

**Verzweigung periodischer  
Lösungen  
bei rein nichtlinearen  
Differentialgleichungssystemen  
in der Ebene**

Dissertation  
zur Erlangung des Grades

”Doktor der Naturwissenschaften”

am Fachbereich Mathematik  
der Johannes Gutenberg Universität  
in Mainz

Wolfgang Schmitt  
geb. in Mainz

Mainz, 26. April 2000

Tag der mündlichen Prüfung: 17.05.2000

# Einleitung

Untersucht man DGL der Form

$$\dot{x} = G(x, \mu) \quad (1)$$

mit  $G(x, \mu) : \mathbb{R}^n \times U(0) \rightarrow \mathbb{R}^n$  in der Umgebung isolierter stationärer Punkte  $x_s$  der DGL

$$\dot{x} = G(x, 0) \quad (2)$$

betrachtet man zunächst die Linearisierung von (2) in  $x_s$ , gegeben durch die Jakobimatrix  $J := D_x G(x_s, 0)$

$$\dot{x} = Jx \quad (3)$$

denn hat  $J$  nur Eigenwerte mit Realteil  $\neq 0$ , ist das Ergebnis wohlbekannt. Bezeichnet man mit  $p$  die Anzahl der Eigenwerte von  $J$  mit Realteil  $= 0$ , so existiert allgemein in einer Umgebung von  $x_s$  eine lokale invariante Zentrumsmannigfaltigkeit ("local invariant center manifold") der Dimension  $p$  ([60],[18] chapter 1). Das Verhalten der DGL (1) auf dieser Mannigfaltigkeit wird dann durch eine  $p$ -dimensionale DGL vollständig beschrieben. Für  $p = 1$  gibt es keine offenen Fragen mehr, doch bereits bei  $p = 2$  gilt dies nicht mehr. Die Beschäftigung mit nichtlinearen Differentialgleichungssystemen in der Ebene ist somit nicht nur Selbstzweck (z.B. für die sehr häufig auftretenden DGL 2. Ordnung), sondern liefert einen wichtigen Beitrag zum Verständnis höher dimensionaler DGL. Zur Behandlung von  $p = 2$  setzen wir o.B.d.A.  $x_s = 0$  und untersuchen dann die 2-dimensionale DGL

$$\dot{x} = F(x, \mu) \quad (4)$$

mit  $F(x, \mu) : \mathbb{R}^2 \times U(0) \rightarrow \mathbb{R}^2$  auf Existenz stationärer Punkte  $y(\mu)$  bzw. periodischer Lösungen  $p(t, \mu)$ , die vom stationären Punkt im Ursprung der DGL

$$\dot{x} = F(x, 0) \quad (5)$$

abzweigen, also  $y(0) = 0$  bzw.  $p(t, 0) \equiv 0$  erfüllen.

Wir können DGL (4) auch in der Form

$$\dot{x} = F_0(x) + \mu F_1(x) + R(x, \mu) \quad (6)$$

schreiben, dabei sind  $F_0(x)$  bzw.  $F_1(x)$  die ersten nichtverschwindenden Glieder der Taylorapproximation von  $F(x, 0)$  bzw.  $F_\mu(x, 0)$  und

$$R(x, \mu) = o(|x|^l + |\mu| |x|^m) \quad (7)$$

wenn man mit  $l = \text{ord}F_0(x)$  und  $m = \text{ord}F_1(x)$  den Grad der homogenen Polynome  $F_0(x)$  bzw.  $F_1(x)$  bezeichnet.

Damit lassen sich genau drei Fälle unterscheiden:

- $\text{ord}(F_0(x)) < \text{ord}(F_1(x))$
- $\text{ord}(F_0(x)) = \text{ord}(F_1(x))$
- $\text{ord}(F_0(x)) > \text{ord}(F_1(x))$

Im ersten Fall ist die Abzweigung stationärer Punkte bzw. periodischer Lösungen vom Ursprung in  $\mu = 0$  offensichtlich nur als Ausnahme möglich, daher können wir uns in dieser Arbeit auf die beiden noch verbleibenden Fälle beschränken.

Im zweiten Fall ist die Abzweigung stationärer Punkte ebenfalls nur als Ausnahme möglich, deswegen untersuchen wir hier nur die Abzweigung periodischer Lösungen, betrachten also insgesamt die drei Problemgruppen:

- (i)  $l = m$  Abzweigung periodischer Lösungen (Kapitel 3)
- (ii)  $l > m$  Abzweigung stationärer Punkte (Kapitel 4)
- (iii)  $l > m$  Abzweigung periodischer Lösungen (Kapitel 5)

Im Fall (i) ist für  $l = m = 1$  alles bekannt (Hopf-Verzweigung), es wurden aber trotz intensiver Recherche keine Arbeiten für  $l = m > 1$  gefunden (vgl. auch Bemerkung 3.1).

Im Fall (ii) ist für  $m = 1$  eine Lösung bekannt [46]. Die nicht generischen ( $m > 1$ ) Fälle scheinen ebenfalls noch nicht betrachtet worden zu sein.

Im verwandten Fall (iii) sind die generischen Fälle ( $m = 1$  und  $\mu \in \mathbb{R}^2$ ) gut untersucht ([18] chapter 4), allerdings wird dabei von  $F(x, \mu)$  Invarianz unter Rotation mit dem Winkel  $\frac{2\pi}{s}$ ,  $s \geq 2$ , gefordert (wobei für  $s=4$  noch nicht alles geklärt ist [7],[8]). Wir hingegen beschränken uns auf  $\mu \in \mathbb{R}$ , lassen aber  $m > 1$  zu und verzichten völlig auf Symmetriebedingungen.

Die Arbeit ist in fünf Kapitel aufgeteilt. Das erste enthält einige technische Hilfsmittel, die wichtig für die weiteren Abschnitte sind. Im zweiten Kapitel untersuchen wir ausführlich das Verhalten der DGL

$$\dot{x} = H(x) \quad (8)$$

mit  $H(x) := (H_1(x_1, x_2), H_2(x_1, x_2))$  homogene Polynome vom gleichen Grad, die sowohl die DGL der ersten Näherung von  $F(x, 0)$

$$\dot{x} = F_0(x) \quad (9)$$

als auch die DGL der ersten Näherung von  $F_\mu(x, 0)$

$$\dot{x} = F_1(x) \quad (10)$$

repräsentiert und dadurch eine wichtige Rolle bei der Untersuchung des Verzweigungsverhaltens vom stationären Punkt im Ursprung der DGL (4) spielt.

Mit dem dritten Kapitel beginnt das Herzstück dieser Arbeit. Die Lösung von Problem (i) ist der Hauptsatz dieses Kapitels. Er enthält als Spezialfall den klassischen Verzweigungssatz von E. Hopf, ist also eine Verallgemeinerung dieses wohlbekannten Ergebnisses. Für  $l = m > 1$  gibt es einen wesentlichen Unterschied zum klassischen ( $l = m = 1$ ) Fall: Die Frequenz der Verzweigungslösungen geht gegen 0 und nicht gegen eine Konstante  $\neq 0$  (das ist für  $l = m = 1$  der Imaginärteil des Eigenwertes der Jakobimatrix  $F_0$  von  $F(x, 0)$ ). Bei der Amplitude gibt es dagegen keine Unterschiede, sie ist (im generischen Fall) in erster Näherung  $\sim \sqrt[l]{|\mu|}$ , also unabhängig von  $l$  bzw.  $m$ .

Im 4. Kapitel beschäftigen wir uns mit Problem (ii), der Abzweigung stationärer Punkte im Fall  $l > m$ . Notwendig dafür ist das Verschwinden einer Art Determinante von  $F_0(x) := (Q_1(x_1, x_2), Q_2(x_1, x_2))$  und  $F_1(x) := (q_1(x_1, x_2), q_2(x_1, x_2))$

$$Q_1(x_1, x_2)q_2(x_1, x_2) - Q_2(x_1, x_2)q_1(x_1, x_2) = 0 \quad (11)$$

und hinreichend, daß die "Nullstellen"  $(\bar{x}_1, \bar{x}_2)$  von (11) (Geraden durch den Ursprung) "einfach" sind:

$$\left( -x_2 \frac{\partial}{\partial x_1} + x_1 \frac{\partial}{\partial x_2} \right) \left( Q_1(x_1, x_2)q_2(x_1, x_2) - Q_2(x_1, x_2)q_1(x_1, x_2) \right) \Big|_{(\bar{x}_1, \bar{x}_2)} \neq 0 \quad (12)$$

Die Verzweigungslösungen laufen dann in erster Näherung längs dieser Geraden und ihr Abstand vom Ursprung ist in erster Näherung  $\sim \sqrt[l-m]{|\mu|}$ . Wegen (12) war es dann noch möglich, die abgezweigten stationären Punkte vollständig zu klassifizieren.

Das 5. und letzte Kapitel behandelt dann in Ergänzung zum vorherigen, Problem (iii), die Abzweigung periodischer Lösungen im Fall  $l > m$ . Hinreichend dafür ist die asymptotische Stabilität (asymptotische Stabilität bei Zeitumkehr) des stationären Punktes im Ursprung der beiden DGL der ersten Näherungen

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= Q_1(x_1, x_2) & \dot{x}_1 &= q_1(x_1, x_2) \\ \dot{x}_2 &= Q_2(x_1, x_2) & \dot{x}_2 &= q_2(x_1, x_2) \end{aligned} \quad (13)$$

wegen  $l > m$  in dieser Arbeit die "äußere" bzw. "innere" DGL genannt.

Gilt  $R(x, \mu) \equiv 0$ , ist das sogar notwendig.

Die Eindeutigkeit der Verzweigungslösungen folgt überraschenderweise aus dem Nichterfülltsein der notwendigen Bedingung für die Abzweigung stationärer Punkte, also aus der Definitheit von  $Q_1(x_1, x_2)q_2(x_1, x_2) - Q_2(x_1, x_2)q_1(x_1, x_2)$ . Die

Amplitude der abgezweigten periodischen Lösungen ist in erster nichtverschwindender Näherung  $\sim \sqrt[l-m]{|\mu|}$ , während der Grenzwert der Frequenz (wie schon im 3. Kapitel bei  $l = m > 1$  beobachtet) für  $\mu \rightarrow 0$  nicht verschieden, sondern  $= 0$  ist.

Die ersten zwei Kapitel gehen in alle folgenden Kapitel ein, während das dritte nicht notwendig ist für die zwei letzten. Das fünfte Kapitel baut auf dem vierten auf, wurde aber so formuliert, daß es vor diesem gelesen werden kann.

# Kapitel 1

## Einige technische Hilfsmittel

### 1.1 Bemerkung:

In diesem Kapitel werden einige technische Hilfsmittel zusammengefaßt, die wichtig für die noch folgenden vier Kapitel sind. Diese hätten durchaus in einem Anhang Platz finden können, doch da einige Beweisideen auch in den folgenden Kapiteln von Bedeutung sind, wurden diese Hilfsmittel als eigenes Kapitel am Anfang dieser Arbeit belassen.

In Definition 1.2 definieren wir gerade bzw. ungerade periodische Funktionen, diskutieren im Satz 1.3 deren Eigenschaften, um dann im Satz 1.4 formale Potenzreihen mit periodischen Funktionen als Koeffizienten ebenfalls nach gerade und ungerade zu unterscheiden. In den Sätzen 1.5 bis 1.7 geben wir schließlich einige Eigenschaften dieser Potenzreihen an. Diese Potenzreihen findet man bei der Untersuchung von durch sukzessive Approximationen gewonnenen Lösungen der im Kapitel 3 betrachteten DGL in verallgemeinerten Polarkoordinaten.

Satz 1.8 behandelt das Verhalten uneigentlicher reeller Integrale an Polstellen, diese treten bei der Untersuchung stationärer Punkte in der Nähe von Sektorengrenzen auf.

Satz 1.9 enthält zwei Abschätzungen für bestimmte Integrale, die nützlich bei der Bestimmung des Index des stationären Punktes im Ursprung der im Kapitel 4 bzw. 5 betrachteten DGL sind.

Die beiden folgenden Sätze 1.10 und 1.11 geben acht Abschätzungen an, mit deren Hilfe im 5. Kapitel Scheitelsätze bewiesen werden, die wiederum zur Konstruktion von Poincaré-Bendixson Gebieten dienen.

Der zwar einfache aber wichtige Satz 1.12 erlaubt das "Kürzen" bzw. "Erweitern" in ebenen DGL und wird in allen folgenden Kapiteln ständig benutzt.

Satz 1.13 ist dann ein einfacher Scheitelsatz, der nicht direkt hinter Satz 1.11 steht, da im Beweis der Satz 1.12 benötigt wird, während Satz 1.14 als Korollar zum Satz von Poincaré-Bendixson aufgefaßt werden kann. In diesem Korollar wird die Nichtexistenz einer periodischen Trajektorie der im Satz 1.13 benutzten

DGL unter speziellen Voraussetzungen gezeigt.

Zum Schluß dieses Kapitels klassifiziert Satz 1.15 das bekannte Verhalten stationärer Punkte bei regulär linearisierbaren DGL. Bemerkung 1.16 erweitert dann die Aussagen von Satz 1.15 auf parameterabhängige DGL.

## 1.2 Definition:

Sei

$$\mathcal{P}_T := \left\{ p(t) \in C^0(\mathbb{R}) \mid p(t) = p(t+T) \quad T > 0 \quad \forall t \in \mathbb{R} \right\}$$

die Menge aller stetigen, periodischen Funktionen der Periode  $T > 0$ .

Definiere dann durch

$$\mathcal{P}_T^- := \left\{ p(t) \in \mathcal{P}_T \mid p(t) = -p\left(t + \frac{T}{2}\right) \right\}$$

$$\mathcal{P}_T^+ := \left\{ p(t) \in \mathcal{P}_T \mid p(t) = p\left(t + \frac{T}{2}\right) \right\} = \mathcal{P}_{\frac{T}{2}}$$

die Mengen aller geraden bzw. ungeraden, stetigen, periodischen Funktionen der Periode  $T > 0$ .

## 1.3 Satz:

Seien  $p^+, p_i^+ \in \mathcal{P}_T^+$  und  $p^-, p_i^- \in \mathcal{P}_T^-$   $i = 1, 2$ .

Dann gilt:

a)  $p_1^+ p_2^+ \in \mathcal{P}_T^+$

b)  $p_1^- p_2^- \in \mathcal{P}_T^+$

c)  $p^- p^+ \in \mathcal{P}_T^-$

d)  $\frac{d}{dt} p^-(t) \in \mathcal{P}_T^-$  falls  $p^-(t) \in C^1(\mathbb{R})$

e)  $\frac{d}{dt} p^+(t) \in \mathcal{P}_T^+$  falls  $p^+(t) \in C^1(\mathbb{R})$

$$\text{f)} \int_0^T p^-(t) dt = 0$$

$$\text{g)} \int_0^t p^-(s) ds \in \mathcal{P}_T$$

Ist zusätzlich  $\int_0^T p^+(t) dt = 0$ , gilt noch:

$$\text{h)} \int_0^t p^+(s) ds \in \mathcal{P}_T^+$$

$$\text{k)} \int_0^T p^-(t) \left( \int_0^t p^+(s) ds \right) dt = 0$$

Beweis:

a), b), c), d), e) folgen sofort aus den Definitionen

$$\begin{aligned} \text{f)} \int_0^T p^-(t) dt &= \int_0^{\frac{T}{2}} p^-(t) dt + \int_{\frac{T}{2}}^T p^-(t) dt = \int_0^{\frac{T}{2}} p^-(t) dt + \int_0^{\frac{T}{2}} p^-(t + \frac{T}{2}) dt = \\ &= \int_0^{\frac{T}{2}} p^-(t) dt - \int_0^{\frac{T}{2}} p^-(t) dt = 0 \end{aligned}$$

$$\text{g)} \int_0^t p^-(s) ds \stackrel{\text{f)}}{=} \int_0^t p^-(s) ds + \int_t^{t+T} p^-(s) ds = \int_0^{t+T} p^-(s) ds$$

$$\begin{aligned} \text{h)} \int_0^T p^+(t) dt = 0 &= \int_0^{\frac{T}{2}} p^+(t) dt + \int_{\frac{T}{2}}^T p^+(t) dt \stackrel{p^+ \in \mathcal{P}_T^+}{=} 2 \int_0^{\frac{T}{2}} p^+(t) dt \implies \int_t^{t+\frac{T}{2}} p^+(t) dt = 0 \implies \\ &\implies \int_0^t p^+(s) ds = \int_0^t p^+(s) ds + \int_t^{t+\frac{T}{2}} p^+(s) ds = \int_0^{t+\frac{T}{2}} p^+(s) ds. \end{aligned}$$

k) Folgt direkt aus h), c) und f).

## 1.4 Definition:

Sei

$$\mathfrak{P}_T := \left\{ \sum_{i=0}^{\infty} p_i(t) x^i \mid p_i(t) \in \mathcal{P}_T \right\}$$

die Menge aller reellen formalen Potenzreihen mit Koeffizienten in  $\mathcal{P}_T$ .

Definiere dann:

$$\mathfrak{P}_T^+ := \left\{ \sum_{i=0}^{\infty} p_i(t) x^i \mid p_{2k}(t) \in \mathcal{P}_T^+, p_{2k+1}(t) \in \mathcal{P}_T^-, k \geq 0 \right\}$$

$$\mathfrak{P}_T^- := \left\{ \sum_{i=0}^{\infty} p_i(t) x^i \mid p_{2k}(t) \in \mathcal{P}_T^-, p_{2k+1}(t) \in \mathcal{P}_T^+, k \geq 0 \right\}$$

Insbesondere sind wegen  $0 \in \mathcal{P}_T^+ \cap \mathcal{P}_T^-$  natürlich auch Polynome in  $\mathfrak{P}_T$ ,  $\mathfrak{P}_T^-$ ,  $\mathfrak{P}_T^+$  zugelassen.

## 1.5 Satz:

Seien  $\mathfrak{p}^+, \mathfrak{p}_i^+ \in \mathfrak{P}_T^+$ ,  $\mathfrak{p}^-, \mathfrak{p}_i^- \in \mathfrak{P}_T^-$ .

Dann gilt:

a)  $\mathfrak{p}_1^+ \mathfrak{p}_2^+ \in \mathfrak{P}_T^+$

b)  $\mathfrak{p}_1^- \mathfrak{p}_2^- \in \mathfrak{P}_T^+$

c)  $\mathfrak{p}^- \mathfrak{p}^+ \in \mathfrak{P}_T^-$

d)  $\prod_{i=1}^l \mathfrak{p}_i^+ \in \mathfrak{P}_T^+$

e)  $\prod_{i=1}^{2k} \mathfrak{p}_i^- \in \mathfrak{P}_T^+$

f)  $\prod_{i=1}^{2k+1} \mathfrak{p}_i^- \in \mathfrak{P}_T^-$

Beweis:

Die hier vorliegenden Produkte sind Cauchy-Produkte, es gilt also die Produktformel:

$$\left( \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i \right) \left( \sum_{i=0}^{\infty} b_i x^i \right) = \left( \sum_{j=0}^{\infty} c_j x^j \right) \quad \text{mit } c_j := \sum_{i=0}^j a_{j-i} b_i$$

(Im Folgenden wird wegen  $0 \equiv 0 \pmod{2}$  Null als gerade Zahl behandelt)  
 $c_j$  besteht bei geradem  $j$  aus Produkten derart, daß entweder  $a$  und  $b$  einen geraden oder  $a$  und  $b$  einen ungeraden Index besitzen.  
 $c_j$  besteht bei ungeradem  $j$  aus Produkten derart, daß  $a$  und  $b$  nicht beide einen geraden und nicht beide einen ungeraden Index besitzen.  
Damit folgen mit 1.3 a),b),c) die Behauptungen a),b),c).  
Die Behauptungen d),e) und f) folgen durch wiederholte Anwendung von a),b),c).

## 1.6 Satz:

Seien  $\mathbf{p}_i = \mathbf{p}_i(x, t) \in \mathfrak{P}_T^+$   $i = 1, 2$  Polynome in  $x$  mit  $\text{grad } \mathbf{p}_i = m \in \mathbb{N}$  und sei  $\mathbf{p}_1(0, t) \equiv 1 \ \forall t \in \mathbb{R}$

Weiter seien:

$\varrho_i(x, t) \in C^0(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$  mit  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\varrho_i(x, t)}{|x|^m} = 0 \ i = 1, 2$  glm in  $t$ , also  $\varrho_i(x, t) = o(|x|^m)$ .

Dann gilt:

Es existieren  $\mathbf{p} = \mathbf{p}(x, t) \in \mathfrak{P}_T^+$  Polynom mit  $\text{grad } \mathbf{p} = m$  und  $\varrho(x, t) \in C^0(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$  mit  $\varrho(x, t) = o(|x|^m)$  so daß  $\forall t \in \mathbb{R}$  gilt:

$$\frac{\mathbf{p}_2(x, t) + \varrho_2(x, t)}{\mathbf{p}_1(x, t) + \varrho_1(x, t)} = \mathbf{p}(x, t) + \varrho(x, t)$$

Beweis:

Wir betrachten zunächst die Formel für die endliche geometrische Reihe:

$$\frac{1 + (-q)^{m+1}}{1 + q} = \sum_{l=0}^m (-q)^l \iff \frac{1}{1 + q} = \sum_{l=0}^m (-q)^l - \frac{(-q)^{m+1}}{1 + q} \quad (1.1)$$

Wegen  $\mathbf{p}_1(0, t) \equiv 1$  und  $\varrho_1(x, t) = o(|x|^m)$  kann man  $\varepsilon > 0$  und  $0 < c < 1$  finden mit:

$$| -1 + \mathbf{p}_1(x, t) + \varrho(x, t) | \leq c < 1 \ \forall x \in U_\varepsilon(0) \text{ und } \forall t \in \mathbb{R}$$

Weiter gilt:  $\mathbf{p}_1(0, t) \equiv 1 \implies (1 - \mathbf{p}_1(x, t))^{m+1} = O(|x|^{m+1}) = o(|x|^m)$

Setzt man  $-1 + \mathbf{p}_1(x, t) + \varrho_1(x, t)$  für  $q$  in (1.1) ein, ergibt sich:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\mathbf{p}_1(x, t) + \varrho_1(x, t)} &= \sum_{l=0}^m (1 - \mathbf{p}_1(x, t) - \varrho_1(x, t))^l - \frac{(1 - \mathbf{p}_1(x, t) - \varrho_1(x, t))^{m+1}}{\mathbf{p}_1(x, t) + \varrho_1(x, t)} = \\ &= \sum_{l=0}^m (1 - \mathbf{p}_1(x, t))^l + \tilde{\varrho}_1(x, t) \quad \text{mit} \quad \tilde{\varrho}_1(x, t) = o(|x|^m) \end{aligned} \quad (1.2)$$

Weiter gilt  $\sum_{l=0}^m (1 - \mathbf{p}_1(x, t))^l \in \mathfrak{P}_T^+$  da  $(1 - \mathbf{p}_1(x, t))^l \in \mathfrak{P}_T^+$  wegen Satz 1.5.d.

Multiplikation von (1.2) mit  $\mathbf{p}_2(x, t) + \varrho_2(x, t)$  ergibt:

$$\frac{\mathbf{p}_2(x, t) + \varrho_2(x, t)}{\mathbf{p}_1(x, t) + \varrho_1(x, t)} = \mathbf{p}_2(x, t) \sum_{l=0}^m (1 - \mathbf{p}_1(x, t))^l + \hat{\varrho}(x, t) \quad \text{mit} \quad \hat{\varrho}(x, t) = o(|x|^m)$$

Nach Satz 1.5.a ist  $\mathbf{p}_2(x, t) \sum_{l=0}^m (1 - \mathbf{p}_1(x, t))^l \in \mathfrak{P}_T^+$ . Wähle jetzt für  $\mathbf{p}(x, t)$ :

$\mathbf{p}_2(x, t) \sum_{l=0}^m (1 - \mathbf{p}_1(x, t))^l$  bis zur  $m$ -ten Potenz in  $x$ , was offensichtlich ebenfalls in  $\mathfrak{P}_T^+$  liegt.

Dann folgt wegen

$$\left( \mathbf{p}_2(x, t) \sum_{l=0}^m (1 - \mathbf{p}_1(x, t))^l - \mathbf{p}(x, t) \right) + \hat{\varrho}(x, t) =: \varrho(x, t) = o(|x|^m)$$

die Behauptung.

## 1.7 Satz:

Seien  $\mathbf{p}_i = \mathbf{p}_i(x, t) \in \mathfrak{P}_T^+$  mit  $\mathbf{p}_1(0, t) \equiv 0 \quad \forall t \in [0, T]$  und  $\mathbf{p}_1(x, t)$  konvergent in  $U_\delta(0) \quad \forall t \in [0, T]$ .

Dann gilt:

Es existiert  $\delta_0$  mit  $0 < \delta_0 \leq \delta$  und:

$$\frac{\mathbf{p}_2(x, t)}{1 + \mathbf{p}_1(x, t)} \in \mathfrak{P}_T^+ \quad \forall x \in U_{\delta_0}(0) \quad \forall t \in [0, T]$$

Beweis:

Wähle  $\delta_0$  so, daß gilt:  $|\mathbf{p}_1(x, t)| \leq c < 1 \quad \forall x \in U_{\delta_0} \quad \forall t \in [0, T]$ . Dann folgt die Behauptung aus der gleichmäßigen Konvergenz der geometrischen Reihe und Satz 1.6 ( $m \rightarrow \infty$ ).

## 1.8 Satz:

Seien  $h_i(x) \in C^i([a, b]; \mathbb{R})$   $i = 0, 1$  mit

- (i)  $\exists! \bar{x}$  mit  $h_1(\bar{x}) = 0$
- (ii)  $\bar{x} \in ]a, b[$
- (iii)  $h_0(\bar{x}) \neq 0$

Dann gilt:

$$\begin{aligned} \text{a) } \lim_{x \nearrow \bar{x}^-} \int_a^x \frac{h_0(t)}{h_1(t)} dt &= \int_a^{\bar{x}} \frac{h_0(t)}{h_1(t)} dt = \text{sign}(h_0(\bar{x})) \text{sign}(h_1(a)) \cdot \infty \\ \text{b) } \lim_{x \searrow \bar{x}^+} \int_x^b \frac{h_0(t)}{h_1(t)} dt &= \int_{\bar{x}}^b \frac{h_0(t)}{h_1(t)} dt = \text{sign}(h_0(\bar{x})) \text{sign}(h_1(b)) \cdot \infty \end{aligned}$$

Beweis:

a) Definiere:

$$\hat{x} = \begin{cases} a & \text{falls } h_0|_{[a, \bar{x}]} \neq 0 \\ \sup_i \{x_i\} & \text{mit } h_0(x_i) = 0 \wedge x_i < \bar{x} \end{cases}$$

Klar:  $\hat{x} < \bar{x}$ . Weiter gilt für  $x \in (\hat{x}, \bar{x})$ :

$$\int_a^x \frac{h_0(t)}{h_1(t)} dt = \int_a^{\hat{x}} \frac{h_0(t)}{h_1(t)} dt + \int_{\hat{x}}^x \frac{h_0(t)}{h_1(t)} dt \quad (1.3)$$

Das erste Integral auf der rechten Seite ist endlich und für das zweite gilt mit dem MWS der Integralrechnung [34]:

$\exists \tilde{x} \in (\hat{x}, x)$  mit:

$$\begin{aligned} \int_{\hat{x}}^x \frac{h_0(t)}{h_1(t)} dt &= h_0(\tilde{x}) \int_{\hat{x}}^x \frac{1}{h_1(t)} dt = \\ &= \text{sign}(h_0(\bar{x})) \text{sign}(h_1(a)) |h_0(\tilde{x})| \int_{\hat{x}}^x \frac{1}{|h_1(t)|} dt \end{aligned} \quad (1.4)$$

Was aus  $\hat{x} < \tilde{x} < \bar{x} \Rightarrow \text{sign}(h_0(\tilde{x})) = \text{sign}(h_0(\bar{x}))$  folgt.

Mit dem MWS der Differentialrechnung sieht man leicht:

$$|h_1(x)| \leq K(\bar{x} - x) \text{ für } x \in [\hat{x}, \bar{x}] \text{ mit } K := \max_{\xi \in [\hat{x}, \bar{x}]} |h_1'(\xi)| \implies$$

$$\implies \frac{1}{|h_1(x)|} \geq \frac{1}{K(\bar{x} - x)} \implies \int_{\hat{x}}^x \frac{1}{|h_1(t)|} dt \geq \frac{1}{K} \int_{\hat{x}}^x \frac{1}{\bar{x} - x} dt \implies$$

$$\implies \lim_{x \nearrow \bar{x}} \int_{\hat{x}}^x \frac{1}{|h_1(t)|} dt = \int_{\hat{x}}^{\bar{x}} \frac{1}{|h_1(t)|} dt = \infty$$

Damit ergibt sich mit (1.3) und (1.4) die Behauptung a).

b) Völlig analog a).

## 1.9 Satz:

Seien  $a_i(t), b_i(t) \in C^0([0, T], \mathbb{R})$   $i = 0, \dots, 2$ ,  $a_3(t, r, \delta) = O(r) + O(\delta)$ ,  $b_3(t, r, \delta) = O(r) + O(\delta)$  und  $a_3(t, r, \delta), b_3(t, r, \delta) \in C^0([0, T] \times \mathbb{R}^+ \times [-d, d], \mathbb{R})$ .

Weiter sei

$$I(r, \delta) := \int_0^T \frac{a_0(t)r^{2m} + a_1(t)r^{l+m} + a_2(t)r^{2l} + \delta a_3(t, r, \delta)r^{2m}}{b_0(t)r^{2m} + b_1(t)r^{l+m} + b_2(t)r^{2l} + \delta b_3(t, r, \delta)r^{2m}} dt$$

mit  $l > m \in \mathbb{N}$ .

Dann gilt:

- a) Falls  $b_0(t) \neq 0$ , existieren  $\forall t \in [0, T]$   $r_0 > 0, \delta_0 > 0$ , so daß  $\forall r, \delta$  mit  $0 < r < r_0 \wedge |\delta| < \delta_0$  gilt:

$$\left| I(r, \delta) - \int_0^T \frac{a_0(t)}{b_0(t)} dt \right| < 1$$

- b) Falls  $b_2(t) \neq 0$ , existieren  $\forall t \in [0, T]$   $r_1 > 0, \delta_1 > 0$ , so daß  $\forall \delta$  mit  $|\delta| < \delta_1$  gilt:

$$\left| I(r_1, \delta) - \int_0^T \frac{a_2(t)}{b_2(t)} dt \right| < 1$$

Beweis:

a) Wegen

$$\lim_{(r,\delta) \rightarrow (0,0)} I(r,\delta) = \int_0^T \frac{a_0(t)}{b_0(t)} dt$$

$\exists r_0 > 0, \delta_0 > 0$  mit

$$\left| I(r,\delta) - \int_0^T \frac{a_0(t)}{b_0(t)} dt \right| < 1$$

$\forall r, \delta$  mit  $0 < r < r_0 \wedge |\delta| < \delta_0$

b) Definiere zunächst:

$$\alpha_0(t) := a_0(t)b_2(t) - a_2(t)b_0(t)$$

$$\alpha_1(t) := a_1(t)b_2(t) - a_2(t)b_1(t)$$

$$\alpha_2(t) := a_2(t)b_2(t) - a_2(t)b_2(t) = 0$$

$$\alpha_3(t, r, \delta) := b_2(t)a_3(t, r, \delta) - a_2(t)b_3(t, r, \delta)$$

$$\beta_0(t) := b_0(t)b_2(t)$$

$$\beta_1(t) := b_1(t)b_2(t)$$

$$\beta_2(t) := b_2(t)b_2(t) = b_2^2(t) > 0$$

$$\beta_3(t, r, \delta) := b_2(t)b_3(t, r, \delta)$$

Damit ergibt sich als Betrag der Differenz der beiden Integrale:

$$\begin{aligned} \left| I(r,\delta) - \int_0^T \frac{a_2(t)}{b_2(t)} dt \right| &= \left| \int_0^T \frac{b_2(t) (a_0(t)r^{2m} + a_1(t)r^{l+m} + a_2(t)r^{2l} + \delta a_3(t, r, \delta)r^{2m})}{b_2(t) (b_0(t)r^{2m} + b_1(t)r^{l+m} + b_2(t)r^{2l} + \delta b_3(t, r, \delta)r^{2m})} dt - \right. \\ &\quad \left. - \int_0^T \frac{a_2(t) (b_0(t)r^{2m} + b_1(t)r^{l+m} + b_2(t)r^{2l} + \delta b_3(t, r, \delta)r^{2m})}{b_2(t) (b_0(t)r^{2m} + b_1(t)r^{l+m} + b_2(t)r^{2l} + \delta b_3(t, r, \delta)r^{2m})} dt \right| = \\ &= \left| \int_0^T \frac{\alpha_0(t)r^{2m} + \alpha_1(t)r^{l+m} + \alpha_2(t)r^{2l} + \delta \alpha_3(t, r, \delta)r^{2m}}{\beta_0(t)r^{2m} + \beta_1(t)r^{l+m} + \beta_2(t)r^{2l} + \delta \beta_3(t, r, \delta)r^{2m}} dt \right| = \\ &= \left| \int_0^T \frac{\alpha_0(t)r^{2(m-l)} + \alpha_1(t)r^{m-l} + \delta \alpha_3(t, r, \delta)r^{2(m-l)}}{\beta_2(t) + \beta_0(t)r^{2(m-l)} + \beta_1(t)r^{m-l} + \delta \beta_3(t, r, \delta)r^{2(m-l)}} dt \right| \end{aligned} \quad (1.5)$$

Definiere dann:

$$M_0 := \max_{t \in [0, T]} \left\{ \frac{7}{6} |\alpha_0(t)|, \frac{1}{T} |\beta_0(t)|, 1 \right\} \left( \implies |\alpha_0(t)| \leq \frac{6}{7} M_0 \wedge |\beta_0(t)| \leq T M_0 \wedge M_0 \geq 1 > 0 \right)$$

$$M_1 := \max_{t \in [0, T]} \left\{ \frac{7}{6} |\alpha_1(t)|, \frac{1}{T} |\beta_1(t)|, 1 \right\} \left( \implies |\alpha_1(t)| \leq \frac{6}{7} M_1 \wedge |\beta_1(t)| \leq T M_1 \wedge M_1 \geq 1 > 0 \right)$$

$$M_2 := \min_{t \in [0, T]} \left\{ \frac{1}{T} \beta_2(t) \right\} > 0 \quad \left( \implies |\beta_2(t)| \geq T M_2 \right)$$

$$r_1 := \max \left\{ {}^{2(l-m)} \sqrt{\frac{6M_0}{M_2}}, {}^{(l-m)} \sqrt{\frac{6M_1}{M_2}} \right\} \left( \implies r_1^{2(m-l)} \leq \frac{M_2}{6M_0} \wedge r_1^{m-l} \leq \frac{M_2}{6M_1} \right)$$

$$M_3 := \max_{t \in [0, T]} \max_{\delta \in [-d, d]} \left\{ \frac{7}{6} |\alpha_3(t, r_1, \delta)|, \frac{1}{T} |\beta_3(t, r_1, \delta)| \right\} \\ \left( \implies |\alpha_3(t, r_1, \delta)| \leq \frac{6}{7} M_3 \wedge |\beta_3(t, r_1, \delta)| \leq T M_3 \right)$$

$$\delta_1 := \min \left\{ \frac{M_2 r_1^{2(l-m)}}{6M_3}, d \right\}$$

Es folgt wegen (1.5)  $\forall \delta$  mit  $|\delta| < \delta_1$  :

$$\left| I(r_1, \delta) - \int_0^T \frac{a_2(t)}{b_2(t)} dt \right| \leq \int_0^T \frac{|\alpha_0(t)| r_1^{2(m-l)} + |\alpha_1(t)| r_1^{m-l} + |\delta| |\alpha_3(t, r_1, \delta)| r_1^{2(m-l)}}{|\beta_2(t)| - |\beta_0(t)| r_1^{2(m-l)} - |\beta_1(t)| r_1^{m-l} - |\delta| |\beta_3(t, r_1, \delta)| r_1^{2(m-l)}} dt \leq \\ \leq \int_0^T \frac{\frac{1}{7} M_2 + \frac{1}{7} M_2 + \frac{1}{7} M_2}{M_2 T - \frac{1}{6} M_2 T - \frac{1}{6} M_2 T - \frac{1}{6} M_2 T} dt = T \frac{6}{7T} < 1.$$

## 1.10 Satz:

Seien  $a_1(t), a_2(t), a_3(t), a_4(t) \in C^0([t_1, t_2], \mathbb{R})$ ,  $r \in \mathbb{R}^+$  und  $k \in \mathbb{N}$  beliebig.

Dann gilt:

a) Im Falle  $a_4(t) \neq 0$ ,

existiert  $\forall \alpha > 0$  ein  $R(\alpha) > 0$ , so daß  $\forall r > R(\alpha)$  und  $\forall t \in [t_1, t_2]$  gilt:

$\text{sign}(a_3(t) + a_4(t)r^k) = \text{sign}(a_4(t))$  und

$$(i) \quad \frac{a_2(t) - \alpha}{a_4(t)} < \frac{a_1(t) + a_2(t)r^k}{a_3(t) + a_4(t)r^k} < \frac{a_2(t) + \alpha}{a_4(t)} \quad \text{falls } \text{sign}(a_4(t)) > 0$$

$$(ii) \quad \frac{a_2(t) + \alpha}{a_4(t)} < \frac{a_1(t) + a_2(t)r^k}{a_3(t) + a_4(t)r^k} < \frac{a_2(t) - \alpha}{a_4(t)} \quad \text{falls } \text{sign}(a_4(t)) < 0$$

b) Im Falle  $a_3(t) \neq 0$ ,

existiert  $\forall \beta > 0$  ein  $R(\beta) > 0$ , so daß  $\forall r < R(\beta)$  und  $\forall t \in [t_1, t_2]$  gilt:  
 $\text{sign}(a_3(t) + a_4(t)r^k) = \text{sign}(a_3(t))$  und

$$(i) \quad \frac{a_1(t) - \beta}{a_3(t)} < \frac{a_1(t) + a_2(t)r^k}{a_3(t) + a_4(t)r^k} < \frac{a_1(t) + \beta}{a_3(t)} \quad \text{falls } \text{sign}(a_3(t)) > 0$$

$$(ii) \quad \frac{a_1(t) + \beta}{a_3(t)} < \frac{a_1(t) + a_2(t)r^k}{a_3(t) + a_4(t)r^k} < \frac{a_1(t) - \beta}{a_3(t)} \quad \text{falls } \text{sign}(a_3(t)) < 0$$

Beweis:

$$a) \text{ Setze: } R_0 := k \sqrt{\frac{\max_{t \in [t_1, t_2]} |a_3(t)|}{\min_{t \in [t_1, t_2]} |a_4(t)|}}$$

Dann gilt:

$$\begin{aligned} r > R_0 &\iff r > k \sqrt{\frac{\max_{t \in [t_1, t_2]} |a_3(t)|}{\min_{t \in [t_1, t_2]} |a_4(t)|}} \iff r^k > \frac{\max_{t \in [t_1, t_2]} |a_3(t)|}{\min_{t \in [t_1, t_2]} |a_4(t)|} \geq \frac{|a_3(t)|}{|a_4(t)|} \geq -\frac{a_3(t)}{a_4(t)} \implies \\ &\implies \text{sign}(a_3(t) + a_4(t)r^k) = \text{sign}(a_4(t)) \neq 0 \quad \forall t \in [t_1, t_2] \text{ und } \forall r > R_0 \end{aligned}$$

Weiter existiert wegen:

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{a_1(t)a_4(t) - a_2(t)a_3(t)}{a_3(t) + a_4(t)r^k} = 0 \quad \text{glm in } t$$

zu  $\alpha > 0$  ein  $R(\alpha) \geq R_0$  mit

$$\left| \frac{a_1(t)a_4(t) - a_2(t)a_3(t)}{a_3(t) + a_4(t)r^k} \right| < \alpha \quad \forall r > R(\alpha) \quad \forall t \in [t_1, t_2] \quad (1.6)$$

oder äquivalent dazu:

$$-\alpha < \frac{a_1(t)a_4(t) - a_2(t)a_3(t)}{a_3(t) + a_4(t)r^k} < \alpha \quad \forall r > R(\alpha) \quad \forall t \in [t_1, t_2] \quad (1.7)$$

(i) Sei jetzt  $a_4(t) > 0$ . Dann folgt aus der zweiten Ungleichung in (1.7)

$$\begin{aligned} &a_1(t)a_4(t) - a_2(t)a_3(t) < \alpha (a_3(t) + a_4(t)r^k) \\ \iff &a_1(t)a_4(t) + a_2(t)a_4(t)r^k < a_2(t)a_3(t) + a_2(t)a_4(t)r^k + \alpha(a_3(t) + a_4(t)r^k) \\ \iff &a_4(t)(a_1(t) + a_2(t)r^k) < (a_2(t) + \alpha)(a_3(t) + a_4(t)r^k) \end{aligned}$$

$$\Longleftrightarrow \frac{a_1(t) + a_2(t)r^k}{a_3(t) + a_4(t)r^k} < \frac{a_2(t) + \alpha}{a_4(t)}$$

Aus der ersten Ungleichung in (1.7) folgt analog:

$$\frac{a_2(t) - \alpha}{a_4(t)} < \frac{a_1(t) + a_2(t)r^k}{a_3(t) + a_4(t)r^k}$$

(ii) Für den zweiten Fall  $a_4(t) < 0$  ergibt sich analog (i):  
(Beachte  $a_4(t) < 0 \wedge r > R(\alpha) \Rightarrow a_3(t) + a_4(t)r^k < 0 \forall t \in [t_1, t_2]$ )

$$\frac{a_2(t) + \alpha}{a_4(t)} < \frac{a_1(t) + a_2(t)r^k}{a_3(t) + a_4(t)r^k} < \frac{a_2(t) - \alpha}{a_4(t)}$$

womit a) folgt.

b) Mit  $\varrho := \frac{1}{r}$  gilt:

$$\frac{a_1(t) + a_2(t)r^k}{a_3(t) + a_4(t)r^k} = \frac{a_1(t)\frac{1}{r^k} + a_2(t)}{a_3(t)\frac{1}{r^k} + a_4(t)} = \frac{a_2(t) + a_1(t)\varrho^k}{a_4(t) + a_3(t)\varrho^k} \quad (1.8)$$

Wenden wir jetzt Teil a) auf den letzten Term in (1.8) an, erhalten wir b).

## 1.11 Satz:

Seien  $a(t), b(t) \in C^0([t_1, t_2], \mathbb{R})$ ,  $A_i(r, t, \varepsilon), B_i(r, t, \varepsilon) \in C^0(\mathbb{R} \times [t_1, t_2] \times U(0), \mathbb{R})$  mit  $A_i(r, t, 0) \equiv 0 \equiv B_i(r, t, 0)$   $i = 1, 2$ .

Sei weiter  $b(t) \neq 0$  sowie  $k \in \mathbb{N}$  beliebig.

Dann gilt:

a)  $\forall \alpha > 0$  und  $\forall R_0, R_1$  mit  $0 < R_0 < R_1 \exists \varepsilon_1 > 0$ , so daß  $\forall r$  mit  $R_0 < r < R_1$ ,  $\forall t \in [t_1, t_2]$  und  $\forall \varepsilon$  mit  $|\varepsilon| < \varepsilon_1$  gilt:

$\text{sign}(b(t)) = \text{sign}(b(t)r^k + B_1(r, t, \varepsilon))$  und

(i)  $\frac{a(t) - \alpha}{b(t)} < \frac{a(t)r^k + A_1(r, t, \varepsilon)}{b(t)r^k + B_1(r, t, \varepsilon)} < \frac{a(t) + \alpha}{b(t)}$  falls  $b(t) > 0$

(ii)  $\frac{a(t) + \alpha}{b(t)} < \frac{a(t)r^k + A_1(r, t, \varepsilon)}{b(t)r^k + B_1(r, t, \varepsilon)} < \frac{a(t) - \alpha}{b(t)}$  falls  $b(t) < 0$

b)  $\forall \beta > 0$  und  $\forall R_2 > 0 \exists \varepsilon_2 > 0$  so daß  $\forall r$  mit  $0 < r < R_2$ ,  $\forall t \in [t_1, t_2]$  und  $\forall \varepsilon$  mit  $|\varepsilon| < \varepsilon_2$  gilt:

$\text{sign}(b(t)) = \text{sign}(b(t) + B_1(r, t, \varepsilon))$  und

$$(i) \quad \frac{a(t) - \beta}{b(t)} < \frac{a(t) + A_2(r, t, \varepsilon)}{b(t) + B_2(r, t, \varepsilon)} < \frac{a(t) + \beta}{b(t)} \text{ falls } b(t) > 0$$

$$(ii) \quad \frac{a(t) + \beta}{b(t)} < \frac{a(t) + A_2(r, t, \varepsilon)}{b(t) + B_2(r, t, \varepsilon)} < \frac{a(t) - \beta}{b(t)} \text{ falls } b(t) < 0$$

Beweis:

a)  $B_1(r, t, \varepsilon) \in C^0([R_0, R_1] \times [t_1, t_2] \times U(0), \mathbb{R})$  und  $B_1(r, t, 0) \equiv 0 \implies \exists \varepsilon_3 > 0$  mit:

$$|B_1(r, t, \varepsilon)| < \frac{1}{2} \min_{t \in [t_1, t_2]} |b(t)| R_0^k \quad \forall r \in [R_0, R_1] \quad \forall t \in [t_1, t_2] \text{ und } |\varepsilon| < \varepsilon_3$$

Damit gilt

$$\text{sign}(b(t)) = \text{sign}(b(t)r^k + B_1(r, t, \varepsilon)) \neq 0$$

woraus

$$\frac{A_1(r, t, \varepsilon)b(t) - a(t)B_1(r, t, \varepsilon)}{b(t)r^k + B_1(r, t, \varepsilon)} \in C^0([R_0, R_1] \times [t_1, t_2] \times U_{\varepsilon_3}(0), \mathbb{R})$$

folgt.

Da  $A_1(r, t, 0) \equiv 0 \equiv B_1(r, t, 0)$  existiert zu  $\alpha > 0$  ein  $\varepsilon_1 > 0$  mit  $\varepsilon_1 \leq \varepsilon_3$ , so daß  $\forall r \in [R_0, R_1], \forall t \in [t_1, t_2]$  und  $\forall \varepsilon$  mit  $|\varepsilon| < \varepsilon_1$  gilt:

$$\left| \frac{A_1(r, t, \varepsilon)b(t) - a(t)B_1(r, t, \varepsilon)}{b(t)r^k + B_1(r, t, \varepsilon)} \right| < \alpha$$

Der Rest des Beweises von a) läuft jetzt analog zum Beweis von Satz 1.10.a, beginnend mit Gleichung (1.6), wenn man  $a(t) \leftrightarrow a_2(t)$ ,  $b(t) \leftrightarrow a_4(t)$ ,  $A_1(r, t, \varepsilon) \leftrightarrow a_1(t)$  und  $B_1(r, t, \varepsilon) \leftrightarrow a_3(t)$  benutzt.

b) Hier existiert  $\varepsilon_4 > 0$  mit

$$|B_2(r, t, \varepsilon)| < \frac{1}{2} \min_{t \in [t_1, t_2]} |b(t)| \quad \forall r \in [0, R_2] \quad \forall t \in [t_1, t_2] \text{ und } |\varepsilon| < \varepsilon_4$$

Damit gilt wie in a)

$$\text{sign}(b(t)) = \text{sign}(b(t) + B_2(r, t, \varepsilon)) \neq 0$$

Weiter existiert analog a) zu  $\beta > 0$  ein  $\varepsilon_2 > 0$  mit  $\varepsilon_2 \leq \varepsilon_4$ , so daß  $\forall r \in [0, R_2], \forall t \in [t_1, t_2]$  und  $\forall \varepsilon$  mit  $|\varepsilon| < \varepsilon_2$  gilt:

$$\left| \frac{A_2(r, t, \varepsilon)b(t) - a(t)B_2(r, t, \varepsilon)}{b(t) + B_2(r, t, \varepsilon)} \right| < \beta$$

Der Rest des Beweises von b) läuft dann genau wie bei a) analog zum Beweis von Satz 1.10.a.

## 1.12 Satz:

Seien  $g_1(x_1, x_2), g_2(x_1, x_2), m(x_1, x_2) \in C^0(D \subseteq \mathbb{R}^2, \mathbb{R})$  mit  $m(\bar{x}_1, \bar{x}_2) = 0 \Rightarrow g_1(\bar{x}_1, \bar{x}_2) = 0 = g_2(\bar{x}_1, \bar{x}_2)$

Dann haben die DGL-Systeme:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= g_1(x_1, x_2) \\ \dot{x}_2 &= g_2(x_1, x_2)\end{aligned}\tag{1.9}$$

bzw.

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= m(x_1, x_2)g_1(x_1, x_2) \\ \dot{x}_2 &= m(x_1, x_2)g_2(x_1, x_2)\end{aligned}\tag{1.10}$$

identische Trajektorien.

Beweis:

Falls  $m(\bar{x}_1, \bar{x}_2) = 0 \xrightarrow{\text{n.V.}} g_1(\bar{x}_1, \bar{x}_2) = 0 = g_2(\bar{x}_1, \bar{x}_2)$  d.h. sowohl Das DGL-System (1.9) als auch das DGL-System (1.10) besitzen in  $(\bar{x}_1, \bar{x}_2)$  einen stationären Punkt, d.h. die Trajektorien von (1.9) und (1.10) stimmen in diesem Fall überein.

Falls  $m(x_1, x_2) \neq 0$  betrachten wir die zu (1.9) bzw. (1.10) gehörigen DGL für die Trajektorien:

$$\frac{dx_1}{dx_2} = \frac{g_1(x_1, x_2)}{g_2(x_1, x_2)}\tag{1.11}$$

bzw.

$$\frac{dx_1}{dx_2} = \frac{m(x_1, x_2)g_1(x_1, x_2)}{m(x_1, x_2)g_2(x_1, x_2)}\tag{1.12}$$

Da  $m(x_1, x_2) \neq 0$  kann in (1.12) gekürzt werden, d.h. die DGL (1.11) und die DGL (1.12) und damit die Trajektorien von (1.9) und (1.10) sind auch in diesem Fall identisch.

## 1.13 Satz:

Seien  $H_i(r, \varphi) \in C^1(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$ ,  $G_i(\varphi) \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$   $i = 1, 2$ . Weiter gelte:

$$\begin{aligned}\dot{r} &= H_1(r, \varphi)r \\ \dot{\varphi} &= H_2(r, \varphi)\end{aligned}\tag{1.13}$$

Dann gilt:

a) Falls für ein  $(r_0, \varphi_0) \in \mathbb{R}^+ \setminus \{0\} \times \mathbb{R}$

$$\frac{H_1(r, \varphi)}{H_2(r, \varphi)} < G_1(\varphi) \quad (1.14)$$

und

(i)  $\text{sign} H_2(r_0, \varphi_0) > 0$  gilt,

schneidet die durch  $(r_0, \varphi_0)$  laufende Trajektorie der DGL (1.13), die durch  $(r_0, \varphi_0)$  laufende Lösung der DGL (für wachsende  $t$ )

$$\frac{dr}{d\varphi} = G_1(\varphi)r \quad (1.15)$$

von  $r \equiv 0$  aus gesehen, von oben nach unten.

(ii)  $\text{sign} H_2(r_0, \varphi_0) < 0$  gilt,

schneidet die durch  $(r_0, \varphi_0)$  laufende Trajektorie der DGL (1.13), die durch  $(r_0, \varphi_0)$  laufende Lösung der DGL (1.15) (für wachsende  $t$ )  
von  $r \equiv 0$  aus gesehen, von unten nach oben.

b) Falls für ein  $(r_0, \varphi_0) \in \mathbb{R}^+ \setminus \{0\} \times \mathbb{R}$

$$G_2(\varphi) < \frac{H_1(r, \varphi)}{H_2(r, \varphi)} \quad (1.16)$$

und

(i)  $\text{sign} H_2(r_0, \varphi_0) > 0$  gilt,

schneidet die durch  $(r_0, \varphi_0)$  laufende Trajektorie der DGL (1.13), die durch  $(r_0, \varphi_0)$  laufende Lösung der DGL (für wachsende  $t$ )

$$\frac{dr}{d\varphi} = G_2(\varphi)r \quad (1.17)$$

von  $r \equiv 0$  aus gesehen, von unten nach oben.

(ii)  $\text{sign} H_2(r_0, \varphi_0) < 0$  gilt,

schneidet die durch  $(r_0, \varphi_0)$  laufende Trajektorie der DGL (1.13), die durch  $(r_0, \varphi_0)$  laufende Lösung der DGL (1.17) (für wachsende  $t$ )  
von  $r \equiv 0$  aus gesehen, von oben nach unten.

Beweis:

Wir zeigen nur a)(i), die anderen Fälle beweist man völlig analog.  
Die Trajektorien der DGL (1.13) sind die Lösungen der DGL:

$$\frac{dr}{d\varphi} = \frac{H_1(r, \varphi)}{H_2(r, \varphi)} r \quad (1.18)$$

Aus (1.14) folgt:

$$\frac{H_1(r_0, \varphi)}{H_2(r_0, \varphi)} r_0 < G_1(\varphi_0) r_0$$

D.h. die Steigung der Trajektorie von (1.13) im Punkt  $(r_0, \varphi_0)$  ist kleiner als die Steigung der durch  $(r_0, \varphi_0)$  laufenden Lösung der DGL (1.15). Da  $\text{sign } H_2(r_0, \varphi_0) = \text{sign } \dot{\varphi}(r_0, \varphi_0) > 0$  gilt, schneidet die Trajektorie (für wachsende  $t$ ) die Lösung von  $r \equiv 0$  aus gesehen, von oben nach unten.

## 1.14 Satz:

Seien  $H_i(r, \varphi) \in C^1(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$ ,  $i = 1, 2$  mit  $H_1^2(r, \varphi) + H_2^2(r, \varphi) \neq 0$  und  $\Gamma_i := \{(\varphi, \gamma_i(\varphi)) \mid \gamma_i(0) = \gamma_i(2\pi)\}$   $i = 1, 2$  wobei  $\gamma_i(\varphi) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+ \setminus \{0\}$   $i = 1, 2$  stückweise glatt sowie  $\gamma_1(\varphi) > \gamma_2(\varphi) > 0$ .

Weiter werden die zwei Kurven  $\Gamma_i$   $i = 1, 2$  von den Trajektorien der DGL (1.13), von  $r \equiv 0$  aus gesehen, jeweils beide entweder von oben nach unten oder von unten nach oben geschnitten.

Zusätzlich besitze die DGL (1.13) zwischen  $\Gamma_1$  und  $\Gamma_2$  eine asymptotisch stabile (bei Zeitumkehr asymptotisch stabile) Trajektorie  $p(\varphi)$  mit  $H_2(\varphi, p(\varphi)) \neq 0$  und  $p(0) = p(2\pi)$ .

Dann gilt:

Zwischen  $\Gamma_1$  und  $\Gamma_2$  existiert eine weitere Trajektorie  $q(\varphi)$  der DGL (1.13) mit  $q(0) = q(2\pi)$ .

Beweis:

Es sind acht mögliche Fälle zu unterscheiden:

$\Gamma_1, \Gamma_2$  werden von oben nach unten bzw. von unten nach oben geschnitten, zwischen  $\Gamma_1$  und  $\Gamma_2$  liegt entweder eine asymptotisch stabile oder bei Zeitumkehr asymptotisch stabile Trajektorie  $p(\varphi)$  und  $H_2(\varphi, p(\varphi))$  ist entweder größer oder kleiner 0.

Wir zeigen nur den Fall:

Die Trajektorien von (1.13) schneiden  $\Gamma_1$  und  $\Gamma_2$  von oben nach unten,  $H_2(\varphi, p(\varphi)) > 0$  und  $p(\varphi)$  ist asymptotisch stabil.

Um die Existenz von  $q(\varphi)$  nachzuweisen, konstruieren wir ein Poincaré-Bendixson Gebiet mit den Grenzen  $\Gamma_o > \Gamma_u$  im  $(r, \varphi)$ -Raum:

Als untere Grenze  $\Gamma_u$  wählen wir:  $\Gamma_u := \Gamma_2$

Da  $p(\varphi)$  asymptotisch stabil ist, existiert wegen [11] S. 66 unterhalb von  $p(\varphi)$  eine Kurve  $\Gamma_o$ , die von den Trajektorien der DGL (1.13) von  $r \equiv 0$  aus gesehen, von unten nach oben geschnitten wird.

Wegen  $H_1^2(r, \varphi) + H_2^2(r, \varphi) > 0$  kann es zwischen  $\Gamma_u$  und  $\Gamma_o$  keinen stationären Punkt geben. Mit dem Satz von Poincaré-Bendixson (vgl. [21] S. 391) liegt dann zwischen  $\Gamma_u$  und  $\Gamma_o$  mindestens eine (instabile) Trajektorie  $q(\varphi)$  von (1.13) mit  $q(0) = q(2\pi)$ .

Die übrigen sieben Fälle zeigt man völlig analog.

## 1.15 Satz:

Seien  $A := (a_{i,j})_{i,j=1,2} \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$  eine reguläre  $2 \times 2$  Matrix und  $\lambda, \nu, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ .

Dann gilt:

$A$  ist zu genau einer der folgenden Matrizen ähnlich, klassifiziert durch die angegebenen Äquivalenzen:

- a)  $\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \nu \end{pmatrix} \quad \lambda < 0 < \nu \quad \Longleftrightarrow \quad \det A < 0$
- b)  $\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \nu \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} \nu < \lambda < 0 \\ (0 < \nu < \lambda) \end{matrix} \quad \Longleftrightarrow \quad \det A > 0 \wedge \text{tr}^2 A - 4 \det A > 0 \wedge \text{tr} A < 0 (> 0)$
- c)  $\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \quad \lambda < 0 (\lambda > 0) \quad \Longleftrightarrow \quad \text{tr}^2 A - 4 \det A = 0 \wedge \text{tr} A < 0 (> 0) \wedge a_{12} = 0 = a_{21}$
- d)  $\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \quad \lambda < 0 (\lambda > 0) \quad \Longleftrightarrow \quad \text{tr}^2 A - 4 \det A = 0 \wedge \text{tr} A < 0 (> 0) \wedge a_{12}^2 + a_{21}^2 \neq 0$

$$e) \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix} \quad \alpha \neq 0 \neq \beta \quad \Longleftrightarrow \quad \text{tr}^2 A - 4 \det A < 0 \wedge \text{tr} A < 0 \text{ } (> 0)$$

$$f) \begin{pmatrix} 0 & -\beta \\ \beta & 0 \end{pmatrix} \quad \beta \neq 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \text{tr}^2 A - 4 \det A < 0 \wedge \text{tr} A = 0$$

Sei weiter:

$$\dot{x} = Ax + h(x) \tag{1.19}$$

mit  $h(x) = o(\|x\|) \in C^1(U(0) \subseteq \mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$ .

Dann gilt:

Der stationäre Punkt im Ursprung der DGL (1.19) ist im Falle:

- a) ein Sattel
- b)  $\nu < \lambda < 0$  ( $0 < \nu < \lambda$ ) ein stabiler (instabiler) uneigentlicher Knoten
- c)  $\lambda < 0$  ( $\lambda > 0$ ) entweder ein stabiler (instabiler) eigentlicher Knoten oder ein stabiler (instabiler) uneigentlicher Knoten oder ein stabiler (instabiler) Wirbel
- d)  $\lambda < 0$  ( $\lambda > 0$ ) ein stabiler (instabiler) uneigentlicher Knoten
- e)  $\alpha < 0$  ( $\alpha > 0$ ) ein stabiler (instabiler) Wirbel
- f) entweder ein Zentrum oder ein Wirbel.

Beweis:

Einen ausführlichen Beweis findet man in [21] Kapitel 15.

## 1.16 Bemerkung:

Die Aussage des Satzes 1.15 läßt sich auch auf beliebige stationäre Punkte  $x_s(\mu)$  der DGL

$$\dot{x} = G(x, \mu)$$

mit  $G(x, \mu) \in C^1(\mathbb{R}^2 \times U(0), \mathbb{R}^2)$  übertragen, wenn man für  $A$  in Satz 1.15 die Jacobi-Matrix von  $G(x, \mu)$  an der Stelle  $(x_s(\mu), \mu)$

$$J(x_s(\mu)) := D_x G(x, \mu) \Big|_{(x_s(\mu), \mu)}$$

benutzt und  $J(x_s(\mu))$  regulär ist.

# Kapitel 2

## Einige Ergebnisse über DGL mit homogenen Polynomen

### 2.1 Bemerkung:

Wir werden in diesem Kapitel einige Ergebnisse über DGL bereitstellen, die in den folgenden Kapiteln benötigt werden. Seien dazu  $Q_i(x_1, x_2)$   $i = 1, 2$  reelle, homogene Polynome vom gleichen Grad  $k > 0$  und

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= Q_1(x_1, x_2) \\ \dot{x}_2 &= Q_2(x_1, x_2)\end{aligned}\tag{2.1}$$

die durch die  $Q_i(x_1, x_2)$   $i = 1, 2$  definierte DGL. Um eine einfachere Behandlung von (2.1) zu ermöglichen, ist es sinnvoll, die zur DGL (2.1) (für  $r > 0$ ) äquivalente DGL in klassischen Polarkoordinaten

$$\begin{aligned}\dot{r} &= f(\varphi)r^k \\ \dot{\varphi} &= g(\varphi)r^{k-1}\end{aligned}\tag{2.2}$$

wobei

$$\begin{aligned}f(\varphi) &:= Q_1(\cos(\varphi), \sin(\varphi)) \cos(\varphi) + Q_2(\cos(\varphi), \sin(\varphi)) \sin(\varphi) \\ g(\varphi) &:= Q_2(\cos(\varphi), \sin(\varphi)) \cos(\varphi) - Q_1(\cos(\varphi), \sin(\varphi)) \sin(\varphi)\end{aligned}\tag{2.3}$$

definiert wurde, mit Hilfe von Satz 1.12 auf eine DGL mit zu (2.2) (für  $r > 0$ ) äquivalenten Trajektorien zu überführen

$$\begin{aligned}\dot{r} &= f(\varphi)r \\ \dot{\varphi} &= g(\varphi)\end{aligned}\tag{2.4}$$

und dann auch (2.4) zu untersuchen. Zunächst allerdings beginnen wir unsere Betrachtungen in Satz 2.2 mit z.T. elementaren Aussagen über homogene Polynome, wobei die Integralformeln in h) und i) von zentraler Bedeutung sind. Im Satz 2.3 beschäftigen wir uns mit dem  $\text{ggT}(Q_1, Q_2)$ , denn falls die  $Q_i(x_1, x_2)$   $i = 1, 2$  vom Grad 1 sind, die Gleichung (2.1) also eine lineare DGL mit konstanten Koeffizienten,

$$\dot{x} = Qx \tag{2.5}$$

ist die Aussage  $\text{ggT}(Q_1, Q_2)$  definit (nicht definit) äquivalent zur Aussage  $Q \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$  regulär (singulär). D.h. mit Hilfe der Aussage  $\text{ggT}(Q_1, Q_2)$  definit (nicht definit) läßt sich der Begriff regulär bzw. singulär von linearen auf homogene Vektorfelder beliebiger Ordnung übertragen.

Der wichtige Satz 2.4 klassifiziert das Verhalten des stationären Punktes im Ursprung der DGL (2.1). In den Aussagen des Satzes wird keine lineare Algebra benutzt, er gilt aber auch für DGL (2.5), d.h. die Bedingungen an die Eigenwerte von  $Q$  werden so verallgemeinert, daß sie auch für beliebige ebene homogene Vektorfelder gelten.

Bei einer allgemeinen ebenen DGL ist das Bestimmen von Sektoren (hyperbolisch, parabolisch, elliptisch) praktisch unmöglich (vgl. [5]), glücklicherweise ist die DGL (2.1) dank Satz 2.4 eine Ausnahme. Dies legt nahe, bei der Klassifikation stationärer Punkte, die allgemeine ebene DGL auf lokale Diffeomorphie zu DGL (2.1) zu untersuchen und dann Satz 2.4 anzuwenden.

Satz 2.5 ist die Version in Polarkoordinaten von Satz 2.4 und Satz 2.6 ein Korollar, der eine Äquivalenzaussage zur Existenz periodischer Lösungen der DGL (2.1) macht. Satz 2.7 ist ebenfalls ein Korollar von Satz 2.4 und handelt von Existenz und Symmetrie von Sektoren, während Korollar 2.8 eine Äquivalenzaussage zur asymptotischen Stabilität des stationären Punktes im Ursprung der DGL (2.1) macht. Bemerkung 2.9 ist dann die Polarkoordinatenversion von 2.8 bevor in 2.10 dann zahlreiche Beispiele ausführlich diskutiert werden.

Im Satz 2.11 geben wir einen Spezialfall des Satzes von Bendixson an, mit dessen Hilfe man den Index des stationären Punktes im Ursprung der DGL (2.1) einfach berechnen kann.

In den Sätzen 2.12 bzw. 2.13 wird die Existenz eines homogenen Polynoms als Potential (kurz: homogenes Potential) für die DGL (2.1) untersucht. Erfüllen die  $Q_i(x_1, x_2)$   $i = 1, 2$  die Integrabilitätsbedingung, ist das immer der Fall. Erfüllen sie die Integrabilitätsbedingung nicht, gibt es eine nachrechenbare Äquivalenzbedingung, wann ein homogenes Potential als Euler'scher Multiplikator für die DGL (2.1) existiert. Falls der stationäre Punkt im Ursprung der DGL (2.1) ein Zentrum und  $k = 1$  ist, existiert immer ein homogenes Potential. Für  $k > 1$  muß das nicht der Fall sein, man kann also Zentren in zwei disjunkte Klassen einteilen. Strenggenommen sind damit nur die (nichtlinearen) Zentren aus der Klasse mit homogenem Potential die korrekte Verallgemeinerung eines linearen Zentrums. Der Sinn dieser Unterscheidung wird sich im nächsten Kapitel zeigen.

Im Satz 2.14 lösen wir die DGL (2.1), unter der Voraussetzung  $Q_2x_1 - Q_1x_2$  definit, für den Anfangswert  $(r_0, 0)$  explizit, da wir spezielle (periodische) Lösungen dieser DGL im nächsten Kapitel als verallgemeinerte Polarkoordinaten verwenden und bereiten die Definition 2.15 vor, in der die Funktionen  $T(r_0), \alpha(r_0), \beta(r_0)$  erklärt werden. Für  $k = 1$  sind sie unabhängig von  $r_0$  und entsprechen der Periode der Lösungen sowie Realteil bzw. Imaginärteil der Eigenwerte von  $Q$ . Für  $k > 1$  sind  $T(r_0), \alpha(r_0), \beta(r_0)$  Homöomorphismen von  $\mathbb{R}^+ \setminus \{0\}$ , was in Satz 2.16 nachgewiesen wird. Falls weiter die DGL (2.1) nur periodische Lösungen besitzt und  $k > 1$  gilt, zeigt Bemerkung 2.17, daß die in  $(r_0, 0)$  startenden Lösungen alle Frequenzen sowie alle Perioden besitzen. Es gilt genauer  $T(r_0) \sim \frac{1}{r_0^{k-1}}, \alpha(r_0) \sim r_0^{k-1}$  bzw.  $\beta(r_0) \sim r_0^{k-1}$ , d.h. die Frequenz läuft gegen 0 und damit die Periode gegen  $\infty$ , wenn sich  $r_0$  der 0 nähert, im Unterschied zum linearen ( $k = 1$ ) Fall, wo alles konstant bleibt. Satz 2.18 macht die einfache, aber im nächsten Kapitel wichtige Aussage, daß periodische Lösungen der DGL (2.1) ungerade periodisch (vgl. Definition 1.2) sind. Um  $T(r_0), \alpha(r_0), \beta(r_0)$  auch für parameterabhängige DGL der Form

$$\dot{x}_1 = P_1(x_1, x_2, \mu)$$

$$\dot{x}_2 = P_2(x_1, x_2, \mu)$$

mit  $P_i(x_1, x_2, 0) := Q_i(x_1, x_2)$   $i = 1, 2$  nutzen zu können, erweitern wir diese Funktionen in Bemerkung 2.19 auf  $T(r_0, \mu), \alpha(r_0, \mu), \beta(r_0, \mu)$  und beweisen für  $\alpha(r_0, \mu), \beta(r_0, \mu)$  im Satz 2.20 drei einfache, aber im nächsten Kapitel entscheidende Beziehungen.

## 2.2 Satz:

Sei  $Q(x_1, x_2)$  ein reelles, homogenes Polynom vom Grad  $k > 0$  mit

$$Q(x_1, x_2) := \sum_{i=0}^k a_i x_1^{k-i} x_2^i$$

und (im Falle der Existenz)  $(\bar{x}_1, \bar{x}_2) \neq (0, 0)$  eine nichttriviale Nullstelle von  $Q(x_1, x_2)$ .

Dann gilt:

- a)  $\exists c_1, c_2 \in \mathbb{R}$  mit  $c_1^2 + c_2^2 \neq 0$  und  $c_1 \bar{x}_1 + c_2 \bar{x}_2 = 0$ , d.h. das Urbild der 0 von  $Q(x_1, x_2)$  besteht entweder nur aus dem Ursprung oder aus Gerade(n) durch den Ursprung.
- b) Ist  $k$  ungerade so besitzt  $Q(x_1, x_2)$  immer nichttriviale Nullstellen.
- c)  $\left(\frac{\partial}{\partial x_1} Q(x_1, x_2)\right)x_1 + \left(\frac{\partial}{\partial x_2} Q(x_1, x_2)\right)x_2 = Q_{x_1}x_1 + Q_{x_2}x_2 = kQ(x_1, x_2)$

Sei weiter  $Q(x_1, x_2)$  definit, also  $Q(x_1, x_2) \neq 0$  für  $(x_1, x_2) \neq (0, 0)$ .

Dann gilt:

d)  $k = 2m$

e)  $a_0 a_{2m} > 0$

f) Alle Urbilder  $\neq (0, 0)$  von  $Q(x_1, x_2)$  von Punkten sind einfach geschlossene Kurven (=Höhenlinien) mit dem Ursprung im Inneren. Weiter existiert zu jedem  $c \neq 0$  aus dem Wertebereich von  $Q(x_1, x_2)$  genau eine Höhenlinie als Urbild.

g) Ist  $\Gamma_c := \{(h_1(t), h_2(t)) \in \mathbb{R}^2 \mid Q(h_1(t), h_2(t)) = c \ \forall t \in [0, T]\}$

die  $c$ -Höhenlinie von  $Q(x_1, x_2)$ , so ist auch

$$b\Gamma_c := \{(bh_1(t), bh_2(t)) \in \mathbb{R}^2 \mid t \in [0, T], \ b > 0\}$$

Höhenlinie und es gilt:

$$Q(bh_1(t), bh_2(t)) = b^{2m} Q(h_1(t), h_2(t)) \quad \text{bzw.} \quad b\Gamma_c = \Gamma_{b^{2m}c} \quad (2.6)$$

d.h. alle Höhenlinien lassen sich durch Streckung aus einer beliebigen Höhenlinie konstruieren.

h) Sind  $Q_i(x_1, x_2)$   $i = 1, 2$  beliebige homogene Polynome vom Grad  $2m - 1$ , so gilt folgende Integralformel:

$$\oint_{\Gamma_c} (-Q_2, Q_1) d\Gamma = \frac{c}{2m} \int_0^{2\pi} \frac{\frac{\partial}{\partial x_1} Q_1(\cos(\varphi), \sin(\varphi)) + \frac{\partial}{\partial x_2} Q_2(\cos(\varphi), \sin(\varphi))}{Q(\cos(\varphi), \sin(\varphi))} d\varphi$$

Ist speziell  $Q(x_1, x_2) := Q_2(x_1, x_2)x_1 - Q_1(x_1, x_2)x_2$ , so gilt zusätzlich:

$$\text{i) } \oint_{\Gamma_c} (-Q_2, Q_1) d\Gamma = c \int_0^{2\pi} \frac{Q_1(\cos(\varphi), \sin(\varphi)) \cos(\varphi) + Q_2(\cos(\varphi), \sin(\varphi)) \sin(\varphi)}{Q_2(\cos(\varphi), \sin(\varphi)) \cos(\varphi) - Q_1(\cos(\varphi), \sin(\varphi)) \sin(\varphi)} d\varphi$$

$$\text{j) } \sum_{k=1}^2 Q_k(x_1, x_2) \frac{\partial}{\partial x_k} Q(x_1, x_2) = Q(x_1, x_2) \sum_{k=1}^2 \frac{\partial}{\partial x_k} Q_k(x_1, x_2)$$

wobei j) unabhängig vom grad  $Q_k(x_1, x_2)$  und der Definitheit von  $Q(x_1, x_2)$  ist.

Beweis:

a) bis e) und g) sind klar, wir zeigen daher nur f), h), i) und j).

f) Wir geben alle Höhenlinien explizit an. Die Kurve

$$\Gamma := \{(\gamma_1(t), \gamma_2(t)) \mid t \in [0, 2\pi]\} := \\ := \left\{ \sqrt[2m]{|c|} \left( \frac{\cos(t)}{\sqrt[2m]{|Q(\cos(t), \sin(t))|}}, \frac{\sin(t)}{\sqrt[2m]{|Q(\cos(t), \sin(t))|}} \right) \mid t \in [0, 2\pi] \quad c \neq 0 \right\}$$

ist geschlossen, da  $(\cos(0) = \cos(2\pi)) \wedge (\sin(0) = \sin(2\pi))$ .

$\Gamma$  ist sogar einfach geschlossen:

Annahme:

$\exists \tau \in (0, 2\pi)$  mit  $\gamma_i(t) = \gamma_i(t + \tau) \quad i = 1, 2 \quad (*)$  für mindestens ein  $t \in [0, 2\pi)$ .

$$\begin{aligned} \implies \gamma_i^2(t) &= \gamma_i^2(t + \tau) \quad i = 1, 2 \implies \gamma_1^2(t) + \gamma_2^2(t) = \gamma_1^2(t + \tau) + \gamma_2^2(t + \tau) \implies \\ \implies \left( \sqrt[2m]{|Q(\cos(t), \sin(t))|} \right)^2 &= \left( \sqrt[2m]{|Q(\cos(t + \tau), \sin(t + \tau))|} \right)^2 \implies \\ \implies \sqrt[2m]{|Q(\cos(t), \sin(t))|} &= \sqrt[2m]{|Q(\cos(t + \tau), \sin(t + \tau))|} \implies \\ \stackrel{(*)}{\implies} \cos(t) &= \cos(t + \tau) \wedge \sin(t) = \sin(t + \tau). \end{aligned}$$

Aus der ersten Gleichung folgt aus Symmetriegründen  $\tau = 2\pi - 2t$ .

Eingesetzt in die zweite Gleichung ergibt das:

$$\begin{aligned} \sin(t) &= \sin(t + 2\pi - 2t) = \sin(2\pi - t) \implies t = 0 \vee t = \pi. \implies \\ \implies \tau &= 2\pi \notin (0, 2\pi) \vee \tau = 0 \notin (0, 2\pi). \text{ Widerspruch.} \end{aligned}$$

Damit ist  $\Gamma$  einfach geschlossen.

Einsetzen von  $\Gamma$  in  $Q(x_1, x_2)$  ergibt:

$$\begin{aligned} Q\left(\sqrt[2m]{|c|} \frac{\cos(t)}{\sqrt[2m]{|Q(\cos(t), \sin(t))|}}, \sqrt[2m]{|c|} \frac{\sin(t)}{\sqrt[2m]{|Q(\cos(t), \sin(t))|}}\right) = \\ = \left( \frac{\sqrt[2m]{|c|}}{\sqrt[2m]{|Q(\cos(t), \sin(t))|}} \right)^{2m} Q(\cos(t), \sin(t)) = \text{sign}(Q)|c| = c \Rightarrow \Gamma = \Gamma_c \Rightarrow \text{Beh.} \end{aligned}$$

h) Wir wenden auf das Kurvenintegral den Integralsatz von Green an und erhalten:

$$\oint_{\Gamma_c} (-Q_2, Q_1) d\Gamma = \iint_G \left( \frac{\partial}{\partial x_1} Q_1(x_1, x_2) + \frac{\partial}{\partial x_2} Q_2(x_1, x_2) \right) dx_1 dx_2 \quad (2.7)$$

Wobei  $G := \Gamma \cup \text{int}\Gamma$  das von  $\Gamma$  berandete Gebiet mit  $\Gamma$  bedeutet. Um das Flächenintegral in (2.7) auszuwerten, benutzen wir die Transformationsformel für Integrale mit folgender Transformation

$$x_1(s, \varphi) := s \sqrt[2m]{|c|} \frac{\cos(\varphi)}{\sqrt[2m]{\hat{Q}(\varphi)}} \quad x_2(s, \varphi) := s \sqrt[2m]{|c|} \frac{\sin(\varphi)}{\sqrt[2m]{\hat{Q}(\varphi)}} \quad (2.8)$$

wobei:

$$\hat{Q}(\varphi) := |Q(\cos(\varphi), \sin(\varphi))| = \text{sign}(Q) \cdot Q(\cos(\varphi), \sin(\varphi)) \quad (2.9)$$

Wie wir im Beweis von f) gesehen haben, gilt:

$$Q(x_1(1, \varphi), x_2(1, \varphi)) = \text{sign}(Q)|c| = c \quad (2.10)$$

Weiter erhält man für die Jakobideterminante der Transformation (2.8):

$$\begin{aligned} & \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial s} x_1(s, \varphi) & \frac{\partial}{\partial \varphi} x_1(s, \varphi) \\ \frac{\partial}{\partial s} x_2(s, \varphi) & \frac{\partial}{\partial \varphi} x_2(s, \varphi) \end{vmatrix} = \\ &= (\sqrt[2m]{|c|})^2 \left( \frac{\cos(\varphi)}{\sqrt[2m]{\hat{Q}(\varphi)}} \frac{\sqrt[2m]{\hat{Q}(\varphi)} \cos(\varphi) - \sin(\varphi) \frac{\partial}{\partial \varphi} \sqrt[2m]{\hat{Q}(\varphi)}}{(\sqrt[2m]{\hat{Q}(\varphi)})^2} - \right. \\ & \quad \left. - \frac{\sin(\varphi)}{\sqrt[2m]{\hat{Q}(\varphi)}} \frac{\sqrt[2m]{\hat{Q}(\varphi)} (-\sin(\varphi)) - \cos(\varphi) \frac{\partial}{\partial \varphi} \sqrt[2m]{\hat{Q}(\varphi)}}{(\sqrt[2m]{\hat{Q}(\varphi)})^2} \right) s = \\ &= \left( \frac{\sqrt[2m]{|c|}}{\sqrt[2m]{\hat{Q}(\varphi)}} \right)^2 \left( \cos^2(\varphi) + \sin^2(\varphi) - \left( \frac{\cos(\varphi) \sin(\varphi)}{\sqrt[2m]{\hat{Q}(\varphi)}} - \frac{\sin(\varphi) \cos(\varphi)}{\sqrt[2m]{\hat{Q}(\varphi)}} \right) \frac{\partial}{\partial \varphi} \sqrt[2m]{\hat{Q}(\varphi)} \right) s = \\ &= \left( \frac{\sqrt[2m]{|c|}}{\sqrt[2m]{\hat{Q}(\varphi)}} \right)^2 s \end{aligned}$$

Damit ergibt sich mit (2.10) und  $\text{grad}(\frac{\partial}{\partial x_i} Q_i) = 2m - 2$ ,  $i = 1, 2$  für das Flächenintegral in (2.7):

$$\begin{aligned} & \int_G \frac{\partial}{\partial x_1} Q_1(x_1, x_2) + \frac{\partial}{\partial x_2} Q_2(x_1, x_2) dx_1 dx_2 = \\ &= \int_0^1 \int_0^{2\pi} \left( \frac{\partial}{\partial x_1} Q_1 \left( s \sqrt[2m]{|c|} \frac{\cos(\varphi)}{\sqrt[2m]{\hat{Q}(\varphi)}}, s \sqrt[2m]{|c|} \frac{\sin(\varphi)}{\sqrt[2m]{\hat{Q}(\varphi)}} \right) + \right. \\ & \quad \left. + \frac{\partial}{\partial x_2} Q_2 \left( s \sqrt[2m]{|c|} \frac{\cos(\varphi)}{\sqrt[2m]{\hat{Q}(\varphi)}}, s \sqrt[2m]{|c|} \frac{\sin(\varphi)}{\sqrt[2m]{\hat{Q}(\varphi)}} \right) \right) \left( \frac{\sqrt[2m]{|c|}}{\sqrt[2m]{\hat{Q}(\varphi)}} \right)^2 s d\varphi ds \stackrel{(2.6)}{=} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\stackrel{(2.6)}{=} \int_0^1 \int_0^{2\pi} \left( \frac{s \sqrt[2m]{|c|}}{\sqrt[2m]{\hat{Q}(\varphi)}} \right)^{2m-2} \left( \frac{\sqrt[2m]{|c|}}{\sqrt[2m]{\hat{Q}(\varphi)}} \right)^2 \left( \frac{\partial}{\partial x_1} Q_1(\cos(\varphi), \sin(\varphi)) + \right. \\
&\quad \left. + \frac{\partial}{\partial x_2} Q_2(\cos(\varphi), \sin(\varphi)) \right) s \, d\varphi \, ds = \\
&= |c| \int_0^1 s^{2m-1} \, ds \int_0^{2\pi} \frac{1}{\hat{Q}(\varphi)} \left( \frac{\partial}{\partial x_1} Q_1(\cos(\varphi), \sin(\varphi)) + \frac{\partial}{\partial x_2} Q_2(\cos(\varphi), \sin(\varphi)) \right) d\varphi \stackrel{(2.9)}{=} \\
&\stackrel{(2.9)}{=} \text{sign}(Q) |c| \frac{1}{2m} \int_0^{2\pi} \frac{\frac{\partial}{\partial x_1} Q_1(\cos(\varphi), \sin(\varphi)) + \frac{\partial}{\partial x_2} Q_2(\cos(\varphi), \sin(\varphi))}{Q(\cos(\varphi), \sin(\varphi))} d\varphi \stackrel{(2.10)}{=} \\
&\stackrel{(2.10)}{=} \frac{c}{2m} \int_0^{2\pi} \frac{\frac{\partial}{\partial x_1} Q_1(\cos(\varphi), \sin(\varphi)) + \frac{\partial}{\partial x_2} Q_2(\cos(\varphi), \sin(\varphi))}{Q(\cos(\varphi), \sin(\varphi))} d\varphi
\end{aligned}$$

Damit ist h) gezeigt.

$$\begin{aligned}
\text{i) } \oint_{\Gamma_c} (-Q_2, Q_1) \, d\Gamma = \\
= \int_0^{2\pi} -Q_2 \left( \sqrt[2m]{|c|} \frac{\cos(\varphi)}{\sqrt[2m]{\hat{Q}(\varphi)}}, \sqrt[2m]{|c|} \frac{\sin(\varphi)}{\sqrt[2m]{\hat{Q}(\varphi)}} \right) \frac{d}{d\varphi} \sqrt[2m]{|c|} \frac{\cos(\varphi)}{\sqrt[2m]{\hat{Q}(\varphi)}} + \\
+ Q_1 \left( \sqrt[2m]{|c|} \frac{\cos(\varphi)}{\sqrt[2m]{\hat{Q}(\varphi)}}, \sqrt[2m]{|c|} \frac{\sin(\varphi)}{\sqrt[2m]{\hat{Q}(\varphi)}} \right) \frac{d}{d\varphi} \sqrt[2m]{|c|} \frac{\sin(\varphi)}{\sqrt[2m]{\hat{Q}(\varphi)}} d\varphi \quad (2.11)
\end{aligned}$$

Setzen wir die Ableitungen:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{d\varphi} \frac{\cos(\varphi)}{\sqrt[2m]{\hat{Q}(\varphi)}} &= -\frac{\sin(\varphi)}{\sqrt[2m]{\hat{Q}(\varphi)}} - \frac{\cos(\varphi)}{\left( \sqrt[2m]{\hat{Q}(\varphi)} \right)^2} \frac{d}{d\varphi} \sqrt[2m]{\hat{Q}(\varphi)} \\
\frac{d}{d\varphi} \frac{\sin(\varphi)}{\sqrt[2m]{\hat{Q}(\varphi)}} &= \frac{\cos(\varphi)}{\sqrt[2m]{\hat{Q}(\varphi)}} - \frac{\sin(\varphi)}{\left( \sqrt[2m]{\hat{Q}(\varphi)} \right)^2} \frac{d}{d\varphi} \sqrt[2m]{\hat{Q}(\varphi)}
\end{aligned}$$

in (2.11) ein, so ergibt sich:

$$\left( \sqrt[2m]{|c|} \right)^{2m-1} \sqrt[2m]{|c|} \int_0^{2\pi} Q_2 \left( \frac{\cos(\varphi)}{\sqrt[2m]{\hat{Q}(\varphi)}}, \frac{\sin(\varphi)}{\sqrt[2m]{\hat{Q}(\varphi)}} \right) \frac{\sin(\varphi)}{\sqrt[2m]{\hat{Q}(\varphi)}} + Q_1 \left( \frac{\cos(\varphi)}{\sqrt[2m]{\hat{Q}(\varphi)}}, \frac{\sin(\varphi)}{\sqrt[2m]{\hat{Q}(\varphi)}} \right) \frac{\cos(\varphi)}{\sqrt[2m]{\hat{Q}(\varphi)}} +$$

$$\begin{aligned}
& + \left( Q_2 \left( \frac{\cos(\varphi)}{\sqrt[2m]{\hat{Q}(\varphi)}}, \frac{\sin(\varphi)}{\sqrt[2m]{\hat{Q}(\varphi)}} \right) \frac{\cos(\varphi)}{\left( \sqrt[2m]{\hat{Q}(\varphi)} \right)^2} - \right. \\
& \quad \left. - Q_1 \left( \frac{\cos(\varphi)}{\sqrt[2m]{\hat{Q}(\varphi)}}, \frac{\sin(\varphi)}{\sqrt[2m]{\hat{Q}(\varphi)}} \right) \frac{\sin(\varphi)}{\left( \sqrt[2m]{\hat{Q}(\varphi)} \right)^2} \right) \frac{d}{d\varphi} \sqrt[2m]{\hat{Q}(\varphi)} d\varphi = \\
& = |c| \int_0^{2\pi} \frac{Q_2(\cos(\varphi), \sin(\varphi)) \sin(\varphi) + Q_1(\cos(\varphi), \sin(\varphi)) \cos(\varphi)}{\left( \sqrt[2m]{\hat{Q}(\varphi)} \right)^{2m-1} \sqrt[2m]{\hat{Q}(\varphi)}} d\varphi + \\
& + |c| \int_0^{2\pi} \frac{Q_2(\cos(\varphi), \sin(\varphi)) \cos(\varphi) - Q_1(\cos(\varphi), \sin(\varphi)) \sin(\varphi)}{\left( \sqrt[2m]{\hat{Q}(\varphi)} \right)^{2m-1} \sqrt[2m]{\hat{Q}(\varphi)}} \frac{1}{\sqrt[2m]{\hat{Q}(\varphi)}} \frac{d}{d\varphi} \sqrt[2m]{\hat{Q}(\varphi)} d\varphi = \\
& = \text{sign}(Q) |c| \int_0^{2\pi} \frac{Q_1(\cos(\varphi), \sin(\varphi)) \cos(\varphi) + Q_2(\cos(\varphi), \sin(\varphi)) \sin(\varphi)}{Q_2(\cos(\varphi), \sin(\varphi)) \cos(\varphi) - Q_1(\cos(\varphi), \sin(\varphi)) \sin(\varphi)} d\varphi + \\
& + \text{sign}(Q) |c| \int_0^{2\pi} \frac{Q_2(\cos(\varphi), \sin(\varphi)) \cos(\varphi) - Q_1(\cos(\varphi), \sin(\varphi)) \sin(\varphi)}{Q_2(\cos(\varphi), \sin(\varphi)) \cos(\varphi) - Q_1(\cos(\varphi), \sin(\varphi)) \sin(\varphi)} \frac{d}{d\varphi} \left( \ln \left( \sqrt[2m]{\hat{Q}(\varphi)} \right) \right) d\varphi = \\
& = c \int_0^{2\pi} \frac{Q_1(\cos(\varphi), \sin(\varphi)) \cos(\varphi) + Q_2(\cos(\varphi), \sin(\varphi)) \sin(\varphi)}{Q_2(\cos(\varphi), \sin(\varphi)) \cos(\varphi) - Q_1(\cos(\varphi), \sin(\varphi)) \sin(\varphi)} d\varphi
\end{aligned}$$

da das zweite Integral ein Integral über die Ableitung einer periodischen Funktion ist.

j) Aus c) folgt

$$\begin{aligned}
& Q_1(x_1, x_2) \left( \left( \frac{\partial}{\partial x_1} Q_2(x_1, x_2) \right) x_1 + \left( \frac{\partial}{\partial x_2} Q_2(x_1, x_2) \right) x_2 \right) = \\
& = Q_2(x_1, x_2) \left( \left( \frac{\partial}{\partial x_1} Q_1(x_1, x_2) \right) x_1 + \left( \frac{\partial}{\partial x_2} Q_1(x_1, x_2) \right) x_2 \right) \\
& \iff Q_1(x_1, x_2) \left( \frac{\partial}{\partial x_1} Q_2(x_1, x_2) \right) x_1 - Q_2(x_1, x_2) \left( \frac{\partial}{\partial x_2} Q_1(x_1, x_2) \right) x_2 = \\
& = Q_2(x_1, x_2) \left( \frac{\partial}{\partial x_1} Q_1(x_1, x_2) \right) x_1 - Q_1(x_1, x_2) \left( \frac{\partial}{\partial x_2} Q_2(x_1, x_2) \right) x_2 \quad (2.12)
\end{aligned}$$

Damit ergibt sich:

$$\begin{aligned}
& \sum_{k=1}^2 Q_k(x_1, x_2) \frac{\partial}{\partial x_k} Q(x_1, x_2) = \\
& = Q_1(x_1, x_2) \left( \left( \frac{\partial}{\partial x_1} Q_2(x_1, x_2) \right) x_1 + Q_2(x_1, x_2) - \left( \frac{\partial}{\partial x_1} Q_1(x_1, x_2) \right) x_2 \right) + \\
& \quad + Q_2(x_1, x_2) \left( \left( \frac{\partial}{\partial x_2} Q_2(x_1, x_2) \right) x_1 - \left( \frac{\partial}{\partial x_2} Q_1(x_1, x_2) \right) x_2 - Q_1(x_1, x_2) \right) = \\
& = Q_1(x_1, x_2) \left( \frac{\partial}{\partial x_1} Q_2(x_1, x_2) \right) x_1 - Q_2(x_1, x_2) \left( \frac{\partial}{\partial x_2} Q_1(x_1, x_2) \right) x_2 - \\
& \quad - Q_1(x_1, x_2) \left( \frac{\partial}{\partial x_1} Q_1(x_1, x_2) \right) x_2 + Q_2(x_1, x_2) \left( \frac{\partial}{\partial x_2} Q_2(x_1, x_2) \right) x_1 \stackrel{(2.12)}{=} \\
& \stackrel{(2.12)}{=} Q_2(x_1, x_2) \left( \frac{\partial}{\partial x_1} Q_1(x_1, x_2) \right) x_1 - Q_1(x_1, x_2) \left( \frac{\partial}{\partial x_2} Q_2(x_1, x_2) \right) x_2 - \\
& \quad - Q_1(x_1, x_2) \left( \frac{\partial}{\partial x_1} Q_1(x_1, x_2) \right) x_2 + Q_2(x_1, x_2) \left( \frac{\partial}{\partial x_2} Q_2(x_1, x_2) \right) x_1 = \\
& = \left( Q_2(x_1, x_2) x_1 - Q_1(x_1, x_2) x_2 \right) \left( \frac{\partial}{\partial x_1} Q_1(x_1, x_2) + \frac{\partial}{\partial x_2} Q_2(x_1, x_2) \right) = \\
& = Q(x_1, x_2) \sum_{k=1}^2 \frac{\partial}{\partial x_k} Q_k(x_1, x_2)
\end{aligned}$$

## 2.3 Satz:

Seien  $Q_i(x_1, x_2)$   $i = 1, 2$  und  $f(\varphi), g(\varphi)$  definiert wie in Bemerkung 2.1.

Dann gelten für die DGL (2.1) folgende Aussagen:

- a) Sei  $\text{ggT}(Q_1(x_1, x_2), Q_2(x_1, x_2))$  definit

Dann gilt:

- (i)  $Q_1^2(x_1, x_2) + Q_2^2(x_1, x_2) \neq 0$  für  $(x_1, x_2) \neq 0$
- (ii)  $f^2(\varphi) + g^2(\varphi) \neq 0$

d.h. die DGL (2.1) besitzt außer dem Ursprung und die DGL (2.2) für  $r > 0$  keine stationären Punkte.

- b) Sei  $\text{ggT}(Q_1(x_1, x_2), Q_2(x_1, x_2)) \Big|_{(\bar{x}_1, \bar{x}_2)} = 0$  für  $(\bar{x}_1, \bar{x}_2) \neq 0$

Dann gilt:

$$(i) \quad Q_1(c\bar{x}_1, c\bar{x}_2) = 0 = Q_2(c\bar{x}_1, c\bar{x}_2) \quad \forall c \in \mathbb{R}$$

$$(ii) \quad f(\bar{\varphi}) = f(\bar{\varphi} + \pi) = 0 = g(\bar{\varphi}) = g(\bar{\varphi} + \pi) \quad \text{mit } \bar{\varphi} := \arctan \frac{\bar{x}_2}{\bar{x}_1}$$

Also sind alle Punkte auf der Geraden durch den Ursprung und  $(\bar{x}_1, \bar{x}_2)$  bzw. alle Punkte auf den Halbgeraden  $(\varphi, r)$  und  $(\varphi + \pi, r)$  stationäre Punkte der DGL (2.1) bzw. (2.2), d.h. alle Punkte der Nullniveaumenge des ggT sind stationär.

Beweis:

Da  $\text{grad } Q_i(x_1, x_2) = k > 0$ , gilt  $Q_1(0, 0) = Q_2(0, 0) = 0$ , d.h. der Ursprung ist stets stationärer Punkt der DGL (2.1).

a) Sei  $\text{ggT}(Q_1(x_1, x_2), Q_2(x_1, x_2))$  definit, also  $\text{ggT}(Q_1(x_1, x_2), Q_2(x_1, x_2)) \neq 0$  für  $(x_1, x_2) \neq 0$ .

Dann haben  $Q_1(x_1, x_2)$  und  $Q_2(x_1, x_2)$  außer den Ursprung keine gemeinsame reelle Nullstelle.

Damit gilt  $Q_1^2(x_1, x_2) + Q_2^2(x_1, x_2) \neq 0$  für  $(x_1, x_2) \neq 0$  und der Ursprung ist einziger stationärer Punkt der DGL (2.1).

Dann besitzt auch die DGL (2.2) keine stationären Punkte für  $r > 0$  und  $\nexists \bar{\varphi}$  mit  $f(\bar{\varphi}) = 0 = g(\bar{\varphi}) \implies f^2(\varphi) + g^2(\varphi) \neq 0$ .

b) Sei  $\text{ggT}(Q_1(x_1, x_2), Q_2(x_1, x_2)) \Big|_{(\bar{x}_1, \bar{x}_2)} = 0$  für  $(\bar{x}_1, \bar{x}_2) \neq 0$

$$\implies \exists c_i \in \mathbb{R} \quad i = 1, 2 \quad \text{mit } c_1^2 + c_2^2 \neq 0 \quad \text{und } c_1\bar{x}_1 + c_2\bar{x}_2 = 0 \xrightarrow{2.2.a}$$

$$\implies c_1x_1 + c_2x_2 \mid \text{ggT}(Q_1(x_1, x_2), Q_2(x_1, x_2)) \implies$$

$$\implies c_1x_1 + c_2x_2 \mid Q_i(x_1, x_2) \quad i = 1, 2 \implies$$

$$\implies Q_i(\bar{x}_1, \bar{x}_2) = 0 \quad i = 1, 2 \implies Q_i(c\bar{x}_1, c\bar{x}_2) = 0 \quad i = 1, 2 \quad \forall c \in \mathbb{R},$$

da die  $Q_i(x_1, x_2)$   $i = 1, 2$  homogene Polynome vom gleichen Grad  $> 0$  sind. D.h. alle Punkte auf der Geraden durch den Ursprung und  $(\bar{x}_1, \bar{x}_2)$  sind stationäre Punkte der DGL (2.1).

Aus der Äquivalenz von (2.1) und (2.2) folgt die Aussage über die stationären Punkte von (2.2) und daraus  $f(\bar{\varphi}) = f(\bar{\varphi} + \pi) = 0 = g(\bar{\varphi}) = g(\bar{\varphi} + \pi)$  mit  $\bar{\varphi} := \arctan \frac{\bar{x}_2}{\bar{x}_1}$ .

## 2.4 Satz:

Seien  $Q_i(x_1, x_2)$   $i = 1, 2$  reelle, homogene Polynome vom gleichen Grad  $k > 0$  mit definitivem ggT und im Falle der Existenz:

$$J := \int_0^{2\pi} \frac{\frac{\partial}{\partial x_1} Q_1(\cos(\varphi), \sin(\varphi)) + \frac{\partial}{\partial x_2} Q_2(\cos(\varphi), \sin(\varphi))}{|Q_2(\cos(\varphi), \sin(\varphi)) \cos(\varphi) - Q_1(\cos(\varphi), \sin(\varphi)) \sin(\varphi)|} d\varphi$$

Weiter seien  $H_i, H_{i+1}$  zwei im mathematisch positivem Sinne aufeinander folgende, vom Ursprung ausgehende Halbgeraden aus der Nullniveaumenge von  $Q_2(x_1, x_2)x_1 - Q_1(x_1, x_2)x_2$  und  $S_i$  der von  $H_i$  und  $H_{i+1}$  begrenzte Sektor.

Dann gelten für die DGL (2.1) folgende Aussagen:

- a) Sei  $Q_2(x_1, x_2)x_1 - Q_1(x_1, x_2)x_2 \equiv 0$

Genau dann gilt:

Der stationäre Punkt im Ursprung der DGL (2.1) ist ein globaler eigentlicher Knoten.

Der Knoten ist stabil (instabil), wenn  $Q_1(x_1, x_2)x_1 + Q_2(x_1, x_2)x_2 < 0 (> 0)$  gilt.

- b) Sei  $Q_2(x_1, x_2)x_1 - Q_1(x_1, x_2)x_2 \neq 0$

Genau dann gilt:

Der stationäre Punkt im Ursprung der DGL (2.1) ist im Falle

(i)  $J = 0$  ein globales Zentrum.

(ii)  $J \neq 0$  ein globaler Wirbel.

Der Wirbel ist stabil (instabil), wenn  $J < 0 (> 0)$  gilt.

- c) Sei  $Q_2(x_1, x_2)x_1 - Q_1(x_1, x_2)x_2 = 0$  und  $\neq 0$

Genau dann gilt:

Der Sektor  $S_i$  ist im Falle:

- (i)  $\text{sign}(Q_1(x_1, x_2)x_1 + Q_2(x_1, x_2)x_2) \Big|_{H_i} = \text{sign}(Q_1(x_1, x_2)x_1 + Q_2(x_1, x_2)x_2) \Big|_{H_{i+1}}$   
ein parabolischer Sektor.

Sind alle Sektoren parabolisch, so ist der stationäre Punkt im Ursprung der DGL (2.1) ein globaler uneigentlicher Knoten. Der Knoten ist stabil (instabil), wenn  $\text{sign}(Q_1(x_1, x_2)x_1 + Q_2(x_1, x_2)x_2) \Big|_{H_i} < 0 (> 0)$  gilt.

- (ii)  $\text{sign}(Q_1(x_1, x_2)x_1 + Q_2(x_1, x_2)x_2) \Big|_{H_i} \neq \text{sign}(Q_1(x_1, x_2)x_1 + Q_2(x_1, x_2)x_2) \Big|_{H_{i+1}} =$   
 $= \text{sign}(Q_2(x_1, x_2)x_1 - Q_1(x_1, x_2)x_2) \Big|_{S_i}$   
ein hyperbolischer Sektor.

- (iii)  $\text{sign}(Q_1(x_1, x_2)x_1 + Q_2(x_1, x_2)x_2) \Big|_{H_i} \neq \text{sign}(Q_1(x_1, x_2)x_1 + Q_2(x_1, x_2)x_2) \Big|_{H_{i+1}} \neq$   
 $\neq \text{sign}(Q_2(x_1, x_2)x_1 - Q_1(x_1, x_2)x_2) \Big|_{S_i}$   
ein elliptischer Sektor.

Beweis:

Wir betrachten zunächst die zu (2.1) äquivalente DGL (2.2) in klassischen Polarkoordinaten, bzw mit Hilfe von Satz 1.12 eine DGL mit äquivalenten Trajektorien:

$$\begin{aligned}\dot{r} &= f(\varphi)r \\ \dot{\varphi} &= g(\varphi)\end{aligned}\tag{2.13}$$

Nun sind genau die drei folgenden Fälle zu unterscheiden:

a)  $g(\varphi) \equiv 0$ , b)  $g(\varphi) \neq 0$  und c)  $g(\varphi) \not\equiv 0$  aber  $\exists \bar{\varphi}$  mit  $g(\bar{\varphi}) = 0$ .

a) “ $\Rightarrow$ ”

$g(\varphi) \equiv 0 \Rightarrow f(\varphi) \neq 0$  also  $\dot{\varphi} \equiv 0 \wedge \dot{r} \neq 0$  d.h. die in  $(\varphi_0, r_0 > 0)$  startenden Trajektorien von (2.13) laufen senkrecht auf die Gerade  $r \equiv 0$  zu oder weg. Das bedeutet für die Trajektorien von (2.1), daß sie radial auf den Ursprung zulaufen oder weglaufen, der stationäre Punkt im Ursprung der DGL (2.1) ist also ein globaler eigentlicher Knoten.

“ $\Leftarrow$ ”

Sei der stationäre Punkt im Ursprung der DGL (2.1) ein globaler eigentlicher Knoten. Dann laufen alle Trajektorien der DGL (2.1) radial auf den Ursprung zu oder weg, d.h.  $\dot{\varphi} \equiv 0 \wedge \dot{r} \neq 0 \iff g(\varphi) \equiv 0 \wedge f(\varphi) \neq 0$ .

Die Stabilitätsaussage folgt aus  $f(\varphi) \neq 0 \iff \dot{r} = f(\varphi) < 0 (> 0) \iff \text{sign}(Q_1(x_1, x_2)x_1 + Q_2(x_1, x_2)x_2) < 0 (> 0)$ .

b) “ $\Rightarrow$ ”

Sei  $g(\varphi) \neq 0$ . Hier können wir die DGL der Trajektorien von (2.2) bzw. (2.4) aufstellen oder auch  $\varphi$  als neue unabhängige Variable einführen, was dasselbe ist:

$$\frac{dr}{d\varphi} = \frac{f(\varphi)}{g(\varphi)} r\tag{2.14}$$

Die Lösung dieser DGL mit der Anfangsbedingung  $r(\varphi_0) = r_0 > 0$  lautet:

$$r(\varphi, \varphi_0, r_0) = r_0 e^{\int_{\varphi_0}^{\varphi} \frac{f(\psi)}{g(\psi)} d\psi}\tag{2.15}$$

Mit

$$\int_0^{2\pi} \frac{f(\varphi)}{g(\varphi)} d\varphi = \text{sign } g(\varphi) \cdot J\tag{2.16}$$

was aus Satz 2.2.h+i folgt, ist der stationäre Punkt im Ursprung der DGL (2.1) für  $J = 0$  ein globales Zentrum und für  $J \neq 0$  ein globaler Wirbel.

“ $\Leftarrow$ ”

Sei der stationäre Punkt im Ursprung der DGL (2.1) ein globales Zentrum oder ein globaler Wirbel, d.h.

$\lim_{t \rightarrow \infty} \varphi(t) = \infty \wedge ((i) r(0, \varphi_0, r_0) = r(2\pi, \varphi_0, r_0) \text{ bzw. } (ii) r(0, \varphi_0, r_0) \neq r(2\pi, \varphi_0, r_0))$

Annahme:  $\exists \bar{\varphi}$  mit  $g(\bar{\varphi}) = 0$ .

Dann existiert (vgl. Beweis von a)) eine Lösung von (2.2) bzw. (2.4) mit

$\lim_{t \rightarrow \infty} \varphi(t) = \bar{\varphi}$ . Widerspruch.

Damit gilt  $g(\varphi) \neq 0$ .

Bei der Berechnung der Stabilität muß man den Drehsinn, also  $\text{sign } g(\varphi)$  berücksichtigen.

Der Wirbel ist stabil (instabil), falls  $\text{sign } g(\varphi) > 0 \wedge \text{sign } g(\varphi) \cdot J < 0 (> 0)$  bzw. falls  $\text{sign } g(\varphi) < 0 \wedge \text{sign } g(\varphi) \cdot J > 0 (< 0)$  d.h.  $J < 0 (> 0)$  gilt.

c) Sei  $g(\varphi) \neq 0$  aber  $\exists \bar{\varphi}$  mit  $g(\bar{\varphi}) = 0$ .

Seien weiter  $\varphi_i, \varphi_{i+1}$  zwei aufeinander folgende Nullstellen von  $g(\varphi)$  (entsprechen  $H_i, H_{i+1}$ ). Da  $g(\varphi) \neq 0 \forall \varphi \in (\varphi_i, \varphi_{i+1})$  kann wieder die DGL (2.14), diesmal für das Intervall  $(\varphi_i, \varphi_{i+1})$ , aufgestellt werden.

Für die Lösung (2.15) gilt (beachte  $\varphi_0 \in S_i$ ):

$$\lim_{\varphi \searrow \varphi_i} r(\varphi, \varphi_0, r_0) = 0 \ (\infty) \iff \lim_{\varphi \searrow \varphi_i} \int_{\varphi_0}^{\varphi} \frac{f(\psi)}{g(\psi)} d\psi = -\infty \ (\infty)$$

$$\lim_{\varphi \nearrow \varphi_{i+1}} r(\varphi, \varphi_0, r_0) = 0 \ (\infty) \iff \lim_{\varphi \nearrow \varphi_{i+1}} \int_{\varphi_0}^{\varphi} \frac{f(\psi)}{g(\psi)} d\psi = -\infty \ (\infty)$$

Außerdem gilt mit Satz 1.8 für die rechten Seiten:

$$\lim_{\varphi \searrow \varphi_i} \int_{\varphi_0}^{\varphi} \frac{f(\psi)}{g(\psi)} d\psi = \lim_{\varphi \searrow \varphi_i} \left( - \int_{\varphi}^{\varphi_0} \frac{f(\psi)}{g(\psi)} d\psi \right) = -\text{sign } f(\varphi_i) \text{sign } g(\varphi_0) \cdot \infty$$

$$\lim_{\varphi \nearrow \varphi_{i+1}} \int_{\varphi_0}^{\varphi} \frac{f(\psi)}{g(\psi)} d\psi = \text{sign } f(\varphi_{i+1}) \text{sign } g(\varphi_0) \cdot \infty$$

und damit insgesamt:

$$\begin{aligned} \lim_{\varphi \searrow \varphi_i} r(\varphi, \varphi_0, r_0) = 0 \ (\infty) &\iff \text{sign } f(\varphi_i) = (\neq) \text{sign } g(\varphi_0) \\ \lim_{\varphi \nearrow \varphi_{i+1}} r(\varphi, \varphi_0, r_0) = 0 \ (\infty) &\iff \text{sign } f(\varphi_{i+1}) \neq (=) \text{sign } g(\varphi_0) \end{aligned} \tag{2.17}$$

Allgemein gilt für einen Sektor  $S_i$  (vgl. [5]):

$$\begin{aligned}
S_i \text{ parabolisch} & \iff \lim_{\varphi \searrow \varphi_i} r(\varphi, \varphi_0, r_0) = 0 \text{ } (\infty) \quad \wedge \quad \lim_{\varphi \nearrow \varphi_{i+1}} r(\varphi, \varphi_0, r_0) = \infty \text{ } (0) \\
S_i \text{ hyperbolisch} & \iff \lim_{\varphi \searrow \varphi_i} r(\varphi, \varphi_0, r_0) = \infty \quad \wedge \quad \lim_{\varphi \nearrow \varphi_{i+1}} r(\varphi, \varphi_0, r_0) = \infty \\
S_i \text{ elliptisch} & \iff \lim_{\varphi \searrow \varphi_i} r(\varphi, \varphi_0, r_0) = 0 \quad \wedge \quad \lim_{\varphi \nearrow \varphi_{i+1}} r(\varphi, \varphi_0, r_0) = 0
\end{aligned}$$

Mit (2.17) bedeutet das:

$$\begin{aligned}
S_i \text{ parabolisch} & \iff \begin{aligned} & \text{sign} f(\varphi_i) = (\neq) \text{sign} g(\varphi_0) \quad \wedge \quad \text{sign} f(\varphi_{i+1}) = (\neq) \text{sign} g(\varphi_0) \\ & \iff \text{sign} f(\varphi_i) = \text{sign} f(\varphi_{i+1}) \end{aligned} \\
S_i \text{ hyperbolisch} & \iff \begin{aligned} & \text{sign} f(\varphi_i) \neq \text{sign} g(\varphi_0) \quad \wedge \quad \text{sign} f(\varphi_{i+1}) = \text{sign} g(\varphi_0) \\ & \iff \text{sign} f(\varphi_i) \neq \text{sign} f(\varphi_{i+1}) \quad \wedge \quad \text{sign} f(\varphi_{i+1}) = \text{sign} g(\varphi_0) \end{aligned} \\
S_i \text{ elliptisch} & \iff \begin{aligned} & \text{sign} f(\varphi_i) = \text{sign} g(\varphi_0) \quad \wedge \quad \text{sign} f(\varphi_{i+1}) \neq \text{sign} g(\varphi_0) \\ & \iff \text{sign} f(\varphi_i) \neq \text{sign} f(\varphi_{i+1}) \quad \wedge \quad \text{sign} f(\varphi_{i+1}) \neq \text{sign} g(\varphi_0) \end{aligned}
\end{aligned}$$

Da wir die Aussagen dieses Satzes später auch in Polarkoordinaten formuliert benötigen, geben wir sie hier zusätzlich an:

## 2.5 Bemerkung:

Seien  $f(\varphi), g(\varphi)$  definiert wie in Bemerkung 2.1 und  $H_i, H_{i+1}, S_i, S_{i+1}$  wie im Satz 2.4. Weiter seien  $\varphi_i, \varphi_{i+1}$  die  $H_i, H_{i+1}$  entsprechenden, aufeinander folgenden Nullstellen von  $g(\varphi)$ ,  $\overline{\varphi} \in (\varphi_i, \varphi_{i+1})$  und  $J := \int_0^{2\pi} \frac{f(\varphi)}{|g(\varphi)|} d\varphi$  (vgl. (2.16)).

Dann gelten für die DGL (2.1) folgende Aussagen:

a) Sei  $g(\varphi) \equiv 0$

Genau dann gilt:

Der stationäre Punkt im Ursprung der DGL (2.1) ist ein globaler eigentlicher Knoten.

Der Knoten ist stabil (instabil), wenn  $f(\varphi) < 0$  ( $> 0$ ) gilt.

b) Sei  $g(\varphi) \neq 0$

Genau dann gilt:

Der stationäre Punkt im Ursprung der DGL (2.1) ist im Falle

- (i)  $J = 0$  ein globales Zentrum.
- (ii)  $J \neq 0$  ein globaler Wirbel.

Der Wirbel ist stabil (instabil), wenn  $J < 0$  ( $> 0$ ) gilt.

c) Sei  $g(\varphi) = 0$  und  $\neq 0$

Genau dann gilt:

Der Sektor  $S_i$  ist im Falle:

- (i)  $\text{sign}f(\varphi_i) = \text{sign}f(\varphi_{i+1})$   
ein parabolischer Sektor.

Sind alle Sektoren parabolisch, so ist der stationäre Punkt im Ursprung der DGL (2.1) ein globaler uneigentlicher Knoten. Der Knoten ist stabil (instabil), wenn  $\text{sign}f(\varphi_i) < 0$  ( $> 0$ ) gilt.

- (ii)  $\text{sign}f(\varphi_i) \neq \text{sign}f(\varphi_{i+1}) = \text{sign}g(\overline{\varphi})$   
ein hyperbolischer Sektor.
- (iii)  $\text{sign}f(\varphi_i) \neq \text{sign}f(\varphi_{i+1}) \neq \text{sign}g(\overline{\varphi})$   
ein elliptischer Sektor.

## 2.6 Korollar:

Seien  $Q_i(x_1, x_2)$   $i = 1, 2$  definiert wie im Satz 2.4.

Dann gilt:

Die DGL (2.1) besitzt stets die konstante Lösung durch den Ursprung.

Weiter gilt:

- a) Ist  $k$  gerade, so besitzt (2.1) sonst keine periodischen Lösungen.
- b) Ist  $k$  ungerade, so besitzt (2.1) genau dann nur periodische Lösungen, wenn gilt:

- (i)  $Q_2(x_1, x_2)x_1 - Q_1(x_1, x_2)x_2$  ist definit

$$(ii) \int_0^{2\pi} \frac{\frac{\partial}{\partial x_1} Q_1(\cos(\varphi), \sin(\varphi)) + \frac{\partial}{\partial x_2} Q_2(\cos(\varphi), \sin(\varphi))}{Q_2(\cos(\varphi), \sin(\varphi)) \cos(\varphi) - Q_1(\cos(\varphi), \sin(\varphi)) \sin(\varphi)} d\varphi = 0$$

Beweis:

a)  $k$  gerade  $\implies \text{grad } (Q_2x_1 - Q_1x_2)$  ungerade  $\implies Q_2x_1 - Q_1x_2$  nicht definit  $\xRightarrow{2.4.a^+c}$  Behauptung.

b) (2.1) besitzt nur periodische Lösungen  $\iff$  Ursprung ist globales Zentrum  $\xLeftrightarrow{2.4.b(i)} (Q_2x_1 - Q_1x_2)$  definit  $\wedge I = 0$ .

## 2.7 Korollar:

Seien  $Q_i(x_1, x_2)$   $i = 1, 2$  definiert wie im Satz 2.4.

Dann gilt:

- a) Der stationäre Punkt im Ursprung der DGL (2.1) besitzt zu jedem Sektor einen symmetrisch bezüglich des Ursprungs gelegenen Sektor gleichen Typs.  
Falls  $k$  ungerade ist, werden die Trajektorien in diesen Sektoren symmetrisch bezüglich des Ursprungs durchlaufen, sonst entgegengesetzt.

Ist speziell  $k = \text{grad}Q_i(x_1, x_2)$   $i = 1, 2$  gerade, gilt zusätzlich:

- b) Der stationäre Punkt im Ursprung der DGL (2.1) besitzt mindestens zwei elliptische oder zwei hyperbolische Sektoren.
- c) Der stationäre Punkt im Ursprung der DGL (2.1) ist kein Zentrum, Wirbel, eigentlicher oder uneigentlicher Knoten.

Beweis:

Allgemein gilt (vgl.(2.3)):

$$f(\varphi) = (-1)^{k+1}f(\varphi + \pi) \quad \wedge \quad g(\varphi) = (-1)^{k+1}g(\varphi + \pi) \quad (2.18)$$

a) Folgt mit (2.18) aus 2.4.c bzw.2.5.c.

b)  $k$  gerade  $\xRightarrow{(2.18)} \exists \bar{\varphi}$  mit  $g(\bar{\varphi}) = 0 \implies g(\bar{\varphi} + \pi) = 0$  aber  $f(\bar{\varphi}) \stackrel{(2.18)}{=} -f(\bar{\varphi} + \pi) \xRightarrow{2.5}$  Der Ursprung ist kein reiner Knoten und besitzt auch nicht nur parabolische Sektoren  $\xRightarrow{a)}$  Beh.

c) Diese Aussage ist äquivalent zu b).

## 2.8 Korollar:

Der stationäre Punkt im Ursprung der DGL (2.1) sei asymptotisch stabil (bei Zeitumkehr asymptotisch stabil).

Genau dann gilt:

Entweder

(i)  $Q_2(x_1, x_2)x_1 - Q_1(x_1, x_2)x_2$  definit und

$$(ii) \int_0^{2\pi} \frac{\frac{\partial}{\partial x_1} Q_1(\cos(\varphi), \sin(\varphi)) + \frac{\partial}{\partial x_2} Q_2(\cos(\varphi), \sin(\varphi))}{|Q_2(\cos(\varphi), \sin(\varphi)) \cos(\varphi) - Q_1(\cos(\varphi), \sin(\varphi)) \sin(\varphi)|} d\varphi < 0 (> 0)$$

oder

(i)  $Q_2(x_1, x_2)x_1 - Q_1(x_1, x_2)x_2$  nicht definit und

$$(ii) \begin{aligned} & Q_1(x_1, x_2)x_1 + Q_2(x_1, x_2)x_2 < 0 (> 0) \\ & \forall (x_1, x_2) \in \left\{ \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \mid Q_2(x_1, x_2)x_1 - Q_1(x_1, x_2)x_2 = 0 \right\} \end{aligned}$$

Beweis:

Satz 2.4.b.(ii), 2.4.a, 2.4.c.(i).

Da wir die Aussagen dieses Korollars später auch wieder in Polarkoordinaten formuliert benötigen, seien sie hier zusätzlich angegeben:

## 2.9 Bemerkung:

In der DGL (2.4) sei  $r \equiv 0$  asymptotisch stabil (bei Zeitumkehr asymptotisch stabil).

Genau dann gilt:

Entweder

(i)  $g(\varphi)$  definit und

$$(ii) \int_0^{2\pi} \frac{f(\varphi)}{|g(\varphi)|} d\varphi < 0 (> 0)$$

oder

(i)  $g(\varphi)$  nicht definit und

$$(ii) f(\varphi) < 0 (> 0) \forall \varphi \in [0, 2\pi] \text{ mit } g(\varphi) = 0$$

## 2.10 Beispiele:

Elliptische Sektoren können im linearen ( $k = 1$ ) Fall nicht auftreten (vgl. [21] S. 351). Ist aber  $k > 1$ , kann der stationäre Punkt im Ursprung der DGL (2.1) sowohl für  $k = \text{gerade}$ , als auch für  $k = \text{ungerade}$ , nur elliptische Sektoren besitzen, was die beiden folgenden Beispiele für  $k=2$  bzw.  $k=3$  zeigen:

a) ( $k=2$ ) Betrachte die DGL

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_1 x_2 \\ \dot{x}_2 &= -x_1^2 + x_2^2\end{aligned}\tag{2.19}$$

Wir zeigen:

Der stationäre Punkt im Ursprung der DGL (2.19) besitzt nur elliptische Sektoren (vgl. Satz 2.4.c (iii)).

Wegen

$$Q_2(x_1, x_2)x_1 - Q_1(x_1, x_2)x_2 = (-x_1^2 + x_2^2)x_1 - (x_1 x_2)x_2 = -x_1^3 + x_1 x_2^2 - x_1 x_2^2 = -x_1^3$$

hat die DGL (2.19) zwei Sektoren (vgl. Satz 2.4), die linke ( $=: S_1$ ) und die rechte ( $=: S_2$ ) Halbebene, getrennt durch die positive ( $=: H_1$ ) und die negative ( $=: H_2$ )  $x_2$ -Achse.

Weiter gilt:

$$Q_1(x_1, x_2)x_1 + Q_2(x_1, x_2)x_2 = (x_1 x_2)x_1 + (-x_1^2 + x_2^2)x_2 = x_1^2 x_2 - x_1^2 x_2 + x_2^3 = x_2^3$$

und

$$\text{sign}(x_2^3)\Big|_{H_1} = \text{sign}(x_2^3)\Big|_{(0,1)} = 1$$

$$\text{sign}(x_2^3)\Big|_{H_2} = \text{sign}(x_2^3)\Big|_{(0,-1)} = -1$$

sowie

$$\text{sign}(-x_1^3)\Big|_{S_1} = \text{sign}(-x_1^3)\Big|_{(-1,0)} = 1$$

$$\text{sign}(-x_1^3)\Big|_{S_2} = \text{sign}(-x_1^3)\Big|_{(1,0)} = -1$$

Setzt man noch  $H_3 := H_1$  folgt:

$$\text{sign}(x_2^3)\Big|_{H_1} \neq \text{sign}(x_2^3)\Big|_{H_2} \neq \text{sign}(-x_1^3)\Big|_{S_1}$$

und

$$\text{sign}(x_2^3)\Big|_{H_2} \neq \text{sign}(x_2^3)\Big|_{H_3} \neq \text{sign}(-x_1^3)\Big|_{S_2}$$

Nach Satz 2.4.c (iii) sind damit beide Sektoren elliptisch.

b) (k=3) Betrachte die DGL

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= 3x_1^3 - 5x_1x_2^2 \\ \dot{x}_2 &= 3x_1^2x_2 - x_2^3\end{aligned}\tag{2.20}$$

Wir zeigen wieder:

Der stationäre Punkt im Ursprung der DGL (2.20) besitzt nur elliptische Sektoren.

Wegen

$$Q_2(x_1, x_2)x_1 - Q_1(x_1, x_2)x_2 =$$

$$= (3x_1^2x_2 - x_2^3)x_1 - (3x_1^3 - 5x_1x_2^2)x_2 = 3x_1^3x_2 - x_1x_2^3 - 3x_1^3x_2 + 5x_1x_2^3 = 4x_1x_2^3$$

hat die DGL (2.20) vier Sektoren, den ersten ( $=: S_1$ ), zweiten ( $=: S_2$ ), dritten ( $=: S_3$ ) und vierten ( $=: S_4$ ) Quadranten der Ebene, getrennt durch die positive  $x_1$ -Achse ( $=: H_1$ ), die positive  $x_2$ -Achse ( $=: H_2$ ), die negative  $x_1$ -Achse ( $=: H_3$ ) und die negative  $x_2$ -Achse ( $=: H_4$ ).

Weiter gilt

$$Q_1(x_1, x_2)x_1 + Q_2(x_1, x_2)x_2 =$$

$$= (3x_1^3 - 5x_1x_2^2)x_1 + (3x_1^2x_2 - x_2^3)x_2 = 3x_1^4 - 5x_1^2x_2^2 + 3x_1^2x_2^2 - x_2^4 = 3x_1^4 - 2x_1^2x_2^2 - x_2^4$$

und

$$\text{sign}(3x_1^4 - 2x_1^2x_2^2 - x_2^4)\Big|_{H_1} = \text{sign}(3x_1^4 - 2x_1^2x_2^2 - x_2^4)\Big|_{(1,0)} = 1$$

$$\text{sign}(3x_1^4 - 2x_1^2x_2^2 - x_2^4)\Big|_{H_2} = \text{sign}(3x_1^4 - 2x_1^2x_2^2 - x_2^4)\Big|_{(0,1)} = -1$$

$$\text{sign}(3x_1^4 - 2x_1^2x_2^2 - x_2^4)\Big|_{H_3} = \text{sign}(3x_1^4 - 2x_1^2x_2^2 - x_2^4)\Big|_{(-1,0)} = 1$$

$$\text{sign}(3x_1^4 - 2x_1^2x_2^2 - x_2^4)\Big|_{H_4} = \text{sign}(3x_1^4 - 2x_1^2x_2^2 - x_2^4)\Big|_{(0,-1)} = -1$$

sowie

$$\text{sign}(4x_1x_2^3)\Big|_{S_1} = \text{sign}(4x_1x_2^3)\Big|_{(1,1)} = 1$$

$$\text{sign}(4x_1x_2^3)\Big|_{S_2} = \text{sign}(4x_1x_2^3)\Big|_{(-1,1)} = -1$$

$$\text{sign}(4x_1x_2^3)\Big|_{S_3} = \text{sign}(4x_1x_2^3)\Big|_{(-1,-1)} = 1$$

$$\text{sign}(4x_1x_2^3)\Big|_{S_4} = \text{sign}(4x_1x_2^3)\Big|_{(1,-1)} = -1$$

Setzt man noch  $H_5 := H_1$  folgt:

$$\begin{aligned} \text{sign}(3x_1^4 - 2x_1^2x_2^2 - x_2^4) \Big|_{H_1} &\neq \text{sign}(3x_1^4 - 2x_1^2x_2^2 - x_2^4) \Big|_{H_2} \neq \text{sign}(4x_1x_2^3) \Big|_{S_1} \\ \text{sign}(3x_1^4 - 2x_1^2x_2^2 - x_2^4) \Big|_{H_2} &\neq \text{sign}(3x_1^4 - 2x_1^2x_2^2 - x_2^4) \Big|_{H_3} \neq \text{sign}(4x_1x_2^3) \Big|_{S_2} \\ \text{sign}(3x_1^4 - 2x_1^2x_2^2 - x_2^4) \Big|_{H_3} &\neq \text{sign}(3x_1^4 - 2x_1^2x_2^2 - x_2^4) \Big|_{H_4} \neq \text{sign}(4x_1x_2^3) \Big|_{S_3} \\ \text{sign}(3x_1^4 - 2x_1^2x_2^2 - x_2^4) \Big|_{H_4} &\neq \text{sign}(3x_1^4 - 2x_1^2x_2^2 - x_2^4) \Big|_{H_5} \neq \text{sign}(4x_1x_2^3) \Big|_{S_4} \end{aligned}$$

Nach Satz 2.4.c (iii) sind damit alle vier Sektoren elliptisch.

## 2.11 Satz:

Seien  $Q_i(x_1, x_2)$   $i = 1, 2$  wie im Satz 2.4 definiert. Sei weiter:

$H :=$  Anzahl der hyperbolischen Sektoren

$E :=$  Anzahl der elliptischen Sektoren

$I :=$  Index des stationären Punktes im Ursprung  
der DGL (2.1).

Dann gilt:

$$I = \frac{E - H}{2} + 1$$

Beweis:

Das ist ein Spezialfall des Satzes von Bendixson. Einen Beweis findet man in [5] S. 510.

## 2.12 Satz:

Seien  $Q_i(x_1, x_2)$   $i = 1, 2$  homogene Polynome vom gleichen Grad  $k$ .

Dann sind äquivalent:

$$(a) \quad \frac{\partial}{\partial x_1} Q_1(x_1, x_2) + \frac{\partial}{\partial x_2} Q_2(x_1, x_2) = 0 \quad \forall (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \quad (2.21)$$

(b) Es existiert ein homogenes Polynom  $V(x_1, x_2)$  vom Grad  $k + 1$  mit

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x_1}V(x_1, x_2) &= Q_2(x_1, x_2) \\ \frac{\partial}{\partial x_2}V(x_1, x_2) &= -Q_1(x_1, x_2)\end{aligned}\tag{2.22}$$

Weiter ist  $V(x_1, x_2)$  im Falle der Existenz konstant längs Lösungen der DGL (2.1) und es sind äquivalent:

- (i) Die DGL (2.1) hat nur periodische Lösungen.
- (ii)  $V(x_1, x_2)$  ist definit.

Beweis:

Wir zeigen von der ersten Äquivalenz nur (a) $\Rightarrow$ (b), denn (b) $\Rightarrow$ (a) ist trivial.

Definiere:

$$V(x_1, x_2) := \frac{1}{k+1} \left( -Q_1(x_1, x_2)x_2 + Q_2(x_1, x_2)x_1 \right) \tag{2.23}$$

Damit ergibt sich:

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x_1}V(x_1, x_2) &= \frac{1}{k+1} \left( -\left(\frac{\partial}{\partial x_1}Q_1(x_1, x_2)\right)x_2 + \frac{\partial}{\partial x_1}\left(Q_2(x_1, x_2)\right)x_1 + Q_2(x_1, x_2) \right) \stackrel{(2.21)}{=} \\ &\stackrel{(2.21)}{=} \frac{1}{k+1} \left( \frac{\partial}{\partial x_2}\left(Q_2(x_1, x_2)\right)x_2 + \frac{\partial}{\partial x_1}\left(Q_2(x_1, x_2)\right)x_1 + Q_2(x_1, x_2) \right) \stackrel{2.2.c}{=} \\ &\stackrel{2.2.c}{=} \frac{1}{k+1} \left( kQ_2(x_1, x_2) + Q_2(x_1, x_2) \right) = Q_2(x_1, x_2)\end{aligned}$$

Völlig analog zeigt man:

$$\frac{\partial}{\partial x_2}V(x_1, x_2) = -Q_1(x_1, x_2)$$

Sei jetzt  $V(x_1, x_2)$  existent und  $(h_1(t), h_2(t))$  beliebige Lösung von (2.1).

Dann gilt:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}V(h_1(t), h_2(t)) &= \frac{\partial}{\partial x_1}V(h_1(t), h_2(t))\dot{h}_1(t) + \frac{\partial}{\partial x_2}V(h_1(t), h_2(t))\dot{h}_2(t) \stackrel{(2.22)}{=} \\ &\stackrel{(2.22)}{=} Q_2(h_1(t), h_2(t))Q_1(h_1(t), h_2(t)) - Q_1(h_1(t), h_2(t))Q_2(h_1(t), h_2(t)) = 0\end{aligned}\tag{2.24}$$

Weiter gilt noch:

$$(i) \xrightarrow{2.5} Q_2 x_1 - Q_1 x_2 \neq 0 \xrightarrow{(2.23)} (ii) \xrightarrow[2.2.f]{(2.24)} (i).$$

Falls (2.21) nicht erfüllt ist, gibt der folgende Satz Auskunft über die Existenz eines homogenen Polynoms als Euler'schen Multiplikator:

## 2.13 Satz:

Seien  $Q_i(x_1, x_2)$   $i=1,2$  homogene Polynome vom gleichen Grad  $k$  und es sei

$$0 \neq Q_2(x_1, x_2)x_1 - Q_1(x_1, x_2)x_2 := \prod_{j=1}^{k_1} q_j^{\alpha_j}(x_1, x_2) \quad (2.25)$$

die (mod const) eindeutige Zerlegung von  $Q_2 x_1 - Q_1 x_2$  in über  $\mathbb{R}$  irreduzible homogene Polynome vom Grad 1 bzw. 2.

Dann sind äquivalent:

- (a) Es existiert eine Lösung des linearen, inhomogenen Gleichungssystems (entsteht durch Koeffizientenvergleich) für  $\beta_j \in \mathbb{N} \cup \{0\}$   $j = 1, \dots, k_1$  (vgl. (2.21)):

$$\begin{aligned} - \sum_{i=1}^2 Q_i(x_1, x_2) \sum_{j=1}^{k_1} q_j^{\alpha_j-1}(x_1, x_2) \left( \prod_{j \neq m=1}^{k_1} q_m^{\alpha_m}(x_1, x_2) \right) \frac{\partial}{\partial x_i} q_j(x_1, x_2) \cdot \beta_j = \\ = \left( Q_2(x_1, x_2)x_1 - Q_1(x_1, x_2)x_2 \right) \left( \frac{\partial}{\partial x_1} Q_1(x_1, x_2) + \frac{\partial}{\partial x_2} Q_2(x_1, x_2) \right) \end{aligned}$$

- (b) Es existieren homogene Polynome  $V(x_1, x_2)$ ,  $M(x_1, x_2)$  (=Euler'scher Multiplikator) mit

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_1} V(x_1, x_2) &= M(x_1, x_2) Q_2(x_1, x_2) \\ \frac{\partial}{\partial x_2} V(x_1, x_2) &= -M(x_1, x_2) Q_1(x_1, x_2) \end{aligned} \quad (2.26)$$

Weiter gelten im Falle der Existenz von  $V(x_1, x_2)$  und  $M(x_1, x_2)$  die Konstanz von  $V(x_1, x_2)$  längs Lösungen von (2.1) sowie folgende Formeln, wobei mit  $\text{ord } V$  der Grad von  $V(x_1, x_2)$  gemeint ist:

$$V(x_1, x_2) = \frac{1}{\text{ord } V} \prod_{j=1}^{k_1} q_j^{\alpha_j + \beta_j}(x_1, x_2) \quad M(x_1, x_2) = \prod_{j=1}^{k_1} q_j^{\beta_j}(x_1, x_2) \quad (2.27)$$

und es sind äquivalent:

(i) Das DGL-System (2.1) hat nur periodische Lösungen.

(ii)  $V(x_1, x_2)$  und  $M(x_1, x_2)$  sind definit.

Beweis:

Folgende Formeln sind äquivalent:

$$\begin{aligned}
& - \sum_{i=1}^2 Q_i(x_1, x_2) \sum_{j=1}^{k_1} q_j^{\alpha_j-1}(x_1, x_2) \left( \prod_{j \neq m=1}^{k_1} q_m^{\alpha_m}(x_1, x_2) \right) \frac{\partial}{\partial x_i} q_j(x_1, x_2) \cdot \beta_j = \\
& = \left( Q_2(x_1, x_2)x_1 - Q_1(x_1, x_2)x_2 \right) \left( \frac{\partial}{\partial x_1} Q_1(x_1, x_2) + \frac{\partial}{\partial x_2} Q_2(x_1, x_2) \right)
\end{aligned}$$

und

$$\sum_{i=1}^2 Q_i(x_1, x_2) \sum_{j=1}^{k_1} q_j^{\alpha_j-1}(x_1, x_2) \left( \prod_{j \neq m=1}^{k_1} q_m^{\alpha_m}(x_1, x_2) \right) \frac{\partial}{\partial x_i} q_j(x_1, x_2) \cdot (\alpha_j + \beta_j) = 0$$

Denn:

$$\begin{aligned}
& \left( Q_2(x_1, x_2)x_1 - Q_1(x_1, x_2)x_2 \right) \left( \frac{\partial}{\partial x_1} Q_1(x_1, x_2) + \frac{\partial}{\partial x_2} Q_2(x_1, x_2) \right) \stackrel{2.2.j}{=} \\
& = \sum_{i=1}^2 Q_i(x_1, x_2) \frac{\partial}{\partial x_i} \left( Q_2(x_1, x_2)x_1 - Q_1(x_1, x_2)x_2 \right) \stackrel{(2.25)}{=} \\
& = \sum_{i=1}^2 Q_i(x_1, x_2) \frac{\partial}{\partial x_i} \prod_{j=1}^l q_j^{\alpha_j}(x_1, x_2) = \\
& = \sum_{i=1}^2 Q_i(x_1, x_2) \sum_{j=1}^{k_1} q_j^{\alpha_j-1}(x_1, x_2) \left( \prod_{j \neq m=1}^{k_1} q_m^{\alpha_m}(x_1, x_2) \right) \frac{\partial}{\partial x_i} q_j(x_1, x_2) \cdot \alpha_j
\end{aligned}$$

Durch Subtraktion erhält man die behauptete Äquivalenz.

(a) $\Rightarrow$ (b):

Mit der eben gezeigten Äquivalenz, folgt aus der Existenz der Lösungen  $\beta_j$   $j = 1, \dots, k_1$  des linearen Gleichungssystems, daß die Vektoren mit Einträgen aus den homogenen Polynomen vom Grad  $k$

$$\begin{pmatrix} - \sum_{j=1}^{k_1} q_j^{\alpha_j-1}(x_1, x_2) \left( \prod_{j \neq m=1}^{k_1} q_m^{\alpha_m}(x_1, x_2) \right) \frac{\partial}{\partial x_2} q_j(x_1, x_2) (\alpha_j + \beta_j) \\ \sum_{j=1}^{k_1} q_j^{\alpha_j-1}(x_1, x_2) \left( \prod_{j \neq m=1}^{k_1} q_m^{\alpha_m}(x_1, x_2) \right) \frac{\partial}{\partial x_1} q_j(x_1, x_2) (\alpha_j + \beta_j) \end{pmatrix} \quad \text{bzw.} \quad \begin{pmatrix} Q_1(x_1, x_2) \\ Q_2(x_1, x_2) \end{pmatrix}$$

linear abhängig sind. Es existiert also  $c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$  mit:

$$-c \sum_{j=1}^{k_1} q_j^{\alpha_j-1}(x_1, x_2) \left( \prod_{j \neq m=1}^{k_1} q_m^{\alpha_m}(x_1, x_2) \right) \frac{\partial}{\partial x_2} q_j(x_1, x_2)(\alpha_j + \beta_j) = Q_1(x_1, x_2)$$

$$c \sum_{j=1}^{k_1} q_j^{\alpha_j-1}(x_1, x_2) \left( \prod_{j \neq m=1}^{k_1} q_m^{\alpha_m}(x_1, x_2) \right) \frac{\partial}{\partial x_1} q_j(x_1, x_2)(\alpha_j + \beta_j) = Q_2(x_1, x_2)$$

Erweitern der ersten Gleichung mit

$$M(x_1, x_2) := \prod_{j=1}^{k_1} q_j^{\beta_j}(x_1, x_2) \quad (2.28)$$

und Differentiation von

$$V(x_1, x_2) := c \prod_{j=1}^{k_1} q_j^{\alpha_j+\beta_j}(x_1, x_2) \quad (2.29)$$

ergibt:

$$\begin{aligned} -\frac{\partial}{\partial x_2} V(x_1, x_2) &= -c \frac{\partial}{\partial x_2} \prod_{j=1}^{k_1} q_j^{\alpha_j+\beta_j}(x_1, x_2) = \\ &= -c \sum_{j=1}^{k_1} q_j^{\alpha_j+\beta_j-1}(x_1, x_2) \left( \prod_{j \neq m=1}^{k_1} q_m^{\alpha_m+\beta_m}(x_1, x_2) \right) \frac{\partial}{\partial x_2} q_j(x_1, x_2) \cdot (\alpha_j + \beta_j) = \\ &= M(x_1, x_2) Q_1(x_1, x_2) \end{aligned}$$

Völlig analog zeigt man:

$$\frac{\partial}{\partial x_1} V(x_1, x_2) = M(x_1, x_2) Q_2(x_1, x_2)$$

(b) $\Rightarrow$ (a):

Sei:

$$V(x_1, x_2) := c \prod_{n=1}^{k_2} p_n^{\gamma_n}(x_1, x_2)$$

Wir zeigen zunächst:

$$\left\{ q_m(x_1, x_2) \mid m = 1, \dots, k_1 \right\} = \left\{ p_n(x_1, x_2) \mid n = 1, \dots, k_2 \right\} \pmod{\text{const}}$$

1) ” $\subseteq$ ”

Es gilt:

$$\left( Q_2(x_1, x_2)x_1 - Q_1(x_1, x_2)x_2 \right) \Big| V(x_1, x_2) \quad (2.30)$$

was aus:

$$\begin{aligned} M(x_1, x_2) \left( Q_2(x_1, x_2)x_1 - Q_1(x_1, x_2)x_2 \right) &= M(x_1, x_2)Q_2(x_1, x_2)x_1 - M(x_1, x_2)Q_1(x_1, x_2)x_2 = \\ &= \left( \frac{\partial}{\partial x_1} V(x_1, x_2) \right) x_1 + \left( \frac{\partial}{\partial x_2} V(x_1, x_2) \right) x_2 = \text{ord}(V)V(x_1, x_2) \end{aligned}$$

folgt. Damit gilt insbesondere ” $\subseteq$ ”.

2) ” $\supseteq$ ”

Wir zeigen als ersten Schritt:

$$\text{ggT} \left( \sum_{n=1}^{k_2} \gamma_n \left( \prod_{n \neq j=1}^{k_2} p_j(x_1, x_2) \right) \frac{\partial}{\partial x_1} p_n(x_1, x_2) \ , \ \sum_{n=1}^{k_2} \gamma_n \left( \prod_{n \neq j=1}^m p_j(x_1, x_2) \right) \frac{\partial}{\partial x_2} p_n(x_1, x_2) \right) = 1$$

Annahme:  $\exists$  Polynom  $q(x_1, x_2)$  vom Grade  $\geq 1$  mit  $q(x_1, x_2) \Big| \text{ggT}(*, *)$

$$\begin{aligned} \implies q(x_1, x_2) \Big| & \left( \sum_{n=1}^{k_2} \gamma_n \left( \prod_{n \neq j=1}^{k_2} p_j(x_1, x_2) \right) \frac{\partial}{\partial x_1} p_n(x_1, x_2) \right) x_1 + \\ & + \left( \sum_{n=1}^{k_2} \gamma_n \left( \prod_{n \neq j=1}^{k_2} p_j(x_1, x_2) \right) \frac{\partial}{\partial x_2} p_n(x_1, x_2) \right) x_2 = \sum_{n=1}^{k_2} \gamma_n \text{ord}(p_n) \prod_{j=1}^{k_2} p_j(x_1, x_2) \end{aligned}$$

Da die  $p_i(x_1, x_2)$   $i = 1, \dots, n$  irreduzibel über  $\mathbb{R}$  sind,  $\exists$  mindestens ein  $p(x_1, x_2) \in \{p_n(x_1, x_2) \mid n = 1, \dots, k_2\}$  mit  $p(x_1, x_2) \Big| q(x_1, x_2)$

$$\begin{aligned} \implies p(x_1, x_2) \Big| \text{ggT}(*, *) & \implies p(x_1, x_2) \Big| \sum_{n=1}^{k_2} \gamma_n \left( \prod_{n \neq j=1}^{k_2} p_j(x_1, x_2) \right) \frac{\partial}{\partial x_1} p_n(x_1, x_2) \wedge \\ & \wedge p(x_1, x_2) \Big| \sum_{n=1}^{k_2} \gamma_n \left( \prod_{n \neq j=1}^{k_2} p_j(x_1, x_2) \right) \frac{\partial}{\partial x_2} p_n(x_1, x_2) \end{aligned}$$

Da  $p(x_1, x_2)$  jeweils alle Summanden bis auf genau einen teilt, ergibt sich ein Widerspruch.

Wegen:

$$\frac{\partial}{\partial x_i} V(x_1, x_2) = c \sum_{n=1}^{k_2} \gamma_n p_n^{\gamma_n-1}(x_1, x_2) \left( \prod_{n \neq j=1}^{k_2} p_j^{\gamma_j}(x_1, x_2) \right) \frac{\partial}{\partial x_i} p_n(x_1, x_2)$$

gilt:

$$\begin{aligned} \text{ggT} \left( \frac{\partial}{\partial x_1} V(x_1, x_2), \frac{\partial}{\partial x_2} V(x_1, x_2) \right) &= \prod_{n=1}^{k_2} p_n^{\gamma_n-1}(x_1, x_2) \cdot \text{ggT}(*, *) = \\ &= \prod_{n=1}^{k_2} p_n^{\gamma_n-1}(x_1, x_2) \end{aligned} \quad (2.31)$$

Weiter folgt direkt aus der Voraussetzung:

$$M(x_1, x_2) \left| \text{ggT} \left( \frac{\partial}{\partial x_1} V(x_1, x_2), \frac{\partial}{\partial x_2} V(x_1, x_2) \right) \right. \quad (2.32)$$

Sei jetzt  $p(x_1, x_2) \in \{p_n(x_1, x_2) \mid n = 1, \dots, k_2\}$ . Dann gilt:

$$\begin{aligned} p(x_1, x_2) \left| V(x_1, x_2) \xrightarrow{(2.31)} p(x_1, x_2) \left| \frac{V(x_1, x_2)}{\text{ggT} \left( \frac{\partial}{\partial x_1} V(x_1, x_2), \frac{\partial}{\partial x_2} V(x_1, x_2) \right)} \right. \Rightarrow \\ \Rightarrow p(x_1, x_2) \left| \frac{M(x_1, x_2) (Q_2(x_1, x_2)x_1 - Q_1(x_1, x_2)x_2)}{\text{ggT} \left( \frac{\partial}{\partial x_1} V(x_1, x_2), \frac{\partial}{\partial x_2} V(x_1, x_2) \right)} \Rightarrow \\ \Rightarrow p(x_1, x_2) \left| (Q_2(x_1, x_2)x_1 - Q_1(x_1, x_2)x_2) \right. \end{aligned}$$

Damit sind die Mengen  $\{q_m(x_1, x_2) \mid m = 1, \dots, k_1\}$  bzw.  $\{p_n(x_1, x_2) \mid n = 1, \dots, k_2\}$  bis auf multiplikative Konstanten gleich und es gilt nach geeigneter Umnummerierung  $p_j(x_1, x_2) = q_j(x_1, x_2) \pmod{\text{const}}$   $j = 1, \dots, k_1 = k_2$ . Aus (2.30) folgt weiter:

$$\alpha_j \leq \gamma_j \implies \gamma_j - \alpha_j =: \beta_j \geq 0$$

Also  $\exists \beta_j \in \mathbb{N} \cup \{0\}$   $j = 1, \dots, k_1$  und  $c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$  mit:

$$V(x_1, x_2) = c \prod_{j=1}^{k_1} q_j^{\alpha_j + \beta_j}(x_1, x_2) \quad (2.33)$$

Definieren wir

$$M(x_1, x_2) := \prod_{j=1}^{k_1} q_j^{\beta_j}(x_1, x_2) \quad (2.34)$$

und teilen beide Gleichungen in (b) durch  $M(x_1, x_2)$ , ergibt sich:

$$Q_2(x_1, x_2) = \sum_{j=1}^{k_1} q_j^{\alpha_j-1}(x_1, x_2) \frac{\partial}{\partial x_1} q_j(x_1, x_2) \left( \prod_{j \neq m=1}^{k_1} q_m^{\alpha_m}(x_1, x_2) \right) (\alpha_j + \beta_j)$$

$$Q_1(x_1, x_2) = - \sum_{j=1}^{k_1} q_j^{\alpha_j-1}(x_1, x_2) \frac{\partial}{\partial x_2} q_j(x_1, x_2) \left( \prod_{j \neq m=1}^{k_1} q_m^{\alpha_m}(x_1, x_2) \right) (\alpha_j + \beta_j)$$

oder insbesondere:

$$\sum_{i=1}^2 Q_i(x_1, x_2) \sum_{j=1}^{k_1} q_j^{\alpha_j-1}(x_1, x_2) \left( \prod_{j \neq m=1}^{k_1} q_m^{\alpha_m}(x_1, x_2) \right) \frac{\partial}{\partial x_i} q_j(x_1, x_2) (\alpha_j + \beta_j) = 0$$

Mit der zum Beginn des Beweises gezeigten Äquivalenz folgt die Behauptung (a).

Die Konstanz von  $V(x_1, x_2)$  längs einer beliebigen Lösung  $(h_1(t), h_2(t))$  des DGL-Systems (2.1) sieht man so:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} V(h_1(t), h_2(t)) &= \frac{\partial}{\partial x_1} V(h_1(t), h_2(t)) \dot{h}_1(t) + \frac{\partial}{\partial x_2} V(h_1(t), h_2(t)) \dot{h}_2(t) \stackrel{(2.26)}{=} \\ &\stackrel{(2.26)}{=} M(h_1(t), h_2(t)) Q_2(h_1(t), h_2(t)) Q_1(h_1(t), h_2(t)) - \\ &\quad - M(h_1(t), h_2(t)) Q_1(h_1(t), h_2(t)) Q_2(h_1(t), h_2(t)) = 0 \end{aligned}$$

Die Formeln in (2.27) folgen aus (2.28) und (2.29) mit

$$\begin{aligned} V(x_1, x_2) &\stackrel{(2.26)}{=} \frac{1}{\text{ord } V} \left( M(x_1, x_2) Q_2(x_1, x_2) x_1 - M(x_1, x_2) Q_1(x_1, x_2) x_2 \right) \stackrel{(2.25)}{=} \\ &\stackrel{(2.25)}{=} \frac{1}{\text{ord } V} \prod_{j=1}^{k_1} q_j^{\beta_j}(x_1, x_2) \cdot \prod_{j=1}^{k_1} q_j^{\alpha_j}(x_1, x_2) = \frac{1}{\text{ord } V} \prod_{j=1}^{k_1} q_j^{\alpha_j + \beta_j}(x_1, x_2) \implies c = \frac{1}{\text{ord } V} \end{aligned}$$

Verbleibt noch die Äquivalenz (i)  $\iff$  (ii) zu zeigen.

Wegen (2.27) gilt:

$$V(x_1, x_2) \text{ definit} \iff \text{alle Faktoren quadratisch} \iff M(x_1, x_2) \text{ definit} \quad (2.35)$$

Wendet man Satz 2.10 auf die DGL

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= M(x_1, x_2) Q_2(x_1, x_2) \\ \dot{x}_2 &= -M(x_1, x_2) Q_1(x_1, x_2) \end{aligned} \quad (2.36)$$

an, gilt folgende Äquivalenz:

(1) Die DGL (2.36) hat nur periodische Lösungen.

(2)  $V(x_1, x_2)$  ist definit.

(i) $\Rightarrow$ (ii):

Die DGL (2.1) hat nur periodische Lösungen  $\xRightarrow{2.5}$

$Q_2(x_1, x_2)x_1 - Q_1(x_1, x_2)x_2 = \prod_{j=1}^{k_1} q_j^{\alpha_j}(x_1, x_2)$  definit  $\xRightarrow{(2.25)}$

$V(x_1, x_2) = \frac{1}{\text{ord } V} \prod_{j=1}^{k_1} q_j^{\alpha_j + \beta_j}(x_1, x_2)$  definit.

(ii) $\Rightarrow$ (i):

Mit (2.35) und (1) $\Longleftrightarrow$ (2) erhält man:

$V(x_1, x_2)$  definit  $\Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} M(x_1, x_2) \text{ definit} \\ (2.36) \text{ hat nur periodische Lösungen} \end{array} \right\} \xRightarrow{1.12} (2.1) \text{ hat nur periodische Lösungen.}$

## 2.14 Satz:

Seien  $Q_i(x_1, x_2)$   $i = 1, 2$ ,  $f(\varphi), g(\varphi)$  definiert wie in Bemerkung 2.1,  $k = 2n - 1$  und  $Q_2(x_1, x_2)x_1 - Q_1(x_1, x_2)x_2$  definit ( $\Longleftrightarrow g(\varphi) \neq 0$ ). Sei weiter  $x(t) := (x_1(t), x_2(t))$  die Lösung des Anfangswertproblems

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= Q_1(x_1, x_2) \\ \dot{x}_2 &= Q_2(x_1, x_2) \end{aligned} \tag{2.37}$$

$$x_1(0) = r_0 \quad x_2(0) = 0$$

und

$$I(\varphi) := \int_0^\varphi \frac{f(\psi)}{g(\psi)} d\psi \quad E(\varphi) := e^{I(\varphi)}$$

sowie  $\varphi(t)$  die Inverse der Funktion:

$$t(\varphi) := \frac{1}{r_0^{2n-2}} \int_0^\varphi \frac{d\psi}{g(\psi)(E(\psi))^{2n-2}}$$

Dann gilt:

$$x_1(t) = r_0 E(\varphi(t)) \cos(\varphi(t)) \quad x_2(t) = r_0 E(\varphi(t)) \sin(\varphi(t)) \tag{2.38}$$

Besitzen die  $Q_i(x_1, x_2)$   $i = 1, 2$  zusätzlich ein homogenes Potential  $V(x_1, x_2)$ , so lautet die Lösung von (2.37)

$$x_1(t) = \frac{r_0 V_0 \cos(\varphi(t))}{\sqrt[2n]{|V(\cos(\varphi(t)), \sin(\varphi(t)))|}} \quad x_2(t) = \frac{r_0 V_0 \sin(\varphi(t))}{\sqrt[2n]{|V(\cos(\varphi(t)), \sin(\varphi(t)))|}}$$

wobei  $V_0 := \sqrt[2n]{|V(1, 0)|}$  gesetzt wurde und  $\varphi(t)$  als Inverse der Funktion

$$t(\varphi) := \frac{1}{r_0^{2n-2}} \int_0^\varphi \frac{\text{sign } V}{2n V_0^{2n-2} \sqrt[n]{|V(\cos(\psi), \sin(\psi))|}} d\psi$$

gewählt werden kann.

Beweis:

Die DGL der Trajektorien von DGL (2.37) in Polarkoordinaten ist (2.14) mit Lösung (2.15). Setze (2.15) in die zweite Gleichung von (2.2) ein (beachte:  $\varphi(t=0) = 0$ )

$$\dot{\varphi} = g(\varphi) \left( r_0 e^{\int_0^\varphi \frac{f(\psi)}{g(\psi)} d\psi} \right)^{2n-2} = r_0^{2n-2} g(\varphi) (E(\varphi))^{2n-2}$$

woraus

$$\frac{d\varphi}{g(\varphi)(E(\varphi))^{2n-2}} = dt$$

bzw.

$$t(\varphi) = \frac{1}{r_0^{2n-2}} \int_0^\varphi \frac{d\psi}{g(\psi)(E(\psi))^{2n-2}}$$

folgt. Ist  $\varphi(t)$  die Umkehrfunktion von  $t(\varphi)$  (beachte:  $g(\varphi)(E(\varphi))^{2n-2} \neq 0 \forall \varphi$ ), ergibt sich:

$$x_1(t) = r_0 E(\varphi(t)) \cos(\varphi(t)) \quad x_2(t) = r_0 E(\varphi(t)) \sin(\varphi(t))$$

Die  $Q_i(x_1, x_2)$   $i = 1, 2$  sollen jetzt ein homogenes Potential besitzen, d.h.:

$$f(\varphi) = -\frac{\partial}{\partial x_2} V(\cos(\varphi), \sin(\varphi)) + \frac{\partial}{\partial x_1} V(\cos(\varphi), \sin(\varphi)) = -\frac{d}{d\varphi} V(\cos(\varphi), \sin(\varphi))$$

$$g(\varphi) = \frac{\partial}{\partial x_1} V(\cos(\varphi), \sin(\varphi)) + \frac{\partial}{\partial x_2} V(\cos(\varphi), \sin(\varphi)) = 2n V(\cos(\varphi), \sin(\varphi))$$

Daraus folgt analog dem ersten Teil des Beweises:

$$I(\varphi) = \int_0^\varphi \frac{f(\psi)}{g(\psi)} d\psi = -\frac{1}{2n} \frac{d}{d\varphi} \ln |V(\cos(\varphi), \sin(\varphi))| \quad E(\varphi) = \frac{V_0}{\sqrt[2n]{|V(\cos(\varphi), \sin(\varphi))|}}$$

$$t(\varphi) = \frac{1}{r_0^{2n-2}} \int_0^\varphi \frac{\text{sign } V \, d\psi}{2nV_0^{2n-2} \sqrt[n]{|V(\cos(\psi), \sin(\psi))|}}$$

Einsetzen in (2.38) ergibt dann die Behauptung.

## 2.15 Definition:

Es gelten die Voraussetzungen und Definitionen aus Satz 2.14.

Definiere dann:

$$T(r_0) := \frac{1}{r_0^{2n-2}} \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{|g(\varphi)|(E(\varphi))^{2n-2}} = |t(2\pi)|$$

$$\beta(r_0) := \frac{2\pi}{T(r_0)} = \frac{r_0^{2n-2}}{\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{|g(\varphi)|(E(\varphi))^{2n-2}}}$$

$$\alpha(r_0) := \frac{1}{T(r_0)} \ln \left( \frac{x_1(T(r_0))}{x_1(0)} \right) = \frac{1}{T(r_0)} \int_0^{2\pi} \frac{f(\varphi)}{|g(\varphi)|} d\varphi = \beta(r_0) \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{f(\varphi)}{|g(\varphi)|} d\varphi$$

Für  $T(r_0), \beta(r_0)$  und  $\alpha(r_0)$  gilt folgender Satz:

## 2.16 Satz:

Es gelten die Voraussetzungen von Satz 2.14,  $T(r_0), \alpha(r_0), \beta(r_0)$  seien definiert wie in Definition 2.15 und  $Q \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$  sei definiert wie in (2.5) von Bemerkung 2.1.

Dann gilt:

Falls

- a)  $n = 1$ , sind  $T(r_0), \alpha(r_0), \beta(r_0)$  unabhängig von  $r_0$  und  $Q$  hat ein Paar konjugiert komplexer Eigenwerte  $\alpha \pm i\beta$  mit  $\alpha = \alpha(r_0), \beta = \beta(r_0)$  und  $\frac{2\pi}{\beta} = T(r_0)$ .
- b)  $n > 1$ , sind  $T(r_0), \alpha(r_0), \beta(r_0)$  abhängig von  $r_0$ , sogar Homöomorphismen von  $\mathbb{R}^+ \setminus \{0\}$ .

Beweis:

a)  $n = 1$ . Sei  $(q_{i,j})_{i,j=1,2} := Q$ . Die Voraussetzung  $Q_2(x_1, x_2)x_1 - Q_1(x_1, x_2)x_2$  definit bedeutet:

$$(q_{2,1}x_1 + q_{2,2}x_2)x_1 - (q_{1,1}x_1 + q_{1,2}x_2)x_2 = q_{2,1}x_1^2 + (q_{2,2} - q_{1,1})x_1x_2 - q_{1,2}x_2^2 \neq 0$$

Diese quadratische Form ist genau dann definit, wenn ihre Diskriminante

$$(q_{2,2} - q_{1,1})^2 + 4q_{2,1}q_{1,2} < 0$$

erfüllt.

Für die Eigenwerte von  $Q$  gilt:

$$\begin{aligned} \lambda_{1/2} &= \frac{\text{spur}Q}{2} \pm \sqrt{\frac{(\text{spur}Q)^2 - 4\det Q}{4}} = \frac{q_{1,1} + q_{2,2} \pm \sqrt{(q_{1,1} + q_{2,2})^2 - 4(q_{1,1}q_{2,2} - q_{2,1}q_{1,2})}}{2} = \\ &= \frac{q_{1,1} + q_{2,2} \pm \sqrt{(q_{1,1} - q_{2,2})^2 + 4q_{2,1}q_{1,2}}}{2} =: \alpha \pm i\beta \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R} \end{aligned}$$

Wir können daher im folgenden annehmen, daß  $Q$  Normalform hat, also  $-q_{1,2} = q_{2,1} = \beta \wedge q_{1,1} = q_{2,2} = \alpha$  gesetzt werden kann ( $q_{1,2} = -q_{2,1} = \beta \wedge q_{1,1} = q_{2,2} = \alpha$  wird völlig analog behandelt). Damit gilt

$$g(\varphi) = \beta \cos^2(\varphi) + \beta \sin^2(\varphi) = \beta$$

und

$$T(r_0) = \frac{1}{r_0^0} \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{\beta E^0(\varphi)} = \frac{2\pi}{\beta} \quad \forall r_0 > 0$$

$$\beta(r_0) = \frac{2\pi}{T(r_0)} = \beta \quad \forall r_0 > 0$$

Sei weiter  $x(t) = (x_1(t), x_2(t))$  die Lösung des Anfangswertproblems (2.37). Dann gilt

$$x_1(t) = r_0 e^{\alpha t} \cos(\beta t) \quad x_2(t) = r_0 e^{\alpha t} \sin(\beta t)$$

und damit

$$\alpha(r_0) = \frac{1}{T(r_0)} \ln \left( \frac{r_0 e^{\alpha T(r_0)} \cos(\beta T(r_0))}{r_0 e^{\alpha 0} \cos(\beta 0)} \right) = \frac{1}{T(r_0)} \alpha T(r_0) = \alpha \quad \forall r_0 > 0$$

b) Folgt direkt aus den Definitionen.

## 2.17 Bemerkung:

$T(r_0)$  ist die Zeit, die eine in  $(r_0, 0)$  startende Lösung der DGL (2.1) braucht, um zur positiven  $x_1$ -Achse zurückzukehren. Ist  $x(t)$  periodisch, dann ist  $T(r_0)$  ihre Periode und  $\beta(r_0)$  ihre Frequenz. Da  $T(r_0), \beta(r_0)$  wegen Satz 2.16 für  $k > 1$  Homöomorphismen von  $\mathbb{R}^+ \setminus \{0\}$  sind, haben die periodischen Lösungen der DGL (2.1) alle möglichen Frequenzen bzw. Perioden. Je näher  $r_0$  am Ursprung liegt, um so kleiner wird die Frequenz  $\beta(r_0)$  und um so größer die Periode  $T(r_0)$ , im Unterschied zum linearen ( $n = 1$ ) Fall, wo beide konstant sind.

Für  $T(r_0)$  gilt noch ein einfacher Satz:

## 2.18 Satz:

Sei  $x(t) = (x_1(t), x_2(t))$  eine periodische Lösung des Anfangswertproblems (2.37).

Dann gilt:

$$x(t) = -x\left(t + \frac{T(r_0)}{2}\right) \in \mathcal{P}_{T(r_0)}^-$$

Beweis:

Da die  $Q_i(x_1, x_2)$   $i = 1, 2$  ungeraden Grad haben, ist aus Symmetriegründen auch  $-x(t)$  Lösung der DGL (2.1) mit den Anfangswerten  $x_1(0) = -r_0$   $x_2(0) = 0$ .

Wähle  $t_1$  so, daß  $\varphi(t_1) = \pi$ . Dann gilt:

$$x_1(t_1) = r_0 E(\varphi(t_1)) \cos(\varphi(t_1)) = -r_0 E(\pi)$$

$$x_2(t_1) = r_0 E(\varphi(t_1)) \sin(\varphi(t_1)) = -r_0 E(\pi) 0 = 0$$

Wenn wir  $E(\pi) = 1$  zeigen können, haben  $x(t)$  und  $-x(t)$  dieselbe Trajektorie im Phasenraum.

Da  $f(\varphi), g(\varphi)$  homogene trigonometrische Polynome von geradem Grad  $2n$  sind, gilt  $f(\varphi + \pi) = f(\varphi)$  und  $g(\varphi + \pi) = g(\varphi)$ . Weil  $x(t)$  periodisch ist, gilt  $I(2\pi) = 0$ , also:

$$0 = \int_0^{2\pi} \frac{f(\varphi)}{g(\varphi)} d\varphi = \int_0^{\pi} \frac{f(\varphi)}{g(\varphi)} d\varphi + \int_{\pi}^{2\pi} \frac{f(\varphi)}{g(\varphi)} d\varphi \quad (2.39)$$

Der letzte Term in (2.39) erfüllt:

$$\int_{\pi}^{2\pi} \frac{f(\varphi)}{g(\varphi)} d\varphi = \int_0^{\pi} \frac{f(\varphi + \pi)}{g(\varphi + \pi)} d\varphi = \int_0^{\pi} \frac{f(\varphi)}{g(\varphi)} d\varphi$$

Setzt man das wieder in (2.39) ein folgt:

$$\int_0^\pi \frac{f(\varphi)}{g(\varphi)} d\varphi = 0 \quad \Longrightarrow \quad I(\pi) = 0 \quad \Longrightarrow \quad E(\pi) = 1$$

Da  $x(t)$  und  $-x(t)$  somit dieselbe Trajektorie im Phasenraum besitzen, gilt weiter:

$$x(t + 2t_1) = x((t + t_1) + t_1) = -x(t + t_1) = x(t)$$

Nach Definition ist  $T(r_0)$  die kleinste Periode von  $x(t)$  und die Behauptung folgt aus  $2t_1 = T(r_0)$ .

## 2.19 Bemerkung:

Seien  $P_i(x_1, x_2, \mu)$   $i = 1, 2$  homogene Polynome in  $x$  vom Grad  $k = 2n - 1$  mit stetig differenzierbaren Koeffizienten in  $\mu$  und  $P_2(x_1, x_2, 0)x_1 - P_1(x_1, x_2, 0)x_2$  definit. Dann ist für  $\mu$  hinreichend klein auch  $P_2(x_1, x_2, \mu)x_1 - P_1(x_1, x_2, \mu)x_2$  definit und wir können in völlig analoger Weise zu  $f(\varphi), g(\varphi), I(\varphi), E(\varphi), t(\varphi), T(r_0), \alpha(r_0), \beta(r_0)$  und  $x(t)$  die Funktionen  $f(\varphi, \mu), g(\varphi, \mu), I(\varphi, \mu), E(\varphi, \mu), t(\varphi, \mu), T(r_0, \mu), \alpha(r_0, \mu), \beta(r_0, \mu)$  und  $x(t, \mu)$  definieren, in dem wir in den Definitionen  $Q_i(x_1, x_2)$  durch  $P_i(x_1, x_2, \mu)$   $i = 1, 2$  ersetzen.

Speziell für  $\alpha(r_0, \mu)$  und  $\beta(r_0, \mu)$  gilt folgender Satz:

## 2.20 Satz:

Seien  $P(x_1, x_2, \mu)$   $i = 1, 2$  und  $\alpha(r_0, \mu), \beta(r_0, \mu)$  definiert wie in Bemerkung 2.19.

Dann gilt:

$$\text{a) } \beta(r_0, 0) \neq 0$$

$$\text{b) } \alpha(r_0, 0) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \int_0^{2\pi} \frac{\frac{\partial}{\partial x_1} P_1(x_1, x_2, \mu) + \frac{\partial}{\partial x_2} P_2(x_1, x_2, \mu)}{P_2(x_1, x_2, \mu)x_1 - P_1(x_1, x_2, \mu)x_2} d\varphi \Big|_{\mu=0} = 0$$

Sei jetzt zusätzlich  $\alpha(r_0, 0) = 0$ . Dann gilt noch:

$$\text{c) } \frac{\partial}{\partial \mu} \alpha(r_0, 0) \neq 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{d}{d\mu} \int_0^{2\pi} \frac{\frac{\partial}{\partial x_1} P_1(x_1, x_2, \mu) + \frac{\partial}{\partial x_2} P_2(x_1, x_2, \mu)}{P_2(x_1, x_2, \mu)x_1 - P_1(x_1, x_2, \mu)x_2} d\varphi \Big|_{\mu=0} \neq 0$$

Beweis:

a) Da nach Satz 2.16:  $0 < T(r_0, 0) < \infty$ , gilt ebenfalls für  $|\mu|$  hinreichend klein:  
 $0 < T(r_0, \mu) < \infty$ , woraus wegen  $\beta(r_0, \mu) = \frac{2\pi}{T(r_0, \mu)}$  die Behauptung folgt.

$$\text{b) } 0 = \alpha(r_0, 0) = \frac{\beta(r_0, 0)}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{f(\varphi, 0)}{|g(\varphi, 0)|} d\varphi \quad \stackrel{a)}{\Longleftrightarrow}$$

$$\Longleftrightarrow 0 = \int_0^{2\pi} \frac{P_1(\cos(\varphi), \sin(\varphi), \mu) \cos(\varphi) + P_2(\cos(\varphi), \sin(\varphi), \mu) \sin(\varphi)}{P_2(\cos(\varphi), \sin(\varphi), \mu) \cos(\varphi) - P_1(\cos(\varphi), \sin(\varphi), \mu) \sin(\varphi)} d\varphi \Bigg|_{\mu=0} \quad \stackrel{2,2.h+i}{\Longleftrightarrow}$$

$$\Longleftrightarrow 0 = \int_0^{2\pi} \frac{\frac{\partial}{\partial x_1} P_1(\cos(\varphi), \sin(\varphi), \mu) + \frac{\partial}{\partial x_2} P_2(\cos(\varphi), \sin(\varphi), \mu)}{P_2(\cos(\varphi), \sin(\varphi), \mu) \cos(\varphi) - P_1(\cos(\varphi), \sin(\varphi), \mu) \sin(\varphi)} d\varphi \Bigg|_{\mu=0}$$

c)  $\alpha(r_0, \mu) = \beta(r_0, \mu) \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{f(\varphi, \mu)}{|g(\varphi, \mu)|} d\varphi$ . Differentiation nach  $\mu$  ergibt:

$$\frac{\partial}{\partial \mu} \alpha(r_0, \mu) = \left( \frac{\partial}{\partial \mu} \beta(r_0, \mu) \right) \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{f(\varphi, \mu)}{|g(\varphi, \mu)|} d\varphi + \beta(r_0, \mu) \frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial \mu} \left( \int_0^{2\pi} \frac{f(\varphi, \mu)}{|g(\varphi, \mu)|} d\varphi \right)$$

Setzt man  $\mu = 0$  in diese Gleichung ein, verschwindet der erste Term der rechten Seite wegen  $\alpha(r_0, 0) = 0$  und der zweiten Zeile im Beweis von b), der letzte liefert mit a) die Behauptung.

# Kapitel 3

## Eine Verallgemeinerung des Verzweigungssatzes von E. Hopf

### 3.1 Bemerkung:

Wir werden in diesem Kapitel DGL der Art

$$\dot{x} = F(x, \mu) \quad (3.1)$$

mit  $F(x, \mu) \in C^l(\mathbb{R}^2 \times U(0), \mathbb{R}^2)$  betrachten und auf einparametrische Scharen periodischer Lösungen  $p(t, \mu)$  untersuchen, die von einem stationären Punkt  $x_s$  der DGL

$$\dot{x} = F(x, 0) \quad (3.2)$$

in  $\mu = 0$  abzweigen, also  $p(t, 0) \equiv x_s$  erfüllen. Dabei können wir o.B.d.A.  $x_s = 0$  bzw.  $F(0, 0) = 0$  annehmen und damit (3.1) in der Form (vgl. Einleitung)

$$\dot{x} = F_0(x) + \mu F_1(x) + R(x, \mu) \quad (3.3)$$

bzw.

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= Q_1(x_1, x_2) + \mu q_1(x_1, x_2) + R_1(x_1, x_2, \mu) \\ \dot{x}_2 &= Q_2(x_1, x_2) + \mu q_2(x_1, x_2) + R_2(x_1, x_2, \mu) \end{aligned} \quad (3.4)$$

schreiben. Dabei sind:

$q_i(x_1, x_2), Q_i(x_1, x_2)$   $i = 1, 2$  homogene Polynome vom gleichen Grad  $k$  und

$$R(x_1, x_2, \mu) = O(\|x\|^{k+1}) + O(|\mu|^2 \|x\|^k).$$

(Vgl. dazu die Bemerkungen 4.1 bzw. 5.1. In den Kapiteln 4 und 5 ist der Grad von  $q_i(x_1, x_2)$   $i = 1, 2$  echt kleiner als der von  $Q_i(x_1, x_2)$   $i = 1, 2$ )

Falls  $k = 1$  gilt und  $F(x, \mu)$  in  $x = 0$  eine reguläre Jakobimatrix

$$D_x F(x, \mu)|_{x=0} =: J(\mu) \quad (3.5)$$

besitzt, ist das Problem durch den Verzweigungssatz von E. Hopf [36],[47] gelöst. Wesentliche Voraussetzungen dieses Satzes sind die Existenz eines Paares konjugiert komplexer Eigenwerte  $\alpha(\mu) \pm i\beta(\mu)$ , für die gilt:

$$\text{a) (i) } \beta(0) \neq 0 \quad \text{(ii) } \alpha(0) = 0$$

$$\text{b) } \frac{d}{d\mu}\alpha(\mu)\big|_{\mu=0} \neq 0$$

Falls  $k = 1$  gilt und  $J(0)$  Rang 1 hat siehe [18] S.231/232. Die Frage, was geschieht, wenn  $J(\mu) \equiv 0$ , also  $F(x, 0)$  rein nichtlinear ist, war bisher vermutlich ungeklärt. Das scheint überraschend, wird aber vielleicht verständlich, wenn man folgendes bedenkt: Nach Aufstellung des Satzes von Hopf wurden zahlreiche Verallgemeinerungen bewiesen, zunächst für  $\dim=n$  (vgl. z.B. [55]), statt  $\dim=2$ , später auch für  $\dim=\infty$  [43]. Weiter wurden Fälle mit singulärer Linearisierung [40], doppelten Paaren konjugiert komplexer Eigenwerte [42], zwei verschiedenen Paaren konjugiert komplexer Eigenwerte [38] und der Fall  $\alpha'(0) = 0$  [43] betrachtet. Bei allen diesen Untersuchungen wird stets die Existenz mindestens eines Paares konjugiert komplexer Eigenwerte vorausgesetzt, die Generalvoraussetzung der Hopf-Verzweigung. Dagegen ist die in diesem Kapitel betrachtete Verzweigung strenggenommen nur im Falle  $k = 1$  vom Hopf-Typ, für  $k > 1$  verhält sie sich zwar sehr ähnlich, erfüllt aber nicht diese entscheidende Voraussetzung.

Wir werden in diesem Kapitel einen Satz über die Abzweigung periodischer Lösungen beweisen, der den Hopf'schen Verzweigungssatz als Spezialfall enthält, aber  $J(0) \equiv 0$  zuläßt. Was an die Stelle von Realteil bzw. Imaginärteil von  $J(\mu)$  tritt, haben wir am Ende des letzten Kapitels ab Satz 2.14 geklärt und einfach nachzuprüfende Bedingungen angegeben (Satz 2.20), die a) (i) und (ii) bzw. b) entsprechen. Diesen Ersatz für a) fassen wir in Definition 3.2 als "Bedingung A" zusammen, um ihn nicht ständig wiederholen zu müssen.

Dann erklärt die Definition 3.3 mit Hilfe von Satz 2.13, wann die Funktion  $F(x, \mu)$  in DGL (3.1) die Bedingung für homogenes Potential erfüllt. Diese Bedingung ist notwendig, um im Satz 3.4 mit Hilfe verallgemeinerter Polarkoordinaten  $(rh_1(\theta), rh_2(\theta))$ , die DGL (3.1) auf die Form

$$\begin{aligned} \dot{r} &= R(r, \theta, \mu) + o(r^{l-k+1}) \\ \dot{\theta} &= \Theta(r, \theta, \mu) + o(r^{l-k}) \end{aligned} \tag{3.6}$$

mit  $R(0, \theta, 0) \equiv 0, \Theta(0, \theta, 0) \equiv 1$  zu transformieren. Für (3.6) können wir damit in Bemerkung 3.5 die DGL der Trajektorien aufstellen:

$$\frac{dr}{d\theta} = \frac{R(r, \theta, \mu) + o(r^{l-k})}{\Theta(r, \theta, \mu) + o(r^{l-k})} r =: f(r, \theta, \mu) =: \sum_{i=0}^{l-k+1} f_i(\theta, \mu) r^i + o(r^{l-k+1}) \tag{3.7}$$

Explizite Formeln für die  $f_i(\theta, \mu)$  gewinnen wir im Satz 3.6 wegen  $\Theta(0, \theta, 0) \equiv 1$  und Anwendung der geometrischen Reihe.

Im Satz 3.7 zeigen wir die Konvergenz der sukzessiven Approximationen des Anfangswertproblems

$$\frac{dr}{d\theta} = f(r, \theta, \mu) \quad r(0, \mu) = r_0$$

d.h. wir können diese Lösung als

$$r(\theta, \mu) = \sum_{i=0}^{l-k+1} a_i(\theta, \mu) r_0^i + o(r^{l-k+1}) \quad (3.8)$$

schreiben und dann (3.8) in (3.7) einsetzen. Das liefert im Satz 3.8 Formeln für die  $a_i(\theta, \mu)$ , die im Korollar 3.9 an der Stelle  $\theta = T$  ausgewertet werden. Die beiden Sätze machen die Bedeutung der verallgemeinerten gegenüber den klassischen Polarkoordinaten deutlich. Bei Benutzung von  $(r \cos(\theta), r \sin(\theta))$  ist  $\dot{\theta}$  ein trigonometrisches Polynom  $\neq 1$ , was spätestens beim mindestens notwendigen zweiten Approximationsschritt zu einer praktisch nicht durchführbaren Quadratur führt. Dasselbe Problem tritt übrigens auch auf, wenn kein homogenes Potential vorliegt.

Im Satz 3.10 rechnen wir nach, daß die Ableitung in  $\mu = 0$  von  $a_1(T, \mu)$  genau dann  $\neq 0$  ist wenn eine zu b) äquivalente Bedingung (vgl. Satz 2.20.c) gilt. Diese formulieren wir dann in Ergänzung von Bedingung A aus Definition 3.2 in 3.11 als Bedingung B.

Es schließen sich in 3.12 und 3.13 zwei Definitionen über Generizität von  $F(x, 0)$  und der Poincaré-Abbildung an, bevor wir in Bemerkung 3.14 und im Satz 3.15, unter der Voraussetzung Bedingung A+B, wichtige Eigenschaften dieser Abbildung angeben können.

Satz 3.16 ist dann der Hauptsatz dieses Kapitels, der "Verallgemeinerte Verzweigungssatz von E. Hopf". Er enthält den klassischen Satz als Spezialfall, was man mit Satz 2.20 und Satz 2.16.a leicht sieht. Beim klassischen Satz laufen die Frequenzen der Verzweigungslösungen für  $\mu \rightarrow 0$  gegen  $\beta(0)$ , während sie für  $k > 1$  gegen 0 gehen. Bei der Amplitude gibt es dafür keine Unterschiede, sie ist im generischen Fall in erster Näherung  $\sim \sqrt[2]{\mu}$ , also unabhängig von  $k$ .

Bemerkung 3.17 formuliert dann noch Satz 3.16 in Polarkoordinaten und stellt einen Bezug zu den letzten zwei Kapiteln dieser Arbeit her. In 3.18 schließlich werden zahlreiche Beispiele ausführlich diskutiert.

## 3.2 Definition:

Sei  $F(x, \mu) := (F_1(x_1, x_2, \mu), F_2(x_1, x_2, \mu)) \in C^l(\mathbb{R}^2 \times U(0), \mathbb{R}^2)$  und  $\exists k \leq l$  mit  $D_x^\alpha F_i(0, 0, \mu) \equiv 0 \quad i = 1, 2 \quad \alpha = (\alpha_1, \alpha_2) \in \mathbb{N}^2 \quad |\alpha| = 0, \dots, k-1$  und sei:

$$P_i(x_1, x_2, \mu) := \sum_{|\alpha|=k} \frac{1}{\alpha!} D_x^\alpha F_i(0, 0, \mu) x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \quad (3.9)$$

Dann sagen wir:

$F(x, \mu)$  erfüllt die Bedingung A vom Grad  $k \leq l$ ,

genau dann, wenn gilt (vgl. Satz 2.20.a+b):

- (i)  $P_2(\cos(\varphi), \sin(\varphi), 0) \cos(\varphi) - P_1(\cos(\varphi), \sin(\varphi), 0) \sin(\varphi) \neq 0$   
 $(\iff P_2(x_1, x_2, 0)x_1 - P_1(x_1, x_2, 0)x_2 \text{ ist definit})$
- (ii)  $\int_0^{2\pi} \frac{\frac{\partial}{\partial x_1} P_1(\cos(\varphi), \sin(\varphi), 0) + \frac{\partial}{\partial x_2} P_2(\cos(\varphi), \sin(\varphi), 0)}{P_2(\cos(\varphi), \sin(\varphi), 0) \cos(\varphi) - P_1(\cos(\varphi), \sin(\varphi), 0) \sin(\varphi)} d\varphi = 0$

### 3.3 Definition:

Seien  $F(x, \mu)$  und  $P_i(x_1, x_2, \mu)$   $i = 1, 2$  definiert wie in Definition 3.2 und  $F(x, \mu)$  erfülle die Bedingung A. Es existieren also insbesondere  $p_j(x_1, x_2)$   $j = 1, \dots, k_1$  wie im Satz 2.13 mit:

$$\prod_{j=1}^{k_1} p_j^{\alpha_j}(x_1, x_2) = \frac{1}{P_2(1, 0, 0)} (P_2(x_1, x_2, 0)x_1 - P_1(x_1, x_2, 0)x_2)$$

Dann sagen wir:

$F(x, \mu)$  erfüllt die Bedingung für homogenes Potential

genau dann, wenn gilt:

Das lineare, inhomogene Gleichungssystem

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^2 P_i(x_1, x_2, 0) \sum_{j=1}^{k_1} p_j^{\alpha_j-1}(x_1, x_2) \left( \prod_{j \neq m=1}^{k_1} p_m^{\alpha_m}(x_1, x_2) \right) \frac{\partial}{\partial x_i} p_j(x_1, x_2) \cdot \beta_j = \\ = -\frac{1}{P_2(1, 0, 0)} (P_2(x_1, x_2, 0)x_1 - P_1(x_1, x_2, 0)x_2) \left( \frac{\partial}{\partial x_1} P_1(x_1, x_2, 0) + \frac{\partial}{\partial x_2} P_2(x_1, x_2, 0) \right) \end{aligned}$$

hat für  $\beta_j \in \mathbb{N} \cup \{0\}$   $j = 1, \dots, k_1$  Lösungen.

Nach Satz 2.13 existieren dann definite homogene Polynome  $V(x_1, x_2), M(x_1, x_2)$  mit:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_1} V(x_1, x_2) &= M(x_1, x_2) P_2(x_1, x_2) \\ \frac{\partial}{\partial x_2} V(x_1, x_2) &= -M(x_1, x_2) P_1(x_1, x_2) \end{aligned} \tag{3.10}$$

### 3.4 Satz:

Sei  $F(x, \mu) = (F_1(x_1, x_2, \mu), F_2(x_1, x_2, \mu))$  definiert wie in Definition 3.2 und erfülle die Bedingung A vom Grad  $k \leq l$  sowie die Bedingung für homogenes Potential. Weiter sei  $MF_i(x_1, x_2, \mu) := M(x_1, x_2)F_i(x_1, x_2, \mu)$   $i = 1, 2$  mit  $M(x_1, x_2)$  definiert wie in Definition 3.3 und  $m := \text{ord}M(x_1, x_2)$  der Grad von  $M(x_1, x_2)$ .

Dann gilt:

Es existiert eine reguläre Transformation

$$(x_1, x_2) := H(r, \theta) := (rh_1(\theta), rh_2(\theta))$$

mit  $H : \mathbb{R}_+^* \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^2$  bzw.  $h_i : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$   $i = 1, 2$ , die die DGL

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= MF_1(x_1, x_2, \mu) \\ \dot{x}_2 &= MF_2(x_1, x_2, \mu) \end{aligned} \tag{3.11}$$

überführt in die DGL

$$\begin{aligned} \dot{r} &= R(r, \theta, \mu)r^{k+m} + o(r^{l+m}) \\ \dot{\theta} &= \Theta(r, \theta, \mu)r^{k+m-1} + o(r^{l+m-1}) \end{aligned} \tag{3.12}$$

wobei  $R(r, \theta, \mu), \Theta(r, \theta, \mu) \in \mathfrak{P}_T^+$  (vgl. Definition 1.4) Polynome in  $r$  vom Grad  $l - k \forall \mu$  sind mit

$$R(r, \theta, \mu) := \text{sign}V \sum_{|\alpha|=k+m}^{l+m} \frac{1}{\alpha!} D_x^\alpha \left( MF_1(0, 0, \mu)h_2'(\theta) - MF_2(0, 0, \mu)h_1'(\theta) \right) h_1^{\alpha_1}(\theta) h_2^{\alpha_2}(\theta) r^{|\alpha|-(k+m)}$$

$$\Theta(r, \theta, \mu) := \text{sign}V \sum_{|\alpha|=k+m}^{l+m} \frac{1}{\alpha!} D_x^\alpha \left( MF_2(0, 0, \mu)h_1(\theta) - MF_1(0, 0, \mu)h_2(\theta) \right) h_1^{\alpha_1}(\theta) h_2^{\alpha_2}(\theta) r^{|\alpha|-(k+m)}$$

für die  $\forall \theta \in [0, T]$  gilt:

$$R(0, \theta, 0) \equiv 0 \qquad \Theta(0, \theta, 0) \equiv 1 \tag{3.13}$$

Beweis:

Da  $F(x, \mu)$  die Bedingung A vom Grad  $k$  und die Bedingung für homogenes Potential erfüllt (vgl. Definitionen 3.2 und 3.3), existiert ein definites homogenes Polynom  $V(x_1, x_2)$  vom Grad  $m + k + 1$  mit

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x_1} V(x_1, x_2) &= M(x_1, x_2) \sum_{|\alpha|=k} \frac{1}{\alpha!} D_x^\alpha F_2(0, 0, 0) x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \\ \frac{\partial}{\partial x_2} V(x_1, x_2) &= -M(x_1, x_2) \sum_{|\alpha|=k} \frac{1}{\alpha!} D_x^\alpha F_1(0, 0, 0) x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2}\end{aligned}\tag{3.14}$$

was aus Formel (3.10) mit Formel (3.9) folgt.

Die Lösung der Anfangswertaufgabe (vgl. Satz 2.14)

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= -\frac{\partial}{\partial x_2} V(x_1, x_2) \\ \dot{x}_2 &= \frac{\partial}{\partial x_1} V(x_1, x_2) \\ x_1(0) &= \frac{1}{\sqrt{(k+m+1)|V(1,0)|}} \quad x_2(0) = 0\end{aligned}\tag{3.15}$$

sei  $h := (h_1, h_2)$ . Sie ist periodisch mit kleinster Periode  $T > 0$ .

Definiere:

$$H(r, \theta) := (rh_1(\theta), rh_2(\theta)) \quad r > 0, \theta \in [0, T).$$

Die Jakobideterminante von  $H(r, \theta)$  lautet:

$$\begin{aligned}\left| \begin{pmatrix} h_1(\theta) & rh_1'(\theta) \\ h_2(\theta) & rh_2'(\theta) \end{pmatrix} \right| &= rh_1(\theta)h_2'(\theta) - rh_2(\theta)h_1'(\theta) = \\ &= r(V_{x_1}(h_1(\theta), h_2(\theta))h_1(\theta) + V_{x_2}(h_1(\theta), h_2(\theta))h_2(\theta)) \stackrel{2.2.c}{=} r(k+m+1)V(h_1(\theta), h_2(\theta)) \stackrel{(2.24)}{=} \\ &= r(k+m+1)V(h_1(0), h_2(0)) = r(k+m+1)V\left(\frac{1}{\sqrt{(k+m+1)|V(1,0)|}}, 0\right) = \\ &= r(k+m+1)V(1,0) \left(\frac{1}{\sqrt{(k+m+1)|V(1,0)|}}\right)^{(k+m+1)} = r \operatorname{sign} V\end{aligned}$$

Wir vermerken noch, daß aus dem eben Gezeigten gefolgert werden kann:

$$V(h_1(\theta), h_2(\theta)) = \frac{\text{sign} V}{(k+m+1)} \quad (3.16)$$

Die Inverse der Jakobimatrix von  $H(r, \theta)$  lautet:

$$\frac{\text{sign} V}{r} \begin{pmatrix} rh_2'(\theta) & -rh_1'(\theta) \\ -h_2(\theta) & h_1(\theta) \end{pmatrix} \quad (3.17)$$

Setzen wir nun die Transformation  $(x_1, x_2) = H(r, \theta)$  in die Gleichung (3.11) ein, erhalten wir:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= \dot{r}h_1(\theta) + rh_1'(\theta)\dot{\theta} = MF_1(rh_1(\theta), rh_2(\theta), \mu) \\ \dot{x}_2 &= \dot{r}h_2(\theta) + rh_2'(\theta)\dot{\theta} = MF_2(rh_1(\theta), rh_2(\theta), \mu) \end{aligned} \quad (3.18)$$

Multiplizieren wir die Gleichung (3.18) mit der Inversen der Jakobimatrix (3.17) ergibt sich:

$$\begin{aligned} \dot{r} &= \frac{\text{sign} V}{r} \left( MF_1(rh_1(\theta), rh_2(\theta), \mu)h_2'(\theta) - MF_2(rh_1(\theta), rh_2(\theta), \mu)h_1'(\theta) \right) r \\ \dot{\theta} &= \frac{\text{sign} V}{r} \left( MF_2(rh_1(\theta), rh_2(\theta), \mu)h_1(\theta) - MF_1(rh_1(\theta), rh_2(\theta), \mu)h_2(\theta) \right) \end{aligned}$$

Taylor-Approximation nach Potenzen von  $r$  ergibt

$$\begin{aligned} \dot{r} &= R(r, \theta, \mu)r^{k+m} + o(r^{l+m}) \\ \dot{\theta} &= \Theta(r, \theta, \mu)r^{k+m-1} + o(r^{l+m-1}) \end{aligned}$$

mit

$$\begin{aligned} R(r, \theta, \mu) &= \text{sign} V \sum_{|\alpha|=k+m}^{l+m} \frac{1}{\alpha!} D_x^\alpha \left( MF_1(0, 0, \mu)h_2'(\theta) - MF_2(0, 0, \mu)h_1'(\theta) \right) h_1^{\alpha_1}(\theta) h_2^{\alpha_2}(\theta) r^{|\alpha|-(k+m)} \\ \Theta(r, \theta, \mu) &= \text{sign} V \sum_{|\alpha|=k+m}^{l+m} \frac{1}{\alpha!} D_x^\alpha \left( MF_2(0, 0, \mu)h_1(\theta) - MF_1(0, 0, \mu)h_2(\theta) \right) h_1^{\alpha_1}(\theta) h_2^{\alpha_2}(\theta) r^{|\alpha|-(k+m)} \end{aligned}$$

Damit ergibt sich wegen Satz 2.14 und Satz 1.5.d+e:

$$R(r, \theta, \mu), \Theta(r, \theta, \mu) \in \mathfrak{P}_T^+$$

Weiter gilt:

$$R(0, \theta, 0) = \text{sign} V \sum_{|\alpha|=k+m} \frac{1}{\alpha!} D_x^\alpha \left( MF_1(0, 0, 0)h_2'(\theta) - MF_2(0, 0, 0)h_1'(\theta) \right) h_1^{\alpha_1}(\theta) h_2^{\alpha_2}(\theta) =$$

$$\begin{aligned}
& \stackrel{(3.14)}{=} \text{sign} V \left( \frac{\partial}{\partial x_2} V(h_1(\theta), h_2(\theta)) h_1'(\theta) - \frac{\partial}{\partial x_1} V(h_1(\theta), h_2(\theta)) h_2'(\theta) \right) = \\
& = \text{sign} V \left( -\frac{\partial}{\partial x_2} V(h_1(\theta), h_2(\theta)) \frac{\partial}{\partial x_1} V(h_1(\theta), h_2(\theta)) + \right. \\
& \quad \left. + \frac{\partial}{\partial x_1} V(h_1(\theta), h_2(\theta)) \frac{\partial}{\partial x_2} V(h_1(\theta), h_2(\theta)) \right) \equiv 0 \quad \forall \theta \in [0, T]
\end{aligned}$$

Analog sieht man:

$$\begin{aligned}
\Theta(0, \theta, 0) &= \text{sign} V \sum_{|\alpha|=k+m} \frac{1}{\alpha!} D_x^\alpha \left( -M F_1(0, 0, 0) h_2(\theta) + M F_2(0, 0, 0) h_1(\theta) \right) h_1^{\alpha_1}(\theta) h_2^{\alpha_2}(\theta) = \\
& \stackrel{(3.14)}{=} \text{sign} V \left( \frac{\partial}{\partial x_1} V(h_1(\theta), h_2(\theta)) h_1(\theta) + \frac{\partial}{\partial x_2} V(h_1(\theta), h_2(\theta)) h_2(\theta) \right) = \\
& \stackrel{2.2.c}{=} \text{sign} V(k+m+1) V(h_1(\theta), h_2(\theta)) \stackrel{(3.16)}{=} \text{sign} V(k+m+1) \frac{\text{sign} V}{k+m+1} \equiv 1 \quad \forall \theta \in [0, T].
\end{aligned}$$

### 3.5 Bemerkung:

Wegen  $\Theta(0, \theta, 0) \equiv 1$  kann man Konstanten  $0 < c < 1$ ,  $R_1 > 0$ ,  $m_1 > 0$  finden, so daß  $\forall \theta \in [0, T]$ ,  $\forall r < R_1$ ,  $0 \leq |\mu| < m_1$  gilt:

$$\left| \frac{\dot{\theta}(r, \theta, \mu)}{r^{k+m-1}} - 1 \right| = \left| \Theta(r, \theta, \mu) + o(r^{l-k+1}) - 1 \right| \leq c < 1 \iff 1-c \leq \left| \Theta(r, \theta, \mu) + o(r^{l-k+1}) \right| \leq 1+c$$

Daher können wir mit Satz 1.12

$$\frac{dr}{d\theta} = \frac{\dot{r}(r, \theta, \mu)}{\dot{\theta}(r, \theta, \mu)} = \frac{R(r, \theta, \mu) + o(r^{l-k+1})}{\Theta(r, \theta, \mu) + o(r^{l-k+1})} r =: f(r, \theta, \mu) \quad (3.19)$$

bilden und damit  $\theta$  als neue unabhängige Variable einführen.

Gleichzeitig läßt sich die Formel für die geometrische Reihe anwenden, um  $f(r, \theta, \mu)$  explizit zu bestimmen.

Die Taylorapproximation von  $f(r, \theta, \mu)$  bzgl.  $r$  lautet:

$$f(r, \theta, \mu) = \sum_{i=0}^{l-k+1} f_i(\theta, \mu) r^i + o(r^{l-k+1}) \quad (3.20)$$

Für diese  $f_i(\theta, \mu)$  gilt folgender Satz:

### 3.6 Satz:

Seien  $F_i(x_1, x_2, \mu)$   $i = 1, 2$  definiert wie in Definition 3.2,  $V(x_1, x_2)$ ,  $M(x_1, x_2)$  wie in Definition 3.3,  $MF_i(x_1, x_2, \mu)$ ,  $h_i(\theta)$   $i = 1, 2$  wie im Satz 3.4 bzw. (3.15) und  $f(r, \theta, \mu)$  sowie  $f_i(\theta, \mu)$   $i = 0, \dots, l - k + 1$  definiert wie in Bemerkung 3.5.

Dann gilt:

a)  $f_0(\theta, \mu) \equiv 0$

$$\text{b) } f_1(\theta, \mu) = \frac{\sum_{|\alpha|=k} \frac{1}{\alpha!} D_x^\alpha \left( F_1(0, 0, \mu) h_2'(\theta) - F_2(0, 0, \mu) h_1'(\theta) \right) h_1^{\alpha_1}(\theta) h_2^{\alpha_2}(\theta)}{\sum_{|\alpha|=k} \frac{1}{\alpha!} D_x^\alpha \left( F_2(0, 0, \mu) h_1(\theta) - F_1(0, 0, \mu) h_2(\theta) \right) h_1^{\alpha_1}(\theta) h_2^{\alpha_2}(\theta)}$$

$$\begin{aligned} \text{c) } f_{n+1}(\theta, \mu) = & \frac{\sum_{|\alpha|=n+k} \frac{1}{\alpha!} D_x^\alpha \left( F_1(0, 0, \mu) h_2'(\theta) - F_2(0, 0, \mu) h_1'(\theta) \right) h_1^{\alpha_1}(\theta) h_2^{\alpha_2}(\theta)}{\sum_{|\alpha|=k} \frac{1}{\alpha!} D_x^\alpha \left( F_2(0, 0, \mu) h_1(\theta) - F_1(0, 0, \mu) h_2(\theta) \right) h_1^{\alpha_1}(\theta) h_2^{\alpha_2}(\theta)} - \\ & - \sum_{i=1}^n f_i(\theta, \mu) \frac{\sum_{|\alpha|=n+k+1-i} \frac{1}{\alpha!} D_x^\alpha \left( F_2(0, 0, \mu) h_1(\theta) - F_1(0, 0, \mu) h_2(\theta) \right) h_1^{\alpha_1}(\theta) h_2^{\alpha_2}(\theta)}{\sum_{|\alpha|=k} \frac{1}{\alpha!} D_x^\alpha \left( F_2(0, 0, \mu) h_1(\theta) - F_1(0, 0, \mu) h_2(\theta) \right) h_1^{\alpha_1}(\theta) h_2^{\alpha_2}(\theta)} \end{aligned}$$

speziell:

d)  $f_1(\theta, 0) \equiv 0$

$$\text{e) } f_2(\theta, 0) = \frac{\sum_{|\alpha|=k+1} \frac{1}{\alpha!} D_x^\alpha \left( F_1(0, 0, 0) h_2'(\theta) - F_2(0, 0, 0) h_1'(\theta) \right) h_1^{\alpha_1}(\theta) h_2^{\alpha_2}(\theta)}{\sum_{|\alpha|=k} \frac{1}{\alpha!} D_x^\alpha \left( F_2(0, 0, 0) h_1(\theta) - F_1(0, 0, 0) h_2(\theta) \right) h_1^{\alpha_1}(\theta) h_2^{\alpha_2}(\theta)}$$

$$\text{f) } f_3(\theta, 0) = \frac{\sum_{|\alpha|=k+2} \frac{1}{\alpha!} D_x^\alpha \left( F_1(0, 0, 0) h_2'(\theta) - F_2(0, 0, 0) h_1'(\theta) \right) h_1^{\alpha_1}(\theta) h_2^{\alpha_2}(\theta)}{\sum_{|\alpha|=k} \frac{1}{\alpha!} D_x^\alpha \left( F_2(0, 0, 0) h_1(\theta) - F_1(0, 0, 0) h_2(\theta) \right) h_1^{\alpha_1}(\theta) h_2^{\alpha_2}(\theta)} -$$

$$\begin{aligned}
& - f_2(\theta, 0) \frac{\sum_{|\alpha|=k+1} \frac{1}{\alpha!} D_x^\alpha \left( F_2(0, 0, 0) h_1(\theta) - F_1(0, 0, 0) h_2(\theta) \right) h_1^{\alpha_1}(\theta) h_2^{\alpha_2}(\theta)}{\sum_{|\alpha|=k} \frac{1}{\alpha!} D_x^\alpha \left( F_2(0, 0, 0) h_1(\theta) - F_1(0, 0, 0) h_2(\theta) \right) h_1^{\alpha_1}(\theta) h_2^{\alpha_2}(\theta)} \\
\text{g) } & \left. \frac{\partial}{\partial \mu} f_1(\theta, \mu) \right|_{\mu=0} = \\
& = \text{sign} V \frac{\partial}{\partial \mu} \sum_{k+m} \frac{1}{\alpha!} D_x^\alpha \left( M F_1(0, 0, \mu) h_2'(\theta) - M F_2(0, 0, \mu) h_1'(\theta) \right) h_1^{\alpha_1}(\theta) h_2^{\alpha_2}(\theta) \Big|_{\mu=0} = \\
& = \frac{\frac{\partial}{\partial \mu} \sum_{|\alpha|=k} \frac{1}{\alpha!} D_x^\alpha \left( F_1(0, 0, \mu) h_2'(\theta) - F_2(0, 0, \mu) h_1'(\theta) \right) h_1^{\alpha_1}(\theta) h_2^{\alpha_2}(\theta) \Big|_{\mu=0}}{\sum_{|\alpha|=k} \frac{1}{\alpha!} D_x^\alpha \left( F_2(0, 0, 0) h_1(\theta) - F_1(0, 0, 0) h_2(\theta) \right) h_1^{\alpha_1}(\theta) h_2^{\alpha_2}(\theta)}
\end{aligned}$$

Im Falle  $M(x_1, x_2) \equiv 1$  sind die Nenner  $\equiv 1$  in e), f) und g).

$$\text{h) } f_i(\theta, \mu) \in \begin{cases} \mathcal{P}_T^- & i \text{ gerade} \\ \mathcal{P}_T^+ & i \text{ ungerade} \end{cases} \quad \text{also} \quad \sum_{i=0}^{l-k+1} f_i(\theta, \mu) r^i \in \mathfrak{P}_T^-$$

wählt man  $r$  und  $|\mu|$  nur hinreichend klein.

Beweis:

Um Schreibarbeit zu sparen, definieren wir:

$$\Theta(r, \theta, \mu) := \sum_{i=0}^{l-k} c_i(\theta, \mu) r^i \tag{3.21}$$

Nach Voraussetzung gilt (vgl. Bemerkung 3.5):

$$\sum_{i=0}^{l-k+1} f_i(\theta, \mu) r^i + o(r^{l-k+1}) = \frac{R(r, \theta, \mu) + o(r^{l-k+1})}{\Theta(r, \theta, \mu) + o(r^{l-k+1})} r \tag{3.22}$$

Setzt man  $r = 0$  in (3.22), verschwindet die rechte Seite der Gleichung identisch, links bleibt nur  $f_0(\theta, \mu)$  stehen. Damit gilt a).

Weiter ist zu (3.22) äquivalent:

$$\left( \Theta(r, \theta, \mu) + o(r^{l-k+1}) \right) \left( \sum_{i=1}^{l-k+1} f_i(\theta, \mu) r^i + o(r^{l-k+1}) \right) = R(r, \theta, \mu) r + o(r^{l-k+1})$$

$\Longleftrightarrow$

$$c_0(\theta, \mu) \sum_{i=1}^{l-k+1} f_i(\theta, \mu) r^i + \sum_{i=1}^{l-k} c_i(\theta, \mu) r^i \sum_{i=1}^{l-k+1} f_i(\theta, \mu) r^i + o(r^{l-k+1}) = R(r, \theta, \mu) r + o(r^{l-k+1})$$

$\Longleftrightarrow$

$$c_0(\theta, \mu) \sum_{i=1}^{l-k+1} f_i(\theta, \mu) r^i + o(r^{l-k+1}) = R(r, \theta, \mu) r - \sum_{i=2}^{l-k+1} \left( \sum_{j=1}^{i-1} c_{i-j}(\theta, \mu) f_j(\theta, \mu) \right) r^i + o(r^{l-k+1})$$

$\Longleftrightarrow$

$$\sum_{i=1}^{l-k+1} f_i(\theta, \mu) r^i + o(r^{l-k+1}) = \frac{r}{c_0(\theta, \mu)} \left( R(r, \theta, \mu) - \sum_{i=1}^{l-k} \left( \sum_{j=1}^i c_{i-j+1}(\theta, \mu) f_j(\theta, \mu) \right) r^i \right) + o(r^{l-k+1})$$

Wegen (vgl. Satz 3.4)

$$R(r, \theta, \mu) = \text{sign} V \sum_{|\alpha|=k+m}^{l+m} \frac{1}{\alpha!} D_x^\alpha \left( M F_1(0, 0, \mu) h_2'(\theta) - M F_2(0, 0, \mu) h_1'(\theta) \right) h_1^{\alpha_1}(\theta) h_2^{\alpha_2}(\theta) r^{|\alpha|-(k+m)}$$

folgt durch Koeffizientenvergleich bei  $r^1$  die Behauptung b):

$$\begin{aligned} f_1(\theta, \mu) &= \frac{\text{sign} V}{c_0(\theta, \mu)} \sum_{|\alpha|=k+m} \frac{1}{\alpha!} D_x^\alpha \left( M F_1(0, 0, \mu) h_2'(\theta) - M F_2(0, 0, \mu) h_1'(\theta) \right) h_1^{\alpha_1}(\theta) h_2^{\alpha_2}(\theta) = \\ &= \frac{\sum_{|\alpha|=k} \frac{1}{\alpha!} D_x^\alpha \left( F_1(0, 0, \mu) h_2'(\theta) - F_2(0, 0, \mu) h_1'(\theta) \right) h_1^{\alpha_1}(\theta) h_2^{\alpha_2}(\theta)}{\sum_{|\alpha|=k} \frac{1}{\alpha!} D_x^\alpha \left( F_2(0, 0, \mu) h_1(\theta) - F_1(0, 0, \mu) h_2(\theta) \right) h_1^{\alpha_1}(\theta) h_2^{\alpha_2}(\theta)} \end{aligned}$$

wobei die letzte Gleichung aus (vgl. Satz 3.4 und (3.21))

$$c_i(\theta, \mu) = \text{sign} V \sum_{|\alpha|=k+m+i} \frac{1}{\alpha!} D_x^\alpha \left( M F_2(0, 0, \mu) h_1(\theta) - M F_1(0, 0, \mu) h_2(\theta) \right) h_1^{\alpha_1}(\theta) h_2^{\alpha_2}(\theta)$$

und kürzen durch  $M(h_1(\theta), h_2(\theta)) \text{sign} V$  entsteht.

c) zeigt man analog b) durch Koeffizientenvergleich bei  $r^{n+1}$ .

d),e) und f) folgen durch Anwenden der Rekursionsformel in c) an der Stelle  $\mu = 0$ .

g) Wir differenzieren  $f_1(\theta, \mu)$  nach  $\mu$  in  $\mu = 0$  unter Berücksichtigung der ersten Formel für  $f_1(\theta, \mu)$  im Beweis von b),  $c_0(\theta, 0) \equiv 1$  und  $R(0, \theta, 0) \equiv 0$ :

$$\left. \frac{\partial}{\partial \mu} f_1(\theta, \mu) \right|_{\mu=0} =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\partial}{\partial \mu} \frac{\text{sign} V}{c_0(\theta, \mu)} \sum_{|\alpha|=k+m} \frac{1}{\alpha!} D_x^\alpha \left( M F_1(0, 0, \mu) h_2'(\theta) - M F_2(0, 0, \mu) h_1'(\theta) \right) h_1^{\alpha_1}(\theta) h_2^{\alpha_2}(\theta) \Big|_{\mu=0} = \\
&= -\text{sign} V \frac{\frac{\partial}{\partial \mu} c_0(\theta, \mu)}{c_0^2(\theta, \mu)} \Big|_{\mu=0} \cdot 0 + \\
&\quad + \text{sign} V \cdot 1 \cdot \frac{\partial}{\partial \mu} \sum_{|\alpha|=k+m} \frac{1}{\alpha!} D_x^\alpha \left( M F_1(0, 0, \mu) h_2'(\theta) - M F_2(0, 0, \mu) h_1'(\theta) \right) h_1^{\alpha_1}(\theta) h_2^{\alpha_2}(\theta) \Big|_{\mu=0} = \\
&= \text{sign} V \frac{\partial}{\partial \mu} \sum_{|\alpha|=k+m} \frac{1}{\alpha!} D_x^\alpha \left( M F_1(0, 0, \mu) h_2'(\theta) - M F_2(0, 0, \mu) h_1'(\theta) \right) h_1^{\alpha_1}(\theta) h_2^{\alpha_2}(\theta) \Big|_{\mu=0} = \\
&= \frac{\frac{\partial}{\partial \mu} \sum_{|\alpha|=k} \frac{1}{\alpha!} D_x^\alpha \left( F_1(0, 0, \mu) h_2'(\theta) - F_2(0, 0, \mu) h_1'(\theta) \right) h_1^{\alpha_1}(\theta) h_2^{\alpha_2}(\theta) \Big|_{\mu=0}}{\sum_{|\alpha|=k} \frac{1}{\alpha!} D_x^\alpha \left( F_2(0, 0, 0) h_1(\theta) - F_1(0, 0, 0) h_2(\theta) \right) h_1^{\alpha_1}(\theta) h_2^{\alpha_2}(\theta)}
\end{aligned}$$

was aus (vgl. Satz 3.4)

$$\begin{aligned}
1 &\equiv \text{sign} V \sum_{|\alpha|=k+m} \frac{1}{\alpha!} D_x^\alpha \left( M F_2(0, 0, 0) h_1(\theta) - M F_1(0, 0, 0) h_2(\theta) \right) h_1^{\alpha_1}(\theta) h_2^{\alpha_2}(\theta) \iff \\
&\iff M(h_1(\theta), h_2(\theta)) \text{sign} V = \frac{1}{\sum_{|\alpha|=k} \frac{1}{\alpha!} D_x^\alpha \left( F_2(0, 0, 0) h_1(\theta) - F_1(0, 0, 0) h_2(\theta) \right) h_1^{\alpha_1}(\theta) h_2^{\alpha_2}(\theta)}
\end{aligned}$$

folgt.

Falls  $M(x_1, x_2) \equiv 1$  folgt mit  $\Theta(0, \theta, 0) \equiv 1$ , daß die Nenner  $\equiv 1$  sind in e), f) und g).

h) In Satz 3.4 wurde gezeigt:

$$R(r, \theta, \mu), \Theta(r, \theta, \mu) \in \mathfrak{P}_T^+ \text{ mit } \Theta(0, \theta, 0) \equiv 1 \xRightarrow{1.6} \frac{R}{\Theta} \in \mathfrak{P}_T^+ \xRightarrow{1.4} \frac{R}{\Theta} r \in \mathfrak{P}_T^-.$$

Mit (3.22) und Definition 1.4 folgt die Behauptung.

### 3.7 Satz:

Seien  $f(r, \theta, \mu), f_i(\theta, \mu), R_1, m_1$  definiert wie in Bemerkung 3.5.

Dann gilt:

Es existieren Konstanten  $R_2, m_2$  mit  $0 < R_2 \leq R_1$  und  $0 < m_2 \leq m_1$ , so daß die Folge

$$r_{n+1} = r_0 + \int_0^\theta f(r_n, \varphi, \mu) d\varphi \quad (3.23)$$

falls  $0 \leq r_0 < \frac{1}{2}R_2$  gilt, gleichmäßig in  $\theta \in [0, T]$  und  $\mu \in [-m_2, m_2]$  gegen die Lösung  $r(\theta, \mu)$  der Integralgleichung

$$r = r_0 + \int_0^\theta f(r, \varphi, \mu) d\varphi \quad (3.24)$$

bzw. gegen die Lösung des Anfangswertproblems

$$\frac{dr}{d\theta} = f(r, \theta, \mu) \quad r(0, \mu) = r_0 \quad (3.25)$$

konvergiert.

Beweis:

Wegen (3.20) und Satz 3.6.a+d gilt

$$\frac{\partial}{\partial r} f(0, \theta, 0) \equiv 0 \quad \forall \theta \in [0, 2\pi]$$

Daher existieren Konstanten  $R_2 \leq R_1, m_2 \leq m_1$  mit

$$\max_{r \in [0, R_2]} \max_{\mu \in [-m_2, m_2]} \left| \frac{\partial}{\partial r} f(r, \theta, \mu) \right| \leq \frac{1}{2T} \quad \forall \theta \in [0, 2\pi]$$

Seien weiter:

$$I(r) := r_0 + \int_0^\theta f(r, \varphi, \mu) d\varphi \quad J_1 := [0, T] \times [-m_2, +m_2] \quad B := C^0(J_1, [0, R_2])$$

Dann ist  $B$ , versehen mit der Maximumsnorm, ein Banachraum.

Wir wollen jetzt den Banach'schen Fixpunktsatz auf  $I$  anwenden. Dazu müssen wir zeigen:

$$a) \quad I(B) \subseteq B$$

$$b) \quad \|I(r) - I(s)\| \leq q \|r - s\| \quad q < 1 \quad \forall r, s \in B$$

Wir zeigen zunächst a).

Sei also  $r \in B$  beliebig vorgegeben. Man beachte, daß aus (3.20) und Satz 3.6.a  $f(0, \theta, \mu) \equiv 0$  folgt.

Damit gilt:

$$\begin{aligned} |I(r)| &= \left| r_0 + \int_0^\theta f(r, \varphi, \mu) d\varphi \right| \leq |r_0| + \int_0^\theta |f(r, \varphi, \mu)| d\varphi = r_0 + \int_0^\theta |f(r, \varphi, \mu) - f(0, \varphi, \mu)| d\varphi \leq \\ &\leq r_0 + \int_0^\theta \frac{1}{2T} |r - 0| d\varphi \leq \frac{1}{2} R_2 + \frac{1}{2T} \|r\| T \leq \frac{1}{2} R_2 + \frac{1}{2} R_2 = R_2 \end{aligned}$$

Bilden wir das Maximum von  $|I(r)|$  folgt

$$\|I(r)\| \leq R_2$$

also  $I(r) \in B$ , woraus a) folgt.

Der Nachweis für b), daß  $I$  Kontraktion ist, geht ähnlich wie in a):

Seien  $r, s \in B$  beliebig vorgegeben.

Dann gilt:

$$|I(r) - I(s)| \leq \int_0^\theta |f(r, \varphi, \mu) - f(s, \varphi, \mu)| d\varphi \leq \int_0^\theta \frac{1}{2T} |r - s| d\varphi \leq \frac{1}{2T} \|r - s\| T \leq \frac{1}{2} \|r - s\|$$

Bilden wir das Maximum von  $|I(r) - I(s)|$  folgt b):

$$\|I(r) - I(s)\| \leq \frac{1}{2} \|r - s\|$$

Damit können wir den Banach'schen Fixpunktsatz anwenden und erhalten die Behauptung.

### 3.8 Satz:

Sei

$$r(\theta, \mu) =: \sum_{i=0}^{l-k+1} a_i(\theta, \mu) r_0^i + o(r_0^{l-k+1}) \quad (3.26)$$

die Lösung aus Satz 3.7. Die  $f_i(\theta, \mu)$  seien wie in Bemerkung 3.5 definiert und  $\alpha^{(j)} := (\alpha_1^{(j)}, \dots, \alpha_j^{(j)}) \in (\mathbb{N} \setminus \{0\})^j$ .

Dann gilt:

$$\text{a) } a_0(\theta, \mu) \equiv 0$$

$$\text{b) } a_1(\theta, \mu) = 1 + \int_0^\theta f_1(\varphi, \mu) a_1(\varphi, \mu) d\varphi$$

$$\text{c) } a_i(\theta, \mu) = \int_0^\theta \sum_{j=1}^i f_j(\varphi, \mu) \left( \sum_{|\alpha^{(j)}|=i} \prod_{n=1}^j a_{\alpha_n^{(j)}}(\varphi, \mu) \right) d\varphi \quad i \geq 2$$

speziell:

$$\text{d) } a_1(\theta, 0) \equiv 1$$

$$\text{e) } a_2(\theta, 0) = \int_0^\theta f_2(\varphi, 0) d\varphi$$

$$\text{f) } a_3(\theta, 0) = \int_0^\theta f_3(\varphi, 0) d\varphi + \left( \int_0^\theta f_2(\varphi, 0) d\varphi \right)^2$$

$$\begin{aligned} \text{g) } a_4(\theta, 0) = \int_0^\theta f_4(\varphi, 0) d\varphi + \left( \int_0^\theta f_2(\varphi, 0) d\varphi \right)^3 + 3 \left( \int_0^\theta f_2(\varphi, 0) d\varphi \right) \left( \int_0^\theta f_3(\varphi, 0) d\varphi \right) - \\ - \int_0^\theta f_2(\varphi, 0) \left( \int_0^\varphi f_3(\psi, 0) d\psi \right) d\varphi \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{h) } a_5(\theta, 0) = \int_0^\theta f_5(\varphi, 0) d\varphi + \left( \int_0^\theta f_2(\varphi, 0) d\varphi \right)^4 + 5 \left( \int_0^\theta f_2(\varphi, 0) d\varphi \right)^2 \left( \int_0^\theta f_3(\varphi, 0) d\varphi \right) - \\ - 2 \left( \int_0^\theta f_2(\varphi, 0) d\varphi \right) \left( \int_0^\theta f_2(\varphi, 0) \left( \int_0^\varphi f_3(\psi, 0) d\psi \right) d\varphi \right) + \\ + \int_0^\theta f_3(\varphi, 0) \left( \int_0^\varphi f_2(\psi, 0) d\psi \right)^2 d\varphi + \frac{3}{2} \left( \int_0^\theta f_3(\varphi, 0) d\varphi \right)^2 + \end{aligned}$$

$$+ 2 \left( \int_0^\theta f_2(\varphi, 0) d\varphi \right) \left( \int_0^\theta f_4(\varphi, 0) d\varphi \right) + 2 \int_0^\theta f_4(\varphi, 0) \left( \int_0^\varphi f_2(\psi, 0) d\psi \right) d\varphi$$

$$\text{k) } \left. \frac{\partial}{\partial \mu} a_1(\theta, \mu) \right|_{\mu=0} = \left. \frac{\partial}{\partial \mu} \int_0^\theta f_1(\varphi, \mu) d\varphi \right|_{\mu=0}$$

Beweis:

a) Da für den Anfangswert  $r_0 = 0$   $r(\theta, \mu) \equiv 0$  Lösung von (3.25) ist, folgt  $a_0(\theta, \mu) \equiv 0$ .

b) Wir setzen  $r(\theta, \mu)$  in die Integralgleichung (3.24) ein und erhalten:

$$\sum_{i=1}^{l-k+1} a_i(\theta, \mu) r_0^i = r_0 + \int_0^\theta \sum_{i=1}^{l-k+1} f_i(\varphi, \mu) \left( \sum_{j=1}^{l-k+1} a_j(\theta, \mu) r_0^j \right)^i =$$

$$= r_0 + \int_0^\theta \sum_{i=1}^{l-k+1} \left( \sum_{j=1}^i f_j(\varphi, \mu) \left( \sum_{|\alpha^{(j)}|=i} \prod_{n=1}^j a_{\alpha_n^{(j)}}(\varphi, \mu) \right) \right) r_0^i$$

Koeffizientenvergleich bei  $r_0$  ergibt:

$$a_1(\theta, \mu) = 1 + \int_0^\theta f_1(\varphi, \mu) a_1(\varphi, \mu) d\varphi \quad (3.27)$$

c) Koeffizientenvergleich bei  $r_0^i$   $i \geq 2$  ergibt:

$$a_i(\theta, \mu) = \int_0^\theta \sum_{j=1}^i f_j(\varphi, \mu) \left( \sum_{|\alpha^{(j)}|=i} \prod_{n=1}^j a_{\alpha_n^{(j)}}(\varphi, \mu) \right) d\varphi$$

d) Im Falle  $\mu = 0$  liefert (3.27) wegen 3.6.d:  $a_1(\theta, 0) \equiv 1$ .

e) Mit b),c) und d) erhält man:

$$a_2(\theta, 0) = \int_0^\theta f_2(\varphi, 0) a_1^2(\varphi, 0) d\varphi = \int_0^\theta f_2(\varphi, 0) d\varphi$$

f) Mit b),c),d) und e) erhält man:

$$a_3(\theta, 0) = \int_0^\theta 2f_2(\varphi, 0) a_2(\varphi, 0) + f_3(\varphi, 0) d\varphi = \int_0^\theta f_3(\varphi, 0) d\varphi + \int_0^\theta 2f_2(\varphi, 0) \left( \int_0^\varphi f_2(\psi, 0) d\psi \right) d\varphi =$$

$$= \int_0^\theta f_3(\varphi, 0) d\varphi + \left( \int_0^\theta f_2(\varphi, 0) d\varphi \right)^2$$

g) Mit b),c),d),e) und f) erhält man:

$$\begin{aligned} a_4(\theta, 0) &= \int_0^\theta f_2(\varphi, 0) \left( a_2^2(\varphi, 0) + 2a_3(\varphi, 0) \right) + 3f_3(\varphi, 0)a_2(\varphi, 0) + f_4(\varphi, 0) d\varphi = \\ &= \int_0^\theta f_4(\varphi, 0) d\varphi + \int_0^\theta f_2(\varphi, 0) \left( \int_0^\varphi f_2(\psi, 0) d\psi \right)^2 d\varphi + 2 \int_0^\theta f_2(\varphi, 0) \left( \int_0^\varphi f_3(\psi, 0) d\psi \right) d\varphi + \\ &\quad + 2 \int_0^\theta f_2(\varphi, 0) \left( \int_0^\varphi f_2(\psi, 0) d\psi \right)^2 d\varphi + 3 \int_0^\theta f_3(\varphi, 0) \left( \int_0^\varphi f_2(\psi, 0) d\psi \right) d\varphi = \\ &= \int_0^\theta f_4(\varphi, 0) d\varphi + \left( \int_0^\theta f_2(\varphi, 0) d\varphi \right)^3 + 3 \left( \int_0^\theta f_2(\varphi, 0) d\varphi \right) \left( \int_0^\theta f_3(\varphi, 0) d\varphi \right) - \\ &\quad - \int_0^\theta f_2(\varphi, 0) \left( \int_0^\varphi f_3(\psi, 0) d\psi \right) d\varphi \end{aligned}$$

h) Mit b),c),d),e),f) und g) erhält man:

$$\begin{aligned} a_5(\theta, 0) &= \int_0^\theta 2f_2(\varphi, 0) \left( a_4(\varphi, 0) + a_2(\varphi, 0)a_3(\varphi, 0) \right) + 3f_3(\varphi, 0) \left( a_3(\varphi, 0) + a_2^2(\varphi, 0) \right) + \\ &\quad + 4f_4(\varphi, 0)a_2(\varphi, 0) + f_5(\varphi, 0) d\varphi = \\ &= \int_0^\theta f_5(\varphi, 0) d\varphi + 2 \int_0^\theta f_2(\varphi, 0) \left( \int_0^\varphi f_4(\psi, 0) d\psi \right) d\varphi + 2 \int_0^\theta f_2(\varphi, 0) \left( \int_0^\varphi f_2(\psi, 0) d\psi \right)^3 d\varphi + \\ &\quad + 6 \int_0^\theta f_2(\varphi, 0) \left( \int_0^\varphi f_2(\psi, 0) d\psi \right) \left( \int_0^\varphi f_3(\psi, 0) d\psi \right) d\varphi - 2 \int_0^\theta f_2(\varphi, 0) \left( \int_0^\varphi f_2(\psi, 0) \int_0^\psi f_3(\chi, 0) d\chi d\psi \right) d\varphi + \\ &\quad + 2 \int_0^\theta f_2(\varphi, 0) \left( \int_0^\varphi f_2(\psi, 0) d\psi \right) \left( \int_0^\varphi f_3(\psi, 0) d\psi \right) d\varphi + 2 \int_0^\theta f_2(\varphi, 0) \left( \int_0^\varphi f_2(\psi, 0) d\psi \right)^3 d\varphi + \\ &\quad + 3 \int_0^\theta f_3(\varphi, 0) \left( \int_0^\varphi f_3(\psi, 0) d\psi \right) d\varphi + 3 \int_0^\theta f_3(\varphi, 0) \left( \int_0^\varphi f_2(\psi, 0) d\psi \right)^2 d\varphi + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + 3 \int_0^\theta f_3(\varphi, 0) \left( \int_0^\varphi f_2(\psi, 0) d\psi \right)^2 d\varphi + 4 \int_0^\theta f_4(\varphi, 0) \left( \int_0^\varphi f_2(\psi, 0) d\psi \right) d\varphi = \\
& = \int_0^\theta f_5(\varphi, 0) d\varphi + \left( \int_0^\theta f_2(\varphi, 0) d\varphi \right)^4 + 5 \left( \int_0^\theta f_2(\varphi, 0) d\varphi \right)^2 \left( \int_0^\theta f_3(\varphi, 0) d\varphi \right) - \\
& - 2 \left( \int_0^\theta f_2(\varphi, 0) d\varphi \right) \left( \int_0^\theta f_2(\varphi, 0) \left( \int_0^\varphi f_3(\psi, 0) d\psi \right) d\varphi \right) + \\
& + \int_0^\theta f_3(\varphi, 0) \left( \int_0^\varphi f_2(\psi, 0) d\psi \right)^2 d\varphi + \frac{3}{2} \left( \int_0^\theta f_3(\varphi, 0) d\varphi \right)^2 + \\
& + 2 \left( \int_0^\theta f_2(\varphi, 0) d\varphi \right) \left( \int_0^\theta f_4(\varphi, 0) d\varphi \right) + 2 \int_0^\theta f_4(\varphi, 0) \left( \int_0^\varphi f_2(\psi, 0) d\psi \right) d\varphi
\end{aligned}$$

k) Wir differenzieren 3.8.b nach  $\mu$  in  $\mu = 0$ :

$$\begin{aligned}
& \left. \frac{\partial}{\partial \mu} a_1(\theta, \mu) \right|_{\mu=0} \stackrel{\text{b)}}{=} 0 + \left. \frac{\partial}{\partial \mu} \int_0^\theta f_1(\varphi, \mu) a_1(\varphi, \mu) d\varphi \right|_{\mu=0} = \\
& = \int_0^\theta \left. \frac{\partial}{\partial \mu} f_1(\varphi, \mu) \right|_{\mu=0} a_1(\varphi, 0) + f_1(\varphi, 0) \left. \frac{\partial}{\partial \mu} a_1(\varphi, \mu) \right|_{\mu=0} d\varphi \stackrel{\substack{3.8.d \\ 3.6.d}}{=} \\
& = \int_0^\theta \left. \frac{\partial}{\partial \mu} f_1(\varphi, \mu) \right|_{\mu=0} d\varphi = \left. \frac{\partial}{\partial \mu} \int_0^\theta f_1(\varphi, \mu) d\varphi \right|_{\mu=0}
\end{aligned}$$

### 3.9 Korollar:

Seien  $f_i(\theta, \mu)$   $i = 1, \dots, l - k + 1$  wie in Bemerkung 3.5 und  $a_i(\theta, \mu)$   $i = 1, \dots, l - k + 1$  wie im Satz 3.8 definiert.

Dann gilt:

a)  $a_1(T, 0) = 1$

b)  $a_2(T, 0) = 0$

$$\text{c) } a_3(T, 0) = \int_0^T f_3(\theta, 0) d\theta$$

Weiter gilt, falls  $a_3(T, 0) = 0$ :

$$\text{d) } a_4(T, 0) = 0$$

$$\text{e) } a_5(T, 0) = \int_0^T f_5(\theta, 0) d\theta + 2 \int_0^T f_4(\theta, 0) \left( \int_0^\theta f_2(\varphi, 0) d\varphi \right) d\theta + \int_0^T f_3(\theta, 0) \left( \int_0^\theta f_2(\varphi, 0) d\varphi \right)^2 d\theta$$

$$\text{f) } \left. \frac{\partial}{\partial \mu} a_1(T, \mu) \right|_{\mu=0} = \left. \frac{\partial}{\partial \mu} \int_0^T f_1(\theta, \mu) d\theta \right|_{\mu=0}$$

Beweis:

a) Folgt aus Satz 3.8.d.

b) Aus Satz 3.6.h folgt  $f_2(\theta, \mu) \in \mathcal{P}_T^-$  und mit Satz 1.3.f sowie Satz 3.8.e die Behauptung.

c) Folgt aus b) und Satz 3.8.f.

d) Aus Satz 3.6.h folgt  $f_4(\theta, \mu) \in \mathcal{P}_T^-$ . Mit Satz 3.8.g, Satz 1.3.f, b),  $a_3(T, 0) = 0$  und Satz 1.3.k folgt die Behauptung.

e) Folgt wie d) aus Satz 3.8.h.

f) Folgt aus Satz 3.8.k.

### 3.10 Satz:

Seien  $F(x, \mu)$ ,  $P_i(x_1, x_2, \mu)$   $i = 1, 2$  definiert wie in Definition 3.2.  $F(x, \mu)$  erfülle die Bedingung A und die Bedingung für homogenes Potential.  $M(x_1, x_2)$ ,  $V(x_1, x_2)$  seien definiert wie in Definition 3.3,  $MF_i(x_1, x_2, \mu)$ ,  $h_i(\theta)$   $i = 1, 2$  wie im Satz 3.4 bzw. (3.15),  $f_1(\theta, \mu)$  wie in Bemerkung 3.5 und  $a_1(\theta, \mu)$  wie im Satz 3.8. Definiere dann noch  $MP_i(x_1, x_2, \mu) := M(x_1, x_2)P_i(x_1, x_2, \mu)$   $i = 1, 2$  und

$$\Gamma := \left\{ (h_1(\theta), h_2(\theta)) \mid \theta \in [0, T] \right\}$$

Dann gilt:

$$\left. \frac{\partial}{\partial \mu} a_1(T, \mu) \right|_{\mu=0} = \frac{1}{k+1} \frac{d}{d\mu} \int_0^{2\pi} \frac{\frac{\partial}{\partial x_1} P_1(\cos(\varphi), \sin(\varphi), \mu) + \frac{\partial}{\partial x_2} P_2(\cos(\varphi), \sin(\varphi), \mu)}{P_2(\cos(\varphi), \sin(\varphi), \mu) \cos(\varphi) - P_1(\cos(\varphi), \sin(\varphi), \mu) \sin(\varphi)} d\varphi \Big|_{\mu=0}$$

Beweis:

Wir zeigen zunächst drei nützliche Beziehungen:

$$\begin{aligned} \text{(i)} \quad & \int_0^T \sum_{|\alpha|=k+m} \frac{1}{\alpha!} D_x^\alpha \left( M F_1(0, 0, \mu) h_2'(\theta) - M F_2(0, 0, \mu) h_1'(\theta) \right) h_1^{\alpha_1}(\theta) h_2^{\alpha_2}(\theta) d\theta \stackrel{(3.9)}{=} \\ &= \int_0^T M P_1(h_1(\theta), h_2(\theta), \mu) h_2'(\theta) - M P_2(h_1(\theta), h_2(\theta), \mu) h_1'(\theta) d\theta = \oint_{\Gamma} (-M P_2, M P_1) d\Gamma \stackrel{2.2.h}{=} \\ &= \frac{\text{sign} V}{m+k+1} \int_0^{2\pi} \frac{\frac{\partial}{\partial x_1} M P_1(\cos(\varphi), \sin(\varphi), \mu) + \frac{\partial}{\partial x_2} M P_2(\cos(\varphi), \sin(\varphi), \mu)}{M P_2(\cos(\varphi), \sin(\varphi), 0) \cos(\varphi) - M P_1(\cos(\varphi), \sin(\varphi), 0) \sin(\varphi)} d\varphi \\ \text{(ii)} \quad & \left. \frac{\partial}{\partial \mu} \frac{\frac{\partial}{\partial x_1} M P_1(\cos(\varphi), \sin(\varphi), \mu) + \frac{\partial}{\partial x_2} M P_2(\cos(\varphi), \sin(\varphi), \mu)}{M P_2(\cos(\varphi), \sin(\varphi), 0) \cos(\varphi) - M P_1(\cos(\varphi), \sin(\varphi), 0) \sin(\varphi)} \right|_{\mu=0} = \\ & \left. \frac{\partial}{\partial \mu} \frac{\frac{\partial}{\partial x_1} M P_1(\cos(\varphi), \sin(\varphi), \mu) + \frac{\partial}{\partial x_2} M P_2(\cos(\varphi), \sin(\varphi), \mu)}{M P_2(\cos(\varphi), \sin(\varphi), \mu) \cos(\varphi) - M P_1(\cos(\varphi), \sin(\varphi), \mu) \sin(\varphi)} \right|_{\mu=0} \end{aligned}$$

Dies folgt aus der Quotientenregel, angewandt auf den zweiten Bruch unter Berücksichtigung von  $\frac{\partial}{\partial x_1} M P_1(x_1, x_2, 0) + \frac{\partial}{\partial x_2} M P_2(x_1, x_2, 0) \equiv 0$ , was wiederum durch Differentiation aus (2.26) folgt.

$$\begin{aligned} \text{(iii)} \quad & \int_0^{2\pi} \frac{\frac{\partial}{\partial x_1} M P_1(\cos(\varphi), \sin(\varphi), \mu) + \frac{\partial}{\partial x_2} M P_2(\cos(\varphi), \sin(\varphi), \mu)}{M P_2(\cos(\varphi), \sin(\varphi), \mu) \cos(\varphi) - M P_1(\cos(\varphi), \sin(\varphi), \mu) \sin(\varphi)} d\varphi \stackrel{2.2.h+i}{=} \\ &= (m+k+1) \int_0^{2\pi} \frac{M P_1(\cos(\varphi), \sin(\varphi), \mu) \cos(\varphi) + M P_2(\cos(\varphi), \sin(\varphi), \mu) \sin(\varphi)}{M P_2(\cos(\varphi), \sin(\varphi), \mu) \cos(\varphi) - M P_1(\cos(\varphi), \sin(\varphi), \mu) \sin(\varphi)} d\varphi = \\ &= (m+k+1) \int_0^{2\pi} \frac{P_1(\cos(\varphi), \sin(\varphi), \mu) \cos(\varphi) + P_2(\cos(\varphi), \sin(\varphi), \mu) \sin(\varphi)}{P_2(\cos(\varphi), \sin(\varphi), \mu) \cos(\varphi) - P_1(\cos(\varphi), \sin(\varphi), \mu) \sin(\varphi)} d\varphi \stackrel{2.2.h+i}{=} \end{aligned}$$

$$= \frac{m+k+1}{k+1} \int_0^{2\pi} \frac{\frac{\partial}{\partial x_1} P_1(\cos(\varphi), \sin(\varphi), \mu) + \frac{\partial}{\partial x_2} P_2(\cos(\varphi), \sin(\varphi), \mu)}{P_2(\cos(\varphi), \sin(\varphi), \mu) \cos(\varphi) - P_1(\cos(\varphi), \sin(\varphi), \mu) \sin(\varphi)} d\varphi$$

Damit erhält man:

$$\begin{aligned} & \left. \frac{\partial}{\partial \mu} a_1(T, \mu) \right|_{\mu=0} \stackrel{3.9.f}{=} \left. \frac{\partial}{\partial \mu} \int_0^T f_1(\theta, \mu) d\theta \right|_{\mu=0} = \\ & = \text{sign} V \left. \frac{\partial}{\partial \mu} \int_0^T \sum_{|\alpha|=k+m} \frac{1}{\alpha!} D_x^\alpha \left( M F_1(0, 0, \mu) h_2'(\theta) - M F_2(0, 0, \mu) h_1'(\theta) \right) h_1^{\alpha_1}(\theta) h_2^{\alpha_2}(\theta) d\theta \right|_{\mu=0} \stackrel{(i)}{=} \\ & = \frac{1}{m+k+1} \left. \frac{\partial}{\partial \mu} \int_0^{2\pi} \frac{\frac{\partial}{\partial x_1} M P_1(\cos(\varphi), \sin(\varphi), \mu) + \frac{\partial}{\partial x_2} M P_2(\cos(\varphi), \sin(\varphi), \mu)}{M P_2(\cos(\varphi), \sin(\varphi), 0) \cos(\varphi) - M P_1(\cos(\varphi), \sin(\varphi), 0) \sin(\varphi)} d\varphi \right|_{\mu=0} = \\ & = \frac{1}{m+k+1} \left. \int_0^{2\pi} \frac{\partial}{\partial \mu} \frac{\frac{\partial}{\partial x_1} M P_1(\cos(\varphi), \sin(\varphi), \mu) + \frac{\partial}{\partial x_2} M P_2(\cos(\varphi), \sin(\varphi), \mu)}{M P_2(\cos(\varphi), \sin(\varphi), 0) \cos(\varphi) - M P_1(\cos(\varphi), \sin(\varphi), 0) \sin(\varphi)} \right|_{\mu=0} d\varphi \stackrel{(ii)}{=} \\ & = \frac{1}{m+k+1} \left. \int_0^{2\pi} \frac{\partial}{\partial \mu} \frac{\frac{\partial}{\partial x_1} M P_1(\cos(\varphi), \sin(\varphi), \mu) + \frac{\partial}{\partial x_2} M P_2(\cos(\varphi), \sin(\varphi), \mu)}{M P_2(\cos(\varphi), \sin(\varphi), \mu) \cos(\varphi) - M P_1(\cos(\varphi), \sin(\varphi), \mu) \sin(\varphi)} \right|_{\mu=0} d\varphi = \\ & = \frac{1}{m+k+1} \left. \frac{\partial}{\partial \mu} \int_0^{2\pi} \frac{\frac{\partial}{\partial x_1} M P_1(\cos(\varphi), \sin(\varphi), \mu) + \frac{\partial}{\partial x_2} M P_2(\cos(\varphi), \sin(\varphi), \mu)}{M P_2(\cos(\varphi), \sin(\varphi), \mu) \cos(\varphi) - M P_1(\cos(\varphi), \sin(\varphi), \mu) \sin(\varphi)} d\varphi \right|_{\mu=0} \stackrel{(iii)}{=} \\ & = \frac{1}{k+1} \left. \frac{\partial}{\partial \mu} \int_0^{2\pi} \frac{\frac{\partial}{\partial x_1} P_1(\cos(\varphi), \sin(\varphi), \mu) + \frac{\partial}{\partial x_2} P_2(\cos(\varphi), \sin(\varphi), \mu)}{P_2(\cos(\varphi), \sin(\varphi), \mu) \cos(\varphi) - P_1(\cos(\varphi), \sin(\varphi), \mu) \sin(\varphi)} d\varphi \right|_{\mu=0} \end{aligned}$$

### 3.11 Definition:

Seien  $F(x, \mu)$  und  $P_i(x_1, x_2, \mu)$   $i = 1, 2$  definiert wie in Definition 3.2 und  $F(x, \mu)$  erfülle die Bedingung A.

Dann sagen wir:

$F(x, \mu)$  erfüllt die Bedingung B (vgl. Bemerkung 3.1.b)

genau dann, wenn gilt:

$$\left. \frac{d}{d\mu} \int_0^{2\pi} \frac{\frac{\partial}{\partial x_1} P_1(\cos(\varphi), \sin(\varphi), \mu) + \frac{\partial}{\partial x_2} P_2(\cos(\varphi), \sin(\varphi), \mu)}{P_2(\cos(\varphi), \sin(\varphi), \mu) \cos(\varphi) - P_1(\cos(\varphi), \sin(\varphi), \mu) \sin(\varphi)} d\varphi \right|_{\mu=0} \neq 0$$

### 3.12 Definition:

Sei  $F(x, \mu)$  definiert wie in Definition 3.2 und erfülle die Bedingung A (vgl. Definition 3.2). Weiter seien die  $a_i(\theta, \mu)$  definiert wie im Satz 3.8.

Dann nennen wir  $F(x, \mu)$

- a) generisch, wenn  $a_3(T, 0) \neq 0$
- b) degeneriert vom Grad  $n \geq 1$ , wenn  $a_i(T, 0) = 0 \quad i \leq n+2$  aber  $a_{n+3}(T, 0) \neq 0$
- c) völlig degeneriert, wenn für alle existenten  $a_i(\theta, \mu)$  gilt:  $a_i(T, 0) = 0$ .

### 3.13 Definition:

Sei  $F(x, \mu)$  definiert wie in Definition 3.2 mit den Eigenschaften von Satz 3.4, erfülle also die Bedingung A und die Bedingung für homogenes Potential. Weiter seien die  $a_i(\theta, \mu)$  definiert wie im Satz 3.8.

Dann definiert man durch (beachte (3.26), Satz 3.8.a und (3.24))

$$\Pi(r_0, \mu) := r(T, \mu) - r(0, \mu) = \sum_{i=1}^{l-k+1} a_i(T, \mu) r_0^i - r_0 + o(r_0^{l-k+1})$$

für  $|\mu|, r_0$  hinreichend klein die Poincaré-Abbildung der DGL (3.1) bzgl. der positiven  $x_1$ -Achse.

### 3.14 Bemerkung:

Hat  $F(x, \mu)$  die Eigenschaften wie im Satz 3.4 und ist nicht völlig degeneriert, so kann man die Stabilitätseigenschaften des stationären Punktes im Ursprung der DGL

$$\dot{x} = F(x, 0) \tag{3.28}$$

am Vorzeichen von  $a_{n+3}(T, 0)$  ablesen. Denn es gilt offensichtlich

$$a_{n+3}(T, 0) < 0 \ (> 0) \quad \Longleftrightarrow \quad \Pi(r_0, 0) < 0 \ (> 0)$$

wählt man  $r_0$  nur hinreichend klein.

Also ist der stationäre Punkt im Ursprung der DGL (3.28)

asymptotisch stabil (bei Zeitumkehr asymptotisch stabil)  $\iff a_{n+3}(T, 0) < 0$  ( $> 0$ ).

### 3.15 Satz:

Sei  $F(x, \mu)$  definiert wie in Definition 3.2, erfülle weiter die Bedingungen A und B sowie für homogenes Potential und sei nicht völlig degeneriert.

Dann gilt:

Es existiert  $\mu_0 > 0$ , so daß entweder für  $\mu \in (0, \mu_0)$  oder  $\mu \in (-\mu_0, 0)$  genau eine Nullstelle

$$r_0(\mu) = \sqrt[n+2]{-\frac{\frac{\partial}{\partial \mu} a_1(T, 0)}{a_{n+3}(T, 0)} \mu} + o(\sqrt[n+2]{|\mu|})$$

der Poincaré-Abbildung  $\Pi(r_0, \mu)$  existiert.

Diese Nullstelle ist anziehend (abstoßend), falls  $\text{sign}(a_{n+3}(T, 0)) < 0$  ( $> 0$ ) gilt.

Beweis:

Wir suchen Nullstellen der Poincaré-Abbildung, es muß also gelten:

$$\Pi(r_0, \mu) = \sum_{i=1}^{l-k+1} a_i(T, \mu) r_0^i - r_0 + o(r_0^{l-k+1}) = 0 \quad (3.29)$$

Wir entwickeln (3.29) bis zur ersten Ordnung in  $\mu$  und benutzen Satz 3.9:

$$\mu \frac{\partial}{\partial \mu} a_1(T, 0) r_0 + a_{n+3}(T, 0) r_0^{n+3} + o(|\mu| r_0) + o(r_0^{n+3}) = 0$$

Kürzen durch  $r_0$  ergibt:

$$\mu \frac{\partial}{\partial \mu} a_1(T, 0) + a_{n+3}(T, 0) r_0^{n+2} + o(|\mu|) + o(r_0^{n+2}) = 0 \quad (3.30)$$

Nach Voraussetzung gilt:

$$\frac{\partial}{\partial \mu} a_1(T, 0) \neq 0 \neq a_{n+3}(T, 0) \iff \text{sign}\left(\mu \frac{\partial}{\partial \mu} a_1(T, 0) a_{n+3}(T, 0)\right) \neq 0$$

Sei jetzt  $\text{sign}\left(\mu \frac{\partial}{\partial \mu} a_1(T, 0) a_{n+3}(T, 0)\right) = 1$ .

Dann gilt  $\mu \frac{\partial}{\partial \mu} a_1(T, 0) + a_{n+3} r_0^{n+2} > 0$  bzw.  $< 0$  und die Poincaré-Abbildung hat

wegen (3.30) für  $|\mu|, r_0$  hinreichend klein keine Nullstelle.

Sei jetzt  $\text{sign}\left(\mu \frac{\partial}{\partial \mu} a_1(T, 0) a_{n+3}(T, 0)\right) = -1$ .

Dann führen wir

$$\varrho := \frac{a_{n+3}(T, 0)}{\mu \frac{\partial}{\partial \mu} a_1(T, 0)} r_0^{n+2} + 1 \quad \left( \Longleftrightarrow \quad r_0 = \sqrt[n+2]{-\frac{\frac{\partial}{\partial \mu} a_1(T, 0)}{a_{n+3}(T, 0)} \mu (1 - \varrho)} \right) \quad (3.31)$$

als neue Variable ein. Setzen wir (3.31) in (3.30) ein ergibt sich

$$\mu \frac{\partial}{\partial \mu} a_1(T, 0) + a_{n+3}(T, 0) \left( -\frac{\frac{\partial}{\partial \mu} a_1(T, 0)}{a_{n+3}(T, 0)} \mu (1 - \varrho) \right) + o(|\mu|^{n+2} \sqrt{|\mu|}) = 0$$

oder ausmultipliziert, zusammengefaßt und durch  $\mu$  gekürzt:

$$\frac{\partial}{\partial \mu} a_1(T, 0) \varrho + o(\sqrt[n+2]{|\mu|}) = 0 \quad (3.32)$$

Auf (3.32) können wir jetzt den Satz über die implizite Funktion in  $(\mu = 0, \varrho = 0)$  anwenden und erhalten das eindeutig bestimmte  $\varrho(\mu) \simeq o(\sqrt[n+2]{|\mu|})$  und damit auch, wegen (3.31)

$$r_0(\mu) = \sqrt[n+2]{-\frac{\frac{\partial}{\partial \mu} a_1(T, 0)}{a_{n+3}(T, 0)} \mu} + o(\sqrt[n+2]{|\mu|}) \quad (3.33)$$

die eindeutig bestimmte Nullstelle der Poincaré-Abbildung, wählt man  $|\mu|, r_0$  hinreichend klein.

Um festzustellen, ob  $r_0(\mu)$  anziehend oder abstoßend ist, differenzieren wir die Poincaré Abbildung nach  $r_0$ , setzen (3.33) ein und erhalten

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial r_0} \Pi(r_0, \mu) \Big|_{r_0(\mu)} &= \\ &= \mu \frac{\partial}{\partial \mu} a_1(T, 0) + (n+3) a_{n+3}(T, 0) \left( \sqrt[n+2]{-\frac{\frac{\partial}{\partial \mu} a_1(T, 0)}{a_{n+3}(T, 0)} \mu} + o(\sqrt[n+2]{|\mu|}) \right)^{n+2} = \\ &= -(n+2) \mu \frac{\partial}{\partial \mu} a_1(T, 0) + o(|\mu|) \neq 0 \end{aligned}$$

wählt man  $|\mu|$  hinreichend klein.

Weiter gilt wegen

$$\text{sign}\left(\mu \frac{\partial}{\partial \mu} a_1(T, 0) a_{n+3}(T, 0)\right) = -1$$

die Gleichung

$$\text{sign}\left(\frac{\partial}{\partial r_0} \prod(r_0(\mu), \mu) \Big|_{r_0(\mu)}\right) = \text{sign}\left(a_{n+3}(T, 0)\right) \quad (3.34)$$

woraus die Behauptung folgt.

### 3.16 Satz:

Sei  $F(x, \mu) = (F_1(x_1, x_2, \mu), F_2(x_1, x_2, \mu)) \in C^{l+2}(\mathbb{R}^2 \times U(0), \mathbb{R})$ ,  $l \geq 1$  nicht völlig degeneriert und  $\exists k \leq l$  mit  $D_x^\alpha F_i(0, 0, \mu) \equiv 0$   $i = 1, 2$   $|\alpha| = 0, \dots, k-1$   $\alpha \in \mathbb{N}^2$

Für  $P_i(x_1, x_2, \mu) = \sum_{|\alpha|=k} \frac{D_x^\alpha}{\alpha!} F_i(0, 0, \mu) x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2}$   $i = 1, 2$  gelte: (vgl. Bemerkung 3.1)

$$\text{a) (i) } P_2(\cos(\varphi), \sin(\varphi), \mu) \cos(\varphi) - P_1(\cos(\varphi), \sin(\varphi), \mu) \sin(\varphi) \Big|_{\mu=0} \neq 0$$

$$\text{(ii) } \int_0^{2\pi} \frac{\frac{\partial}{\partial x_1} P_1(\cos(\varphi), \sin(\varphi), \mu) + \frac{\partial}{\partial x_2} P_2(\cos(\varphi), \sin(\varphi), \mu)}{P_2(\cos(\varphi), \sin(\varphi), \mu) \cos(\varphi) - P_1(\cos(\varphi), \sin(\varphi), \mu) \sin(\varphi)} d\varphi \Big|_{\mu=0} = 0$$

$$\text{b) } \frac{d}{d\mu} \int_0^{2\pi} \frac{\frac{\partial}{\partial x_1} P_1(\cos(\varphi), \sin(\varphi), \mu) + \frac{\partial}{\partial x_2} P_2(\cos(\varphi), \sin(\varphi), \mu)}{P_2(\cos(\varphi), \sin(\varphi), \mu) \cos(\varphi) - P_1(\cos(\varphi), \sin(\varphi), \mu) \sin(\varphi)} d\varphi \Big|_{\mu=0} =: \aleph \neq 0$$

Dann gilt:

Vom stationären Punkt im Ursprung der DGL (3.1)

$$\dot{x} = F(x, \mu)$$

zweigt in  $\mu = 0$  genau eine einparametrische Schar periodischer Lösungen ab und zwar (vgl. (3.34)) entweder für  $\mu > 0$ , falls der Ursprung der DGL (3.28)

$$\dot{x} = F(x, 0)$$

asymptotisch stabil [bei Zeitumkehr asymptotisch stabil] ist und  $\aleph > 0$  [ $\aleph < 0$ ] gilt oder für  $\mu < 0$ , falls der Ursprung der DGL (3.28) asymptotisch stabil [bei Zeitumkehr asymptotisch stabil] ist und  $\aleph < 0$  [ $\aleph > 0$ ] gilt.

Diese Schar periodischer Lösungen ist asymptotisch orbital stabil [bei Zeitumkehr asymptotisch stabil] falls  $\text{sign}(\mu)\text{sign}(\aleph) = [\neq]$   $\text{sign}(P_2 x_1 - P_1 x_2)$  gilt und dreht sich in mathematisch positiver Richtung um den Ursprung, falls  $\text{sign}(P_2 x_1 - P_1 x_2) > 0$  gilt, sonst umgekehrt.

Für die Amplitude  $A(\mu)$  und die Periode  $T(\mu)$  gilt:

$$A(\mu) \simeq \sqrt[n+2]{|\mu|} \left( 1 + O(\sqrt[n+2]{|\mu|}) \right) \quad T(\mu) \simeq \left( \sqrt[n+2]{|\mu|} \right)^{1-k} \left( 1 + O(\sqrt[n+2]{|\mu|}) \right)$$

mit  $n = \text{Degenerationsgrad von } F(x, \mu)$ .

Beweis:

Wir müssen nur noch die Aussage für  $T(\mu)$  beweisen, der Rest folgt aus Satz 3.15 mit Bemerkung 3.14. Da also  $F(x_1, x_2, \mu)$  die Bedingung A vom Grad  $k$  erfüllt, gilt für  $\theta$ :

$$\dot{\theta} = (P_2(\cos(\varphi), \sin(\varphi), 0) \cos(\varphi) - P_1(\cos(\varphi), \sin(\varphi), 0) \sin(\varphi)) r^{k-1} + O(|\mu| r^{k-1}) + O(r^k)$$

Weiter gilt  $r(\mu) \simeq \sqrt[n+2]{|\mu|}$ , damit ergibt sich für  $\dot{\theta}$ :

$$\dot{\theta} \simeq \left( \sqrt[n+2]{|\mu|} \right)^{k-1} \left( 1 + O(\sqrt[n+2]{|\mu|}) \right) \implies dt \simeq \frac{d\theta}{\left( \sqrt[n+2]{|\mu|} \right)^{k-1} \left( 1 + O(\sqrt[n+2]{|\mu|}) \right)}$$

Integration ergibt jetzt wegen

$$\frac{1}{\left( \sqrt[n+2]{|\mu|} \right)^{k-1} \left( 1 + O(\sqrt[n+2]{|\mu|}) \right)} = \left( \sqrt[n+2]{|\mu|} \right)^{1-k} \left( 1 + O(\sqrt[n+2]{|\mu|}) \right)$$

die Behauptung.

### 3.17 Bemerkung:

Um einen Bezug zu den den zwei folgenden Kapiteln herzustellen, formulieren wir die Bedingungen von Satz 3.16 auch für Gleichung (3.4) und in Polarkoordinaten.

1) Mit Gleichung

$$P_i(x_1, x_2, \mu) = Q_i(x_1, x_2) + \mu q_i(x_1, x_2) + O(\mu^2) \quad i = 1, 2 \quad (3.35)$$

lauten die Bedingungen im Satz 3.16

$$\text{a) (i) } Q_2(\cos(\varphi), \sin(\varphi)) \cos(\varphi) - Q_1(\cos(\varphi), \sin(\varphi)) \sin(\varphi) \neq 0$$

$$\text{(ii) } \int_0^{2\pi} \frac{\frac{\partial}{\partial x_1} Q_1(\cos(\varphi), \sin(\varphi)) + \frac{\partial}{\partial x_2} Q_2(\cos(\varphi), \sin(\varphi))}{Q_2(\cos(\varphi), \sin(\varphi)) \cos(\varphi) - Q_1(\cos(\varphi), \sin(\varphi)) \sin(\varphi)} d\varphi = 0$$

$$b) \int_0^{2\pi} \frac{q_1(\cos(\varphi), \sin(\varphi))Q_2(\cos(\varphi), \sin(\varphi)) - q_2(\cos(\varphi), \sin(\varphi))Q_1(\cos(\varphi), \sin(\varphi))}{(Q_2(\cos(\varphi), \sin(\varphi))\cos(\varphi) - Q_1(\cos(\varphi), \sin(\varphi))\sin(\varphi))^2} d\varphi \neq 0$$

bzw. falls die Integrabilitätsbedingung für die  $Q_i(x_1, x_2)$   $i = 1, 2$  erfüllt ist:

$$b') \int_0^{2\pi} \frac{\frac{\partial}{\partial x_1}q_1(\cos(\varphi), \sin(\varphi)) + \frac{\partial}{\partial x_2}q_2(\cos(\varphi), \sin(\varphi))}{Q_2(\cos(\varphi), \sin(\varphi))\cos(\varphi) - Q_1(\cos(\varphi), \sin(\varphi))\sin(\varphi)} d\varphi \neq 0$$

Bedingung b) folgt mit Hilfe der letzten Gleichung in Satz 3.10 (iii), (3.35) und Differentiation nach  $\mu$ . Für den Zähler des Integranden gilt damit:

$$\begin{aligned} & (Q_2 \cos(\varphi) - Q_1 \sin(\varphi))(q_1 \cos(\varphi) + q_2 \sin(\varphi)) - (Q_1 \cos(\varphi) + q_2 \sin(\varphi))(q_2 \cos(\varphi) - q_1 \sin(\varphi)) = \\ & = q_1 Q_2 (\cos^2(\varphi) + \sin^2(\varphi)) - q_2 Q_1 (\sin^2(\varphi) + \cos^2(\varphi)) + (-q_1 Q_1 + q_2 Q_2 + q_1 Q_1 - q_2 Q_2) \sin(\varphi) \cos(\varphi) = \\ & = q_1(\cos(\varphi), \sin(\varphi))Q_2(\cos(\varphi), \sin(\varphi)) - q_2(\cos(\varphi), \sin(\varphi))Q_1(\cos(\varphi), \sin(\varphi)) \end{aligned}$$

Bedingung b') folgt mit (3.35) und ebenfalls Differentiation nach  $\mu$ . Für den Zähler des Integranden gilt hier

$$\begin{aligned} & (Q_2 \cos(\varphi) - Q_1 \sin(\varphi))\left(\frac{\partial}{\partial x_1}q_1 + \frac{\partial}{\partial x_2}q_2\right) - \left(\frac{\partial}{\partial x_1}Q_1 + \frac{\partial}{\partial x_2}Q_2\right)(q_2 \cos(\varphi) - q_1 \sin(\varphi)) = \\ & = (Q_2 \cos(\varphi) - Q_1 \sin(\varphi))\left(\frac{\partial}{\partial x_1}q_1 + \frac{\partial}{\partial x_2}q_2\right) \end{aligned}$$

was aus der Integrabilitätsbedingung  $\frac{\partial}{\partial x_1}Q_1(x_1, x_2) + \frac{\partial}{\partial x_2}Q_2(x_1, x_2) \equiv 0$  folgt. Kürzen durch den ersten Faktor ergibt die Behauptung.

2) Definieren wir (wie in den folgenden Kapiteln 4+5):

$$\begin{aligned} c(\varphi) &:= q_1(\cos(\varphi), \sin(\varphi))\cos(\varphi) + q_2(\cos(\varphi), \sin(\varphi))\sin(\varphi) \\ d(\varphi) &:= q_2(\cos(\varphi), \sin(\varphi))\cos(\varphi) - q_1(\cos(\varphi), \sin(\varphi))\sin(\varphi) \\ f(\varphi) &:= Q_1(\cos(\varphi), \sin(\varphi))\cos(\varphi) + Q_2(\cos(\varphi), \sin(\varphi))\sin(\varphi) \\ g(\varphi) &:= Q_2(\cos(\varphi), \sin(\varphi))\cos(\varphi) - Q_1(\cos(\varphi), \sin(\varphi))\sin(\varphi) \\ D(\varphi) &:= q_1(\cos(\varphi), \sin(\varphi))Q_2(\cos(\varphi), \sin(\varphi)) - q_2(\cos(\varphi), \sin(\varphi))Q_1(\cos(\varphi), \sin(\varphi)) \end{aligned}$$

(vgl. zur letzten Gleichung Satz 4.13.a) lauten die Bedingungen von Satz 3.16:

$$a) \quad (i) \quad g(\varphi) \neq 0$$

$$(ii) \quad \int_0^{2\pi} \frac{f(\varphi)}{g(\varphi)} d\varphi = 0$$

$$\text{b)} \quad \int_0^{2\pi} \frac{D(\varphi)}{g^2(\varphi)} d\varphi \neq 0$$

a) Folgt aus 2.5.b (i)

b) Folgt aus 1 b).

### 3.18 Beispiele:

1) Betrachte das DGL-System:

$$\dot{x}_1 = -x_2^3 + \mu \sum_{i=0}^3 c_{i,1}^{(\mu)} x_1^{3-i} x_2^i - x_1^4 + x_1 x_2^3 + o(\|x\|^5) + o(|\mu| \|x\|^3)$$

$$\dot{x}_2 = x_1^3 + \mu \sum_{i=0}^3 c_{i,2}^{(\mu)} x_1^{3-i} x_2^i + x_1^4 + 2x_2^4 + o(\|x\|^5) + o(|\mu| \|x\|^3)$$

mit  $c_{i,j}^{(\mu)} \in \mathbb{R}$   $i = 0, \dots, 3$   $j = 1, 2$  und  $3c_{0,1}^{(\mu)} + c_{2,1}^{(\mu)} + c_{1,2}^{(\mu)} + 3c_{3,2}^{(\mu)} \neq 0$ .

Für die Bedingungen im verallgemeinerten Verzweigungssatz von E. Hopf erhält man:

a) (i)  $x_1^3 x_1 - (-x_2^3) x_2 = x_1^4 + x_2^4 > 0$  positiv definit

$$\text{(ii)} \quad \frac{\partial}{\partial x_1}(-x_2^3) + \frac{\partial}{\partial x_2}(x_1^3) = 0 \implies \int_0^{2\pi} \frac{\frac{\partial}{\partial x_1}(-x_2^3) + \frac{\partial}{\partial x_2}(x_1^3)}{x_1^4 + x_2^4} \Big|_{(\cos(\varphi), \sin(\varphi))} d\varphi = 0$$

$$\begin{aligned} \text{b)} \quad & \int_0^{2\pi} \frac{(3c_{0,1}^{(\mu)} + c_{1,2}^{(\mu)}) \cos^2(\varphi) + 2(c_{1,1}^{(\mu)} + c_{2,2}^{(\mu)}) \cos(\varphi) \sin(\varphi) + (c_{2,1}^{(\mu)} + 3c_{3,2}^{(\mu)}) \sin^2(\varphi)}{\cos^4(\varphi) + \sin^4(\varphi)} d\varphi = \\ & = \left( 3c_{0,1}^{(\mu)} + c_{1,2}^{(\mu)} + c_{2,1}^{(\mu)} + 3c_{3,2}^{(\mu)} \right) \int_0^{2\pi} \frac{\cos^2(\varphi)}{\cos^4(\varphi) + \sin^4(\varphi)} d\varphi \neq 0 \end{aligned}$$

was aus

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos^2(\varphi)}{\cos^4(\varphi) + \sin^4(\varphi)} d\varphi = \int_0^{2\pi} \frac{\sin^2(\varphi)}{\cos^4(\varphi) + \sin^4(\varphi)} d\varphi > 0 = \int_0^{2\pi} \frac{\cos(\varphi) \sin(\varphi)}{\cos^4(\varphi) + \sin^4(\varphi)} d\varphi$$

folgt.

Seien weiter  $h_1(\theta), h_2(\theta)$  Lösungen des DGL-Systems:

$$\dot{x}_1 = -x_2^3$$

$$\dot{x}_2 = x_1^3$$

mit den Anfangswerten  $h_1(0) = \frac{1}{\sqrt{2}}$   $h_2(0) = 0$  und kleinster Periode  $T_1 > 0$ .  
Wegen (vgl. 3.9.c und 3.6.f)

$$\begin{aligned} a_3(T_1, 0) &= \int_0^{T_1} f_3(\theta, 0) d\theta = \\ &= \int_0^{T_1} \left( \left( h_1^4(\theta) + h_1(\theta) h_2^3(\theta) \right) h_2'(\theta) - \left( -h_1^4(\theta) + h_1^3(\theta) h_2(\theta) \right) h_1'(\theta) \right) \\ &\quad \cdot \left( \left( -h_1^4(\theta) + h_1^3(\theta) h_2(\theta) \right) h_1(\theta) - \left( h_1^4(\theta) + h_1(\theta) h_2^3(\theta) \right) h_2(\theta) \right) d\theta = \\ &= \int_0^{T_1} \left( h_1^7(\theta) + h_1^3(\theta) h_2^4(\theta) \right) \left( -h_1^5(\theta) - h_1(\theta) h_2^4(\theta) \right) d\theta = - \int_0^{T_1} h_1^4(\theta) \left( h_1^4(\theta) + h_2^4(\theta) \right)^2 d\theta < 0 \end{aligned}$$

ist dieses Beispiel nicht degeneriert, sondern sogar generisch (vgl. 3.12)

Damit sind alle Voraussetzungen des Satzes 3.16 erfüllt.

Das DGL-System besitzt somit für  $\mu > 0$  ( $< 0$ ), falls  $(3c_{0,1}^{(\mu)} + c_{1,2}^{(\mu)} + c_{2,1}^{(\mu)} + 3c_{3,2}^{(\mu)}) > 0$  ( $< 0$ ) genau eine einparametrische Schar asymptotisch orbital stabiler periodischer Lösungen, die in  $\mu = 0$  vom Ursprung abzweigen.

Für ihre Amplitude  $A_1(\mu)$  und die Periode  $T_1(\mu)$  gilt:

$$A_1(\mu) \simeq \sqrt[3]{|\mu|} \left( 1 + O(\sqrt[3]{|\mu|}) \right) \quad T_1(\mu) \simeq \frac{1}{|\mu|} \left( 1 + O(\sqrt[3]{|\mu|}) \right)$$

2) Betrachte das DGL-System:

$$\dot{x}_1 = -8x_1^2 x_2 - 12x_2^3 + \mu \sum_{i=0}^3 c_{i,1}^{(\mu)} x_1^{3-i} x_2^i - x_1^5 - 2x_1^3 x_2^2 + o(\|x\|^5) + o(|\mu| \|x\|^3)$$

$$\dot{x}_2 = 6x_1^3 + 10x_1 x_2^2 + \mu \sum_{i=0}^3 c_{i,2}^{(\mu)} x_1^{3-i} x_2^i + x_1^4 x_2 - x_2^5 + o(\|x\|^5) + o(|\mu| \|x\|^3)$$

mit  $c_{i,j}^{(\mu)} \in \mathbb{R}$   $i = 0, \dots, 3$   $j = 1, 2$  und

$$c_{0,1}^{(\mu)} (26\sqrt{2} - 34) + c_{2,1}^{(\mu)} (22 - 15\sqrt{2}) + c_{1,2}^{(\mu)} (-18\sqrt{2} + 26) + c_{3,2}^{(\mu)} (-14 + 11\sqrt{2}) \neq 0$$

Wir rechnen wieder die Bedingungen in 3.16 nach:

$$\text{a) (i) } (6x_1^3 + 10x_1 x_2^2) x_1 - (-8x_1^2 x_2 - 12x_2^3) x_2 = 6(x_1^4 + 3x_1^2 x_2^2 + 2x_2^4) = 6(x_1^2 + x_2^2)(x_1^2 + 2x_2^2) > 0$$

$$(ii) \frac{\partial}{\partial x_1}(-8x_1^2x_2-12x_2^3)+\frac{\partial}{\partial x_2}(6x_1^3+10x_1x_2^2) = -16x_1x_2+20x_1x_2 = 4x_1x_2 (\neq 0)$$

Damit erhält man:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{6} \int_0^{2\pi} \frac{4 \cos(\varphi) \sin(\varphi)}{(\cos^2(\varphi) + \sin^2(\varphi)) (\cos^2(\varphi) + 2 \sin^2(\varphi))} d\varphi = \frac{2}{3} \int_0^{2\pi} \frac{\cos(\varphi) \sin(\varphi)}{1 + \sin^2(\varphi)} d\varphi = 0 \\ b) & \quad \frac{1}{6} \int_0^{2\pi} \frac{(3c_{0,1}^{(\mu)} + c_{1,2}^{(\mu)}) \cos^2(\varphi) + 2(c_{1,1}^{(\mu)} + c_{2,2}^{(\mu)}) \cos(\varphi) \sin(\varphi) + (c_{2,1}^{(\mu)} + 3c_{3,2}^{(\mu)}) \sin^2(\varphi)}{1 + \sin^2(\varphi)} d\varphi - \\ & - \frac{1}{6} \int_0^{2\pi} \frac{4 \cos(\varphi) \sin(\varphi) \left( c_{0,2}^{(\mu)} \cos^4(\varphi) + (c_{1,2}^{(\mu)} - c_{0,1}^{(\mu)}) \cos^3(\varphi) \sin(\varphi) + (c_{2,2}^{(\mu)} - c_{1,1}^{(\mu)}) \cos^2(\varphi) \sin^2(\varphi) + \right. \\ & \quad \left. + (c_{3,2}^{(\mu)} - c_{2,1}^{(\mu)}) \cos(\varphi) \sin^3(\varphi) - c_{3,1}^{(\mu)} \sin^4(\varphi) \right)}{(1 + \sin^2(\varphi))^2} d\varphi = \\ & = \pi \left( c_{0,1}^{(\mu)} (26\sqrt{2}-34) + c_{2,1}^{(\mu)} (22-15\sqrt{2}) + c_{1,2}^{(\mu)} (-18\sqrt{2}+26) + c_{3,2}^{(\mu)} (-14+11\sqrt{2}) \right) \end{aligned}$$

was aus

$$\begin{aligned} & \int_0^{2\pi} \frac{\cos^2(\varphi)}{1 + \sin^2(\varphi)} d\varphi = \sqrt{2} (2 - \sqrt{2}) \pi = \sqrt{2} \int_0^{2\pi} \frac{\sin^2(\varphi)}{1 + \sin^2(\varphi)} d\varphi \\ & \int_0^{2\pi} \frac{\cos^4(\varphi) \sin^2(\varphi)}{(1 + \sin^2(\varphi))^2} d\varphi = (5\sqrt{2} - 7) \pi = \sqrt{2} \int_0^{2\pi} \frac{\cos^2(\varphi) \sin^4(\varphi)}{(1 + \sin^2(\varphi))^2} d\varphi \end{aligned}$$

und

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos(\varphi) \sin(\varphi)}{1 + \sin^2(\varphi)} d\varphi = \int_0^{2\pi} \frac{\cos^5 \sin(\varphi)}{(1 + \sin^2(\varphi))^2} d\varphi = \int_0^{2\pi} \frac{\cos^3(\varphi) \sin^3(\varphi)}{(1 + \sin^2(\varphi))^2} d\varphi = \int_0^{2\pi} \frac{\cos(\varphi) \sin^5(\varphi)}{(1 + \sin^2(\varphi))^2} d\varphi = 0$$

folgt.

Da die Bedingung für homogenes Potential nicht wie im Beispiel 1) a priori erfüllt ist ( $4x_1x_2 \neq 0$ ), müssen wir sie zusätzlich überprüfen:

Mit

$$p_1(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2, \quad p_2(x_1, x_2) = x_1^2 + 2x_2^2, \quad \alpha_1 = 1, \alpha_2 = 1, \quad \frac{\partial}{\partial x_1} p_1(x_1, x_2) = 2x_1,$$

$$\frac{\partial}{\partial x_1} p_2(x_1, x_2) = 2x_1, \quad \frac{\partial}{\partial x_2} p_1(x_1, x_2) = 2x_2, \quad \frac{\partial}{\partial x_2} p_2(x_1, x_2) = 4x_2$$

erhält man für die linke Seite des linearen, inhomogenen Gleichungssystems (vgl. 2.11 bzw 3.3):

$$\begin{aligned}
& - (8x_1^2x_2 + 12x_2^3) \left( (x_1^2 + x_2^2)^0 (x_1^2 + 2x_2^2)^1 2x_1\beta_1 + (x_1^2 + 2x_2^2)^0 (x_1^2 + x_2^2)^1 2x_1\beta_2 \right) + \\
& + (6x_1^3 + 10x_1x_2^2) \left( (x_1^2 + x_2^2)^0 (x_1^2 + 2x_2^2)^1 2x_2\beta_1 + (x_1^2 + 2x_2^2)^0 (x_1^2 + x_2^2)^1 4x_2\beta_2 \right) = \\
& = \left( - (8x_1^2x_2 + 12x_2^3) (2x_1^3 + 4x_1x_2^2) + (6x_1^3 + 10x_1x_2^2) (2x_1^2x_2 + 4x_2^3) \right) \beta_1 + \\
& \quad + \left( - (8x_1^2x_2 + 12x_2^3) (2x_1^3 + 2x_1x_2^2) + (6x_1^3 + 10x_1x_2^2) (4x_1^2x_2 + 4x_2^3) \right) \beta_2 = \\
& = - (4x_1^5x_2 + 12x_1^3x_2^3 + 8x_1x_2^5) \beta_1 + (8x_1^5x_2 + 24x_1^3x_2^3 + 8x_1x_2^5) \beta_2
\end{aligned}$$

Für die rechte Seite ergibt sich:

$$-\frac{1}{6} (6x_1^4 + 18x_1^2x_2^2 + 12x_2^4) (4x_1x_2) = - (4x_1^5x_2 + 12x_1^3x_2^3 + 8x_1x_2^5)$$

Insgesamt also:

$$- (4x_1^5x_2 + 12x_1^3x_2^3 + 8x_1x_2^5) \beta_1 + (8x_1^5x_2 + 24x_1^3x_2^3 + 8x_1x_2^5) \beta_2 = - (4x_1^5x_2 + 12x_1^3x_2^3 + 8x_1x_2^5)$$

Diese Gleichung besitzt die Lösungen  $\beta_1 = 1$ ,  $\beta_2 = 0$ .

Die Bedingung für homogenes Potential ist damit erfüllt.

Seien weiter  $h_1(\theta)$ ,  $h_2(\theta)$  Lösungen des DGL-Systems:

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= -8x_1^4x_2 - 20x_1^2x_2^3 - 12x_2^5 \\
\dot{x}_2 &= 6x_1^5 + 16x_1^3x_2^2 + 10x_1x_2^4
\end{aligned}$$

mit den Anfangswerten  $h_1(0) = \frac{1}{\sqrt[3]{6}}$ ,  $h_2(0) = 0$  und kleinster Periode  $T_2 > 0$ .

Wegen (vgl. wieder 3.9.c und 3.6.f)

$$\begin{aligned}
a_3(T_2, 0) &= \int_0^{T_2} f_3(\theta, 0) d\theta = \frac{1}{6} \int_0^{T_2} \frac{- \left( h_1^5(\theta) + 2h_1^3(\theta)h_2^2(\theta) \right) h_2'(\theta) - \left( h_1^4(\theta)h_2(\theta) - h_2^5(\theta) \right) h_1'(\theta)}{\left( h_1^2(\theta) + h_2^2(\theta) \right) \left( h_1^2(\theta) + 2h_2^2(\theta) \right)} d\theta = \\
&= -\frac{1}{6} \int_0^{T_2} \frac{\left( h_1^5(\theta) + 2h_1^3(\theta)h_2^2(\theta) \right) \left( 6h_1^3(\theta) + 10h_1(\theta)h_2^2(\theta) \right)}{\left( h_1^2(\theta) + h_2^2(\theta) \right) \left( h_1^2(\theta) + 2h_2^2(\theta) \right)} d\theta +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{\left(h_1^4(\theta)h_2(\theta) - h_2^5(\theta)\right)\left(-8h_1^2(\theta)h_2(\theta) - 12h_2^3(\theta)\right)}{\left(h_1^2(\theta) + h_2^2(\theta)\right)\left(h_1^2(\theta) + 2h_2^2(\theta)\right)} d\theta = \\
& = -\frac{1}{3} \int_0^{T_2} \frac{3h_1^8(\theta) + 7h_1^6(\theta)h_2^2(\theta) + 4h_1^4(\theta)h_2^4(\theta) + 4h_1^2(\theta)h_2^6(\theta) + 6h_2^8(\theta)}{\left(h_1^2(\theta) + h_2^2(\theta)\right)\left(h_1^2(\theta) + 2h_2^2(\theta)\right)} d\theta < 0
\end{aligned}$$

ist dieses Beispiel nicht degeneriert, sondern sogar generisch (vgl. 3.12).

Damit sind alle Voraussetzungen des Satzes 3.16 erfüllt.

Das DGL-System besitzt somit für  $\mu > 0$  ( $< 0$ ) falls

$$c_{0,1}^{(\mu)}(26\sqrt{2}-34) + c_{2,1}^{(\mu)}(22-15\sqrt{2}) + c_{1,2}^{(\mu)}(-18\sqrt{2}+26) + c_{3,2}^{(\mu)}(-14+11\sqrt{2}) > 0 \text{ } (< 0)$$

genau eine einparametrische Schar asymptotisch orbital stabiler periodischer Lösungen, die vom Ursprung in  $\mu = 0$  abzweigen.

Für ihre Amplitude  $A_2(\mu)$  und die Periode  $T_2(\mu)$  gilt:

$$A_2(\mu) \simeq \sqrt[2]{|\mu|} \left(1 + O(\sqrt[2]{|\mu|})\right) \quad T_2(\mu) \simeq \frac{1}{|\mu|} \left(1 + O(\sqrt[2]{|\mu|})\right)$$

3) Als letztes Beispiel betrachten wir folgendes DGL-System:

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= -x_1^2 x_2 - x_2^3 + \mu \sum_{i=0}^3 c_{i,1}^{(\mu)} x_1^{3-i} x_2^i + \sum_{i=0}^4 c_{i,1}^{(4)} x_1^{4-i} x_2^i + \sum_{i=0}^5 c_{i,1}^{(5)} x_1^{5-i} x_2^i + \\
&+ x_1^3 x_2^3 - x_1 x_2^5 - 2x_1^5 x_2^2 + x_1 x_2^6 + o(|\mu| \|x\|^3) + o(\|x\|^7) \\
\dot{x}_2 &= x_1^3 + x_1 x_2^2 + \mu \sum_{i=0}^3 c_{i,2}^{(\mu)} x_1^{3-i} x_2^i + \sum_{i=0}^4 c_{i,2}^{(4)} x_1^{4-i} x_2^i + \sum_{i=0}^5 c_{i,2}^{(5)} x_1^{5-i} x_2^i - \\
&- x_1^4 x_2^2 + x_1^2 x_2^4 - 2x_1^6 x_2 + x_1^2 x_2^5 + o(|\mu| \|x\|^3) + o(\|x\|^7)
\end{aligned}$$

mit  $c_{i,j}^{(\mu)}, c_{l,j}^{(k)} \in \mathbb{R}$   $i = 0, \dots, 3$   $j = 1, 2$   $k = 4, 5$   $l = 0, \dots, k$   $3c_{0,1}^{(\mu)} + c_{2,1}^{(\mu)} + c_{1,2}^{(\mu)} + 3c_{3,2}^{(\mu)} \neq 0$  und

$$\begin{aligned}
& 80 \left( c_{0,1}^{(5)} + c_{0,2}^{(5)} \right) + 16 \left( c_{2,1}^{(5)} + c_{4,1}^{(5)} + c_{1,2}^{(5)} + c_{3,2}^{(5)} \right) + c_{0,1}^{(4)} \left( 14c_{1,1}^{(4)} + 6c_{3,1}^{(4)} - 56c_{0,2}^{(4)} - 4c_{2,2}^{(4)} \right) + \\
& + c_{2,1}^{(4)} \left( 6c_{1,1}^{(4)} + 6c_{3,1}^{(4)} - 4c_{0,2}^{(4)} + 4c_{4,2}^{(4)} \right) + c_{4,1}^{(4)} \left( 6c_{1,1}^{(4)} + 14c_{3,1}^{(4)} + 4c_{2,2}^{(4)} + 56c_{4,2}^{(4)} \right) + (3.36) \\
& + c_{1,2}^{(4)} \left( -4c_{1,1}^{(4)} - 14c_{0,2}^{(4)} - 6c_{2,2}^{(4)} - 6c_{4,2}^{(4)} \right) + c_{3,2}^{(4)} \left( 4c_{3,1}^{(4)} - 6c_{0,2}^{(4)} - 6c_{2,2}^{(4)} - 14c_{4,2}^{(4)} \right) = 0
\end{aligned}$$

Wir erhalten für die Bedingungen in Satz 3.16:

$$\text{a) (i) } (x_1^3 + x_1 x_2^2) x_1 - (-x_1^2 x_2 - x_2^3) x_2 = x_1^4 + 2x_1^2 x_2^2 + x_2^4 = (x_1^2 + x_2^2)^2$$

$$\text{(ii) } \frac{\partial}{\partial x_1}(-x_1^2 x_2 - x_2^3) + \frac{\partial}{\partial x_2}(x_1^3 + x_1 x_2^2) = -2x_1 x_2 + 2x_1 x_2 = 0 \implies$$

$$\implies \int_0^{2\pi} \frac{\frac{\partial}{\partial x_1}(-x_1^2 x_2 - x_2^3) + \frac{\partial}{\partial x_2}(x_1^3 + x_1 x_2^2)}{(x_1^2 + x_2^2)^2} \Big|_{(\cos(\varphi), \sin(\varphi))} d\varphi = 0$$

$$\begin{aligned} \text{b) } \int_0^{2\pi} \frac{(3c_{0,1}^{(\mu)} + c_{1,2}^{(\mu)}) \cos^2(\varphi) + 2(c_{1,1}^{(\mu)} + c_{2,2}^{(\mu)}) \cos(\varphi) \sin(\varphi) + (c_{2,1}^{(\mu)} + 3c_{3,2}^{(\mu)}) \sin^2(\varphi)}{(\cos^2(\varphi) + \sin^2(\varphi))^2} d\varphi = \\ = (3c_{0,1}^{(\mu)} + c_{1,2}^{(\mu)} + c_{2,1}^{(\mu)} + 3c_{3,2}^{(\mu)}) \int_0^{2\pi} \cos^2(\varphi) d\varphi \neq 0 \end{aligned}$$

Die Lösung des DGL-Systems

$$\dot{x}_1 = -x_1^2 x_2 - x_2^3$$

$$\dot{x}_2 = x_1^3 + x_1 x_2^2$$

mit den Anfangswerten  $(1, 0)$  lautet  $(\cos(\theta), \sin(\theta))$ .

Wegen 3.9.c und 3.6.f gilt:

$$a_3(2\pi, 0) =$$

$$\begin{aligned} &= \int_0^{2\pi} f_3(\theta, 0) d\theta = \int_0^{2\pi} \left( \sum_{i=0}^5 c_{i,1}^{(5)} \cos^{5-i}(\theta) \sin^i(\theta) \right) \sin'(\theta) - \left( \sum_{i=0}^5 c_{i,2}^{(5)} \cos^{5-i}(\theta) \sin^i(\theta) \right) \cos'(\theta) d\theta \\ &- \int_0^{2\pi} \left( \left( \sum_{i=0}^4 c_{i,1}^{(5)} \cos^{4-i}(\theta) \sin^i(\theta) \right) \sin'(\theta) - \left( \sum_{i=0}^4 c_{i,2}^{(5)} \cos^{4-i}(\theta) \sin^i(\theta) \right) \cos'(\theta) \right) \cdot \\ &\quad \cdot \left( \left( \sum_{i=0}^4 c_{i,2}^{(5)} \cos^{4-i}(\theta) \sin^i(\theta) \right) \cos(\theta) - \left( \sum_{i=0}^4 c_{i,1}^{(5)} \cos^{4-i}(\theta) \sin^i(\theta) \right) \sin(\theta) \right) d\theta = \\ &= \int_0^{2\pi} c_{0,1}^{(5)} \cos^6(\theta) + (c_{2,1}^{(5)} + c_{1,2}^{(5)}) \cos^4(\theta) \sin^2(\theta) + (c_{4,1}^{(5)} + c_{3,2}^{(5)}) \cos^2(\theta) \sin^4(\theta) + c_{5,2}^{(5)} \sin^6(\theta) d\theta - \\ &- \int_0^{2\pi} c_{0,1}^{(4)} c_{0,2}^{(4)} \cos^{10}(\theta) + \left( -c_{0,1}^{(4)} c_{0,2}^{(4)} + c_{0,1}^{(4)} c_{2,2}^{(4)} + c_{1,1}^{(4)} c_{1,2}^{(4)} + c_{2,1}^{(4)} c_{0,2}^{(4)} - 2c_{0,1}^{(4)} c_{1,1}^{(4)} + 2c_{0,2}^{(4)} c_{1,2}^{(4)} \right) \cos^8(\theta) \sin^2(\theta) + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \left( -c_{0,1}^{(4)} c_{2,2}^{(4)} - c_{1,1}^{(4)} c_{1,2}^{(4)} - c_{2,1}^{(4)} c_{0,2}^{(4)} + c_{0,1}^{(4)} c_{4,2}^{(4)} + c_{1,1}^{(4)} c_{3,2}^{(4)} + c_{2,1}^{(4)} c_{2,2}^{(4)} + c_{3,1}^{(4)} c_{1,2}^{(4)} + c_{4,1}^{(4)} c_{0,2}^{(4)} - \right. \\
& \quad \left. - 2c_{0,1}^{(4)} c_{3,1}^{(4)} - 2c_{1,1}^{(4)} c_{2,1}^{(4)} + 2c_{0,2}^{(4)} c_{3,2}^{(4)} + 2c_{1,2}^{(4)} c_{2,2}^{(4)} \right) \cos^6(\theta) \sin^4(\theta) + \\
& + \left( -c_{0,1}^{(4)} c_{4,2}^{(4)} - c_{1,1}^{(4)} c_{3,2}^{(4)} - c_{2,1}^{(4)} c_{2,2}^{(4)} - c_{3,1}^{(4)} c_{1,2}^{(4)} - c_{4,1}^{(4)} c_{4,2}^{(4)} + c_{2,1}^{(4)} c_{4,2}^{(4)} + c_{3,1}^{(4)} c_{3,2}^{(4)} + c_{4,1}^{(4)} c_{2,2}^{(4)} - \right. \\
& \quad \left. - 2c_{2,1}^{(4)} c_{3,1}^{(4)} - 2c_{1,1}^{(4)} c_{4,1}^{(4)} + 2c_{2,2}^{(4)} c_{3,2}^{(4)} + 2c_{1,2}^{(4)} c_{4,2}^{(4)} \right) \cos^4(\theta) \sin^6(\theta) + \\
& + \left( -c_{2,1}^{(4)} c_{4,2}^{(4)} - c_{3,1}^{(4)} c_{3,2}^{(4)} - c_{4,1}^{(4)} c_{2,2}^{(4)} + c_{4,1}^{(4)} c_{4,2}^{(4)} - 2c_{3,1}^{(4)} c_{4,1}^{(4)} + 2c_{3,2}^{(4)} c_{4,2}^{(4)} \right) \cos^2(\theta) \sin^8(\theta) - c_{4,1}^{(4)} c_{4,2}^{(4)} \sin^{10}(\theta) \, d\theta = \\
& = \frac{1}{128} \pi \left( 80 \left( c_{0,1}^{(5)} + c_{0,2}^{(5)} \right) + 16 \left( c_{2,1}^{(5)} + c_{4,1}^{(5)} + c_{1,2}^{(5)} + c_{3,2}^{(5)} \right) + c_{0,1}^{(4)} \left( 14c_{1,1}^{(4)} + 6c_{3,1}^{(4)} - 56c_{0,2}^{(4)} - 4c_{2,2}^{(4)} \right) + \right. \\
& \quad + c_{2,1}^{(4)} \left( 6c_{1,1}^{(4)} + 6c_{3,1}^{(4)} - 4c_{0,2}^{(4)} + 4c_{4,2}^{(4)} \right) + c_{4,1}^{(4)} \left( 6c_{1,1}^{(4)} + 14c_{3,1}^{(4)} + 4c_{2,2}^{(4)} + 56c_{4,2}^{(4)} \right) \\
& \quad \left. + c_{1,2}^{(4)} \left( -4c_{1,1}^{(4)} - 14c_{0,2}^{(4)} - 6c_{2,2}^{(4)} - 6c_{4,2}^{(4)} \right) + c_{3,2}^{(4)} \left( 4c_{3,1}^{(4)} - 6c_{0,2}^{(4)} - 6c_{2,2}^{(4)} - 14c_{4,2}^{(4)} \right) \right) = 0
\end{aligned}$$

Was aus

$$\begin{aligned}
\int_0^{2\pi} \cos^5(\theta) \sin(\theta) \, d\theta &= \int_0^{2\pi} \cos^3(\theta) \sin^3(\theta) \, d\theta = \int_0^{2\pi} \cos(\theta) \sin^5(\theta) \, d\theta = \int_0^{2\pi} \cos^9(\theta) \sin(\theta) \, d\theta = \\
&= \int_0^{2\pi} \cos^7(\theta) \sin^3(\theta) \, d\theta = \int_0^{2\pi} \cos^5(\theta) \sin^5(\theta) \, d\theta = \int_0^{2\pi} \cos^3(\theta) \sin^7(\theta) \, d\theta = \int_0^{2\pi} \cos(\theta) \sin^9(\theta) \, d\theta = 0
\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
\int_0^{2\pi} \cos^6(\theta) \, d\theta &= \int_0^{2\pi} \sin^6(\theta) \, d\theta = 5 \int_0^{2\pi} \cos^4(\theta) \sin^2(\theta) \, d\theta = 5 \int_0^{2\pi} \cos^2(\theta) \sin^4(\theta) \, d\theta = \frac{5}{8} \pi \\
\int_0^{2\pi} \cos^{10}(\theta) \, d\theta &= \int_0^{2\pi} \sin^{10}(\theta) \, d\theta = 9 \int_0^{2\pi} \cos^8(\theta) \sin^2(\theta) \, d\theta = 9 \int_0^{2\pi} \cos^2(\theta) \sin^8(\theta) \, d\theta = \\
&= 21 \int_0^{2\pi} \cos^6(\theta) \sin^4(\theta) \, d\theta = 21 \int_0^{2\pi} \cos^4(\theta) \sin^6(\theta) \, d\theta = \frac{63}{128} \pi
\end{aligned}$$

folgt.

Das Beispiel 3) ist also nicht generisch, sondern degeneriert. Weiter muß  $a_4(2\pi, 0) = 0$

gelten. Um die Übersichtlichkeit des Beispiels bei der Berechnung von  $a_5(2\pi, 0)$  nicht zu sprengen, setzen wir zusätzlich

$$c_{0,1}^{(k)} = c_{k,2}^{(k)} = 0 \quad \wedge \quad c_{i,1}^{(k)} = -c_{i-1,2}^{(k)} \quad i = 1, \dots, k \quad k = 4, 5 \quad (3.37)$$

voraus. Damit gilt  $f_2(\theta, 0) \equiv f_3(\theta, 0) \equiv 0$  und

$$\begin{aligned} f_4(\theta, 0) &= \left( \cos^3(\theta) \sin^3(\theta) - \cos(\theta) \sin^5(\theta) \right) \sin'(\theta) - \left( -\cos^4(\theta) \sin^2(\theta) + \cos^2(\theta) \sin^4(\theta) \right) \cos'(\theta) = \\ &= \cos^4(\theta) \sin^3(\theta) - \cos^2(\theta) \sin^5(\theta) - \cos^4(\theta) \sin^3(\theta) + \cos^2(\theta) \sin^5(\theta) \equiv 0 \end{aligned}$$

sowie

$$\begin{aligned} a_5(2\pi, 0) &= \int_0^{2\pi} f_5(\theta, 0) d\theta + \int_0^{2\pi} f_3(\theta, 0) \left( \int_0^\theta f_2(\varphi, 0) d\varphi \right)^2 d\theta - 2 \int_0^{2\pi} f_2(\theta, 0) \left( \int_0^\theta f_4(\varphi, 0) d\varphi \right) d\theta = \\ &= \int_0^{2\pi} \left( -2 \cos^5(\theta) \sin^2(\theta) + \cos(\theta) \sin^6(\theta) \right) \sin'(\theta) - \left( -2 \cos^6(\theta) \sin(\theta) + \cos^2(\theta) \sin^5(\theta) \right) \cos'(\theta) d\theta = \\ &= \int_0^{2\pi} -2 \cos^6(\theta) \sin^2(\theta) + \cos^2(\theta) \sin^6(\theta) - 2 \cos^6(\theta) \sin^2(\theta) + \cos^2(\theta) \sin^6(\theta) d\theta = \\ &= -4 \int_0^{2\pi} \cos^6(\theta) \sin^2(\theta) + 2 \int_0^{2\pi} \cos^2(\theta) \sin^6(\theta) d\theta = \int_0^{2\pi} \cos^6(\theta) \sin^2(\theta) d\theta < 0 \end{aligned}$$

Der Degenerationsgrad ist also 2.

Damit sind alle Voraussetzungen des Satzes 3.16 erfüllt.

Das Beispiel ist degeneriert (3.36) vom Grad 2 und besitzt für  $\mu > 0$  ( $< 0$ ) falls  $3c_{0,1}^{(\mu)} + c_{2,1}^{(\mu)} + c_{1,2}^{(\mu)} + 3c_{3,2}^{(\mu)} > 0$  ( $< 0$ ) genau eine einparametrische Schar asymptotisch orbital stabiler periodischer Lösungen, die vom Ursprung in  $\mu = 0$  abzweigen. Für ihre Amplitude  $A_3(\mu)$  und die Periode  $T_3(\mu)$  gilt:

$$A_3(\mu) \simeq \sqrt[4]{|\mu|} \left( 1 + O(\sqrt[4]{|\mu|}) \right) \quad T_3(\mu) \simeq \frac{1}{\sqrt[2]{|\mu|}} \left( 1 + O(\sqrt[4]{|\mu|}) \right)$$



# Kapitel 4

## Die Abzweigung stationärer Punkte

### 4.1 Bemerkung:

Wir werden in diesem Kapitel DGL der Gestalt (vgl. Kapitel 3)

$$\dot{x} = F(x, \mu) \quad (4.1)$$

mit  $F(x, \mu) : \mathbb{R}^2 \times U(0) \rightarrow \mathbb{R}^2$  betrachten und nach einparametrischen Scharen stationärer Punkte suchen, die von isolierten stationären Punkten  $x_s$  der DGL

$$\dot{x} = F(x, 0) \quad (4.2)$$

abzweigen. D.h. wir bestimmen eine stetige Kurve  $x(\mu)$  mit  $x(0) = x_s$ , wobei jeder Punkt der Kurve ein stationärer Punkt der DGL (4.1) ist.

Wir können wieder, wie im Kapitel 3, o.B.d.A.  $x_s = 0$  bzw  $F(0, 0) = 0$  annehmen und damit (4.1) in der Form (vgl. Einleitung)

$$\dot{x} = F_0(x) + \mu F_1(x) + R(x, \mu)$$

bzw.

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= \mu q_1(x_1, x_2) + Q_1(x_1, x_2) + R_1(x_1, x_2, \mu) \\ \dot{x}_2 &= \mu q_2(x_1, x_2) + Q_2(x_1, x_2) + R_2(x_1, x_2, \mu) \end{aligned} \quad (4.3)$$

schreiben. Dabei sind:

$q_i(x_1, x_2), Q_i(x_1, x_2)$   $i = 1, 2$  homogene Polynome und

$R_i(x_1, x_2, \mu) = O(|\mu| \|x\|^{m+1}) + O(\mu^2 \|x\|^m) + O(\|x\|^{l+1}) \in C^{l+1}(\mathbb{R}^2 \times U(0), \mathbb{R}), i = 1, 2.$

Weiter seien:

$\text{ggT}(q_1, q_2), \text{ggT}(Q_1, Q_2)$  definit und

$\text{ord } q_i(x_1, x_2) = m < l = \text{ord } Q_i(x_1, x_2), i = 1, 2, m \geq 0.$

(Beachte: In Kapitel 3 galt  $m = l$  vgl. Bemerkung 3.1 bzw. Einleitung)

Um eine einfachere Behandlung des Problems zu ermöglichen, ist es sinnvoll, die zu (4.3) für  $r > 0$  äquivalente Gleichung in klassischen  $((x_1, x_2) = (r \cos(\varphi), r \sin(\varphi)))$  Polarkoordinaten

$$\begin{aligned}\dot{r} &= \mu c(\varphi) r^m + f(\varphi) r^l + S_1(r, \varphi, \mu) r^m \\ \dot{\varphi} &= \mu d(\varphi) r^{m-1} + g(\varphi) r^{l-1} + S_2(r, \varphi, \mu) r^{m-1}\end{aligned}\tag{4.4}$$

wobei

$$\begin{aligned}c(\varphi) &:= q_1(\cos(\varphi), \sin(\varphi)) \cos(\varphi) + q_2(\cos(\varphi), \sin(\varphi)) \sin(\varphi) \\ d(\varphi) &:= q_2(\cos(\varphi), \sin(\varphi)) \cos(\varphi) - q_1(\cos(\varphi), \sin(\varphi)) \sin(\varphi) \\ f(\varphi) &:= Q_1(\cos(\varphi), \sin(\varphi)) \cos(\varphi) + Q_2(\cos(\varphi), \sin(\varphi)) \sin(\varphi) \\ g(\varphi) &:= Q_2(\cos(\varphi), \sin(\varphi)) \cos(\varphi) - Q_1(\cos(\varphi), \sin(\varphi)) \sin(\varphi) \\ r^m S_1(r, \varphi, \mu) &:= R_1(r \cos(\varphi), r \sin(\varphi), \mu) \cos(\varphi) + R_2(r \cos(\varphi), r \sin(\varphi), \mu) \sin(\varphi) \\ r^m S_2(r, \varphi, \mu) &:= R_2(r \cos(\varphi), r \sin(\varphi), \mu) \cos(\varphi) - R_1(r \cos(\varphi), r \sin(\varphi), \mu) \sin(\varphi)\end{aligned}$$

definiert wurde, durch Satz 1.12 auf eine DGL mit zu (4.4) für  $r > 0$  äquivalenten Trajektorien zu überführen

$$\begin{aligned}\dot{r} &= \mu c(\varphi) r + f(\varphi) r^{l-m+1} + S_1(r, \varphi, \mu) r \\ \dot{\varphi} &= \mu d(\varphi) + g(\varphi) r^{l-m} + S_2(r, \varphi, \mu)\end{aligned}\tag{4.5}$$

(Beachte:  $S_i(r, \varphi, \mu) = O(|\mu|r) + O(\mu^2) + O(r^{l-m+1})$   $i = 1, 2$ )

und diese DGL auf Scharen stationärer Punkte  $(\varphi(\mu), r(\mu))$  zu untersuchen, die  $r(0) = 0$  erfüllen.

Für dieses Problem liegen Ergebnisse vor [46], die allerdings zwingend  $m=1$  voraussetzen. In diesem Fall stimmen die Ergebnisse mit unseren Betrachtungen überein.

Stationäre Punkte  $(\varphi(\mu), r(\mu))$  der DGL (4.5) sind Lösungen der algebraischen Gleichung:

$$\begin{aligned}0 &= \mu c(\varphi) r + f(\varphi) r^{l-m+1} + S_1(r, \varphi, \mu) r \\ 0 &= \mu d(\varphi) + g(\varphi) r^{l-m} + S_2(r, \varphi, \mu)\end{aligned}\tag{4.6}$$

Diese Gleichung hat Lösungen, wenn die in 4.2 definierte Funktion

$$D(\varphi) = c(\varphi)g(\varphi) - f(\varphi)d(\varphi)$$

(eine Art Determinante für den ersten Teil der Gleichung (4.6)) Nullstellen hat, wie später im Satz 4.7 gezeigt wird.

Dazu untersuchen wir vorher im Satz 4.3 die Eigenschaften von  $c(\varphi), d(\varphi), f(\varphi), g(\varphi)$  an Nullstellen  $\bar{\varphi}$  von  $D(\varphi)$  und führen in Definition 4.4 die wichtige Hilfsgröße  $\sigma(\bar{\varphi})$  ein. Satz 4.5 gibt erste einfache Eigenschaften von  $\sigma(\bar{\varphi})$  an, während Satz 4.6 zunächst eine Äquivalenzaussage macht, wie sich die Steigungen der Trajektorien der DGL

$$\dot{r} = \mu c(\varphi)r$$

$$\dot{\varphi} = \mu d(\varphi)$$

zu den Steigungen der Trajektorien der DGL

$$\dot{r} = f(\varphi)r^{l-m+1}$$

$$\dot{\varphi} = g(\varphi)r^{l-m}$$

(zwei DGL, die aus Teilen der DGL (4.5) gebildet wurden) an den Stellen  $(\bar{\varphi}, r)$  verhalten. Der zweite Teil von Satz 4.6 gibt an, wie die Durchlaufrichtung dieser Trajektorien mit  $\sigma(\bar{\varphi})$  zusammenhängen. Dieser Satz ist somit eine geometrische Interpretation der Eigenschaft  $D(\bar{\varphi}) = 0$  mit Hilfe von  $\sigma(\bar{\varphi})$ .

Satz 4.7 ist der erste Hauptsatz dieses Kapitels, die "notwendige Bedingung" für die Abzweigung stationärer Punkte der DGL (4.5):

Falls eine Schar stationärer Punkte  $(\varphi(\mu), r(\mu))$  von  $r \equiv 0$  abzweigt, gilt:

$$\lim_{\mu \rightarrow 0} D(\varphi(\mu)) = 0$$

Falls weiter  $D(\varphi)$  nicht identisch verschwindet, gilt zusätzlich:

$$\exists \bar{\varphi} : \text{ mit } \lim_{\mu \rightarrow 0} \varphi(\mu) = \bar{\varphi} \quad \wedge \quad r(\mu) = \sqrt[l-m]{-\sigma(\bar{\varphi})\mu} + o\left(\sqrt[l-m]{|\mu|}\right)$$

Satz 4.8 ist der zweite Hauptsatz des Kapitels, die "hinreichende Bedingung":

Hat  $D(\varphi)$  eine einfache Nullstelle  $\bar{\varphi}$ , dann zweigt von  $(\bar{\varphi}, 0)$  genau eine Schar stationärer Punkte  $(\varphi(\mu), r(\mu))$  der DGL (4.5) ab und zwar entweder für  $\mu > 0$  oder  $\mu < 0$  in Abhängigkeit vom Vorzeichen von  $\sigma(\bar{\varphi})$ .

Mit Hilfe von Definition 4.9 für die Hilfsgröße  $S(\bar{\varphi})$  können wir dann im Satz 4.10, unter den Voraussetzungen von Satz 4.8 ( $D(\bar{\varphi}) = 0 \neq D'(\bar{\varphi})$ ), die von  $(\bar{\varphi}, 0)$  abgezweigten stationären Punkte  $(\varphi(\mu), r(\mu))$  vollständig klassifizieren, da die DGL (4.5) in  $(\varphi(\mu), r(\mu))$  stets regulär linearisierbar ist.

Es folgt mit 4.11 ein Hilfssatz über Periodizitätseigenschaften der in 4.7, 4.8 und 4.10 vorkommenden Funktionen, um die Aussagen, die für die Abzweigung an der Stelle  $(\varphi, 0)$  gelten, direkt auf  $(\varphi + \pi, 0)$  im Satz 4.12 übertragen zu können. Dabei sind die wichtigsten Ergebnisse von Satz 4.12:

Falls  $l - m$  gerade ist, zweigt jeweils genau eine Schar von stationären Punkten von  $(\bar{\varphi}, 0)$  sowie eine von  $(\bar{\varphi} + \pi, 0)$  ab und zwar entweder nur für  $\mu > 0$  oder nur

für  $\mu < 0$  (also "gleichzeitig" bzgl.  $\mu$ ).

Falls  $l - m$  ungerade ist, zweigt ebenfalls genau eine Schar stationärer Punkte von  $(\bar{\varphi}, 0)$  und eine von  $(\bar{\varphi} + \pi, 0)$  ab und zwar für jeweils verschiedene Vorzeichen von  $\mu$  (also nicht "gleichzeitig" bzgl.  $\mu$ ).

Anschließend folgen noch Aussagen über die Stabilität der abgezweigten stationären Punkte.

Im Satz 4.13 und in Definition 4.14 bereiten wir die kartesische Formulierung der Sätze 4.7, 4.8, 4.10 und 4.12 vor. Die Sätze 4.15 bis 4.18 sind dann das kartesische Analogon. Ergänzend wird im Satz 4.19 mit Hilfe des Poincaré-Index eines stationären Punktes ein Verzweigungssatz für stationäre Punkte formuliert, der auch noch gültig ist, wenn die Voraussetzungen von Satz 4.8 bzw. Satz 4.16 nicht mehr erfüllt sind, bevor wir in 4.20 zahlreiche Beispiele ausführlich diskutieren.

## 4.2 Definition

Seien  $c(\varphi), d(\varphi), f(\varphi), g(\varphi)$  definiert wie in Bemerkung 4.1.

Definiere dann:

$$D(\varphi) := c(\varphi)g(\varphi) - f(\varphi)d(\varphi)$$

Die Funktion  $D(\varphi)$  ist von entscheidender Bedeutung für dieses und das nächste Kapitel.

## 4.3 Satz:

Seien  $c(\varphi), d(\varphi), f(\varphi), g(\varphi)$  definiert wie in Bemerkung 4.1,  $D(\varphi)$  wie in Definition 4.2 und  $\exists \bar{\varphi}$  mit  $D(\bar{\varphi}) = 0$ .

Dann gilt:

a)  $c^2(\varphi) + d^2(\varphi) \neq 0$

b)  $f^2(\varphi) + g^2(\varphi) \neq 0$

c)  $c(\bar{\varphi}) = 0 \iff f(\bar{\varphi}) = 0$

d)  $d(\bar{\varphi}) = 0 \iff g(\bar{\varphi}) = 0$

e)  $c(\bar{\varphi})g(\bar{\varphi}) = f(\bar{\varphi})d(\bar{\varphi})$

f)  $f(\bar{\varphi}) \neq 0 \neq g(\bar{\varphi}) \implies \frac{c(\bar{\varphi})}{f(\bar{\varphi})} = \frac{d(\bar{\varphi})}{g(\bar{\varphi})}$

Beweis:

a) Folgt aus  $\text{ggT}(q_1, q_2)$  definit und Satz 2.3.a(ii).

b) Folgt aus  $\text{ggT}(Q_1, Q_2)$  definit und Satz 2.3.a(ii).

$$\text{c) } \left. \begin{array}{l} c(\overline{\varphi}) = 0 \xrightarrow{D(\overline{\varphi})=0} -f(\overline{\varphi})d(\overline{\varphi}) = 0 \\ c(\overline{\varphi}) = 0 \xrightarrow{a)} d(\overline{\varphi}) \neq 0 \end{array} \right\} \implies f(\overline{\varphi}) = 0.$$

Die Rückrichtung läuft analog mit b) statt a).

d) Völlig analog c).

e) Trivial.

f) Folgt aus e).

## 4.4 Definition:

Seien  $c(\varphi), d(\varphi), f(\varphi), g(\varphi)$  definiert wie in Bemerkung 4.1,  $D(\varphi)$  wie in Definition 4.2 und  $\exists \overline{\varphi}$  mit  $D(\overline{\varphi}) = 0$ .

Definiere dann:

$$\sigma(\overline{\varphi}) = \begin{cases} \frac{c(\overline{\varphi})}{f(\overline{\varphi})} & \text{falls } f(\overline{\varphi}) \neq 0 \\ \frac{d(\overline{\varphi})}{g(\overline{\varphi})} & \text{falls } g(\overline{\varphi}) \neq 0 \end{cases}$$

Für  $\sigma(\overline{\varphi})$  gelten folgende Aussagen:

## 4.5 Satz:

Sei  $\sigma(\overline{\varphi})$  definiert wie in Definition 4.4.

Dann gilt:

a)  $\sigma(\overline{\varphi})$  ist wohldefiniert

b)  $\sigma(\overline{\varphi}) \neq 0$

$$\text{c) } \text{sign}(\sigma(\overline{\varphi})) = \begin{cases} \text{sign}(c(\overline{\varphi})) \cdot \text{sign}(f(\overline{\varphi})) & \text{falls } f(\overline{\varphi}) \neq 0 \\ \text{sign}(d(\overline{\varphi})) \cdot \text{sign}(g(\overline{\varphi})) & \text{falls } g(\overline{\varphi}) \neq 0 \end{cases}$$

Beweis:

a) Mit Satz 4.3.b folgt  $f(\overline{\varphi}) \neq 0 \vee g(\overline{\varphi}) \neq 0$ . Ist zusätzlich  $f(\overline{\varphi}) \neq 0 \wedge g(\overline{\varphi}) \neq 0$  folgt mit Satz 4.3.f die Behauptung.

b) Folgt mit Satz 4.3.c+d.

c) Sei  $f(\overline{\varphi}) \neq 0 \implies \operatorname{sign}\left(\frac{c(\overline{\varphi})}{f(\overline{\varphi})}\right) = \operatorname{sign}(c(\overline{\varphi})) \cdot \operatorname{sign}(f(\overline{\varphi}))$ .

Sei  $g(\overline{\varphi}) \neq 0 \implies \operatorname{sign}\left(\frac{d(\overline{\varphi})}{g(\overline{\varphi})}\right) = \operatorname{sign}(d(\overline{\varphi})) \cdot \operatorname{sign}(g(\overline{\varphi}))$ .

## 4.6 Satz:

Seien  $c(\varphi), d(\varphi), f(\varphi), g(\varphi)$  definiert wie in Bemerkung 4.1,  $D(\varphi)$  wie in Definition 4.2 und  $\exists \overline{\varphi}$  mit  $D(\overline{\varphi}) = 0$ . Seien weiter

$$\begin{aligned}\dot{r} &= \mu c(\varphi)r \\ \dot{\varphi} &= \mu d(\varphi)\end{aligned}\tag{4.7}$$

mit  $0 \neq \mu \in \mathbb{R}$  und

$$\begin{aligned}\dot{r} &= f(\varphi)r^{l-m+1} \\ \dot{\varphi} &= g(\varphi)r^{l-m}\end{aligned}\tag{4.8}$$

zwei DGL, die aus Teilen der DGL (4.5) gebildet wurden.

Dann sind äquivalent:

- (a)  $D(\overline{\varphi}) = 0$
- (b) Die Trajektorien von (4.7) bzw. (4.8) haben in  $(\overline{\varphi}, r > 0)$  identische Steigungen.

Gilt weiter:

- (i)  $\operatorname{sign}(\mu) = \operatorname{sign}(\sigma(\overline{\varphi}))$ ,  
so haben die Trajektorien von (4.7) bzw. (4.8) in  $(\overline{\varphi}, r > 0)$  gleiche Durchlaufrichtung.
- (ii)  $\operatorname{sign}(\mu) \neq \operatorname{sign}(\sigma(\overline{\varphi}))$ ,  
so haben die Trajektorien von (4.7) bzw. (4.8) in  $(\overline{\varphi}, r > 0)$  verschiedene Durchlaufrichtung.

Beweis:

(a) $\Rightarrow$ (b):

Sei  $D(\overline{\varphi}) = 0$ . Dann ist die folgende Matrix singulär:

$$\begin{pmatrix} \mu c(\overline{\varphi}) & f(\overline{\varphi}) \\ \mu d(\overline{\varphi}) & g(\overline{\varphi}) \end{pmatrix} \quad (4.9)$$

Wegen Satz 4.3.a+b und  $\mu \neq 0$  besitzt (4.9) keine 0-Spalte. Also  $\exists a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$  mit:

$$\begin{pmatrix} \mu c(\overline{\varphi}) \\ \mu d(\overline{\varphi}) \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} f(\overline{\varphi}) \\ g(\overline{\varphi}) \end{pmatrix} \quad (4.10)$$

d.h. die Steigungen der Trajektorien von (4.7) bzw. (4.8) sind in  $(\overline{\varphi}, r > 0)$  gleich.

(b) $\Rightarrow$ (a):

Seien die Steigungen der Trajektorien von (4.7) bzw. (4.8) in  $(\overline{\varphi}, r > 0)$  gleich  $\Rightarrow$  (4.10)  $\Rightarrow$  (4.9) singulär  $\Rightarrow D(\overline{\varphi}) = 0$ .

(i)  $\text{sign}(\mu) = \text{sign}(\sigma(\overline{\varphi}))$

Seien  $\text{sign}(\mu) = \text{sign}(\sigma(\overline{\varphi})) \wedge f(\overline{\varphi}) \neq 0$

$$\xrightarrow{4.5.c} \text{sign}(\mu) = \text{sign}(c(\overline{\varphi}))\text{sign}(f(\overline{\varphi})) \Rightarrow \text{sign}(\mu)\text{sign}(c(\overline{\varphi})) = \text{sign}(f(\overline{\varphi})) \Rightarrow \\ \Rightarrow \text{sign}(\mu c(\overline{\varphi})) = \text{sign}(f(\overline{\varphi}))$$

Analog sieht man:

$$\text{sign}(\mu) = \text{sign}(\sigma(\overline{\varphi})) \wedge g(\overline{\varphi}) \neq 0 \Rightarrow \text{sign}(\mu d(\overline{\varphi})) = \text{sign}(g(\overline{\varphi}))$$

d.h. in beiden Fällen zeigen die Vektoren  $\begin{pmatrix} \mu c(\overline{\varphi}) \\ \mu d(\overline{\varphi}) \end{pmatrix}$  bzw.  $\begin{pmatrix} f(\overline{\varphi}) \\ g(\overline{\varphi}) \end{pmatrix}$  in dieselbe

Richtung.

Damit haben die Trajektorien von (4.7) bzw. (4.8) in  $(\overline{\varphi}, r > 0)$  gleiche Durchlaufrichtung.

(ii) Analog (i).

## 4.7 Satz:

Seien  $c(\varphi), d(\varphi), f(\varphi), g(\varphi)$  definiert wie in Bemerkung 4.1,  $D(\varphi)$  wie in Definition 4.2 und es zweige eine Schar stationärer Punkte  $(\varphi(\mu), r(\mu))$  der DGL (4.4) von  $r \equiv 0$  in  $\mu = 0$  für  $\mu > 0$  ( $\mu < 0$ ) ab.

Dann gilt:

$$\text{a) } \lim_{\mu \rightarrow 0} D(\varphi(\mu)) = 0$$

Ist zusätzlich  $D(\varphi) \neq 0$ , dann gilt noch:

$$\text{b) } \exists \bar{\varphi} \text{ mit } D(\bar{\varphi}) = 0 \text{ und } \lim_{\mu \rightarrow 0} \varphi(\mu) = \bar{\varphi}$$

$$\text{c) } r(\mu) = \sqrt[l-m]{-\sigma(\bar{\varphi})\mu} + o(\sqrt[l-m]{|\mu|})$$

Beweis:

a) Wir zeigen zunächst:  $\left| \frac{r^{l-m}(\mu)}{\mu} \right|$  ist in einer Umgebung der Null beschränkt.

Da  $(\varphi(\mu), r(\mu))$  die Gleichung (4.4) erfüllt, gilt:

$$\begin{aligned} \mu c(\varphi(\mu))r^m(\mu) + f(\varphi(\mu))r^l(\mu) + S_1(r(\mu), \varphi(\mu), \mu)r^m(\mu) &= 0 \\ \mu d(\varphi(\mu))r^{m-1}(\mu) + g(\varphi(\mu))r^{l-1}(\mu) + S_2(r(\mu), \varphi(\mu), \mu)r^{m-1}(\mu) &= 0 \end{aligned} \quad (4.11)$$

Kürzen durch  $r^m$  bzw.  $r^{m-1}$  und umordnen ergibt wegen (vgl. Bemerkung 4.1)

$$S_i(r, \varphi, \mu) = O(|\mu|r) + O(\mu^2) + O(r^{l-m+1}) \quad i = 1, 2 \quad (4.12)$$

folgende Gleichungen:

$$\begin{aligned} f(\varphi(\mu))r^{l-m}(\mu) + O(r^{l-m+1}) &= -\mu(c(\varphi(\mu)) + O(r) + O(\mu)) \\ g(\varphi(\mu))r^{l-m}(\mu) + O(r^{l-m+1}) &= -\mu(d(\varphi(\mu)) + O(r) + O(\mu)) \end{aligned} \quad (4.13)$$

Definiere dann  $(U, V \subseteq \mathbb{R})$ :

$$M_c := \max |c(\varphi)| \quad M_d := \max |d(\varphi)| \quad m_f(U) := \min_{\varphi \in U} |f(\varphi)| \quad m_g(V) := \min_{\varphi \in V} |g(\varphi)|$$

Wir machen folgende Fallunterscheidung

(i)  $f(\varphi) \neq 0$ , (ii)  $g(\varphi) \neq 0$ , (iii)  $f(\varphi) \neq 0 \neq g(\varphi) \wedge \exists \varphi_i, \psi_j$  mit  $f(\varphi_i) = 0 = g(\psi_j)$

und beginnen mit:

(i)  $f(\varphi) \neq 0$

Hier gilt

$$f(\varphi)r^{l-m} + O(r^{l-m+1}) = f(\varphi)r^{l-m}(1 + O(r))$$

und nach einfacher Rechnung:

$$\left| \frac{r^{l-m}(\mu)}{\mu} \right| \leq \frac{M_c + |O(r(\mu)) + O(\mu)|}{m_f(\mathbb{R})|1 + O(r(\mu))|} \quad (4.14)$$

(ii)  $g(\varphi) \neq 0$

Hier erhält man analog (i)

$$g(\varphi)r^{l-m} + O(r^{l-m+1}) = g(\varphi)r^{l-m}(1 + O(r))$$

und

$$\left| \frac{r^{l-m}(\mu)}{\mu} \right| \leq \frac{M_d + |O(r(\mu)) + O(\mu)|}{m_g(\mathbb{R})|1 + O(r(\mu))|} \quad (4.15)$$

(iii)  $f(\varphi) \not\equiv 0 \not\equiv g(\varphi) \wedge \exists \varphi_i, \psi_j$  mit  $f(\varphi_i) = 0 = g(\psi_j)$

Definiere zunächst (beachte:  $f(\varphi_i) = 0 = g(\psi_j) \xrightarrow{4.3.b} \varphi_i \neq \psi_j!$ ):

$$\delta := \frac{1}{3} \min_{i,j} \{|\varphi_i - \psi_j|\} \quad U_1 := \mathbb{R} \setminus \bigcup_i U_\delta(\varphi_i) \quad U_2 := \mathbb{R} \setminus \bigcup_j U_\delta(\psi_j)$$

Damit gilt:

$$U_1 \cup U_2 = \mathbb{R} \quad f|_{U_1} \neq 0 \quad (\Rightarrow m_f(U_1) > 0) \quad g|_{U_2} \neq 0 \quad (\Rightarrow m_g(U_2) > 0)$$

Für  $\varphi \in U_1$  gilt

$$\left| \frac{r^{l-m}(\mu)}{\mu} \right| \leq \frac{M_c + |O(r(\mu)) + O(\mu)|}{m_f(U_1)|1 + O(r(\mu))|}$$

und für  $\varphi \in U_2$

$$\left| \frac{r^{l-m}(\mu)}{\mu} \right| \leq \frac{M_d + |O(r(\mu)) + O(\mu)|}{m_g(U_2)|1 + O(r(\mu))|}$$

woraus

$$\left| \frac{r^{l-m}(\mu)}{\mu} \right| \leq \begin{cases} \frac{M_c + |O(r(\mu)) + O(\mu)|}{m_f(U_1)|1 + O(r(\mu))|} & \text{falls } \varphi \in U_1 \\ \frac{M_d + |O(r(\mu)) + O(\mu)|}{m_g(U_2)|1 + O(r(\mu))|} & \text{falls } \varphi \in U_2 \end{cases} \quad (4.16)$$

folgt.

Wir fassen jetzt (i)-(iii) zusammen:

Wählt man  $|\mu|$  hinreichend klein und  $K > 0$  geeignet, so gilt offensichtlich wegen  $\lim_{\mu \rightarrow 0} r(\mu) = 0$ ,  $U_1 \cup U_2 = \mathbb{R}$  und (4.14), (4.15) sowie (4.16):

$$\left| \frac{r^{l-m}(\mu)}{\mu} \right| \leq K \quad \forall \varphi \in \mathbb{R} \quad (4.17)$$

was wir zeigen wollten.

Wir führen dann

$$s := \left( \frac{r^{l-m}}{\mu} \right) \quad \left( \Longleftrightarrow \quad r^{l-m} = \mu s \quad \Longleftrightarrow \quad r = \sqrt[l-m]{\mu s} \right) \quad (4.18)$$

als neue Variable ein. In (4.13) einsetzen, durch  $\mu$  kürzen und umordnen ergibt, da  $s$  für kleine  $|\mu|$  beschränkt:

$$\begin{aligned} c(\varphi) + f(\varphi)s &= O(\sqrt[l-m]{|\mu|}) \\ d(\varphi) + g(\varphi)s &= O(\sqrt[l-m]{|\mu|}) \end{aligned} \quad (4.19)$$

Bildet man für  $\mu > 0$  ( $\mu < 0$ ) den Grenzwert  $\mu \rightarrow 0$ , so geht die rechte Seite gegen 0. Also gilt auch für die linke Seite:

$$\begin{aligned} \lim_{\mu \rightarrow 0} \left( c(\varphi(\mu)) + f(\varphi(\mu))s(\mu) \right) &= 0 \\ \lim_{\mu \rightarrow 0} \left( d(\varphi(\mu)) + g(\varphi(\mu))s(\mu) \right) &= 0 \end{aligned} \quad (4.20)$$

Wir müssen zeigen:  $\forall \varepsilon > 0 \exists \mu_0$  so daß  $\forall \mu$  mit  $\mu_0 \geq \mu \geq 0$  ( $-\mu_0 \leq \mu \leq 0$ ) gilt:

$$|D(\varphi(\mu))| = |c(\varphi(\mu))g(\varphi(\mu)) - f(\varphi(\mu))d(\varphi(\mu))| < \varepsilon$$

Sei:

$$M := \max\{|f(\varphi)|, |g(\varphi)|\} \quad (4.21)$$

Wegen (4.20) existiert  $\forall \chi := \frac{\varepsilon}{2M}$  ein  $\mu_0$ , so daß  $\forall \mu$  mit  $\mu_0 \geq \mu \geq 0$  ( $-\mu_0 \leq \mu \leq 0$ ) gilt:

$$\begin{aligned} |c(\varphi(\mu)) + f(\varphi(\mu))s(\mu)| &\leq \chi \\ |d(\varphi(\mu)) + g(\varphi(\mu))s(\mu)| &\leq \chi \end{aligned} \quad (4.22)$$

Mit Hilfe von (4.21) und (4.22) ergibt sich  $\forall \mu$  mit  $\mu_0 \geq \mu \geq 0$  ( $-\mu_0 \leq \mu \leq 0$ ):

$$\begin{aligned} |D(\varphi(\mu))| &= |c(\varphi(\mu))g(\varphi(\mu)) - f(\varphi(\mu))d(\varphi(\mu))| = \\ &= |c(\varphi(\mu))g(\varphi(\mu)) + f(\varphi(\mu))g(\varphi(\mu))s(\mu) - f(\varphi(\mu))g(\varphi(\mu))s(\mu) - f(\varphi(\mu))d(\varphi(\mu))| = \\ &= \left| g(\varphi(\mu)) \left( c(\varphi(\mu)) + f(\varphi(\mu))s(\mu) \right) - f(\varphi(\mu)) \left( d(\varphi(\mu)) + g(\varphi(\mu))s(\mu) \right) \right| \leq \\ &\leq |g(\varphi(\mu))| |c(\varphi(\mu)) + f(\varphi(\mu))s(\mu)| + |f(\varphi(\mu))| |d(\varphi(\mu)) + g(\varphi(\mu))s(\mu)| \leq \\ &\leq M\chi + M\chi = \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \end{aligned}$$

b) Sei  $D(\varphi) \not\equiv 0$ .

Dann besitzt  $D(\varphi)$  nur diskrete Nullstellen  $\overline{\varphi}_i$  mit Ordnung  $n_i$  ( $\Rightarrow D^{(n_i+1)}(\overline{\varphi}_i) \neq 0$ ).

Definiere:

$$n := \max_i n_i \quad \Phi := \{\varphi \neq \bar{\varphi}_i \mid D'(\varphi) = 0\}$$

$$m_D^{(0)} := \frac{1}{2} \min_{\varphi \in \Phi} |D(\varphi)| \quad m_D^{(1)} := \frac{1}{2} \min_i |D^{(n_i+1)}(\bar{\varphi}_i)|$$

Es gilt:

$$\forall i \exists \delta_1 > 0 \text{ mit } |D^{(n_i+1)}(\bar{\varphi}_i)| \geq m_D^{(1)} > 0 \quad \forall \varphi \in [\bar{\varphi}_i - \delta_1, \bar{\varphi}_i + \delta_1]$$

und

$$\exists d_1, d_2 > 0 \text{ mit } [-d_1, d_2] := D \left( \bigcup_i [\bar{\varphi}_i - \delta_1, \bar{\varphi}_i + \delta_1] \right)$$

Wir müssen zeigen:

$$\forall (1 \geq) \eta > 0 \exists \nu > 0 \text{ mit } |\mu| < \nu \Rightarrow |\varphi(\mu) - \bar{\varphi}| < \eta$$

Definiere dazu:

$$\xi := \min\{m_D^{(0)}, d_1, d_2, m_D^{(1)} \eta^{n+1}\} > 0$$

Wegen a) gilt:

$$\text{Zu } \xi > 0 \exists \nu > 0 \text{ mit } |\mu| < \nu \implies |D(\varphi(\mu))| < \xi \quad (4.23)$$

D.h.  $\varphi(\mu)$  liegt für  $|\mu| < \nu$  vollständig in der Urbildmenge  $D^{-1}([-\xi, \xi])$ . Nach Konstruktion besteht die Urbildmenge aus disjunkten, abgeschlossenen Intervallen, die jeweils genau eine Nullstelle  $\bar{\varphi}_i$  von  $D(\varphi)$  enthalten. Da  $\varphi(\mu)$  für  $\mu \neq 0$  stetig ist, muß  $\varphi(\mu)$  für  $|\mu| < \nu$  somit (bis auf endlich viele) in genau einem dieser Intervalle liegen. Dieses Intervall sei  $I_j$  besitze die Nullstelle  $\bar{\varphi}_j$  mit Vielfachheit  $n_j$ .

Wir zeigen:  $|D(\varphi(\mu))| < \xi \implies |\varphi(\mu) - \bar{\varphi}_j| < \eta$ .

Mit Hilfe des Taylorschen Satzes gilt:

$$\exists \zeta \in I_j \text{ mit } \xi > |D(\varphi(\mu))| = |D(\varphi(\mu)) - D(\bar{\varphi}_j)| = |D^{(n_j+1)}(\zeta)| |\varphi(\mu) - \bar{\varphi}_j|^{n_j+1} \implies$$

$$\implies |\varphi(\mu) - \bar{\varphi}_j|^{n_j+1} < \frac{\xi}{D^{(n_j+1)}(\zeta)} \leq \frac{m_D^{(1)}}{D^{(n_j+1)}(\zeta)} \eta^{n+1} \leq \eta^{n+1} \implies |\varphi(\mu) - \bar{\varphi}_j| < \eta^{\frac{n+1}{n_j+1}} \leq \eta$$

Mit (4.23) folgt die Behauptung b).

c) Mit 4.3.b folgt aus (4.19)

$$s(\mu) = \begin{cases} \frac{-c(\varphi(\mu)) + O(\sqrt[n-m]{|\mu|})}{f(\varphi(\mu))} & \text{falls } f(\varphi(\mu)) \neq 0 \\ \frac{-d(\varphi(\mu)) + O(\sqrt[n-m]{|\mu|})}{g(\varphi(\mu))} & \text{falls } g(\varphi(\mu)) \neq 0 \end{cases} \quad (4.24)$$

Weiter gilt  $\forall h \in C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ :

$$h(\varphi(\mu)) = h(\overline{\varphi}) + (h(\varphi(\mu)) - h(\overline{\varphi})) \stackrel{b)}{=} h(\overline{\varphi}) + o(1)$$

Es ergibt sich für (4.24) mit Hilfe der geometrischen Reihe:

$$s(\mu) = \left\{ \begin{array}{ll} -\frac{c(\overline{\varphi})}{f(\overline{\varphi})} + o(1) & \text{falls } f(\overline{\varphi}) \neq 0 \\ -\frac{d(\overline{\varphi})}{g(\overline{\varphi})} + o(1) & \text{falls } g(\overline{\varphi}) \neq 0 \end{array} \right\} = -\sigma(\overline{\varphi}) + o(1)$$

Mit (4.18) folgt dann

$$r(\mu) = {}^{l-m}\sqrt{-\sigma(\overline{\varphi})\mu} + o({}^{l-m}\sqrt{|\mu|})$$

und damit die Behauptung.

## 4.8 Satz:

Seien  $c(\varphi), d(\varphi), f(\varphi), g(\varphi)$  definiert wie in Bemerkung 4.1,  $D(\varphi)$  wie in Definition 4.2 und  $\exists \overline{\varphi}$  mit:

- (i)  $D(\overline{\varphi}) = 0$
- (ii)  $D'(\overline{\varphi}) \neq 0$

Weiter sei noch  $\sigma(\overline{\varphi})$  definiert wie in Definition 4.4.

Dann gilt:

Es zweigt von  $(\overline{\varphi}, 0)$  in  $\mu = 0$  genau eine Schar stationärer Punkte  $(\varphi(\mu), r(\mu))$  der DGL (4.4) ab und zwar entweder für  $\mu > 0$  (falls  $\sigma(\overline{\varphi}) < 0$ ) oder für  $\mu < 0$  (falls  $\sigma(\overline{\varphi}) > 0$ ).

Für  $(\varphi(\mu), r(\mu))$  gilt:

$$\begin{aligned} \varphi(\mu) &= \overline{\varphi} + O({}^{l-m}\sqrt{|\mu|}) \\ r(\mu) &= {}^{l-m}\sqrt{-\sigma(\overline{\varphi})\mu} + o({}^{l-m}\sqrt{|\mu|}) \end{aligned} \tag{4.25}$$

Beweis:

Wir suchen Lösungen  $(\varphi(\mu), r(\mu))$ , die folgende Gleichungen erfüllen (vgl. (4.11)):

$$\begin{aligned} \mu c(\varphi)r^m + f(\varphi)r^l + S_1(r, \varphi, \mu)r &= 0 \\ \mu d(\varphi)r^{m-1} + g(\varphi)r^{l-1} + S_2(r, \varphi, \mu) &= 0 \end{aligned} \tag{4.26}$$

Wie in (4.11) wird wieder durch  $r^m$  bzw.  $r^{m-1}$  gekürzt und (4.12) benutzt:

$$\begin{aligned}\mu c(\varphi) + f(\varphi)r^{l-m} + O(|\mu|r) + O(\mu^2) + O(r^{l-m+1}) &= 0 \\ \mu d(\varphi) + g(\varphi)r^{l-m} + O(|\mu|r) + O(\mu^2) + O(r^{l-m+1}) &= 0\end{aligned}\tag{4.27}$$

Wir unterscheiden die Fälle

(i)  $f(\overline{\varphi}) \neq 0 \neq g(\overline{\varphi})$ , (ii)  $f(\overline{\varphi}) = 0$  und (iii)  $g(\overline{\varphi}) = 0$ .

und beginnen mit:

(i)  $f(\overline{\varphi}) \neq 0 \neq g(\overline{\varphi})$

Dann lassen sich wegen Satz 4.3.c+d und (4.17)

$$\varrho := -\frac{f(\overline{\varphi})r^{l-m}}{c(\overline{\varphi})\mu} - 1 = -\frac{g(\overline{\varphi})r^{l-m}}{d(\overline{\varphi})\mu} - 1 \quad \text{und} \quad \psi := \varphi - \overline{\varphi}\tag{4.28}$$

als neue Variablen einführen. Mit

$$r^{l-m} = -\mu \frac{c(\overline{\varphi})}{f(\overline{\varphi})}(1 + \varrho) = -\mu \frac{d(\overline{\varphi})}{g(\overline{\varphi})}(1 + \varrho) \quad \text{und} \quad \varphi = \overline{\varphi} + \psi\tag{4.29}$$

schreibt sich Gleichung (4.27):

$$\mu c(\overline{\varphi} + \psi) - \mu f(\overline{\varphi} + \psi) \frac{c(\overline{\varphi})}{f(\overline{\varphi})}(1 + \varrho) + O(|\mu|^{l-m}\sqrt{|\mu|}) = 0$$

$$\mu d(\overline{\varphi} + \psi) - \mu g(\overline{\varphi} + \psi) \frac{d(\overline{\varphi})}{g(\overline{\varphi})}(1 + \varrho) + O(|\mu|^{l-m}\sqrt{|\mu|}) = 0$$

Kürzen durch  $\mu$  und Taylorapproximation nach Potenzen von  $\psi$  ergibt:

$$c(\overline{\varphi}) + c'(\overline{\varphi})\psi + O(\psi^2) - \left(f(\overline{\varphi}) + f'(\overline{\varphi})\psi + O(\psi^2)\right) \frac{c(\overline{\varphi})}{f(\overline{\varphi})}(1 + \varrho) + O(|\mu|^{l-m}\sqrt{|\mu|}) = 0$$

$$d(\overline{\varphi}) + d'(\overline{\varphi})\psi + O(\psi^2) - \left(g(\overline{\varphi}) + g'(\overline{\varphi})\psi + O(\psi^2)\right) \frac{d(\overline{\varphi})}{g(\overline{\varphi})}(1 + \varrho) + O(|\mu|^{l-m}\sqrt{|\mu|}) = 0$$

Wir multiplizieren die erste Gleichung mit  $f(\overline{\varphi})$ , die zweite mit  $g(\overline{\varphi})$ :

$$c(\overline{\varphi})f(\overline{\varphi}) + c'(\overline{\varphi})f(\overline{\varphi})\psi + O(\psi^2) - \left(f(\overline{\varphi})c(\overline{\varphi}) + f'(\overline{\varphi})c(\overline{\varphi})\psi + O(\psi^2)\right)(1 + \varrho) + O(|\mu|^{l-m}\sqrt{|\mu|}) = 0$$

$$d(\overline{\varphi})g(\overline{\varphi}) + d'(\overline{\varphi})g(\overline{\varphi})\psi + O(\psi^2) - \left(g(\overline{\varphi})d(\overline{\varphi}) + g'(\overline{\varphi})d(\overline{\varphi})\psi + O(\psi^2)\right)(1 + \varrho) + O(|\mu|^{l-m}\sqrt{|\mu|}) = 0$$

Ausmultiplizieren und vereinfachen ergibt:

$$\left(c'(\overline{\varphi})f(\overline{\varphi}) - f'(\overline{\varphi})c(\overline{\varphi})\right)\psi + c(\overline{\varphi})f(\overline{\varphi})\varrho + O(\psi^2) + O(|\psi||\varrho|) + O(|\mu|^{l-m}\sqrt{|\mu|}) = 0$$

$$\left(d'(\overline{\varphi})g(\overline{\varphi}) - g'(\overline{\varphi})d(\overline{\varphi})\right)\psi + d(\overline{\varphi})g(\overline{\varphi})\varrho + O(\psi^2) + O(|\psi||\varrho|) + O(\sqrt[l-m]{|\mu|}) = 0$$

Die beiden Gleichungen haben eine eindeutig bestimmte Lösung  $(\psi(\mu), \varrho(\mu))$  mit  $(\psi(0), \varrho(0)) = (0,0)$ , wenn die Determinante ihrer Jacobimatix bzgl  $\psi, \varrho$  an der Stelle  $\mu = 0$  nicht verschwindet, falls also gilt:

$$\left| \begin{pmatrix} c'(\overline{\varphi})f(\overline{\varphi}) - f'(\overline{\varphi})c(\overline{\varphi}) & c(\overline{\varphi})f(\overline{\varphi}) \\ d'(\overline{\varphi})g(\overline{\varphi}) - g'(\overline{\varphi})d(\overline{\varphi}) & d(\overline{\varphi})g(\overline{\varphi}) \end{pmatrix} \right| \neq 0 \quad (4.30)$$

Wir berechnen die Determinante:

$$\begin{aligned} & \left(c'(\overline{\varphi})f(\overline{\varphi}) - f'(\overline{\varphi})c(\overline{\varphi})\right)d(\overline{\varphi})g(\overline{\varphi}) - \left(d'(\overline{\varphi})g(\overline{\varphi}) - g'(\overline{\varphi})d(\overline{\varphi})\right)c(\overline{\varphi})f(\overline{\varphi}) = \\ & = c'(\overline{\varphi})f(\overline{\varphi})d(\overline{\varphi})g(\overline{\varphi}) - f'(\overline{\varphi})c(\overline{\varphi})d(\overline{\varphi})g(\overline{\varphi}) - d'(\overline{\varphi})g(\overline{\varphi})c(\overline{\varphi})f(\overline{\varphi}) + g'(\overline{\varphi})d(\overline{\varphi})c(\overline{\varphi})f(\overline{\varphi}) = \\ & = \left(c'(\overline{\varphi})g(\overline{\varphi}) + g'(\overline{\varphi})c(\overline{\varphi})\right)f(\overline{\varphi})d(\overline{\varphi}) - \left(f'(\overline{\varphi})d(\overline{\varphi}) + d'(\overline{\varphi})f(\overline{\varphi})\right)c(\overline{\varphi})g(\overline{\varphi}) \stackrel{4.3.e}{=} \\ & = \left(c'(\overline{\varphi})g(\overline{\varphi}) + c(\overline{\varphi})g'(\overline{\varphi}) - f'(\overline{\varphi})d(\overline{\varphi}) - f(\overline{\varphi})d'(\overline{\varphi})\right)f(\overline{\varphi})d(\overline{\varphi}) = f(\overline{\varphi})d(\overline{\varphi})D'(\overline{\varphi}) \end{aligned}$$

Annahme:  $f(\overline{\varphi})d(\overline{\varphi}) = 0$ .

Wegen 4.3.e und  $f(\overline{\varphi}) \neq 0 \neq g(\overline{\varphi})$  folgt  $c(\overline{\varphi}) = 0 = d(\overline{\varphi})$ .

Widerspruch zu 4.3.a.

Damit gilt:  $f(\overline{\varphi})d(\overline{\varphi})D'(\overline{\varphi}) \neq 0$ .

(ii)  $f(\overline{\varphi}) = 0$

Hier sieht man:

$$f(\overline{\varphi}) = 0 \stackrel{4.3.b+c}{\implies} \begin{cases} c(\overline{\varphi}) = 0 & \stackrel{4.3.b+c}{\implies} \begin{cases} d(\overline{\varphi}) \neq 0 \\ D'(\overline{\varphi}) = c'(\overline{\varphi})g(\overline{\varphi}) - f'(\overline{\varphi})d(\overline{\varphi}) \end{cases} \\ g(\overline{\varphi}) \neq 0 & \implies r^{l-m}(\mu) = -\mu \frac{d(\overline{\varphi})}{g(\overline{\varphi})}(1 + \varrho) \end{cases}$$

Nach ähnlicher Rechnung wie in (i) ergibt sich (Setze  $r^{l-m} = -\mu \frac{d(\overline{\varphi})}{g(\overline{\varphi})}(1 + \varrho)$  in beide Gleichungen von (4.27) ein und multipliziere später die erste Gleichung mit  $g(\overline{\varphi})$  statt wie in (i) mit  $f(\overline{\varphi})$ ):

$$c(\overline{\varphi})g(\overline{\varphi}) + c'(\overline{\varphi})g(\overline{\varphi})\psi + O(\psi^2) - \left(f(\overline{\varphi})d(\overline{\varphi}) + f'(\overline{\varphi})d(\overline{\varphi})\psi + O(\psi^2)\right)(1 + \varrho) + O(\sqrt[l-m]{|\mu|}) = 0$$

$$d(\overline{\varphi})g(\overline{\varphi}) + d'(\overline{\varphi})g(\overline{\varphi})\psi + O(\psi^2) - \left(g(\overline{\varphi})d(\overline{\varphi}) + g'(\overline{\varphi})d(\overline{\varphi})\psi + O(\psi^2)\right)(1 + \varrho) + O(\sqrt[l-m]{|\mu|}) = 0$$

Ausmultiplizieren und vereinfachen ergibt:

$$\begin{aligned} \left(c'(\overline{\varphi})g(\overline{\varphi}) - f'(\overline{\varphi})d(\overline{\varphi})\right)\psi & + 0 + O(\psi^2) + O(|\psi||\varrho|) + O(\sqrt[l-m]{|\mu|}) = 0 \\ \left(d'(\overline{\varphi})g(\overline{\varphi}) - g'(\overline{\varphi})d(\overline{\varphi})\right)\psi & + d(\overline{\varphi})g(\overline{\varphi})\varrho + O(\psi^2) + O(|\psi||\varrho|) + O(\sqrt[l-m]{|\mu|}) = 0 \end{aligned}$$

Damit erhalten wir in Falle (ii) für die Jacobideterminante:

$$\begin{aligned} & \left| \begin{pmatrix} c'(\overline{\varphi})g(\overline{\varphi}) - f'(\overline{\varphi})d(\overline{\varphi}) & 0 \\ d'(\overline{\varphi})g(\overline{\varphi}) - g'(\overline{\varphi})d(\overline{\varphi}) & d(\overline{\varphi})g(\overline{\varphi}) \end{pmatrix} \right| = d(\overline{\varphi})g(\overline{\varphi}) \left( c'(\overline{\varphi})g(\overline{\varphi}) - f'(\overline{\varphi})d(\overline{\varphi}) \right) = \\ & = d(\overline{\varphi})g(\overline{\varphi})D'(\overline{\varphi}) \neq 0 \end{aligned}$$

(iii)  $g(\overline{\varphi}) = 0$

Hier erhält man nach ähnlicher Vorgehensweise wie in (ii):

$$\begin{aligned} & \left| \begin{pmatrix} c'(\overline{\varphi})f(\overline{\varphi}) - f'(\overline{\varphi})c(\overline{\varphi}) & c(\overline{\varphi})f(\overline{\varphi}) \\ d'(\overline{\varphi})f(\overline{\varphi}) - g'(\overline{\varphi})c(\overline{\varphi}) & 0 \end{pmatrix} \right| = c(\overline{\varphi})f(\overline{\varphi}) \left( c(\overline{\varphi})g'(\overline{\varphi}) - f(\overline{\varphi})d'(\overline{\varphi}) \right) = \\ & = c(\overline{\varphi})f(\overline{\varphi})D'(\overline{\varphi}) \neq 0 \end{aligned}$$

Damit können wir den Satz über die implizite Funktion anwenden und erhalten  $\left( \psi(\mu) = O(\sqrt[l-m]{|\mu|}), \varrho(\mu) = O(\sqrt[l-m]{|\mu|}) \right)$  wie oben gefordert. Mit (4.28) bzw. (4.29) folgt dann die Behauptung.

## 4.9 Definition:

Seien  $c(\overline{\varphi}), d(\overline{\varphi}), f(\overline{\varphi}), g(\overline{\varphi})$  definiert wie in Bemerkung 4.1,  $D(\overline{\varphi})$  wie in Definition 4.2 und  $\exists \overline{\varphi}$  mit  $D(\overline{\varphi}) = 0$ .

Definiere dann:

$$S(\overline{\varphi}) := \frac{1}{\sqrt[l-m]{|\mu|}} \left( (m-l)c(\overline{\varphi}) + d'(\overline{\varphi}) - g'(\overline{\varphi})\sigma(\overline{\varphi}) \right)$$

Mit Hilfe von  $S(\overline{\varphi})$  läßt sich folgender Satz formulieren:

## 4.10 Satz:

Es gelten die Voraussetzungen von Satz 4.8 und  $\sigma(\overline{\varphi}), S(\overline{\varphi})$  seien definiert wie in den Definitionen 4.4 bzw 4.9.

Dann gilt:

Ein stationärer Punkt aus der von  $(\bar{\varphi}, 0)$  in  $\mu = 0$  entweder für  $\mu > 0$  (falls  $\sigma(\bar{\varphi}) < 0$ ) oder für  $\mu < 0$  (falls  $\sigma(\bar{\varphi}) > 0$ ) abzweigenden Schar stationärer Punkte  $(\varphi(\mu), r(\mu))$  der DGL (4.4) ist im Falle:

- a)  $\sigma(\bar{\varphi})D'(\bar{\varphi}) < 0$   
ein Sattel,
- b)  $\sigma(\bar{\varphi})D'(\bar{\varphi}) > 0 \wedge S^2(\bar{\varphi}) - 4\sigma(\bar{\varphi})D'(\bar{\varphi}) > 0 \wedge \sigma(\bar{\varphi})S(\bar{\varphi}) > 0 (< 0)$   
ein stabiler (instabiler) uneigentlicher Knoten,
- c)  $S^2(\bar{\varphi}) - 4\sigma(\bar{\varphi})D'(\bar{\varphi}) = 0 \wedge \sigma(\bar{\varphi})S(\bar{\varphi}) > 0 (< 0) \wedge d(\bar{\varphi}) = 0 = \left(\frac{c(\bar{\varphi})}{f(\bar{\varphi})}\right)'$   
ein stabiler (instabiler) eigentlicher Knoten oder ein stabiler (instabiler) uneigentlicher Knoten oder ein stabiler (instabiler) Wirbel,
- d)  $S^2(\bar{\varphi}) - 4\sigma(\bar{\varphi})D'(\bar{\varphi}) = 0 \wedge \sigma(\bar{\varphi})S(\bar{\varphi}) > 0 (< 0) \wedge \left(d(\bar{\varphi}) \neq 0 \vee \left(\frac{c(\bar{\varphi})}{f(\bar{\varphi})}\right)' \neq 0\right)$   
ein stabiler (instabiler) uneigentlicher Knoten oder ein Wirbel,
- e)  $S^2(\bar{\varphi}) - 4\sigma(\bar{\varphi})D'(\bar{\varphi}) < 0 \wedge \sigma(\bar{\varphi})S(\bar{\varphi}) > 0 (< 0)$   
ein stabiler (instabiler) Wirbel,
- f)  $S^2(\bar{\varphi}) - 4\sigma(\bar{\varphi})D'(\bar{\varphi}) < 0 \wedge S(\bar{\varphi}) = 0$   
ein Zentrum oder ein Wirbel,

wählt man  $|\mu|$  nur hinreichend klein.

Beweis:

Definiere:

$$J(\varphi(\mu), r(\mu)) := \left( J_{i,j}(\varphi(\mu), r(\mu)) \right)_{i,j=1,2} := \begin{pmatrix} \frac{\partial \dot{r}}{\partial r} & \frac{\partial \dot{r}}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial \dot{\varphi}}{\partial r} & \frac{\partial \dot{\varphi}}{\partial \varphi} \end{pmatrix} \bigg|_{(\varphi(\mu), r(\mu))}$$

Wir berechnen die Einträge der Jacobimatrix mit Hilfe von (4.25):

Falls  $f(\bar{\varphi}) \neq 0$ , ergibt sich für den ersten Eintrag:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \dot{r}}{\partial r} \bigg|_{(\varphi(\mu), r(\mu))} &= m\mu c(\varphi(\mu))r^{m-1}(\mu) + lf(\varphi(\mu))r^{l-1}(\mu) + O(|\mu|r^m(\mu)) + O(\mu^2r^{m-1}(\mu)) + O(r^l(\mu)) = \\ &= r^{m-1}(\mu) \left( m\mu c(\bar{\varphi}) + lf(\bar{\varphi}) \left( -\frac{c(\bar{\varphi})}{f(\bar{\varphi})}\mu \right) + O\left( (|\mu|^{l-m}) \right) \right) = \end{aligned}$$

$$= \mu r^{m-1}(\mu) \left( (m-l)c(\overline{\varphi}) + O(\sqrt[l-m]{|\mu|}) \right)$$

oder auch, falls  $g(\overline{\varphi}) \neq 0$ :

$$\begin{aligned} &= \mu r^{m-1}(\mu) \left( mc(\overline{\varphi}) - lf(\overline{\varphi}) \frac{d(\overline{\varphi})}{g(\overline{\varphi})} + O(\sqrt[l-m]{|\mu|}) \right) = \\ &= \mu r^{m-1}(\mu) \left( mc(\overline{\varphi}) - l \frac{c(\overline{\varphi})g(\overline{\varphi})}{g(\overline{\varphi})} + O(\sqrt[l-m]{|\mu|}) \right) = \\ &= \mu r^{m-1}(\mu) \left( (m-l)c(\overline{\varphi}) + O(\sqrt[l-m]{|\mu|}) \right) \end{aligned}$$

Also insgesamt:

$$\left. \frac{\partial \dot{r}}{\partial r} \right|_{(\varphi(\mu), r(\mu))} = \mu r^{m-1}(\mu) \left( (m-l)c(\overline{\varphi}) + O(\sqrt[l-m]{|\mu|}) \right)$$

Für den zweiten Eintrag erhält man:

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial \dot{r}}{\partial \varphi} \right|_{(\varphi(\mu), r(\mu))} &= \mu c'(\varphi(\mu))r^m + f'(\varphi(\mu))r^l(\mu) + O(|\mu|r^{m+1}) + O(\mu^2 r^m) + O(r^l) = \\ &= \mu r^m(\mu) \left( c'(\overline{\varphi}) - f'(\overline{\varphi})\sigma(\overline{\varphi}) + O(\sqrt[l-m]{|\mu|}) \right) \end{aligned}$$

oder alternativ, falls  $f(\overline{\varphi}) \neq 0$ :

$$\begin{aligned} &= \mu r^m(\mu) \left( c'(\overline{\varphi}) - f'(\overline{\varphi}) \frac{c(\overline{\varphi})}{f(\overline{\varphi})} + O(\sqrt[l-m]{|\mu|}) \right) = \\ &= \mu r^m(\mu) \left( f(\overline{\varphi}) \left( \frac{c'(\overline{\varphi})f(\overline{\varphi}) - f'(\overline{\varphi})c(\overline{\varphi})}{f(\overline{\varphi})^2} \right) + O(\sqrt[l-m]{|\mu|}) \right) = \\ &= \mu r^m \left( f(\overline{\varphi}) \left( \frac{c(\overline{\varphi})}{f(\overline{\varphi})} \right)' + O(\sqrt[l-m]{|\mu|}) \right) \end{aligned}$$

Weiter ergibt sich für den dritten Eintrag, falls  $g(\overline{\varphi}) \neq 0$ :

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial \dot{\varphi}}{\partial r} \right|_{(\varphi(\mu), r(\mu))} &= (m-1)\mu d(\varphi(\mu))r^{m-2}(\mu) + (l-1)g(\varphi(\mu))r^{l-2}(\mu) + \\ &\quad + O(|\mu|r^{m-1}(\mu)) + O(\mu^2 r^{m-2}(\mu)) + O(r^{l-1}(\mu)) = \\ &= r^{m-2}(\mu) \left( (m-1)\mu d(\overline{\varphi}) + (l-1)g(\overline{\varphi}) \left( -\frac{d(\overline{\varphi})}{g(\overline{\varphi})}\mu \right) + O((\sqrt[l-m]{|\mu|})^{l-m+1}) \right) = \\ &= \mu r^{m-2}(\mu) \left( (m-l)d(\overline{\varphi}) + O(\sqrt[l-m]{|\mu|}) \right) \end{aligned}$$

oder auch, falls  $f(\overline{\varphi}) \neq 0$ :

$$\begin{aligned}
&= \mu r^{m-2}(\mu) \left( (m-1)d(\overline{\varphi}) - (l-1)g(\overline{\varphi}) \frac{c(\overline{\varphi})}{f(\overline{\varphi})} + O(\sqrt[l-m]{|\mu|}) \right) = \\
&= \mu r^{m-2}(\mu) \left( (m-1)d(\overline{\varphi}) - (l-1) \frac{f(\overline{\varphi})d(\overline{\varphi})}{f(\overline{\varphi})} + O(\sqrt[l-m]{|\mu|}) \right) = \\
&= \mu r^{m-2}(\mu) \left( (m-l)d(\overline{\varphi}) + O(\sqrt[l-m]{|\mu|}) \right)
\end{aligned}$$

Also insgesamt:

$$\left. \frac{\partial \dot{\varphi}}{\partial r} \right|_{(\varphi(\mu), r(\mu))} = \mu r^{m-2}(\mu) \left( (m-l)d(\overline{\varphi}) + O(\sqrt[l-m]{|\mu|}) \right)$$

Verbleibt noch der letzte Eintrag zu berechnen:

$$\begin{aligned}
\left. \frac{\partial \dot{\varphi}}{\partial \varphi} \right|_{(\varphi(\mu), r(\mu))} &= \mu d'(\varphi(\mu)) r^{m-1}(\mu) + g'(\varphi(\mu)) r^{l-1}(\mu) + O(|\mu| r^m(\mu)) + O(\mu^2 r^{m-1}(\mu)) + O(r^l(\mu)) = \\
&= r^{m-1}(\mu) \left( \mu d'(\overline{\varphi}) + g'(\overline{\varphi}) (-\sigma(\overline{\varphi})\mu) + O((\sqrt[l-m]{|\mu|})^{l-m+1}) \right) = \\
&= \mu r^{m-1}(\mu) \left( d'(\overline{\varphi}) - g'(\overline{\varphi})\sigma(\overline{\varphi}) + O(\sqrt[l-m]{|\mu|}) \right)
\end{aligned}$$

Damit lautet die Jakobimatrix  $J(\varphi(\mu), r(\mu))$ :

$$\begin{pmatrix} \mu r^{m-1} \left( (m-l)c(\overline{\varphi}) + O(\sqrt[l-m]{|\mu|}) \right) & \mu r^m \left( c'(\overline{\varphi}) - f'(\overline{\varphi})\sigma(\overline{\varphi}) + O(\sqrt[l-m]{|\mu|}) \right) \\ \mu r^{m-2} \left( (m-l)d(\overline{\varphi}) + O(\sqrt[l-m]{|\mu|}) \right) & \mu r^{m-1} \left( d'(\overline{\varphi}) - g'(\overline{\varphi})\sigma(\overline{\varphi}) + O(\sqrt[l-m]{|\mu|}) \right) \end{pmatrix}$$

Für ihre Determinante erhält man im Falle  $f(\overline{\varphi}) \neq 0$ :

$$\begin{aligned}
&\det J(\varphi(\mu), r(\mu)) = \\
&= \mu^2 r^{2m-2}(\mu) (m-l) \left( c(\overline{\varphi}) \left( d'(\overline{\varphi}) - g'(\overline{\varphi})\sigma(\overline{\varphi}) \right) - d(\overline{\varphi}) \left( c'(\overline{\varphi}) - f'(\overline{\varphi})\sigma(\overline{\varphi}) \right) + O(\sqrt[l-m]{|\mu|}) \right) = \\
&= \mu^2 r^{2m-2}(\mu) (m-l) \left( c(\overline{\varphi}) \left( d'(\overline{\varphi}) - g'(\overline{\varphi}) \frac{c(\overline{\varphi})}{f(\overline{\varphi})} \right) - d(\overline{\varphi}) \left( c'(\overline{\varphi}) - f'(\overline{\varphi}) \frac{c(\overline{\varphi})}{f(\overline{\varphi})} \right) + O(\sqrt[l-m]{|\mu|}) \right) = \\
&= \mu^2 r^{2m-2}(\mu) (m-l) \frac{1}{f(\overline{\varphi})} \left( f(\overline{\varphi}) c(\overline{\varphi}) d'(\overline{\varphi}) - c(\overline{\varphi}) g'(\overline{\varphi}) c(\overline{\varphi}) - \right. \\
&\quad \left. - f(\overline{\varphi}) d(\overline{\varphi}) c'(\overline{\varphi}) + d(\overline{\varphi}) f'(\overline{\varphi}) c(\overline{\varphi}) + O(\sqrt[l-m]{|\mu|}) \right) =
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \mu^2 r^{2m-2}(\mu)(m-l) \frac{1}{f(\bar{\varphi})} \left( c(\bar{\varphi})f(\bar{\varphi})d'(\bar{\varphi}) - c(\bar{\varphi})g'(\bar{\varphi})c(\bar{\varphi}) - \right. \\
&\quad \left. - c(\bar{\varphi})g(\bar{\varphi})c'(\bar{\varphi}) + c(\bar{\varphi})d(\bar{\varphi})f'(\bar{\varphi}) + O(\sqrt[l-m]{|\mu|}) \right) = \\
&= \mu^2 r^{2m-2}(\mu)(m-l) \frac{c(\bar{\varphi})}{f(\bar{\varphi})} \left( -D'(\bar{\varphi}) + O(\sqrt[l-m]{|\mu|}) \right) = \\
&= \mu^2 r^{2m-2}(\mu)(l-m)\sigma(\bar{\varphi}) \left( D'(\bar{\varphi}) + O(\sqrt[l-m]{|\mu|}) \right)
\end{aligned}$$

oder nach analoger Rechnung, falls  $g(\bar{\varphi}) \neq 0$ :

$$= \mu^2 r^{2m-2}(\mu)(l-m)\sigma(\bar{\varphi}) \left( D'(\bar{\varphi}) + O(\sqrt[l-m]{|\mu|}) \right)$$

Also insgesamt:

$$\det J(\varphi(\mu), r(\mu)) = (l-m)\mu^2 r^{2m-2}(\mu)\sigma(\bar{\varphi}) \left( D'(\bar{\varphi}) + O(\sqrt[l-m]{|\mu|}) \right)$$

Es gilt damit für  $|\mu|$  hinreichend klein:

$$\det J(\varphi(\mu), r(\mu)) > 0 \ (< 0) \iff \sigma(\bar{\varphi})D'(\bar{\varphi}) > 0 \ (< 0) \quad (4.31)$$

Weiter ergibt sich für die Spur :

$$\begin{aligned}
\operatorname{tr} J(\varphi(\mu), r(\mu)) &= \mu r^{m-1}(\mu) \left( (m-l)c(\bar{\varphi}) + d'(\bar{\varphi}) - g'(\bar{\varphi})\sigma(\bar{\varphi}) + O(\sqrt[l-m]{|\mu|}) \right) \stackrel{4.9}{=} \\
&= \mu r^{m-1}(\mu) \sqrt{l-m} \left( S(\bar{\varphi}) + O(\sqrt[l-m]{|\mu|}) \right)
\end{aligned}$$

Es gilt damit für  $|\mu|$  hinreichend klein:

$$\operatorname{tr} J(\varphi(\mu), r(\mu)) > 0 \ (< 0) \iff \mu S(\bar{\varphi}) > 0 \ (< 0)$$

Aus der zweiten Gleichung von (4.25) in Satz 4.8 folgt für die abzweigende Schar stationärer Punkte  $\operatorname{sign}(\mu) = -\operatorname{sign}(\sigma(\bar{\varphi}))$  und damit für die Spur:

$$\operatorname{tr} J(\varphi(\mu), r(\mu)) > 0 \ (< 0) \iff \sigma(\bar{\varphi})S(\bar{\varphi}) < 0 \ (> 0) \quad (4.32)$$

Für die Diskriminante der Jacobimatrix  $J(\varphi(\mu), r(\mu))$

$$\Delta J(\varphi(\mu), r(\mu)) := \operatorname{tr}^2 J(\varphi(\mu), r(\mu)) - 4 \det J(\varphi(\mu), r(\mu))$$

erhält man

$$\Delta(J(\varphi(\mu), r(\mu))) = \mu^2 r^{2m-2}(\mu)(l-m) \left( S^2(\bar{\varphi}) - 4\sigma(\bar{\varphi})D'(\bar{\varphi}) + O(\sqrt[l-m]{|\mu|}) \right)$$

bzw.

$$\Delta J(\varphi(\mu), r(\mu)) > 0 \ (< 0) \iff S^2(\bar{\varphi}) - 4\sigma(\bar{\varphi})D'(\bar{\varphi}) > 0 \ (< 0) \quad (4.33)$$

wählt man wieder  $|\mu|$  hinreichend klein.

Wir zeigen noch:

$$J_{2,1}(\varphi(\mu), r(\mu)) \neq 0 \vee J_{2,1}(\varphi(\mu), r(\mu)) \neq 0 \iff d(\overline{\varphi}) \neq 0 \vee \left( \frac{c(\overline{\varphi})}{f(\overline{\varphi})} \right)' \neq 0 \quad (4.34)$$

Dazu reicht es offensichtlich

$$d(\overline{\varphi}) \neq 0 \vee \left( \frac{c(\overline{\varphi})}{f(\overline{\varphi})} \right)' \neq 0 \iff d(\overline{\varphi}) \neq 0 \vee (c'(\overline{\varphi}) - f'(\overline{\varphi})\sigma(\overline{\varphi})) \neq 0$$

zu zeigen.

1.Fall:  $d(\overline{\varphi}) \neq 0$ .

Hier ist nichts zu zeigen.

2.Fall:  $d(\overline{\varphi}) = 0$

Hier gilt wegen 4.3.d:

$$g(\overline{\varphi}) = 0 \xrightarrow{4.3.b} f(\overline{\varphi}) \neq 0 \xrightarrow{4.4} \sigma(\overline{\varphi}) = \frac{c(\overline{\varphi})}{f(\overline{\varphi})} \implies (c'(\overline{\varphi}) - f'(\overline{\varphi})\sigma(\overline{\varphi})) = f(\overline{\varphi}) \left( \frac{c(\overline{\varphi})}{f(\overline{\varphi})} \right)'.$$

Es gilt dann

$$(c'(\overline{\varphi}) - f'(\overline{\varphi})\sigma(\overline{\varphi})) \neq 0 \iff \left( \frac{c(\overline{\varphi})}{f(\overline{\varphi})} \right)' \neq 0$$

und damit die Behauptung in (4.34).

Mit (4.31) bis (4.34) und Satz 1.15 folgt die Behauptung.

## 4.11 Satz:

Seien  $c(\varphi), d(\varphi), f(\varphi), g(\varphi)$  definiert wie in Bemerkung 4.1,  $D(\varphi)$  wie in Definition 4.2 und  $\exists \overline{\varphi}$  mit  $D(\overline{\varphi}) = 0$ .  $\sigma(\overline{\varphi})$  sei definiert wie in Definition 4.4 und  $S(\overline{\varphi})$  wie in Definition 4.9.

Dann gilt:

$$\text{a) } D(\overline{\varphi} + \pi) = 0$$

$$\text{b) } D'(\overline{\varphi} + \pi) = \begin{cases} -D'(\overline{\varphi}) & \text{falls } l - m \text{ ungerade} \\ D'(\overline{\varphi}) & \text{falls } l - m \text{ gerade} \end{cases}$$

$$\text{c) } \sigma(\overline{\varphi} + \pi) = \begin{cases} -\sigma(\overline{\varphi}) & \text{falls } l - m \text{ ungerade} \\ \sigma(\overline{\varphi}) & \text{falls } l - m \text{ gerade} \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
\text{d) } S(\overline{\varphi} + \pi) &= \begin{cases} -S(\overline{\varphi}) & \text{falls } m \text{ gerade} \\ S(\overline{\varphi}) & \text{falls } m \text{ ungerade} \end{cases} \\
\text{e) } \sigma(\overline{\varphi} + \pi)S(\overline{\varphi} + \pi) &= \begin{cases} -\sigma(\overline{\varphi})S(\overline{\varphi}) & \text{falls } l \text{ gerade} \\ \sigma(\overline{\varphi})S(\overline{\varphi}) & \text{falls } l \text{ ungerade} \end{cases} \\
\text{f) } \sigma(\overline{\varphi} + \pi)D'(\overline{\varphi} + \pi) &= \sigma(\overline{\varphi})D'(\overline{\varphi}) \\
\text{g) } S^2(\overline{\varphi} + \pi) - 4\sigma(\overline{\varphi} + \pi)D'(\overline{\varphi} + \pi) &= S^2(\overline{\varphi}) - 4\sigma(\overline{\varphi})D'(\overline{\varphi})
\end{aligned}$$

Beweis:

Aus der Definition von  $c(\varphi), d(\varphi), f(\varphi), g(\varphi)$  folgt:

$$\begin{aligned}
c(\varphi), d(\varphi) \in \begin{cases} \mathcal{P}_{2\pi}^- & \text{falls } m \text{ gerade} \\ \mathcal{P}_{2\pi}^+ & \text{falls } m \text{ ungerade} \end{cases} \quad \text{und} \quad f(\varphi), g(\varphi) \in \begin{cases} \mathcal{P}_{2\pi}^- & \text{falls } l \text{ gerade} \\ \mathcal{P}_{2\pi}^+ & \text{falls } l \text{ ungerade} \end{cases} \xrightarrow{1.3} \\
D(\varphi) \in \begin{cases} \mathcal{P}_{2\pi}^- & \text{falls } l - m \text{ ungerade} \\ \mathcal{P}_{2\pi}^+ & \text{falls } l - m \text{ gerade} \end{cases} \xrightarrow{1.3} D'(\varphi) \in \begin{cases} \mathcal{P}_{2\pi}^- & \text{falls } l - m \text{ ungerade} \\ \mathcal{P}_{2\pi}^+ & \text{falls } l - m \text{ gerade} \end{cases}
\end{aligned}$$

Damit gilt:  $D(\overline{\varphi}) = 0 \implies D(\overline{\varphi} + \pi) = 0$  und man erhält für die Ableitung:

$$D'(\overline{\varphi} + \pi) = \begin{cases} -D'(\overline{\varphi}) & \text{falls } l - m \text{ ungerade} \\ D'(\overline{\varphi}) & \text{falls } l - m \text{ gerade} \end{cases}$$

womit a) und b) gezeigt sind.

c) und d) folgen in analoger Weise durch mehrfache Anwendung von Satz 1.3 unter Berücksichtigung von

$$p^+ \in \mathcal{P}_{2\pi}^+ (p^- \in \mathcal{P}_{2\pi}^-) \wedge p^+ \neq 0 (p^- \neq 0) \implies \frac{1}{p^+} \in \mathcal{P}_{2\pi}^+ \left( \frac{1}{p^-} \in \mathcal{P}_{2\pi}^- \right)$$

e) Aus c) und d) folgt:

$$\sigma(\overline{\varphi} + \pi)S(\overline{\varphi} + \pi) = \begin{cases} -\sigma(\overline{\varphi})S(\overline{\varphi}) & \text{falls } l - m \text{ gerade} \quad \wedge \quad m \text{ gerade} \\ -\sigma(\overline{\varphi})S(\overline{\varphi}) & \text{falls } l - m \text{ ungerade} \quad \wedge \quad m \text{ ungerade} \\ \sigma(\overline{\varphi})S(\overline{\varphi}) & \text{falls } l - m \text{ gerade} \quad \wedge \quad m \text{ ungerade} \\ \sigma(\overline{\varphi})S(\overline{\varphi}) & \text{falls } l - m \text{ ungerade} \quad \wedge \quad m \text{ gerade} \end{cases}$$

oder zusammengefaßt:

$$\sigma(\overline{\varphi}+\pi)S(\overline{\varphi}+\pi) = \begin{cases} -\sigma(\overline{\varphi})S(\overline{\varphi}) & \text{falls } l \text{ gerade} \\ \sigma(\overline{\varphi})S(\overline{\varphi}) & \text{falls } l \text{ ungerade} \end{cases}$$

f) und g) folgen aus b), c) und d).

## 4.12 Satz:

Es gelten die Voraussetzungen von Satz 4.8 und  $S(\overline{\varphi})$  sei definiert wie in Definition 4.9.

Dann gilt:

Es zweigt in  $\mu = 0$ , falls  $\sigma(\overline{\varphi}) < 0$  ( $\sigma(\overline{\varphi}) > 0$ ) und

a)  $l - m$  gerade

ist, von  $(\overline{\varphi}, 0)$  für  $\mu > 0$  ( $\mu < 0$ ) sowie von  $(\overline{\varphi} + \pi, 0)$  für  $\mu > 0$  ( $\mu < 0$ )

b)  $l - m$  ungerade

ist, von  $(\overline{\varphi}, 0)$  für  $\mu > 0$  ( $\mu < 0$ ) sowie von  $(\overline{\varphi} + \pi, 0)$  für  $\mu < 0$  ( $\mu > 0$ )

jeweils genau eine Schar stationärer Punkte der DGL (4.4) ab.

Gilt weiter

(i)  $\sigma(\overline{\varphi})D'(\overline{\varphi}) < 0$

dann sind die stationären Punkte der beiden Scharen instabil (Sättel).

(ii)  $\sigma(\overline{\varphi})D'(\overline{\varphi}) > 0 \wedge \sigma(\overline{\varphi})S(\overline{\varphi}) > 0$  ( $< 0$ ) und ist

( $\alpha$ )  $l$  gerade

dann sind die stationären Punkte der in  $(\overline{\varphi}, 0)$  abzweigenden Schar asymptotisch stabil (bei Zeitumkehr asymptotisch stabil) und der in  $(\overline{\varphi} + \pi, 0)$  abzweigenden Schar bei Zeitumkehr asymptotisch stabil (asymptotisch stabil), haben also verschiedenes Stabilitätsverhalten.

( $\beta$ )  $l$  ungerade

dann sind die stationären Punkte der in  $(\overline{\varphi}, 0)$  abzweigenden Schar asymptotisch stabil (bei Zeitumkehr asymptotisch stabil) und der in  $(\overline{\varphi} + \pi, 0)$  abzweigenden Schar ebenfalls asymptotisch stabil (bei Zeitumkehr asymptotisch stabil), haben also gleiches Stabilitätsverhalten.

Beweis:

a) bzw. b) ist die Aussage von Satz 4.8 angewandt an den Stellen  $\bar{\varphi}, \bar{\varphi} + \pi$  unter Benutzung von 4.11.a bis 4.11.c.

(i) Wegen Satz 4.10.a mit Satz 4.11.f sind die stationären Punkte der beiden abzweigenden Scharen Sättel, also jeweils instabil.

(ii) Es gilt  $d(\varphi) = 0 \iff d(\varphi + \pi) = 0$ , da  $d(\varphi) \in \mathcal{P}_{2\pi}^+ \vee \mathcal{P}_{2\pi}^-$ . Genauso sieht man mit zusätzlich Satz 1.3.d oder e:  $\left(\frac{c(\bar{\varphi})}{f(\bar{\varphi})}\right)' = 0 \iff \left(\frac{c(\bar{\varphi} + \pi)}{f(\bar{\varphi} + \pi)}\right)' = 0$ .

Der Rest der Behauptung folgt mit Satz 4.10.b bis e unter Berücksichtigung von Satz 4.11.e+g.

### 4.13 Satz:

Seien  $q_i(x_1, x_2), Q_i(x_1, x_2)$   $i = 1, 2$  definiert wie in Bemerkung 4.1 und  $D(\varphi), \sigma(\bar{\varphi}), S(\bar{\varphi})$  definiert wie in den Definition 4.2, 4.4 und 4.9.

Seien weiter:

$(x_1, x_2) = (r \cos(\varphi), r \sin(\varphi)) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$  beliebig und  
 $(\bar{x}_1, \bar{x}_2) = (r \cos(\bar{\varphi}), r \sin(\bar{\varphi}))$  mit  $q_1(\bar{x}_1, \bar{x}_2)Q_2(\bar{x}_1, \bar{x}_2) - q_2(\bar{x}_1, \bar{x}_2)Q_1(\bar{x}_1, \bar{x}_2) = 0$

Dann gilt:

$$\text{a) } D(\varphi) = \frac{q_1(x_1, x_2)Q_2(x_1, x_2) - q_2(x_1, x_2)Q_1(x_1, x_2)}{\left(\sqrt{x_1^2 + x_2^2}\right)^{l+m}}$$

$$\text{b) } D'(\varphi) = \frac{\left(-x_2 \frac{\partial}{\partial x_1} + x_1 \frac{\partial}{\partial x_2}\right) \left(q_1(x_1, x_2)Q_2(x_1, x_2) - q_2(x_1, x_2)Q_1(x_1, x_2)\right)}{\left(\sqrt{x_1^2 + x_2^2}\right)^{l+m}}$$

$$\text{c) } \sigma(\bar{\varphi}) = \begin{cases} \left(\sqrt{\bar{x}_1^2 + \bar{x}_2^2}\right)^{l-m} \frac{q_1(\bar{x}_1, \bar{x}_2)}{Q_1(\bar{x}_1, \bar{x}_2)} & \text{falls } Q_1(\bar{x}_1, \bar{x}_2) \neq 0 \\ \left(\sqrt{\bar{x}_1^2 + \bar{x}_2^2}\right)^{l-m} \frac{q_2(\bar{x}_1, \bar{x}_2)}{Q_2(\bar{x}_1, \bar{x}_2)} & \text{falls } Q_2(\bar{x}_1, \bar{x}_2) \neq 0 \end{cases}$$

$$\text{d) } S(\bar{\varphi}) = \frac{1}{\sqrt{l-m}} \left( \frac{\frac{\partial}{\partial x_1} q_1(\bar{x}_1, \bar{x}_2) + \frac{\partial}{\partial x_2} q_2(\bar{x}_1, \bar{x}_2)}{\left(\sqrt{\bar{x}_1^2 + \bar{x}_2^2}\right)^{m-1}} - \right.$$

$$- \frac{\left( \frac{\partial}{\partial x_1} Q_1(\bar{x}_1, \bar{x}_2) + \frac{\partial}{\partial x_2} Q_2(\bar{x}_1, \bar{x}_2) \right) \sigma(\bar{\varphi})}{\left( \sqrt{\bar{x}_1^2 + \bar{x}_2^2} \right)^{l-1}}$$

Beweis:

$$\begin{aligned} c(\varphi) &= q_1(\cos(\varphi), \sin(\varphi)) \cos(\varphi) + q_2(\cos(\varphi), \sin(\varphi)) \sin(\varphi) = \\ &= q_1\left(\frac{x_1}{r}, \frac{x_2}{r}\right) \frac{x_1}{r} + q_2\left(\frac{x_1}{r}, \frac{x_2}{r}\right) \frac{x_2}{r} = \frac{q_1(x_1, x_2)x_1 + q_2(x_1, x_2)x_2}{\left(\sqrt{x_1^2 + x_2^2}\right)^{m+1}} \end{aligned} \quad (4.35)$$

Analog sieht man

$$d(\varphi) = \frac{q_2(x_1, x_2)x_1 - q_1(x_1, x_2)x_2}{\left(\sqrt{x_1^2 + x_2^2}\right)^{m+1}} \quad (4.36)$$

$$f(\varphi) = \frac{Q_1(x_1, x_2)x_1 + Q_2(x_1, x_2)x_2}{\left(\sqrt{x_1^2 + x_2^2}\right)^{l+1}} \quad (4.37)$$

$$g(\varphi) = \frac{Q_2(x_1, x_2)x_1 - Q_1(x_1, x_2)x_2}{\left(\sqrt{x_1^2 + x_2^2}\right)^{l+1}} \quad (4.38)$$

Damit ergibt sich für

$$\begin{aligned} \text{a) } D(\varphi) &= c(\varphi)g(\varphi) - f(\varphi)d(\varphi) = \\ &= \frac{1}{\left(\sqrt{x_1^2 + x_2^2}\right)^{l+m+2}} \left( \left( q_1(x_1, x_2)x_1 + q_2(x_1, x_2)x_2 \right) \left( Q_2(x_1, x_2)x_1 - Q_1(x_1, x_2)x_2 \right) - \right. \\ &\quad \left. - \left( Q_1(x_1, x_2)x_1 + Q_2(x_1, x_2)x_2 \right) \left( q_2(x_1, x_2)x_1 - q_1(x_1, x_2)x_2 \right) \right) = \\ &= \frac{1}{\left(\sqrt{x_1^2 + x_2^2}\right)^{l+m+2}} \left( q_1 Q_2 x_1^2 - q_1 Q_1 x_1 x_2 + q_2 Q_2 x_1 x_2 - q_2 Q_1 x_2^2 - \right. \\ &\quad \left. - q_2 Q_1 x_1^2 - q_2 Q_2 x_1 x_2 + q_1 Q_1 x_1 x_2 + q_1 Q_2 x_2^2 \right) = \\ &= \frac{1}{\left(\sqrt{x_1^2 + x_2^2}\right)^{l+m+2}} (x_1^2 + x_2^2) \left( q_1(x_1, x_2) Q_2(x_1, x_2) - q_2(x_1, x_2) Q_1(x_1, x_2) \right) = \\ &= \frac{q_1(x_1, x_2) Q_2(x_1, x_2) - q_2(x_1, x_2) Q_1(x_1, x_2)}{\left(\sqrt{x_1^2 + x_2^2}\right)^{l+m}} \end{aligned}$$

b)  $D'(\varphi) = \frac{d}{d\varphi}D(\varphi) = \frac{\partial}{\partial\varphi}D(\varphi).$

Mit  $\frac{\partial}{\partial\varphi} = -x_2\frac{\partial}{\partial x_1} + x_1\frac{\partial}{\partial x_2}$  und  $\frac{\partial}{\partial\varphi}\frac{1}{r^{l+m}} = 0$  folgt die Behauptung.

c) Mit Definition 4.4 und (4.35) bis (4.38) erhält man zunächst:

$$\sigma(\overline{\varphi}) = \begin{cases} \left(\sqrt{\overline{x}_1^2 + \overline{x}_2^2}\right)^{l-m} \frac{q_1(\overline{x}_1, \overline{x}_2)\overline{x}_1 + q_2(\overline{x}_1, \overline{x}_2)\overline{x}_2}{Q_1(\overline{x}_1, \overline{x}_2)\overline{x}_1 + Q_2(\overline{x}_1, \overline{x}_2)\overline{x}_2} & \text{falls } Q_1(\overline{x}_1, \overline{x}_2)\overline{x}_1 + Q_2(\overline{x}_1, \overline{x}_2)\overline{x}_2 \neq 0 \\ \left(\sqrt{\overline{x}_1^2 + \overline{x}_2^2}\right)^{l-m} \frac{q_2(\overline{x}_1, \overline{x}_2)\overline{x}_1 - q_1(\overline{x}_1, \overline{x}_2)\overline{x}_2}{Q_2(\overline{x}_1, \overline{x}_2)\overline{x}_1 - Q_1(\overline{x}_1, \overline{x}_2)\overline{x}_2} & \text{falls } Q_2(\overline{x}_1, \overline{x}_2)\overline{x}_1 - Q_1(\overline{x}_1, \overline{x}_2)\overline{x}_2 \neq 0 \end{cases}$$

Wir machen Fallunterscheidungen und beginnen mit

$$Q_1(\overline{x}_1, \overline{x}_2)\overline{x}_1 + Q_2(\overline{x}_1, \overline{x}_2)\overline{x}_2 \neq 0.$$

1.Fall:  $Q_1(\overline{x}_1, \overline{x}_2) \neq 0$ .

Nach Voraussetzung (beachte a) und  $D(\overline{\varphi})$  in Definition 4.4) gilt:

$$\begin{aligned} q_1(\overline{x}_1, \overline{x}_2)Q_2(\overline{x}_1, \overline{x}_2) - q_2(\overline{x}_1, \overline{x}_2)Q_1(\overline{x}_1, \overline{x}_2) &= 0 \implies \\ (q_1(\overline{x}_1, \overline{x}_2)Q_2(\overline{x}_1, \overline{x}_2) - q_2(\overline{x}_1, \overline{x}_2)Q_1(\overline{x}_1, \overline{x}_2))\overline{x}_2 &= 0 \implies \\ q_1(\overline{x}_1, \overline{x}_2)Q_2(\overline{x}_1, \overline{x}_2)\overline{x}_2 + q_1(\overline{x}_1, \overline{x}_2)Q_1(\overline{x}_1, \overline{x}_2)\overline{x}_1 &= \\ &= q_1(\overline{x}_1, \overline{x}_2)Q_1(\overline{x}_1, \overline{x}_2)\overline{x}_1 + q_2(\overline{x}_1, \overline{x}_2)Q_1(\overline{x}_1, \overline{x}_2)\overline{x}_2 \implies \\ q_1(\overline{x}_1, \overline{x}_2)(Q_1(\overline{x}_1, \overline{x}_2)\overline{x}_1 + Q_2(\overline{x}_1, \overline{x}_2)\overline{x}_2) &= Q_1(\overline{x}_1, \overline{x}_2)(q_1(\overline{x}_1, \overline{x}_2)\overline{x}_1 + q_2(\overline{x}_1, \overline{x}_2)\overline{x}_2) \implies \\ \frac{q_1(\overline{x}_1, \overline{x}_2)\overline{x}_1 + q_2(\overline{x}_1, \overline{x}_2)\overline{x}_2}{Q_1(\overline{x}_1, \overline{x}_2)\overline{x}_1 + Q_2(\overline{x}_1, \overline{x}_2)\overline{x}_2} &= \frac{q_1(\overline{x}_1, \overline{x}_2)}{Q_1(\overline{x}_1, \overline{x}_2)} \end{aligned}$$

2.Fall:  $Q_2(\overline{x}_1, \overline{x}_2) \neq 0$

Hier ergibt sich nach ähnlicher Rechnung: (multipliziere  $q_1Q_2 - q_2Q_1|_{(\overline{x}_1, \overline{x}_2)}$  mit  $\overline{x}_1$  und addiere  $q_2Q_2|_{(\overline{x}_1, \overline{x}_2)}\overline{x}_2$ )

$$\frac{q_1(\overline{x}_1, \overline{x}_2)\overline{x}_1 + q_2(\overline{x}_1, \overline{x}_2)\overline{x}_2}{Q_1(\overline{x}_1, \overline{x}_2)\overline{x}_1 + Q_2(\overline{x}_1, \overline{x}_2)\overline{x}_2} = \frac{q_2(\overline{x}_1, \overline{x}_2)}{Q_2(\overline{x}_1, \overline{x}_2)}$$

Sei jetzt  $Q_2(\overline{x}_1, \overline{x}_2)\overline{x}_1 - Q_1(\overline{x}_1, \overline{x}_2)\overline{x}_2 \neq 0$

1.Fall:  $Q_1(\overline{x}_1, \overline{x}_2) \neq 0$

Multipliziere  $q_1Q_2 - q_2Q_1|_{(\overline{x}_1, \overline{x}_2)}$  mit  $\overline{x}_1$  und subtrahiere  $q_1Q_1|_{(\overline{x}_1, \overline{x}_2)}\overline{x}_2$ . Dann erhält man das gleiche Ergebnis wie oben beim ersten Fall.

2.Fall:  $Q_2(\overline{x}_1, \overline{x}_2) \neq 0$

Hier multipliziert man  $q_1Q_2 - q_2Q_1|_{(\overline{x}_1, \overline{x}_2)}$  mit  $\overline{x}_2$ , subtrahiert  $q_2Q_2|_{(\overline{x}_1, \overline{x}_2)}\overline{x}_1$  und

erhält ebenfalls das gleiche Ergebnis wie oben beim 2.Fall.

Es ergibt sich also insgesamt:

$$\sigma(\overline{\varphi}) = \begin{cases} \left( \sqrt{\overline{x}_1^2 + \overline{x}_2^2} \right)^{l-m} \frac{q_1(\overline{x}_1, \overline{x}_2)}{Q_1(\overline{x}_1, \overline{x}_2)} & \text{falls } Q_1(\overline{x}_1, \overline{x}_2) \neq 0 \\ \left( \sqrt{\overline{x}_1^2 + \overline{x}_2^2} \right)^{l-m} \frac{q_2(\overline{x}_1, \overline{x}_2)}{Q_2(\overline{x}_1, \overline{x}_2)} & \text{falls } Q_2(\overline{x}_1, \overline{x}_2) \neq 0 \end{cases}$$

d) Wir berechnen zunächst  $d'(\varphi)$  und  $g'(\varphi)$ :

$$\begin{aligned} d'(\varphi) &= \frac{\partial}{\partial \varphi} d(\varphi) = \frac{1}{\left( \sqrt{x_1^2 + x_2^2} \right)^{m+1}} \left( -x_2 \frac{\partial}{\partial x_1} + x_1 \frac{\partial}{\partial x_2} \right) (q_2(x_1, x_2)x_1 - q_1(x_1, x_2)x_2) = \\ &= \frac{1}{\left( \sqrt{x_1^2 + x_2^2} \right)^{m+1}} \left( -x_2 \left( x_1 \frac{\partial}{\partial x_1} q_2(x_1, x_2) + q_2(x_1, x_2) - x_2 \frac{\partial}{\partial x_1} q_1(x_1, x_2) \right) + \right. \\ &\quad \left. + x_1 \left( x_1 \frac{\partial}{\partial x_2} q_2(x_1, x_2) - x_2 \frac{\partial}{\partial x_2} q_1(x_1, x_2) - q_1(x_1, x_2) \right) \right) = \\ &= \frac{1}{\left( \sqrt{x_1^2 + x_2^2} \right)^{m+1}} \left( x_1^2 \frac{\partial}{\partial x_2} q_2(x_1, x_2) + x_2^2 \frac{\partial}{\partial x_1} q_1(x_1, x_2) - \right. \\ &\quad \left. - x_1 x_2 \left( \frac{\partial}{\partial x_2} q_1(x_1, x_2) + \frac{\partial}{\partial x_1} q_2(x_1, x_2) \right) - (q_1(x_1, x_2)x_1 + q_2(x_1, x_2)x_2) \right) = \\ &= \frac{1}{\left( \sqrt{x_1^2 + x_2^2} \right)^{m+1}} \left( (x_1^2 + x_2^2) \left( \frac{\partial}{\partial x_1} q_1(x_1, x_2) + \frac{\partial}{\partial x_2} q_2(x_1, x_2) \right) - x_2^2 \frac{\partial}{\partial x_2} q_2(x_1, x_2) - \right. \\ &\quad \left. - x_1^2 \frac{\partial}{\partial x_1} q_1(x_1, x_2) - x_1 x_2 \left( \frac{\partial}{\partial x_2} q_1(x_1, x_2) + \frac{\partial}{\partial x_1} q_2(x_1, x_2) \right) - (q_1(x_1, x_2)x_1 + q_2(x_1, x_2)x_2) \right) = \\ &= \frac{1}{\left( \sqrt{x_1^2 + x_2^2} \right)^{m+1}} \left( (x_1^2 + x_2^2) \left( \frac{\partial}{\partial x_1} q_1(x_1, x_2) + \frac{\partial}{\partial x_2} q_2(x_1, x_2) \right) - (q_1(x_1, x_2)x_1 + q_2(x_1, x_2)x_2) - \right. \\ &\quad \left. - x_1 \left( x_1 \frac{\partial}{\partial x_1} q_1(x_1, x_2) + x_2 \frac{\partial}{\partial x_2} q_1(x_1, x_2) \right) - x_2 \left( x_1 \frac{\partial}{\partial x_1} q_2(x_1, x_2) + x_2 \frac{\partial}{\partial x_2} q_2(x_1, x_2) \right) \right) = \\ &= \frac{1}{\left( \sqrt{x_1^2 + x_2^2} \right)^{m+1}} \left( (x_1^2 + x_2^2) \left( \frac{\partial}{\partial x_1} q_1(x_1, x_2) + \frac{\partial}{\partial x_2} q_2(x_1, x_2) \right) - (q_1(x_1, x_2)x_1 + q_2(x_1, x_2)x_2) - \right. \\ &\quad \left. - m q_1(x_1, x_2)x_1 - m q_2(x_1, x_2)x_2 \right) = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{\left(\sqrt{x_1^2 + x_2^2}\right)^{m+1}} \left( (x_1^2 + x_2^2) \left( \frac{\partial}{\partial x_1} q_1(x_1, x_2) + \frac{\partial}{\partial x_2} q_2(x_1, x_2) \right) - \right. \\
&\quad \left. - (m+1)(q_1(x_1, x_2)x_1 + q_2(x_1, x_2)x_2) \right) = \\
&= \frac{\frac{\partial}{\partial x_1} q_1(x_1, x_2) + \frac{\partial}{\partial x_2} q_2(x_1, x_2)}{\left(\sqrt{x_1^2 + x_2^2}\right)^{m-1}} - (m+1)c(\varphi)
\end{aligned}$$

Analog ergibt sich für  $g'(\varphi)$ :

$$g'(\varphi) = \frac{\frac{\partial}{\partial x_1} Q_1(x_1, x_2) + \frac{\partial}{\partial x_2} Q_2(x_1, x_2)}{\left(\sqrt{x_1^2 + x_2^2}\right)^{l-1}} - (l+1)f(\varphi)$$

Im Falle  $f(\bar{\varphi}) \neq 0$  erhält man für  $g'(\bar{\varphi})\sigma(\bar{\varphi})$ :

$$\begin{aligned}
g'(\bar{\varphi}) \frac{c(\bar{\varphi})}{f(\bar{\varphi})} &= \left( \frac{\frac{\partial}{\partial x_1} Q_1(\bar{x}_1, \bar{x}_2) + \frac{\partial}{\partial x_2} Q_2(\bar{x}_1, \bar{x}_2)}{\left(\sqrt{\bar{x}_1^2 + \bar{x}_2^2}\right)^{l-1}} - (l+1)f(\bar{\varphi}) \right) \frac{c(\bar{\varphi})}{f(\bar{\varphi})} = \\
&= \frac{\frac{\partial}{\partial x_1} Q_1(\bar{x}_1, \bar{x}_2) + \frac{\partial}{\partial x_2} Q_2(\bar{x}_1, \bar{x}_2)}{\left(\sqrt{\bar{x}_1^2 + \bar{x}_2^2}\right)^{l-1}} \sigma(\bar{\varphi}) - (l+1)c(\bar{\varphi})
\end{aligned}$$

Im Falle  $g(\bar{\varphi}) \neq 0$  erhält man analog für  $g'(\bar{\varphi})\sigma(\bar{\varphi})$ : (Beachte  $c(\bar{\varphi})g(\bar{\varphi}) = f(\bar{\varphi})d(\bar{\varphi})$ !)

$$g'(\bar{\varphi}) \frac{d(\bar{\varphi})}{g(\bar{\varphi})} = \frac{\frac{\partial}{\partial x_1} Q_1(\bar{x}_1, \bar{x}_2) + \frac{\partial}{\partial x_2} Q_2(\bar{x}_1, \bar{x}_2)}{\left(\sqrt{\bar{x}_1^2 + \bar{x}_2^2}\right)^{l-1}} \sigma(\bar{\varphi}) - (l+1)c(\bar{\varphi})$$

und damit insgesamt

$$g'(\bar{\varphi})\sigma(\bar{\varphi}) = \frac{\frac{\partial}{\partial x_1} Q_1(\bar{x}_1, \bar{x}_2) + \frac{\partial}{\partial x_2} Q_2(\bar{x}_1, \bar{x}_2)}{\left(\sqrt{\bar{x}_1^2 + \bar{x}_2^2}\right)^{l-1}} \sigma(\bar{\varphi}) - (l+1)c(\bar{\varphi})$$

Jetzt können wir  $S(\bar{\varphi})$  berechnen:

$$S(\bar{\varphi}) = \frac{1}{\sqrt{l-m}} \left( (m-l)c(\bar{\varphi}) + d'(\bar{\varphi}) - g'(\bar{\varphi})\sigma(\bar{\varphi}) \right) =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{\sqrt{l-m}} \left( (m-l)c(\bar{\varphi}) + \frac{\frac{\partial}{\partial x_1} q_1(\bar{x}_1, \bar{x}_2) + \frac{\partial}{\partial x_2} q_2(\bar{x}_1, \bar{x}_2)}{\left(\sqrt{\bar{x}_1^2 + \bar{x}_2^2}\right)^{m-1}} - (m+1)c(\bar{\varphi}) - \right. \\
&\quad \left. - \frac{\frac{\partial}{\partial x_1} Q_1(\bar{x}_1, \bar{x}_2) + \frac{\partial}{\partial x_2} Q_2(\bar{x}_1, \bar{x}_2)}{\left(\sqrt{\bar{x}_1^2 + \bar{x}_2^2}\right)^{l-1}} \sigma(\bar{\varphi}) + (l+1)c(\bar{\varphi}) \right) = \\
&= \frac{1}{\sqrt{l-m}} \left( \frac{\frac{\partial}{\partial x_1} q_1(\bar{x}_1, \bar{x}_2) + \frac{\partial}{\partial x_2} q_2(\bar{x}_1, \bar{x}_2)}{\left(\sqrt{\bar{x}_1^2 + \bar{x}_2^2}\right)^{m-1}} - \right. \\
&\quad \left. - \frac{\left(\frac{\partial}{\partial x_1} Q_1(\bar{x}_1, \bar{x}_2) + \frac{\partial}{\partial x_2} Q_2(\bar{x}_1, \bar{x}_2)\right) \sigma(\bar{\varphi})}{\left(\sqrt{\bar{x}_1^2 + \bar{x}_2^2}\right)^{l-1}} \right)
\end{aligned}$$

#### 4.14 Definition:

Seien  $q_i(x_1, x_2), Q_i(x_1, x_2)$   $i = 1, 2$  wie in Bemerkung 4.1 definiert.

Definiere dann:

- a)  $\hat{D}(x_1, x_2) := q_1(x_1, x_2)Q_2(x_1, x_2) - q_2(x_1, x_2)Q_1(x_1, x_2)$
- b)  $\hat{D}'(x_1, x_2) := \left(-x_2 \frac{\partial}{\partial x_1} + x_1 \frac{\partial}{\partial x_2}\right) \left(q_1(x_1, x_2)Q_2(x_1, x_2) - q_2(x_1, x_2)Q_1(x_1, x_2)\right)$

Sei zusätzlich  $(\bar{x}_1, \bar{x}_2) \neq (0, 0)$  mit  $\hat{D}(\bar{x}_1, \bar{x}_2) = 0$ . Definiere dann weiter:

- c)  $\hat{\sigma}(\bar{x}_1, \bar{x}_2) := \begin{cases} -\frac{q_1(\bar{x}_1, \bar{x}_2)}{Q_1(\bar{x}_1, \bar{x}_2)} & \text{falls } Q_1(\bar{x}_1, \bar{x}_2) \neq 0 \\ -\frac{q_2(\bar{x}_1, \bar{x}_2)}{Q_2(\bar{x}_1, \bar{x}_2)} & \text{falls } Q_2(\bar{x}_1, \bar{x}_2) \neq 0 \end{cases}$
- d)  $\hat{S}(\bar{x}_1, \bar{x}_2) := \frac{\sqrt{\bar{x}_1^2 + \bar{x}_2^2}}{\sqrt{l-m}} \left( \frac{\partial}{\partial x_1} q_1(\bar{x}_1, \bar{x}_2) + \frac{\partial}{\partial x_2} q_2(\bar{x}_1, \bar{x}_2) - \right. \\ \left. - \left( \frac{\partial}{\partial x_1} Q_1(\bar{x}_1, \bar{x}_2) + \frac{\partial}{\partial x_2} Q_2(\bar{x}_1, \bar{x}_2) \right) \hat{\sigma}(\bar{x}_1, \bar{x}_2) \right)$

$\hat{D}(x_1, x_2), \hat{D}'(x_1, x_2), \hat{\sigma}(\bar{x}_1, \bar{x}_2)$  und  $\hat{S}(\bar{x}_1, \bar{x}_2)$  sind das kartesische Analogon zu  $D(\varphi), D'(\varphi), \sigma(\bar{\varphi})$  und  $S(\bar{\varphi})$  (vgl. die Definitionen 4.2, 4.4 und 4.9).

## 4.15 Satz:

Seien  $q_i(x_1, x_2), Q_i(x_1, x_2)$   $i = 1, 2$  definiert wie in Bemerkung 4.1,  $\hat{D}(x_1, x_2)$ ,  $\hat{D}(x_1, x_2)$ ,  $\sigma(\bar{x}_1, \bar{x}_2)$  wie in Definition 4.14 und es zweige eine Schar stationärer Punkte  $(x_1(\mu), x_2(\mu))$  der DGL (4.3) vom Ursprung in  $\mu = 0$  für  $\mu > 0$  ( $\mu < 0$ ) ab (vgl. Satz 4.7).

Dann gilt:

$$\text{a) } \lim_{\mu \rightarrow 0} \frac{\hat{D}(x_1(\mu), x_2(\mu))}{\left(\sqrt{x_1^2(\mu) + x_2^2(\mu)}\right)^{l+m}} = 0$$

Ist zusätzlich  $\hat{D}(x_1, x_2) \neq 0$ , dann gilt noch:

$$\text{b) } \exists (\bar{x}_1, \bar{x}_2) \neq (0, 0) \text{ mit } \hat{D}(\bar{x}_1, \bar{x}_2) = 0 \wedge \lim_{\mu \rightarrow 0} \arctan \frac{x_2(\mu)}{x_1(\mu)} = \frac{\bar{x}_2}{\bar{x}_1}$$

$$\text{c) } \sqrt{x_1^2(\mu) + x_2^2(\mu)} = \sqrt{\bar{x}_1^2 + \bar{x}_2^2} {}^{l-m}\sqrt{-\hat{\sigma}(\bar{x}_1, \bar{x}_2)\mu} + o({}^{l-m}\sqrt{|\mu|})$$

Beweis:

$$\begin{aligned} \text{a) } & \lim_{\mu \rightarrow 0} \frac{\hat{D}(x_1(\mu), x_2(\mu))}{\left(\sqrt{x_1^2(\mu) + x_2^2(\mu)}\right)^{l+m}} \stackrel{4.14.a}{=} \\ & \stackrel{4.14.a}{=} \lim_{\mu \rightarrow 0} \frac{Q_2(x_1(\mu), x_2(\mu))q_1(x_1(\mu), x_2(\mu)) - Q_1(x_1(\mu), x_2(\mu))q_2(x_1(\mu), x_2(\mu))}{\left(\sqrt{x_1^2(\mu) + x_2^2(\mu)}\right)^{l+m}} \stackrel{4.13.a}{=} \\ & \stackrel{4.13.a}{=} \lim_{\mu \rightarrow 0} D(\varphi(\mu)) \stackrel{4.7.a}{=} 0 \end{aligned}$$

b) Aus Satz 4.13.a und Definition 4.14.a folgt:  $D(\bar{\varphi}) = 0 \iff \hat{D}(\bar{x}_1, \bar{x}_2) = 0$ .

Mit Satz 4.7.b folgt der erste Teil von b).

Den zweiten Teil sieht man so:

$$\lim_{\mu \rightarrow 0} \arctan \frac{x_2(\mu)}{x_1(\mu)} = \lim_{\mu \rightarrow 0} \varphi(\mu) \stackrel{4.7.b}{=} \bar{\varphi} = \arctan \frac{\bar{x}_2}{\bar{x}_1}$$

c) Mit Satz 4.13.c und Definition 4.14.c erhält man:

$$\sigma(\bar{\varphi}) = \left(\sqrt{\bar{x}_1^2 + \bar{x}_2^2}\right)^{l-m} \hat{\sigma}(\bar{x}_1, \bar{x}_2) \quad (4.39)$$

Damit gilt:

$$\begin{aligned} \sqrt{x_1^2(\mu) + x_2^2(\mu)} &= r(\mu) \stackrel{4.7.c}{=} {}^{l-m}\sqrt{-\sigma(\bar{\varphi})\mu} + o({}^{l-m}\sqrt{|\mu|}) \stackrel{(4.39)}{=} \\ &= \sqrt{\bar{x}_1^2 + \bar{x}_2^2} {}^{l-m}\sqrt{-\hat{\sigma}(\bar{x}_1, \bar{x}_2)\mu} + o({}^{l-m}\sqrt{|\mu|}) \end{aligned}$$

## 4.16 Satz:

Seien  $q_i(x_1, x_2), Q_i(x_1, x_2)$   $i = 1, 2$  definiert wie in Bemerkung 4.1,  $\hat{D}(x_1, x_2), \hat{D}'(x_1, x_2)$  wie in Definition 4.14 und  $\exists (\bar{x}_1, \bar{x}_2) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$  mit:

$$(i) \quad \hat{D}(\bar{x}_1, \bar{x}_2) = 0$$

$$(ii) \quad \hat{D}'(\bar{x}_1, \bar{x}_2) \neq 0$$

Weiter sei noch  $\hat{\sigma}(\bar{x}_1, \bar{x}_2)$  definiert wie in Definition 4.14.c. (vgl. Satz 4.8)

Dann gilt:

Es zweigt vom Ursprung in Richtung  $(\bar{x}_1, \bar{x}_2)$  in  $\mu = 0$  genau eine Schar stationärer Punkte  $(x_1(\mu), x_2(\mu))$  der DGL (4.3) ab und zwar entweder für  $\mu > 0$  (falls  $\hat{\sigma}(\bar{x}_1, \bar{x}_2) < 0$ ) oder für  $\mu < 0$  (falls  $\hat{\sigma}(\bar{x}_1, \bar{x}_2) > 0$ ).

Für diese Schar  $(x_1(\mu), x_2(\mu))$  gilt:

$$\begin{aligned} x_1(\mu) &= \bar{x}_1 \sqrt[l-m]{-\hat{\sigma}(\bar{x}_1, \bar{x}_2)\mu} + o(\sqrt[l-m]{|\mu|}) \\ x_2(\mu) &= \bar{x}_2 \sqrt[l-m]{-\hat{\sigma}(\bar{x}_1, \bar{x}_2)\mu} + o(\sqrt[l-m]{|\mu|}) \end{aligned} \quad (4.40)$$

d.h. in erster nichtverschwindender Näherung läuft  $(x_1(\mu), x_2(\mu))$ , vom Ursprung ausgehend, längs einer Halbgeraden, die zur Nullniveaumenge von  $\hat{D}(x_1, x_2)$  gehört.

Beweis:

Wegen Satz 4.8 müssen wir nur noch die Formeln (4.40) zeigen.

Die erste Formel folgt aus den Beziehungen

$$\cos(\varphi(\mu)) \stackrel{(4.25)}{=} \cos\left(\bar{\varphi} + O(\sqrt[l-m]{|\mu|})\right) = \cos(\bar{\varphi}) + O(\sqrt[l-m]{|\mu|}) \quad \text{bzw.} \quad \cos(\bar{\varphi}) = \frac{\bar{x}_1}{\sqrt{\bar{x}_1^2 + \bar{x}_2^2}}$$

und

$$\begin{aligned} x_1(\mu) &= r(\mu) \cos(\varphi(\mu)) = \sqrt{x_1^2(\mu) + x_2^2(\mu)} \left( \cos(\bar{\varphi}) + O(\sqrt[l-m]{|\mu|}) \right) \stackrel{4.15.c}{=} \\ &\stackrel{4.15.c}{=} \left( \sqrt{\bar{x}_1^2 + \bar{x}_2^2} \sqrt[l-m]{-\hat{\sigma}(\bar{x}_1, \bar{x}_2)\mu} + o(\sqrt[l-m]{|\mu|}) \right) \left( \frac{\bar{x}_1}{\sqrt{\bar{x}_1^2 + \bar{x}_2^2}} + O(\sqrt[l-m]{|\mu|}) \right) = \\ &= \sqrt{\bar{x}_1^2 + \bar{x}_2^2} \sqrt[l-m]{-\hat{\sigma}(\bar{x}_1, \bar{x}_2)\mu} \frac{\bar{x}_1}{\sqrt{\bar{x}_1^2 + \bar{x}_2^2}} + o(\sqrt[l-m]{|\mu|}) = \bar{x}_1 \sqrt[l-m]{-\hat{\sigma}(\bar{x}_1, \bar{x}_2)\mu} + o(\sqrt[l-m]{|\mu|}) \end{aligned}$$

Die Formel für  $x_2(\mu)$  sieht man analog der Formel für  $x_1(\mu)$ .

## 4.17 Satz:

Es gelten die Voraussetzungen von Satz 4.16 und  $\hat{S}(\bar{x}_1, \bar{x}_2)$  sei definiert wie in Definition 4.14.d. (vgl. Satz 4.10)

Dann gilt:

Ein stationärer Punkt aus der vom Ursprung in Richtung  $(\bar{x}_1, \bar{x}_2)$  in  $\mu = 0$  entweder für  $\mu > 0$  (falls  $\hat{\sigma}(\bar{x}_1, \bar{x}_2) < 0$ ) oder für  $\mu < 0$  (falls  $\hat{\sigma}(\bar{x}_1, \bar{x}_2) > 0$ ) abzweigenden Schar stationärer Punkte  $(x_1(\mu), x_2(\mu))$  der DGL (4.3) ist im Falle:

- a)  $\hat{\sigma}(\bar{x}_1, \bar{x}_2)\hat{D}'(\bar{x}_1, \bar{x}_2) < 0$   
ein Sattel,
- b)  $\hat{\sigma}(\bar{x}_1, \bar{x}_2)\hat{D}'(\bar{x}_1, \bar{x}_2) > 0 \wedge \hat{S}^2(\bar{x}_1, \bar{x}_2) - 4\hat{\sigma}(\bar{x}_1, \bar{x}_2)\hat{D}'(\bar{x}_1, \bar{x}_2) > 0 \wedge \hat{\sigma}(\bar{x}_1, \bar{x}_2)\hat{S}(\bar{x}_1, \bar{x}_2) > 0 (< 0)$   
ein stabiler (instabiler) uneigentlicher Knoten,
- c)  $\hat{S}^2(\bar{x}_1, \bar{x}_2) - 4\hat{\sigma}(\bar{x}_1, \bar{x}_2)\hat{D}'(\bar{x}_1, \bar{x}_2) = 0 \wedge \hat{\sigma}(\bar{x}_1, \bar{x}_2)\hat{S}(\bar{x}_1, \bar{x}_2) > 0 (< 0) \wedge$   
 $q_2(\bar{x}_1, \bar{x}_2)\bar{x}_1 - q_1(\bar{x}_1, \bar{x}_2)\bar{x}_2 = 0 = \left(-\bar{x}_2 \frac{\partial}{\partial \bar{x}_1} + \bar{x}_1 \frac{\partial}{\partial \bar{x}_2}\right) \frac{q_1(\bar{x}_1, \bar{x}_2)\bar{x}_1 + q_2(\bar{x}_1, \bar{x}_2)\bar{x}_2}{Q_1(\bar{x}_1, \bar{x}_2)\bar{x}_1 + Q_2(\bar{x}_1, \bar{x}_2)\bar{x}_2}$   
ein stabiler (instabiler) eigentlicher Knoten, ein stabiler (instabiler) uneigentlicher Knoten oder ein stabiler (instabiler) Wirbel,
- d)  $\hat{S}^2(\bar{x}_1, \bar{x}_2) - 4\hat{\sigma}(\bar{x}_1, \bar{x}_2)\hat{D}'(\bar{x}_1, \bar{x}_2) = 0 \wedge \hat{\sigma}(\bar{x}_1, \bar{x}_2)\hat{S}(\bar{x}_1, \bar{x}_2) > 0 (< 0) \wedge$   
 $\left(q_2(\bar{x}_1, \bar{x}_2)x_1 - q_1(\bar{x}_1, \bar{x}_2)x_2 \neq 0 \vee 0 \neq \left(-\bar{x}_2 \frac{\partial}{\partial \bar{x}_1} + \bar{x}_1 \frac{\partial}{\partial \bar{x}_2}\right) \frac{q_1(\bar{x}_1, \bar{x}_2)\bar{x}_1 + q_2(\bar{x}_1, \bar{x}_2)\bar{x}_2}{Q_1(\bar{x}_1, \bar{x}_2)\bar{x}_1 + Q_2(\bar{x}_1, \bar{x}_2)\bar{x}_2}\right)$   
ein stabiler (instabiler) uneigentlicher Knoten oder ein stabiler (instabiler) Wirbel,
- e)  $\hat{S}^2(\bar{x}_1, \bar{x}_2) - 4\hat{\sigma}(\bar{x}_1, \bar{x}_2)\hat{D}'(\bar{x}_1, \bar{x}_2) < 0 \wedge \hat{\sigma}(\bar{x}_1, \bar{x}_2)\hat{S}(\bar{x}_1, \bar{x}_2) > 0 (< 0)$   
ein stabiler (instabiler) Wirbel,
- f)  $\hat{S}^2(\bar{x}_1, \bar{x}_2) - 4\hat{\sigma}(\bar{x}_1, \bar{x}_2)\hat{D}'(\bar{x}_1, \bar{x}_2) < 0 \wedge \hat{S}(\bar{x}_1, \bar{x}_2) = 0$   
ein Zentrum oder ein Wirbel,

wählt man nur  $|\mu|$  hinreichend klein.

Beweis:

Mit Satz 4.13 und Definition 4.14 sieht man leicht:

$$D'(\bar{\varphi}) = \frac{\hat{D}'(\bar{x}_1, \bar{x}_2)}{\left(\sqrt{\bar{x}_1^2 + \bar{x}_2^2}\right)^{l+m}} \quad S(\bar{\varphi}) = \frac{\hat{S}(\bar{x}_1, \bar{x}_2)}{\left(\sqrt{\bar{x}_1^2 + \bar{x}_2^2}\right)^m}$$

woraus mit (4.39) folgt:

$$\sigma(\bar{\varphi})D'(\bar{\varphi}) = \frac{\hat{\sigma}(\bar{x}_1, \bar{x}_2)\hat{D}'(\bar{x}_1, \bar{x}_2)}{\left(\sqrt{\bar{x}_1^2 + \bar{x}_2^2}\right)^{2m}} \quad \sigma(\bar{\varphi})S(\bar{\varphi}) = \frac{\hat{\sigma}(\bar{x}_1, \bar{x}_2)\hat{S}(\bar{x}_1, \bar{x}_2)}{\left(\sqrt{\bar{x}_1^2 + \bar{x}_2^2}\right)^{2m-l}}$$

$$S^2(\bar{\varphi}) - 4\sigma(\bar{\varphi})D'(\bar{\varphi}) = \frac{\hat{S}(\bar{x}_1, \bar{x}_2)^2 - 4\hat{\sigma}(\bar{x}_1, \bar{x}_2)\hat{D}'(\bar{x}_1, \bar{x}_2)}{\left(\sqrt{\bar{x}_1^2 + \bar{x}_2^2}\right)^{2m}}$$

Mit Satz 4.10, den Gleichungen (4.35) bis (4.37) und der Darstellung von  $\frac{\partial}{\partial \varphi}$  in kartesischen Koordinaten folgt die Behauptung.

## 4.18 Satz:

Es gelten die Voraussetzungen von Satz 4.16 und  $\hat{S}(\bar{x}_1, \bar{x}_2)$  sei definiert wie in Definition 4.14.d. (vgl. Satz 4.12)

Dann gilt:

Es zweigt in  $\mu = 0$ , falls  $\sigma(\bar{\varphi}) < 0$  ( $\sigma(\bar{\varphi}) > 0$ ) und

a)  $l - m$  gerade

ist, vom Ursprung in Richtung  $(\bar{x}_1, \bar{x}_2)$  für  $\mu > 0$  ( $\mu < 0$ ) sowie in Richtung  $(-\bar{x}_1, -\bar{x}_2)$  für  $\mu > 0$  ( $\mu < 0$ )

b)  $l - m$  ungerade

ist, vom Ursprung in Richtung  $(\bar{x}_1, \bar{x}_2)$  für  $\mu > 0$  ( $\mu < 0$ ) sowie in Richtung  $(-\bar{x}_1, -\bar{x}_2)$  für  $\mu < 0$  ( $\mu > 0$ )

jeweils genau eine Schar stationärer Punkte der DGL (4.3) ab.

Gilt weiter

(i)  $\hat{\sigma}(\bar{x}_1, \bar{x}_2)\hat{D}'(\bar{x}_1, \bar{x}_2) < 0$

dann sind die stationären Punkte der beiden Scharen instabil (Sättel).

(ii)  $\hat{\sigma}(\bar{x}_1, \bar{x}_2)\hat{D}'(\bar{x}_1, \bar{x}_2) > 0 \wedge \hat{\sigma}(\bar{x}_1, \bar{x}_2)\hat{S}(\bar{x}_1, \bar{x}_2) > 0$  ( $< 0$ ) und ist

( $\alpha$ )  $l$  gerade,

dann sind die stationären Punkte der vom Ursprung in Richtung  $(\bar{x}_1, \bar{x}_2)$  abzweigenden Schar asymptotisch stabil (bei Zeitumkehr asymptotisch stabil) und der in Richtung  $(-\bar{x}_1, -\bar{x}_2)$  abzweigenden Schar bei Zeitumkehr asymptotisch stabil (asymptotisch stabil) haben also verschiedenes Stabilitätsverhalten.

( $\beta$ )  $l$  ungerade,

dann sind die stationären Punkte der vom Ursprung in Richtung  $(\bar{x}_1, \bar{x}_2)$  abzweigenden Schar asymptotisch stabil (bei Zeitumkehr asymptotisch stabil) und der in Richtung  $(-\bar{x}_1, -\bar{x}_2)$  abzweigenden Schar ebenfalls asymptotisch stabil (bei Zeitumkehr asymptotisch stabil) haben also gleiches Stabilitätsverhalten.

Beweis:

Wie Satz 4.12 mit den Sätzen 4.16 und 4.17 statt 4.8 und 4.10.

Wir geben noch mit Hilfe des Index einen Satz über die Abzweigung stationärer Lösungen an, der die Voraussetzung 4.16.b nicht benötigt:

## 4.19 Satz:

Seien  $q_i(x_1, x_2), Q_i(x_1, x_2)$  definiert wie in Bemerkung 4.1. Sei weiter (vgl. Satz 2.11):

$I_1 :=$  Index des stationären Punktes im Ursprung der DGL

$$\dot{x}_1 = q_1(x_1, x_2)$$

$$\dot{x}_2 = q_2(x_1, x_2)$$

und

$I_2 :=$  Index des stationären Punktes im Ursprung der DGL

$$\dot{x}_1 = Q_1(x_1, x_2)$$

$$\dot{x}_2 = Q_2(x_1, x_2)$$

Weiter gelte:  $I_1 \neq I_2$ .

Dann gilt:

Vom stationären Punkt im Ursprung der DGL (4.3) zweigt in  $\mu = 0$  mindestens ein stationärer Punkt mit Index  $\neq 0$  ab und zwar sowohl für  $\mu > 0$  wie für  $\mu < 0$ .

Beweis:

Wir wenden die Transformation

$$x_i := \sqrt[l-m]{|\mu|} y_i$$

auf die Gleichung (4.3) an, teilen durch  ${}^{l-m}\sqrt{|\mu|}$  und erhalten:

$$\begin{aligned}\dot{y}_1 &= \left({}^{l-m}\sqrt{|\mu|}\right)^{l-1} \left(\text{sign}(\mu)q_1(y_1, y_2) + Q_1(y_1, y_2) + {}^{l-m}\sqrt{|\mu|}\tilde{R}_1(y_1, y_2, \mu)\right) \\ \dot{y}_2 &= \left({}^{l-m}\sqrt{|\mu|}\right)^{l-1} \left(\text{sign}(\mu)q_2(y_1, y_2) + Q_2(y_1, y_2) + {}^{l-m}\sqrt{|\mu|}\tilde{R}_2(y_1, y_2, \mu)\right)\end{aligned}$$

mit

$$\tilde{R}_i(y_1, y_2, \mu) = O(\|y\|^{m+1}) + O({}^{l-m}\sqrt{|\mu|^{l-m-1}}\|y\|^m) \quad i = 1, 2$$

oder äquivalent zur transformierten DGL für  $\mu \neq 0$  mit Satz 1.12:

$$\begin{aligned}\dot{y}_1 &= \text{sign}(\mu)q_1(y_1, y_2) + Q_1(y_1, y_2) + {}^{l-m}\sqrt{|\mu|}\tilde{R}_1(y_1, y_2, \mu) \\ \dot{y}_2 &= \text{sign}(\mu)q_2(y_1, y_2) + Q_2(y_1, y_2) + {}^{l-m}\sqrt{|\mu|}\tilde{R}_2(y_1, y_2, \mu)\end{aligned} \tag{4.41}$$

Definiere:

$$f_i(y_1, y_2, \mu) := \text{sign}(\mu)q_i(x_1, x_2) + Q_i(x_1, x_2) + {}^{l-m}\sqrt{|\mu|}\tilde{R}_i(y_1, y_2, \mu) \quad i = 1, 2$$

Damit ergibt sich für die Drehung von  $(f_1, f_2)$  längs  $K_r(0)$ :

$$\begin{aligned}D(f_1, f_2; K_r(0)) &= \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{f_1(r \cos(\varphi), r \sin(\varphi), \mu) \frac{\partial}{\partial \varphi} f_2(r \cos(\varphi), r \sin(\varphi), \mu)}{f_1^2(r \cos(\varphi), r \sin(\varphi), \mu) + f_2^2(r \cos(\varphi), r \sin(\varphi), \mu)} - \\ &\quad - \frac{f_2(r \cos(\varphi), r \sin(\varphi), \mu) \frac{\partial}{\partial \varphi} f_1(r \cos(\varphi), r \sin(\varphi), \mu)}{f_1^2(r \cos(\varphi), r \sin(\varphi), \mu) + f_2^2(r \cos(\varphi), r \sin(\varphi), \mu)} d\varphi = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{A_0(\varphi)r^{2m} + A_1(\varphi)r^{l+m} + A_2(\varphi)r^{2l} + {}^{l-m}\sqrt{|\mu|}A_3(\varphi, r, \mu)r^{2m}}{B_0(\varphi)r^{2m} + B_1(\varphi)r^{l+m} + B_2(\varphi)r^{2l} + {}^{l-m}\sqrt{|\mu|}B_3(\varphi, r, \mu)r^{2m}} d\varphi \quad (4.42)\end{aligned}$$

mit

$$\begin{aligned}A_0(\varphi) &:= \left(q_1(\cos(\varphi), \sin(\varphi)) \frac{\partial}{\partial x_2} q_2(\cos(\varphi), \sin(\varphi)) - q_2(\cos(\varphi), \sin(\varphi)) \frac{\partial}{\partial x_2} q_1(\cos(\varphi), \sin(\varphi))\right) \cos(\varphi) + \\ &\quad + \left(q_2(\cos(\varphi), \sin(\varphi)) \frac{\partial}{\partial x_1} q_1(\cos(\varphi), \sin(\varphi)) - q_1(\cos(\varphi), \sin(\varphi)) \frac{\partial}{\partial x_1} q_2(\cos(\varphi), \sin(\varphi))\right) \sin(\varphi) \\ A_1(\varphi) &:= \text{sign} \mu \left( (q_1(\cos(\varphi), \sin(\varphi)) \frac{\partial}{\partial x_2} Q_2(\cos(\varphi), \sin(\varphi)) - Q_2(\cos(\varphi), \sin(\varphi)) \frac{\partial}{\partial x_2} q_1(\cos(\varphi), \sin(\varphi)) + \right. \\ &\quad + Q_1(\cos(\varphi), \sin(\varphi)) \frac{\partial}{\partial x_2} q_2(\cos(\varphi), \sin(\varphi)) - q_2(\cos(\varphi), \sin(\varphi)) \frac{\partial}{\partial x_2} Q_1(\cos(\varphi), \sin(\varphi)) ) \cos(\varphi) + \\ &\quad + (q_2(\cos(\varphi), \sin(\varphi)) \frac{\partial}{\partial x_1} Q_1(\cos(\varphi), \sin(\varphi)) - Q_1(\cos(\varphi), \sin(\varphi)) \frac{\partial}{\partial x_1} q_2(\cos(\varphi), \sin(\varphi)) + \\ &\quad + Q_2(\cos(\varphi), \sin(\varphi)) \frac{\partial}{\partial x_1} q_1(\cos(\varphi), \sin(\varphi)) - q_1(\cos(\varphi), \sin(\varphi)) \frac{\partial}{\partial x_1} Q_2(\cos(\varphi), \sin(\varphi)) ) \sin(\varphi) \end{aligned}$$

$$A_2(\varphi) := \left( Q_1(\cos(\varphi), \sin(\varphi)) \frac{\partial}{\partial x_2} Q_2(\cos(\varphi), \sin(\varphi)) - Q_2(\cos(\varphi), \sin(\varphi)) \frac{\partial}{\partial x_2} Q_1(\cos(\varphi), \sin(\varphi)) \right) \cos(\varphi) + \\ + \left( Q_2(\cos(\varphi), \sin(\varphi)) \frac{\partial}{\partial x_1} Q_1(\cos(\varphi), \sin(\varphi)) - Q_1(\cos(\varphi), \sin(\varphi)) \frac{\partial}{\partial x_1} Q_2(\cos(\varphi), \sin(\varphi)) \right) \sin(\varphi)$$

$$A_3(\varphi, r, \mu) := O(r) + O\left(\sqrt[l-m]{|\mu|^{l-m-1}}\right)$$

$$B_0(\varphi) := q_1^2(\cos(\varphi), \sin(\varphi)) + q_2^2(\cos(\varphi), \sin(\varphi)) > 0$$

$$B_1(\varphi) := (q_1(\cos(\varphi), \sin(\varphi))Q_1(\cos(\varphi), \sin(\varphi)) + q_2(\cos(\varphi), \sin(\varphi))Q_2(\cos(\varphi), \sin(\varphi)) + \\ q_1(\cos(\varphi), \sin(\varphi))Q_2(\cos(\varphi), \sin(\varphi)) + q_2(\cos(\varphi), \sin(\varphi))Q_1(\cos(\varphi), \sin(\varphi))$$

$$B_2(\varphi) := Q_1^2(\cos(\varphi), \sin(\varphi)) + Q_2^2(\cos(\varphi), \sin(\varphi)) > 0$$

$$B_3(\varphi, r, \mu) := O(r) + O\left(\sqrt[l-m]{|\mu|^{l-m-1}}\right)$$

Weiter gilt definitionsgemäß:

$$I_1 = D(q_1, q_2; K_r(0)) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{A_0(\varphi)}{B_0(\varphi)} d\varphi \quad \forall r > 0$$

$$I_2 = D(Q_1, Q_2; K_r(0)) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{A_2(\varphi)}{B_2(\varphi)} d\varphi \quad \forall r > 0$$

Setzen wir jetzt  $\delta := \sqrt[l-m]{|\mu|}$  und wenden Satz 1.9 auf (4.42) an, folgt:

$$I_1 = D(f_1, f_2; K_{r_0}(0)) \quad \text{und} \quad I_2 = D(f_1, f_2; K_{r_1}(0))$$

d.h. im Ringgebiet zwischen  $K_r(0)$   $r < r_0$  und  $K_{r_1}(0)$  befindet sich mindestens ein stationärer Punkt der DGL (4.41) mit von Null verschiedenem Index und zwar für  $\mu > 0 \wedge \mu < 0$ , wählt man nur  $|\mu|$  hinreichend klein.

Aus der Äquivalenz der DGL (4.41) und (4.3) folgt die Behauptung.

## 4.20 Beispiele:

a) Betrachte die DGL:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= \mu x_1 x_2 + x_1^3 x_2 - 4x_1 x_2^3 \\ \dot{x}_2 &= \mu(x_1^2 - 4x_2^2) + 10x_1^4 - 18x_1^2 x_2^2 + 17x_2^4 \end{aligned} \tag{4.43}$$

$x_1 x_2$  und  $x_1^2 - 4x_2^2$  sind offensichtlich sogar teilerfremd.

$x_1^3 x_2 - 4x_1 x_2^3$  und  $10x_1^4 - 18x_1^2 x_2^2 + 17x_2^4$  auch, was aus

$$x_1^3 x_2 - 4x_1 x_2^3 = x_1 x_2 (x_1^2 - 4x_2^2) = x_1 x_2 (x_1 - 2x_2)(x_1 + 2x_2)$$

und

$$10x_1^4 - 18x_1^2x_2^2 + 17x_2^4 \Big|_{x_1=2x_2} \text{ bzw. } \Big|_{x_1=-2x_2} = 105x_2^4 \neq 0$$

folgt.

Wir berechnen  $\hat{D}(x_1, x_2)$  und  $\hat{D}'(x_1, x_2)$ :

$$\begin{aligned} \hat{D}(x_1, x_2) &= x_1x_2 \left( 10x_1^4 - 18x_1^2x_2^2 + 17x_2^4 \right) - \left( x_1^2 - 4x_2^2 \right) \left( x_1^3x_2 - 4x_1x_2^3 \right) = 9x_1^5x_2 - 10x_1^3x_2^3 + x_1x_2^5 = \\ &= x_1x_2(x_1 - x_2)(x_1 + x_2)(-3x_1 + x_2)(3x_1 + x_2) \end{aligned}$$

$$\hat{D}'(x_1, x_2) = \left( -x_2 \frac{\partial}{\partial x_1} + x_1 \frac{\partial}{\partial x_2} \right) \left( 9x_1^5x_2 - 10x_1^3x_2^3 + x_1x_2^5 \right) = 9x_1^6 - 75x_1^4x_2^2 + 35x_1^2x_2^4 - x_2^6$$

$\hat{D}(x_1, x_2)$  wird 0 längs der Geraden

$$x_1 = 0, \quad x_2 = 0, \quad x_2 = x_1, \quad x_2 = -x_1, \quad x_2 = 3x_1, \quad x_2 = -3x_1$$

Wir können also  $(\bar{x}_1, \bar{x}_2) \in \{(0, 1); (1, 0); (1, 1); (1, -1); (1, 3); (1, -3)\}$  wählen.

Damit erhält man für  $\hat{\sigma}(\bar{x}_1, \bar{x}_2)$ :

$$\hat{\sigma}(\bar{x}_1, \bar{x}_2) = \begin{cases} \frac{1}{\bar{x}_1^2 - 4\bar{x}_2^2} & \text{falls } \bar{x}_1 \neq 0 \wedge \bar{x}_2 \neq 0 \\ \frac{\bar{x}_1^2 - 4\bar{x}_2^2}{10\bar{x}_1^4 - 18\bar{x}_1^2\bar{x}_2^2 + 17\bar{x}_2^4} & \text{falls } \bar{x}_1 = 0 \vee \bar{x}_2 = 0 \end{cases}$$

Weiter gilt:

$$\frac{\partial}{\partial x_1} x_1x_2 + \frac{\partial}{\partial x_2} (x_1^2 - 4x_2^2) = -7x_2$$

$$\frac{\partial}{\partial x_1} (x_1^3x_2 - 4x_1x_2^3) + \frac{\partial}{\partial x_2} (10x_1^4 - 18x_1^2x_2^2 + 17x_2^4) = -33x_1^2x_2 + 64x_2^3 = x_2(-33x_1^2 + 64x_2^2)$$

Es ergibt sich dann für  $\hat{S}(\bar{x}_1, \bar{x}_2)$ :

$$\hat{S}(\bar{x}_1, \bar{x}_2) = \bar{x}_2 \sqrt{\frac{\bar{x}_1^2 + \bar{x}_2^2}{2}} \left( -7 + (33\bar{x}_1^2 - 64\bar{x}_2^2) \hat{\sigma}(\bar{x}_1, \bar{x}_2) \right)$$

Setzt man jetzt für  $(\bar{x}_1, \bar{x}_2)$  die o.a. Zahlen ein, erhält man folgende Tabelle:

|                                      | (1, -3)         | (1, -1)         | (1, 0)         | (1, 1)         | (1, 3)          | (0, 1)          |
|--------------------------------------|-----------------|-----------------|----------------|----------------|-----------------|-----------------|
| $\hat{\sigma}$                       | $-\frac{1}{35}$ | $-\frac{1}{3}$  | $\frac{1}{10}$ | $-\frac{1}{3}$ | $-\frac{1}{35}$ | $-\frac{4}{17}$ |
| $\hat{D}'$                           | 1440            | -32             | 9              | -32            | 1440            | -1              |
| $\hat{\sigma} \hat{D}'$              | < 0             | $\frac{32}{3}$  | $\frac{9}{10}$ | $\frac{32}{3}$ | < 0             | $\frac{4}{17}$  |
| $\hat{S}$                            |                 | $-\frac{10}{3}$ | 0              | $\frac{10}{3}$ |                 | $\approx 5, 7$  |
| $\hat{\sigma} \hat{S}$               |                 | > 0             | 0              | < 0            |                 | < 0             |
| $\hat{S}^2 - 4\hat{\sigma} \hat{D}'$ |                 | < 0             | < 0            | < 0            |                 | > 0             |

D.h. nach Satz 4.10 zweigen für  $\mu > 0$  vom stationären Punkt im Ursprung der DGL (4.43) in Richtung

- (1, 1) ein instabiler Wirbel
- (1, 3) ein Sattel
- (0, 1) ein instabiler Knoten
- (-1, 3) ein Sattel
- (-1, 1) ein instabiler Wirbel
- (-1, -1) ein stabiler Wirbel
- (-1, -3) ein Sattel
- (0, -1) ein stabiler Knoten
- (1, -3) ein Sattel
- (1, -1) ein stabiler Wirbel

ab.

Für  $\mu < 0$  zweigen vom stationären Punkt im Ursprung der DGL (4.43) in Richtung

- (1, 0) entweder ein Zentrum oder ein Wirbel
- (-1, 0) entweder ein Zentrum oder ein Wirbel

ab.

b) Betrachte die DGL

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= \mu x_1 - 4x_1^5 + 5x_1^3 x_2^2 + x_1 x_2^4 \\ \dot{x}_2 &= \mu x_2 + 2x_2^5\end{aligned}\tag{4.44}$$

$x_1$  und  $x_2$  sind wie  $-4x_1^5 + 5x_1^3 x_2^2 + x_1 x_2^4$  und  $2x_2^5$  teilerfremd.

Wir berechnen wieder  $\hat{D}(x_1, x_2)$  und  $\hat{D}'(x_1, x_2)$ :

$$\begin{aligned}\hat{D}(x_1, x_2) &= x_1 2x_2^5 - x_2(-4x_1^5 + 5x_1^3 x_2^2 + x_1 x_2^4) = 4x_1^5 x_2 - 5x_1^3 x_2^3 + x_1 x_2^5 = \\ &= x_1 x_2 (x_2 - x_1)(x_2 + x_1)(x_2 - 2x_1)(x_2 + 2x_1) \\ \hat{D}'(x_1, x_2) &= \left(-x_2 \frac{\partial}{\partial x_1} + x_1 \frac{\partial}{\partial x_2}\right) (4x_1^5 x_2 - 5x_1^3 x_2^3 + x_1 x_2^5) = 4x_1^6 - 35x_1^4 x_2^2 + 20x_1^2 x_2^4 - x_2^6\end{aligned}$$

$\hat{D}(x_1, x_2)$  wird 0 längs der Geraden

$$x_1 = 0, \quad x_2 = 0, \quad x_2 = x_1, \quad x_2 = -x_1, \quad x_2 = 2x_1, \quad x_2 = -2x_1$$

Wir können also  $(\bar{x}_1, \bar{x}_2) \in \{(0, 1); (1, 0); (1, 1); (1, -1); (1, 2); (1, -2)\}$  wählen.

Damit erhält man für  $\hat{\sigma}(\bar{x}_1, \bar{x}_2)$ :

$$\hat{\sigma}(\bar{x}_1, \bar{x}_2) = \begin{cases} \frac{1}{-4\bar{x}_1^4 + 5\bar{x}_1^2 \bar{x}_2^2 + \bar{x}_2^4} & \text{falls } \bar{x}_1 \neq 0 \\ \frac{1}{2\bar{x}_2^4} & \text{falls } \bar{x}_2 \neq 0 \end{cases}$$

Weiter gilt

$$\frac{\partial}{\partial x_1}x_1 + \frac{\partial}{\partial x_2}x_2 = 2 \wedge \frac{\partial}{\partial x_1}(-4x_1^5 + 5x_1^3x_2^2 + x_1x_2^4) + \frac{\partial}{\partial x_2}(2x_2^5) = -20x_1^4 + 15x_1^2x_2^2 + 11x_2^4$$

Es ergibt sich für  $\hat{S}(\bar{x}_1, \bar{x}_2)$ :

$$\hat{S}(\bar{x}_1, \bar{x}_2) = \sqrt{\frac{\bar{x}_1^2 + \bar{x}_2^2}{4}} \left( 2 - (-20\bar{x}_1^4 + 15\bar{x}_1^2\bar{x}_2^2 + 11\bar{x}_2^4) \hat{\sigma}(\bar{x}_1, \bar{x}_2) \right)$$

Setzt man jetzt die o.a. Zahlenwerte ein, läßt sich wieder eine Tabelle aufstellen:

|                                      | (0, 1)        | (1, 0)         | (1, 1)        | (1, -1)       | (1, 2)          | (1, -2)         |
|--------------------------------------|---------------|----------------|---------------|---------------|-----------------|-----------------|
| $\hat{\sigma}$                       | $\frac{1}{2}$ | $-\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{32}$  | $\frac{1}{32}$  |
| $\hat{D}'$                           | -1            | 4              | -12           | -12           | 120             | 120             |
| $\hat{\sigma} \hat{D}'$              | < 0           | < 0            | < 0           | < 0           | $\frac{15}{4}$  | $\frac{15}{4}$  |
| $\hat{S}$                            |               |                |               |               | $\approx -5,31$ | $\approx -5,31$ |
| $\hat{\sigma} \hat{S}$               |               |                |               |               | < 0             | < 0             |
| $\hat{S}^2 - 4\hat{\sigma} \hat{D}'$ |               |                |               |               | > 0             | > 0             |

D.h. nach Satz 4.10 zweigen für  $\mu > 0$  vom stationären Punkt im Ursprung der DGL (4.44) in Richtung

(1, 0) ein Sattel  
 (-1, 0) ein Sattel

ab.

Für  $\mu < 0$  zweigen vom stationären Punkt im Ursprung der DGL (4.44) in Richtung

(1, 1) ein Sattel  
 (1, 2) ein instabiler Knoten  
 (0, 1) ein Sattel  
 (-1, 2) ein instabiler Knoten  
 (-1, 1) ein Sattel  
 (-1, -1) ein Sattel  
 (-1, -2) ein instabiler Knoten  
 (0, -1) ein Sattel  
 (1, -2) ein instabiler Knoten  
 (1, -1) ein Sattel

ab.

Da die Behandlung der beiden nächsten Beispiele völlig analog läuft, geben wir nur die Ergebnisse an.

c)

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= \mu(x_1 - x_2) + x_1^2 - 4x_1x_2 + 3x_2^2 \\ \dot{x}_2 &= \mu(x_1 + x_2) + x_1^2 - x_1x_2 - 3x_2^2\end{aligned}\tag{4.45}$$

$$\text{ggT}(x_1 - x_2, x_1 + x_2) = 1 = \text{ggT}(x_1^2 - 4x_1x_2 + 3x_2^2, x_1^2 - x_1x_2 - 3x_2^2)$$

$$\hat{D}(x_1, x_2) = x_1^2x_2 - x_1x_2^2 = x_1x_2(x_1 - x_2)$$

$$\hat{D}'(x_1, x_2) = x_1^3 - 2x_1^2x_2 - 2x_1x_2^2 + x_2^3$$

$$(\bar{x}_1, \bar{x}_2) \in \{(0, 1); (1, 0); (1, 1)\}$$

$$\hat{\sigma}(\bar{x}_1, \bar{x}_2) = \begin{cases} \frac{1}{\bar{x}_1 - 3\bar{x}_2} & \text{falls } \bar{x}_1 \neq \bar{x}_2 \\ -\frac{2}{3\bar{x}_1} & \text{falls } \bar{x}_1 = \bar{x}_2 \end{cases}$$

$$\frac{\partial}{\partial x_1}(x_1 - x_2) + \frac{\partial}{\partial x_2}(x_1 + x_2) = 2 \wedge \frac{\partial}{\partial x_1}(x_1^2 - 4x_1x_2 + 3x_2^2) + \frac{\partial}{\partial x_2}(x_1^2 - x_1x_2 - 3x_2^2) = x_1 - 10x_2$$

$$\hat{S}(\bar{x}_1, \bar{x}_2) = \sqrt{\bar{x}_1^2 + \bar{x}_2^2} \left( 2 - (\bar{x}_1 - 10\bar{x}_2) \hat{\sigma}(\bar{x}_1, \bar{x}_2) \right)$$

|                                     | (0, 1)         | (1, 0) | (1, 1)         |
|-------------------------------------|----------------|--------|----------------|
| $\hat{\sigma}$                      | $-\frac{1}{3}$ | 1      | $-\frac{2}{3}$ |
| $\hat{D}'$                          | 1              | 1      | -2             |
| $\hat{\sigma}\hat{D}'$              | $< 0$          | 1      | $\frac{4}{3}$  |
| $\hat{S}$                           |                | 1      | $-4\sqrt{2}$   |
| $\hat{\sigma}\hat{S}$               |                | $> 0$  | $> 0$          |
| $\hat{S}^2 - 4\hat{\sigma}\hat{D}'$ |                | $< 0$  | $> 0$          |

D.h. nach Satz 4.10 zweigen für  $\mu > 0$  vom stationären Punkt im Ursprung der DGL (4.45) in Richtung

- (1, 1) ein stabiler Knoten
- (0, 1) ein Sattel
- (-1, 0) ein instabiler Wirbel

ab.

Für  $\mu < 0$  zweigen vom stationären Punkt im Ursprung der DGL (4.45) in Richtung

- (-1, -1) ein instabiler Knoten
- (0, -1) ein Sattel
- (1, 0) ein stabiler Wirbel

ab.

d)

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= \mu(9x_1^2 - 4x_2^2) + 2x_1^3 - 2x_1^2x_2 + \frac{2}{9}x_1x_2^2 + \frac{1}{3}x_2^3 \\ \dot{x}_2 &= \mu x_1x_2 + \frac{4}{9}x_1^2x_2 - \frac{1}{3}x_1x_2^2 \end{aligned} \quad (4.46)$$

$$\text{ggT}(9x_1^2 - 4x_2^2, x_1x_2) = 1 = \text{ggT}(2x_1^3 - 2x_1^2x_2 + \frac{2}{9}x_1x_2^2 + \frac{1}{3}x_2^3, \frac{4}{9}x_1^2x_2 - \frac{1}{3}x_1x_2^2)$$

$$\hat{D}(x_1, x_2) = 2x_1^4x_2 - x_1^3x_2^2 - 2x_1^2x_2^3 + x_1x_2^4 = x_1x_2(x_2 + x_1)(x_2 - x_1)(x_2 - 2x_1)$$

$$\hat{D}'(x_1, x_2) = 2x_1^5 - 2x_1^4x_2 - 14x_1^3x_2^2 + 7x_1^2x_2^3 + 4x_1x_2^4 - x_2^5$$

$$(\bar{x}_1, \bar{x}_2) \in \{(0, 1); (1, 0); (1, 1); (1, -1); (1, 2)\}$$

$$\hat{\sigma}(\bar{x}_1, \bar{x}_2) = \begin{cases} \frac{9}{4\bar{x}_1 - 3\bar{x}_2} & \text{falls } \bar{x}_1 \neq 0 \wedge \bar{x}_2 \neq 0 \\ \frac{9\bar{x}_1^2 - 4\bar{x}_2^2}{2\bar{x}_1^3 - 2\bar{x}_1^2\bar{x}_2 + \frac{2}{9}\bar{x}_1\bar{x}_2^2 + \frac{1}{3}\bar{x}_2^3} & \text{falls } \bar{x}_1 = 0 \vee \bar{x}_2 = 0 \end{cases}$$

$$\frac{\partial}{\partial x_1}(9x_1^2 - 4x_2^2) + \frac{\partial}{\partial x_2}(x_1x_2) = 19x_1$$

$$\frac{\partial}{\partial x_1}(2x_1^3 - 2x_1^2x_2 + \frac{2}{9}x_1x_2^2 + \frac{1}{3}x_2^3) + \frac{\partial}{\partial x_2}(\frac{4}{9}x_1^2x_2 - \frac{1}{3}x_1x_2^2) = \frac{58}{9}x_1^2 - \frac{14}{3}x_1x_2 + \frac{2}{9}x_2^2$$

$$\hat{S}(\bar{x}_1, \bar{x}_2) = \sqrt{\bar{x}_1^2 + \bar{x}_2^2} \left( 19\bar{x}_1 - \left( \frac{58}{9}\bar{x}_1^2 - \frac{14}{3}\bar{x}_1\bar{x}_2 + \frac{2}{9}\bar{x}_2^2 \right) \hat{\sigma}(\bar{x}_1, \bar{x}_2) \right)$$

|                                     | (0, 1)        | (1, 0)        | (1, 1) | (1, -1)       | (1, 2)         |
|-------------------------------------|---------------|---------------|--------|---------------|----------------|
| $\hat{\sigma}$                      | -12           | $\frac{9}{2}$ | 9      | $\frac{9}{7}$ | $-\frac{9}{2}$ |
| $\hat{D}'$                          | -1            | 2             | -4     | -14           | 30             |
| $\hat{\sigma}\hat{D}'$              | 12            | 9             | < 0    | < 0           | < 0            |
| $\hat{S}$                           | $\frac{8}{3}$ | -10           |        |               |                |
| $\hat{\sigma}\hat{S}$               | < 0           | < 0           |        |               |                |
| $\hat{S}^2 - 4\hat{\sigma}\hat{D}'$ | < 0           | > 0           |        |               |                |

D.h. nach Satz 4.10 zweigen für  $\mu > 0$  vom stationären Punkt im Ursprung der DGL (4.46) in Richtung

- (1, 2) ein Sattel
- (0, 1) ein instabiler Wirbel
- (-1, 1) ein Sattel
- (-1, 0) ein instabiler Knoten
- (-1, -1) ein Sattel

ab.

Für  $\mu < 0$  zweigen vom stationären Punkt im Ursprung der DGL (4.46) in

Richtung

- $(-1, -2)$  ein Sattel
- $(0, -1)$  ein instabiler Wirbel
- $(1, -1)$  ein Sattel
- $(1, 0)$  ein instabiler Knoten
- $(1, 1)$  ein Sattel

ab.



# Kapitel 5

## Die Abzweigung periodischer Lösungen

### 5.1 Bemerkung:

Wir werden auch in diesem Kapitel DGL der Gestalt (vgl. Kapitel 3 bzw. 4)

$$\dot{x} = F(x, \mu) \quad (5.1)$$

mit  $F(x, \mu) : \mathbb{R}^2 \times U(0) \rightarrow \mathbb{R}^2$  betrachten und noch einmal (vgl. Kapitel 3 bzw. Einleitung) auf einparametrische Scharen periodischer Lösungen  $p(t, \mu)$  untersuchen, die von isolierten stationären Punkten  $x_s$  der DGL

$$\dot{x} = F(x, 0) \quad (5.2)$$

abzweigen, also  $p(t, 0) \equiv x_s$  erfüllen.

Wir dürfen wieder, wie in den beiden letzten Kapiteln o.B.d.A.  $x_s = 0$  bzw.  $F(0, 0) = 0$  voraussetzen und damit (5.1) in der Form

$$\dot{x} = F_0(x) + \mu F_1(x) + R(x, \mu) \quad (5.3)$$

bzw.

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= \mu q_1(x_1, x_2) + Q_1(x_1, x_2) + R_1(x_1, x_2, \mu) \\ \dot{x}_2 &= \mu q_2(x_1, x_2) + Q_2(x_1, x_2) + R_2(x_1, x_2, \mu) \end{aligned} \quad (5.4)$$

schreiben. Dabei sind

$q_i(x_1, x_2), Q_i(x_1, x_2)$   $i = 1, 2$  homogene Polynome und

$R_i(x_1, x_2, \mu) = O(|\mu| \|x\|^{m+1}) + O(\mu^2 \|x\|^m) + O(\|x\|^{l+1}) \in C^{l+1}(\mathbb{R}^2 \times U(0), \mathbb{R})$   $i = 1, 2$ .

Weiter seien wie im Kapitel 4

$\text{ggT}(q_1, q_2), \text{ggT}(Q_1, Q_2)$  definit und

$\text{ord } q_i(x_1, x_2) = m < l = \text{ord } Q_i(x_1, x_2), i = 1, 2, m \geq 0.$

(Beachte: In Kapitel 3 galt  $m = l$  vgl. Bemerkung 3.1 bzw. Einleitung)

Aus den bereits aus dem letzten Kapitel bekannten Gründen, betrachten wir die zu (5.4) für  $r > 0$  äquivalente Gleichung in klassischen Polarkoordinaten

$$\begin{aligned}\dot{r} &= \mu c(\varphi) r^m + f(\varphi) r^l + S_1(r, \varphi, \mu) r^m \\ \dot{\varphi} &= \mu d(\varphi) r^{m-1} + g(\varphi) r^{l-1} + S_2(r, \varphi, \mu) r^{m-1}\end{aligned}\tag{5.5}$$

wobei genau wie im Kapitel 4

$$\begin{aligned}c(\varphi) &:= q_1(\cos(\varphi), \sin(\varphi)) \cos(\varphi) + q_2(\cos(\varphi), \sin(\varphi)) \sin(\varphi) \\ d(\varphi) &:= q_2(\cos(\varphi), \sin(\varphi)) \cos(\varphi) - q_1(\cos(\varphi), \sin(\varphi)) \sin(\varphi) \\ f(\varphi) &:= Q_1(\cos(\varphi), \sin(\varphi)) \cos(\varphi) + Q_2(\cos(\varphi), \sin(\varphi)) \sin(\varphi) \\ g(\varphi) &:= Q_2(\cos(\varphi), \sin(\varphi)) \cos(\varphi) - Q_1(\cos(\varphi), \sin(\varphi)) \sin(\varphi) \\ r^m S_1(r, \varphi, \mu) &:= R_1(r \cos(\varphi), r \sin(\varphi), \mu) \cos(\varphi) + R_2(r \cos(\varphi), r \sin(\varphi), \mu) \sin(\varphi) \\ r^m S_2(r, \varphi, \mu) &:= R_2(r \cos(\varphi), r \sin(\varphi), \mu) \cos(\varphi) - R_1(r \cos(\varphi), r \sin(\varphi), \mu) \sin(\varphi) \\ D(\varphi) &:= c(\varphi)g(\varphi) - f(\varphi)d(\varphi)\end{aligned}$$

(Beachte:  $S_i(r, \varphi, \mu) = O(|\mu|r) + O(\mu^2) + O(r^{l-m+1})$ )

definiert wurde. Mit Hilfe von Satz 1.12 läßt sich dann (5.5) (für  $r > 0$ ) wieder in eine DGL mit zu (5.5) äquivalenten Trajektorien

$$\begin{aligned}\dot{r} &= \mu c(\varphi) r + f(\varphi) r^{l-m+1} + S_1(r, \varphi, \mu) r \\ \dot{\varphi} &= \mu d(\varphi) + g(\varphi) r^{l-m} + S_2(r, \varphi, \mu)\end{aligned}\tag{5.6}$$

überführen. Die DGL (5.6) untersuchen wir dann auf Existenz von einparametrischen Scharen von Trajektorien  $r(\varphi, \mu)$ , welche die Bedingungen

$$(i) \quad r(0, \mu) = r(2\pi, \mu) > 0 \quad (\mu > 0 \vee \mu < 0)$$

$$(ii) \quad r(\varphi, 0) \equiv 0 \quad \forall \varphi \in [0, 2\pi]$$

erfüllen.

Dazu schließen wir in Bemerkung 5.2 zunächst den Fall  $m = 0$  (s.o.) aus, um dann in den Sätzen 5.3 bis 5.6 wichtige Scheitelsätze für die DGL

$$\begin{aligned}\dot{r} &= \mu c(\varphi) r + f(\varphi) r^{l-m+1} \\ \dot{\varphi} &= \mu d(\varphi) + g(\varphi) r^{l-m}\end{aligned}\tag{5.7}$$

zu beweisen. D.h. in 5.3 bzw. 5.5 werden Kurven konstruiert, die von den Trajektorien der DGL (5.7) von oben nach unten (unten nach oben) geschnitten werden,

je nachdem ob  $r \equiv 0$  für die sogenannte äußere DGL

$$\dot{r} = f(\varphi)r$$

$$\dot{\varphi} = g(\varphi)$$

asymptotisch stabil (bei Zeitumkehr asymptotisch stabil) ist. Völlig analog gehen wir dann in den Sätzen 5.4 bzw. 5.6 für die innere DGL

$$\dot{r} = c(\varphi)r$$

$$\dot{\varphi} = d(\varphi)$$

vor. Satz 5.7 zeigt schließlich mit Hilfe der in den vorigen vier Sätzen konstruierten Kurven und dem Satz von Poincaré-Bendixson die Existenz von mindestens einer periodischen Trajektorie der DGL (5.7).

Die folgenden Sätze 5.8 bis 5.13 dienen dazu, die Aussage von Satz 5.7 auf eine Äquivalenzaussage für Existenz und Eindeutigkeit zu erweitern. Satz 5.8 ist ein Satz über die Nichtexistenz periodischer Trajektorien, in Abhängigkeit von Nullstellen der Funktionen  $d(\varphi)$  und  $g(\varphi)$ , während Satz 5.9 zeigt, daß eine periodische Trajektorie  $p(\varphi) > 0$  der DGL (5.7) keinen gemeinsamen Punkt mit der durch

$$\dot{\varphi} = d(\varphi) + g(\varphi)p^k(\varphi) = 0$$

bestimmten Kurve haben kann. D.h. die DGL für die Trajektorien der DGL (5.7)

$$\frac{dr}{d\varphi} = \frac{c(\varphi) + f(\varphi)r^k}{d(\varphi) + g(\varphi)r^k} r \quad (5.8)$$

kann in einer Umgebung einer periodischen Trajektorie  $p(\varphi)$  aufgestellt werden und dann mit Hilfe des charakteristischen Exponenten der Variationsgleichung bzgl.  $p(\varphi)$  der DGL (5.8) Eindeutigkeit im Falle der Existenz gezeigt werden. Im folgenden Satz 5.11 wird die Nichtexistenz periodischer Trajektorien bewiesen, falls die Trajektorien der inneren oder äußeren DGL also

$$\begin{array}{ccc} \dot{r} = c(\varphi)r & & \dot{r} = f(\varphi)r \\ & \text{oder} & \\ \dot{\varphi} = d(\varphi) & & \dot{\varphi} = g(\varphi) \end{array}$$

gleiches (asymptotisches) Stabilitätsverhalten haben, im Satz 5.12, falls mindestens eine der DGL einen nichtparabolischen Sektor hat und im Satz 5.13, falls mindestens eine der DGL nur periodische Lösungen besitzt.

Im Satz 5.14 werden dann die vorherigen Ergebnisse zusammengefaßt, d.h. wir geben zwei Äquivalenzbedingungen für die gesuchte Existenz und Eindeutigkeit einer periodischen Trajektorie  $p(\varphi) > 0$  der DGL (5.7) an.

Die folgenden Sätze 5.15 bzw. 5.16 dienen der Übertragung der Ergebnisse von

DGL (5.7) auf DGL (5.5). Satz 5.15 macht eine Aussage über das asymptotische (bzgl.  $\mu$ ) Verhalten im Falle der Existenz einer periodischen Trajektorie  $p(\varphi, \mu)$  der DGL (5.6). Satz 5.16 ist dann das Analogon für DGL (5.5) zu Satz 5.9 für DGL (5.7), d.h. im Falle der Existenz einer periodischen Trajektorie  $p(\varphi, \mu) > 0$  der DGL (5.5) hat  $p(\varphi, \mu)$  keine gemeinsamen Punkte mit der durch

$$\dot{\varphi} = d(\varphi) + g(\varphi)p^k + S_2(p, \varphi, \mu) = 0$$

definierten Kurve. In Bemerkung 5.17 geben wir dann zwei Beispiele für DGL, die belegen, daß eine Äquivalenzaussage wie im Satz 5.14 für (5.7) für die DGL (5.5) nicht möglich ist. Bei dem zweiten Beispiel fällt auf, daß die innere DGL sowohl hyperbolische als auch elliptische Sektoren besitzt, also  $r \equiv 0$  in der inneren DGL nicht asymptotisch sein kann und instabil ist, auch nach einer Erweiterung mit  $\mu$ .  $r \equiv 0$  in der inneren DGL wechselt also nicht bei  $\mu = 0$  sein Stabilitätsverhalten von stabil nach instabil oder umgekehrt und trotzdem besitzt die DGL für jedes  $\mu > 0$  genau eine periodische Trajektorie  $> 0$ .

Der Satz 5.18 ist dann der Hauptsatz über die Abzweigung periodischer Lösungen in Polarkoordinaten und 5.19 ein wichtiger Korollar für die Gleichung:

$$\begin{aligned}\dot{r} &= c(\varphi)r^m + f(\varphi)r^l + S_1(r, \varphi, \mu)r^m \\ \dot{\varphi} &= d(\varphi)r^{m-1} + g(\varphi)r^{l-1} + S_2(r, \varphi, \mu)r^{m-1}\end{aligned}$$

Schließlich liefern die Sätze 5.20 bis 5.22 die kartesischen Versionen von 5.14, 5.18 und 5.19, während 5.23 mehrere Beispiele ausführlich diskutiert.

## 5.2 Bemerkung:

Gilt in Bemerkung 5.1  $m = 0$ , also  $F_1(0) \neq 0$ , ist der Ursprung (für  $|\mu|$  hinreichend klein) kein stationärer Punkt der DGL (5.1) bzw. (5.3). (Beachte:  $R(0, \mu) = O(\mu^2)$ ).

Gilt  $D(\varphi) \neq 0$  zweigt vom Ursprung in  $\mu = 0$  kein stationärer Punkt ab (vgl. Satz 4.7).

Gilt also  $m = 0 \wedge D(\varphi) \neq 0$ , existiert in einer Umgebung des Ursprungs für  $\mu \neq 0$  kein stationärer Punkt und damit auch keine periodische Lösung, da die Trajektorien periodischer Lösungen stets (mindestens) einen stationären Punkt im inneren Gebiet haben müssen.

Da wir für die Hauptsätze Satz 5.14 bzw. Satz 5.18  $D(\varphi) \neq 0$  zwingend als Voraussetzung brauchen, können wir ohne wesentliche Einschränkung im folgenden  $m \geq 1$  voraussetzen.

### 5.3 Satz:

Seien  $c(\varphi), d(\varphi), g(\varphi), f(\varphi)$  definiert wie in Bemerkung 5.1. Sei weiter:

$$g(\varphi) \neq 0 \quad \forall \varphi \in [0, 2\pi] \quad \wedge \quad \int_0^{2\pi} \frac{f(\varphi)}{|g(\varphi)|} d\varphi < 0 \quad (> 0)$$

(vgl. Bemerkung 2.5.b (ii) bzw. Satz 2.4.b (ii) und Bemerkung 2.9).

Dann gilt:

$\exists C^o, \gamma_0 > 0$  und  $\gamma(\varphi) : [0, 2\pi] \rightarrow (0, \infty)$  stückweise glatt mit  $\gamma(0) = \gamma(2\pi) = 1$  sowie

$$\Gamma^o(\gamma_0) := \{(\varphi, \gamma_0 \gamma(\varphi)) \mid \varphi \in [0, 2\pi]\}$$

so daß  $\forall \gamma_0 > C^o$  alle Trajektorien der DGL

$$\begin{aligned} \dot{r} &= c(\varphi)r + f(\varphi)r^{k+1} \\ \dot{\varphi} &= d(\varphi) + g(\varphi)r^k \end{aligned} \tag{5.9}$$

wenn sie einen Punkt mit  $\Gamma^o(\gamma_0)$  gemeinsam haben,  $\Gamma^o(\gamma_0)$  von  $r \equiv 0$  aus gesehen, für wachsende  $t$  von oben nach unten (unten nach oben) schneiden.

(Beachte: Durch jeden Punkt oberhalb von  $\Gamma^o(C^o)$  läuft genau eine der Kurven  $\Gamma^o(\gamma_0)$ , da  $\gamma(\varphi) > 0$ ).

Beweis:

Definiere:

$$\bar{\alpha} := \frac{\int_0^{2\pi} \frac{f(\varphi)}{g(\varphi)} d\varphi}{\int_0^{2\pi} \frac{1}{g(\varphi)} d\varphi}$$

Mit:

$t_1 \leftrightarrow 0, t_2 \leftrightarrow 2\pi, t \leftrightarrow \varphi, c(\varphi) \leftrightarrow a_1(t), d(\varphi) \leftrightarrow a_3(t), f(\varphi) \leftrightarrow a_2(t), g(\varphi) \leftrightarrow a_4(t)$   
und  $\alpha := |\bar{\alpha}|$  können wir Satz 1.10.a auf

$$\frac{c(\varphi) + f(\varphi)r^k}{d(\varphi) + g(\varphi)r^k} \tag{5.10}$$

anwenden und erhalten:

Zu  $|\bar{\alpha}| \exists R(|\bar{\alpha}|)$  so daß  $\forall r > R(|\bar{\alpha}|)$  und  $\forall \varphi \in [0, 2\pi]$  gilt:

$$\frac{f(\varphi) - |\bar{\alpha}|}{g(\varphi)} < \frac{c(\varphi) + f(\varphi)r^k}{d(\varphi) + g(\varphi)r^k} < \frac{f(\varphi) + |\bar{\alpha}|}{g(\varphi)} \quad \text{falls } g(\varphi) > 0 \quad (5.11)$$

$$\frac{f(\varphi) + |\bar{\alpha}|}{g(\varphi)} < \frac{c(\varphi) + f(\varphi)r^k}{d(\varphi) + g(\varphi)r^k} < \frac{f(\varphi) - |\bar{\alpha}|}{g(\varphi)} \quad \text{falls } g(\varphi) < 0 \quad (5.12)$$

Definiere

$$m(|\bar{\alpha}|) := 2\pi \frac{\max_{\varphi \in [0, 2\pi]} |f(\varphi)| + |\bar{\alpha}|}{\min_{\varphi \in [0, 2\pi]} |g(\varphi)|}$$

und

$$C^o := R(|\bar{\alpha}|)e^{m(|\bar{\alpha}|)}$$

sowie

$$\gamma(\varphi) := e^{\int_0^\varphi \frac{f(\psi) - \bar{\alpha}}{g(\psi)} d\psi} > 0 \quad \gamma^o(\varphi) := \gamma_0 \gamma(\varphi) \quad \forall \gamma_0 > C^o.$$

Wegen

$$\int_0^{2\pi} \frac{f(\varphi) - \bar{\alpha}}{g(\varphi)} d\varphi = \int_0^{2\pi} \frac{f(\varphi)}{g(\varphi)} d\varphi - \bar{\alpha} \int_0^{2\pi} \frac{1}{g(\varphi)} d\varphi = 0$$

gilt

$$\gamma(0) = \gamma(2\pi) = 1 \quad \text{bzw.} \quad \gamma^o(0) = \gamma^o(2\pi) = \gamma_0$$

d.h.  $\gamma^o(\varphi)$  erfüllt die DGL mit Periodizitätsrandbedingung:

$$\frac{dr}{d\varphi} = \frac{f(\varphi) - \bar{\alpha}}{g(\varphi)} r \quad r(0) = r(2\pi) = \gamma_0$$

Weiter gilt

$$\begin{aligned} \int_0^\varphi \frac{f(\psi) - \bar{\alpha}}{g(\psi)} d\psi &\geq \varphi \min_{\psi \in [0, \varphi]} \left( \frac{f(\psi) - \bar{\alpha}}{g(\psi)} \right) \geq -\varphi \max_{\psi \in [0, \varphi]} \left| \frac{f(\psi) - \bar{\alpha}}{g(\psi)} \right| \geq \\ &\geq -2\pi \max_{\varphi \in [0, 2\pi]} \left| \frac{f(\varphi) - \bar{\alpha}}{g(\varphi)} \right| \geq -2\pi \frac{\max_{\varphi \in [0, 2\pi]} |f(\varphi)| + |\bar{\alpha}|}{\min_{\varphi \in [0, 2\pi]} |g(\varphi)|} = -m(|\bar{\alpha}|) \end{aligned}$$

woraus

$$\gamma^o(\varphi) = \gamma_0 e^{\int_0^\varphi \frac{f(\psi) - \bar{\alpha}}{g(\psi)} d\psi} > C^o e^{\int_0^\varphi \frac{f(\psi) - \bar{\alpha}}{g(\psi)} d\psi} \geq R(|\bar{\alpha}|) e^{m(|\bar{\alpha}|)} e^{-m(|\bar{\alpha}|)} = R(|\bar{\alpha}|)$$

d.h.

$$\gamma^o(\varphi) > R(|\bar{\alpha}|) \quad \forall \varphi \in [0, 2\pi] \quad (5.13)$$

folgt.

Damit gelten (5.11) und (5.12) längs  $\Gamma^o(\gamma_0)$ .

1. Fall  $g(\varphi) > 0$ .

Wir betrachten hier zunächst die Situation  $\int_0^{2\pi} \frac{f(\varphi)}{g(\varphi)} d\varphi < 0$ , d.h.  $\bar{\alpha} < 0$ .

Es ergibt sich mit (5.13) und der zweiten Ungleichung in (5.11):

$$\frac{c(\varphi) + f(\varphi)r^k}{d(\varphi) + g(\varphi)r^k} < \frac{f(\varphi) - \bar{\alpha}}{g(\varphi)}$$

Setzt man

$$H_1(r, \varphi) := c(\varphi) + f(\varphi)r^k \quad H_2(r, \varphi) := d(\varphi) + g(\varphi)r^k \quad G(\varphi) := \frac{f(\varphi) - \bar{\alpha}}{g(\varphi)}$$

folgt mit Satz 1.13.a (i) die Behauptung.

Falls  $\int_0^{2\pi} \frac{f(\varphi)}{g(\varphi)} d\varphi > 0$  gilt, also  $\bar{\alpha} > 0$  erhält man mit (5.13) und der ersten Ungleichung in (5.11):

$$\frac{f(\varphi) - \bar{\alpha}}{g(\varphi)} < \frac{c(\varphi) + f(\varphi)r^k}{d(\varphi) + g(\varphi)r^k}$$

Mit Satz 1.13.b (i) folgt auch hier die Behauptung.

2. Fall  $g(\varphi) < 0$ .

Zeigt man völlig analog dem 1. Fall, man benutzt lediglich (5.12) statt (5.11) und 1.13.b (ii) bzw 1.13 a (ii).

## 5.4 Satz:

Seien  $c(\varphi), d(\varphi), g(\varphi), f(\varphi)$  definiert wie in Bemerkung 5.1. Sei weiter:

$$d(\varphi) \neq 0 \quad \forall \varphi \in [0, 2\pi] \quad \wedge \quad \int_0^{2\pi} \frac{c(\varphi)}{|d(\varphi)|} d\varphi > 0 \quad (< 0)$$

(vgl. Bemerkung 2.5.b (ii) bzw. Satz 2.4.b (ii) und Bemerkung 2.9).

Dann gilt:

$\exists C^u, \gamma_0 > 0$  und  $\gamma(\varphi) : [0, 2\pi] \rightarrow (0, \infty)$  stückweise glatt mit  $\gamma(0) = \gamma(2\pi) = 1$  sowie

$$\Gamma^u(\gamma_0) := \{(\varphi, \gamma_0 \gamma(\varphi)) \mid \varphi \in [0, 2\pi]\}$$

so daß  $\forall \gamma_0 < C^u$  alle Trajektorien von (5.9), wenn sie einen Punkt mit  $\Gamma^u(\gamma_0)$  gemeinsam haben,  $\Gamma^u(\gamma_0)$  von  $r \equiv 0$  aus gesehen, für wachsende  $t$  von unten nach oben (oben nach unten) schneiden.

(Beachte: Durch jeden Punkt zwischen  $r \equiv 0$  und  $\Gamma^u(C^u)$  läuft genau eine der Kurven  $\Gamma^u(\gamma_0)$ , da  $\gamma(\varphi) > 0$ ).

Beweis:

Wir gehen vor wie im Satz 5.3, definieren zunächst

$$\bar{\beta} := \frac{\int_0^{2\pi} \frac{c(\varphi)}{d(\varphi)} d\varphi}{\int_0^{2\pi} \frac{1}{d(\varphi)} d\varphi}$$

wenden Satz 1.10.b statt 1.10.a auf (5.10) an und erhalten:

Zu  $|\bar{\beta}| \exists R(|\bar{\beta}|)$  so daß  $\forall r < R(|\bar{\beta}|)$  und  $\forall \varphi \in [0, 2\pi]$  gilt:

$$\frac{c(\varphi) - |\bar{\beta}|}{d(\varphi)} < \frac{c(\varphi) + f(\varphi)r^k}{d(\varphi) + g(\varphi)r^k} < \frac{c(\varphi) + |\bar{\beta}|}{d(\varphi)} \quad \text{falls } d(\varphi) > 0 \quad (5.14)$$

$$\frac{c(\varphi) + |\bar{\beta}|}{d(\varphi)} < \frac{c(\varphi) + f(\varphi)r^k}{d(\varphi) + g(\varphi)r^k} < \frac{c(\varphi) - |\bar{\beta}|}{d(\varphi)} \quad \text{falls } d(\varphi) < 0 \quad (5.15)$$

Wir definieren (vgl. Beweis von Satz 5.3)

$$m(|\bar{\beta}|) := 2\pi \frac{\max_{\varphi \in [0, 2\pi]} |c(\varphi)| + |\bar{\beta}|}{\min_{\varphi \in [0, 2\pi]} |d(\varphi)|}$$

und

$$C^u := R(|\bar{\beta}|)e^{-m(|\bar{\beta}|)}$$

sowie

$$\gamma(\varphi) := e^{\int_0^\varphi \frac{c(\psi) - \bar{\beta}}{d(\psi)} d\psi} > 0 \quad \text{bzw.} \quad \gamma^u(\varphi) := \gamma_0 \gamma(\varphi) \quad 0 < \gamma_0 < C^u$$

d.h.  $\gamma^u(\varphi)$  erfüllt die DGL mit Periodizitätsrandbedingung:

$$\frac{dr}{d\varphi} = \frac{c(\varphi) - \bar{\beta}}{d(\varphi)} r \quad r(0) = r(2\pi) = \gamma_0$$

Weiter gilt:

$$\gamma(\varphi) = \gamma_0 e^{\int_0^\varphi \frac{c(\psi) - \bar{\beta}}{d(\psi)} d\psi} < C^u e^{\int_0^\varphi \frac{c(\psi) - \bar{\beta}}{d(\psi)} d\psi} \leq R(|\bar{\beta}|) e^{-m(|\bar{\beta}|)} e^{m(|\bar{\beta}|)} = R(|\bar{\beta}|)$$

(5.14) und (5.15) gelten somit längs  $\Gamma^u(\gamma_0)$ .

Der Rest des Beweises läuft analog dem Beweis von Satz 5.3, man benutzt lediglich (5.14) und (5.15) statt (5.11) und (5.12) sowie  $G(\varphi) := \frac{c(\varphi) - \bar{\beta}}{d(\varphi)}$ .

## 5.5 Satz:

Seien  $c(\varphi), d(\varphi), g(\varphi), f(\varphi)$  definiert wie in Bemerkung 5.1 und es gelte  $\forall \hat{\varphi} \in [0, 2\pi]$  mit  $g(\hat{\varphi}) = 0$ :

$$f(\hat{\varphi}) < 0 \quad (> 0)$$

(vgl. Bemerkung 2.5.a+c (i) bzw. Satz 2.4.a+c (i) und Bemerkung 2.9).

Dann gilt:

$\exists C^o, \gamma_0 > 0$  und  $\gamma(\varphi) : [0, 2\pi] \rightarrow [1, \infty)$  stückweise glatt mit  $\gamma(0) = \gamma(2\pi) = 1$  sowie

$$\Gamma^o(\gamma_0) := \{(\varphi, \gamma_0 \gamma(\varphi)) \mid \varphi \in [0, 2\pi]\}$$

so daß  $\forall \gamma_0 > C^o$  alle Trajektorien der DGL (5.9), wenn sie einen Punkt mit  $\Gamma^o(\gamma_0)$  gemeinsam haben,  $\Gamma^o(\gamma_0)$  von  $r \equiv 0$  aus gesehen, für wachsende  $t$  von oben nach unten (unten nach oben) schneiden.

(Auch hier läuft durch jeden Punkt oberhalb von  $\Gamma^o(C^o)$  genau eine der Kurven  $\Gamma^o(\gamma_0)$ ).

Beweis:

Wir betrachten zuerst die Situation  $f(\hat{\varphi}) < 0$

1.Fall:  $g(\varphi) \equiv 0$ .

Hier gilt  $f(\varphi) < 0 \quad \forall \varphi \in [0, 2\pi]$ .

Definiere:

$$C^o := k \sqrt{-\frac{\max_{\varphi \in [0, 2\pi]} |c(\varphi)|}{\max_{\varphi \in [0, 2\pi]} f(\varphi)}}$$

$$\gamma(\varphi) := 1 \quad \text{bzw.} \quad \gamma^o(\varphi) := \gamma_0 \gamma(\varphi) \equiv \gamma_0 \quad \forall \gamma_0 > C^o$$

Es gilt

$$c(\varphi) + f(\varphi)\gamma_0^k < c(\varphi) + f(\varphi)(C^o)^k \leq \max_{\varphi \in [0, 2\pi]} |c(\varphi)| + \max_{\varphi \in [0, 2\pi]} f(\varphi)(C^o)^k = 0$$

und damit

$$\dot{r}|_{\Gamma^o(\gamma_0)} = \dot{r}(\varphi, \gamma_0) = (c(\varphi) + f(\varphi)\gamma_0^k)\gamma_0 < 0 \quad \forall \gamma_0 > C^o$$

d.h. alle Trajektorien von DGL (5.9), die einen Punkt mit  $\Gamma^o(\gamma_0)$  gemeinsam haben, schneiden  $\Gamma^o(\gamma_0)$  von oben nach unten, falls  $\gamma_0 > C^o$ .

2.Fall:  $g(\varphi) = 0 \wedge g(\varphi) \not\equiv 0$ .

Seien  $\varphi_1 < \varphi_2 < \dots < \varphi_{n_1}$  genau die Nullstellen von  $g(\varphi)$  in  $[0, 2\pi)$  also

$$g(\varphi_i) = 0 \quad \varphi_i \in [0, 2\pi) \quad i = 1, \dots, n_1 \quad \text{und} \quad \varphi_{n_1+1} := \varphi_1 + 2\pi \in [2\pi, 4\pi)$$

Die Menge  $I = \{1, \dots, n_1\}$  zerfällt in drei disjunkte Teilmengen  $I_1, I_2, I_3$ :

$$I_1 := \{i \in I \mid f(\varphi) < 0 \quad \forall \varphi \in [\varphi_i, \varphi_{i+1}]\}$$

$$I_2 := \{i \in I \mid \exists \bar{\varphi} \in [\varphi_i, \varphi_{i+1}] \text{ mit } f(\bar{\varphi}) = 0 \wedge g(\bar{\varphi}) > 0\}$$

$$I_3 := \{i \in I \mid \exists \bar{\varphi} \in [\varphi_i, \varphi_{i+1}] \text{ mit } f(\bar{\varphi}) = 0 \wedge g(\bar{\varphi}) < 0\}$$

Im Falle  $i \in I_1$  sieht man wie oben im 1.Fall mit

$$C_i^o := k \sqrt{-\frac{\max_{\varphi \in [\varphi_i, \varphi_{i+1}]} |c(\varphi)|}{\max_{\varphi \in [\varphi_i, \varphi_{i+1}]} f(\varphi)}}$$

daß  $\dot{r}(\varphi, \gamma_0) < 0$  gilt  $\forall \gamma_0 > C_i^o \wedge \varphi \in [\varphi_i, \varphi_{i+1}]$ .

Falls  $i \in I_2 \cup I_3$  definieren wir

$$\bar{\alpha} := \frac{1}{2} \max_{i \in I} f(\varphi_i) < 0 \quad \left( \implies \bar{\alpha} > f(\varphi_i) \quad \forall i \in I \right)$$

da n.V.  $f(\varphi)$  an den Nullstellen von  $g(\varphi)$  stets  $< 0$  ist.

Definiere weiter

$$h_\alpha(\psi, \chi) := \int_{\psi}^{\chi} \frac{f(\varphi) - \bar{\alpha}}{g(\varphi)} d\varphi$$

und falls  $i \in I_2$

$$\psi_1^{(i)} := \min \{ \bar{\psi} \in (\varphi_i, \varphi_{i+1}) \mid f(\bar{\psi}) - \bar{\alpha} = 0 \wedge$$

$$\begin{aligned}
& \wedge \forall \epsilon > 0 \exists \psi_1, \psi_2 \text{ mit } \psi_1 < \bar{\psi} < \psi_2 \in U_\epsilon(\bar{\psi}) \text{ und } (f(\psi_1) - \bar{\alpha})(f(\psi_2) - \bar{\alpha}) < 0 \} \\
\chi_1^{(i)} &:= \min \{ \bar{\chi} \in (\psi_1^{(i)}, \varphi_{i+1}) \mid h_\alpha(\psi_1^{(i)}, \bar{\chi}) = 0 \} \\
\psi_{j+1}^{(i)} &:= \min \{ \bar{\psi} \in [\chi_j^{(i)}, \varphi_{i+1}) \mid f(\bar{\psi}) - \bar{\alpha} = 0 \wedge \\
& \wedge \forall \epsilon > 0 \exists \psi_1, \psi_2 \text{ mit } \psi_1 < \bar{\psi} < \psi_2 \in U_\epsilon(\bar{\psi}) \text{ und } (f(\psi_1) - \bar{\alpha})(f(\psi_2) - \bar{\alpha}) < 0 \} \\
\chi_{j+1}^{(i)} &:= \min \{ \bar{\chi} \in (\psi_{j+1}^{(i)}, \varphi_{i+1}) \mid h_\alpha(\psi_{j+1}^{(i)}, \bar{\chi}) = 0 \}
\end{aligned}$$

bzw. falls  $i \in I_3$

$$\begin{aligned}
\tilde{\psi}_1^{(i)} &:= \max \{ \bar{\psi} \in (\varphi_i, \varphi_{i+1}) \mid f(\bar{\psi}) - \bar{\alpha} = 0 \wedge \\
& \wedge \forall \epsilon > 0 \exists \psi_1, \psi_2 \text{ mit } \psi_1 < \bar{\psi} < \psi_2 \in U_\epsilon(\bar{\psi}) \text{ und } (f(\psi_1) - \bar{\alpha})(f(\psi_2) - \bar{\alpha}) < 0 \} \\
\tilde{\chi}_1^{(i)} &:= \max \{ \bar{\chi} \in (\varphi_i, \tilde{\psi}_1^{(i)}) \mid h_\alpha(\bar{\chi}, \tilde{\psi}_1^{(i)}) = 0 \} \\
\tilde{\psi}_{j+1}^{(i)} &:= \max \{ \bar{\psi} \in (\varphi_i, \tilde{\chi}_j^{(i)}) \mid f(\bar{\psi}) - \bar{\alpha} = 0 \wedge \\
& \wedge \forall \epsilon > 0 \exists \psi_1, \psi_2 \text{ mit } \psi_1 < \bar{\psi} < \psi_2 \in U_\epsilon(\bar{\psi}) \text{ und } (f(\psi_1) - \bar{\alpha})(f(\psi_2) - \bar{\alpha}) < 0 \} \\
\tilde{\chi}_{j+1}^{(i)} &:= \max \{ \bar{\chi} \in (\varphi_i, \tilde{\psi}_{j+1}^{(i)}) \mid h_\alpha(\bar{\chi}, \tilde{\psi}_{j+1}^{(i)}) = 0 \}
\end{aligned}$$

Wir zeigen:  $\psi_1^{(i)}, \chi_1^{(i)}$  existieren, falls  $I_2 \neq \emptyset$

$f(\varphi)$  ist analytisch  $\implies f(\varphi)$  hat nur endlich viele Nullstellen in  $[0, 2\pi]$  und nach Definition  $I_2$  mindestens eine in  $(\varphi_i, \varphi_{i+1})$ . Die kleinste Nullstelle in  $(\varphi_i, \varphi_{i+1})$  sei  $\psi_i$ . Für  $\psi_i$  gilt:

$$\begin{aligned}
f(\psi_i) - \bar{\alpha} &= 0 - \bar{\alpha} > 0. \text{ Weiter gilt noch (s.o.):} \\
\bar{\alpha} > f(\varphi_i) &\implies f(\varphi_i) - \bar{\alpha} < 0.
\end{aligned}$$

Mit dem Zwischenwertsatz, angewandt auf die Funktion  $f(\varphi) - \bar{\alpha}$  folgt die Existenz von mindestens einer Nullstelle von  $f(\varphi) - \bar{\alpha}$  und da auch  $f(\varphi) - \bar{\alpha}$  nur endlich viele Nullstellen haben kann, die Existenz einer kleinsten Nullstelle mit Vorzeichenwechsel, also  $\psi_1^{(i)}$ .

Nach Konstruktion von  $\psi_1^{(i)} \exists \bar{\epsilon} > 0$  mit

$$\text{sign}(f(\varphi) - \bar{\alpha}) = -\text{sign}(f(\varphi_i)) > 0 \quad \forall \varphi \in (\psi_1^{(i)}, \psi_1^{(i)} + \bar{\epsilon}).$$

Außerdem gilt mit Satz 1.8.a:

$$\lim_{\chi \rightarrow \varphi_{i+1}} h_\alpha(\psi_1^{(i)}, \chi) = \text{sign}(f(\varphi_{i+1}) - \bar{\alpha}) \text{sign}(g(\psi_1^{(i)})) \cdot \infty = (-1)(+1)\infty = -\infty$$

Mit dem Zwischenwertsatz folgt, wie eben bei  $\psi_1^{(i)}$  gezeigt, die Existenz von  $\chi_1^{(i)}$  mit offensichtlich  $f(\chi_1^{(i)}) < \bar{\alpha}$ .

Das gesamte Verfahren bricht nach  $\omega_i \geq 1$  Schritten ab, da  $f(\varphi) - \bar{\alpha}$  nur endlich

viele Nullstellen haben kann.

Falls  $I_3 \neq \emptyset$  zeigt man völlig analog die Existenz von  $\tilde{\psi}_1^{(i)}, \tilde{\chi}_1^{(i)}, \tilde{\omega}_i$ .

Definiere dann:

$$\delta_1 := \frac{1}{2} \min \left\{ \min_{i \in I_2} \left\{ |\varphi_i - \psi_1^{(i)}|; |\chi_{\omega_i}^{(i)} - \varphi_{i+1}| \right\}; \min_{i \in I_3} \left\{ |\varphi_i - \tilde{\chi}_{\tilde{\omega}_i}^{(i)}|; |\tilde{\psi}_1^{(i)} - \varphi_{i+1}| \right\} \right\}$$

Wir wenden Satz 1.10.a jeweils über den Intervallen  $[\varphi_i + \delta_1, \varphi_{i+1} - \delta_1]$  auf (5.10) an und erhalten:

Zu  $|\bar{\alpha}| \exists R_i^o(|\bar{\alpha}|)$  so daß  $\forall r > R_i^o(\alpha) \forall \varphi \in [\varphi_i + \delta_1, \varphi_{i+1} - \delta_1] i \in I_2 \cup I_3$  gilt:

$$\text{sign}(g(\varphi)) = \text{sign}(d(\varphi) + g(\varphi)r^k)$$

und

$$\frac{f(\varphi) - |\bar{\alpha}|}{g(\varphi)} < \frac{c(\varphi) + f(\varphi)r^k}{d(\varphi) + g(\varphi)r^k} < \frac{f(\varphi) + |\bar{\alpha}|}{g(\varphi)} \quad \text{falls } i \in I_2 \quad (5.16)$$

$$\frac{f(\varphi) + |\bar{\alpha}|}{g(\varphi)} < \frac{c(\varphi) + f(\varphi)r^k}{d(\varphi) + g(\varphi)r^k} < \frac{f(\varphi) - |\bar{\alpha}|}{g(\varphi)} \quad \text{falls } i \in I_3 \quad (5.17)$$

Sei

$$R^o(|\bar{\alpha}|) := \max_{i \in I_2 \cup I_3} R_i^o(|\bar{\alpha}|)$$

und

$$C^o := \max \left\{ \max_{i \in I_1} C_i^o; R^o(|\bar{\alpha}|); \sqrt[k]{\frac{\max_{\varphi \in [0, 2\pi]} |c(\varphi)|}{|\bar{\alpha}|}} \right\}$$

sowie

$$\gamma(\varphi) := \begin{cases} e^{h_\alpha(\psi_j^{(i)}, \varphi)} & \text{falls } \varphi \in [\psi_j^{(i)}, \chi_j^{(i)}] \\ e^{h_\alpha(\tilde{\chi}_j^{(i)}, \varphi)} & \text{falls } \varphi \in [\tilde{\chi}_j^{(i)}, \tilde{\psi}_j^{(i)}] \\ 1 & \text{sonst} \end{cases}$$

bzw.

$$\gamma^o(\varphi) := \gamma_0 \gamma(\varphi) \quad \forall \gamma_0 > C^o$$

Für  $i \in I_1$  haben wir  $\dot{r}(\varphi, \gamma_0) < 0$  bereits gezeigt, woraus für  $i \in I_1$  die Behauptung folgt.

Für  $i \in I_2$  beginnen wir mit den Intervallen  $[\varphi_i, \varphi_i + \delta_1], [\varphi_{i+1} - \delta_1, \varphi_{i+1}], [\chi_j^{(i)}, \psi_{j+1}^{(i)}] 1 \leq j \leq \omega_i$

Hier gilt nach Konstruktion:  $f(\varphi) - \bar{\alpha} \leq 0 \implies f(\varphi) \leq \bar{\alpha} < 0$ .

Damit gilt:

$$c(\varphi) + f(\varphi)\gamma_0^k \leq \max_{\varphi \in [0, 2\pi]} |c(\varphi)| + \bar{\alpha}\gamma_0^k < \max_{\varphi \in [0, 2\pi]} |c(\varphi)| + \bar{\alpha}(C^o)^k = 0$$

woraus  $\dot{r}(\varphi, \gamma_0) < 0$  auf den Intervallen folgt.

Weiter gilt für die Intervalle  $[\psi_j^{(i)}, \chi_j^{(i)}]$ :

$\gamma^o(\varphi) \Big|_{[\psi_j^{(i)}, \chi_j^{(i)}]}$  ist Lösung der DGL mit Periodizitätsrandbedingung:

$$\frac{dr}{d\varphi} = \frac{f(\varphi) - \bar{\alpha}}{g(\varphi)} r \quad r(\psi_j^{(i)}) = r(\chi_j^{(i)}) = \gamma_0$$

wobei nach Konstruktion  $\gamma^o(\varphi) \geq \gamma_0 > 0 \ \forall \varphi \in [\psi_j^{(i)}, \chi_j^{(i)}]$  gilt.

Mit der zweiten Ungleichung in (5.16) und Satz 1.13.a (i) folgt hier  $(f(\varphi_i) < 0$  und  $|\bar{\alpha}| = -\bar{\alpha})$  die Behauptung für  $i \in I_2$ .

Für  $i \in I_3$  geht man völlig analog vor, man benutzt am Schluß lediglich die erste Ungleichung in (5.17) und Satz 1.13.b (ii).

Damit ist die Behauptung für den Fall  $f(\varphi_i) < 0 \ i \in I = I_1 \cup I_2 \cup I_3$  gezeigt.

Den noch ausstehenden Fall  $f(\varphi_i) > 0 \ i \in I$  beweist man so:

Zuerst macht man Zeitumkehr, d.h.  $f(\varphi) \rightarrow -f(\varphi)$ ,  $g(\varphi) \rightarrow -g(\varphi)$ . Dann kann der bisherige Beweis vollständig übernommen werden. Macht man noch einmal Zeitumkehr, ist alles gezeigt.

## 5.6 Satz:

Seien  $c(\varphi), d(\varphi), g(\varphi), f(\varphi)$  definiert wie in Bemerkung 5.1 und es gelte  $\forall \hat{\phi} \in [0, 2\pi]$  mit  $d(\hat{\phi}) = 0$ :

$$c(\hat{\phi}) > 0 \ (\leq 0)$$

(vgl. Bemerkung 2.5.a+c (i) bzw. Satz 2.4.a+c (i) und Bemerkung 2.9).

Dann gilt:

$\exists C^u, \gamma_0 > 0$  und  $\gamma(\varphi) : [0, 2\pi] \rightarrow (0, 1]$  stückweise glatt mit  $\gamma(0) = \gamma(2\pi) = 1$  sowie

$$\Gamma^u(\gamma_0) := \{(\varphi, \gamma_0 \gamma(\varphi)) \mid \varphi \in [0, 2\pi]\}$$

so daß  $\forall \gamma_0$  mit  $0 < \gamma_0 < C^u$  die Trajektorien von (5.9), wenn sie einen Punkt mit  $\Gamma^u(\gamma_0)$  gemeinsam haben,  $\Gamma^u(\gamma_0)$  von  $r \equiv 0$  aus gesehen, für wachsende  $t$  von unten nach oben (oben nach unten) schneiden.

(Auch hier läuft durch jeden Punkt zwischen  $r \equiv 0$  und  $\Gamma^u(C^u)$  genau eine der Kurven  $\Gamma^u(\gamma_0)$ ).

Beweis:

Wir betrachten zuerst die Situation  $c(\hat{\phi}) > 0$ .

1. Fall  $d(\varphi) \equiv 0$ .

Hier gilt  $c(\varphi) > 0 \forall \varphi \in [0, 2\pi]$ .

Gilt  $f(\varphi) \equiv 0$ , ist offensichtlich

$$\dot{r}(\varphi, r) = (c(\varphi) + 0 \cdot r^k)r > 0 = c(\varphi)r > 0$$

$\forall r > 0$  und  $\forall \varphi \in [0, 2\pi]$ . Hier kann  $\gamma(\varphi) := 1$  gewählt werden.

Gilt  $f(\varphi) \not\equiv 0$ , definiere

$$C^u := k \sqrt{\frac{\min_{\varphi \in [0, 2\pi]} c(\varphi)}{\max_{\varphi \in [0, 2\pi]} |f(\varphi)|}} \quad \gamma(\varphi) := 1$$

Es gilt  $\forall \gamma_0$  mit  $0 < \gamma_0 < C^u$

$$c(\varphi) + f(\varphi)\gamma_0^k \geq \min_{\varphi \in [0, 2\pi]} c(\varphi) - \max_{\varphi \in [0, 2\pi]} |f(\varphi)|\gamma_0^k > \min_{\varphi \in [0, 2\pi]} c(\varphi) - \max_{\varphi \in [0, 2\pi]} |f(\varphi)|(C^u)^k = 0$$

und damit

$$\dot{r}|_{\Gamma^u(\gamma_0)} = \dot{r}(\varphi, \gamma_0) = (c(\varphi) + f(\varphi)\gamma_0^k)\gamma_0 > 0 \quad 0 < \gamma_0 < C^u$$

D.h. alle Trajektorien von DGL (5.9), die einen Punkt mit  $\Gamma^u(\gamma_0)$  gemeinsam haben, schneiden  $\Gamma^u(\gamma_0)$  von unten nach oben, falls  $0 < \gamma_0 < C^u$ .

2.Fall  $d(\varphi) = 0 \wedge d(\varphi) \not\equiv 0$

Seien  $\phi_1 < \phi_2 < \dots < \phi_{n_2+1}$  genau die Nullstellen von  $d(\varphi)$  in  $[0, 2\pi)$  also

$$d(\phi_i) = 0 \quad \phi_i \in [0, 2\pi) \quad i = 1, \dots, n_2 \quad \text{und} \quad \phi_{n_2+1} := \phi_1 + 2\pi \in [2\pi, 4\pi)$$

Die Menge  $J = \{1, \dots, n_2\}$  zerfällt in drei disjunkte Teilmengen  $J_1, J_2, J_3$ :

$$J_1 := \{i \in J \mid c(\varphi) \neq 0 \forall \varphi \in [\phi_i, \phi_{i+1}]\}$$

$$J_2 := \{i \in J \mid \exists \bar{\varphi} \in [\phi_i, \phi_{i+1}] \text{ mit } c(\bar{\varphi}) = 0 \wedge d(\bar{\varphi}) > 0\}$$

$$J_3 := \{i \in J \mid \exists \bar{\varphi} \in [\phi_i, \phi_{i+1}] \text{ mit } c(\bar{\varphi}) = 0 \wedge d(\bar{\varphi}) < 0\}$$

Im Falle  $i \in J_1$  und  $f(\varphi) \equiv 0$  sieht man wieder sofort  $\dot{r} > 0 \forall r > 0 \wedge \forall \varphi \in [0, 2\pi]$  da n.V.  $c(\varphi) > 0$ .

Falls  $i \in J_1$  und  $f(\varphi) \not\equiv 0$  sieht man wie oben beim 1. Fall mit

$$C_i^u := k \sqrt{\frac{\min_{\varphi \in [\phi_i, \phi_{i+1}]} c(\varphi)}{\max_{\varphi \in [\phi_i, \phi_{i+1}]} |f(\varphi)|}}$$

daß  $\dot{r}(\varphi, \gamma_0) > 0$  gilt  $\forall \gamma_0$  mit  $0 < \gamma_0 < C^u \wedge \varphi \in [\phi_i, \phi_{i+1}] \quad i \in J_1$ .

Falls  $i \in J_2 \cup J_3$  definieren wir

$$\bar{\beta} := \frac{1}{2} \min_{i \in J} c(\phi_i) > 0 \quad \left( \implies \bar{\beta} < c(\phi_i) \quad \forall i \in J \right)$$

da n.V.  $c(\varphi)$  an den Nullstellen von  $d(\varphi)$  stets  $> 0$  ist.

Definiere weiter

$$h_\beta(\vartheta, \xi) := \int_{\vartheta}^{\xi} \frac{c(\varphi) - \bar{\beta}}{d(\varphi)} d\varphi$$

und falls  $i \in J_2$

$$\vartheta_1^{(i)} := \min \{ \bar{\vartheta} \in (\phi_i, \phi_{i+1}) \mid c(\bar{\vartheta}) - \bar{\beta} = 0 \wedge$$

$$\wedge \forall \epsilon > 0 \exists \vartheta_1, \vartheta_2 \text{ mit } \vartheta_1 < \bar{\vartheta} < \vartheta_2 \in U_\epsilon(\bar{\vartheta}) \text{ und } (c(\vartheta_1) - \bar{\beta})(c(\vartheta_2) - \bar{\beta}) < 0 \}$$

$$\xi_1^{(i)} := \min \{ \bar{\xi} \in (\vartheta_1^{(i)}, \phi_{i+1}) \mid h_\beta(\vartheta_1^{(i)}, \bar{\xi}) = 0 \}$$

$$\vartheta_{j+1}^{(i)} := \min \{ \bar{\vartheta} \in [\xi_j^{(i)}, \phi_{i+1}) \mid c(\bar{\vartheta}) - \bar{\beta} = 0 \wedge$$

$$\wedge \forall \epsilon > 0 \exists \vartheta_1, \vartheta_2 \text{ mit } \vartheta_1 < \bar{\vartheta} < \vartheta_2 \in U_\epsilon(\bar{\vartheta}) \text{ und } (c(\vartheta_1) - \bar{\beta})(c(\vartheta_2) - \bar{\beta}) < 0 \}$$

$$\xi_{j+1}^{(i)} := \min \{ \bar{\xi} \in (\vartheta_{j+1}^{(i)}, \phi_{i+1}) \mid h_\beta(\vartheta_{j+1}^{(i)}, \bar{\xi}) = 0 \}$$

bzw  $i \in J_3$

$$\tilde{\vartheta}_1^{(i)} := \max \{ \bar{\vartheta} \in (\phi_i, \phi_{i+1}) \mid c(\bar{\vartheta}) - \bar{\beta} = 0 \wedge$$

$$\wedge \forall \epsilon > 0 \exists \vartheta_1, \vartheta_2 \text{ mit } \vartheta_1 < \bar{\vartheta} < \vartheta_2 \in U_\epsilon(\bar{\vartheta}) \text{ und } (c(\vartheta_1) - \bar{\beta})(c(\vartheta_2) - \bar{\beta}) < 0 \}$$

$$\tilde{\xi}_1^{(i)} := \max \{ \bar{\xi} \in (\phi_i, \tilde{\xi}_1^{(i)}) \mid h_\beta(\bar{\xi}, \tilde{\vartheta}_1^{(i)}) = 0 \}$$

$$\tilde{\vartheta}_{j+1}^{(i)} := \max \{ \bar{\vartheta} \in (\phi_i, \tilde{\xi}_j^{(i)}) \mid c(\bar{\vartheta}) - \bar{\beta} = 0 \wedge$$

$$\wedge \forall \epsilon > 0 \exists \vartheta_1, \vartheta_2 \text{ mit } \vartheta_1 < \bar{\vartheta} < \vartheta_2 \in U_\epsilon(\bar{\vartheta}) \text{ und } (c(\vartheta_1) - \bar{\beta})(c(\vartheta_2) - \bar{\beta}) < 0 \}$$

$$\tilde{\xi}_{j+1}^{(i)} := \max \{ \bar{\xi} \in (\phi_i, \tilde{\vartheta}_{j+1}^{(i)}) \mid h_\beta(\bar{\xi}, \tilde{\vartheta}_{j+1}^{(i)}) = 0 \}$$

Die Existenz von  $\vartheta_1^{(i)}, \xi_1^{(i)}$  falls  $J_2 \neq \emptyset$  bzw. von  $\tilde{\vartheta}_1^{(i)}, \tilde{\xi}_1^{(i)}$  falls  $J_3 \neq \emptyset$  sieht man wie im Beweis von Satz 5.5 mit Hilfe des Zwischenwertsatzes.

Die Konstruktionen für  $\vartheta_{j+1}^{(i)}, \xi_{j+1}^{(i)}$  bzw. für  $\tilde{\vartheta}_{j+1}^{(i)}, \tilde{\xi}_{j+1}^{(i)}$  brechen nach  $\zeta_i$  bzw.  $\tilde{\zeta}_i$  Schritten ab (vgl.  $\omega_i, \tilde{\omega}_i$  in Satz 5.5).

Definiere dann:

$$\delta_2 := \frac{1}{2} \min \left\{ \min_{i \in J_2} \left\{ |\phi_i - \vartheta_1^{(i)}|; |\xi_{\zeta_i}^{(i)} - \phi_{i+1}| \right\} ; \min_{i \in J_3} \left\{ |\phi_i - \tilde{\xi}_{\tilde{\zeta}_i}^{(i)}|; |\tilde{\vartheta}_1^{(i)} - \phi_{i+1}| \right\} \right\}$$

Wir wenden Satz 1.10.b jeweils über den Intervallen  $[\phi_i + \delta_2, \phi_{i+1} - \delta_2]$   $i \in J_2 \cup J_3$  auf (5.10) an und erhalten:

Zu  $|\bar{\beta}| \exists R_i^u(|\bar{\beta}|)$  so daß  $\forall r < R_i^u \forall \varphi \in [\phi_i + \delta_2, \phi_{i+1} - \delta_2]$   $i \in J_2 \cup J_3$  gilt:

$$\text{sign}(d(\varphi)) = \text{sign}(d(\varphi) + g(\varphi)r^k)$$

und

$$\frac{c(\varphi) - |\bar{\beta}|}{d(\varphi)} < \frac{c(\varphi) + f(\varphi)r^k}{d(\varphi) + g(\varphi)r^k} < \frac{c(\varphi) + |\bar{\beta}|}{d(\varphi)} \quad \text{falls } i \in J_2 \quad (5.18)$$

$$\frac{c(\varphi) + |\bar{\beta}|}{d(\varphi)} < \frac{c(\varphi) + f(\varphi)r^k}{d(\varphi) + g(\varphi)r^k} < \frac{c(\varphi) - |\bar{\beta}|}{d(\varphi)} \quad \text{falls } i \in J_3 \quad (5.19)$$

Sei

$$R^u(|\bar{\beta}|) := \min_{i \in J_2 \cup J_3} R_i^u(|\bar{\beta}|)$$

und

$$C^u := \min \left\{ \min_{i \in J_1} C_i^u ; R^u(|\bar{\beta}|) ; k \sqrt{\frac{|\bar{\beta}|}{\max_{\varphi \in [0, 2\pi]} |f(\varphi)|}} \right\}$$

sowie

$$\gamma(\varphi) := \begin{cases} e^{h_\beta(\vartheta_j^{(i)}, \varphi)} & \text{falls } \varphi \in [\vartheta_j^{(i)}, \xi_j^{(i)}] \\ e^{h_\beta(\tilde{\xi}_j^{(i)}, \varphi)} & \text{falls } \varphi \in [\tilde{\xi}_j^{(i)}, \tilde{\vartheta}_j^{(i)}] \\ 1 & \text{sonst} \end{cases}$$

bzw.

$$\gamma^u(\varphi) := \gamma_0 \gamma(\varphi)$$

Den Rest der Behauptung beweist man analog Satz 5.5, wobei hier nach Konstruktion  $0 < \gamma^u(\varphi) \leq \gamma_0$  gilt.

## 5.7 Satz:

Seien  $c(\varphi), d(\varphi), f(\varphi), g(\varphi)$  definiert wie in Bemerkung 5.1 und die DGL (5.9) besitze außerhalb  $r \equiv 0$  keine stationären Punkte.

Weiter gelte:

(i) In der DGL

$$\dot{r} = f(\varphi)r \quad (5.20)$$

$$\dot{\varphi} = g(\varphi)$$

sei  $r \equiv 0$  asymptotisch stabil (bei Zeitumkehr asymptotisch stabil).

(ii) In der DGL

$$\dot{r} = c(\varphi)r \quad (5.21)$$

$$\dot{\varphi} = d(\varphi)$$

sei  $r \equiv 0$  bei Zeitumkehr asymptotisch stabil (asymptotisch stabil).

Dann gilt:

Die DGL (5.9) besitzt eine Trajektorie  $p(\varphi) > 0$  mit  $p(0) = p(2\pi)$ .

Beweis:

Mit Bemerkung 2.9, den Sätzen 5.3 - 5.6 und dem Satz von Poincaré-Bendixson (vgl. [21] S. 391) folgt die Behauptung.

## 5.8 Satz:

Seien  $c(\varphi), d(\varphi), f(\varphi), g(\varphi)$  definiert wie in Bemerkung 5.1. Weiter sei:

- (i)  $d(\varphi_1) = 0 \quad \wedge \quad d(\varphi) \neq 0 \quad \forall \varphi \in (\varphi_1, \varphi_2]$
- (ii)  $g(\varphi_2) = 0 \quad \wedge \quad g(\varphi) \neq 0 \quad \forall \varphi \in [\varphi_1, \varphi_2)$
- (iii)  $\text{sign}(d(\varphi)) \neq \text{sign}(g(\varphi)) \quad \forall \varphi \in (\varphi_1, \varphi_2)$

oder

- (i)'  $g(\varphi_3) = 0 \quad \wedge \quad g(\varphi) \neq 0 \quad \forall \varphi \in (\varphi_3, \varphi_4]$
- (ii)'  $d(\varphi_4) = 0 \quad \wedge \quad d(\varphi) \neq 0 \quad \forall \varphi \in [\varphi_3, \varphi_4)$
- (iii)'  $\text{sign}(d(\varphi)) \neq \text{sign}(g(\varphi)) \quad \forall \varphi \in (\varphi_3, \varphi_4)$

Dann gilt:

Die DGL (5.9) besitzt keine Trajektorie  $p(\varphi) > 0$  mit  $p(0) = p(2\pi)$ .

Beweis:

Annahme:

$\exists$  Trajektorie  $p(\varphi) > 0$  mit  $p(0) = p(2\pi)$ .

Wir behandeln zunächst die Voraussetzungen (i)-(iii):

$$\dot{\varphi}(\varphi_1, r) = d(\varphi_1) + g(\varphi_1)r^k = g(\varphi_1)r^k \implies \text{sign}(\dot{\varphi}(\varphi_1, r)) = \text{sign}(g(\varphi_1)) \quad \forall r > 0$$

$$\dot{\varphi}(\varphi_2, r) = d(\varphi_2) + g(\varphi_2)r^k = d(\varphi_2) \implies \text{sign}(\dot{\varphi}(\varphi_2, r)) = \text{sign}(d(\varphi_2)) \quad \forall r > 0$$

Es gilt also insgesamt:

$$\text{sign}(\dot{\varphi}(\varphi_1, r)) \neq \text{sign}(\dot{\varphi}(\varphi_2, r)) \quad \forall r > 0$$

d.h. alle Trajektorien von DGL (5.9), die einen Punkt mit den beiden senkrechten Halbgeraden  $\{(\varphi_i, r) \mid r > 0 \ i = 1, 2\}$  gemeinsam haben, laufen entweder in den

von den Halbgeraden begrenzten Streifen hinein (falls  $\text{sign}(\dot{\varphi}(\varphi_1, r)) > 0$ ) oder heraus (falls  $\text{sign}(\dot{\varphi}(\varphi_1, r)) < 0$ ).

Da dies auch für die Trajektorie  $p(\varphi) > 0$  mit  $p(0) = p(2\pi)$  gelten muß, ergibt sich ein Widerspruch und die Behauptung folgt.

Der zweite Teil des Satzes läuft völlig analog.

## 5.9 Satz:

Seien  $c(\varphi), d(\varphi), f(\varphi), g(\varphi), D(\varphi)$  definiert wie in Bemerkung 5.1 und  $D(\varphi) \neq 0$ . Weiter besitze die DGL (5.9) eine Trajektorie  $p(\varphi) > 0$  mit  $p(0) = p(2\pi)$ .

Dann gilt:

$$\dot{\varphi}(\varphi, p(\varphi)) = d(\varphi) + g(\varphi)p^k(\varphi) \neq 0 \quad \forall \varphi \in [0, 2\pi]$$

Beweis:

Annahme:

$$\exists \varphi_0 \text{ mit } d(\varphi_0) + g(\varphi_0)p^k(\varphi_0) = 0.$$

Es gilt offensichtlich:  $d(\varphi_0) = 0 \xLeftrightarrow{p(\varphi) > 0} g(\varphi_0) = 0$ .

Weiter kann es wegen  $D(\varphi) \neq 0$  kein  $\varphi_0$  geben mit  $d(\varphi_0) = 0 = g(\varphi_0)$ .

Es muß daher  $\forall r > 0$  gelten:

$$\dot{\varphi}(\varphi_0, r) = 0 \implies g(\varphi_0) \neq 0 \neq d(\varphi_0)$$

Die Menge aller Punkte der  $(\varphi, r > 0)$  Halbebene, die  $\dot{\varphi} = 0$  erfüllen, läßt sich daher durch den Graph der Funktion

$$r(\varphi) = \sqrt[k]{-\frac{d(\varphi)}{g(\varphi)}} \quad (5.22)$$

beschreiben.

Wir betrachten den Graphen von  $r(\varphi)$ , denn nach Annahme hat er mindestens einen Punkt mit  $p(\varphi)$  gemeinsam.

Falls  $d(\varphi)$  und  $g(\varphi)$  über einem Intervall gleiches Vorzeichen haben, liegt  $r(\varphi)$  im Komplexen und es ist nichts zu zeigen ( $\dot{\varphi} \neq 0$ ).

Falls auf eine Nullstelle von  $d(\varphi)$  eine Nullstelle von  $g(\varphi)$  folgt (oder umgekehrt) wurde bereits in Satz 5.8 die Nichtexistenz von  $p(\varphi)$  gezeigt. Wir können uns daher auf folgende drei Fälle beschränken:

- 1)  $d(\varphi) \neq 0 \neq g(\varphi) \quad \forall \varphi \in [0, 2\pi] \quad \wedge \quad \text{sign}(d(\varphi)) \neq \text{sign}(g(\varphi))$
- 2)  $d(\varphi_1) = d(\varphi_2) = 0 \quad \wedge \quad d(\varphi) \neq 0 \quad \forall \varphi \in (\varphi_1, \varphi_2) \quad \wedge \quad g(\varphi) \neq 0 \quad \forall \varphi \in [\varphi_1, \varphi_2]$
- 3)  $g(\varphi_3) = g(\varphi_4) = 0 \quad \wedge \quad g(\varphi) \neq 0 \quad \forall \varphi \in (\varphi_3, \varphi_4) \quad \wedge \quad d(\varphi) \neq 0 \quad \forall \varphi \in [\varphi_3, \varphi_4]$

wobei, falls 1) nicht gilt, die Fälle 2) bzw. 3) unabhängig voneinander mehrfach auftreten können.

Im ersten Fall teilt der Graph von  $r(\varphi)$  die  $(\varphi, r)$ -Halbebene in zwei disjunkte Gebiete, ein oberes und ein unteres Gebiet. Damit schneiden alle Trajektorien von (5.9), die einen Punkt mit dem Graph gemeinsam haben, ihn entweder von oben nach unten (falls  $\dot{r}|_{r(\varphi)} < 0$ ), bzw. von unten nach oben (falls  $\dot{r}|_{r(\varphi)} > 0$ ). Wegen  $D(\varphi) \neq 0$  ist  $\dot{r}|_{r(\varphi)} = 0$  nicht möglich (vgl. Satz 4.7).

Im zweiten Fall teilt der Graph von  $r(\varphi)$  den Streifen über  $[\varphi_1, \varphi_2]$ :  $\{(\varphi, r) \mid \varphi_1 \leq \varphi \leq \varphi_2, r > 0\}$  in zwei disjunkte Teilmengen, eine davon liegt zwischen  $(\varphi_1, 0)$  und  $(\varphi_2, 0)$  unter dem Graphen. Damit laufen alle Trajektorien, die einen Punkt über  $[\varphi_1, \varphi_2]$  mit ihm gemeinsam haben, in das unterhalb liegende Gebiet hinein (falls  $\dot{r}|_{r(\varphi)} < 0$ ) oder heraus (falls  $\dot{r}|_{r(\varphi)} > 0$ ).

Im dritten Fall teilt der Graph von  $r(\varphi)$  den Streifen über  $[\varphi_3, \varphi_4]$ :  $\{(\varphi, r) \mid \varphi_3 \leq \varphi \leq \varphi_4, r > 0\}$  in zwei disjunkte Teilmengen, eine davon liegt zwischen  $(\varphi_3, \infty)$  und  $(\varphi_4, \infty)$  über dem Graphen. Damit laufen alle Trajektorien, die einen Punkt über  $[\varphi_3, \varphi_4]$  mit ihm gemeinsam haben, in das oberhalb liegende Gebiet hinein (falls  $\dot{r}|_{r(\varphi)} > 0$ ) oder heraus (falls  $\dot{r}|_{r(\varphi)} < 0$ ).

Es gilt also insgesamt:

Hat eine Trajektorie von (5.9) einen Punkt mit der durch die Gleichung  $\dot{\varphi}(\varphi, r) = d(\varphi) + g(\varphi)r^k = 0$  definierten Kurve(n) gemeinsam, so kann sie nicht periodisch sein.

Dies ist ein Widerspruch zur Annahme, woraus die Behauptung folgt.

## 5.10 Satz:

Seien  $c(\varphi), d(\varphi), f(\varphi), g(\varphi), D(\varphi)$  definiert wie in Bemerkung 5.1 mit  $D(\varphi) \neq 0$  und die DGL (5.9) besitze eine Trajektorie  $p(\varphi) > 0$  mit  $p(0) = p(2\pi)$ .

Dann gilt:

$p(\varphi)$  ist die einzige Trajektorie  $> 0$  der DGL (5.9) mit  $p(0) = p(2\pi)$ .

Beweis:

Eine  $2\pi$ -periodische Trajektorie  $p(\varphi) > 0$  der DGL (5.9) ist mit Satz 5.9 eine  $2\pi$ -periodische Lösung der DGL:

$$\frac{dr}{d\varphi} = \frac{c(\varphi) + f(\varphi)r^k}{d(\varphi) + g(\varphi)r^k} r \quad (5.23)$$

Wir untersuchen die Stabilität einer beliebigen periodischen Lösung  $p(\varphi) > 0$  der DGL (5.23). Das Stabilitätsverhalten von  $p(\varphi)$  wird durch die Variationsgleichung von (5.23) längs  $p(\varphi)$  bestimmt ([21] S. 321):

$$\frac{dy}{d\varphi} = \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{c(\varphi) + g(\varphi)r^k}{d(\varphi) + g(\varphi)r^k} r \right) \Big|_{p(\varphi)} y \quad (5.24)$$

Um den charakteristischen Exponenten von (5.24) zu bestimmen, berechnen wir zunächst die partielle Ableitung in (5.24):

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{c(\varphi) + f(\varphi)r^k}{d(\varphi) + g(\varphi)r^k} r \right) = \\ &= \frac{c(\varphi) + f(\varphi)r^k}{d(\varphi) + g(\varphi)r^k} + \frac{(d(\varphi) + g(\varphi)r^k)kf(\varphi)r^{k-1} - (c(\varphi) + f(\varphi)r^k)kg(\varphi)r^{k-1}}{(d(\varphi) + g(\varphi)r^k)^2} r = \\ &= \frac{c(\varphi) + f(\varphi)r^k}{d(\varphi) + g(\varphi)r^k} - \frac{(c(\varphi)g(\varphi) - f(\varphi)d(\varphi))kr^{k-1}}{(d(\varphi) + g(\varphi)r^k)^2} r \end{aligned}$$

Damit lautet die Variationsgleichung längs  $p(\varphi)$ :

$$\frac{dy}{d\varphi} = \left( \frac{c(\varphi) + f(\varphi)p^k(\varphi)}{d(\varphi) + g(\varphi)p^k(\varphi)} - \frac{D(\varphi)kp^{k-1}(\varphi)}{(d(\varphi) + g(\varphi)p^k(\varphi))} p(\varphi) \right) y \quad (5.25)$$

und der charakteristische Exponent von Gleichung (5.25):

$$\begin{aligned} & \int_0^{2\pi} \left( \frac{c(\varphi) + f(\varphi)p^k(\varphi)}{d(\varphi) + g(\varphi)p^k(\varphi)} - \frac{D(\varphi)kp^k(\varphi)}{(d(\varphi) + g(\varphi)p^k(\varphi))^2} \right) d\varphi = \\ &= - \int_0^{2\pi} \frac{D(\varphi)kp^k}{(d(\varphi) + g(\varphi)p^k)^2} d\varphi \neq 0 \end{aligned} \quad (5.26)$$

was aus

$$\begin{aligned} & \int_0^{2\pi} \frac{c(\varphi) + f(\varphi)p^k(\varphi)}{d(\varphi) + g(\varphi)p^k(\varphi)} d\varphi = \int_0^{2\pi} \frac{1}{p(\varphi)} \left( \frac{c(\varphi) + f(\varphi)p^k(\varphi)}{d(\varphi) + g(\varphi)p^k(\varphi)} p(\varphi) \right) d\varphi = \\ &= \int_0^{2\pi} \frac{1}{p(\varphi)} \frac{dp(\varphi)}{d\varphi} d\varphi = \int_0^{2\pi} \frac{d}{d\varphi} \ln(p(\varphi)) d\varphi = \ln(p(2\pi)) - \ln(p(0)) = 0 \end{aligned}$$

folgt. Da das Vorzeichen ( $= -\text{sign} D(\varphi)$ ) des charakteristischen Exponenten unabhängig von  $p(\varphi)$  ist, sind die periodischen Lösungen  $> 0$  von (5.23) entweder alle asymptotisch stabil oder alle bei Zeitumkehr asymptotisch stabil. Weiter besitzt die DGL (5.9) wegen  $D(\varphi) \neq 0$  (vgl. Satz 4.7) außerhalb von  $r \equiv 0$  keinen stationären Punkt. Also müßte zwischen zwei asymptotisch stabilen (bei Zeitumkehr asymptotisch stabilen) periodischen Lösungen mindestens eine instabile (stabile) periodische Lösung liegen. Widerspruch.

## 5.11 Satz:

Seien  $c(\varphi), d(\varphi), f(\varphi), g(\varphi), D(\varphi)$  definiert wie in Bemerkung 5.1 mit  $D(\varphi) \neq 0$  und es gelte:

- (i) In der DGL (5.20) sei  $r \equiv 0$  asymptotisch stabil (bei Zeitumkehr asymptotisch stabil).
- (ii) In der DGL (5.21) sei  $r \equiv 0$  ebenfalls asymptotisch stabil (bei Zeitumkehr asymptotisch stabil).

Dann gilt:

Die DGL (5.9) besitzt keine Trajektorie  $p(\varphi) > 0$  mit  $p(0) = p(2\pi)$ .

Beweis:

Annahme:

Die DGL (5.9) besitze eine Trajektorie  $p(\varphi) > 0$  mit  $p(0) = p(2\pi)$ .

Wegen der Sätze 5.3 - 5.6 kann  $p(\varphi)$  nur zwischen  $\Gamma^o(C^o)$  und  $\Gamma^u(C^u)$  liegen und ist mit Satz 5.10 eindeutig. Aus (5.26) folgt, daß  $p(\varphi)$  entweder asymptotisch stabil oder bei Zeitumkehr asymptotisch stabil ist.

Weiter werden  $\Gamma^o(C^o)$  und  $\Gamma^u(C^u)$  von den Trajektorien von (5.9) beide entweder von oben nach unten oder von unten nach oben geschnitten.

Mit Satz 1.14 folgt die Existenz mindestens einer weiteren periodischen Trajektorie der DGL (5.9). Widerspruch.

## 5.12 Satz:

Seien  $c(\varphi), d(\varphi), f(\varphi), g(\varphi), D(\varphi)$  definiert wie in Bemerkung 5.1 mit  $D(\varphi) \neq 0$ . Weiter besitze mindestens eine der beiden DGL

$$\begin{array}{ll} \dot{r} = f(\varphi)r & \text{oder} & \dot{r} = c(\varphi)r \\ \dot{\varphi} = g(\varphi) & & \dot{\varphi} = d(\varphi) \end{array} \quad (5.27)$$

mindestens einen Sektor, der nicht parabolisch ist.

Dann gilt:

Die DGL (5.9) besitzt keine Trajektorie  $p(\varphi) > 0$  mit  $p(0) = p(2\pi)$ .

Beweis:

Wir nehmen an, die zweite DGL in (5.27) besitze einen nichtparabolischen Sektor, d.h. (vgl. Bemerkung 2.5.c (ii)+(iii) bzw. Satz 2.4.c (ii)+(iii))  $\exists \varphi_1 < \varphi_2$  mit

$$d(\varphi_1) = d(\varphi_2) = 0 \quad \wedge \quad \text{sign}(c(\varphi_1)) \neq \text{sign}(c(\varphi_2))$$

Es gilt:

$$d(\varphi_1) = 0 \implies D(\varphi) = c(\varphi_1)g(\varphi_1) - f(\varphi_1)d(\varphi_1) = c(\varphi_1)g(\varphi_1)$$

$$d(\varphi_2) = 0 \implies D(\varphi) = c(\varphi_2)g(\varphi_2) - f(\varphi_2)d(\varphi_2) = c(\varphi_2)g(\varphi_2)$$

Wegen  $D(\varphi) \neq 0 \forall \varphi$  und  $\text{sign}(c(\varphi_1)) \neq \text{sign}(c(\varphi_2))$  folgt:

$$\text{sign}(g(\varphi_1)) \neq \text{sign}(g(\varphi_2))$$

Damit gilt in Gleichung (5.9)

$$\text{sign}(\dot{\varphi}(\varphi_1, r)) \neq \text{sign}(\dot{\varphi}(\varphi_2, r))$$

womit wir, wie im Beweis von Satz 5.8, auf Nichtexistenz einer periodischen Trajektorie  $> 0$  schließen können.

Der noch ausstehende Fall, daß die erste DGL in (5.27) einen nichtparabolischen Sektor besitzt, wird völlig analog behandelt.

## 5.13 Satz:

Seien  $c(\varphi), d(\varphi), f(\varphi), g(\varphi), D(\varphi)$  definiert wie in Bemerkung 5.1 mit  $D(\varphi) \neq 0$  und es gelte

$$(i) \quad g(\varphi) \neq 0 \quad \wedge \quad \int_0^{2\pi} \frac{f(\varphi)}{g(\varphi)} d\varphi = 0$$

oder

$$(ii) \quad d(\varphi) \neq 0 \quad \wedge \quad \int_0^{2\pi} \frac{c(\varphi)}{d(\varphi)} d\varphi = 0$$

(vgl. Bemerkung 2.5.b (i) bzw. Satz 2.4.b (i)), d.h. mindestens eine der beiden DGL (5.27) besitzt nur  $2\pi$ -periodische Trajektorien.

Dann gilt:

Die DGL (5.9) besitzt keine Trajektorie  $p(\varphi) > 0$  mit  $p(0) = p(2\pi)$ .

Beweis:

Wir nehmen zunächst an, (i) und (ii) seien erfüllt:

$$\int_0^{2\pi} \frac{c(\varphi)}{d(\varphi)} d\varphi = 0 = \int_0^{2\pi} \frac{f(\varphi)}{g(\varphi)} d\varphi \implies 0 = \int_0^{2\pi} \frac{f(\varphi)}{g(\varphi)} d\varphi - \int_0^{2\pi} \frac{c(\varphi)}{d(\varphi)} d\varphi = \int_0^{2\pi} \frac{c(\varphi)g(\varphi) - f(\varphi)d(\varphi)}{d(\varphi)g(\varphi)} d\varphi$$

Es existiert also ein  $\bar{\varphi} \in [0, 2\pi]$  mit  $c(\bar{\varphi})g(\bar{\varphi}) - f(\bar{\varphi})d(\bar{\varphi}) = D(\bar{\varphi}) = 0$ . Widerspruch zu  $D(\varphi) \neq 0$ .

Sei jetzt entweder (i) oder (ii) erfüllt.

Wegen Satz 5.12, Bemerkung 2.5 und Bemerkung 2.9 können wir uns auf die beiden noch verbleibenden Fälle beschränken:

- a) In der DGL (5.20) ist  $r \equiv 0$  asymptotisch stabil (bei Zeitumkehr asymptotisch stabil) und die DGL (5.21) besitzt nur  $2\pi$ -periodische Trajektorien.
- b) In der DGL (5.21) ist  $r \equiv 0$  asymptotisch stabil (bei Zeitumkehr asymptotisch stabil) und die DGL (5.20) besitzt nur  $2\pi$ -periodische Trajektorien.

Wir zeigen nur a) denn der Beweis von b) läuft analog.

Sei zunächst  $d(\varphi) > 0$  vorausgesetzt.

Wir zeigen als erstes:

Ist  $r \equiv 0$  in der DGL (5.20) asymptotisch stabil (bei Zeitumkehr asymptotisch stabil), dann gilt  $D(\varphi) > 0$  ( $< 0$ ).

1.Fall:  $g(\varphi) \neq 0 \ \forall \varphi \in [0, 2\pi]$

$\alpha$ )  $\text{sign}(g(\varphi)) = 1$

Hier gilt n.V. und Bemerkung 2.9:

$$\int_0^{2\pi} \frac{f(\varphi)}{g(\varphi)} d\varphi < 0 \ (> 0) \ \wedge \ \int_0^{2\pi} \frac{c(\varphi)}{d(\varphi)} d\varphi = 0 \implies \int_0^{2\pi} \frac{f(\varphi)}{g(\varphi)} d\varphi - \int_0^{2\pi} \frac{c(\varphi)}{d(\varphi)} d\varphi < 0 \ (> 0) \implies - \int_0^{2\pi} \frac{D(\varphi)}{d(\varphi)g(\varphi)} d\varphi < 0 \ (> 0)$$

Wegen  $\text{sign}(d(\varphi)) = 1 = \text{sign}(g(\varphi))$  folgt die Behauptung.

$\beta$ )  $\text{sign}(g(\varphi)) = -1$

Hier gilt n.V. und Bemerkung 2.9:

$$\int_0^{2\pi} \frac{f(\varphi)}{g(\varphi)} d\varphi > 0 \ (< 0) \ \wedge \ \int_0^{2\pi} \frac{c(\varphi)}{d(\varphi)} d\varphi = 0 \implies$$

$$-\int_0^{2\pi} \frac{f(\varphi)}{g(\varphi)} d\varphi + \int_0^{2\pi} \frac{c(\varphi)}{d(\varphi)} d\varphi < 0 (> 0) \implies \int_0^{2\pi} \frac{D(\varphi)}{d(\varphi)g(\varphi)} d\varphi < 0 (> 0)$$

Wegen  $\text{sign}(d(\varphi)) = 1 = -\text{sign}(g(\varphi))$  folgt die Behauptung.

2.Fall:  $g(\bar{\varphi}) = 0$  für mindestens ein  $\bar{\varphi} \in [0, 2\pi]$ .

Hier gilt:

$$\begin{aligned} \bar{\varphi} \in [0, 2\pi] \text{ mit } g(\bar{\varphi}) = 0 &\implies f(\bar{\varphi}) < 0 (> 0) \implies f(\bar{\varphi})d(\bar{\varphi}) < 0 (> 0) \implies \\ &\implies c(\bar{\varphi})g(\bar{\varphi}) - f(\bar{\varphi})d(\bar{\varphi}) = D(\bar{\varphi}) > 0 (< 0) \implies D(\varphi) > 0 (< 0) \forall \varphi \implies \text{Beh.} \end{aligned}$$

Wir zeigen als zweites:

$\exists R_0 > 0$  so daß  $\forall r < R_0$  und  $\forall \varphi$  gilt:

$$D(\varphi) > 0 (< 0) \iff \frac{c(\varphi) + f(\varphi)r^k}{d(\varphi) + g(\varphi)r^k} < \frac{c(\varphi)}{d(\varphi)} \left( > \frac{c(\varphi)}{d(\varphi)} \right) \quad (5.28)$$

Definiere dazu:

$$R_0 := \begin{cases} \infty & \text{falls } g(\varphi) \equiv 0 \\ k \sqrt{\frac{\min_{\varphi \in [0, 2\pi]} d(\varphi)}{\max_{\varphi \in [0, 2\pi]} |g(\varphi)|}} & \text{falls } g(\varphi) \not\equiv 0 \end{cases}$$

Wie man leicht nachprüft, gilt  $\forall r < R_0$  und  $\forall \varphi$ :

$$d(\varphi) + g(\varphi)r^k > 0$$

Damit ergibt sich mit

$$\begin{aligned} D(\varphi) = c(\varphi)g(\varphi) - f(\varphi)d(\varphi) > 0 &\iff c(\varphi)d(\varphi) + f(\varphi)d(\varphi)r^k < c(\varphi)d(\varphi) + c(\varphi)g(\varphi)r^k \iff \\ &\iff d(\varphi)(c(\varphi) + f(\varphi)r^k) < c(\varphi)(d(\varphi) + g(\varphi)r^k) \iff \frac{c(\varphi) + f(\varphi)r^k}{d(\varphi) + g(\varphi)r^k} < \frac{c(\varphi)}{d(\varphi)} \end{aligned}$$

( $D(\varphi) < 0$  analog) die Behauptung (5.28).

Definiert man (vgl. Satz 5.4)

$$C^u := \frac{R_0}{e^{2\pi \frac{\max |c(\varphi)|}{\min |d(\varphi)|}}} \quad \gamma(\varphi) := e^{\int_0^{\varphi} \frac{c(\psi)}{d(\psi)} d\psi} > 0 \quad \Gamma^u(\gamma_0) := \{(\varphi, \gamma_0 \gamma(\varphi)) \mid \varphi \in [0, 2\pi]\}$$

(beachte  $\gamma(0) = \gamma(2\pi) = 1$ ), so gilt  $\forall \gamma_0$  mit  $0 < \gamma_0 < C^u$  :

$$\gamma_0 \int_0^{\varphi} e^{\int_0^{\psi} \frac{c(\psi)}{d(\psi)} d\psi} d\psi < C^u \int_0^{\varphi} e^{\int_0^{\psi} \frac{c(\psi)}{d(\psi)} d\psi} d\psi \leq C^u e^{2\pi \frac{\max |c(\varphi)|}{\min |d(\varphi)|}} \leq R_0$$

Wegen Satz 1.13.a (i) (1.13.b (ii)) schneiden dann alle Trajektorien von (5.9), die einen Punkt mit  $\Gamma^u(\gamma_0)$  gemeinsam haben,  $\Gamma^u(\gamma_0) \forall \gamma_0$  mit  $0 < \gamma_0 < C^u$ , von  $r \equiv 0$  aus gesehen, von oben nach unten (unten nach oben).

Weiter folgt aus Satz 5.3 bzw. Satz 5.5 die Existenz von  $C^o$  ( $> C^u$ ) und  $\Gamma^o(\gamma_0)$ , wobei  $\Gamma^o(\gamma_0)$  von allen Trajektorien der DGL (5.9), die einen Punkt mit  $\Gamma^o(\gamma_0)$  gemeinsam haben,  $\forall \gamma_0 > C^o$  von  $r \equiv 0$  gesehen, ebenfalls von oben nach unten (unten nach oben) geschnitten wird.

Annahme:

Die DGL (5.9) besitze eine Trajektorie  $p(\varphi) > 0$  mit  $p(0) = p(2\pi)$ .

Dann muß  $p(\varphi)$  zwischen den Kurven  $\Gamma^o(C^o)$  und  $\Gamma^u(C^u)$  liegen. Weiter muß nach Satz 1.14 dann dort eine weitere Trajektorie  $q(\varphi)$  mit  $q(0) = q(2\pi)$  existieren. Mit Satz 5.10 ergibt sich ein Widerspruch und damit für  $d(\varphi) > 0$  die Behauptung. Der Fall  $d(\varphi) < 0$  wird völlig analog gezeigt.

## 5.14 Satz:

Seien  $c(\varphi), d(\varphi), f(\varphi), g(\varphi), D(\varphi), m, l$  definiert wie in Bemerkung 5.1 und  $D(\varphi) \neq 0$ .

Dann sind äquivalent:

(i) In der DGL (5.20)

$$\dot{r} = f(\varphi)r$$

$$\dot{\varphi} = g(\varphi)$$

ist  $r \equiv 0$  asymptotisch stabil (bei Zeitumkehr asymptotisch stabil) und in der DGL (5.21)

$$\dot{r} = c(\varphi)r$$

$$\dot{\varphi} = d(\varphi)$$

ist  $r \equiv 0$  bei Zeitumkehr asymptotisch stabil (asymptotisch stabil).

(ii) Die DGL

$$\begin{aligned} \dot{r} &= c(\varphi)r^m + f(\varphi)r^l \\ \dot{\varphi} &= d(\varphi)r^{m-1} + g(\varphi)r^{l-1} \end{aligned} \tag{5.29}$$

besitzt mindestens eine Trajektorie  $p(\varphi) > 0$  mit  $p(0) = p(2\pi)$ .

(iii) Die DGL (5.29) besitzt genau eine Trajektorie  $p(\varphi) > 0$  mit  $p(0) = p(2\pi)$ .

Weiter gilt:

Die Trajektorie  $p(\varphi)$  ist asymptotisch stabil (bei Zeitumkehr asymptotisch stabil) und läuft von links nach rechts, falls  $D(\varphi) > 0$ , sonst umgekehrt.

Beweis:

Die DGL (5.29) ist wegen Satz 1.12 für  $r > 0$  äquivalent zu DGL (5.9) mit  $k = l - m$ :

$$\dot{r} = c(\varphi)r + f(\varphi)r^{k+1}$$

$$\dot{\varphi} = d(\varphi) + g(\varphi)r^k$$

Wir können uns daher im folgenden Beweis auf die DGL (5.9) beschränken.

(i)  $\implies$  (ii) Satz 5.7.

(ii)  $\implies$  (iii) Satz 5.10.

(iii)  $\implies$  (ii) trivial

(ii)  $\implies$  (i) Indirekt mit Bemerkung 2.9, Bemerkung 2.5 und den Sätzen 5.11 - 5.13.

Die asymptotische Stabilität (asymptotische Stabilität bei Zeitumkehr) folgt aus den Sätzen 1.14 und 5.10. Damit muß (vgl. (5.26)) gelten:

$$\text{sign } \dot{\varphi}(\varphi, p(\varphi)) \cdot (-1) \cdot \text{sign } D(\varphi) \leq 0 \quad (\geq 0)$$

Mit Satz 5.9 folgt dann sogar " $< 0$  ( $> 0$ )" statt " $\leq 0$  ( $\geq 0$ )" und daraus:

$$\text{sign } D(\varphi) = (\neq) \text{sign } \dot{\varphi}(\varphi, p(\varphi)).$$

## 5.15 Satz:

Seien  $c(\varphi), d(\varphi), f(\varphi), g(\varphi), D(\varphi)$  definiert wie in Bemerkung 5.1 und  $D(\varphi) \neq 0$ . Weiter sei  $p(\varphi, \mu)$  eine periodische Trajektorie  $> 0$  der DGL (5.5), die in  $\mu = 0$  von  $r \equiv 0$  abzweigt.

Dann gilt:

- a) Falls die DGL (5.20) weder  $2\pi$ -periodische Trajektorien  $> 0$  noch einen nichtparabolischen Sektor besitzt,  $\exists K_1, \mu_1 > 0$ , so daß  $\forall \mu$  mit  $|\mu| < \mu_1$  und  $\forall \varphi \in [0, 2\pi]$  gilt:

$$p(\varphi, \mu) < K_1 \sqrt[m]{|\mu|} \quad (5.30)$$

- b) Falls die DGL (5.21) weder  $2\pi$ -periodische Trajektorien  $> 0$  noch einen nichtparabolischen Sektor besitzt,  $\exists K_0, \mu_0 > 0$ , so daß  $\forall \mu$  mit  $|\mu| < \mu_0$  und  $\forall \varphi \in [0, 2\pi]$  gilt:

$$K_0 \sqrt[l-m]{|\mu|} < p(\varphi, \mu) \quad (5.31)$$

Beweis:

Nach Satz 1.12 haben die DGL (5.5) und die DGL (5.6)

$$\begin{aligned} \dot{r} &= \mu c(\varphi)r + f(\varphi)r^{l-m+1} + S_1(r, \varphi, \mu)r \\ \dot{\varphi} &= \mu d(\varphi) + g(\varphi)r^{l-m} + S_2(r, \varphi, \mu) \end{aligned}$$

für  $r > 0$  die gleichen Trajektorien. Wir können uns daher im weiteren Beweis auf die DGL (5.6) beschränken.

Sei  $k := l - m$  und  $u(\mu) \in C^0(U(0), \mathbb{R}^+)$  mit  $u(0) = 0$  und  $u(\mu) \neq 0$  für  $\mu \neq 0$ . Dann geht die DGL (5.6) durch die Transformation

$$r = u(\mu)s \quad (5.32)$$

über in die DGL

$$\begin{aligned} \dot{s} &= \mu c(\varphi)s + u^k(\mu)f(\varphi)s^{k+1} + S_1(u(\mu)s, \varphi, \mu)s \\ \dot{\varphi} &= \mu d(\varphi) + u^k(\mu)g(\varphi)s^k + S_2(u(\mu)s, \varphi, \mu) \end{aligned} \quad (5.33)$$

Weiter haben die DGL (5.33) und die DGL

$$\begin{aligned} \dot{s} &= f(\varphi)s^{k+1} + \frac{1}{u^k(\mu)}(\mu c(\varphi) + S_1(u(\mu)s, \varphi, \mu))s \\ \dot{\varphi} &= g(\varphi)s^k + \frac{1}{u^k(\mu)}(\mu d(\varphi) + S_2(u(\mu)s, \varphi, \mu)) \end{aligned} \quad (5.34)$$

sowie die DGL

$$\begin{aligned} \dot{s} &= c(\varphi)s + \frac{1}{\mu}(u^k(\mu)f(\varphi)s^k + S_1(u(\mu)s, \varphi, \mu))s \\ \dot{\varphi} &= d(\varphi) + \frac{1}{\mu}(u^k(\mu)g(\varphi)s^k + S_2(u(\mu)s, \varphi, \mu)) \end{aligned} \quad (5.35)$$

für  $\mu \neq 0$  dieselben Trajektorien.

- a) Annahme: Die Ungleichung (5.30) sei nicht erfüllt, d.h.

$$\limsup_{\mu \rightarrow 0} \frac{\max_{\varphi \in [0, 2\pi]} p(\varphi, \mu)}{\sqrt[k]{|\mu|}} = \infty \quad (5.36)$$

Wir nehmen weiter an, daß  $p(\varphi, \mu)$  für  $\mu > 0$  von  $r \equiv 0$  abzweigt.

(Der Fall  $\mu < 0$  wird völlig analog behandelt)

Wegen (5.36) existiert eine Folge  $(\mu_n)_{n \in \mathbb{N}}$  mit den folgenden Eigenschaften:

$$(i) \quad \mu_n > \mu_{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad (ii) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \mu_n = 0 \quad (iii) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\max_{\varphi \in [0, 2\pi]} p(\varphi, \mu_n)}{\sqrt[k]{\mu_n}} = \infty \quad (5.37)$$

Definiere  $\varphi_1(\mu)$  durch:

$$p(\varphi_1(\mu), \mu) = \max_{\varphi \in [0, 2\pi]} p(\varphi, \mu)$$

Definiere dann weiter:

$$u_1(\mu) := \begin{cases} 0 & \text{falls } \mu = 0 \\ p(\varphi_1(\mu_n), \mu_n) & \text{falls } \mu = \mu_n \\ \frac{p(\varphi_1(\mu_n), \mu_n) - p(\varphi_1(\mu_{n+1}), \mu_{n+1})}{\mu_n - \mu_{n+1}}(\mu - \mu_n) + p(\varphi_1(\mu_n), \mu_n) & \text{falls } \mu \in (\mu_{n+1}, \mu_n) \end{cases}$$

Der Graph von  $u_1(\mu)$  ist damit ein Streckenzug, der die Punkte  $(\mu_n, p(\varphi_1(\mu_n), \mu_n))$  miteinander verbindet.

Für  $u_1(\mu)$  gilt, da  $p(\varphi, \mu)$  von  $r \equiv 0$  abzweigt und wegen (5.37) (iii):

$$\lim_{\mu \rightarrow 0} u_1(\mu) = 0 = \lim_{\mu \rightarrow 0} \frac{\mu}{u_1^k(\mu)} \quad (5.38)$$

Wir setzen  $u_1(\mu)$  für  $u(\mu)$  in die DGL (5.34) ein:

$$\begin{aligned} \dot{s} &= f(\varphi)s^{k+1} + \frac{1}{u_1^k(\mu)}(\mu c(\varphi) + S_1(u_1(\mu)s, \varphi, \mu))s \\ \dot{\varphi} &= g(\varphi)s^k + \frac{1}{u_1^k(\mu)}(\mu d(\varphi) + S_2(u_1(\mu)s, \varphi, \mu)) \end{aligned} \quad (5.39)$$

Nach Konstruktion muß (5.39) eine periodische Trajektorie mit (beachte (5.32)):

$$s = q_1(\varphi, \mu) := \frac{p(\varphi, \mu)}{u_1(\mu)} \quad \wedge \quad q_1(\varphi, \mu_n) \leq 1 = q_1(\varphi_1(\mu_n), \mu_n) \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

besitzen. Wir konstruieren nun in den zwei möglichen Fällen (Knoten bzw. Wirbel) in Gleichung (5.20) eine Kurve

$$\Gamma_{\mu_n} := \left\{ (\varphi, \gamma_{\mu_n}(\varphi)) \mid \gamma_{\mu_n}(0) = \gamma_{\mu_n}(2\pi) \wedge \gamma_{\mu_n}(\varphi_1(\mu_n)) = 1 \right\}$$

stückweise glatt, so daß die Trajektorien von DGL (5.39), wenn sie einen gemeinsamen Punkt mit  $\Gamma_{\mu_n}$  besitzen,  $\Gamma_{\mu_n}$  entweder alle von oben nach unten oder

alle von unten nach oben schneiden, wählt man  $n$  hinreichend groß. Da  $\Gamma_{\mu_n}$  in  $(\varphi_1(\mu_n), 1)$  einen gemeinsamen Punkt mit  $(\varphi, q_1(\varphi, \mu_n))$  besitzt, ergibt sich die Nichtexistenz von  $q_1(\varphi, \mu)$  bzw.  $p(\varphi, \mu)$  für  $\mu = \mu_n$ , d.h. in jeder Umgebung von  $\mu = 0$  existiert mindestens ein  $\mu$ , für das  $p(\varphi, \mu)$  nicht existiert. Das ist ein Widerspruch zur Abzweigung von  $p(\varphi, \mu)$  in  $\mu = 0$  von  $r \equiv 0$ .

1.Fall:  $r \equiv 0$  in Gleichung (5.20) ist ein Wirbel (vgl. Bemerkung 2.5 b (ii) und Satz 5.3). Dann gilt:

$$g(\varphi) \neq 0 \quad \forall \varphi \in [0, 2\pi] \quad \wedge \quad \int_0^{2\pi} \frac{f(\varphi)}{|g(\varphi)|} d\varphi < 0 \quad (> 0).$$

Seien  $\bar{\alpha}, m(|\bar{\alpha}|)$  definiert wie im Satz 5.3,

$$\gamma_{\mu_n}(\varphi) := e^{-\int_0^{\varphi_1(\mu_n)} \frac{f(\psi) - \bar{\alpha}}{g(\psi)} d\psi} \cdot e^{\int_0^{\varphi} \frac{f(\psi) - \bar{\alpha}}{g(\psi)} d\psi}$$

und

$$R_0 := e^{-2m(|\bar{\alpha}|)} \quad R_1 := e^{+2m(|\bar{\alpha}|)}$$

Offensichtlich liegt  $\Gamma_{\mu_n}$  im von  $s = R_0$  und  $s = R_1$  begrenzten Streifen und hat in  $(\varphi_1(\mu_n), 1)$  wegen

$$\gamma_{\mu_n}(\varphi_1(\mu_n)) = e^{-\int_0^{\varphi_1(\mu_n)} \frac{f(\psi) - \bar{\alpha}}{g(\psi)} d\psi} \cdot e^{\int_0^{\varphi_1(\mu_n)} \frac{f(\psi) - \bar{\alpha}}{g(\psi)} d\psi} = 1 = q_1(\varphi_1(\mu_n), \mu_n)$$

einen gemeinsamen Punkt mit  $(\varphi, q_1(\varphi, \mu_n))$ .

Wegen (5.38) und der Definition von  $S_i(r, \varphi, \mu)$   $i = 1, 2$  (vgl. Bemerkung 5.1) gilt:

$$\lim_{\mu \rightarrow 0} \left( \frac{1}{u_1^k(\mu)} (\mu c(\varphi) + S_1(u_1(\mu)s, \varphi, \mu)) \right) = 0 \quad (5.40)$$

$$\lim_{\mu \rightarrow 0} \left( \frac{1}{u_1^k(\mu)} (\mu d(\varphi) + S_2(u_1(\mu)s, \varphi, \mu)) \right) = 0 \quad (5.41)$$

Mit  $t_1 \leftrightarrow 0$ ,  $t_2 \leftrightarrow 2\pi$ ,  $t \leftrightarrow \varphi$ ,  $r \leftrightarrow s$ ,  $a(t) \leftrightarrow f(\varphi)$ ,  $b(t) \leftrightarrow g(\varphi)$  und

$$A_1(r, t, \mu) \leftrightarrow \frac{1}{u_1^k(\mu)} (\mu c(\varphi) + S_1(u_1(\mu)s, \varphi, \mu))$$

$$B_1(r, t, \mu) \leftrightarrow \frac{1}{u_1^k(\mu)} (\mu d(\varphi) + S_2(u_1(\mu)s, \varphi, \mu))$$

können wir Lemma 1.11.a auf

$$\frac{f(\varphi)s^k + \frac{1}{u_1^k(\mu)} (\mu c(\varphi) + S_1(u_1(\mu)s, \varphi, \mu))}{g(\varphi)s^k + \frac{1}{u_1^k(\mu)} (\mu d(\varphi) + S_2(u_1(\mu)s, \varphi, \mu))} \quad (5.42)$$

anwenden und erhalten im 1.Fall analog Satz 5.3 mit Satz 1.13 die gewünschten Eigenschaften von  $\Gamma_{\mu_n}$ .

2.Fall:  $r \equiv 0$  in Gleichung (5.20) ist ein Knoten (vgl. Bemerkung 2.5 a+c (i) und Satz 5.5). Dann gilt  $\forall \hat{\varphi} \in [0, 2\pi]$  mit  $g(\hat{\varphi}) = 0$ :

$$f(\hat{\varphi}) < 0 \text{ } (> 0)$$

Wir beginnen mit der Situation  $g(\varphi) \equiv 0$  und definieren

$$\gamma_{\mu_n}(\varphi) := 1 \quad \forall \varphi \in [0, 2\pi] \quad 0 < R_0 < 1 < R_1 < \infty$$

Wegen  $g(\varphi) \equiv 0$  gilt  $f(\varphi) \neq 0$  und mit (5.40) dann

$$\left| \frac{1}{u_1^k(\mu)} (\mu c(\varphi) + S_1(u_1(\mu)s, \varphi, \mu)) \right| < \frac{1}{2} \min_{\varphi \in [0, 2\pi]} |f(\varphi)|$$

wählt man  $\mu$  hinreichend klein und  $R_0 < s < R_1$ . Das bedeutet:

$$|\dot{s}(1, \varphi, \mu)| \geq \left| f(\varphi) + \frac{1}{u_1^k(\mu)} (\mu c(\varphi) + S_1(u_1(\mu), \varphi, \mu)) \right| > \frac{1}{2} \min_{\varphi \in [0, 2\pi]} |f(\varphi)| > 0$$

Damit erfüllt auch hier  $\Gamma_{\mu_n} = (\varphi, 1)$  die gewünschten Eigenschaften, wählt man  $n$  hinreichend groß.

Nachdem  $g(\varphi) \equiv 0$  abgehandelt wurde, verbleibt noch die Situation  $g(\varphi) = 0 \wedge g(\varphi) \not\equiv 0$  zu betrachten.

Seien  $\varphi_i, I, I_1, I_2, I_3, \bar{\alpha}, h_\alpha(\psi, \chi), \psi_j^{(i)}, \chi_j^{(i)}, \omega_i, \tilde{\psi}_j^{(i)}, \tilde{\chi}_j^{(i)}, \tilde{\omega}_i, \delta_1$  definiert wie im Satz 5.5. Definiere dann weiter:

$$\gamma(\varphi) := \begin{cases} e^{h_\alpha(\psi_j^{(i)}, \varphi)} & \text{falls } \varphi \in [\psi_j^{(i)}, \chi_j^{(i)}] \\ e^{h_\alpha(\tilde{\chi}_j^{(i)}, \varphi)} & \text{falls } \varphi \in [\tilde{\chi}_j^{(i)}, \tilde{\psi}_j^{(i)}] \\ 1 & \text{sonst} \end{cases}$$

$$\gamma_{\mu_n}(\varphi) := \frac{1}{\gamma(\varphi_1(\mu_n))} \gamma(\varphi)$$

$$m(|\bar{\alpha}|) := 2\pi \max \left\{ \frac{|f(\varphi)| + |\bar{\alpha}|}{|g(\varphi)|} \mid \varphi \in [0, 2\pi] \setminus \bigcup_{i \in I} U_{\delta_1}(\varphi_i) \right\}$$

$$R_0 := e^{-2m(|\bar{\alpha}|)} \quad R_1 = e^{2m(|\bar{\alpha}|)}$$

Damit liegt  $\Gamma_{\mu_n}$  im von  $s = R_0$  und  $s = R_1$  begrenzten Streifen und hat in  $(\varphi_1(\mu_n), 1)$  einen gemeinsamen Punkt mit  $(\varphi, q_1(\varphi, \mu_n))$ .

Wir müssen noch zeigen:

Die Trajektorien von (5.34) schneiden  $\Gamma_{\mu_n}$ , falls sie einen Punkt mit  $\Gamma_{\mu_n}$  gemeinsam haben, entweder von oben nach unten (falls  $f(\varphi_i) < 0$ ) oder von unten nach

oben (falls  $f(\varphi_i) > 0$ ), wählt man  $\mu$  hinreichend klein.

Wir beginnen mit  $i \in I_1$ , d.h.  $f(\varphi_i) \neq 0 \forall \varphi \in [\varphi_i, \varphi_{i+1}]$ .

Hier gilt  $\forall \varphi \in [\varphi_i, \varphi_{i+1}] \ i \in I_1, \ R_0 < s < R_1$  und  $|\mu|$  hinreichend klein:

$$\text{sign}(f(\varphi)) = \text{sign}(f(\varphi)s^k) = \text{sign}\left(f(\varphi)s^k + \frac{1}{u_1^k(\mu)}(\mu c(\varphi) + S_1(u_1(\mu)s, \varphi, \mu))\right) = \text{sign}(\dot{s}(s, \varphi, \mu))$$

was man leicht mit (5.40) analog zum Beginn des Beweises im 2.Fall sieht.

Wir behandeln jetzt nur noch den Fall  $f(\varphi_i) < 0 \wedge i \in I_2$ , da die Fälle

$f(\varphi_i) < 0 \wedge i \in I_3$  bzw.  $f(\varphi_i) > 0 \wedge i \in I_2 \cup I_3$  völlig analog behandelt werden.

Sei zunächst  $i \in I_2 \wedge \varphi \notin [\psi_j^{(i)}, \chi_j^{(i)}] \ 1 \leq j \leq \omega_i$ .

Hier gilt:  $f(\varphi) - \bar{\alpha} \leq 0 \implies f(\varphi) \leq \bar{\alpha} < 0$ . Dann sieht man wie eben bei  $i \in I_1$

$\forall \varphi \in [\varphi_i, \varphi_{i+1}] \setminus [\psi_j^{(i)}, \chi_j^{(i)}], \ 1 \leq j \leq \omega_i \ i \in I_2, \ R_0 < s < R_1$  und  $|\mu|$  hinreichend klein:

$$-1 = \text{sign}(f(\varphi)) = \text{sign}\left(f(\varphi)s^k + \frac{1}{u_1^k(\mu)}(\mu c(\varphi) + S_1(u_1(\mu)s, \varphi, \mu))\right) = \text{sign}(\dot{s}(s, \varphi, \mu))$$

$\forall \varphi \in [\varphi_i, \varphi_{i+1}] \setminus [\psi_j^{(i)}, \chi_j^{(i)}] \ 1 \leq j \leq \omega_i \ i \in I_2$  und  $R_0 < s < R_1$  wählt man wieder  $|\mu|$  hinreichend klein.

Bleibt noch  $\varphi \in [\psi_j^{(i)}, \chi_j^{(i)}] \ 1 \leq j \leq \omega_i \ i \in I_2$  zu behandeln. Hier liefern Satz 1.11.a mit  $t_1 \leftrightarrow \psi_j^{(i)}, t_2 \leftrightarrow \chi_j^{(i)} \ 1 \leq j \leq \omega_i \ i \in I_2$  und Satz 1.13 (vgl. Satz 5.5) das gewünschte Ergebnis.

Damit ist der erste Teil des Beweises, die Ungleichung in (5.30), gezeigt.

b) Annahme: Die Ungleichung (5.31) sei nicht erfüllt, d.h.

$$\liminf_{\mu \rightarrow 0} \frac{\min_{\varphi \in [0, 2\pi]} p(\varphi, \mu)}{\sqrt[k]{|\mu|}} = 0 \quad (5.43)$$

Wir nehmen wieder an, daß  $p(\varphi, \mu)$  für  $\mu > 0$  von  $r \equiv 0$  abzweigt.

(Der Fall  $\mu < 0$  wird völlig analog behandelt)

Wegen (5.43) existiert eine Folge  $(\mu_n)_{n \in \mathbb{N}}$  mit den folgenden Eigenschaften:

$$(i) \ \mu_{n+1} < \mu_n \ \forall n \in \mathbb{N} \quad (ii) \ \lim_{n \rightarrow \infty} \mu_n = 0 \quad (iii) \ \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\min_{\varphi \in [0, 2\pi]} p(\varphi, \mu_n)}{\sqrt[k]{\mu_n}} = 0 \quad (5.44)$$

Definiere  $\varphi_0(\mu)$  durch:

$$p(\varphi_0(\mu), \mu) = \min_{\varphi \in [0, 2\pi]} p(\varphi, \mu)$$

Definiere dann weiter

$$u_0(\mu) := \begin{cases} 0 & \text{falls } \mu = 0 \\ p(\varphi_0(\mu_n), \mu_n) & \text{falls } \mu = \mu_n \\ \frac{p(\varphi_0(\mu_n), \mu_n) - p(\varphi_0(\mu_{n+1}), \mu_{n+1})}{\mu_n - \mu_{n+1}}(\mu - \mu_n) + p(\varphi_0(\mu_n), \mu_n) & \text{falls } \mu \in (\mu_{n+1}, \mu_n) \end{cases}$$

Der Graph von  $u_0(\mu)$  ist damit analog  $u_1(\mu)$  ein Streckenzug, der die Punkte  $(\mu_n, p(\varphi_0(\mu_n), \mu_n))$  miteinander verbindet.

Für  $u_0(\mu)$  gilt, da  $p(\varphi, \mu)$  von  $r \equiv 0$  abzweigt und wegen (5.44) (iii):

$$\lim_{\mu \rightarrow 0} u_0(\mu) = 0 = \lim_{\mu \rightarrow 0} \frac{u_0^k(\mu)}{\mu} \quad (5.45)$$

Wir setzen  $u_0(\mu)$  für  $u(\mu)$  in die DGL (5.34) ein. Nach Konstruktion muß jetzt (5.35) eine periodische Trajektorie

$$q_0(\varphi, \mu) := \frac{p(\varphi, \mu)}{u_0(\mu)} \quad \wedge \quad q_0(\varphi, \mu_n) \geq 1 = q_0(\varphi_0(\mu_n), \mu_n)$$

besitzen.

Der Rest des Beweises läuft analog a) man benutzt lediglich im 1. Fall (Wirbel)  $\bar{\beta}, m(|\bar{\beta}|)$  wie in Satz 5.4 und

$$\gamma_{\mu_n}(\varphi) := e^{-\int_0^{\varphi_0(\mu_n)} \frac{c(\psi) - \bar{\beta}}{d(\psi)} d\psi} \cdot e^{\int_0^{\varphi} \frac{c(\psi) - \bar{\beta}}{d(\psi)} d\psi}$$

$$R_2 := e^{2m(|\bar{\beta}|)}$$

$$\lim_{\mu \rightarrow 0} \left( \frac{1}{\mu} (u_0^k(\mu) f(\varphi) s^k + S_1(u_0(\mu) s, \varphi, \mu)) \right) = 0$$

$$\lim_{\mu \rightarrow 0} \left( \frac{1}{\mu} (u_0^k(\mu) g(\varphi) s^k + S_2(u_0(\mu) s, \varphi, \mu)) \right) = 0$$

$$A_2(r, t, \mu) \leftrightarrow \frac{1}{\mu} (u_0^k(\mu) f(\varphi) s^k + S_1(u_0(\mu) s, \varphi, \mu))$$

$$B_2(r, t, \mu) \leftrightarrow \frac{1}{\mu} (u_0^k(\mu) g(\varphi) s^k + S_2(u_0(\mu) s, \varphi, \mu))$$

$$\frac{c(\varphi) + \frac{1}{\mu} (u_0^k(\mu) f(\varphi) s^k + S_1(u_0(\mu) s, \varphi, \mu))}{d(\varphi) + \frac{1}{\mu} (u_0^k(\mu) g(\varphi) s^k + S_2(u_0(\mu) s, \varphi, \mu))}$$

und dann Satz 1.11.b.

Im 2.Fall (Knoten) beginnt man wieder mit  $\gamma_{\mu_n}(\varphi) := 1$ , benutzt dann aber die Ungleichung

$$\left| \frac{1}{\mu} (u_0^k(\mu) f(\varphi) s^k + S_1(u_0(\mu) s, \varphi, \mu)) \right| < \frac{1}{2} \min_{\varphi \in [0, 2\pi]} |c(\varphi)|$$

für  $|\mu|$  hinreichend klein und  $0 < s < 2 =: R_2$

In der Situation  $d(\varphi) = 0 \wedge d(\varphi) \neq 0$  wählt man

$\phi_i, J, J_1, J_2, J_3, \bar{\beta}, h_\beta(\vartheta, \xi), \vartheta_j^{(i)}, \xi_j^{(i)}, \zeta_i, \tilde{\vartheta}_j^{(i)}, \tilde{\xi}_j^{(i)}, \tilde{\zeta}_i, \delta_2$  wie im Satz 5.6 und definiert:

$$\gamma(\varphi) := \begin{cases} e^{h_\beta(\vartheta_j^{(i)}, \varphi)} & \text{falls } \varphi \in [\vartheta_j^{(i)}, \xi_j^{(i)}] \\ e^{h_\beta(\tilde{\xi}_j^{(i)}, \varphi)} & \text{falls } \varphi \in [\tilde{\xi}_j^{(i)}, \tilde{\vartheta}_j^{(i)}] \\ 1 & \text{sonst} \end{cases}$$

$$\gamma_{\mu_n} := \frac{1}{\gamma(\varphi_0(\mu_n))} \gamma(\varphi)$$

$$m(|\bar{\beta}|) := 2\pi \max \left\{ \frac{|c(\varphi)| + |\bar{\beta}|}{|d(\varphi)|} \mid \varphi \in [0, 2\pi] \setminus \bigcup_{i \in J} U_{\delta_2}(\phi_i) \right\}$$

$$R_2 := e^{2m(|\bar{\beta}|)}$$

Mit Satz 1.11.b folgt analog a) die Behauptung.

## 5.16 Satz:

Seien  $c(\varphi), d(\varphi), f(\varphi), g(\varphi), D(\varphi), S_2(r, \varphi, \mu)$  definiert wie in Bemerkung 5.1 und  $D(\varphi) \neq 0$ . Die DGL (5.20) und die DGL (5.21) seien weder im Besitz  $2\pi$ -periodischer Trajektorien  $> 0$  noch eines nichtparabolischen Sektors.

Weiter sei  $p(\varphi, \mu)$  eine periodische Trajektorie  $> 0$  der DGL (5.5), die in  $\mu = 0$  von  $r \equiv 0$  abzweigt.

Dann gilt:

$$\dot{\varphi}(p, \varphi, \mu) = \mu d(\varphi) p^{m-1} + g(\varphi) p^{l-1} + S_2(p, \varphi, \mu) p^{m-1} \neq 0 \quad (5.46)$$

wählt man  $|\mu|$  nur hinreichend klein.

Beweis:

Wir gehen zunächst vor wie beim letzten Satz, d.h. die DGL (5.5) wird mit

Satz 1.12 übergeführt in die DGL (5.6). Mit  $u(\mu) := \sqrt[k]{|\mu|}$  und  $k = l - m$  in (5.32) ergibt sich:

$$\begin{aligned}\dot{s} &= \mu c(\varphi)s + |\mu|f(\varphi)s^{k+1} + S_1(|\mu|s, \varphi, \mu)s \\ \dot{\varphi} &= \mu d(\varphi) + |\mu|g(\varphi)s^k + S_2(|\mu|s, \varphi, \mu)\end{aligned}$$

oder wieder mit Satz 1.12 für  $\mu \neq 0$

$$\begin{aligned}\dot{s} &= c(\varphi)s + \text{sign}(\mu)f(\varphi)s^{k+1} + \hat{S}_1(s, \varphi, \mu)s \\ \dot{\varphi} &= d(\varphi) + \text{sign}(\mu)g(\varphi)s^k + \hat{S}_2(s, \varphi, \mu)\end{aligned}$$

mit

$$\hat{S}_i(s, \varphi, \mu) = \frac{1}{\mu} S_i(|\mu|s, \varphi, \mu) = O\left(\sqrt[k]{|\mu|}s\right) + O(|\mu|) + O\left(\sqrt[k]{|\mu|}s^{k+1}\right) = O\left(\sqrt[k]{|\mu|}\right)$$

Wir betrachten zunächst den Fall  $\text{sign}(\mu) = 1$  ( $\text{sign}(\mu) = -1$  läuft völlig analog), also die DGL

$$\begin{aligned}\dot{s} &= c(\varphi)s + f(\varphi)s^{k+1} + \hat{S}_1(s, \varphi, \mu)s \\ \dot{\varphi} &= d(\varphi) + g(\varphi)s^k + \hat{S}_2(s, \varphi, \mu)\end{aligned} \tag{5.47}$$

und zeigen

$$\dot{\varphi}\Big|_{q(\varphi, \mu)} = d(\varphi) + g(\varphi)q^k(\varphi, \mu) + \hat{S}_2(q(\varphi, \mu)) \neq 0 \tag{5.48}$$

wobei

$$q(\varphi, \mu) := \frac{p(\varphi, \mu)}{\sqrt[k]{\mu}}$$

eine periodische Trajektorie der DGL (5.47) ist.

Offensichtlich ist die Aussage (5.48) zu (5.46) äquivalent.

Der Beweis von (5.48) folgt im wesentlichen dem Beweis von Satz 5.9 sowie dem für Satz 5.9 notwendigen Satz 5.8, deswegen sei an dieser Stelle dorthin verwiesen. Mit Satz 5.15 können wir uns im Folgenden in der  $(s, \varphi)$ -Halbebene auf einen Streifen  $K_0 < s < K_1$  ( $K_0, K_1 > 0$  geeignet) beschränken.

Annahme: Die Voraussetzungen von Satz 5.8 (i)-(iii) ((i)'-(iii)') läuft völlig analog seien erfüllt.

Dann folgt (vgl. Beweis von Satz 5.8)  $\forall s$  mit  $K_0 < s < K_1$  und  $\mu$  hinreichend klein

$$\text{sign } \dot{\varphi}(s, \varphi_1, \mu) = \text{sign } g(\varphi_1) \quad \wedge \quad \text{sign } \dot{\varphi}(s, \varphi_2, \mu) = \text{sign } d(\varphi_2)$$

woraus

$$\text{sign } \dot{\varphi}(s, \varphi_1, \mu) \neq \text{sign } \dot{\varphi}(s, \varphi_2, \mu)$$

folgt, was ein Widerspruch zur Voraussetzung dieses Satzes ist und wir können uns im weiteren auf die im Beweis von Satz 5.9 angegebenen Fälle 1), 2) und 3) beschränken.

Um den weiteren Beweis zu erleichtern, definiere:

$$\begin{aligned}\Phi &:= \left\{ \varphi \left| \frac{d}{d\varphi} \sqrt[k]{-\frac{d(\varphi)}{g(\varphi)}} = 0 \right. \right\} \\ \tilde{K}_0 &:= \min \left\{ K_0, \frac{1}{2} \min_{\varphi \in \Phi} \sqrt[k]{-\frac{d(\varphi)}{g(\varphi)}} \right\} \\ \tilde{K}_1 &:= \max \left\{ K_1, 2 \max_{\varphi \in \Phi} \sqrt[k]{-\frac{d(\varphi)}{g(\varphi)}} \right\} \\ M_{\hat{S}_2}(\mu) &:= \max_{s \in [0, \tilde{K}_1]} \max_{\varphi \in [0, 2\pi]} \left| \hat{S}_2(s, \varphi, \mu) \right|\end{aligned}$$

Wir betrachten zunächst den Fall 1):

$$d(\varphi) \neq 0 \neq g(\varphi) \quad \forall \varphi \in [0, 2\pi] \quad \wedge \quad \text{sign}(d(\varphi)) \neq \text{sign}(g(\varphi))$$

Dann ist die Gleichung:

$$h(\varphi, \mu) := -\hat{S}_2\left(\sqrt[k]{-\frac{d(\varphi) + h(\varphi, \mu)}{g(\varphi)}}, \varphi, \mu\right) \quad (5.49)$$

nach dem Theorem über die implizite Funktion eindeutig  $\forall \varphi$  in einer Umgebung von  $(h = 0, \mu = 0)$  für  $\mu$  hinreichend klein auflösbar

(Beachte:  $\hat{S}_2(s, \varphi, \mu) = O(\sqrt[k]{|\mu|})$ ,  $\text{sign}(d(\varphi)g(\varphi)) = -1$ ), d.h.

$$s(\varphi, \mu) := \sqrt[k]{-\frac{d(\varphi) + h(\varphi, \mu)}{g(\varphi)}}$$

(vgl. (5.22) im Beweis von Satz 5.9) ist ebenfalls  $\forall \varphi$  erklärt und die Lösung der Gleichung

$$\dot{\varphi} = 0 = d(\varphi) + g(\varphi)s^k + \hat{S}_2(s, \varphi, \mu) \quad (5.50)$$

wie man durch Einsetzen leicht verifiziert, d.h. die Lösungen von (5.50) werden durch den Graph der Funktion  $s(\varphi, \mu)$  beschrieben. Weiter liegt dieser Graph nach Konstruktion von  $\tilde{K}_0$  bzw.  $\tilde{K}_1$  vollständig im von  $\tilde{K}_0$  bzw.  $\tilde{K}_1$  begrenzten Streifen (wie auch  $q(\varphi, \mu)$ ) und wir können wie im Beweis von Satz 5.9 schließen, mit dem Streifen zwischen  $\tilde{K}_0$  und  $\tilde{K}_1$  statt der  $(r, \varphi)$ -Halbebene sowie  $s(\varphi, \mu)$  statt  $r(\varphi) = \sqrt[k]{-\frac{d(\varphi)}{g(\varphi)}}$ .

Falls die Fälle 2) bzw. 3) vorliegen, sind noch einige technische Betrachtungen nötig, da der Definitionsbereich von  $s(\varphi, \mu)$  ( $=: \mathbb{D}_s(\mu)$ ) für  $\mu$  hinreichend klein

offensichtlich nicht ganz  $[0, 2\pi]$  (bzw.  $\mathbb{R}$ ) sein kann.

Wir behandeln zunächst Fall 2):

$$d(\varphi_1) = d(\varphi_2) = 0 \wedge d(\varphi) \neq 0 \forall \varphi \in (\varphi_1, \varphi_2) \wedge g(\varphi) \neq 0 \forall \varphi \in [\varphi_1, \varphi_2]$$

Es gilt:

$$\text{Zu } \chi_1 > 0 \exists \varepsilon_1(\chi_1) \text{ mit: } |\varphi - \varphi_i| \leq \varepsilon_1 \quad i = 1, 2 \implies \sqrt[k]{\left| \frac{d(\varphi)}{g(\varphi)} \right|} < \chi_1$$

Sei im folgenden  $\chi_1 := \frac{1}{3}\tilde{K}_0$  und  $\varepsilon_1 := \varepsilon_1(\frac{1}{3}\tilde{K}_0)$

Definiere dann:

$$m_g := \min \{ |g(\varphi)| \mid \varphi \in [\varphi_1 - \varepsilon_1, \varphi_2 + \varepsilon_1] \}$$

Weiter gilt:

$$\text{Zu } \chi_2 > 0 \exists \mu_2(\chi_2) \text{ mit: } \mu < \mu_2 \implies \frac{1}{m_g} M_{\hat{S}_2}(\mu) < \chi_2$$

(Beachte  $M_{\hat{S}_2}(0) = 0$  wegen  $\hat{S}_2(s, \varphi, \mu) = O(\sqrt[k]{|\mu|})$ )

Wähle hier  $\chi_2 := \left(\frac{1}{3}\tilde{K}_0\right)^k$  und  $\mu_2 := \mu_2\left(\left(\frac{1}{3}\tilde{K}_0\right)^k\right)$ .

Wir zeigen:

Gibt es eine Lösung von  $\dot{\varphi} = 0$ , die für  $\mu < \mu_2$  in einem der beiden Rechtecke  $[0, \tilde{K}_1] \times [\varphi_i - \varepsilon_1, \varphi_i + \varepsilon_1]$   $i = 1, 2$  liegt, so liegt sie bereits in einem der Rechtecke  $[0, \frac{\sqrt[k]{2}}{3}\tilde{K}_0] \times [\varphi_i - \varepsilon_1, \varphi_i + \varepsilon_1]$   $i = 1, 2$ .

Dies folgt wegen

$$\dot{\varphi} = 0 \iff s^k = -\frac{d(\varphi)}{g(\varphi)} - \frac{1}{g(\varphi)} \hat{S}_2(s, \varphi, \mu)$$

aus der Abschätzung ( $\varphi \in [\varphi_i - \varepsilon_1, \varphi_i + \varepsilon_1]$   $i = 1, 2$ )

$$s^k \leq \left| \frac{d(\varphi)}{g(\varphi)} \right| + \frac{1}{|g(\varphi)|} |\hat{S}_2(s, \varphi, \mu)| \leq \left(\frac{1}{3}\tilde{K}_0\right)^k + \left(\frac{1}{3}\tilde{K}_0\right)^k = 2 \left(\frac{1}{3}\tilde{K}_0\right)^k$$

bzw.

$$s \leq \frac{\sqrt[k]{2}}{3} \tilde{K}_0$$

Es gilt außerdem:

$$\text{Zu } \varepsilon_3 > 0 \exists \mu_3(\varepsilon_3) \text{ mit: } \mu < \mu_3 \implies [\varphi_1 + \varepsilon_3, \varphi_2 - \varepsilon_3] \subseteq \mathbb{D}_s(\mu)$$

Wählen wir jetzt  $\varepsilon_3 := \frac{1}{2}\varepsilon_1$  und  $\mu_3 = \mu_3(\frac{1}{2}\varepsilon_1)$  ragt das Intervall  $[\varphi_1 + \frac{1}{2}\varepsilon_1, \varphi_2 - \frac{1}{2}\varepsilon_1]$  in die Intervalle  $[\varphi_i - \varepsilon_1, \varphi_i + \varepsilon_1]$   $i = 1, 2$  hinein. Damit besitzt  $s(\varphi, \mu)$  für  $\mu$  hinreichend klein in den zwei Intervallen  $[\varphi_1 + \frac{1}{2}\varepsilon_1, \varphi_1 + \varepsilon_1]$  bzw.  $[\varphi_2 - \varepsilon_1, \varphi_2 - \frac{1}{2}\varepsilon_1]$  nur

Werte  $\leq \frac{\sqrt{2}}{3}\tilde{K}_0$  und nach Konstruktion von  $\tilde{K}_0, \tilde{K}_1$  im Intervall  $[\varphi_1 + \varepsilon_1, \varphi_2 - \varepsilon_1]$  mindestens einen Wert zwischen  $\tilde{K}_0$  bzw.  $\tilde{K}_1$ . Es existieren also  $\bar{\varphi}_1(\mu), \bar{\varphi}_2(\mu)$  mit:

$$\bar{\varphi}_1(\mu) := \min \{ \varphi \in [\varphi_1 + \varepsilon_1, \varphi_2 - \varepsilon_1] \mid s(\varphi, \mu) = K_0 \}$$

$$\bar{\varphi}_2(\mu) := \max \{ \varphi \in [\varphi_1 + \varepsilon_1, \varphi_2 - \varepsilon_1] \mid s(\varphi, \mu) = K_0 \}$$

Da  $s(\varphi, \mu)$  außerdem für  $\mu$  hinreichend klein nach Konstruktion von  $\tilde{K}_1$  im Intervall  $[\varphi_1 + \frac{1}{2}\varepsilon_1, \varphi_2 - \frac{1}{2}\varepsilon_1]$  keine Werte  $\geq \tilde{K}_1$  haben kann und im offenen Intervall  $(\bar{\varphi}_1(\mu), \bar{\varphi}_2(\mu))$  nach Konstruktion von  $\Phi$  bzw.  $\tilde{K}_0$  auch keine Werte  $\leq \tilde{K}_0$ , können wir wie im Fall 2) im Beweis von Satz 5.9 mit  $\bar{\varphi}_1(\mu), \bar{\varphi}_2(\mu), s(\varphi, \mu)$  und dem Streifen zwischen  $\tilde{K}_0$  und  $\tilde{K}_1$  statt  $\varphi_1, \varphi_2, r(\varphi)$  und der  $(r, \varphi)$ -Halbebene schließen.

Der Fall 3) läßt sich auf Fall 2) zurückführen, wenn man die Transformation  $s \rightarrow \frac{1}{s}$  durchführt und dann Satz 1.12 anwendet.

## 5.17 Bemerkung:

Eine Äquivalenz wie in Satz 5.14 für Gleichung (5.9) ist für Gleichung (5.5) bzw. (5.6) nicht zu erwarten, wie folgende Beispiele zeigen:

a) Betrachte die DGL:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -\mu x_2 + 2\mu^2 x_1 - 3\mu x_1(x_1^2 + x_2^2) + x_1(x_1^2 + x_2^2)^2 \\ \dot{x}_2 &= \mu x_1 + 2\mu^2 x_2 - 3\mu x_2(x_1^2 + x_2^2) + x_2(x_1^2 + x_2^2)^2 \end{aligned}$$

Diese DGL lautet in Polarkoordinaten

$$\begin{aligned} \dot{r} &= r^5 - 3\mu r^3 + 2\mu^2 r \\ \dot{\varphi} &= \mu \end{aligned} \tag{5.51}$$

d.h.

$$c(\varphi) \equiv 0 \quad d(\varphi) \equiv 1 \quad f(\varphi) \equiv 1 \quad g(\varphi) \equiv 0$$

$$S_1(r, \varphi, \mu) = 2\mu^2 - 3\mu r^2 \quad S_2(r, \varphi, \mu) \equiv 0 \quad D(\varphi) \equiv -1 \neq 0$$

Gleichung (5.21) besitzt wegen  $c(\varphi) \equiv 0 \neq d(\varphi)$  nur  $2\pi$ -periodische Trajektorien, damit ist (i) in Satz 5.14 nicht erfüllt. Dennoch besitzt die DGL (5.51) für  $\mu > 0$  sogar zwei  $2\pi$ -periodische Trajektorien, die sich in  $\mu = 0$  von  $r \equiv 0$  abzweigen, nämlich

$$p_1(\varphi, \mu) = \sqrt{\mu} \quad p_2(\varphi, \mu) = \sqrt{2\mu}$$

was man durch Einsetzen leicht verifiziert.

b) Betrachte nun folgende DGL

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= \mu \left( \frac{5}{4}x_1^3 - \frac{1}{2}x_1^2x_2 - \frac{3}{4}x_1x_2^2 \right) + (x_2 - 4x_1)(x_1^2 + x_2^2)^2 - \mu^2(x_1^2x_2 + x_2^3) \\ \dot{x}_2 &= \mu \left( \frac{5}{4}x_1^2x_2 + \frac{1}{2}x_1x_2^2 - \frac{3}{4}x_2^3 \right) + (x_1 - 4x_2)(x_1^2 + x_2^2)^2 + \mu^2(x_1^3 + x_1x_2^2)\end{aligned}$$

Diese DGL lautet in Polarkoordinaten:

$$\begin{aligned}\dot{r} &= \mu \left( \frac{1}{4} + \cos(2\varphi) \left( 1 - \frac{1}{4} \sin(2\varphi) \right) \right) r^3 + (\sin(2\varphi) - 4)r^5 \\ \dot{\varphi} &= \mu \frac{1}{4} \sin^2(2\varphi) r^2 + \cos(2\varphi) r^4 + \mu^2 r^2\end{aligned} \quad (5.52)$$

d.h.

$$\begin{aligned}c(\varphi) &= \frac{1}{4} + \cos(2\varphi) \left( 1 - \frac{1}{4} \sin(2\varphi) \right) & d(\varphi) &= \frac{1}{4} \sin^2(2\varphi) \\ f(\varphi) &= \sin(2\varphi) - 4 < 0 & g(\varphi) &= \cos(2\varphi) \\ S_1(r, \varphi, \mu) &\equiv 0 & S_2(r, \varphi, \mu) &= \mu^2 r^2 \\ D(\varphi) &= \left( \frac{1}{4} + \cos(2\varphi) \left( 1 - \frac{1}{4} \sin(2\varphi) \right) \right) \cos(2\varphi) - \left( \sin(2\varphi) - 4 \right) \frac{1}{4} \sin^2(2\varphi) = \\ &= \frac{1}{4} \cos(2\varphi) + \cos^2(2\varphi) \left( 1 - \frac{1}{4} \sin(2\varphi) \right) + \sin^2(2\varphi) \left( 1 - \frac{1}{4} \sin(2\varphi) \right) = \\ &= 1 + \frac{1}{4} \cos(2\varphi) - \frac{1}{4} \sin(2\varphi) = 1 + \frac{\sqrt{2}}{4} \sin\left(\frac{\pi}{4} - 2\varphi\right) > 0\end{aligned}$$

Zur weiteren Betrachtung transformieren wir die DGL (5.52) durch die Transformation  $r = \sqrt[3]{\mu} s$  für  $\mu \neq 0$  wie im letzten Satz (vgl. DGL (5.47)) in die DGL:

$$\begin{aligned}\dot{s} &= \left( \frac{1}{4} + \cos(2\varphi) \left( 1 - \frac{1}{4} \sin(2\varphi) \right) \right) s + (\sin(2\varphi) - 4)s^3 \\ \dot{\varphi} &= \frac{1}{4} \sin^2(2\varphi) + \cos(2\varphi)s^2 + \mu\end{aligned} \quad (5.53)$$

d.h.

$$\hat{S}_1(s, \varphi, \mu) \equiv 0 \quad \hat{S}_2(s, \varphi, \mu) = \mu$$

Wegen

$$\begin{aligned}d(\bar{\varphi}) &= \frac{1}{4} \sin^2(2\bar{\varphi}) = 0 \iff \bar{\varphi} \in \left\{ n \frac{\pi}{2} \mid n \in \mathbb{Z} \right\} \\ c(\bar{\varphi}) &= \frac{1}{4} + \cos(2\bar{\varphi}) \left( 1 - \frac{1}{4} \sin(2\bar{\varphi}) \right) = \frac{1}{4} + \cos(2\bar{\varphi}) = \begin{cases} \frac{5}{4} & \text{falls } n \equiv 0 \pmod{2} \\ -\frac{3}{4} & \text{falls } n \equiv 1 \pmod{2} \end{cases}\end{aligned}$$

$$d(\varphi) > 0 \quad \forall \varphi \in \mathbb{R} \setminus \left\{ n\frac{\pi}{2} \mid n \in \mathbb{Z} \right\}$$

(vgl. Bemerkung 2.5.c (ii) bzw. (iii)) besitzt  $s \equiv 0$  in der DGL

$$\begin{aligned} \dot{s} &= \left( \frac{1}{4} + \cos(2\varphi) \left( 1 - \frac{1}{4} \sin(2\varphi) \right) \right) s \\ \dot{\varphi} &= \frac{1}{4} \sin^2(2\varphi) \end{aligned} \tag{5.54}$$

sowohl hyperbolische, als auch elliptische Sektoren.

Um den Satz 5.14 auf die DGL (5.53) anwenden zu können, obwohl (5.53) von  $\mu$  abhängt, vertauschen wir die beiden letzten Terme bei  $\dot{\varphi}$  in (5.53). Damit schreibt sich die DGL (5.53)

$$\begin{aligned} \dot{s} &= \left( \frac{1}{4} + \cos(2\varphi) \left( 1 - \frac{1}{4} \sin(2\varphi) \right) \right) s + (\sin(2\varphi) - 4)s^3 \\ \dot{\varphi} &= \frac{1}{4} \sin^2(2\varphi) + \mu + \cos(2\varphi)s^2 \end{aligned} \tag{5.55}$$

d.h. wir betrachten  $\mu$  als Konstante statt als Störparameter. Dann bleiben  $c(\varphi), f(\varphi), g(\varphi), \hat{S}_1(s, \varphi, \mu)$  wie oben bei DGL (5.53), es ändern sich lediglich:

$$d(\varphi) = \frac{1}{4} \sin^2(2\varphi) + \mu \quad \hat{S}_2(s, \varphi, \mu) \equiv 0$$

$$D(\varphi) = 1 + \frac{\sqrt{2}}{4} \sin\left(\frac{\pi}{4} - 2\varphi\right) - \mu(\sin(2\varphi) - 4) > 0$$

Desweiteren ist  $s \equiv 0$  in der DGL

$$\begin{aligned} \dot{s} &= \left( \frac{1}{4} + \cos(2\varphi) \left( 1 - \frac{1}{4} \sin(2\varphi) \right) \right) s \\ \dot{\varphi} &= \frac{1}{4} \sin^2(2\varphi) + \mu \end{aligned}$$

$\forall \mu > 0$  ein instabiler Wirbel (vgl. Bemerkung 2.5.b (ii)):

$$\begin{aligned} &\frac{1}{4} \sin^2(2\varphi) + \mu > 0 \quad \wedge \quad \int_0^{2\pi} \frac{\frac{1}{4} + \cos(2\varphi) \left( 1 - \frac{1}{4} \sin(2\varphi) \right)}{\frac{1}{4} \sin^2(2\varphi) + \mu} d\varphi = \\ &= \int_0^{2\pi} \frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{4} \sin^2(2\varphi) + \mu} d\varphi + \int_0^{2\pi} \frac{\cos(2\varphi) \left( 1 - \frac{1}{4} \sin(2\varphi) \right)}{\frac{1}{4} \sin^2(2\varphi) + \mu} d\varphi = \int_0^{2\pi} \frac{1}{\sin^2(2\varphi) + 4\mu} d\varphi + 0 > 0 \end{aligned}$$

Außerdem ist  $s \equiv 0$  in der DGL

$$\begin{aligned} \dot{s} &= (\sin(2\varphi) - 4)s \\ \dot{\varphi} &= \cos(2\varphi) \end{aligned}$$

(vgl. Bemerkung 2.5.c (i)) ein stabiler uneigentlicher Knoten.

Damit können wir Satz 5.14 (für  $\mu > 0$  beliebig aber fest) auf die DGL (5.55) anwenden:

Die DGL (5.55) besitzt für  $\mu > 0$  jeweils genau eine periodische Trajektorie  $> 0$ .

Da die DGL (5.55) und die DGL (5.53) völlig identisch sind und die Aussage von Satz 5.14  $\forall \mu > 0$  richtig ist, besitzt die DGL (5.53) und damit auch die DGL (5.52)  $\forall \mu > 0$  jeweils genau eine periodische Trajektorie  $> 0$ . Die den periodischen Trajektorien von (5.53) entsprechenden Trajektorien der DGL (5.52) zweigen in  $\mu = 0$  von  $r \equiv 0$  (beachte:  $r = \sqrt[2]{\mu} s$ ) und das obwohl die DGL (5.54) sowohl elliptische, als auch hyperbolische Sektoren besitzt.

## 5.18 Satz:

Seien  $c(\varphi), d(\varphi), f(\varphi), g(\varphi), D(\varphi)$  definiert wie in Bemerkung 5.1 und  $D(\varphi) \neq 0$ . Weiter seien die DGL (5.20) und die DGL (5.21)

$$\begin{array}{ll} \dot{r} = f(\varphi)r & \dot{r} = c(\varphi)r \\ & \text{bzw.} \\ \dot{\varphi} = g(\varphi) & \dot{\varphi} = d(\varphi) \end{array}$$

weder im Besitz  $2\pi$ -periodischer Trajektorien  $> 0$  noch eines nichtparabolischen Sektors.

Dann gilt:

Von der Trajektorie  $r \equiv 0$  der DGL (5.5)

$$\begin{array}{ll} \dot{r} = \mu c(\varphi)r^m + f(\varphi)r^l + S_1(r, \varphi, \mu)r^m \\ \dot{\varphi} = \mu d(\varphi)r^{m-1} + g(\varphi)r^{l-1} + S_2(r, \varphi, \mu)r^{m-1} \end{array}$$

zweigt in  $\mu = 0$  genau eine einparametrische Schar  $2\pi$ -periodischer Trajektorien  $p(\varphi, \mu) > 0$  ab und zwar entweder für  $\mu > 0$  (falls  $r \equiv 0$  in (5.20) und (5.21) verschiedenes Stabilitätsverhalten hat) oder für  $\mu < 0$  (falls  $r \equiv 0$  in (5.20) und (5.21) gleiches Stabilitätsverhalten hat), wählt man  $|\mu|$  nur hinreichend klein.

$p(\varphi, \mu)$  ist asymptotisch stabil (bei Zeitumkehr asymptotisch stabil), falls  $r \equiv 0$  in (5.20) asymptotisch stabil (bei Zeitumkehr asymptotisch stabil) ist und läuft von links nach rechts, falls  $D(\varphi) > 0$ , sonst umgekehrt.

Für die Amplitude  $A(\mu)$  und die Periode  $T(\mu)$  einer zu  $p(\varphi, \mu)$  gehörenden Lösung der DGL (5.5) gilt:

$$A(\mu) \simeq \sqrt[l]{|\mu|} \left( 1 + O(\sqrt[l]{|\mu|}) \right) \quad T(\mu) \simeq \left( \sqrt[l]{|\mu|} \right)^{1-l} \left( 1 + O(\sqrt[l]{|\mu|}) \right) \left( \xrightarrow{\mu \rightarrow 0} \infty \right)$$

Beweis:

Wir gehen wieder vor wie beim letzten Satz, führen die DGL (5.5) (wir betrachten zunächst  $\text{sign}(\mu) = 1$ ) über in die DGL (5.47)

$$\begin{aligned}\dot{s} &= c(\varphi)s + f(\varphi)s^{k+1} + \hat{S}_1(s, \varphi, \mu)s \\ \dot{\varphi} &= d(\varphi) + g(\varphi)s^k + \hat{S}_2(s, \varphi, \mu)\end{aligned}$$

und unterscheiden die Fälle:

- (i)  $r \equiv 0$  in der DGL (5.20) und  $r \equiv 0$  in der DGL (5.21) haben gleiches Stabilitätsverhalten.
- (ii)  $r \equiv 0$  in der DGL (5.20) und  $r \equiv 0$  in der DGL (5.21) haben verschiedenes Stabilitätsverhalten.

Wir beginnen mit (i):

Annahme: Die DGL (5.5) habe für  $\mu$  hinreichend klein eine periodische Trajektorie  $p(\varphi, \mu)$ , die in  $\mu = 0$  von  $r \equiv 0$  abzweigt.

Dann muß auch die DGL (5.47) eine periodische Trajektorie  $q(\varphi, \mu) := \frac{p(\varphi, \mu)}{\sqrt[k]{\mu}}$  besitzen. Wegen Satz 5.15 existieren  $K_0, K_1, \mu_2 > 0$ , so daß  $\forall \varphi \in [0, 2\pi]$  und  $\mu < \mu_2$  gilt:

$$K_0 < q(\varphi, \mu) < K_1$$

Die Funktionenfolge  $(q(\varphi, \mu))_{\mu < \mu_2}$  ist also gleichmäßig beschränkt und wegen (vgl. Satz 5.16)  $\dot{\varphi}(q(\varphi, \mu), \varphi, \mu) \neq 0$  für  $\mu$  hinreichend klein auch gleichgradig stetig. Damit existiert mit dem Satz von Arzela-Ascoli eine Folge  $(\mu_n)_{n \in \mathbb{N}}$  mit der Eigenschaft  $\lim_{n \rightarrow \infty} \mu_n = 0$  und

$$\lim_{n \rightarrow \infty} q(\varphi, \mu_n) = q(\varphi)$$

Damit gilt auch (beachte:  $\hat{S}_i(s, \varphi, \mu) = O(\sqrt[k]{\mu})$   $i = 1, 2$ )

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \hat{S}_i(q(\varphi, \mu_n), \varphi, \mu_n) = 0 \quad i = 1, 2$$

und  $q(\varphi)$  ist eine periodische Trajektorie  $> 0$  der DGL (5.9). Nach Satz 5.14 ist dies aber nicht möglich. Widerspruch.

Nun behandeln wir (ii):

Da verschiedenes Stabilitätsverhalten für  $r \equiv 0$  bei den beiden DGL (5.20) bzw. (5.21) vorliegt, besitzt die DGL (5.9) nach Satz 5.14 genau eine periodische Trajektorie  $q(\varphi)$ , die gleichzeitig eine Lösung der Randwertaufgabe mit Periodizitätsrandbedingungen ist:

$$\frac{dr}{d\varphi} = \frac{c(\varphi) + f(\varphi)r^k}{d(\varphi) + g(\varphi)r^k} r \quad r(0) = r(2\pi)$$

Da der charakteristische Exponent  $\neq 0$  ist (vgl. (5.26) im Beweis von Satz 5.10) und damit die Variationsgleichung bzgl.  $q(\varphi)$  keine periodische Lösung besitzt, zweigt von  $q(\varphi)$  genau eine periodische Lösung

$$q(\varphi, \mu) := q(\varphi) + O(\sqrt[k]{\mu}) \quad (5.56)$$

der DGL

$$\frac{dr}{d\varphi} = \frac{c(\varphi) + f(\varphi)r^k + \hat{S}_1(r, \varphi, \mu)}{d(\varphi) + g(\varphi)r^k + \hat{S}_2(r, \varphi, \mu)} r =: \frac{c(\varphi) + f(\varphi)r^k}{d(\varphi) + g(\varphi)r^k} r + O(\sqrt[k]{\mu}) \quad (5.57)$$

ab ([21] S. 348). Damit besitzt auch die DGL (5.5) die periodische Trajektorie

$$p(\varphi, \mu) := \sqrt[k]{\mu} \left( q(\varphi) + O(\sqrt[k]{\mu}) \right) \quad (5.58)$$

Annahme: Die DGL (5.5) habe für  $\mu$  hinreichend klein mindestens 2 periodische Trajektorien  $p_1(\varphi, \mu) \neq p_2(\varphi, \mu)$ , die in  $\mu = 0$  von  $r \equiv 0$  abzweigen.

Dann hat die DGL (5.47) ebenfalls mindestens 2 periodische Trajektorien

$$q_1(\varphi, \mu) = \frac{p_1(\varphi, \mu)}{\sqrt[k]{\mu}} \neq \frac{p_2(\varphi, \mu)}{\sqrt[k]{\mu}} = q_2(\varphi, \mu)$$

Wendet man wie eben bei (i) den Satz von Arzela-Ascoli an, folgt die Existenz einer Folge  $(\mu_n)_{n \in \mathbb{N}}$  mit

$$\lim_{n \rightarrow \infty} q_1(\varphi, \mu) =: q_1(\varphi) \quad \wedge \quad \lim_{n \rightarrow \infty} q_2(\varphi, \mu) =: q_2(\varphi)$$

wobei  $q_1(\varphi), q_2(\varphi)$  periodische Trajektorien  $> 0$  der DGL (5.9) sind. Da aber nach Satz 5.14 die DGL (5.9) nur genau eine periodische Trajektorie  $> 0$  besitzt, gilt:

$$\lim_{\mu \rightarrow 0} q_1(\varphi, \mu) = q_1(\varphi) = q(\varphi) = q_2(\varphi) = \lim_{\mu \rightarrow 0} q_2(\varphi, \mu)$$

d.h.  $q_1(\varphi, \mu)$  und  $q_2(\varphi, \mu)$  zweigen beide in  $\mu = 0$  von  $q(\varphi)$  ab. Von  $q(\varphi)$  kann aber nur (s.o.) genau eine Trajektorie abzweigen. Widerspruch.

Der noch verbleibende Fall  $\mu < 0$  wird analog gezeigt, wegen  $f(\varphi) \leftrightarrow -f(\varphi)$  und  $g(\varphi) \leftrightarrow -g(\varphi)$  vertauscht sich nur (i) mit (ii).

Das Stabilitätsverhalten und die Laufrichtung von  $p(\varphi, \mu)$  können für  $|\mu|$  hinreichend klein wegen (5.58) und (5.26) von Satz 5.14 übernommen werden.

Die Periode gewinnt man aus der Gleichung für  $\dot{\varphi}$  in (5.5):

$$\dot{\varphi} \simeq \left( {}^{l-m}\sqrt{|\mu|} \right)^{l-1} \left( 1 + O({}^{l-m}\sqrt{|\mu|}) \right) \implies dt \simeq \frac{d\varphi}{\left( {}^{l-m}\sqrt{|\mu|} \right)^{l-1} \left( 1 + O({}^{l-m}\sqrt{|\mu|}) \right)}$$

Integration ergibt jetzt wegen

$$\frac{1}{\left( {}^{l-m}\sqrt{|\mu|} \right)^{l-1} \left( 1 + O({}^{l-m}\sqrt{|\mu|}) \right)} = \left( {}^{l-m}\sqrt{|\mu|} \right)^{1-l} \left( 1 + O({}^{l-m}\sqrt{|\mu|}) \right)$$

die Behauptung.

## 5.19 Korollar:

Seien  $c(\varphi), d(\varphi), f(\varphi), g(\varphi), D(\varphi)$  definiert wie in Bemerkung 5.1,  $D(\varphi) \neq 0$  und  $\tilde{S}_i(r, \varphi, \mu) \in C^1(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \times U(0), \mathbb{R})$  mit  $\tilde{S}_i(r, \varphi, 0) \equiv 0 \quad i = 1, 2$ . Weiter sei  $r \equiv 0$  in der DGL (5.20) asymptotisch stabil (bei Zeitumkehr asymptotisch stabil) und  $r \equiv 0$  in der DGL (5.21) bei Zeitumkehr asymptotisch stabil (asymptotisch stabil) (vgl. hierzu Bemerkung 2.9).

Dann gilt:

Von der eindeutig bestimmten  $2\pi$ -periodischen Trajektorie  $q(\varphi) > 0$  der DGL (5.29) zweigt in  $\mu = 0$  genau eine einparametrische Schar asymptotisch stabiler (bei Zeitumkehr asymptotisch stabiler)  $2\pi$ -periodischer Trajektorien  $q(\varphi, \mu)$  mit  $q(\varphi, 0) \equiv q(\varphi)$  der DGL

$$\begin{aligned}\dot{r} &= c(\varphi)r^m + f(\varphi)r^l + \tilde{S}_1(r, \varphi, \mu)r^m \\ \dot{\varphi} &= d(\varphi)r^{m-1} + g(\varphi)r^{l-1} + \tilde{S}_2(r, \varphi, \mu)r^{m-1}\end{aligned}\tag{5.59}$$

ab.

Beweis:

Analog (ii) im Beweis von Satz 5.18, ersetze nur (5.56) durch

$$q(\varphi, \mu) := q(\varphi) + O(\mu)\tag{5.60}$$

und die DGL (5.57) durch

$$\frac{dr}{d\varphi} = \frac{c(\varphi) + f(\varphi)r^k + \tilde{S}_1(r, \varphi, \mu)}{d(\varphi) + g(\varphi)r^k + \tilde{S}_2(r, \varphi, \mu)} r =: \frac{c(\varphi) + f(\varphi)r^k}{d(\varphi) + g(\varphi)r^k} r + O(\mu)\tag{5.61}$$

Zum Ende des Kapitels nun die Hauptsätze 5.14, 5.18 und Korollar 5.19 in kartesischer Darstellung:

## 5.20 Satz:

Seien  $q_i(x_1, x_2), Q_i(x_1, x_2) \quad i = 1, 2$  definiert wie in Bemerkung 5.1 und es gelte  $\hat{D}(x_1, x_2) := q_1(x_1, x_2)Q_2(x_1, x_2) - q_2(x_1, x_2)Q_1(x_1, x_2) \neq 0$  (vgl. Def. 4.14.a)

Dann sind äquivalent:

(i) Der Ursprung der DGL

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= q_1(x_1, x_2) \\ \dot{x}_2 &= q_2(x_1, x_2)\end{aligned}\tag{5.62}$$

ist asymptotisch stabil (bei Zeitumkehr asymptotisch stabil) und der Ursprung der DGL

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= Q_1(x_1, x_2) \\ x_2 &= Q_2(x_1, x_2)\end{aligned}\tag{5.63}$$

ist bei Zeitumkehr asymptotisch stabil (asymptotisch stabil).

(ii) Die DGL

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= q_1(x_1, x_2) + Q_1(x_1, x_2) \\ \dot{x}_2 &= q_2(x_1, x_2) + Q_2(x_1, x_2)\end{aligned}\tag{5.64}$$

besitzt mindestens eine Schar periodischer Lösungen  $> 0$ .

(iii) Die DGL (5.64) besitzt genau eine Schar periodischer Lösungen  $> 0$ .

Weiter gilt:

Diese Schar ist asymptotisch orbital stabil (bei Zeitumkehr asymptotisch orbital stabil) und läuft in mathematisch positiver Richtung um den Ursprung, falls  $q_1 Q_2 - q_2 Q_1 > 0$  ( $< 0$ ), sonst umgekehrt.

Beweis:

Satz 5.14.

## 5.21 Satz:

Seien  $q_i(x_1, x_2), Q_i(x_1, x_2)$   $R_i(x_1, x_2)$   $i = 1, 2$  definiert wie in Bemerkung 5.1 und

$$\hat{D}(x_1, x_2) = q_1(x_1, x_2)Q_2(x_1, x_2) - q_2(x_1, x_2)Q_1(x_1, x_2) \neq 0.$$

Weiter sei der stationäre Punkt im Ursprung der DGL (5.62) und der DGL (5.63)

$$\begin{array}{ll}\dot{x}_1 = q_1(x_1, x_2) & \dot{x}_1 = Q_1(x_1, x_2) \\ & \text{bzw.} \\ \dot{x}_2 = q_2(x_1, x_2) & x_2 = Q_2(x_1, x_2)\end{array}$$

kein Zentrum und besitze keinen nichtparabolischen Sektor.

Dann gilt:

Vom stationären Punkt im Ursprung der DGL (5.4)

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= \mu q_1(x_1, x_2) + Q_1(x_1, x_2) + R_1(x_1, x_2, \mu) \\ \dot{x}_2 &= \mu q_2(x_1, x_2) + Q_2(x_1, x_2) + R_2(x_1, x_2, \mu)\end{aligned}$$

zweigt in  $\mu = 0$  genau eine einparametrische Schar periodischer Lösungen ab und zwar entweder für  $\mu > 0$  (falls der Ursprung der DGL (5.62) und der Ursprung der DGL (5.63) verschiedenes Stabilitätsverhalten haben) oder für  $\mu < 0$  (sonst). Sie ist asymptotisch orbital stabil (bei Zeitumkehr asymptotisch orbital stabil), falls der Ursprung in (5.63) asymptotisch stabil (bei Zeitumkehr asymptotisch stabil) ist und läuft in mathematisch positiver Richtung um den Ursprung, falls  $q_1 Q_2 - q_2 Q_1 > 0$  ( $< 0$ ) gilt, sonst umgekehrt.

Für ihre Amplitude  $A(\mu)$  und ihre Periode  $T(\mu)$  gilt:

$$A(\mu) \simeq \sqrt[l-m]{|\mu|} \left( 1 + O(\sqrt[l-m]{|\mu|}) \right) \quad T(\mu) \simeq \left( \sqrt[l-m]{|\mu|} \right)^{1-l} \left( 1 + O(\sqrt[l-m]{|\mu|}) \right)$$

Beweis:

Satz 5.18.

## 5.22 Korollar:

Seien  $q_i(x_1, x_2), Q_i(x_1, x_2)$   $i = 1, 2$  definiert wie in Bemerkung 5.1,  $\hat{D}(x_1, x_2)$  wie im Satz 5.20,  $\tilde{R}_i(x_1, x_2, \mu) \in C^1(\mathbb{R}^2 \times U(0), \mathbb{R})$  mit  $\tilde{R}_i(x_1, x_2, 0) \equiv 0$   $i = 1, 2$  und es gelte  $\hat{D}(x_1, x_2) \neq 0$ . Weiter sei der stationäre Punkt im Ursprung der DGL (5.62) asymptotisch stabil (bei Zeitumkehr asymptotisch stabil) und der stationäre Punkt im Ursprung der DGL (5.63) bei Zeitumkehr asymptotisch stabil (asymptotisch stabil) (vgl. hierzu Satz 2.8).

Dann gilt:

Von der eindeutig (bis auf Phasenverschiebung) bestimmten periodischen Lösung  $(p_1(t), p_2(t))$  der DGL (5.64) zweigt in  $\mu = 0$  genau eine asymptotisch stabile (bei Zeitumkehr asymptotisch stabile) einparametrische Schar periodischer Lösungen  $(p_1(t, \mu), p_2(t, \mu))$  mit  $p_i(t, 0) \equiv p_i(t)$   $i = 1, 2$  der DGL

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= q_1(x_1, x_2) + Q_1(x_1, x_2) + \tilde{R}_1(x_1, x_2, \mu) \\ \dot{x}_2 &= q_2(x_1, x_2) + Q_2(x_1, x_2) + \tilde{R}_2(x_1, x_2, \mu)\end{aligned}$$

ab.

Beweis:

Korollar 5.19.

## 5.23 Beispiele:

a) Betrachte folgende DGL:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= 2\mu x_1^3 - \mu x_1^2 x_2 - \mu x_2^3 - x_1^5 - 4x_1^4 x_2 - 2x_1^3 x_2^2 - 7x_1^2 x_2^3 - x_1 x_2^4 - 3x_2^5 \\ \dot{x}_2 &= \mu x_1^3 + 3\mu x_1^2 x_2 + \mu x_1 x_2^2 + \mu x_2^3 + 4x_1^5 - x_1^4 x_2 + 6x_1^3 x_2^2 - 2x_1^2 x_2^3 + 2x_1 x_2^4 - x_2^5\end{aligned}$$

Für diese DGL gilt:

Der stationäre Punkt im Ursprung der DGL

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= 2x_1^3 - x_1^2 x_2 - x_2^3 \\ \dot{x}_2 &= x_1^3 + 3x_1^2 x_2 + x_1 x_2^2 + x_2^3\end{aligned}$$

ist wegen

$$\begin{aligned}c(\varphi) &= 2\cos^4(\varphi) - \cos^3(\varphi)\sin(\varphi) - \cos(\varphi)\sin^3(\varphi) + \cos^3(\varphi)\sin(\varphi) + 3\cos^2(\varphi)\sin^2(\varphi) + \\ &+ \cos(\varphi)\sin^3(\varphi) + \sin^4(\varphi) = \left(\cos^2(\varphi) + \sin^2(\varphi)\right)^2 + \cos^2(\varphi)\sin^2(\varphi) + \cos^4(\varphi) = \\ &= 1 + \cos^2(\varphi) > 0 \quad \forall \varphi \in [0, 2\pi]\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}d(\varphi) &= \cos^4(\varphi) + 3\cos^3(\varphi)\sin(\varphi) + \cos^2(\varphi)\sin^2(\varphi) + \cos(\varphi)\sin^3(\varphi) - 2\cos^3(\varphi)\sin(\varphi) + \\ &+ \cos^2(\varphi)\sin^2(\varphi) + \sin^4(\varphi) = \left(\cos^2(\varphi) + \sin^2(\varphi)\right)^2 + \cos^3(\varphi)\sin(\varphi) + \cos(\varphi)\sin^3(\varphi) = \\ &= 1 + \cos(\varphi)\sin(\varphi) = 1 + \frac{1}{2}\sin(2\varphi) > 0 \quad \forall \varphi \in [0, 2\pi]\end{aligned}$$

ein instabiler Wirbel.

Der stationäre Punkt im Ursprung der DGL

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= -x_1^5 - 4x_1^4 x_2 - 2x_1^3 x_2^2 - 7x_1^2 x_2^3 - x_1 x_2^4 - 3x_2^5 \\ \dot{x}_2 &= 4x_1^5 - x_1^4 x_2 + 6x_1^3 x_2^2 - 2x_1^2 x_2^3 + 2x_1 x_2^4 - x_2^5\end{aligned}$$

ist wegen

$$\begin{aligned}
 f(\varphi) &= -\cos^6(\varphi) - 4\cos^5(\varphi)\sin(\varphi) - 2\cos^4(\varphi)\sin^2(\varphi) - 7\cos^3(\varphi)\sin^3(\varphi) - \cos^2(\varphi)\sin^4(\varphi) - \\
 &- 3\cos(\varphi)\sin^5(\varphi) + 4\cos^5(\varphi)\sin(\varphi) - \cos^4(\varphi)\sin^2(\varphi) + 6\cos^3(\varphi)\sin^3(\varphi) - 2\cos^2(\varphi)\sin^4(\varphi) + \\
 &+ 2\cos(\varphi)\sin^5(\varphi) - \sin^6(\varphi) = -\left(\cos^2(\varphi) + \sin^2(\varphi)\right)^3 - \cos^3(\varphi)\sin^3(\varphi) - \cos(\varphi)\sin^5(\varphi) = \\
 &= -1 - \cos(\varphi)\sin^3(\varphi) = -1 - \frac{1}{2}\sin^2(\varphi)\sin(2\varphi) < 0 \quad \forall \varphi \in [0, 2\pi]
 \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
 g(\varphi) &= 4\cos^6(\varphi) - \cos^5(\varphi)\sin(\varphi) + 6\cos^4(\varphi)\sin^2(\varphi) - 2\cos^3(\varphi)\sin^3(\varphi) + 2\cos^2(\varphi)\sin^4(\varphi) - \\
 &- \cos(\varphi)\sin^5(\varphi) + \cos^5(\varphi)\sin(\varphi) + 4\cos^4(\varphi)\sin^2(\varphi) + 2\cos^3(\varphi)\sin^3(\varphi) + 7\cos^2(\varphi)\sin^4(\varphi) + \\
 &+ \cos(\varphi)\sin^5(\varphi) + 3\sin^6(\varphi) = 3\left(\cos^2(\varphi) + \sin^2(\varphi)\right)^3 + \cos^6(\varphi) + \cos^4(\varphi)\sin^2(\varphi) = \\
 &= 3 + \cos^4(\varphi) > 0 \quad \forall \varphi \in [0, 2\pi]
 \end{aligned}$$

ein stabiler Wirbel.

Weiter gilt wegen

$$c(\varphi) > 0 \quad d(\varphi) > 0 \quad f(\varphi) < 0 \quad g(\varphi) > 0 \quad \forall \varphi \in [0, 2\pi]$$

$$c(\varphi)g(\varphi) - f(\varphi)d(\varphi) > 0 \quad \forall \varphi \in [0, 2\pi]$$

Damit sind die Voraussetzungen des Satzes 5.20 erfüllt, d.h. vom Ursprung zweigt in  $\mu = 0$  für  $\mu > 0$  genau eine einparametrische Schar periodischer Lösungen ab. Diese ist asymptotisch orbital stabil und läuft in mathematisch positiver Richtung um den Ursprung.

Für die Amplitude und Periodenlänge gilt:

$$A(\mu) \simeq \sqrt[3]{\mu} (1 + O(\sqrt[3]{\mu})) \quad T(\mu) \simeq \mu^{-2} (1 + O(\sqrt[3]{\mu}))$$

Für  $\mu < 0$  zweigen in  $\mu = 0$  keine periodischen Lösungen ab.

Alle Aussagen bleiben gültig, wenn man auf der rechten Seite der DGL noch

$$R_i(x_1, x_2, \mu) = O(|\mu| \|x\|^4) + O(\mu^2 \|x\|^3) + O(\|x\|^6) \quad i = 1, 2$$

(vgl Bemerkung 5.1) addiert.

b) Betrachte folgende DGL:

$$\begin{aligned}
 \dot{x}_1 &= \mu x_1 - x_1^7 + 2x_1^6 x_2 - 2x_1^5 x_2^2 + 6x_1^4 x_2^3 - 3x_1^3 x_2^4 + 5x_1^2 x_2^5 - x_1 x_2^6 + 2x_2^7 \\
 \dot{x}_2 &= \mu x_2 - 2x_1^7 - x_1^6 x_2 - 6x_1^5 x_2^2 - 2x_1^4 x_2^3 - 5x_1^3 x_2^4 - 3x_1^2 x_2^5 - 2x_1 x_2^6 - x_2^7
 \end{aligned}$$

Für diese DGL gilt:

Der stationäre Punkt im Ursprung der DGL

$$\dot{x}_1 = x_1$$

$$\dot{x}_2 = x_2$$

ist offensichtlich ein instabiler reiner Knoten.

Der stationäre Punkt im Ursprung der DGL

$$\dot{x}_1 = -x_1^7 + 2x_1^6x_2 - 2x_1^5x_2^2 + 6x_1^4x_2^3 - 3x_1^3x_2^4 + 5x_1^2x_2^5 - x_1x_2^6 + 2x_2^7$$

$$\dot{x}_2 = -2x_1^7 - x_1^6x_2 - 6x_1^5x_2^2 - 2x_1^4x_2^3 - 5x_1^3x_2^4 - 3x_1^2x_2^5 - 2x_1x_2^6 - x_2^7$$

ist wegen

$$\begin{aligned} f(\varphi) &= -\cos^8(\varphi) + 2\cos^7(\varphi)\sin(\varphi) - 2\cos^6(\varphi)\sin^2(\varphi) + 6\cos^5(\varphi)\sin^3(\varphi) - 3\cos^4(\varphi)\sin^4(\varphi) + \\ &+ 5\cos^3(\varphi)\sin^5(\varphi) - \cos^2(\varphi)\sin^6(\varphi) + 2\cos(\varphi)\sin^7(\varphi) - 2\cos^7(\varphi)\sin(\varphi) - \cos^6(\varphi)\sin^2(\varphi) - \\ &- 6\cos^5(\varphi)\sin^3(\varphi) - 2\cos^4(\varphi)\sin^4(\varphi) - 5\cos^3(\varphi)\sin^5(\varphi) - 3\cos^2(\varphi)\sin^6(\varphi) - 2\cos(\varphi)\sin^7(\varphi) - \\ &- \sin^8(\varphi) = -\left(\cos^2(\varphi) + \sin^2(\varphi)\right)^4 + \cos^6(\varphi)\sin^2(\varphi) + \cos^4(\varphi)\sin^4(\varphi) = -1 + \cos^4(\varphi)\sin^2(\varphi) = \\ &= -1 + \frac{1}{4}\cos^2(\varphi)\sin^2(2\varphi) < 0 \quad \forall \varphi \in [0, 2\pi] \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} g(\varphi) &= -2\cos^8(\varphi) - \cos^7(\varphi)\sin(\varphi) - 6\cos^6(\varphi)\sin^2(\varphi) - 2\cos^5(\varphi)\sin^3(\varphi) - 5\cos^4(\varphi)\sin^4(\varphi) - \\ &- 3\cos^3(\varphi)\sin^5(\varphi) - 2\cos^2(\varphi)\sin^6(\varphi) - \cos(\varphi)\sin^7(\varphi) + \cos^7(\varphi)\sin(\varphi) - 2\cos^6(\varphi)\sin^2(\varphi) + \\ &+ 2\cos^5(\varphi)\sin^3(\varphi) - 6\cos^4(\varphi)\sin^4(\varphi) + 3\cos^3(\varphi)\sin^5(\varphi) - 5\cos^2(\varphi)\sin^6(\varphi) + \cos(\varphi)\sin^7(\varphi) - \\ &- 2\sin^8(\varphi) = -2\left(\cos^2(\varphi) + \sin^2(\varphi)\right)^4 + \cos^4(\varphi)\sin^4(\varphi) + \cos^2(\varphi)\sin^6(\varphi) = -2 + \cos^2(\varphi)\sin^4(\varphi) = \\ &= -2 + \frac{1}{4}\sin^2(\varphi)\sin^2(2\varphi) < 0 \quad \forall \varphi \in [0, 2\pi] \end{aligned}$$

ein stabiler Wirbel.

Weiter gilt wegen

$$c(\varphi) > 0 \quad d(\varphi) \equiv 0 \quad f(\varphi) < 0 \quad g(\varphi) < 0 \quad \forall \varphi \in [0, 2\pi]$$

$$c(\varphi)g(\varphi) - f(\varphi)d(\varphi) < 0 \quad \forall \varphi \in [0, 2\pi]$$

Damit sind die Voraussetzungen des Satzes 5.20 erfüllt, d.h. vom Ursprung zweigt in  $\mu = 0$  für  $\mu > 0$  genau eine einparametrische Schar periodischer Lösungen

ab. Diese ist asymptotisch orbital stabil und läuft in mathematisch negativer Richtung um den Ursprung.

Für die Amplitude und Periodenlänge gilt:

$$A(\mu) \simeq \sqrt[6]{\mu} (1 + O(\sqrt[6]{\mu})) \quad T(\mu) \simeq \mu^{-1} (1 + O(\sqrt[6]{\mu}))$$

Für  $\mu < 0$  zweigen in  $\mu = 0$  keine periodischen Lösungen ab.

Alle Aussagen bleiben gültig, wenn man auf der rechten Seite der DGL noch

$$R_i(x_1, x_2, \mu) = O(|\mu| \|x\|^2) + O(\mu^2 \|x\|) + O(\|x\|^8) \quad i = 1, 2$$

(vgl. Bemerkung 5.1) addiert.

c) Betrachte nun noch folgende DGL:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= 5\mu x_1 - 10x_1^3 - 2x_1^2 x_2 - 10x_1 x_2^2 - x_2^3 \\ \dot{x}_2 &= \mu x_2 + 2x_1^3 - 2x_1^2 x_2 + x_1 x_2^2 - 2x_2^3 \end{aligned}$$

Für diese DGL gilt:

Der stationäre Punkt im Ursprung der DGL

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= 5x_1 \\ \dot{x}_2 &= x_2 \end{aligned}$$

ist offensichtlich ein instabiler Knoten, wobei

$$c(\varphi) = 5 \cos^2(\varphi) + \sin^2(\varphi) = 1 + 4 \cos^2(\varphi)$$

und

$$d(\varphi) = \cos(\varphi) \sin(\varphi) - 5 \cos(\varphi) \sin(\varphi) = -2 \sin(2\varphi)$$

gilt.

Der stationäre Punkt im Ursprung der DGL

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -10x_1^3 - 2x_1^2 x_2 - 10x_1 x_2^2 - x_2^3 \\ \dot{x}_2 &= 2x_1^3 - 2x_1^2 x_2 + x_1 x_2^2 - 2x_2^3 \end{aligned}$$

ist wegen

$$\begin{aligned} f(\varphi) &= -10 \cos^4(\varphi) - 2 \cos^3(\varphi) \sin(\varphi) - 10 \cos^2(\varphi) \sin^2(\varphi) - \cos(\varphi) \sin^3(\varphi) + 2 \cos^3(\varphi) \sin(\varphi) - \\ &- 2 \cos^2(\varphi) \sin^2(\varphi) + \cos(\varphi) \sin^3(\varphi) - 2 \sin^4(\varphi) = -2 \left( 5 \cos^2(\varphi) + \sin^2(\varphi) \right) \left( \cos^2(\varphi) + \sin^2(\varphi) \right) = \end{aligned}$$

$$= -2 \left( 1 + 4 \cos^2(\varphi) \right) < 0 \quad \forall \varphi \in [0, 2\pi]$$

und

$$\begin{aligned} g(\varphi) &= 2 \cos^4(\varphi) - 2 \cos^3(\varphi) \sin(\varphi) + \cos^2(\varphi) \sin^2(\varphi) - 2 \cos(\varphi) \sin^3(\varphi) + 10 \cos^3(\varphi) \sin(\varphi) + \\ &\quad + 2 \cos^2(\varphi) \sin^2(\varphi) + 10 \cos(\varphi) \sin^3(\varphi) + \sin^4(\varphi) = \\ &= \left( 2 \cos^2(\varphi) + 8 \cos(\varphi) \sin(\varphi) + \sin^2(\varphi) \right) \left( \cos^2(\varphi) + \sin^2(\varphi) \right) = 1 + 4 \sin(2\varphi) + \cos^2(\varphi) \end{aligned}$$

also

$$g(0) = 1 - 4 \cdot 0 + 1 = 2 > 0 \quad \text{und} \quad g\left(\frac{3}{4}\pi\right) = 1 - 4 + \cos^2\left(\frac{3}{4}\pi\right) < -2 < 0$$

ein stabiler Knoten.

Weiter gilt:

$$\begin{aligned} c(\varphi)g(\varphi) - f(\varphi)d(\varphi) &= \left( 1 + 4 \cos^2(\varphi) \right) \left( 1 + 4 \sin(2\varphi) + \cos^2(\varphi) \right) + 2 \left( 1 + 4 \cos^2(\varphi) \right) \left( -2 \sin(2\varphi) \right) = \\ &= \left( 1 + 4 \cos^2(\varphi) \right) \left( 1 + \cos^2(\varphi) \right) > 0 \quad \forall \varphi \in [0, 2\pi] \end{aligned}$$

Damit sind die Voraussetzungen des Satzes 5.20 erfüllt, d.h. vom Ursprung zweigt in  $\mu = 0$  für  $\mu > 0$  genau eine einparametrische Schar periodischer Lösungen ab. Diese ist asymptotisch orbital stabil und läuft in mathematisch positiver Richtung um den Ursprung.

Für die Amplitude und Periodenlänge gilt:

$$A(\mu) \simeq \sqrt[3]{\mu} \left( 1 + O\left(\sqrt[3]{\mu}\right) \right) \quad T(\mu) \simeq \mu^{-1} \left( 1 + O\left(\sqrt[3]{\mu}\right) \right)$$

Für  $\mu < 0$  zweigen in  $\mu = 0$  keine periodischen Lösungen ab.

Alle Aussagen bleiben gültig, wenn man auf der rechten Seite der DGL noch

$$R_i(x_1, x_2, \mu) = O(|\mu| \|x\|^2) + O(\mu^2 \|x\|) + O(\|x\|^4) \quad i = 1, 2$$

(vgl. Bemerkung 5.1) addiert.

# Literaturverzeichnis

- [1] R. Abraham J. Marsden. Foundations of Mechanics. Benjamin 1978.
- [2] J.C. Alexander J.A.Yorke. Global Bifurcation of Periodic Orbits. Amer. J. Math 100 (1978), no. 2, 263-292.
- [3] A.Algaba E. Freire E. Gamero. Hypernormal Form for the Hopf-Zero Bifurcation. Intern. J. Bifur. Chaos Appl. Sci. Engrg. 8 (1998), no. 10, 1857-1887.
- [4] Andronow Witt Chaikin. Theorie der Schwingungen, 1.Teil. Akademie Verlag, Berlin 1965.
- [5] Andronow et al. Qualitative Theory of Second-Order Dynamic Systems. John Wiley & Sons, New York 1973.
- [6] S. Antman J.B. Keller Bifurcation Theory and Nonlinear Eigenvalue Problems. Benjamin 1969.
- [7] V.I. Arnold. Geometric Methods in the Theory of Ordinary Differential Equations. Springer Verlag, New York 1983.
- [8] V.I. Arnold. Bifurcations and Singularities in Mathematics and Mechanics. Lecture on 17th Congress of TCTAM, 1988; ADV in Mech. 19, 2 (1989), 217-231.
- [9] N.N. Bautin. On the Number of Limit Cycles which Appear with the Variation of Coefficients from an Equilibrium of Focus or Center Type. Transl. A. M. S. 100 (1954).
- [10] M. Berger. On von Karman's Equations and the Buckling of a Thin Elastic Plate, Comm. Pure and Appl. Math., 28 (1967) 687-719, 21 (1968), 227-241.
- [11] Bhatia Szegő. Stability Theorie of Dynamical Systems. Springer Verlag, New York 1970.
- [12] Q.S. Bi Y.S. Cheu. Local Bifurcation Analysis of Strongly Nonlinear Duffing System. Appl. Math. Mech. (English Ed.) 17 (1996), no. 9, 837-845.

- [13] T.D. Burton. On the Amplitude Decay of Strongly Nonlinear Damped Oscillators. J. Sound Vibrations 87 (1983), no. 4, 535-541.
- [14] T.K. Caughey A. Vakakis J.M. Sivo. Analytical Study of Similar Normal Modes and their Bifurcations in a Class of Strongly Nonlinear Systems. Intern. J. Non-Linear Mech. 25 (1990), no. 5, 521-533.
- [15] Y.S. Cheu J. Xu. Local Bifurcation Theory of Nonlinear Systems with Parametric Excitation. Nonlinear Dynam. 10 (1996), no. 3, 203-220.
- [16] Y.K. Cheung S.H. Cheu S.L. Lau. A Modified Lindstedt-Poincaré Method for certain Strongly Nonlinear Oscillations. Internat. J. Non-Linear Mech. 26 (1991), no. 3-4, 367-378.
- [17] S.N. Chow J.K. Hale. Methods of Bifurcation Theory. Springer Verlag, New York 1982.
- [18] Chow Li Wang. Normal Forms and Bifurcation of Planar Vektor Fields. Cambridge University Press, Cambridge NY 1994.
- [19] S.N. Chow K. Lu. Invariant Manifolds for Flows in Banach Spaces. J. Diff. Eq. 74 (1988) 285-317.
- [20] S.N. Chow K. Lu.  $C^k$  Center Unstable Manifolds. Proc. R. Soc., Edinburgh, Sect. A 108 (1988) 303-320.
- [21] E.A.Coddington N. Levinson. Theorie of Ordinary Differential Equations. Mc Graw-Hill, New York 1955.
- [22] L.Cveticanin. Adiabatic Invariants for Strongly Nonlinear Dynamical Systems, described with Complex Funktions. Quart. Appl. Math. 54 (1996), no. 3, 407-421.
- [23] A. Doelmann F. Verhulst. Bifurcations of Strongly Nonlinear Self-Exited Oscillations. Math. Methoda Appl. Sci. 17 (1994), no. 3, 189-207.
- [24] F. Dumortier. Singularities of Vektor Fields. Monografias de Matemática 32, I.M.P.A., Rio de Janeiro 1978.
- [25] J.P. Eckmann. Roads to Turbulence in Dissipative Dynamical Systems. Rev. Mod. Phys. 53, 643.
- [26] M. Garcia-Huidobro R. Manusevich F. Zanolin. Strongly Nonlinear Second Order ODE with Rapidly Growing Terms. J. Math. Anal. Appl. 202 (1996), no. 1, 1-26.
- [27] J. Guckenheimer P. Holmes. Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems and Bifurcation of Vektor Fields. Springer Verlag, New York 1983.

- [28] J.K. Hale. Bifurcation with Several Parameters. In VII. Internationale Konferenz über nichtlineare Schwingungen, Vol. I, 1, Adh. Akad. Wiss. DDR, Akademie-Verlag, Berlin 1977.
- [29] J.K. Hale. Bifurcation from Simple Eigenvalues for Several Parameter Values. *Nonlin. Anal.* 2 (1978) 491-497.
- [30] W.S. Hall. The Bifurcation of Solutions in Banach Spaces. *Trans. Am. Math Soc.* 161 (1971), 207-218.
- [31] M.N. Hamdan. On the Primary Frequency Response of Strongly Nonlinear Oscillators: A Linearisation Approach. *J. Sound Vibration* 140 (1990), no.1, 1-12.
- [32] B.D. Hassard N. Kazarinoff Y.H. Wan. *Theory and Application of the Hopf Bifurcation*. Cambridge University Press, Cambridge 1980.
- [33] X.J. He Z. Jiang. Existence of Hopf Bifurcation Problems with Jumping Nonlinearities. *Ann Differential Equations* 11 (1995), no.2, 127-146.
- [34] H. Heuser. *Lehrbuch der Analysis, Teil 1*. Teubner Verlag, Stuttgart 1994.
- [35] H.W. Hirsch S. Smale. *Differential Equations, Dynamic Systems and Linear Algebra*. Academic Press, New York 1965.
- [36] E. Hopf. Abzweigung einer periodischen Lösung von einer stationären Lösung eines Differentialsystems. *Ber. Math.-Phys. KL. Sächs. Akad. Wiss. Leipzig*, 94 (1942) 1-22.
- [37] I.D. Iliev. On Second Order Bifurcation of Limit Cycles. *J. London Math. Soc.* (2) 58 (1998), no.2, 353-366.
- [38] G.Iooss. Direct Bifurcation of a Steady Solution of the Navier-Stokes Equation into an Invariant Torus. *Turbulence and Navier-Stokes Equations, Lecture Notes in Mathematics*, no. 565, 69-84, Springer Verlag, New York 1975.
- [39] G. Iooss D.D. Joseph. *Elementary Stability and Bifurcation Theory*. Springer Verlag, New York 1980.
- [40] G. Iooss W.F. Langford. Conjectures on the Routes to Turbulence via Bifurcations. *New York Academy of Science Proceedings* Dec. 1979.
- [41] M.J. Jang C.L. Cheu. Analysis of the Response of a Strongly Nonlinear Damped System using a Differential Transformation Technique. *Appl. Math. Comput.* 88 (1997), no.2-3, 137-151.
- [42] H. Kielhöfer. Hopf Bifurcation at Multiple Eigenvalues. *Arch. Rational Mech. Anal.* 69, 53-83 (1979).

- [43] H. Kielhöfer. Generalized Hopf Bifurcation in Hilbert Space. *Math Methods Appl. Sci.* 1 (1979), no. 4, 498-513.
- [44] V.B. Loginov V.A. Trenogin. Branching Equation of Andronov-Hopf Bifurcation under Group Symmetrie Conditions. *Chaos* 7 (1997), no. 2, 229-238.
- [45] D. Luo. Poincaré Bifurcations in Polynomial Differential Systems. *Sci. Math. Sci* 12 (1999), no. 2, 166-174.
- [46] J.B. McLeod D.H. Sattinger. Loss of Stability and Bifurcation at a Double Eigenvalue. *J. Funct. Anal.* 14, 62-84 (1973).
- [47] Marsden McCracken. *The Hopf-Bifurcation and its Applications*. Springer Verlag, New York 1976.
- [48] P.C. Martin. Instabilities, Oscillations and Chaos. *J. Phys. (Paris) Coll.* 37. C1-57.
- [49] W. de Melo J. Palis. *Geometric Theory of Dynamical Systems*. Springer Verlag, New York 1982.
- [50] R.D. Nussbaum. A Global Bifurcation Theorem with Applications to Functional Differential Equations. *J. Funct. An.* 19 (1975), 319-338.
- [51] R. Roussarie. *Bifurcations of Planar Vector Fields and Hilbert's Sixteenth Problem*. Birkhäuser Verlag, Basel, Boston, Berlin 1998.
- [52] D. Ruelle. Bifurcations in the Presence of a Symmetry Group. *Arch. Rat. Mech. An.* 51 (1973), 136-152.
- [53] D. Ruelle F. Takens. On the Nature of Turbulence. *Comm. Math. Phys.* 20 (1971), 167-192, 23 (1971), 343-344.
- [54] D. Schlomiuk. *Bifurcation and Periodic Orbits of Vektor Fields*. Nato ASI Series C: Mathematical and Physical Sciences, Vol 408 (1993)
- [55] D.S. Schmidt. Hopf's Bifurcation Theorem and the Center Theorem of Liapunov. In [47] Section 3c 95-103.
- [56] H.G. Schuster. *Deterministic Chaos: An Introduction*. Physik-Verlag, Weinheim 1984.
- [57] H.L. Swinney J.P. Gollub. The Transition to Turbulence. *Phys. Today* 31 (8), 41.
- [58] F. Takens. Unfolding of Certain Singularities of Vector Fields: Generalized Hopf Bifurcations. *J. Diff. Eq* 14 (1973), 476-493.

- [59] M.M. Wainberg W.A. Trenogin. Theorie der Lösungsverzweigung bei nicht-lineaten Gleichungen. Akademie-Verlag, Berlin 1973.
- [60] A. Vanderbauwhede. Center Manifold Theory. Univ. Ghent, Ghent 1987.
- [61] A. Vanderbauwhede. Center Manifolds, Normal Forms and Elementary Bifurcations. In Dynamics Reportet, Vol. 2, eds. U. Kirchgraber and O. Walther, 89-169. Wiley, New York 1989.
- [62] J. Xu Q.S. Lu. Hopf Bifurcation of Time-Delay Liénard Equations. Internat. J. Bifur. Chaos Appl. Sci. Engrg. 9 (1999), no. 5, 939-951.
- [63] Ye Yan-Qian et al. Theory of Limit Cycles. Translations of Mathematical Monographs, Volume 66. American Mathematical Society, Providence Rhode Island 1986.
- [64] X. Zhang. Bifurcation and Distribution of Limit Cycles for Quadratic Differential Systems of Type II. J. Math. Anal. Appl. 233 (1999), no.2, 508-534.
- [65] Zhang Zhi-Fen et al. Qualitative Theorie of Differential Equations. Translations of Mathematical Monographs, Volume 101. American Mathematical Society, Providence Rhode Island 1992.