

QUADRATURFORMELN FÜR DAS QUALOKATIONSVERFAHREN

Dissertation
zur Erlangung des Grades
„Doktor der Naturwissenschaften“

am Fachbereich Mathematik & Informatik
der Johannes Gutenberg–Universität
in Mainz

Michael Junges
geboren in Trier

Mainz, 2002

Datum der mündlichen Prüfung: 26. November 2002

Zusammenfassung

Das Qualokationsverfahren ist eine Methode zur numerischen Behandlung von Gleichungen der Form

$$Lu = f,$$

wobei f eine gegebene 1-periodische Funktion und L ein 1-periodischer Integraloperator (oder allgemeiner ein 1-periodischer Pseudodifferentialoperator) ist. Solche Gleichungen treten z.B. bei der Integralgleichungsmethode zur Lösung des DIRICHLET-Innenraumproblems für die LAPLACE-Gleichung in glatt berandeten und beschränkten Gebieten auf.

Das Qualokationsverfahren (*Quadratur-modifiziertes Kollokationsverfahren*) wurde Ende der 80er Jahre von SLOAN, WENDLAND und CHANDLER entwickelt. Es kann als ein modifiziertes PETROV-GALERKIN-Verfahren mit Spline-Verfahrens- und Testräumen angesehen werden, bei welchem das innere Produkt durch eine zusammengesetzte Basis-Quadraturformel approximiert wird. Es zeigt sich, dass das Qualokationsverfahren die gleichen Konvergenzordnungen erreicht wie das PETROV-GALERKIN-Verfahren, wenn man symmetrische Basis-Quadraturformeln mit positiven Gewichten verwendet, die für ein System von Funktionen exakt sind. Wesentlich hierbei ist, dass dieses System vom Operator L und von der Wahl des Verfahrensraums abhängig ist, d.h. die hier konstruierten Quadraturformeln sind operatorabhängig, eine Besonderheit des Qualokationsverfahrens.

Im Mittelpunkt dieser Arbeit steht die Untersuchung noch offener Existenz- und Eindeutigkeitsfragen von solchen Quadraturformeln. Im ersten Kapitel werden die hier behandelten Pseudodifferentialoperatoren und das Qualokationsverfahren vorgestellt. Im zweiten Kapitel wird eine Theorie zur Existenz und Eindeutigkeit von Quadraturformeln entwickelt, welche die o.g. Anforderungen erfüllen. Ein wesentliches Hilfsmittel hierzu ist die hier bewiesene Verallgemeinerung eines Satzes von NÜRNBERGER über die Existenz und Eindeutigkeit von Quadraturformeln mit positiven Gewichten, die exakt für TSCHEBYSCHEFF-Räume sind. Es wird schließlich gezeigt, dass es stets eindeutig bestimmte Quadraturformeln gibt, welche die in den Arbeiten von SLOAN und WENDLAND formulierten Bedingungen erfüllen.

Im dritten Kapitel der Arbeit werden 2-Punkt-Quadraturformeln für so genannte einfache Operatoren bestimmt, mit welchen das Qualokationsverfahren mit einem Testraum von stückweise konstanten Funktionen eine höhere Konvergenzordnung als das PETROV-GALERKIN-Verfahren hat; insbesondere wird eine offene Frage aus der Arbeit von CHANDLER & SLOAN beantwortet. Außerdem wird gezeigt, dass es bei nicht-einfachen Operatoren im Allgemeinen nicht möglich ist, mit einer geeigneten Quadraturformel eine Konvergenzordnung zu erhalten, die höher als beim PETROV-GALERKIN-Verfahren ist.

Das vierte Kapitel beinhaltet schließlich numerische Tests, welche die theoretischen Ergebnisse der vorangehenden Kapitel bestätigen. Es wurden auch Rechnungen mit Operatoren mit variablen Koeffizienten durchgeführt, deren numerische Ergebnisse sich ebenfalls der Theorie entsprechend verhalten.

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	8
1.1	Randintegralgleichungen & Pseudodifferentialoperatoren	8
1.2	Numerische Verfahren für Randintegralgleichungen	11
1.2.1	Das Kollokationsverfahren	11
1.2.2	Das GALERKIN-Verfahren	13
1.2.3	Das Qualokationsverfahren	14
1.2.4	Symmetrische Quadraturformeln für das Qualokationsverfahren	16
2	Existenz von Quadraturformeln	20
2.1	Grundbegriffe	20
2.2	TSCHEBYSCHEFF-Systeme	21
2.3	Existenz- und Eindeutigkeitsatz für Quadraturformeln	24
2.4	Eigenschaften der Funktion G_α	32
2.4.1	Darstellung und Ableitung von G_α	32
2.4.2	Zusammenhang mit BERNOULLI-Polynomen	37
2.4.3	Einschließung der Nullstelle von G_α	40
2.4.4	Die Singularität von G_α für $\alpha \in (0, 1]$ im Ursprung	42
2.5	Hauptsatz	43
2.5.1	Hilfssätze für den Beweis des Hauptsatzes	44
2.5.2	Beweis des Hauptsatzes	47
2.5.3	Der Fall $\alpha \in (0, 1]$	52
2.6	Quadraturformeln für das Qualokationsverfahren	53

3 Erhöhung der Konvergenzordnung	57
3.1 Einfache Operatoren	57
3.2 Nicht-einfache Operatoren	63
4 Numerische Beispiele	67
4.1 Implementation	67
4.2 Zwei-Punkt-Formeln für einfache Operatoren	69
4.3 Elliptische Operatoren mit konstanten Koeffizienten	72
4.3.1 Stark elliptischer Operator	74
4.3.2 Ungerade elliptischer Operator	76
4.4 Glattheit der Lösung	78
4.5 Variable Koeffizienten	81
A Periodische Splineräume	82
B Darstellung des Polylogarithmus	84
C Funktionswerte von G_α und H_α	92
Literaturverzeichnis	94

Symboltabelle

Mengen und Räume

\mathbb{N}	Menge der natürlichen Zahlen $\{1, 2, 3, \dots\}$
$\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$	Menge der natürlichen Zahlen einschließlich 0
\mathbb{Z}	Menge der ganzen Zahlen $\{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$
\mathbb{R}	Menge der reellen Zahlen
\mathbb{C}	Menge der komplexen Zahlen
Π_n	Vektorraum der Polynome vom Höchstgrad $n \in \mathbb{N}_0$
(a, b)	offenes Intervall $\{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$
$[a, b]$	abgeschlossenes Intervall $\{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$
$\langle f_1, \dots, f_n \rangle$	Vektorraum erzeugnis von $\{f_1, \dots, f_n\}$ über \mathbb{R} : $\left\{ \sum_{i=1}^n a_i f_i \mid a_i \in \mathbb{R}, i = 1(1)n, n \in \mathbb{N} \right\}$
$C[a, b] = C^0[a, b]$	Vektorraum der stetigen Funktionen auf $[a, b]$
$C^m[a, b]$	Vektorraum der m -mal stetig differenzierbaren Funktionen auf $[a, b]$, $m \in \mathbb{N}$
$C_{\text{per}} = C_{\text{per}}[0, 1]$	Vektorraum der 1-periodischen stetigen Funktionen: $\{f \in C(\mathbb{R}) \mid f(x) = f(x+1) \forall x \in \mathbb{R}\}$
$C_{\text{per}}^m = C_{\text{per}}^m[0, 1]$	Vektorraum der 1-periodischen Funktionen aus $C^m(\mathbb{R})$: $\{f \in C^m(\mathbb{R}) \mid f(x) = f(x+1) \forall x \in \mathbb{R}\}$
$C_{\text{per}}^\infty = C_{\text{per}}^\infty[0, 1]$	Vektorraum der 1-periodischen Funktionen aus $C^\infty(\mathbb{R})$: $\{f \in C^\infty(\mathbb{R}) \mid f(x) = f(x+1) \forall x \in \mathbb{R}\}$
$L_{\text{per}}^2 = L_{\text{per}}^2[0, 1]$	Vektorraum der Nebenklassen der 1-periodischen integrierbaren Funktionen f mit $\int_0^1 f(t) ^2 dt < \infty$

Abbildungen und Symbole

$[x]$	$:= \max \{n \in \mathbb{Z} \mid n \leq x\}$ für $x \in \mathbb{R}$
η_α	die eindeutige Nullstelle der Funktion G_α , $\alpha > 0$ (vgl. 2.4.2)
$a b$	a teilt b , $a, b \in \mathbb{Z}$, d.h. $\exists k \in \mathbb{Z}$ so dass $b = k \cdot a$

Kapitel 1

Einleitung

1.1 Randintegralgleichungen & Pseudodifferentialoperatoren

Eine Methode zur Behandlung klassischer Randwertprobleme, wie z.B. der LAPLACE-Gleichung

$$\Delta u(x) = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} u(x) + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} u(x) = 0,$$

oder der HELMHOLTZ-Gleichung

$$(\Delta + k^2) u(x) = \Delta u(x) + k^2 u(x) = 0, \quad k > 0,$$

auf einem zweidimensionalen Gebiet mit geeigneten Randbedingungen, ist die Überführung in eine Randintegralgleichung auf dem Rand des Gebietes. So lässt sich beispielsweise das DIRICHLET-Innenraumproblem für ein beschränktes Gebiet Ω mit glattem Rand Γ , nämlich

$$\begin{aligned} \Delta u(x) &= 0, & x \in \Omega, \\ u(x) &= f(x), & x \in \Gamma, \end{aligned}$$

wobei $f \in C(\Gamma)$ gegeben und $u \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ gesucht sei, mit Hilfe des so genannten Einfachschichtpotentials

$$v(x) := \int_{\Gamma} \log|x-y| \mu(y) d\Gamma_y, \quad x \notin \Gamma, \quad (1.1)$$

(welches eine harmonische Funktion auf $\mathbb{R}^2 \setminus \Gamma$ ist) als Randintegralgleichung 1. Art formulieren: Finde eine Lösung μ von

$$\int_{\Gamma} \log|x-y| \mu(y) d\Gamma_y = f(x), \quad x \in \Gamma,$$

dann ist die Funktion v in (1.1) eine Lösung des DIRICHLET-Innenraumproblems. Diese Randintegralgleichung ist eindeutig lösbar, sofern Γ keine Γ -Kontur ist, was z.B. für einen Kreis Γ bedeutet, dass sein Radius ungleich 1 sein muss (vgl. [34], 4.3, [29], 3.2.2, [6], 7.2.3). Durch diese „indirekte“ Methode lassen sich unter Zuhilfenahme des Einfach- oder Doppelschichtpotentials auch das DIRICHLET-Außenraumproblem und NEUMANN-Innen-/Außenraumproblem als Randintegralgleichung 1. bzw. 2. Art formulieren, wobei sich durch die Lösung der Integralgleichung eine Lösung

des entsprechenden Randwertproblems in Integralform ergibt.

Die „direkte“ Methode verwendet eine Integraldarstellung harmonischer Funktionen, welche man mit Hilfe des GAUSSSchen Integralsatzes erhält ([6] Kap. 7.1.3, [29] 2.3, [34] 2.3), und liefert eine Integralgleichung, deren Lösung gleichzeitig Lösung des Randwertproblems ist.

Die Randintegralmethode wird ausführlich in [34, 45, 5] diskutiert, in [34], S.290 ist weitere Literatur über die Formulierung von elliptischen Randwertproblemen als Randintegralgleichungen angegeben. Die Randintegraloperatoren auf glatten Kurven gehören zur Klasse der Pseudodifferentialoperatoren, die nun eingeführt werden.

Es wird die allgemeine Gleichung

$$L u = f \quad (1.2)$$

behandelt, wobei $f \in H^\tau$ für ein $\tau \in \mathbb{R}$ eine gegebene Funktion und $L : H^t \mapsto H^{t-\beta}$, $\forall t \in \mathbb{R}$, ein 1-periodischer Pseudodifferentialoperator (z.B. ein Randintegraloperator) der Ordnung $\beta \in \mathbb{R}$ sind. Hierbei ist H^t der SOBOLEV-Raum 1-periodischer Funktionen (bzw. Distributionen für $t < 0$) auf \mathbb{R} , d.h. für $t \geq 0$ besteht H^t aus den Funktionen aus $L^2_{\text{per}}[0, 1]$, für welche die Norm

$$\|v\|_t := \left(|\widehat{v}(0)|^2 + \sum_{k \neq 0} |k|^{2t} |\widehat{v}(k)|^2 \right)^{1/2} \quad (1.3)$$

endlich ist, wobei

$$\widehat{v}(k) = \int_0^1 v(t) e^{-2\pi i k t} dt, \quad k \in \mathbb{Z},$$

die Fourierkoeffizienten von v sind.

H^t ist ein Hilbertraum mit dem Skalarprodukt

$$(u, v)_t := \widehat{u}(0) \overline{\widehat{v}(0)} + \sum_{k \neq 0} |k|^{2t} \widehat{u}(k) \overline{\widehat{v}(k)}. \quad (1.4)$$

Für $t = 0$ erhält man gerade

$$(u, v)_0 = \int_0^1 u(t) \overline{v(t)} dt,$$

$u, v \in H^0$, und man kann H^0 mit $L^2_{\text{per}}[0, 1]$ identifizieren. Man kann zeigen, dass für $k \in \mathbb{N}$ die Menge H^k gleich der Menge der $(k-1)$ -mal stetig differenzierbaren Funktionen φ mit (der schwachen Ableitung) $\varphi^{(k)} \in L^2_{\text{per}}[0, 1]$ ist ([6], 7.3.1). Für $\mu > \lambda$ liegt H^μ dicht in H^λ und die Einbettung ist kompakt. Desweiteren gilt $H^{s+i} \subset C^i_{\text{per}}[0, 1]$ für $s > \frac{1}{2}$, $i \in \mathbb{N}_0$, insbesondere sind Funktionen aus H^s für $s > \frac{1}{2}$ stetig. Für $\varepsilon \in (0, \frac{1}{2})$ gilt dann

$$\dots \supset H^{-1} \supset H^0 = L^2_{\text{per}} \supset C^0_{\text{per}} \supset H^{\frac{1}{2}+\varepsilon} \supset H^1 \supset C^1_{\text{per}} \supset H^{\frac{3}{2}+\varepsilon} \supset H^2 \supset \dots$$

Weitere Details über SOBOLEV-Räume sind in [29, 6, 19] zu finden.

Die Randintegraloperatoren auf glatten Kurven lassen sich als klassische **Pseudodifferentialoperatoren** schreiben [30]. Es werden also Operatoren L der folgenden Gestalt betrachtet:

$$(L u)(x) = (b_+(x) L_+ + b_-(x) L_- + K) u(x), \quad x \in [0, 1], \quad (1.5)$$

wobei die Anteile $L_{\pm} : H^s \mapsto H^{s-\beta}$, $\forall s \in \mathbf{R}$, gegeben sind durch

$$(L_+ u)(x) := \widehat{u}(0) + \sum_{n \neq 0} |n|^{\beta} \widehat{u}(n) e^{2\pi i n x} \quad (1.6)$$

(**gerader** Operator der Ordnung $\beta \in \mathbf{R}$) und

$$(L_- u)(x) := \widehat{u}(0) + \sum_{n \neq 0} \text{sign}(n) |n|^{\beta} \widehat{u}(n) e^{2\pi i n x} \quad (1.7)$$

(**ungerader** Operator der Ordnung $\beta \in \mathbf{R}$).

Die Koeffizienten b_+ und b_- sind komplexwertige, 1-periodische C^∞ -Funktionen und K ist ein kompakter Operator, für den ein $\tau > 0$ so existiert, dass $K : H^s \mapsto H^{s-\beta+\tau}$ beschränkt für alle $s \in \mathbf{R}$ ist (z.B. K ist ein Integraloperator mit C^∞ -Kern [30], (2.1)). K hat also eine stärkere Glättungseigenschaft als L_+ bzw. L_- (für genauere Anforderungen an K insbesondere für variable Koeffizienten b_{\pm} siehe [38], Assumption B). Operatoren L , für die entweder $b_+ \equiv 0$ oder $b_- \equiv 0$ gilt, werden in dieser Arbeit als **einfache** Operatoren bezeichnet.

Zusätzlich zur Form (1.5) sei für den Operator L angenommen, dass er eine isomorphe Abbildung von H^t nach $H^{t-\beta}$ für alle $t \in \mathbf{R}$ ist. Somit ist L ein elliptischer Pseudodifferentialoperator. Da K keinen Einfluss auf die Analyse der Verfahren hat, werden wir im Folgenden nur den **Hauptteil** des Operators

$$L_0 := b_+ L_+ + b_- L_- \quad (1.8)$$

betrachten, K wird als Störung angesehen (siehe hierzu [36], Section 6).

Nicht-einfache Operatoren lassen sich genauer dadurch charakterisieren, ob der gerade oder der ungerade Anteil des Hauptteils dominiert [37, 38]:

Definition 1.1.1. (gleichmäßige starke/ungerade Elliptizität)

Der Operator L_0 heißt

- (a) **gleichmäßig stark elliptisch**, falls es eine Funktion $\theta \in C_{\text{per}}^\infty[0, 1]$ gibt, so dass

$$\inf_{x \in [0, 1]} \min \{ \text{Re} [\theta(x) (b_+(x) + b_-(x))], \text{Re} [\theta(x) (b_+(x) - b_-(x))] \} > 0 .$$

- (b) **gleichmäßig ungerade elliptisch**, falls es eine Funktion $\theta \in C_{\text{per}}^\infty[0, 1]$ gibt, so dass

$$\inf_{x \in [0, 1]} \min \{ \text{Re} [\theta(x) (b_-(x) + b_+(x))], \text{Re} [\theta(x) (b_-(x) - b_+(x))] \} > 0 .$$

Bemerkung 1.1.2.

- (a) Hat L_0 konstante Koeffizienten $b_+, b_- \in \mathcal{C}$, so nennt man den Operator stark elliptisch (bzw. ungerade elliptisch), wenn es eine Konstante $\theta \in \mathcal{C}$ gibt mit

$$\begin{aligned} & \text{Re} [\theta (b_+ + b_-)] > 0 \text{ und } \text{Re} [\theta (b_+ - b_-)] > 0 \\ & (\text{bzw. } \text{Re} [\theta (b_- + b_+)] > 0 \text{ und } \text{Re} [\theta (b_- - b_+)] > 0 \text{)} . \end{aligned}$$

- (b) Für *reellwertige* (konstante oder variable) Koeffizienten b_+, b_- schließen sich die beiden Eigenschaften aus: Nach [37], Lemma 1.c) ist der Operator mit konstanten Koeffizienten genau

dann stark und ungerade elliptisch (i.e. komplex elliptisch), wenn b_+ und b_- nicht auf einer Ursprungsgeraden in \mathcal{C} liegen, was für reelle Zahlen natürlich ausgeschlossen ist. Für reellwertige variable Koeffizienten ist die starke Elliptizität nach [38] äquivalent zu

$$b_+(x) + \lambda b_-(x) \neq 0 \quad \forall \lambda \in [-1, 1], x \in [0, 1]$$

($\implies |b_+| > |b_-|$), entsprechend ist ungerade Elliptizität äquivalent zu

$$b_-(x) + \lambda b_+(x) \neq 0 \quad \forall \lambda \in [-1, 1], x \in [0, 1]$$

($\implies |b_-| > |b_+|$), und diese beiden Kriterien können nicht gleichzeitig erfüllt sein.

- (c) Es wird im Folgenden die Bezeichnung „gleichmäßig“ weggelassen, wenn aus dem Kontext hervorgeht, dass es sich um Operatoren mit variablen Koeffizienten handelt.

Ein Beispiel für einen stark elliptischen Operator der Ordnung $\beta = -1$ ist der SYMMSche Integraloperator

$$(Lu)(x) := \int_{\Gamma} \log|x-s| u(s) d\Gamma_s$$

auf einem Kreis Γ mit Radius $a \in (0, 1)$, der sich (siehe [29]) in Fourierdarstellung schreiben lässt als

$$(Lu)(x) = \ln(a)\hat{u}(0) - \frac{1}{2} \sum_{k \neq 0} |k|^{-1} \hat{u}(k) e^{2\pi i k x}.$$

Der CAUCHY-Integraloperator auf einer glatten Kurve Γ (siehe 4.3) ist ungerade elliptisch und hat die Ordnung 0. Weitere Beispiele sind in [34, 29] angegeben.

Eine ausführliche Einführung in periodische Pseudodifferentialoperatoren findet sich in Kapitel 7 im Buch von SARANEN und VAINIKKO [29] und in [39, 43].

Im folgenden Abschnitt wird auf numerische Verfahren zur Behandlung von Gleichungen mit Pseudodifferentialoperatoren der Form (1.5) eingegangen.

1.2 Numerische Verfahren für Randintegralgleichungen

Zwei klassische (und mit dem Qualokationsverfahren verwandte) Verfahren zur numerischen Lösung von Gleichungen mit Operatoren der Gestalt (1.5) sind das Kollokationsverfahren und das PETROV-GALERKIN-Verfahren, die nun kurz erläutert werden.

1.2.1 Das Kollokationsverfahren

Die konzeptionell einfachste Methode ist das **Kollokationsverfahren**.

Man wählt einen N -dimensionalen Verfahrensraum (1-periodischer Funktionen), in dem die Näherungslösung zu suchen ist, und eine Menge von Kollokationspunkten t_1, \dots, t_N mit $0 \leq t_1 < t_2 < \dots < t_N < 1$. Dann lautet die Kollokationsmethode: Finde ein u_N im Verfahrensraum, so dass

$$(Lu_N)(t_k) = f(t_k), \quad k = 1(1)N, \tag{1.9}$$

gilt. Hierbei sei $f \in H^s$ für ein $s > \frac{1}{2}$ gefordert, damit die Auswertung von f in den Kollokationspunkten wohldefiniert ist. Entsprechend ist auch der Verfahrensraum so zu wählen, dass $Lu_N \in H^s$, $s > \frac{1}{2}$, gilt.

Ist $\{\varphi_1, \dots, \varphi_N\}$ eine Basis des Verfahrensraums, so kann man $u_N = \sum_{j=1}^N a_j \varphi_j$, mit $a_j \in \mathcal{C}$, $j = 1(1)N$, schreiben. Es ist dann das folgende Gleichungssystem zu lösen:

$$\sum_{j=1}^N (L\varphi_j)(t_k) a_j = f(t_k), \quad k = 1(1)N. \quad (1.10)$$

Offensichtlich ist das Verfahren recht einfach zu implementieren. Pro Matrixeintrag ist ein Integral zu berechnen, nämlich das des Operators.

Bei dem von SCHMIDT [31] untersuchten Spline-Kollokationsverfahren („ ε -Collocation“) wählt man als Verfahrensraum S_N^r den N -dimensionalen Raum der glatten 1-periodischen Splines der Ordnung $r \geq 1$ (d.h. Funktionen, die stückweise Polynome vom Grad $r - 1$ sind und für $r \geq 2$ in $C^{r-2}[0, 1]$ liegen, vgl. Anhang A) auf dem äquidistanten Gitter

$$\{x_k := k/N, k = 0(1)N - 1\}, \quad N \in \mathbb{N}, \quad (1.11)$$

und als Kollokationsknoten die Punkte $t_k := x_k + \varepsilon/N$ mit einem $\varepsilon \in [0, 1)$. Es zeigt sich, dass das ε -Kollokationsverfahren für Operatoren L mit konstanten Koeffizienten ([31], S.77: „Similar results hold if the principal part of L has variable coefficients“) genau dann **instabil** ist, wenn

- $\varepsilon = 0$ gilt und entweder L stark elliptisch und r ungerade ist oder L ungerade elliptisch und r gerade ist (Kollokation an den Splineknoten), bzw.
- $\varepsilon = \frac{1}{2}$ gilt und entweder L stark elliptisch und r gerade ist oder L ungerade elliptisch und r ungerade ist (Kollokation an den Mittelpunkten).

Ist das Verfahren stabil, u_N die Lösung der Kollokations-Gleichungen und u die (exakte) Lösung der Gleichung (1.2), so gilt die Fehlerabschätzung

$$\|u_N - u\|_\beta \leq c \left(\frac{1}{N}\right)^{r-\beta} \|u\|_r, \quad (1.12)$$

sofern $u \in H^r$ ist, wobei man

$$\begin{aligned} r - \beta &> 1, & \text{falls } \varepsilon = 0, \text{ bzw.} \\ r - \beta &> \frac{1}{2}, & \text{falls } \varepsilon \in (0, 1), \end{aligned} \quad (1.13)$$

voraussetzen muss, damit die beiden Seiten in (1.10) wohldefiniert sind. Es gilt $u_N \in H^\beta$, da $S_N^r \subset H^{r-\frac{1}{2}-\delta}$, $\forall \delta > 0$ (vgl. [10], S.542, [4], S.323), und $r - \beta > \frac{1}{2}$ erfüllt sind. Außerdem ist $u \in H^\beta$, da $r > \beta + \frac{1}{2}$ gilt.

In der Arbeit von SLOAN [34] finden sich Referenzen auf Analysen der Kollokationsmethode sowohl für Gleichungen mit glatten Kurven als auch für Gebiete mit Ecken. Besonders hinzuweisen ist auf die Arbeiten von ARNOLD & WENDLAND [3, 4] und SARANEN & WENDLAND [28], in denen Spline-Kollokationsverfahren für Operatoren auf glatten Kurven analysiert werden, welche eng verwandt mit dem Qualokationsverfahren sind.

1.2.2 Das GALERKIN–Verfahren

Das (Standard–) **GALERKIN–Verfahren** verwendet ebenfalls einen Verfahrensraum S_N der Dimension N , und gesucht ist eine Funktion $u_N \in S_N$ mit

$$(L u_N, \chi)_0 = (f, \chi)_0, \quad \forall \chi \in S_N. \quad (1.14)$$

Hierbei sei $f \in H^0$ vorausgesetzt, und der Verfahrensraum ist so zu wählen, dass $L(S_N) \subset H^0$ und $S_N \subset H^0$ gilt, damit das Skalarprodukt wohldefiniert ist. Ist wiederum $\{\varphi_1, \dots, \varphi_N\}$ eine Basis des Verfahrensraums, so ist hier für $u_N = \sum_{j=1}^N a_j \varphi_j$, $a_j \in \mathcal{C}$, $j = 1(1)N$, das folgende Gleichungssystem zu lösen:

$$\sum_{j=1}^N (L \varphi_j, \varphi_k)_0 a_j = (f, \varphi_k)_0, \quad k = 1(1)N. \quad (1.15)$$

In diesem Fall enthält jeder Matrixeintrag ein Doppelintegral, eines vom Integraloperator L , das andere vom Skalarprodukt $(\cdot, \cdot)_0$, was die Implementation aufwendiger macht. Vorteilhaft ist hingegen die Konvergenzordnung: Wählt man als Verfahrensraum wie oben beim Kollokationsverfahren den Raum S_N^r der glatten periodischen Splines der Ordnung $r \geq 1$ auf dem äquidistanten Gitter (1.11), so gilt bei stark elliptischem Operator L für die GALERKIN–Approximation u_N der exakten Lösung u

$$\|u_N - u\|_{\beta-r} \leq c \left(\frac{1}{N}\right)^{2r-\beta} \|u\|_r, \quad (1.16)$$

siehe [3]. ($S_N^r \subset H^0$ ist klar, für $L(S_N^r) \subset H^0$ ist $r - \beta > \frac{1}{2}$ nötig [27]).

Beim **PETROV–GALERKIN–Verfahren** wählt man noch einen Testraum $T_N \subset H^0$, für den $\dim T_N = \dim S_N$ gilt. Das Standard–GALERKIN–Verfahren ist also ein Spezialfall mit $T_N = S_N$. Gesucht ist eine Funktion u_N aus dem Verfahrensraum derart, dass

$$(L u_N, \chi)_0 = (f, \chi)_0, \quad \forall \chi \in T_N, \quad (1.17)$$

gilt. Mit dem Verfahrensraum $S_N = S_N^r$ und dem Testraum $T_N = S_N^{r'}$, $r, r' \geq 1$, gilt für ein stabiles PETROV–GALERKIN–Verfahren die Abschätzung

$$\|u_N - u\|_{\beta-r'} \leq c \left(\frac{1}{N}\right)^{r+r'-\beta} \|u\|_r, \quad (1.18)$$

siehe [27].

Das PETROV–GALERKIN–Verfahren mit Spline–Verfahrens– und Testräumen S_N^r bzw. $S_N^{r'}$ ist genau dann stabil, wenn

- der Operator stark elliptisch ist und r und r' gleiche Parität besitzen (d.h. entweder r und r' beide gerade oder beide ungerade sind), bzw.
- der Operator ungerade elliptisch ist und r und r' verschiedene Parität haben.

Also ist insbesondere das Standard–GALERKIN–Verfahren für stark elliptische Operatoren stabil ([37], S.455; vgl. insbesondere DOMÍNGUEZ & SAYAS [11], Proposition 5). Weitere Varianten des GALERKIN–Verfahrens findet man wiederum in [34], S.317ff.

1.2.3 Das Qualokationsverfahren

Das Qualokationsverfahren zur Behandlung von Randintegralgleichungen auf glatten Kurven wurde Ende der 80er Jahre von SLOAN, WENDLAND und CHANDLER [33, 36, 10, 37, 38] entwickelt. Das Ziel war es, die Vorzüge des PETROV–GALERKIN–Verfahrens (Stabilität, Konvergenzordnung) bei einem zum Kollokationsverfahren vergleichbaren Aufwand zu erhalten.

Auf der einen Seite kann man das Qualokationsverfahren als Modifikation des PETROV–GALERKIN–Verfahrens ansehen, bei welcher das Skalarprodukt $(\cdot, \cdot)_0$ (das äußere Integral) auf beiden Seiten der Gleichung (1.17) durch eine diskrete Variante ersetzt wird, nämlich einer zusammengesetzten Quadraturformel. Andererseits kann man es als eine Verbesserung des Kollokationsverfahren betrachten, bei der durch geeignete Konvexkombination von verschiedenen Kollokationsverfahren Fehlerterme eliminiert werden. Insbesondere ist das Kollokationsverfahren ein Spezialfall des Qualokationsverfahrens, nämlich wenn als Basisformel für die zusammengesetzte Quadraturformel eine 1–Punkt–Quadraturformel verwendet wird. In der Tat erreicht das Qualokationsverfahren in „negativen Normen“ höhere Konvergenzordnungen als das Kollokationsverfahren. Daher ist im Folgenden auch von *Zusatzkonvergenzordnung* die Rede. Die Normen mit kleinerem SOBOLEV–Index sind deshalb interessant, weil sie eine Aussage über die Konvergenzgüte bez. der Lösung $v(x) = \int k(x, t)u(t) dt$ der ursprünglich betrachteten Differentialgleichung ermöglichen, wobei u die Lösung der Integralgleichung ist.

Als Verfahrensraum verwendet das Qualokationsverfahren den N –dimensionalen Raum S_N^r der glatten 1–periodischen Splines der Ordnung $r \geq 1$ auf einer Familie von äquidistanten Gittern

$$\Delta_N := \{x_k = k/N, k = 0(1)N - 1\}, \quad N \in \mathbb{N},$$

als Testraum den Raum $S_N^{r'}$ der Splines der Ordnung $r' \geq 1$ auf demselben Gitter Δ_N . $S_N^{r'}$ hat ebenfalls die Dimension N . Näheres zu den periodischen Splineräumen findet sich in Anhang A. In [33, 36] wird als Testraum der Raum der trigonometrischen Polynome verwendet, in den späteren Arbeiten [10, 37, 38, 41, 42] und hier dient aber stets der Raum $S_N^{r'}$ als Testraum.

Desweiteren benötigt das Verfahren eine Basis–Quadraturformel

$$Q_J(g) := \sum_{j=1}^J w_j g(\xi_j), \quad J \geq 1, \quad (1.19)$$

auf $[0, 1]$ mit $0 \leq \xi_1 < \xi_2 < \dots < \xi_J < 1$ und positiven Gewichten w_j , $j = 1(1)J$. Mit der zusammengesetzten Quadraturformel

$$Q_J^{(N)}(g) := \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{j=1}^J w_j g(x_k + \xi_j/N) \approx \int_0^1 g(t) dt$$

lautet das Qualokationsverfahren $(S_N^r, S_N^{r'}, Q_J)$ dann: Man bestimme ein $u_N \in S_N^r$ derart, dass

$$\frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{j=1}^J w_j ((L u_N) \bar{v})(x_k + \xi_j/N) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{j=1}^J w_j (f \bar{v})(x_k + \xi_j/N) \quad \forall v \in S_N^{r'}. \quad (1.20)$$

Sieht man das Qualokationsverfahren wie oben erwähnt als Modifikation des PETROV–GALERKIN–Verfahrens an, so dient hier die aus Q_J zusammengesetzte Quadraturformel $Q_J^{(N)}$ zur Approxima-

tion des äußeren Integrals in (1.14). Definiert man das diskrete innere Produkt $(\cdot, \cdot)_N$ durch

$$(v, w)_N := Q_J^{(N)}(v \bar{w}) \approx \int_0^1 v(t) \bar{w}(t) dt = (v, w),$$

dann lautet die Formulierung des Qualokationsverfahrens ähnlich wie beim PETROV–GALERKIN–Verfahren: Finde ein $u_N \in S_N^r$ mit

$$(L u_N, v)_N = (f, v)_N \quad \forall v \in S_N^{r'}. \quad (1.21)$$

Damit die Auswertung in den Punkten $x_k + \xi_j/N$, $k = 0(1)N$, $j = 1(1)J$, möglich ist, muss man fordern, dass f stetig und $L u_N$ in diesen Punkten definiert ist:

Definition 1.2.1. (Wohldefiniiertheit)

Ein Qualokationsverfahren $(S_N^r, S_N^{r'}, Q_J)$ mit Quadraturformel Q_J wie in (1.19) heißt **wohldefiniert**, falls

$$\begin{aligned} \xi_1 > 0 \quad \text{und} \quad r - \beta > \frac{1}{2}, \quad \text{oder} \\ \xi_1 = 0 \quad \text{und} \quad r - \beta > 1 \end{aligned} \quad (1.22)$$

gilt (vgl. [37], S. 458).

Die Funktionen $L u_N$, $u_N \in S_N^r$, sind für $r - \beta > \frac{1}{2}$ zumindest in den Intervallen (x_k, x_{k+1}) stetig, aber i. Allg. singular in den Knotenpunkten, so dass Punktauswertung nur für $\xi_1 > 0$ möglich ist; für $r - \beta > 1$ gilt aber $L u_N \in C_{\text{per}}[0, 1]$, so dass man auch in den Knoten auswerten kann.

Für $J = 1$, wenn also die Basis–Quadraturformel Q_J eine 1–Punkt–Formel ist, lautet die Qualokationsgleichung (1.20)

$$\frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N-1} w_1 ((L u_N) \bar{v})(x_k + \xi_1/N) = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N-1} w_1 (f \bar{v})(x_k + \xi_1/N) \quad \forall v \in S_N^{r'},$$

was (wegen $w_1 > 0$ und für spezielle Splines v_i mit $v_i(x_k + \xi_1/N) = \delta_{i,k}$, $i = 0(1)N - 1$) äquivalent ist zu

$$(L u_N)(x_k + \xi_1/N) = f(x_k + \xi_1/N), \quad k = 0(1)N - 1.$$

Dies entspricht dem von SCHMIDT [31] untersuchten ε –Kollokationsverfahren mit $\varepsilon = \xi_1 \in [0, 1)$. Daher ist für das Qualokationsverfahren nur $J \geq 2$ interessant.

Es bleibt zu untersuchen, wie die Basis–Quadraturformel Q_J zu wählen ist, so dass das Qualokationsverfahren eine höhere Konvergenzordnung als das Kollokationsverfahren hat und stabil ist. A priori hat ein stabiles Qualokationsverfahren lediglich die gleiche Konvergenzordnung wie das Kollokationsverfahren (das entspricht der so genannten Zusatzkonvergenzordnung $b = 0$). Dass $b > 0$ mit speziellen Quadraturformeln Q_J möglich ist, haben SLOAN, WENDLAND und CHANDLER gezeigt:

In den Arbeiten [33, 36, 10] von SLOAN, SLOAN & WENDLAND bzw. CHANDLER & SLOAN wurden Formeln mit $J = 2$ für einfache Operatoren bestimmt, nämlich für solche, die nur aus einem geraden oder ungeraden Anteil bestehen (vgl. (1.6),(1.7)). SLOAN & WENDLAND haben in ihrer Arbeit [37] die Stabilität und Ordnung des Verfahrens für symmetrische Quadraturformeln Q_J untersucht, und zwar für Operatoren der allgemeineren Form (1.5) mit konstanten Koeffizienten

(„second-generation qualocation“ [35]); in [38] haben sie die Ergebnisse auf Operatoren mit variablen Koeffizienten erweitert.

Es gelten die folgenden Konvergenzaussagen (für die Definition von Stabilität und Ordnung des Qualokationsverfahrens siehe [37], S. 460 oder [41], Definition 2.1):

Satz 1.2.2. (SLOAN, WENDLAND [37], Theorem 2)

Es sei $(S_N^r, S_N^{r'}, Q_J)$ ein wohldefiniertes und stabiles Qualokationsverfahren der Ordnung $r - \beta + b$, $b \geq 0$, zur Behandlung der Gleichung $Lu = f$. Dann ist die Qualokationslösung u_N für hinreichend großes N eindeutig bestimmt. Es gilt für $s < r - \frac{1}{2}$, $\beta + \frac{1}{2} < t$, $\beta - b \leq s \leq t \leq r$ die Fehlerabschätzung

$$\|u_N - u\|_s \leq c \left(\frac{1}{N}\right)^{t-s} \|u\|_{t+\max(\beta-s, 0)},$$

wenn $u \in H^{t+\max(\beta-s, 0)}$ die exakte Lösung ist.

Es folgt insbesondere für $s = \beta$, $t = r$ die Abschätzung

$$\|u_N - u\|_\beta \leq c \left(\frac{1}{N}\right)^{r-\beta} \|u\|_r$$

für $u \in H^r$, genau wie beim Kollokationsverfahren. Hat das Verfahren allerdings positive Zusatzkonvergenzordnung $b > 0$, so erhält man in Normen mit kleinerem SOBOLEV-Index höhere Konvergenzordnungen. Setzt man $s = \beta - b$, $t = r$, so gilt

$$\|u_N - u\|_{\beta-b} \leq c \left(\frac{1}{N}\right)^{r-\beta+b} \|u\|_{r+b},$$

sofern $u \in H^{r+b}$ ist (wofür $f \in H^{r+b-\beta}$ notwendig ist). Diese im Vergleich zum Kollokationsverfahren zusätzliche Glattheitsforderung entfällt beim so genannten **toleranten** Qualokationsverfahren, das später noch kurz vorgestellt wird. Für $b = r'$ hat das Qualokationsverfahren also die gleiche Konvergenzordnung wie das PETROV-GALERKIN-Verfahren (vgl. (1.18)).

Im Allgemeinen konvergiert das Qualokationsverfahren höchstens so schnell wie das PETROV-GALERKIN-Verfahren, es gilt also $b \leq r'$. Nur in Spezialfällen, z.B. wenn der Operator einfach ist, erreicht man höhere Ordnung (vgl. [10]). Dass man für nicht-einfache Operatoren i. Allg. keine höhere Konvergenzordnung erreicht, wird in Abschnitt 3.2 bewiesen.

1.2.4 Symmetrische Quadraturformeln für das Qualokationsverfahren

SLOAN und WENDLAND haben Kriterien für **symmetrische** Quadraturformeln Q_J angegeben, für die ein stabiles und wohldefiniertes Qualokationsverfahren eine Zusatzkonvergenzordnung b mit $0 < b \leq r'$ besitzt.

Definition 1.2.3. (symmetrische Quadraturformeln)

Eine J -Punkt-Quadraturformel

$$Q_J(f) = \sum_{j=1}^J w_j f(\xi_j)$$

auf dem Intervall $[0, 1]$ mit Knoten $\xi_j \in [0, 1]$ und Gewichten ω_j , $j = 1(1)J$, heißt **symmetrisch**, falls mit $\xi_j \neq 0$ auch $1 - \xi_j$, $j = 1(1)J$, ein Quadraturknoten ist und beide Quadraturknoten dasselbe Gewicht besitzen.

Für Gleichungen mit *konstanten* Koeffizienten gilt der

Satz 1.2.4. (SLOAN, WENDLAND [37], Theorem 4)

Ein wohldefiniertes und stabiles Qualokationsverfahren $(S_N^r, S_N^{r'}, Q_J)$ mit symmetrischer Quadraturformel Q_J der Form (1.19) zur Behandlung der Gleichung (1.2) mit einem Operator L der Ordnung β und der Lösung $u \in H^r$ hat die Zusatzkonvergenzordnung b , $0 \leq b \leq r'$, falls

$$\sum_{j=1}^J w_j = 1 \quad (1.23)$$

und

$$Q_J(G_\alpha) = \sum_{j=1}^J w_j G_\alpha(\xi_j) = 0, \quad \alpha = r - \beta, r - \beta + 1, \dots, r - \beta + b - 1, \quad (1.24)$$

erfüllt ist, wobei

$$G_\alpha(\xi) = 2 \sum_{l=1}^{\infty} \frac{1}{l^\alpha} \cos(2\pi l \xi), \quad \xi \in (0, 1), \quad (1.25)$$

für $\alpha > 0$ ist.

Die Funktion G_α wird in Abschnitt 2.4 allgemeiner definiert und ausführlich untersucht. Für $\alpha > 0$ ist

$$0 = \int_0^1 G_\alpha(t) dt = 2 \int_0^{\frac{1}{2}} G_\alpha(t) dt, \quad (1.26)$$

da $G_\alpha(\xi) = G_\alpha(1 - \xi)$, $\xi \in [0, 1]$, gilt, und weil die Reihe (1.25) gliedweise integriert werden darf (vgl. Bem. 2.4.3). Demnach ist die Bedingung (1.24) zusammen mit (1.23) gleichwertig damit, dass Q_J exakt für das Funktionensystem

$$\{1, G_{r-\beta}, G_{r-\beta+1}, \dots, G_{r-\beta+b-1}\} \quad (1.27)$$

ist.

Für den Fall, dass Operatorgleichungen mit *variablen* Koeffizienten [38] behandelt werden, müssen noch die Bedingungen $r' \geq 2$, $r - \beta > 1$ und $\beta \in \mathbf{Z}$ erfüllt sein, und die Quadraturformel Q_J muss zusätzlich zur Exaktheit für das Funktionensystem (1.27) einen polynomialen Exaktheitsgrad besitzen, damit das Verfahren die Zusatzkonvergenzordnung b , $0 < b \leq r'$, hat:

Satz 1.2.5. (SLOAN, WENDLAND [37], Theorem 5)

Erfüllt die Quadraturformel Q_J zusätzlich zu den Voraussetzungen aus Satz 1.2.4 für $\beta \in \mathbf{Z}$ noch

$$Q_J(G_{2\ell}) = \sum_{j=1}^J w_j G_{2\ell}(\xi_j) = 0, \quad \ell = 1, \dots, \left[\frac{r - \beta - 1}{2} \right], \quad (1.28)$$

so ist sie exakt für alle Polynome aus $\Pi_{r-\beta+b-1}$.

Dies ist leicht einzusehen, denn als symmetrische Quadraturformel integriert Q_J Bernoulli-Polynome mit ungeradem Index automatisch exakt, und die Funktionen G_α sind für gerade ganzzahlige Indizes α bis auf einen konstanten Faktor die Bernoulli-Polynome B_α (vgl. 2.4.2). Somit gewährleisten (1.24) und (1.28) für Q_J polynomialen Exaktheitsgrad $r - \beta + b - 1$ (beachte $\beta \in \mathbb{Z}$). Für den Fall mit variablen Koeffizienten muss Q_J also das Funktionensystem

$$\left\{ 1, G_2, G_4, \dots, G_{2\lceil \frac{r-\beta-1}{2} \rceil}, G_{r-\beta}, G_{r-\beta+1}, \dots, G_{r-\beta+b-1} \right\} \quad (1.29)$$

exakt integrieren, damit das Verfahren die Zusatzkonvergenzordnung b besitzt.

Das von TRAN & SLOAN vorgestellte **tolerante Qualokationsverfahren** ist eine Modifikation des gewöhnlichen Verfahrens, bei dem das diskrete Skalarprodukt $(\cdot, \cdot)_N$ auf der rechten Seite der Gleichung (1.21) durch das exakte Integral ersetzt wird (welches in der Praxis wie beim PETROV-GALERKIN-Verfahren durch eine hinreichend genaue Quadraturformel berechnet wird). Es lässt sich, ebenso wie das Standard-Qualokationsverfahren [38], auf elliptische Randintegralgleichungen mit variablen Koeffizienten auf glatten Kurven anwenden [42]. Die hierfür benötigten Quadraturformeln Q_J (bei variablen Koeffizienten) sind dieselben wie beim Standard-Qualokationsverfahren, siehe Satz 1.2.4 und Satz 1.2.5.

In ihrer Arbeit haben SLOAN & WENDLAND Quadraturformeln Q_J mit o.a. Eigenschaften für $J \leq 4$ und einige Werte von r und β numerisch berechnet und angegeben, aber nicht bewiesen, dass sie in jedem Fall existieren und eindeutig sind ([37], S.465):

„Only in very simple cases it is known theoretically whether approximate solutions of (1.24) & (1.23) exist. However, in every case we have investigated, the solutions of (1.24) & (1.23) did turn out to have all points in the interval $[0, 1]$ and all weights positive, as required.“

oder ([41], S.105):

„While there is as yet no theory which assures us that these (nonlinear) equations [(1.24), (1.28)] have solution points satisfying (1.23), numerical experiments...“

Diese Theorie wird im nächsten Kapitel entwickelt. Hierfür wird zunächst auf TSCHEBYSCHJEFF-Systeme eingegangen und ein Satz von NÜRNBERGER über die Existenz von Quadraturformeln für TSCHEBYSCHJEFF-Systeme verallgemeinert und bewiesen. Anschließend werden einige Eigenschaften der Funktion G_α gezeigt, unter anderem eine Darstellung, die auch für negative Indizes α gilt, und ein Satz über die Lage der Nullstelle der Funktion G_α für $\alpha \geq 5$. Der Hauptsatz des Kapitels 2 besagt, dass das Funktionensystem $\{1, G_{\alpha_1}, \dots, G_{\alpha_n}\}$ für $1 < \alpha_1 < \dots < \alpha_n$ ein TSCHEBYSCHJEFF-System ist, woraus mit dem Existenzsatz folgt, dass es für jedes n stets zwei eindeutig bestimmte symmetrische Quadraturformeln mit positiven Gewichten gibt, die (1.24), (1.28) und (1.23) erfüllen, also positive Zusatzkonvergenzordnung für das Qualokationsverfahren liefern.

In Satz 1.2.2 wird vorausgesetzt, dass das Verfahren $(Q_J, S_N^r, S_N^{r'})$ **stabil** ist; SLOAN & WENDLAND haben die Stabilität des Verfahrens bei Verwendung symmetrischer Quadraturformeln mit (1.24), (1.28) und (1.23) nur numerisch untersucht. SCHNEIDER [32] hat dieses Problem gelöst und bewiesen, für welche der Quadraturformeln das Verfahren stabil ist und für welche nicht. Insbesondere hat er gezeigt, dass bei gegebener Ordnung r' des Testraums stets mindestens eine Quadraturformel ein stabiles Qualokationsverfahren mit $b = r'$, also „maximaler“ Zusatzkonvergenzordnung liefert.

CHANDLER & SLOAN haben in ihrer Arbeit [10] Quadraturformeln mit $J = 2$ berechnet, mit denen das Qualokationsverfahren für einfache Operatoren positive Zusatzkonvergenzordnung besitzt. Es blieb ein Fall offen: Die Existenz von offenen 2-Punkt-Formeln, wenn r' ungerade ist und L und r verschiedene Parität haben (also L gerade und r ungerade ist oder umgekehrt). In Kapitel 3 wird gezeigt, dass es in diesem Fall für $r - \beta > 1$ immer eine Quadraturformel gibt, mit der das Qualokationsverfahren die Zusatzkonvergenzordnung $b = 3$ besitzt, wenn man als Testraum den Raum der stückweise konstanten Funktionen, also $r' = 1$ wählt. In diesem Fall hat das Qualokationsverfahren sogar eine höhere Konvergenzordnung als das PETROV-GALERKIN-Verfahren. Dass es bei nicht-einfachen Operatorgleichungen im Allgemeinen *nicht* möglich ist, durch Hinzunahme von Quadraturknoten die Konvergenzordnung des Verfahrens weiter zu erhöhen ($b > r'$), wird im zweiten Teil von Kapitel 3 bewiesen.

In Kapitel 4 wird das Qualokationsverfahren auf einige Randintegralgleichungen angewandt und es werden die theoretischen Ergebnisse aus Kapitel 2 und 3 durch numerische Rechnungen bestätigt. Insbesondere bestärken die numerischen Tests die Vermutung [37, 32], dass das Verfahren für $r' = b$ stets stabil ist.

Kapitel 2

Existenz von Quadraturformeln für das Qualokationsverfahren

Damit das Qualokationsverfahren $(S_N^r, S_N^{r'}, Q_J)$ mit einer symmetrischen Quadraturformel Q_J auf $[0, 1]$ eine höhere Konvergenzordnung als das Kollokationsverfahren besitzt (also eine positive Zusatzkonvergenzordnung b), muss Q_J positive Gewichte besitzen und exakt für ein System von Funktionen

$$\Sigma := \{1, G_{\alpha_1}, \dots, G_{\alpha_n}\}, \quad n \in \mathbb{N},$$

sein, wobei sich die Indizes $\frac{1}{2} < \alpha_1 < \dots < \alpha_n$ aus (1.27) bzw. (1.29) ergeben. Da die Funktionen aus Σ symmetrisch bez. $\frac{1}{2}$ sind, genügt es, eine Quadraturformel $Q_{\bar{J}}$ auf $[0, \frac{1}{2}]$ mit positiven Gewichten zu finden, die exakt für das System Σ ist, und diese auf das Intervall $[0, 1]$ symmetrisch fortzusetzen.

Wesentliches Hilfsmittel ist ein Satz über die Existenz von Quadraturformeln, die exakt für so genannte TSCHEBYSCHJEFF-Räume sind, die im zweiten Abschnitt dieses Kapitels eingeführt werden. Im dritten Abschnitt wird der Existenz- und Eindeigkeitssatz für Quadraturformeln zur Approximation von RIEMANN-STIELTJES-Integralen für TSCHEBYSCHJEFF-Systeme (als Verallgemeinerung eines Satzes von NÜRNBERGER) formuliert und bewiesen, hierbei spielen beste einseitige $L_{1,\sigma}$ -Approximationen eine wichtige Rolle. Anschließend werden wichtige Eigenschaften der Funktionen G_α diskutiert, insbesondere Darstellungen für verschiedene Indizes α . Desweiteren wird eine Abschätzung für die Lage der Nullstelle von G_α für $\alpha \geq 5$ bewiesen. Im vorletzten Teil dieses Kapitels wird gezeigt, dass Σ für $\alpha_1 > 1$ (bzw. $\Sigma_{\alpha_1} = \{g_{\alpha_1} f : f \in \Sigma\}$ mit einer geeigneten Gewichtsfunktion g_{α_1} für $\alpha_1 \in (0, 1]$) ein TSCHEBYSCHJEFF-System auf dem Intervall $[0, \frac{1}{2}]$ ist.

Der letzte Abschnitt enthält als Zusammenfassung der Ergebnisse der vorangehenden Teile den Hauptsatz über die Existenz und Eindeigkeit von offenen, halboffenen und geschlossenen Quadraturformeln Q_J mit $J = n + 1$ Knoten und positiven Gewichten, die exakt für das System Σ sind.

2.1 Grundbegriffe

In dieser Arbeit werden die folgenden Grundbegriffe und Definitionen verwendet:

Definition 2.1.1. (offene, halboffene, geschlossene Quadraturformel)

Eine Quadraturformel auf $[a, b]$ heißt **offen**, wenn alle Knoten paarweise verschieden sind und in (a, b) liegen. Dagegen haben **halboffene** Formeln genau einen Randpunkt a oder b und **geschlossene** Formeln beide Randpunkte a und b als Quadraturknoten.

Desweiteren heißt eine Quadraturformel **positiv**, wenn ihre Gewichte sämtlich positiv sind.

Die folgende Definition von nodalen und nichtnodalen Nullstellen stammt von KARLIN und STUDDEN [16].

Definition 2.1.2. (nodale, nichtnodale Nullstellen, $Z(f)$)

Es sei f eine stetige Funktion auf $[a, b]$ mit isolierten Nullstellen.

- (a) Eine Nullstelle $t_0 \in (a, b)$ von f heißt **nichtnodale** Nullstelle, falls f in t_0 sein Vorzeichen nicht wechselt, d.h. wenn es eine Umgebung $U(t_0) \subset (a, b)$ von t_0 gibt, so dass entweder $f(t) > 0$ oder $f(t) < 0$ für alle $t \in U(t_0) \setminus \{t_0\}$ gilt. Alle anderen Nullstellen von f und Nullstellen an den Intervallenden a und b heißen **nodale** Nullstellen.
- (b) Die Anzahl aller Nullstellen von f , wobei nichtnodale Nullstellen zweifach und nodale Nullstellen einfach gezählt werden, wird mit $Z(f)$ bezeichnet.

Bemerkung 2.1.3.

Bei differenzierbaren Funktionen haben Nullstellen gerader Vielfachheit, die nicht am Rand des Intervalls liegen, keinen Vorzeichenwechsel, sind also nichtnodale Nullstellen. Entsprechend sind die Nullstellen ungerader Vielfachheit nodale Nullstellen.

2.2 TSCHEBYSCHEFF–Systeme

TSCHEBYSCHEFF–Systeme bzw. TSCHEBYSCHEFF–Räume haben eine große Bedeutung in der Interpolations- und Approximationstheorie. Einerseits ist für solche Systeme die LAGRANGESche Interpolationsaufgabe auf einem Intervall $[a, b]$ eindeutig lösbar [23], andererseits ist die HAARSche Bedingung (2.1) notwendig und hinreichend für die Eindeutigkeit der bestapproximierenden Funktion eines Teilraums von $C[a, b]$ an eine stetige Funktion f bezüglich der L_∞ - oder der L_1 -Norm (vgl. [2], S. 67 und [23]). Eine Eigenschaft, die hier von großer Wichtigkeit ist, nämlich die Tatsache, dass für ein TSCHEBYSCHEFF–System stets Quadraturformeln existieren, welche exakt für alle Funktionen aus seinem Erzeugnis sind, wird im Abschnitt 2.3 behandelt.

Eine sehr ausführliche Untersuchung von TSCHEBYSCHEFF–Systemen und ihren Anwendungen findet man im Buch von KARLIN und STUDDEN [16].

Definition 2.2.1. ($\mathfrak{D}et$, $\mathfrak{D}et^*$)

- (a) Für Funktionen $u_0, u_1, \dots, u_n \in C[a, b]$ und Punkte t_0, \dots, t_n mit $a \leq t_0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_n \leq b$, $n \in \mathbf{N}_0$, sei

$$\mathfrak{D}et \begin{pmatrix} u_0 & u_1 & \dots & u_n \\ t_0 & t_1 & \dots & t_n \end{pmatrix} := \begin{vmatrix} u_0(t_0) & u_0(t_1) & \dots & u_0(t_n) \\ u_1(t_0) & u_1(t_1) & \dots & u_1(t_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ u_n(t_0) & u_n(t_1) & \dots & u_n(t_n) \end{vmatrix}.$$

- (b) Für Funktionen $u_0, u_1, \dots, u_n \in C^{p-1}[a, b]$, $p \in \mathbb{N}$, und Punkte t_0, \dots, t_n mit $a \leq t_0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_n \leq b$, $n \in \mathbb{N}_0$, bei denen maximal je p aufeinanderfolgende Werte gleich sind, sei

$$\mathfrak{Det}^* \begin{pmatrix} u_0 & u_1 & \dots & u_n \\ t_0 & t_1 & \dots & t_n \end{pmatrix}$$

analog zu (a) definiert, nur dass bei Gleichheit von t_i -Werten in den entsprechenden Spalten die Funktionen u_i , $i = 1(1)n$, durch ihre Ableitungen zu ersetzen sind.

Beispiel: Es seien Punkte t_0, \dots, t_n aus $[a, b]$ mit

$$a < t_0 < \dots < t_i = t_{i+1} = \dots = t_{i+p-1} < t_{i+p} < \dots < t_n \leq b, \quad n \in \mathbb{N}_0, \quad p \in \{1, \dots, n\},$$

und $u_0, u_1, \dots, u_n \in C^{p-1}[a, b]$ gegeben. Dann ist

$$\mathfrak{Det}^* \begin{pmatrix} u_0 & u_1 & \dots & u_n \\ t_0 & t_1 & \dots & t_n \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} u_0(t_0) & \dots & u_0(t_i) & u_0'(t_i) & \dots & u_0^{(p-1)}(t_i) & u_0(t_{i+p}) & \dots & u_0(t_n) \\ u_1(t_0) & \dots & u_1(t_i) & u_1'(t_i) & \dots & u_1^{(p-1)}(t_i) & u_1(t_{i+p}) & \dots & u_1(t_n) \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ u_n(t_0) & \dots & u_n(t_i) & u_n'(t_i) & \dots & u_n^{(p-1)}(t_i) & u_n(t_{i+p}) & \dots & u_n(t_n) \end{vmatrix}.$$

Definition 2.2.2. (TSCHEBYSCHJEFF-System, TSCHEBYSCHJEFF-Raum)

- (a) Es seien $u_0, u_1, \dots, u_n \in C[a, b]$ reellwertige Funktionen. Man bezeichnet das System $\{u_i\}_{i=0}^n$ als **TSCHEBYSCHJEFF-System** auf $[a, b]$, falls es die so genannte HAARSche Bedingung

$$\mathfrak{Det} \begin{pmatrix} u_0 & u_1 & \dots & u_n \\ t_0 & t_1 & \dots & t_n \end{pmatrix} > 0 \quad (2.1)$$

für alle Punkte t_0, \dots, t_n mit $a \leq t_0 < t_1 < \dots < t_n \leq b$ erfüllt.

Ein TSCHEBYSCHJEFF-System $\{u_i\}_{i=0}^n$ heißt **vollständig**, wenn jedes Teilsystem $\{u_i\}_{i=0}^m$, $0 < m \leq n$, ebenfalls ein TSCHEBYSCHJEFF-System bildet.

- (b) Sind die Funktionen $u_0, u_1, \dots, u_n \in C^{p-1}[a, b]$, so bezeichnet man das System $\{u_i\}_{i=0}^n$ als **erweitertes TSCHEBYSCHJEFF-System** der Ordnung p auf $[a, b]$, falls

$$\mathfrak{Det}^* \begin{pmatrix} u_0 & u_1 & \dots & u_n \\ t_0 & t_1 & \dots & t_n \end{pmatrix} > 0 \quad (2.2)$$

ist für alle Punkte t_0, \dots, t_n mit $a \leq t_0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_n \leq b$, bei denen Gleichheit für je höchstens p aufeinanderfolgende Punkte gilt.

- (c) Ein n -dimensionaler Untervektorraum G von $C[a, b]$ heißt **TSCHEBYSCHJEFF-Raum**, falls es eine Basis von G gibt, die ein TSCHEBYSCHJEFF-System ist. Die TSCHEBYSCHJEFF-Räume sind also genau die Erzeugnisse der TSCHEBYSCHJEFF-Systeme.

Die Bezeichnung „TSCHEBYSCHJEFF-System“ stammt von S.N. BERNSTEIN [7].

Bemerkung 2.2.3.

- (a) Offenbar sind die Funktionen eines TSCHEBYSCHJEFF-Systems linear unabhängig, andernfalls wäre die Determinante in (2.1) immer gleich Null.
- (b) Manchmal wird bei der Definition eines TSCHEBYSCHJEFF-Systems statt der Positivität der Determinanten (2.1) nur

$$\mathfrak{Det} \begin{pmatrix} u_0 & u_1 & \dots & u_n \\ t_0 & t_1 & \dots & t_n \end{pmatrix} \neq 0 \quad (2.3)$$

für alle Punkte t_0, \dots, t_n mit $a \leq t_0 < t_1 < \dots < t_n \leq b$ gefordert. Wegen der Stetigkeit der Funktionen u_0, \dots, u_n und der daraus folgenden Stetigkeit von

$$(t_0, \dots, t_n) \mapsto \mathfrak{Det} \begin{pmatrix} u_0 & u_1 & \dots & u_n \\ t_0 & t_1 & \dots & t_n \end{pmatrix}$$

ist dann aber entweder

$$\mathfrak{Det} \begin{pmatrix} u_0 & u_1 & \dots & u_n \\ t_0 & t_1 & \dots & t_n \end{pmatrix} > 0 \quad \text{oder} \quad \mathfrak{Det} \begin{pmatrix} -u_0 & u_1 & \dots & u_n \\ t_0 & t_1 & \dots & t_n \end{pmatrix} > 0,$$

so dass entweder $\{u_0, \dots, u_n\}$ oder $\{-u_0, \dots, u_n\}$ ein TSCHEBYSCHJEFF-System ist. Somit ist die Definition mit (2.3) im Wesentlichen äquivalent zur Definition 2.2.2.

- (c) Wird von dem Funktionensystem statt (2.1) nur verlangt, dass die Determinante nichtnegativ ist, so bezeichnet man das System als **schwaches TSCHEBYSCHJEFF-System** auf $[a, b]$, sofern die Funktionen linear unabhängig sind ([16], Def. 2.1). Dementsprechend werden Systeme linear unabhängiger Funktionen aus $C^{p-1}[a, b]$, für die in (2.2) statt „>“ nur ein „ \geq “ steht, als schwache erweiterte TSCHEBYSCHJEFF-Systeme der Ordnung p auf $[a, b]$ bezeichnet.
- (d) Ist $\{u_i\}_{i=0}^n$ ein (nicht notwendig erweitertes) TSCHEBYSCHJEFF-System mit hinreichend oft differenzierbaren Funktionen, so gilt für die Determinante (2.2) nach [16], S.6, stets

$$\mathfrak{Det}^* \begin{pmatrix} u_0 & u_1 & \dots & u_n \\ t_0 & t_1 & \dots & t_n \end{pmatrix} \geq 0.$$

- (e) Es ist zu beachten, dass bei einem vollständigen TSCHEBYSCHJEFF-System nicht *beliebige* Funktionen weggelassen werden können. So ist wohl $\{1, t\}$ ein vollständiges zweidimensionales TSCHEBYSCHJEFF-System auf $[0, 1]$, jedoch ist $\{t\}$ keins.
- (f) Bezeichnungen: Für $\Sigma = \{u_i\}_{i=0}^n$ sei

$$\langle \Sigma \rangle := \left\{ u = \sum_{i=0}^n a_i u_i \mid a_i \in \mathbf{R}, i = 0(1)n \right\} \text{ das Erzeugnis der Funktionen } u_i, i = 0(1)n,$$

und

$$\langle \Sigma \rangle_0 := \langle \Sigma \rangle \setminus \{0\} \text{ die Menge aller nichttrivialen Linearkombinationen der Funktionen } u_i, i = 0(1)n.$$

- (g) Über die Bezeichnung für ein TSCHEBYSCHJEFF-System Σ und dessen Erzeugnis herrscht in der Literatur Uneinigkeit; man findet für ein TSCHEBYSCHJEFF-System auch die Bezeichnungen T-System [16], HAAR-System [15] und TSCHEBYSCHJEFF-HAAR-System [26]. Ein vollständiges TSCHEBYSCHJEFF-System wird oft als MARKOFF-System bezeichnet [49, 15], die lineare Hülle als HAAR-Raum oder MARKOFF-Raum [49].

Darüberhinaus lässt sich ein TSCHEBYSCHJEFF-System durch folgende äquivalente Eigenschaften charakterisieren:

Satz 2.2.4.

Für ein n -dimensionales System $\Sigma \subset C[a, b]$ sind die folgenden Aussagen äquivalent:

- (a) Σ ist ein TSCHEBYSCHJEFF-System auf $[a, b]$.
- (b) $Z(f) \leq n - 1$ für alle Funktionen $f \in \langle \Sigma \rangle_0$, d.h. jede nichttriviale Funktion f aus $\langle \Sigma \rangle$ hat nicht mehr als $n - 1$ Nullstellen (nichtnodale Nullstellen doppelt gezählt).
- (c) Für jede Funktion $f \in C[a, b]$ und paarweise verschiedene Punkte t_1, \dots, t_n existiert genau eine Funktion $g \in \langle \Sigma \rangle$, für die

$$g(t_i) = f(t_i), \quad i = 1(1)n,$$

erfüllt ist, d.h. die so genannte LAGRANGESche Interpolationsaufgabe ist in $\langle \Sigma \rangle$ eindeutig lösbar.

Beweis : Siehe [16], Theorem 4.2 und [23], Theorem 1.4.

Aus (b) folgt insbesondere, dass für eine Funktion f eines TSCHEBYSCHJEFF-Raums mit $Z(f) \geq n$ dann $f \equiv 0$ sein muss.

Entsprechende Aussagen gelten auch für erweiterte TSCHEBYSCHJEFF-Systeme; hierbei werden Nullstellen einschließlich ihrer algebraischen Vielfachheit gezählt und statt der LAGRANGESchen Interpolation betrachtet man die entsprechende HERMITESche Interpolationsaufgabe (siehe [16] Theorem 4.3. und [23], Theorem 1.8.). Die einfachsten Beispiele für TSCHEBYSCHJEFF-Systeme sind (weitere finden sich in [16]):

- Potenzfunktionen: $\Sigma := \{1, t, t^2, \dots, t^n\}$ ist für alle $n \in \mathbb{N}_0$ ein vollständiges und erweitertes TSCHEBYSCHJEFF-System auf jedem abgeschlossenen Teilintervall von $[0, \infty)$.
- trigonometrische Funktionen: $\Sigma := \{1, \cos(t), \sin(t), \dots, \cos(nt), \sin(nt)\}$, $n \in \mathbb{N}$, ist ein $(2n + 1)$ -dimensionales TSCHEBYSCHJEFF-System periodischer Funktionen auf $[0, 2\pi)$.

2.3 Existenz- und Eindeutigkeitsatz für Quadraturformeln

In diesem Abschnitt wird ein Satz über die Existenz und Eindeutigkeit von Quadraturformeln bewiesen, die exakt für alle Funktionen eines TSCHEBYSCHJEFF-Raumes sind.

Schon M.G. KREIN hat in seinem Artikel [18] erwähnt, dass es – in Analogie zu den GAUSSSchen Quadraturformeln für Polynome – exakte Quadraturformeln für n -dimensionale TSCHEBYSCHJEFF-Systeme gibt, welche nur etwa $\frac{n}{2}$ Knoten besitzen. NÜRNBERGER hat in seinem Buch [23] einen Satz über die Existenz und die Eindeutigkeit von Quadraturformeln mit positiven Gewichten bewiesen, die exakt für einen gegebenen TSCHEBYSCHJEFF-Raum sind und den rechten Randpunkt nicht als Quadraturknoten besitzen (solche Formeln werden dort als GAUSS-Quadraturformeln bezeichnet). V.B. RYVKIN zeigt in seinem Artikel [26] mit topologischen Mitteln die Existenz und Eindeutigkeit von *offenen* Quadraturformeln für RIEMANN-STIELTJES-Integrale mit n Knoten und positiven Gewichten, die exakt für ein $2n$ -dimensionales TSCHEBYSCHJEFF-System sind.

In diesem Abschnitt wird ein allgemeinerer Satz über die Existenz und Eindeutigkeit von offenen, halboffenen und geschlossenen Quadraturformeln für gewichtete Integrale bewiesen.

Die hier behandelten Quadraturformeln sollen Formeln zur Approximation von RIEMANN-STIELTJES-Integralen mit monoton wachsender Gewichtsfunktion σ auf $[a, b]$ sein. Das Integral über eine integrierbare Funktion f schreibt sich dann als

$$\int_a^b f(t) d\sigma(t) \quad \text{oder einfacher als} \quad \int_a^b f d\sigma.$$

Für $\sigma(t) = t$, $t \in [a, b]$, erhält man das gewöhnliche RIEMANN-Integral. Im Folgenden gelte für die Gewichtsfunktion:

$$\sigma \text{ sei streng monoton wachsend und differenzierbar und } \sigma' \text{ sei integrierbar auf } [a, b], \quad (2.4)$$

so dass sich das RIEMANN-STIELTJES-Integral als RIEMANN-Integral schreiben lässt (vgl. [25], Satz 6.17):

$$\int_a^b f(t) d\sigma(t) = \int_a^b f(t) \sigma'(t) dt. \quad (2.5)$$

Der folgende Satz stellt eine Verallgemeinerung des Satzes 5.9 von NÜRNBERGER [23] dar:

Satz 2.3.1.

Es sei G ein n -dimensionaler TSCHEBYSCHEFF-Raum auf $[a, b]$, $n \in \mathbb{N}$, und σ erfülle (2.4). Dann gelten:

- (a) *Ist n gerade, so existiert genau eine positive Quadraturformel Q_J , die **offen** ist, $J = \frac{n}{2}$ Knoten besitzt und exakt für alle Funktionen aus G ist.
Desweiteren existiert genau eine positive **geschlossene** Quadraturformel Q_J mit $J = \frac{n}{2} + 1$ Knoten, die exakt für alle Funktionen aus G ist.*
- (b) *Ist n ungerade, so existiert genau eine positive **halboffene** Quadraturformel Q_J mit $J = \frac{n}{2} + \frac{1}{2}$ Knoten, die den linken Randpunkt a des Intervalls als Quadraturknoten besitzt und exakt für alle Funktionen aus G ist.
Außerdem existiert genau eine positive, halboffene und auf G exakte Quadraturformel Q_J mit $J = \frac{n}{2} + \frac{1}{2}$, die den rechten Randpunkt b als Knoten hat.*

Es existiert also für jedes $n \in \mathbb{N}$ genau eine Formel, für die a (bzw. b) ein Quadraturknoten ist. Der Beweis dieses Satzes erfordert einige Hilfsmittel, die im Anschluss an das folgende Korollar bereitgestellt werden; der Beweis selbst findet sich am Ende dieses Abschnitts.

Zunächst wird noch ein Korollar formuliert, welches die Analogie zu den GAUSS-, RADAU- und LOBATTO-Quadraturformeln für Polynome deutlich macht:

Korollar 2.3.2.

Für alle $J \in \mathbb{N}$ existiert je genau eine positive Quadraturformel auf $[a, b]$ mit J Punkten, die

- *offen und exakt für die Funktionen eines $2J$ -dimensionalen TSCHEBYSCHEFF-Raumes auf $[a, b]$ ist (GAUSS-Typ).*
- *halboffen mit a als Knoten und exakt für die Funktionen eines $(2J-1)$ -dimensionalen TSCHEBYSCHEFF-Raumes auf $[a, b]$ ist (RADAU-Typ).*

- halboffen mit b als Knoten und exakt für die Funktionen eines $(2J-1)$ -dimensionalen TSCHEBYSCHEFF-Raumes auf $[a, b]$ ist (RADAU-Typ).
- geschlossen und exakt für die Funktionen eines $(2J-2)$ -dimensionalen TSCHEBYSCHEFF-Raumes auf $[a, b]$ ist (LOBATTO-Typ).

Für den Beweis des Satzes 2.3.1 werden nun einige Hilfssätze formuliert. Zunächst wird der Begriff der besten einseitigen $L_{1,\sigma}$ -Approximation eingeführt und ein Satz über die Existenz derselben formuliert, anschließend wird die Existenz und dann die Eindeutigkeit von Quadraturformeln für TSCHEBYSCHEFF-Räume bewiesen.

Für eine differenzierbare Funktion σ mit (2.4) und $f \in C[a, b]$ sei

$$\|f\|_{1,\sigma} := \int_a^b |f(t)| d\sigma(t) \stackrel{(2.5)}{=} \int_a^b |f(t)| \sigma'(t) dt. \quad (2.6)$$

Definition 2.3.3. (beste einseitige $L_{1,\sigma}$ -Approximation)

Es sei G ein Untervektorraum von $C[a, b]$ und $f \in C[a, b]$. Eine Funktion $g_f \in G$ mit $g_f(t) \leq f(t) \forall t \in [a, b]$ (im Folgenden kurz $g_f \leq f$), heißt **beste einseitige $L_{1,\sigma}$ -Approximation** von f in G , falls

$$\|f - g_f\|_{1,\sigma} = \inf_{g \in G, g \leq f} \|f - g\|_{1,\sigma}$$

gilt.

Bemerkung 2.3.4.

Es lassen sich die folgenden Aussagen beweisen (siehe z.B. [23], es ist lediglich jeweils die Norm $\|\cdot\|_1$ durch die Norm $\|\cdot\|_{1,\sigma}$ zu ersetzen):

- Ist G ein n -dimensionaler Untervektorraum von $C[a, b]$, $n \in \mathbb{N}$, in dem es eine strikt positive Funktion gibt (d.h. es existiert ein $f \in G$ mit $f(t) > 0 \forall t \in [a, b]$), so existiert für jedes $f \in C[a, b]$ (mindestens) eine beste einseitige $L_{1,\sigma}$ -Approximation von f in G .
- Ist G ein n -dimensionaler TSCHEBYSCHEFF-Raum mit $n \geq 2$, so existiert eine Funktion $f \in C[a, b]$, für welche es mindestens zwei verschiedene beste einseitige $L_{1,\sigma}$ -Approximationen von f in G gibt.
- Hinreichend für die Eindeutigkeit der besten einseitigen $L_{1,\sigma}$ -Approximation ist beispielsweise, dass G ein erweiterter TSCHEBYSCHEFF-Raum der Dimension $n \geq 2$ ist und $f \in C^1[a, b]$ gilt.

Die Voraussetzungen des hinreichenden Kriteriums für die Eindeutigkeit einer besten einseitigen $L_{1,\sigma}$ -Approximation in [23], Theorem 5.5, lassen sich abschwächen:

Satz 2.3.5.

Ist Σ ein n -dimensionaler TSCHEBYSCHEFF-Unterraum von $C^1[a, b]$, $n \in \mathbb{N}$, so existiert zu jeder Funktion $f \in C^1[a, b]$ genau eine beste einseitige $L_{1,\sigma}$ -Approximation.

Beweis:

Der Beweis verläuft ähnlich wie der von Theorem 5.5 in [23]. Es ist nur Folgendes zu beachten:

Zählt man die Vielfachheiten von Nullstellen wie in Definition 2.1.2 angegeben, so gilt für eine nichttriviale Funktion g_0 aus $\Sigma \subset C^1[a, b]$, dass $Z(g_0)$ größer oder gleich der Summe der Vielfachheiten der Nullstellen in der Menge $\{t \in (a, b) : f(t) = f'(t) = 0\} \cup \{t \in \{a, b\} : f(t) = 0\}$ ist (in [23] wird diese Menge als $Z_1(f)$ bezeichnet). Hieraus folgt zusammen mit Satz 2.2.4 die im Beweis von Theorem 5.5. ([23]) benötigte Aussage, dass ebendiese Summe kleiner oder gleich $n - 1$ ist. Nicht für das Zählen der Nullstellen ist die Differenzierbarkeit der Funktionen aus Σ erforderlich, sondern zur Anwendung des Theorems 5.4. in [23]. \square

Der folgende Satz aus [23] verdeutlicht den Zusammenhang zwischen der Existenz von Quadraturformeln und der besten einseitigen $L_{1,\sigma}$ -Approximation:

Satz 2.3.6. (NÜRNBERGER [23])

Es sei G ein n -dimensionaler Untervektorraum von $C[a, b]$, $n \in \mathbb{N}$, der eine positive Funktion enthält, und es seien $f \in C[a, b]$ und $g_f \in G$ mit $g_f \leq f$. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

- (a) g_f ist eine beste einseitige $L_{1,\sigma}$ -Approximation von f in G .
- (b) Es existieren ein $r \in \{1, \dots, n\}$, paarweise verschiedene Punkte $t_1, \dots, t_r \in [a, b]$ und positive Zahlen $a_i > 0$, $i = 1(1)r$, mit

$$f(t_i) - g_f(t_i) = 0, \quad i = 1(1)r,$$

und

$$\int_a^b g(t) d\sigma(t) = \sum_{i=1}^r a_i g(t_i) \quad \forall g \in G.$$

Das bedeutet, dass die Punkte, in welchen die beste einseitige $L_{1,\sigma}$ -Approximation die zu approximierende Funktion berührt, geeignete Knoten für eine Quadraturformel sind, die exakt auf dem gesamten Untervektorraum G von $C[a, b]$ ist. Allerdings enthält der Satz keine Aussage über die Länge r der Quadraturformel, außer dass sie höchstens n Punkte besitzt. Wir benötigen noch eine weitere Definition:

Definition 2.3.7. ($I(T)$)

Für eine endliche Menge $T \subset [a, b]$ sei

$$I(T) := |T \cap (a, b)| + \frac{1}{2} |T \cap \{a, b\}|.$$

Demnach ergibt sich $I(T)$ aus der Summe der Anzahl der Punkte aus T im Inneren des Intervalls und der Hälfte der Anzahl der Punkte aus T am Rande des Intervalls.

Bemerkung 2.3.8.

- (a) Ist $I(T) = \frac{n}{2}$, $n \in \mathbb{N}$, so kann man folgende Aussagen über die Mächtigkeit von T machen: Ist n gerade, so ist entweder $|T| = \frac{n}{2}$ (falls T keinen Randpunkt des Intervalls $[a, b]$ enthält), oder $|T| = \frac{n}{2} + 1$ (beide Randpunkte liegen in T). Ist n ungerade, so gilt $|T| = \frac{n}{2} + 1$ und es liegt genau ein Randpunkt des Intervalls in T .
- (b) Für nichttriviale Funktionen $f \in C[a, b]$, die das Vorzeichen nicht wechseln und die Nullstellenmenge T besitzen, deren Nullstellen in (a, b) also sämtlich nichtnodal sind, gilt

$$Z(f) = 2I(T).$$

Der folgende Hilfssatz stammt von KREIN ([18], Lemma 3.2 oder [16], Theorem I.5.1):

Lemma 2.3.9. (KREIN [18])

Es sei G ein n -dimensionaler TSCHEBYSCHJEFF-Raum, $n \in \mathbb{N}$. Für jede Punktmenge $T = \{t_1, \dots, t_r\}$ mit

$$a \leq t_1 < t_2 < \dots < t_{r-1} < t_r \leq b$$

und $I(T) \leq \frac{n-1}{2}$ existiert eine Funktion $g \in G$ mit

$$g(t_i) = 0, \quad i = 1(1)r, \quad \text{und} \quad g(t) > 0 \quad \forall t \in [a, b] \setminus T,$$

d.h. g besitzt nur nichtnodale Nullstellen in (a, b) und gegebenenfalls (nodale) Nullstellen in a und b .

Es folgt unmittelbar, dass für TSCHEBYSCHJEFF-Räume eine der Voraussetzungen des Satzes 2.3.6 immer erfüllt ist:

Korollar 2.3.10.

In einem TSCHEBYSCHJEFF-Raum gibt es stets eine strikt positive Funktion. Insbesondere existiert (nach Bemerkung 2.3.4) für jede stetige Funktion f eine beste einseitige $L_{1,\sigma}$ -Approximation in einem TSCHEBYSCHJEFF-Raum.

Beweis:

Zu nichtleeren Punkt Mengen $T, U \subset [a, b]$ mit $T \cap U = \emptyset$ und $I(T), I(U) \leq \frac{n-1}{2}$ konstruiert man Funktionen g_T und g_U gemäß Lemma 2.3.9. Die Funktion $g_T + g_U$ ist dann positiv und liegt in G . \square

ZIELKE und ZALIK [49, 48] haben unabhängig voneinander folgendes Resultat gezeigt:

Lemma 2.3.11. (ZIELKE [49], ZALIK [48])

Zu einem n -dimensionalen TSCHEBYSCHJEFF-Raum G existiert stets eine Funktion $f \in C[a, b]$ derart, dass $\langle G, f \rangle$ ein $(n+1)$ -dimensionaler TSCHEBYSCHJEFF-Raum ist.

Nun wird die **Existenz** von mindestens zwei positiven Quadraturformeln für TSCHEBYSCHJEFF-Räume bewiesen:

Lemma 2.3.12.

Es sei G ein n -dimensionaler TSCHEBYSCHJEFF-Raum auf $[a, b]$, $n \in \mathbb{N}$, und für σ gelte (2.4). Dann existieren mindestens zwei verschiedene Quadraturformeln Q_1 und Q_2 mit

$$\left. \begin{aligned} Q_1(f) &:= \sum_{i=1}^r a_i f(t_i), \quad T := \{t_1, \dots, t_r\} \subset [a, b], \\ t_i &\text{ paarweise verschieden, } a_i > 0, \quad i = 1(1)r, \end{aligned} \right\} \quad (2.7)$$

und

$$\left. \begin{aligned} Q_2(f) &:= \sum_{i=1}^{r'} b_i f(u_i), \quad U := \{u_1, \dots, u_{r'}\} \subset [a, b], \\ u_i &\text{ paarweise verschieden, } b_i > 0, \quad i = 1(1)r', \end{aligned} \right\} \quad (2.8)$$

und

$$T \cap U = \emptyset, \quad I(T) = \frac{n}{2} = I(U),$$

so dass

$$Q_1(g) = \int_a^b g(t) d\sigma(t) = Q_2(g) \quad \forall g \in G$$

gilt.

Die Beziehung zwischen r und r' ist in der Gleichung $I(T) = \frac{n}{2} = I(U)$ enthalten. Ist n gerade, so gilt $r, r' \in \{\frac{n}{2}, \frac{n}{2} + 1\}$, ansonsten ist $r = r' = \frac{n}{2} + \frac{1}{2}$. Man beachte, dass für die Gewichtsfunktion σ stets (2.4) gilt.

Beweis:

Nach Lemma 2.3.11 existiert zu G eine Funktion $f \in C[a, b]$ derart, dass $\langle G, f \rangle$ ein $(n + 1)$ -dimensionaler TSCHEBYSCHEFF-Raum ist. Nach 2.3.4(a) und 2.3.10 existiert zu f eine beste einseitige $L_{1, \sigma}$ -Approximation g_f in G . Mit Satz 2.3.6 existieren ein $r \in \{1, \dots, n\}$, reelle Zahlen $a_i > 0$, $i = 1(1)r$, eine Menge $T := \{t_1, \dots, t_r\} \subset [a, b]$ paarweise verschiedener Punkte mit

$$f(t_i) - g_f(t_i) = 0, \quad i = 1(1)r, \quad \text{und} \quad (2.9)$$

$$Q_1(g) := \sum_{i=1}^r a_i g(t_i) = \int_a^b g(t) d\sigma(t) \quad \forall g \in G. \quad (2.10)$$

Zunächst wird gezeigt: $I(T) = \frac{n}{2}$:

Es ist $f - g_f \in \langle G, f \rangle$, und es gilt $r = |T| \leq Z(f - g_f) \leq n$, weil Funktionen aus dem $(n + 1)$ -dimensionalen TSCHEBYSCHEFF-Raum $\langle G, f \rangle$ nach Satz 2.2.4 nicht mehr als n Nullstellen besitzen können. Wegen $f - g_f \geq 0$ sind alle Nullstellen von $f - g_f$ in (a, b) nichtnodal, d.h. ohne Vorzeichenwechsel. Da wegen (2.9) T in der Nullstellenmenge von $f - g_f$ enthalten ist, gilt weiter mit 2.1.2 und Bemerkung 2.3.8(b)

$$2I(T) = 2|T \cap (a, b)| + |T \cap \{a, b\}| \leq Z(f - g_f) \leq n,$$

$$\text{und somit } I(T) \leq \frac{n}{2}.$$

Annahme: $I(T) < \frac{n}{2}$. Für $n = 1$ wäre dann $I(T) = 0$, also $T = \emptyset$, ein Widerspruch zu $r \geq 1$. Ist $n \geq 2$, so ist $I(T) \leq \frac{n-1}{2}$ und somit

$$2|T \cap (a, b)| + |T \cap \{a, b\}| \leq n - 1.$$

Dann existiert nach Lemma 2.3.9 eine Funktion $g \in G$ mit $Z(g) \leq n - 1$ mit Nullstellenmenge T und $g \geq 0$, also $g(t) = 0 \forall t \in T$ und $g(t) > 0 \forall t \in [a, b] \setminus T$. Setzt man diese Funktion in (2.10) ein, so ergibt sich wegen

$$0 \stackrel{g(t_i)=0}{=} Q_1(g) = \int_a^b g(t) d\sigma(t) = \int_a^b g(t) \underbrace{\sigma'(t)}_{>0} dt \stackrel{g \geq 0}{>} 0$$

(2.4) ein Widerspruch. Also gilt $I(T) = \frac{n}{2}$.

Auf ebensolche Art zeigt man, dass für die Funktion $-f$ eine beste einseitige $L_{1, \sigma}$ -Approximation g_{-f} und $r' \in \{1, \dots, n\}$, $b_i > 0$, $i = 1(1)r'$, und eine Menge paarweise verschiedener Punkte $U := \{u_1, \dots, u_{r'}\} \subset [a, b]$ existieren, für die

$$-f(u_i) - g_{-f}(u_i) = 0, \quad i = 1(1)r', \quad (2.11)$$

$$Q_2(g) := \sum_{i=1}^{r'} b_i g(u_i) = \int_a^b g(t) d\sigma(t) \quad \forall g \in G \quad (2.12)$$

und $I(U) = \frac{n}{2}$ gilt.

Es bleibt zu zeigen: $T \cap U = \emptyset$.

Annahme: $T \cap U \neq \emptyset$ (*).

Dann ist $N := |T \cup U| \leq n$, denn aus der Bemerkung 2.3.8 folgt zunächst

$$N \leq r + r' \leq \frac{n}{2} + 1 + \frac{n}{2} + 1 = n + 2.$$

Ist $r + r' = n + 2$, so folgt sofort $r = r' = \frac{n}{2} + 1$, und damit $T \supset \{a, b\} \subset U$, aber dann ist $N \leq n + 2 - 2 = n$, da a und b im Schnitt $T \cap U$ liegen.

Andernfalls ist $r + r' \leq n + \frac{3}{2}$, und nach Annahme liegt ein Element im Schnitt von T und U . Dann ist $N \leq n + \frac{3}{2} - 1 = n + \frac{1}{2}$, also $N \leq n$.

Es gilt dann aber schon $T = U$ (**):

Für $n = 1$ ist wegen (*) $N = 1$, und mit $|T| = |U| = 1$ gilt dann $T = U$.

Es sei nun $n \geq 2$ und angenommen, (**) wäre falsch. Dann existiert o.E. ein $\ell \in \{1, \dots, r\}$ mit $t_\ell \notin U$. Es sei $\{g_1, \dots, g_n\}$ eine Basis von G . In der Menge $(T \cup U) \setminus \{t_\ell\} := \{s_1, \dots, s_k\}$ liegen $k \leq n - 1$ Elemente. Ist $k < n - 1$, so nehme man $n - 1 - k$ beliebige, von den vorhandenen Punkten $s_i, i = 1(1)k$, verschiedene Punkte s_{k+1}, \dots, s_{n-1} aus $[a, b] \setminus \{t_\ell\}$ hinzu. Definiere nun die Funktion $\tilde{g} \in G$ via

$$\tilde{g}(t) := \mathfrak{Det} \begin{pmatrix} g_1 & g_2 & \cdots & g_{n-1} & g_n \\ s_1 & s_2 & \cdots & s_{n-1} & t \end{pmatrix}.$$

Dann hat \tilde{g} Nullstellen in den $n - 1$ von t_ℓ verschiedenen Punkten $s_i, i = 1, \dots, n - 1$. Da G ein n -dimensionales TSCHEBYSCHJEFF-System ist, kann \tilde{g} keine weiteren Nullstellen besitzen (andernfalls wäre die TSCHEBYSCHJEFF-Determinante für diese Punkte gleich Null), also ist insbesondere $\tilde{g}(t_\ell) \neq 0$. Setzt man nun

$$g := \tilde{g}(t_\ell)^{-1} \tilde{g},$$

so ist $g(t_\ell) = 1$, und mit g eingesetzt in (2.10) und (2.12) erhält man den Widerspruch

$$0 = Q_2(g) \stackrel{(2.12)}{=} \int_a^b g(t) d\sigma(t) \stackrel{(2.10)}{=} Q_1(g) = a_\ell > 0.$$

Also ist (**) gezeigt und es gilt insbesondere $r = r'$.

Wegen $g_f \leq f$ und $g_{-f} \leq -f$ folgt zunächst $g_f + g_{-f} \leq 0$, und mit (2.9) und (2.11) ergibt sich

$$(g_f + g_{-f})(t_i) = 0, \quad i = 1(1)r,$$

also sind die Punkte aus T Nullstellen von $g_f + g_{-f} \in G$. Nach Bemerkung 2.3.8(b) gilt dann

$$Z(g_f + g_{-f}) \geq 2I(T) = 2 \frac{n}{2} = n.$$

Nach Satz 2.2.4 gilt dann $g_f + g_{-f} = 0$, weil für keine Funktion $h \in G \setminus \{0\}$ die Ungleichung $Z(h) \geq n$ gelten kann. Also ist $g_{-f} = -g_f$.

Wegen $f - g_f \geq 0$ und $-f + g_f = -f - g_{-f} \geq 0$ folgt $f = g_f \in G$, ein Widerspruch dazu, dass $\langle f, G \rangle$ ein $(n + 1)$ -dimensionaler TSCHEBYSCHJEFF-Raum ist. Also gilt $T \cap U = \emptyset$, womit der Hilfssatz bewiesen ist. \square

Folgerungen:

Ist n gerade, so gilt $r, r' \in \{\frac{n}{2}, \frac{n}{2} + 1\}$. Die beiden Quadraturformeln Q_1 und Q_2 sind dann wegen Bemerkung 2.3.8 entweder beide offen oder Q_1 ist offen und Q_2 ist geschlossen oder umgekehrt. Wegen $T \cap U = \emptyset$ können nicht beide Formeln geschlossen sein.

Im Fall, dass n ungerade ist, gilt $r = r' = \frac{n}{2} + \frac{1}{2}$ und somit sind Q_1 und Q_2 halboffen. Da $T \cap U = \emptyset$ gilt, können nicht beide denselben Randpunkt als Quadraturknoten besitzen, also besitzt die eine den rechten und die andere den linken Randpunkt als Quadraturknoten.

Hieraus folgt aber noch keine Eindeutigkeit. Diese behandelt der folgende Hilfssatz:

Lemma 2.3.13.

Es sei G ein n -dimensionaler TSCHEBYSCHEFF-Raum auf $[a, b]$, $n \in \mathbb{N}$. Dann existiert höchstens eine Quadraturformel Q mit positiven Gewichten und Knotenmenge $T \subset [a, b]$, $I(T) = \frac{n}{2}$, mit

$$Q(g) = \int_a^b g(t) d\sigma(t) \quad \forall g \in G$$

(die also exakt für alle Funktionen aus G ist), für die

(i) $T \subset (a, b)$ bzw.

(ii) $\{a, b\} \subset T$

gilt.

Bemerkung: Die Aussage gilt auch, wenn in (i) $T \subset (a, b]$ steht.

Beweis:

Es seien Q_1 und Q_2 wie in (2.7) und (2.8) in Lemma 2.3.12 definiert mit $I(T) = \frac{n}{2} = I(U)$ und

(i) $T \subset (a, b) \supset U$, d.h. Q_1 und Q_2 sind beide offen oder halboffen, bzw.

(ii) $U \supset \{a, b\} \subset T$, d.h. Q_1 und Q_2 sind beide geschlossen.

Zuerst wird gezeigt $T = U$ (*):

Es gilt $N := |T \cup U| \leq n$, denn

1. Fall: $T \cap U \neq \emptyset$: Man verfährt wie im Beweis von Lemma 2.3.12. Dieser Fall beinhaltet insbesondere (ii).

2. Fall: $T \cap U = \emptyset$: Hier ist nur (i) zu betrachten. Es gilt

$$N \leq r + r' \leq \frac{n}{2} + \frac{1}{2} + \frac{n}{2} + \frac{1}{2} = n + 1,$$

da weder Q_1 noch Q_2 geschlossen sind. Wäre $N = n + 1$, so wäre $r = r' = \frac{n}{2} + \frac{1}{2}$, aber dann wären Q_1 und Q_2 halboffen und hätten demnach wegen (i) den Knoten a gemeinsam, was ein Widerspruch zu $T \cap U = \emptyset$ ist.

Also ist $N < n + 1$ und damit $N \leq n$. Der Rest des Beweises von (*) verläuft genauso wie im Beweis von Lemma 2.3.12.

Zu den Gewichten: Es sei $r := |T|$, $i \in \{1, \dots, r\}$ und $\{g_1, \dots, g_n\}$ eine Basis von G . Man wähle $n - r$ paarweise verschiedene Punkte $t_{r+1}, \dots, t_n \in [a, b] \setminus T$. Die Funktion

$$\tilde{g}_i(t) := \mathfrak{Det} \begin{pmatrix} g_1 & g_2 & \cdots & g_{i-1} & g_i & \cdots & g_{n-1} & g_n \\ t_1 & t_2 & \cdots & t_{i-1} & t_{i+1} & \cdots & t_n & t \end{pmatrix}$$

hat Nullstellen in den $n - 1$ Punkten t_j , $j \in \{1, \dots, n\} \setminus \{i\}$, und kann keine weiteren Nullstellen besitzen, da G ein n -dimensionaler TSCHEBYSCHJEFF-Raum ist. Insbesondere muss $\tilde{g}_i(t_i) \neq 0$ sein, da sonst die TSCHEBYSCHJEFF-Determinante

$$\mathfrak{Det} \begin{pmatrix} g_1 & g_2 & \cdots & g_{i-1} & g_i & \cdots & g_{n-1} & g_n \\ t_1 & t_2 & \cdots & t_{i-1} & t_i & \cdots & t_{n-1} & t_n \end{pmatrix} = (-1)^{n-i} \tilde{g}_i(t_i) = 0$$

wäre, ein Widerspruch dazu, dass $\{g_1, \dots, g_n\}$ ein TSCHEBYSCHJEFF-System ist. Für die Funktion $g_i(t) := \frac{\tilde{g}_i(t)}{\tilde{g}_i(t_i)}$ gilt $g(t_j) = 0$, $j \in \{1, \dots, n\} \setminus \{i\}$, und $g(t_i) = 1$, und somit

$$a_i = Q_1(g_i) = \int_a^b g_i(t) d\sigma(t) = Q_2(g_i) = b_i.$$

Also ist $Q_1 = Q_2$.

Die Aussage (i) mit $T \subset (a, b]$ lässt sich völlig analog beweisen. \square

Mit diesen Hilfssätzen lässt sich nun leicht der Satz 2.3.1 beweisen:

Beweis:

Nach Lemma 2.3.12 existieren mindestens zwei verschiedene Quadraturformeln Q_1 und Q_2 .

1. Fall: n gerade. Der Fall, dass beide Formeln offen sind, kann nach Lemma 2.3.13(i) nicht eintreten. Wegen Bemerkung 2.3.8(a) ist die eine offen, und die andere geschlossen. Die Eindeutigkeit der offenen Formel ergibt sich aus Lemma 2.3.13(i), die der geschlossenen Formel aus 2.3.13(ii).

2. Fall: n ungerade. Wie schon in der Folgerung nach Lemma 2.3.12 bemerkt, sind Q_1 und Q_2 halboffen und eine der Quadraturformeln hat den rechten Randpunkt und die andere den linken Randpunkt als Knoten. Die Eindeutigkeit beider Formeln folgt wiederum aus Lemma 2.3.13(i). \square

2.4 Eigenschaften der Funktion G_α

In diesem Abschnitt werden verschiedene Eigenschaften der Funktion G_α untersucht. Es werden Darstellungen angegeben, die für unterschiedliche Werte von α gültig sind, insbesondere wird eine Darstellung für negative Indizes α bewiesen. Desweiteren wird die Art der Singularität im Ursprung diskutiert, die für $\alpha \leq 1$ auftritt. Schließlich wird noch ein Einschließungssatz für die einzige Nullstelle von G_α im Intervall $(0, \frac{1}{4})$ bewiesen.

Aufgrund der 1-Periodizität und der Symmetrie von G_α bezüglich $\frac{1}{2}$ (d.h. $G_\alpha(1 - \xi) = G_\alpha(\xi)$, $\xi \in [0, 1]$) genügt es, die Betrachtungen auf das Intervall $[0, \frac{1}{2}]$ zu beschränken.

2.4.1 Darstellung und Ableitung von G_α

Man kann die Funktion G_α mittels der **Polylogarithmus**-Funktion definieren. Der Polylogarithmus hat folgende Darstellungen:

Nach [47], (8.1) bzw. [12], §1.11(1) ist

$$\text{Li}_\alpha(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^k}{k^\alpha}, \quad \begin{cases} |z| \leq 1, & \alpha > 1, \\ |z| \leq 1, z \neq 1 & \alpha \in (0, 1], \\ |z| < 1 & \alpha \leq 0. \end{cases} \quad (2.13)$$

Für $\alpha > 0$ gilt eine Integraldarstellung des Polylogarithmus ([44], (5), [47], (1.2) oder [12], §1.11(3)):

$$\operatorname{Li}_\alpha(z) = \frac{z}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty \frac{t^{\alpha-1}}{e^t - z} dt, \quad z \in \mathcal{C} \setminus [1, \infty), \text{ also} \quad (2.14)$$

$$\operatorname{Li}_\alpha(e^w) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty \frac{t^{\alpha-1}}{e^{t-w} - 1} dt, \quad w \in \mathcal{C}, \quad (2.15)$$

$$\text{falls } \operatorname{Im}(w) \not\equiv 0 \pmod{2\pi} \text{ oder } \operatorname{Re}(w) < 0, \text{ bzw.} \quad (2.16)$$

$$\operatorname{Li}_\alpha(e^{2\pi i \xi}) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty \frac{t^{\alpha-1}}{e^{t-2\pi i \xi} - 1} dt, \quad \xi \in \mathcal{I}_\alpha := \begin{cases} (0, \frac{1}{2}] & \alpha \in (0, 1], \\ [0, \frac{1}{2}] & \alpha > 1. \end{cases} \quad (2.17)$$

WOOD[47] hat eine für $\alpha \notin \mathbf{N}$ (insbesondere für negative Werte des Parameters α) gültige Darstellung des Polylogarithmus angegeben (ohne ausführlichen Beweis), die im Anhang B bewiesen ist:

$$\operatorname{Li}_\alpha(e^w) = \sum_{k=0}^\infty \zeta(\alpha - k) \frac{w^k}{k!} + \Gamma(1 - \alpha) (-w)^{\alpha-1}, \quad \text{für } 0 < |w| < 2\pi, \quad (2.18)$$

wobei die RIEMANNSCHE Zetafunktion für negative reelle Argumente durch

$$\zeta(x) = 2(2\pi)^{x-1} \sin\left(\frac{1}{2}\pi x\right) \Gamma(1-x) \zeta(1-x), \quad x < 0, \quad (2.19)$$

zu berechnen ist ([1], §23.2.6).

Nun lassen sich die Funktionen G_α und H_α definieren:

Definition 2.4.1. (G_α, H_α)

Es seien

$$G_\alpha(\xi) := 2 \operatorname{Re}(\operatorname{Li}_\alpha(e^{2\pi i \xi})) = (\operatorname{Li}_\alpha(e^{-2\pi i \xi}) + \operatorname{Li}_\alpha(e^{2\pi i \xi})), \quad \xi \in \mathcal{I}_\alpha, \quad (2.20)$$

und

$$H_\alpha(\xi) := 2 \operatorname{Im}(\operatorname{Li}_\alpha(e^{2\pi i \xi})) = i (\operatorname{Li}_\alpha(e^{-2\pi i \xi}) - \operatorname{Li}_\alpha(e^{2\pi i \xi})), \quad \xi \in \mathcal{I}_\alpha. \quad (2.21)$$

Die Funktion H_α spielt ebenso wie G_α eine wichtige Rolle bei der theoretischen Analyse des Qualokationsverfahrens. Es wird später gezeigt, dass sich mit ihr die Ableitung der Funktion G_α ausdrücken lässt. In den Arbeiten über das Qualokationsverfahren [36, 10, 37, 38] werden die beiden Funktionen über ihre Reihendarstellungen definiert, die im nächsten Satz angegeben sind.

Der Polylogarithmus ist ein Spezialfall der LERCH-Funktion Φ ([12], §1.11):

$$\operatorname{Li}_\alpha(z) = z \Phi(z, \alpha, 1), \quad \begin{cases} z \in D := \mathcal{C} \setminus \{z \in \mathcal{C} \mid \operatorname{Re}(z) \geq 1\}, & \alpha > 0, \\ z \in \{1\} \cup D, & \alpha > 1. \end{cases}$$

Man beachte, dass $z := e^{2\pi i \xi} \in D$ für $\xi \in (0, \frac{1}{2})$ ist, und $z = 1$ nur für $\xi = 0$ gilt. Daher sind G_α und H_α nur für $\alpha > 1$ auf dem abgeschlossenen Intervall $[0, \frac{1}{2}]$ definiert, für $\alpha \in (0, \frac{1}{2})$ kann man G_α nur für $\xi \in (0, 1)$ definieren.

Für verschiedene Werte von α sind unterschiedliche Darstellungen des Polylogarithmus und der LERCH-Funktion gültig (vgl. [12, 47]). So gelten für positive α die **Summen-** und **Integraldarstellung** für G_α und H_α , die man auch in [9, 10, 37] findet:

Satz 2.4.2.

Für $\alpha > 0$ gelten die Reihendarstellungen

(a)

$$G_\alpha(\xi) = 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^\alpha} \cos(2\pi k\xi), \quad \xi \in \mathcal{I}_\alpha, \quad (2.22)$$

(b)

$$H_\alpha(\xi) = 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^\alpha} \sin(2\pi k\xi), \quad \xi \in \mathcal{I}_\alpha, \quad (2.23)$$

und die Integraldarstellung

(c)

$$G_\alpha(\xi) = \frac{2}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty t^{\alpha-1} \frac{e^{-t} \cos(2\pi\xi) - e^{-2t}}{N_t(\xi)} dt, \quad \xi \in \mathcal{I}_\alpha, \quad (2.24)$$

wobei

$$N_t(\xi) := 1 - 2e^{-t} \cos(2\pi\xi) + e^{-2t}, \quad t \in \mathbb{R}_0^+, \quad \xi \in [0, \frac{1}{2}]. \quad (2.25)$$

Beweis:

Wegen (2.13) ist für $z = e^{2\pi i\xi}$ und $\xi \in \mathcal{I}_\alpha$, also $|z| = 1$ für $\alpha > 1$ bzw. $|z| = 1$ und $z \neq 1$ für $\alpha \in (0, 1]$, dann

$$2 \operatorname{Re}(\operatorname{Li}_\alpha(e^{2\pi i\xi})) = 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^\alpha} \operatorname{Re}(e^{2\pi i\xi k}) = 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^\alpha} \cos(2\pi\xi k) = G_\alpha(\xi),$$

und

$$2 \operatorname{Im}(\operatorname{Li}_\alpha(e^{2\pi i\xi})) = 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^\alpha} \operatorname{Im}(e^{2\pi i\xi k}) = 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^\alpha} \sin(2\pi\xi k) = H_\alpha(\xi).$$

Wie man die Integraldarstellung aus der Summendarstellung herleitet, wird in [9] gezeigt; hier wird die Integraldarstellung von G_α mit Hilfe der Integraldarstellung des Polylogarithmus bewiesen:

Nach (2.17) ist wegen $2 \operatorname{Re}(z) = z + \bar{z}$

$$\begin{aligned} G_\alpha(\xi) &\stackrel{(2.20)}{=} 2 \operatorname{Re}(\operatorname{Li}_\alpha(e^{2\pi i\xi})) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty t^{\alpha-1} \left(\frac{1}{e^{t-2\pi i\xi} - 1} + \frac{1}{e^{t+2\pi i\xi} - 1} \right) dt \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty t^{\alpha-1} \frac{e^t (\cos(2\pi\xi) + i \sin(2\pi\xi)) - 1 + e^t (\cos(-2\pi\xi) + i \sin(-2\pi\xi)) - 1}{(e^{t+2\pi i\xi} - 1)(e^{t-2\pi i\xi} - 1)} dt \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty t^{\alpha-1} \frac{2e^t \cos(2\pi\xi) - 2}{e^{2t} - 2e^t \cos(2\pi\xi) + 1} dt \\ &= \frac{2}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty t^{\alpha-1} \frac{e^{-t} \cos(2\pi\xi) - e^{-2t}}{1 - 2e^{-t} \cos(2\pi\xi) + e^{-2t}} dt, \quad \xi \in \mathcal{I}_\alpha. \end{aligned}$$

□

Bemerkung 2.4.3.

Zu den Reihendarstellungen:

- (a) Die (gleichmäßige) Konvergenz der beiden Reihendarstellungen (2.22) und (2.23) für $\alpha > 0$, $\xi \in (0, \frac{1}{2})$, folgt aus dem Kriterium von DIRICHLET ([17], §48, Satz 2 und 199.4), für $\alpha > 1$ ist $2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^\alpha} < \infty$ eine Majorante von $G_\alpha(\xi)$ und $H_\alpha(\xi)$. Die Reihen konvergieren also absolut auf $[0, \frac{1}{2}]$ für $\alpha > 1$ und es gilt dann $G_\alpha(0) = 2\zeta(\alpha)$ und $H_\alpha(0) = 0$. Man sieht auch, dass G_α und H_α 1-periodische und stetige Funktionen sind.

Zur Integraldarstellung:

- (b) Es gilt

$$N_t(\xi) = (\cos(2\pi\xi) - e^{-t})^2 + \sin^2(2\pi\xi) \geq 0, \quad t \in \mathbf{R}_0^+, \quad \xi \in [0, \frac{1}{2}].$$

$N_t(\xi)$ wird Null für $t = 0$ und $\xi = 0$. Genauer: In einer Umgebung des Ursprungs lautet die Reihenentwicklung des Integranden

$$t^{\alpha-1} \frac{e^{-t} \cos(2\pi\xi) - e^{-2t}}{N_t(\xi)}$$

in t um 0

$$t^{\alpha-2} - \frac{1}{2}t^{\alpha-1} + \frac{1}{12}t^\alpha + \mathcal{O}(t^{\alpha+2}), \quad t \rightarrow 0.$$

Das Integral existiert für $2 - \alpha < 1$, also für $\alpha > 1$. Für $\alpha \in (0, 1]$ ist die Funktion G_α singularär im Ursprung, das Integral existiert nicht für $\xi = 0$. Die Singularität wird im nächsten Abschnitt noch genauer untersucht.

An der Integraldarstellung (2.24) erkennt man, dass $G_\alpha \in C^\infty(0, 1)$ ist ([9], S.374), jedoch ist die Darstellung (2.24) nur gültig für $\alpha > 0$.

Für manche Anwendungen (z.B. Beweis von Satz 2.4.7, oder Lemma 3.1.2) sind auch negative Werte von α interessant.

Satz 2.4.4.

Für $\alpha \notin \mathbf{N}$ und $\xi \in (0, \frac{1}{2}]$ gilt

$$\begin{aligned} G_\alpha(\xi) &= 2 \sum_{k=0}^{[\alpha/2]} \zeta(\alpha - 2k) \frac{(-1)^k}{(2k)!} (2\pi\xi)^{2k} + 2(2\pi)^{\alpha-1} \sin\left(\frac{\pi}{2}\alpha\right) \\ &\quad \times \left[\Gamma(1 - \alpha) \xi^{\alpha-1} + 2 \sum_{k=[\alpha/2]+1}^{\infty} \Gamma(1 - \alpha + 2k) \zeta(1 - \alpha + 2k) \frac{\xi^{2k}}{(2k)!} \right]. \end{aligned} \quad (2.26)$$

Beweis:

Für $\alpha \notin \mathbf{N}$ erhält man mit (2.19) aus (2.18):

$$\begin{aligned} \text{Li}_\alpha(e^w) &= \sum_{k=0}^{[\alpha]} \zeta(\alpha - k) \frac{w^k}{k!} \\ &\quad + 2(2\pi)^{\alpha-1} \sum_{k=[\alpha]+1}^{\infty} \sin\left(\frac{\pi}{2}(\alpha - k)\right) \Gamma(1 - \alpha + k) \zeta(1 - \alpha + k) \frac{(w/2\pi)^k}{k!} \\ &\quad + \Gamma(1 - \alpha) (-w)^{\alpha-1}, \quad \alpha \notin \mathbf{N}, \quad 0 < |w| < 2\pi. \end{aligned}$$

Zusammen mit (2.20) und $w := 2\pi i\xi$ folgt

$$\begin{aligned} G_\alpha(\xi) &= 2 \sum_{k=0}^{[\alpha]} \zeta(\alpha - k) \frac{1}{k!} \operatorname{Re} \left((2\pi i\xi)^k \right) \\ &\quad + 4 (2\pi)^{\alpha-1} \sum_{k=[\alpha]+1}^{\infty} \sin \left(\frac{\pi}{2} (\alpha - k) \right) \Gamma(1 - \alpha + k) \zeta(1 - \alpha + k) \frac{1}{k!} \operatorname{Re} \left((i\xi)^k \right) \\ &\quad + 2 \Gamma(1 - \alpha) \operatorname{Re} \left((-2\pi i\xi)^{\alpha-1} \right), \quad \xi \in (0, \tfrac{1}{2}]. \end{aligned}$$

Es ist

$$\operatorname{Re}((xi)^a) = x^a \operatorname{Re}(i^a) = x^a \operatorname{Re}(e^{i\frac{\pi}{2}a}) = x^a \cos\left(\frac{\pi}{2}a\right), \quad \text{für alle } x, a \in \mathbb{R},$$

und

$$\cos\left(k\frac{\pi}{2}\right) = \begin{cases} 0 & k \text{ ungerade} \\ (-1)^{k/2} & k \text{ gerade} \end{cases}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Also gilt weiter

$$\begin{aligned} G_\alpha(\xi) &= 2 \sum_{k=0}^{[\alpha/2]} \zeta(\alpha - 2k) \frac{(-1)^k}{(2k)!} (2\pi\xi)^{2k} \\ &\quad + 4 (2\pi)^{\alpha-1} \sum_{k=[\alpha/2]+1}^{\infty} \underbrace{\sin\left(\frac{\pi}{2}\alpha - k\pi\right)}_{=(-1)^k \sin\left(\frac{\pi}{2}\alpha\right)} \Gamma(1 - \alpha + 2k) \zeta(1 - \alpha + 2k) \frac{\xi^{2k}}{2k!} (-1)^k \\ &\quad + 2 \Gamma(1 - \alpha) (2\pi\xi)^{\alpha-1} \underbrace{\cos\left(\frac{\pi}{2}\alpha - \frac{\pi}{2}\right)}_{=\sin\left(\frac{\pi}{2}\alpha\right)} \\ &= 2 \sum_{k=0}^{[\alpha/2]} \zeta(\alpha - 2k) \frac{(-1)^k}{(2k)!} (2\pi\xi)^{2k} + 2 (2\pi)^{\alpha-1} \sin\left(\frac{\pi}{2}\alpha\right) \\ &\quad \times \left[\Gamma(1 - \alpha) \xi^{\alpha-1} + 2 \sum_{k=[\alpha/2]+1}^{\infty} \Gamma(1 - \alpha + 2k) \zeta(1 - \alpha + 2k) \frac{\xi^{2k}}{(2k)!} \right] \end{aligned}$$

für $\xi \in (0, \frac{1}{2}]$, $\alpha \notin \mathbb{N}$. Man beachte, dass für negative Werte von α die erste Summe wegfällt. \square

Bemerkung: Für gerades ganzzahliges α hat G_α als Funktion von α eine hebbare Singularität in $\alpha = 2m$, $m \in \mathbb{N}$. Der einfache Pol von $\Gamma(1-\alpha)$ und die Nullstelle von $\sin(\frac{\pi}{2}\alpha)$ heben sich gegenseitig auf, die zweite Summe fällt völlig weg. Man sieht, dass die Funktion G_α dann ein Polynom vom Grad α mit einziger ungerader Potenz $\alpha - 1$ ist (siehe auch 2.4.2).

Mit der Ableitung des Polylogarithmus ([47] (4.1)) kann man die Ableitungen von G_α und H_α bestimmen:

$$\frac{d}{dw} \operatorname{Li}_\alpha(e^w) = \operatorname{Li}_{\alpha-1}(e^w). \quad (2.27)$$

Man erhält für $\alpha \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\xi} H_\alpha(\xi) &= \frac{d}{d\xi} (i (\operatorname{Li}_\alpha(e^{-2\pi i\xi}) - \operatorname{Li}_\alpha(e^{2\pi i\xi}))) \\ &= i (-2\pi i \operatorname{Li}_{\alpha-1}(e^{-2\pi i\xi}) - 2\pi i \operatorname{Li}_{\alpha-1}(e^{2\pi i\xi})) \\ &= 2\pi (\operatorname{Li}_{\alpha-1}(e^{-2\pi i\xi}) + \operatorname{Li}_{\alpha-1}(e^{2\pi i\xi})) = 2\pi G_{\alpha-1}(\xi), \quad \xi \in (0, \frac{1}{2}), \end{aligned}$$

und (auf analoge Weise)

$$\frac{d}{d\xi} G_\alpha(\xi) = 2\pi i (\operatorname{Li}_{\alpha-1}(e^{-2\pi i\xi}) - \operatorname{Li}_{\alpha-1}(e^{2\pi i\xi})) = -2\pi H_{\alpha-1}(\xi), \quad \xi \in (0, \frac{1}{2}).$$

Also gilt

$$G'_\alpha(\xi) = -2\pi H_{\alpha-1}(\xi), \quad \xi \in (0, \frac{1}{2}), \quad (2.28)$$

$$H'_\alpha(\xi) = 2\pi G_{\alpha-1}(\xi), \quad \xi \in (0, \frac{1}{2}). \quad (2.29)$$

2.4.2 Zusammenhang mit BERNOULLI-Polynomen

Für ganzzahliges und gerades $\alpha = 2n$, $n \in \mathbb{N}$, ist G_α bis auf einen konstanten Faktor das BERNOULLI-Polynom B_{2n} ([12], 1.13 (14), [20] oder s.o.):

$$G_{2n}(\xi) = \frac{(2\pi)^{2n}}{(2n)!} (-1)^{n+1} B_{2n}(\xi), \quad \xi \in [0, \frac{1}{2}].$$

Wegen (2.28) und (2.29) ist die Funktion H_α für ganzzahliges und ungerades $\alpha = 2n + 1$, $n \in \mathbb{N}_0$, bis auf eine Konstante das BERNOULLI-Polynom B_{2n+1} ([12], 1.13 (13),(15)):

$$H_{2n+1}(\xi) = \frac{(2\pi)^{2n+1}}{(2n+1)!} (-1)^{n+1} B_{2n+1}(\xi), \quad \xi \in [0, \frac{1}{2}], \quad n \in \mathbb{N}_0.$$

Aufgrund dieser Relationen und (2.28), (2.29) ergibt sich für ganzzahliges α und $\xi \in (0, \frac{1}{2})$ die Tabelle 2.1. Die Funktion πH_2 ist auch unter dem Namen „CLAUSENS Integral“ bekannt [21].

α	$G_\alpha(\xi)$	$H_\alpha(\xi)$
-1	$-\frac{1}{2} \csc^2(\pi\xi)$	0
0	-1	$\cot(\pi\xi)$
1	$-2 \log(2 \sin(\pi\xi))$	$2\pi (\frac{1}{2} - \xi)$
2	$2\pi^2 (\xi^2 - \xi + \frac{1}{6})$	$-\frac{1}{\pi} \int_0^\xi \log(2 \sin(\pi t)) dt$
3		$4\pi^3 (\frac{1}{3}\xi^3 - \frac{1}{2}\xi^2 + \frac{1}{6}\xi)$
4	$-8\pi^4 (\frac{1}{12}\xi^4 - \frac{1}{6}\xi^3 + \frac{1}{12}\xi^2 - \frac{1}{360})$	

Tabelle 2.1: Die Funktionen G_α und H_α für gewisse ganzzahlige α

Einige weitere wichtige Eigenschaften sind in [9] bewiesen worden:

- G_α ist für $\alpha > 0$ streng monoton fallend auf $(0, \frac{1}{2})$.
- G_α besitzt für $\alpha > 0$ genau eine Nullstelle in $(0, \frac{1}{4})$, die wir im Folgenden stets mit η_α bezeichnen werden.
- H_α ist für $\alpha > 0$ positiv auf $(0, \frac{1}{2})$, für $\alpha > 1$ ist $H_\alpha(0) = 0$ und es gilt $H_\alpha(\frac{1}{2}) = 0$ für $\alpha > 0$.
- $\lim_{\alpha \rightarrow \infty} G_\alpha(\xi) = 2 \cos(2\pi\xi)$ und $\lim_{\alpha \rightarrow \infty} H_\alpha(\xi) = 2 \sin(2\pi\xi)$.

Desweiteren wurde dort gezeigt, dass die Nullstelle η_α für $\alpha \rightarrow \infty$ streng monoton wachsend gegen $\frac{1}{4}$ konvergiert.

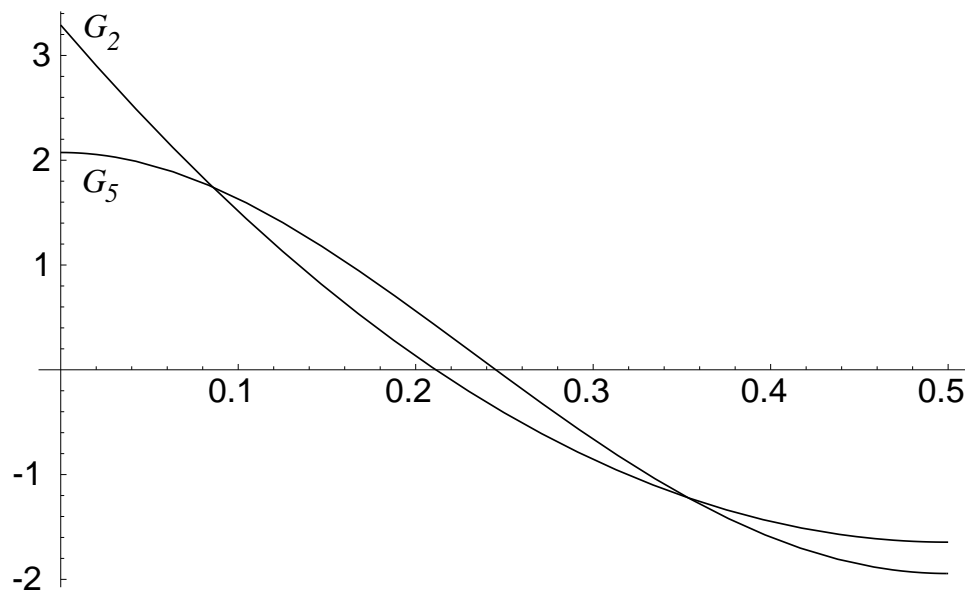
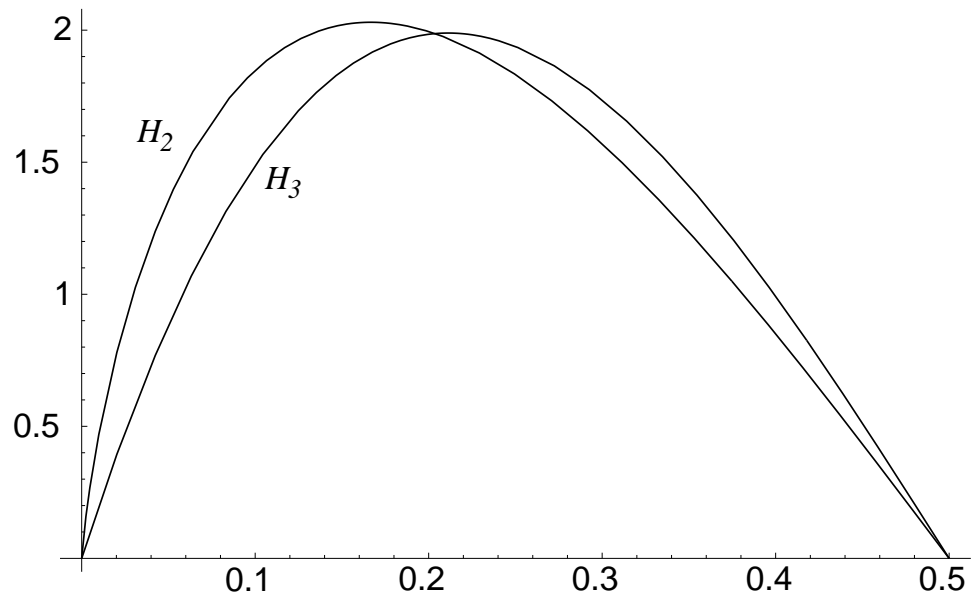


Abbildung 2.1: G_2 und G_5

Für einige Werte von ξ sind die Funktionswerte $G_\alpha(\xi)$ für $\alpha > 1$ in der Tabelle 2.2 angegeben. Die Berechnung findet sich im Anhang C. Für die Funktion H_α gilt $H_\alpha(0) = H_\alpha(\frac{1}{2}) = 0$ für $\alpha > 1$. Für ξ -Werte innerhalb des Intervalls ist die Berechnung von Funktionswerten $H_\alpha(\xi)$ nicht einfach, man kann aber die folgende Abschätzung für $H_\alpha(\frac{1}{4})$ angeben, deren Beweis ebenfalls in Anhang C angegeben ist:

$$H_\alpha\left(\frac{1}{4}\right) > 2(1 - 2^{1-\alpha})(1 - 2^{-\alpha})\zeta(\alpha), \quad \alpha > 1. \quad (2.30)$$

Abbildung 2.2: H_2 und H_3

ξ	$G_\alpha(\xi)$
0	$2\zeta(\alpha)$
$\frac{1}{6}$	$(1 - 2^{1-\alpha})(1 - 3^{1-\alpha})\zeta(\alpha)$
$\frac{1}{4}$	$-2^{1-\alpha}(1 - 2^{1-\alpha})\zeta(\alpha)$
$\frac{1}{2}$	$-2(1 - 2^{1-\alpha})\zeta(\alpha)$

Tabelle 2.2: Funktionswerte von G_α für $\alpha > 1$

2.4.3 Einschließung der Nullstelle von G_α

LEHMER [20] hat eine Abschätzung der Lage der kleinsten positiven Nullstelle der BERNOULLI-Polynome bewiesen, die sich auf die Funktionen G_α für $\alpha \geq 5$ verallgemeinern lässt:

Satz 2.4.5.

Für $\alpha \geq 5$ gilt

$$0 < \frac{1}{4} - \eta_\alpha < \frac{1}{2^{\alpha+1}\pi}, \quad (2.31)$$

d.h. die Nullstelle von G_α weicht um weniger als $2^{-\alpha-1}\pi^{-1}$ von $\frac{1}{4}$ ab. Desweiteren gilt die asymptotische Formel

$$\eta_\alpha = \frac{1}{4} - \frac{1}{2\pi} (2^{-\alpha} - 4^{-\alpha} + 4 \cdot 6^{-\alpha}) + \mathcal{O}(8^{-\alpha}), \quad \alpha \gg 1. \quad (2.32)$$

Beweis:

Es sei im Folgenden stets $\alpha > 1$. Wegen $G_1\left(\frac{1}{6}\right) = -2 \log(2 \sin(\frac{\pi}{6})) = -2 \log(1) = 0$ und $G_\alpha\left(\frac{1}{4}\right) < 0$ (Anhang C) gilt dann

$$\frac{1}{6} < \eta_\alpha < \frac{1}{4}.$$

Setzt man $\theta_\alpha := 2\pi\left(\frac{1}{4} - \eta_\alpha\right)$, so gilt $0 < \theta_\alpha < \frac{\pi}{6}$ und $\eta_\alpha = \frac{1}{4} - \frac{\theta_\alpha}{2\pi}$. Durch Einsetzen in die Reihendarstellung (2.22) von G_α erhält man wegen $\cos\left(\frac{1}{2}k\pi - k\theta_\alpha\right) = \cos\left(\frac{1}{2}k\pi\right)\cos(k\theta_\alpha) + \sin\left(\frac{1}{2}k\pi\right)\sin(k\theta_\alpha)$

$$\begin{aligned} 0 &= 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^\alpha} \cos\left(2\pi k \left(\frac{1}{4} - \frac{\theta_\alpha}{2\pi}\right)\right) \\ &= 2 \left(\sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{1}{(2\ell+1)^\alpha} (-1)^\ell \sin((2\ell+1)\theta_\alpha) - \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{1}{(2\ell+2)^\alpha} (-1)^\ell \cos((2\ell+2)\theta_\alpha) \right) \end{aligned}$$

θ_α muss also die folgende Gleichung erfüllen:

$$\sin(\theta_\alpha) = 2^{-\alpha} \cos(2\theta_\alpha) + 3^{-\alpha} \sin(3\theta_\alpha) - 4^{-\alpha} \cos(4\theta_\alpha) - 5^{-\alpha} \sin(5\theta_\alpha) + \dots \quad (2.33)$$

Für $n \geq 1$ gilt

$$\begin{aligned} \sum_{k=n}^{\infty} k^{-\alpha} &= n^{-\alpha} + \sum_{k=n+1}^{\infty} k^{-\alpha} \leq n^{-\alpha} + \int_n^{\infty} x^{-\alpha} dx \\ &= n^{-\alpha} - \frac{n^{-\alpha+1}}{1-\alpha} = n^{-\alpha} \frac{\alpha+n-1}{\alpha-1}, \quad \forall \alpha > 1. \end{aligned} \quad (2.34)$$

Somit lässt sich $\sin(\theta_\alpha)$ mit (2.33) grob abschätzen durch

$$\sin(\theta_\alpha) < \sum_{k=2}^{\infty} k^{-\alpha} \stackrel{(2.34)}{\leq} 2^{-\alpha} \frac{\alpha+1}{\alpha-1}. \quad (2.35)$$

Verwendet man die Abschätzungen

$$\begin{aligned} \cos(2\theta_\alpha) &< 1, \\ \sin(3\theta_\alpha) &= 3 \sin(\theta_\alpha) - 4 \sin^3(\theta_\alpha) < 3 \sin(\theta_\alpha), \\ \cos(4\theta_\alpha) &= 1 - 8 \sin^2(\theta_\alpha) + 8 \sin^4(\theta_\alpha) > 1 - 8 \sin^2(\theta_\alpha) \quad \text{und} \\ \sin(5\theta_\alpha) &> 0 \end{aligned}$$

in (2.33), so erhält man mit (2.34)

$$\begin{aligned} \sin(\theta_\alpha) &< 2^{-\alpha} + 3^{-\alpha+1} \sin(\theta_\alpha) - 4^{-\alpha} + 2^{-2\alpha+3} \sin^2(\theta_\alpha) + 6^{-\alpha} \left(\frac{\alpha+5}{\alpha-1} \right) \\ &\stackrel{(2.35)}{<} 2^{-\alpha} + 3^{-\alpha+1} 2^{-\alpha} \left(\frac{\alpha+1}{\alpha-1} \right) - 4^{-\alpha} + 2^{-4\alpha+3} \left(\frac{\alpha+1}{\alpha-1} \right)^2 + 6^{-\alpha} \left(\frac{\alpha+5}{\alpha-1} \right). \end{aligned} \quad (2.36)$$

Aus der Taylorentwicklung des Sinus $\sin(\theta_\alpha) = \theta_\alpha - \frac{\theta_\alpha^3}{3!} + \dots$ folgt die Abschätzung

$$\theta_\alpha < \sin(\theta_\alpha) + \frac{\theta_\alpha^3}{6}, \quad (2.37)$$

und wegen $0 < \theta_\alpha < \frac{\pi}{6}$ gilt $\theta_\alpha < \frac{\pi}{3} \sin(\theta_\alpha)$. Zusammen ergibt sich

$$\theta_\alpha < \sin(\theta_\alpha) + \frac{1}{6} \left(\frac{\pi}{3} \sin(\theta_\alpha) \right)^3 \stackrel{(2.35)}{<} \sin(\theta_\alpha) + \frac{1}{6} \left(\frac{\pi}{3} \frac{\alpha+1}{\alpha-1} \right)^3 2^{-3\alpha}.$$

Einsetzen der Ungleichung (2.36) liefert schließlich

$$\begin{aligned} \theta_\alpha - 2^{-\alpha} &< 3^{-\alpha+1} 2^{-\alpha} \left(\frac{\alpha+1}{\alpha-1} \right) - 4^{-\alpha} + 2^{-4\alpha+3} \left(\frac{\alpha+1}{\alpha-1} \right)^2 + 6^{-\alpha} \left(\frac{\alpha+5}{\alpha-1} \right) \\ &\quad + \frac{\pi^3}{162} \left(\frac{\alpha+1}{\alpha-1} \right)^3 2^{-3\alpha}. \end{aligned} \quad (2.38)$$

Für $\alpha > 1$ und $c > 0$ gilt $\frac{d}{d\alpha} \frac{\alpha+c}{\alpha-1} = -\frac{c+1}{(\alpha-1)^2} < 0$, daher ist $\frac{\alpha+c}{\alpha-1} \leq \frac{5+c}{4}$ für $\alpha \geq 5$. Man erhält also weiter mit (2.38) und $\pi < \frac{10}{3}$

$$\begin{aligned} \theta_\alpha - 2^{-\alpha} &< \frac{9}{2} 6^{-\alpha} - 4^{-\alpha} + 18 \underbrace{\left(\frac{8}{3} \right)^{-\alpha}}_{< \frac{243}{32768} < \frac{1}{128}} 6^{-\alpha} + \frac{5}{2} 6^{-\alpha} + \frac{125}{162} \underbrace{\left(\frac{4}{3} \right)^{-\alpha}}_{< \frac{7}{9} < \frac{243}{1024} < \frac{1}{4}} 6^{-\alpha} \\ &= \frac{4225}{576} \underbrace{6^{-\alpha}}_{\left(\frac{3}{2}\right)^{-\alpha} 4^{-\alpha} < \frac{32}{243} 4^{-\alpha}} - 4^{-\alpha} < \left(\frac{4225}{4374} - 1 \right) 4^{-\alpha} < 0, \quad \forall \alpha \geq 5, \end{aligned}$$

womit die Ungleichung (2.31) durch Einsetzen von θ_α bewiesen ist. Aus (2.33) und (2.36) erhält man

$$\sin(\theta_\alpha) = 2^{-\alpha} + \mathcal{O}(4^{-\alpha}), \quad \alpha \rightarrow \infty.$$

Einsetzen in (2.33) bzw. (2.37) liefert

$$\sin(\theta_\alpha) = 2^{-\alpha} + 2^{-\alpha} 3^{-\alpha+1} - 4^{-\alpha} + 6^{-\alpha} + \mathcal{O}(8^{-\alpha}) \quad \text{bzw.} \quad \theta_\alpha = \sin(\theta_\alpha) + \mathcal{O}(8^{-\alpha}).$$

Aus diesen beiden Gleichungen ergibt sich sofort $\theta_\alpha = 2^{-\alpha} - 4^{-\alpha} + 4 \cdot 6^{-\alpha} + \mathcal{O}(8^{-\alpha})$, woraus mit der Definition von θ_α unmittelbar (2.32) folgt. \square

Bemerkung: Eine numerische Betrachtung mit MATHEMATICA zeigt, dass die Formel (2.31) etwa für $\alpha > 1.42$ gültig ist, unterhalb dieser Grenze nicht.

2.4.4 Die Singularität von G_α für $\alpha \in (0, 1]$ im Ursprung

Es ist $G_\alpha \in C^\infty(0, \frac{1}{2})$. Die Reihe (1.25) ist für $\xi \in (0, \frac{1}{2})$ und $\alpha > 0$ gleichmäßig konvergent und damit gliedweise differenzierbar nach dem Kriterium von DIRICHLET (siehe [17], S.358, §48, Satz 2 und 199.4). Ist $\alpha > 1$, so ist G_α stetig auf $[0, \frac{1}{2}]$. Für $\alpha \in (0, 1]$ hat die Funktion G_α eine Singularität im Ursprung, und zwar eine logarithmische Singularität für $\alpha = 1$ und eine Singularität der Form $\xi^{\alpha-1}$ für $\alpha \in (0, 1)$.

Satz 2.4.6.

Es gilt

$$G_1(\xi) = -2 \log(2 \sin(\pi\xi)), \quad \xi \in (0, 1).$$

Insbesondere hat G_1 eine logarithmische Singularität im Nullpunkt. Die Funktion

$$\overline{G}_1(\xi) := \begin{cases} -\frac{1}{\log(\xi)} G_1(\xi), & \xi \in (0, \frac{1}{2}], \\ 2, & \xi = 0 \end{cases}$$

ist stetig auf dem Intervall $[0, \frac{1}{2}]$.

Beweis:

Wegen $\Gamma(1) = 1$ ist

$$G_1(\xi) = 2 \sum_{\ell=1}^{\infty} \frac{1}{\ell} \cos(2\pi\ell\xi) \stackrel{(2.24)}{=} 2 \int_0^{\infty} \frac{e^{-t} \cos(2\pi\xi) - e^{-2t}}{1 - 2e^{-t} \cos(2\pi\xi) + e^{-2t}} dt.$$

Nun gilt für $\xi \in (0, \frac{1}{2}]$ und $t \geq 0$ mit Bemerkung 2.4.3(b) (der Betrag im Logarithmus kann weggelassen werden)

$$\frac{d}{dt} \log(1 - 2e^{-t} \cos(2\pi\xi) + e^{-2t}) = 2 \frac{e^{-t} \cos(2\pi\xi) - e^{-2t}}{1 - 2e^{-t} \cos(2\pi\xi) + e^{-2t}},$$

und somit

$$\begin{aligned} G_1(\xi) &= \log(1 - 2e^{-t} \cos(2\pi\xi) + e^{-2t}) \Big|_0^{\infty} = \log(1 - 0) - \log(1 - 2 \cos(2\pi\xi) + 1) \\ &= -\log(2(1 - \cos(2\pi\xi))) = -\log(2(1 - \cos(\pi\xi + \pi\xi))) \\ &= -\log(2(1 - (\cos^2(\pi\xi) - \sin^2(\pi\xi)))) = -\log(2(1 - (1 - 2 \sin^2(\pi\xi)))) \\ &= -\log(4 \sin^2(\pi\xi)) = -2 \log(2(\sin(\pi\xi))), \quad \xi \in (0, \frac{1}{2}]. \end{aligned}$$

Desweiteren gilt mit der Regel von DE L'HOSPITAL

$$\begin{aligned} \lim_{\xi \rightarrow 0} \overline{G}_1(\xi) &= \lim_{\xi \rightarrow 0} \frac{2 \log(2 \sin(\pi\xi))}{\log(\xi)} = 2 \lim_{\xi \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2 \sin(\pi\xi)} 2 \cos(\pi\xi) \pi}{\xi^{-1}} = 2\pi \lim_{\xi \rightarrow 0} \frac{\xi \cos(\pi\xi)}{\sin(\pi\xi)} \\ &= 2\pi \lim_{\xi \rightarrow 0} \frac{\cos(\pi\xi) - \pi\xi \sin(\pi\xi)}{\pi \cos(\pi\xi)} = 2. \end{aligned}$$

□

Nun zum Fall $\alpha \in (0, 1)$:

Satz 2.4.7.

Für $\alpha \in (0, 1)$ ist die Funktion

$$\overline{G}_\alpha(\xi) := \begin{cases} \xi^{1-\alpha} G_\alpha(\xi), & \xi \in (0, \frac{1}{2}], \\ \frac{2^{\alpha-1} \pi^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \sec\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right), & \xi = 0 \end{cases}$$

stetig auf dem Intervall $[0, \frac{1}{2}]$.

Beweis:

Es wird der Satz mittels der Darstellung (2.26) bewiesen. Er lässt sich auch mit Hilfe der Integraldarstellung und des Residuensatzes beweisen.

Für $\alpha, \xi \in (0, 1)$ ist

$$\begin{aligned} \xi^{1-\alpha} G_\alpha(\xi) &\stackrel{(2.26)}{=} 2\zeta(\alpha)\xi^{1-\alpha} + 2(2\pi)^{\alpha-1} \sin\left(\frac{\pi}{2}\alpha\right) \\ &\quad \times \left[\Gamma(1-\alpha) + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \Gamma(1-\alpha+2k) \zeta(1-\alpha+2k) \frac{\xi^{2k+1-\alpha}}{(2k)!} \right], \end{aligned}$$

und wegen $\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin(\pi z)\Gamma(z)}$ ([12], 1.2(6)) und $\sin(2z) = 2\sin(z)\cos(z)$ gilt

$$\begin{aligned} \overline{G}_\alpha(0) &= 2(2\pi)^{\alpha-1} \sin\left(\frac{\pi}{2}\alpha\right) \Gamma(1-\alpha) = 2^\alpha \pi^{\alpha-1} \sin\left(\frac{\pi}{2}\alpha\right) \frac{\pi}{\sin(\pi\alpha)\Gamma(\alpha)} \\ &= \frac{2^\alpha \pi^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}\alpha\right)}{2\sin\left(\frac{\pi}{2}\alpha\right)\cos\left(\frac{\pi}{2}\alpha\right)} = \frac{2^{\alpha-1} \pi^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \frac{1}{\cos\left(\frac{\pi}{2}\alpha\right)} = \frac{2^{\alpha-1} \pi^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \sec\left(\frac{\pi}{2}\alpha\right). \end{aligned}$$

□

2.5 Hauptsatz

Der Hauptgrund für die Existenz von positiven Quadraturformeln, die exakt für das System

$$\{1, G_{r-\beta}, G_{r-\beta+1}, \dots, G_{r-\beta+b-1}\}$$

bzw.

$$\left\{1, G_2, G_4, \dots, G_{2\lceil \frac{r-\beta-1}{2} \rceil}, G_{r-\beta}, G_{r-\beta+1}, \dots, G_{r-\beta+b-1}\right\}$$

(also für das Qualokationsverfahren geeignet) sind, ist die Tatsache, dass diese (bis auf die Vorzeichen) TSCHEBYSCHEFF-Systeme sind:

Hauptsatz 2.5.1.

Das Funktionensystem $\{1, -G_{\alpha_1}, \dots, -G_{\alpha_n}\}$, $n \in \mathbb{N}$, mit $1 < \alpha_1 < \dots < \alpha_n$ bildet ein TSCHEBYSCHEFF-System auf dem Intervall $[0, \frac{1}{2}]$.

Bemerkung 2.5.2.

Die Funktionen G_α müssen mit negativem Vorzeichen versehen werden, damit die Determinante in (2.1) positiv ist. Andernfalls ist die Determinante jedoch auch stets ungleich Null (vgl. Bemerkung 2.2.3(b)). Da $n \in \mathbb{N}$ beliebig ist, ist das Funktionensystem sogar ein vollständiges TSCHEBYSCHJEFF-System auf $[0, \frac{1}{2}]$, und trivialerweise auch auf jedem abgeschlossenen Teilintervall von $[0, \frac{1}{2}]$.

Die Fälle $\alpha_1 = 1$ und $\alpha_1 \in (0, 1)$ werden später noch gesondert betrachtet.

2.5.1 Hilfssätze für den Beweis des Hauptsatzes**Lemma 2.5.3.**

Das Funktionensystem $\Sigma := \{1, t^{\beta_1}, t^{\beta_2}, \dots, t^{\beta_n}\}$ mit $0 < \beta_1 < \dots < \beta_n$, $n \in \mathbb{N}$, bildet ein TSCHEBYSCHJEFF-System auf jedem abgeschlossenen Teilintervall von $(0, \infty)$.

Beweis:

Nach [16], I §3 bildet $\{t^{\delta_0}, t^{\delta_1}, \dots, t^{\delta_n}\}$ für jede aufsteigende Folge $-\infty < \delta_0 < \dots < \delta_n < \infty$ ein vollständiges TSCHEBYSCHJEFF-System auf jedem abgeschlossenen Teilintervall von $(0, \infty)$. Für beliebige Punkte t_0, t_1, \dots, t_n mit $0 \leq t_0 < t_1 < \dots < t_n$ ist

$$\mathfrak{Det} \begin{pmatrix} 1 & t^{\beta_1} & \dots & t^{\beta_n} \\ t_0 & t_1 & \dots & t_n \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ t_0^{\beta_1} & t_1^{\beta_1} & \dots & t_n^{\beta_1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ t_0^{\beta_n} & t_1^{\beta_n} & \dots & t_n^{\beta_n} \end{vmatrix},$$

was für $t_0 > 0$ größer als Null ist, da $\{1, t^{\beta_1}, \dots, t^{\beta_n}\}$ ein $(n+1)$ -dimensionales TSCHEBYSCHJEFF-System auf dem Intervall $[t_0, t_n] \subset (0, \infty)$ ist (siehe oben mit $\delta_0 := 0$, $\delta_i := \beta_i$, $i = 1(1)n$). Ist hingegen $t_0 = 0$, so gilt

$$\mathfrak{Det} \begin{pmatrix} 1 & t^{\beta_1} & \dots & t^{\beta_n} \\ 0 & t_1 & \dots & t_n \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & t_1^{\beta_1} & \dots & t_n^{\beta_1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & t_1^{\beta_n} & \dots & t_n^{\beta_n} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} t_1^{\beta_1} & t_2^{\beta_1} & \dots & t_n^{\beta_1} \\ t_1^{\beta_2} & t_2^{\beta_2} & \dots & t_n^{\beta_2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ t_1^{\beta_n} & t_2^{\beta_n} & \dots & t_n^{\beta_n} \end{vmatrix} > 0,$$

da $\{t^{\beta_1}, \dots, t^{\beta_n}\}$ ein n -dimensionales TSCHEBYSCHJEFF-System auf dem Intervall $[t_1, t_n] \subset (0, \infty)$ ist (s.o). \square

Hieraus folgt das für den Beweis des Hauptsatzes notwendige

Korollar 2.5.4.

Es sei $0 < \beta_1 < \dots < \beta_n$, $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt: Für beliebige Punkte t_0, \dots, t_n mit $0 < t_0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_n$ ist

$$\mathfrak{Det} \begin{pmatrix} 1 & t^{\beta_1} & \dots & t^{\beta_n} \\ t_0 & t_1 & \dots & t_n \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ t_0^{\beta_1} & t_1^{\beta_1} & \dots & t_n^{\beta_1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ t_0^{\beta_n} & t_1^{\beta_n} & \dots & t_n^{\beta_n} \end{vmatrix} \geq 0.$$

Dies folgt unmittelbar aus der Stetigkeit der Determinanten und der Tatsache, dass die differenzierbaren Funktionen $1, t^{\beta_1}, \dots, t^{\beta_n}$ ein TSCHEBYSCHEFF-System bilden (Bemerkung 2.2.3(d)). Aus Stetigkeitsgründen folgt außerdem, dass diese Determinante für $t_0 \rightarrow 0$ stets nichtnegativ ist, allerdings kann die Determinante für $t_0 = 0$ singularär sein (wenn $\beta_1 < 1$ ist).

Der folgende Hilfssatz stammt von PÓLYA und SZEGÖ [24], ein Beweis findet sich z.B. in [23], S. 81:

Lemma 2.5.5.

Es seien f_1, \dots, f_n und h_1, \dots, h_n , $n \in \mathbb{N}$, Funktionen aus $C[0, \infty)$, und es sei

$$\Delta_n := \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid 0 \leq x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n < \infty\}.$$

Dann gilt

$$\begin{aligned} \det \left(\int_0^\infty h_j(t) f_i(t) dt \right)_{i,j=1(1)n} &= \begin{vmatrix} \int_0^\infty h_1(t) f_1(t) dt & \dots & \int_0^\infty h_n(t) f_1(t) dt \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \int_0^\infty h_1(t) f_n(t) dt & \dots & \int_0^\infty h_n(t) f_n(t) dt \end{vmatrix} \\ &= \int_{\Delta_n} \mathfrak{Det} \begin{pmatrix} h_1 & \dots & h_n \\ t_1 & \dots & t_n \end{pmatrix} \mathfrak{Det} \begin{pmatrix} f_1 & \dots & f_n \\ t_1 & \dots & t_n \end{pmatrix} dt_1 \dots dt_n \\ &= \int_0^\infty \int_0^{t_n} \dots \int_0^{t_2} \mathfrak{Det} \begin{pmatrix} h_1 & \dots & h_n \\ t_1 & \dots & t_n \end{pmatrix} \mathfrak{Det} \begin{pmatrix} f_1 & \dots & f_n \\ t_1 & \dots & t_n \end{pmatrix} dt_1 \dots dt_n. \end{aligned}$$

Es wird noch eine weitere Definition benötigt:

Definition 2.5.6.

Es sei $\alpha > 1$.

(a) Für $\eta, \vartheta \in [0, \frac{1}{2}]$, $\eta \neq \vartheta$, sei

$$g_\alpha\{\eta, \vartheta\} := \Gamma(\alpha) \frac{G_\alpha(\eta) - G_\alpha(\vartheta)}{2(\cos(2\pi\eta) - \cos(2\pi\vartheta))}. \quad (2.39)$$

(b) Für $k \geq 2$ und $x_0, \dots, x_k \in [0, \frac{1}{2}]$ mit $0 \leq x_0 < \dots < x_k \leq \frac{1}{2}$ sei

$$g_\alpha\{x_0, \dots, x_k\} := \frac{g_\alpha\{x_1, \dots, x_k\} - g_\alpha\{x_0, \dots, x_{k-1}\}}{2(\cos(2\pi x_k) - \cos(2\pi x_0))}. \quad (2.40)$$

$g_\alpha\{x_0, \dots, x_n\}$ lässt sich mit Hilfe der Integralformel für $G_\alpha(\xi)$ (2.24) explizit darstellen:

Satz 2.5.7. *Es sei $\alpha > 1$. Für $n \in \mathbb{N}$ ist*

$$g_\alpha\{x_0, \dots, x_n\} = \int_0^\infty t^{\alpha-1} \frac{e^{-nt}(1-e^{-2t})}{\prod_{i=0}^n N_t(x_i)} dt \quad (2.41)$$

$$= 2^{-n} \int_0^\infty t^{\alpha-1} \frac{\sinh(t)}{\prod_{i=0}^n (\cosh(t) - \cos(2\pi x_i))} dt. \quad (2.42)$$

Beweis:

Für $n = 1$ ist

$$\begin{aligned} g_\alpha\{x_0, x_1\} &\stackrel{(2.24)}{=} \stackrel{(2.39)}{=} (\cos(2\pi x_0) - \cos(2\pi x_1))^{-1} \\ &\quad \times \int_0^\infty t^{\alpha-1} \left(\frac{e^{-t} \cos(2\pi x_0) - e^{-2t}}{N_t(x_0)} - \frac{e^{-t} \cos(2\pi x_1) - e^{-2t}}{N_t(x_1)} \right) dt \\ &\stackrel{(2.25)}{=} (\cos(2\pi x_0) - \cos(2\pi x_1))^{-1} \\ &\quad \times \int_0^\infty t^{\alpha-1} \left((1 - 2e^{-t} \cos(2\pi x_1) + e^{-2t})(e^{-t} \cos(2\pi x_0) - e^{-2t}) \right. \\ &\quad \left. - (1 - 2e^{-t} \cos(2\pi x_0) + e^{-2t})(e^{-t} \cos(2\pi x_1) - e^{-2t}) \right) / (N_t(x_0) N_t(x_1)) dt \\ &= (\cos(2\pi x_0) - \cos(2\pi x_1))^{-1} \\ &\quad \times \int_0^\infty t^{\alpha-1} \frac{\cos(2\pi x_0)(e^{-t} - e^{-3t}) - \cos(2\pi x_1)(e^{-t} - e^{-3t})}{N_t(x_0) N_t(x_1)} dt \\ &= \int_0^\infty t^{\alpha-1} \frac{e^{-t}(1-e^{-2t})}{N_t(x_0) N_t(x_1)} dt. \end{aligned}$$

Für $n \geq 2$ folgt per Induktion:

$$\begin{aligned} g_\alpha\{x_0, \dots, x_n\} &= \frac{1}{2} (\cos(2\pi x_n) - \cos(2\pi x_0))^{-1} (g_\alpha\{x_1, \dots, x_n\} - g_\alpha\{x_0, \dots, x_{n-1}\}) \\ &\stackrel{\text{Ind.}}{=} \frac{1}{2} (\cos(2\pi x_n) - \cos(2\pi x_0))^{-1} \int_0^\infty t^{\alpha-1} \frac{e^{-(n-1)t}(1-e^{-2t})}{\prod_{i=1}^{n-1} N_t(x_i)} \cdot \frac{N_t(x_0) - N_t(x_n)}{N_t(x_0)N_t(x_n)} dt \\ &= \frac{1}{2} (\cos(2\pi x_n) - \cos(2\pi x_0))^{-1} \\ &\quad \times \int_0^\infty t^{\alpha-1} \frac{e^{-(n-1)t}(1-e^{-2t})}{\prod_{i=0}^n N_t(x_i)} (1 - 2e^{-t} \cos(2\pi x_0) + e^{-2t} - 1 + 2e^{-t} \cos(2\pi x_n) - e^{-2t}) dt \end{aligned}$$

$$= \int_0^{\infty} t^{\alpha-1} \frac{e^{-nt}(1-e^{-2t})}{\prod_{i=0}^n N_t(x_i)} dt.$$

Zur Formel (2.42): Wegen

$$\frac{e^{-t}}{N_t(\xi)} = \frac{1}{e^t - 2\cos(2\pi\xi) + e^{-t}} = \frac{1}{2(\cosh(t) - \cos(2\pi\xi))}, \quad \xi \in (0, \frac{1}{2}], \quad t \geq 0, \quad (2.43)$$

und

$$\sinh(t) = \frac{1}{2}(e^t - e^{-t}), \quad t \in \mathbb{R},$$

gilt für alle $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} g_{\alpha}\{x_0, \dots, x_n\} &= \int_0^{\infty} t^{\alpha-1} \frac{e^{-nt}(1-e^{-2t})}{\prod_{i=0}^n N_t(x_i)} dt \\ &= \int_0^{\infty} t^{\alpha-1} (e^t - e^{-t}) \prod_{i=0}^n \frac{e^{-t}}{N_t(x_i)} dt \\ &= 2^{-n} \int_0^{\infty} t^{\alpha-1} \frac{\sinh(t)}{\prod_{i=0}^n (\cosh(t) - \cos(2\pi x_i))} dt. \end{aligned}$$

Dies gilt auch für $x_0 = 0$, da der Integrand trotz der Singularität integrierbar bleibt (vgl. Bemerkung 2.4.3). \square

2.5.2 Beweis des Hauptsatzes

Beweis:

Es ist zu zeigen, dass die Determinante (2.1) für das Funktionensystem $\{1, -G_{\alpha_1}, \dots, -G_{\alpha_n}\}$ größer als Null ist. Für $0 \leq \xi_0 < \xi_1 < \dots < \xi_n \leq \frac{1}{2}$ gilt:

$$\begin{aligned} \mathfrak{Det} \begin{pmatrix} 1 & -G_{\alpha_1} & \dots & -G_{\alpha_n} \\ \xi_0 & \xi_1 & \dots & \xi_n \end{pmatrix} &= \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ -G_{\alpha_1}(\xi_0) & -G_{\alpha_1}(\xi_1) & \dots & -G_{\alpha_1}(\xi_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -G_{\alpha_n}(\xi_0) & -G_{\alpha_n}(\xi_1) & \dots & -G_{\alpha_n}(\xi_n) \end{vmatrix} \\ &= (-1)^n \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ G_{\alpha_1}(\xi_0) & G_{\alpha_1}(\xi_1) - G_{\alpha_1}(\xi_0) & G_{\alpha_1}(\xi_2) - G_{\alpha_1}(\xi_1) & \dots & G_{\alpha_1}(\xi_n) - G_{\alpha_1}(\xi_{n-1}) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ G_{\alpha_n}(\xi_0) & G_{\alpha_n}(\xi_1) - G_{\alpha_n}(\xi_0) & G_{\alpha_n}(\xi_2) - G_{\alpha_n}(\xi_1) & \dots & G_{\alpha_n}(\xi_n) - G_{\alpha_n}(\xi_{n-1}) \end{vmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \stackrel{(2.39)}{=} (-1)^n \left| \begin{array}{ccc} \frac{2}{\Gamma(\alpha_1)}(\cos(2\pi\xi_1) - \cos(2\pi\xi_0)) & \cdots & \frac{2}{\Gamma(\alpha_1)}(\cos(2\pi\xi_n) - \cos(2\pi\xi_{n-1})) \\ \times g_{\alpha_1}\{\xi_0, \xi_1\} & & \times g_{\alpha_1}\{\xi_{n-1}, \xi_n\} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{2}{\Gamma(\alpha_n)}(\cos(2\pi\xi_1) - \cos(2\pi\xi_0)) & \cdots & \frac{2}{\Gamma(\alpha_n)}(\cos(2\pi\xi_n) - \cos(2\pi\xi_{n-1})) \\ \times g_{\alpha_n}\{\xi_0, \xi_1\} & & \times g_{\alpha_n}\{\xi_{n-1}, \xi_n\} \end{array} \right| \\
& = (-1)^n \frac{2^n}{\prod_{i=1}^n \Gamma(\alpha_i)} \prod_{i=1}^n (\cos(2\pi\xi_i) - \cos(2\pi\xi_{i-1})) \\
& \quad \times \left| \begin{array}{cccc} g_{\alpha_1}\{\xi_0, \xi_1\} & g_{\alpha_1}\{\xi_1, \xi_2\} & \cdots & g_{\alpha_1}\{\xi_{n-1}, \xi_n\} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ g_{\alpha_n}\{\xi_0, \xi_1\} & g_{\alpha_n}\{\xi_1, \xi_2\} & \cdots & g_{\alpha_n}\{\xi_{n-1}, \xi_n\} \end{array} \right| \\
& = (-1)^n \frac{2^n}{\prod_{i=1}^n \Gamma(\alpha_i)} \prod_{i=1}^n (\cos(2\pi\xi_i) - \cos(2\pi\xi_{i-1})) \\
& \quad \times \left| \begin{array}{cccc} g_{\alpha_1}\{\xi_0, \xi_1\} & g_{\alpha_1}\{\xi_1, \xi_2\} - g_{\alpha_1}\{\xi_0, \xi_1\} & \cdots & g_{\alpha_1}\{\xi_{n-1}, \xi_n\} - g_{\alpha_1}\{\xi_{n-2}, \xi_{n-1}\} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ g_{\alpha_n}\{\xi_0, \xi_1\} & g_{\alpha_n}\{\xi_1, \xi_2\} - g_{\alpha_n}\{\xi_0, \xi_1\} & \cdots & g_{\alpha_n}\{\xi_{n-1}, \xi_n\} - g_{\alpha_n}\{\xi_{n-2}, \xi_{n-1}\} \end{array} \right| \\
& \stackrel{(2.40)}{=} (-1)^n \frac{2^{n+(n-1)}}{\prod_{i=1}^n \Gamma(\alpha_i)} \prod_{i=1}^n (\cos(2\pi\xi_i) - \cos(2\pi\xi_{i-1})) \prod_{i=2}^n (\cos(2\pi\xi_i) - \cos(2\pi\xi_{i-2})) \\
& \quad \times \left| \begin{array}{cccc} g_{\alpha_1}\{\xi_0, \xi_1\} & g_{\alpha_1}\{\xi_0, \xi_1, \xi_2\} & \cdots & g_{\alpha_1}\{\xi_{n-2}, \xi_{n-1}, \xi_n\} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ g_{\alpha_n}\{\xi_0, \xi_1\} & g_{\alpha_n}\{\xi_0, \xi_1, \xi_2\} & \cdots & g_{\alpha_n}\{\xi_{n-2}, \xi_{n-1}, \xi_n\} \end{array} \right| \\
& \stackrel{\text{usw.}}{=} \stackrel{(2.40)}{=} (-1)^n \underbrace{\frac{2^{n(n+1)/2}}{\prod_{i=1}^n \Gamma(\alpha_i)} \prod_{i=1}^n \prod_{j=i}^n (\cos(2\pi\xi_j) - \cos(2\pi\xi_{j-i}))}_{=:C(\xi_0, \dots, \xi_n) \neq 0} \\
& \quad \times \underbrace{\left| \begin{array}{cccc} g_{\alpha_1}\{\xi_0, \xi_1\} & g_{\alpha_1}\{\xi_0, \xi_1, \xi_2\} & \cdots & g_{\alpha_1}\{\xi_0, \dots, \xi_{n-1}, \xi_n\} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ g_{\alpha_n}\{\xi_0, \xi_1\} & g_{\alpha_n}\{\xi_0, \xi_1, \xi_2\} & \cdots & g_{\alpha_n}\{\xi_0, \dots, \xi_{n-1}, \xi_n\} \end{array} \right|}_{=:D(\xi_0, \dots, \xi_n)}. \tag{2.44}
\end{aligned}$$

Da der Cosinus auf $[0, \pi]$ streng monoton fällt, ist

$$\begin{aligned}
\text{sign } (-1)^n C(\xi_0, \dots, \xi_n) &= (-1)^n \text{sign } \underbrace{\prod_{i=1}^n \prod_{j=i}^n (\cos(2\pi\xi_j) - \cos(2\pi\xi_{j-i}))}_{<0} \\
&= \text{sign } (-1)^{n+n(n+1)/2} = \text{sign } (-1)^{n(n+3)/2}, \tag{2.45}
\end{aligned}$$

und für die Determinante gilt weiter

$$\begin{aligned}
D(\xi_0, \dots, \xi_n) &= \begin{vmatrix} g_{\alpha_1}\{\xi_0, \xi_1\} & g_{\alpha_1}\{\xi_0, \xi_1, \xi_2\} & \dots & g_{\alpha_1}\{\xi_0, \dots, \xi_{n-1}, \xi_n\} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ g_{\alpha_n}\{\xi_0, \xi_1\} & g_{\alpha_n}\{\xi_0, \xi_1, \xi_2\} & \dots & g_{\alpha_n}\{\xi_0, \dots, \xi_{n-1}, \xi_n\} \end{vmatrix} \\
\stackrel{(2.42)}{=} & \begin{vmatrix} 2^{-1} \int_0^\infty t^{\alpha_1-1} \frac{\sinh(t)}{\prod_{i=0}^1 (\cosh(t) - \cos(2\pi\xi_i))} dt & \dots & 2^{-n} \int_0^\infty t^{\alpha_1-1} \frac{\sinh(t)}{\prod_{i=0}^n (\cosh(t) - \cos(2\pi\xi_i))} dt \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 2^{-1} \int_0^\infty t^{\alpha_n-1} \frac{\sinh(t)}{\prod_{i=0}^1 (\cosh(t) - \cos(2\pi\xi_i))} dt & \dots & 2^{-n} \int_0^\infty t^{\alpha_n-1} \frac{\sinh(t)}{\prod_{i=0}^n (\cosh(t) - \cos(2\pi\xi_i))} dt \end{vmatrix} \\
= & \underbrace{2^{-n(n+1)/2}}_{=:c} \left| \left(\int_0^\infty \underbrace{t^{\alpha_j-1}}_{=:h_j} \sinh(t) \right) / \underbrace{\prod_{i=0}^k (\cosh(t) - \cos(2\pi\xi_i))}_{=:f_k} dt \right)_{j,k=1(1)n} \right| \\
\stackrel{2.5.5}{=} & c \int_0^\infty \int_0^{t_n} \dots \int_0^{t_2} \mathfrak{Det} \begin{pmatrix} t^{\alpha_1-1} & t^{\alpha_2-1} & \dots & t^{\alpha_n-1} \\ t_1 & t_2 & \dots & t_n \end{pmatrix} \mathfrak{Det} \begin{pmatrix} f_1 & \dots & f_n \\ t_1 & \dots & t_n \end{pmatrix} dt_1 \dots dt_n \\
= & c \int_0^\infty \int_0^{t_n} \dots \int_0^{t_2} \underbrace{\mathfrak{Det} \begin{pmatrix} 1 & t^{\alpha_2-\alpha_1} & \dots & t^{\alpha_n-\alpha_1} \\ t_1 & t_2 & \dots & t_n \end{pmatrix}}_{=:F(t_1, \dots, t_n) \geq 0 \text{ nach Korollar 2.5.4}} \\
& \times \prod_{j=1}^n t_j^{\alpha_1-1} \mathfrak{Det} \begin{pmatrix} f_1 & \dots & f_n \\ t_1 & \dots & t_n \end{pmatrix} dt_1 \dots dt_n \\
= & \int_0^\infty \int_0^{t_n} \dots \int_0^{t_2} F(t_1, \dots, t_n) \prod_{j=1}^n t_j^{\alpha_1-1} \\
& \times \begin{vmatrix} \sinh(t_1) / \prod_{i=0}^1 (\cosh(t_1) - \cos(2\pi\xi_i)) & \dots & \sinh(t_n) / \prod_{i=0}^1 (\cosh(t_n) - \cos(2\pi\xi_i)) \\ \sinh(t_1) / \prod_{i=0}^2 (\cosh(t_1) - \cos(2\pi\xi_i)) & \dots & \sinh(t_n) / \prod_{i=0}^2 (\cosh(t_n) - \cos(2\pi\xi_i)) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \sinh(t_1) / \prod_{i=0}^n (\cosh(t_1) - \cos(2\pi\xi_i)) & \dots & \sinh(t_n) / \prod_{i=0}^n (\cosh(t_n) - \cos(2\pi\xi_i)) \end{vmatrix} dt_1 \dots dt_n
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^\infty \int_0^{t_n} \dots \int_0^{t_2} F(t_1, \dots, t_n) \prod_{j=1}^n \left(t_j^{\alpha_1-1} \sinh(t_j) \right) \Big/ \prod_{i=0}^n (\cosh(t_j) - \cos(2\pi\xi_i)) \Big) \\
&\quad \times \left| \begin{array}{ccc} \prod_{i=2}^n (\cosh(t_1) - \cos(2\pi\xi_i)) & \dots & \prod_{i=2}^n (\cosh(t_n) - \cos(2\pi\xi_i)) \\ \prod_{i=3}^n (\cosh(t_1) - \cos(2\pi\xi_i)) & \dots & \prod_{i=3}^n (\cosh(t_n) - \cos(2\pi\xi_i)) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \cosh(t_1) - \cos(2\pi\xi_n) & \dots & \cosh(t_n) - \cos(2\pi\xi_n) \\ \underbrace{1 \quad \dots \quad 1}_{=:E} \end{array} \right| \quad (2.46)
\end{aligned}$$

Es ist

$$\prod_{j=1}^n \left(t_j^{\alpha_1-1} \sinh(t_j) \right) \Big/ \prod_{i=0}^n (\cosh(t_j) - \cos(2\pi\xi_i)) > 0 \text{ f\"ur } \xi_0 > 0, t_j \geq 0, j = 1(1)n,$$

und f\"ur $\xi_0 = 0$ hat der Term eine Singularit\"at der Form t^{α_1-2} in $t = 0$, ist aber positiv und integrierbar, da $\alpha_1 > 1$ ist. (F\"ur $t \rightarrow \infty$ ist der Term wegen (2.43) ebenfalls integrierbar.)

Es bleibt das Vorzeichen der Determinante von E zu bestimmen. Setzt man $T_i := \cosh(t_i)$, $i = 1(1)n$, und $X_j := \cos(2\pi\xi_j)$, $j = 2(1)n$, so gilt wegen $0 \leq t_1 \leq t_2 \leq \dots \leq t_n$ und der Monotonie des Cosinus hyperbolicus auf $[0, \infty)$ die Ungleichungskette

$$T_1 \leq T_2 \leq \dots \leq T_n \quad . \quad (2.47)$$

Desweiteren ist

$$\det(E) = \det \left(\prod_{k=i+1}^n (T_j - X_k) \right)_{i,j} = \det \left(\prod_{\ell=1}^{n-i} (T_j - X_{\ell+i}) \right)_{i,j},$$

und

$$\Pi_{n-1} = \langle t^{j-1} | j = 1(1)n \rangle = \langle \prod_{\ell=1}^{n-j} (t - X_{\ell+j}) | j = 1(1)n \rangle,$$

d.h. die Funktionen $w_i(t) := \prod_{\ell=1}^{n-i} (t - X_{\ell+i})$, $i = 1(1)n$, bilden eine Basis des Vektorraums der Polynome vom H\"ochstgrad $n-1$. Da w_i den Grad $n-i$ hat und normiert ist, gilt

$$w_i(t) := \sum_{k=1}^n a_{i,k} t^{n-k}, \quad a_{i,k} \in \mathbb{R}, \quad i, k = 1(1)n,$$

mit $a_{i,i} = 1$ und $a_{i,k} = 0$ f\"ur $k < i$, $k, i = 1(1)n$, d.h. die Matrix $A := (a_{i,j})$ ist eine obere Dreiecksmatrix mit 1-Diagonale. Somit ist

$$\begin{pmatrix} w_1(t) \\ w_2(t) \\ \vdots \\ w_n(t) \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & \star & \dots & \star \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \star \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{=:A} \begin{pmatrix} t^{n-1} \\ t^{n-2} \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix},$$

und daher ist wegen $\det A = 1$

$$\det(E) = \det(w_i(T_j))_{i,j} = \det\left(A(T_j^{n-i})_{i,j}\right) = (-1)^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \det\left(T_i^{j-1}\right)_{i,j},$$

wobei die VANDERMONDE–Determinante mit (2.47)

$$\det(T_i^{j-1})_{i,j} = \prod_{i>j}^n (T_i - T_j) \geq 0$$

ist. Mithin hat der Integrand in (2.46) keinen Vorzeichenwechsel und ist nicht identisch Null, also hat das Integral das Vorzeichen $\text{sign } \det(E) = (-1)^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$ (und ist ungleich Null). Es bleibt noch das Vorzeichen der TSCHEBYSCHJEFF–Determinante zu untersuchen.

Zusammen mit (2.44) ist

$$\mathfrak{Det} \begin{pmatrix} 1 & t^{\beta_1} & \dots & t^{\beta_n} \\ 0 & t_1 & \dots & t_n \end{pmatrix} = (-1)^n C(\xi_0, \dots, \xi_n) D(\xi_0, \dots, \xi_n) \neq 0,$$

und wegen (2.45) und $\text{sign}(D(\xi_0, \dots, \xi_n)) = (-1)^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$ ist

$$\text{sign } \mathfrak{Det} \begin{pmatrix} 1 & t^{\beta_1} & \dots & t^{\beta_n} \\ 0 & t_1 & \dots & t_n \end{pmatrix} = \text{sign } (-1)^{n(n+3)/2 + \lfloor \frac{n}{2} \rfloor}.$$

Die TSCHEBYSCHJEFF–Determinante ist also positiv, wenn der Exponent für jedes $n \in \mathbb{N}$ gerade ist. Dies zeigt man wie folgt:

Ist n gerade, also $2|n$, so ist

$$\frac{n}{2}(n+3) + \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor = \frac{n}{2}(n+3) + \frac{n}{2} = \frac{n}{2}(n+4),$$

und wegen $2|(n+4)$ ist der Exponent gerade.

Ist n hingegen ungerade, so ist

$$\frac{n}{2}(n+3) + \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor = n \frac{n+3}{2} + \frac{n-1}{2}. \quad (2.48)$$

Wegen $\frac{n+3}{2} = \frac{n-1}{2} + 2$ ist $2|\frac{n+3}{2} \Leftrightarrow 2|\frac{n-1}{2}$. Daher sind entweder beide Summanden auf der rechten Seite von (2.48) gerade oder beide ungerade. Da sowohl die Summe zweier gerader als auch die Summe zweier ungerader Zahlen immer gerade ist, ist die Behauptung bewiesen. \square

Bemerkung 2.5.8.

Obwohl die Funktionen G_α für hinreichend großes $\alpha > 1$ mehrfach differenzierbar sind, bildet das Funktionensystem $\{1, -G_{\alpha_1}, \dots, -G_{\alpha_n}\}$ kein *erweitertes* TSCHEBYSCHJEFF–System auf $[0, \frac{1}{2}]$. Es gilt z.B. für $n = 1$, $\xi \in [0, \frac{1}{2}]$, $\alpha > 2$:

$$\mathfrak{Det}^* \begin{pmatrix} 1 & -G_\alpha \\ \xi & \xi \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 1 & -G_\alpha(\xi) \\ 0 & -G'_\alpha(\xi) \end{pmatrix} = G'_\alpha(\xi) = -2\pi H_{\alpha-1}(\xi) \geq 0,$$

wobei Gleichheit für $\xi \in \{0, \frac{1}{2}\}$ gilt (vgl. 2.4.2). Jedoch hat die Determinante keinen Vorzeichenwechsel, so dass $\{1, -G_\alpha\}$ ein schwaches erweitertes TSCHEBYSCHJEFF–System (Bemerkung 2.2.3) auf $[0, \frac{1}{2}]$ ist.

Die 1. Ableitungen der Funktionen aus $\{1, -G_{\alpha_1}, \dots, -G_{\alpha_n}\}$, $2 < \alpha_1 < \dots < \alpha_n$, haben allesamt die Nullstelle $\xi = 0$ gemeinsam, so dass stets

$$\mathfrak{Det}^* \begin{pmatrix} 1 & -G_{\alpha_1} & -G_{\alpha_2} & \dots & -G_{\alpha_n} \\ 0 & 0 & t_2 & \dots & t_n \end{pmatrix} = 0$$

für $t_0 = t_1 = 0 < t_2 < \dots < t_n \leq \frac{1}{2}$ gilt. Somit ist das System kein erweitertes TSCHEBYSCHJEFF-System (möglicherweise aber ein schwaches erweitertes TSCHEBYSCHJEFF-System) auf $[0, \frac{1}{2}]$.

2.5.3 Der Fall $\alpha \in (0, 1]$

Für $\alpha \in (0, 1]$ hat die Funktion G_α eine Singularität im Ursprung. Nach den Sätzen 2.4.6 und 2.4.7 ist das Produkt von G_α mit einer geeigneten positiven Funktion

$$\varphi_\alpha(\xi) := \begin{cases} \xi^{1-\alpha}, & \alpha \in (0, 1), \quad \xi \in [0, \frac{1}{2}], \\ -\frac{1}{\log(\xi)}, & \alpha = 1, \quad \xi \in (0, \frac{1}{2}], \\ 0, & \alpha = 1, \quad \xi = 0, \\ 1, & \alpha > 1, \quad \xi \in [0, \frac{1}{2}], \end{cases} \quad (2.49)$$

stetig auf dem Intervall $[0, \frac{1}{2}]$. (Für $\alpha > 1$ ist G_α ohnehin stetig.)

Es muss noch gezeigt werden, dass das Produkt der Funktionen G_α mit diesen Funktionen ebenfalls die Determinanten-Bedingung 2.1 erfüllt:

Satz 2.5.9.

Das Funktionensystem

$$\{\varphi_{\alpha_1}(\xi), -\varphi_{\alpha_1}(\xi) G_{\alpha_1}(\xi), \dots, -\varphi_{\alpha_1}(\xi) G_{\alpha_n}(\xi)\},$$

$n \in \mathbb{N}$, ist für $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ mit $0 < \alpha_1 < \dots < \alpha_n$ ein TSCHEBYSCHJEFF-System auf dem Intervall $[0, \frac{1}{2}]$.

Beweis:

Für $\alpha_1 > 1$ ist nichts zu zeigen. Es seien also $\alpha_1 \in (0, 1]$ und $0 \leq \xi_0 < \xi_1 < \dots < \xi_n \leq \frac{1}{2}$. Ist $\xi_0 > 0$, so gilt:

$$\begin{aligned} & \mathfrak{Det} \begin{pmatrix} \varphi_{\alpha_1} & -\varphi_{\alpha_1} G_{\alpha_1} & -\varphi_{\alpha_1} G_{\alpha_2} & \dots & -\varphi_{\alpha_1} G_{\alpha_n} \\ \xi_0 & \xi_1 & \xi_2 & \dots & \xi_n \end{pmatrix} \\ &= \det \begin{pmatrix} \varphi_{\alpha_1}(\xi_0) & \varphi_{\alpha_1}(\xi_1) & \dots & \varphi_{\alpha_1}(\xi_n) \\ -\varphi_{\alpha_1}(\xi_0) G_{\alpha_1}(\xi_0) & -\varphi_{\alpha_1}(\xi_1) G_{\alpha_1}(\xi_1) & \dots & -\varphi_{\alpha_1}(\xi_n) G_{\alpha_1}(\xi_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\varphi_{\alpha_1}(\xi_0) G_{\alpha_n}(\xi_0) & -\varphi_{\alpha_1}(\xi_1) G_{\alpha_n}(\xi_1) & \dots & -\varphi_{\alpha_1}(\xi_n) G_{\alpha_n}(\xi_n) \end{pmatrix} =: D_n \\ &= \underbrace{\prod_{j=0}^n \varphi_{\alpha_1}(\xi_j)}_{>0} \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ -G_{\alpha_1}(\xi_0) & -G_{\alpha_1}(\xi_1) & \dots & -G_{\alpha_1}(\xi_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -G_{\alpha_n}(\xi_0) & -G_{\alpha_n}(\xi_1) & \dots & -G_{\alpha_n}(\xi_n) \end{pmatrix} > 0, \end{aligned}$$

da die Funktion φ_{α_1} positiv auf $(0, \frac{1}{2}]$ ist und die Funktionen $1, -G_{\alpha_1}, \dots, -G_{\alpha_n}$ auf $[\xi_0, \frac{1}{2}] \subset (0, \frac{1}{2}]$ stetig sind und dort ein TSCHEBYSCHJEFF-System bilden. Dies zeigt man genau wie im Hauptsatz 2.5.1; die Singularität von G_{α_1} in der Null spielt hierbei keine Rolle.

Für $\xi_0 = 0$ gilt mit

$$K_{\alpha_1} := \begin{cases} \frac{2^{\alpha_1-1} \pi^{\alpha_1}}{\Gamma(\alpha_1)} \sec\left(\frac{\pi}{2} \alpha_1\right), & \alpha_1 \in (0, 1), \\ 2, & \alpha_1 = 1, \end{cases}$$

und $(\varphi_{\alpha_1} G_{\alpha_i})(0) = 0, i \in \{0, \dots, n\} \setminus \{1\}$, für die TSCHEBYSCHJEFF-Determinante weiter

$$\begin{aligned} D_n &= \det \begin{pmatrix} 0 & \varphi_{\alpha_1}(\xi_1) & \cdots & \varphi_{\alpha_1}(\xi_n) \\ -K_{\alpha_1} & -\varphi_{\alpha_1}(\xi_1) G_{\alpha_1}(\xi_1) & \cdots & -\varphi_{\alpha_1}(\xi_n) G_{\alpha_1}(\xi_n) \\ 0 & -\varphi_{\alpha_1}(\xi_1) G_{\alpha_2}(\xi_1) & \cdots & -\varphi_{\alpha_1}(\xi_n) G_{\alpha_2}(\xi_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & -\varphi_{\alpha_1}(\xi_1) G_{\alpha_n}(\xi_1) & \cdots & -\varphi_{\alpha_1}(\xi_n) G_{\alpha_n}(\xi_n) \end{pmatrix} \\ &= K_{\alpha_1} \cdot \det \begin{pmatrix} \varphi_{\alpha_1}(\xi_1) & \varphi_{\alpha_1}(\xi_2) & \cdots & \varphi_{\alpha_1}(\xi_n) \\ -\varphi_{\alpha_1}(\xi_1) G_{\alpha_2}(\xi_1) & -\varphi_{\alpha_1}(\xi_2) G_{\alpha_2}(\xi_2) & \cdots & -\varphi_{\alpha_1}(\xi_n) G_{\alpha_2}(\xi_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\varphi_{\alpha_1}(\xi_1) G_{\alpha_n}(\xi_1) & -\varphi_{\alpha_1}(\xi_2) G_{\alpha_n}(\xi_2) & \cdots & -\varphi_{\alpha_1}(\xi_n) G_{\alpha_n}(\xi_n) \end{pmatrix} \\ &= K_{\alpha_1} \cdot \underbrace{\prod_{j=1}^n \varphi_{\alpha_1}(\xi_j)}_{>0} \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ -G_{\alpha_2}(\xi_1) & -G_{\alpha_2}(\xi_2) & \cdots & -G_{\alpha_2}(\xi_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -G_{\alpha_n}(\xi_1) & -G_{\alpha_n}(\xi_2) & \cdots & -G_{\alpha_n}(\xi_n) \end{pmatrix} > 0, \end{aligned}$$

da $\{1, -G_{\alpha_2}, \dots, -G_{\alpha_n}\}$ ein TSCHEBYSCHJEFF-System auf $[\xi_1, \frac{1}{2}] \subset (0, \frac{1}{2}]$ ist. Auch dies zeigt man wie im Beweis von Hauptsatz 2.5.1; es wird nur eine eingeschränkte Menge von Punkten $\{\xi_1, \dots, \xi_n\} \subset (0, \frac{1}{2}]$ betrachtet, so dass auch eventuell auftretende Singularitäten der Funktionen für $\alpha_i \in (0, 1]$ in der Null keine Rolle spielen. \square

2.6 Quadraturformeln für das Qualokationsverfahren

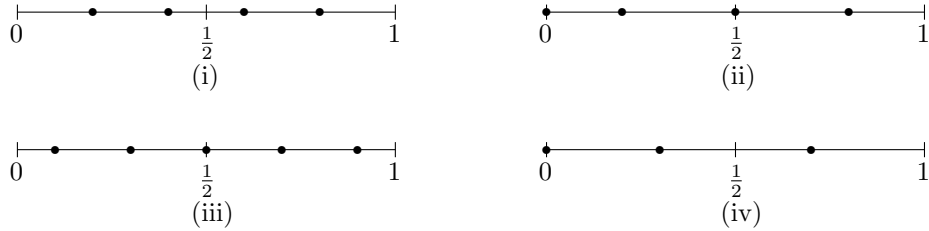
Die symmetrische Quadraturformel Q_J auf $[0, 1]$ für das Qualokationsverfahren entsteht durch symmetrische Fortsetzung verschiedener Typen von Quadraturformeln auf $[0, \frac{1}{2}]$:

Bemerkung 2.6.1.

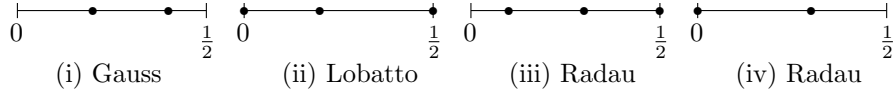
- (a) Für eine symmetrische Quadraturformel Q_J mit (1.23) gibt es vier Fälle zu unterscheiden: Es gibt jeweils solche Formeln, für deren Knotenmenge $T_J := \{\xi_j \mid j = 1(1)J\} \subset [0, 1]$ entweder

- (i) $T_J \cap \{0, \frac{1}{2}\} = \emptyset$, (J gerade),
- (ii) $T_J \cap \{0, \frac{1}{2}\} = \{0, \frac{1}{2}\}$, (J gerade),
- (iii) $T_J \cap \{0, \frac{1}{2}\} = \{\frac{1}{2}\}$, (J ungerade), oder
- (iv) $T_J \cap \{0, \frac{1}{2}\} = \{0\}$, (J ungerade),

gilt.



Sie sind die symmetrischen Fortsetzungen der folgenden vier Typen von Quadraturformeln auf $[0, \frac{1}{2}]$:



Die symmetrische Fortsetzung geschieht wie folgt: Sind $(\xi_1, w_1), \dots, (\xi_{\tilde{J}}, w_{\tilde{J}})$ die Knoten und Gewichte der \tilde{J} -Punkt-Quadraturformel auf $[0, \frac{1}{2}]$, so sind die Knoten und Gewichte der symmetrischen Fortsetzung gegeben durch

$$\left\{ (\xi_j, 2w_j) \mid j \in \{1, \dots, \tilde{J}\} : \xi_j \in \{0, \frac{1}{2}\} \right\} \cup \left\{ (\xi_j, w_j), (1 - \xi_j, w_j) \mid j \in \{1, \dots, \tilde{J}\} : \xi_j \in (0, \frac{1}{2}) \right\},$$

d.h. ist 0 oder $\frac{1}{2}$ ein Knoten, so erhält er doppeltes Gewicht (vgl. Definition 1.2.3, symmetrische Formeln haben nur Knoten in $[0, 1)$).

- (b) Manchmal ist es sinnvoll, statt einer symmetrischen J -Punkt-Quadraturformel Q_J auf $[0, 1]$ mit Knoten und Gewichten $(\xi_1, w_1), \dots, (\xi_J, w_J)$ nur ihre Einschränkung auf $[0, \frac{1}{2}]$ zu betrachten. In diesem Fall verwenden wir für die Einschränkung die Bezeichnung $Q_{\tilde{J}}$ mit

$$\tilde{J} := \frac{1}{2} (J + |\{0, \frac{1}{2}\} \cap \{\xi_j : j \in \{1, \dots, J\}\}|).$$

Die Formel $Q_{\tilde{J}}$ hat dann als Knotenmenge alle Knoten von Q_J aus dem Intervall $[0, \frac{1}{2}]$, wobei die inneren Knoten $\xi_j \in (0, \frac{1}{2})$ dieselben Gewichte behalten, und gfs. die Gewichte für die Randpunkte $\xi_1 = 0$ oder $\xi_{\tilde{J}} = \frac{1}{2}$ halbiert werden (vgl. auch (a)). Demnach sind die Knoten und Gewichte der eingeschränkten Quadraturformel $Q_{\tilde{J}}$ gegeben durch die Menge

$$\left\{ (\xi_j, \frac{1}{2}w_j) \mid j \in \{1, \dots, J\} : \xi_j \in \{0, \frac{1}{2}\} \right\} \cup \left\{ (\xi_j, w_j) \mid j \in \{1, \dots, J\} : \xi_j \in (0, \frac{1}{2}) \right\}.$$

Die Gewichte von $Q_{\tilde{J}}$ werden aufgrund dieser Modifikation mit $\tilde{w}_j, j = 1(1)\tilde{J}$, bezeichnet.

Wir formulieren nun den

Hauptsatz 2.6.2.

Es sei $0 < \alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_n$ und $\Sigma := \{1, G_{\alpha_1}, G_{\alpha_2}, \dots, G_{\alpha_n}\}$.

- (a) Ist $\alpha_1 > 0$, so existiert genau eine symmetrische Quadraturformel Q_J auf $[0, 1]$ mit positiven Gewichten und $J = (n + 1)$ Knoten in $(0, 1)$, die exakt für das Funktionensystem Σ ist.
- (b) Ist $\alpha_1 > 1$, so existiert genau eine symmetrische Quadraturformel Q_J auf $[0, 1]$ mit positiven Gewichten und $J = (n + 1)$ Knoten in $[0, 1)$ und $\xi_1 = 0$, die exakt für das Funktionensystem Σ ist.

Beweis:

Man betrachtet zunächst nur den Fall $\alpha_1 > 1$. Dann sind alle Funktionen aus Σ stetig auf $[0, \frac{1}{2}]$ und erzeugen einen $(n + 1)$ -dimensionalen TSCHEBYSCHJEFF-Raum auf $[0, \frac{1}{2}]$.

Ist $n + 1$ gerade, so existiert nach Satz 2.3.1(a) genau eine auf $\langle \Sigma \rangle$ exakte positive Quadraturformel $Q_{\tilde{J}}$ auf $[0, \frac{1}{2}]$, die offen (bzw. geschlossen) ist mit $\tilde{J} = \frac{n+1}{2}$ (bzw. $\frac{n+1}{2} + 1$) Punkten. Für die eindeutige symmetrische Fortsetzung Q_J auf das Intervall $[0, 1]$ gemäß Bemerkung 2.6.1(a) gilt dann $J = n + 1$ und $\xi_1 > 0$ (bzw. $\xi_1 = 0$).

Falls $n + 1$ ungerade ist, existiert nach Satz 2.3.1(b) je genau eine halboffene positive Quadraturformel $Q_{\tilde{J}}$ auf $[0, \frac{1}{2}]$ mit $\xi_1 = 0$ (bzw. $\xi_{\tilde{J}} = \frac{1}{2}$) und $\tilde{J} = \frac{n}{2} + \frac{1}{2}$, die exakt für alle Funktionen aus $\langle \Sigma \rangle$ ist. Für die eindeutige symmetrische Fortsetzung Q_J gilt wiederum $\xi_1 = 0$ (bzw. $\xi_1 > 0$) und $J = n + 1$.

Um die Existenz von Quadraturformeln für das Qualokationsverfahren für Werte $\alpha_1 \in (0, 1]$ zu beweisen, betrachtet man das RIEMANN-STIELTJES-Integral

$$\int_0^{\frac{1}{2}} f(x) d\sigma_{\alpha_1}(x)$$

mit der auf $[0, \frac{1}{2}]$ monoton wachsenden Funktion

$$\sigma_{\alpha}(x) := \begin{cases} \frac{1}{\alpha} x^{\alpha}, & \alpha \in (0, 1), \\ -x(\log(x) - 1), & \alpha = 1. \end{cases}$$

Offenbar ist die Ableitungsfunktion von σ_{α} integrierbar auf $[0, \frac{1}{2}]$ und es ist $\sigma'_{\alpha} = (\varphi_{\alpha})^{-1}$ (vgl. (2.49)). Dann gilt für das RIEMANN-STIELTJES-Integral ([25], S.617)

$$\int_0^{\frac{1}{2}} f(x) d\sigma_{\alpha_1}(x) = \int_0^{\frac{1}{2}} f(x) \sigma'_{\alpha_1}(x) dx,$$

also

$$\int_0^{\frac{1}{2}} f(x) d\sigma_{\alpha_1}(x) = \int_0^{\frac{1}{2}} \begin{cases} f(x) x^{\alpha_1-1} dx, & \alpha_1 \in (0, 1), \\ -f(x) \log(x) dx, & \alpha_1 = 1. \end{cases}$$

Anwendung des Satzes 2.3.1 bzw. des Korollars 2.3.2 mit dem $J = (n + 1)$ -dimensionalen TSCHEBYSCHJEFF-System (vgl. Satz 2.5.9)

$$\Sigma_{\alpha_1} := \{\varphi_{\alpha_1}(\xi), -\varphi_{\alpha_1}(\xi) G_{\alpha_1}(\xi), \dots, -\varphi_{\alpha_1}(\xi) G_{\alpha_n}(\xi)\},$$

auf $[0, \frac{1}{2}]$ liefert dann die Existenz und Eindeutigkeit einer Quadraturformel $Q_{\tilde{J}}$ auf $[0, \frac{1}{2}]$ mit $\tilde{J} = [\frac{J+1}{2}]$ positiven Gewichten w_j und Knoten ξ_j , $j = 1(1)\tilde{J}$ mit $\xi_1 > 0$, für welche

$$Q_{\tilde{J}}(f) = \int_0^{\frac{1}{2}} f(x) d\sigma_{\alpha_1}(x) = \int_0^{\frac{1}{2}} f(x) (\varphi_{\alpha_1}(x))^{-1} dx, \quad \forall f \in \langle \Sigma_{\alpha_1} \rangle,$$

gilt, die also insbesondere

$$Q_{\tilde{J}}(\varphi_{\alpha_1} G_{\alpha_\ell}) = \int_0^{\frac{1}{2}} \varphi_{\alpha_1}(x) G_{\alpha_\ell}(x) (\varphi_{\alpha_1}(x))^{-1} dx = \int_0^{\frac{1}{2}} G_{\alpha_\ell}(x) dx = 0, \quad \ell = 1(1)n,$$

erfüllt. Weiterhin gilt

$$0 = Q_{\tilde{J}}(\varphi_{\alpha_1} G_{\alpha_\ell}) = \sum_{j=1}^{\tilde{J}} w_j \varphi_{\alpha_1}(\xi_j) G_{\alpha_\ell}(\xi_j), \quad \ell = 1(1)n.$$

Definiere nun $w'_j := w_j \varphi_{\alpha_1}(\xi_j)$, $j = 1(1)\tilde{J}$. Dann gilt für die Quadraturformel $Q'_{\tilde{J}}$ mit Gewichten w'_j , $j = 1(1)\tilde{J}$, und denselben Stützstellen wie $Q_{\tilde{J}}$

$$Q'_{\tilde{J}}(G_{\alpha_\ell}) = \sum_{j=1}^{\tilde{J}} w'_j G_{\alpha_\ell}(\xi_j) = 0, \quad \ell = 1(1)n.$$

Die Gewichte w'_j sind positiv, da $\xi_1 > 0$ ist und die Funktion φ_{α_1} , $\alpha_1 \in (0, 1]$, auf $(0, \frac{1}{2}]$ positiv ist. Die Summe der Gewichte ist

$$Q'_{\tilde{J}}(1) = \sum_{j=1}^{\tilde{J}} w'_j = \sum_{j=1}^{\tilde{J}} w_j \varphi_{\alpha_1}(\xi_j) = Q_{\tilde{J}}(\varphi_{\alpha_1}) = \int_0^{\frac{1}{2}} \varphi_{\alpha_1}(x) d\sigma_{\alpha_1}(x) = \int_0^{\frac{1}{2}} dx = \frac{1}{2},$$

woraus folgt, dass die Summe über die Gewichte der symmetrischen Fortsetzung der Quadraturformel $Q'_{\tilde{J}}$ auf das Intervall $[0, 1]$ gleich 1 ist. Die eindeutige symmetrische Fortsetzung Q_J der Quadraturformel $Q'_{\tilde{J}}$ auf $[0, 1]$ gemäß 2.6.1(a) hat wiederum $J = n + 1$ Knoten und erfüllt also alle Bedingungen des Satzes 1.2.4.

Bemerkung: Der Satz 2.3.1 liefert auch eine Formel mit $\xi_1 = 0$, jedoch muss nach [37], S.458 für $\alpha_1 \leq 1$ für den ersten Knoten $\xi_1 > 0$ gelten, da G_{α_1} singulär in ξ_1 ist und daher im Ursprung nicht ausgewertet werden kann. Somit ist diese Formel hier unzulässig. \square

Bemerkung 2.6.3.

Die nach Hauptsatz 2.6.2(a) existierenden offenen Quadraturformeln werden in [37, 38] mit $g_{J,b,\alpha}$ bezeichnet, sofern sie exakt für das System (1.27) sind, wobei dann $J = b + 1$ und $\alpha = r - \beta > \frac{1}{2}$ gilt. Haben die Quadraturformeln zusätzlich noch einen polynomialen Exaktheitsgrad, d.h. sind sie exakt für das Funktionensystem (1.29), so werden sie mit $G_{J,b,\alpha}$ bezeichnet, in diesem Fall ist $J = b + 1 + \left\lceil \frac{r-\beta-1}{2} \right\rceil$ (Das g bzw. G soll die Analogie zu den GAUSS-Quadraturformeln andeuten). Entsprechend heißen die nach 2.6.2(b) existierenden Formeln $l_{J,b,\alpha}$ bzw. $L_{J,b,\alpha}$ (l, L für LOBATTO).

Kapitel 3

Erhöhung der Konvergenzordnung

Im Artikel [10] von CHANDLER und SLOAN wird das Qualokationsverfahren $(S_N^r, S_N^{r'}, Q_J)$ für einfache Operatoren L der Ordnung β , also für Operatoren der Form

$$\begin{aligned} Lu(x) &= \hat{u}(0) + \sum_{n \neq 0} |n|^\beta \hat{u}(n) e^{2\pi i n x}, \quad (L \text{ gerade}) \text{ oder} \\ Lu(x) &= \hat{u}(0) + \sum_{n \neq 0} \text{sign}(n) |n|^\beta \hat{u}(n) e^{2\pi i n x}, \quad (L \text{ ungerade}) \end{aligned} \quad (3.1)$$

betrachtet, die also nur aus einem geraden *oder* ungeraden Anteil bestehen. CHANDLER und SLOAN haben 2-Punkt-Quadraturformeln angegeben, mit denen das Qualokationsverfahren eine höhere Konvergenzordnung als das PETROV-GALERKIN-Verfahren hat (also $b > r'$). Im ersten Teil dieses Kapitels wird eine offene 2-Punkt-Formel bestimmt, mit welcher das Qualokationsverfahren bei einfachen Operatoren die Zusatzkonvergenzordnung 3 hat, wenn man den Raum S_N^1 als Testraum wählt. Im zweiten Abschnitt wird gezeigt, dass es für nicht-einfache Operatoren im Allgemeinen keine Quadraturformel gibt, mit der das Verfahren eine höhere Konvergenzordnung als das PETROV-GALERKIN-Verfahren besitzt.

3.1 Einfache Operatoren

In diesem Abschnitt werden einfache Operatoren betrachtet. Wie auch im allgemeinen Fall muss $r - \beta > \frac{1}{2}$ gelten (bzw. $r - \beta > 1$, falls 0 ein Knoten von Q_J ist), damit das Verfahren wohldefiniert ist ([10], S. 542).

Ein wohldefiniertes Qualokationsverfahren ist für Operatoren dieser Form bei Verwendung von Quadraturformeln Q_J mit mindestens zwei Quadraturknoten nach [10], Theorem 3 immer stabil. Bei Verwendung von 1-Punkt-Quadraturformeln ist das Verfahren äquivalent zum Kollokationsverfahren und daher instabil in Fällen, die in 1.2.1 nach Formel (1.11) angegebenen sind. Ist u_N die Lösung der Qualokationsgleichungen (1.21) und u die exakte Lösung der behandelten Gleichung, so gilt die Fehlerabschätzung

$$\|u_N - u\|_{\beta-b} = c \left(\frac{1}{N}\right)^{r-\beta+b} \|u\|_{r+b}, \quad (3.2)$$

falls $u \in H^{r+b}$ ist, wobei $b \geq 0$ die Zusatzkonvergenzordnung des Verfahrens ist. Für das Spline-Kollokationsverfahren gilt mit $u \in H^r$ die Abschätzung $\|u_N - u\|_\beta = c \left(\frac{1}{N}\right)^{r-\beta} \|u\|_r$, wenn man als Verfahrensraum den Raum S_N^r wählt.

In ihrer Arbeit haben Chandler und Sloan ausführlich symmetrische Quadraturformeln Q_J mit $J = 2$ untersucht und die folgenden Resultate bewiesen:

Geschlossene Formeln ([10], 4, Simpson-Typ):

Wählt man die Stützstellen $\xi_1 = 0$, $\xi_2 = \frac{1}{2}$, so ist das zweite Gewicht bereits durch $w_2 = 1 - w_1$ bestimmt. Nun kann man das erste Gewicht w_1 so bestimmen, dass man höchstmögliche Ordnung erreicht:

- Ist r' gerade und haben r und L die gleiche Parität, so erhält man $b = 2$, wenn man als Gewicht $w_1 = \frac{2^{r-\beta-1}-1}{2^{r-\beta}-1}$ wählt.
- Ist r' gerade und haben r und L verschiedene Parität, so gilt $b = 3$, wenn $w_1 = \frac{2^{r-\beta}-1}{2^{r-\beta+1}-1}$ ist.

Offene Formeln ([10], 5, symmetrische Regeln):

Für symmetrische offene Quadraturformeln sind die Gewichte gegeben durch $w_1 = w_2 = \frac{1}{2}$, die Knoten sind ξ und $1 - \xi$ mit $\xi \in (0, \frac{1}{2})$. Hier erreicht man ebenfalls höhere Ordnung durch geeignete Wahl der Stützstelle ξ :

Ist r' gerade und haben r und L die gleiche Parität, so hat das Verfahren Zusatzkonvergenzordnung $b = 2$, wenn man als Quadraturknoten $\xi = \eta_{r-\beta}$, also die einzige Nullstelle von $G_{r-\beta}$ in $(0, \frac{1}{2})$ wählt ([10] S. 558, der Fall $\tau = \sigma' = +$).

Im anderen Fall (r' ungerade, r und L haben verschiedene Parität) wird die Ordnung des Verfahrens durch die Funktion

$$E(y; \xi) := -\alpha y^{\alpha+1} G_{\alpha+1}(\xi) + y^{\alpha+r'} H_\alpha(\xi) H_{r'}(\xi) + \mathcal{O}(y^{\alpha+3}), \quad y \in [0, \frac{1}{2}], \quad (3.3)$$

bestimmt, wobei $\alpha := r - \beta$ ist ([10] S.558, der Fall $\tau = \sigma' = -$).

Ohne besondere Wahl des Quadraturknotens $\xi \in (0, \frac{1}{2})$ hat das Verfahren wegen $r' \geq 1$ die Zusatzkonvergenzordnung 1.

Für $r' > 1$ (also $r' \geq 3$, weil r' ungerade) erhält man die Zusatzkonvergenzordnung $b = 3$, wenn $\xi = \eta_{\alpha+1}$, also gleich der Nullstelle von $G_{\alpha+1}$ gewählt wird, da dann der erste Term verschwindet. Bei dieser Wahl des Knotens ist jedoch für $r' = 1$ nur $b = 1$, da der zweite Term echt positiv ist und die gleiche Ordnung bezüglich y besitzt wie der erste.

Den Fall $r' = 1$ haben Chandler und Sloan nicht genauer untersucht. Im folgenden Abschnitt wird gezeigt, dass es für $\alpha > 1$ stets einen Quadraturknoten ξ gibt, für den das Kollokationsverfahren die Zusatzkonvergenzordnung $b = 3$ besitzt, jedoch für $\alpha \in (\frac{1}{2}, 1]$ nicht (beachte: Es muss stets $\alpha > \frac{1}{2}$ gelten). Das bedeutet, dass man für die Zusatzkonvergenzordnung $b = 3$ (bei geeigneter Wahl der Stützstelle) stets mit dem Raum der stückweise konstanten Funktionen als Testraum ($r' = 1$) arbeiten kann. Insbesondere muss man die Ordnung der Splines im Testraum $S_N^{r'}$ nicht erhöhen, um diese Zusatzkonvergenzordnung zu erhalten.

Der Fall $r' = 1$:

Das Verfahren hat für $r' = 1$ die Zusatzkonvergenzordnung 3, wenn die ersten beiden Terme in (3.3) verschwinden, wenn ξ also Nullstelle der Funktion

$$E_\alpha(x) := -\alpha G_{\alpha+1}(x) + H_\alpha(x) H_1(x), \quad x \in \mathcal{I}_\alpha := \begin{cases} (0, \frac{1}{2}], & \alpha \in (0, 1], \\ [0, \frac{1}{2}] & \alpha > 1, \end{cases} \quad (3.4)$$

ist. Man beachte, dass für das Verfahren $\alpha > \frac{1}{2}$ gelten muss, wenn die Quadraturformel Q_J offen ist. Der nächste Satz besagt, dass es für $\alpha > 1$ stets eine solche Nullstelle in $(0, \frac{1}{2})$ gibt, für $\alpha \leq 1$ jedoch nicht.

Am Ende dieses Abschnitts ist eine Tabelle mit den Nullstellen von E_α für verschiedene $\alpha > 1$ und die Graphen von E_α für $\alpha = \frac{1}{2}, 1$ und 4 zu finden. In Abschnitt 4.2 sind Ergebnisse von Testrechnungen angegeben, bei welchen mit dem optimalen Knoten und mit nichtoptimalen Knoten gerechnet wurde. Die numerischen Ergebnisse belegen die hier gefundenen theoretischen Resultate.

Satz 3.1.1.

Die Funktion E_α hat für $\alpha > 1$ genau eine Nullstelle im Intervall $(0, \frac{1}{2})$, für $\alpha \in (0, 1]$ dagegen ist E_α positiv.

Bemerkung: Nach [10], (A.5) ist $H_1(x) = 2\pi(\frac{1}{2} - x)$, d.h. es gilt

$$E_\alpha(x) := -\alpha G_{\alpha+1}(x) + 2\pi H_\alpha(x) \left(\frac{1}{2} - x\right), \quad x \in \mathcal{I}_\alpha.$$

Im folgenden Hilfssatz werden einige Eigenschaften von E_α gezeigt, die zum darauf folgenden Beweis des obigen Satzes benötigt werden.

Lemma 3.1.2.

- (a) Für $\alpha > 1$ ist E_α streng monoton wachsend auf $(0, \eta_{\alpha-1}]$.
- (b) Für $\alpha > 2$ ist E_α streng konkav auf $[\eta_{\alpha-1}, \frac{1}{2}]$.
- (c) Für $\alpha \in (0, 2]$ ist $E_\alpha(x) > 0$ für $x \in [\eta_{\alpha-1}, \eta_{\alpha+1}] \cap (0, \eta_{\alpha+1}]$, wobei $\eta_{\alpha-1} := 0$ für $\alpha \leq 1$ gesetzt sei.

Zur Erinnerung: Es gilt $0 \leq \eta_{\alpha-1} < \eta_\alpha < \eta_{\alpha+1} < \frac{1}{4}$ (vgl. 2.4.2) und

$$G_\alpha(x) \begin{cases} > 0, & x \in [0, \eta_\alpha) \cap \mathcal{I}_\alpha, \\ = 0, & x = \eta_\alpha, \\ < 0, & x \in (\eta_\alpha, \frac{1}{2}]. \end{cases}$$

Beweis:

(a) Für $\alpha > 1$ ist wegen (2.28) und (2.29)

$$\begin{aligned} E'_\alpha(x) &= 2\pi \alpha H_\alpha(x) + 4\pi^2 G_{\alpha-1}(x) \left(\frac{1}{2} - x\right) - 2\pi H_\alpha(x) \\ &= 2\pi \left[\underbrace{(\alpha - 1)}_{>0} H_\alpha(x) + 2\pi G_{\alpha-1}(x) \underbrace{\left(\frac{1}{2} - x\right)}_{>0} \right], \quad x \in (0, \frac{1}{2}]. \end{aligned}$$

Für $x \in (0, \eta_{\alpha-1}]$ ist $G_{\alpha-1}(x) \geq 0$, und da $H_\alpha(x) > 0$ für $x \in (0, \frac{1}{2})$ ist, gilt $E'_\alpha(x) > 0$ für $x \in (0, \eta_{\alpha-1}]$ und $\alpha > 1$. Also ist E_α streng monoton wachsend auf $(0, \eta_{\alpha-1}]$.

(b) Es sei nun $\alpha > 2$. Dann ist

$$\begin{aligned} E''_\alpha(x) &= 2\pi [(\alpha-1)2\pi G_{\alpha-1}(x) - 4\pi^2 H_{\alpha-2}(x) (\tfrac{1}{2} - x) - 2\pi G_{\alpha-1}(x)] \\ &= 4\pi^2 [(\alpha-2)G_{\alpha-1}(x) - 2\pi H_{\alpha-2}(x) (\tfrac{1}{2} - x)], \quad x \in (0, \tfrac{1}{2}]. \end{aligned}$$

Nun ist $G_{\alpha-1}(x) \leq 0$ für $x \in [\eta_{\alpha-1}, \frac{1}{2}]$, und $H_{\alpha-2}(x) \geq 0$ für $x \in (0, \frac{1}{2}]$, mithin ist $E''_\alpha(x) \leq 0$ für $x \in [\eta_{\alpha-1}, \frac{1}{2}]$. Es ist sogar $E''_\alpha(x) < 0$, denn $G_{\alpha-1}(x) = 0 \Leftrightarrow x = \eta_{\alpha-1}$ und $H_{\alpha-2}(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$.

(c) Es sei $x \in [\eta_{\alpha-1}, \eta_{\alpha+1}] \cap (0, \frac{1}{4})$ und $\alpha > 0$. Dann ist $H_\alpha(x) > 0$ und

$$\begin{aligned} E_\alpha(x) &= -\alpha G_{\alpha+1}(x) + 2\pi H_\alpha(x) (\tfrac{1}{2} - x) \\ &\stackrel{G_{\alpha+1}(\eta_{\alpha+1})=0}{=} -\alpha G'_{\alpha+1}(\tau_\alpha) (x - \eta_{\alpha+1}) + 2\pi H_\alpha(x) (\tfrac{1}{2} - x) \\ &\stackrel{(2.28)}{=} 2\pi \alpha H_\alpha(\tau_\alpha) (x - \eta_{\alpha+1}) + 2\pi H_\alpha(x) (\tfrac{1}{2} - x) \\ &= 2\pi H_\alpha(x) \left(\alpha \frac{H_\alpha(\tau_\alpha)}{H_\alpha(x)} (x - \eta_{\alpha+1}) + (\tfrac{1}{2} - x) \right), \end{aligned} \quad (3.5)$$

wobei $\tau_\alpha \in (x, \eta_{\alpha+1})$. Der erste Term ist positiv, es bleibt der Term in den Klammern zu untersuchen.

Zunächst wird gezeigt: Die Funktion H_α ist für alle $\alpha > 0$ streng monoton fallend auf $(\eta_{\alpha-1}, \frac{1}{2}]$: Die Funktion H_α hat für $\alpha > 1$ ihr Maximum in der einzigen Nullstelle $\eta_{\alpha-1}$ ihrer Ableitung $2\pi G_{\alpha-1}$ und ist monoton fallend auf $[\eta_{\alpha-1}, \frac{1}{2}]$, da $G_{\alpha-1}(x) < 0$ für $x \in [\eta_{\alpha-1}, \frac{1}{2}]$ gilt. Für $\alpha \in (0, 1]$ ist die Funktion H_α streng monoton fallend auf $(0, \frac{1}{2}]$ da die Ableitung $2\pi G_{\alpha-1}$ in $(0, \frac{1}{2}]$ negativ ist:

Für $\alpha = 1$ ist $H'_1(x) = -2\pi < 0$.

Für $\alpha \in (0, 1)$ verwenden wir die Darstellung von $H'_\alpha = 2\pi G_{\alpha-1}$ durch den Polylogarithmus (2.26): Es ist

$$\begin{aligned} G_{\alpha-1}(x) &= 2(2\pi)^{\alpha-2} \sin\left(\frac{\pi}{2}(\alpha-1)\right) \\ &\quad \times \underbrace{\left[\Gamma(2-\alpha) x^{\alpha-2} + 2 \sum_{k=[\frac{\alpha-1}{2}]+1}^{\infty} \Gamma(2-\alpha+2k) \zeta(2-\alpha+2k) \frac{x^{2k}}{(2k)!} \right]}_{>0} \end{aligned}$$

für $x \in (0, 1)$, was wegen $\sin(\frac{\pi}{2}(\alpha-1)) < 0$ und $\alpha \in (0, 1)$ negativ ist.

Also gilt $H_\alpha(\tau_\alpha) < H_\alpha(x)$ (wegen $\eta_{\alpha-1} \leq x < \tau_\alpha$) und damit $\frac{H_\alpha(\tau_\alpha)}{H_\alpha(x)} < 1$. Daher gilt weiter für den geklammerten Term in (3.5)

$$\alpha \frac{H_\alpha(\tau_\alpha)}{H_\alpha(x)} (x - \eta_{\alpha+1}) + (\tfrac{1}{2} - x) = \tfrac{1}{2} - x - \alpha \underbrace{\frac{H_\alpha(\tau_\alpha)}{H_\alpha(x)}}_{<1} \underbrace{(\eta_{\alpha+1} - x)}_{>0}$$

$$> \tfrac{1}{2} - x - \alpha (\eta_{\alpha+1} - x) = \tfrac{1}{2} - (1-\alpha)x - \alpha \eta_{\alpha+1} = \tfrac{1}{2} - [(1-\alpha)x + \alpha \eta_{\alpha+1}].$$

Es bleibt zu zeigen, dass $(1-\alpha)x + \alpha \eta_{\alpha+1} < \frac{1}{2}$ ist.

Für $\alpha \in (0, 1]$ ist $1-\alpha \in [0, 1]$, und es gilt $x < \frac{1}{4}$. Demnach folgt

$$(1-\alpha) \underbrace{x}_{<\frac{1}{4}} + \alpha \underbrace{\eta_{\alpha+1}}_{<\frac{1}{4}} < \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}.$$

Ist $\alpha \in (1, 2]$, so gilt

$$\underbrace{\alpha}_{\leq 2} \underbrace{\eta_{\alpha+1}}_{< \frac{1}{4}} + (1 - \alpha)x < \frac{1}{2} - \underbrace{(\alpha - 1)x}_{> 0} < \frac{1}{2}.$$

Somit ist $E_\alpha(x) > 0$ für $x \in [\eta_{\alpha-1}, \eta_{\alpha+1}] \cap (0, \eta_{\alpha+1}]$ und $\alpha \in (0, 2]$. \square

Mit Hilfe dieses Lemmas lässt sich der Satz 3.1.1 beweisen:

Beweis:

Zuerst ist festzustellen, dass E_α im Intervall $(\eta_{\alpha+1}, \frac{1}{2}]$ keine Nullstelle besitzt, da dort $G_{\alpha+1}(x) < 0$ und damit

$$E_\alpha(x) = \underbrace{-\alpha G_{\alpha+1}(x)}_{> 0} + \underbrace{H_\alpha(x)H_1(x)}_{\geq 0} > 0$$

für alle $\alpha > 0$ gilt.

1. Teil: E_α hat für $\alpha \leq 1$ keine Nullstelle:

Für $\alpha \leq 1$ ist das Intervall $[\eta_{\alpha-1}, \eta_{\alpha+1}] = [0, \eta_{\alpha+1}]$. Nach Lemma 3.1.2(c) gilt $E_\alpha(x) > 0$ für $x \in (0, \eta_{\alpha+1}]$. E_α hat im Ursprung eine Singularität, da H_α in 0 singularär ist. Für $x \rightarrow 0$ nähert man sich dieser Singularität, die Funktion bleibt positiv (nach dem Beweis von Lemma 3.1.2(c) ist H_α für $\alpha \leq 1$ streng monoton fallend auf $(0, \frac{1}{2})$). Also hat E_α auf dem ganzen Intervall $(0, \frac{1}{2})$ keine Nullstelle.

2. Teil: Es ist zu zeigen, dass E_α für $\alpha > 1$ stets genau eine Nullstelle in $(0, \frac{1}{2})$ hat.

Zur Existenz:

$$\begin{aligned} E_\alpha(\eta_{\alpha+1}) &= H_\alpha(\eta_{\alpha+1}) H_1(\eta_{\alpha+1}) > 0, \text{ da } \eta_{\alpha+1} \in (0, \frac{1}{2}), \text{ und} \\ E_\alpha(0) &= -2\alpha \zeta(\alpha) < 0 \quad \text{für alle } \alpha > 1, \end{aligned} \tag{3.6}$$

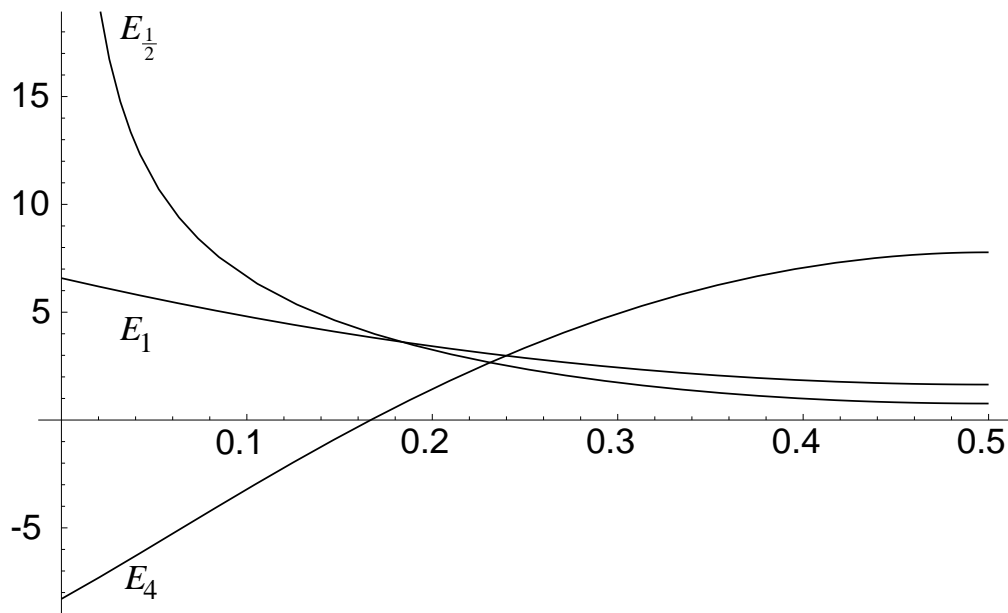
also existiert nach dem Zwischenwertsatz wenigstens eine Nullstelle von E_α in $(0, \eta_{\alpha+1})$.

Zur Eindeutigkeit: Aufgrund der strengen Monotonie von E_α für $\alpha > 1$ nach 3.1.2(a) kann im Intervall $(0, \eta_{\alpha-1})$ höchstens eine Nullstelle liegen. Für das Rest-Intervall $[\eta_{\alpha-1}, \frac{1}{2})$ müssen zwei Fälle unterschieden werden:

1. Fall: $\alpha \in (1, 2]$: Nach Lemma 3.1.2(c) ist $E_\alpha(x) > 0$ für $x \in [\eta_{\alpha-1}, \eta_{\alpha+1}]$. Daher und aufgrund der Bemerkung am Anfang des Beweises kann E_α keine Nullstelle in $[\eta_{\alpha-1}, \frac{1}{2})$ haben.

2. Fall: $\alpha > 2$: Auf dem Intervall $[\eta_{\alpha-1}, \frac{1}{2}]$ ist E'_α nach Lemma 3.1.2(b) (wegen der strengen Konkavität von E_α) streng monoton fallend. Da aber $E'_\alpha(\eta_{\alpha-1}) > 0$ und $E'_\alpha(\frac{1}{2}) = 0$ ist (vgl. Beweis von Lemma 3.1.2(a)), muss $E'_\alpha(x) > 0$ für alle $x \in (0, \frac{1}{2})$ sein. Also ist die Nullstelle eindeutig. \square

In der Tabelle 3.1 sind die Werte für die Quadraturknoten für verschiedene Werte von α angegeben. Sie wurden mit MATHEMATICA berechnet.

Abbildung 3.1: $E_{\frac{1}{2}}$, E_1 und E_4

α	ξ	$1 - \xi$
1.1	0.0000022109089101	0.9999977890910899
2	0.0595927363364696	0.9404072636635304
3	0.1294621009657154	0.8705378990342846
4	0.1667594767331414	0.8332405232668586
5	0.1874910681190965	0.8125089318809035
6	0.2001809387407028	0.7998190612592972
7	0.2086060709672698	0.7913939290327302
8	0.2145691845919098	0.7854308154080902
9	0.2190061735867353	0.7809938264132647
10	0.2224392213669859	0.7775607786330141
20	0.2368734400256883	0.7631265599743117

Tabelle 3.1: Nullstelle der Funktion E_α für verschiedene α

3.2 Nicht-einfache Operatoren

Es stellt sich die Frage, ob sich die Zusatzkonvergenzordnung analog zu den im vorangehenden Abschnitt behandelten einfachen Operatoren auch für nicht-einfache Operatoren der Form (1.5) ([37, 38]) durch geeignete Wahl der Quadraturformel erhöhen lässt, *ohne* die Dimension r' des Testraumes zu erhöhen (beachte in [37, 38]: $r' \geq b$). Dass dies im Allgemeinen nicht der Fall ist, zeigt dieser Abschnitt.

Die Ordnung des Qualokationsverfahrens $(S_N^r, S_N^{r'}, Q_J)$ für Operatoren der Form (1.5) mit symmetrischer Quadraturformel Q_J wird bestimmt durch das Verhalten der Funktionen

$$E_{\pm}(y) = Q_J \left(y^{r-\beta} G_{r-\beta}^{\sigma_{\pm}}(\cdot, y) \left[1 + y^{r'} G_{r'}^{\sigma'}(\cdot, y) \right] + y^{r-\beta+r'} H_{r-\beta}^{\sigma_{\pm}}(\cdot, y) H_{r'}^{\sigma'}(\cdot, y) \right), \quad y \in [0, 1], \quad (3.7)$$

für kleine Werte von y (siehe [37], (4.9)), wobei

$$\sigma_{\pm} := \begin{cases} \pm & r \text{ gerade,} \\ \mp & r \text{ ungerade,} \end{cases} \quad \text{und} \quad \sigma' := \begin{cases} + & r' \text{ gerade,} \\ - & r' \text{ ungerade,} \end{cases}$$

und die Funktionen G_{α}^{\pm} und H_{α}^{\pm} in [37] nach Formel (4.9) definiert sind.

Entwickelt man die Funktionen E_{\pm} nach y , so erhält man als Koeffizienten (bis auf konstante Faktoren) bei

$$\begin{aligned} y^{r-\beta+k} &: Q_J(G_{r-\beta+k}), \quad k = 0(1)r' - 1, \\ y^{r-\beta+r'} &: \begin{cases} Q_J \left(\binom{\beta-r}{r'} G_{r-\beta+r'} + G_{r-\beta} G_{r'} \right) & r' \text{ gerade,} \\ Q_J \left(\binom{\beta-r}{r'} G_{r-\beta+r'} + H_{r-\beta} H_{r'} \right) & r' \text{ ungerade,} \end{cases} \end{aligned}$$

wobei $\binom{\alpha}{k} := \alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-k+1)/k!$, $\alpha \in \mathbf{R}$, $k \in \mathbf{N}_0$.

In [37] werden die Quadraturformeln so gewählt, dass die Terme bei $y^{r-\beta+k}$, $k = 0(1)r - \beta + r' - 1$, verschwinden; das Verfahren ist dann von der Ordnung $r - \beta + r'$, die Zusatzkonvergenzordnung ist $b = r'$. Die Frage ist, ob man durch Hinzunahme von weiteren Knoten zur Quadraturformel den Term bei $y^{r-\beta+r'}$ ebenfalls eliminieren und damit eine Zusatzkonvergenzordnung $b > r'$ erreichen kann.

Um zu zeigen, dass dies im Allgemeinen nicht möglich ist, betrachtet man den einfachsten Fall: Für $r' = 1$ kann man bei Verwendung von 2-Punkt-Quadraturformeln den Term bei $y^{r-\beta}$ durch die Wahl $\xi_1 := \eta_{r-\beta}$ eliminieren, dann ist die Quadraturformel durch $\xi_2 = 1 - \xi_1$ und $w_1 = w_2 = \frac{1}{2}$ eindeutig gegeben ($b = r' = 1$). Es wird nun untersucht, ob man durch Hinzunahme eines weiteren Knotens (also $J = 3$) den Term bei $y^{r-\beta+r'}$ ebenfalls auslöschen kann.

Gesucht ist also eine symmetrische 3-Punkt-Quadraturformel

$$\begin{aligned} Q_3(g) &:= w_1 g(\xi) + w_2 g\left(\frac{1}{2}\right) + w_1 g(1 - \xi), \quad \xi \in \left(0, \frac{1}{2}\right), \\ &= 2w_1 g(\xi) + w_2 g\left(\frac{1}{2}\right), \quad \text{falls } g(1 - \xi) = g(\xi), \end{aligned}$$

auf $[0, 1]$ mit $2w_1 + w_2 = 1$ und einem Knoten $\xi \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$, für die mit $\alpha := r - \beta > \frac{1}{2}$

$$Q_3(G_{\alpha}) = 0 \quad \text{und} \quad (3.8)$$

$$Q_3(-\alpha G_{\alpha+1} + H_{\alpha} H_1) = 0 \quad (3.9)$$

gilt. Da alle auftretenden Funktionen symmetrisch auf dem Intervall $[0, 1]$ sind, erhält man aus (3.8) und (3.9)

$$\begin{aligned} 2w_1 G_\alpha(\xi) + (1 - 2w_1) G_\alpha\left(\frac{1}{2}\right) &= 0, \\ 2w_1(-\alpha G_{\alpha+1}(\xi) + H_\alpha(\xi)H_1(\xi)) + (1 - 2w_1)(-\alpha G_{\alpha+1}\left(\frac{1}{2}\right) + \underbrace{H_\alpha\left(\frac{1}{2}\right)H_1\left(\frac{1}{2}\right)}_{=0}) \\ &= 2w_1(-\alpha G_{\alpha+1}(\xi) + H_\alpha(\xi)H_1(\xi)) - \alpha(1 - 2w_1)G_{\alpha+1}\left(\frac{1}{2}\right) = 0. \end{aligned} \quad (3.10)$$

Da $\xi \in (0, \frac{1}{2})$ ist, gilt

$$G_\alpha(\xi) > G_\alpha\left(\frac{1}{2}\right). \quad (3.11)$$

Somit lässt sich die erste Gleichung nach w_1 auflösen:

$$w_1 = \frac{G_\alpha\left(\frac{1}{2}\right)}{2(G_\alpha\left(\frac{1}{2}\right) - G_\alpha(\xi))}.$$

Wegen $w_1 < \frac{1}{2}$ und (3.11) erhält man hieraus die Bedingung $G_\alpha(\xi) > 0$, also muss ξ kleiner als η_α sein. Da $\eta_\alpha < \frac{1}{4} \forall \alpha > 0$ gilt, genügt es, $\xi \in (0, \frac{1}{4})$ zu betrachten. Setzt man w_1 in die Gleichung (3.10) ein, ergibt sich für ξ die Bedingung $F_\alpha(\xi) = 0$, wobei

$$F_\alpha(x) := G_\alpha\left(\frac{1}{2}\right)(-\alpha G_{\alpha+1}(x) + H_\alpha(x)H_1(x)) + \alpha G_{\alpha+1}\left(\frac{1}{2}\right)G_\alpha(x), \quad x \in \mathcal{I}_\alpha.$$

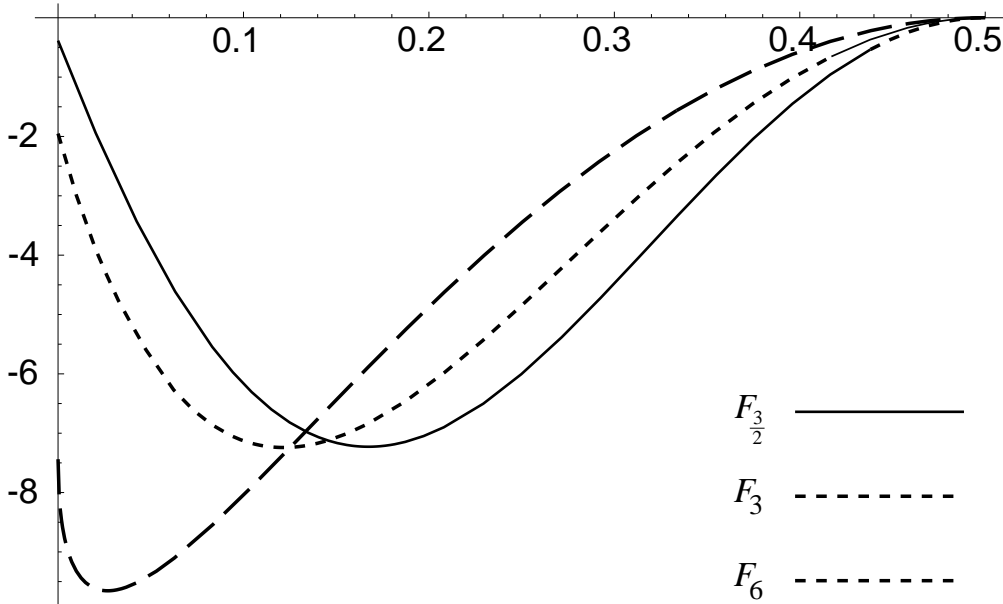


Abbildung 3.2: $F_{\frac{3}{2}}$, F_3 und F_6

Der gesuchte Quadraturknoten ξ muss also eine Nullstelle der Funktion F_α sein. Jedoch hat diese Funktion für $\alpha = 3$ keine Nullstelle in $[0, \frac{1}{4}]$, wie der folgende Satz zeigt:

Satz 3.2.1.

Für alle $\xi \in [0, \frac{1}{4}]$ gilt $F_3(\xi) < 0$.

Beweis:

Für $\alpha > 1$ ist mit (3.4)

$$F_\alpha(x) = G_\alpha\left(\frac{1}{2}\right) E_\alpha(x) + \alpha G_{\alpha+1}\left(\frac{1}{2}\right) G_\alpha(x), \quad x \in [0, \frac{1}{4}].$$

Für die Funktion F_α gilt für $\alpha > 1$:

$$\begin{aligned} F_\alpha(0) &= \alpha \left(G_{\alpha+1}\left(\frac{1}{2}\right) G_\alpha(0) - G_\alpha\left(\frac{1}{2}\right) G_{\alpha+1}(0) \right) \\ &= -2\alpha(1 - 2^{-\alpha})\zeta(\alpha + 1) 2\zeta(\alpha) + 2\alpha(1 - 2^{1-\alpha})\zeta(\alpha) 2\zeta(\alpha + 1) \\ &= 4\alpha\zeta(\alpha)\zeta(\alpha + 1) (1 - 2^{1-\alpha} - (1 - 2^{-\alpha})) = -2^{2-\alpha}\alpha\zeta(\alpha)\zeta(\alpha + 1), \end{aligned}$$

also $F_\alpha(0) < 0$, und

$$\begin{aligned} F_\alpha\left(\frac{1}{4}\right) &= G_\alpha\left(\frac{1}{2}\right) \left(-\alpha G_{\alpha+1}\left(\frac{1}{4}\right) + H_\alpha\left(\frac{1}{4}\right) H_1\left(\frac{1}{4}\right) \right) + \alpha G_{\alpha+1}\left(\frac{1}{2}\right) G_\alpha\left(\frac{1}{4}\right) \\ &\stackrel{\text{Tab.2.2}}{=} -2\zeta(\alpha)(1 - 2^{1-\alpha}) \left((-\alpha)(-2^{-\alpha})(1 - 2^{-\alpha})\zeta(\alpha + 1) + H_\alpha\left(\frac{1}{4}\right) \frac{1}{2}\pi \right) \\ &\quad + \alpha(-2)(1 - 2^{-\alpha})\zeta(\alpha + 1)(-2^{1-\alpha})(1 - 2^{1-\alpha})\zeta(\alpha) \\ &\stackrel{(2.30)}{<} -2\zeta(\alpha)(1 - 2^{1-\alpha}) \left(\alpha 2^{-\alpha}(1 - 2^{-\alpha})\zeta(\alpha + 1) + \frac{1}{2}\pi 2\zeta(\alpha)(1 - 2^{-\alpha})(1 - 2^{1-\alpha}) \right) \\ &\quad + \alpha 2^{2-\alpha}\zeta(\alpha)\zeta(\alpha + 1)(1 - 2^{-\alpha})(1 - 2^{1-\alpha}) \\ &= -2\zeta(\alpha)(1 - 2^{-\alpha})(1 - 2^{1-\alpha}) \left(\alpha 2^{-\alpha}\zeta(\alpha + 1) + \pi\zeta(\alpha)(1 - 2^{1-\alpha}) - \alpha 2^{1-\alpha}\zeta(\alpha + 1) \right) \\ &= -2\zeta(\alpha)(1 - 2^{-\alpha})(1 - 2^{1-\alpha}) \left(\underbrace{\pi \zeta(\alpha)}_{>\zeta(\alpha+1)} (1 - 2^{1-\alpha}) - 2^{-\alpha}\alpha\zeta(\alpha + 1) \right) \\ &< -2\zeta(\alpha)\zeta(\alpha + 1)(1 - 2^{-\alpha})(1 - 2^{1-\alpha}) \underbrace{\left(\pi(1 - 2^{1-\alpha}) - 2^{-\alpha}\alpha \right)}_{=:z(\alpha)}. \end{aligned}$$

Wegen

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \alpha} z(\alpha) &= \pi \log(2) 2^{1-\alpha} + \alpha \log(2) 2^{-\alpha} - 2^{-\alpha} \\ &= 2^{-\alpha}((2\pi + \alpha) \log(2) - 1) > 2^{-\alpha}((2\pi + 1) \log(2) - 1) > 0 \end{aligned}$$

ist z streng monoton wachsend, und da $z(2) = \frac{1}{2}\pi - \frac{1}{2} > 0$ ist, gilt $z(\alpha) > 0$ für $\alpha \geq 2$, also $F_\alpha\left(\frac{1}{4}\right) < 0$.

Es wird nun gezeigt, dass F_3 konvex auf $[0, \frac{1}{4}]$ ist.

Für $\alpha = 3$ hat die Funktion F_α eine relativ einfache Gestalt, da E_3 ein Polynom ist (vgl. Tabelle 2.1):

$$\begin{aligned} E_3(x) &= -3 \left(-\frac{4}{3}\pi^4 \left(\frac{1}{2}x^4 - x^3 + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{60} \right) \right) + 8\pi^4 \left(\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x \right) \left(\frac{1}{2} - x \right) \\ &= -\frac{\pi^4}{15} (10x^4 - 20x^3 + 20x^2 - 10x + 1), \quad x \in [0, \frac{1}{2}]. \end{aligned}$$

Nach Tabelle 2.2 gilt

$$\begin{aligned} G_3\left(\frac{1}{2}\right) &= -2\zeta(3)(1 - 2^{-3+1}) = -\frac{3}{2}\zeta(3), \\ G_4\left(\frac{1}{2}\right) &= -2\zeta(4)(1 - 2^{-4+1}) = -\frac{7}{4}\zeta(4) = -\frac{7}{4}\frac{\pi^4}{90} = -\frac{7}{360}\pi^4 \end{aligned}$$

und $G_1(x) = -2 \log(2 \sin(\pi x))$ (vgl. Tabelle 2.1). Also ist

$$\begin{aligned} F_3(x) &= G_3\left(\frac{1}{2}\right) E_3(x) + 3 G_4\left(\frac{1}{2}\right) G_3(x), \\ F_3'(x) &= -G_3\left(\frac{1}{2}\right) \frac{\pi^4}{3} (8x^3 - 12x^2 + 8x - 2) - 6\pi G_4\left(\frac{1}{2}\right) H_2(x), \\ F_3''(x) &= -G_3\left(\frac{1}{2}\right) \frac{8\pi^4}{3} (3x^2 - 3x + 1) - 12\pi^2 G_4\left(\frac{1}{2}\right) G_1(x) \\ &= 4\pi^4 \zeta(3) (3x^2 - 3x + 1) - \frac{7}{15} \pi^6 \log(2 \sin(\pi x)), \quad x \in (0, \frac{1}{4}]. \end{aligned}$$

Wegen

$$F_3'''(x) = 12\pi^4 \zeta(3) \underbrace{(2x-1)}_{<0} - \frac{7}{15} \pi^7 \underbrace{\cot(\pi x)}_{>0} < 0, \quad x \in (0, \frac{1}{4}].$$

ist die Funktion $F_3''(x)$ auf $(0, \frac{1}{4}]$ monoton fallend, also gilt wegen $\zeta(3) > \zeta(4) = \frac{\pi^4}{90} = \frac{\pi^2}{10} \frac{\pi^2}{9} > \frac{\pi^2}{10}$ und $\log(2) < \frac{3}{4}$ die Abschätzung

$$\begin{aligned} F_3''(x) &> F_3''\left(\frac{1}{4}\right) = 4\pi^4 \zeta(3) \left(\frac{3}{16} - \frac{3}{4} + 1\right) - \frac{7}{15} \pi^6 \log(2 \cdot 2^{-\frac{1}{2}}) = \frac{7}{4} \pi^4 \zeta(3) - \frac{7}{30} \pi^6 \log(2) \\ &= \frac{7}{2} \pi^4 \left(\frac{1}{2} \zeta(3) - \frac{\pi^2}{15} \log(2)\right) > \frac{7}{10} \pi^6 \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{3} \log(2)\right) > 0, \end{aligned}$$

also ist F_3 auf $(0, \frac{1}{4}]$ streng konvex. Zusammen mit $F_3(0) < 0$ und $F_3(\frac{1}{4}) < 0$ gilt also $F_3(x) < 0$ für alle $x \in [0, \frac{1}{4}]$, es gibt also für $\alpha = 3$ keine Stützstelle, die das Gewünschte leistet. \square

Hiermit ist gezeigt, dass es für $\alpha = 3$ keine symmetrische 3-Punkt-Quadraturformel gibt, die (3.8) und (3.9) erfüllt. Das bedeutet, dass im Allgemeinen bei nicht-einfachen Operatoren $b \leq r'$ gilt; die Zusatzkonvergenzordnung ist also durch die Ordnung der Splines des Testraumes beschränkt. Wie man aber im vorangehenden Abschnitt sieht, ist es in Einzelfällen (z.B. bei einfachen Operatoren) durchaus möglich, eine höhere Zusatzkonvergenzordnung zu erreichen.

Kapitel 4

Numerische Beispiele

In diesem Kapitel wird das Qualokationsverfahren zur Lösung einiger Randintegralgleichungen angewandt.

Zuerst werden einige Aspekte der Implementation erläutert, insbesondere die Berechnung der Matrixeinträge und der geschätzten Konvergenzordnung. Dann werden die numerischen Ergebnisse zu Beispielen mit einfachen geraden und ungeraden Operatoren und den symmetrischen Zwei-Punkt-Quadraturformeln aus Kapitel 3 angegeben. Diese bestätigen die theoretischen Resultate.

Anschließend werden einige Beispiele mit stark bzw. ungerade elliptischen Operatoren sowohl mit konstanten als auch mit variablen Koeffizienten gerechnet. Unter anderem wird durch die numerischen Ergebnisse die Vermutung bestärkt, dass das Qualokationsverfahren für $r' = b$ stets stabil ist (vgl. [37, 32]).

Das Programm hierzu wurde in Borland Delphi 4.0 implementiert.

4.1 Implementation

Bevor die Ergebnisse vorgestellt werden, soll noch auf einige Aspekte der Implementation und die Vorgehensweise des Programms eingegangen werden.

Es wird das Gleichungssystem

$$\left(Q_J^{(N)}(L b_j^{(r)} \cdot b_i^{(r')}) \right)_{i,j=1(1)N} (a_1, \dots, a_N)^T = \left(Q_J^{(N)}(f \cdot b_1^{(r')}), \dots, Q_J^{(N)}(f \cdot b_N^{(r')}) \right)^T$$

gelöst, wobei $\{b_1^{(r)}, \dots, b_N^{(r)}\}$ Basis des Verfahrensraums S_N^r (Raum der 1-periodischen Splines der Ordnung $r \geq 1$), $\{b_1^{(r')}, \dots, b_N^{(r')}\}$ Basis des Testraums $S_N^{r'}$ (1-periodische Splines der Ordnung $r' \geq 1$) und $a_1, \dots, a_N \in \mathcal{C}^n$ die gesuchten Koeffizienten der Näherungslösung

$$u_N = \sum_{k=1}^N a_k \cdot b_k^{(r)} \in S_N^r$$

sind. Diese Näherungslösungen werden für verschiedene Schrittweiten $h = \frac{1}{N}$, $N = 4, 8, \dots$, berechnet. Anschließend wird mittels der Lösung mit der kleinsten Schrittweite (oder einer Referenzlösung, welche aus einer Datei eingelesen wird) ein Schätzwert für die Konvergenzordnung

ermittelt.

Die Berechnung des Operators L angewandt auf die Basisfunktionen des Verfahrensraums S_N^r erfolgt über die Fourierdarstellung des Operators. Als Basisfunktionen des Verfahrensraums dienen die 1-periodischen B-Splines auf dem Gitter $\{0, \frac{1}{N}, \frac{2}{N}, \dots, \frac{N-1}{N}, 1\}$, siehe Anhang A.

Mit den Fourierkoeffizienten aus (A.4) lässt sich $L b_j^{(r)} = (b_+ L_+ + b_- L_-) b_j^{(r)}$, $j = 1(1)N$, über die Fourierdarstellung der Operatoren L_+ und L_- berechnen, wobei die Summation der Reihe abgebrochen wird, wenn eine gewisse Anzahl von Fourierkoeffizienten kleiner als ein vorgegebenes ε ist. Für die Knoten $\xi_k^{(N)}$, $k = 1(1)J \cdot N$, der zusammengesetzten Quadraturformel $Q_J^{(N)}$ gilt

$$\xi_{k+\ell \cdot J}^{(N)} = \xi_k^{(N)} + \ell h, \quad k = 1(1)J, \quad \ell = 0(1)N - 1.$$

Aufgrund der Relationen

$$\begin{aligned} \widehat{b_j^{(r)}}(0) &= h, \quad \forall j = 1(1)N, \\ \widehat{b_{j+\ell}^{(r)}}(q) &\stackrel{(A.3)}{=} e^{-2\pi i q \ell h} \widehat{b_j^{(r)}}(q), \quad q \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}, \quad \ell \in \mathbb{N}_0, \end{aligned}$$

folgt somit

$$\begin{aligned} (L_{\pm} b_{j+1})(\xi_{k+J}) &= \widehat{b_{j+1}^{(r)}}(0) + \sum_{q \neq 0} \widehat{b_{j+1}^{(r)}}(q) e^{2\pi i q \xi_{k+J}} \\ &= \widehat{b_j^{(r)}}(0) + \sum_{q \neq 0} e^{-2\pi i q h} \widehat{b_j^{(r)}}(q) e^{2\pi i q (\xi_k + h)} \\ &= \widehat{b_j^{(r)}}(0) + \sum_{q \neq 0} \widehat{b_j^{(r)}}(q) e^{2\pi i q \xi_k} = (L_{\pm} b_j)(\xi_k), \quad j = 1(1)N - 1. \end{aligned}$$

Daher genügt es, nur die Werte $L_{\pm} b_1^{(r)}(\xi_k)$, $k = 1(1)J \cdot N$, zu berechnen, die Werte $L_{\pm} b_j^{(r)}(\xi_k)$, $k = 1(1)J \cdot N$, für $j > 1$ erhält man durch Vektorshift um J Einträge. Damit werden schließlich die Einträge der Matrix $\left(Q_J^{(N)}(L b_j^{(r)} \cdot b_i^{(r')})\right)_{i,j=1(1)N}$ bestimmt.

Das Gleichungssystem selbst wird mit dem Gaußverfahren und Totalpivotwahl gelöst.

Zur Berechnung der Schätzwerte für die Konvergenzordnungen (bzw. der SOBOLEV-Normen) werden Funktionswerte der Fehler der Näherungslösungen $g_N(x) = u_N(x) - u(x)$ (gemessen an einer Referenzlösung u) an 1024 äquidistanten Punkten berechnet und die schnelle Fourier-Transformation (FFT) zur Bestimmung der Fourierkoeffizienten $\widehat{g}_N(-511), \dots, \widehat{g}_N(512)$ angewandt. Mit diesen lässt sich die SOBOLEV-Norm

$$\|u\|_s = \left(|\widehat{u}(0)|^2 + \sum_{k \neq 0} |k|^{2s} |\widehat{u}(k)|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

abschätzen. Da die Schrittweiten sukzessive halbiert werden, errechnen sich die geschätzten Konvergenzordnungen (bzgl. einer SOBOLEV-Norm mit Index β) aus

$$\|g_N\|_{\beta} \doteq C \left(\frac{1}{N} \right)^p, \quad \|g_{2N}\|_{\beta} \doteq C \left(\frac{1}{2N} \right)^p,$$

durch Quotientenbildung und Anwendung des Logarithmus, also durch

$$p \approx \frac{\ln(\|g_N\|_{\beta} / \|g_{2N}\|_{\beta})}{\ln(2)}.$$

Da die exakte Lösung der betrachteten Gleichungen im Allgemeinen unbekannt ist, wird als Referenzlösung in den folgenden numerischen Beispielen die Näherungslösung auf dem feinsten Gitter (hier u_{512}) verwendet, sofern nichts anderes erwähnt wird.

4.2 Zwei-Punkt-Formeln für einfache Operatoren

Die in Kapitel 3, Abschnitt 3.1, betrachteten offenen Zwei-Punkt-Quadraturformeln

$$Qg = \frac{1}{2}g(\xi) + \frac{1}{2}g(1-\xi) \quad (4.1)$$

mit einem Knoten $\xi \in (0, \frac{1}{2})$ eignen sich für die Behandlung von Gleichungen $Lu = f$ mit *einfachen* Operatoren L . In Abschnitt 3.1 ist die Existenz von Quadraturformeln bewiesen, mit denen das Qualokationsverfahren die Zusatzkonvergenzordnung $b = 3$ besitzt, falls folgende Bedingungen erfüllt sind:

- $r' = 1$,
- r ist gerade, L ungerade *oder* r ungerade und L gerade,
- der Quadraturknoten ξ muss die Nullstelle der Funktion

$$E_{r-\beta}(x) = (\beta - r) G_{r-\beta}(x) + H_{r-\beta}(x) H_1(x), \quad x \in (0, \frac{1}{2}), \quad r - \beta > 1,$$

sein.

Die nach Satz 3.1.1 eindeutige Nullstelle von $E_{r-\beta}$ wird fortan als $\varrho_{r-\beta}$ bezeichnet. Als Testbeispiel dient die SYMMSche Integralgleichung auf dem Kreis Γ mit Radius $a \in (0, 1)$

$$\int_{\Gamma} \log|x-s| u(s) d\Gamma_s = f(x), \quad (4.2)$$

dessen zugehöriger Operator L sich in Fourierdarstellung schreiben lässt als [29]

$$L u(x) = \ln(a)\widehat{u}(0) - \frac{1}{2} \sum_{k \neq 0} |k|^{-1} \widehat{u}(k) e^{2\pi i k x},$$

also ein gerader Operator der Ordnung $\beta = -1$ ist. Entsprechend den o.a. Bedingungen wurde für die Testrechnung $r = 3$ gewählt, somit ist $r - \beta = 3 - (-1) = 4$. Demnach ist als Quadraturknoten ξ die einzige Nullstelle von E_4 im Intervall $[0, \frac{1}{2}]$ zu wählen, damit das Qualokationsverfahren die Zusatzkonvergenzordnung 3 hat. Für jede andere Wahl von ξ hat das Verfahren nur die Zusatzkonvergenzordnung $b = 1$. Der Wert von ϱ_4 ist in der Tabelle 3.1 zu finden.

Die theoretisch zu erwartende Konvergenzordnung ist nach [10]

$$\|u_N - u\|_s = ch^{t-s} \|u\|_{t+\max(\beta-s, 0)}, \quad (4.3)$$

für $s < r - \frac{1}{2}$, $t > \beta + \frac{1}{2}$ und $\beta - b \leq s \leq t \leq r$, sofern $u \in H^{t+\max(\beta-s, 0)}$ ist. Es ergibt sich also für die Ordnung des Qualokationsverfahrens die Tabelle 4.1 bei Verwendung des optimalen Knotens $\xi = \varrho_4$, $t = r = 3$.

Index s der Norm $\ \cdot\ _s$ für den Fehler	Ordnung $t - s$	$t + \max(\beta - s, 0)$
-4	7	6
-3	6	5
-2	5	4
-1	4	3
0	3	3

Tabelle 4.1: Zu erwartende Konvergenzordnungen in verschiedenen SOBOLEV-Normen bei Verwendung des optimalen Knotens $\xi = \varrho_4$ und erforderliche Glattheit der Lösung, $t = r = 3$.

In der Tabelle 4.2 sind die geschätzten Konvergenzordnungen (EOC=estimated order of convergence) in den jeweiligen SOBOLEV-Normen angegeben. Für die Inhomogenität $f(x) = \cos(2\pi x)$ gilt $f \in H^r \forall r \in \mathbb{R}$. Hier wurde der optimale Knoten $\xi = \varrho_4$ in der Quadraturformel (4.1) verwendet. Die Ergebnisse bestätigen deutlich die theoretisch erwarteten Konvergenzordnungen aus Tabelle 4.1. Man sieht auch, dass sich in SOBOLEV-Normen mit kleinerem Index als -4 keine weitere Verbesserung der Konvergenzordnung erzielen lässt, die Abschätzungen sind also in diesem Sinne optimal.

N	$s = 0$		$s = -1$		$s = -2$	
	$\ u - u_N\ _s$	EOC	$\ u - u_N\ _s$	EOC	$\ u - u_N\ _s$	EOC
4	2,688244020E-02	3,55	8,907287059E-03	4,83	3,248291353E-03	6,19
8	2,293925417E-03	3,16	3,141562006E-04	4,26	4,455203891E-05	5,40
16	2,562499509E-04	3,04	1,636321118E-05	4,07	1,058192315E-06	5,11
32	3,109252727E-05	3,01	9,723604668E-07	4,02	3,062019473E-08	5,03
64	3,856757994E-06	3,01	5,998123615E-08	4,01	9,379478792E-10	5,01
128	4,800430289E-07		3,730192457E-09		2,911774199E-11	
N	$s = -3$		$s = -4$		$s = -5$	
	$\ u - u_N\ _s$	EOC	$\ u - u_N\ _s$	EOC	$\ u - u_N\ _s$	EOC
4	1,733323449E-03	7,38	1,472925733E-03	7,45	1,441140584E-03	7,42
8	1,040331700E-05	6,82	8,431493265E-06	7,11	8,387270989E-06	7,10
16	9,186058295E-08	6,42	6,120183422E-08	7,03	6,103812775E-08	7,03
32	1,074392101E-09	6,15	4,695513672E-10	7,01	4,685547497E-10	7,01
64	1,513605737E-11	6,04	3,651838466E-12	7,00	3,644573106E-12	7,00
128	2,293328479E-13		2,849681414E-14		2,844122487E-14	

Tabelle 4.2: SYMMscher Operator, $f(x) = \cos(2\pi x)$, optimaler Knoten

Rechnet man das erste Beispiel mit einem anderen Quadraturknoten ξ als dem optimalen, so hat das Verfahren nur die Zusatzkonvergenzordnung $b = 1$. Die nach (4.3) zu erwartenden theoretischen Konvergenzordnungen in den verschiedenen SOBOLEV-Normen sind in der Tabelle 4.3 angegeben.

Index s der Norm $\ \cdot\ _s$ für den Fehler	Ordnung $t - s$
-2	5
-1	4
0	3

Tabelle 4.3: Zu erwartende Konvergenzordnungen in verschiedenen SOBOLEV-Normen bei $\xi \neq \varrho_4$ (nicht optimal), $t = r = 3$.

Es ist also die höchste Konvergenzordnung 5 in der H^{-2} -Norm zu erwarten. Die Ergebnisse in Tabelle 4.4 zeigen wiederum, dass auch in SOBOLEV-Normen mit kleinerem Index keine höhere Konvergenzordnung erzielt wird. Hierbei wurde $\xi = \frac{1}{2} \varrho_4$ als Quadraturknoten verwendet.

N	$s = 0$		$s = -1$		$s = -2$	
	$\ u - u_N\ _s$	EOC	$\ u - u_N\ _s$	EOC	$\ u - u_N\ _s$	EOC
4	2,711618411E-02	3,56	9,201442468E-03	4,82	3,885632987E-03	5,31
8	2,295888648E-03	3,16	3,260440069E-04	4,30	9,782245698E-05	5,06
16	2,562655933E-04	3,04	1,659077304E-05	4,09	2,935426629E-06	5,01
32	3,109264873E-05	3,01	9,761164199E-07	4,02	9,086118132E-08	5,00
64	3,856758935E-06	3,01	6,004075972E-08	4,01	2,832641235E-09	5,00
128	4,800430362E-07		3,731125655E-09		8,837830727E-11	
N	$s = -3$		$s = -4$		$s = -5$	
	$\ u - u_N\ _s$	EOC	$\ u - u_N\ _s$	EOC	$\ u - u_N\ _s$	EOC
4	2,732320852E-03	4,96	2,573171162E-03	4,88	2,554904201E-03	4,87
8	8,770444107E-05	5,00	8,749239959E-05	5,00	8,748814788E-05	5,00
16	2,739596336E-06	5,00	2,738739737E-06	5,00	2,738736083E-06	5,00
32	8,555297795E-08	5,00	8,554752011E-08	5,00	8,554751464E-08	5,00
64	2,672889679E-09	5,00	2,672849317E-09	5,00	2,672849307E-09	5,00
128	8,344420226E-11		8,344389199E-11		8,344389197E-11	

Tabelle 4.4: SYMMscher Operator, $f(x) = \cos(2\pi x)$, nichtoptimaler Knoten

4.3 Elliptische Operatoren mit konstanten Koeffizienten

In diesem Abschnitt soll das Qualokationsverfahren auf Gleichungen $Lu = f$ angewendet werden, bei denen der Pseudodifferentialoperator L die allgemeinere Gestalt

$$L := b_+L_+ + b_-L_- + K,$$

mit $b_+, b_- \in \mathcal{C}$ und $b_+ \neq \pm b_-$,

hat (vgl. Kapitel 1).

Als Beispiel soll (wie in [37, 38]) eine Linearkombination des (geraden) identischen Operators mit dem (ungeraden) CAUCHY-Operator auf dem Einheitskreis $\Gamma := \{z \in \mathcal{C} \mid |z| = 1\}$ gerechnet werden: Der CAUCHY-Operator C_Γ lässt sich schreiben als $C_\Gamma := H_0 + J_0$, wobei H_0 die HILBERT-Transformation [29]

$$(H_0 u)(t) := \frac{1}{i} \text{p.v.} \int_0^1 \cot(\pi(s-t)) u(s) ds$$

für eine 1-periodische Funktion u ist (das Integral ist wegen der Singularität des Integranden für $s = t$ als **CAUCHY-Hauptwert** (CAUCHY principal value) zu interpretieren (vgl. z.B. [14], S. 234 ff. oder [29], S.106 ff.)), und J_0 durch

$$(J_0 u)(t) := \int_0^1 u(s) ds = \hat{u}(0)$$

definiert ist. Somit ergibt sich für den CAUCHY-Operator

$$\begin{aligned} (C_\Gamma u)(t) &= \text{p.v.} \int_0^1 \left(1 + \frac{1}{i} \cot(\pi(s-t))\right) u(s) ds \\ &= \text{p.v.} \int_0^1 \left(1 + \frac{1}{i} \frac{\cos(\pi(s-t))}{\sin(\pi(s-t))}\right) u(s) ds \\ &= \text{p.v.} \int_0^1 \left(1 + \frac{1}{i} \frac{\frac{1}{2}(e^{i\pi(s-t)} + e^{-i\pi(s-t)})}{\frac{1}{2i}(e^{i\pi(s-t)} - e^{-i\pi(s-t)})}\right) u(s) ds \\ &= \text{p.v.} \int_0^1 \frac{2e^{2\pi is}}{e^{2\pi is} - e^{2\pi it}} u(s) ds \quad \left(\begin{array}{l} x := e^{2\pi it}, y := e^{2\pi is} \\ v(e^{2\pi is}) := u(s) \end{array} \right) \\ &= \frac{1}{\pi i} \text{p.v.} \int_\Gamma \frac{v(y)}{y-x} dy, \end{aligned}$$

und für den Operator L dann

$$\begin{aligned} (Lu)(x) &:= b_+u(x) + b_-(C_\Gamma u)(x) \\ &= b_+u(x) + 2b_- \text{p.v.} \int_0^1 \frac{u(s)}{e^{2\pi is} - e^{2\pi ix}} e^{2\pi is} ds, \quad x \in [0, 1]. \end{aligned} \quad (4.4)$$

Die Fourierreihendarstellung ([29], S.154, die Darstellung von $H_0 + J_0$ nach Gleichung (5.55)) lautet

$$(Lu)(x) = b_+ \left(\hat{u}(0) + \sum_{k \neq 0} \hat{u}(k) e^{2\pi i k x} \right) + b_- \left(\hat{u}(0) + \sum_{k \neq 0} \text{sign}(k) \hat{u}(k) e^{2\pi i k x} \right). \quad (4.5)$$

Mithin ist L ein Operator der Ordnung $\beta = 0$ und für die Störung K gilt $K = 0$.

Hat das Qualokationsverfahren mit einer geeigneten Quadraturformel die Zusatzkonvergenzordnung b , so gilt nach Satz 1.2.2 für $s < r - \frac{1}{2}$, $t > \beta + \frac{1}{2}$, $\beta - b \leq s \leq t \leq r$ die Fehlerabschätzung

$$\|u_N - u\|_s \leq ch^{t-s} \|u\|_{t+\max(\beta-s, 0)}. \quad (4.6)$$

Die Lösung u muss also in $H^{t+\max(\beta-s, 0)}$ liegen, damit die Abschätzung erfüllt ist.

Es sei hier noch einmal darauf hingewiesen, dass die zusätzliche Glattheitsbedingung an die Lösung u wegfällt, wenn man die tolerante Version des Qualokationsverfahrens anwendet, also die Quadraturformel auf der rechten Seite von $Q_J^{(N)}((Lu_N)\bar{v}) = Q_J^{(N)}(f\bar{v})$, $\forall v \in S_N^{r'}$, durch das exakte Integral bzw. eine hinreichend genaue Approximation des Integrals (z.B. durch eine GAUSS-Quadraturformel) ersetzt ([41, 42]).

Zur Stabilität: Es seien r und r' von gleicher Parität, falls L stark elliptisch ist, bzw. von verschiedener Parität, falls L ungerade elliptisch ist, und $r' \geq b$. Dann ist das Qualokationsverfahren nach Schneider [32] stabil, falls die Quadraturformel Q_J

- offen und $r' + J$ gerade ist, oder
- abgeschlossen und $r' + J$ ungerade ist.

Für $r' > b$ sind die Bedingungen sogar notwendig für die Stabilität des Verfahrens. (Offene Quadraturformeln werden in [37, 38] als $g_{J,b,\alpha}$ und $G_{J,b,\alpha}$ bezeichnet, die abgeschlossenen Formeln als $l_{J,b,\alpha}$ und $L_{J,b,\alpha}$).

Die unbewiesene Vermutung, dass das Verfahren für $r' = b$ immer stabil ist, wird durch die numerischen Tests bestärkt.

4.3.1 Stark elliptischer Operator

Als erstes Testbeispiel wird der Operator L aus (4.4) mit $b_+ = 3$ und $b_- = 1$ betrachtet; L ist also stark elliptisch, aber nicht ungerade elliptisch ([37], Lemma 1), da $b_- = \frac{1}{3}b_+$ ist. Nach [37], Theorem 3, sind r und r' von gleicher Parität zu wählen, wir setzen $r = 3$ und $r' = 1$ und verwenden (wegen $r - \beta = 3$) als Basis-Quadraturformel Q_J die 2-Punkt-Formeln $l_{2,1,3}$ und $g_{2,1,3}$ (siehe [37], S. 471), mit welchen das Verfahren Zusatzkonvergenzordnung $b = 1$ besitzt, sofern es stabil ist.

In diesem Fall erhält man mit $s = \beta - b = -1$ und $t = r = 3$ aus (4.6)

$$\|u_N - u\|_{-1} \leq c \cdot h^4 \|u\|_4,$$

also muss die Lösung u bzw. die Inhomogenität f (weil $L : H^t \mapsto H^t$, $\beta = 0$) zumindest in H^4 liegen. In der L_2 -Norm ist (mit $s = 0$, $t = 3$)

$$\|u_N - u\|_0 \leq c \cdot h^3 \|u\|_3,$$

zu erwarten.

Wegen $r' = 1$ und $J = 2$ ist das Verfahren mit der abgeschlossenen Quadraturformel $l_{2,1,3}$ nach [32] stabil. Die Fehler und geschätzten Konvergenzordnungen mit der Inhomogenität $f(x) = \cos(2\pi x)$ sind in Tabelle 4.5 angegeben. Diese Werte entsprechen den o.a. theoretischen Ergebnissen. Wie schon bei den Beispielen mit einfachen Operatoren ist die Konvergenzordnung in SOBOLEV-Normen mit kleinerem Index als $\beta - b$ nicht größer als $r - \beta + b$.

N	$s = 0$		$s = -1$		$s = -2$	
	$\ u - u_N\ _s$	EOC	$\ u - u_N\ _s$	EOC	$\ u - u_N\ _s$	EOC
4	1,315564821E-02	3,63	4,421411054E-03	4,88	1,653895417E-03	6,00
8	1,065111516E-03	3,25	1,505589300E-04	4,34	2,579100225E-05	4,16
16	1,115906230E-04	3,11	7,435493132E-06	4,12	1,446271197E-06	3,64
32	1,295085429E-05	3,05	4,273435413E-07	4,04	1,157170069E-07	3,82
64	1,566355092E-06	3,03	2,591024733E-08	4,02	8,214469946E-09	3,92
128	1,923890681E-07		1,597161316E-09		5,436291021E-10	
N	$s = -3$		$s = -4$		$s = -5$	
	$\ u - u_N\ _s$	EOC	$\ u - u_N\ _s$	EOC	$\ u - u_N\ _s$	EOC
4	9,352467259E-04	5,97	8,174360615E-04	5,80	8,032860524E-04	5,78
8	1,492669704E-05	3,45	1,462372940E-05	3,42	1,461751170E-05	3,42
16	1,363919755E-06	3,57	1,363548443E-06	3,57	1,363546812E-06	3,57
32	1,149675634E-07	3,81	1,149667924E-07	3,81	1,149667916E-07	3,81
64	8,205322484E-09	3,92	8,205320201E-09	3,92	8,205320201E-09	3,92
128	5,435015464E-10		5,435015385E-10		5,435015385E-10	

Tabelle 4.5: L stark elliptisch, $r' = b = 1$, $r = 3$, $l_{2,1,3}$, $f(x) = \cos(2\pi x)$

Um die Vermutung, dass das Verfahren für $r' = b$ immer stabil ist, numerisch zu überprüfen, wurde dasselbe Beispiel noch mit der offenen Quadraturformel $g_{2,1,3}$ gerechnet, welche für $r' > b$ instabil ist. Tatsächlich liefert das Qualokationsverfahren auch in diesem Fall die theoretisch zu erwartenden Ergebnisse (siehe Tabelle 4.6).

N	$s = 0$		$s = -1$		$s = -2$	
	$\ u - u_N\ _s$	EOC	$\ u - u_N\ _s$	EOC	$\ u - u_N\ _s$	EOC
4	1,293246198E-02		4,627905752E-03		2,334723764E-03	
8	1,068069633E-03	3,60	1,772672651E-04	4,71	9,731334224E-05	4,58
16	1,117278895E-04	3,26	9,348968768E-06	4,24	5,849334632E-06	4,06
32	1,295554359E-05	3,11	5,525043802E-07	4,08	3,688227096E-07	3,99
64	1,566506299E-06	3,05	3,385373594E-08	4,03	2,328545233E-08	3,99
128	1,923938338E-07	3,03	2,094191774E-09	4,01	1,459536768E-09	4,00
N	$s = -3$		$s = -4$		$s = -5$	
	$\ u - u_N\ _s$	EOC	$\ u - u_N\ _s$	EOC	$\ u - u_N\ _s$	EOC
4	1,919416266E-03		1,867646224E-03		1,861807642E-03	
8	9,501847337E-05	4,34	9,497145706E-05	4,30	9,497050202E-05	4,29
16	5,829521446E-06	4,03	5,829434593E-06	4,03	5,829434211E-06	4,03
32	3,685882626E-07	3,98	3,685880221E-07	3,98	3,685880218E-07	3,98
64	2,328222694E-08	3,98	2,328222613E-08	3,98	2,328222613E-08	3,98
128	1,459489262E-09	4,00	1,459489259E-09	4,00	1,459489259E-09	4,00

Tabelle 4.6: L stark elliptisch, $r' = b = 1$, $r = 3$, $g_{2,1,3}$, $f(x) = \cos(2\pi x)$

4.3.2 Ungerade elliptischer Operator

In diesem Abschnitt wird das Qualokationsverfahren auf eine Gleichung mit dem Operator (4.4) bzw. (4.5) mit $b_+ = 1$ und $b_- = 3$ angewandt, so dass der Operator ungerade elliptisch (aber nicht stark elliptisch) ist und die Ordnung $\beta = 0$ hat. Wiederum nach [37], Theorem 3, sind r und r' von verschiedener Parität zu wählen. In den ersten beiden Beispielen wird $r = 4$ und $r' = 1$ gesetzt, also ist $r - \beta = 4$. Als Basis-Quadraturformel werden die abgeschlossene Zwei-Punkt-Formel $l_{2,1,4}$ und die offene Zwei-Punkt-Formel $g_{2,1,4}$ verwendet, mit welchen das Verfahren Zusatzkonvergenzordnung $b = 1$ besitzt, falls es stabil ist.

Nach (4.6) gelten für ein stabiles Qualokationsverfahren die Fehlerabschätzungen

$$\begin{aligned}\|u_N - u\|_{-1} &\leq c \cdot h^5 \|u\|_5, \\ \|u_N - u\|_0 &\leq c \cdot h^4 \|u\|_4.\end{aligned}$$

Wie man in der Tabelle 4.7 sieht, werden auch hier in SOBOLEV-Normen mit kleinerem Index als $\beta - b = -1$ keine höheren Konvergenzordnungen erzielt.

N	$s = 0$		$s = -1$		$s = -2$	
	$\ u - u_N\ _s$	EOC	$\ u - u_N\ _s$	EOC	$\ u - u_N\ _s$	EOC
4	4,384650988E-03	4,87	1,493098034E-03	6,13	5,902864939E-04	7,30
8	1,498954886E-04	4,36	2,136892498E-05	5,46	3,751626182E-06	5,98
16	7,309654889E-06	4,15	4,847446269E-07	5,17	5,957121448E-08	4,36
32	4,116021326E-07	4,07	1,346331191E-08	5,06	2,893587206E-09	4,69
64	2,458038287E-08	4,03	4,034341300E-10	5,02	1,118940138E-10	4,87
128	1,505520271E-09	4,00	1,240925114E-11	5,00	3,832363634E-12	5,01
256	9,426595610E-11		3,876854366E-13		1,185301729E-13	
N	$s = -3$		$s = -4$		$s = -5$	
	$\ u - u_N\ _s$	EOC	$\ u - u_N\ _s$	EOC	$\ u - u_N\ _s$	EOC
4	3,737750934E-04	7,37	3,413577459E-04	7,26	3,375642455E-04	7,25
8	2,262316829E-06	5,49	2,221753056E-06	5,46	2,220919974E-06	5,46
16	5,035835645E-08	4,14	5,031417398E-08	4,14	5,031397935E-08	4,14
32	2,862788368E-09	4,68	2,862756552E-09	4,68	2,862756519E-09	4,68
64	1,117264455E-10	4,87	1,117264036E-10	4,87	1,117264036E-10	4,87
128	3,831243602E-12	5,01	3,831243533E-12	5,01	3,831243533E-12	5,01
256	1,185213594E-13		1,185213593E-13		1,185213593E-13	

Tabelle 4.7: L ungerade elliptisch, $r' = b = 1$, $r = 4$, $l_{2,1,4}$, $f(x) = \cos(2\pi x)$

Nach [32] ist das Verfahren mit der *geschlossenen* Quadraturformel stabil, da $r' + J = 1 + 2 = 3$ ungerade ist. Die Ergebnisse der Rechnung mit der *offenen* Formel (die für $r' > b$ erwiesenermaßen instabil ist) untermauern abermals die Vermutung, dass das Qualokationsverfahren für $r' = b$ stets stabil ist (siehe Tabelle 4.8).

N	$s = 0$		$s = -1$		$s = -2$	
	$\ u - u_N\ _s$	EOC	$\ u - u_N\ _s$	EOC	$\ u - u_N\ _s$	EOC
4	4,365754966E-03	4,86	1,542476573E-03	5,98	7,302664195E-04	5,86
8	1,503469642E-04	4,36	2,448501160E-05	5,34	1,253428007E-05	5,10
16	7,318508870E-06	4,15	6,041028843E-07	5,11	3,653951691E-07	4,99
32	4,117527705E-07	4,07	1,747368152E-08	5,04	1,150833032E-08	4,98
64	2,458282529E-08	4,03	5,318273794E-10	5,02	3,641449376E-10	5,01
128	1,505557983E-09		1,635672027E-11		1,132430109E-11	
N	$s = -3$		$s = -4$		$s = -5$	
	$\ u - u_N\ _s$	EOC	$\ u - u_N\ _s$	EOC	$\ u - u_N\ _s$	EOC
4	5,730977627E-04	5,56	5,528920703E-04	5,51	5,506015539E-04	5,50
8	1,217187654E-05	5,06	1,216440502E-05	5,06	1,216425294E-05	5,06
16	3,640066933E-07	4,98	3,640005835E-07	4,98	3,640005566E-07	4,98
32	1,150062508E-08	4,98	1,150061716E-08	4,98	1,150061715E-08	4,98
64	3,640934824E-10	5,01	3,640934695E-10	5,01	3,640934695E-10	5,01
128	1,132392210E-11		1,132392207E-11		1,132392207E-11	

Tabelle 4.8: L ungerade elliptisch, $r' = b = 1$, $r = 4$, $g_{2,1,4}$, $f(x) = \cos(2\pi x)$

Als drittes Beispiel (Tabelle 4.9) wird derselbe Operator wie oben behandelt, jedoch mit $r' = 2$, $r = 3$ und der Quadraturformel $g_{2,1,3}$ (weil $r - \beta = 3$). Da r um eins geringer als in den beiden vorangehenden Beispielen ist, ist die Konvergenzordnung jeweils um eins geringer, also 3 in der $H^0 = L_2$ -Norm, und 4 in der H^{-1} -Norm. In den Räumen H^s , $s < -1$, bleibt die Konvergenzordnung erwartungsgemäß bei 4. Die Stabilität des Verfahrens ist nach [32] garantiert, da $r' + J$ gerade und die Quadraturformel offen ist.

N	$s = 0$		$s = -1$		$s = -2$	
	$\ u - u_N\ _s$	EOC	$\ u - u_N\ _s$	EOC	$\ u - u_N\ _s$	EOC
4	1,312009965E-02	3,62	4,349151887E-03	4,86	1,461142074E-03	6,10
8	1,065114636E-03	3,25	1,498631470E-04	4,36	2,125704022E-05	5,42
16	1,115831529E-04	3,11	7,310364158E-06	4,15	4,957809096E-07	4,86
32	1,295035463E-05	3,05	4,117340054E-07	4,07	1,710721448E-08	4,26
64	1,566333852E-06	3,03	2,458976945E-08	4,03	8,906883790E-10	4,02
128	1,923883082E-07		1,502801454E-09		5,495935390E-11	
N	$s = -3$		$s = -4$		$s = -5$	
	$\ u - u_N\ _s$	EOC	$\ u - u_N\ _s$	EOC	$\ u - u_N\ _s$	EOC
4	5,272160917E-04	7,43	2,681115946E-04	8,64	2,213511954E-04	8,74
8	3,066899764E-06	4,68	6,717891310E-07	2,54	5,190873160E-07	2,17
16	1,198836103E-07	3,45	1,155825391E-07	3,40	1,155632962E-07	3,40
32	1,094402023E-08	3,77	1,093591751E-08	3,77	1,093590919E-08	3,77
64	8,019515911E-10	3,90	8,019282340E-10	3,90	8,019282282E-10	3,90
128	5,368296616E-11		5,368288657E-11		5,368288657E-11	

Tabelle 4.9: L ungerade elliptisch, $r' = 2$, $b = 1$, $r = 3$, $g_{2,1,3}$, $f(x) = \cos(2\pi x)$

4.4 Glattheit der Lösung

Damit das Qualokationsverfahren die Fehlerabschätzungen in 1.2.2 erfüllt, muss die Lösung u der behandelten Gleichung eine (im Vergleich zum PETROV-GALERKIN-Verfahren) zusätzliche Glattheitsbedingung erfüllen.

Für das PETROV-GALERKIN-Verfahren (mit S_N^r und $S_N^{r'}$ als Verfahrens- und Testraum) gilt für $\beta - r' \leq s \leq t \leq r$ nach [27] die Abschätzung

$$\|u_N - u\|_s \leq c h^{t-s} \|u\|_t,$$

falls $u \in H^t$ ist, also

$$\|u_N - u\|_{\beta-r'} \leq c h^{r-\beta+r'} \|u\|_r,$$

für $u \in H^r$, wogegen die höchste Konvergenzordnung beim (gewöhnlichen) Qualokationsverfahren in der $(\beta-b)$ -Norm nur erreicht wird, wenn u eine höhere Glattheit hat (beachte i. Allg. ist $b \leq r'$):

$$\|u_N - u\|_{\beta-b} \leq c h^{r-\beta+b} \|u\|_{r+b}, \text{ falls } u \in H^{r+b}.$$

Um zu überprüfen, dass diese Glattheitsbedingung tatsächlich notwendig ist, wird als Testbeispiel noch einmal der stark elliptische SYMMsche Operator der Ordnung $\beta = -1$ (siehe 4.2) behandelt.

Als Inhomogenität wird die Funktion

$$f(x) = \left(x - \frac{1}{\pi}\right)^{3/2} e^{-\frac{1}{x}} e^{-\frac{1}{x-1}}, \quad x \in [0, 1],$$

verwendet, für welche $f \in H^{2-\varepsilon}$ für $\varepsilon > 0$, aber $f \notin H^2$ gilt. Da der Operator die Ordnung -1 hat, gilt für die Lösung u der Gleichung $u \in H^{1-\varepsilon}$. Für stark elliptische Operatoren müssen r und r' gleiche Parität besitzen, daher wird $r = 4$ und $r' = 2$ gewählt. Als Referenzlösung dient hier die Näherungslösung u_{1024} .

Nach [32] ist das Verfahren mit der Quadraturformel $g_{2,1,5}$ stabil und hat die Zusatzkonvergenzordnung $b = 1$.

Da $\beta = -1$ ist, ergibt sich theoretisch nach Formel (4.3) für die L^2 -Norm die Fehlerabschätzung ($s = 0, \max((\beta - s), 0) = 0$)

$$\|u_N - u\|_0 \leq ch^{1-\varepsilon} \|u\|_{1-\varepsilon}$$

für $t = 1 - \varepsilon$, da $u \in H^{1-\varepsilon}$ ist. (Für eine Inhomogenität $f \in H^5$, also einer Lösung $u \in H^4$, wäre die Konvergenzordnung 4 in der L^2 -Norm zu erwarten). Entsprechend erhält man mit $s = -1$ und $\max(\beta - s, 0) = 0$ in der (-1) -Norm

$$\|u_N - u\|_{-1} \leq ch^{2-\varepsilon} \|u\|_{1-\varepsilon}$$

für $t = 1 - \varepsilon$.

Die Quotienten in Tabelle 4.10 geben keinen deutlichen Aufschluss über die Konvergenzordnung, da die Lösung der Gleichung nicht glatt genug ist.

N	s = 0		s = -1		s = -2	
	$\ u - u_N\ _s$	EOC	$\ u - u_N\ _s$	EOC	$\ u - u_N\ _s$	EOC
4	8.257249063E-04		3.947425203E-04		1.940917700E-04	
8	1.424902368E-04	2.53	3.275125991E-05	3.59	7.912595590E-06	4.62
16	2.710982478E-05	2.39	2.592626569E-06	3.66	2.872651883E-07	4.78
32	1.224688814E-05	1.15	5.654211432E-07	2.20	3.526117835E-08	3.03
64	6.972064956E-06	0.81	1.710178425E-07	1.73	4.967281711E-09	2.83
128	3.003579219E-06	1.21	3.465217718E-08	2.30	1.057747896E-09	2.23
256	1.784500959E-06	0.75	1.108762060E-08	1.64	1.523882469E-10	2.80

Tabelle 4.10: SYMMscher Operator, $r = 4, r' = 2, g_{2,1,5}, f(x) = \left(x - \frac{1}{\pi}\right)^{3/2} e^{-\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{1-x}\right)}$

In der Tabelle 4.11 sind die Fehler in den SOBOLEV-Normen $0, -1$ und -2 jeweils geteilt durch verschiedene h -Potenzen angegeben. Aus diesen Werten kann man die Konvergenzordnungen ablesen:

Die erste Spalte bestätigt die lineare Konvergenz in der 0 -Norm, die zweite Spalte lässt quadratische Konvergenz in der (-1) -Norm vermuten. Die dritte bis fünfte Spalte deuten auf eine Konvergenz in der $\beta - b = (-2)$ -Norm hin, die zwischen 2 und 3 liegt. Die Formel (4.3) liefert in der (-2) -Norm die Fehlerabschätzung

$$\|u_N - u\|_{-2} \leq ch^{2-\varepsilon} \|u\|_{1-\varepsilon},$$

wie in der (-1) -Norm. Tatsächlich liegt die numerisch ermittelte Konvergenzordnung höher, was sich nicht mehr mit der Formel (4.3) erklären lässt. Das Verfahren verhält sich in diesem Fall wie das tolerante Verfahren.

Numerische Tests mit anderen Funktionen f führten zu ähnlichen Resultaten. Die Notwendigkeit der Glattheitsforderung für das klassische (nicht-tolerante) Qulokationsverfahren kann durch diese numerischen Ergebnisse also nicht bestätigt werden.

N	$\frac{\ u-u_N\ _0}{(1/N)}$	$\frac{\ u-u_N\ _{-1}}{(1/N)^2}$	$\frac{\ u-u_N\ _{-2}}{(1/N)^2}$	$\frac{\ u-u_N\ _{-2}}{(1/N)^3}$	$\frac{\ u-u_N\ _{-2}}{(1/N)^4}$	$\frac{\ u-u_N\ _{-3}}{(1/N)^4}$
4	3.3029E-03	6.3159E-03	3.1055E-03	1.2422E-02	4.9687E-02	2.4758E-02
8	1.1399E-03	2.0961E-03	5.0641E-04	4.0512E-03	3.2410E-02	8.3084E-03
16	4.3376E-04	6.6371E-04	7.3540E-05	1.1766E-03	1.8826E-02	2.9615E-03
32	3.9190E-04	5.7899E-04	3.6107E-05	1.1554E-03	3.6974E-02	1.6070E-02
64	4.4621E-04	7.0049E-04	2.0346E-05	1.3021E-03	8.3337E-02	1.7277E-02
128	3.8446E-04	5.6774E-04	1.7330E-05	2.2183E-03	2.8394E-01	2.1948E-01
256	4.5683E-04	7.2664E-04	9.9869E-06	2.5567E-03	6.5450E-01	4.8318E-01

Tabelle 4.11: Fehlernormen für den SYMMschen Operator, $f(x) = (x - \frac{1}{\pi})^{3/2} e^{-(\frac{1}{x} + \frac{1}{1-x})}$

4.5 Variable Koeffizienten

Schließlich soll das Qualokationsverfahren auf eine Gleichung mit variablen Koeffizienten angewendet werden. Der Operator sei gegeben durch (vgl. (4.4))

$$\begin{aligned} (Lu)(x) &:= b_+(x)u(x) + b_-(x)(C_\Gamma u)(x) \\ &= b_+(x)u(x) + 2b_-(x) \text{ p.v. } \int_0^1 \frac{u(s)}{e^{2\pi i s} - e^{2\pi i x}} e^{2\pi i s} ds, \quad x \in [0, 1], \end{aligned} \quad (4.7)$$

mit $b_+(x) := 3 + \sin(2\pi x)$ und $b_-(x) := 1$. Der Operator L ist also gleichmäßig stark elliptisch und hat die Ordnung $\beta = 0$.

Damit das Qualokationsverfahren bei Anwendung auf Operatorgleichungen mit variablen Koeffizienten eine positive Zusatzkonvergenzordnung besitzt, ist es notwendig, dass die Quadraturformel zusätzlich zu den Bedingungen für konstante Koeffizienten, nämlich der Exaktheit auf dem Funktionensystem (1.27), noch einen polynomialen Exaktheitsgrad hat. Solche Formeln sind in [37] mit Großbuchstaben $G_{J,b,\alpha}$ bzw. $L_{J,b,\alpha}$ bezeichnet. Desweiteren ist $r' \geq 2$ und $r - \beta > 1$ erforderlich.

Im numerischen Beispiel, dessen Ergebnisse in Tabelle 4.12 stehen, wird das Qualokationsverfahren mit $r = 2$, $r' = 2$ und der geschlossenen Quadraturformel $L_{2,1,2}$ (also $b = 1$) für die o.a. Gleichung mit der Inhomogenität $f(x) = \cos(2\pi x)$ gerechnet. Das Verfahren ist nach [32] stabil. In der 0-Norm ist theoretisch die Konvergenzordnung $r - \beta = 2$ und in der (-1) -Norm die Konvergenzordnung $r - \beta + b = 3$ zu erwarten. Die numerische Rechnung liefert dieselben Ergebnisse, und auch hier wird in SOBOLEV-Normen mit kleinerem Index als -1 keine höhere Konvergenzordnung als 3 erzielt.

N	$s = 0$		$s = -1$		$s = -2$	
	$\ u - u_N\ _s$	EOC	$\ u - u_N\ _s$	EOC	$\ u - u_N\ _s$	EOC
4	5,995597599E-02	1,88	2,544591345E-02	3,21	1,263102042E-02	4,64
8	1,628780986E-02	2,27	2,744459042E-03	3,53	5,073178368E-04	4,71
16	3,383600643E-03	2,17	2,375487970E-04	3,29	1,940774229E-05	3,92
32	7,510171688E-04	2,06	2,421477358E-05	3,11	1,283234716E-06	3,27
64	1,801018864E-04	1,97	2,797868568E-06	3,00	1,326201237E-07	3,07
128	4,600383697E-05		3,497903816E-07		1,577642453E-08	
N	$s = -3$		$s = -4$		$s = -5$	
	$\ u - u_N\ _s$	EOC	$\ u - u_N\ _s$	EOC	$\ u - u_N\ _s$	EOC
4	7,930379657E-03	5,67	6,441182449E-03	5,68	6,036842700E-03	5,60
8	1,558214075E-04	4,11	1,259541587E-04	3,82	1,245229852E-04	3,81
16	8,993320934E-06	3,18	8,895777780E-06	3,16	8,893454601E-06	3,16
32	9,949738739E-07	3,01	9,925071600E-07	3,01	9,919855160E-07	3,01
64	1,234281582E-07	3,01	1,230674768E-07	3,01	1,229788610E-07	3,01
128	1,532721901E-08		1,527605595E-08		1,526341712E-08	

Tabelle 4.12: Stark elliptischer Operator mit variablen Koeffizienten, $r = 2$, $r' = 2$, $G_{2,1,2}$, $f(x) = \cos(2\pi x)$

Anhang A

Periodische Splineräume

Als Verfahrens- und Testräume der Spline-Methoden für Randintegralgleichungen auf glatten Kurven dienen die Räume S_N^r der glatten 1-periodischen Splines der Ordnung $r \geq 1$ auf einem äquidistanten Gitter

$$\{x_k = k/N, k = 0(1)N\}, \quad N \in \mathbb{N}.$$

Sie sind definiert durch

$$\begin{aligned} S_N^1 &:= \{s|_{[x_{j-1}, x_j]} = \text{const}, j = 1(1)N\}, \quad \text{und} \\ S_N^r &:= \{s \in C_{\text{per}}^{r-2}[0, 1] \mid s|_{[x_{j-1}, x_j]} \in \Pi_{r-1}, j = 1(1)N\}, \quad r \geq 2. \end{aligned}$$

Der Raum S_N^r hat für alle $r \in \mathbb{N}$ die Dimension N : Für $r = 1$ sieht man dies sofort ein. Für $r \geq 2$ hat man pro Intervall $[x_{j-1}, x_j]$, $j = 1(1)N$, wegen $s|_{[x_{j-1}, x_j]} \in \Pi_{r-1}$ je r freie Parameter, also insgesamt $r \cdot N$ Freiheitsgrade. In den N Punkten x_0, x_1, \dots, x_{N-1} sind durch $s \in C_{\text{per}}^{r-2}[0, 1]$ je $r - 1$ Bedingungen vorgegeben (durch die 1-Periodizität ist für die Randpunkte natürlich

$$s^{(k)}(x_0) = s^{(k)}(x_N), \quad k = 0(1)r - 2$$

gefordert), also insgesamt $(r - 1) \cdot N$ Bedingungen. Das ergibt $rN - (r - 1)N = N$ übrige Freiheitsgrade, also ist S_N^r ein N -dimensionaler Raum.

Für die numerischen Berechnungen in Kapitel 4 werden als Basisfunktionen der Splineräume die 1-periodischen B-Splines auf $[0, 1]$ verwendet. Diese lassen sich wie folgt definieren ([10]): Mit der 1-periodischen charakteristischen Funktion χ , die auf $[0, 1)$ durch

$$\chi(x) := \begin{cases} 1 & x \in (0, h), \\ \frac{1}{2} & x \in \{0, h\}, \\ 0 & x \in (h, 1), \end{cases} \quad h := \frac{1}{N},$$

(und auf \mathbb{R} durch periodische Fortsetzung) gegeben ist, definiert man die B-Splines der Ordnung $r = 1$ durch

$$b_j^{(1)}(x) := \chi(x - (j - 1)h), \quad j = 1(1)N,$$

(mit Träger $[(j - 1)h, jh]$), und allgemein die B-Splines der Ordnung $r \in \mathbb{N}$ durch die Faltung

$$b_1^{(r)}(x) := \frac{1}{h^{r-1}} \underbrace{(\chi * \chi * \dots * \chi)}_r(x), \quad (\text{A.2})$$

und die Translation

$$b_j^{(r)}(x) := b_1^{(r)}(x - (j-1)h), \quad j = 1(1)N. \quad (\text{A.3})$$

Die Fourierkoeffizienten der B-Splines ergeben sich dann wie folgt:

$$\widehat{b_j^{(r)}}(0) = \int_{(j-1)h}^{jh} 1 \cdot e^0 = h = \frac{1}{N}, \quad j = 1(1)N, \quad r \in \mathbf{N}.$$

Desweiteren ist für $k \in \mathbf{Z} \setminus \{0\}$

$$\begin{aligned} \widehat{b_j^{(1)}}(k) &= \int_{(j-1)h}^{jh} e^{-2\pi i k x} dx = \int_{(j-1)h}^{jh} \cos(2\pi k x) dx - i \int_{(j-1)h}^{jh} \sin(2\pi k x) dx \\ &= \frac{1}{2\pi k} (\sin(2\pi k j h) - \sin(2\pi k (j-1)h)) \\ &\quad + i (\cos(2\pi k j h) - \cos(2\pi k (j-1)h)), \quad j = 1(1)N. \end{aligned}$$

Zusammen mit (A.2) und (A.3) erhält man dann allgemein

$$\widehat{b_j^{(r)}}(k) \stackrel{(\text{A.3})}{=} e^{-2\pi i k (j-1)h} \widehat{b_1^{(r)}}(k) \stackrel{(\text{A.2})}{=} \frac{e^{-2\pi i k (j-1)h}}{h^{r-1}} \left(\widehat{b_1^{(1)}}(k) \right)^r, \quad (\text{A.4})$$

für $j = 1(1)N$, $r \in \mathbf{N}$, $k \in \mathbf{Z} \setminus \{0\}$.

Anmerkung: Die hier gewählte Basis von S_N^r ist für die theoretische Analyse des Verfahrens in [10, 37, 38] ungeeignet, dort wird eine modifizierte Basis verwendet (vgl. (A.3)):

$$\psi_\mu = \text{sinc}(\pi \mu h)^{-r} e^{\pi i \mu h r} \sum_{k=1}^N e^{2\pi i \mu k h} b_k^{(r)}, \quad \mu \in \Lambda_N := \left\{ k \in \mathbf{Z} \mid -\frac{N}{2} < k \leq \frac{N}{2} \right\}.$$

Diese Basisfunktionen haben den Vorteil, dass sie sich ähnlich wie die Funktionen $e^{2\pi i k x}$, $k \in \mathbf{Z}$, verhalten. Sie erfüllen beispielsweise die Translationsbedingung (siehe [10], (2.14)-(2.15))

$$\psi_\mu(x + k h) = e^{2\pi i \mu k h} \psi_\mu(x), \quad \mu \in \Lambda_N, \quad k \in \mathbf{Z}.$$

Anhang B

Darstellung des Polylogarithmus

Es wird die Formel (2.18) bewiesen. Die entsprechende Reihe für $\text{Li}_\alpha(e^w)$ erhält man durch Anwendung der MELLIN-Transformation auf die Funktion $\text{Li}_\alpha(e^{-u})$, $u \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Die MELLIN-Transformation einer Funktion f ist definiert durch (siehe [13], S.305)

$$g(z) = \mathfrak{M}(f(u); z) := \int_0^\infty f(u) u^{z-1} du, \quad z \in \mathbb{C}.$$

Die inverse MELLIN-Transformation von $g(z)$ lautet

$$f(u) = \mathfrak{M}^{-1}(g(z); u) := \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} g(z) u^{-z} dz. \quad (\text{B.1})$$

Es ist (vgl. 2.15)

$$\text{Li}_\alpha(e^{-u}) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty \frac{t^{\alpha-1}}{e^{t+u} - 1} dt.$$

Anwendung der MELLIN-Transformation auf $\text{Li}_\alpha(e^{-u})$, $u \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, liefert

$$\mathfrak{M}(\text{Li}_\alpha(e^{-u}); z) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{t^{\alpha-1} u^{z-1}}{e^{t+u} - 1} dt du.$$

Durch die Variablentransformation $t = \psi(r, s) = r(1-s)$, $u = \varphi(r, s) = rs$, $(0, \infty) \times (0, 1) \xrightarrow{(\varphi, \psi)} (0, \infty) \times (0, \infty)$ mit

$$\left| \frac{\partial(\varphi, \psi)}{\partial(r, s)} \right| := \begin{vmatrix} \varphi_r & \psi_r \\ \varphi_s & \psi_s \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} s & 1-s \\ r & -r \end{vmatrix} = -rs - r(1-s) = -r \neq 0$$

erhält man ([8], 3.1.10.3.)

$$\begin{aligned}
\mathfrak{M}(\text{Li}_\alpha(e^{-u}); z) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty \int_0^1 \frac{(r(1-s))^{\alpha-1} (rs)^{z-1}}{e^r - 1} r \, ds \, dr \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 (1-s)^{\alpha-1} s^{z-1} \, ds \int_0^\infty \frac{r^{\alpha+z-1}}{e^r - 1} \, dr \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \text{B}(\alpha, z) \Gamma(\alpha + z) \zeta(\alpha + z),
\end{aligned}$$

wobei die letzte Gleichung nach [12], 1.5(1) und 1.12(4) gilt.
Für die beta-Funktion B gilt nach [12], 1.5(5)

$$\text{B}(\alpha, z) = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(z)}{\Gamma(\alpha + z)},$$

somit ist

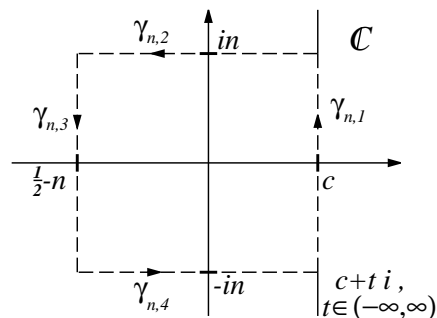
$$\mathfrak{M}(\text{Li}_\alpha(e^{-u}); z) = \Gamma(z) \zeta(\alpha + z). \quad (\text{B.2})$$

Man erhält die ursprüngliche Funktion $\text{Li}_\alpha(e^{-u})$ durch Anwendung der inversen MELLIN-Transformation (B.1) auf (B.2):

$$\text{Li}_\alpha(e^{-u}) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \Gamma(z) \zeta(\alpha + z) u^{-z} \, dz, \quad (\text{B.3})$$

wobei $c > \max\{0, 1 - \alpha\}$ rechts der Pole des Integranden in $z \in \{1 - \alpha, 0, -1, -2, \dots\}$ liege. Dieses Kurvenintegral bestimmen wir mit Hilfe des Residuensatzes. Hierzu definieren wir die Kurve $\gamma_n = \gamma_{n,1} + \gamma_{n,2} + \gamma_{n,3} + \gamma_{n,4}$ für $n \geq 2$ durch

$$\begin{aligned}
\gamma_{n,1}(t) &:= c + itn, \quad t \in [-1, 1], \\
\gamma_{n,2}(t) &:= c - t(c - \frac{1}{2} + n) + in, \quad t \in [0, 1], \\
\gamma_{n,3}(t) &:= \frac{1}{2} - n - itn, \quad t \in [-1, 1], \\
\gamma_{n,4}(t) &:= \frac{1}{2} - n + t(c - \frac{1}{2} + n) - in, \quad t \in [0, 1].
\end{aligned}$$



Das Integral über $\gamma_{n,1}$ konvergiert für $n \rightarrow \infty$ gegen das zu bestimmende Integral in (B.3). Wir betrachten nun die Integrale über die Kurven $\gamma_{n,2}$, $\gamma_{n,3}$ und $\gamma_{n,4}$. Für das Kurvenintegral über

$\boxed{\gamma_{n,3}}$ gilt

$$\begin{aligned}
& \left| \int_{\gamma_{n,3}} \Gamma(z) \zeta(\alpha + z) u^{-z} dz \right| & (B.4) \\
= & \left| \int_{-1}^1 \Gamma\left(\frac{1}{2} - n - itn\right) \zeta\left(\alpha + \frac{1}{2} - n - itn\right) u^{-\left(\frac{1}{2} - n - itn\right)} (-i n) dt \right| \\
\leq & 2n \max_{t \in [-1,1]} \underbrace{\left| \Gamma\left(\frac{1}{2} - n - itn\right) \zeta\left(\alpha + \frac{1}{2} - n - itn\right) u^{-\left(\frac{1}{2} - n - itn\right)} \right|}_{=: \mathcal{M}_{1,n}(t)}.
\end{aligned}$$

Diese Terme müssen nun abgeschätzt werden. Es gilt

$$\begin{aligned}
|u^z| &= \left| e^{z \log(u)} \right| = \left| e^{(a+ib)(\ln|u| + i \arg(u))} \right| = \left| e^{a \ln|u| - b \arg(u) + i(b \ln|u| + a \arg(u))} \right| \\
&= e^{a \ln|u| - b \arg(u)} = e^{a \ln|u|}, \quad \text{wobei } z = a + ib, \quad u \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.
\end{aligned} \tag{B.5}$$

Desweiteren ist nach [12], 1.2(7)

$$\begin{aligned}
\Gamma\left(\frac{1}{2} + z\right) \Gamma\left(\frac{1}{2} - z\right) &= \frac{\pi}{\cos(\pi z)} = \pi \sec(\pi z), \quad z \neq \frac{1}{2} + n, \quad n \in \mathbb{Z}, \quad \text{also} \\
\Gamma\left(\frac{1}{2} - z\right) &= \frac{\pi}{\Gamma\left(\frac{1}{2} + z\right) \cos(\pi z)}, \quad z \neq \frac{1}{2} + n, \quad n \in \mathbb{Z},
\end{aligned} \tag{B.6}$$

eine zur Berechnung von $\Gamma(z)$ für $\operatorname{Re}(z) < 0$ geeignete Darstellung. In [22] findet sich die Abschätzung

$$|\Gamma(s + it)| = e^{-\frac{\pi}{2}|t|} |t|^{s-\frac{1}{2}} \left| \sqrt{2\pi} + \varepsilon(t) \right|, \quad \text{wobei} \quad \lim_{|t| \rightarrow \infty} \varepsilon(t) \stackrel{\text{glm.}}{=} 0. \tag{B.7}$$

Außerdem gilt nach [46], S.289 oder [1], §23.2.6 die Formel

$$\begin{aligned}
\pi^s \zeta(1-s) &= 2^{1-s} \Gamma(s) \zeta(s) \cos\left(\frac{1}{2}\pi s\right), \quad s \notin \{1, 0, -1, -2, \dots\}, \quad \text{und daher} \\
\zeta(1-s) &= 2(2\pi)^{-s} \Gamma(s) \zeta(s) \cos\left(\frac{1}{2}\pi s\right), \quad s \notin \{1, 0, -1, -2, \dots\}.
\end{aligned} \tag{B.8}$$

Für $n \gg 1$ ist $\frac{1}{2} - \alpha + n > 1$. Mit (B.8) ist

$$\begin{aligned}
\zeta\left(\underbrace{\alpha + \frac{1}{2} - n - itn}_{1 - \left(\frac{1}{2} - \alpha + n + itn\right)}\right) &= 2(2\pi)^{-\left(\frac{1}{2} - \alpha + n + itn\right)} \Gamma\left(\frac{1}{2} - \alpha + n + itn\right) \\
&\times \zeta\left(\frac{1}{2} - \alpha + n + itn\right) \cos\left(\frac{1}{2}\pi \left(\frac{1}{2} - \alpha + n + itn\right)\right), \quad t \in [-1, 1],
\end{aligned}$$

und wegen (B.6) gilt

$$\Gamma\left(\frac{1}{2} - n - itn\right) = \Gamma\left(\frac{1}{2} - (n + itn)\right) = \frac{\pi}{\Gamma\left(\frac{1}{2} + n + itn\right) \cos(\pi(n + itn))},$$

für $t \in [-1, 1]$. Also ist

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}_{1,n}(t) &= \left| \Gamma\left(\frac{1}{2} - n - itn\right) \zeta\left(\alpha + \frac{1}{2} - n - itn\right) u^{-\left(\frac{1}{2} - n - itn\right)} \right| & (B.9) \\
&= \left| \frac{\pi}{\Gamma\left(\frac{1}{2} + n + itn\right) \cos(\pi(n + itn))} \cdot 2(2\pi)^{-\left(\frac{1}{2} - \alpha + n + itn\right)} \Gamma\left(\frac{1}{2} - \alpha + n + itn\right) \right| \\
&\quad \times \left| \zeta\left(\frac{1}{2} - \alpha + n + itn\right) \cos\left(\frac{1}{2}\pi\left(\frac{1}{2} - \alpha + n + itn\right)\right) \right| \cdot e^{(n - \frac{1}{2}) \ln|u|} \\
&= \underbrace{\left| (2\pi)^{\frac{1}{2} + \alpha - n - itn} \right|}_{=e^{\left(\frac{1}{2} + \alpha - n\right) \ln(2\pi)}} e^{(n - \frac{1}{2}) \ln|u|} \underbrace{\left| \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2} - \alpha + n + itn\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2} + n + itn\right)} \right|}_{=:T_{1,n}(t)} \\
&\quad \times \underbrace{\left| \frac{\cos\left(\frac{1}{2}\pi\left(\frac{1}{2} - \alpha + n + itn\right)\right)}{\cos(\pi(n + itn))} \right|}_{=:T_{2,n}(t)} \underbrace{\left| \zeta\left(\frac{1}{2} - \alpha + n + itn\right) \right|}_{\leq \zeta\left(\frac{1}{2} - \alpha + n\right) < 2, n \gg 1} \\
&\leq 2 \underbrace{e^{\left(\frac{1}{2} + \alpha\right) \ln(2\pi) - \frac{1}{2} \ln|u|}}_{= \text{const}} e^{-n(\ln(2\pi) - \ln|u|)} T_{1,n}(t) T_{2,n}(t), \quad n \gg 1, \quad t \in [-1, 1],
\end{aligned}$$

da $\frac{1}{2} - \alpha + n > 1$ für hinreichend großes n und $|\zeta(z)| \leq \zeta(\operatorname{Re}(z))$ für $\operatorname{Re}(z) > 1$ ist ([40], **1.11**, Theorem 1), und weil $\lim_{x \rightarrow \infty} \zeta(x) = 1$ gilt. Es bleiben die Terme $T_{1,n}(t)$ und $T_{2,n}(t)$ zu betrachten. Für $t = 0$ ist

$$T_{1,n}(0) = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2} - \alpha + n\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2} + n\right)} < 1, \quad n \gg 1,$$

da die Gamma-Funktion für reelles Argument ≥ 2 monoton wachsend ist. Für $t \neq 0$ lässt sich die Formel (B.7) verwenden:

$$\begin{aligned}
T_{1,n}(t) &= \left| \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2} - \alpha + n + itn\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2} + n + itn\right)} \right| \stackrel{(B.7)}{=} \frac{e^{-\frac{\pi}{2}|tn|} |tn|^{\frac{1}{2} - \alpha + n - \frac{1}{2}} |\sqrt{2\pi} + \varepsilon_1(tn)|}{e^{-\frac{\pi}{2}|tn|} |tn|^{\frac{1}{2} + n - \frac{1}{2}} |\sqrt{2\pi} + \varepsilon_2(tn)|} \\
&= |tn|^{-\alpha} \underbrace{\frac{|\sqrt{2\pi} + \varepsilon_1(tn)|}{|\sqrt{2\pi} + \varepsilon_2(tn)|}}_{\leq 2, n \gg 1} \leq 2n^{|\alpha|}, \quad n \gg 1,
\end{aligned}$$

da $\lim_{|x| \rightarrow \infty} \varepsilon_1(x) = \lim_{|x| \rightarrow \infty} \varepsilon_2(x) = 0$ ist.

Somit gilt $T_{1,n}(t) \leq \max(1, 2n^{|\alpha|}) = 2n^{|\alpha|}$ für $t \in [-1, 1]$, $n \gg 1$. Für den zweiten Term gilt mit $|\cos(x + iy)|^2 = \cos(x)^2 + \sinh(y)^2$ ([8], 3.4.4.1.2)

$$\begin{aligned}
T_{2,n}(t)^2 &= \left| \frac{\cos\left(\frac{1}{2}\pi\left(\frac{1}{2} - \alpha + n + itn\right)\right)}{\cos(\pi(n + itn))} \right|^2 \\
&= \frac{\cos^2\left(\frac{1}{2}\pi\left(\frac{1}{2} - \alpha + n\right)\right) + \sinh^2\left(\frac{1}{2}\pi tn\right)}{\cos^2(\pi n) + \sinh^2(\pi tn)} \leq \frac{1 + \sinh^2\left(\frac{1}{2}\pi tn\right)}{1 + \sinh^2(\pi tn)}.
\end{aligned}$$

Für $t = 0$ gilt demnach $T_{2,n}(0) \leq 1$, $n \in \mathbf{N}$. Für $t \neq 0$ gilt

$$\begin{aligned} T_{2,n}(t)^2 &\leq \frac{1 + \sinh^2\left(\frac{1}{2}\pi t n\right)}{1 + \sinh^2(\pi t n)} \leq \frac{1 + \sinh^2\left(\frac{1}{2}\pi t n\right)}{\sinh^2(\pi t n)} \\ &= \frac{\cosh^2\left(\frac{\pi}{2} t n\right)}{\sinh^2(\pi t n)} = \frac{\cosh^2\left(\frac{\pi}{2} t n\right)}{4 \sinh^2\left(\frac{\pi}{2} t n\right) \cosh^2\left(\frac{\pi}{2} t n\right)} = \frac{1}{4 \sinh^2\left(\frac{\pi}{2} t n\right)}, \text{ also} \\ T_{2,n}(t) &\leq \frac{1}{2 \left| \sinh\left(\frac{\pi}{2} t n\right) \right|} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0, \quad t \neq 0. \end{aligned} \tag{B.10}$$

Somit gilt $T_{2,n}(t) \leq 1$, $n \gg 1$, $t \in [-1, 1]$.

Aus (B.9) ergibt sich mit den Abschätzungen für $T_{1,n}$ und $T_{2,n}$ und mit $0 < |u| < 2\pi$ in (B.4) (hier sind alle nicht von n und t abhängigen Terme in der Konstanten C enthalten)

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \int_{\gamma_{n,3}} \Gamma(z) \zeta(\alpha + z) u^{-z} dz \right| &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} 2n \max_{t \in [-1, 1]} \mathcal{M}_{1,n}(t) \\ &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} \left(C n^{|\alpha|+1} e^{-n \overbrace{(\ln(2\pi) - \ln|u|)}^{>0}} \right) = 0. \end{aligned} \tag{B.11}$$

Nun zum Integral über $\boxed{\gamma_{n,2}}$:

$$\begin{aligned} &\left| \int_{\gamma_{n,2}} \Gamma(z) \zeta(\alpha + z) u^{-z} dz \right| \\ &= \left| \int_0^1 \Gamma\left(c - t\left(c - \frac{1}{2} + n\right) + i n\right) \zeta\left(\alpha + c - t\left(c - \frac{1}{2} + n\right) + i n\right) u^{-(c - t(c - \frac{1}{2} + n) + i n)} \left(-c + \frac{1}{2} - n\right) dt \right| \\ &\leq \left(n + c - \frac{1}{2}\right) \max_{t \in [0, 1]} \mathcal{M}_{2,n}(t), \quad \text{für } n \gg 1, \quad \text{wobei} \\ \mathcal{M}_{2,n}(t) &:= \left| \Gamma\left(c - t\left(c - \frac{1}{2} + n\right) + i n\right) \zeta\left(\alpha + c - t\left(c - \frac{1}{2} + n\right) + i n\right) u^{-(c - t(c - \frac{1}{2} + n) + i n)} \right|. \end{aligned} \tag{B.12}$$

Mit den Formeln (B.6) und (B.8) erhält man für $t \in [0, 1]$

$$\begin{aligned} &\Gamma\left(\underbrace{c - t\left(c - \frac{1}{2} + n\right) + i n}_{=\frac{1}{2} - \left(\frac{1}{2} - c + t\left(c - \frac{1}{2} + n\right) - i n\right)}\right) \\ &= \frac{\pi}{\Gamma\left(1 - c + t\left(c - \frac{1}{2} + n\right) - i n\right) \cos\left(\pi\left(\frac{1}{2} - c + t\left(c - \frac{1}{2} + n\right) - i n\right)\right)}, \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
& \zeta \left(\underbrace{\alpha + c - t(c - \frac{1}{2} + n) + in}_{=1-(1-\alpha-c+t(c-\frac{1}{2}+n)-in)} \right) \\
&= 2(2\pi)^{-(1-\alpha-c+t(c-\frac{1}{2}+n)-in)} \Gamma(1-\alpha-c+t(c-\frac{1}{2}+n)-in) \\
& \quad \times \zeta(1-\alpha-c+t(c-\frac{1}{2}+n)-in) \cos(\frac{1}{2}\pi(1-\alpha-c+t(c-\frac{1}{2}+n)-in)).
\end{aligned}$$

Hieraus ergibt sich mit (B.5) für $t \in [0, 1]$

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}_{2,n}(t) &= e^{(\alpha+c-t(c-\frac{1}{2}+n)) \ln(2\pi)} e^{(t(c-\frac{1}{2}+n)-c) \ln|u|} \underbrace{\left| \frac{\Gamma(1-\alpha-c+t(c-\frac{1}{2}+n)-in)}{\Gamma(1-c+t(c-\frac{1}{2}+n)-in)} \right|}_{=:T_{3,n}(t)} \\
& \times \underbrace{\left| \frac{\cos(\frac{1}{2}\pi(1-\alpha-c+t(c-\frac{1}{2}+n)-in))}{\cos(\pi(\frac{1}{2}-c+t(c-\frac{1}{2}+n)-in))} \right|}_{=:T_{4,n}(t)} \underbrace{|\zeta(1-\alpha-c+t(c-\frac{1}{2}+n)-in)|}_{\leq \zeta(1-\alpha-c+t(c-\frac{1}{2}+n)), n \gg 1}. \quad (\text{B.13})
\end{aligned}$$

Wegen $\lim_{|x| \rightarrow \infty} \varepsilon_1(x) = \lim_{|x| \rightarrow \infty} \varepsilon_2(x) = 0$ gilt wiederum

$$\begin{aligned}
T_{3,n}(t) &= \left| \frac{\Gamma(1-\alpha-c+t(c-\frac{1}{2}+n)-in)}{\Gamma(1-c+t(c-\frac{1}{2}+n)-in)} \right| \\
&\stackrel{(B.7)}{=} \frac{e^{-\frac{\pi}{2}tn} n^{\frac{1}{2}-\alpha-c+t(c-\frac{1}{2}+n)}}{e^{-\frac{\pi}{2}tn} n^{\frac{1}{2}-c+t(c-\frac{1}{2}+n)}} \underbrace{\frac{|\sqrt{2\pi} + \varepsilon_1(-n)|}{|\sqrt{2\pi} + \varepsilon_2(-n)|}}_{\leq 2, n \gg 1} \leq 2n^{-\alpha} \leq 2n^{|\alpha|}, \quad n \gg 1, t \in [0, 1].
\end{aligned}$$

Desweiteren ist

$$\begin{aligned}
(T_{4,n}(t))^2 &= \left| \frac{\cos(\frac{\pi}{2}(1-\alpha-c+t(c-\frac{1}{2}+n)-in))}{\cos(\pi(\frac{1}{2}-c+t(c-\frac{1}{2}+n)-in))} \right|^2 \\
&= \frac{\cos^2(\frac{\pi}{2}(1-\alpha-c+t(c-\frac{1}{2}+n))) + \sinh^2(-\frac{\pi}{2}n)}{\cos^2(\pi(\frac{1}{2}-c+t(c-\frac{1}{2}+n))) + \sinh^2(-\pi n)} \leq \frac{1 + \sinh^2(\frac{\pi}{2}n)}{\sinh^2(\pi n)} \\
&= \frac{\cosh^2(\frac{\pi}{2}n)}{\sinh^2(\pi n)} = \frac{\cosh^2(\frac{\pi}{2}n)}{4\sinh^2(\frac{\pi}{2}n)\cosh^2(\frac{\pi}{2}n)} = \frac{1}{4\sinh^2(\frac{\pi}{2}n)},
\end{aligned}$$

also gilt

$$T_{4,n}(t) \leq \frac{1}{2\sinh(\frac{\pi}{2}n)}, \quad \forall n \in \mathbf{N}, \quad t \in [0, 1].$$

Aus (B.12) und (B.13) folgt für $n \gg 1$ und $0 < |u| < 2\pi$

$$\begin{aligned} & \left| \int_{\gamma_{n,2}} \Gamma(z) \zeta(\alpha + z) u^{-z} dz \right| \\ & \leq \left(n + c - \frac{1}{2} \right) \max_{t \in [0,1]} \underbrace{e^{\ln(2\pi)(\alpha+c-t(c-\frac{1}{2})) + \ln|u|(t(c-\frac{1}{2})-c)}}_{\leq \text{const}} \underbrace{e^{-tn(\ln(2\pi)-\ln|u|)}}_{\leq 1} \frac{n^{|\alpha|}}{2 \sinh\left(\frac{\pi}{2}n\right)} \\ & \leq C \frac{\left(n + c - \frac{1}{2}\right) n^{|\alpha|}}{\sinh\left(\frac{\pi}{2}n\right)} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0, \end{aligned}$$

da der Sinus hyperbolicus exponentiell gegen ∞ wächst. Ebenso kann man zeigen, dass das Integral über $\gamma_{n,4} = -\overline{\gamma_{n,2}}$ für $n \rightarrow \infty$ gegen Null konvergiert, da $|\Gamma(\bar{z}) \zeta(\bar{z}) u^{\bar{z}}| = |\Gamma(z) \zeta(z) u^z| \forall z \in \mathcal{C}$ gilt.

Da für alle u mit $0 < |u| < 2\pi$ die Integrale über die Kurven $\gamma_{n,2}, \gamma_{n,3}$ und $\gamma_{n,4}$ für $n \rightarrow \infty$ verschwinden, ist mit (B.3)

$$\begin{aligned} \text{Li}_\alpha(e^{-u}) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_{n,1}} \Gamma(z) \zeta(\alpha + z) u^{-z} dz \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_n} \Gamma(z) \zeta(\alpha + z) u^{-z} dz, \quad 0 < |u| < 2\pi. \end{aligned}$$

Für das Kurvenintegral über γ_n gilt nach dem Residuensatz

$$\int_{\gamma_n} \Gamma(z) \zeta(\alpha + z) u^{-z} dz = 2\pi i \left(\sum_{k=0}^{n-1} \text{Res}(\Gamma; -k) \chi(\gamma_n, -k) + \text{Res}(\zeta; 1) \chi(\gamma_n, 1 - \alpha) \right),$$

wobei $\chi(\gamma_n, -k) = 1$ und $\chi(\gamma_n, 1 - \alpha) = 1$ die Windungszahlen der Kurve γ_n um die Pole $-k$, $k = 0, \dots, n-1$ und $1 - \alpha$ sind. Hat eine Funktion $f : D \rightarrow \mathcal{C}$, wobei D eine offene Teilmenge von \mathcal{C} sei, in $z_0 \in D$ einen Pol 1. Ordnung und ist $g : D \rightarrow \mathcal{C}$ holomorph, so gilt bekanntlich

$$\text{Res}(f \cdot g; z_0) = g(z_0) \text{Res}(f; z_0).$$

Die Residuen von Γ und ζ sind (nach [12], 1.17(11), 1.12(17)) gegeben durch

$$\text{Res}(\Gamma; -n) = \frac{(-1)^n}{n!}, \quad n \in \mathbb{N}_0, \quad \text{und} \quad \text{Res}(\zeta; 1) = 1.$$

Hiermit ergibt sich für $\alpha \notin \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} \text{Li}_\alpha(e^{-u}) &= \sum_{k=0}^{\infty} \zeta(\alpha - k) u^k \frac{(-1)^k}{k!} + \Gamma(1 - \alpha) u^{\alpha-1} \cdot 1 \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \zeta(\alpha - k) \frac{(-u)^k}{k!} + \Gamma(1 - \alpha) u^{\alpha-1}, \quad 0 < |u| < 2\pi, \quad \text{also auch} \\ \text{Li}_\alpha(e^w) &= \sum_{k=0}^{\infty} \zeta(\alpha - k) \frac{(w)^k}{k!} + \Gamma(1 - \alpha) (-w)^{\alpha-1}, \quad 0 < |w| < 2\pi. \end{aligned}$$

Die Funktion Li_α stellt auf $\mathcal{C} \setminus [1, \infty)$ eine holomorphe Funktion dar ([44], (5)). Da die Darstellungen (2.14) und (B.14) auf der nichtdiskreten Menge $(e^{-2\pi}, 1)$ übereinstimmen, folgt mit dem Identitätssatz für holomorphe Funktionen die Gültigkeit der obigen Darstellung der Polylogarithmusfunktion auch für komplexe Argumente w .

Anhang C

Funktionswerte von G_α und H_α

In diesem Abschnitt werden die in Tabelle 2.2 angegebenen Funktionswerte von G_α berechnet und die Abschätzung (2.30) bewiesen. Es sei im Folgenden stets $\alpha > 1$ vorausgesetzt, dann konvergieren die Reihen (2.22) und (2.23) absolut auf $[0, \frac{1}{2}]$ (vgl. Bem. 2.4.3).

Offenbar ist nach (2.22) $G_\alpha(0) = 2\zeta(\alpha)$. Es gilt

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^\alpha} &= \frac{1}{1^\alpha} + \frac{1}{3^\alpha} + \dots = \zeta(\alpha) - \left(\frac{1}{2^\alpha} + \frac{1}{4^\alpha} + \dots \right) \\ &= \zeta(\alpha) - 2^{-\alpha}\zeta(\alpha) = (1 - 2^{-\alpha})\zeta(\alpha). \end{aligned} \tag{C.1}$$

Wegen (2.22) ist

$$\begin{aligned} &G_\alpha\left(\frac{1}{6}\right) \stackrel{(2.22)}{=} 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^\alpha} \cos\left(\frac{\pi}{3}k\right) \\ &= 2 \left[\frac{1}{1^\alpha} \frac{1}{2} + \frac{1}{2^\alpha} \left(-\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{3^\alpha}(-1) + \frac{1}{4^\alpha} \left(-\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{5^\alpha} \frac{1}{2} + \frac{1}{6^\alpha} \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{7^\alpha} \frac{1}{2} + \frac{1}{8^\alpha} \left(-\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{9^\alpha}(-1) + \frac{1}{10^\alpha} \left(-\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{11^\alpha} \frac{1}{2} + \frac{1}{12^\alpha} + \dots \right] \\ &= 2 \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{1}{2^\alpha} + \frac{1}{4^\alpha} + \frac{1}{6^\alpha} + \dots \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1^\alpha} + \frac{1}{3^\alpha} + \frac{1}{5^\alpha} + \dots \right) - \frac{3}{2} \left(\frac{1}{3^\alpha} + \frac{1}{9^\alpha} + \frac{1}{15^\alpha} + \dots \right) \right. \\ &\quad \left. + \frac{3}{2} \left(\frac{1}{6^\alpha} + \frac{1}{12^\alpha} + \frac{1}{18^\alpha} + \dots \right) \right] \\ &\stackrel{(C.1)}{=} 2 \left[-\frac{1}{2} 2^{-\alpha}\zeta(\alpha) + \frac{1}{2} (1 - 2^{-\alpha})\zeta(\alpha) - \frac{3}{2} 3^{-\alpha} (1 - 2^{-\alpha})\zeta(\alpha) + \frac{3}{2} 6^{-\alpha}\zeta(\alpha) \right] \\ &= 2\zeta(\alpha) \left(-2^{-\alpha-1} + \frac{1}{2} (1 - 2^{-\alpha}) - \frac{1}{2} 3^{1-\alpha} (1 - 2^{-\alpha}) + 2^{-\alpha-1} 3^{1-\alpha} \right) \\ &= 2\zeta(\alpha) \left(2^{-\alpha-1} (3^{1-\alpha} - 1) + \frac{1}{2} (1 - 2^{-\alpha}) (1 - 3^{1-\alpha}) \right) \\ &= 2\zeta(\alpha) (1 - 3^{1-\alpha}) \left(\frac{1}{2} (1 - 2^{-\alpha}) - 2^{-\alpha-1} \right) \end{aligned}$$

$$= \zeta(\alpha) (1 - 3^{1-\alpha}) (1 - 2 \cdot 2^{-\alpha}) = \zeta(\alpha) (1 - 3^{1-\alpha}) (1 - 2^{1-\alpha}).$$

Desweiteren ist wegen

$$\frac{k \bmod 4 \mid 1 \mid 2 \mid 3 \mid 4}{\cos(2\pi \frac{k}{4}) \mid 0 \mid -1 \mid 0 \mid 1}$$

$$\begin{aligned} G_\alpha \left(\frac{1}{4} \right) &= 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k)^\alpha} (-1)^k = 2^{1-\alpha} \left(-\frac{1}{1^\alpha} + \frac{1}{2^\alpha} - \frac{1}{3^\alpha} + \frac{1}{4^\alpha} + \dots \right) \\ &= 2^{1-\alpha} \left(-\zeta(\alpha) + 2 \left(\frac{1}{2^\alpha} + \frac{1}{4^\alpha} + \frac{1}{6^\alpha} + \dots \right) \right) = 2^{1-\alpha} (-\zeta(\alpha) + 2^{1-\alpha} \zeta(\alpha)) \\ &= -2^{1-\alpha} (1 - 2^{1-\alpha}) \zeta(\alpha), \end{aligned}$$

und

$$G_\alpha \left(\frac{1}{2} \right) = 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^\alpha} (-1)^k = 2 \left(-\frac{1}{1^\alpha} + \frac{1}{2^\alpha} - \frac{1}{3^\alpha} + \frac{1}{4^\alpha} + \dots \right) \stackrel{\text{s.o.}}{=} -2 (1 - 2^{1-\alpha}) \zeta(\alpha).$$

Es wird nun gezeigt, dass für $\alpha > 1$ die Abschätzung

$$H_\alpha \left(\frac{1}{4} \right) > 2 (1 - 2^{1-\alpha}) (1 - 2^{-\alpha}) \zeta(\alpha)$$

gilt. Wegen

$$\sin \left(\frac{\pi}{2} k \right) = \begin{cases} 0 & \text{falls } k \text{ gerade,} \\ (-1)^{\ell+1} & \text{falls } k = 2\ell + 1, \ell \in \mathbf{N}_0. \end{cases}$$

und (2.23) ist

$$\begin{aligned} H_\alpha \left(\frac{1}{4} \right) &= 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^\alpha} \sin \left(\frac{\pi}{2} k \right) = 2 \left(\frac{1}{1^\alpha} - \frac{1}{3^\alpha} + \frac{1}{5^\alpha} - \frac{1}{7^\alpha} + \dots \right) \\ &= 2 \left[\left(\frac{1}{1^\alpha} + \frac{1}{3^\alpha} + \frac{1}{5^\alpha} + \frac{1}{7^\alpha} + \dots \right) - 2 \left(\frac{1}{3^\alpha} + \frac{1}{7^\alpha} + \frac{1}{11^\alpha} + \frac{1}{15^\alpha} + \dots \right) \right] \\ &> 2 \left[\left(\frac{1}{1^\alpha} + \frac{1}{3^\alpha} + \frac{1}{5^\alpha} + \frac{1}{7^\alpha} + \dots \right) - 2 \left(\frac{1}{2^\alpha} + \frac{1}{6^\alpha} + \frac{1}{10^\alpha} + \frac{1}{14^\alpha} + \dots \right) \right] \\ &= 2 \left[\left(\frac{1}{1^\alpha} + \frac{1}{3^\alpha} + \frac{1}{5^\alpha} + \frac{1}{7^\alpha} + \dots \right) - 2^{1-\alpha} \left(\frac{1}{1^\alpha} + \frac{1}{3^\alpha} + \frac{1}{5^\alpha} + \frac{1}{7^\alpha} + \dots \right) \right] \\ &= 2(1 - 2^{1-\alpha}) \left(\frac{1}{1^\alpha} + \frac{1}{3^\alpha} + \frac{1}{5^\alpha} + \frac{1}{7^\alpha} + \dots \right) \stackrel{(C.1)}{=} 2(1 - 2^{1-\alpha}) (1 - 2^{-\alpha}) \zeta(\alpha). \end{aligned}$$

Literaturverzeichnis

- [1] Milton Abramowitz and Irene A. Stegun. *Handbook of Mathematical Functions*. Dover Publications, Inc., New York, 1965.
- [2] N.I. Achieser. *Vorlesungen über Approximationstheorie*. Akademie Verlag, Berlin, 1953.
- [3] Douglas N. Arnold and Wolfgang L. Wendland. On the Asymptotic Convergence of Collocation Methods. *Math. Comput.*, 41:349–381, 1983.
- [4] Douglas N. Arnold and Wolfgang L. Wendland. The Convergence of Spline Collocation for Strongly Elliptic Equations on Curves. *Numer. Math.*, 47:317–341, 1985.
- [5] Kendall E. Atkinson. A survey of boundary integral equation methods for the numerical solution of Laplace’s equation in three dimensions. In M. Goldberg, editor, *The Numerical Solution of Integral Equations*, pages 1–34, New York, 1990. Plenum Press.
- [6] Kendall E. Atkinson. *The Numerical Solution of Integral Equations of the Second Kind*. Cambridge Monographs on Applied and Computational Mathematics. Cambridge University Press, Cambridge, New York, 1997.
- [7] S.N. Bernstein. *Extremaleigenschaften von Polynomen und der Bestapproximation stetiger Funktionen einer Variable, Teil 1*. ONTI, Leningrad–Moskau, 1937.
- [8] I.N. Bronstein and K.A. Semendjajew. *Taschenbuch der Mathematik*. B.G. Teubner Verlagsgesellschaft, Verlag Nauka, Stuttgart, Leipzig, Moskau, 1991.
- [9] Gavin Brown, G.A. Chandler, Ian H. Sloan, and David C. Wilson. Properties of Certain Trigonometric Series Arising in Numerical Analysis. *Journal Of Mathematical Analysis And Applications*, 162:371–380, 1991.
- [10] G.A. Chandler and I. H. Sloan. Spline quolocation methods for boundary integral equations. *Numer. Math.*, 58:537–567, 1990.
- [11] Víctor Domínguez and Francisco-Javier Sayas. Full asymptotics of spline Petrov–Galerkin methods for some periodic pseudodifferential equations. *Adv. Comput. Math.*, 1:75–101, 2001.
- [12] Artur Erdélyi, Wilhelm Magnus, Fritz Oberhettinger, and Francesco G. Tricomi. *Higher Transcendental Functions*, volume 1. McGraw–Hill Book Company, Inc., New York, Toronto, London, 1953.
- [13] Artur Erdélyi, Wilhelm Magnus, Fritz Oberhettinger, and Francesco G. Tricomi. *Tables of Integral Transforms*, volume 1. McGraw–Hill Book Company, Inc., New York, Toronto, London, 1954.
- [14] Wolfgang Hackbusch. *Integralgleichungen*. B.G. Teubner, Stuttgart, 1997.

- [15] K.P. Hadeler. Remarks on Haar-Systems. *J. Approx. Theory*, 7:59–62, 1973.
- [16] Samuel J. Karlin and William J. Studden. *Tchebycheff Systems*. Interscience Publishers, New York, London, Sydney, 1966.
- [17] Konrad Knopp. *Theorie und Anwendungen der unendlichen Reihen*. Springer-Verlag, Berlin, Göttingen, Heidelberg, New York, 5 edition, 1964.
- [18] M. G. Krein. Ideas of Chebyshev and Markov in the Theory of Limiting Values. *Am. Math. Soc. Transl., Ser. 2*, 12:1–122, 1951.
- [19] R. Kress. *Linear Integral Equations*. Springer-Verlag, New York, 1989.
- [20] D. H. Lehmer. On the Maxima and Minima of Bernoulli Polynomials. *Amer. Math. Month.*, 47:533–538, 1940.
- [21] L. Lewin. *Dilogarithms and Associated Functions*. Macdonald, London, 1958.
- [22] Robert Hjalmar Mellin. Gamma- und hypergeometrische Funktionen. *Math. Ann.*, 68:305–337, 1910.
- [23] Günther Nürnberger. *Approximation by Spline Functions*. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1989.
- [24] George Pólya and Gabor Szegő. *Problems and Theorems in Analysis*, volume 1. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1972.
- [25] W. Rudin. *Analysis*. Oldenbourg-Verlag, München, Wien, 1998.
- [26] V.B. Ryvkin. Über die Existenz von Quadraturformeln vom Gauss-Typ, welche exakt für Funktionen eines Tschebyscheff-Systems sind. *Dokl. Akad. Nauk BSSR*, 10:824–826, 1966.
- [27] J. Saranen. Local Error Estimates for Some Petrov-Galerkin Methods Applied to Strongly Elliptic Equations on Curves. *Math. Comput.*, 48:485–502, 1987.
- [28] J. Saranen and W.L. Wendland. On the Asymptotic Convergence of Collocation Methods With Spline Functions of Even Degree. *Math. Comput.*, 45:91–108, 1985.
- [29] Jukka Saranen and Gennadi Vainikko. *Periodic Integral and Pseudodifferential Equations with Numerical Approximation*. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 2002.
- [30] A.H. Schatz, V. Thomée, and W.L. Wendland. *Boundary Element Methods for Elliptic Problems*, chapter III, pages 219–276. Birkhäuser, Basel, Boston, Berlin, 1990.
- [31] G. Schmidt. On Spline Collocation Methods for Boundary Integral Equations in the Plane. *Math. Meth. in the Appl. Sci.*, 7:74–89, 1985.
- [32] Claus Schneider. Stability of qualocation methods for elliptic boundary integral equations. Preprint, Fachbereich Mathematik & Informatik, Johannes Gutenberg-Universität Mainz, 2002.
- [33] Ian H. Sloan. A Quadrature-Based Approach to improving the Collocation Method. *Numer. Math.*, 54:41–56, 1988.
- [34] Ian H. Sloan. Error Analysis of boundary integral methods. *Acta Numerica*, 1:287–339, 1991.
- [35] Ian H. Sloan. Qualocation. *J. Comp. and Appl. Math.*, VI:461–478, 2000. Special Issue 125.

- [36] Ian H. Sloan and W.L. Wendland. A Quadrature-Based Approach to Improving the Collocation Method for Splines of Even Degree. *Zeit. Anal. Anwendungen*, 8:361–376, 1989.
- [37] Ian H. Sloan and W.L. Wendland. Qualocation methods for elliptic boundary integral equations. *Numer. Math.*, 79:451–483, 1998.
- [38] Ian H. Sloan and W.L. Wendland. Spline qualocation methods for variable-coefficient elliptic equations on curves. *Numer. Math.*, 83:497–533, 1999.
- [39] M. Taylor. *Pseudodifferential Operators*. Princeton University Press, Princeton, 1981.
- [40] E.C. Titchmarsh. *The Zeta Function Of Riemann*. Cambridge University Press, Cambridge, 1930.
- [41] Thanh Tran and Ian H. Sloan. Tolerant qualocation – a qualocation method for boundary integral equations with reduced regularity requirement. *J. Integral Eqns. Appl.*, 10:85–115, 1998.
- [42] Thanh Tran and Ian H. Sloan. The Tolerant Qualocation Method for Variable Coefficient Elliptic Equations on Curves. Research Report, School of Mathematics, University of New South Wales, Sydney, 2000.
- [43] F. Trèves. *Introduction to Pseudodifferential and Fourier Integral Operators*, volume I. Plenum Press, New York, London, 1980.
- [44] C. Truesdell. On a Function which occurs in the Theory of the Structure of Polymers. *Ann. of Math.*, 46:144–157, 1945.
- [45] W.L. Wendland. Boundary element methods for elliptic problems. In A.H. Schatz, V. Thomée, and W.L. Wendland, editors, *Mathematical Theory of Finite and Boundary Element Methods*, pages 219–276, Basel, 1990. Birkhäuser.
- [46] E. Whittaker and G. Watson. *A Course of Modern Analysis*. Cambridge Mathematical Library, Cambridge, 1927.
- [47] David Wood. The computation of polylogarithms. Technical Report 15–92*, University of Kent, Computing Laboratory, University of Kent, Canterbury, UK, June 1992.
- [48] R.A. Zalik. Existence of Tchebycheff Extensions. *J. Math. Anal. Appl.*, 51:68–75, 1975.
- [49] Roland Zielke. *Discontinuous Čebyšev Systems*, volume 707 of *Lecture Notes in Mathematics*. Springer Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1979.