

Beiträge zur Modellierung technischer dynamischer Systeme

Dissertation
zur Erlangung des Grades
„Doktor der Naturwissenschaften“

am Fachbereich Physik
der Johannes Gutenberg-Universität Mainz

Carsten Michel

Mainz, März 2000

Datum der mündlichen Prüfung : 2000

Inhaltsverzeichnis

Symbolverzeichnis	iii
1 Einleitung	1
1.1 Modellierungsprozeß	1
1.2 Probleme der mathematischen Behandlung	2
1.3 Konsequenzen und Überblick	3
2 Theoretische Grundlagen	5
2.1 Deterministische dynamische Systeme	5
2.2 Zeitreihenanalyse	7
2.2.1 Zustandsrekonstruktion	7
2.2.2 Nichtlineare Kenngrößen	7
3 Gesetzesbasierte Modellbildung	11
3.1 Einleitung	11
3.2 Elementare Schwingungsmechanismen	12
3.2.1 Lineare Schwingungen	12
3.2.2 Die nichtlineare Schwingungsgleichung (Liénard-Gleichung)	13
3.2.3 Dämpfung und Verstärkung (van der Pol-Gleichung)	16
3.3 Mechanisch-technische Systeme	18
3.3.1 Mechanische Reibung	18
3.3.2 Stöße zwischen Bausteinen	20
3.4 Spezielle nichtlineare Effekte in komplexen Systemen	22
3.4.1 Intermittenz	23
3.4.2 Bifurkationen	23
3.5 Bewertung	25
3.5.1 Nichtlineare Phänomene	26
3.5.2 Mechanismen	27
3.5.3 Berechenbarkeit	29
4 Basisbasierte Modelle	31
4.1 Entwicklung nach Funktionensystemen	31
4.1.1 Zerlegung und Darstellung	31
4.1.2 Funktionensysteme als Lösung klassischer Probleme	32
4.1.3 Grenzfälle der Brauchbarkeit	33
4.2 Grundlagen der Waveletanalyse	34
4.2.1 Eine Aufgabenstellung aus der Praxis	34
4.2.2 Wavelets als lokalisierte skalierende Basisfunktionen	34
4.2.3 Vollständigkeit und Orthonormalität	38
4.3 Gesichtspunkte der Anwendung	39
4.3.1 Darstellung durch Details und Verfeinerungen	39

4.3.2	Begrenzung durch endlicher Datenreihen	40
4.3.3	Interpolation oder Extrapolation	41
4.4	Schema der Wavelet-Analyse	42
4.4.1	Wahl der Wavelets	42
4.4.2	Schnelle Wavelet-Transformation	44
4.5	Wavelet-Surrogate	46
4.6	Bewertung und Zusammenfassung	47
5	Topologische Zeitreihenanalyse	51
5.1	Grundlegende Bemerkungen	51
5.2	Komplexe, Triangulierung und Tesselation	51
5.2.1	Simpliziale Komplexe	52
5.2.2	Triangulierung und Mosaiksteine	53
5.3	Morse-Theorie und Euler-Charakteristik	54
5.4	Dynamik auf dem Reißbrett	56
5.4.1	Vorgehensweise	57
5.4.2	Knoten und Zöpfe	58
5.4.3	Verschlingungs- und Windungszahlen	60
5.4.4	Knotenhalter	62
5.5	Was haben wir gewonnen?	62
6	Modellierung durch stochastische Prozesse	65
6.1	Grundlegende Konzepte	65
6.1.1	Zufällige Ereignisse und ihre Verteilungen	65
6.1.2	Von der Zufallsvariablen zum stochastischen Prozeß	67
6.1.3	Markov-Prozesse	68
6.2	Lineare Modelle stochastischer Prozesse	70
6.2.1	Der einfachste Fall: ARMA-Modelle	70
6.2.2	Erweiterungen der ARMA-Modellklasse	72
6.2.3	Grenzen linearer Modelle	73
6.3	Allgemeine stochastische Modellansätze	73
6.3.1	Stochastische Bewegungsgleichungen	73
6.3.2	Rekonstruktion via Fokker-Planck-Gleichung	76
6.4	Stochastische dynamische Systeme	80
7	Fazit und Ausblick	83
A	Bifurkationstheorie	85
B	Theoretische Betrachtung der Wavelets	89
B.1	Multiskalenanalyse und Skalierungsfunktionen	89
B.2	Eigenschaften der Filterkoeffizienten	91
B.3	Koeffizientenbestimmung in der FWT	92
B.4	Wavelet-Pakete	93
C	Stochastische Prozesse	95
	Danksagung	105

Symbolverzeichnis

$\{a_1, a_2, \dots\}$	Menge von Elementen a_1, a_2, \dots
$\{x \mid \mathcal{E}(x)\}$	Menge von Elementen mit der Eigenschaft \mathcal{E}
\emptyset	leere Menge
A^C	Komplement der Menge A in Ω : $A^C = \{x \in \Omega \mid x \notin A\}$
$\mathcal{P}(A)$	Potenzmenge der Menge A
\mathbb{N}	Menge der natürlichen Zahlen
\mathbb{Z}	Ring der ganzen Zahlen
\mathbb{R}	Körper der reellen Zahlen
\mathbb{C}	Körper der komplexen Zahlen
z^*	komplex konjugierter Zahl zu $z \in \mathbb{C}$
$[a, b]$	abgeschlossenes Intervall von a bis b
$]a, b[$	offenes Intervall von a bis b
$\ \cdot\ $	euklidische Norm im \mathbb{R}^n
$\langle \cdot, \cdot \rangle$	Skalarprodukt
$B_\varepsilon(x)$	offener Ball mit Radius ε um Mittelpunkt $x \in \mathbb{R}^n$
$C^r(X)$	Menge der r -fach differenzierbaren Funktionen auf X
$\text{clos}(A)$	Abschluß der Menge A
D^n	n -dimensionale Vollkugel, $D^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \ x\ \leq 1\}$
$\delta(\cdot)$	Dirac'sche Deltadistribution
$\Gamma(x)$	Gamma-Funktion $\Gamma(x) = \int_0^\infty dt t^{x-1} e^{-t}$
$id _M$	Identische Abbildung auf der Menge M : $id _M(x) = x$ für alle $x \in M$
$L^2(\mathbb{R})$	Menge der quadrat-integrierbaren Funktionen über \mathbb{R}
$l^2(\mathbb{Z})$	Menge der quadrat-summierbaren Funktionen über \mathbb{Z}
$\text{rg } A$	Rang der Matrix A
S^n	n -Sphäre, $S^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \ x\ = 1\}$
σ_r	r -Simplex
$\text{sgn}(x)$	Signum-Funktion
$\text{span} \{e_1, e_2, \dots\}$	linearer Raum, der durch Vektoren e_1, e_2, \dots aufgespannt wird
$\sup_A f(x)$	Supremum der Funktion $f(x)$ über der Menge A
$\text{supp } f(x)$	Träger der Funktion $f(x)$: $\text{supp } f(x) = \{x \in \mathbb{R} \mid f(x) \neq 0\}$
$\Theta(\cdot)$	Heavyside-Sprungfunktion
φ_t	Flußabbildung
ϕ	Skalierungsfunktion
ψ	Wavelet
$T_x M$	Tangentialraum an den Punkt $x \in M$
$TM = \bigcup_x T_x M$	Tangentialbündel der differenzierbaren Mannigfaltigkeit M
W^u	instabile Mannigfaltigkeit
W^s	stabile Mannigfaltigkeit

Kapitel 1

Einleitung

Die physikalische Betrachtung von Systemen besteht i.a. darin, sich auf ausgewählte Aspekte des zu untersuchenden Objektes zu beschränken und diese Aspekte anschließend mit Hilfe einer mathematischen Theorie zu beschreiben. Der Gegenstand jeder mathematisch-physikalischen Theorie ist somit letztendlich immer ein Modell. Im physikalischen Erkenntnisprozeß spielen Modelle auch deshalb eine wichtige Rolle, weil zahlreiche physikalische Objekte und Erscheinungen nicht unmittelbar erfaßbar oder nur schlecht anschaulich vorstellbar sind. Sie liefern somit einen unschätzbaren Beitrag zur Interpretation von Messungen und zur Gewinnung neuer Erkenntnisse. Das Ziel dieser Arbeit ist es, verschiedene Ansätze der Modellierung im Hinblick auf ihre Verwendbarkeit in der Praxis, insbesondere im Ingenieurbereich zu beleuchten.

1.1 Modellierungsprozeß

Der Modellierungsprozeß beinhaltet mehrere Stufen. Ein wesentlicher Gesichtspunkt ist zunächst einmal die Frage nach dem Modellziel bzw. dem Modellzweck. Bevor man überhaupt damit beginnt, ein Modell zu konstruieren, muß man festlegen, auf welche Frage ein Modell überhaupt Antworten geben soll. Mögliche Modellziele liegen in der Steuerung und Regelung von technischen Systemen, bei der konstruktiven Optimierung oder etwa in der Diagnose bei der Schwachstellenanalyse. Es stellt für die Modellierung einen grundsätzlichen Unterschied dar, ob man etwa fragt, *wie* irgendetwas funktioniert (deskriptives Modell), oder *was* man tun muß, damit bestimmte Ereignisse eintreten (sog. taktische Modelle). Besonders bei der Behandlung technischer Systeme treffen üblicherweise Perspektiven mit unterschiedlichen Zielsetzungen aufeinander: Physik und Ingenieurwissenschaft. Solange eine Modelldarstellung für die zu behandelnde Aufgabe effektiv ist, wird sich ein Praktiker nicht um die zugrundeliegenden Mechanismen kümmern. Die Minimierung der Implementationskosten steht hier im Vordergrund. Der Physiker dagegen interessiert sich für die Bedeutung dieser Modelldarstellung im Bezug auf die Naturgesetze, d.h. für ihn sind diese Mechanismen wesentlich.

Der nächste Schritt besteht in der Identifikation einer Menge von Phänomenen und ausgewählter Eigenschaften, die das zu modellierende Objekt zeigt. Diesen Eigenschaften müssen geeignete physikalische Begriffe zugeordnet werden.

Im Mittelpunkt der Modellierung steht oftmals die Formulierung einer geeigneten mathematischen Theorie. Dieser Prozeßschritt läßt sich in zwei große Aufgaben unterteilen, nämlich die Feststellung der möglicherweise in Frage kommenden Modellklassen, und die darauf folgende Wahl eines im Hinblick auf Ziel und Zweck geeigneten Repräsentanten. Die Auswahlkriterien können verschiedene Ebenen umfassen. So ist die Definition von Randbedingungen denkbar, die beispielsweise die Kosten des Modells oder dessen Echtzeitfähigkeit

festlegen. Auch kann sich z.B. die Frage stellen, wer den Entscheidungsprozeß durchführt, ein erfahrener kreativer Modellbauer oder ein automatischer Algorithmus (genetischer Algorithmus, Neuronales Netzwerk, usw.). Zu guter letzt sollte auch noch auf den ethischen Aspekt der Modellbildung hingewiesen werden. Die Frage nach den Konsequenzen nicht zutreffender Modellierung sollte niemals außer acht gelassen werden [RH97]. Der Kernpunkt jeder physikalischen Modellbildung besteht in der Korrespondenz, d.h. der Zuordnung von Modellobjekten und ihrer Relationen zu physikalischen Begriffen.

Wir wollen im folgenden grundsätzlich zwei Gruppen von Modellen unterscheiden: funktionelle Modelle und strukturelle Modelle. Unter einem funktionellen Modell verstehen wir in erster Linie solche Modelle, die numerische Antworten auf konkrete Fragestellungen liefern, etwa Neuronale Netze oder Finite Elemente-Methoden. Es handelt sich hierbei um Input/Output-Systeme. Diese Modelle werden z.B. zur Vorhersage von Systemzuständen, sowie zur Steuerung und Regelung von technischen Systemen eingesetzt. Im Gegensatz zu strukturellen Modellen lassen sich aus dieser Modellgruppe keine qualitativen Erkenntnisse gewinnen.

Im Mittelpunkt struktureller Modelle steht ein System von Relationen, das die Modellkomponenten verbindet. Ein einfaches Beispiel sind Modelle, in denen die topographischen Relationen der makroskopischen Bausteine im Ortsraum Ausgangspunkt sind. Diesen wird dann in der Newtonschen Mechanik ein Zustandsraum mit Orten und Geschwindigkeiten zugeordnet. Man kann als grundlegende Relationen aber auch die Überlagerungen von speziellen Bewegungstypen oder allgemein Basisfunktionen betrachten. Andere Relationen ergeben sich, wenn man den hierarchischen Aufbau betrachtet. Die hierarchische Modellierung konstruiert ausgehend von einem einfachen Beschreibungsgrad eine adaptive Modellreihe mit zunehmender Komplexität innerhalb einer Modellklasse bis ein geeignetes Modell gefunden ist [Cru91].

1.2 Probleme der mathematischen Behandlung

Die mathematische Beschreibung von Modellen beinhaltet einige Schwierigkeiten, derer sich der Modellierende bewußt sein sollte. Ein wesentlicher Punkt ist die Aussagekraft von Modellen. Einem konkreten Gegenstand stehen üblicherweise sehr allgemeine theoretische Konzepte gegenüber, die auf der einen Seite zwar eine elegante koordinatenunabhängige Darstellung des Sachverhaltes widerspiegeln, andererseits aber eine direkte Verknüpfung zum Objekt der Untersuchung und seinen Details vermissen lassen. Als Schnittstellen zwischen beiden Welten können vor allem invariante Systemeigenschaften und asymptotisches Langzeitverhalten dienen. Sind diese Schwierigkeiten überwunden, stellt sich die Frage nach der Darstellung. Formale Vollständigkeit eines Funktionensystems reicht in praktischen Anwendungen in der Regel nicht aus. Hier sind übersichtliche und effiziente Methoden gefragt. Zudem spielt die Berechenbarkeit von Lösungen eine große Rolle. Die Existenz von Lösungen einer mathematischen Modellgleichung einmal vorausgesetzt, kommt es für eine konkrete Anwendung auch auf den Rechenaufwand an. Die Komplexität und Skalierung des Modells mit wachsender Anzahl von Freiheitsgraden und Kontrollparametern ist hierbei von hoher Relevanz. Die statistische Modellierung beschäftigt sich daher mit der Frage, ob es innerhalb einer Modellklasse eine Prozedur gibt, die in der Lage ist, auf der Grundlage eines gegebenen Datensatz einen „optimalen“ Repräsentanten zu finden, welcher den Vorhersagefehler des Modells gegen die Modellkomplexität balanciert.

Neben technischen Probleme bei der formalen Aufstellung und Lösung von Bewegungsgleichungen treten auch fundamentale Beschränkungen bei der Modellierung auf. Betrachtet man ein gekoppeltes System von chaotischen Oszillatoren. Es kann gezeigt werden, daß keine Trajektorie beliebiger Länge des mathematischen Modells dieses physikalischen Systems

in der Nähe der gemessenen physikalischen Trajektorien bleibt [LG99]. Die Schwierigkeiten der Modellierungen des Prozesses sind auf unvermeidbare Störungen und Mängel des Modells zurückzuführen. Daraus folgt, daß sich gekoppelte chaotische nichtlineare Oszillatoren nicht zur Modellierung physikalischer Systeme einsetzen lassen, wenn das Ziel die Berechnung quantitativer Größen, beispielsweise die Prädiktion von künftigen Systemzuständen, ist. Somit ist man Beschränkungen unterworfen, die uns bei der Modellbildung bewußt sein müssen.

1.3 Konsequenzen und Überblick

Ein Ausweg besteht nun darin, neue Erfahrungen zu sammeln und diese unter dem Gesichtspunkt der Phänomene, der strukturellen Komponenten und der verfolgten Ziel zu bewerten und zu ordnen. Wir betonen, daß es uns dabei ausschließlich auf praxisnahe Probleme ankommt. Neue Phänomene theoretisch zu konstruieren und die entsprechenden Modelle zu finden, stellt im Vergleich zur Modellierung realer physikalischer Systeme keine so große Herausforderung dar.

Die Zusammenarbeit mit Ingenieuren hat in verschiedenen drittmittelgeführten Projekten^{1,2,3} gezeigt, daß die Betrachtungsweisen der Ingenieure und der Physiker teilweise stark differieren. Dies zeigt sich bereits in den unterschiedlichen Erwartungen, die an die verwendeten Methoden, insbesondere an die Modelle gestellt werden. Aber auch die mathematischen Herangehensweise an die gestellten Probleme ist sehr unterschiedlich. Lineare Betrachtungsweisen dominieren in Bereichen, in denen der Modellkonstrukteur von seiner Erfahrung geleitet wird, weil sich die Zusammenhänge zwischen den einzelnen Modellkomponenten in einer offensichtlicheren Art und Weise ergeben als im Bereich nichtlinearer Systeme oder im Grenzbereich zwischen stochastischen und chaotischen Systemen. Wir wollen daher unser Augenmerk auf die Präsentation von mathematischen Aspekten der nichtlinearen und stochastischen Modellierung richten und so zu einem tieferen Verständnis der theoretischen Grundlagen beitragen. Viele der hier vorgestellten Methoden finden sich zu großen Teilen bereits in der entsprechenden Fachliteratur. Der wesentliche Beitrag besteht primär im Aufzeigen von Verbindungen zwischen Theorie und Praxis und die Diskussion deren Bedeutung für die industrielle Anwendung.

Im Anschluß an diese Einleitung folgt zunächst eine kurze Einführung in die theoretischen Grundlagen dynamischer Systeme und die Konzepte der Nichtlinearer Zeitreihenanalyse. Dieses Kapitel erhebt nicht den Anspruch auf systematische vollständige Behandlung des Themenkomplexes, sondern soll vielmehr der Bereitstellung von Notationen und Begriffen dienen, auf die im Verlauf dieser Arbeit immer wieder zurückgegriffen wird.

Den Schwerpunkt in Kapitel 3 bildet die Konstruktion und Analyse von strukturellen Modellen, die auf physikalischen Gesetzmäßigkeiten aufgebaut sind. Wir werden dabei insbesondere mathematische Techniken betrachten, die für den praktische Einsatz von Bedeutung sind.

In den vergangenen Jahren sind Wavelets aufgrund ihrer Vielseitigkeit und ihrer Effizienz immer mehr in den Blickpunkt des Interesses von Mathematikern gerückt. Eine Einbettung

¹Gemeinschaftsprojekt mit dem Fraunhofer Institut für Produktionstechnologie (IPT), Aachen: „Charakterisierung, Modellierung und Optimierung von spanenden Bearbeitungsmaschinen im Grenzbereich hoher Genauigkeit unter Einsatz der nichtlinearen Datenanalyse“, gefördert durch die Volkswagen-Stiftung, Projekt I/71 622.

²Gemeinschaftsprojekt mit dem Lehrstuhl für Fertigungstechnik und Betriebsorganisation (FBK) der Universität Kaiserslautern: „Diagnose und Prognose von Zerspanprozessen zur Erhöhung der Prozeßsicherheit mit Hilfe der nichtlinearen Dynamik“, gefördert durch die Volkswagen-Stiftung, Projekt I/72 331.

³Gemeinschaftsprojekt mit dem Institut für Fabrikanlagen (IFA) der Universität Hannover: „Analyse, Modellierung und Steuerung des nichtlinear-dynamischen Betriebsverhaltens komplexer Produktionssysteme“, gefördert durch die Volkswagen-Stiftung, Projekt I/72 208.

in den allgemeineren Kontext basisbasierter Modelle findet in Kapitel 4 statt. Wir werden herausstellen, welche Vorteile die Wavelet-Analyse gegenüber der Fourier-Analyse besitzt und welche Rolle Wavelets bei der Modellierung dynamischer Systeme spielen können.

Die Erweiterung des Methodenpools der Nichtlinearen Zeitreihenanalyse ist das Anliegen in Kapitel 5. Wir werden dabei untersuchen, wie man topologischer Informationen über dynamische Systeme aus Zeitreihen gewinnen kann, und diese anschließend unter dem Gesichtspunkt der Praxistauglichkeit bewerten. Wir werden dabei sehen, daß eines der untersuchten Verfahren eine sehr große theoretische Bedeutung besitzt und die Grundlage vieler Methoden der nichtlinearen Zeitreihenanalyse bildet, während das andere eine geringe Relevanz für allgemeine Anwendungen besitzen, weil es nur einen sehr speziellen Aspekt der Dynamik behandelt.

Den Abschluß bilden stochastische Modelle, die eine Zwischenstufe zwischen funktionellen und strukturellen Modellen bilden. Im Vordergrund von Kapitel 6 steht die Diskussion von unterschiedlichen Ansätze zur Modellierung stochastischer Zeitreihen, sowie eine kritische Beleuchtung des Begriffs des stochastischen Prozesses.

Kapitel 2

Theoretische Grundlagen

Die folgenden Abschnitte dienen einer kurzen Einführung in die Begriffe und Konzepte, die in der vorliegenden Arbeit verwendet werden. Eine systematische und umfassende Darstellung kann dies allerdings nicht ersetzen. In einem ersten Abschnitt werden die theoretischen Grundlagen der Nichtlinearen Dynamik vorgestellt. Der interessierte Leser sei für ausführlichere Darstellungen beispielsweise auf Ott [Ott93], Eckmann/Ruelle [ER85], Beckmann [Bec96] oder Guckenheimer/Holmes [GH83] verwiesen. In Abschnitt 2.2 werden einige grundsätzliche Verfahren der nichtlinearen Datenanalyse diskutiert, wie sie etwa bei Abarbanel u.a. [ABST93], Kantz/Schreiber [KS97] oder Grassberger u.a. [GSS91] zu finden sind.

2.1 Deterministische dynamische Systeme

Die Nichtlineare Dynamik befaßt sich mit dynamischen Systemen, d.h. mathematischen Objekten, die zur Beschreibung zeitlich veränderlicher physikalischer Systeme verwendet werden können. Wir möchten diese im folgenden kurz einführen. Dabei wollen wir uns zunächst auf deterministische Prozesse beschränken, d.h. Prozesse, deren künftiger Zustand im Prinzip aus der Kenntnis des aktuellen Zustandes und des Entwicklungsgesetzes bestimmt werden kann. Die möglichen Zustände eines Systems werden durch Punkte x einer Menge M beschrieben. Diese Menge M wird als Zustandsraum oder Phasenraum des Systems bezeichnet. Wir wollen annehmen, daß dieser Zustandsraum zumindest eine Topologie besitzt.

Unter der Entwicklung eines Systems versteht man die Änderung des Systemzustandes in Abhängigkeit von einem Parameter $t \in T$, den man als Zeit bezeichnet. Die Menge T muß dazu eine Ordnungsrelation besitzen. Grundsätzlich werden zwei Typen von Systemen unterschieden: zeitkontinuierliche Systeme ($T = \mathbb{R}$) und zeitdiskrete Systeme ($T = \mathbb{Z}$). Die Zeitentwicklung wird durch eine einparametrische Abbildung $\varphi_t : M \rightarrow M$ auf dem Zustandsraum beschrieben, welche einen Systemzustand $x_0 \equiv x(0) \in M$ zur Zeit $t = 0$ in einen Zustand $x_t \equiv x(t) \in M$ zu einem späteren Zeitpunkt $t > 0$ transformiert:

$$x(t) = \varphi_t x_0. \tag{2.1}$$

Die Abbildung φ_t heißt Entwicklungsoperator und bildet eine additive Gruppe, d.h. sie besitzt die Eigenschaften $\varphi_0 = id|_M$ und $\varphi_s \circ \varphi_t = \varphi_{s+t}$. Im zeitkontinuierlichen Fall nennt man eine Familie $\{\varphi_t\}_{t \in T}$ von Entwicklungsoperatoren den Fluß. Unter einem dynamischen System versteht man ein Paar (M, φ_t) bestehend aus einem Zustandsraum M und einer Familie von Entwicklungsoperatoren $\varphi_t : M \rightarrow M$.

Die Definition des dynamischen Systems ist sehr allgemein gehalten. Üblicherweise macht man weitergehende Annahmen über den Zustandsraum und die Flußabbildung. Soweit nicht explizit andere Voraussetzungen verlangt werden, wollen wir im folgenden immer davon ausgehen, daß der Zustandsraum durch eine differenzierbare Mannigfaltigkeit beschrieben wird.

Eine n -dimensionale differenzierbare Mannigfaltigkeit ist ein Paar (M, \mathcal{D}) bestehend aus einem Hausdorff-Raum M und einer n -dimensionalen differenzierbaren Struktur \mathcal{D} . Eine exakte Definition findet sich beispielsweise bei Nakahara [Nak90]. Nach dem *Einbettungssatz von Whitney* existiert für jede n -dimensionale Mannigfaltigkeit M eine Einbettung in den \mathbb{R}^{2n+1} . Wird die Dynamik eines Systems durch einen Satz von ordentlichen Differentialgleichungen 1. Ordnung¹ beschrieben, d.h.

$$\dot{x}(t) = F(x(t)), \quad (2.2)$$

so entspricht die Differentialgleichung einem Vektorfeld $F : M \rightarrow TM$, welches jedem Punkt $x \in M$ einen Geschwindigkeitsvektor $v_x \in T_x M$ zuordnet. In der Differentialgeometrie bezeichnet man eine solche Abbildung als einen Schnitt in das Tangentialbündel TM . Die Lösung der Differentialgleichung durch den Anfangspunkt $x_0 \in M$ existiert und ist eindeutig, wenn das Vektorfeld mindestens Lipschitz-stetig ist. Das Vektorfeld erzeugt dann eine Flußabbildung $\varphi : \mathbb{R} \times M \rightarrow M$ und es gilt:

$$x(t) = \varphi(t, x_0) \equiv \varphi_t(x_0). \quad (2.3)$$

Die Menge $\Gamma = \{x \in M \mid x = \varphi_t(x_0), t \geq 0\}$ aller Punkte, die durch Wirkung der Flußabbildung aus einem Startpunkt $x_0 \in M$ hervorgeht, bezeichnet man als Orbit oder Trajektorie durch den Punkt x_0 . Besteht ein Orbit nur aus einem einzigen Punkt \bar{x} , so heißt \bar{x} Fixpunkt des dynamischen Systems. Eine Lösung $x(t)$ eines dynamischen Systems wird als stabil bezeichnet, wenn jeder Orbit Γ' , der in einer Umgebung des Punktes x_0 startet, für alle Zeiten t in der „Nähe“ des betrachteten Orbits Γ bleibt. Konvergieren alle Lösungen, die in unmittelbarer Umgebung von x_0 startet, mit wachsendem t sogar gegen $x(t)$, so nennt man den Orbit asymptotisch stabil.

Ein zentraler Begriff in der Untersuchung nichtlinearer dissipativer Systeme ist der Attraktor. Wir verstehen unter einem Attraktor eine abgeschlossene, attraktive Menge $A \subset M$, die unter der Flußabbildung φ_t invariant ist². Solche Attraktoren spiegeln das Langzeitverhalten der Dynamik wider. In physikalischen Systemen sind besonders Punktattraktoren und Grenzyklen von Interesse. Die Menge aller Punkte des Phasenraumes, die unter der Dynamik zum selben Langzeitverhalten, d.h. zum selben Attraktor, führen, bezeichnet man als Einzugsgebiet oder Bassin des Attraktors.

Ist \mathcal{B} eine σ -Algebra auf M , so heißt $\mu : \mathcal{B} \rightarrow \mathbb{R}$ ein invariantes Maß des dynamischen Systems (M, φ_t) , wenn dieses unter der Wirkung des Entwicklungsoperators erhalten bleibt, d.h. für jede meßbare Menge $U \subset M$ gilt

$$\mu(U) = \mu(\varphi_{-t}U), \quad \forall t \in \mathbb{R}. \quad (2.4)$$

Das Quadrupel $(M, \mathcal{B}, \mu, \varphi_t)$ wird als maßerhaltendes dynamisches System bezeichnet. Im allgemeinen wird die Bedingung (2.4) nicht ausreichen, um ein sinnvolles Maß einzuführen. Ein physikalisch relevantes Maß mißt, wie oft und wie lange eine Trajektorie die verschiedenen Teile der Menge überstreicht. Bezeichnet $\mathbb{1}_U$ die charakteristische Funktion auf der Menge U , so kann für fast alle $x \in M$ ein invariantes Maß konstruiert werden:

$$\mu_x(U) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T dt \mathbb{1}_U(\varphi_t(x)). \quad (2.5)$$

Ist das invariante Maß zudem *ergodisch*, d.h. nicht in andere invariante Maße zerlegbar, so kann das Maß auch als ein gewichtetes Phasenraummittel dargestellt werden.

¹Dies stellt keine wesentliche Einschränkung dar, weil jede ordentliche Differentialgleichung n -ter Ordnung in einen Satz von n Differentialgleichungen 1. Ordnung überführt werden kann. Weiterhin können nicht-autonome ordentliche Differentialgleichungen, d.h. solche mit expliziter Zeitabhängigkeit, durch Erweiterung des Zustandsraumes um eine Dimension in autonome Systeme verwandelt werden.

²Wir verzichten hier auf eine formale Definition des Attraktorbegriffes, zumal diese in der einschlägigen Literatur nicht einheitlich ist (siehe auch Diskussion in [Bec96]).

2.2 Zeitreihenanalyse

Zu Beginn jeder Modellierung von dynamischen Systemen steht zunächst die Gewinnung von Informationen über das zugrundeliegende System, damit anschließend in einem zweiten Schritt ein geeignetes Modell konstruiert werden kann. Traditionelle Methoden der Zeitreihenanalyse basieren auf linearen Ansätzen; Linearität und Chaos schließen einander jedoch aus. Ideen und Konzepte aus dem Bereich der Nichtlinearen Dynamik haben in den vergangenen Jahren zur Entwicklung einer großen Zahl von Algorithmen geführt, die im Prinzip in der Lage sind, zugrundeliegende deterministische Dynamiken aus Meßdaten zu identifizieren und zu klassifizieren. Ein einheitlicher konzeptioneller Ansatz, wie Zeitreihen zu analysieren sind, fehlt jedoch.

2.2.1 Zustandsrekonstruktion

Meßwertdaten stehen üblicherweise in Form von Zeitreihen $\{s_i\}$, $i = 1, \dots, N$, zur Verfügung, wobei $s_i \in \mathbb{R}^k$. Wir wollen unsere Betrachtungen auf skalare Zeitreihen beschränken, d.h. $k = 1$, und weiterhin davon ausgehen, daß die Zeitreihe durch eine zeitlich äquidistante Messung entstanden ist, d.h. $s_i = s(t_0 + i\Delta t)$. Die Auswirkungen von zeitlich nicht-äquidistanter Messungen auf die Methoden der nichtlinearen Datenanalyse wurde von Breedon und Packard diskutiert [BP92]. Wir wollen weiterhin annehmen, daß dieser Zeitreihe ein dynamisches System der Form

$$\dot{x}(t) = F(x(t)) + \eta(t) \quad (2.6a)$$

$$\text{und} \quad s(t) = h(x(t)) + \xi(t) \quad (2.6b)$$

zugrunde liegt, wobei $x \in M$ ein n -dimensionaler Zustand in einem Zustandsraum M und $h : M \rightarrow \mathbb{R}$ eine skalarwertige Meßfunktion ist. Im allgemeinen Fall wird zusätzlich Meßrauschen $\xi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ und dynamisches Rauschen $\eta : \mathbb{R} \rightarrow M$ auftreten. In der Praxis sind die Funktionen x , F , h , η und ξ unbekannt und müssen aus der Zeitreihe $\{s_i\}$ rekonstruiert werden.

Zur Zustandsrekonstruktion nutzt man das Takens-Theorem, welches besagt, daß in der Abwesenheit von Rauschen die Zeitversatzvektoren

$$y_i = (s_i, s_{i-\tau}, \dots, s_{i-(m-1)\tau}) \in \mathbb{R}^m, \quad \tau \in \mathbb{N}, \quad (2.7)$$

generisch eine Einbettung bilden, falls $m \geq 2n + 1$. Das bedeutet, daß der rekonstruierte Zustandsraum diffeomorph zum ursprünglichen Zustandsraum ist. Sauer, Yorke und Casdagli haben dieses Theorem in der Weise erweitert, daß der Begriff „generisch“ durch „fast alle“ ersetzt wurde [SYC91]. Analysiert man eine gegebene Zeitreihe, so sind die Einbettungsdimension m und der Zeitversatz τ im allgemeinen unbekannt. Falls m die gesuchte Dimension ist, dann bilden die Vektoren in (2.7) auch für $m' > m$ eine Einbettung, jedoch mit Redundanzen. Einen Hinweis auf die Einbettungsdimension liefern die Kenngrößen, die wir im nächsten Abschnitt kurz vorstellen. Für die gleiche Einbettungsdimension m sind unabhängig von der Wahl von τ mathematisch alle Einbettungen gleichwertig, nicht jedoch in Anwesenheit von Rauschen. Daher ist es wichtig, einen geeigneten Zeitversatz τ zu finden. Wird τ zu klein gewählt, so unterscheiden sich die Koordinaten des Zeitversatzvektors kaum, ist τ dagegen zu groß, so sind die Vektoren unkorreliert [CEFG91]. Ein geeigneter Zeitversatz läßt sich mit Hilfe der Mutual Information abschätzen [FS86].

2.2.2 Nichtlineare Kenngrößen

Neben der Zustandsraumrekonstruktion, welche die Grundlage für die folgenden Überlegungen liefert, ist man in erster Linie an nichtlinearen Kenngrößen interessiert, die uns bei

der Modellbildung weiterhelfen können. Wir wollen kurz einige Konzepte vorstellen, die in den letzten Jahren entwickelt wurden, ohne jedoch auf die numerische Umsetzung eingehen zu wollen. Hierzu sei auf Hegger u.a. [HKS98] verwiesen. Die durch Zeitreihenanalyse extrahierten nichtlinearen Kenngrößen können für die Überwachung von technischen Systemen und die Diagnose von Störungsursachen genutzt werden. Wir wollen hierauf allerdings im folgenden nicht weiter eingehen, sondern lediglich anmerken, daß es nur selten darauf ankommt, den Zusammenhang zwischen den Kenngrößen und den Details der Systemdynamik exakt zu kennen. Vielmehr ist in der Regel eine positive, statistisch belegte und pragmatisch begründete Korrelation von Befunden ausreichend.

Eine wichtige Gruppe von Kenngrößen sind die Dimensionen. Unter der Dimension eines euklidischen Raumes versteht man üblicherweise die Anzahl der Koordinaten, welche zur Beschreibung eines Punktes notwendig sind. Dieser Dimensionsbegriff erlaubt ausschließlich ganzzahlige Werte. Die Untersuchung chaotischer Attraktoren hat zur Einführung fraktaler Dimensionen geführt, d.h. Dimensionsbegriffe mit nicht-ganzzahligen Werten. Ist $\rho : M \rightarrow \mathbb{R}$ ein ergodisches Maß auf M , dann definiert man die verallgemeinerte Dimension der Ordnung q durch

$$D_q = \frac{1}{q-1} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\log I(q, \varepsilon)}{\log \varepsilon}, \quad (2.8a)$$

$$I(q, \varepsilon) = \sum_{i=1}^{N(\varepsilon)} \rho_i^q. \quad (2.8b)$$

Dabei ist $N(\varepsilon)$ die minimale Anzahl von „Würfeln“ der Kantenlänge ε , die notwendig ist, den Attraktor zu überdecken. Die Größe $I(q, \varepsilon)$ heißt verallgemeinerte Renyi-Information der Ordnung q . Es läßt sich zeigen, daß $D_i \leq D_j$ für $i > j$ gilt. Für die Cantor-Menge als Beispiel einer fraktalen Menge ergibt sich $D_0 = \log(2)/\log(3)$. Besondere Bedeutung haben die Kapazität D_0 , häufig auch als *box counting*-Dimension bezeichnet, die Informationsdimension D_1 und die Korrelationsdimension D_2 . Allen Dimensionsbegriffen ist gemeinsam, daß sie im Falle einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit die „Standarddimension“ liefern.

Die Dimension stellt eine geometrische Größe dar und liefert keine Aussage über die dynamischen Eigenschaften eines Systems. Die Ljapunov-Exponenten liefern hingegen Informationen über das Auseinanderlaufen benachbarter Trajektorien. Betrachtet man eine ε -Umgebung $B_\varepsilon(x)$ eines Punktes $x \in M$, so wird diese nach einer Zeit $t > 0$ unter der Flußabbildung $\varphi_t : M \rightarrow M$ auf ein Ellipsoid mit Halbachsen $\varepsilon_i(t)$ abgebildet. Die Ljapunov-Exponenten werden nun definiert durch

$$\lambda_i = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \log \frac{\varepsilon_i(t)}{\varepsilon}, \quad i = 1, \dots, m. \quad (2.9)$$

Besitzt das dynamische System ein ergodisches Wahrscheinlichkeitsmaß $\rho : M \rightarrow \mathbb{R}$, so existiert nach dem multiplikativen Ergodentheorem von Oseledec der Grenzwert

$$\Lambda_x = \lim_{n \rightarrow \infty} (D_x \varphi_t^* D_x \varphi_t)^{1/2n} \quad (2.10)$$

und die Ljapunov-Exponenten entsprechen den Logarithmen der Eigenwerte der Matrix Λ_x . $D_x \varphi_t$ ist hierbei die Jacobi-Matrix der Flußabbildung. Im folgenden werden wir davon ausgehen, daß die Ljapunov-Exponenten der Größe nach geordnet sind, d.h. es gilt $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots$. Die Summe der Ljapunov-Exponenten $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2 + \dots$ entspricht der Dissipation des Systems; sie beschreibt die Kontraktionsrate des Phasenraumvolumens. Die Nichtlineare Dynamik kennt verschiedene Definitionen des Begriffs *Chaos*³. Eine Möglichkeit besteht darin,

³Eine Diskussion der verschiedenen Chaos-Begriffe ist bei Brown/Chua [BC96] und Schmidt [Sch99] zu finden.

einen Attraktor als chaotisch zu bezeichnen, wenn mindestens ein Ljapunov-Exponent größer als Null ist.

Kaplan und Yorke haben einen Zusammenhang zwischen dem Dimensionsbegriff und den Ljapunov-Exponenten hergestellt, in dem sie die Ljapunov-Dimension D_L definierten:

$$D_L = K + \frac{1}{|\lambda_{K+1}|} \sum_{i=1}^K \lambda_i. \quad (2.11)$$

Dabei ist $K \in \mathbb{N}$ die größte Zahl mit $\sum_{i=1}^K \lambda_i \geq 0$.

Die dritte Kenngröße, die wir kurz vorstellen möchten, ist die Kolmogorov-Sinai-Entropie (kurz KS-Entropie). In Systemen mit einem ergodischen Maß $\rho : M \rightarrow \mathbb{R}$ und einer endlichen Partitionierung $\{W_i\}$ des Trägers $\text{supp } \rho$ von ρ gilt:

$$h(\rho) = - \sup_{\{W_i\}} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_i \rho(W_i) \ln \rho(W_i). \quad (2.12)$$

Durch die KS-Entropie wird die mittlere Rate an Informationsgewinn eines Systems angegeben. Nach der Pesin-Identität läßt sich die KS-Entropie als Summe der positiven Ljapunov-Exponenten darstellen.

Die numerische Bestimmung vieler dieser Kenngrößen hat sich in der Praxis als unzuverlässig herausgestellt, weil sie falsche Dimensionen oder Ljapunov-Exponenten liefert [ER92]. Daher ist man dazu übergegangen, zunächst die Nichtlinearität eines dynamischen Systems zu überprüfen, denn diese ist eine notwendige Voraussetzung für eine deterministisch-chaotische Dynamik [TEL⁺92]. Der Test auf Nichtlinearität ist eine vergleichsweise einfache Aufgabe gegenüber dem Test auf Chaos, wenngleich nicht trivial.

Kapitel 3

Gesetzesbasierte Modellbildung

3.1 Einleitung

Reale Tests an Prototypen komplizierter technischer Systeme sind in der Regel sehr aufwendig. Daher versucht man mit mathematischen Modellen Simulationen durchzuführen und so das zu erwartende Verhalten vorherzusagen. Selbst wenn ein Modell sehr wenige Details berücksichtigt, kann es oft wichtige Hinweise zur Planung der Versuche mit realen Prototypen liefern. Dazu gehören insbesondere Hinweise auf Konstruktionsvarianten bzw. Parameterbereiche bei denen grundsätzliche Änderungen des Systemverhaltens, sog. Bifurkationen, auftreten. Die mathematischen Modelle spielen in diesem Zusammenhang die Rolle von virtuellen Prototypen. Dabei setzt man das Systemmodell aus den mathematischen Repräsentanten der einzelnen Bauteile mit den ihnen zugeschriebenen Eigenschaften und Relationen (z.B. Kraftgesetze) zusammen. Den Ausgangspunkt bildet die (zunächst hypothetische) Konstruktion des Systems, auf deren Basis dann ein strukturelles Modell aufgestellt wird.

Die zugrundeliegenden Kraftgesetze bilden bei vielen strukturellen Modellen den Kern der Darstellung der Dynamik. Ihre Verwendbarkeit ist in alltäglichen Problemen allerdings oft beschränkt, da viele technische Systeme, beispielsweise eine Werkzeugmaschine und ihre Bauelemente, zu viele Freiheitsgrade besitzen. Daher haben sich in den Ingenieurwissenschaften, beispielsweise im Maschinenbau und im Bauwesen, vor allem aber in der Elektrotechnik, vereinfachte Ansätze etabliert. Dazu gehören die Methode der finiten Elemente und die sog. *Lumped Parameter*-Modelle. Der Ansatz besteht darin, die Freiheitsgrade eines Systems durch Zusammenfassen von Einzelbausteinen zu reduzieren und das Verhalten dieser diskreten Bauelemente zu untersuchen. Bei der Modellierung eines mechanischen Systems entsprechen Massen, Federn und Dämpfungsglieder solchen Bauelementen; Widerstände, Kondensatoren und Induktivitäten sind solche Elemente bei der Modellierung eines elektrischen Schaltkreises. Ein Verfahren zur Konstruktion linearer Lumped Parameter-Modelle wurde von Chen und Géradin [CG97] entwickelt.

Viele der hier dargestellten Ergebnisse sind in der Literatur in der Regel abstrakt präsentiert und entbehren jeglichen Bezug zu den Ingenieurwissenschaften. Unsere Erfahrung in den interdisziplinären Gemeinschaftsprojekten hat gezeigt, daß in der täglichen Arbeit der Experimentatoren und Ingenieure die Grundzüge der klassischen Theorie linearer Systeme in den Hintergrund treten. Daher ist die Darstellung in diesem Kapitel sehr elementar gefaßt. Dieses Kapitel ist so angelegt, daß in den folgenden Abschnitten zunächst unter physikalisch-technischen Gesichtspunkten in wenigen Demonstrationsbeispielen die große Vielfalt der Phänomene und die Sensitivität ihrer Details, aber auch ihrer Grundstrukturen gegenüber kleinen Veränderungen illustriert wird (Abschnitte 3.2.1-3.4.2). Daran schließt sich eine Diskussion möglicher Konsequenzen für die Behandlung konkreter Probleme in der Praxis an.

3.2 Elementare Schwingungsmechanismen

Schwingungen sind weit verbreitete Formen der Bewegung oder der Zustandsänderung und treten insbesondere in solchen Systemen auf, bei denen innerhalb des Systems ein permanenter Austausch zwischen zwei Energiespeichern stattfindet. Im Beispiel eines Feder-Masse-Systems wird die Energieform „kinetische Energie der schwingenden Masse“ in die „Deformationsenergie der Feder“ umgewandelt und umgekehrt. Daneben gibt es andere Schwingungsmechanismen, beispielsweise die Relaxationsschwingungen und solche periodischen Bewegungen, die durch Rückkopplung eines verzögerten Signals entstehen. Wenn ein physikalisches System durch den Einfluß einer Störung aus seinem Gleichgewichtszustand ausgelenkt wird und eine rücktreibende Kraft die Bewegung beschränkt, dann können, wenn die Energieverluste nicht zu stark sind, Schwingungen auftreten. Mathematisch werden die Oszillationen durch einen Satz charakteristischer Gleichungen beschrieben, üblicherweise durch gewöhnliche Differentialgleichungen.

3.2.1 Lineare Schwingungen

Unter einem freien Oszillator versteht man ein schwingungsfähiges System, welchem keine Energie zugeführt wird. Werden mehrere Oszillatoren derart miteinander verbunden, daß Energie zwischen diesen Systemen ausgetauscht werden kann, kommt es zu gekoppelten Schwingungen. Eine Standardform der Bewegungsgleichung für einen harmonischen Oszillator ist eine lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung:

$$\ddot{x}(t) + 2\gamma\dot{x}(t) + \omega_0^2x(t) = 0. \quad (3.1)$$

Dabei sind ω_0 die Grundfrequenz und γ der Dämpfungsparameter ($\gamma > 0$) bzw. Verstärkungsparameter ($\gamma < 0$). Die Schwingung eines ungedämpften harmonischen Oszillators, d.h. $\gamma = 0$, ist monochromatisch, d.h. das Frequenzspektrum besitzt nur eine einzige Frequenz. Ein gedämpfter Oszillator hingegen besitzt ein kontinuierliches Frequenzspektrum, das einem *Lorentz-Profil* folgt. Sind die Grundfrequenz und der Dämpfungsparameter explizit zeitabhängig, d.h. $\omega_0 = \omega_0(t)$ und $\gamma = \gamma(t)$, so entstehen zeitlich modulierte lineare Schwingungen [NM79].

Bausteine mit linearen Kraftgesetzen führen direkt zu harmonischen Schwingungen als eine Grundform der Bewegung. Aber auch grundsätzlich nichtlineare Bauelemente können insbesondere bei kleinen Auslenkungen aus Gleichgewichtslagen linearisiert behandelt werden, wenn etwa bei den Rückstellkräften die zweite Ableitung des Potentials bei der Gleichgewichtslage nicht verschwindet. So wird verständlich, daß die linearen harmonischen Schwingungen lange Zeit Standardbetrachtungsweise waren. Im folgenden werden einige der Phänomene betrachtet, die sich dann ergeben, wenn man Nichtlinearitäten berücksichtigt. So erhalten wir Hinweise auf den Zusammenhang zwischen konstruktiven Merkmalen und der Systemdynamik.

Eine Vielzahl von Effekten sorgt dafür, daß die meisten realen Systeme nichtlinear sind. Die Rückstellkraft, im Falle eines Feder/Masse-Systems also die Federkraft, wird im allgemeinen eine nichtlineare Funktion der Auslenkung sein. Wird die Federkraft mit wachsender Auslenkung durch die Nichtlinearität verringert, so sprechen wir von einer *weichen Feder*, anderenfalls von einer *harten Feder*. Man erwartet, daß bei nicht zu großen Nichtlinearitäten bei einer weichen Feder die Frequenz bei großen Amplituden abnimmt und umgekehrt bei einer harten Feder zunimmt (Abbildung 3.1).

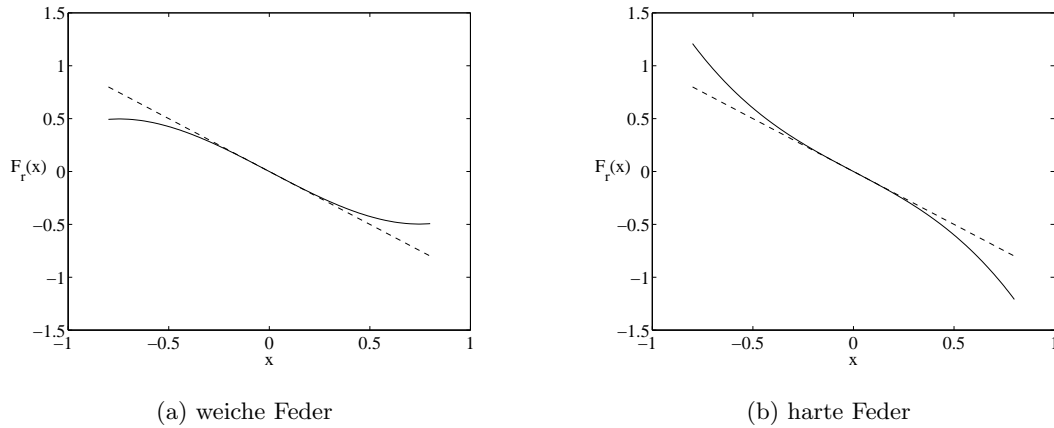


Abbildung 3.1: Nichtlineare Rückstellkräfte

3.2.2 Die nichtlineare Schwingungsgleichung (Liénard-Gleichung)

Ein allgemeiner Ansatz für eine nichtlineare Schwingung mit einem (z.B. mechanischen) Freiheitsgrad ist die sog. Liénard-Gleichung

$$\ddot{x} + f_1(x)\dot{x} + f_2(x) = 0. \quad (3.2)$$

Um einen Eindruck von der Vielfalt der Phänomene zu erhalten, betrachten wir den Spezialfall des sog. Duffing-Oszillators mit periodischer Anregung. Die kubische Nichtlinearität des Duffing-Oszillators kann als Störung eines harmonischen Oszillators ($|\varepsilon| < 1$) aufgefaßt werden:

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x + \varepsilon\omega_0^2 x^3 = F_0 \cos(\omega t), \quad F_0 > 0. \quad (3.3)$$

Die Lösung für den linearen Oszillator ($\varepsilon = 0$) setzt sich aus der freien und der erzwungenen Schwingung zusammen. Der Anteil der freien Schwingung klingt in Folge der Reibung im Laufe der Zeit ab und es bleibt lediglich der Anteil der erzwungenen Schwingung übrig. Man bezeichnet dies als transientes Verhalten. Die erzwungene Lösung besitzt die Form

$$x_p(t) = \frac{F_0}{m\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2\omega^2}} \cos(\omega t + \delta) = A(\omega) \cos(\omega t + \delta), \quad (3.4)$$

wobei δ die Phasenverschiebung zwischen der Anregung und dem Oszillator ist. Wird die Amplitude des Oszillators $A(\omega)$ maximal, so spricht man von Resonanz. Das Frequenzspektrum eines periodisch angeregten linearen Oszillators mit Dämpfung besitzt nach dem Einschwingvorgang nur eine einzige Frequenz, nämlich die Frequenz der Anregung.

Der Duffing-Oszillator besitzt für $\gamma > 0$ stabile Lösungen. Bei bestimmten Anregungsamplituden F_0 zeigt die Resonanzkurve des Duffing-Oszillators typisch nichtlineares Verhalten. Nehmen wir den Fall $\varepsilon < 0$, so existiert für festes γ genau eine periodische Lösung im Bereich $\omega > \omega_0$. Bei kleinen Anregungsamplituden F_0 wird die Lösung gut durch die Lösungen des linearen Oszillators approximiert. Im Bereich $\omega < \omega_0$ existieren je nach Wahl der Dämpfung γ bzw. der Anregung F_0 eine oder drei periodische Lösungen. In letzterem Fall sind zwei periodische Lösungen stabil und eine instabil (Abbildung 3.2(a)). Es hängt von der Vorgeschichte der Schwingung ab, welcher Amplitudenwert auftritt. Maßgebend ist hierbei die Richtung, in der die Treiberfrequenz verändert wurde. Man bezeichnet dieses Verhalten als *Hysterese*. Die in Abbildung 3.2(a) dargestellte Amplitudenresonanz ist typisch für eine weiche Feder; eine harte Feder zeigt das in 3.2(c) abgebildete Verhalten.

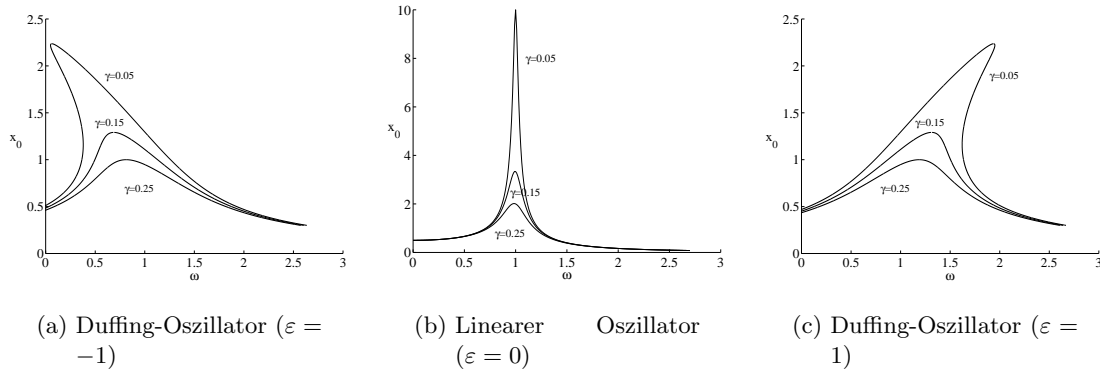


Abbildung 3.2: Amplitudenresonanz bei harmonischer Anregung. Parameter der verschiedenen Kurven ist jeweils die Dämpfung γ .

Im Gegensatz zu linearen Oszillatoren können die Frequenzspektren angeregter nichtlinearer Oszillatoren neben der Treiberfrequenz auch andere Frequenzen beinhalten, sog. subharmonische und ultraharmonische Frequenzen. Aufgrund der kubischen Nichtlinearität treten beim Duffing-Oszillator neben der Anregungsfrequenz ω zusätzlich die Frequenzen 3ω und $\omega/3$ auf.

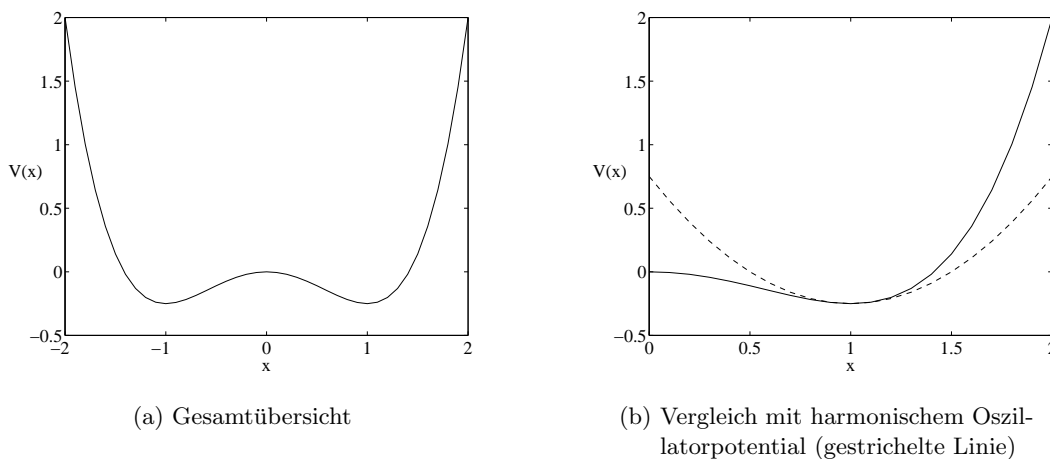


Abbildung 3.3: Potential des Duffing-Oszillators

Eine zweite Form des Duffing-Oszillators beschreibt ein System in einem sog. Doppelmuldenpotential, welches beispielsweise zur Modellierung eines verbogenen Stabes benutzt werden kann, der ohne äußere Erregung zwei stabile Gleichgewichtslagen besitzt:

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} - \alpha x + \beta x^3 = F_0 \cos(\omega t), \quad F_0, \alpha, \beta > 0. \quad (3.5)$$

In Abbildung 3.3(a) ist das Potential des Duffing-Systems dargestellt, in 3.3(b) ist dem Potential in der Umgebung einer der stabilen Gleichgewichtslagen ein quadratisches Potential, d.h. das Potential eines linearen Oszillators, gegenübergestellt. Es läßt sich erkennen, daß das Duffing-Potential im Gegensatz zum quadratischen Potential nicht symmetrisch um das Potentialminimum ist. Dies hat zur Folge, daß die resultierende Rückstellkraft durch die Nichtlinearität mit wachsender Auslenkung in positiver Richtung härter, in negativer Richtung jedoch weicher wird. Symmetrische nichtlineare Federn zeigen Kennlinien, die entweder auf beiden Seiten weicher oder auf beiden Seiten härter werden.

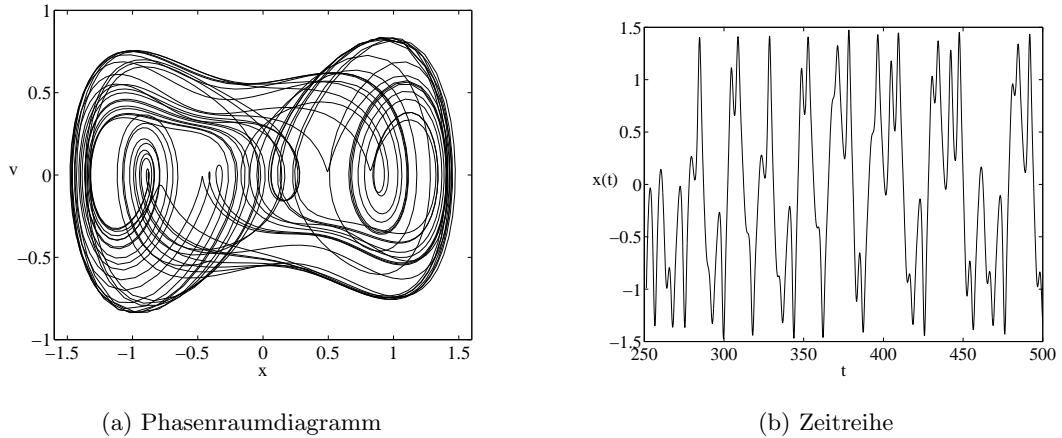


Abbildung 3.4: Duffing-Oszillator

Für große Treiberamplituden entstehen kompliziertere Bewegungsabläufe. Eine Trajektorie des Phasenraumes und eine Zeitreihe des Duffing-Oszillators sind in Abbildung 3.4 dargestellt. Dabei wurde der Einschwingvorgang (transientes Verhalten) abgewartet. Offensichtlich besitzt der Duffing-Oszillator zwei unterschiedliche Regime zwischen denen er hin und her wechselt. Betrachtet man einen freien Duffing-Oszillator, so stellt man fest, daß dieser zwei stabile Grenzzustände besitzt, wobei von der Wahl der Startbedingungen abhängt, welchem der Zustände sich das System für $t \rightarrow \infty$ annähert. Wir sprechen in diesem Zusammenhang von *koexistierenden Attraktoren*. Die Einzugsgebiete oder Bassins der Attraktoren können sehr kompliziert sein und unter Umständen fraktale Gebietsgrenzen besitzen. In Abbildung 3.5 sind die Einzugsgebiete der beiden Fixpunkt-Attraktoren im Phasenraum des ungetriebenen Duffing-Oszillators illustriert.

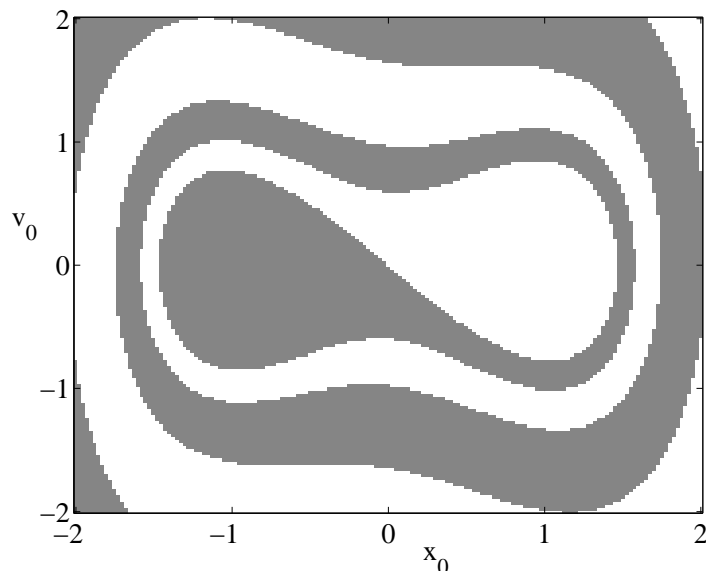


Abbildung 3.5: Attraktor-Einzugsgebiet

Je nach Wahl der Systemparameter zeigt der Duffing-Oszillator unterschiedliches qualitatives Verhalten. So können periodische Bewegungen, aber auch chaotische Bewegungen, auftreten. In Abbildung 3.6 ist ein typisches Bifurkationsdiagramm des Duffing-Oszillators

zu sehen. Bei Vergrößerung der Amplitude der äußeren Kraft f durchläuft das System verschiedene Stadien.

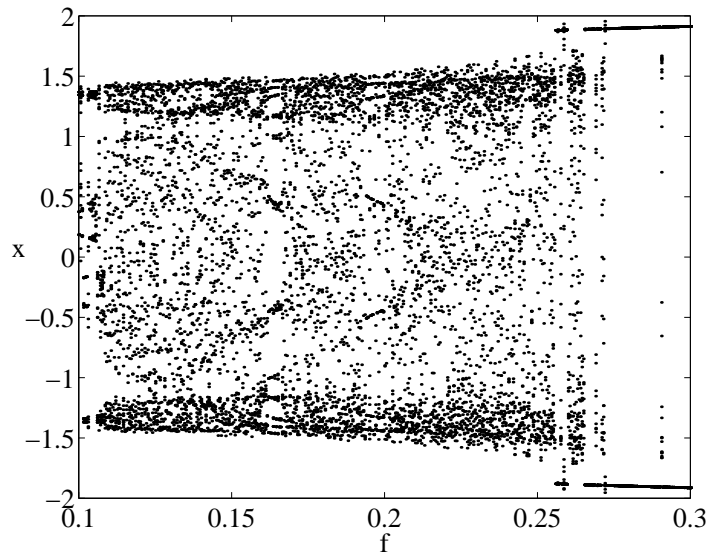


Abbildung 3.6: Bifurkationsdiagramm des Duffing-Oszillators ($\delta = 0.15$ und $\omega = 0.8$)

3.2.3 Dämpfung und Verstärkung (van der Pol-Gleichung)

Jede sich selbst überlassene reale Schwingung klingt im Laufe der Zeit ab. Dies spiegelt sich in der Schwingungsgleichung im Dämpfungsterm wieder, d.h. in der Liénard-Gleichung, der allgemeinen Schwingungsgleichung,

$$\ddot{x} + f_1(x)\dot{x} + f_2(x) = 0$$

im Term f_1 . Dabei entspricht $f_1 > 0$ einer Dämpfung, $f_1 < 0$ einer Anregung. Wenn man die Rückstellkraft wie beim harmonischen Oszillator $f_2 = x$ setzt und $f_1(x) = \mu(x^2 - 1)$, dann erhält man die Bewegungsgleichung des sog. van der Pol-Oszillators:

$$\ddot{x} + \mu(x^2 - 1)\dot{x} + x = 0. \quad (3.6)$$

Bei $\mu > 0$ und Auslenkungen $|x| > 1$ haben wir eine Dämpfung und für $|x| < 1$ eine Anregung. Dies führt zu einigen typisch nichtlinearen Phänomenen. Für $\mu > 0$ besitzt der van der Pol-Oszillator einen stabilen Grenzzyklus, d.h. eine stabile isolierte geschlossene Trajektorie. Solche Grenzzyklen können bei einem nicht angetriebenen linearen System nicht auftreten, denn existiert ein geschlossener Orbit in einem linearen System, so gibt es in dessen Umgebung unendlich viele geschlossene Orbits. Die Existenz von stabilen Grenzzyklen ist besonders interessant, weil das System offensichtlich eine Form der Selbsterhaltung besitzt, die auch in Abwesenheit einer periodischen Erregung eine Schwingung erlaubt. Zudem kehrt das System bei kleinen Störungen immer wieder zum Grenzzyklus zurück. In den Abbildungen 3.7 und 3.8 sind jeweils eine Trajektorie im Phasenraum und der Ausschnitt einer Zeitreihe des van der Pol-Oszillators zu sehen. Entgegen üblichen Darstellungsweisen, bei denen das transiente Verhalten abgeschnitten wird, ist in diesen Abbildungen ein kurzes Zeitintervall nach dem Startpunkt aufgetragen, um die Konvergenz zum Grenzzyklus zu veranschaulichen. Die Systemparameter sind in beiden Systemen identisch.

Der van der Pol-Oszillator ist nur ein Beispiel für ein angetriebenes schwingungsfähiges System, dessen Anregung nicht durch einen externen Mechanismus, sondern durch den Os-

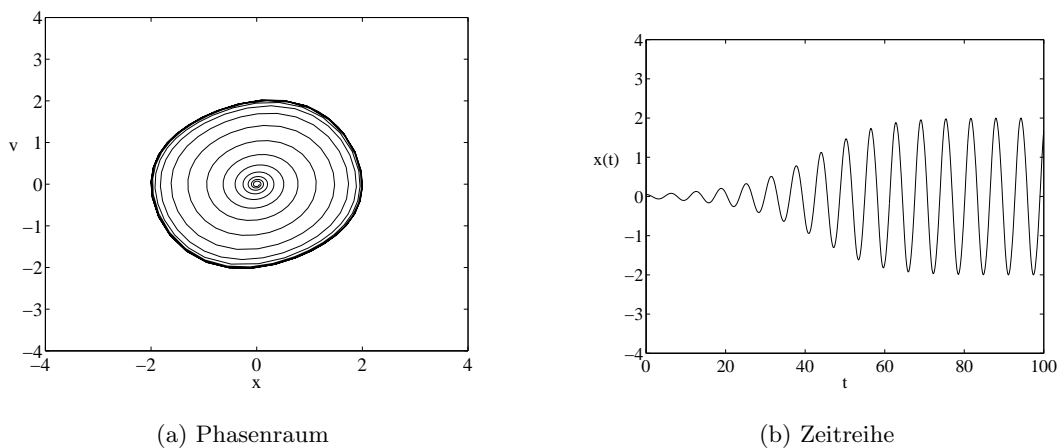


Abbildung 3.7: van der Pol-Oszillator mit $\mu = 0.15$ (Startwert: $(x_0, v_0) = (0.5, 0)$)

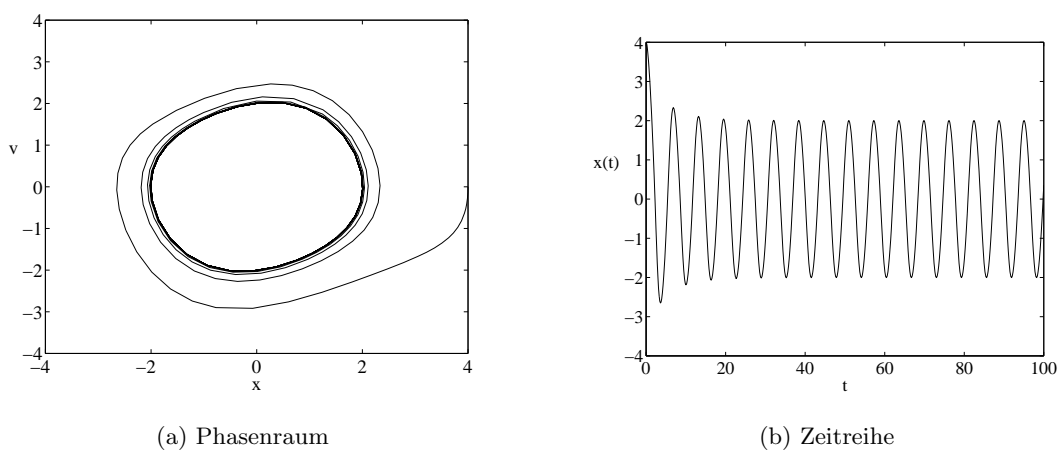


Abbildung 3.8: van der Pol-Oszillator mit $\mu = 0.15$ (Startwert: $(x_0, v_0) = (4, 0)$)

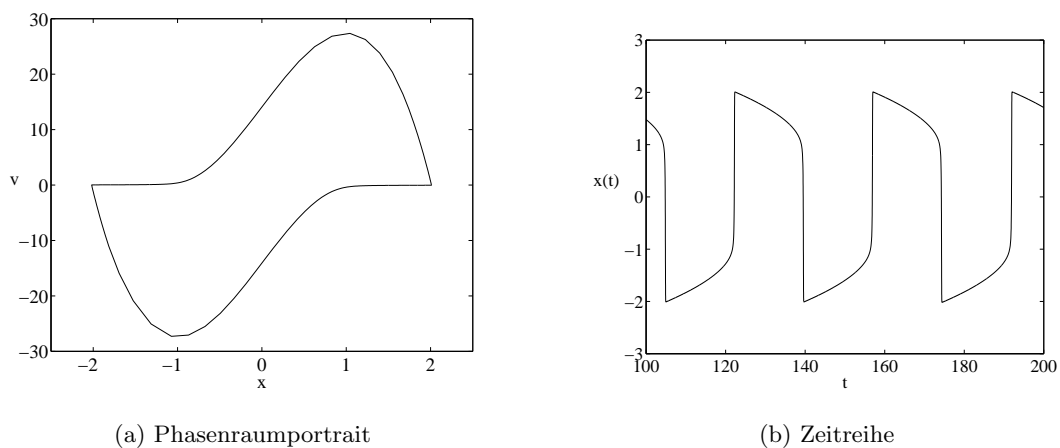


Abbildung 3.9: Relaxationsschwingung des van der Pol-Oszillator ($\mu = 20.0$)

zillator selbst reguliert wird. Man bezeichnet solche Bewegungen als selbst-erregte Schwingungen. Eine bekannte Anwendung dieses Prinzips stellt die Pendeluhr dar.

Bei starker Nichtlinearität zeigt der van der Pol-Oszillator Relaxationsschwingungen, die dadurch zustande kommen, daß einem sehr langsamen Aufbau der rücktreibenden Kraft eine sehr schnelle Entspannung folgt (vgl. Abbildung 3.9). Der van der Pol-Oszillator kann z.B. durch einen elektrischen LCR -Schwingkreis, dessen Widerstand $R(I) = R_0(I^2/I_0^2 - 1)$ eine quadratische Funktion der Stromstärke ist, realisiert werden.

3.3 Mechanisch-technische Systeme

Bei mechanisch-technischen Systemen, wie sie etwa im Bereich des Maschinenbaus anzutreffen sind, gibt es zwei Hauptquellen für nichtlinearer Effekte. Einerseits können nichtlineare Übergänge zwischen zwei stabilen Gleichgewichtslagen auftreten, wie beispielsweise beim Duffing-Oszillator (siehe Abschnitt 3.2.2), und andererseits können Fügstellen zwischen Systemkomponenten vorhanden sein.

Bei den nichtlinearen Übergängen zwischen zwei stabilen Gleichgewichtslagen kann man sich folgenden Mechanismus vorstellen: bei kleinen Amplituden um eine der stabilen Gleichgewichtslagen verläuft die Schwingung praktisch harmonisch. Bei zunehmender Anregung kann die Amplitude so groß werden, daß die Bewegung in die Umgebung des anderen Gleichgewichtspunktes überspringt. Dabei läuft ein Einschwingvorgang ab. Je nach Phasenlage und Amplitude des Antriebs kehrt die Bewegung früher oder später in die Nähe des ersten Gleichgewichtspunktes zurück. So entstehen unregelmäßige Übergänge, die dem sog. gesetzmäßigen Chaos entsprechen können (Abbildung 3.4).

Bei Fügstellen zwischen gegeneinander beweglichen Maschinenteilen gibt es zwei Hauptklassen von Bewegungstypen:

- Bewegung mit Reibung und
- Bewegung mit Spiel und Stößen.

Diese wollen wir in den folgenden beiden Abschnitten kurz beleuchten.

3.3.1 Mechanische Reibung

Das bekannteste Beispiel für Reibung ist die Coloumb- oder Trockenreibung, d.h. die Reibungskraft wirkt der Geschwindigkeit der betrachteten Masse entgegen und ist proportional zur Normalkraft. Dabei sind zwei Fälle zu unterscheiden: die Gleitreibung und die Haftreibung. Infolge der Reibung geht das Gleiten in Haften über. Man kann dieses Verhalten durch den Ansatz

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + R \operatorname{sgn}(\dot{x}) + \omega_0^2 x = 0, \quad R > 0, \quad (3.7)$$

modellieren. Die Lösungen dieser Bewegungsgleichung sind für verschiedene Anfangsbedingungen in Abbildung 3.10 schematisch dargestellt. Man kann den Übergang vom Gleiten zum Haften gut erkennen. Die Ruhelage der Masse ist dabei von den Startwerten abhängig.

Viel interessanter ist der Fall, daß ein System mit Trockenreibung zusätzlich durch eine äußere Kraft angetrieben wird. Ist der Reibungskoeffizient der Haftreibung größer als der Reibungskoeffizient der Gleitreibung, treten Bewegungen auf, die ständig zwischen Haften (Stick-Phase) und Gleiten (Slip-Phase) wechseln. Man bezeichnet dies als eine *Stick-Slip*-Bewegung. Im akustischen Bereich äußern sich Stick-Slip-Schwingungen z.B. durch Quietsch- oder Knarrgeräusche, aber auch bei Streichinstrumenten. Die Bewegungsgleichung für ein

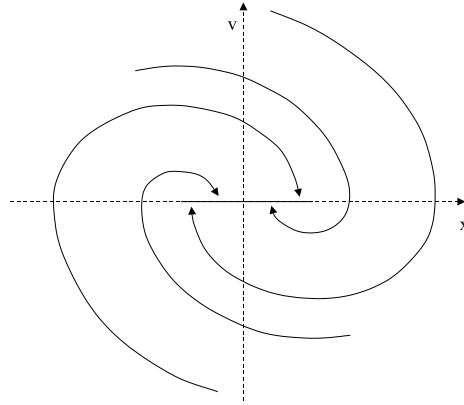


Abbildung 3.10: Trajektorien im Phasenraum eines Oszillators mit Coulomb-Reibung: Nach einiger Zeit kommt die Masse zur Ruhe, d.h. die Gleitbewegung geht in Haften über.

System gemäß Abbildung 3.11(a), wobei das Ende der Feder mit konstanter Geschwindigkeit v gezogen wird, kann so geschrieben werden:

$$m\ddot{x} + kx = F_r(\dot{x}) + kv t \quad (3.8a)$$

wobei gilt

$$F_r = \begin{cases} \mu_g mg \operatorname{sgn}(\dot{x}), & |F_r| > \mu_h mg, \\ k(x - vt), & |F_r| \leq \mu_h mg. \end{cases} \quad (3.8b)$$

Die Koeffizienten μ_g und μ_h beschreiben dabei die Gleit- bzw. Haftreibung. In Abhängigkeit von den Antriebsbedingungen und den Reibungskoeffizienten können komplizierte Bewegungstypen auftreten. Ferner können kleine Parameteränderungen dazu führen, daß sich der Bewegungstypus plötzlich ändert, z.B. von einer periodischen in eine chaotische Bewegung übergeht. Die sog. Stick-Slip-Bewegungen sind Gegenstand vieler aktueller Untersuchungen [GGB95, GP94], da sie in der Praxis eine große Rolle spielen. Anwendung finden Stick-Slip-Modelle beispielsweise bei der Beschreibung von Kupplungen und Bremsen [GW99], aber auch bei der Erdbeben-Modellierung [XK94].

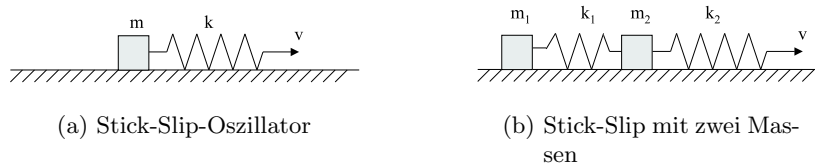


Abbildung 3.11: Stick-Slip-Oszillatoren (schematisch)

In [SV95] wurde ein Stick-Slip-System zur Beschreibung tektonischer Bewegungen vorgestellt, welches auf einem einfachen System basiert, das aus zwei Massen besteht, die über eine Feder miteinander verbunden sind und Stick-Slip-Bewegungen vollführen (siehe Abbildung 3.11(b)). Die Autorin konnte zeigen, daß dieses System Intermittenz (siehe 3.4.1) aufweist und schließlich chaotisch wird. In Abbildung 3.12 sind die Phasenraumdiagramme für drei verschiedene Werte der charakteristischen Geschwindigkeit v_c , die proportional zum

Haftreibungskoeffizient ist, dargestellt. Die zugehörigen Bewegungsgleichungen lauten

$$m_1 \ddot{x}_1 = k_1(x_2 - x_1) - F\left(\frac{\dot{x}_1}{v_c}\right) \quad (3.9a)$$

$$m_2 \ddot{x}_2 = k_1 x_1 - (k_1 + k_2)x_2 + k_2 vt - F\left(\frac{\dot{x}_2}{v_c}\right), \quad (3.9b)$$

wobei die Reibungskraft die folgende Form besitzt:

$$F(\dot{x}) = \frac{\text{sgn}(\dot{x})}{1 + |\dot{x}|}. \quad (3.10)$$

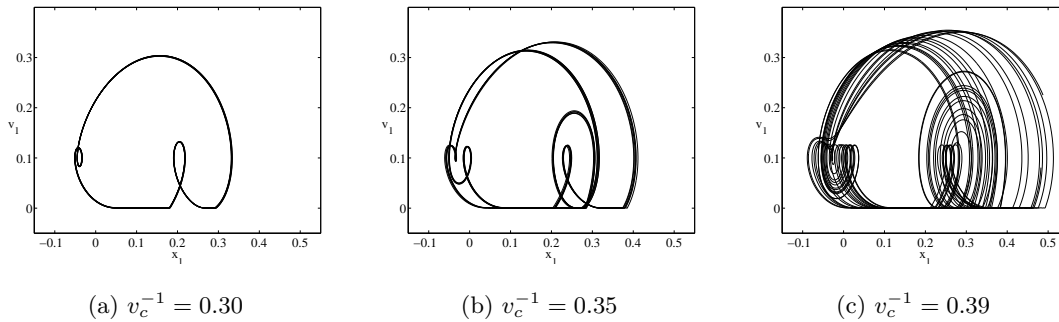


Abbildung 3.12: Trajektorien im Phasenraum eines Stick-Slip-Oszillators mit zwei Massen

3.3.2 Stöße zwischen Bausteinen

In der Praxis treten Systeme, in denen mehrere Bausteine zusammenstoßen können, häufig auf. Man nennt sie *Impact-Systeme*. Ein spezielles dieser Impact-Systeme, der Impact-Oszillator, gehört zu den einfachsten nichtlinearen Systemen. Er besteht aus einem gedämpften linearen Oszillator, dessen Schwingung durch eine Begrenzung eingeschränkt ist. Die Bewegungsgleichung zwischen zwei Stößen ist linear und besitzt somit eine einfache Lösung, wobei die Anfangswerte durch die Stöße vorgegeben sind.

Zu Beginn der 1980er Jahre haben Shaw und Holmes [SH83] ein derartiges periodisch getriebenes System bestehend aus einem gedämpften Feder-Masse-System und einer zweiten Feder, die nur für bestimmte Auslenkungen die Masse berührt, untersucht (siehe Abbildung 3.13). Die rücktreibende Kraft besitzt hierbei die Form

$$f(x) = \begin{cases} k_1 x, & x < x_0 \\ k_1 x + k_2(x - x_0), & x \geq x_0. \end{cases} \quad (3.11)$$

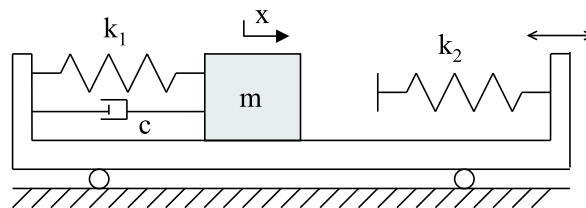


Abbildung 3.13: Stückweise linearer Oszillator

In diesem Modell wird vernachlässigt, daß auch die Feder k_2 nachschwingen kann, und somit ein Kontakt zwischen der Masse und der zweiten Feder nicht zwangsläufig an der Stelle $x = x_0$ stattfindet. Im Grenzübergang $k_2 \rightarrow \infty$ erhalten wir den sog. *harten Impact* (Abbildung 3.14). Für kleine Amplituden der Oszillatorschwingung findet kein Zusammenstoß der Masse m mit der Begrenzung statt und das System entspricht einem periodisch getriebenen, gedämpften linearen Oszillator. Mit wachsender Amplitude finden dann Stöße zwischen Begrenzung und Masse statt. Diese Stöße ereignen sich zunächst in der Nähe des Umkehrpunktes bei geringer Geschwindigkeit des Oszillators. Der Grenzzustand zwischen stoßender und nichtstoßender Bewegungsform wird *grazing impact* genannt, d.h. die Masse berührt die Begrenzung in x_0 mit verschwindender Geschwindigkeit. In den vergangenen Jahren wurde sehr ausführlich das Verhalten der Trajektorien eines Impact-Oszillators bei periodischer Anregung untersucht. Dabei wurden Anregungsfrequenz und -amplitude als Kontrollparameter des Systems variiert [HJ84, CONG94].

In der Regel beschränkt man sich auf die Umgebung des grazing-Punktes. Wir haben darüber hinaus die Auswirkungen betrachtet, die bei größeren Verschiebungen des Anstoßpunktes und konstanter Anregungsamplitude auftreten. Dazu betrachten wir das System

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = \beta \cos(\omega t), \quad x \geq b, \quad (3.12)$$

wobei b die Position der Begrenzung ist. Erreicht das System diese Begrenzung, d.h. existiert ein Zeitpunkt $t_i \in \mathbb{R}$ mit $x(t_i) = b$, so findet ein elastischer Stoß statt, d.h. $\dot{x}(t_i^+) = -\dot{x}(t_i^-)$. Impact-Oszillatoren modellieren u.a. Fügestellen zwischen Bauteilen von mechanischen Systemen, beispielsweise zweier Metallplatten, die nur locker miteinander verschraubt sind. Die Lage des Anstoßpunktes entspricht dabei der Position der Schraubenmutter, welche die maximale zulässige Schwingungsamplitude vorgibt.

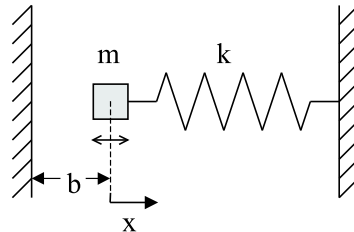


Abbildung 3.14: Harter Impact-Oszillator

In unseren Untersuchungen wurden $\gamma = 0.4$, $\omega_0 = 1$, $\beta = 1$ und $\omega = 3.1828$ gewählt und der Parameter b variiert. In Abbildung 3.15 ist für drei verschiedene b -Werte jeweils eine Trajektorie des Phasenraums und die entsprechende Zeitreihe des Systems zu sehen. Es findet bei Erhöhung von b ein Übergang von einem Periode-1-Orbit über einen chaotischen Zwischenbereich zu einem Periode-2-Orbit statt.

Das Verhalten dieses Systems ist nicht nur von den Systemparametern, sondern auch von den Startwerten abhängig. Ein getriebener Oszillator ohne Amplitudenbegrenzung mit obigen Parameterwerten würde nach dem Einschwingvorgang eine periodische Bewegung mit einer Amplitude von $A = 0.1085$ ausführen, d.h. alle b -Werte kleiner als $b = -0.1085$ sollten keinen Einfluß auf das Systemverhalten haben. Dies trifft allerdings nicht zu, da aufgrund der Anfangsbedingungen bereits Stöße während des Einschwingvorgangs auftreten.

Das zugehörige Bifurkationsdiagramm (Abbildung 3.16) zeigt den Übergang von Periode-1-Orbits über Chaos zu Periode-2-Orbits und schließlich wieder zurück zu Periode-1-Orbits. An den Stellen $b = 0.182$ und $b = 0.238$ lassen sich sehr schön inverse Periodenverdopplungsbifurkationen erkennen.

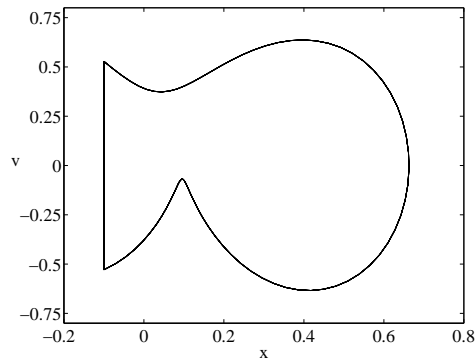
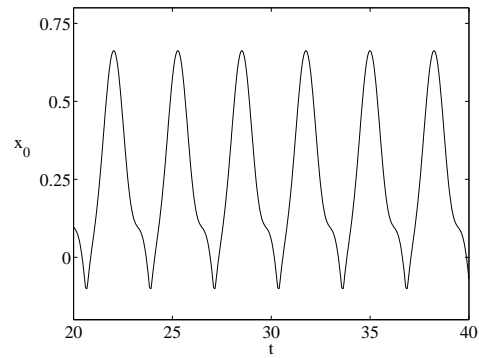
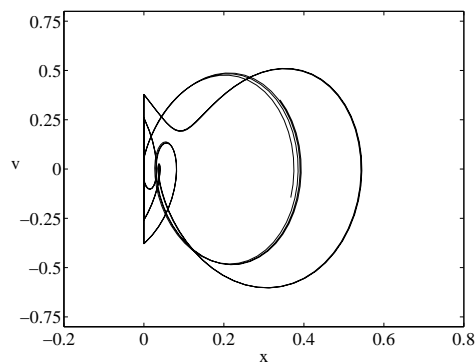
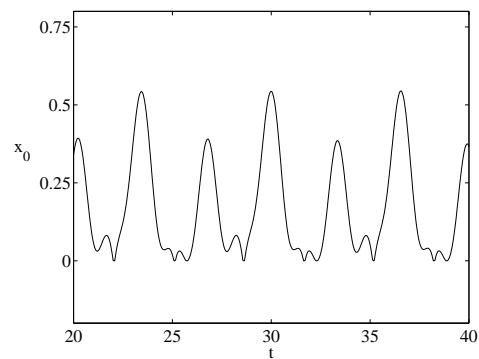
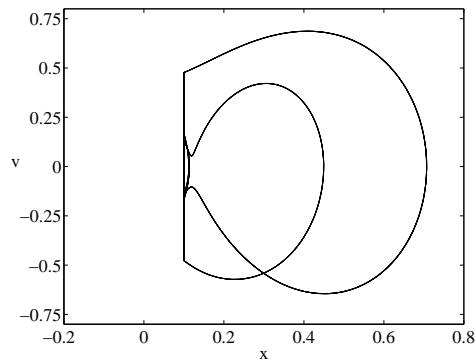
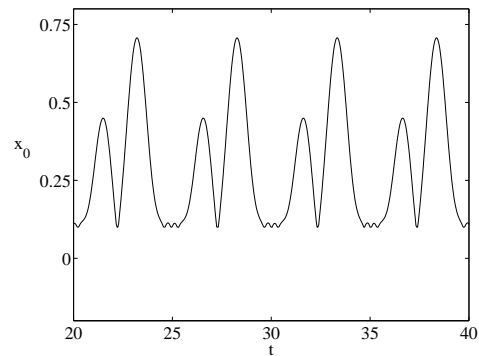
(a) $b = -0.1$ (b) $b = -0.1$ (c) $b = 0.0$ (d) $b = 0.0$ (e) $b = 0.1$ (f) $b = 0.1$

Abbildung 3.15: Phasenraumdiagramm und Zeitreihe des untersuchten Systems

3.4 Spezielle nichtlineare Effekte in komplexen Systemen

Wir sind im vorherigen Abschnitt bereits Phänomenen begegnet, die ausschließlich bei nichtlinearen Systemen auftreten. Wir wollen nun zwei dieser Phänomene etwas näher betrachten. Es handelt sich um die sog. Intermittenz und das Auftreten von sog. Bifurkationen.

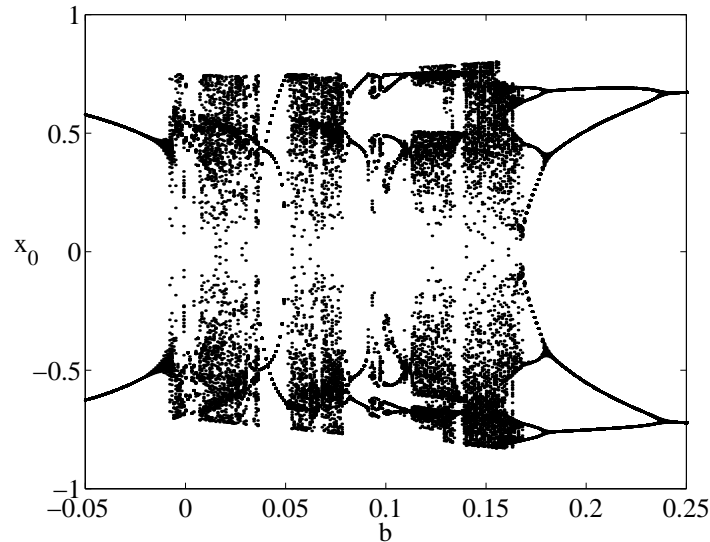


Abbildung 3.16: Bifurkationsszenario für $\omega = 3.1828$

3.4.1 Intermittenz

Der Begriff Intermittenz entstammt der Strömungsmechanik und bezeichnet dort ein ständiges Wechseln zwischen zwei verschiedenen Bewegungsformen, insbesondere dann, wenn eine laminare Strömung immer wieder durch Turbulenzen unterbrochen wird. In der Nichtlinearen Dynamik bezeichnet man es als Intermittenz, wenn sich die Bewegung im Laufe der deterministisch-dynamischen Entwicklung zeitweise – und damit lokal im Zustandsraum – in ihrer Erscheinungsform drastisch ändert. In einigen nichtlinearen Systemen tritt Intermittenz generisch auf, in anderen dagegen nur bei bestimmten Systemparametern. Im allgemeinen besitzen Systeme, die Intermittenz zeigen, zwei Zeitskalen, die zu jeweils einer der beiden Phasen gehören. Dieses Phänomen entsteht dadurch, daß ein stabiler periodischer Orbit instabil wird oder komplett verschwindet. Es existieren hierfür drei Mechanismen¹: eine inverse Sattelpunkt-Bifurkation (Typ-I), eine subkritische Hopf-Bifurkation (Typ-II) und eine subkritische Periodenverdopplungsbifurkation (Typ-III). Während Intermittenzen vom Typ I und III zu Chaos führen, ist dies bei Typ-II-Intermittenzen nicht möglich. Beispiele für Intermittenzen findet man im Lorenz-System (Typ-I) und bei der Rayleigh-Bénard-Konvektion (Typ-III).

3.4.2 Bifurkationen

Bifurkationen sind Übergänge zwischen verschiedenen Bewegungsformen, die dann auftreten, wenn ein Kontrollparameter einen bestimmten Wert, den sog. Bifurkationswert über- bzw. unterschreitet. Zwei Bewegungsformen sind im Sinne der Bifurkationstheorie dann verschieden, wenn sich die Trajektorien nicht durch eine stetige Transformation ineinander überführen lassen. Man sagt auch, daß die Bewegungsformen nicht zueinander topologisch äquivalent sind.

Nicht zueinander topologisch äquivalent sind beispielsweise periodische Orbits mit unterschiedlichen Periodizitäten. Besonders wichtige Bifurkationen sind solche, die zu einer deterministisch-chaotischen Bewegung führen. Einen derartigen Weg ins Chaos zeigt das Modell auf, das Ruelle, Takens und Newhouse zur Beschreibung des Übergangs von laminarer in turbulente Strömung vorgeschlagen haben. Die Autoren gehen davon aus, daß ein

¹Mathematische Eigenschaften der Bifurkationstypen, die bei diesen Phänomenen auftreten, sind in Anhang A zusammengestellt.

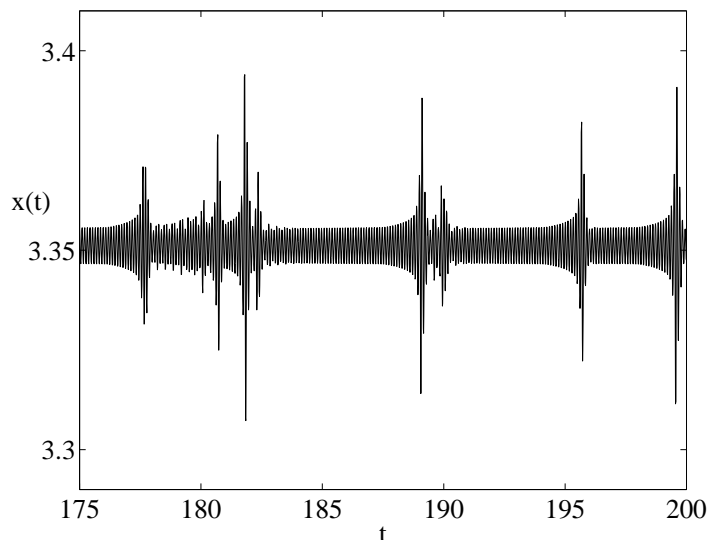


Abbildung 3.17: Beispiel einer Zeitreihe eines Systems mit Intermittenz: das Lorenz-System ($\sigma = 16.0$, $r = 45.92$, $\beta = 4.0$)

System, welches mit Parameterveränderung drei Hopf-Bifurkationen durchläuft, einen seltsamen Attraktor besitzt. Beim Ruelle-Takens-Newhouse-Szenario entsteht bei der ersten Bifurkation aus einem Fixpunkt ein periodischer Orbit, d.h. eine eindimensionale Bewegung im Phasenraum. Die zweite Hopf-Bifurkation erzeugt eine zweidimensionale Bewegung auf einem Torus (T^2) mit zwei Frequenzen, deren Verhältnis irrational ist. Erst mit der dritten Hopf-Bifurkation gelangt man ins chaotische Regime. Experimentelle Hinweise liefert das Leistungsspektrum, wobei bei jeder Hopf-Bifurkation eine zusätzliche Grundfrequenz im Spektrum auftaucht. Mit der dritten Hopf-Bifurkation kommt bei Existenz eines seltsamen Attraktors noch ein breitbandiger Rauschanteil hinzu [Eck81].

Ein zweiter Weg ins Chaos führt über eine unendliche Folge von Periodenverdopplungen (Pitchfork-Bifurkationen). Dieses Szenario wurde anhand der logistischen Abbildung² eingehend untersucht. Die Periodenverdopplungen finden bei Systemparametern μ_k statt, wobei Feigenbaum zeigen konnte, daß für aufeinanderfolgende Bifurkationswerte $\mu_{k+1} > \mu_k$ eine universelle Konstante, die Feigenbaum-Konstante, existiert, so daß gilt:

$$\delta = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\mu_{k+1} - \mu_k}{\mu_{k+2} - \mu_{k+1}} = 4.6692 \dots \quad (3.13)$$

Charakteristisch für das Bifurkationsdiagramm der logistischen Abbildung ist das Auftreten von sog. Fenstern einer bestimmten Periode, etwa von Fenstern der Perioden drei, fünf, sieben, u.a. Auch Bifurkationsdiagramme, die bei zeitkontinuierlichen Systemen auftreten, zeigen oft derartige bzw. ähnliche Fenster (z.B. bei der Bewegung einer rotierenden Achse mit Unwucht in einem Lager mit Spiel). Man kann eine derartige Ähnlichkeit der Bifurkationsdiagramme verstehen, wenn sich der Fluß auf dem Attraktor im Phasenraum – zumindest teilweise – auf ein Gebiet mit einer Dimension etwas größer als zwei zusammenzieht. Eine Poincaré-Abbildung reduziert sich dann näherungsweise auf eine eindimensionale Abbildung. Wenn deren Graph ein entsprechendes Maximum hat, dann ist die Nähe zur logistischen Abbildung und deren Bifurkationsdiagramm gegeben [Mül95].

Das sog. Pomeau-Manneville-Szenario beschreibt den Übergang zu chaotischen Systemen über Intermittenzen. Dabei treten inverse Sattelpunkt-Bifurkationen auf, d.h. es findet die

²Die logistische Abbildung $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1] : x_n \mapsto x_{n+1} = f(x_n) = \mu x_n(1 - x_n)$, $0 < \mu \leq 4$, wurde ausführlich von Devaney [Dev89] diskutiert.

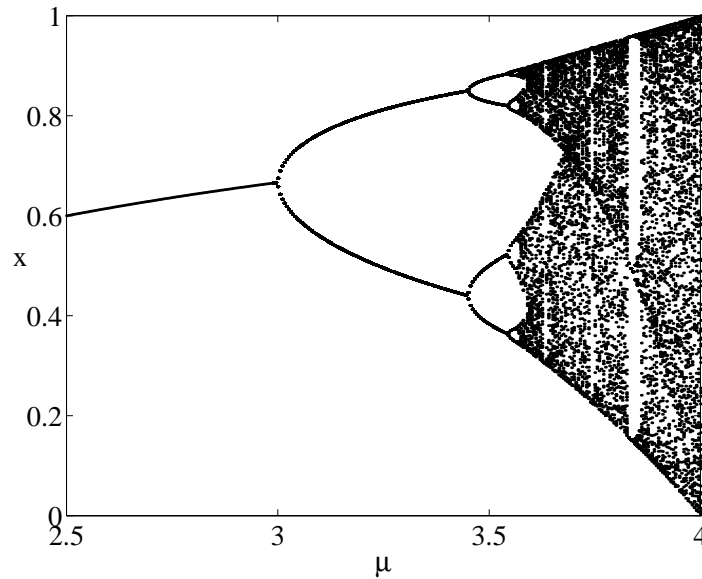


Abbildung 3.18: Bifurkationsdiagramm der logistischen Abbildung

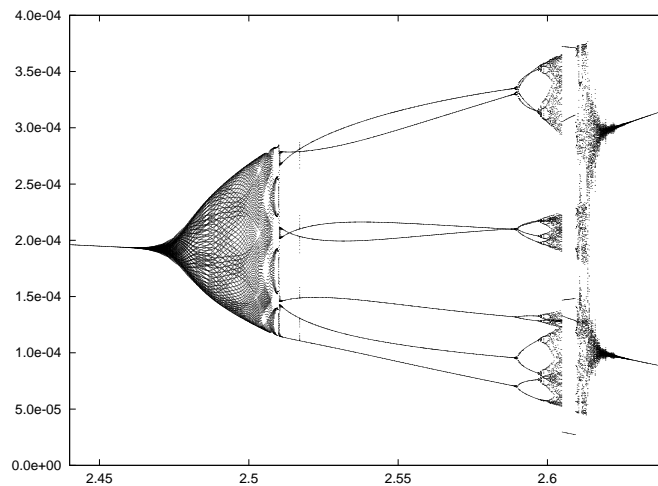


Abbildung 3.19: Bifurkationsdiagramm für die Bewegung eines Rotors mit Unwucht in einem Lager mit Spiel als Funktion der Antriebsdrehzahl [Sim97].

Kollision eines stabilen Fixpunktes mit einem instabilen Fixpunkt statt, die anschließend beide verschwinden. Man findet den Pomeau-Manneville-Übergang unter anderem bei dem Modell für die Bewegung der Drehgestelle von Eisenbahnwagen, das Cooperrider aufgestellt hat [IT97, JT97].

3.5 Bewertung

Die durch gesetztesbasierte Modellierung entwickelten Vorstellungen über Eigenschaften und Arbeitsweise von Bauelementen sind eine der wesentlichen Grundlagen technischer Konstruktionspraxis. Dies ist bei den physikalischen Gesetzmäßigkeiten offensichtlich. Mechanische Festigkeiten, Temperaturverhalten, die Grundgleichungen der Mechanik u.ä. haben in der Technik ihren festen Platz, ebenso wie entsprechende Grundlagen der Elektrotechnik, der Strömungsmechanik usw. In vielen Fällen kommt es nicht darauf an, die speziellen Details in

allen Einzelheiten zu behandeln. Häufig genügen Abschätzungen, gegebenenfalls mit entsprechenden Sicherheitszuschlägen. Dieses Vorgehen hat sich in der Praxis in vielen Bereichen bewährt und läßt sich dann verstehen, wenn man sich auf die Fälle beschränkt, in denen sich die Systeme linear verhalten, bzw. in denen ihr Verhalten zu dem Verhalten linearer Systeme topologisch konjugiert ist (vgl. das sog. Hartman-Grobman-Theorem [GH83]) und ihrerseits im betrachteten Betriebsbereich strukturelle Stabilität aufweisen.

Die Verhältnisse ändern sich, wenn man an die Grenzen eines quasilinearen Verhaltens stößt, insbesondere dann, wenn das System strukturell instabil wird. Besonders ungünstig ist der Fall genau dann, wenn in einem sonst einheitlichen Betriebsbereich ein kleines Fenster mit qualitativ abweichendem Verhalten auftritt (vgl. Abbildung 3.18 und 3.19). Solche Fenster können bei numerischen Simulationen des Systemverhaltens leicht übersehen werden und dann in der Praxis zu unerwarteten Überraschungen führen.

Vor diesem Hintergrund ergibt sich die Frage, ob eine gesetzesbasierte Modellierung, bei der man gezielt bzw. bewußt die nichtlinearen Effekte im Auge hat, ohne weiteres zu allgemeinen Aussagen oder Regeln führt. Wir betrachten im folgenden zunächst auftretende nichtlineare Phänomene, dann nichtlineare Mechanismen und schließlich die Frage der numerischen Berechenbarkeit in der Praxis.

3.5.1 Nichtlineare Phänomene

Wir wollen in diesem Abschnitt einige typische nichtlineare Erscheinungen zusammenfassen, die sich praktisch direkt, d.h. mit Standardmethoden, in den Meßergebnissen widerspiegeln.

Zeitfunktionen

Der erste Schritt bei der Analyse von Meßdaten besteht darin, die Meßgröße als Funktion der Zeit aufzutragen. Unter Umständen kann man bereits aus der Zeitreihe direkte Hinweise auf nichtlineares Verhalten bekommen. Handelt es sich bei der Bewegung oder der Zustandsänderung um

1. amplitudenbegrenztes Verhalt (Impacts),
2. zeitlichen Wechsel zwischen verschiedenen Bewegungsformen (Intermittenz) oder
3. unregelmäßiges Verhalten (deterministisches Chaos),

so kann man dies bereits aus der Zeitreihe ablesen. Während im Fall von amplitudenbegrenzten Verhaltens ein direkter Hinweis auf nichtlineare Gesetzmäßigkeit besteht, kann es sich bei den beiden anderen Fällen um deterministisches oder aber stochastisches Verhalten handeln. Intermittenz kann durch einen nichtlinearen stochastischen Prozeß (z.B. lineare stochastische Prozesse, die durch einen Punktprozeß getriggert werden) vorgetäuscht werden. Eine Abfolge der Daten, die auf den ersten Blick und bei Anwendung klassischer Methoden stationär unregelmäßig erscheint, kann deterministisches Chaos widerspiegeln, aber auch das Resultat eines stochastischen Prozesses sein. In diesem Fall können nur genauere Analysen bzw. Betrachtungen nähere Aufschlüsse geben. Hochdimensional deterministisches und stochastisches Verhalten ist bei konkreten Systemen jedoch nicht klar voneinander abgegrenzt.

Phasenraumportraits

Phasenraumportraits erhält man, wenn man mehrere Meßgrößen oder bei einer Meßgröße zeitversetzte Werte gegeneinander aufträgt. Man erhält hier einen deutlicheren Einblick in die Bewegungsabläufe als bei der Betrachtung nur einer einzelnen Meßgröße. Hierzu trägt

insbesondere auch bei, daß z.B. bei einem zweidimensionalen Portrait nicht nur die y - sondern auch die x -Skala auf die Systemdynamik ausgerichtet ist. Die üblicherweise homogene Zeitskala entspricht der im Alltag verwendeten, an harmonischen Oszillatoren orientierten Zeit. Bei stark nichtlinearen (und damit anharmonischen) Prozessen können andere Skalen zweckmäßiger sein (Beispiel: Bogenlänge im Phasenraum).

Charakteristische Phasenraumportraits treten nicht nur bei Stoßprozessen, sondern auch bei Stick-Slip-Prozessen und bei Übergängen zwischen Gleichgewichtsbereichen auf, beispielsweise beim Duffing-Oszillator oder beim Lorenz-System.

Bifurkationsdiagramme

Ein Bifurkationsdiagramm erhält man, wenn man eine charakteristische Meßgröße als Funktion eines Kontrollparameters, des sog. Bifurkationsparameters, aufträgt. Es lassen sich in einem Bifurkationsdiagramm die folgende Situationen erkennen:

1. strukturell verschiedene Bewegungsformen, die durch Bifurkationspunkte voneinander getrennt sind,
2. spezifische Bewegungsformen, die für bestimmte Bewegungstypen charakteristisch sind, sowie
3. charakteristische Abfolgen von Bifurkationen (sog. Bifurkationsszenarien).

Der erste Fall scheint auf den ersten Blick lediglich die Existenz von Bifurkationen zu beschreiben, d.h. zunächst einfach nur eine Abweichung vom linearen Verhalten. Wichtig hierbei ist, daß kleine Bereiche des Kontrollparameters, in denen eine andere Bewegungsform auftritt, leicht übersehen werden. Dies kann sich bei Simulationen leicht ereignen und in der Praxis sehr gefährlich sein. Ein Beispiel ist das kleine Fenster im Parameterbereich ≈ 2.515 bei der rotierenden Welle in Abbildung 3.19.

Ein typischer Fall, der unter Ziffer 2 eingeordnet werden kann, ist ein Fenster der Periode drei (oder einer anderen Periode, die nicht eine Zweierpotenz ist). In dem Fall, in dem die Dynamik im betrachteten Parameterbereich durch eine eindimensionale Abbildung genähert werden kann, können dann instabile periodische Bewegungsformen und auch instabiles gesetzmäßiges Chaos existieren. Dabei hängt es von der Dämpfung ab, ob und inwieweit sich diese instabilen Effekte bemerkbar machen. Bei Werten des Bifurkationsparameters in der Nähe eines Überganges von stabilem Chaos zur Periode-3 tritt in der Regel Intermittenz auf. Treten derartige Bewegungsformen im Bifurkationsdiagramm eines konkreten Systems auf, so ist erhöhte Aufmerksamkeit geboten.

Der Übergang im Bifurkationsdiagramm zwischen einem chaotischen Bereich und einem Bereich der Periode-3 ist nur ein Beispiel einer charakteristischen Bifurkationsabfolge (Fall 3). Die bekannteste Situation ist die Periodenverdopplungsrouten ins Chaos, wie man sie bei der logistischen Abbildung findet (Abbildung 3.18). Für die Praxis bedeutet dies, daß beim Auftreten von Periodenverdopplungen ein anschließendes unregelmäßiges Systemverhalten höchstwahrscheinlich gesetzmäßigem Chaos entspricht.

3.5.2 Mechanismen

Im Phasenraum kann man häufig das Auftreten von deterministischem Chaos durch ein Auseinanderlaufen und Rückfalten von Trajektorien erklären. Dieser Mechanismus ist aber relativ abstrakt und stellt keine direkte Verbindung zu konstruktiven Elementen von Maschinen u.ä. her. Man kann aber auch bei nichtlinearen Systemen durchaus bestimmte Eigenschaften einer Konstruktion mit dem erwarteten dynamischen Verhalten assoziieren.

Benachbarte Gleichgewichtslagen

An stabilen Gleichgewichtslagen verschwindet die erste Ableitung des Potentials³. Bei nicht verschwindender zweiter Ableitung verhält sich die Bewegung bei kleinen Amplituden wie ein harmonischer Oszillator. Bei entsprechender Anregung kann sich die Amplitude so aufschaukeln, daß der Linearitätsbereich verlassen wird. Insbesondere kann das System in den Einzugsbereich der anderen, benachbarten Potentialmulde gelangen. Dann treten im allgemeinen Einschwingvorgänge auf, die durch die Nichtlinearität kompliziert werden. Insbesondere kann es nach einiger Zeit zu einer Rückkehr in die ursprüngliche Mulde und insgesamt zu einem deterministisch chaotischen Bewegungsablauf kommen.

Dieser Grundmechanismus des Überganges zwischen nichtstationären lokalen Bewegungsformen ist nicht an die quadratische Näherung des Potentials gebunden, sondern basiert darauf, daß sich die antreibende Kraft mit den lokalen systeminternen Rückstellkräften je nach Phasenlage so addieren kann, daß Energie zugeführt und die Barriere überschritten wird. Im einzelnen hängt das Zusammenspiel von den Details ab. Sie bestimmen, ob Chaos oder periodisches Verhalten resultiert. Dies zeigt sich auch deutlich in den Bifurkationsdiagrammen (vgl. Abbildung 3.6).

Fügestellen

An Fügestellen, wie sie z.B. bei Maschinenführungen und insbesondere in Getrieben auftreten, sind es vor allem zwei verschiedene Mechanismen, die zu typisch nichtlinearem Verhalten wie Periodenverdopplungen und Chaos führen können:

- Stick-Slip-Bewegung, d.h. Wechsel zwischen Haft- und Gleitreibung,
- Stoßvorgänge.

In beiden Fällen treten Diskontinuitäten im Phasenraum auf: Bei der Stick-Slip-Bewegung ändert sich zeitweise die effektive Dimension des Phasenraumes und bei den Stoßvorgängen ändert sich die Geschwindigkeit praktisch unstetig. Selbst dann, wenn das System abgesehen von den Übergangsstellen linear ist, kann z.B. Chaos auftreten. Dies kann man verstehen, wenn man sich vergegenwärtigt, daß bei Eintritt in eine neue Phase der Bewegung, das System einer Überlagerung von stationären (inhomogenen) und transienten (homogenen) Lösungen folgt. Dabei richtet sich der homogene Anteil nach den jeweiligen Anfangswerten. Periodische Lösungen treten nur dann auf, wenn diese Anfangswerte sich nach Phase und Amplitude passend aus dem vorhergehenden Bewegungsabschnitt ergeben. D.h., beim Stoß müssen Ort und Geschwindigkeit während des Auftreffens entsprechende Werte haben; beim Stick-Slip-System gilt entsprechendes für den Eintritt in die Stick- bzw. die Slip-Phase. Auch hier gilt wie bei den Übergängen zwischen zwei Potentialmulden, daß es im Prinzip nicht auf die Linearität ankommt, sondern auf das Zusammenspiel der verschiedenen elementaren Faktoren (z.B. Reibung, Rückstellkräfte, Antrieb).

Leider gilt auch hier, daß die Details, z.B. wo bei einem konkreten System Bifurkationen auftreten bzw. wie sie vermieden werden können, empfindlich von den konkreten Systemparametern abhängen können. Die große technische Bedeutung der nichtlinearen Fügestellendynamik ist offensichtlich, umfaßt ihr Einfluß doch z.B. das Violinspiel, die knarrende und quietschende Plastikverkleidungen und Bremsen in Automobilen, ratternde Getriebe, quietschende Kreide und kreischende Kurvenfahrten von Straßenbahnen.

³Sofern der Potentialbegriff sinnvoll angewendet werden kann und das Potential entsprechend glatt ist.

3.5.3 Berechenbarkeit

Nur in den wenigsten Anwendungen lassen sich gesetzesbasierte Modelle analytisch auswerten. Man ist auf numerische Simulationen angewiesen. Dabei ergibt sich die grundsätzliche Frage, inwieweit Systeme mit empfindlicher Abhängigkeit von den Startwerten und den Systemparametern sich überhaupt numerisch behandeln lassen. Dabei muß man verschiedene Situationen unterscheiden, je nachdem ob man lediglich eine bestimmte Trajektorie berechnen will, prüfen will, ob eine bestimmte Klasse von Trajektorien vorliegt, beispielsweise Verhalten einer bestimmten Periode oder Chaos, oder aber Aussagen über die Häufigkeit des Auftretens der verschiedenen Zustände, d.h. über die invarianten Maße, gewinnen will.

Shadowing-Lemma

Wenn man nur eine allgemeine Aussage anstrebt, d.h. nicht eine spezielle Trajektorie berechnen will, dann stört es nicht, wenn nach kurzer Zeit das Berechnungsergebnis von der intendierten Trajektorie abweicht. Man kann den Punkt, an dem die Toleranzgrenze überschritten wird, als neuen Startpunkt eines anderen kurzen Trajektorienstückes auffassen. Auf diese Weise kann man z.B. Häufigkeitsmaße über einem Attraktor ausrechnen.

Es gilt bei Systemen mit Attraktoren jedoch das sog. *Shadowing Lemma*, das besagt, daß es bei dissipativen Systemen eine einheitliche Trajektorie gibt, die den vielen kleinen Stücken in enger Nachbarschaft folgt. In der abstrakt-mathematischen Formulierung lautet das Lemma [GH83]:

Satz 3.1 (Shadowing Lemma von Bowen) *Sei Λ eine hyperbolische invariante Menge. Dann existiert für jedes $\beta > 0$ ein $\alpha > 0$, so daß jeder α -Pseudoorbit⁴ $\{x_i\}_{i=a}^b$ in Λ von einem Punkt $y \in \Lambda$ β -beschattet⁵ wird.*

Hier sind die x_i die vom Computer berechneten Werte und y der Startpunkt derjenigen „wahren“ Trajektorie, von der alle x_i weniger als α entfernt sind.

Grenzen der Berechenbarkeit

So beruhigend das Shadowing-Lemma erscheint, so räumt es nicht alle Komplikationen aus. Zu diesen gehört die Berechnung von Trajektorien in der Nähe von Bassingrenzen, welche die Einzugsgebiete verschiedener Attraktoren trennen. An der Bassingrenze sind die Voraussetzungen des Lemmas nicht gegeben.

Auf eine andere Komplikation haben in jüngster Zeit Lai und Grebogi hingewiesen [LG99, LLWG99]. Bei gekoppelten chaotischen Flüssen oder Abbildungen muß man nichthyperbolisches Verhalten des Gesamtsystems erwarten. Dann ist die wesentliche Bedingung des Shadowing-Lemmas nicht erfüllt. Ein natürliches System, das aus entsprechend gekoppelten chaotischen Subsystemen besteht, kann dann nicht mehr numerisch simuliert werden. Damit ist eine auswertbare Modellierung nicht möglich.

Trotz der erwähnten Einschränkungen bleibt doch der Vorteil gesetzesbasierter Modellbildung, daß in vielen Fällen ein Zusammenhang zwischen den dynamischen und den konstruktiven Merkmalen des Systems hergestellt werden kann, d.h. man kann ein Gefühl dafür gewinnen, wie sich konstruktive Veränderungen auf die Systemdynamik auswirken könnten.

⁴Sei M eine Mannigfaltigkeit und $\varphi_t : M \rightarrow M$ ein Diffeomorphismus, dann heißt eine endliche Folge $\{x_i\}_{i=1 \dots N}$ ein α -Pseudoorbit des Flusses φ , wenn für alle i das Bild $\varphi(x_i)$ in einer α -Umgebung von x_{i+1} liegt.

⁵Ein Punkt y heißt β -Schatten einer Folge $\{x_i\}_{i=1 \dots N}$, wenn für alle i die x_i in einer β -Umgebung von $\varphi_t^i(y)$ liegen.

Kapitel 4

Basisbasierte Modelle

Das Ziel der Signalverarbeitung ist es, aus einer gegebenen Folge von Meßdaten, dem Signal, bestimmte Informationen zu extrahieren. Zu diesem Zweck wendet man geeignete Transformationen auf diese Folge von Meßdaten an, in der Erwartung, die gewünschten Informationen aus der transformierten Funktion einfacher als aus dem ursprünglichen Signal gewinnen zu können. Über die Jahre ist die Anzahl der eingesetzten Algorithmen zu einem großen Werkzeugkasten angewachsen, der Ansätze für verschiedenartige Probleme bereit hält. Viele dieser Ansätze sind von der Vorstellung oder zumindest der Hoffnung bestimmt, daß sich das Systemverhalten als eine Überlagerung spezieller Grundtypen darstellen und verstehen läßt. Man versucht diese Grundtypen so zu wählen, daß wenige von ihnen die Darstellung dominieren. Häufig werden daher Funktionensysteme eingesetzt, die Darstellungen von Symmetriegruppen repräsentieren und somit besonders einfach erlauben, Invarianzeigenschaften des betrachteten Systems, beispielsweise Translationsinvarianz oder Rotationsinvarianz, wiederzugeben. Beispiele sind die Entwicklungen der Lösungen der Wellengleichung nach Eigenfunktionen des Translationsoperators (ebene Wellen) und nach Funktionen bestimmter Rotationssymmetrie (Kugelfunktionen bzw. Multipole).

In diesem Kapitel wollen wir zunächst einen allgemeinen Blick auf Funktionensysteme werfen und uns anschließend speziell mit Wavelet-Transformationen beschäftigen. Die Wavelet-Transformation findet derzeit vor allem im Bereich der Kodierung und der Filterung Anwendung. Bei der Analyse dynamischer Systeme hat sie noch keinen festen Platz in dem Sinne gefunden, daß sie ein Standardverfahren der Analyse wie z.B. die Surrogatdatenmethode wäre. Ziel ist es zu prüfen, bei welchen Fragen eine Darstellung durch Wavelets Vorteile erwarten läßt. Die mathematischen Grundlagen der Wavelet-Theorie sind in [Chu92], [JS94] und [Str89] dargestellt.

4.1 Entwicklung nach Funktionensystemen

In der mathematischen Physik hat sich eine ganze Reihe von speziellen Funktionen etabliert, die zur Lösung physikalischer Probleme eingesetzt werden. In diesem einleitenden Abschnitt wollen wir einen Blick auf die darauf aufbauenden Funktionensysteme werfen.

4.1.1 Zerlegung und Darstellung

Die Lösung einer Modellgleichung oder das quantitative Modell einer Meßreihe ist in der Regel als Element in einem zunächst abstrakten Funktionenraum aufzufassen. Das zentrale Problem besteht nun darin, herauszufinden, wie diese Funktion dem Problem entsprechend geeignet repräsentiert werden kann. Joseph Fourier entdeckte zu Beginn des 19. Jahrhunderts, daß jede periodische Funktion – sei sie noch so bizarr – durch eine Summe aus Sinus- und

Kosinusfunktionen ausgedrückt werden kann, d.h. es gibt offensichtlich in der Mathematik für ein und denselben Sachverhalt unterschiedliche Darstellungen. Diesen Gedanken wollen wir ein wenig abstrakter formulieren. Man nehme zunächst an, daß die Menge der Signale einen Vektorraum V über dem Zahlenkörper \mathbb{K} bilden. Es soll nun eine Familie $\mathcal{D} = \{e_i\}_{i \in I}$ von elementaren Signalen in V existieren, wobei I eine Indexmenge ist, so daß eine ausgewählte Funktion $f \in V$ als Superposition von solchen Elementarsignalen geschrieben werden kann:

$$f = \sum_{i \in I} \alpha_i e_i, \quad \alpha_i \in \mathbb{K}. \quad (4.1)$$

Die Menge der Elementarsignale bezeichnet man als Katalog oder Wörterbuch und nennt sie *vollständig* in V , falls jedes Signal $f \in V$ durch eine solche Reihe beliebig genau hinsichtlich der gewählten Norm approximiert werden kann. Im Falle eines vollständigen Katalogs bezeichnet man (4.1) als Darstellung der Funktion $f \in V$ bzgl. $\{e_i\}$. Diese Darstellung braucht nicht eindeutig zu sein, denn es besteht die Möglichkeit, daß der Katalog übervollständig ist, d.h. es können redundante Elementarsignale in \mathcal{D} enthalten sein und die einzelnen Elemente sind damit nicht linear unabhängig. Handelt es sich bei \mathcal{D} um eine vollständige und linear unabhängige Teilmenge von V , so spricht man von einer Basis.

Existiert auf dem Funktionenraum V zusätzlich ein Skalarprodukt, d.h. eine bilineare Abbildung $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \rightarrow \mathbb{K}$, so wird V zu einem Prähilbertraum und man kann den Begriff der Orthogonalität einführen. Wenn die Basisvektoren normiert werden, z.B. mit der durch das Skalarprodukt induzierten Norm, dann erhält man ein orthonormales Basissystem mit dem Vorteil, daß sich die Entwicklungskoeffizienten der Darstellung besonders einfach berechnen lassen:

$$\alpha_i = \langle f, e_i \rangle. \quad (4.2)$$

Liegt kein orthonormales Basissystem vor, so werden die Entwicklungskoeffizienten mittels der dualen Basisvektoren¹ $\{\tilde{e}_i\}_{i \in I}$ bestimmt und es gilt $\alpha_i = \tilde{e}_i(f)$. Ein vollständiges Basissystem kann i.a. durch einen Orthogonalisierungsprozeß in eine Orthonormalbasis überführt werden. Die Operation, welche einer Funktion ihre Entwicklungskoeffizienten α_i zuweist, heißt die Analyse von f bzgl. $\{e_i\}$.

4.1.2 Funktionensysteme als Lösung klassischer Probleme

Im Mittelpunkt der mathematischen Behandlung physikalischer Probleme steht im allgemeinen die Lösung einer Bewegungsgleichung, welche oftmals eine Differentialgleichung ist. Daher sind Systeme von Funktionen, welche diese Gleichungen erfüllen, von besonders großer Bedeutung. Das bekannteste Beispiel eines klassischen Funktionensystems sind die periodischen Lösungen der homogenen Wellengleichung. Aufbauend auf der periodischen Zeitabhängigkeit $\exp(i\omega t)$ dieser Wellen kann man formal die Fourier-Analyse definieren. Für eine beliebige Funktion $f \in L^1(\mathbb{R})$ wird die zugehörige Fourier-Transformation \hat{f} durch

$$\hat{f}(\omega) \equiv \mathcal{F}[f(t)](\omega) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} dt e^{i\omega t} f(t) \quad (4.3)$$

definiert. Den Koeffizienten $\hat{f}(\omega)$ kann man als komplexe Amplitude auffassen, mit welchem die Frequenz ω in der Funktion f vertreten ist. Wir wollen anmerken, daß \hat{f} zwar eine beschränkte Funktion ist, aber nicht zwangsläufig eine L^1 -Funktion, d.h. es existiert unter Umständen keine inverse Fourier-Transformation, was bedeutet, daß man die Funktion $f \in L^1$ nicht aus ihrem Spektrum rekonstruieren kann. In der Anwendung sind die

¹Die Menge der linearen Funktionale $\tilde{f} : V \rightarrow \mathbb{K}$ bildet einen \mathbb{K} -Vektorraum, den sog. Dualraum V' von V . Die duale Basis $\{\tilde{e}_i\}$, d.h. die Basis des Vektorraumes V' , erfüllt die Bedingung $\tilde{e}_i(e_j) = \delta_{ij}$ für alle $i, j \in I$.

L^1 -Funktionen ohnehin nicht von Bedeutung. Dort arbeitet man in der Regel mit quadratintegrablen Funktionen, da eine Funktion $f \in L^2(\mathbb{R})$ als analoges Signal mit endlicher Energie, definiert durch die L^2 -Norm $\|f\|$, interpretiert werden kann. Zudem bilden die L^2 -Funktionen nach Einführung des Skalarproduktes

$$\langle f, g \rangle = \int_{\mathbb{R}} dt f(t)^* g(t), \quad \forall f, g \in L^2(\mathbb{R}), \quad (4.4)$$

einen Hilbertraum. Schränkt man den Definitionsbereich der Fourier-Transformation in (4.3) auf Funktionen $f \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ ein, so erhält man einen normerhaltenden linearen Operator $\mathcal{F} : L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R}) \rightarrow L^2(\mathbb{R})$. Da die Menge $L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ dicht in $L^2(\mathbb{R})$ liegt², werden wir im folgenden nur noch L^2 -Funktionen betrachten. Damit ist dann auch die Existenz der inversen Transformation

$$f(t) \equiv \mathcal{F}^{-1}[\hat{f}(\omega)](t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} d\omega e^{-i\omega t} \hat{f}(\omega) \quad (4.5)$$

sichergestellt.

Die Legendre-Polynome, welche ein Orthonormalsystem des Funktionenraumes $L^2([-1, 1])$ bilden, sind ein weiteres bekanntes Beispiel für klassische Funktionensysteme. Sie entstehen durch einen Orthogonalisierungsprozeß aus den Monomen $1, t, t^2, \text{etc.}$, und besitzen die Eigenschaft, Lösungen der sog. Legendre-Differentialgleichung zu sein. Die Legendre-Differentialgleichung tritt nach Trennung der Variablen bei der Lösung der Laplace-Gleichung in Kugelkoordinaten auf und hängt eng mit den Darstellungen der Drehgruppe zusammen.

Man beachte, daß die funktionale Form eines orthogonalen Funktionensystems von der Wahl des Skalarproduktes auf dem entsprechenden Funktionenraum abhängt. Wählt man an Stelle des üblicherweise verwendeten Skalarproduktes auf L^2 beispielsweise ein Skalarprodukt mit einer zusätzlichen Wichtungsfunktion $w(x) = e^{-t^2}$, so gelangt man zu den sog. Hermite-Polynomen. Im Rahmen der Approximationstheorie spielen auch nichtorthogonale Polynomentwicklungen eine große Rolle. Wir wollen an dieser Stelle zwei Typen erwähnen, nämlich die Taylor-Entwicklung, welche eine Polynomentwicklung in rationaler Form ausgehend von einem einzigen Punkt darstellt, und die Hermite-Entwicklung, eine Entwicklung in rationaler Form von zwei Stützpunkten aus. Eine ausführliche Diskussion klassischer Funktionensysteme ist in Courant/Hilbert [CH68] zu finden.

4.1.3 Grenzfälle der Brauchbarkeit

Oftmals sind die verwendeten Funktionensysteme den Anforderungen, wie sie in technischen Anwendungen auftreten, nicht angepaßt. Beispielsweise kann die Berechnung der Entwicklungskoeffizienten sehr rechenintensiv sein und damit die Verwendbarkeit stark einschränken. Zudem besteht die Gefahr der Fehlinterpretation, weil Reihenentwicklungen als Ganzes gesehen werden müssen und die Betrachtung einzelner Terme leicht zu einem falschen Verständnis führen kann. Als Beispiel hierfür wollen wir die Entwicklung elektrischer Ladungsverteilungen nach Multipolen anführen, die am Ort der tatsächlichen Ladungen nicht definiert ist. Ein weiterer Aspekt ist der Definitionsbereich, auf dem die Entwicklung durchgeführt wird, und damit die Frage, ob eine Entwicklung als lokal oder global angesehen werden kann. Das Polynom $t - t^3/6 + t^5/120$ stellt eine gute Approximation der Funktion $\sin(t)$ im Intervall $[0, 2]$ dar, weicht außerhalb dieses Intervalls allerdings sehr stark ab.

Zusätzliche Probleme treten auf, wenn die gewählten Funktionensysteme gänzlich andere Eigenschaften als die zu entwickelnde Funktion besitzen. In vielen naturwissenschaftlichen

²„Dicht“ bedeutet in diesem Zusammenhang, daß für jede Funktion $f \in L^2(\mathbb{R})$ eine Folge von Funktionen $\{f_i\}_{i=1,2,\dots}$ mit $f_i \in L^1 \cap L^2$ gefunden werden kann, so daß f_i gegen f konvergiert.

Anwendungen wird man dazu gedrängt, beliebige Funktionen nach Lösungen der Wellengleichung, z.B. nach trigonometrischen Funktionen, zu entwickeln. Funktionen, die nicht-periodisch, schwach analytisch oder sogar unstetig sind, durch trigonometrische Reihen darzustellen, also nach Reihen, deren Glieder andererseits sehr starke analytische Eigenschaften besitzen, entbehrt nicht einer gewissen Willkür. Insbesondere an Unstetigkeitsstellen in der zu analysierenden Funktion, tritt in Fourier-Reihen der Gibbs' Effekt auf, d.h. eine Überhöhung des Funktionswertes. Diese Überhöhung kann man bei trigonometrischen Fourier-Reihen abschätzen; sie beträgt etwa 18%. Der Gibbs' Effekt ist ein Folge des Abschneidens der Fourier-Reihe.

4.2 Grundlagen der Waveletanalyse

Wir wollen im folgenden das Konzept der Waveletfunktionen vorstellen, welches einige Schwierigkeiten, die im Zusammenhang mit der Entwicklung nach klassischen Funktionensystemen entstehen, behebt.

4.2.1 Eine Aufgabenstellung aus der Praxis

Ein großer Mangel der Fourier-Analyse ist ihre Nichtlokalität. So enthält die Fourier-Transformierte zwar Informationen über die Frequenzverteilung eines Signals, nicht aber über deren Zeitstruktur. Die Zeitinformation geht zwar bei Fourier-Transformation nicht verloren – anderenfalls wäre keine Rekonstruktion des Signals aus den Fourier-Koeffizienten möglich –, aber sie ist in der relativen Phasenlage der verschiedenen Frequenzen verborgen. Nehmen wir als Beispiel etwa ein Musikstück und einen einzelnen Ton aus einer sehr kurzen hochfrequenten Schwingungskomponente, deren Amplitude rasch abfällt. Die Information, welche Frequenzen in einem solchen Signal enthalten sind, ist vielfach wertlos, weil man nicht ohne weiteres bestimmen kann, wann sich die verschiedenen Frequenzen konstruktiv oder destruktiv überlagern. Ähnliche Probleme treten auch in seismischen Daten auf. Wünschenswert ist daher ein Verfahren, welches in der Lage ist, sowohl „den Wald als auch die Bäume“ zu sehen. Insbesondere bei der Analyse nichtstationärer Signale ist dies von großer Bedeutung. Die Fourier-Analyse ist im Gegensatz hierzu vor allem bei stationären Signalen nützlich, in denen alle auftretenden Frequenzkomponenten zu allen Zeiten vorhanden sind.

Grundsätzlich sollte die Konstruktion eines solchen Verfahrens möglich sein. Im Falle eines Musikstückes ist es beispielsweise einem geübten Zuhörer möglich, die Noten auf Notenpapier zu schreiben und damit das Signal unter Erhaltung wesentlicher Information im Zeit- und Frequenzbereich zu analysieren. Bemerkenswert ist die Tatsache, daß das menschliche Ohr die Zeit-Frequenz-Analyse in Echtzeit durchführen kann und zur Extraktion der Frequenzinformationen nur Signalwerte in der Vergangenheit verwendet, während man bei der Fourier-Analyse über den kompletten Zeitbereich integrieren muß.

4.2.2 Wavelets als lokalisierte skalierende Basisfunktionen

Der erste Schritt von der Fourier-Analyse hin zu einem Verfahren, welches Lokalität sowohl im Ober- als auch im Unterbereich, beispielsweise Zeit- und Frequenzbereich, bietet, ist die Gabor-Transformation, eine Fourier-Transformation, bei der das Signal zusätzlich mit einer Fensterfunktion gefaltet wird. Eine mögliche Wahl eines solchen Fensters wäre eine Gaußfunktion $e^{-(t-b)^2/a}$, welche für unterschiedliche Werte von b die verschobenen Fourier-Basiselemente lokalisiert, jedoch nicht unterschiedliche Frequenzen getrennt auflöst.

Die Grundfrequenz eines Signals ist antiproportional zur Periodendauer, d.h. der Länge des Zeitintervalls, das für eine Schwingung benötigt wird. Daher ist es offensichtlich sinnvoll, eine Transformation zu suchen, welche hochfrequente Schwingungskomponenten mit

einem sehr kurzen „Fenster“ analysiert und niederfrequente Anteile mit einem sehr langen. Wir benötigen somit ein flexibles Zeit-Frequenz-Fenster, das diese Aufgabe automatisch übernimmt. Zudem wollen wir ähnlich der Fourier-Transformation mit einem einzigen Prototyp $\psi \in L^2(\mathbb{R})$ auskommen. Wir werden daher ausgehend von diesem sog. Mutterwavelet ψ , kurz Wavelet, eine L^2 -Basis bestehend aus den zweiparametrischen Waveletfunktionen

$$\frac{1}{\sqrt{|a|}} \psi \left(\frac{t-b}{a} \right)$$

aufbauen, wobei $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ der Dilatationsparameter und $b \in \mathbb{R}$ der Verschiebungsparameter ist. Der Vorfaktor $1/\sqrt{|a|}$ ist nur technisch bedingt und sorgt dafür, daß die Waveletfunktionen normiert sind, falls das Mutterwavelet ψ normiert ist. Der *Verschiebungsparameter* dient dazu, die komplette \mathbb{R} -Achse durch die stark lokalisierten Waveletfunktionen abzudecken, während der Dilatations- oder *Skalenparameter* a die Breite der analysierenden Waveletfunktion bestimmt. Der grundsätzliche Unterschied zur Gabor-Transformation ist somit die variable Fensterbreite. Das bekannteste Beispiel eines Wavelets ist das Haar-Wavelet $\psi_H \in L^2(\mathbb{R})$, welches für $0 \leq t < 1/2$ den Wert 1 und für $1/2 \leq t < 1$ den Wert -1 annimmt und an allen anderen Stellen verschwindet (siehe Abbildung 4.1).

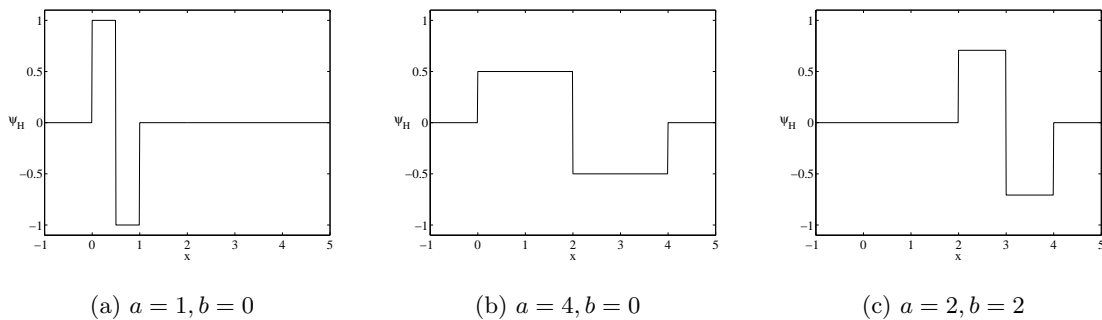


Abbildung 4.1: Haar-Wavelet

Die geforderte Lokalität im Unterbereich bedeutet, daß der Großteil der Energie des Wavelets auf ein endliches Intervall beschränkt ist. Im Idealfall verschwindet das Wavelet außerhalb dieses Intervalls, d.h. es besitzt einen kompakten Träger. Im allgemeinen werden wir verlangen, daß das Wavelet schnell von seinem Maximalwert abklingt. Die Lokalität im Oberbereich verlangt, daß zusätzlich auch die Fourier-Transformierte des Wavelets lokalisiert ist, d.h. das Wavelet sollte möglichst nur ein einziges Frequenzband enthalten. Der simultanen Lokalisierung im Ober- und Unterbereich sind jedoch Grenzen gesetzt. Grundsätzlich gilt für alle L^2 -Funktionen die Relation³

$$\|tf(t)\| \cdot \|\omega \hat{f}(\omega)\| \geq \frac{1}{2} \|f(t)\|^2, \quad (4.6)$$

d.h. eine beliebig hohe Auflösung sowohl im Ober- als auch Unterbereich schließen einander gegenseitig aus. Der Abfall zu den hohen Frequenzen hängt von der Glattheit der Funktion ab. Ist die Funktion unendlich oft differenzierbar, so erfolgt der Abfall exponentiell. Das Abklingen im Bereich kleiner Frequenzen ist hingegen mit der Anzahl der verschwindenden Momente des Wavelets verknüpft. Ein Wavelet ψ , für das die ersten N Momente verschwinden, d.h.

$$\int_{\mathbb{R}} dt t^p \psi(t) = 0, \quad p = 0, \dots, N, \quad (4.7)$$

³Dieser Relation entspricht in der Quantenmechanik der Heisenbergsche Unschärferelation, wenn man die Fourier-Transformierte der Ortsraum-Wellenfunktion mit der Impulsraum-Wellenfunktion identifiziert.

bezeichnet man als Wavelet der Ordnung N . Notwendige Bedingung für eine Waveletfunktion ist das Verschwinden ihres Mittelwertes, d.h. Gleichung (4.7) muß zumindest für $p = 0$ erfüllt sein.

Die kontinuierliche Wavelet-Transformation definiert man als Faltung der Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit dem konjugiert Komplexen des Wavelets ψ , d.h.

$$\mathcal{W}_\psi f(a, b) = \frac{1}{\sqrt{C_\psi}} \int_{\mathbb{R}} dt f(t) \frac{1}{\sqrt{|a|}} \psi^*\left(\frac{t-b}{a}\right) \quad (4.8)$$

für $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $b \in \mathbb{R}$, wobei

$$C_\psi = 2\pi \int_{\mathbb{R}} d\omega \frac{|\hat{\psi}(\omega)|^2}{|\omega|} < \infty \quad (4.9)$$

ist. Streng genommen sichert die Existenz der Konstanten C_ψ die Existenz einer inversen Transformation und wird daher als Zulässigkeitsbedingung dafür bezeichnet, daß eine Funktion $\psi \in L^2(\mathbb{R})$ ein Wavelet ist. Notwendige Bedingung für die Erfüllung der Zulässigkeitsbedingung ist $\hat{\psi}(0) = 0$, was gleichbedeutend mit der Gültigkeit der Gleichung (4.7) für $p = 0$ ist.

Die anschauliche Bedeutung der Wavelet-Transformation hängt von der Wahl des analysierenden Wavelets ab. Verwendet man das Haar-Wavelet, so zeigt sich, daß wir den in Gleichung (4.8) definierten Koeffizienten einerseits als Differenz der Mittelwerte zweier benachbarter Intervalle der Länge $a/2$ von f , andererseits als gewichtetes Mittel der ersten Ableitung von f über ein Intervall der Länge a interpretieren können. Wir werden im Abschnitt 4.4.1 weitere Wavelets vorstellen, beispielsweise den „Mexikanischen Hut“, der eine Information über das Verhalten der zweiten Ableitung von f gibt.

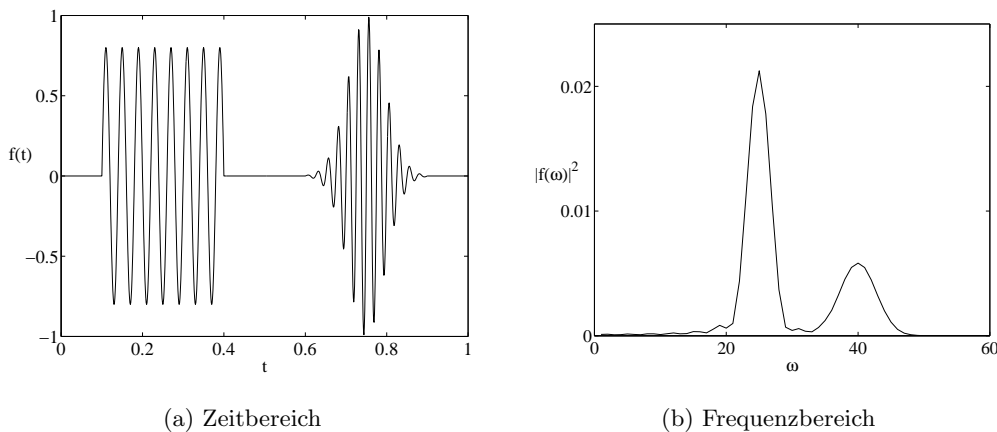


Abbildung 4.2: Signal

In Abbildung 4.3(a) ist das sog. Skalogramm des in Abbildung 4.2(a) skizzierten Signals dargestellt, welches aus zwei „Tönen“ verschiedener Frequenz besteht, wobei der eine sprunghaft beginnt und endet, während die Amplitude des anderen exponentiell ansteigt und abklingt. Die Graustufen spiegeln die Amplitude der Koeffizienten $\mathcal{W}_\psi f(a, b)$ wider. Zum Vergleich ist in Abbildung 4.3(b) das Skalogramm 3-dimensional dargestellt. Wir können deutlich Anfang und Ende der Impulse und ihre Abklingverhalten im Skalogramm erkennen. Zudem sind auch die beiden im Signal enthaltenen Frequenzen ($\omega \sim 1/a$) bei $a \approx 20$ bzw. $a \approx 40$ gut zu erkennen. In Abbildung 4.2(b) ist zum Vergleich das Fourier-Spektrum des Signals zu sehen. Mit wachsender Skala a wird das analysierende Wavelet ausgedehnt und das Skalogramm konzentriert sich somit auf gröbere Strukturen.

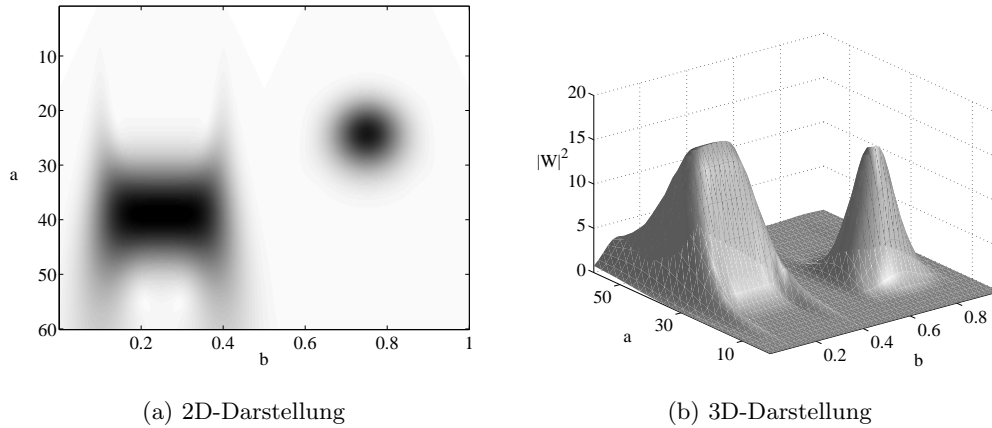


Abbildung 4.3: Skalogramm von Signal 4.2(a)

Die Fourier-Analyse besitzt, wie wir in Abschnitt 4.1.2 gesehen haben, eine Umkehrtransformation, die es ermöglicht, das ursprüngliche Signal aus der Fourier-Transformierten zu rekonstruieren. Im Falle der Wavelet-Transformation steht eine übervollständige Zahl von Wavelet-Koeffizienten $\mathcal{W}_\psi f(a, b)$ zur Verfügung, so daß unterschiedliche Umkehrtransformationen existieren. Es zeigt sich, daß im Unterschied zur gewöhnlichen Fourier-Transformation über \mathbb{R} bereits eine diskrete Menge von Wavelet-Koeffizienten ausreicht, das Signal zu rekonstruieren [HW89]. Die gängigste Wahl ist hierbei $a = 2^{-j}$ und $b = 2^{-j}k$, wobei $j, k \in \mathbb{Z}$. Man erhält somit die sog. dyadischen Wavelets

$$\psi_{j,k}(t) := 2^{j/2} \psi(2^j t - k), \quad \forall j, k \in \mathbb{Z}. \quad (4.10)$$

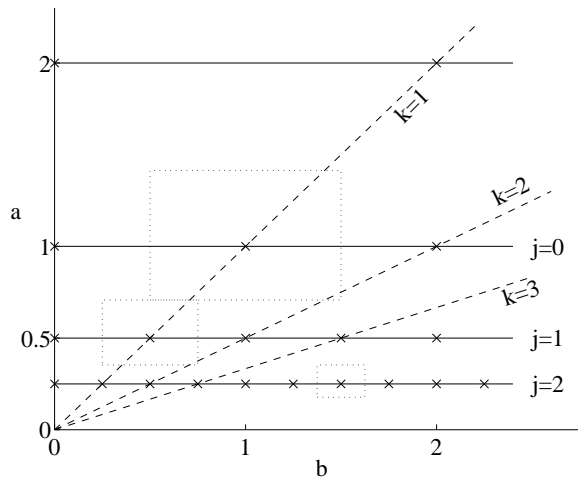


Abbildung 4.4: Dyadisches Gitter in der $a - b$ -Ebene. Die Punkte sind bestimmt durch die Beziehungen $a = 2^{-j}$ und $b = 2^{-j}k$.

Die Abbildung 4.4 zeigt das zugehörige dyadische Gitter. Die Wavelet-Transformation wird bei der diskreten Wavelet-Transformation nur an den Gitterpunkten $(b, a) = (b(j, k), a(j, k)) \in \mathbb{R}^2$ berechnet. Jeder Gitterpunkt repräsentiert das rechteckige Gebiet, dessen Mittelpunkt er ist:

$$R^{(j,k)} =]2^{-j}(k - 1/2), 2^{-j}(k + 1/2)[\times]2^{-j-1/2}, 2^{-j+1/2}[, \quad (4.11)$$

$j, k \in \mathbb{Z}$, wobei diese Rechtecke $R^{(j,k)}$ eine disjunkte Zerlegung von $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$ bilden.

4.2.3 Vollständigkeit und Orthonormalität

Wir haben bislang noch keine weiteren Bedingungen an die Wavelets gestellt, die wir konstruieren und verwenden wollen. Obwohl auch biorthogonale und sogar nichtorthogonale Wavelets in der Praxis Anwendung finden, wollen wir uns in dieser Arbeit auf orthonormale Wavelets beschränken. Obwohl prinzipiell die Vollständigkeit und lineare Unabhängigkeit der Basiselemente ausreichen, sind orthonormale Basisfunktionen in gewisser Hinsicht die natürliche Form der Darstellung von Funktionen. Kleinen „Störungen“ der Entwicklungskoeffizienten in einer orthonormalen Darstellung entsprechen kleinen Änderungen der Funktion.

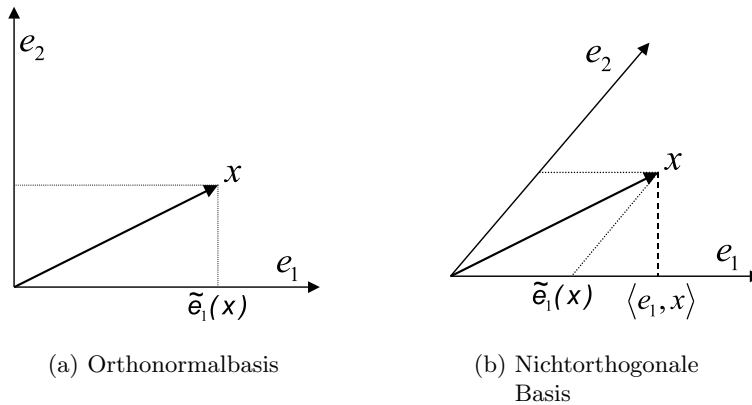


Abbildung 4.5: Basen im \mathbb{R}^2

Sei $\{e_1, e_2, \dots\}$ eine Orthonormalbasis des Vektorraumes V , so kann man einen beliebigen Vektor $x \in V$ durch einen Vektor $x^{(k)}$ approximieren, der in einem Teilraum V_k liegt, welcher durch k Basisvektoren $\{e_1, \dots, e_k\}$ aufgespannt wird. Geht man zu einer „besseren“ Approximation $x^{(k+1)}$ über, so gilt einfach

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} + \langle e_{k+1}, x \rangle e_{k+1}, \quad (4.12)$$

d.h. der neue Vektor besteht aus der alten Approximation und einem zusätzlichen additiven Anteil. Obwohl dies offensichtlich ist, wollen wir herausstellen, daß diese Aussage für nichtorthogonale Basen nicht mehr gültig ist. Wie wir am einfachen Beispiel des \mathbb{R}^2 in Abbildung 4.5(b) erkennen können, ändern sich die Entwicklungskoeffizienten bei Hinzunahme weiterer Basiselemente. Anschaulich bedeutet dies, daß ein Element einer nichtorthogonalen Basis Informationen enthält, die bereits teilweise in den anderen Basiselementen enthält sind, während im Falle einer orthonormalen Basis durch Hinzunahme weiterer Entwicklungsterme ausschließlich neue Informationen ergänzt werden. Betrachten wir beispielsweise die Funktionen

$$f_n(t) = \begin{cases} t^n & t \in [0, 1], \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases} \quad (4.13)$$

Diese Basisfunktionen sind zwar linear unabhängig, jedoch nicht orthonormal, und f_{11} kann bis auf 6 Nachkommastellen Genauigkeit durch die Funktionen f_1, \dots, f_{10} approximiert werden.

Man nennt eine Funktion $\psi \in L^2(\mathbb{R})$ ein orthogonales Wavelet, wenn die Familie $\{\psi_{j,k}\}$ eine Orthonormalbasis des L^2 ist, d.h. wenn

$$\langle \psi_{j,k}(t), \psi_{j',k'}(t) \rangle = \delta_{j,j'} \delta_{k,k'} \quad (4.14)$$

für alle $j, j', k, k' \in \mathbb{Z}$ gilt. In diesem Fall kann man offensichtlich eine beliebige Funktion $f \in L^2$ als

$$f(t) = \sum_{j,k \in \mathbb{Z}} c_k^j \psi_{j,k}(t) \quad (4.15a)$$

mit

$$c_k^j = \langle f(t), \psi_{j,k}(t) \rangle \quad (4.15b)$$

schreiben.

4.3 Gesichtspunkte der Anwendung

Aus den fundamentalen Eigenschaften der Wavelets lassen sich einige praktische Konsequenzen ziehen, die im Hinblick auf einen praktischen Einsatz sehr nützlich sind. Reizvoll ist hierbei insbesondere der Aspekt, in Reihenentwicklungen einerseits reine Details und andererseits kumulierte Eigenschaften darzustellen.

4.3.1 Darstellung durch Details und Verfeinerungen

Aus der Definition der Waveletfunktionen $\psi_{j,k}$ ist offensichtlich, daß für eine feste gewählte Skala $j \in \mathbb{Z}$ diese Funktionen dieselben Details beschreiben, lediglich um k gegeneinander verschoben. Daher werden alle Waveletfunktionen und Linearkombinationen dieser Waveletfunktionen auf derselben Detailstufe j zu einem Teilraum des $L^2(\mathbb{R})$ zusammengefaßt:

$$W_j := \text{clos}(\text{span} \{ \psi_{j,k} \mid k \in \mathbb{Z} \}). \quad (4.16)$$

Eine Funktion $g_j \in W_j$ besitzt nun Details der Auflösung 2^{-j} , d.h. je größer der Skalenwert j ist, desto mehr Details kann die betreffende Waveletfunktion darstellen. Die Teilräume W_i liefern eine direkte Zerlegung des Funktionenraumes $L^2(\mathbb{R}) = \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} W_i$. Interessant sind aber auch die Räume, die nicht nur die Feinheiten auf einer festen Skala j , sondern alle Details bis zu einer bestimmten Skala in sich vereinen. Bei vorgegebener Auflösung enthalten Funktionen, die den L^2 -Teilräumen V_j angehören, auch Informationen zu alle niedrigeren Auflösungen, wobei

$$V_j := \bigoplus_{i=-\infty}^{j-1} W_i. \quad (4.17)$$

Damit beschreiben Funktionen, welche in einem Raum V_j liegen, Details, die wenigstens die Ausdehnung $1/2^{j-1}$ besitzen. Aus Definition (4.17) folgt gerade $V_{j+1} = V_j \oplus W_j$ für alle $j \in \mathbb{Z}$, d.h. W_j ist orthogonales Komplement von V_j bzgl. V_{j+1} und wir können daher die Funktionen in W_j als die Details interpretieren, welche beim Übergang vom Raum V_{j+1} zur nächst schlechteren Auflösungsstufe V_j verloren gehen. Im Grenzübergang $j \rightarrow \infty$ werden die Details beliebig fein und man kann somit jede Funktion $f \in L^2(\mathbb{R})$ durch eine Funktion $f_j \in V_j$ beliebig genau approximieren.

Die Räume $\{V_j\}$ bilden das Gerüst einer sog. Multiskalenanalyse, falls eine Funktion $\phi \in L^2(\mathbb{R})$ existiert, die eine Orthonormalbasis $\{\phi(t-k)\}$ eines dieser Räume erzeugt. Man kann ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, daß die Funktionen $\{\phi(t-k)\}$ eine Orthonormalbasis des Referenzraum V_0 sind. Es zeigt sich, daß die Funktionen $\{\phi_{j,k}(t) = 2^{j/2} \phi(2^j t - k)\}$ für festes $j \in \mathbb{Z}$ dann eine Orthonormalbasis von V_j bilden, d.h.

$$V_j = \text{clos}(\text{span} \{ \phi_{j,k} \mid k \in \mathbb{Z} \}). \quad (4.18)$$

Grundsätzlich ist es auch möglich, Multiskalenanalysen für nicht-orthogonale Skalierungsfunktionen bzw. Wavelets zu definieren. Wir wollen uns hier jedoch auf orthogonale Skalierungsfunktionen beschränken. Eine ausführlichere Behandlung der technischen Aspekte der Multiskalenanalyse ist in Anhang B.1 zu finden.

Die Skalierungsfunktion ϕ stellt somit das Kernstück einer Multiskalenanalyse dar und wir wollen nun einige der üblicherweise geforderten Eigenschaften vorstellen. Nach Voraussetzung müssen die $\phi_{0,k}$ eine Orthonormalbasis von V_0 sein, was man z.B. durch ein Gram-Schmidt-Verfahren realisieren könnte. Weiterhin muß die Separations- und die Vollständigkeitsbedingung (siehe Gleichungen (B.1c) und (B.1b)) erfüllt sein. Es stellt sich heraus, daß die Normierungsbedingung

$$\int_{\mathbb{R}} dt \phi(t) = 1 \quad (4.19)$$

hierfür notwendig und hinreichend ist. Abschließend verlangt man, daß die Inklusionsbedingung $V_j \subset V_{j+1}$ erfüllt wird, wozu die Existenz einer Sequenz $\{h_i\}_{i \in \mathbb{Z}} \in l^2(\mathbb{Z})$ ausreichend ist, welche der Zweiskalenrelation

$$\phi(t) = \sqrt{2} \sum_{k \in \mathbb{Z}} h_k \phi(2t - k) \quad (4.20)$$

genügt. Wir sehen, daß diese Filterkoeffizienten $\{h_i\}$ in der Multiskalenanalyse alles festlegen. In der numerischen Analyse stützt man sich auf die Existenz dieser Koeffizienten und verzichtet in computergestützten Berechnungen auf die explizite Kenntnis von ϕ und ψ . Wir wollen an dieser Stelle bemerken, daß die Wahl der Koeffizienten $\{h_i\}$ nicht beliebig ist, sondern gewissen Konsistenzbedingungen unterliegt (siehe hierzu Gleichungen (B.11) und (B.12) im Anhang).

4.3.2 Begrenzung durch endlicher Datenreihen

In Anwendungen stehen Funktionen oder Signale lediglich in Form von endlich vielen diskreten Werten zur Verfügung. Daher stellt sich zunächst einmal die Frage, ob es überhaupt möglich ist, eine Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ aus ihren diskreten Werten $\{s_k = f(k\Delta t)\}_{k \in \mathbb{Z}}$ vollständig zu rekonstruieren. Bevor wir diese Frage im Hinblick auf die Wavelet-Transformation beantworten, wollen wir zunächst einen Blick auf die Fourier-Transformation werfen. Das Shannon-Theorem besagt, daß eine Ω -bandbegrenzte Funktion, d.h. eine Funktion, deren Fourier-Transformierte \hat{f} für alle Frequenzen $|\omega| > \Omega$ verschwindet, sich aus diskreten Werten rekonstruieren läßt, falls das Abtastintervall $\Delta t = \pi/\Omega$ ist. Umgekehrt formuliert bedeutet dies, daß man aus einer Zeitreihe, welche mit dem Abtastintervall Δt aufgenommen wurde, lediglich eine Ω -bandbegrenzte Funktion rekonstruieren kann, wobei die Frequenz Ω die sog. Nyquist-Frequenz ist. Dies stellt sicher, daß jeder harmonische Anteil in f wenigstens zweimal pro Periode erfaßt wird. Als rekonstruiertes Signal erhält man schließlich

$$f(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} s_k \frac{\sin(\Omega(t - k\Delta t))}{\Omega(t - k\Delta t)}, \quad \forall t \in \mathbb{R}. \quad (4.21)$$

Liegt der Zeitreihe eine Funktion zugrunde, welche nicht Ω -bandbegrenzt ist, sondern deren tatsächliche Bandbreite Ω' größer ist als $\pi/\Delta t$, so enthält die Gewichtsfunktion Beiträge, die gleichsam dadurch entstanden sind, daß die höheren Frequenzanteile in das Frequenzintervall $[-\Omega, \Omega]$ hineingefaltet wurden. Dieser Effekt wird als *Aliasing* bezeichnet und kann nur durch höhere Abtastraten vermindert werden.

4.3.3 Interpolation oder Extrapolation

Bevor wir im nächsten Abschnitt einen Algorithmus zur Berechnung der Wavelet-Transformation vorstellen, wollen wir uns kurz mit der Frage der Interpolation beschäftigen. Wir wollen annehmen, daß wir Daten in Form einer Tabelle vorliegen haben, d.h. einer Menge von Stützstellen ist eine Menge von Werten zugeordnet. Es kann sich hierbei beispielsweise um Funktionswerte einer transzendenten Funktion oder um Meßwerte handeln. Unter Interpolation versteht man die „Schätzung“ von Funktionswerten an Zwischenstellen, die nicht in einer Tabelle angegeben und damit nicht direkt zugänglich sind. Will man Werte bestimmen, die sich außerhalb des Stützstellenintervalls befinden, so spricht man von Extrapolation. Oftmals wird die Interpolation auch benutzt, bekannte, aber sehr komplizierte Funktionen durch Interpolationsfunktionen zu ersetzen, die im Hinblick auf die Aufgabenstellung besonders einfache Eigenschaften besitzen. Beliebte Verfahren zur Interpolation sind Polynom-Interpolation und Spline-Interpolation.

Wir erwarten, daß ein langsam veränderliches Signal aus der Kenntnis seiner Werte auf einer diskreten Menge von Punkten interpoliert werden kann. Wird ein Signal mit einem Zeitintervall von $\Delta t = 2^{-m}$ abgetastet, so gehen alle Details, die auf der Skala $< 2^{-m}$ liegen, verloren, d.h. es existiert ein Raum V_m , der zur Beschreibung des Signals geeignet ist. Nehmen wir an, den gemessenen Werten $s_i = f(i\Delta t)$ liegt das Signal $f \in L^2(\mathbb{R})$ zugrunde, dann können wir f in V_m approximieren durch

$$f(t) \approx \sum_k c_k \phi_{m,k}\left(\frac{t}{\Delta t}\right), \quad (4.22)$$

d.h. für ein gegebenes Wavelet bzw. die zugehörigen Skalierungsfunktion ergibt sich das Interpolationsproblem

$$s_i = f(i\Delta t) = \sum_k c_k \phi_{m,k}(i), \quad (4.23)$$

welches ein einfaches lineares Gleichungssystem ist. Besonders einfach gestaltet sich das Interpolationsproblem, wenn für die Skalierungsfunktion $\phi(k) = \delta_{k,0}$ gilt. In diesem Fall nennt man die Skalierungsfunktion interpolierend und es gilt $c_k = s_k$. Im allgemeinen wird diese Bedingung jedoch nicht erfüllt sein. Eine gewisse Freiheit erhält man, indem man Verschiebungen zuläßt, d.h. Gleichung (4.23) zu

$$s_i = f(i\Delta t) = \sum_k c_k \phi_{m,k}(i + \tau),$$

$\tau \in \mathbb{R}$, verallgemeinert. Ist die Funktion $\phi(\tau + t)$ interpolierend, so gilt $\tau = \int dt t \phi(t)$. Eine Diskussion über die Konstruktion interpolierender Skalierungsfunktionen ist in [SS96] zu finden.

Wir sehen in Abbildung 4.6 einen Vergleich zwischen einer „klassischen“ Spline-Interpolation und einer Wavelet-Interpolation. Die Wavelet-Interpolation besteht darin, die gegebenen Meßwerte als Entwicklungskoeffizienten auf einer bestimmten Skala zu interpretieren, und anschließend die Entwicklungskoeffizienten höherer Skalen zu berechnen, und ihrerseits wiederum als Werte der gesuchten Funktion zu interpretieren. Wir haben in Abbildung 4.6(b) zur Illustration ein Daubechies-Wavelet verwendet (Abbildung 4.9(a)), obwohl Daubechies-Wavelets aufgrund ihrer fraktalen Struktur zur Interpolation eigentlich ungeeignet sind. Es zeigt sich an diesem Beispiel, welche gute Resultate sogar diese Wavelet-Interpolation liefert. Der mittlere quadratische Fehler bei der Wavelet-Interpolation beträgt 0.0173 und bei der kubischen Spline-Interpolation 0.0112. Wir haben zusätzlich noch eine einfache lineare Interpolation durchgeführt, wobei wir einen mittleren quadratischen Fehler von 0.0222 erhalten, d.h. der Fehler aufgrund der Wavelet-Interpolation liegt zwischen den Fehlern, die durch lineare Interpolation und kubischer Spline-Interpolation gemacht werden.

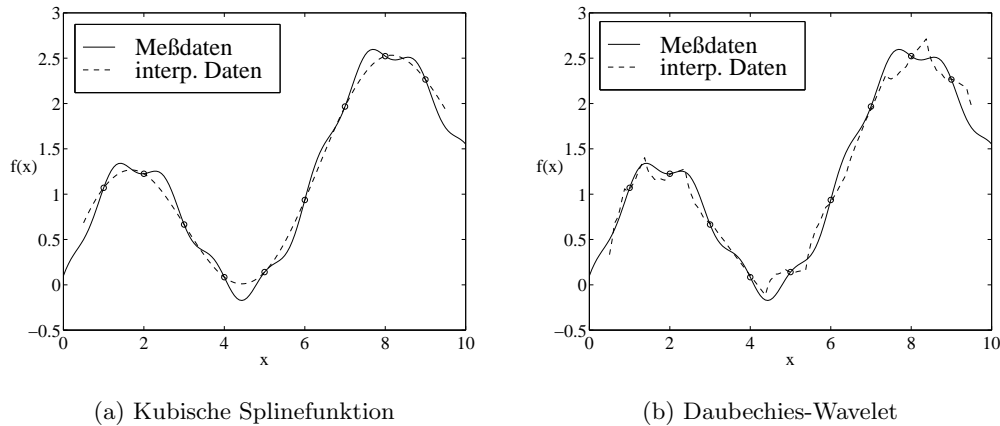


Abbildung 4.6: Interpolation von Meßdaten

4.4 Schema der Wavelet-Analyse

Theoretische Konzepte sind für die Anwendung nur dann von Bedeutung, wenn die Möglichkeit besteht, sie möglichst einfach zu implementieren. Wir werden im folgenden sehen, daß hierin eine Stärke der Wavelet-Analyse und -Synthese liegt.

4.4.1 Wahl der Wavelets

Bevor wir einen Algorithmus zur Durchführung der Wavelet-Analyse vorstellen, wollen wir uns zunächst der Frage zuwenden, welche Wavelets überhaupt als analysierende Funktionen zum Einsatz kommen sollen. Die Wahl einer geeigneten Wavelet-Familie ist zum einen von der Problemstellung abhängig und zum anderen wie so oft in der Modellierung eine Frage des „Fingerspitzengefühls“. Bei der Konstruktion von Wavelets stellt man i.a. einige Randbedingungen an ein Wavelet, beispielsweise Orthogonalität, kompakter Träger, etc., und versucht dann, geeignete Filterkoeffizienten $\{h_i\}$ zu finden.

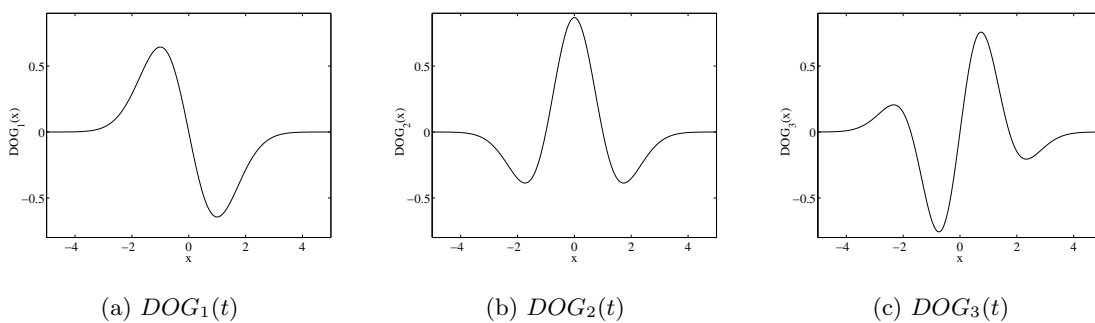


Abbildung 4.7: DOG-Waveletfamilie

Neben dem Haar-Wavelet, welches wir bereits diskutiert haben, gibt es eine ganze Reihe weiterer Wavelet-Familien mit sehr unterschiedlichen Eigenschaften. Unter den kontinuierlichen Wavelets sind etwa die DOG_n -Wavelets zu nennen, welche durch n -fache Differentiation der Gaußfunktion entstehen:

$$DOG_n(t) = \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{\Gamma(n+1/2)}} \frac{d^n}{dt^n} \left(e^{-t^2/2} \right). \quad (4.24)$$

Der bekannteste Vertreter dieser Wavelet-Familie ist der Mexikanische Hut, welcher vom Typ DOG_2 ist. Es zeigt sich, daß Wavelet-Transformationen mit DOG_n -Wavelets im wesentlichen die Struktur der n -ten Ableitung des zu analysierenden Signals widerspiegeln. Der Nachteil der DOG_n -Wavelets besteht zum einen darin, daß sie keine orthonormalen Wavelets sind, und zum anderen, daß keine explizite Filterkoeffizienten für eine Multiskalenanalyse zur Verfügung stehen.

Eine weitere bekannte Familie sind die B_n -Spline-Wavelets, deren Skalierungsfunktion B_n -Splines sind, d.h. ausgehend von $\phi^{(0)}(t) = \mathbb{1}_{[0,1]}(t)$ definiert man

$$\phi^{(n)}(t) = \int_0^1 dt' \phi^{(n-1)}(t-t'). \quad (4.25)$$

Die zugehörigen Filterkoeffizienten sind durch

$$h_i = \begin{cases} \frac{1}{2^n} \binom{n+1}{i} & i = 0, 1, \dots, n+1, \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (4.26)$$

gegeben. Dies widerspricht der Bedingung (B.12), d.h. die B_n -Splines sind keine orthogonalen Wavelets. Es besteht jedoch die Möglichkeit, orthogonale Wavelets aus den B_n -Splines zu konstruieren. Ähnlich den Splinefunktionen gründet sich die Beliebtheit von Spline-Wavelets auf ihre glatt interpolierenden Eigenschaften, für die man gegebenenfalls bereit ist, den Vorteil der Orthogonalität aufzugeben.

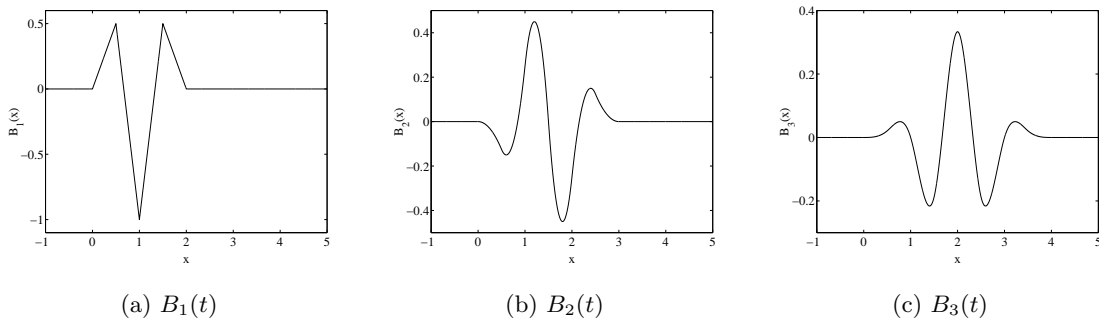


Abbildung 4.8: B -Spline-Waveletfamilie

Als dritte große Familie von Wavelets wollen wir die sog. Daubechies-Wavelets nennen, die in praktischen Anwendungen häufig zu finden sind. Im Gegensatz zur DOG -Waveletfamilie und zu den B -Spline-Wavelets, welche keine orthogonalen Wavelets sind, ist der Ansatz bei den Daubechies-Wavelets derart, daß man versucht, orthogonale Wavelets der Ordnung n mit kompaktem Träger zu konstruieren, d.h. es werden Waveletfunktionen gesucht, die lediglich $2n$ nicht-verschwindende Filterkoeffizienten besitzen. Die Bedingung, daß die ersten n Momente verschwinden, führt auf ein algebraisches Gleichungssystem für die Filterkoeffizienten g_k [Dau92]:

$$\sum_{k=0}^{2n-1} g_k k^p = 0, \quad p = 0, \dots, n. \quad (4.27)$$

Die Daubechies-Waveletfunktionen (Abbildung 4.9) ergeben sich im Verlaufe eines Iterationsprozesses und sind nicht analytisch darstellbar. Wie man anhand von Ausschnittsvergrößerungen erkennen kann, besitzen die Daubechies-Wavelets eine selbstähnliche Struktur. Darüber hinaus existieren noch eine große Anzahl weiterer Wavelet-Familien, etwa die

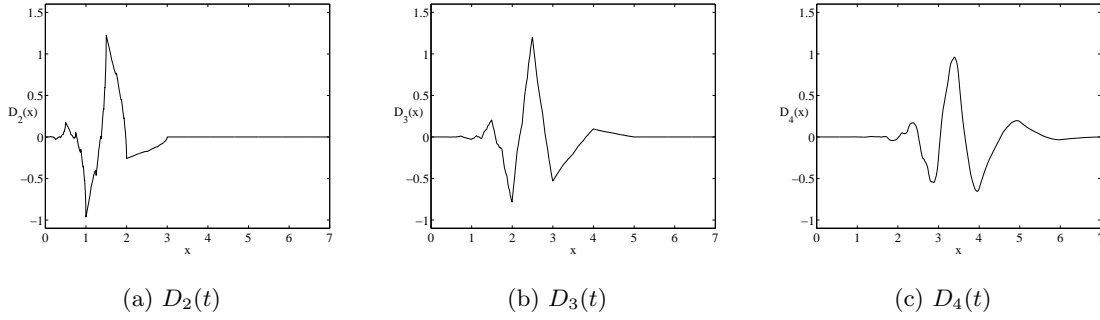


Abbildung 4.9: Daubechies-Waveletfamilie

Coiflets. Das Konzept der Filterkoeffizienten gestattet es dem Anwender zudem leicht, neue Wavelet-Familien zu konstruieren.

Neben der bislang diskutierten Wavelet-Analyse sind in einigen Anwendungen auch redundante Wavelet-Systeme verbreitet. Eine solches übervollständiges Wörterbuch erhält man, indem man zu einer gewöhnlichen Wavelet-Basis zusätzliche Funktionen wie zum Beispiel trigonometrische Funktionen hinzufügt. Die Wavelet-Transformation kann als ein Spezialfall einer allgemeineren Klasse von Transformationen, den sog. Wavelet-Pakettransformation aufgefaßt werden. Ein kurze Einführung in Wavelet-Paketfunktionen ist in in Anhang B.4 zu finden. Wavelet-Paketfunktionen sind sehr spezielle Linearkombinationen von Wavelet-funktionen und bilden ein übervollständiges Wörterbuch, aus dem man einen dem Problem angepaßten Satz von Basiselementen extrahieren kann. Die Methoden zur Bestimmung einer geeigneten Basis beruhen auf der Minimierung einer Kostenfunktion. Für eine Übersicht dieser Verfahren verweisen wir auf [CDS95].

4.4.2 Schnelle Wavelet-Transformation

Wir wollen in diesem Abschnitt den Algorithmus vorstellen, welcher der schnellen Wavelet-Transformation zugrunde liegt. Bei der Analyse eines Signals vergleicht man i.a. dieses nach einander mit den entsprechenden Basisfunktionen. Dieses Vorgehen ist jedoch sehr ineffizient. Daher ist es günstiger in jedem Schritt auf die Ergebnisse des vorherigen Schrittes zurückzugreifen, d.h. ein Signal ausgehend von einer sehr feinen Auflösung hin zu einer groben Auflösung zu zerlegen. Dies ist vergleichbar mit der Herstellung von Übersichtskarten aus Detailkarten in der Landvermessung. Man identifiziert nun die Meßwerte $\{s_i\}$ eines Signals mit den Entwicklungskoeffizienten $\{c_i^N\}$ einer Funktion $f_N = \sum_k c_k^N \phi_{N,k} \in V_N$, d.h. man entscheidet sich für einen Wert von N und setzt dann $c_i^N = s_i, \forall i$. Die Wahl von N ist dabei – wie wir im folgenden sehen werden – beliebig. Da für alle $j \in \mathbb{Z}$ jeweils $V_{j+1} = V_j \oplus W_j$ gilt, kann man diese Funktion in zwei Anteile $f_{N-1} = \sum_k c_k^{N-1} \phi_{N-1,k} \in V_{N-1}$ und $g_{N-1} = \sum_k d_k^{N-1} \psi_{N-1,k} \in W_{N-1}$ zerlegen. In einem zweiten Schritt wird die Funktion f_{N-1} nach dem gleichen Schema in zwei Anteile $f_{N-2} \in V_{N-2}$ und $g_{N-2} \in W_{N-2}$ aufgespalten, usw., so daß schließlich

$$\begin{aligned}
 f_N(t) &= f_{N-M}(t) + \sum_{i=N-M}^{N-1} g_i(t) \\
 &= \underbrace{\sum_k c_k^{N-M} \phi_{N-M,k}(t)}_{\in V_{N-M}} + \sum_{i=N-M}^{N-1} \underbrace{\sum_k c_k^i \psi_{i,k}(t)}_{\in W_i}
 \end{aligned} \tag{4.28}$$

folgt, wobei M die Zerlegungstiefe ist. Sind 2^n Meßwerte vorhanden, so ist die Zerlegungstiefe üblicherweise $M = n$. In Abbildung 4.10 ist die Zerlegung in die entsprechenden Teilräume schematisch dargestellt.

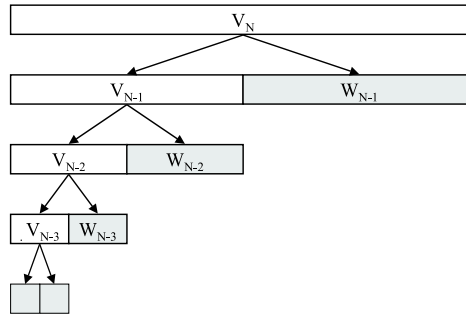


Abbildung 4.10: Schnelle Wavelet-Zerlegung

Zusammenfassend erhält man so den pyramidalen Zerlegungsalgorithmus (siehe (B.16) und (B.17))

$$\begin{array}{ccccccc}
 c^N & \rightarrow & c^{N-1} & \rightarrow & c^{N-2} & \rightarrow & \dots & \rightarrow & c^{N-M} \\
 & \searrow & & \searrow & & \searrow & & \searrow & \\
 & & d^{N-1} & & d^{N-2} & & \dots & & d^{N-M}
 \end{array}$$

wobei für $j = N, \dots, N - M + 1$ gilt

$$c_k^{j-1} = \sum_l h_{l-2k}^* c_l^j =: (Hc^j)_k \quad (4.29a)$$

$$\text{und } d_k^{j-1} = \sum_l g_{l-2k}^* c_l^j =: (Gc^j)_k. \quad (4.29b)$$

Durch die Gleichungen (4.29a) und (4.29b) werden lineare Filteroperatoren $H, G : l^2(\mathbb{Z}) \rightarrow l^2(\mathbb{Z})$ eingeführt, die in der Literatur häufig als *quadrature mirror filter* (QMF) bezeichnet werden. Dabei handelt es sich bei H um einen Tiefpaßfilter und bei G um einen Hochpaßfilter.

Auf ähnliche Weise erhält man den Algorithmus zur Synthese.

$$\begin{array}{ccccccc}
 d^{N-M} & & d^{N-M+1} & & \dots & & d^{N-1} \\
 & \searrow & & \searrow & & \searrow & \\
 c^{N-M} & \rightarrow & c^{N-M+1} & \rightarrow & \dots & \rightarrow & c^{N-1} & \rightarrow & c^N
 \end{array}$$

mit

$$c_k^j = \sum_l (h_{k-2l} c_l^{j-1} + g_{k-2l} d_l^{j-1}) =: (H^* c^{j-1})_k + (G^* d^{j-1})_k. \quad (4.30)$$

Lediglich durch Faltung mit geeigneten Filterkoeffizienten und ohne überhaupt Wavelets oder ihre Skalierungsfunktionen direkt einzusetzen, lassen sich Funktionen somit transformieren. Man beachte, daß sowohl der Zerlegungsalgorithmus (4.29a) und (4.29b), als auch der Rekonstruktionsalgorithmus (4.30) moving average-Schemen darstellen. Damit können Skalierungsfunktion und Wavelet als lineare Filter verstanden werden, im Falle kompakter Wavelets sogar als FIR-Filter. Eine L^2 -Funktion repräsentiert ein analoges Signal endlicher Energie, während die Abtastung eine Approximation in einem Abtastraum V_N liefert, wobei N genügend groß gewählt werden muß, so daß keine Unterabtastung auftritt.

Der große Vorteil der Wavelet-Analyse liegt in ihrer Effizienz, die durch die logarithmische Unterteilung des Unterbereichs in Oktaven erreicht wird. Eine solche Unterteilung ist auch in

der Musik bekannt, wo sich die Frequenz von einer Oktave zur nächsten verdoppelt und das Frequenzverhältnis zwischen den einzelnen Halbtönen $1 : \sqrt[12]{2}$ ist. Man bezeichnet dieses auf Andreas Werckmeister und Johann Sebastian Bach zurückgehende Schema als gleichmäßig temperierte Tonskala [DHS98].

4.5 Wavelet-Surrogate

Bei der Untersuchung von Signalen stellt sich häufig die Frage, ob diesem Signal überhaupt eine gesetzmäßige Struktur zugrunde liegt oder ob es sich um Rauschen handelt. In den vergangenen Jahren hat sich daher innerhalb der Nichtlinearen Zeitreihenanalyse ein Zweig ausgebildet, der sich mit der Beantwortung dieser Frage beschäftigt. Die Methode der Surrogatdaten, die von Theiler u.a. [TEL⁺92] entwickelt wurde, bietet die Möglichkeit, mittels eines Hypothesentests eine gegebene Zeitreihe gegen eine gewählte Modellklasse zu testen, und damit zu entscheiden, ob sich diese Zeitreihe bzgl. einer vorgegebenen Teststatistik signifikant von der Modellklasse unterscheidet. Dazu gibt man zunächst eine Nullhypothese und einen Signifikanzniveau vor. In einem zweiten Schritt werden dann sog. Surrogatdaten erzeugt und eine Teststatistik ausgewählt, und schließlich wird diese ausgewertet und interpretiert. Wir wollen in diesem Abschnitt eine Methode zur Konstruktion von Surrogaten vorstellen, die auf Wavelets basiert.

Zur Veranschaulichung betrachten wir zunächst die einfachste Methode Surrogate zu erzeugen, die sog. FT-Surrogate. Dabei wendet man eine diskrete Fourier-Transformation auf die Meßdaten $\{s_i\}$, $i = 1, 2, \dots, N$, an und erhält somit die Koeffizienten $\{f_k\}$, $k = -N/2, -N/2+1, \dots, N/2$, wobei f_k die komplexe Amplitude zur Frequenz $\frac{k}{N\Delta t}$ für die Abtastzeit Δt ist. Man kann einen solchen komplexwertigen Koeffizienten über die Polardarstellung in eine reelle Amplitude und eine reelle Phase zerlegen, d.h.

$$f_k = \frac{1}{\sqrt{2N}} \sqrt{P_{|k|}} e^{i\theta_k}, \quad k = -\frac{N}{2}, -\frac{N}{2} + 1, \dots, \frac{N}{2}, \quad (4.31)$$

wobei P_k das zugehörige Periodogramm und $\theta_{-k} = -\theta_k$ ist. Verrauscht man nun die Phasen θ_k , so erhält man neue Koeffizienten \tilde{f}_k , welche dieselbe Amplitude und damit auch dasselbe Leistungsspektrum besitzen, allerdings wurde für jede Frequenzkomponente das zeitliche Auftreten innerhalb der Zeitreihe geändert. Durch inverse Fourier-Transformation erhält man somit Surrogatdaten, welche sich in Mittelwert, Varianz und Leistungsspektrum nicht von den Originaldaten unterscheiden.

Aufbauend auf dieser Grundidee wollen wir Wavelet-Surrogate konstruieren. Wir haben gesehen, daß sich eine beliebige L^2 -Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ bezüglich eines vorgegebenen Wavelets ψ bzw. der zugehörigen Skalierungsfunktion ϕ in M Entwicklungsstufen wie folgt zerlegen läßt:

$$f(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k^0 \phi_{0,k}(t) + \sum_{j=0}^{M-1} \sum_{k \in \mathbb{Z}} d_k^j \psi_{j,k}(t). \quad (4.32)$$

Wir werden nun auf einer festen Skala $j = 0, \dots, M-1$ die Entwicklungskoeffizienten d_k^j in einer zufälligen Weise miteinander permutieren, d.h. $\tilde{d}_k^j = d_{\pi(k)}^j$. Dies entspricht anschaulich analog zur Methode der FT-Surrogate einer Änderung der Zeitordnung auf jeder einzelnen Skala. Anschließend führen wir eine Rücktransformation mittels (4.30) durch und erhalten so ein j -Wavelet-Surrogat. Wir können auch auf verschiedenen Skalen gleichzeitig Permutationen der Entwicklungskoeffizienten durchführen, beispielsweise auf den Skalen $j_1, j_2, j_3 \in \{0, 1, \dots, M-1\}$. Wichtig ist hierbei, daß nicht Koeffizienten unterschiedlicher

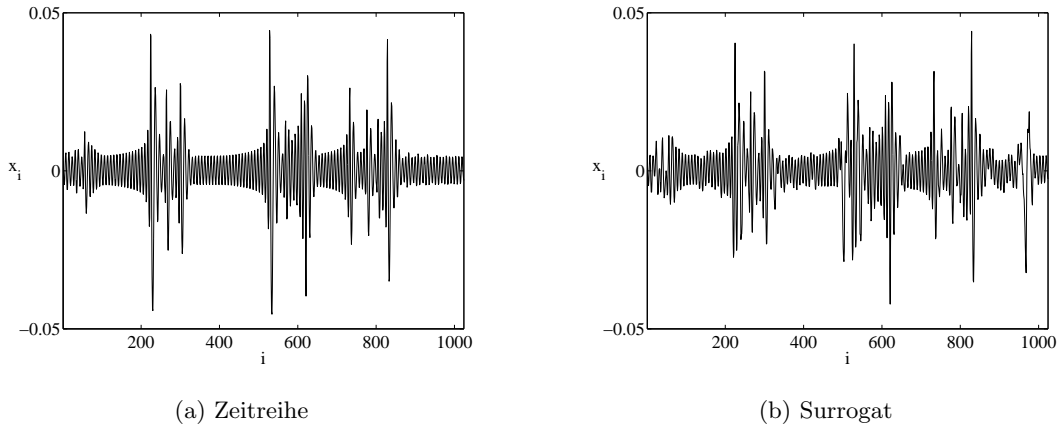


Abbildung 4.11: Vergleich der Zeitreihe eines Lorenz-Prozesses mit Wavelet-Surrogatdaten. Es wurden Wavelets bis zur Ordnung 6 verwendet. Die Koeffizienten der Ordnungen 2 bis 6 wurden jeweils zufällig permutiert.

Skalen miteinander vertauscht werden. Wir bezeichnen solche Surrogate dann als (j_1, j_2, j_3) -Surrogate.

Während wir im Falle der FT-Surrogatmethode das Signal als Überlagerung von Schwingungen verschiedener Frequenzen interpretiert und zur Konstruktion der Surrogate die einzelnen Schwingungskomponenten als voneinander unabhängig betrachtet haben, können wir im Falle unserer Wavelet-Surrogate das Signal als Überlagerung von „Wellenimpulsen“ auffassen, deren Startzeitpunkte stochastisch verändert wurden. Wir sind mit Hilfe dieser Surrogat-Datensätze in der Lage zu erkennen, auf welchen Skalen sich die für die Dynamik relevanten Strukturen widerspiegeln, und zu überprüfen, inwieweit Strukturen auf verschiedenen Skalen miteinander verknüpft sind. In Abbildung 4.11 ist eine Zeitreihe des Lorenz-Systems und ein zugehöriges Wavelet-Surrogat dargestellt, wobei eine Wavelet-Transformation bis zur Skala sechs durchgeführt wurde, und alle Koeffizienten der Skalen zwei bis sechs zufällig permutiert wurden. Es läßt sich erkennen, daß offensichtlich die Wavelet-Koeffizienten der ersten Skala die wesentliche Information des Signals tragen.

Da sich lediglich die Reihenfolge der Koeffizienten, nicht aber ihr Betrag verändert hat, sind Mittelwert, Varianz und L^2 -Norm der Surrogate identisch mit dem Ausgangssignal. Das Leistungsspektrum bleibt i.a. bei der Konstruktion von Wavelet-Surrogaten nicht erhalten, was allerdings in der Praxis auch nicht unbedingt erforderlich ist. Die Forderung, daß ein Surrogat ein bestimmtes Spektrum besitzen soll, ist nur dann sinnvoll, wenn bekannt ist, daß das Signal in allen Realisationen der zugrundeliegenden deterministischen oder stochastischen Dynamik dieselben Kenngrößen, beispielsweise Leistungsspektrum, haben muß.

4.6 Bewertung und Zusammenfassung

Die wesentlichen Eigenschaften der Waveletfunktionen sind ihre Lokalisierung sowohl im Ober- als auch Unterbereich und ihre Skaleneigenschaften. Zwar bilden auch die radialen Basisfunktionen ein System lokalisierter Entwicklungsfunktionen, sie haben jedoch keine brauchbaren Skaleneigenschaften. Wir wollen diese Eigenschaften unter den Aspekten der Signalstruktur und der Anwendungsziele betrachten.

Die Vorteile der Wavelets im Bereich der Signalstruktur liegen insbesondere in der Fähigkeit, stark lokalisierte Eigenschaften eines Signals darstellen zu können. Dies beinhaltet insbesondere Sprünge, Transienten und Bursts. Solche Phänomene treten in Signalen tech-

nischer Prozesse häufig auf. Die Fourier-Transformation ist eine globale Transformation, d.h. die gewählten Basisfunktionen haben \mathbb{R} als Träger. Dies führt dazu, daß bei Änderung eines einzigen Entwicklungskoeffizienten sich die gesamte Funktion ändern kann. Mehr noch, es ist grundsätzlich möglich, aus den Entwicklungskoeffizienten einer gegebenen Funktion eine beliebig „häßliche“ Funktion (mit Unstetigkeiten usw.) zu erzeugen, in dem man einfach die Werte einiger Entwicklungskoeffizienten verringert und ihre Phasen verändert [Mey92]. Daraus folgt, daß man beim Versuch, eine Funktion durch Fourier-Techniken zu glätten, unter Umständen genau das Gegenteil erreicht, weil durch konstruktive Interferenz neue Artefakte auftreten können. Für die Wavelet-Transformation gilt dies nicht, weil es einen Zusammenhang zwischen der Größe eines Wavelet-Koeffizienten und der Glattheit der zugrundeliegenden Funktion gibt.

Somit bieten sich Wavelet-Transformationen insbesondere zur Entrauschung von Meßreihen an. Basierend auf der Wavelet-Transformation wurden in jüngster Vergangenheit Entrauschungsalgorithmen entwickelt, die unter der Bezeichnung *Thresholding* oder *Wavelet Shrinkage* in der Literatur zu finden sind [DJ92, Don92a, Don92b]. Das Prinzip dieser Verfahren besteht darin, eine Wavelet-Transformation des verrauschten Signals durchzuführen und alle Wavelet-Koeffizienten, die unterhalb einer vorgegebenen Schranke, liegen auf Null zu setzen. Anschließend wird eine Rekonstruktion mittels einer inversen Wavelet-Transformation durchgeführt. Im Gegensatz zu Fourier-basierten Verfahren zur Entrauschung wirkt sich diese Veränderung der Koeffizienten nur lokal in der Meßreihe aus und erhält somit die Grundeigenschaften des Datensatzes.

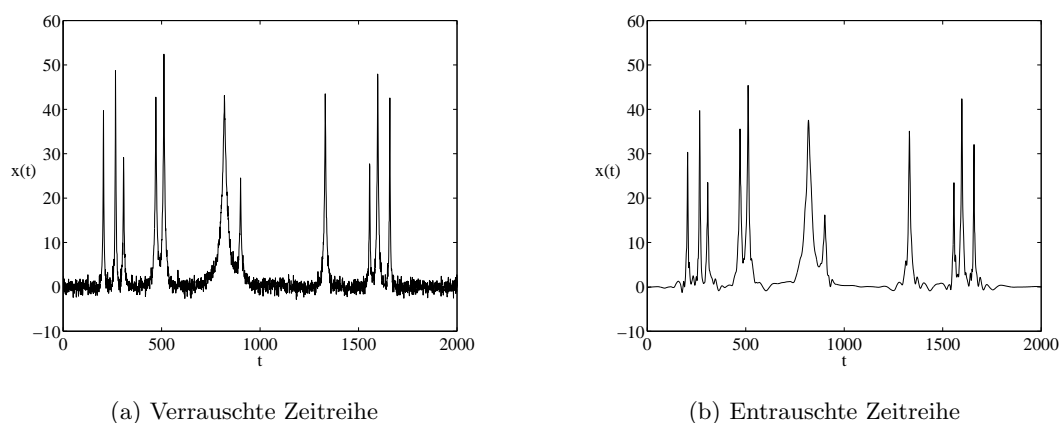


Abbildung 4.12: Wavelet Shrinkage-Entrauschung

Das erfolgreichste Anwendungsbeispiel der Wavelet-Transformation ist die Bildkompression. Vor einigen Jahren hat das FBI einen Wettbewerb ausgeschrieben, in welchem der „günstigste“ Algorithmus zur Kompression und Speicherung digitalisierter Fingerabdrücke gesucht wurde. Neben herkömmlichen Verfahren wie *subband coding* oder jpeg-Kompression wurde auch ein Algorithmus eingereicht, der in Yale von Ronald Coifman auf Basis der Wavelet-Pakettransformation entwickelt wurde und seitdem vom FBI eingesetzt wird. Ein typischer Algorithmus zur Bildkompression arbeitet in drei Schritten: Transformation der Bilddaten, Quantisierung und Kodierung. Die Rekonstruktion führt die jeweils inversen Operationen in umgekehrter Reihenfolge durch. Als Transformationen werden lineare, invertierbare Transformationen auf \mathbb{R}^2 eingesetzt, wobei die Kosinus-Transformation (jpeg-Algorithmus), aber auch Fourier- und Karhunen-Loeve-Transformationen zu den Standardmethoden zählen. Die Wavelet-basierten Verfahren verwenden am häufigsten Daubechies-Wavelets mit sechs Koeffizienten. Der zweite Schritt, die Quantisierung, bildet die berechneten Koeffizienten

auf ganzzahlige Werte ab. Abschließend werden diese Koeffizienten kodiert. Dabei werden meist Entropie-Kodierungen, beispielsweise die Huffman-Kodierung, eingesetzt. Mit Wavelet-Verfahren werden Komprimierungen von bis zu 26 : 1 erzielt [DVDD98].

Obwohl dynamische Systeme in der Realität oft zeitkontinuierlich sind, werden sie in der Modellierung durch diskrete Approximationen ersetzt, weil der numerische Zugang dadurch wesentlich vereinfacht wird. Dennoch sind oftmals kontinuierliche Modelle notwendig. Man steht somit vor dem Problem, aus diskreten Meßdaten ein kontinuierliches Modell konstruieren zu müssen. Als Ansätze für kontinuierliche Modelle dienen insbesondere Polynome und radiale Basisfunktionen [Cas89]. Eine Vielzahl von Methoden zur Schätzung von Modellparametern für diese kontinuierlichen Modelle aus diskreten Zeitreihen sind in den vergangenen Jahren entwickelt worden. Ein Nachteil dieser Modellklassen ist die meist große Anzahl von freien Modellparametern, die häufig zu einer fehlerhaften Anpassung führt [KS97]. Zur Bestimmung der Dynamik ist es bei allen diesen Methoden notwendig, Ableitungen der Funktionen zu schätzen. Die hierzu eingesetzte numerische Differentiation verstärkt im allgemeinen jedoch die Fehler, die aufgrund der Messung gemacht wurden. Die Wavelet-Transformation bietet hier einen Ausweg. Wavelet-Entwicklungen mit interpolierenden Eigenschaften lassen sich recht einfach implementieren. Benutzt man beispielsweise B -Spline-Wavelets, so lassen sich die Entwicklungskoeffizienten der Ableitungen einfach schätzen, in dem man die Beziehung

$$\frac{d}{dx}\phi_{j,k}^{(m)}(x) = 2^j \left(\phi_{j,k}^{(m-1)}(x) - \phi_{j,k+1}^{(m-1)}(x) \right) \quad (4.33)$$

ausnutzt [CB97].

Es ist problematisch, die Basisfunktionen, die bei einer Wavelet-Zerlegung oder einer Wavelet-Paketzerlegung auftreten, geometrisch oder physikalisch zu interpretieren. Wir wollen allerdings anmerken, daß dies auch auf andere Zerlegungen und Reihenentwicklungen gilt, die in der Mathematik und Physik Verbreitung gefunden haben (Beispiel: elektrische Multipole). Abgesehen von Datenkompression und Entrauschung von Signalen mit Hilfe von Wavelets sind uns für die dynamische Modellierung nur wenige gezielte praktische Anwendungen der Wavelet-Transformation bekannt. Erste Versuche wurden bislang von Miyano u.a. im Bereich der Modellierung von Hochöfen [MKS⁺00] und von Aballe u.a. zur Unterscheidung von Korrosionstypen [ABBM99] unternommen. Ein sehr großer Vorteil der Wavelet-Transformation ist ihre rechnerische Handhabbarkeit. Es lassen sich sehr einfach schnelle Wavelet-Transformationen implementieren, die einen Rechenaufwand von $\mathcal{O}(n)$ benötigen. Die schnelle Fourier-Transformation ist dagegen sehr viel aufwendiger ($\mathcal{O}(n \log n)$). Von gleichem Rechenaufwand wie die schnelle Fourier-Transformation ist die Wavelet-Paketzerlegung.

Kapitel 5

Topologische Zeitreihenanalyse

Der Zustandsraum eines dynamischen Systemes wird im allgemeinen durch eine n -dimensionale (differenzierbare) Mannigfaltigkeit M beschrieben, die in einen höherdimensionalen euklidischen Raum eingebettet ist. Für die Modellierung solcher Systeme ist die Kenntnis der topologischen Eigenschaften dieser Mannigfaltigkeit bzw. der darauf ablaufenden Dynamik sehr wertvoll, weil man hierdurch die Klasse der möglichen Modelle drastisch reduzieren kann. Daher wollen wir in diesem Kapitel einige Methoden der topologischen Zeitreihenanalyse untersuchen.

5.1 Grundlegende Bemerkungen

Eine Hauptaufgabe der Topologie ist die Klassifizierung von topologischen Räumen. Zu Beginn jeder Klasseneinteilung muß man sich zunächst überlegen, welche Objekte als verschieden und welche als gleich bezeichnet werden sollen. Die Topologie fordert für die „Gleichheit“ zweier Räume, daß es möglich ist, den ersten Raum durch stetige Deformation in den zweiten Raum zu überführen, oder mathematisch gesprochen, es muß zwischen zwei topologischen Räumen X und Y ein Homöomorphismus $f : X \rightarrow Y$ existieren. Solche Räume werden als homöomorph bezeichnet. Die Topologie kennt auch noch eine etwas schwächere Forderung, die ebenfalls sehr nützlich ist, nämlich die Homotopie. Zwei Abbildungen heißen homotop, wenn eine stetige Abbildung, die Homotopie, existiert, welche die eine in die andere Abbildung überführt. Für eine systematische Darstellung dieses Themenkomplexes verweisen wir auf tom Dieck [Die91].

Es läßt sich leicht einsehen, daß die Homöomorphie-Eigenschaft eine Äquivalenzrelation darstellt. Für uns stellt sich nun die interessante Frage, wie wir Äquivalenzklassen homöomorpher Räume beschreiben können. Wir wollen dazu topologische Invarianten benutzen, d.h. Größen, die unter Homöomorphismen unverändert bleiben. Es soll bereits an dieser Stelle darauf hingewiesen werden, daß hier ein Vollständigkeitsproblem entsteht, denn selbst wenn zwei Räume in allen bekannten topologischen Invarianten übereinstimmen, ist damit immer noch nicht sichergestellt, daß die beiden Räume tatsächlich homöomorph sind. Vielmehr läßt sich nur die schwache Aussage ableiten, daß zwei Räume nicht zur gleichen Äquivalenzklasse gehören, wenn sie bereits eine unterschiedliche topologische Invariante besitzen. Eine anschauliche Einführung in die Topologie findet man bei Jänich [Jän99].

5.2 Komplexe, Triangulierung und Tesselation

Die mengentheoretische Topologie dient zwar der Klassifikation von Räumen, aber die konkrete Umsetzung dieser Konzepte ist oftmals mit rein topologischen Verfahren nicht möglich.

Daher hat sich ein weiterer Zweig, die algebraische Topologie, gebildet. Wir werden untersuchen, wie algebraische Strukturen zur Bestimmung von Klassifikationsgrößen genutzt werden können. Dazu werden wir Zellenkomplexe bzw. speziell simpliziale Komplexe verwenden. Es handelt sich hierbei um stückweise lineare Objekte, welche die Beschreibung geometrischer Objekte erlauben.

5.2.1 Simpliziale Komplexe

Unter einem r -dimensionalen Simplex $\sigma_r = \langle p_0 p_1 \dots p_r \rangle$ (kurz r -Simplex) versteht man die konvexe Hülle von $r + 1$ Punkten p_0, \dots, p_r , sog. Vertices, im \mathbb{R}^n , welche geometrisch unabhängig sind, d.h. es existiert keine $(r - 1)$ -dimensionale Hyperebene, welche alle Vertices enthält. Ein 0-Simplex ist somit ein Punkt, ein 1-Simplex eine Gerade, ein 2-Simplex ein Dreieck, etc. Ein Simplex kann einfach durch Angabe seiner Vertices charakterisiert werden, wobei angenommen werden soll, daß ein Simplex eine Orientierung besitzt. Jeder zu einem r -Simplex gehörende Punkt $x \in \mathbb{R}^m$ kann durch Angabe seiner baryzentrischen Koordinaten (c_0, \dots, c_r) ausgedrückt werden; Die Menge aller zu einem Simplex gehörenden Punkte ist eine kompakte Teilmenge des \mathbb{R}^m :

$$\sigma_r = \left\{ x \in \mathbb{R}^n \mid x = \sum_{i=0}^r c_i p_i, \quad c_i \geq 0, \quad \sum_{i=0}^r c_i = 1 \right\}. \quad (5.1)$$

Die konvexe Hülle einer $(q+1)$ -elementigen Teilmenge von Vertices eines r -Simplex σ , d.h. $q < r$, heißt eine q -Fläche σ_q des Simplex σ (geschrieben $\sigma_q < \sigma$), wenn die Vertices geometrisch unabhängig sind. Man überlegt sich leicht, daß ein r -Simplex σ genau $\binom{r+1}{q+1}$ q -Flächen besitzt. Zur Veranschaulichung sind in Abbildung 5.1 die einfachsten Simplexe dargestellt.

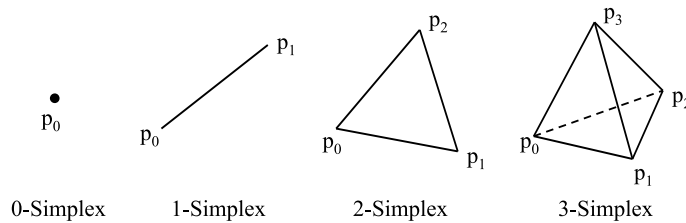


Abbildung 5.1: Simplexe

Definition 5.1 (Simplizialer Komplex) Eine Menge K von endlich vielen Simplexe in \mathbb{R}^n heißt ein simplizialer Komplex oder Polyeder, falls

1. für jeden r -Simplex $\sigma \in K$ auch jede beliebige q -Fläche $\sigma_q < \sigma$, $q < r$, zu K gehört,
2. die Schnittmenge zweier Simplexe $\sigma, \sigma' \in K$ entweder leer oder eine q -Fläche sowohl von σ als auch σ' ist.

Die Dimension eines simplizialen Komplexes entspricht der höchsten Dimension eines in K enthaltenen Simplex. Man beachte, daß ein simplizialer Komplex kein topologischer Raum ist, wohl aber die Vereinigung $|K|$ aller in K enthaltenen Simplexe, die sog. geometrische Realisierung von K :

$$|K| = \bigcup_{\sigma \in K} \sigma \subset \mathbb{R}^n. \quad (5.2)$$

Die Menge aller Simplexe eines simplizialen Komplexes K , deren Dimension kleiner oder gleich p ist, bildet einen simplizialen Unterkomplex K^p und wird als das p -Gerüst bezeichnet:

$$K^p = \{\sigma_{q,i} \in K \mid q \leq p\}. \quad (5.3)$$

Wie hängen nun Simplexe mit topologischen Räumen zusammen? Dazu betrachtet man einen gegebenen topologischen Raum X . Existiert ein simplizialer Komplex K und ein Homöomorphismus $f : |K| \rightarrow X$, so heißt X triangulierbar und das Paar (K, f) heißt Triangulierung von X . Eine Triangulierung eines topologischen Raumes stellt somit eine Zerlegung in Simplexe dar. Diese Triangulierung ist im allgemeinen jedoch nicht eindeutig. Unter Umständen brauchen zwei Triangulierungen eines Raumes noch nicht einmal isomorph zu sein. Die Nützlichkeit dieses Begriffes hängt stark davon ab, ob die zu untersuchenden Räume überhaupt triangulierbar sind. Nach Whitehead sind alle glatten Mannigfaltigkeiten triangulierbar [Whi40]. Es kann sogar gezeigt werden, daß für kompakte glatte Mannigfaltigkeiten die Triangulierung endlich ist, d.h. die Mannigfaltigkeit ist topologisch äquivalent zu einem Polyeder. Dieser wiederum ist eindeutig durch seine Ecken, Kanten, Flächen, etc. festgelegt. Wir wollen festhalten, daß eine endliche Triangulierung lediglich aus endlich vielen Vertices besteht, d.h. es sollte möglich sein, aus einer endlichen Zeitreihe eine solche Triangulierung zu konstruieren.

Die Simplexe lassen sich leicht mit Hilfe baryzentrischer Koordinaten beschreiben und sind daher sehr geeignet für eine numerische Implementation. Ein Nachteil der Simplexe ist jedoch, daß sie keine glatten Ränder besitzen, d.h. Funktionen, die auf einem Simplex definiert sind, sind an diesen Stellen nicht differenzierbar. Eine Glättung dieser Struktur kann durch homöomorphe Abbildungen erreicht werden ohne dabei die Topologie zu verändern. Eine Verallgemeinerung der simplizialen Komplexe stellen sog. CW-Komplexe dar. Wir verweisen dazu auf Jänich [Jän99].

5.2.2 Triangulierung und Mosaiksteine

In diesem Abschnitt wollen wir ein Verfahren vorstellen, wie man aus einer Datenreihe $\{s_i\}$ eine Triangulierung konstruieren kann. Dazu bettet man zunächst die Daten in einen m -dimensionalen euklidischen Raum ein, beispielsweise durch die Zeitversatzeinbettung $y_i = (s_i, s_{i-1}, \dots, s_{i-m+1})$. Interpretiert man diese N' Datenpunkte als Vertices, so lassen sich theoretisch $\binom{N}{m+1}$ m -Simplexe konstruieren. Für jeden Punkt $y_i \in \mathbb{R}^m$ definiert man nun ein Gebiet V_i , das aus allen Punkten $z \in \mathbb{R}^m$ besteht, welche näher am Punkt y_i liegen als an irgendeinem anderen Datenpunkt. Dieses Gebiet nennt man ein Voronoi-Polygon:

$$V_i = \{z \in \mathbb{R}^m \mid \|z - y_i\| < \|z - y_j\|, \quad \forall j \neq i\}. \quad (5.4)$$

Die Voronoi-Gebiete sind per Definition offene Mengen und man definiert den Rand eines Voronoi-Gebietes durch $\partial V_i = \text{clos}(V_i) \setminus V_i$. Die Vereinigung der Ränder aller Voronoi-Gebiete bezeichnet man als Voronoi-Diagramm (Abbildung 5.2(a)). Zwei Datenpunkte y_i und y_j heißen benachbart, wenn sich die Ränder ihrer Voronoi-Gebiete schneiden, d.h. $\text{clos}(V_i) \cap \text{clos}(V_j) \neq \emptyset$. Die Voronoi-Diagramme sind weit verbreitet und werden u.a. in der Meteorologie als Thiessen-Polygone zur Definition von Gebieten, in deren Mittelpunkt sich Wetterstationen befinden, eingesetzt [TA18].

Die sog. Delaunay-Triangulierung erhält man durch Konstruktion der zum Voronoi-Diagramm dualen Struktur. Eine Teilmenge $\{y_{i_1}, \dots, y_{i_n}\}$ von Datenpunkten bildet einen Simplex des Delaunay-Komplexes (siehe Abbildung 5.2(b)), wenn die Vertices des Simplex im Sinne des Voronoi-Diagramms benachbart sind.

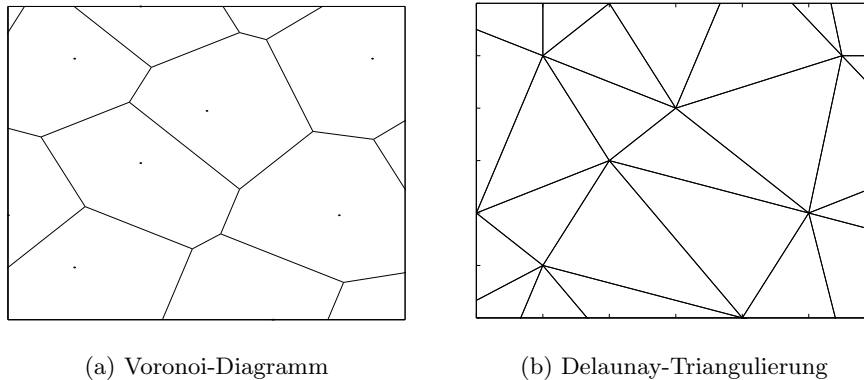


Abbildung 5.2: Voronoi-Gebiete und Delaunay-Simplexe

Die Delaunay-Triangulierung kann direkt aus den gegebenen Datenpunkten ohne Umweg über die Voronoi-Gebiete bestimmt werden. Dabei nutzt man aus, daß eine Delaunay-Triangulierung aus sich nicht überlappenden Simplexe besteht, deren Umsphären¹ außer den Eckpunkten des Simplex keine weiteren Punkte enthalten. Ein Algorithmus von Bowyer geht von einer „groben“ Triangulierung mit wenigen Vertices aus, und baut die Delaunay-Triangulierung durch Hinzufügen neuer Vertices und damit neuer Simplexe sukzessive auf. Dabei wird zunächst einmal bestimmt, zu welchem Simplex ein neuer Punkt gehört und welche Simplexe Umsphären besitzen, in denen dieser Punkt liegt. Diese Simplexe werden gelöscht und aus den Vertices werden neue Simplexe konstruiert. Diese Methode arbeitet in niedrigen Dimensionen recht gut; in höheren Dimensionen ergibt sich allerdings das Problem, daß auch „falsche“ Simplexe auftreten [Mee91].

Ein neues Verfahren zur Triangulierung von Zeitreihen wurde von Tobias Meier vorgeschlagen [Mai98]. Die Grundidee besteht darin, aufeinanderfolgende Punkte einer Zeitreihe durch eine Kante zu verbinden und geeignet Simplexe zu konstruieren, welche diese Kante als 1-Simplex enthalten. Wir wollen diesem Gedanken folgen und eine weitere Methode zur Triangulierung vorschlagen. Im folgenden werden wir das Verfahren im \mathbb{R}^2 skizzieren; eine Verallgemeinerung auf den \mathbb{R}^n ist aber einfach möglich. Die aufeinanderfolgenden Datenpunkte einer Zeitreihe werden durch Linienelemente miteinander verknüpft. Wir konstruieren nun Kreise (in höheren Dimensionen allgemein n -Sphären), so daß die Verbindungsstrecke zwischen zwei aufeinanderfolgenden Zeitreihenpunkten den Durchmesser des Kreises repräsentiert. Diese Wahl ist eindeutig. Alle Verbindungen, in deren Sphären mehr als nur die beiden Eckpunkte der Verbindung liegen, werden entfernt. Dadurch entsteht ein sog. Gabriel-Graph. Aus den Zentren der verbleibenden Kreise werden schließlich die Simplexe einer gröberen Triangulierung konstruiert, d.h. die neue Triangulierung besitzt weniger Simplexe, was die anschließende Berechnung von Kenngrößen vereinfacht. Zudem wurden Simplexe entfernt, bei denen die Länge einer Kante $\overline{y_i y_{i+1}}$ im Verhältnis zu den übrigen Kantenlängen des Simplexes groß ist, d.h. die besonders „flach“ sind.

5.3 Morse-Theorie und Euler-Charakteristik

Nachdem wir in Abschnitt 5.2.1 die simplizialen Komplexe vorgestellt haben, wollen wir nun eine Invariante eines topologischen Raumes vorstellen, die sich sehr einfach aus der

¹Ein n -Simplex besitzt $n + 1$ Vertices, so daß durch diese Punkte eindeutige eine n -Sphäre S^n konstruiert werden kann. Im \mathbb{R}^2 sind diese Simplexe Dreiecke und die Umsphären sind die Umkreise des jeweiligen Dreiecks.

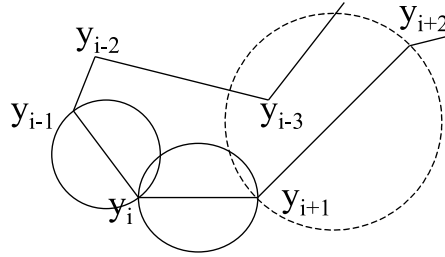


Abbildung 5.3: Die Kante (y_{i+1}, y_{i+2}) wird bei der Triangulierung im Gabriel-Graphen nicht berücksichtigt, da y_{i-3} im umschriebenen Kreis (gestrichelt) liegt.

Triangulierung bestimmen läßt, nämlich die sog. Euler-Charakteristik $\chi(M)$. Diese stellt eine Art Brücke zwischen der Geometrie eines Raumes und seinen topologischen Eigenschaften dar:

$$\begin{aligned}\chi(M) &= \#(\text{Ecken}) - \#(\text{Kanten}) + \#(\text{Flächen}) - \dots \\ &= \sum_{r=0}^n (-1)^r \dim H_r(M).\end{aligned}\quad (5.5)$$

Mit $H_r(M)$ wird die r -te Homologiegruppe der Mannigfaltigkeit M bezeichnet. Mit Hilfe der Homologietheorie lassen sich „Löcher“ in einem topologischen Raum aufspüren. Eine formale Definition der Homologiegruppe findet man bei Nakahra [Nak90] oder tom Dieck [Die91].

Wir werden im folgenden auf Ergebnisse zurückgreifen, die Marston Morse im Rahmen einer differentialtopologischen Theorie entwickelt hat, die aus der Art und Anzahl der kritischen Punkte einer Funktion auf einer Mannigfaltigkeit Rückschlüsse auf die topologischen Eigenschaften dieser Mannigfaltigkeit zu ziehen erlaubt [Hir76]. Wir werden eine Möglichkeit aufzeigen, die Euler-Charakteristik einfach aus einer Zeitreihe zu bestimmen. Ein Vorteil dieses Verfahrens liegt darin, daß man die Zeitordnung der Meßdaten nicht benötigt. Wir wollen annehmen, daß die Meßfunktion, welche die Zustände eines realen physikalischen Systems auf eine Teilmenge des euklidischen Raumes abbildet, eine Morse-Funktion ist. Unter einer Morse-Funktion versteht man dabei eine Funktion $f : M \rightarrow \mathbb{R}$, deren kritische Punkte² alle nicht-degeneriert sind, d.h.

$$\text{rg}_p H(f) = \text{rg} \left. \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \right|_p = \dim M. \quad (5.6)$$

Die Anzahl der negativen Eigenwerte der Hess'schen Matrix H in einem kritischen Punkt $p \in M$ nennt man den Index $\text{ind}_f(p)$. Der Index eines kritischen Punktes entspricht gerade der Dimension der instabilen Mannigfaltigkeit W^u in diesem Punkt. Somit ist ein kritischer Punkt vom Index 0 ein lokales Minimum, ein kritischer Punkt vom Index $n = \dim M$ ein lokales Maximum und alle anderen sind Sattelpunkte. Grundsätzlich existiert nach dem Morse-Lemma für eine beliebige C^{r+2} -Abbildung $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ in einem kritischen Punkt $p \in M$ vom Index k eine C^r -Karte φ , so daß sich in den lokalen Koordinaten (u_i) schreiben läßt

$$f(\varphi^{-1}(u_1, \dots, u_n)) = f(p) - \sum_{i=0}^k u_i^2 + \sum_{i=k+1}^n u_i^2 \quad (5.7)$$

Zur Bestimmung der Euler-Charakteristik verwenden wir den Indexsatz [Bre93]:

²Ein Punkt $p \in M$ heißt kritischer Wert der Funktion $f : M \rightarrow \mathbb{R}$, falls $df(p) = 0$ ist, d.h. alle partiellen ersten Ableitungen der Funktion verschwinden in p .

Satz 5.1 (Indexsatz) Sei M eine glatte, orientierte, kompakte Mannigfaltigkeit und $X : M \rightarrow TM$ ein glattes Vektorfeld mit kritischen Punkten p_1, \dots, p_k . Dann ist die Euler-Charakteristik gegeben durch

$$\chi(M) = \sum_{i=1}^k \text{ind}_{p_i} X.$$

Nach dem Theorem von Sard liegen die kritischen Punkte eines glatten Vektorfeldes isoliert, da das Bild des Vektorfeldes, $X(M) \subset TM$, den Nullschnitt transversal schneidet. Da M als kompakte Mannigfaltigkeit vorausgesetzt ist, ist die Anzahl der kritischen Punkte endlich [Hir76]. Um den Indexsatz anwenden zu können, muß zunächst ein Vektorfeld konstruiert werden. Dieses Vektorfeld ist gerade das Gradientenfeld der Morse-Funktion. Differentialgeometrisch ist das totale Differential der Morse-Funktion $df : M \rightarrow T^*M$ eine Einsform. Das Gradientenfeld ergibt sich über die Dualität zwischen Einsformen und Vektorfeldern. Somit bleibt nur noch das Problem, wie man mittels der Morse-Funktion die kritischen Punkte bestimmt. Dazu verwendet man das folgende Theorem von Noakes [Noa92]:

Theorem 5.1 (Noakes) Sei $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ eine beschränkte Morse-Funktion, $C = \{c_1, \dots, c_k\}$ die Menge ihrer kritischen Punkte und X eine Zufallsvariable mit Werten in M . Dann besitzt die Zufallsvariable $Y = f(X)$ eine C^∞ -Dichte $\phi : \mathbb{R} \setminus f(C) \rightarrow \mathbb{R}$ mit den folgenden Eigenschaften:

1. Falls c_i ein lokales Minimum (Maximum) von f ist, so gilt:

$$\lim_{x \rightarrow f(c_i)^+} \phi(x) > \lim_{x \rightarrow f(c_i)^-} \phi(x)$$

$$(bzw. \lim_{x \rightarrow f(c_i)^+} \phi(x) > \lim_{x \rightarrow f(c_i)^-} \phi(x)).$$

2. Falls c_i ein Sattelpunkt von f ist, so gilt für x in der Nähe von $f(c_i)$:

$$\phi(x) = O(-\ln |x - f(c_i)|).$$

Die kritischen Punkte kann man mit Hilfe dieses Theorems leicht aus einem Histogramm der Morse-Funktion ablesen. Hierzu wird der Wertebereich von f partitioniert und über jedem Intervall die relative Häufigkeit der darauf entfallenden Werte aufgetragen. Jeder Spitze kann ein Sattelpunkt zugeordnet werden und jeder linken (rechten) Flanke ein Minimum (Maximum). In Abbildung 5.4 lassen sich somit zwei Sattelpunkte und je ein lokales Minimum und Maximum erkennen. Daraus ergibt sich $\chi(M) = 0$.

5.4 Dynamik auf dem Reißbrett

Instabile periodische Orbits, d.h. geschlossene Trajektorien, formen das Skelett eines chaotischen Attraktors. Nach Robinson [Rob98] lassen sich beliebige Trajektorien in den \mathbb{R}^3 einbetten. Wir wollen uns daher mit geschlossenen Kurven im \mathbb{R}^3 beschäftigen und sehen, wie sich solche Trajektorien charakterisieren lassen. Es wird sich zeigen, daß es ein geometrisches Objekt, einen Knotenhalter, gibt, welcher die topologische Organisation der Orbits beschreibt und zudem unter Änderung von Systemparametern stabil bleibt. Die Beschreibung solcher periodischer Orbits im dreidimensionalen Raum ist Gegenstand der Knotentheorie.

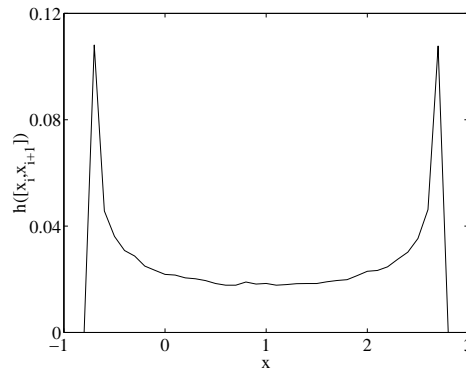


Abbildung 5.4: Histogramm einer Morse-Funktion $f : S^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ($f(x, y, z) = 4z^2 - 1$). Die Punkte $(x, y, z) \in \mathbb{R}^2$ wurden als gleichverteilt auf der Kugel angenommen. Der Wertebereich $[-1, 3]$ wurde in 40 gleich große Teilintervalle unterteilt. Aufgetragen sind die relativen Häufigkeiten $h_i := h([x_i, x_{i+1}])$.

5.4.1 Vorgehensweise

Das folgende Verfahren wurde von Mindlin und Gilmore vorgeschlagen [MG92]. Es beruht auf der Annahme, daß sich Trajektorien eines Attraktors im \mathbb{R}^3 entlang ihrer stabilen Mannigfaltigkeit auf eine 2-dimensionale Fläche projizieren lassen. Diese Fläche stellt eine verzweigte Mannigfaltigkeit dar und wird ein *Template* (Schablone) genannt. Jeder „Ast“ dieser verzweigten Mannigfaltigkeit entspricht einem Periode-1-Orbit. Der Algorithmus besteht aus mehreren Schritten, wobei zunächst die periodischen Orbits aus der Zeitreihe identifiziert werden müssen. Im folgenden werden diese dann in den \mathbb{R}^3 eingebettet. Mindlin und Solari behaupten, daß hierfür im Gegensatz zur nichtlinearen Zeitreihenanalyse nicht die Takens-Einbettung verwendet werden kann, weil diese die topologischen Informationen nicht erhält [MS95]. In einem Beispiel demonstrieren sie, daß sich topologische Kenngrößen aufgrund von Selbstschneidung der Orbits bei Variation des Zeitversatzes verändern. Daher wird auf die differentielle Phasenraumeinbettung zurückgegriffen, d.h. $y_i = (s_i, \dot{s}_i, \ddot{s}_i) \approx (s_i, s_{i+1} - s_{i-1}, s_{i+1} - 2s_i + s_{i-1})$. Wir sind der Meinung, daß durch eine ungünstige Wahl des Zeitversatzes die numerischen Berechnungen zwar instabil werden können, nicht aber, daß man mit der Takens-Einbettung grundsätzlich zu nicht äquivalenten Ergebnissen kommt. Wir verweisen hierzu auch auf die Diskussion bei Beckmann [Bec99].

Anschließend werden Indikatoren berechnet und der Knotenhalter bestimmt. Auf diese beiden Schritte gehen wir in Abschnitt 5.4.3 näher ein. Abschließend wird der Knotenhalter im Rahmen eines Hypothesentests verifiziert und das geometrische Modell erzeugt. Solche Modelle können dann verwendet werden, um synthetische Zeitreihen zu berechnen, welche dieselben topologischen Eigenschaften besitzen wie die Ausgangsdaten. Die metrischen Eigenschaften der gemessenen Daten müssen allerdings nicht mit den synthetischen Daten übereinstimmen.

Auerbach u.a. [ACE⁺87] konnten zeigen, daß instabile periodische Orbits das Skelett eines chaotischen Attraktors bilden und zudem in einer einzigen Zeitreihe, falls die Länge der Zeitreihe nicht zu kurz ist, im Überfluß vorhanden sind. Zur Bestimmung der instabilen periodischen Orbits nutzt man aus, daß ein Zustand, der sich in der Nähe eines instabilen periodischen Orbits befindet, unter der Flußabbildung in eine ε -Umgebung um seinen Ursprungszustand zurückkehrt. Als ε wählt man üblicherweise einige Prozent des Attraktordurchmessers und bestimmt damit aus der Zeitreihe $\{s_i\}_{i=1, \dots, N}$ eine Histogrammfunktion der Form

$$H(p) = \sum_{i=1}^{N'} \Theta(\varepsilon - |s_i - s_{i+p}|), \quad p = 1, \dots, n, \quad (5.8)$$

wobei $N' < N - n$. Die Peaks dieses Histogramms geben Hinweise auf die gesuchten Periodizitäten. Zu ähnlichen Resultaten gelangt man auch durch Verwendung von Rekurrenzplots [Eck87, Cas97]. In Abbildung 5.5 sind die auf die Anzahl der Datenpunkte normierten $H(p)$ -Werte eines getriebenen Duffing-Oszillators aufgetragen. In 5.5(a) ist das Histogramm für einen Amplitudenwert B der Erregung zu sehen, bei welcher ein stabiler periodischer Orbit auftritt, während 5.5(b) zu einem chaotischen Zustand gehört.

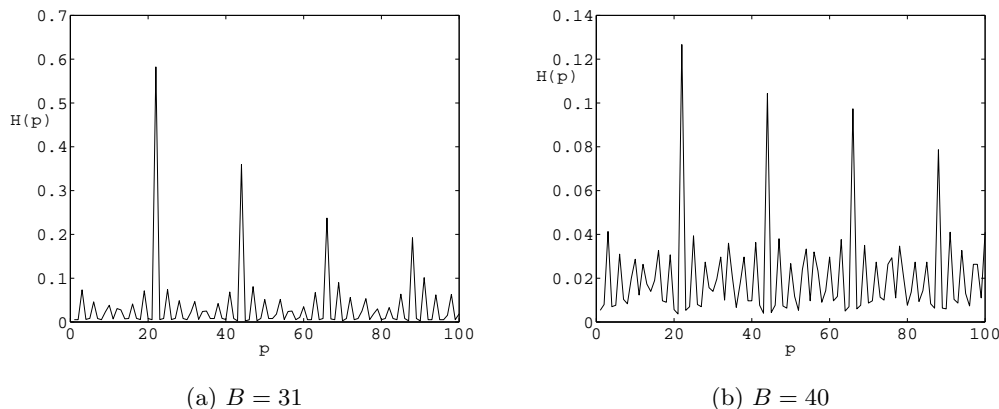


Abbildung 5.5: Histogramme: Die nahe Wiederkehr von Trajektorien wird durch die Häufigkeit des Auftretens benachbarter Punkte in Abhängigkeit ihres Abstandes p bestimmt.

5.4.2 Knoten und Zöpfe

Die Knotentheorie ist ein Teilgebiet der Topologie. Wir wollen an dieser Stelle die wichtigsten Begriffe einführen. Für weiterführende Diskussionen verweisen wir auf Kauffman [Kau93]. Ein Knoten ist einfach ein in sich verschlungenes geschlossenes Kurvenstück im dreidimensionalen Raum, d.h. eine Abbildung von S^1 nach \mathbb{R}^3 . Die beiden einfachsten Beispiele für einen Knoten sind der triviale Knoten (Abbildung 5.6(a)), häufig auch als Unknoten bezeichnet, und die Kleeblattschlinge (Abbildung 5.6(b)).

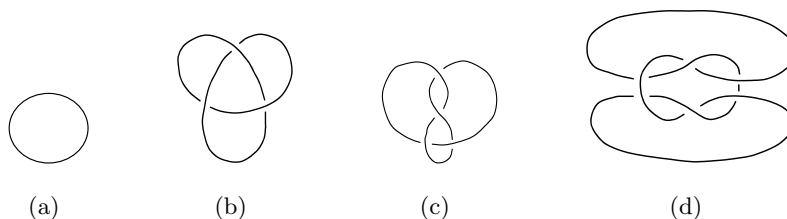


Abbildung 5.6: Beispiel für Knoten

Unter einer Darstellung eines Knotens soll eine Projektion des Knotens in die Ebene (\mathbb{R}^2) verstanden werden. Bei dieser Projektion entstehen Punkte, an denen sich der Knoten selbst schneidet, sog. Kreuzungen. Die Kleeblattschlinge etwa besitzt drei Kreuzungen. Wir werden uns hier ausschließlich mit orientierten Knoten beschäftigen, d.h. es gibt eine ausgezeichnete Richtung, wie der Knoten zu durchlaufen ist. Bevor wir uns eingehender mit den invarianten Größen befassen, die einen Knoten charakterisieren, muß zunächst festgelegt werden, unter welchen Umständen man zwei Knoten bzw. deren Projektion als gleich oder äquivalent ansieht. Zwei Knoten sollen genau dann äquivalent heißen, wenn sie durch sog. Reidemeister-

Bewegungen ineinander überführt werden können. Von diesen fundamentalen Bewegungen gibt es genau drei verschiedene Typen:

1. Jedem Strang darf eine Schlaufe hinzugefügt oder entnommen werden (Abb. 5.7(a)).
2. Jedem Strang dürfen zwei Kreuzungen unterschiedlichen Typs hinzugefügt oder entnommen werden (Abb. 5.7(b)).
3. Jeder Strang eines Knotens, welcher auf einer Seite einer Kreuzung liegt, darf auf die andere Seite verlegt werden (Abb. 5.7(c)).

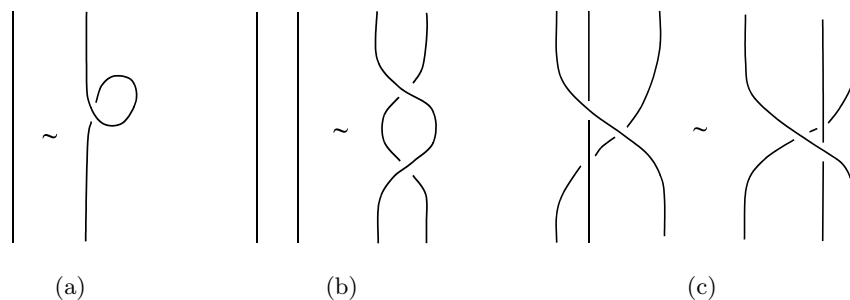


Abbildung 5.7: Reidemeister-Bewegungen

Eine Verschlingung ist eine Menge von Knoten. Sie wird als *zerlegbar* bezeichnet, wenn ihre Komponenten in disjunkte Knoten überführt werden können. Als Einordnung von Verschlingungen dient die Verschlingungszahl $lk(\alpha, \beta)$ zweier Knoten α und β einer Verschlingung. Zur Berechnung der Verschlingungszahl definiert man den Charakter einer Kreuzung. Man ordnet einer Kreuzung C den Wert $\varepsilon(C) = +1$ zu, wenn der obere Strang in mathematisch positive Richtung gedreht werden muß, damit er mit dem unteren Strang zusammenfällt (Überkreuzung). Im Falle einer Unterkreuzung muß der obere Strang in mathematisch negative Richtung gedreht werden, um mit dem unteren zur Deckung zu kommen, und erhält folglich den Wert $\varepsilon(C) = -1$ (Abbildung 5.8). Die Verschlingungszahl wird schließlich definiert durch

$$lk(\alpha, \beta) = \frac{1}{2} \sum_{C_i \in \alpha \cap \beta} \varepsilon(C_i) \quad (5.9)$$

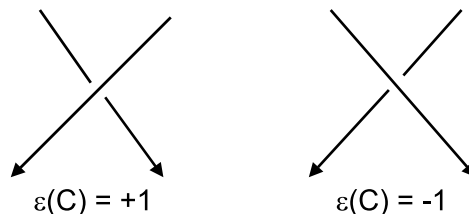


Abbildung 5.8: Charakter von Kreuzungspunkten

Zur Illustration seien zwei einfache Beispiele angeführt: eine Nicht-Verschlingung und eine Hopf-Verschlingung. Nach (5.9) erhält man für die Nicht-Verschlingung den Wert $lk = 0$, während erwartungsgemäß für die Hopf-Verschlingung $lk = +1$ folgt. Die Verschlingungszahl ist eine topologische Invariante. Offensichtlich sind Verschlingungen mit Verschlingungszahl 0 zerlegbar.

Auf dem Weg zu einer geometrisch anschaulicheren Darstellung wollen wir uns kurz mit sog. Zöpfen beschäftigen. Nach dem Alexander-Theorem kann jede orientierte Verschlingung durch einen geschlossenen Zopf dargestellt werden. Ein geometrischer Zopf wird aus n Strängen konstruiert, die von einem Basispunkt auf einer oberen horizontalen Linie zu einem Basispunkt auf einer unteren horizontalen Linie laufen. Eine elementare Bewegung, in welcher der Strang i den Strang $i + 1$ überkreuzt, wird mit b_i bezeichnet (Abbildung 5.9(a) und 5.9(c)), die entsprechende Unterkreuzung mit b_i^{-1} (Abbildung 5.9(b)). Ein allgemeiner n -Zopf kann durch aufeinanderfolgende Anwendung von b_i -Operatoren aufgebaut werden, welches man als Zopfwort bezeichnet (Abbildung 5.9(d)).

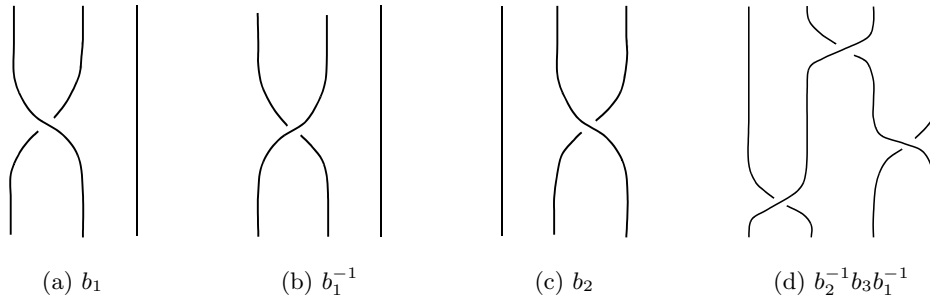


Abbildung 5.9: Zöpfe

Die Zopfoperatoren bilden die sog. Zopfgruppe B_n . Die Zopfworte, die zum Aufbau eines n -Zopfes verwendet werden, sind nicht eindeutig. Vielmehr gelten folgende Zopfrelationen:

$$b_i b_i^{-1} = 1 \quad (5.10a)$$

$$b_i b_j = b_j b_i \quad , |i - j| \geq 2 \quad (5.10b)$$

$$b_i b_{i+1} b_i = b_{i+1} b_i b_{i+1} \quad (5.10c)$$

Falls der Zopf zu einem Knoten verbunden wird, entspricht die Zopfrelation (5.10a) gerade einer Reidemeister-Bewegung vom Typ II und die Zopfrelation (5.10c) entsprechend einer Reidemeister-Bewegung vom Typ III. Die Zopftheorie ist im Grunde lediglich ein neuer Blick auf bereits bekannte Phänomene [MT93]. Man betrachte beispielsweise einen periodischen Orbit eines getriebenen Oszillators. Bislang wurden diese Orbits dargestellt, in dem man entweder die Auslenkung des Oszillators x_1 gegen die Zeit t aufgetragen hat oder die Auslenkung x_1 gegen die Geschwindigkeit $x_2 = \dot{x}_1$ (Phasenraumdiagramm). Projiziert man zwei kurze Trajektorienstücke mit unterschiedlichen Startpunkten eines periodischen Orbits entlang der x_2 -Achse auf die tx_1 -Ebene, so erhält man den zugehörigen Zopf (Abbildung 5.10).

Bevor wir im übernächsten Abschnitt schließlich die Knotenhalter selbst einführen können, benötigen wir als Zwischenstufe berandete Zöpfe, d.h. Zöpfe, deren Stränge mit einer zusätzlichen internen Struktur versehen sind. In unserem Fall ist dies die lokale Torsion der Stränge, die als ganzzahliges Vielfaches von Halbdrehungen mit jedem Strang assoziiert wird. Assoziiert man die Twistzahlen $0, +1, +1$ und -2 mit den Strängen des Zopfes aus Abbildungen 5.9(d), so erhält man den Bandgraph in Abbildung 5.11.

5.4.3 Verschlingungs- und Windungszahlen

Die Verschlingungszahl zweier Knoten α, β wurde bereits im letzten Abschnitt eingeführt. Alternativ zur Auswertung der Kreuzungen in der Knotendarstellung kann diese auch über ein Gauß-Integral bestimmt werden. Seien $\vec{x}_\alpha, \vec{x}_\beta \in \mathbb{R}^3$ die zugehörigen geschlossenen Kurven,

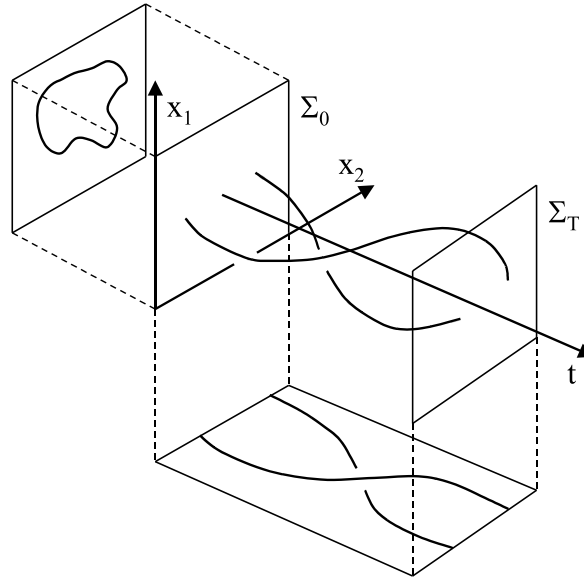


Abbildung 5.10: Zopfprojektion (vgl. [MT93])

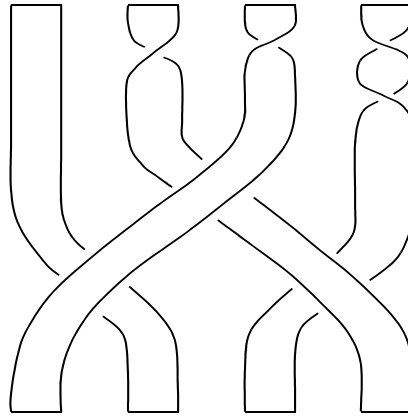


Abbildung 5.11: Bandgraph

so gilt:

$$lk(\alpha, \beta) = \frac{1}{4\pi} \oint_{\alpha} \oint_{\beta} \frac{(\vec{x}_{\alpha} - \vec{x}_{\beta}) \cdot (d\vec{x}_{\alpha} \times d\vec{x}_{\beta})}{\|\vec{x}_{\alpha} - \vec{x}_{\beta}\|^3} \quad (5.11)$$

Eine weitere topologische Invariante ist die relative Windungszahl, die von Solari und Gilmore eingeführt wurde [SG88]. Zur Bestimmung der Windungszahl wird angenommen, daß α und β periodische Orbits der Periode p_{α} bzw. p_{β} im Sinne der Poincaré-Abbildung sind und diese die Poincaré-Ebene in den Punkten $a_1, \dots, a_{p_{\alpha}}$ und $b_1, \dots, b_{p_{\beta}}$ schneiden. Man wählt nun ein beliebiges Paar von Startpunkten (a_i, b_j) und verbindet diese Punkte durch ein gerichtetes Linienelement. Dieser Vektor $\Delta\vec{r} = \vec{x}_{\alpha} - \vec{x}_{\beta}$ wird seine Richtung unter der Flußabbildung ändern und nach $p_{\alpha}p_{\beta}$ Perioden zur ursprünglichen Orientierung zurückkehren. Die mittlere Rotation dieses Vektors während der $p_{\alpha}p_{\beta}$ Perioden definiert die relative Windungszahl:

$$R_{ij}(\alpha, \beta) = \frac{1}{2\pi p_{\alpha}p_{\beta}} \oint \frac{\vec{n} \cdot (\Delta\vec{r} \times d\Delta\vec{r})}{\Delta\vec{r} \cdot \Delta\vec{r}} \quad (5.12)$$

Dieses Integral ist von den Anfangsbedingungen abhängig und wird für alle möglichen Paare von Startwerten berechnet. Die relative Windungszahl ist eine symmetrische Größe,

d.h. $R_{ij}(\alpha, \beta) = R_{ij}(\beta, \alpha)$, und zudem stabil gegen kleine Änderungen der Startparameter. Die Verschlingungszahl der beiden Knoten ergibt sich dann durch

$$lk(\alpha, \beta) = \sum_{i,j} R_{ij}(\alpha, \beta) \quad (5.13)$$

5.4.4 Knotenhalter

Die Knotenhalter wurden von Birman und Williams zur Beschreibung eines Ensembles von instabilen periodischen Orbits eingeführt [BW83]. In der ursprünglichen Arbeit wurden Knotenhalter für den seltsamen Attraktor des Lorenz-Systems untersucht. Das Birman-Williams-Theorem geht davon aus, daß ein seltsamer Attraktor im \mathbb{R}^3 durch einen dissipativen Fluß erzeugt wird, d.h. es existieren drei Ljapunov-Exponenten $\lambda_1 > \lambda_2 > \lambda_3$ mit $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 = 0$ und $\lambda_3 < -|\lambda_1|$. Der fundamentale Mechanismus bei der Entstehung des Attraktors ist somit das Strecken entlang der λ_1 -Richtung und das Zurückfalten entlang der λ_3 -Richtung. Ein Knotenhalter ist eine verzweigte Mannigfaltigkeit, die diesen Mechanismus widerspiegelt, d.h. er gibt an, wie die Stränge eines Zopfes gestreckt und zusammengefaltet werden. Den Weg, den eine Trajektorie auf einem solchen Knotenhalter oder Template durchläuft, kann durch eine Matrix T und einen Vektor v zusammengefaßt werden. Die Werte der Template-Matrix T sind ganzzahlig. Die Diagonalelemente repräsentieren den Twist des Bandes und die Einträge T_{ij} die Halbzahldrehungen des Bandes i um das Band j für $i \neq j$. Die Reihenfolge des Zusammenklebens der einzelnen Bänder wird durch den Vektor v beschrieben. Das erste Element charakterisiert dabei das erste Band und die Werte laufen von 0 (unterste Schicht) bis $n - 1$ (oberste Schicht). Für das Beispiel in Abbildung 5.12, in der ein Knotenhalter und der zugehörige Bandgraph des berandeten Zopfes dargestellt ist, erhalten wir somit

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad v = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}. \quad (5.14)$$

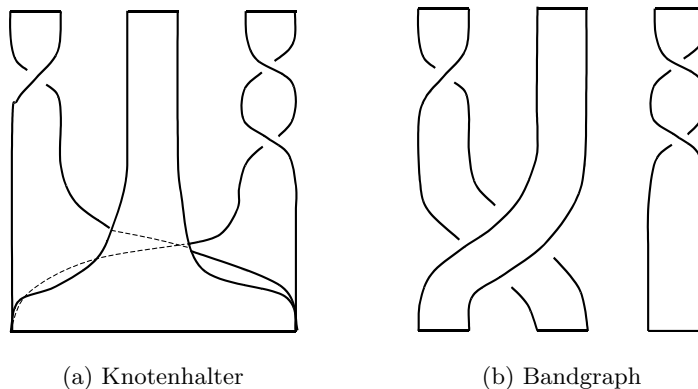


Abbildung 5.12: Beispielsystem

Das Birman-Williams-Theorem läßt sich für n -dimensionale Systeme verallgemeinern.

5.5 Was haben wir gewonnen?

Die vorgestellten Methoden lassen eine Vorstellung von der topologischen Struktur des Zustandsraumes des betrachteten dynamischen Systems gewinnen und leisten damit Beiträge

z.B. zur funktionalen Modellierung, insbesondere dann, wenn man die topologische Struktur für verschiedene Werte von Kontrollparametern untersucht. Als Ergebnis können wir festhalten, daß es möglich ist, topologische Betrachtungsweisen bei der Analyse computergestützt zu nutzen. Ein wesentlicher Fortschritt besteht zum einen darin, daß die Tesselation auf der Grundlage eines meßwertgestützten Punktnetzes eine Rechtfertigung wichtiger gängigen Entrauschungsmethoden gibt. Bei diesen wird nämlich die Zustandsmannigfaltigkeit durch eine glatte Fläche durch die aus den Messungen „rekonstruierten“ Zustände approximiert.

Zum anderen gestatten topologische Betrachtungen, synthetische Modelle, wie sie u.a. mit den in den vorhergehenden Kapiteln vorgestellten Methoden entwickelt werden können, zu testen und zu bewerten. Alle Zustandsmannigfaltigkeiten können durch topologische Invarianten klassifiziert werden. Werden dynamische Systeme durch nicht äquivalente Templates charakterisiert, so können sie nicht ineinander überführt werden. Wir erhalten somit ein Entscheidungskriterium, ob Dynamiken topologisch äquivalent sein können oder nicht. Bei der Untersuchung hochdimensionaler dynamischer Systeme ist jedoch Vorsicht geboten. Nach Robinson ist die Einbettung einer beliebigen Trajektorie in den \mathbb{R}^3 möglich, d.h. es wird eine eindimensionale Mannigfaltigkeit in den dreidimensionalen euklidischen Raum unter Erhaltung der Topologie eingebettet. Damit wurde allerdings noch nicht erreicht, daß der gesamte Attraktor des dynamischen Systems in den \mathbb{R}^3 einbetten werden kann, da dieses Verfahren für jede einzelne Trajektorie unterschiedliche Ergebnisse liefert. In welchem Umfang topologische Invarianten direkt zur Modellierung und damit auch zu einer Prognose verwendet werden können, bleibt hier eine offene Frage.

Kapitel 6

Modellierung durch stochastische Prozesse

Ein dynamisches System wird aus mathematischer Sicht als eine spezielle mathematische Struktur verstanden, die zur Modellierung konkreter deterministischer Systeme eingesetzt werden kann. Bislang haben wir ausschließlich solche Systemen betrachtet. Das Schlüsselwort hierbei ist *deterministisch*, d.h. das Verhalten ist im Prinzip vollständig vorhersagbar – wenn man die dynamischen Gesetze und die Startwerte *aller* Zustandsvariablen des Systems kennt. Was aber, wenn dies nicht der Fall ist, wenn die Anzahl der Freiheitsgrade eine Detailrechnung praktisch ausschließt? Aber es geht nicht nur um das System selbst, sondern auch um die Einflüsse der Umgebung. Solange es sich um äußere Kräfte handelt, die selbst einfachen Gesetzen gehorchen, lassen sie sich in der Regel explizit berücksichtigen. Wie sind jedoch Systeme zu behandeln, bei denen Rauschen eine Rolle spielt, bei denen viele äußere Einflußfaktoren ganz unregelmäßig zusammenspielen? Hier versucht man, die Theorie der stochastischen Prozesse gewinnbringend einzusetzen. Diese Theorie baut zwar auf dem Begriff des zufälligen Ereignisses auf, doch kann man dieses auch als das Ergebnis eines Zusammenspiels einer sehr großen, nicht überschaubaren Zahl von Freiheitsgraden auffassen. Für ein solches Verständnis spricht nicht nur die mikroskopische Interpretation der Thermodynamik durch die kinetische Gastheorie, sondern auch die Tatsache, daß durch nichtlineare Wechselwirkungen die Effekte verstärkt werden können. Auf die Interpretation stochastischer Prozesse werden wir im Detail in Abschnitt 6.4 zurückkommen.

6.1 Grundlegende Konzepte

Die Brownsche Bewegung ist ein Beispiel für einen Prozeß, bei dem Einflüsse auf mikroskopischer Ebene zu einem makroskopischen stochastischen Prozeß führen. Als *Brownsche Bewegung* bezeichnet man die unregelmäßige Form der Bewegung, wie sie bei Pollen und Staubteilchen auftritt, die in einer Flüssigkeiten suspendiert sind [Doo42]. Neben der Stokes' Reibung tritt bei der mathematischen Behandlung noch ein stochastischer Anteil in der Bewegungsgleichung auf, welcher die Stöße der Flüssigkeitsmoleküle mit den Staubteilchen widerspiegelt. Obwohl es sich um einen stochastischen Prozeß handelt, besitzen die resultierenden Trajektorien der Teilchen dennoch bestimmte nicht triviale Eigenschaften.

6.1.1 Zufällige Ereignisse und ihre Verteilungen

Wir wollen kurz einige grundlegende Begriffe zur Beschreibung von stochastischen Systemen zusammenstellen. Für eine ausführliche Einführung in die Thematik verweisen wir auf van Kampen [Kam81], Krengel [Kre91] oder Priestley [Pri81]. Im Mittelpunkt der Wahrschein-

lichkeitstheorie steht die Menge $\Omega \neq \emptyset$ der möglichen Ausgänge eines Zufallsexperimentes, deren Elemente $\omega \in \Omega$, als einelementige Teilmengen betrachtet, *Elementarereignisse* heißen. Jede Teilmenge $A \subset \Omega$ repräsentiert ein *Ereignis*, wobei ein Ereignis genau dann eintritt, wenn eines seiner Elementarereignisse eintritt. Insbesondere sind die leere Menge \emptyset und die Menge Ω selbst Teilmengen von Ω ; sie repräsentieren das unmögliche bzw. das sichere Ereignis. Die Menge aller Ereignisse $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$ entspricht der Potenzmenge von Ω . Betrachtet man zwei Ereignisse $A, B \in \mathcal{A}$, dann versteht man intuitiv, wie man die Ereignisse „ A und B “, „ A oder B “ und „nicht A “ zu beschreiben hat, nämlich durch die Mengen $A \cap B$, $A \cup B$ und A^C . Mathematisch gesprochen bildet die Menge der Ereignisse \mathcal{A} somit eine σ -Algebra¹ über Ω . Man beachte, daß jeder Ausgang eines Zufallsexperiments (und somit auch einer physikalischen Messung) ein Ereignis, genauer gesagt ein Elementarereignis ist, aber nicht jedes Ereignis kann als Ergebnis eines Experiments interpretiert werden [Hon98].

Jedem Ereignis $A \in \mathcal{A}$ soll eine positive Zahl zugeordnet werden, die beschreibt, wie hoch die Wahrscheinlichkeit ist, daß das Ereignis A eintritt. Dazu kann man auf dem Paar (Ω, \mathcal{A}) ein Maß, d.h. eine nicht-negative, abzählbar additive Mengenfunktion $P : \mathcal{A} \rightarrow [0, 1]$, einführen:

$$P(A) \geq P(\emptyset) = 0, \quad \forall A \in \mathcal{A}, \quad (6.1a)$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B), \quad \forall A, B \in \mathcal{A} \text{ mit } A \cap B = \emptyset. \quad (6.1b)$$

Verlangt man zudem, daß $P(\Omega) = 1$ erfüllt ist, dann heißt P ein Wahrscheinlichkeitsmaß. Das Tripel (Ω, \mathcal{A}, P) nennt man einen Wahrscheinlichkeitsraum. Sei zudem ein meßbarer Raum (Ω', \mathcal{A}') gegeben, dann versteht man unter einer Zufallsvariablen mit Werten in Ω' eine \mathcal{A} -meßbare Abbildung $X : \Omega \rightarrow \Omega'$. Wir werden uns in dieser Arbeit ausschließlich mit reellen Zufallsvariablen beschäftigen, d.h. $(\Omega', \mathcal{A}') = (\mathbb{R}, \mathcal{B})$ bzw. $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}^n)$, wobei \mathcal{B} die Borel-Algebra ist.

Die Wahrscheinlichkeit, daß die reelle Zufallsvariable X einen Wert im Intervall $[a, b]$ annimmt, wollen wir im folgenden mit $P_X([a, b]) = P(X^{-1}([a, b]))$ bezeichnen. Die Funktion $F_X = P_X(\cdot - \infty, \cdot) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ heißt Wahrscheinlichkeitsverteilung. Bekannte Verteilungen sind die Binomialverteilung, die Gauß- oder Normalverteilung und die Poisson-Verteilung. Üblicherweise arbeitet man in der Wahrscheinlichkeitsrechnung aber mit der Wahrscheinlichkeitsdichte $f_X : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$, falls diese existiert. Es gilt der Zusammenhang

$$P_X([a, b]) = \int_a^b dx f_X(x) = \int_a^b dF_X(x). \quad (6.2)$$

In der Physik werden Wahrscheinlichkeiten oftmals durch Ensembles veranschaulicht, d.h. anstatt an die Wahrscheinlichkeitsverteilung einer physikalischen Variablen zu denken, wird eine fiktive Menge einer großen Anzahl N von Systemen, die jeweils die durch X repräsentierte Eigenschaft tragen. Dabei können alle diese physikalischen Variablen X verschiedene Werte innerhalb eines vorgegebenen Bereiches annehmen. Die Anzahl der Variablen, welche Werte im Intervall zwischen x und $x + dx$ annehmen, ist dann durch $N f_X(x) dx$ gegeben. Es gibt viele Beispiele von physikalischen Systemen, bestehend aus einer großen Zahl von identischen Objekten, die als Realisationen eines Ensembles angesehen werden können, etwa Moleküle eines idealen Gases oder Elektronenstrahlen.

Jedem Elementarereignis $\omega \in \Omega$ wird in einem Zufallsexperiment durch die Variable X zufällig ein reeller Wert $X(\omega)$ zugeordnet, wobei bei wiederholter Durchführung des Zufallsexperiments unterschiedliche Werte auftreten können. Es stellt sich daher die Frage, welches der zu erwartende Wert von X ist. Die Antwort liefert der Erwartungswert

$$E\{X\} := \int_{\mathcal{A}} dP X = \int_{\mathbb{R}} dx x f_X(x). \quad (6.3)$$

¹Streng genommen bildet die Potenzmenge mit den Verknüpfungen \cup , \cap und Komplementbildung einen Booleschen Verband. Jeder Ereignisalgebra ist ein Boolescher Verband.

Den Begriff des Erwartungswerts kann man für jede Borel-meßbare Funktion $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ verallgemeinern zu

$$E\{g(X)\} := \int_{\mathcal{A}} dP g(X) = \int_{\mathbb{R}} dx g(x) f_X(x). \quad (6.4)$$

Häufig eingesetzte verallgemeinerte Erwartungswerte sind die p -ten Momente $E\{X^p\}$ bzw. die in $\mu \in \mathbb{R}$ zentrierten Momente $E\{(X - \mu)^p\}$, wobei $p \in \mathbb{N}$. Von besonderer Bedeutung ist hierbei der Fall $p = 2$ und $\mu = E\{X\}$, die sog. Varianz VAR und die hieraus abgeleitete Standardabweichung σ :

$$\sigma^2(X) \equiv \text{VAR}\{X\} = \int_{\mathbb{R}} dx (x - \mu)^2 f(x). \quad (6.5)$$

In vielen Fragestellungen ist man darauf angewiesen, die Wahrscheinlichkeit für das Eintreten eines Ereignisses $A \in \mathcal{A}$ anzugeben, wenn bekannt ist, daß ein anderes Ereignis $B \in \mathcal{A}$ eingetreten ist. Man bezeichnet dies als die bedingte Wahrscheinlichkeit von A unter der Bedingung B , definiert durch

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}, \quad (6.6)$$

sofern $P(B) > 0$ ist. Im Falle $P(A|B) = P(A)$ heißen die beiden Ereignisse A und B unabhängig. Die Unabhängigkeit ist eine sehr wichtige Eigenschaft in der Wahrscheinlichkeitstheorie, weil sie sicherstellt, daß sich eine Zufallsvariable nicht an frühere Ausgänge erinnern kann. Die Wahrscheinlichkeit $P(A; B) = P(A \cap B)$ wird als gemeinsame Wahrscheinlichkeit der Ereignisse A und B bezeichnet. Zwei reelle Zufallsvariablen X, Y heißen unabhängig, falls alle Ereignisse von X unabhängig von den Ereignissen von Y sind. Notwendige Bedingung für die Unabhängigkeit zweier Zufallsvariablen ist das Verschwinden der Kovarianz

$$\text{COV}(X, Y) := E\{(X - E\{X\})(Y - E\{Y\})\} = E\{XY\} - E\{X\}E\{Y\}. \quad (6.7)$$

Zwei Zufallsvariablen X, Y , deren Kovarianz verschwindet, werden als unkorreliert bezeichnet [Bau91]. Wir werden im folgenden bedingte und gemeinsame Wahrscheinlichkeiten auf der Ebene der Verteilungen diskutieren. Dann besitzt Gleichung (6.6) die Form

$$f(x|y) = \frac{f(x, y)}{f_Y(y)}. \quad (6.8)$$

6.1.2 Von der Zufallsvariablen zum stochastischen Prozeß

Bislang haben wir uns nur mit Zufallsvariablen beschäftigt. Wir wollen im folgenden dynamische Systeme konstruieren, die zu jedem Zeitpunkt als Zufallsexperiment interpretiert werden können. Ein sehr einfacher stochastischer Prozeß ist die Brownsche Bewegung eines Staubkorns oder Pollen in Flüssigkeit oder Gas. Im Prinzip sollten wir mit Prinzipien der klassischen Mechanik in der Lage sein, diese Bewegung deterministisch zu behandeln. Die enorme Anzahl an Teilchen in diesem System und die damit verbundenen Vielzahl von Kollisionen macht dieses Problem mathematisch unlösbar. Daher wurde im Rahmen der statistischen Physik eine Theorie entwickelt, die mit Hilfe von stochastischen Prozessen diese Phänomene handhabbar macht.

Definition 6.1 Sei T eine nichtleere, total geordnete Indexmenge. Unter einem stochastischen Prozeß versteht man ein Quadrupel $(\Omega, \mathcal{A}, P, \{X_t\})$ bestehend aus einem Wahrscheinlichkeitsraum (Ω, \mathcal{A}, P) und einer Familie $\{X_t\}_{t \in T}$ von Zufallsvariablen mit Werten in einem gemeinsamen Meßraum $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$ auf diesem Wahrscheinlichkeitsraum.

Ein stochastischer Prozeß X ist somit eine Folge von Zufallsvariablen, deren Index t üblicherweise mit der Zeit identifiziert wird. Im allgemeinen sind somit X_{t_1} und X_{t_2} zwei unterschiedliche Zufallsvariablen. Den Meßraum $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$ nennt man den Zustandsraum des stochastischen Prozesses. Für ein festes Ereignis $\omega \in \Omega$ heißt die durch $t \rightarrow X_t(\omega)$ definierte Abbildung ein Pfad oder eine Realisation des Prozesses. Eine sehr spezielle Klasse von stochastischen Prozessen sind die stationären Prozesse. Ein stochastischer Prozeß heißt genau dann stationär, wenn die Zufallsvariable $X_{t+s} - X_t$ für alle t dieselbe Verteilung besitzt. In der Praxis schwächt man diese Forderung jedoch ab und verlangt lediglich, daß der Mittelwert und die Kovarianz zeitlich konstant bleiben. Solche Prozesse werden in der Mathematik als schwach-stationär bezeichnet.

Bislang haben wir uns mit Verteilungen zu jeweils festen Zeiten beschäftigt, d.h. mit der Wahrscheinlichkeit, ein System zu einem bestimmten Zeitpunkt in einem bestimmten Zustand anzutreffen. Betrachten wir die Zeitabhängigkeit einer fluktuierende Größe $x(t)$, so ist es unter Umständen möglich, die zugrundeliegende Verteilung zu bestimmen. Von großem Interesse ist daher eine Größe, die den Zusammenhang des Systemzustandes von X zur Zeit t mit dem Zustand zur Zeit $t + \tau$ mißt. Eine solche Information über den Zusammenhang von Systemzuständen liefert die Autokorrelationsfunktion:

$$G(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T dt x(t)x(t + \tau). \quad (6.9)$$

Ein traditionelles Verfahren in der Untersuchung von dynamischen Systemen ist die Analyse des Spektrums $S(\omega)$, welches definiert ist durch

$$S(\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi T} \left| \int_0^T dt e^{i\omega t} x(t) \right|^2. \quad (6.10)$$

Die Autokorrelationsfunktion und das Spektrum hängen über das *Wiener-Khinchin-Theorem* zusammen:

$$S(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\tau e^{-i\omega\tau} G(\tau), \quad (6.11a)$$

$$G(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} d\omega e^{-i\omega\tau} S(\omega). \quad (6.11b)$$

Wir haben die Autokorrelationsfunktion in (6.9) als Zeitmittel definiert. Alternativ kann man sie auch als Ensemble-Mittelwert definieren. Systeme, deren Zeitmittel und Ensemble-Mittel gleich sind, heißen *ergodisch*:

$$G(\tau) = \langle x(t)x(t + \tau) \rangle. \quad (6.12)$$

6.1.3 Markov-Prozesse

In diesem Abschnitt werden wir eine spezielle Unterklasse der stochastischen Prozesse beleuchten, die Markov-Prozesse. Man betrachte dazu einen stochastischen Prozeß X , dessen Realisation zur Zeit t_1 den Wert $X(t_1) = x_1$ annimmt, zur Zeit $t_2 \geq t_1$ den Wert $X(t_2) = x_2$, etc. Dann existiert ein Satz von gemeinsamen Wahrscheinlichkeiten $P(x_n, t_n; \dots; x_1, t_1)$, mit denen man diesen Prozeß beschreiben kann. Aus Gleichung (6.6) ergibt sich für die bedingte Wahrscheinlichkeit für das Auftreten des Wertes $X(t_n) = x_n$ unter der Voraussetzung, daß bereits die Werte x_{n-1}, x_{n-2}, \dots zu Zeiten t_{n-1}, t_{n-2}, \dots beobachtet wurden:

$$P(x_n, t_n | x_{n-1}, t_{n-1}; \dots; x_1, t_1) = \frac{P(x_n, t_n; x_{n-1}, t_{n-1}; \dots; x_1, t_1)}{P(x_{n-1}, t_{n-1}; \dots; x_1, t_1)}. \quad (6.13)$$

Einen stochastischen Prozeß, der die Markov-Bedingung

$$P(x_n, t_n | x_{n-1}, t_{n-1}; \dots; x_1, t_1) = P(x_n, t_n | x_{n-1}, t_{n-1}; \dots; x_{n-s}, t_{n-s}) \quad (6.14)$$

für alle $n > s$ erfüllt, nennt man einen Markov-Prozeß der Ordnung s . Wir werden uns zunächst auf Markov-Prozesse der Ordnung $s = 1$ beschränken. Der Zustand, der sich nach einem Markov-Prozeß entwickelt, hängt zum Zeitpunkt $t = t_n$ somit lediglich vom seinem „Vorgängerzustand“, d.h. dem Zustand zum Zeitpunkt $t = t_{n-1}$, nicht jedoch von früheren Zuständen. Man spricht in diesem Zusammenhang auch von einem Prozeß mit endlichem Gedächtnis. Ein Markov-Prozeß ist somit vollständig durch seine Startverteilung $P(x_1, t_1)$ und die Übergangswahrscheinlichkeit $P(x_n, t_n | x_{n-1}, t_{n-1})$ bestimmt:

$$\begin{aligned} P(x_n, t_n; \dots; x_1, t_1) &= P(x_n, t_n | x_{n-1}, t_{n-1}) P(x_{n-1}, t_{n-1}; \dots; x_1, t_1) \\ &= P(x_n, t_n | x_{n-1}, t_{n-1}) \cdots P(x_2, t_2 | x_1, t_1) P(x_1, t_1). \end{aligned}$$

Beispiele für kontinuierliche Markov-Prozesse sind der Wiener-Prozeß und der Ornstein-Uhlenbeck-Prozeß. Jeder stochastische Prozeß mit Zustandsraum $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}^n)$ sowie stationären und unabhängigen Zuwächsen ist ein Markov-Prozeß. Insbesondere bedeutet dies, daß durch Erhöhung der Ordnung aus einem Nicht-Markov-Prozeß ein Markov-Prozeß erzeugt werden kann.

Ein stetiger Markov-Prozeß besitzt zwar einen stetigen Wertebereich, aber nicht zwangsläufig auch einen stetigen Pfad. Betrachtet man beispielsweise die Brownsche Bewegung, so finden Stöße eines Pollenteilchens mit Geschwindigkeit v mit den Gas- oder Flüssigkeitsteilchen seiner Umgebung statt. Bei einem solchen Stoß ändert sich die Geschwindigkeit instantan, d.h. die Geschwindigkeit ändert sich nicht stetig. Für die Position des Teilchens werden wir dagegen einen stetigen Pfad erwarten. Der elastische Stoß stellt allerdings nur eine Idealisierung dar, d.h. im mikroskopischen Bereich wird ein Potential existieren, welches dafür verantwortlich ist, daß die Teilchen stetig aneinander gestreut werden. Dieser Vorgang ist allerdings kein Markov-Prozeß. Dennoch besitzt der zugrundeliegende physikalische Prozeß ein derart kurzes Gedächtnis, daß er sich gut durch einen Markov-Prozeß approximieren läßt.

Eine besonders einfache Klasse von Markov-Prozessen sind die Markov-Ketten. Wir verstehen darunter zeitdiskrete Markov-Prozesse, deren Zustände eine diskrete Menge bilden. Ist der Wertebereich nicht nur diskret, sondern auch noch endlich, so spricht man von einer endlichen Markov-Kette. Wir wollen einen endlichen Markov-Prozeß mit N Zuständen $i \in \{1, \dots, N\}$ betrachten. Die Wahrscheinlichkeit, daß zur Zeit $t = n$ ein Zustand i in einen Zustand j übergegangen ist, beträgt $p_{ij}(n) = P(X_n = j | X_{n-1} = i)$. Eine Markov-Kette heißt homogen, wenn für alle i, j die Übergangswahrscheinlichkeit $p_{ij}(n) = p_{ij}$ unabhängig von n ist. Man bezeichnet dann $P = (p_{ij}) \in \mathbb{R}_{N \times N}$ als stochastische Matrix. Gibt man zusätzlich eine Startverteilung $\pi = (\pi_i)$ mit $\pi_i = P(X_0 = i)$ vor, so ist der homogene Markov-Prozeß eindeutig bestimmt. Endliche Markov-Prozesse haben insbesondere bei der Modellierung wirtschaftlicher Systeme einen festen Platz gefunden. Ein bekanntes Beispiel hierfür sind sog. Warteschlangenmodelle, die beispielsweise zur Bedarfsermittlung in Abfertigungseinrichtungen eingesetzt werden.

Obwohl Markov-Prozesse sowohl in der Lage sind, eine Vielzahl von Phänomene zu beschreiben, als auch sehr schöne und einfache Eigenschaften besitzen, wollen wir an dieser Stelle doch noch eine kritische Bemerkung machen. In praktischen Anwendungen, in denen Markov-Prozesse zur Modellierung eingesetzt werden, ist man häufig nicht in der Lage, die Zustände des Markov-Prozesses direkt zu beobachten. Vielmehr werden die Zustände selbst mit einer gewissen Wahrscheinlichkeit auf einen bestimmten Meßbereich abgebildet, d.h. man beobachtet einen stochastischen Prozeß $\{Y_t\}$ mit Ausgängen $Y(t_n) = y_n$, die durch die bedingte Wahrscheinlichkeit $P(y_n, t_n | x_n, t_n)$ bestimmt sind. Ein solcher Prozeß wird

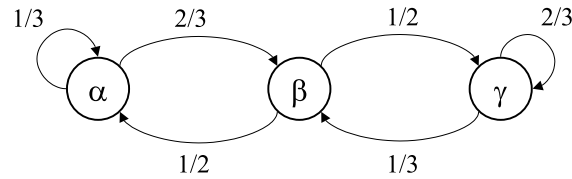


Abbildung 6.1: Beispiel einer Markov-Kette mit drei Zuständen. Die möglichen Zustandsänderungen sind durch die Wahrscheinlichkeiten an Übergangspfeilen gegeben.

als versteckter Markov-Prozeß bezeichnet. Versteckte Markov-Prozesse werden unter anderem im Bereich der Spracherkennung [FD93] und zur Modellierung von Ionenkanälen eingesetzt [TK97].

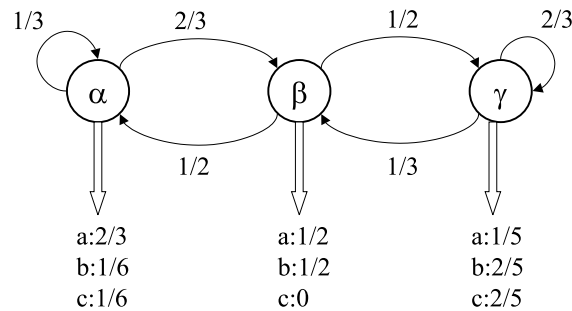


Abbildung 6.2: Beispiel eines versteckten Markov-Prozesses. Jeder Zustand des Markov-Prozesses in Abbildung 6.1 wird mit einer bedingten Wahrscheinlichkeiten auf die diskreten Zustände a , b und c abgebildet.

6.2 Lineare Modelle stochastischer Prozesse

Wir wollen im folgenden Abschnitt zunächst einmal lineare Modellen für stochastische Prozesse betrachten. Diese stellen die am weitesten verbreitete Klasse von stochastischen Modellen zur Analyse von Zeitreihen dar. Lineare Modelle sind besonders geeignet, wenn die Autokorrelation oder das Leistungsspektrum die einzige Information ist, die man über die Zeitreihe des Systems besitzt.

6.2.1 Der einfachste Fall: ARMA-Modelle

Es gibt eine ganze Reihe von Ansätzen zur funktionalen Modellierung mit linearen stochastischen Prozessen. Die bekanntesten Vertreter sind dabei die *autoregressiven* Modelle, die *moving average*-Modelle und Kombinationen aus beiden. In diesem Abschnitt wollen wir uns den univarianten ARMA-Prozessen zuwenden.

Die einfachste Form eines schwach-stationären, linearen Prozesses ist ein moving average-Prozeß, kurz MA-Prozeß, dessen Zeitentwicklung durch

$$X_t = \varepsilon_t + b_1 \varepsilon_{t-1} \quad (6.15)$$

gegeben ist. Dabei ist ε_t ein Gauß-Prozeß, d.h. eine Folge von unkorrelierten Zufallsvariablen. Der hier beschriebene MA-Prozeß ist ebenfalls ein Gauß-Prozeß mit Mittelwert $E\{X\} = 0$ und einer Autokorrelation, die nur für $\tau = 0, 1$ nicht verschwindet. Die Tatsache, daß der Mittelwert eines MA-Prozesses verschwindet, stellt keine wesentliche Einschränkung dar,

weil wir vor der Analyse den Mittelwert immer von einer Zeitreihe subtrahieren können. Allgemein lassen sich MA-Prozesse höherer Ordnung, sog. $MA(q)$ -Prozesse, definieren, wobei q die Ordnung des Prozesses ist:

$$X_t = \sum_{i=0}^q b_i \varepsilon_{t-i}. \quad (6.16)$$

Die MA-Prozesse eignen sich insbesondere dann zur Modellierung, wenn die zu analysierende Zeitreihe keine hervorstechenden Spitzen in ihrem Frequenzspektrum besitzt, d.h. im wesentlichen (farbiges) Rauschen beschreibt. Besteht die Rauschanregung des Prozesses aus einem einzigen Puls, wird dieser spätestens nach q Zeitschritten verschwinden. Daher werden solche Modelle auch als endliche Impulsantwortfilter (FIR-Filter) bezeichnet.

Unter einem $AR(p)$ -Prozeß, d.h. einem autoregressiven Prozeß der Ordnung p , verstehen wir einen stochastischen Prozeß X_t , dessen Ausgang eine lineare Funktion seiner vergangenen p Ausgänge und einem additiven Rauschterm ist:

$$X_t = \sum_{i=1}^p a_i X_{t-i} + \varepsilon_t. \quad (6.17)$$

Führt man einen Shift-Operator B , definiert durch $BX_t = X_{t-1}$, ein, so läßt sich Gleichung (6.17) in die Form

$$\alpha(B)X_t = \varepsilon_t, \quad (6.18a)$$

$$\alpha(B) = 1 + \sum_{i=1}^p a_i B^i, \quad (6.18b)$$

überführen. Der Prozeß ist genau dann asymptotisch stationär, wenn die Nullstellen der Funktion α außerhalb des Einheitskreises in der komplexen Ebene liegen. Ein AR-Prozeß besitzt ein endliches Gedächtnis. Im Falle $\varepsilon_t = 0$ reduziert sich Gleichung (6.17) zu einem deterministischen Prozeß. Daher wollen wir den rauschfreien Fall als Skelett bezeichnen und uns vorstellen, daß Gleichung (6.17) als stochastische Ummantelung eines deterministischen Skelettes verstanden werden kann. Die Bedeutung der AR-Prozesse beruht auf ihrer Fähigkeit, pseudo-periodische Bewegungen zu modellieren. Dies wird besonders am Beispiel des AR(2)-Prozesses deutlich, der das zeitdiskrete Analogon zu einer linearen Differentialgleichung zweiter Ordnung darstellt, die durch ein weißes Rauschen angeregt wird [Pri81]. Es läßt sich zeigen, daß die Lösung einer gedämpfte harmonische Schwingung mit Dämpfungsparameter γ und Eigenfrequenz ω_0 durch den AR(2)-Prozeß

$$X_t = aX_{t-1} + bX_{t-2} \quad (6.19a)$$

mit

$$a = 2e^{-\gamma} \cos(\omega_0) \quad \text{und} \quad b = e^{-2\gamma} \quad (6.19b)$$

beschrieben werden kann, wobei $\omega^2 = \omega_0^2 - \gamma^2$ [Sim99].

Beide Prozesse lassen sich zu einem sog. ARMA(p,q)-Prozeß verallgemeinern:

$$X_t = \sum_{i=1}^p a_i X_{t-i} + \sum_{i=0}^q b_i \varepsilon_{t-i}. \quad (6.20)$$

Der große Erfolg der ARMA-Modelle begründet sich vor allem darauf, daß es sich um sehr einfache Differenzgleichungen handelt, die leicht zu implementieren sind. Zudem stehen

brauchbare Algorithmen zur Bestimmung der Koeffizienten aus einer gegebenen Zeitreihe zur Verfügung. Gleichung 6.20 läßt sich auch in der Form

$$\alpha(B)X_t = \beta(B)\varepsilon_t \quad (6.21)$$

schreiben, wobei $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ein Polynom p -ter Ordnung und $\beta : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ein Polynom q -ter Ordnung ist. Das Leistungsspektrum eines solchen ARMA(p,q)-Prozesses ist gegeben durch

$$S(\omega) = \text{const} \left| \frac{\beta(e^{i\omega})}{\alpha(e^{i\omega})} \right|^2, \quad (6.22)$$

d.h. jedes Leistungsspektrum, das durch eine rationale Funktion von $e^{i\omega}$ beschrieben werden kann, läßt sich als Realisation eines ARMA-Prozesses geeigneter Ordnung auffassen [PTVF92].

6.2.2 Erweiterungen der ARMA-Modellklasse

Die bislang vorgestellten linearen stochastischen Prozesse modellieren lediglich stationäre Systeme. In der Praxis treten daneben aber auch nicht-stationäre Prozesse auf. Der Ansatz hierbei ist, das lineare Modell nicht für den Zufallsprozeß X_t selbst, sondern für seine d -te Differenz W_t zu konstruieren, die wie folgt definiert ist:

$$W_t = (1 - B)^d X_t. \quad (6.23)$$

Für den stochastischen Prozeß W_t wird nun ein ARMA(p,q)-Modell angesetzt:

$$W_t = a_0 + \sum_{i=1}^p a_i W_{t-i} + \sum_{i=0}^q b_i \varepsilon_{t-i}. \quad (6.24)$$

Daraus entsteht dann ein Modell für X_t , das die Autoren Box und Jenkins *autoregressives integriertes moving average*-Modell (ARIMA(p,d,q)-Modell) nennen [Pri81]. Vergleichen wir Gleichung (6.24) mit einem AR-Modell, so wird deutlich, daß der autoregressive Anteil des Modells nun durch die Funktion $(1 - B)^d \alpha(B)$ bestimmt ist, und damit eine d -fache Nullstelle auf dem Einheitskreis besitzt, wodurch der ARIMA-Prozeß seine Stationarität verliert.

Neben den linearen Erweiterungen gibt es auch nichtlineare Modellklassen, die auf ARMA-Modellen basieren. Die wichtigste Klasse von nichtlinearen Zeitreihenmodellen sind die NLAR-Modelle (nichtlineare AR-Modelle) [Ton90]. Ein stochastischer Prozeß X_t folgt einem NLAR-Modell der Ordnung p , falls eine Funktion $g : \mathbb{R}^{p+1} \rightarrow \mathbb{R}$ existiert, so daß

$$X_t = g(X_{t-1}, X_{t-2}, \dots, X_{t-p}, \varepsilon_t), \quad \forall t \in \mathbb{Z}. \quad (6.25)$$

In vielen Anwendungen wird die vereinfachte Form eines NLAR-Modells mit additivem Rauschen eingesetzt:

$$X_t = g(X_{t-1}, X_{t-2}, \dots, X_{t-p}) + \varepsilon_t, \quad \forall t \in \mathbb{Z}. \quad (6.26)$$

Ein großes Problem derartiger Modellklassen besteht in der Konstanz der Varianz von X_t . Viele reale Systeme zeigen jedoch keine konstante Varianz, beispielsweise ökonomische Systeme [JJM93]. Abhilfe schaffen die sog. ARCH-Modelle (autoregressiv conditional heteroscedasticity)

$$X_t = \varepsilon_t \sqrt{V_t}, \quad (6.27a)$$

mit

$$V_t = a_0 + a_1 X_{t-1}^2 + \dots + a_p X_{t-p}^2, \quad (6.27b)$$

wobei $a_i \leq 0$ für $i = 0, 1, \dots, p$. Verwendet man statt (6.27b) den Ansatz

$$V_t = a_0 + \sum_{i=1}^p a_i X_{t-i}^2 + \sum_{i=1}^q b_i V_{t-i} \quad (6.28)$$

mit $b_i \leq 0$ für $i = 1, \dots, q$, so folgt X_t einem verallgemeinerten ARCH-Modell (GARCH-Modell). Für weiterführende Diskussion nichtlinearer Zeitreihenmodelle sei auf Tong [Ton90] verwiesen.

6.2.3 Grenzen linearer Modelle

Ein großer Mangel der ARMA-Modelle besteht darin, daß man keine Zeitreihen mit plötzlich auftretenden Bursts, d.h. sehr großen Amplituden, beschreiben kann. Solche Prozesse finden sich jedoch in der Praxis sehr oft, beispielsweise zeigen Körperschallsignale von Werkzeugmaschinen ausgeprägte Bursts während des Spanbruches.

6.3 Allgemeine stochastische Modellansätze

Wir wollen im folgenden Abschnitt allgemeinere Modellklassen betrachten. Dabei sollen nicht explizit nichtlineare Systeme im Vordergrund stehen, sondern wir wollen uns alle Möglichkeiten offen halten, eine dem physikalisch-technischen Problem angepaßte Modellklasse zu finden.

6.3.1 Stochastische Bewegungsgleichungen

Kehren wir zu unserem Ausgangsbeispiel, der Brownschen Bewegung, zurück. Man betrachtet ein suspendiertes Teilchen der Masse m in einer Flüssigkeit, dessen Geschwindigkeit zur Zeit t gerade $v(t)$ beträgt. Dann wirken zwei Kräfte auf das Teilchen, welche zu einer Beschleunigung führen, nämlich die Stokes' Reibung gegeben durch $-\beta v(t)$, $\beta > 0$, und eine zufällige Kraft dw/dt , welche die Stöße durch die Umgebungsteilchen simuliert. Dabei sei w eine Brownsche Bewegung. Wir erhalten somit die Bewegungsgleichung:

$$m \frac{dv(t)}{dt} = -\beta v(t) + \frac{dw(t)}{dt}. \quad (6.29)$$

Wir haben den Prototyp einer stochastischen Differentialgleichung motiviert, welche eine sehr allgemeine Klasse von stochastischen Prozessen beschreibt. Die Verallgemeinerung des Ansatzes von Ornstein und Uhlenbeck führt auf die sog. Langevin-Gleichung:

$$\frac{dx}{dt} = a(x, t) + b(x, t)\eta(t). \quad (6.30)$$

In der Wahrscheinlichkeitstheorie werden stochastische Prozesse, die durch Gleichung (6.30) beschrieben werden können, als *Diffusionsprozesse* bezeichnet. Ihre Verhalten wird durch zwei Funktionen $a, b : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, den Driftkoeffizienten a und den Diffusionskoeffizienten $b > 0$ bestimmt. Es handelt sich um eine gewöhnliche Differentialgleichung mit nichtlinear deterministischem Teil, in der zusätzlich ein schnell und irregulär fluktuierender Zufallsterm η auftritt. Wir nehmen zur Vereinfachung an, daß es sich bei $\eta(t)$ um ein weißes Rauschen handelt, bei dem gilt:

$$\langle \eta(t) \rangle = 0, \quad (6.31a)$$

$$\langle \eta(t)\eta(t') \rangle = \delta(t - t'). \quad (6.31b)$$

Ein Beispiel für einen Diffusionsprozeß ist der Wiener-Prozeß W bei dem $a = 0$ und $b = 1$, d.h. ein stochastischer Prozeß $\eta(t)$, der weißes Rauschen beschreibt, kann formal als Ableitung des Wiener-Prozesses definiert werden:

$$\eta(t) = \frac{dW(t)}{dt}. \quad (6.32)$$

Für den Fall, daß die Funktion $b = \text{const}$ ist, spricht man von additivem Rauschen, anderenfalls von multiplikativem Rauschen. Hängt die Funktion $b = b(x)$ nicht explizit von der Zeit t ab, so können wir Gleichung (6.30) durch die Variablentransformation in eine neue Bewegungsgleichung überführen, deren Rauschterm additiv ist [Ris89].

Mathematisch ist die Lösung der Gleichung (6.30) problematisch, weil die Anwesenheit des Rauschterms dazu führt, daß das System kein beschränktes Maß besitzt, d.h. formal existiert die Ableitung nicht. Daher betrachtet man häufig die zugehörige Differentialform

$$dx = a(x, t)dt + b(x, t)\eta(t)dt = a(x, t)dt + b(x, t)dW(t) \quad (6.33a)$$

oder die Integralgleichung

$$\begin{aligned} x(t) &= x(0) + \int_0^t ds a(x(s), s) + \int_0^t ds b(x(s), s)\eta(s) \\ &= x(0) + \int_0^t ds a(x(s), s) + \int_0^t dW(s) b(x(s), s). \end{aligned} \quad (6.33b)$$

Der zweite Term in Gleichung (6.33b) stellt ein stochastisches Integral dar. Das Verständnis bereitet bei stochastischen Differentialgleichungen durchaus Schwierigkeiten, denn zeitkontinuierliche stochastische Prozesse sind schwer zu erfassen. Führt man eine Diskretisierung von Gleichung 6.30 durch, so kann man den zusätzlichen stochastischen Anteil als zufällige Störung interpretieren, die zu festen Zeitpunkten auf ein deterministisches System wirkt (siehe Abbildung 6.3).

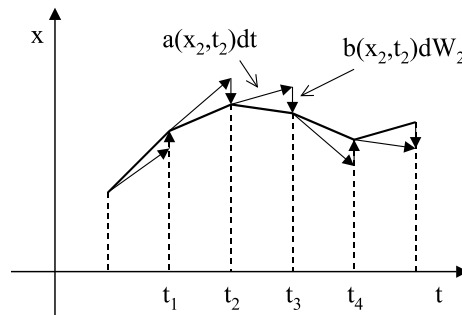


Abbildung 6.3: Illustration der Lösung der Langevin-Gleichung

Wir wollen an dieser Stelle zu den Gleichungen (6.33a) und (6.33b) anmerken, daß es zwei Varianten von stochastischer Differentiation bzw. Integration und damit zwei unterschiedliche Interpretationen gibt: den Itô- und die Stratonovich-Kalkül. Während der Itô-Calculus der Tatsache Rechnung trägt, daß $dW^2 = dt$ gilt², entspricht die Kettenregel bei der Differentiation eines stochastischen Ausdrucks im Stratonovich-Calculus demjenigen der gewöhnlichen

²Man beachte, daß für einen Wiener-Prozeß $W(t)$ nach Gleichung (6.32) gilt:

$$\begin{aligned} \langle dW(t)^2 \rangle &= \langle (W(t+dt) - W(t))^2 \rangle = \left\langle \int_t^{t+dt} du \eta(u) \int_t^{t+dt} dv \eta(v) \right\rangle \\ &= \int_t^{t+dt} du \int_t^{t+dt} dv \langle \eta(u)\eta(v) \rangle = \int_t^{t+dt} du \int_t^{t+dt} dv \delta(u-v) = dt. \end{aligned}$$

Differentialrechnung. Wir werden im folgenden den Itô-Kalkül benutzen, wollen aber betonen, daß beide Formalismen äquivalent sind.

Ausgehend von diesem Ansatz soll nun ein Verfahren vorgestellt werden, die Koeffizienten der stochastischen Differentialgleichung aus einer Zeitreihe zu bestimmen. Im Gegensatz zu rein deterministischen Modellen schlägt bei stochastischen Modellen ein Anfitzen der Parameter, etwa durch die Methode der kleinsten Fehlerquadrate, fehl. Das liegt darin begründet, daß zwei Realisationen desselben stochastischen Prozesses niemals zu den gleichen Beobachtungen führen werden, obwohl die zugrundeliegende Dynamik identisch ist. Zur Illustration sind in Abbildung 6.4 zwei Realisierungen desselben Ornstein-Uhlenbeck-Prozesses dargestellt. Daher werden wir im folgenden nicht die Zustandsgröße selbst, sondern deren Wahrscheinlichkeitsverteilung $p(x)$ untersuchen.

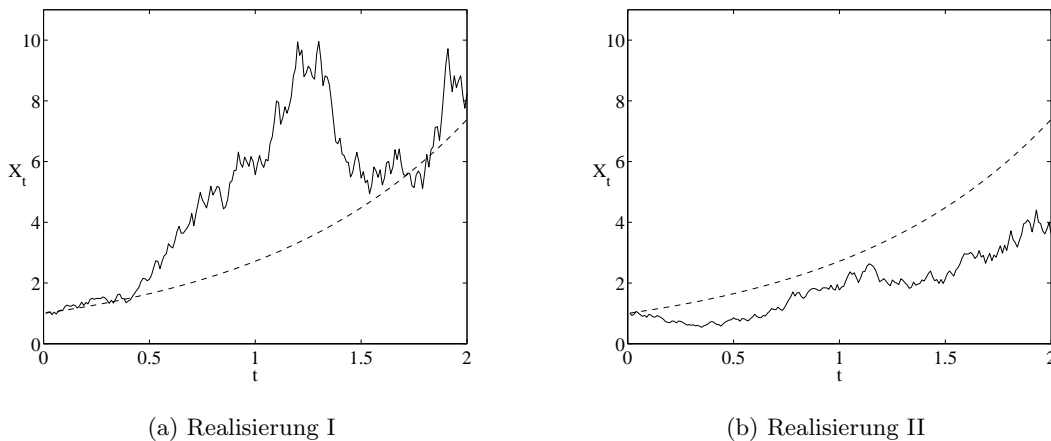


Abbildung 6.4: Ornstein-Uhlenbeck-Prozeß

Bevor wir uns im nächsten Abschnitt mit der Frage der Rekonstruktion von stochastischen Dynamiken aus Zeitreihen beschäftigen, wollen wir kurz die Problematik der numerischen Berechnung von stochastischen Prozessen beleuchten. Zunächst muß man auch die Qualität des Zufallsgenerators testen. In den folgenden Analysen wurde der Pseudozufallsgenerator benutzt, den die Standard-C-Bibliothek zur Verfügung stellt. Der Aufruf der Funktion `rand` liefert eine Zahl zwischen 0 und der Maschinenkonstanten `MAX_RANDOM`. Eine auf dem Intervall $[0, 1]$ gleichverteilte Zufallsvariable erhalten wir dann einfach durch Division der Zufallszahl durch `MAX_RANDOM`. Wir haben zunächst Tests durchgeführt, die zeigen, daß Mittelwert und Varianz dieser Zufallsvariable wie erwartet bei $m = 0.5$ und $\sigma^2 = 0.083$ liegen und die Zufallszahlen unkorreliert sind. Ist X eine Zufallsvariable die $N(\mu, \sigma^2)$ verteilt ist, so ist

$$W = \frac{1}{\sigma}(X - \mu)\sqrt{\Delta} \quad (6.34)$$

eine $N(0, \Delta)$ verteilte Zufallsvariable, d.h. es lassen sich einfach stochastische Prozesse mit anderen Mittelwerten und Varianzen generieren.

Wenden wir uns nun der numerischen Integration eines stochastischen Prozesses zu. Dazu betrachten wir einen Prozeß X_t , der durch eine stochastische Differentialgleichung beschrieben wird:

$$dX_t = a(X_t)dt + b(X_t)dW_t. \quad (6.35)$$

Der Prozeß $W = \{W_t \mid t \geq 0\}$ sei ein Wiener-Prozeß. Zwecks numerischer Behandlung wird zunächst eine Zeitdiskretisierung $0 = t_0 < t_1 \dots < t_N = T$ auf dem Intervall $[0, T]$

durchgeführt. Wir nehmen an, daß die Zeitschritte äquidistant sind, d.h. $t_{n+1} - t_n = \Delta t_n = T/N$. Der einfachste heuristische Ansatz ist nun eine Euler-Approximation

$$Y_{n+1} = Y_n + a(Y_n)\Delta t_n + b(Y_n)\Delta W_n \quad (6.36)$$

mit Startwert $Y_0 = X_0$ durchzuführen. Die Zufallsvariable $\Delta W_n = W_{t_{n+1}} - W_{t_n}$ ist $N(0; \Delta t_n)$ -verteilt. Zur Gewinnung eines Integrationsverfahrens höherer Ordnung gibt es nun zwei mögliche Wege. Man kann etwa eine stochastische Taylor-Reihe verwenden und gelangen so zum sog. Milstein-Schema:

$$Y_{n+1} = Y_n + a(Y_n)\Delta t_n + b(Y_n)\Delta W_n + \frac{1}{2}b(Y_n)b'(Y_n) ((\Delta W_n)^2 - \Delta t_n). \quad (6.37)$$

Der Nachteil dieses Verfahrens liegt darin, daß Ableitungen des Koeffizienten b auftreten. Ein weitere Möglichkeit besteht darin, das Runge-Kutta-Verfahren für stochastische Prozesse zu verallgemeinern:

$$\begin{aligned} Y_{n+1} &= Y_n + a(Y_n)\Delta t_n + b(Y_n)\Delta W_n \\ &+ \frac{1}{2} \left(b(Y_n + b\sqrt{\Delta t_n}) - b(Y_n) \right) ((\Delta W_n)^2 - \Delta t_n) \frac{1}{\sqrt{\Delta t_n}}. \end{aligned} \quad (6.38)$$

Man bezeichnet dieses Verfahren als starke Runge-Kutta-Approximation [KP92].

6.3.2 Rekonstruktion via Fokker-Planck-Gleichung

Im folgenden Abschnitt werden wir uns der Fokker-Planck-Gleichung zuwenden. Es handelt sich hierbei um eine partielle Differentialgleichung für die Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion, die von x und t abhängt. Im allgemeinen lassen sich keine analytischen Lösungen der nicht-stationären Fokker-Planck-Gleichung finden. Explizite Lösungen sind nur für spezielle Beispielsysteme bekannt. Daher stehen numerische Verfahren zur Berechnung von Lösungen im Vordergrund. Wendet man den Itô-Kalkül auf die Wahrscheinlichkeitsdichte $p(x, t)$ an, so erhält man die Fokker-Planck-Gleichung

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} p(x, t) &= L_{FP} p(x, t) \\ &= \left(-\frac{\partial}{\partial x} D^{(1)}(x, t) + \frac{\partial^2}{\partial x^2} D^{(2)}(x, t) \right) p(x, t). \end{aligned} \quad (6.39a)$$

Die Koeffizienten $D^{(1)}$ bzw. $D^{(2)}$ werden in Analogie zur Langevin-Gleichung als Driftkoeffizient bzw. Diffusionskoeffizient bezeichnet. Es gilt der folgende Zusammenhang:

$$D^{(1)}(x, t) = a(x, t), \quad (6.39b)$$

$$D^{(2)}(x, t) = b^2(x, t). \quad (6.39c)$$

Im folgenden werden wir ein Verfahren vorstellen, das von Borland [Bor97] vorgeschlagen wurde. Ziel dieses Verfahrens ist es aus der Zeitreihe $\{s_i\}_{i=1, \dots, N}$ eines stochastischen Prozesses den Drift- und Diffusionskoeffizienten und damit den deterministischen und stochastischen Kraftanteil in der zugehörigen Langevin-Gleichung zu bestimmen. Wir werden im folgenden von einer eindimensionalen Zustandsvariablen x ausgehen und mit x_i bzw. $x_{i+\tau}$ diesen Zustand zur Zeit i bzw. $i + \tau$ bezeichnen, wobei $\tau > 0$ ein kleiner Zeitschritt ist. Die nachfolgenden Überlegungen lassen sich problemlos auf mehrdimensionale Zustandsgrößen verallgemeinern. Wir nehmen weiterhin an, daß Drift- und Diffusionskoeffizient nicht explizit von der Zeit t abhängen. Die Idee des Verfahrens beruht auf der Annahme, daß die gemeinsame

Wahrscheinlichkeitsverteilung $P(x_{t+\tau}, x_t)$ eine Lösung der Fokker-Planck-Gleichung (6.39a) ist. Zur Berechnung der Koeffizienten $D^{(1)}$ und $D^{(2)}$ wird die sog. Kullback-Information, die ein Maß für den Abstand zweier gemeinsamer Wahrscheinlichkeitsverteilungen P und \tilde{P} ist,

$$I = - \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} dx_i dx_{i+\tau} P(x_{i+\tau}, x_i) \ln \frac{P(x_{i+\tau}, x_i)}{\tilde{P}(x_{i+\tau}, x_i)} \quad (6.40)$$

unter vorgegebenen Zwangsbedingungen minimiert. Dabei ist P die gesuchte und \tilde{P} die gemessene Verteilung. Diese Zwangsbedingungen legen die Werte verschiedener Momente und Korrelationen der gesuchten Wahrscheinlichkeitsverteilung fest. Seien $\Omega_j(x_i, x_{i+\tau})$, $j = 1, 2, \dots$, ausgewählte Funktionen, beispielsweise x_i^2 oder $x_i x_{i+\tau}$, aber auch $\sin(x_i)$. Dann ist der Erwartungswert für das Eintreten dieser Variablen Ω_j gegeben durch

$$\langle \Omega_j(x_i, x_{i+\tau}) \rangle_P = \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} dx_i dx_{i+\tau} P(x_{i+\tau}, x_i) \Omega_j(x_i, x_{i+\tau}). \quad (6.41)$$

Als Zwangsbedingungen fordert man für die rekonstruierte Verteilung, daß diese Erwartungswerte $\langle \Omega_j \rangle$ mit denjenigen Werten übereinstimmen, die sich aus der Zeitreihe berechnen lassen:

$$\langle \Omega_j(x_i, x_{i+\tau}) \rangle_T = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \Omega_j(x_i, x_{i+\tau}). \quad (6.42)$$

Ausgehend von der Beziehung

$$P(x_{i+\tau}, x_i) = P(x_{i+\tau} | x_i) P(x_i) \quad (6.43)$$

wenden wir uns zunächst dem stationären Anteil zu. Dazu suchen wir die Lösung der Fokker-Planck-Gleichung für den stationären Fall, d.h. die partielle Ableitung auf der linken Seite der Gleichung (6.39a) muß verschwinden. Wir erhalten somit

$$\begin{aligned} 0 &\stackrel{!}{=} D^{(1)}(x) p_{st}(x) - \frac{\partial}{\partial x} D^{(2)}(x) p_{st}(x) \\ &= \left(\frac{D^{(1)}(x)}{D^{(2)}(x)} - \frac{\partial}{\partial x} \right) D^{(2)}(x) p_{st}(x). \end{aligned} \quad (6.44)$$

Integration liefert nun als stationäre Lösung der Fokker-Planck-Gleichung die Wahrscheinlichkeitsdichte

$$p_{st}(x) = \frac{N_0}{D^{(2)}(x)} \exp \left(\int^x dx' \frac{D^{(1)}(x')}{D^{(2)}(x')} \right) = N_0 e^{-\Phi(x)}, \quad (6.45)$$

wobei N_0 eine Integrationskonstante ist, welche so gewählt wird, daß $p_{st}(x)$ normiert ist, und $\Phi(x)$ das verallgemeinerte Potential:

$$\Phi(x) = \ln D^{(2)}(x) - \int^x dx' \frac{D^{(1)}(x')}{D^{(2)}(x')}. \quad (6.46)$$

Analog zur Langevin-Gleichung kann man durch eine Variablentransformation erreichen, daß der Driftterm konstant wird.

Für das Potential kann nun ein sehr allgemeiner Ansatz in Form eines Polynoms N_1 -ter Ordnung gewählt werden, wobei aus physikalischen Gründen die Notwendigkeit besteht, daß N_1 eine gerade Zahl ist, da anderenfalls die Exponentialfunktion in Gleichung 6.45 für große

x divergiert. Die Anzahl N_1 entspricht der Zahl der Entwicklungsterme des deterministischen Anteils $a(x)$ in Gleichung (6.39a):

$$\Phi(x) = \sum_{\nu=1}^{N_1} \lambda_{\nu}^{(1)} x_i^{\nu}. \quad (6.47)$$

Die Maximierung der Information (6.40) unter den gegebenen Zwangsbedingungen führt schließlich auf eine Gleichung für den Gradienten der Lagrange-Multiplikatoren $\{\lambda_{\nu}^{(1)}\}_{\nu=1, \dots, N_1}$:

$$\Delta \lambda_{\nu}^{(1)} = \gamma_1 \frac{\partial W}{\partial \lambda_{\nu}^{(1)}} = \gamma_1 (\langle x_i^{\nu} \rangle_P - \langle x_i^{\nu} \rangle_T), \quad \nu = 1, \dots, N_1. \quad (6.48)$$

Man beachte, daß die Ableitung auf der linken Seite keine Differentiation nach der Zeit t darstellt, sondern die Gradientenstrategie zur Bestimmung der Lagrange-Multiplikatoren repräsentiert. Eine ausführliche mathematische Behandlung dieser Theorie findet sich in [BH92]. Die bedingte Wahrscheinlichkeit $P(x_{i+\tau} | x_i)$ besitzt analog hierzu die Form

$$P(x_{i+\tau} | x_i) = N_0' \exp \left(x_{i+\tau} \sum_{\mu=0}^{N_2} \lambda_{\mu}^{(2)} x_i^{\mu} + x_{i+\tau}^2 \sum_{\kappa=1}^{N_3} \lambda_{\kappa}^{(3)} x_i^{\kappa} \right) \quad (6.49)$$

und es ergeben sich nach [BH92] die folgenden Beziehungen für die weiteren Lagrange-Multiplikatoren:

$$\Delta \lambda_{\mu}^{(2)} = -\gamma_2 (\langle x_i^{\mu} x_{i+\tau} \rangle_P - \langle x_i^{\mu} x_{i+\tau} \rangle_T), \quad \mu = 1, \dots, N_2, \quad (6.50a)$$

und

$$\Delta \lambda_{\kappa}^{(3)} = \gamma_3 (\langle x_i^{\kappa} x_{i+\tau}^2 \rangle_P - \langle x_i^{\kappa} x_{i+\tau}^2 \rangle_T), \quad \kappa = 1, \dots, N_3. \quad (6.50b)$$

In der praktischen Umsetzung dieses Algorithmus berechnet man zunächst die gewünschten Zwangsbedingungen aus der Zeitreihe und setzt anschließend Startwerte für die Familien von Lagrange-Multiplikatoren fest. Aus Stabilitätsgründen versucht man zunächst, die stationäre Verteilung aus den Momenten zu schätzen, weil diese nur von einem Satz der Lagrange-Multiplikatoren abhängt und somit weniger Unbekannte beim Minimierungsproblem auftreten. Hat man die zugehörigen Lagrange-Multiplikatoren bestimmt, schätzt man die bedingte Verteilung aus den Kurzzeit-Korrelationen. Da der Rechenaufwand zur Bestimmung der Kurzzeit-Korrelationen durch die Auswertung des Doppelintegrals aufwendig ist, vereinfacht man die Ausdrücke $\Omega_j(x_i, x_{i+\tau})$ zu $\Omega_j'(x_i)$ unter Verwendung von Gleichung (6.30)

$$x_{i+\tau} = x_i + a(x_i)\tau + b(x_i)\eta_i\sqrt{\tau}, \quad (6.51)$$

wobei $dt \approx \tau$ gesetzt wurde. Damit reduziert sich der Aufwand auf die Berechnung eines Einfachintegrals. Die gesuchten Drift- und Diffusionskoeffizienten werden schließlich aus der gemeinsamen Wahrscheinlichkeit extrahiert.

Wir haben nun den beschriebenen Algorithmus auf künstlich generierte Zeitreihen angewendet. In Abbildung 6.5 ist beispielsweise das Zeitsignal für $dx = 2.0x - 4.0x^3 + w$ zu sehen, wobei $w \sim N(0, 1)$.

Die Rekonstruktion ergab nach 200000 Iterationen für den deterministischen Anteil: $dx = 0.22 + 2.17x - 0.30x^2 - 5.62x^3$. Obwohl der Fehler groß ist, zeigt das Ergebnis eine signifikante Übereinstimmung mit dem Ausgangssystem. In Abbildung 6.6 ist für zwei Momente exemplarisch das Konvergenzdiagramm aufgezeichnet. Es zeigt sich, daß die Konvergenz der Momente nach einer sehr schnellen Annäherung an den vorgegebenen Wert recht

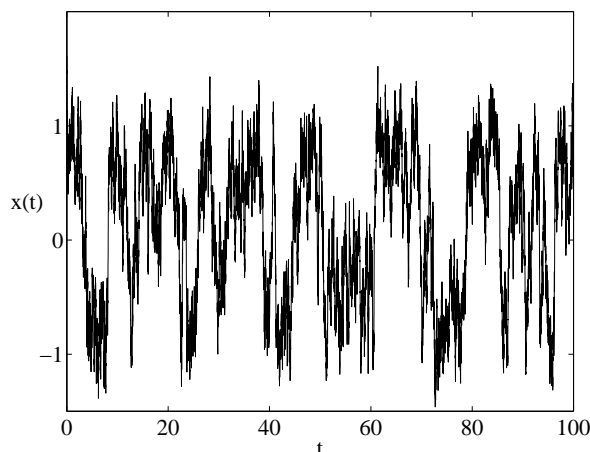


Abbildung 6.5: Zeitreihe des Beispielsignals

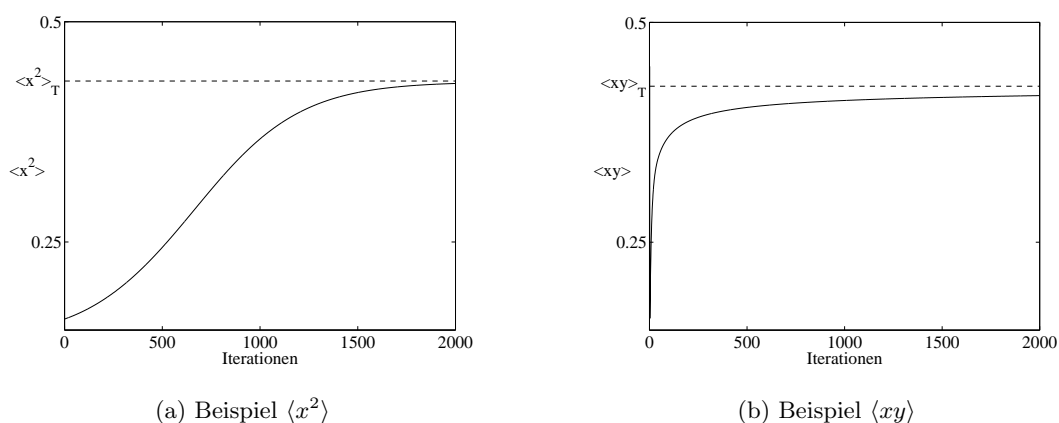


Abbildung 6.6: Konvergenz der rekonstruierten Momente

langsam erfolgt. Weiterhin zeigt sich, daß die Lagrange-Parameter sehr sensitiv von den Momenten abhängen, d.h. auch kleinste Änderungen der rekonstruierten Momente haben sehr große Auswirkungen auf die Lagrange-Parameter und damit folglich auch auf die rekonstruierte Bewegungsgleichung.

Grundsätzlich neigt dieses Verfahren zu numerisch Komplikationen. Die Integration, welche zur Berechnung der Momente benötigt wird, ist nur mit beschränkter Genauigkeit möglich. Da aber die Bestimmung der Koeffizienten sehr sensibel von den Momenten abhängt, führt dies bereits zu einer erheblichen Einschränkung der Einsatzfähigkeit dieses Algorithmus. Höhere Genauigkeit führt auf der anderen Seite schnell zu einer Explosion des Rechenaufwands eines ohnehin schon langsamen Verfahrens und macht es somit für die praktische Anwendung wenig attraktiv. Eine Erweiterung des Algorithmus auf mehrdimensionale Probleme ist theoretisch zwar problemlos möglich, scheitert jedoch in der Praxis an der Genauigkeit der Integrationsroutinen. Unsere Tests für ein zweidimensionales Problem ergaben, daß die Fehler bei der numerischen Auswertung des zweidimensionalen Integrals bereits viel zu groß für die den Lernalgorithmus sind. Es ist daher nicht zu erwarten, daß dieses Verfahren in absehbarer Zeit zur technischen Anwendung kommt.

6.4 Stochastische dynamische Systeme

Wir wollen uns an dieser Stelle nach dem Zusammenhang zwischen deterministischen und stochastischen Systemen fragen, d.h. wir wollen diskutieren, was wir unter stochastischen Modellen verstehen. Dabei sind zwei Gesichtspunkte von Bedeutung: die Dynamik, d.h. der Entwicklungsmechanismus, und die Startbedingungen des Systems. Wir wollen daher dynamische Systeme in vier Gruppen unterteilen:

1. Deterministische Systeme mit
 - (a) identischen Anfangsbedingungen bzw.
 - (b) zufälligen Anfangsbedingungen, und
2. stochastische Systeme mit
 - (a) identischen Anfangsbedingungen bzw.
 - (b) zufälligen Anfangsbedingungen.

Der Fall 1a wurde bereits ausgiebig untersucht. Solche Systeme werden beispielsweise in digitalen Automaten mit digitalen Eingabewerten realisiert, d.h. das System ist streng deterministisch und die Anfangswerte mit Sicherheit bekannt. Die meisten Modelle von physikalischen Systemen folgen dieser Idealvorstellung. Ein Mischsystem entsteht, wenn die Dynamik deterministisch ist, die Startbedingungen jedoch zufällig sind (Fall 1b). Eine Bearbeitungsmaschine, z.B. ein Steinbrecher, dessen Ausgangsmaterial zufällig in Form und Zusammensetzung ist, gehört dieser Gruppe an. Trotz ähnlicher Anfangsbedingungen kann hierbei infolge unterschiedlicher Mikrostruktur des Materials im Laufe des Bearbeitungsprozesses sehr unterschiedliches Systemverhalten auftreten.

Der Fall 2a entspricht einem System mit stochastischer Dynamik, welches beispielsweise digitale Eingangswerte hat. Wir denken dabei an Übertragungsfunktionen von Input-/Output-Systemen mit Rauschen. Es handelt sich hierbei also um verschiedene Realisationen eines stochastischen Prozesses mit identischem Anfang, d.h. der Pfad startet im selben Punkt. Stochastische Systeme mit zufälligen Startbedingungen (Fall 2b) entsprechen vielen Realisationen mit unterschiedlichen Anfangspunkten des Beispielpfades.

Welche dieser Mechanismen bei der Modellierung eines konkreten physikalischen Systems zum Einsatz kommt, hängt im wesentlichen von zwei Gesichtspunkten ab: den Größenordnungen der stochastischen Schwankungen und den charakteristischen Zeiten. In nicht-chaotischen deterministischen Systemen wird man den Einfluß zufälliger Anfangsbedingungen oftmals vernachlässigen können, solange diese nicht zu groß sind, weil das System stabil gegen kleine Störungen ist. Eine Ausnahme bilden dynamische Systeme mit komplizierten Basinggrenzen. In chaotischen Systemen ist dies hingegen nicht ratsam. Die Zeitskalen spielen ebenfalls eine große Rolle. Hier stellt sich die Frage, in welchen Zeitabständen überhaupt zufällige Schwankungen auf ein System einwirken. An dieser Stelle sei auf die Diskussion von Arnold zur Verallgemeinerung des Begriffs der Bifurkation auf stochastische dynamische Systeme hingewiesen [Arn99].

Beispiele für Mischsysteme, d.h. einfache deterministische Modelle, welches durch Einfügung stochastischer Faktoren ein komplexes Verhalten entwickelt, sind der Verbrennungsmotor [DKFC98] oder das Getriebe eines Automotors [PK90]. Das stochastische Verhalten von Getrieben mit Spiel wurde von Pfeiffer und Kunert untersucht. Angeregt durch Torsionsschwingungen der Führung des Getriebegehäuses finden Stöße zwischen einzelnen Bauteilen statt. Die Berechnung von Lösungen erfordert allerdings einen sehr hohen Rechenaufwand, so daß Pfeiffer und Kunert vorgeschlagen haben, die Stöße als Zufallsprozeß zu modellieren.

Die Definition eines stochastischen Prozesses reduziert sich üblicherweise auf die Definition einer (gleichverteilten) Zufallsvariablen. In numerischen Simulationen werden zur Behandlungen von stochastischen Prozessen Pseudo-Zufallszahlengeneratoren eingesetzt. Diese Zufallsgeneratoren repräsentieren aber chaotische Prozesse, d.h. ein chaotischer Prozeß ist eine mathematische Approximation eines stochastischen Prozesses [BC99]. Als einfaches Beispiel eines solchen chaotischen Systems sei die Abbildung $x_i \mapsto x_{i-1} = 2x_i \bmod 1$ genannt. Üblicherweise wird die Behandlung stochastischer Probleme dadurch vereinfacht, daß man die Existenz eines gleichverteilten Zufallsprozesses annimmt. Brown und Chua konnten jedoch zeigen, daß es keine beschränkten, Lebesgue-meßbaren, gleichverteilten Funktionen auf einem abgeschlossenen Intervall gibt, die nicht fast überall konstant sind.

Wir wollen an dieser Stelle eine kritische Bemerkung über den Zusammenhang zwischen Zeitreihen und stochastischen Prozessen ergänzen. Ein stochastischer Prozeß X ist eine reellwertige Funktion auf einem Raum $T \times \Omega$ (vgl. Abschnitt 6.1.2). Wir können eine Zeitreihe $\{s_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ als eine Folge von Zufallsvariablen $\{X_{i\Delta t}\}_{i \in \mathbb{N}}$ auffassen. Für ein festes Ereignis $\omega \in \Omega$ ist $X_{i\Delta t}(\omega)$ somit eine reellwertige Funktion von $t = i\Delta t$ oder eine Realisation. Die Menge aller möglichen Realisationen heißt ein *Ensemble*. Betrachtet man eine Zeitreihe in einem Diagramm, so betrachtet man streng genommen eine spezielle Realisation des stochastischen Prozesses. Wollen wir also eine Zeitreihe als Realisation eines stochastischen Prozesses interpretieren, so müssen wir uns bewußt sein, daß der Zustand des Systems im ganzen das Ereignis $\omega \in \Omega$ ist und nicht etwa die Veränderung des Systemzustandes aufgrund der Dynamik. In den meisten Fällen gehen wir davon aus, daß eine Meßreihe nicht eine Realisation ist, sondern sich vielmehr aus vielen Realisationen von kurzen stochastischen Prozessen zusammensetzt. Im Spezialfall handelt es sich dabei um die Wiederholung desselben stochastischen Prozesses. Dies spiegelt sich in der Tatsache wider, daß wir üblicherweise Statistiken aus einer einzigen Zeitreihe ableiten.

Bislang wurde keine systematische integrierte Betrachtung dieser Verhaltensweisen im Zusammenhang mit der Nichtlinearen Dynamik durchgeführt.

Kapitel 7

Fazit und Ausblick

Diese Arbeit ist im Rahmen eines interdisziplinären Projektes mit dem Ziel entstanden, die Modellierung von dynamischen Systemen mit Methoden der nichtlinearen Dynamik im Hinblick auf die Beantwortung praxisrelevanter Fragestellungen zu untersuchen. Als empirischer Hintergrund fungierte die spanende Bearbeitung von Werkstücken [WSK⁺97, WHB⁺97a, WHB⁺97b, WHB⁺99]. Im Verlaufe dieses Forschungsvorhabens ist deutlich geworden, welche Kluft zwischen formaler theoretischer Physik und praxisorientierter Ingenieurwissenschaft besteht. Die unterschiedlichen Betrachtungs- und Herangehensweisen sind vor allem auf unterschiedliches methodisches Wissen und unterschiedliche Zielsetzung zurückzuführen.

Die Nichtlineare Dynamik ist eine abstrakte Theorie, die eine Verallgemeinerung von Aussagen über dynamische Systeme durch Abstraktion von konkreten Beispielsystemen vornimmt. Werkzeugmaschinen in der Produktionsstätte eines Industrieunternehmens dagegen sind sehr konkret und die Behandlung der dort auftretenden Probleme mit Methoden der theoretischen Physik nicht trivial. Solange die Probleme linear behandelt werden können, stellt die Theorie eine sehr brauchbare Methode der Klassifizierung von dynamischen Systemen, die Theorie der Normalformen, zur Verfügung. Die Rückübersetzung von Ergebnissen ist dann relativ einfach möglich, worauf sich der große Erfolg linearer Ansätze gründet.

Diese Arbeit ist ein erster Versuch, die Schwierigkeiten bei der Anwendung der nichtlinearen Theorie zu lokalisieren. An Hand einiger exemplarischer Modellansätze, die in vier große Gruppen eingeteilt werden können, wurden die Anwendungsmöglichkeiten beleuchtet und systematisiert. Im Blick standen dabei theoretisch interessierte Anwender aus dem Bereich der Ingenieurwissenschaft.

Beispiele gesetzesbasierter Modelle wurden in Kapitel 3 betrachtet. Dabei wurde bewußt auf allzu mathematisch-theoretische Formulierungen verzichtet und statt dessen die Modelle unter physikalisch-technischen Aspekten präsentiert. Ausgehend von der Behandlung linearer Systeme, die in den Ingenieurwissenschaften dominieren, wurden zunächst typisch nichtlineare Phänomene vorgestellt und aufgezeigt, wie sich diese in Zeitreihen, Phasenportraits und Bifurkationsdiagrammen manifestieren. Die zugehörigen nichtlinearen Mechanismen, die für diese Phänomene verantwortlich sind, wurden vorgestellt. Zudem wurde auf grundsätzliche Probleme der Berechnung analytisch formulierter Modelle unter dem Aspekt der Berechenbarkeit einer konkreten Lösung, einer Lösungsklasse und einer Häufigkeitsverteilung von Lösungen hingewiesen.

Ein Standardverfahren der strukturellen Modellierung ist die Entwicklung von Lösungen des dynamischen Systems nach speziellen Funktionen, die besonders gut die Eigenschaften und Symmetrien des betrachteten Systems widerspiegeln. Dadurch erreicht man i.a. eine Darstellung, die nur wenige, dafür aber wesentliche Entwicklungselemente enthält. Ein solcher direkter Zusammenhang ist für die Waveletfunktionen, deren bisherige Einsatzfelder vorwiegend die Datenkompression und die Entrauschung von Signalen sind, bisher nicht her-

gestellt worden. In Kapitel 4 haben wir Möglichkeiten aufgezeigt, die die Wavelet-Analyse als Werkzeug im Bereich der Nichtlinearen Dynamik bietet. Hier lassen sich Wavelets insbesondere zur Vorverarbeitung von Signalen und zur Detektion von sprunghaften Veränderungen in Zeitreihen gut einsetzen. Gegenüber einfachen Fourierfiltern haben sie den Vorteil, daß sie im Unterbereich jeweils lokalisiert wirken. Zudem lassen sie sich einfach und schnell numerisch umsetzen. Dies zusammen mit ihren Lokalisierungs- und Skalierungseigenschaften läßt erwarten, daß Wavelets künftig verstärkt im Bereich der Modellierung von dynamischen Systemen eingesetzt werden.

Verfahren zur topologischen Zeitreihenanalyse wurden im Hinblick auf ihre Einsatzmöglichkeiten in Kapitel 5 untersucht. Wir haben dabei zwei sehr unterschiedliche Methoden betrachtet. Aus den Zeitreihen kann man zum einen eine Triangulierung des zugrundeliegenden Zustandsraumes konstruieren. Dieses Verfahren stellt somit eine Grundlage für viele Methoden der nichtlinearen Zeitreihenanalyse dar. Zum anderen werden topologische Überlegungen benutzt, um Invarianten, insbesondere Verschlingungszahlen und Template-Matrizen zu berechnen. Diese Verfahren nutzen aus, daß jede einzelne Systemtrajektorie als eindimensional Mannigfaltigkeit aufgefaßt und in einen dreidimensionalen Raum eingebettet werden kann. Die Relationen zwischen verschiedenen Trajektorien lassen sich auf diese Weise jedoch nicht immer korrekt darstellen. So kommen diese topologischen Verfahren primär für die Modellvalidierung in Frage.

In Kapitel 6 standen die stochastischen Prozesse im Mittelpunkt. Es zeigt sich, daß bei einer Anwendung auf ein konkretes dynamisches System genau überlegt werden muß, welches stochastische Versuchsschema der technischen Fragestellung entspricht. Hier sind vier Situationen zu unterscheiden, je nachdem ob die Startwerte als identisch oder zufällig bzw. das Entwicklungsgesetze stochastisch oder deterministisch betrachtet werden müssen. Eine Sonderstellung nehmen dabei die stochastischen Prozesse ein.

Die Untersuchung hat insgesamt ergeben, daß eine systematische Strukturierung des Modellierungsproblems dringend erforderlich ist. Nur dann lassen sich die verschiedenen Schnittstellen zur theoretischen Physik und angewandten Mathematik klar erkennen und es wird möglich, von lokalen ad hoc-Ansätzen zu systematischen Modellierungsprozessen überzugehen.

Anhang A

Bifurkationstheorie

Wir haben in Abschnitt 3.4.2 strukturelle Veränderungen von dynamischen Systemen betrachtet. Einige grundlegende Begriffe, die in diesem Abschnitt verwendet wurden, sind in diesem Anhang zusammengestellt. Für eine detailliertere Einführung verweisen wir auf Craford [Cra91] und die Referenzen darin. Neben den dynamischen Variablen hängen viele Systeme noch von zusätzliche Variablen, sog. Kontrollparameter, ab, die sich üblicherweise nicht oder nur sehr langsam ändern. Kleine Änderungen dieser Kontrollparameter führen im allgemeinen zu quantitativen Veränderungen des Systemverhaltens. Unter bestimmten Umständen können jedoch auch qualitative Veränderungen auftreten, die man als Bifurkationen oder Verzweigungen bezeichnet. Wir wollen an dieser Stelle einige elementare Bifurkationstypen vorstellen. Das Systemverhalten kann je nach Anzahl der Kontrollparameter sehr kompliziert sein. Wir werden uns allerdings auf solche Verzweigungen beschränken, die durch Änderung eines Parameters verursacht werden, die sog. Kodimension-1-Bifurkationen. Betrachtet man also ein eindimensionales dynamisches System der Form

$$\dot{x} = f(x, \mu), \tag{A.1}$$

wobei $\mu \in \mathbb{R}$ der Systemparameter und $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ das Vektorfeld des Systems ist. Ein Punkt $x_0 \in \mathbb{R}$ heißt ein Fixpunkt des Vektorfeldes f , wenn

$$f(x_0, \mu) = 0 \tag{A.2}$$

gilt. In der Regel ist der Fixpunkt eine Funktion des Kontrollparameters, d.h. $x_0 = x_0(\mu)$. Ein Wert $\mu = \mu_0 \in \mathbb{R}$, heißt ein Bifurkationspunkt oder Verzweigungspunkt, wenn sich die Struktur des Phasenraumportraits ändert, während μ durch den Wert μ_0 geht. Man betrachte zunächst den einfachen Fall, daß es sich um ein lineares Vektorfeld handelt, beispielsweise $f(x, \mu) = \mu - x$. Für alle Werte von $\mu \in \mathbb{R}$ besitzt dieses Vektorfeld einen asymptotisch stabilen Fixpunkt bei $x_0 = \mu$. Somit bleibt das strukturelle Verhalten des Vektorfeldes bei Variation des Parameters μ erhalten oder anders ausgedrückt: es gibt in linearen Systemen keine Bifurkationen. Der Satz von Hartman und Grobman besagt, daß die Dynamik eines Systems in der Umgebung eines hyperbolischen Fixpunktes topologisch konjugiert¹ zu seinem linearisierten System ist, d.h. man kann die Topologie des nichtlinearen Systems in der Umgebung des Fixpunktes durch Lösung des linearisierten Problems analysieren [GH83]. Somit können Bifurkationen ausschließlich bei nicht-hyperbolischen Fixpunkten auftreten.

Sei μ_0 der Bifurkationspunkt und $x_0 = x_0(\mu_0)$ der zugehörige Fixpunkt an dieser Stelle.

¹Zwei Flußabbildungen $\varphi_t, \psi_t : M \rightarrow M$ heißen zueinander topologisch konjugiert, falls ein Homöomorphismus $h : M \rightarrow M$ existiert, so daß $h \circ \varphi_t = \psi_t \circ h$ ist.

Dann kann man eine Taylor-Entwicklung um den Wert (x_0, μ_0) durchführen:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x_0, \mu_0) + \frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{(x_0, \mu_0)} (x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial \mu} \Big|_{(x_0, \mu_0)} (\mu - \mu_0) \\ &\quad + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \Big|_{(x_0, \mu_0)} (x - x_0)^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial \mu} \Big|_{(x_0, \mu_0)} (\mu - \mu_0)(x - x_0) \\ &\quad + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial \mu^2} \Big|_{(x_0, \mu_0)} (\mu - \mu_0)^2 + \dots \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

Da x_0 nach Voraussetzung ein Fixpunkt sein soll, gilt $f(x_0, \mu) = 0$ für alle $\mu \in \mathbb{R}$. Für nicht-hyperbolische Fixpunkte gilt zudem $f_x(x_0, \mu_0) = 0$. Damit vereinfacht sich Gleichung (A.3) zu

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \frac{\partial f}{\partial \mu} \Big|_{(x_0, \mu_0)} (\mu - \mu_0) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \Big|_{(x_0, \mu_0)} (x - x_0)^2 \\ &\quad + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial \mu} \Big|_{(x_0, \mu_0)} (\mu - \mu_0)(x - x_0) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial \mu^2} \Big|_{(x_0, \mu_0)} (\mu - \mu_0)^2 + \dots \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

Unter den Voraussetzungen $f_\mu(x_0, \mu_0) \neq 0$ und $f_{xx}(x_0, \mu_0) \neq 0$ erhält man nach einer Variablentransformation, welche die Vorfaktoren eliminiert, die sog. Normalform

$$\dot{x} = \mu - x^2. \quad (\text{A.5})$$

Für den Fall $\mu < 0$ besitzt das System keinen Fixpunkt. Bei $\mu = 0$ tritt dann ein nicht-hyperbolischer Fixpunkt in $x = 0$ auf, der sich für $\mu > 0$ in einen stabilen Fixpunkt $x_1 = \sqrt{\mu}$ und einen instabilen Fixpunkt $x_2 = -\sqrt{\mu}$ verzweigt (siehe Abbildung A.1a). Man bezeichnet dies als eine Sattelpunkt-Verzweigung. Der Name Sattelpunkt-Bifurkation rührt daher, daß im zweidimensionalen Analogon $\dot{x} = y$, $\dot{y} = \mu - x^2 - y$ der Fixpunkt $(0, -\sqrt{\mu})$ ein Sattelpunkt ist. Infolge der Bifurkation ändert sich die Anzahl der Fixpunkte.

Unter einer Normalform vom Entwicklungsgrad p versteht man ein Polynom vom Grade p der Form

$$\dot{x} \approx f_p(x, \mu) = \sum_{i=0}^p a_i(\mu) x^i, \quad (\text{A.6})$$

wobei $a_p(\mu) \neq 0$. Ist $a_p(\mu) > 0$, so spricht man von einer inversen Bifurkation. Physikalisch ist der Begriff der inversen Bifurkation nicht von Bedeutung, weil man in einem Modell einfach einen neuen Kontrollparameter $\nu = -\mu$ definieren kann, unter dessen Variation dann eine normale Bifurkation auftritt.

Verschwimmt zusätzlich auch der Koeffizient $f_{x\mu}(x_0, \mu_0)$ in der Taylor-Entwicklung (A.3), so erhält man als Approximation

$$\dot{x} \approx \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \Big|_{(x_0, \mu_0)} (x - x_0)^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial \mu} \Big|_{(x_0, \mu_0)} (\mu - \mu_0)(x - x_0)$$

und damit das Standardsystem

$$\dot{x} = \mu x - x^2. \quad (\text{A.7})$$

Es existieren für alle Werte des Parameters $\mu \neq 0$ ein stabiler und ein instabiler Fixpunkt, die ihre Stabilität beim Zusammentreffen in $\mu = 0$ austauschen. Man bezeichnet dies als eine transkritische Verzweigung (Abbildung A.1b).

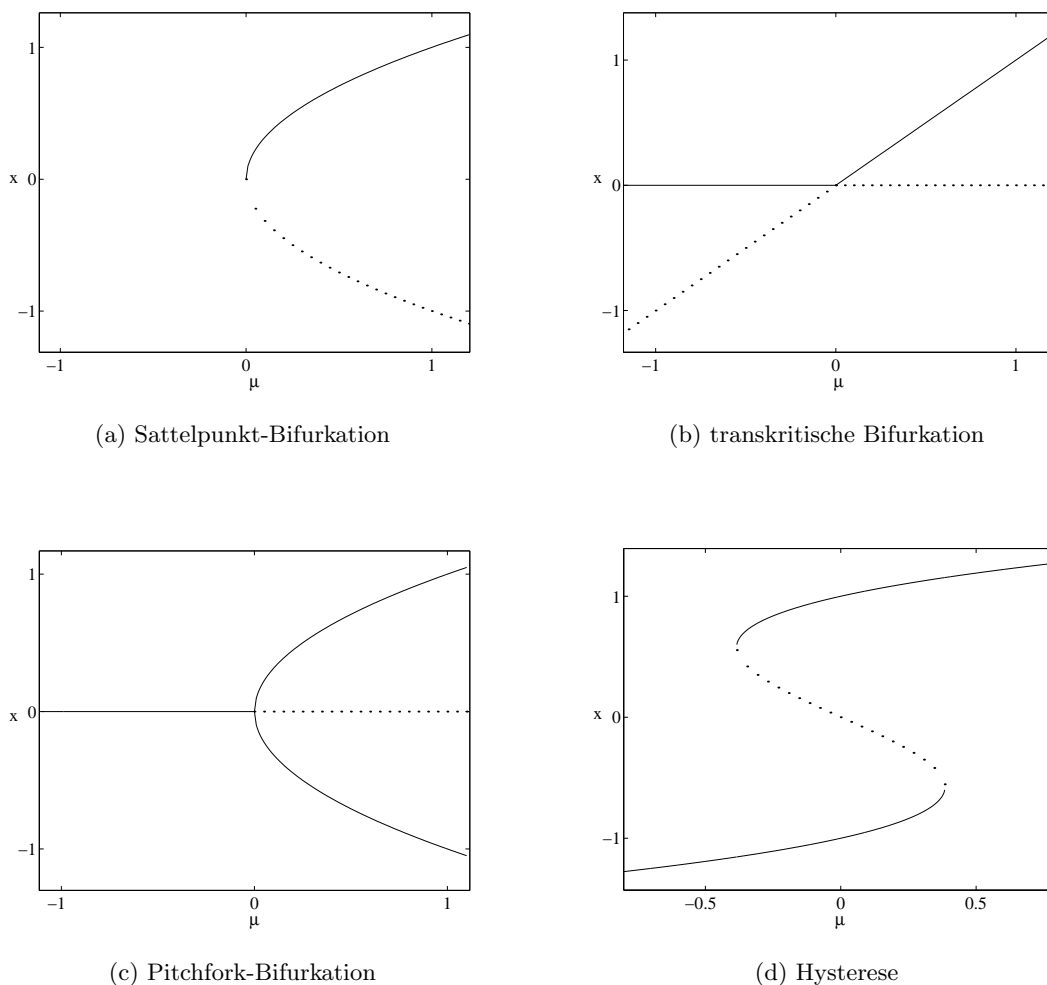


Abbildung A.1: Diagramme elementarer Bifurkationen

Der dritte Bifurkationstyp in eindimensionalen Systemen sind die Gabel- oder Pitchfork-Bifurkationen, die aus (A.3) unter der Bedingung $f_{xx}(x_0, \mu_0) = 0$ entstehen und die Normalform

$$\dot{x} = \mu x - x^3 = (\mu - x^2)x \quad (\text{A.8})$$

besitzen (Abbildung A.1c). Bei einer Pitchfork-Bifurkation geht ein stabiler Fixpunkt in einen instabilen Fixpunkt über und es entstehen zwei neue stabile Fixpunkte. Dieser Bifurkationstyp tritt oft bei physikalischen Systemen mit Symmetrie auf, beispielsweise bei Magnetmodellen in der statistischen Mechanik. Dort treten Systeme der Form $\dot{x} = -x + \beta \tanh(x)$ auf, die solche Phänomene zeigen. An dieser Stelle wollen wir noch eine kurze Bemerkung zu sog. subkritischen Pitchfork-Bifurkationen machen. Betrachtet man ein System der Form $\dot{x} = rx + x^3$, so wirkt der kubische Term destabilisierend, d.h. für endliche Zeiten gilt $x \rightarrow \pm\infty$. In physikalischen Systemen darf so ein Verhalten nicht auftreten. Beachtet man die Symmetrie des Systems unter Paritätstransformationen, so wäre als stabilisierender Term ein Monom der Ordnung 5 denkbar, d.h.

$$\dot{x} = rx + x^3 - x^5. \quad (\text{A.9})$$

Dieses System zeigt eine subkritische Pitchfork-Bifurkation in $\mu = 0$ und eine Sattelpunkt-Bifurkation in $\mu = \mu_r = -1/4$. Interessant ist die Tatsache, daß das System im Bereich

$\mu_r < \mu < 0$ Bistabilität zeigt, d.h. es existieren zwei qualitativ verschiedene stabile Zustände. Bei langsamem Anstieg des Kontrollparameters μ wird das System zunächst in einem lokal stabilen Zustand $x = 0$ bis zum Erreichen des Bifurkationspunktes $\mu = 0$ bleiben. An dieser Stelle wird das System auf den einzig verbleibenden stabilen Zustand springen. Verringert man den Kontrollparameter wieder, so wird das System zunächst bis zum Erreichen des Bifurkationswertes $\mu = \mu_r$ auf dem stabilen Zweig bleiben, und schließlich nach Vernichtung dieses Zweiges durch die Sattelpunkt-Bifurkation auf den Zustand mit kleinerer Amplitude zurückspringen. Man beobachtet hier also *Hysterese*.

Das Verhalten eines nichtlinearen dynamischen Systems wird im Falle hyperbolischer Fixpunkte durch die Jacobi-Matrix des Systems bestimmt. Betrachtet man ein zweidimensionales System mit skalarem Kontrollparameter, d.h. $\dot{x} = f(x, \mu)$ mit $x \in \mathbb{R}^2$. Im Gegensatz zu einem eindimensionalen System besteht nun die Möglichkeit, daß die Eigenwerte der Jacobi-Matrix konjugiert-komplexe Werte annehmen. Für $\mu < 0$ sei der Realteil dieser Eigenwerte negativ, d.h. das System besitzt einen stabilen Fokus. Dieser Fokus wird nicht-hyperbolisch, wenn die Realteile der Eigenwerte verschwinden. Es tritt dann eine sog. *superkritische Hopf-Bifurkation* auf. Dabei wird der Fokus instabil und es entsteht ein stabiler Grenzzyklus. Die Normalform der Hopf-Bifurkation lautet:

$$\dot{x} = \mu x + y - x(x^2 + y^2) \quad (\text{A.10a})$$

$$\dot{y} = -x + \mu y - y(x^2 + y^2). \quad (\text{A.10b})$$

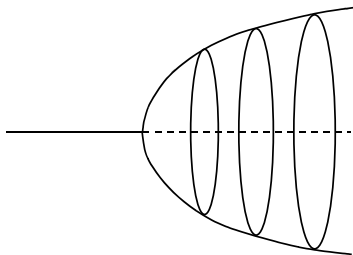


Abbildung A.2: Superkritische Hopf-Bifurkation

Anhang B

Theoretische Betrachtung der Wavelets

B.1 Multiskalenanalyse und Skalierungsfunktionen

Es gibt zwei gängige Wege, sich den Wavelets zu nähern. Der intuitive Ansatz ist die Einführung der kontinuierlichen Wavelet-Transformation (folglich Abschnitt 4.2.2). Der mehr technische Ansatz ist die Konstruktion von Wavelets mittels der Multiskalenanalyse. Dieser Weg erfreut sich im Hinblick auf die algorithmische Umsetzung großer Beliebtheit. Wir wollen daher in diesem Abschnitt die theoretischen Grundlagen der Multiskalenanalyse zusammenfassen.

Eine Sequenz von abgeschlossenen Teilräumen $V_i \subset L^2(\mathbb{R})$, $i \in \mathbb{Z}$, heißt eine durch $\phi \in L^2(\mathbb{R})$ erzeugte Multiskalenanalyse, falls die Bedingungen

$$V_j \subset V_{j+1}, \quad \forall j \in \mathbb{Z}, \quad (\text{B.1a})$$

$$\text{clos}\left(\bigcup_{j \in \mathbb{Z}} V_j\right) = L^2(\mathbb{R}), \quad (\text{B.1b})$$

$$\bigcap_{j \in \mathbb{Z}} V_j = 0, \quad (\text{B.1c})$$

$$\text{und} \quad f(\cdot) \in V_j \iff f(2\cdot) \in V_{j+1}, \quad \forall j \in \mathbb{Z}, \quad (\text{B.1d})$$

erfüllt sind. Mallat konnte zeigen, daß für jede Multiskalenanalyse eindeutig eine Funktion $\phi \in L^2(\mathbb{R})$ existiert, so daß $\{\phi(x - k) \mid k \in \mathbb{Z}\}$ eine Riesz-Basis¹ des V_0 ist [Mal89]. Wir definieren die Abkürzung

$$\phi_{j,k}(x) := 2^{j/2} \phi(2^j x - k). \quad (\text{B.2})$$

Der Vorfaktor $2^{j/2}$ sorgt dafür, daß $\|\phi_{j,k}\| = \|\phi\|$ gilt. Offensichtlich erfüllen die in Gleichung (4.17) definierten Räume diese Bedingung. Aus der Bedingung (B.1d) folgt, daß die Funktionen $\{\phi_{j,k}(x) \mid k \in \mathbb{Z}\}$ eine Riesz-Basis des Raumes V_j bilden, d.h. es gilt

$$V_j = \text{clos}(\text{span} \{\phi_{j,k}(x) \mid k \in \mathbb{Z}\}). \quad (\text{B.3})$$

¹Eine abzählbare Menge $\{e_i\}$ eines Hilbertraumes H heißt eine Riesz-Basis, falls jedes Element $f \in H$ eindeutig als $f = \sum_k c_k e_k$ geschrieben werden kann und Konstanten $A, B > 0$ existieren, so daß

$$A \|f\|^2 \leq \sum_k |c_k|^2 \leq B \|f\|^2.$$

Aus der Bedingung (B.1a) folgt $V_0 \subset V_1$, d.h. für jede Funktion $\phi \in V_0$ ergibt sich auch $\phi \in V_1$. Da aber $\{\phi_{1,k} \mid k \in \mathbb{Z}\}$ eine Basis von V_1 ist, muß es einen Satz von Koeffizienten $\{h_k\} \in l^2(\mathbb{Z})$ geben, so daß ϕ die Zweiskalenrelation

$$\phi(x) = \sqrt{2} \sum_k h_k \phi(2x - k) \quad (\text{B.4})$$

erfüllt. Man bezeichnet ϕ daher auch als Skalierungsfunktion. In der Literatur findet man unterschiedliche Formulierungen der Skalierungsgleichung. Oftmals wird der Faktor $\sqrt{2}$ durch geeignete Wahl der Koeffizienten h_k eliminiert. Wir verwenden jedoch diese Form, damit die für die Berechnung relevanten Gleichungen besonders einfach werden. Wir können ausgehend von dieser Beziehung die folgende Verallgemeinerung formulieren:

$$\begin{aligned} \phi_{j,k}(x) &= 2^{j/2} \phi(2^j x - k) \\ &= 2^{j/2} \sqrt{2} \sum_l h_l \phi(2(2^j x - k) - l) \\ &= 2^{(j+1)/2} \sum_l h_l \phi(2^{j+1} x - 2k - l) = \sum_l h_l \phi_{j+1, 2k+l}(x). \end{aligned} \quad (\text{B.5})$$

Zudem erzwingt die Forderung, daß $\{\phi(x - k) \mid k \in \mathbb{Z}\}$ eine Riesz-Basis von V_0 ist, eine zusätzliche Bedingung an die Skalierungsfunktion:

$$\sum_k \phi(x - k) = 1, \quad \forall x \in \mathbb{R}. \quad (\text{B.6})$$

Betrachten wir die Bedingung (B.1a) in der Definition der Multiskalenanalyse. Wir haben gesehen, daß V_j ein linearer Teilraum von V_{j+1} ist, d.h. es existiert ein Raum W_j , der orthogonales Komplement von V_j bzgl. V_{j+1} ist, so daß sich der Zusammenhang $V_{j+1} = V_j \oplus W_j$ und damit insbesondere $W_0 \subset V_1$ ergibt. Analog zu (B.4) gibt es für jede Funktion $\psi \in W_0$ einen Satz von Koeffizienten $\{g_k\} \in l^2(\mathbb{Z})$, so daß gilt:

$$\psi(x) = \sqrt{2} \sum_k g_k \phi(2x - k). \quad (\text{B.7})$$

Auch diese Beziehung läßt sich für beliebige Skalen verallgemeinern:

$$\begin{aligned} \psi_{j,k}(x) &= 2^{j/2} \psi(2^j x - k) \\ &= 2^{j/2} \sqrt{2} \sum_l g_l \phi(2(2^j x - k) - l) \\ &= 2^{(j+1)/2} \sum_l g_l \phi(2^{j+1} x - 2k - l) = \sum_l g_l \phi_{j+1, 2k+l}(x) \end{aligned} \quad (\text{B.8})$$

Aus Gleichung (B.6) folgt für die Funktionen $\psi \in W_0$

$$\int_{\mathbb{R}} dx \psi(x) = 0, \quad (\text{B.9})$$

d.h. es handelt sich bei ψ offensichtlich um eine Waveletfunktion. Wir wollen an dieser Stelle bemerken, daß die Konstruktion der Wavelets über das orthogonale Komplement nicht eindeutig ist. Es besteht der Zusammenhang

$$g_k = (-1)^k h_{2l+1-k}, \quad k \in \mathbb{Z}, \quad (\text{B.10})$$

für alle $l \in \mathbb{Z}$, wobei die Nichteindeutigkeit eine Folge der Translationsinvarianz der Basiselemente ist.

B.2 Eigenschaften der Filterkoeffizienten

Wir wollen in diesem Abschnitt auf die Eigenschaften der Filterkoeffizienten eingehen. Es zeigt sich, daß man die Filterkoeffizienten nicht beliebig wählen kann und wir wollen nun einige Randbedingungen an diese Koeffizienten stellen. Zunächst einmal wollen wir fordern, daß die Skalierungsfunktion normiert ist:

$$\begin{aligned}
 1 &= \int_{\mathbb{R}} dx \phi(x) = \int_{\mathbb{R}} dx \left(\sqrt{2} \sum_k h_k \phi(2x - k) \right) \\
 &= \sqrt{2} \sum_k h_k \int_{\mathbb{R}} dx \phi(2x - k) = \sqrt{2} \sum_k h_k \int_{\mathbb{R}} \frac{dx'}{2} \phi(x') \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_k h_k.
 \end{aligned} \tag{B.11}$$

Weiterhin bildet die Skalierungsfunktion ϕ nach Konstruktion eine Orthonormalbasis von V_0 , d.h. wegen der Translationsinvarianz des L^2 -Skalarproduktes muß für beliebiges $l \in \mathbb{Z}$ gelten:

$$\begin{aligned}
 \delta_{0,l} &= \langle \phi(x), \phi(x-l) \rangle \\
 &= \left\langle \sum_m h_m \phi_{1,m}(x), \sum_n h_n \phi_{1,2l+n}(x) \right\rangle \\
 &= \sum_{m,n} h_m h_n^* \underbrace{\langle \phi_{1,m}(x), \phi_{1,2l+n}(x) \rangle}_{\delta_{m,2l+n}} \\
 &= \sum_m h_m h_{m-2l}^*.
 \end{aligned} \tag{B.12}$$

Aus der Zweiskalenrelation (B.4) bzw. (B.5) folgt für die Koeffizienten aufgrund der Orthogonalität der Skalierungsfunktion gerade

$$h_k = \langle \phi(x), \phi_{1,k}(x) \rangle = \langle \phi_{j,l}(x), \phi_{j+1,2l+k}(x) \rangle \tag{B.13}$$

für alle $k \in \mathbb{Z}$ und beliebiges $l \in \mathbb{Z}$. Das Skalarprodukt verschwindet aber nur dann nicht, wenn sich die Träger von $\phi = \phi_{0,0}$ und $\phi_{1,k}$ überlappen, woraus man den Schluß ziehen kann, daß Skalierungsfunktionen mit kompaktem Träger nur endlich viele nichtverschwindende Koeffizienten h_k besitzen.

Wir haben in unserer Wavelet-Definition zudem festgelegt, daß eine Funktion ψ genau dann ein Wavelet ist, wenn das Integral über ψ verschwindet, d.h. es gilt

$$\begin{aligned}
 0 &= \int_{\mathbb{R}} dx \psi(x) = \int_{\mathbb{R}} dx \left(\sqrt{2} \sum_k g_k \phi(2x - k) \right) \\
 &= \sqrt{2} \sum_k g_k \int_{\mathbb{R}} dx \phi(2x - k) = \sqrt{2} \sum_k g_k \int_{\mathbb{R}} \frac{dx'}{2} \phi(x') \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_k g_k.
 \end{aligned} \tag{B.14}$$

Wir werden nun zeigen, daß die Wavelets eine Orthonormalbasis von W_0 bilden, wenn

die Skalierungsfunktion eine Orthonormalbasis von V_0 erzeugt. Dazu betrachten wir

$$\begin{aligned}
\langle \psi_{j,k}(x), \psi_{j,l}(x) \rangle &= \left\langle \sum_m g_m \phi_{j+1,2k+m}(x), \sum_n g_n \phi_{j+1,2l+n}(x) \right\rangle \\
&= \sum_{m,n} g_m g_n^* \underbrace{\langle \phi_{j+1,2k+m}(x), \phi_{j+1,2l+n}(x) \rangle}_{\delta_{m+2k,n+2l}} \\
&= \sum_m g_m g_{m+2(k-l)}^* \\
&= \sum_m (-1)^m h_{2N+1-m} (-1)^{m+2(k-l)} h_{2N+1-m+2(k-l)}^* \\
&= \sum_{m'} \underbrace{(-1)^{2(m+k-l)}}_1 h_{m'} h_{m'+2(k-l)}^* = \delta_{0,2(k-l)} \\
&= \delta_{k,l}.
\end{aligned} \tag{B.15}$$

B.3 Koeffizientenbestimmung in der FWT

Wir wollen kurz die Beziehungen zur Berechnung der Entwicklungskoeffizienten bei der schnellen Wavelet-Transformation (FWT) herleiten. Betrachten wir dazu die Funktion $f_{j-1} \in V_{j-1}$ für $j = N - M + 1, \dots, N$, so gilt

$$f_{j-1}(x) = \sum_k c_k^{j-1} \phi_{j-1,k}(x)$$

und somit

$$\begin{aligned}
c_k^{j-1} &= \langle f_N(x), \phi_{j-1,k}(x) \rangle = \langle f_N(x), \sum_l h_l \phi_{j,2k+l}(x) \rangle \\
&= \sum_l h_l^* \langle f_N(x), \phi_{j,2k+l}(x) \rangle = \sum_l h_l^* c_{2k+l}^j \\
&= \sum_l h_{l-2k}^* c_l^j.
\end{aligned} \tag{B.16}$$

Analog läßt sich auch eine Beziehung für die Entwicklungskoeffizienten d_k^j der Funktion $g_j \in W_j$ herleiten. Aus der Beziehung

$$g_{j-1}(x) = \sum_k d_k^{j-1} \psi_{j-1,k}(x)$$

folgt

$$\begin{aligned}
d_k^{j-1} &= \langle f_N(x), \psi_{j-1,k}(x) \rangle = \langle f_N(x), \sum_l g_l \phi_{j,2k+l}(x) \rangle \\
&= \sum_l g_l^* \langle f_N(x), \phi_{j,2k+l}(x) \rangle = \sum_l g_l^* c_{2k+l}^j \\
&= \sum_l g_{l-2k}^* c_l^j.
\end{aligned} \tag{B.17}$$

Einen ähnlich einfachen Algorithmus erhält man auch für die Wavelet-Synthese. Betrachten

wir dazu wiederum eine Funktion $f_j \in V_j$, so gilt:

$$\begin{aligned}
c_k^j &= \langle f_j(x), \phi_{j,k}(x) \rangle = \langle f_{j-1}(x) + g_{j-1}(x), \phi_{j,k}(x) \rangle \\
&= \left\langle \sum_l c_l^{j-1} \phi_{j-1,l}(x) + \sum_l d_l^{j-1} \psi_{j-1,l}(x), \phi_{j,k}(x) \right\rangle \\
&= \sum_l c_l^{j-1} \langle \phi_{j-1,l}(x), \phi_{j,k}(x) \rangle + \sum_l d_l^{j-1} \langle \psi_{j-1,l}(x), \phi_{j,k}(x) \rangle \\
&= \sum_l c_l^{j-1} \left\langle \sum_m h_m \phi_{j,2l+m}(x), \phi_{j,k}(x) \right\rangle \\
&\quad + \sum_l d_l^{j-1} \left\langle \sum_m g_m \phi_{j,2l+m}(x), \phi_{j,k}(x) \right\rangle \\
&= \sum_{l,m} \left(h_m c_l^{j-1} + g_m d_l^{j-1} \right) \underbrace{\langle \phi_{j,2l+m}(x), \phi_{j,k}(x) \rangle}_{\delta_{2l+m,k}} \\
&= \sum_l (h_{k-2l} c_l^{j-1} + g_{k-2l} d_l^{j-1}). \tag{B.18}
\end{aligned}$$

B.4 Wavelet-Pakete

Wir haben im vorigen Abschnitt gesehen, daß eine Sequenz $\{h_i\}$ alle Informationen über eine orthonormale Skalierungsfunktion enthält und eine weitere Folge $\{g_i\}$ das zugehörige orthonormale Wavelet charakterisiert. Aus diesem Wavelet konnten wir eine Orthonormalbasis des Funktionenraumes $L^2(\mathbb{R})$ konstruieren. Wir wollen diesen Ansatz im folgenden verallgemeinern und aufbauend auf einer Filtersequenz $\{h_i\}$ ein übervollständiges Wörterbuch \mathcal{D} konstruieren. Setzen wir $\psi^0 = \phi$ und $\psi^1 = \psi$, so erhalten die Gleichungen (B.4) und (B.7) die Form

$$\psi^0(x) = \sum_k h_k \psi^0(2x - k) \tag{B.19a}$$

$$\text{und } \psi^1(x) = \sum_k g_k \psi^0(2x - k). \tag{B.19b}$$

Definition B.1 Die Familie von Funktionen $\{\psi^n\}$, $n \in \mathbb{N}$, definiert durch

$$\begin{aligned}
\psi^{2l}(x) &= \sum_k h_k \psi^l(2x - k) \\
\text{und } \psi^{2l+1}(x) &= \sum_k g_k \psi^l(2x - k),
\end{aligned}$$

$l = 0, 1, \dots$, heißt Wavelet-Paket bezüglich der Skalierungsfunktion $\psi^0 = \phi$.

Aus den Eigenschaften für die Skalierungsfunktion ϕ und das zugehörige Wavelet ψ kann man zeigen, daß für festes $n \in \mathbb{N}$ die Wavelet-Paketfunktionen orthonormal zueinander sind, d.h. es gilt

$$\langle \psi^n(x - j), \psi^n(x - k) \rangle = \delta_{j,k}, \quad \forall j, k \in \mathbb{Z}. \tag{B.20}$$

Nach Konstruktion sind die Funktionen ψ^n L^2 -Funktionen. Daher wollen wir nun Familien von Teilräumen des $L^2(\mathbb{R})$ einführen, welche durch die Wavelet-Paketfunktionen erzeugt werden, und definieren

$$U_j^n := \text{clos}(\text{span} \{ \psi_{j,k}^n \mid k \in \mathbb{Z} \}), \tag{B.21}$$

wobei man in Analog zur Notation der dyadischen Wavelets

$$\psi_{j,k}^n(x) = \psi^n(2^j x - k) \tag{B.22}$$

setzt. Es läßt sich einsehen, daß für $l = 0, 1, \dots$

$$\langle \psi^{2l}(x - j), \psi^{2l+1}(x - k) \rangle = 0, \quad \forall j, k \in \mathbb{Z}, \tag{B.23}$$

gilt, d.h. die Räume U_j^{2l} und U_j^{2l+1} sind ebenfalls orthogonal zueinander. Wegen $\psi^0 = \phi$ folgt aus der Definitionsgleichung (B.21), daß $U_j^0 = V_j$ und $U_j^1 = W_j$ für alle $j \in \mathbb{Z}$ ist. Erinnern wir uns an Eigenschaft $V_{j+1} = V_j \oplus W_j$, so können wir diese nun $U_{j+1}^0 = U_j^0 \oplus U_j^1$ schreiben. Es zeigt sich, daß sich diese Beziehung zu

$$U_{j+1}^n = U_j^{2n} \oplus U_j^{2n+1} \tag{B.24}$$

verallgemeinert. Abbildung B.1 zeigt die Paketfunktion $\psi^4(x)$ für das Daubechies-Wavelet D_2 (Abbildung 4.9a) und das Spline-Wavelet B_2 (Abbildung 4.8b).

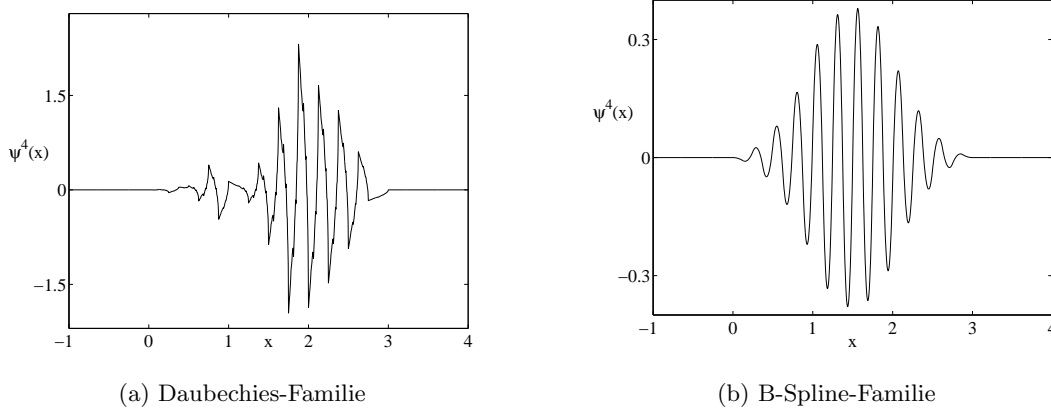


Abbildung B.1: Beispiele für Wavelet-Paketfunktionen $\psi^4(x)$

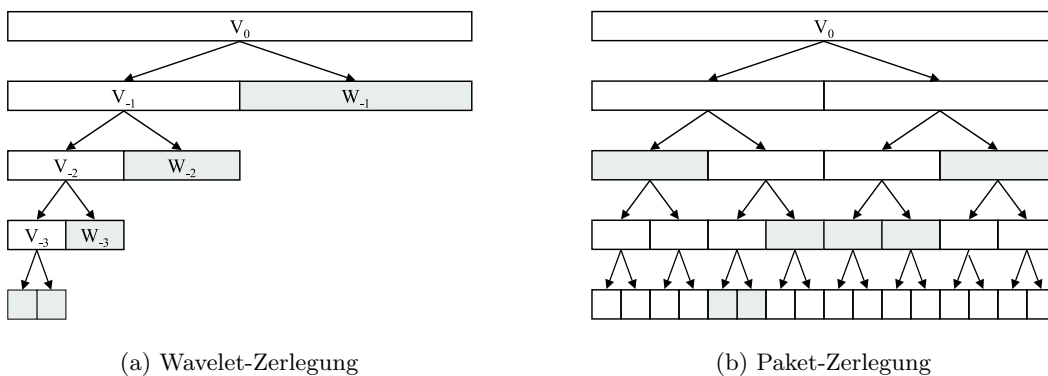


Abbildung B.2: Vergleich Wavelets und Wavelet-Pakete

Als Beispiel betrachten wir ein Signal $x \in V_0$. Eine Wavelet-Zerlegung der Zerlegungsstufe 4 stellt den Raum V_0 in der Form $V_0 = V_{-4} \oplus W_{-4} \oplus W_{-3} \oplus W_{-2} \oplus W_{-1}$ dar (siehe Abbildung B.2a). Eine Wavelet-Paketzerlegung läßt hingegen eine Vielzahl möglicher Darstellungen zu. In Abbildung B.2b wurde beispielsweise $V_0 = V_{-2} \oplus U_{-4}^4 \oplus U_{-4}^5 \oplus U_{-3}^3 \oplus U_{-3}^4 \oplus U_{-3}^5 \oplus U_{-2}^3$ gewählt.

Anhang C

Stochastische Prozesse

In Abschnitt (6.1.3) hatten wir die Markov-Prozesse eingeführt, d.h. stochastische Prozesse, welche die Markov-Eigenschaft (6.14) erfüllen. Ist die Ordnung des Prozesses gerade $q = 1$ gilt somit

$$P(x_n, t_n | x_{n-1}, t_{n-1}; \dots; x_1, t_1) = P(x_n, t_n | x_{n-1}, t_{n-1}). \quad (\text{C.1})$$

Wir wollen in diesem Abschnitt einige nützliche Eigenschaften der Markov-Prozesse vorstellen. Betrachten wir zunächst die Wahrscheinlichkeit, daß ein Zustand x_n zum Zeitpunkt $t = t_n$ auftritt, so läßt sich dieser einfach aus der gemeinsamen Wahrscheinlichkeit bestimmen:

$$P(x_1, t_1) = \int_{\mathbb{R}} dx_2 P(x_1, t_1; x_2, t_2) \int_{\mathbb{R}} dx_2 P(x_1, t_1 | x_2, t_2) P(x_2, t_2). \quad (\text{C.2})$$

Analog läßt sich für eine bedingte Wahrscheinlichkeit die Beziehung

$$\begin{aligned} P(x_1, t_1 | x_3, t_3) &= \int_{\mathbb{R}} dx_2 P(x_1, t_1; x_2, t_2 | x_3, t_3) \\ &= \int_{\mathbb{R}} dx_2 P(x_1, t_1 | x_2, t_2; x_3, t_3) P(x_2, t_2 | x_3, t_3) \end{aligned} \quad (\text{C.3})$$

finden. Verwenden wir nun die Markov-Eigenschaft (C.1), so erhalten wir die sog. *Chapman-Kolmogorov-Gleichung*:

$$P(x_1, t_1 | x_3, t_3) = \int_{\mathbb{R}} dx_2 P(x_1, t_1 | x_2, t_2) P(x_2, t_2 | x_3, t_3). \quad (\text{C.4})$$

Für die Chapman-Kolmogorov-Gleichung existiert auch eine differentielle Form:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} p(z, t | y, t') &= - \sum_i \frac{\partial}{\partial z_i} \left(A_i(z, t) p(z, t | y, t') \right) \\ &+ \sum_{i,j} \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial z_i \partial z_j} \left(B_{ij}(z, t) p(z, t | y, t') \right) \\ &+ \int dx \left(W(z|x, t) p(x, t | y, t') - W(x|z, t) p(z, t | y, t') \right). \end{aligned} \quad (\text{C.5})$$

Die Lösungen der Chapman-Kolmogorov-Gleichung sind i.a. schwierig zu bestimmen. Die Anfangsbedingung für diese partielle Differentialgleichung lautet $p(z, t | y, t) = \delta(y - z)$. Es gibt allerdings drei Spezialfälle dieser Gleichung, die bestimmte Phänomene beschreiben.

Betrachten wir zunächst den Fall, daß die Koeffizienten $A_i(z, t) = B_{ij}(z, t) = 0$ sind, dann erhalten wir die sog. Mastergleichung, welche Sprungprozesse beschreibt:

$$\frac{\partial}{\partial t} p(z, t|y, t') = \int dx \left(W(z|x, t)p(x, t|y, t') - W(x|z, t)p(z, t|y, t') \right). \quad (\text{C.6})$$

Im zweiten Fall sei die bedingte Wahrscheinlichkeit $W(z|x, t)$ Null für alle Argumente, so daß wir einen Diffusionsprozeß erhalten, der durch die *Fokker-Planck-Gleichung* beschrieben wird:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} p(z, t|y, t') = & - \sum_i \frac{\partial}{\partial z_i} \left(A_i(z, t)p(z, t|y, t') \right) \\ & + \sum_{i,j} \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial z_i \partial z_j} \left(B_{ij}(z, t)p(z, t|y, t') \right). \end{aligned} \quad (\text{C.7})$$

Gehen wir hier weiterhin davon aus, daß der Diffusionskoeffizient B_{ij} verschwindet, gelangen wir zur Liouville-Gleichung:

$$\frac{\partial}{\partial t} p(z, t|y, t') = - \sum_i \frac{\partial}{\partial z_i} \left(A_i(z, t)p(z, t|y, t') \right). \quad (\text{C.8})$$

Die Liouville-Gleichung ist aus der klassischen Mechanik bekannt und beschreibt rein-deterministische Systeme. Ist $x(y, t)$ eine Lösung der Gleichung

$$\frac{dx_i(t)}{dt} = A_i(x(t), t) \quad (\text{C.9})$$

mit $x(y, t') = y$, so löst die bedingte Wahrscheinlichkeit

$$p(z, t|y, t') = \delta(z - x(y, t))$$

die Liouville-Gleichung.

Literaturverzeichnis

- [ABBM99] ABALLE, A.; BETHENCOURT, M.; BOTANA, F.; MARCOS, M.: Monitoring of different corrosion types through the application of wavelet transform to current noise records. In: *Revista de Metallurgica* 35 (1999), Nr. 6, S. 384–391
- [ABST93] ABARBANEL, H. D.; BROWN, R.; SIDOROWICH, J. J.; TSIMRING, L. S.: The analysis of observed chaotic data in physical systems. In: *Rev. Mod. Phys.* 65 (1993), Nr. 4, S. 1331–1392
- [ACE+87] AUERBACH, D.; CVITANOVIĆ, P.; ECKMANN, J.-P.; GUNARATNE, G.; PROCACCIA, I.: Exploring chaotic motion through periodic orbits. In: *Phys. Rev. Lett.* 58 (1987), Nr. 23, S. 2387–2389
- [AM78] ABRAHAM, R.; MARSDEN, J. E.: *Foundations of mechanics*. 2. Aufl. Addison-Wesley, 1978
- [Arn99] ARNOLD, L.: *Random dynamical systems*. Springer-Verlag, 1999
- [Bau91] BAUER, H.: *Wahrscheinlichkeitstheorie*. 4. Aufl. de Gruyter-Verlag, 1991
- [BC96] BROWN, R.; CHUA, L. O.: Clarifying chaos: Examples and counterexamples. In: *Int. J. Bifurcation and Chaos* 6 (1996), Nr. 2, S. 219–249
- [BC99] BROWN, R.; CHUA, L. O.: Clarifying chaos III: Chaotic and stochastic processes, chaotic resonance, and number theory. In: *Int. J. Bifurcation and Chaos* 9 (1999), Nr. 5, S. 785–803
- [BE86] BOLTJANSKIJ, V.; EFREMOVIC, V.: *Anschauliche kombinatorische Topologie*. Vieweg, 1986
- [Bec96] BECKMANN, P.: *Theoretische Grundlagen nichtlinearer Dynamik dissipativer Systeme*. Universität Mainz, 1996 (Vorlesung SS 1996)
- [Bec99] BECKMANN, P.: Some aspects of nonlinear dynamics for perspective users. In: *Investigation of nonlinear dynamic effects in production systems*, Aditec Aachen, 1999 (2. Int. Symposium VW-Stiftung)
- [BH92] BORLAND, L.; HAKEN, H.: Unbiased determination of forces causing observed processes. In: *Z. Phys. B* 88 (1992), S. 95–103
- [Bor97] BORLAND, L.: Detecting structure in noise. In: CUTLER, C. (Hrsg.); KAPLAN, D. (Hrsg.): *Nonlinear Dynamics and Time Series* Bd. 11. American Math. Soc., 1997, S. 187–199
- [BP92] BREEDEN, J.; PACKARD, N. H.: Nonlinear analysis of data sampled nonuniformly in time. In: *Physica D* 58 (1992), S. 273–283

- [Bre93] BREDON, G.: *Topology and geometry*. Springer-Verlag, 1993
- [BW83] BIRMAN, J.; WILLIAMS, R.: Knotted periodic orbits in dynamical systems, I: Lorenz's equations. In: *Topology* 22 (1983), Nr. 1, S. 47–82
- [Cas89] CASDAGLI, M.: Nonlinear prediction of chaotic time series. In: *Physica D* 35 (1989), S. 335–356
- [Cas97] CASDAGLI, M.: Recurrence plot revisited. In: *Physica D* 108 (1997), S. 12–44
- [CB97] COCA, D.; BILLINGS, S.: Continuous-time system identification for linear and nonlinear systems using wavelet decomposition. In: *Int. J. Bifurcation and Chaos* 7 (1997), Nr. 1, S. 87–96
- [CDS95] CHEN, S.; DONOHO, D.; SAUNDERS, M. *Atomic decomposition by basis pursuit*. <http://www-stat.stanford.edu/~donoho/Reports/1995/30401.ps>. 1995
- [CEFG91] CASDAGLI, M.; EUBANK, S.; FARMER, J. D.; GIBSON, J.: State space reconstruction in the presence of noise. In: *Physica D* 51 (1991), S. 52–98
- [CG97] CHEN, S.; GÉRADIN, M.: An exact model reduction procedure for mechanical systems. In: *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.* 143 (1997), S. 69–78
- [CH68] COURANT, R.; HILBERT, D.: *Methoden der Mathematischen Physik I*. 3. Aufl. Springer-Verlag, 1968 (Heidelberger Taschenbücher 30)
- [Chu92] CHUI, C.: *An introduction to wavelets*. Academic Press, 1992 (Wavelet Analysis and its Applications 1)
- [CONG94] CHIN, W.; OTT, E.; NUSSE, H.; GREBOGI, C.: Grazing bifurcation in impact oscillators. In: *Phys. Rev. E* 50 (1994), Nr. 6, S. 4427–4444
- [Cra91] CRAWFORD, J.: Introduction to bifurcation theory. In: *Rev. Mod. Phys.* 63 (1991), Nr. 4, S. 991–1037
- [Cru91] CRUTCHFIELD, J. P.: Knowledge and meaning: Chaos and Complexity. In: LAM, L. (Hrsg.); NARODITSKY, V. (Hrsg.): *Modeling complex phenomena*. Springer-Verlag, 1991, S. 67–101
- [Czi96] CZICHOS, H. (Hrsg.): *Hütte – Die Grundlagen der Ingenieurwissenschaften*. 30. Aufl. Springer-Verlag, 1996
- [Dau92] DAUBECHIES, I.: *Ten lectures on wavelets*. Capital City Press, 1992
- [Dev89] DEVANEY, R.: *An introduction to chaotic dynamical systems*. Addison-Wesley, 1989
- [DHS98] DORFMÜLLER, T.; HERING, W.; STIERSTEDT, K.: *Bergmann/Schäfer – Lehrbuch der Experimentalphysik*. Bd. 1: Mechanik, Relativität, Wärme. 11. Aufl. de Gruyter-Verlag, 1998
- [Die91] TOM DIECK, T.: *Topologie*. de Gruyter-Verlag, 1991
- [DJ92] DONOHO, D.; JOHNSTONE, I.: Minimax estimation via wavelet shrinkage. In: *Technical Report, Stanford University* (1992)

- [DKFC98] DAW, C.; KENNEL, M.; FINNEY, C.; CONNOLLY, F.: Observing and modelling nonlinear dynamics in an internal combustion engine. In: *Phys. Rev. E* 57 (1998), Nr. 3, S. 2811–2819
- [Don92a] DONOHO, D.: Denoising via soft thresholding. In: *Technical Report, Stanford University* (1992)
- [Don92b] DONOHO, D.: Wavelet shrinkage and w.v.d. – A ten-minute tour. In: MEYER, Y. (Hrsg.); ROQUES, S. (Hrsg.): *Progress in wavelet analysis and application*. 1992 (Proceeding of the International Conference „Wavelets and Application“)
- [Doo42] DOOB, J.: The Brownian movement and stochastic equations. In: *Annals of Mathematics* 43 (1942), Nr. 2, S. 351–369
- [DVDD98] DONOHO, D.; VETTERLI, M.; DEVORE, R.; DAUBECHIES, I.: Data compression and harmonic analysis. In: *preprint* (1998)
- [Eck81] ECKMANN, J.-P.: Roads to turbulences in dissipative dynamical systems. In: *Rev. Mod. Phys.* 53 (1981), Nr. 4, S. 643–654
- [Eck87] ECKMANN, J.-P.: Recurrence plots of dynamical systems. In: *Europhys. Lett.* 4 (1987), Nr. 9, S. 973–977
- [ER85] ECKMANN, J.-P.; RUELLE, D.: Ergodic theory of chaos and strange attractors. In: *Rev. Mod. Phys.* 57 (1985), Nr. 3, S. 617–656
- [ER92] ECKMANN, J.-P.; RUELLE, D.: Fundamental limitations for estimating dimensions and Lyapunov exponents in dynamical systems. In: *Physica D* 56 (1992), S. 185–187
- [FD93] FRASER, A.; DIMITRIADIS, A.: Forecasting probability densities by using hidden Markov models with mixed states. In: WEIGEND, A. (Hrsg.); GERSHENFELD, N. (Hrsg.): *Time series prediction: Forecasting the future and understanding the past*. Addison-Wesley, 1993, S. 265–282
- [FS86] FRASER, A.; SWINNEY, H.: Independent coordinates for strange attractors from mutual information. In: *Phys. Rev. A* 33 (1986), Nr. 2, S. 1134–1211
- [GBB95] GALVANETTO, U.; BISHOP, S.; BRISEGHIELLA, L.: Mechanical stick-slip vibrations. In: *Int. J. Bifurcation and Chaos* 5 (1995), Nr. 3, S. 637–651
- [GH83] GUCKENHEIMER, J.; HOLMES, P.: *Nonlinear oscillations, dynamical systems and bifurcations of vector fields*. Springer-Verlag, 1983 (Applied Mathematical Sciences 42)
- [GP94] GLOCKER, C.; PFEIFFER, F.: Stick-slip phenomena and applications. In: THOMPSON, J. (Hrsg.); BISHOP, S. (Hrsg.): *Nonlinearity and Chaos in Engineering Dynamics*. John Wiley & Sons, 1994 (Fields Inst. Commun.), S. 103–113
- [GSS91] GRASSBERGER, P.; SCHREIBER, T.; SCHAFFRATH, C.: Nonlinear time sequence analysis. In: *Int. J. Bifurcation and Chaos* 1 (1991), Nr. 3, S. 521–547
- [GW99] GRUDZIŃSKI, K.; WEDMAN, S.: Self-excited and chaotic vibrations of machine tool unit sliding on guideways. In: *Investigation of nonlinear dynamic effects in production systems*, Aditec Aachen, 1999 (2. Int. Symposium VW-Stiftung)

- [Hir76] HIRSCH, M.: *Differential topology*. Springer-Verlag, 1976 (Graduate Texts in Mathematics 33)
- [HJ84] HINDMARSH, M.; JEFFERIES, D.: On the motion of the offset impact oscillator. In: *J. Phys. A.* 17 (1984), S. 1791–1803
- [HK91] HALE, J.; KOÇAK, H.: *Dynamics and bifurcations*. Springer-Verlag, 1991 (Texts in Applied Mathematics 3)
- [HKS98] HEGGER, R.; KANTZ, H.; SCHREIBER, T.: Practical implementation of nonlinear time series methods: The TISEAN package. In: <http://xxx.lanl.gov/abs/chao-dyn/9810005> (1998)
- [Hon98] HONERKAMP, J.: *Statistical physics*. Springer-Verlag, 1998
- [HW89] HEIL, C.; WALNUT, D.: Continuous and discrete wavelet transforms. In: *SIAM Review* 31 (1989), Nr. 4, S. 628–666
- [IT97] ISAKSEN, P.; TRUE, H.: On the ultimate transition to chaos in the dynamics of Cooperrider’s bogie. In: *Chaos Solitons Fractals* 8 (1997), Nr. 4, S. 559–581
- [JJM93] JADITZ, T.; JOHNSON, D.; MCCLELLAND, R.: Another look at evidence on the distribution of certain speculative prices. In: *Int. J. Bifurcation and Chaos* 3 (1993), Nr. 3, S. 597–606
- [Jän99] JÄNICH, K.: *Topologie*. 6. Springer-Verlag, 1999
- [JS94] JAWERTH, B.; SWELDENS, W.: An overview of wavelet based multiresolution analyses. In: *SIAM Review* 36 (1994), Nr. 3, S. 377–412
- [JT97] JENSEN, C.; TRUE, H.: On a new route to chaos in railway dynamics. In: *Nonlinear Dynamics* 13 (1997), S. 117–129
- [Kam81] VAN KAMPEN, N. G.: *Stochastic processes in physics and chemistry*. North Holland, 1981
- [Kau93] KAUFFMAN, L.: *Knots and physics*. 2. World Scientific, 1993
- [KP92] KLÖDEN, P. E.; PLATEN, E.: *Numerical solution of stochastic differential equations*. Springer-Verlag, 1992 (Applications of Mathematics 23)
- [Kre91] KRENGEL, U.: *Einführung in die Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik*. 3. Aufl. Vieweg, 1991
- [KS97] KANTZ, H.; SCHREIBER, T.: *Nonlinear time series analysis*. Cambridge University Press, 1997 (Cambridge Nonlinear Science Series 7)
- [LG99] LAI, Y.-C.; GREBOGI, C.: Modeling of coupled chaotic oscillators. In: *Phys. Rev. Lett.* 82 (1999), Nr. 24, S. 4803–4806
- [LLWG99] LAI, Y.-C.; LERNER, D.; WILLIAMS, K.; GREBOGI, C.: Unstable dimension variability in coupled chaotic systems. In: *Phys. Rev. E* 60 (1999), Nr. 5, S. 5445–5454
- [Mai98] MAIER, T.: *Datenanalyse durch Einbettung endlicher Datenreihen*, Universität Mainz, Diplomarbeit, 1998

- [Mal89] MALLAT, S.: Multiresolution approximations and wavelet orthonormal bases of $L^2(\mathbb{R})$. In: *Trans. Am. Math. Soc.* 315 (1989), S. 69–87
- [Mee91] MEES, A.: Dynamical systems and tessellations: detecting determinism in data. In: *Int. J. Bifurcation and Chaos* 1 (1991), Nr. 4, S. 777–794
- [Mey92] MEYER, Y.: *Wavelets and operators*. Cambridge University Press, 1992 (Cambridge Studies in Advanced Mathematics 37)
- [MG92] MINDLIN, G.; GILMORE, R.: Topological analysis and synthesis of chaotic time series. In: *Physica D* 58 (1992), S. 229–242
- [MKS⁺00] MIYANO, T.; KIMOTO, S.; SHIBUTA, H.; NAKASHIMA, K.; IKENAGA, Y.; AIHARA, K.: Time series analysis and prediction on complex dynamical behavior observed in a blast furnace. In: *Physica D* 135 (2000), Nr. 3-4, S. 305–330
- [Mül95] MÜLLER, M.: *Untersuchung zur Struktur des Goldbeterattraktors*, Universität Mainz, Diplomarbeit, 1995
- [MMHB93] MULDOON, M.; MACKAY, R.; HUKU, J.; BROOMHEAD, D.: Topology from time series. In: *Physica D* 65 (1993), S. 1–16
- [Moo87] MOON, F.: *Chaotic Vibrations*. John Wiley & Sons, 1987
- [MS95] MINDLIN, G.; SOLARI, H.: Topologically inequivalent embeddings. In: *Phys. Rev. E* 52 (1995), Nr. 2, S. 1497–1502
- [MT93] MCROBIE, F.; THOMPSON, J.: Braids and knots in driven oscillators. In: *Int. J. Bifurcation and Chaos* 3 (1993), Nr. 6, S. 1343–1361
- [Nak90] NAKAHARA, M.: *Geometry, topology and physics*. Adam Hilger, 1990 (Graduate student series in physics)
- [NM79] NAYFEH, A. H.; MOOK, D.: *Nonlinear oscillations*. John Wiley & Sons, 1979
- [Noa92] NOAKES, L.: Densities and dynamics. In: *Int. J. Bifurcation and Chaos* 2 (1992), Nr. 2, S. 371–381
- [Ott93] OTT, E.: *Chaos in dynamical systems*. Cambridge University Press, 1993
- [PK90] PFEIFFER, F.; KUNERT, A.: Rattling models from deterministic to stochastic processes. In: *Nonlinear Dynamics* (1990), Nr. 1, S. 63–74
- [Pri81] PRIESTLEY, M. B.: *Spectral analysis and time series*. Academic Press, 1981
- [PTVF92] PRESS, W. H.; TEUKOLSKY, S. A.; VETTERLING, W. T.; FLANNERY, B. P.: *Numerical recipes in C*. 2. Aufl. Cambridge University Press, 1992
- [RH97] RABINS, M.; HARRIS, C.: The ethics of modelling. In: *Control Eng. Practice* 5 (1997), Nr. 4, S. 519–526
- [Ris89] RISKEN, H.: *The Fokker-Planck equation*. 2. Aufl. Springer-Verlag, 1989 (Springer series in Synergetics 18)
- [Rob98] ROBINSON, J. C.: All possible chaotic dynamics can be approximated in three dimensions. In: *Nonlinearity* 11 (1998), S. 529–545

- [Rue88] RUELLE, D.: *Elements of differentiable dynamics and bifurcation theory*. Academic Press, 1988
- [Sch99] SCHMIDT, J. C.: *Aspekte mathematischer Strukturen bei der Modellierung dynamischer Systeme*, Universität Mainz, Dissertation, 1999
- [SG88] SOLARI, H.; GILMORE, R.: Relative rotation rates for driven dynamical systems. In: *Phys. Rev. A* 37 (1988), Nr. 8, S. 3096–3109
- [SH83] SHAW, S.; HOLMES, P.: A periodically forced piecewise linear oscillator. In: *J. Sound Vib.* 90 (1983), Nr. 1, S. 129–155
- [Sim97] SIMON, T.: *Koexistierende Attraktoren im Jeffcott-Modell einer Welle mit Lagerspiel*, Universität Mainz, Diplomarbeit, 1997
- [Sim99] SIMON, T.: *Beiträge zur Steuerung und Analyse von technischen Bearbeitungssystemen mit Methoden der Nichtlinearen Zeitreihenanalyse*, Universität Mainz, Dissertation, 1999
- [SS96] SWELDENS, W.; SCHRÖDER, P.: Building your own wavelets at home. In: *Wavelets in computer graphics*. ACM SIGGRAPH Course Notes, 1996, S. 15–87
- [Str89] STRANG, G.: Wavelets and dilation equations: A brief introduction. In: *SIAM Review* 31 (1989), Nr. 4, S. 614–627
- [SV95] DE SOUSA VIEIRA, M.: Chaos in a simple spring-block system. In: *Phys. Lett. A* 198 (1995), S. 407–414
- [SYC91] SAUER, T.; YORKE, J.; CASDAGLI, M.: Embedology. In: *J. Stat. Phys.* 65 (1991), Nr. 3/4, S. 579–616
- [TA18] THIESSEN, A.; ALTER, J.: Precipitation average for large areas. In: *Monthly Weather Review* 39 (1918), S. 1082–1084
- [TEL⁺92] THEILER, J.; EUBANK, S.; LONGTIN, A.; GALDRIKIAN, B.; FARMER, J. D.: Testing for nonlinearity in time series: The method of surrogate data. In: *Physica D* 58 (1992), S. 77–94
- [TK97] TIMMER, J.; KLEIN, S.: Testing the Markov condition in ion channel recordings. In: *Phys. Rev. E* 55 (1997), Nr. 3, S. 3306–3311
- [Ton90] TONG, H.: *Non-linear time series*. Oxford University Press, 1990 (Oxford Statistical Science Series)
- [WHB⁺97a] WECK, M.; HILBING, R.; BECKMANN, P.; MICHEL, C.; SIMON, T.: Analyse dynamischer Störungen in Präzisionsmaschinen auf Basis nichtlinearer Verfahren. In: *Untersuchung nichtlinear-dynamischer Effekte in produktionstechnischen Systemen*. Bremen: IFA Hannover, 1997 (1. Symposium VW-Stiftung)
- [WHB⁺97b] WECK, M.; HILBING, R.; BECKMANN, P.; MICHEL, C.; SIMON, T.: Analyse dynamischer Störungen in Präzisionsmaschinen auf Basis nichtlinearer Verfahren. In: HOFFSCHULZ, H. (Hrsg.): *Zeitreihenanalyse (Workshop)*. Düsseldorf: VDI-Technologiezentrum Physikalische Technologien, 1997, S. 13–16

- [WHB⁺99] WECK, M.; HILBING, R.; BECKMANN, P.; MICHEL, C.; SIMON, T.: Analysis and compensation of vibrations between tool and workpiece with nonlinear methods. In: *Investigation of nonlinear dynamic effects in production systems*, Aditec Aachen, 1999 (2. Int. Symposium VW-Stiftung)
- [Whi40] WHITEHEAD, J.: On C^1 -complexes. In: *Annals of Mathematics* (1940), Nr. 41, S. 809–824
- [WSK⁺97] WARNECKE, G.; SCHRÖTER, C.; KLUGE, R.; BECKMANN, P.; MICHEL, C.; SIMON, T.: Erhöhung der Prozeßsicherheit beim Feindreihen durch Nichtlineare Analyse von Körperschallsignalen. In: *Untersuchung nichtlinear-dynamischer Effekte in produktionstechnischen Systemen*. Bremen: IFA Hannover, 1997 (1. Symposium VW-Stiftung)
- [XK94] XU, H.-J.; KNOPOFF, L.: Periodicity and chaos in a one-dimensional dynamical model of earthquakes. In: *Phys. Rev. E* 50 (1994), S. 3577ff

Danksagung

An dieser Stelle möchte ich mich ganz herzlich bei Herrn Prof. Dr. P. B. für die Themenstellung, die engagierte und intensive Betreuung sowie die vielen Diskussionen, insbesondere im Zusammenhang mit dem Abschlußbericht für das VW-Stiftungsprojekt, bedanken, die für den Fortgang dieser Arbeit unverzichtbar waren.

Für die finanzielle Unterstützung während der vergangenen drei Jahre und die Möglichkeit, an einem interessanten interdisziplinären Projekt mitarbeiten zu dürfen, schulde ich der VW-Stiftung besonderen Dank.