Formfaktoren des Nukleons in relativistischer chiraler Störungstheorie

Dissertation
zur Erlangung des Grades
„Doktor der Naturwissenschaften“

am Fachbereich Physik der
Johannes Gutenberg-Universität Mainz

vorgelegt von
Thomas Fuchs
geboren in Wiesbaden

Institut für Kernphysik
Johannes Gutenberg-Universität Mainz

November 2002

Jahr der Prüfung: 2003

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1

Einleitung

Die Vielzahl an Phänomenen in der Natur kann in unserem derzeitigen Verständnis durch vier fundamentale Kräfte beschrieben werden, nämlich die starke, die elektromagnetische, die schwache und die Gravitationskraft. Das Standardmodell der Teilchenphysik ist die vereinheitlichte Theorie der starken und elektroschwachen Wechselwirkungen, die im Rahmen einer $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$-Eichtheorie beschrieben werden. Dabei entstehen die Wechselwirkungen durch Austausch von Vektorbosonen, d.h. von Teilchen mit Spin 1, die an eine Ladung koppeln. Das Eichboson der elektromagnetischen Wechselwirkung ist das Photon, das an die elektrische Ladung koppelt. Analog dazu sind die Eichbosonen der schwachen Wechselwirkung die so genannten W-Bosonen und das Z^0, die an die schwache Ladung koppeln. Im Fall der starken Wechselwirkung heißt die Eichtheorie Quantenchromodynamik (QCD), die Austauschteilchen sind die Gluonen, von denen es acht verschiedene Arten gibt, und die Ladung heißt Farbladung, von der es drei verschiedene Arten gibt, nämlich rot, blau und grün. Dabei unterscheidet man zwischen abelschen Eichtheorien wie z.B. der elektromagnetischen Wechselwirkung und nichtabelschen Theorien wie z.B. der starken Wechselwirkung. Bei den nichtabelschen Eichtheorien tragen die Austauschteilchen selbst Ladung und somit existieren auch direkte Kopplungen der Austauschteilchen untereinander.

Die elementaren Spin-$\frac{1}{2}$ Teilchen im Standardmodell sind die Quarks und die Leptonen. Die Quarks unterscheidet man nach ihrem *flavor*, der mit up (u), down (d), strange (s), charm (c), bottom (b) und top (t) bezeichnet wird, und nach ihrer Farbe, die rot (r), grün (g) oder blau (b) sein kann. Sie erfahren sowohl die starke als auch die elektroschwache Wechselwirkung. Von den Leptonen gibt es sechs verschiedene Arten, von denen das Elektron, das Myon und das Tau elektromagnetische und schwache Wechselwirkungen erfahren, während die entsprechenden Neutrinos nur schwach wechselwirken.

In der Natur hat man bisher allerdings keine freien Quarks und Gluonen gefunden, sondern nur aus Quarks und Gluonen zusammengesetzte Objekte. Dieses Phänomen bezeichnet man als *confinement*. Den Grund hierfür vermutet man in der starken Impulsabhängigkeit der starken Kopplungskonstante α_s, die bei kleiner werdenden Wechselwirkungsenergien größer wird und im Grenzfall verschwindender Energien eine Divergenz aufweist. Versucht man zwei Quarks voneinander zu trennen, so wird die Kopplung immer stärker, d.h. man muss immer mehr Energie aufwenden. Irgendwann ist die Energie dann groß genug, um aus dem Vakuum Quark-Antiquark-Paare bilden zu können. Die in der Natur vorkommenden Objekte sind immer farbneutral. Man bezeichnet die Gruppe der stark wechselwirkenden Teilchen als Hadronen und unterteilt diese in Mesonen, die aus Quark-Antiquark-Paaren bestehen, und Baryonen, die aus drei Quarks zusammengesetzt sind.

Die Impulsabhängigkeit der starken Kopplungskonstante α_s ist auch dafür verantwortlich, dass die QCD in zwei Bereiche unterteilt werden kann. Im perturbativen Bereich ist α_s klein, die Quarks und Gluonen wechselwirken relativ schwach miteinander und bewegen sich in einem begrenzten Gebiet praktisch unabhängig voneinander. Dieses Verhalten bezeichnet man als *asymptotic freedom*. Im perturbativen Bereich können die konventionellen Methoden der Störungsrechnung zur Berechnung von physikalischen Größen angewandt werden. Im nichtperturbativen Bereich hingegen wird die Kopplungskonstante größer, so dass die effektiven Freiheitsgrade jetzt nicht mehr Quarks und Gluonen, sondern Mesonen und Baryonen sind. In diesem Bereich versagen die Methoden der konventionellen Störungsrechnung.

Von den Baryonen sind vor allem die Nukleonen, d.h. das Proton und das Neutron interessant, da sie Bestandteile der Atomkerne sind und somit 99.9% der Masse aller Objekte in unserem Sonnensystem ausmachen [TW 01]. Die ersten Anzeichen einer inneren Struktur der Nukleonen kamen von der Messung ihrer magnetischen Momente, die eine starke Abweichnung von denen eines Dirac-Punktteilchens zeigten [Ste 33]. Mitte der 1950er Jahre lieferten elastische Elektronenstreuexperimente, bei denen die elektromagnetischen Formfaktoren gemessen wurden, Aufschluss über die innere Struktur der Kerne [Hof 57]. Genauer betrachtet erhielt man Informationen über die Ladungs- bzw. Magnetisierungsverteilung der untersuchten Kerne, da die Formfaktoren im nichtrelativistischen Grenzfall gerade die Fouriertransformierten dieser Verteilungen sind[1]. Heute sind die elektromagnetischen Formfaktoren des Protons und die aus den elektromagnetischen Formfaktoren der Nukleonen ableitbaren mittleren Ladungsradien zu erstaunlicher Präzision bekannt. Etwas schlechter sieht die Situation bei den elektromagnetischen Formfaktoren des Neutrons aus, da kein freies Neutrontarget existiert. Die beiden Formfaktoren F_2^n und G_M^n sind allerdings im Bereich $Q^2 = -k^2 \leq 2$ GeV^2 relativ gut bekannt [TW 01]. Bei den axialen Formfaktoren[2] sieht die Situation etwas anders aus. Da die schwache Wechselwirkung etwa eine Billion mal kleiner als die elektromagnetische Wechselwirkung ist, ist es vergleichsweise schwer, aus Experimenten Informationen über diese Formfaktoren zu erhalten. Die ersten Neutrinostreuexperimente, in denen der schwache geladene Strom beobachtet werden konnte, sind 1962 in Brookhaven durchgeführt worden [Dan+ 62]. Der schwache neutrale Strom konnte sogar erst in den 1970er Jahren beobachtet werden [Has+ 73]. Für die Bestimmung der axialen Formfaktoren des Nukleons benötigt man relativ komplizierte Experimente. Den axialen Formfaktor G_A kann man durch quasielastische Neutrinostreuung oder durch Pionelektroproduktionsexperimente, wie sie zur Zeit in Mainz durchgeführt werden [Neu+ 98], bestimmen. Den induzierten pseudoskalaren Formfaktor kann man z.B. in dem strahlungsbegleiteten Myoneneinfang beobachten [Jon+ 96]. Auf Grund der schwierigen Experimente ist dieser Formfaktor bis heute noch relativ unbekannt. Einen guten Überblick über unser bisheriges Verständnis der inneren Struktur des Nukleons kann in [TW 01] gefunden werden.

Von den Mesonen haben die Pionen auf Grund ihrer sehr kleinen Masse, die eine Größenordnung kleiner als die typische Massenskala der Hadronen von etwa 1 GeV ist, eine besondere Bedeutung. Im nichtperturbativen Bereich der QCD stellt sich das Nukleon im Wesentlichen als schweres punktförmiges Teilchen dar, das von einer Pionenwolke umgeben ist. Die Theorie, die diesen Niederenergiebereich am besten beschreibt, wird chirale Störungstheorie (χPT oder ChPT) genannt [Wei 79, GL 84, GL 85, GSS 88]. Sie basiert auf einer Impulsentwicklung der allgemeinsten, mit den Symmetrien der QCD verträglichen effektiven Lagrange-Dichte nach Quarkmassen und externen Impulsen. Die wichtigste dieser Symmetrien ist die so genannte chirale Symmetrie: Im chiralen Grenzfall, d.h. im Grenzfall verschwindender up- und down-Quarkmassen, ist die

[1]Ein Formfaktor $F(q^2)$ gibt allgemein die Abweichung von einem punktförmigen Teilchen an, für das $F(q^2) = F(0)$ gilt.

[2]Wir bezeichnen mit dem Oberbegriff axiale Formfaktoren die Formfaktoren, die den axialen Vektorstrom parametrisieren. Zu diesen Formfaktoren gehören der axialer Formfaktor G_A und der induzierte pseudoskalare Formfaktor G_P.

QCD-Lagrange-Dichte invariant unter globalen $SU(2)_L \times SU(2)_R$-Transformationen. Man geht davon aus, dass diese Symmetrie im Grundzustand spontan nach $SU(2)$ gebrochen ist, was zur Existenz von drei masselosen Goldstone-Bosonen (Pionen) führen müsste. In Wirklichkeit sind die Quarkmassen und somit auch die Pionmasse aber von Null verschieden. Die kleine Pionmasse spiegelt also die explizit gebrochene chirale Symmetrie wieder. Die Durchführbarkeit der Impulsentwicklung wird dadurch gewährleistet, dass die Pionen als Goldstone-Bosonen [Gol 61] der spontanen Symmetriebrechung [CL 84, Ryd 85] für verschwindende Energien nicht mehr miteinander wechselwirken. Dabei beinhaltet die chirale Störungstheorie nur diejenigen Freiheitsgrade, die bei den entsprechenden Energien asymptotisch produziert werden können, z.B. $\pi, \pi N, \ldots$. In der ursprünglichen Formulierung [Wei 79, GL 84, GL 85] treten nur pseudoskalare Mesonen als effektive Freiheitsgrade auf. Je nachdem, ob man nur die Masse der up- und down-Quarks oder auch noch die Masse des strange-Quarks als klein gegenüber der chiralen Symmetriebrechungsskala von $\Lambda \approx 4\pi F_0 \approx 1$ GeV (F_0 ist die Pionzerfallskonstante im chiralen Grenzfall) annimmt, erhält man das Triplett der Pionen ($\pi^\pm, \pi^0$) oder das Oktett aus Pionen, Kaonen ($K^\pm, K^0, \bar{K}^0$) und η_8 als effektive Freiheitsgrade. In jeder Ordnung der Impulsentwicklung treten in den entsprechenden Lagrange-Dichten so genannte Niederenergiekonstanten (LECs, engl.: *low energy constants*) auf. Sie parametrisieren die zu Grunde liegende Dynamik der QCD. Gelänge es uns, die QCD im nichtperturbativen Bereich vollständig zu lösen, so könnte man die Werte dieser Konstanten bestimmen. Da dies noch nicht möglich ist, ist man darauf angewiesen, die Werte durch Anpassung an experimentelle Daten oder durch spezielle Modellrechnungen festzulegen. Die LECs erfüllen aber noch einen anderen Zweck. Bei Rechnungen, die über die führende Ordnung hinausgehen, treten Unendlichkeiten auf, die von Schleifenintegralen stammen. Diese Unendlichkeiten werden mit Hilfe der dimensionalen Regularisierung separiert und durch die Niederenergiekonstanten absorbiert. Es ist klar, dass erst diese renormierten LECs endliche Werte annehmen und experimentell bestimmt werden können. Wenn man alle Ordnungen betrachten wollte, gäbe es theoretisch unendlich viele solcher Konstanten, die renormiert werden müssten. Erst die Anwesenheit eines chiralen Zählschemas ermöglicht es uns, jede Ordnung getrennt zu renormieren. Die chirale Störungstheorie ist somit eine im üblichen Sinne nicht renormierbare Feldtheorie, die aber Ordnung für Ordnung in der Impulsentwicklung renormiert werden kann.

Erweitert man die Theorie und bezieht die Nukleonen mit ein, so treten Schwierigkeiten auf. Die ursprüngliche relativistische Formulierung [GSS 88] besitzt kein konsistentes chirales Zählschema mehr, wenn man die dimensionale Regularisierung in Kombination mit einer modifizierten $\overline{MS}$-Subtraktion als Renormierungsschema verwendet [Vel 94]. Die Schwierigkeiten entstehen wegen des Auftretens einer neuen Massenskala, nämlich der Nukleonmasse, die im chiralen Grenzfall nicht verschwindet. Die Masse des Nukleons ist in etwa so groß wie die in den Schleifenintegralen auftretende Skala $4\pi F_0$. Berechnet man jetzt die Integrale, die innere Nukleonenlinien enthalten, mit Hilfe der dimensionalen Regularisierung [Vel 94], so können diese Integrale zu jeder Ordnung in der Impulsentwicklung beitragen. Insbesondere treten Korrekturen zu physikalischen Größen wie z.B. der Nukleonmasse schon in niedrigster Ordnung auf. Die Divergenzen der Integrale müssen also bereits von den Kopplungskonstanten der niedrigsten Ordnung absorbiert werden. Das chirale Zählschema kann wiederhergestellt werden, wenn man den Nukleonspinor in eine „leichte“ und eine „schwere“ Komponente zerlegt, wie das in der chiralen Störungstheorie für schwere Baryonen (HBχPT, engl.: *Heavy Baryon Chiral Perturbation Theory*) [JM 91, Ber+ 92, Eck 94] der Fall ist. Der Nachteil dieser Formulierung ist, dass die Impulsentwicklung jetzt nichtrelativistisch ist und dadurch nicht im gesamten Niederenergiebereich konvergiert [BL 99]. Es sind deshalb Methoden entwickelt worden, die versuchen, die Vorteile der beiden Beschreibungen miteinander zu kombinieren [ET 98, BL 99, GJW 99]. Sie können als zur $\overline{MS}$-Subtraktion alternative Renormierungsverfahren angesehen werden.

Die explizit gebrochene chirale Symmetrie der QCD-Lagrange-Dichte spielt in der Physik der Pionen die wohl wichtigste Rolle. Einerseits folgt daraus die PCAC-Relation, die besagt, dass der axiale Strom nur teilweise erhalten ist (PCAC = Partially Conserved Axial-Vector Current) [Gel 64, AD 68, Tre+ 72, Alf+ 73]. Andererseits kann man mit ihrer Hilfe eine Vielzahl an Niederenergietheoremen (LET, engl.: *low energy theorem*) ableiten, die modellunabhängige Voraussagen für das Verhalten von physikalischen Größen (Observablen) bei niedrigen Energien machen. Die wohl bekannteste dieser Relationen ist die Goldberger-Treiman-Relation, die die Pion-Nukleon-Kopplungskonstante der starken Wechselwirkung $g_{\pi NN}$ mit der Pionzerfallskonstante F_π und der axialen Kopplungskonstante g_A der schwachen Wechselwirkung verbindet [GT 58]. Aber auch z.B. die Weinberg-Tomozawa-Relation in der πN-Streuung basiert auf solch einem Theorem [Wei 66, Tom 66]. Kombiniert man diese Niederenergietheoreme mit den Dispersionsrelationen, so ergeben sich nützliche Summenregeln, die integrierte Wirkungsquerschnitte mit anderen physikalischen Größen verbinden (s. z.B. [Tre+ 85]).

Das Ziel dieser Arbeit ist es gewesen, die Formfaktoren des Nukleons in einer relativistischen Formulierung der chiralen Störungstheorie bis zur Ordnung $\mathcal{O}(q^4)$ in der Impulsentwicklung zu berechnen. Dazu haben wir ein neues Renormierungsschema verwendet, das ein konsistentes Zählschema für renormierte Größen erzeugt. Im Einzelnen sollte der skalare Formfaktor, die elektromagnetischen Formfaktoren und die beiden axialen Formfaktoren, d.h. der axiale Formfaktor G_A und der induzierte pseudoskalare Formfaktor G_P, berechnet werden.

Die Arbeit ist folgendermaßen gegliedert. In Kapitel 2 diskutieren wir die Lagrange-Dichte der QCD und leiten aus der näherungsweisen $SU(2)_L \times SU(2)_R$-Symmetrie dieser Lagrange-Dichte die Ausdrücke für die Vektor- und Axialvektorströme sowie deren Divergenzen her. Der Ausdruck für die Divergenz des Axialvektorstroms stellt die bedeutende PCAC-Relation dar. Außerdem wiederholen wir die wichtigsten Bestandteile der chiralen Störungstheorie für Mesonen und Nukleonen. Die hier angegebenen Lagrange-Dichten bilden das Fundament aller in dieser Arbeit auftretenden Rechnungen.

Im dritten Kapitel werden wir die verschiedenen Methoden zur Wiederherstellung des chiralen Zählschemas im Nukleonsektor der ChPT beschreiben. Neben der nichtrelativistischen HBχPT werden wir zwei relativistische Renormierungsschemen beschreiben, die wir in dieser Arbeit verwendet haben, nämlich die Infrarotregularisierung von Becher und Leutwyler [BL 99] und ein neues, alternatives Renormierungsschema, das in Zusammenarbeit mit J. Gegelia entwickelt worden ist und auf Gegelia, Japarizde und Wang zurückgeht [GJW 99]. Die unterschiedlichen Methoden werden miteinander verglichen und die Vor- und Nachteile dargestellt. Zum Schluss geben wir die Ergebnisse dieser drei Methoden für die Wellenfunktionsrenormierungskonstante und die Masse des Nukleons an.

In den folgenden drei Kapiteln berechnen wir die verschiedenen Formfaktoren des Nukleons in den beiden in Kapitel 3 vorgestellten, relativistischen Renormierungsschemen. Die Ergebnisse in den verschiedenen Renormierungsschemen werden diskutiert und miteinander verglichen. Die Abhängigkeit der Formfaktoren vom Impulsübertrag wird graphisch dargestellt. Im vierten Kapitel diskutieren wir dabei den skalaren Formfaktor des Nukleons, der ein Maß für die Verteilung der skalaren Dichte im Nukleon ist. Für einen verschwindenden Impulsübertrag geht er in den Pion-Nukleon-Sigmaterm über, der den Beitrag der Quarkmassen zur Masse des Nukleons angibt. Der skalare Formfaktor stellt ein relativ einfaches Beispiel dar, an Hand dessen die Probleme der HBχPT noch einmal verdeutlicht werden können. Im fünften Kapitel berechnen wir die elektromagnetischen Formfaktoren. Dabei berechnen wir die Dirac- und Pauli-Formfaktoren, aus denen dann die Sachs-Formfaktoren bestimmt werden können. Im sechsten Kapitel berechnen wir die axialen Formfaktoren des Nukleons, d.h. den axialen Formfaktor $G_A(t)$ und den induzierten pseudoskalaren Formfaktor $G_P(t)$. Als Test unserer Ergebnisse berechnen wir zusätzlich den

Pion-Nukleon-Formfaktor und überprüfen eine auf die PCAC-Relation zurückgehende Beziehung zwischen diesen drei Formfaktoren.

Im siebten Kapitel untersuchen wir ausführlich den axialen Formfaktor G_A in der Pionelektroproduktion. Den theoretischen Rahmen hierfür bildet die in Kapitel 2 abgeleitete PCAC-Hypothese unter Anwesenheit eines äußeren elektromagnetischen Feldes. Sie besagt, dass der axiale Strom nur im chiralen Grenzfall und ohne die Anwesenheit des elektromagnetischen Feldes erhalten ist. Mit Hilfe dieser Relation kann man eine Verbindung zwischen der Pionelektroproduktionsamplitude und dem Matrixelement des axialen Stroms herstellen. Diese Relation ist streng gültig und kann als Test eines jeden Modells angesehen werden. Sie ist bereits 1966 von Adler und Gilman [AG 66] mit Hilfe der minimalen Substitution abgeleitet worden und wird deshalb auch Adlers Relation genannt. Außerdem gehen wir auf die Behauptung ein, dass der axiale Formfaktor nicht in der Pionelektroproduktion gemessen werden kann [Hab 00]. Dazu untersuchen wir mit der Hilfe eines phänomenologischen Modells die in [Hab 00] verwendeten Methoden zur Ableitung von Adlers Relation. Das verwendete phänomenologische Modell respektiert alle Symmetrien der Lagrange-Dichte der QCD und reproduziert alle für die Diskussion relevanten Terme. Die Rechnungen in diesem Kapitel sind so einfach wie möglich gehalten, damit man sie leicht nachvollziehen kann. An Hand eines in Mainz durchgeführten Experimentes [Lie+ 99] beschreiben wir, wie der axiale Formfaktor experimentell bestimmt werden kann.

Im achten Kapitel geben wir eine Zusammenfassung der wichtigsten Ergebnisse dieser Arbeit an und diskutieren diese.

Im Anhang befinden sich viele hilfreiche, theoretische Details, die aber die Übersichtlichkeit der Arbeit beeinträchtigt hätten. Neben den Gell-Mann-Matrizen und den hypergeometrischen Funktionen findet man hier vor allem die in dieser Arbeit verwendeten Integrale, die Ausdrücke für die elektromagnetischen Formfaktoren, ausgedrückt durch skalare Integrale, eine Zusammenfassung der Theorie der Pionelektroproduktion und die Herleitung der in Kapitel 7 verwendeten chiralen Ward-Identitäten.

Kapitel 2

QCD und chirale Störungstheorie

In diesem Kapitel wird die Lagrange-Dichte der QCD mit ihren Symmetrien diskutiert (s. [Sch 00] für eine pädagogische Einführung in das Thema) und eine Einführung in die chirale Störungstheorie für Mesonen [Wei 79, GL 84, GL 85] und Nukleonen [GSS 88, EM 96] gegeben. Es existieren eine Reihe von Übersichtsartikeln zur chiralen Störungstheorie, von denen wir hier nur einige angeben: [DGH 92, Bij 93, Mei 93, BKM 95, Pic 95, Eck 95, Man 96, Sch 02]. Die chirale Störungstheorie ist die effektive Feldtheorie der QCD im Niederenergiebereich. Die allgemeinste, mit den Symmetrien der QCD verträgliche Lagrange-Dichte wird dabei nach Quarkmassen und kleinen Impulsen entwickelt. Wir diskutieren die in dieser Arbeit benötigten Lagrange-Dichten bis einschließlich der Ordnung $\mathcal{O}(q^4)$.

2.1 Die QCD-Lagrange-Dichte

Die QCD ist die nichtabelsche Eichtheorie der starken Wechselwirkung mit der SU(3) als Symmetriegruppe. Ausgangspunkt unserer Überlegungen ist die Lagrange-Dichte der QCD in Abwesenheit externer Felder [DGH 92]:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\mathrm{QCD}} &= \sum_f \bar{q}_f (i\not{D} - m_f) q_f - \frac{1}{4} G^\alpha_{\mu\nu} G^{\mu\nu}_\alpha \qquad (2.1) \\ \text{mit} \quad D_\mu q_f &= \partial_\mu q_f - ig \sum_{\alpha=1}^{8} \frac{\lambda_\alpha}{2} A^\alpha_\mu q_f \\ \text{und} \quad G^\alpha_{\mu\nu} &= \partial_\mu A^\alpha_\nu - \partial_\nu A^\alpha_\mu + g f_{\alpha\beta\gamma} A^\beta_\mu A^\gamma_\nu . \end{aligned}$$

Der erste Teil dieser Lagrange-Dichte besteht aus einer Summe über alle Quarkflavors f, wobei die Massen m_f der verschiedenen Quarks in Tabelle 2.1 angegeben sind. Für jeden Quarkflavor

flavor	u	d	s	c	b	t
Masse [MeV]	5	9	$80 - 155$	$1000 - 1400$	$4000 - 4500$	174300 ± 5100

Tabelle 2.1: Quarkmassen. Die Werte für m_u und m_d sind obere Grenzen, während die Werte für die restlichen Massen [PDG 02] entnommen sind.

haben wir einen 3-komponentigen Spinor q_f eingeführt,

$$q_f = \begin{pmatrix} q_{f,r} \\ q_{f,g} \\ q_{f,b} \end{pmatrix}. \tag{2.2}$$

Die kovariante Ableitung D_μ enthält die acht Gluonfelder A_μ^α und vermittelt somit die Wechselwirkung zwischen den Quarkfeldern und den Gluonen. Dabei ist g die Kopplungskonstante der starken Wechselwirkung. Die acht Gell-Mann-Matrizen λ_α sind zusammen mit den Strukturkonstanten der SU(3), $f_{\alpha\beta\gamma}$, im Anhang A angegeben.

Der zweite Teil der Lagrange-Dichte stellt den „kinetischen" Term dar, der zusätzlich die Selbstwechselwirkung der Gluonen berücksichtigt. Die hier auftretenden Feldstärketensoren der QCD, $G_{\mu\nu}^\alpha$, enthalten auch das Produkt zweier Gluonfelder. Somit existieren Vertices mit drei und vier Gluonen und deshalb können die Gluonen auch untereinander koppeln. Das ist der große Unterschied zu einer abelschen Feldtheorie wie z.B. der QED, bei der die Feldstärketensoren diesen Term nicht enthalten.

Bei einem Blick auf Tabelle 2.1 fallen die sehr kleinen Massen der up- und down-Quarks auf, die eine Größenordnung kleiner sind als die Masse des strange-Quarks und mindestens zwei Größenordnungen kleiner als die restlichen Quarkmassen. Die Massen m_u und m_d sind im Vergleich zu der typischen hadronischen Skala von etwa 1 GeV verschwindend klein. Die Annahme, dass bei niedrigen Energien nur diese beiden niedrigsten Quarkmassen eine Rolle spielen, erscheint also vernünftig[1]. Für die Erzeugung der Hadronenmassen ist offenbar ein komplexer Mechanismus verantwortlich, denn für die Masse des Protons gilt: $m_p \gg 2m_u + m_d$. Da die Massen der drei Quarks, aus denen das Proton besteht, sehr viel kleiner als die Masse des Protons sind, müssen die Wechselwirkungen im Proton den Hauptanteil seiner Masse ausmachen. Das rechtfertigt letzten Endes, den chiralen Grenzfall $m_u, m_d \to 0$ zu betrachten. Unterscheidet man außerdem zwischen rechts- und linkshändigen Anteilen der Quarkflavors,

$$q = \left[\frac{1}{2}(1+\gamma_5) + \frac{1}{2}(1-\gamma_5)\right] q = [P_R + P_L]\, q = q_R + q_L, \tag{2.3}$$

wobei P_R und P_L Projektionsoperatoren sind, die aus einer freien, masselosen Lösung die Zustände mit positiver (rechtshändig) bzw. negativer (linkshändig) Helizität herausprojezieren, so erhält man:

$$\mathcal{L}_{QCD}^0 = \sum_{f=u,d} \left(\bar{q}_{R,f} i\not{D}\, q_{R,f} + \bar{q}_{L,f} i\not{D}\, q_{L,f}\right) - \frac{1}{4} G_{\mu\nu}^\alpha G_\alpha^{\mu\nu}. \tag{2.4}$$

Diese Lagrange-Dichte besitzt eine globale $SU(2)_L \times SU(2)_R \times U(1)_V$-Symmetrie (V steht für Vektor), wobei die Symmetrie bzgl. $U(1)_V$ in der Baryonenzahlerhaltung resultiert und $SU(2)_L \times SU(2)_R$ auch als chirale Gruppe bezeichnet wird. Schaut man auf das Spektrum der Hadronen, so gibt es zu Zuständen positiver Parität keine entarteten Zustände negativer Parität. Man erkennt vielmehr eine $SU(2)_V$-Symmetrie. Nach dem Colemanschen Theorem [Col 66] bestimmt aber die Symmetriegruppe des Grundzustandes die Symmetrie des Teilchenspektrums. Die Lösung dieses Widerspruchs liefert die Annahme, dass die $SU(2)_L \times SU(2)_R$-Symmetrie spontan zu $SU(2)_V$ gebrochen ist.

Als Nächstes betrachten wir deshalb ganz allgemein das Phänomen der spontanen Symmetriebrechung. Voraussetzung für eine solche Symmetriebrechung [CL 84, Ryd 85] ist die Existenz

[1] Ohne größere Probleme kann man auch m_s dazunehmen. Im Folgenden müsste man nur berücksichtigen, dass man anstatt 2 Flavors dann 3 Flavors hat.

von mehreren entarteten Grundzuständen. Kleine Störungen wählen jetzt einen Grundzustand aus und sorgen somit für die Brechung der Symmetrie. Der Grundzustand ist jetzt nicht mehr unter der vollen Symmetriegruppe G (mit n_G Generatoren) invariant, sondern nur noch unter der Untergruppe H (mit n_H Generatoren). Vom Goldstone-Theorem [Gol 61] wissen wir dann, dass $n_G - n_H$ masselose Goldstone-Bosonen existieren müssen, deren Eigenschaften durch die $n_G - n_H$ Generatoren bestimmt sind, die das Vakuum nicht vernichten. Diese Goldstone-Bosonen zeigen verschwindende Wechselwirkung für $E \to 0$ und ermöglichen es deshalb, in einer effektiven Lagrange-Dichte eine Impulsentwicklung durchzuführen.

In unserem Fall hat die Gruppe $SU(2)$ gerade $n_H = 2^2 - 1 = 3$ Generatoren und die Gruppe $SU(2)_L \times SU(2)_R$ sechs Generatoren, so dass wir $6 - 3 = 3$ masselose Goldstone-Bosonen erhalten, die mit dem Piontriplett (π^+, π^0, π^-) identifiziert werden.

Wir führen jetzt in die Lagrange-Dichte die Kopplung der Vektor- und Axialvektorströme sowie der skalaren und pseudoskalaren Dichten an externe, hermitesche, farbneutrale Felder $v_\mu(x)$, $a_\mu(x)$, $s(x)$ und $p(x)$ ein [GL 84]:

$$\mathcal{L}_{\mathrm{QCD}} = \mathcal{L}^0_{\mathrm{QCD}} + \bar{q}(x)\gamma^\mu(v_\mu(x) + \frac{1}{3}v^{(s)}_\mu(x) + \gamma_5 a_\mu(x))q(x) - \bar{q}(x)(s(x) - i\gamma_5 p(x))q(x), \quad (2.5)$$

wobei die Größe q die up- und down-Quarkfelder zusammenfasst, $q = (u, d)^T$. Bei den Feldern, die an die Vektorströme koppeln, unterscheiden wir zwischen den Feldern, die an den isoskalaren Strom koppeln, $v^{(s)}_\mu$, und den Feldern, die an die isovektoriellen Ströme koppeln, v_μ.

Die externen Felder können nach den Paulischen Spinmatrizen und der Einheitsmatrix entwickelt werden,

$$v_\mu = \sum_{i=1}^{3} \frac{\tau_i}{2} v^i_\mu, \qquad a_\mu = \sum_{i=1}^{3} \frac{\tau_i}{2} a^i_\mu, \qquad s = 1_{2\times2} s_0 + \sum_{i=1}^{3} \tau_i s_i, \qquad p = 1_{2\times2} p_0 + \sum_{i=1}^{3} \tau_i p_i. \quad (2.6)$$

Den Quarkmassenterm, der den Pionen ihre Masse gibt und zu einer expliziten Symmetriebrechung führt, bekommen wir, indem wir für $s_0 = \hat{m}$ setzen, wobei $\hat{m} = (m_u + m_d)/2$ ist. Dabei vernachlässigen wir die Effekte, die auf die Verletzung der perfekten Isospinsymmetrie zurückgehen, d.h. wir vernachlässigen die Terme, die für $m_u = m_d$ verschwinden würden.
Das elektromagnetische Feld $\mathcal{A}^\mu$ wird z.B. durch folgende Überlegungen miteinbezogen,

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{\mathrm{e.m.}} &= -e\mathcal{A}_\mu \left(\frac{2}{3}\bar{u}\gamma^\mu u - \frac{1}{3}\bar{d}\gamma^\mu d \right), \qquad e > 0 \\
&= -e\mathcal{A}_\mu \bar{q}\gamma^\mu \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} \end{pmatrix} q \\
&= \frac{1}{3}\bar{q}\gamma^\mu \left(-\frac{1}{2}e\mathcal{A}_\mu \right) q + \bar{q}\gamma^\mu \left(-\frac{1}{2}e\tau_3\mathcal{A}_\mu \right) q,
\end{aligned}$$

d.h. die vektoriellen Felder nehmen in Anwesenheit der elektromagnetischen Wechselwirkung folgende Form an:

$$v^{(s)}_\mu = -\frac{1}{2}e\mathcal{A}_\mu, \qquad v_\mu = -\frac{1}{2}e\tau_3\mathcal{A}_\mu. \quad (2.7)$$

Die Lagrange-Dichte aus Gl. (2.5) ist invariant unter *lokalen* $SU(2)_L \times SU(2)_R$-Transformationen, falls die externen Felder folgendermaßen transformieren,

$$\begin{aligned}
(v_\mu + a_\mu) &\mapsto V_R\,(v_\mu + a_\mu)\,V_R^\dagger + iV_R\partial_\mu V_R^\dagger,\\
(v_\mu - a_\mu) &\mapsto V_L\,(v_\mu - a_\mu)\,V_L^\dagger + iV_L\partial_\mu V_L^\dagger,\\
s + ip &\mapsto V_R(s+ip)V_L^\dagger,\\
s - ip &\mapsto V_L(s-ip)V_R^\dagger. \qquad (2.8)
\end{aligned}$$

2.2 Noether-Theorem und PCAC-Relation

In diesem Abschnitt zeigen wir, wie wir aus den Lagrange-Dichten aus Gl. (2.4) und Gl. (2.5) mit Hilfe des Tricks von Gell-Mann und Lévy [GL 60] die Ausdrücke für die Vektor- und Axialvektorströme und deren Divergenzen ableiten können. Dazu betrachten wir zuerst allgemein eine Lagrange-Dichte, die von N Feldern Φ_r und deren ersten Ableitungen $\partial_\mu\Phi_r$ abhängt, d.h.

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}\left(\Phi_r, \partial_\mu\Phi_r\right), \qquad r = 1,\ldots N.$$

Wir betrachten jetzt infinitesimale, *lokale* Transformationen der Felder, die durch insgesamt n infinitesimale Transformationsparameter $\epsilon_\alpha(x)$ beschrieben werden können,

$$\Phi_r'(x) = \Phi_r(x) - i\sum_{\alpha=1}^{n}\epsilon_\alpha(x)F_r^\alpha\left(\Phi_s(x)\right).$$

Die Variation der Lagrange-Dichte lautet damit

$$\begin{aligned}
\delta\mathcal{L} &= \mathcal{L}(\Phi_r'(x), \partial_\mu\Phi_r'(x)) - \mathcal{L}(\Phi_r(x), \partial_\mu\Phi_r(x))\\
&= \epsilon_\alpha(x)\left(-i\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\Phi_r}F_r^\alpha - i\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\Phi_r)}F_r^\alpha\right) + \partial_\mu\epsilon_\alpha(x)\left(-i\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\Phi_r)}F_r^\alpha\right)\\
&=: \epsilon_\alpha(x)\partial_\mu j_\alpha^\mu + \partial_\mu\epsilon_\alpha(x)j_\alpha^\mu. \qquad (2.9)
\end{aligned}$$

Aus der Variation der Lagrange-Dichte erhält man also durch folgende Formeln die Ausdrücke für die Stromdichten und deren Divergenzen,

$$j_\alpha^\mu = \frac{\partial\delta\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\epsilon_\alpha)}, \qquad \partial_\mu j_\alpha^\mu = \frac{\partial\delta\mathcal{L}}{\partial\epsilon_\alpha}. \qquad (2.10)$$

Bei einer kontinuierlichen, globalen Symmetrietransformation hängt der Transformationsparameter ϵ_α nicht von x ab, so dass der zweite Term in Gl. (2.9) wegfällt. Ist die Lagrange-Dichte sogar invariant unter dieser globalen Transformation, so bekommen wir einen erhaltenen Strom. Das ist die Aussage des Noether-Theorems: Jeder kontinuierlichen, globalen Symmetrietransformation, die die Lagrange-Dichte bis auf eine totale Divergenz einer Funktion der Felder und der Koordinaten invariant lässt, ist ein Erhaltungssatz und eine Konstante der Bewegung zugeordnet.

Das Prinzip lässt sich auf die Lagrange-Dichte aus Gl. (2.4) anwenden, die invariant unter den globalen Transformationen

$$q_L \hookrightarrow V_L q_L \qquad \text{und} \qquad q_R \hookrightarrow V_R q_R \qquad \text{mit} \qquad (V_L, V_R) \in SU(2)_L \times SU(2)_R$$

ist. Die Fundamentaldarstellungen der Gruppen $SU(2)_L$ und $SU(2)_R$ lassen sich durch

$$V_L = \exp\left(-i\frac{\vec{\tau}\cdot\vec{\theta}_L}{2}\right) = 1 - i\frac{\vec{\tau}\cdot\vec{\theta}_L}{2} + \mathcal{O}(\theta_L^2), \qquad (2.11)$$

$$V_L = \exp\left(-i\frac{\vec{\tau}\cdot\vec{\theta}_R}{2}\right) = 1 - i\frac{\vec{\tau}\cdot\vec{\theta}_R}{2} + \mathcal{O}(\theta_R^2) \qquad (2.12)$$

beschreiben. Die Variation der Lagrange-Dichte erhält man dadurch, dass man für die Transformationsparameter eine x-Abhängigkeit erlaubt,

$$\delta\mathcal{L}^0_{\text{QCD}} = \bar{q}_R\gamma^\mu \frac{\vec{\tau}\cdot\partial_\mu\vec{\theta}_R}{2} q_R + \bar{q}_L\gamma^\mu \frac{\vec{\tau}\cdot\partial_\mu\vec{\theta}_L}{2} q_L. \tag{2.13}$$

Die links- und rechtshändigen Ströme erhält man mittels Gl. (2.10):

$$\begin{aligned} L^\mu_i &= \frac{\partial\delta\mathcal{L}^0_{\text{QCD}}}{\partial\partial_\mu\theta^i_L} = \bar{q}_L\gamma^\mu\frac{\tau_i}{2}q_L, \\ R^\mu_i &= \frac{\partial\delta\mathcal{L}^0_{\text{QCD}}}{\partial\partial_\mu\theta^i_R} = \bar{q}_R\gamma^\mu\frac{\tau_i}{2}q_R, \qquad i=1,2,3. \end{aligned}$$

Für uns sind besonders die Linearkombinationen

$$V^{\mu,i} = R^{\mu,i} + L^{\mu,i} = \bar{q}\gamma^\mu\frac{\tau^i}{2}q \tag{2.14}$$

und

$$A^{\mu,i} = R^{\mu,i} - L^{\mu,i} = \bar{q}\gamma^\mu\gamma_5\frac{\tau^i}{2}q \tag{2.15}$$

interessant. Hierbei handelt es sich um die Vektor- und Axialvektorströme. In Abwesenheit von externen Feldern sind diese Ströme erhalten.

Die Lagrange-Dichte aus Gl. (2.5) ist nur invariant unter lokalen $SU(2)_L \times SU(2)_R$-Transformationen falls die externen Felder nach Gl. (2.8) mittransformiert werden. Werden die externen Felder nicht mittransformiert, so erhalten wir für die Variation von $\mathcal{L}_{\text{ext}}$,

$$\begin{aligned} \delta\mathcal{L}_{\text{ext}} &= i\bar{q}_R\gamma^\mu\left[\frac{\vec{\tau}\cdot\vec{\theta}_R}{2}, v_\mu\right]q_R + i\bar{q}_L\gamma^\mu\left[\frac{\vec{\tau}\cdot\vec{\theta}_L}{2}, v_\mu\right]q_L \\ &+ i\bar{q}_R\gamma^\mu\gamma_5\left[\frac{\vec{\tau}\cdot\vec{\theta}_R}{2}, a_\mu\right]q_R + i\bar{q}_L\gamma^\mu\gamma_5\left[\frac{\vec{\tau}\cdot\vec{\theta}_L}{2}, a_\mu\right]q_L \\ &- i\bar{q}_R\left[\frac{\vec{\tau}\cdot\vec{\theta}_R}{2}, s\right]q_L - i\bar{q}_L\left[\frac{\vec{\tau}\cdot\vec{\theta}_L}{2}, s\right]q_R \\ &- \bar{q}_R\gamma_5\left[\frac{\vec{\tau}\cdot\vec{\theta}_R}{2}, p\right]q_L - \bar{q}_L\gamma_5\left[\frac{\vec{\tau}\cdot\vec{\theta}_L}{2}, p\right]q_R. \end{aligned}$$

Damit erhalten wir die Ausdrücke für die Divergenz des Vektor- und Axialvektorstroms in Anwesenheit externer Felder:

$$\partial_\mu V^\mu_i = i\bar{q}\gamma^\mu\left[\frac{\tau_i}{2}, v_\mu\right]q + i\bar{q}\gamma^\mu\gamma_5\left[\frac{\tau_i}{2}, a_\mu\right]q - i\bar{q}\left[\frac{\tau_i}{2}, s\right]q - \bar{q}\gamma_5\left[\frac{\tau_i}{2}, p\right]q, \tag{2.16}$$

$$\partial_\mu A^\mu_i = i\bar{q}\gamma^\mu\gamma_5\left[\frac{\tau_i}{2}, v_\mu\right]q + i\bar{q}\gamma^\mu\left[\frac{\tau_i}{2}, a_\mu\right]q + i\bar{q}\gamma_5\left\{\frac{\tau_i}{2}, s\right\}q + \bar{q}\left\{\frac{\tau_i}{2}, p\right\}q. \tag{2.17}$$

Die Einführung von externen Feldern führte zu einer expliziten Symmetriebrechung in der Lagrange-Dichte. Die Divergenzen der oben angegebenen Ströme sind deshalb nicht mehr Null. Betrachtet man die Quarkmasse $\hat{m}$ und das elektromagnetische Feld $\mathcal{A}^\mu$ als externe Felder, so erhält man die folgenden wichtigen Relationen[2]:

$$\partial_\mu V^\mu_i(x) = -e\epsilon_{3ij}\mathcal{A}_\mu(x)V^\mu_j(x), \tag{2.18}$$

$$\partial_\mu A^\mu_i(x) = -e\epsilon_{3ij}\mathcal{A}_\mu(x)A^{\mu,j}(x) + 2\hat{m}P_i(x), \tag{2.19}$$

[2]Tatsächlich besitzt die dritte Komponente des Axialvektorstroms A^μ_3 eine Anomalie, die proportional zu e^2 ist und für unsere Zwecke nicht relevant ist [Adl 69, AB 69, Bar 69, BJ 69, Adl 70].

mit der pseudoskalaren Dichte

$$P_i(x) = i\bar{q}(x)\gamma_5 \frac{\tau_i}{2} q(x). \tag{2.20}$$

Bei der Ableitung dieser Relationen haben wir eine perfekte Isospinsymmetrie angenommen, d.h. wir haben Terme proportional zu $m_u - m_d$ vernachlässigt. Die beiden Gln. (2.18) und (2.19) konnten auf Grund von Symmetriebetrachtungen ganz allgemein hergeleitet werden und sind deshalb streng gültig. Voraussetzung ist, dass neben der endlichen Quarkmasse und dem elektromagnetischen Feld keine anderen externen Felder vorhanden sind. Dabei besitzt Gl. (2.19) eine besondere Bedeutung. Sie wird als PCAC-Relation unter Anwesenheit der elektromagnetischen Wechselwirkung bezeichnet. Sie ist in einer ähnlichen Form bereits von Adler und Gilman [AG 66] mit Hilfe der minimalen Substitution abgeleitet worden. Der Unterschied zum Vektorstromoperator besteht darin, dass dieser in Abwesenheit elektromagnetischer Felder erhalten ist, während der axiale Stromoperator nur im chiralen Grenzfall erhalten ist. Bei der Diskussion des axialen Formfaktors in der Pionelektroproduktion in Kapitel 7 werden wir auf diese Relation noch einmal zurückkommen.

2.3 Mesonische chirale Störungstheorie

In der chiralen Störungstheorie suchen wir die allgemeinste, mit den Symmetrien der QCD verträgliche effektive Lagrange-Dichte, die die Goldstone-Bosonen als effektive Freiheitsgrade enthält. Die Symmetrien der QCD sind im Wesentlichen die chirale Symmetrie, die diskreten Symmetrien (Parität, Ladungskonjugation, Zeitumkehrinvarianz), die Hermitizität und die Lorentzinvarianz. Die Goldstone-Bosonen, die in unserem Fall die Pionen sind, werden in einer unitären 2×2 Matrix $U(x)$ zusammengefasst,

$$U(x) = \exp\left(\frac{i\Phi(x)}{F_0}\right), \qquad \Phi(x) = \vec{\tau}\cdot\vec{\pi} = \begin{pmatrix} \pi^0 & \sqrt{2}\pi^+ \\ \sqrt{2}\pi^- & -\pi^0 \end{pmatrix}. \tag{2.21}$$

Die Matrix $U(x)$ transformiert bzgl. der chiralen Gruppe wie

$$U(x) \to V_R U(x) V_L^\dagger \qquad \text{mit} \qquad V_R, V_L \in SU(2). \tag{2.22}$$

Die Konstante F_0 ist die Pionzerfallskonstante im chiralen Grenzfall, $F_\pi = F_0(1+\mathcal{O}(\hat{m})) = 92.4$ MeV [GL 85].

Die einzelnen Terme der effektiven Lagrange-Dichte werden nach ihrer chiralen Ordnung klassifiziert und organisiert. Zur Konstruktion der Lagrange-Dichten der betreffenden chiralen Ordnung werden einzelne Basisbausteine verwendet, die alle eine bestimmte feste Ordnung in dem Impuls- und Quarkmassenzählschema besitzen:

$$D_\mu U = \partial_\mu U - iR_\mu U + iUL_\mu, \tag{2.23}$$
$$F^R_{\mu\nu} = \partial_\mu R_\nu - \partial_\nu R_\mu - i\left[R_\mu, R_\nu\right], \tag{2.24}$$
$$F^L_{\mu\nu} = \partial_\mu L_\nu - \partial_\nu L_\mu - i\left[L_\mu, L_\nu\right], \tag{2.25}$$
$$\chi = 2B_0\left(s + ip\right). \tag{2.26}$$

Dabei haben wir noch die Größen $R^\mu = v^\mu + a^\mu$ und $L^\mu = v^\mu - a^\mu$ eingeführt. Die Konstante B_0 ist direkt mit dem chiralen Quarkkondensat verknüpft, $2F_0^2 B_0 = -\langle\bar{q}q\rangle$. Die einzelnen Bausteine besitzen in unserem Zählschema die folgende chirale Ordnung[3]

$$U = \mathcal{O}\left(q^0\right), \quad D_\mu U = \mathcal{O}\left(q\right), \quad F^{R/L}_{\mu\nu} = \mathcal{O}\left(q^2\right), \quad \chi = \mathcal{O}\left(q^2\right). \tag{2.27}$$

[3] Für ein alternatives Zählschema s. [FSS 91, Kne+ 93, SSF 93].

Unter der chiralen Gruppe transformieren die einzelnen Bausteine wie folgt:

$$D^\mu U \hookrightarrow V_R D^\mu U V_L^\dagger, \quad F_R^{\mu\nu} \hookrightarrow V_R F_R^{\mu\nu} V_R^\dagger, \quad F_L^{\mu\nu} \mapsto V_L F_L^{\mu\nu} V_L^\dagger, \quad \chi \mapsto V_R \chi V_L^\dagger. \tag{2.28}$$

Da wir die Größe χ zur $\mathcal{O}(q^2)$ zählen und wir Lorentzindizes immer kontrahieren müssen (wegen der Lorentzinvarianz), treten nur gerade Ordnungen in dieser Impulsentwicklung auf. Die allgemeinste, chiral invariante Lagrange-Dichte der niedrigsten Ordnung, die alle Symmetrien erfüllt, lautet [GL 84]:

$$\mathcal{L}_{\pi\pi}^{(2)} = \frac{F_0^2}{4} \mathrm{Tr}\left(D_\mu U \left(D^\mu U\right)^\dagger\right) + \frac{F_0^2}{4} \mathrm{Tr}\left(\chi U^\dagger + U \chi^\dagger\right). \tag{2.29}$$

Dabei kennzeichnet der Index 2 die chirale Ordnung, d.h. in diesem Fall enthält die Lagrange-Dichte nur Terme der Ordnung $\mathcal{O}(q^2)$. In dieser Ordnung tauchen zwei Niederenergiekonstanten auf, nämlich die Pionzerfallskonstante F_0 und die in dem Baustein χ enthaltene Konstante B_0.

Damit wir wissen, welcher Beitrag der Lagrange-Dichte zur Berechnung der einzelnen Vertices jeweils wichtig ist, unterteilen wir diese noch nach den unterschiedlichen externen Feldern:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{\pi\pi}^{(2)} \; = \; & \frac{F_0^2}{4} \mathrm{Tr}\left(\partial_\mu U \partial^\mu U^\dagger\right) + \frac{B_0 F_0^2}{2} \mathrm{Tr}\left(s U^\dagger + U s\right) \\
& + i \frac{F_0^2}{2} \mathrm{Tr}\left((\partial_\mu U U^\dagger + \partial_\mu U^\dagger U) v^\mu\right) + i \frac{F_0^2}{2} \mathrm{Tr}\left((\partial_\mu U U^\dagger - \partial_\mu U^\dagger U) a^\mu\right) \\
& - \frac{F_0^2}{4} \mathrm{Tr}\left([v_\mu, U][v^\mu, U^\dagger]\right) + \frac{F_0^2}{4} \mathrm{Tr}\left(\{a_\mu, U\}\{a^\mu, U^\dagger\}\right) \\
& + \frac{F_0^2}{2} \mathrm{Tr}\left(v_\mu U a^\mu U^\dagger - v_\mu U^\dagger a^\mu U\right) + i \frac{B_0 F_0^2}{2} \mathrm{Tr}\left(p U^\dagger - U p\right).
\end{aligned} \tag{2.30}$$

Mit Hilfe der Ersetzung

$$U(x) \to U^\dagger(x) \Leftrightarrow \pi(x) \to -\pi(x)$$

kann man überprüfen, welcher Term eine gerade und welcher eine ungerade Anzahl an Pionfeldern enthält, je nachdem ob der Term durch die Ersetzung ein Minuszeichen ($\Leftrightarrow$ ungerade Anzahl) erhält oder nicht. So koppelt z.B. ein Photon nur an eine gerade Anzahl an Pionen, während der axiale Strom nur an eine ungerade Anzahl an Pionen koppelt.
Die $SU(2)$ Lagrange-Dichte der nächsthöheren Ordnung ($\mathcal{O}(q^4)$) lautet [GSS 88][4]

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{\pi\pi}^{(4)} \; = \; & \frac{l_1}{4} \left[\mathrm{Tr}\left(D_\mu U \left(D^\mu U\right)^\dagger\right)\right]^2 + \frac{l_2}{4} \mathrm{Tr}\left(D_\mu U \left(D_\nu U\right)^\dagger\right) \mathrm{Tr}\left(D^\mu U \left(D^\nu U\right)^\dagger\right) \\
& + \frac{l_3 + l_4}{16} \left[\mathrm{Tr}\left(\chi U^\dagger + U \chi^\dagger\right)\right]^2 + \frac{l_4}{8} \mathrm{Tr}\left(D_\mu U \left(D^\mu U\right)^\dagger\right) \mathrm{Tr}\left(\chi U^\dagger + U \chi^\dagger\right) \\
& + l_5 \mathrm{Tr}\left(F_{\mu\nu}^R U F_L^{\mu\nu} U^\dagger\right) + i \frac{l_6}{2} \mathrm{Tr}\left(F_{\mu\nu}^R D^\mu U \left(D^\nu U\right)^\dagger + F_{\mu\nu}^L \left(D^\mu U\right)^\dagger D^\nu U\right) \\
& - \frac{l_7}{16} \left[\mathrm{Tr}\left(\chi U^\dagger - U \chi^\dagger\right)\right]^2 + \ldots .
\end{aligned} \tag{2.31}$$

Dabei haben wir diejenigen Terme weggelassen, die ausschließlich externe Felder und keine Pionfelder enthalten. Sie spielen in den folgenden Betrachtungen keine Rolle. Die 7 Niederenergiekonstanten (LECs) l_i parametrisieren die zu Grunde liegende Dynamik der QCD. Um ihre Werte zu bestimmen, muss man sie an experimentelle Daten anpassen oder an Hand von Vorhersagen von effektiven Quarkmodellen ableiten. Allerdings muss man sie nur einmal bestimmen und kann

[4] Die $SU(3)$ Lagrange-Dichte [GL 85] enthält insgesamt 10 unabhängige Terme mit Goldstone-Bosonenfeldern, von denen drei im $SU(2)$ Fall durch Linearkombinationen der anderen 7 Terme ausgedrückt werden können.

dann damit die Werte von einer ganzen Reihe von physikalischen Größen vorhersagen (s. Anhang D.1 von [Sch 02]).

Was uns jetzt noch zur Berechnung von physikalischen Prozessen bis zu einer bestimmten Ordnung fehlt, ist ein Schema, mit dessen Hilfe Feynman-Diagramme klassifiziert werden können. Weinbergs Zählschema [Wei 79] liefert uns eine solche konsistente Behandlung:
Reskaliert man in einem gegebenen Diagramm die externen Impulse und die Massen der Goldstone-Bosonen[5], so ergibt sich für das Verhalten der invarianten Amplitude des Diagramms:

$$\mathcal{M}\left(tp, t^2 M^2\right) = t^D \mathcal{M}\left(p, M^2\right), \qquad D = 2 + \sum_{n=1}^{\infty} 2\,(n-1)\,N_{2n} + 2N_L. \tag{2.32}$$

Dabei steht N_L für die Anzahl der Schleifen im Diagramm und N_{2n} für die Anzahl der Vertices, die von $\mathcal{L}_{2n}$ kommen. Die wichtigste Konsequenz ist, dass Diagramme mit kleinem D dominieren, d.h. in führender Ordnung die invariante Amplitude bestimmen. Schleifendiagramme sind wegen des Faktors $2N_L$ unterdrückt. Für unsere Zwecke sind die Diagramme mit $D = 2$ und $D = 4$ interessant:

$$\begin{array}{llll} D = 2: & n = 1, & N_L = 0, & \\ D = 4: & n = 1, & N_L = 1 & \text{oder} \\ & n = 2, & N_L = 0, & N_4 = 1. \end{array}$$

Zur Ordnung $\mathcal{O}(p^2)$ tragen also alle Diagramme mit einer beliebigen Anzahl an Vertices von $\mathcal{L}_{\pi\pi}^{(2)}$ bei. Zur Ordnung $\mathcal{O}(p^4)$ tragen Einschleifengraphen mit Vertices von $\mathcal{L}_{\pi\pi}^{(2)}$ und Baumgraphen mit genau einem Vertex von $\mathcal{L}_{\pi\pi}^{(4)}$ bei.

2.4 Chirale Störungstheorie für Nukleonen

Die Vorgehensweise ist analog zum Mesonsektor. Die effektiven Freiheitsgrade sind jetzt neben den Pionen auch die Nukleonen. Dabei sind wir nur an Prozessen interessiert, in denen ein einlaufendes und ein auslaufendes Nukleon vorkommt. Die Nukleonen (Proton p, Neutron n) sind in dem Nukleonenfeld $\Psi(x) = (p, n)^T$ enthalten, das die Viererspinoren von Proton und Neutron zusammenfasst. Die Pionen werden jetzt in der Größe u zusammengefasst,

$$u = \sqrt{U} = \exp\left(i\frac{\vec{\tau}\cdot\vec{\pi}}{2F_0}\right).$$

Wie wir im nächsten Kapitel sehen werden, bereitet das Auftreten der Nukleonmasse als neue Massenskala Probleme, da diese im chiralen Grenzfall nicht verschwindet. Im Gegensatz zur mesonischen ChPT existieren in der ChPT für Nukleonen Lagrange-Dichten für alle chiralen Ordnungen und nicht nur für gerade Ordnungen. Die Lagrange-Dichte der niedrigsten Ordnung ist somit von der Ordnung $\mathcal{O}(q)$, wobei q ein Parameter sein soll, der für einen kleinen Mesonen- oder Nukleonenimpuls steht[6].

---

[5] Das Reskalieren der Massen ist nur ein mathematisches Hilfsmittel, das dadurch motiviert wird, dass die Massen der Goldstone-Bosonen im chiralen Grenzfall verschwinden.

[6] Da die nullte Komponente des Viererimpulsvektors der Energie des Teilchens entspricht, kann der Viererimpuls des Nukleons nicht „klein“ sein. Entweder betrachtet man also nur die Dreierimpulse des Nukleons oder man spaltet einen „kleinen“ Viererimpuls vom eigentlichen Impulsvektor ab, der dann nicht die Energie-Massenschalenbeziehung erfüllt (s. HBChPT im nächsten Kapitel).

Die Basisbausteine lauten jetzt

$$\begin{aligned}
D_\mu \Psi &= \left(\partial_\mu + \Gamma_\mu - i v_\mu^{(s)}\right) \Psi \\
&= \left\{\partial_\mu + \frac{1}{2}\left[u^\dagger(\partial_\mu - iR_\mu)u + u(\partial_\mu - iL_\mu)u^\dagger\right] - i v_\mu^{(s)}\right\} \Psi, \\
u_\mu &= i\left[u^\dagger(\partial_\mu - iR_\mu)u - u(\partial_\mu - iL_\mu)u^\dagger\right], \\
\chi_\pm &= u^\dagger \chi u^\dagger \pm u \chi^\dagger u, \\
f_{\mu\nu}^\pm &= u F_{\mu\nu}^L u^\dagger \pm u^\dagger F_{\mu\nu}^R u \\
v_{\mu\nu}^{(s)} &= \partial_\mu v_\nu^{(s)} - \partial_\nu v_\mu^{(s)}.
\end{aligned} \tag{2.33}$$

Im chiralen Zählschema besitzen diese Größen die folgenden Ordnungen,

$$D_\mu \Psi = \mathcal{O}(q^0), \;\; D_\mu U = \mathcal{O}(q), \;\; u_\mu = \mathcal{O}(q), \;\; \chi_\pm = \mathcal{O}(q^2), \;\; f_{\mu\nu}^\pm = \mathcal{O}(q^2), \;\; v_{\mu\nu}^{(s)} = \mathcal{O}(q^2). \tag{2.34}$$

Die Pion- und Nukleonfelder werden zur Ordnung $\mathcal{O}(q^0)$ gezählt. Die kovariante Ableitung D_μ kann sowohl auf die Nukleonfelder Ψ als auch auf die Pionfelder oder die externen Felder wirken. Wirkt D_μ auf ein Nukleonfeld $\Psi(x)$, so zählen wir diese Größe zur Ordnung $\mathcal{O}(q^0)$, da die Zeitableitung die Energie des Nukleons liefert, die nicht als „klein“ angesehen werden kann. Wirkt D_μ auf ein Pionfeld oder ein externes Feld, so zählen wir diese Größe zur Ordnung $\mathcal{O}(q)$. Die hier auftauchende kovariante Ableitung sollte nicht mit der kovarianten Ableitung in der Theorie für die Mesonen verwechselt werden.

Die Basisbausteine sind gerade so gewählt, dass es besonders einfach ist, Terme zu konstruieren, die unter der chiralen Gruppe invariant sind. Die einzelnen Bausteine besitzen das folgende Transformationsverhalten:

$$\Psi \mapsto K(V_L, V_R, U)\Psi, \qquad \bar{\Psi} \mapsto \bar{\Psi} K^{-1}(V_L, V_R, U), \tag{2.35}$$

$$X \mapsto K(V_L, V_R, U) X K^{-1}(V_L, V_R, U), \qquad X = u_\mu, \chi_\pm, f_{\mu\nu}^\pm, v_{\mu\nu}^{(s)}, \tag{2.36}$$

wobei die $SU(2)$-wertige Matrixfunktion $K(V_L, V_R, U)$ definiert ist durch

$$K(V_L, V_R, U) = u'^{-1} V_R u = \sqrt{V_R, U, V_L^\dagger}^{-1} V_R u.$$

Für die kovariante Ableitung folgt, dass $[D_\mu, X]$ gemäß Gl. (2.36) und $D_\mu \Psi$ gemäß Gl. (2.35) transformiert (s. [Fet+ 00]).

Die effektive Pion-Nukleon-Lagrange-Dichte der niedrigsten Ordnung mit der minimalen Anzahl an Ableitungen lautet [GSS 88, EM 96],

$$\mathcal{L}_{\pi N}^{(1)} = \bar{\Psi}\left(i\not{D} - \mathring{m}_N + \frac{\mathring{g}_A}{2}\gamma^\mu \gamma_5 u_\mu\right)\Psi. \tag{2.37}$$

Hier tauchen zwei neue Niederenergiekonstanten auf, nämlich die Nukleonmasse $m_N = \mathring{m}_N(1 + \mathcal{O}(\hat{m})) = 939.6$ MeV und die axiale Kopplungskonstante $g_A = \mathring{g}_A(1 + \mathcal{O}(\hat{m})) = 1.2670 \pm 0.0035$ [PDG 02] im chiralen Grenzfall. Im Folgenden kennzeichnen wir alle physikalischen Größen im chiralen Grenzfall mit dem Symbol $^\circ$.

Aufgeteilt nach den externen Feldern lautet diese Lagrange-Dichte:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{\pi N}^{(1)} &= \bar{\Psi}(i\not{\partial} - \mathring{m}_N)\Psi + i\frac{1}{2}\bar{\Psi}\gamma^\mu(u^\dagger\partial_\mu u + u\partial_\mu u^\dagger)\Psi \\
&+\frac{1}{2}\bar{\Psi}\gamma^\mu(u^\dagger v_\mu u + u v_\mu u^\dagger)\Psi + \frac{1}{2}\bar{\Psi}\gamma^\mu(u^\dagger a_\mu u - u a_\mu u^\dagger)\Psi + \bar{\Psi}\gamma^\mu v_\mu^{(s)}\Psi \\
&+i\frac{\mathring{g}_A}{2}\bar{\Psi}\gamma^\mu\gamma_5(u^\dagger\partial_\mu u - u\partial_\mu u^\dagger)\Psi \\
&+\frac{\mathring{g}_A}{2}\bar{\Psi}\gamma^\mu\gamma_5(u^\dagger v_\mu u - u v_\mu u^\dagger)\Psi + \frac{\mathring{g}_A}{2}\bar{\Psi}\gamma^\mu\gamma_5(u^\dagger a_\mu u + u a_\mu u^\dagger)\Psi. \qquad (2.38)
\end{aligned}$$

Die in der Einleitung erwähnten chiralen Niederenergietheoreme (wie z.B. die Goldberger-Treiman-Relation [GT 58]), die im chiralen Grenzfall exakt gültig sind, können mit Hilfe der Lagrange-Dichten aus Gl. (2.29) und Gl. (2.37) abgeleitet werden. Tatsächlich reproduziert die chirale Störungstheorie der niedrigsten Ordnung alle mit den Methoden der Stromalgebra und der PCAC-Relation abgeleiteten Ergebnisse.

Die Lagrange-Dichte der nächsthöheren Ordnung enthält die sieben Niederenergiekonstanten c_i [GSS 88, Kra 90],

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{\pi N}^{(2)} &= \bar{\Psi}c_1\langle\chi_+\rangle\Psi - \frac{c_2}{8\mathring{m}_N^2}\left(\bar{\Psi}\langle u_\mu u_\nu\rangle\{D^\mu, D^\nu\}\Psi + \text{h.c.}\right) + \bar{\Psi}\frac{c_3}{2}\langle u_\mu u^\mu\rangle\Psi \\
&+\bar{\Psi}\left[i\frac{c_4}{4}\bar{\Psi}\left[u_\mu, u_\nu\right]\sigma^{\mu\nu}\Psi + c_5\left(\chi_+ - \frac{1}{2}\langle\chi_+\rangle\right) + \frac{c_6}{8\mathring{m}_N}f_{\mu\nu}^+\sigma^{\mu\nu} + \frac{c_7}{2\mathring{m}_N}v_{\mu\nu}^{(s)}\sigma^{\mu\nu}\right]\Psi. \qquad (2.39)
\end{aligned}$$

Die eckigen Klammern stehen für die Spur über die 2×2 Matrizen. Wir werden später sehen, dass die Konstanten c_6 bzw. c_7 proportional zum anomalen isovektoriellen bzw. isoskalaren magnetischen Moment des Nukleons im chiralen Grenzfall sind. Wir geben noch die Beziehung zwischen den in [GSS 88] definierten und den in dieser Arbeit verwendeten Konstanten an:

$$\begin{aligned}
&\mathring{m}_N c_1^{GSS} = F^2 c_1, \quad \mathring{m}_N c_2^{GSS} = -F^2 c_4, \quad \mathring{m}_N c_3^{GSS} = -2F^2 c_3, \\
&\mathring{m}_N(c_4^{GSS} - 2\mathring{m}_N c_5^{GSS}) = -F^2 c_2, \quad 8\mathring{m}_N^2 c_6^{GSS} = F^2 c_6.
\end{aligned}$$

Die Lagrange-Dichten der Ordnungen $\mathcal{O}(q^3)$ und $\mathcal{O}(q^4)$ sind komplett in [Fet+ 00] angegeben. Sie enthalten 23 bzw. 118 unabhängige Terme, von denen wir aber nur einige wenige in dieser Arbeit benötigen. Wir verzichten daher auf die vollständigen Lagrange-Dichten und geben nur die relevanten Terme an. Aus $\mathcal{L}_{\pi N}^{(3)}$ [EM 96] benötigen wir die folgenden fünf Terme:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{\pi N}^{(3)} &= \frac{i}{2\mathring{m}_N}\frac{b_7}{(4\pi F)^2}\left(\bar{\Psi}\left[D^\mu, f_{\mu\nu}^+\right]D^\nu\Psi - \text{h.c.}\right) + \frac{i}{2\mathring{m}_N}\frac{b_8}{(4\pi F)^2}\left(\bar{\Psi}(\partial^\mu v_{\mu\nu}^{(s)})D^\nu\Psi - \text{h.c.}\right) \\
&+\frac{1}{2}\bar{\Psi}\left[\frac{b_{17}}{(4\pi F)^2}\gamma^\mu\gamma_5\langle\chi_+\rangle u_\mu + \frac{b_{19}}{(4\pi F)^2}\gamma^\mu\gamma_5\left[D_\mu, \chi_-\right] + \frac{b_{23}}{(4\pi F)^2}\gamma^\mu\gamma_5\left[D^\nu, f_{\mu\nu}^-\right]\right]\Psi. \qquad (2.40)
\end{aligned}$$

Auch hier geben wir die Beziehung zwischen den Konstanten d_i aus [Fet+ 00] und den hier verwendeten Konstanten b_i aus [EM 96] an:

$$d_6 = \frac{b_7}{(4\pi F)^2}, \quad 4\,d_7 = \frac{b_8}{(4\pi F)^2}, \quad d_{16} = \frac{b_{17}}{(4\pi F)^2}, \quad d_{18} = \frac{b_{19}}{(4\pi F)^2}, \quad d_{22} = \frac{b_{23}}{(4\pi F)^2}.$$

Aus $\mathcal{L}_{\pi N}^{(4)}$ [Fet+ 00] benötigen wir die folgenden acht Terme:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{\pi N}^{(4)} &= \ldots + \bar{\Psi}\Big[e_{22}\,[D_\mu,[D^\mu,\langle\chi_+\rangle]] + e_{38}\langle\chi_+\rangle^2 - 2\,e_{54}\,\left(\partial^\lambda\partial_\lambda v_{\mu\nu}^{(s)}\right)\sigma^{\mu\nu} \\ &\quad -\frac{1}{2}\,e_{74}\,[D^\lambda,[D_\lambda,f_{\mu\nu}^+]]\sigma^{\mu\nu} - 2\,e_{105}\,v_{\mu\nu}^{(s)}\langle\chi_+\rangle\sigma^{\mu\nu} - \frac{1}{2}\,e_{106}\,f_{\mu\nu}^+\langle\chi_+\rangle\sigma^{\mu\nu} \\ &\quad +\frac{1}{4}e_{115}\langle\chi_+^2-\chi_-^2\rangle - \frac{1}{4}e_{116}\left(\langle\chi_-^2\rangle - \langle\chi_-\rangle^2 + \langle\chi_+^2\rangle - \langle\chi_+\rangle^2\right)\Big]\,\Psi + \ldots . \end{aligned} \tag{2.41}$$

Die Konstanten e_{22} und e_{38} stehen mit den Konstanten e_1^{BL} und e_2^{BL} aus [BL 99] folgendermaßen in Verbindung:

$$e_1^{BL} = -2\,(8e_{38} + e_{115} + e_{116})\,, \qquad e_2^{BL} = 4\,e_{22}. \tag{2.42}$$

Damit haben wir alle Lagrange-Dichten zusammen, die für eine volle Einschleifenberechnung der skalaren, elektromagnetischen und schwachen Formfaktoren benötigt werden. Die Werte der Niederenergiekonstanten müssen an Hand von experimentellen Daten bestimmt werden und hängen i.A. von dem verwendeten Renormierungsschema ab. Wir diskutieren deshalb ihre Werte in Zusammenhang mit den einzelnen Formfaktoren (Kapitel 4-6).

Kapitel 3

Wiederherstellung des chiralen Zählschemas

Berechnet man mit den im letzten Kapitel angegebenen Lagrange-Dichten Schleifengraphen, die innere Nukleonenlinien enthalten, so stellt man fest, dass das chirale Zählschema („power counting“) verletzt ist, wenn man die übliche dimensionale Regularisierung in Kombination mit einer modifizierten minimalen Subtraktion verwendet [GSS 88]. In diesem Kapitel behandeln wir verschiedene Methoden, die das chirale Zählschema wiederherstellen. Wir vergleichen diese Methoden miteinander und zählen die jeweiligen Vor- und Nachteile auf.

3.1 Nukleonmasse im chiralen Grenzfall

Zur Verdeutlichung des Problems berechnen wir die Nukleonmasse bis zur Ordnung $\mathcal{O}(q^3)$ im chiralen Grenzfall, d.h. im Grenzfall verschwindender Quarkmassen. Wir betrachten den chiralen Grenzfall, da der Ausdruck für die Nukleonmasse dann sehr übersichtlich wird und trotzdem das Problem verdeutlicht [GSS 88]. Die physikalische Nukleonmasse ist als Position des Pols des Nukleonpropagators definiert:

$$iS(p) = \frac{i}{\not p - \mathring{m}_N - \Sigma(p)} \quad \Rightarrow m_N = \mathring{m}_N + \Sigma(\not p = m_N). \tag{3.1}$$

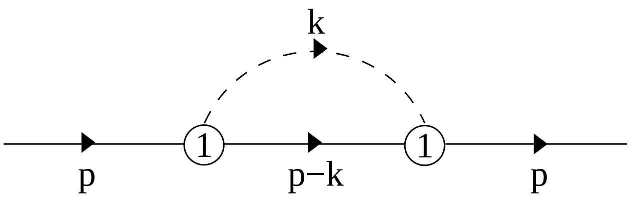

Abbildung 3.1: Selbstenergiegraph des Nukleons. Die durchgezogenen bzw. gestrichelten Linien kennzeichnen Nukleon- bzw. Pionlinien. Die 1 im Kreis steht für einen Beitrag von $\mathcal{L}_{\pi N}^{(1)}$.

Die einzige Korrektur zu $\mathring{m}_N$ kommt im chiralen Grenzfall von dem in Abb. 3.1 gezeigten Selbstenergiegraphen. Zur Berechnung dieses Graphen müssen wir den Ausdruck für den πNN-Vertex ableiten. Für ein Pion mit Impuls q und Isospinindex a erhalten wir

$$\mp \frac{\mathring{g}_A}{2F_0} \not q \gamma_5 \tau^a,$$

wobei das Minuszeichen für eine einlaufendes und das Pluszeichen für ein auslaufendes Pion steht. Nach Anwendung der Feynmanregeln [BD 64, Ryd 85] erhalten wir für $\Sigma(p) = i\mathcal{M}$ den folgenden Ausdruck [GSS 88]:

$$
\begin{aligned}
\Sigma(p) &= i\left(-\frac{\mathring{g}_A^2}{4F_0^2}\right)\mu^{4-n}\int\frac{d^nk}{(2\pi)^n}\not{k}\,\gamma_5\tau^a\frac{i}{k^2+i\varepsilon}\frac{i}{\not{p}-\not{k}-\mathring{m}_N+i\varepsilon}\not{k}\,\gamma_5\tau^a \\
&= i\frac{3\mathring{g}_A^2}{4F_0^2}\mu^{4-n}\int\frac{d^nk}{(2\pi)^n}\frac{\not{k}\,\gamma_5(\not{p}-\not{k}+\mathring{m}_N)\not{k}\,\gamma_5}{(k^2+i\varepsilon)((p-k)^2-\mathring{m}_N^2+i\varepsilon)} \\
&= -i\frac{3\mathring{g}_A^2}{4F_0^2}\mu^{4-n}\int\frac{d^nk}{(2\pi)^n}\frac{(\mathring{m}_N+\not{p})k^2-(p^2-\mathring{m}_N^2)\not{k}+((p-k)^2-\mathring{m}_N^2)\not{k}}{(k^2+i\varepsilon)((p-k)^2-\mathring{m}_N^2+i\varepsilon)}, \\
\Sigma(\not{p}=\mathring{m}_N) &= -\frac{3\mathring{g}_A^2}{2F_0^2}\mathring{m}_N I_N = -\frac{3\mathring{g}_A^2}{32\pi^2F_0^2}\mathring{m}_N^3\left(R+2\ln\frac{\mathring{m}_N}{\mu}\right).
\end{aligned}
\tag{3.2}
$$

In der letzten Zeile haben wir von $\not{p} = \mathring{m}_N$ Gebrauch gemacht. Hierbei ist μ die bei der dimensionalen Regularisierung auftretende Renormierungsskala[1]. Die Konstante R ist in Gl. (C.1) im Anhang C angegeben und divergiert für $n \to 4$. Wie wir gezeigt haben, tritt bei der Berechnung des Selbstenergiegraphen des Nukleons im chiralen Grenzfall lediglich das Integral I_N auf, das wir mit Hilfe der dimensionalen Regularisierung im Anhang berechnet haben.

Die Schleifenbeiträge verschieben also die Position des Pols im Nukleonpropagator um einen unendlichen Betrag, d.h. wir müssen die Nukleonmasse im chiralen Grenzfall, die bereits in führender Ordnung in $\mathcal{L}_{\pi N}^{(1)}$ (Gl. 2.37) auftaucht, renormieren. Das bedeutet aber auch, dass Schleifenbeiträge jetzt nicht mehr unterdrückt sind, sondern schon in der führenden Ordnung beitragen. Das ist in der chiralen Störungstheorie für Mesonen nicht der Fall. Die beiden, in der niedrigsten Ordnung auftretenden Niederenergiekonstanten B_0 und F_0 müssen nicht renormiert werden und sind somit endlich. Zum Vergleich geben wir das Ergebnis einer Einschleifenrechnung für die Pionmasse an [GL 84],

$$
m_\pi^2 = m_{\pi,0}^2\left(1+\frac{2m_{\pi,0}^2}{F_0^2}\left(l_3^r(\mu)+\frac{1}{32\pi^2}\ln\frac{m_{\pi,0}}{\mu}\right)\right).
$$

Die Pionmasse nimmt durch die Renormierung der aus $\mathcal{L}_4^{\pi\pi}$ stammenden Konstanten l_3 einen endlichen Wert an,

$$
l_3^r(\mu) = l_3 + \frac{R}{64\pi^2}.
$$

Der Vergleich der Ausdrücke für die Massen des Pions und des Nukleons zeigt deutlich das Problem der chiralen Störungstheorie im Nukleonsektor. Die Masse des Nukleons verschwindet im Gegensatz zur Masse des Pions im chiralen Grenzfall nicht und kann auch nicht als klein (von der Ordnung $\mathcal{O}(q)$) angesehen werden. Es tritt eine neue Massenskala auf, die das chirale Zählschema zerstört.

3.2 Theorie für schwere Baryonen

Die Masse des Nukleons ist in etwa so groß wie die in den Schleifenintegralen auftretende Skala $4\pi F_0$. Wir suchen deshalb eine Formulierung der chiralen Störungstheorie, die eine simultane Entwicklung nach

$$
\frac{q}{4\pi F_0} \quad \text{und} \quad \frac{q}{\mathring{m}_N}
$$

[1] Im Nukleonsektor wird, wie wir später noch erklären werden, $\mu = \mathring{m}_N$ gewählt.

ermöglicht. In der relativistischen Formulierung der ChPT besteht aber zwischen F_0 und $\mathring{m}_N$ ein grundlegender Unterschied. Während F_0 nur in der Lagrange-Dichte auftaucht, ist $\mathring{m}_N$ auch im Nukleonpropagator enthalten. Damit eine solche Entwicklung also überhaupt möglich ist, muss der gesuchte Formalismus einen neuen Propagator liefern, der die Nukleonmasse im chiralen Grenzfall nicht mehr enthält.

Dies ist in der so genannten HBChPT (Heavy Baryon ChPT) [JM 91, Ber+ 92] der Fall, die die Nukleonfelder als schwere statische Fermionenfelder [Geo 90] behandelt. Wir zerlegen den Viererimpuls eines Nukleons in $m_N v^\mu$ und einen Restimpuls k^μ,

$$p^\mu = m_N v^\mu + k^\mu, \qquad v^2 = 1,\ v^0 \geq 1, \tag{3.3}$$

so dass $v \cdot k \ll m_N$ ein Maß dafür ist, wieviel das Nukleon von der Massenschale abweicht. Wir zählen den Restimpuls k^μ zur Ordnung $\mathcal{O}(q)$. Mit Hilfe der Größe v^μ können wir den Nukleonspinor in eine „leichte“ und eine „schwere“ Komponente zerlegen

$$\begin{aligned}
\Psi(x) &= e^{-i\mathring{m}_N v\cdot x}\left[\mathcal{N}_v + \mathcal{H}_v\right] \\
\mathcal{N}_v &= e^{i\mathring{m}_N v\cdot x} P_v^+ \Psi(x) = e^{i\mathring{m}_N v\cdot x}\frac{1+\not{v}}{2}\Psi(x), \\
\mathcal{H}_v &= e^{i\mathring{m}_N v\cdot x} P_v^- \Psi(x) = e^{i\mathring{m}_N v\cdot x}\frac{1-\not{v}}{2}\Psi(x).
\end{aligned} \tag{3.4}$$

Für $v^\mu = (1,0,0,0)^T$ stellen die Felder $\mathcal{N}_v$ und $\mathcal{H}_v$ die großen und kleinen Komponenten eines Dirac-Spinors dar.

Die Idee ist es jetzt, die Felder $\mathcal{H}_v$ zu eliminieren und somit neue Lagrange-Dichten und Propagatoren zu erhalten, die die Masse des Nukleons in niedrigster Ordnung nicht mehr enthalten. Die Vorgehensweise ist analog zu der effektiven Theorie für schwere Quarkfelder (HQET, engl.: *Heavy Quark Effective Theorie*), in der man auf eine richtige Normierung der Quarkfelder achten muss [BKP 94]. Analog zu dieser Diskussion muss in der HBChPT auch die unterschiedliche Normierung der Felder Ψ und $\mathcal{N}_v$ berücksichtigt werden. Zur Elimination der Felder $\mathcal{H}_v$ setzen wir Gl. (3.4) in die Bewegungsgleichung ein, die aus der in Gl. (2.37) angegebenen relativistischen Lagrange-Dichte folgt, und multiplizieren mit $e^{i\mathring{m}_N v\cdot x}$:

$$\left[i\not{D} + \frac{\mathring{g}_A}{2}\not{u}\,\gamma_5\right]\mathcal{N}_v + \left[i\not{D} - 2\mathring{m}_N + \frac{\mathring{g}_A}{2}\not{u}\,\gamma_5\right]\mathcal{H}_v = 0. \tag{3.5}$$

Damit können wir die Felder $\mathcal{H}_v$ durch $\mathcal{N}_v$ ausdrücken,

$$\mathcal{H}_v = P_v^- \frac{1}{2\mathring{m}_N}\left(i\not{D} + \frac{\mathring{g}_A}{2}\not{u}\,\gamma_5\right)\mathcal{N}_v + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\mathring{m}_N^2}\right). \tag{3.6}$$

Neben der Entwicklung nach kleinen Impulsen und Quarkmassen tritt somit eine zusätzliche Entwicklung in $1/m$ auf, die die Abweichung zum extremen nichtrelativistischen Grenzwert berücksichtigt.

Mit Hilfe des Spinoperators,

$$S^\mu = \frac{i}{2}\gamma_5\sigma^{\mu\nu}v_\nu, \qquad S\cdot v = 0, \tag{3.7}$$

kann man Ausdrücke der Form $\bar{\mathcal{N}}_v\Gamma\mathcal{N}_v$ durch v^μ und S^μ ausdrücken, wobei Γ für eine beliebige Kombination von Gammamatrizen steht. Wir erhalten somit die Lagrange-Dichte der HBChPT in niedrigster Ordnung [JM 91]:

$$\hat{\mathcal{L}}_{\pi N}^{(1)} = \bar{\mathcal{N}}_v\left[iv\cdot D + g_A S\cdot u\right]\mathcal{N}_v. \tag{3.8}$$

Die Nukleonmasse taucht in Gl. (3.8) und damit auch im Nukleonpropagator nicht mehr auf. In höheren Ordnungen tritt sie allerdings in Potenzen von $1/\mathring{m}_N$ auf. Der Propagator lautet jetzt:

$$\frac{P_v^+}{v \cdot k + i\varepsilon}. \tag{3.9}$$

Damit ist das chirale Zählschema wiederhergestellt. Die Schleifenintegrale sind um einen Faktor $\mathcal{O}(q^2)$ unterdrückt, wie das im Mesonsektor der Fall ist. Die Formel aus Gl. (2.32) kann auf den Meson-Nukleonsektor verallgemeinert werden (s. z.B. [Eck 95]). Die chirale Dimension D eines Graphen mit N_L Schleifen, I_M inneren Mesonlinien, I_B inneren Nukleonlinien und N_n Vertices der Ordnung $\mathcal{O}(q^n)$ ist gegeben durch

$$D = 4N_L - 2I_M - I_B + \sum_n n\, N_n. \tag{3.10}$$

Unterscheidet man noch die Vertices durch die Anzahl n_B der Nukleonlinien,

$$N_n = \sum_{n_B} N_{n,n_B} = N_{n,0} + N_{n,2} = N_n^M + N_n^B,$$

so kann man Gl. (3.10) umschreiben:

$$D = 2 + 2N_L - \frac{E_B}{2} + \sum_{n,n_B} \left(n - 2 + \frac{n_B}{2}\right) N_{n,n_B}, \tag{3.11}$$

wobei E_B die Anzahl externer Nukleonlinien ist, d.h. $E_B = 0, 2$. Im Mesonsektor gilt $n_B = E_B = 0$ und man erhält direkt die bekannte Formel aus Gl. (2.32). Im Nukleonsektor ist $E_B = 2$ und wir erhalten

$$D = 1 + 2N_L + \sum_{n=1}^{\infty} 2(n-1)N_{2n}^M + \sum_{n=1}^{\infty}(n-1)N_n^B. \tag{3.12}$$

Damit können wir jetzt die chirale Dimension eines jeden Graphen eindeutig bestimmen. Da $D \geq 1 + 2N_L$ ist, tragen nur Baumgraphen zu den Ordnungen $\mathcal{O}(q)$ und $\mathcal{O}(q^2)$ bei.

Als Beispiel berechnen wir den Selbstenergiegraphen des Nukleons im chiralen Grenzfall mit Hilfe der HBChPT. Neben dem Nukleonpropagator ändert sich jetzt auch der Ausdruck für den πNN-Vertex. Für ein Pion mit Impuls q und Isospinindex a lautet der Ausdruck jetzt

$$\mp \frac{\mathring{g}_A}{F_0} S_v \cdot q\, \tau^a,$$

wobei das Vorzeichen sich wieder auf ein einlaufendes (–) bzw. auslaufendes (+) Pion bezieht. Mit $p^\mu = m_N v^\mu + r^\mu$ erhalten wir:

$$\Sigma(p) \quad = \quad -i\frac{\mathring{g}_A^2}{F_0^2} \int \frac{d^n k}{(2\pi)^n} S_v \cdot k\, \tau^a \frac{i}{k^2 + i\varepsilon} \left(\frac{iP_v^+}{v \cdot (r-k) + i\varepsilon}\right) S_v \cdot k\, \tau^a.$$

Das Ergebnis ist für eine nicht verschwindende Pionmasse z.B. in [Sch 02] (Kapitel 5.5.9) ausführlich diskutiert und berechnet worden. Im chiralen Grenzfall erhalten wir keinen Beitrag von Schleifengraphen zu $\mathring{m}_N$, d.h. das „power counting" ist jetzt erfüllt. Die Masse des Nukleons im chiralen Grenzfall, $\mathring{m}_N$, muss nicht renormiert werden.

Der große Nachteil der HBChPT ist, dass die Entwicklung nichtrelativistisch ist. Tatsächlich konvergiert die Störungsreihe in Teilen des Niederenergiebereiches nicht. Wir werden diesen Punkt am Beispiel des Dreiecksgraphen, der zur Berechnung des skalaren Formfaktors notwendig ist, im nächsten Kapitel verdeutlichen [BL 99]. Außerdem ist es nicht so leicht, in den Lagrange-Dichten der höheren Ordnungen die $1/\mathring{m}_N$ Korrekturen richtig zu berücksichtigen [EM 96]. Eine relativistische Beschreibung könnte auch neue Einblicke in die Impulsentwicklung geben [Tan 96]. Daher sucht man nach einer relativistischen Beschreibung des Baryonsektors der chiralen Störungstheorie, die das chirale Zählschema respektiert.

3.3 Relativistische Formulierung der ChPT im Nukleonsektor

Bei der Berechnung von Schleifenintegralen treten Divergenzen auf, die das Verwenden eines Renormierungsschemas notwendig machen. Die Idee ist dabei, die Divergenzen zuerst mit Hilfe der dimensionalen Regularisierung zu extrahieren und dann in die Niederenergiekonstanten der Lagrange-Dichte zu stecken. Etwas genauer formuliert separieren wir auch die Niederenergiekonstanten in einen divergenten und einen endlichen Anteil und wählen den divergenten Anteil gerade so, dass er sich mit den Unendlichkeiten der Integrale exakt weghebt. Die endlichen Anteile sind dann die renormierten Größen, die in Experimenten bestimmt werden können. Welche endlichen Terme die Niederenergiekonstanten noch zusätzlich absorbieren, hängt vom verwendeten Renormierungsschema ab, d.h. die Werte für die einzelnen Kopplungskonstanten hängen vom benutzten Renormierungsschema ab.

Etwas anders formuliert nützt man bei den verschiedenen Renormierungsschemen aus, dass man zu der effektiven Lagrange-Dichte der relativistischen chiralen Störungstheorie so genannte Gegenterme (engl.: *counter-terms*) dazuaddieren kann, die alle Symmetrien der ursprünglichen Lagrange-Dichte erfüllen und die analytisch in den Entwicklungsparametern sind, d.h. Polynome in den externen Impulsen. Da die Lagrange-Dichte der ChPT die allgemeinste, mit den Symmetrien der QCD verträgliche Lagrange-Dichte ist, sind diese Terme bereits in ihr enthalten [Wei 79]. Die Addition dieser Terme ändert also nur die effektiven Kopplungskonstanten, wie oben bereits erwähnt.

In der chiralen Störungstheorie für Mesonen wird die Konstante

$$R = -2/\epsilon + \gamma_E - 1 - \ln(4\pi)$$

mit $\epsilon = 4 - n$ absorbiert. Wir bezeichnen dieses Verfahren als modifiziertes Abzugsverfahren der ChPT und unterscheiden es durch das Symbol $\widetilde{MS}$ vom normalerweise im Standardmodell benutzten $\overline{MS}$-Schema (engl.: *modified minimal subtracted*). Wendet man dieses Renormierungsschema auf den Nukleonsektor an, so stellt man fest, dass das Zählschema verletzt wird. Die Lösung des Problems liegt in der Wahl eines anderen Renormierungsschemas, in dem die Terme abgezogen werden, die das Zählschema zerstören. Die grundlegende Idee geht dabei auf Ellis und Tang zurück [Tan 96, ET 98]. Das Problem der „unnatürlich“ großen Streulängen in der NN-Streuung konnte z.B. dadurch gelöst werden, dass man ein geeignetes Renormierungsschema verwendet hat. In diesem Zusammenhang ist auch erkannt worden, dass das in der chiralen Störungstheorie im Mesonsektor verwendete Renormierungsschema im Nukleonsektor nicht das beste ist [Lep 97, KSW 98].

Dabei ist vor allem zu beachten, dass einzelne Vertices über die chirale Symmetrie miteinander verknüpft sind. Wenn bei einem Vertex ein Term dazuaddiert wird, muss man genau diesen Term an einer anderen Stelle wieder abziehen. Deshalb kann man nicht willkürlich die störenden analytischen Terme abziehen, sondern muss darauf achten, dass die renormierten Ausdrücke die chirale Symmetrie immer noch erfüllen.

Es ist hier wichtig, zwischen einem Renormierungsschema und der verwendeten Methode zur Regularisierung zu unterscheiden. In der chiralen Störungstheorie ist die dimensionale Regularisierung zur Extraktion der Divergenzen der Integrale auch im Nukleonsektor am besten geeignet, da sie die chirale Symmetrie und die Eichsymmetrie erhält. Das verwendete Renormierungsschema muss die mit Hilfe der dimensionalen Regularisierung extrahierten Divergenzen subtrahieren. Die hier diskutierten Renormierungsschemen unterscheiden sich lediglich darin, welche nicht divergenten Terme noch zusätzlich abgezogen werden.

Im Folgenden werden wir zwei Methoden beschreiben, die auf die hier entwickelten Ideen zurückgreifen, nämlich die Infrarotregularisierung [BL 99] und das in dieser Arbeit verwendete Renormierungsschema, das auf Gegelia, Japarizde und Wang [GJW 99] zurückgeht.

3.3.1 Die Infrarotregularisierung

In der Infrarotregularisierung von Becher und Leutwyler [BL 99] werden die Graphen ganz normal mit Hilfe der relativistischen Lagrange-Dichte [GSS 88] berechnet. Alle Tensorintegrale werden durch skalare Integrale ausgedrückt. Die skalaren Integrale werden allerdings besonders behandelt, indem sie in einen infrarot divergenten und einen regulären Anteil aufgeteilt werden. Der reguläre Anteil enthält nur Terme, die in eine Taylor-Reihe nach Potenzen in den externen Impulsen und Quarkmassen entwickelt werden können, d.h. der reguläre Anteil enthält gerade die analytischen Terme. Es stellt sich heraus, dass gerade diese Terme das „power counting“ verletzen. Der infrarot divergente Anteil enthält die nichtanalytischen Terme, d.h. die Terme mit einer nicht trivialen Abhängigkeit von Impulsen und Quarkmassen, wie z.B. die chiralen Logarithmen oder gebrochene Potenzen in den Quarkmassen. Diese nichtanalytischen Terme werden von Integralen erzeugt, die im chiralen Grenzfall jeweils eine Singularität entwickeln. Die Singularität stammt bei diesen Integralen von der Integration über kleine Schleifenimpulse von der Ordnung $\mathcal{O}(q)$. Deshalb wird dieser Anteil als infrarot divergent bezeichnet.

Da die relativistische Lagrange-Dichte invariant unter chiralen Transformationen ist, ist auch die Kombination von regulären und infrarot divergenten Termen chiral invariant und zwar für beliebige Dimensionen d, da die dimensionale Regularisierung die Symmetrien der Lagrange-Dichte erhält. Die auf die chirale Symmetrie zurückgehenden Ward-Identitäten müssen deshalb in jeder Ordnung der chiralen Entwicklung erfüllt sein. In der chiralen Entwicklung nach externen Impulsen und Quarkmassen enthalten die nichtanalytischen Terme aber nur ungerade Potenzen und die analytischen Terme nur gerade Potenzen. Deshalb müssen reguläre und infrarot divergente Terme separat invariant unter der chiralen Gruppe sein. Der reguläre Anteil besteht also aus analytischen Termen und besitzt alle Symmetrien der relativistische Lagrange-Dichte. Deshalb kann dieser reguläre Anteil in den Niederenergiekonstanten absorbiert und mit einer geeigneten Wahl für die Subtraktion das chirale Zählschema wiederhergestellt werden.

Die Methode, um diese beiden Anteile eines Integrals voneinander zu trennen, besteht in einer speziellen Wahl der Feynmanparametrisierung. Wir betrachten zunächst nur solche Integrale, die mindestens einen Mesonpropagator und mindestens einen Nukleonpropagator enthalten. Allgemein lautet der Ausdruck für m Mesonpropagatoren und n Nukleonpropagatoren:

$$\begin{aligned} H_{mn} &= \frac{1}{i}\int \frac{d^dk}{(2\pi)^d}\frac{1}{a_1\ldots a_m}\frac{1}{b_1\ldots b_n}, \\ a_i &= M^2-(k-q_i)^2-i\varepsilon, \qquad i=1,\ldots,m, \\ b_j &= m_N^2-(P_j-k)^2-i\varepsilon, \qquad j=1,\ldots,n, \end{aligned} \tag{3.13}$$

wobei wir hier die Konvention aus [BL 99] übernommen haben. Insbesondere ist M die Pionmasse und m_N die Nukleonmasse. Die m Mesonpropagatoren können durch $m-1$ Feynmanparameter beschrieben werden:

$$\frac{1}{a_1\ldots a_m} = \left(-\frac{\partial}{\partial M^2}\right)^{(m-1)}\int_0^1 dx_1\ldots\int_0^1 dx_{m-1}\frac{X}{A}, \tag{3.14}$$

$$
\begin{aligned}
X &= \begin{cases} 1 & m = 2 \\ x_2 \cdot (x_3)^2 \ldots (x_{m-1})^{m-2} & m > 2 \end{cases}, \\
A &= A_m, \qquad A_{p+1} = x_p A_p + (1 - x_p) a_{p+1} \quad (p = 1, \ldots, m-1), \qquad A_1 = a_1.
\end{aligned}
$$

Analog dazu können die n Nukleonpropagatoren durch $n - 1$ Feynmanparameter beschrieben werden. Wir erhalten schließlich:

$$
H_{mn} = \left(-\frac{\partial}{\partial M^2}\right)^{(m-1)} \left(-\frac{\partial}{\partial m_N^2}\right)^{(n-1)} \int_0^1 dx\, dy\, XY \frac{1}{i} \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{1}{AB}, \tag{3.15}
$$

wobei wir die Integration über die $m+n-2$ Feynmanparameter durch $\int_0^1 dx\, dy$ abgekürzt haben. Wir benötigen noch einen weiteren Parameter, um die Mesonpropagatoren mit den Nukleonpropagatoren zu kombinieren. Bei der Integration über diesen Parameter nehmen wir jetzt die entscheidende Aufteilung vor:

$$
\frac{1}{AB} = \int_0^\infty dz \frac{1}{(A + (B - A)z)^2} - \int_1^\infty dz \frac{1}{(A + (B - A)z)^2} = \frac{1}{A(B - A)} - \frac{1}{B(B - A)}. \tag{3.16}
$$

Die infrarot divergenten Terme werden vom ersten Teil von Gl. (3.16) erzeugt und die regulären Terme vom zweiten Teil.

Die Integrale mit mindestens einem Nukleon- und einem Mesonpropagator werden in der Infrarotregularisierung wie gewohnt berechnet, mit der Ausnahme, dass die Integration über einen Feynmanparameter anstatt von 0 bis 1 von 0 bis ∞ geht. Dieser eine Feynmanparameter verbindet gerade die Meson- mit den Nukleonpropagatoren.

Wenn wir ausschließlich Mesonpropagatoren haben, so treten keine regulären Terme auf, die das „power counting“ zerstören könnten. Wegen der Mesonmasse in den Propagatoren, $(k^2 - M^2 + i\epsilon)^{-1}$, werden im chiralen Grenzfall die Singularitäten der Integrale von Schleifenimpulsen k erzeugt, die von der Ordnung $\mathcal{O}(q)$ sind. Bezeichnen wir den infrarot divergenten Teil mit I_{mn} und den regulären mit R_{mn}, so erhalten wir also:

$$
I_{m0} = H_{m0}, \qquad R_{m0} = 0.
$$

Lediglich die Ausdrücke für die skalaren Integrale mit mindestens einem Nukleonpropagator weichen von den gewohnten Ausdrücken [GSS 88] ab. Die Ergebnisse der chiralen Störungstheorie für Mesonen bleiben somit weiterhin gültig.

Wenn wir ausschließlich Nukleonpropagatoren haben, so dominiert der Integrationsbereich, bei dem die Schleifenimpulse von der Größenordnung der Nukleonmasse sind, d.h. $k = \mathcal{O}(q^0)$. Wir haben nur reguläre Terme, die durch die Niederenergiekonstanten absorbiert werden. Diese Integrale verschwinden in der Infrarotregularisierung:

$$
I_{0n} = 0, \qquad R_{0n} = H_{0n}.
$$

3.3.2 Alternatives Renormierungsschema

Wie oben diskutiert, sind die Terme, die das chirale Zählschema zerstören, regulär. In der Infrarotregularisierung zieht man durch eine geschickte Manipulation des Feynmanparameters alle regulären Terme ab. Damit ist sichergestellt, dass die chirale Symmetrie erfüllt ist, da die Ward-Identitäten für die regulären und infrarot divergenten Terme getrennt gelten. Es ist aber nicht unbedingt notwendig, alle regulären Terme abzuziehen. Es genügt nämlich, nur die Terme abzuziehen, die für die Verletzung des Zählschemas verantwortlich sind. Wenn wir aber nur einen Teil der regulären Terme abziehen, müssen wir aufpassen, dass die übriggebliebenen Ausdrücke die chiralen Ward-Identitäten noch erfüllen. Dies ist dann sichergestellt, wenn die Abzugsterme durch einen Gegenterm erzeugt werden, d.h. in den Niederenergiekonstanten absorbiert werden können. In den Rechnungen geben wir deshalb jeweils an, welche Niederenergiekonstanten die jeweiligen Abzugsterme absorbieren und wie die Änderung dieser Kopplungskonstanten aussieht.

Das hier vorgestellte und in dieser Arbeit verwendete Renormierungsschema [GJW 99] funktioniert folgendermaßen. Zuerst bestimmt man an Hand der Formel aus Gl. (3.11) die erwartete Ordnung des Diagramms. Dann bestimmt man den Beitrag zu diesem Diagramm mit Hilfe der relativistischen Lagrange-Dichte [GSS 88]. Die Divergenzen der Integrale, die daher stammen, dass der Schleifenimpuls unendlich groß werden kann (ultraviolette Divergenzen), werden mit Hilfe der dimensionalen Regularisierung abgezogen. Anschließend zieht man die regulären Terme ab, die von einer niedrigeren Ordnung sind als es das chirale Zählschema vorgibt. Zur Bestimmung der Abzugsterme ersetzt man zuerst alle Tensorintegrale durch skalare Integrale und entwickelt dann die Integrale nach der Pionmasse und nach kleinen Impulsen bis man die infrarote Divergenz trifft, d.h. bis man einen nichtanalytischen Term erhält. Die kleinen Impulse können entweder Mesonimpulse sein oder aber subtrahierte Nukleonimpulse, d.h. $\not{p} - \mathring{m}_N$ bzw. $p^2 - \mathring{m}_N^2$, wobei p für einen Nukleonimpuls steht. Wir behalten zur Bestimmung der Abzugsterme nur die Terme der Entwicklung, die regulär sind. Die Koeffizienten vor den Integralen werden in einer Taylorreihe entwickelt. Es werden also wieder alle infraroten Terme behalten, nur dass jetzt nur die entwickelten, regulären Terme abgezogen werden. Enthält ein Integral nur Mesonpropagatoren, so existiert in der chiralen Entwicklung kein regulärer Term, der abgezogen werden kann. Im Mesonsektor bestehen also keine Unterschiede zwischen der Infrarotregularisierung, unserem hier beschriebenen Renormierungsverfahren und dem modifizierten $\widetilde{MS}$-Schema. Enthält ein Integral ausschließlich Nukleonpropagatoren, so verschwindet dieses in der Infrarotregularisierung komplett, während es mit dem hier beschriebenen Renormierungsverfahren Beiträge höherer Ordnungen liefert.

Wir erwähnen noch einmal, dass die numerischen Werte der Kopplungskonstanten vom verwendeten Renormierungsschema abhängen. Da wir in dem hier vorgeschlagenen Renormierungsschema im Gegensatz zur Infrarotregularisierung die regulären Terme nicht komplett abziehen, erwarten wir unterschiedliche Werte in den Kopplungskonstanten höherer Ordnungen. Die physikalischen Ergebnisse dürfen natürlich nicht vom Renormierungsschema abhängen.

Der Vorteil des hier beschriebenen Renormierungsschemas im Vergleich zur Infrarotregularisierung ist, dass die Integrale nicht in zwei verschiedene Anteile aufgeteilt werden. Zur Berechnung der Integrale können wir in diesem Schema auf die bekannten Methoden zurückgreifen bzw. die bereits berechneten Ausdrücke übernehmen. Eine Erweiterung auf eine Zweischleifenrechnung ist somit einfach, während es in der Infrarotregularisierung noch keine Vorschrift gibt, die besagt, wie man die auftretenden Zweischleifenintegrale behandeln soll. Der wesentliche Unterschied dieser beiden Renormierungsschemen besteht in den benötigten Gegentermen: In der Infrarotregularisierung ziehen wir die regulären Terme komplett ab, d.h. wir subtrahieren eine unendliche Anzahl an Gegentermen, während in dem hier beschriebenen Renormierungsschema [GJW 99] nur die Terme bis zu einer bestimmten Ordnung abgezogen werden, d.h. es wird nur eine endliche Anzahl an Gegentermen benötigt.

In der relativistischen Formulierung der chiralen Störungstheorie für Baryonen tritt mit der Nukleonmasse im chiralen Grenzfall, $\mathring{m}_N$, in der Lagrange-Dichte der niedrigsten Ordnung eine neue Massenskala auf. Sie ist als natürliche Massenskala für die dimensionale Regularisierung wichtig. Da die infrarot divergenten Anteile der Integrale in der chiralen Entwicklung beliebig hohe Ordnungen enthalten, erfordert ihre Renormierung auch beliebig viele Gegenterme. Gäbe es im Nukleonsektor eine laufende Massenskala μ, wie das im Mesonsektor der Fall ist, so müsste man in unendlich vielen Termen die Skalenabhängigkeit durch die Kopplungskonstanten kompensieren, damit die Amplituden skalenunabhängig wären. Dies ist weder praktisch machbar noch notwendig, da im Nukleonsektor die Masse des Nukleons im chiralen Grenzfall die natürliche Massenskala ist und somit $\mu = \mathring{m}_N$ gesetzt werden kann.

Betrachten wir in diesem Zusammenhang das am Anfang des Kapitels erwähnte Beispiel der Masse des Nukleons im chiralen Grenzfall. Das nicht renormierte Ergebnis für den Selbstenergiegraphen im chiralen Grenzfall, das mit der relativistischen Lagrange-Dichte aus Gl. (2.37) berechnet worden ist, ist proportional zum Integral I_N (s. Gl. (3.2)) und enthält mit der Massenskala $\mu = \mathring{m}_N$ nur noch einen divergenten Term, der bereits im modifizierten $\widetilde{MS}$-Schema in der Nukleonmasse absorbiert wird. Die in der relativistischen Lagrange-Dichte auftauchende Grösse $\mathring{m}_N$ muss zwar immer noch renormiert werden, aber es tragen keine endlichen, regulären Terme bei. Die beiden relativistischen Renormierungsschemen liefern in diesem Fall also identische Ergebnisse.

Zur Demonstration der Methode betrachten wir uns das Integral,

$$J_0 = i \int \frac{d^n k}{(2\pi)^n} \frac{1}{(k^2 + i\epsilon)\left[(p-k)^2 - \mathring{m}_N^2 + i\epsilon\right]}, \tag{3.17}$$

welches gerade das Integral $I_{\pi N}(p^2)$ im chiralen Grenzfall ist. Die Integration über $d^n k$ liefert in unserem Zählschema einen Faktor 4, der eine Mesonpropagator einen Faktor -2 und der Nukleonpropagator -1. Wir erwarten also, dass das Integral mit der Ordnung $\mathcal{O}(q)$ startet. Mit Hilfe von hypergeometrischen Funktionen (s. Anhang B) kann man das Integral in n Dimensionen berechnen:

$$J_0 = -\frac{\mathring{m}_N^{n-4}}{(4\pi)^{n/2}} \frac{\Gamma\left(2-\frac{n}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n}{2}-1\right)}{\Gamma(n/2)}\, {}_2F_1\left(1, 2-\frac{n}{2}; \frac{n}{2}; \frac{p^2}{\mathring{m}_N^2}\right). \tag{3.18}$$

Benutzt man jetzt noch die im Anhang angegebene Gl. (B.5), so erhält man für das Integral J_0 den Ausdruck:

$$\begin{aligned} J_0 \;=\; & -\frac{\mathring{m}_N^{n-4}}{(4\pi)^{n/2}} \left[\frac{\Gamma\left(2-\frac{n}{2}\right)\Gamma(n-3)}{\Gamma(n-2)}\, {}_2F_1\left(1, 2-\frac{n}{2}; 4-n; 1-\frac{p^2}{\mathring{m}_N^2}\right)\right. \\ & \left. +\Gamma\left(\frac{n}{2}-1\right)\Gamma(3-n)\left(1-\frac{p^2}{\mathring{m}_N^2}\right)^{n-3} {}_2F_1\left(\frac{n}{2}-1, n-2; n-2; 1-\frac{p^2}{\mathring{m}_N^2}\right)\right]. \end{aligned} \tag{3.19}$$

Die hypergeometrischen Funktionen sind jetzt Potenzreihen in $1-(p^2/\mathring{m}_N^2)$. In der ersten Zeile von Gl. (3.19) stehen die regulären Terme, deren Koeffizienten im Grenzfall $n \to 4$ alle divergent sind. Bis auf den ersten Koeffizienten heben sie sich alle mit Termen aus der zweiten Zeile weg. In der zweiten Zeile treten neben den divergenten, regulären Termen auch endliche, aber nicht analytische Terme auf, die den infrarot divergenten Termen entsprechen:

$$\begin{aligned} J_0 \;=\; & -\frac{\mathring{m}_N^{n-4}}{(4\pi)^{n/2}} \left[\frac{\Gamma\left(2-\frac{n}{2}\right)}{n-3} + \left(1-\frac{p^2}{\mathring{m}_N^2}\right)\ln\left(1-\frac{p^2}{\mathring{m}_N^2}\right)\right. \\ & \left. + \left(1-\frac{p^2}{\mathring{m}_N^2}\right)^2 \ln\left(1-\frac{p^2}{\mathring{m}_N^2}\right) + \ldots\right]. \end{aligned} \tag{3.20}$$

Der erste Term in Gl. (3.20) kommt von der ersten Zeile in Gl. (3.19) und die restlichen Terme von der zweiten Zeile. Führt man noch die in der dimensionalen Regularisierung verwendete Konstante

R ein, so können wir den ersten Term folgendermaßen umschreiben:

$$-\frac{\mathring{m}_N^{n-4}}{(4\pi)^{n/2}}\frac{\Gamma\left(2-\frac{n}{2}\right)}{n-3} = \frac{\mathring{m}_N^{n-4}}{16\pi^2}\,(R-1)\,.$$

Das modifizierte $\widetilde{MS}$-Schema absorbiert lediglich die Konstante R in den Kopplungskonstanten. Das Integral verletzt das Zählschema, da es offensichtlich mit der Ordnung $\mathcal{O}(q^0)$ startet. In dem neuen Renormierungsschema wird der gesamte erste Term absorbiert:

$$J_0^R = -\frac{\mathring{m}_N^{n-4}}{(4\pi)^{n/2}}\left[\left(1-\frac{p^2}{\mathring{m}_N^2}\right)\ln\left(1-\frac{p^2}{\mathring{m}_N^2}\right)+\left(1-\frac{p^2}{\mathring{m}_N^2}\right)^2\ln\left(1-\frac{p^2}{\mathring{m}_N^2}\right)+\cdots\right]. \quad (3.21)$$

Den Subtraktionsterm kann man auch ohne explizite Berechnung des Integrals erhalten. Dazu ersetzt man den Integranden von J_0 durch die Reihe:

$$\sum_{l=0}^{\infty}\frac{(p^2-\mathring{m}_N^2)^l}{l!}\left[\left(\frac{1}{2p^2}p_\mu\frac{\partial}{\partial p_\mu}\right)^l\frac{1}{(k^2+i\varepsilon)(k^2-2k\cdot p+(p^2-\mathring{m}_N^2)+i\varepsilon)}\right]_{p^2=\mathring{m}_N^2}. \quad (3.22)$$

Vertauscht man anschließend Integration mit Summation, so erhält man:

$$\begin{aligned} J_0^{exp} &= i\int\frac{d^nk}{(2\pi)^n}\left.\frac{1}{(k^2+i\epsilon)\,[k^2-2p\cdot k+i\epsilon]}\right|_{p^2=\mathring{m}_N^2}+\mathcal{O}(p^2-\mathring{m}_N^2) \\ &= \frac{\mathring{m}_N^{n-4}}{16\pi^2}\,(R-1)+\mathcal{O}(p^2-\mathring{m}_N^2). \end{aligned}$$

Die Vertauschung von Integration und Summation ist genau das Verfahren, das von Ellis und Tang [ET 98] vorgeschlagen worden ist, um die „hard-momentum“-Beiträge loszuwerden. Im Unterschied zu [ET 98] behalten wir aber in den folgenden Rechnungen die kompletten Ausdrücke für die Integrale bei, d.h. wir entwickeln die Integrale nicht.

3.4 Nukleonmasse und Wellenfunktionsrenormierung

Als erste Anwendung der verschiedenen Methoden berechnen wir die physikalische Masse des Nukleons bis zur Ordnung $\mathcal{O}(q^4)$ und leiten daraus die Wellenfunktionsrenormierungskonstante des Nukleons ab. Zur Definition dieser beiden Größen betrachten wir den vollen Nukleonpropagator, der sich aus einer Summe von irreduziblen Selbstenergiediagrammen $\Sigma(p)$ zusammensetzt [CL 84]:

$$\begin{aligned} iS(p) &= \int d^4x\,\langle 0\left|T\left(\Psi_0(x)\bar{\Psi}_0(0)\right)\right|0\rangle e^{ip\cdot x} \\ &= \frac{i}{\not{p}-\mathring{m}_{N,0}+i\varepsilon}+\frac{i}{\not{p}-\mathring{m}_{N,0}+i\varepsilon}\left[-i\Sigma_0(p)\right]\frac{i}{\not{p}-\mathring{m}_{N,0}+i\varepsilon}+\ldots \\ &= \frac{i}{\not{p}-\mathring{m}_{N,0}+i\varepsilon}\left[\frac{1}{1+i\Sigma_0(p)\frac{i}{\not{p}-\mathring{m}_{N,0}}}\right] \\ &= \frac{i}{\not{p}-\mathring{m}_{N,0}-\Sigma_0(p)+i\varepsilon}=\frac{i}{\not{p}-\mathring{m}_N-\Sigma(p)+i\varepsilon} \end{aligned} \quad (3.23)$$

wobei der Index 0 bei Ψ_0, $\mathring{m}_{N,0}$ und Σ_0 die „nackten“, d.h. nicht renormierten Größen kennzeichnet und $\Sigma(p)$ die Selbstenergie des Nukleons ausgedrückt durch $\mathring{m}_N$ und nicht renormierte Kopplungskonstanten ist.

Die physikalische Masse des Nukleons ist als Pol des Nukleonpropagators definiert, d.h.

$$m_N = \mathring{m}_N + \Sigma(\not p = m_N). \tag{3.24}$$

Der führende Beitrag zur Selbstenergie $\Sigma(p)$ kommt von $\mathcal{L}_{\pi N}^{(2)}$, so dass die Nukleonmasse bis zur Ordnung $\mathcal{O}(q^2)$ gegeben ist durch

$$m_{N,2} = \mathring{m}_N - 4\, c_1 m_{\pi,0}^2, \tag{3.25}$$

wobei $m_{\pi,0}^2 = 2B_0\hat{m}$ ist. Bis zur Ordnung $\mathcal{O}(q^4)$ muss man neben dem Baumgraphenbeitrag von $\mathcal{L}_{\pi N}^{(4)}$ noch die in Abbildung 3.2 gezeigten Schleifenintegrale berücksichtigen,

$$\Sigma(p) = -4\, c_1 m_{\pi,0}^2 + \Sigma_{\mathrm{a}}(p) + \Sigma_{\mathrm{b}}(p) + \Sigma_{\mathrm{c}}(p) - 2\,(8\, e_{38} + e_{115} + e_{116})\; m_\pi^4 + \mathcal{O}(q^5). \tag{3.26}$$

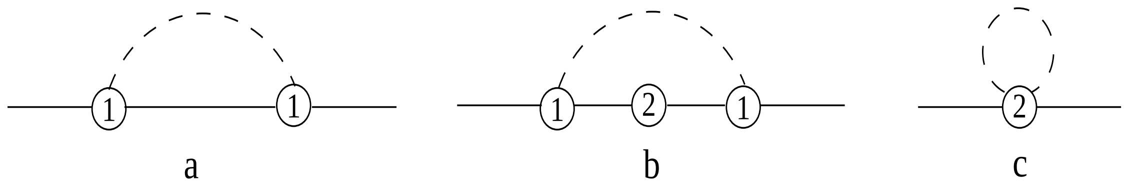

Abbildung 3.2: Einschleifengraphen, die zur Selbstenergie des Nukleons beitragen. Die Zahlen 1 und 2 in den Kreisen stehen für die beiden Lagrange-Dichte $\mathcal{L}_1^{\pi N}$ und $\mathcal{L}_2^{\pi N}$, von denen die Vertices abgeleitet worden sind.

Mit den Feynmanregeln [BD 64, Ryd 85] erhält man für $\Sigma_{\mathrm{a}}(p)$, $\Sigma_{\mathrm{b}}(p)$ und $\Sigma_{\mathrm{c}}(p)$,

$$\begin{aligned}
\Sigma_{\mathrm{a}}(p) &= i\frac{3\mathring{g}_A^2}{4F_0^2}\int \frac{d^nk}{(2\pi)^n}\not k\,\gamma_5\frac{\mathring{m}_N^{4-n}}{(k^2 - m_\pi^2 + i\varepsilon)\,(\not p - \not k - \mathring{m}_N + i\varepsilon)}\not k\,\gamma_5 \\
&= -\frac{3\mathring{g}_A^2}{4F_0^2}\Big\{(\not p + \mathring{m}_N)I_N + m_\pi^2(\not p + \mathring{m}_N)I_{\pi N}(p^2) \\
&\quad -\frac{p^2 - \mathring{m}_N^2}{2p^2}\not p\,\left[I_N - I_\pi + (p^2 - \mathring{m}_N^2 + m_\pi^2)I_{\pi N}(p^2)\right]\Big\}, \qquad (3.27)\\
\Sigma_{\mathrm{b}}(p) &= \frac{3\mathring{g}_A^2 m_\pi^2}{F_0^2}c_1\Big[I_N + m_\pi^2 I_{\pi N} + 2\mathring{m}_N^2 m_\pi^2\left(1 + \frac{\not p}{\mathring{m}_N}\right)I_{\pi NN}(0) + \frac{\mathring{m}_N^2}{8\pi^2}\left(1 + \frac{\not p}{\mathring{m}_N}\right) \\
&\quad + \frac{\mathring{m}_N\not p}{p^2}\Big(I_N - I_\pi + \big(2(p^2 - \mathring{m}_N^2) + m_\pi^2\big)\, I_{\pi N}(p^2) - \frac{p^2 - \mathring{m}_N^2}{16\pi^2} \\
&\quad -(p^2 - \mathring{m}_N^2)(p^2 - \mathring{m}_N^2 + m_\pi^2)I_{\pi NN}(0)\Big)\Big], \qquad (3.28)\\
\Sigma_{\mathrm{c}}(p) &= \frac{3m_\pi^2}{F_0^2}\left(2c_1 - \frac{p^2}{\mathring{m}_N^2 n}c_2 - c_3\right)I_\pi, \qquad (3.29)\\
&\overset{n\to 4}{=} \frac{3m_\pi^2}{F_0^2}\left[\left(2c_1 - \frac{p^2}{4\mathring{m}_N^2}c_2 - c_3\right)I_\pi + \frac{m_\pi^2}{128\pi^2}c_2\right], \qquad (3.30)
\end{aligned}$$

wobei die Integrale I_N, I_π, $I_{\pi N}(p^2)$ und $I_{\pi NN}(0)$ in den Gln. (C.6), (C.5), (C.26) und (C.46) aus Anhang C gegeben sind. Das Diagramm 3.2b muss nicht mehr direkt berechnen werden, da es nur die Masse des Nukleonpropagators in Diagramm 3.2a von $\mathring{m}_N$ nach $m_{N,2}$ verschiebt. Deshalb kann man die Beiträge zu $\Sigma_{\rm b}$ durch die Ersetzung $\mathring{m} \to m_{N,2}$ in $\Sigma_{\rm a}$ miteinbeziehen. Der eigentliche Ausdruck für $\Sigma_{\rm b}$ ist dann durch die Terme gegeben, die linear in c_1 sind. Dabei muss man allerdings beachten, dass auch in den Integralen $\mathring{m}_N$ durch $m_{N,2}$ ersetzt werden muss. Insbesondere bekommt man auch einen endlichen Beitrag aus der Singularität R:

$$\frac{(\mathring{m}_N - 4c_1 m_\pi^2)^{n-4}}{n-4} = \frac{\mathring{m}_N^{n-4}}{n-4} - \frac{4m_\pi^2}{\mathring{m}_N} c_1 + \mathcal{O}(m_\pi^4).$$

In der Infrarotregularisierung von Becher und Leutwyler ersetzen wir jetzt die Integrale durch ihre infrarot divergenten Anteile. Insbesondere verschwindet jetzt das Integral I_N, da es aus nur einem Nukleonpropagator besteht und deshalb keine infrarot divergenten Anteile besitzt. Das Integral I_π bleibt unverändert, da es aus nur einem Mesonpropagator besteht und deshalb keine regulären Terme enthält. Nur das Integral $I_{\pi N}(p^2)$ muss somit neu berechnet werden. Eine ausführliche Beschreibung der Berechnung dieses Integrals ist in [BL 99] angegeben (s. Gl. (33) in [BL 99] für das renormierte Ergebnis).

In unserem Renormierungsschema subtrahieren wir zunächst alle divergenten Terme, die proportional zu R sind. Diese Terme werden bei der Berechnung der Masse des Nukleons in den Konstanten $\mathring{m}_{N,0}$, c_1, c_3 und einer Kombination der Konstanten e_{38}, e_{115} und e_{116} absorbiert:

$$\begin{aligned} \mathring{m}_{N,0} &= \mathring{m}_N + \frac{3\mathring{g}_A^2}{32\pi^2 F_0^2} m_N^3 R, \quad c_1 = c_1^r - \frac{3g_A^2}{128\pi^2 F^2} m_N R, \quad c_3 = c_3^r - \frac{3g_A^2}{64\pi^2 F^2} m_N R, \\ 8\, e_{38} + e_{115} + e_{116} &= 8e_{38}^r + e_{115}^r + e_{116}^r + \frac{3}{32\pi^2 F^2}\left(2c_1 - \frac{1}{4}c_2 - c_3\right) R. \end{aligned} \tag{3.31}$$

Zur Bestimmung der zusätzlichen endlichen Abzugsterme von $\Sigma_{\rm a}$, die vom modifizierten $\widetilde{MS}$-Schema abweichen, entwickelt man die analytischen Terme nach $\not{p} - \mathring{m}_N$ (bzw. $p^2 - \mathring{m}_N^2$) und m_π^2 bis einschließlich der Ordnung $\mathcal{O}(q^2)$, da das Diagramm nach dem chiralen Zählschema (Gl. (3.11)) von der Ordnung $\mathcal{O}(q^3)$ sein soll. Das Integral I_π besitzt ausschließlich nichtanalytische Terme in den Entwicklungsparametern und darf deshalb nicht abgezogen werden. Entwickelt man das Integral $I_{\pi N}(p^2)$ nach kleinen Impulsen und Quarkmassen, so ist der führende Term von der Ordnung $\mathcal{O}(q^0)$ und analytisch. Der Term der nächsthöheren Ordnung $\mathcal{O}(q)$ ist proportional zur Masse des Pions und damit nicht analytisch, $m_\pi = \sqrt{2B_0\hat{m}}$:

$$I_{\pi N}(p^2) = \frac{R}{16\pi^2} - \frac{1}{16\pi^2} + \frac{m_\pi}{16\pi \mathring{m}_N} + \mathcal{O}(q^2). \tag{3.32}$$

Die ersten beiden Terme erhält man auch, wenn man die führende Ordnung des Integranden des Integrals $I_{\pi N}(p^2)$ in einer Entwicklung nach der Pionmasse und $p^2 - \mathring{m}_N^2$ betrachtet:

$$J_{\pi N} = i \int \frac{d^n k}{(2\pi)^n} \mathring{m}_N^{4-n} \left. \frac{1}{(k^2 + i\epsilon)\,(k^2 - 2p\cdot k + i\epsilon)} \right|_{p^2 = \mathring{m}_N^2} = \frac{R}{16\pi^2} - \frac{1}{16\pi^2}. \tag{3.33}$$

Der Nukleonimpuls $\not{p}$ setzt sich aus einem Term der Ordnung $\mathcal{O}(q^0)$ und einem der Ordnung $\mathcal{O}(q^1)$ zusammen:

$$\not{p} = \mathring{m}_N + (\not{p} - \mathring{m}_N).$$

Wir ziehen nur den Term proportional zu $\mathring{m}_N$ ab. Die zusätzlichen, endlichen Abzugsterme lauten damit:

$$\Sigma_{\rm a}^{sub}(p) = -\frac{3\mathring{g}_A^2}{4F_0^2}\left[2\mathring{m}_N m_\pi^2 \left(-\frac{1}{16\pi^2}\right) - \frac{(p^2 - \mathring{m}_N^2)^2}{2\mathring{m}_N}\left(-\frac{1}{16\pi^2}\right)\right]. \tag{3.34}$$

Der erste Abzugsterm in Gl. (3.34) wird in der Niederenergiekonstanten c_1 absorbiert:

$$c_1^{(3)} = c_1^R + \frac{3g_A^2 \mathring{m}_N}{128\pi^2 F^2}. \tag{3.35}$$

Hierbei kennzeichnet der Index R die renormierten Größen nach dem hier beschriebenen Renormierungsverfahren und der Index 3 steht dafür, dass Gl. (3.35) nur in einer $\mathcal{O}(q^3)$-Rechnung gültig ist. Die Konstante $c_1^{(3)}$ ist also c_1^r aus Gl. (3.31) bis zur Ordnung $\mathcal{O}(q^3)$. Der zweite Abzugsterm, der proportional zu $(p^2 - \mathring{m}_N)^2$ ist, wird durch eine Kombination von Gegentermen erzeugt, die bei Anwendung der Bewegungsgleichung bis zur Ordnung $\mathcal{O}(q^4)$, die wir hier nur betrachten, zu keiner physikalischen Observablen beiträgt (s. z.B. [SF 95, EM 96, Sch 02]).

Für Σ_b geht man analog vor. Das Diagramm 3.2 ist nach unserem Zählschema von der Ordnung $\mathcal{O}(q^4)$, so dass wir jetzt die regulären Terme bis einschließlich der Ordnung $\mathcal{O}(q^3)$ abziehen. Damit erhalten wir die folgenden Abzugsterme:

$$\Sigma_\mathrm{b}^\mathrm{sub}(p) = -\frac{3\mathring{g}_A^2 m_\pi^2}{F^2} c_1^r \left(2\mathring{m}_N^2 \left(1 + \frac{\not{p}}{\mathring{m}_N}\right) - 3\left(p^2 - \mathring{m}_N^2\right)\right)\left(-\frac{1}{16\pi^2}\right). \tag{3.36}$$

Der einzige Abzugsterm, der nach Anwendung der Bewegungsgleichung zu physikalischen Observablen beiträgt, lautet:

$$\frac{3c_1^r g_A^2 m_\pi^2 \mathring{m}_N^2}{4\pi^2 F^2}.$$

Er wird in der Niederenergiekonstanten c_1 absorbiert,

$$c_1^{(4)} = c_1^{(3)} + \frac{3g_A^2 m_N^2}{16\pi^2 F^2} c_1^R, \tag{3.37}$$

wobei Gl. (3.37) jetzt für eine Rechnung bis zur Ordnung $\mathcal{O}(q^4)$ gültig ist. Die Konstante $c_1^{(4)}$ erzeugt also alle notwendigen Abzugsterme, die bis zur Ordnung $\mathcal{O}(q^4)$ notwendig sind. Die restlichen Abzugsterme werden von Gegentermen erzeugt, die zu keiner Observablen beitragen.

Da das Diagramm 3.2c ausschließlich innere Mesonlinien enthält, treten in Σ_c keine regulären Terme auf, die abgezogen werden müssen.

Die physikalische Masse ist dann durch Gl. (3.24) gegeben. Ausgedrückt durch renormierte Größen lautet das Ergebnis,

$$\begin{aligned} m_N \;=\;& \mathring{m}_N - 4c_1^R m_\pi^2 - \frac{3g_A^2 m_\pi^3}{32\pi F^2} + \frac{m_\pi^4}{4\pi^2 F^2}\left(-\frac{3g_A^2}{8\mathring{m}_N} + 3\,c_1^R - \frac{3}{8}c_2^R - \frac{3}{2}c_3^R\right)\ln\left(\frac{m_\pi}{\mathring{m}_N}\right) \\ &+ m_\pi^4\left(-2\left(8e_{38}^R + e_{115}^R + e_{116}^R\right) + \frac{3g_A^2}{32\pi^2 F^2 \mathring{m}_N} + \frac{3g_A^2 c_1^R}{8\pi^2 F^2} + \frac{3c_2^R}{128\pi^2 F^2}\right) + \mathcal{O}(q^5). \end{aligned} \tag{3.38}$$

Der Unterschied zwischen $\mathring{g}_A$ und g_A bzw. F und F_0 ist von der Ordnung $\mathcal{O}(q^2)$ und spielt daher in diesen Rechnungen keine Rolle. Wir haben deshalb die Größen im chiralen Grenzfall durch die physikalischen Größen ausgedrückt. Bei der Ableitung von Gl. (3.38) muss man beachten, dass der Unterschied zwischen $\mathring{m}_N$ und $m_{N,2}$ von der Ordnung $\mathcal{O}(q^2)$ ist (s. Gl. (3.25)) und deshalb einen nicht vernachlässigbaren Beitrag liefert.
Das Ergebnis in der Infrarotregularisierung ist bereits in [BL 99] berechnet worden:

$$\begin{aligned} m_N &= \mathring{m}_N - 4c_1^\mathrm{IR} m_\pi^2 - \frac{3g_A^2 m_\pi^3}{32\pi F^2} + k_1 m_\pi^4 \ln\left(\frac{m_\pi}{\mathring{m}_N}\right) + k_2 m_\pi^4 + \mathcal{O}(q^5), \qquad (3.39) \\ k_1 &= -\frac{3}{32\pi^2 F^2 \mathring{m}_N}\left(g_A^2 - 8c_1^\mathrm{IR}\mathring{m}_N + c_2^\mathrm{IR}\mathring{m}_N + 4c_3^\mathrm{IR}\mathring{m}_N\right), \\ k_2 &= -2\left(8e_{38}^\mathrm{IR} + e_{115}^\mathrm{IR} + e_{116}^\mathrm{IR}\right) - \frac{3}{128\pi^2 F^2 \mathring{m}_N}\left(2g_A^2 - c_2^\mathrm{IR}\mathring{m}_N\right), \end{aligned}$$

wobei die Konstanten mit IR für Infrarotregularisierung gekennzeichnet sind, um deutlich zu machen, dass diese numerischen Werte sich von unseren Werten unterscheiden. In diesem Schema muss nur noch die Konstante $\bar{e}_1^{\mathrm{BL}}$ renormiert werden, die eine Kombination der Konstanten e_{38}^{IR}, e_{115}^{IR} und e_{116}^{IR} ist (s. Gl. 2.42).

$$e_1^{\mathrm{BL}} = \bar{e}_1^{\mathrm{BL}} + \frac{3}{64\pi^2 F^2}\frac{R}{\mathring{m}_N}\left(g_A^2 - 8c_1\mathring{m}_N + c_2\mathring{m}_N + 4c_3\mathring{m}_N\right). \tag{3.40}$$

Vergleicht man Gl. (3.38) mit Gl. (3.39), so unterscheiden sich die beiden Ergebnisse formal. Der Unterschied taucht erst in der Ordnung $\mathcal{O}(q^4)$ auf und ist ein analytischer Term $\propto m_\pi^4 \propto \hat{m}^2$. Das ist aber nicht verwunderlich, da zwei verschiedene Renormierungsschemen benutzt worden sind. Der Unterschied zwischen den beiden Ergebnissen kann durch einen Gegenterm absorbiert werden. Die nichtanalytischen Terme stimmen selbstverständlich überein.

Zur Berechnung der Wellenfunktionsrenormierungskonstante des Nukleons drücken wir die Selbstenergie durch die Funktionen f und g aus (s. Kapitel 5.4.1 in [Sch 02]):

$$\Sigma(p) = -f(p^2)\not{p} + g(p^2)\mathring{m}_N, \tag{3.41}$$

Mit Hilfe von Gl. (3.24) erhalten wir dann für die Masse des Nukleons den folgenden Ausdruck:

$$m_N = \mathring{m}_N \frac{1 + g(m_N^2)}{1 + f(m_N^2)}. \tag{3.42}$$

In der Nähe des Pols können wir den Nukleonpropagator aus Gl. (3.23) folgendermaßen umschreiben:

$$\begin{aligned}
S(p) &= \frac{1}{\not{p}\,(1 + f(p^2)) - \mathring{m}_N(1 + g(p^2))} \\
&= \Big\{\not{p}\,\left[1 + f(m_N^2) + (\not{p} - m_N)(\not{p} + m_N)f'(m_N^2) + \ldots\right] \\
&\quad -\mathring{m}_N\left[1 + g(m_N^2) + (\not{p} - m_N)(\not{p} + m_N)g'(m_N^2) + \ldots\right]\Big\}^{-1} \\
&\to \frac{1}{(\not{p} - m_N)\left[1 + f(m_N^2) + 2m_N^2 f'(m_N^2) - 2\mathring{m}_N m_N g'(m_N^2)\right]} \\
&= Z_N \frac{1}{\not{p} - m_N + i\epsilon}.
\end{aligned}$$

Dabei haben wir benutzt, dass der durch $S_R(p) = Z_N^{-1} S(p)$ definierte renormierte Propagator in der Nähe des Pols die Form des freien Propagators hat, allerdings mit der Nukleonmasse aus Gl. (3.38). Für die Wellenfunktionsrenormierungskonstante des Nukleons erhalten wir dann:

$$Z_N = \frac{1}{1 + f(m_N^2) + 2m_N^2 f'(m_N^2) - 2\mathring{m}_N m_N g'(m_N^2)} = \left\{1 - \frac{\partial}{\partial \not{p}}\Sigma(p)\Big|_{\not{p}=m_N}\right\}^{-1}. \tag{3.43}$$

In einer $\mathcal{O}(q^4)$ Rechnung kann man Z_N nur bis zur Ordnung $\mathcal{O}(q^3)$ bestimmen, da wegen $\not{p}$ in Gl. (3.41) die Funktion $f(m_N^2)$ eine Ordnung niedriger als $\Sigma(p)$ ist. Ist ein Term in der Selbstenergie z.B. proportional zu $m_\pi^2(\not{p} - \mathring{m}_N)$ und von der Ordnung $\mathcal{O}(q^3)$, so liefert er einen Beitrag zu Z_N, der proportional zu m_π^2 und von der Ordnung $\mathcal{O}(q^2)$ ist. Als Zwischenergebnis geben wir die folgenden Terme an:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial \not{p}}\Sigma_{\mathrm{a}}^{\mathrm{R}}\Big|_{\not{p}=m_N} &= -\frac{3g_A^2}{4F^2}\left[\frac{m_\pi^2}{4\pi^2} + \frac{3m_\pi^2}{8\pi^2}\ln\left(\frac{m_\pi}{m_N}\right) - \frac{m_\pi^3}{16\pi m_N}(3 - 16c_1 m_N)\right] + \mathcal{O}(m_\pi^4), \\
\frac{\partial}{\partial \not{p}}\Sigma_{\mathrm{b}}^{\mathrm{R}}\Big|_{\not{p}=m_N} &= \frac{3g_A^2 m_\pi^3}{4\pi F^2}c_1 + \mathcal{O}(m_\pi^4),
\end{aligned}$$

wobei der Index R wieder bedeutet, dass sowohl die Terme proportional zu R als auch die regulären Terme bereits abgezogen worden sind. Auch hier muss man beachten, dass der Unterschied zwischen $\mathring{m}_N$ und m_N von der Ordnung $\mathcal{O}(q^2)$ ist. Damit erhalten wir für die zum $\widetilde{MS}$-subtrahierten Propagator gehörende Wellenfunktionsrenormierungskonstante:

$$Z_N^{\mathrm{R}} = 1 - \frac{9g_A^2 m_\pi^2}{32\pi^2 F^2}\left(\frac{2}{3} + \ln\left(\frac{m_\pi}{m_N}\right)\right) + \frac{9g_A^2 m_\pi^3}{64\pi F^2 m_N} + \mathcal{O}(m_\pi^4). \tag{3.44}$$

Wir vergleichen wieder mit dem Ergebnis der Infrarotregularisierung [BL 99]:

$$Z_N^{\mathrm{IR}} = 1 - \frac{9g_A^2 m_\pi^2}{32\pi^2 F^2}\left(\frac{1}{3} + \ln\left(\frac{m_\pi}{m_N}\right)\right) + \frac{9g_A^2 m_\pi^3}{64\pi F^2 m_N} + \mathcal{O}(m_\pi^4). \tag{3.45}$$

Auch hier ist der Unterschied ein analytischer Term $\propto m_\pi^2$. Das Ergebnis aus Gl. (3.45) stimmt mit dem aus der HBχPT überein [KM 99]. Die Wellenfunktionsrenormierungskonstanten sind keine Observablen und können deshalb in verschiedenen Renormierungsschemen unterschiedliche Werte annehmen [Fea+ 97]. In den nächsten Kapiteln berechnen wir die einzelnen Formfaktoren des Nukleons. Dabei verwenden wir das hier vorgestellte Renormierungsschema und multiplizieren mit Z_N^R.

Kapitel 4

Der skalare Formfaktor des Nukleons

4.1 Definition des skalaren Formfaktors

Der skalare Formfaktor des Nukleons, $\sigma(t)$, ist im Grenzfall perfekter Isospinsymmetrie, $m_u = m_d = \hat{m}$, definiert durch das Matrixelement

$$\langle N(p_f) \left| \hat{m}(\bar{u}u + \bar{d}d) \right| N(p_i) \rangle = \bar{u}(p_f)u(p_i)\,\sigma(t), \qquad t = (p_f - p_i)^2. \tag{4.1}$$

Er ist ein Maß für die Verteilung der skalaren Dichte im Nukleon und hängt nur von einer Variablen ab, nämlich $t = q^2$ mit $q^\mu = p_f^\mu - p_i^\mu$. Die anderen Skalare, die gebildet werden können, sind über die Impulserhaltung und die Massenschalenbedingung mit t verknüpft:

$$p_i \cdot q = -\frac{t}{2}, \quad p_i \cdot p_f = m_N^2 + p_i \cdot q = m_N^2 - \frac{t}{2}, \quad p_f \cdot q = p_i \cdot q + t = \frac{t}{2},$$

wobei wir noch von $p_f^2 = m_N^2 = (p_i + q)^2 = m_N^2 + 2p_i \cdot q + t$ Gebrauch gemacht haben. Unter einer Paritätstransformation verhält sich $\sigma(t)$ wie ein Skalar, da sich die linke Seite von Gl. (4.1) wie ein Skalar verhält,

$$\hat{m}\left(\bar{u}u + \bar{d}d\right) = \hat{m}\bar{q}q \to \hat{m}\bar{q}\left(e^{-i\phi}\gamma_0\right)\left(\gamma_0 e^{i\phi}\right)q = \hat{m}\bar{q}q.$$

Mit Hilfe von Gl. (2.5) unter Anwesenheit eines externen, skalaren Feldes,

$$i\mathcal{L}_{\text{ext.}} = -i\bar{q}sq = -i\bar{q}\hat{m}1_{2\times 2}q = -i\hat{m}\left(\bar{u}u + \bar{d}d\right),$$

erhält man die Regel, dass die Amplitude für die Kopplung einer skalaren Quelle an ein Nukleon mit i multipliziert den skalaren Formfaktor ergibt:

$$\bar{u}(p_f)u(p_i)\,\sigma(t) = i\mathcal{M}_{\text{sNN}}. \tag{4.2}$$

Für eine $\mathcal{O}(q^4)$-Rechnung des skalaren Formfaktors werden neben den Baumgraphen die in Abbildung 4.1 gezeigten Schleifendiagramme benötigt.

4.2 Ergebnisse bis zur Ordnung $\mathcal{O}(q^3)$

Die Lagrange-Dichte $\mathcal{L}_{\pi N}^{(1)}$ enthält keine skalaren Quellen. Der Beitrag der führenden Ordnung kommt somit von dem Baumgraphen, der aus der Lagrange-Dichte $\mathcal{L}_{\pi N}^{(2)}$ abgeleitet werden kann. Dies entspricht auch unseren Erwartungen, da auf Grund der Quarkmasse $\hat{m}$ in der Definition des

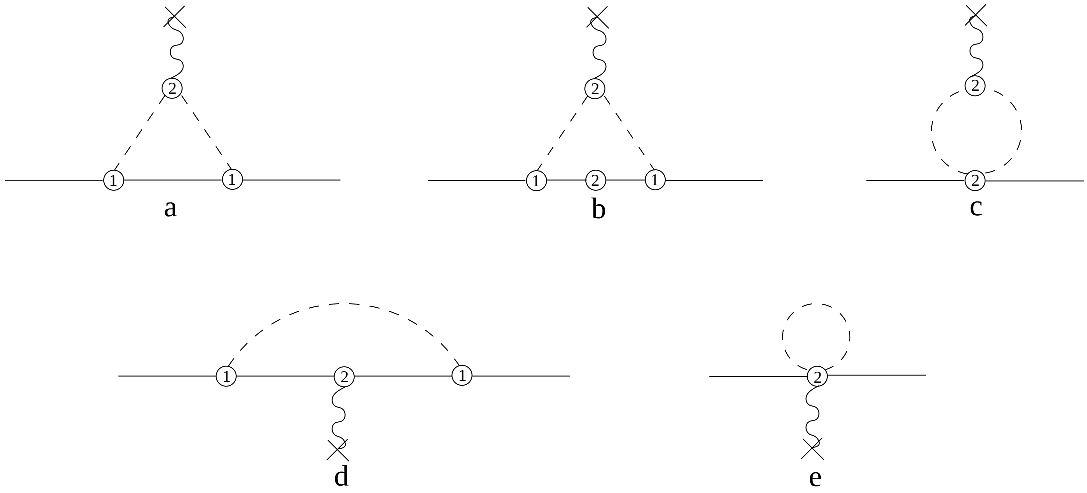

Abbildung 4.1: Schleifendiagramme, die zum skalaren Formfaktor bis zur Ordnung $\mathcal{O}(q^4)$ beitragen. Die Kopplung der skalaren Dichte an die Pionen bzw. Nukleonen ist mit einer geschlängelten Linie mit einem Kreuz gekennzeichnet. Die Zahlen in den Kreisen stehen für die Ordnung der Lagrange-Dichte, von der diese Vertices abgeleitet worden sind.

skalaren Formfaktors (s. Gl. (4.1)), die in unserem chiralen Zählschema als Ordnung $\mathcal{O}(q^2)$ gezählt wird, die Entwicklung mit der Ordnung $\mathcal{O}(q^2)$ starten sollte. Nach Anwendung der Feynmanregeln erhalten wir für den Beitrag der führenden Ordnung:

$$\sigma_{\text{tree}} = -4c_1 m_\pi^2. \tag{4.3}$$

Von den in Abbildung 4.1 gezeigten Schleifendiagrammen trägt in der Ordnung $\mathcal{O}(q^3)$ lediglich der Dreiecksgraph aus Abbildung 4.1a bei, für den wir den folgenden Beitrag erhalten:

$$\begin{aligned}
\sigma_{\text{a}} &= -\frac{3\mathring{g}_A^2 m_\pi^2}{4F_0^2}\Big[-\frac{1}{2}\not{q}\, I_{\pi\pi}(t) + (\not{p} + \not{q} + \mathring{m}_N)\big(m_\pi^2 I_{\pi\pi N}(0,q,-p) + I_{\pi N}(q,-p)\big) \\
&\quad + \big(\mathring{m}_N^2 - p^2 - \not{q}\,(\not{p} - \mathring{m}_N)\big)\,\gamma_\mu I^\mu_{\pi\pi N}(0,q,-p)\Big] \\
&= \frac{3g_A^2 m_\pi^2 m_N}{2F^2(4m_N^2 - t)}\left[tI_{\pi\pi}(t) - 4m_N^2 I_{\pi N}(m_N^2) + 2m_N^2(t - 2m_\pi^2)I_{\pi\pi N}(t)\right] && (4.4) \\
&= -\frac{3g_A^2 m_\pi^2 m_N}{32\pi^2 F^2}\left[R - 1 + \pi\frac{m_\pi}{m_N} - \pi\frac{t - 2m_\pi^2}{4m_N m_\pi}\right] + \mathcal{O}(q^4). && (4.5)
\end{aligned}$$

Die Notation für die auftretenden Integrale ist in Anhang C angegeben. Die erste Zeile ist für beliebige Nukleonlinien gültig, während die zweite und dritte Zeile nur für Nukleonen auf der Massenschale gültig ist. Außerdem haben wir in diesen Zeilen die Größen im chiralen Grenzfall wieder durch die physikalischen Größen ersetzt. Man beachte, dass auch der Unterschied zwischen $\mathring{m}_N$ und m_N bis zu der betrachteten Ordnung keine Rolle spielt. In der dritten Zeile haben wir für die anschließende Diskussion die Integrale nach m_π und t entwickelt.

Wir erkennen, dass in dem Schleifendiagramm durch die Konstante R Unendlichkeiten zusammen mit einem Term der Ordnung $\mathcal{O}(q^2)$ auftreten. Diese Terme zerstören das chirale Zählschema, nach welchem das Schleifendiagramm erst mit der Ordnung $\mathcal{O}(q^3)$ starten sollte (s. Gl. (3.11)). Sie müssen daher, ähnlich wie bei der Berechnung der Masse des Nukleons, zur Renormierung der Konstante c_1 verwendet werden. Um das chirale Zählschema wiederherzustellen, verwenden wir die beiden in Kapitel 3 beschriebenen, relativistischen Renormierungsschemen.

In dem auf Gegelia, Japarizde und Wang [GJW 99] zurückgehenden Renormierungsschema zieht man erst die Terme $\propto R$ ab und bestimmt dann die zusätzlichen Abzugsterme, indem man die Koeffizienten und Integrale nach m_π und t entwickelt. Es werden die analytischen Terme abgezogen, die kleiner als die Ordnung sind, die das chirale Zählschema vorgibt. Wir betrachten jetzt die einzelnen Terme von Gl. (4.4). Die Terme, die die Integrale $I_{\pi\pi}(t)$ und $I_{\pi\pi N}(t)$ enthalten, verletzen das chirale Zählschema nicht und werden daher nicht abgezogen. Diese beiden Integrale enthalten in niedrigster Ordnung schon nichtanalytische Terme in der Pionmasse (s. Anhang C) und können deshalb gar nicht abgezogen werden. Wir müssen also lediglich $I^r_{\pi N}(m_N^2)$ mit Koeffizienten entwickeln,

$$\frac{4m_N^2}{4m_N^2-t} I^r_{\pi N}(m_N^2) = -\frac{1}{16\pi^2} + \mathcal{O}(q),$$

wobei der Index r für das nach dem $\widetilde{MS}$-Schema renormierte Integral steht, d.h. für das Integral ohne die Terme proportional zu R. Der Abzugsterm lautet damit[1]:

$$\sigma_{\rm a}^{\rm sub} = \frac{3g_A^2 m_\pi^2 \mathring{m}_N}{32\pi^2 F^2}. \tag{4.6}$$

Er wird wieder in der Niederenergiekonstanten c_1 absorbiert (s. Gl. (3.35)). Für $\sigma_{\rm a}^{\rm R}$ erhalten wir

$$\begin{aligned} \sigma_{\rm a}^R &= \frac{3g_A^2 m_\pi^2 m_N}{2F^2(4m_N^2-t)} \Bigg[t I^r_{\pi\pi}(t) - 4m_N^2 I^r_{\pi N}(m_N^2) + 2m_N^2(t-2m_\pi^2) I_{\pi\pi N}(t) \\ &\quad + \left(4m_N^2 - t\right)\left(-\frac{1}{16\pi^2}\right)\Bigg], \qquad (4.7) \\ &= \frac{3g_A^2 m_\pi^2 m_N}{4F^2} \left[\frac{t-2m_\pi^2}{32\pi m_N m_\pi} - \frac{1}{8\pi}\frac{m_\pi}{m_N}\right] + \mathcal{O}(q^4). \qquad (4.8) \end{aligned}$$

Bei der Infrarotregularisierung ändern sich nur die Ausdrücke für die einzelnen Integrale:

$$\begin{aligned} \sigma_{\rm a}^{\rm IR} &= \frac{3g_A^2 m_\pi^2 m_N}{2F^2(4m_N^2-t)} \left[t I^r_{\pi\pi}(t) - 4m_N^2 \bar{I}^{\rm IR}_{\pi N}(m_N^2) + 2m_N^2(t-2m_\pi^2) \bar{I}^{\rm IR}_{\pi\pi N}(t)\right] \\ &\qquad (4.9) \\ &= \frac{3g_A^2 m_\pi^2 m_N}{4F^2} \left[\frac{t-2m_\pi^2}{32\pi m_N m_\pi} - \frac{1}{8\pi}\frac{m_\pi}{m_N}\right] + \mathcal{O}(q^4). \qquad (4.10) \end{aligned}$$

Wir erkennen, dass die renormierten Ausdrücke mit der richtigen Ordnung starten und in führender Ordnung auch übereinstimmen. Dies muss so der Fall sein, da $\sigma_{\rm a}$ von der Ordnung $\mathcal{O}(q^3)$ ist, d.h. eine ungerade Ordnung im chiralen Zählschema besitzt und deshalb in führender Ordnung nur nichtanalytische Terme auftauchen können.

Bis zur Ordnung $\mathcal{O}(q^3)$ existiert auch ein Ergebnis aus der HBχPT [Ber+ 92]. Die Unterschiede in den analytischen Eigenschaften zwischen den relativistischen Ergebnissen und diesem HBχPT-Ergebnis können an Hand des Imaginärteils des Integrals $I_{\pi\pi N}(t)$ verdeutlicht werden[2].

[1] Man beachte, dass der Unterschied zwischen $\mathring{m}_N$ und m_N von einer höheren Ordnung ist.

[2] Diese Diskussion ist im Wesentlichen aus [BL 99] entnommen.

Zur Berechnung von Im $I_{\pi\pi N}(t)$ benützen wir die im Anhang C beschriebenen Cutkosky-Regeln [Cut 60]. Für $t \ll 4m_N^2$ erhalten wir (s. Gl. (C.32)):

$$\text{Im } I_{\pi\pi N}(t) = \frac{\theta(t-4m_\pi^2)}{16\pi m_N \sqrt{t}} \left(\arctan\left(\frac{2m_N\sqrt{t-4m_\pi^2}}{t-2m_\pi^2} \right) + \mathcal{O}(q^2) \right).$$

Bei $t = 4m_\pi^2$ ist der Impulsübertrag gerade groß genug, damit in Diagramm 4.1a die beiden propagierenden Pionen auf der Massenschale sein können. An dieser Stelle können zwei reelle Pionen produziert werden und das Integral entwickelt einen Imaginärteil. Das Argument des Arkustangens stellt eine Größe der Ordnung $\mathcal{O}(q^{-1})$ dar. In der Region, in der das Argument große Werte annimmt, kann man den Arkustangens wie folgt entwickeln:

$$\arctan(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{x} + \frac{1}{3x^3} + \mathcal{O}\left(\left(\frac{1}{x} \right)^5 \right). \tag{4.11}$$

Die ersten beiden Terme in dieser Entwicklung lauten:

$$\text{Im } I_{\pi\pi N}^{\text{HB}}(t) = \frac{\theta(t-4m_\pi^2)}{32\pi m_N m_\pi} \left[\frac{\pi m_\pi}{\sqrt{t}} - \frac{m_\pi(t-2m_\pi^2)}{m_N\sqrt{t(t-4m_\pi^2)}} \right]. \tag{4.12}$$

Setzt man diese Entwicklung in Gl. (4.4) ein, so erhält man genau das Ergebnis der HBχPT [Ber+ 92]. In der Nähe der Pionschwelle, $t \approx 4m_\pi^2$, kann das Argument des Arkustangens aber nicht mehr als groß angesehen werden, so dass die Entwicklung in diesem Bereich nicht gültig ist [BKM 95]. Darin liegt der wesentliche Unterschied zwischen den relativistischen Rechnungen und der HBχPT. Das eigentliche Integral unterscheidet sich in führender Ordnung von Gl. (4.12) durch den Term,

$$\begin{aligned} \text{Im}\,(\Delta I_{\pi\pi N}(t)) &= \text{Im}\, I_{\pi\pi N}(t) - \text{Im}\, I_{\pi\pi N}^{\text{HB}}(t), \\ &= \frac{\theta(t-4m_\pi^2)}{32\pi m_N m_\pi} \left[\frac{\alpha\, m_\pi}{\sqrt{t-4m_\pi^2}} - \arctan\left(\frac{\alpha\, m_\pi}{\sqrt{t-4m_\pi^2}} \right) \right] + \mathcal{O}(q), \end{aligned} \tag{4.13}$$

wobei hier noch die Abkürzung $\alpha = \frac{m_\pi}{m_N}$ eingeführt worden ist. Dieser Term ist in der HBχPT abwesend. Er sorgt gerade dafür, dass die chirale Entwicklung auch in der Schwellenregion ($t \approx 4m_\pi^2$) konvergiert. Die Abbildung 4.2 zeigt die $\mathcal{O}(q^3)$-Resultate für den skalaren Formfaktor aus der HBχPT und den relativistischen Rechnungen mit den Renormierungsschemen von [BL 99] und [GJW 99].

Zuerst vergleichen wir die Ergebnisse in den beiden relativistischen Renormierungsschemen. Während der Imaginärteil des skalaren Formfaktors exakt übereinstimmt, gibt es eine kleine Abweichung für den Realteil von $\sigma(t)$. Bei der Berechnung haben wir für beide Renormierungsschemen den Wert $c_1 = -1\,\text{GeV}^{-1}$ verwendet. Dies ist in Übereinstimmung mit den Ergebnissen für c_1 aus der Pion-Nukleon-Streuung [FM 00, PN 00]. Da der Unterschied zwischen den beiden Ergebnissen relativ klein ist, müssen die Werte für die Kopplungskonstante c_1 in beiden Methoden auch ungefähr gleich groß sein. Für die übrigen Konstanten haben wir die folgenden Werte benutzt:

$$m_\pi = 139.6 \text{ MeV}, \qquad m_N = 939 \text{ MeV}, \qquad g_A = 1.267, \qquad F = 92.4 \text{ MeV}.$$

Allerdings haben wir bei der Berechnung der Integrale $I_{\pi\pi N}(t)$ bzw. $I_{\pi\pi N}^{\text{IR}}(t)$ die im Anhang C bzw. im Anhang von [BL 99] angegebenen analytischen Ausdrücke verwendet, die nur bis zur Ordnung $\mathcal{O}(q)$ gültig sind.

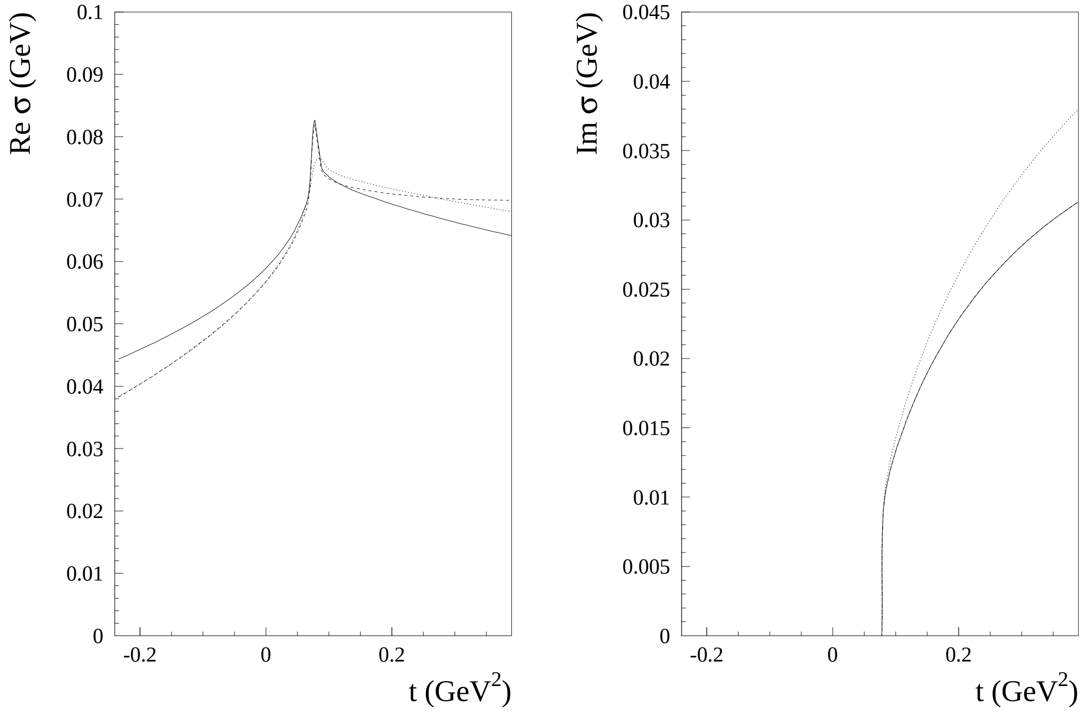

Abbildung 4.2: Der skalare Formfaktor des Nukleons bis zur Ordnung $\mathcal{O}(q^3)$. Die durchgezogene Linie ist unser Ergebnis (nach [GJW 99]), die gestrichelte Linie das Ergebnis der Infrarotregularisierung und die punktierte Linie das Ergebnis einer Rechnung im Rahmen der HBχPT. Beim Imaginärteil stimmt unser Ergebnis mit dem der Infrarotregularisierung überein.

Zur Diskussion des Ergebnisses der nichtrelativistischen HBχPT müssen wir uns die Stelle $t = 4m_\pi^2$ in Abbildung 4.2 genauer betrachten. Deshalb haben wir in Abbildung 4.3 den skalaren Formfaktor in einem sehr kleinen Bereich um die Pionschwelle dargestellt ($4m_\pi^2 = 0.7795264\mathrm{GeV}^2$).

Der Übergang an dieser Pionschwelle ist bei den relativistischen Rechnungen stetig, wie dies auch sein sollte, während das HBχPT-Ergebnis sowohl im Realteil als auch im Imaginärteil einen Pol aufweist. Der Grund hierfür ist oben diskutiert worden. In der HBχPT konvergiert die chirale Entwicklung nicht mehr in der Nähe der Pionschwelle, d.h. für $t \approx 4m_\pi^2$.

4.3 Ergebnisse bis zur Ordnung $\mathcal{O}(q^4)$

Bis zur Ordnung $\mathcal{O}(q^4)$ setzt sich der skalare Formfaktor folgendermaßen zusammen:

$$\sigma = \sigma_{\mathrm{tree}} + \sigma_{\mathrm{a}} + \sigma_{\mathrm{b}} + \sigma_{\mathrm{c}} + \sigma_{\mathrm{d}} + \sigma_{\mathrm{e}}. \tag{4.14}$$

Die Indizes a bis e beziehen sich auf die in Abbildung 4.1 dargestellten Schleifendiagramme. Im Folgenden geben wir, falls es notwendig ist, zu jedem Diagramm jeweils drei Ergebnisse an. Einmal das nicht renormierte Ergebnis, dann das Ergebnis mit der Methode aus [GJW 99] (mit

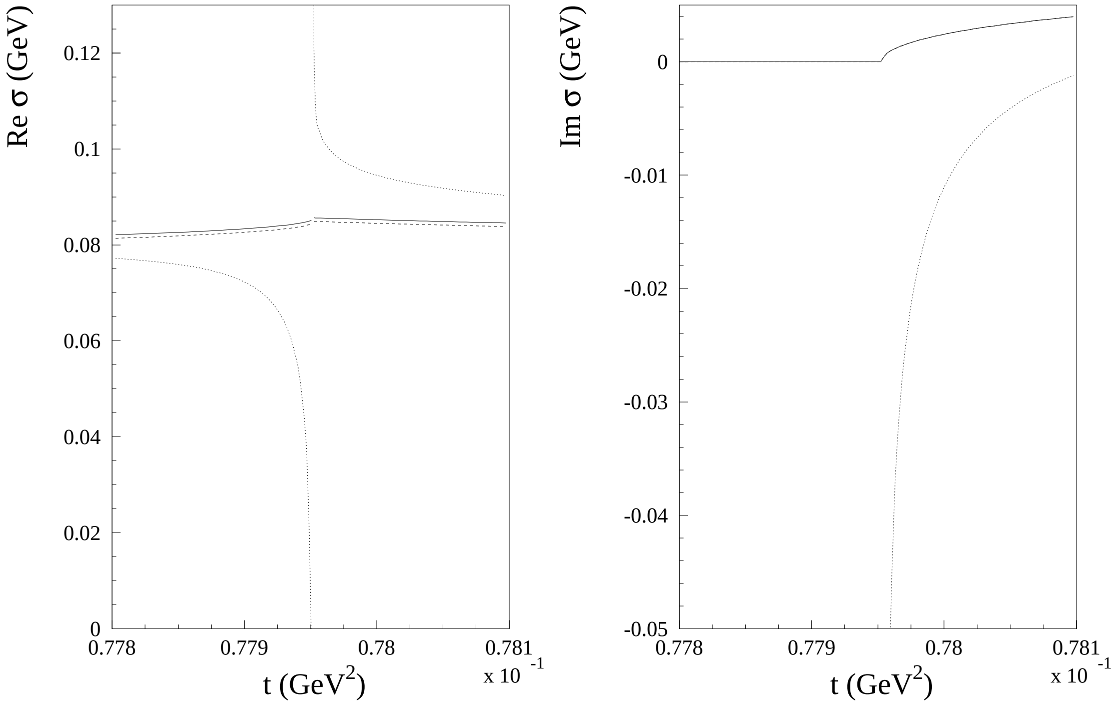

Abbildung 4.3: Der skalare Formfaktor des Nukleons bis zur Ordnung $\mathcal{O}(q^3)$ im Bereich um die Pionschwelle, d.h. für $t \approx 4m_\pi^2$ (Legende wie in Abb. 4.2). Sowohl im Realteil als auch im Imaginärteil von $\sigma(t)$ erkennt man jetzt erst deutlich die Polstellen des Ergebnisses der HBχPT.

dem Index R gekennzeichnet) und zum Schluss das Ergebnis unter Verwendung der Methode von Becher und Leutwyler [BL 99] (mit dem Index IR gekennzeichnet).

Der Baumgraphenanteil setzt sich aus Beiträgen von $\mathcal{L}_{\pi N}^{(2)}$ und $\mathcal{L}_{\pi N}^{(4)}$ zusammen:

$$\sigma_{\text{tree}} = -4Z_N c_1 m_\pi^2 - 4\,(8\,e_{38} + e_{115} + e_{116})\, m_\pi^4 + 4e_{22} m_\pi^2 t, \tag{4.15}$$

wobei die verschiedenen Renormierungsschemen sich lediglich durch die unterschiedliche Nukleonrenormierungskonstanten unterscheiden (s. Gl. (3.44) und Gl. (3.45) in Kapitel 3).

Die Ergebnisse für σ_a sind bereits berechnet worden. Das nicht renormierte Ergebnis ist in Gl. (4.4), das Ergebnis in dem hier verwendeten Renormierungsschema in Gl. (4.7) und das Ergebnis in der Infrarotregularisierung in Gl. (4.9) angegeben. Bis zur Ordnung $\mathcal{O}(q^3)$ kann der Unterschied zwischen $\mathring{m}_N$ und m_N vernachlässigt werden. Für das Diagramm 4.1a muss dieser Unterschied aber in der Ordnung $\mathcal{O}(q^4)$ berücksichtigt werden. Genau wie bei der Berechnung der Selbstenergie des Nukleons verschiebt das Diagramm 4.1b nur die Masse der propagierenden Nukleonen im Diagramm 4.1a von $\mathring{m}_N$ nach $m_{N,2}$ [BL 99]. Man beachte, dass der Unterschied zwischen $\mathring{m}_N$ und $m_{2,N}$ von der Ordnung $\mathcal{O}(q^2)$ ist, der Unterschied zwischen $m_{N,2}$ und m_N aber von der Ordnung $\mathcal{O}(q^3)$ ist. Wir können deshalb die Ergebnisse aus den Gleichungen (4.4), (4.7) und (4.9) einfach übernehmen. In allen anderen Schleifengraphen ist die Unterscheidung von $\mathring{m}$ und m_N von höherer Ordnung und deshalb nicht notwendig. Das Gleiche gilt auch für F_0 und $\mathring{g}_A$. Aus diesem Grund treten in unseren Formeln nur noch physikalische Größen auf.

Der Beitrag zu $\sigma_{\rm c}$ lautet:

$$\begin{aligned}
\sigma_{\rm c} &= \frac{6c_1 m_\pi^4}{F^2} I_{\pi\pi}(t) - \frac{3c_2 m_\pi^2}{8F^2 m_N^2}\left[2t^2\left(I_{\pi\pi}^{(q)}(t) + I_{\pi\pi}^{(qq)}(t)\right) + 8m_N^2 t I_{\pi\pi}^{(00)}(t)\right] \\
&\quad -\frac{3c_3 m_\pi^2}{F^2}\left(I_\pi - \frac{t-2m_\pi^2}{2} I_{\pi\pi}(t)\right) \\
&= \frac{6c_1 m_\pi^4}{F^2} I_{\pi\pi}(t) + \frac{3c_2 m_\pi^2}{8F^2 m_N^2}\left[-\left(\frac{2}{3}t + \frac{4}{3}m_N^2\right) I_\pi\right. \\
&\quad \left. + \left(\frac{t^2}{2} + \frac{\left(4m_N^2 - t\right)\left(t - 4m_\pi^2\right)}{6}\right) I_{\pi\pi}(t) - \frac{\left(4m_N^2 - t\right)\left(t - 6m_\pi^2\right)}{144\pi^2}\right] \\
&\quad -\frac{3c_3 m_\pi^2}{F^2}\left(I_\pi - \frac{t-2m_\pi^2}{2} I_{\pi\pi}(t)\right), \qquad (4.16)
\end{aligned}$$

wobei die Kopplungskonstanten c_i in Gl. (4.16) „nackt“, d.h. die nicht renormierten c_i sind. Da dieses Diagramm keine inneren Nukleonlinien enthält, unterscheiden sich die verschiedenen Renormierungsschemen nicht. Man zieht wie gewohnt die Terme $\propto R$ ab und ersetzt die Kopplungskonstanten c_i durch die renormierten c_i^r.
Für die Beiträge zu $\sigma_{\rm d}$ geben wir jeweils drei Ergebnisse an. Einmal das nicht renormierte Ergebnis, dann das Ergebnis mit der Methode aus [GJW 99] (mit dem Index R gekennzeichnet) und zum Schluss das Ergebnis unter Verwendung der Methode von Becher und Leutwyler [BL 99] (mit dem Index IR gekennzeichnet). Die Beiträge zu $\sigma_{\rm d}$ lauten dann:

$$\sigma_{\rm d} = \frac{3c_1 g_A^2 m_\pi^2}{F^2}\left[2I_N - I_\pi + 2m_\pi^2 I_{\pi N}(m_N^2) + 4m_N^2 I_{NN}(t) + 4m_N^2 m_\pi^2 I_{\pi NN}(t)\right], \qquad (4.17)$$

$$\begin{aligned}
\sigma_{\rm d}^{\rm R} &= \frac{3c_1^R g_A^2 m_\pi^2}{F^2}\left[-I_\pi^r + 2m_\pi^2 I_{\pi N}^r(m_N^2) + 4m_N^2\left(I_{NN}^r(t) - \frac{1}{16\pi^2}\right)\right. \\
&\quad \left. +4m_N^2 m_\pi^2 I_{\pi NN}^r(t)\right], \qquad (4.18)
\end{aligned}$$

$$\sigma_{\rm d}^{\rm IR} = \frac{3c_1^{\rm IR} g_A^2 m_\pi^2}{F^2}\left[-I_\pi^r + 2m_\pi^2 \bar{I}_{\pi N}^{\rm IR}(m_N^2) + 4m_\pi^2 m_N^2 \bar{I}_{\pi NN}^{\rm IR}(t)\right]. \qquad (4.19)$$

Bei der Berechnung von $\sigma_{\rm d}^{\rm R}$ haben wir noch den Term

$$\sigma_{\rm d}^{\rm sub} = \frac{3c_1^R g_A^2 m_\pi^2 m_N^2}{4\pi^2 F^2} \qquad (4.20)$$

abgezogen, der in der Konstanten c_1 absorbiert wird (s. Gl. (3.37)). Die Konstante c_1 absorbiert somit die Abzugsterme aus Gl. (4.6) und Gl. (4.20):

$$c_1^{(4)} = c_1^R + \frac{3g_A^2 \mathring{m}_N}{128\pi^2 F^2}\left(1 + 8\mathring{m}_N c_1^R\right). \qquad (4.21)$$

Dies kann man als Test interpretieren, dass das Verfahren konsistent ist. Man beachte, dass auf der rechten Seite von Gl. (4.21) jetzt nur noch renormierte Größen stehen.
Der Beitrag zu $\sigma_{\rm e}$ lautet

$$\sigma_{\rm e} = \frac{6c_1 m_\pi^2}{F^2} I_\pi. \qquad (4.22)$$

Der renormierte Beitrag lautet dann in allen Renormierungsschemen:

$$\sigma_{\mathrm{e}}^{r} = \frac{3c_1^r m_\pi^4}{4\pi^2 F^2} \ln\left(\frac{m_\pi}{m_N}\right). \tag{4.23}$$

Der skalare Formfaktor des Nukleons ist mit der Masse des Nukleons durch das Feynman-Hellmann-Theorem [Fey 39] verbunden:

$$\sigma(t=0) = m_\pi^2 \frac{\partial m_N}{\partial m_\pi^2}. \tag{4.24}$$

Zur Überprüfung dieser Relation müssen wir den so genannten σ-Term berechnen:

$$\begin{aligned}\sigma(0) \quad = \quad & -4c_1^R m_\pi^2 - \frac{9g_A^2 m_\pi^3}{64\pi F^2} + \frac{m_\pi^4}{2\pi^2 F^2}\left(-\frac{3g_A^2}{8m_N} + 3\,c_1^R - \frac{3}{8}c_2^R - \frac{3}{2}c_3^R\right)\ln\left(\frac{m_\pi}{m_N}\right) \\ & + m_\pi^4\left(-4\left(8\,e_{38}^R + e_{115}^R + e_{116}^R\right) + \frac{9g_A^2}{64\pi^2 F^2 m_N} + \frac{3}{8\pi^2 F^2}\left(1+2g_A^2\right)c_1^R \right. \\ & \left. - \frac{3}{16\pi^2 F^2}c_3^R\right). \end{aligned} \tag{4.25}$$

Bei der Ableitung von Gl. (4.25) muss man insbesondere bei der Ersetzung von $\mathring{m}_N$ durch $m_{N,2}$ im Integral $I_{\pi N}(m_N^2)$ vorsichtig sein (s. Diskussion der Nukleonmasse in Kapitel 3). Das bis zur Ordnung $\mathcal{O}(m_\pi^2)$ entwickelte Integral $I_{\pi N}(m_N^2)$ lautet nämlich mit dieser Ersetzung:

$$I_{\pi N}^{m_{N,2}}(m_N^2) = \frac{R}{16\pi^2} - \frac{1}{16\pi^2} + \frac{m_\pi}{16\pi m_N} - \frac{m_\pi^2}{16\pi^2 m_N^2}\left(1 - \ln\frac{m_\pi}{m_N}\right) - \frac{m_\pi^2}{2\pi^2 m_N}c_1. \tag{4.26}$$

Vergleicht man diesen Ausdruck mit der Nukleonmasse aus Gl. (3.38), so kann man sich leicht von der Gültigkeit von Gl. (4.24) überzeugen.

Ein weiterer Vergleich unserer Ergebnisse mit den Ergebnissen der Infrarotregularisierung wird durch die Differenz Δ_σ des σ-Terms zum Wert am Cheng-Dashen-Punkt geliefert. Wir erhalten:

$$\begin{aligned}\Delta_\sigma \quad = \quad & \sigma(2m_\pi^2) - \sigma(0) \\ = \quad & \frac{3g_A^2 m_\pi^3}{64\pi F^2} + \frac{m_\pi^4}{16\pi^2 F^2}\left(\frac{3g_A^2}{m_N} + c_2^R + 6c_3^R\right)\ln\left(\frac{m_\pi}{m_N}\right) + m_\pi^4\left(8\,e_{22}^R \right. \\ & \left. + \frac{3(\pi-2)g_A^2}{128\pi^2 F^2 m_N} - \frac{g_A^2}{4\pi^2 F^2}c_1^R - \frac{3(4-\pi)}{16\pi^2 F^2}c_1^R + \frac{(14-3\pi)}{192\pi^2 F^2}c_2^R + \frac{3}{16\pi^2 F^2}c_3^R\right) + \mathcal{O}(q^5). \end{aligned} \tag{4.27}$$

Der Ausdruck stimmt mit dem aus [BL 99] bis auf die Terme $\propto m_\pi^4$ überein, die in der Infrarotregularisierung gegeben sind durch:

$$-4\left(8\,e_{38}^{\mathrm{IR}} + e_{115}^{\mathrm{IR}} + e_{116}^{\mathrm{IR}}\right) + \frac{3(2+\pi)g_A^2}{128\pi^2 F^2 m_N} - \frac{3(4-\pi)}{16\pi^2 F^2}c_1^{\mathrm{IR}} + \frac{(14-3\pi)}{192\pi^2 F^2}c_2^{\mathrm{IR}} + \frac{3}{16\pi^2 F^2}c_3^{\mathrm{IR}}.$$

Die Abhängigkeit des skalaren Formfaktors von t ist in Abbildung 4.4 graphisch dargestellt, in der wir auch unsere Ergebnisse mit denen von Becher und Leutwyler vergleichen.

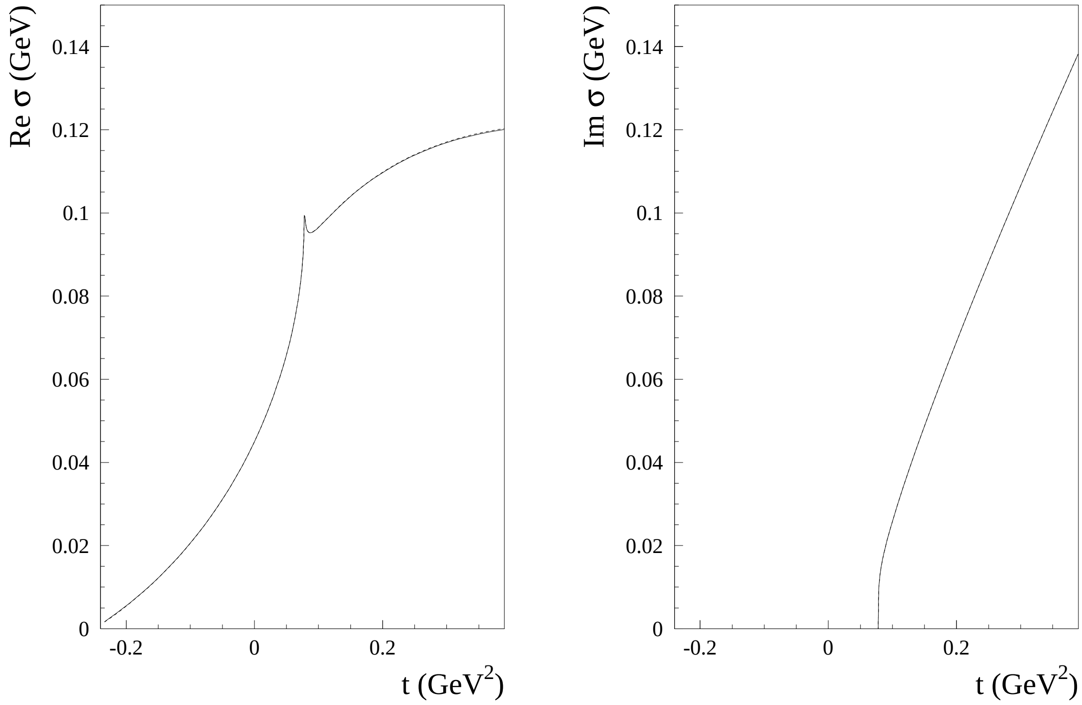

Abbildung 4.4: Der skalare Formfaktor des Nukleons bis zur Ordnung $\mathcal{O}(q^4)$ in den beiden Renormierungsschemen. Die durchgezogene Linie ist das Ergebnis nach [GJW 99] und die gestrichelte Linie das Ergebnis in der Infrarotregularisierung. Der Unterschied ist so klein, dass er in dieser Darstellung nicht zu erkennen ist.

Für die renormierten Konstanten c_2 und c_3 haben wir die Werte $c_2 = 3.2\ \text{GeV}^{-1}$ und $c_3 = -5.4\ \text{GeV}^{-1}$ in beiden Renormierungsschemen verwendet. Auch diese Werte sind in Übereinstimmung mit denen aus der Pion-Nukleon-Streuung [FM 00, PN 00]. Da in allen hier diskutierten Ergebnissen immer nur die Kombination $8\,e_{38} + e_{115} + e_{116}$ auftaucht, führen wir noch die Konstante $\tilde{e}_{38}$ ein:

$$\tilde{e}_{38} = e_{38} + \frac{1}{8}\,(e_{115} + e_{116})\,. \tag{4.28}$$

Die Werte für die renormierten Konstanten e_{22} und $\tilde{e}_{38}$, die von der Lagrange-Dichte $\mathcal{L}_{\pi N}^{(4)}$ stammen, haben wir an die physikalischen Werte für den σ-Term und den Cheng-Dashen-Punkt angepasst. Der σ-Term ist der Wert des skalaren Formfaktors an der Stelle $t = 0$. Er gibt den Beitrag der Quarkmassen zur Masse des Nukleons an. Sein empirischer Wert ist zu $\sigma = 45 \pm 8\,\text{MeV}$ [GLS 91] bestimmt worden[3]. Der Cheng-Dashen-Punkt, der in der πN Streuung eine Rolle spielt, ist der Wert des skalaren Formfaktors bei $t = 2m_\pi^2$. Der empirische Wert für die Differenz $\Delta_\sigma = \sigma(t = 2m_\pi^2) - \sigma(t = 0)$ ist zu $\Delta_\sigma = 15.2 \pm 0.4\,\text{MeV}$ [GLS 91] bestimmt worden. Diese empirischen Ergebnisse liefern die folgenden Werte für die Niederenergiekonstanten e_{22}

[3]Der aktuelle Stand unserer Kenntnisse über den σ-Term ist in [Sai 02] zusammengefasst.

und $\tilde{e}_{38}$:

$$\begin{aligned} e_{22}^{\mathrm{R}} &= -1.20\,\mathrm{GeV}^{-3}, \qquad \tilde{e}_{38}^{\mathrm{R}} = -0.36\,\mathrm{GeV}^{-3}, \\ e_{22}^{\mathrm{IR}} &= -0.86\,\mathrm{GeV}^{-3}, \qquad \tilde{e}_{38}^{\mathrm{IR}} = -0.32\,\mathrm{GeV}^{-3}. \end{aligned}$$

Wir weisen darauf hin, dass vor allem der σ-Term mit einem Fehler von ± 8 MeV eine große experimentelle Unsicherheit aufweist, die die Werte für die Konstante $\tilde{e}_{38}$ beeinflusst. Die Beiträge der beiden Kopplungskonstanten e_{22} und $\tilde{e}_{38}$ zum skalaren Formfaktor sind aber relativ klein und spielen vor allem für den graphischen Verlauf eine untergeordnete Rolle.

Kapitel 5

Die elektromagnetischen Formfaktoren des Nukleons

5.1 Definition der Dirac- und Pauli-Formfaktoren

Die elektromagnetische Struktur des Nukleons kann mit Hilfe von vier Formfaktoren parametrisiert werden, wobei je zwei Formfaktoren für das Proton und das Neutron existieren. Das Verständnis dieser Formfaktoren ist von entscheidender Bedeutung in jedem Modell der starken Wechselwirkung. Experimentellen Zugang zu diesen Formfaktoren erhält man vor allem durch die elastische Elektronenstreuung am Nukleon, die das erste Mal in den 1950er Jahren [Hof 57] untersucht worden ist. Aus der Kenntnis dieser Formfaktoren kann man dann die magnetischen Momente sowie die Ladungs- und Magnetisierungsverteilung der Nukleonen bestimmen. Das derzeitige Verständnis dieser Formfaktoren ist in [Dre+ 97] zusammengefasst.

Die elektromagnetischen Formfaktoren sind über das Matrixelement des elektromagnetischen Stromoperators $J^\mu(x)$ definiert, ausgewertet zwischen einem Anfangs- und Endzustand des Nukleons:

$$\langle N(p_f)\,|J^\mu(0)|\,N(p_i)\rangle = \bar{u}(p_f)\left[\gamma^\mu F_1^N(t) + \frac{i\sigma^{\mu\nu}q_\nu}{2m_N}F_2^N(t)\right]u(p_i), \qquad N = p, n. \tag{5.1}$$

Dabei ist $q^\mu = p_f^\mu - p_i^\mu$ der Impulsübertrag, $t = (p_f - p_i)^2 = q^2 \leq 0$ und $J^\mu(x)$ ist gegeben durch[1]

$$J^\mu(x) = \frac{2}{3}\bar{u}(x)\gamma^\mu u(x) - \frac{1}{3}\bar{d}(x)\gamma^\mu d(x) = \bar{q}(x)Q\gamma^\mu q(x). \tag{5.2}$$

Als Nächstes untersuchen wir den hermiteschen Operator $J^\mu(x)$ etwas genauer. Die Quarkladungsmatrix Q ist gegeben durch

$$Q = \begin{pmatrix} 2/3 & 0 \\ 0 & -1/3 \end{pmatrix} = \frac{1}{6} + \frac{\tau_3}{2},$$

d.h. $J^\mu(x)$ enthält einen isoskalaren Anteil und einen Anteil, der sich wie die dritte Komponente eines Isovektors transformiert. Unter der Paritätstransformation und der Ladungskonjugation transformiert $J^\mu(x)$ wie folgt:

$$J^\mu(x) \overset{P}{\mapsto} J_\mu(Px), \qquad J^\mu(x) \overset{C}{\mapsto} -J^\mu(x),$$

[1] Wir definieren den elektromagnetischen Strom in Einheiten von e.

wobei $(Px)^\mu = (x_0, -\vec{x}) = x_\mu$ ist. Gl. (5.1) kann mit Hilfe der Lorentzinvarianz und dem Verhalten von $J^\mu(x)$ unter der Paritätstransformation und der Ladungskonjugation abgeleitet werden. Ein Ausdruck proportional zu q^μ tritt auf Grund der Stromerhaltung (und unabhängig davon wegen der Zeitumkehrinvarianz) nicht auf. Da der Operator $J^\mu(x)$ hermitesch ist, sind $F_1^N(t)$ und $F_2^N(t)$ reelle Funktionen für $t \leq 0$. In allen Elektronenstreuexperimenten ist der Impulsübertrag t immer negativ. Man erkennt dies leicht, indem man z.B. in das Ruhesystem des auslaufenden Elektrons geht. Bezeichnen wir mit k_i und k_f die Viererimpulse des einlaufenden und auslaufenden Elektrons, so ist dieses System durch $\vec{k}_f = \vec{0}$ definiert. Wir erhalten dann:

$$t = q^2 = (k_i - k_f)^2 = 2m_e^2 - 2m_e\sqrt{m_e^2 + |\vec{k}_i|^2} \leq 0.$$

Daher können die Funktionen $F_1^N(t)$ und $F_2^N(t)$ in Elektronenstreuexperimenten für $t \leq 0$ gemessen werden. Die Formfaktoren im zeitartigen Bereich können für $t \geq 4m_N^2$ in der e^+e^--Paarvernichtung untersucht werden.

Man nennt $F_1^N(t)$ den Dirac-Formfaktor und $F_2^N(t)$ den Pauli-Formfaktor des Nukleons. An der Stelle $t = 0$ sind diese Formfaktoren durch die elektrische Ladung und die anomalen magnetischen Momente der Nukleonen gegeben:

$$F_1^p(0) = 1, \qquad F_1^n(0) = 0, \qquad F_2^p(0) = \kappa_p, \qquad F_2^n(0) = \kappa_n. \tag{5.3}$$

Die experimentellen Werte für die anomalen magnetischen Momente sind mit sehr hoher Präzision bestimmt worden [PDG 02]:

$$\kappa_p = 1.792847337(29), \qquad \kappa_n = -1.91304272(45). \tag{5.4}$$

Oft ist es für die theoretische Analyse von Vorteil mit den Isospinanteilen dieser Formfaktoren zu arbeiten und sie in einen isoskalaren und einen isovektoriellen Anteil zu zerlegen,

$$F_i^{(s)} = \frac{1}{2}\left(F_i^p + F_i^n\right), \qquad F_i^{(v)} = \frac{1}{2}\left(F_i^p - F_i^n\right), \qquad i = 1, 2. \tag{5.5}$$

Im Isospinraum setzen sich die elektromagnetischen Formfaktoren des Nukleons dann folgendermaßen zusammen:

$$F_i^N = F_i^{(s)} + \tau_3 F_i^{(v)}, \qquad i = 1, 2. \tag{5.6}$$

5.2 Ergebnisse für den Dirac- und Pauli-Formfaktor des Nukleons

Zur Berechnung der elektromagnetischen Formfaktoren $F_1(t)$ und $F_2(t)$ bis zur Ordnung $\mathcal{O}(q^4)$ müssen wir die in Abbildung 5.1 dargestellten Diagramme berechnen. Dabei haben wir die Diagramme weggelassen, die ausschließlich zur Wellenfunktionsrenormierung beitragen. Die Schleifengraphen mit den Nummern (5) bis (8) in Abbildung 5.1 sind dabei von der Ordnung $\mathcal{O}(q^3)$ und die restlichen Schleifengraphen mit den Nummern (9) bis (11) von der Ordnung $\mathcal{O}(q^4)$.

Bezeichnen wir die invariante Amplitude für diese Diagramme mit $\mathcal{M}_J$, so ist die Verbindung zum Matrixelement aus Gl. (5.1) gegeben durch

$$\mathcal{M}_J = -ie\epsilon_\mu \langle N(p_f)\,| J^\mu(0) |\, N(p_i)\rangle, \tag{5.7}$$

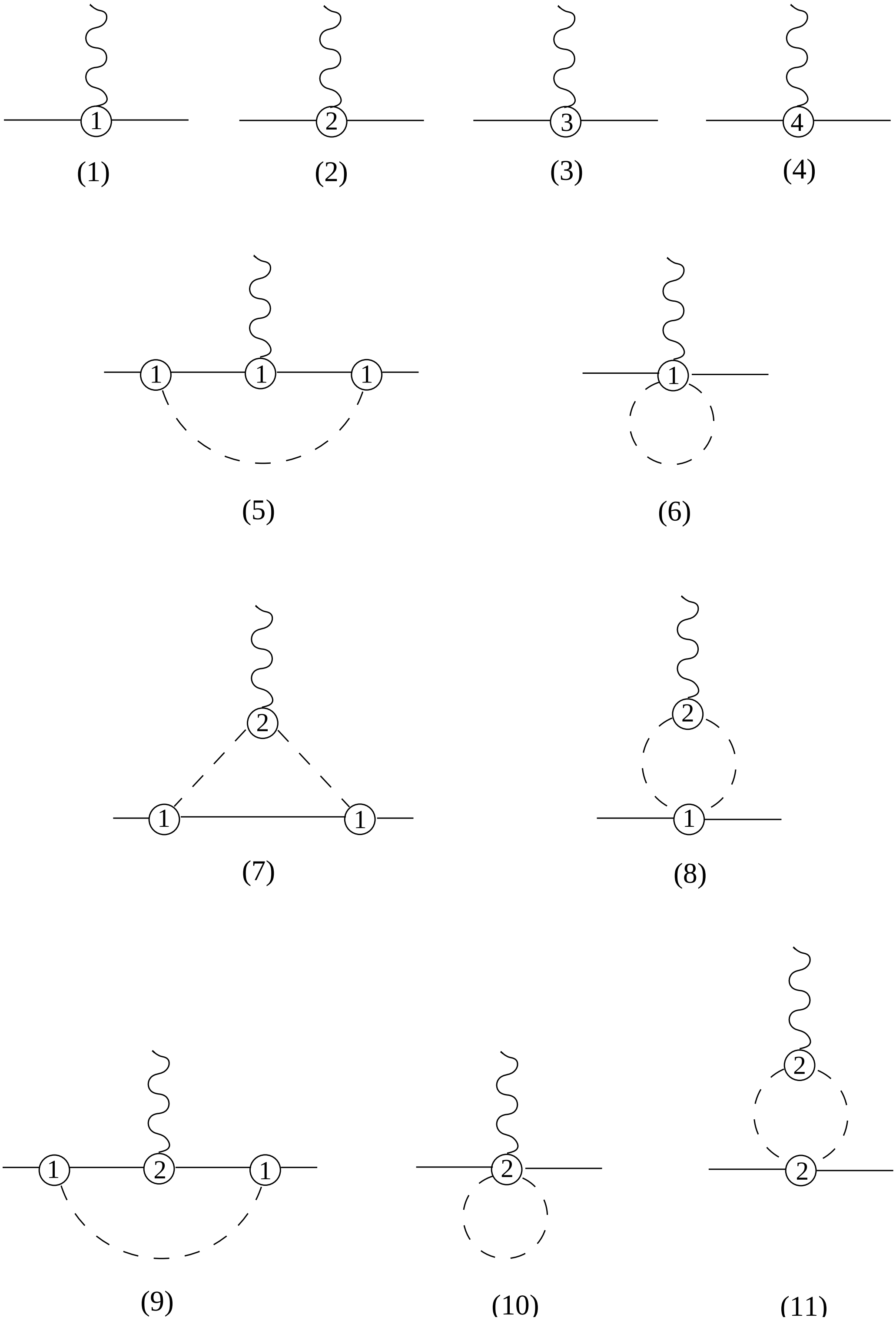

Abbildung 5.1: Diagramme, die zu den elektromagnetischen Formfaktoren bis zur Ordnung $\mathcal{O}(q^4)$ beitragen. Die Diagramme, die nur zur Wellenfunktionsrenormierung einen Beitrag liefern, sind nicht aufgelistet. Die geschlängelte Linie steht für das einlaufende Photon. Die Zahlen in Klammern unter den Diagrammen nummerieren die Diagramme.

wobei ϵ_μ der Polarisationsvektor des virtuellen Photons ist. Damit erhalten wir die folgenden Beiträge zum (noch nicht renormierten) Dirac-Formfaktor F_1:

$$F_1^{1+3} = \frac{1+\tau_3}{2} - \left(\tau_3 \frac{b_7}{(4\pi F)^2} + \frac{1}{2}\frac{b_8}{(4\pi F)^2}\right) t, \tag{5.8}$$

$$\begin{aligned} F_1^5 &= \frac{g_A^2}{8F_\pi^2}(3-\tau_3)\Big[I_\pi + 4m_N^2 I_{\pi N}^{(p)}(m_N^2) - 4m_N^2\left(m_\pi^2 I_{\pi NN}(t) + I_{NN}(t)\right) \\ &\qquad + 8m_N^2 I_{\pi NN}^{(00)}(t) + 32 m_N^4 I_{\pi NN}^{(PP)}(t)\Big], \end{aligned} \tag{5.9}$$

$$F_1^6 = -\frac{\tau_3}{2F_\pi^2} I_\pi, \tag{5.10}$$

$$F_1^7 = -\frac{g_A^2}{F_\pi^2}\tau_3\left[t I_{\pi\pi}^{(00)}(t) + 4m_N^2 I_{\pi\pi N}^{(00)}(t) + 16 m_N^4 I_{\pi\pi N}^{(PP)}(t)\right], \tag{5.11}$$

$$F_1^8 = \frac{\tau_3}{F_\pi^2}\, t\, I_{\pi\pi}^{(00)}(t), \tag{5.12}$$

$$F_1^9 = \frac{m_N^2 g_A^2}{F_\pi^2}(6c_7 - \tau_3 c_6)\; t\, I_{\pi NN}^{(PP)}(t), \tag{5.13}$$

$$F_1^{10} = \frac{3m_\pi^2}{4m_N F_\pi^2}(1+\tau_3)\, c_2 \left(I_\pi - \frac{m_\pi^2}{32\pi^2}\right). \tag{5.14}$$

Zum Pauli-Formfaktor F_2 erhalten wir folgende Beiträge:

$$\begin{aligned} F_2^{2+3+4} &= \frac{1}{2}\tau_3\, c_6 + c_7 + \left(\tau_3 \frac{b_7}{(4\pi F)^2} + \frac{1}{2}\frac{b_8}{(4\pi F)^2}\right) t + 2m_N\Big(2\, e_{54} + \tau_3\, e_{74}\Big)\, t \\ &\quad - 8 m_N m_\pi^2\left(2\, e_{105} + \tau_3\, e_{106}\right), \end{aligned} \tag{5.15}$$

$$F_2^5 = -\frac{g_A^2}{F_\pi^2}(3-\tau_3)\, 4m_N^4\, I_{\pi NN}^{(PP)}(t), \tag{5.16}$$

$$F_2^7 = \frac{g_A^2}{F_\pi^2}\tau_3\, 16 m_N^4 I_{\pi\pi N}^{(PP)}(t), \tag{5.17}$$

$$\begin{aligned} F_2^9 &= -\frac{g_A^2}{8F_\pi^2}(6c_7 - \tau_3 c_6)\Big[I_\pi + 4m_N^2 I_{\pi N}^{(p)}(m_N^2) + 4m_N^2 m_\pi^2 I_{\pi NN}(t) \\ &\qquad + 4m_N^2 I_{NN}(t) - 16 m_N^2 I_{\pi NN}^{(00)}(t) + 8m_N^2 t\left(I_{\pi NN}^{(PP)}(t) - I_{\pi NN}^{(qq)}(t)\right)\Big], \end{aligned} \tag{5.18}$$

$$F_2^{10} = -\frac{3m_\pi^2}{4m_N F_\pi^2}(1+\tau_3)\; c_2 \left(I_\pi - \frac{m_\pi^2}{32\pi^2}\right) - \frac{\tau_3}{2F_\pi^2} c_6\, I_\pi, \tag{5.19}$$

$$F_2^{11} = \frac{4m_N}{F_\pi^2}\tau_3\, c_4\, t\, I_{\pi\pi}^{(00)}(t). \tag{5.20}$$

Wir haben unsere Ergebnisse im zweidimensionalen Isospinraum angegeben, in dem die obere Komponente das Ergebnis für die Protonen und die untere Komponente das Ergebnis für die Neutronen ist. Die Unterteilung in den isoskalaren und den isovektoriellen Anteil ist dann trivial, da der isovektorielle Anteil proportional zu τ_3 ist. Der obere Index bei den Formfaktoren steht für die Nummer, die das dazugehörige Diagramm in Abbildung 5.1 hat, und der untere Index bezeichnet den Dirac- bzw. Pauli-Formfaktor. Nicht aufgeführte Beiträge zu einzelnen Diagrammen verschwinden.

Zur Renormierung dieser Formfaktoren bestimmen wir wieder die Ordnung der einzelnen Diagramme und subtrahieren die regulären Terme, die von einer kleineren Ordnung als das dazugehörige Diagramm sind. Dabei sind nur die Diagramme (5), (7) und (9) in Abbildung 5.1 problematisch, da sie innere Nukleonlinien enthalten. Für den Dirac-Formfaktor benötigen wir nur einen endlichen Abzugsterm,

$$\Delta F_1^{9,\,R} = \frac{g_A^2 t}{128\pi^2 F^2}\left(6c_7 - \tau_3 c_6\right),$$

und für den Pauli-Formfaktor benötigen wir die folgenden Abzugsterme:

$$\begin{aligned} \Delta F_2^{5,\,R} &= -\frac{g_A^2 m_N^2}{32\pi^2 F^2}\left(3 - \tau_3\right), \qquad \Delta F_2^{7,\,R} = \frac{g_A^2 m_N^2}{8\pi^2 F^2}\tau_3, \\ \Delta F_2^{9\,R} &= -\frac{g_A^2 m_N^2}{32\pi^2 F^2}\left(6c_7 - \tau_3 c_6\right). \end{aligned}$$

Die Ergebnisse für die renormierten elektromagnetischen Formfaktoren mit ausreduzierten Tensorintegralen sind im Anhang D zu finden.

Bis zur Ordnung $\mathcal{O}(q^3)$ werden die beiden Abzugsterme $\Delta F_2^{5,\,R}$ und $\Delta F_2^{7,\,R}$ durch die Konstanten c_6 und c_7 absorbiert:

$$c_6^{(3)} = c_6^R - \frac{5g_A^2 m_N^2}{16\pi^2 F^2}, \qquad c_7^{(3)} = c_7^R + \frac{3g_A^2 m_N^2}{32\pi^2 F^2}. \tag{5.21}$$

Bis zur Ordnung $\mathcal{O}(q^4)$ wird der Abzugsterm $\Delta F_1^{9,\,R}$ in den Konstanten b_7 und b_8 absorbiert und der Term $\Delta F_2^{9,\,R}$ in den Konstanten c_6 und c_7. Die durch b_7 und b_8 im Pauli-Formfaktor zusätzlich erzeugten Terme werden durch die Konstanten e_{54} und e_{74} absorbiert:

$$\frac{b_7^{(4)}}{(4\pi F)^2} = \frac{b_7^R}{(4\pi F)^2} - \frac{g_A^2}{128\pi^2 F^2} c_6^R, \qquad \frac{b_8^{(4)}}{(4\pi F)^2} = \frac{b_8^R}{(4\pi F)^2} + \frac{3g_A^2}{32\pi^2 F^2} c_7^R, \tag{5.22}$$

$$c_6^{(4)} = c_6^{(3)} - \frac{g_A^2 m_N^2}{16\pi^2 F^2} c_6^R, \qquad c_7^{(4)} = c_7^{(3)} + \frac{3g_A^2 m_N^2}{16\pi^2 F^2} c_7^R, \tag{5.23}$$

$$e_{74}^{(3)} = e_{74}^R + \frac{g_A^2}{256\pi^2 F^2 m_N} c_6^R, \qquad e_{54}^{(4)} = e_{54}^R - \frac{3g_A^2}{256\pi^2 F^2 m_N} c_7^R. \tag{5.24}$$

Die Gesamtbeiträge zum Dirac-Formfaktor $F_1(t)$ erhält man, wenn man die Gln. (5.8) - (5.14) addiert und die Ladung mit der Wellenfunktionsrenormierungskonstante des Nukleons, Z_N, aus Gl. (3.44) multipliziert. Für den Pauli-Formfaktor $F_2(t)$ muss man die Gln. (5.15) - (5.20) addieren und mit Z_N multiplizieren. Allerdings benötigt man hier Z_N nur bis zur Ordnung $\mathcal{O}(q^2)$, da der Faktor q_ν in Gl. (5.1) die Ordnung um eins reduziert.

Die graphische Darstellung der Dirac- und Pauli-Formfaktoren bis zur Ordnung $\mathcal{O}(q^4)$ im Rahmen der chiralen Störungstheorie ist in Abbildung 5.2 zu sehen, in der wir auch unsere Ergebnisse mit den Ergebnissen aus der Infrarotregularisierung [KM 01] vergleichen. Wir haben den Verlauf der Formfaktoren in der Region mit kleinen Impulsüberträgen von $-0.4\,\mathrm{GeV}^2 \leq t \leq 0$ dargestellt. Zur Berechnung haben wir in beiden Methoden für c_4 den Wert $c_4 = 3.47\,\mathrm{GeV}^{-1}$ gewählt, in Übereinstimmung mit [FM 00, PN 00]. Die Parameter c_6 und c_7 sind an Hand der magnetischen Momente von Proton und Neutron (s. Gl. (5.4)) bestimmt worden. Die Konstanten d_6, d_7, e_{54} und e_{74} können an Hand der elektrischen und magnetischen Radien bestimmt werden, die folgendermaßen definiert sind:

$$\langle (r_E^p)^2 \rangle = \frac{6}{G_E^p(0)} \left.\frac{dG_E^p(t)}{dt}\right|_{t=0}, \qquad \langle (r_M^p)^2 \rangle = \frac{6}{G_M^p(0)} \left.\frac{dG_M^p(t)}{dt}\right|_{t=0}, \tag{5.25}$$

$$\langle (r_E^n)^2 \rangle = 6 \left.\frac{dG_E^n(t)}{dt}\right|_{t=0}, \qquad \langle (r_M^n)^2 \rangle = \frac{6}{G_M^n(0)} \left.\frac{dG_E^n(t)}{dt}\right|_{t=0}. \tag{5.26}$$

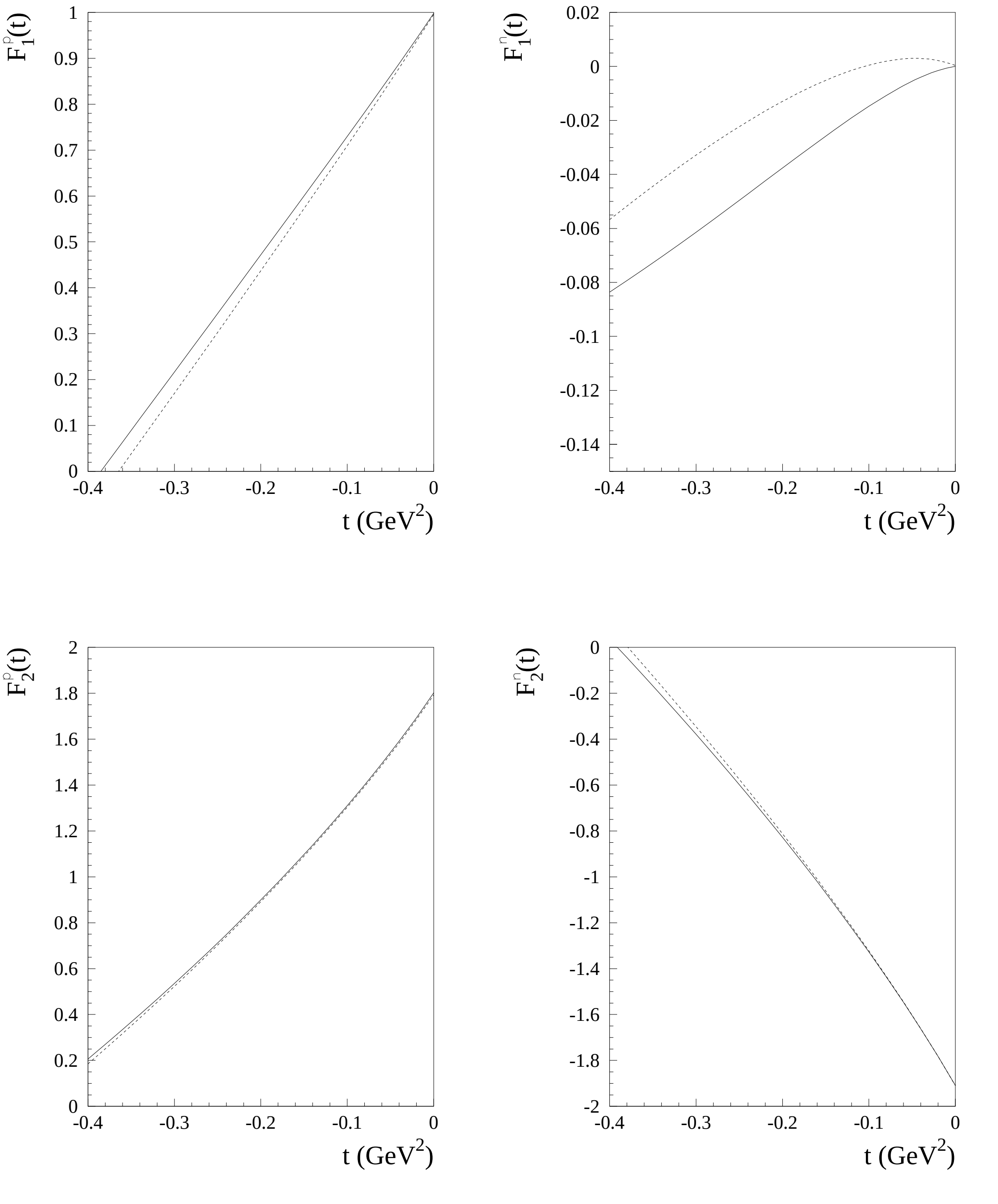

Abbildung 5.2: Die Dirac- und Pauli-Formfaktoren des Nukleons bis zur Ordnung $\mathcal{O}(q^4)$ in den beiden Renormierungsschemen. Die durchgezogene Linie ist das Ergebnis nach [GJW 99] und die gestrichelte Linie das Ergebnis in der Infrarotregularisierung. Bis auf den sehr kleinen Dirac-Formfaktor des Neutrons stimmen die Ergebnisse sehr gut überein.

Zur Definition der Sachs-Formfaktoren verweisen wir auf Gl. (5.28) im nächsten Abschnitt. Wir haben dabei genau wie in [KM 01] die folgenden Werte aus der Dispersionsanalyse von [MMD 96] verwendet: $r_E^p = 0.847\,\text{fm}$, $r_E^n = -0.113\,\text{fm}$, $r_M^p = 0.836\,\text{fm}$ und $r_M^n = 0.889\,\text{fm}$. Die so bestimmten Werte sind in Tabelle 5.1 zusammengefasst. Man beachte vor allem den großen Unterschied in den Werten für die Konstante d_6, je nachdem, ob man die Infrarotregularisierung oder unser Renormierungsschema verwendet. Die LECs d_6 und d_7 liefern die führende Ordnung der elektromagnetischen Radien. Die Anpassung dieser Konstanten an die gemessenen Radien ist somit für die Steigung der einzelnen Graphen entscheidend. Die Konstanten e_{105} und e_{106} können vernachlässigt werden, da sie in die beiden Konstanten c_6 und c_7 gesteckt werden können:

$$c_6 \to \tilde{c}_6 = c_6 - 16 m_N m_\pi^2 e_{106}, \qquad c_7 \to \tilde{c}_7 = c_7 - 16 m_N m_\pi^2 e_{105}, \tag{5.27}$$

wobei wir in der numerischen Berechnung nicht zwischen $\tilde{c}_6$ und c_6 unterscheiden.

	c_2	c_4	c_6	c_7	d_6	d_7	e_{54}	e_{74}
R	3.20	3.47	4.92	-0.12	-0.69	-0.50	0.20	1.23
IR	3.20	3.47	4.90	-0.17	0.55	-0.73	0.25	1.57

Tabelle 5.1: Werte für die einzelnen Niederenergiekonstanten in unserem Renormierungsschema (Index R) und in der Infrarotregularisierung (Index IR) für die $\mathcal{O}(q^4)$-Rechnung. Die Konstanten c_i sind in Einheiten von GeV^{-1}, die d_i in Einheiten von GeV^{-2} und die e_i in Einheiten von GeV^{-3} angegeben.

Wir erkennen in Abbildung 5.2, dass der Dirac-Formfaktor des Protons und die beiden Pauli-Formfaktoren in den beiden Methoden sehr gut übereinstimmen. Der Dirac-Formfaktor des Neutrons ist im gesamten Niederenergiegebiet relativ klein, so dass der Einfluss von Termen höherer Ordnungen eine wichtige Rolle spielt. Der Dirac-Formfaktor des Protons, F_1^p, zeigt in dem betrachteten Bereich einen linearen Verlauf, der überwiegend durch den elektrischen Radius des Protons bestimmt ist. Um zu sehen wie groß die Schleifenbeiträge zu F_1^p sind, haben wir in Abbildung 5.3 die Ergebnisse in den beiden relativistischen Renormierungsschemen ([GJW 99] und [BL 99]) mit den Kontaktgraphbeiträgen verglichen. Wir erkennen, dass die Beiträge aus den Schleifengraphen nicht vernachlässigt werden können, d.h. der Einfluss der Pionwolke eine entscheidende Rolle spielt. In der Infrarotregularisierung kommt der Hauptbeitrag zum Protonradius sogar von den Schleifenbeiträgen und nicht von den Kontaktgraphen. In dem hier verwendeten Renormierungsschema [GJW 99] sind die Schleifenbeiträge kleiner, weshalb sich auch die numerischen Werte für die Konstanten d_6 bzw. d_7 von d_6^{IR} bzw. d_7^{IR} aus der Infrarotregularisierung unterscheiden. Die Situation ist damit unterschiedlich zu der beim elektromagnetischen Formfaktor des Pions, dessen linearer Verlauf im Wesentlichen auf einen Kontaktgraphen zurückgeführt werden kann [GL 84, GL 85].

5.3 Die Sachs-Formfaktoren

Die Dirac- und Pauli-Formfaktoren sind die natürlichen Größen in jeder relativistischen Formulierung. Im nichtrelativistischen Grenzfall sind die natürlichen Größen allerdings durch die elektrischen und magnetischen Sachs-Formfaktoren, $G_E^N(t)$ und $G_M^N(t)$, gegeben, die folgendermaßen definiert sind:

$$G_E^N(t) = F_1^N(t) + \frac{t}{4m_N^2} F_2^N(t), \qquad G_M^N(t) = F_1^N(t) + F_2^N(t). \tag{5.28}$$

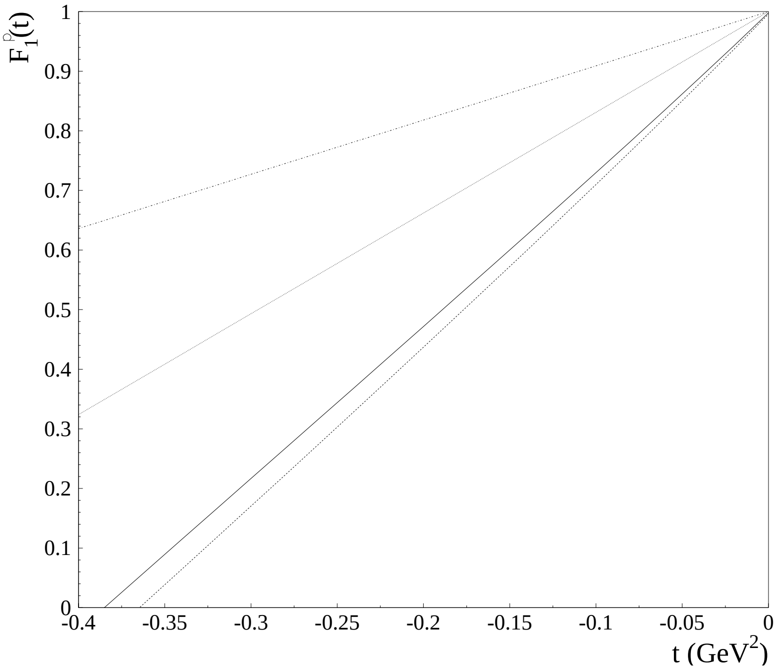

Abbildung 5.3: Der Pauli-Formfaktor des Protons bis zur Ordnung $\mathcal{O}(q^4)$ in den beiden Renormierungsschemen. Legende wie in Abbildung 5.2. Die gepunktete (strichpunktierte) Linie ist das Ergebnis ohne Schleifengraphen nach [GJW 99] ([BL 99]).

Sie besitzen eine einfache Interpretation im so genannten Breit-System, das in der elastischen Elektronenstreuung identisch mit dem Elektron-Nukleon-Schwerpunktsystem ist. Im Breit-System hat das Nukleon im Anfangszustand den Dreierimpuls $\vec{p}_i = -\vec{q}/2$, das Nukleon im Endzustand den Impuls $\vec{p}_f = \vec{q}/2$ und das ausgetauschte virtuelle Photon überträgt keine Energie, d.h. $q_0 = 0$. Die Matrixelemente lauten in diesem System:

$$\begin{aligned}
\langle N\left(\frac{\vec{q}}{2}\right)\left|J^0(0)\right| N\left(-\frac{\vec{q}}{2}\right)\rangle &= G_E(-\vec{q}^{\,2}) \\
\langle N\left(\frac{\vec{q}}{2}\right)\left|\vec{J}(0)\right| N\left(-\frac{\vec{q}}{2}\right)\rangle &= i\frac{\vec{\sigma}\times\vec{q}}{2m_N}G_M(-\vec{q}^{\,2}).
\end{aligned}$$

Die Bezeichnungen „elektrisch“ und „magnetisch“ für $G_E(t)$ und $G_M(t)$ werden jetzt klar, da im Breit-System G_E proportional zu J_0 und G_M proportional zu $\vec{J}$ ist und diese Formfaktoren am ehesten einer dreidimensionalen Fouriertransformierten der Ladungs- und Magnetisierungsverteilung entsprechen.

Dabei muss man noch Folgendes bedenken: Die Berechnung der elektromagnetischen Formfaktoren bis zur Ordnung $\mathcal{O}(q^4)$ im chiralen Zählschema liefert auf Grund der Definition aus Gl. (5.1) und der Tatsache, dass der Polarisationsvektor ϵ^μ des virtuellen Photons in Gl. (5.7) zur Ordnung $\mathcal{O}(q)$ gezählt wird, F_1 bis zur Ordnung $\mathcal{O}(q^3)$ und F_2 bis zur Ordnung $\mathcal{O}(q^2)$. Wenn man diese beiden Formfaktoren zu den Sachs-Formfaktoren kombiniert, so tritt eine Mischung der Ordnungen auf, s. Gl. (5.28). Wenn wir im Folgenden von der Berechnung der Sachs-Formfaktoren zur dritten bzw. vierten Ordnung sprechen, so meinen wir damit die Ordnung im chiralen Zählschema, bis zu der wir die Diagramme betrachten.

In Abbildung 5.4 sind die Sachs-Formfaktoren bis zur Ordnung $\mathcal{O}(q^3)$ dargestellt. Die Niederenergiekonstanten c_6 und c_7 sind wieder an die anomalen magnetischen Momente und die Konstanten d_6, d_7, e_{54} und e_{74} an die elektromagnetischen Radien angepasst worden. Die so bestimmten Werte sind in Tabelle 5.2 aufgelistet. Sie unterscheiden sich von denen aus Tabelle 5.1, da die Rechnung nur bis zur Ordnung $\mathcal{O}(q^3)$ geht.

	c_6	c_7	d_6	d_7	e_{54}	e_{74}
R	5.05	-0.14	-0.70	-0.49	0.18	1.23
IR	5.09	-0.21	0.50	-0.73	0.24	2.76

Tabelle 5.2: Werte für die einzelnen Niederenergiekonstanten in unserem Renormierungsschema (Index R) und in der Infrarotregularisierung (Index IR) für die $\mathcal{O}(q^3)$-Rechnung. Die Konstanten c_i sind in Einheiten von GeV^{-1}, die d_i in Einheiten von GeV^{-2} und die e_i in Einheiten von GeV^{-3} angegeben.

Bis zur Ordnung $\mathcal{O}(q^3)$ existiert auch ein Ergebnis aus der HBχPT [Ber+ 98]. In Abbildung 5.4 vergleichen wir dieses Ergebnis mit den $\mathcal{O}(q^3)$-Resultaten der relativistischen Rechnungen. Für das Proton stimmen die Sachs-Formfaktoren in den beiden relativistischen Rechnungen gut überein, während das HBχPT-Ergebnis eine kleine Abweichung zeigt. Dies stimmt auch noch für den magnetischen Formfaktor des Neutrons, aber der Verlauf des elektrischen Formfaktors des Neutrons unterscheidet sich in allen drei Methoden. Analog zum Dirac-Formfaktor des Neutrons spielen bei G_E^n die Beiträge von höheren Ordnungen eine entscheidende Rolle. Der Grund ist, dass sowohl G_E^n als auch F_1^n in dem dargestellten Bereich sehr klein sind. Das erkennt man auch, wenn man das $\mathcal{O}(q^4)$-Resultat für G_E^n in Abbildung 5.5 betrachtet. Sowohl in der Infrarotregularisierung als auch in unserem Renormierungsschema wird hier G_E^n für $t < -0.3$ GeV sogar

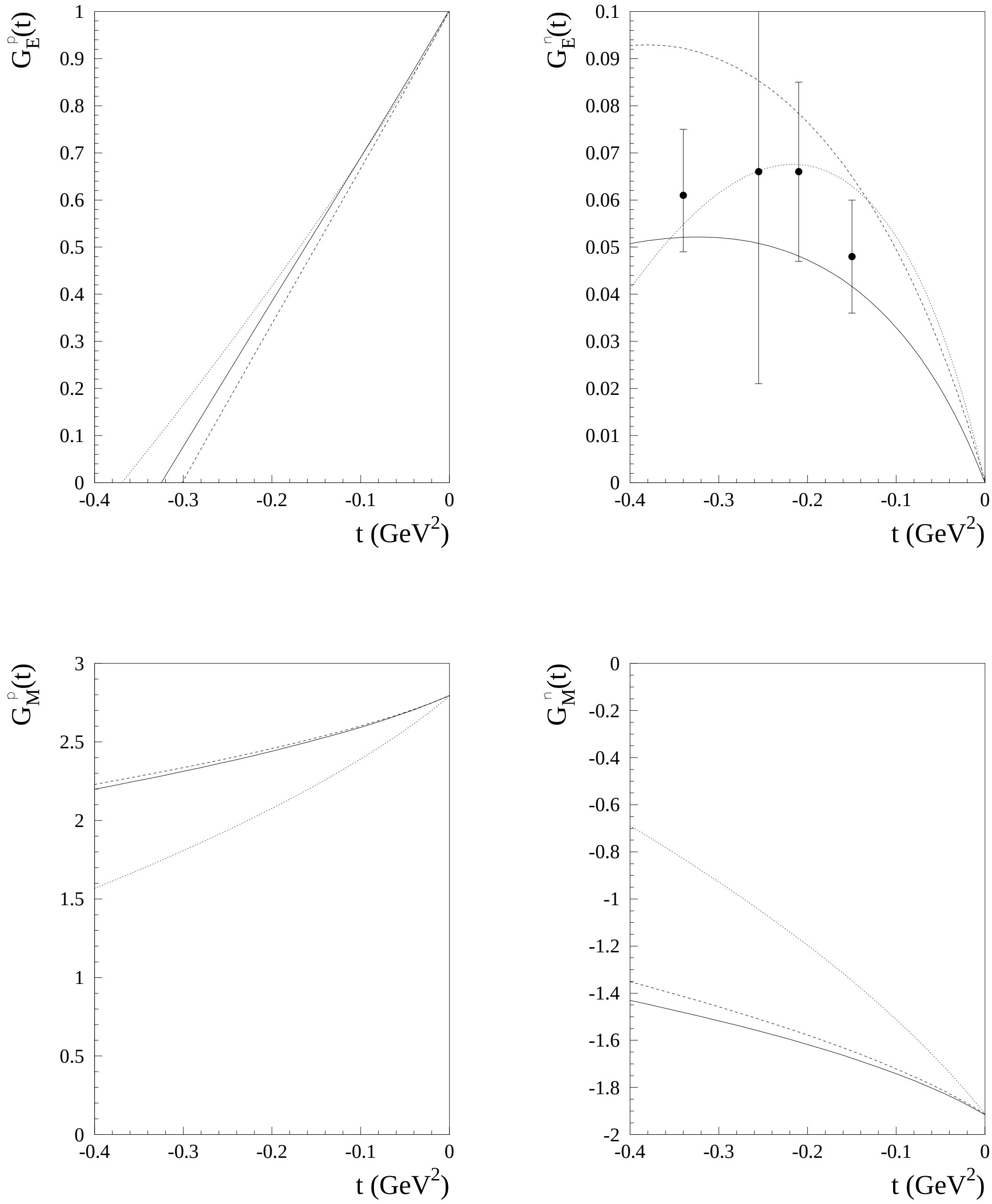

Abbildung 5.4: Die Sachs-Formfaktoren des Nukleons bis zur Ordnung $\mathcal{O}(q^3)$. Die durchgezogene Linie ist das Ergebnis nach [GJW 99], die gestrichelte Linie das Ergebnis in der Infrarotregularisierung und die gepunktete Linie ein Ergebnis aus der HBχPT [Ber+ 98]. Die experimentellen Daten für G_E^n sind [Ede+ 94, Her+ 99, Pas+ 99, Ost+ 99] entnommen.

negativ. Dies steht im Widerspruch zu den am MIT [Ede+ 94], am NIKHEF [Pas+ 99] und in Mainz [Her+ 99, Ost+ 99] gemessenen Datenpunkten für G_E^n, die in den Abbildungen 5.4 und 5.5 ebenfalls eingezeichnet sind. Die experimentellen Daten stimmen mit den Resultaten der Ordnung $\mathcal{O}(q^3)$ besser überein als mit den Resultaten der Ordnung $\mathcal{O}(q^4)$. Vergleicht man die $\mathcal{O}(q^4)$-Resultate aus Abbildung 5.5 mit den $\mathcal{O}(q^3)$-Resultaten aus Abbildung 5.4, so erkennt man, dass die Störungsreihe für den elektrischen Formfaktor des Protons am besten konvergiert.

Neben G_E^n ist in Mainz auch der magnetische Formfaktor des Neutrons, G_M^n, mit hoher Präzision gemessen worden [Ank+ 94, Ank+ 98, Kub+ 02]. Die experimentellen Werte sind auf den Dipol-Formfaktor G_D normiert, der durch

$$G_D(t) = \left(1 - \frac{t}{0.71\mathrm{GeV}^2}\right)^{-2} \tag{5.29}$$

gegeben ist. In Abbildung 5.6 vergleichen wir diese experimentellen Daten mit den $\mathcal{O}(q^3)$- und $\mathcal{O}(q^4)$-Resultaten des in dieser Arbeit verwendeten Renormierungsschemas. Wir erkennen, dass das $\mathcal{O}(q^3)$-Resultat über und das $\mathcal{O}(q^4)$-Resultat unter $\mu_n G_D$ liegt. Da eine $\mathcal{O}(q^4)$-Rechnung den magnetischen Sachs-Formfaktor G_M nur bis zur Ordnung $\mathcal{O}(q^2)$ liefert, haben wir in Abbildung 5.6 auch unser $\mathcal{O}(q^4)$-Ergebnis mit der linearen Näherung des Dipol-Formfaktors verglichen und eine relativ gute Übereinstimmung gefunden. Die neuen experimentellen Daten haben eine weitaus höhere Präzision als eine relativistische Einschleifenrechnung.

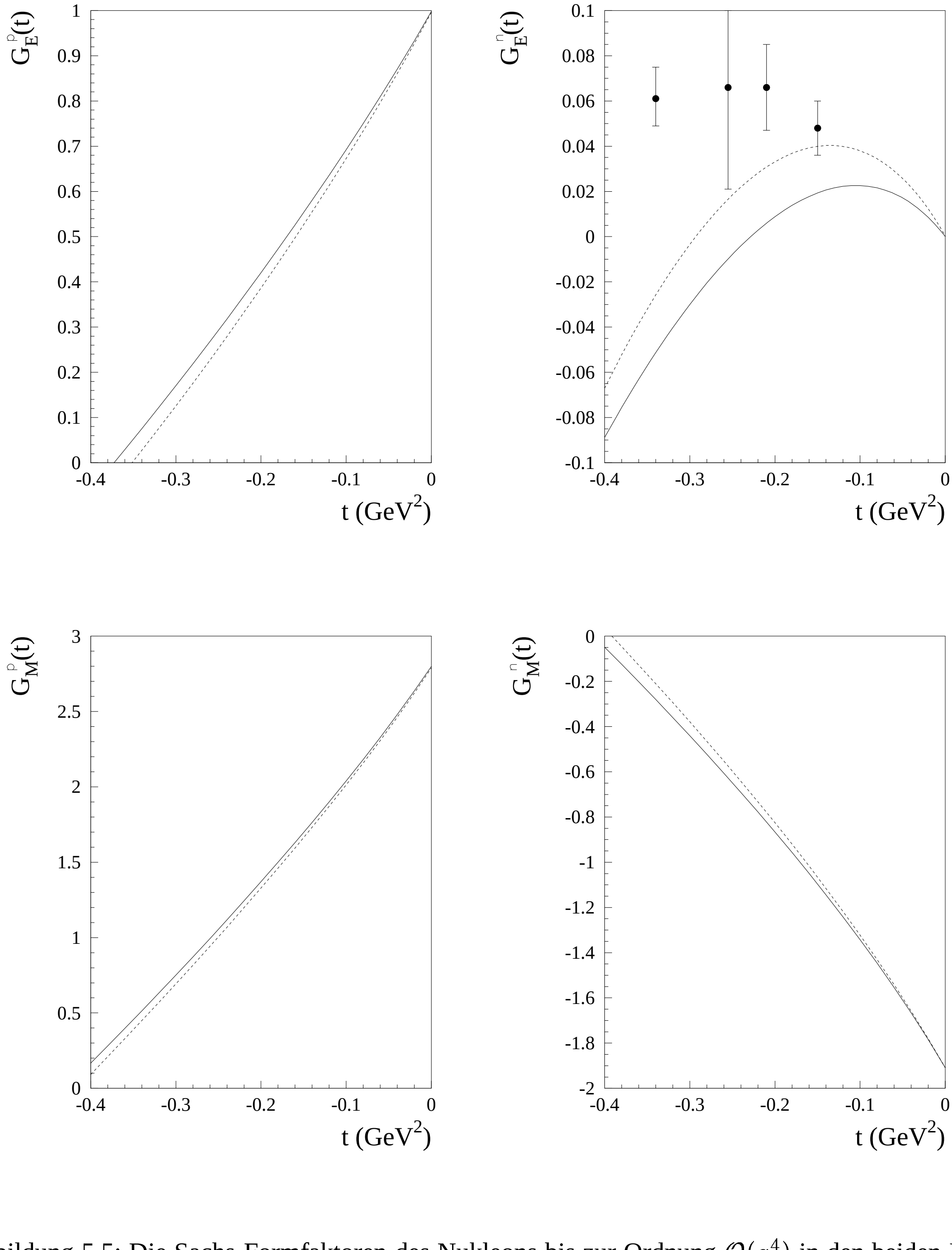

Abbildung 5.5: Die Sachs-Formfaktoren des Nukleons bis zur Ordnung $\mathcal{O}(q^4)$ in den beiden Renormierungsschemen. Die durchgezogene Linie ist das Ergebnis nach [GJW 99] und die gestrichelte Linie das Ergebnis in der Infrarotregularisierung. Die experimentellen Daten für G_E^n sind wieder [Ede+ 94, Her+ 99, Pas+ 99, Ost+ 99] entnommen.

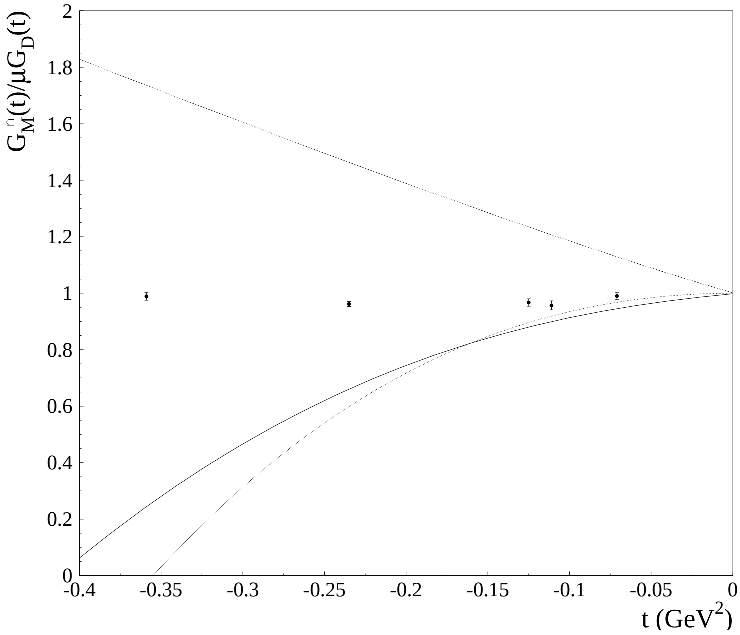

Abbildung 5.6: Der magnetische Formfaktor des Neutrons dividiert durch $\mu_n G_D$. Die durchgezogene Linie ist das $\mathcal{O}(q^4)$- und die gestrichelte Linie das $\mathcal{O}(q^3)$-Resultat nach [GJW 99]. Die gepunktete Linie ist die lineare Näherung des Dipol-Formfaktors, d.h. $(1 + 2t/(0.71\text{GeV}^2))/G_D(t)$. Die Datenpunkte sind [Ank+ 94, Ank+ 98, Kub+ 02] entnommen.

Kapitel 6

Die axialen Formfaktoren des Nukleons

6.1 Definition der axialen Formfaktoren

Neben den elektromagnetischen Formfaktoren existieren die so genannten axialen Formfaktoren, die über das Matrixelement des axialen Stromoperators $A^{\mu,\,i}(x)$ (Gl. 2.15) definiert sind[1]. Deshalb geben wir zuerst einige Eigenschaften des Operators $A^{\mu,\,i}(x)$ an, der selbstverständlich hermitesch ist, d.h. $A^{\dagger}_{\mu,\,i}(x) = A_{\mu,\,i}(x)$. Die Bezeichnung „Axialvektor" geht auf das Verhalten von $A^{\mu,\,i}(x)$ unter der Paritätstransformation zurück,

$$A^{\mu,\,i}(x) \overset{P}{\mapsto} -A^{i}_{\mu}(Px),$$

d.h. für jede Isospinkomponente i verhält sich der Dreiervektor $\vec{A}^{\,i}$ wie ein Axialvektor. Unter Ladungskonjugation verhält sich $A^{\mu,\,i}(x)$ wie folgt:

$$\begin{aligned} A^{\mu,\,i}(x) &\overset{C}{\mapsto} A^{\mu,\,i}(x), \quad i = 1, 3, \\ A^{\mu,\,i}(x) &\overset{C}{\mapsto} -A^{\mu,\,i}(x), \quad i = 2. \end{aligned}$$

Die Isospinkomponenten transformieren wie ein Isovektor, d.h.

$$\left[I^a, A^{\mu,\,b}(x)\right] = i\varepsilon^{abc} A^{\mu,\,c}(x),$$

wobei I^a die Elemente der Darstellung der Generatoren der Lie-Algebra $su(2)$ in der QCD sind.

Wertet man $A^{\mu}_{i}(x)$ zwischen den Zuständen des auslaufenden und einlaufenden Nukleons aus, so kann man dieses Matrixelement folgendermaßen parametrisieren [EW 88]:

$$\langle N(p_f)|A^{\mu}_{i}(0)|N(p_i)\rangle = \bar{u}(p_f)\left[\gamma^{\mu} G_A(t) + \frac{q^{\mu}}{2m_N} G_P(t) + i\frac{\sigma^{\mu\nu} q_{\nu}}{2m_N} G_T(t)\right]\gamma_5 \frac{\tau_i}{2} u(p_i), \quad (6.1)$$

wobei $q^{\mu} = (p_f - p_i)^{\mu}$ und $t = q^2 = (p_f - p_i)^2$ ist. Die Form von Gl. (6.1) kann ganz allgemein mit Hilfe der Lorentzinvarianz, der Isospinerhaltung und dem Verhalten von $A^{\mu}_{i}(x)$ unter den diskreten Symmetrien, d.h. der Ladungskonjugation C und der Raumspiegelung P, abgeleitet werden. Man nennt $G_A(t)$ den axialen Formfaktor, G_P den induzierten pseudoskalaren Formfaktor und G_T den induzierten pseudotensoriellen Formfaktor. Für den Grenzfall der perfekten Isospininvarianz, $m_u = m_d$, ist das Matrixelement auch invariant unter der $\mathcal{G}$-Konjugation, d.h. invariant unter der

[1] Die Bezeichnungsweise ist etwas ungenau, da man einen dieser Formfaktoren als axialen Formfaktor G_A bezeichnet.

gleichzeitigen Anwendung der Ladungskonjugation und einer Drehung im Isospinraum um $-180°$ um die 2-Achse,

$$\mathcal{G} = \mathcal{C} \exp(i\pi I_2) \,.$$

Nimmt man an, dass das Matrixelement auch unter dieser $\mathcal{G}$-Konjugation erhalten ist, so verschwindet der induzierte pseudotensorielle Formfaktor G_T. Man sagt auch, dass G_T nur Beiträge von Strömen der zweiten Klasse erhält (engl.: *second-class currents*) [Wei 58], die wir in dieser Arbeit nicht untersuchen. In Experimenten konnten bisher obere Grenzen für G_T bestimmt werden [Wil 00].

6.2 Ergebnisse für die axialen Formfaktoren

Das Matrixelement in Gl. (6.1) steht mit der Amplitude des axialen Stroms, $\mathcal{M}^{\mu}_{A,i}$, wie folgt in Verbindung:

$$\mathcal{M}_{A,i} = i\epsilon_{\mu,A}\langle p_f, s_f | A_i^{\mu}(0) | p_i, s_i\rangle, \tag{6.2}$$

wobei wir analog zum elektromagnetischen Polarisationsvektor ϵ den axialen Polarisationsvektor ϵ_A eingeführt haben, der zur Ordnung $\mathcal{O}(q)$ gezählt wird. Zur Berechnung dieser Formfaktoren unterteilen wir die Diagramme in Beiträge zum einteilchenirreduziblen Vertex und Beiträge zum Pionpolgraph. Die Beiträge zum einteilchenirreduziblen Vertex stammen von den Diagrammen, bei denen der axiale Strom direkt an die Nukleonen koppelt (s. Abb. 6.1), und die Pionpolgraphbeiträge stammen von Diagrammen, bei denen der axiale Strom zuerst an ein Pion koppelt, das dann propagiert und anschließend an die Nukleonen koppelt (s. Abb. 6.2).

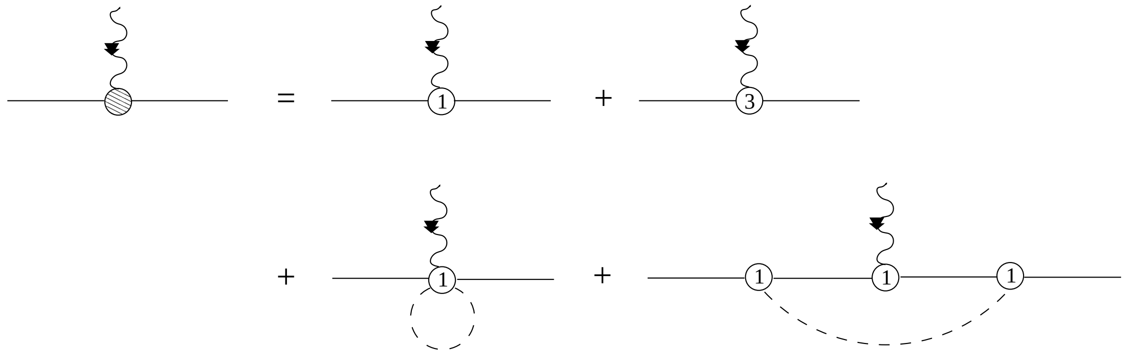

Abbildung 6.1: Einteilchenirreduzibler Vertex des axialen Stroms. Die geschlängelte Linie mit dem Doppelpfeil kennzeichnet den axialen Strom.

Der Beitrag zum axialen Formfaktor kommt ausschließlich vom einteilchenirreduziblen Vertex des axialen Stroms (Abb. 6.1):

$$\begin{aligned} G_A(t) &= \mathring{g}_A + 4m_\pi^2 \frac{b_{17}}{(4\pi F)^2} + \frac{1}{6} g_A \langle r^2\rangle_A \, t - \frac{g_A}{F^2} I_\pi \\ &\quad + \frac{g_A^3}{4F^2}\Big[-2I_N + I_\pi - 2m_\pi^2 I_{\pi N}(m_N^2) - 4m_N^2 I_{NN}(t) - 4m_N^2 m_\pi^2 I_{\pi NN}(t) \\ &\qquad + 8m_N^2 I^{(00)}_{\pi NN}(t)\Big] \,. \end{aligned} \tag{6.3}$$

Dabei haben wir die Niederenergiekonstante b_{23} durch den axialen Radius ausgedrückt:

$$b_{23} = -\frac{(4\pi F_\pi)^2}{6} g_A \langle r^2\rangle_A. \tag{6.4}$$

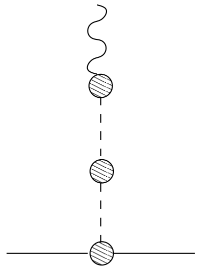

Abbildung 6.2: Pionpolgraph des axialen Stroms, bestehend aus drei renormierten Bausteinen, der Kopplung des axialen Stroms an das Pion, dem Pionpropagator und dem πNN-Vertex.

Zur Renormierung des axialen Formfaktors müssen wir diesen noch mit der Nukleonrenormierungskonstante multiplizieren und ein geeignetes Renormierungsschema verwenden (s. Kapitel 3). In dem hier verwendeten Schema [GJW 99] ist die Nukleonrenormierungskonstante durch Gl. (3.44) gegeben und es wird zusätzlich zu den divergenten $\widetilde{MS}$-Abzugstermen noch der endliche Term

$$-\frac{g_A^3 m_N^2}{16\pi^2 F^2}$$

abgezogen. Er wird durch die Konstante $\mathring{g}_A$ erzeugt:

$$\mathring{g}_A = \mathring{g}_A^R + \frac{g_A^2 m_N^2}{16\pi^2 F^2}. \tag{6.5}$$

Die axiale Kopplungskonstante g_A ist als der Wert des axialen Formfaktors an der Stelle $t = 0$ definiert. Sie lautet in diesem Renormierungsschema:

$$\begin{aligned} g_A^R &= \mathring{g}_A^R + 4m_\pi^2 \frac{b_{17}}{(4\pi F)^2} - \frac{g_A}{F^2} I_\pi^r - \frac{g_A^3}{4F^2}\left[8I_\pi^r + m_\pi^2 I_{\pi N}^r(m_N^2) + m_\pi^4 I_{\pi NN}(0) + \frac{13m_\pi^2}{16\pi^2}\right] \\ &\quad + \frac{9g_A^3 m_\pi^3}{64\pi F^2 m_N}. \end{aligned} \tag{6.6}$$

Ausgedrückt durch die Kopplungskonstante g_A lautet der axiale Formfaktor jetzt:

$$G_A(t) = g_A^R + \frac{1}{6} g_A \langle r^2 \rangle_A t + \frac{g_A^3}{4F^2} F(t), \tag{6.7}$$

wobei $F(t)$ gegeben ist durch

$$\begin{aligned} F(t) &= -m_\pi^2 I_{\pi N}^r(m_N^2) - 4m_N^2 m_\pi^2 I_{\pi NN}(t) - 4m_N^2 I_{NN}^r(t) + 8m_N^2 I_{\pi NN}^{(00)}(t) \\ &\quad + m_\pi^4 I_{\pi NN}(0) + \frac{1}{16\pi^2}\left(4m_N^2 + m_\pi^2\right) \end{aligned}$$

und gerade so konstruiert worden ist, dass $F(0) = 0$ ist. Der induzierte pseudoskalare Formfaktor erhält Beiträge sowohl vom einteilchenirreduziblen Vertex als auch vom Pionpolgraphen des axialen Stroms. Der einteilchenirreduzible Vertex liefert den folgenden Beitrag zu $G_P(t)$

$$G_P^{\mathrm{irr}}(t) = -\frac{2}{3} m_N^2 g_A \langle r^2 \rangle_A + \frac{8m_N^4 g_A^3}{F^2} I_{\pi NN}^{(qq)}(t), \tag{6.8}$$

wobei hier keine zusätzlichen Abzugsterme notwendig sind, da Gl. (6.8) bereits mit der richtigen Ordnung startet. Auf Grund des Integrals $I_{\pi NN}^{(qq)}$ könnte man vermuten, dass Gl. (6.8) einen Pol bei

$t = 0$ besitzt. Dies ist allerdings nicht der Fall, da in der im Anhang C angegebenen Gl. (C.52) der Zähler im Grenzfall $t \to 0$ ebenfalls verschwindet.

Der Pionpolgraph besteht aus der Kopplung des axialen Stroms an die Pionen, dem Pionpropagator und dem πNN-Vertex. Wir renormieren als Nächstes jede dieser Komponenten einzeln. Die Ergebnisse können mit denen vom Myoneinfang durch ein Proton in [Fea+ 97] verglichen werden, da unsere Vorgehensweise analog zu [Fea+ 97] ist.

Bezeichnen wir die Selbstenergieeinschübe mit $-i\Sigma(p^2)$, so gilt analog zu Gl. (3.23) für den vollen Pionpropagator [CL 84]:

$$i\Delta_\pi(p^2) = \frac{i}{p^2 - m_{\pi,0}^2 - \Sigma(p^2) + i\varepsilon}, \tag{6.9}$$

wobei $m_{\pi,0}^2$ die nackte (nicht renormierte) Pionmasse ist. Bis zur Ordnung $\mathcal{O}(q^4)$ erhält $\Sigma(p^2)$ Beiträge von zwei Diagrammen, nämlich dem Schleifendiagramm mit $\mathcal{L}_{\pi\pi}^{(2)}$ und dem Kontaktdiagramm von $\mathcal{L}_{\pi\pi}^{(4)}$ (s. Abb. 6.3). Die physikalische Pionmasse ist als Position des Pols des Propaga-

Abbildung 6.3: Selbstenergiebeiträge zum Pionpropagator.

tors definiert. Wir erhalten für m_π^2 bis zur Ordnung $\mathcal{O}(q^4)$:

$$m_\pi^2 = m_{\pi,0}^2 + \Sigma(m_\pi^2) = m_{\pi,0}^2 \left[1 + \frac{2m_\pi^2}{F^2}\left(l_3^r + \frac{1}{32\pi^2}\ln\left(\frac{m_\pi}{m_N}\right)\right)\right]. \tag{6.10}$$

Die Wellenfunktionsrenormierungskonstante des Pions ist gegeben durch[2]

$$Z_\pi = \frac{1}{1 - \Sigma'(m_\pi^2)} = 1 - \frac{2m_\pi^2}{F^2}\left[l_4^r + \frac{1}{24\pi^2}\left(R - \ln\left(\frac{m_\pi}{m_N}\right)\right)\right], \tag{6.11}$$

und die renormierten Konstanten l_3^r und l_4^r sind gegeben durch

$$l_3^r = l_3 + \frac{R}{64\pi^2}, \qquad l_4^r = l_4 - \frac{R}{16\pi^2}.$$

Entwickeln wir $\Sigma(p^2)$ um $p^2 = m_\pi^2$ und multiplizieren den Propagator aus Gl. (6.9) mit Z_π^{-1}, so erhalten wir das Ergebnis, dass bis zu der betrachteten Ordnung der renormierte Pionpropagator die Form des freien Propagators hat, allerdings mit der physikalischen Pionmasse aus Gl. (6.10).

Zur Berechnung der Kopplung des axialen Stroms an das Pion muss man die in Abbildung 6.4 gezeigten Diagramme berechnen.

Wenn wir den einlaufenden axialen Strom in Analogie zum elektromagnetischen Strom mit ϵ_A bezeichnen, so lautet der Ausdruck für den renormierten, d.h. mit $\sqrt{Z_\pi}$ multiplizierten Vertex

$$\epsilon_A \cdot qF\delta_{ij}, \tag{6.12}$$

[2] Die Form von Z_π hängt davon ab, welches $\mathcal{L}_4$ und welche Parametrisierung für U benutzt wird. Wir verwenden $\mathcal{L}_4$ aus Gl. (2.31) und für U die Exponentialdarstellung (s. Gl. (2.21)).

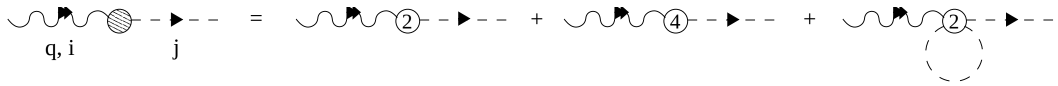

Abbildung 6.4: Renormierter Vertex für die Kopplung des axialen Stroms an ein Pion.

wobei die physikalische Pionzerfallskonstante gegeben ist durch:

$$F = F_0 \left[1 + \frac{m_\pi^2}{F^2} l_4^r - \frac{m_\pi^2}{8\pi^2 F^2} \ln \left(\frac{m_\pi}{m_N} \right) \right]. \tag{6.13}$$

Zur Berechnung des Pion-Nukleon-Vertex bis zur Ordnung $\mathcal{O}(q^4)$ müssen wir die in Abbildung 6.5 gezeigten Diagramme berechnen. Für ein Pion mit Isospinindex i erhalten wir das folgende Ergebnis:

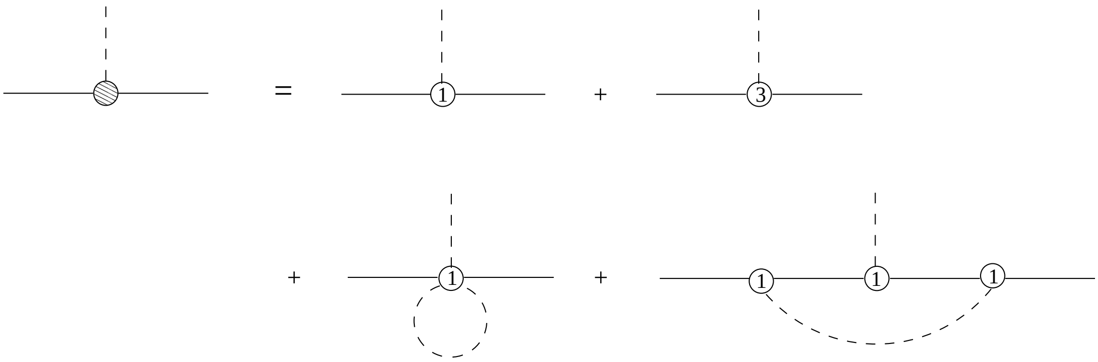

Abbildung 6.5: Pion-Nukleon-Vertex bis zur Ordnung $\mathcal{O}(q^4)$.

$$\begin{aligned} &-\Big[\frac{\mathring{g}_A}{F_0} m_N + \frac{4 m_\pi^2 m_N}{F} \frac{b_{17}}{(4\pi F)^2} + g_{\pi NN} \Delta - \frac{g_A m_N}{3F^3} I_\pi \\ &- \frac{g_A^3 m_N}{4F^3} \left(2 I_N + I_\pi + 4 m_N^2 m_\pi^2 I_{\pi NN}(t) + 4 m_N^2 I_{NN}(t) \right) \Big] \gamma_5 \tau_i, \end{aligned} \tag{6.14}$$

wobei wir die hier auftauchende Konstante b_{19} durch die im nächsten Kapitel diskutierte Goldberger-Treiman-Diskrepanz Δ [Fea+ 97] ausgedrückt haben:

$$b_{19} = -\frac{8\pi^2 F_\pi^3}{m_N m_\pi^2} g_{\pi NN} \Delta, \qquad \text{mit} \quad \Delta = 1 - \frac{m_N g_A}{F_\pi g_{\pi NN}}. \tag{6.15}$$

Für die Renormierung müssen wir mit $\sqrt{Z_\pi} Z_N$ multiplizieren und den endlichen Term

$$\frac{g_A^3 m_N^3}{16\pi^2 F^2}$$

zusätzlich abziehen, der wieder mit Hilfe von Gl. (6.5) durch die Konstante $\mathring{g}_A$ absorbiert werden kann.

Für den induzierten pseudoskalaren Formfaktor erhalten wir aus dem Pionpolgraphen des axialen Stroms (Abb. 6.2):

$$
\begin{aligned}
G_P^{\mathrm{Pol}}(t) &= -\frac{4m_N F g_{\pi NN}}{t-m_\pi^2} + \frac{g_A^3 m_N^2}{F^2(t-m_\pi^2)}\Big[2I_\pi^r - m_\pi^2 I_{\pi N}^r(m_N^2) + 4m_N^2 m_\pi^2 I_{\pi NN}(t) \\
&\quad + 4m_N^2 I_{NN}^r(t) - m_\pi^4 I_{\pi NN}(0) - \frac{1}{16\pi^2}\left(4m_N^2 + m_\pi^2\right)\Big], \qquad (6.16)
\end{aligned}
$$

wobei wir hier von Gl. (6.6) Gebrauch gemacht haben. Man beachte auch, dass in dem Ausdruck für den Pion-Nukleon-Vertex in Gl. (6.14) die Konstante F_0 auftaucht, die nicht identisch mit der physikalischen Pionzerfallskonstante F ist, d.h. wir haben auch Gl. (6.13) benützt. Der induzierte pseudoskalare Formfaktor setzt sich aus der Summe von $G_P^{\mathrm{Pol}}(t)$ und $G_P^{\mathrm{irr}}(t)$ (Gl. (6.8)) zusammen, wobei die Pionpolbeiträge gegenüber den Beiträgen zum einteilchenirreduziblen Vertex dominieren.

Der graphische Verlauf der beiden Formfaktoren $G_A(t)$ und $G_P(t)$ ist in Abbildung 6.6 dargestellt. Dabei haben wir das hier verwendete Renormierungsschema [GJW 99] mit der Infrarotregularisierung [BL 99] verglichen und im graphischen Verlauf fast keine Unterschiede zwischen diesen beiden Methoden festgestellt. Wir erkennen, dass der axiale Formfaktor $G_A(t)$ fast komplett durch $g_A + 1/6 g_A \langle r^2\rangle_A t$ bestimmt ist, wobei unser Ergebnis im Gegensatz zur Infrarotregularisierung eine leichte Abweichung davon zeigt. Der induzierte pseudoskalare Formfaktor $G_P(t)$ wird in beiden Renormierungsschemen durch den Term $-4m_N F g_{\pi NN}/(t-m_\pi^2)$ dominiert. Zur Berechnung der axialen Formfaktoren haben wir die folgenden empirischen Werte verwendet (s. [PDG 02] für g_A und $g_{\pi NN}$ und [Lie+ 99] für $\sqrt{\langle r^2\rangle_A}$),

$$
g_A = 1.2670(35), \qquad \sqrt{\langle r^2\rangle_A} = 0.670(23)\,\mathrm{fm}, \qquad g_{\pi NN} = 13.2(1).
$$

Die Zahlen in Klammern geben die Fehler in den letzten Ziffern an, d.h. $13.2(1)$ steht z.B. für 13.2 ± 0.1.

6.3 Der Pion-Nukleon-Formfaktor

Als Nächstes führen wir den Pion-Nukleon-Formfaktor ein, der über das Matrixelement der pseudoskalaren Dichte $P_i(x)$definiert ist, ausgewertet zwischen einem Anfangs- und Endzustand des Nukleons:

$$
2\hat{m}\langle p_f|P_i(0)|p_i\rangle = \frac{m_\pi^2 F}{m_\pi^2 - t} G_\pi(t) i\bar{u}(p_f)\gamma_5\tau_i u(p_i). \qquad (6.17)
$$

Bei der Berechnung dieses Formfaktors kann man die auftretenden Diagramme in einen Kontaktgraphen, bei dem die pseudoskalare Quelle direkt an die Nukleonen koppelt, und Pionpolgraphen mit einem propagierenden Pion aufspalten. Der Kontaktgraph wird vom b_{19}-Term der Lagrange-Dichte $\mathcal{L}_{\pi N}^{(3)}$ erzeugt:

$$
G_\pi^{\mathrm{Kont}}(t) = \frac{t-m_\pi^2}{m_\pi^2} g_{\pi NN}\Delta. \qquad (6.18)
$$

Auch die Berechnung der Beiträge zum Pionpolgraphen ist leicht, da man auf den πNN-Vertex zurückgreifen kann. Wir erhalten in dem von uns verwendeten Renormierungsschema [GJW 99] mit der in Gl. (6.6) definierten axialen Kopplungskonstante g_A:

$$
\begin{aligned}
G_\pi^{\mathrm{Pol}}(t) &= \frac{m_N g_A}{F} + g_{\pi NN}\Delta - \frac{g_A^3 m_N}{4F^3}\Big[2I_\pi^r - m_\pi^2 I_{\pi N}^r(m_N^2) + 4m_N^2 m_\pi^2 I_{\pi NN}(t) \\
&\quad + 4m_N^2 I_{NN}^r(t) - m_\pi^4 I_{\pi NN}(0) - \frac{1}{16\pi^2}\left(4m_N^2 + m_\pi^2\right)\Big]. \qquad (6.19)
\end{aligned}
$$

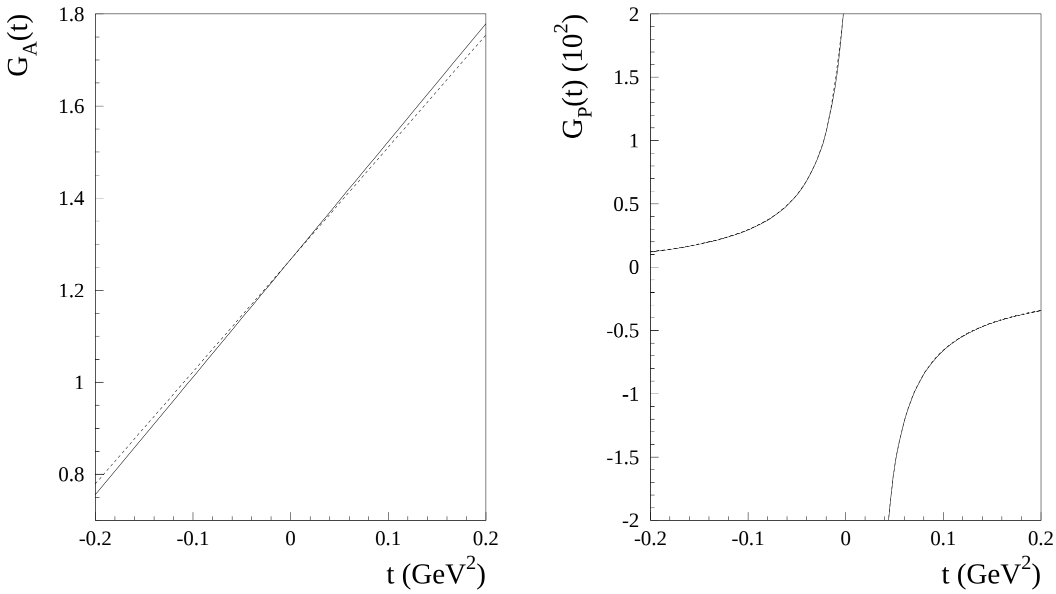

Abbildung 6.6: Die axialen Formfaktoren des Nukleons bis zur Ordnung $\mathcal{O}(q^4)$ in der χPT. Die durchgezogene Linie ist unser Ergebnis und die gestrichelte Linie das Ergebnis der Infrarotregularisierung. Man erkennt, dass $G_P(t)$ durch den Pol an der Stelle $t = m_\pi^2 \approx 0.02\mathrm{GeV}^2$ dominiert ist.

Der graphische Verlauf des Pion-Nukleon-Formfaktors $G_\pi(t)$ ist in Abbildung 6.7 dargestellt, in der wir wieder unsere Ergebnisse [GJW 99] mit denen aus der Infrarotregularisierung [BL 99] verglichen haben. Der Unterschied ist sehr klein und in der Abbildung 6.7 nicht zu erkennen. Der Pion-Nukleon-Formfaktor bis zur Ordnung $\mathcal{O}(q^4)$ wird fast komplett durch den Term $m_N g_A/F + g_{\pi NN}\Delta t/m_\pi^2$ wiedergegeben, so dass wir erwarten, dass die Korrekturen von höheren Ordnungen sehr klein sind. An der Stelle $t = m_\pi^2$ ist G_π mit der Pion-Nukleon-Kopplungskonstante identisch, $G_\pi(m_\pi^2) = g_{\pi NN}$.

Mit Hilfe der PCAC-Relation in Abwesenheit der elektromagnetischen Wechselwirkung kann man eine Beziehung zwischen den axialen Formfaktoren $G_A(t)$ und $G_P(t)$ und dem Pion-Nukleon-Formfaktor $G_\pi(t)$ herstellen:

$$2m_N G_A(t) + \frac{t}{2m_N} G_P(t) = 2\frac{m_\pi^2 F_\pi}{m_\pi^2 - t} G_\pi(t). \tag{6.20}$$

Die Herleitung von Gl. (6.20) ist im Anhang F angegeben. Unsere Ausdrücke für die Formfaktoren erfüllen selbstverständlich Gl. (6.20) und damit die Bedingung, die aus der chiralen Symmetrie hergeleitet worden ist. Man kann dies leicht überprüfen, indem man die folgende Beziehung verwendet,

$$4m_N^2 \left(I_{\pi NN}^{(00)}(t) + t I_{\pi NN}^{(00)}(t) \right) = -I_\pi(0) + I_{\pi N}(m_N^2).$$

Betrachtet man in Gleichung (6.20) den Grenzfall $t \to 0$, so erhält man im chiralen Grenzfall die so genannte Goldberger-Treiman-Relation [GT 58]:

$$2\mathring{m}_N \mathring{g}_A = 2F_0 \mathring{g}_{\pi NN}. \tag{6.21}$$

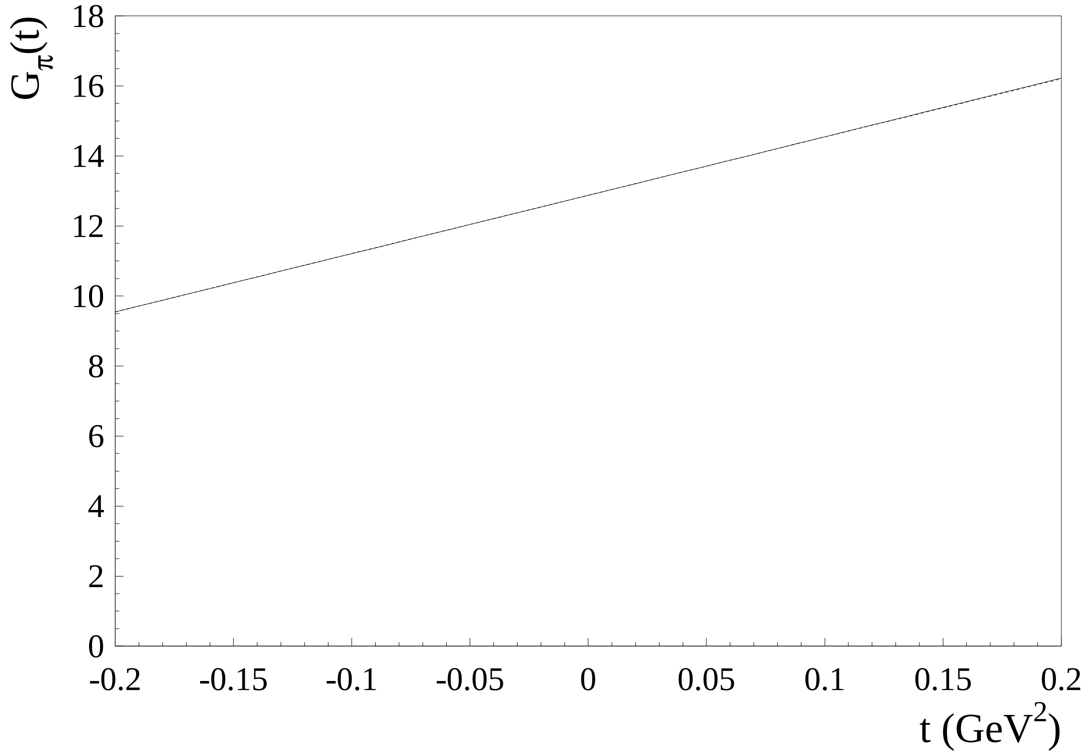

Abbildung 6.7: Der Pion-Nukleon-Formfaktor $G_\pi(t)$ bis zur Ordnung $\mathcal{O}(q^4)$ in der χPT. Der Unterschied zwischen den Renormierungsschemen von [GJW 99] und der Infrarotregularisierung [BL 99] ist nicht zu erkennen.

Dabei haben wir lediglich verwendet, dass der Pion-Nukleon-Formfaktor an der Stelle $t = m_\pi^2$ gerade die Pion-Nukleon-Kopplungskonstante liefert, $G_\pi(m_\pi^2) = g_{\pi NN}$ und $G_A(0) = g_A$ ist. Die Relation aus Gl. (6.21) ist insofern bemerkenswert, da sie die Pion-Nukleon-Kopplungskonstante der starken Wechselwirkung, $g_{\pi NN}$, mit der axialen Kopplungskonstante der schwachen Wechselwirkung, g_A, verbindet. Die experimentell gemessenen Werte erfüllen diese Relation mit einer Genauigkeit, die besser als 3% ist. Die Näherung, die man bei der Goldberger-Treiman-Relation macht, ist, dass man $G_\pi(0) \approx G_\pi(m_\pi^2) = g_{\pi NN}$ setzt.

Wir weisen darauf hin, dass der Pion-Nukleon-Formfaktor nicht die darstellungsabhängige Funktion ist, die am πN-Vertex steht und keine Observable ist. Die beiden Größen stimmen nur für $t = m_\pi^2$ überein.

Kapitel 7

Der axiale Formfaktor in der Pionelektroproduktion

In diesem Kapitel wollen wir die Frage klären, ob der axiale Formfaktor des Nukleons, $G_A(t)$, in der Pionelektroproduktion gemessen werden kann[1]. Kürzlich hat es eine kontroverse Diskussion über genau diese Frage gegeben [Hab 00, Gui 01, BKM 01, Hab 01, Tru 01] und unser Anliegen ist es gewesen, die in diesem Zusammenhang gemachten Aussagen zu überprüfen. Dazu haben wir ein phänomenologisches Modell verwendet, das einerseits alle Symmetrien der Lagrange-Dichte der QCD respektiert, d.h. insbesondere die chirale Symmetrie, und alle relevanten Terme produziert, andererseits relativ einfach nachzuvollziehende Rechnungen enthält [FS 02]. Wir kommen zu dem Schluss, dass der axiale Formfaktor tatsächlich in der Pionelektroproduktion gemessen werden kann. Dies ist im Widerspruch zu dem in [Hab 00] gefundenen Ergebnis. Wie in [Hab 01] gefordert, stellen wir präzise heraus, welcher der in [Hab 00] aufgeführten Schritte fehlerhaft ist. In den in diesem Kapitel diskutierten Reaktionen verwenden wir die Konvention, dass das einlaufende Photon den Viererimpuls k^μ, das ein- bzw. auslaufende Nukleon den Impuls p_i bzw. p_f und das zweite Teilchen im Endzustand (Pion, axialer Strom, pseudoskalare Dichte) den Impuls q_μ und Isospinindex i hat.

7.1 Das verwendete phänomenologische Modell

Das Modell besteht im Wesentlichen aus den in Kapitel 2 vorgestellten Lagrange-Dichten der chiralen Störungstheorie, die bereits alle Terme enthalten, die mit den geforderten Symmetrien verträglich sind. In der niedrigsten Ordnung sind das die mesonische Lagrange-Dichte $\mathcal{L}_{\pi\pi}^{(2)}$ aus Gl. (2.29) und die Pion-Nukleon-Lagrange-Dichte $\mathcal{L}_{\pi N}^{(1)}$ aus Gl. (2.37). Diese beiden Lagrange-Dichten reproduzieren gerade die mit den Methoden der Stromalgebra hergeleiteten Ergebnisse. Sie geben allerdings keine Auskunft über die innere Struktur des Nukleons. Deshalb benötigen wir auch die Lagrange-Dichten der beiden nächsthöheren Ordnungen. Allerdings tragen nicht alle Terme dieser Lagrange-Dichten zu den hier diskutierten Amplituden bei. Von der Pion-Nukleon-Lagrange-Dichte der Ordnung $\mathcal{O}(q^2)$, $\mathcal{L}_{\pi N}^{(2)}$ (Gl.(2.39)), benötigen wir nur die beiden Terme, die proportional zu den Niederenergiekonstanten c_6 und c_7 sind. Diese Konstanten können mit dem anomalen, isovektoriellen und isoskalaren magnetischen Moment des Nukleons im chiralen Grenzfall in Verbindung gebracht werden, wie man an Hand der Ausdrücke für die elektromagne-

[1]Die Theorie der Pionelektroproduktion wird an dieser Stelle nicht wiederholt. Sie ist im Anhang E noch einmal zusammengefasst, in dem auch weitere Literaturangaben zu diesem Thema zu finden sind.

tischen Formfaktoren mit $F_2^N(0) = \kappa = \frac{1}{2}\left(\kappa^s + \tau_3\kappa^v\right)$ erkennt:

$$c_6 = \kappa^v, \qquad c_7 = \frac{1}{2}\kappa^s. \tag{7.1}$$

Von $\mathcal{L}_{\pi N}^{(3)}$ (Gl. (2.40)) benötigen wir nur die drei Terme, die proportional zu b_{17}, b_{19} und b_{23} sind. Eine Interpretation dieser Konstanten werden wir im Zusammenhang mit den Ergebnissen für die axialen Formfaktoren des Nukleons geben.

In unserem phänomenologischen Modell verwenden wir also die Lagrange-Dichten der chiralen Störungstheorie. Wir berechnen allerdings keine Schleifengraphen, da diese nur chirale Korrekturen zu den Ergebnissen liefern und keine für die Diskussion in diesem Kapitel relevanten Terme erzeugen. Insbesondere erfüllen die Schleifenbeiträge unabhängig von den Baumgraphen die Konsistenzbedingungen der chiralen Ward-Identitäten. In diesem Zusammenhang weisen wir darauf hin, dass im Rahmen einer Einschleifenrechnung bis zur Ordnung $\mathcal{O}(q^3)$ in der HBχPT bereits ein Ergebnis für die Pionelektroproduktionsamplitude existiert [BKM 92], das auch die weggelassenen chiralen Korrekturen beinhaltet. Die Vernachlässigung dieser chiralen Korrekturen macht die Rechnungen sehr übersichtlich und leicht nachzuvollziehen.

7.2 Ergebnisse für die axialen Formfaktoren des Nukleons

Als Erstes wenden wir unser Modell auf die axialen Formfaktoren des Nukleons und den Pion-Nukleon-Formfaktor an. Die Definition und Diskussion dieser Formfaktoren ist bereits in Kapitel 6 behandelt worden (s. Gl. (6.1) und Gl. (6.17)), so dass wir hier nur noch die Ergebnisse angeben, die wir in unserem Modell erhalten:

$$G_A(t) = \mathring{g}_A + 4m_\pi^2 \frac{b_{17}}{(4\pi F)^2} - \frac{b_{23}}{(4\pi F)^2}\, t, \tag{7.2}$$

$$G_P(t) = 4m_N^2 \frac{b_{23}}{(4\pi F)^2} - \frac{4m_N^2}{t - m_\pi^2}\left(\mathring{g}_A F_0 + 4m_\pi^2 \frac{b_{17}}{(4\pi F)^2} - 2m_\pi^2 \frac{b_{19}}{(4\pi F)^2}\right), \tag{7.3}$$

$$G_\pi(t) = \frac{\mathring{g}_A}{F} m_N + \frac{4m_\pi^2 m_N}{F}\frac{b_{17}}{(4\pi F)^2} - \frac{2m_N t}{F}\frac{b_{19}}{(4\pi F)^2}. \tag{7.4}$$

Betrachten wir das Ergebnis für $G_A(t)$, so erkennen wir, dass die Niederenergiekonstante b_{17} eine Korrektur zu $\mathring{g}_A$ liefert, der axialen Kopplungskonstante im chiralen Grenzfall:

$$G_A(0) = g_A = \mathring{g}_A + 4m_\pi^2 \frac{b_{17}}{(4\pi F)^2}. \tag{7.5}$$

Dabei ist Folgendes zu beachten. Der Ausdruck für den axialen Formfaktor $G_A(t)$ des Nukleons ist im Rahmen der chiralen Störungstheorie bis zur Ordnung $\mathcal{O}(q^4)$ in Kapitel 6 bereits berechnet worden. Wir haben gesehen, dass bis zu dieser Ordnung die Konstante g_A neben dem b_{17}-Term noch weitere Korrekturen erhält, die von den Schleifen stammen (Gl. (6.6)). Der Ausdruck in Gl. (7.5) für b_{17} ist deshalb nur im Rahmen der phänomenologischen, d.h. Baumgraphen-Näherung gültig.

Die Konstante b_{19} kann dann durch den Wert des Pion-Nukleon-Formfaktors an der Stelle $t = 0$ bestimmt werden:

$$G_\pi(m_\pi^2) = g_{\pi NN} = \frac{g_A m_N}{F} - \frac{2m_N m_\pi^2}{F}\frac{b_{19}}{(4\pi F)^2}, \tag{7.6}$$

d.h. die Konstante b_{19} lässt sich durch die so genannte Goldberger-Treiman-Diskrepanz Δ ausdrücken, die durch $\Delta = 1 - m_N g_A/(F g_{\pi NN})$ gegeben ist (s. Gl. (6.15)). Diese Diskrepanz gibt die Verletzung der im chiralen Grenzfall exakt erfüllten Goldberger-Treiman-Relation (Gl. (6.21)) an.

Die Konstante b_{23} kann direkt mit dem axialen Radius des Nukleons, $\sqrt{\langle r^2 \rangle_A}$, in Verbindung gebracht werden, da dieser über die Ableitung des axialen Formfaktors an der Stelle $t = 0$ definiert ist:

$$\langle r^2 \rangle_A = \frac{6}{G_A(0)} \frac{\mathrm{d}G_A(t)}{\mathrm{d}t}\bigg|_{t=0} = -\frac{6}{g_A} \frac{b_{23}}{(4\pi F)^2}. \tag{7.7}$$

Dies motiviert noch einmal die Identifikation von b_{23} mit dem axialen Radius in Gl. (6.4). Für die Diskussion in diesem Kapitel ist der b_{23}-Term besonders wichtig, da dieser Term für die Abhängigkeit des axialen Formfaktors von der Variablen t verantwortlich ist.

Umgeschrieben in den oben eingeführten Größen lautet unser Ergebnis für die Formfaktoren jetzt:

$$G_A(t) = g_A + \frac{1}{6} g_A \langle r^2 \rangle_A t, \tag{7.8}$$

$$G_P(t) = 4m_N^2 \left(\frac{F_\pi g_{\pi NN}}{m_N} \frac{1}{m_\pi^2 - t} - \frac{1}{6} g_A \langle r^2 \rangle_A \right), \tag{7.9}$$

$$G_\pi(t) = g_{\pi NN} \left(1 + \Delta \frac{t - m_\pi^2}{m_\pi^2} \right). \tag{7.10}$$

Vergleicht man das Ergebnis für den axialen Formfaktor $G_A(t)$ mit den Ergebnissen der relativistischen Einschleifenrechnungen im Rahmen der chiralen Störungstheorie (s. Kapitel 6), so stellt man fest, dass die von den Schleifengraphen stammenden chiralen Korrekturen zu $G_A(t)$ vernachlässigbar klein sind. Der induzierte pseudoskalare Formfaktor $G_P(t)$ ist durch den ersten Term in Gl. (7.9) dominiert, den so genannten Pionpolterm. Oft werden alle anderen Terme weggelassen, da sie sehr klein sind. Man spricht dann von der Pionpoldominanzannahme. Zur Motivation dieser Annahme betrachten wir Gl. (6.20). Im chiralen Grenzfall[2] nimmt diese Gleichung die folgende Form an

$$2\mathring{m}_N \mathring{G}_A(t) + \frac{t}{2\mathring{m}_N} \mathring{G}_P(t) = 0 \rightarrow \mathring{G}_P(t) = -\frac{4\mathring{m}_N^2}{t} \mathring{G}_A(t). \tag{7.11}$$

Der induzierte pseudoskalare Formfaktor $\mathring{G}_P$ hat im chiralen Grenzfall also einen Pol für $t \rightarrow 0$. Wenn man nicht mehr den chiralen Grenzfall betrachtet und die nicht verschwindende Masse der Pionen miteinbezieht, so liegt es nahe, den Pol zu $t - m_\pi^2$ zu verschieben. Wir berücksichtigen aber auch, dass $G_P(t)$ neben diesem Pionpol noch einen Beitrag vom b_{23}-Term erhält und deshalb auch den axialen Radius enthält. Der Pion-Nukleon-Formfaktor $G_\pi(t)$ enthält neben der Konstanten $g_{\pi NN}$ die im letzten Kapitel diskutierte Goldberger-Treiman-Diskrepanz Δ.

Die Ausdrücke für die oben angegebenen drei Formfaktoren erfüllen selbstverständlich Gleichung (6.20) und respektieren somit die chirale Symmetrie. Die Überprüfung dieser Relation ist ein erster Test unserer Rechnungen und unseres phänomenologischen Modells. Die Herleitung der Gl. (6.20) beruht auf der PCAC-Relation (Gl. (2.19)) ohne Anwesenheit der elektromagnetischen Wechselwirkung, die wiederum ganz allgemein mit Hilfe des Tricks von Gell-Mann und Lévy [GL 60] auf Grund der lokalen, chiralen Symmetrie der Lagrange-Dichte der QCD abgeleitet worden ist (s. Kapitel 2). Eine genaue Herleitung dieser Beziehung ist im Anhang F angegeben.

[2]Wir erinnern noch einmal daran, dass wir Größen im chiralen Grenzfall mit $\circ$ kennzeichnen.

7.3 Adlers Relation und Pionelektroproduktion

Mit Hilfe der PCAC-Relation (Gl. (2.19)) kann eine chirale Ward-Identität abgeleitet werden[3], die die folgenden drei Greenschen Funktionen miteinander verbindet:

$$q_\nu \mathcal{M}^{\mu\nu}_{JA,i} = 2i\hat{m}\mathcal{M}^{\mu}_{JP,i} + \epsilon_{3ij}\mathcal{M}^{\mu}_{A,j} \;, \tag{7.12}$$

wobei die hier auftauchenden drei Greenschen Funktionen mit Hilfe von zeitgeordneten Produkten des elektromagnetischen Stromoperators $J^\mu(x)$, des axialen Stromoperators $A^\mu_i(x)$ und des pseudoskalaren Dichteoperators $P_i(x)$ definiert werden können.

Auf der linken Seite von Gl. (7.12) steht die Größe $\mathcal{M}^{\mu\nu}_{JA,i}$, die die Fouriertransformierte des zeitgeordneten Produkts aus dem elektromagnetischen Stromoperator $J^\mu(x)$ und dem isovektoriellen Axialvektorstromoperator $A^\mu_i(x)$ ist und die wir im Folgenden als Vektor-Axialvektorstrom-Tensor bezeichnen werden:

$$\begin{aligned} \mathcal{M}^{\mu\nu}_{JA,i} &= \int d^4x e^{-ik\cdot x}\langle N(p_f,s_f)|T\left[J^\mu(x)A^\nu_i(0)\right]|N(p_i,s_i)\rangle, \\ &= \int d^4x e^{iq\cdot x}\langle N(p_f,s_f)|T\left[J^\mu(0)A^\nu_i(x)\right]|N(p_i,s_i)\rangle. \end{aligned} \tag{7.13}$$

Dabei steht T für das zeitgeordnete Produkt, das folgendermaßen definiert ist[4],

$$T\left[A(x)B(y)\right] = A(x)B(y)\theta(x_0-y_0) + B(y)A(x)\theta(y_0-x_0), \tag{7.14}$$

wobei $\theta(x)$ die Heavisidesche Stufenfunktion ist. Auf der rechten Seite von Gl. (7.12) steht zum einen das Matrixelement des axialen Stromoperators,

$$\mathcal{M}^{\mu}_{A,j} = \langle N(p_f,s_f)|A^\mu_j(0)|N(p_i,s_i)\rangle, \tag{7.15}$$

und zum anderen die Fouriertransformierte des zeitgeordneten Produkts aus dem elektromagnetischen Stromoperator $J^\mu(x)$ und der isovektoriellen pseudoskalaren Dichte $P_i(x)$:

$$\begin{aligned} \mathcal{M}^{\mu}_{JP,i} &= \int d^4x e^{-ik\cdot x}\langle N(p_f)|T\left[J^\mu(x)P_i(0)\right]|N(p_i)\rangle, \\ &= \int d^4x e^{iq\cdot x}\langle N(p_f,s_f)|T\left[J^\mu(0)P_i(x)\right]|N(p_i,s_i)\rangle. \end{aligned} \tag{7.16}$$

Die Gl. (7.12) kann auch alternativ mit Hilfe der auf die minimale Substitution zurückgehenden PCAC-Relation von Adler und Gilman [AG 66] abgeleitet werden. Dazu wertet man diese Relation zwischen einem aus einem Nukleon bestehenden Endzustand und einem aus einem Nukleon und einem virtuellen Photon bestehenden Anfangszustand aus. Aus diesem Grund bezeichnet man Gl. (7.12) auch als „Adlers Relation“.

Man beachte, dass die Herleitung dieser Relation auf der PCAC-Relation unter Anwesenheit der elektromagnetischen Wechselwirkung (Gl. (2.19)) beruht, die allgemein gültig ist und mit Hilfe der chiralen Symmetrie der QCD-Lagrange-Dichte abgeleitet worden ist. Für die komplette Herleitung von Gl. (7.12) benötigt man keine Näherungen[5]. Deshalb sollte diese Relation in jedem Modell erfüllt sein, das die chirale Symmetrie respektiert.

[3] Die genaue Ableitung dieser Gleichung ist im Anhang F zu finden.

[4] Genau genommen müsste in Gl. (7.13) das kovariante zeitgeordnete Produkt T^* stehen, das sich vom „naiven“ zeitgeordneten Produkt T durch einen „seagull“-Term unterscheidet (s. Diskussion in Kapitel 2.4.2 von [Sch 02] und Anhang F).

[5] Dies stimmt bis auf Anomalien, die aber von der Ordnung $\mathcal{O}(e^2)$ sind und nicht benötigt werden.

Die Verbindung zur Pionelektroproduktionsamplitude $\mathcal{M}_i$ kann mit Hilfe eines interpolierenden Pionfeldes hergestellt werden. Dazu betrachten wir das Matrixelement der pseudoskalaren Dichte $P_i(x)$, ausgewertet zwischen einem Einpionzustand und dem Vakuum [GL 84]:

$$\langle 0 \,|P_i(0)|\, \pi_j(q)\rangle = \frac{1}{2} G_\pi \delta_{ij} \mathrm{e}^{-iq\cdot x}. \tag{7.17}$$

Da jedes interpolierende Pionfeld $\Phi_i(x)$ durch die Relation

$$\langle 0 \,|\Phi_i(x)|\, \pi_j(q)\rangle = \delta_{ij} \mathrm{e}^{-iq\cdot x} \tag{7.18}$$

definiert ist, können wir das folgende Feld $\Phi_i(x)$ als interpolierendes Pionfeld wählen,

$$\Phi_i(x) = \frac{2P_i(x)}{G_\pi} = \frac{2P_i(x)}{2B_0 F_0} = \frac{2\hat{m} P_i(x)}{m_\pi^2 F}, \tag{7.19}$$

wobei wir nach dem zweiten und dritten Gleichheitszeichen von Ergebnissen der niedrigsten Ordnung der mesonischen chiralen Störungstheorie Gebrauch gemacht haben.

Wendet man den LSZ-Formalismus (Lehmann, Symanzik, Zimmermann) [LSZ 55] mit dem oben angegebenen interpolierenden Pionfeld $\Phi_i(x)$ auf die chirale Ward-Identität aus Gl. (7.12) an, so erhält man die folgende Gleichung,

$$\mathcal{M}_i^\mu = \lim_{q^2 \to m_\pi^2} -2\hat{m} i \frac{q^2 - m_\pi^2}{F m_\pi^2} \mathcal{M}_{JP,i}^\mu = \lim_{q^2 \to m_\pi^2} \frac{q^2 - m_\pi^2}{F m_\pi^2} \left(\epsilon_{3ij} \mathcal{M}_{A,j}^\mu - q_\nu \mathcal{M}_{JA,i}^{\mu\nu} \right). \tag{7.20}$$

Die Nomenklatur für die Pionelektroproduktion und das Übergangsmatrixelement $\mathcal{M}_i^\mu$ ist im Anhang E angegeben und die genaue Herleitung der Gl. (7.20) kann im Anhang F gefunden werden.

Damit haben wir eine Verbindung zwischen den in Gl. (7.12) auftauchenden Greenschen Funktionen und der Pionelektroproduktionsamplitude hergestellt. Auf der rechten Seite der Gl. (7.20) steht sowohl das Matrixelement des axialen Stroms, $\mathcal{M}_{A,j}^\mu$, als auch der Vektor-Axialvektorstrom-Tensor, $\mathcal{M}_{JA,i}^{\mu\nu}$, der ebenfalls den axialen Stromoperator enthält. Das legt die Vermutung nahe, dass man den axialen Formfaktor G_A in der Pionelektroproduktion messen kann. Die Frage ist nur noch, ob sich die Beiträge dieser beiden Greenschen Funktionen zum axialen Formfaktor im Grenzfall $q^2 \to m_\pi^2$ gerade aufheben oder nicht. Man beachte, dass die chirale Ward-Identität in Gl. (7.12) für beliebige Werte des Impulsübertrages q gültig ist, während die Verbindung zur Pionelektroproduktionsamplitude durch Gl. (7.20) ein Pion auf der Massenschale erfordert, d.h. $q^2 = m_\pi^2$.

7.4 Divergenz des Vektor-Axialvektorstrom-Tensors $\mathcal{M}_{JA,i}^{\mu\nu}$

In diesem Abschnitt berechnen wir in unserem Modell die Divergenz des Vektor-Axialvektorstrom-Tensors, d.h. wir kontrahieren den Tensor $\mathcal{M}_{JA,i}^{\mu\nu}$ mit dem Viererimpuls q_ν des auslaufenden axialen Stroms. Dazu müssen wir zuerst die acht in Abbildung 7.1 dargestellten Diagramme berechnen. Den Tensor $\mathcal{M}_{JA,i}^{\mu\nu}$ erhält man dann aus der Amplitude für diese Diagramme, indem man die Polarisationsvektoren ϵ^μ und ${\epsilon'_A}^\mu$ wegläßt. Zu jedem Diagramm in Abbildung 7.1 bestimmen wir mit Hilfe von Gl. (7.20) den Beitrag zur Pionelektroproduktionsamplitude $\mathcal{M}_i$, indem wir angeben, zu welchem Diagramm in Abbildung 7.2 es jeweils einen Beitrag gibt. Die in Abbildung 7.2 gezeigten Diagramme entsprechen dabei den Diagrammen, die man bei einer direkten

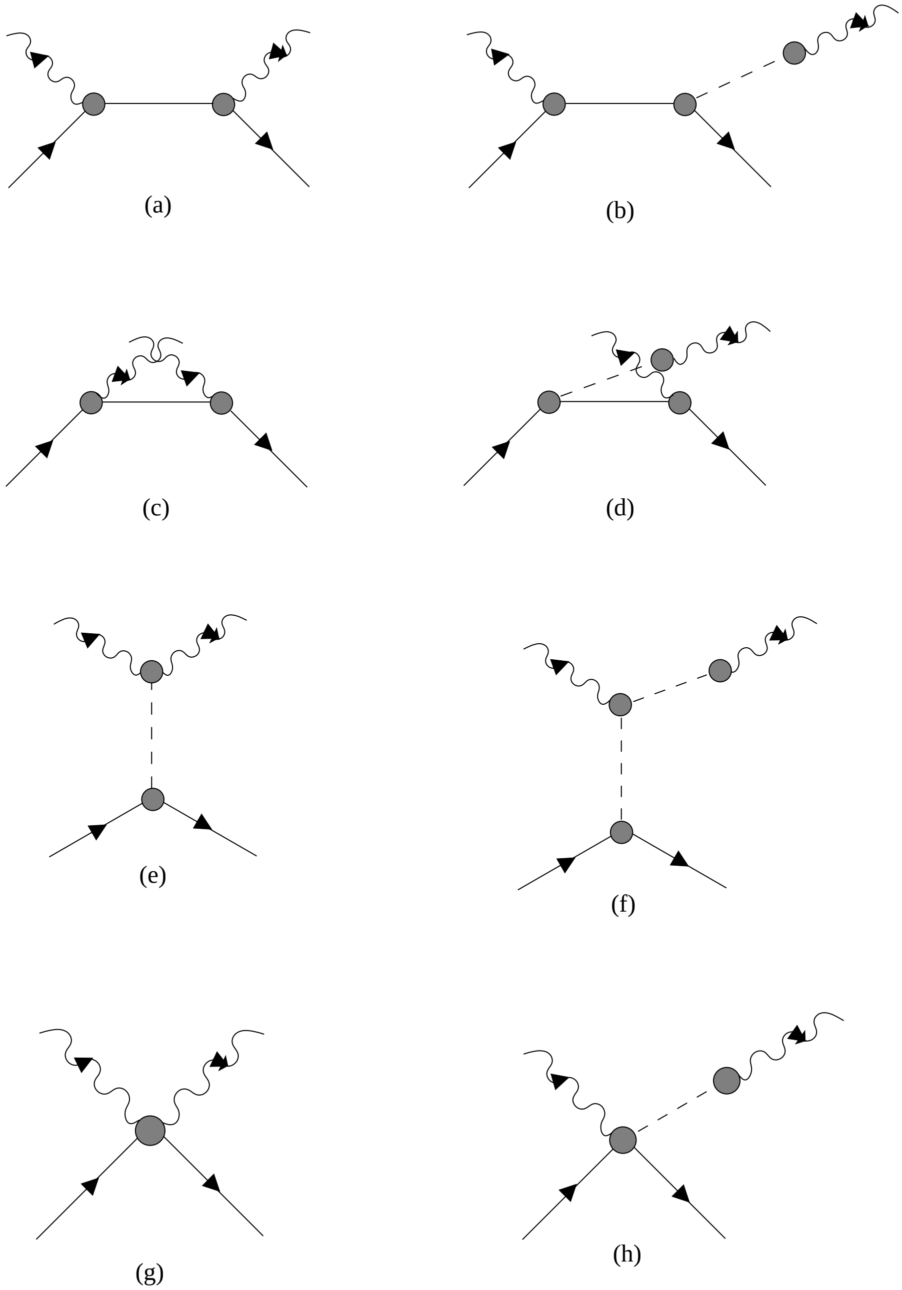

Abbildung 7.1: Diagramme des Vektor-Axialvektorstrom-Tensors $\mathcal{M}^{\mu\nu}_{JA,i}$ in unserem phänomenologischen Modell. Der auslaufende axiale Strom ist mit einer geschlängelten Linie und einem Doppelpfeil gekennzeichnet. Die renormierten Vertices erhalten Beiträge von den Lagrange-Dichten $\mathcal{L}^{(2)}_{\pi\pi}$, $\mathcal{L}^{(1)}_{\pi N}$, $\mathcal{L}^{(2)}_{\pi N}$ und $\mathcal{L}^{(3)}_{\pi N}$. Kontrahiert man den Tensor $\mathcal{M}^{\mu\nu}_{JA,i}$ mit q_ν, so erhält man Beiträge zum axialen Strom und zu $\mathcal{M}^{\mu}_{JP,i}$ (s. Text).

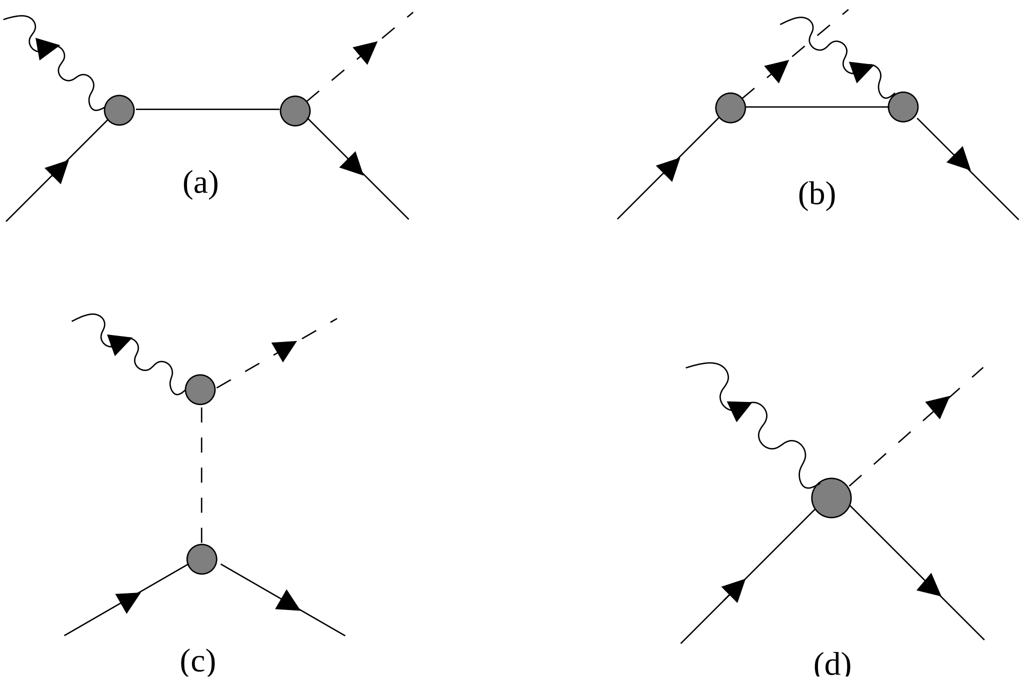

Abbildung 7.2: Die vier Diagramme der Pionelektroproduktionsamplitude $\mathcal{M}_i$.

Berechnung von $\mathcal{M}_i$ betrachten muss. Für das durch $\mathcal{M}_i = -ie\varepsilon_\mu \mathcal{M}_i^\mu$ definierte Übergangsmatrixelement $\mathcal{M}_i^\mu$ erhalten wir in unserem Modell die folgenden Ausdrücke:

$$\mathcal{M}^\mu_{\mathrm{a},\,i} = -i\frac{g_{\pi NN}}{2m_N}\bar{u}(p_f)\left(1 - \not{q}\,\frac{2m_N}{s - m_N^2 + i\epsilon}\right)\gamma_5\tau_i\Gamma^\mu(k)u(p_i), \tag{7.21}$$

$$\mathcal{M}^\mu_{\mathrm{b},\,i} = -i\frac{g_{\pi NN}}{2m_N}\bar{u}(p_f)\Gamma^\mu(k)\left(1 - \not{q}\,\frac{2m_N}{u - m_N^2 + i\epsilon}\right)\gamma_5\tau_i u(p_i), \tag{7.22}$$

$$\mathcal{M}^\mu_{\mathrm{c},\,i} = -g_{\pi NN}\bar{u}(p_f)\frac{(2q-k)^\mu}{t - m_\pi^2 + i\epsilon}\gamma_5\epsilon_{3ij}\tau_j u(p_i), \tag{7.23}$$

$$\mathcal{M}^\mu_{\mathrm{d},\,i} = -\frac{1}{2F}\bar{u}(p_f)\left[\frac{Fg_{\pi NN}}{m_N}\gamma^\mu + \frac{1}{6}g_A\langle r^2\rangle_A\left(k\cdot(k-q)\,\gamma^\mu - (k-q)^\mu\,\not{k}\,\right)\right]\gamma_5\epsilon_{3ij}\tau_j u(p_i). \tag{7.24}$$

Die Größe $\Gamma^\mu = \Gamma^\mu(k)$ bezeichnet den elektromagnetischen Vertex des Nukleons (s. Kapitel 5), wobei die Nukleonen nicht unbedingt auf der Massenschale sein müssen. Damit ist die Kopplung eines einlaufenden Photons mit Impuls k^μ und Polarisationsvektor ϵ^μ an die Nukleonen allgemein gegeben durch

$$-ie\epsilon_\mu\Gamma^\mu(k).$$

Wir erhalten für $\Gamma^\mu(k)$ den folgenden Ausdruck

$$\Gamma^\mu(k) = \frac{1+\tau_3}{2}\gamma^\mu + \frac{1}{4m_N}\left[\not{k}\,,\gamma^\mu\right]\left(\frac{\kappa_s}{2} + \frac{\kappa_v}{2}\tau_3\right). \tag{7.25}$$

Da wir bereits die axialen Formfaktoren des Nukleons berechnet haben, können wir auch angeben, welches Diagramm in Abb. 7.1 zu den Formfaktoren $G_A(t)$ (s. Gl. (7.8)) und $G_P(t)$ (s. Gl. (7.9)) beiträgt.

Für die Kontraktion der Beiträge zum Vektor-Axialvektorstrom-Tensor, die von den ersten beiden Graphen (Abb. 7.1a und 7.1b) stammen, erhalten wir,

$$q_\nu \left(\mathcal{M}_{\mathrm{a+b}}\right)^{\mu\nu}_{JA,i} = \frac{iFg_{\pi NN}}{2m_N}\bar{u}(p_f)\left(\Delta + \frac{m_\pi^2}{q^2 - m_\pi^2 + i\epsilon}\right)\left(1 - \not{q}\,\frac{2m_N}{s - m_N^2 + i\epsilon}\right)\gamma_5\tau_i\Gamma^\mu u(p_i), \tag{7.26}$$

wobei $s = (p_i + k)^2$ eine der drei Mandelstam-Variablen ist. Mit Hilfe von Gl. (7.20) erhalten wir aus Gl. (7.26) gerade den Ausdruck für den s-Kanal der Pionelektroproduktionsamplitude, d.h. wir erhalten gerade Gl. (7.21).

Analog zu den Graphen in Abbildung 7.1a und 7.1b erhalten wir für die Kontraktion der Beiträge, die zu den in Abbildung 7.1c und 7.1d gezeigten Graphen gehören, den folgenden Ausdruck:

$$q_\nu \left(\mathcal{M}_{\mathrm{c+d}}\right)^{\mu\nu}_{JA,i} = \frac{iFg_{\pi NN}}{2m_N}\bar{u}(p_f)\Gamma^\mu\left(\Delta + \frac{m_\pi^2}{q^2 - m_\pi^2 + i\epsilon}\right)\left(1 - \not{q}\,\frac{2m_N}{u - m_N^2 + i\epsilon}\right)\gamma_5\tau_i u(p_i), \tag{7.27}$$

mit $u = (p_f - k)^2$. Benutzen wir wieder Gl. (7.20), so erhalten wir aus Gl. (7.27) den Ausdruck für den u-Kanal der Pionelektroproduktionsamplitude, d.h. wir erhalten gerade Gl. (7.22).

Für die Kontraktion des zur Abbildung 7.1e gehörenden Beitrages erhalten wir den folgenden Ausdruck,

$$q_\nu \left(\mathcal{M}_{\mathrm{e}}\right)^{\mu\nu}_{\gamma A,i} = -Fg_{\pi NN}\bar{u}(p_f)\frac{q^\mu}{t - m_\pi^2 + i\epsilon}\gamma_5\epsilon_{3ij}\tau_j u(p_i). \tag{7.28}$$

Da dieses Diagramm keinen $1/(q^2 - m_\pi^2)$-Pol besitzt, trägt es nicht zur Pionelektroproduktionsamplitude bei. Tatsächlich liefert es einen Teilbeitrag zum Pionpol des induzierten pseudoskalaren Formfaktor $G_P(t)$.

Der noch fehlende Beitrag zum Pionpol von $G_P(t)$ stammt von dem Diagramm 7.1f. Kontrahiert mit q_ν ergibt sich für dieses Diagramm nämlich der folgende Beitrag:

$$q_\nu \left(\mathcal{M}_{\mathrm{f}}\right)^{\mu\nu}_{\gamma A,i} = -Fg_{\pi NN}\bar{u}(p_f)\left(\frac{m_\pi^2}{q^2 - m_\pi^2 + i\epsilon}\,\frac{(k-2q)^\mu}{t - m_\pi^2 + i\epsilon} + \frac{(k-2q)^\mu}{t - m_\pi^2 + i\epsilon}\right)\gamma_5\epsilon_{3ij}\tau_j u(p_i). \tag{7.29}$$

Der Teil in Gl. (7.29), der nicht zur Pionelektroproduktionsamplitude $\mathcal{M}_i^\mu$ beiträgt, d.i. der Anteil ohne den Faktor $1/(q^2 - m_\pi^2)$, liefert gerade den fehlenden Beitrag zum Pionpol von $G_P(t)$. Der andere Teil liefert unter Anwendung von Gl. (7.20) den Ausdruck für den t-Kanal von $\mathcal{M}_i^\mu$, d.h. wir erhalten Gl. (7.23).

Wir stellen fest, dass in den Gln. (7.26) bis (7.29) der axiale Radius $\sqrt{\langle r^2\rangle_A}$ nicht auftaucht, d.h. die Diagramme 7.1a bis 7.1f enthalten den axialen Radius nicht mehr, wenn sie mit q_ν kontrahiert werden. Da die bisher diskutierten Beiträge bei Anwendung von Gl. (7.20) den s-, t- und u-Kanal der Pionelektroproduktionsamplitude liefern, kann der axiale Radius nur im Kontaktgraphen von $\mathcal{M}_i^\mu$ auftauchen (Abb. 7.2d). Dies hat ja bereits unsere direkte Berechnung ergeben, die wir als zusätzlichen Test durchgeführt haben. Tatsächlich erhalten wir durch Kontraktion des zur Abbildung 7.1g gehörenden Beitrages eine Abhängigkeit vom axialen Radius:

$$q_\nu \left(\mathcal{M}_{\mathrm{g}}\right)^{\mu\nu}_{\gamma A,i} = -\frac{1}{12}g_A\langle r^2\rangle_A\left[\gamma^\mu(k-q)\cdot q - (k-q)^\mu\not{q}\,\right]\gamma_5\epsilon_{3ij}\tau_j. \tag{7.30}$$

Da in Gl. (7.30) aber kein $1/(q^2 - m_\pi^2)$-Pol auftaucht, liefert die Anwendung von Gl. (7.20) auf Gl. (7.30) keinen Beitrag zu $\mathcal{M}_i^\mu$. Allerdings enthält Gl. (7.30) noch Beiträge zu den axialen Formfaktoren $G_A(t)$ und $G_P(t)$.

Zum Schluss müssen wir noch den zur Abbildung 7.1h gehörenden Beitrag mit q_ν kontrahieren. Wir erhalten das folgende Ergebnis:

$$\begin{aligned} q_\nu \left(\mathcal{M}_\mathrm{h}\right)^{\mu\nu}_{\gamma A,i} &= \frac{1}{2}\left(1+\frac{m_\pi^2}{q^2-m_\pi^2+i\epsilon}\right)\left[\left(g_A+\frac{Fg_{\pi NN}}{m_N}\Delta\right)\gamma^\mu \right. \\ &\left. +\frac{1}{6}g_A\langle r^2\rangle_A\left((k-q)\cdot k\gamma^\mu-(k-q)^\mu \not{k}\,\right)\right]\gamma_5\epsilon_{3ij}\tau_j. \qquad (7.31)\end{aligned}$$

Gl. (7.31) enthält nicht nur den axialen Radius, sondern auch einen $1/(q^2-m_\pi^2)$-Pol. Wenden wir wieder Gl. (7.20) auf Gl. (7.31) an, so erhalten wir deshalb eine Abhängigkeit der Pionelektroproduktionsamplitude vom axialen Radius. Diese Abhängigkeit kann auf den Kontaktgraph von $\mathcal{M}_i^\mu$, d.h. auf Abbildung 7.2d, zurückgeführt werden. Der Beitrag zu diesem Diagramm ist in Gl. (7.24) angegeben. Außerdem erhalten wir noch Beiträge zu den axialen Formfaktoren $G_A(t)$ und $G_P(t)$. Zusammen mit Gl. (7.30) liefern diese Beiträge gerade den axialen Formfaktor $G_A(t)$ sowie den Teil von $G_P(t)$, der für die $\langle r^2\rangle_A$-Abhängigkeit von $G_P(t)$ verantwortlich ist.

Der komplette Ausdruck für die Pionelektroproduktionsamplitude konnte durch Anwenden von Gl. (7.20) auf die Divergenz des Vektor-Axialvektorstromtensors hergeleitet werden. Der erste Term in Gl. (7.20) liefert keinen Beitrag zu $\mathcal{M}_i^\mu$, da er keinen $1/(q^2-m_\pi^2)$-Pol hat.

7.5 Berechnung von $\mathcal{M}^\mu_{JP,i}$ und Test von Adlers Relation

Da wir im Zusammenhang mit den axialen Formfaktoren des Nukleons das Axialstrommatrixelement $\mathcal{M}^\mu_{A,j}$ bereits berechnet haben, müssen wir zur Überprüfung der chiralen Ward-Identität aus Gl. (7.12) nur noch $\mathcal{M}^\mu_{JP,i}$ berechnen. Dazu betrachten wir die in Abbildung 7.3 gezeigten Diagramme.

Die Greensche Funktion $\mathcal{M}^\mu_{JP,i}$ erhält man aus der Amplitude für die in Abbildung 7.3 dargestellten Diagramme, indem man den Polarisationsvektor des Photons, ϵ_μ, wegläßt. Das Ergebnis für die beiden s-Kanal Diagramme 7.3a und 7.3b lautet dann:

$$(\mathcal{M}_\mathrm{a+b})^\mu_{JP,i} = \frac{B_0Fg_{\pi NN}}{2m_Nm_\pi^2}\bar{u}(p_f)\left(\Delta+\frac{m_\pi^2}{q^2-m_\pi^2+i\epsilon}\right)\left(1-\not{q}\,\frac{2m_N}{s-m_N^2+i\epsilon}\right)\gamma_5\tau_i\Gamma^\mu u(p_i). \qquad (7.32)$$

Analog erhält man für die beiden u-Kanal Diagramme 7.3c und 7.3d:

$$(\mathcal{M}_\mathrm{c+d})^\mu_{JP,i} = \frac{B_0Fg_{\pi NN}}{2m_Nm_\pi^2}\bar{u}(p_f)\Gamma^\mu\left(\Delta+\frac{m_\pi^2}{q^2-m_\pi^2+i\epsilon}\right)\left(1-\not{q}\,\frac{2m_N}{u-m_N^2+i\epsilon}\right)\gamma_5\tau_i u(p_i). \qquad (7.33)$$

Man beachte die Ähnlichkeit der Gln. (7.32) und (7.33) mit den Gln. (7.26) und (7.27).
Für die restlichen Diagramme aus Abb. 7.3 erhalten wir die folgenden Ausdrücke:

$$(\mathcal{M}_\mathrm{e})^\mu_{JP,i} = \frac{iB_0Fg_{\pi NN}}{2m_N}\bar{u}(p_f)\left(\not{k}\;-\not{q}\,\right)\frac{(k-2q)^\mu}{(q^2-m_\pi^2+i\epsilon)(t-m_\pi^2+i\epsilon)}\gamma_5\epsilon_{3ij}\tau_j u(p_i), \qquad (7.34)$$

$$\begin{aligned} (\mathcal{M}_\mathrm{f})^\mu_{JP,i} &= -\frac{iB_0Fg_{\pi NN}}{2m_Nm_\pi^2}\bar{u}(p_f)\Delta\gamma^\mu\gamma_5\epsilon_{3ij}\tau_j u(p_i), \qquad (7.35)\\ (\mathcal{M}_\mathrm{g})^\mu_{JP,i} &= -\frac{iB_0Fg_{\pi NN}}{2m_N(q^2-m_\pi^2+i\epsilon)}\bar{u}(p_f)\left[\gamma^\mu+\frac{1}{6}\langle r^2\rangle_A\left((k-q)\cdot k\gamma^\mu-(k-q)^\mu\not{k}\,\right)\right] \\ &\times\gamma_5\epsilon_{3ij}\tau_j u(p_i). \qquad (7.36)\end{aligned}$$

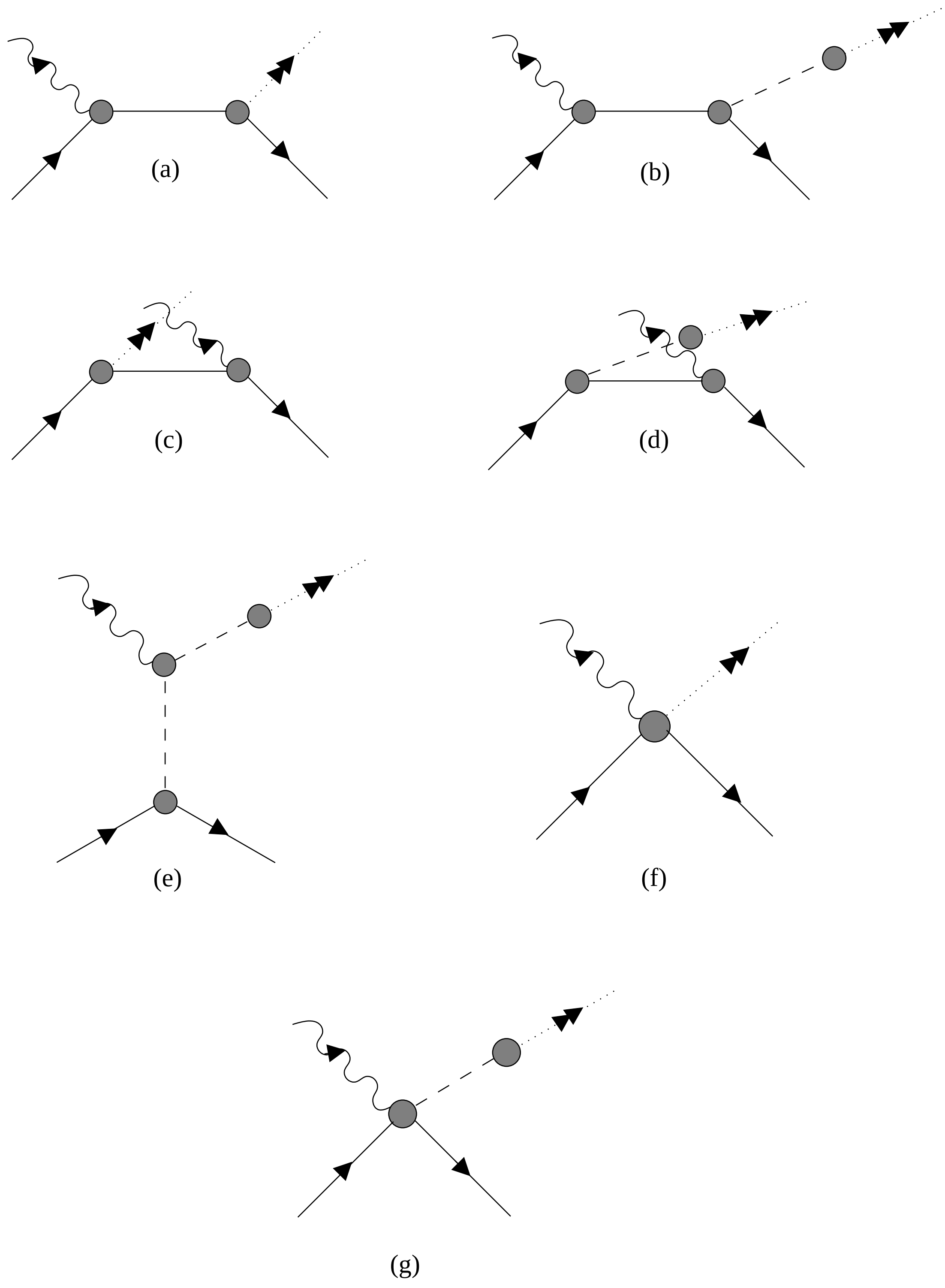

Abbildung 7.3: Diagramme der Greenschen Funktion $\mathcal{M}^{\mu}_{JP,i}$, die die pseudoskalare Dichte enthält. Die gepunktete Linie mit dem Doppelpfeil kennzeichnet die pseudoskalare Dichte.

Die in diesem Kapitel angegebenen Ausdrücke für $\mathcal{M}^{\mu\nu}_{JA,i}$, $\mathcal{M}^{\mu}_{JP,i}$ und $\mathcal{M}^{\mu}_{A,i}$ erfüllen Gl. (7.12) und respektieren somit die chirale Symmetrie, wie das auch sein sollte. Damit ist die Überprüfung von Adlers Relation abgeschlossen. Wir erwähnen an dieser Stelle noch einmal, dass Gl. (7.12) einen Test für jedes Modell darstellt und exakt, d.h. ohne irgendwelche Modifikationsterme wie sie z.B. in [Hab 00] auftauchen, erfüllt sein muss[6].

7.6 Haberzettls Berechnung von $\mathcal{M}^{\mu}_{i}$

Der Vektor-Axialvektorstrom-Tensor $\mathcal{M}^{\mu\nu}_{JA,i}$ ist bereits in [Hab 00] berechnet worden. Ausgehend von der Definition der axialen Formfaktoren (Gl. (6.1)) sind in diesem Papier unter Benutzung von Gl. (6.20) verschiedene Vertices abgeleitet worden. Mit Hilfe der in [Hab 97] beschriebenen Eichableitungsmethode (engl.: *gauge derivative method*) ist an die einzelnen Vertices dann jeweils ein Photon angekoppelt und somit $\mathcal{M}^{\mu\nu}_{JA,i}$ berechnet worden. Bei den Ergebnissen ist vor allem der Ausdruck für das Diagramm, das den Kontaktgraph der Pionelektroproduktionsamplitude enthält (s. Fig. 3 in [Hab 00]) interessant, da er keine Abhängigkeit vom axialen Radius $\sqrt{\langle r^2\rangle_A}$ und damit auch nicht den axialen Formfaktor $G_A(t)$ enthält. Deshalb ist in [Hab 00] die Behauptung aufgestellt worden, dass der axiale Formfaktor in der Pionelektroproduktion an der Schwelle nicht gemessen werden kann. Das Ergebnis steht im Widerspruch zu allen bisherigen Rechnungen (s. z.B. [NS 62, VZ 72, SK 91]) und auch zu den Ergebnissen unseres phänomenologischen Modells. Wie bereits erwähnt, hat dieses Ergebnis zu einer kontroversen Diskussion in den letzten Jahren geführt [Gui 01, BKM 01, Hab 01]. In [Hab 01] ist dabei kritisiert worden, dass bisher keiner genau sagen konnte, an welchem Punkt in der Herleitung aus [Hab 00] ein Fehler aufgetreten sein soll. Mit Hilfe des in diesem Kapitel vorgestellten phänomenologischen Modells sind wir in der Lage, die in [Hab 00] durchgeführten Rechnungen genau zu untersuchen. Es zeigt sich, dass die auf der minimalen Substitution beruhende Eichableitungsmethode [Hab 97] die chirale Symmetrie nicht respektiert. Die Anwendung dieser Methode führt in diesem Fall zu falschen Ergebnissen und damit letzten Endes zu der widersprüchlichen Behauptung in [Hab 00].

Zur Verdeutlichung betrachten wir den Ausdruck für den πNN-Vertex und koppeln an diesen mit der Eichableitungsmethode ein Photon an. Der Ausdruck für die Kopplung eines auslaufenden Pions mit Viererimpuls $q^\mu = (p_i - p_f)^\mu$ und Isospinindex i an die Nukleonen lautet:

$$\frac{1}{2m_N} g_{\pi NN}\,(\not p_i - \not p_f)\,\gamma_5\tau_i. \tag{7.37}$$

Wenden wir auf Gl. (7.37) die Eichableitungsmethode an, so liefern die in [Hab 97] angegebenen Regeln für ein Photon mit Impuls k^μ den folgenden Ausdruck:

$$\begin{aligned}\left\{\frac{g_{\pi NN}}{2m_N}(\not p_i - \not p_f)\gamma_5\tau_i\delta(q-(p_i-p_f))\right\}^\mu &= \left\{\frac{g_{\pi NN}}{2m_N}\not q\,\gamma_5\tau_i\delta(q-(p_i-p_f))\right\}^\mu \\ &= \frac{g_{\pi NN}}{2m_N}\gamma_\nu\gamma_5\left\{q^\nu\tau_i\right\}^\mu\delta(q+p_f-p_i-k) \\ &= \frac{g_{\pi NN}}{2m_N}\gamma^\mu\gamma_5 Q^\pi_{ij}\tau_j. \end{aligned}\tag{7.38}$$

In der zweiten Zeile haben wir von den Gln. (A7) und (A11) in [Hab 97] Gebrauch gemacht. In der letzten Zeile haben wir die Delta-Distribution vernachlässigt und benutzt, dass die Eichableitungsmethode auf einen Pionimpuls wie folgt wirkt (vgl. Gl. (A10) in [Hab 97]):

$$\{q^\nu\tau_i\}^\mu = Q^\pi_{ij}\tau_j\,g^{\mu\nu}.$$

[6] Dies gilt unter der Voraussetzung, dass wir Anomalien der Ordnung $\mathcal{O}(e^2)$ vernachlässigen.

Dabei ist Q^π_{ij} der Ladungsoperator für das Pion und gegeben durch

$$Q^\pi_{ij} = ie\epsilon_{3ij}, \qquad e > 0.$$

Der Ausdruck für den Kontaktgraph der Pionelektroproduktionsamplitude ($\gamma\pi NN$-Vertex) in unserem Modell lautet:

$$\left[\frac{g_{\pi NN}}{2m_N}\gamma^\mu + \frac{g_A\langle r^2\rangle_A}{12F_\pi}\left((k-q)\cdot k\gamma^\mu - \not{k}\,(k-q)^\mu\right)\right]\gamma_5 Q^{ij}_\pi \tau_j. \tag{7.39}$$

Der Vergleich von Gl. (7.39) mit Gl. (7.38) zeigt, dass die Eichableitungsmethode nur den ersten Teil des Kontaktgraphen liefert. Der zweite Teil, der den axialen Radius enthält, wird durch diese Methode nicht erzeugt. Damit ist geklärt, warum der Ausdruck für das Diagramm 7.1h in [Hab 00] keine Abhängigkeit vom axialen Radius $\sqrt{\langle r^2\rangle_A}$ enthält.

In der chiralen Störungstheorie verwendet man für jede Ordnung im Impuls- und Quarkmassenzählschema die allgemeinste, mit den Symmetrien der QCD verträgliche effektive Lagrange-Dichte. Betrachtet man keine Schleifenbeiträge, so erzeugt bis zur Ordnung $\mathcal{O}(q^3)$ nur ein einziger Term im axialen Formfaktor die Abhängigkeit von t, nämlich der Term, der proportional zur Niederenergiekonstanten b_{23} ist. Zur Erinnerung geben wir ihn hier noch einmal an:

$$\mathcal{L}^{(3)}_{\pi N} = \ldots + \bar{\Psi}\frac{1}{2}\frac{b_{23}}{(4\pi F)^2}\gamma^\mu\gamma_5\left[D^\nu, f^-_{\mu\nu}\right]\Psi + \ldots. \tag{7.40}$$

Um zu sehen, zu welchen Vertices dieser Term Beiträge liefert, entwickeln wir die Größe $\partial^\nu f^-_{\mu\nu}$ nach den Pionfeldern:

$$\begin{aligned}
\partial^\nu f^-_{\mu\nu} &= \partial^\nu u\left[\partial_\mu(v_\nu - a_\nu) - \partial_\nu(v_\mu - a_\mu) - i[v_\mu - a_\mu, v_\nu - a_\nu]\right]u^\dagger \\
&\quad - u^\dagger\left[\partial_\mu(v_\nu + a_\nu) - \partial_\nu(v_\mu + a_\mu) - i[v_\mu + a_\mu, v_\nu + a_\nu]\right]u \\
&= -2\partial^\nu(\partial_\mu a_\nu - \partial_\nu a_\mu) + 2i\partial^\nu\left([v_\mu, a_\nu] - [v_\nu, a_\mu]\right) \\
&\quad + \frac{i}{2F_0}\partial^\nu\left[\Phi, \partial_\mu v_\nu - \partial_\nu v_\mu\right] + \frac{1}{F_0}\partial^\nu\left[\Phi, [v_\mu, v_\nu]\right] + \frac{1}{F_0}\partial^\nu\left[\Phi, [a_\mu, a_\nu]\right] + \mathcal{O}(\pi^2).
\end{aligned} \tag{7.41}$$

Wir diskutieren jetzt die in Gl. (7.41) angegebenen Beiträge mit höchstens einem Pionfeld $\Phi(x)$. Der Beitrag zum axialen Formfaktor kommt von dem Term

$$-2\partial^\nu(\partial_\mu a_\nu - \partial_\nu a_\mu).$$

Er ist für die Identifikation des b_{23}-Terms mit dem axialen Radius verantwortlich. Der Kontaktgraph des Vektor-Axialvektorstrom-Tensors (Diagramm 7.1) erhält durch den Term

$$2i\partial^\nu\left([v_\mu, a_\nu] - [v_\nu, a_\mu]\right)$$

seine Abhängigkeit vom axialen Radius. Es tritt aber auch ein Term auf, der einen Beitrag zum Kontaktgraph der Pionelektroproduktion, d.h. zum $\gamma\pi NN$-Vertex, liefert:

$$\frac{i}{2F_0}\partial^\nu\left[\Phi, \partial_\mu v_\nu - \partial_\nu v_\mu\right].$$

Die Verknüpfung dieser drei Vertices miteinander ist eine direkte Konsequenz aus der chiralen Symmetrie. So ist z.B. die Verknüpfung des Kontaktgraphen des Vektor-Axialvektorstrom-Tensors mit dem Kontaktgraph der Pionelektroproduktion durch Gl. (7.20) gegeben. Die letzten beiden

Terme in Gl. (7.41) enthalten zwei Vektor- bzw. zwei Axialvektorfelder und tragen deshalb zu keinem in dieser Arbeit diskutierten Vertex bei.

Wir stellen fest, dass wir einen Beitrag zum $\gamma\pi NN$-Vertex, aber keinen Beitrag zum πNN-Vertex erhalten. Koppelt man mit Hilfe der minimalen Substitution ein Photon an den πNN-Vertex an, so ist zwar die Eichinvarianz erfüllt, nicht aber die aus der chiralen Symmetrie folgenden Bedingungen, d.h. die Eichableitungsmethode aus [Hab 97] respektiert nicht die chirale Symmetrie.

Die Aussage von Haberzettl [Hab 00], dass der axiale Formfaktor in der Pionelektroproduktion nicht gemessen werden kann, erweist sich somit als unbegründet. Die in diesem Papier verwendete Eichableitungsmethode produziert nicht die richtigen Ergebnisse. Alle bisherigen Rechnungen in diesem Gebiet, wie z.B. [NS 62, VZ 72, SK 91], behalten weiterhin ihre Gültigkeit.

7.7 Der „soft-pion"-Grenzfall

In diesem Abschnitt wollen wir Adlers Relation aus Gl. (7.12) im so genannten „soft-pion"-Grenzfall betrachten, d.h. wir betrachten den Grenzfall $q^\mu \to 0$. Dabei setzen wir zuerst den Dreierimpuls $\vec{q}$ Null und betrachten dann $q_0 \to 0$. In diesem Grenzfall können wir sogar modellunabhängig zeigen, dass der Tensor $\mathcal{M}^{\mu\nu}_{JA,i}$ den axialen Formfaktor G_A enthält [Gui 01].

Bei der Berechnung von $q_\nu \mathcal{M}^{\mu\nu}_{JA,i}$ muss man die Diagramme aus Abbildung 7.1 betrachten. Für $q^\mu \to 0$ liefern von diesen Diagrammen nur die s- und u-Kanal Diagramme einen von Null verschiedenen Beitrag zur Divergenz von $\mathcal{M}^{\mu\nu}_{JA,i}$, d.h. nur die Diagramme liefern einen Beitrag, bei denen ein Faktor $1/(s - m_N^2)$ bzw. $1/(u - m_N^2)$ auftaucht. Die s- und u-Kanal-Diagramme enthalten nämlich als Einzige im „soft-pion"-Grenzfall einen $1/q$-Pol:

$$\lim_{q^2\to 0} q_\mu \frac{1}{s - m_N^2 + i\epsilon} = \lim_{q^2\to 0} \frac{q^\mu}{2p_f \cdot q + q^2 + i\epsilon} = \frac{1}{2p_{f,0} + i\epsilon}, \tag{7.42}$$

$$\lim_{q^2\to 0} q_\mu \frac{1}{u - m_N^2 + i\epsilon} = \lim_{q^2\to 0} \frac{q^\mu}{-2p_i \cdot q + q^2 + i\epsilon} = -\frac{1}{2p_{i,0} + i\epsilon}, \tag{7.43}$$

$$\lim_{q^2\to 0} \frac{q_\mu}{t - m_\pi^2 + i\epsilon} = \lim_{q^2\to 0} \frac{q_\mu}{q^2 - m_\pi^2 + i\epsilon} = 0. \tag{7.44}$$

Dieser Punkt ist seit langer Zeit bekannt und bereits in [Adl 65] erwähnt worden.

Als Nächstes zeigen wir, dass in den s- und u-Kanal-Diagrammen im „soft-pion"-Grenzfall kein axialer Formfaktor auftauchen kann. Der axiale Formfaktor kommt bei diesen Diagrammen durch den ANN-Vertex ins Spiel, d.h. durch die Kopplung des axialen Stroms an die Nukleonen. Dabei müssen wir noch beachten, dass in diesen Diagrammen ein Nukleonpropagator auftaucht und deshalb beim ANN-Vertex immer genau eine Nukleonlinie nicht auf der Massenschale ist. Aus diesem Grund führen wir eine Formfunktion $G_A(t, p_i^2, p_f^2)$ ein, die für den Fall, dass beide Nukleonen auf der Massenschale sind, in den axialen Formfaktor übergeht, $G_A(q^2, m_N^2, m_N^2) = G_A(t)$. Für das s-Kanal-Diagramm entwickeln wir diese Formfunktion nach $\Delta = 2p_f \cdot q + q^2$,

$$\frac{G_A(q^2, s, m_N^2)}{s - m_N^2 + i\epsilon} = \frac{1}{\Delta}\left(G_A(q^2, m_N^2, m_N^2) + \Delta G'_A(q^2, m_N^2, m_N^2) + \mathcal{O}(\Delta^2)\right) = \frac{G_A(t)}{\Delta} + \mathcal{O}(\Delta^0)$$

und erhalten dann im „soft-pion"-Grenzfall:

$$\lim_{q^\mu\to 0} q_\mu \frac{G_A(q^2, s, m_N^2)}{s - m_N^2 + i\epsilon} = \frac{g_A}{2p_{f,0}}. \tag{7.45}$$

Für das u-Kanal-Diagramm entwickeln wir die Formfunktion nach $\Delta = -2p_i \cdot q + q^2$ und ersetzen s durch u. Damit haben wir modellunabhängig gezeigt, dass im „soft-pion"-Grenzfall $q_\nu \mathcal{M}^{\mu\nu}_{JA,i}$ den axialen Formfaktor nicht mehr enthält.

Berechnet man jetzt $\mathcal{M}^{\mu}_{JP,i}$ mittels Gl. (7.12), so erhalten wir lediglich einen Beitrag zum axialen Formfaktor, nämlich den vom Matrixelement des axialen Stroms, $\mathcal{M}^{\mu}_{A,j}$,

$$\lim_{q^\mu \to 0} G_A((p_i - p_f)^2) = \lim_{q^\mu \to 0} G_A((k-q)^2) = G_A(k^2) \neq G_A(0) = g_A. \tag{7.46}$$

Es gibt hier also keine zwei Beiträge, die sich aufheben können, d.h. im „soft-pion"-Grenzfall enthält $\mathcal{M}^{\mu}_{JP,i}$ den axialen Formfaktor.

7.8 Messung des axialen Formfaktors in der Pionelektroproduktion

Wir haben gesehen, dass der axiale Formfaktor G_A in der Pionelektroproduktion auftaucht. In diesem Abschnitt beschreiben wir, wie man ihn experimentell in einem Pionelektroproduktionsexperiment bestimmen kann[7]. Die Theorie der Pionelektroproduktion ist im Anhang E zusammengefasst. Als Beispiel betrachten wir ein in Mainz durchgeführtes Experiment [Lie+ 99]. In diesem Experiment ist der Wirkungsquerschnitt für die π^+-Elektroproduktion am Proton bei einer invarianten Masse von $W = \sqrt{s} = 1125$ MeV, d.h. 46 MeV über der Pionschwelle bei drei verschiedenen Werten für den Impulsübertrag $Q^2 = -k^2$ gemessen worden: $Q^2 = 0.117,\ 0.195,\ 0.273$ (GeV/c)^2.

Der differentielle Wirkungsquerschnitt für die Pionelektroproduktion kann in einen leptonischen und einen hadronischen Anteil aufgeteilt werden (s. Gl. (E.43) im Anhang E). In paralleler Kinematik, bei der das Pion in Richtung des ausgetauschten virtuellen Photons emittiert wird, besteht der hadronische differentielle Wirkungsquerschnitt (s. Gl. (E.46) im Anhang E) aus einem transversalen und einem longitudinalen Anteil. Im Schwerpunktsystem des hadronischen πN-Endzustandes erhält man:

$$\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega^*_\pi} = \frac{\mathrm{d}\sigma_T}{\mathrm{d}\Omega^*_\pi} + \epsilon \frac{\mathrm{d}\sigma_L}{\mathrm{d}\Omega^*_\pi}. \tag{7.47}$$

Eine Rosenbluthseparation, bei der $\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega^*_\pi}$ gegen ϵ aufgetragen wird, liefert dann den transversalen und longitudinalen differentiellen Wirkungsquerschnitt. Aus dem transversalen Wirkungsquerschnitt extrahiert man zuerst den E_{0+}-Multipol (s. Gl. (E.52) und Gl. (E.33) im Anhang E). Zur Extraktion des axialen Formfaktors aus dem E_{0+}-Multipol ist ein Modell [DT 92] verwendet worden, da die chirale Störungstheorie erst bei einer Messung mit einer invarianten Masse, die näher an der Pionschwelle liegt, angewendet werden kann. Aus den experimentellen Daten für den axialen Formfaktor ist dann durch einen Dipolfit die so genannte axiale Masse M_A und der axiale Radius $\sqrt{\langle r^2 \rangle_A}$ bestimmt worden,

$$G_A(Q^2) = \frac{G_A(0)}{\left(1 + Q^2/M_A^2\right)^2} \qquad \Rightarrow \qquad \langle r^2 \rangle_A = -\frac{6}{G_A(0)} \frac{dG_A(Q^2)}{dQ^2}\bigg|_{Q^2=0} = \frac{12}{M_A^2}. \tag{7.48}$$

Das Ergebnis der Messungen war für den axialen Radius $\sqrt{\langle \tilde{r}^2 \rangle_A} = (0.635 \pm 0.023)$ fm und für die axiale Masse $\tilde{M}_A = (1.077 \pm 0.039)$ GeV.

[7] Der axiale Formfaktor kann auch noch in der quasielastischen Neutrinostreuung am Proton $\bar{\nu}_\mu + p \to \mu^+ + n$ [Fan+ 80, Ahr+ 87, Ahr+ 88] bzw. am Deuteron $\nu_\mu + d \to \mu^- + p + p_{\mathrm{spectator}}$ (z.B. [Bak+ 81, Kit+ 83, Kit+ 90]) bestimmt werden.

Bei den angegebenen Werten muss man noch eine Schleifenkorrektur berücksichtigen: Eine $\mathcal{O}(q^3)$-Rechnung im Rahmen der chiralen Störungsrechnung für schwere Baryonen (HBχPT) liefert für den E_{0+}-Multipol [BKM 92]

$$\begin{aligned} E_{0+}^{(-)}(k^2) &= \frac{eg_A}{8\pi F_\pi}\left[1 + \frac{k^2}{6}\langle r^2\rangle_A + \frac{k^2}{4m_N^2}\left(\kappa_V + \frac{1}{2}\right) - \frac{m_\pi}{m_N} + CM_\pi^2 + \frac{k^2}{128F_\pi^2}\left(1 - \frac{12}{\pi^2}\right)\right. \\ &\quad \left. + \mathcal{O}(q^3)\right] . \end{aligned}$$

Die Nomenklatur für die Multipole ist ebenfalls in Anhang E angegeben. Das Minuszeichen gibt die Isospinkomponente (s. Gl. (E.17)) an. Die Konstante C ist für unsere Diskussion nicht von Bedeutung, da sie nicht von k^2 abhängt. Der letzte Term ist die führende Ordnung einer Schleifenkorrektur. Er ist bei der oben angegebenen Messung des axialen Radius nicht berücksichtigt worden, d.h.

$$\langle \tilde{r}^2\rangle_A = \langle r^2\rangle_A + \frac{3}{64F_\pi^2}\left(1 - \frac{12}{\pi^2}\right) . \tag{7.49}$$

Dieser Korrekturterm hat den Wert -0.0456 fm^2 und stellt eine 10%-Korrektur zum eigentlichen Wert dar. Damit ist die kleine Diskrepanz zwischen den Werten für den axialen Radius aus der Pionelektroproduktion und denen aus der quasielastischen Neutrinostreuung geklärt [BKM 92].

In einem neuen Experiment wird die π^+-Elektroproduktion bei einer invarianten Masse von 1084 MeV, d.h. 5 MeV über der Pionschwelle bei Impulsüberträgen von $Q^2 = 0.156,\ 0.078$ und 0.035 untersucht [Neu+ 98]. Dies ist nah genug an der Pionschwelle, damit die chiralen Störungstheorie getestet werden kann. Auf Grund der kurzen Lebensdauer des Pions von $\tau = 26.033(5)$ ns [PDG 02] ist ein neues so genanntes „short-orbit“-Spektrometer entwickelt worden, bei dem die Pionen jetzt nur noch eine Flugstrecke von 1.6 m zurücklegen müssen.

Kapitel 8

Zusammenfassung

In dieser Arbeit haben wir die Formfaktoren des Nukleons in einer relativistischen Formulierung der chiralen Störungstheorie für Nukleonen bis zur Ordnung $\mathcal{O}(q^4)$ berechnet. Wir haben dabei ein neues Renormierungsschema [GJW 99] verwendet, in dem die Schleifendiagramme das chirale Zählschema respektieren. Das neue Renormierungsschema besteht darin, die regulären Terme abzuziehen, die von einer kleineren Ordnung sind als es das chirale Zählschema vorgibt und diese Terme in den Niederenergiekonstanten zu absorbieren. Im Einzelnen haben wir die folgenden Formfaktoren berechnet und unsere Ergebnisse mit den Ergebnissen der Infrarotregularisierung von Becher und Leutwyler [BL 99] verglichen:

- Den skalaren Formfaktor des Nukleons,
- die elektromagnetischen Formfaktoren des Nukleons,
- die axialen Formfaktoren des Nukleons.

An Hand der $\mathcal{O}(q^3)$-Ergebnisse für den skalaren Formfaktor kann man die Probleme der nichtrelativistischen HBχPT erkennen. Das Ergebnis der HBχPT divergiert an der Stelle $t = 4m_\pi^2$, während die Ergebnisse der relativistischen Rechnungen im gesamten Niederenergiebereich konvergieren (Abb. 4.3). Die Polstelle wird vom so genannten Dreiecksgraphen (Abb. 4.1a) erzeugt, bei dem für $t = 4m_\pi^2$ der Impulsübertrag gerade groß genug ist, damit die beiden Pionen auf der Massenschale sein können. Die Ergebnisse der Ordnungen $\mathcal{O}(q^3)$ und $\mathcal{O}(q^4)$ sind in den Abbildungen 4.2 und 4.4 dargestellt. Dabei ist in Abbildung 4.4 die Konstante e_{22} und eine Kombination der Konstanten e_{38}, e_{115} und e_{116} (s. Gl. (4.28)) aus $\mathcal{L}_{\pi N}^{(4)}$ an die Werte für den σ-Term und den Cheng-Dashen-Punkt angepasst worden, so dass der Unterschied zwischen den beiden relativistischen Renormierungsschemen kaum zu erkennen ist.

Bei den elektromagnetischen Formfaktoren existieren je zwei für das Proton und Neutron. Für diese beiden Formfaktoren existieren zwei verschiedene Darstellungsmöglichkeiten, nämlich die Dirac- und Pauli-Formfaktoren oder die Sachs-Formfaktoren. Parametrisiert man das Matrixelement des elektromagnetischen Stromoperators durch die Dirac- und Pauli-Formfaktoren, so erhält man einen besonders einfachen Ausdruck (Gl. (5.1)). Deshalb sind die Dirac- und Pauli-Formfaktoren die natürlichen Größen in jeder relativistischen Formulierung. Die Sachs-Formfaktoren hingegen entstehen in der nichtrelativistischen HBχPT als natürliche Größen. Eine $\mathcal{O}(q^4)$-Rechnung liefert den Dirac-Formfaktor bis zur Ordnung $\mathcal{O}(q^3)$ und den Pauli-Formfaktor bis zur Ordnung $\mathcal{O}(q^2)$. Kombiniert man diese beiden Formfaktoren zu den Sachs-Formfaktoren, so erhält man G_E bis zur Ordnung $\mathcal{O}(q^3)$ und G_M bis zur Ordnung $\mathcal{O}(q^2)$ (s. Gl. (5.28)). Der graphische Verlauf der Dirac- und Pauli-Formfaktoren für Proton und Neutron ist in Abbildung

5.2 dargestellt und die elektrischen und magnetischen Sachs-Formfaktoren sind in Abbildung 5.5 zu finden. Zur Berechnung dieser Graphen sind die Konstanten e_{54} und e_{74} an die elektrischen und magnetischen Radien angepasst worden. Die Ergebnisse in der Infrarotregularisierung aus [KM 01] sind in diesen Abbildungen ebenfalls dargestellt. Ein Vergleich zeigt, dass mit Ausnahme von G_E^n unsere Ergebnisse mit denen der Infrarotregularisierung übereinstimmen. In Abbildung 5.4 haben wir unsere $\mathcal{O}(q^3)$-Ergebnisse mit denen aus der Infrarotregularisierung und mit den Ergebnissen der HBχPT [Ber+ 98] verglichen. Mit Ausnahme des elektrischen Formfaktor des Neutrons, bei dem sich alle drei Beschreibungen unterscheiden, stimmen unsere Ergebnisse im Wesentlichen wieder mit denen der Infrarotregularisierung überein, während es Unterschiede zu den HBχPT-Ergebnissen gibt. Diese Unterschiede stammen daher, dass die Beiträge von höheren Ordnungen in einer relativistischen Beschreibung anders behandelt werden als in der HBχPT. Die Beiträge höherer Ordnungen spielen bei den Formfaktoren des Neutrons eine entscheidende Rolle. Das erkennt man durch Vergleich der $\mathcal{O}(q^3)$-Resultate mit den $\mathcal{O}(q^4)$-Resultaten. Beim sehr kleinen elektrischen Formfaktor des Neutrons stimmen z.B. die experimentellen Daten für G_E^n [Ede+ 94, Her+ 99, Pas+ 99, Ost+ 99] mit den $\mathcal{O}(q^3)$-Resultaten besser überein als mit den $\mathcal{O}(q^4)$-Resultaten. Beim magnetischen Formfaktor des Neutrons liegen die experimentellen Daten [Ank+ 94, Ank+ 98, Kub+ 02] zwischen den Resultaten der Ordnungen $\mathcal{O}(q^3)$ und $\mathcal{O}(q^4)$. Dies legt die Vermutung nahe, dass zur Beschreibung der sehr genau gemessenen Daten in der chiralen Störungstheorie eine Zweischleifenrechnung notwendig ist.

Die Ergebnisse für die beiden axialen Formfaktoren, den axialen Formfaktor $G_A(t)$ und den induzierten pseudoskalaren Formfaktor $G_P(t)$, sind in Abbildung 6.6 dargestellt. Da wir hier perfekte Isospininvarianz angenommen haben, erhalten wir keinen Beitrag zum induzierten pseudotensoriellen Formfaktor $G_T(t)$. Unsere Ergebnisse stimmen mit denen der Infrarotregularisierung fast exakt überein. Dabei wird $G_A(t)$ fast komplett durch $g_A + 1/6\langle r^2\rangle_A t$ wiedergegeben und $G_P(t)$ wird durch den Term $-4m_N F g_{\pi NN}/(t-m_\pi^2)$ dominiert, d.h. von den Schleifenintegralen erhält man nur eine sehr schwache Abhängigkeit von der Variablen t. Dies kommt daher, dass der einzige Schleifengraph, der eine t-Abhängigkeit liefert, aus zwei Nukleonpropagatoren und nur einem Pionpropagator besteht. Da die Nukleonen eine deutlich größere Masse als die Pionen haben, ist hier die t-Abhängigkeit unterdrückt. Bei der Berechnung des in Abbildung 6.2 gezeigten Pionpolgraphen des axialen Stroms, den man neben dem einteilchen-irreduziblen Vertex zur Bestimmung von $G_A(t)$ und $G_P(t)$ benötigt, konnten wir die Ergebnisse mit [Fea+ 97] vergleichen. Zur weiteren Überprüfung der Ergebnisse haben wir mit Hilfe des Pion-Nukleon-Formfaktors, $G_\pi(t)$, dessen graphischer Verlauf in Abbildung 6.7 zu sehen ist, die Relation aus Gl. (6.20) getestet. Diese Relation geht auf die PCAC-Relation unter Abwesenheit der elektromagnetischen Wechselwirkung zurück und hat allgemeine Gültigkeit.

Mit der Infrarotregularisierung und dem hier beschriebenen Renormierungsverfahren existieren zwei relativistische Formulierungen der chiralen Störungstheorie für Baryonen, die im Rahmen einer Einschleifenrechnung gleichberechtigt verwendet werden können. Der große Vorteil der neuen Methode ist, dass die Integrale im Vergleich zur Infrarotregularisierung nicht in zwei Teile aufgespalten, sondern wie bisher mit Hilfe der dimensionalen Regularisierung berechnet werden. Die Erweiterung auf Integrale mit zwei Schleifen stellt daher keine Schwierigkeit dar. Ein weiterer Vorteil ist, dass wir nur eine endliche Anzahl an Gegentermen benötigen, da wir im Vergleich zur Infrarotregularisierung nur Terme abziehen, die kleiner als die Ordnung des jeweiligen Diagramms sind. Das große Potential der neuen Methode liegt in ihrer universellen Einsetzbarkeit: Sie kann bei Problemen angewandt werden, die entstehen, wenn eine effektive Theorie Freiheitsgrade beinhaltet, die im chiralen Grenzfall nicht verschwinden. Mit Hilfe dieser Methode existiert z.B. auch ein konsistentes Zählschema, wenn man die Vektormesonen explizit berücksichtigt [FGS 02]. Auch das Δ könnte möglicherweise miteinbezogen werden, um somit die Breite des Δ und die

Phasenverschiebungen in der πN-Streuung beschreiben zu können [ET 98].

Der zweite Teil dieser Arbeit beschäftigte sich mit der Frage, ob der axiale Formfaktor des Nukleons in der Pionelektroproduktion gemessen werden kann. Wir haben dazu ein phänomenologisches Modell aufgestellt, das einerseits alle Symmetrien der Lagrange-Dichte der QCD respektiert, d.h. insbesondere die chirale Symmetrie, und alle relevanten Terme produziert, andererseits relativ einfach nachzuvollziehende Rechnungen enthält [FS 02]. Das Modell basiert auf den Lagrange-Dichten der chiralen Störungstheorie, nur dass wir keine Schleifengraphen berechnen. Wir benutzen diese Baumgraphennäherung, da die Schleifengraphen chirale Korrekturen zu unseren Ergebnissen liefern, die im Rahmen der HBχPT berechnet wurden und unter Kontrolle sind. Als ein erster Test unseres Modells haben wir die axialen Formfaktoren des Nukleons ausgerechnet und gesehen, dass alle wichtigen Terme der $\mathcal{O}(q^4)$-Rechnung produziert worden sind. Die Ergebnisse erfüllen selbstverständlich auch die Relation zwischen den axialen Formfaktoren und dem Pion-Nukleon-Formfaktor aus Gl. (6.20).

In unserem phänomenologischen Modell haben wir eine chirale Ward-Identität überprüft, die die folgenden drei Greenschen Funktionen miteinander verknüpft:

$$q_\nu \mathcal{M}^{\mu\nu}_{JA,i} = 2i\hat{m}\mathcal{M}^{\mu}_{JP,i} + \epsilon_{3ij}\mathcal{M}^{\mu}_{A,j}. \tag{8.1}$$

Auf der linken Seite von Gl. (8.1) steht der in Gl. (7.13) definierte Vektor-Axialvektorstrom-Tensor $\mathcal{M}^{\mu\nu}_{JA,i}$, der die Fouriertransformierte des zeitgeordneten Produkts aus dem elektromagnetischen Stromoperator $J^\mu(x)$ und dem isovektoriellen Axialvektorstromoperator $A^\mu_i(x)$ ist. Diese Größe geht z.B. in die Bestimmung des strahlungsbegleiteten Myoneinfangs am Proton ein [Fea 80]. Auf der rechten Seite steht neben der Größe $\mathcal{M}^{\mu}_{JP,i}$, die die Fouriertransformierte des zeitgeordneten Produkts aus dem elektromagnetischen Stromoperator $J^\mu(x)$ und der isovektoriellen pseudoskalaren Dichte $P_i(x)$ ist (s. Gl. (7.16)), noch das Matrixelement des axialen Stromoperators $\mathcal{M}^{\mu}_{A,j}$ (s. Gl. (7.15)). Gl. (8.1) ist das erste Mal von Adler und Gilman [AG 66] mit Hilfe der minimalen Substitution abgeleitet worden und trägt daher den Namen Adlers Relation. Im Anhang F haben wir explizit gezeigt, wie man diese Relation mit Hilfe der PCAC-Relation herleiten kann. Bei der Herleitung haben wir nur von der chiralen Symmetrie der QCD und ihrer expliziten Berechnung durch die Quarkmassen Gebrauch gemacht. Deshalb ist Adlers Relation allgemein gültig und die Überprüfung dieser Relation kann als ein Test unseres Modells angesehen werden. Mit Hilfe von Gl. (7.20) konnten wir eine Verbindung zwischen $\mathcal{M}^{\mu}_{JP,i}$ und der Pionelektroproduktionsamplitude $\mathcal{M}_i$ herstellen. Im Wesentlichen erhält man $\mathcal{M}_i$ durch Multiplikation von $\mathcal{M}^{\mu}_{JP,i}$ mit $q^2 - m_\pi^2$ und anschließender Bildung des Grenzüberganges $q^2 \to m_\pi^2$. Kombiniert man diese beiden Gleichungen, so erhält man eine Verbindung zwischen der Pionelektroproduktionsamplitude, dem Vektor-Axialvektorstrom-Tensor und dem Matrixelement des axialen Stroms. Da der axiale Formfaktor G_A sowohl in dem Matrixelement des axialen Stromoperators als auch im Vektor-Axialvektorstrom-Tensor enthalten ist, erhält man eine Verbindung der Pionelektroproduktionsamplitude mit dem axialen Formfaktor. Die Frage ist nur noch, ob sich die verschiedenen Beiträge des axialen Formfaktors zu $\mathcal{M}_i$ gerade aufheben oder nicht.

In unserem Modell haben wir zuerst die Divergenz des Vektor-Axialvektorstrom-Tensors berechnet und zu jedem der acht Diagramme aus Abbildung 7.1 die Beiträge zur Pionelektroproduktionamplitude und den axialen Formfaktoren bestimmt. Es hat sich herausgestellt, dass nur ein einziger Beitrag zur Pionelektroproduktionsamplitude existiert, der auch den axialen Radius und somit den axialen Formfaktor enthält. Dieser Beitrag kommt von dem Diagramm aus Abbildung 7.1h. In einer direkten Berechnung der Pionelektroproduktionsamplitude kann die Abhängigkeit vom axialen Radius auf den Kontaktgraphen aus Abbildung 7.2d zurückgeführt werden (s. Gl. (7.24)).

Wir sind in dieser Arbeit auch auf die Berechnung von $\mathcal{M}_i^\mu$ mit Hilfe von Adlers Relation und der in [Hab 97] beschriebenen Eichableitungsmethode eingegangen. Die Eichableitungsmethode basiert auf der minimalen Substitution und erlaubt es, an die Vertices ein Photon anzukoppeln. Der Ausdruck, den wir erhalten, wenn wir mit Hilfe dieser Methode an den πNN-Vertex ein Photon ankoppeln (s. Gl. (7.38)), unterscheidet sich von dem Ausdruck für den $\gamma\pi NN$-Vertex in unserem phänomenologischen Modell (s. Gl. (7.39)) durch einen Term, der proportional zum Quadrat des axialen Radius ist. Wir kommen zu der Schlussfolgerung, dass die Eichableitungsmethode zwar die Eichinvarianz, nicht aber die chirale Symmetrie erfüllt. Somit konnte die Aussage in [Hab 00], dass der axiale Formfaktor in der Pionelektroproduktion nicht gemessen werden kann, widerlegt werden. Jedes Modell, das die chirale Symmetrie erfüllt, produziert eine Abhängigkeit der Pionelektroproduktionsamplitude vom axialen Formfaktor. Alle bisherigen Rechnungen in diesem Gebiet, wie z.B. [NS 62, VZ 72, SK 91], behalten deshalb weiterhin ihre Gültigkeit. Im chiralen Grenzfall kann man sogar modellunabhängig zeigen, dass $\mathcal{M}_i$ den axialen Radius enthält. Wir hoffen, mit Hilfe dieser Rechnungen Klarheit in die kontrovers geführte Diskussion über dieses Thema [Hab 00, Gui 01, BKM 01, Hab 01, Tru 01] gebracht zu haben.

Die Pionelektroproduktionsamplitude ist im Rahmen einer Einschleifenrechnung bis zur Ordnung $\mathcal{O}(q^3)$ in der HBχPT bereits berechnet worden [BKM 92]. In dieser Arbeit kann man auch die chiralen Korrekturen finden, die in unserem Modell vernachlässigt worden sind. Eine relativistische Berechnung der Pionelektroproduktionsamplitude im Rahmen der ChPT existiert derzeit noch nicht. Im Rahmen einer Einschleifenrechnung könnte diese sowohl in der Infrarotregularisierung als auch mit Hilfe der in dieser Arbeit verwendeten Methode durchgeführt werden, wobei mit der hier verwendeten Methode auch eine Zweischleifenrechnung möglich wäre. Außerdem könnte für die Pionelektroproduktion der Einfluss der Isospinsymmetriebrechung ($m_u \neq m_d$) und der e^2-Korrekturen untersucht werden.

Anhang A

Gell-Mann-Matrizen

In der QCD spielt die Lie-Gruppe SU(3) eine entscheidende Rolle. Die SU(3) wird durch die Generatoren $\frac{\lambda_a}{2}$ ($a = 1, 2, \ldots, 8$) erzeugt, die eine Basis der Lie-Algebra der SU(3) bilden. Bei den Gell-Mann-Matrizen λ_a handelt es sich um hermitesche, spurlose 3×3 Matrizen, die folgende Vertauschungsrelation erfüllen:

$$\left[\frac{\lambda_a}{2}, \frac{\lambda_b}{2}\right] = i f_{abc} \frac{\lambda_c}{2}. \tag{A.1}$$

Die f_{abc} sind die Strukturkonstanten der Lie-Algebra der SU(3), die antisymmetrisch bei Austausch zweier Indizes sind. Alle nicht verschwindenden Strukturkonstanten sind in Tabelle A.1 angegeben.

abc	123	147	156	246	257	345	367	458	678
f_{abc}	1	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$

Tabelle A.1: Nicht verschwindende f_{abc}

Die Standarddarstellung der 8 Gell-Mann-Matrizen λ_a lautet [DGH 92]:

$$\begin{aligned}
\lambda_1 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\
\lambda_4 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_6 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \\
\lambda_7 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_8 = \sqrt{\frac{1}{3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.
\end{aligned} \tag{A.2}$$

Die ersten drei Gell-Mann-Matrizen enthalten gerade die Paulischen Spinmatrizen,

$$\tau_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \tau_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \qquad \tau_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \tag{A.3}$$

wobei die $\tau_i/2$ die Generatoren der Lie-Algebra der SU(2) sind.

Anhang B

Hypergeometrische Funktionen

Die Gaußsche hypergeometrische Funktion [AS 65] ist im Komplexen durch die folgende Potenzreihe definiert:

$$\begin{aligned} {}_2F_1(a,b;c;z) &:= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n(b)_n}{(c)_n}\frac{z^n}{n!} = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(b)}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\Gamma(a+n)\Gamma(b+n)}{\Gamma(c+n)}\frac{z^n}{n!}, \\ \text{mit} \quad (a)_n &= a(a+1)\ldots(a+n-1), \qquad (a)_0 = 1, \end{aligned} \tag{B.1}$$

wobei $\Gamma(z)$ die Gammafunktion ist, die durch Eulers Integral definiert ist,

$$\Gamma(z) := \int_0^{\infty} t^{z-1}e^{-t}dt.$$

Der Konvergenzkreis der hypergeometrischen Funktion ist der gesamte Einheitskreis, d.h. $|z| < 1$. Auf diesem Konvergenzkreis hat ${}_2F_1(a,b;c;z)$ das folgende Verhalten:

- Absolute Konvergenz für Re $(c-a-b) > 0$,
- Bedingte Konvergenz für $-1 <$ Re $(c-a-b) \leq 0$, wobei der Punkt z=1 ausgeschlossen ist,
- Divergenz für Re $(c-a-b) \leq -1$.

Es existieren zwei Sonderfälle: Entweder ist a oder b eine negative ganze Zahl $-n$, dann bricht die Reihe ab und wir erhalten ein Polynom vom Grad n. Die Reihe hat dann einen unendlich großen Konvergenzkreis. Oder c ist eine negative ganze Zahl $-m$ und a oder b sind keine ganzen Zahlen $-n$ mit $n < m$. Für diesen Fall ist die Reihe nicht definiert.

Die Verallgemeinerung von Gl. (B.1) führt auf die verallgemeinerten hypergeometrischen Funktionen,

$${}_nF_m(a_1,\ldots,a_n;b_1,\ldots,b_m;z) = \sum_{i=0}^{\infty}\frac{(a_1)_i\ldots(a_n)_i}{(b_1)_i\ldots(b_n)_i}\frac{z^i}{i!}. \tag{B.2}$$

Sie spielen bei der Lösung von linearen Differentialgleichungen zweiter Ordnung eine entscheidende Rolle. Die Kugelflächenfunktionen, die Besselschen Funktionen und die Legendrepolynome sind jeweils Spezialfälle der hypergeometrischen Funktionen. Die Funktion ${}_2F_1(a,b;c;z)$ ist eine partikuläre Lösung der folgenden linearen Differentialgleichung zweiter Ordnung:

$$z(1-z)\frac{d^2F(z)}{dz^2} + [c-(a+b+1)z]\,\frac{dF(z)}{dz} - abF(z) = 0. \tag{B.3}$$

Es existiert eine Integraldarstellung der Funktion ${}_2F_1(a,b;c;z)$:

$$ {}_2F_1(a,b;c;z) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(c-b)} \int_0^1 t^{b-1}(1-t)^{c-b-1}(1-tz)^{-a} dt, \quad \text{Re }(c) > \text{Re }(b) > 0. \tag{B.4} $$

Das Integral stellt eine Funktion dar, die analytisch in der komplexen Ebene ist, mit Ausnahme eines Schnitts entlang der positiven reellen Achse, der bei 1 startet. Deshalb gibt Gl. (B.4) eine analytische Fortsetzung von Gl. (B.1) an. In unserem Fall ist die hypergeometrische Funktion ${}_2F_1(a,b;c;z)$ bei der Berechnung des Selbstenergieintegrals im chiralen Grenzfall aufgetaucht. Wir haben dabei von Gl. (B.4) Gebrauch gemacht.
Eine wichtige Relation der hypergeometrischen Funktionen lautet:

$$ \begin{aligned} {}_2F_1\,(a,b;c;z) \;=\; & \frac{\Gamma(c)\Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)} {}_2F_1\,(a,b;a+b-c-1;1-z) \\ & + (1-z)^{c-a-b} \frac{\Gamma(c)\Gamma(a+b-c)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} {}_2F_1\,(c-a,c-b;c-a-b+1;1-z)\,. \end{aligned} \tag{B.5} $$

Darüberhinaus existiert noch eine Vielzahl an weiteren Relationen, die in [AS 65] angegeben sind.

Anhang C

Integrale

Wir unterscheiden hier zwischen drei Typen von Integralen, je nachdem, ob das dazugehörige Diagramm aus einer, zwei oder drei inneren Linien (Propagatoren) besteht. Die meisten der hier betrachteten Integrale enthalten Divergenzen, die mit Hilfe der dimensionalen Regularisierung [Vel 94] extrahiert werden. Dabei berechnet man die Integrale in n Dimensionen, wobei n nicht unbedingt eine natürliche Zahl sein muss. Die Divergenzen treten dann als Pole in $\epsilon = 4 - n$ auf. In der chiralen Störungstheorie ist es allgemein üblich, die divergenten Terme in der Konstanten

$$R = \frac{2}{n-4} + \gamma_E - 1 - \ln(4\pi) \tag{C.1}$$

zusammenzufassen, wobei $\gamma_E = -\Gamma'(1)$ die Eulerkonstante ist. Dieser divergente Teil der Integrale wird dann in den Niederenergiekonstanten der einzelnen Lagrange-Dichten absorbiert, die dadurch renormiert werden[1].

In die Definition der Integrale führen wir noch einen Faktor $\mathring{m}_N^{4-n}$ ein, damit die Dimensionalität der Integrale unabhängig von n ist. Im Prinzip könnte man eine beliebige Massenskala μ an Stelle von $\mathring{m}_N$ wählen. Da wir aber in dieser Arbeit ausschließlich Prozesse mit Nukleonen betrachten, kommt die Masse des Nukleons im chiralen Grenzfall als eine innere Massenskala ganz natürlich ins Spiel, so dass wir $\mu = \mathring{m}_N$ setzen[2].

Wir haben die folgende Konvention für die Bezeichnung der Integrale getroffen:

$$I_{a\,b\ldots}(p_1, p_2, \ldots) = i \int \frac{d^n k}{(2\pi)^n} \mathring{m}_N^{4-n} \frac{1}{\left((k+p_1)^2 - m_a^2 + i\epsilon\right)\left((k+p_2)^2 - m_b^2 + i\epsilon\right)\ldots}. \tag{C.2}$$

C.1 Integrale mit einer inneren Linie

Das einzige skalare Integral mit einer inneren Linie ist gegeben durch

$$I(m^2) = i \int \frac{d^n k}{(2\pi)^n} \mathring{m}_N^{4-n} \frac{1}{(k+p)^2 - m^2 + i\epsilon}. \tag{C.3}$$

Dieses Integral hängt nicht von einem äußeren Impuls p^μ ab, da man die Impulsabhängigkeit des Integranden durch die Substitution $k^\mu \to k^\mu - p^\mu$ eliminieren kann.

Bei der Ableitung vollzieht man den Übergang vom Minkowskiraum in den euklidischen Raum durch die Wick-Rotation. Das Integral kann schließlich unter Verwendung der Polarkoordinaten in n Dimensionen berechnet werden. Eine genaue Herleitung findet man z.B. in [Vel 94].

[1] In höheren Ordnungen werden allerdings Potenzen bzw. Polynome in R benötigt.

[2] Man könnte im Mesonsektor auch eine andere Massenskala als im Nukleonsektor wählen, z.B. $\mu = m_\rho$.

Das Ergebnis lautet:

$$I(m^2) = \frac{m^2}{16\pi^2}\left[R + 2\ln\left(\frac{m}{\mathring{m}_N}\right) + \mathcal{O}(4-n)\right]. \tag{C.4}$$

Wir interessieren uns hier für die Fälle einer inneren Pionlinie und einer inneren Nukleonlinie:

$$I_\pi = I(m_\pi^2) = \frac{m_\pi^2}{16\pi^2}\left[R + 2\ln\left(\frac{m_\pi}{\mathring{m}_N}\right) + \mathcal{O}(4-n)\right], \tag{C.5}$$

$$I_N = I(\mathring{m}_N^2) = \frac{\mathring{m}_N^2}{16\pi^2}\left[R + \mathcal{O}(4-n)\right]. \tag{C.6}$$

Mit der Wahl $\mu = \mathring{m}_N$ für die Massenskala besteht das Integral I_N nur noch aus einem Term proportional zu R, während I_π noch einen Term enthält, der nicht analytisch in der Quarkmasse $\hat{m}$ ist.

C.2 Integrale mit zwei inneren Linien

Zuerst betrachten wir das Integral $I_{\pi\pi}(t)$ mit zwei Pionmassen in den beiden Propagatoren:

$$I_{\pi\pi}(t) := i\mathring{m}_N^{4-n}\int \frac{d^n k}{(2\pi)^n}\frac{1}{[k^2 - m_\pi^2 + i\epsilon][(k+q)^2 - m_\pi^2 + i\epsilon]}, \tag{C.7}$$

wobei $t = q^2$. Zur Berechnung von Gl. (C.7) verwenden wir den Feynman-Trick

$$\frac{1}{ab} = \int_0^1 dx \frac{1}{[ax + b(1-x)]^2}, \tag{C.8}$$

mit $a = (k+q)^2 - m_\pi^2 + i\epsilon$ und $b = k^2 - m_\pi^2 + i\epsilon$ und erhalten schließlich:

$$I_{\pi\pi}(t) = \frac{1}{16\pi^2}\left[R + 1 + 2\ln\left(\frac{m_\pi}{\mathring{m}_N}\right) + J^{(0)}\left(\frac{t}{m_\pi^2}\right)\right], \tag{C.9}$$

mit der Definition

$$J^{(n)}(a) := \int_0^1 dx x^n \ln\left[1 + a(x^2 - x) - i\epsilon\right]. \tag{C.10}$$

Für $J^{(0)}$ erhalten wir dann:

$$J^{(0)}(x) = \begin{cases} -2 - \sigma\ln\left(\frac{\sigma-1}{\sigma+1}\right) & (x < 0) \\ -2 + 2\sqrt{\frac{4}{x} - 1}\,\mathrm{arccot}\left(\sqrt{\frac{4}{x} - 1}\right) & (0 \le x < 4) \\ -2 - \sigma\ln\left(\frac{1-\sigma}{1+\sigma}\right) - i\pi\sigma & (4 < x) \end{cases},$$

mit

$$\sigma(x) = \sqrt{1 - \frac{4}{x}}, \qquad x \notin [0,4]. \tag{C.11}$$

Den Ausdruck für $I_{NN}(t)$ erhält man, indem man die Pionmasse m_π durch die Nukleonmasse $\mathring{m}_N$ ersetzt:

$$I_{NN}(t) = \frac{1}{16\pi^2}\left[R + 1 + J^{(0)}\left(\frac{t}{\mathring{m}_N^2}\right)\right]. \tag{C.12}$$

Man beachte, dass dieses Integral im Gegensatz zu Gl. (C.9) ausschließlich Terme enthält, die analytisch in dem äußeren Impuls t und der Quarkmasse sind.
Wir benötigen noch die beiden folgenden Tensorintegrale:

$$\begin{aligned}
I^{\mu}_{\pi\pi}(0,q) &= i\mathring{m}_N^{4-n}\int\frac{d^nk}{(2\pi)^n}\frac{k^\mu}{[k^2-m_\pi^2+i\epsilon][(k+q)^2-m_\pi^2+i\epsilon]}\\
&= q^\mu I^{(q)}_{\pi\pi}(t), &\text{(C.13)}\\
I^{\mu\nu}_{\pi\pi}(0,q) &= i\mathring{m}_N^{4-n}\int\frac{d^nk}{(2\pi)^n}\frac{k^\mu k^\nu}{[k^2-m_\pi^2+i\epsilon][(k+q)^2-m_\pi^2+i\epsilon]}\\
&= t\,g^{\mu\nu}I^{(00)}_{\pi\pi}(t)+q^\mu q^\nu I^{(qq)}_{\pi\pi}(t). &\text{(C.14)}
\end{aligned}$$

Die Methode zur Reduktion von Tensorintegralen auf skalare Integrale werden wir am Beispiel dieser beiden Tensorintegrale verdeutlichen. Als Erstes multiplizieren wir Gl. (C.13) mit q_μ,

$$q^2 I^{(q)}_{\pi\pi}(t)=\int\frac{d^nk}{(2\pi)^n}\mathring{m}_N^{n-4}\frac{i\,q\cdot k}{[k^2-m_\pi^2+i\epsilon]\,[(k+q)^2-m_\pi^2+i\epsilon]} \tag{C.15}$$

und schreiben den Zähler in der Form

$$q\cdot k=\frac{1}{2}\left[(k+q)^2-m_\pi^2-(k^2+q^2-m_\pi^2)\right], \tag{C.16}$$

so dass wir schließlich erhalten:

$$\begin{aligned}
q^2 I^{(q)}_{\pi\pi}(t) &= \frac{i}{2}\int\frac{d^nk}{(2\pi)^n}\mathring{m}_N^{n-4}\frac{\left[(k+q)^2-m_\pi^2\right]-\left[k^2-m_\pi^2\right]-q^2}{[k^2-m_\pi^2+i\epsilon]\,[(k+q)^2-m_\pi^2+i\epsilon]}\\
&= \frac{i}{2}\int\frac{d^nk}{(2\pi)^n}\mathring{m}_N^{n-4}\left\{\frac{1}{k^2-m_\pi^2+i\epsilon}-\frac{1}{(k+q)^2-m_\pi^2+i\epsilon}\right.\\
&\qquad\left.-\frac{q^2}{[k^2-m_\pi^2+i\epsilon]\,[(k+q)^2-m_\pi^2+i\epsilon]}\right\}\\
&= -\frac{1}{2}\,q^2 I_{\pi\pi}(t). &\text{(C.17)}
\end{aligned}$$

Analog multiplizieren wir Gl. (C.14) einmal mit $g_{\mu\nu}$ und benutzen $g_{\mu\nu}g^{\mu\nu}=n$:

$$\begin{aligned}
q^2 I^{(qq)}_{\pi\pi}(t)+nq^2 I^{(00)}_{\pi\pi}(t) &= \int\frac{d^nk}{(2\pi)^n}\mathring{m}_N^{n-4}\frac{i\,k^2}{[k^2-m_\pi^2+i\epsilon]\,[(k+q)^2-m_\pi^2+i\epsilon]}\\
&= i\int\frac{d^nk}{(2\pi)^n}\mathring{m}_N^{n-4}\frac{k^2-m_\pi^2+m_\pi^2}{[k^2-m_\pi^2+i\epsilon]\,[(k+q)^2-m_\pi^2+i\epsilon]}\\
&= I_\pi+m_\pi^2 I_{\pi\pi}(t). &\text{(C.18)}
\end{aligned}$$

Mit q_μ multipliziert erhalten wir aus Gl. (C.14):

$$\begin{aligned}
&q^2q^\nu\left(I^{(qq)}_{\pi\pi}(t)+I^{(00)}_{\pi\pi}(t)\right)=\int\frac{d^nk}{(2\pi)^n}\mathring{m}_N^{n-4}\frac{i\,k\cdot p\,k^\nu}{[k^2-m_\pi^2+i\epsilon]\,[(k+q)^2-m_\pi^2+i\epsilon]}\\
&\quad=\frac{1}{2}\int\frac{d^nk}{(2\pi)^n}\mathring{m}_N^{n-4}\frac{i\,k^\nu}{k^2-m_\pi^2+i\epsilon}-\frac{1}{2}\int\frac{d^nk}{(2\pi)^n}\mathring{m}_N^{n-4}\frac{i\,k^\nu}{(k+q)^2-m_\pi^2+i\epsilon}\\
&\qquad-\frac{q^2}{2}\int\frac{d^nk}{(2\pi)^n}\mathring{m}_N^{n-4}\frac{i\,k^\nu}{[k^2-m_\pi^2+i\epsilon]\,[(k+q)^2-m_\pi^2+i\epsilon]}\\
&\quad=\frac{1}{2}q^\nu I_\pi+\frac{q^2}{4}q^\nu I_{\pi\pi}(t). &\text{(C.19)}
\end{aligned}$$

Mit Gl. (C.18) und Gl. (C.19) erhalten wir dann für $I^{(qq)}_{\pi\pi}(t)$ bzw. $I^{(00)}_{\pi\pi}(t)$:

$$
\begin{aligned}
I^{(qq)}_{\pi\pi}(t) &= \frac{1}{(n-1)t}\left[(\frac{1}{2}n-1)I_\pi + \left(\frac{1}{4}n\,t - m_\pi^2\right) I_{\pi\pi}(t)\right], && \text{(C.20)}\\
I^{(00)}_{\pi\pi}(t) &= \frac{1}{(n-1)t}\left[\frac{1}{2}I_\pi + \frac{1}{4}(4m_\pi^2 - t)I_{\pi\pi}(t)\right]. && \text{(C.21)}
\end{aligned}
$$

Die Integrale I_π und $I_{\pi\pi}(t)$ enthalten beide die Größe R (Gl. (C.1)), die für $n = 4$ divergiert. Deshalb müssen wir den Parameter n in einer Taylorreihe um $-\epsilon = n - 4$ entwickeln. In diesem Fall benötigen wir:

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{n-1} &= \frac{1}{3} - \frac{n-4}{9} + \mathcal{O}\left((n-4)\right),\\
\frac{n}{n-1} &= \frac{4}{3} - \frac{1}{9}\left(n-4\right) + \mathcal{O}\left((n-4)\right),\\
\frac{n-2}{2(n-1)} &= \frac{1}{3} + \frac{1}{18}\left(n-4\right) + \mathcal{O}\left((n-4)\right). && \text{(C.22)}
\end{aligned}
$$

Aus den Gln. (C.20) und (C.21) erhalten wir:

$$
\begin{aligned}
tI^{(qq)}_{\pi\pi}(t) &= \frac{1}{3}I_\pi + \frac{1}{3}\left(t - m_\pi^2\right) I_{\pi\pi}(t) + \frac{1}{144\pi^2}\left(3m_\pi^2 - \frac{t}{2}\right), && \text{(C.23)}\\
tI^{(00)}_{\pi\pi}(t) &= \frac{1}{6}I_\pi(t) + \frac{1}{12}\left(4m_\pi^2 - t\right) I_{\pi\pi}(t) - \frac{1}{8\pi^2}\left(\frac{1}{6}m_\pi^2 - \frac{t}{36}\right). && \text{(C.24)}
\end{aligned}
$$

Wir benötigen noch das Integral mit einem Pionpropagator und einem Nukleonpropagator,

$$
I_{\pi N}(p^2) = i\mathring{m}_N^{4-n}\int\frac{d^nk}{(2\pi)^n}\frac{1}{[k^2 - m_\pi^2 + i\epsilon][(k-p)^2 - m_N^2 + i\epsilon]}. \qquad \text{(C.25)}
$$

Die Berechnung dieses Integrals geht analog zur Berechnung von $I_{\pi\pi}(t)$. Wir erhalten das folgende Ergebnis:

$$
I_{\pi N}(p^2) = \frac{1}{16\pi^2}\left[R - 1 + \frac{p^2 - \mathring{m}_N^2 + m_\pi^2}{p^2}\ln\left(\frac{m_\pi}{\mathring{m}_N}\right) + \frac{2\mathring{m}_N m_\pi}{p^2}F(\Omega)\right], \qquad \text{(C.26)}
$$

mit

$$
F(\Omega) = \begin{cases}
\sqrt{\Omega^2 - 1}\ln\left(-\Omega - \sqrt{\Omega^2 - 1}\right) & \text{für} \quad \Omega \leq -1\\
\sqrt{1 - \Omega^2}\arccos\left(-\Omega\right) & \text{für} \quad -1 \leq \Omega \leq 1\\
\sqrt{\Omega^2 - 1}\ln\left(\Omega + \sqrt{\Omega^2 - 1}\right) - i\pi\sqrt{\Omega^2 - 1} & \text{für} \quad \Omega \geq 1
\end{cases}
$$

und

$$
\Omega = \frac{p^2 - \mathring{m}_N^2 - m_\pi^2}{2\mathring{m}_N m_\pi}.
$$

Als ein Test kann man $m_\pi = \mathring{m}_N$ setzen und erhält gerade das Integral $I_{NN}(p^2)$. Das Integral ist für zwei beliebige Massen m_1 und m_2 bereits in [Ebe 01] berechnet worden.
Wir benötigen noch das Tensorintegral

$$
\begin{aligned}
I^\mu_{\pi N}(0, -p) &= i\mathring{m}_N^{4-n}\int\frac{d^nk}{(2\pi)^n}\frac{k^\mu}{[k^2 - m_\pi^2 + i\epsilon][(k-p)^2 - \mathring{m}_N^2 + i\epsilon]}\\
&= p^\mu I^{(p)}_{\pi N}(p^2). && \text{(C.27)}
\end{aligned}
$$

Mit Hilfe der Beziehung

$$k \cdot p = -\frac{1}{2}\left((k-p)^2 - \mathring{m}_N^2 - (k^2 - m_\pi^2) - (p^2 - \mathring{m}_N^2 + m_\pi^2)\right)$$

erhalten wir sofort:

$$I_{\pi N}^{(p)}(p^2) = \frac{1}{2p^2}\left[I_N - I_\pi + (p^2 - \mathring{m}_N^2 + m_\pi^2) I_{\pi N}(p^2)\right]. \tag{C.28}$$

C.3 Integrale mit drei inneren Linien

Die Ausdrücke für die in diesem Abschnitt diskutierten Integrale vereinfachen sich entscheidend, wenn die Impulse p_i^μ und p_f^μ der Nukleonen auf der Massenschale sind, d.h. die Bedingungen $p_i^2 = m_N^2$ und $p_f^2 = (p_i + q)^2 = m_N^2$ erfüllen. Da in dieser Arbeit die benötigten Integrale mit drei inneren Linien diese Bedingungen erfüllen, verwenden wir hier diese Vereinfachungen. Die Integrale hängen dann nur noch von einem Parameter $t = q^2 = (p_f - p_i)^2 = -2p_i \cdot q$ ab. Außerdem ist der Unterschied zwischen $\mathring{m}_N$ und m_N von einer höheren Ordnung und wird deshalb im Folgenden vernachlässigt.

Zuerst diskutieren wir das Integral

$$I_{\pi\pi N}(0, q, -p) = i \int \frac{d^n k}{(2\pi)^n} \mathring{m}_N^{4-n} \frac{1}{k^2 - m_\pi^2 + i\epsilon} \frac{1}{(k+q)^2 - m_\pi^2 + i\epsilon} \frac{1}{(p-k)^2 - m_N^2 + i\epsilon}, \tag{C.29}$$

wie es z.B. beim Dreiecksgraphen des skalaren Formfaktors (Abbildung 4.1a) auftaucht und dort auch eine entscheidende Rolle spielt.
Das zu dem Integral gehörende Diagramm ist in Abbildung C.1 dargestellt[3]. Da wir die oben

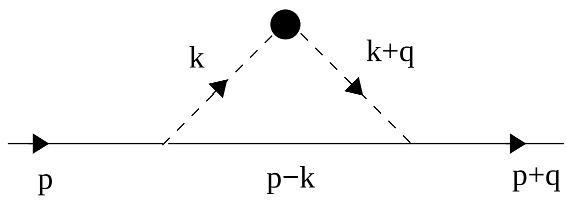

Abbildung C.1: Dreiecksgraph. Der schwarze Punkt steht für eine Wechselwirkung mit einem Impulsübertrag q auf das virtuelle Pion.

diskutierten Bedingungen verwenden und $p = p_i$ setzen, können wir das Integral mit $I_{\pi\pi N}(t)$ bezeichnen. Der Imaginärteil von $I_{\pi\pi N}(t)$ kann mit Hilfe der Cutkosky-Regeln [Cut 60] berechnet werden, die in [PS 95] zusammengefasst sind und folgendermaßen lauten: Um $2i\,\mathrm{Im}(I_{\pi\pi N}(t))$ zu erhalten, schneidet man das betrachtete Diagramm in allen möglichen Arten durch und ersetzt die durchgeschnittenen Propagatoren $1/(p^2 - m^2 + i\epsilon)$ durch $-2\pi i\delta(p^2 - m^2)$. Anschließend summiert man die Beiträge aller möglichen Schnitte. In unserem Fall trägt nur der Schnitt durch die beiden Pionpropagatoren bei:

$$2i\,\mathrm{Im}\left(I_{\pi\pi N}(t)\right) = (-2\pi\, i)^2 i \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{\delta(k^2 - m_\pi^2)\delta((k+q)^2 - m_\pi^2)}{(k-p)^2 - m_N^2 + i\epsilon}. \tag{C.30}$$

[3]Die folgende Ableitung des Imaginärteils ist [Sch 02] entnommen (Kapitel 5.6, Methode der Infrarotregularisierung).

Zur Berechnung von Gl. (C.30) wählen wir das Bezugssystem, das durch $q^\mu = (\sqrt{t}, \vec{0})$ definiert ist. Damit vereinfachen sich die beiden Delta-Distributionen zu

$$\delta(k^2 - m_\pi^2)\delta((k+q)^2 - m_\pi^2) = \frac{1}{2\sqrt{t}}\delta(k^2 - m_\pi^2)\delta\left(k_0 + \frac{\sqrt{t}}{2}\right).$$

Mit $p_0 = -\sqrt{t}/2$ erhalten wir das Zwischenergebnis:

$$\mathrm{Im}(I_{\pi\pi N}(t)) = -\frac{1}{16\pi^2\sqrt{t}} \int d^3k\, \delta\left(\vec{k}^2 + m_\pi^2 - \frac{t}{4}\right) \frac{1}{-\frac{t}{2} + 2\vec{p}\cdot\vec{k} + m_\pi^2 + i\epsilon}. \tag{C.31}$$

Wir erkennen hier bereits, dass das Integral nur für $t \geq 4m_\pi^2$ einen Imaginärteil entwickelt, da erst ab diesem Impulsübertrag zwei Pionen auf der Massenschale produziert werden können. Benutzen wir noch

$$\vec{p} = \begin{cases} i\frac{\sqrt{4m_N^2 - t}}{2}\hat{e}_z & \text{für} \quad 4m_\pi^2 \leq t \leq 4m_N^2, \\ \\ \frac{\sqrt{t - 4m_N^2}}{2}\hat{e}_z & \text{für} \quad 4m_N^2 \leq t \end{cases},$$

und verwenden Kugelkoordinaten, so erhalten wir schließlich für den Fall $t \leq 4m_N^2$:

$$\begin{aligned} \mathrm{Im}(I_{\pi\pi N}(t)) &= \theta(t - 4m_\pi^2)\frac{\sqrt{t - 4m_\pi^2}}{16\pi\sqrt{t}} \int_{-1}^{1} dz \frac{1}{t - 2m_\pi^2 - i\sqrt{4m_N^2 - t}\sqrt{t - 4m_\pi^2}z - i\epsilon} \\ &= i\frac{\theta(t - 4m_\pi^2)}{16\pi\sqrt{t}\sqrt{4m_N^2 - t}} \ln\left(\frac{1 - iy}{1 + iy}\right) \\ &= \frac{\theta(t - 4m_\pi^2)}{8\pi\sqrt{t(4m_N^2 - t)}} \arctan(y), \quad t \leq 4m_N^2, \end{aligned} \tag{C.32}$$

mit

$$y = \frac{\sqrt{(t - 4m_\pi^2)(4m_N^2 - t)}}{t - 2m_\pi^2}.$$

Für den Fall $t > 4m_N^2$ erhalten wir mit der Ersetzung $i\sqrt{4m_N^2 - t} \to \sqrt{t - 4m_N^2}$:

$$\mathrm{Im}(I_{\pi\pi N}(t)) = \frac{\theta(t - 4m_\pi^2)}{16\pi\sqrt{t(t - 4m_N^2)}} \ln\left(\frac{t - 2m_\pi^2 + \sqrt{t - 4m_N^2}\sqrt{t - 4m_\pi^2}}{t - 2m_\pi^2 - \sqrt{t - 4m_N^2}\sqrt{t - 4m_\pi^2}}\right), \quad t > 4m_N^2. \tag{C.33}$$

Das Ergebnis stimmt mit dem für $\mathrm{Im}\gamma^{\pi N}(t)$ aus [GSS 88] überein.

Das eigentliche Integral $I_{\pi\pi N}(t)$ kann man dann mit Hilfe einer subtrahierten Dispersionsrelation berechnen:

$$I_{\pi\pi N}(t) = I_{\pi\pi N}(0) + \frac{t}{\pi}\int_{t=4m_\pi^2}^{\infty} dt' \frac{1}{t'(t'-t)} \mathrm{Im}(I_{\pi\pi N}(t')). \tag{C.34}$$

Das Ergebnis für $I_{\pi\pi N}(0)$ kann explizit berechnet werden:

$$I_{\pi\pi N}(0) = \frac{1}{16\pi^2 m_N^2 m_\pi}\left[m_\pi \ln\left(\frac{m_\pi}{m_N}\right) + \frac{2m_N^2 - m_\pi^2}{\sqrt{4m_N^2 - m_\pi^2}} \arctan\left(\frac{\sqrt{4m_N^2 - m_\pi^2}}{m_\pi}\right)\right]. \tag{C.35}$$

Zu diesem Integral benötigen wir noch die folgenden Tensorintegrale:

$$
\begin{aligned}
I^{\mu}_{\pi\pi N}(0,q,-p_i) &= i\int\frac{d^nk}{(2\pi)^n}\frac{\mathring{m}_N^{4-n}\,k^\mu}{[k^2-m_\pi^2+i\epsilon][(k+q)^2-m_\pi^2+i\epsilon][(k-p_i)^2-m_N^2+i\epsilon]} \\
&= P^\mu I^{(P)}_{\pi\pi N}(t)-\frac{1}{2}q^\mu I_{\pi\pi N}(t), \qquad \text{(C.36)} \\
I^{\mu\nu}_{\pi\pi N}(0,q,-p_i) &= i\int\frac{d^nk}{(2\pi)^n}\frac{\mathring{m}_N^{4-n}\,k^\mu k^\nu}{[k^2-m_\pi^2+i\epsilon][(k+q)^2-m_\pi^2+i\epsilon][(k-p_i)^2-m_N^2+i\epsilon]} \\
&= g^{\mu\nu}I^{(00)}_{\pi\pi N}(t)+P^\mu P^\nu I^{(PP)}_{\pi\pi N}(t)+q^\mu q^\nu I^{(qq)}_{\pi\pi N}(t)-\frac{(q^\mu P^\nu+P^\mu q^\nu)}{2}I^{(P)}_{\pi\pi N}(t), \\
&\qquad \text{(C.37)}
\end{aligned}
$$

wobei wir noch den Impuls $P^\mu=(p_i+p_f)^\mu$ eingeführt haben. Mit den üblichen Methoden zur Reduktion von Tensorintegralen erhalten wir:

$$
\begin{aligned}
I^{(P)}_{\pi\pi N}(t) &= \frac{1}{2(4m_N^2-t)}\left[(2m_\pi^2-t)I_{\pi\pi N}(t)+2I_{\pi N}(m_N^2)-2I_{\pi\pi}(t)\right], \qquad \text{(C.38)} \\
I^{(00)}_{\pi\pi N}(t) &= \frac{1}{4(n-2)}\left[2I_{\pi N}(m_N^2)+(4m_\pi^2-t)I_{\pi\pi N}(t)-2(2m_\pi^2-t)I^{(P)}_{\pi\pi N}(t)\right] \\
&= \frac{1}{8}\left[2I_{\pi N}(t)+(4m_\pi^2-t)I_{\pi\pi N}(t)-2(2m_\pi^2-t)I^{(P)}_{\pi\pi N}(t)-\frac{1}{8\pi^2}\right], \qquad \text{(C.39)} \\
I^{(PP)}_{\pi\pi N}(t) &= \frac{1}{4(n-2)(4m_N^2-t)}\Big[-2I_{\pi N}(m_N^2)+2(n-2)I^{(p)}_{\pi N}(m_N^2)-(4m_\pi^2-t)I_{\pi\pi N}(t) \\
&\quad +2(n-1)(2m_\pi^2-t)I^{(P)}_{\pi\pi N}(t)\Big] \\
&= \frac{1}{8(4m_N^2-t)}\Big[-2I_{\pi N}(m_N^2)+4I^{(p)}_{\pi N}(m_N^2)-(4m_\pi^2-t)I_{\pi\pi N}(t) \\
&\quad +6(2m_\pi^2-t)I^{(P)}_{\pi\pi N}(t)+\frac{1}{8\pi^2}\Big], \qquad \text{(C.40)} \\
I^{(qq)}_{\pi\pi N}(t) &= \frac{1}{4(n-2)t}\Big[2(n-3)I_{\pi N}(m_N^2)-2(n-2)I^{(p)}_{\pi N}(m_N^2) \\
&\quad -\big(4m_\pi^2-(n-1)t\big)\,I_{\pi\pi N}(t)+2(2m_\pi^2-t)I^{(P)}_{\pi\pi N}(t)\Big] \\
&= \frac{1}{8t}\Big[2I_{\pi N}(m_N^2)-4I^{(p)}_{\pi N}(m_N^2)-\big(4m_\pi^2-3t\big)\,I_{\pi\pi N}(t)+2(2m_\pi^2-t)I^{(P)}_{\pi\pi N}(t) \\
&\quad +\frac{1}{8\pi^2}\Big]. \qquad \text{(C.41)}
\end{aligned}
$$

Nach dem ersten Gleichheitszeichen steht der Ausdruck in n Dimensionen und nach dem zweiten Gleichheitszeichen der Ausdruck in $n=4$ Dimensionen. Die $1/\epsilon$-Singularitäten, die in den einzelnen Bausteinen noch vorhanden sind, heben sich genau weg.
Als Nächstes diskutieren wir das folgende Integral,

$$
I_{\pi NN}(t)=i\int\frac{d^nk}{(2\pi)^n}\frac{\mathring{m}_N^{4-n}}{[k^2-m_\pi^2+i\epsilon][(k-p_i)^2-m_N^2+i\epsilon][(k-p_f)^2-m_N^2+i\epsilon]}, \qquad \text{(C.42)}
$$

wobei wir von der Massenschalenbedingung Gebrauch machen werden. Der Imaginärteil wird wieder mit Hilfe der Cutkosky-Regeln berechnet. Dabei betrachten wir das Diagramm in Abbildung C.2, wie es z.B. bei den elektromagnetischen Formfaktoren (Abb. 5.15) auftaucht.

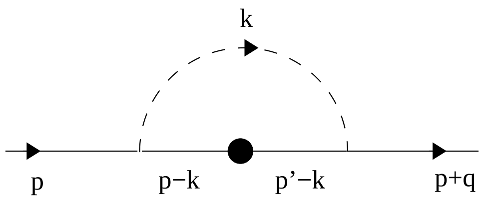

Abbildung C.2: Diagramm, das zum Integral $I_{\pi NN}(t)$ gehört. Der schwarze Punkt steht für eine Wechselwirkung mit einem Impulsübertrag q auf das virtuelle Nukleon.

In diesem Fall trägt nur der Schnitt durch die beiden Nukleonpropagatoren zum Imaginärteil bei:

$$2i\,\mathrm{Im}(I_{\pi NN}(t)) = (-2\pi\, i)^2 i \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{\delta(k^2-2p_i\cdot k)\delta(k^2-2p_f\cdot k)}{k^2-m_\pi^2+i\epsilon}. \tag{C.43}$$

In dem durch $q^\mu = (\sqrt{t},\vec{0})$ definierten Bezugssystem lauten die beiden Deltadistributionen:

$$\delta(k^2-2p_i\cdot k)\delta(k^2-2p_f\cdot k) = \frac{1}{2\sqrt{t}}\,\delta(\vec{k}^2-2\vec{p}_i\cdot\vec{k})\delta(k_0).$$

Wegen der ersten Deltadistribution gibt es nur Beiträge für $t > 4m_N^2$. Wir erhalten schließlich:

$$\mathrm{Im}\,(I_{\pi NN}(t)) = \frac{\theta(t-4m_N^2)}{16\pi\sqrt{t(t-4m_N^2)}} \ln\left(1+\frac{t-4m_N^2}{m_\pi^2}\right). \tag{C.44}$$

Das eigentliche Integral $I_{\pi NN}(t)$ kann man dann wieder mit Hilfe einer subtrahierten Dispersionsrelation berechnen:

$$I_{\pi NN}(t) = I_{\pi NN}(0) + \frac{t}{\pi}\int_{t=4m_N^2}^{\infty} dt' \frac{1}{t'(t'-t)}\mathrm{Im}(I_{\pi NN}(t')), \tag{C.45}$$

wobei das Ergebnis für $I_{\pi NN}(0)$ explizit angegeben werden kann:

$$I_{\pi NN}(0) = -\frac{1}{16\pi^2 m_N^2}\left(\ln\frac{m_\pi}{m_N} - \frac{m_\pi}{\sqrt{4m_N^2-m_\pi^2}}\arctan\frac{\sqrt{4m_N^2-m_\pi^2}}{m_\pi}\right). \tag{C.46}$$

In dieser Arbeit erscheinen noch die folgenden Tensorintegrale:

$$\begin{aligned}
I^\mu_{\pi NN}(0,-p_i,-p_f) &= \int \frac{d^nk}{(2\pi)^n} \frac{i\,\mathring{m}_N^{4-n}\,k^\mu}{[k^2-m_\pi^2+i\epsilon][(k-p_i)^2-m_N^2+i\epsilon][(k-p_f)^2-m_N^2+i\epsilon]} \\
&= P^\mu I^{(P)}_{\pi NN}(t), && \text{(C.47)}\\
I^{\mu\nu}_{\pi NN}(0,-p_i,-p_f) &= \int \frac{d^nk}{(2\pi)^n} \frac{i\,\mathring{m}_N^{4-n}\,k^\mu k^\nu}{[k^2-m_\pi^2+i\epsilon][(k-p_i)^2-m_N^2+i\epsilon][(k-p_f)^2-m_N^2+i\epsilon]} \\
&= g^{\mu\nu} I^{(00)}_{\pi NN}(t) + P^\mu P^\nu I^{(PP)}_{\pi NN}(t) + q^\mu q^\nu I^{(qq)}_{\pi NN}(t). && \text{(C.48)}
\end{aligned}$$

Da diese beiden Tensorintegrale symmetrisch unter der Vertauschung von p_i und p_f sind, verschwinden im Gegensatz zu Gl. (C.36) und Gl. (C.37) die Terme, die proportional zu q^μ bzw.

$q^\mu P^\nu + P^\mu q^\nu$ sind. Wir erhalten schließlich die folgenden Ausdrücke:

$$
\begin{aligned}
I^{(P)}_{\pi NN}(t) &= \frac{1}{4\mathring{m}_N^2 - t}\left[m_\pi^2 I_{\pi NN}(t) - I_{\pi N}(m_N^2) + I_{NN}(t)\right], && \text{(C.49)}\\
I^{(00)}_{\pi NN}(t) &= \frac{1}{n-2}\left[\left(I_{\pi NN}(t) - I^{(P)}_{\pi NN}(t)\right) m_\pi^2 + \frac{1}{2} I_{NN}(t)\right],\\
&= \frac{1}{2}\left[\left(I_{\pi NN}(t) - I^{(P)}_{\pi NN}(t)\right) m_\pi^2 + \frac{1}{2} I_{NN}(t) - \frac{1}{32\pi^2}\right], && \text{(C.50)}\\
I^{(PP)}_{\pi NN}(t) &= \frac{1}{(n-2)(4m_N^2 - t)}\left[\left((n-1) I^{(P)}_{\pi NN}(t) - I_{\pi NN}(t)\right) m_\pi^2 - \frac{n-2}{2} I^{(p)}_{\pi N}(m_N^2)\right.\\
&\quad \left. + \frac{n-3}{2} I_{NN}(t)\right],\\
&= \frac{1}{2(4m_N^2 - t)}\left[\left(3 I^{(P)}_{\pi NN}(t) - I_{\pi NN}(t)\right) m_\pi^2 - I^{(p)}_{\pi N}(m_N^2) + \frac{1}{2} I_{NN}(t) + \frac{1}{32\pi^2}\right], && \text{(C.51)}\\
I^{(qq)}_{\pi NN}(t) &= \frac{1}{(n-2)t}\left[\left(I^{(P)}_{\pi NN}(t) - I_{\pi NN}(t)\right) m_\pi^2 + \frac{n-2}{2} I^{(p)}_{\pi N}(m_N^2) - \frac{1}{2} I_{NN}(t)\right]\\
&= \frac{1}{2t}\left[\left(I^{(P)}_{\pi NN}(t) - I_{\pi NN}(t)\right) m_\pi^2 + I^{(p)}_{\pi N}(m_N^2) - \frac{1}{2} I_{NN}(t) + \frac{1}{32\pi^2}\right], && \text{(C.52)}
\end{aligned}
$$

wobei wir wieder zuerst den Ausdruck in n und dann erst in 4 Dimensionen angegeben haben. Die $1/\epsilon$-Singularitäten der einzelnen Bausteine heben sich hier wieder weg.

Anhang D

Elektromagnetische Formfaktoren ohne Tensorintegrale

Zur Bestimmung der Ordnung der Beiträge zu den Diagrammen muss man die Tensorintegrale durch skalare Integrale ausdrücken. Wir geben in diesem Abschnitt die Ergebnisse der Beiträge der Diagramme 5.15, 5.17 und 5.19 zu den elektromagnetischen Formfaktoren an, ausgedrückt durch ausschließlich skalare Integrale. Die restlichen Beiträge enthalten entweder keine Tensorintegrale oder sind proportional zu $tJ^{(1)}(t)$ (s. Gln. (5.8) - (5.20)). In dem hier verwendeten Renormierungsschema [GJW 99] lauten die renormierten Beiträge für den Dirac-Formfaktor:

$$\begin{aligned}
F_1^{5,R} &= \frac{g_A^2}{8F_\pi^2}(3-\tau^3)\left[\frac{4m_N^2+t}{4m_N^2-t}I_\pi^r + 2m_\pi^2\left(1-\frac{2m_N^2}{4m_N^2-t}-\frac{24m_N^4}{(4m_N^2-t)^2}\right)I_{\pi N}^r(m_N^2)\right.\\
&\quad -2m_N^2\left(1-\frac{4m_N^2-2m_\pi^2}{4m_N^2-t}-\frac{24m_N^2m_\pi^2}{(4m_N^2-t)^2}\right)I_{NN}^r(t)\\
&\quad \left.-\frac{4m_N^2m_\pi^2}{4m_N^2-t}\left(4m_N^2+m_\pi^2-\frac{12m_N^2m_\pi^2}{4m_N^2-t}\right)I_{\pi NN}(t)+\frac{m_N^2 t}{8\pi^2(4m_N^2-t)}\right],
\end{aligned} \tag{D.1}$$

$$\begin{aligned}
F_1^{7,R} &= -\frac{g_A^2}{F_\pi^2}\tau^3\left[-\frac{1}{6}\frac{20m_N^2+t}{4m_N^2-t}I_\pi^r+\frac{2m_N^2}{4m_N^2-t}\left(m_\pi^2+6m_N^2\frac{2m_\pi^2-t}{4m_N^2-t}\right)I_{\pi N}^r(m_N^2)\right.\\
&\quad -\left(\frac{1}{12}\left(t-4m_\pi^2\right)-m_N^2\frac{2m_\pi^2-t}{4m_N^2-t}+12m_N^4\frac{2m_\pi^2-t}{(4m_N^2-t)^2}\right)I_{\pi\pi}^r(t)\\
&\quad -\frac{m_N^2}{2(4m_N^2-t)}\left((4m_\pi^2-t)t-(2m_\pi^2-t)^2\frac{8m_N^2+t}{4m_N^2-t}\right)I_{\pi\pi N}(t)\\
&\quad \left.+\frac{1}{288\pi^2}\left(t-6m_\pi^2+\frac{18m_N^2 t}{4m_N^2-t}\right)\right],
\end{aligned} \tag{D.2}$$

$$\begin{aligned}
F_1^{9,R} &= \frac{m_N^2 g_A^2}{F_\pi^2}(6c_7-\tau_3 c_6)\left\{\frac{t}{2(4m_N^2-t)}\left[-m_\pi^2\left(\frac{1}{2m_N^2}+\frac{3}{4m_N^2-t}\right)I_{\pi N}^r(m_N^2)\right.\right.\\
&\quad \left.+\frac{I_\pi^r}{2m_N^2}-m_\pi^2\left(1-\frac{3m_\pi^2}{4m_N^2-t}\right)I_{\pi NN}(t)+\left(\frac{1}{2}+\frac{3m_\pi^2}{4m_N^2-t}\right)I_{NN}^r(t)+\frac{1}{32\pi^2}\right]\\
&\quad \left.-\frac{t}{128\pi^2 m_N^2}\right\},
\end{aligned} \tag{D.3}$$

und für den Pauli-Formfaktor

$$\begin{aligned}
F_2^{5,R} &= -\frac{g_A^2}{F_\pi^2}(3-\tau^3)\left\{\frac{2m_N^4}{4m_N^2-t}\left[-m_\pi^2\left(\frac{1}{2m_N^2}+\frac{3}{4m_N^2-t}\right)I_{\pi N}^r(m_N^2)\right.\right.\\
&\quad \left.+\frac{1}{2m_N^2}I_\pi^r - m_\pi^2\left(1-\frac{3m_\pi^2}{4m_N^2-t}\right)I_{\pi NN}(t)+\left(\frac{1}{2}+\frac{3m_\pi^2}{4m_N^2-t}\right)I_{NN}^r(t)+\frac{1}{32\pi^2}\right]\\
&\quad \left.-\frac{m_N^2}{32\pi^2}\right\}, \qquad \text{(D.4)}\\
F_2^{7,R} &= \frac{g_A^2}{F_\pi^2}\tau^3\left\{\frac{2m_N^4}{4m_N^2-t}\left[-\frac{2}{m_N^2}I_\pi^r - 2\left(1-\frac{m_\pi^2}{m_N^2}-3\frac{2m_\pi^2-t}{4m_N^2-t}\right)I_{\pi N}^r(m_N^2)\right.\right.\\
&\quad \left.\left.-6\frac{2m_\pi^2-t}{4m_N^2-t}I_{\pi\pi}^r(t)+\left(t-4m_\pi^2+3\frac{(2m_\pi^2-t)^2}{4m_N^2-t}\right)I_{\pi\pi N}(t)+\frac{1}{8\pi^2}\right]-\frac{m_N^2}{8\pi^2}\right\}, \\
&\qquad \text{(D.5)}\\
F_2^{9,R} &= -\frac{g_A^2}{8F_\pi^2}(6c_7-\tau_3 c_6)\left[-\frac{2m_\pi^2}{4m_N^2-t}\left(2m_N^2+t+\frac{6m_N^2 t}{4m_N^2-t}\right)I_{\pi N}^r(m_N^2)\right.\\
&\quad +\frac{4m_N^2+t}{4m_N^2-t}I_\pi^r+\frac{4m_N^2 m_\pi^2}{4m_N^2-t}\left(m_\pi^2-t+\frac{3m_\pi^2 t}{4m_N^2-t}\right)I_{\pi NN}(t)\\
&\quad \left.+\frac{4m_N^2}{4m_N^2-t}\left(2m_N^2+m_\pi^2+\frac{3m_\pi^2 t}{4m_N^2-t}\right)I_{NN}^r(t)+\frac{1}{8\pi^2}\frac{m_N^2 t}{4m_N^2-t}-\frac{m_N^2}{8\pi^2}\right]. \qquad \text{(D.6)}
\end{aligned}$$

Der obere Index r bei den Integralen steht für die nach dem $\widetilde{MS}$-Schema renormierten, endlichen Ausdrücke dieser Integrale. Damit ist gemeint, dass man bei den dimensional regularisierten Integralen den Anteil proportional zu R weglässt. Der $\widetilde{MS}$-Schema renormierte, endliche Ausdruck für das Integral $I_{\pi\pi}(t)$ aus Gl. (C.9) lautet z.B.:

$$I_{\pi\pi}^r(t) = \frac{1}{16\pi^2}\left[1+2\ln\left(\frac{m_\pi}{\mathring{m}_N}\right)+J^{(0)}\left(\frac{t}{m_\pi^2}\right)\right]. \qquad \text{(D.7)}$$

Anhang E

Theorie der Pionelektroproduktion

Unter Pionelektroproduktion am Nukleon versteht man die inelastische Elektronenstreuung am Nukleon mit der Produktion eines Pions. Der Begriff umfasst also die folgenden vier Reaktionen:

$$\begin{aligned} e + p &\rightarrow e' + n + \pi^+, \\ &\rightarrow e' + p + \pi^0, \\ e + n &\rightarrow e' + p + \pi^-, \\ &\rightarrow e' + n + \pi^0. \end{aligned} \tag{E.1}$$

E.1 Kinematik

Wir benutzen in diesem Kapitel die in Abbildung E.1 dargestellte Nomenklatur [AFF 79]. Da die

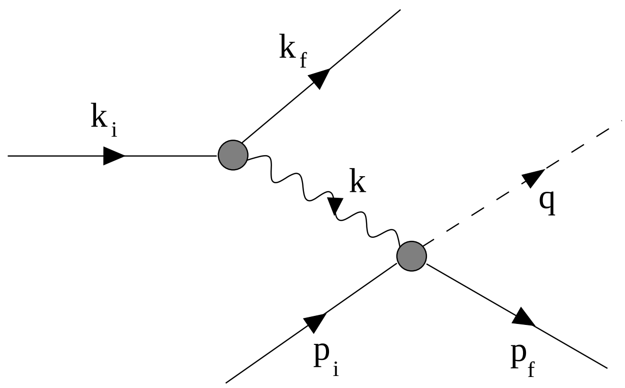

Abbildung E.1: Kinematik der Pionelektroproduktion. Das einlaufende Elektron hat den Viererimpuls k_i^μ und das auslaufende Elektron den Impuls k_f^μ. Die Nukleonen besitzen die Impulse p_i^μ und p_f^μ und das auslaufende Pion den Impuls q^μ.

elektromagnetische Kopplungskonstante α sehr klein ist, $\alpha \approx 1/137$, kann man die Näherung machen, dass in allen elektromagnetischen Prozessen nur ein Photon ausgetauscht wird.

Die Reaktion der Pionelektroproduktion läuft in zwei, i. A. verschiedenen Ebenen ab, der Elektronenstreu- und der Reaktionsebene. Diese Ebenen und die auftretenden Winkel sind in Abbildung E.2 zu sehen.

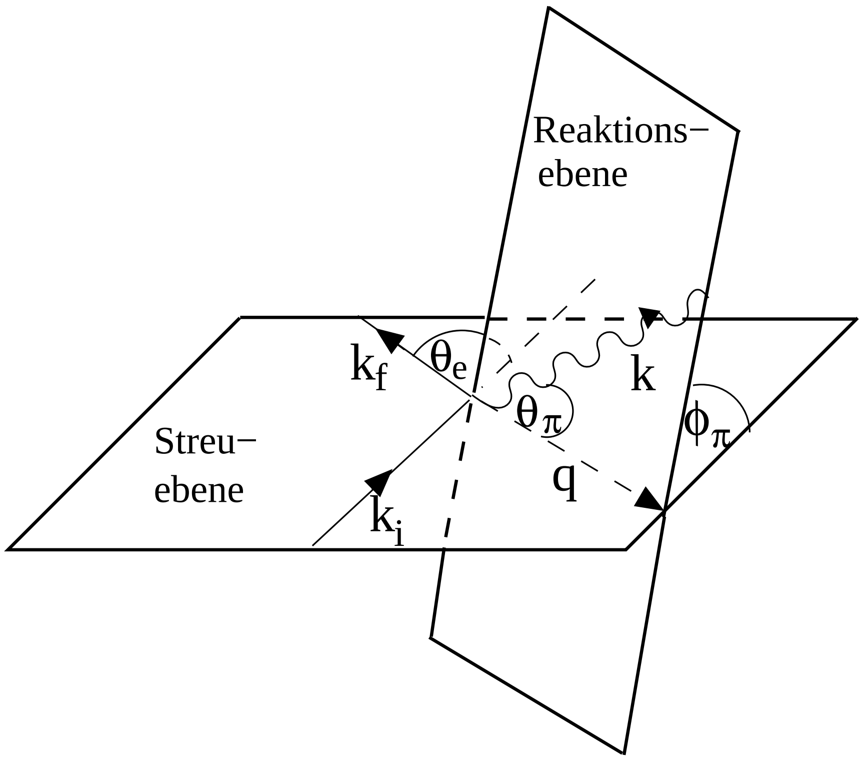

Abbildung E.2: Streukinematik der Pionelektroproduktion mit Elektronenstreu- und Reaktionsebene.

Es gilt die Vierer-Impulserhaltung,

$$p_i(E_i, \vec{p}_i) + k_i(\epsilon_i, \vec{k}_i) = p_f(E_f, \vec{p}_f) + k_f(\epsilon_f, \vec{k}_f) + q(E_\pi, \vec{q}). \tag{E.2}$$

Das Quadrat des Viererimpulsübertrags des ausgetauschten virtuellen Photons k^2 ist immer negativ, d.h. die virtuellen Photonen sind raumartig. Das erkennt man sofort, wenn man z.B. in das Ruhesystem des auslaufenden Elektrons geht:

$$k^2 = 2m_e^2 - 2m_e\sqrt{m_e^2 + |\vec{k}_i|^2} \leq 0. \tag{E.3}$$

Für den Fall relativistischer Elektronen, d.h. $\epsilon_i, \epsilon_f \gg m_e$, macht man oft die folgende Näherung:

$$k^2 = 2m_e^2 - 2(\epsilon_i\epsilon_f - |\vec{k}_i||\vec{k}_f|\cos\theta_e) \approx -4\epsilon_i\epsilon_f \sin^2\left(\frac{\theta_e}{2}\right), \tag{E.4}$$

wobei θ_e der Winkel zwischen ein- und auslaufendem Elektron ist.

Die zur Charakterisierung eines Prozesses am häufigsten verwendeten invarianten Variablen sind die so genannten Mandelstam-Variablen

$$s = W^2 = (p_i + k)^2, \qquad t = (k - q)^2, \qquad u = (p_f - k)^2, \tag{E.5}$$

die durch die Relation

$$s + t + u = k^2 + 2m_N^2 + m_\pi^2 \tag{E.6}$$

miteinander in Verbindung stehen. Die invariante Masse W ist dabei die Energie, die der Reaktion zur Verfügung steht.

In der Pionelektroproduktion werden häufig auch die dimensionslosen invarianten Variablen

$$\nu = \frac{k \cdot (p_i + p_f)}{2m_N^2} = \frac{q \cdot (p_i + p_f)}{2m_N^2}, \tag{E.7}$$

$$\nu_1 = \frac{k \cdot q}{2m_N^2} \tag{E.8}$$

$$\text{und} \qquad \nu_2 = \frac{k^2}{m_N^2} \tag{E.9}$$

eingeführt, wobei folgender Zusammenhang zu den Mandelstam-Variablen s, t und u besteht:

$$\begin{aligned} s - m_N^2 &= 2m_N^2 \left(\nu + \nu_1\right), \\ u - m_N^2 &= -2m_N^2 \left(\nu - \nu_1\right), \\ \left(s - m_N^2\right) + \left(t - m_\pi^2\right) + \left(u - m_N^2\right) &= m_N^2 \, \nu_2. \end{aligned}$$

Es gibt insgesamt fünf unabhängige Variablen. Das Abzählen der Freiheitsgrade für $n \geq 4$ Teilchen geht folgendermaßen: Jedem Teilchen kann ein Viererimpuls zugewiesen werden, d.h. wir haben $4n$ Variablen mit n Massenschalenbedingungen, $p_i^2 = m_i^2$. Die Energie- und Impulserhaltung eliminiert weitere vier Variablen. Die Wahl eines geeigneten Inertialsystems, z.B. $\vec{p}_i = 0$, legt drei Freiheitsgrade fest, die Ausrichtung des Systems entlang einer Achse und die Drehung um diese Ausrichtungsachse erfordert weitere drei Parameter. Somit ist die Anzahl der Freiheitsgrade eines Systems mit $n \geq 4$ Teilchen

$$f = 3n - 10, \tag{E.10}$$

d.h. für fünf Teilchen benötigen wir fünf unabhängige Variablen.

Für diese Variablen werden häufig die folgenden Sätze verwendet: $\epsilon_i, \epsilon_f, \theta_e, \theta_\pi, \Phi_\pi$ oder k^2, s, ϵ, θ_π^*, Φ_π, wobei der Polarisationsparameter ϵ gegeben ist durch

$$\epsilon = \frac{1}{1 - \frac{\vec{k}^2}{k^2} \tan^2\left(\frac{\theta_e}{2}\right)}. \tag{E.11}$$

Die mit einem Stern versehenen Größen kennzeichnen Größen im Schwerpunktsystem des hadronischen πN-Endzustands, während alle anderen Größen Laborsystemgrößen sind. Das Schwerpunktsystem des hadronischen πN-Endzustands ist durch die Gleichungen

$$\vec{p}_i^{\,*} = -\vec{k}^{\,*} \qquad \text{und} \qquad \vec{p}_f^{\,*} = -\vec{q}^{\,*}$$

definiert, während das Laborsystem durch $\vec{p}_i = 0$ definiert ist.

E.2 Die Pionelektroproduktionsamplitude

Die invariante Amplitude der Pionelektroproduktion setzt sich aus einem bekannten leptonischen Anteil und einem hadronischen Anteil zusammen. Bezeichnet man den hadronischen Strom im Ortsraum mit $J^\mu(x)$, so kann man für die invariante Amplitude schreiben:

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_i &= ie\bar{u}(k_f, s_f)\gamma_\mu u(k_i, s_i) \left(-\frac{ig^{\mu\nu}}{k^2}\right) \left(-i\langle N(p_f, s_f),\, \pi^i(q) \left| J_\nu(0) \right| N(p_i, s_i)\rangle\right) \\ &= -ie\varepsilon_\mu \mathcal{M}_i^\mu, \end{aligned} \tag{E.12}$$

mit

$$\epsilon_\mu = \frac{\bar{u}(k_f, s_f)\gamma_\mu u(k_i, s_i)}{k^2}.$$

Dabei bezeichnet i die Isospinkomponente des Pionfeldes. Das allgemeinste Übergangsstrommatrixelement wird durch die acht dimensionslosen Ball-Amplituden parametrisiert [Bal 61, AFF 79],

$$\mathcal{M}^\mu = \frac{i}{2m_N}\sum_{i=1}^{8} \bar{u}(p_f, s_f) Q_i^\mu A_i(\nu, \nu_1, \nu_2) u(p_i, s_i), \tag{E.13}$$

mit den in Gl. (E.7) eingeführten drei dimensionslosen invarianten Variablen ν, ν_1 und ν_2. Die Operatoren Q_i^μ sind gegeben durch

$$\begin{aligned}
Q_1^\mu &= \gamma_5\gamma^\mu, \qquad Q_2^\mu = \gamma_5\frac{(p_i+p_f)^\mu}{4m_N}, \qquad Q_3^\mu = \gamma_5\frac{q^\mu}{2m_N}, \\
Q_4^\mu &= \gamma_5\frac{k^\mu}{2m_N}, \qquad Q_5^\mu = \frac{\gamma^\mu \not{k} - \not{k}\gamma^\mu}{4m_N}, \\
Q_6^\mu &= \gamma_5\not{k}\,\frac{(p_i+p_f)^\mu}{8m_N^2}, \qquad Q_7^\mu = \gamma_5\frac{\not{k}\, q^\mu}{4m_N^2}, \qquad Q_8^\mu = \gamma_5\frac{\not{k}\, k^\mu}{4m_N^2}.
\end{aligned} \tag{E.14}$$

Die Struktur dieser Vektoren ist $\gamma_5\times$ „Vierervektor“= „Axialvektor“. Aus der Eichinvarianz, d.h. $k_\mu\mathcal{M}^\mu = 0$, erhält man zwei Bedingungen, so dass man nur sechs unabhängige Amplituden $A_i(\nu, \nu_1, \nu_2)$ hat,

$$A_1 + \frac{1}{4}\nu A_6 + \frac{1}{2}\nu_1 A_7 + \frac{1}{4}\nu_2 A_8 = 0, \tag{E.15}$$

$$\frac{1}{2}\nu A_2 + \nu_1 A_3 + \frac{1}{2}\nu_2 A_4 = 0. \tag{E.16}$$

Die Anzahl von sechs unabhängigen Amplituden erhält man auch durch das Abzählen mit Hilfe von Spinprojektionen. Im Anfangszustand haben wir ein Nukleon mit Spin $1/2$ und ein virtuelles Photon mit Spin 1, im Endzustand ein Nukleon mit Spin $1/2$ und ein spinloses Pion. Wir haben also $2\times 3\times 2 = 12$ verschiedene Sätze an Spinprojektionen. Die Paritätserhaltung verbindet aber jeweils zwei Sätze mit genau entgegengesetzten Spinprojektionen miteinander, so dass wir nur 6 unabhängige Amplituden haben. Bei dieser Methode muss man allerdings auf eventuell noch vorhandene Symmetrien aufpassen[1].

Unter der Annahme perfekter Isospinsymmetrie, d.h. $m_u = m_d$, kann jede dieser Amplituden noch in drei unabhängige Isospinamplituden zerlegt werden, wobei wir in unserer Definition die Spinfunktionen der Nukleonen noch integriert haben. Für die Produktion eines Pions mit der Ladung α erhält man folgende Isospinzerlegung,

$$A(\pi^\alpha) = \chi_f^\dagger\left(\frac{1}{2}\left[\tau_{-\alpha}, \tau_0\right] A^{(-)} + \tau_{-\alpha}A^{(0)} + \frac{1}{2}\left\{\tau_{-\alpha}, \tau_0\right\} A^{(+)}\right)\chi_i \tag{E.17}$$

mit $\tau_\pm = \frac{1}{\sqrt{2}}(\tau_1 \pm i\tau_2)$ und $\tau_0 = \tau_3$. Die zu den vier physikalischen Prozessen (Gl. (E.1))

[1] Bei der reellen Comptonstreuung ($\gamma + N \to \gamma + N$) z.B. sind die ein- und auslaufenden Teilchen identisch, so dass die Zeitumkehrinvarianz hier noch zwei weitere Bedingungen liefert. Man bekommt hier sechs anstatt acht unabhängige Amplituden.

gehörenden Amplituden können damit durch die Isospinamplituden ausgedrückt werden,

$$
\begin{aligned}
A(\pi^+) &= \sqrt{2}\left(A^{(-)} + A^{(0)}\right), && \text{(E.18)}\\
A(\pi^-) &= \sqrt{2}\left(-A^{(-)} + A^{(0)}\right), && \text{(E.19)}\\
A(p\pi^0) &= A^{(0)} + A^{(+)}, && \text{(E.20)}\\
A(n\pi^0) &= -A^{(0)} + A^{(+)}. && \text{(E.21)}
\end{aligned}
$$

Unter der Vertauschung $k \leftrightarrow -q$ (Crossing-Symmetrie) verhalten sich diese Amplituden wie folgt:

$$A_i^{(+,0,-)}(\nu,\nu_1,\nu_2) = \pm\,\eta_i A_i^{(+,0,-)}(-\nu,\nu_1,\nu_2).$$

Das obere Vorzeichen gilt für die $(+)$- und (0)-Amplituden, das untere für die $(-)$-Amplitude, wobei

$$
\begin{aligned}
\eta_i &= +1, \qquad i = 2,5,6,\\
\eta_i &= -1, \qquad i = 1,3,4,7,8.
\end{aligned}
$$

Manchmal findet man in der Literatur auch die Schreibweise für die kartesischen Indizes,

$$M(\pi^i) = \chi_f^\dagger \left[\frac{1}{2}\left[\tau_i,\tau_0\right] A^{(-)} + \tau_i A^{(0)} + \frac{1}{2}\left\{\tau_i,\tau_0\right\} A^{(+)}\right] \chi_i. \tag{E.22}$$

Zur Beschreibung von vier physikalischen Prozessen benötigen wir also nur drei Isospinamplituden. Zur Begründung betrachten wir uns den Isospin der einzelnen Zustände. Das Nukleon im Anfangszustand hat den Isospin $1/2$. Der elektrische Stromoperator hat eine isoskalare Komponente, die mit dem Nukleon nur zum Isospin $1/2$ koppeln kann, und eine isovektorielle Komponente, die zum Isospin $1/2$ oder $3/2$ koppeln kann. Zusammen haben wir also drei Kopplungsmöglichkeiten:

$$
\begin{aligned}
0 \otimes \frac{1}{2} &= \frac{1}{2}, && \text{(E.23)}\\
1 \otimes \frac{1}{2} &= \frac{1}{2} \oplus \frac{3}{2}. && \text{(E.24)}
\end{aligned}
$$

E.3 Multipolzerlegung der Pionelektroproduktion

Die Eichinvarianz erlaubt es uns, den Polarisationsvektor so zu wählen, dass dessen nullte Komponente verschwindet,

$$a^\mu = \varepsilon^\mu - \frac{\varepsilon^0}{k^0} k^\mu.$$

Zerlegt man den Vektor $\vec{a}$ in einen transversalen und einen longitudinalen Anteil und geht in das hadronische Schwerpunktsystem, so erhält man,

$$
\begin{aligned}
\mathcal{M} &= ie\left(\vec{a}_\perp \cdot \vec{\mathcal{M}} + \vec{a}_{||} \cdot \vec{\mathcal{M}}\right)\\
&= i\frac{4\pi W}{m_N}\chi_f^\dagger \Big(i\vec{\sigma}\cdot\vec{a}_\perp F_1(k^2,W,\cos\theta_\pi^*) + \vec{\sigma}\cdot\hat{q}\vec{\sigma}\cdot\hat{k}\times\vec{a}_\perp F_2(k^2,W,\cos\theta_\pi^*)\\
&\quad + i\vec{\sigma}\cdot\hat{k}\vec{a}_\perp\cdot\hat{q}F_3(k^2,W,\cos\theta_\pi^*) + i\vec{\sigma}\cdot\hat{q}\vec{a}_\perp\cdot\hat{q}F_4(k^2,W,\cos\theta_\pi^*)\\
&\quad + i\vec{\sigma}\cdot\hat{k}\vec{a}_{||}\cdot\hat{k}F_5(k^2,W,\cos\theta_\pi^*) + i\vec{\sigma}\cdot\hat{q}\vec{a}_{||}\cdot\hat{k}F_6(k^2,W,\cos\theta_\pi^*)\Big)\chi_i. && \text{(E.25)}
\end{aligned}
$$

Die letzten beiden Terme treten dabei nur in der Pionelektroproduktion auf, während die restlichen Terme auch in der Pionphotoproduktion auftreten. Die Amplituden F_1 bis F_6 werden als CGLN-Amplituden bezeichnet [Che+ 57]. Diese Strukturfunktionen können in eine Multipolreihe nach den Ableitungen der Legendre-Polynome entwickelt werden,

$$\begin{aligned} F_1(k^2,W,x) &= \sum_{l=0}^{\infty} \left\{ \left[lM_{l+}(k^2,W) + E_{l+}(k^2,W) \right] P'_{l+1}(x) \right. \\ &\quad \left. + \left[(l+1)M_{l-}(k^2,W) + E_{l-}(k^2,W) \right] P'_{l-1}(x) \right\}, \end{aligned} \tag{E.26}$$

$$F_2(k^2,W,x) = \sum_{l=1}^{\infty} \left\{ (l+1)M_{l+}(k^2,W) + lM_{l-}(k^2,W) \right\} P'_l(x), \tag{E.27}$$

$$\begin{aligned} F_3(k^2,W,x) &= \sum_{l=1}^{\infty} \left\{ \left[E_{l+}(k^2,W) - M_{l+}(k^2,W) \right] P''_{l+1}(x) \right. \\ &\quad \left. + \left[E_{l-}(k^2,W) + M_{l-}(k^2,W) \right] P''_{l-1}(x) \right\}, \end{aligned} \tag{E.28}$$

$$F_4(k^2,W,x) = \sum_{l=2}^{\infty} \left\{ M_{l+}(k^2,W) - E_{l+}(k^2,W) - M_{l-}(k^2,W) - E_{l-}(k^2,W) \right\} P''_l(x), \tag{E.29}$$

$$F_5(k^2,W,x) = \sum_{l=0}^{\infty} \left\{ (l+1)L_{l+}(k^2,W)P'_{l+1}(x) - lL_{l-}(k^2,W)P'_{l-1}(x) \right\}, \tag{E.30}$$

$$F_6(k^2,W,x) = \sum_{l=1}^{\infty} \left\{ lL_{l-}(k^2,W) - (l+1)L_{l+}(k^2,W) \right\} P'_l(x), \tag{E.31}$$

mit $x = \cos\theta^*_\pi$ und $P'_l = dP_l/dx$. Zur Definition der Multipole in der Pionelektroproduktion betrachten wir uns den Gesamtdrehimpuls J. Im Endzustand koppelt der Relativbahndrehimpuls l mit dem Spin $1/2$ des Nukleons zu $J = l \pm 1/2$. In der Definition der Multipole wird der Faktor $1/2$ weggelassen, so dass hier nur $l\pm$ steht. Die großen Buchstaben E, M und L stehen für die elektrische, magnetische und longitudinale Multipolstrahlung des virtuellen Photons. Ein transversal polarisiertes Photon führt zu elektrischen und magnetischen Übergängen und ein longitudinal polarisiertes Photon zu longitudinalen oder Coulomb-Übergängen. Die Multipole der Pionelektroproduktion gehören zu den folgenden elektromagnetischen Multipolübergängen:

$$\begin{array}{llllll} E_{l+} \mathrel{\hat{=}} E(l+1), & l \geq 0, & L_{l+} \mathrel{\hat{=}} C(l+1), & l \geq 0, & M_{l+} \mathrel{\hat{=}} M(l), & l \geq 1, \\ E_{l-} \mathrel{\hat{=}} E(l-1), & l \geq 2, & L_{l-} \mathrel{\hat{=}} C(l-1), & l \geq 1, & M_{l-} \mathrel{\hat{=}} M(l), & l \geq 1. \end{array} \tag{E.32}$$

Bei Experimenten nahe der Pionschwelle, d.h. bei invarianten Massen $W \gtrsim m_N + m_\pi$, tragen nur die niedrigsten Multipole bei. Nimmt man an, dass nur Multipole mit einem Relativbahndrehimpuls von $l < 2$ beitragen (s- und p-Wellen), so lauten die CGLN-Amplituden:

$$F_1 = E_{0+} + 3\cos\theta_\pi \left(E_{1+} + M_{1+} \right), \qquad F_4 = 0, \tag{E.33}$$

$$F_2 = 2M_{1+} + M_{1-}, \qquad F_5 = L_{0+} + 6\cos\theta_\pi L_{1+}, \tag{E.34}$$

$$F_3 = 3\left(E_{1+} - M_{1+} \right), \qquad F_6 = L_{1-} - 2L_{1+}. \tag{E.35}$$

Die führenden Multipole sind mittlerweile für invariante Energien bis zu $W = 1.8$ GeV analysiert worden [Kam+ 01].

E.4 Differentieller Wirkungsquerschnitt

Zur Berechnung des differentiellen Wirkungsquerschnitts der Pionelektroproduktion benutzt man die Standardregeln [BD 64] und erhält,

$$d\sigma = \frac{1}{|\vec{v}_e - \vec{v}_N|} \frac{m_e}{\epsilon_i} \frac{m_N}{E_i} |\mathcal{M}|^2 \frac{d^3 k_f}{(2\pi)^3} \frac{m_e}{\epsilon_f} \frac{d^3 p_f}{(2\pi)^3} \frac{m_N}{E_f} \frac{d^3 q}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_\pi} (2\pi)^4 \delta^4 (p_i + k_i - k_f - p_f - q). \tag{E.36}$$

Wertet man den leptonischen Teil im Laborsystem und den hadronischen Teil im Schwerpunktsystem des hadronischen πN-Endzustands aus, so erhält man,

$$\frac{d^5\sigma}{d\epsilon_f d\omega_e d\omega_\pi^*} = \frac{1}{(2\pi)^5} \frac{m_e^2}{2} \frac{\epsilon_f}{\epsilon_i} \frac{m_N |\vec{q}^*|}{W} |\mathcal{M}|^2 . \tag{E.37}$$

Für die quadrierte Amplitude führt man den leptonischen Tensor $\eta^{\mu\nu}$ und den hadronischen Tensor $W^{\mu\nu}$ ein und erhält mittels Gl. (E.12),

$$|\mathcal{M}|^2 = e^2 \left(\varepsilon_\mu \mathcal{M}^\mu\right) \left(\varepsilon_\nu \mathcal{M}^\nu\right)^* = \frac{e^2}{k^4} \eta_{\mu\nu} W^{\mu\nu}, \tag{E.38}$$

mit

$$\eta_{\mu\nu} = \bar{u}(p_f, s_f) \gamma_\mu u(p_i, s_i) \left(\bar{u}(p_f, s_f) \gamma_\nu u(p_i, s_i)\right)^*$$

und

$$W^{\mu\nu} = \langle N(p_f, s_f),\, \pi(q) \,|J^\mu(0)|\, N(p_i, s_i)\rangle \langle N(p_f, s_f),\, \pi(q) \,|J^\nu(0)|\, N(p_i, s_i)\rangle^* .$$

Der Ausdruck für den leptonischen Tensor für einen polarisierten Strahl mit Nachweis der Polarisation des gestreuten Elektrons lautet [DR 86]

$$\begin{aligned} \eta_{\mu\nu} = \; & \frac{1}{8m_e^2} \Big[K_\mu K_\nu \left(1 - s_i \cdot s_f\right) + k^2 g_{\mu\nu} \left(1 - s_i \cdot s_f + 2 \frac{s_i \cdot k s_f \cdot k}{k^2}\right) \\ & + k^2 \left(s_{i,\mu} s_{f,\nu} + s_{f,\mu} s_{i,\nu}\right) + K_\mu U_\nu + U_\mu K_\nu + 2i m_e \, \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} \left(s_i + s_f\right)^\rho k^\sigma \Big] \end{aligned} \tag{E.39}$$

mit $U^\mu = k \cdot s_f s_i^\mu - k \cdot s_i s_f^\mu$ und $K = k_i + k_f$. Wir haben hier Terme, die proportional zu k^μ und k^ν sind, vernachlässigt, da diese Terme bei der Kontraktion mit dem hadronischen Tensor auf Grund der Stromerhaltung wegfallen.

Der Nachweis der Polarisation des gestreuten Elektrons ist relativ schwierig, so dass man normalerweise die Spins des auslaufenden Elektrons summiert. Der Ausdruck für den leptonischen Tensor vereinfacht sich dann zu:

$$\eta_{\mu\nu} = \bar{\eta}_{\mu\nu} + \frac{i}{2m_e} \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} s_i^\rho k^\sigma . \tag{E.40}$$

Verwendet man einen unpolarisierten Strahl und weist die Polarisation des gestreuten Elektrons nicht nach, so muss man über die Anfangszustände mitteln und über die Endzustände summieren. Das Ergebnis lautet dann:

$$\begin{aligned} \bar{\eta}_{\mu\nu} &= \frac{1}{2m_e^2} \left(k_{i,\mu} k_{f,\nu} + k_{f,\mu} k_{i,\nu} + g_{\mu\nu} \left(m_e^2 - k_i \cdot k_f\right)\right) & \text{(E.41)} \\ &= \frac{1}{4m_e^2} \left(K_\mu K_\nu - k_\mu k_\nu + k^2 g_{\mu\nu}\right) . & \text{(E.42)} \end{aligned}$$

Dieser Tensor ist symmetrisch unter Vertauschung der Indizes.

Der differentielle Wirkungsquerschnitt kann also in einen leptonischen und einen hadronischen Anteil aufgeteilt werden,

$$\frac{d^5\sigma}{d\epsilon_f d\omega_e d\omega_\pi^*} = \Gamma \frac{d\sigma_V}{d\Omega_\pi^*}, \tag{E.43}$$

wobei wir hier noch den so genannten virtuellen Photonenfluss

$$\Gamma = \frac{e^2}{(2\pi)^3} \frac{\epsilon_f}{\epsilon_i} \frac{k_\gamma}{-k^2} \frac{1}{1-\epsilon} \tag{E.44}$$

eingeführt haben. Die Größe k_γ ist die Energie, die ein reelles Photon benötigt, um ein Pion und ein Nukleon mit der invarianten Masse W zu erzeugen,

$$k_\gamma = \frac{W^2 - m_N^2}{2\, m_N}. \tag{E.45}$$

Den interessanten hadronischen Teil des Wirkungsquerschnitts zerlegt man nach den verschiedenen Polarisationen des virtuellen Photons [Dre+ 99][2],

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma_V}{d\Omega_\pi^*} &= \frac{d\sigma_T}{d\Omega_\pi^*} + \epsilon \frac{d\sigma_L}{d\Omega_\pi^*} + \sqrt{2\epsilon(1+\epsilon)}\, \frac{d\sigma_{LT}}{d\Omega_\pi^*} \cos\Phi_\pi + \epsilon \frac{d\sigma_{TT}}{d\Omega_\pi^*} \cos 2\Phi_\pi \\ & \quad + h\sqrt{2\epsilon\,(1-\epsilon)} \frac{d\sigma_{LT'}}{d\Omega_\pi^*} \sin\Phi_\pi + h\sqrt{1-\epsilon^2} \frac{d\sigma_{TT'}}{d\Omega_\pi^*}. \end{aligned} \tag{E.46}$$

Dabei ist $\frac{d\sigma_T}{d\Omega_\pi^*}$ der differentielle Wirkungsquerschnitt für transversale nicht polarisierte Photonen, der dem Resultat für nicht polarisierte reelle Photonen entspricht. Der longitudinale Wirkungsquerschnitt $\frac{d\sigma_L}{d\Omega_\pi^*}$ wird von longitudinalen Photonen erzeugt und $\frac{d\sigma_{LT}}{d\Omega_\pi^*}$ ist ein Interferenzterm zwischen longitudinalen und transversalen Komponenten. Beide Wirkungsquerschnitte verschwinden für reelle Photonen. Der Term $\frac{d\sigma_{TT}}{d\Omega_\pi^*}$ resultiert aus einer linearen transversalen Polarisation. Die in der zweiten Zeile stehenden Terme treten nur in Polarisationsexperimenten auf. Der letzte Term $\frac{d\sigma_{TT'}}{d\Omega_\pi^*}$ kann nur mit einem polarisierten Target oder durch Rückstoßpolarisation beobachtet werden. Zum Schluss erwähnen wir noch, dass auf Grund ihrer Abhängigkeit vom Winkel Φ_π die Terme $\frac{d\sigma_{LT}}{d\Omega_\pi^*}$ und $\frac{d\sigma_{LT'}}{d\Omega_\pi^*}$ proportional zu $\sin(\theta_\pi)$ sind und der Term $\frac{d\sigma_{TT}}{d\Omega_\pi^*}$ proportional zu $\sin^2(\theta_\pi)$ ist.

Im Schwerpunktsystem des hadronischen πN-Endzustandes lautet das Ergebnis für einen nicht polarisierten Elektronenstrahl ohne Nachweis der Polarisation des auslaufenden Photons:

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma_V}{d\Omega_\pi^*} &= \frac{|\vec{q}^*|\, W}{k_\gamma m_N} \left(\frac{m_N}{4\pi W}\right)^2 e^2 \left[\frac{W^{11}+W^{22}}{2} + \frac{-k^2}{k_0^{*\,2}} \epsilon W^{33} - \sqrt{2\epsilon(1+\epsilon)} \frac{\sqrt{-k^2}}{k_0^{*\,2}} \mathrm{Re}\, W^{13} \right. \\ & \quad \left. + \epsilon \frac{W^{11}-W^{22}}{2} \right]. \end{aligned} \tag{E.47}$$

An diesem Ausdruck kann man ablesen, welche Einträge des hadronischen Tensors $W^{\mu\nu}$ zu den

[2] Die hier verwendete Konvention unterscheidet sich von der in [AFF 79] und [DT 92] getroffenen Konvention.

verschiedenen Wirkungsquerschnitten gehören:

$$\frac{d\sigma_T}{d\Omega_\pi^*} = \frac{|\vec{q}^*|\,W}{k_\gamma m_N}\left(\frac{m_N}{4\pi W}\right)^2 e^2\,\frac{W^{xx}+W^{yy}}{2}, \tag{E.48}$$

$$\frac{d\sigma_L}{d\Omega_\pi^*} = \frac{|\vec{q}^*|\,W}{k_\gamma m_N}\left(\frac{m_N}{4\pi W}\right)^2 e^2\,\frac{-k^2}{k_0^{*\,2}}W^{33}, \tag{E.49}$$

$$\frac{d\sigma_{LT}}{d\Omega_\pi^*}\cos\Phi_\pi = -\frac{|\vec{q}^*|\,W}{k_\gamma m_N}\left(\frac{m_N}{4\pi W}\right)^2 e^2\,\frac{\sqrt{-k^2}}{k_0^{*\,2}}\mathrm{Re}\,W^{13}, \tag{E.50}$$

$$\frac{d\sigma_{TT}}{d\Omega_\pi^*}\cos 2\Phi_\pi = \frac{|\vec{q}^*|\,W}{k_\gamma m_N}\left(\frac{m_N}{4\pi W}\right)^2 e^2\,\frac{W^{11}-W^{22}}{2}. \tag{E.51}$$

Jetzt sind wir auch in der Lage den Zusammenhang zwischen den einzelnen Wirkungsquerschnitten und den CGLN-Amplituden anzugeben:

$$\begin{aligned}\frac{d\sigma_T}{d\Omega_\pi^*} &= \frac{|\vec{q}^*|\,W}{k_\gamma m_N}\Big[|F_1-\cos\theta_\pi^* F_2|^2+\frac{1}{2}\sin^2\theta_\pi^*\left(|F_2+F_3|^2+|F_1+F_4|^2-|F_1|^2+|F_2|^2\right.\\ &\left.+2|F_3F_4^*|\cos\theta_\pi^*\right)\Big],\end{aligned} \tag{E.52}$$

$$\frac{d\sigma_L}{d\Omega_\pi^*} = \frac{|\vec{q}^*|\,W}{k_\gamma m_N}\frac{-k^2}{k_0^{*\,2}}\left[|F_5+\cos\theta_\pi^* F_6|^2+\sin^2\theta_\pi^*|F_6|^2\right], \tag{E.53}$$

$$\begin{aligned}\frac{d\sigma_{LT}}{d\Omega_\pi^*} &= -\frac{|\vec{q}^*|\,W}{k_\gamma m_N}\sqrt{\frac{-k^2}{k_0^{*\,2}}}\,[|F_1F_6^*|+|F_2F_5^*|+|F_3^*(F_5+\cos\theta_\pi^*F_6)|\\ &+|F_4^*(\cos\theta_\pi^*F_5+F_6)|]\sin\theta_\pi^*,\end{aligned} \tag{E.54}$$

$$\frac{d\sigma_{TT}}{d\Omega_\pi^*} = \frac{|\vec{q}^*|\,W}{k_\gamma m_N}\left[\frac{1}{2}\left(|F_3|^2+|F_4|^2\right)+|F_1F_4^*|+|F_2F_3^*|+|F_3F_4^*|\cos\theta_\pi^*\right]\sin^2\theta_\pi^*. \tag{E.55}$$

An der Pionschwelle ($W = m_N + m_\pi$) ist der transversale Wirkungsquerschnitt proportional zu $|E_{0+}|^2$ und der longitudinale Wirkungsquerschnitt proportional zu $|L_{0+}|^2$ und man erhält

$$\left.\frac{d\sigma^V}{d\Omega_\pi^*}\right|_{thr.} = \frac{|\vec{q}^*|\,W}{k_\gamma m_N}\left(|E_{0+}|^2+\frac{-k^2}{k_0^{*\,2}}\epsilon\,|L_{0+}|^2\right). \tag{E.56}$$

Die Beiträge der s- und p-Wellen zu den einzelnen Wirkungsquerschnitten können in [BKM 96] gefunden werden. Noch mehr Informationen zur Pionelektroproduktion findet man in [AFF 79, DT 92].

Anhang F

Chirale Ward-Identitäten

In diesem Kapitel leiten wir verschiedene chirale Ward-Identitäten mit Hilfe der PCAC-Relation aus Gl. (2.19) ab. Diese Ward-Identitäten verknüpfen verschiedene Matrixelemente miteinander und liefern somit Tests der verwendeten Modelle.

F.1 Einfachstes Matrixelement des axialen Vektorstroms

Wir beginnen mit der Diskussion des Matrixelementes, das mit Hilfe des axialen Vektorstroms aus Gl. (2.15) entsteht, wenn man diesen zwischen dem Einpionzustand und dem Vakuum auswertet[1]:

$$\langle 0\,|A_i^\mu(x)|\,\pi^j(q)\rangle = iq^\mu F e^{-iq\cdot x}\delta^{ij}, \tag{F.1}$$

d.h. dieses Matrixelement läßt sich durch die Pionzerfallskonstante F ausdrücken und kann als Definitionsgleichung von F angesehen werden. Für die Divergenz des Axialvektorstroms erhält man dann mit den Ergebnissen der chiralen Störungstheorie der niedrigsten Ordnung:

$$\begin{aligned}\langle 0\,|\partial_\mu A_i^\mu(x)|\,\pi^j(q)\rangle &= iq^\mu F_0(-iq_\mu)e^{-iq\cdot x}\delta^{ij} = m_\pi^2 F_0 e^{-iq\cdot x}\delta^{ij}\\ &= 2\hat{m}B_0F_0e^{-iq\cdot x}\delta^{ij} = 2\hat{m}\langle 0\,|P_i(x)|\,\pi^j(x)\rangle,\end{aligned} \tag{F.2}$$

wobei wir die in Gl. (2.20) definierte pseudoskalare Dichte $P_i(x)$ eingeführt haben. Die Ergebnisse einer Einschleifenrechnung können in [GL 84] (Abschnitt 12) gefunden werden. Wir erkennen, dass diese Matrixelemente die PCAC-Relation aus Gl. (2.19) erfüllen, wenn die elektromagnetische Wechselwirkung abwesend ist.

F.2 Bedingung für die axialen Formfaktoren des Nukleons

Die axialen Formfaktoren des Nukleons sind über das Matrixelement des axialen Stroms definiert, ausgewertet zwischen einem Anfangs- und Endzustand des Nukleons. Unter Vernachlässigung von Strömen der zweiten Klasse [Wei 58] erhält man (s. Kapitel 6),

$$\langle N(p_f)|A_i^\mu(0)|N(p_i)\rangle = \bar{u}(p_f)\left[\gamma^\mu G_A(t) + \frac{q^\mu}{2m_N}G_P(t)\right]\gamma_5\frac{\tau_i}{2}u(p_i), \tag{F.3}$$

[1] Allgemein folgt aus der Translationsinvarianz $A(x) = e^{iP\cdot x}A(0)e^{-iP\cdot x}$, wobei P der Impulsoperator ist.

mit $q^\mu = (p_f - p_i)^\mu$. Für die Divergenz von $A_i^\mu(x)$ erhalten wir:

$$\begin{aligned}
\partial_\mu \langle N(p_f,s_f)|A_i^\mu(x)|N(p_i,s_i)\rangle &= i(p_f-p_i)_\mu e^{i(p_f-p_i)\cdot x}\,\langle N(p_f,s_f)|A_i^\mu(0)|N(p_i,s_i)\rangle \\
&= ie^{i(p_f-p_i)\cdot x}\bar{u}(p_f)\left[2m_N G_A(t) + \frac{t}{2m_N}G_P(t)\right]u(p_i),
\end{aligned} \tag{F.4}$$

wobei wir Gl. (F.3) und die Dirac-Gleichung ausgenutzt haben. Verwenden wir die PCAC-Relation in Abwesenheit der elektromagnetischen Wechselwirkung, so erhalten wir:

$$\begin{aligned}
\partial_\mu \langle N(p_f,s_f)|A_i^\mu(0)|N(p_i,s_i)\rangle &= 2\hat{m}\langle N(p_f,s_f)|P_i^\mu(0)|N(p_i,s_i)\rangle \\
&= \frac{m_\pi^2 F}{m_\pi^2 - t}G_\pi(t) i\bar{u}(p_f)\gamma_5\tau_i u(p_i),
\end{aligned} \tag{F.5}$$

wobei wir die Definition des Pion-Nukleon-Formfaktors $G_\pi(t)$ in Kapitel 6, Gl. (6.17) verwendet haben. Ein Vergleich von Gl. (F.4) mit Gl. (F.5) liefert sofort die in Gl. (6.20) angegebene Beziehung zwischen den axialen Formfaktoren und dem Pion-Nukleon-Formfaktor.

F.3 Herleitung von Adlers Relation

Wir leiten in diesem Abschnitt eine in Kapitel 7 ausführlich diskutierte chirale Ward-Identität her, die unter dem Namen „Adlers Relation“ bekannt ist. Dazu betrachten wir das folgende Matrixelement und verwenden die partielle Integration mit der Bedingung, dass der Oberflächenterm im Unendlichen verschwindet:

$$\begin{aligned}
&\int d^4x\, e^{iq\cdot x}\partial_\nu \langle N(p_f)|T\left[J^\mu(0)A_i^\nu(x)\right]|N(p_i)\rangle = \\
&\qquad -iq_\nu \int d^4x\, e^{iq\cdot x}\langle N(p_f,s_f)|T\left[J^\mu(0)A_i^\nu(x)\right]|N(p_i,s_i)\rangle.
\end{aligned} \tag{F.6}$$

Wir werten jetzt die linke Seite aus, indem wir das zeitgeordnete Produkt ausschreiben:

$$\begin{aligned}
T\left[J^\mu(0)A^{\nu,i}(x)\right] &= \theta(-x_0)J^\mu(0)A^{\nu,i}(x) + \theta(x_0)A^{\nu,i}(x)J^\mu(0) \\
\Rightarrow \qquad \partial_\nu T\left[J^\mu(0)A^{\nu,i}(x)\right] &= T\left[J^\mu(0)\partial_\nu A^{\nu,i}(x)\right] + \delta(x_0)\left[A^{0,i}(X), J^\mu(0)\right].
\end{aligned} \tag{F.7}$$

Der Kommutator der nullten Komponente des Axialvektorstroms und dem elektromagnetischen Strom ist für gleiche Zeiten gegeben durch[2]:

$$\delta(x_0)\left[A^{0,i}(x), J^\mu(0)\right] = -i\epsilon_{3ij}\delta^4(\vec{x})A_j^\mu(x). \tag{F.8}$$

Zur Herleitung von Gl. (F.8) verwenden wir die Definitionen der Operatoren $A^{\mu,i}(x)$ aus Gl. (2.15) und $J^\mu(y)$ aus Gl. (5.2):

$$\begin{aligned}
\delta(x_0)\left[A^{0,i}(x), J^\mu(0)\right] &= \delta(x_0)\left[q^\dagger(x)\gamma^0\gamma^0\gamma_5\frac{\tau_i}{2}q(x), q^\dagger(0)\gamma^0\gamma^\mu\left(\frac{1}{6}+\frac{\tau_3}{2}\right)q(0)\right] \\
&= \delta^4(\vec{x})\,q^\dagger(x)\left[\gamma_5\frac{\tau_i}{2}, \gamma^0\gamma^\mu\left(\frac{1}{6}+\frac{\tau_3}{2}\right)\right]q(x) \\
&= \delta^4(\vec{x})\,q^\dagger(x)\left[\frac{\tau_i}{2}, \frac{1}{6}+\frac{\tau_3}{2}\right]\gamma^0\gamma^\mu\gamma_5\,q(x) = -i\epsilon_{3ij}A_j^\mu(x)\delta^4(\vec{x}),
\end{aligned}$$

[2]Wir definieren den elektromagnetischen Strom in Einheiten von e.

wobei wir nach dem ersten Gleichheitszeichen von der folgenden gleichzeitigen Vertauschungsrelation Gebrauch gemacht haben:

$$\left\{q^{\dagger}(x), q(y)\right\}\Big|_{x_0=y_0} = \delta^3(\vec{x}-\vec{y}).$$

Jetzt setzen wir Gl. (F.8) zusammen mit der PCAC-Relation ohne Anwesenheit der elektromagnetischen Wechselwirkung in Gl. (F.7) ein und erhalten:

$$\partial_\nu T\left[J^\mu(0)A^{\nu,i}(x)\right] = T\left[J^\mu(0)\,2\hat{m}P_i(x)\right] - i\epsilon_{3ij}A^\mu_j(x)\delta^4(x). \tag{F.9}$$

Damit können wir die drei Greenschen Funktionen $\mathcal{M}^{\mu\nu}_{JA,i}$, $\mathcal{M}^{\mu}_{JP,i}$ und $\mathcal{M}^{\mu}_{A,j}$ einführen und erhalten schließlich Adlers Relation:

$$q_\nu\mathcal{M}^{\mu\nu}_{JA,i} = 2i\hat{m}\mathcal{M}^{\mu}_{JP,i} + \epsilon_{3ij}\mathcal{M}^{\mu}_{A,j}, \tag{F.10}$$

mit

$$\mathcal{M}^{\mu\nu}_{JA,i} = \int d^4x e^{iq\cdot x}\langle N(p_f)|T\left[J^\mu(0)A^\nu_i(x)\right]|N(p_i)\rangle, \tag{F.11}$$

$$\mathcal{M}^{\mu}_{JP,i} = \int d^4x e^{iq\cdot x}\langle N(p_f)|T\left[J^\mu(0)P_i(x)\right]|N(p_i)\rangle, \tag{F.12}$$

$$\mathcal{M}^{\mu}_{A,j} = \langle N(p_f)|A^\mu_j(0)|N(p_i)\rangle. \tag{F.13}$$

Genau genommen müsste in den Gln. (F.11) und (F.12) das kovariante zeitgeordnete Produkt T^* stehen, das sich vom „naiven“ zeitgeordneten Produkt T durch einen so genannten „seagull“-Term unterscheidet. Bei der Ableitung von Adlers Relation (Gl. (F.10)) haben wir aber das „naive“ zeitgeordnete Produkt T verwendet. Außerdem haben wir bei der Ableitung der gleichzeitigen Vertauschungsrelation von Gl. (F.8) den so genannten Schwinger-Term vernachlässigt. Dies kann man machen, da bei der Ableitung einer chiralen Ward-Identität sich Schwinger-Terme und „seagull“-Terme gerade aufheben [Jac 72].

F.4 LSZ-Formalismus und die Pionelektroproduktionsamplitude

In diesem Abschnitt soll die Beziehung zwischen den in Adlers Relation auftauchenden Greenschen Funktionen und der Pionelektroproduktionsamplitude ${}_i\mathcal{M}^\mu$ hergestellt werden. Dazu benötigen wir den LSZ-Formalismus [LSZ 55], der in [Bar 65] genauer beschrieben ist. Im Folgenden betrachten wir das Matrixelement S_{fi} für die Streuung zweier Teilchen. Wir geben hier nur die Ergebnisse für die Ausreduktion von einem und zwei Teilchen aus dem S-Matrixelement an. Für die Ausreduktion von einem spinlosen Teilchen d mit dem Viererimpuls p^μ_d und der Masse m_d liefert der LSZ-Formalismus:

$$S_{fi} = \langle cd; out|ab; in\rangle = \langle cd\,|S|\,ab\rangle = \langle cd|ab\rangle + i\int d^4x f^*_d(x)\left(\Box + m^2_d\right)\langle c\,|\Phi(x)|\,ab\rangle, \tag{F.14}$$

wobei $f_d(x)$ ein normierbares Wellenpaket ist, das in der Regel durch eine ebene Welle ersetzt werden kann:

$$f_d(x) \to \frac{e^{-ip_d\cdot x}}{\sqrt{2\omega_d(2\pi)^3}} \qquad \text{mit} \quad \omega_d = \sqrt{\vec{p}^{\,2}_d + m^2}.$$

Wir vernachlässigen im Folgenden Normierungsfaktoren wie z.B. $2\omega(2\pi)^3$. Das interpolierende Feld $\Phi(x)$ beschreibt dann den Übergang zwischen dem Teilchen d und dem Vakuum:

$$\langle d\,|\Phi(x)|\,0\rangle = e^{ip_d\cdot x}.$$

Dabei haben wir die Indizes in und out, die die ungestörten Anfangszustände kennzeichnen, immer dann weggelassen, wenn in einem Matrixelement nur eine Sorte von Zuständen auftaucht. Die T-Matrix ist mit dem unitären Operator S durch die Relation $S = 1 + iT$ verbunden. Die invariante Amplitude für eine Reaktion erhält man dann aus $\mathcal{M} = \langle cd \,|iT|\, ab\rangle$.
Für die Ausreduktion zweier Teilchen b und d liefert der LSZ-Formalismus den folgenden Ausdruck:

$$S_{fi} = \langle cd|ab\rangle + i^2 \int d^4x \int d^4y f_d^*(x) f_b(y) \left(\Box_x + m_d^2\right) \left(\Box_y + m_b^2\right) \langle c\,|T[\Phi(x)\Phi(y)]|\,a\rangle. \tag{F.15}$$

Man kann noch äußere Quellterme $\eta(x)$ einführen, die über die interpolierenden Felder definiert sind,

$$\left(\Box + m^2\right) \Phi(x) = \eta(x). \tag{F.16}$$

Für die Pionelektroproduktionsamplitude benötigen wir das interpolierende Pionfeld aus Gl. (7.18) und den elektromagnetischen Strom J^μ als äußere Quelle. Der Zusammenhang zwischen J^μ und einem interpolierenden Photonfeld ist durch

$$\Box \Phi_J(y) = -e\epsilon_\mu J^\mu(y)$$

gegeben. Wenden wir jetzt Gl. (F.15) für ein Pion mit Masse m_π und Impuls q im Endzustand und ein Photon mit Impuls k im Anfangszustand an, so erhalten wir für die invariante Amplitude:

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_i &= \langle N(p_f)\pi(q,i)\,|S|\,\gamma(k)N(p_i)\rangle \\ &= i^2 \int d^4x \int d^4y\, f_\pi^*(x) f_\gamma(y) \left(\Box_x + m_\pi^2\right) \langle N(p_f)\,|T\left[\Phi_i(x)\left(-e\epsilon_\mu J^\mu(y)\right)\right]|\,N(p_i)\rangle \\ &= -e\epsilon_\mu i^2 \int d^4x \int d^4y\, e^{iq\cdot x} e^{-ik\cdot y} \left(-q^2 + m_\pi^2\right) \langle N(p_f)\,|T\left[\Phi_i(x)J^\mu(y)\right]|\,N(p_i)\rangle \\ &= -e\epsilon_\mu (2\pi)^4 \delta^4(p_f + q - p_i - k) \left(q^2 - m_\pi^2\right) \cdot \\ &\quad \int d^4x\, e^{iq\cdot x} \langle N(p_f)\,|T\left[J^\mu(0)\Phi_i(x)\right]|\,N(p_i)\rangle. \end{aligned} \tag{F.17}$$

Das interpolierende Pionfeld drücken wir jetzt durch die pseudoskalare Dichte aus:

$$\Phi_i(x) = \frac{2\hat{m}}{m_\pi^2 F} P_i(x).$$

Dann erhalten wir für die durch $\mathcal{M}_i = -ie\epsilon_\mu \mathcal{M}_i^\mu$ definierte Amplitude $\mathcal{M}_i^\mu$:

$$\mathcal{M}_i^\mu = \lim_{q^2 \to m_\pi^2} \frac{q^2 - m_\pi^2}{F m_\pi^2} \left(-2\hat{m} i \mathcal{M}_{JP,i}^\mu\right). \tag{F.18}$$

Dabei muss man noch bedenken, dass die Größe $\mathcal{M}_{JP,i}^\mu$ für beliebige Werte von q^2 definiert ist, während bei der Pionelektroproduktionsamplitude die Pionen auf der Massenschale sein müssen.

Literaturverzeichnis

[AB 69] S. L. Adler und W. A. Bardeen, Phys. Rev. **182** (1969) 1517.

[AD 68] S. L. Adler und R. F. Dashen, *Current Algebras and Applications to Particle Physics* (Benjamin, New York, 1968).

[Adl 65] S. Adler, Phys. Rev. **139** (1965) B1638.

[Adl 69] S. L. Adler, Phys. Rev. **177** (1969) 2426.

[Adl 70] S. L. Adler, in *Lectures on Elementary Particles and Quantum Field Theory*, 1970 Brandeis University Summer Institute in Theoretical Physics, Volume 1, editiert von S. Deser, M. Grisaru und H. Pendleton (M.I.T. Press, Cambridge, Massachusetts, 1970).

[AFF 79] E. Amaldi, S. Fubini und G. Furlan, *Pion Electroproduction* (Springer-Verlag, Berlin, 1979).

[AG 66] S. L. Adler und F. J. Gilman, Phys. Rev. **152** (1966) 1460.

[Ahr+ 87] L. A. Ahrens *et al.*, Phys. Rev. D **35** (1987) 785.

[Ahr+ 88] L. A. Ahrens *et al.*, Phys. Lett. B **202** (1988) 284.

[Alf+ 73] V. de Alfaro, S. Fubini, G. Furlan und C. Rossetti, *Currents in Hadron Physics* (North-Holland, Amsterdam, 1973).

[Ank+ 94] H. Anklin *et al.*, Phys. Lett. B **336** (1994) 313.

[Ank+ 98] H. Anklin *et al.*, Phys. Lett. B **428** (1998) 248.

[AS 65] M. Abramowitz und I. S. Stegun, *Handbook of Mathematical Functions* (Dover Publications, New York, 1965), Kapitel 15.

[Bak+ 81] N. J. Baker *et al.*, Phys. Rev. D **23** (1981) 2499.

[Bal 61] J. S. Ball, Phys. Rev. **124** (1961) 2014.

[Bar 65] G. Barton, *Introduction to Dispersion Techniques in Field Theory* (W. A. Benjamin, New York, 1965).

[Bar 69] W. A. Bardeen, Phys. Rev. **184** (1969) 1848.

[BD 64] J. D. Bjorken und S. Drell, *Relativistic Quantum Mechanics* (McGraw-Hill, New York, 1964).

[BD 65] J. D. Bjorken und S. Drell, *Relativistic Quantum Fields* (McGraw-Hill, New York, 1965).

[Ber+ 92] V. Bernard, N. Kaiser, J. Kambor und U. G. Meißner, Nucl. Phys. B **388** (1992) 315.

[Ber+ 98] V. Bernard, H. W. Fearing, T. R. Hemmert und U. G. Meißner, Nucl. Phys. A **635** (1998) 121 [Erratum-ibid. A **642** (1998) 563].

[BGS 94] S. Bellucci, J. Gasser und M. E. Sainio, Nucl. Phys. B **423** (1994) 80.

[Bij 93] J. Bijnens, Int. J. Mod. Phys. A **8** (1993) 3045.

[BJ 69] J. S. Bell und R. Jackiw, Nuovo Cim. A **60** (1969) 47.

[BKM 92] V. Bernard, N. Kaiser und U. G. Meißner, Phys. Rev. Lett. **69** (1992) 1877.

[BKM 94] V. Bernard, N. Kaiser und U. G. Meißner, Phys. Rev. Lett. **72** (1994) 2810.

[BKM 95] V. Bernard, N. Kaiser und U. G. Meißner, Int. J. Mod. Phys. E **4** (1995) 193.

[BKM 96] V. Bernard, N. Kaiser und U. G. Meißner, Nucl. Phys. A **607** (1996) 379 [Erratum-ibid. A **633** (1996) 695].

[BKM 01] V. Bernard, N. Kaiser und U. G. Meißner, arXiv:hep-ph/0101062.

[BKP 94] S. Balk, J. G. Körner und D. Pirjol, Nucl. Phys. B **428** (1994) 499.

[BL 99] T. Becher und H. Leutwyler, Eur. Phys. J. C **9** (1999) 643.

[BM 97] B. Borasoy und U. G. Meißner, Annals Phys. **254** (1997) 192.

[Che+ 57] G. F. Chew, M. L. Goldberger, F. E. Low und Y. Nambu, Phys. Rev. **106** (1957) 1345.

[CL 84] T.-D. Cheng und L.-F. Li, *Gauge Theory of elementary particle physics* (Clarendon Press, Oxford, 1984).

[Col 66] S. Coleman, J. Math. Phys. **7** (1966) 787.

[Cut 60] R. E. Cutkosky, J. Math. Phys. **1** (1960) 429.

[Dan+ 62] G. Danby *et al.*, Phys. Rev. Lett. **9** (1962) 1319.

[DGH 92] J. F. Donoghue, E. Golowich und B. R. Holstein, *Dynamics of the Standard Model* (Cambridge University Press, Cambridge, 1992).

[DR 86] T. W. Donnelly und A. S. Raskin, Annals Phys. **169** (1986) 247.

[Dre+ 97] D. Drechsel *et al.*, in *Proc. Workshop on Chiral Dynamics: Theory and Experiment*, Mainz, 1997 (Hsg. D. Drechsel und T. Walcher), Springer, Berlin, 1998.

[Dre+ 99] D. Drechsel, O. Hanstein, S. S. Kamalov und L. Tiator, Nucl. Phys. A **645** (1999) 145.

[DT 92] D. Drechsel und L. Tiator, J. Phys. G **18** (1992) 449.

[Ebe 01] T. Ebertshäuser, Dissertation, Johannes Gutenberg-Universität Mainz, 2001.

[Eck 94] G. Ecker, Czech. J. Phys. **44** (1995) 405.

[Eck 95] G. Ecker, Prog. Part. Nucl. Phys. **35** (1995) 1.

[Ede+ 94] T. Eden *et al.*, Phys. Rev. C **50** (1994) 1749.

[EM 96] G. Ecker und M. Mojžiš, Phys. Lett. B **365** (1996) 312.

[ET 98] P. J. Ellis und H. B. Tang, Phys. Rev. C **57** (1998) 3356.

[EW 88] T. Ericson und W. Weise, *Pions and Nuclei* (Clarendon Press, Oxford, 1988).

[Fan+ 80] G. Fanourakis *et al.*, Phys. Rev. D **21** (1980) 562.

[Fea 80] H. W. Fearing, Phys. Rev. C **21** (1980) 1951.

[Fea+ 97] H. W. Fearing, R. Lewis, N. Mobed und S. Scherer, Phys. Rev. D **56** (1997) 1783.

[Fet+ 00] N. Fettes, U. G. Meißner, M. Mojzis und S. Steininger, Annals Phys. **283** (2000) 273 [Erratum-ibid. **288** (2001) 249].

[Fey 39] R. P. Feynman, Phys. Rev. **56** (1939) 340.

[FGS 02] T. Fuchs, J. Gegelia und S. Scherer, *In Vorbereitung*.

[FM 00] N. Fettes und U. G. Meißner, Nucl. Phys. A **676** (2000) 311.

[FS 02] T. Fuchs und S. Scherer, *In Vorbereitung*.

[FSS 91] N. H. Fuchs, H. Sazdjian und J. Stern, Phys. Lett. B **269** (1991) 183.

[Gel 64] M. Gell-Mann, Physics **1** (1964) 63.

[Geo 90] H. Georgi, Phys. Lett. B **240** (1990) 447.

[GJW 99] J. Gegelia, G. Japaridze und X. Q. Wang, arXiv:hep-ph/9910260.

[GL 60] M. Gell-Mann und M. Lévy, Nuovo Cim. **16** (1960) 705.

[GL 84] J. Gasser und H. Leutwyler, Annals Phys. **158** (1984) 142.

[GL 85] J. Gasser und H. Leutwyler, Nucl. Phys. B **250** (1985) 465.

[GLS 91] J. Gasser, H. Leutwyler und M. E. Sainio, Phys. Lett. B **253** (1991) 252.

[Gol 61] J. Goldstone, Nuovo Cim. **19** (1961) 154.

[GSS 88] J. Gasser, M. E. Sainio und A. Švarc, Nucl. Phys. B **307** (1988) 779.

[GT 58] M. L. Goldberger und S. B. Treiman, Phys. Rev. **111** (1958) 354.

[Gui 01] P. A. Guichon, Phys. Rev. Lett. **87** (2001) 019101.

[Hab 97] H. Haberzettl, Phys. Rev. C **56** (1997) 2041.

[Hab 00] H. Haberzettl, Phys. Rev. Lett. **85** (2000) 3576.

[Hab 01] H. Haberzettl, arXiv:hep-ph/0103347.

[Has+ 73] F. J. Hasert *et al.*, Phys. Lett. B **46** (1973) 121.

[Her+ 99] C. Herberg *et al.*, Eur. Phys. J. A **5** (1999) 131.

[Hof 57] R. Hofstadter, Ann. Rev. Nucl. Sci. **7** (1957) 231.

[Jac 72] R. Jackiw, *Field Theoretic Investigations in Current Algebra*, in S. Treiman, R. Jackiw und D. J. Gross, *Lectures on Current Algebra and Its Applications* (Princeton University Press, Princeton, 1972).

[JM 91] E. Jenkins und A. V. Manohar, Phys. Lett. B **255** (1991) 558.

[Jon+ 96] G. Jonkmans *et al.*, Phys. Rev. Lett. **77** (1996) 4512.

[Kam+ 01] S. S. Kamalov, S. N. Yang, D. Drechsel, O. Hanstein und L. Tiator, Phys. Rev. C **64** (2001) 032201.

[Kit+ 83] T. Kitagaki *et al.*, Phys. Rev. D **28** (1983) 436.

[Kit+ 90] T. Kitagaki *et al.*, Phys. Rev. D **42** (1990) 1331.

[KM 99] J. Kambor und M. Mojzis, JHEP **9904** (1999) 031.

[KM 01] B. Kubis und U. G. Meißner, Nucl. Phys. A **679** (2001) 698.

[Kne+ 93] M. Knecht, H. Sazdjian, J. Stern und N. H. Fuchs, Phys. Lett. B **313** (1993) 229.

[Kra 90] A. Krause, Helv. Phys. Acta **63** (1990) 3.

[KSW 98] D. B. Kaplan, M. J. Savage und M. B. Wise, Phys. Lett. B **424** (1998) 390.

[Kub+ 02] G. Kubon *et al.*, Phys. Lett. B **524** (2002) 26.

[Lep 97] G. P. Lepage, *Vorlesung, 9th Jorge Andre Swieca Summer School: Particles and Fields*, Sao Paulo, Brasilien, 1997, arXiv:nucl-th/9706029.

[Lie+ 99] A. Liesenfeld *et. al.*, Phys. Lett. B **468** (1999) 20.

[LSZ 55] H. Lehmann, K. Symanzik und W. Zimmermann, Nuovo Cim. **1** (1955) 205.

[Man 96] A. V. Manohar, *Vorlesung, 35th Int. Universitätswochen für Kern- und Teilchenphysik: Perturbative and Nonperturbative Aspects of Quantum Field Theory*, Schladming, Österreich, 1996, arXiv:hep-ph/9606222.

[Mei 93] U. G. Meißner, Rept. Prog. Phys. **56** (1993) 903.

[MMD 96] P. Mergell, U. G. Meißner und D. Drechsel, Nucl. Phys. A **596** (1996) 367.

[Neu+ 98] R. Neuhausen *et. al*, *Mainz Microtron MAMI - Proposal for an Experiment*, Proposal A1/1-98.

[NS 62] Y. Nambu und E. Shrauner, Phys. Rev. **128** (1962) 862.

[Ost+ 99] M. Ostrick *et al.*, Phys. Rev. Lett. **83** (1999) 276.

[Pas+ 99] I. Passchier *et al.*, Phys. Rev. Lett. **82** (1999) 4988.

[PDG 02] K. Hagiwara *et al.* [Particle Data Group Collaboration], Phys. Rev. D **66** (2002) 010001.

[Pic 95] A. Pich, Rept. Prog. Phys. **58** (1995) 563.

[PN 00] J. R. Pelaez und A. Gomez Nicola, Nucl. Phys. A **675** (2000) 96C.

[PS 95] M. E. Peskin und D. V. Schröder, *An Introduction to Quantum Field Theory* (Addison-Wesley, Reading, 1995).

[Ryd 85] L. H. Ryder, *Quantum Field Theory* (Cambridge University Press, Cambridge, 1985).

[Sai 02] M. E. Sainio, PiN Newslett. **16** (2002) 138.

[Sch 00] S. Scherer, *Chirale Störungstheorie für Mesonen* (Mainz, WS 99/00).

[Sch 02] S. Scherer, *Introduction to Chiral Perturbation Theory* (2002), arXiv:hep-ph/0210398, erscheint in: Advances in Nuclear Physics, Vol. 27.

[SF 95] S. Scherer und H. W. Fearing, Phys. Rev. D **52** (1995) 6445.

[SK 91] S. Scherer und J. H. Koch, Nucl. Phys. A **534** (1991) 461.

[SSF 93] J. Stern, H. Sazdjian und N. H. Fuchs, Phys. Rev. D **47** (1993) 3814.

[Ste 33] O. Stern, Nature 132 (1933) 103.

[Tan 96] H. B. Tang, arXiv:hep-ph/9607436.

[Tom 66] Y. Tomozawa, Nuovo Cim. **46 A** (1966) 707.

[Tre+ 72] S. Treiman, R. Jackiw und D. J. Gross, *Lectures on Current Algebra and Its Applications* (Princeton University Press, Princeton, 1972).

[Tre+ 85] S. B. Treiman, R. Jackiw, B. Zumino und E. Witten, *Current Algebra and Anomalies* (Princeton Univ. Press, Princeton, 1985).

[Tru 01] E. Truhlík, Phys. Rev. C **64** (2001) 055501.

[TW 01] A. W. Thomas und W. Weise, *The Structure Of The Nucleon* (Wiley-VCH, Berlin, 2001).

[Vel 94] M. Veltman, *Diagrammatica* (Cambridge University Press, Cambridge, 1994).

[VZ 72] A. I. Vainshtein und V. I. Zakharov, Nucl. Phys. B **36** (1972) 589.

[Wei 58] S. Weinberg, Phys. Rev. **112** (1958) 1375.

[Wei 66] S. Weinberg, Phys. Rev. Lett. **17** (1966) 616.

[Wei 79] S. Weinberg, Physica **96A** (1979) 327.

[Wil 00] D. H. Wilkinson, Eur. Phys. J. A **7** (2000) 307.

Danksagung

An erster Stelle möchte ich Herrn Hochschuldozenten Dr. S. Scherer für die sehr interessante Themenstellung, die ausgezeichnete Betreuung der Dissertation und das hohe Interesse am Fortschritt dieser Arbeit danken.

Außerdem gilt mein Dank Herrn Dr. J. Gegelia für klärende Diskussionen insbesondere zu dem in dieser Arbeit verwendeten Renormierungsschema und für seine ständige Hilfsbereitschaft. Ebenso danke ich Herrn Dr. T. Ebertshäuser sowie allen Mitgliedern der Arbeitsgruppe von Herrn Prof. Dr. D. Drechsel für zahlreiche Diskussionen und die angenehme Arbeitsatmosphäre.

Schließlich danke ich meinen Eltern, die mir das Studium ermöglicht und mich jederzeit unterstützt haben.

Lebenslauf

Persönliche Daten:

Name:	Thomas Fuchs
Geburtsdatum:	24.02.1975
Geburtsort:	Wiesbaden
Wohnort:	Egerländerstr. 19 65232 Taunusstein
Familienstand:	ledig
Nationalität:	deutsch

Schulausbildung:

August 1981 - Juni 1985:	Grundschule Tsst. Wehen
August 1985 - Juni 1994:	IGS Obere Aar in Tsst. Hahn, Abschluss: Abitur

Studium:

Okt. 1994 - Nov. 1998:	Physikstudium an der Johannes Gutenberg-Universität Mainz
September 1996:	Diplom-Vorprüfung
Oktober 1998:	Diplom-Hauptprüfung
Nov. 1998 - Nov. 1999:	Anfertigung der Diplomarbeit Titel: „Virtuelle Comptonstreuung am pseudoskalaren Mesonoktett“

Promotion:

Jan. 2000 - Nov. 2002:	Anfertigung der Dissertation an der Johannes Gutenberg-Universität Mainz Titel: „Formfaktoren des Nukleons in relativistischer chiraler Störungstheorie“