

Anwendungen des Komplex-Masse- Renormierungsschemas in effektiver Feldtheorie

Dissertation
zur Erlangung des Grades
„Doktor der Naturwissenschaften“

am Fachbereich Physik, Mathematik und Informatik
der Johannes Gutenberg-Universität
in Mainz

Torsten Bauer,
geboren in Frankfurt am Main

Mainz, Mai 2012

Dekan:

1. Gutachter:

2. Gutachter:

Datum der mündlichen Prüfung: 11.07.2012

Zusammenfassung

Der erste Teil der vorliegenden Dissertation befasst sich mit der Untersuchung der perturbativen Unitarität im Komplexe-Masse-Renormierungsschema (CMS). Zu diesem Zweck wird eine Methode zur Berechnung der Imaginärteile von Einschleifenintegralen mit komplexen Massenparametern vorgestellt, die im Grenzfall stabiler Teilchen auf die herkömmlichen Cutkosky-Formeln führt. Anhand einer Modell-Lagrangedichte für die Wechselwirkung eines schweren Vektorbosons mit einem leichten Fermion wird demonstriert, dass durch Anwendung des CMS die Unitarität der zugrunde liegenden S -Matrix im störungstheoretischen Sinne erfüllt bleibt, sofern die renormierte Kopplungskonstante reell gewählt wird.

Der zweite Teil der Arbeit beschäftigt sich mit verschiedenen Anwendungen des CMS in chiraler effektiver Feldtheorie (EFT). Im Einzelnen werden Masse und Breite der Deltaresonanz, die elastischen elektromagnetischen Formfaktoren der Roperresonanz, die elektromagnetischen Formfaktoren des Übergangs vom Nukleon zur Roperresonanz sowie Pion-Nukleon-Streuung und Photo- und Elektropionproduktion für Schwerpunktsenergien im Bereich der Roperresonanz berechnet. Die Wahl passender Renormierungsbedingungen ermöglicht das Aufstellen eines konsistenten chiralen Zählschemas für EFT in Anwesenheit verschiedener resonanter Freiheitsgrade, so dass die aufgeführten Prozesse in Form einer systematischen Entwicklung nach kleinen Parametern untersucht werden können.

Die hier erzielten Resultate können für Extrapolationen von entsprechenden Gitter-QCD-Simulationen zum physikalischen Wert der Pionmasse genutzt werden. Deshalb wird neben der Abhängigkeit der Formfaktoren vom quadrierten Impulsübertrag auch die Pionmassenabhängigkeit des magnetischen Moments und der elektromagnetischen Radien der Roperresonanz untersucht.

Im Rahmen der Pion-Nukleon-Streuung und der Photo- und Elektropionproduktion werden eine Partialwellenanalyse und eine Multipolzerlegung durchgeführt, wobei die P_{11} -Partialwelle sowie M_{1-} - und S_{1-} -Multipole mittels nichtlinearer Regression an empirische Daten angepasst werden.

Abstract

In the first part of the this doctoral thesis the perturbative unitarity in the complex-mass scheme (CMS) is analysed. To that end a procedure for calculating cutting rules for loop integrals containing propagators with finite widths is presented. A toy-model Lagrangian describing the interaction of a heavy vector boson with a light fermion is used to demonstrate that the CMS respects unitarity order by order in perturbation theory provided that the renormalized coupling constant remains real.

The second part of the thesis deals with various applications of the CMS to chiral effective field theory (EFT). In particular, mass and width of the delta resonance, elastic electromagnetic form factors of the Roper resonance, form factors of the nucleon-to-Roper transition, pion-nucleon scattering, and pion photo- and electroproduction for center-of-mass energies in the region of the Roper mass are calculated. By choosing appropriate renormalization conditions, a consistent chiral power counting scheme for EFT with resonant degrees of freedom can be established. This allows for a systematic investigation of the above processes in terms of an expansion in small quantities.

The obtained results can be applied to the extrapolation of corresponding simulations in the context of lattice QCD to the physical value of the pion mass. Therefore, in addition to the Q^2 dependence of the form factors, also the pion-mass dependence of the magnetic moment and electromagnetic radii of the Roper resonance is explored.

Both a partial wave decomposition and a multipole expansion are performed for pion-nucleon scattering and pion photo- and electroproduction, respectively. In this connection the P_{11} partial wave as well as the M_{1-} and S_{1-} multipoles are fitted via non-linear regression to empirical data.

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	1
2	Effektive Feldtheorie	9
2.1	Quantenchromodynamik	9
2.2	Chirale Störungstheorie	15
2.2.1	Mesonische ChPT	16
2.2.2	Baryonische ChPT	17
2.3	Einbau von Resonanzen in EFT	20
2.3.1	Vektormesonen	20
2.3.2	Deltaresonanz	23
2.3.3	Roperresonanz	27
3	Komplexe-Masse-Renormierungsschema und Unitarität	29
3.1	Unitarität im CMS	30
3.1.1	Cutkosky-Gleichungen im CMS	31
3.1.2	Störungstheoretische Unitarität der S -Matrix	38
3.2	CMS in EFT	46
3.3	Zählschema	51
4	Masse und Breite der Deltaresonanz	53
5	Elastische elektromagnetische Formfaktoren der Roperresonanz	61
5.1	Definition der elastischen Formfaktoren	62
5.2	Berechnung der elastischen Formfaktoren	65
5.3	Ergebnisse der elastischen Formfaktoren	71
5.4	Anomales magnetisches Moment und elektromagnetische Radien	75
5.5	Chirale Extrapolationen	80

6	Elektromagnetische Formfaktoren des Übergangs vom Nukleon zur Roperresonanz	85
6.1	Definition der Übergangsformfaktoren	86
6.2	Berechnung der Übergangsformfaktoren	87
6.3	Ergebnisse der Übergangsformfaktoren	89
7	Pion-Nukleon-Streuung und Photo- und Elektropionproduktion im Bereich der Roperresonanz	99
7.1	Pion-Nukleon-Streuung	100
7.1.1	Formalismus der Pion-Nukleon-Streuung	100
7.1.2	Berechnung der Pion-Nukleon-Streuung im Bereich der Roperresonanz	103
7.2	Photo- und Elektropionproduktion	108
7.2.1	Formalismus der Pionproduktion	108
7.2.2	Berechnung der Pionproduktion im Bereich der Roperresonanz	114
7.3	Ergebnisse der Pion-Nukleon-Streuung und Pionproduktion	116
8	Zusammenfassung und Ausblick	127
A	Definitionen	131
A.1	Cauchy'scher Hauptwert	132
A.2	Gamma- und Betafunktion	133
A.3	Hypergeometrische Funktionen	134
A.4	Legendre-Polynome	136
A.5	Dilogarithmen	136
B	Elektropionproduktion	139
C	Skalare Integrale	141
D	Ergebnisse	147
D.1	Imaginärteile für Einschleifenintegrale mit komplexen Massen .	147
D.2	Elastische Formfaktoren der Roperresonanz	153
D.3	Formfaktoren des Übergangs vom Nukleon zur Roperresonanz	169
D.4	Nukleon-Pion-Roper-Übergang	170

Kapitel 1

Einleitung

Effektive Feldtheorien (EFT) haben sich als wichtiges Hilfsmittel in der quantenfeldtheoretischen Behandlung von Problemen mit mehreren separaten Skalen etabliert. Eine Beschreibung der Dynamik physikalischer Prozesse bei niedrigen Energien (großen Abständen) erfordert keine Detailbetrachtung der Dynamik bei hohen Energien (kleinen Abständen), so dass die Physik bei niedrigen Energien durch einen Satz effektiver, für das gegebene Problem relevanter, Freiheitsgrade beschrieben werden kann. Ein erfolgreiches Anwendungsgebiet von EFT ist die starke Wechselwirkung, der die Quantenchromodynamik (QCD) [1, 2, 3] als etablierte fundamentale Theorie zugrunde liegt. Die QCD ist eine auf der Gruppe $SU(3)$ basierende Eichtheorie, in der sechs Quarks die Materiefelder darstellen. Die Wechselwirkung zwischen den Quarks wird durch acht Gluonenfelder vermittelt. Bisher konnten ausschließlich die aus fundamentalen Freiheitsgraden zusammengesetzten Hadronen als asymptotische Zustände beobachtet werden, ein Phänomen, das als Farbeinschlusshypothese (*confinement*) bezeichnet wird [4]. Aufgrund der starken Zunahme ihrer laufenden effektiven Kopplungskonstanten α_s zu niedrigen Energien hin, lässt sich die QCD nur im Bereich hoher Energien perturbativ behandeln. Bei niedrigen Energien kann die chirale Störungstheorie (*chiral perturbation theory*, ChPT) [5, 6, 7], eine auf Pion- und Nukleonzuständen basierende EFT der QCD, erfolgreich zur Beschreibung der starken Wechselwirkung herangezogen werden. Sie beruht auf der allgemeinsten, mit allen Symmetrien der QCD vereinbaren Lagrangedichte. Physikalische Größen werden in Form einer Entwicklung in dem Quotienten q/Λ berechnet, wobei der Parameter q kleine Impulse oder kleine Massen symbolisiert und $\Lambda \approx 1 \text{ GeV}$ die Skala der spontanen Symmetriebrechung darstellt.

Der Anwendungsbereich der ChPT kann durch die explizite Berücksichtigung angeregter, instabiler Zustände zu größeren Energien hin erweitert werden. Die quantenfeldtheoretische Beschreibung instabiler Teilchen ist so-

wohl aus konzeptioneller als auch aus phänomenologischer Sicht von großer Bedeutung. Zur Vermeidung von Singularitäten werden instabile Teilchen als Resonanzen mit endlichen Breiten beschrieben. Die Breiten ergeben sich aus den Imaginärteilen ihrer Selbstenergiediagramme, welche in Form einer Dyson-Reihe zu allen Ordnungen aufsummiert werden. In einer störungstheoretischen Beschreibung müssen Resonanzen aufgrund ihres instabilen Charakters aus den ein- und auslaufenden asymptotischen Zuständen entfernt werden, ohne die Kausalität und Unitarität der resultierenden S -Matrix zu verletzen [8]. Auf der Grundlage des Dirac'schen Wechselwirkungsbildes weist die Behandlung instabiler Teilchen im Operatorformalismus konzeptionelle Probleme auf, da die Definition der S -Matrix auf dem Konzept des adiabatischen Ein- und Ausschaltens der Wechselwirkung beruht. Nutzt man den Pfadintegralformalismus als Ausgangspunkt der störungstheoretischen Entwicklung, kann auf das Konzept des adiabatischen Ein- und Ausschaltens verzichtet werden [9]. Die Integration über Feldvariablen instabiler Teilchen lässt sich in diesem Formalismus analog der Integration über Feldvariablen stabiler Teilchen durchführen.

Ein zentraler Punkt im Zusammenhang mit instabilen Teilchen ist die Definition ihrer physikalischen Eigenschaften. Im Rahmen des Standardmodells existieren für die Masse eines instabilen Teilchens zwei gebräuchliche Definitionen, die sich aus dessen inversen Propagator ableiten,

$$D(q^2) = [q^2 - m_0^2 - \Pi(q^2)]^{-1}, \quad (1.1)$$

wobei m_0 die unrenormierte Masse und $\Pi(q^2)$ die Selbstenergie darstellt. Definiert man die Masse anhand der Nullstelle des Realteils des inversen Propagators,

$$m_1^2 = m_0^2 + \text{Re} [\Pi(m_1^2)], \quad (1.2)$$

erhält man eine relativistische Verallgemeinerung der Breit-Wigner-Formel. Diese Größe wird häufig in phänomenologischen Beschreibungen instabiler Teilchen verwendet, sie hängt allerdings von Eich- und Feldredefinitionsparametern ab [10, 11, 12, 13, 14, 15, 16]. Die als Realteil der komplexwertigen Position s_p des Pols in Gleichung (1.1) definierte Masse m_2 ,

$$s_p = m_0^2 + \Pi(s_p) = \left(m_2 - i \frac{\Gamma_2}{2} \right)^2, \quad (1.3)$$

eignet sich dahingegen als Observable, da sie unabhängig von Eich- und Feldredefinitionsparametern ist. Nach heutigem Kenntnisstand resultiert nur die Extraktion physikalischer Größen am komplexen Pol in einer modellunabhängigen Beschreibung [17, 18].

Neben der Bestimmung von Resonanzmassen und Zerfallsbreiten stellt die experimentelle und theoretische Untersuchung von Resonanz-Photo-Zerfallsamplituden und Nukleon-Resonanz-Übergangsformfaktoren derzeit einen wichtigen Schwerpunkt kernphysikalischer Forschung dar [19, 20, 21, 22]. Im Gegensatz zu den $W^\pm$ -, Z^0 - und Higgs-Bosonen des Standardmodells sind resonante Hadronen zusammengesetzte Objekte, wodurch die mathematisch rigorose Definition ihrer physikalischen Eigenschaften zusätzlich erschwert wird. In Referenz [23] wurde gezeigt, dass die Polmasse der Deltaresonanz nicht von der Wahl der Feldvariablen abhängt, die Breit-Wigner-Masse hingegen schon. Ebenso konnte demonstriert werden, dass physikalische Eigenschaften instabiler Hadronen aus den Residuen an den komplexen Polstellen extrahiert werden sollten, um deren Unabhängigkeit von Feldredefinitionsparametern zu gewährleisten [24]. Diese beiden in EFT erzielten Resultate stehen im Einklang mit den Erkenntnissen aus dem Standardmodell.

Die allgemeinste Lagrangedichte einer EFT umfasst eine unendliche Anzahl an Termen. Um die Aussagekraft der Theorie zu gewährleisten, ist das Aufstellen eines Ordnungsschemas nötig. Mit dem Weinberg'schen Zählschema wird das Verhalten einzelner Diagramme unter Reskalierung der Impulse und Quarkmassen untersucht, wodurch jedem Diagramm entsprechend seiner Bedeutung eine chirale Ordnung zugewiesen werden kann [5]. Die Anwendung von dimensionaler Regularisierung in Kombination mit einem minimalen Abzugsschema führt im mesonischen Sektor der ChPT (*mesonic chiral perturbation theory*, MChPT) zu einer eindeutigen Korrespondenz zwischen der Schleifenentwicklung und der chiralen Entwicklung. Die Einbeziehung schwerer und insbesondere resonanter Freiheitsgrade in EFT erschwert das Aufstellen eines systematischen Zählschemas, da Mehrschleifendiagramme bereits zu niedrigen chiralen Ordnungen beitragen [25]. Abgesehen von der Verwendung der chiralen Störungstheorie für schwere Baryonen (*heavy-baryon chiral perturbation theory*, HBChPT) [26, 27], kann das Zählschema in baryonischer chiraler Störungstheorie (*baryonic chiral perturbation theory*, BChPT) durch die Wahl passender Renormierungsbedingungen wieder hergestellt werden [28, 29, 30, 31, 32, 33]. Da alle zählchemaverletzenden Beiträge regulär in der Entwicklung nach kleinen Größen sind, können sie durch die passende Renormierung von Parametern der effektiven Lagrangedichte absorbiert werden.

Da der Massenunterschied zwischen dem Nukleon und der Deltaresonanz im Vergleich zur Nukleonmasse gering ist, kann die Deltaresonanz in BChPT systematisch als expliziter Freiheitsgrad berücksichtigt werden [34, 35, 36, 37]. Der Einbau schwererer Nukleonresonanzen sowie des Rhomesons erfordert einen anderen Ansatzpunkt. Im Gegensatz zur Deltaresonanz, die sich in ein Nukleon und ein Pion umwandelt, zerfällt das Rhomeson über-

wiegend in zwei Pionen, deren Massen im chiralen Grenzfall verschwinden. Für Schwerpunktsenergien in der Größenordnung der Rhomesonmasse resultiert die Schleifenintegration in zählschemaverletzenden Imaginärteilen, die nicht durch den Einsatz traditioneller Renormierungsschemata absorbiert werden können. Eine Möglichkeit zur Wiederherstellung eines systematischen Zählschemas besteht in der Anwendung des Komplexe-Masse-Renormierungsschemas (*complex-mass scheme*, CMS) [38]. Das CMS [39, 40, 41, 42, 43, 44] wurde ursprünglich konstruiert, um perturbative Berechnungen von Prozessen mit resonanten Zwischenzuständen innerhalb des Standardmodells durchzuführen. Die zentrale Idee besteht darin, resonanten Teilchen komplexe renormierte Massen zuzuweisen, die als komplexe Polpositionen der entsprechenden vollständigen Propagatoren definiert sind. Die komplexen Massen werden dabei auf dem Niveau der Lagrangedichte eingeführt, indem die unrenormierten reellen Massen in komplexe renormierte Massen und komplexe Gegenterme zerlegt werden. Letztere ermöglichen im Zusammenhang mit EFT die Absorption imaginärer zählschemaverletzender Terme, so dass physikalische Größen als Potenzreihe in kleinen Parametern systematisch berechnet werden können.

Die Zerlegung in zwei separat nicht hermitesche Anteile hat keinen Einfluss auf die Hermitizität der unrenormierten Lagrangedichte, weshalb auch die Unitarität der resultierenden S -Matrix unberührt bleibt. Um zu prüfen, ob auch die approximativen Ausdrücke einer störungstheoretischen Entwicklung im CMS die Unitaritätsbedingungen zu jeder Ordnung erfüllen, stellt es sich als zweckmäßig heraus die Cutkosky-Formeln [45] auf Schleifenintegrale mit komplexen renormierten Massen zu verallgemeinern [46]. Erst wenn die perturbative Unitarität der S -Matrix gewährleistet ist, kann das CMS als konsistenter Formalismus zur Definition einer renormierten Quantenfeldtheorie angesehen werden [42].

Durch die Anwendung des CMS lassen sich neben dem Rhomeson auch schwere Nukleonresonanzen wie die Roperresonanz $N(1440) P_{11}$ in EFT beschreiben [47]. Die Roperresonanz ist die niedrigste Nukleonresonanz mit den Quantenzahlen des Nukleons ($I(J^P) = \frac{1}{2}(\frac{1}{2}^+)$). Sie spiegelt sich nicht in einer resonanztypischen Struktur im totalen Wirkungsquerschnitt der Pion-Nukleon-Streuung wider, da sie von benachbarten Resonanzen überlagert wird. Erst nach Durchführung einer Partialwellenanalyse wird die Roperresonanz durch das resonante Verhalten der Streuphase (*phase shift*) und der Inelastizität der P_{11} -Partialwelle ersichtlich [48]. Ihre geringere Masse im Vergleich zum ersten angeregten Zustand des Nukleons mit negativer Parität $N(1535) S_{11}$ ($I(J^P) = \frac{1}{2}(\frac{1}{2}^-)$) steht in Widerspruch zu einfachen Konstituentenquarkmodellen [49, 50], in denen die Quarkwechselwirkung durch ein

Oszillatorpotential mit dem Energiespektrum $E_n = \hbar\omega(n + 3/2)$ beschrieben wird. Identifiziert man den Grundzustand des Systems ($n = 0, l = 0$) mit dem Nukleon $N(J^P = \frac{1}{2}^+)$, so besitzt der erste Anregungszustand mit $n = 1$ und $l = 1$ negative Parität und erst der nächst höhere mit $n = 2$ und $l = 0$ positive Parität. Durch Verwendung relativistischer Quarkmodelle mit QCD-motivierten Potenzialen können die Resultate für Masse und Breite der Roperresonanz verbessert [51, 52, 53] sowie die korrekte Massenordnung der Zustände $N(1440) P_{11}$ und $N(1535) S_{11}$ generiert werden [54]. Nachdem zunächst auch im Rahmen der Gitter-QCD das falsche Massenspektrum beobachtet wurde [56, 57, 58], weisen neuere Simulationen die richtige Reihenfolge dieser Nukleonresonanzen auf [59, 60, 61, 62, 63].

Eine bedeutende Informationsquelle zum Verständnis der Nukleonresonanzen stellt deren Anregung durch die elektromagnetische Wechselwirkung dar. In Einrichtungen mit modernen Elektronenbeschleunigern wie der Continuous Electron Beam Accelerator Facility (CEBAF) am Jefferson Lab, dem Mainzer Mikrotron (MAMI) und dem Out-Of-Plane-Spectrometer (OOPS) an MIT/Bates konnten präzise Datensätze zur Elektro- und Photopionproduktion gesammelt werden. Aus diesen Messungen ließen sich die Helizitätsamplituden für den Übergang vom Nukleon zur Roperresonanz zum ersten Mal über einen signifikanten Bereich des Impulsübertrages Q^2 extrahieren [64, 65, 66, 67]. Die dabei gemessene longitudinale Helizitätsamplitude $_p S_{1/2}$ nimmt einen von Null verschiedenen Wert an, eine Beobachtung, die im Widerspruch zur Beschreibung der Roperresonanz als Drei-Quark-Gluon-Hybridzustand ($q^3 G$) [68, 69] steht. Beschreibt man die Roperresonanz in relativistischen Quarkmodellen hingegen als erste radiale Anregung des Nukleons [66, 70], kann der Verlauf der transversalen und longitudinalen Helizitätsamplituden $_p A_{1/2}$ und $_p S_{1/2}$ für große Werte von Q^2 in guter Übereinstimmung mit dem Experiment vorhergesagt werden. Auch die in *light-front holographic QCD* erzielten Ergebnisse für die Ropermasse und den Dirac-Formfaktor des elektromagnetischen Übergangs vom Nukleon zur Roperresonanz sprechen für die Identifikation der Roperresonanz als erste radiale Anregung des Nukleons [71, 72]. Im Gebiet kleiner Impulsüberträge stimmen die Vorhersagen für den elektromagnetischen Übergang vom Nukleon zur Roperresonanz weder in Quarkmodell- noch Gitterrechnungen mit den experimentellen Analysen überein [73, 74, 75, 66, 70, 76, 77].

Neben der Untersuchung, ob die Unitarität im CMS perturbativ erfüllt ist, befasst sich diese Arbeit mit verschiedenen Anwendungen des CMS in chiraler EFT. Im Einzelnen werden sowohl die elastischen, elektromagnetischen Formfaktoren der Roperresonanz und die Formfaktoren des Übergangs vom Nukleon zur Roperresonanz als auch die Pion-Nukleon-Streuung und

elektromagnetische Pionproduktion im Bereich der Roperresonanz berechnet und mit empirischen Analysen verglichen. Durch die Anwendung des CMS wird dabei ein konsistentes Zählschema für die jeweiligen renormierten Prozesse generiert.

Die Arbeit ist wie folgt gegliedert: In Kapitel 2 wird die Lagrangedichte der QCD vorgestellt und ihre im Hinblick auf die Konstruktion der effektiven Feldtheorie entscheidenden Symmetrieeigenschaften ausgearbeitet. Zudem werden die wichtigsten Bestandteile der chiralen Störungstheorie für Pionen und Nukleonen sowie die Erweiterung der effektiven Lagrangedichte auf resonante Freiheitsgrade diskutiert. Dieses Kapitel enthält alle für die perturbativen Berechnungen dieser Arbeit relevanten Bestandteile der effektiven Lagrangedichte.

In Kapitel 3 werden Gleichungen zur Bestimmung von Imaginärteilen von Propagatoren mit komplexen Massen hergeleitet, mit deren Hilfe anhand einer Modell-Lagrangedichte für die Wechselwirkung eines instabilen Vektorbosons mit einem stabilen Fermion die perturbative Unitarität der S -Matrix im CMS auf Einschleifenniveau bewiesen wird. Anschließend wird erklärt, wie das CMS als Verallgemeinerung der erweiterten Massenschalenrenormierung (*extended on-mass-shell renormalization*, EOMS) [32] zur Wiederherstellung eines konsistenten Zählschemas in chiraler EFT mit resonanten Freiheitsgraden genutzt wird.

In Kapitel 4 wird die Masse und Breite der Deltaresonanz bis zur dritten chiralen Ordnung berechnet und die Ergebnisse mit den Resultaten verglichen, die man durch die Anwendung der *small-scale expansion* [34, 79] in Kombination mit dem EOMS-Schema erhält.

Kapitel 5 befasst sich mit der Analyse der elastischen, elektromagnetischen Formfaktoren der Roperresonanz bis zur Ordnung $\mathcal{O}(q^3)$, wobei sowohl die Roper- als auch die Deltaresonanz explizit als resonante Freiheitsgrade berücksichtigt werden. Ein besonderes Augenmerk wird auf die Pionmassenabhängigkeit des anomalen magnetischen Moments sowie der elektromagnetischen Radien der Roperresonanz mit Blick auf chirale Extrapolationen im Rahmen der Gitter-QCD gelegt.

Als Subprozess der Elektropionproduktion werden in Kapitel 6 die Formfaktoren des Übergangs vom Nukleon zur Roperresonanz bis zur dritten chiralen Ordnung bestimmt. Aus phänomenologischen Gründen wird neben der Roperresonanz auch das Rhomeson als resonanter Freiheitsgrad berücksichtigt. Wie im Fall der elektromagnetischen Formfaktoren des Nukleons [80, 81] erwartet man durch den Einbau von Vektormesonen eine verbesserte Beschreibung der experimentellen Daten über einen erweiterten Bereich des Impulsübertrags.

Daran anknüpfend wird in Kapitel 7 die Pion-Nukleon-Streuung bzw. die

Photo- und Elektropionproduktion für Schwerpunktsenergien im Bereich der Masse der Roperresonanz bis zur übernächstführenden Ordnung berechnet und hinsichtlich der P_{11} -Partialwelle bzw. der M_{1-} - und S_{1-} -Multipole untersucht.

Das achte Kapitel enthält eine Zusammenfassung und Diskussion der wichtigsten Ergebnisse dieser Arbeit.

Einige wichtige Definitionen und Ergebnisse für berechnete Schleifenintegrale sind zur besseren Übersichtlichkeit der Arbeit im Anhang dargestellt.

Kapitel 2

Effektive Feldtheorie

Die chirale Störungstheorie (ChPT) ist die effektive Feldtheorie der Quantenchromodynamik (QCD) für Energien unterhalb der typischen Hadronmassen. Sie basiert auf der chiralen Symmetrie der QCD-Lagrangedichte im Grenzfall masseloser leichter Quarkfelder. In diesem Kapitel werden zunächst die Symmetrien der QCD vorgestellt und ihre Konsequenzen für die Konstruktion der ChPT erläutert. Anschließend wird die effektive Lagrangedichte für die Beschreibung der Dynamik von Pion- sowie Nukleonzuständen diskutiert und die Erweiterung durch die explizite Einbeziehung resonanter Freiheitsgrade behandelt.

2.1 Quantenchromodynamik

Die QCD ist eine auf der Gruppe $SU(3)_c$ basierende, nichtabelsche Eichtheorie, in der die Quarks die Materiefelder darstellen und die Gluonen die Wechselwirkung zwischen den Quarks vermitteln. Die Quarks kommen in sechs verschiedenen Arten (*flavor*) mit jeweils drei verschiedenen Farben (*color*) vor. Historisch wurde der Farbfreiheitsgrad eingeführt, damit Baryonen im Quarkmodell unter Gewährleistung des Pauli-Prinzips als Drei-Quark-Zustand beschrieben werden können [82, 83]. Aufgrund der Abnahme der effektiven starken Kopplungskonstante α_s bei steigender Energie lässt sich die starke Wechselwirkung in zwei Bereiche einteilen. Im Bereich großer Wechselwirkungsenergien verhalten sich die Quarks und Gluonen in einem räumlich beschränkten Gebiet wie freie Teilchen (asymptotische Freiheit) [1, 4, 84] und störungstheoretische Rechnungen sind analog zur QED durchführbar. Bei geringer Wechselwirkungsenergie ist die effektive Kopplungskonstante jedoch so groß, dass konventionelle Störungsrechnungen nicht mehr anwendbar sind. Neben der Durchführung numerischer Simulationen auf dem Gitter (für eine

Einführung in die Gitter-QCD siehe Referenz [85]) ist in dieser Energieregion die Anwendung einer EFT sinnvoll, um modellunabhängige Vorhersagen über physikalische Prozesse treffen zu können. Es folgt eine kurze Einführung in die QCD, ihre Symmetrien und die darauf basierende EFT, die sich an den Referenzen [86, 87] orientiert. Eine umfassende Einführung in die Literaturquellen der QCD findet sich in Referenz [88].

Lagrangedichte der QCD

Bezeichnet man die Quarkfelder mit q_f und die Gluonfelder mit A_μ^a , lautet die Lagrangedichte der QCD [89, 90]

$$\mathcal{L}_{\text{QCD}} = \sum_f \bar{q}_f (i\not{D} - m_f) q_f - \frac{1}{4} G_{\mu\nu}^a G_a^{\mu\nu}, \quad (2.1)$$

wobei die Summation über alle Quarkflavors f läuft und für jeden Quarkflavor ein dreikomponentiger Spinor eingeführt wurde:

$$q_f = \begin{pmatrix} q_{f,r} \\ q_{f,g} \\ q_{f,b} \end{pmatrix}. \quad (2.2)$$

$D_\mu q_f$ steht für die kovariante Ableitung,

$$D_\mu q_f = \partial_\mu q_f - ig \sum_{a=1}^8 \frac{\lambda_a}{2} A_\mu^a q_f, \quad (2.3)$$

welche die Wechselwirkung zwischen den Quarkfeldern und den Gluonen generiert. Dabei ist g die Kopplungskonstante der starken Wechselwirkung, λ_a steht für die acht Gell-Mann-Matrizen und f_{abc} für die Strukturkonstanten der Gruppe SU(3). Der Feldstärketensor $G_{\mu\nu}^a$ lautet

$$G_{\mu\nu}^a = \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a + g f_{abc} A_\mu^b A_\nu^c. \quad (2.4)$$

Die Selbstwechselwirkungsterme der Gluonfelder sind auf die nichtabelsche Struktur der Eichgruppe zurückzuführen. An den Zahlenwerten der Stromquarkmassen m_f aus Tabelle 2.1 erkennt man, dass die Massen der *up*- und *down*-Quarks eine Größenordnung kleiner als die des *strange*-Quarks und mindestens zwei Größenordnungen kleiner als die der restlichen Quarks sind. Aus diesem Grund sind bei niederenergetischen Prozessen der starken Wechselwirkung hauptsächlich *up*- und *down*-Quarks von Relevanz, und die Beiträge der schweren Quarks können im weiteren Verlauf dieser Arbeit vernachlässigt werden.

<i>flavor</i>	<i>up</i>	<i>down</i>	<i>strange</i>
Masse [MeV]	1.7 – 3.3	4.1 – 5.8	101 ⁺²⁹ ₋₂₁
<i>flavor</i>	<i>charm</i>	<i>bottom</i>	<i>top</i>
Masse [GeV]	1.27 ^{+0.07} _{-0.09}	4.19 ^{+0.18} _{-0.06}	172.0 ± 0.9 ± 1.3

Tabelle 2.1: Stromquarkmassen [91]

Chirale Symmetrie der QCD

Um die chirale Symmetrie der QCD-Lagrangedichte herauszuarbeiten, führt man die Projektionsoperatoren P_R und P_L ein. Mit ihrer Hilfe lassen sich die Quarkfelder folgendermaßen auf ihre jeweiligen rechts- und linkshändigen Anteile q_R und q_L projizieren¹:

$$q = \left[\frac{1}{2} (\mathbb{1} + \gamma_5) + \frac{1}{2} (\mathbb{1} - \gamma_5) \right] q = (P_R + P_L) q = q_R + q_L. \quad (2.5)$$

Ausgedrückt durch q_R und q_L lautet die Lagrangedichte (2.1)

$$\mathcal{L}_{\text{QCD}} = \sum_{i=u,d} (\bar{q}_{R,i} i \not{D} q_{R,i} + \bar{q}_{L,i} i \not{D} q_{L,i}) + \sum_{i,j=u,d} (\bar{q}_{R,i} M_{ij} q_{L,j} + \bar{q}_{L,i} M q_{R,j}), \quad (2.6)$$

$$M = \begin{pmatrix} m_u & 0 \\ 0 & m_d \end{pmatrix}.$$

Der kinetische Anteil der Lagrangedichte koppelt nur rechts- und linkshändige Feldern untereinander, währenddessen der Massenterm rechtshändige mit linkshändigen Feldern koppelt. Im chiralen Grenzfall, d. h. im Grenzfall verschwindender Quarkmassen, koppeln somit ausschließlich Felder der gleichen Chiralität:

$$\mathcal{L}_{\text{QCD}}^0 = \sum_{i=u,d} \bar{q}_i i \not{D} q_i - \frac{1}{4} G_{\mu\nu}^a G_a^{\mu\nu}. \quad (2.7)$$

Die resultierende Lagrangedichte besitzt eine globale $U(2)_L \times U(2)_R$ -Symmetrie, wobei die zwei *flavors* der rechts- und linkshändigen Quarkfelder durch unabhängige, unitäre Matrizen R und L transformiert werden:

$$\begin{aligned} q_{R,i} &\rightarrow R_{ij} q_{R,j}, \\ q_{L,i} &\rightarrow L_{ij} q_{L,j}. \end{aligned} \quad (2.8)$$

¹Rechts- bzw. linkshändige Zustände beziehen sich dabei auf masselose Lösungen der Dirac-Gleichung mit positiver bzw. negativer Helizität.

Die Symmetriegruppe $U(2)_L \times U(2)_R$ ist lokal isomorph zur Gruppe $SU(2)_L \times SU(2)_R \times U(1)_V \times U(1)_A$. Dabei bezieht sich $U(1)_V$ bzw. $U(1)_A$ auf die Multiplikation von rechts- und linkshändigen Feldern mit einer gleichen bzw. entgegengesetzten Phase. Die $U(1)_A$ -Transformation ist zwar eine Symmetrie der klassischen Theorie, nicht aber der Quantentheorie. Die Divergenz des zugehörigen Stromes ist aufgrund einer Anomalie ungleich null [92, 93]. In der verbleibenden globalen $SU(2)_L \times SU(2)_R \times U(1)_V$ -Symmetrie stellt die $U(1)_V$ -Symmetrie die Erhaltung der Baryonenzahl B dar, die auf eine Klassifikation der Hadronen in Mesonen ($B = 0$) und Baryonen ($B = 1$) führt. Die nichtabelsche $SU(2)_L \times SU(2)_R$ -Symmetrie wird als chirale Symmetrie bezeichnet. Wie im Folgenden dargestellt wird, spielt sie gemeinsam mit einer spontanen Symmetriebrechung die entscheidende Rolle in der Konstruktion einer EFT des niederenergetischen Bereichs der QCD.

Die chirale Symmetrie wird in der QCD-Lagrangedichte (2.6) von den Quarkmassen explizit gebrochen, da diese links- und rechtshändige Felder miteinander koppeln. Im einfachsten Quarkmodell setzt sich das Proton aus zwei *up*-Quarks und einem *down*-Quark zusammen. Der Vergleich zwischen der Protonmasse und der Summe der entsprechenden Quarkmassen zeigt, dass die Wechselwirkungen im Proton den Hauptanteil seiner Masse erzeugen ($2m_u + m_d \ll m_p$). Diese Beobachtung dient als Rechtfertigung, die QCD im chiralen Grenzfall zu betrachten.

Spontane Symmetriebrechung

Phänomenologische Beobachtungen deuten darauf hin, dass die chirale Symmetrie der QCD spontan gebrochen ist. Spontane Symmetriebrechung tritt immer dann auf, wenn der Grundzustand einer Theorie eine geringere Symmetrie als der zugehörige Hamiltonoperator aufweist. Besitzt der Hamiltonoperator mehrere entartete Grundzustände, bricht die Wahl eines dieser Grundzustände als physikalischer Grundzustand die Symmetrie. Gemäß dem Goldstone-Theorem resultiert aus der spontanen Brechung einer kontinuierlichen Symmetrie die Existenz masseloser Bosonen, der sogenannten Goldstone-Bosonen [94]. Steht n_G für die Anzahl der Erzeugenden der Symmetrie-Gruppe G des Hamiltonoperators und n_H für die Anzahl der Erzeugenden der Symmetrie-Gruppe H des Grundzustandes, wobei H eine Untergruppe von G ($H \triangleleft G$) darstellt, ist die Anzahl der auftretenden Goldstone-Bosonen durch die Differenz $n_G - n_H$ gegeben [95]. Eine nur näherungsweise realisierte Symmetrie-Gruppe G führt auf $n_G - n_H$ Pseudo-Goldstone-Bosonen mit nicht verschwindenden, kleinen Massen.

Die in guter Näherung realisierte chirale Symmetrie lässt eine Anordnung der Hadronen in näherungsweise entarteten Multipletts passend zu den Di-

mensionalitäten irreduzibler Darstellungen der Gruppe $SU(2)_L \times SU(2)_R$ erwarten. Zu jedem Zustand positiver Parität sollte ein gleicher Zustand negativer Parität auftreten. Empirisch findet man im Spektrum nur eine $SU(2)_V$ -Symmetrie ohne Paritätsverdopplung. Gemäß dem Coleman-Theorem [96] ist die Symmetrie des Spektrums durch die Symmetrie des Grundzustandes bestimmt. Eine mögliche Erklärung des Hadronenspektrums ist deshalb dadurch gegeben, dass die $SU(2)_L \times SU(2)_R$ -Symmetrie der QCD im chiralen Grenzfall spontan auf eine $SU(2)_V$ -Symmetrie gebrochen ist. Die resultierenden $n_G - n_H = 6 - 3 = 3$ Pseudo-Goldstone-Bosonen können mit den drei Pionen identifiziert werden, welche eine im Vergleich zu anderen Hadronen deutlich geringere Masse aufweisen. Aus mathematischer Sicht stellt ein nicht verschwindendes skalares Quarkkondensat eine hinreichende Bedingung für die spontane Symmetriebrechung dar [86].

Ward-Identitäten und lokale Symmetrien

Vakuumerwartungswerte zeitgeordneter Produkte von Operatoren werden als Green'sche Funktionen bezeichnet. Sie sind in quantenfeldtheoretischen Rechnungen von großer Bedeutung, da sie über den Lehmann-Symanzik-Zimmermann-Formalismus (LSZ) mit den physikalischen Streuamplituden in Verbindung gebracht werden können [97]. Exakte Verknüpfungen zwischen verschiedenen Green'schen Funktionen, die aufgrund von Symmetrieeigenschaften der zugrunde liegenden Theorie generiert werden, heißen Ward-Identitäten [98, 99].

Die auf der chiralen Symmetrie basierenden Ward-Identitäten spielen eine entscheidende Rolle bei der Konstruktion der chiralen Störungstheorie. Es besteht die Möglichkeit alle Green'schen Funktionen einer Theorie aus dem zugehörigen erzeugenden Funktional zu gewinnen. Dazu führt man externe Felder ein, die im Falle der QCD an Vektor- und Axialvektorströme sowie die skalaren und pseudoskalaren Quarkdichten koppeln [6]. In der resultierenden Lagrangedichte,

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_{\text{QCD}}^0 + \mathcal{L}_{\text{ext}} = \mathcal{L}_{\text{QCD}}^0 + \bar{q} \gamma_\mu \left(v^\mu + \frac{1}{3} v_{(s)}^\mu + \gamma_5 a^\mu \right) q - \bar{q} (s - i \gamma_5 p) q, \quad (2.9)$$

sind die externen Felder durch $v_{(s)}^\mu$ und die farbneutralen, hermiteschen $(2, 2)$ -Matrizen

$$v^\mu = \sum_{i=1}^3 \frac{\tau_i}{2} v_i^\mu, \quad a^\mu = \sum_{i=1}^3 \frac{\tau_i}{2} a_i^\mu, \quad s = \sum_{i=0}^3 \tau_i s_i, \quad p = \sum_{i=0}^3 \tau_i p_i, \quad (2.10)$$

gegeben. Die τ_i ($i = 1, 2, 3$) stehen dabei für die Pauli-Matrizen und τ_0 stellt die zweidimensionale Einheitsmatrix dar. Die ursprüngliche QCD-Lagrangedichte erhält man, indem man $v^\mu = v_{(s)}^\mu = a^\mu = p = 0$ und $s = \text{diag}(m_u, m_d)$ setzt. Der letzte Term ist für die explizite Symmetriebrechung verantwortlich und verleiht den Pionen ihre Masse. Aus dem erzeugenden Funktional,

$$\exp(iZ[v, a, s, p]) = \langle 0 | T \left[\exp \left(i \int d^4x \mathcal{L}_{\text{ext}}(x) \right) \right] | 0 \rangle_0, \quad (2.11)$$

können die Green'schen Funktionen des Vakuumsektors durch Funktionalableitung nach den entsprechenden externen Feldern gewonnen werden. Die Ward-Identitäten sind äquivalent zur Invarianz des erzeugenden Funktionals unter lokalen Transformationen der externen Felder [100]. Um zu verdeutlichen, für welches Transformationsverhalten der externen Felder die Lagrangedichte eine lokale Invarianz aufweist, drückt man Gleichung (2.9) in Form von rechts- und linkshändigen Quarkfeldern aus:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & \mathcal{L}_{\text{QCD}}^0 + \bar{q}_L \gamma_\mu \left(l^\mu + \frac{1}{3} v_{(s)}^\mu \right) q_L + \bar{q}_R \gamma_\mu \left(r^\mu + \frac{1}{3} v_{(s)}^\mu \right) q_R \\ & - \bar{q}_R (s + ip) q_L - \bar{q}_L (s - ip) q_R. \end{aligned} \quad (2.12)$$

Dabei wurden die Definitionen $r_\mu = v_\mu + a_\mu$ und $l_\mu = v_\mu - a_\mu$ verwendet. Die Invarianz unter lokalen $\text{SU}(2)_L \times \text{SU}(2)_R \times \text{U}(1)_V$ -Transformationen,

$$\begin{aligned} q_R & \rightarrow \exp \left(-i \frac{\theta(x)}{3} \right) V_R(x) q_R, \\ q_L & \rightarrow \exp \left(-i \frac{\theta(x)}{3} \right) V_L(x) q_L, \end{aligned} \quad (2.13)$$

kann durch die folgenden Transformationseigenschaften der externen Felder gewährleistet werden [87]:

$$r^\mu \rightarrow V_R r^\mu V_R^\dagger + i V_R \partial^\mu V_R^\dagger, \quad (2.14a)$$

$$l^\mu \rightarrow V_L l^\mu V_L^\dagger + i V_L \partial^\mu V_L^\dagger, \quad (2.14b)$$

$$v_{(s)}^\mu \rightarrow v_{(s)}^\mu - \partial^\mu \theta, \quad (2.14c)$$

$$(s + ip) \rightarrow V_R (s + ip) V_L^\dagger, \quad (2.14d)$$

$$(s - ip) \rightarrow V_L (s - ip) V_R^\dagger. \quad (2.14e)$$

Hierbei weisen die unabhängigen Matrizen $(V_L(x), V_R(x)) \in \text{SU}(2)_L \times \text{SU}(2)_R$ eine explizite Abhängigkeit von der Raumzeit auf. Da Ward-Identitäten äquivalent zur Invarianz des erzeugenden Funktionals unter lokalen Transformationen der externen Felder sind [100, 6], stellt das erzeugende Funktional

(2.11) die entscheidende Verbindung zwischen der zugrunde liegenden und der effektiven Theorie dar [6]. Darüber hinaus erlaubt die lokale Invarianz der effektiven Lagrangedichte die Kopplung effektiver Freiheitsgrade an externe Eichfelder.

2.2 Chirale Störungstheorie

Effektive Feldtheorien besitzen ein breites Anwendungsspektrum in der Physik, wie aus der folgenden Auswahl an Referenzen entnommen werden kann [101, 102, 103, 104, 105, 106, 107, 108, 109, 110, 111, 112, 113]. Bei einer EFT handelt es sich um eine Approximation einer fundamentalen Theorie im Bereich niedriger Energien. Physikalische Problemstellungen weisen oftmals mehrere separate Skalen auf, so dass die Physik bei niedrigen Energien durch eine effektive, nur für das gegebene Problem relevante Freiheitsgrade enthaltende Lagrangedichte beschrieben werden kann. Für niederenergetische Prozesse der starken Wechselwirkung sind die relevanten Freiheitsgrade Pionen und Nukleonen, nicht die fundamentalen Quarks und Gluonen. Die auf diesen Freiheitsgraden beruhende effektive Feldtheorie der QCD heißt chirale Störungstheorie [5, 6, 7]. Der mesonische Sektor der ChPT beschreibt sowohl die Wechselwirkung zwischen Pionen untereinander, als auch diejenige zwischen Pionen und externen Feldern. Dazu benötigt man die allgemeinste Lagrangedichte, welche mit den oben beschriebenen Symmetrien der QCD vereinbar ist. Physikalische Größen werden als Entwicklung in q/Λ berechnet, wobei q für kleine Impulse oder Quarkmassen steht und $\Lambda \approx 1$ GeV die Skala der spontanen Symmetriebrechung darstellt. Als baryonische ChPT bezeichnet man die Erweiterung der mesonischen ChPT auf baryonische Freiheitsgrade. Mit ihrer Hilfe kann die Wechselwirkung zwischen Nukleonen, Pionen und äußeren Feldern analysiert werden, solange der Dreierimpuls des auftretenden Nukleons viel kleiner als 1 GeV ist [25]. Zur Erweiterung des Konvergenzradius ist es notwendig, die EFT um weitere Freiheitsgrade zu ergänzen, da die Masse des am tiefsten liegenden, nicht als expliziter Freiheitsgrad betrachteten Teilchens die obere Grenze für den Anwendungsbereich einer EFT bestimmt. Im Folgenden wird eine kurze Einführung in den mesonischen und baryonischen Sektor der ChPT gegeben. Eine ausführliche Behandlung dieses Themengebietes findet sich beispielsweise in den Referenzen [86, 114, 115, 116].

2.2.1 Mesonische ChPT

Die allgemeinste mit den Symmetrien der QCD verträgliche Lagrangedichte besitzt eine unendliche Anzahl an Termen, die man nach Ableitungen und Quarkmassen entwickelt:

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_2 + \mathcal{L}_4 + \dots \quad (2.15)$$

Der Index zeigt die Ordnung der Entwicklung an. Um die Wichtigkeit einzelner Feynmandiagramme abzuschätzen, wendet man das Weinberg'sche Zähl-schema [5] an. Dabei wird jedem Diagramm, aufgrund des Verhaltens seiner invarianten Amplitude $\mathcal{M}$ unter Reskalierung der äußeren Impulse, $p_i \rightarrow tp_i$, und quadratischer Reskalierung der leichten Quarkmassen, $m_q \rightarrow t^2 m_q$, eine chirale Ordnung D zugewiesen:

$$\mathcal{M}(tp_i, t^2 m_q) = t^D \mathcal{M}(p_i, m_q), \quad D = 2 + \sum_{n=1}^{\infty} 2(n-1) N_{2n} + 2N_L. \quad (2.16)$$

Hier ist N_L die Anzahl der Schleifen im Diagramm und N_{2n} die Anzahl der Vertices aus $\mathcal{L}_{2n}$. Kleiner werdende Impulse und Massen entsprechen einer Reskalierung mit $0 < t < 1$, so dass Beiträge mit zunehmendem D an Bedeutung verlieren.

Die Lagrangedichte wird nun aus einer Reihe von Bausteinen mit wohldefinierter chiraler Ordnung konstruiert. Die pionischen Freiheitsgrade werden durch eine spezielle unitäre $(2, 2)$ -Matrix $U(x)$ zusammengefasst:

$$U(x) = \exp\left(\frac{i\Phi(x)}{F}\right), \quad \Phi(x) = \sum_{i=1}^3 \tau_i \phi_i(x) = \begin{pmatrix} \pi^0 & \sqrt{2}\pi^+ \\ \sqrt{2}\pi^- & -\pi^0 \end{pmatrix}. \quad (2.17)$$

Der Parameter F steht für die Pionzerfallskonstante im chiralen Grenzfall mit $F_\pi = F(1 + \mathcal{O}(\hat{m})) = 92.4 \text{ MeV}$, wobei für den hier betrachteten Fall der Isospinsymmetrie $m_u = m_d = \hat{m}$ gilt. Die Matrix $U(x)$ transformiert bezüglich der chiralen Gruppe wie

$$U(x) \rightarrow V_R U(x) V_L^\dagger \quad (2.18)$$

und besitzt die chirale Ordnung $\mathcal{O}(q^0)$. Zur Konstruktion der Lagrangedichte werden unter Verwendung der Größen $r^\mu = v^\mu + a^\mu$ und $l^\mu = v^\mu - a^\mu$ noch folgende Bausteine benötigt:

$$D_\mu U = \partial_\mu U - i r_\mu U + i U l_\mu = \mathcal{O}(q), \quad (2.19a)$$

$$F_{\mu\nu}^R = \partial_\mu r_\nu - \partial_\nu r_\mu - i [r_\mu, r_\nu] = \mathcal{O}(q^2), \quad (2.19b)$$

$$F_{\mu\nu}^L = \partial_\mu l_\nu - \partial_\nu l_\mu - i [l_\mu, l_\nu] = \mathcal{O}(q^2), \quad (2.19c)$$

$$\chi = 2B(s + ip) = \mathcal{O}(q^2). \quad (2.19d)$$

B ist über die Beziehung $2F^2 B = -\langle \bar{q}q \rangle$ mit dem skalaren Quarkkondensat verknüpft. Die Bausteine sind so gewählt, dass sich aus ihnen einfach Invarianten unter chiralen $SU(2)_L \times SU(2)_R$ -Transformationen bilden lassen. Ihre jeweiligen Transformationsverhalten unter der chiralen Gruppe lauten

$$D_\mu U \rightarrow V_R D_\mu U V_L^\dagger, \quad (2.20a)$$

$$F_{\mu\nu}^{R/L} \rightarrow V_{R/L} F_{\mu\nu}^{R/L} V_{R/L}^\dagger, \quad (2.20b)$$

$$\chi \rightarrow V_R \chi V_L^\dagger. \quad (2.20c)$$

Bis auf die kovariante Ableitung (2.19a) besitzen alle Bausteine aus Gleichung (2.19) eine gerade chirale Ordnung. Um die Lorentzinvarianz der Lagrangedichte zu gewährleisten, müssen alle Lorentzindizes kontrahiert werden, so dass im mesonischen Sektor nur Lagrangedichten gerader chiraler Ordnung auftreten. Die Lagrangedichte der niedrigsten Ordnung ist gegeben durch [6]

$$\mathcal{L}_2 = \frac{F^2}{4} \text{Tr} [D_\mu U (D^\mu U)^\dagger] + \frac{F^2}{4} \text{Tr} (\chi U^\dagger + U \chi^\dagger). \quad (2.21)$$

Hierbei steht Tr für die Spur (*trace*). Die Lagrangedichte (2.21) enthält zwei Niederenergiekonstanten (*low-energy constant*, LEC), F und B , und ist mit allen Symmetrien der QCD verträglich. Die für die folgenden Rechnungen relevanten Terme der Lagrangedichte vierter chiraler Ordnung lauten [6]

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_4 = & \frac{l_3 + l_4}{16} [\text{Tr} (\chi U^\dagger + U \chi^\dagger)]^2 \\ & + \frac{l_4}{8} \text{Tr} [D_\mu U (D^\mu U)^\dagger] \text{Tr} (\chi U^\dagger + U \chi^\dagger) + \dots, \end{aligned} \quad (2.22)$$

mit den unbekannten LEC l_3 und l_4 . Bei der Konstruktion von Lagrangedichten höherer chiraler Ordnungen muss man eine Vielzahl weiterer Terme berücksichtigen, die jeweils von einer LEC begleitet werden. Die LEC enthalten Informationen über die zugrunde liegende Theorie und sind prinzipiell aus der QCD ableitbar. Da man bisher nicht in der Lage ist die QCD zu lösen, werden die Konstanten an experimentelle Daten angepasst oder aus Berechnungen der Gitter-QCD extrahiert [117, 118].

2.2.2 Baryonische ChPT

Bisher wurde die chirale Störungstheorie für Mesonen, d. h. die Wechselwirkung der Goldstone-Bosonen untereinander und mit externen Feldern,

betrachtet. Die Erweiterung auf Prozesse mit einem einzelnen Nukleon im Anfangs- und Endzustand verläuft analog zum Mesonsektor [25], wobei sich diese Arbeit auf den $SU(2)$ -Sektor, also Protonen und Neutronen, beschränkt. Der Ausgangspunkt der baryonischen chiralen Störungstheorie ist wieder die allgemeinste Lagrangedichte, die aus Bausteinen mit wohldefiniertem Transformationsverhalten unter der chiralen Gruppe konstruiert wird. Die Nukleonen werden in einem Isospinor zusammengefasst,

$$\Psi = \begin{pmatrix} p \\ n \end{pmatrix} = \mathcal{O}(q^0), \quad (2.23)$$

und die Pionfelder werden durch die Größe u , mit

$$u = \sqrt{U} = \exp\left(i\frac{\Phi}{2F}\right) = \mathcal{O}(q^0), \quad (2.24)$$

dargestellt. Zur Konstruktion der Lagrangedichte führt man die Bausteine

$$D_\mu \Psi = \left(\partial_\mu + \Gamma_\mu - iv_\mu^{(s)}\right)\Psi = \mathcal{O}(q^0), \quad (2.25a)$$

$$\Gamma_\mu = \frac{1}{2} \left[u^\dagger(\partial_\mu - ir_\mu)u + u(\partial_\mu - il_\mu)u^\dagger\right] = \mathcal{O}(q), \quad (2.25b)$$

$$u_\mu = i \left[u^\dagger(\partial_\mu - ir_\mu)u - u(\partial_\mu - il_\mu)u^\dagger\right] = \mathcal{O}(q), \quad (2.25c)$$

$$\chi_\pm = u^\dagger \chi u^\dagger \pm u \chi^\dagger u = \mathcal{O}(q^2), \quad (2.25d)$$

$$f_{\mu\nu}^\pm = u F_{\mu\nu}^L u^\dagger \pm u^\dagger F_{\mu\nu}^R u = \mathcal{O}(q^2), \quad (2.25e)$$

$$v_{\mu\nu}^{(s)} = \partial_\mu v_\nu^{(s)} - \partial_\nu v_\mu^{(s)} = \mathcal{O}(q^2) \quad (2.25f)$$

mit dem Transformationsverhalten

$$\Psi \rightarrow K(V_L, V_R, U)\Psi, \quad (2.26a)$$

$$\bar{\Psi} \rightarrow \bar{\Psi} K^{-1}(V_L, V_R, U), \quad (2.26b)$$

$$\mathcal{X} \rightarrow K(V_L, V_R, U)\mathcal{X}K^{-1}(V_L, V_R, U) \quad \text{mit} \quad \mathcal{X} = u_\mu, \chi_\pm, f_{\mu\nu}^\pm \quad (2.26c)$$

ein. Dabei ist der Kompensator $K(V_L, V_R, U)$ eine $SU(2)$ -wertige Matrixfunktion, die durch

$$K(V_L, V_R, U) = u'^{-1} V_R u = \sqrt{V_R U V_L^\dagger}^{-1} V_R \sqrt{U} \quad (2.27)$$

definiert ist. Die kovariante Ableitung $D_\mu \Psi$ transformiert konstruktionsgemäß wie das Feld, auf das sie wirkt:

$$D_\mu \Psi \rightarrow K(V_L, V_R, U) D_\mu \Psi. \quad (2.28)$$

Da es sich beim Nukleon um ein Fermion handelt, stehen die Dirac-Matrizen als zusätzliche Bausteine zur Verfügung:

$$\{\mathbb{1}, \gamma^\mu, \gamma^\mu \gamma_5, \sigma^{\mu\nu}\} \propto \mathcal{O}(q^0), \quad \gamma_5 \propto \mathcal{O}(q). \quad (2.29)$$

Die Kontraktion von γ -Matrizen mit einer ungeraden Anzahl von Ableitungen ermöglicht die Konstruktion von Lagrangedichten ungerader chiraler Ordnung. Die Pion-Nukleon-Lagrangedichte in niedrigster Ordnung ist gegeben durch [25]

$$\mathcal{L}_{\pi N}^{(1)} = \bar{\Psi} \left(i \not{D} - m_{N0} + \frac{g_{A0}}{2} \gamma^\mu \gamma_5 u_\mu \right) \Psi, \quad (2.30)$$

wobei m_{N0} und g_{A0} zwei LEC darstellen, die nach der Renormierung in die Nukleonmasse m und die axiale Kopplungskonstante g_A im chiralen Grenzfall übergehen. Analog dem mesonischen Fall kann jedem Diagramm eine chirale Ordnung D zugewiesen werden:

$$D = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} 2(n-1) N_{2n}^\pi + \sum_{n=1}^{\infty} (n-1) N_n^N + 2N_L. \quad (2.31)$$

Dabei steht N_L für die Anzahl der Schleifen, N_{2n}^π für die Anzahl der Vertices aus $\mathcal{L}_{2n}$ und N_n^N für die Anzahl der Vertices aus $\mathcal{L}_{\pi N}^{(n)}$. Die im chiralen Grenzfall nicht verschwindende Nukleonmasse stellt eine weitere Skala in der baryonischen ChPT dar, die zu einer Diskrepanz zwischen chiraler und Schleifenentwicklung führt: Die kovariante Ableitung auf das Nukleonfeld, $D_\mu \Psi$, kann nicht als kleine Größe gezählt werden, wohingegen die Differenz $(i \not{D} - m)\Psi$ von chiraler Ordnung $\mathcal{O}(q)$ ist. Als Konsequenz tragen die renormierten Schleifenbeiträge der BChPT in niedrigeren Ordnungen bei als vom Zählschema vorhergesagt. Wie dieses Problem durch die Wahl eines adäquaten Renormierungsschemas behoben werden kann, wird ausführlich in Abschnitt 3 dargestellt.

Schließlich werden noch die für die folgenden Rechnungen relevanten Terme der Lagrangedichten höherer Ordnung aufgeführt:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\pi N}^{(2)} &= c_1 \text{Tr}(\chi_+) \bar{\Psi} \Psi + \bar{\Psi} \left(\frac{c_6}{2} f_{\mu\nu}^+ + \frac{c_7}{2} v_{\mu\nu}^{(s)} \right) \sigma^{\mu\nu} \Psi + \dots, \\ \mathcal{L}_{\pi N}^{(3)} &= \frac{i}{2m} d_6 \bar{\Psi} [D^\mu, f_{\mu\nu}^+] D^\nu \Psi + \frac{2i}{m} d_7 \bar{\Psi} (\partial^\mu v_{\mu\nu}^{(s)}) D^\nu \Psi + \text{h.c.}, \end{aligned} \quad (2.32)$$

wobei h.c. für hermitesch konjugiert steht. Die vollständige Pion-Nukleon-Lagrangedichte der zweiten Ordnung ist in Referenz [25] und die der dritten Ordnung in Referenz [119] angegeben.

2.3 Einbau von Resonanzen in EFT

Die Masse des leichtesten, nicht explizit berücksichtigten Freiheitsgrades legt die obere Grenze für die Energieregion fest, bis zu welcher eine EFT anwendbar ist. Neben der Vergrößerung des Konvergenzradius bietet der Einbau zusätzlicher dynamischer Freiheitsgrade auch die Möglichkeit, Beiträge höherer Ordnung systematisch zu berechnen, ohne aufwendige Mehrschleifenrechnungen vornehmen zu müssen. Dieser Sachverhalt lässt sich anhand der Entwicklung eines generischen Resonanz-Propagators für kleine Impulse illustrieren [80],

$$\frac{1}{q^2 - M_R^2} = -\frac{1}{M_R^2} \left[1 + \left(\frac{q^2}{M_R^2} \right) + \left(\frac{q^2}{M_R^2} \right)^2 + \dots \right], \quad (2.33)$$

wobei M_R für die Masse der Resonanz steht und die Lorentzstruktur des Propagators vernachlässigt wurde. Die Beiträge auf der rechten Seite von Gleichung (2.33) sind bis zu einer gegebenen Ordnung in den entsprechenden Niederenergiekonstanten enthalten [120, 121, 122]. Die Einbeziehung der Resonanz als zusätzlicher dynamischer Freiheitsgrad führt zur Berücksichtigung aller Terme der Entwicklung.

In den folgenden Abschnitten werden die für diese Arbeit relevanten Teile der effektiven Lagrangedichte inklusive Vektormesonen sowie der Delta- und Roperresonanz vorgestellt. Wie man durch die Wahl passender Renormierungsbedingungen trotz des Einbaus resonanter Freiheitsgrade ein konsistentes Zählschema erhält, wird in Abschnitt 3 ausführlich beschrieben.

2.3.1 Vektormesonen

Die Bedeutung von Vektormesonen bei der phänomenologischen Beschreibung hadronischer Prozesse wird hervorgehoben durch die Tatsache, dass die Kopplung von Photonen an Hadronen im Vektormesondominanzmodell (VMD) [123] bereits vor der Entwicklung der QCD in guter Übereinstimmung mit dem Experiment beschrieben werden konnte [124]. Für die systematische Einbeziehung von Vektormesonen in EFT existieren verschiedene Ansätze, deren Äquivalenz in Referenz [125] gezeigt wurde. In dieser Arbeit wird die Lorentz-Vektorfeldformulierung verwendet, d. h. Vektormesonen werden durch Vierervektoren beschrieben. Da Vektormesonen drei physikalische Freiheitsgrade besitzen, treten bei ihrer Beschreibung durch vierkomponentige Lorentz-Vektoren Zwangsbedingungen auf [113, 126]. Die kanonische Quantisierung eines Systems mit Zwangsbedingungen führt nur dann auf die richtige Anzahl physikalischer Freiheitsgrade, wenn die Wechselwirkungsterme

der zugrunde liegenden Lagrangedichte bestimmten Bedingungen genügen. In diesem Abschnitt wird der Einbau des Rhomesons in EFT diskutiert. Die entsprechende effektive Lagrangedichte berücksichtigt sowohl die Konsequenzen, die sich aus der Zwangsbedingungsanalyse ergeben, als auch diejenigen, die aus der Forderung nach perturbativer Renormierbarkeit folgen.

Das Rhomesonentriplett besteht aus zwei geladenen Rhomesonen und einem neutralen Rhomeson:

$$V_\mu^\pm = (V_\mu^1 \mp iV_\mu^2)/\sqrt{2} \quad \text{und} \quad V_\mu^0 = V_\mu^3. \quad (2.34)$$

Damit eine effektive Theorie die Möglichkeit einer systematischen Entwicklung in kleinen Impulsen, Massen und Kopplungskonstanten bietet, müssen die Kopplungskonstanten umso stärker unterdrückt sein, je höher ihre Dimension in inversen Masseneinheiten ist. Das bedeutet, dass bis zu einer vorgegebenen Ordnung nur Wechselwirkungsterme mit einer gewissen Anzahl an Feldern und Ableitungen beitragen. Die allgemeinste, nur dimensionslose Wechselwirkungsterme umfassende Lagrangedichte für Rhomesonen ist in Referenz [127] aufgeführt. Diese Lagrangedichte lässt sich um die Wechselwirkung mit Pionen wie folgt ergänzen:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_V = & -\frac{1}{2}\text{Tr}(V_{\mu\nu}V^{\mu\nu}) + M_\rho^2\text{Tr}(V_\mu V^\mu) \\ & + 4ig_0\text{Tr}(V_\mu V_\nu \nabla^\mu V^\nu) + 2g_1\text{Tr}(V_\mu V_\nu)\text{Tr}(V^\mu V^\nu) \\ & + 2g_2\text{Tr}(V_\mu V^\mu)\text{Tr}(V_\nu V^\nu), \end{aligned} \quad (2.35)$$

mit

$$V_\mu = V_\mu^a \frac{\tau^a}{2}, \quad (2.36a)$$

$$V_{\mu\nu} = \nabla_\mu V_\nu - \nabla_\nu V_\mu, \quad (2.36b)$$

$$\nabla_\mu V_\nu = \partial_\mu V_\nu + [\Gamma_\mu, V_\nu]. \quad (2.36c)$$

Unter der chiralen Gruppe transformieren die Rhomesonen in dieser Darstellung homogen [122],

$$V_\mu \rightarrow KV_\mu K^\dagger, \quad (2.37)$$

wobei K für den in Gleichung (2.27) definierten Kompensator steht. M_ρ steht für die Rhomesonenmasse in niedrigster chiraler Ordnung und g_0, g_1, g_2 sind unbekannte Kopplungskonstanten. Unter Annahme globaler $U(1)$ -Invarianz führt eine Zwangsbedingungsanalyse zusammen mit der Forderung nach perturbativer Renormierbarkeit gemäß Referenz [127] auf Relationen

zwischen den Kopplungskonstanten aus Gleichung (2.35):

$$g_1 = -g_2 = \frac{g_0^2}{2}. \quad (2.38)$$

Damit vereinfacht sich die ursprüngliche Lagrangedichte zu

$$\mathcal{L}_V = -\frac{1}{2}\text{Tr}(\mathcal{V}^{\mu\nu}\mathcal{V}_{\mu\nu}) + M_\rho^2\text{Tr}(V^\mu V_\mu), \quad (2.39)$$

mit

$$\mathcal{V}_{\mu\nu} = \nabla_\mu V_\nu - \nabla_\nu V_\mu - ig_0[V_\mu, V_\nu]. \quad (2.40)$$

Die allgemeinste selbstkonsistente Lagrangedichte mit Rhomesonen reduziert sich somit auf eine Theorie mit SU(2)-Yang-Mills-Struktur und zusätzlichem Massenterm. Gemäß Referenz [122] führt die obige Darstellung, in der die Vektormesonen homogen transformieren, auf Inkonsistenzen mit dem Hochenergieverhalten der QCD. Um diese Problematik zu vermeiden, werden die Rhomesonenfelder der Lagrangedichte (2.39) folgendermaßen redefiniert:

$$V_\mu = \rho_\mu - \frac{i}{g_0}\Gamma_\mu. \quad (2.41)$$

In der resultierenden Lagrangedichte liegen die Rhomesonenfelder in der Weinberg'schen Parametrisierung vor, d. h. sie transformieren inhomogen unter der chiralen Gruppe [122]:

$$\rho_\mu \rightarrow K\rho_\mu K^\dagger + \frac{i}{g_0}K\partial_\mu K^\dagger. \quad (2.42)$$

Die resultierende Lagrangedichte für Pionen und Rhomesonen lautet

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\pi\rho} = M_\rho^2 \text{Tr} & \left[\left(\rho^\mu - \frac{i}{g_0}\Gamma^\mu \right) \left(\rho_\mu - \frac{i}{g_0}\Gamma_\mu \right) \right] \\ & - \frac{1}{2}\text{Tr}(\rho^{\mu\nu}\rho_{\mu\nu}) + \dots, \end{aligned} \quad (2.43)$$

mit

$$\rho_\mu = \rho_\mu^a \frac{\tau^a}{2}, \quad (2.44a)$$

$$\rho_{\mu\nu} = \partial_\mu \rho_\nu - \partial_\nu \rho_\mu - ig_0[\rho_\mu, \rho_\nu], \quad (2.44b)$$

wobei nur für diese Arbeit relevante Terme dargestellt sind. Zusätzlich werden die folgenden Wechselwirkungsterme zwischen Nukleonen und Rhomesonen benötigt [128]:

$$\mathcal{L}_{N\rho} = \bar{\Psi} \left[g_0 \left(\rho_\mu - \frac{i}{g_0} \Gamma_\mu \right) \gamma^\mu + \frac{G}{2} \rho_{\mu\nu} \sigma^{\mu\nu} \right] \Psi + \dots \quad (2.45)$$

Hierbei wurde die Universalität der Rhomesonkopplung, d. h. die Gleichheit der Rhomesonselfkopplung und der Kopplung an Nukleonen und Pionen, vorausgesetzt. Während die Gleichheit zwischen der Selbstkopplung und der Kopplung an Pionen eine Konsequenz aus der Forderung nach störungstheoretischer Renormierbarkeit einer EFT mit Rhomesonen, Pionen und Nukleonen ist [129], kann die Universalitätsbeziehung $g_0 = g_{\rho NN}$ unter Verwendung des Ansatzes aus Referenz [130] aus der chiralen Symmetrie hergeleitet werden. Schließlich wird im Folgenden von der Kawarabayashi-Suzuki-Riazuddin-Fayyazuddin-Relation (KSRF) Gebrauch gemacht [131, 132]²:

$$M_\rho^2 = 2g_0^2 F^2. \quad (2.46)$$

2.3.2 Deltaresonanz

Die Deltaresonanz ist der erste angeregte Zustand des Nukleons und besitzt Spin $\frac{3}{2}$, weshalb sie mit Hilfe des von W. Rarita und J. S. Schwinger entwickelten Formalismus beschrieben werden kann [133]. In diesem Formalismus werden Teilchen mit Spin $k + \frac{1}{2}$ durch einen in seinen k Lorentzindizes vollständig symmetrischen Tensor $\Psi_{\alpha, \mu_1 \dots \mu_{k-1}}$ dargestellt, der unter der Lorentzgruppe wie das direkte Produkt aus k Darstellungen eines Vierervektors und eines Dirac-Spinors transformiert³. Jede einzelne Komponente des Tensors ist somit ein Dirac-Spinor und erfüllt die Dirac-Gleichung:

$$(i\not{\partial} - m)\Psi_{\alpha, \mu_1 \dots \mu_{k-1}} = 0. \quad (2.47)$$

Zusätzlich zur Dirac-Gleichung muss der Tensor $\Psi_{\alpha, \mu_1 \dots \mu_{k-1}}$ noch die folgenden Zwangsbedingungen erfüllen:

$$\gamma^\alpha \Psi_{\alpha, \mu_1 \dots \mu_{k-1}} = 0, \quad (2.48a)$$

$$\partial^\alpha \Psi_{\alpha, \mu_1 \dots \mu_{k-1}} = 0. \quad (2.48b)$$

²In der Herleitung aus Referenz [129] stellt die KSRF-Relation eine Konsequenz aus chiraler Symmetrie und der Existenz einer konsistenten EFT mit Rhomesonen, Pionen und Nukleonen dar.

³Für den hier relevanten Spezialfall $k = 1$ findet keine Symmetrisierung statt.

Dabei ergibt sich die Bedingung (2.48b) aus der Multiplikation von Gleichung (2.47) mit γ_μ und anschließender Anwendung von Bedingung (2.48a). Die Zwangsbedingungen (2.48) garantieren die Übereinstimmung der Anzahl unabhängiger Komponenten von $\Psi_{\alpha,\mu_1\dots\mu_{k-1}}$ mit der Anzahl physikalischer Spinfreiheitsgrade.

Ein Teilchen mit Spin $\frac{3}{2}$ kann konkret durch das 16-komponentige (Rarita-Schwinger-)Vektor-Spinor-Feld Ψ_μ beschrieben werden. Die Zwangsbedingungen (2.48) verringern die Anzahl unabhängiger Komponenten um jeweils vier, also insgesamt acht. Somit besitzt der Vektor-Spinor Ψ_μ $16 - 4 - 4 = 8 = 2 \times 4$ unabhängige Komponenten, was genau der Anzahl an Spinfreiheitsgraden eines massiven Spin- $\frac{3}{2}$ -Teilchens entspricht. Der Faktor zwei folgt hierbei aus der Beschreibung von Teilchen und Antiteilchen, während der Faktor vier aus den vier möglichen Spinprojektionen im Ruhesystem resultiert.

Um den Isospin $\frac{3}{2}$ der Deltaresonanz zu beschreiben, kann man analog vorgehen und die aus der Kopplung von Isospin 1 mit Isospin $\frac{1}{2}$ entstehenden Isektor-Isospinor-Felder

$$\Psi_{\mu,i} = \begin{pmatrix} \Psi_{\mu,i,\frac{1}{2}} \\ \Psi_{\mu,i,-\frac{1}{2}} \end{pmatrix}, \quad \mu = 0, 1, 2, 3, \quad i = 1, 2, 3 \quad (2.49)$$

definieren. Wieder liefert die Beschreibung von Gleichung (2.49) zu viele Freiheitsgrade, da man durch die Clebsch-Gordan-Zerlegung des direkten Produkts aus dem Isospin- $\frac{1}{2}$ -Raum und dem Isospin-1-Raum zusätzlich zur Isospin- $\frac{3}{2}$ -Komponente eine Isospin- $\frac{1}{2}$ -Komponente erhält. Um die vier physikalischen Isospinfreiheitsgrade herauszuprojizieren, führt man Projektionsoperatoren ein:

$$P_{ij,rs}^{\frac{3}{2}} = \delta_{ij}\delta_{rs} - \frac{1}{3}(\tau_i\tau_j)_{rs}, \quad P_{ij,rs}^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{3}(\tau_i\tau_j)_{rs}. \quad (2.50)$$

Das Deltafeld $\Psi_{\mu,i}$ transformiert unter der lokalen $SU(2)_L \times SU(2)_R \times U(1)_V$ -Symmetriegruppe wie [134]

$$\Psi_{\mu,i,r} \rightarrow \Psi'_{\mu,i,r} = \exp(-i\theta) \underbrace{\left[\frac{1}{2} \text{Tr} (\tau_i K \tau_j K^\dagger) K_{rs} \right]}_{=: \mathcal{K}_{ij,rs}} \Psi_{\mu,j,s}. \quad (2.51)$$

Dabei stellt K den in Gleichung (2.27) definierten Kompensator dar. Die kovariante Ableitung $(D_\mu \Psi)_{\nu,i,\alpha}$ ist durch

$$(D_\mu \Psi)_{\nu,i,r} = \underbrace{(\partial_\mu \delta_{ij} \delta_{rs} - 2i\epsilon_{ijk} \Gamma_{\mu,k} \delta_{rs} + \delta_{ij} \Gamma_{\mu,rs} - iv_\mu^{(s)} \delta_{ij} \delta_{rs})}_{=: \mathcal{D}_{\mu,ij,rs}} \Psi_{\nu,j,s} \quad (2.52)$$

gegeben, wobei hier die Parametrisierung $\Gamma_\mu = \tau_k \Gamma_{\mu,k}$ verwendet wird. Mit diesen Bausteinen lässt sich analog Referenz [34] die Pion-Delta-Lagrangedichte in n Dimensionen in führender Ordnung bestimmen [135, 37],

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{\pi\Delta}^{(1)} = & -\bar{\Psi}^\mu P^{\frac{3}{2}} \left\{ (i\not{D} - m_{\Delta 0})g_{\mu\nu} + iA(\gamma_\mu D_\nu + \gamma_\nu D_\mu) \right. \\
& + \frac{i}{n-2} [(n-1)A^2 + 2A + 1] \gamma_\mu \not{D} \gamma_\nu \\
& + \frac{m_{\Delta 0}}{(n-2)^2} [n(n-1)A^2 + 4(n-1)A + n] \gamma_\mu \gamma_\nu \\
& + \frac{g_{\Delta 1}}{2} \not{\epsilon} \gamma_5 g_{\mu\nu} + \frac{g_{\Delta 2}}{2} (\gamma_\mu u_\nu + u_\mu \gamma_\nu) \gamma_5 \\
& \left. + \frac{g_{\Delta 3}}{2} \gamma_\mu \not{\epsilon} \gamma_5 \gamma_\nu \right\} P^{\frac{3}{2}} \Psi^\nu \\
\equiv & -\bar{\Psi}^\mu P^{\frac{3}{2}} \Lambda_{\mu\nu}^{A,n} P^{\frac{3}{2}} \Psi^\nu,
\end{aligned} \tag{2.53}$$

wobei alle Isospinindizes unterdrückt wurden. Die ersten drei Zeilen von Gleichung (2.53) entsprechen dem kinetischen Anteil des freien Deltafeldes mit Massenparameter $m_{\Delta 0}$, während die restlichen Terme die allgemeinsten Kopplungen mit Pionen darstellen. A ist ein unphysikalischer Parameter, der jeden beliebigen Wert außer $-\frac{1}{2}$ annehmen kann. Er resultiert daraus, dass die Lagrangedichte, die auf die richtige Bewegungsgleichung mit den Zwangsbedingungen (2.48) führt, nicht eindeutig ist [136].

Ähnlich dem Fall der Vektormesonen werden durch die Forderung nach einer selbstkonsistenten Theorie mit der richtigen Anzahl an physikalischen Freiheitsgraden Relationen zwischen den Kopplungskonstanten $g_{\Delta 1}$, $g_{\Delta 2}$ und $g_{\Delta 3}$ generiert [137]:

$$g_{\Delta 2} = A g_{\Delta 1}, \quad g_{\Delta 3} = -\frac{1 + 2A + A^2(n-1)}{n-2} g_{\Delta 1}. \tag{2.54}$$

Die Lagrangedichte (2.53) ist invariant unter dem folgenden Satz von Punkttransformationen⁴ [138, 134]:

$$\begin{aligned}
\Psi_\mu & \rightarrow \Psi_\mu + a \gamma_\mu \gamma^\nu \Psi_\nu, \\
A & \rightarrow \frac{A - 2a}{1 + 4a} \quad \text{mit} \quad a \neq -\frac{1}{4}.
\end{aligned} \tag{2.55}$$

⁴Der Ausdruck Punkttransformationen bezieht sich darauf, dass die Transformationen der Felder nur von den Feldern selbst, nicht aber von deren Ableitungen abhängen.

Da die transformierte Lagrangedichte $\mathcal{L}_{\pi\Delta}(\Psi_\mu, g_{\Delta 1}, A + 2a + 4aA)$ gemäß des Äquivalenztheorems [139] die gleichen Observablen wie $\mathcal{L}_{\pi\Delta}(\Psi_\mu, g_{\Delta 1}, A)$ hervorbringen muss und a beliebig gewählt werden kann, sind physikalische Größen unabhängig von A .

Die redundante Beschreibung im Isospinraum durch $\Psi_{\mu,i}$ hat die Invarianz der Lagrangedichte unter lokalen Transformationen der Felder zur Folge:

$$\Psi_i^\mu(x) \rightarrow \Psi_i^\mu(x) + \tau_i \alpha^\mu(x), \quad (2.56)$$

wobei α^μ eine beliebige Isektor-Isospinor-Funktion darstellt. Zur Quantisierung der Lagrangedichte, ist es notwendig eine Eichbedingung einzuführen. Mit der Eichbedingung $\tau_i \Psi_i^\mu = 0$ führt die Lagrangedichte (2.53) auf den folgenden freien Propagator [135]:

$$S_0^{\mu\nu,ij}(p) = P_{ij}^{\frac{3}{2}} S_0^{\mu\nu}(p), \quad (2.57)$$

mit

$$\begin{aligned} S_0^{\mu\nu}(p) = & -\frac{\not{p} + m_{\Delta 0}}{p^2 - m_{\Delta 0}^2 + i0^+} \left(g^{\mu\nu} - \frac{\gamma^\mu \gamma^\nu}{n-1} + \frac{p^\mu \gamma^\nu - \gamma^\mu p^\nu}{(n-1)m_{\Delta 0}} - \frac{(n-2)p^\mu p^\nu}{(n-1)m_{\Delta 0}^2} \right) \\ & - \frac{A+1}{m_{\Delta 0}^2(A n + 2)} \left[\frac{(n-4-nA)m_{\Delta 0} \gamma^\mu \gamma^\nu}{(n-2)(nA+2)} + \frac{(n-2)(\gamma^\mu p^\nu + p^\nu \gamma^\mu)}{n-1} \right. \\ & \left. - \frac{(n-2)(A+1)\gamma^\mu \not{p} \gamma^\nu}{(n-1)(nA+2)} \right]. \end{aligned} \quad (2.58)$$

Die Pion-Delta-Nukleon-Lagrangedichte ist in führender Ordnung gegeben durch [138]

$$\mathcal{L}_{\pi N \Delta}^{(1)} = g_\Delta \bar{\Psi}_{\mu,i} P_{ij}^{\frac{3}{2}} (g^{\mu\nu} + \tilde{z} \gamma^\mu \gamma^\nu) u_{\nu,j} \Psi + \text{h.c.},$$

(2.59)

wobei g_Δ und $\tilde{z}$ Kopplungskonstanten sind und die Parametrisierung $u_\mu = \tau_k u_{\mu,k}$ gewählt wurde. Eine Analyse der Zwangsbedingungen führt auf die Konsistenzbedingung [140]

$$\tilde{z} = \frac{1}{2} (1 + 3A). \quad (2.60)$$

Auch die Lagrangedichte (2.59) ist invariant unter den Punkttransformationen aus Gleichung (2.55). In dieser Arbeit wird der Parameter $A = -1$ gesetzt, wodurch sich die Form des Propagators aus Gleichung (2.58) stark

vereinfacht. Von der Lagrangedichte der nächst höheren Ordnung wird für die Rechnungen in dieser Arbeit nur der folgende Term benötigt:

$$\mathcal{L}_\Delta^{(2)} = -c_1^\Delta \text{Tr}(\chi_+) \bar{\Psi}_{\mu,i} P_{ij}^{\frac{3}{2}} g^{\mu\nu} \Psi_{\nu,j} + \dots \quad (2.61)$$

2.3.3 Roperresonanz

Die Roperresonanz stellt den ersten angeregten Zustand des Nukleons mit gerader Parität dar und besitzt wie das Nukleon Spin $\frac{1}{2}$ und Isospin $\frac{1}{2}$. Unter Verwendung der Bausteine $D_\mu, u_\mu, \chi_\pm, f_{\mu\nu}^\pm$ und $v_{\mu\nu}^{(s)}$ aus Gleichung (2.25) kann die effektive Lagrangedichte der Roperresonanz deshalb analog zu der des Nukleons konstruiert werden [78]. Die Terme der führenden Ordnung sowie die für diese Arbeit relevanten Terme der zweiten und dritten Ordnung lauten

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_R^{(1)} &= \bar{R} \left(i \not{D} - m_{R0} + \frac{g_R}{2} \gamma^\mu \gamma_5 u_\mu \right) R, \\ \mathcal{L}_R^{(2)} &= \frac{1}{2} \bar{R} \left(c_6^R f_{\mu\nu}^+ + c_7^R v_{\mu\nu}^{(s)} \right) \sigma^{\mu\nu} R + \dots, \\ \mathcal{L}_R^{(3)} &= \frac{i}{2} \bar{R} \left(d_6^R [D^\mu, f_{\mu\nu}^+] + 4d_7^R \partial^\mu v_{\mu\nu}^{(s)} \right) D^\nu R + \text{h.c.} + \dots, \end{aligned} \quad (2.62)$$

wobei R für ein Isospindublett mit Massenparameter m_{R0} steht und g_R, c_i^R und d_i^R unbekannte Kopplungskonstanten sind. Entsprechend ergeben sich die Wechselwirkungslagrangedichten zwischen der Roperresonanz und dem Nukleon zu

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{NR}^{(1)} &= \frac{g_{NR}}{2} \bar{R} \gamma^\mu \gamma_5 u_\mu \Psi + \text{h.c.}, \\ \mathcal{L}_{NR}^{(2)} &= \frac{1}{2} \bar{R} \left(c_6^{NR} f_{\mu\nu}^+ + c_7^{NR} v_{\mu\nu}^{(s)} \right) \sigma^{\mu\nu} \Psi + \text{h.c.} + \dots, \\ \mathcal{L}_{NR}^{(3)} &= \frac{i}{2} \bar{R} \left(\frac{1}{2} d_6^{NR} [D^\mu, f_{\mu\nu}^+] + 2d_7^{NR} \partial^\mu v_{\mu\nu}^{(s)} \right) D^\nu \Psi \\ &\quad + \frac{1}{2} \bar{R} \gamma^\mu \gamma_5 \left[d_{16}^{NR} \text{Tr}(\chi_+) u_\mu + i d_{18}^{NR} [D_\mu, \chi_-] \right] \Psi \\ &\quad + \text{h.c.} + \dots. \end{aligned} \quad (2.63)$$

Von den Lagrangedichten der zweiten und dritten Ordnung sind wieder nur die hier relevanten Terme aufgeführt und g_{NR}, c_i^{NR} und d_i^{NR} stellen unbekannte Kopplungskonstanten dar. Prinzipiell sind auch Wechselwirkungsterme der

Gestalt

$$i\lambda_1 \bar{R} \not{D} \Psi - \lambda_2 \bar{R} \Psi + \text{h.c.} \quad (2.64)$$

möglich. Durch Anwendung der Bewegungsgleichungen kann der Term proportional zu λ_1 eliminiert werden. Da aus der Diagonalisierung der Nukleon-Roper-Massenmatrix keine neuen Operatorstrukturen entstehen, können die Beiträge der Mischungsterme zwischen den Feldern der Roperresonanz und des Nukleons $\bar{R}\Psi$ und $\bar{\Psi}R$ vollständig in den Kopplungskonstanten der Lagrangedichte (2.63) absorbiert werden [78].

Die Wechselwirkungsterme zwischen Roper- und Deltaresonanz lauten in führender Ordnung [47]

$$\mathcal{L}_{\Delta R}^{(1)} = g_{\Delta R} \bar{\Psi}_{\mu,i} P_{ij}^{\frac{3}{2}} (g^{\mu\nu} + \tilde{z} \gamma^\mu \gamma^\nu) u_{\nu,j} R + \text{h.c.} , \quad (2.65)$$

und beinhalten mit $g_{\Delta R}$ eine unbekannte Kopplungskonstante. Gemäß Abschnitt 2.3.2 wird der Parameter $\tilde{z} = -1$ gesetzt.

Schließlich werden in dieser Arbeit noch die folgenden Wechselwirkungsterme zwischen Roperresonanz und Rhomeson sowie zwischen Roperresonanz, Nukleon und Rhomeson benötigt:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{R\rho} &= \bar{R} \left[k_2 \left(\rho_\mu - \frac{i}{g_0} \Gamma_\mu \right) \gamma^\mu \right] R + \dots , \\ \mathcal{L}_{RN\rho} &= \bar{R} \left[\frac{k_3}{2} \rho_{\mu\nu} \sigma^{\mu\nu} + k_4 [D^\mu, \rho_{\mu\nu}] D^\nu \right] \Psi + \text{h.c.} + \dots , \end{aligned} \quad (2.66)$$

wobei die k_i Kopplungskonstanten darstellen und der Feldstärketensor $\rho_{\mu\nu}$ in Gleichung (2.44b) gegeben ist. Der Wechselwirkungsterm proportional zu k_4 wurde gemäß Referenz [128] konstruiert. Wie im Fall des Nukleons wird hier von einer universellen Kopplung des Rhomesons ausgegangen, d. h. $k_2 = g_0$. Eine Wechselwirkung zwischen Roperresonanz, Nukleon und Rhomeson in führender Ordnung ist aufgrund der Eichinvarianz der Lagrangedichte ausgeschlossen.

Kapitel 3

Komplexe-Masse-Renormierungsschema und Unitarität

Die Anwendung des Komplexe-Masse-Renormierungsschemas (CMS) [39, 40, 41, 42, 43, 44] ermöglicht die Durchführung perturbativer Rechnungen mit instabilen Teilchen. Die renormierten Massen aller auftretenden Teilchen werden in diesem Zusammenhang als Polpositionen des entsprechenden vollständigen Propagators gewählt, wodurch die Unabhängigkeit physikalischer Größen von Eich- und Feldredefinitionsparametern gewährleistet wird [10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 24]. Der vollständige Propagator ist im Allgemeinen eine mehrwertige Funktion, mit komplexem Pol auf dem zweiten Riemann'schen Blatt (*Riemann sheet*) [141, 142]. Da die Positionen von Verzweigungspunkten (*branching points*) durch den vollständigen Propagator bestimmt werden, sind die Verzweigungspunkte instabiler Teilchen komplexwertig. Während im Rahmen traditioneller Renormierungsschemata sich die Verzweigungspunkte in führender Ordnung auf der reellen Achse befinden, werden die Pole und Verzweigungspunkte im CMS bereits in führender Ordnung auf komplexe Positionen gesetzt.

Die Vorgehensweise im CMS kann wie folgt zusammengefasst werden: Für jedes instabile Teilchen wird der entsprechende reellwertige Massenparameter m_0 der unrenormierten Lagrangedichte $\mathcal{L}_0$ in eine komplexe renormierte Masse z_R und einen komplexen Gegenterm δm zerlegt,

$$m_0 = \left(m_R - i \frac{\Gamma_R}{2} \right) + \delta m \equiv z_R + \delta m , \quad (3.1)$$

wobei z_R als komplexer Pol des dem instabilen Teilchen zugehörigen Propagators gewählt wird. Für jedes instabile Teilchen wird somit ein Imaginärteil

der Gestalt $-i\Gamma_R/2$ zu $\mathcal{L}_0$ addiert und subtrahiert. Einer dieser Terme entspricht dem Imaginärteil des renormierten Massenparameters z_R und wird dem freien Propagator hinzugefügt. Der andere Term ist Bestandteil des Gegentermvertex, welcher perturbativ behandelt wird. Da diese Prozedur eine identische Transformation darstellt, bleiben alle Eigenschaften der Lagrangedichte $\mathcal{L}_0$ unverändert, unabhängig davon welcher Wert für Γ_R gewählt wird.

Die selbstkonsistente Einführung von komplexen Massenparametern in Schleifenrechnungen erfordert die Wahl passender Renormierungsbedingungen [41]. Dazu werden neben den Massen auch die restlichen Parameter der Lagrangedichte in komplexe renormierte Parameter und komplexe Gegenterme aufgespalten,

$$g_0 = g_R + \delta g, \quad \Psi_0 = \sqrt{Z} \Psi_R \equiv \sqrt{1 + \delta Z} \Psi_R, \quad (3.2)$$

wobei g_0 die Kopplungskonstanten und Ψ_0 die Felder der unrenormierten Lagrangedichte $\mathcal{L}_0$ symbolisieren. Im Rahmen des Standardmodells ermöglicht eine entsprechende Verallgemeinerung der Massenschalenrenormierung [143] die Durchführung perturbativer Berechnungen von Prozessen mit resonanten Zwischenzuständen [41, 42, 43, 44]. Um das CMS in EFT anwenden zu können, wurden in den Referenzen [38, 47] die Renormierungsbedingungen des EOMS-Schemas [32] entsprechend verallgemeinert. Die renormierten Massen werden als Polpositionen der vollständigen Propagatoren im chiralen Grenzfall gewählt und die komplexen Parameter werden so angepasst, dass die renormierten Schleifendiagramme das vorgegebene Zählschema erfüllen. Dieser Ansatz wird hier fortgeführt und ist in Abschnitt 3.2 genauer beschrieben.

Gemäß Referenz [42] kann das CMS erst dann als konsistentes Renormierungsschema angesehen werden, wenn die Unitarität der resultierenden S -Matrix perturbativ gezeigt werden kann. Die Untersuchung der störungstheoretischen Unitarität stellt einen wichtigen Bestandteil der vorliegenden Arbeit dar und wird im folgenden Abschnitt durchgeführt.

3.1 Unitarität im CMS

Durch die identische Umschreibung der unrenormierten Parameter aus den Gleichungen (3.1) und (3.2), zerfällt die unrenormierte Lagrangedichte $\mathcal{L}_0$ in einen renormierten und einen Gegentermanteil,

$$\mathcal{L}_0(m_0, g_0, \Psi_0) = \mathcal{L}_B(z_R, g_R, \Psi_R) + \mathcal{L}_{GT}(\delta m, \delta g, \delta Z, \dots), \quad (3.3)$$

wobei die Auslassungspunkte die gemischten Abhängigkeiten der Gegenterm-Lagrangedichte $\mathcal{L}_{GT}$ bezeichnen. Die (renormierte) grundlegende Lagrangedichte $\mathcal{L}_B$ ist innerhalb des CMS zwar nicht mehr hermitesch, die gesamte

Lagrangedichte (inklusive Gegenterme) ist per Konstruktion jedoch gleich der Lagrangedichte mit unrenormierten Parametern $\mathcal{L}_0$ und somit hermitesch. Aus diesem Grund bleiben alle Ward- und Slavnov-Taylor-Identitäten [144, 145] erhalten und die Unitarität der kompletten Theorie kann nicht verletzt sein [42]. Allerdings verlieren die Cutkosky-Regeln [146, 147, 45] im Rahmen des CMS ihre Gültigkeit, wodurch die Unitarität der S -Matrix nicht mehr in gewohnter Weise zu jeder Ordnung in Störungstheorie bewiesen werden kann.

Das Ziel dieses Abschnittes besteht darin, die störungstheoretische Unitarität der S -Matrix anhand einer Modell-Lagrangedichte für die Wechselwirkung eines massiven Vektorbosons mit einem Fermion zu demonstrieren. Dabei müssen alle instabilen Teilchen aus der Unitaritätsbedingung entfernt werden, da sie nicht als asymptotische Zustände auftreten dürfen [8]. Mit Hilfe generalisierter Cutkosky-Regeln für Propagatoren mit komplexen Massen kann gezeigt werden, dass alle unitaritätsverletzenden Terme erst jenseits der relevanten Ordnung beitragen.

3.1.1 Cutkosky-Gleichungen im CMS

Dem optischen Theorem nach ist der Imaginärteil der Vorwärtsstreuamplitude proportional zum totalen Wirkungsquerschnitt [148]. Schreibt man die S -Matrix als $S = \mathbb{1} + iT$, lässt sich aus der Unitaritätsbedingung $SS^\dagger = \mathbb{1}$ eine quantenfeldtheoretische Version des optischen Theorems herleiten:

$$SS^\dagger = (\mathbb{1} + iT)(\mathbb{1} - iT^\dagger) = \mathbb{1} \Leftrightarrow i(T - T^\dagger) = -TT^\dagger.$$

Betrachtet man die T -Matrix zwischen ein- und auslaufenden Impulseigenzuständen, $T_{fi} = \langle f|T|i \rangle$, und fügt einen vollständigen Satz von Zuständen ein, ergibt sich die Beziehung

$$\frac{1}{2i} (T_{fi} - T_{if}^*) = \frac{1}{2} \sum_n^f T_{fn} T_{in}^*. \quad (3.4)$$

Die linke Seite von Gleichung (3.4) wird als Absorptionsanteil bezeichnet und geht für elastische Vorwärtsstreuungsprozesse $|i \rangle = |f \rangle$ in den Imaginärteil über:

$$\text{Im} [T_{ii}] = \frac{1}{2} \sum_n^f T_{in} T_{in}^*. \quad (3.5)$$

Mit der Konvention $\langle f|T|i \rangle = (2\pi)^4 \delta^4(P_f - P_i) \mathcal{T}_{fi}$ lautet das optische Theorem für die Vorwärtsstreuamplitude schließlich

$$\text{Im} [\mathcal{T}_{ii}] = \frac{1}{2} \sum_n^f (2\pi)^4 \delta^4(P_n - P_i) \mathcal{T}_{in}^* \mathcal{T}_{in}. \quad (3.6)$$

Der Imaginärteil der Vorwärtstreuamplitude ergibt sich durch die Summe aller möglichen Zwischenzustände, wobei nur über diejenigen Zwischenzustände summiert wird, die als asymptotische Zustände auftreten können. Eine Möglichkeit zur Bestimmung von Imaginärteilen beliebiger Feynmandiagramme ist durch die Anwendung der Cutkosky-Regeln gegeben. Mit ihnen kann das optische Theorem zu jeder Ordnung in Störungstheorie bewiesen werden [45]. Diese Regeln sind in ihrer ursprünglichen Formulierung im Rahmen des CMS nicht mehr gültig. Ziel dieses Abschnittes ist die Verallgemeinerung der Cutkosky-Regeln auf instabile Teilchen mit komplexen Massen, mit deren Hilfe die Unitarität der S -Matrix perturbativ gezeigt werden kann.

Cutkosky-Regeln

Gemäß den Cutkosky-Regeln ist der Imaginärteil der Amplitude eines Feynmandiagramms durch die Berechnung von Phasenraumintegralen gegeben, die aus dem sogenannten *Zerschneiden* innerer Linien resultieren. Unter dem Zerschneiden einer inneren Linie versteht man das Ersetzen des entsprechenden Propagators durch einen Term proportional zur Deltadistribution,

$$\frac{1}{p^2 - m^2 + i\epsilon} \rightarrow -2\pi i \delta(p^2 - m^2) \Theta(p_0), \quad (3.7)$$

mit $\epsilon \rightarrow 0^+$ und der Heaviside'schen Stufenfunktion Θ , definiert als

$$\Theta(t) = \begin{cases} 0 & \text{für } t \leq 0, \\ 1 & \text{für } t > 0. \end{cases}$$

Ein gegebenes Feynmandiagramm muss dabei auf alle möglichen Arten zerschnitten werden, die es erlauben die geschnittenen Propagatoren gleichzeitig auf die Massenschale zu platzieren. Summiert man die Beiträge aller resultierenden Phasenraumintegrale auf, erhält man $(2i)$ mal den Imaginärteil des gegebenen Diagramms.

Die Beweisidee der Cutkosky-Regeln [149, 150] kann anhand des folgenden Einschleifenintegrals illustriert werden,

$$\begin{aligned} I_0 &= i \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \Delta_F(k) \Delta_F(p - k) \\ &= i \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{1}{[k^2 - m^2 + i\epsilon][(p - k)^2 - m^2 + i\epsilon]}, \end{aligned} \quad (3.8)$$

wobei $\Delta_F(p)$ für den Feynmanpropagator eines skalaren Teilchens mit Masse m und Viererimpuls p steht. Definiert man $E_p = \sqrt{\vec{p}^2 + m^2}$, besitzt der

Feynmanpropagator zwei einfache Polstellen bei $p_0 = E_p - i\epsilon$ und $p_0 = -E_p + i\epsilon$:

$$\Delta_F(p) = \frac{1}{2E_p} \left(\frac{1}{p_0 - E_p + i\epsilon} - \frac{1}{p_0 + E_p - i\epsilon} \right). \quad (3.9)$$

Nach Anwendung des Sokhotsky-Weierstraß-Theorems¹,

$$\begin{aligned} \frac{1}{p^2 - m^2 + i\epsilon} &= \frac{p^2 - m^2}{(p^2 - m^2)^2 + \epsilon^2} - i\pi\delta(p^2 - m^2) \\ &= \mathcal{P} \left(\frac{1}{p^2 - m^2} \right) - i\pi\delta(p^2 - m^2), \end{aligned} \quad (3.10)$$

erhält man für den Imaginärteil des Integrals (3.8)

$$\begin{aligned} \text{Im}[I_0] &= \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \left[\mathcal{P} \left(\frac{1}{k^2 - m^2} \right) \mathcal{P} \left(\frac{1}{(p - k)^2 - m^2} \right) \right. \\ &\quad \left. - \pi^2 \delta(k^2 - m^2) \delta[(p - k)^2 - m^2] \right]. \end{aligned} \quad (3.11)$$

Es erweist sich als hilfreich, die avancierten und retardierten Propagatoren $\Delta_A(p)$ und $\Delta_R(p)$ einzuführen:

$$\begin{aligned} \Delta_A(p) &= \frac{1}{2E_p} \left[\frac{1}{p_0 - E_p - i\epsilon} - \frac{1}{p_0 + E_p - i\epsilon} \right] \\ &= \frac{p^2 - m^2}{(p^2 - m^2)^2 + \epsilon^2} + i\pi\delta(p^2 - m^2)\sigma_p \\ &= \mathcal{P} \left(\frac{1}{p^2 - m^2} \right) + i\pi\delta(p^2 - m^2)\sigma_p, \end{aligned} \quad (3.12)$$

$$\begin{aligned} \Delta_R(p) &= \frac{1}{2E_p} \left[\frac{1}{p_0 - E_p + i\epsilon} - \frac{1}{p_0 + E_p + i\epsilon} \right] \\ &= \frac{p^2 - m^2}{(p^2 - m^2)^2 + \epsilon^2} - i\pi\delta(p^2 - m^2)\sigma_p \\ &= \mathcal{P} \left(\frac{1}{p^2 - m^2} \right) - i\pi\delta(p^2 - m^2)\sigma_p, \end{aligned} \quad (3.13)$$

wobei $\sigma_p = \Theta(p_0) - \Theta(-p_0)$ die Signumfunktion darstellt. Aus der Eigenschaft $\sigma_p = -\sigma_{-p}$ ergibt sich die Beziehung $\Delta_A(p) = \Delta_R(-p)$ und der Feynmanpropagator kann durch den avancierten und den retardierten Propagator ausgedrückt werden:

$$\Delta_F = \Theta(p_0)\Delta_R(p) + \Theta(-p_0)\Delta_A(p). \quad (3.14)$$

¹Dabei steht $\mathcal{P}(x)$ für den Cauchy'schen Hauptwert (siehe Anhang A.1).

Um den ersten Term auf der rechten Seite von Gleichung (3.11) passend umzuformen, wird die folgende Identität verwendet:

$$\begin{aligned}
0 &= i \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \Delta_A(k) \Delta_A(k-p) \\
&= i \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \Delta_A(k) \Delta_R(p-k) \\
&= i \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \left[\mathcal{P} \left(\frac{1}{k^2 - m^2} \right) + i\pi \delta(k^2 - m^2) \sigma_k \right] \\
&\quad \times \left\{ \mathcal{P} \left(\frac{1}{(p-k)^2 - m^2} \right) - i\pi \delta[(p-k)^2 - m^2] \sigma_{p-k} \right\}. \tag{3.15}
\end{aligned}$$

Da $\Delta_A(k)$ und $\Delta_A(k-p) = \Delta_R(p-k)$ als Funktionen der komplexen Variablen k_0 einfache Polstellen in der komplexen Halbebene oberhalb der reellen Achse besitzen und man die Integrationskontur in der unteren Halbebene schließen kann, verschwindet das Integral auf der rechten Seite gemäß des Cauchy'schen Integralsatzes. Der Imaginärteil von Gleichung (3.15) ergibt sich zu

$$\begin{aligned}
0 &= \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \left\{ \mathcal{P} \left(\frac{1}{k^2 - m^2} \right) \mathcal{P} \left(\frac{1}{(p-k)^2 - m^2} \right) \right. \\
&\quad \left. + \pi^2 \delta(k^2 - m^2) \sigma_k \delta[(p-k)^2 - m^2] \sigma_{p-k} \right\}. \tag{3.16}
\end{aligned}$$

Subtrahiert man die Identität (3.16) von Gleichung (3.11), heben sich die jeweiligen Hauptwerte gegenseitig heraus und man erhält für den Imaginärteil des Integrals

$$\begin{aligned}
\text{Im}[I_0] &= -\pi^2 \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} (1 + \sigma_k \sigma_{p-k}) \delta(k^2 - m^2) \delta[(p-k)^2 - m^2] \\
&= -\pi^2 \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{d^4 k'}{(2\pi)^4} (2\pi)^4 \delta^4(k' + k - p) (1 + \sigma_k \sigma_{k'}) \\
&\quad \times \delta(k^2 - m^2) \delta(k'^2 - m^2). \tag{3.17}
\end{aligned}$$

Mit $1 = \Theta(x) + \Theta(-x)$ folgt

$$\begin{aligned}
1 + \sigma_k \sigma_{k'} &= 2 [\Theta(k_0) \Theta(k'_0) + \Theta(-k_0) \Theta(-k'_0)] \\
&= \begin{cases} 2 & \text{falls } k_0 \text{ und } k'_0 \text{ das gleiche Vorzeichen besitzen,} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases} \tag{3.18}
\end{aligned}$$

Für $p^2 > 0$ impliziert die Viererimpulserhaltung $k + k' = p$, dass man sich auf eine mögliche Wahl der Vorzeichen, z. B. $k_0 > 0$ und $k'_0 > 0$, beschränken muss [149]. Schließlich erhält man für den Imaginärteil des Integrals I_0 (3.8) in Übereinstimmung mit der Ersetzungsregel (3.7) den Ausdruck

$$\text{Im}[I_0] = -2\pi^2 \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \delta(k^2 - m^2) \Theta(k_0) \delta[(p - k)^2 - m^2] \Theta(p_0 - k_0). \quad (3.19)$$

Dieses Ergebnis wird im nächsten Abschnitt auf Schleifenintegrale mit instabilen Teilchen verallgemeinert.

Verallgemeinerte Cutkosky-Regeln für instabile Teilchen

Der Propagator eines instabilen skalaren Teilchens mit Masse M , Breite Γ und Viererimpuls p lautet im CMS

$$\begin{aligned} \Delta'(p) &= \frac{1}{p^2 - M^2 + i(M\Gamma + \epsilon)} \\ &= \frac{p^2 - M^2}{(p^2 - M^2)^2 + (M\Gamma + \epsilon)^2} - \frac{i(M\Gamma + \epsilon)}{(p^2 - M^2)^2 + (M\Gamma + \epsilon)^2}, \end{aligned} \quad (3.20)$$

wobei der infinitesimale Parameter ϵ nur für den Grenzfall verschwindender Breiten von Relevanz ist. Da er durch die Ersetzung $M\Gamma \rightarrow M\Gamma + \epsilon$ leicht reproduziert werden kann, wird er im Folgenden unterdrückt. Zur Verallgemeinerung der Cutkosky-Regeln im Rahmen des CMS wird ein Einschleifenintegral betrachtet, welches den Propagator eines stabilen und den eines instabilen Teilchens umfasst:

$$I_1 = i \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} (2\pi)^4 \delta^4(k + q - p) \Delta_F(k) \Delta'(q). \quad (3.21)$$

Der Imaginärteil des Integrals ergibt sich zu

$$\begin{aligned} \text{Im}[I_1] &= \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} (2\pi)^4 \left[\frac{k^2 - m^2}{(k^2 - m^2)^2 + \epsilon^2} \frac{q^2 - M^2}{(q^2 - M^2)^2 + M^2\Gamma^2} \right. \\ &\quad \left. - \pi \delta(k^2 - m^2) \frac{M\Gamma}{(q^2 - M^2)^2 + M^2\Gamma^2} \right] \delta^4(k + q - p). \end{aligned} \quad (3.22)$$

Der entscheidende Aspekt in der Bestimmung von Imaginärteilen für Einschleifendiagramme mit komplexen Massen besteht darin, in Analogie zu

Gleichung (3.20) „avancierte“ und „retardierte“ Propagatoren Δ'_A und Δ'_R zu konstruieren:

$$\begin{aligned}\Delta'_A(p) &= \frac{1}{w(p) + w(p)^*} \left[\frac{1}{p_0 - w(p)^*} - \frac{1}{p_0 + w(p)} \right] \\ &= \frac{p^2 - M^2 - M^2 \Gamma^2 / (2 x(p)^2)}{(p^2 - M^2)^2 + M^2 \Gamma^2} + \frac{i M \Gamma}{(p^2 - M^2)^2 + M^2 \Gamma^2} \frac{p_0}{x(p)},\end{aligned}\quad (3.23)$$

$$\begin{aligned}\Delta'_R(p) &= \frac{1}{w(p) + w(p)^*} \left[\frac{1}{p_0 - w(p)} - \frac{1}{p_0 + w(p)^*} \right] \\ &= \frac{p^2 - M^2 - M^2 \Gamma^2 / (2 x(p)^2)}{(p^2 - M^2)^2 + M^2 \Gamma^2} - \frac{i M \Gamma}{(p^2 - M^2)^2 + M^2 \Gamma^2} \frac{p_0}{x(p)},\end{aligned}\quad (3.24)$$

mit

$$\begin{aligned}w(p) &= x(p) - i y(p), \\ x(p) &= \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\mathcal{E}_p^4 + M^2 \Gamma^2)^{1/2} + \mathcal{E}_p^2} = \mathcal{E}_p + \mathcal{O}(\Gamma^2), \\ y(p) &= \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\mathcal{E}_p^4 + M^2 \Gamma^2)^{1/2} - \mathcal{E}_p^2} = M \Gamma / (2 \mathcal{E}_p) + \mathcal{O}(\Gamma^3), \\ \mathcal{E}_p &= \sqrt{\vec{p}^2 + M^2}.\end{aligned}\quad (3.25)$$

In dieser Arbeit wird angenommen, dass die Breite Γ wesentlich kleiner als die Masse M ist, so dass sich die Schreibweise $\mathcal{O}(\Gamma)$ im Folgenden auf die Entwicklung nach dem kleinen Parameter $\Gamma/M \ll 1$ bezieht. Der oben definierte „avancierte“ bzw. „retardierte“ Propagator besitzt zwei einfache Polstellen in der oberen bzw. unteren komplexen Halbebene und reproduziert im Grenzfall verschwindender Breite den avancierten bzw. retardierten Propagator eines stabilen Teilchens aus Gleichung (3.12) bzw. (3.13).²

Zur Umformung des ersten Terms aus Gleichung (3.22) ist es hilfreich, dass das Produkt aus $\Delta_R(q-p)$ und $\Delta'_R(q)$ als Funktion von q_0 zwei einfache Polstellen in der komplexen Halbebene unterhalb der reellen Achse aufweist. Schließt man die Integrationskontur in der oberen Halbebene und wendet

² Anders als der Feynmanpropagator eines stabilen Teilchens kann $\Delta'(p)$ nicht gemäß Gleichung (3.14) als Summe aus $\Delta'_A(p)$ und $\Delta'_R(p)$ ausgedrückt werden.

den Cauchy'schen Integralsatz an, erhält man

$$\begin{aligned}
0 &= i \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \Delta_R(q-p) \Delta'_R(q) \\
&= i \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \Delta_A(p-q) \Delta'_R(q) \\
&= i \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} (2\pi)^4 \delta^4(k+q-p) \Delta_A(k) \Delta'_R(q). \quad (3.26)
\end{aligned}$$

Die Propagatoren $\Delta'_R(k)$ und $\Delta'_A(k)$ sind so konstruiert, dass es sich dabei wie bei $\Delta_R(k)$ und $\Delta_A(k)$ um analytische Funktionen in k^0 handelt, denn nur in diesem Fall ist der Cauchy'sche Integralsatz anwendbar. Einsetzen der Propagatoren und Bilden des Imaginärteils in Gleichung (3.26) liefert

$$\begin{aligned}
0 &= \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} (2\pi)^4 \delta^4(k+q-p) \left[\frac{k^2 - m^2}{(k^2 - m^2)^2 + \epsilon^2} \frac{q^2 - M^2 - \frac{M^2 \Gamma^2}{2x(q)^2}}{(q^2 - M^2)^2 + M^2 \Gamma^2} \right. \\
&\quad \left. + \pi \delta(k^2 - m^2) \sigma_k \frac{M \Gamma}{(q^2 - M^2)^2 + M^2 \Gamma^2} \frac{q_0}{x(q)} \right] \\
&= \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} (2\pi)^4 \delta^4(k+q-p) \left[\frac{k^2 - m^2}{(k^2 - m^2)^2 + \epsilon^2} \frac{q^2 - M^2 - \frac{M^2 \Gamma^2}{2x(q)^2}}{(q^2 - M^2)^2 + M^2 \Gamma^2} \right. \\
&\quad \left. + \pi \delta(k^2 - m^2) \sigma_k \frac{M \Gamma}{(q^2 - M^2)^2 + M^2 \Gamma^2} \frac{q_0}{\mathcal{E}_q} + \mathcal{O}(\Gamma^2) \right], \quad (3.27)
\end{aligned}$$

wobei im letzten Schritt die Entwicklung $x(q) = \mathcal{E}_q + \mathcal{O}(\Gamma^2)$ verwendet wurde. Analog zum vorigen Abschnitt wird die Hilfsformel (3.27) von Gleichung (3.22) subtrahiert und man erhält nach Wiedereinführen des infinitesimalen Parameters ϵ

$$\text{Im}[I_1] = -\pi \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \delta(k^2 - m^2) \frac{(M \Gamma + \epsilon) \left[1 + \frac{p_0 - k_0}{\mathcal{E}_{p-k}} \sigma_k \right]}{[(p-k)^2 - M^2]^2 + (M \Gamma + \epsilon)^2} + \mathcal{O}(\Gamma^2). \quad (3.28)$$

Das Ergebnis lässt sich auf den Imaginärteil eines beliebigen Einschleifenintegrals verallgemeinern. Für jeden Schnitt durch einen Propagator eines instabilen Teilchens erhält man einen Faktor Γ , während ein Schnitt durch einen Propagator eines stabilen Teilchens in einer Delta-Distribution resultiert. Die Imaginärteile für die in dieser Arbeit relevanten Schleifenintegrale sind in Anhang D.1 aufgeführt, außerdem wird dort exemplarisch diskutiert, wie man den Imaginärteil eines Zweischleifenintegrals bestimmt.

Gleichung (3.28) lässt sich auf eine analoge Form zur Cutkosky-Gleichung (3.17) für reelle Massen umformen. Dazu nutzt man, dass die linke Seite aus Gleichung (3.28) manifest lorentzinvariant ist, weshalb auch die rechte Seite lorentzinvariant zu jeder Ordnung in Γ sein muss. Bis zur betrachteten Ordnung lässt sich Gleichung (3.28) ausdrücken als

$$\text{Im}[I_1] = -\pi \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \delta(k^2 - m^2) \frac{(M\Gamma + \epsilon) [1 + \sigma_{p-k}\sigma_k]}{[(p-k)^2 - M^2]^2 + (M\Gamma + \epsilon)^2} + \mathcal{O}(\Gamma^2). \quad (3.29)$$

Dabei resultiert der Integrand aus Gleichung (3.29) nicht einfach aus der Entwicklung des Integranden (3.28). Die Äquivalenz der beiden Ausdrücke zeigt sich, wenn man sie voneinander subtrahiert und den Limes $\Gamma \rightarrow 0$ des integrierten Resultates betrachtet. Unter Verwendung der Identität

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \frac{\epsilon}{x^2 + \epsilon^2} = \pi \delta(x) \quad (3.30)$$

geht Gleichung (3.29) im Grenzfall stabiler Teilchen, d. h. $\Gamma = 0$ und $\epsilon \rightarrow 0^+$, in die gewöhnliche Cutkosky-Gleichung (3.17) über.

3.1.2 Störungstheoretische Unitarität der S -Matrix

Anhand einer Modell-Lagrangedichte wird im Folgenden illustriert, wie sich die Unitarität der S -Matrix im CMS störungstheoretisch ergibt. Dazu werden die im letzten Abschnitt abgeleiteten Ergebnisse für die Imaginärteile herangezogen. Die verwendete Modell-Lagrangedichte beschreibt die Wechselwirkung zwischen einem massiven Vektorboson B und einem Fermion ψ und lautet

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{0\mu\nu} F_0^{\mu\nu} + \frac{M_0^2}{2} B_{0\mu} B_0^\mu + \bar{\psi}_0 (i\not{\partial} - m_0) \psi_0 + g_0 \bar{\psi}_0 \gamma_\mu \psi_0 B_0^\mu, \quad (3.31)$$

mit $F_{\mu\nu}^0 = \partial_\mu B_\nu^0 - \partial_\nu B_\mu^0$. Die physikalischen Massen seien so gewählt, dass das Vektorboson ein instabiles Teilchen darstellt ($M > 2m$) und in ein Fermion-Antifermion-Paar zerfallen kann.

Aufgrund der Wechselwirkung des Vektorfeldes mit dem erhaltenen Dirac-Strom $\bar{\psi}_0 \gamma_\mu \psi_0$ führt das Modell nach Renormierung der Massen und Kopplungskonstante auf endliche physikalische Größen (*on-mass-shell renormalizable*) [151]. Innerhalb des CMS wird die Renormierung in zwei Schritten vorgenommen. Durch die Anwendung dimensionaler Regularisierung [152] zusammen mit dem modifizierten minimalen Abzugsschema $\overline{\text{MS}}$ [153] werden

zuerst alle Divergenzen eliminiert³. Dann werden die renormierten Massen im $\overline{\text{MS}}$ -Schema durch die Pole der vollständigen Propagatoren ersetzt, wofür die folgenden Substitutionen in der Lagrangedichte vorgenommen werden⁴:

$$\begin{aligned} B_0^\mu &\rightarrow B^\mu, \\ \psi_0 &\rightarrow \psi, \\ m_0 &\rightarrow m + \delta m, \\ M_0^2 &\rightarrow M^2 - i M \Gamma + \delta z \equiv z + \delta z, \\ g_0 &\rightarrow g(\Gamma), \end{aligned} \tag{3.32}$$

wobei M die physikalische Masse und Γ die physikalische Breite des Vektormesons darstellen. Die Lagrangedichte (3.31) lässt sich mit den Ersetzungen (3.32) in eine grundlegende (*basic*) und eine Gegenterm-Lagrangedichte aufspalten:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \mathcal{L}_B + \mathcal{L}_{\text{GT}}, \\ \mathcal{L}_B &= -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \frac{z}{2} B_\mu B^\mu + \bar{\psi} (i \not{\partial} - m) \psi + g \bar{\psi} \gamma_\mu \psi B^\mu, \\ \mathcal{L}_{\text{GT}} &= \frac{\delta z}{2} B_\mu B^\mu - \delta m \bar{\psi} \psi. \end{aligned} \tag{3.33}$$

Die Propagatoren sowie der $B\bar{\psi}\psi$ -Wechselwirkungsvertex wird aus der grundlegenden Lagrangedichte $\mathcal{L}_B$ hergeleitet und die Gegenterm-Lagrangedichte $\mathcal{L}_{\text{GT}}$ wird störungstheoretisch behandelt.⁵

Der freie Propagator des Vektorbosons lautet

$$i S'_{\mu\nu}(p) = -i \frac{g_{\mu\nu} - p_\mu p_\nu / z}{p^2 - z} = -\frac{\tilde{G}_{\mu\nu}(p)}{p^2 - z} + \frac{\tilde{P}_{\mu\nu}(p)}{z}, \tag{3.34}$$

wobei die Tensoren $\tilde{G}$ und $\tilde{P}$ gegeben sind durch

$$\tilde{G}_{\mu\nu}(p) = g_{\mu\nu} - \frac{p_\mu p_\nu}{p^2}, \quad \tilde{P}_{\mu\nu}(p) = \frac{p_\mu p_\nu}{p^2}. \tag{3.35}$$

Unter Ausnutzung der Identitäten

$$\tilde{G}\tilde{G} = \tilde{G}, \quad \tilde{G}\tilde{P} = \tilde{P}\tilde{G} = 0, \quad \tilde{P}\tilde{P} = \tilde{P} \tag{3.36}$$

³Da die folgenden Betrachtungen unabhängig von der Wahl des Abzugsschemas sind, werden die Gegenterme des $\overline{\text{MS}}$ -Schemas hier nicht explizit angegeben.

⁴Die Renormierung der Wellenfunktionen ist im Folgenden nicht von Relevanz.

⁵Die einzelnen Terme der Störungsreihen $\delta m = \sum_{k=1}^{\infty} \hbar^k \delta m_k$ und $\delta z = \sum_{k=1}^{\infty} \hbar^k \delta z_k$ werden zu jeder Ordnung der störungstheoretischen Rechnung berücksichtigt.

für Kontraktionen des Typs $A_{\mu\rho}B^\rho{}_\nu$, lassen sich die Selbstenergiediagramme einfach in Form einer geometrischen Reihe aufsummieren. Ausgedrückt durch einteilchenirreduziblen Selbstenergiebeiträge,

$$\begin{aligned} i \Pi_{\mu\nu}(p) &= i [\Pi(p^2)g_{\mu\nu} + \Pi_p(p^2)p_\mu p_\nu] \\ &= i \left\{ \Pi(p^2)\tilde{G}_{\mu\nu}(p) + [\Pi(p^2) + p^2\Pi_p(p^2)] \tilde{P}_{\mu\nu}(p) \right\}, \end{aligned} \quad (3.37)$$

lautet der vollständige Propagator des Vektorfelds schließlich

$$\begin{aligned} S_{\mu\nu}^D(p) &= -\frac{\tilde{G}_{\mu\nu}(p)}{p^2 - z - \Pi(p^2)} + \frac{\tilde{P}_{\mu\nu}(p)}{z + \Pi(p^2) + p^2\Pi_p(p^2)} \\ &= -\frac{g_{\mu\nu} - p_\mu p_\nu[1 + \Pi_p(p^2)]/[z + \Pi(p^2) + p^2\Pi_p(p^2)]}{p^2 - z - \Pi(p^2)}. \end{aligned} \quad (3.38)$$

Da das Vektorfeld mit dem erhaltenen Dirac-Strom wechselwirkt, trägt der Anteil proportional zu $p^\mu p^\nu$ nicht zu physikalischen Größen bei und kann vernachlässigt werden. Der freie Fermionpropagator nimmt die übliche Form an:

$$i S_F(p) = \frac{i}{\not{p} - m + i\epsilon}. \quad (3.39)$$

In Abbildung 3.1 sind alle Feynmandiagramme auf Baum- und Einschleifenniveau dargestellt, die gemäß Lagrangedichte (3.31) zur S -Matrix des Prozesses $f(p_1, \sigma_1) + \bar{f}(p_2, \sigma_2) \rightarrow f(p_3, \sigma_3) + \bar{f}(p_4, \sigma_4)$ beitragen. Die rechte Seite von Gleichung (3.6) entspricht auf Einschleifenniveau der „quadrierten“ Amplitude der Baumdiagramme und ist in den Abbildungen 3.2 und 3.3 gezeigt.

Der Baumbeitrag a) ist gegeben durch

$$\begin{aligned} i \mathcal{T}_a &= -i g^2 \bar{u}(p_3, \sigma_3) \gamma^\mu v(p_4, \sigma_4) S'_{\mu\nu}(p) \bar{v}(p_2, \sigma_2) \gamma^\nu u(p_1, \sigma_1) \\ &\equiv -i V_f^\mu S'_{\mu\nu}(p) V_i^\nu, \end{aligned} \quad (3.40)$$

mit $p = p_1 + p_2 = p_3 + p_4$ und $p^2 = s$. Setzt man Gleichung (3.34) in Gleichung (3.40) ein und verwendet Stromerhaltung, erhält man den Ausdruck

$$\mathcal{T}_a = V_f^\mu \frac{1}{s - z} V_{i\mu}. \quad (3.41)$$

Hier wird der Spezialfall der Vorwärtstreuung, d. h. $p_1 = p_3$, $p_2 = p_4$, $\sigma_1 = \sigma_3$ und $\sigma_2 = \sigma_4$, betrachtet. Unter dieser Voraussetzung gilt

$$V_i^\mu = V_f^{\mu*} =: V^\mu \quad (3.42)$$

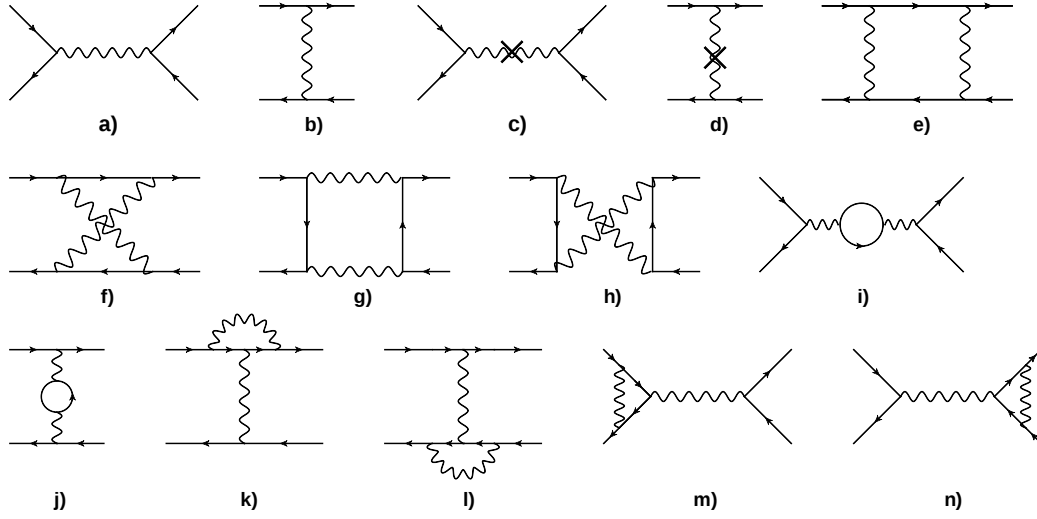


Abbildung 3.1: $f\bar{f}$ -Streuung auf Baum- und Einschleifenniveau, wobei durchgezogene Linien für Fermionen und geschwungene für Vektorbosonen stehen. Die Pfeile an den Fermionlinien geben den Fluss der Fermionenzahl an.

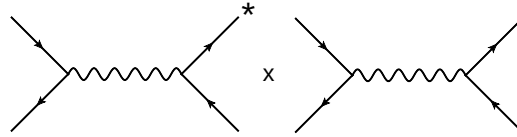


Abbildung 3.2: Quadrierte s -Kanal Baumgraphenamplitude der $f\bar{f}$ -Streuung. Bezeichnung gemäß Abbildung 3.1, wobei der Stern für die komplex konjugierte Amplitude des entsprechenden Diagramms steht.

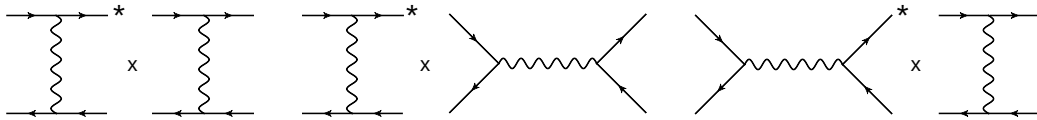


Abbildung 3.3: Quadrierte t -Kanal, s - und t -Kanalinterferenz sowie t - und s -Kanalinterferenz Baumgraphenamplitude der $f\bar{f}$ -Streuung. Bezeichnung gemäß Abbildung 3.1, wobei der Stern für die komplex konjugierte Amplitude des entsprechenden Diagramms steht.

und der Imaginärteil von Gleichung (3.41) ist gegeben durch

$$\text{Im} [\mathcal{T}_a] = \text{Im} \left[V^{\mu*} \frac{s - z^*}{(s - z)(s - z^*)} V_\mu \right] = -V^{\mu*} \frac{M \Gamma}{(s - z)(s - z^*)} V_\mu. \quad (3.43)$$

Die Ergebnisse für die Einschleifendiagramme i) und c) lauten

$$i \mathcal{T}_i = i V^{\mu*} S'_{\mu\alpha}(p) \Pi_1^{\alpha\beta}(p) S'_{\beta\nu}(p) V^\nu, \quad (3.44a)$$

$$i \mathcal{T}_c = i V^{\mu*} S'_{\mu\alpha}(p) \delta z_1 g^{\alpha\beta} S'_{\beta\nu}(p) V^\nu, \quad (3.44b)$$

wobei $\Pi_1^{\alpha\beta}$ und δz_1 die Selbstenergie und den Gegenterm der ersten Ordnung in $\hbar$ darstellen. Mit der Parametrisierung (3.37) erhält man für die Summe der Amplituden (3.44)

$$\mathcal{T}_{i+c} = \mathcal{T}_i + \mathcal{T}_c = V^{\mu*} \frac{\Pi_1(s) + \delta z_1}{(s - z)^2} V_\mu, \quad (3.45)$$

wobei der Einschleifenbeitrag zur Funktion $\Pi(s)$ durch

$$\Pi_1(s) = -\frac{g^2}{36\pi^2} [6m^2 - s - 6A_0(m^2) + 3(2m^2 + s)B_0(s, m^2, m^2)]$$

gegeben ist und die A_0 - und B_0 -Funktionen in Anhang C definiert sind. Bilden des Imaginärteils von Gleichung (3.45) liefert für $s \neq M^2$

$$\begin{aligned} \text{Im} [\mathcal{T}_{i+c}] &= V^{\mu*} \frac{\text{Im} [(\Pi_1(s) + \delta z_1)(s - z^*)^2]}{(s - z)^2(s - z^*)^2} V_\mu \\ &= V^{\mu*} V_\mu \frac{1}{(s - z)(s - z^*)} \text{Im} \left[(\Pi_1(s) + \delta z_1) \frac{s - z + z - z^*}{s - z} \right] \\ &= V^{\mu*} V_\mu \frac{1}{(s - z)(s - z^*)} \text{Im} \left[(\Pi_1(s) + \delta z_1) \left(1 - 2M\Gamma \frac{i}{s - z} \right) \right] \\ &= V^{\mu*} \frac{\text{Im} [\Pi_1(s) + \delta z_1]}{(s - z)(s - z^*)} V_\mu + \mathcal{O}(\Gamma^3), \end{aligned} \quad (3.46)$$

wobei ausgenutzt wurde, dass $V^\mu \sim g \sim \sqrt{\Gamma}$ und $\Pi_1 \sim g^2 \sim \Gamma$. Aus Gleichung (3.32) folgt $\text{Im}[\delta z_1] = M\Gamma + \mathcal{O}(\hbar^2)$, so dass sich bis zur Ordnung $\mathcal{O}(\Gamma^3)$ die Imaginärteile von Diagramm a) und c) wegheben.

Im nächsten Schritt wird gezeigt, dass der s -Kanal-Beitrag zur „quadrier-

ten“ Amplitude aus Abbildung 3.2,

$$\begin{aligned}
& \sum_{f, \bar{f}} (2\pi)^4 \delta^4(p_{(f\bar{f})} - p) \mathcal{T}_{a(f\bar{f})i}^* \mathcal{T}_{a(f\bar{f})i} \\
&= \sum_{\sigma, \bar{\sigma}} \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} (2\pi)^2 \delta(q^2 - m^2) \Theta(q_0) \delta[(p - q)^2 - m^2] \Theta(p_0 - q_0) \\
&\quad \times g^4 \bar{v}(p - q, \bar{\sigma}) \gamma^\mu u(q, \sigma) [S'_{\mu\nu}(p)]^* \bar{u}(p_1, \sigma_1) \gamma^\nu v(p_2, \sigma_2) \\
&\quad \times \bar{u}(q, \sigma) \gamma^\sigma v(p - q, \bar{\sigma}) S'_{\sigma\rho}(p) \bar{v}(p_2, \sigma_2) \gamma^\rho u(p_1, \sigma_1), \tag{3.47}
\end{aligned}$$

gemäß der Unitaritätsbedingung (3.6) bis zur betrachteten Ordnung mit dem Imaginärteil von Diagramm i) korrespondiert. Unter Ausnutzung der Stromerhaltung und der Notation (3.40) erhält man für die rechte Seite von Gleichung (3.47)

$$\begin{aligned}
& \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} (2\pi)^2 \delta(q^2 - m^2) \Theta(q_0) \delta[(p - q)^2 - m^2] \Theta(p_0 - q_0) \\
&\quad \times g^2 \sum_{\sigma, \bar{\sigma}} \bar{v}_\alpha(p - q, \bar{\sigma}) (\gamma^\mu)_{\alpha\beta} u_\beta(q, \sigma) \bar{u}_\gamma(q, \sigma) (\gamma^\sigma)_{\gamma\delta} v_\delta(p - q, \bar{\sigma}) \\
&\quad \times V^{\mu*} \frac{1}{(p^2 - z^*)(p^2 - z)} V_\mu \\
&= \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} (2\pi)^2 \delta(q^2 - m^2) \Theta(q_0) \delta[(p - q)^2 - m^2] \Theta(p_0 - q_0) \\
&\quad \times g^2 (\gamma^\mu)_{\alpha\beta} \sum_{\sigma} u_\beta(q, \sigma) \bar{u}_\gamma(q, \sigma) (\gamma^\sigma)_{\gamma\delta} \sum_{\bar{\sigma}} v_\delta(p - q, \bar{\sigma}) \bar{v}_\alpha(p - q, \bar{\sigma}) \\
&\quad \times V^{\mu*} \frac{1}{(p^2 - z^*)(p^2 - z)} V_\mu, \tag{3.48}
\end{aligned}$$

wobei die Spinor-Indizes α, β, γ und δ explizit eingeführt wurden. Aufgrund der vorangestellten Delta- und Theta-Funktionen können die Ersetzungen

$$\begin{aligned}
\sum_{\sigma} u_\beta(q, \sigma) \bar{u}_\gamma(q, \sigma) &= (\not{q} + m)_{\beta\gamma}, \\
\sum_{\bar{\sigma}} v_\delta(p - q, \bar{\sigma}) \bar{v}_\alpha(p - q, \bar{\sigma}) &= (\not{p} - \not{q} - m)_{\delta\alpha}
\end{aligned}$$

durchgeführt werden. Die Summation über die Spinor-Indizes α, β, γ und δ stellt eine Spur des Produkts der entsprechenden Dirac-Matrizen dar, so dass

Formel (3.48) in die folgende Form gebracht werden kann:

$$\begin{aligned}
& - (2\pi)^2 \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \delta(q^2 - m^2) \Theta(q_0) \delta[(p - q)^2 - m^2] \Theta(p_0 - q_0) \\
& \times \frac{g^2 V_\mu^* V_\sigma}{(p^2 - z^*)(p^2 - z)} \text{Tr} [\gamma^\mu (\not{q} + m) \gamma^\sigma (\not{q} - \not{p} + m)] .
\end{aligned} \tag{3.49}$$

Um das Ergebnis (3.49) weiter umzuformen, betrachtet man den Einschleifenbeitrag zur Selbstenergie des Vektormesons:

$$\begin{aligned}
i\Pi_1^{\mu\sigma}(p) &= - (ig)^2 \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \text{Tr} \left[\gamma^\mu \frac{i}{\not{q} - m + i\epsilon} \gamma^\sigma \frac{i}{\not{q} - \not{p} - m + i\epsilon} \right] \\
&= - g^2 \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \frac{1}{q^2 - m^2 + i\epsilon} \frac{1}{(q - p)^2 - m^2 + i\epsilon} \\
&\quad \times \text{Tr} [\gamma^\mu (\not{q} + m) \gamma^\sigma (\not{q} - \not{p} + m)] .
\end{aligned} \tag{3.50}$$

Da man eine Darstellung wählen kann, in der alle γ -Matrizen rein imaginär sind (Majorana-Darstellung) und die Spur des Produkts einer ungeraden Anzahl von γ -Matrizen verschwindet, ist das Ergebnis der in Gleichung (3.50) auftretenden Spur reell. Der Imaginärteil ergibt sich somit gemäß Gleichung (3.19) zu

$$\begin{aligned}
\text{Im}[\Pi_1^{\mu\sigma}] &= - 2g^2 \pi^2 \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \delta(q^2 - m^2) \Theta(q_0) \delta[(p - q)^2 - m^2] \Theta(p_0 - q_0) \\
&\quad \times \text{Tr} [\gamma^\mu (\not{q} + m) \gamma^\sigma (\not{q} - \not{p} + m)] .
\end{aligned} \tag{3.51}$$

Der Vergleich der Ergebnisse (3.49) und (3.51) mit Gleichung (3.46) liefert die folgende Beziehung:

$$\begin{aligned}
\sum_{f, \bar{f}} (2\pi)^4 \delta^4(p_{(f\bar{f})} - p) \mathcal{T}_{a(f\bar{f})i}^* \mathcal{T}_{a(f\bar{f})i} &= V_\mu^* \frac{2 \text{Im} [\Pi_1^{\mu\sigma}(p)]}{(s - z^*)(s - z)} V_\sigma \\
&= V_\mu^* \frac{2 \text{Im} [\Pi_1(s)]}{(s - z^*)(s - z)} V^\mu \\
&= \text{Im} [\mathcal{T}_i] + \mathcal{O}(\Gamma^3) ,
\end{aligned} \tag{3.52}$$

wobei im zweiten Schritt die Parametrisierung (3.37) verwendet wurde. Die Unitaritätsbedingung ist somit zur Ordnung $\mathcal{O}(\Gamma^3)$ für die bisher betrachteten Diagramme erfüllt.

Als nächstes werden die Diagramme b) und d) analysiert:

$$i \mathcal{T}_b = i g^2 \bar{u}(p_1, \sigma_1) \gamma^\mu u(p_1, \sigma_1) S'_{\mu\nu}(0) \bar{v}(p_2, \sigma_2) \gamma^\nu v(p_2, \sigma_2) , \tag{3.53a}$$

$$i \mathcal{T}_d = -i g^2 \bar{u}(p_1, \sigma_1) \gamma^\mu u(p_1, \sigma_1) S'_{\mu\alpha}(0) \delta z_1 g^{\alpha\beta} S'_{\beta\nu}(0) \bar{v}(p_2, \sigma_2) \gamma^\nu v(p_2, \sigma_2) . \tag{3.53b}$$

Das relative Vorzeichen im Vergleich zu den Diagrammen a) und c) ist auf die Spinorstruktur zurückzuführen. Führt man die Notationen

$$g \bar{u}(p_1, \sigma_1) \gamma^\mu u(p_1, \sigma_1) =: V_1^\mu, \quad g \bar{v}(p_2, \sigma_2) \gamma^\mu v(p_2, \sigma_2) =: V_2^\mu \quad (3.54)$$

ein, lautet der Imaginärteil der Summe beider Diagramme

$$\begin{aligned} \text{Im} [\mathcal{T}_{b+d}] &= -\text{Im} \left[V_1^\mu \left(\frac{1}{(-z)} + \frac{\delta z_1}{(-z)^2} \right) V_{2\mu} \right] \\ &= -V_1^\mu V_{2\mu} \frac{1}{zz^*} \text{Im} \left[-z^* + \frac{\delta z_1 (z - z + z^*)}{z} \right] \\ &= -V_1^\mu V_{2\mu} \frac{1}{zz^*} \text{Im} \left[-z^* + \delta z_1 \left(1 + 2M\Gamma \frac{i}{z} \right) \right] \\ &= -V_1^\mu V_{2\mu} \frac{1}{zz^*} \underbrace{[-M\Gamma + \text{Im}(\delta z_1)]}_{=\mathcal{O}(\hbar^2)} + \mathcal{O}(\Gamma^3). \end{aligned} \quad (3.55)$$

Der Beitrag (3.55) zur Unitaritätsbedingung ist somit von höherer Ordnung. Entwickelt man die Amplitude von Diagramm j) in Potenzen von Γ , ist der führende Term der Entwicklung reell und proportional zu $g^4 \sim \Gamma^2$. Der Imaginärteil trägt erst in Ordnung $\mathcal{O}(\Gamma^3)$ bei. Auch die Diagramme f), g), h), k) und l) besitzen Imaginärteile höherer Ordnung. Das liegt daran, dass die Diagramme proportional zu g^4 sind und alle kinematisch beitragenden Schnitte durch mindestens ein instabiles Teilchen führen und somit in mindestens einem zusätzlichen Faktor von Γ resultieren.

Schließlich bleibt noch der Beweis, dass die Imaginärteile der Diagramme e), m) und n) bis zur betrachteten Ordnung mit der „quadrierten“ Amplitude aus Abbildung 3.3 im Einklang stehen. Dazu betrachtet man zunächst die Amplitude e):

$$\begin{aligned} i\mathcal{T}_e &= -g^4 \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \left[\frac{1}{(p_2 - k)^2 - z} \right]^2 \bar{u}(p_1, \sigma_1) \gamma^\mu \frac{1}{\not{p} - \not{k} - m + i\epsilon} \gamma^\nu u(p_1, \sigma_1) \\ &\quad \times \bar{v}(p_2, \sigma_2) \gamma_\mu \frac{1}{-\not{k} - m + i\epsilon} \gamma_\nu v(p_2, \sigma_2) \\ &= -g^4 \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \left[\frac{1}{(p_2 - k)^2 - z} \right]^2 \frac{1}{(p - k)^2 - m^2 + i\epsilon} \frac{1}{k^2 - m^2 + i\epsilon} \\ &\quad \times \left\{ \bar{u}(p_1, \sigma_1) \gamma^\mu [\not{p} - \not{k} + m] \gamma^\nu u(p_1, \sigma_1) \bar{v}(p_2, \sigma_2) \gamma_\mu [m - \not{k}] \gamma_\nu v(p_2, \sigma_2) \right\}. \end{aligned} \quad (3.56)$$

Der Ausdruck in geschweiften Klammern ist von der Form

$$\bar{u} \Gamma_1^{\mu\nu} u \bar{v} \Gamma_{2\mu\nu} v \quad \text{mit} \quad (\Gamma_i^{\mu\nu})^\dagger = \gamma_0 \Gamma_i^{\nu\mu} \gamma_0. \quad (3.57)$$

Es lässt sich leicht zeigen, dass der Ausdruck (3.57) reell ist,

$$(\bar{u}\Gamma_1^{\mu\nu}u\bar{v}\Gamma_{2\mu\nu}v)^\dagger = u^\dagger(\gamma_0\Gamma_1^{\nu\mu}\gamma_0)\gamma_0u\,v^\dagger(\gamma_0\Gamma_{2\nu\mu}\gamma_0)\gamma_0v = \bar{u}\Gamma_1^{\mu\nu}u\bar{v}\Gamma_{2\mu\nu}v,$$

so dass sich der Imaginärteil von Gleichung (3.56) durch die Anwendung der Formel (D.9) bestimmen lässt. Unter Verwendung der Projektionsoperatoren über die positiven und negativen Energiezustände ergibt sich der zweifache Imaginärteil der Amplitude (3.56) zu

$$\begin{aligned} 2\text{Im}[\mathcal{T}_e] &= g^4 \sum_{\sigma, \bar{\sigma}} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^2} \delta(k^2 - m^2) \Theta(k_0) \delta[(p-k)^2 - m^2] \Theta(p_0 - k_0) \\ &\quad \times \bar{u}(p_1, \sigma_1) \gamma^\mu u(p-k, \sigma) \bar{u}(p-k, \sigma) \gamma^\nu u(p_1, \sigma_1) \\ &\quad \times \bar{v}(p_2, \sigma_2) \gamma_\mu v(k, \bar{\sigma}) \bar{v}(k, \bar{\sigma}) \gamma_\nu v(p_2, \sigma_2) \\ &\quad \times \left\{ \frac{(p_2 - k)^2 - M^2}{[(p_2 - k)^2 - M^2]^2 + M^2 \Gamma^2} \right\}^2 + \mathcal{O}(\Gamma^3). \end{aligned} \quad (3.58)$$

Die rechte Seite von Gleichung (3.58) entspricht bis zur Ordnung $\mathcal{O}(\Gamma^3)$ der quadrierten t-Kanal-Amplitude aus Abbildung 3.3. Analog dazu lässt sich unter Anwendung der Formel (D.4) zeigen, dass der Imaginärteil von Diagramm m) und n) bis auf Terme der höheren Ordnung der s- und t-Kanal-Interferenz zur „quadrierten“ Amplitude aus Abbildung 3.3 entspricht.

Es wurde gezeigt, dass die Imaginärteile aller auf Baum- und Einschleifenniveau zur Vorwärtsstreuamplitude beitragenden Diagramme bis zur Ordnung $\mathcal{O}(\Gamma^3)$ gemäß Gleichung (3.6) mit der „quadrierten“ Amplitude der Baumdiagramme übereinstimmen. Die als Entwicklungsparameter verwendete renormierte Kopplungskonstante $g(\sim \sqrt{\Gamma})$ wurde dabei als reellwertig vorausgesetzt. In Übereinstimmung mit Referenz [8] tragen keine instabilen Zustände zur rechten Seite der Unitaritätsbedingung (3.6) bei. Im Anhang D.1 wird die Verallgemeinerung der hier hergeleiteten Cutkosky-Regeln exemplarisch an einem Zweischleifenintegral vorgeführt. Auch wenn die Vorgehensweise ähnlich derjenigen auf dem Einschleifenniveau ist, wird eine Analyse der perturbativen Unitarität in höheren Ordnungen durch nicht triviale Γ -Abhängigkeiten der Imaginärteile deutlich komplizierter.

3.2 CMS in EFT

Die ursprüngliche Formulierung des CMS auf Schleifenniveau [41] basiert auf der direkten Verallgemeinerung der Massenschalenrenormierung (*on-mass-shell renormalization*) [154] und ist somit für Anwendungen innerhalb des

Standardmodells geeignet. In dieser Arbeit werden die Renormierungsbedingungen des CMS im Hinblick auf EFT modifiziert [38, 47]. Im Gegensatz zum Standardmodell und zur Modell-Lagrangedichte aus Gleichung (3.31) sind EFT nicht renormierbar⁶, d. h. es können nicht alle UV-Divergenzen durch die Redefinition endlich vieler Parameter der Lagrangedichte absorbiert werden. Die Forderung nach Renormierbarkeit schränkt die Anzahl physikalisch zulässiger Theorien stark ein und gilt aus heutiger Sicht nicht mehr als zwingend erforderlich. Umfasst die Lagrangedichte alle, also unendlich viele, Terme, die durch ihre Symmetrien erlaubt sind, existiert ein entsprechender Gegenterm zur Absorption jeder UV-Divergenz [113]. In diesem Sinne stellen effektive Feldtheorien renormierbare Theorien mit unendlich vielen Kopplungskonstanten dar [5].

Eine EFT ist nur dann von praktischem Nutzen, wenn die Wichtigkeit jedes Feynmandiagramms zu einem gegebenen physikalischen Prozess abgeschätzt werden kann. Das Aufstellen eines solchen Zählschemas ist für den mesonischen Sektor der ChPT unproblematisch, da Beiträge aus Diagrammen mit k Schleifen als $\mathcal{O}(q^{2k+2})$ zählen und somit um den Faktor q^{2k} gegenüber entsprechenden Baumdiagrammen unterdrückt sind. Zur Renormierung divergenter Schleifenbeiträge verwendet man im mesonischen Sektor die dimensionale Regularisierung [152] in n Raumzeitdimensionen zusammen mit dem modifizierten minimalen Abzugsschema (*modified minimal subtraction scheme of ChPT*, $\widetilde{\text{MS}}$) [25]. Dabei werden zu

$$R = \frac{2}{n-4} - [\ln(4\pi) + \Gamma'(1) + 1] \quad (3.59)$$

proportionale Beiträge in den Niederenergiekonstanten absorbiert⁷. Durch die Anwendung der dimensional Regularisierung in Verbindung mit dem $\widetilde{\text{MS}}$ -Schema korrespondiert die Schleifenentwicklung exakt mit der chiralen Entwicklung nach Impulsen und Quarkmassen bei festem Verhältnis m_q/q^2 [6], weshalb systematische Berechnungen im Rahmen der Störungstheorie durchgeführt werden können.

Wendet man das $\widetilde{\text{MS}}$ -Schema auf Schleifendiagramme mit inneren Nukleonlinien an, tragen die renormierten Schleifenbeiträge in niedrigeren chiralen Ordnungen bei als vom Zählschema vorhergesagt [25]. Dieser Umstand resultiert daraus, dass mit der Nukleonmasse eine neue Skala in die EFT eingeführt wird, die im chiralen Grenzfall nicht verschwindet. Eine Möglichkeit das

⁶ Anders als das Standardmodell ist die durch die Lagrangedichte (3.31) definierte Theorie nur auf dem Niveau der physikalischen Größen renormierbar (*on-mass-shell renormalizable*) [151].

⁷ $\Gamma'(1) \approx -0.577$ siehe Anhang A.2.

Zählschema wieder herzustellen, besteht darin, im Rahmen der chiralen Störungstheorie für schwere Baryonen [26, 27] die schweren Komponenten des Nukleonfeldes auszuintegrieren und die resultierende effektive Wirkung in inversen Ordnungen der Nukleonmasse zu entwickeln. In diesem nichtrelativistischen Grenzfall der BChPT ist das Zählschema analog dem mesonischen Sektor durch die minimale Subtraktion dimensionalregularisierter Schleifenbeiträge erfüllt. Die zusätzliche Entwicklung in der Nukleonmasse generiert allerdings in manchen Fällen ein falsches analytisches Verhalten [155].

Das Aufstellen eines konsistenten Zählschemas im Rahmen der relativistischen BChPT kann durch die Wahl passender Renormierungsbedingungen gewährleistet werden [28, 29, 30, 31, 33]. Eine Standardmethode in diesem Zusammenhang, die auf Einschleifendiagramme mit Pion- und Nukleonpropagatoren angewendet werden kann, ist die Infrarotregularisierung [31]. Dabei werden die Schleifenintegrale in einen infrarot singulären und einen infrarot regulären Anteil zerlegt. Der infrarot singuläre Anteil erfüllt das Zählschema, während der infrarot reguläre Anteil in den LEC der effektiven Theorie absorbiert werden kann, da er analytisch in der Entwicklung nach kleinen Größen ist. Die erweiterte Massenschalenrenormierung [32] stellt ein alternatives lorentzinvariantes Renormierungsschema dar, das sich erfolgreich auf Feynmandiagramme mit mehreren Fermion- und inneren Resonanzlinien sowie Mehrschleifendiagramme anwenden lässt [156, 157]. Die zentrale Idee besteht darin, zusätzlich zur Verwendung des $\overline{\text{MS}}$ -Schemas endliche Subtraktionen durchzuführen, so dass die renormierten Feynmandiagramme das vorgegebene Zählschema erfüllen. Da alle zählschemaverletzenden Terme analytisch in kleinen Parametern sind, können sie als Gegenterme der allgemeinsten Lagrangedichte realisiert werden.

Die Vorgehensweise in der erweiterten Massenschalenrenormierung kann anhand des folgenden Integrals verdeutlicht werden [32]:

$$\begin{aligned}
H_{11}(0, p) &= \mu^{4-n} \int \frac{d^n k}{(2\pi)^n} \frac{i}{[k^2 + i0^+][(k+p)^2 - m^2 + i0^+]} \\
&= -\frac{1}{(4\pi)^{n/2}} \left(\frac{m}{\mu}\right)^{n-4} \left[\underbrace{{}_2F_1\left(1, 2 - \frac{n}{2}; 4 - n; -\Delta\right)}_{=: F(n, \Delta)} \frac{\Gamma(2 - \frac{n}{2})}{n-3} \right. \\
&\quad \left. + (-\Delta)^{n-3} \underbrace{{}_2F_1\left(\frac{n}{2} - 1, n-2; n-2; -\Delta\right)}_{=: G(n, \Delta)} \Gamma(3-n) \Gamma\left(\frac{n}{2} - 1\right) \right], \tag{3.60}
\end{aligned}$$

wobei μ für den 't Hooft-Parameter der dimensionalen Regularisierung und Γ für die Γ -Funktion aus Anhang A.2 steht. Dieses Integral tritt beispielsweise in der Berechnung der führenden Schleifenkorrektur zur Nukleonselbstenergie im chiralen Grenzfall auf [25]. Die hypergeometrischen Funktionen F und G sind analytische Potenzreihen des Entwicklungsparameters $\Delta = \frac{p^2 - m^2}{m^2} = \mathcal{O}(q)$ (vgl. Anhang A.3). Gemäß des Zählschemas aus Gleichung (2.31) trägt das renormierte Integral in chiraler Ordnung $\mathcal{O}(q^{n-3})$ bei. Der zu G proportionale Anteil ist für unganzzahlige Werte von n nichtanalytisch in Δ und erfüllt das Zählschema. Der zu F proportionale Anteil verletzt das Zählschema, ist aber analytisch in Δ . Um diesen Sachverhalt zu verdeutlichen, verwendet man die Identität (siehe Gleichung (A.12))

$${}_2F_1(a, b; c; z) = 1 + \frac{a b}{c} z + \frac{a(a+1) b(b+1)}{c(c+1)} \frac{z^2}{2} + \dots \quad \text{für } |z| < 1 \quad (3.61)$$

und berücksichtigt, dass Δ als kleine Größe der Ordnung $\mathcal{O}(q)$ zählt. Gleichung (3.60) ergibt sich somit zu

$$H_{11}(0, p) = -\frac{1}{(4\pi)^{n/2}} \left(\frac{m}{\mu}\right)^{n-4} \left[\frac{\Gamma(2 - \frac{n}{2})}{n-3} + \Delta \ln(\Delta) + \Delta^2 \ln(\Delta) + \dots \right]. \quad (3.62)$$

Die Auslassungspunkte symbolisieren dabei Beiträge der Ordnung $\mathcal{O}(q^3)$ oder $\mathcal{O}(n-4)$. Der zählchemaverletzende Term

$$-\frac{1}{(4\pi)^{n/2}} \left(\frac{m}{\mu}\right)^{n-4} \frac{\Gamma(2 - \frac{n}{2})}{n-3} = \mathcal{O}(q^0) \quad (3.63)$$

ist analytisch im Impuls p und kann somit durch die Renormierung von Kopplungskonstanten absorbiert werden.

Zur Bestimmung der Subtraktionsterme ist eine explizite Berechnung des Integrals nicht notwendig. Stattdessen entwickelt man den Integranden nach kleinen Parametern bis zur zählchemaverletzenden Ordnung und integriert die resultierenden Summanden einzeln. Die Vertauschung von Integration und Summation reproduziert alle in den Entwicklungsparametern analytischen Beiträge des ursprünglichen Integrals [158]. Der Abzugsterm für das Integral aus Gleichung (3.60) lautet entsprechend

$$H_{11}^{\text{sub}} = \mu^{4-n} \int \frac{d^n k}{(2\pi)^n} \frac{i}{[k^2 + i0^+][k^2 + 2p \cdot k + i0^+]} \Big|_{p^2=m^2}. \quad (3.64)$$

Unter Verwendung der Formel (C.17) für $\alpha = \beta = 1$ erhält man in Übereinstimmung mit Gleichung (3.63) für den zu subtrahierenden Term

$$\begin{aligned} H_{11}^{\text{sub}} &= -\frac{1}{(4\pi)^{n/2}} \left(\frac{m}{\mu}\right)^{n-4} \frac{\Gamma(2 - \frac{n}{2})}{n-3} \\ &= \frac{1}{16\pi^2} \left[R - 1 + 2 \ln \left(\frac{m}{\mu}\right) \right] + \mathcal{O}(n-4), \end{aligned} \quad (3.65)$$

wobei R in Gleichung (3.59) gegeben ist. Das renormierte Integral

$$H_{11}^{\text{ren}} = H_{11} - H_{11}^{\text{sub}} = \mathcal{O}(q^{n-3}) \quad (3.66)$$

erfüllt das Zählschema.

Unter Berücksichtigung resonanter Freiheitsgrade führt das EOMS-Schema nur dann zu einem konsistenten Zählschema, wenn diese ausschließlich als innere Linien in Schleifen auftreten [156, 37]. Bei der Berechnung von Resonanzeigenschaften resultiert die Schleifenintegration für große externe Impulse in komplexwertigen, zählschemaverletzenden Beiträgen, deren Imaginärteile nicht durch die oben beschriebene Redefinition der Parameter eliminiert werden können. Dieses Problem kann durch die Anwendung des CMS behoben werden. Dazu zerlegt man zunächst die nackten Parameter der Lagrangedichte in renormierte Parameter und Gegenterme und wählt die renormierten Massen als Pole der vollständigen Propagatoren im chiralen Grenzfall. Die reellwertige nackte Masse $M_{R,0}$ wird in eine komplexe, renormierte Masse z_R und einen komplexen Gegenterm δz_R aufgespaltet:

$$M_{R,0} = z_R + \delta z_R, \quad (3.67)$$

mit

$$z_R^2 = \left(M_\chi - i \frac{\Gamma_\chi}{2} \right)^2. \quad (3.68)$$

Hierbei steht M_χ für die physikalische Masse und Γ_χ für die physikalische Breite der Resonanz im chiralen Grenzfall. Die physikalische Masse ist als Realteil und die Breite als (-2) mal der Imaginärteil des Pols definiert⁸. Die renormierten Massen werden wie oben beschrieben in die Propagatoren eingesetzt, die Gegenterme störungstheoretisch behandelt und die restlichen renormierten Parameter der Lagrangedichte werden so gewählt, dass

⁸Die Parametrisierung aus Gleichung (3.68) weicht von der üblicherweise im Standardmodell verwendeten Parametrisierung aus Gleichung (3.20) ab. Für Rechnungen in EFT wird in dieser Arbeit ausschließlich die Parametrisierung aus (3.68) verwendet.

die korrespondierenden Gegenterme die zählschemaverletzenden Anteile der Schleifendiagramme absorbieren.

Das CMS wird in dieser Arbeit in zwei Schritten durchgeführt. Zuerst werden alle divergenten Beiträge durch die Anwendung der dimensional Regularisierung zusammen mit dem $\overline{\text{MS}}$ -Schema eliminiert. Dann werden die $\overline{\text{MS}}$ -renormierten Schleifendiagramme an den komplexen Punkten auf der Massenschale im chiralen Grenzfall subtrahiert. Insofern stellt das CMS eine Verallgemeinerung des EOMS-Schemas für instabile Teilchen dar, und die oben beschriebene Methode kann zur Bestimmung der Abzugsterme angewendet werden. Die Gegenterme nehmen dabei im Allgemeinen komplexe Werte an und ermöglichen somit die Absorption zählschemaverletzender Imaginärteile.

Nach der Subtraktion aller zählschemaverletzenden Terme werden die renormierten LEC durch nichtlineare Regressionsalgorithmen an verfügbare empirische Daten angepasst. Auch wenn die renormierten LEC im CMS im Allgemeinen einen Imaginärteil aufweisen können, wird dieser an einigen Stellen dieser Arbeit vernachlässigt, da oft nicht genug empirische Informationen vorhanden sind, um sowohl Real- als auch Imaginärteil zu bestimmen.

Die Anwendung des CMS bedingt die Berechnung von Schleifenintegralen mit komplexen inneren Massen und komplexen äußeren Impulsen (vgl. Anhang C). Die Schleifenintegrale mit komplexen Parametern müssen im Grenzfall verschwindender Breiten stetig gegen die Werte der entsprechenden Schleifenintegrale mit reellen Parametern streben. Umfassen die Schleifenintegrale interne Massen mit endlichen negativen Imaginärteilen und reelle äußere Impulse, können die nötigen analytischen Fortsetzungen bis hin zu Vierpunktfunktionen durchgeführt werden [159]. Schwierigkeiten bei der analytischen Fortsetzung treten dann auf, wenn sowohl interne Massen als auch äußere Impulse komplex gewählt werden müssen und keine analytischen Resultate für die Integrale existieren [18]. Da diese Problematik in einigen Rechnungen auftritt, mussten zur numerischen Auswertung Approximationen durchgeführt werden, die an den betroffenen Stellen näher ausgeführt werden.

3.3 Zählschema

In den störungstheoretischen Rechnungen der vorliegenden Arbeit wird das folgende Zählschema verwendet:

- Ein Vertex aus einer Lagrangedichte der Ordnung $\mathcal{O}(q^n)$ zählt als $\mathcal{O}(q^n)$,
- ein Pionpropagator als $\mathcal{O}(q^{-2})$,

- ein Nukleon-, Deltaresonanz-, Roperresonanzpropagator als $\mathcal{O}(q^{-1})$,
- ein Vektormesonpropagator als $\mathcal{O}(q^0)$,
- der Polarisationsvektor eines virtuellen Photons als $\mathcal{O}(q)$,
- eine Schleifenintegration in n Raumzeitdimensionen als $\mathcal{O}(q^n)$.

In der Pion-Nukleon-Streuung und Pionproduktion im Bereich der Roperresonanz dominiert deren Beitrag, so dass dem Roperpropagator eine niedrigere chirale Ordnung zugeordnet wird. Die entsprechende Modifikation des Zählschemas wird in Abschnitt 7.1.2 näher erläutert.

Kapitel 4

Masse und Breite der Deltaresonanz

Aufgrund ihres geringen Massenunterschieds zum Nukleon und ihrer starken Kopplung an den Pion-Nukleon-Kanal spielt die Deltaresonanz eine wichtige Rolle in der phänomenologischen Beschreibung von nieder- und mittlere-energetischen Prozessen der starken Wechselwirkung. Eine Möglichkeit, die Deltaresonanz als dynamischen Freiheitsgrad in BChPT zu integrieren, besteht in der Verwendung der Massendifferenz $\delta \equiv m_\Delta - m_N$ als zusätzlichen Entwicklungsparameter. Dabei existieren mit der *small-scale expansion* (SSE) [34, 79] und dem *delta counting* [35] zwei Zähl schemata, die sich in der Zählweise des Massenunterschiedes δ unterscheiden.

In diesem Kapitel wird anhand einer Berechnung der Masse und Breite der Deltaresonanz in relativistischer chiraler EFT bis zur Ordnung $\mathcal{O}(q^3)$ demonstriert, dass unabhängig von der Zählweise der Massendifferenz δ ein konsistentes Zähl schema im Rahmen des CMS aufgestellt werden kann. In diesem Zusammenhang werden wie oben beschrieben die nackten Parameter der Lagrangedichten (2.53), (2.59) und (2.61) aus Abschnitt 2.3.2 in renormierte Parameter und Gegenterme aufgespalten¹:

$$\begin{aligned} m_{\Delta 0} &= z_\Delta + \delta z_\Delta, \\ m_0 &= m + \delta m, \\ c_{1,0}^\Delta &= c_1^\Delta + \delta c_1^\Delta, \\ &\dots \end{aligned} \tag{4.1}$$

z_Δ steht für den komplexwertigen Pol des Deltapropagators im chiralen Grenzfalle, m für die Masse des Nukleons im chiralen Grenzfalle und die Auslassungs-

¹Zur besseren Übersicht wurde in der Lagrangedichte (2.61) der Index 0 von $c_{1,0}^\Delta$ unterdrückt.

punkte symbolisieren weitere Parameter der Lagrangedichte. Die renormierten Massenparameter werden in die freien Propagatoren eingesetzt und die Gegenterme perturbativ behandelt.

Unter Ausnutzung der Isospinsymmetrie ist die Isospinstruktur des vollständigen Propagators der Deltaresonanz gegeben durch

$$S_{ij,\alpha\beta}^{\mu\nu}(p) = P_{ij,\alpha\beta}^{\frac{3}{2}} S^{\mu\nu}(p), \quad (4.2)$$

wobei man $S^{\mu\nu}(p)$ aus der Lösung der Gleichung

$$S^{\mu\nu}(p) = S_0^{\mu\nu}(p) - S^{\mu\rho}(p) \Sigma_{\rho\sigma}(p) S_0^{\sigma\nu}(p) \quad (4.3)$$

erhält. $S_0^{\mu\nu}(p)$ steht hierbei für den freien Propagator und $i\Sigma^{\mu\nu}$ für die Summe aller einteilchenirreduziblen Diagramme, die zur Green'schen Zweipunktfunktion beitragen. Aus Gleichung (4.3) ergibt sich der vollständige Deltapropagator in n Raumzeitdimensionen zu [37, 47]

$$\begin{aligned} iS^{\mu\nu}(p) = & -i \left[g^{\mu\nu} - \frac{\gamma^\mu \gamma^\nu}{n-1} + \frac{p^\mu \gamma^\nu - \gamma^\mu p^\nu}{(n-1)z_\Delta} - \frac{(n-2)p^\mu p^\nu}{(n-1)z_\Delta^2} \right] \\ & \times \frac{1}{\not{p} - z_\Delta - \Sigma_1(\not{p}) - \not{p} \Sigma_6(\not{p})} + \text{n. p.}, \end{aligned} \quad (4.4)$$

wobei n. p. für die polfreien Anteile steht und die Selbstenergie der Deltaresonanz folgendermaßen parametrisiert wurde:

$$\Sigma^{\mu\nu}(p^2) = \sum_{a=1}^{10} \Sigma_a(p^2) \mathcal{P}_a^{\mu\nu}, \quad (4.5)$$

mit

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_1^{\mu\nu} &= g^{\mu\nu}, & \mathcal{P}_2^{\mu\nu} &= \gamma^\mu \gamma^\nu, & \mathcal{P}_3^{\mu\nu} &= p^\mu \gamma^\nu, & \mathcal{P}_4^{\mu\nu} &= \gamma^\mu p^\nu, & \mathcal{P}_5^{\mu\nu} &= p^\mu p^\nu, \\ \mathcal{P}_6^{\mu\nu} &= \not{p} g^{\mu\nu}, & \mathcal{P}_7^{\mu\nu} &= \not{p} \gamma^\mu \gamma^\nu, & \mathcal{P}_8^{\mu\nu} &= \not{p} p^\mu \gamma^\nu, & \mathcal{P}_9^{\mu\nu} &= \not{p} \gamma^\mu p^\nu, & \mathcal{P}_{10}^{\mu\nu} &= \not{p} p^\mu p^\nu. \end{aligned}$$

Der komplexe Pol z des Deltapropagators ist schließlich durch die Lösung der Gleichung

$$z - z_\Delta + 4c_1^\Delta M^2 - \tilde{\Sigma}_1(z^2) - z\Sigma_6(z^2) = 0 \quad (4.6)$$

gegeben, wobei der konstante Baumgraphenanteil $-4c_1^\Delta M^2$ von Σ_1 abgespalten wurde.

Die zur Selbstenergie der Deltaresonanz bis zur Ordnung $\mathcal{O}(q^3)$ beitragenden Schleifendiagramme sind in Abbildung 4.1 dargestellt. Unter Verwendung der Definitionen

$$\{I_{m_i}^{\mu\nu}, I_{m_i}^{\mu\nu\lambda}\} := i \mu^{4-n} \int \frac{d^n k}{(2\pi)^n} \frac{\{k^\mu k^\nu, k^\mu k^\nu k^\lambda\}}{[(k-p)^2 - m_i^2 + i0^+][k^2 - M^2 + i0^+]} \quad (4.7)$$

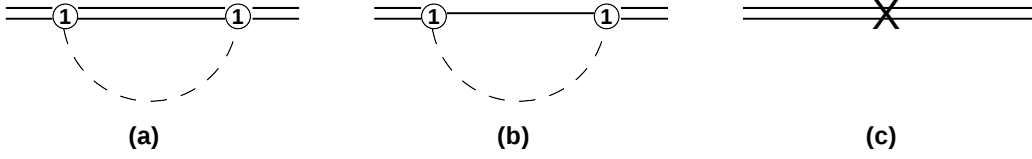


Abbildung 4.1: Beiträge zur Δ -Selbstenergie der Ordnung $\mathcal{O}(q^3)$. Einfach durchgezogene Linien stehen für Nukleonen, doppelt durchgezogene für Deltas und gestrichelte für Pionen.

lauten die unrenormierten Ergebnisse für die Schleifendiagramme aus Abbildung 4.1 (a) und (b) (vgl. Referenz [37])

$$\begin{aligned} \Sigma_{(a)}^{\mu\nu} = & -\frac{5g_1^2}{3F^2} \left[\frac{2}{3} I_{z_\Delta}^{\mu\nu} \left(2z_\Delta + 3\not{p} - \frac{p^2 \not{p}}{z_\Delta^2} \right) - g^{\mu\nu} I_{z_\Delta}^{\alpha\beta} (g_{\alpha\beta} (z_\Delta + \not{p}) - 2\gamma_\alpha p_\beta) \right. \\ & \left. + g^{\mu\nu} I_{z_\Delta}^{\alpha\beta\lambda} g_{\alpha\beta} \gamma_\lambda - \frac{2}{3} I_{z_\Delta}^{\mu\nu\lambda} \frac{\gamma_\lambda (z_\Delta^2 - p^2) + 2p_\lambda (z_\Delta + \not{p})}{z_\Delta^2} \right], \end{aligned} \quad (4.8)$$

$$\Sigma_{(b)}^{\mu\nu} = -\frac{g_\Delta^2}{F^2} [I_m^{\mu\nu} (\not{p} + m) + I_m^{\mu\nu\lambda} \gamma_\lambda]. \quad (4.9)$$

Um das CMS konkret zu realisieren, wurden die Schleifendiagramme zu skalaren Integralen reduziert, in Potenzen von

$$\left. \begin{array}{l} M \\ \not{p} - z_\Delta \\ p^2 - z_\Delta^2 \end{array} \right\} \propto \mathcal{O}(q)$$

entwickelt und alle Terme, die explizit das oben beschriebene Zählschema verletzen, subtrahiert. Mit der Schreibweise

$$\Sigma^{(i)} = \widetilde{\Sigma}_1^{(i)} + z_\Delta \Sigma_6^{(i)}, \quad (4.10)$$

ist der Pol der Deltaresonanz bis zur dritten chiralen Ordnung gegeben durch

$$z = z_\Delta - 4c_1^\Delta M^2 + (\Sigma^{(a)} + \Sigma^{(b)})|_{\not{p}=z_\Delta} - \Sigma_{\text{Sub}}^{(a)} - \Sigma_{\text{Sub}}^{(b)}, \quad (4.11)$$

wobei die an der Stelle $\not{p} = z_\Delta$ ausgewerteten endlichen Beiträge zu den

Abzugstermen folgende Form annehmen

$$\Sigma_{\text{Sub}}^{(a)} = \frac{5g_1^2 z_\Delta}{10368\pi^2 F^2} \left[12 (11z_\Delta^2 + 10M^2) \ln \left(\frac{z_\Delta}{\mu} \right) + 25z_\Delta^2 - 28M^2 \right], \quad (4.12)$$

$$\begin{aligned} \Sigma_{\text{Sub}}^{(b)} = & \frac{g_\Delta^2}{2304\pi^2 F^2 z_\Delta^5} \left\{ -6i\pi (z_\Delta - m)^3 (z_\Delta + m)^5 + C_1 \right. \\ & - \alpha_1(m, z_\Delta) \ln \left(\frac{z_\Delta^2 - m^2}{m^2} \right) + \alpha_1(z_\Delta, m) \ln \left(\frac{z_\Delta^2 - m^2}{\mu^2} \right) \\ & + M^2 \left[12i\pi (z_\Delta - m) (z_\Delta + m)^3 (2z_\Delta^2 - z_\Delta m + 2m^2) + C_2 \right. \\ & \left. \left. + \alpha_2(m, z_\Delta) \ln \left(\frac{z_\Delta^2 - m^2}{m^2} \right) - \alpha_2(z_\Delta, m) \ln \left(\frac{z_\Delta^2 - m^2}{\mu^2} \right) \right] \right\}, \quad (4.13) \end{aligned}$$

mit den Definitionen

$$\begin{aligned} C_1 &= z_\Delta^2 (-10z_\Delta^6 - 20z_\Delta^5 m + 14z_\Delta^4 m^2 + 48z_\Delta^3 m^3 + 9z_\Delta^2 m^4 - 12z_\Delta m^5 - 6m^6), \\ C_2 &= 4z_\Delta^2 (7z_\Delta^4 + 9z_\Delta^3 m + 3z_\Delta^2 m^2 + 9z_\Delta m^3 + 6m^4), \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} \alpha_1(m_1, m_2) &= 6m_1^5 (m_1^3 + 2m_1^2 m_2 - 2m_1 m_2^2 - 6m_2), \\ \alpha_2(m_1, m_2) &= 12m_1^5 (2m_1 + 3m_2). \end{aligned}$$

Die nichtanalytischen Terme aus Gleichung (4.11) stimmen mit denen aus Referenz [37] überein. Die Abzugsterme aus den Gleichungen (4.12) und (4.13) sind analytisch in den Pionmassen und können durch die Renormierung der Masse z_Δ und der Konstanten c_1^Δ absorbiert werden. Beide Größen sind komplex und bleiben endlich im Limes $m \rightarrow z_\Delta$.

Um zu zeigen, dass die renormierten Diagramme die chirale Ordnung $\mathcal{O}(q^3)$ besitzen und somit das Zählschema erfüllen, betrachtet man zunächst Diagramm (a), dividiert dessen Beitrag durch M^3 und bildet schließlich den Grenzwert $M \rightarrow 0$:

$$\lim_{M \rightarrow 0} \frac{1}{M^3} \Sigma_{(a)}^{\text{ren}} \bigg|_{p=z_\Delta} = \frac{25g_1^2}{864F^2\pi}. \quad (4.14)$$

Der durch M^3 dividierte Beitrag des Diagramms (b) liefert im Limes $M \rightarrow 0$ für eine konstante und endliche Massendifferenz $z_\Delta - m$

$$\lim_{M \rightarrow 0} \frac{1}{M^3} \Sigma_{(b)}^{\text{ren}} \bigg|_{p=z_\Delta} = 0. \quad (4.15)$$

Skaliert die Massendifferenz $z_\Delta - m$ wie αM , ergibt sich für den Grenzfall verschwindender Pionmasse das folgende Ergebnis:

$$\lim_{M \rightarrow 0} \frac{1}{M^3} \Sigma_{(b)}^{\text{ren}} \Big|_{p=z_\Delta} = \frac{g_\Delta^2}{48F^2\pi^2} f(\alpha), \quad (4.16)$$

mit

$$\begin{aligned} f(\alpha) = & 4i\pi\alpha^3 + (6\alpha - 4\alpha^3) \log(2\alpha) + 4i\pi(1 - \alpha^2) \sqrt{\alpha^2 - 1} \\ & + 4(\alpha^2 - 1)^{3/2} \ln(\sqrt{\alpha^2 - 1} + \alpha) - 6i\pi\alpha + \alpha. \end{aligned} \quad (4.17)$$

Bildet man schließlich erst den Grenzwert $z_\Delta \rightarrow m$ und anschließend $M \rightarrow 0$, erhält man

$$\lim_{M \rightarrow 0} \frac{1}{M^3} \Sigma_{(b)}^{\text{ren}} \Big|_{p=z_\Delta} = -\frac{g_\Delta^2}{24F^2\pi}. \quad (4.18)$$

Die Beiträge der renormierten Diagramme sind somit in der Region um die Deltamasse unabhängig von der Zählweise des Massenunterschiedes δ der chiralen Ordnung $\mathcal{O}(q^3)$.

Um die expliziten Beiträge zum Pol der Deltaresonanz abzuschätzen, werden für die Parameter die Zahlenwerte aus Tabelle A.1 eingesetzt, wobei der Wert für die Kopplungskonstante g_Δ aus Referenz [37] übernommen und der für g_1 aus dem SU(6)-Grenzfall abgeschätzt wurde. Daraus ergibt sich das Resultat

$$z = \left[\left(1.210 - \frac{i}{2} 0.100 \right) - 0.078 c_1^\Delta + \left(0.036 - \frac{i}{2} 0.009 \right) \right] \text{ GeV}. \quad (4.19)$$

Im Folgenden wird geprüft, wie sich die numerischen Beiträge der renormierten Schleifendiagramme zum Deltapol ändern, wenn man die SSE verwendet, d. h. der Massendifferenz δ die gleiche chirale Ordnung wie der Pionmasse zuordnet $\delta \approx M$. Die Ergebnisse der SSE (sowie die des *delta counting*) können durch zusätzliche Entwicklungen der im CMS erzielten Ergebnisse reproduziert werden. Die zählschemaverletzenden Terme lauten unter Verwendung der SSE

$$\begin{aligned} \Sigma_{\text{Sub, SSE}}^{(a)} &= \frac{5g_1^2 z_\Delta}{10368F^2\pi^2} \left[25z_\Delta^2 - 28M^2 + 12(11z_\Delta^2 + 10M^2) \ln\left(\frac{z_\Delta}{\mu}\right) \right], \\ \Sigma_{\text{Sub, SSE}}^{(b)} &= -\frac{g_\Delta^2 z_\Delta}{2304F^2\pi^2} \left\{ -23z_\Delta^2 + 32z_\Delta\delta + 8(26\delta^2 - 17M^2) \right. \\ &\quad \left. + 60[z_\Delta^2 - 4z_\Delta\delta + 2(M^2 + 2\delta^2)] \ln\left(\frac{z_\Delta}{\mu}\right) \right\}, \end{aligned} \quad (4.20)$$

wobei es in diesem Zusammenhang üblich ist den renormierten Massenparameter z_Δ reell zu wählen, so dass der Imaginärteil des Deltapols z ,

$$\text{Im}(z) = -\frac{g_\Delta^2 (\delta^2 - M^2)^{\frac{3}{2}}}{6\pi F^2} + \mathcal{O}(q^4), \quad (4.21)$$

die chirale Ordnung $\mathcal{O}(q^3)$ besitzt und das vorgegebene Zählschema erfüllt (vgl. Referenz [37]). Durch die zusätzliche Entwicklung in δ treten keine zähl-schemaverletzenden Imaginärteile auf und eine Aufspaltung der unrenormierten Parameter der Lagrangedichte in komplexe renormierte Parameter und komplexe Gegenterme ist nicht mehr erforderlich.

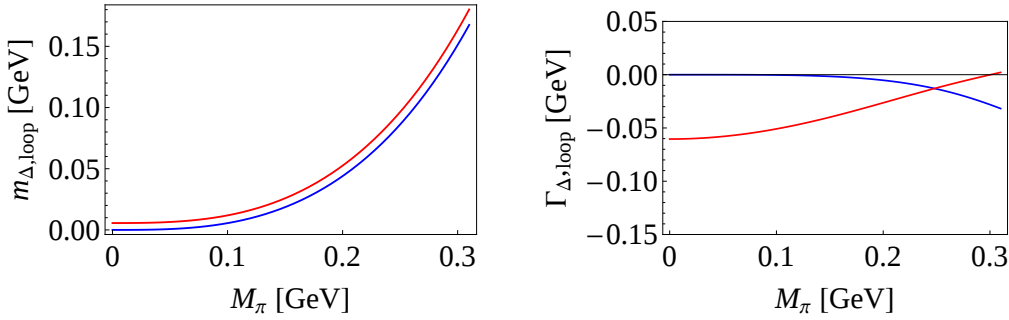


Abbildung 4.2: Beiträge der renormierten Schleifendiagramme zum Real- und Imaginärteil des Pols der Deltaresonanz in Abhängigkeit der Pionmasse. Die rote Linie steht dabei für das Resultat unter Verwendung der SSE und die blaue Linie für das Resultat im CMS ohne zusätzliche Entwicklung in δ .

In Abbildung 4.2 sind die Pionmassenabhängigkeiten der renormierten Schleifenbeiträge zum Real- und Imaginärteil des Pols abgebildet. Für die numerische Auswertung wurden wieder die Zahlenwerte aus Tabelle A.1 verwendet. Der Polbeitrag der Schleifendiagramme ist unter Verwendung der SSE im chiralen Grenzfall proportional zu δ^3 , also im Gegensatz zum entsprechenden Polbeitrag ohne Verwendung der SSE ungleich null. Die chiralen Korrekturen zum Realteil des Pols sind im gesamten dargestellten Bereich $0 < M_\pi < 0.3$ GeV etwas größer, wenn man die SSE verwendet.

Um die Konvergenz in den beiden Renormierungsschemata zu vergleichen, ist in Abbildung 4.3 die Pionmassenabhängigkeit der Schleifenbeiträge zur Deltaresonanzmasse dargestellt. Die blauen Kurven repräsentieren die vollständigen renormierten Schleifenbeiträge der relativistischen Rechnung und die roten Kurven zeigen eine Entwicklung des relativistischen Ergebnisses bis zur dritten chiralen Ordnung. Die Vernachlässigung von Beiträgen der höheren Ordnung übt einen größeren Einfluss auf die Rechnung aus, wenn

die SSE verwendet wird (siehe rechtes Bild). Dies deutet darauf hin, dass eine zusätzliche Entwicklung in δ zu einer schlechteren numerischen Konvergenz der chiralen Korrekturen führt.

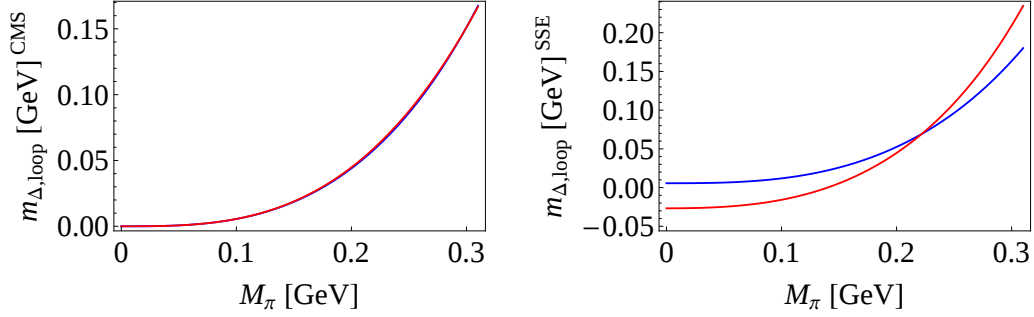


Abbildung 4.3: Vollständiges relativistisches Ergebnis (blau) und Entwicklungen des relativistischen Ergebnisses bis $\mathcal{O}(q^3)$ (rot).

Der Vorteil einer zusätzlichen Entwicklung in δ besteht darin, dass keine zählchemaverletzenden Imaginärteile auftreten und alle renormierten Parameter der Lagrangedichte reell gewählt werden können. Beabsichtigt man neben der Deltaresonanz andere resonante Freiheitsgrade wie die Roperresonanz in die EFT zu integrieren, ist eine deutliche Verschlechterung des Konvergenzverhaltens zu erwarten, da der Massenunterschied zwischen der Roperresonanz und dem Nukleon kaum noch als kleiner Entwicklungsparameter anzusehen ist. Darüber hinaus führt eine simultane Berücksichtigung von Delta- und Roperresonanz auf das komplizierte Problem dreier unterschiedlicher Massenskalen [78]. Unter Verwendung des CMS erfüllen die erzielten Resultate dahingegen unabhängig der Zählweise aller auftretenden Massenunterschiede das vorgegebene Zählschema, was den konsistenten Einbau weiterer Resonanzen vereinfacht. Zur weiteren Untersuchung dieses Sachverhalts werden im folgenden Kapitel die elektromagnetischen Eigenschaften der Roperresonanz in EFT analysiert.

Kapitel 5

Elastische elektromagnetische Formfaktoren der Roperresonanz

Die Ladungs- und Magnetisierungsverteilung innerhalb der Roperresonanz wird durch die elastischen elektromagnetischen Formfaktoren charakterisiert. Im Gegensatz zu den Formfaktoren des Nukleons, für die präzise Daten aus elastischen Elektronenstreuexperimenten extrahiert werden konnten, existieren keine empirischen Analysen zu den elastischen Formfaktoren des Ropers. Für kurzlebige Resonanzen außerhalb des $SU(3)$ -Grundzustandsoktetts sind Spin-Präzessionsmessungen zur Bestimmung von magnetischen Momenten nicht anwendbar, stattdessen müssen Informationen über die elektromagnetische Struktur aus detaillierten Analysen der Zwischenzustände gewonnen werden. Das magnetische Moment der Deltaresonanz μ_{Δ^+} lässt sich durch ein Experiment bestimmen, in dem ein Proton elektromagnetisch zu einer positiv geladenen Deltaresonanz angeregt wird, das entstandene Δ^+ dann ein reelles Photon emittiert und schließlich in ein Proton und neutrales Pion zerfällt [160]. Ähnlich dazu kann das magnetische Moment des $S_{11}(1535)$ aus der Messung des Prozesses $\gamma^* p \rightarrow \eta \gamma p$ extrahiert werden [22]. Solche Experimente basieren auf der Dominanz der Deltaresonanz im Photopionproduktionskanal bzw. der $S_{11}(1535)$ -Resonanz im Photoetaproduktionskanal und scheinen für keine sonstigen Anregungszustände durchführbar. In Referenz [161] wurden die elastischen elektromagnetischen Formfaktoren der Roperresonanz mit Hilfe von Dyson-Schwinger-Gleichungen berechnet. Bis auf den Dirac-Formfaktor des neutralen Ropers stimmen die Resultate in Hinblick auf Größenordnung und Verlauf des Impulsübertrages mit den elektromagnetischen Formfaktoren des Nukleons überein.

In diesem Kapitel werden die elastischen elektromagnetischen Formfaktoren der Roperresonanz in chiraler EFT unter Verwendung des CMS bis zur Ordnung $\mathcal{O}(q^3)$ ausgerechnet und daraus das anomale magnetische Mo-

ment sowie die elektromagnetischen Radien der Roperresonanz bestimmt. Da die Roperresonanz als instabiles Teilchen nicht in den ein- und auslaufenden asymptotischen Zuständen auftreten darf, ist es notwendig zunächst eine quantenfeldtheoretisch sinnvolle Definition der elektromagnetischen Formfaktoren der Roperresonanz aufzustellen, die so viele Eigenschaften wie möglich mit der entsprechenden Definition für ein stabiles Teilchen auf der Massenschale teilt. Obwohl es derzeit nicht möglich scheint, die elastischen Formfaktoren der Roperresonanz experimentell zu extrahieren, stellen die in dieser Arbeit erzielten Ergebnisse eine Grundlage für die Extrapolation entsprechender Gitter-Simulationen dar.

5.1 Definition der elastischen Formfaktoren

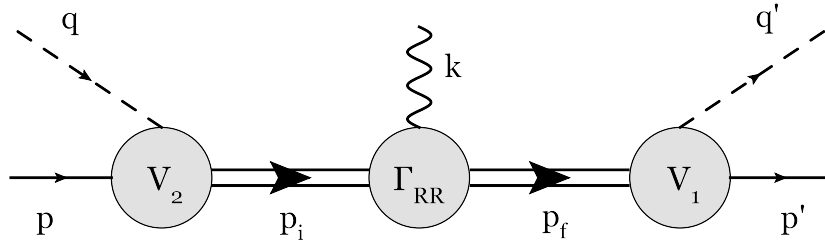


Abbildung 5.1: Resonanter Anteil des Prozesses $N\pi \rightarrow N\pi\gamma$: Einfach durchgezogene Linien stehen für Nukleonpropagatoren, gestrichelte Linien für Pionpropagatoren, doppelt durchgezogene Linien für Roperpropagatoren und geschlängelte für Photonen.

Die Definition der elektromagnetischen Formfaktoren der Roperresonanz über das Matrixelement des elektromagnetischen Stromoperators J^μ , ausgewertet zwischen einem Roper-Anfangs- und Endzustand,

$$\langle R(p_f) | J^\mu(0) | R(p_i) \rangle, \quad (5.1)$$

ist aus quantenfeldtheoretischer Sicht nicht sinnvoll. Da die Roperresonanz ein instabiles Teilchen ist, darf sie nicht im Spektrum der asymptotischen Zustände auftreten. Stattdessen können die Formfaktoren der Roperresonanz analog Referenz [24] mittels des in Abbildung 5.1 dargestellten Prozesses definiert werden:

$$\pi(q) + N(p_i) \rightarrow N(p_f) + \pi(q') + \gamma(k). \quad (5.2)$$

Dazu betrachtet man den resonanten Teil der zugehörigen Amplitude,

$$A_{N\pi \rightarrow N\pi\gamma}^{(r)} = V_1(p_f, q') iS_R(p_f) \Gamma_{RR}(p_f, p_i) iS_R(p_i) V_2(p_i, q), \quad (5.3)$$

mit

$$\Gamma_{RR}(p_f, p_i) = e \epsilon_\mu \Gamma_{RR}^\mu(p_f, p_i), \quad (5.4)$$

wobei ϵ_μ für den Polarisationsvektor des virtuellen Photons steht. Der vollständige Propagator der Roperresonanz S_R lässt sich schreiben als

$$iS_R(p) = \frac{i}{\not{p} - z_R - \Sigma_R(\not{p})}. \quad (5.5)$$

Dabei steht $-i\Sigma_R(\not{p})$ für die Summe aller zur Zweipunktfunktion der Roperresonanz beitragenden einteilchenirreduziblen Diagramme und z_R für den komplexen Pol des Propagators im chiralen Grenzfall. Der Pol des vollständigen Roperresonanzpropagators S_R ergibt sich aus der Lösung der Gleichung

$$z - z_R - \Sigma_R(z) = 0, \quad (5.6)$$

wobei die Polmasse bzw. Polbreite als Realteil bzw. (-2) mal Imaginärteil des Pols definiert ist:

$$z = m_R - i \frac{\Gamma_R}{2}. \quad (5.7)$$

Setzt man die Entwicklung der Selbstenergie $\Sigma_R(\not{p})$ um die Polstelle z ,

$$\begin{aligned} \Sigma_R(\not{p}) &= \Sigma_R(z) + (\not{p} - z)\Sigma'_R(z) + \frac{(\not{p} - z)^2}{2}\Sigma''_R(z) + \dots \\ &\equiv \Sigma_R(z) + (\not{p} - z)\Sigma'_R(z) + (\not{p} - z)^2\widetilde{\Sigma}_R(\not{p}), \end{aligned} \quad (5.8)$$

in den vollständigen Propagator aus Gleichung (5.5) ein, erhält man

$$S_R(p) = \frac{1}{\not{p} - z_R - \Sigma_R(z) - (\not{p} - z)\Sigma'_R(z) - (\not{p} - z)^2\widetilde{\Sigma}_R(\not{p})}. \quad (5.9)$$

Mit Gleichung (5.6) ergibt sich S_R in der Nähe des Pols zu

$$S_R(p) = \frac{Z_R}{\not{p} - z} + \text{n. p.} = \frac{Z_R(\not{p} + z)}{p^2 - z^2} + \text{n. p.}, \quad (5.10)$$

wobei n. p. für den polfreien Anteil steht. Das Residuum Z_R (Wellenfunktionsrenormierungskonstante, WFRK) ist durch den Ausdruck

$$Z_R = \frac{1}{1 - \Sigma'_R(z)} \equiv 1 + \delta Z_R \quad (5.11)$$

gegeben und stellt eine komplexwertige Funktion dar. Führt man gemäß Referenz [24] Spinoren zur Dirac-Gleichung mit komplexer Masse z ein¹,

$$(\not{p} - z)w(p, i) = 0, \quad \bar{w}(p, i)(\not{p} - z) = 0, \quad (5.12)$$

und verwendet die resultierende Formel für die Spinprojektion,

$$\sum_i w(p, i) \bar{w}(p, i) = \not{p} + z, \quad (5.13)$$

lässt sich der angezogene Roperresonanzpropagator darstellen als

$$S_R(p) = \frac{Z_R w(p, i) \bar{w}(p, i)}{p^2 - z^2} + \text{n. p.}, \quad (5.14)$$

wobei im Folgenden die Summation über gleiche Spinprojektionen impliziert ist. Die Zerlegung der resonanten Amplitude (5.3) in einen Anteil mit und ohne Polterme [10] lautet somit

$$\begin{aligned} A_{N\pi \rightarrow N\pi\gamma}^{(r)} &= V_1(p_f, q') i S_R(p_f) \Gamma_{RR}(p_f, p_i) i S_R(p_i) V_2(p_i, q) \\ &= V_1(p_f, q') w(p_f, i) \sqrt{Z_R} \frac{i}{p_f^2 - z^2} \\ &\quad \times \underbrace{\epsilon_\mu \sqrt{Z_R} \bar{w}(p_f, i) \Gamma_{RR}^\mu(p_f, p_i) w(p_i, j) \sqrt{Z_R}}_{V_{RR}^\mu} \\ &\quad \times \frac{i}{p_i^2 - z^2} \sqrt{Z_R} \bar{w}(p_i, j) V_2(p_i, q) + \text{n. p.} \end{aligned} \quad (5.15)$$

Unter Ausnutzung von Lorentzinvarianz und den diskreten Symmetrien lässt sich der elektromagnetische Vertex eines Teilchens mit Spin 1/2 allgemein durch zwölf Dirac-Strukturen parametrisieren [162, 163, 164]. Jede Struktur wird dabei mit einer Formfunktion multipliziert, die von drei skalaren Variablen, beispielsweise p_i^2 , p_f^2 und k^2 , abhängt. Aufgrund der Ward-Takahashi-Identität [98, 99] sind die Formfunktionen geladener Teilchen nicht unabhängig voneinander. Für ein stabiles Teilchen mit Masse m lauten die Massenschalenbedingungen $p_i^2 = p_f^2 = m^2$ und die Formfunktionen reduzieren sich zu zwei Formfaktoren, welche nur noch von k^2 abhängen. Für instabile Teilchen wie die Roperresonanz ist der entsprechende kinematische Punkt durch die Position am Pol gegeben, $p_i^2 = p_f^2 = z^2$. Mit den Gleichungen (5.12) kann die renormierte Vertexfunktion V_{RR}^μ für $p_i^2 = p_f^2 = z^2$ somit mittels Formfaktoren

¹Eine explizite Darstellung der Spinoren $w(p, i)$ und $\bar{w}(p, i)$ findet sich in Anhang A.

parametrisiert werden [165]:

$$\begin{aligned} V_{RR}^\mu(Q^2) &= \sqrt{Z_R} \bar{w}(p_f, i) \Gamma_{RR}^\mu(p_f, p_i) w(p_i, j) \sqrt{Z_R} \\ &= \bar{w}(p_f, i) \left[\gamma^\mu F_1^{**}(Q^2) + \frac{i\sigma^{\mu\nu} k_\nu}{2m_R} F_2^{**}(Q^2) \right] w(p_i, j). \end{aligned} \quad (5.16)$$

Das Quadrat des Viererimpulsübertrages k^2 ist negativ, weshalb hier die positive Größe $Q^2 = -k^2 = -(p_f - p_i)^2 = -t$ eingeführt wurde. Oft ist es hilfreich, die Formfaktoren in ihre isoskalaren und isovektoriellen Anteile zu zerlegen:

$$\mathbb{F}_i^{**} = \frac{1}{2} \left(F_i^{**(s)} \mathbb{1} + F_i^{**(v)} \tau_3 \right). \quad (5.17)$$

Außerdem können die elektrischen und magnetischen Sachs-Formfaktoren der Roperresonanz, G_E^{**} und G_M^{**} , analog zu denen des Nukleons definiert werden [73]:

$$\begin{aligned} G_E^{**}(Q^2) &= F_1^{**}(Q^2) - \frac{Q^2}{4m_R^2} F_2^{**}(Q^2), \\ G_M^{**}(Q^2) &= F_1^{**}(Q^2) + F_2^{**}(Q^2). \end{aligned} \quad (5.18)$$

5.2 Berechnung der elastischen Formfaktoren

Die elektromagnetischen Formfaktoren der Roperresonanz werden bis zur chiralen Ordnung $\mathcal{O}(q^3)$ ausgerechnet, wobei die relevanten Terme der effektiven Lagrangedichte,

$$\mathcal{L}_{\text{eff}} = \mathcal{L}_2 + \mathcal{L}_{\pi N}^{(1)} + \mathcal{L}_R^{(1,2,3)} + \mathcal{L}_\Delta^{(1)} + \mathcal{L}_{NR}^{(1)} + \mathcal{L}_{\Delta R}^{(1)}, \quad (5.19)$$

in den Abschnitten 2.2.1, 2.2.2, 2.3.2 und 2.3.3 spezifiziert sind. In der folgenden störungstheoretischen Rechnung wird das in Abschnitt 3.3 beschriebene Zählschema verwendet. Zusätzlich dazu zählen der Polarisationsvektor des virtuellen Photons ϵ_μ und der Impulsübertrag k_μ als $\mathcal{O}(q)$. Die bis einschließlich chiraler Ordnung $\mathcal{O}(q^3)$ beitragenden Feynmandiagramme sind in Abbildung 5.2 dargestellt.

Die Schleifendiagramme (1)-(14) können in vier separat stromerhaltende Gruppen zerlegt werden. Die Diagramme (1)-(4) enthalten Pion-Roperresonanz-Schleifen und besitzen die gleiche Struktur wie die entsprechenden Schleifendiagramme der Nukleonformfaktoren mit inneren Nukleonlinien. Die Diagramme (5)-(8) umfassen Pion-Nukleon-Schleifen, während die Diagramme (9)-(12) Pion-Delta-Schleifen besitzen. Die vierte Klasse enthält mit den

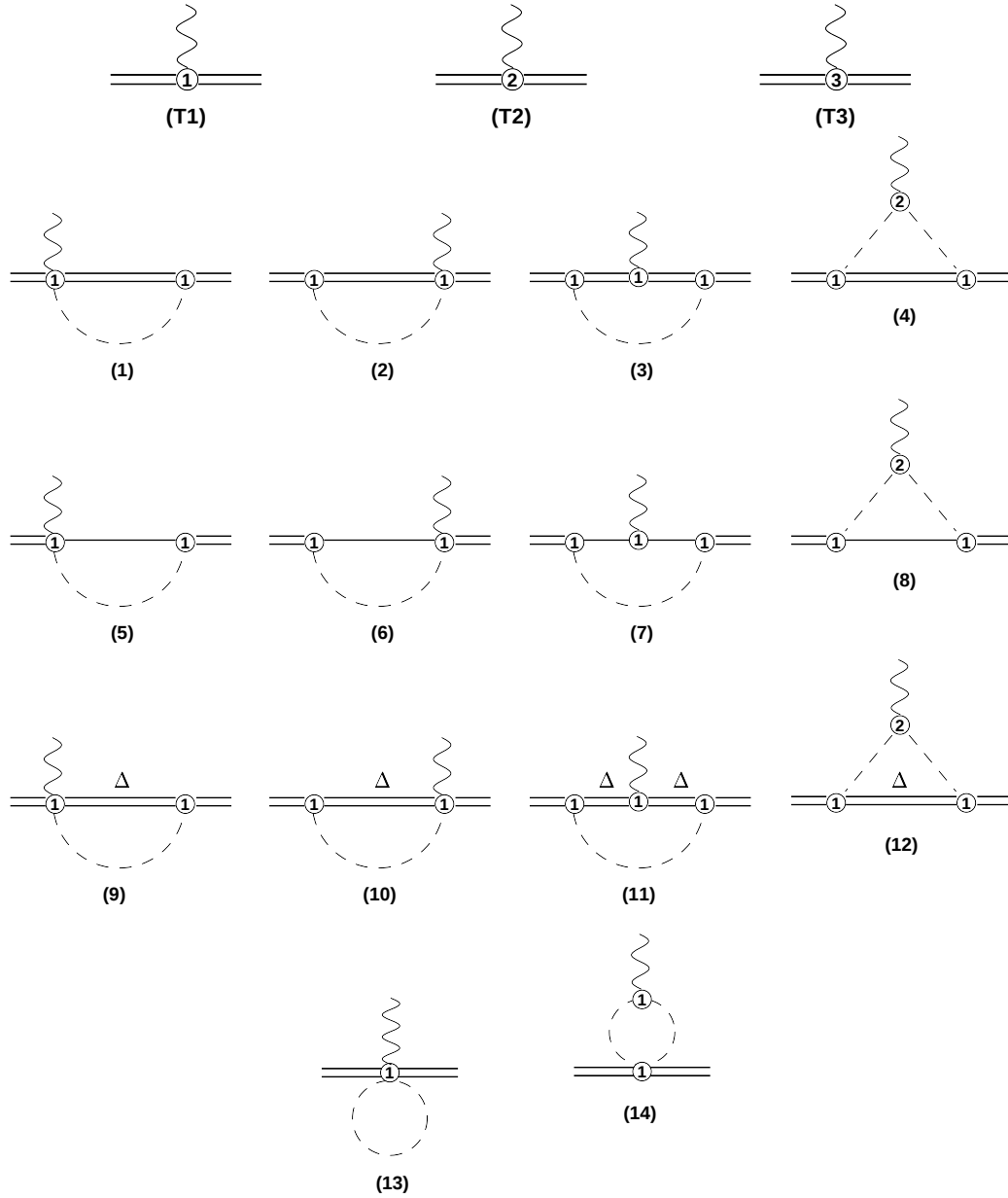


Abbildung 5.2: Feynmandiagramme für die elektromagnetischen Formfaktoren der Roperresonanz bis $\mathcal{O}(q^3)$. Einfach durchgezogene Linien stehen für Nukleonen, gestrichelte für Pionen, geschlängelte für Photonen, doppelt durchgezogene stehen für die Roperresonanz bzw. für die Deltaresonanz, falls diese mit Δ gekennzeichnet sind.

Diagrammen (13) und (14) nur Diagramme, die keine schweren inneren Linien aufweisen. Zur Berechnung der Schleifendiagramme wurde das *Mathematica*-Programmpaket *Feyncalc* [166] eingesetzt. Das Programm kontrahiert auftretende Vierervektoren, metrische Tensoren und Dirac-Matrizen und nutzt die Dirac-Algebra derart, dass die Dirac-Gleichung zur Vereinfachung der Amplituden angewendet werden kann. Zudem besteht die Möglichkeit auftretende Schleifenintegrale durch Passarino-Veltman-Reduktion [167] auf skalare Integrale zu reduzieren². Die Berechnung der Schleifenintegrale mittels *Feyncalc* ist nur dann möglich, wenn der Tensorrang der auftretenden Integrale nicht größer als drei ist³. Aufgrund der komplizierten Lorentzstruktur des Deltapropagators $S_0^{\mu\nu}$ aus Gleichung (2.57) können die Diagramme (9)-(12) nicht ohne das Implementieren zusätzlicher Vereinfachungen berechnet werden. Insbesondere durch die Anwendung der folgenden Kontraktionen,

$$S_0^{\mu\nu}(p) \gamma_\nu = -i \left[\frac{\gamma^\mu}{(n-1)m_{\Delta 0}} - \frac{(n-2)p^\mu}{(n-1)m_{\Delta 0}^2} \right],$$

$$S_0^{\mu\nu}(p) p_\nu = -i \left[\frac{\gamma^\mu \not{p}}{(n-1)m_{\Delta 0}} - \frac{(n-2)p^\mu \not{p}}{(n-1)m_{\Delta 0}^2} - \frac{p^\mu}{m_{\Delta 0}} \right],$$

kann der Tensorrang dieser Diagramme jedoch auf die benötigte Stufe reduziert werden. Die expliziten Ausdrücke für die unrenormierten Schleifendiagramme in Form skalarer Integrale finden sich in Anhang D.2.

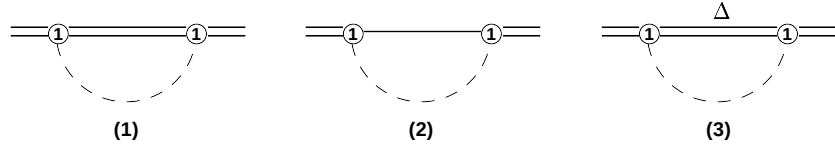


Abbildung 5.3: Feynmandiagramme für die Selbstenergie der Roperresonanz bis $\mathcal{O}(q^3)$. Bezeichnung gemäß Abbildung 5.2.

Neben den Unendlichkeiten, die durch Anwendung des $\widetilde{\text{MS}}$ -Schemas eliminiert werden, enthalten die Schleifenbeiträge noch zählschemaverletzende Terme, welche zusätzlich subtrahiert werden müssen. Alle Unendlichkeiten und zählschemaverletzenden Beiträge von F_1^{**} werden in der betrachteten chiralen Ordnung vom Produkt aus WFRK und Baumdiagrammen absorbiert. Bis $\mathcal{O}(q^3)$ tragen die Selbstenergiendiagramme der Roperresonanz aus Abbildung 5.3 zur Berechnung der WFRK bei. In Übereinstimmung mit der

²Die skalaren Integrale sind in Anhang C definiert.

³Als Tensorrang definiert man die Anzahl an nicht kontrahierten Integrationsimpulsen im Zähler eines Schleifenintegrals.

Ward-Identität lautet das Ergebnis für $F_1^{**}(0) = (1 + \tau_3)/2$. Der Sachverhalt, dass die elektrische Ladung der Roperresonanz keine Korrekturen durch die starke Wechselwirkung erhält, stellt eine wichtige Konsistenzprüfung der vorliegenden Rechnung dar.

Im Gegensatz zu F_1^{**} enthält der Beitrag zu F_2^{**} zählschemaverletzende Anteile. Da der Polarisationsvektor ϵ_μ sowie der Impulsübertrag k_μ als $\mathcal{O}(q)$ gezählt werden, liefert die durchgeführte Rechnung den Formfaktor F_2^{**} bis zur chiralen Ordnung $\mathcal{O}(q)$. Zur Bestimmung der zählschemaverletzenden Anteile wurden die Beiträge der einzelnen MS-renormierten Schleifendiagramme zu F_2^{**} nach M und Q^2 entwickelt. Dafür wurden alle skalaren Integrale formal als Potenzreihen in ϵ angesetzt,

$$\begin{aligned} B_0(\cdots) &= B_0^{(0)}(\cdots) + \epsilon B_0^{(1)}(\cdots) + \epsilon^2 B_0^{(2)}(\cdots) + \cdots, \\ C_0(\cdots) &= C_0^{(0)}(\cdots) + \epsilon C_0^{(1)}(\cdots) + \epsilon^2 C_0^{(2)}(\cdots) + \cdots, \end{aligned} \quad (5.20)$$

und der Entwicklungsparameter ϵ eingeführt. Die Argumente sind zur besseren Übersicht unterdrückt und der obere Index zeigt die jeweilige chirale Ordnung an. Anschließend reskaliert man in den Koeffizienten der Integrale die Pionmasse und das Quadrat des Impulsübertrags,

$$M \rightarrow \epsilon M, \quad Q^2 \rightarrow \epsilon^2 Q^2, \quad (5.21)$$

und entwickelt den Gesamtausdruck um $\epsilon = 0$ bis zur nullten Ordnung. Die so bestimmten Abzugsterme enthalten im Allgemeinen noch die Summanden aus Gleichung (5.20). Da alle zählschemaverletzenden Terme analytisch in den Entwicklungsparametern sein müssen, kann zur Berechnung der benötigten Terme aus Gleichung (5.20) die in Abschnitt 3.2 vorgestellte Methode angewendet werden. Dazu entwickelt man die entsprechenden skalaren Schleifenintegrale bis zu einer gegebenen Ordnung und integriert jeden Summanden der Entwicklung einzeln, wodurch ausschließlich analytische Terme erzeugt werden.

Als Konsistenztest wurde zusätzlich geprüft, ob sich innerhalb jedes Abzugsterms die nichtanalytischen Anteile wegheben und die zu subtrahierende Größe regulär ist. Ähnlich zu den analytischen Anteilen lassen sich die nichtanalytischen Anteile eines Schleifenintegrals durch Reskalierung der Integrationsvariable und anschließender Vertauschung von Integration und Summation bestimmen [168]. Zur Veranschaulichung dieser Methode wird der Abzugsterm des Diagramms (8) aus Abbildung 5.2 herangezogen,

$$A + K \left[B_0^{(0)}(t, M^2, M^2) + (m^2 - z^2) C_0^{(0)}(z^2, t, z^2, m^2, M^2, M^2) \right], \quad (5.22)$$

wobei K ein konstanter Koeffizient ist, der Term A nur manifest analytische Anteile enthält und die Terme

$$B_0^{(0)}(t, M^2, M^2) \quad \text{und} \quad C_0^{(0)}(z^2, t, z^2, m^2, M^2, M^2) \quad (5.23)$$

nichtanalytische Anteile proportional zum Logarithmus der Pionmasse umfassen. Um zu zeigen, dass sich die nichtanalytischen Terme in eckigen Klammern aus Gleichung (5.22) gegenseitig wegheben, betrachtet man zunächst den zweiten Ausdruck aus Gleichung (5.23), welcher sich aus der chiralen Entwicklung des Integrals

$$C_0(z^2, t, z^2, m^2, M^2, M^2) = \frac{(2\pi\mu)^{4-n}}{i\pi^2} \int \frac{d^n l}{[l^2 - m^2][(l + p_i)^2 - M^2][(l + p_f)^2 - M^2]} \quad (5.24)$$

bis $\mathcal{O}(q^0)$ ergibt. Im Folgenden wird das Argument der C_0 -Funktion unterdrückt und die Abkürzung $\tilde{\mu} = -i(2\pi\mu)^{4-n}/\pi^2$ eingeführt. Die relevanten Entwicklungsparameter sind durch $\delta = M^2/z^2$ und $\delta_2 = t/z^2$ gegeben, wobei der Quotient δ/δ_2 eine von Null verschiedene Konstante darstellt. Die Transformation der Integrationsvariable gemäß

$$l \rightarrow \delta^{1/2} l' - p_i \quad (5.25)$$

liefert

$$\begin{aligned} C_0 &= \tilde{\mu} \delta^{\frac{n}{2}} \int \frac{d^n l'}{[(\delta^{\frac{1}{2}} l' - p_i)^2 - m^2][\delta l'^2 - M^2][(\delta^{\frac{1}{2}} l' + q)^2 - M^2]} \\ &= \tilde{\mu} \delta^{\frac{n}{2}-1} \int \frac{d^n l'}{[(\delta^{\frac{1}{2}} l' - p_i)^2 - m^2][l'^2 - z^2][(\delta^{\frac{1}{2}} l' + \delta_2^{\frac{1}{2}} z)^2 - \delta z^2]} . \end{aligned} \quad (5.26)$$

Entwickelt man den Ausdruck (5.26) um $\delta_2 = 0$ bis zur führenden Ordnung, erhält man

$$\tilde{\mu} \delta^{\frac{n}{2}-2} \int \frac{d^n l'}{[(\delta^{\frac{1}{2}} l' - p_i)^2 - m^2][l'^2 - z^2]^2} . \quad (5.27)$$

Der gesuchte nichtanalytische Anteil $\tilde{C}_0^{(0)}$ entspricht schließlich dem führenden Term der Entwicklung von Gleichung (5.27) um $\delta = 0$. Unter Anwendung von Formel (C.16) erhält man schließlich

$$\begin{aligned} \tilde{C}_0^{(0)} &= \tilde{\mu} \delta^{\frac{n}{2}-2} \int \frac{d^n l'}{[z^2 - m^2][l'^2 - z^2]^2} \\ &= \frac{2}{m^2 - z^2} \ln \left(\frac{M}{\mu} \right) + \mathcal{O}(n-4) . \end{aligned} \quad (5.28)$$

Den nichtanalytischen Beitrag $\widetilde{B}_0^{(0)}(t^2, M^2, M^2)$ kann man entweder auf analoge Weise ermitteln oder direkt aus der Entwicklung des entsprechenden Ergebnisses in Gleichung (C.7) ablesen:

$$\widetilde{B}_0^{(0)}(t, M^2, M^2) = -2 \ln \left(\frac{M}{\mu} \right) + \mathcal{O}(n-4). \quad (5.29)$$

Insgesamt heben sich die nichtanalytischen Beiträge in Gleichung (5.22) erwartungsgemäß gegenseitig auf. Auf diese Weise wurde für alle benötigten Abzugsterme gezeigt, dass sie reguläre Größen in den Entwicklungsparametern darstellen.

Die zählschemaverletzenden Beiträge von F_2^{**} werden von den $\widetilde{\text{MS}}$ -normierten Schleifendiagrammen subtrahiert und in der Renormierung der Kopplungskonstanten c_6^R und c_7^R absorbiert:

$$\begin{aligned} c_{6,r}^R &= c_{6,R}^R - \left\{ \frac{5g_R^2 z_R^2}{64z_R F^2 \pi^2} + \frac{g_{NR}^2 (m+z_R)^2}{256z_R^5 F^2 \pi^2} \left[(6m^2 - 6z_R m + 5z_R^2) z_R^2 \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + 2m(m-z_R)(3m^2 + z_R^2) \ln \left(\frac{m^2 - z_R^2}{m^2} \right) \right] \right. \\ &\quad \left. + \frac{g_{\Delta R}^2}{F^2 \pi^2} \left[\tilde{\alpha}_1 + \tilde{\beta}_1 \ln \left(\frac{z_\Delta}{\mu} \right) + (z_R - z_\Delta) \tilde{\gamma}_1 \ln \left(\frac{z_\Delta^2 - z_R^2}{z_\Delta^2} \right) \right] \right\}, \\ c_{7,r}^R &= c_{7,R}^R + \left\{ \frac{3g_R^2 z_R}{32 F^2 \pi^2} + \frac{3g_{NR}^2 (m+z_R)^2}{256z_R^5 F^2 \pi^2} \left[(z_R^2 - 2m^2 + 2z_R m) z_R^2 \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - 2m(m-z_R)^2(m+z_R) \ln \left(\frac{m^2 - z_R^2}{m^2} \right) \right] \right. \\ &\quad \left. + \frac{g_{\Delta R}^2}{F^2 \pi^2} \left[\tilde{\alpha}_2 + \tilde{\beta}_2 \ln \left(\frac{z_\Delta}{\mu} \right) + (z_R - z_\Delta)^2 \tilde{\gamma}_2 \ln \left(\frac{z_\Delta^2 - z_R^2}{z_\Delta^2} \right) \right] \right\}. \end{aligned}$$

Hierbei kennzeichnet der Index r die renormierten Kopplungskonstanten nach dem $\widetilde{\text{MS}}$ -Schema. Der Index R , welcher die mittels CMS renormierten Kopplungen bezeichnet, wird zur besseren Übersicht im Folgenden unterdrückt. Die Summanden $\tilde{\alpha}_i$ sowie die Koeffizienten $\tilde{\beta}_i$ und $\tilde{\gamma}_i$ sind Polynome der Massen z_R und z_Δ , welche im Grenzfall $z_\Delta \rightarrow z_R$ endliche Werte ungleich null annehmen. Sie können leicht aus den in Anhang D.2 aufgelistet Subtraktionstermen abgelesen werden. Da alle zählschemaverletzenden Terme durch die Renormierung von Niederenergiekonstanten absorbiert werden können, ist die Erfüllung aller chiralen Ward-Identitäten garantiert.

5.3 Ergebnisse der elastischen Formfaktoren

Alle Ergebnisse der Feynmandiagramme und deren Abzugsterme wurden durch skalare Ein-, Zwei- und Dreipunktintegrale ausgedrückt. Die skalaren Integrale sind Funktionen der ein- und auslaufenden Impulse sowie der auftretenden inneren Massen. Während die Ein- und Zweipunktfunktionen für beliebige, komplexwertige äußere Impulse und innere Massen analytisch integriert werden können, lassen sich die Dreipunktfunktionen nur numerisch bestimmen. Zur numerischen Auswertung von Schleifenintegralen wird in dieser Arbeit das Programm *LoopTools* [169] eingesetzt. In der Berechnung der elastischen Formfaktoren der Roperresonanz treten Dreipunktfunktionen der folgenden Gestalt auf:

$$C_0(z^2, t, z^2, m_1^2, m_2^2, m_2^2), \quad t \in \mathbb{R} < 0, \quad (5.30)$$

mit

$$m_1 \in \{m, z_R, z_\Delta\} \wedge m_2 = M \quad \vee \quad m_1 = M \wedge m_2 \in \{m, z_R, z_\Delta\}.$$

Für die Integrale (5.30) existieren numerische Lösungen, falls die quadrierten äußeren Impulse z^2 reell und die quadrierten inneren Massen m_i^2 komplex sind. Im Rahmen des CMS stellen sowohl z als auch die Roper- und Deltaresonanzmasse (im chiralen Grenzfall)⁴ komplexe Größen dar, so dass die Integrale (5.30) nicht numerisch ausgewertet werden können. Um die Formfaktoren als Funktion des quadrierten Impulsübertrags darzustellen, wurde der Imaginärteil der quadrierten äußeren Impulse vernachlässigt:

$$p^2 = z^2 = \left(m_R - i\frac{\Gamma_R}{2}\right)^2 \approx m_R^2. \quad (5.31)$$

Der führende Beitrag zum Imaginärteil des Pols z stammt aus den Selbstenergiendiagrammen (2) und (3) aus Abbildung 5.3 und ist in einer Schleifenentwicklung von der Ordnung $\mathcal{O}(\hbar)$. Verwendet man die Approximation (5.31) in Schleifendiagrammen, führt dies zu Korrekturen der Ordnung $\mathcal{O}(\hbar^2)$. Da die Ergebnisse für die Formfaktoren sieben unbekannte LEC umfassen, die aufgrund fehlender empirischer Informationen nicht adäquat bestimmt werden können, ist im Folgenden nur eine qualitative Bestimmung der Kurvenverläufe möglich.

⁴Für die numerische Auswertung der Formfaktoren werden die physikalischen Massen eingesetzt, da der Unterschied zu den jeweiligen Massen im chiralen Grenzfall von höherer Ordnung ist.

Wählt man alle Massenparameter reell, treten für bestimmte Werte des quadrierten Impulsübertrages Q^2 Unstetigkeitsstellen auf, die aus der Definition elektromagnetischer Formfaktoren instabiler Teilchen in der Einphotonenaustauschnäherung resultieren [170]. Innerhalb des CMS sind die Formfaktoren stetige Funktionen von Q^2 , da instabilen Teilchen immer eine endliche Breite zugewiesen wird und somit die in Referenz [170] beschriebene Problematik umgangen wird. Durch die Näherung $p^2 \approx m_R^2$ nehmen alle Parameter der Diagramme (5)-(8) reelle Werte an und die Dreipunktfunktion

$$C_0(m_R^2, t, m_R^2, M^2, m^2, m^2) \quad (5.32)$$

aus Diagramm (8) generiert eine Unstetigkeit an der Stelle

$$Q_1^2 = \lambda(m_R^2, m_N^2, M_\pi^2) \approx 0.965 \text{ GeV}^2, \quad (5.33)$$

wobei $\lambda(x, y, z) = (x - y - z)^2 - 4yz$ die Källén-Funktion darstellt. Der Punkt Q_1^2 liegt außerhalb der Region, für die eine sinnvolle Beschreibung der Formfaktoren im Rahmen der vorliegenden EFT möglich ist und muss deshalb nicht weiter betrachtet werden.

Um die Formfaktoren graphisch darzustellen, wurden die Zahlenwerte aus Tabelle A.1 verwendet. Drei der sieben unbekannten Kopplungen wurden gemäß den Schätzungen aus den Referenzen [47, 78] eingesetzt,

$$g_R = 1, \quad g_{\Delta R} = 1, \quad g_{NR} = 0.45, \quad (5.34)$$

und die restlichen vier mit den entsprechenden Konstanten aus dem Nukleonsektor gleichgesetzt:

$$\begin{aligned} c_6^R &= c_6 \approx 1.44 \text{ GeV}^{-1}, & c_7^R &= c_7 \approx -0.15 \text{ GeV}^{-1}, \\ d_6 &= m_N d_6^R \approx -0.47 \text{ GeV}^{-2}, & d_7 &= m_N d_7^R \approx -0.14 \text{ GeV}^{-2}. \end{aligned} \quad (5.35)$$

Die Werte für die c_i und d_i wurden aus einer Anpassung der elektromagnetischen Formfaktoren des Nukleons unter expliziter Berücksichtigung der Delta- und Roperresonanz an experimentelle Daten ermittelt.

In Abbildung 5.4 sind die Dirac- und Pauli-Formfaktoren der Roperresonanz als Funktion von Q^2 aufgetragen. Da die Roperresonanz ein instabiles Teilchen ist, sind die Formfaktoren komplexe Größen. Die Imaginärteile aller Formfaktoren sind betragsmäßig kleiner als die jeweiligen Realteile. Für die getroffene Wahl der Parameter nimmt das anomale magnetische Moment der Roperresonanz, definiert durch den Wert des Pauli-Formfaktors an der Stelle $Q^2 = 0$, einen verhältnismäßig großen Wert an. Das magnetische Moment wird im Gegensatz zur Ladung von der Rechnung nicht vorhergesagt und

ist im Wesentlichen durch die unbekannten Konstanten c_6^R und c_7^R bestimmt. Abbildung 5.5 zeigt einen Vergleich zwischen den elektrischen und magnetischen Sachs-Formfaktoren der Roperresonanz und des Nukleons, wobei die magnetischen Sachs-Formfaktoren auf die magnetischen Momente $\mu = 1 + \kappa$ der zugehörigen Teilchen normiert wurden. Die Formfaktoren der Roperresonanz sind von der gleichen Größenordnung wie die des Nukleons und weisen ein ähnliches Krümmungsverhalten auf. Bis auf den magnetischen Sachs-Formfaktor der neutralen Teilchen sind die Kurven im Fall des Nukleons stärker gekrümmt als im Fall des Ropers. Die vergleichbaren Kurvenverläufe zwischen den Formfaktoren der Roperresonanz und des Nukleons sind darauf zurückzuführen, dass beide Rechnungen eine sehr ähnliche chirale Struktur aufweisen. Identifiziert man die Roperresonanz als radiale Anregung des Nukleons, erwartet man, dass sie einen größeren mittleren quadratischen Radius als das Nukleon aufweist. Diese Erwartung wird von den Kurven aus Abbildung 5.5 nicht bestätigt, da in drei der vier Formfaktoren die Kurven des Nukleons eine betragsmäßig größere Steigung zeigen. Das könnte damit zusammen hängen, dass die unbekannten LEC d_6^R und d_7^R , welche eng mit den mittleren quadratischen Radien verknüpft sind, durch die oben beschriebene Methode nicht hinreichend gut bestimmt wurden.

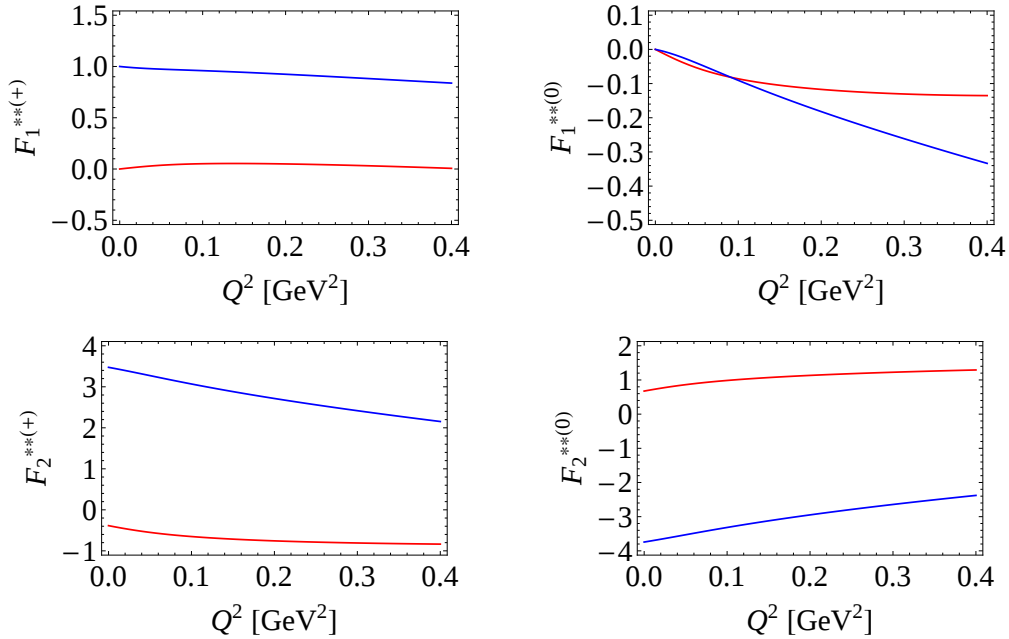


Abbildung 5.4: Die Dirac- und Pauli-Formfaktoren des Ropers bis $\mathcal{O}(q^3)$. Blaue Linien stehen für den Realteil, rote für den Imaginärteil.

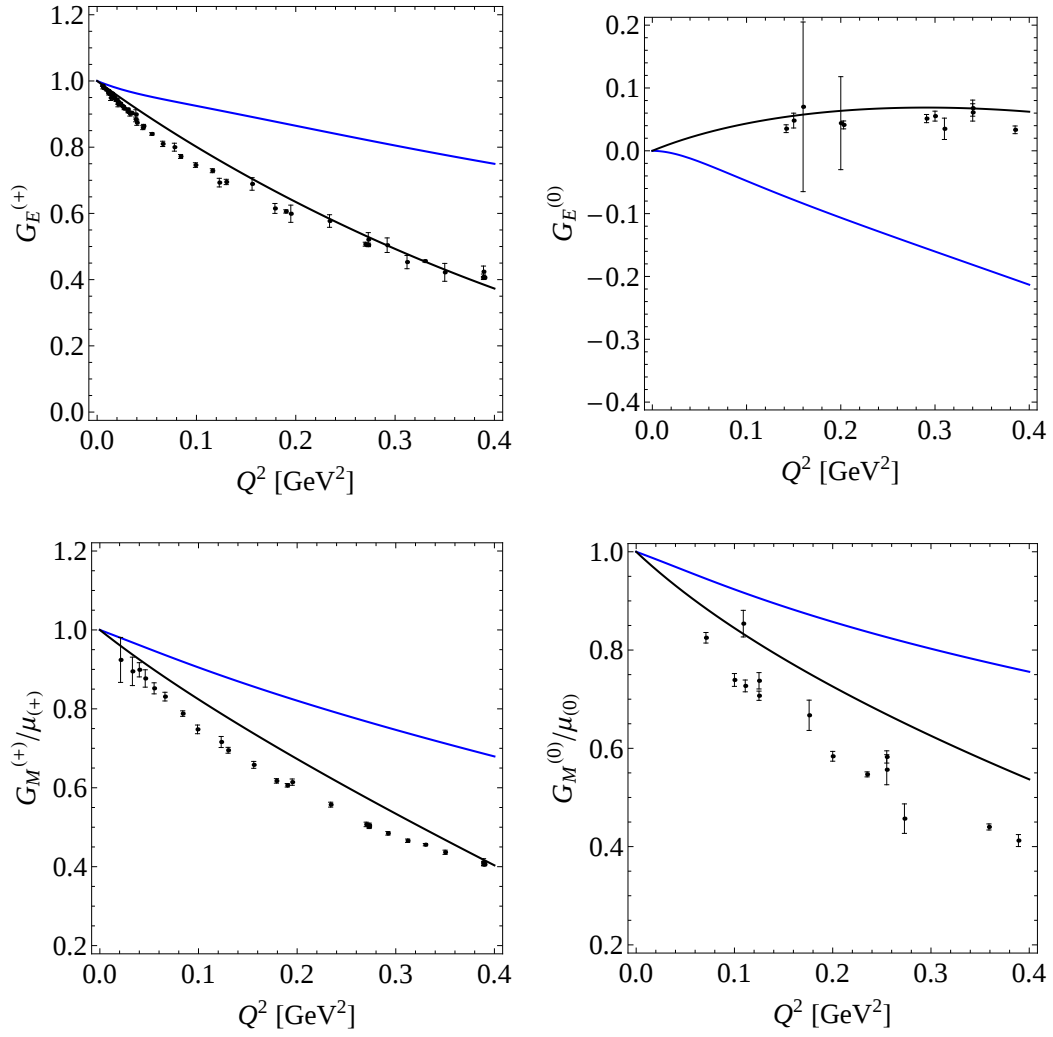


Abbildung 5.5: Elektrische und magnetische Sachs-Formfaktoren der Roperresonanz und des Nukleons bis $\mathcal{O}(q^3)$. Blaue Linien stehen für den Realteil der Roperresonanz und schwarze für das Nukleon. Die Daten für die Sachs-Formfaktoren des Nukleons sind aus Referenz [171].

Um abzuschätzen, wie stark die elastischen Formfaktoren der Roperresonanz von der Wahl der unbekannten LEC abhängen, werden sie gemäß Gleichung (5.17) in ihre isoskalaren und isovektoriellen Anteile zerlegt. Der isoskalare bzw. isovektorielle Dirac-Formfaktor hängt nur von der Konstanten d_7^R bzw. d_6^R ab und nicht von beiden wie der geladene und ungeladene Dirac-Formfaktor. Genauso hängt der isoskalare bzw. isovektorielle Pauli-Formfaktor nur von c_7^R , d_7^R bzw. c_6^R , d_6^R anstatt von allen vier Konstanten ab. Auch wenn die Relation zwischen Formfaktoren und freien Konstanten in beiden Darstellungen gleich ist, sind die individuellen Einflüsse der LEC in den Isospinkanälen transparenter. Die verschiedenen Kopplungskonstanten aus Gleichung (5.35) wurden jeweils um $\pm 50\%$ variiert und die dabei ermittelten maximalen Abweichungen sind durch die in dunkelgrauer Farbe dargestellten Fehlerbänder in Abbildung 5.6 illustriert. Im Vergleich dazu wurden auch theoretische Fehler approximiert, die aus der Berücksichtigung von Termen höherer chiraler Ordnung resultieren. Diese Terme der Ordnung $\mathcal{O}(q^4)$ wurden generiert, indem nicht nur das Baumdiagramm der führenden Ordnung, sondern alle Baumdiagramme mit δZ_R multipliziert wurden. Die hellgrau eingefärbten Fehlerbänder in Abbildung 5.6 deuten den durch Addition und Subtraktion dieser Terme abgeschätzten Fehler an. Schließlich ist in Abbildung 5.6 noch eine blaue gestrichelte Linie dargestellt, die daraus resultiert, dass in den Schleifendiagrammen auch die internen Massen der Roperresonanz gemäß Gleichung (5.31) abgeschätzt wurden. Sie gibt einen Hinweis darauf, in wieweit die Vernachlässigung von Imaginärteilen in den Schleifenintegralen als numerisch unterdrückt angesehen werden kann. Erwartungsgemäß nehmen die Fehlerbänder mit steigendem Q^2 zu. Die dominante Fehlerquelle resultiert aus der Unsicherheit in den Kopplungskonstanten, wohingegen die Vernachlässigung von Imaginärteilen in Schleifenintegralen die Ergebnisse numerisch am geringsten beeinflusst. Diese Beobachtung trifft allerdings nur zu, wenn durch die Vernachlässigung keine weiteren Singularitäten im betrachteten Bereich auftreten. Zusammenfassend lässt sich schließen, dass quantitative Aussagen über den Verlauf der elastischen Formfaktoren der Roperresonanz erst nach einer besseren Abschätzung der LEC möglich sind.

5.4 Anomales magnetisches Moment und elektromagnetische Radian

Das anomale magnetische Moment der Roperresonanz κ^{**} in Einheiten von $e/(2m_R)$ ist durch den Wert des Pauli-Formfaktors F_2^{**} aus Gleichung (5.16)

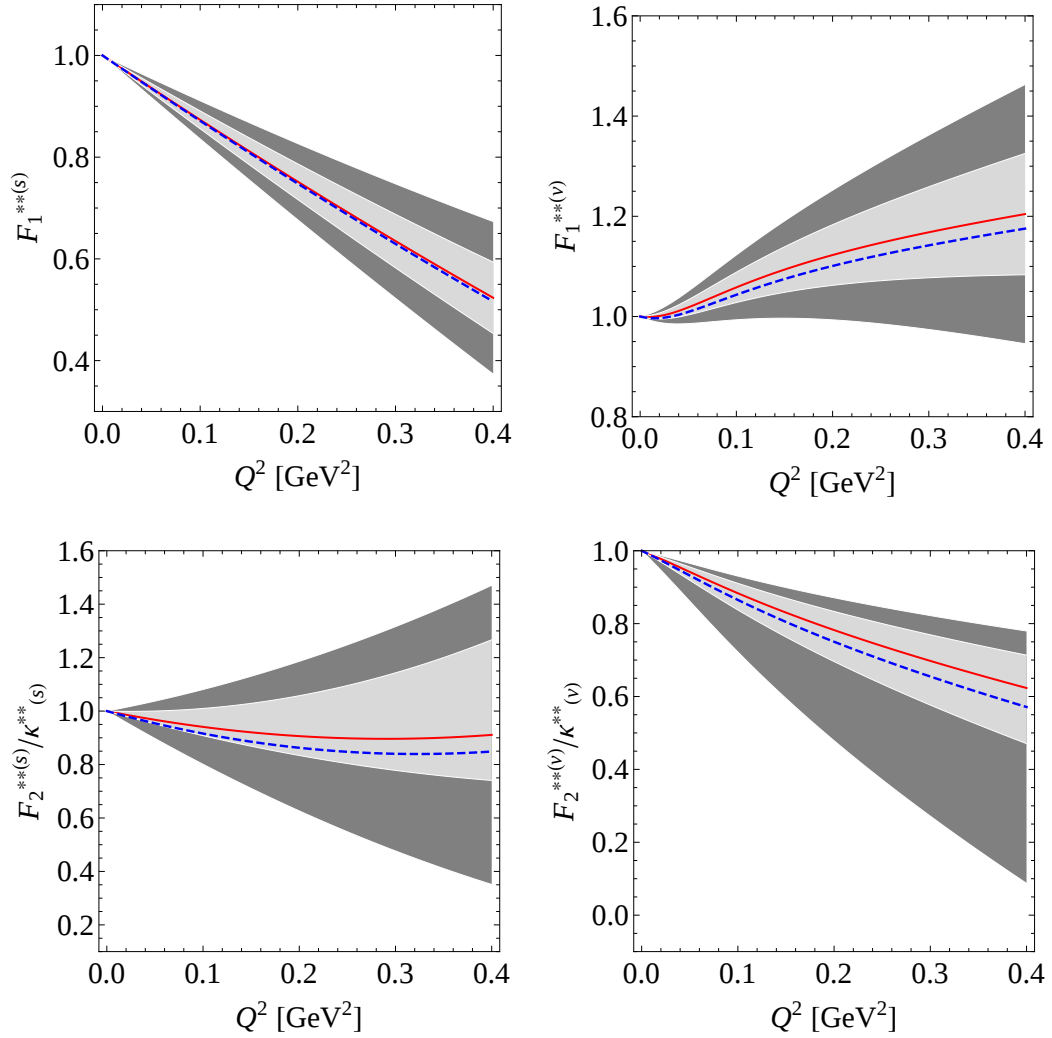


Abbildung 5.6: Isoskalarer und isovektorieller Anteil der Dirac- und Pauli-Formfaktoren der Roperresonanz bis $\mathcal{O}(q^3)$. Die Fehlerbänder sind im Text erläutert.

an der Stelle $Q^2 = 0$ gegeben:

$$\kappa^{**} = F_2^{**}(0). \quad (5.36)$$

Die nichtverschwindenden Beiträge zum anomalen magnetischen Moment sind durch die Diagramme (3), (4), (7), (8) und (11)-(14) aus Abbildung 5.2 gegeben.

Um zu zeigen, dass die chirale Entwicklung der berechneten Schleifenbeiträge das Zählschema erfüllt, d. h. der Ordnung $\mathcal{O}(q)$ ist, werden die Schleifendiagramme aus Abbildung 5.2 wie im vorigen Abschnitt beschrieben in drei Klassen, je nachdem ob sie innere Roperresonanz-, Nukleon- oder Deltalinien besitzen, zerlegt. Die Beiträge der renormierten Diagramme (3) und (4) werden im Folgenden als $\kappa_R^{(\text{ren})}$, die der renormierten Diagramme (7) und (8) als $\kappa_N^{(\text{ren})}$ und die der renormierten Diagramme (9) bis (12) als $\kappa_\Delta^{(\text{ren})}$ bezeichnet.

Als erstes betrachtet man die Beiträge der Diagramme mit inneren Roperresonanzlinien. Dividiert man $\kappa_R^{(\text{ren})}$ durch die Pionmasse M und bildet den Grenzwert $M \rightarrow 0$, erhält man⁵

$$\lim_{M \rightarrow 0} \frac{1}{M} \kappa_R^{(\text{ren})} = -g_R^2 \frac{m_R}{8F^2\pi} \tau_3. \quad (5.37)$$

Dieser Ausdruck stimmt mit dem nichtanalytischen Beitrag vom anomalen magnetischen Moment des Nukleons überein, wenn man g_R durch g_A ersetzt.

In der Analyse der Diagramme mit inneren Nukleonlinien werden drei Fälle unterschieden. Wählt man den Massenunterschied $z_R - m$ als Konstante ungleich null und betrachtet den Grenzwert verschwindender Pionmasse, erhält man

$$\lim_{M \rightarrow 0} \frac{1}{M} \kappa_N^{(\text{ren})} = 0. \quad (5.38)$$

Bildet man den Grenzwert $m \rightarrow z_R$ vor $M \rightarrow 0$, erhält man analog zu Gleichung (5.37) das Ergebnis

$$\lim_{M \rightarrow 0} \left(\lim_{m \rightarrow z_R} \frac{1}{M} \kappa_N^{(\text{ren})} \right) = -g_{NR}^2 \frac{m_R}{8F^2\pi} \tau_3. \quad (5.39)$$

Skaliert man die Massendifferenz $z_R - m$ wie αM , liefert der Grenzübergang $M \rightarrow 0$

$$\lim_{M \rightarrow 0} \frac{1}{M} \kappa_N^{(\text{ren})} = g_{NR}^2 \frac{m_R}{4F^2\pi^2} g(\alpha) \tau_3, \quad (5.40)$$

⁵Der Faktor m_R resultiert aus der Parametrisierung in Gleichung (5.16).

mit

$$g(\alpha) = i\pi \left(\sqrt{\alpha^2 - 1} - \alpha \right) + \alpha \ln(2\alpha) - \sqrt{\alpha^2 - 1} \ln(\alpha + \sqrt{\alpha^2 - 1}). \quad (5.41)$$

Damit wurde gezeigt, dass die Beiträge der Diagramme $\kappa_N^{(\text{ren})}$ unabhängig von der Zählweise des Massenunterschiedes $z_R - m$ das Zählschema erfüllen. Gleiches gilt für die Beiträge der renormierten Diagramme mit inneren Deltalinien $\kappa_\Delta^{(\text{ren})}$. Für konstanten Massenunterschied $z_R - z_\Delta$ ungleich null, liefert der Grenzwert $M \rightarrow 0$

$$\lim_{M \rightarrow 0} \frac{1}{M} \kappa_\Delta^{(\text{ren})} = 0. \quad (5.42)$$

Bildet man erst $z_\Delta \rightarrow z_R$ und dann $M \rightarrow 0$, erhält man

$$\lim_{M \rightarrow 0} \left(\lim_{z_\Delta \rightarrow z_R} \frac{1}{M} \kappa_\Delta^{(\text{ren})} \right) = -g_{\Delta R}^2 \frac{m_R}{18F^2\pi} \tau_3. \quad (5.43)$$

Lässt man schließlich $z_R - z_\Delta$ wie βM skalieren, ergibt sich für $M \rightarrow 0$

$$\lim_{M \rightarrow 0} \frac{1}{M} \kappa_\Delta^{(\text{ren})} = g_{\Delta R}^2 \frac{m_R}{9F^2\pi^2} g(\beta) \tau_3. \quad (5.44)$$

Für die numerische Auswertung des anomalen magnetischen Moments der Roperresonanz wurden die Zahlenwerte aus Tabelle A.1 eingesetzt:

$$\begin{aligned} \kappa^{**} = & (2c_6^R \tau_3 + c_7^R) m_R \\ & + g_R^2 [(0.065 + 0.002i) + (-0.667 + 0.010i) \tau_3] \\ & + g_{NR}^2 [(-0.061 + 0.020i) + (0.200 - 0.100i) \tau_3] \\ & + g_{\Delta R}^2 [(0.026 + 0.124i) + (0.302 - 0.217i) \tau_3]. \end{aligned} \quad (5.45)$$

Der instabile Charakter der Roperresonanz spiegelt sich im Imaginärteil des magnetischen Moments wider. Der Imaginärteil der renormierten Schleifendiagramme mit inneren Nukleon- und Deltalinien ist von der gleichen Größenordnung wie der jeweilige Realteil und resultiert im Gegensatz zum kleinen Imaginärteil der renormierten Schleifendiagramme mit inneren Roperlinien hauptsächlich aus der mathematischen Struktur der Schleifenintegrale und nicht nur aus der Verwendung komplexer Massen⁶. Zum Vergleich wurden die elektromagnetischen Formfaktoren des Nukleons unter expliziter Berücksichtigung des Deltas und Ropers berechnet. Das resultierende anomale magnetische Moment lautet

$$\begin{aligned} \kappa_N = & (2c_6 \tau_3 + c_7) m_N + g_A^2 (0.052 - 0.42 \tau_3) \\ & + g_{NR}^2 (0.011 - 0.09 \tau_3) + g_\Delta^2 (-0.004 - 0.059 \tau_3). \end{aligned} \quad (5.46)$$

⁶Die Imaginärteile der Zwei- und Dreipunktfunktionen sind in Anhang C Gleichung (C.11) gegeben.

Man erkennt, dass die wichtigste Schleifenkorrektur in beiden Fällen durch den isovektoriellen Anteil gegeben ist (vgl. Gleichung (5.37)). Bis auf den Beitrag der Deltaresonanz, welcher für das magnetische Moment der Roperresonanz größer ist, sind die Schleifenkorrekturen in beiden Fällen von der gleichen Größenordnung.

Zum besseren Verständnis der Niederenergiestruktur der Roperresonanz ist es hilfreich, die mittleren quadratischen Radien zu studieren:

$$\langle (r_1^{**})^2 \rangle = -6 \left. \frac{dF_1^{**}(Q^2)}{dQ^2} \right|_{Q^2=0}, \quad (5.47)$$

$$\langle (r_2^{**})^2 \rangle = -\frac{6}{\kappa^{**}} \left. \frac{dF_2^{**}(Q^2)}{dQ^2} \right|_{Q^2=0}. \quad (5.48)$$

Zur expliziten Berechnung der Radien aus den Formfaktoren müssen die Ableitungen der auftretenden Dreipunktfunktionen nach dem Impulsübertrag Q^2 an der Stelle $Q^2 = 0$ gebildet werden. In Referenz [172] wurde gezeigt, dass diese Ableitungen durch eine Summe aus Dreipunktfunktionen und Ableitungen von Zweipunktfunktionen bezüglich der auftretenden Massen gegeben werden können. Sowohl die Ableitungen von Zweipunktfunktionen bezüglich der Massen als auch die Dreipunktfunktionen an der Stelle $Q^2 = 0$ sind als Summe aus Ein- und Zweipunktfunktionen darstellbar. Insgesamt sind die Radien somit auch für komplexe Parameter analytisch berechenbar. Aufgrund der Ableitung nach dem Quadrat des Impulsübertrages liefert die durchgeführte Rechnung den Dirac-Radius $\langle (r_1^{**})^2 \rangle$ bis zur Ordnung $\mathcal{O}(q^0)$ und den Pauli-Radius $\langle (r_2^{**})^2 \rangle$ bis zur Ordnung $\mathcal{O}(q^{-1})$. Wie im Fall des magnetischen Momentes erfüllen die renormierten Schleifenbeiträge unabhängig von der Zählweise auftretender Massendifferenzen das verwendete Zählchema. Die chirale Struktur der quadratischen Radien der Roperresonanz lässt sich schematisch wie folgt zusammenfassen:

$$\begin{aligned} \langle (r_1^{**})^2 \rangle &= r_1^0 + a_1 \ln \left(\frac{M}{\mu} \right) + b_1 M + \mathcal{O}(M^2), \\ \langle (r_2^{**})^2 \rangle &= r_2^0 + c_2 \frac{1}{M} + a_2 \ln \left(\frac{M}{\mu} \right) + b_2 M + \mathcal{O}(M^2), \end{aligned} \quad (5.49)$$

wobei die Kopplungskonstanten d_6^R und d_7^R in den Koeffizienten r_1^0 und r_2^0 enthalten sind. Im chiralen Grenzfall divergieren die Radien mit $\ln(M/\mu)$ bzw. $1/M$. Diese nichtanalytischen Beiträge stammen aus den Diagrammen (5)-(10) in Abbildung 5.2 und weisen die gleiche Struktur wie die nichtanalytischen Beiträge zu den elektromagnetischen Radien des Nukleons auf.

Zum numerischen Vergleich der elektromagnetischen Radien der Roperresonanz mit denen des Nukleons werden die Sachs-Formfaktoren aus Gleichung (5.37) verwendet.

chung (5.18) herangezogen. Die zugehörigen mittleren quadratischen Radien sind gegeben durch

$$\begin{aligned}\langle (r_E^{**})^2 \rangle &= -6 \frac{dG_E^{**}(Q^2)}{dQ^2} \Big|_{Q^2=0}, \\ \langle (r_M^{**})^2 \rangle &= -\frac{6}{G_M^{**}(0)} \frac{dG_M^{**}(Q^2)}{dQ^2} \Big|_{Q^2=0}.\end{aligned}\tag{5.50}$$

In Tabelle 5.1 sind die numerischen Werte der elektromagnetischen Radien der Roperresonanz zusammen mit denen des Nukleons dargestellt, wobei die Abkürzungen

$$R_E := \langle (r_E)^2 \rangle \quad \text{und} \quad R_M := G_M(0) \langle (r_M)^2 \rangle \tag{5.51}$$

eingeführt wurden. Die Beiträge sind zur besseren Übersicht nach Diagrammklassen separiert. Die Unterschiede auf Baumniveau können auf die unterschiedliche Normierung der jeweiligen Lagrangedichten (2.32) und (2.63) zurückgeführt werden. Der Beitrag von Schleifendiagrammen ohne innere Linien schwerer Teilchen ist für den Fall der Roperresonanz und den des Nukleons gleich $0.043\tau_3 \text{ fm}^2$. Die Schleifenbeiträge der Roperresonanz proportional zu g_R^2 sind von der gleichen Größenordnung wie die des Nukleons proportional zu g_A^2 . Ein größerer Unterschied lässt sich in den Strukturen proportional zu g_{NR}^2 und $g_{\Delta R}^2$ bzw. g_Δ^2 erkennen, wobei im Fall der Roperresonanz wieder Imaginärteile in der Größenordnung der zugehörigen Realteile auftreten. Insgesamt sind die einzelnen Schleifenkorrekturen zu den Roperresonanzradien betragsmäßig etwas größer als die zu den Nukleonradien. Der Gesamtbeitrag hängt jedoch stark von den Werten der entsprechenden Kopplungskonstanten ab.

5.5 Chirale Extrapolationen

Numerische Simulationen im Rahmen der Gittereichtheorie stellen eine modellunabhängige Methode zur Untersuchung des nichtperturbativen Bereichs der QCD dar. Der minimale Wert der Quarkmassen, für welche die Simulationen durchgeführt werden können, wird von der endlichen Größe des verwendeten Gitters begrenzt. Aus diesem Grund werden Rechnungen auf dem Gitter für verschiedene Quarkmassen durchgeführt und die Resultate auf den physikalischen Punkt extrapoliert. Da viele physikalische Observablen nichtanalytisch von den Quarkmassen abhängen, können einfache Extrapolationen mit linearer Quarkmassenabhängigkeit fehlschlagen. Die nichtanalytischen Strukturen können allerdings durch die Anwendung von chiraler

	Baumbeitrag -6×0.197^2	g_R^2/g_A^2	g_{NR}^2	$g_{\Delta R}^2/g_{\Delta}^2$
$R_E^{**(+)}$	$d_{(+)}^R z - \frac{c_{(+)}^R}{4m_R}$	$0.15 - 0.01i$	$-0.11 + 0.07i$	$0.29 - 0.34i$
R_E^p	$d_{(+)} - \frac{c_{(+)}^R}{4m_N}$	0.10	0.05	-0.03
$R_E^{**(0)}$	$d_{(-)}^R z - \frac{c_{(-)}^R}{4m_R}$	$-0.02 + 0.01i$	$0.31 + 0.11i$	$-0.28 + 0.39i$
R_E^n	$d_{(-)} - \frac{c_{(-)}^R}{4m_N}$	0.03	0.03	0.07
$R_M^{**(+)}$	$d_{(+)}^R (m_R - z)$	$0.55 - 0.03i$	$-0.32 + 0.20i$	$-0.35 + 0.46i$
R_M^p	$-$	0.32	0.14	0.55
$R_M^{**(0)}$	$d_{(-)}^R (m_R - z)$	$-0.50 + 0.02i$	$0.38 - 0.26i$	$0.57 - 0.44i$
R_M^n	$-$	-0.28	-0.10	-0.26

Tabelle 5.1: Numerische Beiträge zu den elektrischen und magnetischen Radien der geladenen und neutralen Roperresonanz sowie des Protons und Neutrons in Einheiten von fm^2 . Dabei wurden die Abkürzungen $c_{(\pm)} = c_7 \pm 2c_6$ und $d_{(\pm)} = 2d_7 \pm d_6$ (sowie analog für $d_{(\pm)}^R$ und $c_{(\pm)}^R$) eingeführt.

EFT bestimmt werden, wobei die Quarkmassenabhängigkeit in QCD durch die Gell-Mann-Oakes-Renner-Relation [173],

$$M^2 = 2B\hat{m}, \quad B = -\frac{\langle \bar{q}q \rangle}{2F^2}, \quad \hat{m} = \frac{m_u + m_d}{2}, \quad (5.52)$$

mit der Pionmassenabhängigkeit in chiraler EFT verknüpft ist [174, 175, 176].

Ein wichtiges Anwendungsgebiet der Extrapolationen stellen die Gitter-Rechnungen der elastischen Formfaktoren des Nukleons [177, 178, 179, 180, 181] und der Deltaresonanz [182, 183, 184] dar. Verbesserungen der Effizienz und Methodik erlauben mittlerweile auch präzisere Bestimmungen von Eigenschaften der Roperresonanz. Numerische Analysen auf dem Gitter existieren sowohl zum Spektrum der angeregten Baryonen [55, 56, 57, 59, 58, 60, 185, 186, 61, 62, 63] als auch zu den elektromagnetischen und transversalen Übergangsformfaktoren der Roperresonanz [76, 187]. In Referenz [178] wurden Gitter-Simulationen für die elastischen elektromagnetischen Formfaktoren des Nukleons unter Anwendung verschiedener Formulierungen baryonischer ChPT in den physikalischen Bereich extrapoliert. Da die Q^2 -Abhängigkeit der Formfaktoren im Rahmen traditioneller BChPT nur für einen kleinen Bereich beschrieben wird, beschränkt sich die durchgeführte Analyse auf die Pionmassenabhängigkeit des magnetischen Momentes und

der elektromagnetischen Radian des Nukleons. Die in Abschnitt 5.4 gezeigten Ergebnisse ermöglichen eine zu Referenz [178] analoge Analyse für die Roperformfaktoren, magnetischen Momente und Radian. Durch die Anpassung der EFT-Ergebnisse an Gitter-Daten zu verschiedenen Pionmassen, können die chiralen Extrapolationen dann zur Bestimmung unbekannter LEC genutzt werden. Die Werte der zur Anpassung verwendeten Pionmassen dürfen allerdings nicht oberhalb des anwendbaren Bereichs der EFT liegen [188, 189]. Auch wenn bisher noch keine Simulationen der Roperformfaktoren auf dem Gitter durchgeführt wurden, scheinen sie im Gegensatz zu entsprechenden experimentellen Messungen realisierbar.

Im Rahmen von Gitter-Extrapolationen ist es hilfreich die elektromagnetischen Formfaktoren gemäß Gleichung (5.17) in ihre isoskalaren und isovektoriellen Anteile zu zerlegen. Während bei der Berechnung der geladenen und neutralen Formfaktoren in Gitter-QCD sogenannte unverbundene (*disconnected*) Diagramme berücksichtigt werden müssen, heben sich die Beiträge dieser numerisch schwierig auszuwertenden Diagrammtypen bei der Bildung des isovektoriellen Formfaktors weg. Die Analyse der isoskalaren Formfaktoren erfordert weiterhin die Berücksichtigung unverbundener Diagramme und wird deshalb in manchen Analysen vermieden.

Die isovektoriellen und isoskalaren Schleifenbeiträge zum anomalen magnetischen Moment sowie zu den mittleren quadratischen Dirac- und Pauli-Radian sind in Abbildung 5.7 als Funktion der Pionmasse dargestellt. Dabei sind die vollständigen relativistischen Ergebnisse und ihre jeweiligen strikten chiralen Entwicklungen bis zur entsprechenden Ordnung gegenübergestellt. Für die Radian wurden die Bezeichnungen aus Gleichung (5.51) gewählt und die unbekannten Kopplungskonstanten gemäß Gleichung (5.34) abgeschätzt. Sowohl in den magnetischen Momenten als auch im isovektoriellen Anteil des Dirac- und Pauli-Radius erkennt man eine signifikante Abweichung der vollständigen Ergebnisse von deren Entwicklungen. Bis zur Ordnung $\mathcal{O}(q)$ ist der isoskalare Anteil sowie der Imaginärteil des isovektoriellen Anteils des magnetischen Momentes null. Die isoskalaren Radian stimmen im dargestellten Bereich besser mit den jeweiligen Entwicklungen überein.

Abbildung 5.8 zeigt einen Vergleich zwischen den Schleifenkorrekturen der anomalen magnetischen Momente sowie den elektrischen und magnetischen Radian der Roperresonanz und des Nukleons in Abhängigkeit der Pionmasse. Hierbei handelt es sich um den geladenen und neutralen Kanal, nicht den isovektoriellen und isoskalaren Anteil. Qualitativ sind die chiralen Korrekturen in allen Fällen von der gleichen Größenordnung, da die Formfaktoren der Roperresonanz die gleiche Struktur wie die des Nukleons aufweisen. Ein quantitativer Vergleich ist erst möglich, wenn man die unbekannten Kopplungskonstanten im Sektor der Roperresonanz bestimmen kann.

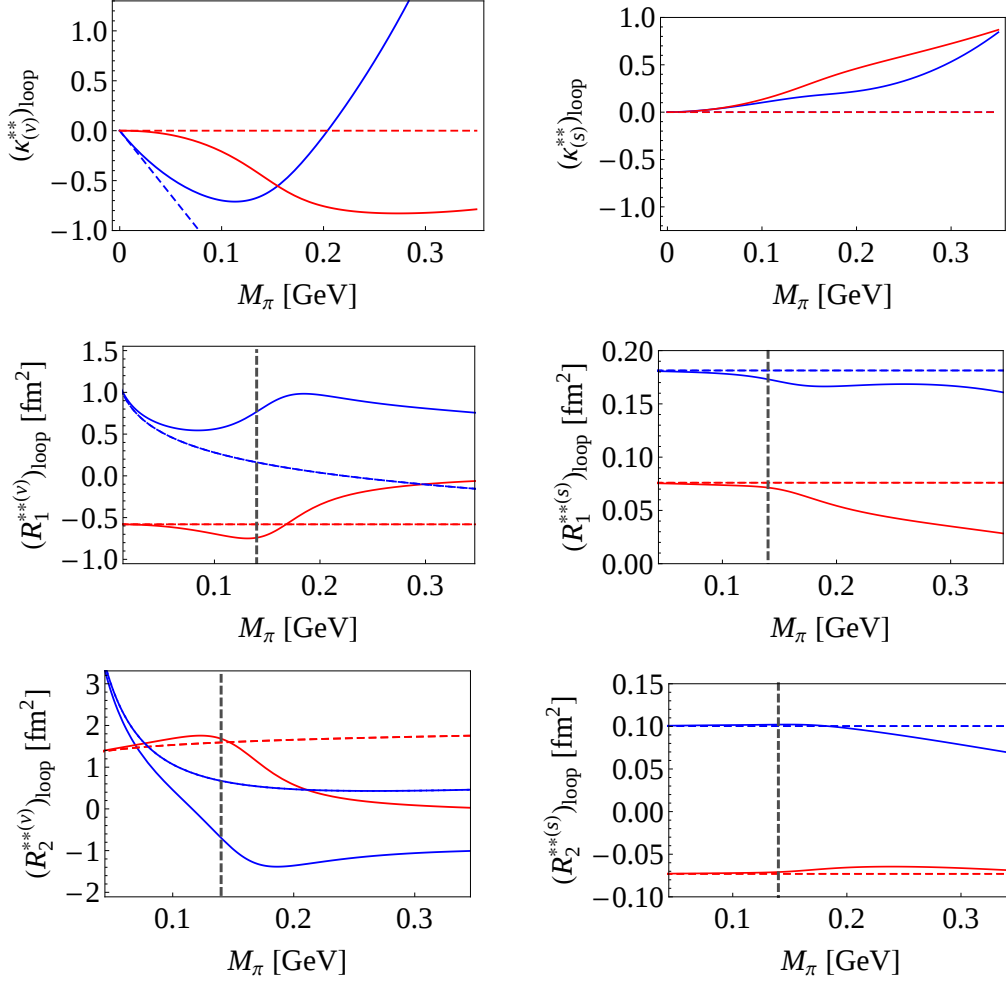


Abbildung 5.7: Einschleifenbeiträge zum isovektoriellen und isoskalaren magnetischen Moment (oben), dem mittleren quadratischen Dirac-Radius (Mitte) und Pauli-Radius (unten) der Roperresonanz als Funktion der Pionmasse. Blaue Linien stehen für den Real-, rote für den Imaginärteil. Durchgezogene Linien repräsentieren die vollständigen relativistischen Ergebnisse, während gestrichelte Linien eine strikte chirale Entwicklung darstellen. Graue vertikale Linien markieren den physikalischen Wert der Pionmasse.

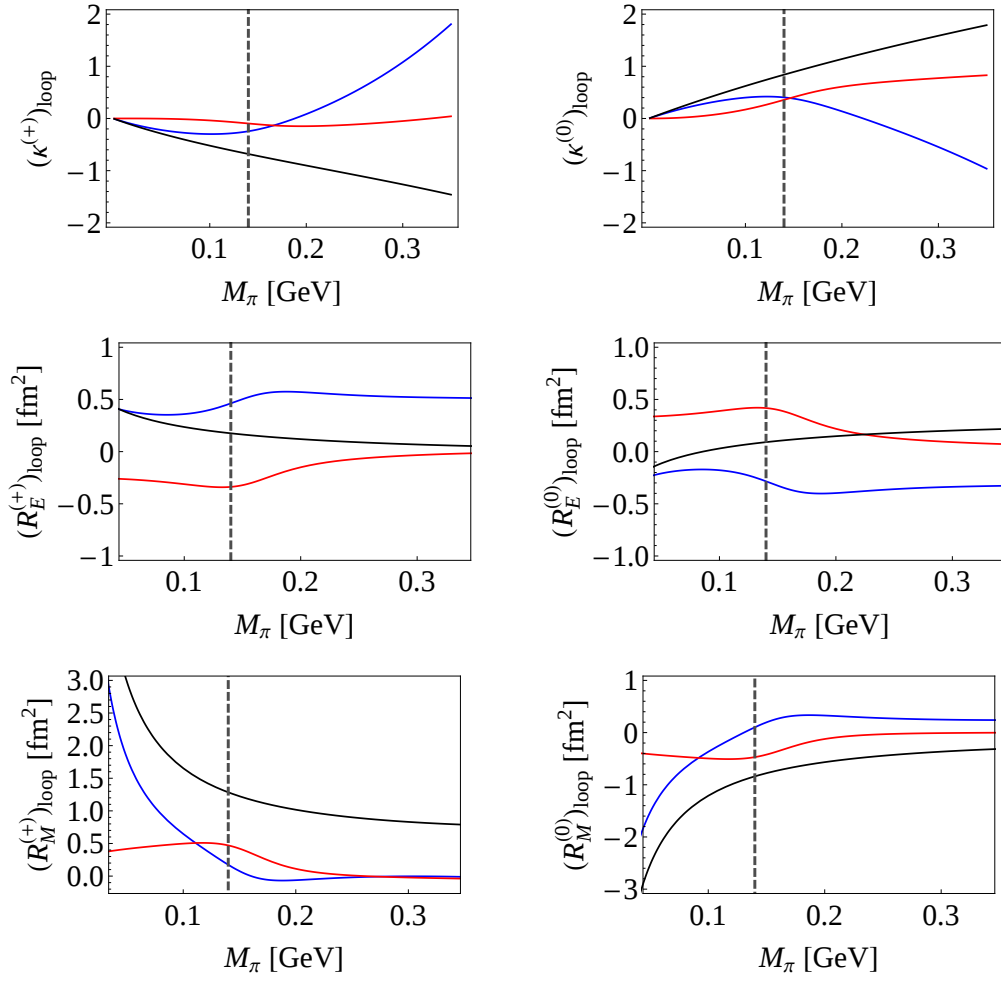


Abbildung 5.8: Einschleifenbeiträge zum anomalen magnetischen Moment (oben), dem mittleren quadratischen elektrischen Radius (Mitte) und magnetischen Radius (unten) der Roperresonanz und des Nukleons (schwarze Linie) als Funktion der Pionmasse. Restliche Bezeichnung gemäß Abbildung 5.7.

Kapitel 6

Elektromagnetische Formfaktoren des Übergangs vom Nukleon zur Roperresonanz

Der elektromagnetische Übergang vom Nukleon zur Roperresonanz lässt sich aus den experimentellen Daten der Elektropionproduktion in der Energie-region der Roperresonanz durch die Anwendung von Isobaren-Modellen in Kombination mit effektiven Lagrangedichten und Dispersionsrelationen [124, 190, 64, 65, 191, 192] extrahieren. Der elektromagnetische Übergang kann in Form von zwei Helizitätsamplituden $A_{1/2}$ und $S_{1/2}$ oder alternativ durch zwei kovariante Dirac- und Pauli- (F_1^* und F_2^*) oder Sachs-Formfaktoren (G_E^* und G_M^*) parametrisiert werden [193]. Die Dirac- und Pauli-Formfaktoren werden insbesondere im Zusammenhang mit der Gitter-QCD und als Grundlage zur Herleitung von transversalen Übergangsdichten (*transverse transition densities*) im *light-front*-Formalismus [190] eingesetzt.

Weder im Rahmen relativistischer Quarkmodelle noch in Simulationen auf dem Gitter können die experimentellen Daten für die Helizitätsamplituden für kleine Werte des Impulsübertrags beschrieben werden [73, 74, 75, 66, 70, 76]. In chiraler EFT lassen sich die elektromagnetischen Übergangsformfaktoren für kleine Werte von Q^2 berechnen, wobei durch die Anwendung des CMS ein systematisches Zählschema generiert wird. Die Ergebnisse können zur Extrapolation entsprechender Gitter-Simulationen genutzt werden.

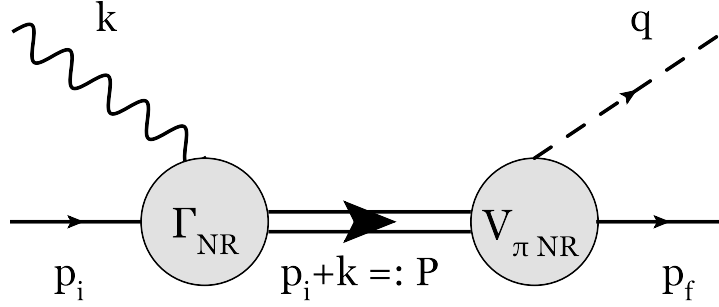


Abbildung 6.1: Resonanter Anteil des Prozesses $N(p_i) + \gamma(k) \rightarrow N(p_f) + \pi(q)$: Einfache Linien stehen für das Nukleon, doppelte für die Roperresonanz, gestrichelte für das Pion und geschlängelte für das Photon.

6.1 Definition der Übergangsformfaktoren

Unter Zuhilfenahme der resonanten Amplitude der Elektropionproduktion am Nukleon (siehe Abbildung 6.1)¹,

$$A_{N\gamma \rightarrow N\pi}^{(r)} = \bar{u}(p_f) V_{\pi NR}(P, q) i S_R(P) \Gamma_{NR}(P, p_i) u(p_i), \quad (6.1)$$

kann die Definition des elektromagnetischen Übergangs vom Nukleon zur Roperresonanz wie in Abschnitt 5.1 vorgenommen werden [194]:

$$V_{NR}^\mu(Q^2) = \bar{w}(P) \left[\left(\gamma^\mu - \not{k} \frac{k^\mu}{k^2} \right) F_1^*(Q^2) + \frac{i \sigma^{\mu\nu} k_\nu}{M_R + m_N} F_2^*(Q^2) \right] u(p_i). \quad (6.2)$$

Dabei wurde der positive quadrierte Impulsübertrag $Q^2 = -k^2 = -(P - p_i)^2$ eingeführt und $u(p_i)$ und $w(P)$ stehen für die Dirac-Spinoren des Nukleons und der Roperresonanz. Die Struktur des Übergangsvortex $V_{NR}^\mu(Q^2)$ unterscheidet sich von der des elastischen Vertex (5.16) im Formfaktor proportional zu k^μ . Während die Forderung nach Stromerhaltung im elastischen Fall einen Formfaktor proportional zu k^μ ausschließt, ergibt sich für den Übergang vom Nukleon zur Roperresonanz die Bedingung, dass der Formfaktor proportional zu k^μ wie in Gleichung (6.2) mit dem Dirac-Formfaktor verknüpft ist. In der Normierung des Pauli-Formfaktors wurde die Polmasse m_R durch die Breit-Wigner-Masse $M_R = 1.44$ GeV ersetzt, damit die erzielten Ergebnisse leichter mit empirischen Analysen verglichen werden können.

Da die Übergangsformfaktoren aus Messungen der Elektropionproduktion extrahiert werden, ist es üblich, die Q^2 -Abhängigkeit des elektromagnetischen Übergangs in Form von Helizitätsamplituden $A_{1/2}$ und $S_{1/2}$ im hadronischen

¹Im Folgenden werden die Isospinindizes der Dirac-Spinoren unterdrückt.

Schwerpunktsystem anzugeben. Helizitätsamplituden können als Linearkombinationen der $\gamma N \rightarrow N\pi$ Multipolamplituden definiert werden [193] und stehen in der folgenden Relation zu den Formfaktoren aus Gleichung (6.2) [190]:

$$\begin{aligned} A_{1/2}(Q^2) &= \frac{e Q_-}{\sqrt{4K m_N M_R}} \left(F_1^*(Q^2) + F_2^*(Q^2) \right), \\ S_{1/2}(Q^2) &= \frac{e Q_-}{\sqrt{8K m_N M_R}} \left(\frac{Q_- Q_+}{2M_R} \right) \frac{M_R + m_N}{Q^2} \\ &\quad \times \left[F_1^*(Q^2) - \frac{Q^2}{(M_R + m_N)^2} F_2^*(Q^2) \right], \end{aligned} \quad (6.3)$$

mit

$$\begin{aligned} K &= \frac{M_R^2 - m_N^2}{2M_R}, \\ Q_{\pm} &= \sqrt{(M_R \pm m_N)^2 + Q^2}. \end{aligned}$$

Führt man gemäß Referenz [73] elektrische und magnetische Sachs-Formfaktoren G_E^* und G_M^* für den Übergang vom Nukleon zur Roperresonanz ein,

$$\begin{aligned} G_E^*(Q^2) &= F_1^*(Q^2) - \frac{Q^2}{(M_R + m_N)^2} F_2^*(Q^2), \\ G_M^*(Q^2) &= F_1^*(Q^2) + F_2^*(Q^2), \end{aligned} \quad (6.4)$$

resultiert eine direkte Proportionalität zwischen $S_{1/2}$ und G_E^* sowie zwischen $A_{1/2}$ und G_M^* .

6.2 Berechnung der Übergangsformfaktoren

In diesem Kapitel werden die Formfaktoren des Übergangs vom Nukleon zur Roperresonanz in chiraler EFT bis einschließlich dritter chiraler Ordnung im CMS berechnet. Aus phänomenologischen Gründen wird das Rhomeson als dynamischer Freiheitsgrad gemäß Abschnitt 2.3.1 berücksichtigt. Ohne explizite Einbeziehung von Vektormesonen weisen Formfaktorrechnungen auf Einschleifenniveau nicht die nötige Krümmung auf, um experimentelle Daten über eine ausgedehnte Region des Impulsübertrages beschreiben zu können [80, 81]. Diagramme mit Delta-Pion-Schleifen werden in der Rechnung nicht explizit betrachtet. In Abschnitt 5.4 wurde demonstriert, dass sich die Beiträge von Delta-Pion-Schleifen entweder ähnlich zu den Beiträgen der Nukleon-Pion-Schleifen oder ähnlich zu den Beiträgen der Roper-Pion-Schleifen verhalten, abhängig davon wie man die Masse des Deltas im Vergleich zu der des

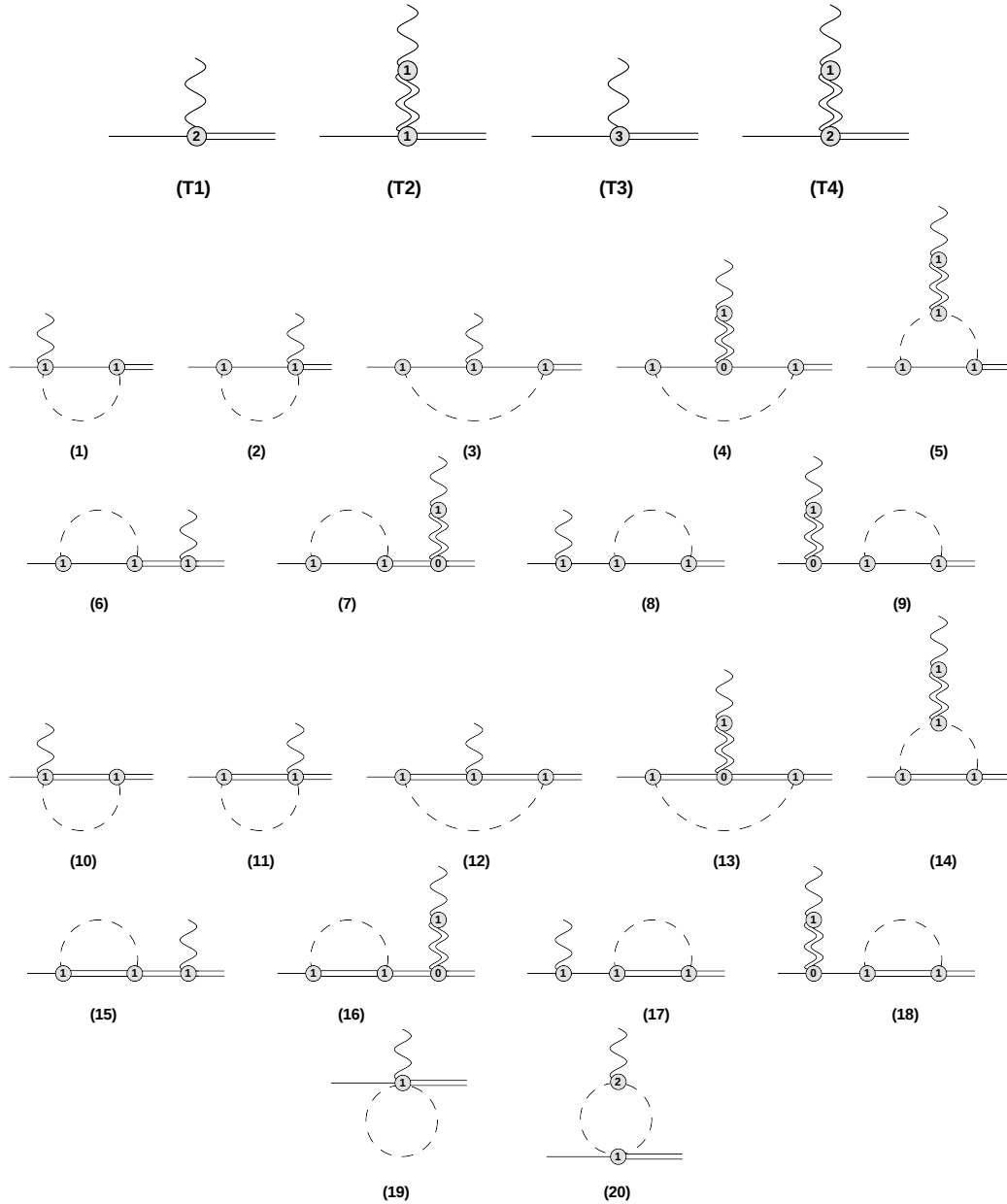


Abbildung 6.2: Feynmandiagramme für die elektromagnetischen Übergangsformfaktoren vom Nukleon zur Roperresonanz. Einfach durchgezogene Linien stehen für Nukleonen, gestrichelte für Pionen, doppelt durchgezogene stehen für die Roperresonanz und einfach geschlängelte für Photonen und doppelt geschlängelte für Rhomesonen.

Nukleons und der Roperresonanz zählt. In allen Fällen können die Beiträge durch die Redefinition der auftretenden Kopplungen modelliert werden [78].

Für die perturbative Rechnung wurde das Zählschema aus Abschnitt 3.3 angewendet. Zusätzlich dazu wird der Impulsübertrag k^μ als $\mathcal{O}(q)$ gezählt, wodurch der Massendifferenz zwischen der Roperresonanz und dem Nukleon die Ordnung $\mathcal{O}(q)$ zugewiesen wird. Die bis zur dritten chiralen Ordnung beitragenden Feynmandiagramme aus Abbildung 6.2 wurden, wie in Abschnitt 5.2 beschrieben, zu skalaren Integralen reduziert.

Die zählschemaverletzenden Beiträge der $\overline{\text{MS}}$ -renormierten Schleifendiagramme konnten durch die Anwendung des CMS eliminiert werden. Wie im Fall der elastischen Formfaktoren treten in der betrachteten Ordnung keine zählschemaverletzenden Terme für den Dirac-Formfaktor F_1^* auf. Dieses Resultat ist vorhersehbar, da in Ordnung $\mathcal{O}(q^3)$ keine Kopplungskonstante existiert, in der solche zählschemaverletzende Beiträge absorbiert werden können. Zur Bestimmung der zählschemaverletzenden Terme in F_2^* wurden die entsprechenden Schleifenbeiträge in einer Potenzreihe der Pionmasse und des quadrierten Impulsübertrages entwickelt und die Terme nullter chiraler Ordnung identifiziert. Mit der Methode aus Abschnitt 5.2 wurde bestätigt, dass alle zählschemaverletzenden Terme analytisch in den Entwicklungsparametern sind und durch die Renormierung der Kopplungskonstanten c_6^{NR} , c_7^{NR} und k_3 absorbiert werden können. Zusammen mit der Erhaltung des elektromagnetischen Stroms stellt dies einen wichtigen Konsistenztest an die vorliegende Rechnung dar. Die expliziten Ausdrücke der Subtraktionsterme, ausgewertet an den komplexen Massenschalenpunkten, finden sich in Anhang D.3. Die WFRK ist gegeben durch

$$Z_{NR} = 1 + \delta Z_{NR}, \quad (6.5)$$

wobei δZ_{NR} der Ordnung $\mathcal{O}(q^2)$ ist. Gemäß der Lagrangedichten (2.63) und (2.66) tritt keine Nukleon-Photon-Roper- sowie Nukleon-Rho-Roper-Wechselwirkung in erster chiraler Ordnung auf, so dass die führenden Feynmandiagramme (T1) und (T2) aus Abbildung 6.2 der Ordnung $\mathcal{O}(q^2)$ sind und das Produkt mit δZ_{NR} erst in höheren Ordnungen beiträgt.

6.3 Ergebnisse der Übergangsformfaktoren

Im Gegensatz zu den elastischen Formfaktoren der Roperresonanz existieren empirische Analysen zum Übergang vom Nukleon zur Roperresonanz, die zur Anpassung der unbekannten Parameter genutzt werden können. In Referenz [190] wurde die Parametrisierung gemäß MAID2007 [67] verwendet,

um die Helizitätsamplituden aus den experimentellen Daten der Elektropionproduktion zu extrahieren. Bei MAID handelt es sich um ein unitäres Isobarenmodell, das alle etablierten Resonanzen bis 2 GeV umfasst. Die resonanten Beiträge sind durch Breit-Wigner-Funktionen parametrisiert und die Beiträge zum Untergrund setzen sich aus unitarisierten Nukleon- und Vektormesonaustauschdiagrammen zusammen. Der Breit-Wigner-Ansatz für die Resonanzbeiträge nimmt folgende Gestalt an:

$$t_{\gamma\pi}^{R,\alpha} = \bar{\mathcal{A}}_{\alpha}^R(Q^2) \frac{M_R \Gamma_R}{M_R^2 - W^2 - i M_R \Gamma_R} f_{\gamma N}(W) f_{\pi N}(W) , \quad (6.6)$$

wobei W die Gesamtenergie des Prozesses im Schwerpunktsystem darstellt², der Faktor $f_{\pi N}(W)$ den Zerfall der Resonanz N^* beschreibt und der Faktor $f_{\gamma N}(W)$ die Abhängigkeit des γNN^* -Vertex von der Variablen W parametrisiert. Die Resonanzkopplungen $\bar{\mathcal{A}}_{\alpha}^R(Q^2)$ sind Linearkombinationen der $\gamma^* N \rightarrow N^*$ Helizitätsamplituden und können für feste Werte von Q^2 an die Daten zur Pionproduktion angepasst werden (*single- Q^2 fit*, SQ). Eine ähnliche SQ-Analyse der Elektropionproduktionsdaten wurde in den Referenzen [64, 65] durchgeführt. In beiden Fällen wurden für einen ausgedehnten Bereich des Impulsübertrages empirische Daten für den elektromagnetischen Übergang vom Proton zur positiv geladenen Roperresonanz generiert. SQ-Analysen zeichnen sich dadurch aus, dass den Resonanzkopplungen $\bar{\mathcal{A}}_{\alpha}^R$ für feste Werte von Q^2 ein konstanter Wert zugewiesen wird. Alternativ können die Resonanzkopplungen wie in Referenz [190] als Funktionen von Q^2 parametrisiert werden,

$$\bar{\mathcal{A}}_{\alpha}^R(Q^2) = \bar{\mathcal{A}}_{\alpha}^R(0)(1 + a_1 Q^2 + a_2 Q^4 + a_3 Q^6 + a_4 Q^8)e^{-b_1 Q^2} , \quad (6.7)$$

wobei die Parameter a_i und b_1 aus einem kombinierten Fit der Elektroproduktions-Weltdaten bestimmt werden (*Q^2 -dependent fit*). In dieser Arbeit werden die empirischen Informationen aus den SQ-Analysen für die Anpassung der unbekannten LEC verwendet und untereinander verglichen. Fit 1 und Fit 2 steht im Folgenden jeweils für die Anpassung der LEC an die $p \rightarrow P_{11}^+$ Helizitätsamplituden des SQ-Fit aus Referenz [64] und Referenz [190]. Zudem liegen beiden Fits noch die Daten der transversalen Helizitätsamplituden ${}_p A_{1/2}$ und ${}_n A_{1/2}$ an der Stelle $Q^2 = 0$ aus Referenz [91] zu Grunde.

Vor der Anpassung an die verschiedenen Datensätze wurden unter Zuhilfenahme des Programmpakets *LoopTools* numerische Werte für die auftretenden skalaren Schleifenintegrale ermittelt. Da es innerhalb dieses Programms

²Eine Einführung in den Prozess der Elektro- und Photopionproduktion findet sich in Abschnitt 7.2.

nicht möglich ist Dreipunktintegrale auszuwerten, die sowohl komplexe äußere Impulse als auch komplexe innere Massen umfassen, wurden in den C_0 -Integralen der Diagramme (12)-(14) aus Abbildung 6.2 die Imaginärteile der Ropermassen vernachlässigt:

$$\begin{aligned} C_0(m_N^2, t, z^2, M_\pi^2, z^2, z^2) &\rightarrow C_0(m_N^2, t, z^2, M_\pi^2, m_R^2, m_R^2) \\ C_0(m_N^2, t, z^2, z^2, M_\pi^2, M_\pi^2) &\rightarrow C_0(m_N^2, t, z^2, m_R^2, M_\pi^2, M_\pi^2) . \end{aligned}$$

Der dadurch begangene Fehler ist formal der Ordnung $\mathcal{O}(\hbar^2)$.

Die Resultate für die Formfaktoren des Übergangs vom Nukleon zur Roperresonanz umfassen acht unbekannte LEC, wovon zwei auf den Einbau des Rhomesons zurückzuführen sind. Die vier Kopplungskonstanten c_6^{NR} , c_7^{NR} , d_6^{NR} und d_7^{NR} weisen folgende Korrelationen auf:

$$\frac{c_7^{NR}}{2} + c_6^{NR}\tau_3, \quad d_7^{NR} + d_6^{NR}\tau_3, \quad (6.8)$$

weshalb zur Durchführung der Fits die Linearkombinationen

$$\frac{c_7^{NR}}{2} \pm c_6^{NR} = c_{p/n}^{NR}, \quad d_7^{NR} \pm d_6^{NR} = d_{p/n}^{NR} \quad (6.9)$$

gebildet wurden. Abhängig davon, ob an die Daten des Übergangs $p \rightarrow P_{11}^+$ oder die des Übergangs $n \rightarrow P_{11}^0$ angepasst wird, tragen nur die Konstanten mit dem Index p oder n bei.

Obwohl bei der Extraktion des elektromagnetischen Übergangs aus den Referenzen [64, 190] keine Imaginärteile berücksichtigt wurden, stellen die Übergangsformfaktoren und Helizitätsamplituden aufgrund des instabilen Charakters der Roperresonanz komplexe Größen dar. Da zur Anpassung der LEC nur die extrahierten Realteile der Helizitätsamplituden zur Verfügung stehen, werden in den folgenden Fits die nach dem CMS renormierten LEC als reell angenommen. Durch explizite Berücksichtigung des Rhomesons erwartet man eine verbesserte Beschreibung der Q^2 -Abhängigkeit bis zur Größenordnung der Masse des Rhomesons, d. h. $Q^2 \sim (0.77 \text{ GeV})^2 \approx 0.6 \text{ GeV}^2$. In dieser Region des quadrierten Impulsübertrages existiert nur eine geringe Anzahl extrahierter SQ-Datenpunkte, so dass der Anpassungsbereich im Falle von Fit 1 bis $Q^2 = 0.65 \text{ GeV}^2$ und im Falle von Fit 2 bis $Q^2 = 0.75 \text{ GeV}^2$ ausgedehnt wurde. Auf diese Weise liegen sowohl Fit 1 als auch Fit 2 vier Datenpunkte für ${}_p A_{1/2}$ und ${}_p S_{1/2}$ zugrunde. Die Kopplungen c_p^{NR} und c_n^{NR} werden für beide Fits an die transversalen Helizitätsamplituden ${}_p A_{1/2}$ und ${}_n A_{1/2}$ an der Stelle $Q^2 = 0$ angepasst. Zur Bestimmung der restlichen LEC

wurde die *Mathematica*-Routine *NonlinearModelFit* verwendet. Die zu minimierende Chi-Quadrat-Funktion χ^2 ist definiert als

$$\chi^2 = \sum_j \frac{(H_j^{\text{exp}} - H_j^{\text{th}})^2}{(\delta H_j^{\text{exp}})^2}, \quad (6.10)$$

wobei H^{exp} für die Daten der jeweiligen SQ-Analyse steht, δH^{exp} die experimentellen Fehler darstellen und H^{th} die in EFT berechneten Helizitätsamplituden bezeichnet. Da es sich bei den durchgeführten Anpassungen um nichtlineare Regressionen handelt, sind die von *Mathematica* ermittelten Lösungen nicht notwendigerweise globale Minima der χ^2 -Funktion. Aufgrund der großen Anzahl unbekannter LEC im Vergleich zu der Anzahl an Datenpunkten wurden zusätzliche Bedingungen an die LEC gestellt. Unnatürlich große Werte der ermittelten Parameter oder starke Diskrepanz zwischen Resultaten auf Baum- und Schleifenniveau deuten auf eine schlechte oder fehlende Konvergenz der Störungsreihe hin. In diesem Fall kann nicht mehr gewährleistet werden, dass sich das Ergebnis systematisch durch die Berechnung von Beiträgen höherer Ordnung verbessern lässt. Zur Vermeidung einer solchen Situation wurden zunächst die Ergebnisse auf Baum- und Schleifenniveau gleichzeitig an die entsprechenden Datensätze angepasst. Die dadurch bestimmten Werte für die LEC wurden als Startwerte für die anschließenden Anpassungen der Ergebnisse auf Schleifenniveau verwendet. Bei diesen Fits wurden die LEC der Bedingung unterworfen, dass ihre Abweichung vom jeweiligen Startwert nicht mehr als 50% beträgt. Zusätzlich wurde die Konstante g_R so eingeschränkt, dass sie nicht um mehr als 50% von dem in Referenz [78] abgeschätzten Wert abweicht. Da keine SQ-Daten zum Übergang $n \rightarrow P_{11}^0$ für $Q^2 \neq 0$ existieren, wurde die unbekannte Konstante d_n^{NR} aus einem Fit an die Q^2 -abhängige Analyse der longitudinalen Amplitude ${}_nS_{1/2}$ angepasst.

In Tabelle 6.1 sind die ermittelten Werte für die Parameter zusammengefasst. In beiden Anpassungen nehmen die LEC ähnliche Werte von natürlicher Größenordnung an. Der signifikante Unterschied des reduzierten Chi-Quadrats ($\chi_{\text{red}}^2 := \chi^2/\text{Freiheitsgrad}$) lässt sich darauf zurückführen, dass die Fehler der SQ-Daten aus Referenz [190] (Fit 2) wesentlich kleiner geschätzt wurden als die der Daten aus Referenz [64] (Fit 1). Aus diesem Grund liefert ein Fit an beide Datensätze annähernd die gleichen LEC wie Fit 2 und bringt keinen Informationsgewinn. Die in dieser Arbeit durchgeführte Analyse des elektromagnetischen Übergangs vom Nukleon zur Roperresonanz zielt auf eine Beschreibung der empirischen Vorhersagen im Bereich kleiner Q^2 ab. Es ist jedoch nicht möglich die Zahlenwerte für die unbekannten LEC genau festzulegen. Für eine zuverlässige Bestimmung der LEC liegen der Anpassung

	c_p^{NR}	c_n^{NR}	d_p^{NR}	d_n^{NR}	k_3
Fit 1	-0.28	0.177	-0.003	-0.080	7.508
Fit 2	-0.28	0.177	0.051	-0.135	6.393
	k_4	g_R	g_{NR}	χ_{red}^2	
Fit 1	-0.965	0.50	-0.103	0.8	
Fit 2	-0.290	0.50	-0.101	13.0	

Tabelle 6.1: Zahlenwerte für die angepassten Parameter, wobei $c_{p/n}^{NR}$ und k_3 in Einheiten von GeV^{-1} , k_4 in Einheiten von GeV^{-2} und $d_{p/n}^{NR}$ in Einheiten von GeV^{-3} gegeben sind.

sung einerseits zu wenig experimentelle Informationen zu Grunde, andererseits sind die angepassten Parameter in der betrachteten Observablen stark miteinander korreliert. Beispielsweise sollte man die Konstante g_R aus einer Anpassung an die axiale Kopplung der Roperresonanz bestimmen. Der axiale Formfaktor kann im CMS zwar analog zu den elastischen Formfaktoren der Roperresonanz berechnet werden, es existieren aber keine experimentellen Informationen dazu.

In Abbildung 6.3 sind die Helizitätsamplituden für den elektromagnetischen Übergang in Abhängigkeit von Q^2 dargestellt. Die zu Fit 1 gehörende Kurve scheint die entsprechenden Datenpunkte besser beschreiben zu können als die zu Fit 2 gehörige. Während die blaue Kurve für die transversale Amplitude ${}_pA_{1/2}$ eine gute Übereinstimmung mit dem Q^2 -abhängigen Fit aus Referenz [190] zeigt, weicht sie für die longitudinale Amplitude ${}_pS_{1/2}$ stärker davon ab. Obwohl für die longitudinale Amplitude ${}_pS_{1/2}$ keine Daten unterhalb von $Q^2 = 0.3 \text{ GeV}^2$ existieren, zeigen die ermittelten Kurven in diesem Bereich ähnliches Krümmungsverhalten wie der Q^2 -abhängige Fit. Die Helizitätsamplituden des Übergangs $n \rightarrow P_{11}^0$ weichen sowohl für Fit 1 als auch für Fit 2 von den Vorhersagen des Q^2 -abhängigen Fits ab. Abbildung 6.4 zeigt die resultierenden Übergangsformfaktoren als Funktion von Q^2 . Aufgrund der Parametrisierung nimmt der Dirac-Formfaktor F_1 an der Stelle $Q^2 = 0$ den Wert null an, und die Werte des Pauli-Formfaktors F_2 an der Stelle $Q^2 = 0$ sind durch die Wahl der Konstanten c_p^{NR} und c_n^{NR} auf die empirischen Werte fixiert. Wie im Fall der Helizitätsamplituden können die roten Kurven die empirischen Analysen besser beschreiben als die blauen.

Die oben beschriebenen Anpassungen stellen keine zuverlässige Methode zur Festlegung der unbekannten LEC dar. Der Grund hierfür liegt in der hohen Modellabhängigkeit bei der Extraktion der Helizitätsamplituden ge-

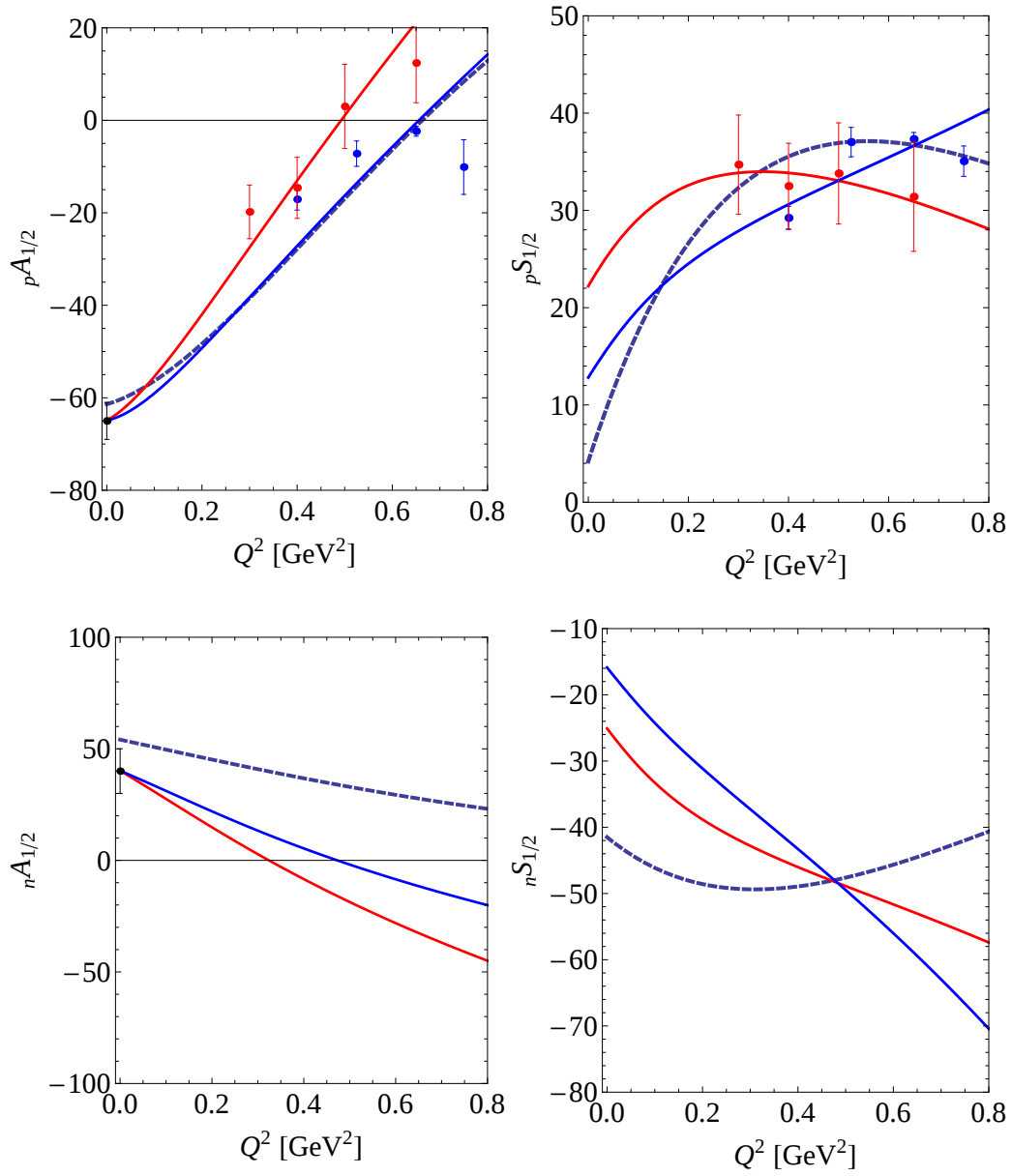


Abbildung 6.3: Helizitätsamplituden des Übergangs vom Nukleon zur Roperresonanz in Einheiten von $10^{-3} \text{ GeV}^{-1/2}$. Rote Kurven entsprechen Fit 1, blaue Fit 2 aus Tabelle 6.1 und gestrichelte dem Q^2 -abhängigen Fit aus Referenz [190].

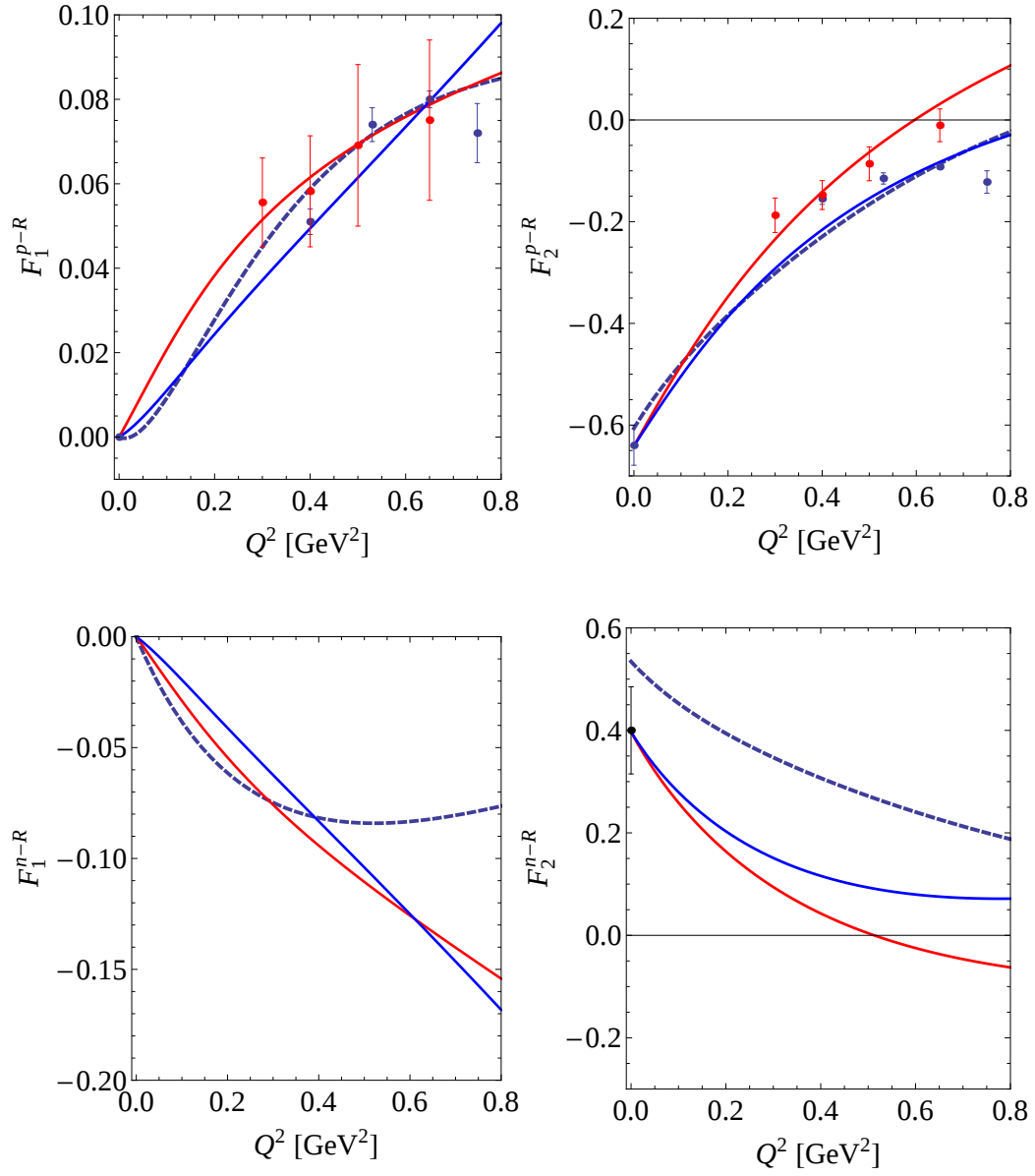


Abbildung 6.4: Formfaktoren des Übergangs vom Nukleon zur Roperresonanz. Bezeichnung gemäß Abbildung 6.3.

mäß den Referenzen [190, 64, 65]. Insbesondere der Q^2 -abhängige Fit aus Referenz [190] ist nicht für die Beschreibung der Helizitätsamplituden im Bereich kleiner Q^2 konstruiert. Eine modellunabhängige Vorhersage der unbekannten LEC kann mittels Simulationen auf dem Gitter getroffen werden (s. Abschnitt 5.5). Alle bisherigen Untersuchungen in diesem Zusammenhang konnten die empirischen Daten der Übergangsformfaktoren nicht für kleine Werte des quadrierten Impulsübertrags beschreiben [76, 77]. Sowohl für den positiven als auch für den neutralen Übergang weisen die empirischen Analysen und die Gitter-Rechnungen unterschiedliche Vorzeichen für die Formfaktoren auf. Eine mögliche Erklärung dafür liegt darin, dass die Beiträge der Vakuumpolarisation in den Rechnungen auf dem Gitter aus technischen Gründen vernachlässigt wurden (*quenched approximation*). Um eine Vorstellung über den Verlauf der Übergangsformfaktoren als Funktion der Pionmasse zu erhalten, sind in Abbildung 6.5 die Q^2 -Abhängigkeiten der Dirac- und Pauli-Formfaktoren für verschiedene Werte der Pionmasse bis $M_\pi = 0.4$ GeV dargestellt. Der Abstand aller Formfaktoren zu den jeweiligen Kurven mit physikalischer Pionmasse wächst für ansteigende Pionmassen. Dies trifft allerdings nicht zu, wenn der Wert für die Pionmasse weiter erhöht wird, vergleiche Abbildung 6.6. Hier wurden die Pionmassen gemäß der Simulationen aus Referenz [77] eingesetzt. Obwohl die Kurven aus Abbildung 6.6 im dargestellten Bereich eine stärkere Abhängigkeit von Q^2 aufweisen und geringer von den experimentellen Befunden abweichen als die Simulationen aus Referenz [77], zeigen sich einige qualitative Übereinstimmungen. Zum einen besitzt F_2^{n-R} an der Stelle $Q^2 = 0$ für große Pionmassen in beiden Fällen ein entgegengesetztes Vorzeichen zum experimentellen Wert, zum anderen nimmt F_2^{p-R} an der Stelle $Q^2 = 0$ einen größeren Wert an als experimentell bestimmt. An dieser Stelle muss betont werden, dass die vorliegende Rechnung nicht für Pionmassen oberhalb 0.4 GeV angewendet werden sollte, da für große Werte der Pionmasse ein schlechtes Konvergenzverhalten der chiralen Entwicklung zu erwarten ist. Erst für Gitter-Simulationen unterhalb von $M_\pi = 0.4$ GeV lassen sich die hier erzielten Resultate zuverlässig zur Extrapolation auf den physikalischen Wert der Pionmasse einsetzen.

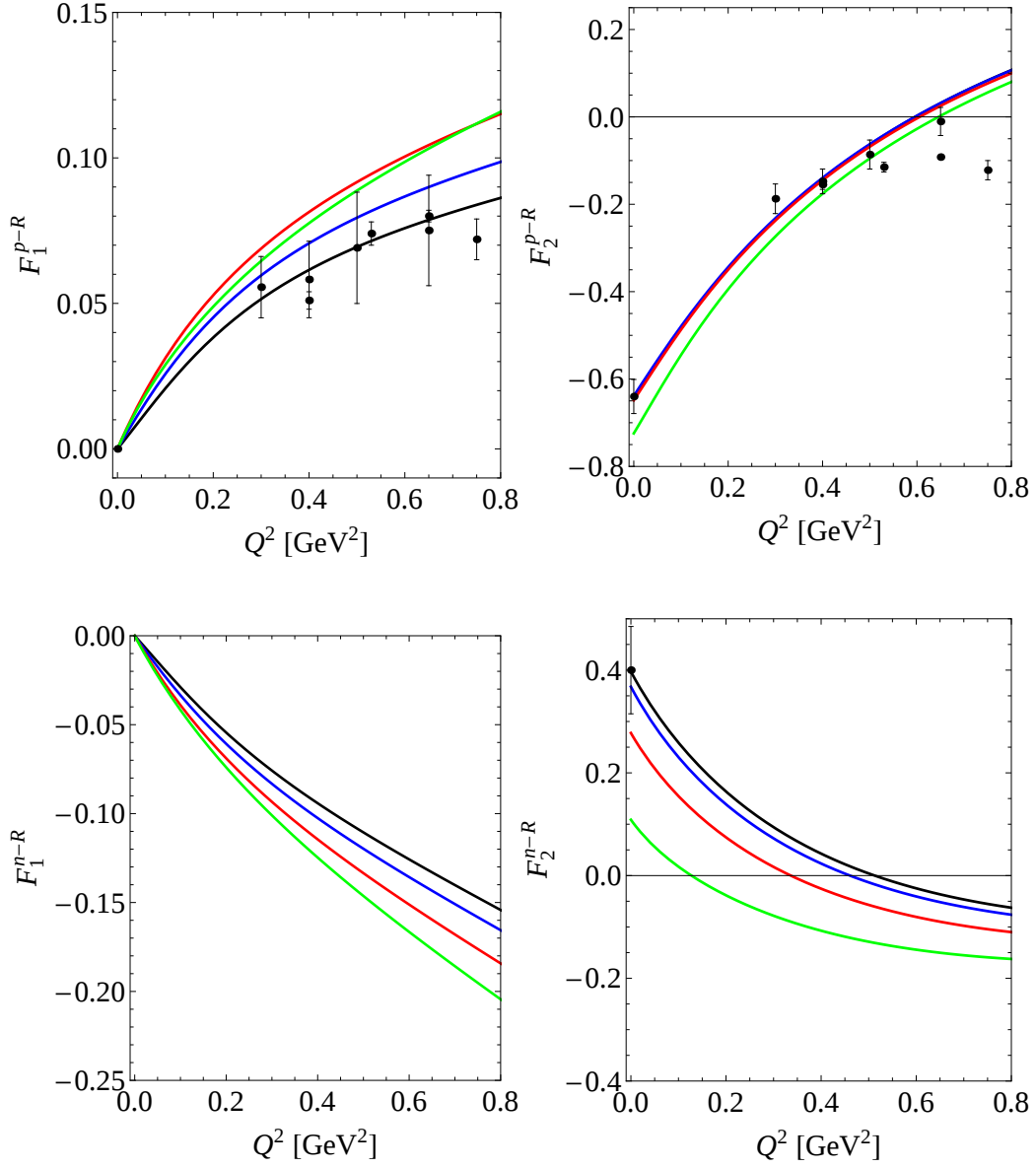


Abbildung 6.5: Formfaktoren des Übergangs vom Nukleon zur Roperresonanz für verschiedene Pionmassen. Schwarze Kurven entsprechen $M_\pi = 0.14$ GeV, blaue $M_\pi = 0.2$ GeV, rote $M_\pi = 0.3$ GeV und grüne $M_\pi = 0.4$ GeV. Die LEC sind entsprechend Fit 1 aus Tabelle 6.1 eingesetzt.

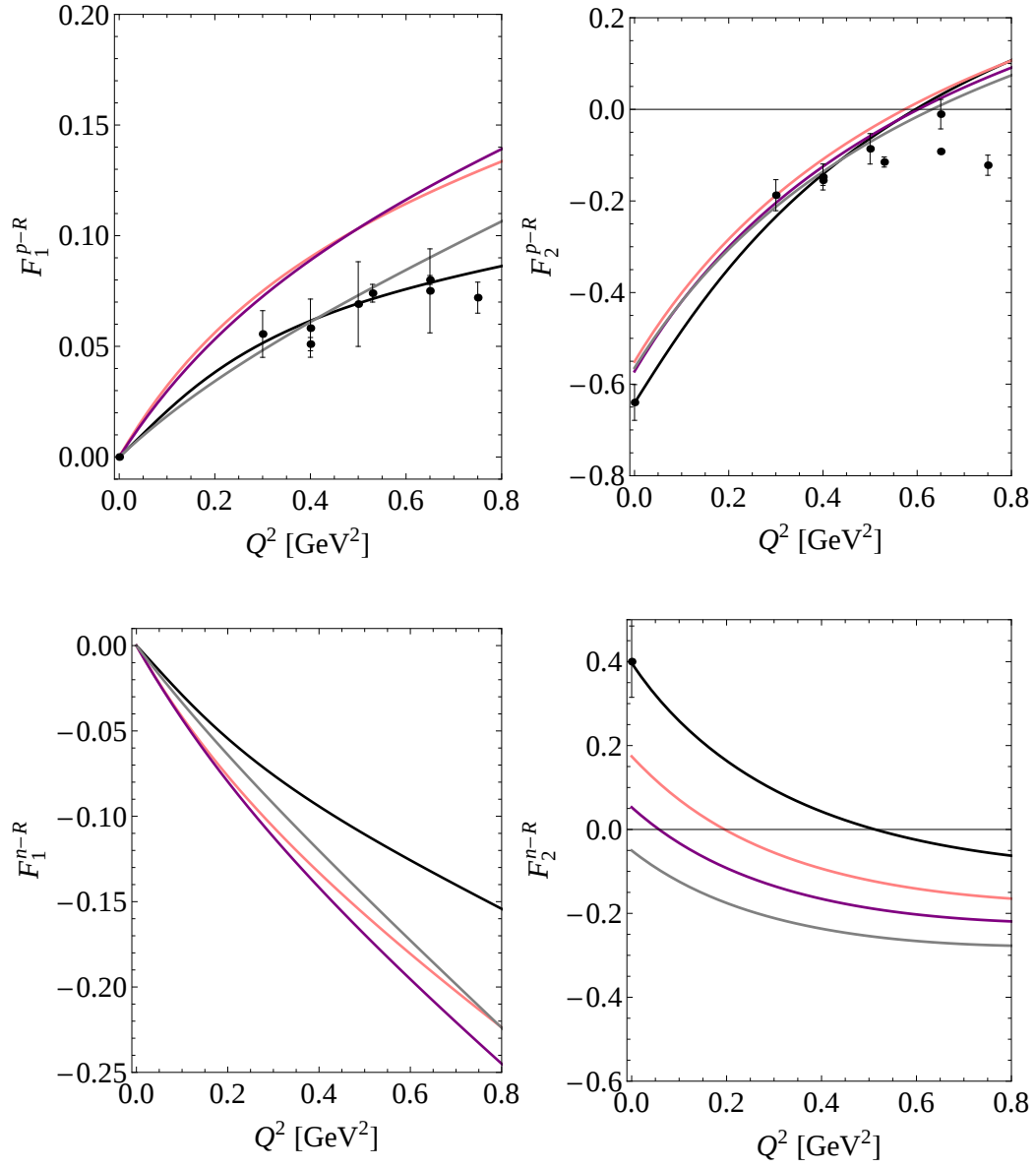


Abbildung 6.6: Formfaktoren des Übergangs vom Nukleon zur Roperresonanz für die Pionmassen aus Referenz [77]. Pink entspricht $M_\pi = 0.48 \text{ GeV}$, lila $M_\pi = 0.72 \text{ GeV}$ und grau $M_\pi = 1.1 \text{ GeV}$. Restliche Bezeichnung gemäß Abbildung 6.5.

Kapitel 7

Pion-Nukleon-Streuung und Photo- und Elektropionproduktion im Bereich der Roperresonanz

Die Wechselwirkung zwischen Pion und Nukleon zählt zu den fundamentalen Prozessen der Hadronenphysik. Da Resonanzen für üblicherweise als Peaks im totalen Wirkungsquerschnitt der Pion-Nukleon-Streuung auftreten, steht dieser Prozess eng mit dem Anregungsspektrum der Baryonen in Zusammenhang. Die Roperresonanz nimmt eine besondere Stellung im Baryonenspektrum ein, da sie sich nicht in einer resonanztypischen Struktur im totalen Wirkungsquerschnitt äußert, sondern erst nach Durchführung einer Partialwellenanalyse erkennbar ist [48]. Erste Untersuchungen der Pion-Nukleon-Streuung, in denen die Roperresonanz im Hinblick auf chirale Symmetrie und Unabhängigkeit von Feldredefinitionsparametern konsistent berücksichtigt wurde, finden sich in den Referenzen [195, 196, 197, 198]. Dabei wurde ein Pion-Nukleon-Kernel in ChPT hergeleitet und die Beiträge anschließend unitarisiert. Die Ergebnisse weisen bis in die Energieregion der Roperresonanz eine gute Übereinstimmung mit empirischen Analysen auf, den zugrunde liegenden Methoden fehlt jedoch ein manifestes Zählschema auf Amplitudenniveau. Die Schwellenregion des P_{11} -Kanals kann im Rahmen von EFT mit [29, 199, 200, 201, 202] und ohne [203, 204, 205, 206, 207, 208] explizite Berücksichtigung der Deltaresonanz beschrieben werden. Um die Beschreibung der P_{11} -Partialwelle in die Deltaregion zu erweitern, wurden in Referenz [209] die wichtigsten Beiträge der Roperresonanz auf Baumgraphenniveau berücksichtigt. Eine Analyse des P_{11} -Kanals in der Energieregion der Roperresonanz erfordert darüber hinaus die konsistente Einbeziehung der Roperresonanz auf dem Schleifenniveau. Ähnlich zur Pion-Nukleon-Streuung reicht die Berücksichtigung der Deltaresonanz in der Photopionproduktion nicht aus, um eine

gute Beschreibung des Multipols mit den Quantenzahlen der Roperresonanz zu erzielen [210].

Im folgenden Abschnitt wird ein Zählschema zur störungstheoretischen Untersuchung der Pion-Nukleon-Streuung im Bereich der Roperresonanz vorgestellt. Innerhalb dieses Zählschemas werden die Beiträge zur P_{11} -Partialwelle bis zur übernächstführenden Ordnung in chiraler EFT unter Anwendung des CMS berechnet. Da das Zählschema auch für die Anwendung auf die Photo- und Elektropionproduktion in der Roperregion geeignet ist, werden darüber hinaus die Beiträge zum M_{1-} - und S_{1-} -Multipol bis zur übernächstführenden Ordnung bestimmt. Die unbekannten LEC der Prozesse werden an die empirischen SAID- [211] und MAID-Daten [67] angepasst.

7.1 Pion-Nukleon-Streuung

Nach einer kurzen Einführung in den Prozess der Pion-Nukleon-Streuung wird im zweiten Abschnitt dieses Kapitels beschrieben, wie die perturbative Berechnung in chiraler EFT durchgeführt werden kann. Eine ausführliche Abhandlung der Pion-Nukleon-Streuung findet sich in Referenz [212].

7.1.1 Formalismus der Pion-Nukleon-Streuung

Kinematik und Amplitude

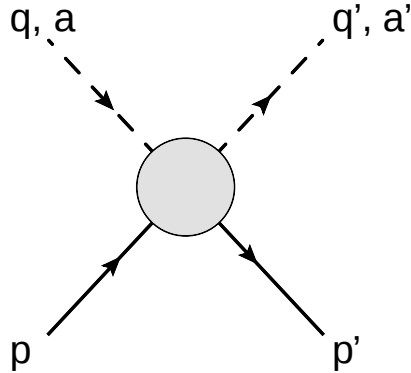


Abbildung 7.1: Kinematik der Pion-Nukleon-Streuung, wobei p , q (p' , q') den Impuls des einlaufenden (auslaufenden) Nukleons, Pions darstellen und a (a') der kartesische Isospinindex des einlaufenden (auslaufenden) Pions ist.

Die Kinematik der elastischen Pion-Nukleon-Streuung ist in Abbildung

7.1 dargestellt, wobei die Viererimpulserhaltung gilt:

$$p_\mu + q_\mu = p'_\mu + q'_\mu. \quad (7.1)$$

Die invariante Amplitude der Pion-Nukleon-Streuung $M_{\pi N} = iT_{\pi N}$ wird in dieser Arbeit durch die sogenannten Dirac-Amplituden parametrisiert [212],

$$T_{\pi N}^{aa'} = \bar{u}(p') \left[A^{aa'} + \frac{1}{2}(\not{q} + \not{q}')B^{aa'} \right] u(p), \quad (7.2)$$

mit

$$\begin{aligned} A^{aa'} &= \delta_{aa'} A^+ - i\epsilon_{aa'k} \tau_k A^-, \\ B^{aa'} &= \delta_{aa'} B^+ - i\epsilon_{aa'k} \tau_k B^-. \end{aligned} \quad (7.3)$$

Die Streumatrix $T_{\pi N}$ ist eine Funktion der drei Mandelstam-Variablen:

$$s = (p + q)^2 = (p' + q')^2, \quad (7.4a)$$

$$t = (q' - q)^2 = (p - p')^2, \quad (7.4b)$$

$$u = (p - q')^2 = (p' - q)^2. \quad (7.4c)$$

Nutzt man die Massenschalenbedingungen, sind die Mandelstam-Variablen nicht unabhängig, sondern erfüllen die Beziehung

$$s + t + u = 2(m_N^2 + M_\pi^2). \quad (7.5)$$

Aus der sogenannten *crossing symmetry* der invarianten Amplitude,

$$T_{\pi N}^{aa'}(p, q; p', q') = T_{\pi N}^{a'a}(p, -q'; p', -q), \quad (7.6)$$

resultiert das folgende Verhalten der Dirac-Amplituden unter Vertauschung der Variablen s und u (*crossing*):

$$A^\pm(s, t, u) = \pm A^\pm(u, t, s), \quad B^\pm(s, t, u) = \mp B^\pm(u, t, s). \quad (7.7)$$

Die Streumatrix $T_{\pi N}$ kann unter Annahme der Isospinsymmetrie ($m_u = m_d$) in einen Kanal mit Isospin $I = \frac{1}{2}$ und einen mit $I = \frac{3}{2}$ zerlegt werden [87]:

$$\langle I', I'_3 | T_{\pi N} | I, I_3 \rangle = T_{\pi N}^I \delta_{II'} \delta_{I_3 I'_3},$$

mit

$$T^{\frac{1}{2}} = T^+ + 2T^-, \quad T^{\frac{3}{2}} = T^+ - T^-.$$

Die Isospinzerlegung überträgt sich direkt auf die Dirac-Amplituden:

$$\begin{aligned} A^{\frac{1}{2}} &= A^+ + 2A^-, & B^{\frac{1}{2}} &= B^+ + 2B^-, \\ A^{\frac{3}{2}} &= A^+ - A^-, & B^{\frac{3}{2}} &= B^+ - B^-. \end{aligned} \quad (7.8)$$

Partialwellenzerlegung

Allgemein treten Resonanzen mit definiertem Drehimpuls und Isospin auf, so dass experimentelle Daten für elastische Pion-Nukleon-Streuung oft in Form von Partialwellen analysiert sind. Zur Bestimmung der Partialwellenamplituden ist es hilfreich die Streumatrix im Schwerpunktsystem durch zweikomponentige Pauli-Spinoren für die ein- (χ_i) und auslaufenden (χ_f) Nukleon-zustände auszudrücken,

$$\bar{u}(p') T_{\pi N} u(p) = \frac{8\pi\sqrt{s}}{2m_N} \chi_f^\dagger \mathcal{F}_{\pi N} \chi_i, \quad (7.9)$$

wobei die Streuamplitude $\mathcal{F}_{\pi N}$ wie folgt mit den Dirac-Amplituden (7.3) verknüpft ist [212]:

$$\mathcal{F}_{\pi N}(s, \theta) = f_1(s, \theta) + \vec{\sigma} \cdot \hat{q}' \vec{\sigma} \cdot \hat{q} f_2(s, \theta), \quad (7.10)$$

mit

$$f_1(s, \theta) = \frac{E + m_N}{8\pi\sqrt{s}} \left[A(s, \theta) + (\sqrt{s} - m_N) B(s, \theta) \right], \quad (7.11a)$$

$$f_2(s, \theta) = \frac{E - m_N}{8\pi\sqrt{s}} \left[-A(s, \theta) + (\sqrt{s} + m_N) B(s, \theta) \right]. \quad (7.11b)$$

Hier stellt $E = \sqrt{\vec{p}^2 + m_N^2}$ die Nukleonenergie im Schwerpunkt dar.

Die Entwicklung der sogenannten Pauli-Amplituden aus Gleichung (7.11) nach Partialwellen lautet [213, 214]

$$f_1(s, \theta) = \sum_{l=0}^{\infty} f_{l+}(s) P'_{l+1} - \sum_{l=2}^{\infty} f_{l-}(s) P'_{l-1}(x), \quad (7.12a)$$

$$f_2(s, \theta) = \sum_{l=1}^{\infty} (f_{l-}(s) - f_{l+}(s)) P'_l(x), \quad (7.12b)$$

wobei l für den Bahndrehimpuls und der Index $\pm$ für den Gesamtdrehimpuls $j = l \pm \frac{1}{2}$ steht, x stellt den Kosinus des Streuwinkels θ im Schwerpunktsystem und $P'_l(x)$ die Ableitung der Legendre-Polynome nach diesem dar. Invertieren des Gleichungssystems (7.12) ergibt

$$f_{l\pm}(s) = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 dx [P_l(x) f_1(s, \theta) + P_{l\pm 1}(x) f_2(s, \theta)]. \quad (7.13)$$

Üblicherweise führt man dimensionslose Partialwellenamplituden $\mathcal{T}_{l\pm}(s)$ ein, indem man Gleichung (7.13) mit dem Pion- bzw. Nukleonimpuls im Schwerpunktsystem $q \equiv |\vec{q}|$ multipliziert:

$$\mathcal{T}_{l\pm}(s) = q f_{l\pm}(s), \quad (7.14)$$

mit

$$\vec{q}^2 = \frac{(s - M_\pi^2 - m_N^2)^2 - 4m_N^2 M_\pi^2}{4s}. \quad (7.15)$$

Für gegebenen Isospin I können die Streuphasen (*phase shifts*) $\delta_{l\pm}^{(I)}$ wie folgt aus den Partialwellen extrahiert werden:

$$\mathcal{T}_{l\pm}^{(I)}(s) = \frac{1}{2i} \left[\exp \left(2i\delta_{l\pm}^{(I)} \right) - 1 \right]. \quad (7.16)$$

Die in der Pion-Nukleon-Streuung gebräuchliche Schreibweise für Partialwellen mit Bahndrehimpuls l , Gesamtdrehimpuls j und Isospin I lautet $l_{2I,2j}$, wobei die spektroskopische Notation $S, P, D, F, \dots$ für $l = 0, 1, 2, 3, \dots$ verwendet wird. Für die Roperresonanz P_{11} ist die Partialwellenamplitude durch den Ausdruck $\mathcal{T}_{1-}^{(1/2)}$ gegeben, wobei in Gleichung (7.14) die Amplituden $A^\pm$ und $B^\pm$ gemäß Gleichung (7.8) ersetzt werden müssen.

7.1.2 Berechnung der Pion-Nukleon-Streuung im Bereich der Roperresonanz

In diesem Abschnitt wird die Berechnung der Pion-Nukleon-Streuung im Bereich der Roperresonanz bis zur übernächstführenden chiralen Ordnung beschrieben. Wie im Fall der Übergangsformfaktoren wurden Pion, Nukleon, Rhomeson und die Roperresonanz als dynamische Freiheitsgrade in die EFT aufgenommen. Die Deltaresonanz wurde nicht explizit berücksichtigt, weil sich die folgende Untersuchung auf die P_{11} -Partialwelle konzentriert. Da das Delta den Isospin $3/2$ besitzt, tragen die führenden Deltapoldiagramme nicht zu dieser Partialwelle bei. Das Rhomeson ist aus phänomenologischer Sicht in der Pion-Nukleon-Streuung von geringerer Bedeutung als im Rahmen der Übergangsformfaktoren und der Pionproduktion. Die Berücksichtigung des Rhomesons ist dennoch sinnvoll, da die Kopplungskonstanten zusammen mit denen aus der Pionproduktion angepasst werden.

Die perturbative Berechnung eines Prozesses für Energieregionen in der unmittelbaren Umgebung einer explizit berücksichtigten Resonanz bedingt die Modifikation des standardmäßigen Zählschemas. In den Referenzen [35, 215, 209] wurden Zähl schemata entwickelt, die zur Berechnung von Prozessen

im Bereich der Deltaresonanz angewendet werden können. Dabei werden s -Kanal-Diagramme mit Deltapol, sogenannte ein- Δ -reduzible Diagramme, für Energien im Bereich des Deltas stärker gewichtet und die ein- Δ -reduziblen Beiträge aufsummiert. Die Aufsummierung resultiert darin, dass der freie Propagator durch den vollständigen ersetzt wird und die Divergenzen am Deltapol behoben werden. In Referenz [209] wurde angedeutet, dass eine ähnliche Behandlung von ein-Roper-reduziblen Diagrammen die Beschreibung von Prozessen in der Roperregion ermöglicht, wobei der Ansatz mit Verweis auf eine schlechte Konvergenz in diesem Energiebereich nicht weiter elaboriert wurde.

Anknüpfend an die Methoden im Bereich der Deltaresonanz wird in dieser Arbeit das Zählschema aus Abschnitt 3.3 für die Beschreibung von Prozessen im Bereich der Roperresonanz verallgemeinert. Dazu betrachtet man den vollständigen Propagator der Roperresonanz in der Nähe des Pols (siehe Gleichung (5.10)):

$$S_R(p) = \frac{Z_R}{\not{p} - m_R + i\frac{\Gamma_R}{2}} + \text{n.p.} \quad (7.17)$$

Liegt p^2 nahe der quadrierten Polmasse der Roperresonanz m_R^2 , bleibt im Nenner eine Größe proportional zur Breite $\frac{\Gamma_R}{2}$ stehen. Der führende Beitrag zur Breite der Roperresonanz ist mit dem Imaginärteil des Diagramms (2) aus Abbildung 5.3 verknüpft, welches proportional zu $(m_R - m_N)^3$ ist und von der chiralen Ordnung $\mathcal{O}(q^3)$ gezählt wird. Aus diesem Grund wird einem Roperresonanzpropagator für $p^2 \approx m_R^2$ die chirale Ordnung $\mathcal{O}(q^{-3})$ anstatt $\mathcal{O}(q^{-1})$ zugewiesen und die Wichtigkeit ein-Roper-reduzierbarer Diagramme erhöht sich um q^{-2} . Im Gegensatz zu Referenz [35] wird hier allen kleinen Parametern die gleiche chirale Ordnung zugewiesen.

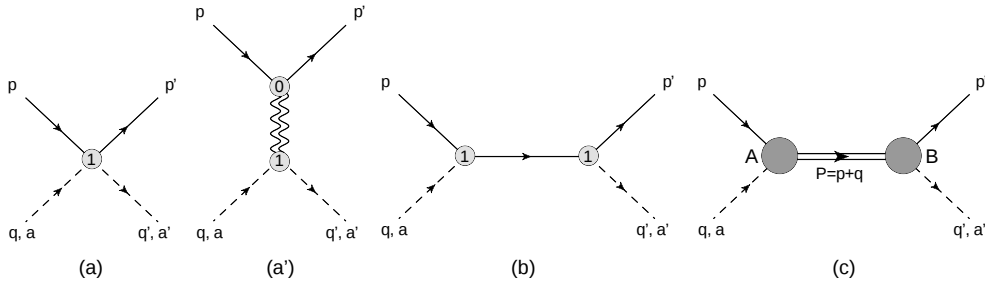


Abbildung 7.2: Diagramme für Pion-Nukleon-Streuung bis Ordnung $\mathcal{O}(q)$ im Bereich der Roperresonanz. Einfache Linien stehen für das Nukleon, doppelte für die Roperresonanz und gestrichelte für das Pion.

Abbildung 7.2 zeigt alle Feynmandiagramme der Pion-Nukleon-Streuung,

die gemäß dem oben beschriebenen Zählschema bis zur übernächstführenden Ordnung $\mathcal{O}(q)$ beitragen. Diagramme ohne expliziten Roperbeitrag beginnen mit der Ordnung $\mathcal{O}(q)$, während Diagramme mit Roperbeitrag mit der Ordnung $\mathcal{O}(q^{-1})$ beginnen. Die explizite Berücksichtigung des Rhomesons führt dazu, dass der $NN\pi\pi$ -Vertex in führender Ordnung verschwindet. Diagramm (a) trägt somit nicht zum Prozess bei und wird durch Diagramm (a') ersetzt. Weiterhin trägt das zu (b) gekreuzte Diagramm bei, welches sich aus dem ursprünglichen Diagramm durch Vertauschung von a mit a' und q mit $-q$ gewinnen lässt. Die Diagramme mit Roperbeitrag sind in Diagramm (c) zusammengefasst. Die Amplitude eines solchen Diagramms lässt sich schreiben als

$$\mathcal{M}_c = \bar{u}(p') V_B iS_R(P) V_A u(p), \quad (7.18)$$

wobei der Impuls P für die Summe des einlaufenden Nukleon- und Pionimpulses steht, $P = p+q$. Zerlegt man den Vertex V_B in einen von $\not{P}$ abhängigen Anteil und einen Anteil, der nicht von $\not{P}$ abhängt,

$$V_B = V'_B + V''_B \not{P}, \quad (7.19)$$

erhält man für die Amplitude

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_c &= \bar{u}(p') [V'_B + V''_B \not{P}] iS_R(P) V_A u(p) \\ &= \bar{u}(p') i [V'_B + V''_B z + V''_B (\not{P} - z)] \left(\frac{Z_R}{\not{P} - z} + \text{n.p.} \right) V_A u(p). \end{aligned} \quad (7.20)$$

Bis zur betrachteten Ordnung können die polfreien Terme des Propagators vernachlässigt werden, da deren Beiträge zur Amplitude $\mathcal{M}_c$ von mindestens zweiter Ordnung sind. Im Term proportional zu $(\not{P} - z)$ kürzt sich der Polbeitrag heraus, so dass auch hier nur Beiträge von mindestens zweiter Ordnung entstehen. Wendet man die gleich Argumentation auf den Vertex V_A an, ergibt sich der Beitrag der Amplitude $\mathcal{M}_c$ bis einschließlich erster Ordnung zu

$$\mathcal{M}_c^{(1)} = \bar{u}(p') [V'_B + V''_B z] \frac{iZ_R}{\not{P} - z} [V'_A + V''_A z] u(p), \quad (7.21)$$

wobei die Vertices $V'_{A/B}$ und $V''_{A/B}$ noch von der Variablen P^2 abhängen. Erweitert man den Propagator aus Gleichung (7.21) mit $\not{P} + z$ und nutzt die Beziehung aus Gleichung (5.13), erhält man

$$\mathcal{M}_c^{(1)} = \bar{u}(p') [V'_B + V''_B z] w(P) \frac{iZ_R}{P^2 - z^2} \bar{w}(P) [V'_A + V''_A z] u(p). \quad (7.22)$$

Diagramme vom Typ (c) lassen sich somit in erster Ordnung dadurch berechnen, dass man die renormierte Amplitude des $N\pi R$ -Vertex für Teilchen auf der Massenschale bestimmt und mit den Polbeiträgen des angezogenen Roperpropagators multipliziert. Die Massenschalenbedingung bedeutet für die Roperresonanz wieder $P^2 = z^2$. Dazu benötigt man die in Abbildung 7.3 dargestellten Diagramme des $N\pi R$ -Vertex bis zur Ordnung $\mathcal{O}(q^3)$. Der Prozess $R(P) \rightarrow N(p') + \pi(q')$ wurde für $q'^2 = M_\pi^2$ berechnet, wobei die Schleifenintegrale zu skalaren Integralen reduziert wurden. Die nach dem $\widetilde{\text{MS}}$ -Schema renormierten Schleifendiagramme enthalten zählschemaverletzende Terme, die durch die Anwendung des CMS in der Renormierung der Konstanten g_{NR} absorbiert wurden. Die Ergebnisse für die Diagramme aus Abbildung 7.3 und die zugehörigen Subtraktionsterme finden sich in Anhang D.4. Für den gespiegelten Prozess $N(p) \rightarrow R(P) + \pi(q)$ ergeben sich analoge Resultate. Der Faktor Z_R unterscheidet sich nur in Ordnung $\mathcal{O}(q^2)$ von eins und muss deshalb nur im Diagramm der führenden Ordnung berücksichtigt werden. Die relevanten Beiträge von Z_R leiten sich aus den Selbstenergiediagrammen (1) und (2) aus Abbildung 5.3 ab.

Das Diagramm der führenden Ordnung ist dadurch gegeben, dass man in Diagramm (c) jeweils die Vertices erster Ordnung einsetzt. Aus dessen Ergebnis lässt sich das des gekreuzten Diagramms durch die Vertauschung von a mit a' und q mit $-q$ gewinnen. Während das s -Kanal-Diagramm der Ordnung $\mathcal{O}(q^{-1})$ ist, besitzt das gekreuzte u -Kanal-Diagramm die chirale Ordnung $\mathcal{O}(q)$. Um die anderen auf Baumniveau beitragenden s -Kanal-Diagramme zu erhalten, muss man einen Vertex sowohl erster als auch dritter Ordnung einsetzen. Die gespiegelte Variante ergibt das gleiche Resultat und die entsprechenden gekreuzten Diagramme tragen erst in höheren Ordnungen bei. Für die ein-Roper-reduziblen Schleifendiagramme kommt als zweiter Vertex nur ein Übergang erster Ordnung in Frage, da die Schleifenbeiträge aus Abbildung 7.2 schon von dritter Ordnung sind. Die gekreuzten Diagramme sind wieder von höherer Ordnung.

Aus der invarianten Amplitude der Feynmandiagramme 7.3 wurden die Dirac-Amplituden aus Gleichung (7.2) extrahiert und die Endergebnisse mit dem Produkt aus WFRK des Nukleons und Pions multipliziert. Die Faktoren Z_N und Z_π unterscheiden sich wieder nur in Ordnung $\mathcal{O}(q^2)$ von eins, so dass das Produkt $Z_N Z_\pi$ ausschließlich im Baumdigramm der führenden Ordnung explizit berücksichtigt werden muss.

Bei numerischer Auswertung der skalaren Schleifenintegrale mit dem Programm *LoopTools* wurden bei den Dreipunktfunktionen wieder die Imaginärteile der internen Massen vernachlässigt. Die Zerlegung der Ergebnisse nach Partialwellen erfordert eine Integration über den Kosinus des Streuwinkels im

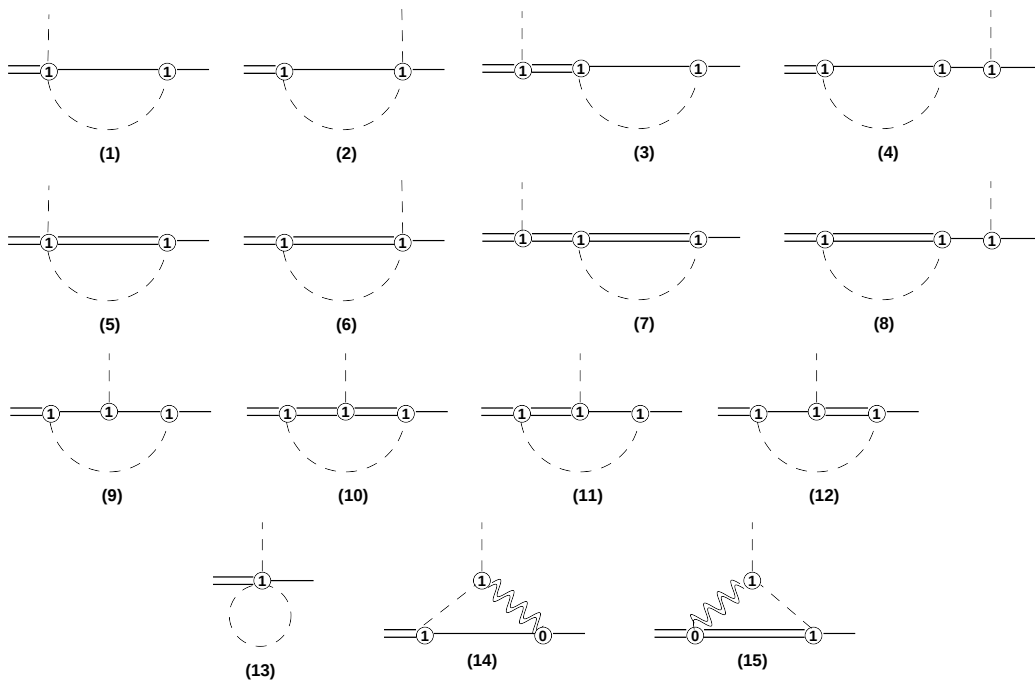


Abbildung 7.3: Schleifendiagramme für den $N\pi R$ -Übergang bis $\mathcal{O}(q^3)$. Einfache Linien stehen für das Nukleon, doppelte für die Roperresonanz, gestrichelte für das Pion und doppelt geschlängelte für das Rhomeson.

Schwerpunktsystem (s. Gleichung (7.13)), welche sich in *Mathematica* sowohl analytisch als auch numerisch durchführen lässt. Beide Methoden wurden miteinander verglichen und produzierten innerhalb der zu erwartenden Genauigkeit übereinstimmende Ergebnisse. In Abschnitt 7.3 wird beschrieben, wie die auftretenden LEC zusammen mit eben jenen aus der Pionproduktion an die experimentellen Daten angepasst wurden.

7.2 Photo- und Elektropionproduktion

Als Elektropionproduktion wird die inelastische Elektronenstreuung am Nukleon mit der Produktion eines Pions bezeichnet. Die Photopionproduktion kann als Grenzfall der Elektropionproduktion betrachten werden, wobei der Impuls des virtuellen Photons im Rahmen der Einphotonannäherung auf die Massenschale gesetzt wird. Der Grundstein zur theoretischen Beschreibung der Pionproduktion wurde in der Arbeit von Chew, Goldberger, Low und Nambu [213] gelegt. Im folgenden Kapitel werden alle für diese Arbeit relevanten Formeln zur Photo- und Elektropionproduktion dargestellt. Ausführliche Einführungen in das Themengebiet finden sich beispielsweise in den Referenzen [216, 217, 218, 219].

7.2.1 Formalismus der Pionproduktion

Kinematik

Die Kinematik der elektromagnetischen Pionproduktion ist in Abbildung 7.4 dargestellt. Hierbei gilt die Viererimpulserhaltung,

$$p_i^\mu + k_i^\mu = p_f^\mu + k_f^\mu + q^\mu, \quad (7.23)$$

wobei die virtuellen Photonen raumartig sind, d. h. das Quadrat des Viererimpulsübertrags des virtuellen Photons k^2 ist immer negativ. Aus diesem Grund definiert man die positive Größe $Q^2 = -k^2$. Im Allgemeinen läuft die Reaktion der Pionproduktion in zwei verschiedenen Ebenen ab. Diese sogenannten Elektronenstreu- und Reaktionsebenen sowie die auftretenden Winkel sind in Abbildung 7.5 dargestellt.

Die invariante Amplitude der Pionproduktion $\mathcal{M}$ ist eine Funktion der Mandelstam-Variablen s , t und u , welche die Relation

$$s + t + u = 2m_N^2 + k^2 + M_\pi^2 \quad (7.24)$$

erfüllen (vgl. Gleichung (7.5)).

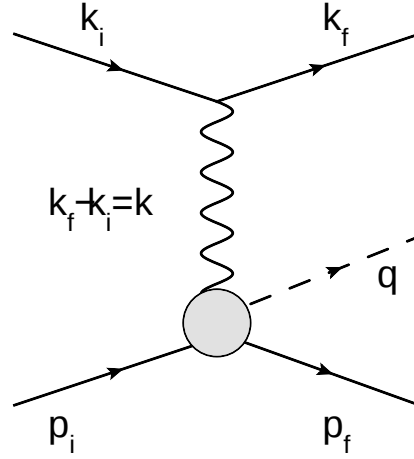


Abbildung 7.4: Kinematik der Pionproduktion, wobei p_i (p_f) den Impuls des einlaufenden (auslaufenden) Nukleons und q den des auslaufenden Pions darstellen, $k = k_f - k_i$ ist der Viererimpulsübertrag des virtuellen Photons.

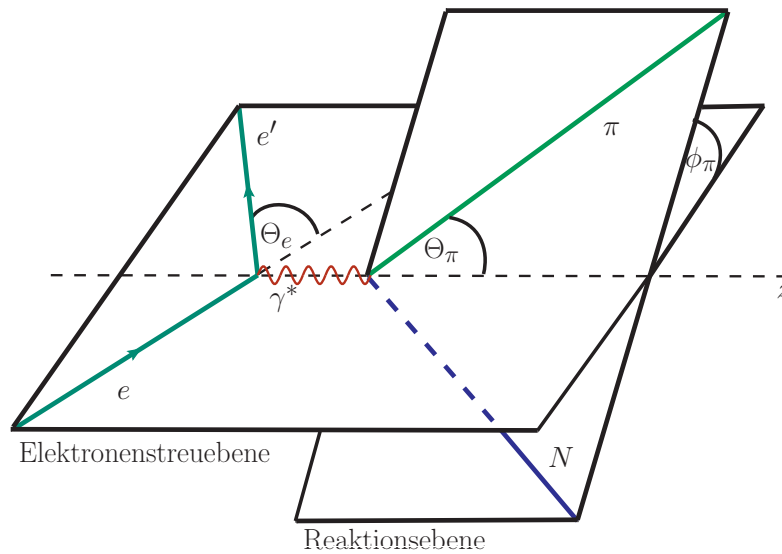


Abbildung 7.5: Räumliche Darstellung der kinematischen Variablen der Pionproduktion sowie Elektronenstreu- und Reaktionsebene [128].

Invariante Amplituden

Im Rahmen der Einphotonäuschnäherung ist die invariante Amplitude der Elektropionproduktion durch den Ausdruck

$$\begin{aligned} \mathcal{M} = & -ie \langle e^-(k_f) | j^\nu(0) | e^-(k_i) \rangle \left(-i \frac{g_{\mu\nu}}{k^2 + i0^+} + \text{Eichterme} \right) \\ & \times -ie \langle N(p_f), \pi(q) | J^\mu(0) | N(p_i) \rangle \end{aligned} \quad (7.25)$$

gegeben, wobei das erste Matrixelement den aus der QED bekannten leptonischen Vertex darstellt. Die Eichterme des Photonpropagators sind nicht explizit aufgeführt, da diese aufgrund der Eichinvarianz nicht zu Observablen beitragen. Fasst man den leptonischen Vertex und den Photonpropagator zu dem Polarisationsvektor ϵ_μ zusammen,

$$\epsilon_\mu = \frac{e}{k^2} \bar{u}(k_f) \gamma_\mu u(k_i), \quad (7.26)$$

ergibt sich die folgende Parametrisierung für die invariante Amplitude:

$$\mathcal{M} := -ie \epsilon_\mu \mathcal{M}^\mu. \quad (7.27)$$

Das Übergangsmatrixelement $\mathcal{M}^\mu$ beinhaltet die gesamte Abhängigkeit von der starken Wechselwirkung und kann durch sechs invariante Amplituden A_j ausgedrückt werden:

$$\mathcal{M}^\mu = \sum_{j=1}^6 \bar{u}(p_f) M_j^\mu A_j u(p_i). \quad (7.28)$$

Dabei enthalten die M_j^μ die gesamte Lorentzstruktur und lauten [220]

$$M_1^\mu = -\frac{1}{2} i \gamma_5 (\gamma^\mu \not{k} - \not{k} \gamma^\mu), \quad (7.29a)$$

$$M_2^\mu = i \gamma_5 \left[P^\mu k \cdot \left(q - \frac{1}{2} k \right) - \left(q^\mu - \frac{1}{2} k^\mu \right) k \cdot P \right], \quad (7.29b)$$

$$M_3^\mu = -i \gamma_5 (\gamma^\mu k \cdot q - \not{k} q^\mu), \quad (7.29c)$$

$$M_4^\mu = -i \gamma_5 (\gamma^\mu k \cdot P - \not{k} P^\mu) - 2m_N M_1^\mu, \quad (7.29d)$$

$$M_5^\mu = i \gamma_5 (k^\mu k \cdot q - k^2 q^\mu), \quad (7.29e)$$

$$M_6^\mu = -i \gamma_5 (\not{k} k^\mu - k^2 \gamma^\mu), \quad (7.29f)$$

mit $P^\mu = (p_i^\mu + p_f^\mu)/2$.

Im Fall der Photopionproduktion und unter Ausnutzung der Eichinvarianz, $\epsilon_\mu k^\mu = 0$, entfallen M_5^μ und M_6^μ und die verbleibenden M_j^μ reduzieren sich zu

$$M_1^\mu = -\frac{1}{2}i\gamma_5 (\gamma^\mu \not{k} - \not{k}\gamma^\mu), \quad (7.30a)$$

$$M_2^\mu = i\gamma_5 (P^\mu k \cdot q - q^\mu k \cdot P), \quad (7.30b)$$

$$M_3^\mu = -i\gamma_5 (\gamma^\mu k \cdot q - \not{k}q^\mu), \quad (7.30c)$$

$$M_4^\mu = -i\gamma_5 (\gamma^\mu k \cdot P - \not{k}P^\mu) - 2m_N M_1^\mu. \quad (7.30d)$$

Isospinamplituden

Die im vorigen Unterabschnitt definierten invarianten Amplituden A_j können für die Produktion eines Pions mit kartesischem Isospinindex a unter Annahme der Isospinsymmetrie jeweils noch in drei unabhängige Isospinamplituden zerlegt werden,

$$A_j^a = A_j^{(-)} i\epsilon^{a3b} \tau^b + A_j^{(0)} \tau^a + A_j^{(+)} \delta_{a3}, \quad (7.31)$$

wobei τ^a die Pauli-Matrizen im Isospinraum darstellen. Unter Vertauschung der Variablen s und u (*crossing*) verhalten sich die invarianten Isospinamplituden folgendermaßen:

$$A_i^{(+,0,-)}(s, t, u) = \pm \eta_i A_i^{(+,0,-)}(u, t, s), \quad (7.32)$$

mit

$$\eta_i = \begin{cases} +1 & \text{für } i = 1, 2, 4, \\ -1 & \text{für } i = 3, 5, 6. \end{cases}$$

In Gleichung (7.32) gilt das obere Vorzeichen für die (+)- und (0)-Amplituden und das untere für die (-)-Amplitude. Ausgedrückt durch die Isospinamplituden lauten die physikalischen Amplituden

$$A(\gamma p \rightarrow n\pi^+) = \sqrt{2} (A^{(-)} + A^{(0)}), \quad (7.33a)$$

$$A(\gamma n \rightarrow p\pi^-) = \sqrt{2} (-A^{(-)} + A^{(0)}), \quad (7.33b)$$

$$A(\gamma p \rightarrow p\pi^0) = A^{(0)} + A^{(+)}, \quad (7.33c)$$

$$A(\gamma n \rightarrow n\pi^0) = -A^{(0)} + A^{(+)}. \quad (7.33d)$$

Analysiert man den Prozess bezüglich des Isospins des πN Endzustandes, müssen die Isospinamplituden wie folgt kombiniert werden:

$$A(\frac{1}{2}) = 2A^{(-)} + A^{(+)}, \quad (7.34a)$$

$$A(\frac{3}{2}) = -A^{(-)} + A^{(+)}, \quad (7.34b)$$

$$A^{(0)} = A^{(0)}. \quad (7.34c)$$

Eine weitere gebräuchliche Isospinzerlegung lautet

$$A_p^{(\frac{1}{2})} = \frac{1}{3} (3A^{(0)} + 2A^{(-)} + A^{(+)}) , \quad (7.35a)$$

$$A_n^{(\frac{1}{2})} = \frac{1}{3} (3A^{(0)} - 2A^{(-)} - A^{(+)}) , \quad (7.35b)$$

$$A^{(\frac{3}{2})} = -A^{(-)} + A^{(+)} . \quad (7.35c)$$

CGLN-Amplituden

Drückt man die invariante Amplitude im Schwerpunktsystem durch Pauli-Matrizen und zweikomponentigen Pauli-Spinoren χ aus (vgl. (7.9)), ergibt sich eine alternative Parametrisierung der invarianten Amplitude:

$$\mathcal{M} = -i e \bar{u}(p_f) \sum_{j=1}^6 A_j \epsilon_\mu M_j^\mu u(p_i) = \frac{4\pi\sqrt{s}}{m_N} \chi_f^\dagger \mathcal{F} \chi_i. \quad (7.36)$$

Der Operator $\mathcal{F}$ ist durch die folgende Linearkombination der CGLN-Amplituden $\mathcal{F}_i$ (Chew, Goldberger, Low und Nambu) [213] gegeben:

$$\begin{aligned} \mathcal{F} = & -i(\vec{\sigma} \cdot \vec{b})\mathcal{F}_1 - (\vec{\sigma} \cdot \hat{q})\vec{b} \cdot (\vec{\sigma} \times \hat{k})\mathcal{F}_2 \\ & -i(\vec{b} \cdot \hat{q})(\vec{\sigma} \cdot \hat{k})\mathcal{F}_3 - i(\vec{b} \cdot \hat{q})(\vec{\sigma} \cdot \hat{q})\mathcal{F}_4 \\ & + i(\vec{\sigma} \cdot \hat{k})b_0 \frac{k}{k_0}\mathcal{F}_5 + i(\vec{\sigma} \cdot \hat{q})b_0 \frac{k}{k_0}\mathcal{F}_6, \end{aligned} \quad (7.37)$$

mit $b^\mu = \epsilon^\mu - (\vec{\epsilon} \cdot \hat{k})\frac{k^\mu}{k}$. Die Beziehungen zwischen den CGLN-Amplituden $\mathcal{F}_i$ und den invarianten Amplituden A_i aus Gleichung (7.28) sind explizit in Gleichung (B.2) aufgeführt.

Multipolzerlegung

Wie im Fall der Pion-Nukleon-Streuung ist es sinnvoll die Amplitude der Pionproduktion auf Zustände mit definiertem Spin und Isospin sowie definierter Parität zu projizieren, also eine Multipolzerlegung durchzuführen. Das virtuelle Photon besitzt drei Polarisationsmöglichkeiten λ . Die transversalen Polarisierungen $\lambda = \pm 1$ resultieren in elektrischen (EL) und magnetischen (ML) Multipolübergängen, während die longitudinale Polarisation $\lambda = 0$ in skalaren oder Coulomb- (CL) Multipolübergängen resultiert. Die transversalen Multipole tragen sowohl zur Photo- als auch zur Elektropionproduktion bei, wohingegen die longitudinalen Multipole nur in Elektropionproduktion

auftreten. Koppelt man den Spin des Photons mit dem Bahndrehimpuls des Photon-Nukleon-Systems l_γ , ergibt sich für den Gesamtdrehimpuls im Anfangszustand:

$$L = \begin{cases} l_\gamma \pm 1 & \text{für EL (oberes Vorzeichen) und ML (unteres Vorzeichen),} \\ l_\gamma & \text{für CL.} \end{cases}$$

Der Endzustand wird durch den Bahndrehimpuls l des Pions relativ zum Nukleon und die Parität $(-1)^{l+1}$ charakterisiert. Der Gesamtdrehimpuls des Endzustandes j muss gleich dem Gesamtdrehimpuls des Anfangszustandes sein, d. h. $j = l \pm \frac{1}{2} = L \pm \frac{1}{2}$. Unter Berücksichtigung der Paritätseigenschaften der einzelnen Multipolübergänge, erhält man folgende Relationen:

$$\begin{aligned} \text{CL, EL :} \quad (-1)^L &= (-1)^{l+1} \Rightarrow |L - l| = 1, \\ \text{ML :} \quad (-1)^{L+1} &= (-1)^{l+1} \Rightarrow L = l. \end{aligned} \quad (7.38)$$

Die Roperresonanz P_{11} mit $l = 1$, $j = \frac{1}{2}$ und positiver Parität kann dementsprechend sowohl durch $C0$ - als auch durch $M1$ -Strahlung angeregt werden. Die entsprechenden Multipole werden mit L_{1-} bzw. M_{1-} bezeichnet, wobei der erste Index für den Bahndrehimpuls $l = 1$ steht und der zweite den Gesamtdrehimpuls $j = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ andeutet.

Die Zerlegung der CGLN-Amplituden $\mathcal{F}_i$ in eine Multipolreihe lautet [216]

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_1 &= \sum_{l=0}^{\infty} \left\{ (lM_{l+} + E_{l+})P'_{l+1}(x) + [(l+1)M_{l-} + E_{l-}]P'_{l-1}(x) \right\}, \\ \mathcal{F}_2 &= \sum_{l=1}^{\infty} \left[(l+1)M_{l+} + lM_{l-} \right] P'_l(x), \\ \mathcal{F}_3 &= \sum_{l=1}^{\infty} \left[(E_{l+} - M_{l+})P''_{l+1}(x) + (E_{l-} + M_{l-})P''_{l-1}(x) \right], \\ \mathcal{F}_4 &= \sum_{l=2}^{\infty} \left(M_{l+} - E_{l+} - M_{l-} - E_{l-} \right) P''_l(x), \\ \mathcal{F}_5 &= \sum_{l=0}^{\infty} \left[(l+1)L_{l+}P'_{l+1}(x) - lL_{l-}P'_l(x) \right], \\ \mathcal{F}_6 &= \sum_{l=1}^{\infty} \left[lL_{l-} - (l+1)L_{l+} \right] P'_l(x), \end{aligned} \quad (7.39)$$

wobei $x = (t - M_\pi^2 + Q^2 + 2q_0k_0)/(2qk)$ für den Kosinus des Streuwinkels im Schwerpunktsystem steht und die $P_l(x)$ Legendre-Polynome darstellen. Die

Abhängigkeit der Multipole von den Variablen W und k^2 wurde hierbei zur besseren Übersicht unterdrückt. Invertieren der Gleichungen (7.39) liefert für die im Zusammenhang mit der Roperresonanz stehenden Multipole

$$M_{1-} = \int_{-1}^1 \frac{dx}{2} \left[-P_1(x)\mathcal{F}_1 + \mathcal{F}_2 + \frac{1}{3}(1 - P_2(x))\mathcal{F}_3 \right], \quad (7.40)$$

$$S_{1-} = \int_{-1}^1 \frac{dx}{2} (P_0(x)\mathcal{F}_6 + P_1(x)\mathcal{F}_5). \quad (7.41)$$

Die allgemeinen Formeln für die Multipole als Funktionen der CGLN-Amplituden sind in Gleichung (B.1) aufgeführt.

7.2.2 Berechnung der Pionproduktion im Bereich der Roperresonanz

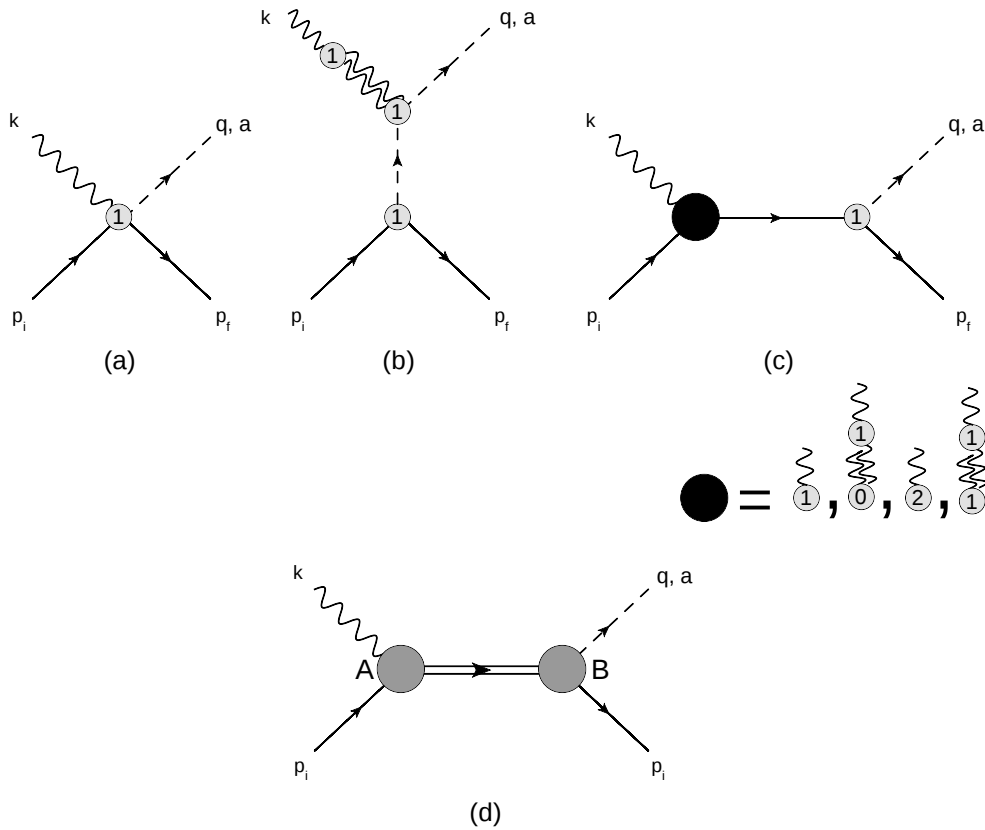


Abbildung 7.6: Diagramme für die Pionproduktion bis Ordnung $\mathcal{O}(q^2)$ im Bereich der Roperresonanz. Bezeichnung gemäß Abbildung 7.3.

Für die störungstheoretische Berechnung der Photo- und Elektropionproduktion im Bereich der Roperresonanz wird das Zählschema aus Abschnitt 3.3 analog zur Pion-Nukleon-Streuung modifiziert. Ein-Roper-reduzierbaren Diagrammen wird eine besondere Bedeutung zugeschrieben, da sie Propagatoren der Form $1/[s - (m_R + i\frac{\Gamma}{2})^2]$ umfassen und diese für $s \approx m_R^2$ als Ordnung $\mathcal{O}(q^{-3})$ zählen. In Abbildung 7.6 sind alle Feynmandiagramme dargestellt, die bis zur übernächstführenden chiralen Ordnung $\mathcal{O}(q^2)$ zu dem Prozess beitragen. Ein-Roper-reduzierbare Beiträge sind in Diagramm (d) zusammengefasst und tragen ab nullter chiraler Ordnung bei, während der Untergrund, repräsentiert durch die Diagramme (a)-(c), ab erster chiraler Ordnung beiträgt. Die gekreuzten Diagramme sind nicht explizit dargestellt. Die Ausführungen aus Abschnitt 7.1.2 lassen sich direkt auf diesen Prozess übertragen, so dass sich die Diagramme vom Typ (c) bis zur Ordnung $\mathcal{O}(q^2)$ durch Multiplikation der Polbeiträge des angezogenen Roperresonanzpropagators mit der renormierten Amplitude des γNR -Vertex (von links) und der renormierten Amplitude des $N\pi R$ -Vertex (von rechts) bestimmen lassen. In der betrachteten Genauigkeit können die Vertices wieder auf die Massenschale gesetzt werden. Außerdem müssen neben den gekreuzten Untergrunddiagrammen (c) nur die zu den führenden Baumdiagrammen in (d) gekreuzten Diagramme berücksichtigt werden. Die Endergebnisse ergeben sich schließlich durch die Multiplikation mit der WFRK:

$$Z_N \sqrt{Z_\pi} = 1 + \delta Z_N + \frac{\delta Z_\pi}{2} + \mathcal{O}(\hbar^2). \quad (7.42)$$

Um eine Multipolzerlegung der Amplitude durchzuführen, wurden aus der invarianten Amplitude der Feynmandiagramme zunächst die sogenannten Ball-Amplituden [221] extrahiert:

$$\mathcal{M}^\mu = \bar{u}(p_f) \sum_{j=1}^8 B_j V_j^\mu u(p_i), \quad (7.43)$$

mit

$$\begin{aligned} V_1^\mu &= \gamma^\mu \gamma_5, & V_2^\mu &= \gamma_5 P^\mu, & V_3^\mu &= \gamma_5 q^\mu, & V_4^\mu &= \gamma_5 k^\mu, \\ V_5^\mu &= \gamma^\mu \not{k} \gamma_5, & V_6^\mu &= \not{k} \gamma_5 P^\mu, & V_7^\mu &= \not{k} \gamma_5 q^\mu, & V_8^\mu &= \not{k} \gamma_5 k^\mu, \end{aligned}$$

und zu den invarianten Amplituden aus Gleichung (7.29) zusammengefügt:

$$A_1 = i(B_5 + B_6 m_N), \quad (7.44a)$$

$$A_2 = -i \frac{k \cdot q B_3 + k^2 (B_4 + B_5)}{(k \cdot P)(k^2 - 2k \cdot q)}, \quad (7.44b)$$

$$A_3 = iB_7, \quad (7.44c)$$

$$A_4 = \frac{i}{2} B_6, \quad (7.44d)$$

$$A_5 = \frac{i}{k^2 - 2k \cdot q} (B_3 + 2B_4 + 2B_5), \quad (7.44e)$$

$$A_6 = -iB_8. \quad (7.44f)$$

Es stellt sich als technisch einfacher heraus erst die Ball-Amplituden zu extrahieren und daraus die invarianten Amplituden zu berechnen, als direkt die invarianten Amplituden zu extrahieren. Die invarianten Amplituden wurden anschließend gemäß Gleichung (B.2) zu den CGLN Amplituden kombiniert. Anhand der Formeln (B.1) konnten die Multipole aus den CGLN-Amplituden bestimmt werden. Die erforderliche Integration über den Streuwinkel im Schwerpunktsystem wurde in *Mathematica* numerisch durchgeführt.

7.3 Ergebnisse der Pion-Nukleon-Streuung und Pionproduktion

In diesem Abschnitt werden die erzielten Resultate der Pion-Nukleon-Streuung sowie der Photo- und Elektropionproduktion im Bereich der Roperresonanz vorgestellt. Die vorliegenden Untersuchungen beschränken sich auf die P_{11} -Partialwelle der Pion-Nukleon-Streuung sowie den M_{1-} - und S_{1-} -Multipol der Pionproduktion. Insgesamt umfasst die Rechnung in der durchgeführten chiralen Ordnung eine große Anzahl unbekannter LEC, die zur numerischen Auswertung der Ergebnisse bestimmt werden müssen. Außer den Konstanten c_6 und c_7 (siehe Gleichung (5.35)), die an das magnetische Moment des Nukleons angepasst wurden, werden im Folgenden alle weiteren LEC durch die Anpassung an empirische Daten fixiert. Unter der Berücksichtigung, dass die Kopplungen d_{16}^{NR} und d_{18}^{NR} in den vorliegenden Rechnungen nur in der Linearkombination

$$\tilde{d}_{NR} := 2d_{16}^{NR} - d_{18}^{NR} \quad (7.45)$$

auftreten, bleiben insgesamt zehn anzupassende Parameter. Das Resultat der Pion-Nukleon-Streuung hängt mit g_R , g_{NR} und $\tilde{d}_{NR}$ von drei unbekannten

LEC ab, während das der Photopionproduktion noch zusätzlich von c_6^{NR} , c_7^{NR} , G und k_3 abhängt. Für die Beschreibung der Elektropionproduktion müssen darüber hinaus noch die Konstanten d_6^{NR} , d_7^{NR} und k_4 bestimmt werden.

Grundlage für die Anpassung der Pion-Nukleon-Streuung stellen die sogenannten *Single-Energy-Fits* (SE) der SAID-Kollaboration dar. Diese empirische Analyse geht von einer Parametrisierung der Partialwellen in Form eines K -Matrix-Ansatzes aus, welche an die SAID-Datenbank angefitet wird [211]. Entsprechende phänomenologische Analysen wurden sowohl von SAID als auch von MAID2007 im Zusammenhang mit der Photo- und Elektropionproduktion durchgeführt. Die dabei generierten empirischen SE-Daten für die Multipolamplituden stellen hier die Grundlage zur Bestimmung der unbekannten LEC dar.

Die Anpassungen der unbekannten Parameter wurde ähnlich Abschnitt 6.3 vorgenommen, mit dem Unterschied, dass die Imaginärteile der anzupassenden LEC hier nicht von vornherein vernachlässigt wurden. Im Gegensatz zu Abschnitt 6.3 treffen die empirischen Analysen auch Vorhersagen über die Imaginärteile der Partialwellen und Multipole, wodurch eine größere Anzahl an empirischen Datenpunkten zur Anpassung genutzt werden konnte. Aus Konsistenzgründen wurden die Ergebnisse der Pion-Nukleon-Streuung gleichzeitig mit denen der Photopionproduktion an die jeweiligen SE-Daten gefittet. Dabei wurden zwei separate Anpassungen durchgeführt, die auf folgenden Datensätzen basieren:

- Fit 1: SAID-SE-Daten der $\mathcal{T}_{1-}^{(1/2)}$ -Partialwelle zusammen mit MAID-SE-Daten des ${}_pM_{1-}^{(1/2)}$ und ${}_nM_{1-}^{(1/2)}$ -Multipols.
- Fit 2: SAID-SE-Daten der $\mathcal{T}_{1-}^{(1/2)}$ -Partialwelle zusammen mit SAID-SE-Daten des ${}_pM_{1-}^{(1/2)}$ und ${}_nM_{1-}^{(1/2)}$ -Multipols.

Zur Vermeidung einer zu starken Abweichung der Ergebnisse auf Baum- und Schleifenniveau, wurden in beiden Fällen simultane Anpassungen der Baum- und Schleifenenergieergebnisse vorgenommen. Die dabei ermittelten Parameter dienen als Startwerte für den jeweiligen Fit der Resultate auf Schleifenniveau. Zusätzlich wurden die Fits der Bedingung unterworfen, dass die zu ermittelnden Parameter nur bis zu 50% von den zugehörigen Startwerten abweichen dürfen.

Die resultierenden LEC sind in Tabelle 7.1 zusammengefasst. Die von der SAID-Kollaboration angegebenen Fehler für die Datenpunkte der P_{11} -Partialwelle liegen teilweise unterhalb von einem Prozent. Diese Präzision liegt weit oberhalb von dem, was für die hier durchgeführte störungstheoretische Rechnung erreichbar ist. Da sich Fit 1 und Fit 2 nur im zugrunde

liegenden Datensatz der Photopionproduktion unterscheiden, bezieht sich der in Tabelle 7.1 angegebene Wert des reduzierten χ^2 ausschließlich auf die Abweichung der berechneten Ergebnisse von den zugehörigen SE-Daten für den Real- und Imaginärteil des ${}_pM_{1-}^{(1/2)}$ - und ${}_nM_{1-}^{(1/2)}$ -Multipols. Verzichtet man im Gegensatz zum oben beschriebenen Fitverfahren auf die Einschränkung der LEC, ergeben sich Parametersätze, die zu einer besseren Beschreibung der empirischen Datenpunkte führen ($\chi_{\text{red}}^2 \approx 3$). Die Abweichung zwischen den Ergebnissen auf Baum- und Schleifenniveau beträgt dabei jedoch mehr als eine Größenordnung, so dass die zugrunde liegende Störungsreihe mit hoher Wahrscheinlichkeit divergiert. Diese unphysikalischen Lösungen der Regressionsanalysen treten auf, da der empirische Datensatz zu klein ist, um die große Anzahl an unbekannten Parametern adäquat zu fixieren. Wie bereits diskutiert, existieren im Zusammenhang mit der Roperresonanz kaum experimentelle Informationen, so dass die Anpassung der LEC an fundamentale Prozesse nicht möglich ist. Die in Tabelle 7.1 gezeigten Parametersätze implizieren in der betrachteten Ordnung keine Probleme mit der Konvergenz der zugrunde liegenden Theorie, da Baum- und Schleifenergebnisse aufgrund des gewählten Anpassungsverfahrens in guter Übereinstimmung stehen.

Bemerkenswert ist die signifikante Abweichung der hier bestimmten LEC von eben solchen, die im Zusammenhang mit den Übergangsformfaktoren (vgl. Tabelle 6.1) bestimmt wurden, obwohl die Helizitätsamplituden des Übergangs vom Nukleon zur Roperresonanz mit den Multipolen verknüpft sind. Die Unterschiede können nicht nur auf auftretende Korrelationen zwischen den Parametern zurückgeführt werden. Vielmehr scheint es nicht möglich, mit den hier erzielten Ergebnissen gleichzeitig die empirischen Vorhersagen der Multipole und die der Helizitätsamplituden angemessen zu beschreiben. Ein Grund hierfür könnte die hohe Modellabhängigkeit des MAID-Ansatzes für die Helizitätsamplituden sein. Des Weiteren ist es denkbar, dass gemäß des verwendeten Zählschemas unterdrückte Diagramme numerisch wichtige Beiträge liefern und somit das Zählschema einer Modifikation bedarf. Diese Vermutung lässt sich erst durch die explizite Berechnung höherer Ordnungen prüfen.

In Abbildung 7.7 sind die zu Fit 1 gehörenden Ergebnisse für Real- und Imaginärteil der $\mathcal{T}_{1-}^{(1/2)}$ -Partialwelle sowie des ${}_pM_{1-}^{(1/2)}$ - und ${}_nM_{1-}^{(1/2)}$ -Multipols in Abhängigkeit der Schwerpunktsenergie W zusammen mit den zugehörigen SE-Datenpunkten und den energieabhängigen empirischen Fits dargestellt. Während die Ergebnisse für die betrachteten Multipole der Photopionproduktion in guter Übereinstimmung mit den empirischen Analysen sind, zeigen die Resultate der Pion-Nukleon-Streuung eine größere Abweichung von den Daten. Insbesondere das Resultat für den Imaginärteil der $\mathcal{T}_{1-}^{(1/2)}$ -Partialwelle kann die zugehörigen Daten nur qualitativ beschreiben. Die gleichen Beob-

	g_R	g_{NR}	c_6^{NR}	c_7^{NR}
Fit 1	$1.87 + i\ 0.75$	$0.33 + i\ 0.32$	$0.08 + i\ 0.73$	$0.50 + i\ 0.22$
Fit 2	$1.87 + i\ 0.85$	$0.35 + i\ 0.37$	$0.05 + i\ 1.19$	$0.56 + i\ 0.26$
	G_ρ	k_3	$\tilde{d}_{NR}$	χ_{red}^2
Fit 1	$12.52 - i\ 0.29$	$1.14 + i\ 2.00$	$-11.69 - i\ 12.68$	8.1
Fit 2	$13.60 - i\ 0.09$	$0.3 + i\ 1.20$	$-13.06 - i\ 13.32$	12.9

Tabelle 7.1: Zahlenwerte für die angepassten Parameter der Pion-Nukleon-Streuung und Photopionproduktion, wobei c_i^{NR} , G_ρ und k_3 in Einheiten von GeV^{-1} und $\tilde{d}_{NR}$ in Einheiten von GeV^{-3} gegeben sind.

achtungen treffen auf die in Abbildung 7.8 gezeigten Kurven von Fit 2 zu. Im Fall der Pion-Nukleon-Streuung scheint das verwendete Zählschema in der betrachteten Ordnung die Beiträge des Untergrunds im Vergleich zu den Poltermen zu überschätzen. Durch das Vernachlässigen der Untergrundterme ließen sich die empirischen Daten wesentlich besser beschreiben.

Der Zerfall der Roperresonanz in zwei Pionen und ein Nukleon ist nur leicht gegenüber dem Zerfall in ein Pion und ein Nukleon unterdrückt [91]. Die korrespondierenden Beiträge umfassen komplizierte Zweischleifendiagramme, die in der hier durchgeführten Rechnung aufgrund des zugrunde liegenden Zählschemas nicht explizit berücksichtigt werden mussten. In Referenz [209] wurde argumentiert, dass die Vernachlässigung solcher Effekte zu einer schlechteren Konvergenz im Vergleich zu entsprechenden Untersuchungen in der Energieregion der Deltaresonanz führen. Beabsichtigt man eine systematische Berechnung von Zweischleifendiagrammen, scheint es vorteilhaft, ein Zählschema zu konstruieren, in dem die auftretenden Entwicklungsparameter unterschiedlich gewichtet werden. Das Aufstellen eines solchen Zählschemas ist zwar komplizierter, die Anzahl zu berechnender Diagramme bis zu einer gegebenen Ordnung ist jedoch gewöhnlich geringer als bei einem vergleichbaren Zählschema mit gleicher Gewichtung aller Entwicklungsparameter.

In der Elektropionproduktion sollte in Zusammenhang mit der Roperresonanz neben dem M_{1-} - noch der skalare S_{1-} -Multipol berücksichtigt werden. Der S_{1-} -Multipol hängt in der betrachteten Ordnung von den folgenden drei, bisher nicht fixierten LEC d_6^{NR} , d_7^{NR} und k_4 ab. Diese Konstanten tragen nur für Q^2 -Werte ungleich null bei. Zu ihrer Festlegung wurden die Real- und Imaginärteile der ${}_pS_{1-}^{(1/2)}$ - und ${}_nS_{1-}^{(1/2)}$ -Multipole unter Verwendung des Parametersatzes von Fit 1 aus Tabelle 7.1 an die entsprechenden Daten aus

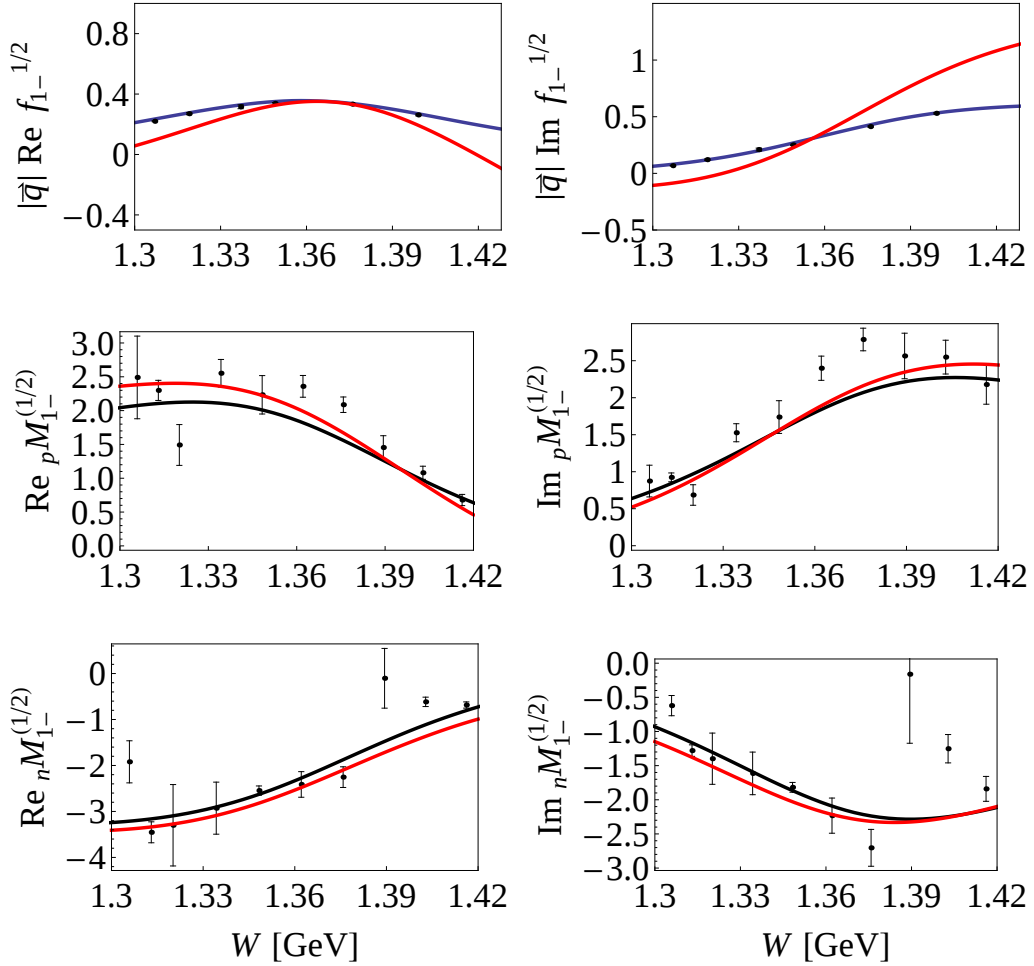


Abbildung 7.7: $\mathcal{T}_{1-}^{(1/2)}$ -Partialwelle der Pion-Nukleon-Streuung sowie ${}_pM_{1-}^{(1/2)}$ - und ${}_nM_{1-}^{(1/2)}$ -Multipol der Photopionproduktion in Abhängigkeit von W . Rote Kurven zeigen die Ergebnisse mit den Parametern aus Fit 1, blaue die globalen SAID-Analysen und schwarze die globalen MAID-Analysen. Die Datenpunkte stellen die Fit 1 zugrunde liegenden SE-Fits dar. Die Multipolamplituden sind in Einheiten von $10^{-3}/M_{\pi^+}$ gegeben.

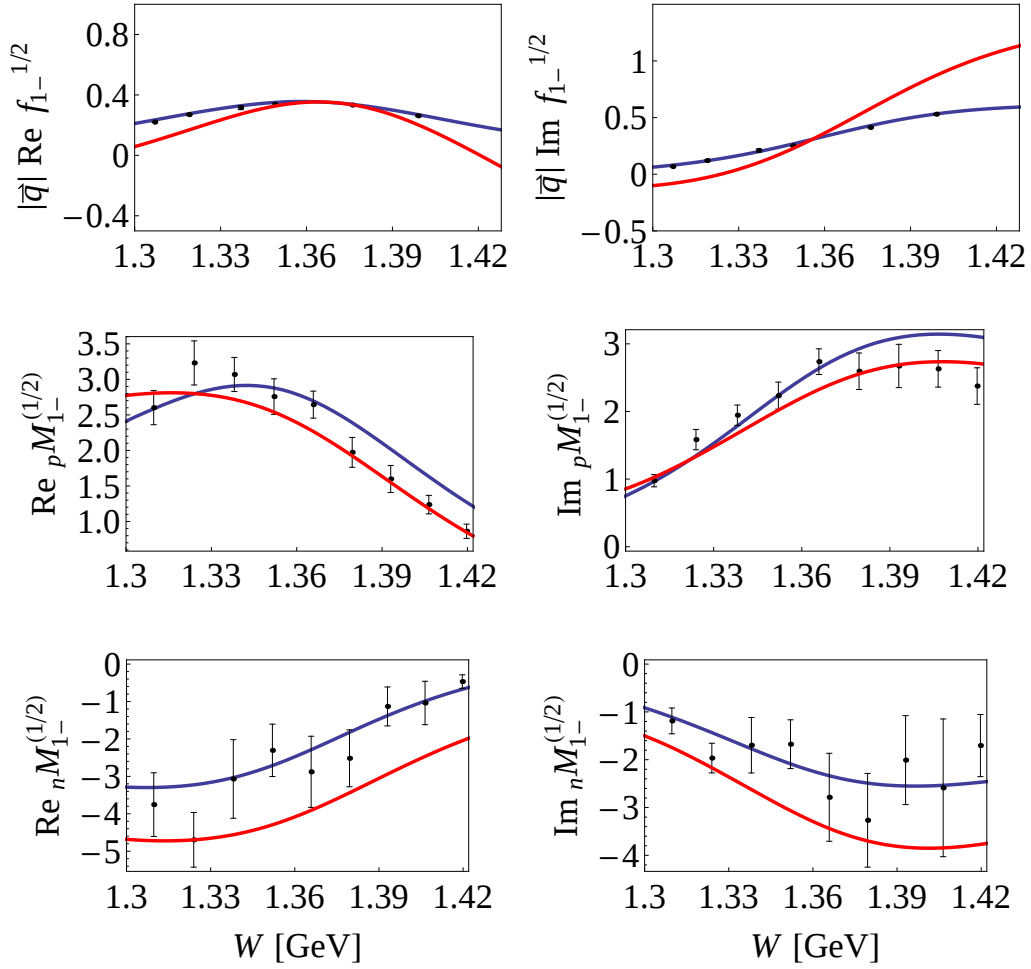


Abbildung 7.8: $\mathcal{T}_{1-}^{(1/2)}$ -Partialwelle der Pion-Nukleon-Streuung sowie ${}_p M_{1-}^{(1/2)}$ - und ${}_n M_{1-}^{(1/2)}$ -Multipol der Photopionproduktion in Abhängigkeit von W . Rote Kurven zeigen die Ergebnisse mit den Parametern aus Fit 2, blaue die globalen SAID-Analysen. Die Datenpunkte stellen die Fit 2 zugrunde liegenden SE-Fits dar. Die Multipolamplituden sind in Einheiten von $10^{-3}/M_{\pi^+}$ gegeben.

d_6^{NR}	d_7^{NR}	k_4
$-1.62 - i 0.92$	$0.03 - i 0.04$	$-10.23 + i 8.64$

Tabelle 7.2: Zahlenwerte für die angepassten Parameter der Elektropionproduktion, wobei k_4 in Einheiten von GeV^{-2} und die d_i^{NR} in Einheiten von GeV^{-3} gegeben sind.

MAID2007 für $W = 1.362 \text{ GeV}$ in der Region $0 < Q^2 < 0.2 \text{ GeV}^2$ gefittet. Die dabei ermittelten LEC finden sich in Tabelle 7.2. In den Abbildungen 7.9 bis 7.12 sind die W -Abhängigkeiten der untersuchten Multipole für verschiedene Werte des quadrierten Impulsübertrags Q^2 dargestellt. Da die M_{1-} -Multipole keine Abhängigkeit von den Konstanten aus Tabelle 7.2 aufweisen, sind die Ergebnisse aus den Abbildungen 7.9 und 7.10 reine Vorhersagen. Während der Realteil von ${}_nM_{1-}^{(1/2)}$ im Einklang mit den MAID-Vorhersagen ist, weicht der Imaginärteil für steigende Werte von W immer stärker davon ab. Die Übereinstimmung des ${}_pM_{1-}^{(1/2)}$ -Multipols ist im dargestellten Bereich signifikant schlechter als im Fall des ${}_nM_{1-}^{(1/2)}$. Vor allem die Kurven des Imaginärteils liegen deutlich oberhalb der empirischen Analyse. Sowohl Real- als auch Imaginärteil weisen für steigende Werte von Q^2 eine zu starke Krümmung im Vergleich zu MAID auf. Der Realteil des ${}_pS_{1-}^{(1/2)}$ - und ${}_nS_{1-}^{(1/2)}$ -Multipols aus den Abbildungen 7.11 und 7.12 kann im betrachteten Bereich der Schwerpunktsenergie die MAID-Ergebnisse für alle abgebildeten Werte von Q^2 gut beschreiben. Die entsprechenden Imaginärteile zeigen insbesondere in der Region $W > 1.36 \text{ GeV}$ eine größere Abweichung von den MAID-Ergebnissen. Durch die explizite Berücksichtigung des Rhomesons lässt sich eine zufriedenstellende Beschreibung des S_{1-} -Multipols zu größeren Werten von Q^2 hin erzielen. In der betrachteten Ordnung existiert mit k_4 eine auf den Einbau des Rhomesons zurückgehende Kopplungskonstante, durch deren Anpassung die Q^2 -Abhängigkeit von S_{1-} verbessert werden kann. Zur besseren Beschreibung des M_{1-} -Multipols in der Elektropionproduktion scheint es notwendig, die störungstheoretische Rechnung auf höhere Ordnungen zu erweitern oder anders zu organisieren.

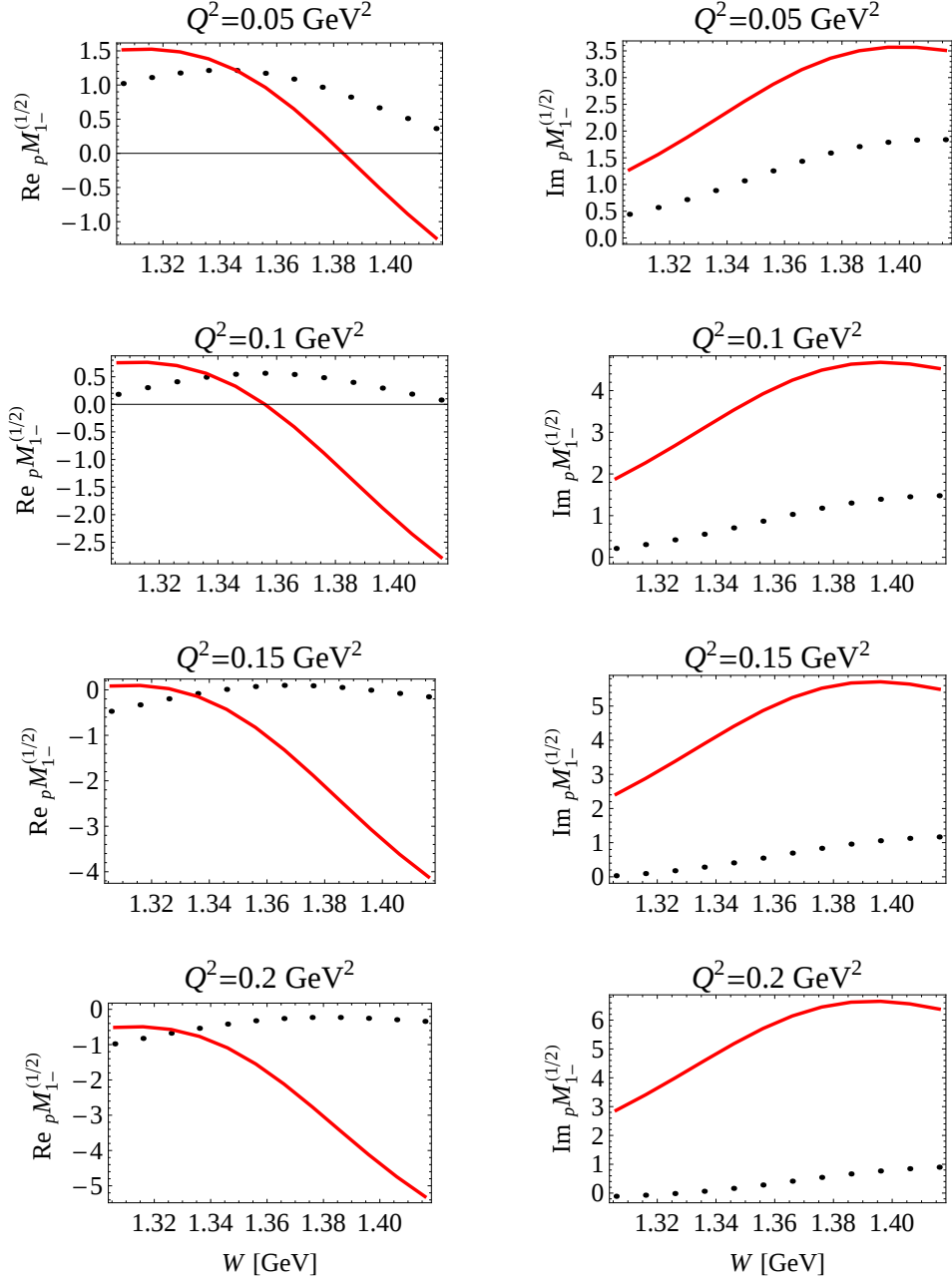


Abbildung 7.9: $_p M_{1-}^{(1/2)}$ -Multipol der Elektropionproduktion in Einheiten von $10^{-3}/M_{\pi^+}$ als Funktion von W für verschiedene Werte von Q^2 . Rote Kurven zeigen die Ergebnisse in chiraler EFT, schwarze Punkte die MAID-Analysen.

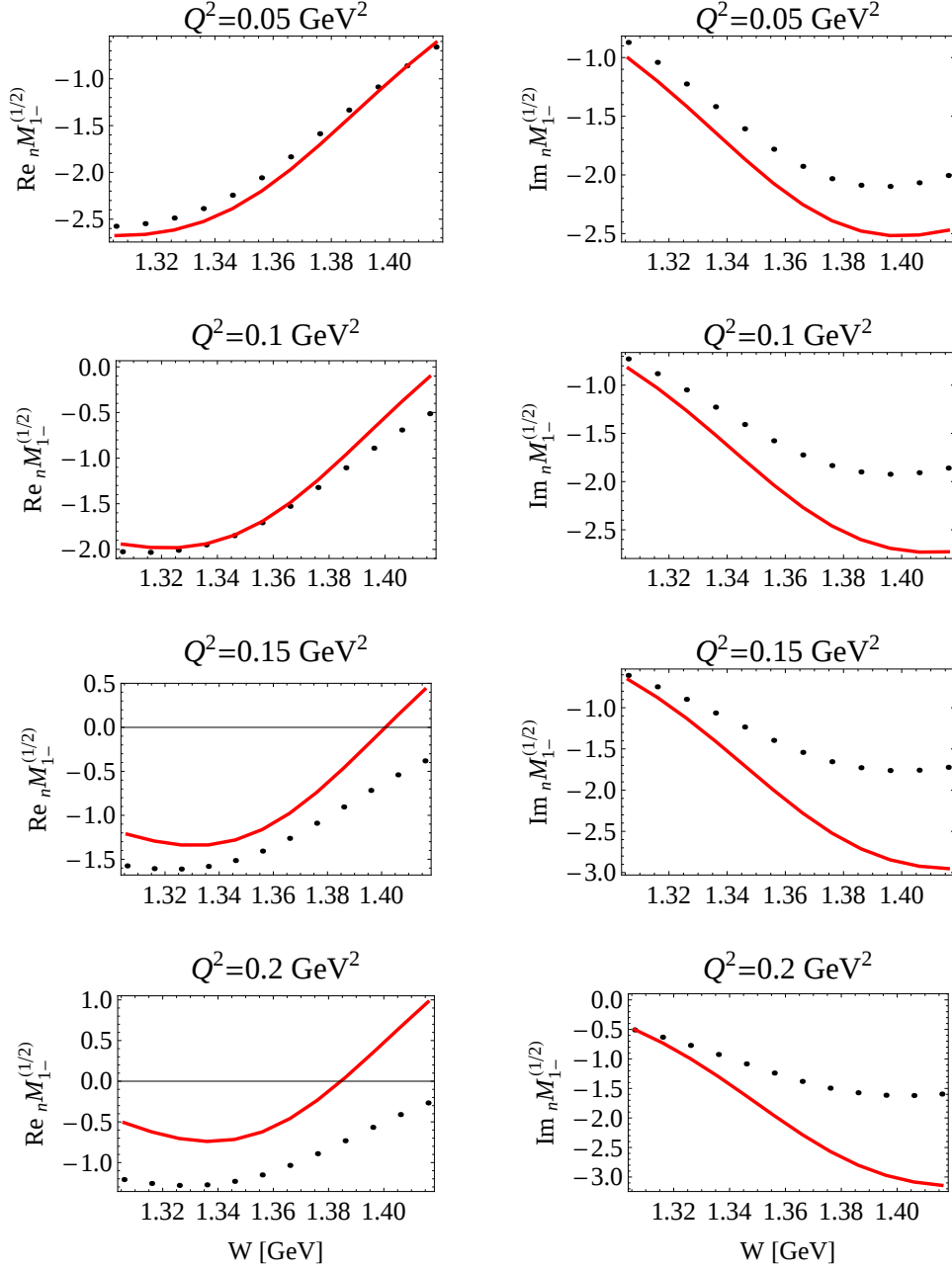


Abbildung 7.10: ${}_nM_{1-}^{(1/2)}$ -Multipol der Elektropionproduktion in Einheiten von $10^{-3}/M_{\pi^+}$ als Funktion von W für verschiedene Werte von Q^2 . Bezeichnung gemäß Abbildung 7.9

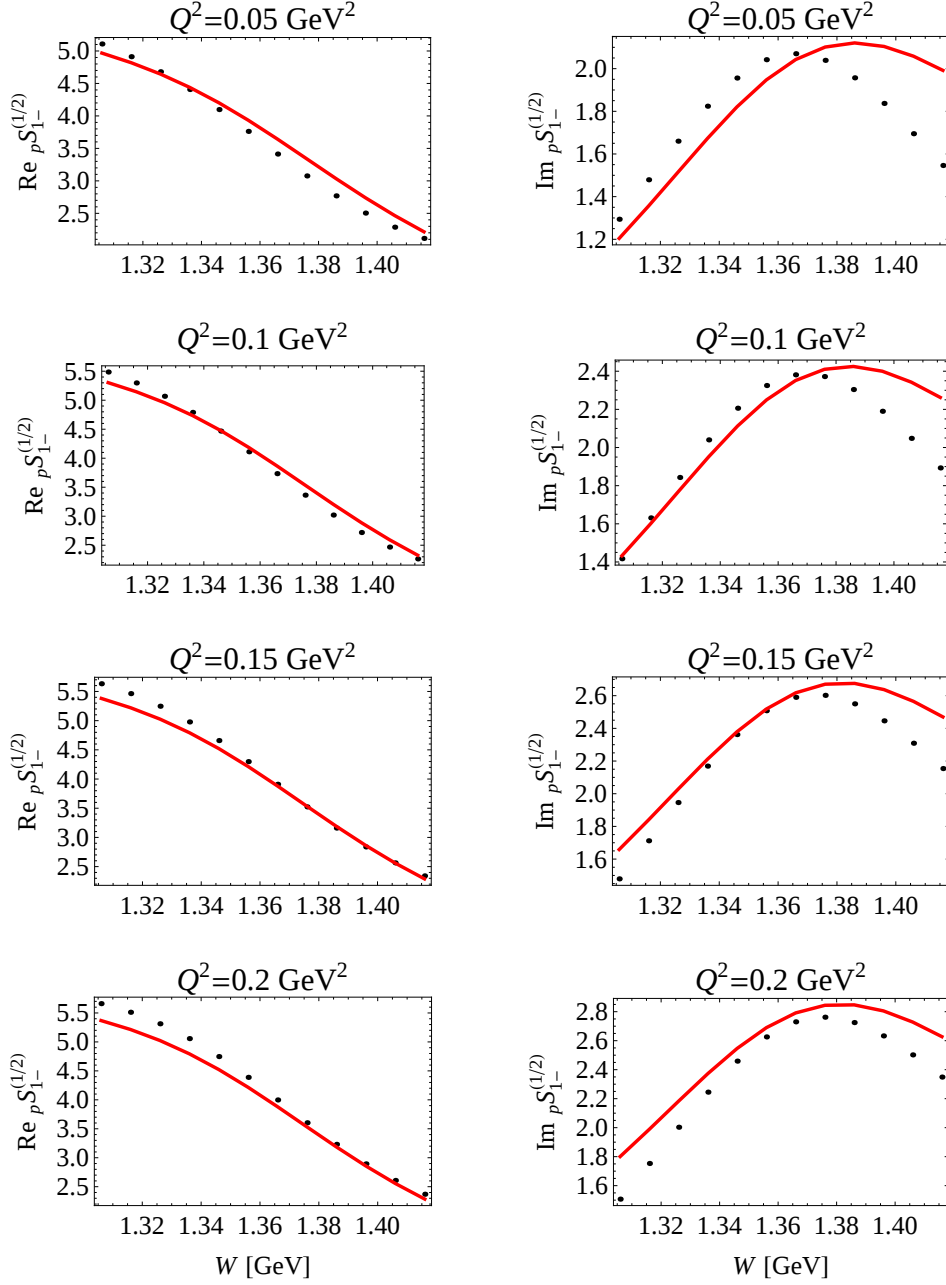


Abbildung 7.11: $pS_{1-}^{(1/2)}$ -Multipol der Elektropionproduktion in Einheiten von $10^{-3}/M_{\pi^+}$ als Funktion von W für verschiedene Werte von Q^2 . Bezeichnung gemäß Abbildung 7.9

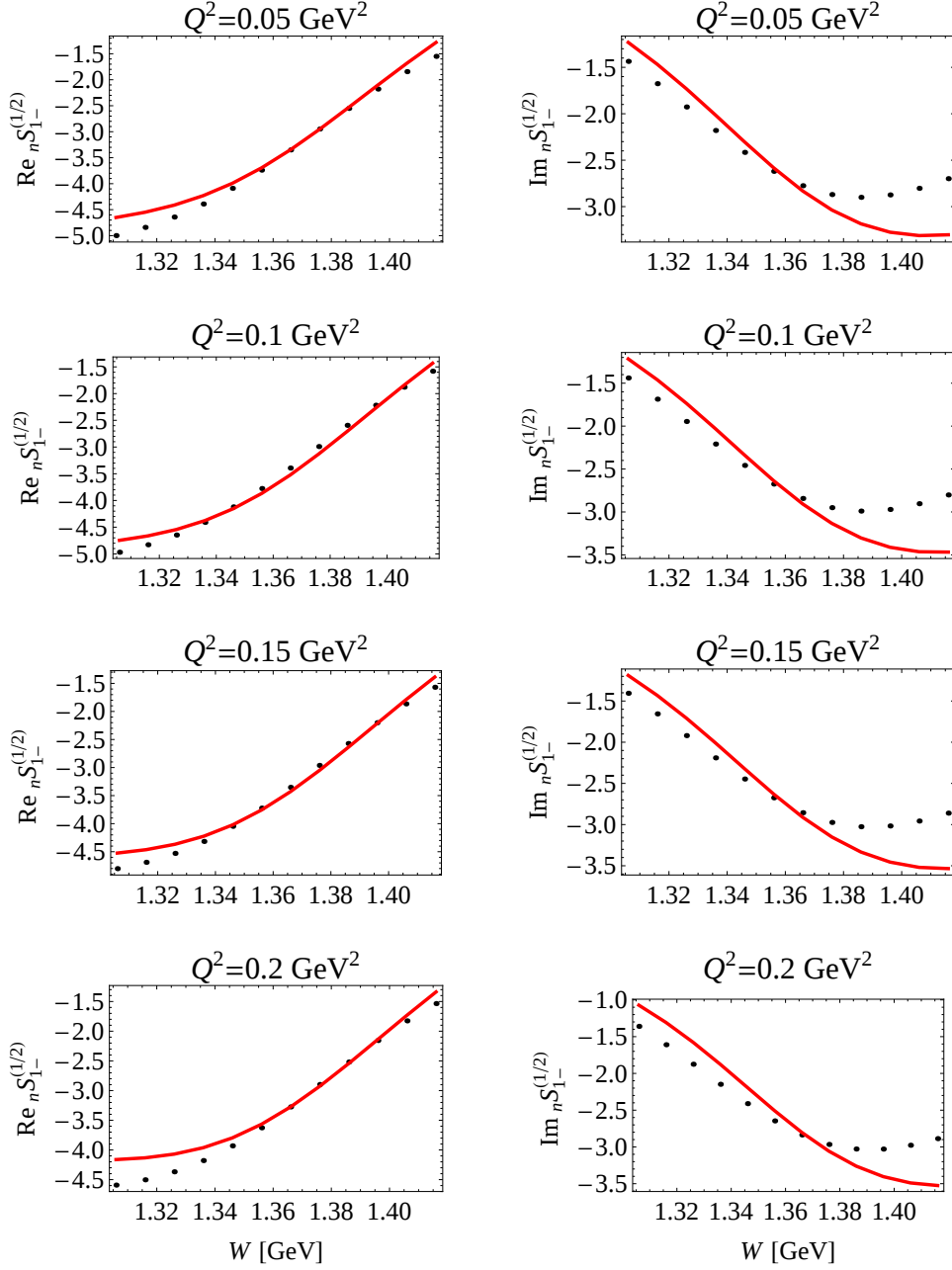


Abbildung 7.12: $nS_{1-}^{(1/2)}$ -Multipol der Elektropionproduktion in Einheiten von $10^{-3}/M_{\pi^+}$ als Funktion von W für verschiedene Werte von Q^2 . Bezeichnung gemäß Abbildung 7.9

Kapitel 8

Zusammenfassung und Ausblick

In diese Arbeit wurden verschiedene Anwendungen des Komplexe-Masse-Renormierungsschemas in chiraler effektiver Feldtheorie behandelt. Das CMS ermöglicht störungstheoretische Berechnungen von Prozessen mit instabilen Teilchen. Innerhalb dieses Schemas wird allen instabilen Teilchen eine komplexe renormierte Masse zugewiesen, die der Polposition des zugehörigen Propagators entspricht. Durch Aufspalten der unrenormierten Masse in eine komplexe renormierte Masse und einen komplexen Gegenterm zerfällt die hermitesche unrenormierte Lagrangedichte in zwei Anteile, die einzeln betrachtet nicht mehr hermitesch sind. Deshalb verlieren die Cutkosky-Formeln ihre Gültigkeit und die Unitarität der S -Matrix kann nicht mehr in gewohnter Weise zu jeder Ordnung in Störungstheorie bewiesen werden.

Ein Ziel dieser Arbeit bestand darin, mittels einer Modell-Lagrangedichte für die Wechselwirkung eines schweren Vektorbosons mit einem leichten Fermion zu demonstrieren, dass die Unitarität der zugehörigen S -Matrix bis auf höhere Ordnungen in einer Entwicklung in dem Quotienten Γ/M erfüllt ist, wobei Γ für die Breite und $M \gg \Gamma$ für die Masse des Vektorboson steht. Zu diesen Zweck wurden Formeln für die Berechnung von Imaginärteilen von Einschleifendiagrammen mit komplexen Massen hergeleitet, die im Grenzfall verschwindender Breiten, d. h. stabiler Teilchen, in die Cutkosky-Formeln übergehen. Unter Voraussetzung einer reellwertigen renormierten Kopplungskonstanten wurde anhand der Fermion-Antifermion-Vorwärtsstreuung die perturbative Unitarität der zugehörigen S -Matrix im CMS auf Einschleifen-niveau demonstriert. In Übereinstimmung mit den Grundlagen der Quantenfeldtheorie gelten die hergeleiteten Unitaritätsbedingungen für eine S -Matrix, die nur stabile asymptotische Zustände umfasst. Die hergeleitete Methode zur Bestimmung von Imaginärteilen lässt sich auf Mehrschleifenintegrale mit endlichen Breiten verallgemeinern, die komplizierten Γ -Abhängigkeiten der resultierenden Imaginärteile erschweren jedoch eine Unitaritätsanalyse zu hö-

heren Ordnungen in Störungstheorie.

Die Anwendung des CMS in chiraler EFT ermöglicht das Aufstellen eines konsistenten Zählschemas in Anwesenheit resonanter Freiheitsgrade. In den perturbativen Berechnungen dieser Arbeit wurden die renormierten Massen als komplexe Polpositionen der korrespondierenden Propagatoren im chiralen Grenzfall gewählt und die Schleifendiagramme an den komplexen Punkten auf der Massenschale im chiralen Grenzfall subtrahiert. In diesem Sinne stellt das CMS eine Verallgemeinerung der erweiterten Massenschalenrenormierung für instabile Teilchen dar. Unter Verwendung des CMS wurden die folgenden Eigenschaften und Prozesse in chiraler EFT berechnet:

- Masse und Breite der Deltaresonanz
- elastische elektromagnetische Formfaktoren der Roperresonanz
- elektromagnetische Formfaktoren des Übergangs vom Nukleon zur Roperresonanz
- Pion-Nukleon-Streuung im Bereich der Roperresonanz
- Photo- und Elektropionproduktion im Bereich der Roperresonanz

Führt man die Massendifferenz zwischen Delta und Nukleon als zusätzlichen Entwicklungsparameter ein, lässt sich die Deltaresonanz konsistent in baryonischer chiraler Störungstheorie berücksichtigen. Im Zuge der Berechnung der Masse und Breite des Deltas bis zur chiralen Ordnung $\mathcal{O}(q^3)$ konnte in dieser Arbeit demonstriert werden, dass im CMS unabhängig von der Zählweise des Massenunterschiedes ein systematisches Zählschema existiert.

Unter expliziter Berücksichtigung des Pions, Nukleons, der Deltaresonanz und der Roperresonanz wurden die elastischen elektromagnetischen Formfaktoren der Roperresonanz bis zur Ordnung $\mathcal{O}(q^3)$ berechnet. Während die Schleifenbeiträge des Dirac-Formfaktors F_1 durch die korrekte Berücksichtigung der Wellenfunktionsrenormierungskonstanten das Zählschema erfüllen, umfassen die Schleifenbeiträge zum Pauli-Formfaktor F_2 zählchemaverletzende Terme. Es wurde bestätigt, dass diese Terme analytisch in den quadrierten Pionmassen und Impulsen sind und durch die Renormierung auftretender Niederenergiekonstanten absorbiert werden können. Anhand des Ergebnisses für das anomale magnetische Moment wurde demonstriert, dass die renormierten Schleifendiagramme unabhängig von der Zählweise aller auftretenden Massenunterschiede das vorgegebene Zählschema erfüllen. Zur numerischen Bestimmung der Ergebnisse mussten Schleifenintegrale mit komplexen inneren Massen und komplexen äußeren Impulsen ausgewertet werden.

Da sich Zweipunktintegrale für komplexe Parameter integrieren lassen, konnten das anomale magnetische Moment und die elektromagnetischen Radien der Roperresonanz in Form von analytischen Ausdrücken bestimmt werden. Im Hinblick auf mögliche Untersuchungen im Rahmen der Gitter-QCD wurde die Pionmassenabhängigkeit dieser Größen untersucht. Die dabei ermittelten chiralen Korrekturen bewegen sich in der gleichen Größenordnung wie die im Falle des Nukleons. Für die numerische Auswertung der Formfaktoren als Funktion des quadrierten Impulsübertrages Q^2 war es nötig, den Imaginärteil der externen Impulse $p_i^2 = p_f^2 = z^2$ zu vernachlässigen. Die Unkenntnis der auftretenden Niederenergiekonstanten stellte sich als dominante Unsicherheit in der Rechnung heraus. Aufgrund fehlender experimenteller Informationen, scheint es unumgänglich, die Niederenergiekonstanten durch Anpassungen an zukünftige Simulationen auf dem Gitter zu bestimmen.

Bei der Berechnung der elektromagnetischen Formfaktoren des Übergangs vom Nukleon zur Roperresonanz wurde dem Impulsübertrag des virtuellen Photons und damit gleichzeitig auch der Differenz zwischen Roperresonanz- und Nukleonmasse die chirale Ordnung $\mathcal{O}(q)$ zugewiesen. Um den Verlauf der Übergangsformfaktoren zu größeren Werten des Impulsübertrages hin beschreiben zu können, wurde zusätzlich zur Roperresonanz noch das Rhomeson eingebaut. Dabei wurde die effektive Lagrangedichte für die Wechselwirkung zwischen Roperresonanz und Rhomeson analog zu der für die Wechselwirkung zwischen Nukleon und Rhomeson konstruiert. Alle zähl-schemaverletzenden Beiträge der berechneten Schleifendiagramme konnten durch die Redefinition auftretender Niederenergiekonstanten absorbiert werden. Aus den Übergangsformfaktoren wurden die transversalen und longitudinalen Helizitätsamplituden extrahiert und die unbekannten Niederenergiekonstanten mittels nichtlinearer Regressionsanalysen an empirische Daten von MAID2007 und der CLAS-Kollaboration angepasst. Die entsprechenden *single-energy*-Daten konnten zwar durch die Rechnung beschrieben werden, aufgrund der geringen Anzahl an Messpunkten im niederenergetischen Bereich war es jedoch nicht möglich die große Anzahl unbekannter Parameter adäquat zu bestimmen. Auch die bisherigen Analysen der Übergangsformfaktoren im Rahmen der Gitter-QCD können nicht zur Festlegung der Niederenergiekonstanten verwendet werden, da sie für Pionmassen jenseits des Anwendungsbereich dieser Arbeit durchgeführt wurden.

Des Weiteren wurde ein Zählschema zur Berechnung der Pion-Nukleon-Streuung sowie der Photo- und Elektropionproduktion für Schwerpunktsenergien im Bereich der Roperresonanz vorgestellt. Es basiert darauf, dass der führende Beitrag zur Breite der Roperresonanz der chiralen Ordnung $\mathcal{O}(q^3)$ ist, wodurch einem Roperresonanzpropagator für Impulse nahe der Roperresonanzmasse die chirale Ordnung $\mathcal{O}(q^{-3})$ anstatt $\mathcal{O}(q^{-1})$ zugewie-

sen wird. Die durchgeführten Betrachtungen konzentrierten sich auf die P_{11} -Partialwelle im Falle der Pion-Nukleon-Streuung bzw. den M_{1-} - sowie S_{1-} -Multipol im Falle der Pionproduktion. Während die Kurven den Verlauf der empirischen Daten der Photopionproduktion wiedergeben, zeigt sich bei der Pion-Nukleon-Streuung und der Elektropionproduktion, insbesondere für die entsprechenden Imaginärteile, eine größere Abweichung von den empirischen Analysen. Analog den Übergangsformfaktoren reicht die Anzahl der experimentellen Informationen nicht zur Bestimmung der unbekannten Niederenergiekonstanten aus. Ob der Massenunterschied zwischen der Roperresonanz und dem Nukleon ausreichend klein für eine gute Konvergenz der Störungsentwicklung ist, kann erst durch die Auswertung höherer Ordnungen geklärt werden. Um physikalische Observablen wie totale oder differentielle Wirkungsquerschnitte im Bereich der Roperresonanz untersuchen zu können, ist es notwendig weitere resonante Freiheitsgrade in der effektiven Lagrangedichte zu berücksichtigen. Dies ist innerhalb des CMS prinzipiell durchführbar, aber insbesondere die Berücksichtigung des Deltas führt bei der Berechnung komplizierter Prozesse wie der Elektropionproduktion selbst unter Einsatz moderner Computeralgebrasysteme zu technischen Schwierigkeiten, da hierbei eine Vielzahl an Diagrammen mit hohem Tensorrang zu berücksichtigen wäre. Eine Möglichkeit die Anzahl der zu berechnenden Diagramme zu reduzieren, ist durch die Modifikation des hier eingesetzten Zählschemas gegeben. Das Aufstellen eines modifizierten Zählschemas könnte darüber hinaus zur Lösung des Problems beitragen, dass die Nukleon-Bornsterme in der vorliegenden Rechnung überschätzt werden. Ein alternativer Lösungsansatz für dieses Problem ist die Unitarisierung der Untergrundbeiträge im Rahmen der unitarisierten chiralen Störungstheorie (*unitarized chiral perturbation theory*).

Zusammenfassend lässt sich festhalten, dass die im ersten Teil der Arbeit durchgeführte Untersuchung der perturbativen Unitarität im CMS einen wichtigen Beitrag zur Etablierung dieses Renormierungsschemas für (effektive) Quantenfeldtheorien mit instabilen Teilchen darstellt. Die anschließenden, im CMS durchgeführten Berechnungen sollten als erster Schritt in der konsistenten Beschreibung der Roperresonanz in chiraler EFT und der systematischen Untersuchung von Reaktionen im Bereich der Roperresonanz betrachtet werden.

Anhang A

Definitionen

- In dieser Arbeit werden natürliche Einheiten verwendet, d. h. $\hbar = c = \epsilon_0 = 1$, wodurch sich für die Elementarladung der Wert $e = \sqrt{4\pi\alpha} \approx 0.303$ ergibt.
- Da die elektromagnetische Kopplungskonstante $\alpha \approx 1/137$ sehr klein ist, werden alle elektromagnetischen Prozesse in der Einphotonäus-tauschnäherung betrachtet.
- Für die numerische Auswertung der Schleifenintegrale werden die physikalischen Werte der auftretenden Parameter aus Tabelle A.1 verwendet. Der Unterschied zwischen den physikalischen Werten und denen im chiralen Grenzfall ist jenseits der betrachteten Ordnungen. Der 't Hooft-Parameter wird $\mu = 1$ GeV gesetzt.
- In der Definition der elektromagnetischen Formfaktoren der Roperresonanz und des Übergangs vom Nukleon zur Roperresonanz wurden Spinoren mit komplexen Massen eingeführt. Eine explizite Darstellung

m_N	M_π	z	z_Δ	F_π	$\mathbf{g}_A$	g_1	g_Δ
0.94	0.14	$1.365 - \frac{i}{2} 0.19$	$1.21 - \frac{i}{2} 0.10$	0.09	1.26	$9/5 \mathbf{g}_A$	1.127

Tabelle A.1: Zahlenwerte für die verwendeten Parameter, wobei die Massen und F_π in Einheiten von GeV gegeben sind und die g_i dimensionslos sind.

lautet [24]

$$\begin{aligned}
w(p, 1) &= \begin{pmatrix} \sqrt{z + p_0} \\ 0 \\ \frac{p_z}{\sqrt{z + p_0}} \\ \frac{p_x + ip_y}{\sqrt{z + p_0}} \end{pmatrix}, \\
\bar{w}(p, 1) &= \begin{pmatrix} \sqrt{z + p_0} & 0 & \frac{-p_z}{\sqrt{z + p_0}} & -\frac{p_x - ip_y}{\sqrt{z + p_0}} \end{pmatrix}, \\
w(p, 2) &= \begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{z + p_0} \\ \frac{p_x - ip_y}{\sqrt{z + p_0}} \\ \frac{-p_z}{\sqrt{z + p_0}} \end{pmatrix}, \\
\bar{w}(p, 2) &= \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{z + p_0} & -\frac{p_x + ip_y}{\sqrt{z + p_0}} & \frac{p_z}{\sqrt{z + p_0}} \end{pmatrix}. \tag{A.1}
\end{aligned}$$

Sie erfüllen die Dirac-Gleichung,

$$\begin{aligned}
(\not{p} - z) w &= 0, \\
\bar{w} (\not{p} - z) &= 0, \tag{A.2}
\end{aligned}$$

und für die Summe über die Spinprojektionen ergibt sich das Resultat

$$\sum_i w(p, i) \bar{w}(p, i) = \not{p} + z. \tag{A.3}$$

Im Gegensatz zu Spinoren mit reellen Massen gilt jedoch

$$\bar{w}(p, i) \neq w^\dagger(p, i) \gamma_0. \tag{A.4}$$

A.1 Cauchy'scher Hauptwert

Verhält sich der Integrand von $\int_a^c dx f(x)$ so, dass das Integral $\int_a^b dx f(x)$ für den Punkt $b \in (a, c)$ divergiert, bezeichnet man den Grenzwert

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \left(\int_a^{b-\epsilon} dx f(x) + \int_{b+\epsilon}^c dx f(x) \right) \equiv \mathcal{P} \left(\int_a^b dx f(x) \right) \tag{A.5}$$

als Cauchy'scher Hauptwert des obigen Integrals [222]. Unter Verwendung des Hauptwertes lässt sich die hilfreiche Identität [113]

$$(x \pm i\epsilon)^{-1} = \mathcal{P} \left(\frac{1}{x} \right) \mp i\pi\delta(x) \quad (\text{A.6})$$

beweisen¹. Dafür schreibt man die linke Seite der Gleichung als

$$\frac{x \mp i\epsilon}{x^2 + \epsilon^2} = \frac{x}{x^2 + \epsilon^2} \mp i \frac{\epsilon}{x^2 + \epsilon^2}. \quad (\text{A.7})$$

Der erste Term auf der rechten Seite verhält sich wie $1/x$ für $x \gg \epsilon$ und verschwindet im Grenzfall $x \rightarrow 0$. Er besitzt somit die Eigenschaften des Hauptwertes $\mathcal{P}(\frac{1}{x})$. Für verschwindendes ϵ ergibt die Integration des zweiten Terms über x den Wert π . Der Term verhält sich im Grenzfall $\epsilon \rightarrow 0$ somit wie $\pi\delta(x)$, woraus die Identität (A.6) folgt. Formel (A.6) stellt eine Distribution dar und ist erst durch die Faltung mit einer Testfunktion definiert:

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int dx \frac{F(x)}{x \pm i\epsilon} = \mathcal{P} \int dx \frac{F(x)}{x} \mp i\pi F(0). \quad (\text{A.8})$$

In dieser Form ist die Identität als Sokhotski-Plemelj-Weierstraß-Theorem bekannt [223].

A.2 Gamma- und Betafunktion

Die Gammafunktion stellt eine Erweiterung der Fakultät auf die reellen und komplexen Zahlen dar. Sie kann durch die Euler'sche Integraldarstellung,

$$\Gamma(z) := \int_0^\infty t^{z-1} e^{-t} dt \quad (\text{A.9})$$

definiert werden, falls z eine komplexe Zahl mit positivem Realteil ist. Durch analytische Fortsetzung wird diese Definition auf alle komplexen Zahlen erweitert. Wie man durch partielle Integration zeigen kann, erfüllt die Gammafunktion die Funktionalgleichung

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z).$$

Sie besitzt einfache Polstellen für alle nicht positiven ganzen Zahlen, $z = 0, -1, -2, \dots$, mit den Residuen

$$\text{Res}(\Gamma, -n) = \frac{(-1)^n}{n!}.$$

¹Die Identität wurde zur Herleitung der Cutkosky-Regeln in Abschnitt 3.1.1 verwendet.

Außerdem genügt die Gammafunktion der folgenden Laurentreihenentwicklung:

$$\Gamma(z) = \sum_{k=-1}^{\infty} \frac{d^{k+1}}{dz^{k+1}} \Gamma(z) \Big|_{z=1} \frac{z^k}{(k+1)!} = \frac{1}{z} - \gamma + \mathcal{O}(z).$$

Die k -te Ableitung der Gammafunktion ist dabei durch

$$\frac{d^k}{dz^k} \Gamma(z) = \int_0^{\infty} t^{z-1} e^{-t} (\ln t)^k dt$$

gegeben und $\gamma := -\Gamma'(1) = 0.577\dots$ stellt die Euler-Mascheroni-Konstante dar.

Das Produkt zweier Gammafunktionen,

$$\Gamma(x)\Gamma(y) = \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} e^{-u-v} u^{x-1} v^{y-1} du dv,$$

lässt sich durch die Variablentransformation $u = zt, v = z(1-t)$ wie folgt umschreiben:

$$\begin{aligned} \Gamma(x)\Gamma(y) &= \underbrace{\int_0^{\infty} e^{-z} z^{x+y-1} dz}_{=\Gamma(x+y)} \underbrace{\int_0^{\infty} t^{x-1} (1-t)^{y-1} dt}_{=:B(x,y)}, \\ \Rightarrow B(x,y) &= \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}. \end{aligned} \quad (\text{A.10})$$

Die in Gleichung (A.10) definierte Funktion $B(x,y)$ heißt Euler'sche Betafunktion oder Euler'sches Integral 1. Art.

A.3 Hypergeometrische Funktionen

Mit Hilfe der Gammafunktion lässt sie die verallgemeinerte hypergeometrische Funktion durch die folgende Potenzreihe definieren [224, 225]:

$${}_nF_m(a_1, \dots, a_n; b_1, \dots, b_m; z) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} \prod_{i=1}^n \frac{\Gamma(k+a_i)}{\Gamma(a_i)} \prod_{j=1}^m \frac{\Gamma(b_j)}{\Gamma(k+b_j)}. \quad (\text{A.11})$$

Häufig werden für die Definition der hypergeometrischen Funktion auch die Pochhammersymbole $(a)_n$,

$$(a)_k = a(a+1)(a+2)\cdots(a+k-1) = \frac{\Gamma(k+a)}{\Gamma(a)} \quad \text{mit} \quad (a)_0 = 1,$$

verwendet. Ein wichtiger Spezialfall der verallgemeinerten hypergeometrischen Funktion ist die Gauß'sche hypergeometrische Funktion ${}_2F_1(a, b; c; z)$:

$$\begin{aligned} {}_2F_1(a, b; c; z) &:= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \frac{(a)_n (b)_n}{(c)_n} \\ &= \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \frac{\Gamma(a+n)\Gamma(b+n)}{\Gamma(c+n)}. \end{aligned} \quad (\text{A.12})$$

Der Konvergenzradius der hypergeometrischen Funktion beträgt eins. Die analytische Fortsetzung von ${}_2F_1(a, b; c; z)$ auf einige andere Argumente lautet [224, 225]

$${}_2F_1(a, b; c; z) = (1-z)^{-b} {}_2F_1\left(b, c-a; c; \frac{z}{z-1}\right) \quad (\text{A.13a})$$

$$\begin{aligned} &= \frac{\Gamma(c)\Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)} {}_2F_1(a, b; a+b-c+1; 1-z) \\ &\quad + (1-z)^{c-a-b} \frac{\Gamma(c)\Gamma(a+b-c)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} \\ &\quad \times {}_2F_1(c-a, c-b; c-a-b+1; 1-z) \end{aligned} \quad (\text{A.13b})$$

$$\begin{aligned} &= \frac{\Gamma(c)\Gamma(b-a)}{\Gamma(c-a)\Gamma(b)} (-z)^{-a} {}_2F_1\left(a, 1-c+a; 1-b+a; \frac{1}{z}\right) \\ &\quad + \frac{\Gamma(c)\Gamma(a-b)}{\Gamma(c-b)\Gamma(a)} (-z)^{-b} {}_2F_1\left(b, 1-c+b; 1-a+b; \frac{1}{z}\right) \end{aligned} \quad (\text{A.13c})$$

$$\begin{aligned} &= \frac{\Gamma(c)\Gamma(b-a)}{\Gamma(c-a)\Gamma(b)} (1-z)^{-a} {}_2F_1\left(a, c-b; a-b+1; \frac{1}{1-z}\right) \\ &\quad + \frac{\Gamma(c)\Gamma(a-b)}{\Gamma(c-b)\Gamma(a)} (1-z)^{-b} {}_2F_1\left(b, c-a; b-a+1; \frac{1}{1-z}\right). \end{aligned} \quad (\text{A.13d})$$

Eine nützliche Integraldarstellung ist gegeben durch

$${}_2F_1(a, b; c; z) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(c-b)} \int_0^1 dx x^{b-1} (1-x)^{c-b-1} (1-zx)^{-a}.$$

Einige wichtige Spezialfälle der Gauß'schen hypergeometrischen Funktion lauten [224]

$${}_2F_1(a, b; c; 1) = \frac{\Gamma(c)\Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)} \quad \text{für } b \in \mathbb{Z} < 0 \vee \operatorname{Re}(c-a-b) > 0, \quad (\text{A.14a})$$

$${}_2F_1(a, b; c; -1) = \frac{\Gamma(\frac{b}{2}+1)\Gamma(b-a+1)}{\Gamma(b+1)\Gamma(\frac{b}{2}-a+1)} \quad \text{für } a-b+c=1, \quad (\text{A.14b})$$

$${}_2F_1(a, 1-a; b; \frac{1}{2}) = \frac{\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(\frac{1}{2}+a+b)}{\Gamma(\frac{1}{2}+a)\Gamma(\frac{1}{2}+b)}, \quad (\text{A.14c})$$

$${}_2F_1(1, 2; 3; z) = -2 \frac{z + \ln(1-z)}{z^2}. \quad (\text{A.14d})$$

A.4 Legendre-Polynome

Die Legendre-Polynome $P_n(x)$ sind Polynome n -ten Grades und stellen somit weitere Spezialfälle der Gauß'schen hypergeometrischen Funktionen dar:

$$\begin{aligned} {}_2F_1\left(-n, n+1; 1; \frac{1-x}{2}\right) &= \sum_{k=1}^n (-1)^k \binom{n}{k}^2 \left(\frac{1+x}{2}\right)^{n-k} \left(\frac{1-x}{2}\right)^k \\ &=: P_n(x). \end{aligned} \quad (\text{A.15})$$

Häufig werden sie durch die Rodrigues-Formel dargestellt:

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} [(x^2-1)^n]. \quad (\text{A.16})$$

A.5 Dilogarithmen

Der Dilogarithmus (auch Spence-Funktion genannt) spielt bei der Berechnung skalarer Dreipunktfunktionen eine wichtige Rolle und kann wie folgt definiert werden:

$${}_3F_2(1, 1, 1; 2, 2; z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^2} =: \operatorname{Li}_2(z). \quad (\text{A.17})$$

Eine alternative Darstellung ist über das folgende Integral gegeben:

$$\begin{aligned} \operatorname{Li}_2(z) &= - \int_0^1 \frac{\ln(t)}{t-1/z} dt \quad \text{mit } |\arg(z)| < \pi \\ &= - \int_0^1 \frac{\ln(1-zt)}{t} dt. \end{aligned} \quad (\text{A.18})$$

Es gilt die Beziehung

$$\operatorname{Li}_2(z) + \operatorname{Li}_2(1-z) = \frac{\pi^2}{6} - \ln(z) \ln(1-z). \quad (\text{A.19})$$

Die Verallgemeinerung des Dilogarithmus wird als Polylogarithmus bezeichnet und ist folgendermaßen definiert:

$$\begin{aligned} \operatorname{Li}_a(z) &:= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^a} \\ &= \frac{(-1)^a}{(a-1)!} \int_0^1 \frac{\ln^{a-1}(t)}{t - 1/z} dt, \quad \text{mit } |\arg(z)| < \pi. \end{aligned} \quad (\text{A.20})$$

Anhang B

Elektropionproduktion

In Gleichung (7.39) ist die Multipolentwicklung der CGLN-Amplituden gegeben. Aus der Invertierung dieser Gleichungen folgt für die Multipole [218]:

$$\begin{aligned} E_{l+} &= \int_{-1}^1 \frac{dx}{2(l+1)} \left[P_l \mathcal{F}_1 - P_{l+1} \mathcal{F}_2 + \frac{l}{2l+1} (P_{l-1} - P_{l+1}) \mathcal{F}_3 \right. \\ &\quad \left. + \frac{l+1}{2l+3} (P_l - P_{l+2}) \mathcal{F}_4 \right], \\ E_{l-} &= \int_{-1}^1 \frac{dx}{2l} \left[P_l \mathcal{F}_1 - P_{l-1} \mathcal{F}_2 - \frac{l+1}{2l+1} (P_{l-1} - P_{l+1}) \mathcal{F}_3 \right. \\ &\quad \left. + \frac{l}{2l-1} (P_l - P_{l-2}) \mathcal{F}_4 \right], \\ M_{l+} &= \int_{-1}^1 \frac{dx}{2(l+1)} \left[P_l \mathcal{F}_1 - P_{l+1} \mathcal{F}_2 - \frac{1}{2l+1} (P_{l-1} - P_{l+1}) \mathcal{F}_3 \right], \\ M_{l-} &= \int_{-1}^1 \frac{dx}{2l} \left[-P_l \mathcal{F}_1 + P_{l-1} \mathcal{F}_2 + \frac{1}{2l+1} (P_{l-1} - P_{l+1}) \mathcal{F}_3 \right], \\ S_{l+} &= \int_{-1}^1 \frac{dx}{2(l+1)} (P_{l+1} \mathcal{F}_7 + P_l \mathcal{F}_8), \\ S_{l-} &= \int_{-1}^1 \frac{dx}{2l} (P_{l-1} \mathcal{F}_7 + P_l \mathcal{F}_8). \end{aligned} \tag{B.1}$$

Die CGLN-Amplituden als Funktionen der invarianten Amplituden lau-

ten [219, 220]

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}_1 &= \frac{W - m_N}{8\pi W} \sqrt{(E_i + m_N)(E_f + m_N)} \left[A_1 + (W - m_N)A_4 \right. \\
&\quad \left. - \frac{2m_N\nu_B}{W - m_N}(A_3 - A_4) + \frac{Q^2}{W - m_N}A_6 \right], \\
\mathcal{F}_2 &= \frac{W + m_N}{8\pi W} |\vec{q}| \sqrt{\frac{E_i - m_N}{E_f + m_N}} \left[-A_1 + (W + m_N)A_4 \right. \\
&\quad \left. - \frac{2m_N\nu_B}{W + m_N}(A_3 - A_4) + \frac{Q^2}{W + m_N}A_6 \right], \\
\mathcal{F}_3 &= \frac{W + m_N}{8\pi W} |\vec{q}| \sqrt{(E_i - m_N)(E_f + m_N)} \left[\frac{2W^2 - 2m_N^2 + Q^2}{2(W + m_N)} A_2 \right. \\
&\quad \left. + A_3 - A_4 - \frac{Q^2}{W + m_N} A_5 \right], \\
\mathcal{F}_4 &= \frac{W - m_N}{8\pi W} |\vec{q}|^2 \sqrt{\frac{E_i + m_N}{E_f + m_N}} \left[-\frac{2W^2 - 2m_N^2 + Q^2}{2(W - m_N)} A_2 \right. \\
&\quad \left. + A_3 - A_4 + \frac{Q^2}{W - m_N} A_5 \right], \\
\mathcal{F}_5 &= \frac{k_0}{8\pi W} \sqrt{\frac{E_f + m_N}{E_i + m_N}} \left\{ (E_i + m_N)A_1 + \left[4m_N\nu_B(W - \frac{3}{4}k_0) - \vec{k}^2 W \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + q_0(W^2 - m_N^2 + \frac{1}{2}Q^2) \right] A_2 + [q_0(W + m_N) + 2m_N\nu_B]A_3 \right. \\
&\quad \left. + [(E_i + m_N)(W - m_N) - q_0(W + m_N) - 2m_N\nu_B]A_4 \right. \\
&\quad \left. + (2m_N\nu_B k_0 - q_0 Q^2)A_5 - (E_i + m_N)(W - m_N)A_6 \right\}, \\
\mathcal{F}_6 &= \frac{k_0 |\vec{q}|}{8\pi W \sqrt{(E_f + m_N)(E_i - m_N)}} \left\{ - (E_i - m_N)A_1 + \left[\vec{k}^2 W - \right. \right. \\
&\quad \left. \left. 4m_N\nu_B(W - \frac{3}{4}k_0) - q_0(W^2 - m_N^2 + \frac{1}{2}Q^2) \right] A_2 + [q_0(W - m_N) \right. \\
&\quad \left. + 2m_N\nu_B]A_3 + [(E_i - m_N)(W + m_N) - q_0(W - m_N) \right. \\
&\quad \left. - 2m_N\nu_B]A_4 + (q_0 Q^2 - 2m_N\nu_B k_0)A_5 \right. \\
&\quad \left. - (E_i - m_N)(W + m_N)A_6 \right\}, \tag{B.2}
\end{aligned}$$

mit $\nu_B = \frac{(t - M_\pi^2 + Q^2)}{4m_N}$.

Anhang C

Skalare Integrale

In dieser Arbeit wurden alle zu berechnenden Schleifendiagramme unter Zuhilfenahme des Programmpakets *FeynCalc* auf skalare Einschleifenintegrale reduziert. Für die numerische Auswertung der skalaren Integrale wurde die Bibliothek *LoopTools* [169] genutzt. Da zur Renormierung der in dieser Arbeit auftretenden Schleifendiagramme das CMS verwendet wird, stellen die Massen instabiler Teilchen komplexwertige Parameter dar. Integrale mit mehr als zwei inneren Linien können mit Hilfe von *LoopTools* nicht mehr für eine beliebige Konfiguration komplexer Parameter berechnet werden.

Im Folgenden werden alle in dieser Arbeit benötigten skalaren Einschleifenintegrale in dimensionaler Regularisierung definiert:

Integral mit einer inneren Linie:

$$A_0(m^2) = \frac{(2\pi\mu)^{4-n}}{i\pi^2} \int \frac{d^n k}{k^2 - m^2 + i0^+} . \quad (\text{C.1})$$

Integral mit zwei inneren Linien:

$$B_0(p^2, m_1^2, m_2^2) = \frac{(2\pi\mu)^{4-n}}{i\pi^2} \int \frac{d^n k}{[k^2 - m_1^2 + i0^+][(k+p)^2 - m_2^2 + i0^+]} . \quad (\text{C.2})$$

Integral mit drei inneren Linien:

$$C_0(p_i^2, (p_f - p_i)^2, p_f^2, m_1^2, m_2^2, m_3^2) = \frac{(2\pi\mu)^{4-n}}{i\pi^2} \int \frac{d^n k}{[k^2 - m_1^2 + i0^+][(k - p_i)^2 - m_2^2 + i0^+][(k - p_f)^2 - m_3^2 + i0^+]} . \quad (\text{C.3})$$

Die $i0^+$ Terme geben im Falle reeller Massen an, wie die jeweiligen Pole behandelt werden. Sie können für komplexe Massen weggelassen werden. Die

B_0 -Funktionen sind symmetrisch unter Vertauschung der letzten beiden Argumente. Bei den C_0 -Funktionen führen die folgenden Permutationen der Argumente auf gleiche Ergebnisse:

$$\begin{aligned} C_0(p_i^2, q^2, p_f^2, m_1^2, m_2^2, m_3^2), & \quad C_0(p_f^2, q^2, p_i^2, m_1^2, m_3^2, m_2^2), \\ C_0(p_i^2, p_f^2, q^2, m_2^2, m_1^2, m_3^2), & \quad C_0(q^2, p_f^2, p_i^2, m_2^2, m_3^2, m_1^2), \\ C_0(p_f^2, p_i^2, q^2, m_3^2, m_1^2, m_2^2), & \quad C_0(q^2, p_i^2, p_f^2, m_3^2, m_2^2, m_1^2). \end{aligned} \quad (\text{C.4})$$

Unter Verwendung der Definition

$$\lambda = \frac{1}{16\pi^2} \left\{ \frac{1}{n-4} - \frac{1}{2} [\ln(4\pi) + \Gamma'(1) + 1] \right\} \quad (\text{C.5})$$

lauten die expliziten Ausdrücke für die skalaren Integrale mit einer und zwei inneren Linien

$$\begin{aligned} A_0(m^2) &= (-16\pi^2) \left[2m^2\lambda + \frac{m^2}{8\pi^2} \ln\left(\frac{m}{\mu}\right) \right], \\ B_0(p^2, m_1^2, m_2^2) &= (-16\pi^2) \left\{ 2\lambda - \frac{\ln\left(\frac{\mu}{m_2}\right)}{8\pi^2} + \frac{1}{16\pi^2} + \frac{{}_2F_1(1, 2; 3; \omega)}{32\pi^2} \omega \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{32\pi^2} \left[1 + \frac{m_2^2}{m_1^2(\omega - 1)} \right] {}_2F_1\left(1, 2; 3; 1 + \frac{m_2^2}{m_1^2(\omega - 1)}\right) \right\}, \end{aligned} \quad (\text{C.6})$$

mit

$$\omega = \frac{m_1^2 - m_2^2 + p^2 + \sqrt{(m_1^2 - m_2^2 + p^2)^2 - 4m_1^2 p^2}}{2m_1^2}.$$

Für den Fall, dass p^2 , m_1^2 und $m_2^2 \in \mathbb{R}$ sind, lässt sich das Ergebnis der skalaren Zweipunktfunktion schreiben als

$$\begin{aligned} B_0(p^2, m_1^2, m_2^2) &= (-16\pi^2) \left\{ 2\lambda + \frac{\ln\left(\frac{m_1}{\mu}\right)}{8\pi^2} + \frac{1}{16\pi^2} \right. \\ &\quad \left. \times \left[-1 + \frac{p^2 - m_1^2 + m_2^2}{p^2} \ln\left(\frac{m_2}{m_1}\right) + \frac{2m_1 m_2}{p^2} F(\Omega) \right] \right\}, \end{aligned} \quad (\text{C.7})$$

wobei

$$F(\Omega) = \begin{cases} \sqrt{\Omega^2 - 1} \ln(-\Omega - \sqrt{\Omega^2 - 1}) & \text{für } \Omega \leq -1, \\ \sqrt{1 - \Omega^2} \arccos(-\Omega) & \text{für } -1 \leq \Omega \leq 1, \\ \sqrt{\Omega^2 - 1} \ln(\Omega + \sqrt{\Omega^2 - 1}) - i\pi\sqrt{\Omega^2 - 1} & \text{für } 1 \leq \Omega, \end{cases}$$

$$\Omega = \frac{p^2 - m_1^2 - m_2^2}{2m_1 m_2}.$$

Explizite Ausdrücke für die skalare Dreipunktfunktion unter Verwendung von Spence-Funktionen sind in den Referenzen [143, 226] gegeben. Eine alternative Darstellung in Form von sogenannten Appell-Funktionen [227], eine Erweiterung der hypergeometrischen Funktionen auf mehrere Variablen, findet sich in Referenz [228]. Allerdings sind diese Ergebnisse nicht für beliebige komplexe Massen und Impulse gültig.

Die Imaginärteile der Zwei- und Dreipunktfunktionen mit reellen Massen und Impulsen sind gegeben durch

$$\text{Im} [B_0(p^2, m_1^2, m_2^2)] = \pi \frac{\sqrt{\lambda(p^2, m_1^2, m_2^2)}}{p^2} \Theta(p^2 - (m_1 + m_2)^2), \quad (\text{C.9})$$

$$\text{Im} [C_0(p_1^2, p_2^2, p_3^2, m_1^2, m_2^2, m_3^2)] = \pi \frac{-\ln\left(\frac{\alpha+\beta}{\alpha-\beta}\right)}{\sqrt{\lambda(p_1^2, p_2^2, p_3^2)}} \Theta(p_1^2 - (m_1 + m_2)^2), \quad (\text{C.10})$$

mit

$$\begin{aligned} \lambda(x, y, z) &= (x - y - z)^2 - 4yz, \\ \alpha &= p_1^2(p_1^2 + 2m_3^2 - (p_2^2 + p_3^2 + m_1^2 + m_2^2)), \\ \beta &= \sqrt{\lambda(p_1^2, m_1^2, m_2^2)\lambda(p_1^2, p_2^2, p_3^2)}. \end{aligned}$$

Einige nützliche Beziehungen zwischen den skalaren Integralen lauten

$$B_0(0, m_1^2, m_2^2) = \frac{A_0(m_1^2) - A_0(m_2^2)}{m_1^2 - m_2^2}, \quad (\text{C.11})$$

$$B_0(0, m^2, m^2) = \frac{A_0(m^2)}{m^2} - 1, \quad (\text{C.12})$$

$$B_0(m^2, 0, m^2) = \frac{A_0(m^2)}{m^2} + 1, \quad (\text{C.13})$$

$$\begin{aligned} C_0(p^2, 0, p^2, m_1^2, m_2^2, m_2^2) &= \frac{\partial}{\partial m_2^2} B_0(p^2, m_2^2, m_1^2) \\ &= \frac{1}{m_2^4 - 2m_2^2(m_1^2 + p^2) + (m_1^2 - p^2)^2} \\ &\quad \times \left[(m_2^2 - m_1^2 - p^2)(B_0(p^2, m_2^2, m_1^2) - 1) \right. \\ &\quad \left. - \frac{m_2^2 + m_1^2 - p^2}{m_2^2} A_0(m_2^2) + 2A_0(m_1^2) \right]. \end{aligned} \quad (\text{C.14})$$

Für die Berechnung der Roperresonanzradien benötigt man die Ableitungen der Zwei- und Dreipunktfunktionen nach den Impulsüberträgen $-Q^2 = t$ an der Stelle $t = 0$. Für die Zweipunktfunktionen ist die Ableitung gegeben durch

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} B_0(t, m_1^2, m_2^2) \Big|_{t=0} &= \frac{{}_2F_1\left(2, 1; 4; 1 - \frac{m_1^2}{m_2^2}\right)}{6m_2^2} \\ &= \frac{m_1^4 - m_2^4 + 2A_0(m_1^2)m_2^2 - 2A_0(m_2^2)m_1^2}{2(m_1^2 - m_2^2)^3}, \\ \frac{\partial}{\partial t} B_0(t, m^2, m^2) \Big|_{t=0} &= \frac{1}{6m^2}. \end{aligned}$$

In Referenz [172] wurde gezeigt, dass sich die Ableitungen der Dreipunktfunktionen allgemein als Summe aus Dreipunktfunktionen und Ableitungen von Zweipunktfunktionen schreiben lassen. Da die Radien an der Stelle $t = 0$ ausgewertet werden, reduziert sich die hier benötigte Ableitung zu einer Summe aus Ein- und Zweipunktfunktionen:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} C_0(p^2, t, p^2, m_1^2, m_2^2, m_2^2) \Big|_{t=0} &= \frac{1}{D} \left[K_0 + K_1 A_0(m_1^2) \right. \\ &\quad \left. + K_2 A_0(m_2^2) + K_3 B_0(p^2, m_1^2, m_2^2) \right], \end{aligned} \quad (\text{C.15})$$

mit

$$\begin{aligned}
D &= 6 \, m_2^2 \, p^2 \left[m_1^4 - 2 (m_2^2 + p^2) m_1^2 + (m_2^2 - p^2)^2 \right]^2, \\
K_0 &= p^2 \left[3 (m_2^4 - (p^2)^2) m_1^2 - (m_2^2 - p^2)^3 - m_1^6 - (m_2^2 - 3p^2) m_1^4 \right], \\
K_1 &= m_2^2 \left[m_1^4 - 2 (m_2^2 + 3p^2) m_1^2 + (m_2^2 - p^2)^2 \right], \\
K_2 &= 2 (m_2^4 + p^2 m_2^2 - 2(p^2)^2) m_1^2 - (m_2^2 - 3p^2) m_1^4 - (m_2^2 - p^2)^3, \\
K_3 &= m_2^2 \left[3 (m_2^2 + p^2) m_1^4 - 3 (m_2^4 - (p^2)^2) m_1^2 + (m_2^2 - p^2)^3 - m_1^6 \right].
\end{aligned}$$

Für die Bestimmung der Abzugsterme werden schließlich noch zwei weitere nützliche Ergebnisse angegeben [229]:

$$\int \frac{d^n k}{(k^2 - m^2 + i0^+)^\alpha} = (-1)^{\alpha+1} \frac{(m^2)^{n/2-\alpha}}{i \pi^{-n/2}} \frac{\Gamma(\alpha - n/2)}{\Gamma(\alpha)}, \quad (\text{C.16})$$

$$\begin{aligned}
\int \frac{d^n k}{[k^2 + i0^+]^\alpha [k^2 + 2p \cdot k + i0^+]^\beta} &= \frac{(p^2)^{n/2-\alpha-\beta}}{i \pi^{-n/2}} \frac{\Gamma[\alpha + \beta - n/2]}{\Gamma[n - \alpha - \beta]} \\
&\quad \times \Gamma[n - 2\alpha - \beta]. \quad (\text{C.17})
\end{aligned}$$

Anhang D

Ergebnisse

D.1 Imaginärteile für Einschleifenintegrale mit komplexen Massen

In diesem Abschnitt sind die expliziten Formeln für die in Abschnitt 3.1.2 benötigten Imaginärteile hergeleitet. Um die Notation zu verkürzen, werden die folgenden Abkürzungen eingeführt:

$$\begin{aligned}d(k^2) &= (k^2 - m^2)^2 + \epsilon^2, \\D(k^2) &= (k^2 - M^2)^2 + M^2\Gamma^2.\end{aligned}$$

Damit ergeben sich die Propagatoren aus den Gleichungen (3.10) und (3.20) zu

$$\begin{aligned}\Delta_F(k) &= \frac{k^2 - m^2}{d(k^2)} - i\pi\delta(p^2 - m^2), \\ \Delta'(k) &= \frac{k^2 - M^2}{D(k^2)} - i\frac{M\Gamma}{D(k^2)}.\end{aligned}$$

Der Imaginärteil eines Integrals der Form

$$\begin{aligned}I_2 &= i \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \frac{d^4l}{(2\pi)^4} (2\pi)^4 \delta^4(k + l - p_1) (2\pi)^4 \delta^4(k + q - p_2) \\ &\quad \times \Delta'(k) \Delta_F(q) \Delta_F(l) \\ &= i \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \Delta'(k) \Delta_F(p_2 - k) \Delta_F(p_1 - k),\end{aligned}\tag{D.1}$$

welches die Propagation eines stabilen und zweier instabiler Teilchen umfasst, lautet

$$\begin{aligned} \text{Im}[I_2] = & \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \frac{d^4 l}{(2\pi)^4} (2\pi)^4 \delta^4(k+l-p_1) (2\pi)^4 \delta^4(k+q-p_2) \\ & \times \left\{ \frac{k^2 - M^2}{D(k^2)} \frac{q^2 - m^2}{d(q^2)} \frac{l^2 - m^2}{d(l^2)} - \frac{k^2 - M^2}{D(k^2)} \pi^2 \delta(q^2 - m^2) \delta(l^2 - m^2) \right. \\ & \left. - \frac{M \Gamma}{D(k^2)} \frac{q^2 - m^2}{d(q^2)} \pi \delta(l^2 - m^2) - \frac{M \Gamma}{D(k^2)} \frac{l^2 - m^2}{d(l^2)} \pi \delta(q^2 - m^2) \right\}. \end{aligned} \quad (\text{D.2})$$

Zur Umformung von Gleichung (D.2) wird die folgende Identität verwendet:

$$\begin{aligned} 0 = & i \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \frac{d^4 l}{(2\pi)^4} (2\pi)^4 \delta^4(k+l-p_1) (2\pi)^4 \delta^4(k+q-p_2) \\ & \times \Delta'_A(k) \Delta_R(q) \Delta_R(l). \end{aligned}$$

Bildet man den Imaginärteil auf beiden Seiten, erhält man

$$\begin{aligned} 0 = & \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \frac{d^4 l}{(2\pi)^4} (2\pi)^4 \delta^4(k+l-p_1) (2\pi)^4 \delta^4(k+q-p_2) \\ & \times \left\{ \frac{k^2 - M^2}{D(k^2)} \frac{q^2 - m^2}{d(q^2)} \frac{l^2 - m^2}{d(l^2)} - \frac{k^2 - M^2}{D(k^2)} \pi^2 \delta(q^2 - m^2) \delta(l^2 - m^2) \sigma_q \sigma_l \right. \\ & + \frac{M \Gamma}{D(k^2)} \frac{q^2 - m^2}{d(q^2)} \pi \delta(l^2 - m^2) \sigma_l \frac{k_0}{\mathcal{E}_k} \\ & \left. + \frac{M \Gamma}{D(k^2)} \frac{l^2 - m^2}{d(l^2)} \pi \delta(q^2 - m^2) \sigma_q \frac{k_0}{\mathcal{E}_k} + \mathcal{O}(\Gamma^2) \right\}. \end{aligned} \quad (\text{D.3})$$

Subtrahiert man Gleichung (D.3) von Gleichung (D.2), liefert dies

$$\begin{aligned} \text{Im}[I_2] = & \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \frac{d^4 l}{(2\pi)^4} (2\pi)^4 \delta^4(k+l-p_1) (2\pi)^4 \delta^4(k+q-p_2) \\ & \times \left\{ -\frac{k^2 - M^2}{D(k^2)} \pi^2 \delta(q^2 - m^2) \delta(l^2 - m^2) (1 - \sigma_q \sigma_l) \right. \\ & - \frac{M \Gamma \left(1 + \sigma_l \frac{k_0}{\mathcal{E}_k}\right)}{D(k^2)} \frac{q^2 - m^2}{d(q^2)} \pi \delta(l^2 - m^2) \\ & \left. - \frac{M \Gamma \left(1 + \sigma_q \frac{k_0}{\mathcal{E}_k}\right)}{D(k^2)} \frac{l^2 - m^2}{d(l^2)} \pi \delta(q^2 - m^2) + \mathcal{O}(\Gamma^2) \right\}. \end{aligned} \quad (\text{D.4})$$

Der erste Term aus Gleichung (D.4) entspricht dem Zerschneiden der beiden Propagatoren stabiler Teilchen, während die beiden übrigen Terme dem Zerschneiden von jeweils einem Propagator eines stabilen und eines instabilen Teilchens entsprechen. Diese beiden Terme sind erwartungsgemäß proportional zur Breite Γ .

Außerdem benötigt man noch das Integral

$$\begin{aligned}
I_3 &= i \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \frac{d^4 l}{(2\pi)^4} \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} (2\pi)^4 \delta^4(k + p_1 - p_3 - q) (2\pi)^4 \delta^4(k + p_1 - l) \\
&\quad \times (2\pi)^4 \delta^4(k - p_2 + p) \Delta'(k) \Delta'(q) \Delta_F(l) \Delta_F(p) \\
&= i \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \Delta'(k) \Delta'(p_1 - p_3 + k) \Delta_F(p_1 + k) \Delta_F(p_2 - k), \tag{D.5}
\end{aligned}$$

dessen Imaginärteil durch

$$\begin{aligned}
\text{Im}[I_3] &= \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \frac{d^4 l}{(2\pi)^4} \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} (2\pi)^4 \delta^4(k + p_1 - p_3 - q) \\
&\quad \times (2\pi)^4 \delta^4(k + p_1 - l) (2\pi)^4 \delta^4(k - p_2 + p) \\
&\quad \times \left\{ \frac{k^2 - M^2}{D(k^2)} \frac{q^2 - M^2}{D(q^2)} \frac{l^2 - m^2}{d(l^2)} \frac{p^2 - m^2}{d(p^2)} \right. \\
&\quad - \frac{k^2 - M^2}{D(k^2)} \frac{q^2 - M^2}{D(q^2)} \pi^2 \delta(l^2 - m^2) \delta(p^2 - m^2) \\
&\quad - \frac{M \Gamma}{D(k^2)} \frac{M \Gamma}{D(q^2)} \frac{l^2 - m^2}{d(l^2)} \frac{p^2 - m^2}{d(p^2)} \\
&\quad - \frac{M \Gamma}{D(k^2)} \frac{q^2 - M^2}{D(q^2)} \frac{p^2 - m^2}{d(p^2)} \pi \delta(l^2 - m^2) \\
&\quad - \frac{M \Gamma}{D(k^2)} \frac{q^2 - M^2}{D(q^2)} \frac{l^2 - m^2}{d(l^2)} \pi \delta(p^2 - m^2) \\
&\quad - \frac{k^2 - M^2}{D(k^2)} \frac{M \Gamma}{D(q^2)} \frac{p^2 - m^2}{d(p^2)} \pi \delta(l^2 - m^2) \\
&\quad - \frac{k^2 - M^2}{D(k^2)} \frac{M \Gamma}{D(q^2)} \frac{l^2 - m^2}{d(l^2)} \pi \delta(p^2 - m^2) \\
&\quad \left. + \frac{M \Gamma}{D(k^2)} \frac{M \Gamma}{D(q^2)} \pi \delta(l^2 - m^2) \pi \delta(p^2 - m^2) \right\} \tag{D.6}
\end{aligned}$$

gegeben ist. Um Gleichung (D.6) umzuformen, betrachtet man

$$\begin{aligned}
0 &= i \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \frac{d^4 l}{(2\pi)^4} \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} (2\pi)^4 \delta^4(k + p_1 - p_3 - q) (2\pi)^4 \delta^4(k + p_1 - l) \\
&\quad \times (2\pi)^4 \delta^4(k - p_2 + p) \Delta'_A(k) \Delta'_A(q) \Delta_A(l) \Delta_R(p) \\
&= i \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \Delta'_A(k) \Delta'_A(p_1 - p_3 + k) \Delta_A(p_1 + k) \Delta_R(p_2 - k). \tag{D.7}
\end{aligned}$$

Der Imaginärteil hiervon lautet

$$\begin{aligned}
0 &= \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \frac{d^4 l}{(2\pi)^4} \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} (2\pi)^4 \delta^4(k + p_1 - p_3 - q) (2\pi)^4 \delta^4(k + p_1 - l) \\
&\quad \times (2\pi)^4 \delta^4(k - p_2 + p) \left\{ \frac{k^2 - M^2}{D(k^2)} \frac{q^2 - M^2}{D(q^2)} \frac{l^2 - m^2}{d(l^2)} \frac{p^2 - m^2}{d(p^2)} \right. \\
&\quad + \frac{k^2 - M^2}{D(k^2)} \frac{q^2 - M^2}{D(q^2)} \pi^2 \delta(l^2 - m^2) \delta(p^2 - m^2) \sigma_l \sigma_p \\
&\quad - \frac{M \Gamma \frac{k_0}{\mathcal{E}_k}}{D(k^2)} \frac{M \Gamma \frac{q_0}{\mathcal{E}_q}}{D(q^2)} \frac{l^2 - m^2}{d(l^2)} \frac{p^2 - m^2}{d(p^2)} \\
&\quad - \frac{M \Gamma \frac{k_0}{\mathcal{E}_k}}{D(k^2)} \frac{q^2 - M^2}{D(q^2)} \frac{p^2 - m^2}{d(p^2)} \pi \delta(l^2 - m^2) \sigma_l \\
&\quad + \frac{M \Gamma \frac{k_0}{\mathcal{E}_k}}{D(k^2)} \frac{q^2 - M^2}{D(q^2)} \frac{l^2 - m^2}{d(l^2)} \pi \delta(p^2 - m^2) \sigma_p \\
&\quad - \frac{k^2 - M^2}{D(k^2)} \frac{M \Gamma \frac{q_0}{\mathcal{E}_q}}{D(q^2)} \frac{p^2 - m^2}{d(p^2)} \pi \delta(l^2 - m^2) \sigma_l \\
&\quad + \frac{k^2 - M^2}{D(k^2)} \frac{M \Gamma \frac{q_0}{\mathcal{E}_q}}{D(q^2)} \frac{l^2 - m^2}{d(l^2)} \pi \delta(p^2 - m^2) \sigma_p \\
&\quad \left. - \frac{M \Gamma \frac{k_0}{\mathcal{E}_k}}{D(k^2)} \frac{M \Gamma \frac{q_0}{\mathcal{E}_q}}{D(q^2)} \pi \delta(l^2 - m^2) \pi \delta(p^2 - m^2) \sigma_l \sigma_p + \mathcal{O}(\Gamma^2) \right\}. \tag{D.8}
\end{aligned}$$

Subtrahiert man Gleichung (D.8) von Gleichung (D.6), erhält man schließlich

$$\begin{aligned}
\text{Im}[I_3] = & \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \frac{d^4 l}{(2\pi)^4} \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} (2\pi)^4 \delta^4(k + p_1 - p_3 - q) \\
& \times (2\pi)^4 \delta^4(k + p_1 - l) (2\pi)^4 \delta^4(k - p_2 + p) \\
& \left\{ -\frac{k^2 - M^2}{D(k^2)} \frac{q^2 - M^2}{D(q^2)} \pi^2 \delta(l^2 - m^2) \delta(p^2 - m^2) (1 + \sigma_l \sigma_p) \right. \\
& - \frac{M \Gamma \left(1 - \frac{k_0}{\varepsilon_k} \frac{q_0}{\varepsilon_q}\right)}{D(k^2)} \frac{M \Gamma}{D(q^2)} \frac{l^2 - m^2}{d(l^2)} \frac{p^2 - m^2}{d(p^2)} \\
& - \frac{M \Gamma \left(1 - \frac{k_0}{\varepsilon_k} \sigma_l\right)}{D(k^2)} \frac{q^2 - M^2}{D(q^2)} \frac{p^2 - m^2}{d(p^2)} \pi \delta(l^2 - m^2) \\
& - \frac{M \Gamma \left(1 + \frac{k_0}{\varepsilon_k} \sigma_p\right)}{D(k^2)} \frac{q^2 - M^2}{D(q^2)} \frac{l^2 - m^2}{d(l^2)} \pi \delta(p^2 - m^2) \\
& - \frac{k^2 - M^2}{D(k^2)} \frac{M \Gamma \left(1 - \frac{q_0}{\varepsilon_q} \sigma_l\right)}{D(q^2)} \frac{p^2 - m^2}{d(p^2)} \pi \delta(l^2 - m^2) \\
& \left. - \frac{k^2 - M^2}{D(k^2)} \frac{M \Gamma \left(1 + \frac{q_0}{\varepsilon_q} \sigma_p\right)}{D(q^2)} \frac{l^2 - m^2}{d(l^2)} \pi \delta(p^2 - m^2) + \mathcal{O}(\Gamma^2) \right\}.
\end{aligned} \tag{D.9}$$

Der Imaginärteil des Integrals ist durch die Summe aller möglichen Schnitte durch Propagatorpaare gegeben. Obwohl der Schnitt durch die beiden Propagatoren instabiler Teilchen (zweite Zeile in geschweiften Klammern) formal der höheren Ordnung ist ($\sim \mathcal{O}(\Gamma^2)$), wird er der Vollständigkeit halber aufgeführt.

Bis zur betrachteten Genauigkeit können in den Gleichungen (D.4) und (D.9) die Ersetzungen $\frac{x_0}{\varepsilon_x} \rightarrow \sigma_x$ vorgenommen werden. Den Grenzfall verschwindender Breiten erhält man dann durch die Ersetzung $M \Gamma \rightarrow M \Gamma + \epsilon$. Für $\Gamma = 0$ führt dies im Limes $\epsilon \rightarrow 0^+$ auf die Cutkosky-Regeln für Schleifenintegrale mit reellen Massen [45].

Mit Hilfe der Ergebnisse (D.4), (D.9) und (3.29) kann die perturbative Unitarität der Streuamplitude aus Abschnitt 3.1.2 auf Einschleifenniveau im CMS gezeigt werden.

Schließlich wird noch gezeigt, dass sich die obige Methode zur Bestimmung von Imaginärteilen unmittelbar auf Zweischleifenintegrale mit komplexen Massen verallgemeinern lässt. Dazu wird exemplarisch das folgende Zweischleifenintegral betrachtet, welches die Propagation eines stabilen und

zweier instabiler Teilchen beschreibt:

$$J(p) = \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \frac{d^4 l}{(2\pi)^4} (2\pi)^4 \delta^4(k + q + l - p) \Delta_F(k) \Delta'(q) \Delta'(l). \quad (\text{D.10})$$

Der Imaginärteil des Integrals lautet

$$\begin{aligned} \text{Im}[J(p)] = & \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \frac{d^4 l}{(2\pi)^4} (2\pi)^4 \delta^4(k + q + l - p) \\ & \times \left[-\frac{k^2 - m^2}{d(k^2)} \frac{q^2 - M^2}{D(q^2)} \frac{M \Gamma}{D(l^2)} - \frac{k^2 - m^2}{d(k^2)} \frac{M \Gamma}{D(q^2)} \frac{l^2 - M^2}{D(l^2)} \right. \\ & \left. - \pi \delta(k^2 - m^2) \frac{q^2 - M^2}{D(q^2)} \frac{l^2 - M^2}{D(l^2)} + \pi \delta(k^2 - m^2) \frac{M \Gamma}{D(q^2)} \frac{M \Gamma}{D(l^2)} \right]. \end{aligned} \quad (\text{D.11})$$

Zur Vereinfachung des ersten Terms aus Gleichung (D.11) nutzt man den Imaginärteil der Identität

$$0 = i \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} (2\pi)^4 \delta^4(k + q + l - p) \Delta_A(k) \Delta'_R(q), \quad (\text{D.12})$$

welcher gegeben ist durch

$$\begin{aligned} 0 = & \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} (2\pi)^4 \delta^4(k + q + l - p) \\ & \times \left[\frac{k^2 - m^2}{d(k^2)} \frac{q^2 - M^2}{D(q^2)} + \pi \delta(k^2 - m^2) \sigma_k \frac{M \Gamma \frac{g_0}{\mathcal{E}_q}}{D(q^2)} + \mathcal{O}(\Gamma^2) \right]. \end{aligned} \quad (\text{D.13})$$

Umformen von Gleichung (D.13) liefert die Beziehung

$$\begin{aligned} & \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} (2\pi)^4 \delta^4(k + q + l - p) \frac{k^2 - m^2}{d(k^2)} \frac{q^2 - M^2}{D(q^2)} = \\ & - \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} (2\pi)^4 \delta^4(k + q + l - p) \pi \delta(k^2 - m^2) \frac{M \Gamma \frac{g_0}{\mathcal{E}_q} \sigma_k}{D(q^2)} + \mathcal{O}(\Gamma^2). \end{aligned} \quad (\text{D.14})$$

Analog dazu lassen sich aus den Identitäten

$$\begin{aligned} 0 = & i \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} (2\pi)^4 \delta^4(k + q + l - p) \Delta_A(k) \Delta'_R(l), \\ 0 = & i \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \frac{d^4 l}{(2\pi)^4} (2\pi)^4 \delta^4(k + q + l - p) \Delta'_A(q) \Delta'_R(l), \end{aligned} \quad (\text{D.15})$$

die folgenden Beziehungen herleiten:

$$\begin{aligned}
& \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{d^4 l}{(2\pi)^4} (2\pi)^4 \delta^4(k+q+l-p) \frac{k^2 - m^2}{d(k^2)} \frac{l^2 - M^2}{D(l^2)} = \\
& - \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{d^4 l}{(2\pi)^4} (2\pi)^4 \delta^4(k+q+l-p) \pi \delta(k^2 - m^2) \frac{M \Gamma \frac{l_0}{\varepsilon_l} \sigma_k}{D(l^2)} + \mathcal{O}(\Gamma^2), \\
& \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \frac{d^4 l}{(2\pi)^4} (2\pi)^4 \delta^4(k+q+l-p) \frac{q^2 - M^2}{D(q^2)} \frac{l^2 - M^2}{D(l^2)} = \\
& - \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \frac{d^4 l}{(2\pi)^4} (2\pi)^4 \delta^4(k+q+l-p) \frac{M \Gamma \frac{q_0}{\varepsilon_q}}{D(q^2)} \frac{M \Gamma \frac{l_0}{\varepsilon_l}}{D(l^2)} + \mathcal{O}(\Gamma^4). \quad (\text{D.16})
\end{aligned}$$

Durch Einsetzen von Gleichungen (D.14) und (D.16) in Gleichung (D.11) erhält man das Endergebnis für den Imaginärteil:

$$\begin{aligned}
\text{Im}[J(p)] &= \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \frac{d^4 l}{(2\pi)^4} (2\pi)^4 \delta^4(k+q+l-p) \pi \delta(k^2 - m^2) \\
& \quad \times \frac{M^2 \Gamma^2 \left(1 + \sigma_k \frac{q_0}{\varepsilon_q} + \sigma_k \frac{l_0}{\varepsilon_l} + \frac{q_0 l_0}{\varepsilon_q \varepsilon_l}\right)}{D(q^2) D(l^2)} + \mathcal{O}(\Gamma^3) \\
&= \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \frac{d^4 l}{(2\pi)^4} (2\pi)^4 \delta^4(k+q+l-p) \pi \delta(k^2 - m^2) \\
& \quad \times \frac{M^2 \Gamma^2 (1 + \sigma_k \sigma_q + \sigma_k \sigma_l + \sigma_q \sigma_l)}{D(q^2) D(l^2)} + \mathcal{O}(\Gamma^3). \quad (\text{D.17})
\end{aligned}$$

In führender Ordnung $[\mathcal{O}(\Gamma^2)]$ ist der Imaginärteil des Zweischleifenintegrals somit durch den gleichzeitigen Schnitt aller drei Propagatoren gegeben.

D.2 Elastische Formfaktoren der Roperresonanz

In diesem Abschnitt werden die Ergebnisse für die elektromagnetischen Formfaktoren der Roperresonanz in Form von skalaren Integralen dargestellt. Die Impulse der Roperresonanz liegen auf der Massenschale, $p_i^2 = p_f^2 = z^2$. Da der Unterschied zwischen den jeweiligen physikalischen Massen und den Massen im chiralen Grenzfall der Ordnung $\mathcal{O}(q^2)$ ist, wird er in den Schleifenintegralen nicht berücksichtigt. Außerdem werden noch die folgenden Notationen eingeführt: $F_1^{** (i)} = F^i$ und $F_2^{** (i)} = G^i$. Die Baumgraphenbeiträge lauten

$$\begin{aligned}
F^{(t)} &= \frac{1 + \tau_3}{2} - z (\tau_3 d_6^R + 2 d_7^R) t, \\
G^{(t)} &= m_R (2 \tau_3 c_6^R + c_7^R) + \frac{m_R}{z} (\tau_3 d_6^R + 2 d_7^R) t
\end{aligned}$$

Die Schleifenbeiträge zu F_1^{**} sind gegeben durch

$$\begin{aligned}
F^{1+2} &= \frac{g_{NR}^2 \tau_3}{32 F^2 z_R \pi^2} \left\{ (-m - z_R) A_0(m^2) + (m - z_R) A_0(M^2) \right. \\
&\quad \left. + (m + z_R) [(m - z_R)^2 - M^2] B_0(z_R^2, m^2, M^2) \right\}, \\
F^3 &= \frac{g_{NR}^2 (\tau_3 - 3)}{256 F^2 z_R \pi^2 (t - 4z_R^2)^2} \left\{ -2(m + z_R) A_0(m^2) (4z_R^2 - t) [2(m - z_R) z_R \right. \\
&\quad \left. + t] + 2A_0(M^2) (4z_R^2 - t) [2z_R(m^2 + z_R^2) + mt] + (m + z_R) \right. \\
&\quad \times \left[2B_0(z_R^2, m^2, M^2) \left(-16(-m^3 + z_R m^2 + (M^2 - z_R^2)m + z_R^3) z_R^3 \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + (-m^3 + 11z_R m^2 + (M^2 - 15z_R^2)m + 5z_R^3 - 7z_R M^2) t z_R \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - (m^2 - 2z_R m + z_R^2 - M^2) t^2 \right) \right. \\
&\quad \left. + z_R(m + z_R) \left\{ t(t - 4z_R^2) - B_0(t, m^2, m^2) \right. \right. \\
&\quad \times [16(m^2 - 2z_R m + z_R^2 - M^2) z_R^2 + t^2 + 2(m^2 + 4z_R m - 7z_R^2 - M^2) t] \\
&\quad \left. + 2C_0(z_R^2, t, z_R^2, M^2, m^2, m^2) \left[8 \left(m^4 - 2z_R m^3 + 2(z_R^2 - M^2) m^2 \right. \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - 2(z_R^3 - z_R M^2) m + (z_R^2 - M^2)^2 \right) z_R^2 + (m - z_R)^2 t^2 + \left(m^4 + 4z_R m^3 \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - 2(7z_R^2 + M^2) m^2 + 4(3z_R^3 - z_R M^2) m - 3z_R^4 + M^4 \right. \right. \\
&\quad \left. \left. \left. + 10z_R^2 M^2 \right) t \right] \right\} \right\},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
F^4 = & \frac{g_{NR}^2 \tau_3}{32 F^2 \pi^2 (t - 4z_R^2)} \left(\frac{1}{3} A_0(M^2) [2(3m^2 + 6z_R m + z_R^2) + t] \right. \\
& + 2(m + z_R)^2 A_0(m^2) - \frac{(m + z_R)^2}{(t - 4z_R^2)} B_0(z_R^2, m^2, M^2) \\
& \left\{ (3z_R^2 - m^2 + 4z_R m + M^2) t - 16 z_R^2 (M^2 - m^2 + z_R m) \right\} \\
& + \frac{(m + z_R)^2}{(t - 4z_R^2)} C_0(z_R^2, t, z_R^2, m^2, M^2, M^2) \left\{ +m(m + 2z_R)t^2 + 8[m^4 \right. \\
& - 2z_R m^3 - 2M^2 m^2 + 2z_R(z_R^2 + M^2)m - z_R^4 + M^4]z_R^2 + (4z_R m^3 \\
& + m^4 + 2(z_R^2 - M^2)m^2 - 4z_R(3z_R^2 + M^2)m + 5z_R^4 + M^4 - 6z_R^2 M^2)t \left. \right\} \\
& + \frac{1}{6(t - 4z_R^2)} B_0(t, M^2, M^2) \left\{ -t^3 + (3m^2 + 6z_R m + 11z_R^2 + 4M^2)t^2 \right. \\
& + 2 \left[3m^4 + 18z_R m^3 + 3(8z_R^2 - M^2)m^2 \right. \\
& + 6(z_R^3 - z_R M^2)m - 11z_R^4 - 19z_R^2 M^2 \left. \right] t \\
& + 16z_R^2(3m^4 - 3(2z_R^2 + M^2)m^2 - 6z_R M^2 m + z_R^2(3z_R^2 + M^2)) \left. \right\} \\
& + \frac{1}{16} [48z_R^2 M^2 + 2t^2 - (9m^2 + 18z_R m + 17z_R^2 + 12M^2)t] \left. \right), \\
F^{5+6} = & - \frac{g_R^2 \tau_3 [B_0(z_R^2, z_R^2, M^2) M^2 + A_0(z_R^2)]}{16 F^2 \pi^2},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
F^7 &= \frac{(3 - \tau_3)g_R^2}{64F^2\pi^2 (t - 4z_R^2)^2} \left\{ z_R^2 (4z_R^2 - t) t + \frac{1}{2} (t^2 - 16z_R^4) A_0 (M^2) \right. \\
&\quad + (4z_R^2 - t) t A_0 (z_R^2) + M^2 (16z_R^4 + 6tz_R^2 - t^2) B_0 (z_R^2, z_R^2, M^2) \\
&\quad + z_R^2 [t (t - 2M^2) - 4z_R^2 (4M^2 + t)] B_0 (t, z_R^2, z_R^2) \\
&\quad \left. - 2z_R^2 M^2 [4 (2M^2 + t) z_R^2 - 16z_R^4 + M^2 t] C_0 (z_R^2, t, z_R^2, M^2, z_R^2, z_R^2) \right\}, \\
F^8 &= \frac{\tau_3 g_R^2}{96F^2\pi^2 (4z_R^2 - t)^2} \left[\frac{1}{3} (4z_R^2 - t) (24M^2 z_R^2 - 22tz_R^2 - 6M^2 t + t^2) \right. \\
&\quad + (-80z_R^4 + 16tz_R^2 + t^2) A_0 (M^2) + 24 (4z_R^4 - z_R^2 t) A_0 (z_R^2) \\
&\quad + 12 (16M^2 z_R^4 - 6tz_R^4 - M^2 t z_R^2) B_0 (z_R^2, z_R^2, M^2) \\
&\quad + \frac{1}{2} (M^2 (4t^2 - 128z_R^4 - 56tz_R^2) + 20t^2 z_R^2 + 80tz_R^4 - t^3) B_0 (t, M^2, M^2) \\
&\quad + 12 (8M^4 z_R^4 + 3t^2 z_R^4 - 12M^2 t z_R^4 + M^4 t z_R^2) \\
&\quad \left. \times C_0 (z_R^2, t, z_R^2, z_R^2, M^2, M^2) \right], \\
F^{9+10} &= \frac{\tau_3 [12A_0 (M^2) + 3B_0 (t, M^2, M^2) (t - 4M^2) + 2 (t - 6M^2)]}{576F^2\pi^2}, \\
F^{11+12} &= \frac{\tau_3 g_{\Delta R}^2}{864F^2 z_{\Delta}^2 z_R^2 \pi^2} \left\{ 4z_{\Delta} z_R^5 - 4z_{\Delta}^2 z_R^4 - 8M^2 z_R^4 - 12z_{\Delta}^3 z_R^3 - 12z_{\Delta} M^2 z_R^3 \right. \\
&\quad + 2z_R^6 + 3z_{\Delta}^4 z_R^2 - 3M^4 z_R^2 + 6 \left[z_{\Delta}^4 - (z_R^2 + 2M^2) z_{\Delta}^2 + (z_R^2 - M^2)^2 \right. \\
&\quad + 2z_R z_{\Delta}^3 + 2 (z_R^3 - z_R M^2) z_{\Delta} \left. \right] A_0 (z_{\Delta}^2) - 6 \left[z_{\Delta}^4 + 2z_R z_{\Delta}^3 - 2M^2 z_{\Delta}^2 \right. \\
&\quad \left. - 3z_R^2 M^2 - 2z_R (z_R^2 + M^2) z_{\Delta} - z_R^4 + M^4 \right] A_0 (M^2) \\
&\quad + \left[6z_R^2 z_{\Delta}^4 - 6z_{\Delta}^6 - 12z_R z_{\Delta}^5 + 18M^2 z_{\Delta}^4 - 12z_R^5 z_{\Delta} - 12z_R M^4 z_{\Delta} \right. \\
&\quad + 24z_R^3 z_{\Delta}^3 + 24z_R M^2 z_{\Delta}^3 + 6z_R^4 z_{\Delta}^2 - 18M^4 z_{\Delta}^2 + 12z_R^2 M^2 z_{\Delta}^2 \\
&\quad \left. + 24z_R^3 M^2 z_{\Delta} - 6z_R^6 + 6M^6 - 18z_R^2 M^4 + 18z_R^4 M^2 \right] B_0 (z_R^2, z_{\Delta}^2, M^2) \left. \right\},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
F_1^{13} = & \frac{g_{\Delta R}^2(5\tau_3 + 3)}{10368F^2 z_{\Delta}^4 z_R^3 \pi^2 (4z_R^2 - t)^2} \left(2(4z_R^2 - t) A_0(z_{\Delta}^2) \left\{ 3t^3 z_R^3 \right. \right. \\
& + 12z_{\Delta}^2 \left[3z_{\Delta}^4 - (z_R^2 + 6M^2) z_{\Delta}^2 - 20z_R^3 z_{\Delta} - 13z_R^4 + 3M^4 + 10z_R^2 M^2 \right] z_R^3 \\
& + \left[-22z_{\Delta}^5 - 39z_R z_{\Delta}^4 + (74z_R^2 + 26M^2) z_{\Delta}^3 + 52z_R M^2 z_{\Delta}^2 \right. \\
& - 4(3z_R^4 - 16M^2 z_R^2 + M^4) z_{\Delta} - 4z_R (5z_R^4 - 6M^2 z_R^2 + M^4) \left. \right] t z_R^2 \\
& + 2 \left[2z_{\Delta}^5 + 6z_R z_{\Delta}^4 - 2z_R (z_R^4 + 3M^2 z_R^2 - M^4) \right. \\
& + 2(z_R^2 - 2M^2) z_{\Delta}^3 + (3z_R^3 - 8z_R M^2) z_{\Delta}^2 + (2M^4 - 8z_R^2 M^2) z_{\Delta} \left. \right] t^2 \left. \right\} \\
& - 12C_0(z_R^2, t, z_R^2, M^2, z_{\Delta}^2, z_{\Delta}^2) \left\{ \left[z_{\Delta}^3 + z_R z_{\Delta}^2 - z_R^2 z_{\Delta} + 2M^2 z_{\Delta} - z_R^3 \right. \right. \\
& + z_R M^2 \left. \right]^2 t^3 + \left[5z_{\Delta}^8 + 2z_R z_{\Delta}^7 - 4(6z_R^2 + M^2) z_{\Delta}^6 - 2(9z_R^3 + 14M^2 z_R) z_{\Delta}^5 \right. \\
& + (30z_R^4 - 44M^2 z_R^2 - 6M^4) z_{\Delta}^4 + (30z_R^5 - 22M^2 z_R^3 + 8M^4 z_R) z_{\Delta}^3 \\
& + 4(-2z_R^6 + 3M^2 z_R^4 + M^6) z_{\Delta}^2 - (z_R^2 - M^2)^2 (3z_R^4 - 10M^2 z_R^2 - M^4) \\
& - 2(7z_R^7 - 15M^2 z_R^5 + 17M^4 z_R^3 - 9M^6 z_R) z_{\Delta} \left. \right] t^2 \\
& + \left[3z_{\Delta}^{10} - 4(8z_R^2 + 3M^2) z_{\Delta}^8 + (z_R^2 - M^2)^2 (3z_R^4 + 26M^2 z_R^2 + 3M^4) z_{\Delta}^2 \right. \\
& + (46z_R^3 + 42M^2 z_R) z_{\Delta}^7 + 2(37z_R^4 + 50M^2 z_R^2 + 9M^4 - 18z_R z_{\Delta}^9) z_{\Delta}^6 \\
& - 2(13z_R^5 - 38M^2 z_R^3 + 9M^4 z_R) z_{\Delta}^5 - 4(14z_R^6 - 25M^2 z_R^4 \\
& + 24M^4 z_R^2 + 3M^6) z_{\Delta}^4 - 2(7z_R^7 - 53M^2 z_R^5 + 37M^4 z_R^3 + 9M^6 z_R) z_{\Delta}^3 \\
& + 12z_R (z_R^2 - M^2)^4 z_{\Delta} + 8z_R^2 (z_R^2 - M^2)^4 \left. \right] t \\
& + 24z_{\Delta}^2 z_R^2 (z_{\Delta}^2 + 2z_R z_{\Delta} + z_R^2 - M^2)^2 \\
& \times \left[z_{\Delta}^4 - 2z_R z_{\Delta}^3 + 2(z_R^2 - M^2) z_{\Delta}^2 - 2(z_R^3 - z_R M^2) z_{\Delta} + (z_R^2 - M^2)^2 \right] \left. \right\} \\
& - 4B_0(z_R^2, z_{\Delta}^2, M^2) \left\{ 144z_{\Delta}^2 \left[z_{\Delta}^6 + z_R z_{\Delta}^5 - 3M^2 z_{\Delta}^4 + 2(z_R^3 - z_R M^2) z_{\Delta}^3 \right. \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + (z_R^4 + 3M^4) z_\Delta^2 + (2M^2 z_R^3 - 3z_R^5 + M^4 z_R) z_\Delta - 2z_R^6 - M^6 + 3z_R^4 M^2 \Big] z_R^5 \\
& - \left\{ 9z_R^8 + 98z_R z_\Delta^7 + 9(17z_R^2 - 3M^2) z_\Delta^6 + 4(5z_R^3 - 42z_R M^2) z_\Delta^5 \right. \\
& + 4(3z_R^7 - 23M^2 z_R^5 + 13M^4 z_R^3 + 7M^6 z_R) z_\Delta \\
& + (-97z_R^4 - 290M^2 z_R^2 + 27M^4) z_\Delta^4 - 2(65z_R^5 + 36M^2 z_R^3 - 21M^4 z_R) z_\Delta^3 \\
& + (-97z_R^6 + 33M^2 z_R^4 + 121M^4 z_R^2 - 9M^6) z_\Delta^2 \\
& + 16(2z_R^8 - 3M^2 z_R^6 + M^6 z_R^2) \Big\} t z_R^3 + \left[19z_\Delta^7 + 60z_R z_\Delta^6 + (22z_R^2 - 48M^2) z_\Delta^5 \right. \\
& - (89z_R^3 + 106M^2 z_R) z_\Delta^4 + (-77z_R^4 - 102M^2 z_R^2 + 39M^4) z_\Delta^3 \\
& + (22z_R^5 - 87M^2 z_R^3 + 59M^4 z_R) z_\Delta^2 + 2(18z_R^6 - 35M^2 z_R^4 + 22M^4 z_R^2 - 5M^6) z_\Delta \\
& + z_R(7z_R^2 - 13M^2)(z_R^2 - M^2)^2 \Big] t^2 z_R^2 \\
& - 2(z_\Delta + z_R)(z_\Delta^2 - 2z_R z_\Delta + z_R^2 - M^2)(z_\Delta^2 + 2z_R z_\Delta + z_R^2 - M^2)^2 t^3 \Big\} \\
& - 2(4z_R^2 - t) A_0(M^2) \left\{ 36z_\Delta^2(z_\Delta^4 - 2M^2 z_\Delta^2 + 4z_R^3 z_\Delta + 3z_R^4 + M^4 \right. \\
& + 3z_R^2 M^2) z_R^3 - \left[22z_\Delta^5 + 42z_R z_\Delta^4 + (38z_R^2 - 26M^2) z_\Delta^3 + (34z_R^3 - 55z_R M^2) z_\Delta^2 \right. \\
& + 4(3z_R^4 - 20M^2 z_R^2 + M^4) z_\Delta - 4(z_R^5 + 9M^2 z_R^3 - M^4 z_R) \Big] t z_R^2 \\
& + \left[4z_\Delta^5 + 12z_R z_\Delta^4 + 8(z_R^2 - M^2) z_\Delta^3 - 2(z_R^3 + 8M^2 z_R) z_\Delta^2 \right. \\
& + 4M^2(M^2 - 5z_R^2) z_\Delta + 2z_R^5 + 4z_R M^4 - 15z_R^3 M^2 \Big] t^2 \Big\} \\
& + B_0(t, z_\Delta^2, z_\Delta^2) \left\{ 3t^5 - (z_\Delta^2 + 12z_R z_\Delta + 4(5z_R^2 + M^2)) t^4 + \left[72z_R - 44z_\Delta^4 z_\Delta^3 \right. \right. \\
& + (34z_R^2 - 20M^2) z_\Delta^2 + 12z_R(7z_R^2 + M^2) z_\Delta + 22z_R^4 + 6M^4 \\
& + 20z_R^2 M^2 \Big] t^3 + 2 \left[33z_\Delta^6 - 6z_R z_\Delta^5 + 2(64z_R^2 - 3M^2) z_\Delta^4 - 6(37z_R^3 + 19M^2 z_R) z_\Delta^3 \right. \\
& + (-43z_R^4 + 8M^2 z_R^2 - 21M^4) z_\Delta^2 - 24(3z_R^5 - 2M^2 z_R^3 + 3M^4 z_R) z_\Delta
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -2 \left(5z_R^6 - 23M^2 z_R^4 + 15M^4 z_R^2 + 3M^6 \right) \Big] t^2 + 4 \Big[9z_\Delta^8 - 27(3z_R^2 + M^2) z_\Delta^6 \\
& - 54z_R z_\Delta^7 + 72z_R (2z_R^2 + M^2) z_\Delta^5 + (-149z_R^4 + 162M^2 z_R^2 + 27M^4) z_\Delta^4 \\
& - 6(z_R^5 - 38M^2 z_R^3 - 3M^4 z_R) z_\Delta^3 + (29z_R^6 + 37M^2 z_R^4 - 57M^4 z_R^2 - 9M^6) z_\Delta^2 \\
& + 36z_R (z_R^2 - M^2)^3 z_\Delta + 24z_R^2 (z_R^2 - M^2)^3 \Big] t \\
& + 96z_\Delta^2 z_R^2 \Big[3z_\Delta^6 + 6z_R z_\Delta^5 + (z_R^2 - 9M^2) z_\Delta^4 - 4(z_R^3 + 3M^2 z_R) z_\Delta^3 \\
& + (z_R^4 - 10M^2 z_R^2 + 9M^4) z_\Delta^2 + 6z_R (z_R^2 - M^2)^2 z_\Delta + 3(z_R^2 - M^2)^3 \Big] \Big\} \\
& + z_R^2 (4 - z_R t) \Big\{ 2z_R t^4 - z_R (13z_\Delta^2 + 4(z_R^2 + M^2)) t^3 \\
& + \Big[4z_\Delta^5 + 13z_R z_\Delta^4 - 8z_R^2 z_\Delta^3 + (38z_R^3 - 28z_R M^2) z_\Delta^2 \\
& + 4(z_R^4 - 6M^2 z_R^2 - M^4) z_\Delta - z_R (6z_R^4 - 4M^2 z_R^2 + M^4) \Big] t^2 \\
& + z_R \Big[3z_\Delta^6 - 148z_R z_\Delta^5 - 4(25z_R^2 + 3M^2) z_\Delta^4 + 28(5z_R^3 - 3z_R M^2) z_\Delta^3 \\
& + (56z_R^4 + 76M^2 z_R^2 + 9M^4) z_\Delta^2 + (-40z_R^5 + 96M^2 z_R^3 + 40M^4 z_R) z_\Delta \\
& - 16z_R^6 + 28z_R^2 M^4 \Big] t + 12z_\Delta^2 z_R^3 \Big[5z_\Delta^4 + 40z_R z_\Delta^3 + 4(5z_R^2 - 2M^2) z_\Delta^2 \\
& - 8(2z_R^3 - 3z_R M^2) z_\Delta - 10z_R^4 + 3M^4 + 24z_R^2 M^2 \Big] \Big\},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
F_1^{14} = & -\frac{g_{\Delta R}^2 \tau_3}{5184 F^2 z_{\Delta}^2 \pi^2 (4z_R^2 - t)} \left\{ -t^3 + (4z_R z_{\Delta} - 52z_{\Delta}^2 + 6z_R^2 + 4M^2) t^2 \right. \\
& + \left[36z_R z_{\Delta}^3 - 27z_{\Delta}^4 + 4(22z_R^2 + 3M^2) z_{\Delta}^2 + (44z_R^3 - 84z_R M^2) z_{\Delta} \right. \\
& \left. \left. - 8z_R^4 + 15M^4 - 28z_R^2 M^2 \right] t + 12z_R^2 \left[3z_{\Delta}^4 + 4(z_R^2 + 2M^2) z_{\Delta}^2 - 6z_R^4 \right. \right. \\
& \left. \left. - 8(z_R^3 - 2z_R M^2) z_{\Delta} - 11M^4 + 16z_R^2 M^2 \right] \right\} \\
& - \frac{g_{\Delta R}^2 \tau_3 A_0 (z_{\Delta}^2)}{288 F^2 z_{\Delta}^2 z_R^2 \pi^2 (4z_R^2 - t)} \left\{ \left[-2z_{\Delta}^4 - 6z_R z_{\Delta}^3 + 7z_R^2 z_{\Delta}^2 + 4M^2 z_{\Delta}^2 \right. \right. \\
& \left. \left. - 2z_R^3 z_{\Delta} + 6z_R M^2 z_{\Delta} + 2z_R^4 - 2M^4 \right] t - 4z_R^2 \left[-3z_{\Delta}^4 - 4z_R z_{\Delta}^3 \right. \right. \\
& \left. \left. + (z_R^2 + 6M^2) z_{\Delta}^2 + 4z_R M^2 z_{\Delta} + z_R^4 - 3M^4 + 2z_R^2 M^2 \right] \right\} \\
& + \frac{g_{\Delta R}^2 \tau_3 A_0 (M^2)}{864 F^2 z_{\Delta}^2 z_R^2 \pi^2 (4z_R^2 - t)} \left\{ 4 \left[9z_{\Delta}^4 + 12z_R z_{\Delta}^3 + 2(2z_R^2 - 9M^2) z_{\Delta}^2 \right. \right. \\
& \left. \left. + 4(2z_R^3 - 3z_R M^2) z_{\Delta} + 7z_R^4 + 9M^4 - 13z_R^2 M^2 \right] z_R^2 + \left[-6z_{\Delta}^4 - 18z_R z_{\Delta}^3 \right. \right. \\
& \left. \left. + 2(7z_R^2 + 6M^2) z_{\Delta}^2 - 2(7z_R^3 - 9z_R M^2) z_{\Delta} - 6M^4 + 7z_R^2 M^2 - z_R^2 t \right] t \right\} \\
& - \frac{g_{\Delta R}^2 \tau_3 B_0 (t, M^2, M^2)}{1728 F^2 z_{\Delta}^2 \pi^2 (t - 4z_R^2)^2} \left\{ t^4 + 2(8z_{\Delta}^2 - 2z_R z_{\Delta} - 5z_R^2 - M^2) t^3 \right. \\
& + 2 \left[21z_{\Delta}^4 - 78z_R z_{\Delta}^3 - 4(7z_R^2 + 5M^2) z_{\Delta}^2 + 2(5z_R^3 + 7M^2 z_R) z_{\Delta} \right. \\
& \left. \left. + 19z_R^4 - M^4 + 6z_R^2 M^2 \right] t^2 \right. \\
& + 4 \left[3z_{\Delta}^6 - 30z_R z_{\Delta}^5 + 9(3z_R^2 - M^2) z_{\Delta}^4 + 12(12z_R^3 + 5M^2 z_R) z_{\Delta}^3 \right. \\
& + (61z_R^4 - 46M^2 z_R^2 + 9M^4) z_{\Delta}^2 - 2(17z_R^5 - 8M^2 z_R^3 + 15M^4 z_R) z_{\Delta} \\
& \left. \left. - 11z_R^6 - 3M^6 + 19z_R^2 M^4 - 21z_R^4 M^2 \right] t \right. \\
& + 32z_R^2 \left[3z_{\Delta}^6 + 6z_R z_{\Delta}^5 - 3(z_R^2 + 3M^2) z_{\Delta}^4 - 12z_R (z_R^2 + M^2) z_{\Delta}^3 \right. \\
& \left. \left. + (-3z_R^4 - 2M^2 z_R^2 + 9M^4) z_{\Delta}^2 + (6z_R^5 - 4M^2 z_R^3 + 6M^4 z_R) z_{\Delta} + 3z_R^6 \right] \right\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -3M^6 + 5z_R^2 M^4 - 5z_R^4 M^2 \Big] \Big\} + \frac{g_{\Delta R}^2 \tau_3 B_0 (z_R^2, z_\Delta^2, M^2)}{144 F^2 z_\Delta^2 z_R^2 \pi^2 (t - 4z_R^2)^2} \\
& \times \left\{ 16 \left[2z_\Delta^6 + 3z_R z_\Delta^5 - (z_R^2 + 6M^2) z_\Delta^4 - 2(z_R^3 + 3M^2 z_R) z_\Delta^3 - z_R^6 \right. \right. \\
& - 2M^2 (z_R^2 - 3M^2) z_\Delta^2 - (z_R^5 + 2M^2 z_R^3 - 3M^4 z_R) z_\Delta - 2M^6 + 3z_R^2 M^4 \Big] z_R^4 \\
& + \left[(25z_R^2 + 27M^2) z_\Delta^4 - 9z_\Delta^6 + (44z_R^3 + 60M^2 z_R) z_\Delta^3 - 3(z_R^2 + 3M^2)^2 z_\Delta^2 \right. \\
& - 30z_R z_\Delta^5 + 10(z_R^5 + 2M^2 z_R^3 - 3M^4 z_R) z_\Delta + (z_R^2 - M^2)^2 (11z_R^2 + 9M^2) \Big] t z_R^2 \\
& + \left[z_\Delta^6 + 3z_R z_\Delta^5 - 3M^2 z_\Delta^4 - 6z_R (2z_R^2 + M^2) z_\Delta^3 + (6z_R^4 - M^2 z_R^2 + 3M^4) z_\Delta^2 \right. \\
& \left. \left. - 3(z_R^5 - z_R M^4) z_\Delta - (z_R^2 - M^2)^2 (z_R^2 + M^2) \right] t^2 \right\} \\
& - \frac{g_{\Delta R}^2 \tau_3 C_0 (t, z_R^2, z_\Delta^2, M^2, M^2, z_\Delta^2)}{144 F^2 z_\Delta^2 \pi^2 (t - 4z_R^2)^2} \left\{ 3z_\Delta^3 (z_\Delta - 2z_R) t^3 + 2z_\Delta \left[2z_\Delta^5 - 9z_R z_\Delta^4 \right. \right. \\
& - 2(z_R^2 + 2M^2) z_\Delta^3 + (17z_R^3 + 11M^2 z_R) z_\Delta^2 + 2(3z_R^4 - 4M^2 z_R^2 + M^4) z_\Delta \\
& - 2z_R (z_R^2 - M^2)^2 \Big] t^2 + \left[4(3z_R^2 - M^2) z_\Delta^6 - 10z_R z_\Delta^7 + 6(11z_R^3 + 5M^2 z_R) z_\Delta^5 \right. \\
& + z_\Delta^8 + 2(5z_R^4 - 16M^2 z_R^2 + 3M^4) z_\Delta^4 - 10(7z_R^5 + 6M^2 z_R^3 + 3M^4 z_R) z_\Delta^3 \\
& - 4(7z_R^6 - M^2 z_R^4 - 7M^4 z_R^2 + M^6) z_\Delta^2 + 2z_R (z_R^2 - M^2)^2 (7z_R^2 + 5M^2) z_\Delta \\
& + (z_R^2 - M^2)^3 (5z_R^2 - M^2) \Big] t + 8z_R^2 (z_\Delta^2 + 2z_R z_\Delta + z_R^2 - M^2)^2 \left[-2z_R z_\Delta^3 \right. \\
& \left. \left. + z_\Delta^4 - 2M^2 z_\Delta^2 + 2z_R (z_R^2 + M^2) z_\Delta - z_R^4 + M^4 \right] \right\}.
\end{aligned}$$

Mit $F_2^{** (i)} = G^i$ lauten die Schleifenbeiträge zu F_2^{**} ungleich null wie folgt:

$$\begin{aligned}
G^3 = & \frac{g_{NR}^2 z_R^2 (m + z_R)^2 (\tau_3 - 3)}{64 F^2 \pi^2 (4 z_R^2 - t)} + \frac{g_{NR}^2 (m + z_R)^2 (\tau_3 - 3) [A_0(m^2) - A_0(M^2)]}{64 F^2 \pi^2 (4 z_R^2 - t)} \\
& - \frac{g_{NR}^2 z_R (m + z_R)^2 (\tau_3 - 3)}{64 F^2 \pi^2 (t - 4 z_R^2)^2} B_0(t, m^2, m^2) \left[2 z_R (4 z_R m + z_R^2 + 3 M^2 - 3 m^2) \right. \\
& \left. + (z_R - 2 m) t \right] - \frac{g_{NR}^2 (m + z_R)^2 (\tau_3 - 3)}{64 F^2 \pi^2 (t - 4 z_R^2)^2} B_0(z_R^2, m^2, M^2) \\
& \times \left[-2 (4 z_R m + z_R^2 + 5 M^2 - 5 m^2) z_R^2 - (m^2 - 2 z_R m + z_R^2 - M^2) t \right] \\
& + \frac{g_{NR}^2 z_R (m + z_R)^2 (\tau_3 - 3)}{32 F^2 \pi^2 (t - 4 z_R^2)^2} C_0(z_R^2, t, z_R^2, M^2, m^2, m^2) \times \left\{ z_R \left[4 z_R m^3 \right. \right. \\
& \left. \left. - 3 m^4 + 2 (z_R^2 + 3 M^2) m^2 - 4 z_R (z_R^2 + M^2) m + z_R^4 - 3 M^4 + 2 z_R^2 M^2 \right] \right. \\
& \left. + \left[-m^3 + z_R m^2 + (z_R^2 + M^2) m - z_R (z_R^2 + 2 M^2) \right] t \right\}, \\
G^4 = & \frac{g_{NR}^2 z_R^2 (m + z_R)^2 \tau_3}{16 F^2 \pi^2 (4 z_R^2 - t)} - \frac{g_{NR}^2 (m + z_R)^2 \tau_3 [A_0(m^2) - A_0(M^2)]}{16 F^2 \pi^2 (4 z_R^2 - t)} \\
& - \frac{g_{NR}^2 z_R (m + z_R)^2 \tau_3 B_0(t, M^2, M^2)}{16 F^2 \pi^2 (t - 4 z_R^2)^2} \left[2 z_R (3 m^2 - 4 z_R m + z_R^2 - 3 M^2) \right. \\
& \left. + (2 m + z_R) t \right] \\
& + \frac{g_{NR}^2 (m + z_R)^2 \tau_3 B_0(z_R^2, m^2, M^2)}{16 F^2 \pi^2 (t - 4 z_R^2)^2} \left[2 (5 m^2 - 4 z_R m + z_R^2 - 5 M^2) z_R^2 \right. \\
& \left. + (-m^2 + 2 z_R m + z_R^2 + M^2) t \right] \\
& - \frac{g_{NR}^2 z_R (m + z_R)^2 \tau_3}{16 F^2 \pi^2 (t - 4 z_R^2)^2} C_0(z_R^2, t, z_R^2, m^2, M^2, M^2) \\
& \times \left\{ m t^2 + 2 \left[m^3 + 2 z_R m^2 - (3 z_R^2 + M^2) m + z_R^3 - z_R M^2 \right] t - 2 z_R \left[-3 m^4 \right. \right. \\
& \left. \left. + 4 z_R m^3 + 2 (z_R^2 + 3 M^2) m^2 - 4 z_R (z_R^2 + M^2) m + z_R^4 - 3 M^4 + 2 z_R^2 M^2 \right] \right\},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
G^7 &= \frac{g_R^2 z_R^4 (\tau_3 - 3)}{16F^2 \pi^2 (4z_R^2 - t)} + \frac{g_R^2 z_R^2 (\tau_3 - 3) [A_0(z_R^2) - A_0(M^2)]}{16F^2 \pi^2 (4z_R^2 - t)} \\
&\quad - \frac{g_R^2 z_R^4 (\tau_3 - 3) B_0(t, z_R^2, z_R^2) (4z_R^2 + 6M^2 - t)}{16F^2 \pi^2 (t - 4z_R^2)^2} \\
&\quad + \frac{g_R^2 z_R^2 M^2 (\tau_3 - 3) B_0(z_R^2, z_R^2, M^2) (10z_R^2 - t)}{16F^2 \pi^2 (t - 4z_R^2)^2} \\
&\quad - \frac{g_R^2 z_R^4 M^2 (\tau_3 - 3) C_0(z_R^2, t, z_R^2, M^2, z_R^2, z_R^2) (-4z_R^2 + 3M^2 + t)}{8F^2 \pi^2 (t - 4z_R^2)^2}, \\
G^8 &= \frac{g_R^2 z_R^4 \tau_3}{4F^2 \pi^2 (4z_R^2 - t)} + \frac{g_R^2 z_R^2 \tau_3 [A_0(M^2) - A_0(z_R^2)]}{4F^2 \pi^2 (4z_R^2 - t)} \\
&\quad - \frac{3g_R^2 z_R^4 \tau_3 B_0(t, M^2, M^2) (t - 2M^2)}{4F^2 \pi^2 (t - 4z_R^2)^2} \\
&\quad + \frac{g_R^2 z_R^2 \tau_3 B_0(z_R^2, z_R^2, M^2) (4z_R^4 - 10M^2 z_R^2 + (2z_R^2 + M^2) t)}{4F^2 \pi^2 (t - 4z_R^2)^2} \\
&\quad - \frac{g_R^2 z_R^4 \tau_3}{4F^2 \pi^2 (t - 4z_R^2)^2} \left[6M^4 - 8z_R^2 M^2 + t^2 + 2(z_R^2 - 2M^2) t \right. \\
&\quad \times C_0(z_R^2, t, z_R^2, z_R^2, M^2, M^2) \left. \right], \\
G^{11+12} &= - \frac{g_{\Delta R}^2 \tau_3}{648F^2 z_\Delta^2 z_R^2 \pi^2} \left\{ \left[3z_\Delta^4 - 6z_R z_\Delta^3 - 2z_R^2 z_\Delta^2 + 2(z_R^3 - 3z_R M^2) z_\Delta + z_R^4 \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - 3M^4 - 4z_R^2 M^2 \right] z_R^2 + \left[z_\Delta^4 + 2z_R z_\Delta^3 - 2M^2 z_\Delta^2 - 2z_R (z_R^2 + M^2) z_\Delta \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - z_R^4 + M^4 - 3z_R^2 M^2 \right] 6A_0(M^2) - \left[z_\Delta^4 + 2z_R z_\Delta^3 - (z_R^2 + 2M^2) z_\Delta^2 \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + 2(z_R^3 - z_R M^2) z_\Delta + (z_R^2 - M^2)^2 \right] 6A_0(z_\Delta^2) + (z_\Delta^2 - 2z_R z_\Delta + z_R^2 \right. \\
&\quad \left. - M^2) (z_\Delta^2 + 2z_R z_\Delta + z_R^2 - M^2)^2 6B_0(z_R^2, z_\Delta^2, M^2) \right\},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
G^{13} = & \frac{g_{\Delta R}^2(5\tau_3 + 3)B_0(z_R^2, z_\Delta^2, M^2)}{1296F^2 z_\Delta^4 z_R \pi^2 (t - 4z_R^2)^2} \left\{ 2 \left[45z_\Delta^8 + 2z_R z_\Delta^7 - 5(23z_R^2 + 27M^2) z_\Delta^6 \right. \right. \\
& + 12(3z_R^3 - 2z_R M^2) z_\Delta^5 + (147z_R^4 + 166M^2 z_R^2 + 135M^4) z_\Delta^4 \\
& + (-18z_R^5 + 232M^2 z_R^3 + 42M^4 z_R) z_\Delta^3 \\
& - (69z_R^6 - 173M^2 z_R^4 + 59M^4 z_R^2 + 45M^6) z_\Delta^2 - 8z_R^2 (z_R^2 - M^2)^3 \\
& - 20z_R (z_R^2 - M^2)^2 (z_R^2 + M^2) z_\Delta \left. \right] z_R^3 - \left[9z_\Delta^8 + 2z_R z_\Delta^7 \right. \\
& - (85z_R^2 + 27M^2) z_\Delta^6 + 12z_R (M^2 - 5z_R^2) z_\Delta^5 \\
& + (153z_R^4 + 118M^2 z_R^2 + 27M^4) z_\Delta^4 + 2(63z_R^5 + 116M^2 z_R^3 - 15M^4 z_R) z_\Delta^3 \\
& - (75z_R^6 - 191M^2 z_R^4 + 71M^4 z_R^2 + 9M^6) z_\Delta^2 - 4(17z_R^7 - 20M^2 z_R^5 \\
& + 7M^4 z_R^3 - 4M^6 z_R z_\Delta - 2(z_R^2 - 19M^2)(z_R^3 - z_R M^2)^2 \left. \right] t z_R \\
& - 2(z_\Delta + 2z_R)(z_\Delta^2 - 2z_R z_\Delta + z_R^2 - M^2)(z_\Delta^2 + 2z_R z_\Delta + z_R^2 - M^2)^2 t^2 \left. \right\} \\
& + \frac{g_{\Delta R}^2 z_R(5\tau_3 + 3)C_0(z_R^2, t, z_R^2, M^2, z_\Delta^2, z_\Delta^2)}{216F^2 z_\Delta^4 \pi^2 (t - 4z_R^2)^2} \left\{ z_\Delta z_R \left[9z_\Delta^5 - 26z_R z_\Delta^4 \right. \right. \\
& + (22z_R M^2 - 6z_R^3) z_\Delta^2 + (9M^4 - 7z_R^4 - 2M^2 z_R^2) z_\Delta \\
& + 2(13z_R^2 - 9M^2) z_\Delta^3 + 4z_R (z_R^2 - M^2)^2 \left. \right] (z_\Delta^2 + 2z_R z_\Delta + z_R^2 - M^2)^2 \\
& + \left[(3z_R^2 - 4M^2) z_\Delta^5 - z_\Delta^7 - z_R z_\Delta^6 + 3z_R^3 z_\Delta^4 \right. \\
& + (7M^2 z_R^2 + 2M^4 - 3z_R^4) z_\Delta^3 + (-3z_R^5 - 2M^2 z_R^3 + 8M^4 z_R) z_\Delta^2 \\
& + (z_R^6 - 5M^2 z_R^4 + M^4 z_R^2 + 3M^6) z_\Delta + z_R^7 + 2z_R M^6 - 3z_R^3 M^4 \left. \right] t^2 \\
& - \left[4z_\Delta^9 - 3z_R z_\Delta^8 - 10(2z_R^2 + M^2) z_\Delta^7 + 4(2z_R^3 - 3z_R M^2) z_\Delta^6 \right. \\
& - 6(z_R^5 - 2M^2 z_R^3 - 5M^4 z_R) z_\Delta^4 + 2(-14z_R^6 + 4M^2 z_R^4 + 9M^4 z_R^2 + M^6) z_\Delta^3 \\
& - 4(3z_R M^6 - 8z_R^3 M^4 + 5z_R^5 M^2) z_\Delta^2 + 6(6z_R^4 + M^4) z_\Delta^5 \\
& + z_R (z_R^2 - M^2)^3 (z_R^2 + 3M^2) + 2(z_R^2 - M^2)^2 (4z_R^4 - M^2 z_R^2 - M^4) z_\Delta \left. \right] t \left. \right\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{g_{\Delta R}^2(5\tau_3 + 3)A_0(M^2)}{1296F^2z_{\Delta}^4\pi^2(4z_R^3 - z_R t)} \left\{ z_R \left[9z_{\Delta}^6 - 14z_R z_{\Delta}^5 - 2(13z_R^2 + 9M^2)z_{\Delta}^4 \right. \right. \\
& + 2(11z_R^3 + 5M^2z_R)z_{\Delta}^3 + (25z_R^4 + 66M^2z_R^2 + 9M^4)z_{\Delta}^2 + 4z_R(z_R^2 + M^2)^2 z_{\Delta} \\
& + 4(z_R^6 + 3M^2z_R^4 - M^4z_R^2) \left. \right] + \left[2(z_R^2 - 2M^2)z_{\Delta}^3 - 2(5z_R^3 + 6M^2z_R)z_{\Delta}^2 \right. \\
& + 2z_{\Delta}^5 + 8z_R z_{\Delta}^4 - 2(2z_R^4 + M^2z_R^2 - M^4)z_{\Delta} + 2z_R^5 + 4z_R M^4 - 9z_R^3 M^2 \left. \right] t \left. \right\} \\
& - \frac{g_{\Delta R}^2(5\tau_3 + 3)A_0(z_{\Delta}^2)}{1296F^2z_{\Delta}^4\pi^2(4z_R^3 - z_R t)} \left\{ z_R^2(z_R - 6z_{\Delta})t^2 + 2 \left[4z_R z_{\Delta}^4 + 2(8z_R^2 - M^2)z_{\Delta}^3 \right. \right. \\
& + z_{\Delta}^5 + 3(z_R^3 - 2z_R M^2)z_{\Delta}^2 + (12z_R^4 - M^2z_R^2 + M^4)z_{\Delta} + 2z_R M^4 - 4z_R^3 M^2 \left. \right] t \\
& + z_R \left[9z_{\Delta}^6 - 14z_R z_{\Delta}^5 - 2(13z_R^2 + 9M^2)z_{\Delta}^4 + (10z_R M^2 - 98z_R^3)z_{\Delta}^3 \right. \\
& + (-39z_R^4 + 66M^2z_R^2 + 9M^4)z_{\Delta}^2 + 4z_R(-3z_R^4 + 2M^2z_R^2 + M^4)z_{\Delta} \\
& - 4(z_R^3 - z_R M^2)^2 \left. \right] \left. \right\} \\
& - \frac{g_{\Delta R}^2 z_R(5\tau_3 + 3)}{2592F^2z_{\Delta}^4\pi^2(4z_R^2 - t)} \left\{ -2z_{\Delta}t^3 + z_{\Delta} \left[8z_{\Delta}^2 - 5z_R z_{\Delta} + 4(z_R^2 + M^2) \right] t^2 \right. \\
& + \left[-26z_{\Delta}^5 + 35z_R z_{\Delta}^4 - 2(3z_R^2 + 7M^2)z_{\Delta}^3 + (6z_R^3 + 4M^2z_R)z_{\Delta}^2 + 4M^4 z_{\Delta} \right. \\
& + 2z_R^5 + 5z_R M^4 + 4z_R^3 M^2 \left. \right] t + 2z_R \left[9z_{\Delta}^6 + 46z_R z_{\Delta}^5 - 2(32z_R^2 + 9M^2)z_{\Delta}^4 \right. \\
& + (13z_R^4 + 10M^2z_R^2 + 9M^4)z_{\Delta}^2 + 4z_R(5z_R^4 - 8M^2z_R^2 + M^4)z_{\Delta} \\
& - 22(z_R^3 - z_R M^2)z_{\Delta}^3 + 2z_R^2(4z_R^4 - 16M^2z_R^2 + M^4) \left. \right] \left. \right\} \\
& - \frac{g_{\Delta R}^2 z_R(5\tau_3 + 3)B_0(t, z_{\Delta}^2, z_{\Delta}^2)}{2592F^2z_{\Delta}^4\pi^2(t - 4z_R^2)^2} \left\{ (z_R - 6z_{\Delta})t^4 \right. \\
& + \left[32z_{\Delta}^3 + 5z_R z_{\Delta}^2 + 38z_R^2 z_{\Delta} - 8z_R^3 + 10M^2 z_{\Delta} \right] t^3 \\
& - 2 \left[10z_{\Delta}^5 + 18z_R z_{\Delta}^4 + 2(57z_R^2 + 10M^2)z_{\Delta}^3 + (5z_R^3 + 18M^2 z_R)z_{\Delta}^2 \right. \\
& + 2(7z_R^4 + 11M^2z_R^2 + 6M^4)z_{\Delta} - 5z_R^5 + 3z_R M^4 - 6z_R^3 M^2 \left. \right] t^2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -2 \left[24z_{\Delta}^7 - 27z_R z_{\Delta}^6 + 4(11z_R^6 - 11M^2 z_R^4 - 3M^4 z_R^2 + 3M^6) z_{\Delta} \right. \\
& - 2(61z_R^2 + 18M^2) z_{\Delta}^5 - 18(4z_R^3 + 3M^2 z_R) z_{\Delta}^4 - 2(75z_R^4 + 29M^2 z_R^2) z_{\Delta}^3 \\
& + (63M^4 z_R - 7z_R^5 - 72M^2 z_R^3) z_{\Delta}^2 + 6z_R (z_R^2 - M^2)^2 (z_R^2 + 3M^2) \Big] t \\
& + 4z_{\Delta} z_R \left[27z_{\Delta}^7 - 9(7z_R^2 + 9M^2) z_{\Delta}^5 + 12z_R (z_R^2 - M^2)^3 \right. \\
& - 8(7z_R^3 + 9M^2 z_R) z_{\Delta}^4 - 9(7z_R^4 + 2M^2 z_R^2 - 9M^4) z_{\Delta}^3 \\
& + (-26z_R^5 - 28M^2 z_R^3 + 54M^4 z_R) z_{\Delta}^2 + 27(z_R^2 - M^2)^3 z_{\Delta} + 30z_R z_{\Delta}^6 \Big] \Big\}, \\
G^{14} = & -\frac{g_{\Delta R}^2 \tau_3 B_0 (z_R^2, z_{\Delta}^2, M^2)}{216F^2 z_{\Delta}^2 z_R^2 \pi^2 (t - 4z_R^2)^2} \left\{ -2 \left[-31z_{\Delta}^6 - 26z_R z_{\Delta}^5 + 31(z_R^2 + 3M^2) z_{\Delta}^4 \right. \right. \\
& + (19z_R^4 + 26M^2 z_R^2 - 93M^4) z_{\Delta}^2 + (22z_R^5 + 4M^2 z_R^3 - 26M^4 z_R) z_{\Delta} \\
& + 4(7z_R^3 + 13M^2 z_R) z_{\Delta}^3 + (z_R^2 - M^2)^2 (5z_R^2 + 31M^2) \Big] z_R^4 \\
& + \left[-19z_{\Delta}^6 - 38z_R z_{\Delta}^5 + (67z_R^2 + 57M^2) z_{\Delta}^4 + (64z_R^3 + 76M^2 z_R) z_{\Delta}^3 \right. \\
& + (25z_R^4 - 40M^2 z_R^2 - 57M^4) z_{\Delta}^2 + 2(11z_R^5 + 8M^2 z_R^3 - 19M^4 z_R) z_{\Delta} \\
& + (z_R^2 - M^2)^2 (11z_R^2 + 19M^2) \Big] t z_R^2 + \left[- (5z_R^2 + 6M^2) z_{\Delta}^4 \right. \\
& - (17z_R^3 + 8M^2 z_R) z_{\Delta}^3 + 2(2z_R^4 + M^2 z_R^2 + 3M^4) z_{\Delta}^2 + 2z_{\Delta}^6 \\
& + 4z_R z_{\Delta}^5 + (M^2 z_R^3 - 5z_R^5 + 4M^4 z_R) z_{\Delta} - z_R^6 - 2M^6 + 3z_R^2 M^4 \Big] t^2 \Big\} \\
& - \frac{g_{\Delta R}^2 \tau_3 A_0 (M^2)}{216F^2 z_{\Delta}^2 z_R^2 \pi^2 (4z_R^2 - t)} \left\{ \left[11z_{\Delta}^4 + 10z_R z_{\Delta}^3 + (6z_R^2 - 22M^2) z_{\Delta}^2 \right. \right. \\
& + 10(3z_R^3 - z_R M^2) z_{\Delta} + 19z_R^4 + 11M^4 - 18z_R^2 M^2 \Big] z_R^2 + \left[-2z_{\Delta}^4 - 4z_R z_{\Delta}^3 \right. \\
& + (3z_R^2 + 4M^2) z_{\Delta}^2 + (4z_R M^2 - 9z_R^3) z_{\Delta} - 4z_R^4 - 2M^4 + 3z_R^2 M^2 \Big] t \Big\} \\
& + \frac{g_{\Delta R}^2 \tau_3 A_0 (z_{\Delta}^2)}{216F^2 z_{\Delta}^2 z_R^2 \pi^2 (4z_R^2 - t)} \left\{ \left[(5z_R^2 + 4M^2) z_{\Delta}^2 - (z_R^3 - 4z_R M^2) z_{\Delta} \right. \right. \\
& - 2z_{\Delta}^4 - 4z_R z_{\Delta}^3 + z_R^4 - 2M^4 + z_R^2 M^2 \Big] t - z_R^2 \left[+2(z_R^2 + 11M^2) z_{\Delta}^2 \right. \\
& - 11z_{\Delta}^4 - 10z_R z_{\Delta}^3 + 2(z_R^3 + 5M^2 z_R) z_{\Delta} + z_R^4 - 11M^4 + 10z_R^2 M^2 \Big] \Big\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{g_{\Delta R}^2 z_R \tau_3 C_0(t, z_R^2, z_R^2, M^2, M^2, z_\Delta^2)}{72 F^2 z_\Delta^2 \pi^2 (t - 4z_R^2)^2} \left\{ -3z_\Delta^3 t^3 \right. \\
& - 2z_\Delta \left[4z_\Delta^4 - 5z_R z_\Delta^3 - (9z_R^2 + 5M^2) z_\Delta^2 - 2(z_R^3 - z_R M^2) z_\Delta + (z_R^2 - M^2)^2 \right] t^2 \\
& - 2 \left[2z_\Delta^7 - 9z_R z_\Delta^6 - 2(7z_R^2 + 3M^2) z_\Delta^5 + (13z_R^3 + 19M^2 z_R) z_\Delta^4 \right. \\
& + 2(10z_R^4 + 7M^2 z_R^2 + 3M^4) z_\Delta^3 + (z_R^5 + 10M^2 z_R^3 - 11M^4 z_R) z_\Delta^2 \\
& \left. - 2(2z_R^6 - 3M^2 z_R^4 + M^6) z_\Delta - z_R (z_R^2 - M^2)^3 \right] t \\
& - 2z_R (z_\Delta^2 + 2z_R z_\Delta + z_R^2 - M^2)^2 (-3z_\Delta^4 + 10z_R z_\Delta^3 + (6M^2 - 10z_R^2) z_\Delta^2 \\
& \left. + 2(z_R^3 - 5z_R M^2) z_\Delta + z_R^4 - 3M^4 + 2z_R^2 M^2) \right\} \\
& + \frac{g_{\Delta R}^2 \tau_3}{1296 F^2 z_\Delta^2 \pi^2 (4z_R^2 - t)} \left\{ 2 \left[3z_\Delta^4 + 6z_R z_\Delta^3 + 2(41z_R^2 + 9M^2) z_\Delta^2 \right. \right. \\
& + 2(13z_R^3 - 63z_R M^2) z_\Delta - 17z_R^4 - 21M^4 + 2z_R^2 M^2 \left. \right] z_R^2 - (7z_\Delta + 3z_R) t^2 z_R \\
& \left. + \left[-6z_\Delta^4 + 6z_R z_\Delta^3 - 68z_R^2 z_\Delta^2 + 6(4z_R^3 + 9M^2 z_R) z_\Delta + 16z_R^4 + 6M^4 + 8z_R^2 M^2 \right] t \right\} \\
& + \frac{g_{\Delta R}^2 z_R \tau_3 B_0(t, M^2, M^2)}{432 F^2 z_\Delta^2 \pi^2 (t - 4z_R^2)^2} \left\{ (4z_\Delta + 3z_R) t^3 - 2 \left[18z_\Delta^3 - 9z_R z_\Delta^2 + 8(2z_R^2 + M^2) z_\Delta \right. \right. \\
& + 6z_R (2z_R^2 + M^2) \left. \right] t^2 + \left[-24z_\Delta^5 + 90z_R z_\Delta^4 \right. \\
& + 12(11z_R^2 + 4M^2) z_\Delta^3 - 24(z_R^3 + 4M^2 z_R) z_\Delta^2 + 4(7z_R^4 + 47M^2 z_R^2 - 6M^4) z_\Delta \\
& \left. + 6z_R (9z_R^4 + 14M^2 z_R^2 + M^4) \right] t \\
& + 4z_R \left[9z_\Delta^6 + 6z_R z_\Delta^5 - 27(z_R^2 + M^2) z_\Delta^4 - 12z_R (2z_R^2 + M^2) z_\Delta^3 \right. \\
& + 3(5z_R^4 + 2M^2 z_R^2 + 9M^4) z_\Delta^2 + 2(9z_R^5 - 44M^2 z_R^3 + 3M^4 z_R) z_\Delta \\
& \left. \left. + 3(z_R^6 - 21M^2 z_R^4 + 7M^4 z_R^2 - 3M^6) \right] \right\}.
\end{aligned}$$

Die Abzugsterme für G^i ungleich null sind gegeben durch

$$\begin{aligned}
\Delta G^3 &= \frac{g_{NR}^2(m+z_R)^2(\tau_3-3)}{512F^2m^2z_R^2\pi^2} \left\{ (5m^2-4z_Rm+z_R^2) A_0(m^2) \right. \\
&\quad + m^2 \left[(3m^2-4z_Rm-z_R^2) B_0(0, m^2, m^2) \right. \\
&\quad \left. \left. - 8(m-z_R)B_0(z_R^2, 0, m^2) m + 3m^2-4z_Rm+3z_R^2 \right] \right\}, \\
\Delta G^4 &= \frac{g_{NR}^2(m+z_R)\tau_3}{32F^2z_R^2\pi^2} \left[2B_0(z_R^2, 0, m^2) m^3 - 2A_0(m^2) m \right. \\
&\quad \left. + z_R^2(z_R-m) \right], \\
\Delta G^7 &= \frac{g_R^2z_R^2(\tau_3-3)}{32F^2\pi^2}, \\
\Delta G^8 &= -\frac{g_R^2\tau_3 [A_0(z_R^2) - z_R^2B_0(z_R^2, 0, z_R^2)]}{8F^2\pi^2}, \\
\Delta G^{11+12} &= \frac{g_{\Delta R}^2\tau_3}{648F^2z_\Delta^2z_R^2\pi^2} \left\{ 6(z_\Delta-z_R)^2B_0(z_R^2, 0, z_\Delta^2)(z_\Delta+z_R)^4 \right. \\
&\quad - z_R^2 \left(3z_\Delta^4 - 6z_Rz_\Delta^3 - 2z_R^2z_\Delta^2 + 2z_R^3z_\Delta + z_R^4 \right) \\
&\quad \left. - 6(z_\Delta^4 + 2z_Rz_\Delta^3 - z_R^2z_\Delta^2 + 2z_R^3z_\Delta + z_R^4) A_0(z_\Delta^2) \right\}, \\
\Delta G^{13} &= \frac{g_{\Delta R}^2(5\tau_3+3)}{2592F^2z_\Delta^4z_R^2\pi^2} \left[2(9z_\Delta^5 - 23z_Rz_\Delta^4 + 22z_R^2z_\Delta^3 - 6z_R^3z_\Delta^2 \right. \\
&\quad - z_R^4z_\Delta - z_R^5)B_0(z_R^2, 0, z_\Delta^2)(z_\Delta+z_R)^3 - z_R^2(9z_\Delta^6 + 28z_Rz_\Delta^5 \\
&\quad - 5z_R^2z_\Delta^4 - 7z_R^4z_\Delta^2 + 4z_R^5z_\Delta + 4z_R^6) + 2(-9z_\Delta^6 - 4z_Rz_\Delta^5 \\
&\quad \left. + 20z_R^2z_\Delta^4 + 36z_R^3z_\Delta^3 + 12z_R^4z_\Delta^2 + 4z_R^5z_\Delta + z_R^6)A_0(z_\Delta^2) \right], \\
\Delta G^{14} &= -\frac{g_{\Delta R}^2\tau_3}{1296F^2z_\Delta^2z_R^2\pi^2} \left\{ (-15z_\Delta^4 - 12z_Rz_\Delta^3 - 14z_R^2z_\Delta^2 + 14z_R^3z_\Delta \right. \\
&\quad + 13z_R^4)z_R^2 - 6(5z_\Delta^4 + 4z_Rz_\Delta^3 - 5z_R^2z_\Delta^2 - 5z_R^3z_\Delta - z_R^4) A_0(z_\Delta^2) \\
&\quad + 6(z_\Delta+z_R)^2 \left(5z_\Delta^4 - 6z_Rz_\Delta^3 \right. \\
&\quad \left. \left. + 2z_R^2z_\Delta^2 - 3z_R^3z_\Delta - z_R^4 \right) B_0(z_R^2, 0, z_\Delta^2) \right\}.
\end{aligned}$$

D.3 Formfaktoren des Übergangs vom Nukleon zur Roperresonanz

Dieser Abschnitt beinhaltet die Ergebnisse für die nichtverschwindenden, endlichen Abzugsterme der Formfaktoren des Übergangs vom Nukleon zur Roperresonanz:

$$\begin{aligned}
\Delta F_2^{*(1)} &= \frac{\mathfrak{g}_A g_{NR} \tau_3 (m + z_R) [(m - z_R)^2 B_0(z_R^2, 0, m^2) - A_0(m^2)]}{64\pi^2 F^2 z_R}, \\
\Delta F_2^{*(2)} &= -\frac{\mathfrak{g}_A g_{NR} \tau_3 A_0(m^2)}{32\pi^2 F^2}, \\
\Delta F_2^{*(3)} &= -\frac{3\mathfrak{g}_A g_{NR}}{256\pi^2 F^2 z_R (m - z_R)} \left(-4m^2 z_R^2 B_0(m^2, 0, m^2) \right. \\
&\quad + (4m^2 z_R^2 + z_R^4 - m^4) B_0(z_R^2, 0, m^2) \\
&\quad + (4m^2 z_R^4 - 4m^4 z_R^2) C_0(m^2, 0, z_R^2, 0, m^2, m^2) \\
&\quad \left. + A_0(m^2) (m^2 + 2mz_R - 3z_R^2) + 2m^3 z_R - 2mz_R^3 \right), \\
\Delta F_2^{*(4)} &= -\frac{\mathfrak{g}_A g_{NR} M_\rho^2 \tau_3}{256\pi^2 F^2 z_R (m - z_R) (M_\rho^2 - t)} \left[4m^2 z_R^2 B_0(m^2, 0, m^2) \right. \\
&\quad - (4m^2 z_R^2 + z_R^4 - m^4) B_0(z_R^2, 0, m^2) \\
&\quad - (4m^2 z_R^4 - 4m^4 z_R^2) C_0(m^2, 0, z_R^2, 0, m^2, m^2) \\
&\quad \left. - A_0(m^2) (m^2 + 2mz_R - 3z_R^2) - 2m^3 z_R + 2mz_R^3 \right], \\
\Delta F_2^{*(5)} &= \frac{\mathfrak{g}_A g_{NR} m M_\rho^2 \tau_3 (m + z_R) (B_0(z_R^2, 0, m^2) + 1)}{32\pi^2 F^2 (M_\rho^2 - t)}, \\
\Delta F_2^{*(6)} &= \frac{3\mathfrak{g}_A g_{NR} m A_0(m^2)}{64\pi^2 F^2 (m - z_R)}, \\
\Delta F_2^{*(7)} &= \frac{3\mathfrak{g}_A g_{NR} m M_\rho^2 \tau_3 A_0(m^2)}{64\pi^2 F^2 (m - z_R) (M_\rho^2 - t)}, \\
\Delta F_2^{*(8)} &= \frac{3\mathfrak{g}_A g_{NR} (m + z_R)^2 [(m - z_R)^2 B_0(z_R^2, 0, m^2) - A_0(m^2)]}{256\pi^2 F^2 z_R (m - z_R)}, \\
\Delta F_2^{*(9)} &= \frac{3\mathfrak{g}_A g_{NR} M_\rho^2 \tau_3 (m + z_R)^2 [(m - z_R)^2 B_0(z_R^2, 0, m^2) - A_0(m^2)]}{256\pi^2 F^2 z_R (m - z_R) (M_\rho^2 - t)},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Delta F_2^{*(10)} &= -\frac{g_{NR} g_R \tau_3 A_0(z_R^2)}{32\pi^2 F^2}, \\
\Delta F_2^{*(11)} &= \frac{g_{NR} g_R \tau_3 (m+z_R) [(m-z_R)^2 B_0(m^2, 0, z_R^2) - A_0(z_R^2)]}{64\pi^2 F^2 m}, \\
\Delta F_2^{*(12)} &= -\frac{3g_{NR} g_R}{256\pi^2 F^2 z_R (m^3 - m z_R^2)} \left\{ 2m z_R \left[(2m^2 z_R^2 + 2m z_R^3) B_0(z_R^2, 0, z_R^2) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + z_R(m+z_R)(z_R^2 - m^2)(2m z_R C_0(m^2, 0, z_R^2, 0, z_R^2, z_R^2) - 1) \right] \right. \\
&\quad \left. - z_R(m+z_R)(m^4 + 4m^2 z_R^2 - z_R^4) B_0(m^2, 0, z_R^2) \right. \\
&\quad \left. + A_0(z_R^2)(m^2 - z_R^2)(3m z_R + z_R^2) \right\}, \\
\Delta F_2^{*(13)} &= \frac{g_{NR} g_R M_\rho^2 \tau_3}{256\pi^2 F^2 z_R (m^3 - m z_R^2) (M_\rho^2 - t)} \left\{ 2m z_R \left[(2m^2 z_R^2 + 2m z_R^3) \right. \right. \\
&\quad \times B_0(z_R^2, 0, z_R^2) + z_R(m+z_R)(z_R^2 - m^2) \\
&\quad \times (2m z_R C_0(m^2, 0, z_R^2, 0, z_R^2, z_R^2) - 1) \left. \right] \\
&\quad - z_R(m+z_R)(m^4 + 4m^2 z_R^2 - z_R^4) B_0(m^2, 0, z_R^2) \\
&\quad \left. + A_0(z_R^2)(m^2 - z_R^2)(3m z_R + z_R^2) \right\}, \\
\Delta F_2^{*(14)} &= \frac{g_{NR} g_R z_R M_\rho^2 \tau_3 (m+z_R) [(m^2 - z_R^2) B_0(m^2, 0, z_R^2) + m^2 - z_R^2]}{32\pi^2 F^2 (m^2 - z_R^2) (M_\rho^2 - t)}, \\
\Delta F_2^{*(15)} &= -\frac{3g_{NR} g_R (m+z_R)^2 [(m-z_R)^2 B_0(m^2, 0, z_R^2) - A_0(z_R^2)]}{256\pi^2 F^2 m(m-z_R)}, \\
\Delta F_2^{*(16)} &= -\frac{3g_{NR} g_R M_\rho^2 \tau_3 (m+z_R)^2 [(m-z_R)^2 B_0(m^2, 0, z_R^2) - A_0(z_R^2)]}{256\pi^2 F^2 m(m-z_R) (M_\rho^2 - t)}, \\
\Delta F_2^{*(17)} &= -\frac{3g_{NR} g_R z_R A_0(z_R^2)}{64\pi^2 F^2 (m-z_R)}, \\
\Delta F_2^{*(18)} &= -\frac{3g_{NR} g_R z_R M_\rho^2 \tau_3 A_0(z_R^2)}{64\pi^2 F^2 (m-z_R) (M_\rho^2 - t)}.
\end{aligned}$$

D.4 Nukleon-Pion-Roper-Übergang

In diesem Abschnitt werden die Ergebnisse für die invarianten Amplituden der Feynmandiagramme aus Abbildung 7.3 in Form von skalaren Integralen dargestellt. Alle Impulse liegen auf der Massenschale, $P^2 = z^2$, $p^2 = m^2$, $q^2 = M^2$. Da der Unterschied zwischen den jeweiligen physikalischen Massen und den Massen im chiralen Grenzfall der Ordnung $\mathcal{O}(q^2)$ ist, wird er in den Schleifenintegralen nicht

berücksichtigt.

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}_{N\pi R}^{(1)} &= \frac{\mathfrak{g}_A(3m+z_R)}{4F^2} \left[M^2 B_0(m^2, m^2, M^2) + A_0(m^2) \right] \tau_a \gamma_5, \\
\mathcal{M}_{N\pi R}^{(2)} &= 0, \\
\mathcal{M}_{N\pi R}^{(3)} &= -3\tau_a \frac{\mathfrak{g}_A g_{NR} g_R m(m+z_R)}{64\pi^2 F^3(m-z_R)} \left[M^2 B_0(m^2, m^2, M^2) + A_0(m^2) \right] \tau_a \gamma_5, \\
\mathcal{M}_{N\pi R}^{(4)} &= -3 \frac{\mathfrak{g}_A^2 g_{NR} (m+z_R)^2}{256\pi^2 F^3 z_R (m-z_R)} \left[A_0(M^2)(m-z_R) - A_0(m^2)(m+z_R) \right. \\
&\quad \left. + (m+z_R)(m^2 - 2mz_R + z_R^2 - M^2) B_0(z_R^2, m^2, M^2) \right] \tau_a \gamma_5, \\
\mathcal{M}_{N\pi R}^{(5)} &= -\frac{g_{NR}(m+z_R)}{64F^3 m \pi^2} \left[-A_0(z_R^2)(m+z_R) + A_0(M^2)(z_R-m) \right. \\
&\quad \left. + (m+z_R)(m^2 - 2mz_R + z_R^2 - M^2) B_0(m^2, z_R^2, M^2) \right] \tau_a \gamma_5, \\
\mathcal{M}_{N\pi R}^{(6)} &= \frac{g_R(m+3z_R)}{64\pi^2 F^3} \left[M^2 B_0(z_R^2, z_R^2, M^2) + A_0(z_R^2) \right] \tau_a \gamma_5, \\
\mathcal{M}_{N\pi R}^{(7)} &= \frac{3g_{NR} g_R^2 (m+z_R)^2}{256\pi^2 F^3 m(m-z_R)} \left[A_0(z_R^2)(-m-z_R) + A_0(M^2)(z_R-m) \right. \\
&\quad \left. + (m+z_R)(m^2 - 2mz_R + z_R^2 - M^2) B_0(m^2, z_R^2, M^2) \right] \tau_a \gamma_5, \\
\mathcal{M}_{N\pi R}^{(8)} &= \frac{3\mathfrak{g}_A g_{NR} g_R z_R (m+z_R)}{64\pi^2 F^3 (m-z_R)} \left[M^2 B_0(z_R^2, z_R^2, M^2) + A_0(z_R^2) \right] \tau_a \gamma_5,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}_{N\pi R}^{(9)} &= \frac{\mathfrak{g}_A^2 g_{NR}(m+z_R)}{256\pi^2 F^3 z_R (m^2 - 2mz_R + z_R^2 - M^2)} \left[8m^2 z_R M^2 B_0(M^2, m^2, m^2) \right. \\
&\quad + (8m^3 z_R^2 - 8m^4 z_R) B_0(m^2, m^2, M^2) + (-m^5 + 5m^4 z_R - 2m^3 z_R^2 \\
&\quad + 2m^3 M^2 + 2m^2 z_R^3 - 6m^2 z_R M^2 - 5m z_R^4 + 6m z_R^2 M^2 - mM^4 \\
&\quad + z_R^5 - 2z_R^3 M^2 + z_R M^4) B_0(z_R^2, m^2, M^2) + (-8m^6 z_R + 8m^5 z_R^2 \\
&\quad + 8m^4 z_R^3 - 8m^3 z_R^4 + 8m^2 z_R M^4) C_0(M^2, z_R^2, m^2, m^2, m^2, M^2) \\
&\quad + A_0(m^2)(m - z_R)(m^2 - 2mz_R + z_R^2 - M^2) \\
&\quad \left. - A_0(M^2)(m + z_R)(m^2 - 2mz_R + z_R^2 - M^2) \right] \tau_a \gamma_5, \\
\mathcal{M}_{N\pi R}^{(10)} &= \frac{g_{NR} g_R^2(m+z_R)}{256\pi^2 F^3 m (m^2 - 2mz_R + z_R^2 - M^2)} \left[(8m^2 z_R^3 - 8m z_R^4) \right. \\
&\quad \times B_0(z_R^2, z_R^2, M^2) + (m^5 - 5m^4 z_R + 2m^3 z_R^2 - 2m^3 M^2 \\
&\quad - 2m^2 z_R^3 + 6m^2 z_R M^2 + 5m z_R^4 - 6m z_R^2 M^2 + mM^4 + 2z_R^3 M^2 \\
&\quad - z_R^5 - z_R M^4) B_0(m^2, z_R^2, M^2) + 8m z_R^2 M^2 B_0(M^2, z_R^2, z_R^2) \\
&\quad + (-8m^4 z_R^3 + 8m^3 z_R^4 + 8m^2 z_R^5 - 8m z_R^6 + 8m z_R^2 M^4) \\
&\quad \times C_0(M^2, z_R^2, m^2, z_R^2, z_R^2, M^2) \\
&\quad + A_0(z_R^2)(z_R - m)(m^2 - 2mz_R + z_R^2 - M^2) \\
&\quad \left. - A_0(M^2)(m + z_R)(m^2 - 2mz_R + z_R^2 - M^2) \right] \tau_a \gamma_5, \\
\mathcal{M}_{N\pi R}^{(11)} &= -\frac{\mathfrak{g}_A g_{NR} g_R}{128\pi^2 F^3} \left[(4m^2 z_R + 4m z_R^2) B_0(M^2, m^2, z_R^2) \right. \\
&\quad + M^2(m - z_R) B_0(m^2, m^2, M^2) + M^2(z_R - m) B_0(z_R^2, z_R^2, M^2) \\
&\quad + (4m^2 z_R M^2 + 4m z_R^2 M^2) C_0(M^2, z_R^2, m^2, m^2, z_R^2, M^2) \\
&\quad \left. + A_0(m^2)(m - z_R) + A_0(z_R^2)(z_R - m) + (m + z_R) A_0(M^2) \right] \tau_a \gamma_5,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}_{N\pi R}^{(12)} = & -\frac{g_{NR}^3(m+z_R)}{8F^3(m^2-2mz_R+z_R^2-M^2)} \left\{ 2m(m-z_R)(m+z_R)^2 \right. \\
& \times B_0(m^2, z_R^2, M^2) + 2z_R(z_R-m)(m+z_R)^2 B_0(z_R^2, m^2, M^2) \\
& + [-m^2(m+z_R)^2 - z_R^2(m+z_R)^2 \\
& - M^2(m+z_R)^2 + 2mz_R(m+z_R)^2] B_0(M^2, m^2, z_R^2) \\
& + [3m^4(m+z_R)^2 - 4m^3z_R(m+z_R)^2 + 2m^2z_R^2(m+z_R)^2 \\
& - 2m^2M^2(m+z_R)^2 + 3z_R^4(m+z_R)^2 - 4mz_R^3(m+z_R)^2 \\
& - 2z_R^2M^2(m+z_R)^2 - M^4(m+z_R)^2 \\
& + 4mz_RM^2(m+z_R)^2] C_0(M^2, z_R^2, m^2, z_R^2, m^2, M^2) \\
& \left. + A_0(M^2)(m^2-2mz_R+z_R^2-M^2) \right\} \tau_a \gamma_5, \\
\mathcal{M}_{N\pi R}^{(13)} = & -\frac{g_{NR}}{48\pi^2 F^3} \left[(m+z_R) A_0(M^2) \right] \tau_a \gamma_5, \\
\mathcal{M}_{N\pi R}^{(14)} = & -\frac{g_{NR}(m+z_R)}{128\pi^2 F^3 M^2 (m^2-2mz_R+z_R^2-M^2)} \left[-4(mz_R-z_R^2+M^2) \right. \\
& \times M_\rho^2 M^2 B_0(m^2, m^2, M_\rho^2) + (4mz_R M_\rho^2 M^2 - 4z_R^2 M_\rho^2 M^2) \\
& \times B_0(z_R^2, m^2, M^2) + B_0(M^2, M_\rho^2, M^2) (-m^2 M_\rho^4 + 6m^2 M_\rho^2 M^2 \\
& + 2mz_R M_\rho^4 - 12mz_R M_\rho^2 M^2 - z_R^2 M_\rho^4 + 6z_R^2 M_\rho^2 M^2 + M_\rho^4 M^2 \\
& - 2M_\rho^2 M^4) + (4m^4 M_\rho^2 M^2 - 8m^3 z_R M_\rho^2 M^2 + 8mz_R^3 M_\rho^2 M^2 \\
& + 4mz_R M_\rho^4 M^2 - 8mz_R M_\rho^2 M^4 - 4z_R^4 M_\rho^2 M^2 - 4z_R^2 M_\rho^4 M^2 \\
& + 8z_R^2 M_\rho^2 M^4 - 4M_\rho^2 M^6) C_0(M^2, z_R^2, m^2, M_\rho^2, M^2, m^2) \\
& - M_\rho^2 A_0(M^2)(m^2-2mz_R+z_R^2-M^2) \\
& \left. + A_0(M_\rho^2)(M_\rho^2-2M^2)(m^2-2mz_R+z_R^2-M^2) \right] \tau_a \gamma_5,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}_{N\pi R}^{(15)} = & \frac{g_{NR}(m+z_R)}{128\pi^2 F^3 M^2 (m^2 - 2mz_R + z_R^2 - M^2)} \left[4mM_\rho^2 M^2 (m - z_R) \right. \\
& \times B_0(m^2, z_R^2, M^2) + (-4m^2 M_\rho^2 M^2 + 4mz_R M_\rho^2 M^2 + 4M_\rho^2 M^4) \\
& \times B_0(z_R^2, z_R^2, M_\rho^2) + B_0(M^2, M_\rho^2, M^2) (m^2 M_\rho^4 - 6m^2 M_\rho^2 M^2 \\
& - 2mz_R M_\rho^4 + 12mz_R M_\rho^2 M^2 - 6z_R^2 M_\rho^2 M^2 - M_\rho^4 M^2 + 2M_\rho^2 M^4 \\
& + z_R^2 M_\rho^4) + (4m^4 M_\rho^2 M^2 - 8m^3 z_R M_\rho^2 M^2 + 4m^2 M_\rho^4 M^2 \\
& + 8mz_R^3 M_\rho^2 M^2 - 4mz_R M_\rho^4 M^2 + 8mz_R M_\rho^2 M^4 - 4z_R^4 M_\rho^2 M^2 \\
& + 4M_\rho^2 M^6 - 8m^2 M_\rho^2 M^4) C_0(M^2, z_R^2, m^2, M^2, M_\rho^2, z_R^2) \\
& + M_\rho^2 A_0(M^2) (m^2 - 2mz_R + z_R^2 - M^2) \\
& \left. + A_0(M_\rho^2) (M_\rho^2 - 2M^2) (-m^2 + 2mz_R - z_R^2 + M^2) \right] \tau_a \gamma_5.
\end{aligned}$$

Die Amplitude $\mathcal{M}_{N\pi R}^{(2)}$ ist null, da der $NN\pi\pi$ -Vertex erster Ordnung unter Berücksichtigung des Rhomesons verschwindet.

Die entsprechenden endlichen Abzugsterme ungleich null sind gegeben durch

$$\begin{aligned}
\Delta\mathcal{M}_{N\pi R}^{(1)} &= \frac{g_A A_0(m^2) (3m + z_R)}{64\pi^2 F^3} \tau_a \gamma_5, \\
\Delta\mathcal{M}_{N\pi R}^{(3)} &= - \frac{3g_A g_{NR} g_R m A_0(m^2) (m + z_R)}{64\pi^2 F^3 (m - z_R)} \tau_a \gamma_5, \\
\Delta\mathcal{M}_{N\pi R}^{(4)} &= \frac{3g_A^2 g_{NR} (m + z_R)^3 [(m - z_R)^2 B_0(z_R^2, 0, m^2) - A_0(m^2)]}{256\pi^2 F^3 z_R (z_R - m)} \tau_a \gamma_5, \\
\Delta\mathcal{M}_{N\pi R}^{(5)} &= - \frac{g_{NR} (m + z_R)^2 [(m - z_R)^2 B_0(m^2, 0, z_R^2) - A_0(z_R^2)]}{64\pi^2 F^3 m} \tau_a \gamma_5, \\
\Delta\mathcal{M}_{N\pi R}^{(6)} &= \frac{g_R A_0(z_R^2) (m + 3z_R)}{64\pi^2 F^3} \tau_a \gamma_5, \\
\Delta\mathcal{M}_{N\pi R}^{(7)} &= \frac{3g_{NR} g_R^2 (m + z_R)^3 [(m - z_R)^2 B_0(m^2, 0, z_R^2) - A_0(z_R^2)]}{256\pi^2 F^3 m (m - z_R)} \tau_a \gamma_5, \\
\Delta\mathcal{M}_{N\pi R}^{(8)} &= \frac{3g_A g_{NR} g_R z_R A_0(z_R^2) (m + z_R)}{64\pi^2 F^3 (m - z_R)} \tau_a \gamma_5,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Delta\mathcal{M}_{N\pi R}^{(9)} &= -\frac{g_A^2 g_{NR}(m+z_R)}{256\pi^2 F^3 z_R(m-z_R)} \left[8m^3 z_R B_0(m^2, 0, m^2) \right. \\
&\quad + (m^4 - 4m^3 z_R - 2m^2 z_R^2 - 4m z_R^3 + z_R^4) B_0(z_R^2, 0, m^2) \\
&\quad + (8m^5 z_R - 8m^3 z_R^3) C_0(0, z_R^2, m^2, m^2, m^2, 0) \\
&\quad \left. - A_0(m^2)(m-z_R)^2 \right] \tau_a \gamma_5, \\
\Delta\mathcal{M}_{N\pi R}^{(10)} &= \frac{g_{NR} g_R^2(m+z_R)}{256\pi^2 F^3 m(m-z_R)} \left[8m z_R^3 B_0(z_R^2, 0, z_R^2) \right. \\
&\quad + (m^4 - 4m^3 z_R - 2m^2 z_R^2 - 4m z_R^3 + z_R^4) B_0(m^2, 0, z_R^2) \\
&\quad + 8m z_R^3 (z_R^2 - m^2) C_0(0, z_R^2, m^2, z_R^2, z_R^2, 0) \\
&\quad \left. - A_0(z_R^2)(m-z_R)^2 \right] \tau_a \gamma_5, \\
\Delta\mathcal{M}_{N\pi R}^{(11)} &= -\frac{g_A g_{NR} g_R}{128\pi^2 F^3} \left\{ 4m z_R(m+z_R) B_0(0, m^2, z_R^2) \right. \\
&\quad \left. + [A_0(m^2)(m-z_R) + A_0(z_R^2)(z_R-m)] \right\} \tau_a \gamma_5, \\
\Delta\mathcal{M}_{N\pi R}^{(12)} &= -\frac{g_{NR}^3(m+z_R)^3}{128\pi^2 F^3(m-z_R)} \left[(z_R-m) B_0(0, m^2, z_R^2) \right. \\
&\quad + 2m B_0(m^2, 0, z_R^2) - 2z_R B_0(z_R^2, 0, m^2) \\
&\quad \left. + (3m^3 - m^2 z_R + m z_R^2 - 3z_R^3) C_0(0, z_R^2, m^2, z_R^2, m^2, 0) \right] \tau_a \gamma_5, \\
\Delta\mathcal{M}_{N\pi R}^{(14)} &= \frac{g_{NR} M_\rho^2(m+z_R)}{256\pi^2 F^3(z_R-m)} \left[8z_R(B_0(z_R^2, 0, m^2) - B_0(m^2, m^2, M_\rho^2)) \right. \\
&\quad + (8m^3 - 8m^2 z_R - 8m z_R^2 + 8z_R^3 + 8z_R M_\rho^2) \\
&\quad \left. \times C_0(0, z_R^2, m^2, M_\rho^2, 0, m^2) + (z_R-m)(12\ln(M_\rho) + 1) \right] \tau_a \gamma_5, \\
\Delta\mathcal{M}_{N\pi R}^{(15)} &= \frac{g_{NR} M_\rho^2(m+z_R)}{256\pi^2 F^3(m-z_R)} \left[8m(B_0(m^2, 0, z_R^2) - B_0(z_R^2, z_R^2, M_\rho^2)) \right. \\
&\quad + (8m^3 - 8m^2 z_R - 8m z_R^2 + 8m M_\rho^2 + 8z_R^3) \\
&\quad \left. \times C_0(0, z_R^2, m^2, 0, M_\rho^2, z_R^2) + (m-z_R)(12\ln(M_\rho) + 1) \right] \tau_a \gamma_5.
\end{aligned}$$

Literaturverzeichnis

- [1] D. J. Gross und F. Wilczek, Phys. Rev. Lett. **30**, 1343 (1973).
- [2] S. Weinberg, Phys. Rev. Lett. **31**, 494 (1973).
- [3] H. Fritzsch, M. Gell-Mann und H. Leutwyler, Phys. Lett. B **47**, 365 (1973).
- [4] D. J. Gross und F. Wilczek, Phys. Rev. D **8**, 3633 (1973).
- [5] S. Weinberg, Physica A **96**, 327 (1979).
- [6] J. Gasser und H. Leutwyler, Annals Phys. **158**, 142 (1984).
- [7] J. Gasser und H. Leutwyler, Nucl. Phys. **B250**, 465 (1985).
- [8] M. J. G. Veltman, Physica **29**, 186 (1963).
- [9] R. Ticciati, *Quantum Field Theory for Mathematicians* (Cambridge University Press, Cambridge, 1999).
- [10] A. Sirlin, Phys. Rev. Lett. **67**, 2127 (1991).
- [11] A. Sirlin, Phys. Lett. B **267**, 240 (1991).
- [12] S. Willenbrock und G. Valencia, Phys. Lett. B **259**, 373 (1991).
- [13] J. Gegelia *et al.*, in Proceedings of the *International Seminar on Quarks (Quark 92)*, Zvenigorod, Russland, 11.-17. Mai 1992, S.391
- [14] P. Gambino und P. A. Grassi, Phys. Rev. D **62**, 076002 (2000).
- [15] S. Willenbrock und G. Valencia, Phys. Lett. B **247**, 341 (1990).
- [16] G. Valencia und S. Willenbrock, Phys. Rev. D **42**, 853 (1990).
- [17] R. G. Stuart, Phys. Lett. B **262**, 113 (1991).

- [18] G. Passarino, C. Sturm und S. Uccirati, Nucl. Phys. **B834**, 77 (2010).
- [19] R. Workman, Phys. Rev. C **59**, 3441 (1999).
- [20] L. Tiator *et al.*, Eur. Phys. J. A **19**, 55 (2004).
- [21] V. D. Burkert und T. S. H. Lee, Int. J. Mod. Phys. E **13**, 1035 (2004).
- [22] M. Kotulla, Prog. Part. Nucl. Phys. **61**, 147 (2008).
- [23] D. Djukanovic, J. Gegelia und S. Scherer, Phys. Rev. D **76**, 037501 (2007).
- [24] J. Gegelia und S. Scherer, Eur. Phys. J. A **44**, 425 (2010).
- [25] J. Gasser, M. E. Sainio und A. Svarc, Nucl. Phys. **B307**, 779 (1988).
- [26] E. E. Jenkins und A. V. Manohar, Phys. Lett. B **255**, 558 (1991).
- [27] V. Bernard *et al.*, Nucl. Phys. **B388**, 315 (1992).
- [28] H. -B. Tang, arXiv:hep-ph/9607436.
- [29] P. J. Ellis und H. -B. Tang, Phys. Rev. C **57**, 3356 (1998).
- [30] J. Gegelia, G. Japaridze und X. Q. Wang, J. Phys. G **29**, 2303 (2003).
- [31] T. Becher und H. Leutwyler, Eur. Phys. J. C **9**, 643 (1999).
- [32] T. Fuchs *et al.*, Phys. Rev. D **68**, 056005 (2003).
- [33] M. R. Schindler, J. Gegelia und S. Scherer, Phys. Lett. B **586**, 258 (2004).
- [34] T. R. Hemmert, B. R. Holstein und J. Kambor, J. Phys. G **24**, 1831 (1998).
- [35] V. Pascalutsa und D. R. Phillips, Phys. Rev. C **67**, 055202 (2003).
- [36] V. Bernard, T. R. Hemmert und U.-G. Meißner, Phys. Lett. B **565**, 137 (2003).
- [37] C. Hacker *et al.*, Phys. Rev. C **72**, 055203 (2005).
- [38] D. Djukanovic *et al.*, Phys. Lett. B **680**, 235 (2009).
- [39] R. G. Stuart, in Z^0 *Physics*, ed. J. Tran Thanh Van (Editions Frontieres, Gif-sur-Yvette, 1990), S. 41.

- [40] A. Denner *et al.*, Nucl. Phys. **B560**, 33 (1999).
- [41] A. Denner *et al.*, Nucl. Phys. **B724**, 247 (2005).
- [42] A. Denner und S. Dittmaier, Nucl. Phys. Proc. Suppl. **160**, 22 (2006).
- [43] S. Actis und G. Passarino, Nucl. Phys. **B777**, 100 (2007).
- [44] S. Actis *et al.*, Phys. Lett. B **669**, 62 (2008).
- [45] R. E. Cutkosky, J. Math. Phys. **1**, 429 (1960).
- [46] T. Bauer, G. Japaridze, J. Gegelia und S. Scherer, *in Vorbereitung*.
- [47] D. Djukanovic, J. Gegelia und S. Scherer, Phys. Lett. B **690**, 123 (2010).
- [48] L. D. Roper, Phys. Rev. Lett. **12**, 340 (1964).
- [49] N. Isgur und G. Karl, Phys. Lett. B **72**, 109 (1977).
- [50] N. Isgur und G. Karl, Phys. Rev. D **19**, 2653 (1979).
- [51] R. Koniuk und N. Isgur, Phys. Rev. **D21**, 1868 (1980).
- [52] F. Stancu und P. Stassart, Phys. Rev. **D41**, 916 (1990).
- [53] J. M. Richard, Phys. Rept. **212**, 1 (1992).
- [54] L. Y. Glozman und D. O. Riska, Phys. Rept. **268**, 263 (1996).
- [55] D. B. Leinweber, Phys. Rev. D **51**, 6383 (1995).
- [56] S. Sasaki, T. Blum und S. Ohta, Phys. Rev. D **65**, 074503 (2002).
- [57] W. Melnitchouk *et al.*, Phys. Rev. D **67**, 114506 (2003).
- [58] R. G. Edwards *et al.*, Nucl. Phys. Proc. Suppl. **119**, 305 (2003).
- [59] F. X. Lee *et al.* Nucl. Phys. Proc. Suppl. **119**, 296 (2003).
- [60] N. Mathur *et al.*, Phys. Lett. B **605**, 137 (2005).
- [61] K. Sasaki, S. Sasaki und T. Hatsuda, Phys. Lett. B **623**, 208 (2005).
- [62] M. S. Mahbub *et al.*, Phys. Lett. B **679**, 418 (2009).
- [63] M. S. Mahbub *et al.*, Phys. Lett. B **693**, 351 (2010).

- [64] I. G. Aznauryan *et al.*, Phys. Rev. C **71**, 015201 (2005).
- [65] I. G. Aznauryan *et al.*, Phys. Rev. C **78**, 045209 (2008).
- [66] I. G. Aznauryan *et al.*, Phys. Rev. C **80**, 055203 (2009).
- [67] D. Drechsel, S. S. Kamalov und L. Tiator, Eur. Phys. J. A **34**, 69 (2007).
- [68] Z. -p. Li, V. Burkert und Z. -j. Li, Phys. Rev. D **46**, 70 (1992).
- [69] S. Capstick und P. R. Page, Phys. Rev. D **60**, 111501 (1999).
- [70] G. Ramalho und K. Tsushima, AIP Conf. Proc. **1374**, 353 (2011).
- [71] G. F. de Teramond und S. J. Brodsky, AIP Conf. Proc. **1257**, 59 (2010).
- [72] G. F. de Teramond und S. J. Brodsky, arXiv:hep-ph/1108.0965.
- [73] F. Cardarelli *et al.*, Phys. Lett. B **397**, 13 (1997).
- [74] F. Cano und P. Gonzalez, Phys. Lett. B **431**, 270 (1998).
- [75] P. Alberto *et al.*, Phys. Lett. B **523**, 273 (2001).
- [76] H. -W. Lin *et al.*, Phys. Rev. D **78**, 114508 (2008).
- [77] H. -W. Lin *et al.*, PoS LATTICE **2008**, 140 (2008).
- [78] B. Borasoy *et al.*, Phys. Lett. B **641**, 294 (2006).
- [79] J. Kambor, arXiv:hep-ph/9711484.
- [80] B. Kubis und U.-G. Meißner, Nucl. Phys. **A679**, 698 (2001).
- [81] M. R. Schindler, J. Gegelia und S. Scherer, Eur. Phys. J. A **26**, 1 (2005).
- [82] O. W. Greenberg, Phys. Rev. Lett. **13**, 598 (1964).
- [83] M. Y. Han und Y. Nambu, Phys. Rev. **139**, B1006 (1965).
- [84] H. D. Politzer, Phys. Rev. Lett. **30**, 1346 (1973).
- [85] R. Gupta, hep-lat/9807028.
- [86] S. Scherer, Adv. Nucl. Phys. **27**, 277 (2003).

- [87] S. Scherer und M. R. Schindler, *A Primer for Chiral Perturbation Theory* (Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 2012).
- [88] A. S. Kronfeld und C. Quigg, Am. J. Phys. **78**, 1081 (2010).
- [89] W. J. Marciano und H. Pagels, Phys. Rept. **36**, 137 (1978).
- [90] G. Altarelli, Phys. Rept. **81**, 1 (1982).
- [91] K. Nakamura *et al.*, J. Phys. G **37**, 075021 (2010).
- [92] S. L. Adler, Phys. Rev. **177**, 2426 (1969).
- [93] J. S. Bell und R. Jackiw, Nuovo Cim. A **60**, 47 (1969).
- [94] J. Goldstone, Nuovo Cim. **19**, 154 (1961).
- [95] J. Goldstone, A. Salam und S. Weinberg, Phys. Rev. **127**, 965 (1962).
- [96] S. Coleman, J. Math. Phys. **7**, 787 (1966).
- [97] H. Lehmann, K. Symanzik und W. Zimmermann, Nuovo Cim. **1**, 205 (1955).
- [98] J. C. Ward, Phys. Rev. **78**, 182 (1950).
- [99] Y. Takahashi, Nuovo Cim. **6**, 371 (1957).
- [100] H. Leutwyler, Annals Phys. **235**, 165 (1994).
- [101] J. Polchinski, arXiv:hep-th/9210046.
- [102] H. Georgi, Ann. Rev. Nucl. Part. Sci. **43**, 209 (1993).
- [103] D. B. Kaplan, arXiv:nucl-th/9506035.
- [104] A. V. Manohar, arXiv:hep-ph/9606222.
- [105] C. P. Burgess, Phys. Rept. **330**, 193 (2000).
- [106] A. Pich, arXiv:hep-ph/9806303.
- [107] I. Z. Rothstein, arXiv:hep-ph/0308266.
- [108] G. Ecker, hep-ph/0507056.
- [109] D. B. Kaplan, arXiv:nucl-th/0510023.

- [110] W. D. Goldberger, arXiv:hep-ph/0701129.
- [111] J. F. Donoghue, PoS EFT **09**, 001 (2009).
- [112] S. Weinberg, arXiv:hep-th/0908.1964.
- [113] S. Weinberg, *The Quantum Theory of Fields Volume I* (Cambridge University Press, Cambridge, 1995).
- [114] J. Bijnens, Prog. Part. Nucl. Phys. **58**, 521 (2007).
- [115] V. Bernard und U.-G. Meißner, Ann. Rev. Nucl. Part. Sci. **57**, 33 (2007).
- [116] S. Scherer, Prog. Part. Nucl. Phys. **64**, 1 (2010).
- [117] S. Necco, PoS **LAT2007**, 021 (2007).
- [118] S. Necco, PoS **CONFINEMENT**, 8024 (2008).
- [119] N. Fettes *et al.*, Annals Phys. **283**, 273 (2000).
- [120] G. Ecker *et al.*, Nucl. Phys. **B321**, 311 (1989).
- [121] J. F. Donoghue, C. Ramirez und G. Valencia, Phys. Rev. D **39**, 1947 (1989).
- [122] G. Ecker *et al.*, Phys. Lett. **B223**, 425 (1989).
- [123] J. J. Sakurai, *Currents and Mesons* (The University of Chicago Press, Chicago, 1969).
- [124] D. Drechsel *et al.*, Nucl. Phys. **A645**, 145 (1999).
- [125] M. C. Birse, Z. Phys. A **355**, 231 (1996).
- [126] M. Henneaux und C. Teitelboim, *Quantization of Gauge Systems* (Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 1992).
- [127] D. Djukanovic, J. Gegelia und S. Scherer, Int. J. Mod. Phys. A **25**, 3603 (2010).
- [128] M. Hilt, *Photo- und Elektropionproduktion in chiraler effektiver Feldtheorie*, Doktorarbeit, Johannes Gutenberg-Universität Mainz, 2011.
- [129] D. Djukanovic *et al.*, Phys. Rev. Lett. **93**, 122002 (2004).

- [130] S. Weinberg, Phys. Rev. **166**, 1568 (1968).
- [131] Riazuddin und Fayyazuddin, Phys. Rev. **147**, 1071 (1966).
- [132] K. Kawarabayashi und M. Suzuki, Phys. Rev. Lett. **16**, 255 (1966).
- [133] W. Rarita und J. S. Schwinger, Phys. Rev. **60**, 61 (1941).
- [134] H. B. Tang und P. J. Ellis, Phys. Lett. B **387**, 9 (1996).
- [135] T. Pilling, Int. J. Mod. Phys. A **20**, 2715 (2005).
- [136] P. A. Moldauer und K. M. Case, Phys. Rev. **102**, 279 (1956).
- [137] N. Wies, J. Gegelia und S. Scherer, Phys. Rev. D **73**, 094012 (2006).
- [138] L. M. Nath, B. Etemadi und J. D. Kimel, Phys. Rev. D **3**, 2153 (1971).
- [139] S. Kamefuchi, L. O’Raifeartaigh und A. Salam, Nucl. Phys. **28**, 529 (1961).
- [140] V. Pascalutsa, *Covariant Description of Pion-Nucleon Dynamics* (Print Partners-Ipskamp, Enschede, 1998).
- [141] R. Peierls, in Proceedings of the 1954 Glasgow Conference, S. 296 (Pergamon, New York, 1955).
- [142] P. T. Matthews und A. Salam, Phys. Rev. **112**, 283 (1958).
- [143] A. Denner, Fortsch. Phys. **41**, 307 (1993).
- [144] A. A. Slavnov, Theor. Math. Phys. **10**, 99 (1972).
- [145] J. C. Taylor, Nucl. Phys. **B33**, 436 (1971).
- [146] L. D. Landau, Nucl. Phys. **13**, 181 (1959).
- [147] S. Mandelstam, Phys. Rev. **115**, 1741 (1959).
- [148] R. G. Newton, Am. J. Phys. **44**, 639 (1976).
- [149] C. Itzykson und J. B. Zuber, *Quantum Field Theory* (McGraw-Hill, New York, 1980).
- [150] A. Zee, *Quantum Field Theory in a Nutshell* (Princeton University Press, Princeton, USA, 2010).
- [151] D. G. Boulware, Annals Phys. **56**, 140 (1970).

- [152] G. 't Hooft und M. J. G. Veltman, Nucl. Phys. **B44**, 189 (1972).
- [153] J. C. Collins, *Renormalization* (Cambridge University Press, Cambridge, England, 1984).
- [154] A. Denner, G. Weiglein und S. Dittmaier, Nucl. Phys. **B440**, 95 (1995).
- [155] V. Bernard, N. Kaiser und U.-G. Meißner, Nucl. Phys. **A611**, 429 (1996).
- [156] T. Fuchs *et al.*, Phys. Lett. B **575**, 11 (2003).
- [157] M. R. Schindler, J. Gegelia und S. Scherer, Nucl. Phys. **B682**, 367 (2004).
- [158] J. Gegelia, G. S. Japaridze und K. S. Turashvili, Theor. Math. Phys. **101**, 1313 (1994).
- [159] A. Denner und S. Dittmaier, Nucl. Phys. **B844**, 199 (2011).
- [160] M. Kotulla, Prog. Part. Nucl. Phys. **50**, 295 (2003).
- [161] D. J. Wilson *et al.*, Phys. Rev. C **85**, 025205 (2012).
- [162] A. M. Bincer, Phys. Rev. **118**, 855 (1960).
- [163] H. W. L. Naus und J. H. Koch, Phys. Rev. C **36**, 2459 (1987).
- [164] J. H. Koch, V. Pascalutsa und S. Scherer, Phys. Rev. C **65**, 045202 (2002).
- [165] M. R. Foldy, Phys. Rev. **87**, 688 (1952).
- [166] R. Mertig, M. Bohm und A. Denner, Comput. Phys. Commun. **64**, 345 (1991).
- [167] G. Passarino und M. J. G. Veltman, Nucl. Phys. **B160**, 151 (1979).
- [168] J. Gegelia, G. S. Japaridze und K. S. Turashvili, Theor. Math. Phys. **101**, 1313 (1994).
- [169] T. Hahn und M. Perez-Victoria, Comput. Phys. Commun. **118**, 153 (1999).
- [170] T. Ledwig, V. Pascalutsa und M. Vanderhaeghen, Phys. Rev. D **82**, 091301 (2010).

- [171] H. Merkel, private Mitteilung.
- [172] G. Devaraj und R. G. Stuart, Nucl. Phys. **B519**, 483 (1998).
- [173] M. Gell-Mann, R. J. Oakes und B. Renner, Phys. Rev. **175**, 2195 (1968).
- [174] T. D. Cohen und D. B. Leinweber, Comments Nucl. Part. Phys. **21**, 137 (1993).
- [175] D. B. Leinweber, A. W. Thomas und R. D. Young, Phys. Rev. Lett. **86**, 5011 (2001).
- [176] T. R. Hemmert und W. Weise, Eur. Phys. J. A **15**, 487 (2002).
- [177] T. Yamazaki *et al.*, Phys. Rev. D **79**, 114505 (2009).
- [178] S. N. Syritsyn *et al.*, Phys. Rev. D **81**, 034507 (2010).
- [179] C. Alexandrou *et al.*, Phys. Rev. D **83**, 114513 (2011).
- [180] S. Collins *et al.*, Phys. Rev. D **84**, 074507 (2011).
- [181] J. M. M. Hall, D. B. Leinweber und R. D. Young, arXiv:hep-lat/1201.6114.
- [182] C. Aubin *et al.*, Phys. Rev. D **79**, 051502 (2009).
- [183] C. Alexandrou *et al.*, Phys. Rev. D **79**, 014507 (2009).
- [184] C. Alexandrou *et al.*, Phys. Rev. D **83**, 014501 (2011).
- [185] S. Sasaki, Prog. Theor. Phys. Suppl. **151**, 143 (2003).
- [186] D. Guadagnoli, M. Papinutto und S. Simula, Phys. Lett. B **604**, 74 (2004).
- [187] H. -W. Lin und S. D. Cohen, arXiv:hep-lat/1108.2528.
- [188] U.-G. Meissner, PoS LAT **2005**, 009 (2006).
- [189] D. Djukanovic, J. Gegelia und S. Scherer, Eur. Phys. J. A **29**, 337 (2006).
- [190] L. Tiator und M. Vanderhaeghen, Phys. Lett. B **672**, 344 (2009).
- [191] L. Tiator *et al.*, Eur. Phys. J. ST **198**, 141 (2011).

- [192] I. G. Aznauryan und V. D. Burkert, Prog. Part. Nucl. Phys. **67**, 1 (2012).
- [193] R. C. E. Devenish, T. S. Eizenschitz und J. G. Körner, Phys. Rev. **D14**, 3063 (1976).
- [194] H. J. Weber, Phys. Rev. **C41**, 2783 (1990).
- [195] U.-G. Meißner und J. A. Oller, Nucl. Phys. **A673**, 311 (2000).
- [196] M. F. M. Lutz und E. E. Kolomeitsev, Nucl. Phys. **A700**, 193 (2002).
- [197] M. Döring *et al.*, Nucl. Phys. **A829**, 170 (2009).
- [198] H. Kamano *et al.*, Phys. Rev. C **81**, 065207 (2010).
- [199] A. Datta und S. Pakvasa, Phys. Rev. D **56**, 4322 (1997).
- [200] N. Fettes und U.-G. Meißner, Nucl. Phys. **A679**, 629 (2001).
- [201] K. Torikoshi und P. J. Ellis, Phys. Rev. C **67**, 015208 (2003).
- [202] B. Long und U. van Kolck, Nucl. Phys. **A840**, 39 (2010).
- [203] M. Mojžiš, Eur. Phys. J. C **2**, 181 (1998).
- [204] N. Fettes, U.-G. Meißner und S. Steininger, Nucl. Phys. **A640**, 199 (1998).
- [205] N. Fettes und U.-G. Meißner, Nucl. Phys. **A676**, 311 (2000).
- [206] N. Fettes und U.-G. Meißner, Nucl. Phys. **A693**, 693 (2001).
- [207] T. Becher und H. Leutwyler, JHEP **0106**, 017 (2001).
- [208] J. M. Alarcon *et al.*, Phys. Rev. C **83**, 055205 (2011).
- [209] B. Long und U. van Kolck, Nucl. Phys. **A870**, 72 (2011).
- [210] V. Pascalutsa and M. Vanderhaeghen, Phys. Rev. D **73**, 034003 (2006).
- [211] R. A. Arndt *et al.*, Phys. Rev. C **74**, 045205 (2006).
- [212] G. Höhler und H. Schopper, (Ed.), (Springer-Verlag, Berlin, 1983).
- [213] G. F. Chew *et al.* Phys. Rev. **106**, 1345 (1957).
- [214] G. F. Chew *et al.* Phys. Rev. **106**, 1337 (1957).

- [215] H. W. Griedhammer, T. R. Hemmert und B. Pasquini, Eur. Phys. J. A **20**, 293 (2004).
- [216] E. Amaldi, S. Fubini und G. Furlan, *Pion-Electroproduction at Low Energy and Hadron Form Factors* (Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1979).
- [217] D. Drechsel und L. Tiator, J. Phys. G **18**, 449 (1992).
- [218] R. M. Davidson, Czech. J. Phys. **44**, 365 (1995).
- [219] B. Pasquini, D. Drechsel und L. Tiator, Eur. Phys. J. A **34**, 387 (2007).
- [220] P. Denner, Phys. Rev. **124**, 2000 (1961).
- [221] J. S. Ball, Phys. Rev. **124**, 2014 (1961).
- [222] K. Jänich, *Funktionentheorie* (Springer-Verlag, Berlin, 2004).
- [223] E. Zeidler, *Quantum Field Theory 1* (Springer-Verlag, Berlin, 2006).
- [224] M. Abramowitz und I. A. Stegun, *Handbook of Mathematical Functions* (Dover, New York, 1965).
- [225] A. P. Prudnikov, Yu. A. Brychkov und O. I. Marichev, *Integrals and Series. Vol. 3 More special functions* (Moscow, Nauka, 1986).
- [226] G. 't Hooft und M. J. G. Veltman, Nucl. Phys. **B153**, 365 (1979).
- [227] P. Appell und J. Kampé de Fériet, *Fonctions hypergéométriques et hypersphériques. Polynômes d'Hermité* (Gauthier-Villars, Paris, 1926).
- [228] L. G. Cabral-Rosetti und M. A. Sanchis-Lozano, J. Phys. Conf. Ser. **37**, 82 (2006).
- [229] V. A. Smirnov *Feynman integral calculus* (Springer, Berlin, 2006).