

Dissertation zur Erlangung des Grades
„Doktor der Naturwissenschaften“
am Fachbereich Physik
der Johannes-Gutenberg-Universität in Mainz

**Entwicklung und Tests
von Algorithmen
für die
Impedanztomographie**

Mustapha Azzouz
geb. in Beni-Chiker Nador

Mainz, den 27. Juni 2006

Datum der mündlichen Prüfung: 04.12.2006
D77 (Diss. Universität Mainz)

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	1
2	Grundgleichung der Elektrischen Impedanztomographie (EIT)	7
3	Vorwärtsproblem	11
3.1	Fragestellung der EIT	11
3.2	Nichtlineares Problem	12
3.3	Greensche Funktion	14
3.3.1	Neumann-Problem	15
3.3.2	Dirichlet-Problem	15
3.3.3	Gemischte Randbedingungen	16
3.3.4	Greensche Funktionen für den Kreis	16
3.3.5	Greensche Funktion für die Kugel	18
3.4	Der Neumann-nach-Dirichlet Operator Λ_σ	19
3.5	Punktförmige Störung der Leitfähigkeit	20
3.6	Beliebige Leitfähigkeit	21
3.6.1	Integralgleichung für $\Delta\Phi$	22
3.6.2	(FEM) Finite Element Methode	22
3.7	Kleine Störung	25
4	Das Inverse Problem	31
4.1	Rekonstruktion	35
4.1.1	Bestehende Rekonstruktionsalgorithmen	35
4.1.2	Neue Rekonstruktionsalgorithmen	36
5	Linearisierung	39
5.1	Standardverfahren	39
5.2	Die erste Iteration	41
5.3	$\delta\sigma$ und $\tilde{\sigma}$	42
5.4	Systeme von Integralgleichungen	43
5.4.1	Approximative Inverse	44
5.5	Rekonstruktion mit Linearisierung	46
5.6	Vergleich der Randdaten	50

5.7	Daten mit Fehlern	54
5.8	Diskrete Linearisierung	55
5.8.1	Rekonstruktion mit Zusatzinformationen	58
6	Gebietserkennung	67
6.1	$\Lambda_\sigma - \Lambda_1, \Lambda_\sigma - \Lambda_1 ^{1/2}$	68
6.2	Alternatives Verfahren	70
6.3	Die verschiedenen Kriterien	72
7	Der Tomograph	83
7.1	Halbebene	91
7.2	Messung am Brustkorb	94
8	Zusammenfassung	99
A	Anhang	101
A.1	Inverse Probleme	101
A.2	Fredholm'sche Integralgleichungen	102
A.3	SVD Singulärwertzerlegung eines Operators	104
A.4	Die verallgemeinerte Inverse (Moore-Penrose Lösung)	105
A.4.1	Matrizen	106
A.5	Tikhonov-Regularisierung	107
A.6	Abgeschnittene Singulärwertzerlegung	107
A.7	Gewichtete Pseudoinverse	107
A.8	Bessel-Funktionen	109
	Literatur	111

1 Einleitung

Medizinische Forschungsergebnisse haben gezeigt, daß die Früherkennung einer vorliegenden Krebserkrankung die Chance auf eine Heilung enorm erhöht. Daher gibt es ein großes Interesse an nicht-invasiven Untersuchungsmethoden, die regelmäßige Reihenuntersuchungen erlauben. Da beispielsweise ein Brusttumor eine Verdopplungsrate von 3 Monaten hat, sollte eine Reihenuntersuchung in einem ähnlichen Zeitraum liegen. Der maligne Brustkrebs ist die häufigste Ursache für Tod durch Krebs bei Frauen.

Damit sich eine Untersuchungsmethode für eine Reihenuntersuchung eignen kann, muß sie den Patienten körperlich schonen und zudem finanziell realisierbar sein. Die Elektrische Impedanztomographie (EIT) könnte eine Antwort auf diese Fragestellung liefern. Zusammen mit bereits existierenden Methoden, die auf unterschiedlichen physikalischen Prinzipien beruhen, kann sie das Untersuchungsspektrum des Arztes erweitern. Dem Arzt stehen heutzutage verschiedene sich ergänzende Methoden für die Brustuntersuchung zur Verfügung. Zuerst versucht der Arzt durch Abtasten der Brust verdächtige Stellen zu lokalisieren. Diese Untersuchungsmethode kann dann durch weitere technische Untersuchungsmethoden erweitert werden. Eine Kombination der Röntgentomographie und der Ultraschall-Tomographie (der sogenannten Sonographie) kann ihm weitere wichtige Informationen liefern. Unter gewissen Bedingungen erhält er damit relativ gute Resultate.

Bei der Röntgentomographie wird der Körper mit Röntgenstrahlung durchleuchtet, dabei macht man sich zu Nutze, daß verschiedene Gewebe verschiedene Röntgenabsorptionskoeffizienten besitzen. Allerdings hat die Röntgentomographie auch Nebenwirkungen, die nicht zu vernachlässigen sind. Zum einen ist es die Strahlenbelastung, die gerade selbst die Gefahr einer Krebserkrankung erhöht, und zum anderen kann bei sehr dichtem gesunden Fettgewebe in der Brust (welches bei jungen Frauen häufig der Fall ist) die Unterscheidung von einem Tumor versagen. Eine Verbesserung der Auflösung ist durch die zumutbare Strahlenbelastung begrenzt.

Die Sonographie hingegen nutzt Ultraschallwellen. Die Reflektion der ausgesandten Ultraschallwellen an den Grenzschichten unterschiedlicher Dichte liefert Information über die Dichteverteilung im Inneren des Körpers. Im Gegensatz zur Röntgentomographie ist die Sonographie eine schonende Methode, die auch Echtzeitaufnahmen erlaubt. Sie ist allerdings nicht hochauflösend, das heißt sie eignet sich für die Identifizierung von Tumoren ab einer Größe von einem Zentimeter. Kleinere Krebserkrankungen werden mit ihr nicht nachgewiesen, was aber gerade für die Früherkennung

wichtig wäre.

Eine effiziente nichtinvasive Methode ist die Magnetresonanztomographie (MRT), die eine sehr gute Auflösung liefert. Bei der Magnetresonanztomographie wird sich zu Nutze gemacht, daß Atomkerne mit einer ungeraden Protonen- oder Neutronenzahl einen Kernspin besitzen. Ohne ein äußeres Magnetfeld ist die Ausrichtung des Kernspins der Atome in jede Richtung gleichmäßig ohne Vorzugsrichtung verteilt. In einem statischen äußeren Magnetfeld spalten die Energieniveaus verschiedener Spin-zustände auf. Durch ein äußeres hochfrequentes Magnetfeld kann ein Übergang in das energiereichere Niveau angeregt werden. Erfolgt die hochfrequente Anregung mit der Lamorfrequenz, so findet dieser Übergang sehr intensiv statt. Diese Frequenz ist die entscheidende Größe; die Lamorfrequenz hängt von dem Atom und der Stärke des angelegten statischen Magnetfeldes ab. Damit kann eine Unterscheidung unterschiedlicher Gewebe erfolgen. Die räumliche Auflösung wird durch Anlegen eines inhomogenen statischen Magnetfeldes erreicht. Dadurch werden örtlich unterschiedliche Bedingungen für die Lamorfrequenz garantiert.

Allerdings kann die MRT nicht als Reihenuntersuchung zum Einsatz kommen, da die Kosten und der Aufwand erheblich sind. Sie eignet sich, um bei einem dringenden Verdacht eine eindeutige Diagnose zu stellen.

Das Thema dieser Arbeit

Das Interesse dieser Arbeit gilt der elektrischen Impedanztomographie. Die EIT hat verschiedene Anwendungsgebiete, diese sind beispielsweise die Geologie, die Materialwissenschaften und die Medizin. Von großem Interesse ist auch die Optimierung chemischer Prozesse. Eine große Arbeitsgruppe der University of Science and Technology in Manchester beschäftigt sich zum Beispiel mit der Überwachung von Mischungen verschiedener Flüssigkeiten oder Gasen durch ein EIT-System. Mit einem solchen System wäre es auch möglich, das Verhältnis von Wasser und Öl in Pipelines zu bestimmen.

In dieser Arbeit wird insbesondere die Anwendung der Impedanztomographie für die Mammographie behandelt. Ein weiteres Anwendungsgebiet in der Medizin die Lungenüberwachung wird hier auch am Rande betrachtet.

Mit der elektrischen Impedanztomographie soll, wie bereits erwähnt, eine Erweiterung des Untersuchungsspektrums für die Mammographie erreicht werden. Die EIT macht sich zu Nutze, daß unterschiedliche Gewebe unterschiedliche Leitfähigkeiten besitzen. Ein Tumor zeigt durch seine starke Durchblutung eine viel höhere Leitfähigkeit als gesundes Gewebe oder Fett.

Durch Veränderungen in der Zellmembran wird dieser Effekt weiter verstärkt, insgesamt führt dies auf eine 20-40 fache Erhöhung der Leitfähigkeit. In Tabelle (1.1) sind verschiedene Gewebe und deren Leitfähigkeiten aufgelistet.

Gewebe	spezifischer Widerstand in Ωm
Knochen	17
Fett	21-28
Lunge	7.3-24
Herzmuskel-longitudinal	1.6-5.8
Herzmuskel-transversal	4.2-51
Skelettmuskel-longitudinal	1.3-1.5
Skelettmuskel-transversal	18-23
Leber	3.5-5.5
Blut	1.5
Plasma	0.66

Tabelle 1.1: spezifischer Widerstand verschiedener Gewebe nach [1]

Die Vorteile eines Impedanztomographen wären:

- keine Nebenwirkungen für den Patienten,
- die Entwicklungskosten, Anschaffungskosten und Betriebskosten sind relativ klein,
- die Auswertung kann vor Ort erfolgen, vielleicht sogar in Echtzeit.

Bei der Impedanztomographie werden Elektroden an der Oberfläche des Körpers angebracht, mit denen man Strom in den Körper ein- und abfließen lassen kann. Durch geeignete elektronische Schaltungen lassen sich unterschiedliche Strommuster applizieren. An den Elektroden wird neben dem Strom auch das Potential gemessen. Bei Vorhandensein eines unbekanntes Kontaktwiderstandes kommen auch getrennte hochohmige reine Potentialelektroden zur Anwendung. Wir werden später sehen, daß es in der Praxis besser ist, mit strominjizierenden und weiteren potentialmessenden Elektroden zu arbeiten. Um das schlecht gestellte mathematische Problem der EIT zu lösen, möchte man die maximale Information zur Verfügung haben. Daher versucht man soweit möglich die ganze Oberfläche des Körpers durch Elektroden zu bedecken. Dies ist in der Praxis nur schwer realisierbar, daher beschränkt man sich auf den zu untersuchenden Bereich. Möchte man zum Beispiel die Lunge abbilden, so würde man einen mit Elektroden besetzten Gürtel um die Brust legen.

Die strominjizierenden Elektroden benötigen eine gewisse Größe, um den Hautwiderstand zu überwinden. Dadurch kommt man auf eine beschränkte Anzahl an Elektroden und somit zu einer beschränkten Anzahl an Informationen über das zu untersuchende Objekt. Die endliche Anzahl an Elektroden und weitere Einschränkungen limitieren in erster Ordnung die Auflösung eines solchen Tomographen.

Eine der Hauptschwierigkeiten in der praktischen Anwendung der elektrischen Impedanztomographie ist die Notwendigkeit der genauen Kenntnis der Form des zu untersuchenden Körpers, sowie der exakten Positionen der Elektroden. In der Mammographie als Anwendungsgebiet der EIT können diese Probleme noch am besten bewältigt werden, da sich die Brust der Meßapparatur anpassen kann.

In Zusammenarbeit mit Herrn Dr. K.H.Georgi und Herrn N.Schuster ist ein Prototyp eines Tomographen, der in der Mammographie Anwendung finden soll, konzipiert und entwickelt worden.

Die Algorithmen, die die Rekonstruktion erlauben, werden in den folgenden Kapiteln vorgestellt, und das Gerät selbst wird im letzten Kapitel beschrieben.

Stand der Forschung

Das von Brown und Seagel entwickelte Mark1-System kam als erster Impedanztomograph 1987 zum Einsatz. Es bestand aus einem Gürtel mit 16 Elektroden, der dem Patienten um den Brustkorb gelegt wurde und so Bilder der Herz- und Lungenaktivität lieferte. Die Bilder gewannen im Laufe der Jahre fortlaufend an Qualität. Dazu beigetragen haben zum einen bessere Rekonstruktionsalgorithmen und zum anderen immer leistungsfähigere Computer. Die Anzahl an Elektroden konnte damit erhöht werden. Heute arbeitet man in Sheffield sowohl mit einem 64-, als auch mit einem (16+32+16)-Elektrodensystem.

Bei letzterer Anordnung benutzt man drei Gürtel, die übereinander am Körper angelegt werden. Der mittlere Gürtel besitzt 32 Elektroden und die beiden äußeren 16 Elektroden. In nur Bruchteilen von Sekunden ist es möglich einen ganzen Meßzyklus aufzunehmen und eben so schnell im Anschluß ein Bild zu berechnen. Als Rekonstruktionsalgorithmus in zwei und drei Dimensionen wird hauptsächlich ein sogenannter Backprojection-Algorithmus verwendet. Das System arbeitet bei unterschiedlichen Frequenzen zwischen 1kHz und 1MHz. Damit ist die Möglichkeit gegeben, sowohl Real- als auch Imaginärteil der Leitfähigkeitsverteilung zu betrachten.

Mehrere Arbeitsgruppen auf der ganzen Welt arbeiten daran, ein ähnliches Gerät zur Überwachung von Herz und Lunge zu entwickeln. Die Gruppe um A.V. Korjensky und V.A. Cherepenin in Moskau entwickelte ein Gerät, daß in der Sekunde bereits 12 Bilder liefert.

Das derzeit vielleicht weltweit führende Team befindet sich im Rensselaer Polytechnic Institut in Troy bei New York. Die bekanntesten Mitarbeiter sind Jonathan Newell, Margaret Cheney, David Isaacson, David G. Gisser und Gary J. Saulnier. Der große Erfolg des von ihnen entwickelten ACT3-Systems (Adaptive Current Tomography-Systems) beruht vor allem auf der Entdeckung der optimalen Ströme durch David Isaacson. Hierbei werden in einem iterativen Verfahren äußere Stromverteilungen berechnet, die für eine Bestimmung der gesuchten Leitfähigkeitsverteilung

lung besonders gut geeignet sind. Das Gerät liefert in der Sekunde 20 Bilder. Damit ist eine fließende Darstellung der Herz- und Lungenaktivität möglich. Weitere Ziele sind die Überwachungsfunktion einer Lungenembolie und die Lokalisierung von Tumoren.

Das ACT3-System arbeitet bei einer Frequenz von 28.8kHz. Es werden 32 Elektroden verwendet. Hier kommen zwei verschiedene Methoden zum Einsatz: Bei einer werden zwei unmittelbar hintereinander aufgenommene Meßzyklen miteinander verglichen. Man erhält damit eine bildliche Darstellung der Änderung der Leitfähigkeitsverteilung. Bei der anderen wird für einen aufgenommenen Meßzyklus im Anschluß die Leitfähigkeitsverteilung bestimmt. Im diesem Fall werden alle Meßdaten mit den theoretisch erwarteten Meßdaten für eine homogene Leitfähigkeitsverteilung verglichen. Die in dieser theoretischen Vorhersage liegenden Fehler führen allerdings zur Zeit noch zu Bildern geringer Qualität.

Mit dem *Transscan2000* ist im Jahre 2000 zum ersten Mal ein kommerzielles Gerät auf den Markt gekommen. Das Siemens-Gerät ist ein Scanninggerät zur Erkennung von Erkrankungen in der weiblichen Brust. Es wird derzeit in einigen Kliniken getestet. Es handelt sich hier aber um keinen echten Tomographen.

Die einzelnen Kapitel

Die Grundgleichung der Elektrischen Impedanztomographie (EIT)

In diesem Kapitel wird aus den Maxwell-Gleichungen die Grundgleichung der EIT hergeleitet. Um den Hautwiderstand zu überwinden, kommen in der Praxis Wechselströme zum Einsatz. Es wird gezeigt, daß für Wechselströme um 30kHz eine quasistationäre Behandlung des Problems möglich ist.

Vorwärtsproblem

Um das Problem der EIT zu lösen, ist die genaue Kenntnis des Vorwärtsproblems entscheidend. Für wenige hochsymmetrische Leitfähigkeitsverteilungen und einfache Geometrien kann eine analytische Lösung angegeben werden. Die Methode der Finiten Elemente wird vorgestellt. Mit ihr kann eine numerische Lösung für das Vorwärtsproblem bestimmt werden.

Das Inverse Problem

In diesem Kapitel wird der Begriff der Schlechtgestellttheit einer Abbildung diskutiert. Die damit verbundenen Schwierigkeiten beim Finden einer Lösung für die Leit-

fähigkeitsverteilung werden erläutert und Möglichkeiten aufgezeigt, wie mit diesen Problemen umzugehen ist.

Linearisierung

In diesem Kapitel wird eine Linearisierung des Problems durchgeführt, dabei werden zwei verschiedene Rekonstruktionsmethoden vorgestellt. Zum einen die Methode der approximativen Inversen und zum anderen eine Rekonstruktion mit einer Diskretisierung des Gebietes. Für die Diskretisierung wird ein Algorithmus vorgestellt, bei dem Zusatzinformationen in die Rekonstruktion eingehen können.

Gebietserkennung

Für Leitfähigkeitsverteilungen, die bis auf kleine Störungen im wesentlichen konstant sind, wird ein Algorithmus vorgestellt, der Gebiete erkennen kann, die eine veränderte Leitfähigkeit zur Umgebung haben.

Der Tomograph

Im letzten Kapitel wird der entwickelte Tomograph vorgestellt und die Rekonstruktion für echte Meßdaten an einem Wassertank gezeigt. Desweiteren wird eine Rekonstruktion für echte Daten des Brustkorbs gezeigt.

2 Grundgleichung der Elektrischen Impedanztomographie (EIT)

Die Grundgleichung der EIT leitet sich aus den Maxwell-Gleichungen ab.

$$\nabla \cdot \vec{D}(\vec{x}, t) = 4\pi\rho(\vec{x}, t), \quad (2.1)$$

$$\nabla \times \vec{H}(\vec{x}, t) - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \vec{D}(\vec{x}, t) = \frac{4\pi}{c} \vec{j}(\vec{x}, t), \quad (2.2)$$

$$\nabla \times \vec{E}(\vec{x}, t) + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \vec{B}(\vec{x}, t) = 0, \quad (2.3)$$

$$\nabla \cdot \vec{B}(\vec{x}, t) = 0 \quad (2.4)$$

Hier werden die dielektrische Verschiebung \vec{D} , das elektrische Feld \vec{E} , das magnetische Feld \vec{H} und die magnetische Induktion \vec{B} in Relation gesetzt.

Man betrachtet eine Leitfähigkeitsverteilung $\sigma(\vec{x})$, die auf dem Gebiet Ω endlich und beschränkt ist:

$$0 < \underline{\sigma} < \sigma(\vec{x}) < \bar{\sigma} < \infty, \quad \forall \vec{x} \in \Omega \quad (2.5)$$

Um die mathematische Formulierung des Problems nicht übermäßig zu verkomplizieren, werden einige einschränkende Annahmen getroffen. Zum einen betreffen diese das untersuchte Medium.

In dem betrachteten Medium soll das ohmsche Gesetz in der einfachen Form

$$\vec{j}(\vec{x}, t) = \sigma(\vec{x}) \vec{E}(\vec{x}, t) \quad (2.6)$$

gelten, wobei die Leitfähigkeit $\sigma(\vec{x})$ in obiger Gleichung eine skalare Größe darstellt.

Außerdem sei das Medium isotrop und erfülle die Beziehungen

$$\vec{D}(\vec{x}, t) = \epsilon \vec{E}(\vec{x}, t) \quad (2.7)$$

$$\vec{B}(\vec{x}, t) = \mu \vec{H}(\vec{x}, t). \quad (2.8)$$

Hierbei ist ϵ die sogenannte elektrische Dielektrizitätskonstante und μ die magnetische Permeabilität.

Den Ausgangspunkt für die Herleitung der Differentialgleichung der EIT bildet die Kontinuitätsgleichung, die die Divergenz einer Stromdichte mit der Ladungsverteilung in Bezug setzt

$$\nabla \cdot \vec{j}(\vec{x}, t) + \frac{\partial}{\partial t} \rho(\vec{x}, t) = 0. \quad (2.9)$$

Diese erhält man aus den beiden Gleichungen (2.1) und (2.2). Bei Abwesenheit von inneren Quellen $\frac{\partial}{\partial t} \rho(\vec{x}, t) = 0$ führt dies auf die erste Kirchhoffsche Gleichung

$$\nabla \cdot \vec{j}(\vec{x}, t) = 0. \quad (2.10)$$

Im Falle **statischer** Felder reduziert sich die Maxwellgleichung (2.3), die das Elektrische und Magnetische Feld (\vec{E} , \vec{B}) in Beziehung setzt, auf die zweite Kirchhoffsche Gleichung

$$\nabla \times \vec{E}(\vec{x}) = 0. \quad (2.11)$$

Die elektrische Feldstärke kann daher als Gradient eines Potentials geschrieben werden

$$\vec{E}(\vec{x}) = -\nabla \Phi(\vec{x}). \quad (2.12)$$

In Verbindung mit dem verallgemeinerten Ohmschen Gesetz (Gleichung 2.6) folgt die elliptische Differentialgleichung der EIT.

$$\boxed{\nabla \cdot (\sigma(\vec{x}) \nabla \Phi(\vec{x})) = 0} \quad (2.13)$$

Diese Gleichung gilt, wie unten gezeigt wird, auch im **quasistatischen** Fall.

Die vereinfachenden Annahmen, die zur Herleitung gemacht wurden, werden noch einmal zusammengestellt und in Bezug auf Anwendungen in der Tomographie diskutiert.

- Die Leitfähigkeit ist eine skalare Größe, sie besitzt keine Richtungsabhängigkeit. Dies ist bei organischem Gewebe im Allgemeinen nicht der Fall (siehe Tabelle 1.1). Bei Muskeln gibt es zum Beispiel einen Unterschied in der transversalen und longitudinalen Leitfähigkeit.
- Die Polarisation des zu untersuchenden Objektes wird vernachlässigt. Um Polarisationen im zu untersuchenden Objekt möglichst zu vermeiden, werden Wechselströme eingesetzt. Die Frequenzen dürfen allerdings nicht zu hoch sein, damit die zeitliche Änderung des magnetischen Feldes nicht berücksichtigt werden muß. Um das Problem quasistationär behandeln zu können, muß die Wellenlänge des angelegten elektrischen Feldes verglichen mit der Ausdehnung des zu untersuchenden Objektes sehr groß sein. In der Medizin arbeitet man daher mit Frequenzen von 1kHz bis 1MHz.

Die quasistatischen Behandlung läßt sich folgendermaßen begründen [17],[2]:
Für die Felder mit harmonischer Zeitabhängigkeit,

$$\vec{F}(x, t) = \vec{F}(x) e^{i\omega t}, \quad (2.14)$$

erhält man mit Gleichung (2.7),(2.8),(2.2),(2.3) und (2.6)

$$\nabla \times \vec{H} = \left(\frac{i\omega\epsilon}{c} + \frac{4\pi\sigma}{c} \right) \vec{E}, \quad (2.15)$$

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{i\omega\mu}{c} \vec{H}. \quad (2.16)$$

Die Gleichungen (2.15) und (2.16) werden zunächst in eine Form gebracht, in der die Felder dimensionslos sind,

$$\begin{aligned} E &= [E] \tilde{E}, \\ H &= [H] \tilde{H}, \\ x &= [x] \tilde{x}, \\ \nabla \times &= [x]^{-1} \tilde{\nabla} \times, \end{aligned}$$

wobei die Klammerausdrücke [...] die Einheiten tragen und alle mit einer Tilde gekennzeichneten Größen dimensionslos sind.

Dies führt auf:

$$\tilde{\nabla} \times \tilde{H} = \left(\frac{i\omega\epsilon}{c} + \frac{4\pi\sigma}{c} \right) \frac{[E][x]}{[H]} \tilde{E}, \quad (2.17)$$

$$\tilde{\nabla} \times \tilde{E} = -\frac{i\omega\mu}{c} \frac{[H][x]}{[E]} \tilde{H}. \quad (2.18)$$

In Gleichung (2.17) ist $\omega\epsilon$ gegenüber $4\pi\sigma$ im allgemeinen vernachlässigbar. Für die in der Mammographie auftretenden Größen wird dies im weiteren gezeigt. Die dimensionslosen Felder \tilde{H} und \tilde{E} sind von gleicher Größenordnung, wenn man die Einheiten $[H]$ und $[E]$ so wählt, daß

$$\frac{4\pi\sigma [E][x]}{c [H]} = 1$$

gilt.

Damit ergibt sich

$$\tilde{\nabla} \times \tilde{H} = \tilde{E} + \frac{i\omega\epsilon}{4\pi\sigma} \tilde{E} \quad (2.19)$$

$$\tilde{\nabla} \times \tilde{E} = -\frac{i4\pi\sigma\omega\mu[x]^2}{c^2} \tilde{H}. \quad (2.20)$$

Ist die Größe

$$k = \frac{4\pi\sigma\omega\mu [x]^2}{c^2} \ll 1, \quad (2.21)$$

so ist eine quasistationäre Behandlung zulässig.

Im der Mammographie ist die typische Länge $[x]$ kleiner als 20cm. Die Leitfähigkeit ist im wesentlichen die des Fettgewebes, die nach Tabelle (1.1) $\sigma < 0.05 (\Omega\text{m})^{-1}$ beträgt. Um den Hautwiderstand zu überwinden wird in der Medizin eine Frequenz von etwa 30kHz verwendet. Damit erhält man einen Wert von $k < 10^{-4}$.

Eine Umformung der Gleichung (2.13) führt auf eine “inhomogene Laplacegleichung”

$$\nabla\sigma(\vec{\mathbf{x}})\nabla\Phi(\vec{\mathbf{x}}) + \sigma(\vec{\mathbf{x}})\Delta\Phi(\vec{\mathbf{x}}) = 0. \quad (2.22)$$

Da $(\sigma(\vec{\mathbf{x}}) > 0, \forall \vec{\mathbf{x}})$ vorausgesetzt ist, erhält man:

$$\Delta\Phi(\vec{\mathbf{x}}) = -\frac{\nabla\sigma(\vec{\mathbf{x}})}{\sigma(\vec{\mathbf{x}})}\nabla\Phi(\vec{\mathbf{x}}). \quad (2.23)$$

Mit der Abkürzung

$$\frac{\nabla\sigma(\vec{\mathbf{x}})}{\sigma(\vec{\mathbf{x}})} = \nabla\ln(\sigma(\vec{\mathbf{x}})) = \nabla\tilde{\sigma}(\vec{\mathbf{x}}), \quad (2.24)$$

kann man die Differentialgleichung der EIT auch in der Form schreiben:

$$\Delta\Phi(\vec{\mathbf{x}}) = -\nabla\tilde{\sigma}(\vec{\mathbf{x}})\nabla\Phi(\vec{\mathbf{x}}). \quad (2.25)$$

Eine Rekonstruktion für $\tilde{\sigma}(\vec{\mathbf{x}})$ garantiert, daß die gesuchte Leitfähigkeitsverteilung $\sigma(\vec{\mathbf{x}})$ überall positiv ist:

$$\sigma(\vec{\mathbf{x}}) = \exp(\tilde{\sigma}(\vec{\mathbf{x}})) \implies \sigma(\vec{\mathbf{x}}) > 0, \quad \forall \vec{\mathbf{x}} \in \Omega. \quad (2.26)$$

3 Vorwärtsproblem

3.1 Fragestellung der EIT

Die Grundgleichung der EIT setzt die Leitfähigkeitsverteilung $\sigma(\vec{x})$ und das Potential $\Phi(\vec{x})$ im Inneren eines Körpers in Beziehung. Messungen können im Allgemeinen nur am Rand erfolgen.

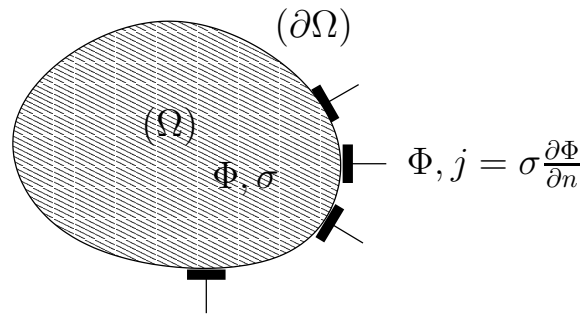


Abbildung 3.1: Für eine Leitfähigkeitsverteilung σ in Ω werden verschiedene Randströme vorgegeben und die resultierende Spannung am Rand gemessen.

Dadurch ergeben sich zwei verschiedene Fragestellungen:

- Wie lautet die Lösung für das Potential Φ im Inneren eines Gebietes Ω und auf dem Rand $\partial\Omega$ bei gegebener Leitfähigkeitsverteilung $\sigma(\vec{x})$ und vorgegebenen Randbedingungen. Dabei kann auf dem Rand $\partial\Omega$ entweder das Potential vorgegeben sein oder der Strom $j|_{\partial\Omega} = \sigma \frac{\partial\Phi}{\partial n}|_{\partial\Omega}$, wo $\frac{\partial\Phi}{\partial n}$ die Normalableitung des Potentials ist. Man kennt die **Ursache** und ist auf der Suche nach der **Wirkung**. Diese Fragestellung wird als das **Vorwärtsproblem** bezeichnet.
- Die umgekehrte Fragestellung bezieht sich auf die Leitfähigkeitsverteilung $\sigma(\vec{x})$ im Inneren des Körpers bei vorgegebenen Randwerten für Strom **und** Potential. Die **Wirkung** ist bekannt und man sucht die **Ursache**. Dies ist die eigentliche Fragestellung in der Impedanztomographie und wird als **Inverses Problem** bezeichnet. Das Inverse Problem ist meistens das mathematisch schwierigere Problem, wie auch hier im Falle der EIT.

Für die Lösung des inversen Problems ist ein grundlegendes Verständnis des Vorwärtsproblems von enormer Wichtigkeit.

Folgende Punkte sind zu klären:

- Eindeutigkeit: Liefern verschiedene Leitfähigkeitsverteilungen für gleiche Randstromvorgaben auch verschiedene Randpotentiale?
- Wie groß ist der Effekt unterschiedlicher Leitfähigkeiten auf das Randpotential?
- Was ist die Empfindlichkeit der Rekonstruktion auf den Abstand der Störung von der Oberfläche?
- Des weiteren kann studiert werden, ob durch eine geschickte Wahl der Randstromvorgaben die Größe des zu messenden Effektes gesteigert werden kann.

Man kann durch das Vorwärtsproblem wichtige Informationen erhalten, bevor man sich überhaupt für das Inverse Problem interessiert.

Für die Lösung des inversen Problems ergeben sich folgende Aufgaben:

- Hat man einen Rekonstruktionsalgorithmus entwickelt, so muß dieser anhand von synthetischen Daten getestet werden.
- Viele Rekonstruktionsalgorithmen basieren auf der Linearisierung des nichtlinearen Problems.
- Die Fehler der Rekonstruktion können mit simulierten Daten studiert werden.
- Die meisten Rekonstruktionsalgorithmen verlangen eine Lösung des Vorwärtsproblems für eine konstante Leitfähigkeitsverteilung .

3.2 Nichtlineares Problem

Die Gleichung der EIT ist nichtlinear. Für zwei Leitfähigkeitsverteilungen σ_1 und σ_2 (mit $\sigma_1|_{\partial\Omega} = \sigma_2|_{\partial\Omega} = 1$) und gegebenen Randbedingungen f_1, f_2

$$\nabla(\sigma_1 \nabla \Phi_1) = 0, \quad \text{mit } \frac{\partial \Phi_1}{\partial n} = f_1 \quad (3.1)$$

$$\nabla(\sigma_2 \nabla \Phi_2) = 0, \quad \text{mit } \frac{\partial \Phi_2}{\partial n} = f_2. \quad (3.2)$$

erfüllt die Zusammensetzung

$$\begin{aligned} \sigma &= \sigma_1 + \sigma_2 \\ \Phi &= \Phi_1 + \Phi_2 \quad \text{mit } \frac{\partial \Phi}{\partial n} = f_1 + f_2 \end{aligned}$$

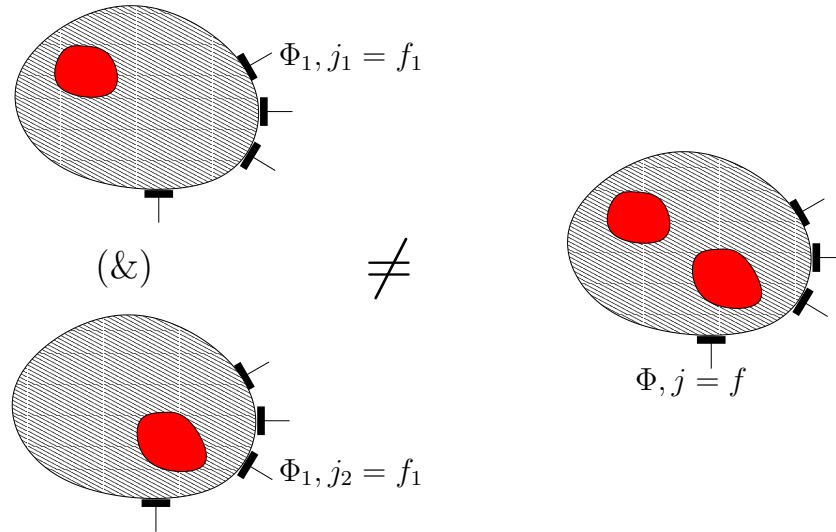


Abbildung 3.2: Die Lösung für eine komplizierte Leitfähigkeitsverteilung läßt sich nicht durch die Lösung für einfache Leitfähigkeitsverteilungen zusammensetzen.

nicht die EIT-Gleichung

$$\begin{aligned} \nabla(\sigma \nabla \Phi) &= \nabla(\sigma_1 \nabla \Phi_1) + \nabla(\sigma_1 \nabla \Phi_2) + \nabla(\sigma_2 \nabla \Phi_1) + \nabla(\sigma_2 \nabla \Phi_2) \\ &= \nabla(\sigma_1 \nabla \Phi_2) + \nabla(\sigma_2 \nabla \Phi_1) \\ &\neq 0. \end{aligned}$$

Damit kann man in der Rekonstruktion nicht einfach die Lösung aus bereits bekannten Lösungen mit einfacher Leitfähigkeitsverteilung zusammensetzen.

Man definiert den Neumann-nach-Dirichlet Operator

$$\mathbf{\Lambda}_\sigma : f|_{\partial\Omega} \mapsto \Phi|_{\partial\Omega}, \quad (3.3)$$

der den Strom am Rand auf das Potential am Rand abbildet.

Dieser Operator ist linear

$$\mathbf{\Lambda}_\sigma : (f_1 + f_2)|_{\partial\Omega} \mapsto (\Phi_1 + \Phi_2)|_{\partial\Omega}. \quad (3.4)$$

Dagegen ist die Abbildung $\chi : \sigma \mapsto \mathbf{\Lambda}_\sigma$, die der Leitfähigkeitsverteilung $\sigma(\vec{x})$ den Neumann-nach-Dirichlet-Operator $\mathbf{\Lambda}_\sigma$ zuordnet, nichtlinear

$$\chi(\sigma_1) + \chi(\sigma_2) \neq \chi(\sigma_1 + \sigma_2). \quad (3.5)$$

Im inversen Problem sucht man die inverse Abbildung

$$\chi^{-1} : \Lambda_\sigma \mapsto \sigma. \quad (3.6)$$

Viele Rekonstruktionsalgorithmen benötigen die Lösung des Potentials $\Phi(\vec{x})$ für ein ungestörtes Problem ($\sigma = \textit{konst.}$) unter der Randbedingung f . Die konstante Leitfähigkeit kann o.B.d.A gleich 1 gesetzt werden. Für Neumann-Randbedingungen bezeichnen wir das ungestörte Potential mit $\Phi_N(\vec{x})$.

Für eine konstante Leitfähigkeit vereinfacht sich die Gleichung der EIT (2.13) auf die homogenen Laplace-Gleichung

$$\Delta\Phi(\vec{x}) = 0. \quad (3.7)$$

3.3 Greensche Funktion

Eine elegante Methode zur Lösung der Differentialgleichung (2.25) unter Berücksichtigung der Randbedingungen ist die der Greenschen Funktion. Sie erlaubt auf einfache Weise die Vorgabe der Randbedingungen. Hierbei wird die Differentialgleichung in eine äquivalente Integralgleichung übergeführt. Ausgangspunkt ist die Greensche Identität

$$\int_{\Omega} (v(\vec{x})\Delta u(\vec{x}) - u(\vec{x})\Delta v(\vec{x})) \, d(\Omega) = \oint_{\partial\Omega} \left(v(\vec{x})\frac{\partial u(\vec{x})}{\partial n} - u(\vec{x})\frac{\partial v(\vec{x})}{\partial n} \right) \, d(\partial\Omega). \quad (3.8)$$

Setzt man

$$u(\vec{x}) = \Phi(\vec{x}), \quad (3.9)$$

$$v(\vec{x}) = G(\vec{x}, \vec{x}'), \quad (3.10)$$

und verwendet man die Eigenschaft der Greenschen Funktion für die Laplacegleichung

$$\Delta G(\vec{x}, \vec{x}') = -\delta(\vec{x} - \vec{x}'), \quad (3.11)$$

so folgt für das gesuchte Potential im Inneren und am Rand:

$$\begin{aligned} \Phi(\vec{x}) &= \oint_{\partial\Omega} G(\vec{x}, \vec{x}')\frac{\partial}{\partial n'}\Phi(\vec{x}') \, d(\partial\Omega') - \oint_{\partial\Omega} \frac{\partial}{\partial n'}\Phi(\vec{x}')G(\vec{x}, \vec{x}') \, d(\partial\Omega') \\ &\quad - \int_{\Omega} G(\vec{x}, \vec{x}')\Delta\Phi(\vec{x}') \, d(\Omega'). \end{aligned} \quad (3.12)$$

Für konstante Leitfähigkeiten fällt der letzte Term weg, und die Lösung kann bei Kenntnis der passenden Greenschen Funktion direkt angegeben werden. Die Lösung, die man erhält, ist die Lösung für $\sigma = \textit{konst.} = 1$.

3.3.1 Neumann-Problem

Möchte man den Strom $j = \sigma \frac{\partial \Phi}{\partial n}$ am Rand $\partial\Omega$ des Körpers anlegen und das Potential im Inneren des Körpers berechnen, so sucht man die Greensche Funktion mit der Nebenbedingung¹

$$\left. \frac{\partial}{\partial n'} G_N(\vec{x}, \vec{x}') \right|_{\vec{x}' \in \partial\Omega} = -\frac{1}{S}, \quad (3.13)$$

wobei S die Randfläche des Volumens Ω ist. Normiert man das Potential am Rand mit

$$\oint_{\partial\Omega} \Phi(\vec{x}') d(\partial\Omega') = 0, \quad (3.14)$$

so ergibt sich im Falle konstanter Leitfähigkeit die Gleichung, die das Potential bis auf eine Konstante eindeutig bestimmt,

$$\Phi(\vec{x}) = \oint_{\partial\Omega} G_N(\vec{x}, \vec{x}') \frac{\partial}{\partial n'} \Phi(\vec{x}') d(\partial\Omega') := \Phi_N(\vec{x}). \quad (3.15)$$

Dies ist die Lösung für das sogenannte Neumann-Problem für eine konstante Leitfähigkeit ($\sigma = 1$). Die Lösung für ein beliebiges konstantes σ läßt sich durch eine einfache Division berechnen:

$$\Phi_N^\sigma(\vec{x}) = \frac{1}{\sigma} \Phi_N(\vec{x}), \quad \text{mit } \sigma \text{ konstant.} \quad (3.16)$$

3.3.2 Dirichlet-Problem

Möchte man stattdessen das Potential am Rand des Körpers vorgeben und das Potential im Inneren berechnen, so sucht man die Greensche Funktion mit der Nebenbedingung

$$G_D(\vec{x}, \vec{x}')|_{\vec{x}' \in \partial\Omega} = 0. \quad (3.17)$$

Damit hat man im Falle konstanter Leitfähigkeit die Gleichung, die das Potential im Inneren bestimmt:

$$\Phi(\vec{x}) = - \oint_{\partial\Omega} \Phi(\vec{x}') \frac{\partial}{\partial n'} G_D(\vec{x}, \vec{x}') d(\partial\Omega') := \Phi_D(\vec{x}). \quad (3.18)$$

Dies ist die Lösung für das sogenannte Dirichlet-Problem für eine konstante Leitfähigkeit ($\sigma = 1$). Im Gegensatz zur Neumann-Randbedingung ist die Lösung eindeutig.

¹Die einfachste Forderung $\left. \frac{\partial G_N(\vec{x}, \vec{x}')}{\partial n'} \right|_{\vec{x}' \in S} = 0$ würde wegen $-1 = \int_{\Omega} \Delta G(\vec{x}, \vec{x}') d(\Omega') = \oint_{\partial\Omega} \frac{\partial G_N(\vec{x}, \vec{x}')}{\partial n'} d(\partial\Omega') = 0$ zum Widerspruch führen.

3.3.3 Gemischte Randbedingungen

Beim Robin-Problem möchte man jeweils das Potential oder den Strom auf verschiedenen Teilstücken des Randes vorgeben. Die Bestimmung einer Greenschen Funktion für gemischte Randbedingungen gestaltet sich im allgemeinen schwieriger als bei nichtgemischten Randwertvorgaben.

Beispiele

3.3.4 Greensche Funktionen für den Kreis

Im vorhergehenden Abschnitt hat man die Lösung für ein Vorwärtsproblem mit konstanter Leitfähigkeit auf die Bestimmung einer Greenschen Funktion reduziert. Sie trägt die Information der vorliegenden Geometrie. Analytisch läßt sie sich nur für wenige Geometrien angeben. In der Medizin hat man es mit dreidimensionalen Geometrien zu tun. Allerdings kann man das Problem der EIT auch in zwei Dimensionen studieren, bevor man auf den mathematisch aufwendigeren Fall in drei Dimensionen übergeht.

Als Beispiel wird der Kreis betrachtet.

Das allgemeine Vorgehen ist es, zur freien Greenschen Funktion

$$G(\vec{x}, \vec{x}') = -\frac{1}{4\pi} \ln(|\vec{x} - \vec{x}'|) \quad (3.19)$$

$$= -\frac{1}{4\pi} \ln(r^2 + r'^2 - 2rr' \cos(\varphi - \varphi')) \quad (3.20)$$

mit $\vec{x} = \vec{x}(r, \varphi)$, die die geforderte Randbedingung (3.13) noch nicht erfüllt, Korrekturterme zu addieren, um die Randbedingungen zu erfüllen. Als Korrekturterme kommen nur Terme in Frage, die die erste Bedingung (3.11) nicht verletzen, d.h. es werden nur Funktionen benutzt, die im Integrationsgebiet harmonisch sind.

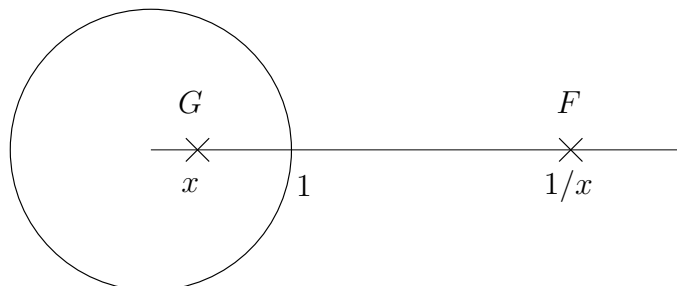


Abbildung 3.3: Die Spiegelladung für den Einheitskreis. Die Spiegelladung befindet sich außerhalb des Kreises im Abstand von $1/x$ zum Zentrum

Durch das Einführen von sogenannten Spiegelladungen außerhalb des Körpers wird die Harmonizität der Greenschen Funktion innerhalb des Körpers nicht verletzt. Es hängt von der Geometrie des Körpers ab, wieviele sogenannte Korrekturterme (Spiegelladungen) benötigt werden, um die Randbedingung zu erfüllen. Für komplizierte Geometrien können das unendlich viele sein.

Im Falle des Kreises reicht ein Korrekturterm aus, um die gewünschten Randbedingungen zu erfüllen.

Für den Einheitskreis lautet dieser

$$F(\vec{\mathbf{x}}, \vec{\mathbf{x}}') = -\frac{1}{4\pi} \ln(1 + (r'r)^2 - 2rr' \cos(\varphi - \varphi')). \quad (3.21)$$

Die Neumann-Greensche Funktion setzt sich aus der Summe der beiden Terme (3.21) und (3.20) zusammen:

$$G_N(\vec{\mathbf{x}}, \vec{\mathbf{x}}') = -\frac{1}{4\pi} \left[\ln(r^2 + r'^2 - 2rr' \cos(\varphi - \varphi')) + \ln(1 + (r'r)^2 - 2rr' \cos(\varphi - \varphi')) \right]. \quad (3.22)$$

Die Dirichlet-Greensche Funktion ist die Differenz der beiden Terme (3.21) und (3.20):

$$G_D(\vec{\mathbf{x}}, \vec{\mathbf{x}}') = -\frac{1}{4\pi} \left[\ln(r^2 + r'^2 - 2rr' \cos(\varphi - \varphi')) - \ln(1 + (r'r)^2 - 2rr' \cos(\varphi - \varphi')) \right]. \quad (3.23)$$

Eine Entwicklung der Greenschen Funktion in harmonische Funktionen [5] liefert

$$G_N(\vec{\mathbf{x}}, \vec{\mathbf{x}}')|_{r'=1} = \sum_{n \neq 0}^{\infty} \frac{r^{|n|}}{|n|} u_n(\varphi) u_n(\varphi') \quad (3.24)$$

$$\frac{\partial}{\partial n'} G_D(\vec{\mathbf{x}}, \vec{\mathbf{x}}')|_{r'=1} = -\sum_{n \neq 0}^{\infty} r^{|n|} u_n(\varphi) u_n(\varphi'). \quad (3.25)$$

Man erkennt, daß

$$u_n(\varphi) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \begin{cases} \sin(|n|\varphi) & , \quad n > 0 \\ \cos(|n|\varphi) & , \quad n < 0 \end{cases}, \quad (3.26)$$

die Eigenfunktionen des Neumann-nach-Dirichlet Operators $\Lambda_{\sigma=1}$ sind, der für eine konstante Leitfähigkeit ($\sigma = 1$), dem Strom am Rand das Potential am Rand zuordnet

$$\Lambda_1 : u_n(\varphi) \mapsto \frac{1}{|n|} u_n(\varphi). \quad (3.27)$$

3.3.5 Greensche Funktion für die Kugel

Die freie Greensche Funktion lautet im \mathbb{R}^3 :

$$G(\vec{x}, \vec{x}') = \frac{1}{4\pi} \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \quad (3.28)$$

$$= \frac{1}{4\pi} (r^2 + r'^2 - 2rr'\cos\gamma)^{-1/2}, \quad (3.29)$$

mit $\vec{x} = (r, \theta, \varphi)$ und $\cos\gamma = \cos\theta\cos\theta' + \sin\theta\sin\theta'\cos(\varphi - \varphi')$ in Polarkoordinaten.

Um Dirichlet oder Neumann-Randbedingungen zu erfüllen, wird die freie Greensche Funktion wie im Falle des Kreises durch eine Spiegelladung ergänzt. Damit lautet die Dirichlet-Funktion der Einheitskugel:

$$G_D(\vec{x}, \vec{x}') = \frac{1}{4\pi} \left((r^2 + r'^2 - 2rr'\cos\gamma)^{-1/2} - ((rr')^2 + 1 - 2rr'\cos\gamma)^{-1/2} \right). \quad (3.30)$$

Für die Neumann-Funktion der Kugel muß im Gegensatz zum Kreis noch ein weiterer Korrekturterm hinzugefügt werden [7]:

$$G_N(\vec{x}, \vec{x}') = \frac{1}{4\pi} \left((r^2 + r'^2 - 2rr'\cos\gamma)^{-1/2} + ((rr')^2 + 1 - 2rr'\cos\gamma)^{-1/2} + \ln \left[c \left(1 - rr'\cos\gamma + \sqrt{(rr')^2 + 1 - 2rr'\cos\gamma} \right)^{-1} \right] \right). \quad (3.31)$$

Wobei c eine frei wählbare Konstante ist. Mit $r_< = \min(r|r')$ und $r_> = \max(r|r')$ entwickelt man für die freie Greensche Funktion

$$(r^2 + r'^2 - 2rr'\cos\gamma)^{-1/2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{r_<^n}{r_>^{n+1}} P_n(\cos\gamma). \quad (3.32)$$

Die Variablen r und r' sind im interessanten Bereich beide kleiner als 1. Daher kann man eine Potenzreihe in (rr') ansetzen, z.B. für die Spiegelladung

$$((rr')^2 + 1 - 2rr'\cos\gamma)^{-1/2} = \sum_{n=0}^{\infty} (rr')^n P_n(\cos\gamma). \quad (3.33)$$

Aus der Beziehung

$$t \frac{\partial}{\partial t} \ln \left(\left(1 - wt + \sqrt{(1+t^2 - 2wt)} \right)^{-1} \right) = \frac{1}{\sqrt{1+t^2 - 2wt}} - 1 \quad (3.34)$$

folgt direkt die Entwicklung des zusätzlichen Terms:

$$\ln \left(c \left(1 - rr'\cos\gamma + \sqrt{(rr')^2 + 1 - 2rr'\cos\gamma} \right)^{-1} \right) = \ln(c/2) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(rr')^n}{n} P_n(\cos\gamma). \quad (3.35)$$

Mit dem Additionstheorem

$$P_n(\cos\gamma) = \frac{4\pi}{2n+1} \sum_{m=-n}^n Y_{nm}(\theta, \varphi) Y_{nm}^*(\theta', \varphi') \quad (3.36)$$

und der Normierung $\oint_{\partial\Omega} \Phi \, d(\partial\Omega) = 0$ schreiben sich die Dirichlet- und die Neumann-Funktion:

$$G_N(\vec{x}, \vec{x}')|_{r'=1} = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^n \frac{r^{|n|}}{|n|} Y_{nm}(\theta, \varphi) Y_{nm}^*(\theta', \varphi') \quad (3.37)$$

$$\frac{\partial}{\partial n'} G_D(\vec{x}, \vec{x}')|_{r'=1} = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^n -r^{|n|} Y_{nm}(\theta, \varphi) Y_{nm}^*(\theta', \varphi'), \quad (3.38)$$

wobei es willkürlich ist, welche Variable die komplex-konjugierte Basis bekommt, da die Greenschen Funktionen reell sind.

Hieraus folgen Eigenfunktionen des Neumann-nach-Dirichlet Operators Λ_σ für eine konstante Leitfähigkeit $\sigma = 1$, der dem Strom am Rand das Potential am Rand zuordnet

$$\Lambda_{\sigma=1} : Y_{nm}(\theta, \varphi) \mapsto \frac{1}{|n|} Y_{nm}(\theta, \varphi). \quad (3.39)$$

3.4 Der Neumann-nach-Dirichlet Operator Λ_σ

Man kann zeigen das große Änderungen in der Leitfähigkeitsverteilung sehr kleine Unterschiede in den Randpotentialen liefern. Für eine radialsymmetrische Leitfähigkeitsverteilung der Form:

$$\sigma(r) = \begin{cases} \Sigma & , \quad 0 \leq r \leq \rho \\ 1 & , \quad \rho < r \leq 1 \end{cases} \quad \Sigma > 1, \quad (3.40)$$

mit

$$\Sigma(\rho) = 1 + \rho^{-1} \quad (3.41)$$

ist

$$\|\sigma - 1\|_{\mathcal{L}^2(\Omega)}^2 = \pi \quad \forall \rho,$$

und es kann gezeigt werden [8], daß der Operator Λ_σ für die Leitfähigkeitsverteilung (3.40) ein Hilbert-Schmidt Operator ist. Damit ist für eine beliebige Orthonormalbasis $\{u_i\}$ von \mathcal{L}^2

$$\|\Lambda_\sigma\|_{HS} = \left(\sum_{i=1}^{\infty} \|\Lambda_\sigma u_i\|_{\mathcal{L}^2}^2 \right)^{1/2} < \infty.$$

Bezüglich dieser Hilbert-Schmidt Norm $\|\cdot\|_{HS}$ läßt sich für die gewählten Leitfähigkeiten zeigen

$$\|\mathbf{\Lambda}_\sigma - \mathbf{\Lambda}_1\|_{HS} \rightarrow 0, \quad \rho \rightarrow 0. \quad (3.42)$$

Damit verursachen sehr große Störungen der Leitfähigkeit in Zentrum extrem kleine Effekte in den Randpotentialen.

3.5 Punktförmige Störung der Leitfähigkeit

Eine analytische Behandlung des Vorwärtsproblems ist nur für einige hochsymmetrische Leitfähigkeitsverteilungen möglich.

Eine Vereinfachung erzielt man durch die Wahl einer konstanten Hintergrundleitfähigkeit mit einer punktförmigen Störung bei gleichzeitiger Linearisierung. Das Vorwärtsproblem für eine beliebige Leitfähigkeit führt nach Gleichung (3.12) und (3.13) auf die Integralgleichung

$$\Phi(\vec{x}) = \Phi_N(\vec{x}) - \int_{\Omega} G_N(\vec{x}, \vec{x}') \Delta \Phi(\vec{x}') d(\Omega'). \quad (3.43)$$

Mit

$$\Phi_N(\vec{x}) = \oint_{\partial\Omega} G_N(\vec{x}, \vec{x}') \frac{\partial}{\partial n'} \Phi(\vec{x}') d(\partial\Omega')$$

als Potential für eine konstante Leitfähigkeit und $\Delta \Phi(\vec{x}') = -\nabla \Phi(\vec{x}') \nabla \tilde{\sigma}(\vec{x}')$ nach Gleichung (2.25) hat man:

$$\Phi(\vec{x}) = \Phi_N(\vec{x}) + \int_{\Omega} G_N(\vec{x}, \vec{x}') \nabla \Phi(\vec{x}') \nabla \tilde{\sigma}(\vec{x}') d(\Omega'). \quad (3.44)$$

Der Integrand liefert mit der folgenden Umformung

$$\begin{aligned} G_N(\vec{x}, \vec{x}') \nabla \Phi(\vec{x}') \nabla \tilde{\sigma}(\vec{x}') &= \nabla [G_N(\vec{x}, \vec{x}') \tilde{\sigma}(\vec{x}') \nabla \Phi(\vec{x}')] \\ &- \nabla [G_N(\vec{x}, \vec{x}') \nabla \Phi(\vec{x}')] \tilde{\sigma}(\vec{x}') \end{aligned}$$

eine Integralgleichung für das Potential. Der erste Term auf der rechten Seite liefert ein Oberflächenintegral.

$$\begin{aligned} \Phi(\vec{x}) - \Phi_N(\vec{x}) &= \oint_{\partial\Omega} G_N(\vec{x}, \vec{x}') \tilde{\sigma}(\vec{x}') \frac{\partial}{\partial n'} \Phi(\vec{x}') d(\partial\Omega') \\ &- \int_{\Omega} \nabla [G_N(\vec{x}, \vec{x}') \nabla \Phi(\vec{x}')] \tilde{\sigma}(\vec{x}') d(\Omega'). \end{aligned} \quad (3.45)$$

Setzt man für die Leitfähigkeit eine kleine Störung in Form einer Delta-Funktion ein, so erhält man für diese punktförmige Störung mit

$$\tilde{\sigma}(\vec{\mathbf{x}}') = \tilde{\sigma}_a \delta(\vec{\mathbf{a}} - \vec{\mathbf{x}}') \quad (3.46)$$

die Beziehung

$$\begin{aligned} \Phi(\vec{\mathbf{x}}) &= \Phi_N(\vec{\mathbf{x}}) - \tilde{\sigma}_a \nabla [G_N(\vec{\mathbf{x}}, \vec{\mathbf{a}}) \nabla \Phi(\vec{\mathbf{a}})] \\ &= \Phi_N(\vec{\mathbf{x}}) - \tilde{\sigma}_a (\nabla G_N(\vec{\mathbf{x}}, \vec{\mathbf{a}}) \nabla \Phi(\vec{\mathbf{a}}) + G_N(\vec{\mathbf{x}}, \vec{\mathbf{a}}) \Delta \Phi(\vec{\mathbf{a}})). \end{aligned} \quad (3.47)$$

Die lineare Abschätzung besteht darin, daß das Potential durch das ungestörte Potential ersetzt wird, $\Phi(\vec{\mathbf{a}}) \rightarrow \Phi_N(\vec{\mathbf{a}})$ und $\Delta \Phi(\vec{\mathbf{a}}) = 0$. Damit erhält man

$$\begin{aligned} \delta \Phi(\vec{\mathbf{x}}) &= \Phi(\vec{\mathbf{x}}) - \Phi_N(\vec{\mathbf{x}}) = -\tilde{\sigma}_a \nabla G_N(\vec{\mathbf{x}}, \vec{\mathbf{a}}) \nabla \Phi_N(\vec{\mathbf{a}}), \\ &\text{für } \tilde{\sigma}(\vec{\mathbf{x}}) = \tilde{\sigma}_a \delta(\vec{\mathbf{a}} - \vec{\mathbf{x}}). \end{aligned} \quad (3.48)$$

Eine kleine Leitfähigkeitsänderung wirkt sich durch einen Dipoleffekt auf das Randpotential aus. Die exakte Form des Dipols wird durch die Greensche Funktion festgelegt und somit durch Geometrie des Gebietes vorgegeben. Die Stärke wird durch den Gradienten des Potentials und der Greenschen Funktion bestimmt. Der Gradient der Greenschen Funktion entspricht gerade dem Potential eines Dipols. Betrachtet man den Gradienten der Greenschen Funktion in 2 Dimensionen, so sieht man daß der Effekt einer Störung, mit dem Abstand r zum Rand, mit mindestens $1/r$ abnimmt. In 3 Dimensionen nimmt der Effekt sogar mit $1/r^2$ ab.

3.6 Beliebige Leitfähigkeit

Um das Vorwärtsproblem für eine beliebige Leitfähigkeit zu lösen, formt man die Integralgleichung (3.43) mit

$$\begin{aligned} G_N(\vec{\mathbf{x}}, \vec{\mathbf{x}}') \nabla \Phi(\vec{\mathbf{x}}') \nabla \tilde{\sigma}(\vec{\mathbf{x}}') &= \nabla [G_N(\vec{\mathbf{x}}, \vec{\mathbf{x}}') \Phi(\vec{\mathbf{x}}') \nabla \tilde{\sigma}(\vec{\mathbf{x}}')] \\ &- \nabla [G_N(\vec{\mathbf{x}}, \vec{\mathbf{x}}') \nabla \tilde{\sigma}(\vec{\mathbf{x}}')] \Phi(\vec{\mathbf{x}}') \end{aligned}$$

um, damit hat man

$$\begin{aligned} \Phi(\vec{\mathbf{x}}) &= \oint_{\partial \Omega} G_N(\vec{\mathbf{x}}, \vec{\mathbf{x}}') \left(\frac{\partial}{\partial n'} \Phi(\vec{\mathbf{x}}') + \Phi(\vec{\mathbf{x}}') \frac{\partial}{\partial n'} \tilde{\sigma}(\vec{\mathbf{x}}') \right) d(\partial \Omega') \\ &- \int_{\Omega} \nabla [G_N(\vec{\mathbf{x}}, \vec{\mathbf{x}}') \nabla \tilde{\sigma}(\vec{\mathbf{x}}')] \Phi(\vec{\mathbf{x}}') d(\Omega'). \end{aligned} \quad (3.49)$$

Für den einfachen, aber nicht unrealistischen Fall, daß die Normalableitung von $\tilde{\sigma}$ auf dem Rand verschwindet, $\frac{\partial}{\partial n} \tilde{\sigma}|_{\partial\Omega} = 0$, ergibt sich

$$\Phi(\vec{x}) = \Phi_N(\vec{x}) - \int_{\Omega} \nabla [G_N(\vec{x}, \vec{x}') \nabla \tilde{\sigma}(\vec{x}')] \Phi(\vec{x}') d(\Omega'). \quad (3.50)$$

Für eine numerische Auswertung muß die Integralgleichung diskretisiert werden. Der Kern der Integralgleichung ist für $\vec{x} = \vec{x}'$ singulär, dies liefert ein Gleichungssystem mit singulären Einträgen in der Diagonalen. Sind die Singularitäten von geringer Ordnung, so kann das Problem durch eine geschickte Subtraktion und Addition gelöst werden [16].

3.6.1 Integralgleichung für $\Delta\Phi$

Eine weitere Methode [12] schließt zuerst auf $\Delta\Phi(\vec{x})$ und dann im nächsten Schritt auf das Potential. Dies führt auf eine Integralgleichung, deren Kern etwas einfacher ist. Von der bekannten Integralgleichung

$$\Phi(\vec{x}) = \Phi_N(\vec{x}) - \int_{\Omega} G_N(\vec{x}, \vec{x}') \Delta\Phi(\vec{x}') d(\Omega')$$

ausgehend bildet man auf beiden Seiten $\nabla\tilde{\sigma}\nabla(\cdot)$. Unter Verwendung von Gleichung (2.25) führt dies auf eine Integralgleichung, die nur noch $\Delta\Phi(\vec{x})$ involviert und einen einfacheren Kern aufweist

$$\Delta\Phi(\vec{x}) - \nabla\tilde{\sigma}(\vec{x})\nabla_{\vec{x}} \int_{\Omega} G_N(\vec{x}, \vec{x}') \Delta\Phi(\vec{x}') d(\Omega') = -\nabla\tilde{\sigma}(\vec{x})\nabla\Phi_N(\vec{x}). \quad (3.51)$$

Ist die Greensche Funktion in vollständigen Eigenfunktionen entwickelbar, so kann man das Problem auf eine Matrixinvertierung der Entwicklungskoeffizienten überführen. Die Auswertung der Integrale für die Entwicklungskoeffizienten ist sehr zeintensiv und muß für jede Leitfähigkeit jedes Mal neu berechnet werden.

3.6.2 (FEM) Finite Element Methode

Eine andere Art, um partielle Differentialgleichungen zu lösen, bietet die beliebte Methode der finiten Elemente (FEM). Zugang zur Methode der finiten Elemente erhält man durch die Überführung der partiellen Differentialgleichung in eine "schwache Formulierung". Dabei wird das mit einer Testfunktion gewichtete Integral des Residuums $\nabla(\sigma(\vec{x})\nabla\Phi(\vec{x}))$ der Differentialgleichung betrachtet. Durch partielle Integration erhält man eine Integralbedingung für das Potential im Inneren

des Körpers.

$$\begin{aligned}
 0 &= \int_{\Omega} w(\vec{x}) \underbrace{\nabla [\sigma(\vec{x}) \nabla \Phi(\vec{x})]}_{=0} d(\Omega) \\
 &= - \int_{\Omega} \sigma(\vec{x}) \nabla w(\vec{x}) \nabla \Phi(\vec{x}) d(\Omega) \\
 &\quad + \oint_{\partial\Omega} \sigma(\vec{x}) w(\vec{x}) \frac{\partial}{\partial n} \Phi(\vec{x}) d(\partial\Omega), \quad \forall w(\vec{x}) \in H_{\diamond}^1(\Omega). \quad (3.52)
 \end{aligned}$$

Die Lösung der Differentialgleichung ist auf die Suche nach einem Potential reduziert worden, das für jede beliebige Testfunktion $w(\vec{x}) \in H_{\diamond}^1(\Omega)$ folgende Bedingung erfüllt:

$$\begin{aligned}
 \int_{\Omega} \sigma(\vec{x}) \nabla w(\vec{x}) \nabla \Phi(\vec{x}) d(\Omega) &= \oint_{\partial\Omega} \sigma(\vec{x}) w(\vec{x}) \frac{\partial \Phi(\vec{x})}{\partial n} d(\partial\Omega), \\
 \forall w(\vec{x}) &\in H_{\diamond}^1(\Omega), \quad (3.53)
 \end{aligned}$$

wo $H_{\diamond}^1(\Omega)$ der Sobolev-Raum der stetigen und 1-fach differenzierbaren Funktionen mit quadratintegrierbarer Ableitung ist. Dabei taucht die Neumann-Randbedingung ganz natürlich auf. Die Überführung der Differentialgleichung in die Form von Gleichung (3.53) wird als schwache Formulierung bezeichnet. Die Bezeichnung "schwach" bezieht sich dabei auf den Verzicht einer lokalen Bedingung an das Potential, wie dies durch die Differentialgleichung gegeben ist. Stattdessen werden globale Integralbedingungen gefordert.

Die Gleichung (3.53) besitzt Lösungen im Sobolev-Raum. Die numerische Lösung wird allerdings nur in einem passenden endlichdimensionalen Unterraum bestimmt [26].

Sei $S_h(\Omega)$ ein solcher Unterraum, der für $h \rightarrow 0$ gegen die Lösung des kontinuierlichen Problems strebt, dann gilt es folgendes Problem zu lösen:

$$a(\Phi_h, w) = l(w), \quad \forall w \in S_h(\Omega), \quad (3.54)$$

mit der Bilinear-Form

$$a(u, v) = \int_{\Omega} \sigma \nabla u \nabla v d(\Omega) \quad (3.55)$$

und dem linearen Funktional

$$l(w) = \oint_{\partial\Omega} f w d(\partial\Omega), \quad f = \sigma \frac{\partial u}{\partial n}, \quad (3.56)$$

und der Neumann-Randbedingung f .

Wählt man die Basis in $S_h(\Omega)$ mit $\{\psi_1, \dots, \psi_N\}$, dann gilt es mit der Entwicklung für das Potential

$$\Phi_h = \sum_{k=1}^N z_k \psi_k, \quad k = 1, \dots, N \quad (3.57)$$

folgendes Gleichungssystem zu lösen:

$$\sum_{k=1}^N z_k a(\psi_k, \psi_i) = l(\psi_i), \quad i = 1, \dots, N. \quad (3.58)$$

Um die sehr zeitaufwendigen Integrale zu lösen, benutzt man lineare finite Elemente Räume. Sie sind sehr praktisch, da die Basis aus linearen Zeltfunktionen (Abbildung 3.4) besteht und die Integrale nur dann einen Wert ungleich Null besitzen, wenn die Knotenpunkte direkte Nachbarn sind oder das Integral über dieselben Indizes ausgewertet wird.

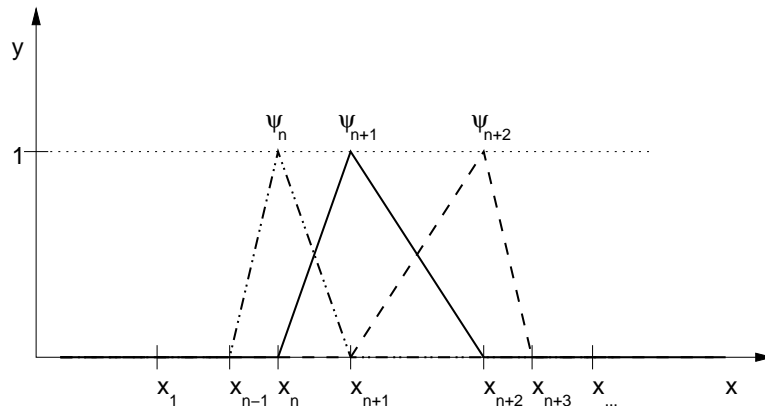


Abbildung 3.4: Die Zeltfunktionen (Basisfunktionen) im eindimensionalen Fall für Diskretisierungspunkte x_i .

$$\int_{\Omega} \psi_k \psi_i \, d(\Omega) = 0, \quad \forall |k - i| > 1 \quad (3.59)$$

$$\int_{\Omega} \partial_x \psi_k \partial_x \psi_i \, d(\Omega) = 0, \quad \forall |k - i| > 1. \quad (3.60)$$

Die Invertierung der Matrix ist sichergestellt, da sie positiv-definit ist.

$$\begin{aligned}
 z^T A z &= \sum_{ik} z_i A_{ik} z_k \\
 &= a\left(\sum_i z_i \psi_i, \sum_k z_k \psi_k\right) = a(u_h, u_h) \\
 &\geq \rho \|u_h\|^2.
 \end{aligned} \tag{3.61}$$

Für 2-dimensionale Probleme existiert das PDE-Toolbox-Paket [29] für MatLab [30], mit dem das Vorwärtsproblem mit Hilfe der Methode der FEM gelöst werden kann. Man stellt sich die interessierende Geometrie aus verschiedenen Grundgeometrien zusammen. Hat man dieses Gebiet mit den jeweiligen Booleschen Verknüpfungen zusammengesetzt, so wird dann durch das Programm ein geeignetes Gitter aus Dreiecken erzeugt. Die Gitterpunkte können unterschiedlich dicht ausfallen, je nachdem wie interessant der jeweilige Bereich für die Rechnung ist. Dies ist eine der Stärken der finiten Element Methode. Die Randbedingungen und die Leitfähigkeitsverteilung müssen dem Programm durch analytische Funktionen oder diskrete Werte an den Dreiecken vorgegeben werden. Als Resultat erhält man das Potential im gesamten Gebiet.

Die Lösung 3-dimensionaler Probleme kann in MatLab durch ein zusätzliches Paket namens EIDORS [28] gefunden werden. In diesem Paket muß zuerst über ein weiteres Program namens NetGen [27] ein Gitter für die gewünschte Geometrie erzeugt werden. In dem EIDORS Paket werden dann die Randbedingungen und die Leitfähigkeitsverteilung auf den Gitterpunkten zugewiesen.

3.7 Kleine Störung

Um ein Gefühl für das zu erwartende Signal $\delta\Phi = \Phi - \Phi_N$ zu bekommen, welches am Rand bei gegebener Neumann-Randbedingung erwartet wird, betrachtet man eine kleine Störung in der Leitfähigkeit. Darunter versteht man eine Störung mit kleiner Ausdehnung im Vergleich zum Gesamtobjekt Ω . Für diese Leitfähigkeitsverteilung wird jeweils der Abstand zum Rand und die Stärke der Störung variiert. Für den Kreis sei zum Beispiel eine solche "kleine" Störung vorgegeben durch die Parametrisierung :

$$\sigma(\vec{x}) = 1 + 10 \exp\left(-[100((x+r)^2 + y^2)]^4\right) \tag{3.62}$$

Über den Parameter r wird das Zentrum der Störung variiert. Mit der Methode der finiten Elemente wird für die feste Randbedingung $f = \sin(\theta)$ das Signal $\delta\Phi$ berechnet. In Abbildung (3.6) zeigt sich das Dipolverhalten, welches von Gleichung (3.49) bekannt ist. Ein erwarteter starker Anstieg des Signals für eine Störung in Randnähe ist ebenfalls zu beobachten.

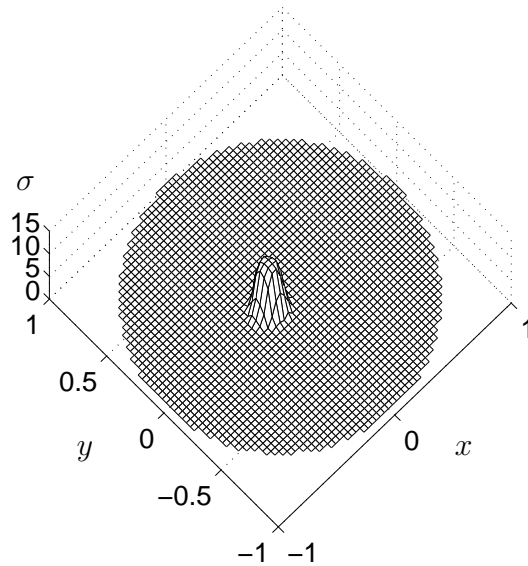


Abbildung 3.5: Für eine Störung nach Gleichung (3.62) mit unterschiedlichem Abstand r der Störung zum Mittelpunkt wird die Stärke und Form des zu erwartenden Signals $\delta\Phi$ mit der Randbedingung $f = \sin(\theta)$ in Abbildung (3.6) gezeigt.

Um den Effekt der Stärke der kleinen Störung zu studieren, betrachten wir als nächstes Beispiel

$$\sigma(\vec{x}) = 1 + 10^k \exp\left(-[100((x + 0.5)^2 + y^2)]^4\right) \quad (3.63)$$

Hier kann die Stärke variiert werden. Nach anfänglichem Anstieg des Signals mit steigender Leitfähigkeit mit der Stärke 10^k ergibt sich für höhere k eine Sättigung.

Vergleicht man das Signal (Abbildung 3.7) zweier Störungen mit der Stärke $a_1 = 10^{0.5}$ und $a_2 = 10^{2.5}$ mit dem Verhältnis $a_2/a_1 \approx 100$, so ergibt sich für das Verhältnis des Signals nur $\frac{\|\delta\Phi_2\|}{\|\delta\Phi_1\|} \approx 2$. Hier zeigt sich wieder, wie schwach der Effekt der Leitfähigkeitsänderung auf das Randpotential ist.

In Abbildung (3.7) wird die Form für unterschiedliche Stärken der Störung miteinander verglichen. Auch für unterschiedliche Größenordnungen ist die Form des Signals im wesentlichen gleich. Damit hat man bei einer Rekonstruktion der Leitfähigkeit nur begrenzt die Möglichkeit, über die Stärke des Signals auf die Stärke der Leitfähigkeitsänderung zu schließen. Der erwartete Effekt ist im Prozentbereich. Durch Anlegen einer Randbedingung $f = \sin(n\theta)$ (mit n groß) kann der Gradient des Potentials in Randnähe im Gegensatz zum Inneren des Gebietes erhöht werden. Durch die Wahl der Randbedingungen können somit unterschiedliche Gebiete besser “angeregt” wer-

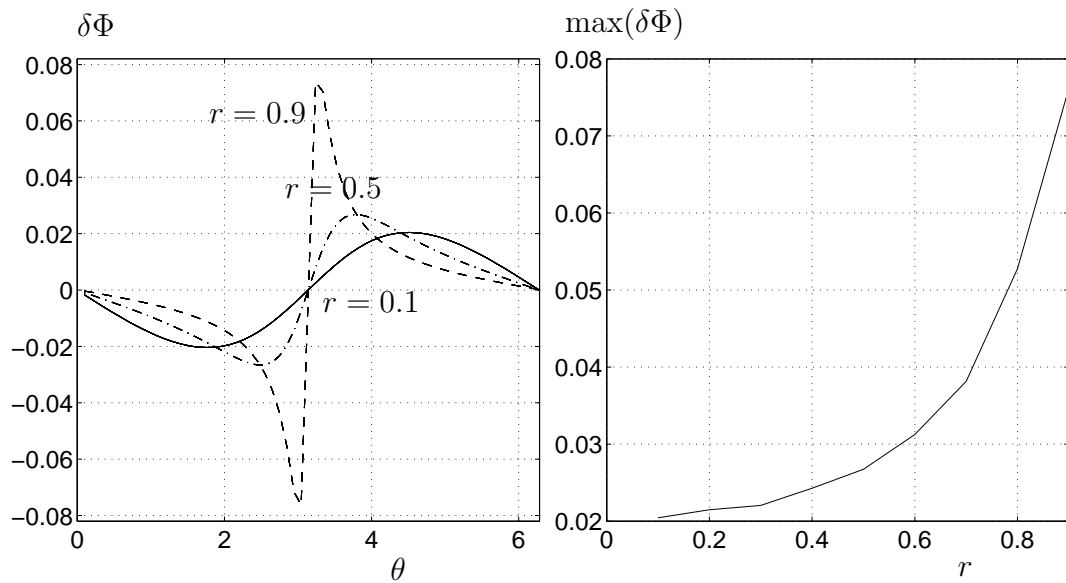


Abbildung 3.6: Die Stärke und Form des zu erwartenden Signals $\delta\Phi$ für eine Störung nach Gleichung (3.62) mit der Randbedingung $f = \sin(\theta)$. Das Signal einer Störung in Randnähe setzt sich stark aus den hohen Frequenzen zusammen. Für eine Störung in der Nähe des Ursprungs werden diese Anteile kleiner.

den. Allerdings nimmt die absolute Stärke des Signales $\delta\Phi$ für höhere n mit ungefähr $1/n$ ab, wie man aus der Abbildung (3.9) deutlich erkennt.

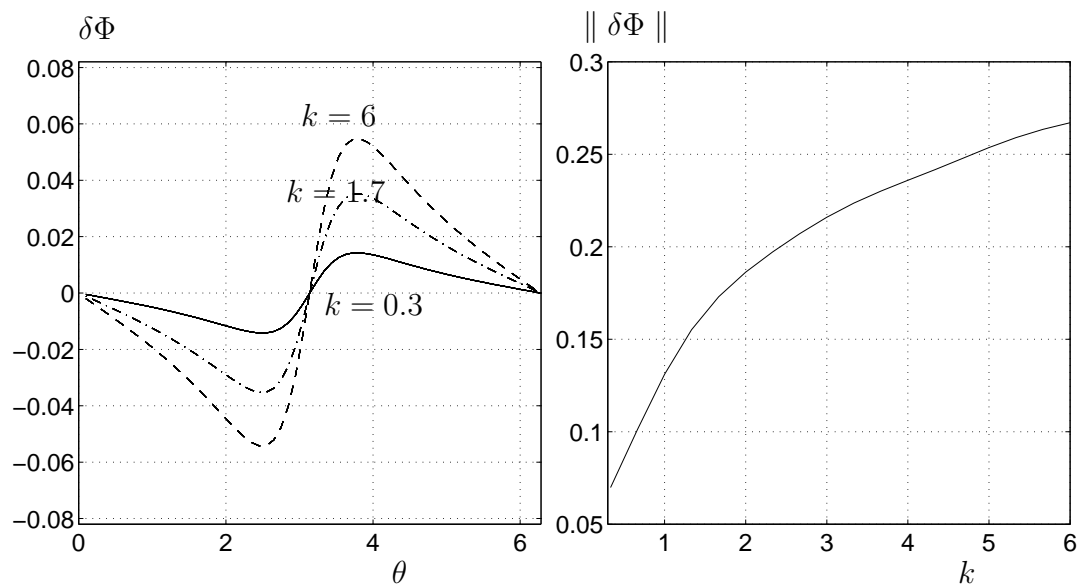


Abbildung 3.7: Die Stärke und Form des zu erwartenden Signals $\delta\Phi$ für eine Randbedingung $f = \sin(\theta)$ für eine Leitfähigkeit nach Gleichung (3.63). Der erwartete Effekt ist im Prozentbereich.

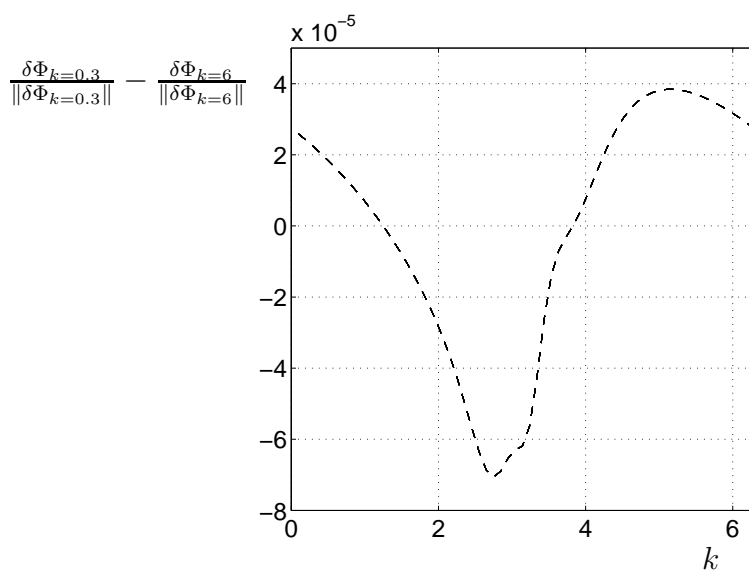


Abbildung 3.8: Die Differenz des zu erwartenden Signals $\delta\Phi$ mit $k = 0.3$ und $\delta\Phi$ mit $k = 6$ für eine Leitfähigkeit nach Gleichung (3.63) mit der Randbedingung $f = \sin(\theta)$, wobei die beiden Signale auf die gleiche Norm gebracht wurden damit der Unterschied in der Form verglichen werden kann. Der Unterschied des Signals ist auch für verschiedene Größenordnungen der Leitfähigkeit sehr klein.

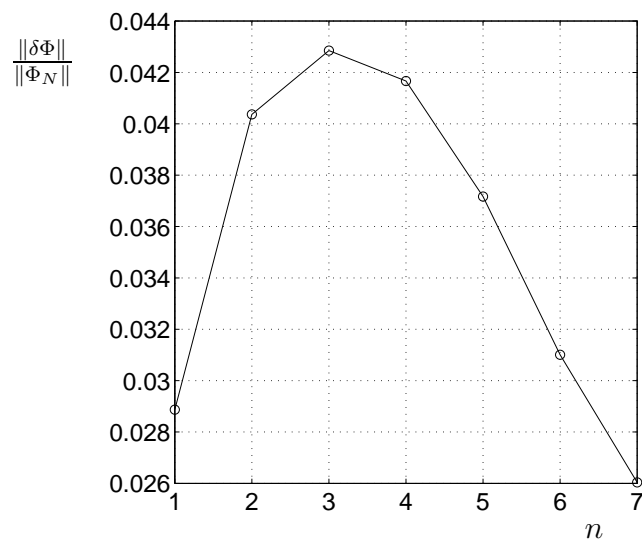


Abbildung 3.9: $\sigma(x, y) = 1 + 10 \exp\left(-[100(x^2 + (y - 0.5)^2)]^4\right)$; Für diese Verteilung beispielsweise wird die Stärke des zu erwartenden Signals $\delta\Phi$ und Φ_N am Rand für verschiedene Randbedingung $f = \sin(n\theta)$ verglichen. Mit der Randbedingung $n = 3$ hat man ein größeres Verhältnis für $\frac{\|\delta\Phi\|}{\|\Phi_N\|}$.

4 Das Inverse Problem

Im Inversen Problem der elektrischen Impedanztomographie interessiert man sich für die Leitfähigkeitsverteilung $\sigma(\vec{x})$ und möchte diese anhand der gemessenen Neumann-nach-Dirichlet-Abbildung Λ_σ rekonstruieren. Hierbei ist die Leitfähigkeit eine Größe, die nicht direkt bestimmt werden kann, wie dies in den meisten Inversen Problemen der Fall ist. Eine Rekonstruktion der Leitfähigkeit ist nur dann möglich, wenn die Abbildung

$$\chi : \sigma \mapsto \Lambda_\sigma \quad (4.1)$$

eindeutig ist. Die Wahl der richtigen Funktionsklasse für die Leitfähigkeit spielt dabei eine wichtige Rolle. Die Eindeutigkeit der Abbildung χ konnte in der Arbeit von Kohn und Vogelius [14] für analytische Funktionen gezeigt werden. Allerdings konnte auch gezeigt werden, daß im Falle einer richtungsabhängigen Leitfähigkeit die Eindeutigkeit im Allgemeinen nicht gegeben ist.

Obwohl man es in der Medizin auch mit richtungsabhängigen Leitfähigkeiten zu tun hat, wie etwa im Falle von Muskulatur (siehe Tabelle 1.1), beschränkt man sich, wegen der Eindeutigkeitsaussage bei der Bestimmung der inversen Abbildung,

$$\chi^{-1} : \Lambda_\sigma \mapsto \sigma, \quad (4.2)$$

auf skalare Leitfähigkeiten. Diese Vereinfachung wird auch von allen Arbeitsgruppen, die sich mit der EIT beschäftigen, gemacht. Dabei muß man sich im klaren sein, daß zusätzlich zum Fehler aus fehlerbehafteten Messdaten noch mit einem Modellfehler zu rechnen ist. Trotz der Eindeutigkeitsaussage für skalare Leitfähigkeiten treten bei der Berechnung der Inversen Abbildung numerische Probleme auf. Im Allgemeinen sind Inverse Probleme *schlecht gestellt*. Schlecht gestellt ist hier im Sinne von Hadamard gemeint. Ein Problem ist nach Hadamard gut gestellt, wenn folgende Bedingungen erfüllt sind:

Definition 4.1 Sei $A : X \rightarrow Y$ eine Abbildung zwischen den topologischen Räumen X, Y . Das Problem, welches durch (A, X, Y) gegeben ist, heißt gut gestellt im Sinne von Hadamard, wenn

1. für jedes $g \in Y$ die Gleichung $Ap = g$ eine Lösung hat,
2. die Lösung p eindeutig ist,

3. die Lösung p stetig von den Daten abhängt.

Ist eine der Bedingungen nicht erfüllt, so bezeichnet man das Problem als schlecht gestellt.

In der Praxis ist oft die erste Bedingung in (4.1) verletzt. Sind die Messdaten g_ϵ mit einem Fehler ϵ behaftet, so hat man eine Gleichung $Ap = g_\epsilon$ zu lösen, wobei g_ϵ durch den Fehler nicht im Bildbereich des Operators liegen muß.

Ein einfaches Beispiel für die Schlechtgestellttheit eines Inversen Problems liefert folgendes Problem [20]:

$$Af(x) = \int_0^x f(t)dt = g(x). \quad (4.3)$$

Sucht man stetige Lösungen dieser Gleichung, so ergibt sich die Bedingung

- g sei stetig differenzierbar
- $g(0) = 0$

und für die Lösung gilt

$$f = \frac{dg}{dx}. \quad (4.4)$$

Hat man gestörte Daten mit

$$g(0) = \epsilon \neq 0, \quad (4.5)$$

so ist das Problem nicht lösbar.

Sind die Messdaten zum Beispiel mit dem Fehler

$$g^\epsilon(x) = g(x) + \epsilon \sin(nx) \quad (4.6)$$

behaftet, dann ist auch $g^\epsilon(x)$ stetig differenzierbar und $g^\epsilon(0) = 0$. Der Fehler ist

$$\|g^\epsilon(x) - g(x)\| \leq \epsilon. \quad (4.7)$$

Für die Lösung erhält man

$$f^\epsilon(x) = f(x) + n\epsilon \cos(nx), \quad (4.8)$$

damit hat man für den Fehler

$$\|f^\epsilon(x) - f(x)\| = n\epsilon. \quad (4.9)$$

Somit kann der Fehler in der Lösung beliebig groß werden.

In Kapitel (3) Gleichung (3.42) hat man gesehen, daß große Leitfähigkeitsveränderungen kleine Unterschiede in den Randdaten produzieren. Dies ist kein Effekt, der nur durch die Radialsymmetrie des Problems entsteht. Vielmehr ist es die Struktur der Abbildung $\chi : \sigma \mapsto \Lambda_\sigma$.

Bei der Suche nach der Inversen Abbildung stößt man auf Integralgleichungen vom Typ Fredholm Erster Art

$$g(\vec{x}) = \int K(\vec{x}, \vec{x}') p(\vec{x}') d(\Omega'), \quad (4.10)$$

die zu invertieren sind. Diese Integraloperatoren sind kompakt [15] und sind typische Vertreter für schlecht gestellte Probleme. Betrachtet man deren Singulärwertzerlegung, so gewinnt man anhand der Singulärwerte einen Einblick über die Schlechtgestelltheit des Inversen-Problems.

Ein Beispiel in einer Dimension ist folgende Integralgleichung:

$$g(\theta) = \int_0^{2\pi} K(\theta, \theta') f(\theta') d\theta' \quad (4.11)$$

mit dem nach Eigenfunktionen entwickelten Kern,

$$K(\theta, \theta') = \sum_n^{\infty} \exp(-\alpha n) (\sin(n\theta) \sin(n\theta') + \cos(n\theta) \cos(n\theta')), \quad (4.12)$$

der als glättender Operator agiert. Die Exponentialfunktion beschreibt in diesem Fall die Eigenwerte. Nach einfachem Rechnen mit

$$g_s = \int_0^{2\pi} \frac{1}{\pi} \sin(n\theta') g(\theta') d\theta' \quad (4.13)$$

$$g_c = \int_0^{2\pi} \frac{1}{\pi} \cos(n\theta') g(\theta') d\theta' \quad (4.14)$$

erhält man für $f(\theta)$ die Lösung:

$$f(\theta) = \sum_n^{\infty} \exp(\alpha n) (g_s \sin(n\theta) + g_c \cos(n\theta)). \quad (4.15)$$

Sind Fehler in den Daten, so werden die Fehler in den Fourierkoeffizienten g_s, g_c exponentiell verstärkt. Abbildung (4.1) verdeutlicht diesen Sachverhalt graphisch.

In Abbildung (3.7) kann schon für das simulierte Vorwärtsproblem der EIT gezeigt werden, daß unterschiedliche Leitfähigkeiten sehr kleine Abweichungen in ihren

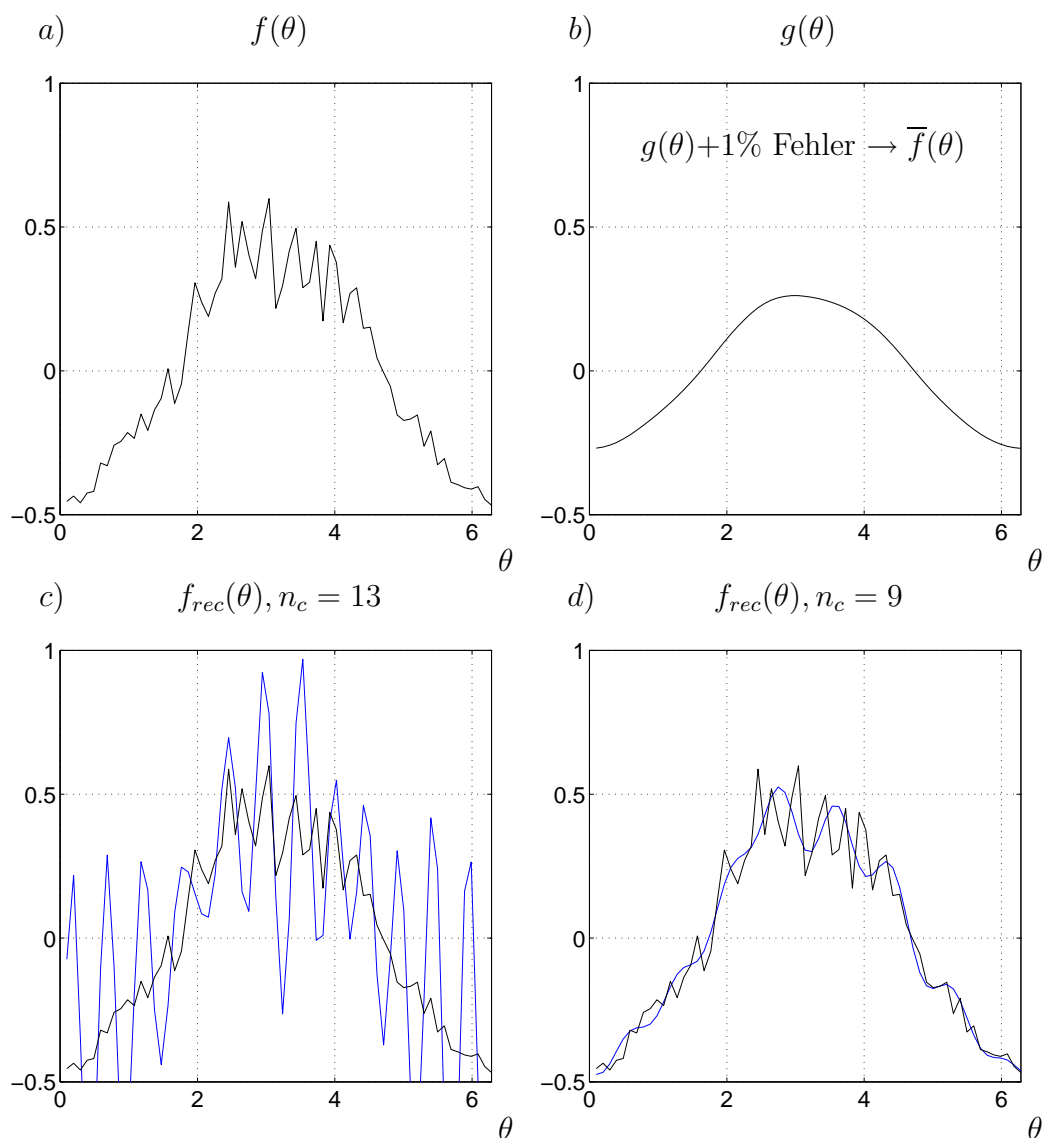


Abbildung 4.1: Mit $\alpha = 0.5$ für die Lösung (4.15). a) Das Ausgangssignal $f(\theta)$. b) Der Operator glättet die Funktion zu $g(\theta)$. c) Die Rekonstruktion f_{rec} mit 13 Fourierkoeffizienten. d) Die Rekonstruktion mit 9 Fourierkoeffizienten. Benutzt man nur die ersten Fourierkoeffizienten, dann kann eine erfolgreiche Rekonstruktion stattfinden.

Randdaten aufweisen können. Man kann sagen, daß ein inverses Problem schlechter gestellt ist, je schneller das Vorwärtsproblem konvergiert. Für diese Problematik muß eine geeignete Regularisierung gefunden werden. Der Versuch, eine exakte Lösung zu den gemessenen Randdaten zu finden, wird aufgegeben, da selbst bei nahezu fehlerfreien Daten allein die Rechengenauigkeit zu Instabilitäten in der Rekonstruktion führt. Betrachtet man die Eigenwerte bzw. die Singulärwerte der Integralkerne, so

sieht man, daß die höherfrequenten Anteile der Randdaten bei der Rekonstruktion immer stärker beitragen. Die Stabilisierung des Problems erreicht man durch zusätzliche Bedingungen an die Lösungsfunktion. Eine gängige Regularisierung ist die Tikhonov-Phillips Regularisierung. Sie unterdrückt Lösungen mit allzu großer Norm. Damit verbunden ist eine Unterdrückung der höheren Frequenzen für die Lösungsfunktion, die die Verstärkung der Fehler bewirken. Der Preis, den man zahlt, ist eine Reduzierung der Auflösung.

4.1 Rekonstruktion

Bei der Elektrischen Impedanztomographie kennt man zu gegebenen Randströmen nur die Randpotentiale eines Objektes. Im Inneren des zu untersuchenden Objektes sind sowohl das Potential als auch die Leitfähigkeit der Messung unzugänglich und demnach unbekannt. Selbst die Randdaten sind meistens nur auf einer beschränkten Elektrodenanzahl bekannt. Durch diese beschränkte Elektrodenzahl ergibt sich auch eine beschränkte Anzahl linear unabhängiger Messanordnungen. Für N Elektroden hat man nur maximal $N \times (N - 1)$ Informationen über das zu untersuchende Objekt. Damit ist schon die maximale Auflösung der Rekonstruktion festgelegt.

Allerdings hat man in der Praxis noch weniger Informationen, da Messungen des Potentials mit Randstrommuster höherer Frequenz immer kleinere Signale liefern. Ist das Signal unterhalb der Messgenauigkeit der Messapparatur, so kann die Messung zu solchen Randbedingungen nicht benutzt werden. Zudem wird die Auflösung weiter durch die notwendige Regularisierung des Inversen Problems reduziert.

4.1.1 Bestehende Rekonstruktionsalgorithmen

Der erste in der Praxis funktionierende Impedanztomograph war das von Barber und Brown entwickelte APT (Applied Potential Tomography) System [3][4]. Die Rekonstruktion wurde mit einem Backprojektion Algorithmus entlang der Äquipotentiallinien einer konstanten Leitfähigkeitsverteilung durchgeführt.

Die meisten anderen Rekonstruktionsalgorithmen basieren auf einer Linearisierung des Problems. Der derzeit bekannteste in der Praxis funktionierende Tomograph ist der am Rensselaer Polytechnic Institute entwickelte ACT3 Tomograph. Das Gerät arbeitet mit sogenannten "optimalen Strömen", die im Falle des Kreises trigonometrische Strommuster sind. Diese machen die Effekte von Störungen einer homogenen Leitfähigkeitsverteilung besonders gut sichtbar [23]. Bei der Rekonstruktion kommt der NOSER Algorithmus zum Einsatz [18]. Hier wird zur Bilderstellung nur ein Newton-Schritt benötigt. Besitzt die Leitfähigkeitsverteilung eine komplexe Struktur, versagt der einfache Algorithmus, und es müssen mehrere Iterationen durchgeführt werden. Solche iterativen Verfahren wurden bereits mehrfach unter-

sucht [9][6]. Nach bereits wenigen Schritten liefern diese befriedigende Resultate. Allerdings verlangen diese Algorithmen einen sehr hohen Rechenaufwand.

4.1.2 Neue Rekonstruktionsalgorithmen

Für die Rekonstruktion der Leitfähigkeit gibt es verschiedene Herangehensweisen. Möchte man direkt die Leitfähigkeit bestimmen, so muss man das Problem linearisieren und die weitere unbekannte Größe $\Phi(\vec{x})$ in der Integralgleichung (3.45) in Ω selbst vorgeben, d.h. man setzt für das Potential im Inneren das ungestörte Potential $\Phi_N(\vec{x})$ ein. Dadurch ist der Kern der Integralgleichung bekannt und eine Kombination der verschiedenen Messanordnungen führt auf ein Gleichungssystem, welches die maximale Information beinhaltet. Hat man mit der Linearisierung des Problems die Leitfähigkeit rekonstruiert, so kann die Integralgleichung (3.45) mit dem neuen Potential iteriert werden. Eine Iteration setzt aber für jeden Iterationsschritt das Lösen des Vorwärtsproblems für alle betrachteten Randbedingungen voraus. Damit verbunden ist ein enormer Rechenaufwand, da zusätzlich bei jedem Schritt eine Matrixinvertierung stattfinden muss. Daher möchte man einen Algorithmus, der ohne Iteration auskommt. Möchte man keine Linearisierung des Potential durchführen, so kann man nur eine einzelne Messung verwenden, da sich das Potential mit jeder unterschiedlichen Randbedingung ändert. Betrachtet man die alternative Integralgleichung (3.43), so kennt man hier den Kern, im Gegensatz zur anderen Integralgleichung zur direkten Rekonstruktion der Leitfähigkeit. Die zu rekonstruierende Größe ist in diesem Fall nicht die Leitfähigkeit selber, sondern $\Delta\Phi(\vec{x})$. Damit läßt sich mit Hilfe von Gleichung (3.43) auch das Potential berechnen. Mit der Kenntnis des Potentials kann dann mit der Methode der sogenannten Charakteristiken direkt auf die Leitfähigkeit geschlossen werden [12][25]. Allerdings funktioniert die Methode wegen der zu geringen Zahl an Inputdaten nur mit einem Modell mit endlich vielen Parametern, die durch die Rekonstruktion angepaßt werden. In diesem Modell müssen Informationen über die Größe, Stärke und die Anzahl an Störungen angegeben werden.

Eine weitere Methode ist es, nach Inhomogenitäten in der Leitfähigkeit zu suchen. Mit einem Vergleich der Randdaten eines Testdipols mit den Messdaten kann für jeden Punkt in Ω ein Ausschlußkriterium definiert werden. Dieses Ausschlußkriterium bestimmt, ob sich der Punkt in einem Gebiet befindet, welches eine veränderte Leitfähigkeit zur Hintergrundleitfähigkeit hat.

Alle hier genannten Algorithmen haben gemeinsam, daß das Potential $\Phi_N(\vec{x})$ für konstante Leitfähigkeit in ganz Ω benötigt wird. Dieses Potential kann durch eine Leermessung oder durch eine Rechnung bestimmt werden. Optimal ist, wenn eine experimentelle Leermessung des Randpotentials möglich ist. Aus diesen Randdaten läßt sich durch Lösen der Laplacegleichung das Potential $\Phi_N(\vec{x})$ oder $\Phi_D(\vec{x})$ im Inneren bestimmen. In diese Rechnung geht die Geometrie des zu untersuchen-

den Objektes ein. Die unvermeidlichen Fehler der Leermessung und der Lösung der Laplacegleichung sind oft viel größer als das erwartete Signal $\delta\Phi$.

Wenn keine experimentelle Leermessung zur Verfügung steht (was in der medizinischen Diagnostik im Allgemeinen der Fall ist), muß diese theoretisch bestimmt werden. Die Form des Körpers muß dafür genau bekannt sein, beim Patienten wäre dies die Form seines ganzen Körpers. Dies ist aber klarerweise nicht exakt durchführbar. Daher wird man einige vereinfachende Annahmen für diese Leermessung machen. Legt man bei der Brustuntersuchung einen kreisförmigen Stempel auf die Brust, dann wird man für die Leermessung nicht die genaue Form des Körpers vorgeben müssen. Stattdessen wird man die Geometrie der Halbebene, eines Zylinders oder einer Kugel wählen und das Problem als rotationssymmetrisch betrachten. Für die Praxis muß allerdings untersucht werden, wie robust die Rekonstruktionsalgorithmen auf die vereinfachte Leermessung reagieren.

Zum einen braucht man diese Leermessung, um zum einen das Signal $\delta\Phi$ zu erhalten und zum anderen für die erste Iteration der Integralgleichung (3.45).

5 Linearisierung

In diesem Kapitel wird die Rekonstruktion der Leitfähigkeitsverteilung mit der Linearisierung des Problems beschrieben. Eine Linearisierung des Problems führt auf eine Integralgleichung mit bekanntem Kern. Durch Anlegen verschiedener Randströme hat man verschiedene Randbedingungen, die zu einem Satz an Integralgleichungen führen. Eine Lösung für den Satz an Integralgleichungen wird hier mit der Methode der approximativen Inversen gefunden. Dabei braucht das Rekonstruktionsgebiet nicht diskretisiert zu werden. Hat man sich für einen Regularisierungsparameter λ entschieden, so kann die Lösung schnell erhalten werden, da die gemessenen Daten nicht in die zu invertierende Matrix eingehen. Die Invertierung für jeden Regularisierungsparameter erfolgt damit nur einmal. Um die Lösung zu erhalten, muß dann nur eine Matrixmultiplikation durchgeführt werden.

5.1 Standardverfahren

Da das Potential im Inneren des zu rekonstruierenden Gebietes nicht gemessen werden kann und dessen Berechnung ohne die Kenntnis der gesuchten Leitfähigkeitsverteilung $\sigma(\vec{x})$ nicht möglich ist, setzt man für das Potential das ungestörte Neumann-Potential Φ_N ein. Wie wir bereits wissen, liefern sehr hohe Leitfähigkeitsverteilungen einen sehr schwachen Effekt auf das Randpotential. Der Effekt auf das Potential im Inneren wird durch die Stärke des vorhandenen Gradienten des Potentials skaliert. Der Effekt auf das Potential ist für kleine Leitfähigkeiten viel kleiner als das ungestörte Potential.

Die Überführung der Grundgleichung der EIT in die schwache Formulierung liefert eine Integralgleichung zur Bestimmung der Leitfähigkeit

$$\int_{\Omega} \sigma(\vec{x}) \nabla w(\vec{x}) \nabla \Phi(\vec{x}) \, d(\Omega) = \oint_{\partial\Omega} \sigma(\vec{x}) w(\vec{x}) \frac{\partial}{\partial n} \Phi(\vec{x}) \, d(\partial\Omega) \quad \forall w(\vec{x}) \in H_{\diamond}^1(\Omega). \quad (5.1)$$

Setzt man für $w(\vec{x})$ das Potential $\Phi(\vec{x})$ ein, so erhält man eine Gleichung, die die Leistung, die am Rand eindringt, mit der Leistung, die im Inneren geleistet wird,

gleich setzt:

$$\int_{\Omega} \sigma(\vec{x}) \nabla \Phi(\vec{x}) \nabla \Phi(\vec{x}) \, d(\Omega) = \oint_{\partial\Omega} \Phi(\vec{x}) \sigma(\vec{x}) \frac{\partial}{\partial n} \Phi(\vec{x}) \, d(\partial\Omega). \quad (5.2)$$

Unter der Annahme, daß die Leitfähigkeit im wesentlichen konstant ist und nur kleine Störungen aufweist, erhält man mit der Linearisierung $\sigma(\vec{x}) = 1 + \delta\sigma(\vec{x})$ und $\Phi(\vec{x}) = \Phi_N(\vec{x}) + \delta\Phi(\vec{x})$ von Gleichung (5.1) eine Integralgleichung für $\delta\sigma(\vec{x})$ [5],

$$\langle \delta\Phi^f, g \rangle_{\partial\Omega} = \langle \Phi^f - \Phi_N^f, g \rangle_{\partial\Omega} = - \int_{\Omega} \nabla \Phi_N^g(\vec{x}) \nabla \Phi_N^f(\vec{x}) \delta\sigma(\vec{x}) \, d(\Omega), \quad (5.3)$$

mit $\Phi_N^g(\vec{x})$, dem ungestörten Potential zur ‘‘Strommessfunktion’’ g , und $\Phi_N^f(\vec{x})$, dem ungestörten Potential zur Randbedingung f . Φ^f ist das gemessene Potential am Rand unter der Randbedingung f . Ausgangspunkt für die Herleitung ist die Grundgleichung der EIT. Setzt man für die Leitfähigkeit eine konstante Hintergrundleitfähigkeit σ_0 und eine kleine Störung $\delta\sigma(\vec{x})$ an, und für das Potential ebenso das ungestörte Potential $\Phi_N(\vec{x})$ (für die Randbedingung f) und eine kleine Störung $\delta\Phi(\vec{x})$, so folgt damit:

$$\begin{aligned} 0 &= \nabla[(\sigma_0 + \delta\sigma(\vec{x})) \nabla(\Phi_N(\vec{x}) + \delta\Phi(\vec{x}))] \\ &= \underbrace{\nabla[\sigma_0 \nabla \Phi_N(\vec{x})]}_{=0} + \nabla[\sigma_0(\vec{x}) \nabla \delta\Phi(\vec{x})] \\ &\quad + \nabla[\delta\sigma(\vec{x}) \nabla \Phi_N(\vec{x})] + \nabla[\delta\sigma(\vec{x}) \nabla \delta\Phi(\vec{x})]. \end{aligned} \quad (5.4)$$

Vernachlässigt man den letzten Term, so hat man die Differentialgleichung

$$\nabla[\sigma_0(\vec{x}) \nabla \delta\Phi(\vec{x})] = -\nabla[\delta\sigma(\vec{x}) \nabla \Phi_N(\vec{x})]. \quad (5.5)$$

Da die Potentialverteilung $\Phi_N(\vec{x})$ bereits der verlangten Neumann-Randbedingung f genügt, muß Gleichung (5.5) unter der Neumann-Randbedingung $\partial(\sigma_0 \delta\Phi)/\partial n = 0$ gelöst werden. Sei o.B.d.A $\sigma_0 = 1$. Das Greensche Theorem (3.8) liefert die Lösung für $\delta\Phi(\vec{x})$

$$\delta\Phi(\vec{x}) = \int_{\Omega} G_N(\vec{x}, \vec{x}') \nabla[\delta\sigma(\vec{x}') \nabla \Phi_N(\vec{x}')] \, d(\Omega'). \quad (5.6)$$

Der Integrand läßt sich umformen,

$$\begin{aligned} G_N(\vec{x}, \vec{x}') \nabla[\delta\sigma(\vec{x}') \nabla \Phi_N(\vec{x}')] &= \nabla[G_N(\vec{x}, \vec{x}') \delta\sigma(\vec{x}') \nabla \Phi_N(\vec{x}')] \\ &\quad - \nabla G_N(\vec{x}, \vec{x}') \nabla \Phi_N(\vec{x}') \delta\sigma(\vec{x}'). \end{aligned} \quad (5.7)$$

Mit der Annahme, daß die Variation der Leitfähigkeit $\delta\sigma$ am Rand Null ist, verschwindet der zweite Term in Gleichung (5.7), der als Oberflächenterm auftauchen würde. Die Lösung für $\delta\Phi(\vec{x})$ ist dann

$$\delta\Phi(\vec{x}) = - \int_{\Omega} \nabla G_N(\vec{x}, \vec{x}') \nabla \Phi_N(\vec{x}') \delta\sigma(\vec{x}') d(\Omega'). \quad (5.8)$$

Multipliziert man die Gleichung (5.8) mit den Eigenfunktionen der Neumannschen Funktion und integriert man über den Rand, so erhält man die Gleichung (5.3)

$$\langle \delta\Phi, g \rangle_{\partial\Omega} = - \int_{\Omega} \nabla \Phi_N^g(\vec{x}') \nabla \Phi_N(\vec{x}') \delta\sigma(\vec{x}') d(\Omega'). \quad (5.9)$$

5.2 Die erste Iteration

Alternativ kann die erste Iteration der Integralgleichung betrachtet werden. Ausgehend von Gleichung (3.45) und der Annahme $\tilde{\sigma} = 0$ auf dem Rand, wird die erste Iteration (Φ_N) des Potentials in der rechten Seite von Gleichung (3.45) eingesetzt:

$$\delta\Phi(\vec{x}) = \Phi(\vec{x}) - \Phi_N(\vec{x}) = - \int_{\Omega} \nabla [G_N(\vec{x}, \vec{x}') \nabla \Phi_N(\vec{x}')] \tilde{\sigma}(\vec{x}') d(\Omega'). \quad (5.10)$$

Für die Leitfähigkeit wird hier keine Linearisierung durchgeführt.

Wertet man die Potentialdifferenz $\delta\Phi(\vec{x})$ auf dem Rand aus und bildet das Skalarprodukt mit den Eigenfunktionen der Neumann-nach-Dirichlet Abbildung, so ergibt sich eine Integralgleichung für eine feste Neumann Randbedingung f ,

$$\langle \delta\Phi, u \rangle_{\partial\Omega} = - \int_{\Omega} \nabla w(\vec{x}') \nabla \Phi_N(\vec{x}') \tilde{\sigma}(\vec{x}') d(\Omega'), \quad (5.11)$$

mit

$$w(\vec{x}') = G_N u(\vec{x}) = \oint_{\partial\Omega} G_N(\vec{x}', \vec{x}) u(\vec{x}) d(\partial\Omega) = \Phi_N(\vec{x}').$$

Für j verschiedene Messkonfigurationen (Randbedingungen f_j) und i "Strommessfunktionen" ergibt sich ein Satz von Integralgleichungen für $\tilde{\sigma}(\vec{x})$,

$$\langle \delta\Phi^j, u_i \rangle_{\partial\Omega} = \int_{\Omega} K_{ji}(\vec{x}') \tilde{\sigma}(\vec{x}') d(\Omega') \quad (5.12)$$

$$\text{mit } K_{ji}(\vec{x}) = - \nabla \Phi_N^i(\vec{x}) \nabla \Phi_N^j(\vec{x}).$$

5.3 $\delta\sigma$ und $\tilde{\sigma}$

Die Kerne der Integralgleichungen (5.3) und (5.11) und deren linke Seite sind gleich. Lediglich die zu rekonstruierenden Größen sind unterschiedlich. Für kleine Leitfähigkeitsänderungen $\delta\sigma(\vec{x})$ sind die beiden zu rekonstruierenden Größen gleich:

$$\tilde{\sigma}(\vec{x}) = \ln(1 + \delta\sigma(\vec{x})) \approx \delta\sigma(\vec{x}). \quad (5.13)$$

Eine Rekonstruktion über $\tilde{\sigma}(\vec{x})$ erlaubt die gleichberechtigte Behandlung von Leitfähigkeitserhöhungen und Leitfähigkeitserniedrigungen. Zudem garantiert die Rekonstruktion von $\tilde{\sigma}(\vec{x})$, daß die Leitfähigkeit überall positiv ist. Als Beispiel sollen folgende Leitfähigkeitsverteilungen dienen:

$$\begin{aligned} \tilde{\sigma}_1(\vec{x}) &= \alpha \exp\left(-[40((x+0.5)^2 + (y-0.2)^2)]^4\right) \\ \tilde{\sigma}_2(\vec{x}) &= -\alpha \exp\left(-[40((x+0.5)^2 + (y-0.2)^2)]^4\right) \end{aligned}$$

damit

$$\begin{aligned} \sigma_1(\vec{x}) &= \exp\left(\alpha \exp\left(-[40((x+0.5)^2 + (y-0.2)^2)]^4\right)\right) \\ \sigma_2(\vec{x}) &= \exp\left(-\alpha \exp\left(-[40((x+0.5)^2 + (y-0.2)^2)]^4\right)\right) \end{aligned}$$

mit

$$\begin{aligned} \max(\sigma_1) &= \exp(\alpha) \\ \min(\sigma_2) &= \exp(-\alpha). \end{aligned} \quad (5.14)$$

In Abbildung (5.2) ist die Potentialdifferenz auf dem Rand für eine Leitfähigkeitserhöhung und eine Leitfähigkeitserniedrigung entsprechend den Verteilungen in Gleichung (5.14) gezeigt.

Die Leitfähigkeitsverteilung selbst ist in Abbildung (5.1) dargestellt.

Für gleiche Randbedingungen besitzt die Potentialdifferenz für die beiden Leitfähigkeitsverteilungen nur ein umgekehrtes Vorzeichen,

$$\delta\Phi(\sigma_1) = -\delta\Phi(\sigma_2), \quad (5.15)$$

ist aber von der Stärke und der Form her gleich. Man kann sich fragen, in wie weit sich die in Abbildung (5.1) gezeigten Leitfähigkeitsverteilung aus den in Abbildung (5.2) gegebenen Potentialen rekonstruieren lassen.

Man sieht, daß eine Rekonstruktion von $\delta\sigma(\vec{x})$ nach dem Standardverfahren Leitfähigkeitserniedrigungen zu stark berücksichtigt. In der Praxis treten Leitfähigkeitsänderungen viel größer als 1 häufig auf und eine Linearisierung von $\sigma(\vec{x})$ ist schon aus diesem Grunde nicht zulässig. Dieses Problem existiert nicht für das neue Verfahren.

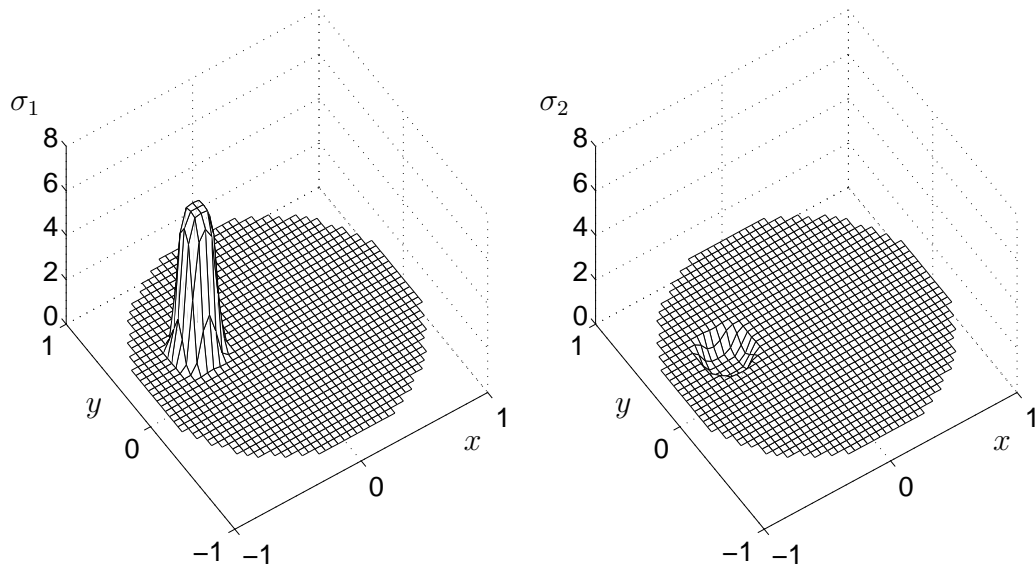


Abbildung 5.1: Leitfähigkeitsverteilungen nach Gleichung (5.14)

5.4 Systeme von Integralgleichungen

Durch Anlegen verschiedener Randbedingungen erhält man die maximale Informationen über die zu untersuchende Leitfähigkeitsverteilung. Dadurch ergeben sich nach (5.12) mehrere Integralgleichungen, die gleichzeitig zu lösen sind. Für den Einheitskreis ergibt sich für die verschiedenen Strommessfunktionen (Eigenfunktionen der Neumann-Greenfunktion)

$$u_i(\theta) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \begin{cases} \sin(|i|\theta) & , \quad i > 0 \\ \cos(|i|\theta) & , \quad i < 0 \end{cases}$$

die Potentiale

$$\Phi_N^i(r, \theta) = \frac{r^{|i|}}{|i|} u_i(\theta). \quad (5.16)$$

Damit ergibt sich konkret für die Integralkerne $K_{ji}(\vec{x})$

$$K_{ji}(\vec{x}) = \frac{r^{|i|+|j|-2}}{\pi} \begin{cases} \cos((|i| - |j|)\theta) & , \quad i, j > 0 \text{ oder } i, j < 0 \\ \sin((|i| - |j|)\theta) & , \quad i > 0, j < 0, |j| \geq |i| \\ \sin((|j| - |i|)\theta) & , \quad i < 0, j > 0, |j| \geq |i|. \end{cases} \quad (5.17)$$

Der Index j bezeichnet die Randbedingung $f_j(\theta) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin(|j|\theta)$ (den angelegten Strom), für $j > 0$ und $f_j(\theta) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos(|j|\theta)$ für $j < 0$ [5].

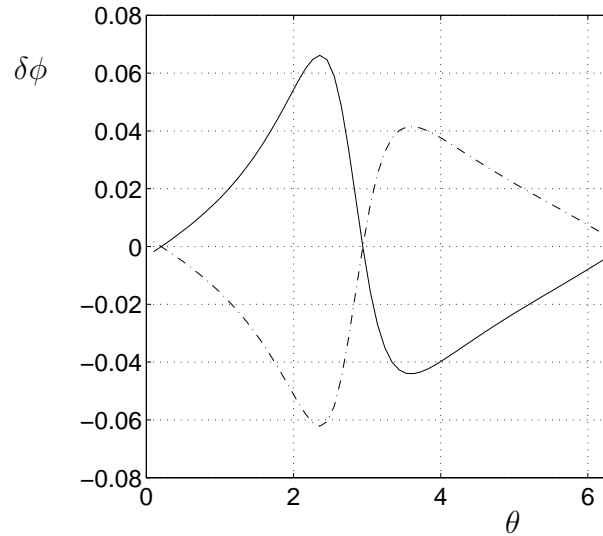


Abbildung 5.2: Das Signal für zwei Störungen der Stärke $\exp(2)$ (gestrichelte Linie) und der Stärke $\exp(-2)$ bei gleicher Randbedingung $f = \sin(\theta)$. Die Form und die Stärke sind gleich, lediglich das Vorzeichen ist wie erwartet unterschiedlich

Solche Systeme von Integralgleichung lassen sich mit der Methode der Approximativen Inversen lösen [21][22] Dabei muß keine Diskretisierung der Leitfähigkeitsverteilung durchgeführt werden.

5.4.1 Approximative Inverse

Ein System von schlechtgestellten Integralgleichungen,

$$Af = g \tag{5.18}$$

$$A: \Omega \subset \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}^N,$$

läßt sich wie folgt lösen [5][20]: Man betrachtet Funktionale der Lösung. Diese werden durch einen sogenannten Mollifier e_γ regularisiert,

$$f_\gamma(\vec{x}) = \langle f(\vec{x}'), e_\gamma(\vec{x}, \vec{x}') \rangle = \int_{\Omega} f(\vec{x}') e_\gamma(\vec{x}, \vec{x}') d(\partial\Omega'). \tag{5.19}$$

Ein gängiger Mollifier ist im \mathbb{R}^3 zum Beispiel

$$e_\gamma(\vec{x}, \vec{x}') = \frac{3}{4\pi\gamma^3} \chi_\gamma(\|\vec{x} - \vec{x}'\|) \text{ mit } \chi_\gamma(z) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \begin{cases} 1 & , z < \gamma \\ 0 & , z \geq \gamma, \end{cases} \tag{5.20}$$

mit dem eine Mittelung der Funktion um ihre Umgebung durchführt wird. Dadurch werden die hochfrequenten Anteile unterdrückt, die zur Schlechtgestellttheit des Problems beitragen. Eine Wahl

$$e_\gamma(\vec{x}, \vec{x}') = \delta(\vec{x} - \vec{x}') \quad (5.21)$$

liefert die unregularisierte Lösung. Als nächstes wird der sogenannte Rekonstruktionskern v_γ bestimmt. Es gilt dabei die Lösung für folgende Gleichung zu finden:

$$\mathbf{A}^* v_\gamma = e_\gamma, \quad (5.22)$$

mit \mathbf{A}^* dem adjungierten Operator zu \mathbf{A} . Da e_γ nicht im Bild von \mathbf{A}^* liegen muß, bestimmt man die Lösung durch Minimieren des Defektes

$$J = \| \mathbf{A}^* v_\gamma - e_\gamma \| \rightarrow \min. \quad (5.23)$$

Dies führt auf die Normalengleichung

$$\mathbf{A}\mathbf{A}^* v_\gamma = \mathbf{A}e_\gamma. \quad (5.24)$$

Wenn man an dieser Stelle regularisiert, bietet sich die Methode von Thikonov an. Hier wird ein Regularisierungsparameter λ eingeführt, da der Operator $(\mathbf{A}\mathbf{A}^*)$ die Schlechtgestellttheit des Operators \mathbf{A} übernommen hat.

$$v_\gamma = (\mathbf{A}\mathbf{A}^* + \lambda I)^{-1} \mathbf{A}e_\gamma, \quad (5.25)$$

Für das Funktional der Lösung erhält man damit

$$\langle f, e_\gamma \rangle \approx \langle f, \mathbf{A}^* v_\gamma \rangle = \langle \mathbf{A}f, v_\gamma \rangle = \langle g, v_\gamma \rangle =: \mathbf{S}_\gamma g. \quad (5.26)$$

\mathbf{S}_γ wird als die Approximative Inverse bezeichnet. Für einen Operator

$$\mathbf{A}: \Omega \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^N, \quad \mathbf{A}f = g, \quad (5.27)$$

wie in Gleichung gegeben (5.17) gegeben hat man mit

$$g_n = (\mathbf{A}f)_n = \langle f, k_n \rangle = \int_{\Omega} k_n(\vec{x}) f(\vec{x}) d(\Omega) \quad n = 1, \dots, N$$

und dem adjungierten Operator

$$\mathbf{A}^* g = \sum_{n=1}^N g_n k_n(\vec{x}) \quad (5.28)$$

den Operator $(\mathbf{A}\mathbf{A}^*)$ in Matrixdarstellung

$$(\mathbf{A}\mathbf{A}^*)_{mn} = \langle k_m, k_n \rangle = \int_{\Omega} k_m(\vec{x}) k_n(\vec{x}) d(\Omega) \quad (5.29)$$

Damit kann man direkt die Approximative Inverse angeben.

$$\mathbf{S}_\gamma g = \sum_{ij}^N g_i (\mathbf{A}\mathbf{A}^* + \lambda \mathbf{I})_{ij}^{-1} \int_{\Omega} k_j(\vec{\mathbf{x}}') e_\gamma(\vec{\mathbf{x}}, \vec{\mathbf{x}}') d(\Omega'). \quad (5.30)$$

Für die Wahl der Deltafunktion als Mollifier erhält man

$$\mathbf{S}_\gamma g = \sum_{ij}^N g_i (\mathbf{A}\mathbf{A}^* + \lambda \mathbf{I})_{ij}^{-1} k_j(\vec{\mathbf{x}}). \quad (5.31)$$

Zu erwähnen ist, daß die Entwicklungsfunktionen nach Gleichung (5.17) auf Ω nicht vollständig sind.

5.5 Rekonstruktion mit Linearisierung

Für den Test des Algorithmus werden verschiedene Leitfähigkeitsverteilungen mit einfachen Störungen der Form

$$\begin{aligned} \delta\sigma_1(\vec{\mathbf{x}}) &= 1.5 \exp\left(-[100((x-0.6)^2 + (y+0.2)^2)]^{10}\right) \\ \delta\sigma_2(\vec{\mathbf{x}}) &= 3 \exp\left(-[100((x-0.4)^2 + (y-0.6)^2)]^{10}\right) \\ \delta\sigma_3(\vec{\mathbf{x}}) &= 1 \exp\left(-[10((x+0.3)^2 + (y-0.2)^2)]^2\right), \end{aligned}$$

mit

$$\begin{aligned} \|\delta\sigma_2\|_{\mathcal{L}^2} &= 2 \|\delta\sigma_1\|_{\mathcal{L}^2} \\ \|\delta\sigma_3\|_{\mathcal{L}^2} &\approx 0.89 \|\delta\sigma_2\|_{\mathcal{L}^2}, \end{aligned} \quad (5.32)$$

simuliert, die zu einer konstanten Leitfähigkeit addiert werden.

Speziell wählen wir

$$\sigma_{s1}(\vec{\mathbf{x}}) = 1 + \delta\sigma_1(\vec{\mathbf{x}}) \quad (5.33)$$

$$\sigma_{s2}(\vec{\mathbf{x}}) = 1 + \delta\sigma_1(\vec{\mathbf{x}}) + \delta\sigma_2(\vec{\mathbf{x}}) \quad (5.34)$$

$$\sigma_{s3}(\vec{\mathbf{x}}) = 1 + \delta\sigma_1(\vec{\mathbf{x}}) + \delta\sigma_2(\vec{\mathbf{x}}) + \delta\sigma_3(\vec{\mathbf{x}}) \quad (5.35)$$

und lösen das Vorwärtsproblem mit der Methode der Finiten Elemente. Die angesetzten Störungen $\delta\sigma_1, \delta\sigma_2$ sind sehr schmal. Die Störung $\delta\sigma_3$ hingegen weist eine allmähliche Veränderung auf und ist sehr breit. Die beiden Störungen $\delta\sigma_3$ und $\delta\sigma_2$ besitzen eine vergleichbare Norm. Die Randdaten des Potentials enthalten außer der Rechengenauigkeit keine weiteren Fehler und werden als "perfekte Daten" bezeichnet. Dadurch soll die Effizienz des Algorithmus bei nahezu perfekten Daten getestet werden. Die Leermessung (das Potential für eine konstante Leitfähigkeit)

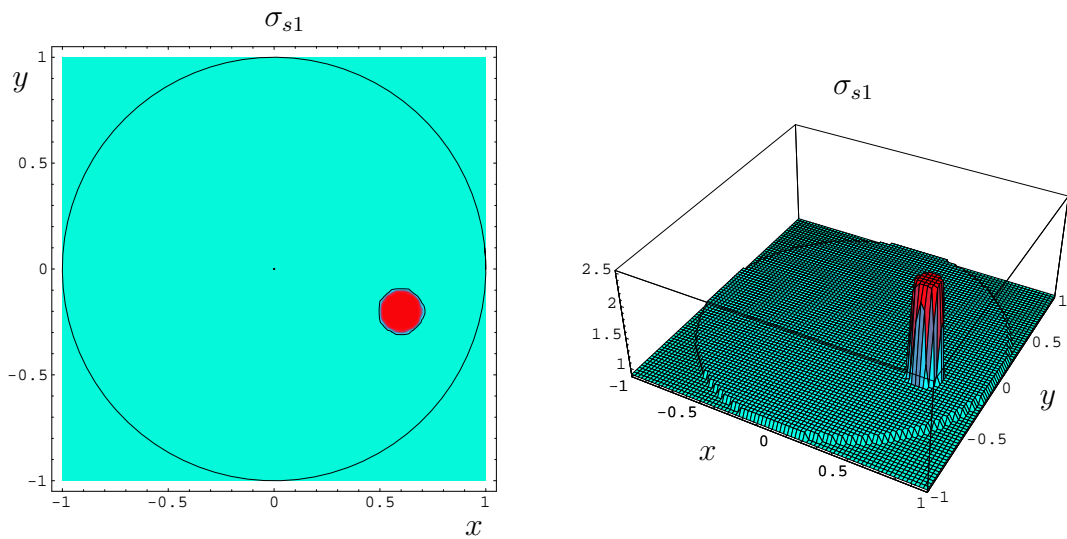


Abbildung 5.3: Für die einfache Leitfähigkeitsverteilung mit nur einer Störung der Form σ_{s1} nach Gleichung (5.32) werden mit der Methode der Finiten Elemente Daten simuliert und anschließend eine Rekonstruktion durchgeführt.

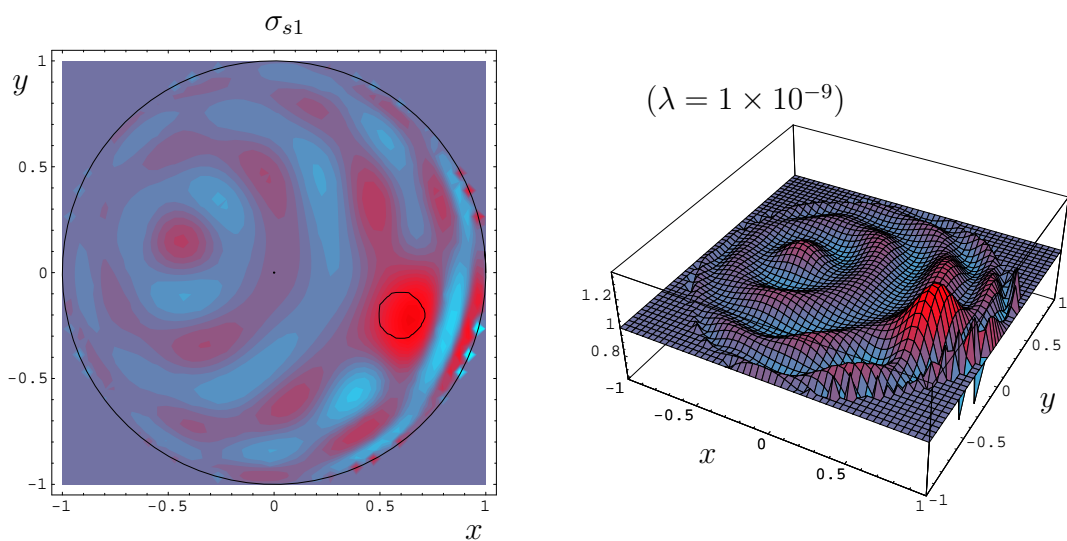


Abbildung 5.4: Für eine sehr schwache Regularisierung ist die Matrix sehr schlecht konditioniert, die Rekonstruktion der Leitfähigkeit ist trotz perfekter Daten sehr instabil

wird als exakt bekannt vorausgesetzt. Später werden Fehler in die Daten eingebaut, um zu untersuchen, wie stabil der Rekonstruktionsalgorithmus auf diese Störung reagiert. In den folgenden Rekonstruktionen werden die ersten 20 Anregungsströme

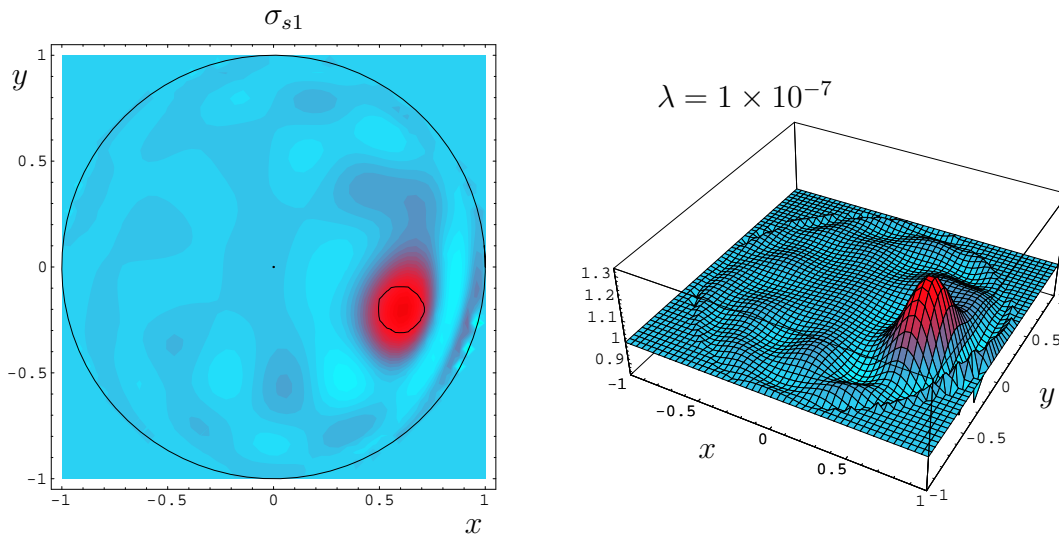


Abbildung 5.5: Mit dem Regularisierungsparameter $\lambda = 1 \times 10^{-7}$ ist die Rekonstruktion relativ gut. Die Ausdehnung der Störung und deren Stärke sind nicht exakt, allerdings wird der störungsfreie Bereich auch relativ gut rekonstruiert. Am Rand des Potentials schwingt die Rekonstruktion aus.

aus den ersten Sinus- und Cosinusfunktionen benutzt. Die Randdaten für Strom und Spannung sind auf 64 Elektroden gegeben. Mit dem linearisierten Algorithmus wird im Anschluss die Rekonstruktion durchgeführt. In den Abbildungen (5.6)(5.7)(5.8) werden die Rekonstruktionen für verschiedene Kombinationen der Störleitfähigkeiten gezeigt und die Rekonstruktionen miteinander verglichen.

Abbildung (5.4) zeigt die Rekonstruktion bei sehr schwacher Regularisierung für perfekte Daten. Die hohen Frequenzen werden voll berücksichtigt und liefern in der Rekonstruktion sehr große Anteile. Eine stärkere Regularisierung in Abbildung (5.5) zeigt den Ort der Störung relativ gut. Allerdings kann schon bei einer solchen einfachen Leitfähigkeitsverteilung nicht auf deren Stärke geschlossen werden. Auch die Größe des Objektes ist nicht genau rekonstruierbar. Für verschiedene Regularisierungsparameter im Bereich von $\lambda = 5 \times 10^{-5}$ bis $\lambda = 7 \times 10^{-5}$ zeigt sich in Abbildung (5.6) eine relativ stabile Rekonstruktion. Ein größerer Regularisierungsparameter läßt die Rekonstruktion flacher werden. Um eine schmale Störung zu rekonstruieren, sind die Funktionen mit hoher Frequenz nach Gleichung (5.17) nötig.

Wegen der Schlechtgestellttheit ist eine Regularisierung, die die hohen Frequenzen unterdrückt, unbedingt erforderlich. Die genaue Stärke einer Störung kann daher nicht bestimmt werden.

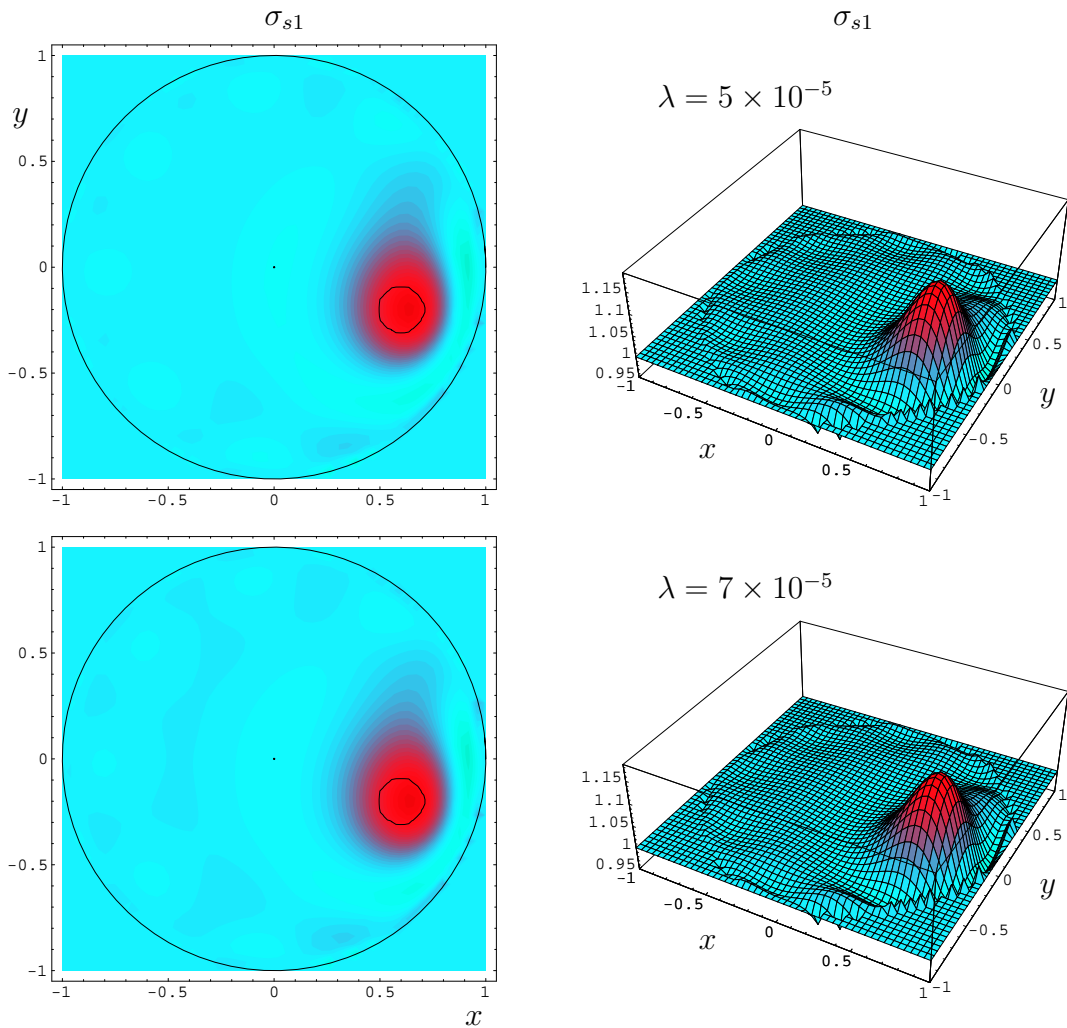


Abbildung 5.6: Bei einer stärkeren Regularisierung wird die Rekonstruktion stabiler. Zwischen den beiden Rekonstruktion zeigt sich relativ wenig Unterschied. Die Rekonstruktion wird mit stärkerer Regularisierung immer flacher

Abbildung (5.7) zeigt die Rekonstruktion für die beiden schmalen Störungen, die die Leitfähigkeitsverteilung σ_{s2} bilden. Die Rekonstruktion ist für die Parameter um $\lambda = 5 \times 10^{-5}$ stabil. Die Störungen sind wie in Abbildung (5.6) breiter und flacher als die simulierte Verteilung. Auch hier kann nicht auf die Stärke der Störungen geschlossen werden, allerdings ist das Verhältnis der Stärken der beiden Störungen richtig wiedergegeben.

Abbildung (5.8) zeigt eine etwas kompliziertere Verteilung mit einer breiten Störung und zwei relativ schmalen Störungen. Die Stärke der breiten Störung $\delta\sigma_3$ wird in der Rekonstruktion stärker als die schlankere Störung $\delta\sigma_2$ rekonstruiert, obwohl die Norm der beiden Störungen in etwa gleich ist. Der Grund ist, daß sich eine

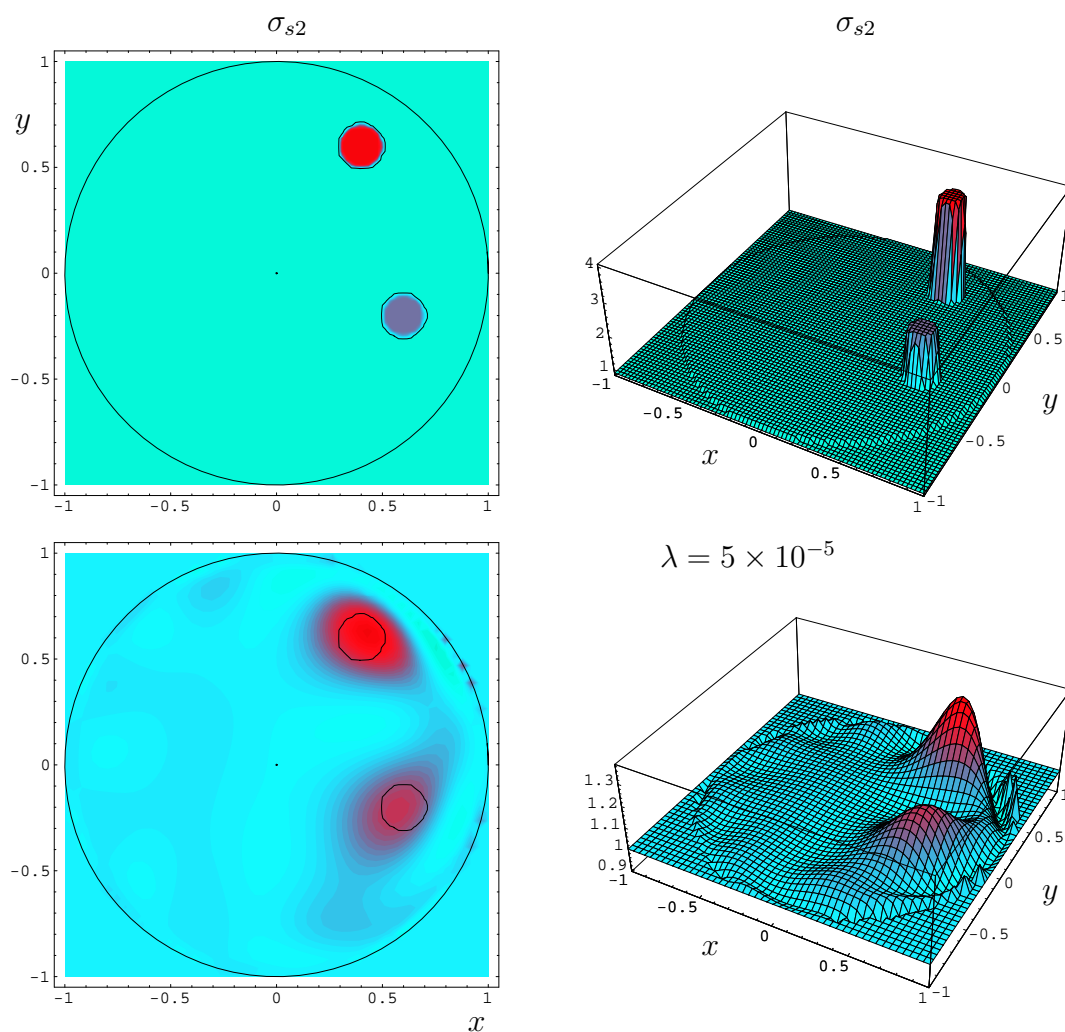


Abbildung 5.7: Oben: Leitfähigkeitsverteilung σ_{s2} mit zwei Störungen mit scharfem Rand und unterschiedlicher Stärke. Unten: Das Verhältnis der Stärken der beiden Störungen wird richtig wiedergegeben.

breite Störung gut mit den Funktionen aus Gleichung (5.17) niedriger Frequenz zusammensetzen läßt. Auch hier ist die Stärke der simulierten Störungen in der Rekonstruktion nicht zu bestimmen.

5.6 Vergleich der Randdaten

Vergleicht man die Input-Randpotentiale mit den Ergebnissen aus der Rekonstruktion, die man mit $\sigma = \exp(\tilde{\sigma})$ bzw. $\sigma = 1 + \delta\sigma$ erhalten hat, so zeigt sich eine etwas bessere Übereinstimmung für die Rekonstruktion über $\tilde{\sigma}$. In Abbildung (5.9) sind die Randdaten der Rekonstruktion σ_{s3} für verschiedene Randbedingungen gezeigt.

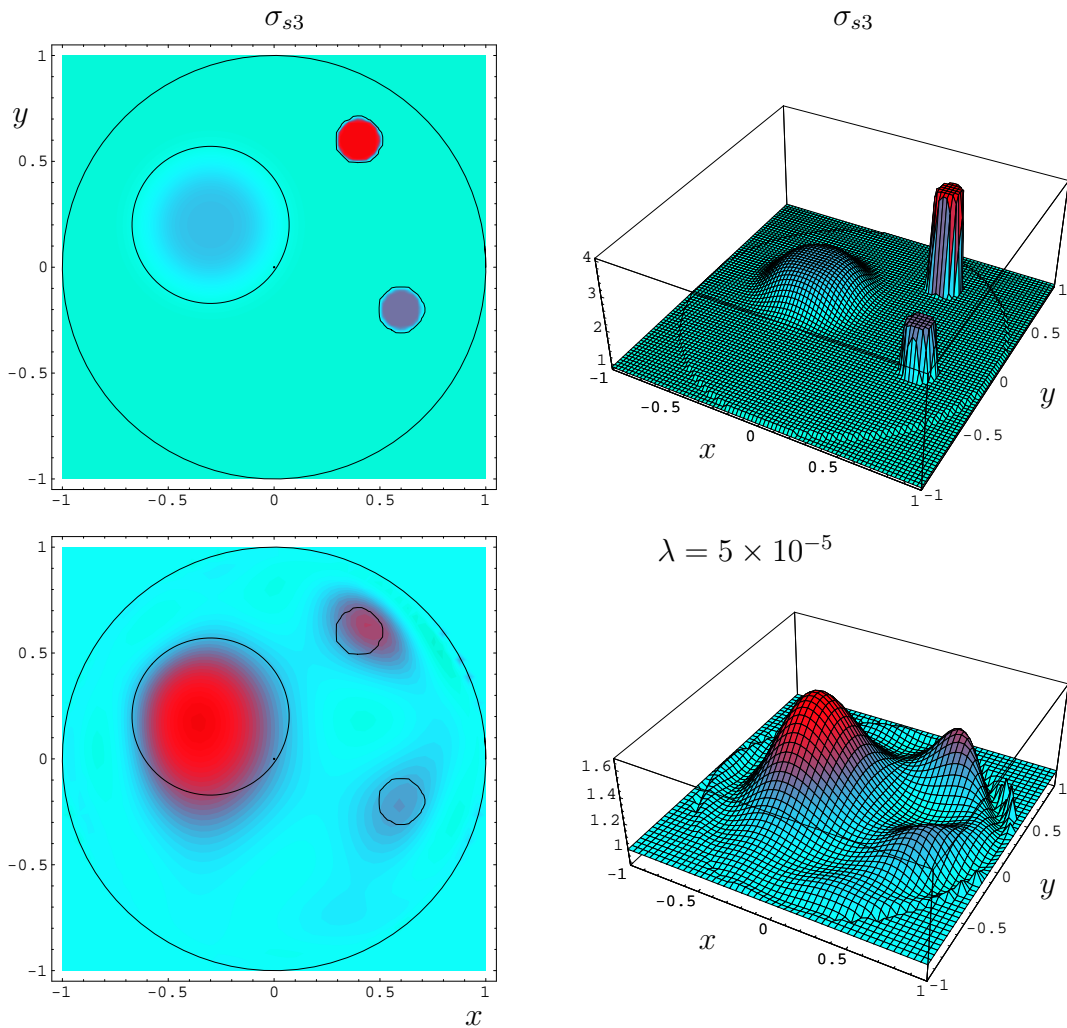


Abbildung 5.8: Die Rekonstruktion für die Leitfähigkeitsverteilung σ_{s3} . Die Stärke der breiten Störung $\delta\sigma_3$ wird in der Rekonstruktion stärker als die schlankere Störung $\delta\sigma_2$ rekonstruiert, obwohl die Norm der beiden Störungen in etwa gleich ist.

Eine viel stärkere Abweichung erhält man, wenn Leitfähigkeitserniedrigungen vorhanden sind. Im Beispiel der Medizin besitzen die Knochen oder das Fett eine sehr geringe Leitfähigkeit. Abbildung (5.10) zeigt die Rekonstruktion für eine Leitfähigkeitsverteilung σ_{s4} beispielsweise mit

$$\begin{aligned} \sigma_{s4}(\vec{x}) = & 1 + 3 \exp\left(-[70((x - 0.4)^2 + (y + 0.5)^2)]^4\right) \\ & - 0.9 \exp\left(-[30((x + 0.3)^2 + (y + 0.5)^2)]^4\right) \end{aligned} \quad (5.36)$$

parametrisiert. Die simulierten Randdaten der Rekonstruktion sind in Abbildung (5.11) zu sehen. Man sieht, daß die Rekonstruktion über $\tilde{\sigma}$ die Randdaten der Leit-

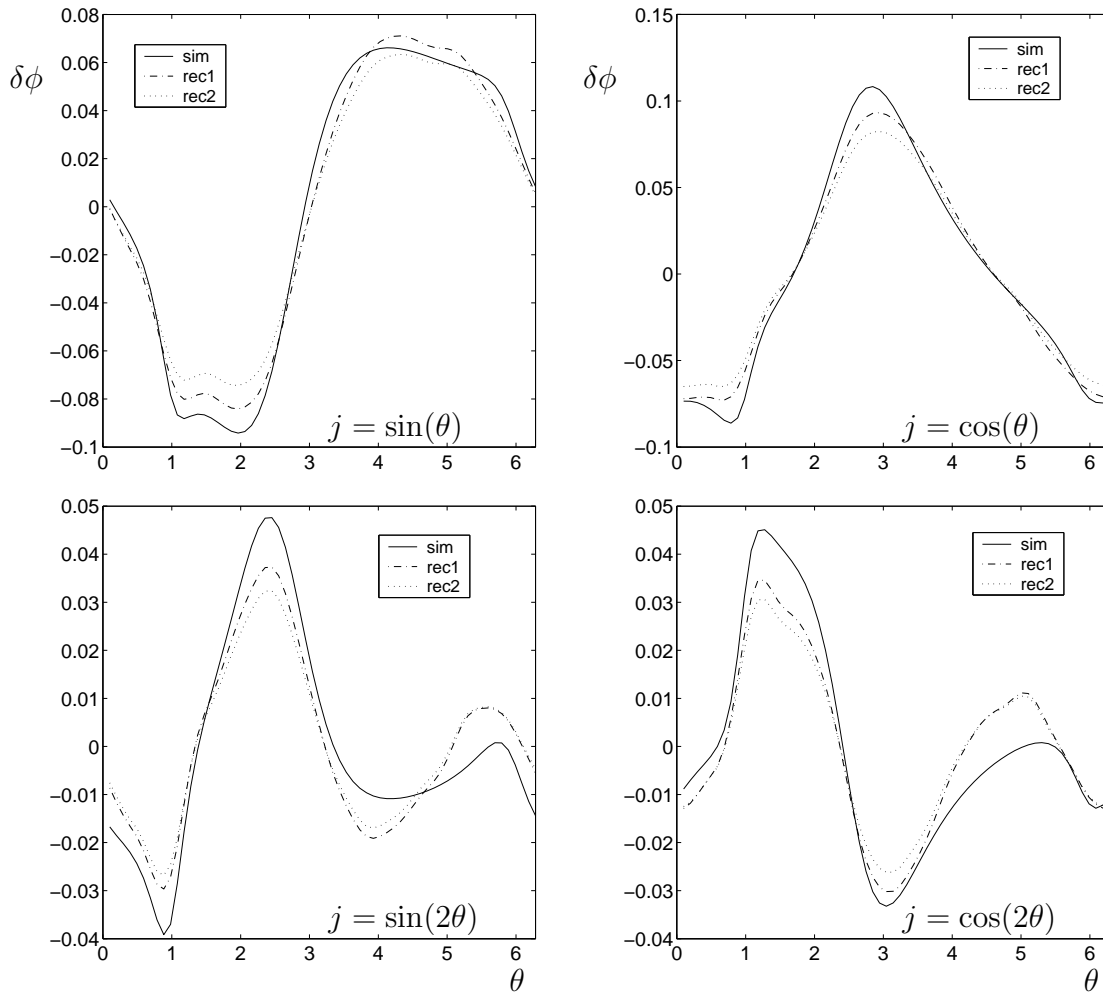


Abbildung 5.9: Die Randdaten für die simulierte Leitfähigkeitsverteilung σ_{s3} (*sim*) und die Rekonstruktion mit $\tilde{\sigma}$ (*rec1*) und $\delta\sigma$ (*rec2*). Die Randdaten der Rekonstruktion mit $\tilde{\sigma}$ beschreiben die Randdaten besser. Ein größerer Unterschied ergibt sich bei Vorhandensein von Leitfähigkeitserniedrigungen.

fähigkeitsverteilung σ_{s4} besser beschreibt.

Die bisher betrachteten Rekonstruktionen zeigen am Rand in der Nähe der Störung ein Ausschwingen. Dieses Ausschwingen taucht wegen der unvollständigen Entwicklungsfunktionen (5.17) auf. Durch die nötige Regularisierung, die eine kleinere Norm der Leitfähigkeit liefert, werden Punkte in der Nähe des Randes bevorzugt. Die schmalen Störungen werden breiter und flacher rekonstruiert. Eine Diskretisierung des Gebietes wird im nächsten Kapitel durchgeführt, um die Problematik der unvollständigen Entwicklungsfunktionen zu beheben. Zudem erlaubt eine Diskretisierung die Möglichkeit, Zusatzinformationen für jeden Punkt (jedes Gebiet) in die Rekon-

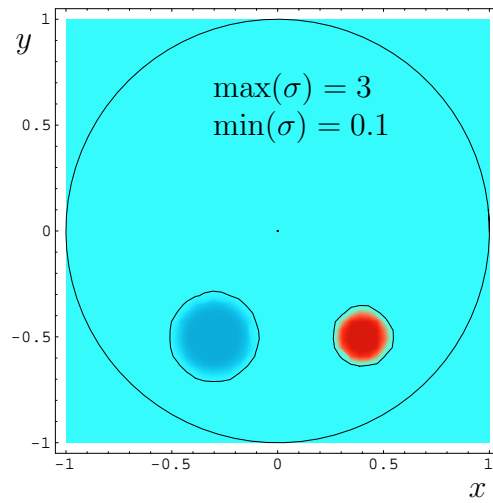
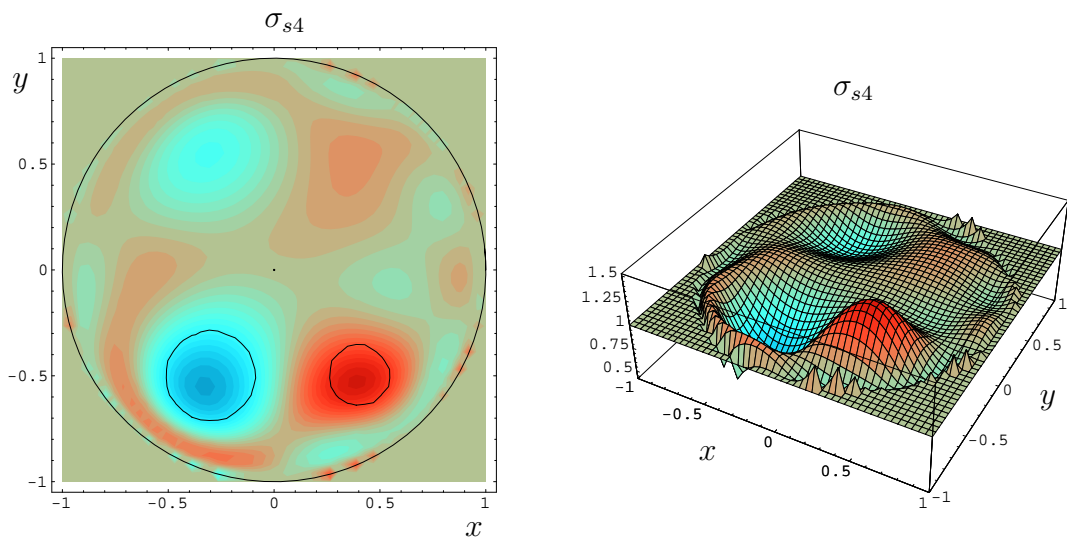
Abbildung 5.10: Leitfähigkeitsverteilung σ_{s4} 

Abbildung 5.11: Die Rekonstruktion für eine Leitfähigkeitserniedrigung und Leitfähigkeitserhöhung. Am Rand ist ein starkes Ausschlagen zu beobachten. In Abbildung (5.9) kann man die Randpotentiale der Rekonstruktion sehen.

struktion einzubringen.

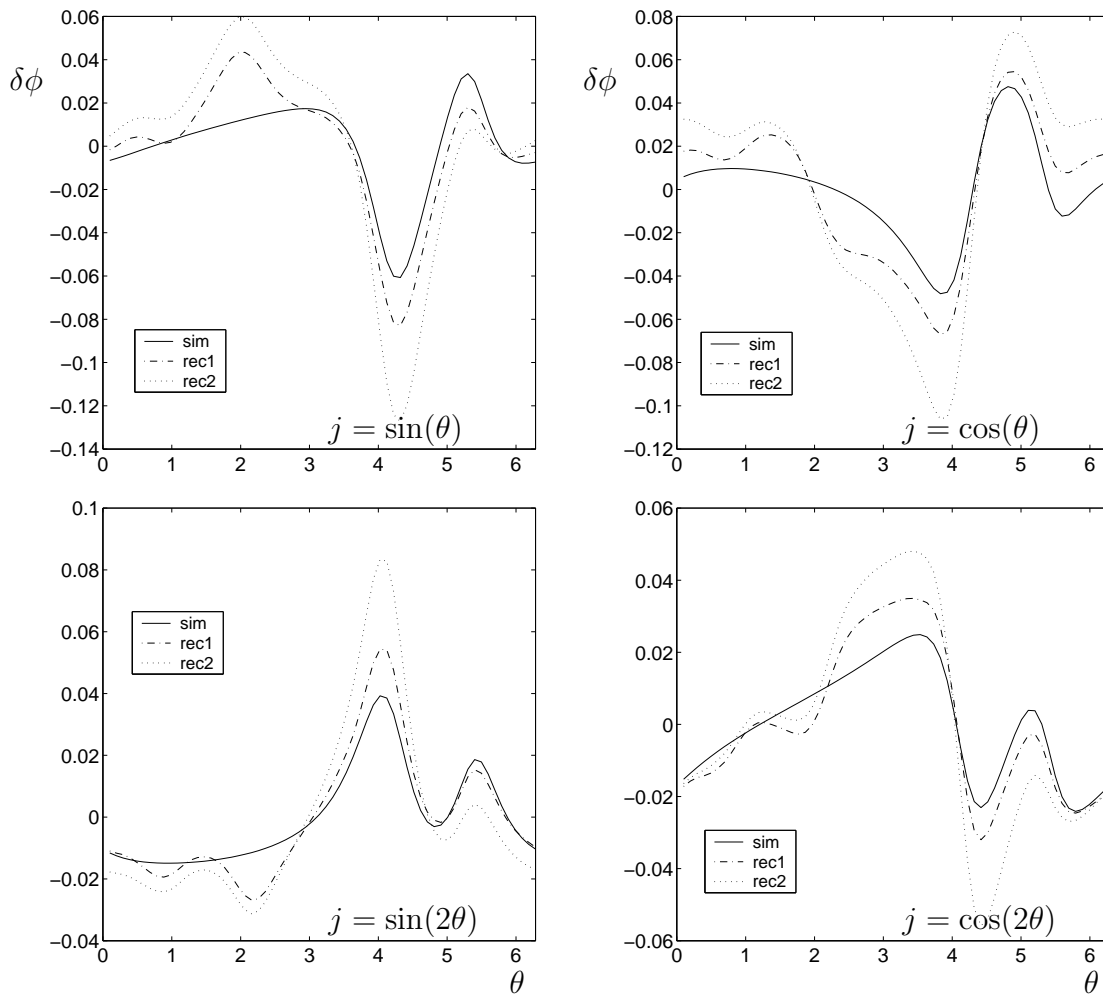


Abbildung 5.12: Die Randdaten für die simulierte Leitfähigkeitsverteilung σ_{s4} (*sim*) und die Rekonstruktion über $\tilde{\sigma}$ (*rec1*) und $\delta\sigma$ (*rec2*). Die Rekonstruktion über $\tilde{\sigma}$ liefert bessere Randdaten. Die starke Diskrepanz im Bereich von $\theta \in (0, \pi)$ kommt durch die schlechte Rekonstruktion des störungsfreien Raums ($y > 0$) in Abbildung (5.11).

5.7 Daten mit Fehlern

Sind die Daten mit einem größeren Fehler behaftet, wird die Rekonstruktion sehr instabil. Man erhält eine schlechte Rekonstruktion der Leitfähigkeitsverteilung. Abbildung (5.13) zeigt eine Rekonstruktion für Differenzdaten (Differenzpotentiale) mit einem Fehler von 10%. Eine stärkere Regularisierung ist notwendig, um die Störungen zu rekonstruieren. Die dritte Störung wird nur noch sehr schwach rekonstruiert.

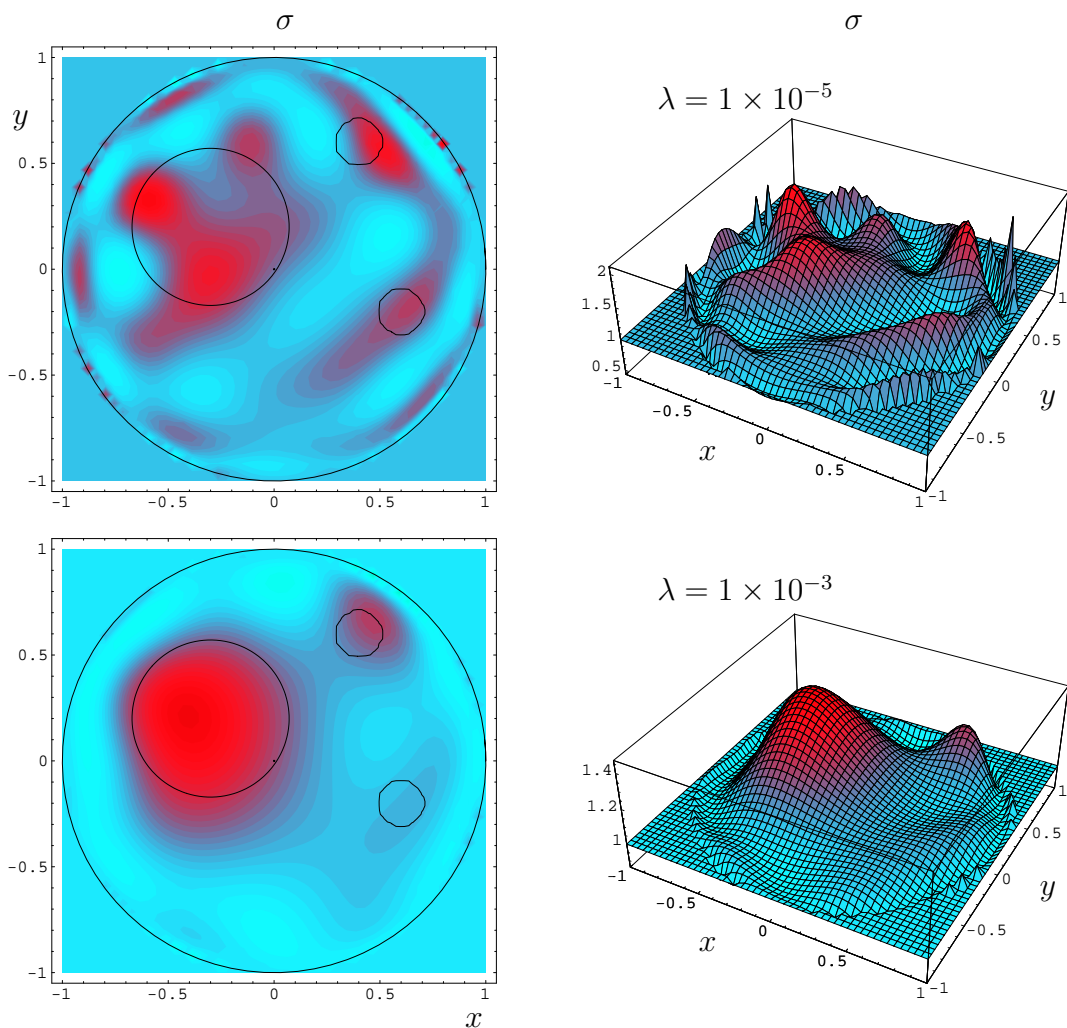


Abbildung 5.13: Die Rekonstruktion für verschiedene Regularisierungsparameter λ . Eine stärkere Regularisierung bei fehlerbehafteten Daten ist notwendig. Die dritte Störung wird dabei nicht mehr rekonstruiert.

5.8 Diskrete Linearisierung

Wird eine Diskretisierung des Gebietes durchgeführt, so erlaubt dies im Vergleich zur approximativen Inversen eine bessere Rekonstruktion, weil das Problem der Unvollständigkeit der Entwicklungsfunktionen (5.17) nicht existiert. Hat man eine Diskretisierung durchgeführt und sich auf den Regularisierungsparameter festgelegt, so kann auch hier eine schnelle Lösung gefunden werden, da die Daten nicht in die zu invertierende Matrix eingehen. Eine Invertierung der Matrix wird damit nur einmal durchgeführt. Die Diskretisierung erlaubt zudem die Möglichkeit, Zusatzinformationen für jeden Punkt (jedes Gebiet) in die Rekonstruktion einzubringen. Hat man Fehler in den Daten, so muß eine stärkere Regularisierung gewählt werden, um eine

aussagekräftige Rekonstruktion zu erhalten. Dadurch wird die Norm der rekonstruierten Leitfähigkeit klein gehalten. Bereiche in der Nähe des Randes werden dann bevorzugt, da Leitfähigkeiten in Randnähe höhere Effekte auf das Randpotential haben. Benutzt man Zusatzinformationen, so kann man trotz der notwendigen Regularisierung die Lösung verbessern. Damit kann auch die Stärke der unterschiedlichen Störungen besser wiedergegeben werden. Beim Einbringen von Zusatzinformation muß die Matrix allerdings jedes Mal neu invertiert werden, da die Zusatzinformation in die Matrix eingeht.

Für verschiedene Messkonfigurationen (Randbedingungen f_j) und verschiedene "Strommessfunktionen" u_i hat man nach Gleichung (5.11) einen Satz von Integralgleichungen für $\tilde{\sigma}(\vec{x})$

$$\langle \delta\Phi_j, u_i \rangle_{\partial\Omega} = - \int_{\Omega} \nabla\Phi_N^i(\vec{x}) \nabla\Phi_N^j(\vec{x}) \tilde{\sigma}(\vec{x}) d(\Omega).$$

Eine Disretisierung der Gleichung und Triangulierung von Ω ergibt

$$\langle \delta\Phi_j, u_i \rangle_{\partial\Omega} = - \sum_k^p \nabla\Phi_N^i(\vec{x}_k) \nabla\Phi_N^j(\vec{x}_k) \tilde{\sigma}(\vec{x}_k) \delta v(\vec{x}_k). \quad (5.37)$$

Mit den Abkürzungen

$$\delta\Phi_{ji} = \langle \delta\Phi_j, u_i \rangle_{\partial\Omega} \quad (5.38)$$

$$K_{ijk} = - \nabla\Phi_N^i(\vec{x}_k) \nabla\Phi_N^j(\vec{x}_k) \delta v(\vec{x}_k) \quad (5.39)$$

$$\tilde{\sigma}_k = \tilde{\sigma}(\vec{x}_k) \quad (5.40)$$

und der Anzahl p an Diskretisierungspunkten, schreibt sich die Matrix-Gleichung zu:

$$\delta\Phi_{ji} = \sum_k^p K_{ijk} \tilde{\sigma}_k. \quad (5.41)$$

Mit $i = 1 \dots n_c$, n_c der Anzahl an Fourierkoeffizienten,
 $j = 1 \dots n_m$, n_m der Anzahl an Randbedingungen,
 $k = 1 \dots n_p$, n_p der Anzahl an Diskretisierungspunkten.

Die Matrix K_{ijk} ist rechteckig. Die "Invertierung" dieser Matrix erfolgt mit der verallgemeinerten Inversen und Singulärwertzerlegung. Mit dem Regularisierungsparameter λ werden zu kleinen Singulärwerte $\mu_i < \lambda$ abgeschnitten und gehen nicht in die Rekonstruktion ein. Fehler werden durch die kleinen Singulärwerte in der Invertierung zu stark berücksichtigt. Sind große Fehler in den Daten vorhanden, so werden nur die niedrigen Fourierkoeffizienten $\delta\Phi_{ij}$ für eine Rekonstruktion betrachtet. Die Rekonstruktion an diskreten Punkten (Abbildung 5.14) zeigt ähnlich zur

Rekonstruktion mit der approximativen Inversen den Ort der Störungen relativ gut. Bei der diskreten Linearisierung wird jedoch die Stärke der einzelnen Störungen besser wiedergegeben. Die bessere Übereinstimmung zu der Rekonstruktion mit der approximativen Inversen erhält man auch, wenn man die Randdaten der Rekonstruktionen (5.17) mit dem Input vergleicht.

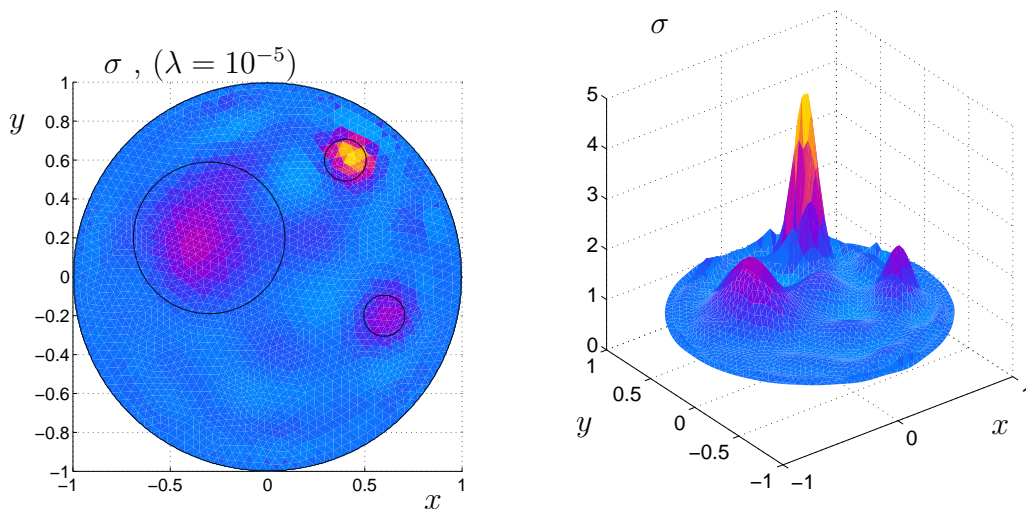


Abbildung 5.14: Rekonstruktion von σ_{s3} für perfekte Differenzpotentiale mit der diskreten Linearisierung. Für die Rekonstruktion wurden die Randdaten der Randbedingungen $j = \sin(n\theta); \cos(n\theta)$ (mit $n = 1 \dots 10$) verwendet. Die ersten 20 Fourierkoeffizienten der Randdaten wurden benutzt. Die Rekonstruktion zeigt ähnlich zur Rekonstruktion mit der approximativen Inversen den Ort der Störungen relativ gut. Hier wird die Stärke der einzelnen Störungen besser wiedergegeben.

Regularisiert man etwas stärker, so wird die Rekonstruktion flacher. Die Verhältnisse der Stärken werden nicht richtig reproduziert. Abbildung (5.15) zeigt die Rekonstruktion für perfekte Differenzdaten mit einer etwas stärkeren Regularisierung.

Hat man zusätzlich Fehler in den Randpotentialen, so muß stärker regularisiert werden. In Abbildung (5.17) haben die Differenzpotentiale einen Fehler von $\epsilon = 5\%$. Wegen der stärkeren Regularisierung wird, wie erwartet, die Rekonstruktion flacher und das Verhältnis der Stärken der einzelnen Störungen wird schlecht wiedergegeben.

Hat man durch andere physikalische Messverfahren oder durch andere Rekonstruktionsalgorithmen Zusatzinformationen über die Ausdehnung und den Ort einer Störung, so kann man diese in der Rekonstruktion berücksichtigen.

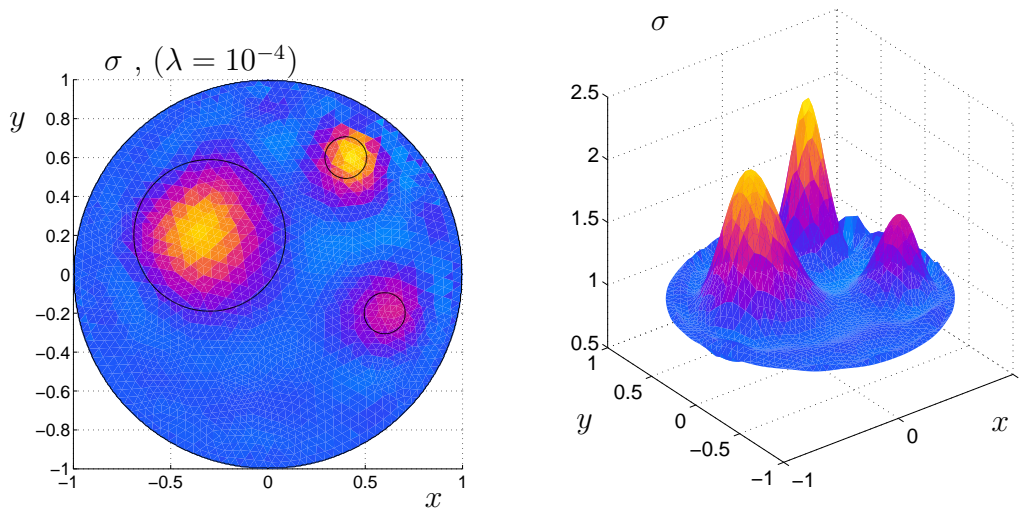


Abbildung 5.15: Rekonstruktion von σ_{s3} für perfekte Differenzpotentiale mit der diskreten Linearisierung. Für die Rekonstruktion wurden die Randdaten der Randbedingungen $j = \sin(n\theta); \cos(n\theta)$ (mit $n = 1 \dots 10$) benutzt. Der störungsfreie Bereich ist flacher, allerdings wird auch das Verhältnis der Störungen zueinander schlechter.

5.8.1 Rekonstruktion mit Zusatzinformationen

Durch das Einfügen von Zusatzinformation kann die Stärke der Störungen besser rekonstruiert werden. Eine solche Zusatzinformation kann der Ort und die Größe der Störung sein. Solche Informationen können zum Beispiel aus einem Algorithmus gewonnen werden, der in Kapitel (6) erläutert wird. Für eine schlecht konditionierte Matrix $A_{n \times m}$ mit

$$A \vec{g} = \vec{f} \quad (5.42)$$

wird eine Lösung für \vec{g} bei Vorhandensein von Zusatzinformationen gesucht. Die Spalten der Matrix A werden mit dem Wichtungsvektor (Zusatzinformation) \vec{q} komponentenweise zur neuen Matrix A' multipliziert

$$A'_{ij} = A_{ij}q_j, \quad \text{mit } q_j > 0. \quad (5.43)$$

Der Lösungsvektor \vec{g} wird durch den Wichtungsvektor \vec{q} komponentenweise dividiert

$$g'_j = \frac{1}{q_j}g_j, \quad \text{mit } q_j > 0. \quad (5.44)$$

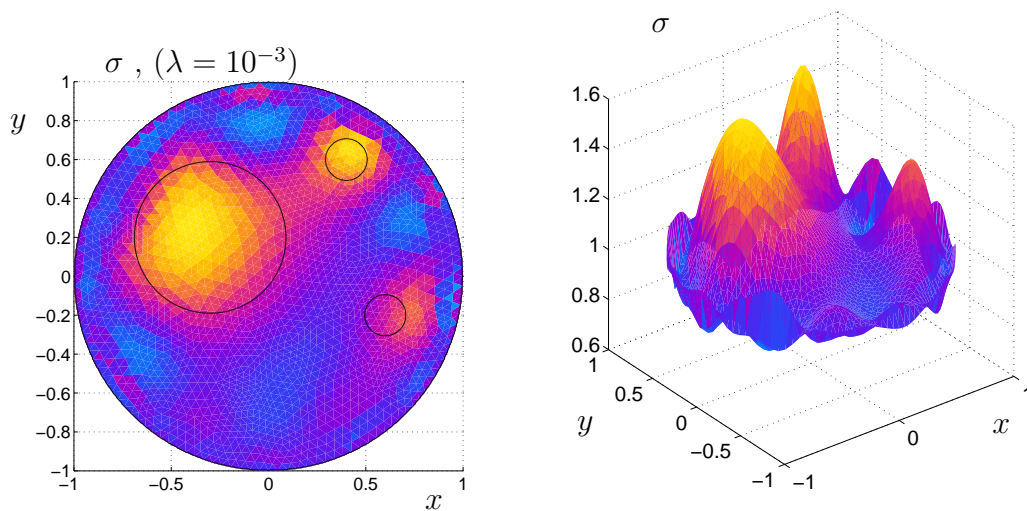


Abbildung 5.16: Rekonstruktion von σ_{s3} bei einem Fehler von $\epsilon = 5\%$ in den Differenzpotentialen. Durch Fehler in den Randdaten muß stärker regularisiert werden. Dadurch wird die Rekonstruktion flacher. Die Stärke der einzelnen Störungen wird nicht genau wiedergegeben. Der Ort der kleinsten Störung wird ungenauer. Gebiete in der Nähe des Randes werden stärker rekonstruiert.

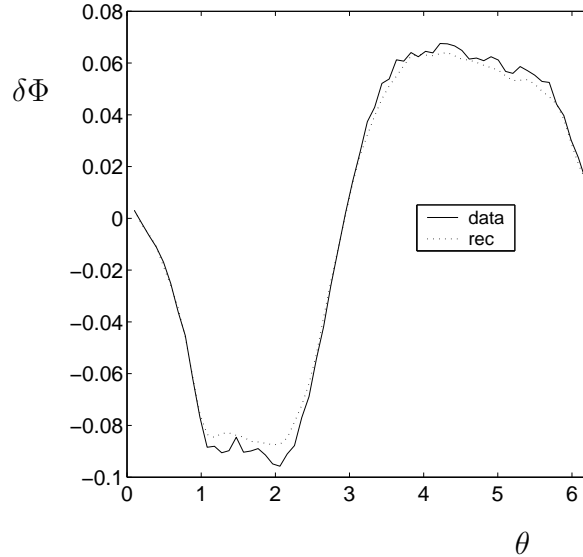


Abbildung 5.17: Randdaten $\delta\Phi$ der simulierten Daten (data) bei einem Fehler von $\epsilon = 5\%$ in den Differenzpotentialen und die Randdaten (rec) der rekonstruierten Leitfähigkeitsverteilung in Abbildung (5.16) für $j = \sin(\theta)$.

Für die neue Matrix A' gilt es nun das neue Least-Squares Problem zu lösen:

$$A' \vec{g}' = \vec{f} \quad (5.45)$$

$$f_i = \sum_j A_{ij} g_j = \sum_j (A_{ij} q_j) \left(\frac{1}{q_j} g_j \right) = \sum_j A'_{ij} g'_j. \quad (5.46)$$

Die Lösung für die Einträge in \vec{g} ergibt sich dann zu

$$g_j = q_j g'_j. \quad (5.47)$$

Mit der Pseudoinversen wird die verallgemeinerte Inverse der Matrix A' bestimmt, wobei kleine Singulärwerte abgeschnitten werden. Die Pseudoinverse liefert für das Least-Squares Problem die Lösung mit kleinster Norm.

$$\| A' \vec{g}' - \vec{f} \|^2 \quad \text{minimal und} \quad \sum_i \left(\frac{g_i}{q_i} \right)^2 \quad \text{minimal.} \quad (5.48)$$

Damit können über eine geeignete Wahl des Wichtungsvektors \vec{q} ausgeschlossene Gebiete in der Rekonstruktion unterdrückt werden. In diesen Gebieten wird die Lösung \vec{g} beziehungsweise g_j klein sein. Für eine Zusatzinformation $q(\vec{x})$, die die Lage und ungefähre Ausdehnung der Störungen der Leitfähigkeitsverteilung beispielsweise nach Gleichung σ_{s3} beschreibt, mit

$$\begin{aligned} q(\vec{x}) = 1 &+ N \exp \left(- [70 ((x - 0.6)^2 + (y + 0.2)^2)]^2 \right) \\ &+ N \exp \left(- [70 ((x - 0.4)^2 + (y - 0.6)^2)]^2 \right) \\ &+ N \exp \left(- [9 ((x + 0.3)^2 + (y - 0.2)^2)]^2 \right), \end{aligned} \quad (5.49)$$

$$\text{und} \quad \vec{q} = \{q_i\} = \{q(\vec{x}_i)\},$$

ergibt sich für eine kleine Wichtung ($N = 2$) die Rekonstruktion in Abbildung (5.18). Über den Parameter N wird eingestellt, wie stark die Zusatzinformation in die Rekonstruktion eingehen soll. Je größer N , desto stärker geht die Zusatzinformation ein. In den folgenden Abbildungen werden die Rekonstruktionen für Differenzdaten $\delta\Phi$ gezeigt. Die Differenzpotentiale haben einen Fehler von $\epsilon = 5\%$.

In Abbildung (5.18) wird das Verhältnis der Störungen bei der Verwendung von Zusatzinformation q besser wiedergegeben.

Hat man für die Wichtung eine falsche Vermutung, zum Beispiel dadurch, daß man ein Gebiet stärker wichtet, weil man dort eine Störung vermutet, die aber nicht vorhanden ist, so zeigt das Beispiel mit der folgenden Wichtung,

$$q^{(2)}(\vec{x}) = q + N \exp \left(- [80 ((x + 0.1)^2 + (y - 0.7)^2)]^2 \right), \quad (5.50)$$

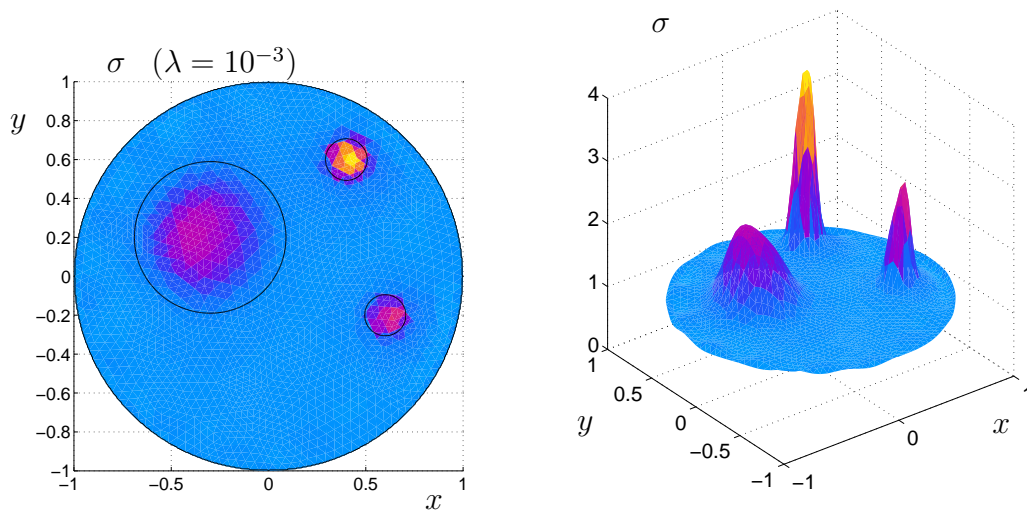


Abbildung 5.18: Rekonstruktion mit Wichtung (q , $N = 2$) für Differenzdaten mit einem Fehler von $\epsilon = 5\%$. Das Verhältnis der Störungen untereinander wird mit dieser Zusatzinformation besser wiedergegeben als in Abbildung (5.16). Die Rekonstruktion ist vergleichbar mit Abbildung (5.14).

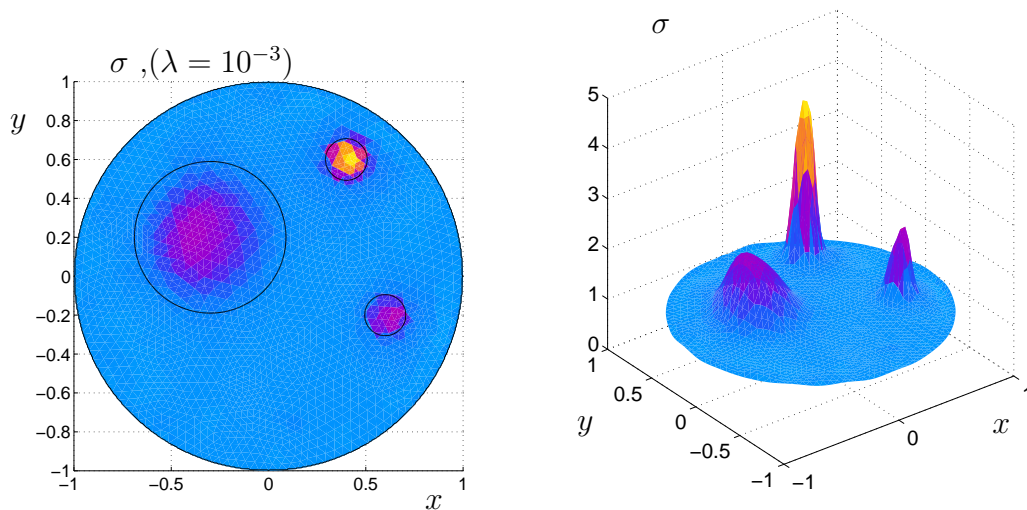


Abbildung 5.19: Rekonstruktion mit Wichtung ($q^{(2)}$, $N = 2$) für Differenzdaten mit einem Fehler von $\epsilon = 5\%$. Die Rekonstruktion ist trotz falscher Wichtung immer noch vergleichbar mit Abbildung (5.14).

in Abbildung (5.19) keine wesentliche Veränderung zu Abbildung (5.18). Die Rekonstruktion ist robust gegenüber einer Wichtung, die fälschlicherweise zusätzliche

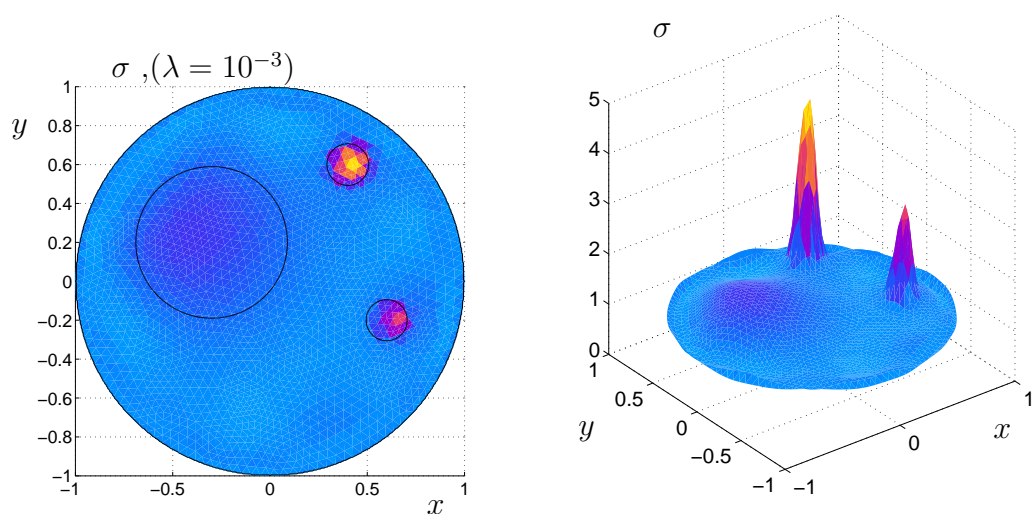


Abbildung 5.20: Rekonstruktion mit Wichtung $(q^{(3)}, N = 2)$ für Differenzdaten mit einem Fehler von $\epsilon = 5\%$. Die ausgedehnte Störung wird nur schwach rekonstruiert.

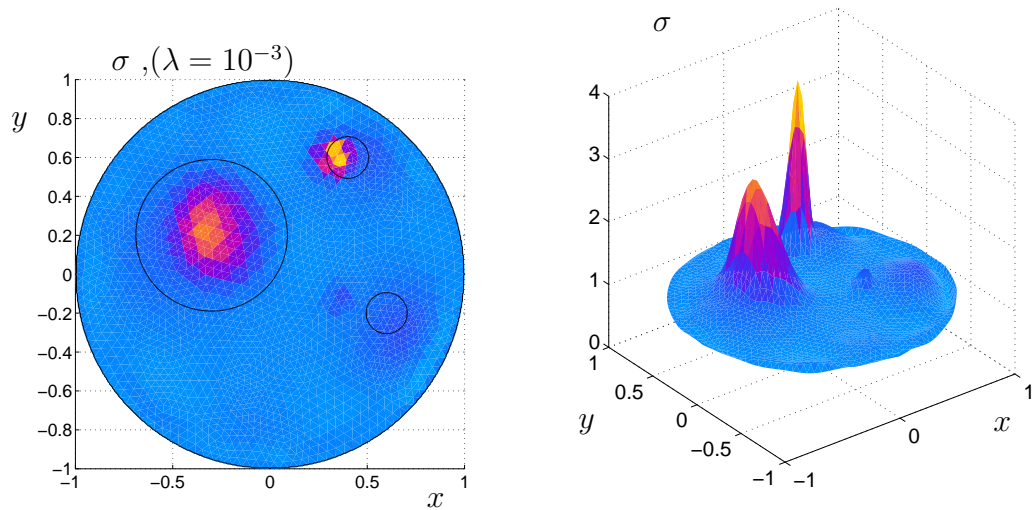


Abbildung 5.21: Rekonstruktion mit Wichtung $(q^{(4)}, N = 2)$ für Differenzdaten mit einem Fehler von $\epsilon = 5\%$.

Störungen in einem Bereich vermutet, die dort aber nicht vorhanden sind.
Für den anderen Fall, bei dem nicht alle Störungen berücksichtigt werden, beispiels-

weise mit der Wichtung $q^{(3)}$,

$$q^{(3)}(\vec{x}) = 1 + N \exp\left(-[70((x-0.6)^2 + (y+0.2)^2)]^2\right) + N \exp\left(-[70((x-0.4)^2 + (y-0.6)^2)]^2\right), \quad (5.51)$$

ergibt sich eine schlechtere Rekonstruktion (Abbildung 5.20). Die beiden Störungen, die durch die Wichtung berücksichtigt wurden, werden gut rekonstruiert. Die breite Störung wird sehr flach rekonstruiert. Damit sieht man, daß alle Störungen in der Wichtung berücksichtigt werden müssen. Für den Fall, daß man den Ort der Störungen nicht exakt kennt, ergibt sich für das Beispiel $q^{(4)}$,

$$q^{(4)}(\vec{x}) = 1 + N \exp\left(-[70((x-0.3)^2 + (y+0.1)^2)]^2\right) + N \exp\left(-[70((x-0.3)^2 + (y-0.6)^2)]^2\right) + N \exp\left(-[9((x+0.15)^2 + (y-0.25)^2)]^2\right), \quad (5.52)$$

eine ebenfalls schlechte Rekonstruktion in Abbildung (5.21).

Zusammenfassend kann man sagen: Kennt man die Ausdehnung der Störungen und deren Ort relativ gut, so kann man in der Rekonstruktion auch die Stärke der einzelnen Störungen rekonstruieren. Setzt man fälschlicherweise einige zusätzliche Wichtungen für nicht vorhandene Störungen ein, so reagiert der Rekonstruktionsalgorithmus robust auf diese Fehler. Mit der zusätzlichen Information werden die Randpotentiale der Rekonstruktion nicht wesentlich verändert. Durch die Schlechtgestellttheit des inversen Operators hat man eine gewisse Freiheit in der Lösungsfunktion, ohne daß dadurch das Vorwärtsproblem stark beeinflusst wird.

Im Allgemeinen hat man keine Differenzdaten für das Randpotential. Das gesuchte Signal $\delta\Phi$ ist im Vergleich zu Φ sehr klein. Die Leermessung (Φ_N) muß theoretisch bestimmt werden. Kennt man die Eigenwerte der Neumann-nach-Dirichlet Abbildung, so kann die Stärke der Hintergrundleitfähigkeit aus der Forderung [5], daß das Funktional $\mathcal{F}(\lambda)$ ein Minimum einnimmt, bestimmt werden.

$$\mathcal{F}(\lambda) = \|\Lambda_M - \lambda \Lambda_1\|^2 \longrightarrow \min \quad (5.53)$$

Wobei Λ_M der gemessene Neumann-nach-Dirichlet Operator ist. Mit $\Lambda_{\sigma_0} = \sigma_0^{-1} \Lambda_1$ erhält man für die Stärke der Hintergrundleitfähigkeit:

$$\sigma_0 = \frac{\|\Lambda_1\|^2}{\langle \Lambda_M, \Lambda_1 \rangle}. \quad (5.54)$$

Eine Bestimmung der exakten Hintergrundleitfähigkeit setzt die genaue Kenntnis des Neumann-nach-Dirichlet Operators voraus. Kennt man den exakten Wert der

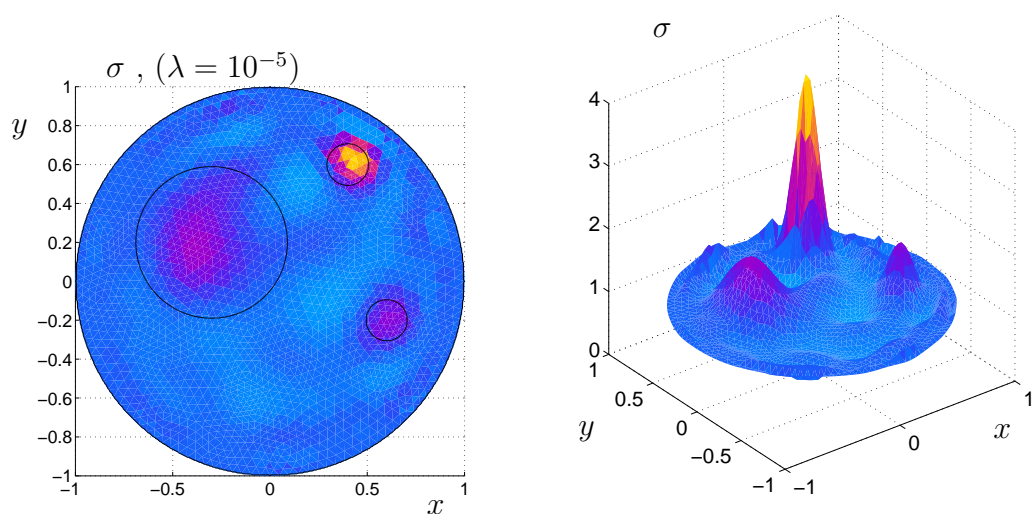


Abbildung 5.22: Rekonstruktion von σ_{s3} für gefilterte Daten mit einem Fehler von $\epsilon = 5\%$ in den Differenzdaten. Die Rekonstruktion ist ähnlich gut wie für Differenzdaten.

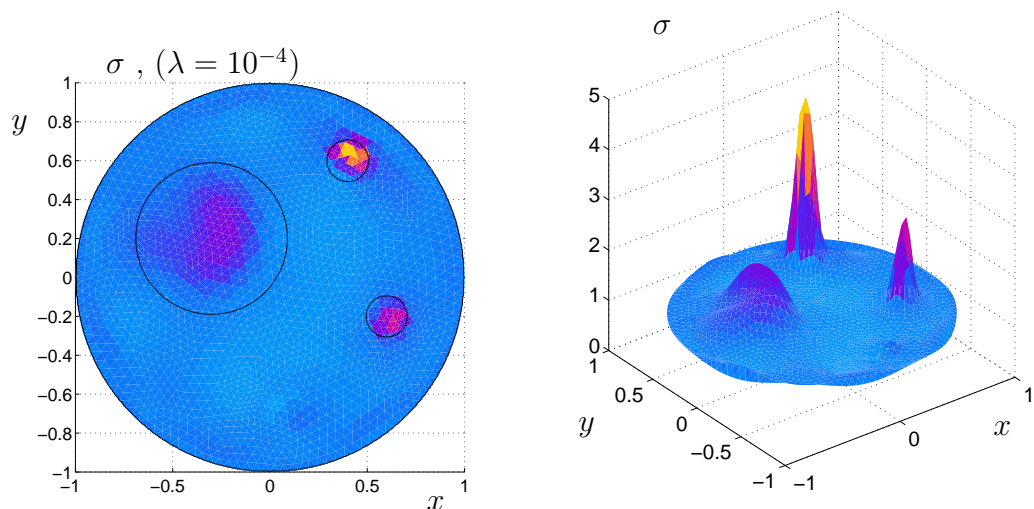


Abbildung 5.23: Rekonstruktion von σ_{s3} für gefilterte Daten mit einem Fehler von $\epsilon = 5\%$ in den Differenzdaten und der Wichtung $q^{(2)}$. Die Rekonstruktion ist etwas schlechter als die Rekonstruktion für Differenzdaten. Auch hier werden die Verhältnisse der Störungen relativ gut wiedergegeben.

Hintergrundleitfähigkeit nicht genau, so macht sich die Ungenauigkeit des zugehörigen Potentials am Rand deutlich bemerkbar, da $\delta\Phi$ die Differenz von zwei großen

Verteilungen darstellt. Regt man mit der Randbedingung ($f_i = \sin(i\theta); \cos(i\theta)$) an, so besteht die Möglichkeit, einfach den i -ten Fourierkoeffizienten der Randpotentiale abzuschneiden. Solche Daten werden hier als gefilterte Daten bezeichnet. Eine Rekonstruktion für gefilterte Daten (Abbildung 5.22) zeigt, wie robust die Rekonstruktion auf diese Daten reagiert.

Im nächsten Kapitel wird ein Algorithmus vorgestellt, mit dem man die benötigten Zusatzinformationen gewinnen kann.

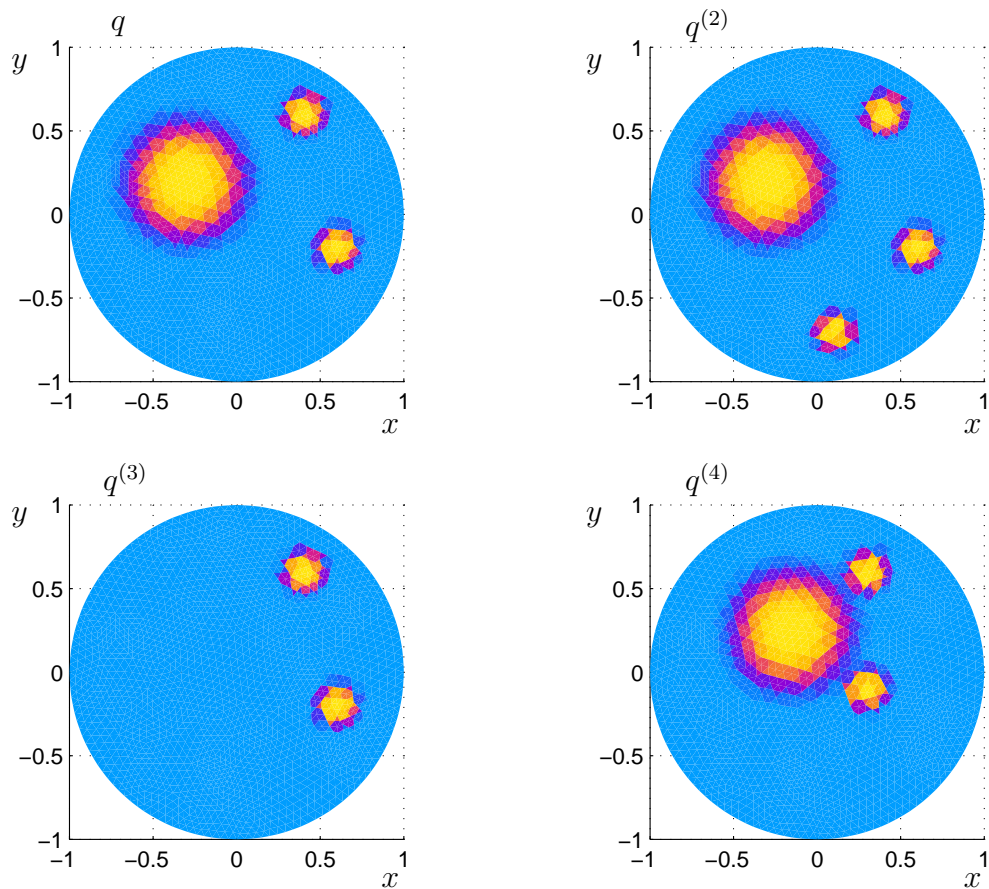


Abbildung 5.24: Die verschiedenen Wichtungen, die als Zusatzinformation in die Rekonstruktion eingehen. Der Ort und die Ausdehnung wird durch Gaußsche Glockenkurven beschrieben. q beschreibt den exakten Ort der Störungen. Bei $q^{(2)}$ wird fälschlicherweise eine weitere Störung vermutet. Bei $q^{(3)}$ kennt man nur den Ort der beiden schmalen Störungen. Bei $q^{(4)}$ sind die Ausdehnungen, aber nicht der exakte Ort bekannt.

6 Gebietserkennung

Hat man Leitfähigkeitsverteilungen, die im wesentlichen konstant sind und nur kleine Störungen besitzen, so kann man einen Gebietserkennungsalgorithmus anwenden, der diese Störungen erkennt. Man zerlegt das interessierende Gebiet Ω in viele kleine Gebiete. Für jedes dieser Teilgebiete vergleicht man die gemessenen Randpotentiale mit dem Effekt, den eine Störung in diesem Gebiet auf die Randdaten hätte. Mit diesem Vergleich kann ein Ausschlußkriterium definiert werden. In der Arbeit von Brühl [10] wird ein solches Rekonstruktionsverfahren vorgestellt, welches nicht direkt die Leitfähigkeit rekonstruiert, sondern nur eine Aussage darüber macht, ob ein Punkt zu einem Gebiet gehört, welches eine sich von der Umgebung unterscheidende Leitfähigkeit hat oder nicht. Es werden Leitfähigkeiten wie die in Abbildung (6.1) betrachtet,

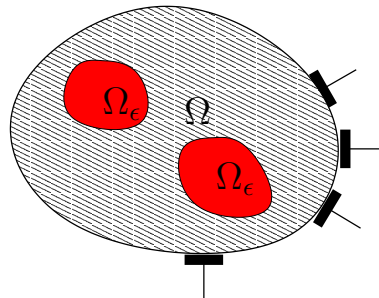


Abbildung 6.1: Einschlüsse von gleicher Leitfähigkeit in einer ansonsten konstanten Hintergrundleitfähigkeit.

$$\sigma(\vec{x}) = \begin{cases} 1 & , \quad \text{für } \vec{x} \in \Omega \setminus \Omega_\epsilon \\ \kappa & , \quad \text{für } \vec{x} \in \Omega_\epsilon, \kappa \neq 0 \end{cases} \quad (6.1)$$

wo Ω_ϵ das Gebiet des Einschlußes ist. Die zugrundeliegende Idee für eine Rekonstruktion der Leitfähigkeit ist, daß Lösungen des Potentials für Gebiete mit konstanter Leitfähigkeit harmonisch sind, und somit auch deren Randdaten diese ‘‘Glattheit’’ aufweisen. In der Nähe von Einschlüssen geht diese Harmonizität verloren und die Randdaten erhalten ebenfalls einen nicht-glatte Anteil.

Damit kann für jeden Punkt $\vec{x} \in \Omega$ ein Test durchgeführt werden, der die Glattheit der Randdaten einer Testfunktion $T(\vec{x})$ mit der Glattheit der gemessenen Randda-

ten $\delta\Phi|_{\partial\Omega}$ vergleicht, hieraus folgt dann, ob $\vec{x} \in \Omega_\epsilon$ oder $\vec{x} \in \Omega \setminus \Omega_\epsilon$. Mathematisch gesprochen heißt das: Es wird getestet, ob die Randdaten der Testfunktion zum Bildraum des Operators gehören.

6.1 $\Lambda_\sigma - \Lambda_1, |\Lambda_\sigma - \Lambda_1|^{1/2}$

Man betrachtet den Operator $\Lambda_\sigma - \Lambda_1$, der für eine Neumann-Randbedingung f die Potentialdifferenz am Rand liefert:

$$(\Lambda_\sigma - \Lambda_1) : f|_{\partial\Omega} \mapsto (\Phi_\sigma - \Phi_1)|_{\partial\Omega} = \delta\Phi|_{\partial\Omega}. \quad (6.2)$$

Des weiteren wird eine Testfunktion $T(\vec{x})$ betrachtet, die Lösung zum eindeutigen Cauchy-Randwertproblem ist:

$$\frac{\partial}{\partial n} T(\vec{x})|_{\partial\Omega} = 0, \quad (6.3)$$

$$T(\vec{x})|_{\partial\Omega} = t, \quad (6.4)$$

$$\Delta T(\vec{x}) = 0, \quad \text{für } \vec{x} \notin \Omega_\epsilon. \quad (6.5)$$

Die Testfunktion ist der Effekt, den eine vorhandene punktförmige Störung auf das Potential hätte.

- Bedingung (6.3) garantiert, daß kein Strom durch eine solche Testfunktion an den Rändern fließt und somit die fest vorgegebene äußere Randbedingung f stört.
- Die Randwerte von t können mit den Messdaten $\delta\Phi$ am Rand verglichen werden. Sind die Randwerte der Testfunktion mit den Randdaten der Messung vereinbar?
- Die Bedingung (6.5) liefert die Testbedingung für unterschiedliche Testpunkte \vec{x} . In der Umgebung einer homogenen Leitfähigkeit gilt $\Delta\Phi(\vec{x}) = 0$.

Es kann gezeigt werden, daß der kompakte Operator $(\Lambda_\sigma - \Lambda_1)$ selbstadjungiert ist [10] und folglich eine Spektralzerlegung besitzt.

$$\Lambda_\sigma - \Lambda_1 = \sum_i \mu_i \langle \cdot, v_i \rangle v_i. \quad (6.6)$$

Für den modifizierten Operator

$$|\Lambda_\sigma - \Lambda_1|^{1/2} = \sum_i |\mu_i|^{1/2} \langle \cdot, v_i \rangle v_i, \quad (6.7)$$

kann durch das Picard-Kriterium ein eindeutiges Ausschlußkriterium formuliert werden,

$$\vec{x} \in \Omega_\epsilon \Leftrightarrow \sum_i \frac{\langle t, v_i \rangle^2}{|\mu_i|} < \infty, \quad (6.8)$$

welches angibt, ob der Effekt $t = T(\vec{x})|_{\partial\Omega}$ für das betrachtete Gebiet im Bildraum des Operators liegt.

Wie sieht nun eine solche Testfunktion $T(\vec{x})$ aus? Dazu wird betrachtet, wie sich eine kleine Leitfähigkeitsveränderung auf das Potential auswirkt. Mit

$$\tilde{\sigma}(\vec{x}') = \tilde{\sigma}_0 \delta(\vec{a} - \vec{x}'),$$

wo $\tilde{\sigma}(\vec{x}) = \ln(\sigma(\vec{x}))$ war, so erhält man nach Gleichung (3.49) für die Potentialdifferenz

$$\delta\Phi(\vec{x}) = -\tilde{\sigma}_0 \nabla[G_N(\vec{x}, \vec{a}) \nabla\Phi(\vec{a})].$$

Die Gleichung kann geschrieben werden als

$$\delta\Phi(\vec{x}) = -\tilde{\sigma}_0 \epsilon \nabla G_N(\vec{x}, \vec{a}) \vec{d} - \tilde{\sigma}_0 \gamma G_N(\vec{x}, \vec{a}) \quad (6.9)$$

$$\text{mit} \quad \epsilon \vec{d} = \nabla\Phi(\vec{a}), |\vec{d}| = 1, \text{ und } \gamma = \Delta\Phi(\vec{a}).$$

Es kommen also zwei Testfunktionen in Frage,

$$T_1(\vec{a}, \vec{x}, \vec{d}) = \nabla G_N(\vec{x}, \vec{a}) \vec{d} \quad (6.10)$$

$$T_2(\vec{a}, \vec{x}) = G_N(\vec{x}, \vec{a}). \quad (6.11)$$

T_1 erfüllt die drei Bedingungen (6.3) bis (6.5) für eine Testfunktion. Bei T_2 bräuchte man den Test nicht für verschiedene Richtungen \vec{d} durchzuführen, allerdings erfüllt T_2 nicht die Bedingungen (6.3).

Eine Ausschlusskriterium anhand von T_2 schiebt die erkannten Gebiete nach außen zum Rand hin. In der Vereinfachung des Vorwärtsproblems gewinnt man einen Eindruck, welchen Effekt eine solche Leitfähigkeitsänderung bewirkt: Sie verursacht einen Dipolanteil $h_d^a = T_1(\vec{a}, \vec{x}|_{\partial\Omega}, \vec{d})$ im Randpotential. Für eine kompliziertere Leitfähigkeitsverteilung kann man sich die erwartete Potentialdifferenz, welche man durch Anlegen eines bestimmten Strommusters erhält, als eine Kombination vieler Dipole vorstellen, die ihre Ursprünge in den Gebieten haben, die eine unterschiedliche Leitfähigkeit zu ihrer Umgebung haben.

$$\delta\Phi_f(\vec{x}) \approx \sum_i \alpha_{i,f} \nabla G_N(\vec{x}, \vec{a}_i) \vec{d}_i \quad \text{für Randbedingung } f \quad (6.12)$$

Die Form der Dipole wird durch die Geometrie des Gebietes Ω festgelegt.

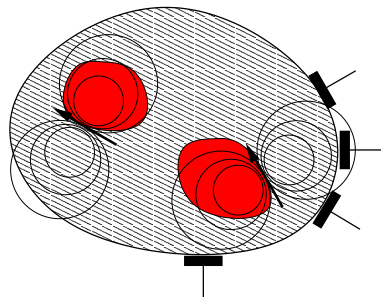


Abbildung 6.2: Der Rand der Einschlüsse liefert Dipolanteile in die Randpotentiale.

Bei der Rekonstruktion der Leitfähigkeit zerlegt man den interessierenden Raum in viele kleine Gebiete (Punkte) a_i . Es werden für jeden Punkt, der den Ursprung eines Testdipols darstellt, dessen Randdaten für verschiedene Ausrichtungen berechnet. Auf dem Rand, auf dem die Potentialmessung durchgeführt wird, vergleicht man dann die Randdaten des gerechneten Dipols mit den genommenen Messdaten.

6.2 Alternatives Verfahren

Bei einer realen Versuchsanordnung wird man durch den elektronischen Aufwand und die unterschiedliche Ausdehnung der Elektroden mehr Potentialmeselektroden als stromführende Elektroden haben. In Abbildung (7.2) ist beispielsweise eine solche Verteilung der Messelektroden gezeigt. Durch den vorhandenen Kontaktwiderstand der Haut ist es schwierig, auf der selben Elektrode gleichzeitig Strom und Spannung exakt zu messen. Daher sollte ein Algorithmus eine unterschiedliche Anzahl an Anregungen und Messungen gestatten. Der Algorithmus von Brühl nutzt die Selbstadjungiertheit des Operators aus. Das heißt, der Operator ist symmetrisch. Man braucht daher genausoviele Messungen wie Anregungen. Das bedeutet, daß Potentialmessungen nur auf stromführenden Elektroden durchgeführt werden können und weitere Informationen verworfen werden müßten. Bei einer Elektrodenanzahl N müssen N linear unabhängige Messungen durchgeführt werden. Die Messungen werden allerdings mit höherer Frequenz des Strommusters immer kleiner und können unterhalb der Genauigkeit der Messapparatur liegen und somit unbrauchbar werden. Im Gegensatz zum Kriterium von Brühl wird hier ein anderer Weg vorgeschlagen. Möchte man weiterhin ein Ausschlußkriterium benutzen, so muß der Algorithmus an die unterschiedliche Anzahl von Messwerten und Anregungen angepaßt werden. Hierzu betrachtet man eine andere Fragestellung: Gehört ein Teilstück zu einem Gebiet, in dem die Leitfähigkeit unterschiedlich zu den Nachbargebieten ist, so sollte dessen Dipol-Effekt in den Daten so stark vertreten sein, so daß sich der Testdipol

$h_d^{a_i}$ für wenigstens eine Richtung \vec{d} als Linearkombination der Potentialdifferenzen entwickeln läßt, mit

$$h_d^{a_i} \approx H_d^{a_i} = \sum_j \beta_j^{a_i, d} [(\Phi(\vec{x}) - \Phi_N(\vec{x}))|_{\partial\Omega}]_j. \quad (6.13)$$

Hier bezeichnet der Index j die Messung für die j -te Randbedingung f_j .

Sollte die Entwicklung (6.13) nicht möglich sein, so existieren keine nicht-harmonischen Anteile in den Potentialdifferenzen für diesen Testpunkt, und somit gehört dieses Teilstück nicht zu einem Gebiet mit sich ändernder Leitfähigkeit. Dies würde sich mathematisch dadurch bemerkbar machen, daß die Entwicklungskoeffizienten und der Entwicklungsfehler extrem hoch sind. Ein Ausschlußkriterium kann z.B durch folgende Bedingungen definiert werden:

$$\exists \vec{d} : \min \left(\frac{\|H_d^{a_i} - h_d^{a_i}\|}{\|h_d^{a_i}\|} \right) < konst_1, \quad (6.14)$$

$$\exists \vec{d} : \min \left(\sum_j \left(\beta_j^{a_i, d} \right)^2 \right) < konst_2. \quad (6.15)$$

Gleichung (6.14) verlangt, daß der relative Entwicklungsfehler kleiner als eine vorgegebene Konstante ist. Gleichung (6.15) verlangt, daß die Summe der Entwicklungskoeffizienten kleiner als eine vorgegebene Konstante ist. Möglich sind auch Schnitte auf kombinierte Größen.

Bei der Betrachtung des relativen Entwicklungsfehlers geht im Gegensatz zur Betrachtung der Entwicklungskoeffizienten die unbekannte Stärke der einzelnen Störungen nicht ein. Dadurch sollte eine bessere Erkennung für Störungen mit unterschiedlicher Stärke stattfinden. Im folgenden soll die Methode beschrieben werden, mit der diese Entwicklung durchgeführt wird. In der Praxis hat man nur eine endliche Anzahl an Messpunkten N_e , und demnach auch nur eine endliche Anzahl an Messungen N_f , die durchgeführt werden können. Schreibt man für einen Punkt a_i die Bestimmungsgleichung für die Entwicklungskoeffizienten auf, führt dies auf eine Matrix-Gleichung. Die Bestimmung der Entwicklungskoeffizienten wird hier als "Invertierung" einer nicht notwendigerweise symmetrischen Matrix durchgeführt.

$$D \vec{b}_{h_d^{a_i}} = \vec{v}_{h_d^{a_i}}, \quad (6.16)$$

hierbei beschreibt der Vektor $\vec{v}_{h_d^{a_i}}$ die Daten des Testdipols an den Messelektroden. Die Matrix D hat in ihren Spalten die Messungen für verschiedene Strommuster.

$$\begin{aligned} D_{kl} &= [(\Phi(\vec{x}) - \Phi_N(\vec{x}))|_{\partial\Omega}]_{kl} = [\delta\Phi(\vec{x}|_{\partial\Omega, k})]_l \\ k &= 1, \dots, N_e \quad \text{der Anzahl an Messelektroden} \\ l &= 1, \dots, N_f. \quad \text{der Anzahl an Randbedingungen} \end{aligned} \quad (6.17)$$

In $\vec{b}_{h_d^{a_i}}$ stehen die Entwicklungskoeffizienten $\beta^{a_i,d}$ für die Daten.

Eine verallgemeinerte Inverse kann man mit der Singulärwertzerlegung erhalten. Diese Zerlegung ist ein robustes Mittel, um eine Lösung für die Koeffizienten $\beta^{a_i,d}$ zu finden. Sie garantiert unter allen möglichen Lösungen daß die Lösung mit der kleinsten Norm gefunden wird. Zur Regularisierung lassen sich sehr kleine Singulärwerte λ_i herausschneiden. Dieses Herausschneiden bewirkt, daß die Entwicklungskoeffizienten nicht durch die Messfehler in den Daten künstlich groß werden. (Zeigt die Leitfähigkeitsverteilung wenig Struktur (z.B. nur eine kleine Störung), so liefern verschiedene linear unabhängige Ströme "numerisch" linear abhängige Spannungsdifferenzen. Damit erhält man auch hier sehr kleine Singulärwerte die wegregularisiert werden müssen.)

In den folgenden Abbildungen werden verschiedene Kriterien untersucht, die auf die gesuchte Leitfähigkeitsänderung hinweisen. Für die folgenden Bilder wurden 10 verschiedene Richtungen für den Dipol verwendet. Weitere Richtungen des Dipols können aus der Linearkombination der anderen Dipole bestimmt werden. Es zeigt sich, daß nur wenige Richtungen betrachtet werden müssen.

6.3 Die verschiedenen Kriterien

Mit dem relativen Entwicklungsfehler

$$Z = \frac{\|H_d^{a_i} - h_d^{a_i}\|}{\|h_d^{a_i}\|}, \quad (6.18)$$

und der Summe der Quadrate der Entwicklungskoeffizienten,

$$X = \sum_j (\beta_j^{a_i,d})^2, \quad (6.19)$$

werden Kriterien definiert. Für verschiedene Richtungen \vec{d} des Testdipols $h_d^{a_i}$ im Punkt a_i wird das Minimum für die folgenden Größen bestimmt:

- K_1 : Das Minimum des relativen Entwicklungsfehlers:

$$\boxed{K_1 = -\log(\min(Z))} \quad (6.20)$$

- K_2 : Das Minimum der Summe der Quadrate der Entwicklungskoeffizienten:

$$\boxed{K_2 = -\log(\min(X))} \quad (6.21)$$

- K_3 : Das Produkt aus Z und X .

$$\boxed{K_3 = -\log(\min(Z * X))}. \quad (6.22)$$

- K_4 : Das Minimum des Produktes aus dem Quadrat des relativen Entwicklungsfehlers und der Summe der Entwicklungskoeffizienten. Damit wird mehr Wert auf den Entwicklungsfehler gelegt:

$$\boxed{K_4 = -\log(\min(Z^2 * X))} \quad (6.23)$$

Zur besseren farbigen Darstellung der Größenordnung wird der negative Logarithmus der Verteilungen betrachtet. In den folgenden Abbildungen sind die Verteilungen der verschiedenen Kriterien dargestellt. Es wird eine Gebietserkennung für die Verteilung σ_{s3} nach Gleichung (5.35) durchgeführt. Hier werden jeweils 10 Cosinusfunktionen und 10 Sinusfunktionen als Randbedingungen benutzt. Die Potentialdifferenzen sind auf 64 Elektroden bekannt.

Der Regularisierungsparameter λ wirkt hier anders als bei der Regularisierung in Kapitel (5). Hier wird nicht der Kern der Integralgleichung regularisiert, sondern die Meßdaten-Matrix (6.17).

Für perfekte Differenzdaten und eine kleine Regularisierung zeigt sich in Abbildung (6.3) für alle Kriterien eine gute Gebietserkennung. Die Ausdehnung der Störungen wird mit dem Kriterium K_1 relativ gut beschrieben. Das Kriterium K_2 ist etwas schlechter und das Rekonstruierte Gebiet ist etwas breiter als das aus K_1 . Die zusammengesetzten Kriterien K_3 und K_4 zeigen einen ähnlichen guten Verlauf wie K_1 . Regularisiert man etwas stärker, so zeigt sich in Abbildung (6.4) für K_1, K_3, K_4 eine immer noch gute Gebietserkennung, für K_2 wird diese etwas schlechter.

Die Frage, wie robust ein solcher Algorithmus auf Fehler in den Messdaten reagiert, soll in den folgenden Abbildungen gezeigt werden. Sind die Differenzdaten mit 3% Fehler behaftet (siehe Abbildung 6.5), so sind die Ergebnisse mit K_1 etwas schlechter, es gelingt aber immer noch eine gute Gebietserkennung. Das Ergebnis für K_2 ist signifikant schlechter. Regularisiert man etwas stärker (siehe Abbildung 6.6), so verbessern sich die Ergebnisse für K_2 und für die zusammengesetzten Kriterien K_3, K_4 etwas. Die Forderung (6.13) kann bei stark fehlerbehafteten Daten auch benutzt werden wenn man diese filtert. Für stark fehlerbehaftete Daten werden die höheren Frequenzen der Differenzpotentiale und der Testfunktion abgeschnitten. In Abbildung (6.7) sieht man eine gute Rekonstruktion für Differenzpotentiale mit einem Fehler von $\epsilon = 10\%$.

Hat man nur wenige Messungen zur Verfügung (Abbildung 6.9), so zeigt sich eine noch relativ gute Gebietserkennung alleine für K_1 .

Die unterschiedliche Rekonstruktionsqualität zwischen Abbildung (6.9) und Abbildung (6.8) erklärt sich durch die Anzahl der vorhandenen Störungen. In Abbildung (6.9) hat man 3 Störungen. Um diese gut zu rekonstruieren, sollte man Messungen für wenigstens 2×3 Randbedingungen zur Verfügung haben. Mit dieser Anzahl an Messungen kann man passende Koeffizienten für die Linearkombination des Dipols finden.

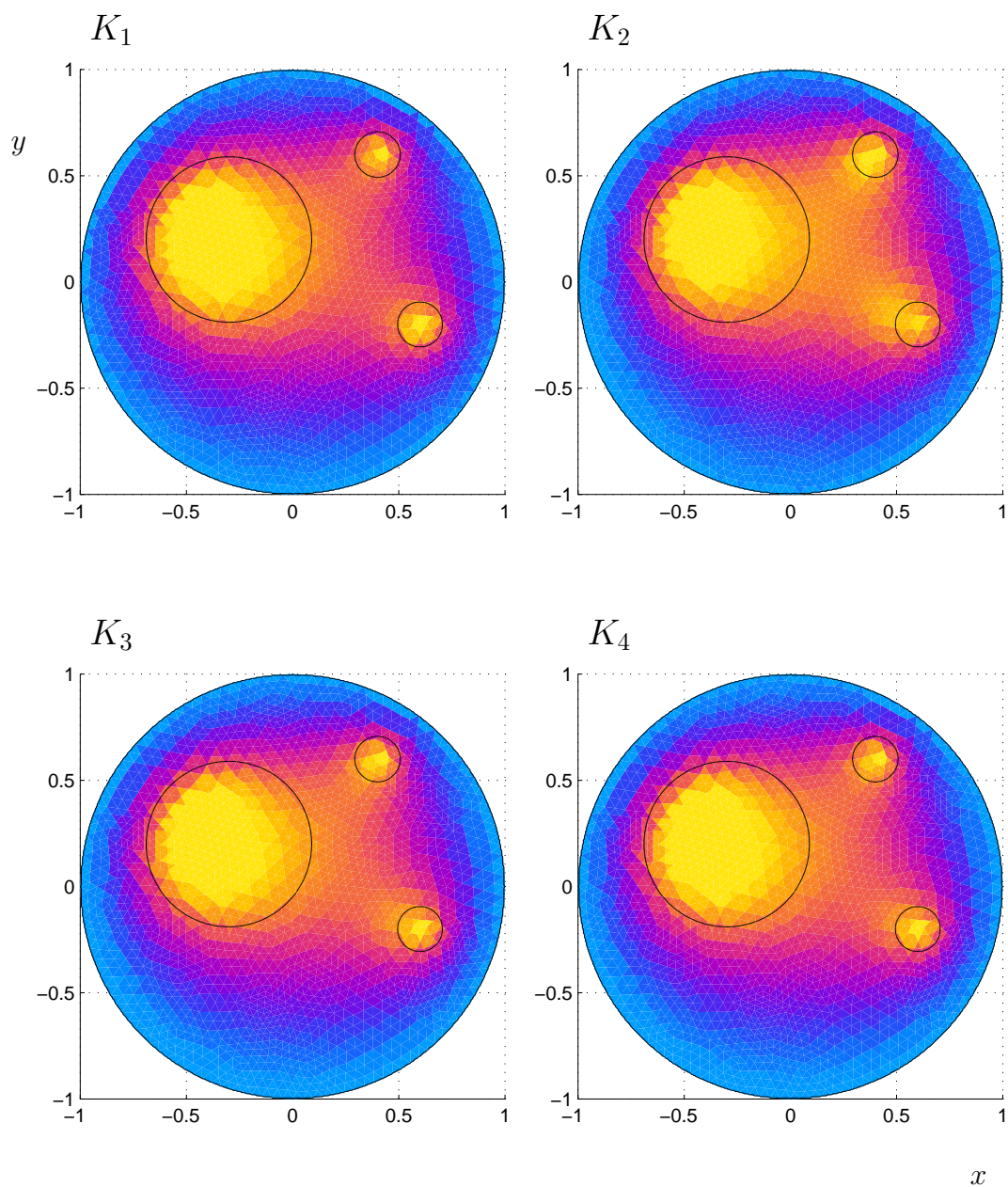


Abbildung 6.3: Die Verteilungen für die Randbedingungen $j = \sin(n\theta); \cos(n\theta)$ (mit $n = 1 \dots 10$) und einem Fehler von $\epsilon = 0$ in den Differenzdaten $\delta\Phi$, und dem Schnittparameter $\lambda = 10^{-5}$. Das Kriterium K_1 zeigt eine gute Erkennung, ebenso das Kriterium K_2 , K_2 ist allerdings schlechter als K_1 .

Unkenntnis der exakten Hintergrundleitfähigkeit

Hat man die Hintergrundleitfähigkeit nicht exakt bestimmt, so zeigen Gebietserkennungsalgorithmen Schwächen. Eine ungenaue Bestimmung der Hintergrundleitfähig-

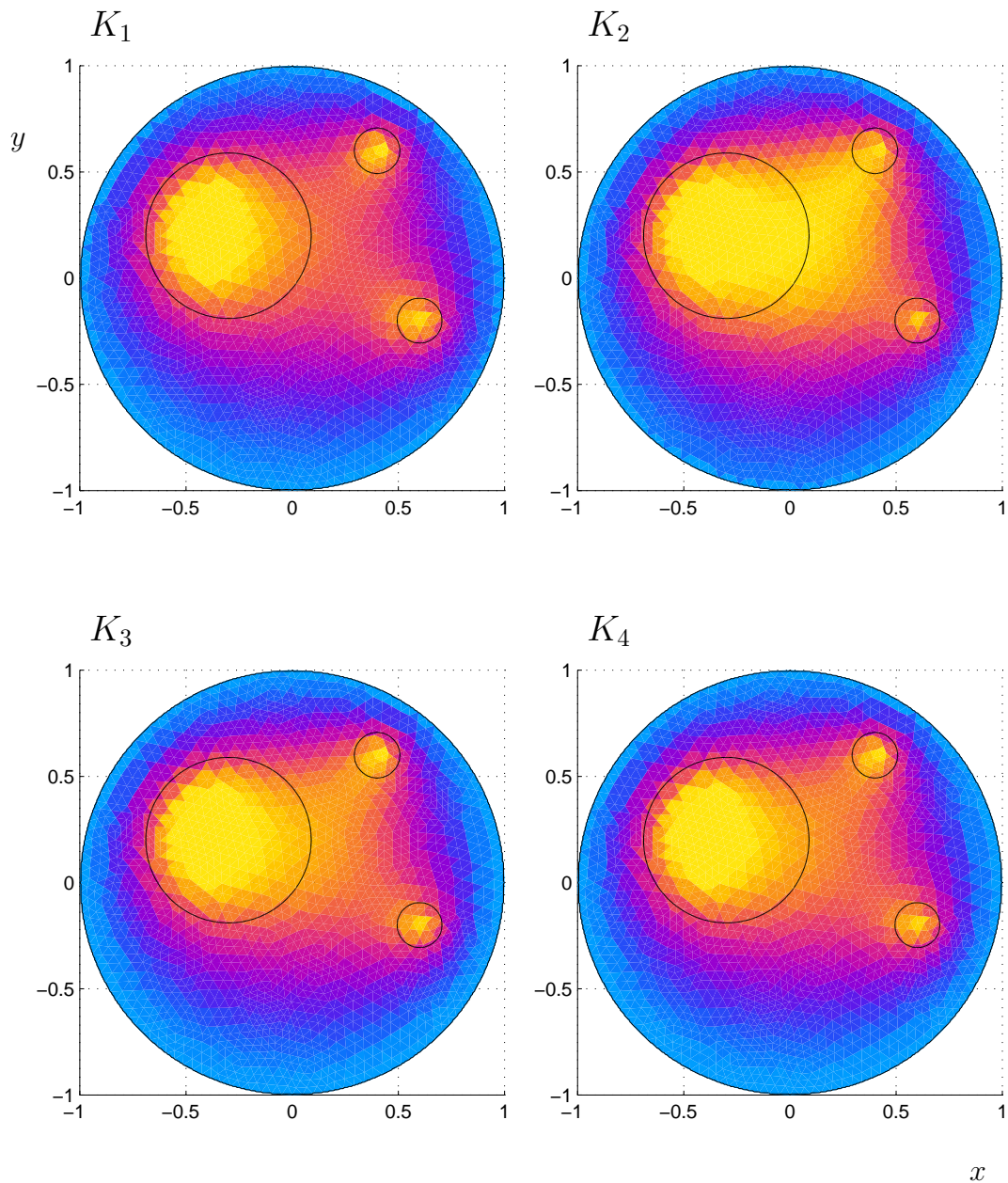


Abbildung 6.4: Die Verteilungen für die Randbedingungen $j = \sin(n\theta); \cos(n\theta)$ (mit $n = 1 \dots 10$) und einem Fehler von $\epsilon = 0$ in den Differenzdaten $\delta\Phi$, und dem Schnittparameter $\lambda = 10^{-4}$. Bei stärkerer Regularisierung wird K_2 schlechter. K_1 wird auch etwas schlechter. K_3 und K_4 zeigen eine gute Erkennung.

keit von 0,1% kann derart falsche Differenzpotentiale liefern, daß die Gebietserkennung scheitert.

Es gibt die Möglichkeit, nur die höheren Fourierkoeffizienten der Daten und des Testdipols für die Gebietserkennung zu verwenden. Wählt man die ersten 5 Rand-

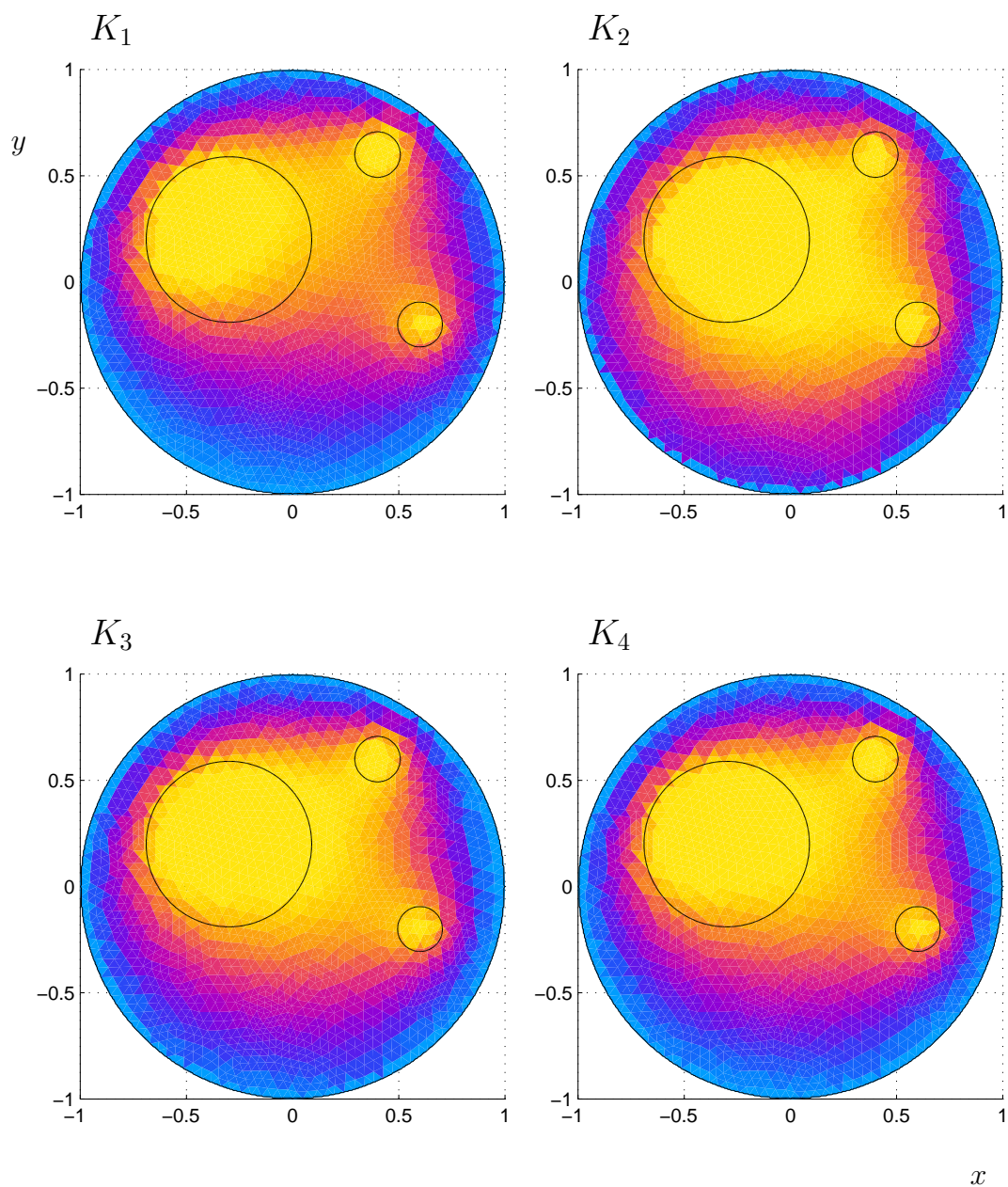


Abbildung 6.5: Die Verteilungen für die Randbedingungen $j = \sin(n\theta); \cos(n\theta)$ (mit $n = 1 \dots 10$) und einem Fehler von $\epsilon = 3\%$ in den Differenzdaten $\delta\Phi$, und dem Schnittparameter $\lambda = 10^{-4}$. Das Kriterium K_4 zeigt eine gute Gebietserkennung.

bedingungen $j = \sin(n\theta)$ und $j = \cos(n\theta)$ ($n = 1 \dots 5$), so muss man die ersten 5 Fourierkoeffizienten abschneiden. Eine solche Rekonstruktion ist in der Abbildung (6.10) gezeigt. Die Grösse K_1 zeigt eine relativ gute Gebietserkennung. Eine Gebietserkennung anhand von K_2 versagt, da die Gebiete in der Nähe des Ursprungs bevorzugt werden. Eine radiale Wichtung könnte das Verhalten dieser Größe ver-

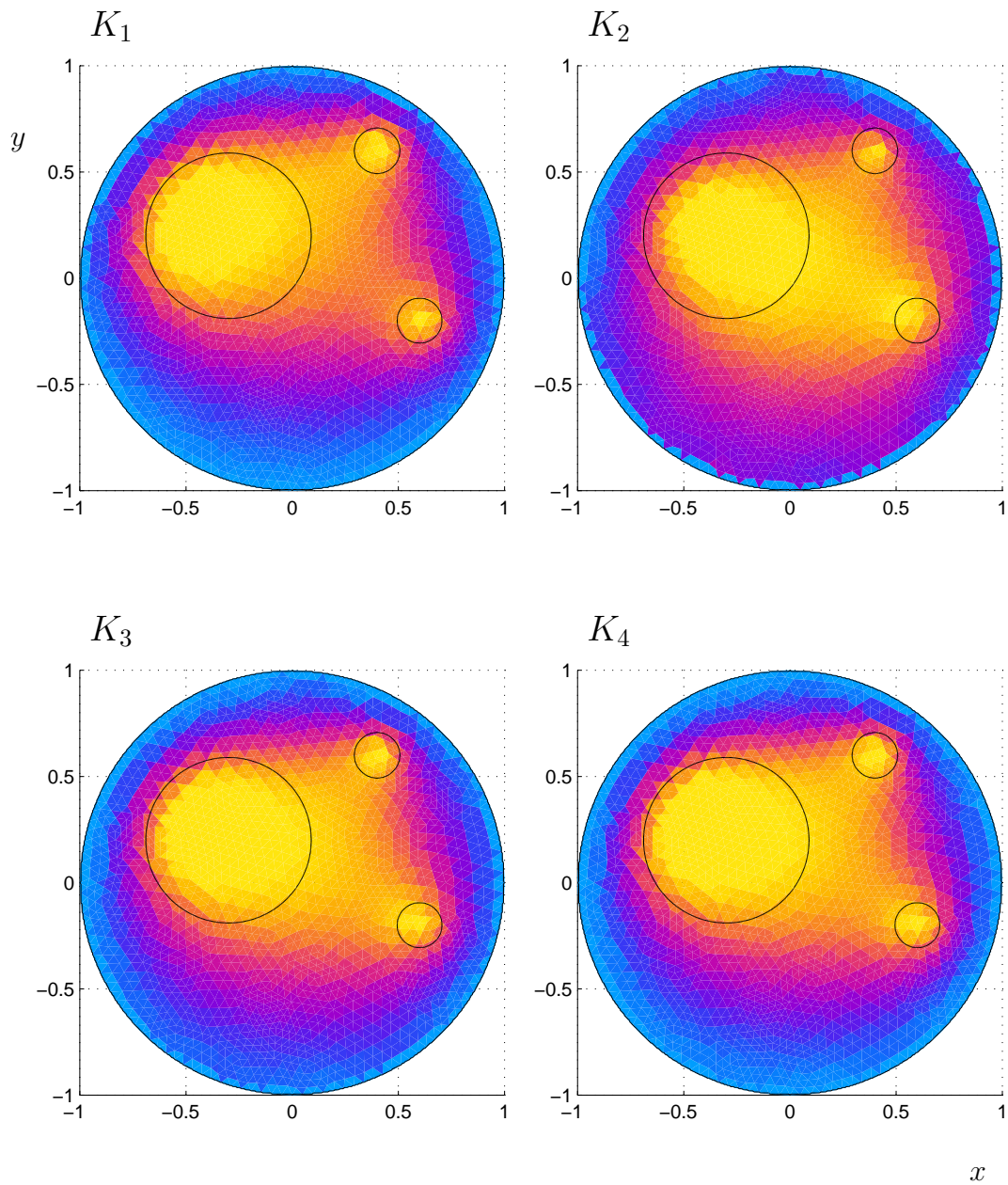


Abbildung 6.6: Die Verteilungen für die Randbedingungen $j = \sin(n\theta); \cos(n\theta)$ (mit $n = 1 \dots 10$) und einem Fehler von $\epsilon = 3\%$ in den Differenzdaten $\delta\Phi$, und dem Schnittparameter $\lambda = 10^{-3}$. Das Kriterium K_4 zeigt eine gute Gebietserkennung.

bessern.

In Abbildung (6.11) ist die Grösse K_1 gezeigt, wenn man 3 oder 4 Messungen benutzt. Wählt man mehrere Messungen aus, so ist die Zahl der abzuschneidenden Fourierkoeffizienten gleich der Zahl der Messungen. Hier muß ein Kompromiss gefunden werden.

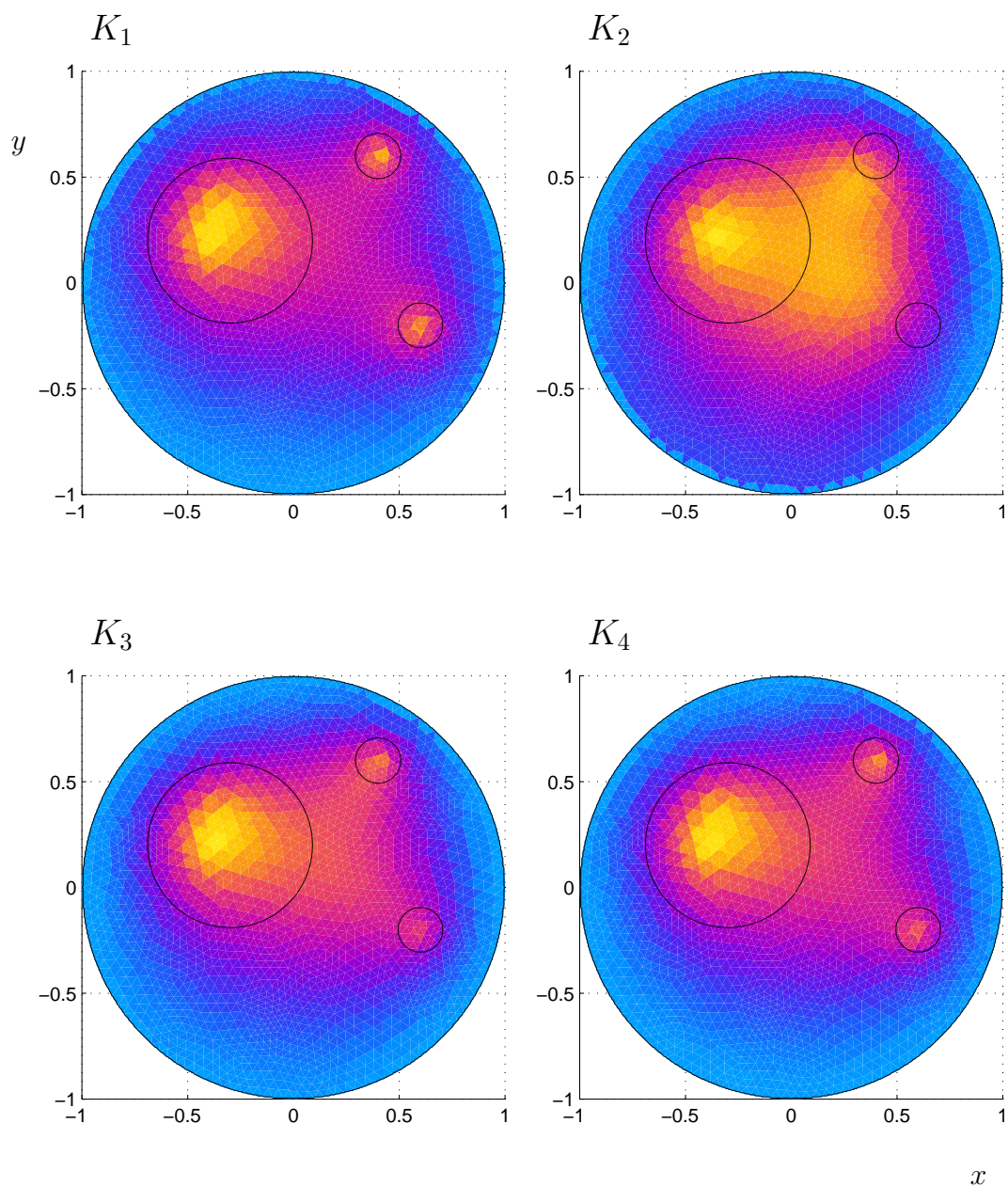


Abbildung 6.7: Die Verteilungen für die Randbedingungen $j = \sin(n\theta); \cos(n\theta)$ (mit $n = 1 \dots 10$) und einem Fehler von $\epsilon = 10\%$ in den Differenzdaten $\delta\Phi$, und dem Schnittparameter $\lambda = 10^{-3}$. Die Daten und die Testfunktion wurden mit 8 Fourierkoeffizienten entwickelt.

Ist die Anzahl der Messungen, die man betrachtet zu hoch, so schneidet man zu viele der niedrigen Fourierkoeffizienten ab, und es bleiben nur die höheren Fourierkoeffizienten der Messung übrig.

Betrachtet man Messungen zu höheren Strommustern, so müssen hauptsächlich die (hohen) Anregungsfrequenzen herausgeschnitten werden. Es dürfen nicht zu viele

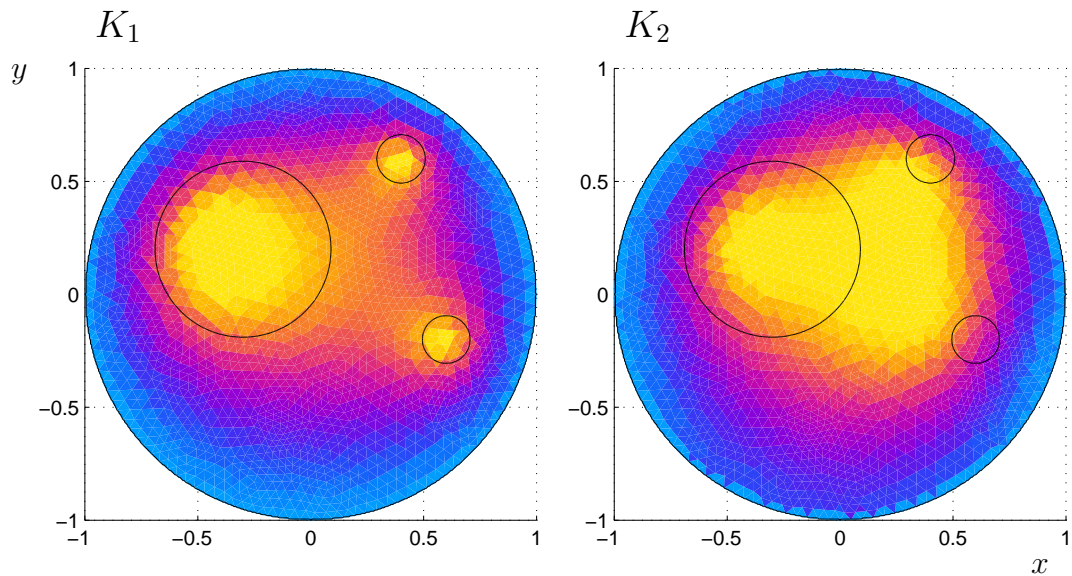


Abbildung 6.8: Die Verteilungen für die Randbedingungen $j = \sin(n\theta); \cos(n\theta)$ (mit $n = 1..4$) und einem Fehler von $\epsilon = 3\%$ in den Differenzdaten $\delta\Phi$, und dem Schnittparameter $\lambda = 10^{-3}$. Das Kriterium K_1 zeigt im Gegensatz zu dem Kriterium K_2 eine gute Erkennung.

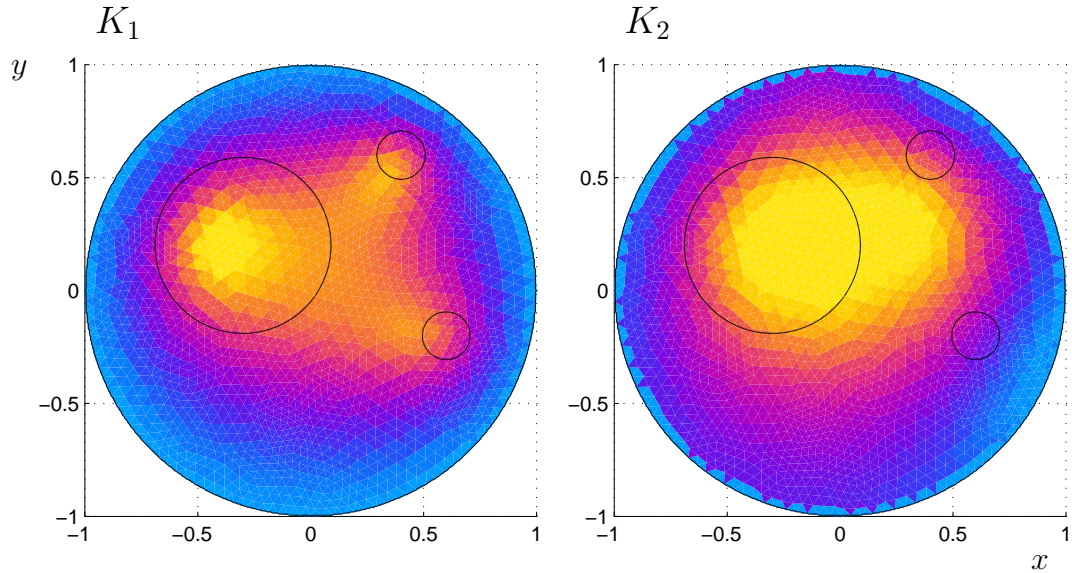


Abbildung 6.9: Die Verteilungen für die Randbedingungen $j = \sin(n\theta); \cos(n\theta)$ (mit $n = 1..3$) und einem Fehler von $\epsilon = 3\%$ in den Differenzdaten $\delta\Phi$, und dem Schnittparameter $\lambda = 10^{-3}$. Bei zu wenigen Messungen bleibt das Kriterium K_1 nicht mehr so aussagekräftig.

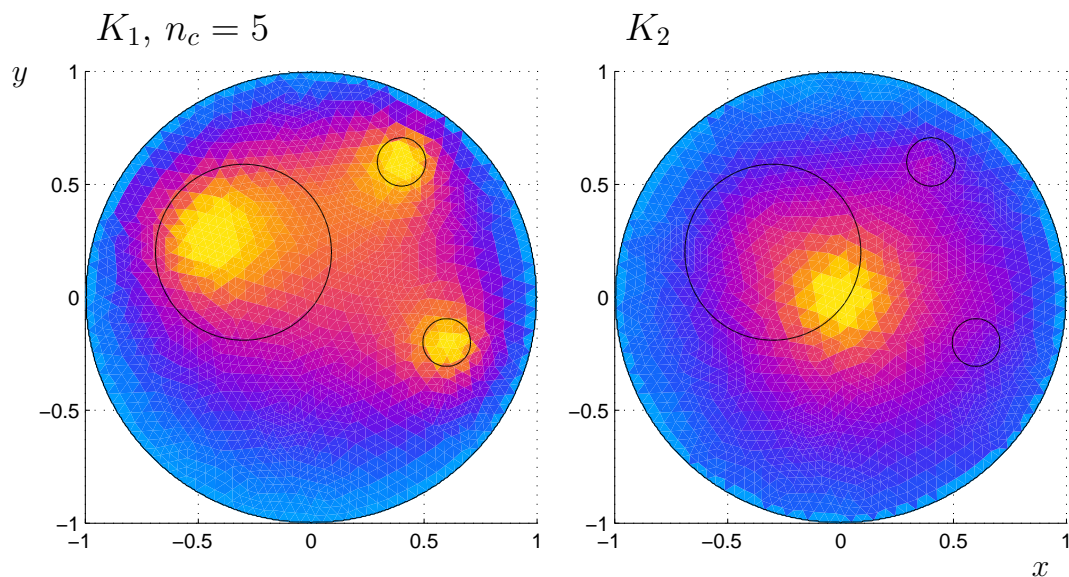


Abbildung 6.10: Die Verteilungen für die Randbedingungen $j = \sin(n\theta); \cos(n\theta)$ (mit $n = 1..5$) und einem kleinen Fehler von $\epsilon = 1\%$ in den Differenzdaten $\delta\Phi$, und $\lambda = 10^{-4}$. Für die Potentialdifferenzen und den Testdipol sind die Fourierkoeffizienten $n = 1, \dots, 5$ abgeschnitten worden.

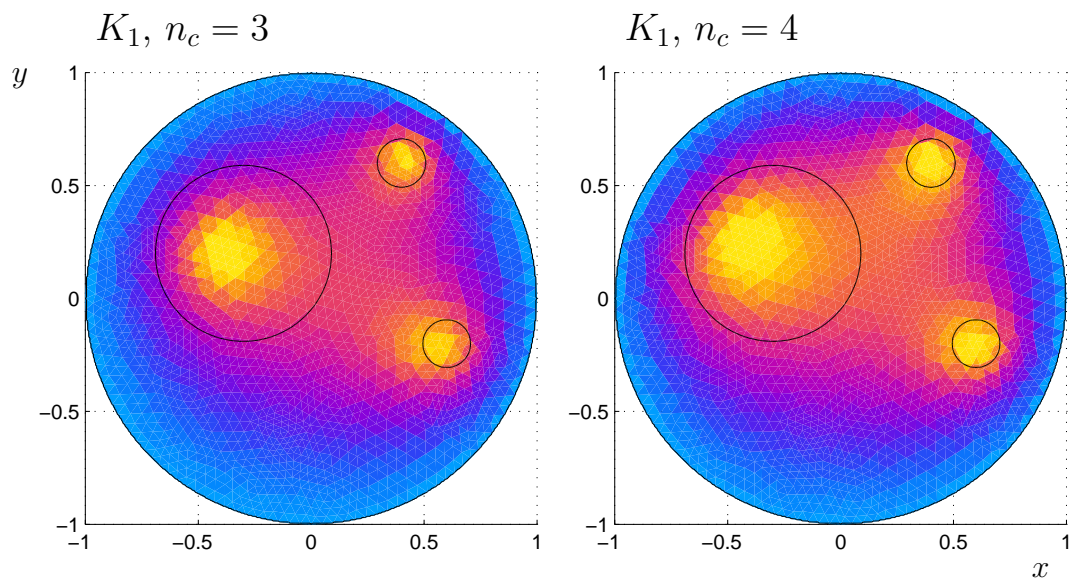


Abbildung 6.11: Die Verteilungen der Schnittvariablen mit einem Fehler von $\epsilon = 1\%$ in den Differenzdaten. Für die Potentialdifferenzen und den Testdipol sind die Fourierkoeffizienten bis n_c abgeschnitten worden.

hohe Frequenzen abgeschnitten werden, da das Signal einer Störung einen großen Beitrag gerade aus den höheren Frequenzen besitzt. Eine Vorgehensweise ist es, wenige Messungen zu verschiedenen Strommustern unterschiedlich zu kombinieren.

Beispiel

Möchte man die Randpotentiale $\delta\Phi_j$ für die Messungen mit der Randbedingung $f_j = \sin(j\theta)$ (mit beispielsweise $j = 1, 4, 7$) für die Rekonstruktion benutzen, so wird man die Frequenzen $(1, 4, 7)$ der betrachteten Randpotentiale $\delta\Phi_j$ (mit $j = 1, 4, 7$) und der Testfunktion abschneiden.

Zusammenfassung

Hat man mehrere Messungen zur Verfügung und einen sehr kleinen Fehler, dann funktionieren die beiden Kriterien K_1 und K_2 sehr gut für Differenzdaten. Hat man keine exakten Differenzdaten oder nur wenige Messungen, so ergibt das Kriterium K_1 die besten Ergebnisse. Für K_1 läßt sich der Algorithmus so modifizieren, daß er auch für gefilterte Daten funktioniert.

Eine Verbesserung für das Kriterium K_2 kann vielleicht über zusätzliche Bedingungen oder unterschiedliche Wichtung der Entwicklungskoeffizienten erfolgen. Die Kriterien K_3 und K_4 können eine kleine Verbesserung gegenüber K_1 und K_2 liefern, wenn wegen größerer Fehler in den Daten stärker regularisiert werden muß. Als zusammengesetzte Größen geht dies nur wenn das Kriterium K_2 nicht zu schlecht ist. Hat man wenige Messungen, wird das Kriterium K_2 allerdings schnell ungenau.

7 Der Tomograph



Abbildung 7.1: Links: Das System aus Computer, Tomograph und Meßstempel. In einem Behälter, an dessen Boden der Meßstempel angebracht ist, kann Wasser eingefüllt werden. Mit einer Metallkugel im Wasser wird der Effekt der Leitfähigkeitserhöhung studiert. Rechts: Der runde Meßstempel, mit 16 äußeren Anregungselektroden und 48 inneren Potentialmessen Elektroden.

Die vorgestellten Rekonstruktionsalgorithmen erfordern eine gewisse Anzahl an Messungen mit verschiedenen Randvorgaben. Möchte man sich auf die Brust konzentrieren, so beschränkt man sich bei vorgegebener Elektrodenanzahl auf die Platzierung der Elektroden um die Brust, um dort eine zufriedenstellende Auflösung zu erhalten. Man erfaßt dadurch nicht den gesamten Rand des Körpers, aber durch die gewählte Nähe der Elektroden fließt der Strom hauptsächlich in der Umgebung der Brust. Für den nicht mit Elektroden überdeckten Rand des Körpers müssen geeignete Annahmen gemacht werden. Durch die Anordnung der Elektroden auf einem festen Stempel ist gewährleistet, daß die exakte Position der Elektroden bekannt ist. Dies ist eine wichtige Voraussetzung für das Gelingen der Impedanztomographie.

Die Fehler, die aus einer falschen Positionsbestimmung der Elektroden herrühren, werden sehr schnell größer als das Signal (Potentialdifferenz).

In Zusammenarbeit mit Herrn Dr. K.H.Georgi und Herrn N.Schuster ist ein Prototyp für einen Tomographen, der in der Mammographie Anwendung finden soll, entwickelt worden. In Abbildung (7.1) ist das System dargestellt. Es besteht aus einem tragbaren Computer, dem Tomographen und dem Meßstempel. Der Tomograph kann 32 Anregungselektroden ansteuern und weitere 64 Elektroden messen. Auf den Anregungselektroden kann gleichzeitig das Potential und der Strom gemessen werden. Dazu ist ein Stempel angefertigt worden, der 16 Anregungselektroden führt und weitere 48 Potentialmesselektroden. Die Verteilung der Elektroden ist in Abbildung (7.2) zu sehen.

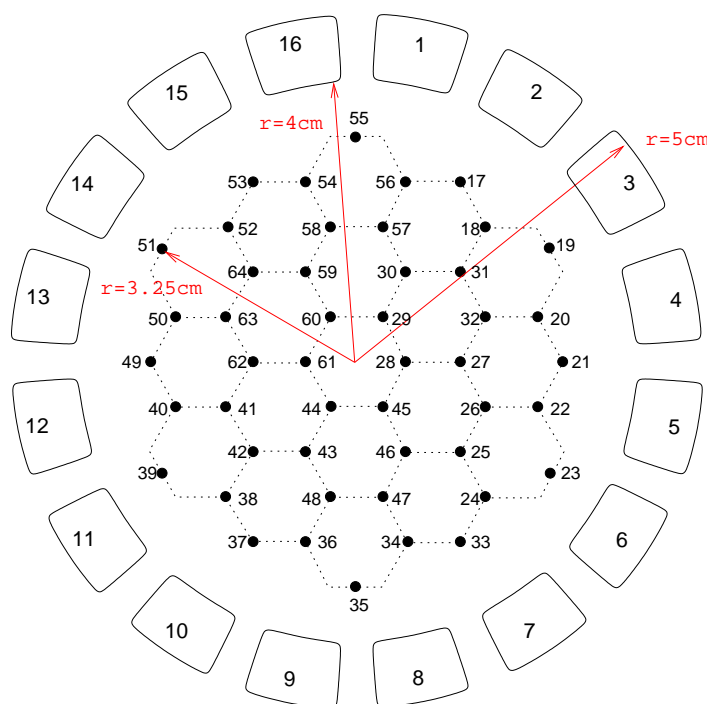


Abbildung 7.2: Elektrodenverteilung des Stempels. Der äußere Ring besteht aus den strominjizierenden Anregungselektroden. Die inneren schwarzen Punkte sind die Potentialmesselektroden, die so angeordnet sind, daß ein etwa gleichmäßiger Abstand vorhanden ist.

Intern besteht der Tomograph aus 5 verschiedenen Modulen. Modul1 ist eine Platine mit einem Siemens-Fujitsu Mikro-Kontroller mit dem Chip MB90F598, welcher über die serielle RS232-Schnittstelle angesprochen werden kann. Über den Micro-Kontroller erfolgt die gesamte Kommunikation zwischen dem Computer und der weiteren Hardware. Der zweite Teil (Abbildung 7.3) ist die Einheit, die die gewünschten Randspannungen generiert, um damit Ströme zu injizieren. Dabei wird das Signal U_{ref} eines programmierbaren Sinusgenerators auf 32 (bzw 16)

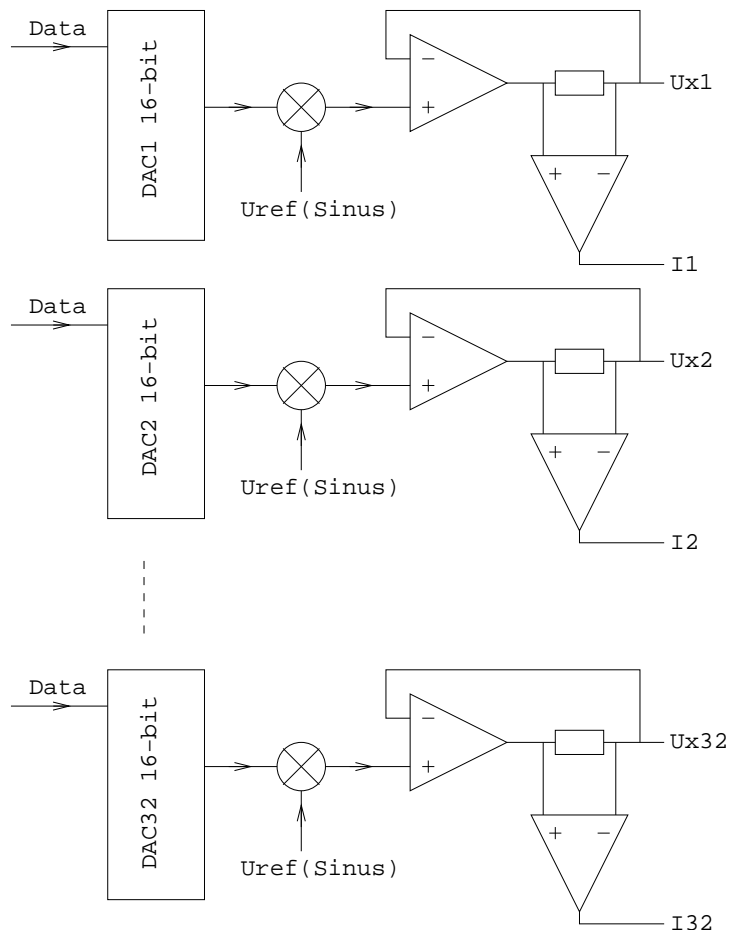


Abbildung 7.3: Modul2: Das Modul kann 32 verschiedene Amplituden mit sinusförmigem Wechselstrom mit einer Genauigkeit von 16-bit für die Anregungselektroden generieren. Gleichzeitig ist die Möglichkeit gegeben, durch eine Spannungsdifferenzmessung den fließenden Strom zu messen. Die gesetzte Spannung wird im weiteren auch über eine Messung kontrolliert.

”Multiplying Digital-Analog-Umwandler” (M-DAC) gegeben. Die Amplitude kann auf 16 Bit genau gesetzt werden. In jedem dieser M-DAC wird die Spannung mit $U_{ref} = U_0 \sin(\omega t)$, $20\text{kHz} < \omega < 30\text{kHz}$ mit der gewünschten Amplitude multipliziert. Für jede Anregungselektrode wird die Spannung dann jeweils mit einem eigenen Operationsverstärker der Verstärkung $V = 1$ verstärkt. Damit ergibt sich die Möglichkeit, durch Anbringen eines Widerstandes auch eine Strommessung durchführen zu können. Bei genauer Kenntnis des Widerstandes kann mit der an ihm abfallenden Spannung direkt der fließende Strom bestimmt werden. Die Auswertung von gleichzeitig 8 Kanälen kann im Modul4 erfolgen. Auf 8 Analog-Multiplexern mit 16 Eingängen können die 128 Signale ($U1\dots U32$, $I1\dots I32$, $Ux1\dots Ux64$) gemessen werden. Das Signal wird auf einen Peakdetektor gegeben. Der Wert des Peakdetek-

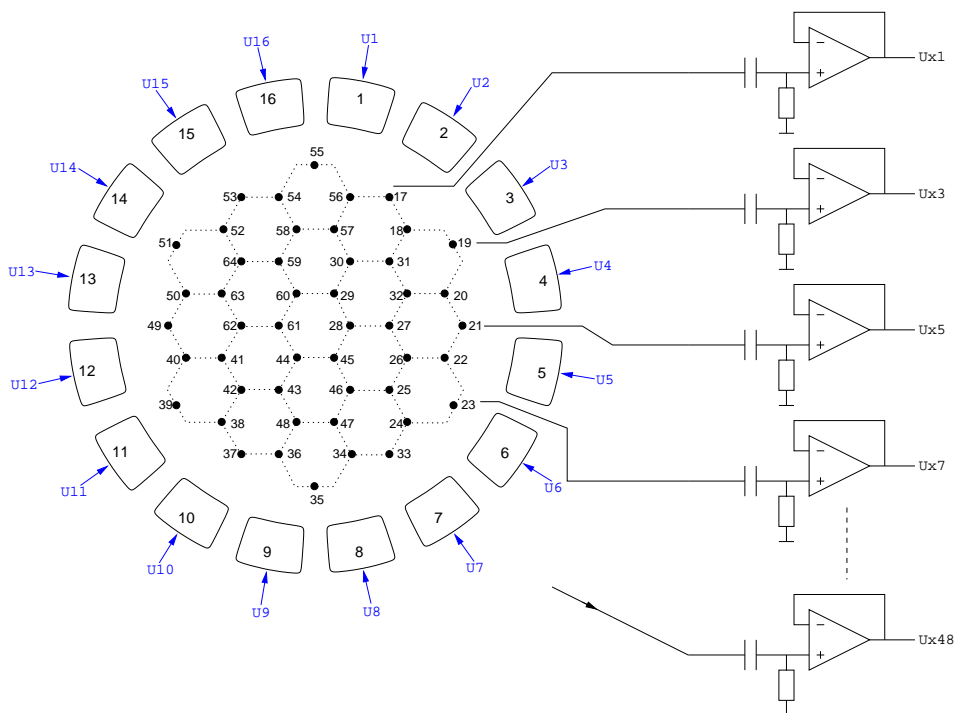


Abbildung 7.4: Modul3: Die Spannung der reinen Potentialmesselektroden wird auf einen Operationsverstärker gegeben. Davor wird ein Kondensator geschaltet, um Gleichstromanteile zu unterdrücken.

tors wird anschließend mit einem ADC auf 16 Bit genau bestimmt. Zu beachten ist, daß hier 8 verschiedene Messketten vorhanden sind, die genau abgestimmt sein müssen. Eine solche Parallelisierung ist komplizierter als der Gebrauch von nur einer Messkette; allerdings erlaubt dies eine schnellere Datennahme. Das Setzen der Randspannungen geschieht mit 16 Bit Genauigkeit. Der Wert wird nochmals mit einer Genauigkeit von 16 Bit gemessen. Für die Messung des Vorzeichens ist das Modul5 in Abbildung (7.6) zuständig. Über einen Komperator wird die Phase des zu messenden Signals mit der Phase der Referenzspannung U_{ref} verglichen.

Für die meisten Rekonstruktionsalgorithmen gibt man den Strom vor und mißt das Potential. Anschließend vergleicht man dann für die gleiche Stromverteilung die Randspannung für eine Leermessung (Messung mit homogener Leitfähigkeitsverteilung) und die Randspannung der tatsächlich durchgeführten Messung. Bei diesem Prototypen wird allerdings die Spannung vorgegeben und der Strom gemessen. Der Aufwand an Elektronik ist erheblich höher, wenn man den Strom vorgeben wollte. Hat man einen vollständigen Meßsatz, so kann man sich die Messung für eine fest vorgegebene Stromverteilung durch eine Linearkombination der verschiedenen Messungen bestimmen.

Als Anregung können verschiedene Potentiale vorgegeben werden. Wir geben sinus- und cosinusartige Potentiale vor, damit hat man einen vollständigen Satz an Rand-

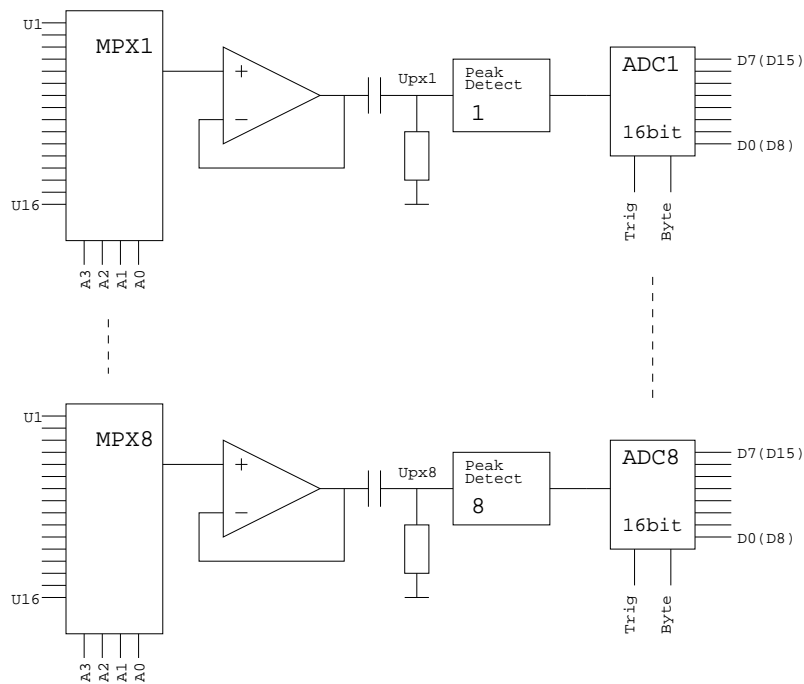


Abbildung 7.5: Modul4: Die Auswertung von 8 Kanälen kann gleichzeitig erfolgen. Auf 8 Analog-Multiplexern mit 16 Eingängen können die 128 Signale ($U_1 \dots U_{32}$, $I_1 \dots I_{32}$, $U_{x1} \dots U_{x64}$) gemessen werden. Das Signal wird auf einen Peakdetektor gegeben. Der Wert des Peakdetektors wird anschließend mit einem ADC auf 16-bit genau bestimmt.

bedingungen. Die Ströme sind bei verschwindendem Kontaktwiderstand dann auch nahezu sinus- und cosinusartig.

Eine Messzyklus für eine einzelne Randbedingung dauert $\approx 0.01s$. Um Messfehler gering zu halten wird intern eine vorgegebene Anzahl an Mittelungen durchgeführt. Die Übertragung der Daten auf den Computer benötigt eine halbe Sekunde. Dabei erwies sich, daß 50 Mittelungen ausreichen. Es verbleiben also etwa eine Sekunde für eine Randbedingung.

Zum Testen des Tomographen wird eine Wanne, an deren Boden der Meßstempel angebracht ist, mit einer leitenden Flüssigkeit gefüllt. In die Flüssigkeit wird dann eine Metallkugel mit einer höheren Leitfähigkeit als die Flüssigkeit gehängt. Eine Differenzmessung zwischen der Messung mit Metallkugel und der Messung ohne Metallkugel zeigt in Abbildung (7.7), wie gut der Tomograph den Effekt der Metallkugel mißt. Die Potentiale sind nur auf den Elektroden bekannt, mit einer Spline-Interpolation werden sie auf den ganzen Raum ausgerechnet. Man kann bei der Differenzmessung den Dipoleffekt gut erkennen. Für höhere Strommuster werden die Messungen etwas schlechter.

In Abbildung (7.7) sind für verschiedene Randbedingungen die Differenzmessungen

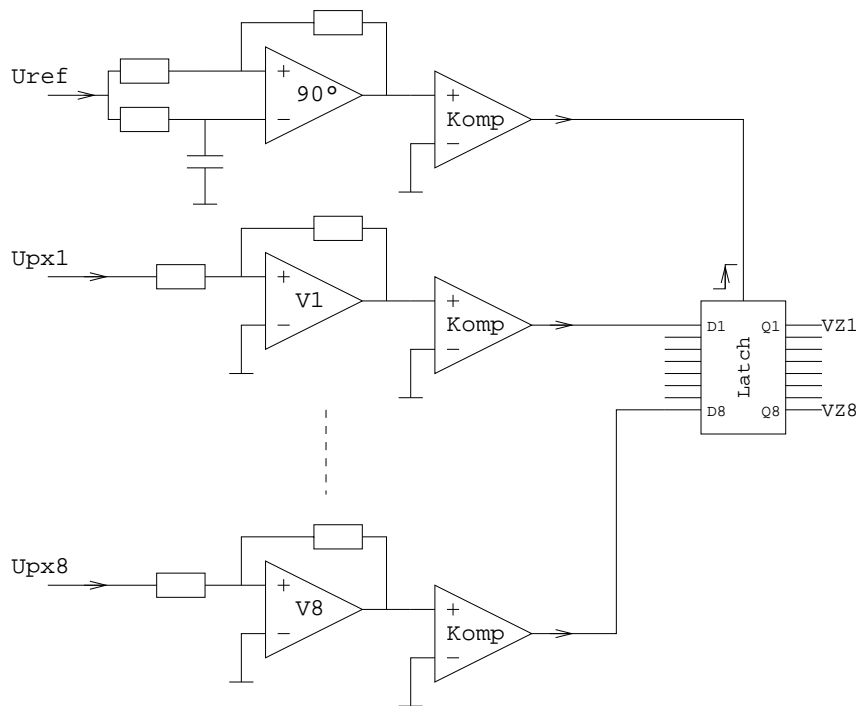


Abbildung 7.6: Modul5: Um den Strömen und Spannungen ein Vorzeichen zu geben, wird die Phase mit der Phase des Wechselstroms U_{ref} verglichen.

für eine Metallkugel in einem wassergefüllten Behälter gezeigt. Sie hat einen Durchmesser von 1cm und einem Abstand von 1cm zum Meßstempel. Sie befindet sich über den Elektroden (56,57). Der Behälter hat einen Radius von 25cm und ist mit 15cm Wasser befüllt. Der Effekt der Kugel ist mit Differenzpotentialen relativ gut zu sehen. Mit höheren Strommustern wird die Potentialdifferenz ungenauer.

Absolutdaten

Stehen nur die gemessenen Potentiale für die nichtkonstante Leitfähigkeit zur Verfügung, so spricht man von Absolutdaten. Im allgemeinen hat man wie bereits schon erwähnt keine Leermessung zur Verfügung. Eine theoretische Berechnung der Leermessung (Messung für eine homogene Leitfähigkeit), die für die Rekonstruktion nötig ist, ist schwierig zu finden. Diese setzt voraus, daß die genaue Geometrie des zu untersuchenden Objektes (Person) bekannt ist. Für eine Rekonstruktion in drei Dimensionen müsste man die exakte Form des Körpers vorgeben und dafür das ungestörte Vorwärtsproblem lösen. Dafür müsste man die Greensche Funktion des Körpers kennen und für diese eine geschickte Entwicklung finden, oder die Leermessung mit der Methode der Finiten Elemente bestimmen. Dies ist allerdings sehr aufwendig und in der Praxis nicht einfach realisierbar. Daher würde man lieber eine feste einfache

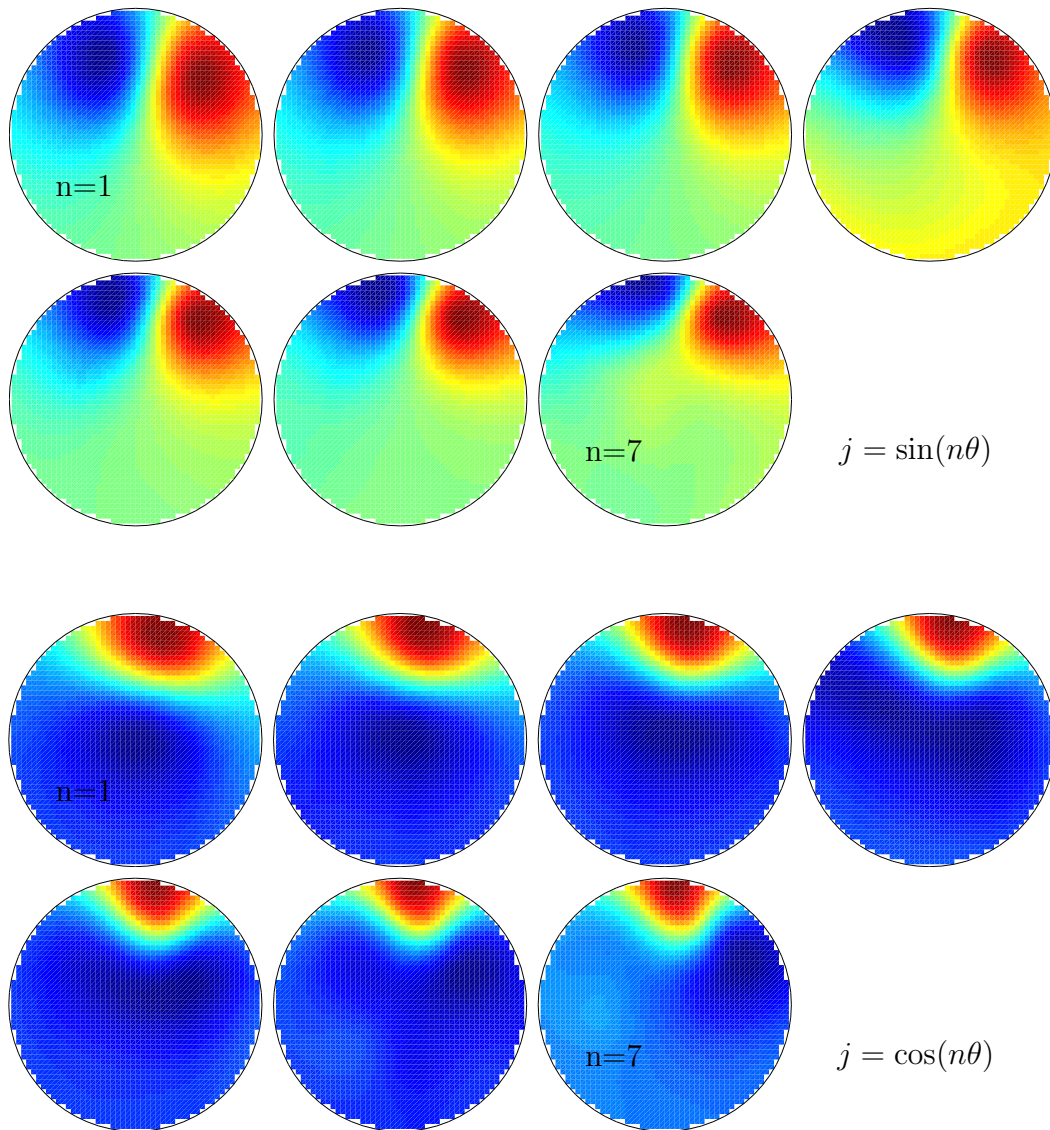


Abbildung 7.7: Die Differenzmessung für verschiedene Anregungen für eine Kugel mit Durchmesser 1cm und einem Abstand von 1cm zum Stempel. Mit größerem n wird der Effekt immer kleiner. (Die Farbskala erstreckt sich über in jedem einzelnen Bild vom minimalen zum maximalen Wert. Gezeigt werden soll die Form des Signales!) Die Potentiale sind nur an den 64 Elektroden bekannt. Mit einer Spline-Interpolation [31] werden die Werte auf dem nicht mit Elektroden besetzten Bereich ausgeweitet.

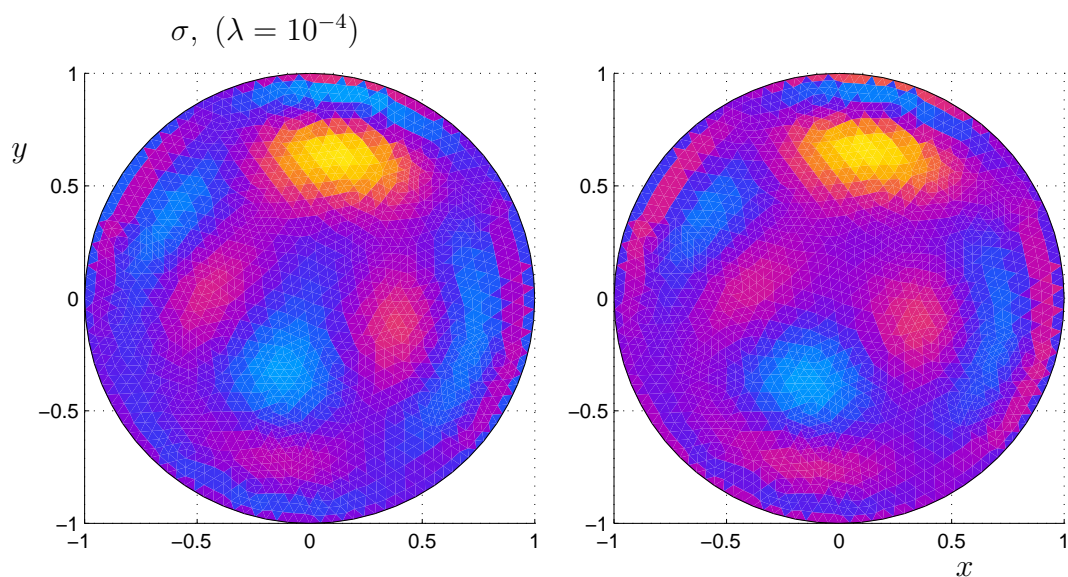


Abbildung 7.8: Links: Rekonstruktion mit experimenteller Leermessung. Rechts: Die Rekonstruktion mit gefilterten Daten, sie ist vergleichbar mit der Rekonstruktion bei vorhandener experimenteller Leermessung

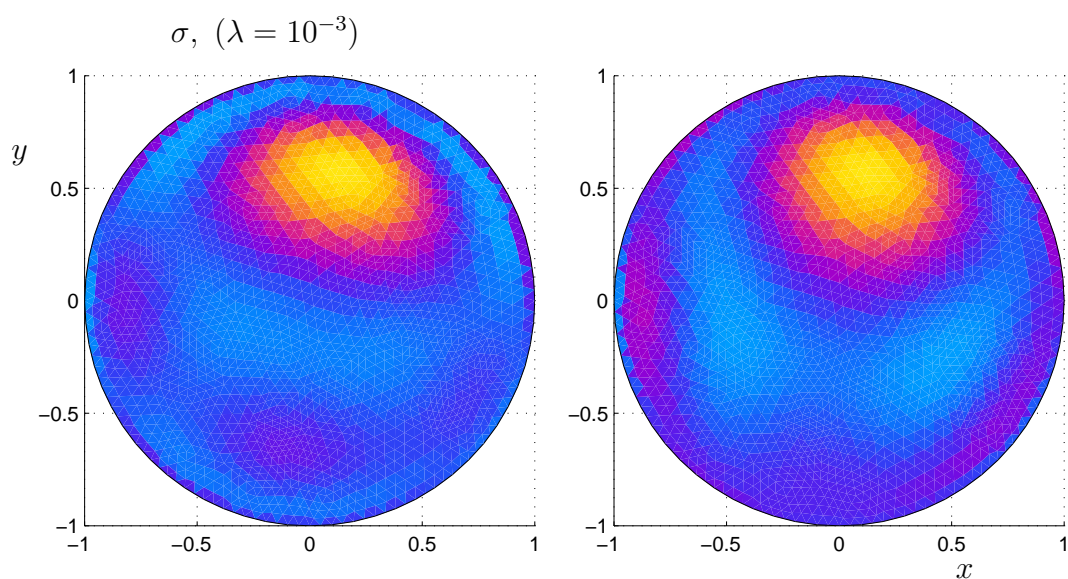


Abbildung 7.9: Links: Rekonstruktion mit experimenteller Leermessung. Rechts: Die Rekonstruktion mit gefilterten Daten.

Geometrie vorgeben, die die vorhandene Geometrie anährend beschreibt. Die Geometrie des Brustkorbs kann durch einen Zylinder, eine Kugel oder eine Halbebene approximiert werden. (In der Praxis muß allerdings noch studiert werden, wie gut

eine solche Vereinfachung den Brustkorb approximiert.)

Mit der Annahme, daß nur der in Stempelnähe befindliche Bereich eine Rolle spielt (weil der Strom nicht sehr tief eindringt), kann man sich eine experimentelle Leermessung an einer anderen Körperstelle besorgen, welche ein ähnliches Gewebe besitzt wie die Brust. Das Gesäß könnte eine solche Möglichkeit bieten.

Das Signal einer Störung setzt sich eher aus Anteilen höherer Frequenz zusammen. Die Hintergrundleitfähigkeit hingegen liefert nur harmonische Anteile. Schneidet man diese harmonischen Anteile ab, so sollte das Signal übrigbleiben. Damit könnte eine Filterung der Daten benutzt werden, um das Signal $\delta\Phi$ zu erhalten.

Vereinfacht man das 3-dimensionale Problem, indem man es als 2-dimensionales Problem betrachtet, und benutzt man nur die Randdaten (nur die 16 äußeren Elektroden von Abbildung 7.2), so kann der Algorithmus für den Kreis auf das Problem angewandt werden. Abbildung (7.9) zeigt die Rekonstruktion für diesen Algorithmus, wenn man die experimentelle Leermessung hat, im Vergleich zu einer Rekonstruktion mit gefilterten absoluten Daten. Im letzteren Fall wurde für die gemessene Randspannung mit der Randbedingung $j = \sin(n\theta)$ und $j = \cos(n\theta)$ der n -te Fourierkoeffizient auf Null gesetzt (Die Daten werden als gefilterte Daten bezeichnet). Die linke Abbildung zeigt eine gute Übereinstimmung mit der Rekonstruktion, bei bekannter Leermessung.

In Abbildung (7.10) ist die Rekonstruktion mit dem Gebietserkennungsalgorithmus zu sehen. Die Position der Störung kann sowohl mit Differenzdaten als auch mit gefilterten Daten erfolgreich bestimmt werden.

7.1 Halbebene

Die Neumann-Greenfunktion für die Halbebene lautet

$$G_N(\vec{x}, \vec{x}') = \frac{1}{4\pi} \left(\frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|} + \frac{1}{|\vec{x} - \vec{a}'|} \right), \quad (7.1)$$

wo \vec{a}' die Position der Spiegelladung ist. In Zylinderkoordinaten mit $\vec{x}'(\rho', \theta', z')$ ist $\vec{a}' = \vec{x}'(\rho', \theta', -z')$. Damit wird

$$G_N(\vec{x}, \vec{x}') = \frac{1}{4\pi} \left(\frac{1}{\sqrt{\rho^2 + \rho'^2 + (z - z')^2 - 2\rho\rho' \cos \theta_d}} + \frac{1}{\sqrt{\rho^2 + \rho'^2 + (z + z')^2 - 2\rho\rho' \cos \theta_d}} \right), \quad (7.2)$$

mit $\theta_d = \theta - \theta'$.

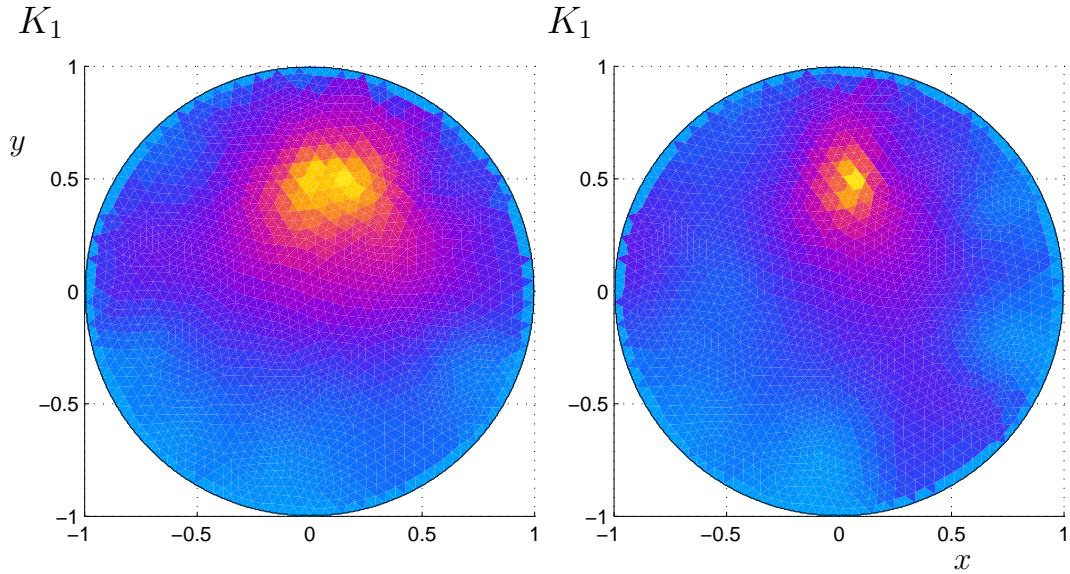


Abbildung 7.10: Links: Gebietserkennung mit experimenteller Leermessung. Rechts: Gebietserkennung mit gefilterten Daten. Hier wurden die Messungen der Randbedingung $n = 1, 2$ benutzt.

Die Greensche Funktion lässt sich als Summe von Legendre-Polynomen schreiben, was im folgenden kurz ausgeführt wird. Wir betrachten dazu den Term

$$\begin{aligned} & (\rho^2 + \rho'^2 + (z - z')^2 - 2\rho\rho' \cos \theta_d)^{-1/2} = \\ & (\rho'^2 + (z - z')^2)^{-1/2} \left(\frac{\rho^2}{\rho'^2 + (z - z')^2} + 1 - 2 \frac{\rho\rho'}{\rho'^2 + (z - z')^2} \cos \theta_d \right)^{-1/2}. \end{aligned} \quad (7.3)$$

Der zweite Faktor lässt sich schreiben als

$$\left(\frac{\rho^2}{\rho'^2 + (z - z')^2} + 1 - 2 \sqrt{\rho^2 / (\rho'^2 + (z - z')^2)} \sqrt{\rho'^2 / (\rho'^2 + (z - z')^2)} \cos \theta_d \right)^{-1/2} \quad (7.4)$$

Mit $t = \sqrt{\frac{\rho^2}{\rho'^2 + (z - z')^2}}$ und $w = \sqrt{\frac{\rho'^2}{\rho'^2 + (z - z')^2}} \cos \theta_d$ kann man die Entwicklung in Legendre-Polynome

$$(t^2 + 1 - 2tw)^{-1/2} = \sum_{n=0}^{\infty} t^n P_n(w), \quad (7.5)$$

benutzen, vorausgesetzt $\rho^2 < \rho'^2 + (z - z')^2$. Mit dem Additionstheorem

$$\begin{aligned} P_n(\cos \psi_1 \cos \psi_2 + \sin \psi_1 \sin \psi_2 \cos \theta) &= P_n(\cos \psi_1) P_n(\cos \psi_2) \\ &+ 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\Gamma(n - k + 1)}{\Gamma(n + k + 1)} P_n^k(\cos \psi_1) P_n^k(\cos \psi_2) \cos k\theta, \end{aligned} \quad (7.6)$$

und der Wahl $\psi_1 = \pi/2$ und $\sin \psi_2 = \sqrt{\rho'^2/(\rho'^2 + (z - z')^2)} =: B$ reduziert sich das Additionstheorem auf

$$P_n(B \cos \theta_d) = P_n(0)P_n(\cos \arcsin B) + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\Gamma(n-k+1)}{\Gamma(n+k+1)} P_n^k(0) P_n^k(\cos \arcsin B) \cos k\theta_d. \quad (7.7)$$

Damit läßt sich die Greensfunktion für die Halbebene in folgender Form schreiben (Für den Anteil der Spiegelladung wird $(z - z')^2$ durch $(z + z')^2$ ersetzt):

$$G_N(\vec{x}, \vec{x}') = \frac{1}{4\pi} \sum_n \frac{\rho^n}{\sqrt{\rho'^2 + (z - z')^2}^{n+1}} \times (P_n(0)P_n(\cos \alpha_1) \quad (7.8)$$

$$+ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\Gamma(n-k+1)}{\Gamma(n+k+1)} P_n^k(0) P_n^k(\cos \alpha_1) \cos k(\theta - \theta')) \quad (7.9)$$

$$+ \frac{1}{4\pi} \sum_n \frac{\rho^n}{\sqrt{\rho'^2 + (z + z')^2}^{n+1}} \times (P_n(0)P_n(\cos \alpha_2) \quad (7.10)$$

$$+ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\Gamma(n-k+1)}{\Gamma(n+k+1)} P_n^k(0) P_n^k(\cos \alpha_2) \cos k(\theta - \theta')) , \quad (7.11)$$

mit $\alpha_1 = \arcsin \sqrt{\rho'^2/(\rho'^2 + (z - z')^2)}$ und $\alpha_2 = \arcsin \sqrt{\rho'^2/(\rho'^2 + (z + z')^2)}$. Bei vorgegebenem Strom $j = \Theta(\rho' - \rho_a)\Theta(\rho_e - \rho')\delta(z') \sin(j\theta')$ erhält man für eine Leitfähigkeit $\sigma = 1$ das Potential

$$\Phi_j(\rho, \theta, z) = \oint_{\partial\Omega} G(\rho, \theta, z; \rho', \theta', z') j(\rho', \theta', z') d(\partial\Omega'), \quad (7.12)$$

mit $\cos k(\theta - \theta') = \cos k\theta \cos k\theta' + \sin k\theta \sin k\theta'$. Betrachtet man das Potential auf dem Rand ($z = 0$), so vereinfacht sich die Gleichung zu

$$\Phi_j(\rho, \theta, z) = \frac{1}{2} \sum_n \frac{\Gamma(n-j+1)}{\Gamma(n+j+1)} P_n^j(0)^2 \frac{1}{n} \left(\frac{1}{\rho_e^n} - \frac{1}{\rho_a^n} \right) \rho^n \sin j\theta, \quad (7.13)$$

mit

$$P_n^j(0) = \frac{2^j \sqrt{\pi}}{\Gamma(\frac{n-j}{2} + 1) \Gamma(\frac{-n-j+1}{2})}. \quad (7.14)$$

Ebenso ergibt sich für eine Stromvorgabe $j = \Theta(\rho' - \rho_a)\Theta(\rho_e - \rho')\delta(z') \cos(j\theta')$

$$\Phi_j(\rho, \theta, z) = \frac{1}{2} \sum_n \frac{\Gamma(n-j+1)}{\Gamma(n+j+1)} P_n^j(0)^2 \frac{1}{n} \left(\frac{1}{\rho_e^n} - \frac{1}{\rho_a^n} \right) \rho^n \cos j\theta, \quad (7.15)$$

mit dem radialen Anteil

$$R_j(\rho) = \frac{1}{2} \sum_n \frac{\Gamma(n-j+1)}{\Gamma(n+j+1)} P_n^j(0)^2 \frac{1}{n} \left(\frac{1}{\rho_e^n} - \frac{1}{\rho_a^n} \right) \rho^n. \quad (7.16)$$

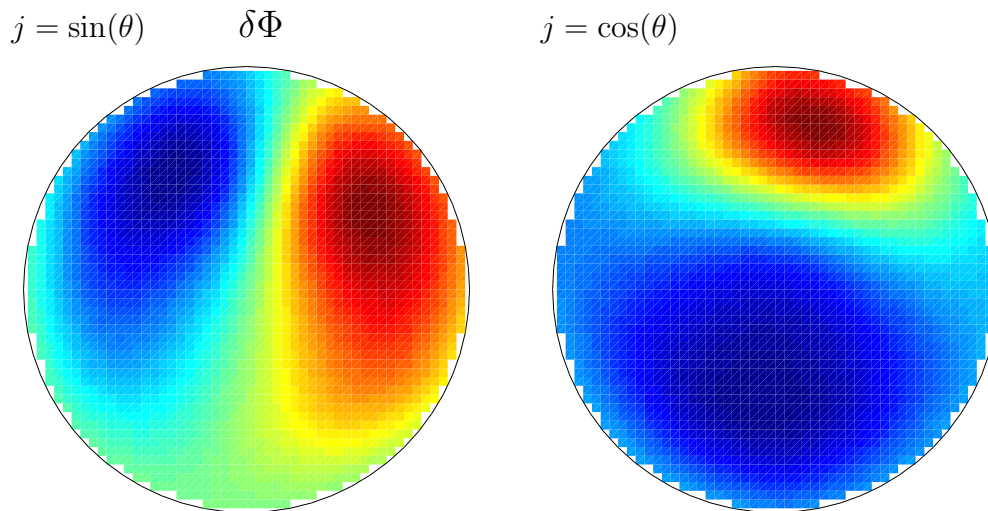


Abbildung 7.11: Potentialdifferenz mit theoretischer Leermessung nach Gleichung (7.13)

Konstante Leitfähigkeit

Wie bereits erwähnt hat man in der Regel keine experimentelle Leermessung. Legt man nach Gleichung (7.13) für eine konstante Leitfähigkeit einen Fit durch die Daten für Sinus- und Cosinusförmige Anregung, so ergibt sich für die Anregung $j = \sin(\theta)$ und $j = \cos(\theta)$ die Potentialdifferenz $\delta\Phi$ in Abbildung (7.11). Für die höheren Strommuster wird die theoretische Leermessung schlechter. Möchte man die Leitfähigkeitsverteilung in drei Dimensionen rekonstruieren, so kann man den Gebietserkennungsalgorithmus und die Rekonstruktion mit der Linearisierung benutzen. Da man für die höheren Strommuster keine exakte Leermessung bestimmen kann, bietet es sich an, die Absolutdaten zu filtern. Für die Rekonstruktionsalgorithmen würde man das Potential in Besselfunktionen entwickeln (die Besselfunktionen sind ein vollständiges System auf dem Kreis) und die Frequenzen der anregenden Strommuster abschneiden (Abbildung 7.12).

Eine Gebietserkennung in 3 Dimensionen mit Differenzdaten wird in Abbildung (7.13) gezeigt. Die (x,y)-Koordinaten der Störung werden gut rekonstruiert. Der Behälter ist mit 15cm Wasser gefüllt. Der Testdipol ist der für die unendlich ausgehende Halbebene, daher kann die Tiefe nicht genau wiedergegeben werden.

7.2 Messung am Brustkorb

Mit der Messung am Brustkorb möchte man eine Methode zur Lungenüberwachung haben. Für Patienten auf der Intensivstation ist man interessiert, die Leitfähigkeitsverteilung im Brustkorb zu kennen, speziell in der Lunge. Erhöht sich die Leitfähig-

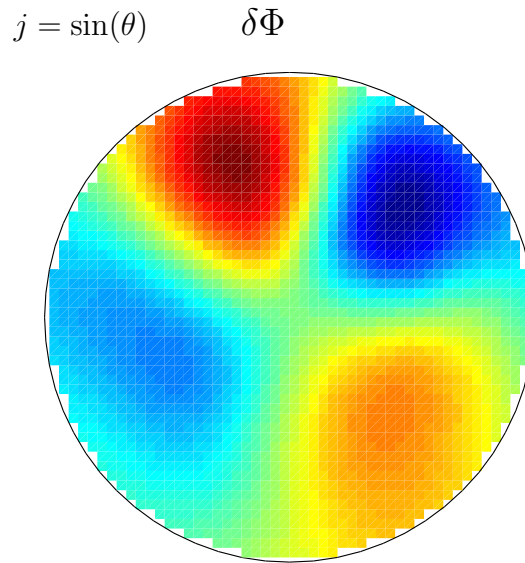


Abbildung 7.12: Die Entwicklung des Potentials in Besselfunktionen mit Abschneiden der anregenden Frequenz.

keit dort, so kann man davon ausgehen, daß sich die Lunge mit Wasser gefüllt hat. Dem Patienten wird ein Ring von Elektroden um den Brustkorb gelegt. Die Elektroden müssen im gleichen Abstand angebracht werden, da das Gelingen der Rekonstruktion stark von der exakten Position der Elektroden abhängt.

Bei der Messung am Patienten ergibt sich die Schwierigkeit des Kontaktwiderstandes. Am Übergang zwischen Haut und der Elektrode herrscht ein hochohmiger Widerstand Z . Für das gemessene Potential kann man ansetzen:

$$\Phi_i + Z_i j_i = \Phi_i^{mess}. \quad (7.17)$$

Der Kontaktwiderstand ist im allgemeinen für jede Elektrode i unterschiedlich. Möchte man gleichzeitig Strom und Spannung auf der selben Elektrode i messen, so entspricht das gemessene Potential Φ_i^{mess} nicht dem direkt unter der Haut liegenden Potential Φ_i , welches für eine erfolgreiche Rekonstruktion nötig ist. Man kann versuchen, das Potential zu korrigieren, indem man den Kontaktwiderstand z_i aus den hochfrequenten Anregungen bestimmt. (Dies wären Anregungen, bei der benachbarte Elektroden abwechselnd einen positiven und negativen Strom führen.) Da hierbei der Strom nicht tief in das Objekt eindringt, sondern hauptsächlich an der Oberfläche abfließt, kann über die Potentialdifferenz an zwei benachbarte Elektroden eine Abschätzung erfolgen. Dies ist aber eine sehr kritische Angelegenheit, das erwartete Signal ist extrem klein. Eine falsche Bestimmung des Kontaktwiderstandes würde eine total falsche Rekonstruktion zur Folge haben. Die einzige praktikable Vorgehensweise ist sicherlich, wenn man die Strom- und Spannungselektroden trennt. Bei

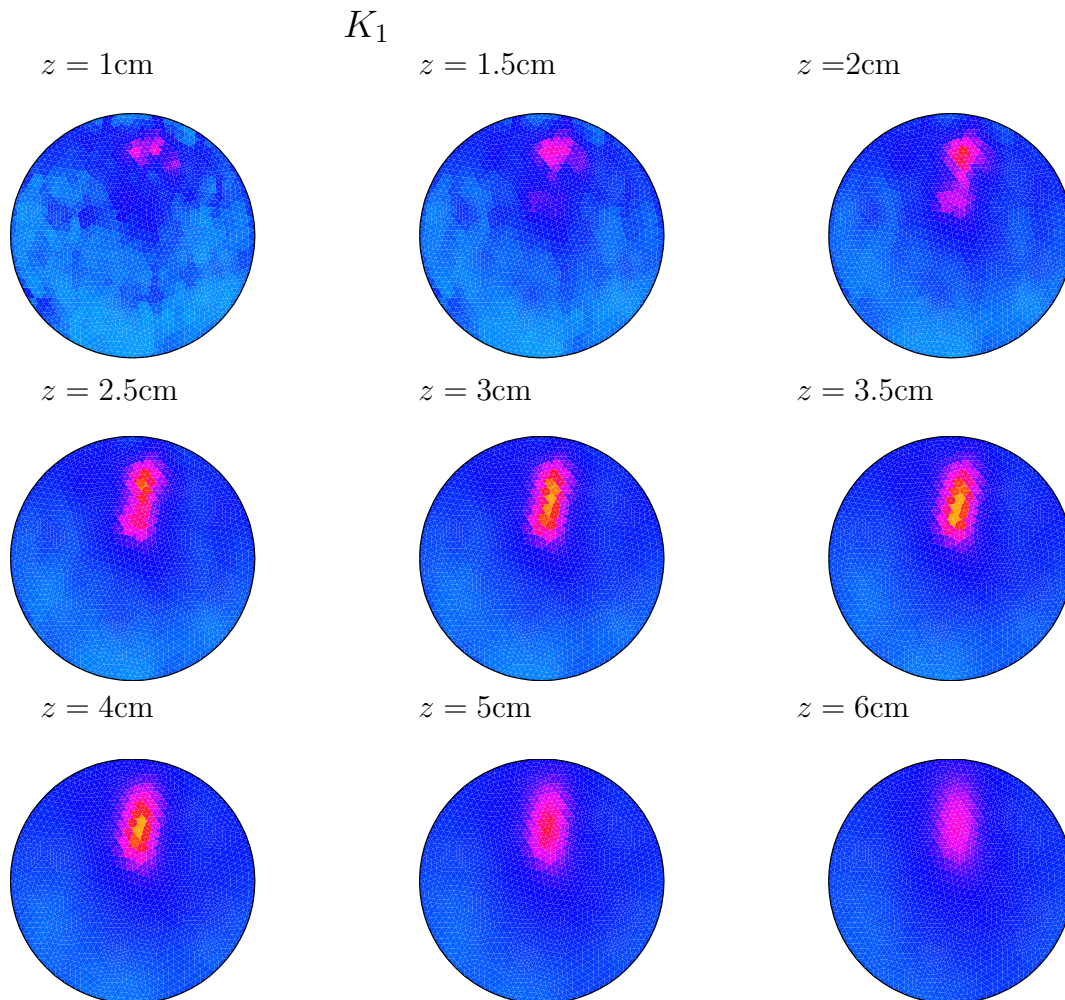


Abbildung 7.13: 3-dimensionale Gebietserkennung für Differenzdaten mit K_1 . Die Position der Kugel wird gut rekonstruiert. Die Tiefe ist nicht genau wiedergegeben. Die Kugel befindet sich 1cm über dem Meßstempel. Der Behälter ist mit 15cm Wasser gefüllt. Der Testdipol ist der für die unendlich ausgedehnte Halbebene, daher kann die Tiefe nicht genau wiedergegeben werden.

potentialmessenden Elektroden, die sehr hochohmig messen spielt der Kontaktwiderstand keine Rolle. Da kein Strom durch die Meßelektrode fließt, kann man mit Gleichung (7.17) das exakte Potential bestimmen. Bei strominjizierenden Elektroden ist dies anders, hier fließt ein Strom. Damit fällt am Kontaktwiderstand eine Spannung ab, die gemessene Spannung ist damit eine Zusammensetzung aus dem gesuchten Potential am Rand und dem Potential der am Kontaktwiderstand abfällt. Für diese Problematik ist auch eine zusammengesetzte Elektrode denkbar, die aus

einem äußeren Ring besteht, durch den der Strom eingespeist werden kann, und einer punktförmigen Elektrode in der Mitte des Rings, um das Potential zu messen.

Um unseren Rekonstruktionsalgorithmus zu testen, benutzen wir Daten, die am Rensselaer Polytechnic Institute [19][17] am Brustkorb eines Patienten aufgenommen wurden. Messungen am Patienten mit unserem Tomographen werden bald erfolgen. Bei der Messung am Patienten wurden um den Brustkorb 32 Elektroden mit gleichem Abstand angelegt. Auf den Elektroden wurde sowohl der Strom eingespeist als auch die Spannungsmessung durchgeführt. Damit ergibt sich die oben erwähnte Problematik des Kontaktwiderstandes. Ein vollständiger Satz an Stromkonfigurationen wurde eingespeist. Die Kontaktwiderstände wurden bestimmt und somit die Potentiale korrigiert. Es wird nicht klar, wie dies genau erfolgt ist. In Abbildung (7.14) ist eine Rekonstruktion des Brustkorbes mit korrigierten Rensselaer Daten gezeigt.

Zur Rekonstruktion wurde der Algorithmus für den Kreis benutzt. Hier sind die Eigenwerte des Neumann-nach-Dirichlet Operators bekannt und können benutzt werden, um eine theoretische Leermessung zu bestimmen. Die Hintergrundleitfähigkeit bestimmt man aus der Forderung, daß das Funktional $\mathcal{F}(\lambda)$ ein Minimum einnimmt:

$$\mathcal{F}(\lambda) = \| \mathbf{\Lambda}_M - \lambda \mathbf{\Lambda}_1 \|^2 \longrightarrow \min,$$

wo $\mathbf{\Lambda}_M$ der gemessene Neumann-nach-Dirichlet Operator ist. Mit $\mathbf{\Lambda}_{\sigma_0} = \sigma_0^{-1} \mathbf{\Lambda}_1$ erhält man für die Hintergrundleitfähigkeit

$$\sigma_0 = \frac{\| \mathbf{\Lambda}_1 \|^2}{\langle \mathbf{\Lambda}_M, \mathbf{\Lambda}_1 \rangle}. \quad (7.18)$$

Sowohl die Rekonstruktion mit theoretischer Leermessung und die Rekonstruktion für gefilterte Daten lassen in Abbildung (7.14) und (7.15) die Lungenflügel und das Herz erkennen. Der Gebietserkennungsalgorithmus erwies sich als weniger erfolgreich, da er nur für scharf lokalisierte Leitfähigkeitsverteilungen geeignet ist. Er schafft es nur, das Herz zu erkennen. Die ausgedehnten Lungen werden mit ihm nicht erkannt.

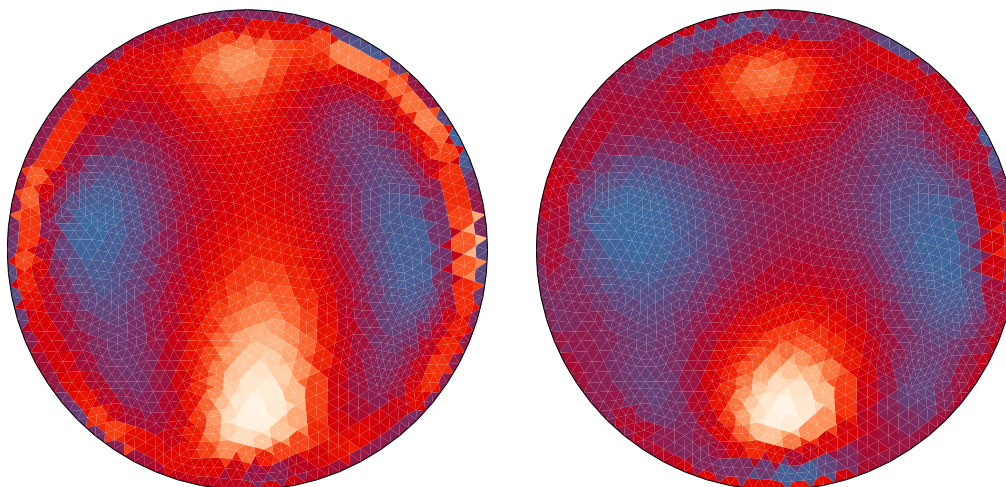


Abbildung 7.14: Der Brustkorb eines Patienten. Links: Die Rekonstruktion mit theoretischer Leermessung. Gut zu sehen sind die Lungenflügel mit einer niedrigeren Leitfähigkeit und das Herz mit einer höheren Leitfähigkeit. Rechts: Die Rekonstruktion für gefilterte Daten. Auch hier sind die Lungenflügel mit einer niedrigeren Leitfähigkeit und das Herz mit einer höheren Leitfähigkeit zu sehen.

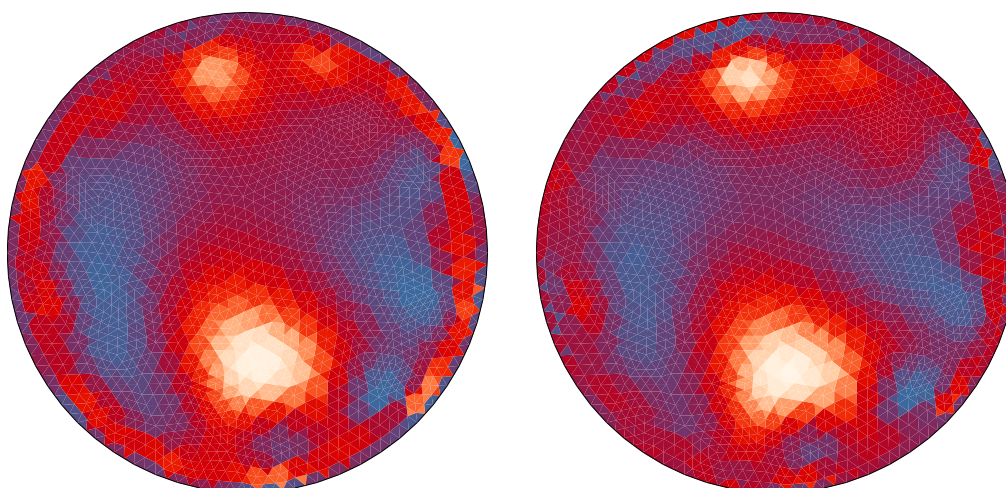


Abbildung 7.15: Der Brustkorb eines Patienten. Links: Die Rekonstruktion mit theoretischer Leermessung. Rechts: Die Rekonstruktion für gefilterte Daten. Die Rekonstruktionen sind hier mit schwächerer Regularisierung als in Abbildung 7.14.

8 Zusammenfassung

Die Elektrische Impedanztomographie soll als kostengünstige und nebenwirkungsfreie Tomographiemethode in der medizinischen Diagnostik, z. B. in der Mammographie dienen. Mit der EIT läßt sich Krebsgewebe von gesundem Gewebe unterscheiden, da es eine signifikant erhöhte Leitfähigkeit aufweist. Damit kann die EIT als Ergänzung zu den klassischen Diagnoseverfahren dienen. So ist z.B. bei jungen Frauen mit einem dichteren Fettgewebe die Identifizierung eines Mammakarzinoms mit der Röntgentomographie nicht immer möglich.

Ziel dieser Arbeit war es, einen Prototypen für die Impedanztomographie zu entwickeln und mögliche Anwendungen zu testen. Der Tomograph ist in Zusammenarbeit mit Dr. K.H. Georgi gebaut worden. Der Tomograph erlaubt es niederohmige, Wechselströme an Elektroden auf der Körperoberfläche einzuspeisen. Die Potentiale können an diesen Elektroden programmierbar vorgegeben werden. Weitere hochohmige Elektroden dienen zur Potentialmessung. Um den Hautwiderstand zu überbrücken, werden Wechselstromfrequenzen von 20-100 kHz eingesetzt. Mit der Möglichkeit der Messung von Strom und Potential auf unterschiedlichen Elektroden kann man das Problem des nur ungenau bekannten Hautwiderstandes umgehen.

Prinzipiell ist es mit dem Mainzer EIT System möglich, 100 Messungen in der Sekunde durchzuführen. Durch eine Mittelung, die statistische Fehler unterdrücken soll, und die begrenzte Übertragungsgeschwindigkeit von einer halben Sekunde, benötigt ein voller Meßzyklus ungefähr 15 Sekunden. In einer geplanten Erweiterung wird mehr Speicher zur Verfügung stehen, so daß die Zeit für einen Zyklus auf weniger als die Hälfte reduziert werden kann.

Auf der Basis von mit dem Mainzer EIT gewonnenen Daten sollten unterschiedliche Rekonstruktionsalgorithmen getestet und weiterentwickelt werden. In der Vergangenheit sind verschiedene Rekonstruktionsalgorithmen für das mathematisch schlecht gestellte EIT Problem betrachtet worden. Sie beruhen im Wesentlichen auf zwei Strategien

- Linearisierung und iterative Lösung des Problems
- Gebietserkennungsmethoden

Die iterativen Verfahren wurden von mir dahingehend modifiziert, daß Leitfähigkeitserhöhungen und Leitfähigkeitserniedrigungen gleichberechtigt behandelt wer-

den können. Für den modifizierten Algorithmus wurden zwei verschiedene Rekonstruktionsalgorithmen programmiert und mit synthetischen Daten getestet. Zum einen die Rekonstruktion über die approximative Inverse, zum anderen eine Rekonstruktion mit einer Diskretisierung. Speziell für die Rekonstruktion mittels Diskretisierung wurde eine Methode entwickelt, mit der zusätzliche Informationen in der Rekonstruktion berücksichtigt werden können, was zu einer Verbesserung der Rekonstruktion beiträgt. Der Gebietserkennungsalgorithmus kann diese Zusatzinformationen liefern.

Die Gebietserkennungsverfahren bedeuten im Wesentlichen die Suche nach Störungen in einer konstanten Leitfähigkeit. In der Arbeit wurde ein neueres Verfahren derart modifiziert, daß eine Rekonstruktion auch für getrennte Strom- und Spannungselektroden möglich wurde. Zudem erlaubt der neue Algorithmus eine unterschiedliche Anzahl von stromführenden und potentialmessenden Elektroden von unterschiedlich vielen Messungen zu verschiedenen Randbedingungen in einem Zyklus. Dies ist dann wichtig, wenn für höhere Strommuster das Signal so klein ist, daß Meßfehler das Signal überdecken.

Eine Reihe von Messungen wurden mit einer Metallkugel in einem mit einer leitenden Flüssigkeit gefüllten Behälter durchgeführt. Nach einer Leermessung wurde die Kugel in die Flüssigkeit getaucht. Mit Hilfe der Differenzdaten lassen sich ausgezeichnete Rekonstruktionen erzielen. Für die medizinischen Anwendungen sind aber Absolutmessungen nötig, d.h. ohne Leermessung. Der erwartende Effekt einer Inhomogenität in der Leitfähigkeit ist sehr klein und als Differenz zweier großer Zahlen sehr schwierig zu bestimmen. Die entwickelten Algorithmen kommen auch gut mit Absolutdaten zurecht.

Die entwickelten Algorithmen wurden auch eingehend mit synthetischen Daten getestet. Die mit Mathematica und MatLab entwickelten Programme werden Mitgliedern der Arbeitsgruppe zur Verfügung gestellt.

In der Erweiterung des Gerätes ist es vorgesehen die Elektrodenanzahl zu erhöhen, um eine bessere Auflösung zu erhalten.

A Anhang

A.1 Inverse Probleme

Bei der Untersuchung inverser Probleme sind folgende Punkte von besonderem Interesse:

- Ist der Operator des Problems nicht surjektiv, d.h. liegen die gemessenen Daten nicht zwingend im Bild des Operators, so ist es möglich, daß zu vorgegebenen Daten gar keine Lösung existiert. Grund dafür sind Fehler, von denen man zwei Typen zu unterscheiden hat:
 1. Fehler, die durch das Modell und den zugehörigen Operator entstehen, der i.a. niemals exakt ist,
 2. die unvermeidlichen experimentellen Meßfehler.

Obwohl in solch einem Fall keine Lösung im herkömmlichen Sinn existiert, ist es aber trotzdem möglich, ein Ergebnis zu erzielen, indem man eine verallgemeinerte Lösung angibt. Diese bezeichnet man als die Moore Penrose Lösung.

- Ist der Operator nicht injektiv, so muß eine existierende Lösung nicht eindeutig sein. Auch hier hilft einem die Moore-Penrose Lösung, um aus den i.a. unendlich vielen Möglichkeiten eine eindeutige Lösung zu finden. Diese ist die Lösung mit geringster Norm, die Lösung, die keine Anteile im Nullraum des Operators hat.
- Die exakte Lösung des Problems zu gegebenen fehlerbehafteten Daten kann trotz kleiner Fehler (auch Fehler aus Rechengenauigkeit) eine sehr schlechte Rekonstruktion ergeben.

Kleine Veränderung in den Daten können für große Änderungen im Ergebnis sorgen. So kann durch die Meßfehler (Rechengenauigkeit) eine völlig unsinnige Rekonstruktion erfolgen. Der Ausweg in einem solchen Fall ist die Stabilisierung oder Regularisierung des Problems.

Diese Problematik führt zur mathematischen Definition des schlecht gestellten Problems nach Hadamard:

Definition A.1 Seien X, Y topologische Räume und sei $A : X \rightarrow Y$ eine Abbildung. Das Problem (A, X, Y) heißt gut gestellt im Sinne von Hadamard, wenn

1. die Gleichung $Af = g$ für jedes $g \in Y$ eine Lösung hat,
2. diese Lösung eindeutig ist,
3. die Lösung stetig von den Daten abhängt.

Das Problem heißt schlecht gestellt, falls eine der Bedingungen nicht erfüllt ist.

Es ist jedoch zu beachten, daß die Forderung der Stetigkeit der inversen Abbildung (3.) zwar eine notwendige, aber keine hinreichende Bedingung für die Stabilität der Lösung ist.

Die Unterscheidung gut gestelltes oder schlecht gestelltes Problem nach Hadamard ist in der Praxis tatsächlich zu grob. Im Fall eines gut gestellten Problems läßt sich jedoch das Maß der Fehlerfortpflanzung von den Daten zur Lösung durch eine Konditionszahl bestimmen, die man durch einen Vergleich der relativen Fehler erhält [5][24]:

$$\frac{\|\delta f\|_X}{\|f\|_X} \leq \text{cond}(A) \frac{\|\delta g\|_Y}{\|g\|_Y}. \quad (\text{A.1})$$

Hierbei beschreibt δf den Fehler in der Lösung, während δg den Fehler in den Daten angibt.

Eine kleine Konditionszahl garantiert also eine stabile Lösung. Man spricht in diesem Fall auch von einem gut konditionierten Problem. Diese sind in der physikalischen Praxis jedoch leider ein Ausnahmefall, denn schlecht konditionierte Probleme mit großer Konditionszahl sind sehr viel häufiger anzutreffen. Die Behandlung dieser Probleme ist demnach der Hauptbestandteil in der Theorie der Inversen Probleme.

A.2 Fredholm'sche Integralgleichungen

Sei $K(s, t)$ eine Funktion von zwei Variablen $s \in [a, b]$ und $t \in [a, b]$ und seien weiterhin $f(s)$ und $\varphi(s)$ stetige Funktionen auf $s \in [a, b]$. Man nennt eine Gleichung eine Integralgleichung der ersten Art, wenn sie von folgender Form ist:

$$f(s) = \int_a^b K(s, t)\varphi(t)dt. \quad (\text{A.2})$$

Eine Integralgleichung der zweiten Art bezeichnet man eine Gleichung mit folgender Form:

$$f(s) = \varphi(s) - \lambda \int_a^b K(s, t)\varphi(t)dt. \quad (\text{A.3})$$

Ist der Kern $K(s, t)$ stetig für $s \in [a, b]$ und $t \in [a, b]$ oder besitzt er eine Unstetigkeit, erfüllt er aber folgende Bedingung:

$$\int_a^b \int_a^b |K(s, t)|^2 ds dt < \infty, \quad (\text{A.4})$$

so wird die Gleichung (A.2) oder Gleichung (A.3) als Fredholm'sche Integralgleichung bezeichnet.

Hat der Kern $K(s, t)$ die Form

$$K(s, t) = \frac{H(s, t)}{|s - t|^\alpha}, \quad (\text{A.5})$$

mit $H(s, t)$ beschränkt und $0 < \alpha < 1$, dann bezeichnet man die Integralgleichung als Integralgleichung mit schwacher Singularität. Ist der Kern von folgender Form

$$K(s, t) = \frac{A(s, t)}{s - t}, \quad (\text{A.6})$$

wobei der Zähler $A(s, t)$ eine differenzierbare Funktion von s und t ist, so wird die Integralgleichung als Singuläre Integralgleichung bezeichnet.

Diese Klassifizierung ist nicht komplett, allerdings sind diese in der Praxis die wichtigsten Typen. Desweiteren sind die Unterschiede zwischen den Integralgleichungen mit schwacher Singularität und den Fredholm'schen Integralgleichungen nicht wesentlich. Die wichtigsten Resultate gelten für beide Typen. Daher werden nur Fredholm'sche Integralgleichungen betrachtet.

Fredholm'sche Integralgleichungen zweiter Art sind in der Regel einfacher zu invertieren. Durch den "Rückkopplungsparameter" λ wird die Lösung regularisiert.

Schwierigkeiten bei der Inversion tauchen bei der Fredholm'schen Gleichung erster Art auf. Hier findet keine Rückkoppelung der Gleichung statt.

Betrachten wir einfachheitshalber einen symmetrischen Kern, der sich in Eigenfunktionen entwickeln läßt:

$$K(s, t) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\varphi_i(s)\varphi_i(t)}{\lambda_i} \quad (\text{A.7})$$

mit den Eigenwerten $\mu_i = 1/\lambda_i$, so kann man eine formale Lösung mit

$$\varphi(s) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \lambda_\nu \langle f, \varphi_\nu \rangle \varphi_\nu(s), \quad (\text{A.8})$$

angeben. Eine Lösung der Gleichung (A.2) existiert sicherlich, wenn die Eigenwerte μ_i sehr schnell abfallen. Für die inverse Lösung φ in Gleichung (A.8) ergibt sich dann die Problematik daß die Lösung durch die hohen $\lambda_i = 1/\mu_i$ instabil wird.

Kleine Fehler werden extrem skaliert. Die Formale Lösung ist damit nur bedingt brauchbar. Der allgemeine Fall wird durch das Picard Theorem abgedeckt, welches notwendige Bedingungen an den Kern stellt, damit eine quadratintegrierbare Lösung $\varphi(s)$ existiert.

A.3 SVD Singulärwertzerlegung eines Operators

Der Integraloperator K zwischen zwei Hilberträumen X und Y ist kompakt (G kompakt).

$$\begin{aligned} K : X &\mapsto Y, & K : \mathcal{L}^2(G) &\mapsto \mathcal{L}^2(G), \\ x &\mapsto (Kx)(s) := \int_G K(s, t)x(t)dt. \end{aligned} \quad (\text{A.9})$$

Für jeden kompakten Operator zwischen den beiden Hilberträumen X und Y existiert ein "Singuläres System" $\{\mu_i; u_i, v_i\}_{i \in \mathbb{N}}$, welches wie folgt definiert ist: Wenn

$$K^* : Y \mapsto X \quad (\text{A.10})$$

den adjungierten Operator zu K bezeichnet, mit der geforderten Bedingung $\langle Kx, y \rangle = \langle x, K^*y \rangle$, dann sind die $\{\mu_i^2\}_{i \in \mathbb{N}}$ die endlichen Eigenwerte zum selbstadjungierten Operator K^*K und auch zu KK^* .

In absteigender Größe und Multiplizität geschrieben $\{\mu_i > 0\}$, bilden die $\{u_i\}$ das komplette Orthogonalsystem von Eigenvektoren für K^*K mit $\mathcal{R}(K^*) = \mathcal{R}(K^*K)$, und ebenso bilden die $\{v_i\}$, die über

$$v_i := \frac{Ku_i}{\|Ku_i\|} \quad (\text{A.11})$$

definiert sind, das komplette Orthogonalsystem von Eigenvektoren für KK^* mit $\mathcal{R}(K) = \mathcal{R}(KK^*)$.

Die singuläre Zerlegung des Operators schreibt sich zu:

$$K(s, t) = \sum_i^\infty \mu_i u_i(t) v_i(s) \quad (\text{A.12})$$

Man hat folgende Beziehungen

$$Kx = \sum_i^\infty \mu_i \langle x, u_i \rangle v_i \quad x \in X \quad (\text{A.13})$$

$$K^*y = \sum_i^\infty \mu_i \langle y, v_i \rangle u_i \quad y \in Y \quad (\text{A.14})$$

$$K u_i = \mu_i v_i \quad (\text{A.15})$$

$$K^* v_i = \mu_i u_i \quad (\text{A.16})$$

$$K^* K u_i = \mu_i^2 u_i \quad (\text{A.17})$$

$$K K^* v_i = \mu_i^2 v_i \quad (\text{A.18})$$

Mit verallgemeinerten Inversen $y = (K^* K)^{-1} K^* x$ hat man dann

$$y = \sum_i^{\infty} \mu_i^{-1} \langle x, v_i \rangle u_i. \quad (\text{A.19})$$

A.4 Die verallgemeinerte Inverse (Moore-Penrose Lösung)

Gegeben sei das mit Fehlern behaftete Bild g und der lineare Operator A , der folgende Situation beschreibt:

$$A f = g. \quad (\text{A.20})$$

Wir sind an der Lösung f interessiert. Da g als fehlerbehaftetes Bild nicht im Bildraum von A liegen muß, existiert eigentlich gar keine Lösung zu (A.20). Daher sucht man nach einer Lösung, die den Defekt (das Funktional)

$$\mathcal{J}(f, g) = \| A f - g \|^2 \quad (\text{A.21})$$

minimiert. Damit ergibt sich die sogenannte Normalengleichung

$$A^* A f = A^* g. \quad (\text{A.22})$$

Die Lösung der Gleichung lautet

$$f = (A^* A)^{-1} A^* g. \quad (\text{A.23})$$

$A^+ = (A^* A)^{-1} A^*$ wird als die verallgemeinerte Inverse bezeichnet.

Durch die Definition des adjungierten Operators sieht man, daß

$$0 = \langle A x = 0, y \rangle = \langle x, A^* y \rangle, \quad (\text{A.24})$$

daß also der Bildraum $\mathcal{R}(A)$ orthogonal zum Nullraum $\mathcal{N}(A^*)$ steht, ebenso steht der Bildraum der verallgemeinerten Inversen A^+ senkrecht auf dem Nullraum von A^* . Damit hat man über die Lösung mit der verallgemeinerten Inversen die Lösung mit der geringsten Norm.

Im Falle von schlechtgestellten Operatoren, ist $(A^* A)^{-1}$ nicht ohne weiteres zu berechnen. $A^* A$ erbt die Schlechtgestellttheit des Operators A . Hier muß eine Regularisierung durchgeführt werden. Diese kann über eine Tikhonov-Regularisierung oder eine abgeschnittene Singulärwertzerlegung erfolgen.

A.4.1 Matrizen

In diesem Abschnitt werden speziell reelle Matrizen betrachtet [13]. Gilt es das Problem für eine reelle Matrix \mathbf{A} ($\mathbf{A}_{n \times m}$) mit

$$\mathbf{A}\vec{x} = \vec{f}, \quad (\text{A.25})$$

für \vec{x} zu lösen, so geht das einfach, wenn die Matrix quadratisch ist ($n = m$), und ihr Rang maximal ist $\text{rang}(\mathbf{A}) = n$. Die Lösung ergibt sich zu.

$$\vec{x} = \mathbf{A}^{-1}\vec{f} \quad (\text{A.26})$$

Für den Fall das $m > n$ und $\text{rang}(\mathbf{A}) = n$ hat man ein überbestimmtes Gleichungssystem; eine Lösung im eigentlichen Sinn existiert nicht.

Für den umgekehrten Fall $m < n$ und $\text{rang}(\mathbf{A}) = m$ ist das Gleichungssystem unterbestimmt und die Lösung ist nicht eindeutig.

Über die Forderung, daß der Defekt minimiert wird,

$$\mathcal{J} = \|\mathbf{A}\vec{x} - \vec{f}\|^2 \rightarrow \min, \quad (\text{A.27})$$

wird eine verallgemeinerte Inverse eingeführt. Diese existiert auch, wenn \vec{f} nicht im Bildraum von \mathbf{A} liegt.

Eine Minimierung dieses Funktionals führt auf die sogenannte Normalengleichung:

$$\mathbf{A}^T\mathbf{A}\vec{x} = \mathbf{A}^T\vec{f}. \quad (\text{A.28})$$

Damit hat man die verallgemeinerte Inverse,

$$\vec{x} = (\mathbf{A}^T\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}^T\vec{f} = \mathbf{A}^+\vec{f}. \quad (\text{A.29})$$

Sie liefert die Lösung mit der kleinsten Norm. Die so gefundene Lösung steht senkrecht auf dem Nullraum von \mathbf{A} [13].

Für den Fall $m > n$ schreibt sie sich

$$\vec{x} = \mathbf{A}^T(\mathbf{A}\mathbf{A}^T)^{-1}\vec{f} = \mathbf{A}^+\vec{f}. \quad (\text{A.30})$$

Wenn der Rang der Matrix kleiner als die Anzahl der Spalten bzw. kleiner als die Anzahl der Zeilen ist, $\text{rang}(\mathbf{A}) < \min(m, n)$, so kann eine Invertierung der quadratischen Matrizen $\mathbf{A}^T\mathbf{A}$ bzw. $\mathbf{A}\mathbf{A}^T$ nicht ohne weiteres durchgeführt werden.

Für die Invertierung einer quadratischen Matrix, die nicht den vollen Rang besitzt, muß eine Regularisierung durchgeführt werden. Dies kann anhand einer Tikonv-Regularisierung erfolgen oder einer Regularisierung mittels der Singulärwertzerlegung.

A.5 Tikhonov-Regularisierung

Die verallgemeinerte Lösung, die man aus der verallgemeinerten Inversen erhält, ist im Falle von schlecht gestellten Problemen nicht sehr aussagekräftig, da Fehler in der Lösung durch den Inversen Operator extrem skaliert werden. Daher müssen zusätzliche, physikalisch vernünftige Zusatzbedingungen eingeführt werden.

Es wird ein sogenannter Strafterm eingefügt, dieser soll die Lösung mit geringer Norm bevorzugen:

$$\mathcal{J}_\lambda = \| \mathbf{A}f - g \|^2 + \lambda \| f \|^2 \rightarrow \text{minimal}. \quad (\text{A.31})$$

Damit hat man die Normalengleichung zu lösen,

$$(\mathbf{A}^* \mathbf{A} + \lambda \mathbf{I})f = \mathbf{A}^* g. \quad (\text{A.32})$$

Die regularisierte Lösung f_λ kann geschrieben werden als

$$f_\lambda = \mathbf{R}_\lambda g \quad (\text{A.33})$$

$$\mathbf{R}_\lambda = (\mathbf{A}^* \mathbf{A} + \lambda \mathbf{I})^{-1} \mathbf{A}^*. \quad (\text{A.34})$$

Der Operator \mathbf{R}_λ ist eine Approximation der verallgemeinerten Inversen \mathbf{A}^+ . Mittels der Singulärwertzerlegung schreibt sich die Lösung als

$$f_\lambda = \sum \frac{\mu_i}{\mu_i^2 + \lambda} \langle g, u_i \rangle v_i. \quad (\text{A.35})$$

A.6 Abgeschnittene Singulärwertzerlegung

Die weiche Regularisierung A.35 kann durch eine scharfe Regularisierung ersetzt werden. Zu kleine Singulärwerte $\mu_i < \lambda$, die hauptsächlich die Fehler in der Inversion extrem verstärken würden, werden einfach abgeschnitten. Damit hat man

$$f_\lambda = \sum_i^{\mu_i > \lambda} \mu_i^{-1} \langle g, u_i \rangle v_i. \quad (\text{A.36})$$

Die so erhaltene Inverse wird als Pseudoinverse bezeichnet.

A.7 Gewichtete Pseudoinverse

Folgendes Beispiel zeigt, ein wie für eine schlecht konditionierte Matrix eine Lösung mit Zusatzbedingungen gefunden wird. Dazu wird die ursprüngliche Matrix modifiziert:

$$\mathbf{A} \vec{x} = \vec{f} \quad (\text{A.37})$$

$$\sum_j \mathbf{A}_{ij} x_j = \sum_j \mathbf{A}_{ij} q_j \frac{1}{q_j} x_j = f_i, \quad (\text{A.38})$$

mit $A'_{ij} = A_{ij}q_j$ und $x'_j = \frac{1}{q_j}x_j$. Mit der Pseudoinversen wird die Inverse der Matrix A' bestimmt wobei sehr kleine Singulärwerte abgeschnitten werden. Die Pseudoinverse liefert für das Least-Squares Problem die Lösung mit kleinster Norm.

$$\|A'\vec{x}' - \vec{f}\|^2 \text{ minimal, } \sum_i \left(\frac{x_i}{q_i}\right)^2 \text{ minimal.} \quad (\text{A.39})$$

Damit können über eine geeignete Wahl des Wichtungsvektors \vec{q} gewisse Lösungen für das Problem $A\vec{x} = \vec{f}$ unterdrückt werden. In dem folgenden Beispiel soll diese Vorgehensweise erläutert werden.

Beispiel

Für die folgende Matrix

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2.01 & 1.99 \\ 3 & 3 & 2.99 \\ 4 & 4.1 & 3.9 \end{bmatrix} \vec{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} \quad (\text{A.40})$$

mit den Singulärwerten $\mu = (9.4843, 0.0874, 0.0023)$, mit $\mu_1 \gg \mu_3$ liefert die Lösung mit der Pseudoinversen $\vec{x} = (1, 0, 0)$.

Möchte man nun Zusatzinformationen einführen, so wird die Wichtung der Spalten eingeführt. Soll der Wert von x_1 unterdrückt werden so kann die Matrix z.B mit einem Vektor $\vec{q}_1 = (1, 10, 10)$ gewichtet werden. Damit hat man folgende Gleichung zu lösen:

$$\begin{bmatrix} 1 & 10 & 10 \\ 2 & 20.1 & 19.9 \\ 3 & 30 & 29.9 \\ 4 & 41 & 39 \end{bmatrix} \vec{x}' = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}, \quad (\text{A.41})$$

die Singulärwerte der modifizierten Matrix sind $\mu = (77.6226, 0.8731, 0.0028)$. Schneidet man den letzten Singulärwert ab so erhält man $\vec{x} = (0.005, 0.4730, 0.5232)$. Setzt man diese Lösung wieder ein, so erhält man für $\vec{f}_1 = (1.0012, 2.0019, 2.9984, 3.9999)$ Diese Lösung liefert nicht das exakte \vec{f} , allerdings konnte der Wert für x_1 unterdrückt werden.

Für eine schwächere Wichtung $\vec{q}_2 = (1, 2, 2)$ ergeben sich die Singulärwerte der modifizierten Matrix $\mu = (16.4259, 0.1747, 0.0026)$. Schneidet man den letzten Singulärwert ab, so erhält man $\vec{x} = (0.1116, 0.4223, 0.4672)$. Setzt man diese Lösung wieder ein, so hat man für $\vec{f}_2 = (1.0011, 2.0017, 2.9986, 3.9999)$ Hier wird x_1 schwächer unterdrückt.

Die Differenz $\delta f_1 = \|\vec{f} - \vec{f}_1\| = 0.0028$ für die Wichtung \vec{q}_1 ist größer als die Differenz $\delta f_2 = \|\vec{f} - \vec{f}_2\| = 0.0025$ für die Wichtung \vec{q}_2 . Die Differenz der beiden Lösungen für \vec{x} hingegen ist relativ groß.

Hat man Vorinformation, die man in den Lösungsprozeß mit einbringen möchte, so kann über die oben beschriebene Wichtung eine Lösung mit Zusatzinformationen erhalten werden. Dies ist deswegen möglich, da große Änderungen in \vec{x} kleine Änderungen in \vec{f} liefern.

A.8 Bessel-Funktionen

Die Bessелеigenfunktionen bilden ein vollständiges System auf dem Kreis [11]. Sie ergeben sich aus folgender Eigenwertgleichung:

$$\Delta v = -\lambda v. \tag{A.42}$$

In Polarkoordinaten lautet die Eigenwertgleichung

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial v}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v}{\partial \varphi^2} = -\lambda v. \tag{A.43}$$

Durch den Separationsansatz

$$v(r, \varphi) = \rho(r)w(\varphi) \tag{A.44}$$

erhält man die zwei Differentialgleichungen für den Winkel- und Radialteil:

$$\frac{1}{r} (r\rho'(r))' + \left(\lambda - \frac{\nu^2}{r^2} \right) \rho(r) = 0, \quad r \in [0, 1] \tag{A.45}$$

$$w''(\varphi) + \nu^2 w(\varphi) = 0, \tag{A.46}$$

wobei ν eine Konstante ist.

Die Eigenfunktionen für das Dirichlet-Problem $v|_{\partial\Omega} = 0$ auf dem Einheitskreis sind

$$v_{lk}(\vec{x}) = \frac{c_{lk}}{\sqrt{\pi(1 + \delta_{10})}} \begin{cases} J_l(j_{lk}r) \cos(l\varphi) & , \quad l \geq 0 \\ J_{-l}(j_{-lk}r) \sin(l\varphi) & , \quad l < 0 \end{cases}, \tag{A.47}$$

mit

$$c_{lk} = \frac{\sqrt{2}}{|J_{l+1}(j_{lk})|} \tag{A.48}$$

und den dazugehörigen Eigenwerten

$$\lambda_{lk} = j_{lk}^2 \tag{A.49}$$

Die J_l sind die Besselfunktionen und die j_{lk} die k-ten Nullstellen der J_l .

Für das Neumann-Problem $v'|_{\partial\Omega} = 0$ hat man

$$v_{lk}(\vec{x}) = \frac{c_{lk}}{\sqrt{\pi(1+\delta_{10})}} \begin{cases} J_l(j_{lk}^* r) \cos(l\varphi) & , \quad l \geq 0 \\ J_{-l}(j_{-lk}^* r) \sin(l\varphi) & , \quad l < 0 \end{cases} , \quad (\text{A.50})$$

mit

$$c_{lk} = \sqrt{\frac{2}{1 - (l/j_{lk}^*)^2}} \frac{1}{|J_l(j_{lk}^*)|} \quad (\text{A.51})$$

und

$$\lambda_{lk} = j_{lk}^{*2} , \quad (\text{A.52})$$

wobei die j_{lk}^* die k -ten Nullstellen der J_l' sind. Diese Funktionen sind auf dem Kreis vollständig.

Literaturverzeichnis

- [1] www.med.siemens.com *TransScan2000 for breast cancer detecting*.
- [2] Fließbach, T. *Elektrodynamik*, Spektrum Akademischer Verlag (1997)
- [3] Barber, D.C. und Brown, B.H. *Applied potential tomography*, J. Phys.E: Sci. Instrum., Vol. 17, (1984)
- [4] Barber, D.C. und Seager, A.D. *Fast reconstruction of resistance images*, Clin.Phys.Physiol.Meas., Vol.8, Suppl.A, 47-54 (1987)
- [5] Lehmann, C. *Die Mammographie als Anwendungsbeispiel in der elektrischen Impedanztomographie*, Dissertation, Fachbereich Physik der Johannes Gutenberg-Universität Mainz (2000)
- [6] Savelsberg, I. *Elektrische Impedanztomographie mit realistischen Daten*, Dissertation, Fachbereich Physik der Johannes Gutenberg-Universität Mainz (1998)
- [7] J. KEVORKIAN *Partial Differential Equations, Analytical Solution Techniques*, Second Edition, Texts in applied Mathematics 35, 2000 Springer-Verlag, New York
- [8] Hanke, M. *Mathematische Grundlagen der elektrischen Impedanztomographie*, Skript zur Vorlesung
- [9] Brühl, M., Hanke, M. und Wanzki, H. *Ein Rekonstruktionsverfahren für die elektrische Impedanztomographie*, Preprint des Instituts für praktische Mathematik, Universität Karlsruhe
- [10] Brühl, M. *Gebietserkennung in der elektrischen Impedanztomographie*, Dissertation Fakultät für Mathematik der Universität Karlsruhe
- [11] H.Fischer, H.Kaul, *Mathematik für Physiker*, Teubner Verlag
- [12] C. Sebu, *Inverse Problems in Classical and Quantum Physics*, PhD thesis, Univ. Montp. II,(2004)

- [13] Gene H. Golub and Charles F. van Loan, *Matrix Computations*, 2nd edn., The John Hopkins University Press, 1989.
- [14] Kohn, R. und Vogelius, M. *Determining Conductivity by Boundary Measurements*, Comm.Pure.Appl.Math. (1984), 289-298
- [15] A.Rieder, *Keine Probleme mit Inversen Problemen*, Vieweg Verlag (2003)
- [16] W.H. Press, S.A. Teukolsky, W.T. Vetterling, and B.P. Flannery, *Numerical Recipes in C*, Second edition, Cambridge University Press, 1995.
- [17] Cheney, M. Isaacson, D. und Newell, J. *Electrical impedance Tomography*, Preprint des Rensselaer Polytechnic Institute, Troy N.Y
- [18] Cheney, M., Isaacson, D., Newell, J., Goble, J., Simske, S. *NOSER: An algorithm for solving the inverse conductivity problem*, Int. J. Imag. Syst. Techn. 2, 66-75, (1990)
- [19] <http://www.rpi.edu>
- [20] Louis, A.K. *Inverse und schlecht gestellte Probleme*, Teubner, Stuttgart (1989)
- [21] Louis, A.K. und Maass, P. *A mollifier method for linear operator equations of the first kind*, Inverse Problems 6 (1990), 427-440
- [22] Louis, A.K. *Approximative inverse for linear and some nonlinear problems*, Inverse Problems, Vol.11, No.6, 1211-1224
- [23] Gisser, D.G., Isaacson, D. und Newell, J.C. *Electric current computed tomography and eigenvalues*, SIAM J.Appl.Math., Vol.50 No.6, 1623-1634
- [24] Baumeister, J. *Stable solution of inverse problems*, Friedr. Vieweg & Sohn, Braunschweig/Wiesbaden
- [25] A. D. Polyanin, *Handbook of Linear Partial Differential Equations for Engineers and Scientists*, Chapman & Hall/CRC Press, Boca Raton, 2002.
- [26] D. Braess, *Finite Elemente*, Springer-Verlag, Berlin (1991)
- [27] <http://www.hpfem.jku.at/netgen>
- [28] <http://eidors3d.sourceforge.net>
- [29] <http://www.mathworks.com/products/pde/index.html?ref=pfomain>
- [30] <http://www.mathworks.com>
- [31] <http://www.mathworks.com/access/helpdesk/help/techdoc/ref/spline.html>