \\ \sum_{\lambda=-1}^{+1} \varepsilon_{V\rho}(p,\lambda)\,\varepsilon^*_{V\rho'}(p,\lambda) &= \left(-g_{\rho\rho'} + \frac{p_\rho p_{\rho'}}{m_V^2}\right)\ . \end{aligned} \tag{3.10}$$

Wird zudem die folgende Eigenschaft von zwei Epsilon-Tensoren mit einem einzelnen kontrahierten Index [82]

$$\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\varepsilon^{\mu'}{}_{\nu}{}^{\rho'\sigma'} = -\det\left(g^{\alpha\alpha'}\right)\ , \quad \alpha = \mu,\ \rho,\ \sigma \quad \alpha' = \mu',\ \rho',\ \sigma' \tag{3.11}$$

berücksichtigt, so ergibt sich das invariante Matrixelement zu

$$\overline{|\mathcal{M}|^2} = c_A 4e^2|\mathcal{A}|^2 \det\left(g^{\alpha\alpha'}\right) q_\mu q_{\mu'} g_{\nu\nu'} \left(-g_{\rho\rho'} + \frac{p_\rho p_{\rho'}}{m_V^2}\right) k_\sigma k_{\sigma'}\ . \tag{3.12}$$

Daraus bestimmt sich durch die Kontraktion der Lorentz-Indizes das Zwischenergebnis

$$\overline{|\mathcal{M}|^2} = c_A 4e^2 |\mathcal{A}|^2 \left(2\,(q\cdot k)^2 - 2q^2k^2\right) \;. \tag{3.13}$$

Die Konstante c_A zeigt dabei an, ob das Vektor-Meson V im Anfangs- oder Endzustand auftritt. Im Beispiel bestimmt sich $c_A = 1/3$ für ein Vektor-Meson im Anfangszustand in Folge einer Mittelung über die Spinzustände. Wird der alternative Fall eines Vektor-Meson im Endzustand betrachtet, so ergibt sich aus der Summation über die Spins ein Wert von $c_A = 1$. In einem weiteren Schritt der Rechnung lassen sich nun die Massenschalen-Bedingungen $k^2 = M_P^2$ für das pseudoskalare Meson P und $q^2 = 0$ für das reelle Photon γ, die Impulserhaltung $p = k + q$, sowie die Annahme, dass der Zerfall im Schwerpunktsystem des Vektor-Mesons betrachtet wird, was zu den Relationen

$$\begin{aligned} q\cdot k &= q\cdot(p-q) \;, \\ p\cdot q &= M_V E_k \end{aligned} \tag{3.14}$$

führt, ausnutzen. Die Energie E_k ist dabei dem pseudoskalaren Meson mit Impuls k zugehörig. Nach Einsetzen in der Klammer in Gleichung (3.13) und Vereinfachen ergibt sich daraus das Ergebnis

$$\overline{|\mathcal{M}|^2} = c_A 4e^2 |\mathcal{A}|^2 2\left(M_V E_k - M_P^2\right)^2 \;. \tag{3.15}$$

Die gezeigten Schritte laufen im Grunde parallel zur Integration über den Phasenraum, sind aber ab dem letzten gezeigten Punkt in Gleichung (3.15) für die Ersetzung der Energie E_k auf diese angewiesen. Der Übersicht wegen wurden in Gleichungen (3.8)-(3.15) gezeigten Schritte einzeln dargestellt.
Als Nächstes steht die Integration über den Phasenraum des Zerfalls eines Vektor-Mesons im Anfangszustand in ein pseudoskalares Meson und ein Photon im Endzustand an. Für die zugehörige differentielle Zerfallsrate gilt (wie auch bei entsprechender Ersetzung der Massen und Impulse für jeden allgemeinen Zerfall von einem zu zwei Teilchen)

$$d\Gamma = \frac{1}{2m_A}\overline{|\mathcal{M}|^2}\frac{d^3k}{2E_k\,(2\pi)^3}\frac{d^3q}{2E_q\,(2\pi)^3}\,(2\pi)^4\,\delta^4\,(p-k-q) \;. \tag{3.16}$$

Die Gesamtzerfallsrate (oder nur Zerfallsrate) ergibt sich durch Integration über die Impulse $\vec{k}$ und $\vec{q}$ [2],

$$\Gamma = \frac{1}{2m_V}\int \frac{d^3k}{2E_k\,(2\pi)^3}\frac{d^3q}{2E_q\,(2\pi)^3}\,(2\pi)^4\,\delta^4\,(p-q-k)\,\overline{|\mathcal{M}|^2} \;. \tag{3.17}$$

[2] In den folgenden Rechnungen ist aus dem Kontext ersichtlich, ob es sich um 3- oder 4-dimensionale Vektoren handelt. Die Vektorpfeile werden nur an ausgewählten Stellen angegeben.

Die Integration über $\vec{q}$ wird [Ryd96] folgend in eine über den 4-dimensionalen Impuls q erweitert, sodass

$$\Gamma = \frac{1}{16\pi^2 m_V} \int \frac{d^3k}{E_k} d^4q\, \delta\left(q^2 - m_\gamma^2\right) \Theta\left(q^0\right) \delta^4\left(p - q - k\right) \overline{|\mathcal{M}|^2}\,, \tag{3.18}$$

wobei gilt $q^0 = E_\gamma$. Der Vollständigkeit halber ist anzumerken, dass in diesem und den folgenden Rechenschritten die quadrierte Masse des Photons $m_\gamma^2 = 0$ in einigen Schritten explizit ausgeschrieben wird. Dies dient dazu, die Anwendbarkeit der Rechnung auch für Fälle mit einem massiven dritten Teilchen zu unterstreichen. In der folgenden Diskussion wird das invariante Matrixelement nicht explizit ausgeführt. Es sei dabei auf die obige Abfolge von Ersetzungen aus Gleichungen (3.8) bis (3.15) verwiesen. Man nutzt nun, dass von einer Betrachtung im Ruhezustand des Mesons im Anfangszustand ausgegangen werden kann, kombiniert dies mit der Energieerhaltung und integriert über den Impuls q, sodass sich die Rechenschritte

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{16\pi^2 m_V} \int \frac{d^3k}{E_k} d^4q\, \delta\left(q^2 - m_\gamma^2\right) \Theta\left(m_V - E_k\right) \delta^4\left(p - q - k\right) \overline{|\mathcal{M}|^2} \\
&= \frac{1}{16\pi^2 m_V} \int \frac{d^3k}{E_k}\, \delta\left((p-k)^2 - m_\gamma^2\right) \Theta\left(m_V - E_k\right) \overline{|\mathcal{M}|^2} \\
&= \frac{1}{32\pi^2 m_V^2} \int \frac{d^3k}{E_k}\, \delta\left(E_k - \frac{m_V^2 + M_P^2}{2m_V}\right) \Theta\left(m_V - E_k\right) \overline{|\mathcal{M}|^2}
\end{aligned} \tag{3.19}$$

ergeben. Hierbei wird für den quadrierten Impuls des Photons im Schwerpunktsystem des Vektor-Mesons im Anfangszustand die Relation

$$\begin{aligned}
q^2 &= (p-k)^2 = p^2 - 2p\cdot k + k^2 \\
&= m_V^2 - 2M_V E_k + M_P^2\,.
\end{aligned} \tag{3.20}$$

angewandt und dies wird wie folgt zur Umformung der δ-Funktion im zweiten in Gleichung (3.19) gezeigten Rechenschritt genutzt:

$$\begin{aligned}
\delta\left((p-k)^2 - m_\gamma^2\right) &= \delta\left((m_V^2 - 2M_V E_k + M_P^2 - m_\gamma^2\right) \\
&= \delta\left(2M_V E_k - \left(m_V^2 + M_P^2\right)\right)
\end{aligned} \tag{3.21}$$

Für den nächsten Schritt wird ein Wechsel des Koordinatensystems in Kugelkoordinaten durchgeführt

$$d^3k = k^2 dk\, d\Omega_k\,, k^2 = \left|\vec{k}\right|^2\,, \tag{3.22}$$

und die Energie-Impuls-Beziehung verwendet, um die Ersetzung

$$
\begin{aligned}
E_k = \sqrt{\vec{k}^2 + M_P^2} \Rightarrow dE_k = \frac{k\,dk}{E_k}& \\
\Rightarrow \frac{k^2 dk}{E_k} = \sqrt{E_k^2 - M_P^2}\, dE_k\,,& \qquad (3.23)
\end{aligned}
$$

zu erhalten, sodass sich die folgenden Umformungen

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{32\pi^2 m_V^2} \int d\Omega_k \frac{k^2 dk}{E_k}\, \delta\left(E_k - \frac{m_V^2 + M_P^2}{2m_V}\right) \Theta\left(m_V - E_k\right) \overline{|\mathcal{M}|^2} \\
&= \frac{1}{32\pi^2 m_V^2} \int d\Omega_k dE_k \sqrt{E_k^2 - M_P^2}\, \delta\left(E_k - \frac{m_V^2 + M_P^2}{2m_V}\right) \Theta\left(m_V - E_k\right) \overline{|\mathcal{M}|^2} \\
&= \frac{1}{8\pi m_V^2} \int dE_k \sqrt{E_k^2 - M_P^2}\, \delta\left(E_k - \frac{m_V^2 + M_P^2}{2m_V}\right) \Theta\left(m_V - E_k\right) \overline{|\mathcal{M}|^2}\,, \qquad (3.24)
\end{aligned}
$$

ergeben. Dabei sei darauf hin gewiesen, dass der Θ-Term die Integration innerhalb der unteren Grenze M_P und oberen Grenze m_V beschränkt. Nun ist noch die Integration über die Energie E_k auszuführen und es ergibt sich das Zwischenergebnis vor Einsetzen des invarianten Matrixelements

$$
= \frac{1}{8\pi m_V^2} \sqrt{\left(\frac{m_V^2 + M_P^2}{2m_V}\right)^2 - M_P^2}\; \overline{|\mathcal{M}|^2}\,. \qquad (3.25)
$$

Nach Vereinfachen und Einsetzen des simultan mit denselben Schritten bestimmten invarianten Matrixelements $\overline{|\mathcal{M}|^2}$

$$
\overline{|\mathcal{M}|^2} = c_A 4 e^2 |\mathcal{A}|^2 \frac{1}{2} \left(m_V^2 - M_P^2\right)^2 \qquad (3.26)
$$

ergibt sich für den Spezialfall eines Vektor-Meson im Ausgangszustand des Übergangs $PV\gamma$ die Zerfallsrate mit der Konstanten $c_A = 1/3$ zu

$$
\begin{aligned}
\Gamma &= \frac{1}{8\pi m_V^2} \sqrt{\frac{1}{4m_V^2} \left(m_V^2 - M_P^2\right)^2} c_A 4 e^2 |\mathcal{A}|^2 \frac{1}{2} \left(m_A - m_B^2\right)^2 \\
&= c_A \frac{e^2 |\mathcal{A}|^2}{8\pi} \frac{1}{m_V^3} \left(m_V^2 - M_P^2\right) \left(m_V^2 - M_P^2\right)^2 \\
&= c_A \frac{e^2 |\mathcal{A}|^2}{8\pi} \left(\frac{m_V^2 - M_P^2}{m_V}\right)^3\,. \qquad (3.27)
\end{aligned}
$$

Die Gleichung für die Zerfallsrate lässt sich mit den Ersetzungen $m_V \leftrightarrow M_P$ und $c_A = 1$ auf ein pseudoskalares Meson im Anfangszustand anpassen.

3.4. Ergebnisse

Ausgehend von dem in Gleichung (3.27) erhaltenen Ausdruck für die Zerfallsrate werden die jeweiligen Modellterme an die zugehörigen experimentellen Daten angepasst und somit die Kopplungskonstanten der Wechselwirkungs-Lagrange-Dichte bestimmt. Die verwendeten Massen der pseudoskalaren und Vektor-Mesonen sind in Abschnitt 2.4 vorgegeben, ebenso wie die Zerfallskonstanten und weitere Modellgrößen. Die einzelnen experimentellen Zerfallsraten zu den betrachteten Zerfällen wurden aus ihren jeweiligen Verzweigungsverhältnissen („branching ratios“), entnommen aus [Tan+18], bestimmt. Die bestimmten Zerfallsraten und ihre zugehörigen Fehler werden im Folgenden, siehe beispielsweise Tabelle 3.1 in der zweiten Spalte, immer mit einem Γ_{exp} angegeben.

Im Folgenden werden sukzessive unterschiedliche Stufen der Approximation innerhalb des Modells getestet und die Ergebnisse der unterschiedlichen Szenarien miteinander verglichen. Zum Fit der Modellparameter an die Daten findet das Programm *Mathematica* mit der vorprogrammierten Funktion *NonLinearModelFit* (für genauere Informationen zu dem Programm selbst siehe [Wol16]) Anwendung. Um ein Kriterium zu haben, an dem die Qualität der Beschreibung der Zerfälle zu messen ist, werden sowohl eine relative Abweichung δ_1, als auch eine relativ zu den Unsicherheiten in Modell und experimentellen Daten normierte Abweichung δ_2 eingeführt,

$$\begin{aligned} \delta_1 &= \frac{\Gamma_{\text{mod}} - \Gamma_{\text{exp}}}{\Gamma_{\text{exp}}} \,, \\ \delta_2 &= \frac{\Gamma_{\text{mod}} - \Gamma_{\text{exp}}}{\sqrt{\sigma^2_{\text{mod}} + \sigma^2_{\text{exp}}}} \,. \end{aligned} \tag{3.28}$$

Hierbei und in den folgenden Betrachtungen sind Γ_{exp}, σ_{exp} die Zerfallsbreite und Unsicherheit der experimentellen Daten und Γ_{mod}, σ_{mod} die mit den bestimmten Modellgrößen berechnete Zerfallsbreite sowie die zugehörige Unsicherheit derselben. Als eine grobe Regel ist davon auszugehen, dass für Werte von $|\delta_2|$ größer als eins, eine Spannung zwischen den Modellwerten und den experimentellen Ergebnissen vorliegt.

3.4.1. Führende Ordnung

In einem ersten Schritt wird ausschließlich die Lagrange-Dichte in führender Ordnung aus Gleichung (3.2) betrachtet. Konsequenterweise muss an dieser Stelle in Ermangelung von Korrekturen in $1/N_C$ oder aufgrund der Quarkmassen, der Mischungswinkel der pseudoskalaren Mesonen in führender Ordnung, $\Theta_P = -19.7°$ siehe Abschnitt 2.3, und gleichfalls der Mischungswinkel der Vektor-Mesonen entsprechend der idealen Mischung, $\Theta_V \approx 35.3°$, angenommen werden. Es findet die einheitliche Zerfallskonstante $F = 90.7$ MeV für alle Zerfälle Anwendung, eine Verwendung einer davon differierenden, für alle Zerfälle einheitlichen Zerfallskonstanten bedeutet nur eine Reskalierung der Kopplungskonstanten. Die Ergebnisse eines Fits in führender Ordnung mit dem Wert der zugehörigen Kopplungskonstanten $|c_1| = 3.84 \pm 0.26 \cdot 10^{-2}$ sind in Tabelle 3.1 angegeben.

Tabelle 3.1.: Fit der experimentellen Daten mit dem Modell in führender Ordnung, Verwendung von idealer ϕ-ω-Mischung, sowie $\Theta_{\eta\eta'} = -19.7°$. $\chi^2_{\text{red}} = 93.$ (elf Freiheitsgrade und ein Parameter), $c_1 = 0.0384 \pm 0.0026$.

Zerfall	Γ_{PDG} in keV	Γ_{mod} in keV	δ_1	δ_2
$\rho^0 \to \pi^0\gamma$	70.1 ± 9.0	41.2 ± 5.5	-0.41	-2.7
$\rho^\pm \to \pi^\pm\gamma$	67.1 ± 7.5	40.9 ± 5.5	-0.39	-2.8
$\rho^0 \to \eta\gamma$	44.7 ± 3.1	34.2 ± 4.6	-0.23	-1.9
$\omega \to \pi^0\gamma$	$713. \pm 19.$	$369. \pm 49.$	-0.48	-6.5
$\omega \to \eta\gamma$	3.82 ± 0.34	4.13 ± 0.55	0.08	0.48
$\phi \to \eta\gamma$	55.4 ± 1.1	48.8 ± 6.5	-0.12	-0.99
$\phi \to \eta'\gamma$	0.2643 ± 0.0095	0.446 ± 0.060	0.69	3.0
$K^{*0} \to K^0\gamma$	$116. \pm 10.$	$92. \pm 12.$	-0.21	-1.5
$K^{*\pm} \to K^\pm\gamma$	50.3 ± 4.6	23.0 ± 3.1	-0.54	-4.9
$\eta' \to \rho^0\gamma$	56.6 ± 2.6	31.1 ± 4.2	-0.45	-5.2
$\eta' \to \omega\gamma$	5.14 ± 0.35	3.10 ± 0.42	-0.40	-3.7

Zu beachten ist, dass der Zerfall $\phi \to \pi^0\gamma$ in Folge der *Okubo-Zweig-Iizuka*-Regel [Oku63; Iiz66] in führender Ordnung nicht erfasst werden kann, da dessen Zerfallsrate, unabhängig von dem Wert der Kopplungskonstanten c_1, für $N_C \to \infty$ verschwindet. Wird die Mischung der η, η'-Mesonen vernachlässigt, d. h. unter Verwendung von $\Theta_P = 0°$, so führen die Ergebnisse der Lagrange-Dichte führender Ordnung auf dieselben Raten für die Größen der Zerfallsamplituden wie im Rahmen des Quark-Modells mit einer SU(6)-Symmetrie [Ani+65].
In diesem wie in allen weiteren Fällen werden die in den Tabellen angegebenen Werte am Ende der Berechnung gerundet. Gewählt wurde dabei im Regelfall eine Genauigkeit des Fehlers nach Auf- oder Abrunden auf zwei Stellen. Da die Zerfallsrate eine Funktion von $|\mathcal{A}|^2$ ist, ist es unmöglich das Vorzeichen der Kopplungskonstanten c_1 zu ermitteln. Innerhalb dieser Arbeit wird deshalb die Vereinfachung vorgenommen, dass für die Kopplungskonstante der führenden Ordnung $c_1 > 0$ gilt. Alle weiteren Kopplungskonstanten entwickeln ihr Vorzeichen in Abhängigkeit von dieser Wahl und werden folglich in Bezug auf ein positiv gewähltes c_1 angegeben.
Mit Ausnahme der Zerfälle $\omega \to \eta\gamma$ und $\phi \to \eta'\gamma$ zeigen sich die theoretisch berechneten Zerfallsbreiten durchweg kleiner als die entsprechenden experimentell ermittelten Zerfallsbreiten. Weiterhin ist festzustellen, dass nur für die Zerfälle $\omega \to \eta\gamma$ und $\phi \to \eta\gamma$ das angenommene Qualitätskriterium der Abweichungen $|\delta_2|$ kleiner als eins

ist. Mit Verwendung der experimentellen Unsicherheiten, ergibt sich für das reduzierte Chi-Quadrat

$$\chi^2_{\mathrm{red}} = \frac{1}{\nu} \sum_{i=1}^{11} \frac{\left(\Gamma_i^{\mathrm{PDG}} - \Gamma_i^{\mathrm{LO}}\right)^2}{\sigma_i^2} = 93. \tag{3.29}$$

Dabei ist, unter Auslassung von $\phi \to \pi^0\gamma$, $\nu = 11 - 1 = 10$ (d. h. insgesamt elf Freiheitsgrade abzüglich eines Parameters) in führender Ordnung. Demzufolge bleibt, beim Blick auf die Qualität der Ergebnisse im Vergleich zum Experiment und der Anzahl der beschriebenen Zerfälle, die Schlussfolgerung, dass ein Modell in führender Ordnung, das zu Beschreibung der Zerfälle nur eine Kopplungskonstante zur Verfügung stellt, keine gute Beschreibung der zwölf verschiedenen physikalischen Zerfälle ermöglicht.

3.4.2. Korrekturen in $1/N_C$

Mit dem nächsten Schritt werden die Korrekturen in $1/N_C$ berücksichtigt und zunächst bleibt die SU (3)-Symmetrie der Wechselwirkungsterme erhalten. Konsequenterweise ist für die ϕ-ω-Mischung die ideale Mischung anzunehmen, der Winkel Θ_P bleibt in führender Ordnung und in gleichem Maße wird die einheitliche Zerfallskonstante F beibehalten. Für den Fall einer erhaltenen SU (3)-Symmetrie müssen mögliche Beiträge aufgrund der Quarkmassen nicht gesondert berücksichtigt werden. Unter Verwendung des allgemeinen Massenquadrats $\overline{M}^2 = M_K^2 = M_\pi^2$ ist für eine erhaltene Symmetrie bei Betrachtung der vollständigen Amplituden im Anhang in Tabelle B.2 zu folgern, dass eine Hinzunahme von Korrekturen aufgrund der Quarkmassen zu einer gleichmäßigen Verschiebung des Wertes der Kopplungskonstante führender Ordnung c_1 führen würde, konkret bedeutet dies $c_1 \to \tilde{c}_1 = c_1 + 2\overline{M}^2 c_+$.
Dahingegen zeichnen sich die $1/N_C$-Korrekturen für den Fall der erhaltenen Symmetrie dadurch aus, dass sie sowohl bei der Ersetzung $\tilde{c}_1 \to \tilde{c}_1 + \frac{3}{2}c_3$ für die Übergänge zwischen den neutralen Feldern des Vektor-Meson-Oktetts und dem pseudoskalaren Singulett ($\rho^0\eta_1$ und $\omega_8\eta_1$), als auch der Ersetzung $\tilde{c}_1 \to \tilde{c}_1 + \frac{3}{2}c_2$ im Falle der Übergänge zwischen den neutralen Feldern des pseudoskalaren Oktetts und dem Singulett der Vektor-Mesonen ($\pi^0\omega_1$ und $\eta_8\omega_1$), eine für die verschiedenen Übergänge unterschiedliche Auswirkung zeigen. Eine Aufzählung der vollständigen Amplituden aller Übergänge mit Beiträgen der $1/N_C$-Kopplungskonstanten c_2 und c_3 findet sich im Anhang in Tabelle B.2.
Die Ergebnisse eines Fits für den Fall einer erhaltenen SU (3)-Symmetrie sind in Tabelle 3.2 aufgeführt. Im Vergleich zur führenden Ordnung, bei der das reduzierte Chi-Quadrat 93. betragen hat, nimmt es für diesen Fall (für nun alle zwölf Zerfälle) den Wert 55. an. Die Kopplungskonstante $\tilde{c}_1$ nimmt den relativ zu dem Ergebnis führender Ordnung kleineren Wert $\tilde{c}_1 = (3.43 \pm 0.22) \cdot 10^{-2}$ an. Demzufolge werden die Werte der Raten für die Zerfälle $\rho \to \pi\gamma$ und $K^* \to K\gamma$, die nicht durch die $1/N_C$-Korrekturen c_2 und c_3 beeinflusst werden, um einen Faktor $(\tilde{c}_1/c_1)^2 \approx 0.89$ reduziert. Für alle anderen Zerfälle ist die Sachlage aufgrund der Mischungen (siehe Gleichung

Tabelle 3.2.: Experimentelle gegenüber Modellwerten für den Grenzfall einer erhaltenen SU(3)-Symmetrie. Idealer ϕ-ω-Mischung und Mischungswinkel $\Theta_{\eta\eta'} = -19.7°$. $\chi^2_{\text{red}} = 55$. (zwölf Freiheitsgrade und drei Parameter) und Kopplungskonstanten $\tilde{c}_1 = 0.0343 \pm 0.0022$, $c_2 = 0.0067 \pm 0.0010$ und $c_3 = -0.0043 \pm 0.0030$.

Zerfall	Γ_{PDG} in keV	Γ_{mod} in keV	δ_1	δ_2
$\rho^0 \to \pi^0\gamma$	70.1 ± 9.0	32.8 ± 4.1	-0.53	-3.8
$\rho^\pm \to \pi^\pm\gamma$	67.1 ± 7.5	32.6 ± 4.1	-0.51	-4.0
$\rho^0 \to \eta\gamma$	44.7 ± 3.1	23.9 ± 3.7	-0.47	-4.3
$\omega \to \pi^0\gamma$	$713. \pm 19.$	$414. \pm 40.$	-0.42	-6.7
$\omega \to \eta\gamma$	3.82 ± 0.34	5.76 ± 0.70	0.51	2.5
$\phi \to \pi^0\gamma$	5.52 ± 0.22	5.3 ± 1.6	-0.033	-0.11
$\phi \to \eta\gamma$	55.4 ± 1.1	61.7 ± 7.3	0.11	0.85
$\phi \to \eta'\gamma$	0.2643 ± 0.0095	0.302 ± 0.066	0.14	0.57
$K^{*0} \to K^0\gamma$	$116. \pm 10.$	73.4 ± 9.2	-0.37	-3.1
$K^{*\pm} \to K^\pm\gamma$	50.3 ± 4.6	18.3 ± 2.3	-0.37	-3.1
$\eta' \to \rho^0\gamma$	56.6 ± 2.6	47.9 ± 4.6	-0.15	-1.7
$\eta' \to \omega\gamma$	5.14 ± 0.35	5.70 ± 0.82	0.11	0.63

(2.64) und für die ideale Mischung Gleichung (2.65)) auf den ersten Blick etwas komplexer. Obwohl die Übergänge $\omega_8 \to \eta_8\gamma$, $\omega_1 \to \eta_1\gamma$, $\rho^0 \to \eta_8\gamma$ und $\omega_8 \to \pi^0\gamma$ noch rein mit der Kopplungskonstanten $\tilde{c}_1$ beschrieben werden können, enthalten alle an dieser Stelle noch nicht genannten Zerfälle, mit Ausnahme der obig genannten $\rho \to \pi\gamma$ und $K^* \to K\gamma$, sowohl die Kopplungen $\tilde{c}_1$ als auch einen der beiden Beiträge aus $1/N_C$ mit den Werten $c_2 = (0.67 \pm 0.10) \cdot 10^{-2}$ und $c_3 = (-0.43 \pm 0.30) \cdot 10^2$. Obwohl in den Ergebnissen verglichen mit dem Fit in führender Ordnung Verbesserungen zu sehen sind, ist das Ziel der simultanen Beschreibung aller zwölf physikalischen Zerfälle innerhalb eines Modells nicht erreicht worden. Folglich ist festzustellen, dass die Annahme einer erhaltenen SU(3)-Symmetrie und Korrekturen in $1/N_C$ nicht der umfänglichen Beschreibung der physikalischen Zerfälle $PV\gamma$ dienen kann.

3.4.3. Korrekturen in $1/N_C$ und Quarkmassen

Mit Blick auf die Ergebnisse für die Annahme einer erhaltenen SU(3)-Symmetrie ist zu folgern, dass zu einer Verbesserung des Modells in der Lagrange-Dichte zwingend Korrekturen aufgrund der Quarkmassen berücksichtigt werden müssen. Dies wird im Folgenden durch einige Beobachtungen untermauert werden.

Eine wichtige, aus der $\mathrm{SU}(3)$-Symmetrie zu ziehende Folgerung ist, dass die Amplituden $\mathcal{A}$ der Zerfälle $\rho \to \pi\gamma$, $K^{*\pm} \to K^{\pm}\gamma$ und $K^{*0} \to K^{0}\gamma$ die Relationen, nachzuschlagen in [Ani+65; ODo81] (siehe auch Appendix B, Tabelle B.2),

$$\begin{aligned} |\mathcal{A}_{\rho\to\pi\gamma}| &= |\mathcal{A}_{K^{*\pm}\to K^{\pm}\gamma}| \quad \text{und} \\ |\mathcal{A}_{K^{*0}\to K^{0}\gamma}| &= 2|\mathcal{A}_{K^{*\pm}\to K^{\pm}\gamma}| \end{aligned} \tag{3.30}$$

erfüllen. Unter Anwendung der physikalischen Massen aus Tabelle 2.2 innerhalb der Gleichung (3.27) für die Zerfallsbreite, sowie den experimentell ermittelten Zerfallsraten, ergeben sich die Verhältnisse

$$\begin{aligned} \frac{|\mathcal{A}_{\rho^{\pm}\to\pi^{\pm}\gamma}|}{|\mathcal{A}_{K^{*\pm}\to K^{\pm}\gamma}|} &= 0.865\ , \\ \frac{|\mathcal{A}_{K^{*0}\to K^{0}\gamma}|}{|\mathcal{A}_{K^{*\pm}\to K^{\pm}\gamma}|} &= 1.52\ , \end{aligned} \tag{3.31}$$

was auf dem Niveau der Amplituden zu einer Brechung der $\mathrm{SU}(3)$-Symmetrie von respektive 14% beziehungsweise 24% führt. Dies ist von der gleichen Größenordnung wie die relative Differenz zwischen den Zerfallskonstanten der Pionen F_{π} und Kaonen F_K,

$$\frac{F_K - F_{\pi}}{F_K} = 16\%\ . \tag{3.32}$$

Ein direkter Vergleich der experimentellen Zerfallsraten für die Prozesse $\omega \to \pi^0\gamma$ und $\rho^0 \to \pi^0\gamma$ resultiert in einem Verhältnis von

$$\frac{|\mathcal{A}_{\omega\to\pi^0\gamma}|}{|\mathcal{A}_{\rho^0\to\pi^0\gamma}|} = 3.14\ , \tag{3.33}$$

was nur eine geringe Abweichung gegenüber dem Wert 3 aus den Vorhersagen führender Ordnung im Grenzfall großen N_C darstellt.
Nachdem im vorangegangenen Abschnitt festgestellt, und dies obig weiter erörtert wurde, dass anhand der vorgestellten Ergebnisse und der beobachteten experimentellen Zerfallsraten nicht von einem Erhalt der $\mathrm{SU}(3)$-Symmetrie ausgegangen werden kann, werden in einem nächsten Schritt nun zusätzlich die Terme berücksichtigt, die diese Symmetrie explizit brechen. Es zeigt sich, dass sich in Folge der Korrekturen aufgrund der Quarkmassen auch für die Mischungswinkel der ϕ-ω- und η-η'-Mischung und die Zerfallskonstanten der pseudoskalaren Mesonen Änderungen ergeben. Die bei Einbeziehung aller Korrekturen für die Meson-Felder notwendigen Redefinitionen resultieren in einer Vervollständigung der Feynman-Regeln durch die Multiplikation der äußeren Linien mit einem Faktor $\sqrt{Z}$, für Pionen und Kaonen siehe [SS12] und darin genannte Referenzen. Ausführlich wurde die notwendige Vorgehensweise für die η-η'-Mischung in [BMS17] und für die Vektor-Mesonen in [Kra20] gezeigt. Die Werte der Mischungswinkel bestimmen sich, unter Berücksich-

tigung der in dieser Dissertation verwendeten Konventionen und physikalischen Massen 2.4 und Appendix A.2, zu

$$\begin{aligned} \Theta_{\phi\omega} &= 39.5^\circ \\ \Theta_{\eta\eta'} &= -12.4^\circ \end{aligned} . \tag{3.34}$$

Für die Zerfallskonstanten der Kaonen beziehungsweise Pionen werden die experimentell gemessenen Werte $F_K = 110$ MeV und $F_\pi = 92.1$ MeV verwendet. Für die Zerfälle, die ein η oder η' beinhalten, wird die Zerfallskonstante F beibehalten. Wie in Referenz [BMS17] nachzulesen ist, ergeben sich die Abweichungen von F im vorliegenden Falle über die Änderung in den Mischungsanteilen, siehe auch Gleichungen (2.66) und (2.67), wobei sie auch bei Wunsch in einzelnen Zerfallskonstanten für die Singulett- und Oktett-Felder zusammengefasst werden können.
Bislang ungeklärt ist jedoch noch, in welcher Art und Weise die aus den Korrekturen der pseudoskalaren kinetischen Lagrange-Dichte in $1/N_C$ stammende Kopplungskonstante[3] Λ_1 berücksichtigt wird. Da es sich um eine Korrektur in $1/N_C$ handelt, lässt sich anhand des Organisationsschemas in Abschnitt 2.2.4 eine Abschätzung über den Betrag $|\Lambda_1| \approx 1/3$ der Konstanten treffen, wohl aber nicht über das Vorzeichen. In einem ersten Schritt bietet es sich an jeweils die Werte $\Lambda_1 = -1/3,\ 0,\ 1/3$ in einem Fit zu verwenden und die Ergebnisse miteinander zu vergleichen. Dies ist im Anhang in Tabelle B.4 aufgeführt. Anhand des Vergleichs der Ergebnisse aller drei Fälle ist zu folgern, dass ein Vernachlässigen dieser Kopplungskonstanten ($\Lambda_1 = 0$) nicht sinnvoll ist, und dass ein positives Vorzeichen von dem Fit (mit den in dieser Dissertation vorgegebenen Konventionen und Bedingungen) bevorzugt wird. Die erhaltenen Ergebnisse scheinen mit einem reduzierten Chi-Quadrat von 7.7 qualitativ deutlich besser als die der Alternativen. Es ist allerdings darauf hinzuweisen, dass dieses Vorgehen nur eine grobe Abschätzung der Kopplung sowie des Verhaltens der Modellergebnisse ermöglicht. Schlussendlich wird im Folgenden die Konstante Λ_1 als ein weiterer Parameter für die Anpassung des theoretischen Modells an die experimentellen Daten berücksichtigt.
Ein weiterer, der Verfeinerung der Ergebnisse zuträglicher, noch zu diskutierender Punkt ist die Vorgehensweise bei der Näherung des invarianten Matrixelements, beziehungsweise präziser, die Bestimmung des Quadrats der invarianten Amplitude und daraus folgend des Matrixelements. Ausgehend von den Lagrange-Dichten innerhalb des Organisationsschemas (Gleichungen (3.2), (3.4) und (3.6)), enthält dieses eine Summe aus Beiträgen führender Ordnung (LO) und Korrekturen (NLO) in den Amplituden (siehe Appendix B, Tabelle B.2) und es ergibt sich, bei Unterdrückung der Symbolik für die Mittlung über die Spins $\overline{|\mathcal{M}|^2} = |\mathcal{M}|^2$, formell die folgende Situation,

$$\left|\mathcal{M}\right|^2 = \left|\mathcal{M}_{LO} + \mathcal{M}_{NLO}\right|^2 = \left|\mathcal{M}_{LO}\right|^2 + 2\mathrm{Re}\left(\mathcal{M}_{LO}\mathcal{M}^*_{NLO}\right) + \left|\mathcal{M}_{NLO}\right|^2 . \tag{3.35}$$

[3] Als Beitrag in den δ_i, siehe Gleichung (A.11), in der η-η'-Mischung in den Gleichungen (2.66) und (2.67)

Zu beachten ist dabei, dass hier Terme der Ordnung NNLO = NLO $\times$ NLO, d. h. Korrekturen einer höheren Ordnung als im Modell bislang berücksichtigt, beitragen würden. Der aufgrund dieser zusätzlichen Beiträge in höherer Ordnung entstehende Fehler wäre wiederum von Ordnung NNLO. Es stehen also die folgenden zwei Varianten zur Auswahl, wie bei der Berechnung des invarianten Matrixelement vorgegangen werden kann

$$\text{I: alle Terme, d. h. } \left|\mathcal{M}^{I}\right|^2 = \left|\mathcal{M}_{LO}\right|^2 + 2\mathrm{Re}\left(\mathcal{M}_{LO}\mathcal{M}^*_{NLO}\right) + \left|\mathcal{M}_{NLO}\right|^2 \;,$$

$$\text{II: ohne NNLO, d. h. } \left|\mathcal{M}^{II}\right|^2 = \left|\mathcal{M}_{LO}\right|^2 + 2\mathrm{Re}\left(\mathcal{M}_{LO}\mathcal{M}^*_{NLO}\right) \;,$$

wovon die erste der beiden Varianten bislang implizit in den vorangegangenen Abschnitten Anwendung fand. In Appendix B, Tabelle B.5 ist ein Vergleich zwischen den beiden Varianten des invarianten Matrixelements zu sehen. Anhand der Ergebnisse und unter Berücksichtigung der Tatsache, dass innerhalb dieser Dissertation mit dem Organisationsschema Terme nur bis inklusive NLO berücksichtigt werden, wird in den folgenden Betrachtungen die zweite Variante mit dem Ausschluss von Beiträgen in NNLO gewählt.
Der beste Fit inklusive der Abweichungen δ_1 und δ_2 für die obig genannten Annahmen und Voraussetzungen ist in Tabelle 3.3 angegeben. Verdeutlicht wird dies in Abbildung 3.4, in der die Ergebnisse des Modells für eine Lagrange-Dichte führender Ordnung in roter Farbe und einer inklusive Korrekturen in $1/N_C$ und den Quarkmassen in blauer Farbe den experimentellen Werten in Schwarz gegenübergestellt werden.
Da die Linearkombination $c_- = c_5 - c_6 - c_8$ nur zu den geladenen Kaon-Zerfällen $K^{*\pm} \to K^{\pm}\gamma$ einen Beitrag liefert, stimmen experimentelle und Modellwerte in diesem Falle exakt überein. Daraus folgt, dass die verbleibende Linearkombination $c_+ = c_5 + c_6 - c_7$ faktisch der einzig verfügbare Parameter ist, der zur Beschreibung von Konsequenzen der SU(3)-Symmetriebrechnung herangezogen werden kann. Anhand der Werte für $|\delta_2|$, die kleiner als eins sind, ist zu sehen, dass ausgenommen der vier Zerfälle $\rho^0 \to \eta\gamma$, $\omega \to \pi^0\gamma$, $\omega \to \eta\gamma$ und $K^{*0} \to K^0\gamma$ durch das Modell eine gute Beschreibung der experimentellen Zerfallsbreiten erreicht wird. Auffällig im Vergleich zum Fit in führender Ordnung ist, dass sich, mit Ausnahme des Zerfalls $\omega \to \eta\gamma$, mehr oder minder deutliche Verbesserungen der Modellwerte ergeben. Der Zerfall der neutralen Kaonen $K^{*0} \to K^0\gamma$, für den, wie für alle der genannten Zerfälle, nur die Kopplungen aus führender Ordnung und der Quarkmassen-Korrekturen (explizit: $\tilde{c}_1$ und c_+, nachzuschlagen in Appendix B, Tabelle B.2) eine Rolle spielen, kann den gesetzten Qualitätskriterien nach nicht genügend gut beschrieben werden, auch wenn sich im Vergleich zur führenden Ordnung eine Verbesserung von $\delta_2 = -1.5$ zu $\delta_2 = 1.1$ ergibt. Für die Zerfälle $\rho^0 \to \eta\gamma$, $\omega \to \pi^0\gamma$ und $\omega \to \eta\gamma$ ist die Aufschlüsselung der Beiträge aufgrund der Mischungen komplexer. Wie in Appendix B in Tabelle B.2 nachzuschlagen ist, stechen die Abhängigkeiten in den $1/N_C$-

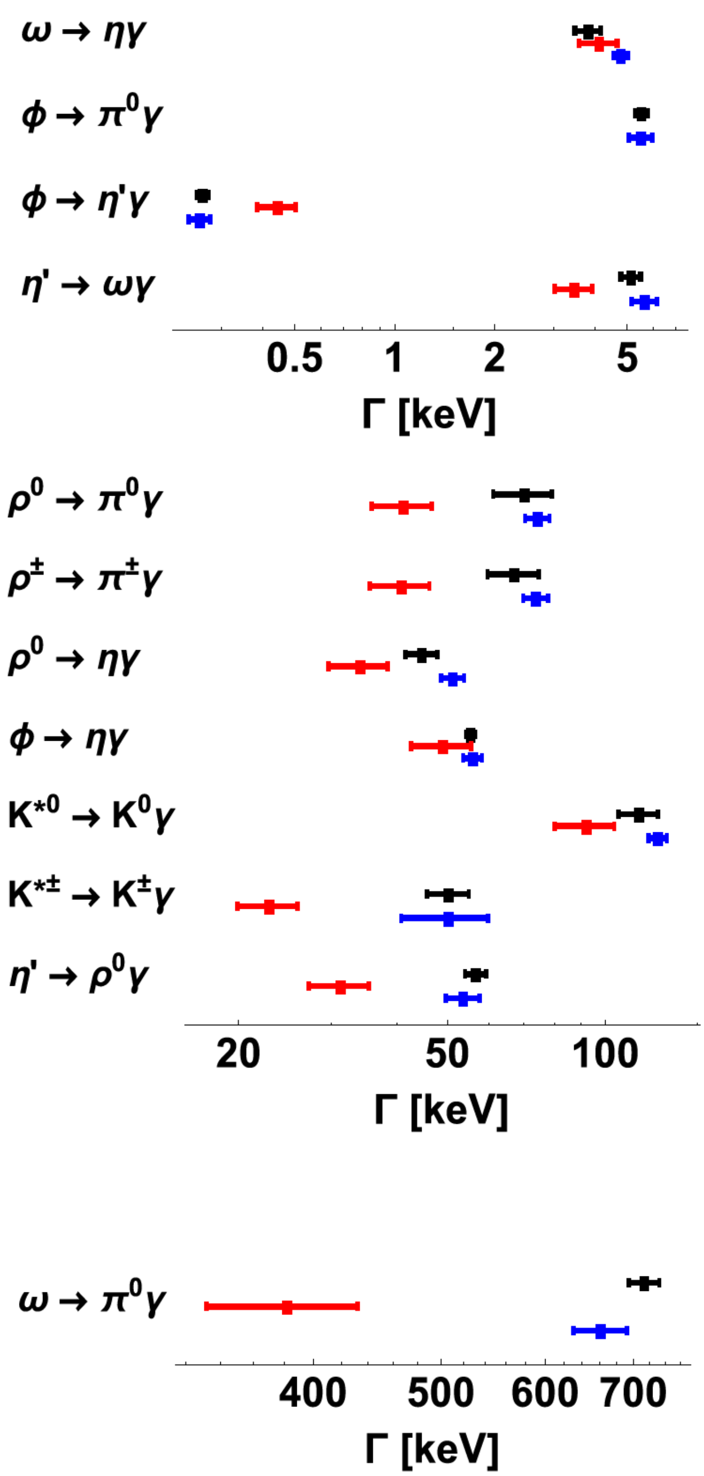

Abbildung 3.4.: Visualisierung relativer Größen und Veränderungen der Zerfallsbreiten inklusive Fehler. Aufgeführt sind Experiment (schwarz), sowie im Modell die Ergebnisse für einen Fit mit der Lagrange-Dichte führender Ordnung (rot) und inklusive aller Korrekturen (blau).

Tabelle 3.3.: Vergleich experimenteller Zerfallsraten und Modellrechnung für die vollständige Lagrange-Dichte, mit $\left|\mathcal{M}^{II}\right|^2$, $\Theta_{\phi\omega} = 39.5°$ und $\Theta_{\eta\eta'} = -12.4°$. $\chi^2_{\text{red}} = 4.4$ (zwölf Freiheitsgrade und fünf Parameter), $c_1 = 0.0527 \pm 0.0015$, $c_2 = -0.00081 \pm 0.00016$, $c_3 = 0.00234 \pm 0.00071$, $c_+ = (2.46 \pm 0.60) \cdot 10^{-9} \frac{1}{\text{MeV}^2}$ und $c_- = (-6.0 \pm 3.2) \cdot 10^{-9} \frac{1}{\text{MeV}^2}$, sowie $\Lambda_1 = 0.264 \pm 0.056$.

Zerfall	Γ_{PDG} in keV	Γ_{mod} in keV	δ_1	δ_2
$\rho^0 \to \pi^0\gamma$	70.1 ± 9.0	75.7 ± 4.1	0.080	0.57
$\rho^\pm \to \pi^\pm\gamma$	67.1 ± 7.5	75.2 ± 4.1	0.12	0.95
$\rho^0 \to \eta\gamma$	44.7 ± 3.1	52.2 ± 2.7	0.17	1.8
$\omega \to \pi^0\gamma$	$713. \pm 19.$	$658. \pm 31.$	-0.077	-1.5
$\omega \to \eta\gamma$	3.82 ± 0.34	4.56 ± 0.22	0.19	1.8
$\phi \to \pi^0\gamma$	5.52 ± 0.22	5.53 ± 0.46	0.002	0.019
$\phi \to \eta\gamma$	55.4 ± 1.1	55.7 ± 2.3	0.005	0.098
$\phi \to \eta'\gamma$	0.2643 ± 0.0095	0.260 ± 0.020	-0.018	-0.21
$K^{*0} \to K^0\gamma$	$116. \pm 10.$	128.5 ± 5.2	0.11	1.1
$K^{*\pm} \to K^\pm\gamma$	50.3 ± 4.6	50.3 ± 9.7	–	–
$\eta' \to \rho^0\gamma$	56.6 ± 2.6	53.2 ± 3.9	-0.060	-0.72
$\eta' \to \omega\gamma$	5.14 ± 0.35	5.69 ± 0.51	0.11	0.88

Korrekturen heraus. Es gelten im Einzelnen die Relationen

$$\begin{aligned} \rho^0 \to \eta_1\gamma \propto c_3 \;, &\quad \omega_1 \to \pi^0\gamma \propto c_2 \;, \\ \omega_8 \to \eta_1\gamma \propto c_3 \;, &\quad \omega_1 \to \eta_8\gamma \propto c_1 \;. \end{aligned} \tag{3.36}$$

Dies liefert aber keine eindeutige Begründung für die Ergebnisse, da für den Falle einer Ersetzung des ω durch ein ϕ oder des η durch ein η' die zugehörigen Zerfälle innerhalb des Modells gut erfasst sind. Eine mögliche Erklärung könnte sein, dass es notwendig sein könnte, die ρ-ω-Mischung im Ansatz des Modells zu berücksichtigen. Auffällig ist zudem, dass der Übergang $\omega_1 \to \eta_1\gamma$, der für den physikalischen Zerfall $\omega \to \eta\gamma$ den primären Anteil stellt, nur von der Quarkmassen-Korrektur c_+ abhängig ist und keinerlei weiteren Beitrag von anderen Kopplungen enthält.
Abschließend gewährt Tabelle 3.4 einen Blick auf die Korrelationskoeffizienten $\left\{\delta c_i \delta c_j\right\} / \left(\delta c_i \delta c_j\right)$ des Fits. Wie zu erwarten, ist eine starke Korrelation zwischen den Parametern c_1 und c_+ festzustellen, da die Linearkombination $\tilde{c}_1 = c_1 + 2M_\pi^2 c_+$ für alle Übergänge einen Beitrag liefert (siehe Appendix B, Tabelle B.2). Des Weiteren fällt die ebenso starke Korrelation zwischen den Kopplungskonstanten c_1 und

c_2 auf, was innerhalb des Modells auf einen großen Einfluss der Übergänge zwischen dem Vektor-Meson-Singulett und dem pseudoskalaren Oktett auf die Kopplungskonstante führender Ordnung, und demzufolge auf die Anpassung des Modells an die experimentellen Werte, schließen lässt. Abschließend festzuhalten ist die stärkere Korrelation zwischen den Konstanten c_3, vorkommend in den Übergängen zwischen dem Vektor-Meson-Oktett und dem pseudoskalaren Singulett, und Λ_1 aus den Korrekturen der kinetischen Lagrange-Dichte der pseudoskalaren Mesonen, beides Korrekturen in $1/N_C$.

Tabelle 3.4.: Untere Dreiecksmatrix der Korrelationskoeffizienten der Kopplungskonstanten c_i und Λ_1 der zu Tabelle 3.3 zugehörigen Lagrange-Dichte.

	c_1	c_2	c_3	c_+	c_-
c_2	-0.71				
c_3	0.008	0.12			
c_+	-0.72	0.39	0.26		
c_-	-0.18	0.13	-0.02	0.09	
Λ_1	0.31	-0.10	0.66	-0.05	-0.07

3.4.4. Entwicklung der Quarkladungs-Matrix in $1/N_C$

Zum Abschluss der Diskussion sukzessiver Korrekturen wird die Entwicklung der Quarkladungs-Matrix in $1/N_C$ [BW01] folgend berücksichtigt:

$$
\begin{aligned}
Q = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{3} \end{pmatrix} &\to \begin{pmatrix} \frac{1}{2N_C} + \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2N_C} - \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2N_C} - \frac{1}{2} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} + \frac{1}{2N_C}\mathbb{1} \,.
\end{aligned} \tag{3.37}
$$

In Folge dieser Entwicklung trägt der Anteil der Wechselwirkungs-Lagrange-Dichte proportional zur Kopplungskonstanten c_4, in der Lagrange-Dichte in Gleichung (3.4), zusätzlich zu den invarianten Amplituden in Tabelle B.3 bei. Wird nun ein Fit mit denselben Vorgaben wie im vorherigen Abschnitt für alle verfügbaren Zerfälle durchgeführt, so ergeben sich die im Vergleich zu den bisherigen Ergebnissen deutlichen Verbesserungen in Tabelle 3.5.

Im Anhang findet sich in Tabelle B.6 noch zusätzlich ein Vergleich der Wahl für die Behandlung der invarianten Matrixelemente. Vergleichbar zum vorher betrachteten Fall der vollständigen Langrange-Dichte, wird auch an dieser Stelle die zweite Variante zur Betrachtung des invarianten Matrixelements aus dem vorherigen Abschnitt gewählt. Die geringeren Werte für das reduzierte χ^2 sind für den Fall der entwi-

Tabelle 3.5.: Experimentelle Zerfallsraten gegenüber Modellrechnung für den Fall eines entwickelten Q, mit $\left|\mathcal{M}^{II}\right|^2$, $\Theta_{\phi\omega} = 39.5°$ und $\Theta_{\eta\eta'} = -12.4°$. $\chi^2_{\mathrm{red}} = 2.2$ (zwölf Freiheitsgrade und sechs Parameter) und Kopplungskonstanten $c_1 = 0.0533 \pm 0.0010$, $c_2 = -0.000483 \pm 0.000061$, $c_3 = 0.00085 \pm 0.00027$, $c_4 = 0.00136 \pm 0.00050$, $c_+ = (1.01 \pm 0.40) \cdot 10^{-9} \frac{1}{\mathrm{MeV}^2}$ und $c_- = (-5.1 \pm 1.3) \cdot 10^{-9} \frac{1}{\mathrm{MeV}^2}$, sowie $\Lambda_1 = 0.228 \pm 0.036$.

Zerfall	Γ_{PDG} in keV	Γ_{mod} in keV	δ_1	δ_2
$\rho^0 \to \pi^0\gamma$	70.1 ± 9.0	65.2 ± 4.6	-0.073	-0.50
$\rho^\pm \to \pi^\pm\gamma$	67.1 ± 7.5	64.7 ± 4.6	-0.039	-0.50
$\rho^0 \to \eta\gamma$	44.7 ± 3.1	51.0 ± 1.8	0.14	1.7
$\omega \to \pi^0\gamma$	$713. \pm 19.$	$688. \pm 23.$	-0.035	-0.82
$\omega \to \eta\gamma$	3.82 ± 0.34	3.97 ± 0.40	0.042	0.30
$\phi \to \pi^0\gamma$	5.52 ± 0.22	5.55 ± 0.32	0.006	0.084
$\phi \to \eta\gamma$	55.4 ± 1.1	55.2 ± 1.6	-0.003	-0.083
$\phi \to \eta'\gamma$	0.2643 ± 0.0095	0.262 ± 0.014	-0.007	-0.083
$K^{*0} \to K^0\gamma$	$116. \pm 10.$	136.6 ± 4.2	0.18	2.0
$K^{*\pm} \to K^\pm\gamma$	50.3 ± 4.6	50.3 ± 6.8	–	–
$\eta' \to \rho^0\gamma$	56.6 ± 2.6	55.6 ± 2.8	-0.018	-0.27
$\eta' \to \omega\gamma$	5.14 ± 0.35	5.23 ± 0.44	0.017	0.15

ckelten Quarkladungs-Matrix zu erwarten, da an dieser Stelle ein zusätzlicher Parameter hinzu kommt. Überraschend ist die im Vergleich zum Fall eines nicht entwickelten Q deutliche Verschlechterung des Wertes für den Zerfall $K^{*0} \to K^0\gamma$, die der guten Passung der anderen Ergebnisse zu den experimentellen Werte gegenüber steht. Dies ist in Abbildung 3.5 unterstützend graphisch dargestellt. Eingezeichnet sind in der Abbildung die Zerfallsbreiten für die experimentellen Angaben in Schwarz und den Fit der vollständigen Lagrange-Dichte in Blau, sowie für die vollständige Lagrange-Dichte mit der in $1/N_C$ entwickelten Quarkladungs-Matrix in grüner Farbe. Grund für die Abweichung des Zerfalls könnten möglicherweise die in dieser Arbeit nicht berücksichtigen Quantenkorrekturen (Schleifenbeiträgen) sein. Die in [Kra20] berechneten und in Tabelle 5.7 aufgeführten Einschleifenkorrekturen unterstützen, im Vergleich zu den in dieser Dissertation bestimmten Ergebnissen, die Annahme.

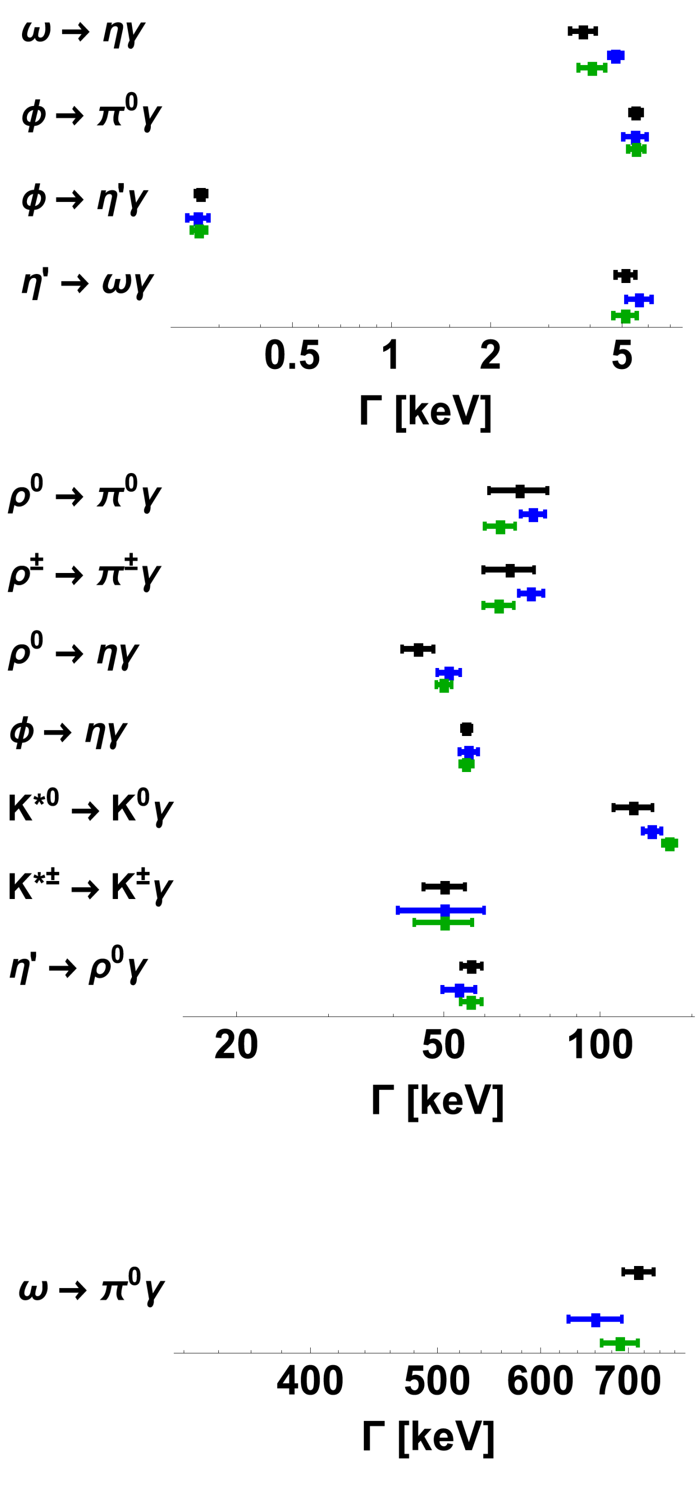

Abbildung 3.5.: Visualisierung relativer Größen und Veränderungen der Zerfallsbreiten inklusive Fehler. Gegeben sind Experiment (schwarz), sowie im Modell die Ergebnisse für die vollständige Lagrange-Dichte mit physikalischen (blau) und in $1/N_C$ entwickelter Quarkladungs-Matrix Q.

3.4.5. Kopplungskonstanten und Konvergenz

Innerhalb dieser Arbeit wurde für die Lagrange-Dichten ein Organisationsschema basierend auf den $1/N_C$- und Quarkmassen-Korrekturen, dargestellt durch die $\chi_\pm$, verwendet, siehe Abschnitt 2.2.4. Es sei daran erinnert, dass für die Anzahl der Farbfreiheitsgrade im physikalischen Falle $N_C = 3$ gesetzt wird und mit Blick auf die Entwicklung in den Quarkmassen ist $M_K^2/(4\pi F)^2 \approx 1/4$ ein typischer dimensionsloser, kleiner Parameter, mit der Skala der chiralen Symmetriebrechung $\Lambda_\chi = 4\pi F$ [MG84]. In Tabelle 3.6 sind die im Modell erhaltenen Kopplungkonstanten in der Reihenfolge der Entwicklung geordnet aufgeführt. Die zweiten Spalte, gekennzeichnet mit LO, enthält die Ergebnisse für die Lagrange-Dichte in führender Ordnung mit dem Mischungswinkel $\Theta_P = \Theta_{\mathrm{LO}} = -19.7°$ sowie idealer ϕ-ω-Mischung. Für die Ergebnisse des Grenzfalls einer erhaltenen SU(3)-Symmetrie ($\mathrm{LO} + 1/N_C$) in der dritten Spalte werden die Mischungswinkel aus dem Fall führender Ordnung beibehalten. Darauf folgend ist in der vierten Spalte der Fall einer vollständigen Lagrange-Dichte inklusive der Korrekturen in $1/N_C$ und Quarkmassen (NLO) mit den zugehörigen Mischungswinkeln $\Theta_P = \Theta_{\mathrm{NLO}} = -12.4°$ und $\Theta_V = 39.5°$ aufgeführt. Zuletzt ist mit den gleichen Mischungswinkeln der Fall einer Entwicklung der Quarkladungs-Matrix (NLO, Q in $1/N_C$) in der verbleibenden Spalte platziert. Wie in Appendix B in den Tabellen B.2 und B.3 zu sehen ist, verändern sich Beiträge und Gewichtung der Kopplungskonstanten c_i beim Übergang von einer physikalischen hin zu einer in $1/N_C$ entwickelten Quarkladungs-Matrix. Mit Ausnahme der Konstanten c_1 ist dies der Grund für die teils unterschiedlichen Beiträge der einzelnen Kopplungskonstanten in den beiden letzten Fällen.

Tabelle 3.6.: Vergleich der Kopplungskonstanten (von links nach rechts): a) Lagrange-Dichte führender Ordnung, Mischungswinkel Θ_V, Θ_P in LO, Q physikalisch; b) Lagrange-Dichte inkl. Korrekturen in $1/N_C$, Mischungswinkel Θ_V, Θ_P in LO, Q physikalisch; c) vollständige Lagrange-Dichte, Mischungswinkel Θ_V, Θ_P in NLO, Q physikalisch; d) vollständige Lagrange-Dichte, Mischungswinkel Θ_V, Θ_P in NLO, mit Q in $1/N_C$.

Kopplungskonstante c_i	LO	$\mathrm{LO} + 1/N_C$	NLO	NLO, Q in $1/N_C$
c_1 in $\left[10^{-2}\right]$	3.84 ± 0.26	3.43 ± 0.22	5.27 ± 0.15	5.33 ± 0.10
c_2 in $\left[10^{-2}\right]$	-	0.67 ± 0.10	-0.081 ± 0.016	-0.0483 ± 0.0061
c_3 in $\left[10^{-2}\right]$	-	-0.44 ± 0.30	0.234 ± 0.071	0.085 ± 0.027
c_4 in $\left[10^{-2}\right]$	-	-	-	0.136 ± 0.050
c_+ in $\left[10^{-2}\mathrm{GeV}^{-2}\right]$	-	-	0.246 ± 0.060	0.101 ± 0.040
c_- in $\left[10^{-2}\mathrm{GeV}^{-2}\right]$	-	-	-0.60 ± 0.32	-0.51 ± 0.13

Abschließend sei noch kurz die Größenordnung der einzelnen Korrekturen im Vergleich zum Term führender Ordnung betrachtet (siehe Abschnitt 2.2.4 zum Aufbau des Organisationsschemas). Die Konstanten c_2, c_3 und c_3 werden für den physikalischen Fall mit einem Faktor $N_C = 3$ multipliziert, um die Koeffizienten der Entwicklung in $1/N_C$ zu erhalten. Gleichermaßen werden zur Bestimmung der Koeffizenten der dimensionslosen Entwicklung in den Quarkmassen die Konstanten c_+ und c_- mit $(4\pi F)^2$, mit F aus Gleichung (2.69), multipliziert. Die den letzten beiden Spalten in Tabelle 3.6 entsprechenden Ergebnisse sind in Tabelle 3.7 angegeben.

Tabelle 3.7.: Blick auf Konvergenzverhalten der vollständigen Lagrange-Dichte, Mischungswinkel Θ in NLO, mit physikalischem Q in linker Spalte und zur Rechten für Q in $1/N_C$.

c_i	Q phys. $[10^{-2}]$	Q $1/N_C$ $[10^{-2}]$
c_1	5.27	5.33
$c_2 \cdot N_C$	-0.24	-0.14
$c_3 \cdot N_C$	0.70	0.26
$c_4 \cdot N_C$	-	0.41
$c_+ \cdot (4\pi F)^2$	0.32	0.13
$c_- \cdot (4\pi F)^2$	-0.77	-0.66

Im Folgenden seien beispielhaft für die Folgerungen, die aus Tabelle 3.7 zu ziehen sind, die Ergebnisse für den Fall der vollständigen Lagrange-Dichte mit physikalischem Q aus der zweiten Spalte betrachtet. Wird Tabelle B.2 zu Rate gezogen, fällt zunächst das Faktum auf, dass in jeder der Amplituden $\mathcal{A}_i$, ausgenommen $\mathcal{A}_5$, die Kopplungskonstante aus dem Beitrag führender Ordnung c_1 an erster Stelle steht. Zur Vereinfachung der Identifikation des größten relativen Beitrages ist jedes $\mathcal{A}_i$ derart mit einem passenden Faktor zu multiplizieren, dass der Term führender Ordnung durch ein einfaches $1 \cdot c_1$ gegeben ist. Mit Blick auf die Korrekturen in $1/N_C$ ergibt sich nach Einsetzen der Werte aus der mittleren Spalte von Tabelle 3.7

$$\frac{3\,|c_2|}{2c_1} = 0.068$$

für die Amplituden $\mathcal{A}_9$ und $\mathcal{A}_{11}$ beziehungsweise

$$\frac{3\,|c_3|}{2c_1} = 0.199$$

für $\mathcal{A}_7$ und $\mathcal{A}_{10}$. Es ist darauf zu verweisen, dass diese Zahlen, sobald sie noch einem Faktor $1/3$ multipliziert werden, relativ kleine Korrekturen in $1/N_C$ zur Folge haben. Für die Quarkmassen findet sich die größte Korrektur aufgrund der Konstanten c_+ in der Amplitude $\mathcal{A}_4$ und nimmt das Verhältnis

$$\frac{16\,|c_+|\,(4\pi F)^2}{3c_1} = 0.324$$

an, was noch mit

$$\frac{M_K^2 - M_\pi^2}{(4\pi F)^2} < 1/4$$

zu multiplizieren ist. Diese relative Korrektur aufgrund der Quarkmassen ist somit größer als die Korrektur in $1/N_C$. Gleiches gilt im Fall der durch den Prozess $K^{*\pm} \to K^{\pm}\gamma$ bestimmten Kopplung c_-, die auf ein Verhältnis

$$\frac{6\,|c_-|\,(4\pi F)^2}{c_1} = 0.877$$

führt. Für den Fall eines in $1/N_C$ entwickelten Q ergeben sich ähnliche Ergebnisse, wobei sich die Verhältnisse für alle Korrekturen aufgrund deren geringerer relativer Größe leicht in der Größe reduzieren.

3.4.6. Vergleich mit anderen theoretischen Berechnungen

In dieser Dissertation wird der Vergleich des Vorgehens und der zugehörigen Ergebnisse des Modells dieser Arbeit mit anderen theoretischen Berechnungen auf diejenigen Ansätze beschränkt, die ebenfalls auf der Konstruktion chiraler effektiver Langrange-Dichten basieren.
Zunächst wird eine Anwendung des Vektor-Meson-Formalismus in der Veröffentlichung von Klingl, Kaiser und Weise [KKW96] betrachtet. In dieser wird die bekannte Lagrange-Dichte führender Ordnung der Zerfälle $PV\gamma$ für den Zerfall neutraler Vektor-Mesonen in Pionen entwickelt. Beim Vergleich mit Gleichung (3.19) aus [KKW96] fällt auf, dass bei einer Ersetzung von $2ec_1/F$ durch d/f_π in Gleichung (3.2) dieser Dissertation, die in beiden Arbeiten vorgestellten Lagrange-Dichten überein stimmen. Man beachte bei dem Vergleich die unterschiedlichen Konventionen zur Normierung der Vektor-Meson-Felder, im Vergleich zur Referenz unterscheidet sich die gewählte Normierung in dieser Arbeit um einen Faktor $1/2$. Allerdings ist festzuhalten, dass bei Vergleich von Gleichung (4.7) aus [KKW96] und der in dieser Arbeit entwickelten Zerfallsrate in Gleichung (3.27) eine Diskrepanz zu konstatieren ist. Konkret sollte in der zweiten Zeile von Gleichung (4.7) mit einem Faktor $1/9$, stammend aus den Elementen der Quarkladungs-Matrix aufgrund von $(2/3-1/3)^2$, multipliziert werden. Demzufolge muss zur Vervollständigung der Korrektur auch die in Gleichung (4.10) erhaltene Kopplung $d \simeq 0.01$ mit einem Faktor 3 multipliziert werden.
Des Weiteren findet der Formalismus der antisymmetrischen Tensoren [Kyr69; Kyr72] zur Bestimmung der $PV\gamma$-Wechselwirkung Verwendung, Beispiele hierfür sind die Arbeiten [RPP03; LL08; TLL12; CGZ14]. In der Veröffentlichung von Ruiz-Femenía,

Pich und Portolés [RPP03] wurden die zu den Wechselwirkungen zweier Vektorfelder mit einem pseudoskalaren Feld (kurz: VVP) mit sieben Kopplungskonstanten und für eine Vektorresonanz mit einem externen Vektorfeld und einem pseudoskalaren Feld (kurz: VJP) mit vier Kopplungskonstanten gehörende Wechselwirkungs-Lagrange-Dichten konstruiert. Unter Ausnutzung des Verhaltens der QCD der Green'schen Funktionen bei kleinen Distanzen, wurden zwischen den Kopplungen Zwangsbedingungen entwickelt. Mit Verwendung dieser Zwangsbedingungen bietet Gleichung (4.6) aus [RPP03] eine von Parametern freie Vorhersage des Übergangsmatrixelements für den Prozess $\omega \to \pi^0\gamma$, was sich für den Wert der Kopplungskonstanten c_1 aus dieser Arbeit die folgende Vorhersage umsetzen lässt

$$|c_1| = \frac{1}{4\sqrt{2}} \left(\frac{3}{8\pi^2} \frac{m_\omega}{F} - \frac{F}{2} \frac{m_\omega}{m_V^2} \right) .$$

Unter Verwendung von $F = 90.7$ MeV und $m_\omega = m_V = 782.7$ MeV und der Vernachlässigung von Messfehlern ergibt sich daraus der Wert $|c_1| = 4.77 \cdot 10^{-2}$, was in einem guten Vergleich mit der Vorhersage in führender Ordnung $|c_1| = (3.84 \pm 0.26) \cdot 10^{-2}$ aus Tabelle 3.1 steht.

Auch die Autoren Lutz und Leupold [LL08] nutzen zur Beschreibung der radiativen Zerfälle des Vektor-Meson-Nonets in das pseudoskalare Oktett die Beschreibung der Vektor-Felder mittels antiysmmetrischer Tensoren. Hierbei klammert ihre Diskussion allerdings das η' aus, wobei das physikalische η als Teil des pseudoskalaren Oketts eingeordnet wird, und für die ϕ- und ω-Mesonen die ideale Mischung angenommen wurde. Ein Zerfall findet nun entweder in führender Ordnung über einen VVP-Vertex derart statt, dass das propagierende neutrale Vektor-Meson an ein reelles Photon koppelt[4] oder über eine direkte $PV\gamma$-Wechselwirkung, die allerdings innerhalb des chiralen Zählschemas dieser Quelle als von höherer Ordnung gezählt wird. Die Zerfallsraten enthalten dann drei Kopplungskonstanten beziehungsweise Kombinationen aus Kopplungskonstanten von einzelnen Vertices. Dabei handelt es sich um die Kopplung des direkten Zerfalls e_A und die Kombinationen $h_A e_V$ und $b_A e_V$ des indirekten Zerfalls. Innerhalb des Grenzfalls einer erhaltenen $\mathrm{SU}(3)$-Symmetrie stimmen die Ergebnisse für die invarianten Amplituden in vollem Maße mit denen aus [LL08] überein. Dies lässt sich zeigen, indem alle Massen der Vektor-Mesonen gleich m_V, alle Massen der pseudoskalaren Mesonen gleich $\overline{M}$, die Zerfallskonstante $F = f$ und abschließend $e\,|\tilde{c}_1| = |\tilde{e}_A| \left(\tilde{e}_A = e_A + (1/4)\,h_A e_V - 2 b_A e_V \overline{M}^2 / m_V^2\right)$, gesetzt werden.

In der auf der vorangegangenen Referenz aufbauenden Arbeit von Terschluesen, Lutz und Leupold [TLL12] wurde auch das η' zusätzlich mit berücksichtigt. Mit zwei weiteren zusätzlichen Parametern, dem Mischungswinkel der pseudoskalaren Mesonen Θ_P und dem aus der Wechselwirkung des Singulett-η mit zwei verschiedenen Vektor-

[4]Es sei an dieser Stelle angemerkt, dass das entsprechende Diagramm, was in Abbildung 3.3 zu Beginn dieses Kapitels zu finden ist, für eine Verwendung des Vektorformalismus keinen Beitrag liefert.

Mesonen stammenden Parameter b_H wurden insgesamt fünf Parameter unter Verwendung von fünf physikalischen Zerfällen angepasst. Insbesondere ist be dieser Rechnung auffällig, dass ein unerwartet niedriger Wert $\Theta_P \simeq \pm 2^\circ$ für den Mischungswinkel bestimmt wurde. Werden Effekte, die zu einer Brechung der $\mathrm{SU}(3)$-Symmetrie führen, berücksichtigt, so stehen in der vorliegenden Arbeit zwei Parameter c_+ und c_- zur Verfügung, wohingegen in Quelle [LL08]36 nur die Kombination der Parameter $b_A e_V$ auf eine Brechung der $\mathrm{SU}(3)$-Symmetrie führt. Der genannte Term entspricht der zu c_+ zugehörigen Struktur. Insbesondere ist festzustellen, dass die innerhalb der $\mathrm{SU}(3)$-Symmetrie gültige Relation $|\mathcal{A}_{K^{*\pm}\to K^{\pm}\gamma}| = 2|\mathcal{A}_{K^{*0}\to K^{0}\gamma}|$ innnerhalb des theoretischen Konstrukts von [LL08] nicht gebrochen werden kann, ausgenommen es werden Terme höherer Ordnung mit hinzu genommen. In der vorliegenden Dissertation führt im Gegensatz dazu der Parameter c_- auf ein Entkoppeln der Amplituden $\mathcal{A}_{K^{*\pm}\to K^{\pm}\gamma}$ und $\mathcal{A}_{K^{*0}\to K^{0}\gamma}$. Es ist zu bedenken, dass die Wichtigkeit eines solchen Terms im Zusammenhang mit der Brechung der $\mathrm{SU}(3)$-Symmetrie von Chen, Guo und Zhen in Referenz [CGZ14] bereits für die strahlenden Zerfälle $K^* \to K\gamma$ ausgearbeitet wurde. Zudem wurden in [CGZ14] die Ergebnisse von [RPP03] durch die Erweiterung des Formalismus auf angeregte Vektor-Meson-Zustände ergänzt.
Eine neuere Referenz von Kimura, Morozumi und Umeeda [KMU18] untersucht die Zerfälle leichter Hadronen in einem Modell einer chiralen effektiven Lagrange-Dichte im Hidden-Gauge-Formalismus [BKY85; BKY88] mit einer Darstellung der Vektor-Meson-Felder durch antisymmetrische Tensoren [Eck+89a]. Dabei werden Resonanzen von Vektor-Mesonen und Korrekturen auf dem Niveau einer Schleife mit berücksichtigt. Das Modell berücksichtigt Oktett- und Singulett-Felder der Mesonen in einer Darstellung der $\mathrm{SU}(3)$, die Mischung der pseudoskalaren und Vektor-Mesonen wird als Folge einer Brechung der Isospin- und $\mathrm{SU}(3)$-Symmetrien in Beiträgen der Selbstenergie betrachtet. Ergänzend der Betrachtung der elektromagnetischen Übergänge $PV\gamma$ werden die Dalitz-Zerfälle $PV\ell^+\ell^-$ untersucht und zugehörige Formfaktoren unter Zuhilfenahme experimenteller Datenreihen bestimmt. Insgesamt erhält [KMU18] sechs Kopplungskonstanten in den Prozessen $PV\gamma$, drei für leichte Vektor-Mesonen und drei in den Beiträgen der Resonanzen, die an experimentelle Daten von Zerfällen und mittels Formfaktoren zu entsprechenden Dalitz-Zerfällen angepasst werden. Im Gegensatz dazu werden in dem Modell dieser Dissertation nur experimentelle Daten zu den Zerfällen $PV\gamma$ zur Anpassung der Kopplungskonstanten verwendet und Formfaktoren der Dalitz-Zerfälle werden nicht benötigt. Insgesamt kann das Modell aus [KMU18] Vorhersagen für elf elektromagnetische Übergänge $PV\gamma$ liefern, aufgeführt in Tabelle 3.8, der Zerfall $\eta' \to \rho^0\gamma$ konnte nicht erfasst werden.
Ein Vergleich der in den Modellen aus [KMU18] und dieser Dissertation bestimmten Zerfallsraten für die elektromagnetischen Übergänge $PV\gamma$ ist in Tabelle 3.5 angegeben. Auch unter Berücksichtigung, dass in [KMU18] ausgehend von experimentellen Angaben einer älteren Ausgabe der Particle Data Group gearbeitet wird, ist festzustellen, dass die Ergebnisse fast durchweg deutlich schlechter sind als die aus dem Modell dieser Dissertation. Zudem sind auch die angegebenen Fehler, insbesondere für den Zerfall $\phi \to \pi^0\gamma$, in fast allen Prozessen deutlich größer als im Modell dieser Dissertation. Ein Blick auf die Ergebnisse dieser Dissertation für die Erhaltung

Tabelle 3.8.: Experimentelle Zerfallsraten gegenüber Modellrechnung aus dieser Dissertation, siehe Tabelle 3.5, und [KMU18].

Zerfall	Γ_{PDG} in keV	Γ_{mod} in keV	Γ_{KMU18} in keV
$\rho^0 \to \pi^0\gamma$	70.1 ± 9.0	65.2 ± 4.6	46 ± 5
$\rho^\pm \to \pi^\pm\gamma$	67.1 ± 7.5	64.7 ± 4.6	73 ± 7
$\rho^0 \to \eta\gamma$	44.7 ± 3.1	51.0 ± 1.8	33^{+8}_{-9}
$\omega \to \pi^0\gamma$	$713. \pm 19.$	$688. \pm 23.$	710 ± 90
$\omega \to \eta\gamma$	3.82 ± 0.34	3.97 ± 0.40	$5.5^{+1.6}_{-1.3}$
$\phi \to \pi^0\gamma$	5.52 ± 0.22	5.55 ± 0.32	17^{+12}_{-9}
$\phi \to \eta\gamma$	55.4 ± 1.1	55.2 ± 1.6	22^{+9}_{-12}
$\phi \to \eta'\gamma$	0.2643 ± 0.0095	0.262 ± 0.014	$0.39^{+0.12}_{-0.09}$
$K^{*0} \to K^0\gamma$	$116. \pm 10.$	136.6 ± 4.2	110 ± 10
$K^{*\pm} \to K^\pm\gamma$	50.3 ± 4.6	50.3 ± 6.8	28 ± 3
$\eta' \to \rho^0\gamma$	56.6 ± 2.6	55.6 ± 2.8	–
$\eta' \to \omega\gamma$	5.14 ± 0.35	5.23 ± 0.44	$4.6^{+3.3}_{-2.0}$

der $\mathrm{SU}(3)$-Symmetrie in Tabelle 3.2 gegenüber Brechung dieser Symmetrie in Tabelle 3.3 zeigt einen insgesamt deutlichen Unterschied in den bestimmten Zerfallsraten und ihrer Abweichung von den experimentellen Werten. In dem Sinne gleichen die Ergebnisse von [KMU18] eher dem Fall einer erhaltenen $\mathrm{SU}(3)$-Symmetrie in dieser Dissertation.
Ein Blick auf die in den obigen Abschnitten genannte Referenzen zeigt, dass diese ihre Betrachtungen teils auf eine deutlich geringere Anzahl an Zerfällen beschränken. Favorisiert wird hier der Prozess $\omega \to \pi^0\gamma$, unter anderem für eine anschließende Ausweitung der Diskussion auf den Dalitz-Zerfall $\omega \to \pi^0\ell^+\ell^-$. Zudem werden zumeist Kopplungskonstanten und keine berechneten Zerfallsraten zu Zerfällen $PV\gamma$ angegeben. Somit ist zum Abschluss des Vergleichs festzuhalten, dass das Modell dieser Dissertation nach aktuellem Stand gleichzeitig die vollständigste Diskussion aller elektromagnetischen Übergänge $PV\gamma$ mit den bislang im Vergleich zur aktuellen Ausgabe der Particle Data Group [Tan+18] besten Ergebnissen liefert.
Abschließend ist noch zu erwähnen, dass die Ergebnisse für die Lagrange-Dichte führender Ordnung dieser Arbeit mit den in Abbildung 3 von Danilkin, Deineka und Vanderhaeghen in Referenz [DDV17] angegebenen Koeffizienten in gutem Maße überein stimmen. Die genannten Werte nutzen über die $\mathrm{SU}(3)$-Symmetrie hinausgehend, Eigenschaften der Nonet-Symmetrie unter der Annahme idealer Mischung für das ϕ-ω-System und der Vernachlässigung der η-η'-Mischung.

4. Elektromagnetische Übergänge $PV\ell^+\ell^-$

Im vorangegangenen Kapitel wurden für ein im Rahmen einer chiralen effektiven Feldtheorie entwickelten Modell für elektromagnetischer Übergänge eines Meson A im Anfangszustand in ein Meson B und reelles Photon γ im Endzustand die zugehörigen Parameter an experimentelle Daten angepasst. Ziel ist nun die Erweiterung des Modells von einem reellen auf ein virtuelles Photon im Endzustand, welches in ein Lepton-Paar zerfällt. Das Lepton-Paar dieser auch Dalitz-Zerfälle genannten Prozesse, in dieser Arbeit abgekürzt $PV\ell^+\ell^-$, besteht immer aus einem geladenen Teilchen-Antiteilchen-Paar, symbolisiert durch $\ell^+\ell^-$. Angefangen mit prinzipiellen Überlegungen zum Übergang von $PV\gamma$ zu $PV\ell^+\ell^-$ werden notwendige Feynman-Diagramme festgelegt und zugehörige Lagrange-Dichten aufgestellt, im Anschluss daran die Zerfallsraten und Übergangsformfaktoren (im Englischen „transition formfactor“, kurz TFF) bestimmt und mit experimentellen sowie Ergebnissen anderer theoretischer Modelle verglichen.

4.1. Die physikalischen Zerfälle

Ausgehend von den Symmetrieüberlegungen für die elektromagnetischen Übergänge $PV\gamma$ in Abschnitt 3.1 ist davon auszugehen, dass auch insgesamt zwölf physikalische Zerfälle $PV\ell^+\ell^-$ zu erwarten sind. Experimentell erfasst sind, die zur Bestimmung der Zerfallsraten verwendeten Verzweigungsraten wurden aus [Tan+18] entnommen, davon in exakten Messungen die in Tabelle 4.1 angegebenen Zerfälle. Ergänzend dazu zeigt Tabelle 4.2 eine Auswahl von Zerfällen, für die bislang nur Abschätzungen über obere Grenzen für die Werte der Zerfallsraten angegeben werden können.

Tabelle 4.1.: Exakt gemessene Zerfallsraten von physikalischen Zerfällen $PV\ell^+\ell^-$ in keV.

Zerfall	Γ_{PDG} [keV]
$\omega \to \pi^0 e^+ e^-$	6.54 ± 0.57
$\omega \to \pi^0 \mu^+ \mu^-$	1.14 ± 0.16
$\phi \to \pi^0 e^+ e^-$	0.0565 ± 0.0047
$\phi \to \eta e^+ e^-$	0.459 ± 0.020
$\eta' \to \omega e^+ e^-$	0.0392 ± 0.0096

Tabelle 4.2.: Mittels Abschätzungen erfasste Zerfallsraten physikalischer Zerfälle $PV\ell^+\ell^-$ in keV.

Zerfall	Γ_{PDG} [keV]
$\rho^0 \to \pi^0 e^+ e^-$	< 1.79
$\rho^0 \to \eta e^+ e^-$	< 1.04
$\omega \to \eta e^+ e^-$	< 0.093
$\phi \to \eta \mu^+ \mu^-$	< 0.040

4.2. Von $PV\gamma$ zu $PV\ell^+\ell^-$

4.2.1. Aufbau auf Punktwechselwirkung $PV\gamma$

Unter der Annahme eines punktförmigen Teilchens A im Ausgangszustand können, aufbauend auf den Ergebnissen für die elektromagnetischen Übergänge $PV\gamma$ in Kapitel 3, die Dalitz-Zerfällen $PV\ell^+\ell^-$ innerhalb des Rahmens der Quantenelektrodynamik beschrieben werden. Dabei wird für einen Zerfall $A \to B\gamma^*$ angenommen, dass das virtuelle Photon in ein Lepton-Paar zerfällt [KW55]. Den in [BD65] verwendeten Konventionen folgend bedeutet dies eine Ersetzung des Polarisationsvektors ε_ν des Photons in Gleichung (3.8) via

$$\varepsilon_\nu \mapsto -\frac{i g_{\nu\alpha}}{q_\gamma^2} \left(\mathrm{e}\, \overline{u}(k_{\ell^-}, s_{\ell^-}) \gamma^\alpha v(k_{\ell^+}, s_{\ell^+}) \right) \; . \tag{4.1}$$

Dabei ist q der Impuls des virtuellen Photons, das Lepton-Paar ℓ^+ und ℓ^- ist in den Zuständen $\overline{u}$, v mit Impuls $k_{\ell^-} = k_-$ und respektive $k_{\ell^+} = k_+$, sowie mit der gemeinsamen Masse m_ℓ gegeben. Dieser einfache Ansatz führt dann, bei Berücksichtigung der Polarisation der Vektor-Mesonen und vor Kontraktion der Lorentz-Indices für das invariante Matrixelement, auf das folgende Ergebnis für den Fall eines Vektor-Mesons im Ausgangszustand,

$$\begin{aligned} \overline{\left|\mathcal{M}\right|^2}^{O(1)} =& e^2 c_A \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \varepsilon^{\mu'\nu'\rho'\sigma'} q_\mu q_{\mu'} \left(-g_{\rho\rho'} + \frac{p_\rho p_{\rho'}}{m_A^2} \right) k_\sigma k_{\sigma'} \\ & \frac{(2m_\ell)^2 \mathrm{e}^2}{(q^2)^2} \left(\frac{1}{m_\ell^2} \left(k_{-\nu} k_{+\nu'} + k_{+\nu} k_{-\nu'} - g_{\nu\nu'} k_+ \cdot k_- \right) - g_{\nu\nu'} \right) |\mathcal{A}|^2 \; , \end{aligned} \tag{4.2}$$

wobei die gleichen Konventionen zu Benennungen und Normierungen aus Kapitel 3 zur Anwendung kommen. Der Grund für die Benennung des invarianten Matrixelements, wie es in Gleichung (4.2) gezeigt ist, wird später in der Diskussion ersichtlich. Auch sagt die Quantenelektrodynamik, abgekürzt QED, eine starke Abhängigkeit der Zerfallsrate des Mesons im Anfangszustand von der invarianten Masse des Lepton-Paares $m_{\ell^+\ell^-}^2 = q^2$ voraus.

Unter Verwendung der in Abschnitt 3.4 für die elektromagnetischen Übergänge $PV\gamma$ bestimmten Kopplungskonstanten lassen sich dann mit der in Gleichung (4.2) durchgeführten Anpassung des invarianten Matrixelements und der Integration über den Phasenraum eines Zerfalls von einem in drei Teilchen die Zerfallsraten der Zerfälle $PV\ell^+\ell^-$ bestimmen. Eine Ausführung der Integrationsschritte, die in großen Teilen analog zum bereits bekannten Fall des Zerfalls eines Teilchens in zwei Endprodukte funktioniert, findet sich in Appendix C.4. Die zu den experimentell exakt erfassten Zerfällen zugehörigen Ergebnisse sind in Tabelle C.8 im Anhang aufgeführt und es lässt sich feststellen, dass ausgenommen des Zerfalls $\phi \to \pi^0 e^+ e^-$ allein die Größenordnungen der Ergebnisse zu denen der experimentellen Werte passen. Im genannten Fall liegt der Unterschied sogar bei einem Faktor $\propto 10^2$. Die Differenzen zwischen den experimentellen Werten und Ergebnissen des an dieser Stelle betrachteten Ansatzes bestätigen, dass diese einfache Erweiterung des Modells nicht der physikalischen Realität genügt. Der Grund für die mangelhafte Beschreibung der Zerfälle und der Abweichung von der durch die Quantenelektrodynamik vorhergesagten Abhängigkeit, ist in der Annahme punktförmiger Teilchen sowohl im Anfangs- als auch im Endzustand zu suchen. Diese Mesonen A bzw. B weisen in der physikalischen Realität eine elektromagnetische Struktur auf, welche durch den elektromagnetischen Übergangsformfaktor, oder kurz Formfaktor, beschrieben wird [Lan85].
Ein Ansatz zur Erklärung der Kopplung eines Hadron an das virtuelle Photon γ^* ist das Modell der Vektor-Meson-Dominanz, abgekürzt VMD [Sak69], das von einem virtuellen Vektor-Meson V^* mit Masse m_{V^*} im Zwischenzustand ausgeht. Dieser Mechanismus zeigt sich vor allem im Bereich des zeitartigen Intervalls des Impulsübertrags $(2m_\ell)^2 < q^2$ als dominant. Nahe $q^2 = m_{V^*}^2$ ist ein resonantes Verhalten des virtuellen Photons festzustellen, da sich das virtuelle Vektor-Meson der Massenschale nähert. Beobachtung und der Grad dieses Verhaltens stellen somit ein Nachweis des Modells der Vektor-Meson-Dominanz dar und die Eignung des Modells zur Beschreibung der Dalitz-Zerfälle wird später in diesem Kapitel anhand experimenteller Datenreihen untersucht.
In Anpassung an die allgemein gültige Parametrisierung der Dalitz-Zerfälle, geprägt von [Lan85] für den Prozess $\omega \to \pi^0 \ell^+ \ell^-$, lässt sich das Übergangs-Matrixelement für die elektromagnetischen Zerfälle $PV\gamma$ (Gleichung (3.8)) für ein reelles Photon umschreiben zu

$$\mathcal{M}^{O(1)} = i\, f\left(q^2 = 0\right) e \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} q_\mu \varepsilon_\nu^* \varepsilon_{V\rho} k_\sigma \tag{4.3}$$

mit der Definition des Übergangsformfaktors für $q^2 = 0$

$$f\left(q^2 = 0\right) = -\mathcal{A}\,. \tag{4.4}$$

Wie in Gleichung (4.4) zu erkennen ist, entspricht der Formfaktor im Fall reeller Photonen bis auf ein Vorzeichen gerade der Amplitude in der in dieser Arbeit gewählten Normierung. Für die einfach differentielle Zerfallsrate, normiert mit der Zerfallsrate des zugehörigen elektromagnetischen Übergangs, ergibt sich dann am Ende der Rechnung mit der Parametrisierung allgemein der Ausdruck

$$\frac{d\Gamma(A \to B\ell^+\ell^-)}{dm_{\ell^+\ell^-}\Gamma(A \to B\gamma)} = [\mathrm{QED}_{AB}]\,|F_{AB}(m_{\ell^+\ell^-})|^2\ . \tag{4.5}$$

Dabei beschreibt der QED-Beitrag nur einen Term führender Ordnung in den Zerfallsamplituden und es müssten weitere, radiative Korrekturen berücksichtigt werden. Allerdings wird die Größenordnung der Auswirkung dieser Korrekturen auf den Term führender Ordnung anhand in der Struktur ähnlicher Prozesse in einem Bereich von um die zehn Prozent abgeschätzt. Für einen Betrachtung der radiativen Korrekturen des Prozesses $\pi^0 \to e^+e^-\gamma$ siehe beispielsweise [HKN15]. Die ausführlichen Inhalte der einzelnen Terme in Gleichung (4.5) werden im folgenden Abschnitt mit der Erweiterung der Punktwechselwirkung auf eine Wechselwirkung mit Formfaktor $F_{AB}(m_{\ell^+\ell^-})$ im Detail gezeigt.

4.2.2. Von Punktwechselwirkung zu Formfaktor

Zur vollständigen Betrachtung der Zerfälle $PV\ell^+\ell^-$ ist das in Kapitel 3 entwickelte Modell um ein weiteres Feynman-Diagramm zu erweitern. Dieses ist zur Rechten in Abbildung 4.1 zu finden und enthält ein zusätzliches, virtuelles Vektor-Meson V^* im Zwischenzustand, das über ein virtuelles Photon γ^* in ein Lepton-Paar zerfällt.

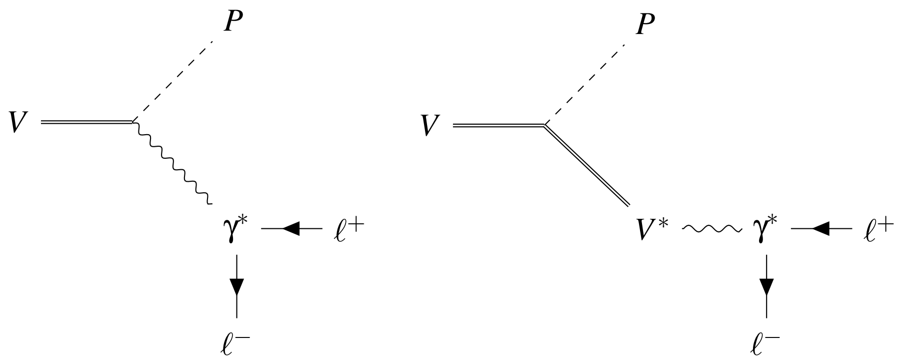

Abbildung 4.1.: Feynman-Diagramme für Dalitz-Zerfälle $PV\ell^+\ell^-$. Direkter Zerfall mittels Punktwechselwirkung auf der linken, Zerfall mit Vektor-Meson im Zwischenzustand auf der rechten Seite.

In der praktischen Rechnung bedeutet dies, dass in der Reihenentwicklung der S-Matrix zusätzlich zum bereits berechneten Term erster Ordnung $O(1)$ ein weiterer Term berücksichtigt werden muss:

$$\mathrm{S} = \mathbb{1} + \underbrace{i\int \mathrm{d}^4x\,\{:\mathcal{L}_{int}:\}}_{O(1)} \underbrace{-\frac{1}{2}\int \mathrm{d}^4x\,\mathrm{d}^4y\,\mathrm{T}\{:\mathcal{L}_{int}::\mathcal{L}_{int}:\}}_{O(2)}\ , \tag{4.6}$$

wobei innerhalb dieser Dissertation sowohl das Vorzeichen als auch der Faktor $1/2$ mit in den Term $O(2)$ gezogen werden.[1] Das zum Term erster Ordnung zugehörige Matrixelement wurde bereits in Gleichung (4.2) bestimmt, es verbleibt noch den zum Term zweiter Ordnung zugehörigen Beitrag zu berechnen. Im entsprechenden Diagramm ist festzustellen, dass die Lagrange-Dichten für zwei weitere Vertices, für die Wechselwirkung eines pseudoskalaren Meson mit zwei Vektor-Mesonen (kurz: PVV) und für die Wechselwirkung eines Vektor-Mesons mit einem Photon, das in ein Lepton-Paar zerfällt (kurz: $V\gamma$) zu bestimmen und die zugehörigen Kopplungskonstanten zu ermitteln sind. Der Term zweiter Ordnung entsteht aus der Integration über die Multiplikation der Normalordnungen der zu den Vertices zugehörigen Wechselwirkungs-Lagrange-Dichten. Aus der Kontraktion je eines Vektor-Meson-Zustands der beiden Lagrange-Dichten entsteht dann das propagierende Vektor-Meson im Zwischenzustand[2].

4.2.3. Der Vertex $V\gamma$

Als ersten weiteren Vertex, der zur Betrachtung der Prozesse $PV\ell^+\ell^-$ notwendig ist, wird der Übergang zwischen einem neutralen Vektor-Meson V mit Masse m_V und einem Photon γ (kurz $V\gamma$), das dann in ein Lepton-Paar $\ell^+\ell^-$ zerfällt, für Leptonen $\ell^\pm$ mit Masse m_ℓ, betrachtet.

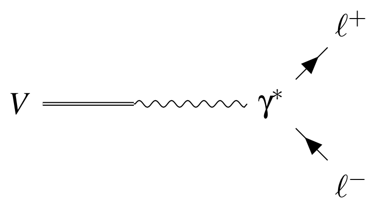

Abbildung 4.2.: Vertex des Übergangs eines Vektor-Mesons in ein Lepton-Paar.

Für den Zerfall eines Vektor-Mesons in ein Photon, siehe Abbildung 4.2, lässt sich nach Entwicklung der Bausteine die folgende Lagrange-Dichte aufstellen,

$$\mathcal{L}^{V\gamma} = -2ec_1^{V\gamma}F^{\mu\nu}\left\langle QG_{\mu\nu}\right\rangle - 4B_0ec_2^{V\gamma}F^{\mu\nu}\left\langle \mathcal{M}QG_{\mu\nu}\right\rangle \ , \tag{4.7}$$

wobei $G_{\mu\nu} = \partial_\mu V_\nu - \partial_\nu V_\mu$ der antisymmetrische Feldstärke-Tensor der Vektor-Mesonen ist. Ein Term für Korrekturen in $1/N_C$ tritt für neutrale Vektor-Mesonen auch für ein in $1/N_C$ entwickeltes Q nicht auf. Grund dafür ist, dass für die Spuren aufgrund ihrer

[1] Der Zerfall $\gamma \to \ell^+\ell-$ entspringt formell einer weiteren Ordnung in der Störungstheorie. Das Ergebnis der zugehörigen Kontraktion T$\left\{: \mathcal{L}_{PV\gamma} :: \mathcal{L}_{\ell^+\ell^-\gamma} :\right\}$ wird mittels der Ersetzung in Gleichung (4.1) berücksichtigt.

[2] Eine auf mathematische Vorgehensweise fokussierte Darstellung der Rechnungen lässt sich in [Zei06] nachschlagen.

zyklischen Eigenschaft und der Antisymmetrie des Feldstärke-Tensors gilt

$$\langle Q \rangle \left\langle G_{\mu\nu} \right\rangle = 0 \, ,$$

Für die drei physikalischen Zerfälle neutraler Mesonen in ein Lepton-Paar, $\rho^0 \to e^+e^-$, $\omega \to e^+e^-$ und $\phi \to e^+e^-$, sind die Zerfallsraten, bestimmt aus den [Tan+18] entnommenen Verzweigungsraten, in Tabelle C.9 eingetragen. Da innerhalb dieser Dissertation von einem Erhalt der Lepton-Universalität ausgegangen wird, werden die ebenfalls gemessenen Zerfälle mit einem Paar Myonen im Endzustand als den Elektronen gleich gestellt angesehen und können nicht als separate Daten zum Fit der Kopplungskonstanten verwendet werden. Gleichwohl werden die Myon-Zerfälle in unterschiedlichen Kombinationen zusammen mit den Elektron-Zerfällen genutzt, um das Ergebnis der Anpassung der Kopplungskonstanten zu verbessern. Für die Zerfallsbreite ergibt sich nach Bestimmung des invarianten Matrixelements und Integration über den Phasenraum zu

$$\Gamma^{V\to\ell^+\ell^-} = \frac{m_\ell^2 e^2}{6\pi m_V^2}\sqrt{\frac{m_V^2}{4} - m_\ell^2}\left(\frac{m_V^2}{m_\ell^2} + 2\right) 4e \left|\mathcal{A}^{V\gamma}\right|^2 \, . \tag{4.8}$$

Dabei sei $\mathcal{A}^{V\gamma}$ die zu den Übergängen $V\gamma$ zugehörige Amplitude. Es sei an dieser Stelle zu erwähnen, dass die Phasenräume für die Zerfälle $A \to B\gamma$ und $V \to \ell^+\ell^-$ strukturell im Phasenraum identisch sind, in dem Sinne kann die Integration wie in Kapitel 3 für die elektromagnetischen Übergänge $PV\gamma$ gezeigt durchgeführt werden.

4.2.4. Der Vertex PVV

Der zweite in der Diskussion der Prozesse $PV\ell^+\ell^-$ zusätzlich auftretende Vertex ist der einer Wechselwirkung zwischen einem pseudoskalaren und zwei Vektor-Mesonen. Das Feynman-Diagramm der Wechselwirkung eines pseudoskalaren Meson mit zwei Vektor-Mesonen ist in Abbildung 4.3 dargestellt.

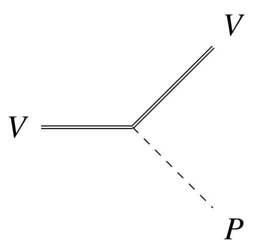

Abbildung 4.3.: Feynman-Diagram des Übergangs zwischen einem pseudoskalaren Meson P und zwei Vektor-Mesonen V.

Die zu dem Prozess zugehörige Wechselwirkungs-Lagrange-Dichte in führender Ordnung lautet

$$\mathcal{L}^{PVV} = -\frac{1}{F}\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} c_1^{PVV} \left\langle \left\{ \partial_\mu V_\nu, V_\rho \right\} \partial_\sigma \Phi \right\rangle \, . \tag{4.9}$$

Eine vollständige Lagrange-Dichte, wie sie aus der Entwicklung der Bausteine inklusive Korrekturen in $1/N_C$ und der Quark-Massen entsteht, ist in Appendix C in Gleichung (C.10) zu finden.
Zur Diskussion des Vertex für den Übergang zwischen einem pseudoskalaren Meson und zwei Vektor-Mesonen steht an experimentellen Ergebnissen laut der Particle Data Group [Tan+18] in einer exakten Messung nur der Zerfall $\phi \to \omega\pi^0$ zur Verfügung. Dieser verletzt allerdings die Annahme der Isospin-Erhaltung und kann somit innerhalb der Konventionen dieser Arbeit, welche die Erhaltung des Insospins voraussetzen, nicht modelliert werden. Somit ist ein alternativer Weg zur Bestimmung der Kopplung des PVV-Vertex zu beschreiten. Gewählt werden die Zerfälle eines Vektor-Mesons in drei pseudoskalare Mesonen, die sich aus zwei Beiträgen zusammensetzen. In Abbildung 4.4 sind der direkte Zerfall und der Zerfall mittels eines virtuellen Vektor-Mesons im Zwischenzustand abgebildet.

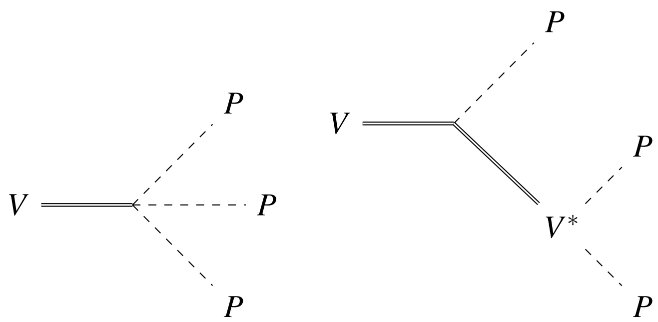

Abbildung 4.4.: Feynman-Diagramme für den Übergang eines Vektor-Mesons V in drei pseudoskalare Mesonen P. Linker Hand die Punktwechselwirkung, rechter Hand der zweistufiger Zerfall via virtuellem Vektor-Meson V^* im Zwischenzustand.

Letzterer wurde bereits für den Zerfall $\omega \to 3\pi$ von Gell-Mann, Sharp und Wagner [GSW62a] in dem so benannten GSW-Prozess beschrieben, bei dem das ω-Meson zunächst in ein Pion und ein Rho-Meson, $\pi\rho$, übergeht und dann das Rho-Meson in ein Pion-Paar zerfällt, $\rho \to \pi\pi$. Zu den Diagrammen zugehörig sind die Wechselwirkungs-Lagrange-Dichten führender Ordnung zu den Vertices VPP,

$$\mathcal{L}^{V\to PP} = -i\frac{1}{F}c_1^{VPP}\left\langle V^\mu\left[\partial_\mu\Phi,\Phi\right]\right\rangle \,, \tag{4.10}$$

und $VPPP$,

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^{V\to PPP} = &-i\frac{2}{F^3}\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}c_1^{VPPP}\left(2\left\langle V_\mu\partial_\nu\Phi\left[\partial_\rho\Phi,\partial_\sigma\Phi\right]\right\rangle\right.\\ &\left.-\left\langle V_\mu\left(\partial_\rho\Phi\partial_\nu\Phi\partial_\sigma\Phi-\partial_\sigma\Phi\partial_\nu\Phi\partial_\rho\Phi\right)\right\rangle\,,\right)\end{aligned} \tag{4.11}$$

zu bestimmen. Die vollständigen Lagrange-Dichten inklusive Korrekturen in $1/N_C$ und der Quark-Massen finden sich in Appendix C in den Gleichungen (C.11) und

(C.12). Für den Zerfall eines Vektor-Mesons in zwei pseudoskalare Mesonen stehen im Rahmen des Modells dieser Dissertation bis zu sieben[3] Zerfälle, siehe Appendix C in Tabelle C.10, zur Verfügung. Hingegen stehen für die Zerfälle eines Vektor-Mesons, genauer eines neutralen Vektor-Mesons, in drei Pionen laut [Tan+18] insgesamt drei Zerfälle zur Verfügung. Die zu diesen Prozessen zugehörigen Zerfallsraten sind in Appendix C in Tabelle C.11 aufgeführt. Demzufolge können die Kopplungskonstanten des Vertex VPP in höherer Ordnung bestimmt werden. Für die Rechnung zur Bestimmung der Kopplungen der beiden verbleibenden Vertices $VPPP$ und PVV in den Übergängen zwischen einem Vektor-Meson und drei pseudoskalaren Mesonen ist dies aber aufgrund der verfügbaren Prozesse nur in führender Ordnung möglich. Somit werden der Konsistenz wegen alle beteiligten Vertices nur ausgehend von Lagrange-Dichten in führender Ordnung diskutiert.
Zunächst ergibt sich aus der zugehörigen Lagrange-Dichte für den Prozess VPP eines Vektor-Mesons V mit Masse m_V und zweier pseudoskalarer Mesonen P_1 und P_2 mit zugehörigen Massen M_{q_1} beziehungsweise M_{q_2} die Gleichung für die Zerfallsrate

$$\begin{aligned}\Gamma^{V\to PP} =& \frac{1}{24\pi m_V^2 F^2}\sqrt{\left(\frac{m_V^2+M_{q_1}^2-M_{q_2}^2}{2m_V}\right)^2 - M_{q_1}^2} \\ &\cdot \left(\frac{\left(M_{q_1}^2\right)^2 - 2M_{q_1}^2\left(M_{q_2}^2+m_V^2\right)+\left(M_{q_2}^2-m_V^2\right)^2}{m_V^2}\right) c_1^{VPP}\left|\mathcal{A}^{VPP}\right|^2 .\end{aligned} \tag{4.12}$$

Sowohl die Integration über den Phasenraum des Übergangs eines Teilchen im Anfangszustand in zwei Teilchen im Endzustand als auch weitere Konventionen der Bestimmung sind aus Kapitel 2 bekannt. Die Amplituden[4] der Zerfälle finden sich in Appendix C, Tabelle C.2.
Das Übergangs-Matrixelement der Punktwechselwirkung $V\to PPP$ für ein Vektor-Meson V mit Impuls p und Masse m_V im Anfangszustand, sowie einem neutralen Pion π^0 mit Impuls k_1, Masse M_{k_1} und einem Paar geladener Pionen π^+ und π^- mit Impulsen k_2, k_3 und Massen M_{k_2}, M_{k_3} im Endzustand ergibt sich zu

$$\mathcal{M}^{VPPP,O(1)} = -i\frac{2}{F^3}c_1^{VPPP}\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\varepsilon_\mu(p)\,k_{1\nu}k_{2\rho}k_{3\sigma}\mathcal{A}^{VPPP,O(1)} . \tag{4.13}$$

Die Werte für die zugehörige Amplitude finden sich in der zweiten Spalte von Tabelle C.3. Zudem ergibt sich das Übergangs-Matrixelement des sequentiellen Zerfalls

[3]Zwei der Zerfälle, $\omega/\phi\to\pi^+\pi^-$, können innerhalb des Modells nicht beschrieben werden. Die zugehörigen Amplituden für einen Fit in führender Ordnung ergeben keine Beiträge.
[4]Im Gegensatz zu der in Kapitel 3 gewählten Konvention zur Darstellung der Amplituden der Übergänge $PV\gamma$, stehen die für die Vertices VPP sowie $VPPP$ allein für einzelne Flavor-Spuren und beinhalten weder Kopplungskonstanten noch Faktoren zur Normierung.

$V \to PV^* \to PPP$ zu

$$\begin{aligned}\mathcal{M}^{VPPP,O(2)} =& i\frac{1}{F^2}c_1^{PVV}c_1^{VPP}\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\varepsilon_\mu(p)\,k_{1\nu}k_{2\rho}k_{3\sigma} \\ &\cdot\frac{1}{(k_2+k_3)^2-M_\rho^2+i0^+}\mathcal{A}^{VPPP,O(2)}\;.\end{aligned} \tag{4.14}$$

Dabei fällt auf, dass bei den betrachteten Zerfällen nur ein Rho-Meson im Zwischenzustand auftreten kann. Die Werte für die zu den Zerfällen zugehörigen Amplituden finden sich in der dritten Spalte von Tabelle C.3.

4.2.5. Matrixelement und Zerfallsrate von $PV\ell^+\ell^-$

Aufbauend auf den Konventionen für die Übergänge $PV\gamma$ in Kapitel 3 und erweitert um die Betrachtung des Lepton-Paars, werden die Formeln für das Matrixelement und die Zerfallsrate von Prozessen $PV\ell^+\ell^-$ bestimmt. In den folgenden Rechenschritten wird in den Flavor-Spuren für die Darstellung der Meson-Felder mittels Gell-Mann Matrizen gewählt, siehe Kapitel 2 Gleichungen (2.37) und (2.44). Dabei ist dem Meson im Anfangszustand immer die Gell-Mann Matrix λ_a und dem Meson im Endzustand die Matrix λ_b zugeordnet. Mit den Rechenregeln für die Spur-Relationen aus [IZ80] oder [SS12] lassen sich dann die Werte der Spuren bestimmen. Einige Beispiele hierfür sind in Appendix C in Abschnitt C.1 gegeben. Implizit findet in den folgenden Ergebnissen für die Propagatoren bereits die Darstellung der physikalischen Quarkladungs-Matrix

$$Q = \frac{1}{2}\lambda_3 + \frac{1}{2\sqrt{3}}\lambda_8 \tag{4.15}$$

in der Aufspaltung in die drei im Zwischenzustand auftretenden neutralen Vektor-Mesonen ρ^0, ω und ϕ Anwendung.

Das $O(2)$-Übergangs-Matrixelement für ein Vektor-Meson im Anfangszustand[5] ergibt sich dann unter Berücksichtigung der ϕ-ω-Mischungs für das Vektor-Meson im Zwischenzustand zu

$$\begin{aligned}\mathcal{M}^{O(2)} = & i\frac{4e}{F}\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}q_\mu\varepsilon_\nu^*(k)\,\varepsilon_{V\rho}(p)\,k_\sigma \\ &\left(\frac{q^2}{q^2-M_\rho^2+i\varepsilon}\left(P_\rho\right)+\frac{q^2}{q^2-M_\omega^2+i\varepsilon}\left(P_\omega\right)+\frac{q^2}{q^2-M_\phi^2+i\varepsilon}\left(P_\phi\right)\right)\;,\end{aligned} \tag{4.16}$$

mit den Propagator-Termen P_ρ, P_ω und P_ϕ unterschiedlicher Zusammensetzung, je nachdem welches der neutralen Vektor-Mesonen im Zwischenzustand auftritt. Innerhalb dieser Terme wird aufgrund der Struktur und mittels des Mischungswinkels Θ_V die Mischung von Oktett- und Singulett-Feldern berücksichtigt. Für ein ρ-Meson im

[5] Das Ergebnis für ein pseudoskalares Meson im Anfangszustand ergibt sich entsprechend der in Kapitel 3 für Gleichung (3.8) genannten Umschreibungen.

Zwischenzustand ergibt sich beispielsweise der folgende Term:

$$
\begin{aligned}
P_\rho = & \frac{1}{4}\Big(2c_1^{PVV}\left(c_1^{V\gamma}+2c_2^{V\gamma}M_{\pi^0}^2\right)\langle\lambda_3\{\lambda_a,\lambda_b\}\rangle \\
& + 2c_1^{V\gamma}c_3^{PVV}\langle\lambda_b\rangle\langle\lambda_3\lambda_a\rangle \\
& + c_1^{V\gamma}\left(c_2^{PVV}+c_4^{PVV}\right)\langle\lambda_a\rangle\langle\lambda_3\lambda_b\rangle \\
& + 4B_0c_1^{V\gamma}\left(c_5^{PVV}+2c_6^{PVV}+c_7^{PVV}\right)\left\langle\mathcal{M}\lambda_3\{\lambda_a,\lambda_b\}\right\rangle \\
& + 2B_0c_1^{V\gamma}\left(c_5^{PVV}+c_7^{PVV}\right)\left\langle\mathcal{M}\left(\lambda_a\lambda_3\lambda_b+\lambda_b\lambda_3\lambda_a\right)\right\rangle\Big)\ .
\end{aligned}
\tag{4.17}
$$

Die zu den Mesonen ω und ϕ zugehörigen Terme sind strukturell gleich und unterscheiden sich nur in ihren Mischungsanteilen, zu finden sind sie und ihre Relation untereinander in Appendix C, Gleichung (C.7). Der in Gleichung (4.17) separat geschriebene Faktor $1/4$ entspringt der in dieser Dissertation gewählten Normierung der Vektor-Meson-Zustände, die für die Kontraktion der Vektor-Meson-Zustände im Zwischenzustand beachtet werden muss. Zudem wurden in der Bestimmung der Terme P_ρ, P_ω und P_ϕ bis zu diesem Punkt dem Organisationsschema folgend die Lagrange-Dichten der Vertices PVV und $V\gamma$ bis inklusive der Korrekturen in $1/N_C$ und der Quark-Massen berücksichtigt. In den folgenden Rechnungen werden die innerhalb dieser Arbeit nicht bestimmbaren Kopplungen der Korrekturen zur führenden Ordnung des Vertex PVV nicht weiter berücksichtigt. Die Resultate der Berechnung der einzelnen Spuren in den Propagator-Termen sind in Appendix C in den Tabellen C.6 und C.7 aufgeführt.
Bei allen drei im Zwischenzustand auftretenden neutralen Vektor-Mesonen handelt es sich um Teilchen mit einer nicht vernachlässigbaren Breite und dies trifft in besonderem Maße auf das ρ-Meson zu. Somit müssen die zugehörigen Propagatoren ausgehend von der bislang implizit angenommenen infinitesimalen Breite wie folgt erweitert werden,

$$
\frac{i}{q^2-M^2+i\varepsilon} \mapsto \frac{i}{q^2-M^2+i\Gamma M}\ , \tag{4.18}
$$

wobei Γ die zum Teilchen mit Masse M zugehörige Zerfallsbreitei ist. Zudem sollte die im Vergleich zu der eigenen Masse sehr große Zerfallsbreite des ρ-Mesons nicht als konstant angenommen werden, was im Gegensatz dazu für die ω- und ϕ-Mesonen eine gute Näherung ist. Im Rahmen dieser Dissertation wird den Referenzen [LL08] und [TLL12] folgend die Breite mittels des Ansatzes

$$
\Gamma_{\rho^0}\left(q^2\right) = \Gamma_{\rho^0}\left[\frac{q^2-4m_B^2}{M_{\rho^0}^2-4m_B^2}\right]^{\frac{3}{2}}\frac{M_{\rho^0}^2}{q^2} \tag{4.19}
$$

modelliert, dabei ist m_B die Masse des Meson B im Endzustand. Die Abhängigkeit der Zerfallsbreite von q^2 wird im Folgenden der Übersichtlichkeit wegen nicht mehr explizit ausgeschrieben werden.
Die Addition der $O(1)$- und $O(2)$-Beiträge zum Übergangs-Matrixelement der Pro-

zesse $PV\ell^+\ell^-$ aus den Gleichungen (4.2) und (4.16) und Sortieren nach den zu den Propagatoren zugehörigen Spuren ergibt nun das vollständige Übergangs-Matrix-element:

$$
\begin{aligned}
\mathcal{M}^{PV\ell^+\ell^-} =& -i\frac{e}{F}\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}q_\mu\varepsilon^*_\nu(k)\,\varepsilon_{V\rho}(p)\,k_\sigma \\
&\left[\left(c_1-\left(2c_1^{PVV}c_1^{V\gamma}+4c_1^{PVV}c_2^{V\gamma}M_{\pi^0}^2\right)\frac{q^2}{q^2-M_{\rho^0}^2+i\Gamma_{\rho^0}M_{\rho^0}}\right)\langle\lambda_3\{\lambda_a,\lambda_b\}\rangle\right. \\
&+c_2\langle\lambda_a\rangle\langle\lambda_3\lambda_b\rangle+c_3\langle\lambda_3\lambda_a\rangle\langle\lambda_b\rangle \\
&+2B_0c_+\left\langle\mathcal{M}\lambda_3\{\lambda_a,\lambda_b\}\right\rangle+2B_0c_-\mathrm{Tr}\left[\mathcal{M}\left(\lambda_a\lambda_3\lambda_b+\lambda_b\lambda_3\lambda_a\right)\right\rangle \\
&+\frac{1}{\sqrt{3}}\left(c_1-\left(2c_1^{PVV}c_1^{V\gamma}+\frac{4}{3}c_1^{PVV}c_2^{V\gamma}\left(4M_K^2-M_{\pi^0}^2\right)\right)\right. \\
&\cdot\left.\left(\frac{q^2}{q^2-M_\omega^2+i\Gamma_\omega M_\omega}\sin(\theta_V)^2+\frac{q^2}{q^2-M_\phi^2+i\Gamma_\phi M_\phi}\cos(\theta_V)^2\right)\right)\langle\lambda_8\{\lambda_a,\lambda_b\}\rangle \\
&+\frac{c_2}{\sqrt{3}}\langle\lambda_a\rangle\langle\lambda_8\lambda_b\rangle+\frac{c_3}{\sqrt{3}}\langle\lambda_8\lambda_a\rangle\langle\lambda_b\rangle \\
&+2B_0\frac{c_+}{\sqrt{3}}\left\langle\mathcal{M}\lambda_8\{\lambda_a,\lambda_b\}\right\rangle+2B_0\frac{c_-}{\sqrt{3}}\left\langle\mathcal{M}\left(\lambda_a\lambda_8\lambda_b+\lambda_b\lambda_8\lambda_a\right)\right\rangle \\
&-\left(\frac{q^2}{q^2-M_\omega^2+i\Gamma_\omega M_\omega}-\frac{q^2}{q^2-M_\phi^2+i\Gamma_\phi M_\phi}\right)\cos(\theta_V)\sin(\theta_V) \\
&\cdot\left(\frac{8}{3}\sqrt{\frac{2}{3}}c_1^{PVV}c_2^{V\gamma}\left(M_{\pi^0}^2-M_K^2\right)\langle\lambda_8\{\lambda_a,\lambda_b\}\rangle\right. \\
&+\left.\frac{4\sqrt{2}}{3}c_1^{PVV}\left(c_1^{V\gamma}-\frac{2}{3}c_2^{V\gamma}\left(4M_K^2-M_{\pi^0}^2\right)\right)\langle\lambda_a\lambda_b\rangle\right) \\
&-\left(\frac{q^2}{q^2-M_\omega^2+i\Gamma_\omega M_\omega}\cos(\theta_V)^2+\frac{q^2}{q^2-M_\phi^2+i\Gamma_\phi M_\phi}\sin(\theta_V)^2\right) \\
&\cdot\left.\left(\frac{32}{9}c_1^{PVV}c_2^{V\gamma}\left(M_{\pi^0}^2-M_K^2\right)\langle\lambda_a\lambda_b\rangle\right)\right] \\
=& -i\frac{e}{F}\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}q_\mu\varepsilon^*_\nu\varepsilon_{V\rho}k_\sigma\mathcal{P}_{\rho,\omega,\phi}\left(q^2\right)\ .
\end{aligned}
\tag{4.20}
$$

Nach der Bestimmung des Betragsquadrats und der an das Meson im Anfangszustand angepassten Behandlung der Polarisationsvektoren des Vektor-Mesons, siehe Gleichung (3.10), lässt sich das invariante Matrixelement berechnen. Kompakt ergibt sich für die einfach differentielle Zerfallsrate der Zerfälle $PV\ell^+\ell^-$

$$
\frac{\mathrm{d}\Gamma\left(A\to B\ell^+\ell^-\right)}{\mathrm{d}q^2}=c_A\mathrm{N}^{(3)}|\mathcal{P}_{\rho,\omega,\phi}\left(q^2\right)|^2\mathrm{T}\left(q^2\right)\ . \tag{4.21}
$$

Die Bestimmung des Phasenraums eines sequentiellen Zerfalls $A \to BV \to B\ell^+\ell^-$ und dessen Vereinbarkeit mit dem Phasenraum der Punktwechselwirkung ist in Appendix C in Abschnitt C.4, den in [BK73] gezeigten Schemata folgend, gegeben. Eine kurze Übersicht dazu findet sich unter anderem auch in [Tan+18]. Zur Bestimmung der Zerfallsrate muss Gleichung (4.21) innerhalb des Intervalls $[4m_\ell^2, (m_A - m_B)^2]$ über q^2 integriert werden. Einen Normierungsfaktor und dem Phasenraum zugehörige Faktoren, sowie die Normierung aus den leptonischen Zuständen und ein konstanter Faktor e^2 aus dem leptonischen Tensor wird wie folgt zusammengefasst

$$N^{(3)} = \frac{1}{32m_A^3\left(2\pi\right)^3} e^2 \left(2m_\ell\right)^2 \ . \tag{4.22}$$

Aus der Integration des kontrahierten hadronischen und leptonischen Tensors über die quadrierte invariante Masse $m_{qk_+}^2$ bestimmt sich der Term

$$\begin{aligned} \mathrm{T}\left(q^2\right) =& \frac{e^2}{F^2}\frac{1}{6m_\ell^2 q^2}\left(\sqrt{q^2-4m_\ell^2}\left(2m_\ell^2+q^2\right)\right. \\ &\cdot \left.\left(\frac{\left(m_B^2\right)^2 - 2m_B^2\left(m_A^2+q^2\right) + \left(m_A^2-q^2\right)^2}{q^2}\right)^{\frac{3}{2}}\right) \ . \end{aligned} \tag{4.23}$$

Zur besseren Separation der Übergangsformfaktoren aus der Rechnung und deren Vergleich mit aktuellen experimentellen und theoretischen Ergebnissen, wird der in Gleichung (4.21) gegebene Ausdruck für die differentielle Zerfallsrate der Dalitz-Zerfälle $PV\ell^+\ell^-$ an die in [Lan85] gezeigten Konventionen angepasst. Dies knüpft damit auch an die Darstellung in aktuellen theoretischen [LL08; TLL12] sowie experimentellen [Arn+16; Adl+17] Diskussionen an, was den Vergleich von Ergebnissen aus verschiedenen Referenzen erleichtert. Dazu wird das Übergangs-Matrixelement wie folgt definiert

$$\mathcal{M}^{O(2)} = i\widetilde{f}\left(q^2\right) e\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} q_\mu \varepsilon_\nu^*\left(k\right) \varepsilon_{V\rho}\left(p\right) k_\sigma \tag{4.24}$$

mit dem $O\left(2\right)$-Anteil des Formfaktors

$$\begin{aligned} \widetilde{f}\left(q^2\right) = \frac{4}{F}&\left(\frac{q^2}{q^2-M_\rho^2+i\Gamma_\rho M_\rho}\left(P_\rho\right) + \frac{q^2}{q^2-M_\omega^2+i\Gamma_\omega M_\omega}\left(P_\omega\right)\right. \\ &\left.+\frac{q^2}{q^2-M_\phi^2+i\Gamma_\phi M_\phi}\left(P_\phi\right)\right) \ . \end{aligned} \tag{4.25}$$

Somit gilt innerhalb des Modells bis zur gewählten Ordnung der S-Matrix für den Formfaktor der Dalitz-Zerfälle $A \to Bl^+l^-$

$$f\left(q^2\right) = f\left(q^2=0\right) + \widetilde{f}\left(q^2\right) \ . \tag{4.26}$$

Wird diese Summe mit Hilfe des Wertes für $q^2 = 0$ (reelle Photonen) normiert, so ergibt sich der im Allgemeinen diskutierte Übergangsformfaktor

$$\left|F_{AB}\left(q^2\right)\right|^2 = \left|\frac{f\left(q^2\right)}{f(0)}\right|^2 . \tag{4.27}$$

Die einfach differentielle Zerfallsrate in Gleichung (4.21) lässt sich nun alternativ durch den Term

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}\Gamma\left(A\to B\ell^+\ell^-\right)}{\mathrm{d}q^2} =& \frac{e^2}{12\pi^2}\frac{c_A}{32\pi}\frac{1}{q^2}\left(1-\frac{4m_\ell^2}{q^2}\right)^{\frac{1}{2}}\left(1+\frac{2m_\ell^2}{q^2}\right)\\ &\cdot\left(\frac{\left(m_B^2\right)^2-2m_B^2\left(m_A^2+q^2\right)+\left(m_A^2-q^2\right)^2}{m_A^2}\right)^{\frac{3}{2}}\\ &\cdot\left|f\left(q^2\right)\right|^2\end{aligned} \tag{4.28}$$

darstellen. Bei anschließender Division durch die Zerfallsbreite des zugehörigen elektromagnetischen Übergangs $A \to B\gamma$ ergibt sich dann, mit der invarianten Masse des Lepton-Paares $q^2 = m_{\ell^+\ell^-}^2$, die normierte differentielle Zerfallsrate

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}\Gamma\left(A\to B\ell^+\ell^-\right)}{\mathrm{d}m_{\ell^+\ell^-}^2\;\Gamma\left(A\to B\gamma\right)} =& \frac{e^2}{12\pi^2}\frac{1}{m_{\ell^+\ell^-}^2}\left(1-\frac{4m_\ell^2}{m_{\ell^+\ell^-}^2}\right)^{\frac{1}{2}}\left(1+\frac{2m_\ell^2}{m_{\ell^+\ell^-}^2}\right)\\ &\cdot\left(\frac{\left(m_B^2\right)^2-2m_B^2\left(m_A^2+m_{\ell^+\ell^-}^2\right)+\left(m_A^2-m_{\ell^+\ell^-}^2\right)^2}{\left(m_A^2-m_B^2\right)^2}\right)^{\frac{3}{2}}\\ &\cdot\left|F_{AB}\left(m_{\ell^+\ell^-}^2\right)\right|^2\\ =& \frac{e^2}{12\pi^2}\frac{1}{m_{\ell^+\ell^-}^2}\left(1-\frac{4m_\ell^2}{m_{\ell^+\ell^-}^2}\right)^{\frac{1}{2}}\left(1+\frac{2m_\ell^2}{m_{\ell^+\ell^-}^2}\right)\\ &\cdot\left(\left(1+\frac{m_{\ell^+\ell^-}^2}{m_A^2-m_B^2}\right)^2-\frac{4m_A^2m_{\ell^+\ell^-}^2}{\left(m_A^2-m_B^2\right)^2}\right)^{\frac{3}{2}}\left|F_{AB}\left(m_{\ell^+\ell^-}^2\right)\right|^2 .\end{aligned} \tag{4.29}$$

Sollte die einfach differentielle Zerfallsrate nicht nach $\mathrm{d}m_{\ell^+\ell^-}^2$ sondern $\mathrm{d}m_{\ell^+\ell^-}$ gesucht sein, muss die der Beziehung

$$\frac{\mathrm{d}m_{\ell^+\ell^-}^2}{\mathrm{d}m_{\ell^+\ell^-}} = 2m_{\ell^+\ell^-} \Leftrightarrow \frac{2m_{\ell^+\ell^-}}{\mathrm{d}m_{\ell^+\ell^-}^2} = \frac{1}{\mathrm{d}m_{\ell^+\ell^-}} \tag{4.30}$$

folgende Ersetzung des Differentials vorgenommen werden.

4.3. Ergebnisse

Die Ergebnisse der Anpassung der Kopplungskonstanten der einzelnen Vertices sowie die abschließende Bestimmung und Diskussion der Übergangsformfaktoren werden im Folgenden sukzessive aufeinander aufbauend präsentiert. Dazu wird zunächst der Vertex $V\gamma$ beleuchtet, daran schließt sich die Prozedur zur Anpassung der Kopplungskonstanten des Vertex PVV mittels des GSW-Prozesses in Zerfällen eines Vektor-Mesons in drei Pionen, $VPPP$, an. Schlussendlich werden Zerfallsraten und Übergangsformfaktoren der Zerfälle $PV\ell^+\ell^-$ bestimmt und sowohl mit experimentellen Daten als auch weiteren theoretischen Berechnungen verglichen.

4.3.1. Ergebnisse Vertex $V\gamma$

Bei Annahme einer idealen ϕ-ω-Mischung ergibt sich für den Vertex $V\gamma$ aus einem Fit der Lagrange-Dichte aus Gleichung (4.7) in führender Ordnung an die Zerfallsraten aus Tabelle C.9 für die Kopplungskonstante führender Ordnung $c_1^{V\gamma}$ das Ergebnis

$$c_1^{V\gamma} = 0.0882 \pm 0.0074 \ . \tag{4.31}$$

Aus einem Fit inklusive der Korrekturen in den Quark-Massen mit Mischungswinkel $\Theta_V = 39.5°$, unter Beachtung der Approximation des quadrierten invarianten Matrixelements nach Vorbild von Kapitel 3, ergeben sich die in Tabelle 4.3 angegebenen Kopplungskonstanten mit zugehörigen Zerfallsraten in Appendix C, Tabelle C.12. Es ist festzustellen, dass aufgrund der geringen Anzahl an Termen im invarianten Matrixelement sich die Ergebnisse für beide Betrachtungen nur geringfügig voneinander unterscheiden und die Unterschiede im Rahmen der Genauigkeit des Modells vernachlässigt werden können. Der Konsistenz wegen wird, um an den besten Fit für die elektromagnetischen Übergänge $PV\gamma$ anzuknüpfen, wie schon in Kapitel 3 die zweite Variante der Näherung für das invariante Matrixelement, gekennzeichnet mit dem Superskript II, gewählt.

Tabelle 4.3.: Ergebnisse der Kopplungskonstanten für die vollständige Lagrange-Dichte des Vertex $V\gamma$ inklusive der Korrekturen in den Quark-Massen mit physikalischer Mischung $\Theta_V = 39.5°$. In der linken Spalte sind die Ergebnisse für ein vollständiges quadriertes invariantes Matrixelement gegeben, in der rechten die für ein reduziertes Quadrat (siehe Kapitel 3).

Konstante	$\lvert\mathcal{M}^I\rvert^2$	$\lvert\mathcal{M}^{II}\rvert^2$
$c_1^{V\gamma}$ in $[10^{-2}]$	9.51 ± 0.47	9.50 ± 0.47
$c_2^{V\gamma}$ in $[10^{-2}\ \mathrm{GeV}^{-2}]$	-0.59 ± 0.33	-0.55 ± 0.29

Bei Betrachtung der in Appendix C in Tabelle C.1 aufgeführten Amplituden für die Übergänge der Oktett- und Singulett-Felder ist festzustellen, dass für die Kopplung

führender Ordnung der Beitrag des Singulett-Feldes, $\omega_0 \to \ell^+\ell^-$, entfällt und diese Felder erst bei Berücksichtigung von Korrekturen aufgrund der Quark-Massen einen Beitrag liefern. Dies liefert unter anderem bei einem Blick auf die Mischungsverhältnisse in Gleichung (2.64) eine Erklärung dafür, dass für einen Fit in führender Ordnung der Zerfall des ϕ-Meson gegenüber dem des ω dominiert.
Ein Vergleich der Ergebnisse der Anpassung der Kopplungskonstante führender Ordnung aus Gleichung (4.31) mit dem Ansatz aus [KKW96], der auf einer chiralen effektiven Lagrange-Dichte führender Ordnung und der Verwendung des Vektor-Formalismus zur Darstellung der Vektor-Meson-Felder basiert, und dem in der Referenz ermittelten Ergebnis von $g_{V\gamma} \simeq 5.7$ zeigt, dass bei einer Umrechnung der verwendeten Normierungen und Konventionen

$$\frac{2}{4g_\gamma} = 0.0877 \tag{4.32}$$

beide Werte gut miteinander übereinstimmen.

4.3.2. Ergebnisse Vertex VPP

Der Zerfall eines Vektor-Meson in zwei pseudoskalare Mesonen ergibt für eine Anpassung der Kopplungskonstanten führender Ordnung der theoretischen Zerfallsrate in Gleichung (4.12) an die experimentellen Resultate das Ergebnis

$$c_1^{VPP} = (275. \pm 26.)\ \text{MeV}\ . \tag{4.33}$$

Mit Blick auf die Amplituden, gezeigt in Appendix C Tabelle C.2, ist festzustellen, dass in einem Fit führender Ordnung innerhalb des Modells die Übergänge $\omega_8/\omega_0 \to \pi^+\pi^-$ nicht erfasst werden können. Zudem trägt in dieser Ordnung auch der Übergang eines ω_0 in ein Paar geladener Kaonen nicht bei.
In einem Vergleich mit dem entsprechenden Ergebnis für den gleichen Prozess in [KKW96], dort wurde für die Kopplung ein Wert von $g_{\rho\pi\pi} \simeq 6$ ermittelt, ist unter Berücksichtigung der Normierung der Vektor-Meson-Felder festzustellen, dass mit der Umrechnung

$$2\frac{c_1^{VPP}}{F} \approx 5.97 \tag{4.34}$$

die Ergebnisse innerhalb der Fehler gut übereinstimmen. Dieser Wert zeigt auch eine gute Übereinstimmung mit sowohl demjenigen der bereits von Köpp [Köp74] ermittelt wurde, $g_{\rho\pi\pi} = 5.98$, als auch mit der in [Tan+18] angegebenen Zerfallsbreite Γ_ρ.
Im weiteren Verlauf wird der Wert der Kopplungskonstanten c_1^{VPP} in der Bestimmung der Kopplungskonstanten des Vertex $VPPP$ verwendet werden.

4.3.3. Ergebnisse Vertex $VPPP$

Unter Berücksichtigung des Propagators für Zerfälle eines Vektor-Mesons in drei pseudoskalare Mesonen in Gleichung (4.14) und den in Tabelle C.3 aufgeführten Amplituden ist festzustellen, dass die Zerfälle $\phi/\omega \to \pi^0\pi^+\pi^-$ sowohl Beiträge aus der Punktwechselwirkung als auch dem GSW-Prozess mit einem ρ-Meson im Zwischenzustand enthalten und letzterer im Vergleich dominiert. Der Zerfall des ρ^0-Meson hingegen tritt innerhalb des Modells in der betrachteten Ordnung nur über die direkte Punktwechselwirkung auf. Ein Fit an die experimentellen Werte liefert für die Kopplungskonstanten die Ergebnisse

$$\begin{aligned} c_1^{VPPP} &= -0.017 \pm 0.013 \,, \\ c_1^{PVV} &= -0.46 \pm 0.11 \,. \end{aligned} \tag{4.35}$$

Aus den Amplituden der in Tabelle C.3 aufgeführten zugehörigen Übergänge ist zu schließen, dass der Zerfall des ρ^0 nur zu der Kopplung der Punktwechselwirkung beiträgt. Im Umkehrschluss ist daraus dann auch der große Fehler der Konstanten c_1^{VPPP} zu erklären, da der Zerfall des Rho-Meson einen großen Fehler aufweist. Es ist allerdings trotzdem wichtig für den Fit mit drei Zerfällen zu arbeiten, da ein Auslassen des Zerfalls des ρ-Mesons zu deutlich differierenden Ergebnissen führt, die Zentralwerte in diesem Fall sind respektive $c_1^{VPPP} = -0.066$ und $c_1^{PVV} = -0.18$. Bei Auslassung des dritten Zerfalls unterscheiden sich somit die Beträge beider Kopplungskonstanten im Vergleich zu dessen Berücksichtigung deutlich.
Der vergleichbare Ansatz im Vektor-Formalismus aus Referenz [KKW96] erhält für den Anteil des direkten Zerfalls eines Vektor-Mesons in drei pseudoskalare Mesonen, bei Betrachtung der experimentellen Werte zu $\omega/\phi \to 3\pi$, die Kopplung $h = -0.06$. Für die zweite gesuchte Kopplung eines pseudoskalaren mit zwei Vektor-Mesonen ergibt sich das Ergebnis $g_{VVP} = 1.2$. Werden die Lagrange-Dichten miteinander verglichen und die verwendeten Normierungen angepasst, so ergibt sich in den beiden Fällen

$$\begin{aligned} -\frac{8f_\pi^3}{2F^3} c_1^{VPPP} &\approx 0.072 \,, \\ -\frac{8f_\pi}{2F} c_1^{PVV} &\approx 0.94 \pm 0.22 \,. \end{aligned} \tag{4.36}$$

Dabei ist der in der Referenz verwendete Wert für die Zerfallskonstante der Pionen $f_\pi = 92.4$ MeV. Für den Vertex $VPPP$ stehen die Zentralwerte der Kopplungskonstanten aus beiden Berechnungen in recht guter Übereinstimmung, hingegen ist für den Vertex PVV eine deutliche Abweichung im Betrag festzustellen. Eine nähere Betrachtung führt zu dem Schluss, dass die Diskrepanz in den Beträgen sich auch insbesondere nicht mit einem Ausschluss des Zerfalls $\rho^0 \to \pi^+\pi^-\pi^0$ aus der Anpassung beheben lässt.

Tabelle 4.4.: Experimentelle gegenüber im Modell ermittelte Zerfallsraten für Prozesse $PV\ell^+\ell^-$ für exakt erfasste Zerfälle. In der dritten Spalte stehen Ergebnisse für $\Gamma(A \to B\gamma) = \Gamma_{\text{PDG}}$, in der vierten für die Verwendung der Modellergebnisse aus Tabelle 3.3.

Zerfall	Γ_{PDG} [keV]	mit $\Gamma^{PV\gamma}_{\text{mod}}$ [keV]	mit $\Gamma^{PV\gamma}_{\text{PDG}}$ [keV]
$\omega \to \pi^0 e^+e^-$	6.54 ± 0.57	6.75 ± 0.18	6.23 ± 0.17
$\omega \to \pi^0 \mu^+\mu^-$	1.14 ± 0.16	0.86 ± 0.14	0.80 ± 0.13
$\phi \to \pi^0 e^+e^-$	0.0565 ± 0.0047	0.0728 ± 0.0086	0.0729 ± 0.0085
$\phi \to \eta e^+e^-$	0.459 ± 0.020	0.471 ± 0.035	0.0473 ± 0.035
$\eta' \to \omega e^+e^-$	0.0392 ± 0.0096	0.0350 ± 0.0010	0.0387 ± 0.0011

4.3.4. Ergebnisse zu $PV\ell^+\ell^-$

Zur Bestimmung der Zerfallsraten der Zerfälle $PV\ell^+\ell^-$ werden nun in Gleichung (4.29) sowohl die Kopplungskonstanten der beiden Vertices $V\gamma$ und PVV aus den Gleichungen (4.31) und (4.36) als auch die für die elektromagnetischen Übergänge $PV\gamma$ bestimmten Kopplungen aus Tabelle 3.3 eingesetzt. Die resultierende differentielle Zerfallsbreite ist dann im Intervall $[2m_l, m_V - M_P]$ über die invariante Masse des Lepton-Paares $q = (m^2_{\ell^+\ell^-})^{1/2}$ zu integrieren. Respektive ist für eine Integration über $q^2 = m^2_{\ell^+\ell^-}$ das Intervall $[4m_l^2, (m_V - M_P)^2]$ zu beachten. Die daraus erhaltenen Ergebnisse für experimentell exakt erfasste Zerfälle sind in Tabelle 4.4 angegeben. Die experimentell nur mittels Abschätzungen erfassten Ergebnisse sowie die Vorhersagen für bislang nicht erfasste Zerfälle sind mit ihren Zentralwerten in den Tabellen C.13 beziehungsweise C.14 in Appendix C gegeben. Genauere Angaben finden sich in den Diskussionen zu den Formfaktoren der einzelnen Prozesse. In den Rechnungen werden entsprechend Tabelle 3.3 die mittels der aus [Tan+18] entnommenen Verzweigungsraten berechneten und die Modellergebnisse, respektive aus den Spalten zwei und drei, für $\Gamma(A \to B\gamma)$ in Gleichung (4.29) eingesetzt.
Entsprechend den Differenzen zwischen den im Modell bestimmten gegenüber den experimentellen Zerfallsraten der Prozesse $PV\gamma$ ergeben sich leichte Abweichungen in den Ergebnissen. So ist beispielsweise der für den Zerfall $\omega\pi^0\gamma$ mittels des Modells bestimmte Wert kleiner, als das zugehörige experimentelle Ergebnis, folglich gilt dies in umgekehrten Maße auch für die entsprechenden Zerfallsraten $\omega \to \pi^0\ell^+\ell^-$. Mit Blick auf den in Tabelle 4.4 gezeigten Vergleich zwischen experimentellen Werten und Ergebnissen aus dem Modell ist festzustellen, dass im Rahmen der Fehler für die meisten der Zerfälle eine relativ gute Übereinstimmung gefunden werden kann. Eine besondere Ausnahme stellt hierbei der Zerfall $\omega \to \pi^0\mu^+\mu^-$ dar, im Gegensatz zu dem direkt verwandten Prozess $\omega \to \pi^0 e^+e^-$, dessen Zerfallsrate gut beschrieben wird. Unter der Annahme der Lepton-Universalität innerhalb des Modells wurde bei guter Passung des Zerfalls in ein Elektron-Paar dasselbe auch für den Prozess mit

einem Myon-Paar erwartet. Die Tatsache, dass dies nicht der Fall ist, wirft, bei fortwährender Annahme der Lepton-Universalität, die Frage auf, inwieweit das Modell zuverlässig sein kann, wenn es scheinbar derart offenkundige Widersprüche zur Folge hat, oder ob der Grund für die festgestellte Diskrepanz bei experimentellen Messungen zu suchen ist. Dieser Konflikt lässt sich an dieser Stelle nicht anhand der Zerfallsraten untersuchen, da diese mittels einer Integration über eine Strukturfunktion, den Übergangsformfaktor, entstehen und bei Integrationen Informationen über zugrunde liegende Strukturen verloren gehen. Es besteht allerdings die Möglichkeit Übergangsformfaktoren betrachteter Prozesse experimentell zu erfassen und somit mit den entsprechenden Ergebnissen aus dem Modell zu vergleichen.
Mit Blick auf die Ergebnisse der Spuren, die in Appendix C in den Tabellen C.6 und C.7 angegeben sind, ist festzustellen, dass ein propagierendes Rho-Meson nur für Prozesse mit entweder einem ρ^0 oder einem π^0 in Anfangs- *oder* Endzustand auftritt. Im Falle des Übergangs $\rho^0 \to \pi^0 \ell^+ \ell^-$ sowie aller physikalischen Prozesse, die eine Mischung aus Oktett- und Singulett-Feldern in Anfangs- und Endzustand enthalten, tritt eine Mischung zwischen den Mesonen ω und ϕ im Zwischenzustand auf. Zudem ist zu erkennen, dass Korrekturen in $1/N_C$, bedingt durch die Struktur der Terme, nur im Zusammenhang von Prozessen mit einem einzelnen Singulett-Feld, sei es ein pseudoskalares oder Vektor-Meson-Feld, auftreten. Auffällig sind bei den beobachteten regelmäßigen Strukturen Zerfälle mit einem η' im Anfangszustand, aufgrund der im Vergleich zu den anderen Zerfällen umgekehrten Reihenfolge der Mesonen wechseln hierfür auch jeweils die Relationen und in den Spuren *II* und *III* beziehungsweise *VII* und *VIII*.
Insgesamt stehen drei Prozesse zur Verfügung, in denen der Übergangsformfaktor durch eine oder mehrere Messungen experimentell erfasst worden ist. Der Prozess $\omega \to \pi^0 \ell^+ \ell^-$ ist bei weitem am besten erfasst, so stehen unter anderem mit den Messungen [Dzh+81], [Akh+05], [Ach+08], [Arn+09], [Arn+16], [Adl+17] sowohl Ergebnisse zu Elektron- als auch Myon-Zerfällen zur Verfügung. Des Weiteren stehen auch für die Formfaktoren zu $\phi \to \eta \ell^+ \ell^-$, siehe [Ach+01] und [Bab+15], und $\phi \to \pi^0 \ell^+ \ell^-$ [Ana+16] Datenreihen zum Vergleich mit theoretischen Modellen bereit. Für alle weiteren Prozesse ist bislang noch keine experimentelle Grundlage vorhanden, es steht aber zu hoffen, dass die BESIII-Kollaboration in naher Zukunft für den Prozess $\eta' \to \omega \ell^+ \ell^-$ Abhilfe schaffen kann.
Beginnend mit dem Übergangsformfaktor der Zerfälle $\omega \to \pi^0 \ell^+ \ell^-$ werden im Folgenden sukzessive Ergebnisse zu allen Prozessen diskutiert. Dabei werden, so vorhanden, zunächst erfasste Datenreihen präsentiert und mit dem Modell dieser Dissertation verglichen. Im Anschluss steht dann der Vergleich verschiedener theoretischer Ansätze zur Beschreibung der Formfaktoren untereinander sowie ihre Passung im Hinblick auf die Beschreibung experimenteller Ergebnisse.

4.3.5. Der Formfaktor für $\omega \to \pi^0 \ell^+ \ell^-$

Vor einer Betrachtung des Formfaktors der Zerfälle $\omega \to \pi^0 \ell^+ \ell^-$ ist festzuhalten, dass dieser bei Berücksichtigung der Propagator-Terme in den Gleichungen (4.17) und (C.7) vom Lepton-Paar, Elektronen oder Myonen, unabhängig ist. Folglich sollten alle Messungen, egal mit welcher Art Lepton-Paar sie durchgeführt werden, auf denselben Formfaktor führen. Einziger Unterschied ist das Intervall. in dem je nach Prozess Datenpunkte aufgenommen werden können. Für die untere Grenze gilt im Falle eines Elektron-Paares $2m_e \approx 1$ MeV sowie für ein Myon-Paar $2m_\mu \approx 200$ MeV. Dementsprechend ist es für die gezeigten Messungen mit einem Paar Myonen im Endzustand nicht möglich Messwerte im Intervall für $0 < m_{\ell^+\ell^-} < 200$ MeV zu erfassen.

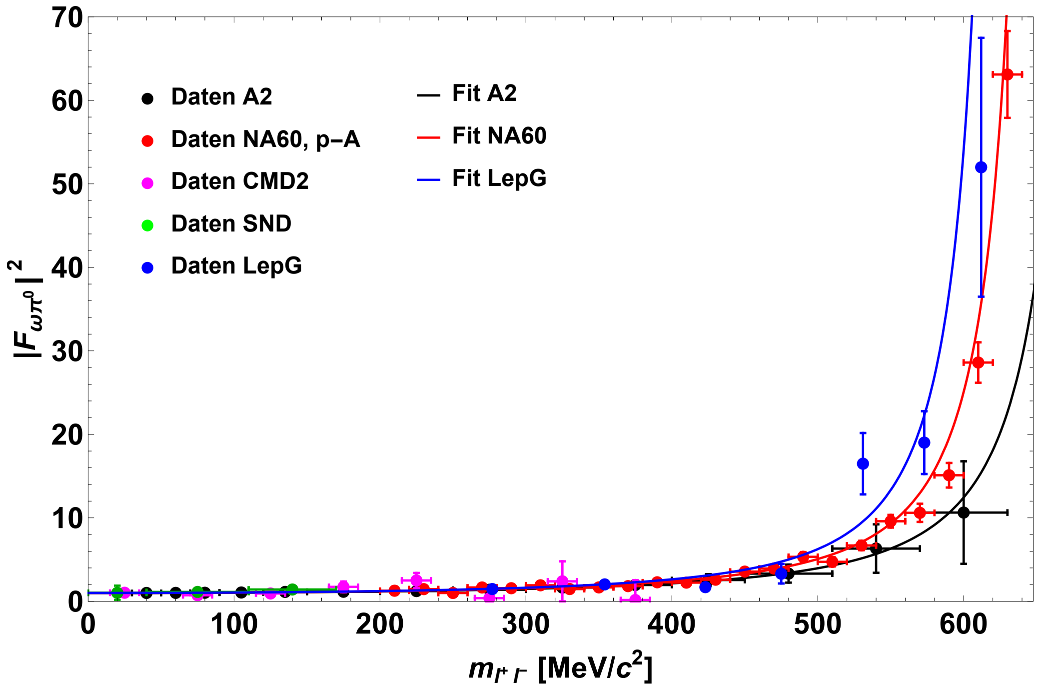

Abbildung 4.5.: Experimentelle Datenreihen zu Formfaktoren $|F_{\omega\pi^0}|^2$ der Dalitz-Zerfälle $\omega \to \pi^0\ell^+\ell^-$ in Abhängigkeit von der invarianten Masse des Lepton-Paars $m_{\ell^+\ell^-}$. In Schwarz sind die Datenpunkte und der Monopol-Fit aus [Adl+17], in Rot Daten und Fit aus [Arn+16], in Magenta die Daten aus [Akh+05], in Grün die Daten aus [Ach+08] und in Blau Daten und Fit aus [Dzh+81] eingezeichnet.

Eine Zusammenstellung einiger Datenreihen ist in Abbildung 4.5 dargestellt. Der Annahme der Vektor-Meson-Dominanz folgend, dass nahe einer invarianten Masse des Lepton-Paars von $m_{\ell^+\ell^-} = m_{V^*}$ ein resonantes Verhalten des virtuellen Photons festzustellen ist, lässt sich der Übergangsformfaktor mittels einer Polfunktion parametrisieren

$$F(m_{\ell\ell}) = \left(1 - \frac{m^2_{\ell^+\ell^-}}{\Lambda^2}\right)^{-1} . \tag{4.37}$$

Dabei ist Λ^{-2} die Steigung des Formfaktors bei $m_{\ell^+\ell^-} = 0$. Innerhalb des Quark-Modells bestimmt sich die Steigung zu $\Lambda_{\omega\pi^0}^{-2} = 1.68\ \mathrm{GeV}^{-2}$ [Lan85], was äquivalent zu einem $\Lambda_{\omega\pi^0} = 772$ MeV ist. Die Nähe von $\Lambda_{\omega\pi^0}$ zu der Masse des Rho-Mesons ist eine Folge der Isospin-Erhaltung im Zerfall $\omega \to \pi^0\gamma^* \to \pi^0\ell^+\ell^-$. Diese lässt in diesem Prozess nur Zerfälle des virtuellen Meson $\gamma^* \to \ell^+\ell-$ mit Isospin $I = 1$ zu und schließt demzufolge Beiträge von ω- und ϕ-Mesonen mit Isospin $I = 0$ aus.
Die Zuordnung der Farben zu den Datenreihen in Abbildung 4.5 ist wie folgt: In *Blau* sind die Ergebnisse der Lepton-G-Kollaboration [Dzh+81] mit einer Steigung von $\Lambda_{\omega\pi^0}^{-2} = (2.36 \pm 0.21)\ \mathrm{GeV}^{-2}$ und die Ergebnisse aus [Ach+08] und [Akh+05] in einem *dunklen Grün* beziehungsweise in *Magenta* eingezeichnet. Hinzu kommen die Datenpunkte der NA60-Kollaboration für p-A-Stöße [Arn+16] in *Rot* mit $\Lambda_{\omega\pi^0}^{-2} = \left(2.223 \pm 0.026_{\mathrm{stat}} \pm 0.017_{\mathrm{syst}}\right)\ \mathrm{GeV}^{-2}$. Diese steht auch repräsentativ für eine weitere Messung derselben Gruppe für In-In-Stöße [Arn+09] mit der Steigung $\Lambda_{\omega\pi^0}^{-2} = \left(2.24 \pm 0.06_{\mathrm{stat}} \pm 0.02_{\mathrm{syst}}\right)\ \mathrm{GeV}^{-2}$, die aufgrund der guten Übereinstimmung mit den Ergebnissen aus den p-A-Stößen und deren besserer Statistik der Übersicht wegen in den Abbildungen dieser Arbeit nicht eigens aufgezeigt werden. Schließlich findet sich als letzte gezeigte Datenreihe die Ergebnisse der A2-Kollaboration [Adl+17] mit $\Lambda_{\omega\pi^0}^{-2} = (1.99 \pm 0.21)\ \mathrm{GeV}^{-2}$ in *Schwarz*. Aus den aufgezählten Steigungen lassen sich mit Gleichung (4.37) die zugehörigen Formfaktoren bestimmten. Diese werden dann Gleichung (4.29) folgend zur Berechnung der Zerfallsraten genutzt und die entsprechenden Zentralwerte für die Zerfälle $\omega \to \pi^0\ell^+\ell^-$ sind dann in Tabelle 4.5 im Vergleich zu den in [Tan+18] gegebenen Werten aufgeführt. Für alle angegebenen Ergebnisse wurde $\Gamma(A \to B\gamma) = \Gamma_{\mathrm{PDG}}$ verwendet. Dies gilt sowohl für die Modellergebnisse, als auch für die Monopol-Fits an die Datenreihen. Im direkten Vergleich lassen sich die Unterschiede zwischen den Zerfallsraten, die sich aus den einzelnen Datenreihen bestimmen, sehr gut direkt auf die Formfaktoren zurückverfolgen.

Tabelle 4.5.: Zentralwerte der Zerfallsrate der Dalitz-Zerfälle $\omega \to \pi^0\ell^+\ell^-$ aus [Tan+18] im Vergleich zu Ergebnissen aus dem Modell dieser Dissertation und den Datenreihen, Gleichung (4.37) folgend, aus [Dzh+81], [Arn+16] und [Adl+17].

Zerfall	Γ_{PDG} [keV]	Γ_{mod} [keV]	Γ_{LepG} [keV]	Γ_{NA60} [keV]	Γ_{A2} [keV]
$\omega \to \pi^0 e^+e^-$	6.54 ± 0.57	6.75	7.06	6.73	6.59
$\omega \to \pi^0 \mu^+\mu^-$	1.14 ± 0.16	0.86	1.20	0.88	0.75

Die Messungen aus [Dzh+81] sowie [Arn+16], gezeigt in Abbildung C.1, wurden für den Dalitz-Zerfall mit einem Myon-Paar im Endzustand durchgeführt, die verbleibenden Datenreihen aus [Ach+08], [Akh+05] und [Adl+17], zu finden in Abbildung C.2, sind für einen Zerfall mit einem Elektron-Paar gemessen worden. Bei genauer Betrachtung von Abbildung 4.5 fällt auf, dass die Datenreihen ab $m_{\ell^+\ell^-} \approx 500$ MeV beginnen, stark voneinander abzuweichen. Zwar besteht für die Messreihen mit einem

Myon-Paar eine relativ gute Übereinstimmung, diese ist insbesondere für die beiden Messungen [Arn+16] und [Arn+09] auffällig, jedoch ist im Vergleich zu [Adl+17] ein deutlicher Unterschied sichtbar. Für kleine Werte der invarianten Masse des Lepton-Paares, im mittleren Bereich von circa 200 MeV bis 500 MeV scheinen die Messungen gut überein zu stimmen. Allerdings ist die Darstellung in Abbildung 4.5 mit der linear skalierten y-Achse im Rahmen der Größenverhältnisse der Werte, die der Übergangsformfaktor für den Dalitz-Zerfall annimmt, für einen solchen Vergleich denkbar ungeeignet.

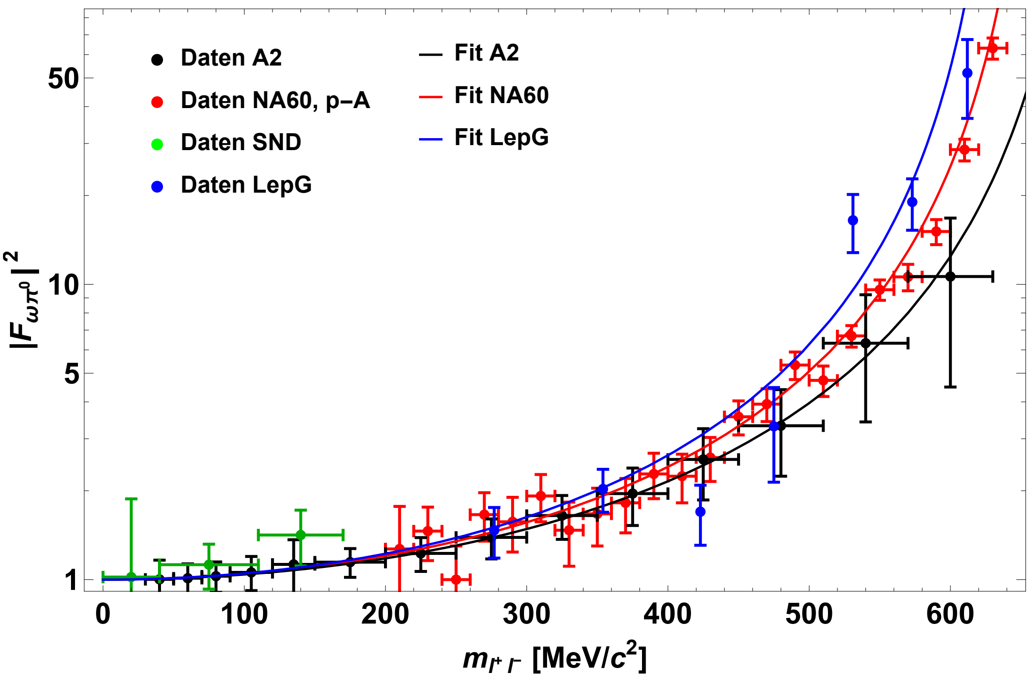

Abbildung 4.6.: Experimentelle Datenreihen zu Formfaktoren $|F_{\omega\pi^0}|^2$ der Dalitz-Zerfälle $\omega \to \pi^0\ell^+\ell^-$ in Abhängigkeit von der invarianten Masse des Lepton-Paars $m_{\ell^+\ell^-}$ mit logarithmischer Skalierung der Ordinate. In Schwarz sind die Datenpunkte und der Monopol-Fit aus [Adl+17], in Rot Daten und Fit aus [Arn+16], in Grün die Daten aus [Ach+08] und in Blau Daten und Fit aus [Dzh+81] eingezeichnet.

In Abbildung 4.6 sind die bislang genannten Datenreihen, mit Ausnahme derer aus [Akh+05], in einem Plot mit einer logarithmischen Skalierung der y-Achse angegeben. Im Gegensatz zu der linearen Skalierung ist für diesen Fall das Verhalten des Formfaktors für kleine bis mittlere Werte der invarianten Masse des Lepton-Paars besser zu beobachten. Somit können die Datenreihen mit dieser Darstellung in diesem Bereich besser miteinander verglichen werden. Als einziger Nachteil dieser logarithmischen Darstellung ist festzuhalten, dass die Größenverhältnisse der Formfaktoren bei großen Werten von $m_{\ell^+\ell^-}$, infolge der gewählten Skala auf den ersten Blick verzerrt und die Differenz zwischen den Messungen aus [Dzh+81], [Arn+16] und [Adl+17] im Vergleich zur linearen Darstellung in Abbildung 4.5 weniger deutlich erscheint. Im Folgenden wird bei der Darstellung des Formfaktors zum Dalitz-Zerfall $\omega \to \pi^0 \ell^+ \ell^-$ die logarithmische Skalierung bevorzugt, Abbildungen in linearer Skalierung sind zu Vergleichszwecken in Appendix C gegeben. Für die Übergangsformfaktoren der weiteren in dieser Arbeit diskutierten Prozesse wird je nach betrachtetem Wertebereich von $m_{\ell^+\ell^-}$ die geeignet erscheinende Skalierung gewählt. Für den Vergleich mit dem Ergebnis für den Übergangsformfaktor, der sich aus dem Modell dieser Dissertation errechnet, sowie dem darauf folgenden Vergleich mit den Formfaktoren anderer theoretischer Ansätze werden in den folgenden Darstellungen der Übersicht wegen nur die beiden aktuellen Datenreihen aus [Arn+16] und [Adl+17] als Repräsentanten der experimentellen Ergebnisse herangezogen.

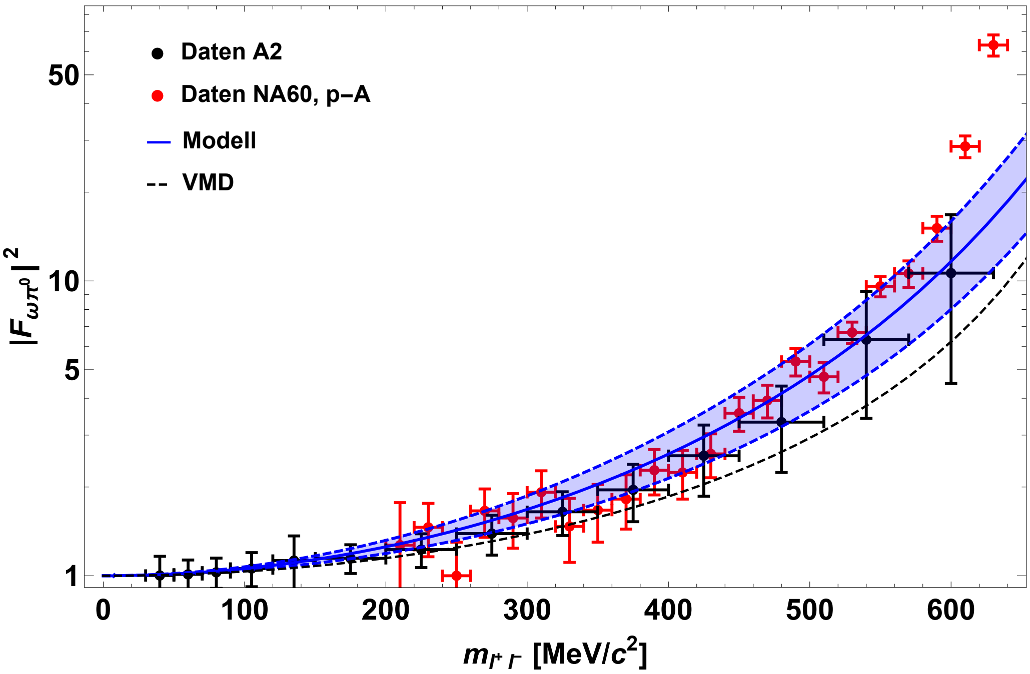

Abbildung 4.7.: Graphen der quadrierten Beträge des Übergangsformfaktors $|F_{\omega\pi^0}|^2$, angegeben in Abhängigkeit von der invarianten Masse des Lepton-Paars $m_{\ell^+\ell^-}$. In Blau mit blauem Fehlerband ist das Ergebnis aus dem Modell dieser Dissertation, in Schwarz die Daten aus [Adl+17] und in Rot die Daten aus [Arn+16] gegeben.

In Abbildung 4.7, mit zugehöriger lineare Skalierung in Abbildung C.3, ist der Vergleich zwischen dem Ergebnis des Modells aus dieser Dissertation angegeben, eine *blaue* durchgehende Linie mit zugehörigem in gestrichelten Linien begrenzten Fehlerband und den Datenreihen aus [Arn+16] in *Rot* und [Adl+17] in *Schwarz* gezeigt. Als Vergleich wurde mit der gestrichelten schwarzen Linie noch die Vorhersage des Vektor-Meson-Dominanz-Modells, das für den Zerfall eines ω-Meson in ein π^0

und ein Lepton-Paar ein Rho-Meson im Zwischenzustand mit Formfaktor

$$\Gamma_{\omega\pi^0}^{\mathrm{VMD}} = \frac{m_{\rho^0}^2}{m_{\rho^0}^2 - m_{\ell^+\ell^-}^2} \tag{4.38}$$

erwartet, hinzugefügt. Vorhersagen innerhalb des VMD-Modells sowie Abweichungen von diesen wurden beispielsweise in [KKW96] und [Ach+01] diskutiert, im Verlauf der weiteren Diskussion soll deswegen darauf nicht näher eingegangen werden. Ein Blick auf die bestimmten Spuren der Propagatoren in Tabelle C.6 bestätigt, dass auch in dem Modell dieser Dissertation der Zerfall ein ρ-Meson im Zwischenzustand aufweist. Es zeigt sich in Abbildung 4.7, dass die Vorhersage der VMD zur Beschreibung der Datenreihe der NA60-Kollaboration ungeeignet ist und die der A2-Kollaboration innerhalb des äußersten unteren Ende der Fehlerbalken beschreibt. Im Gegensatz dazu eignet sich das Modell dieser Dissertation bis zu einem Betrag der invarianten Masse des Lepton-Paares von circa 550 MeV sehr gut zur Beschreibung beider Datenreihen. Es sei an dieser Stelle aber auch darauf hingewiesen, dass aufgrund einer in Abbildung 4.7 im Vergleich zum Verlauf der Datenreihen festgestellten zu schwachen Krümmung des Formfaktors die Datenpunkte in einem Bereich von 200 bis 400 MeV knapp innerhalb der oberen Fehlerbalken beschrieben werden. Für ein $m_{\ell^+\ell^-}$ größer als 550 MeV fällt auf, dass aufgrund der Divergenz zwischen den Datenreihen nicht mehr beide gleichzeitig beschrieben werden können. Während die letzten zwei Datenpunkte der NA60-Kollaboration weit außerhalb des zu dem Modell angegebenen Fehlerbands liegen, lässt sich die der A2-Kollaboration für große invariante Masse des Lepton-Paares mittels des Modells exzellent darstellen. In dem Sinne ist es von experimenteller Seite aus notwendig, die Differenz zwischen den Datenreihen zu klären, um genauer sagen zu können, inwieweit das Modell den Übergangsformfaktor gut beschreibt.
Vor dem Vergleich des Modells dieser Dissertation mit weiteren theoretischen Ansätzen wird zunächst noch eine Auswahl in gezeigten Modellen getroffen und kurz erläutert. In Abbildung 4.8 sind die Datenreihen der NA60- und A2-Kollaborationen zusammen mit Abschätzungen für die Grenzbereiche des Übergangsformfaktors nach [ACK14] in *Violett* und [Cap15] angegeben. In der genannten Abbildung werden zwei Ergebnisse aus [Cap15] gezeigt, zunächst in *Orange* mit einer gestrichelten Linie jenes aus Abbildung 2 mit der Amplitude $f_1(t)$ aus [SKN12] und dann mit Strich-Punkten in *dunklem Orange* das verbesserte N/D-Modell aus Abbildung 4 mit $g_{\omega\rho\pi} = 13.42$. Motiviert durch die beobachteten Diskrepanzen zwischen experimentellen Ergebnissen und theoretischen Vorhersagen des Formfaktors für den Dalitz-Zerfall $\omega \to \pi^0\ell^+\ell^-$ wurde in [ACK14] unter Ausnutzung von Analytizität und Unitarität im Rahmen der unitären Grenzen für den elastischen Bereich des Prozesses obere wie untere Grenzen für das Betragsquadrat des Formfaktors $|F_{\omega\pi^0}|^2$ bestimmt. Diese Idee wurde in [Cap15] mit dem Ausgangspunkt einer dispersiven Analyse des Formfaktors aufgegriffen und erweitert. In beiden Fällen wurde die Diskrepanz zwischen experimentellen und theoretischen Ergebnissen für den Übergangsform-

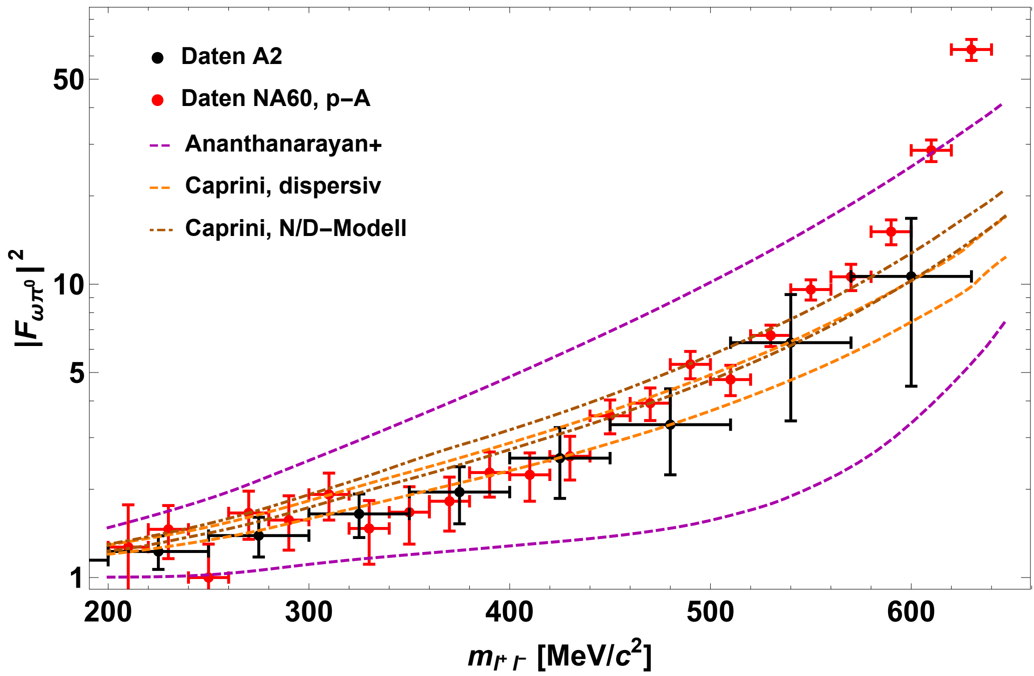

Abbildung 4.8.: Graphen der quadrierten Beträge des Übergangsformfaktors $|F_{\omega\pi^0}|^2$, angegeben in Abhängigkeit von der invarianten Masse des Lepton-Paars $m_{\ell^+\ell^-}$. Die Vorhersage aus [ACK14] ist mittels einer gestrichelten Linie in Magenta der dispersive Ansatz aus [Cap15] mit gestrichelter Linie in Orange und aus der gleichen Referenz das verbesserte N/D-Modell in dunkel-orangen Strich-Punkten aufgeführt. Die gezeigten Datenreihen sind in Schwarz [Adl+17] und in Rot [Arn+16].

faktor des Zerfalls in ein Myon-Paar im Endzustand, repräsentiert durch die Datenreihe der NA60-Kollaboration, bei Werten um und oberhalb einer invarianten Masse des Lepton-Paars von $m_{\ell^+\ell^-} = 600$ MeV bestätigt. Im Gegensatz dazu zeigen die Grenzbereiche eine sehr gute Übereinstimmung mit den Daten des Zerfalls mit einem Elektron-Paar im Endzustand. In den folgenden Vergleichen der theoretischen Modelle mit den experimentellen Datenreihen werden nur die beiden, im Vergleich zu den Grenzen aus [ACK14] strengeren, Vorhersagen für die Formfaktoren aus [Cap15] herangezogen.

Der Übersichtlichkeit wegen sind die Graphen der verschiedenen Modelle, im Vergleich zu den experimentellen Datenreihen aus [Arn+16] und [Adl+17], auf drei verschiedene Abbildungen, 4.9, 4.10 und 4.11, verteilt. Ein dem Modell dieser Dissertation recht ähnlicher Ansatz ist der aus [TLL12], welcher mit der Inklusion der η-η'-Mischung die Verfeinerung einer vorangegangenen Ausarbeitung aus [TL10] darstellt und in Abbildung 4.9 mittels einer Linie in hellem Blau repräsentiert wird. Dieser Ansatz beruht auch auf der Konstruktion einer chiralen effektiven Lagrange-Dichte zur Beschreibung der elektromagnetischen Übergänge zwischen pseudoskalaren und

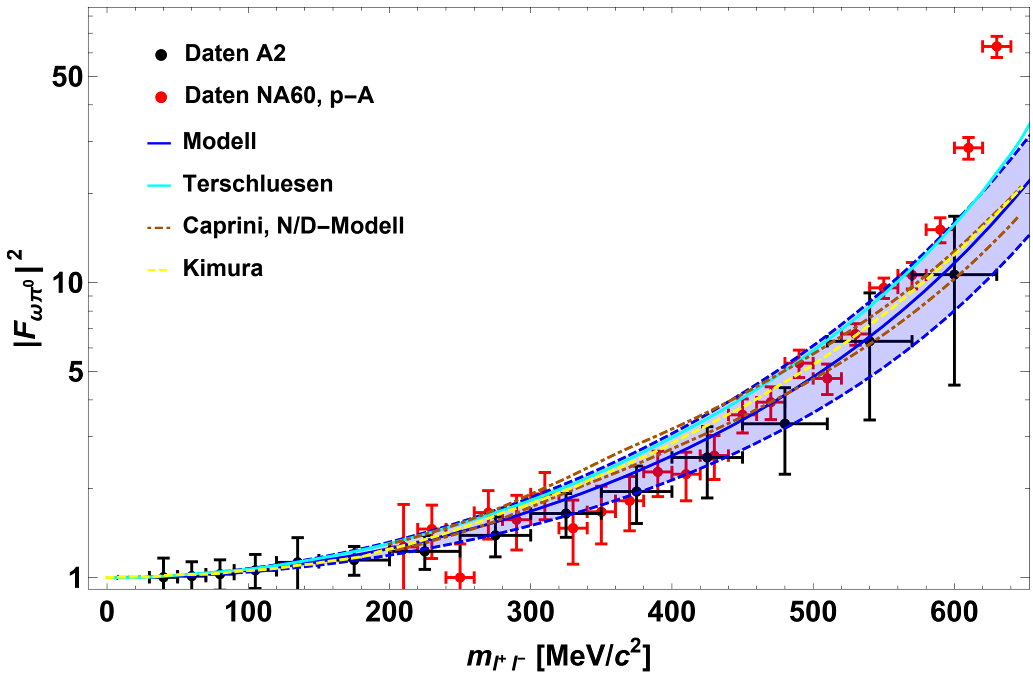

Abbildung 4.9.: Graphen der quadrierten Beträge des Übergangsformfaktors $|F_{\omega\pi^0}|^2$, angegeben in Abhängigkeit von der invarianten Masse des Lepton-Paars $m_{\ell^+\ell^-}$. Datenreihen in Rot [Arn+16] und Schwarz [Adl+17] eingezeichnet. Berechnete Formfaktoren aus [TLL12] in hellem Blau, [KMU18] in Gelb und verbessertes N/D-Modell aus [Cap15] in dunklem Orange.

Vektor-Mesonen. Basierend auf den Konventionen in [LL08] nutzt dieses Modell antisymmetrische Tensoren zur Darstellung der Vektor-Meson-Felder und nimmt eine ideale Mischung für die ϕ-ω-Mesonen an. Die zur Beschreibung der Dalitz-Zerfälle notwendigen vier Kopplungskonstanten, h_A, b_A, h_H und e_H, und der Mischungswinkel der η-η'-Mischung, Θ, werden an die insgesamt fünf Zerfälle $\omega \to \pi^0\gamma$, $\omega \to \eta\gamma$, $\phi \to \eta\gamma$, $\phi \to \eta'\gamma$ und $\eta' \to \omega\gamma$ angepasst. Auffällig ist hierbei, dass dies für den Mischungswinkel in dem unerwartet niedrigen Wert $\Theta = (\pm 2 \pm 1.1)^\circ$ mit einem relativ großem Fehler resultiert. In den folgenden Vergleichen werden, so merkbare Unterschiede festzustellen sind, in allen Prozessen die Ergebnisse mit einem negativen Mischungswinkel betrachtet. Die Begründung dafür ist in der Diskusion des Zerfalls $\phi \to \eta'\ell^+\ell^-$ gegeben. In Abbildung 4.9 ist zu sehen, dass der resultierende Formfaktor für den Zerfall $\omega \to \pi^0\ell^+\ell^-$ bis zu einer invarianten Masse des Lepton-Paares von knapp 600 MeV eine gute Beschreibung der Datenreihe der NA60-Kollaboration in Rot liefert, wobei er in dem Bereich von 340 bis 440 MeV oberhalb aller gezeigten Datenpunkte verläuft, was den Schluss zulässt, dass die Krümmung der Kurve zur Beschreibung der Datenpunkte ungenügend ist, und sich der Fehler des Modells im oberen Bereich der der in Schwarz aufgeführten Werten der A2-Kollaboration finden lässt. Im Vergleich zu dem Modell dieser Arbeit ist zu sehen,

dass der Formfaktor aus [TLL12] bis auf ein leicht divergierendes Verhalten für große $m_{\ell^+\ell^-}$ gut mit der oberen Grenze des Fehlerbands übereinstimmt. Es ist allerdings auch in Abbildung 4.9 festzustellen, dass der in der Referenz ermittelte Formfaktor für große invariante Masse des Lepton-Paares innerhalb keiner der Grenzen aus [Cap15] befindet, explizit gezeigt in der Abbildung ist mit Strich-Punkten in dunklem Orange der Ansatz basierend auf einem verbesserten N/D-Modell, welcher, wie in Abbildung 4.8 zu sehen ist, im Vergleich mit dem auf der dispersiven Rechnung basierenden Vorgehensweise etwas oberhalb liegt. Im Gegensatz dazu zeigt der in dieser Dissertation bestimmte Formfaktor eine sehr gute Übereinstimmung mit dem verbesserten N/D-Modell und liegt mit einer relativ geringen Differenz im Bereich großen $m_{\ell^+\ell^-}$ oberhalb des Bereichs der dispersiven Rechnung.
Zusammengefasst ist zu sagen, dass die beiden Ansätze Unterschiede in der Konstruktion der chiralen effektiven Lagrange-Dichte, dem verwendeten Schema zur Organisation der Terme der Lagrange-Dichte und darauf aufbauend der Inklusion der Mischungswinkel in das jeweilige Modell aufweisen. Die Annahme einer idealen ϕ-ω-Mischung ist nach den Ergebnissen dieser Dissertation, siehe Abschnitt 3.4, für eine Betrachtung der Lagrange-Dichte in führender Ordnung und bei Erhaltung der SU(3)-Symmetrie gerechtfertigt. Im Hinblick auf die Anpassung des Mischungswinkels der η-η'-Mischung mittels der elektromagnetischen Übergänge $PV\gamma$ ist zur allgemeinen Problematik der Bestimmung dieser Mischung auf die ausführliche Ausarbeitung [BMS17] verwiesen, die in [TLL12] verwendete Vorgehensweise bietet sich zur allgemeinen Bestimmung des Mischungswinkels aufgrund der gleichzeitigen Mischung von pseudoskalaren und Vektor-Mesonen nicht an. Dies zeigt sich beim Ergebnis in dessen Betrag sowie der beim Fehlen einer Festlegung auf ein Vorzeichen.
Ein weiterer Ansatz mit einer chiralen effektiven Lagrange-Dichte für pseudoskalare und Vektor-Mesonen mit Darstellung der Felder im „Hidden-gauge"-Formalismus [BKY85] ist in [KMU18] gezeigt. Hier werden zusätzlich zu leichten Vektor-Mesonen auch deren Resonanzen berücksichtigt, was den betrachteten Bereich invarianter Masse zu größeren Werten hin erweitert. Innerhalb der Massen-Matrix berücksichtigt genannte Referenz sowohl die SU(3)- als auch die Isospin-Brechung, werden Korrekturen in $1/N_C$ und in den Quark-Massen nicht explizit diskutiert. Zur Anpassung der Kopplungskonstanten der konstruierten Lagrange-Dichte werden die Oktett- und Singulett-Felder von pseudoskalaren und Vektor-Mesonen im Gegensatz zu dieser Arbeit separat unter einer SU(3)-Symmetrie betrachtet. Zusätzlich dazu werden sowohl experimentelle Daten zu elektromagnetischen Übergängen $PV\gamma$, als auch Messreihen zu Dalitz-Zerfällen $PV\ell^+\ell^-$ herangezogen. In den Abbildungen dieser Dissertation finden die Ergebnisse aus [KMU18] für $c_{34}^+ < 0$ mit einer statistischen Sicherheit von 95.4% Verwendung. Diese Auswahl wurde getroffen, da in der Referenz selbst in Abbildung IV.3 für ein c_{34}^+ ein deutlicher Konflikt mit den Daten zu den Zerfällen $\eta'/\eta \to \gamma\ell^+\ell^-$ festgestellt wurde. Das in Abbildung 4.9 in *Gelb* mit Strich-Punkten eingetragene Ergebnis für den Übergangsformfaktor der Zerfälle $\omega \to \pi^0\ell^+\ell^-$ stimmt über den gezeigten Wertebereich mit den in [Cap15] gezeigten Grenzen überein. Auch ist zu beobachten, dass

die Beträge des Formfaktors aus [KMU18] konsistent größer sind als die aus dem Modell dieser Dissertation und kleiner sind als jene aus [TLL12]. Letzteres ist interessant, da theoretisch die Äquivalenz von Modellen mit antisymmetrischen Tensoren und „Hidden-gauge"-Formalismus erwartet wird [Bir96] und dies somit auf Unterschiede in der Konstruktion der Lagrange-Dichte sowie der Vorgehensweise bei der Anpassung der Kopplungen hinweist.
Mit Blick auf die genannten Unterschiede ist abschließend zu sagen, dass ein direkter Vergleich der Ansätze zum aktuellen Stand nur in Hinsicht auf die Endergebnisse, die bestimmten Übergangsformfaktoren sowie Berechnungen und Vorhersagen für Zerfallsraten sinnvoll ist. Die Zerfallsraten aus obig diskutierten Modellen von [TLL12] und [KMU18] sind in Tabelle 4.6 im Vergleich zu den innerhalb des Modells dieser Arbeit berechneten Ergebnissen aufgeführt. Wie bei einem generell im Betrag größeren Formfaktor aus [TLL12] zu erwarten ist, sind bei Verwendung von Gleichung (4.29) mit $\Gamma(A \to B\gamma) = \Gamma_{\mathrm{PDG}}$ in beiden Fällen, die bestimmten Zerfallsraten etwas größer als die in dieser Arbeit berechneten. Das Ergebnis aus [KMU18] ist für den Zerfall $\omega \to \pi^0 e^+ e^-$, wenn auch mit größeren Fehlern, gut vergleichbar mit denen aus dieser Dissertation und [TLL12]. Für ein Myon-Paar im Endzustand besteht allerdings ein deutlicher Unterschied zu [TLL12] und der Zentralwert des Ergebnisses zeigt eine erkennbar bessere Übereinstimmung mit dem Wert aus dieser Dissertation.

Tabelle 4.6.: Theoretisch ermittelte Zerfallsraten für die Prozesse $\omega \to \pi^0 \ell^+ \ell^-$ aus der dritten Spalte von Tabelle 4.4, im Vergleich zu Ergebnissen aus [TLL12] und [KMU18].

Zerfall	Γ_{mod} [keV]	Γ_{Tersch} [keV]	Γ_{Kimura} [keV]
$\omega \to \pi^0 e^+ e^-$	6.75 ± 0.18	6.85 ± 0.21	$6.8^{+0.9}_{-0.8}$
$\omega \to \pi^0 \mu^+ \mu^-$	0.86 ± 0.14	0.97 ± 0.03	$0.89^{+0.15}_{-0.13}$

Zu den beiden bislang diskutierten Modellen, die eine chiralen effektiven Lagrange-Dichte zur Grundlage haben, kommen in Abbildungen 4.10 und 4.11 zwei aktuelle Ansätze aus [SKN12] in *Grün* und [Dan+15] in *Rot*, die auf eine Bestimmung des Übergangsformfaktors mit Hilfe von Dispersionsrelationen zielen, hinzu. Die zuerst genannte Referenz baut in der Berechnung und den theoretischen Fehlern auf einer vorangegangenen Analyse von den zu den Dalitz-Zerfällen der Vektor-Mesonen zugehörigen Zerfällen in drei Pionen, $\phi/\omega \to \pi^0\pi^+\pi^-$, mittels dispersiver Theorie in [NKS12] auf. Die zweite Quelle [Dan+15] liefert entsprechende Rechnungen für die Zerfälle mit einer zusätzlichen Parametrisierung der inelastischen Beiträge mittels einer Potenzreihe in einer geeignet gewählten Variablen. Diese berücksichtigt innerhalb der dispersiven Analyse die Änderung im analytischen Verhalten der Amplitude. Die Bestimmung der elektromagnetischen Übergangsformfaktoren der Prozesse $\phi/\omega \to \pi^0\gamma^*$ stellt dann eine Erweiterung des verwendeten Formalismus dar. In Abbildung 4.10 ist in zwei gestrichelten grünen Linien der Grenzbereich für die voll-

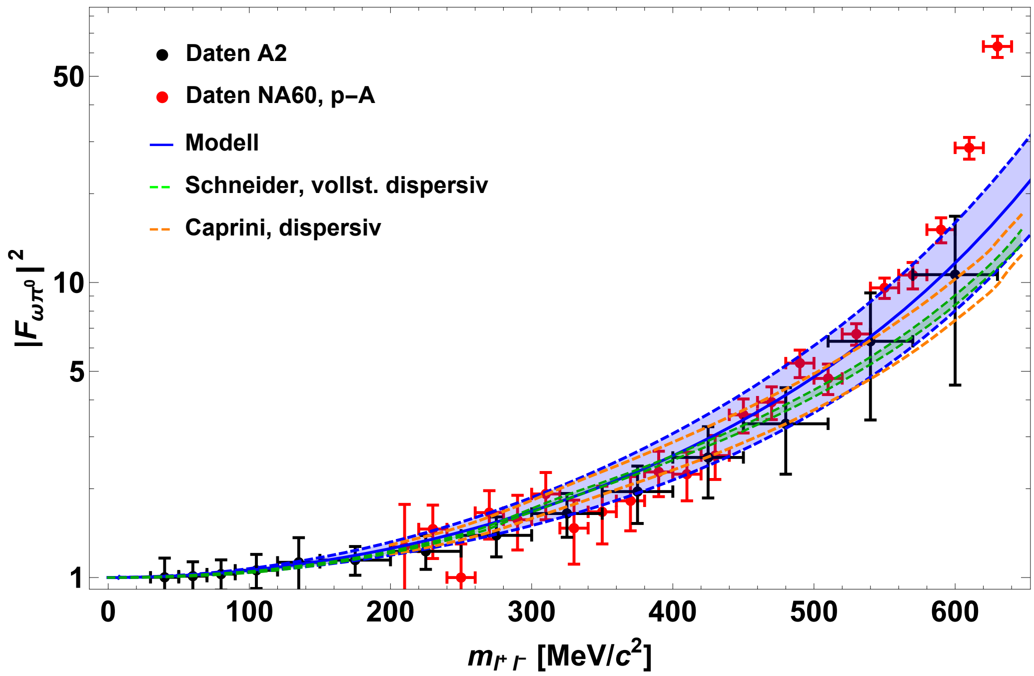

Abbildung 4.10.: Graphen der quadrierten Beträge des Übergangsformfaktors $|F_{\omega\pi^0}|^2$, angegeben in Abhängigkeit von der invarianten Masse des Lepton-Paars $m_{\ell^+\ell^-}$. Datenreihen in Rot [Arn+16] und Schwarz [Adl+17] eingezeichnet. Berechnete Formfaktoren mittels dispersiver Rechnung aus [SKN12] in Grün und ebenfalls dispersiver Rechnung aus [Cap15] in Orange.

ständige dispersive Lösung aus [SKN12] aufgeführt. Diese befindet sich, wie zu erwarten war, vollständig innerhalb des ebenfalls auf einem dispersiven Ansatz mit der Amplitude aus [SKN12] beruhenden in gestrichelten *orangen* Linien angegebenen Grenzbereichs von [Cap15], dort in Abbildung 2 eingezeichnet. Bis zu einer invarianten Masse des Lepton-Paares von circa 500 MeV beschreiben die Ansätze beide Datenreihen sehr gut. Danach allerdings wird aufgrund des starken Anstiegs der von der NA60-Kollaboration gemessenen Datenpunkte nur noch die Datenreihe der A2-Kollaboration gut beschrieben. Im Vergleich mit dem Ergebnis dieser Arbeit ist festzustellen, dass der Übergangsformfaktor des vollständigen dispersiven Ansatzes aus [SKN12] bis zu einem $m_{\ell^+\ell^-}$ von circa 420 MeV mit dessen Zentralwert fast überein stimmt und hiernach eine stärkere Steigung aufweist. Gleiches gilt für den Formfaktor aus [Cap15], der innerhalb seiner Grenzen mit dem Modell dieser Arbeit bis circa 520 MeV eine gute Übereinstimmung zeigt. Als letztes zeigt Abbildung 4.11 die Formfaktoren von [Dan+15] aus der dispersiven Entwicklung bei Abbruch in niedrigster Ordnung als *rote* durchgehende Linie und erster Ordnung als *rote* gestrichelte Line. Im Anhang in Abbildung C.7 findet sich ein Vergleich der beiden dispersiven Ansätze. Gut zu sehen ist, dass die Kurve für einen Abbruch der Entwicklung führender Ordnung aus [Dan+15] innerhalb des durch die vollständige dispersive Rech-

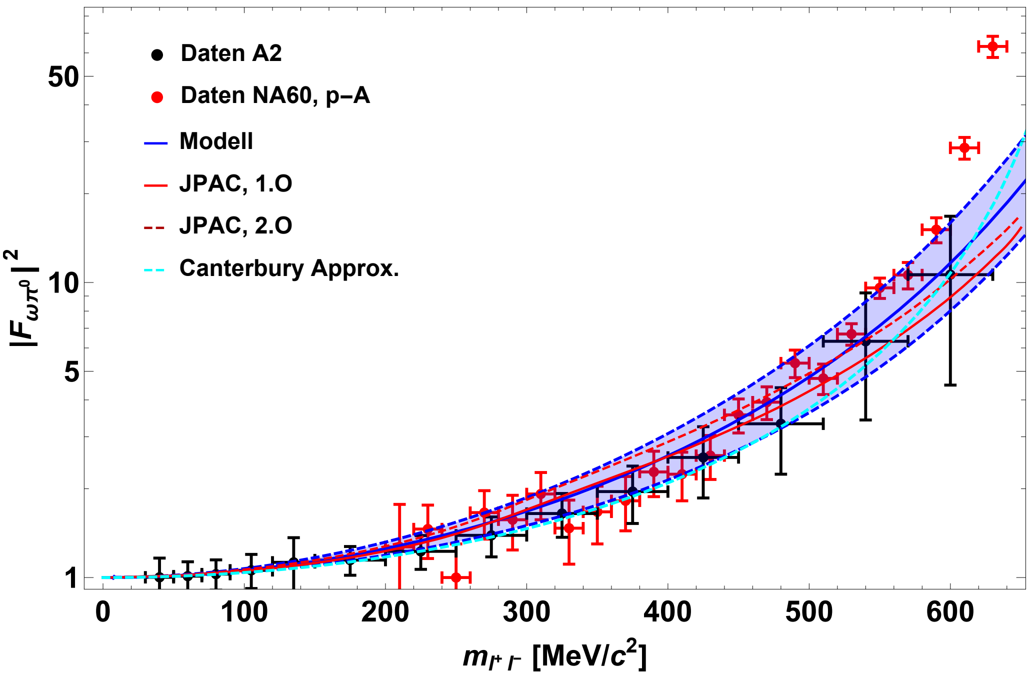

Abbildung 4.11.: Graphen der quadrierten Beträge des Übergangsformfaktors $|F_{\omega\pi^0}|^2$, angegeben in Abhängigkeit von der invarianten Masse des Lepton-Paars $m_{\ell^+\ell^-}$. Datenreihen in Rot [Arn+16] und Schwarz [Adl+17] eingezeichnet. Berechnete Formfaktoren aus [Dan+15] in Rot für LO-, dunklem Rot für NLO-Rechnung. In hellem Blau Canterbury-Approximation wie in [Adl+17] als Referenz [53] gezeigt.

nung gegebenen Grenzbereiches aus [SKN12] liegt. Bei einer Fortführung der Entwicklung bis inklusive der ersten Ordnung jedoch liegt der resultierende Formfaktor oberhalb und außerhalb des gezeigten Grenzbereiches. Im Vergleich zu den beiden gezeigten Datenreihen ist festzustellen, dass die dispersiven Ansätze aus beiden Referenzen sich insbesondere gut zur Beschreibung der Daten aus [Adl+17] eignen. Wiederum ist eine Abweichung von der Datenreihe aus [Arn+16] für große invariante Masse wie auch schon für die bislang diskutierten theoretischen Ansätze zu beobachten. An dieser Stelle soll allerdings darauf hingewiesen werden, dass die Entwicklung der Amplitude in [Dan+15] bis zu einer höheren Ordnung die Möglichkeit bietet, Terme an die Datenreihen anzupassen. Die Ergebnisse hierzu sind für einen Anpassung an die Datenpunkte der NA60-Kollaboration in [Dan+15] selbst und für eine Ausrichtung an den Werten der A2-Kollaboration in [Adl+17] gegeben. Ein solches Vorgehen ermöglicht eine deutlich verbesserte, auf die einzelnen Daten zugeschnittene Beschreibung der einzelnen Formfaktoren. Ein Vergleich zu dem Graphen des in dieser Arbeit ermittelten Formfaktors zeigt auf, dass alle aus den dispersiven Modellen bestimmten Formfaktoren für kleine invariante Masse des Lepton-Paares größere Beträge aufweisen als der im Rahmen dieser Arbeit ermittelte Formfaktor. Dieses Ver-

hältnis kehrt sich aber hin zu größeren $m_{\ell^+\ell^-}$ nach einer Kreuzung der Graphen um. Diese Beobachtung hat für alle Formfaktoren aus [SKN12] und [Dan+15] bei jeweils anderen relativen Werten von $m_{\ell^+\ell^-}$ Bestand. Insgesamt stimmen alle Graphen der dispersiven Rechnungen mit dem Ergebnis dieser Arbeit innerhalb des Fehlerbands überein, bei großen Werten der invarianten Masse des Lepton-Paares teils deutlich am unteren Rand des Fehlerbereichs.
Als letzter theoretischer Ansatz in Abbildung 4.11 ist der in [Adl+17] als Quelle [53] in Abbildung 19(a) aufgeführte Formfaktor in *hellem Blau* eingezeichnet. Dieser beruht auf einer modellunabhängigen Berechnung mittels Canterbury-Approximation, die eine Erweiterung der beispielsweise in [MS16] verwendeten Padé-Approximation für bivariate Funktionen (Funktionen mit zwei Variablen) ist. Mit einem Steigungsfaktor von $\Lambda^{-2}_{\omega\pi^0} = (1.93 \pm 0.26)$ gelingt diesem Modell im Gegensatz zu allen anderen theoretischen Ansätzen eine herausragende Beschreibung der Datenreihe der A2-Kollaboration. Allerdings bleibt festzustellen, dass weiterhin eine Diskrepanz mit Blick auf die Ergebnisse der NA60-Kollaboration bestehen, die auch dieses Modell nicht klären kann. Zudem bleibt, mit Blick auf weitere Dalitz-Zerfälle $A \to B\ell^+\ell^-$ abzuwarten, inwieweit dieser basierend auf Daten angelegte Ansatz ein konsistentes Modell für mehr als nur einen Zerfall ergibt.
Zusammenfassend lässt sich sagen, dass für den Dalitz-Zerfall $\omega \to \pi^0\mu^+\mu^-$ weiterhin im Bereich großer invarianter Masse des Lepton-Paares eine Diskrepanz zwischen den experimentell und theoretisch ermittelten Übergangsformfaktoren existiert. Hingegen scheinen die meisten der aktuellen theoretischen Modelle in guter Übereinstimmung mit aktuellen Ergebnissen zum Zerfall $\omega \to \pi^0 e^+e^-$. Die offenkundige Differenz zwischen den beiden neuesten Messungen zu Myonen und Elektronen im Endzustand klärt bislang nicht die Frage, ob und inwieweit theoretische Modelle die physikalische Wirklichkeit beschreiben können. Zur Klärung dieser Frage bleiben somit neue experimentelle Ergebnisse zu den Dalitz-Zerfällen $\omega \to \pi^0\ell^+\ell^-$ abzuwarten.

4.3.6. Der Formfaktor für $\phi \to \eta\ell^+\ell^-$

Zum Zerfall eines Phi-Mesons in ein Eta und ein Lepton-Paar findet sich in Abbildung 4.12 der Vergleich zweier hierzu gemessener Datenreihen und ihre zugehörigen Monopol-Fits. In *Orange* sind die Datenpunkte aus [Ach+01] mit $\Lambda^{-2}_{\phi\eta} = (3.8 \pm 1.8)$ GeV^{-2}, gemessen mit dem SND-Detektor am Teilchenbeschleuniger VEPP-2M, und in *Schwarz* die von der KLOE2-Kollaboration [Bab+15] mit einem Steigungsfaktor von $\Lambda^{-2}_{\phi\eta} = (1.17 \pm 0.21)$ GeV^{-2} veröffentlichten Ergebnisse angegeben. Aufgrund des betrachteten Intervalls für diesen Prozess und der Werte der Formfaktoren, genügt ein Diagramm mit linear skalierter Ordinate. Auffällig ist auf den ersten Blick der große Unterschied im Intervall der erfassten Datenpunkte, wie auch die deutlichen Unterschiede in der Anzahl an Messwerten und deren Fehlern. In beiden Aspekten konnte die aktuelle Messung der KLOE2-Kollaboration deutliche Verbesserungen aufzeigen. Es bleibt allerdings auch bei diesen Ergebnissen festzustellen, dass die Datenpunkte ab einer invarianten Masse des Lepton-Paares von 300 MeV eine scheinbare Oszillation aufweisen, die sich gegen Ende des gemessenen

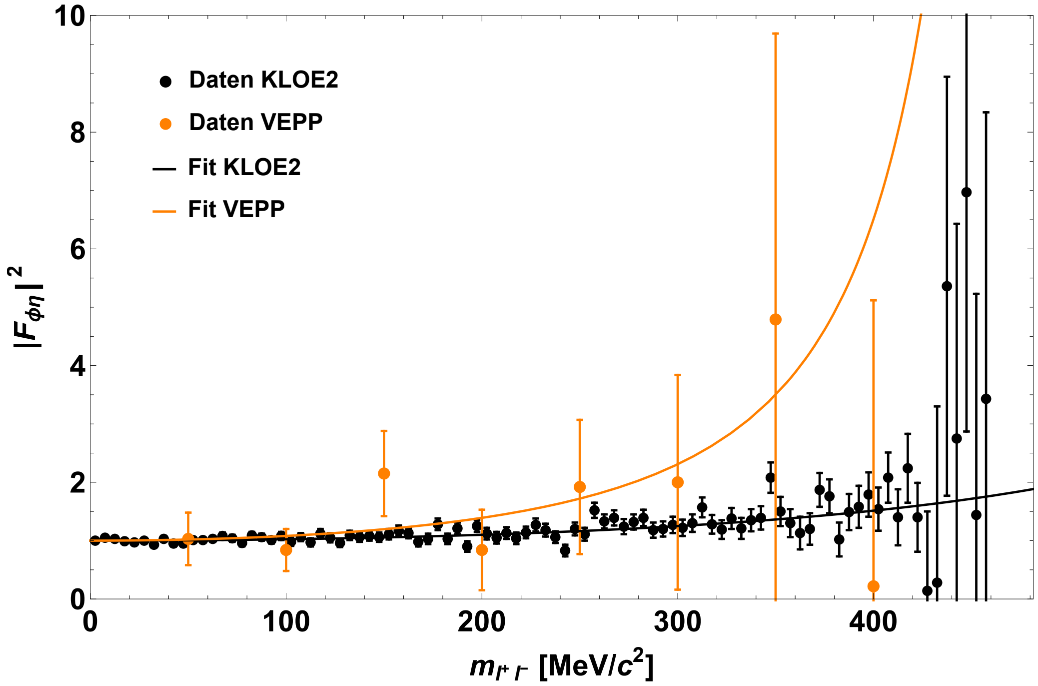

Abbildung 4.12.: Graphen der quadrierten Beträge des Übergangsformfaktors $\left|F_{\phi\eta}\right|^2$, angegeben in Abhängigkeit von der invarianten Masse des Lepton-Paars $m_{\ell^+\ell^-}$.

Intervalls deutlich verstärkt und ebenso, dass die Fehler in hohem Maße größer werden. In beiden Datenreihen ist eine gewisse regelmäßige Schwankung, d. h. Abweichung der Datenpunkte in einem fast zyklischen Rhythmus von einer idealen Line, zu beobachten. Aufgrund der besseren Qualität und Statistik der neueren Messung werden im Folgenden die theoretischen Ergebnisse mit der Datenreihe aus [Bab+15] verglichen.

Im Vergleich der Datenreihen mit dem Ergebnis ermittelt mit dem in *Blau* aufgeführten Modell dieser Arbeit, gezeigt in Abbildung 4.13, ist zu sehen, dass die Datenreihe der KLOE2-Kollaboration von dem berechneten Formfaktor gut beschrieben wird und auch der in der Referenz angegebene Monopol-Fit innerhalb des Fehlerbands der theoretischen Lösung liegt. In Tabelle 4.7 findet sich ein Vergleich der aus den Steigungfaktoren der Datenreihen und in dem Modell dieser Arbeit berechneten Zentralwerte der Zerfallsraten. In allen Fällen wurde zur Berechnung Gleichung (4.29) mit $\Gamma(A \to B\gamma) = \Gamma_{\mathrm{PDG}}$ verwendet. Es lassen sich die relativen Unterschiede der Übergangsformfaktoren auch direkt in den Zerfallsraten beobachten. Der Blick auf die mit einfacher Vektor-Meson-Dominanz, die für diesen Prozess mit Beachtung der OZI-Regel [Oku63; Iiz66] ein Phi-Meson mit Formfaktor

$$F_{\phi\eta}^{\mathrm{VMD}} = \frac{m_\phi^2}{m_\phi^2 - m_{\ell^+\ell^-}^2} \tag{4.39}$$

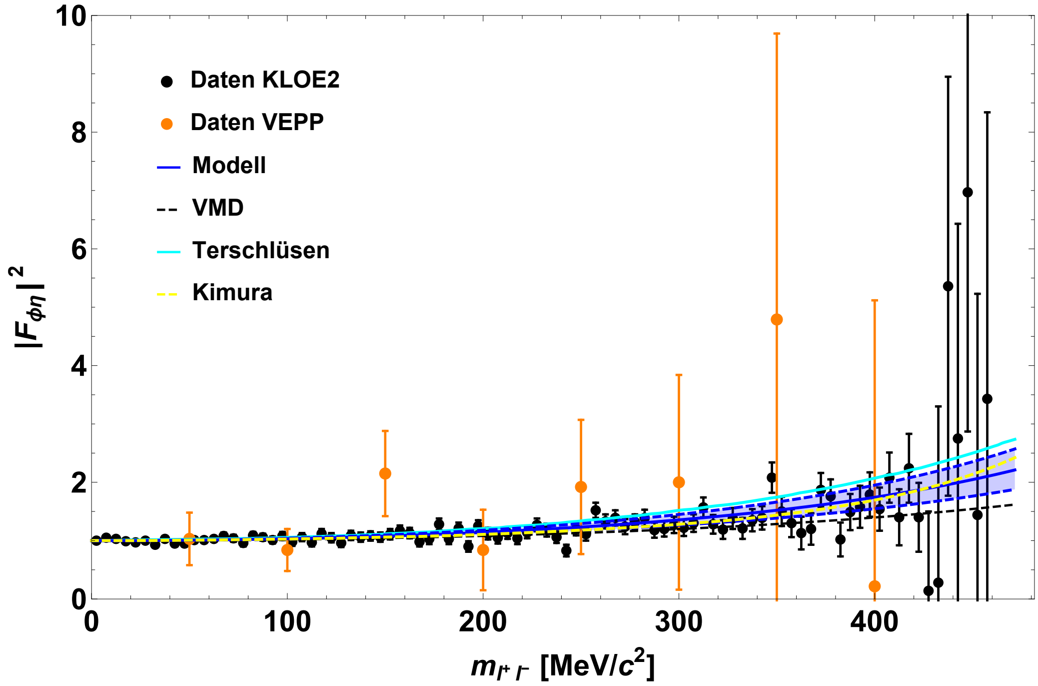

Abbildung 4.13.: Graphen der quadrierten Beträge des Übergangsformfaktors $\left|F_{\phi\eta}\right|^2$, angegeben in Abhängigkeit von der invarianten Masse des Lepton-Paars $m_{\ell^+\ell^-}$. Datenreihen in Schwarz [Bab+15] und Orange [Ach+01] eingezeichnet. Berechnete Formfaktoren aus [TLL12] in hellem Blau aus [KMU18] in Gelb, dem VMD-Modell in Schwarz und dem Modell dieser Dissertation in Blau.

erwartet, zeigt, dass dieser Ansatz, wenn auch leicht außerhalb, so doch unterhalb des Modells dieser Dissertation liegt und die Datenreihe hinreichend gut beschreibt. Allerdings ist aufgrund der starken Schwankungen und des sehr großen Fehlers der Datenpunkte ab einer invarianten Masse des Lepton-Paares von 400 MeV keine genaue Aussage über die Passung eines der beiden Ansätze möglich. Eine weitere theoretische Modellierung bietet der Ansatz mittels der chiralen Lagrange-Dichte von [TLL12] und ist mit einer *hellblauen* Linie in Abbildung 4.13 angegeben. Der genannte Formfaktor zeigt über das gesamte Intervall durchgängig größere Werte als in allen anderen Ergebnissen, sowohl dieser Arbeit, in VMD als auch dem Monopol-Fit an die Ergebnisse. In dem Intervall der invarianten Masse des Lepton-Paares von 300 bis 400 MeV zeigt er im Vergleich zur Datenreihe aus [Bab+15] eine Tendenz dazu, zu große Beträge für den Formfaktor des Prozesses $\phi \to \eta\ell^+\ell^-$ zu liefern. Das Ergebnis aus [KMU18], in Abbildung 4.13 in Gelb aufgeführt, zeigt eine gute Übereinstimmung mit dem Modell dieser Dissertation. Für Werte der invarianten Masse über 400 MeV ist aber im Vergleich zu anderen gezeigten Modellen eine deutlich stärkere Krümmung des zugehörigen Graphen hin zu großen Beträgen des Formfaktors festzustellen. Wiederum ist aber an dieser Stelle darauf hinzuweisen, dass

Tabelle 4.7.: Vergleich der Angaben für Werte der Zerfallsrate der Dalitz-Zerfälle $\phi \to \pi^0 \ell^+ \ell^-$ aus [Tan+18] mit Zentralwerten aus dem Modell dieser Arbeit und mit Formfaktoren berechnet aus Parametrisierung mittels einer Polfunktion, siehe Gleichung (4.37), für die Datenreihen aus [Ach+01] und [Bab+15].

Zerfall	Γ_{PDG} [keV]	Γ_{mod} [keV]	Γ_{VEPP} [keV]	Γ_{KLOE2} [keV]
$\phi \to \eta e^+ e^-$	0.459 ± 0.0020	0.471	0.508	0.467
$\phi \to \eta \mu^+ \mu^-$	< 0.040	0.026	0.051	0.023

eine definitive Abwägung zur Qualität des diskutierten Modells, wie bereits schon erwähnt, aufgrund des Verhaltens der Datenpunkte gegen Ende des gemessenen Intervalls nicht abschließend möglich ist.
Zuletzt sind in Tabelle 4.8 die aus den Modellen basierend auf einer chiralen effektiven Lagrange-Dichte berechneten Zerfallsraten für Dalitz-Zerfälle $\phi \to \eta \ell^+ \ell^-$ angegeben. Für jedes der Modelle wird dabei zur Bestimmung der Zerfallsrate Gleichung (4.29) verwendet und wie schon im vorangegangen diskutieren Prozess wiederum für das Modell dieser Dissertation die Zerfallsrate der elektromagnetischen Übergänge $\Gamma(A \to B\gamma) = \Gamma_{\mathrm{PDG}}$ angesetzt.

Tabelle 4.8.: Theoretisch ermittelte Zerfallsraten für die Prozesse $\phi \to \eta \ell^+ \ell^-$ aus der dritten Spalte von Tabelle 4.4 im Vergleich zu Ergebnissen aus [TLL12] und [KMU18].

Zerfall	Γ_{mod} [keV]	Γ_{Tersch} [keV]	Γ_{Kimura} [keV]
$\phi \to \eta e^+ e^-$	0.471 ± 0.035	0.481 ± 0.059	$0.19^{+0.09}_{-0.10}$
$\phi \to \eta \mu^+ \mu^-$	0.0254 ± 0.020	0.0283 ± 0.0033	$0.011^{+0.005}_{-0.006}$

Die Ergebnisse in Tabelle 4.8 spiegeln mit einer Ausnahme die relativen Unterschiede in den Formfaktoren wider. Referenz [TLL12] zeigt größere Beträge im Vergleich zu dem Modell dieser Dissertation, wobei die berechneten Zerfallsraten innerhalb der Fehler übereinstimmen. Zudem bestätigt sich, dass aufgrund des kleineren Intervalls für ein Myon-Paar der Unterschied im Gegensatz zu dem Fall eines Elektron-Paares im Endzustand stärker ausfällt. Die in [KMU18] angegebenen Werte weisen deutliche Abweichungen von den mit dem Formfaktor bestimmten Ergebnissen bei einer vergleichbaren Rechnung auf. Zudem fällt der große Unterschied beim Vergleich zu den Werten der Particle Data Group und der experimentellen Ergebnisse in Tabelle 4.7 auf.

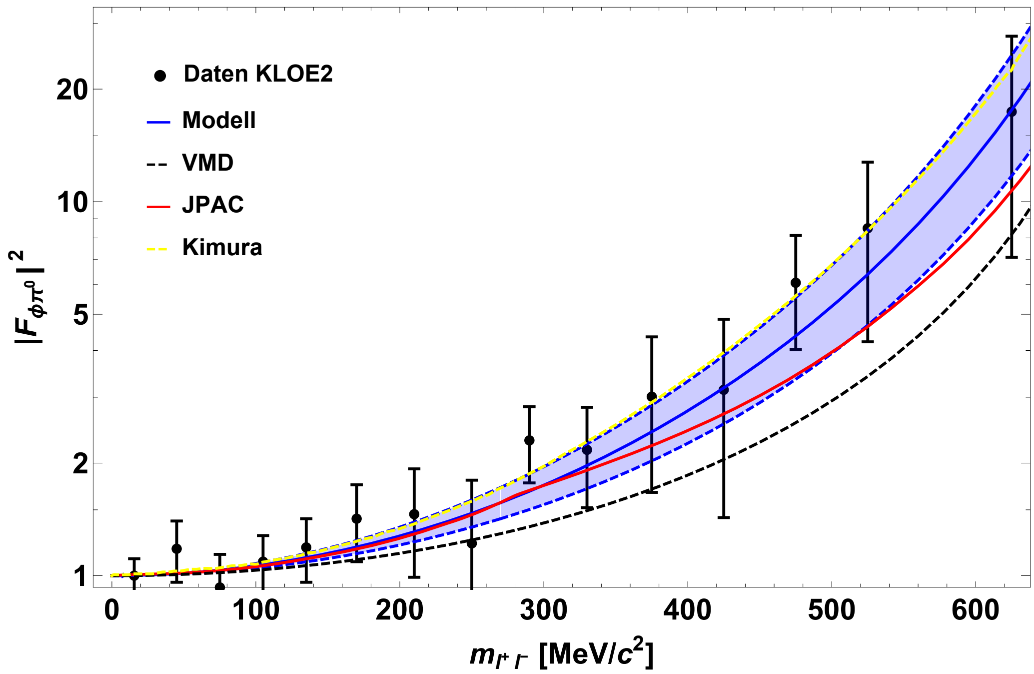

Abbildung 4.14.: Graphen der quadrierten Beträge des Übergangsformfaktors $\left|F_{\phi\pi^0}\right|^2$, angegeben in Abhängigkeit von der invarianten Masse des Lepton-Paars $m_{\ell^+\ell^-}$. Datenreihe in Schwarz [Ana+16] eingezeichnet. Berechnete Formfaktoren aus [Dan+15] in Rot, aus [KMU18] in Gelb, dem VMD-Modell in Schwarz und dem Modell dieser Dissertation in Blau.

4.3.7. Der Formfaktor für $\phi \to \pi^0\ell^+\ell^-$

Als dritter Dalitz-Zerfall, für dessen Übergangsformfaktor experimentelle Daten einen Vergleich mit theoretischen Modellen ermöglichen, wird der Prozess $\phi \to \pi^0\ell^+\ell^-$ diskutiert. Die Daten wurden von der KLOE2-Kollaboration in [Ana+16] veröffentlicht. In den Abbildungen 4.14 und 4.15 ist die Datenreihe im Vergleich zu den Ergebnissen theoretischer Modelle aufgeführt. Diese sind die Vektor-Meson-Dominanz, das Ergebnis der chiralen effektiven Lagrange-Dichte dieser Dissertation und aus [KMU18], sowie die dispersiven Ansätze aus [SKN12] und [Dan+15]. Aufgrund des betrachteten Intervalls, innerhalb dessen die Datenreihe erfasst wurde, und des Wertebereichs des Formfaktors wird eine Darstellung in logarithmischer Skala gewählt. Mit Blick auf die Datenreihe ist zudem zu erwähnen, dass der Formfaktor nur bis zu einem Wert von 625 MeV erfasst wurde, auch wenn aus theoretischer Sicht das gesamte Intervall bis zu einem Wert von $m_\phi - m_{\pi^0} \approx 885$ MeV reicht. Dementsprechend steht nicht das gesamte Spektrum der invarianten Masse des Lepton-Paares für die Betrachtungen zur Verfügung, insbesondere aber der Bereich starken Anstiegs mit erwarteter Resonanz im Bereich von $m_V \approx m_\rho$ aufgrund des Rho-Mesons im Zwischenzustand. In der Folge beschränken sich die folgenden mit Abbildungen illustrierten Diskussionen auf das Intervall der experimentell erfassten Datenpunkte.

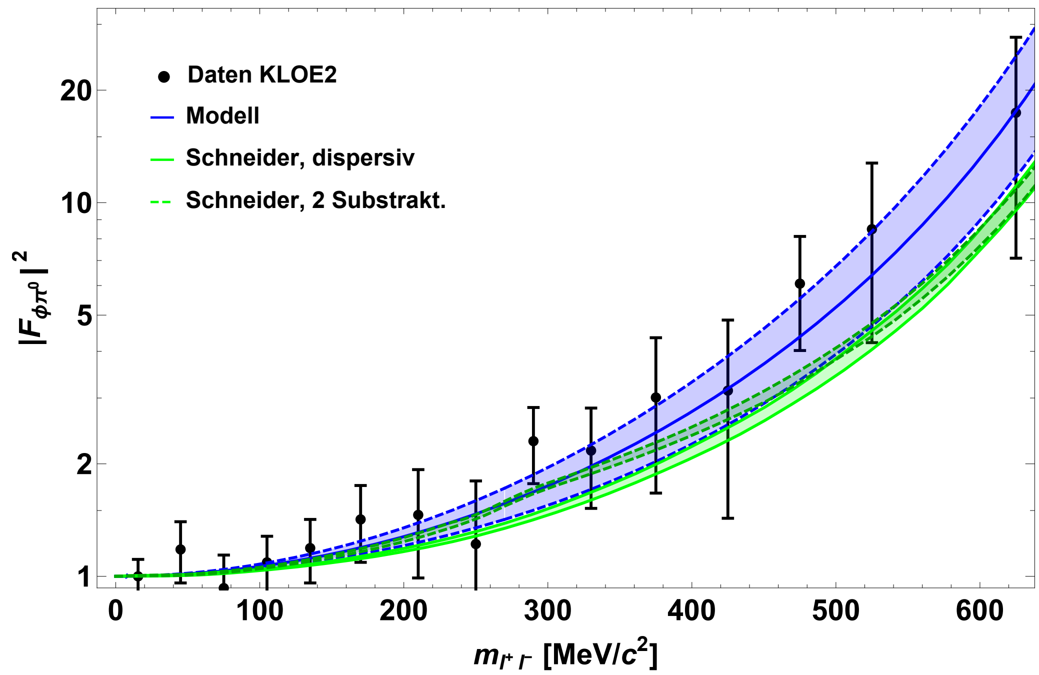

Abbildung 4.15.: Graphen der quadrierten Beträge des Übergangsformfaktors $\left|F_{\phi\pi^0}\right|^2$, angegeben in Abhängigkeit von der invarianten Masse des Lepton-Paars $m_{\ell^+\ell^-}$. Datenreihe in schwarz [Ana+16] eingezeichnet. Berechnete Formfaktoren aus [SKN12] in Grün und dem Modell dieser Dissertation in Blau.

Mit Blick auf den Formfaktor aus dem Modell dieser Dissertation ist festzustellen, dass dieser die gegebenen Datenpunkte sehr gut beschreibt, allerdings für eine zunehmende invariante Masse des Lepton-Paares eine deutliche Verbreiterung des Fehlerbands festzustellen ist. Der abgeschätzte Fehler scheint somit für diesen Prozess einen sehr großen Einfluss auf den Übergangsformfaktor zu haben. Dabei ist sowohl in den Datenpunkten als auch dem theoretischen Modell ein deutlicher Anstieg der Fehler hin zu größeren Beträgen der invarianten Masse des Lepton-Paares zu beobachten.

Das VMD-Modell erwartet wie schon bei dem Zerfall $\omega \to \pi^0\ell^+\ell^-$ ein Rho-Meson im Zwischenzustand, siehe Gleichung (4.38). In Abbildung 4.14 *schwarz* gestrichelte Linie dargestellt, beschreibt es die Datenreihe im gegebenen Intervall größtenteils im unteren Fehlerbereich, für einige Datenpunkte liegt der VMD-Formfaktor aber auch deutlich unterhalb der Fehler. Ein Vergleich mit einem weiteren Modell basierend auf einer chiralen effektiven Lagrange-Dichte aus [TLL12] ist nicht möglich. In dem Ansatz der genannten Referenz wird bei der Konstruktion der Lagrange-Dichte eine ideale Mischung der Vektor-Mesonen angenommen. Dies schließt dann folglich in führender Ordnung die Zerfälle $\phi \to \pi^0\gamma^*$ aus, siehe Abschnitt 3.4. Eine Erweiterung der Lagrange-Dichte zur Inklusion von Korrekturen in $1/N_C$ wäre ein erster Schritt, der bei Beibehaltung der idealen Mischung eine Diskussion dieser in diesem Modell fehlenden Prozesse ermöglichen könnte. Somit verbleiben an dieser Stelle der Ansatz mit einer chiralen effektiven Lagrange-Dichte aus [KMU18] und die beiden dispersiven Ansätze zum Vergleich mit experimentellen Daten und dem Modell dieser Dissertation. Diese sind in Abbildungen 4.14 und 4.15 in *Gelb* ([KMU18]), in *Rot* ([Dan+15] mit dem Abbruch der Reihenentwicklung in der Amplituden in führender Ordnung) und *Grün* ([SKN12]) aufgeführt. Für letztgenannte Referenz sind mit durchgezogenen Linien der dispersive Ansatz mit $f_1(t) = a\Omega(t)$ und mit gestrichelten Linien der Ansatz mit zwei Substraktionstermen in $f_1(t)$ gezeigt. Ein Blick auf die in Abbildung C.8 separat gezeigten dispersiven Formfaktoren lässt darauf schließen, dass der Formfaktor aus [Dan+15] und derjenige aus [SKN12] mit zwei Substraktionen sehr gut miteinander übereinstimmen, wohingegen der Betrag des zweiten Formfaktors aus [SKN12] im Bereich einer invarianten Masse von 120 bis 520 MeV konstant unterhalb der beiden anderen Kurven liegt. Im direkten Vergleich zeigen sich die beiden Formfaktoren mit ähnlichem Verlauf dabei gut dazu geeignet, die Datenreihe zu beschreiben. Mit Blick auf den in dieser Arbeit ausgehend von einer chiralen effektiven Lagrange-Dichte bestimmten Übergangsformfaktor lässt sich sagen, dass dieser bis zu einem $m_{\ell^+\ell^-}$ von 300 MeV gut mit der Entwicklung bis führender Ordnung in [Dan+15] sowie dem Ansatz mit zwei Substraktionen aus [SKN12] übereinstimmt. Im Vergleich zu dem in [KMU18] ermittelten Übergangsformfaktor ist zu sehen, dass dieser fast vollständig mit der oberen Grenze des Fehlerbands aus dem Modell dieser Dissertation zusammenfällt, für große invariante Masse des Lepton-Paares um die 600 MeV im Betrag aber leicht kleinere Werte annimmt. Für größere Werte invarianter Massen hingegen und die dritte verbleibende Kurve des einfachen dispersiven Ansatzes aus [SKN12] liegt das Ergebnis dieser Dissertation für diesen Prozess im Betrag konsistent oberhalb der anderen Formfaktoren. Unter Berücksichtigung der Datenpunkte und ihrer Fehler ist die Annahme zulässig, dass für den gezeigten Wertebereich das Modell dieser Arbeit eine im Vergleich etwas bessere Beschreibung der experimentellen Ergebnisse liefert als die gezeigten dispersiven Ansätze. Dies ist aber zum aktuellem Zeitpunkt noch mit Vorbehalt zu sehen, da die Datenreihe nicht den Bereich der Resonanz abdeckt.

In Tabelle 4.9 sind die in [KMU18] und die mit dem Modell dieser Dissertation ermittelten Zerfallsraten angegeben. Wie bereits in den vorangegangenen Prozessen wird für das Modell dieser Dissertation die Zerfallsrate der elektromagnetischen Übergänge $\Gamma(A \to B\gamma) = \Gamma_{\text{PDG}}$ angesetzt. Auffällig ist der Unterschied in einer Größenordnung zwischen den Ergebnissen, was im direkten Gegensatz zur guten Passung der Formfaktoren in Abbildung 4.14 steht. Zudem sind bei den Ergebnissen aus [KMU18] sehr große Fehler festzustellen, welche in der Referenz mit der Einbeziehung der Kopplungskonstante des PVV-Vertices in die Berechnung erklärt werden.

Tabelle 4.9.: Theoretisch ermittelte Zerfallsraten für Prozesse $\phi \to \pi^0 \ell^+ \ell^-$ aus der dritten Spalte von Tabelle 4.4 im Vergleich zu Ergebnissen aus [KMU18].

Zerfall	Γ_{PDG} [keV]	Γ_{mod} [keV]	Γ_{Kimura} [keV]
$\phi \to \pi^0 e^+ e^-$ in $[10^{-2}]$	5.65 ± 0.47	7.28 ± 0.86	23^{+22}_{-13}
$\phi \to \pi^0 \mu^+ \mu^-$ in $[10^{-2}]$	–	2.54 ± 0.79	$6.7^{+16.7}_{-4.7}$

4.3.8. Der Formfaktor für $\omega \to \eta \ell^+ \ell^-$

Der Dalitz-Zerfall eines Omega-Mesons in ein Eta und ein Lepton-Paar ist einer von drei in dieser Arbeit diskutierten Zerfälle, für die nach aktuellem Stand keine experimentellen Daten zu Formfaktoren zum Abgleich mit den theoretischen Modellen verfügbar sind. Aufgrund der oberen Intervallgrenze von $m_\omega - m_\eta$ und der unteren Intervallgrenze von $2m_\ell$ wird sowohl der Zerfall in ein Paar Elektronen, für den eine Abschätzung über eine obere Grenze für den Betrag der Zerfallsrate existiert, als auch in ein Myon-Paar erwartet. Das Modell der Vektor-Meson-Dominanz erwartet für den Zerfall ein ω-Meson mit resultierendem Übergangsformfaktor

$$F_{\omega\eta}^{\mathrm{VMD}} = \frac{m_\omega^2}{m_\omega^2 - m_{\ell^+\ell^-}^2} \tag{4.40}$$

im Zwischenzustand.

In Abbildung 4.16 finden sich die Ergebnisse für den Formfaktor der Vektor-Meson-Dominanz, in *Schwarz*, sowie aus den Modellen basierend auf einer chiralen effektiven Lagrange-Dichte aus [TLL12], [KMU18] und dieser Dissertation in *hellem Blau*, *Gelb* und respektive *Blau* aufgeführt. Wie zu sehen ist, stimmen alle Modelle in ihrer Vorhersage des Formfaktors innerhalb eines Bereiches miteinander überein und die Zentralwerte nehmen jeweils größere Beträge als die Vorhersage der Vektor-Meson-Dominanz an. Zudem besteht innerhalb der jeweiligen Fehlerbereiche keinerlei Übereinstimmung zwischen den Modellen basierend auf einer chiralen effektiven Lagrange-Dichte und dem Formfaktor der Vektor-Meson-Dominanz. Die Vorhersage aus [TLL12] liegt dabei im Bereich der Überlappung der anderen beiden Modelle und das Ergebnis aus [KMU18] zeigt sich als deutlich breiteres Band mit hauptsächlich größeren Werten relativ zu dem Ergebnis aus dem Modell dieser Dissertation. Dabei zeigt der Formfaktor aus [TLL12] für größere Werte der invarianten Masse etwas größere Beträge als der Zentralwert des Übergangsformfaktors aus dem Modell dieser Dissertation. Dies wirkt sich auch auf die Bestimmung der Zerfallsraten aus, am Besten zu sehen im Dalitz-Zerfall mit dem Elektron-Paar im Endzustand. Die Vorhersagen sind dabei in Tabelle 4.10 im Vergleich zu der Abschätzung für die obere Grenze der Zerfallsrate aus [Tan+18] angegeben. Innerhalb der Fehler stimmen die angegebenen Vorhersagen gut miteinander überein und bestätigen somit den aus den Formfaktoren gewonnenen Eindruck. Einzig die Vorhersage aus [KMU18] für den

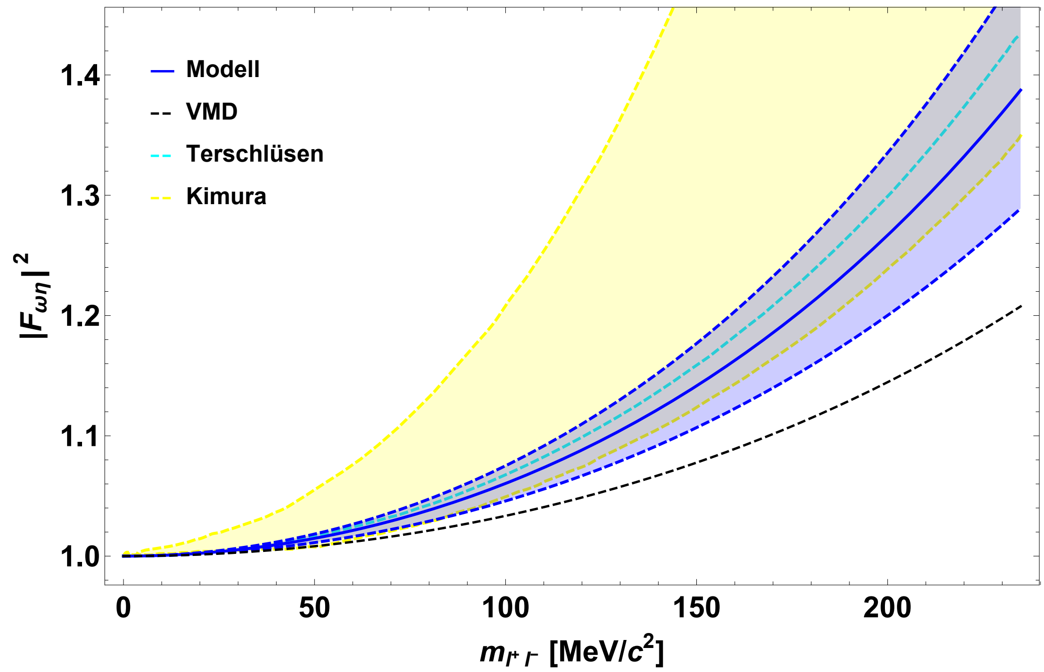

Abbildung 4.16.: Graphen der quadrierten Beträge des Übergangsformfaktors $\left|F_{\omega\eta}\right|^2$, angegeben in Abhängigkeit von der invarianten Masse des Lepton-Paars $m_{\ell^+\ell^-}$. Vorhersagen zu Formfaktoren aus [TLL12] in hellem Blau, aus [KMU18] in Gelb, der VMD in Schwarz und dem Modell dieser Dissertation in Blau eingezeichnet.

Prozess $\omega \to \eta\mu^+\mu^-$ ist um einen Faktor zwei größer als die aus den anderen beiden Modellen.

Tabelle 4.10.: Theoretisch ermittelte Zerfallsraten für die Prozesse $\omega \to \eta\ell^+\ell^-$ aus der dritten Spalte von Tabelle 4.4 im Vergleich zu Ergebnissen aus [TLL12] und [KMU18].

Zerfall	Γ_{PDG} [keV]	Γ_{mod} [keV]	Γ_{Tersch} [keV]	Γ_{Kimura} [keV]
$\omega \to \eta e^+e^-$ in $[10^{-2}]$	< 9.3	2.79 ± 0.10	2.88 ± 0.22	$4.2^{+1.3}_{-1.0}$
$\omega \to \eta\mu^+\mu^-$ in $[10^{-6}]$	–	9.04 ± 0.58	8.57 ± 0.64	$17.^{+7.}_{-5.}$

4.3.9. Der Formfaktor für $\phi \to \eta'\ell^+\ell^-$

Als zweiter Dalitz-Zerfall, dessen Übergangsformfaktor bislang noch nicht erfasst wurde, steht der Prozess $\phi \to \eta'\ell^+\ell^-$ zur Diskussion. Das Vektor-Meson-Dominanz-Modell sagt für diesen Zerfall unter Beachtung der OZI-Regel ein Phi-Meson im Zwischenzustand mit Übergangsformfaktor aus Gleichung (4.39) voraus und ist in

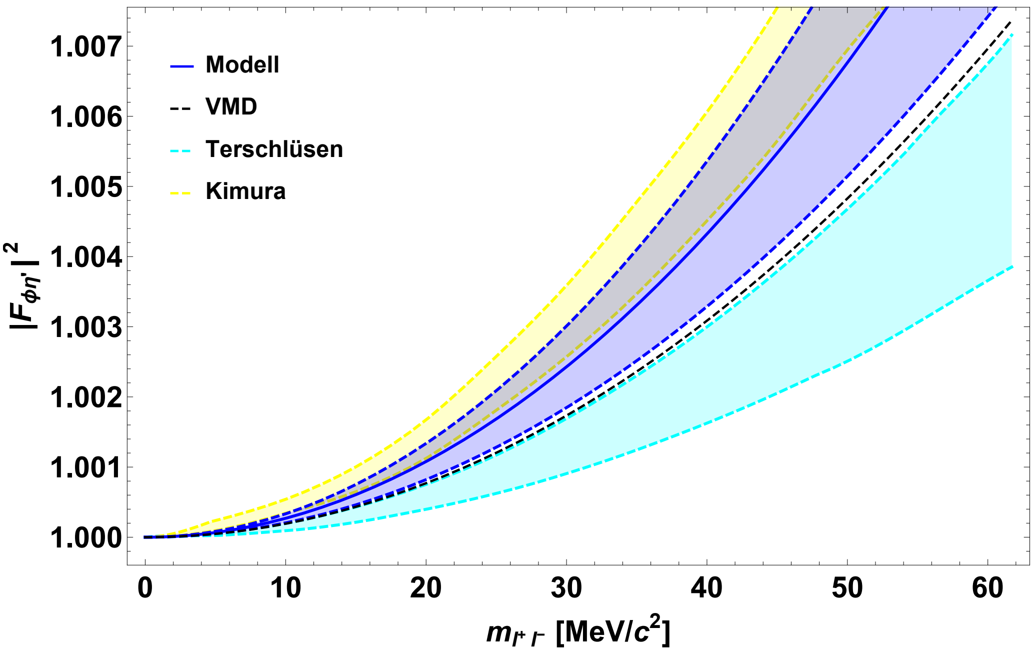

Abbildung 4.17.: Graphen der quadrierten Beträge des Übergangsformfaktors $\left|F_{\phi\eta'}\right|^2$, angegeben in Abhängigkeit von der invarianten Masse des Lepton-Paars $m_{\ell^+\ell^-}$. Vorhersagen zu Formfaktoren aus [TLL12] in hellem Blau, [KMU18] in Gelb, der VMD in Schwarz und dem Modell dieser Dissertation in Blau eingezeichnet.

Abbildung 4.17 in *Schwarz* aufgeführt. Des Weiteren sind im Vergleich die Modelle, die auf die Konstruktion einer chiralen effektiven Lagrange-Dichte aufbauen, das aus [TLL12], aus [KMU18] und das dieser Dissertation, angegeben. Im Falle des ersten Ansatzes wird wie in den vorangegangenen Prozessen das Ergebnis für einen Mischungswinkel mit negativem Vorzeichen diskutiert. Diese Auswahl wird dadurch bestärkt, dass die Ergebnisse dieser Dissertation, in *Blau* gekennzeichnet, keinerlei Hinweis auf ein Verhalten ergeben, das auf ein in [TLL12] in Abbildung 6 gezeigtes Verhalten des Formfaktors für einen positiven Mischungswinkel hinweisen würde. Mehr noch zeigt im direkten Vergleich das Ergebnis dieser Arbeit mit seinem Fehlerband einen durchgängig größeren Betrag des Formfaktors. Auch weisen beide Formfaktoren ab einer invarianten Masse des Lepton-Paares von 10 MeV keinerlei Übereinstimmung mehr auf. Dabei verläuft der Formfaktor der Vektor-Meson-Dominanz fast genau mittig zwischen den beiden Fehlerbereichen der in blau eingetragenen Ansätze mit chiraler effektiver Lagrange-Dichte und zeigt somit auch keine Überschneidungen mit ihnen. Das Ergebnis aus [KMU18] weist mit dem Formfaktor aus dem Modell dieser Dissertation eine Übereinstimmung innerhalb dessen oberen Fehlerbereichs auf, zeigt aber keinerlei Überlappung mit dem VMD-Formfaktor und dem Ergebnis aus [TLL12].

Wird das Intervall der invarianten Masse des Lepton-Paares betrachtet, so ist auffällig, dass für ein Myon-Paar im Endzustand die untere Grenze bei $2m_\mu \approx 211$ MeV ist. Wohingegen die obere Grenze nur einen Wert von $m_\phi - m_{\eta'} = 61.7$ MeV aufweist. Demzufolge ist ein Zerfall mit einem Myon-Paar im Endzustand nicht möglich und nur ein Elektron-Paar tritt auf. Gezeigt wird ein Vergleich der Vorhersagen für den Dalitz-Zerfall $\phi \to \eta' e^+ e^-$ aus den Modellen aus [TLL12], [KMU18] und dieser Dissertation in Tabelle 4.11 gezeigt. Die Zerfallsraten wurden mit Gleichung (4.29) und unter Annahme der Zerfallsrate der elektromagnetischen Übergänge $\Gamma(A \to B\gamma) = \Gamma_{\text{PDG}}$ berechnet.

Tabelle 4.11.: Theoretisch bestimmte Vorhersage der Zerfallsrate für den Dalitz-Zerfall $\phi \to \eta' e^+ e^-$. Im Vergleich sind die Ergebnisse aus [TLL12] und [KMU18] zu jenem aus dem Modell dieser Dissertation eingetragen.

Zerfall	Γ_{mod} [keV]	Γ_{Tersch} [keV]	Γ_{Kimura} [keV]
$\phi \to \eta' e^+ e^-$ in $[10^{-3}]$	1.36 ± 0.16	1.39 ± 0.30	$2.0^{+0.7}_{-0.5}$

Insgesamt lässt sich für diesen Prozess konstatieren, dass aufgrund der mangelnden Übereinstimmung der betrachteten theoretischen Modelle keine eindeutige Aussage über die Vorhersagekraft einzelner Formfaktoren getroffen werden kann.

4.3.10. Der Formfaktor für $\eta' \to \omega \ell^+ \ell^-$

Auch für den Dalitz-Zerfall eines η' in ein ω-Meson und ein Lepton-Paar ist bislang keine experimentelle Datengrundlage zu den Übergangsformfaktoren vorhanden. Das Modell der Vektor-Meson-Dominanz erwartet wie bei dem Zerfall $\omega \to \eta \ell^+ \ell^-$ im Zwischenzustand ein ω-Meson mit zugehörigem Formfaktor aus Gleichung (4.40). In Abbildung 4.18 sind die Vorhersagen für den Formfaktor und, wenn vorhanden, dessen Fehlerbereich aus den Modellen der Vektor-Meson-Dominanz in *Schwarz*, [TLL12] in *hellem Blau* und dieser Arbeit in *Blau* aufgeführt. Im Vergleich mit dem vorangegangenen Prozess $\phi \to \eta' \ell^+ \ell^-$, siehe Abbildung 4.17, fallen direkt Parallelen auf. Zunächst zeigt sich eine ähnliche Anordnung der Formfaktoren, mit dem aus [TLL12] mit den niedrigsten Beträgen, gefolgt von dem VMD-Formfaktor und dem Modell dieser Dissertation. Zudem besteht wiederum zwischen den einzelnen Ergebnissen, auch unter Berücksichtigung der Fehlerbereiche, keine Übereinstimmung. Demzufolge ist festzuhalten, dass zum aktuellen Zeitpunkt ohne einen weiteren Anstoß durch experimentelle Messungen oder theoretische Modelle, keine Aussage über die Vorhersagekraft der Modelle basierend auf einer chiralen effektiven Lagrange-Dichte getroffen werden kann.
Aus kinematischen Gründen, analog zum vorangegangenen Prozess $\phi \to \eta' \ell^+ \ell^-$, ist ein Zerfall in ein Myon-Paar ausgeschlossen. Vorhersagen für den Zerfall in ein Elektron-Paar aus beiden Modellen, die auf einer chiralen effektiven Lagrange-Dichte basieren, sind in Tabelle 4.12 angegeben.

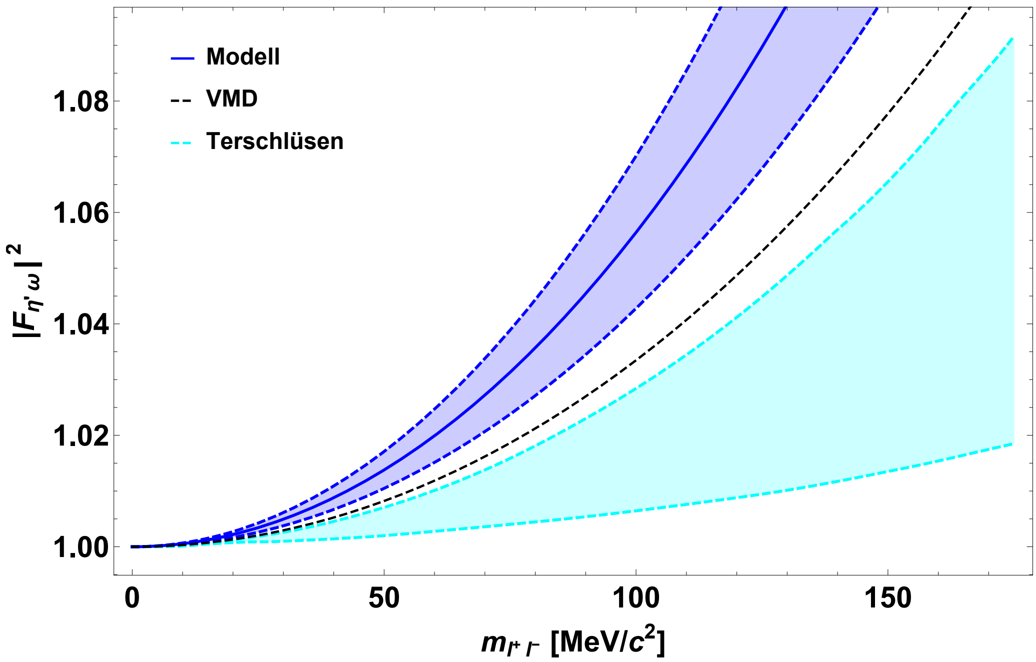

Abbildung 4.18.: Graphen der quadrierten Beträge des Übergangsformfaktors $\left|F_{\eta'\omega}\right|^2$, angegeben in Abhängigkeit von der invarianten Masse des Lepton-Paars $m_{\ell^+\ell^-}$. Vorhersagen zu Formfaktoren aus [TLL12] in hellem Blau, der VMD in Schwarz und dem Modell dieser Dissertation in Blau eingezeichnet.

4.3.11. Der Formfaktor für $\rho^0 \to \pi^0 \ell^+ \ell^-$

Des Weiteren ist für den Zerfall eines ρ^0 in ein π^0 und ein Lepton-Paar bislang keine experimentelle Datenreihe zum Vergleich mit Vorhersagen theoretischer Modelle vorhanden. In Abbildung 4.19 sind die Vorhersagen für den Übergangsformfaktor dieses Prozesses in *Gelb* für [KMU18], *Schwarz* für die Vorhersage des VMD-Modells und *Blau* für das Modell dieser Dissertation aufgeführt. Die beiden Ergebnisse aus [KMU18] und dieser Dissertation stimmen gut miteinander überein, zeigen aber im Gegensatz dazu keine Übereinstimmung mit der Vorhersage der Vektor-Meson-Dominanz mit einem ω-Meson im Zwischenzustand, vergleiche Gleichung (4.40). Im direkten Vergleich nehmen die Ergebnisse aus den Modellen mit einer

Tabelle 4.12.: Theoretisch bestimmte Vorhersage der Zerfallsrate für den Dalitz-Zerfall $\eta' \to \omega e^+ e^-$. Im Vergleich ist das Ergebnis aus [TLL12] zu jenem aus dem Modell dieser Dissertation eingetragen.

Zerfall	Γ_{mod} [keV]	Γ_{Tersch} [keV]
$\eta' \to \omega e^+ e^-$ in $[10^{-2}]$	3.50 ± 0.13	3.36 ± 1.10

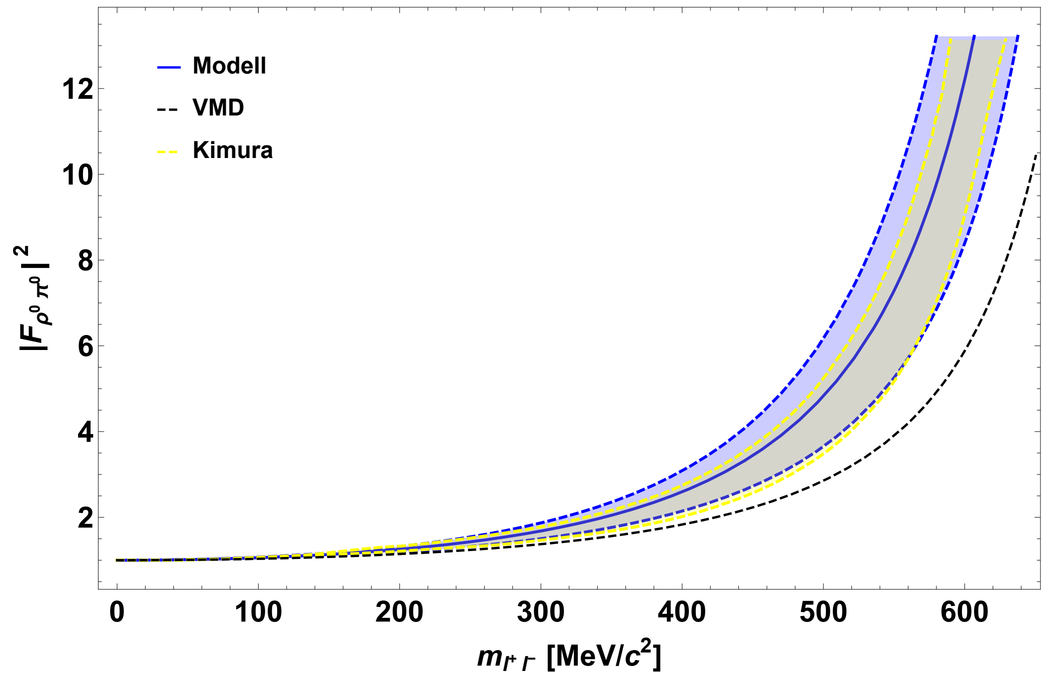

Abbildung 4.19.: Graphen der quadrierten Beträge des Übergangsformfaktors $|F_{\rho^0\pi^0}|^2$, angegeben in Abhängigkeit von der invarianten Masse des Lepton-Paars $m_{\ell^+\ell^-}$. Vorhersagen zu Formfaktoren aus [KMU18] in Gelb der VMD in Schwarz und dem Modell dieser Dissertation in Blau eingezeichnet.

chiralen effektiven Lagrange-Dichte größere Beträge für den Formfaktor an als von dem VMD-Modell vorhergesagt.

In Tabelle 4.13 sind die aus den Vorhersagen von [KMU18] und dem Modell dieser Dissertation berechneten Zerfallsraten der Zerfälle $\rho^0 \to \pi^0 \ell^+ \ell^-$ aufgeführt. Die angegebenen Werte weisen auf dieselbe Größenordnung für den Wert der Zerfallsraten hin, eine genaue Vorhersage ist aber aufgrund der Abweichungen nicht festzulegen.

Tabelle 4.13.: Theoretisch bestimmte Vorhersage der Zerfallsrate für den Dalitz-Zerfall $\rho^0 \to \pi^0 \ell^+ \ell^-$. Im Vergleich ist das Ergebnis aus [KMU18] zu jenem des Modells dieser Dissertation aufgeführt.

Zerfall	Γ_{mod} [keV]	Γ_{Kimura} [keV]
$\rho^0 \to \pi^0 \ell^+ \ell^-$	0.661 ± 0.020	0.43 ± 0.05
$\rho^0 \to \pi^0 \ell^+ \ell^-$ in $\left[10^{-2}\right]$	8.2 ± 1.8	$5.0^{+0.9}_{-0.7}$

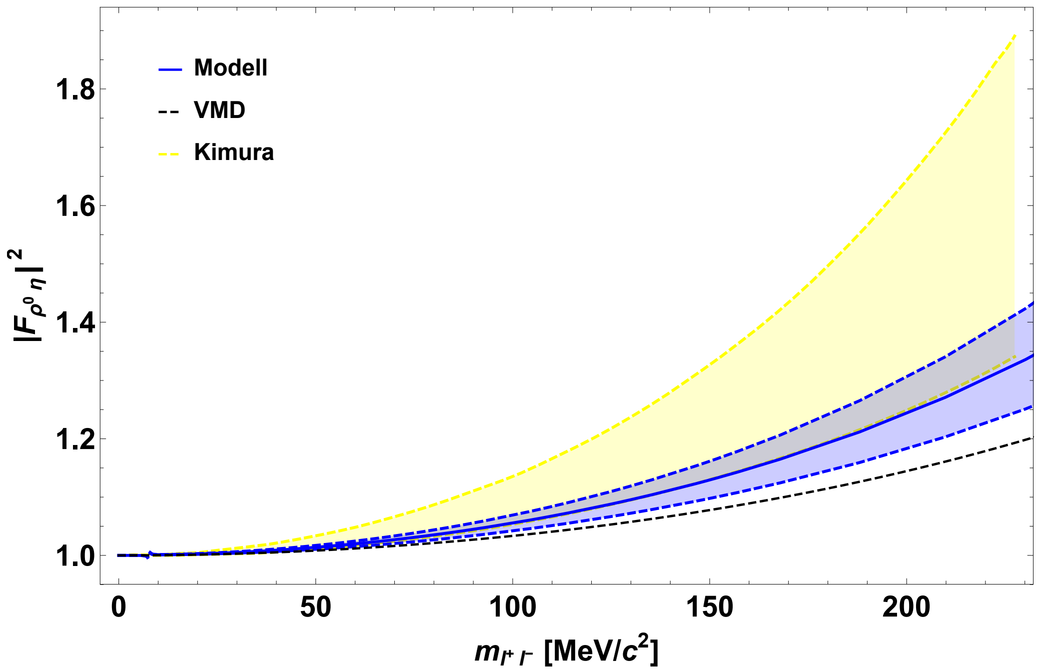

Abbildung 4.20.: Graphen der quadrierten Beträge des Übergangsformfaktors $|F_{\rho^0\eta}|^2$, angegeben in Abhängigkeit von der invarianten Masse des Lepton-Paars $m_{\ell^+\ell^-}$. Vorhersagen zu Formfaktoren aus [KMU18] in Gelb der VMD in Schwarz und dem Modell dieser Dissertation in Blau eingezeichnet.

4.3.12. Der Formfaktor für $\rho^0 \to \eta\ell^+\ell^-$

Als nächster Prozess wird der Zerfall eines ρ^0 in ein η und ein Lepton-Paar betrachtet. Die Vorhersagen für den Formfaktor des Prozesses aus der Vektor-Meson-Dominanz für ein ω-Meson im Zwischenzustand, siehe Gleichung (4.40), dem Ansatz aus [KMU18], sowie dem Modell dieser Dissertation sind in Abbildung 4.20 in respektive *Schwarz*, *Gelb* und *Blau* aufgeführt. Dabei ist zu erkennen, dass beide Modelle, die auf einer chiralen effektiven Lagrange-Dichte beruhen, für große invariante Massen des Lepton-Paares keine Übereinstimmung zeigen. Innerhalb des oberen Fehlerbereichs des Formfaktors aus dem Modell dieser Dissertation zeigt sich ein Überlappung mit dem Ergebnis aus [KMU18], letzteres deckt allerdings einen sehr großen Bereich an Werten für den Betrag des Übergangsformfaktors ab.
Ein Vergleich der mit den Modellen aus [KMU18] und dieser Dissertation berechneten Vorhersagen für die Zerfallsraten zu den Dalitz-Zerfällen $\rho^0 \to \eta\ell^+\ell^-$ findet sich in Tabelle 4.14. Die gezeigten Ergebnisse stimmen in der Größenordnung, wenn auch nicht innerhalb der Fehlerbereiche, miteinander überein.

Tabelle 4.14.: Theoretisch bestimmte Vorhersage der Zerfallsrate für den Dalitz-Zerfall $\rho^0 \to \eta\ell^+\ell^-$. Im Vergleich ist das Ergebnis aus [KMU18] zu jenem des Modells dieser Dissertation angegeben.

Zerfall	Γ_{mod} [keV]	Γ_{Kimura} [keV]
$\rho^0 \to \eta\ell^+\ell^-$	0.378 ± 0.011	$0.25^{0.7}_{-0.5}$
$\rho^0 \to \eta\ell^+\ell^-$ in $\left[10^{-5}\right]$	3.61 ± 0.15	$3.3^{+1.1}_{-0.8}$

4.3.13. Der Formfaktor für $\eta' \to \rho^0\ell^+\ell^-$

Als letzter in dieser Dissertation präsentierter Formfaktor eines Dalitz-Zerfalls steht der Zerfall eines η' in ein ρ^0 und ein Lepton-Paar. Wie schon bei den vorangegangenen Zerfällen $\phi \to \eta'\ell^+\ell^-$ und $\eta' \to \ell^+\ell^-$ tritt auch bei diesem Prozess ein Myon-Paar im Endzustand aus kinematischen Gründen nicht auf. In Abbildung 4.21 ist die mit dem Modell dieser Dissertation bestimmte Vorhersage für den Übergangsformfaktor im Vergleich mit der aus dem Vektor-Meson-Dominanz-Modell aufgeführt. Zwischen den beiden Formfaktoren sind keine Übereinstimmungen festzustellen, die Beträge des Ergebnisses dieser Dissertation sind für Zentralwert wie für das gesamte Fehlerband konsistent größer als die des VMD-Modells. Mit der Zerfallsrate der elektromagnetischen Übergänge $\Gamma(A \to B\gamma) = \Gamma_{\text{PDG}}$ bestimmt sich aus Gleichung (4.29) die Vorhersage für Zerfallsrate des Dalitz-Zerfalls $\eta' \to \rho^0 e^+e^-$ zu

$$\Gamma_{\text{mod}}^{\eta'\rho^0} = 0.389 \pm 0.022 \text{ keV} . \tag{4.41}$$

Zur weiteren Untersuchung dieses Zerfalls bietet sich aus den in dieser Dissertation diskutierten Referenzen der Ansatz in [TLL12], der bereits den Zerfall $\eta' \to \omega e^+e^-$ untersuchen konnte.

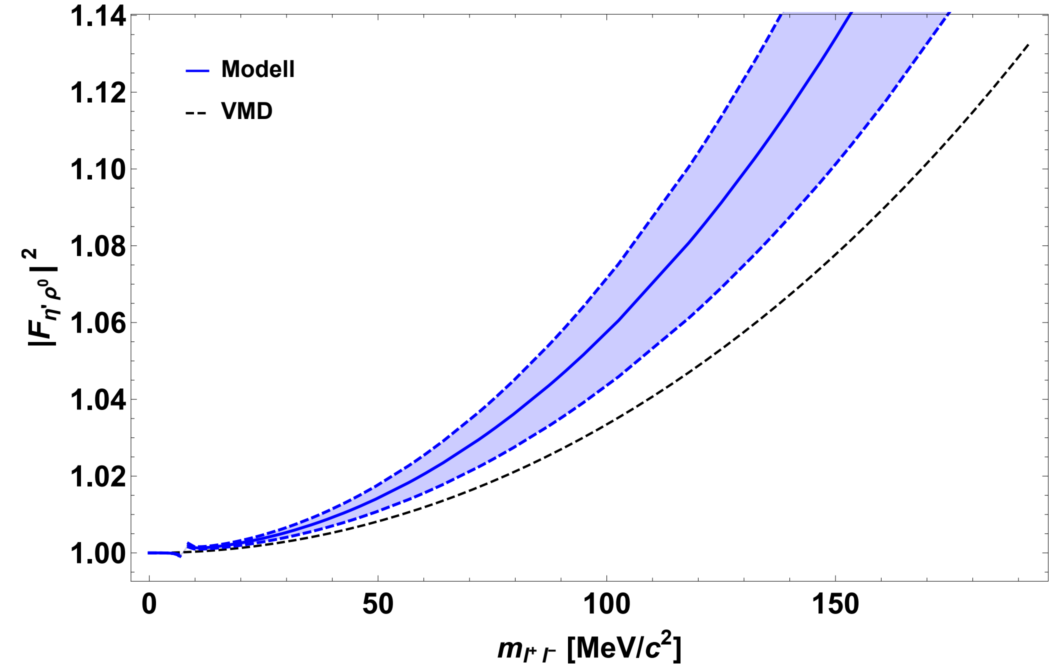

Abbildung 4.21.: Graphen der quadrierten Beträge des Übergangsformfaktors $|F_{\eta'\rho^0}|^2$, angegeben in Abhängigkeit von der invarianten Masse des Lepton-Paars $m_{\ell^+\ell^-}$. Vorhersagen zu Formfaktoren der VMD in Schwarz und dem Modell dieser Dissertation in Blau eingezeichnet.

5. Fazit und Ausblick

Das Ziel dieser Dissertation war die Untersuchung der elektromagnetischen Übergänge $PV\gamma^*$ zwischen einem pseudoskalaren und einem Vektor-Meson innerhalb einer chiralen effektiven Feldtheorie mit einer Inklusion von Vektor-Mesonen als dynamischen Freiheitsgraden. Mit der Betrachtung der Nonetts von pseudoskalaren und Vektor-Mesonen konnten auch die Mischungen η-η' und ϕ-ω in das Modell dieser Arbeit eingepflegt werden. Die mathematischen Betrachtungen beschränken sich dabei auf das Niveau der Baumgraphen und berücksichtigen in der Lagrange-Dichte des Modells Korrekturen in $1/N_C$ und solche aufgrund der Quark-Massen. Mit der Verwendung eines ursprünglich für die LN_CChPT entwickelten Zählschemas war es möglich, die konstruierten Terme der Wechselwirkungs-Lagrange-Dichte in einer Hierarchie zu ordnen.
Zur Anpassung der Modellparameter wurden als erstes die elektromagnetischen Übergänge $PV\gamma$ mit einem reellen Photon im Endzustand untersucht. Die Verfügbarkeit von experimentellen Ergebnissen zu allen zwölf theoretisch erwarteten Prozessen ermöglichte eine umfängliche Anwendung des entwickelten Modells. Unter Berücksichtigung der sich aus dem Zählschema ergebenden Ordnungen wurden die zu dem Prozess zugehörigen Terme der Wechselwirkungs-Lagrange-Dichte des Diagramms der Punktwechselwirkung bis zu Termen in NLO konstruiert. Es ergaben sich insgesamt ein Term in führender Ordnung, drei für die Korrekturen in $1/N_C$ und zwei für die Korrekturen aufgrund der Quark-Massen. Anschließend wurde aus der Lagrange-Dichte über das invariante Matrixelement die Formel für die Zerfallsrate und die zu den Übergängen der Felder zugehörigen Amplituden bestimmt.
Ausgehend von der führenden Ordnung wurden bei Anpassung der Kopplungskonstanten an die experimentellen Ergebnisse, unter Berücksichtigung der Hierarchie der Beiträge in den Amplituden, sukzessive Korrekturen hinzugenommen. Vor dem Fit einer Kopplungskonstanten in führender Ordnung musste aufgrund der OZI-Regel, bei angenommener idealer Mischung für das ϕ-ω-System, der Zerfall $\phi \to \pi^0\gamma$ ausgeschlossen werden. Die Ergebnisse erwiesen sich nicht zur simultanen Beschreibung aller physikalischen Prozesse geeignet. Da eine Beschreibung aller physikalischer Zerfälle angestrebt war, wurden in dem folgenden Schritt die Korrekturen in $1/N_C$ bei gleichzeitiger Erhaltung der SU(3)-Symmetrie hinzu genommen. Infolge dessen konnte der Zerfall $\phi \to \pi^0\gamma$ mit berücksichtigt werden und es ergaben sich bei dem Fit dreier Kopplungskonstanten deutliche Verbesserungen für die Ergebnisse der Zerfallsraten im Vergleich zum Fit in führender Ordnung. Allerdings wurde aufgrund noch bestehender großer Abweichungen zu den experimentellen Ergebnissen das gesetzte Ziel einer gleichzeitigen Beschreibung aller physikalischer Zerfälle nicht erreicht. Da in den Amplituden der Kaonen eine Brechung der SU(3)-Symmetrie be-

obachtet wird, war es notwendig auch Korrekturen aufgrund der Quark-Massen einfließen zu lassen.
In Folge der Hinzunahme von Korrekturen zur führenden Ordnung war es zur Verbesserung der Genauigkeit der Berechnungen in der gewählten Ordnung erforderlich, die Bestimmung des quadrierten invarianten Matrixelements zu untersuchen. Hier entstanden aus NLO$\times$NLO-Termen Beiträge in NNLO, eine Stufe höher im Organisationsschema als die betrachteten Terme an sich. Diese zusätzlichen Terme höherer Ordnung stellen aber für eine Rechnung in NNLO nur ein Bruchteil der möglichen Beiträge dar. Da das Modell dieser Dissertation auf eine Diskussion bis einschließlich NLO-Korrekturen ausgerichtet war, wurde die Entscheidung getroffen, diese NNLO-Beiträge in den folgenden Rechnungen nicht zu berücksichtigen. Für einen NLO-Fit mit insgesamt fünf Kopplungskonstanten an die Daten der elektromagnetischen Übergänge ergab sich eine insgesamt gute Übereinstimmung mit den experimentellen Ergebnissen. Für die Zerfälle $\rho^0 \to \eta\gamma$, $\omega \to \pi^0\gamma$, $\omega \to \eta\gamma$ und $K^{*0} \to K^0\gamma$ wurden aber im Hinblick auf die gesetzten Qualitätskriterien größere Abweichungen festgestellt. Im Gegensatz dazu entkoppelt der Zerfall der geladenen Kaonen mit einer eigenen Kopplungskonstante. Dieser kann innerhalb der betrachteten Ordnung somit immer exakt bestimmt werden und bietet aber demzufolge auch keine Möglichkeit auf Eigenschaften der Kaon-Zerfälle zu schließen.
In einem Versuch die Abweichungen der Modellergebnisse von den experimentellen Werten zu reduzieren, wurde die Entwicklung der Matrix der Quark-Ladungen in $1/N_C$ berücksichtigt. Dies hatte die Auswirkung, dass ein Term, der bislang aufgrund der spurlosen physikalischen Quark-Ladungs-Matrix weggefallen war, berücksichtigt werden konnte. Die Ergebnisse eines NLO-Fit mit sechs Kopplungskonstanten boten, ausgenommen des Zerfalls $K^{*0} \to K^0\gamma$, eine sehr gute Beschreibung der experimentellen Zerfallsraten.
Schließlich wurden die Ergebnisse des in dieser Dissertation entwickelten Modells mit denen aus anderen Modellen verglichen. Dabei wurden große Unterschiede in der Berücksichtigung von Korrekturen zur führenden Ordnung sowie der Betrachtung der Mischungswinkel festgestellt. Die Ergebnisse aus einem Fit in LO stimmten mit denen jener Referenzen, die sich auf eine Betrachtung der elektromagnetischen Übergänge $PV\gamma$ auf die führende Ordnung beschränken, sehr gut überein. Bei Hinzunahme von Korrekturen konnte im direkten Vergleich der Modelle die Bedeutung der beiden Terme mit den Kopplungskonstanten c_+ und c_-, die eine Brechung der $SU(3)$-Symmetrie aufgrund der Quark-Massen zur Folge haben, bestätigt werden. Allerdings werden diese Terme nicht in allen Ansätzen vollständig berücksichtigt. Zudem fiel auf, dass die Mischung des ϕ-ω-Systems oft als ideal angenommen wird. In dieser Dissertation wurde allerdings bestätigt, dass diese Annahme bei Berücksichtigung von Korrekturen aufgrund der Quark-Massen zu vermeiden ist. Es wird, sofern das η'-Meson in Ansätzen mit berücksichtigt wird, die η-η'-Mischung in anderen Ansätzen nicht in einem dem in dieser Arbeit verwendeten Grundgerüst vergleichbarem Umfang mit einbezogen. Insbesondere ist hervorzuheben, dass das Modell dieser Dissertation die aktuellste und umfänglichste Ausarbeitung einer chiralen effektiven Lagrange-Dichte der elektromagnetischen Übergänge $PV\gamma$ unter Verwen-

dung des Vektor-Formalismus zur Darstellung der Vektor-Mesonen ist.
Als eine Anwendung zur Betrachtung der elektromagnetischen Struktur der Mesonen und als ein erster Test des Modells für elektromagnetische Übergänge $PV\gamma^*$ wurde dieses im zweiten Teil dieser Arbeit auf die Dalitz-Zerfälle $PV\ell^+\ell^-$ neutraler Mesonen angewandt. Hier bestätigte sich, dass eine Beschränkung auf die Betrachtung einer reinen Punktwechselwirkung aufgrund der elektromagnetischen Struktur der Mesonen nicht der physikalischen Realität genügt. Folglich wurde eine Erweiterung des Modells um ein Feynman-Diagram mit einem propagierenden virtuellen Vektor-Meson im Zwischenzustand erwogen und durchgeführt. Zur Bestimmung des dem zusätzlichen Feynman-Diagramms zugehörigen Beitrags zum Übergangsmatrixelements des Zerfalls mussten die Lagrange-Dichten zu den Vertices $V\gamma$ und PVV aufgestellt und die zugehörigen Kopplungen ermittelt werden. Für den ersten Vertex gelang dies, schlug aber für PVV zunächst fehl, da der mit einer experimentell gemessenen Zerfallsrate verfügbare Zerfall $\phi \to \omega\pi$ innerhalb des Modells, das eine Erhaltung der Isospin-Symmetrie vorausgesetzt hatte, nicht anwendbar war. Als Folge davon wurde die zum Vertex PVV zugehörige Kopplung in den Zerfällen eines Vektor-Mesons in drei pseudoskalare Mesonen innerhalb des GSW-Prozesses vorgenommen. Hierzu mussten zusätzlich die Lagrange-Dichte der Vertices $VPPP$ und VPP bestimmt werden.
Aufgrund der für die Zerfälle $V \to PPP$ verfügbaren experimentellen Daten konnte in diesem Prozess für den Vertex PVV nur die Kopplungskonstante führender Ordnung ermittelt werden. Entsprechend fand auch von dem Vertex VPP nur die Kopplung führender Ordnung Verwendung. Die ermittelten Kopplungskonstanten der Vertices $V\gamma$ und PVV wurden dann zur Berechnung der zu den Dalitz-Zerfällen zugehörigen Zerfallsraten und Übergangsformfaktoren verwendet.
Die Bestimmung der Formel für die Zerfallsrate geschah unter Berücksichtigung des zusätzlichen Feynman-Diagramms analog zu der Vorgehensweise für die Prozesse $PV\gamma$. Einzig musste die bislang angewandte Integration über den Phasenraum eines Zerfalls von einem in zwei Teilchen auf einen Zerfall eines Telchens in drei im Endzustand erweitert werden. Die Darstellung von Zerfallsrate und Formfaktor wurde allgemein verwendeten Konventionen angepasst. Als propagierendes virtuelles Vektor-Meson wurden die Mesonen ρ^0, ω und ϕ betrachtet. Für letztere wurde in der Propagation die ϕ-ω-Mischung im Einklang mit den verwendeten Konventionen dieser Dissertation betrachtet. Das ρ-Meson wurde im Propagator mit einer nicht-vernachlässigbaren von der invarianten Masse des Lepton-Paars abhängigen Bereite modelliert, für die ω- und ϕ-Mesonen wurde jeweils eine konstante Breite vorausgesetzt.
Die Ergebnisse der Zerfallsraten zeigen in Teilen eine gute Übereinstimmung mit den verfügbaren experimentellen Werten. Zur Untersuchung der Abweichungen war es notwendig die Übergangsformfaktoren von Modell und Experiment zu vergleichen. Dies wurde sukzessiv für die einzelnen Zerfälle $PV\ell^+\ell^-$ durchgeführt, und als weitere Vergleich wurden zusätzlich Ergebnisse aus anderen theoretischen Modellen betrachtet.
Als Erstes wurde der experimentell sehr gut erfasste Dalitz-Zerfall $\omega \to \pi^0\ell^+\ell^-$ dis-

kutiert. Für diesen standen sowohl Datenreihen zu $\omega \to \pi^0 e^+e^-$ als auch $\omega \to \pi^0 \mu^+\mu^-$ zur Verfügung. Ein Vergleich der experimentellen Formfaktoren zeigte eine Diskrepanz zwischen Ergebnissen für die Messungen mit einem Elektron- und einem Myon-Paar im Endzustand bei großen Werten von $m_{\ell^+\ell^-}$. Mit dieser Beobachtung erklärten sich die Differenzen zwischen experimentellen und Modellergebnissen der Zerfallsraten. Zudem wurde festgestellt, dass das Modell dieser Dissertation eine sehr gute Beschreibung der Datenreihe für $\omega \to \pi^0 e^+e^-$ liefert. Dies gilt auch für den Großteil anderer aktueller theoretischer Modelle, die diesen Prozess besser beschreiben und somit in recht guter Übereinstimmung miteinander und zu dieser Arbeit stehen. Es ist allerdings geboten, diesen Dalitz-Zerfall weiterhin experimentell zu untersuchen, um die Diskrepanz zwischen den Messungen zu klären.
Im Anschluss an den diskutieren Dalitz-Zerfall wurden zwei weitere Prozesse, $\phi \to \eta\ell^+\ell^-$ und $\phi \to \pi^0\ell^+\ell^-$, zu denen experimentelle Datenreihen vorlagen, untersucht. In beiden Fällen zeigte sich das in dieser Dissertation entwickelte Modell in der Lage, die gegeben Datenpunkte sehr gut zu beschreiben. Der Vergleich mit anderen theoretischen Ansätzen brachte aber die Erkenntnis, dass die ermittelten theoretischen Formfaktoren nur teilweise mit dem Modell dieser Dissertation übereinstimmen. Insbesondere ergeben sich im Bereich großer invarianter Masse des Lepton-Paars Abweichungen zwischen den einzelnen Modellen.
Als Abschluss wurden zur vollständigen Betrachtung der Dalitz-Zerfälle aller neutraler Mesonen Vorhersagen für Prozesse. zu denen experimentelle Datengrundlagen für die Übergangsformfaktoren nicht verfügbar sind, betrachtet. Für die Zerfälle $\omega \to \eta\ell+\ell^-$ und $\rho^0 \to \pi^0\ell^+\ell^-$ konnte dabei eine gute Übereinstimmung der betrachteten Vorhersagen festgestellt werden. Im Gegensatz dazu konnten für die Zerfälle $\phi \to \eta'\ell^+\ell^-$, $\eta' \to \omega\ell+\ell^-$, $\rho^0 \to \eta\ell^+\ell^-$ und $\eta' \to \rho^0\ell^+\ell^-$ große Abweichungen zwischen den verfügbaren Modellen festgestellt werden.
Insgesamt zeigt sich das Modell dieser Dissertation gut geeignet zur Beschreibung von elektromagnetischen Übergängen $PV\gamma$ und darauf aufbauend Daten zu den Dalitz-Zerfällen $PV\ell^+\ell^-$ und ermöglicht die Untersuchung aller zwölf Zerfälle $A \to B\gamma$ sowie von Formfaktoren und Zerfallsraten für alle Dalitz-Zerfälle neutraler Mesonen. Zudem bietet der vorliegende Entwurf in dieser Dissertation einige Möglichkeiten zur Erweiterung und Ausbau des Modells.
So wurden die Prozesse bislang nur auf dem Niveau der Baumgraphen betrachtet. Eine Inklusion von Quantenkorrekturen gibt somit einen logischen nächsten Schritt zur Erweiterung des Modells vor. Erste Schritte zur Bestimmung von Beiträgen aufgrund von Schleifen und deren Größenordnungen wurden bereits in [Kra20] gegangen. Des Weiteren wurde in derselben Referenz der in dem Modell verwendete ϕ-ω-Mischungswinkel in einer analogen Vorgehensweise zur Bestimmung des η-η'-Mischungswinkel in [BMS17] bestimmt. Dabei war in Ermangelung experimenteller Daten zu einigen benötigten Kopplungen eine vollständige Anwendung des für die pseudoskalaren Mesonen entwickelten Formalismus auf die Vektor-Mesonen nicht möglich und konnte somit nur eingeschränkt durchgeführt werden.
Da in dieser Dissertation das Modell zunächst von Grund auf entwickelt wurde, wurde in allen Anpassungen von Kopplungskonstanten an experimentelle Werte in den

Fehlern nur die der experimentellen Angaben berücksichtigt und die von Mischungswinkeln oder verwendeten Konstanten vernachlässigt. Zur Verbesserung der Fehlerbetrachtung und in direkter Folge der Ergebnisse, müssen die Fehler aller genutzten Werte in einer Verfeinerung des Modells entweder berücksichtigt oder begründet vernachlässigt werden. Zudem fehlen bislang Abschätzungen über Fehler, die in Folge von Erzeugung und Vernachlässigung von Termen höherer Ordnung entstehen.
Die Bestimmung der Kopplungskonstanten c_1^{PVV} über den GSW-Prozess in den Zerfällen $V \to 3P$ weist eine große Unsicherheit auf, unter anderem wegen der großen Fehler des ρ-Zerfalls, aber auch durch die erzwungene Beschränkung auf die führende Ordnung des Zählschemas in Folge einer geringen Anzahl an physikalischen Zerfällen, die diesem Prozess entsprechen. Eine Möglichkeit zur Verbesserung der Ergebnisse für diese Kopplung wäre ein Vergleich zu in dispersiver Theorie ermittelten Ergebnissen [Dan+15], die in neueren Messungen bestätigt wurden [Abl+18]. Sollte eine Möglichkeit der Anpassung an die Ergebnisse dispersiver Theorien gefunden werden, hätte dies eine merkbare Reduzierung des Fehlers für die Dalitz-Zerfälle $PV\ell^+\ell^-$ zur Folge.
Eine interessante Möglichkeit der Erweiterung der Betrachtung der Dalitz-Zerfälle $PV\ell^+\ell^-$ ist die zu der in den Zerfällen $PV\gamma$ bereits angewandten Entwicklung der Quark-Ladungs-Matrix Q in $1/N_C$, die dort eine deutliche Verbesserung der Ergebnisse zur Folge hatte. Als sinnvolle Erweiterung des Modells hätte dies eine direkte Auswirkung auf die Terme der Propagatoren.
Des Weiteren ist in den betrachteten Zerfällen $PV\gamma$ und $PV\ell^+\ell^-$ ein expliziter Vergleich von zur Darstellung von Vektor-Feldern verwendeten Vektor- und Tensor-Formalismen, im Hinblick auf die in der Theorie erwartete Äquivalenz dieser Darstellungen, zu erwägen. Der Vergleich mit einer Referenz, die eine Darstellung mittels antisymmetrischer Tensor-Felder für die Vektor-Mesonen einer chiralen effektiven Lagrange-Dichte verwendete, ergab große Unterschiede in den verwendeten Konventionen, angefangen beim Zählschema bis hin zu den Mischungswinkeln. In Folge dessen ergeben sich in der Anzahl der experimentellen Prozesse, die zur Anpassung der Modelle herangezogen werden, und den Ergebnissen der Fits deutliche Unterschiede. Somit wäre eine Möglichkeit die Konstruktion einer effektiven Lagrange-Dichte mit durch antisymmetrische Tensoren dargestellten Vektor-Meson-Feldern im Rahmen des in dieser Dissertation verwendeten Zählschemas und Konventionen durchzuführen und die daraus erhaltenen Ergebnisse mit denen dieser Dissertation zu vergleichen.
Als weitere Optionen für die Untersuchung von möglichen Erweiterungen des Modells stünden die Berücksichtigung der ρ-ω-Mischung und der Brechung der Isospin-Symmetrie zur Auswahl. Die Beiträge ersterer werden im Allgemeinen als klein bestimmt, ein Vergleich deren expliziter Größenordnungen in den untersuchten Prozessen mit denen anderer angewandter Korrekturen erscheint aber in einem ersten Schritt als sinnvoll. Eine Brechung der Isospin-Symmetrie mit $m_u \neq m_q$ könnte eine Möglichkeit sein, in den Prozessen $PV\gamma$ die Abweichungen in den Kaon-Zerfällen zu untersuchen und die direkte Bindung des Zerfalls geladener Kaonen an die Kopplungskonstante c_- aufbrechen.

Literatur

[Aad+12] G. Aad u. a.
„Observation of a new particle in the search for the Standard Model Higgs boson with the ATLAS detector at the LHC“.
In: *Phys. Lett. B* 716 (2012), S. 1–29.
DOI: 10.1016/j.physletb.2012.08.020.
arXiv: 1207.7214 [hep-ex].

[AB69] S. L. Adler und W. A. Bardeen.
„Absence of higher order corrections in the anomalous axial vector divergence equation“.
In: *Phys. Rev.* 182 (1969), S. 1517–1536.
DOI: 10.1103/PhysRev.182.1517.

[Abl+18] M. Ablikim u. a.
„Dalitz Plot Analysis of the Decay $\omega \to \pi^+\pi^-\pi^0$“.
In: *Phys. Rev. D* 98 (2018), S. 112007.
DOI: 10.1103/PhysRevD.98.112007.
arXiv: 1811.03817 [hep-ex].

[ABY10] C. Aydin, M. Bayar und A.H. Yilmaz.
„Recalculation of the coupling constants $g_{\rho\eta\gamma}$, $g_{\omega\eta\gamma}$, $g_{\eta'\rho\gamma}$, and $g_{\eta'\omega\gamma}$ in QCD sum rules“.
In: *Phys. Rev. D* 81 (2010), S. 094032.
DOI: 10.1103/PhysRevD.81.094032.

[Ach+01] M.N. Achasov u. a.
„Study of Conversion Decays $\phi \to \eta e^+e^-$ and $\eta \to \gamma e^+e^-$ in the Experiment with SND Detector at the VEPP-2M Collider“.
In: *Phys. Lett. B* 504 (2001), S. 275–281.
DOI: 10.1016/S0370-2693(01)00320-3.

[Ach+08] M.N. Achasov u. a.
„Measurement of the ω, $\rho \to \pi^0e^+e^-$ branching fractions“.
In: *J. Exp. Theor. Phys.* 107 (2008), S. 61–68.
DOI: 10.1134/S1063776108070054.

[ACK14] B. Ananthanarayan, I. Caprini und B. Kubis.
„Constraints on the $\omega\pi$ form factor from analyticity and unitarity“.
In: *Eur. Phys. J. C* 74 (2014), S. 3209.
DOI: 10.1140/epjc/s10052-014-3209-4.
arXiv: 1410.6276 [hep-ph].

[Adl+17] P. Adlarson u. a.
„Measurement of the $\omega \to \pi^0 e^+ e^-$ and $\eta \to e^+ e^- \gamma$ Dalitz decays with the A2 setup at MAMI“.
In: *Phys. Rev. C* 95 (2017), S. 035208.
DOI: 10.1103/PhysRevC.95.035208.
arXiv: 1609.04503 [hep-ex].

[Adl69] Stephen L. Adler.
„Axial vector vertex in spinor electrodynamics“.
In: *Phys. Rev.* 177 (1969), S. 2426–2438.
DOI: 10.1103/PhysRev.177.2426.

[Akh+05] R.R. Akhmetshin u. a.
„Study of the ρ and ω meson decays into pseudoscalar meson and e^+e^- pair with the CMD-2 detector“.
In: *Phys. Lett. B* 613 (2005), S. 29–38.
DOI: 10.1016/j.physletb.2005.03.019.
arXiv: hep-ex/0502024.

[Ale+18] C. Alexandrou u. a.
„$\pi\gamma \to \pi\pi$ transition and the ρ radiative decay width from lattice QCD“.
In: *Phys. Rev. D* 98 (2018), S. 074502.
DOI: 10.1103/PhysRevD.98.074502.
arXiv: 1807.08357 [hep-lat].

[Alt82] G. Altarelli.
„Partons in Quantum Chromodynamics“.
In: *Phys. Rept.* 81 (1982), S. 1–129.
DOI: 10.1016/0370-1573(82)90127-2.

[Ana+16] A. Anastasi u. a.
„Measurement of the $\phi \to \pi^0 e^+ e^-$ transition form factor with the KLOE detector“.
In: *Phys. Lett. B* 757 (2016), S. 362–367.
DOI: 10.1016/j.physletb.2016.04.015.
arXiv: 1601.06565 [hep-ex].

[Ani+65] V.V. Anisovich u. a.
„Electromagnetic decays of mesons in the quark model“.
In: *Phys. Lett.* 16 (1965), S. 194–195.
DOI: 10.1016/0031-9163(65)90184-8.

[Arn+09] R. Arnaldi u. a.
„Study of the electromagnetic transition form-factors in $\eta \to \mu^+\mu^-\gamma$ and $\omega \to \mu^+\mu^-\pi^0$ decays with NA60“.
In: *Phys. Lett. B* 677 (2009), S. 260–266.
DOI: 10.1016/j.physletb.2009.05.029.
arXiv: 0902.2547 [hep-ph].

[Arn+16] R. Arnaldi u. a.
„Precision study of the $\eta \to \mu^+\mu^-\gamma$ and $\omega \to \mu^+\mu^-\pi^0$ electromagnetic transition form-factors and of the $\rho \to \mu^+\mu^-$ line shape in NA60“.
In: *Phys. Lett. B* 757 (2016), S. 437–444.
DOI: 10.1016/j.physletb.2016.04.013.
arXiv: 1608.07898 [hep-ex].

[Bab+15] D. Babusci u. a.
„Study of the Dalitz decay $\phi \to \eta e^+e^-$ with the KLOE detector“.
In: *Phys. Lett. B* 742 (2015), S. 1–6.
DOI: 10.1016/j.physletb.2015.01.011.
arXiv: 1409.4582 [hep-ex].

[BD65] J. D. Bjorken und S. D. Drell.
Relativistic Quantum Mechanics.
International Series In Pure and Applied Physics.
New York: McGraw-Hill, 1965.
ISBN: 978-0-07-005493-6.

[BE14] J. Bijnens und G. Ecker.
„Mesonic low-energy constants“.
In: *Ann. Rev. Nucl. Part. Sci.* 64 (2014), S. 149–174.
DOI: 10.1146/annurev-nucl-102313-025528.
arXiv: 1405.6488 [hep-ph].

[Ben+99] M. Benayoun u. a.
„Radiative decays, nonet symmetry and SU(3) breaking“.
In: *Phys. Rev. D* 59 (1999), S. 114027.
DOI: 10.1103/PhysRevD.59.114027.
arXiv: hep-ph/9902326.

[BGT98] J. Bijnens, P. Gosdzinsky und P. Talavera.
„Chiral corrections to vector meson decay constants“.
In: *Phys. Lett. B* 429 (1998), S. 111–120.
DOI: 10.1016/S0370-2693(98)00452-3.
arXiv: hep-ph/9801418.

[Bha88] R.K. Bhaduri.
Models of the Nucleon: From Quarks to Soliton.
Lecture notes and supplements in physics, Vol.22.
Redwood City, CA u.a.: Addison-Wesley, 1988.
ISBN: 978-0201156737.

[Bir96] M. C. Birse.
„Effective chiral Lagrangians for spin 1 mesons“.
In: *Z. Phys. A* 355 (1996), S. 231–246.
DOI: 10.1007/s002180050105.
arXiv: hep-ph/9603251.

[BJ69] J. S. Bell und R. Jackiw.
„A PCAC puzzle: $\pi^0 \to \gamma\gamma$ in the σ model“.
In: *Nuovo Cim.* A60 (1969), S. 47–61.
DOI: 10.1007/BF02823296.

[BK73] E. Byckling und K. Kajantie.
Particle Kinematics.
London u.a.: John Wiley & Sons Ltd., 1973.
ISBN: 978-0471128854.

[BKY85] M. Bando, Taichiro K. und K. Yamawaki.
„On the Vector Mesons as Dynamical Gauge Bosons of Hidden Local Symmetries“.
In: *Nucl. Phys. B* 259 (1985), S. 493–502.
DOI: 10.1016/0550-3213(85)90647-9.

[BKY88] M. Bando, T. Kugo und K. Yamawaki.
„Nonlinear Realization and Hidden Local Symmetries“.
In: *Phys. Rept.* 164 (1988), S. 217–314.
DOI: 10.1016/0370-1573(88)90019-1.

[BL99] Thomas Becher und H. Leutwyler.
„Baryon chiral perturbation theory in manifestly Lorentz invariant form“.
In: *Eur. Phys. J. C* 9 (1999), S. 643–671.
DOI: 10.1007/PL00021673.
arXiv: hep-ph/9901384.

[Blo+69] E. D. Bloom u. a.
„High-Energy Inelastic *e*-*p* Scattering at 6° and 10°“.
In: *Phys. Rev. Lett.* 23 (1969), S. 930–934.
DOI: 10.1103/PhysRevLett.23.930.

[BM05] P. C. Bruns und U.-G. Meißner.
„Infrared regularization for spin-1 fields“.
In: *Eur. Phys. J. C* 40 (2005), S. 97–119.
DOI: 10.1140/epjc/s2005-02118-0.
arXiv: hep-ph/0411223.

[BM65] C. Becchi und Giacomo Morpurgo.
„Test of the Nonrelativistic Quark Model for 'Elementary' Particles: Radiative Decays of Vector Mesons“.
In: *Phys. Rev.* 140 (1965), B687–B690.
DOI: 10.1103/PhysRev.140.B687.

[BMS17] P. Bickert, P. Masjuan und S. Scherer.
„η-η' Mixing in Large-N_c Chiral Perturbation Theory“.
In: *Phys. Rev. D* 95.5 (2017), S. 054023.
DOI: 10.1103/PhysRevD.95.054023.
arXiv: 1612.05473 [hep-ph].

[Bor04] B. Borasoy.
„The Number of colors in the decays $\pi^0, \eta, \eta' \to \gamma\gamma$“.
In: *Eur. Phys. J.* C34 (2004), S. 317–326.
DOI: 10.1140/epjc/s2004-01713-9.
arXiv: hep-ph/0402294 [hep-ph].

[Bre+69] M. Breidenbach u. a.
„Observed Behavior of Highly Inelastic Electron-Proton Scattering“.
In: *Phys. Rev. Lett.* 23 (1969), S. 935–939.
DOI: 10.1103/PhysRevLett.23.935.

[BW01] O. Bär und U.J. Wiese.
„Can one see the number of colors?“
In: *Nucl. Phys. B* 609 (2001), S. 225–246.
DOI: 10.1016/S0550-3213(01)00288-7.
arXiv: hep-ph/0105258.

[Cal+69] C. G. Callan u. a.
„Structure of Phenomenological Lagrangians. II.“
In: *Phys. Rev.* 177 (1969), S. 2247–2250.
DOI: 10.1103/PhysRev.177.2247.

[Cap15] I. Caprini.
„Testing the consistency of the $\omega\pi$ transition form factor with unitarity and analyticity“.
In: *Phys. Rev. D* 92 (2015), S. 014014.
DOI: 10.1103/PhysRevD.92.014014.
arXiv: 1505.05282 [hep-ph].

[CGZ14] Y.-H. Chen, Z.-H. Guo und H.-Q. Zheng.
„Radiative transition processes of light vector resonances in a chiral framework“.
In: *Phys. Rev. D* 90 (2014), S. 034013.
DOI: 10.1103/PhysRevD.90.034013.
arXiv: 1311.3366 [hep-ph].

[Cha+12] S. Chatrchyan u. a.
„Observation of a New Boson at a Mass of 125 GeV with the CMS Experiment at the LHC“.
In: *Phys. Lett. B* 716 (2012), S. 30–61.
DOI: 10.1016/j.physletb.2012.08.021.
arXiv: 1207.7235 [hep-ex].

[CL92] M. Crisafulli und V. Lubicz.
„A lattice study of electromagnetic decays of vector mesons“.
In: *Phys. Lett. B* 278 (1992), S. 323–329.
DOI: 10.1016/0370-2693(92)90201-E.

[Col66] S. Coleman.

„The Invariance of the Vacuum is the Invariance of the World“.
In: *Journal of Mathematical Physics* 7.5 (1966), S. 787–787.
DOI: 10.1063/1.1931207.
eprint: https://doi.org/10.1063/1.1931207.
URL: https://doi.org/10.1063/1.1931207.

[CW80] S. R. Coleman und E. Witten.
„Chiral Symmetry Breakdown in Large N Chromodynamics“.
In: *Phys. Rev. Lett.* 45 (1980), S. 100.
DOI: 10.1103/PhysRevLett.45.100.

[CWZ69] S. R. Coleman, J. Wess und B. Zumino.
„Structure of phenomenological Lagrangians. I.“
In: *Phys. Rev.* 177 (1969), S. 2239–2247.
DOI: 10.1103/PhysRev.177.2239.

[Dan+15] I.V. Danilkin u. a.
„Dispersive analysis of $\omega/\phi \to 3\pi,\pi\gamma^*$“.
In: *Phys. Rev. D* 91 (2015), S. 094029.
DOI: 10.1103/PhysRevD.91.094029.
arXiv: 1409.7708 [hep-ph].

[DDV17] I. Danilkin, O. Deineka und M. Vanderhaeghen.
„Theoretical analysis of the $\gamma\gamma \to \pi^0\eta$ process“.
In: *Phys. Rev. D* 96 (2017), S. 114018.
DOI: 10.1103/PhysRevD.96.114018.
arXiv: 1709.08595 [hep-ph].

[DGH92] J. F. Donoghue, E. Golowich und Barry R. Holstein.
„Dynamics of the standard model“.
In: *Camb. Monogr. Part. Phys. Nucl. Phys. Cosmol.* 2 (1992). [Camb. Monogr. Part. Phys. Nucl. Phys. Cosmol.35(2014)], S. 1–540.
DOI: 10.1017/CBO9780511524370.

[DGS10] D. Djukanovic, J. Gegelia und S. Scherer.
„Path integral quantization for massive vector bosons“.
In: *Int. J. Mod. Phys. A* 25 (2010), S. 3603–3619.
DOI: 10.1142/S0217751X10049736.
arXiv: 1001.1077 [hep-th].

[Div+12] G.M. de Divitiis u. a.
„Isospin breaking effects due to the up-down mass difference in Lattice QCD“.
In: *JHEP* 04 (2012), S. 124.
DOI: 10.1007/JHEP04(2012)124.
arXiv: 1110.6294 [hep-lat].

[Dju+09] D. Djukanovic u. a.
„Complex-mass renormalization in chiral effective field theory“.

In: *Phys. Lett. B* 680 (2009), S. 235–238.
DOI: 10.1016/j.physletb.2009.08.068.
arXiv: 0902.4347 [hep-ph].

[Dur87] J.W. Durso.
„Vector Dominance and Radiative Meson Decays“.
In: *Phys. Lett. B* 184 (1987), S. 348–352.
DOI: 10.1016/0370-2693(87)90178-X.

[DV80] P. Di Vecchia und G. Veneziano.
„Chiral dynamics in the large N Limit“.
In: *Nucl. Phys.* B171 (1980), S. 253–272.
DOI: 10.1016/0550-3213(80)90370-3.

[Dzh+81] R.I. Dzhelyadin u. a.
„Study of the electromagnetic transition form-factor in $\omega \to \pi^0\mu^+\mu^-$ decay“.
In: *Phys. Lett. B* 102 (1981), S. 296–298.
DOI: 10.1016/0370-2693(81)90879-0.

[Eck+89a] G. Ecker u. a.
„Chiral Lagrangians for Massive Spin 1 Fields“.
In: *Phys. Lett. B* 223 (1989), S. 425–432.
DOI: 10.1016/0370-2693(89)91627-4.

[Eck+89b] G. Ecker u. a.
„The Role of Resonances in Chiral Perturbation Theory“.
In: *Nucl. Phys. B* 321 (1989), S. 311–342.
DOI: 10.1016/0550-3213(89)90346-5.

[FGL73] H. Fritzsch, M. Gell-Mann und H. Leutwyler.
„Advantages of the Color Octet Gluon Picture“.
In: *Phys. Lett. B* 47 (1973), S. 365–368.
DOI: 10.1016/0370-2693(73)90625-4.

[Fuc+03] T. Fuchs u. a.
„Renormalization of relativistic baryon chiral perturbation theory and power counting“.
In: *Phys. Rev. D* 68 (2003), S. 056005.
DOI: 10.1103/PhysRevD.68.056005.
arXiv: hep-ph/0302117.

[Gel64] M. Gell-Mann.
„A Schematic Model of Baryons and Mesons“.
In: *Phys. Lett.* 8 (1964), S. 214–215.
DOI: 10.1016/S0031-9163(64)92001-3.

[Geo90] H. Georgi.
„Vector Realization of Chiral Symmetry“.
In: *Nucl. Phys. B* 331 (1990), S. 311–330.

DOI: 10.1016/0550-3213(90)90210-5.

[GJ99] J. Gegelia und G. Japaridze.
„Matching heavy particle approach to relativistic theory".
In: *Phys. Rev. D* 60 (1999), S. 114038.
DOI: 10.1103/PhysRevD.60.114038.
arXiv: hep-ph/9908377.

[GKS84] H. Gomm, O. Kaymakcalan und J. Schechter.
„Anomalous Spin 1 Meson Decays From the Gauged Wess-Zumino Term".
In: *Phys. Rev. D* 30 (1984), S. 2345–2355.
DOI: 10.1103/PhysRevD.30.2345.

[GL82] J. Gasser und H. Leutwyler.
„Quark Masses".
In: *Phys. Rept.* 87 (1982), S. 77–169.
DOI: 10.1016/0370-1573(82)90035-7.

[GL84] J. Gasser und H. Leutwyler.
„Chiral Perturbation Theory to One Loop".
In: *Annals Phys.* 158 (1984), S. 142–210.
DOI: 10.1016/0003-4916(84)90242-2.

[GL85] J. Gasser und H. Leutwyler.
„Low energy expansion of meson form factors".
In: *Nucl. Phys.* B250 (1985), S. 517–538.
DOI: 10.1016/0550-3213(85)90493-6.

[Gla63] S.L. Glashow.
„ϕ-ω Mixing".
In: *Phys. Rev. Lett.* 11 (1963), S. 48–49.
DOI: 10.1103/PhysRevLett.11.48.

[Gol61] J. Goldstone.
„Field Theories with Superconductor Solutions".
In: *Nuovo Cim.* 19 (1961), S. 154–164.
DOI: 10.1007/BF02812722.

[GSS88] J. Gasser, M.E. Sainio und A. Svarc.
„Nucleons with Chiral Loops".
In: *Nucl. Phys. B* 307 (1988), S. 779–853.
DOI: 10.1016/0550-3213(88)90108-3.

[GSW62a] M. Gell-Mann, D. Sharp und W.G. Wagner.
„Decay rates of neutral mesons".
In: *Phys. Rev. Lett.* 8 (1962), S. 261–262.
DOI: 10.1103/PhysRevLett.8.261.

[GSW62b] J. Goldstone, A. Salam und S. Weinberg.

„Broken Symmetries“.
In: *Phys. Rev.* 127 (1962), S. 965–970.
DOI: 10.1103/PhysRev.127.965.

[Guo+15] X.-K. Guo u. a.
„Scrutinizing the η-η' mixing, masses and pseudoscalar decay constants in the framework of U(3) chiral effective field theory“.
In: *JHEP* 06 (2015), S. 175.
DOI: 10.1007/JHEP06(2015)175.
arXiv: 1503.02248 [hep-ph].

[GW73a] D. J. Gross und F. Wilczek.
„Ultraviolet Behavior of Nonabelian Gauge Theories“.
In: *Phys. Rev. Lett.* 30 (1973), S. 1343–1346.
DOI: 10.1103/PhysRevLett.30.1343.

[GW73b] D.J. Gross und F. Wilczek.
„Asymptotically Free Gauge Theories. I“.
In: *Phys. Rev. D* 8 (1973), S. 3633–3652.
DOI: 10.1103/PhysRevD.8.3633.

[GY02] A. Gokalp und O. Yilmaz.
„The Coupling constants $g_{\rho\pi\gamma}$ and $g_{\omega\pi\gamma}$ as derived from QCD sum rules“.
In: *Eur. Phys. J. C* 24 (2002), S. 117–120.
DOI: 10.1007/s100520200934.
arXiv: nucl-th/0103033.

[Haj93] O. Hajuj.
„Hidden gauge model and radiative decays“.
In: *Z. Phys. C* 60 (1993), S. 357–360.
DOI: 10.1007/BF01474634.

[Her+97] P. Herrera-Siklody u. a.
„Chiral effective lagrangian in the large-N_C limit: The nonet case“.
In: *Nucl. Phys.* B497 (1997), S. 345–386.
DOI: 10.1016/S0550-3213(97)00260-5.
arXiv: hep-ph/9610549 [hep-ph].

[Her98] P. Herrera-Siklody.
„Matching of $U_L(3) \times U_R(3)$ and $SU_L(3) \times SU_R(3)$ chiral perturbation theories“.
In: *Phys. Lett.* B442 (1998), S. 359–368.
DOI: 10.1016/S0370-2693(98)01279-9.
arXiv: hep-ph/9808218 [hep-ph].

[HKN15] T. Husek, K. Kampf und J. Novotny.
„Radiative corrections to the Dalitz decay $\pi^0 \to e^+e^-\gamma$ revisited“.
In: *Phys. Rev. D* 92 (2015), S. 054027.

DOI: 10.1103/PhysRevD.92.054027.
arXiv: 1504.06178 [hep-ph].

[HL15] T. Husek und S. Leupold.
„Two-hadron saturation for the pseudoscalar–vector–vector correlator and phenomenological applications“.
In: *Eur. Phys. J. C* 75 (2015), S. 586.
DOI: 10.1140/epjc/s10052-015-3778-x.
arXiv: 1507.00478 [hep-ph].

[HY03] M. Harada und K. Yamawaki.
„Hidden local symmetry at loop: A New perspective of composite gauge boson and chiral phase transition“.
In: *Phys. Rept.* 381 (2003), S. 1–233.
DOI: 10.1016/S0370-1573(03)00139-X.
arXiv: hep-ph/0302103.

[Iiz66] J. Iizuka.
„Systematics and phenomenology of meson family“.
In: *Prog. Theor. Phys. Suppl.* 37 (1966), S. 21–34.
DOI: 10.1143/PTPS.37.21.

[IZ80] C. Itzykson und J.B. Zuber.
Quantum Field Theory.
International Series In Pure and Applied Physics.
New York: McGraw-Hill, 1980.
ISBN: 978-0-486-44568-7.

[JGW14] S.-Z. Jiang, F.-J. Ge und Q. Wang.
„Full pseudoscalar mesonic chiral Lagrangian at p^6 order under the unitary group“.
In: *Phys. Rev. D* 89 (2014), S. 074048.
DOI: 10.1103/PhysRevD.89.074048.
arXiv: 1401.0317 [hep-ph].

[JM91] E. E. Jenkins und A. V. Manohar.
„Baryon chiral perturbation theory using a heavy fermion Lagrangian“.
In: *Phys. Lett. B* 255 (1991), S. 558–562.
DOI: 10.1016/0370-2693(91)90266-S.

[KKW96] F. Klingl, Norbert Kaiser und W. Weise.
„Effective Lagrangian approach to vector mesons, their structure and decays“.
In: *Z. Phys. A* 356 (1996), S. 193–206.
DOI: 10.1007/s002180050167.
arXiv: hep-ph/9607431.

[KL] R. Kaiser und H. Leutwyler.
„Pseudoscalar decay constants at large N_C“.

In: *Nonperturbative methods in quantum field theory. Proceedings, Workshop, Adelaide, Australia, February 2-13, 1988*,
S. 15–29.
arXiv: hep-ph/9806336 [hep-ph].

[KL00] R. Kaiser und H. Leutwyler.
„Large N_C in chiral perturbation theory“.
In: *Eur. Phys. J.* C17 (2000), S. 623–649.
DOI: 10.1007/s100520000499.
arXiv: hep-ph/0007101 [hep-ph].

[KLZ67] N.M. Kroll, T.D. Lee und B. Zumino.
„Neutral Vector Mesons and the Hadronic Electromagnetic Current“.
In: *Phys. Rev.* 157 (1967), S. 1376–1399.
DOI: 10.1103/PhysRev.157.1376.

[KMU18] D. Kimura, T. Morozumi und H. Umeeda.
„Analysis of Dalitz decays with intrinsic parity violating interactions in resonance chiral perturbation theory“.
In: *PTEP* 2018.12 (2018), 123B02.
DOI: 10.1093/ptep/pty122.
arXiv: 1609.09235 [hep-ph].

[KNT07] K. Kampf, J. Novotny und J. Trnka.
„On different lagrangian formalisms for vector resonances within chiral perturbation theory“.
In: *Eur. Phys. J. C* 50 (2007), S. 385–403.
DOI: 10.1140/epjc/s10052-006-0171-9.
arXiv: hep-ph/0608051.

[Köp74] G. Köpp.
„Dispersion calculation of the transition form factor $F_{\pi\omega\gamma}(t)$ with cut contributions“.
In: *Phys. Rev. D* 10 (3 Aug. 1974), S. 932–940.
DOI: 10.1103/PhysRevD.10.932.
URL: https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.10.932.

[Kra20] Ardit Krasniqi.
„The Vector-Meson Pseudoscalar-Meson Photon Interaction“.
Magisterarb. Johannes Gutenberg-Universität, Mainz, 2020.

[KRS84] O. Kaymakcalan, S. Rajeev und J. Schechter.
„Nonabelian Anomaly and Vector Meson Decays“.
In: *Phys. Rev. D* 30 (1984), S. 594.
DOI: 10.1103/PhysRevD.30.594.

[KS85] O. Kaymakcalan und J. Schechter.
„Chiral Lagrangian of Pseudoscalars and Vectors“.
In: *Phys. Rev. D* 31 (1985), S. 1109–1113.

DOI: 10.1103/PhysRevD.31.1109.

[KW55] N. M. Kroll und W. Wada.
„Internal pair production associated with the emission of high-energy gamma rays“.
In: *Phys. Rev.* 98 (1955), S. 1355–1359.
DOI: 10.1103/PhysRev.98.1355.

[Kyr69] E. Kyriakopoulos.
„Vector-Meson Interaction Hamiltonian“.
In: *Phys. Rev.* 183 (1969), S. 1318–1323.
DOI: 10.1103/PhysRev.183.1318.

[Kyr72] E. Kyriakopoulos.
„Tensor Approach to Spin-One Mesons. II. Quantization“.
In: *Phys. Rev. D* 6 (1972), S. 2202–2207.
DOI: 10.1103/PhysRevD.6.2202.

[Lan85] L.G. Landsberg.
„Electromagnetic Decays of Light Mesons“.
In: *Phys. Rept.* 128 (1985), S. 301–376.
DOI: 10.1016/0370-1573(85)90129-2.

[Leb99] R. F. Lebed.
„Phenomenology of large N_C QCD“.
In: *Czech. J. Phys.* 49 (1999). Hrsg. von J. Adam, P. Bydzovsky und J. Mares, S. 1273–1306.
DOI: 10.1023/A:1022820227262.
arXiv: nucl-th/9810080.

[Leu94] H. Leutwyler.
„On the foundations of chiral perturbation theory“.
In: *Annals Phys.* 235 (1994), S. 165–203.
DOI: 10.1006/aphy.1994.1094.
arXiv: hep-ph/9311274.

[Leu96] H. Leutwyler.
„Implications of η-η' mixing for the decay $\eta \to 3\pi$“.
In: *Phys. Lett.* B374 (1996), S. 181–185.
DOI: 10.1016/0370-2693(96)00167-0.
arXiv: hep-ph/9601236 [hep-ph].

[Leu98] H. Leutwyler.
„On the $1/N$ expansion in chiral perturbation theory“.
In: *Nucl. Phys. Proc. Suppl.* 64 (1998), S. 223–231.
DOI: 10.1016/S0920-5632(97)01065-7.
arXiv: hep-ph/9709408 [hep-ph].

[LL08] M.F.M. Lutz und S. Leupold.
„On the radiative decays of light vector and axial-vector mesons“.

In: *Nucl. Phys. A* 813 (2008), S. 96–170.
DOI: 10.1016/j.nuclphysa.2008.09.005.
arXiv: 0801.3821 [nucl-th].

[LR80] D.B. Lichtenberg und S. P. Rosen, Hrsg.
Developments in the Quark Theory of Hadrons. Vol. 1.
Nonantum, Usa: Hadronic Press, 1980.
ISBN: 978-0911767360.

[LSZ55] H. Lehmann, K. Symanzik und W. Zimmermann.
„On the formulation of quantized field theories“.
In: *Nuovo Cim.* 1 (1955), S. 205–225.
DOI: 10.1007/BF02731765.

[Man98] Aneesh V. Manohar.
„Large N QCD“.
In: *Les Houches Summer School in Theoretical Physics, Session 68: Probing the Standard Model of Particle Interactions*.
Feb. 1998,
S. 1091–1169.
arXiv: hep-ph/9802419.

[Mei88] U.-G. Meißner.
„Low-Energy Hadron Physics from Effective Chiral Lagrangians with Vector Mesons“.
In: *Phys. Rept.* 161 (1988), S. 213–361.
DOI: 10.1016/0370-1573(88)90090-7.

[MG84] A. Manohar und H. Georgi.
„Chiral Quarks and the Nonrelativistic Quark Model“.
In: *Nucl. Phys. B* 234 (1984), S. 189–212.
DOI: 10.1016/0550-3213(84)90231-1.

[Mou95] B. Moussallam.
„Chiral sum rules for parameters of the $\mathcal{L}_{(6)}^{WZ}$ parameters and its application to π^0, η, η' decays“.
In: *Phys. Rev.* D51 (1995), S. 4939–4949.
DOI: 10.1103/PhysRevD.51.4939.
arXiv: hep-ph/9407402 [hep-ph].

[MP78] W. J. Marciano und H. Pagels.
„Quantum Chromodynamics“.
In: *Phys. Rept.* 36 (1978), S. 137–276.
DOI: 10.1016/0370-1573(78)90208-9.

[MS16] P. Masjuan und P. Sanchez-Puertas.
„η and η' decays into lepton pairs“.
In: *JHEP* 08 (2016), S. 108.
DOI: 10.1007/JHEP08(2016)108.

arXiv: 1512.09292 [hep-ph].

[MW19] H. B. Meyer und H. Wittig. „Lattice QCD and the anomalous magnetic moment of the muon“. In: *Prog. Part. Nucl. Phys.* 104 (2019), S. 46–96. DOI: 10.1016/j.ppnp.2018.09.001. arXiv: 1807.09370 [hep-lat].

[Nei11] A. Neiser. „Effective field theories for vector particles and constraint analysis“. Magisterarb. Johanndes Gutenberg-Universität Mainz, 2011.

[NKS12] F. Niecknig, B. Kubis und S. P. Schneider. „Dispersive analysis of $\omega \to 3\pi$ and $\phi \to 3\pi$ decays“. In: *Eur. Phys. J. C* 72 (2012), S. 2014. DOI: 10.1140/epjc/s10052-012-2014-1. arXiv: 1203.2501 [hep-ph].

[Noe18] E. Noether. „Invariant Variation Problems“. In: *Gott. Nachr.* 1918 (1918), S. 235–257. DOI: 10.1080/00411457108231446. arXiv: physics/0503066.

[ODo81] P. J. O'Donnell. „Radiative decays of mesons“. In: *Rev. Mod. Phys.* 53 (1981), S. 673–685. DOI: 10.1103/RevModPhys.53.673.

[Oku63] S. Okubo. „φ meson and unitary symmetry model“. In: *Phys. Lett.* 5 (1963), S. 165–168. DOI: 10.1016/S0375-9601(63)92548-9.

[Owe+15] B. J. Owen u. a. „Transition of $\rho{\to}\pi\gamma$ in lattice QCD“. In: *Phys. Rev. D* 92 (2015), S. 034513. DOI: 10.1103/PhysRevD.92.034513. arXiv: 1505.02876 [hep-lat].

[Pat+16] C. Patrignani u. a. „Review of Particle Physics“. In: *Chin. Phys. C* 40.10 (2016), S. 100001. DOI: 10.1088/1674-1137/40/10/100001.

[Pol73] H. D. Politzer. „Reliable Perturbative Results for Strong Interactions?“ In: *Phys. Rev. Lett.* 30 (1973), S. 1346–1349. DOI: 10.1103/PhysRevLett.30.1346.

[RPP03] P.D. Ruiz-Femenia, A. Pich und J. Portoles.
„Odd intrinsic parity processes within the resonance effective theory of QCD“.
In: *JHEP* 07 (2003), S. 003.
DOI: 10.1088/1126-6708/2003/07/003.
arXiv: hep-ph/0306157.

[Rus09] A. Rusetsky.
„Isospin symmetry breaking“.
In: *PoS* CD09 (2009), S. 071.
DOI: 10.22323/1.086.0071.
arXiv: 0910.5151 [hep-ph].

[Ryd96] L.H. Ryder.
Quantum Field Theory.
Cambridge: Cambridge University Press, 1996.
ISBN: 978-0-521-47814-4, 978-1-139-63239-3, 978-0-521-23764-2.

[Sak60] J.J. Sakurai.
„Theory of strong interactions“.
In: *Annals Phys.* 11 (1960), S. 1–48.
DOI: 10.1016/0003-4916(60)90126-3.

[Sak69] J.J. Sakurai.
Currents and Mesons.
The University of Chicago Press, 1969.
ISBN: 978-0-226-73383-8.

[Sch03] S. Scherer.
„Introduction to chiral perturbation theory“.
In: *Adv. Nucl. Phys.* 27 (2003), S. 277–538.
arXiv: hep-ph/0210398 [hep-ph].

[Sch67] J. S. Schwinger.
„Chiral dynamics“.
In: *Phys. Lett. B* 24 (1967), S. 473–476.
DOI: 10.1016/0370-2693(67)90277-8.

[SDE15] C. J. Shultz, J. J. Dudek und R. G. Edwards.
„Excited meson radiative transitions from lattice QCD using variationally optimized operators“.
In: *Phys. Rev. D* 91.11 (2015), S. 114501.
DOI: 10.1103/PhysRevD.91.114501.
arXiv: 1501.07457 [hep-lat].

[SGS05] M. R. Schindler, J. Gegelia und S. Scherer.
„Electromagnetic form factors of the nucleon in chiral perturbation theory including vector mesons“.
In: *Eur. Phys. J. A* 26 (2005), S. 1–5.

DOI: `10.1140/epja/i2005-10145-8`.
arXiv: `nucl-th/0509005`.

[SKN12] Sebastian P. Schneider, Bastian Kubis und Franz Niecknig.
„The $\omega \to \pi^0\gamma^*$ and $\phi \to \pi^0\gamma^*$ transition form factors in dispersion theory“.
In: *Phys. Rev. D* 86 (2012), S. 054013.
DOI: `10.1103/PhysRevD.86.054013`.
arXiv: `1206.3098 [hep-ph]`.

[SS12] S. Scherer und M. R. Schindler.
„A Primer for Chiral Perturbation Theory“.
In: *Lect. Notes Phys.* 830 (2012), S. 1–338.
DOI: `10.1007/978-3-642-19254-8`.

[t H74] Gerard ’t Hooft.
„A Planar Diagram Theory for Strong Interactions“.
In: *Nucl. Phys.* B72 (1974), S. 461.
DOI: `10.1016/0550-3213(74)90154-0`.

[t H76] Gerard ’t Hooft.
„Symmetry Breaking Through Bell-Jackiw Anomalies“.
In: *Phys. Rev. Lett.* 37 (1976), S. 8–11.
DOI: `10.1103/PhysRevLett.37.8`.

[Tan+18] M. Tanabashi u. a.
„Review of Particle Physics“.
In: *Phys. Rev. D* 98 (2018), S. 030001.
DOI: `10.1103/PhysRevD.98.030001`.

[TL10] C. Terschlüsen und S. Leupold.
„Electromagnetic transition form factors of light vector mesons“.
In: *Phys. Lett. B* 691 (2010), S. 191–201.
DOI: `10.1016/j.physletb.2010.06.033`.
arXiv: `1003.1030 [hep-ph]`.

[TLL12] C. Terschlüsen, S. Leupold und M.F.M. Lutz.
„Electromagnetic Transitions in an Effective Chiral Lagrangian with the η' and Light Vector Mesons“.
In: *Eur. Phys. J. A* 48 (2012), S. 190.
DOI: `10.1140/epja/i2012-12190-6`.
arXiv: `1204.4125 [hep-ph]`.

[Ven79] G. Veneziano.
„U(1) Without Instantons“.
In: *Nucl. Phys.* B159 (1979), S. 213–224.
DOI: `10.1016/0550-3213(79)90332-8`.

[VW84] C. Vafa und E. Witten.
„Restrictions on Symmetry Breaking in Vector-Like Gauge Theories“.

In: *Nucl. Phys. B* 234 (1984), S. 173–188.
DOI: 10.1016/0550-3213(84)90230-X.

[War50] J. C. Ward.
„An Identity in Quantum Electrodynamics“.
In: *Phys. Rev.* 78 (1950), S. 182.
DOI: 10.1103/PhysRev.78.182.

[Wei05] S. Weinberg.
The Quantum theory of fields. Vol. 1: Foundations.
Cambridge: Cambridge University Press, 2005.
ISBN: 978-0-521-67053-1, 978-0-511-25204-4.

[Wei68] S. Weinberg.
„Nonlinear realizations of chiral symmetry“.
In: *Phys. Rev.* 166 (1968), S. 1568–1577.
DOI: 10.1103/PhysRev.166.1568.

[Wei73] S. Weinberg.
„Nonabelian Gauge Theories of the Strong Interactions“.
In: *Phys. Rev. Lett.* 31 (1973), S. 494–497.
DOI: 10.1103/PhysRevLett.31.494.

[Wei79] S. Weinberg.
„Phenomenological Lagrangians“.
In: *Physica* A96.1-2 (1979), S. 327–340.
DOI: 10.1016/0378-4371(79)90223-1.

[Wit08] H. Wittig.
5 QCD on the Lattice: Datasheet from Landolt-Börnstein - Group I Elementary Particles, Nuclei and Atoms · Volume 21A: “Theory and Experiments” in SpringerMaterials.
Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2008.
DOI: 10.1007/978-3-540-74203-6_5.

[Wit79a] E. Witten.
„Baryons in the $1/n$ Expansion“.
In: *Nucl. Phys.* B160 (1979), S. 57–115.
DOI: 10.1016/0550-3213(79)90232-3.

[Wit79b] E. Witten.
„Current Algebra Theorems for the U(1) Goldstone Boson“.
In: *Nucl. Phys.* B156 (1979), S. 269–283.
DOI: 10.1016/0550-3213(79)90031-2.

[Wol16] Inc. Wolfram Research.
Mathematica, Version 11.0.
Champaign, IL, 2016.

[Wol86] R.M. Woloshyn.

„Vector meson radiative decay in lattice QCD“.
In: *Z. Phys. C* 33 (1986), S. 121–124.
DOI: 10.1007/BF01410459.

[WZ67] J. Wess und Bruno Zumino.
„Lagrangian method for chiral symmetries“.
In: *Phys. Rev.* 163 (1967), S. 1727–1735.
DOI: 10.1103/PhysRev.163.1727.

[WZ71] J. Wess und B. Zumino.
„Consequences of anomalous Ward identities“.
In: *Phys. Lett. B* 37 (1971), S. 95–97.
DOI: 10.1016/0370-2693(71)90582-X.

[Zei06] E. Zeidler.
Quantum field theory. I: Basics in mathematics and physics.
Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2006.
ISBN: 978-3-540-34764-4.

[ZHY98] S.-L. Zhu, W.Y.P. Hwang und Z.-S. Yang.
„Electromagnetic decay of vector mesons as derived from QCD sum rules“.
In: *Phys. Lett. B* 420 (1998), S. 8–12.
DOI: 10.1016/S0370-2693(97)01524-4.
arXiv: nucl-th/9802043.

[Zwe64] G. Zweig.
„An SU(3) model for strong interaction symmetry and its breaking. V. 2“.
In:
Developments in the Quark Theory of Hadrons. Vol 1.
1964,
S. 22–101.

Appendices

A. Handreichungen - Theoretische Grundlagen

A.1. Die Gell-Mann Matrizen

Die acht hermiteschen, spurlosen Gell-Mann-Matrizen sind Erzeuger der Gruppe $SU(3)$, sie werden explizit in den folgenden Matrizen dargestellt

$$\begin{aligned}
\lambda_1 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} , \quad \lambda_2 = \begin{pmatrix} 0 & i & 0 \\ -i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} , \quad \lambda_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} , \\
\lambda_4 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} , \quad \lambda_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 \end{pmatrix} , \quad \lambda_6 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} , \\
\lambda_7 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & i \\ 0 & -i & 0 \end{pmatrix} , \quad \lambda_8 = \sqrt{\tfrac{1}{3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} .
\end{aligned} \tag{A.1}$$

Die neunte Gell-Mann-Matrix ist gegeben durch

$$\lambda_0 = \sqrt{\frac{2}{3}} \mathbb{1} . \tag{A.2}$$

Relevante Eigenschaften der Gell-Mann-Matrizen lassen sich beispielsweise in [SS12] oder [IZ80] nachschlagen.

A.2. Die Bestimmung des η-η'-Mischungswinkels

Die Darstellungen in diesem Abschnitt orientieren sich an den Vorgaben in [BMS17] und sind auf die Rechnungen bis NLO in dieser Dissertation angepasst. Ein Superskript (1) einer Größe $A^{(1)}$ zeigt an, dass diese inklusive von Korrekturen in NLO ist. Die Singulett- und Oktett-Felder η_1 und η_8 seien in folgendem Tupel angeordnet

$$\eta_A = \begin{pmatrix} \eta_8 \\ \eta_1 \end{pmatrix} . \tag{A.3}$$

Unter Verwendung von η_A lässt sich die zugehörige allgemeinst mögliche Lagrange-Dichte in NNLO wie folgt schreiben,

$$\mathcal{L}_{\text{eff}} = \frac{1}{2}\partial_\mu \eta_A \mathcal{K}_A \partial^\mu \eta_A - \frac{1}{2}\eta_A^{\mathrm{T}} \mathcal{M}_A^2 \eta_A + \frac{1}{2}\Box\eta_A^{\mathrm{T}} \mathcal{C}_A \Box\eta_A \ , \tag{A.4}$$

mit der kinetischen Matrix $\mathcal{K}_A$, die die Renormierung in NLO anzeigt, der Massen-Matrix $\mathcal{M}_A$, und die Matrix $\mathcal{C}_A$ gibt eine notwendige Renormierung in NNLO an. Sollte Gleichung (A.4) nur in führender Ordnung betrachtet werden, so müssten die folgenden Ersetzungen durchgeführt werden

$$\mathcal{K}_A \mapsto \mathbb{1} \ , \quad \mathcal{M}_A^2 \mapsto \mathcal{M}_A^{2(0)} \ , \quad \mathcal{C}_A \mapsto 0 \ . \tag{A.5}$$

Im gleichen Sinne gilt für eine Betrachtung in NLO

$$\mathcal{K}_A \mapsto \mathcal{K}_A \ , \quad \mathcal{M}_A^2 \mapsto \mathcal{M}_A^{2(1)} \ , \quad \mathcal{C}_A \mapsto 0 \ . \tag{A.6}$$

Da in dieser Dissertation in letzterem Fall gearbeitet wird, ist der erste Schritt eine Diagonalisierung der kinetischen Matrix $\mathcal{K}_A$ mittels der Redefinition der Felder

$$\eta_A = \sqrt{Z}\eta_B \ , \tag{A.7}$$

sodass

$$\sqrt{Z}^{\mathrm{T}} \mathcal{K}_A \sqrt{Z} = \mathbb{1} \ . \tag{A.8}$$

Dabei gilt für die kinetische Matrix

$$\mathcal{K}_A = \begin{pmatrix} 1+\delta_8^{(1)} & \delta_{81}^{(1)} \\ \delta_{81}^{(1)} & 1+\delta_1^{(1)} \end{pmatrix} \tag{A.9}$$

und somit folgt für $\sqrt{Z}$

$$\sqrt{Z} = \begin{pmatrix} 1-\frac{1}{2}\delta_8^{(1)} & \frac{1}{2}\delta_{81}^{(1)} \\ \frac{1}{2}\delta_{81}^{(1)} & 1-\frac{1}{2}\delta_1^{(1)} \end{pmatrix} \ , \tag{A.10}$$

mit den folgenden Werten für die $\delta_i^{(1)}$:

$$\begin{aligned} \delta_8^{(1)} &= 8\frac{4M_K^2 - M_\pi^2}{3F^2} L_5 \ , \\ \delta_1^{(1)} &= 8\frac{2M_K^2 + M_\pi^2}{3F^2} L_5 + \Lambda_1 \ , \\ \delta_{81}^{(1)} &= -16\sqrt{2}\frac{M_K^2 - M_\pi^2}{3F^2} L_5 \ . \end{aligned} \tag{A.11}$$

Gleichzeitig ist ein Übergang der Massen-Matrix $\mathcal{M}_B^2 = \sqrt{Z}^{\mathrm{T}} \mathcal{M}_A^2 \sqrt{Z}$ aufgrund der Renormierung der Felder mit

$$\mathcal{M}_B^2 = \begin{pmatrix} M_8^2 & M_{81}^2 \\ M_{81}^2 & M_1^2 \end{pmatrix} \tag{A.12}$$

zu beachten. In den folgenden Gleichungen seien die Superskripte (1) der Übersicht wegen unterdrückt. Gegeben sind die transformierten Massen durch die Gleichungen

$$\begin{aligned} M_8^2 =& \mathring{M}_8^2 (1-\delta_8) + \Delta M_8^2 + \mathring{M}_{81}^2 (-\delta_{81}) \ , \\ M_1^2 =& \left(M_0^2 + \mathring{M}_1^2\right)(1-\delta_1) + \mathring{M}_1^2 + \Delta M_1^2 + \mathring{M}_{81}^2 (-\delta_{81}) \ , \\ M_{81}^2 =& \mathring{M}_{81}^2 \left(1 - \frac{1}{2}\delta_8 - \frac{1}{2}\delta_1\right) + \Delta M_{81}^2 + \mathring{M}_8^2 \left(-\frac{1}{2}\delta_{81}\right) \\ &+ \left(M_0^2 + \mathring{M}_1^2\right)\left(-\frac{1}{2}\delta_{81}\right) \end{aligned} \tag{A.13}$$

und die ihrer zugehörigen Korrekturterme sind

$$\begin{aligned} \Delta M_8^2 &= 16 \frac{8M_K^4 - 8M_K^2 M_\pi^2 + 3M_\pi^4}{3F_\pi^2} L_8 \ , \\ \Delta M_1^2 &= 16 \frac{8M_K^4 - 4M_K^2 M_\pi^2 + 3M_\pi^4}{3F_\pi^2} L_8 + \frac{2\Lambda_2}{3}\left(2M_K^2 + M_\pi^2\right) \ , \\ \Delta M_{81}^2 &= -64\sqrt{2} \frac{\left(M_K^2 - M_\pi^2\right) M_K^2}{3F_\pi^2} L_8 - \frac{2\sqrt{2}\Lambda_2}{3}\left(M_K^2 - M_\pi^2\right) \ . \end{aligned} \tag{A.14}$$

Für die Massen in führender Ordnung gilt:

$$\begin{aligned} \mathring{M}_8^2 &= \frac{1}{3}\left(4\mathring{M}_K^2 - \mathring{M}_\pi^2\right) \ , \\ \mathring{M}_1^2 &= \frac{1}{3}\left(2\mathring{M}_K^2 + \mathring{M}_\pi^2\right) \ , \\ \mathring{M}_{81}^2 &= -2\frac{\sqrt{2}}{3}\left(\mathring{M}_K^2 - \mathring{M}_\pi^2\right) \ . \end{aligned} \tag{A.15}$$

Um die physikalischen Eigenzustände der Massen-Matrix zu erhalten, muss im nächsten Schritt die Matrix mittels einer orthogonalen Transformation, einer Drehung charakterisiert durch einen Winkel Θ, diagonalisiert werden,

$$\begin{aligned} \eta_C &= R\eta_B \ , \\ R &= \begin{pmatrix} \cos(\Theta_P) & -\sin(\Theta_P) \\ \sin(\Theta_P) & \cos(\Theta_P) \end{pmatrix} \ , \end{aligned} \tag{A.16}$$

sodass gilt

$$R\mathcal{M}_B^2 R^{\mathrm{T}} = \mathcal{M}_C = \begin{pmatrix} M_\eta^2 & 0 \\ 0 & M_{\eta'}^2 \end{pmatrix} . \tag{A.17}$$

Werden die Renormierungen sukzessive durchgeführt, ergeben sich bei geeignetem Umschreiben für die Mischung der mathematischen in den physikalischen Feldern die Gleichungen (2.66) und (2.67).
Zur Bestimmung des Mischungswinkels Θ_P aus

$$\sin(2\Theta_P) = \frac{2M_{81}^2}{\sqrt{\left(M_8^2 - M_1^2\right)^2 + 4\left(M_{81}^2\right)^2}} \tag{A.18}$$

wird zunächst M_0^2 mit Hilfe der Gleichungen für die physikalische Massen von η und η',

$$M_{\eta'}^2 + M_\eta^2 = M_8^2 + M_1^2 , \tag{A.19}$$

$$M_{\eta'}^2 - M_\eta^2 = \sqrt{\left(M_8^2 - M_1^2\right) + 4\left(M_{81}^2\right)^2} , \tag{A.20}$$

bestimmt. Mit Einsetzen aller Massen M_i^2 in gewünschter Ordnung in Gleichung (A.18) lässt sich dann der Mischungswinkel bestimmen. Für den Mischungswinkel in führender Ordnung ist die entsprechende Formel bereits in [BMS17] angegeben.

A.3. Tabellen

Tabelle A.1.: Transformationseigenschaften der Bausteine der effektiven Lagrange-Dichte. Dabei kennzeichne G Transformationen der chiralen Gruppe, C Ladungskonjugationen und P Paritätstransformationen.

Element	G	C	P
U, u	$V_R U V_L^\dagger, V_R u K^\dagger = K u V_L^\dagger$	U^T, u^T	$U^\dagger, u^\dagger$
$D_\mu U$	$V_R D_\mu U V_L^\dagger$	$D_\mu U^T$	$D^\mu U^\dagger,$
$\hat{V}_\mu, \tilde{V}_\mu$	$K \hat{V}_\mu K^\dagger, V \tilde{V}_\mu V^\dagger = \tilde{V}_\mu$	$-\hat{V}_\mu^T, -\tilde{V}_\mu^T$	$\hat{V}_\mu^\dagger, \tilde{V}_\mu^\dagger$
χ	$V_R \chi V_L^\dagger$	χ^T	$\chi^\dagger$
$f_{R,\mu\nu}$	$V_R f_{R,\mu\nu} V_R^\dagger$	$-\left(f_{R,\mu\nu}\right)^T$	$f_L^{\mu\nu}$
$f_{L,\mu\nu}$	$V_L f_{L,\mu\nu} V_L^\dagger$	$-\left(f_{L,\mu\nu}\right)^T$	$f_R^{\mu\nu}$

Tabelle A.2.: Zählschema für LN_CChPT, geordnet in LN_C, ChPT Zählschema und kombiniertes Zählschema, nach [BMS17]. Ergänzt um die Vektor-Meson-Felder.

Größe	$O(N_C)$	$O(p)$	$O(\delta)$
Impulse p/Ableitungen ∂_μ	1	p	$\delta^{-\frac{1}{2}}$
$1/N_C$	N_C^{-1}	1	δ
Quark-Massen m	1	p^2	δ
Dyn. Felder ϕ_a, $(a = 1, \ldots, 8)$	$\sqrt{N_C}$	1	$\delta^{-\frac{1}{2}}$
Externe Felder l_μ, r_μ	1	p	$\delta^{\frac{1}{2}}$
Externe Felder s, p	1	p^2	δ
Meson-Propagator	1	p^{-2}	δ^{-1}

B. Handreichungen zu $PV\gamma$

B.1. Konstruktion der Lagrange-Dichte

In diesem Abschnitt wird die Konstruktion der invarianten[1] Wechselwirkungs-Lagrange-Dichte für die elektromagnetischen Übergänge eines einzelnen pseudoskalaren in ein Vektor-Meson und vice versa, ergänzend zu den Ausführungen in Abschnitt 3.2 dieser Arbeit vorgestellt. Für eine ausführliche Diskussion von allgemeinen Prinzipien der Konstruktion von Lagrange-Dichten siehe beispielsweise [SS12] oder für eine Inklusion von Vektor-Feldern [Eck+89a].
Vor Beginn der Konstruktion und Prüfung einzelner Terme der Wechselwirkungs-Lagrange-Dichte müssen zunächst diejenigen Vertices festgelegt werden, die innerhalb des Modells beschrieben werden sollen. In Abschnitt 3.2, Abbildung 3.3, sind beide für die Übergänge $PV\gamma$ auftretenden Feynman-Diagramme aufgezeichnet. Da nur das Diagramm der Punktwechselwirkung für die Verwendung des Vektorformalismus einen Beitrag liefert, werden in der Folge die zugehörigen Terme der Lagrange-Dichte innerhalb des Organisationsschemas konstruiert. Am Anfang steht der Term der Lagrange-Dichte in führender Ordnung, zusammengesetzt aus einem einzelnen Vektor-Feld V_μ, dem Feldstärketensor $f_{+\mu\nu}$ sowie dem chiralen Vielbein u_μ für das pseudoskalare Meson, alle innerhalb einer Flavor-Spur $\langle \ldots \rangle$. Demzufolge kann der Term in einer ersten Skizze, ohne vollständige Kontraktion der Lorentz-Indices, die folgende Form annehmen:

$$\left\langle f_{+\mu\nu} V_\rho u_\sigma \right\rangle \tag{B.1}$$

Als erster Schritt bei der Konstruktion eines jeden Terms, ist das Verhalten unter der Paritätstransformation und Ladungskonjugation zu prüfen, sowie die Lorentz-Invarianz zu garantieren (die Eigenschaften der einzelnen Bausteine sind in Appendix A, Tabelle A.1 nachzuschlagen). Im vorliegenden Fall des Terms führender Ordnung weisen V_ρ und $f_{+\mu\nu}$ als Tensoren erster beziehungsweise zweiter Stufe positive, u_σ als Peudotensor erster Stufe allerdings negative Parität auf, zum Ausgleich wird der Epsilon-Tensor $\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$, ein Pseudotensor vierter Stufe, benötigt, um die Invarianz unter Paritätstransformation zu garantieren. Zudem garantiert der Epsilon-Tensor eine vollständige Kontraktion aller Lorentz-Indices und damit die gewünschte Eigenschaft eines Lorentz-Skalars für folgenden Term der Lagrange-Dichte,

$$\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \left\langle f_{+\mu\nu} V_\rho u_\sigma \right\rangle \; . \tag{B.2}$$

[1] Invariant bedeutet in diesem Zusammenhang immer, dass die Lagrange-Dichte ein unter Paritätstransformation wie Ladungskonjugation invarianter Lorentz-Skalar sei.

Für die Ladungskonjugation gilt nun (unter Vernachlässigung des Epsilon-Tensors, der hierauf keinen Einfluss nimmt) mit Ausnutzung der Eigenschaften der Spur

$$\left\langle f_{+\mu\nu} V_\rho u_\sigma \right\rangle \xrightarrow{\mathrm{C}} \left\langle \left(-f_{+\mu\nu}\right)^T \left(-V_\rho\right)^T u_\sigma^T \right\rangle = \left\langle u_\sigma V_\rho f_{+\mu\nu} \right\rangle = \left\langle f_{+\mu\nu} u_\sigma V_\rho \right\rangle \ , \tag{B.3}$$

was zum Erhalt der Invarianz unter Ladungskonjugation auf einen zusätzlichen Antikommutator innerhalb der Spur führt. Somit ergibt sich schlussendlich der Term führender Ordnung mit Kopplungskonstante c_1 in der Wechselwirkungs-Lagrange-Dichte zu

$$\mathcal{L}_{\mathrm{LO}} = c_1 \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \left\langle f_{+\mu\nu} \left\{ V_\rho, u_\sigma \right\} \right\rangle \ . \tag{B.4}$$

Nach Konstruktion des ersten Terms der Lagrange-Dichte führender Ordnung bleibt nun noch zu prüfen, ob noch weitere Kombinationen geeigneter Bausteine passende Terme ergeben. Würde anstelle des gewählten Feldstärketensors $f_{+\mu\nu}$ der Tensor $f_{-\mu\nu}$ Anwendung finden, fiele das chirale Vielbein als separater Baustein für das pseudoskalare Feld weg, da dieses bereits im Feldstärketensor (in der Entwicklung des Bausteins in führender Ordnung) enthalten ist und die gesuchte Lagrange-Dichte in führender Ordnung nur ein pseudoskalares Meson beschreiben soll. Somit ergäbe sich die Struktur

$$\left\langle f_{-\mu\nu} V_\mu \right\rangle \tag{B.5}$$

unter Ladungskonjugation ergäbe sich nun aufgrund der Transformationseigenschaften folgendes Problem,

$$\left\langle f_{-\mu\nu} V_\mu \right\rangle \xrightarrow{\mathrm{C}} \left\langle \left(+f_{-\mu\nu}\right)^T \left(-V_\mu\right)^T \right\rangle = -\left\langle f_{-\mu\nu} V_\mu \right\rangle \ , \tag{B.6}$$

was diesen Term in führender Ordnung gänzlich ausschließt. Weitere Möglichkeiten können entweder aufgrund der Verletzung von Invarianz unter Lorentz-, Paritätstransformationen und Ladungskonjugation ausgeschlossen werden, oder stimmen bis auf eine totale Ableitung mit dem bereits gezeigten Term überein.

Als Nächstes werden die Korrekturen in $1/N_C$ betrachtet. Diese konstruiert man, indem Terme der Lagrange-Dichte führender Ordnung anstelle von einer in zwei Spuren aufgeteilt werden. Die Invarianz unter Parität und Ladungskonjugation sowie die Lorentz-Invarianz wird übernommen (die Aufteilung der Spuren ändern an diesen Eigenschaften nichts). Im vorliegenden Fall (Gleichung (B.4)) ergeben sich bei drei Bausteinen in der Lagrange-Dichte dann insgesamt drei Möglichkeiten, sie in zwei Spuren anzuordnen, der Antikommutator wird dabei aufgrund der zyklischen Eigenschaft der Spur obsolet,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\mathrm{NLO},1/N_C} = {} & c_2 \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \left\langle V_\rho \right\rangle \left\langle f_{+\mu\nu} u_\sigma \right\rangle \\ & + c_3 \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \left\langle f_{+\mu\nu} V_\rho \right\rangle \left\langle u_\sigma \right\rangle \\ & + c_4 \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \left\langle f_{+\mu\nu} \right\rangle \left\langle V_\rho u_\sigma \right\rangle \ . \end{aligned} \tag{B.7}$$

Es verbleiben letztendlich die zu den Korrekturen aufgrund der Quarkmassen zugehörigen Terme. Die Quarkmassen werden mittels der Bausteine $\chi_\pm$ berücksichtigt, welche in die bereits bestehenden Strukturen aus der Lagrange-Dichte führender Ordnung eingefügt werden oder neue Varianten schaffen können. Zunächst wird der Fall betrachtet, dass ein χ_+, welches keine Änderung im Transformationsverhalten unter Parität und Ladungskonjugation zur Folge hat und in der Entwicklung in führender Ordnung kein zusätzliches pseudoskalares Feld enthält, zu den Bausteinen in Gleichung (B.4) hinzugefügt wird. Auf Grundlage von Überlegungen der Kombinatorik erhält man dann für die Anordnung der Bausteine in der Spur (unter Vernachlässigung des weiterhin notwendigen Epsilon-Tensors) die folgenden zwei echt voneinander verschiedenen Möglichkeiten:

$$\begin{aligned}&\left\langle \chi_+ f_{+\mu\nu} \left\{ V_\rho, u_\sigma \right\} \right\rangle \ ,\\ &\left\langle \chi_+ V_\rho f_{+\mu\nu} u_\sigma + \chi_+ u_\sigma f_{+\mu\nu} V_\rho \right\rangle \ .\end{aligned} \tag{B.8}$$

Zusätzlich kann nun über die Hinzunahme des χ_+ und nach Prüfung des nach Ladungskonjugation eingeführten Kommutators für den Term in Gleichung (B.5) als dritten Baustein die folgende Variante der Bausteine berücksichtigt werden

$$i \left\langle f_{-\mu\nu} \left[\partial_\rho V_\sigma, \chi_+ \right] \right\rangle \ . \tag{B.9}$$

An dieser Stelle ist zu beachten, dass zur Garantie reeller Beiträge in der Lagrange-Dichte nach Entwicklung des Bausteins $f_{-\mu\nu}$ in den pseudoskalaren Feldern, vergleiche dazu Gleichung (2.42), ein Faktor i hinzu gefügt werden muss. Zuletzt bleibt zu erwägen, ob innerhalb der Lagrange-Dichte die Korrekturen aufgrund der Quarkmassen sich auch mit dem Baustein χ_- beschreiben lassen. Da dieser in seiner Entwicklung in führender Ordnung ein pseudoskalares Feld impliziert, wird hierfür kein extra Baustein benötigt. Aufgrund des Verhaltens unter Paritätstranstransformation und Ladungskonjugation werden zudem die Bausteine $f_{+\mu\nu}$ und V_μ benötigt. Zur Anpassung der Lorentz-Invarianz mit Hilfe des Epsilon-Tensors wird den Vektor-Feldern eine partielle Ableitung hinzugefügt. Analog zum vorangegangenen Term muss in Folge der Entwicklung des Bausteins χ_- wieder mit einem Faktor i multipliziert werden werden. Nach Prüfung des Terms unter Ladungskonjugation ergibt sich mit einem Antikommutator die letzte Struktur in der Wechselwirkungs-Lagrange-Dichte für elektromagnetische Übergänge $PV\gamma$ zu

$$i \left\langle \left\{ f_{+\mu\nu}, \partial_\rho V_\sigma \right\} \chi_- \right\rangle \ .$$

Insgesamt ergeben sich vier Terme, die Korrekturen in den Quarkmassen anzeigen:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{NLO,\chi} =& c_5 \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \left\langle \chi_+ f_{+\mu\nu} \left\{ V_\rho, u_\sigma \right\} \right\rangle + c_6 \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \left\langle \chi_+ V_\rho f_{+\mu\nu} u_\sigma + \chi_+ u_\sigma f_{+\mu\nu} V_\rho \right\rangle \\ &+ i c_7 \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \left\langle \left\{ f_{+\mu\nu}, \partial_\rho V_\sigma \right\} \chi_- \right\rangle + i c_8 \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \left\langle f_{-\mu\nu} \left[\partial_\rho V_\sigma, \chi_+ \right] \right\rangle \ .\end{aligned} \tag{B.10}$$

Werden diese untereinander auf mögliche Äquivalenzen bis auf totale Ableitungen geprüft, so ist zu folgern, dass nur zwei Terme verbleiben (siehe Gleichung (3.5) in Abschnitt 3.2).

B.2. Bestimmung der Amplituden $\mathcal{A}_i$

In diesem Abschnitt soll die Bestimmung der Werte der Amplituden in Abhängigkeit von den Kopplungkonstanten das Ziel sein. Generell ist eine kompakte Darstellung, die physikalische Zusammenhänge übersichtlich darstellt, bevorzugt. Im Folgenden werden deshalb zur Bestimmung Matrizen der Felder verwendet. Eine Verwendung von Gell-Mann-Matrizen als Alternative dazu führt zu den gleichen Ergebnissen.
Allgemein lässt sich die effektive Lagrange-Dichte der $PV\gamma$-Wechselwirkung als eine Summe einer Anzahl n Strukturen $T_{i\rho\sigma}$ mit zugehörigen Amplitungen $\mathcal{A}_i$ schreiben

$$\mathcal{L}_{\text{eff}}^{PV\gamma} = e\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} F_{\mu\nu} \sum_{i=1}^{n} \mathcal{A}_i \, . \tag{B.11}$$

Wird in einem ersten Schritt für die Lagrange-Dichte führender Ordnung

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{LO}}^{PV\gamma} &= 2e\frac{c_1}{F}\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} F_{\mu\nu} \left\langle Q \left\{ V_\rho, \partial_\sigma \Phi \right\} \right\rangle \\ &= E^{\rho\sigma} H_{\rho\sigma} \end{aligned} \tag{B.12}$$

definiert, mit den Tensoren

$$\begin{aligned} E^{\rho\sigma} &= e\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} F_{\mu\nu} \, , \\ H_{\rho\sigma} &= \frac{2}{F} c_1 \left\langle Q \left\{ V_\rho, \partial_\sigma \Phi \right\} \right\rangle \, , \end{aligned} \tag{B.13}$$

so liegt der nächste Schritt darin, für jeden einzelnen Übergang die zugehörigen Matrizen der Felder einzusetzen und die Spur zu bestimmen. Illustriert für das Beispiel des Übergangs $\rho^+ \to \pi^+\gamma$ bedeutet dies

$$\begin{aligned} V_\rho &\mapsto \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & \rho^+_\rho & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \, , \\ \partial_\sigma \Phi &\mapsto \sqrt{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \partial_\sigma \pi^- & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \, , \end{aligned}$$

mit den Quarkladungen Q_u, Q_d und Q_s in der Matrix

$$Q = \begin{pmatrix} Q_u & 0 & 0 \\ 0 & Q_d & 0 \\ 0 & 0 & Q_s \end{pmatrix} \, , \tag{B.14}$$

und es folgt somit für die zugehörige Spur des Übergangs

$$\left\langle Q\left\{V_\rho, \partial_\sigma \Phi\right\}\right\rangle = (Q_u + Q_d)\, \rho_\rho^+ \partial_\sigma \pi^- \ . \tag{B.15}$$

Wird dies für alle möglichen Übergänge durchgeführt, so ergibt sich für die Lagrange-Dichte führender Ordnung

$$\begin{aligned} H_{\rho\sigma} = \frac{2}{F} c_1 \Big[& (Q_u + Q)\, T_{1\rho\sigma} + (Q_u + Q_d)\, T_{2\rho\sigma} + (Q_d + Q_s)\, T_{3\rho\sigma} \\ & + \frac{1}{3}(Q_u + Q_d + 4Q_s)\, T_{4\rho\sigma} + \frac{2}{3}(Q_u + Q_d + Q_s)\, T_{5\rho\sigma} \\ & + (Q_u - Q_d) \left(\frac{1}{\sqrt{3}} T_{6\rho\sigma} \sqrt{\frac{2}{3}} T_{7\rho\sigma} \frac{1}{\sqrt{3}} T_{8\rho\sigma} \sqrt{\frac{2}{3}} T_{9\rho\sigma} \right) \\ & + \frac{\sqrt{2}}{3} (Q_u + Q_d - 2Q_s) \left(T_{10\rho\sigma} + T_{11\rho\sigma} \right) \Big] \ . \end{aligned} \tag{B.16}$$

Dabei wurden für die Singulett- und Oktett-Felder die folgenden Strukturen definiert

$$\begin{aligned} T_{1\rho\sigma} &= \rho_\rho^+ \partial_\sigma \pi^- + \rho_\rho^- \partial_\sigma \pi^+ + \rho_\rho^0 \partial_\sigma \pi^0 \ , \\ T_{2\rho\sigma} &= K_\rho^{*+} \partial_\sigma K^- + K_\rho^{*-} \partial_\sigma K^+ \ , \\ T_{3\rho\sigma} &= \overline{K}_\rho^{*0} \partial_\sigma K^0 + K_\rho^{*0} \partial_\sigma \overline{K}^0 \ , \\ T_{4\rho\sigma} &= \omega_{8\rho} \partial_\sigma \eta_8 \ , \\ T_{5\rho\sigma} &= \omega_{1\rho} \partial_\sigma \eta_1 \ , \\ T_{6\rho\sigma} &= \rho_\rho^0 \partial_\sigma \eta_8 \ , \\ T_{7\rho\sigma} &= \rho_\rho^0 \partial_\sigma \eta_1 \ , \\ T_{8\rho\sigma} &= \omega_{8\rho} \partial_\sigma \pi^0 \ , \\ T_{9\rho\sigma} &= \omega_{1\rho} \partial_\sigma \pi^0 \ , \\ T_{10\rho\sigma} &= \omega_{8\rho} \partial_\sigma \eta_1 \ , \\ T_{11\rho\sigma} &= \omega_{1\rho} \partial_\sigma \eta_8 \ . \end{aligned} \tag{B.17}$$

Die Werte der Faktoren, die sich aus den verschiedenen Linearkombinationen der Quarkladungen ergeben, sind in Tabelle B.1 sowohl für den physikalischen als auch den Grenzfall $N_C \to \infty$ aufgetragen. Der Gleichung (B.16) ist bei genauerer Betrachtung der Werte in Tabelle B.1 zu entnehmen, dass der Term $T_{5\rho\sigma}$ für den Fall physikalischer Quarkladungen keinen Beitrag liefert.
Die Korrekturen zur Lagrange-Dichte in $1/N_C$ werden dem gleichen Prinzip folgend

Tabelle B.1.: Faktoren aus Linearkombinationen der Quarkladungen im physikalischen sowie im Grenzfall $N_C \to \infty$.

	Physikalischer Wert	Wert für $N_C \to \infty$
Q_u	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{2}$
Q_d	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{2}$
Q_s	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{2}$
$Q_u + Q_d$	$\frac{1}{3}$	0
$Q_u + Q_s$	$\frac{1}{3}$	0
$Q_d + Q_s$	$-\frac{2}{3}$	-1
$Q_u - Q_d$	1	1
$Q_u + Q_d + 4Q_s$	-1	-2
$Q_u + Q_d - 2Q_s$	1	1
$Q_u + Q_d + Q_s$	0	$-\frac{1}{2}$

umgeschrieben, und es lässt sich die Lagrange-Dichte wie folgt schreiben:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^{PV\gamma}_{\mathrm{NLO},1/N_C} = E^{\rho\sigma} \Bigg\{ & c_2 \left[(Q_u + Q_d + Q_s)\, T_{5\rho\sigma} + \sqrt{\frac{3}{2}}\, (Q_u - Q_d)\, T_{9\rho\sigma} + \frac{1}{\sqrt{2}}\, (Q_u + Q_d - 2Q_s)\, T_{11\rho\sigma} \right] \\ & + c_3 \left[(Q_u + Q_d + Q_s)\, T_{5\rho\sigma} + \sqrt{\frac{3}{2}}\, (Q_u - Q_d)\, T_{7\rho\sigma} + \frac{1}{\sqrt{2}}\, (Q_u + Q_d - 2Q_s)\, T_{10\rho\sigma} \right] \\ & + c_4\, (Q_u + Q_d + Q_s) \left(T_{1\rho\sigma} + T_{2\rho\sigma} + T_{3\rho\sigma} + T_{4\rho\sigma} + T_{5\rho\sigma} \right) \Bigg\} . \end{aligned} \tag{B.18}$$

Da für physikalische Quarkladungen $\langle Q \rangle = Q_u + Q_d + Q_s = 0$ gilt, trägt der letzte Term mit Kopplungskonstante c_4 in Gleichung (B.18) in diesem Falle nicht bei. Zudem existiert in demselben Fall kein Übergang von Singulett zu Singulett, was im Term $T_{5\rho\sigma}$ angezeigt wird.
Zur Angabe des Falls der Korrekturen in den Quarkmassen werden die Kaon- und Pionmassen in führender Ordnung (vergleiche in Referenz [GL85]), $\mathring{M}_K^2 = B_0\,(\hat{m} + m_s)$ und $\mathring{M}_\pi^2 = 2B_0\hat{m}$, verwendet. In der Ordnung, in der gearbeitet wird, werden die Ausdrücke führender Ordnung mit den physikalischen Werte ersetzt, d. h. $\mathring{M}_K^2 \mapsto M_K^2$ und $\mathring{M}_\pi^2 \mapsto M_\pi^2$.

Die Korrekturen aufgrund der Quarkmassen sind dann gegeben durch

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}^{PV\gamma}_{\text{NLO},\chi} = & (2c_5 - c_7 - c_8)\, E^{\rho\sigma} \Big\{ M_\pi^2 (Q_u + Q_d)\, T_{1\rho\sigma} + \left[M_\pi^2 Q_u + \left(2M_K^2 - M_\pi^2\right) Q_s\right] T_{2\rho\sigma} \\
& + \left[M_\pi^2 Q_d + \left(2M_K^2 - M_\pi^2\right) Q_s\right] T_{3\rho\sigma} + \frac{1}{3}\left[M_\pi^2 (Q_u + Q_d) + 4\left(2M_K^2 - M_\pi^2\right) Q_s\right] T_{4\rho\sigma} \\
& + \frac{2}{3}\left[M_\pi^2 (Q_u + Q_d) + \left(2M_K^2 - M_\pi^2\right) Q_s\right] T_{5\rho\sigma} \\
& + M_\pi^2 (Q_u - Q_d) \left(\frac{1}{\sqrt{3}} T_{6\rho\sigma} + \sqrt{\frac{2}{3}} T_{7\rho\sigma} + \frac{1}{\sqrt{3}} T_{8\rho\sigma} + \sqrt{\frac{2}{3}} T_{9\rho\sigma} \right) \\
& + \frac{\sqrt{2}}{3}\left[M_\pi^2 (Q_u + Q_d) - 2\left(2M_K^2 - M_\pi^2\right) Q_s\right] \left(T_{10\rho\sigma} + T_{11\rho\sigma}\right) \Big\} \\
& + (2c_5 - c_7 + c_8)\, E^{\rho\sigma} \Big\{ M_\pi^2 (Q_u + Q_d)\, T_{1\rho\sigma} + \left[\left(2M_K^2 - M_\pi^2\right) Q_u + M_\pi^2 Q_s\right] T_{2\rho\sigma} \\
& + \left[\left(2M_K^2 - M_\pi^2\right) Q_d + M_\pi^2 Q_s\right] T_{3\rho\sigma} + \frac{1}{3}\left[M_\pi^2 (Q_u + Q_d) + 4\left(2M_K^2 - M_\pi^2\right) Q_s\right] T_{4\rho\sigma} \\
& + \frac{2}{3}\left[M_\pi^2 (Q_u + Q_d) + \left(2M_K^2 - M_\pi^2\right) Q_s\right] T_{5\rho\sigma} \\
& + M_\pi^2 (Q_u - Q_d) \left(\frac{1}{\sqrt{3}} T_{6\rho\sigma} + \sqrt{\frac{2}{3}} T_{7\rho\sigma} + \frac{1}{\sqrt{3}} T_{8\rho\sigma} + \sqrt{\frac{2}{3}} T_{9\rho\sigma} \right) \\
& + \frac{\sqrt{2}}{3}\left[M_\pi^2 (Q_u + Q_d) - 2\left(2M_K^2 - M_\pi^2\right) Q_s\right] \left(T_{10\rho\sigma} + T_{11\rho\sigma}\right) \Big\} \,.
\end{aligned}
\tag{B.19}
$$

Wird ausgenutzt, dass $2M_K^2 - M_\pi^2 = M_\pi^2 + 2\left(M_K^2 - M_\pi^2\right)$ und $Q_d = Q_s$ gilt, lässt sich dies umschreiben zu

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}^{PV\gamma}_{\text{NLO},\chi} = & (2c_5 - c_7 - c_8)\, E^{\rho\sigma} \\
& + 4\left(M_K^2 - M_\pi^2\right)(c_5 + c_6 - c_7)\, E^{\rho\sigma} \Bigg[\frac{1}{2}(Q_u + Q_s)\, T_{2\rho\sigma} + Q_s T_{3\rho\sigma} + \frac{4}{3} Q_s T_{4\rho\sigma} \\
& + \frac{2}{3} Q_s T_{5\rho\sigma} - 2\frac{\sqrt{2}}{3} Q_s \left(T_{10\rho\sigma} + T_{11\rho\sigma}\right) \Bigg] \\
& + 2\left(M_K^2 - M_\pi^2\right)(c_5 - c_6 - c_8)\, E^{\rho\sigma} (Q_s - Q_u)\, T_{2\rho\sigma} \,.
\end{aligned}
\tag{B.20}
$$

In Tabelle B.2 sind nun alle Amplituden $\mathcal{A}_i$ mit $i = 1, \ldots, 11$, sowohl für die führende Ordnung der Lagrange-Dichte als auch die Beiträge aufgrund der Korrekturen in $1/N_C$ und der Quarkmassen eingetragen. Dazu wurden die Definitionen $c_+ = c_5 + c_6 - c_7$, $c_- = c_5 - c_6 - c_8$ und $\tilde{c}_1 = c_1 + 2M_\pi^2 c_+$ angewandt, sodass die Ergebnisse von den fünf Parametern $c_1\,(\tilde{c}_1)$, c_2, c_3, c_+ und c_- abhängig sind.
Für die Zerfälle mit Beteiligung der ϕ-, ω- und η-, η'-Mesonen ist dann zur Bestim-

Tabelle B.2.: Amplituden $\mathcal{A}_i$ für die vollständige Lagrange-Dichte (LO und NLO) in Einheiten von $2/F$.

Übergang	Struktur	Amplitude $\mathcal{A}_i$ in $[2/F]$
$\rho \to \pi\gamma$	T_1	$\frac{1}{3}\tilde{c}_1$
$K^{*\pm} \to K^{\pm}\gamma$	T_2	$\frac{1}{3}\tilde{c}_1 + \frac{2}{3}\left(M_K^2 - M_\pi^2\right)c_+ - 2\left(M_K^2 - M_\pi^2\right)c_-$
$K^{*0} \to K^0\gamma$	T_3	$-\frac{2}{3}\tilde{c}_1 - \frac{4}{3}\left(M_K^2 - M_\pi^2\right)c_+$
$\omega_8 \to \eta_8\gamma$	T_4	$-\frac{1}{3}\tilde{c}_1 - \frac{16}{9}\left(M_K^2 - M_\pi 2\right)c_+$
$\omega_1 \to \eta_1\gamma$	T_5	$-\frac{8}{9}\left(M_K^2 - M_\pi^2\right)c_+$
$\rho^0 \to \eta_8\gamma$	T_6	$\frac{1}{\sqrt{3}}\tilde{c}_1$
$\rho^0 \to \eta_1\gamma$	T_7	$\sqrt{\frac{2}{3}}\tilde{c}_1 + \sqrt{\frac{3}{2}}c_3$
$\omega_8 \to \pi^0\gamma$	T_8	$\frac{1}{\sqrt{3}}\tilde{c}_1$
$\omega_1 \to \pi^0\gamma$	T_9	$\sqrt{\frac{2}{3}}\tilde{c}_1 + \sqrt{\frac{3}{2}}c_2$
$\omega_8 \to \eta_1\gamma$	T_{10}	$\frac{\sqrt{2}}{3}\tilde{c}_1 + \frac{1}{\sqrt{2}}c_3 + \frac{8\sqrt{2}}{9}\left(M_K^2 - M_\pi^2\right)c_+$
$\omega_1 \to \eta_8\gamma$	T_{11}	$\frac{\sqrt{2}}{3}\tilde{c}_1 + \frac{1}{\sqrt{2}}c_2 + \frac{8\sqrt{2}}{9}\left(M_K^2 - M_\pi^2\right)c_+$

mung der vollen Amplitude noch die Mischung der Singulett- und Oktett-Felder zu beachten.
Tabelle B.3 zeigt die der Entwicklung von Q für großes N_C zugehörigen Koeffizienten. Dabei sind die Ergebnisse sowohl für die führende Ordnung (LO) als auch inklusive der Korrekturen (NLO) gezeigt, im ersten Fall in Abhängigkeit von einem in letzterem von sechs Parametern.

Tabelle B.3.: Amplituden $\mathcal{A}_i$ für die vollständige Lagrange-Dichte (LO und NLO) im Falle der Entwicklung von Q für großes N_C in Einheiten von $2/F$.

Struktur	Amplitude $\mathcal{A}_i$ für LO in $[2/F]$	Amplitude $\mathcal{A}_i$ für NLO in $[2/F]$
T_1	0	$\frac{1}{3}c_1 - \frac{1}{2}c_4$
T_2	0	$\frac{1}{3}c_1 - \frac{1}{2}c_4 - 2\left(M_K^2 - M_\pi^2\right)c_-$
T_3	$-c_1$	$-\frac{2}{3}c_1 - \frac{1}{2}c_4 - 2M_K^2 c_+$
T_4	$-\frac{2}{3}c_1$	$-\frac{1}{3}c_1 - \frac{1}{2}c_4 - \frac{4}{3}\left(2M_K^2 - M_\pi^2\right)c_+$
T_5	$-\frac{1}{3}c_1$	$-\frac{1}{2}c_2 - \frac{1}{2}c_3 - \frac{1}{2}c_4 - \frac{2}{3}\left(2M_K^2 - M_\pi^2\right)c_+$
T_6	$\frac{1}{\sqrt{3}}c_1$	$\frac{1}{\sqrt{3}}c_1 + \frac{2}{\sqrt{3}}M_\pi^2 c_+$
T_7	$\sqrt{\frac{2}{3}}c_1$	$\sqrt{\frac{2}{3}}c_1 + \sqrt{\frac{3}{2}}c_3 + 2\sqrt{\frac{2}{3}}M_\pi^2 c_+$
T_8	$\frac{1}{\sqrt{3}}c_1$	$\frac{1}{\sqrt{3}}c_1 + \frac{2}{\sqrt{3}}M_\pi^2 c_+$
T_9	$\sqrt{\frac{2}{3}}c_1$	$\sqrt{\frac{2}{3}}c_1 + \sqrt{\frac{3}{2}}c_2 + 2\sqrt{\frac{2}{3}}M_\pi^2 c_+$
T_{10}	$\frac{\sqrt{2}}{3}c_1$	$\frac{\sqrt{2}}{3}c_1 + \frac{1}{\sqrt{2}}c_3 + \frac{2\sqrt{2}}{3}\left(2M_K^2 - M_\pi^2\right)c_+$
T_{11}	$\frac{\sqrt{2}}{3}c_1$	$\frac{\sqrt{2}}{3}c_1 + \frac{1}{\sqrt{2}}c_2 + \frac{2\sqrt{2}}{3}\left(2M_K^2 - M_\pi^2\right)c_+$

B.3. Tabellen

In diesem Abschnitt sind zu Kapitel 3 zugehörige zusätzliche Tabellen und Abbildungen aufgeführt.

Tabelle B.4.: Test Wertebereich Λ_1, mit $\Theta_{\phi\omega} = 39.5°$ und $\Theta_{\eta\eta'} = -12.4°$. Alle Zerfallsbreiten in keV angegeben.

Zerfall	Γ_{PDG} in keV	$\Lambda_1 = -\frac{1}{3}$ in keV	$\Lambda_1 = 0$ in keV	$\Lambda_1 = \frac{1}{3}$ in keV
$\rho^0 \to \pi^0\gamma$	70.1 ± 9.0	51.9 ± 13.5	66.3 ± 8.1	74.5 ± 5.4
$\rho^\pm \to \pi^\pm\gamma$	67.1 ± 7.5	51.5 ± 13.4	65.8 ± 8.1	74.0 ± 5.4
$\rho^0 \to \eta\gamma$	44.7 ± 3.1	33.8 ± 8.8	45.7 ± 5.3	55.7 ± 3.6
$\omega \to \pi^0\gamma$	$713. \pm 19.$	$463. \pm 98.$	$579. \pm 59.$	$646. \pm 40.$
$\omega \to \eta\gamma$	3.82 ± 0.34	3.04 ± 0.74	4.07 ± 0.45	4.98 ± 0.31
$\phi \to \pi^0\gamma$	5.52 ± 0.22	4.80 ± 1.80	5.24 ± 0.97	5.55 ± 0.60
$\phi \to \eta\gamma$	55.4 ± 1.1	51.9 ± 8.9	54.3 ± 4.8	56.1 ± 3.0
$\phi \to \eta'\gamma$	0.2643 ± 0.0095	0.248 ± 0.078	0.251 ± 0.041	0.248 ± 0.025
$K^{*0} \to K^0\gamma$	$116. \pm 10.$	103.6 ± 15.2	122.2 ± 8.9	137.0 ± 6.0
$K^{*\pm} \to K^\pm\gamma$	50.3 ± 4.6	50.3 ± 38.5	50.3 ± 20.7	50.3 ± 12.7
$\eta' \to \rho^0\gamma$	56.6 ± 2.6	86.9 ± 10.0	70.7 ± 4.2	50.1 ± 1.8
$\eta' \to \omega\gamma$	5.14 ± 0.35	9.12 ± 1.49	7.76 ± 0.63	5.62 ± 0.27
χ^2_{red}	-	70.0	20.2	7.7

Tabelle B.5.: Vergleich der Näherungen des Matrixelements für vollständige Lagrange-Dichte mit $\left|\mathcal{M}^{I}\right|^2$ und $\left|\mathcal{M}^{II}\right|^2$, dabei sind $\Theta_{\phi\omega} = 39.5°$ und $\Theta_{\eta\eta'} = -12.4°$.

Zerfall	Γ_{PDG} in keV	mit $\left\|\mathcal{M}^{I}\right\|^2$ in keV	mit $\left\|\mathcal{M}^{II}\right\|^2$ in keV
$\rho^0 \to \pi^0\gamma$	70.1 ± 9.0	73.5 ± 5.6	75.7 ± 4.1
$\rho^\pm \to \pi^\pm\gamma$	67.1 ± 7.5	72.9 ± 5.6	75.2 ± 4.1
$\rho^0 \to \eta\gamma$	44.7 ± 3.1	53.9 ± 4.2	52.2 ± 2.7
$\omega \to \pi^0\gamma$	$713. \pm 19.$	$637. \pm 41.$	$658. \pm 31.$
$\omega \to \eta\gamma$	3.82 ± 0.34	4.81 ± 0.37	4.56 ± 0.22
$\phi \to \pi^0\gamma$	5.52 ± 0.22	5.50 ± 0.61	5.53 ± 0.46
$\phi \to \eta\gamma$	55.4 ± 1.1	55.8 ± 3.1	55.7 ± 2.3
$\phi \to \eta'\gamma$	0.2643 ± 0.0095	0.250 ± 0.026	0.260 ± 0.020
$K^{*0} \to K^0\gamma$	$116. \pm 10.$	134.4 ± 6.8	128.5 ± 5.2
$K^{*\pm} \to K^\pm\gamma$	50.3 ± 4.6	50.3 ± 13.0	50.3 ± 9.7
$\eta' \to \rho^0\gamma$	56.6 ± 2.6	54.4 ± 5.5	53.2 ± 3.9
$\eta' \to \omega\gamma$	5.14 ± 0.35	6.09 ± 0.63	5.69 ± 0.51
χ^2_{red}	-	8.0	4.4
Λ_1	-	0.266 ± 0.081	0.264 ± 0.056

Tabelle B.6.: Vergleich der Näherung des invarianten Matrixelements für vollständige Lagrange-Dichte mit in $1/N_C$ entwickeltem Q mit $\left|\mathcal{M}^{I}\right|^2$ und $\left|\mathcal{M}^{II}\right|^2$, dabei sind $\Theta_{\phi\omega} = 39.5°$ und $\Theta_{\eta\eta'} = -12.4°$.

Zerfall	Γ_{exp} in keV	$\left|\mathcal{M}^{I}\right|^2$ in keV	$\left|\mathcal{M}^{II}\right|^2$ in keV
$\rho^0 \to \pi^0\gamma$	70.1 ± 9.0	61.9 ± 7.1	65.2 ± 4.6
$\rho^\pm \to \pi^\pm\gamma$	67.1 ± 7.5	61.5 ± 7.0	64.8 ± 4.6
$\rho^0 \to \eta\gamma$	44.7 ± 3.1	52.0 ± 3.2	51.0 ± 1.8
$\omega \to \pi^0\gamma$	$713. \pm 19.$	$683. \pm 36.$	$688. \pm 23.$
$\omega \to \eta\gamma$	3.82 ± 0.34	4.11 ± 0.67	3.97 ± 0.40
$\phi \to \pi^0\gamma$	5.52 ± 0.22	5.57 ± 0.54	5.55 ± 0.32
$\phi \to \eta\gamma$	55.4 ± 1.1	55.0 ± 2.6	55.2 ± 1.6
$\phi \to \eta'\gamma$	0.2643 ± 0.0095	0.259 ± 0.022	0.262 ± 0.014
$K^{*0} \to K^0\gamma$	$116. \pm 10.$	145.8 ± 7.1	136.6 ± 4.2
$K^{*\pm} \to K^\pm\gamma$	50.3 ± 4.6	50.3 ± 11.3	50.3 ± 6.8
$\eta' \to \rho^0\gamma$	56.6 ± 2.6	55.9 ± 2.5	55.6 ± 2.8
$\eta' \to \omega\gamma$	5.14 ± 0.35	5.32 ± 0.43	5.23 ± 0.44
χ^2_{red}	-	4.0	2.2
Λ_1	-	0.230 ± 0.051	0.228 ± 0.036

C. Handreichungen - Zerfälle $PV\ell^+\ell^-$

C.1. Darstellung und Bestimmung von Flavor-Spuren mit Gell-Mann-Matrizen

Als Alternative zu der in Appendix B vorgestellten Bestimmung der Amplituden der Übergänge $PV\gamma$ mit Hilfe der Matrixdarstellung der Meson-Felder steht die Darstellung der Felder mittels Gell-Mann-Matrizen, siehe Appendix A, und den zugehörigen Relationen für die Bestimmung von Spuren dieser Matrizen. Im Folgenden wird für ein Beispiel gezeigt, wie mit der Darstellung über Gell-Mann-Matrizen die Flavor-Spuren bestimmt werden können.
Es werde zur Illustration ein Zerfall auf die Existenz eines ρ^0 im Zwischenzustand untersucht. Gewählt ist beispielhaft die Spur

$$\langle \lambda_3 \{\lambda_a, \lambda_b\} \rangle \tag{C.1}$$

aus P_ρ in Gleichung (4.17). Im einfachsten Fall gilt, unter Beachtung der in dieser Dissertation gewählten Normierung der Vektor-Meson-Felder, für einen Zerfall $\rho^0 \to \pi^0 \ell^+ \ell^-$ für die Meson-Felder

$$\begin{aligned} \rho^0 &\sim \frac{1}{2}\lambda_3 \ , \\ \pi^0 &\sim \lambda_3 \ , \end{aligned} \tag{C.2}$$

was in die Spur eingesetzt mit der Übertragung der Spur von Gell-Mann-Matrizen in die Strukturkonstanten h beziehungsweise d und f

$$\left\langle \lambda_3 \left\{ \frac{1}{2}\lambda_3, \lambda_3 \right\} \right\rangle = \frac{1}{2} \langle \lambda_3 \lambda_3 \lambda_3 \rangle = h_{333} = (d_{333} + i f_{333}) \tag{C.3}$$

ergibt. Die Werte von d und f lassen sich beispielsweise in [IZ80] oder [SS12] nachschlagen und ihre Verwendung führt zu dem Ergebnis

$$\left\langle \lambda_3 \left\{ \frac{1}{2}\lambda_3, \lambda_3 \right\} \right\rangle = (0 + i \cdot 0) \ . \tag{C.4}$$

Demzufolge ergibt für ein ρ-Meson im Zwischenzustand der Zerfall $\rho^0 \to \pi^0 \ell^+ \ell^-$ in diesem Term keinen Beitrag. Werden die restlichen Beiträge im Propagator-Term eines propagierenden ρ-Mesons für den gleichen Zerfall untersucht, ergeben diese ebenfalls jeweils keine Beiträge. Somit ist rechnerisch bestätigt, dass der Zerfall $\rho^0 \to \pi^0 \ell^+ \ell^-$ nicht mittels eines ρ-Meson im Zwischenzustand erfolgt, sondern ein Mischung aus ω- beziehungsweise ϕ-Meson für den Übergang notwendig ist.

C.1.1. Die Amplituden von $V\gamma$

Für den Zerfall eines Vektor-Mesons in ein Lepton-Paar gilt es die Amplitude

$$\mathcal{A}^{V\gamma} = c_1^{V\gamma} \langle Q\lambda_a \rangle + 2B_0 c_2^{V\gamma} \left\langle \mathcal{M} Q\lambda_a \right\rangle \tag{C.5}$$

zu bestimmen, λ_a steht dabei für das Vektor-Meson-Feld im Anfangszustand. Die zugehörigen Ergebnisse für die Übergänge der Oktett- und Singulett-Felder sind in Tabelle C.1 aufgetragen, für die Amplituden der Zerfälle ist in Teilen noch die Mischung der kartesischen Felder zu berücksichtigen.

Tabelle C.1.: Amplituden $\mathcal{A}^{V\gamma}$ der Übergänge eines Vektor-Meson-Feldes in ein Photon (ein Lepton-Paar).

Übergang	$\mathcal{A}^{V\gamma}$
$\rho^0 \to \gamma$	$\frac{1}{2} c_1^{V\gamma} + M_\pi^2 c_2^{V\gamma}$
$\omega_8 \to \gamma$	$\frac{1}{2\sqrt{3}} c_1^{V\gamma} + \frac{1}{3\sqrt{3}} \left(4M_K^2 - M_\pi^2\right) c_2^{V\gamma}$
$\omega_0 \to \gamma$	$-\frac{2}{3}\sqrt{\frac{2}{3}} \left(M_K^2 - M_\pi^2\right) c_2^{V\gamma}$

C.1.2. Die Amplituden von VPP und $VPPP$

Die für die Zerfälle VPP in führender Ordnung zu bestimmende Amplitude ist

$$\mathcal{A}^{VPP} = \langle \lambda_a \left[\lambda_b, \lambda_c\right] \rangle \ . \tag{C.6}$$

Dabei steht λ_a für das Vektor-Meson im Anfangszustand und λ_b, λ_c für die pseudoskalaren Mesonen im Enzustand. In Tabelle C.2 sind die Ergebnisse für die Übergänge der Felder aufgetragen. Es ist gut zu sehen, dass die Zerfälle $\omega/\phi \to \pi\pi$ in führender Ordnung keinen Beitrag liefern und somit nicht mit dem Modell erfasst werden können.
Für die Zerfälle eines Vektor-Mesons in drei pseudoskalare Mesonen sind die Flavor-Spuren für die Punktwechselwirkung (Index $O(1)$) und den Zerfall über ein Vektor-Meson im Zwischenzustand (Index $O(2)$) zu bestimmen. Die zugehörigen Ergebnisse für die physikalischen Zerfälle finden sich in Tabelle C.3.

Tabelle C.2.: Amplituden $\mathcal{A}^{VPP}$ der Übergänge eines Vektor-Mesons in zwei pseudoskalare Mesonen.

Zerfall	$\mathcal{A}^{VPP}$
$\rho \to \pi\pi$	2
$\omega_8/\omega_0 \to \pi^+\pi^-$	0
$\omega_8 \to K^+K^-$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}\cos(\Theta_V)$
$\omega_0 \to K^+K^-$	0
$K^{*\pm} \to K\pi$	1

Tabelle C.3.: Amplituden der Übergänge eines neutralen Vektor-Mesons in drei pseudoskalare Mesonen, dabei sind die Amplituden $\mathcal{A}^{O(1)}$ der Punktwechselwirkung und $\mathcal{A}^{O(2)}$ für ein Vektor-Meson im Zwischenzustand zugeordnet.

Zerfall	$\mathcal{A}^{O(1)}$	$\mathcal{A}^{O(2)}$
$\rho^0 \to \pi^+\pi^-\pi^0$	2	0
$\omega_8 \to \pi^+\pi^-\pi^0$	$2\sqrt{3}$	$\frac{8}{\sqrt{3}}$
$\omega_0 \to \pi^+\pi^-\pi^0$	$2\sqrt{6}$	$8\sqrt{\frac{2}{3}}$

C.2. Propagator-Strukturen für $PV\ell^+\ell^-$

Zusätzlich zu dem in Kapitel 3 Gleichung (4.17) gezeigten Propagator-Term für ein ρ-Meson im Zwischenzustand können auch für die ω- und ϕ-Mesonen entsprechende Terme aufgestellt werden. In der folgend gezeigten Gleichung (C.7) wurde für die Zwischenzustände die Mischung der Oktett- und Singulett-Zustände berücksichtigt. Der Term für ein ω-Meson im Zwischenzustand lautet wie folgt

$$\begin{aligned}
P_\omega = \frac{1}{\sqrt{3}} \sin(\theta_V)^2 \frac{1}{4} \Bigg(& 2c_1^{PVV} \left(c_1^{V\gamma} + \frac{2}{3} c_2^{V\gamma} \left(4M_K^2 - M_{\pi^0}^2\right)\right) \langle \lambda_8 \{\lambda_a, \lambda_b\}\rangle \\
& + 2c_1^{V\gamma} c_3^{PVV} \langle \lambda_b \rangle \langle \lambda_8 \lambda_a \rangle \\
& + c_1^{V\gamma} \left(c_2^{PVV} + c_4^{PVV}\right) \langle \lambda_a \rangle \langle \lambda_8 \lambda_b \rangle \\
& + 4B_0 c_1^{V\gamma} \left(c_5^{PVV} + 2c_6^{PVV} + c_7^{PVV}\right) \left\langle \mathcal{M} \lambda_8 \{\lambda_a, \lambda_b\} \right\rangle \\
& + 2B_0 c_1^{V\gamma} \left(c_5^{PVV} + c_7^{PVV}\right) \left\langle \mathcal{M} \left(\lambda_a \lambda_8 \lambda_b + \lambda_b \lambda_8 \lambda_a\right)\right\rangle \Bigg) \\
+ \sin(\theta_V) \cos(\theta_V) \frac{1}{4} \Bigg(& \frac{8}{3} \sqrt{\frac{2}{3}} c_1^{PVV} c_2^{V\gamma} \left(M_\pi^2 - M_K^2\right) \langle \lambda_8 \{\lambda_a, \lambda_b\}\rangle \\
& + \frac{4\sqrt{2}}{3} c_1^{PVV} \left(c_1^{V\gamma} + \frac{2}{3} c_2^{V\gamma} \left(4M_K^2 - M_{\pi^0}^2\right)\right) \langle \lambda_a \lambda_b \rangle \\
& + \sqrt{2} c_1^{V\gamma} \left(c_2^{PVV} + c_4^{PVV}\right) \langle \lambda_a \lambda_b \rangle \\
& + \frac{\sqrt{2}}{3} c_1^{V\gamma} \left(c_2^{PVV} + 2c_3^{PVV} + c_4^{PVV}\right) \langle \lambda_a \rangle \langle \lambda_b \rangle \\
& + 2B_0 \frac{4\sqrt{2}}{3} \left(c_5^{PVV} + c_6^{PVV} + c_7^{PVV}\right) \left\langle \mathcal{M} \{\lambda_a, \lambda_b\} \right\rangle \Bigg) \\
+ \cos(\theta_V)^2 \frac{1}{4} \Bigg(& \frac{32}{9} c_1^{PVV} c_2^{V\gamma} \left(M_\pi^2 - M_K^2\right) \langle \lambda_a \lambda_b \rangle \Bigg) \ .
\end{aligned} \tag{C.7}$$

Wiederum wurde der Faktor $1/4$ zur Kennzeichnung der Normierung separat beibehalten. Der Propagator-Term des ϕ-Mesons weist die gleiche Struktur wie P_ω auf, nur die Anteile der Mischung müssen mittels der Ersetzung

$$\sin(\theta_V) \cos(\theta_V) \mapsto -\sin(\theta) \cos(\theta) \tag{C.8}$$

und dem Tausch von

$$\cos(\theta_V)^2 \leftrightarrow \sin(\theta_V)^2 \tag{C.9}$$

angepasst werden.
Die in Gleichungen (4.17) und (C.7) (beide Propagatoren) angegebenen Strukturen entstehen aus den vollständigen NLO-Lagrange-Dichten der Vertices PVV und $V\gamma$, da ersterer innerhalb dieser Arbeit nur in führender Ordnung betrachtet werden kann, entfallen dementsprechend alle Korrekturen in $1/N_C$ und den Quarkmassen. Die

zugehörigen Kopplungskonstanten werden somit faktisch in den weiteren Berechnungen gleich null gesetzt.

C.2.1. Spuren in den Propagatoren

Aufgrund der Dimension der Propagatoren und der Anzahl der in ihnen auftretenden Flavor-Spuren wird für die einzelnen Zerfälle $PV\ell^+\ell^-$ im Folgenden keine Amplitude angegeben. Hingegen werden die berechneten Werte der einzelnen Spuren für jeden Prozess aufgeführt. Zu diesem Zweck werden die Spuren mit römischen Ziffern durchnummeriert, dies und die bei jeder Spur wirkenden Kopplungen sind der Übersicht wegen in Beiträge zu den Propagatoren P_ρ und P_ω/P_ϕ aufgeteilt. In Tabelle C.4 sind die fünf zugehörigen Spuren für ein propagierendes ρ-Meson aufgetragen.

Tabelle C.4.: Aufzählung und Nummerierung der Spuren des Propagators P_ρ mit ihren beigeordneten Kopplungskonstanten.

Nummer	Spur	Kopplungen
I	$\langle\lambda_3\{\lambda_a,\lambda_b\}\rangle$	$c_1^{PV\gamma}, c_1^{PVV}, c_1^{V\gamma}, c_2^{V\gamma}$
II	$\langle\lambda_a\rangle\langle\lambda_3\lambda_b\rangle$	$c_2^{PV\gamma}, c_1^{V\gamma}$
III	$\langle\lambda_3\lambda_a\rangle\langle\lambda_a\rangle$	$c_3^{PV\gamma}, c_1^{V\gamma}$
IV	$\left\langle\mathcal{M}\lambda_3\{\lambda_a,\lambda_b\}\right\rangle$	$c_+^{PV\gamma}, c_1^{V\gamma}$
V	$\left\langle\mathcal{M}\left(\lambda_a\lambda_3\lambda_b+\lambda_a\lambda_3\lambda_b\right)\right\rangle$	$c_5^{PV\gamma}, c_1^{V\gamma}$

Für die Spuren VI bis X propagierender ω- und ϕ-Mesonen ist in den Spuren in Tabelle C.4 die Gell-Mann-Matrix λ_3 durch die Matrix λ_8 zu ersetzen. Die gesamten Spuren der Propagatoren P_ω und P_ϕ sind in Tabelle C.5 eingetragen.

Tabelle C.5.: Aufzählung und Nummerierung der Spuren der Propagatoren P_ω/P_ϕ mit ihren beigeordneten Kopplungskonstanten.

Nummer	Spur	Kopplungen
VI	$\langle\lambda_8\{\lambda_a,\lambda_b\}\rangle$	$c_1^{PV\gamma}, c_1^{PVV}, c_1^{V\gamma}, c_2^{V\gamma}$
VII	$\langle\lambda_8\rangle\langle\lambda_3\lambda_b\rangle$	$c_2^{PV\gamma}, c_1^{V\gamma}$
$VIII$	$\langle\lambda_8\lambda_a\rangle\langle\lambda_a\rangle$	$c_3^{PV\gamma}, c_1^{V\gamma}$
IX	$\left\langle\mathcal{M}\lambda_8\{\lambda_a,\lambda_b\}\right\rangle$	$c_+^{PV\gamma}, c_1^{V\gamma}$
X	$\left\langle\mathcal{M}\left(\lambda_a\lambda_8\lambda_b+\lambda_a\lambda_8\lambda_b\right)\right\rangle$	$c_5^{PV\gamma}, c_1^{V\gamma}$
XI	$\langle\lambda_a\lambda_b\rangle$	$c_1^{PVV}, c_1^{V\gamma}, c_2^{V\gamma}$

Bei näherer Betrachtung der in Tabelle C.6 aufgetragenen Werte der Spuren zu P_ρ ist auffällig, dass die Übergänge $\rho^0 \to \pi^0\ell^+\ell^-$ und $\omega_8/\omega_0 \to \eta_8/\eta_0\ell^+\ell^-$ nicht mit einem ρ-Meson im Zwischenzustand auftreten. Nur Prozesse mit entweder einem π^0 oder einem ρ^0 im Anfangs- oder Endzustand geben in dem entsprechenden Propagator einen Beitrag.

Tabelle C.6.: Werte der Spuren zu P_ρ zu den jeweiligen Prozessen, bestimmt mit einem Ansatz der Felder mittels Gell-Mann-Matrizen.

Übergang	*I*	*II*	*III*	*IV*	*V*
$\rho^0 \to \pi^0 \ell^+ \ell^-$	0	0	0	0	0
$\rho^0 \to \eta_8 \ell^+ \ell^-$	$\frac{4}{\sqrt{3}}$	0	0	$\frac{4}{\sqrt{3}} M_\pi^2$	$\frac{4}{\sqrt{3}} M_\pi^2$
$\rho^0 \to \eta_0 \ell^+ \ell^-$	$4\sqrt{\frac{2}{3}}$	$6\sqrt{\frac{2}{3}}$ (für η')	$6\sqrt{\frac{2}{3}}$ (für η)	$4\sqrt{\frac{2}{3}} M_\pi^2$	$4\sqrt{\frac{2}{3}} M_\pi^2$
$\omega_8 \to \pi^0 \ell^+ \ell^-$	$\frac{4}{\sqrt{3}}$	0	0	$\frac{4}{\sqrt{3}} M_\pi^2$	$\frac{4}{\sqrt{3}} M_\pi^2$
$\omega_0 \to \pi^0 \ell^+ \ell^-$	$4\sqrt{\frac{2}{3}}$	$6\sqrt{\frac{2}{3}}$	0	$4\sqrt{\frac{2}{3}} M_\pi^2$	$4\sqrt{\frac{2}{3}} M_\pi^2$
$\omega_8 \to \eta_8 \ell^+ \ell^-$	0	0	0	0	0
$\omega_0 \to \eta_0 \ell^+ \ell^-$	0	0	0	0	0
$\omega_8 \to \eta_0 \ell^+ \ell^-$	0	0	0	0	0
$\omega_0 \to \eta_8 \ell^+ \ell^-$	0	0	0	0	0

Zudem ist auffällig, dass, ausgenommen Mischungen in den physikalischen Prozessen, die vorliegenden Übergänge zwischen den mathematischen Feldern in fast allen Spuren gleiche Beiträge bringen. Dies gilt für Oktett- wie Singulett-Anteile in der führenden Ordnung wie auch für die Korrekturen aufgrund der Quarkmassen. Da es sich bei den betrachteten Teilchen um ausschließlich neutrale Teilchen handelt, sind die beiden Spuren identisch. Eine Besonderheit stellen die zu den Korrekturen in $1/N_C$ zugehörigen Spuren, in denen die Singulett-Felder beitragen, dar. Hier ist aufgrund der Struktur der Übergänge in Verbindung mit den Spuren einzelner Felder zu beobachten, dass Spur *III* nur für den Übergang $\rho^0 \to \eta_0 \ell^+ \ell^-$ für ein η im Endzustand einen Beitrag liefert, dieser aber im Betrag dem der für Spur *II* auftretenden Übergänge in den Singulett-Feldern entspricht.
Analoge Beobachtungen zu denen bei P_ρ, ausgenommen dem Sonderfall, lassen sich auch für die Spuren der Propagatoren P_ω und P_ϕ in Tabelle C.7 bestätigen. Aufgrund der Mischungen kommt zu den für P_ρ bekannten Strukturen noch eine weitere Spur hinzu.

Tabelle C.7.: Werte der Spuren zu P_ω und P_ϕ zu den jeweiligen Prozessen, bestimmt mit einem Ansatz der Felder mittels Gell-Mann-Matrizen. Die mit $(*)$ markierten Einträge sind dem physikalischen Zerfall $\eta' \to \omega\ell^+\ell^-$ zugehörig und treten an die Stelle der Werte für die Spuren VII und $VIII$, während die entsprechenden anderen Werte gleich Null gesetzt werden.

Übergang	VI	VII	$VIII$	IX	X	XI
$\rho^0 \to \pi^0\ell^+\ell^-$	$\frac{4}{\sqrt{3}}$	0	0	$\frac{4}{\sqrt{3}}M_\pi^2$	$\frac{4}{\sqrt{3}}M_\pi^2$	2
$\rho^0 \to \eta_8\ell^+\ell^-$	0	0	0	0	0	0
$\rho^0 \to \eta_0\ell^+\ell^-$	0	0	0	0	0	0
$\omega_8 \to \pi^0\ell^+\ell^-$	0	0	0	0	0	0
$\omega_0 \to \pi^0\ell^+\ell^-$	0	0	0	0	0	0
$\omega_8 \to \eta_8\ell^+\ell^-$	$-\frac{4}{\sqrt{3}}$	0	0	$-\frac{4}{3\sqrt{3}}\left(8M_K^2-5M_\pi^2\right)$	$-\frac{4}{3\sqrt{3}}\left(8M_K^2-5M_\pi^2\right)$	2
$\omega_0 \to \eta_0\ell^+\ell^-$	$4\sqrt{\frac{2}{3}}$	0	0	$\frac{16}{3\sqrt{3}}\left(M_\pi^2-M_K^2\right)$	$\frac{16}{3\sqrt{3}}\left(M_\pi^2-M_K^2\right)$	2
$\omega_8 \to \eta_0\ell^+\ell^-$	$4\sqrt{\frac{2}{3}}$	$6\sqrt{\frac{2}{3}}\ (*)$	$6\sqrt{\frac{2}{3}}$	$\frac{4}{3}\sqrt{\frac{2}{3}}\left(4M_K^2-M_\pi^2\right)$	$\frac{4}{3}\sqrt{\frac{2}{3}}\left(4M_K^2-M_\pi^2\right)$	0
$\omega_0 \to \eta_8\ell^+\ell^-$	0	$6\sqrt{\frac{2}{3}}$	$6\sqrt{\frac{2}{3}}\ (*)$	$\frac{4}{3}\sqrt{\frac{2}{3}}\left(4M_K^2-M_\pi^2\right)$	$\frac{4}{3}\sqrt{\frac{2}{3}}\left(4M_K^2-M_\pi^2\right)$	0

C.3. Wechselwirkungs-Lagrange-Dichten

Die im Folgenden angegebenen Lagrange-Dichten sind vor Vereinfachungen, die sich aufgrund der Flavor-Strukturen o.ä. ergeben, bestimmt. Für die verwendeten Bausteine und ihre Transformationseigenschaften, siehe Kapitel 1, sowie Appendix A. Die Konstruktion ist analog zu der in Appendix B gezeigten Vorgehensweise für $PV\gamma$ vorzunehmen.
Beachte, dass alle der angegebenen Lagrange-Dichten allgemeine Konstrukte für beliebige Teilchen der gesuchten Charakterisierung, pseudoskalare oder Vektor-Mesonen, in Anfangs- und Endzuständen sind. Alternativ ließe sich sagen, dass die Lagrange-Dichten allgemein möglichst aufgestellt wurden und erst im weiteren Verlauf der Rechnungen werden Zwangsbedingungen und daraus resultierende Vereinfachungen der Terme, wie beispielsweise für Teilchen-Antiteilchen-Paare oder neutrale Vektor-Mesonen, eingesetzt.

C.3.1. Vollständige Wechselwirkungs-Lagrange-Dichte zu Vertex PVV

Die dem Übergang zwischen einem pseudoskalaren und zweier Vektor-Mesonen zugehörige Lagrange-Dichte ergibt sich innerhalb des verwendeten Organisationsschemas inklusive Korrekturen in $1/N_C$ und der Quark-Massen zu

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^{PVV} = -\frac{1}{F}\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\big(&c_1^{PVV}\left\langle\left\{\partial_\mu V_\nu, V_\rho\right\}\partial_\sigma\Phi\right] + c_2^{PVV}\left\langle\partial_\mu V_\nu\right\rangle\left\langle V_\rho\partial_\sigma\Phi\right\rangle \\ &+ c_3^{PVV}\left\langle V_\rho\right\rangle\left\langle\partial_\mu V_\nu\partial_\sigma\Phi\right\rangle + c_4^{PVV}\left\langle\partial_\mu V_\nu V_\rho\right]\left\langle\partial_\sigma\Phi\right\rangle \\ &+ 4B_0 c_5^{PVV}\left\langle\mathcal{M}\left(\partial_\mu V_\nu V_\rho\partial_\sigma\Phi + \partial_\sigma\Phi V_\rho\partial_\mu V_\nu\right)\right\rangle \\ &+ 4B_0 c_6^{PVV}\left\langle\mathcal{M}\left(V_\rho\partial_\sigma\Phi\partial_\mu V_\nu + \partial_\mu V_\nu\partial_\sigma\Phi V_\rho\right)\right\rangle \\ &+ 4B_0 c_7^{PVV}\left\langle\mathcal{M}\left(\partial_\sigma\Phi\partial_\mu V_\nu V_\rho + V_\rho\partial_\mu V_\nu\partial_\sigma\Phi\right)\right\rangle\big) \ . \end{aligned} \tag{C.10}$$

C.3.2. Vollständige Wechselwirkungs-Lagrange-Dichte zu Vertex VPP

Die dem Übergang zwischen einem Vektor-Meson und zweier pseudoskalarer Mesonen zugehörige Lagrange-Dichte ergibt sich innerhalb des verwendeten Organisationsschemas inklusive Korrekturen in $1/N_C$ und der Quark-Massen zu

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^{V\to PP} = -\frac{1}{F}\big(&c_1^{VPP}\left\langle V^\mu\left[\partial_\mu\Phi,\Phi\right]\right\rangle \\ &+ 4B_0 c_2^{VPP}\left\langle\mathcal{M}\left(V^\mu\partial_\mu\Phi\Phi - \Phi\partial_\mu\Phi V^\mu\right)\right\rangle \\ &+ 4B_0 c_3^{VPP}\left\langle\mathcal{M}\left(V^\mu\Phi\partial_\mu\Phi - \partial_\mu\Phi\Phi V^\mu\right)\right\rangle \\ &+ 4B_0 c_4^{VPP}\left\langle\mathcal{M}\left(\partial_\mu\Phi V^\mu\Phi - \Phi V^\mu\partial_\mu\Phi\right)\right\rangle\big) \ . \end{aligned} \tag{C.11}$$

C.3.3. Vollständige Wechselwirkungs-Lagrange-Dichte zu Vertex $VPPP$

Die dem Übergang zwischen einem Vektor-Meson und dreier pseudoskalarer Mesonen zugehörige Lagrange-Dichte ergibt sich innerhalb des verwendeten Organisations-schemas inklusive Korrekturen in $1/N_C$ und der Quark-Massen zu

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^{V\to PPP} = &-\frac{1}{F^3}\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\Big(c_1^{VPPP}\left\langle V_\mu\left(\partial_\nu\Phi\partial_\rho\Phi\partial_\sigma\Phi-\partial_\sigma\Phi\partial_\rho\Phi\partial_\nu\Phi\right)\right\rangle\\
&+c_2^{VPPP}\left\langle V_\mu\left(\partial_\nu\Phi\partial_\sigma\Phi\partial_\rho\Phi-\partial_\rho\Phi\partial_\sigma\Phi\partial_\nu\Phi\right)\right\rangle\\
&+c_3^{VPPP}\left\langle V_\mu\left(\partial_\rho\Phi\partial_\nu\Phi\partial_\sigma\Phi-\partial_\sigma\Phi\partial_\nu\Phi\partial_\rho\Phi\right)\right\rangle\\
&+c_4^{VPPP}\left\langle V_\mu\right\rangle\left\langle\partial_\nu\Phi\left[\partial_\rho\Phi,\partial_\sigma\Phi\right]\right\rangle\\
&+4B_0c_5^{VPPP}\left\langle\mathcal{M}V_\mu\left(\partial_\nu\Phi\partial_\rho\Phi\partial_\sigma\Phi-\partial_\sigma\Phi\partial_\rho\Phi\partial_\nu\Phi\right)\right\rangle\\
&+4B_0c_6^{VPPP}\left\langle\mathcal{M}V_\mu\left(\partial_\nu\Phi\partial_\sigma\Phi\partial_\rho\Phi-\partial_\rho\Phi\partial_\sigma\Phi\partial_\nu\Phi\right)\right\rangle\\
&+4B_0c_7^{VPPP}\left\langle\mathcal{M}V_\mu\left(\partial_\rho\Phi\partial_\nu\Phi\partial_\sigma\Phi-\partial_\sigma\Phi\partial_\nu\Phi\partial_\rho\Phi\right)\right\rangle\\
&+4B_0c_8^{VPPP}\left\langle\mathcal{M}\left(\partial_\nu\Phi V_\mu\partial_\rho\Phi\partial_\sigma\Phi-\partial_\sigma\Phi\partial_\rho\Phi V_\mu\partial_\nu\Phi\right)\right\rangle\\
&+4B_0c_9^{VPPP}\left\langle\mathcal{M}\left(\partial_\nu\Phi V_\mu\partial_\sigma\Phi\partial_\rho\Phi-\partial_\rho\Phi\partial_\sigma\Phi V_\mu\partial_\nu\Phi\right)\right\rangle\\
&+4B_0c_{10}^{VPPP}\left\langle\mathcal{M}\left(\partial_\nu\Phi\partial_\rho\Phi V_\mu\partial_\sigma\Phi-\partial_\sigma\Phi V_\mu\partial_\rho\Phi\partial_\nu\Phi\right)\right\rangle\\
&+4B_0c_{11}^{VPPP}\left\langle\mathcal{M}\left(\partial_\nu\Phi\partial_\sigma\Phi V_\mu\partial_\rho\Phi-\partial_\rho\Phi V_\mu\partial_\sigma\Phi\partial_\nu\Phi\right)\right\rangle\\
&+4B_0c_{12}^{VPPP}\left\langle\mathcal{M}\left(\partial_\rho\Phi V_\mu\partial_\nu\Phi\partial_\sigma\Phi-\partial_\sigma\Phi\partial_\nu\Phi V_\mu\partial_\rho\Phi\right)\right\rangle\\
&+4B_0c_{13}^{VPPP}\left\langle\mathcal{M}\left(\partial_\rho\Phi\partial_\nu\Phi V_\mu\partial_\sigma\Phi-\partial_\sigma\Phi V_\mu\partial_\nu\Phi\partial_\rho\Phi\right)\right\rangle\Big)\end{aligned}\qquad\text{(C.12)}$$

Aufgrund der Anzahl an Termen wurde zur Vereinfachung bei der Konstruktion vorausgesetzt, dass es sich um ein neutrales Vektor-Meson im Ausgangszustand handelt was die kombinatorisch möglichen Terme erheblich beschränkt. Die zusätzliche Annahme, dass weder η noch η' als pseudoskalare Mesonen im Endzustand auftreten, reduziert die Anzahl der Terme die Korrekturen in $1/N_C$ anzeigen auf einen einzigen. Das in Kapitel 3, Gleichung (4.11), angegebene Ergebnis für die Lagrange-Dichte führender Ordnung macht von der Tatsache Gebrauch, dass es sich im Endzustand um drei Pionen, zwei davon ein geladenes Pion-Paar und eines ein neutrales Pion, handelt.

C.4. Phasenraum zu $PV\ell^+\ell^-$ und $VPPP$

Der Phasenraum eines mittels Zwischenschritten charakterisierten, sequenziellen Zerfalls eines einzelnen Teilchen im Anfangszustand in eine bestimmte Anzahl, im konkreten Falle drei, von Teilchen im Endzustand ist in den in dieser Arbeit vorliegenden Fällen identisch mit demjenigen einer Punktwechselwirkung eines Teilchens im Anfangszustand mit derselben Anzahl und Art an Teilchen im Endzustand. Für eine ausführliche Bestimmung des Phasenraums sequenzieller Zerfälle siehe [BK73],

aktuell verwendete Konventionen für Phasenräume finden sich in [Tan+18]. Die Beispielrechnung ist für den Prozess $PV\ell^+\ell^-$ gezeigt, lässt sich bei entsprechender Ersetzung der Impulse und Massen aber auch für $VPPP$ anwenden.
Die in der folgenden Rechnung gezeigten Zwischenschritte und Vorgehensweisen orientieren sich an der Darstellung in [BK73]. Dabei wird der Fall eines Vektor-Mesons V mit Masse m_V und Impuls p im Ausgangszustand und eines pseudoskalaren Mesons P mit Masse M_P, Impuls k und Energie E_k betrachtet, der umgekehrte Fall eines pseudoskalaren Mesons im Anfangszustand ergibt sich analog der Ersetzungen im Fall der elektromagnetischen Übergänge $PV\gamma$ in Kapitel 3. Zusätzlich wird das Lepton-Paar im Endzustand mit jeweils zugehörigen Massen $m_{\ell^+} = m_+$, $m_{\ell^-} = m_-$ [1] sowie Impulsen q_+, q_- und Energien E_+, E_- bewusst als separate Teilchen angegeben, um, soweit dies möglich ist, die Option der Anwendung auf beliebige Teilchen zu verdeutlichen. Der Zerfall findet mittels eines virtuellen Photon γ^* im Zwischenzustand mit „Masse“ m_γ, Impuls q und Energie E_q statt. Wie bislang auch für die elektromagnetischen Übergänge $PV\gamma$ wird der Zerfall im Ruhesystem des Mesons im Anfangszustand betrachtet und alle Koordinaten sowie Energien und Impulse werden dementsprechend gewählt. Rechenschritte, die in analoger Weise durchgeführt werden, sind nicht ausführlich kommentiert. Zur Erinnerung sei die Gleichung für die differentielle Zerfallsrate eines allgemeinen dynamischen Prozesses angegeben

$$d\Gamma = \underbrace{\overline{|\mathcal{M}|^2}}_{\text{dyn}} \underbrace{\frac{1}{2m_V}}_{\text{norm}} \underbrace{S}_{\text{Statistik}} \underbrace{\prod_{i=1}^{n} \frac{d^3 p_i}{(2\pi)^3 2E_i}}_{\text{Phasenraum}} \underbrace{(2\pi)^4 \delta^4 \left(p - \sum_{i=1}^{n} p_i \right)}_{\text{Impulserhaltung}} . \tag{C.13}$$

Die folgende Diskussion in diesem Abschnitt wird sich auf eine Betrachtung des Phasenraumes beschränken, welcher zu Beginn ein neun-dimensionaler Dreikörper-Phasenraum mit d^9R [BK73] ist, mit

$$d^9R = \frac{d^3k}{(2\pi)^3 2E_k} \frac{d^3q_-}{(2\pi)^3 2E_-} \frac{d^3q_+}{(2\pi)^3 2E_+} (2\pi)^4 \delta^4 (P - k - q_- - q_+) \ . \tag{C.14}$$

Dabei sei daran erinnert, dass für zwei gleichartige Teilchen, wie im konkreten Fall das Lepton-Paar, die Massen $m_+ = m_-$ gleich sind. Zum Zwecke einer möglichen Verallgemeinerung auf Prozesse mit drei unterschiedlichen Teilchen im Endzustand werden die Energien soweit möglich separat dargestellt.
In den folgenden Rechenschritten wird ein Faktor $(2\pi)^{-5}$, der sich aus der Normierung der drei Integrationen mittels jeweils eines Faktors $(2\pi)^{-3}$ und der Impulserhaltung mit einem Faktor $(2\pi)^4$ zusammen setzt, vernachlässigt. Somit nimmt der

[1] Zur besseren Übersicht sei in der Rechnung in diesem Abschnitt $\ell^+ \mapsto +$ und $\ell^- \mapsto -$ gesetzt.

Phasenraum folgende Gestalt an:

$$d^9R \propto \frac{d^3k}{2E_k} \underbrace{\frac{d^3q_-}{2E_-}\frac{d^3q_+}{2E_+}\delta^4\left(P-k-q_- -q_+\right)}_{\text{separater Zweikörper}-\text{Zerfall}} \ . \tag{C.15}$$

Dabei sei für die Impulserhaltung des zweiten Zerfalls $\gamma^* \to l^+l^-$ die Gleichung $q = q_- + q_+$ mit dem Impuls q des virtuellen Photons gesetzt.
Analog zu der bekannten Vorgehensweise in Kapitel 3 wird die Integration über $\vec{q}_-$ mittels Hinzufügen einer Integration über einen festen Parameter, der Energie des Leptons, welche nicht zur Integration über den Phasenraum beiträgt, zu einer Integration über q_- erweitert

$$\frac{1}{2E_-} = \int dq_-^0\, \delta\left(q_-^2 - m_-^2\right)\Theta\left(q_-^0\right) \ . \tag{C.16}$$

An dieser Stelle sei daran erinnert, dass Teilchen betrachtet werden, die auf der Massenschale liegen, sogenannte „on-shell“-Teilchen. An dieser Stelle wird eine Integration über q_- gewählt, für den betrachteten Prozess wäre bei entsprechender Anpassung der verwendeten Massen, Impulse und Energien eine Integration über q_+ in gleicher Weise möglich.
Wird nun im nächsten Schritt über den Impuls q_- integriert, so ergibt sich

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{8}\frac{d^3k}{E_k}\left[\frac{d^3\vec{q}_+}{q_+}\delta\left((k-q_+)^2 - m_-^2\right)\Theta\left(q_-^0\right)\right] \\ &= \frac{1}{8}\frac{d^3\vec{k}}{E_k}\left[\frac{d^3\vec{q}_+}{E_+}\frac{1}{2m_V}\delta\left(\frac{m_{kq_+}^2 + m_{q_+q_-}^2 - m_-^2 - M_P^2}{2m_V} - E_+\right)\Theta\left(q_-^0\right)\right] \ , \end{aligned} \tag{C.17}$$

mit den invarianten Massen $m_{q_+q_-}^2 = (q_+ + q_-)^2$ und $m_{kq_+}^2 = (k+q_+)^2$.
Nun wird das Koordinatensystem derart gewählt, dass die z-Achse in Richtung des Impulses des pseudoskalaren Meson verläuft. In Folge der Wahl gilt nun für den Impuls des Teilchens ℓ^+ in Kugelkoordinaten die folgende Relation

$$d^3q_+ = |\vec{q}_+|^2 dq_+ d\cos(\theta_z) d\phi \ , \tag{C.18}$$

dabei sind θ_z und ϕ der Polar- und Azimutwinkel des Impuls-Vektors $\vec{q}_+$ in Bezug auf ein Koordinatensystem mit einer in der Richtung von $\vec{k}$ orientierten z-Achse. Wird nun die Integration über q_+ entsprechend Gleichung (C.18) ersetzt, so ergibt sich

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{16m_V}\frac{d^3\vec{k}}{E_k}\left[d\phi d\cos(\theta_z)\frac{|\vec{q_+}|^2 dq_+}{E_+}\delta\left(\frac{m_{kq_+}^2+m_{q_+q_-}^2-m_-^2-M_P^2}{2m_V}-E_+\right)\Theta(m_V-E_k-E_+)\right]\\
&= \frac{\pi}{8m_V}\frac{d^3\vec{k}}{E_k}\left[d\cos(\theta_z)\frac{|\vec{q_+}|^2 dq_+}{E_+}\delta\left(\frac{m_{kq_+}^2+m_{q_+q_-}^2-m_-^2-M_P^2}{2m_V}-E_+\right)\Theta\left(m_V-E_q-E_+\right)\right] \ .
\end{aligned} \tag{C.19}
$$

Die Integration über $d\phi$ in Gleichung (C.19) gibt aufgrund der Wahl des Koordinatensystems für den zweiten Zerfall einen Faktor 2π.
Es verbleibt noch über $d\cos(\theta_z)$ zu integrieren, üblicherweise geschieht dies bei Zerfällen von einem in drei Teilchen unter Nutzung der Energie des zweiten Teilchens E_-. Da allerdings bereits über dessen Impuls q_- integriert wurde ist diese Wahl nicht länger zulässig. Als eine Alternative bietet sich bei genauerer Überlegung die in Gleichung (C.20) gezeigte quadrierte invariante Masse, welche einen Term proportional zu $\cos(\theta_z)$ und auch die bislang noch nicht verwendeten Energien E_k und E_+ enthält, an,

$$m_{qk_+}^2 = m_+^2 + M_P^2 + 2E_kE_+ + 2|\vec{k}||\vec{q_+}|\cos(\theta_z) \ . \tag{C.20}$$

Zum Zwecke der Vereinfachung der Rechnung wird die Integration über den Kosinus des Winkel später ausgeführt.
Im nächsten Schritt wird mittels der folgenden Gleichung

$$\frac{|\vec{q_+}|^2 dq_+}{E_+} = |\vec{q}_+|dE_+ \ , \tag{C.21}$$

die Integration über q_+ mit der einer über E_+ getauscht, sodass sich bei Nutzung dieser Ersetzung und Integration über die Energie E_+ der folgende Zwischenschritt der Rechnung ergibt,

$$
\begin{aligned}
&= \frac{\pi}{8m_V}d\cos(\theta_z)\frac{d^3k}{E_k}\left[|\vec{q_+}|dE_+\delta(\Xi-E_+)\Theta(m_V-E_k-E_+)\right]\\
&= \frac{\pi}{8m_V}d\cos(\theta_z)\frac{d^3k}{E_k}\left[|\vec{q_+}|\Theta(m_V-E_k-\Xi)\right] \ .
\end{aligned} \tag{C.22}
$$

Dabei wurde die Kurzschreibweise

$$\Xi = \frac{m_{kq_+}^2+m_{q_+q_-}^2-m_-^2-M_P^2}{2m_V} \tag{C.23}$$

eingeführt. Bis zu diesem Punkt der Rechnung wurden zunächst nur die kinematischen Eigenschaften für den zweiten Zerfall, den eines virtuellen Photons in ein Lepton-Paar, betrachtet. Im weiteren Verlauf ist es nun notwendig, den bislang vernachlässigten ersten Schritt des Zerfalls, den Übergang eines Vektor-Meson in ein pseudoskalares und ein virtuelles Photon (direkt aus dem Übergang in ein virtuelles Vektor-Meson, das aber mit Blick auf die kinematischen Aspekte identisch mit dem Photon ist), mit zu berücksichtigen. Zu diesem Zweck müssen zwei Zwangsbedingungen, die die diskutierten Eigenschaften eines sequentiellen Zerfalls garantieren, eingeführt werden. Diese Bedingungen sind zunächst die Erhaltung des vierdimensionalen Impulses für die erste Stufe des Zerfalls

$$1 = \int d^4 q \delta^4 \left((P-k) - q\right) \tag{C.24}$$

und zweitens die Zwangsbedingung für den Masse-Impuls-Übertrag

$$1 = \int dm^2_{q_+q_-} \delta\left(m^2_{q_+q_-} - q^2\right) \tag{C.25}$$

des Teilchens im Zwischenzustand.
Werden diese Bedingungen im Folgenden Schritt der Bestimmung des Phasenraums eingefügt und über den Impuls q integriert, so gilt

$$\begin{aligned}
=&\frac{\pi}{8m_V}\int |\vec{q_+}| d\cos(\theta_z)\, dm^2_{q_+q_-} \frac{d^3k}{E_k} d^4q\delta^4\left((P-k)-q\right)\delta\left(m^2_{q_+q_-} - q^2\right)\Theta\left(m_V - E_k - \Xi\right)\\
=&\frac{\pi}{8m_V}\int |\vec{q_+}| d\cos(\theta_z)\, dm^2_{q_+q_-} \frac{d^3k}{E_k}\delta\left(m^2_{q_+q_-} - (P-k)^2\right)\Theta\left(m_V - E_k - \Xi\right)\\
=&\frac{\pi}{16m_V^2}\int |\vec{q_+}| d\cos(\theta_z)\, dm^2_{q_+q_-} \frac{d^3k}{E_k}\delta\left(E_k - \frac{m_V^2 + M_P^2 - m^2_{q_+q_-}}{2m_V}\right)\Theta\left(m_V - E_k - \Xi\right)\ .
\end{aligned} \tag{C.26}$$

Mit bereits bekannten Vorgehensweise werden nun die Ersetzungen

$$\begin{aligned}
d^3\vec{k} &= |\vec{k}|^2 dk\, d\Omega\ ,\\
\frac{|\vec{k}|^2 dk}{E_k} &= |\vec{k}| dE_k\ ,
\end{aligned} \tag{C.27}$$

mit dem Raumwinkel des ersten Zerfalls $\int d\Omega = 4\pi$ in dem nächsten Schritt genutzt,

$$\begin{aligned}
=&\frac{\pi}{16m_V^2}|\vec{q_+}| d\cos(\theta_z)\, dm^2_{q_+q_-}|\vec{k}| dE_k d\Omega\delta\left(E_k - \frac{m_V^2 + M_P^2 - m^2_{q_+q_-}}{2m_V}\right)\Theta\left(m_V - E_k - \Xi\right)\\
=&\frac{\pi^2}{4m_V^2}|\vec{q_+}|\ |\vec{k}|\ d\cos(\theta_z)\, dm^2_{q_+q_-}\Theta\left(m_V - \frac{m_V^2 - m_+^2 + m^2_{kq_+}}{2m_V}\right)\\
=&\frac{\pi^2}{4m_V^2} dm^2_{kq_+} dm^2_{q_+q_-}\Theta\left(m_V - \frac{m_V^2 - m_+^2 + m^2_{kq_+}}{2m_V}\right)\ ,
\end{aligned} \tag{C.28}$$

dabei gilt nach Gleichung (C.20) für das Quadrat der invarianten Masse $dm_{kq_+}^2 = |\vec{q}_+|\,|\vec{k}|\, d\cos(\theta_z)$.
Werden nun die Relationen

$$\begin{aligned} dm_{kq_+}^2 &= -2m_V dE_+ \ , \\ dm_{q_+q_-}^2 &= -2m_V dE_k \ , \end{aligned} \tag{C.29}$$

verwendet, so ergibt sich das in [Tan+18] gezeigte Ergebnis für Zerfälle $1 \to 3$.
Wird zudem noch innerhalb der angegeben Grenzen über das Quadrat der invarianten Masse $m_{kq_+}^2$ beziehungsweise die Energie E_+ integriert und sich ins Gedächtnis gerufen, dass für das Quadrat der invarianten Masse der Leptonen $dm_{q_+q_-}^2 = dm_{\ell^+\ell^-}^2$ gilt, so ergibt sich die in Kapitel 4 gezeigte einfach differentielle Zerfallsrate.

C.5. Tabellen und Abbildungen

Tabelle C.8.: Vergleich der Zerfallsraten von experimentell exakt erfassten Zerfällen $PV\ell^+\ell^-$ aus [Tan+18] gegenüber aus der mittels auf Annahme einer Punktwechselwirkung basierenden Erweiterung des Modells berechneten Ergebnissen.

Zerfall	Γ_{PDG} in keV	$\Gamma_{\text{mod,QED}}$ in keV
$\omega \to \pi^0 e^+ e^-$	6.54 ± 0.57	8.63
$\omega \to \pi^0 \mu^+ \mu^-$	1.14 ± 0.16	0.56
$\phi \to \pi^0 e^+ e^-$	0.0565 ± 0.0047	0.0006
$\phi \to \eta e^+ e^-$	0.459 ± 0.020	0.459
$\eta' \to \omega e^+ e^-$	0.0392 ± 0.0096	0.0525

Tabelle C.9.: Zerfallsraten der Prozesse $V \to \ell^+\ell^-$, bestimmt mittels Verzweigungsraten entnommen aus [Tan+18].

Zerfall	Γ_{PDG} in keV
$\rho^0 \to e^+ e^-$	6.78 ± 0.42
$\rho^0 \to \mu^+ \mu^-$	7.038 ± 0.084
$\omega \to e^+ e^-$	0.625 ± 0.014
$\omega \to \mu^+ \mu^-$	0.63 ± 0.15
$\phi \to e^+ e^-$	1.263 ± 0.015
$\phi \to \mu^+ \mu^-$	1.215 ± 0.081

Tabelle C.10.: Zerfallsraten der Prozesse $V \to PP$, bestimmt mittels Verzweigungsraten entnommen aus [Tan+18].

Zerfall	Γ_{PDG} in MeV
$\rho \to \pi\pi$	149.00 ± 0.80
$\omega \to \pi^+\pi^-$	0.130 ± 0.011
$\phi \to K^+K^-$	2.091 ± 0.022
$\phi \to \pi^+\pi^-$	$(3.10 \pm 0.55) \cdot 10^{-4}$
$K^{*\pm} \to K\pi$	50.25 ± 0.80
$K^{*0} \to K\pi$	47.18 ± 0.51

Tabelle C.11.: Zerfallsraten der Prozesse $V \to PPP$, bestimmt mittels Verzweigungsraten entnommen aus [Tan+18]. Für den asymmetrischen Fehler des ρ-Zerfalls wird der Vereinfachung halber der größerer Wert für einen symmetrischen Fehler herangezogen.

Zerfall	Γ_{PDG} in MeV
$\rho^0 \to \pi^+\pi^-\pi^0$	0.015 ± 0.011
$\omega \to \pi^+\pi^-\pi^0$	7.573 ± 0.072
$\phi \to \pi^+\pi^-\pi^0$	0.648 ± 0.015

Tabelle C.12.: Experimentelle Werte gegenüber aus Modell berechneten Ergebnissen für den Vertex $V\gamma$. Variation der Approximation des Matrixelements $|\mathcal{M}^I|^2$ und $|\mathcal{M}^{II}|^2$ analog der Zerfälle $PV\gamma$ in Kapitel 3.

Zerfall	Γ_{PDG} in keV	$\Gamma_{\mathrm{mod}},\ |\mathcal{M}^I|^2$ in keV	$\Gamma_{\mathrm{mod}},\ |\mathcal{M}^I|^2$ in keV
$\rho^0 \to e^+e^-$	6.78 ± 0.42	6.19 ± 0.59	6.19 ± 0.59
$\rho^0 \to \mu^+\mu^-$	7.038 ± 0.084	6.18 ± 0.58	6.17 ± 0.59
$\omega \to e^+e^-$	0.625 ± 0.014	0.825 ± 0.072	0.825 ± 0.072
$\omega \to \mu^+\mu^-$	0.63 ± 0.15	0.823 ± 0.072	0.823 ± 0.072
$\phi \to e^+e^-$	1.263 ± 0.015	1.25 ± 0.13	1.25 ± 0.13
$\phi \to \mu^+\mu^-$	1.215 ± 0.081	1.25 ± 0.13	1.25 ± 0.13

Tabelle C.13.: Experimentelle gegenüber im Modell ermittelten Zerfallsraten für Prozesse $PV\ell^+\ell^-$ für mittels Abschätzungen erfasster Zerfälle. In der dritten Spalte stehen Ergebnisse für $\Gamma(A \to B\gamma) = \Gamma_{\text{exp}}$, in der vierten für die Verwendung der Modellergebnisse aus Tabelle 3.3.

Zerfall	Γ_{PDG} [keV]	mit $\Gamma_{\text{PDG}}^{PV\gamma}$ [keV]	mit $\Gamma_{\text{mod}}^{PV\gamma}$ [keV]
$\rho^0 \to \pi^0 e^+ e^-$	< 1.79	0.66	0.71
$\rho^0 \to \eta e^+ e^-$	< 1.04	0.32	0.38
$\omega \to \eta e^+ e^-$	< 0.093	0.028	0.033
$\phi \to \eta \mu^+ \mu^-$	< 0.040	0.025	0.026

Tabelle C.14.: Vorhersagen der Zerfallsraten für Prozesse PVe^+e^- neutraler Vektor-Mesonen, die experimentell bislang noch nicht erfasst wurden. In der dritten Spalte stehen Ergebnisse für $\Gamma(A \to B\gamma) = \Gamma_{\text{exp}}$, in der vierten für die Verwendung der Modellergebnisse aus Tabelle 3.3.

Zerfall	mit $\Gamma_{\text{PDG}}^{PV\gamma}$ [keV]	mit $\Gamma_{\text{mod}}^{PV\gamma}$ [keV]
$\phi \to \eta' e^+ e^-$	0.0014	0.0013
$\eta' \to \rho^0 e^+ e^-$	0.39	0.37

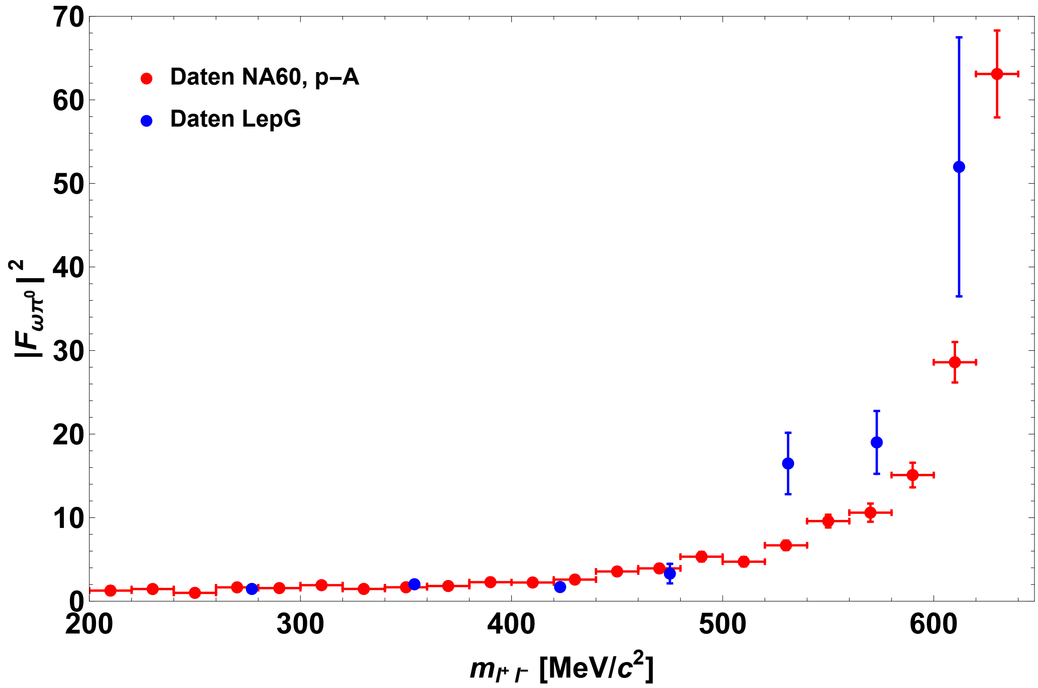

Abbildung C.1.: Experimentelle Datenreihen zu Formfaktoren $|F_{\omega\pi^0}|^2$ der Dalitz-Zerfälle $\omega \to \pi^0\ell^+\ell^-$ in Abhängigkeit von der invarianten Masse des Lepton-Paars $m_{\ell^+\ell^-}$. In Rot sind die Datenpunkte [Arn+16] und in Blau Daten aus [Dzh+81] aufgetragen.

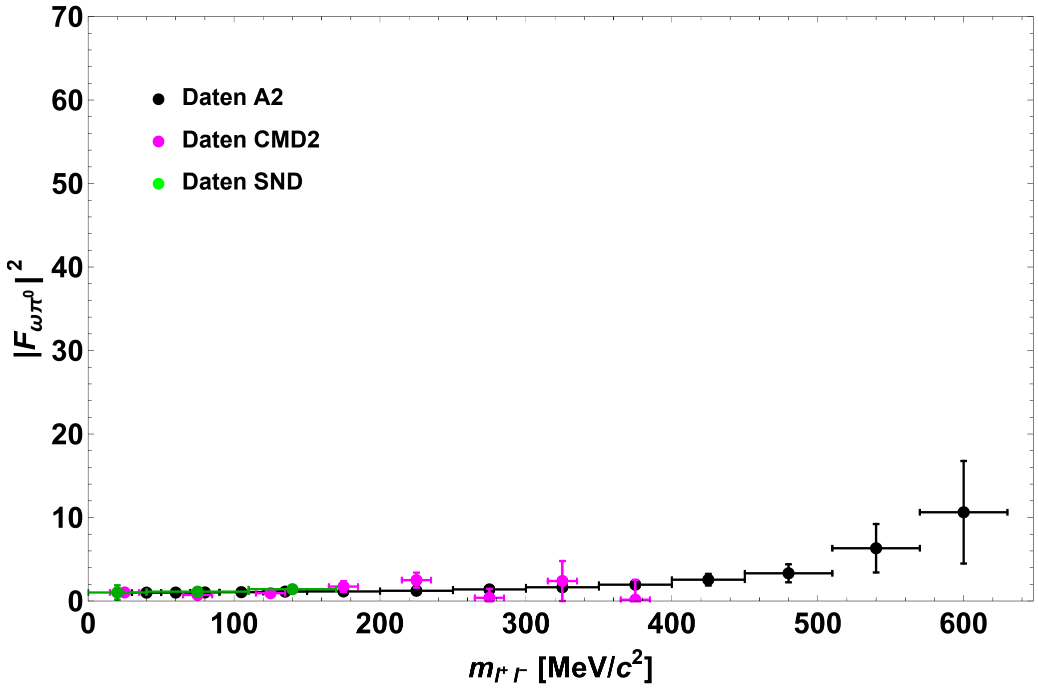

Abbildung C.2.: Experimentelle Datenreihen zu Formfaktoren $|F_{\omega\pi^0}|^2$ der Dalitz-Zerfälle $\omega \to \pi^0 \ell^+ \ell^-$ in Abhängigkeit von der invarianten Masse des Lepton-Paars $m_{\ell^+\ell^-}$. In Schwarz sind die Datenpunkte aus [Adl+17], in Magenta die Daten aus [Akh+05] und in Grün die Daten aus [Ach+08] aufgetragen.

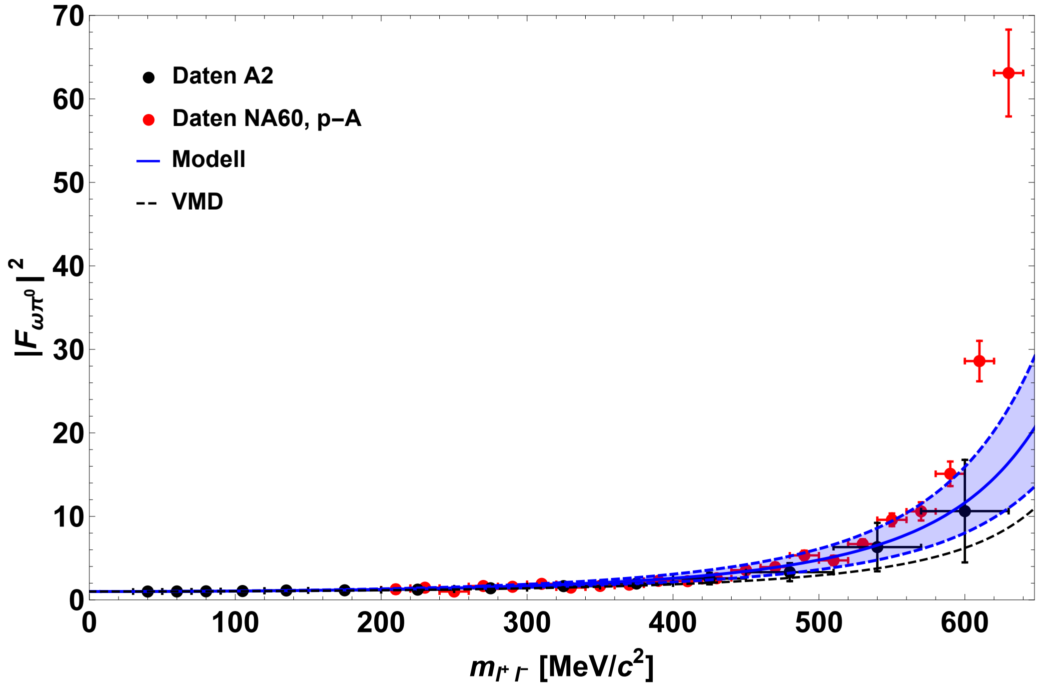

Abbildung C.3.: Graphen der quadrierten Beträge des Übergangsformfaktors $|F_{\omega\pi^0}|^2$, aufgetragen in Abhängigkeit von der invarianten Masse des Lepton-Paars $m_{\ell^+\ell^-}$ in linearer Skalierung der Ordinate. In Blau mit blauem Fehlerband ist das Ergebnis aus dem Modell dieser Dissertation, in Schwarz die Daten aus [Adl+17] und in Rot die Daten aus [Arn+16] gegeben.

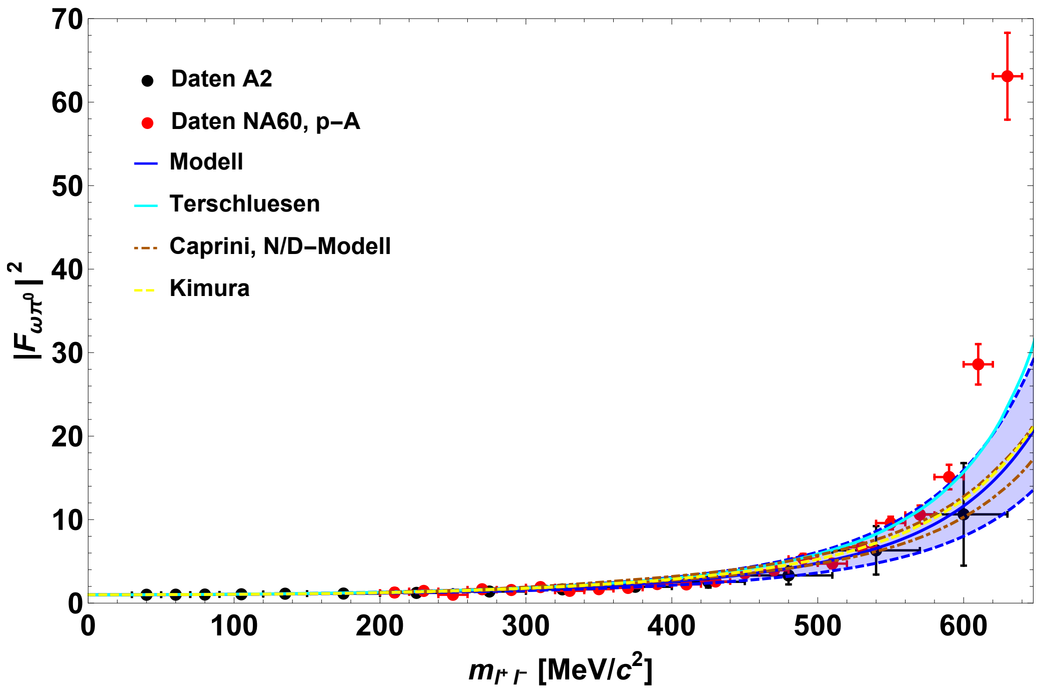

Abbildung C.4.: Graphen der quadrierten Beträge des Übergangsformfaktors $|F_{\omega\pi^0}|^2$, aufgetragen in Abhängigkeit von der invarianten Masse des Lepton-Paars $m_{\ell^+\ell^-}$ in linearer Skalierung der Ordinate. Datenreihen in Rot [Arn+16] und Schwarz [Adl+17] aufgetragen. Berechnete Formfaktoren aus dem Modell dieser Dissertation in Blau, [TLL12] in hellem Blau, [KMU18] in Gelb und verbessertes N/D-Modell aus [Cap15] in dunklem Orange.

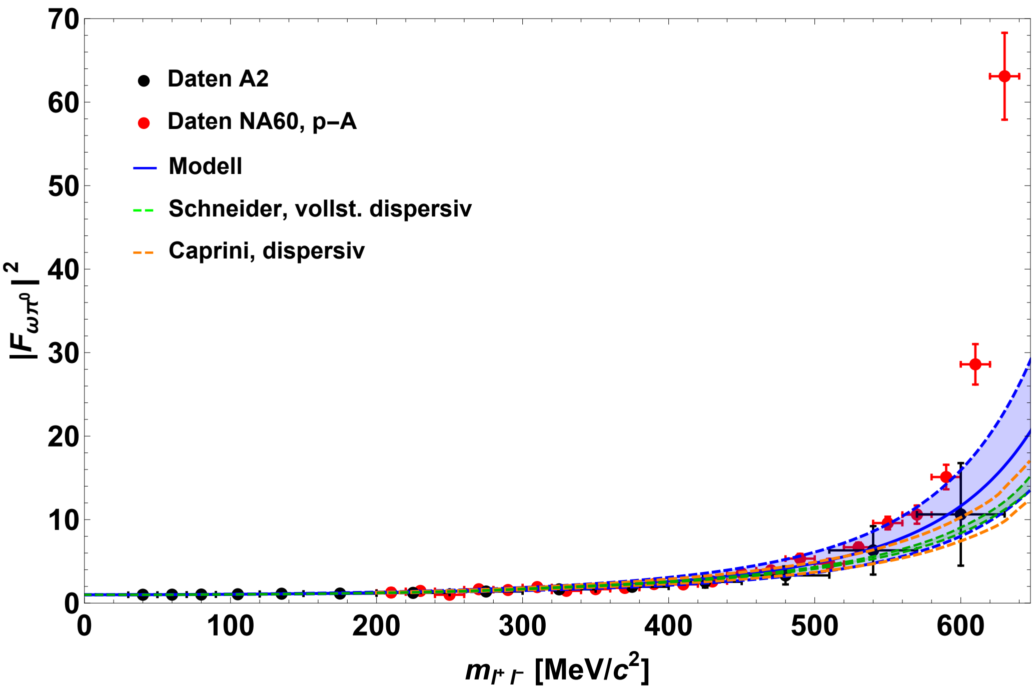

Abbildung C.5.: Graphen der quadrierten Beträge des Übergangsformfaktors $|F_{\omega\pi^0}|^2$, aufgetragen in Abhängigkeit von der invarianten Masse des Lepton-Paars $m_{\ell^+\ell^-}$ in linearer Skalierung der Ordinate. Datenreihen in Rot [Arn+16] und Schwarz [Adl+17] aufgetragen. Berechnete Formfaktoren aus dieser Dissertation in Blau, mittels dispersiver Rechnung aus [SKN12] in Grün und ebenfalls dispersiver Rechnung aus [Cap15] in Orange.

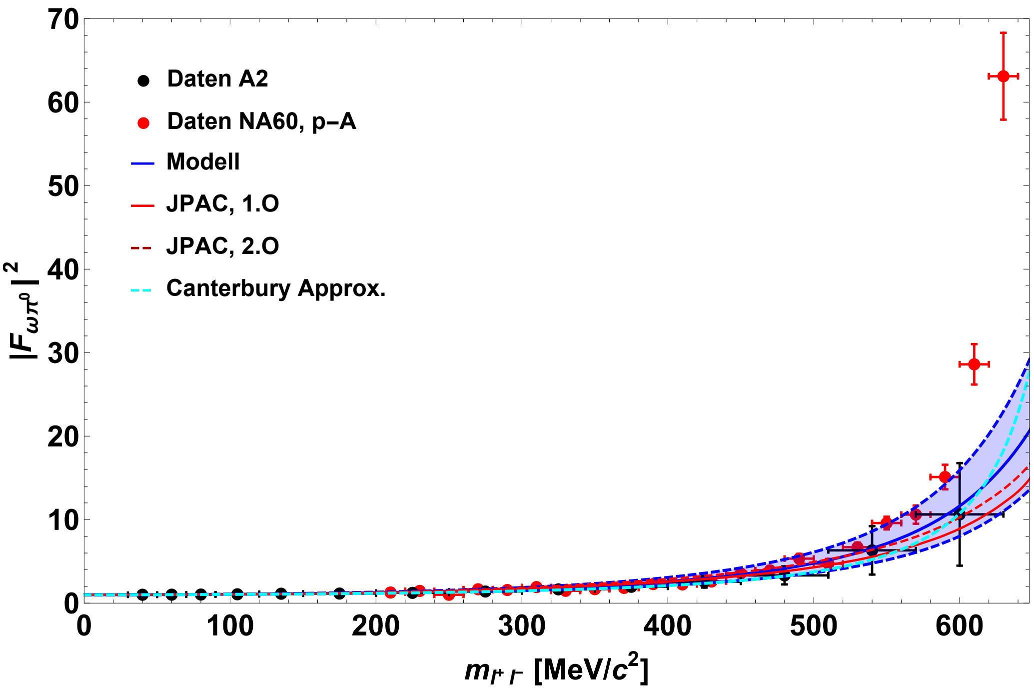

Abbildung C.6.: Graphen der quadrierten Beträge des Übergangsformfaktors $|F_{\omega\pi^0}|^2$, aufgetragen in Abhängigkeit von der invarianten Masse des Lepton-Paars $m_{\ell^+\ell^-}$ in linearer Skalierung der Ordinate. Datenreihen in Rot [Arn+16] und Schwarz [Adl+17] aufgetragen. Berechnete Formfaktoren aus dieser Dissertation in Blau, [Dan+15] in Rot für LO-, dunklem Rot für NLO-Rechnung. In hellem Blau Canterbury-Approximation wie in [Adl+17] gezeigt.

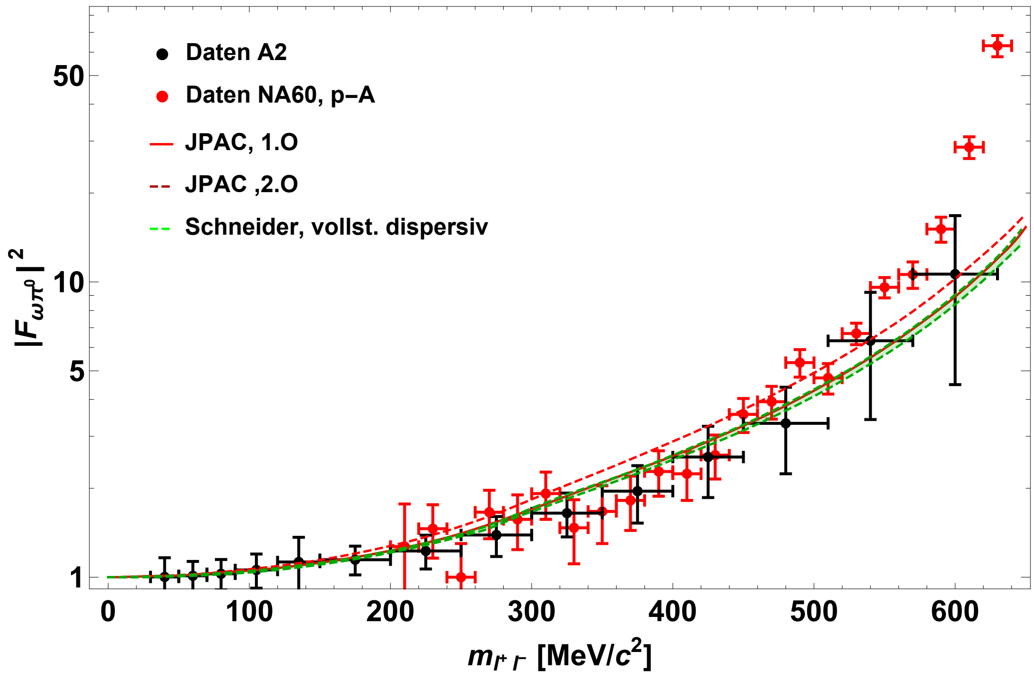

Abbildung C.7.: Graphen der quadrierten Beträge des Übergangsformfaktors $|F_{\omega\pi^0}|^2$, aufgetragen in Abhängigkeit von der invarianten Masse des Lepton-Paars $m_{\ell^+\ell^-}$ in linearer Skalierung der Ordinate. Datenreihen in Rot [Arn+16] und Schwarz [Adl+17] aufgetragen. Berechnete Formfaktoren aus [Dan+15] in Rot für LO- und dunklem Rot für NLO-Rechnung, in Grün Ergebnis aus [SKN12].

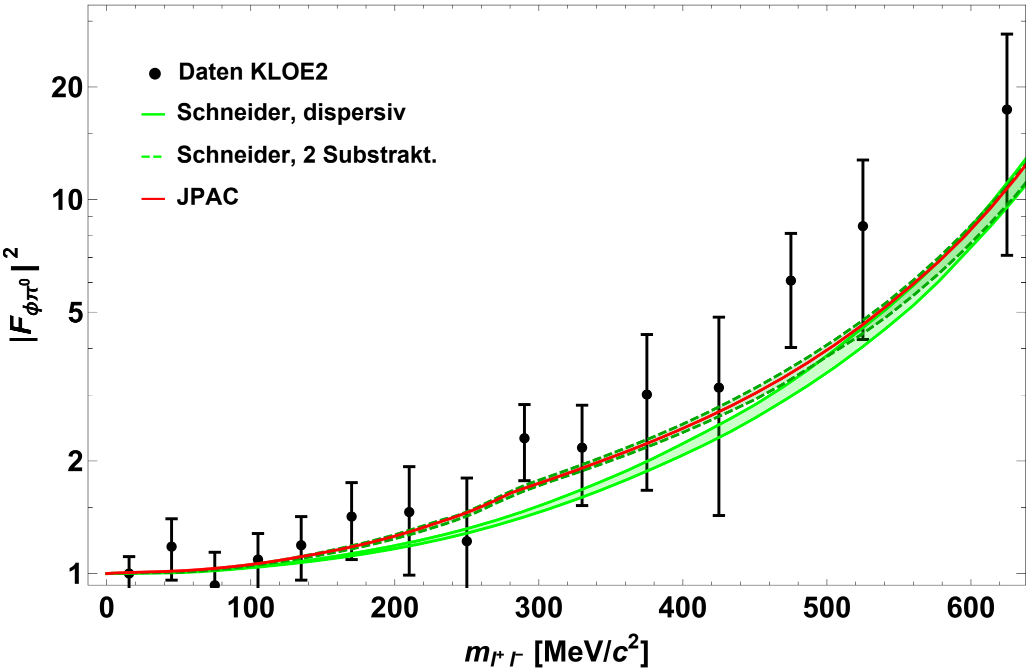

Abbildung C.8.: Graphen der quadrierten Beträge des Übergangsformfaktors $\left|F_{\phi\eta}\right|^2$, aufgetragen in Abhängigkeit von der invarianten Masse des Lepton-Paars $m_{\ell^+\ell^-}$. Datenreihe in schwarz [Ana+16] aufgetragen. Berechnete Formfaktoren aus [Dan+15] in Rot und [SKN12] in Grün.