

Eulers Horizonte –  
Möglichkeiten und Grenzen seiner Arbeitsweise in  
der Mathematik

Eine Dissertation zur Erlangung des Grades  
“Doktor der Naturwissenschaften”  
am Fachbereich Physik, Mathematik und  
Informatik  
der Johannes–Gutenberg Universität  
in Mainz

verfasst von Alexander Aycock  
geboren am 18.09.1989 in Neumünster,  
eingereicht in Mainz, den 10.3.25.

*“Repetitio cognitorum est fortuna ignorantium.”*

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Geleitwort</b>	<b>10</b>
<b>2</b>	<b>Einleitung</b>	<b>15</b>
2.1	Abfassungen über Euler und sein Opus . . . . .	15
2.1.1	Übersicht über Arbeiten über Euler . . . . .	16
2.2	Aufbau dieser Arbeit . . . . .	17
2.3	Zielsetzung dieser Arbeit . . . . .	20
<b>3</b>	<b>Eulers Ansicht zur Mathematik</b>	<b>21</b>
3.1	Eulers Mathematikphilosophie . . . . .	21
3.1.1	Eulers Auffassung zum Wesen der Mathematik . . . . .	21
3.1.2	Eulers Auffassung der Analysis . . . . .	23
3.1.3	Die Rolle der Definition in der Mathematik bei Euler . . . . .	26
3.1.4	Eulers Auffassung eines Beweises . . . . .	28
3.1.5	Beweistechnik der Induktion bei Euler . . . . .	36
3.1.6	Eulers Ansicht zur Physik . . . . .	41
3.2	Abriss von Eulers Vorgehensweise . . . . .	44
3.2.1	Leitfäden der Arbeitsweise . . . . .	44
3.2.2	Besonderheiten des Präsentationstils . . . . .	54
<b>4</b>	<b>Eine Illustration von Eulers Arbeitsweise anhand ausgewählter Beispiele</b>	<b>66</b>
4.1	Die Lösung des Baseler Problems . . . . .	66
4.1.1	Transformation der Reihe . . . . .	67
4.1.2	Ermittlung des exakten Wertes – mit formalen Methoden . . . . .	70
4.1.3	Ein strengerer Beweis . . . . .	71
4.1.4	Ein moderner Beweis . . . . .	74
4.1.5	Zusammenfassung zum Baselproblem . . . . .	77
4.2	Ein richtiges Ergebnis mit unzulässiger Herleitung . . . . .	81
4.2.1	Differentialgleichungen unendlicher Ordnung: Der homogene Fall . . . . .	81
4.2.2	Der inhomogene Fall . . . . .	85
4.3	Euler und inhomogene Differenzgleichungen mit konstanten Koeffizienten . . . . .	90
4.3.1	Eulers Lösung der einfachen Differenzgleichung . . . . .	90
4.3.2	Ein Nebenergebnis: Ein unendliches Produkt . . . . .	93
4.3.3	Stirling'sche Formel nach Euler . . . . .	95

4.3.4	Ein Fehlschluss von Euler . . . . .	99
<b>5</b>	<b>Von Euler vorweggenommene Entdeckungen</b>	<b>105</b>
5.1	Von seinen Nachfolgern übersehene Entdeckungen . . . . .	106
5.1.1	Die Fourierkoeffizienten . . . . .	106
5.1.2	Produktdarstellung für die Gamma-Funktion . . . . .	109
5.2	Von Euler in anderer Gestalt Bewiesenes . . . . .	110
5.2.1	Die Form betreffend: Die Multiplikationsformel für die Gammafunktion . . . . .	111
5.2.2	Eine andere Intention: Euler und das Weierstraß'sche Produkt . . . . .	116
5.2.3	Eine andere Fragestellung: Die Mellin-Transformierte	121
5.2.4	Den Kontext betreffend: Die Legendre-Polynome . . .	125
5.2.5	Die Darstellung betreffend – Die hypergeometrische Reihe . . . . .	137
<b>6</b>	<b>Von Euler nicht bewiesene Entdeckungen</b>	<b>169</b>
6.1	Von Euler selbst beweisbare Lehrsätze . . . . .	170
6.1.1	Durch Anwendung einer Methode: Seine Konstante $A$	170
6.1.2	Durch Kombinieren von Ergebnissen: Die $\zeta$ -Funktion	174
6.1.3	Durch einen neuen Gedanken: Die $\vartheta$ -Funktion . . . . .	184
6.2	Von Euler nicht beweisbare Entdeckungen . . . . .	190
6.2.1	Wegen fehlender Formulierung: Der Primzahlsatz . . .	191
6.2.2	Wegen fehlender Mittel: Das Reziprozitätsgesetz . . .	195
6.2.3	Wegen nicht zu sehender Unvollständigkeit: Der große Satz von Fermat für $n=3$ . . . . .	201
<b>7</b>	<b>Mathematische Grenzen Eulers</b>	<b>205</b>
7.1	Aus der Begriffsbildung resultierende Grenzen . . . . .	206
7.1.1	Der Begriff der Funktion und damit eng verwandte . .	206
7.1.2	Der Begriff des Grenzwerts und damit verknüpfte Kon- zepte . . . . .	213
7.1.3	Der Begriff der Summe einer Reihe . . . . .	221
7.1.4	Mehrwertige Funktionen: Das fehlende Konzept der Riemann'schen Fläche . . . . .	232
7.2	Durch eine irreleitende Frage . . . . .	239
7.2.1	Die Normalform von elliptischen Integralen . . . . .	240
7.2.2	Wegen Unbeweisbarkeit: Auflösbarkeit von polynomia- len Gleichungen mit Radikalen . . . . .	250
7.3	Grenzen durch den eigenen Arbeitsethos . . . . .	264

7.3.1	Eulers Nichtentdeckung der komplexen Analysis . . .	265
7.3.2	Methodus Inveniendi über Methodus Demonstrandi .	270
7.3.3	Praxis über Abstraktion . . . . .	282
<b>8</b>	<b>Herleitungen aus Eulers Formeln und Ideen</b>	<b>295</b>
8.1	Unmittelbare Korollare aus den vorgestellten Euler'schen Formeln . . . . .	295
8.1.1	Herleitung Formel für die Potenzsummen der Reziproken	296
8.1.2	Explizite Formeln aus Eulers Theorie zu Differenzengleichungen . . . . .	298
8.1.3	Weitere Untersuchungen zu den Legendre–Polynomen	313
8.2	Mit Eulers Ideen zu Formeln von Ramanujan . . . . .	320
8.2.1	Ein bestimmtes Integral von Ramanujan . . . . .	320
8.2.2	Ramanujans Mastertheorem . . . . .	328
8.2.3	Ramanujans Formeln zur Kreisquadratur . . . . .	331
<b>9</b>	<b>Zusammenfassung</b>	<b>338</b>
9.1	Grundlegendes . . . . .	338
9.2	Grenzen Eulers . . . . .	339
9.3	Diskussion der Euler'schen Arbeitsweise . . . . .	341
<b>10</b>	<b>Danksagung</b>	<b>343</b>

## Abbildungsverzeichnis

1	Eulers Figur zum Königsberger Brückenproblem aus [EulerE53]. Die Aufgabe besteht im Überschreiten jeder der sieben Brücken (mit Kleinbuchstaben gekennzeichnet), ohne eine von ihnen doppelt zu passieren. Euler zeigt im Verlauf die Unmöglichkeit dieser Aufgabe auf. . . . .	26
2	Eulers Beginn des Beweises kleinen Satzes von Fermat mittels vollständiger Induktion nach natürlichen Zahl $a$ aus seiner Arbeit [EulerE54]. . . . .	40
3	Das Titelblatt von Eulers Buch zur Varitionsrechnung [EulerE65] als Pars Pro Toto für die von ihm bevorzugte <i>Methodus inveniendi</i> . . . . .	47
4	Euler gibt die Euler-Maclaurin'sche Summenformel in [EulerE130] an. Zu sehen ist ganz oben die allgemeine Formel für eine Summe $S$ bis hin zu $n$ Termen summiert über den allgemeinen Term $X$ . Am unteren Rand sind noch die ersten Entwicklungskoeffizienten $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon$ zu erkennen. . . . .	48
5	Eulers Herleitung von Ausdrücken für Logarithmen einer komplexen Zahl mithilfe von Differentialformen aus seiner Arbeit [EulerE170]. Euler schreibt hier, wie zumeist, für den natürlichen Logarithmus nur den Formelbuchstaben $l$ . . . . .	52
6	Die Integralfamilie von Interesse aus Eulers Arbeit [EulerE673]. Die angenommene Differenzengleichung mit zu bestimmenden Koeffizienten $\alpha$ und $\beta$ ist unten zu sehen. . . . .	56
7	Euler nutzt in seiner Arbeit [EulerE19] die zuvor eruierte Interpolation der Fakultät zur Definition von gebrochenen Ableitungen. Die Integrale sind alle von $x = 0$ bis zu $x = 1$ erstreckt. . . . .	58
8	Der Beginn von Eulers Herleitung des Sinusproduktes aus der Zerlegung des Binoms $a^n - b^n$ in lauter trinomische Faktoren in seiner Arbeit [EulerE61]. . . . .	73
9	Euler leitet in seiner Arbeit [EulerE63] aus einem Potenzreihenansatz die Potenzreihe für $\arcsin^2(x)$ her. . . . .	77
10	Eulers Auflistung der Lösung der allgemeinen inhomogenen gewöhnlichen Differentialgleichung aus seiner Arbeit [EulerE188] geordnet nach Vielfachheit der Nullstellen des charakteristischen Polynoms. . . . .	88
11	Euler formuliert das Problem zur Lösung der einfachen Differenzengleichung in [EulerE189]. . . . .	91

12	Eulers erklärt die Produktentwicklung von $e^x - 1$ aus § 20 von seiner Arbeit [EulerE189]. $n$ und $m$ versteht Euler hier als unendlich große Zahlen. . . . .	94
13	Eulers (unrichtige) Version der Stirling'schen Formel aus seiner Arbeit [EulerE189] abgeleitet aus der Differenzgleichung der Fakultät. . . . .	98
14	Eulers Ausdruck der Lösung der Gleichung $y(x + 1) = y(x)$ aus § 13 seiner Arbeit [EulerE189], welcher die allgemeine Fourierentwicklung einer periodischen Funktion darstellt. . .	107
15	Euler gelangt in seiner Abhandlung [EulerE704] zur heute immer noch gängigen Form der Fourierkoeffizienten. . . . .	108
16	Euler gibt in seiner Arbeit [EulerE19] die Produktdarstellung der $\Gamma$ -Funktion bzw. der Fakultät. . . . .	110
17	Eulers Version der Multiplikationsformel für die $\Gamma$ -Funktion aus seiner Arbeit [EulerE421] mit von ihm eigens eingeführten Symbolen. . . . .	112
18	Euler gelangt in [EulerE212] zur Potenzreihe der $\psi$ -Funktion. Die Euler-Mascheroni-Konstante $\gamma$ ist hierbei für die ersten Stellen ausgeschrieben. . . . .	118
19	Euler erklärt in seiner Arbeit [EulerE613] die Interpolation von Produktformeln. . . . .	119
20	Euler erklärt in seiner Arbeit [EulerE123] die Verwendung einer Differenzgleichung zur Bildung von Kettenbrüchen. .	122
21	Euler leitet in seiner Arbeit [EulerE594] die bekannte Integraldarstellung der $\Gamma$ -Funktion aus seiner Theorie der Differenzgleichungen her. . . . .	125
22	Euler gelangt in seiner Arbeit [EulerE606] zur Darstellung der Legendre-Polynome mithilfe von Integralen. In der ersten Zeile ist die Differenzgleichung für die Legendre-Polynome zu sehen. . . . .	132
23	Euler gelangt in seiner Arbeit [EulerE551] zur erzeugenden Funktion der Legendre-Polynome. . . . .	135
24	Euler führt die hypergeometrische Reihe in seiner Arbeit [EulerE710] ein. Euler verwendet dabei das Symbol $\Pi$ , um den gesamten vorausgehenden Zahlenkoeffizienten der vorausgehenden Potenz anzuzeigen. . . . .	138
25	Euler gelangt in seiner Arbeit [EulerE710] zur Differentialgleichung für die hypergeometrische Funktion. . . . .	144

26	Legendre gibt in seinem Buch [Legendre2] die nach ihm benannte Relation für die elliptischen Integrale für die speziellen Werte $b = \frac{1}{2}\sqrt{2 + \sqrt{3}}$ und $c = \frac{1}{2}\sqrt{2 - \sqrt{3}}$ an. . . . .	146
27	Euler gelangt in seiner Arbeit [EulerE19] durch Grenzwertbildung zur Integraldarstellung der $\Gamma$ -Funktion. . . . .	150
28	Euler gibt in seiner Arbeit [EulerE464] ein Frulliani'sches Integral an. Die Grenzen der Integration sind $z = 0$ , was Euler nicht explizit erwähnt, und $z = 1$ für die obere Grenze. . . . .	152
29	Eulers Erläuterung der Wahl der Funktion $P$ zur Erfüllung einer vorgelegten Differentialgleichung mit dem Ausdruck $\int P dx (u+x)^n$ aus seiner Arbeit [EulerE274]. . . . .	156
30	Euler gelangt in den Ausführungen seines Lehrbuchs zur Integralrechnung [EulerE366] zu einer Integraldarstellung einer Funktion, welche derjenigen der hypergeometrischen Reihe (84) sehr ähnlich ist. . . . .	158
31	Euler stellt in seiner Arbeit [EulerE123] den Quotienten von zwei hypergeometrischen Funktionen, hier ausgedrückt über Integrale, als Kettenbruch dar. . . . .	160
32	Eulers Formel, welche der Gauß'schen Summationsformel (89) gleichwertig ist, aus seiner Arbeit [EulerE663]. Das Symbol $\binom{a}{b}$ bezeichnet bei Euler hier den Binomalkoeffizienten $\binom{a}{b}$ . Weiter benutzt Euler hier das Integralzeichen $\int$ statt $\sum$ , um eine Summe anzuzeigen. . . . .	164
33	Euler konstruiert in seiner Arbeit [EulerE70] eine Differentialgleichung für einen Spezialfall der konfluenten hypergeometrischen Funktion. . . . .	167
34	Euler gibt in seiner Arbeit [EulerE522] den Kettenbruch für zwei konsekutive konfluente konfluente hypergeometrische Reihe an. Hier ist in moderner Notation $A = \int_0^1 x^{\delta-1} dx e^{\alpha x} (1-x)^{\lambda-1}$ und $B = \int_0^1 x^{\delta} dx e^{\alpha x} (1-x)^{\lambda-1}$ . . . . .	169
35	Euler leitet in seiner Arbeit [EulerE661] die Asymptotik seiner verallgemeinerten Fakultät her. . . . .	171
36	Euler gibt in seiner Arbeit [EulerE352] die Werte einiger divergenten Reihen an. Die Zahlen $A, B, C, D, E$ etc. sind die Bernoulli-Zahlen. . . . .	177
37	Euler gibt in der Arbeit [EulerE592] die Partialbruchzerlegung der Funktion $\frac{\varphi}{\sin(\varphi)}$ an. . . . .	178

38	Poission gelangt in seiner Arbeit [Poisson] zur Funktionalgleichung für die Thetafunktion (122). Es ist Gleichung (15) in seiner Arbeit. . . . .	182
39	Euler formuliert in seiner Arbeit [EulerE352] die Funktionalgleichung für die heute sogenannte Dirichlet'sche $\beta$ -Funktion, definiert über (123), als Vermutung und gleichzeitig als Theorem. . . . .	183
40	Euler stellt in seiner <i>Introductio</i> [EulerE101] den binomischen Lehrsatz und die Binomalreihe vor. . . . .	186
41	Euler spricht in seiner Arbeit [EulerE541] den Pentagonalzählensatz aus. . . . .	189
42	Euler formuliert das Euler-Produkt für die harmonische Reihe. Hier ist die Version von [EulerE101] zu sehen. . . . .	192
43	Euler formuliert im letzten Paragraphen seiner Arbeit [EulerE552] seine Version des quadratischen Reziprozitätsgesetzes und räumt ein, dass er es nicht beweisen kann. . . . .	198
44	Legendre formuliert in seinem Buch [Legendre1] das quadratische Reziprozitätsgesetz. . . . .	199
45	Euler formuliert in seiner <i>Algebra</i> [EulerE387] den großen Satz von Fermat für $n = 3$ . . . . .	202
46	Euler nutzt in [EulerE45] erstmalig die Notation $f(x)$ für eine Funktion von $x$ . . . . .	207
47	Euler gibt in seiner Arbeit [EulerE675] eine allgemeine Formel zur Berechnung vieler Integrale an. . . . .	212
48	Euler leitet in seiner Arbeit [EulerE247] eine Differentialgleichung (und ihre Lösung) zwecks Summierung der divergenten Fakultätenreihe her. . . . .	226
49	Eulers Einteilung der elliptischen Integrale aus § 38 seiner Arbeit [EulerE295] in 12 Klassen. . . . .	246
50	Eulers (mit Latex nachgezeichnete) Figur aus seinem Buch [EulerE65], welche er zur Herleitung von den Euler-Lagrange'schen Differentialgleichung verwendet. . . . .	247
51	Euler Definition des Wortes Variation und des Zeichens $\delta$ für sein Kalkül in seiner Arbeit [EulerE296]. . . . .	249
52	Euler gibt in seiner Arbeit [EulerE644] ein allgemeines Beispiel einer Gleichung vom Grad 6 an, die eine Resolvente vom Grad 5 besitzt. Beim ersten Term in der zweiten Zeile sollte wohl $+6ab(a^3 + aab + abb + b^3)x$ statt nur $+6ab(a^3 + aab + abb + b^3)$ stehen. . . . .	259

53	Eulers Herleitung der Riemann–Cauchy Differentialgleichung aus seiner Arbeit [EulerE694] über die Theorie von Funktionen zweier reeller Variablen. . . . .	267
54	Euler gibt in seiner Arbeit [EulerE368] einige Ausdrücke für den Logarithmus der Fakultät an. . . . .	274
55	Eulers Ansatz aus [EulerE170] zur Zerlegung eines Polynoms vom Grad $2^n$ in zwei vom Grad $2^{n-1}$ . . . . .	280
56	Eulers berühmte Identität für das Produkt von zwei Summanden aus je vier Quadraten aus seiner Arbeit [EulerE242].	287
57	Euler listet seine 65 “Numeri idonei” in der Arbeit [EulerE498] auf. . . . .	288
58	Eulers Tabelle aus [EulerE201] zu den Fehlständen beim Spiel “Rencontre”. . . . .	301

# 1 Geleitwort

Lest EULER - er ist unser aller  
Meister!

---

Pierre-Simon Laplace

Leonhard Euler (1707–1783) war unumstritten einer der produktivsten und vielseitigsten Mathematiker aller Zeiten. Seine gesammelten Werke umfassen mittlerweile 4 Reihen bestehend aus insgesamt 84 Büchern von je 300 bis 700 Seiten, sodass sich sein Opus in Gänze auf ungefähr 30000 beläuft. Reihe 1 ist dabei seinen mathematischen Untersuchungen gewidmet und zählt 30 Bände, Reihe 2 mit 31 Bänden enthält Eulers Untersuchungen zur Physik, die 12 Bände der 3. Reihe haben allgemeine Untersuchungen zum Inhalt. Schließlich ist in der 4. Reihe Eulers wissenschaftlicher Briefwechsel zu finden. Eulers Opus ist demnach nicht nur am reinem Umfang gemessen, sondern auch der Qualität nach beurteilt immens. Die Leistung der Herausgeber seiner gesammelten Werke als *Opera Omnia Leonhardi Euleri* kann demnach kaum überbewertet werden.

Angesichts des gewaltigen Umfangs Euler'schen Werkes mag es jedoch verwundern, dass Klein (1849–1925) auf den Seiten 4–5 über die Darstellung mathematischer Werke im 19. Jahrhundert in seinem Buch *“Vorlesungen über die Entwicklung der Mathematik”* ([Klein], 1956) schreibt :

*“Freilich werden die großen Schönheiten dieser kristallklaren, abgeschlossenen, klassischen Darstellungsweise nicht ohne Einbuße erkaufte. Es ist nämlich diesen Meisterwerken kaum mehr ihre Werdeggeschichte zu entnehmen. Dadurch ist dem Leser die eigentümliche und für einen selbständigen Geist größte Freude versagt, unter der Führung des Meisters die gefundenen Resultate selbstständig gleichsam noch einmal zu entdecken. In diesem Sinne mangelt es den Werken der klassischen Zeit das eigentliche erzieherische Moment. Der Gedanke, den Leser nicht nur zu erfreuen und zu belehren, sondern in ihm über das Werk hinausgehende Kräfte zu wecken, zur eigenen Tätigkeit anzuregen – eine Wirkung, wie sie etwa von Monges, von Jacobis oder auch von Faradays Schriften ausgeht – gehört durchaus dem 19. Jahrhundert an.”*

Das Wundersame ist, dass Leonhard Euler als einer der, wenn nicht gar der führende Mathematiker, was die Erklärungen seiner Entdeckun-

gen betrifft, in obigem Zitat keine Erwähnung findet<sup>1</sup>. Die nicht oder kaum stattfindende Betrachtung des Euler'schen Opus in Büchern zur Mathematikgeschichte ist jedoch kein Einzelfall. Entweder sind die entsprechenden Werke sämtlich Euler gewidmet oder der Euler'sche Beitrag wird in gedrungener Form wiedergeben, um schnellstmöglich zum eigentlichen Gegenstand überzugehen. Nicht zuletzt daran macht man den Paradigmenwechsel in der Mathematik von Euler, der die Mathematik im 18. Jahrhundert entscheidend geprägt hat, zur Moderne aus.

Eulers *Opera Omnia* war die Grundlage der Arbeit des *Euler-Kreis Mainz*<sup>©</sup>, einer Gruppe historisch interessierter Mathematiker und Mathematikerinnen, die sich mit den Schriften und dem Werk Leonhard Eulers beschäftigen. Die Vorträge, Abhandlungen sowie Übersetzungen ausgewählter Euler'scher Arbeiten aus dem Lateinischen und Französischen in die deutsche und englische Sprache sind online<sup>2</sup> zugänglich<sup>3</sup>. Ein Teil derselben Translationen sind auch beim *Euler Archive* unter <http://eulerarchive.maa.org/> von dessen Betreibern veröffentlicht worden. Letzteres hat ebenfalls gescannte Versionen von allen Originalarbeiten Eulers bereitgestellt<sup>4</sup>. Bei der Übersetzungsarbeit im *Euler-Kreis* sind überdies kleinere Entdeckungen gemacht worden, welche anschließend den Inhalt eigener Abhandlungen gebildet haben. Selbige haben auch Eingang in das "*Euleriana Archive*"<sup>5</sup> gefunden. Dabei handelt es sich um ein wissenschaftliches Journal, das Arbeiten von und über Euler gewidmet ist.

Warum jedoch gerade die Beschäftigung mit Euler? Zum einen, weil sich dem auf Seite 235 in der "*Encyclopedia of Mathematics Education*" ([Grinstein], 2001) Gauß (1777–1855) zugeschriebenen Ausspruch

*"The study of Euler's works will remain the best school for the different fields of mathematics and nothing else can replace it."*

auch heute noch beipflichten lässt, was den reinen Inhalt betrifft. Zum

---

<sup>1</sup>Eine Aufklärung dieses Umstandes findet man in einer Fußnote der Herausgeber von Kleins Buch: Nämlich, dass sich die mangelnde Würdigung Eulers von Kleins Seite in der Nichtbeschäftigung des letzteren mit den Werken von erstem begründet liegt.

<sup>2</sup>Der Link zum Euler-Kreis Mainz lautet <https://www.agtz.mathematik.uni-mainz.de/algebraische-geometrie/van-straten/euler-kreis-mainz/>.

<sup>3</sup>Basierend auf den Euler'schen Arbeiten fanden ebenfalls studentische Seminare statt.

<sup>4</sup>Alle Scans von Eulers Arbeiten, die in die vorliegende Abhandlung eingefügt wurden, stammen aus dieser Quelle.

<sup>5</sup>Der Link lautet: <https://scholarlycommons.pacific.edu/euleriana/>.

anderen gestatten Eulers Ausarbeitungen, die Hürden zu erkennen, welche sich beim mathematischen Schaffensprozess auftun, welche Euler in ihn auszeichnender Art auch stets eingeräumt hat. Obschon sich die Mathematik durch ihre geforderte Beweisstrenge auszeichnet, lässt dies doch die Frage offen, wie diese Schlüsse, genauer die Prämissen und die Folgerungen, ursprünglich ausgemacht worden sind. Die Virtuosität Eulers in dieser Tätigkeit in Kombination mit seinen ausführlichen Erläuterungen sucht wohl bis zum heutigen Tage ihresgleichen. Ein Zeugnis von Eulers meisterhaftem Umgang mit Formeln und der Erstellung derselben ist, dass sich viele Ausdrücke, welche die exakte Auswertung von Reihen und Integrale betreffen, bereits bei Euler finden, obschon sie den Namen seiner Nachfolger tragen<sup>6</sup>.

Angesichts dessen mag es schwer zu glauben sein, dass Euler überhaupt an irgendwelche Grenzen stoßen konnte, welche nicht durch seine endliche Lebenszeit begründet waren. Dennoch trägt sich das natürlich zu, dass selbst Euler manche Probleme nicht auflösen konnte. Die Ursachenforschung dessen führt, je nach behandeltem Themenbereich, zu unterschiedlichen Antworten. Allem geht aber die schlichte, wenngleich rückblickend offenkundig anmutende, Feststellung voraus, dass Euler den entsprechenden Lehrsatz, die etwaige Formel oder dergleichen nicht zwingend in derselben Form zu erhärten versucht hat, wie es heutzutage geschähe. Stets ist nämlich zu beachten, dass etwaige heute wohl vertraute Konzepte im 18. Jahrhundert noch gar nicht existierten oder gar eine andere Bedeutung hatten<sup>7</sup>.

Ein Vergleich mit der heutigen Mathematik zeichnet hierneben auch von Euler weniger bis gar nicht berührte Gebiete aus<sup>8</sup>. Was andererseits Abhandlungen *über* Euler betrifft, findet man insbesondere das Thema, was er – aus der modernen Sicht betrachtet – bereits alles vorweg genommen hat und was er selbst aus seinen Entdeckungen heraus noch zu leisten vermocht hätte, kaum diskutiert. Die Aufhebung dieses Umstandes ist eines der Kernanlie-

---

<sup>6</sup>Ein ganzer Abschnitt ist eigens diesem Sachverhalt gewidmet.

<sup>7</sup>Ein prägnantes Beispiel dessen ist das des Begriffs der Funktion. Von Euler in seinem berühmten Lehrbuch *“Introductio in analysin infinitorum, volumen primum”* ([EulerE101], 1748, ges. 1745) (E101: “Einleitung in die Analysis des Unendlichen, erster Band”) gleichsam in die Mathematik eingeführt, ist die Euler’sche Definition einer Funktion nicht mit der verträglich, die man heute in einem Einführungsbuch zur Analysis vorfindet.

<sup>8</sup>Bezüglich der Euler’schen Arbeiten ist hier insbesondere die komplexe Analysis zu nennen, zu welcher Euler freilich wichtige Beiträge geleistet hat, aber nie eine umfassende Theorie vorgestellt hat, wie dies Cauchy (1789–1857) und Riemann (1826–1866) später getan haben.

gen der gegenwärtigen Arbeit.

Unabhängig vom Inhalt, tritt weiter die paradigmatische<sup>9</sup> Struktur der Mathematik hervor, welche sich in unterschiedlicher Gewichtung einiger mathematischer Grundbegriffe zwischen dem 18. Jahrhundert und der Moderne manifestiert. So mutet Eulers zur Auffassung dessen, was einen Beweis darstellt, heute eigentümlich an und seine Argumentationen sind mancherorts zu ergänzen, um den Ansprüchen des heutigen Rigors zu entsprechen<sup>10</sup>. Manche seiner Beweisführungen sind indes nicht zu reparieren, auch wenn sie zu seiner Zeit Akzeptanz gefunden haben.

Die vorliegende Ausarbeitung intendiert, die zuvor erwähnten teils auch anderenorts publizierten und an dieser Stelle erstmals mitgeteilten Funde des *Euler-Kreis Mainz* bezüglich der Euler'schen Werke, gesammelt und möglichst kohärent darzustellen<sup>11</sup>. Dies ließe sich freilich auf vielerlei Art leisten. Jedoch scheint die Orientierung am Euler'schen Gedankengang selbst dem gesteckten Ziel am ehesten zuzukommen, zumal sie unter anderem zum Verständnis von Eulers Kreativität und seiner Schaffenskraft beizutragen

---

<sup>9</sup>In diesem Kontext referiert dies auf die Definition von Thomas Kuhn (1922–1996) in seinem Buch *“The Structure of Scientific Revolutions”* ([Kuhn], 2012).

<sup>10</sup>Hier von werden im Haupttext einige Beispiele auftreten, welche auch korrigiert werden, sofern dies möglich ist.

<sup>11</sup>Folgende bereits veröffentlichte Arbeiten des Verfassers haben Eingang in die vorliegende Arbeit gefunden und bilden wesentliche Bestandteile der entsprechenden Abschnitte: *“On proving some of Ramanujan’s formulas for  $\frac{1}{\pi}$  with an elementary method”* ([Aycock1], 2013) sowie die mit weiteren Autoren veröffentlichte Arbeit *“Proof of some conjectured formulas for  $\frac{1}{\pi}$  by Z. W. Sun”* ([Almkvist], 2011) (Abschnitt 8.2.3), *“Euler and the Legendre Polynomials”* ([Aycock6], 2023) (Abschnitt 5.2.4 und 8.1.3), *“Euler and the Gammafunction”* ([Aycock3], 2021) (Abschnitt 5.2.2 und 5.2.5), *“Answer to a question concerning Euler’s paper *Variae considerationes circa series hypergeometricas*”* ([Aycock5], 2022) und *“Euler and the Duplication Formula for the Gamma-Function”* ([Aycock7], 2021) (Abschnitt 6.1.1), *“Euler and Homogeneous Difference Equations with Linear Coefficients”* ([Aycock9], 2024) (Abschnitt 5.2.3), *“On Euler’s Solution of the Simple Difference Equation”* ([Aycock8], 2023) (Abschnitt 4.3 und 8.1.1), *“Euler and the Gaussian Summation Formula for the Hypergeometric Series”* ([Aycock10], 2024) (Abschnitt 5.2.5), *“Euler and a Proof of the Functional Equation for the Riemann Zeta-Function He Could Have Given”* ([Aycock11], 2024) (Abschnitt 6.1.2).

Hier erstmalig mitgeteilte Entdeckungen sind unter anderem der Vergleich der Beiträge zur Theorie der hypergeometrischen Funktion von Euler und Gauß (Abschnitt 5.2.5), die heuristische Herleitung des Primzahlsatzes aus den Euler'schen Formeln (Abschnitt 6.2.1) sowie die Diskussion der Gründe für die Nichtentdeckung der komplexen Analysis durch Euler (Abschnitt 7.3.1). Weiterhin scheint der Zugang zu Formeln für gewisse Orthogonalpolynome mit Euler'schen Methoden (Abschnitt 8.1.2) bisher in der Literatur nicht behandelt worden zu sein.

vermag. Darum nimmt die Präsentation ihren Ausgangspunkt bei Eulers Ideen zur Mathematik selbst, geht dann zu exemplarischen Auszügen seiner Arbeitsweise über und beleuchtet die Schranken, an die er gestoßen ist (und aus moderner Sicht gesprochen, teilweise stoßen musste), um abschließend Anwendungen seiner Ergebnisse vorzustellen. Eine gewisse Redundanz der behandelten Themen ließ sich dabei nicht gänzlich vermeiden, da – wie auch aufgezeigt werden wird – Euler des Öfteren zu einem behandelten Gegenstand zurückkehrte, um ihn dann mit mittlerweile (meist von ihm selbst bei Behandlung scheinbar unverwandter Fragestellungen) geschaffenen Techniken neu anzugehen. Diese Herangehensweise gestattet des Weiteren ein Urteil darüber, wie weit Eulers Forschungen gereicht haben und wohin sie nicht mehr zu reichen vermochten; eine Frage, die man in der Literatur kaum diskutiert findet.

Um dem Kontext einer historischen motivierten Abhandlung gerecht zu werden, beabsichtigt der Stil der vorliegenden Abhandlung, die Euler'sche Schaffensweise möglichst getreu nachzuzeichnen und folgt entsprechend weitestgehend nicht der von Euklid vorgegebenen synthetisch–deduktiven Struktur zur Präsentation mathematischer Sachverhalte. Weiterhin sind insbesondere bei Eulers Arbeiten die Titel seiner Abhandlungen beim ersten Auftreten im Text in Originalsprache und Übersetzung desselben<sup>12</sup> angegeben. Wie aus dem Quellenverzeichnis zu entnehmen, bilden die Euler'schen Originalabhandlungen das Fundament für die vorliegende Ausarbeitung, was sich in einem gleichsam “Euler'sch–solipsistischen” Schreibstil niederschlägt<sup>13</sup>. Das Hauptaugenmerk liegt stets bei Euler und andere Beiträge werden ergänzend genannt. In den Fußnoten haben größtenteils Erwähnungen ihren Platz gefunden, welche Antworten auf Fragen aus Diskussionen des Verfassers mit verschiedensten Interessenten der Mathematikgeschichte geben, jedoch zu weit vom Haupttraktat wegführen würden.

---

<sup>12</sup>Die Übersetzung wird nur bei den Titeln in lateinischer und französischer Sprache gegeben. Datum der Veröffentlichung und ggf. das Erstverfassung sind stets mit angegeben, eine Praxis, welche von den Richtlinien des *Euleriana Archive* herrührt. Zusätzlich wird bei Zitierungen von Eulers Arbeiten stets die Eneström–Zahl mit aufgeführt. Eneström (1852–1923) hat eigens einen Katalog “*Die Schriften Eulers chronologisch nach den Jahren geordnet, in denen sie verfasst worden sind*” ([Eneström], 1910) mit kurzen Übersichten zu jeder einzelnen Euler'schen Abhandlung verfasst und ihnen nach ihrer Erscheinungschronologie eine Zahl, eben die heute so genannte Eneström–Zahl, zugewiesen.

<sup>13</sup>Man wird etwa deswegen in der vorliegenden Arbeit kaum eine Definition finden, weil, wie auch herausgearbeitet werden wird, die explizite Definition von Begriffen bei Euler vergleichsweise in den Hintergrund trat.

## 2 Einleitung

History is a kind of introduction to more interesting people than we can possibly meet in our restricted lives; let us not neglect the opportunity.

---

Dexter Perkins

In diesem einleitendem Abschnitt so ein rudimentärer Überblick über bereits über Euler verfasste Arbeiten (Abschnitt 2.1) gegeben werden. Weiterhin wird zur Erleichterung des Verständnisses die Struktur der vorliegenden Abhandlung vorgestellt werden (Abschnitt 2.2), wonach noch die Zielsetzung ihre Erwähnung finden wird (Abschnitt 2.3).

### 2.1 Abfassungen über Euler und sein Opus

Euler published so much and in so many different fields that [...] no one person will know enough to span all of his work.

---

Fernando Q. Gouvêa

Es wird zuträglich sein, dem Hauptgegenstand der gegenwärtigen Abhandlung eine kurze (und notwendig unvollständige) Übersicht einiger bereits über Euler verfasster Arbeiten, sowohl seine Mathematik und Physik als auch seine Biografie betreffend, voranzustellen.

### 2.1.1 Übersicht über Arbeiten über Euler

Much of our knowledge is due to a comparatively few great mathematicians such as Newton, Euler, Gauss, or Riemann; few careers can have been more satisfying than theirs. They have contributed something to human thought even more lasting than great literature, since it is independent of language.

---

Edward Charles Titchmarsh

Neben der bekannten Biographie von E. Fellman (1927–2012) mit dem Titel *“Leonhard Euler”* ([Fellmann], 1995) und einzelnen Übersichtsartikeln wie etwa *“The Mathematics and Science of Leonhard Euler (1707–1783)”* ([Thiele1], 2006) von Thiele (1943–) ist das Buch *“Leonhard Euler: Mathematical Genius in the Enlightenment”* ([Calinger], 2015) von Calinger dermaßen detailliert, dass sich allerhöchstens noch Fußnoten zur Ergänzung beifügen ließen. Überdies sind die Euler’schen Werke allesamt mit größter Sorgfalt editiert leicht zugänglicher Form als *Opera Omnia* nach Themengebieten geordnet herausgegeben worden. Die jeweiligen Vorworte enthalten sonst keinerorts nieder geschriebene Informationen über den Inhalt von Eulers Arbeiten. Während letztgenannte angesichts des gewaltigen Umfangs von Eulers Werk den Charakter einer Übersicht behalten mussten, sind an vielen Orten synoptische Einzelbesprechungen von ausgesuchten Euler’schen Arbeiten publiziert worden. Hervorzuheben sind in diesem Kontext die Kolumne *“How Euler did it”* von E. Sandifer (1951–2022), welche auch als Buch mit demselben Titel *“How Euler Did It”* ([Sandifer21], 2007) erschienen ist, und sein Buch *“The Early Mathematics of Leonhard Euler”* ([Sandifer22], 2007), welches nahezu 50 Arbeiten aus der frühen Euler’schen Schaffensperiode bespricht.

Weiterhin sind einzelne, umfassende Werke, zu Teilgebieten erschienen, welche Euler mit seinen Beiträgen bereichert hat. Genannt sei an dieser Stelle stellvertretend das Buch von Verdun *“Leonhard Eulers Arbeiten zur Himmelsmechanik”* ([Verdun], 2014) über Eulers Untersuchungen zur Himmelsmechanik. Besonders kreative Beweise von Euler sind ebenfalls Inhalt von Abhandlungen gewesen und bilden außerdem den Inhalt von Büchern

wie dem von Dunham (1947–) *“Euler: The Master of Us All”* ([Dunham2], 1999).

Angesichts der Breite des Euler’schen Opus überrascht es wenig, dass sich darin auch Entdeckungen finden, welche seinen Nachfolgern zugeschrieben worden sind. Arbeiten, welche die Euler’sche Prioritätsansprüche geltend machen, sind eine logische Konsequenz dessen und ebenfalls zahlreich verfasst worden. Hier sei die Arbeit von Ayoub (1923–2013) *“Euler and the Zeta Function”* ([Ayoub], 1974) hervorgehoben, welche den Euler’schen Beitrag zur Riemann’schen  $\zeta$ -Funktion zum Inhalt hat<sup>14</sup>. Weiterhin haben sich Forscher wie Polya (1887–1985) der Präsentation mathematischer Arbeitsweise angenommen und dabei Eulers Ausführungen zur Illustration herangezogen<sup>15</sup>. Das Buch von Suisky *“Euler as Physicist”* ([Suisky], 2010) diskutiert diverse Aspekte des Euler’schen Beitrags zur Physik, wobei insbesondere Eulers Arbeit *“Anleitung zur Naturlehre”* ([EulerE842], 1862, ges. ca. 1750) im Vordergrund steht.

## 2.2 Aufbau dieser Arbeit

Information is a source of learning. But unless it is organized, processed, and available to the right people in a format for decision making, it is a burden, not a benefit.

---

William Pollard

Die vorliegende Ausarbeitung gliedert sich in drei Hauptteile. Der erste Teil ist ganz den Euler’schen Entdeckungen gewidmet. Allem voran wird die Euler’sche Ansicht auf die Mathematik betrachtet (Abschnitt 3); mit einem besonderen Fokus auf seine Auffassung eines Beweises (Abschnitt 3.1.4). Die Rolle der Definition und anderer Konzepte werden in den historischen Kontext eingeordnet (Abschnitt 3.1.3).

---

<sup>14</sup>Euler entdeckt bereits alle Eigenschaften der  $\zeta$ -Funktion, welche man zutage fördern kann, wenn sie als Funktion einer reellen Variable behandelt wird. Riemann (1826–1866) reicht in seiner berühmten Arbeit (*“Über die Anzahl der Primzahlen unter einer gegebenen Größe”* [Riemann2], 1860, ges. 1859) strenge Beweise für die Euler’schen Entdeckungen nach. Dies wird alles in Abschnitt (6.1.2) detailliert ausgeführt werden.

<sup>15</sup>Die Methoden findet man unter anderem in seinem Buch *“Mathematics and Plausible Reasoning”* ([Poyla], 2014).

Nach Präsentation der Euler'schen Mathematik-Philosophie folgt die Darstellung seines Schaffensprozesses anhand ausgewählter Beispiele (Abschnitt 4). Das bekannte Beispiel der Lösung des Baseler Problems (Abschnitt 4.1) und Eulers in der Literatur weniger diskutierte allgemeine Lösung der einfachen Differenzgleichung (Abschnitt 4.3) werden es gestatten, anhand einzelner Abhandlungen unmittelbar zahlreiche charakteristische Facetten seiner Arbeitsweise zu illustrieren. So werden sowohl sein nahezu unermesslicher Ideenreichtum als auch seine – mathematisch gesprochen – Waghalsigkeit, die ihn bisweilen auch zu falschen Ergebnissen leitet, zutage treten (Abschnitt 4.2).

Der nächste Abschnitt der vorliegenden Abhandlung nimmt sich der Klärung von Prioritätsfragen an (Abschnitt 5); genauer werden einige Ergebnisse ihre Erwähnung finden, die Euler bereits zutage gefördert hat, jedoch seinen Nachfolgern zugeschrieben worden sind. Unterteilt werden die Resultate entsprechend der verschiedenen Ursachen für diese jeweiligen Missattributionen: Einmal ereignete es sich, dass Euler einen Schatz zwar als erster gehoben hatte, selbigen mit einem Beweis untermauert hat, und die Entdeckung gar in heute üblicher Form niedergeschrieben hat, seine Nachfolger jedoch von seinen Arbeiten keine Kenntnis hatten. Ein Exempel dessen stellt die Formel der Fourierkoeffizienten (Abschnitt 5.1.1) dar. Bei anderen Begebenheiten präsentierte Euler ebenfalls einen Beweis für eine Entdeckung, allerdings findet sich das Ergebnis nicht in der modernen Gestalt in seinen Arbeiten und bedarf erst einer Einkleidung in das Gewand der modernen Sprache der Mathematik, um ersichtlich zu werden. Die Unterschiede der Euler'schen Darstellungen reichen über die reine Form (Abschnitt 5.2.1), zu einem anderen Kontext (Abschnitt 5.2.4) und anderen Fragestellungen (Abschnitte 5.2.3 und 5.2.2) bis hin zu einer anderen Präsentation (Abschnitt 5.2.5).

Weiterhin hat Euler Theoreme formuliert, die er, wie er an entsprechender Stelle auch einräumt, nicht mit einem Beweis unterlegt hat (Abschnitt 6). Hier lassen sich seine Resultate weiter zwei Unterkategorien zuordnen. Die eine bilden diejenigen Funde, in welchen es Euler freilich selbst vermocht hätte, noch zur vermissten rigorosen Bestätigung zu gelangen. Die nachzureichenden Begründungen erstrecken sich dabei von einer einfachen Anwendung einer von ihm anderenorts bewiesenen Methode (Abschnitt 6.1.1) weiter über eine leichte Kombination seiner anderenorts, meist in anderen Kontexten, erzielten Ergebnissen (Abschnitt 6.1.2) bis hin zu einem einfa-

chen Gedankengang (Abschnitt 6.1.3), welchen er zweifelsohne leicht hätte haben können. Die andere Unterkategorie bilden indes Entdeckungen, welche Euler zwar gemacht hatte und nachzuweisen suchte, jedoch das Fehlen der Mittel (Abschnitt 6.2.2) oder seine Formulierung des Sachverhaltes (Abschnitt 6.2.1) oder eine übersehene, jedoch für Euler schwer zu erkennende, Unvollständigkeit in der Argumentation (Abschnitt 6.2.3) dies nicht zuließ.

Diese letzte Unterkategorie bildet gleichzeitig den Übergang zum nächsten Teil, welcher Grenzen Eulers zum Gegenstand hat (Abschnitt 7). Einmal wurde diese Schranke von den Begriffen selbst (wie dem der Funktion (Abschnitt 7.1.1)), des Grenzwertes (Abschnitt 7.1.2), der Summe (von divergenten) Reihen (Abschnitt 7.1.3)) gesetzt, welche bei Euler noch nicht die moderne Gestalt hatten. Abseits dieser mathematischen Hinderungsgründe vereitelte bei anderen Begebenheiten seine eigene Herangehensweise an Problemstellungen ein weiteres Fortschreiten. Denn letztere veranlasste Euler bisweilen zu einer eingeschränkten Sichtweise oder zur Ausbildung einer irreführenden Frage (Abschnitt 7.2). Einmal wählte Euler eine nicht zielführende Kategorisierung für die Objekte seines Interesses (Abschnitt 7.2.1), ein anderes Mal versuchte er etwas zu beweisen, von dem man erst nach ihm wusste, dass es unmöglich ist (Abschnitt 7.2.2). Weshalb Euler die Entwicklung mancher Techniken seinen Nachfolgern überlassen hat, wird in der folgenden Sektion (Abschnitt 7.3) im Kontext verschiedener Themenkomplexe erläutert werden.

Im letzten Teil (Abschnitt 8) werden die vorgestellten Euler'schen Ergebnisse ihre Anwendung finden. So wird die Anzahl der Beweise für der Werte der Potenzsummen der Reziproken der natürlichen Zahlen um eine Einheit erhöht (Abschnitt 8.1.1) sowie weitere Spezialfälle seiner Ergebnisse zu Legendre–Polynomen präsentiert (Abschnitt 8.1.3) und Formeln für weitere orthogonale Polynome mitgeteilt (Abschnitt 8.1.2). Abschließend soll eine Verbindung zwischen Euler und Ramanujan (1887–1920), welche oft wegen ihrer ausgeprägten mathematischen Intuition verglichen worden sind, hergestellt werden. Zum einen geschieht dies über die Herleitung von zwei bekannteren Integralidentitäten Ramanujans (Abschnitt 8.2.1 und 8.2.2), zum anderen über die berühmten Formeln von Ramanujan zur Berechnung der Kreiszahl  $\pi$ , welche sich in Euler'scher Manier finden lassen (Abschnitt 8.2.3). Die Zusammenfassung (Abschnitt 9) wird den Schlusspunkt dieser Arbeit bilden.

### 2.3 Zielsetzung dieser Arbeit

No matter what you do, you first have to have a vision [...]. If you don't have a goal or a vision, then you have nothing.

---

Arnold Schwarzenegger

Das ausgeschriebene Ziel der hiesigen Ausführungen besteht im Beitrag zum umfassenderen Verständnis des Euler'schen Werks. Angestrebt wird dies über die Vermittlung seiner Auffassungen zur Mathematik und die sich daraus ableitenden Konsequenzen für seinen Arbeitsprozess. Überdies wird durch die Mitteilung weniger diskutierter Ergebnisse Eulers ein Beitrag zur Geschichte der Mathematik beabsichtigt. Als Nebenprodukt bleibt die Hoffnung, dass sich aus der Beschäftigung mit dem Euler'schen Opus der Beantwortung von Fragen aus anderen Wissenschaften näher kommen lässt. Dies zielt insbesondere auf Fragen aus der Psychologie wie derjenigen, welche Bedingungen für kreatives Schaffen notwendig sind<sup>16</sup>.

---

<sup>16</sup>Hierzu wurde trotz intensiver Bemühungen auf verschiedensten Wegen keine zufriedenstellende bzw. allgemein in der Psychologie akzeptierte Antwort gefunden; man siehe etwa die Ausführungen im Buch *“Thought and Knowledge: An Introduction to Critical Thinking”* ([Halpern], 2022). Da Euler wie kaum ein anderer seines Leistungsvermögens seinen Entdeckungsprozess samt seiner Misserfolge in seinen Arbeiten kund getan hat, ist diese Hoffnung auf die Aufhebung dieses Umstandes nicht allzu unbegründet.

### 3 Eulers Ansicht zur Mathematik

If there is a God, he's a great mathematician.

---

Paul Dirac

Für die weitere Progression der hiesigen Ausführungen ist eine Diskussion dessen, was für Euler die Essenz der Mathematik bildet, unabdingbar. Dieser Besprechung ist der erste Teil dieser Sektion gewidmet (Abschnitt 3.1), wohingegen der zweite Teil anhand kleinerer Beispiele Besonderheiten seiner Darstellungen präsentiert (Abschnitt 3.2).

#### 3.1 Eulers Mathematikphilosophie

Mathematics is not just a language. Mathematics is a language plus reasoning.

---

Richard P. Feynman

Unter dem Begriff der *Mathematikphilosophie* soll im folgenden stets das gesammelte Bündel an expliziten und impliziten Auffassungen und Konzepten dessen verstanden werden, was dem Begriff *Mathematik* zugehörig ist. Es wird im folgenden zunächst das diskutiert, was Mathematik für Euler bedeutet (3.1.1) und die Vorrangstellung der Analysis bei Euler herausgestellt (Abschnitt 3.1.2), bevor dann auf das fundamentale Konzept der Definition (Abschnitt 3.1.3), das Verständnis eines Beweises (Abschnitt 3.1.4) und die Methode der Induktion bei Euler (3.1.5) eingegangen wird. Den Abschluss bildet die Diskussion von Eulers Ansicht auf die Physik (Abschnitt 3.1.6).

##### 3.1.1 Eulers Auffassung zum Wesen der Mathematik

God used beautiful mathematics in creating the world.

---

Paul Dirac

Seine Auffassung vom Wesen der Mathematik setzt Euler in seinem Text "*Commentatio de matheseos sublimioris utilitate*" ([EulerE790], 1847, ges. 1741) (E790: "Kommentar über die Nützlichkeit der höheren Mathematik") auseinander. Zunächst betont er den praktischen Nutzen der Mathematik.

Die diskutierten Gebiete umfassen die klassische Mechanik, die Hydromechanik, Artillerie, Schifffahrt und die Physik, der gesonderten Besprechung welcher Anwendungsbereiche Euler folgende Passage voranstellt<sup>17</sup>:

*“Weil aber die ganze Mathematik im Auffinden unbekannter Größen besteht, und zu diesem Zweck entweder Methoden oder gleichsam zur Wahrheit führende Wege eröffnet, oder äußerst tief verborgene Wahrheiten ausfindig macht und klar beleuchtet, von welchen zum einen die Kraft unseres Geistes geschärft wird, zum anderen unsere Erkenntnis erweitert wird, kann gewiss auf keine der beiden zu wenig Mühe aufgewandt werden. Weil nämlich die Wahrheit nicht nur an sich sehr lobenswert ist, sondern auch wegen des großen Zusammenhangs, in welchem alle Wahrheiten zusammenhängen, nicht ohne Nutzen sein kann, auch wenn selbiger nicht sofort erkannt wird, ist jener Einwand, dass die höhere Mathematik, allzu sehr von der Wahrheitsfindung eingenommen ist, in einen Lobesauspruch umgekehrt, als ein Tadel zu sein.”*

Demnach sieht Euler die Mathematik als *notwendig und hinreichend* für die Wahrheitsfindung, wobei die Wahrheit das oberste Gut ist, welches es zu finden gilt. Erst hieraus ergeben sich letztendlich die ganzen praktischen Anwendungen in den anderen Wissenschaften. Von Interesse ist auch die Auffassung, dass letztendlich alle Wahrheiten<sup>18</sup>, welche mithilfe der Mathematik der Kenntnis zugeführt werden, zusammenhängen. Dies erklärt zugleich Eulers Motivation, für eine Behauptung in der Mathematik, ob der eigentlichen Redundanz, meist mehrere Begründungen zu liefern, sofern ihm dies freilich möglich war.

---

<sup>17</sup>Es folgt die Übersetzung des ursprünglich von Euler in Latein verfassten Textes, welche Burckhardt (1903–2006) für die Serie 3, Band 2 der *Opera Omnia* ([Burckhardt1], 1942) ins Deutsche übertragen hat. Man findet seine ganze Übersetzung auf den Seiten 408–416 des Buches.

<sup>18</sup>Weiter unten (Abschnitt 3.1.4) werden noch die verschiedenen Arten von Wahrheiten, welche Euler hierunter versteht, ihre Erwähnung finden.

### 3.1.2 Eulers Auffassung der Analysis

The person who did most to give to analysis the generality and symmetry which are now its pride, was also the person who made Mechanics analytical; I mean Euler.

---

William Whewell

Kaum jemand hat die Analysis dermaßen geprägt und gleichsam personifiziert wie Euler<sup>19</sup>, was sich im folgenden Zitat von Hermann Hankel (1839–1873) auf Seite 14 in seinem Buch *“Die Entwicklung der Mathematik in den letzten Jahrhunderten”* ([Hankel2], 1869) widerspiegelt:

*“Es ist das unschätzbare Verdienst des grossen Baseler Mathematikers Leonhard Euler, den analytischen Calcul von allen geometrischen Fesseln befreit zu haben, und damit die Analysis, als selbstständige Wissenschaft begründet zu haben.”*

**Zwei kleinere Erfolgsbeispiele seiner Auffassung** Euler selbst äußert des Öfteren die Ansicht, die Analysis finde in jedem Feld der Mathematik, wenn auch nicht unmittelbar, jedoch eventuell ihre Anwendung. In § 2 seiner Abhandlung *“De numeris amicibilibus”* ([EulerE152], 1752, ges. 1747) (E152: “Über befreundete Zahlen”) formuliert er diesbezüglich die Aussage:

*“Weil aber außer Zweifel steht, dass die Analysis auch aus diesem Zweig [der Mathematik] nicht zu verachtende Zuwächse nehmen wird, wenn eine Methode erschlossen wird, mit welcher sich um vieles mehr Paare von dieser Art ausfindig machen lassen, halte ich es nicht für unpassend, gewisse sich hierauf beziehende Methoden, auf welche ich zufällig gestoßen bin, hier mitzuteilen.”*

Die Paare dieser Art meinen dabei Paare von sogenannten befreundeten Zahlen; dies sind solche Zahlenpaare, von welchen die Summe der echten Teiler der einen Zahl der jeweils anderen Zahl gleich ist. Das kleinste Beispiel befreundeter Zahlen besteht aus den Zahlen 220 und 284. In seiner

---

<sup>19</sup>So begründet sich es wohl auch, dass Eulers Portrait die Vorderseite des Buches *“3000 Jahre Analysis”* ([Sonar], 2016) ziert.

Abhandlung führt Euler insbesondere die Teilerfunktion  $\sigma$  ein, welche einer natürlichen Zahl die Summe ihrer echten Teiler zuordnet<sup>20</sup>. Weiterhin weist er die grundlegenden Eigenschaften

$$\sigma(p^k) = \frac{p^{k+1} - 1}{p - 1} \quad \text{für } p \in \mathbb{P}, k \in \mathbb{N},$$

wobei  $\mathbb{P}$  die Menge der Primzahlen anzeigt, sowie

$$\sigma(m \cdot n) = \sigma(m) \cdot \sigma(n)$$

für teilerfremde Zahlen  $m, n$  nach. Euler zeigt demnach, dass  $\sigma$  eine zahlentheoretische Funktion ist, wie Funktionen mit den just mitgeteilten Beschaffenheiten heute genannt werden. Diese verwendet er im Folgenden, um durch geschickte Ansätze und Probieren weitere befreundete Zahlen zu finden. Am Ende seiner Arbeit [EulerE152] hat er die Menge der Paare von den 3 bekannten auf 61 erhöht<sup>21</sup>.

Das eingangs mitgeteilte Euler'sche Zitat ist bemerkenswert, weil die referierte Arbeit sich einem Problem aus der Zahlentheorie annimmt, einem Gebiet dessen systematische Entwicklung Euler wesentliche Impulse verdankt. Im weiteren Verlauf der vorliegenden Ausführungen wird sich zeigen, dass diese "Analytisierung" Euler auf der einen Seite weit vordringen lässt, ihm aber andererseits auch Grenzen setzt, die er mangels der dafür notwendigen Konzepte nicht überwinden kann.

Auch in der Geometrie lässt Euler die analytische Fassung eines Problems Entdeckungen machen, die seinen Vorgängern verschlossen geblieben waren. Obwohl etwa umfassende Untersuchungen über Dreiecke viele ihrer Eigenschaften enthüllten, bedurfte es zur Entdeckung der Euler'schen Geraden seines in der Arbeit "*Solutio facilis problematum quorundam geometricorum difficillimorum*" ([EulerE325], 1767, ges. 1763) (E325: "Eine leichte Lösung gewisser sehr schwieriger geometrischer Probleme") gewählten analytischen Ansatzes. Einen rein geometrischen Beweis der Tatsache, dass sich Höhenschnittpunkt, Schnittpunkt der Mittelsenkrechten und der Seitenhalbierenden stets auf einer Geraden – der heute so genannten Euler'schen Geraden – befinden, ist vermutlich mit noch höheren Schwierigkeiten verbunden als die analytischen Rechnungen Eulers, welche man in Sandifers

---

<sup>20</sup>Euler benutzt das Symbol  $\int$ , womit er explizit machen will, dass die Funktion eine Summe ist.

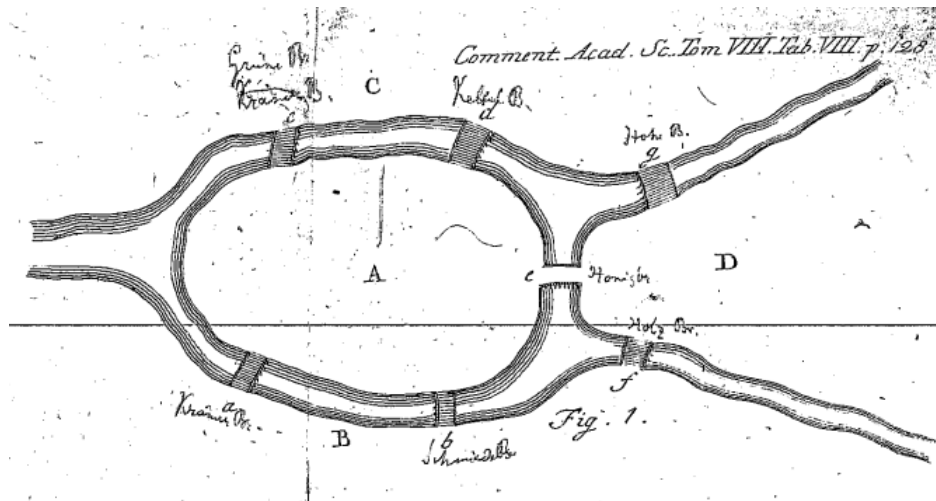
<sup>21</sup>Man vergleiche dazu Sandifers Artikel "*Amicable numbers*" ([Sandifer10], 2005).

Artikel “*The Euler line*” ([Sandifer23], 2009) und auch in Dunhams Buch “*Euler: The Master of Us All*” ([Dunham2], 1999) nachgezeichnet findet.

**Was für Euler nicht zur Mathematik gehörte** Nach Eulers Auffassung, Mathematik bestehe im Auffinden von unbekanntem Größen (siehe das Zitat aus Abschnitt 3.1.1), erscheint folgende Äußerung aus Eulers Arbeit “*Solutio problematis ad geometriam situs pertinentis* ([EulerE53], 1741, ges. 1735) (E53: “Lösung eines sich auf die Geometriam Situs beziehenden Problems”) zum berühmten Königsberger Brückenproblem selbiges von der Mathematik auszuschließen. Er schreibt direkt in § 1 zu dem damals von Leibniz als *Geometriam Situs* bezeichneten Teilbereich der Mathematik:

*“So wird dieser Teilbereich [der Mathematik] von selbigem [Leibniz] allein von der Bestimmung der Lage und dem Eruiieren der Beschaffenheiten des Ortes eingenommen festgelegt, bei welchem Unterfangen weder auf die Größen zu achten noch ein Kalkül mit Größen zu gebrauchen ist. [...] Deswegen, nachdem neulich die Erwähnung eines gewissen Problems gemacht worden ist, das sich auf die Geometrie zu beziehen schien, aber so beschaffen war, dass es weder die Bestimmung von Größen erfordert, noch eine Lösung mithilfe des Kalküls von Größen zuließ, habe ich nicht gezweifelt, es zur Geometriam Situs zu zählen.”*

Das “gewisse Problem” meint bereits das zuvor angesprochene Problem der Brücken von Königsberg, welches häufig angesehen wird, die Topologie als Teildisziplin der Mathematik begründet zu haben. Euler hingegen hätte die Frage wohl nicht als eine mathematische eingeordnet. Jedenfalls ist die Arbeit [EulerE53] das einzige Euler’sche, was sich aus moderner Sicht der Graphentheorie zuordnen lässt.



**Abbildung 1:** Eulers Figur zum Königsberger Brückenproblem aus [EulerE53]. Die Aufgabe besteht im Überschreiten jeder der sieben Brücken (mit Kleinbuchstaben gekennzeichnet), ohne eine von ihnen doppelt zu passieren. Euler zeigt im Verlauf die Unmöglichkeit dieser Aufgabe auf.

### 3.1.3 Die Rolle der Definition in der Mathematik bei Euler

What is a good definition? For the philosopher or the scientist, it is a definition which applies to all the objects to be defined, and applies only to them; it is that which satisfies the rules of logic. But in education it is not that; it is one that can be understood by the pupils.

Henri Poincaré

Heute sind Definitionen in der Mathematik ein wesentlicher Bestandteil und überdies wurden eigens Bücher zum Gegenstand zur Natur des Begriffs und Gebrauchs der Definition verfasst. Man vergleiche etwa das Lehrbuch von Dubislav<sup>22</sup> (1895–1937) *“Die Definition”* ([Dubislav], 1994). Zu Eulers Lebenszeiten lag das Hauptaugenmerk vielmehr auf den Anwendungen und das implizite Verständnis eines Begriffs ließ die explizite Aus-

<sup>22</sup>Dubislav hat insbesondere Mathematik studiert, einer seiner Lehrer war David Hilbert (1862–1943).

formulierung von Begriffen entsprechend in den Hintergrund treten. Diese Situation wird treffend von Hardy (1877–1947) in seinem Buch *“Divergent Series”* ([Hardy3], 1949) zusammengefasst. Man findet auf Seite 15 folgende Ausführung:

*“It is a mistake to think of Euler as a ‘loose’ mathematician, though his language sometimes might seem loose to modern ears; and even his language sometimes suggests a point view far in advance of the general ideas of his time. [...] It is impossible to state Euler’s principle accurately without clear ideas about functions of a complex variable and analytic continuation.”*

Euler erfasst mit seinen Ideen, von Hardy beschrieben am Konzept der divergenten Reihen, zwar oft den Kern der Sache, jedoch bedurfte es der genauen Ausarbeitung entsprechender Konzepte, hier unter anderem dem der analytischen Fortsetzung von Funktionen einer komplexen Variablen, um sie auf solidere Füße zu stellen.

Indes hat Euler auch selbst den Umgang mit Begriffsbildung und Definitionen in seinem Artikel *“De usu functionum discontinuarum in analysi”* ([EulerE322], 1767, ges. 1762) (E322: “Über den Gebrauch von unstetigen Funktionen in der Analysis) thematisiert und bei dieser Gelegenheit bemängelt. Hier schreibt er am Ende von § 6:

*“Daher entbehren die sehr häufigen Beschwerden, dass die Idee der Analysis des Unendlichen niemals genau beschrieben und fundamental begründet gefunden wird, nicht jedweder Grundlage, [...]”*

Die zitierte Textpassage bezieht sich vornehmlich auf die Natur von Differentialen, welche damals auch von Euler selbst in seinem Lehrbuch *“Institutiones calculi differentialis cum eius usu in analysi finitorum ac doctrina serierum”* ([EulerE212], 1755, ges. 1748) (E212: “Grundlagen des Differentialkalküls mit seinem Gebrauch in der Analysis des Endlichen und der Reihenlehre”) noch als unendlich kleine Größen betrachtet werden, was teilweise zu paradoxen Schlussfolgerungen führt<sup>23</sup>. Zusammengefasst wird dies treffend von Hardy (in einen anderen Zusammenhang) auf S. 5–6 von [Hardy3]:

*“[I]t does not occur to a modern mathematician that a collection of ma-*

---

<sup>23</sup>Dies wird weiter unten Abschnitt 7.1.2 noch explizit besprochen und mit entsprechenden Beispielen unterlegt werden.

*thematical symbols should have a 'meaning' until one has been assigned to it by definition. It was not a triviality even to the greatest mathematicians of the eighteenth century. They had not the habit of definition: it was not natural to them to say, in so many words, by X we mean Y."*

### 3.1.4 Eulers Auffassung eines Beweises

Mathematics is not a deductive science - that's a cliché. When you try to prove a theorem, you don't just list the hypotheses, and then start to reason. What you do is trial and error, experimentation, guesswork.

---

Paul Halmos

Die Konzeption eines Beweises nimmt das Primat der Begriffe in der Mathematik ein. Wohingegen sich die moderne Mathematik heute auf die Beweistheorie<sup>24</sup> zurückblicken kann, lag selbige zu Eulers Lebzeiten noch nicht vor. Nichtsdestoweniger besitzt Euler ebenfalls eine Auffassung eines Beweises, welche er jedoch selten explizit erläutert zu haben scheint, aber natürlich implizit in seinen Untersuchungen gebraucht<sup>25</sup>. Da die Euler'schen Ansichten mancherorts von ihren modernen Gegenstücken abweichen, wird eine Analyse seiner Äußerungen zu diesem Gegenstand an dieser Stelle eingeschaltet.

**Allgemeine Ansichten** In seinen "*Lettres à une princesse d'Allemagne sur divers sujets de physique et de philosophie – Tome second*" ([EulerE343], 1768, ges. 1760–1761) (E343: "Briefe an eine deutsche Prinzessin über verschiedene Gegenstände der Physik und Philosophie – Buch 2") setzt Euler neben vielen anderen Themen seine Theorie des Wissenserwerbs und die damit verknüpften Wahrheitsbegriffe sowie Beweismethodiken auseinander. Seine Erläuterungen diesbezüglich finden sich in den Briefen 115–120. In Brief 115 unterscheidet Euler nämlich drei Wahrheitsarten, welche für ihn gleichzeitig auch die einzigen drei sind: Die Erfahrungswahrheiten ( "*Verités*

---

<sup>24</sup>Man vergleiche etwa das Buch "*Handbook of mathematical logic*" ([Barwise], 1977) zum Gebiet der mathematischen Logik und das Buch "*Basic Proof Theory*" ([Pohlers], 2008), welches eigens der Beweistheorie in der Mathematik gewidmet ist.

<sup>25</sup>Ab welchem Punkt ein Beweis als solcher anzuerkennen ist, bildet immer noch den Gegenstand vieler Diskussionen über mehrere Wissenschaftsgebiete hinweg.

*des sens*”), die Vernunftwahrheiten (*“Verités de l’entendement”*) und Glaubenswahrheiten (*“Verités de la foi”*). Dies mit der gängigen Definition des Terminus *Wissen* als gerechtfertigte, wahre Meinung<sup>26</sup> vergleichend, sieht man die Teilfacetten der modernen Auffassung des Wissensbegriffs von der Euler’schen Aufteilung abgedeckt. Während jedoch heute Wissen aus diesen Teilen konstituiert verstanden wird<sup>27</sup>, betont Euler explizit die strikte Verschiedenheit seiner drei Wahrheitsgattungen, welche dementsprechend jeweils eigener Beweismethoden bedürfen. In Brief 119 erläutert Euler, die Erfahrungswahrheiten verlangen physische Gewissheit (*“certitude physique”*), die Vernunftwahrheiten logische oder demonstrative Gewissheit (*“certitude logique ou démonstrative”*) und die Glaubenswahrheiten schließlich moralische Gewissheit (*“certitude morale”*). Die Mathematik<sup>28</sup> ordnet Euler in die zweite Klasse ein, sagt demnach, man habe sich von der Gültigkeit mathematischer Wahrheiten mithilfe der Logik zu überzeugen. Die Art des logischen Schließens hatte er zuvor in seinen Briefen 102–109 auseinander gesetzt, wo er unter anderem auch die heute nach ihm benannten Diagramme zur Illustration von Syllogismen heranzieht<sup>29</sup>. Dazu passend schreibt Euler schreibt im Vorwort (Seite XII) zu seinen *Calculi Differentialis* [EulerE212] zur Mathematik:

*“Obschon nämlich demjenigen, der die Bestimmung der Größe der gesamten Erdkugel mit dem Kalkül in Angriff genommen hat, ein Fehler, nicht nur von einem sondern vielleicht gar mehreren Steinchen, leicht nachgegeben zu werden pflegt, scheut indes die mathematische Strenge auch vor dem kleinsten Fehler zurück, und allzu schwer wäre dieser Einwand, sollte jedweden Bestand behalten.”*

---

<sup>26</sup>Man siehe zum Beispiel das einführende Lehrbuch *“Einführung in die theoretische Philosophie”* ([Hübner], 2015) für umfassendere Erläuterungen.

<sup>27</sup>Dass die Begriffe Überzeugung, Wahrheit und Meinung lediglich notwendig, jedoch keinesfalls hinreichend für Wissen sind, ist von Gettier (1927–2021) in seiner Arbeit *“Is Justified True Belief Knowledge?”* ([Gettier], 1963) aufgezeigt worden. Gettier demonstriert, dass nebst der drei obigen Begriffe für Wissen der Zufall ausgeschlossen werden müsste. Das daraus resultierende heute sogenannte Gettier-Problem, wie dies zu bewerkstelligen ist, ist eine offene Frage.

<sup>28</sup>In seinen Briefen schreibt er den damals noch gleichwertig zu verstehenden Begriff *“Géométrie”*.

<sup>29</sup>Euler-Diagramme werden heute verwendet, um mengentheoretische Beziehungen zu veranschaulichen, wohingegen Venn-Diagramme alle möglichen Mengenrelationen in die Betrachtung mit einbeziehen. Letztere erlauben im Gegensatz zu ersteren ebenfalls eine Inferenz auf gegebenenfalls fehlende Zusammenhänge. Der Leser ist diesbezüglich auch auf Sandifers Artikel *“Venn Diagrams”* ([Sandifer3], 2004) aus seiner Kolumne verwiesen.

**Ein explizites Exempel** Die Mathematik ist demnach für Euler durch ihre Exaktheit geprägt, während folgende Äußerung aus seiner Arbeit “*Remarques sur un beau rapport entre les series des puissances tant directes que reciproques*” ([EulerE352], 1768, ges. 1749) (E352: “Bemerkung zur schönen Beziehungen über die Reihen der direkten und reziproken Potenzen”) dazu widersprüchlich anmutet, wo er in § 12 formuliert:

*“Siehe nun diesen neuen Beweis, welcher mit dem vorherigen zusammengekommen schon als vollständiger Beweis unserer Vermutung angesehen werden kann. Nichtsdestotrotz ist es überaus gerechtfertigt, noch einen direkten Beweis zu fordern, welcher alle möglichen Fälle auf einmal abhandelt.”*

Der Zusammenhang ist hierbei folgender: In besagter Arbeit gelangt Euler durch findiges Hantieren mit divergenten Reihen<sup>30</sup> zu folgender Gleichung:

$$\begin{aligned} & \frac{1 - 2^{n-1} + 3^{n-1} - 4^{n-1} + 5^{n-1} - 6^{n-1} + \text{etc.}}{1 - 2^{-n} + 3^{-n} + 4^{-n} + 5^{-n} - 6^{-n} + \text{etc.}} \\ &= \frac{-1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (n-1) \cdot (2^n - 1)}{(2^{n-1} - 1) \cdot \pi^n} \cdot \cos \frac{n\pi}{2}, \end{aligned} \quad (1)$$

welche für ihn zunächst einmal für die natürlichen Zahlen Geltung haben soll<sup>31</sup>. Mit den “Beweisen” drückt Euler in diesem Zusammenhang aus, dass er die Richtigkeit der Formel überdies explizit für die speziellen Fälle  $n = 0$  und  $n = 1$  erhärtet hat, in welchen die Summen auf der linken Seite anderswoher bekannt sind<sup>32</sup>. Unter Verwendung der l’Hospital’schen Regel kann Euler jeweils rechnerisch verifizieren, dass die Formel auf der rechten Seite mit dem Quotienten der Reihenwerte auf der linken übereinstimmt. Mit seiner Auffassung der divergenten Reihen kann Euler seine Vermutung insgesamt für die ganzen Zahlen validieren. An anderer Stelle (§ 16), nachdem er auch noch den Wert  $n = \frac{1}{2}$  numerisch überprüft hat, in selbiger Arbeit äußert er des Weiteren, dass eine richtige Formel wohl kaum zufällig zu so vielen richtigen Ergebnissen führen könnte, was also umgekehrt für ihre

<sup>30</sup>Seine Auffassung divergenter Reihen wird in Abschnitt (7.1.3) diskutiert.

<sup>31</sup>Die Euler’sche Vermutung stellt die Funktionalgleichung der Riemann’schen  $\zeta$ -Funktion dar. Weiter unten (Abschnitt 6.1.2) wird ein Beweis nachgereicht, der von Euler selbst hätte geführt werden können.

<sup>32</sup>Euler weiß, dass  $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \text{etc.} = \log(2)$  und bedient sich des Wertes  $1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \text{etc.} = \frac{1}{2}$ . Wie Euler zu letzterem Wert gelangt ist, wird unten (Abschnitt 7.1.3) erläutert werden.

Wahrheit spricht. Genauer schreibt er:

“Weil unsere Vermutung nun zum höchsten Grad an Gewissheit erhoben worden ist und nicht einmal mehr ein Zweifel in den Fällen bestehen bleibt, in denen man für den Exponenten  $n$  Brüche einsetzt, wollen wir [...]”

Euler demonstriert noch für  $n = \frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \frac{7}{2}, \frac{9}{2}$  und  $\frac{11}{2}$  die Übereinstimmung und führt demnach insgesamt einen regressiven Beweis für die Richtigkeit der Gleichung (1), welcher heute in der Mathematik nicht mehr als Beweis herangezogen werden kann. Euler verleiht indes seiner Argumentation im letzten Paragraphen der Arbeit (§ 20) noch einmal Nachdruck. Bezugnehmend auf seine Untersuchungen zu Gleichung (1) schreibt er:

“In gleicher Manier kann man die Summen dieser zwei Reihen

$$1 - 3^{n-1} + 5^{n-1} - 7^{n-1} + \text{etc.} \quad \text{und} \quad 1 - \frac{1}{3^n} + \frac{1}{5^n} - \frac{1}{7^n} + \frac{1}{9^n} + \text{etc.}$$

miteinander vergleichen und eine ähnliche Vermutung liefert dieses Theorem<sup>33</sup>

$$\frac{1 - 3^{n-1} + 5^{n-1} - 7^{n-1} + \text{etc.}}{1 - 3^{-n} + 5^{-n} - 7^{-n} + \text{etc.}} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (n-1) \cdot 2^n}{\pi^n} \cdot \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right).”$$

Kontrastiert man dies mit seinen Untersuchungen in der Arbeit “*Consideratio quarumdam serierum, quae singularibus proprietatibus sunt praeditae*” ([EulerE190], 1753, ges. 1743) (E190: “Betrachtung gewisser Reihen, die einzigartige Eigenschaften aufweisen”) zu der Reihe<sup>34</sup>:

$$s(a, x) := \frac{1-x}{1-a} + \frac{(1-x)(a-x)}{a-a^3} + \frac{(1-x)(a-x)(a^2-x)}{a^3-a^6} + \text{etc.}$$

mit allgemeinen Term

$$\frac{(1-x)(a-x)(a^2-x)(a^3-x) \cdots (a^{n-1}-x)}{a^{\frac{n(n-1)}{2}} - a^{\frac{n(n+1)}{2}}},$$

<sup>33</sup>Das Wort *théoreme* ist in Eulers Arbeit kursiv gedruckt, womit Euler vermutlich die Gewissheit über die Richtigkeit der Formel unterstreichen will.

<sup>34</sup>Diese bildet auch den Untersuchungsgegenstand von Sandifers Arbeit “*A false logarithm series*” ([Sandifer20], 2007).

wird die Paradoxie der geschilderten Euler'schen Beweisauffassungen noch eindrücklicher. Wie Euler in letztgenannter Abhandlung richtig bemerkt, hat man für die Wahl  $x = a^n$  allgemein  $s(a, a^n) = n$ , eine Eigenschaft, die der Funktion  $\log_a(x)$  zukommt. Jedoch gilt, wie Euler durch ein numerisches Beispiel nachweist, für nicht natürliche Zahlen  $n$  bereits nicht mehr  $s(a, a^n) = \log_a(x)$ , sodass man die Gültigkeit eines für die natürlichen Zahlen gültigen Ausdrucks nicht ohne Hinzutreten eines weiteren Arguments auf die reellen Zahlen überführen kann<sup>35</sup>.

Der Vollständigkeit wegen sei in diesem Zusammenhang auch die Euler'sche Arbeit "*Exercitationes analyticae*" ([EulerE432], 1773, ges. 1772) (E432: "Analytische Übungen") erwähnt; sie hat ebenfalls obige Funktionalgleichung (1) zum Inhalt. Gleich in § 2 findet man die Formel

$$1 - 2^{n-1} + 3^{n-1} - 4^{n-1} + \dots = \frac{2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (n-1)}{\pi^n} \cdot N \cdot \left( 1 + \frac{1}{3^n} + \frac{1}{5^n} + \frac{1}{7^n} + \dots \right).$$

Obleich Euler bezüglich ihrer Allgemeingültigkeit seine Worte behutsamer wählt als in [EulerE352], scheint dieselbe Meinung in § 3 hervor; so schreibt er:

*"Aber es lässt sich nicht bezweifeln, dass die einfachste und natürlichste [Formel] hier Geltung hat, das heißt  $N = \cos \frac{n-2}{2}\pi$ , während  $\pi$  hier den zwei rechten gleichen Winkel bezeichnet, weil ja der ganze Sinus = 1 angenommen wird, dass  $\pi$  der Halbumfang des Kreises ist."*

Seine Aussage bezieht sich auf den Term  $\cos \frac{(n-2)\pi}{2}$  in der Formel, welchen er als Interpolation für die Folge von Werten  $-1, 0, +1, 0, -1, 0, +1 \dots$  annimmt. Euler sieht diesen Term wegen der Einfachheit und Schönheit als richtige Wahl an, welches Prinzip insbesondere von Paul Dirac (1902–1984) in der theoretischen Physik vertreten wurde; man konsultiere diesbezüglich seine Arbeit "*The Relation between Mathematics and Physics*" ([Dirac2], 1939).

Als allgemeines Resümee bleibt die Differenz bezüglich der Stellung eines Beweises in der heutigen Mathematik und der von Euler. Bezogen auf das vorgestellte Beispiel führt Euler gleichsam das *Wunderargument zur Exis-*

---

<sup>35</sup>Der Nicht-Eindeutigkeit des Interpolationsproblem ist sich Euler selbstredend bewusst gewesen. Dies wird in Abschnitt (7.3.2) eine ausführlichere Verwendung finden.

tenz *unbeobachtbarer Realität*<sup>36</sup> als Grund für die Wahrheit der Formel (1) ins Feld. Daraus ließe weiter folgern, dass Euler als Vertreter der Meinung, Mathematik werde *entdeckt* und nicht *kreiert*<sup>37</sup>, anzusehen ist<sup>38</sup>

Eng verknüpft mit dem just Gesagten ist, dass Euler des Öfteren ein und dieselbe Tatsache auf mehreren und unabhängigen Wegen beweist, wofür seine Beiträge zur Auswertung der Summe

$$1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \frac{1}{25} + \text{etc.}$$

ein konkretes Beispiel liefern (siehe Abschnitt 4.1 für eine eingehendere Diskussion). Dieses Vorgehen ist dabei für Euler jedoch nicht redundant, sondern gar nötig, um sich der Wahrheit einer Sache sicherer zu werden. Selbige Schlussweise führt Euler zumeist zu richtigen Resultaten; in der Tat haben die von Euler falsch vermuteten Sätze eine geringe Zahl an Argumenten für ihre Richtigkeit gemein<sup>39</sup>.

---

<sup>36</sup>Dieses Argument wird oft Hilary Putnam (1926–2016) in Bezug auf den wissenschaftlichen Realismus zugeschrieben. Er formuliert in seiner Arbeit *“What is mathematical truth?”* ([Putnam], 1975): *“The positive argument for realism is that it is the only philosophy that doesn’t make the success of science a miracle.”*

<sup>37</sup>Das sind auch die von Klein ausgemachten Archetypen: Er schreibt auf Seite 72 seines Buches [Klein]: *“Die eine Gruppe von Mathematikern hält sich für unbeschränkte Selbstherrscher in ihrem Gebiet, das sie nach eigener Willkür logisch deduzierend aus sich heraus schaffen; die andere geht von der Auffassung aus, daß die Wissenschaft in ideeller Vollendung vorexistiere, und daß es uns nur gegeben ist, in glücklichen Augenblicken ein begrenztes Neuland davon zu entdecken.”*

<sup>38</sup>Eine gegenteilige Position wird von Vertretern der Kohärenztheorie der Wahrheit wie etwa Rescher vertreten. Letzterer erläutert seine Auffassungen in seinem Buch *“The Coherence Theory of Truth”* ([Rescher], 1973). Als einen Vertreter dieser Meinung in den mathematischen Wissenschaften ließe sich hier Poincaré (1854–1912) nennen. Man konsultiere dazu seine Essays zur Mathematikphilosophie, welche sich als Nachdruck im Buch *“La science selon Henri Poincaré: La science et l’hypothèse - La valeur de la science - Science et méthode”* ([Poincaré2], 2024) (*“Die Wissenschaft nach Henri Poincaré: Wissenschaft und Hypothese – Der Wert der Wissenschaft – Wissenschaft und Methode”*) als Nachdruck finden. Man betrachte seine Beschreibung aus *“Wissenschaft und Hypothese”* (Kapitel 2): *“Mathematiker untersuchen nicht die Objekte, sondern die Beziehungen zwischen den Objekten; es ist daher für sie nebensächlich, die einen Objekte durch andere zu ersetzen, solange sich nur die Beziehungen nicht ändern.”*

<sup>39</sup>Neben der gleich zu diskutierenden Potenzvermutung hat sich die Euler’sche Vermutung zu den sogenannten griechisch–lateinischen Quadraten als falsch herausgestellt, welche Euler in seinen Arbeiten *“Recherches sur un nouvelle espèce de quarrés”* ([EulerE530], 1782) (E530: *“Untersuchungen über eine neue Gattung von magischen Quadraten”*) und *“De quadratis magicis”* ([EulerE795], 1849, ges. 1776) (E795: *“Über magische Quadrate”*) untersucht. Die Euler’schen Ausführungen sowie die Unrichtigkeit seiner Vermutung sind umfassend in der Arbeit *“Graeco-Latin Squares and a Mistaken Conjecture of Euler”*

**Beispiel einer unrichtigen Vermutung Eulers** Als Beispiel für eine unrichtig von Euler vermutete Behauptung sei die Euler'sche Potenzenvermutung angeführt. Euler spricht sie in seinen Arbeiten *“Resolutio formulae Diophantae  $ab(maa + nbb) = cd(mcc + ndd)$  per numeros rationales”* ([EulerE716], 1802, ges. 1778) (E716: “Auflösung der Diophant'schen Formel  $ab(maa + nbb) = cd(mcc + ndd)$  mit rationalen Zahlen”) und *“Dilucidationes circa binas summas duorum biquadratorum inter se aequales”* ([EulerE776], 1830, ges. 1780) (E776: “Erläuterungen zu den Summen zweier einander gleicher Biquadrate”) aus. In § 3 erstgenannter Arbeit schreibt er:

*“Wie nämlich keine zwei Kuben dargeboten werden können, deren Summe oder Differenz ein Kubus ist<sup>40</sup>, so ist auch gewiss, dass nicht einmal drei Biquadrate dargeboten werden können, deren Summe gleichermaßen ein Biquadrat ist, sondern dass mindestens vier Biquadrate erforderlich sind, damit deren Summe ein Biquadrat ergibt, obgleich noch niemand vier solche Biquadrate angeben konnte. In gleicher Weise scheint bekräftigt werden zu können, dass keine vier fünften Potenzen dargeboten werden können, deren Summe auch eine fünfte Potenz ist; ebenso wird sich die Angelegenheit bei den höheren Potenzen verhalten; [...]”*

In § 1 der zweiten Arbeit formuliert Euler seinen Verdacht etwas behutsamer; er schreibt:

*“Weil solche Formeln  $A^2 \pm B^2 = 0$ ,  $A^3 \pm B^3 \pm C^3 = 0$  als unmöglich nachgewiesen worden sind, wenn freilich gleiche und verschwindende Zahlen ausgeschlossen werden, kann es den Anschein haben, dass auch diese Form  $A^4 \pm B^4 \pm C^4 \pm D^4 = 0$ , und entsprechende für die höheren Potenzen  $A^5 \pm B^5 \pm C^5 \pm D^5 \pm E^5 = 0$  und  $A^6 \pm B^6 \pm C^6 \pm D^6 \pm E^6 \pm F^6 = 0$  unmöglich sind.”*

Modern ließe sich die Euler'sche Vermutung wie folgt fassen: Ist die Gleichung

---

([Kylve], 2006) dargestellt.

<sup>40</sup>Den Beweis, hierfür hat Euler in § 243 des zweiten seines Buches *“Vollständige Anleitung zur Algebra”*, bestehend aus den zwei Teilen ([EulerE387], 1770, ges. 1767) und ([EulerE388], 1770, ges. 1776) gegeben, was auch unten (Abschnitt 6.2.3) noch diskutiert werden wird. Die Lösbarkeit der Gleichung  $x^3 + y^3 + z^3 = u^3$  beweist Euler in § 16 seiner Arbeit *“Solutio generalis quorundam problematum Diophanteorum, quae vulgo nonnisi solutiones speciales admittere videntur”* ([EulerE255], 1761, ges. 1754) (E255: “Die allgemeine Lösung gewisse Diophant'scher Probleme, welche für gewöhnlich nur spezielle Lösungen zuzulassen scheinen”).

$$\sum_{k=1}^p x_k^n = 0 \tag{2}$$

über den rationalen Zahlen lösbar, gilt  $p > n$ . In dieser Form ist die Euler'sche Vermutung als unrichtig nachgewiesen worden. Der Fall  $n = 4$  wurde von Elkies (1966-) abgehandelt, welcher in seiner Arbeit “*On  $A^4 + B^4 + C^4 = D^4$* ” ([Elkies], 1988) das Beispiel

$$20615673^4 = 2682440^4 + 15365639^4 + 18796760^4 \tag{3}$$

angibt, nachdem bereits zuvor von Landir und Parkin in der Arbeit “*Counterexample to Euler's conjecture on sums of like powers*” ([Lander], 1966) für den Fall  $n = 5$  mit der Lösung

$$144^5 = 27^5 + 84^5 + 110^5 + 133^5$$

ein Gegenbeispiel angegeben hatten. Ob tatsächlich stets  $n = p$  auch das Vorhandensein einer rationalen Lösung von (2) bedeutet, ist eine offene Frage.

In diesem Zusammenhang könnte als weitere indirekte Bestätigung des Gesagten die Widerlegung der Fermat'schen Vermutung, bei allen Zahlen der Form

$$F_n = 2^{2^n} + 1$$

handele es sich um Primzahlen, durch Euler, angeführt werden. Während die ersten fünf Zahlen:

$$F_0 = 3, \quad F_1 = 5, \quad F_2 = 17, \quad F_3 = 257, \quad F_4 = 65537$$

als Primzahlen Fermat (1601–1665) zu seiner Vermutung veranlasst haben, widerlegt Euler in seiner Arbeit “*Observationes de theoremate quodam Fermatiano aliisque ad numeros primos spectantibus*” ([EulerE26], 1738, ges. 1732) (E26: “Beobachtungen zu einem gewissen Fermat'schen Lehrsatz und anderen, welche sich auf die Primzahlen beziehen”) die Fermat'sche Behauptung, indem er 641 als Teiler von  $2^{2^5} + 1$  angibt<sup>41</sup>. Trotz ähnlicher Sachlage bezüglich der Evidenz wie bei der Potenzvermutung (Richtigkeit für die

---

<sup>41</sup>Für Eulers genaues Vorgehen konsultiere man zum Beispiel Sandifer's Artikel “*Factoring  $F_5$* ” ([Sandifer15], 2007).

Zahlen 1, 2 und 3), lässt sich Euler bei den Fermat’schen Primzahlen (Richtigkeit für die ersten fünf Zahlen) nicht von der Richtigkeit der Vermutung überzeugen. Dies liegt natürlich an der expliziten Angabe eines Gegenbeispiels, wohingegen zu Eulers Lebzeiten das Auffinden des Beispiels von Elkies aus(3) wegen fehlender Methoden und der Größe der Zahlen gleichsam eine Unmöglichkeit darstellten.

Abschließend sei bezüglich der Euler’schen Herangehensweise an Beweise die Bewertung von G. Polya (1887–1985) aus seinem Buch *“Mathematics and Plausible Reasoning”* ([Poyla], 2014)<sup>42</sup> mitgeteilt:

*“Euler’s reasons are not demonstrative. Euler does not reexamine the grounds for his conjecture [...] only its consequences. [...] He examines also the consequences of closely related analogous conjectures [...] Euler’s reasons are, in fact, inductive.”*

### 3.1.5 Beweistechnik der Induktion bei Euler

It is by logic that we prove, but  
by intuition that we discover. To  
know how to criticize is good, to  
know how to create is better.

---

Henri Poincaré

Das Polya’sche Zitat schafft einen unmittelbaren Übergang zum nächsten zu besprechenden Thema: Die Rolle der Induktion bei Euler.

**Eulers Auffassung vom Prinzip der Induktion** Euler beschreibt seine Ansicht zur Anwendung des Induktionsprinzips unumwunden in Arbeiten zur Zahlentheorie. In pädagogischer Weise mit expliziten Hinweisen für die Nützlichkeit der Methode beim Forschungsprozess tut er dies etwa in der Arbeit *“Specimen de usu observationum in mathesi pura”* ([EulerE256], 1761, ges. 1754) (E256: “Ein Beispiel über den Nutzen von Beobachtungen in der reinen Mathematik”)<sup>43</sup>. Euler schreibt im Vorwort zu besagter Abhandlung:

*“Aus diesen Erläuterungen schließen wir mit Recht, dass in der Erforschung der Natur der Zahlen der Beobachtung und der Induktion [...] sehr*

---

<sup>42</sup>Die ursprüngliche Version des Buchs wurde von Polya 1954 verfasst.

<sup>43</sup>Sandifer hat die Arbeit *“2aa+bb”* ([Sandifer11], 2006) seiner Kolumne den Euler’schen Ausführungen diesbezüglich gewidmet.

*große Wichtigkeit einzuräumen ist. [...] Denn mit dieser Methode sind wir zur Kenntnis von Eigenschaften dieser Art gelangt, welche uns andernfalls verborgen geblieben wären. [...] Obwohl aber Beschaffenheiten von dieser Art durch scharfsinnige Beobachtungen entdeckt worden sind, [...] können wir dennoch, wenn nicht ein strenger Beweis hinzutritt, bezüglich ihrer Richtigkeit nicht hinreichend sicher sein.”*

Die Euler’schen Ausführungen zum Gegenstand der Induktion im Teilbereich der Zahlentheorie sind aus moderner Sicht umso interessanter, weil das Fehlen der für einen Fortschritt notwendigen Konzepte Euler zwingt seine Beobachtungen anders zu untermauern<sup>44</sup>.

**Ein Beispiel falscher Induktion bei Euler** Da Euler Induktion als den Schluss von Einzelfällen auf ein allgemeines Ergebnis versteht, ist ihm die Fehleranfälligkeit dieser Methode nicht entgangen. Dies hat Euler klar in §§ 1–3 der Veröffentlichung *“Varia artificia in serierum indolem inquirendi”* ([EulerE551], 1783, ges. 1772) (E551: “Verschiedene Kunstgriffe, die Natur von Reihen ausfindig zu machen”) erläutert. Hier betrachtet er die Reihe der größten Koeffizienten in der Entwicklung von  $(1 + x + x^2)^n$  nach Potenzen von  $x$ . Die ersten Terme dieser Reihe sind:

$$1, 3, 7, 19, 51, 141, 393 \text{ etc.}$$

Die wesentlichen Euler’schen Gedanken bezüglich der Induktion werden im Folgenden kompakt nachgezeichnet. In § 1 schreibt Euler:

*“Demjenigen der diese Reihe betrachtet, gelangt schnell in den Sinn, dass jeder beliebige Term trefflich mit dem Dreifachen des vorhergehenden verglichen werden kann, weil es aus ihrem Ursprung ersichtlich ist, dass diese Reihe ins Unendliche fortgesetzt mit der verdreifachten geometrischen Progression zusammenfallen muss.”*

---

<sup>44</sup>So entgeht Euler etwa selbst das quadratische Reziprozitätsgesetz nicht. Es findet sich bereits in der Arbeit *“Theoremata circa divisores numerorum in hac forma  $paa \pm qbb$  contentorum”* ([EulerE164], 1751, ges. 1747) (E164: “Theoreme über die in der Form  $paa \pm qbb$  enthaltenen Zahlen”), wie zuerst von Kronecker (1823–1891) in seiner Arbeit *“Bemerkungen zur Geschichte der Reciprocitätsgesetzes”* ([Kronecker], 1876) bemerkt worden ist. Besagte Euler’sche Arbeit enthält, wie Euler auch selbst zugibt, keinen einzigen Beweis, aber nahezu 60 Theoreme. Ein Nachweis des Reziprozitätsgesetzes ist Euler verwehrt geblieben und wurde erst von Gauß in seinem Buch *“Disquisitiones arithmeticae”* ([Gauß2], 1801, ges. 1798) (“Untersuchungen zur Zahlentheorie”) geliefert.

Euler versucht nun durch weitere Operationen die allgemeinen Terme der Reihe solange umzuformen, bis er auf eine Progression stößt, für welche er einen expliziten Term anzugeben imstande ist. Aus seinen Überlegungen konstruiert er folgende Tabelle:

Index	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$A(n)$	1	1	3	7	19	51	141	393	1107	3139
$B(n+1)(=3A(n))$		3	3	9	21	57	153	423	1179	3321
$C(n)(=B(n)-A(n))$	2	0	2	2	6	12	30	72	182	
$D(n)(=\frac{1}{2}C(n))$	1	0	1	1	3	6	15	36	91	
$E(n)(=D^{-1}(n))$	1	0	1	1	2	3	5	8	13	

In seiner Notation unterdrückt Euler die Abhängigkeit von  $n$  und auch die in Klammern geschriebenen Ausdrücke. Wie Euler jedoch erklärt, ergibt sich  $B(n)$  aus Verdreifachung von  $A(n)$ .  $C(n)$  ist gerade die Differenz von  $B(n)$  und  $A(n)$ .  $D(n)$  ist die Hälfte von  $C(n)$ . Entscheidend ist nun, dass Euler die Folge  $D(n)$  als Dreieckszahlen erkennt, woraus er die Folge  $E(n)$  als deren Indizes<sup>45</sup> definiert. Die Folge  $E(n)$  sind aber gerade die Fibonacci-Zahlen, für welche Euler mithilfe der Theorie der rekurrenten Reihen eine explizite Formel anzugeben weiß<sup>46</sup>. Daraus kann man durch Umkehren aller erläuterten Schritte aus der expliziten Formel für  $E(n)$  die für  $A(n)$  finden. Über die Reihe  $E(n)$ , welche Euler schlicht  $E$  nennt, schreibt er in § 2:

*“In dieser Reihe  $E$  scheint die Struktur der Terme so beschaffen zu sein, dass jeder der Summe der zwei vorhergehenden gleich ist, und diese Schlussfolgerung, allein durch Beobachtung gebildet, scheint dermaßen gewiss, dass [...]”*

<sup>45</sup>Euler selbst schreibt das lateinische Wort für Wurzel.

<sup>46</sup>In seiner Arbeit [EulerE551] gibt er unmittelbar die finale Formel für  $A(n)$  an. Seine Methode, die  $n$ -te Fibonacci-Zahl zu finden, erläutert er unter anderem in seiner *Introductio*. Man betrachte insbesondere seine allgemeinen Ausführungen in §§ 212–214. Aus seinem Beispiel 4 von § 216 ergibt sich die explizite Formel für die Fibonacci-Zahlen als Spezialfall.

Daraus schließt Euler dann in erläuterter Weise auf die ursprüngliche Progression, welcher er mit  $A$  bezeichnet, zurück und fasst in § 3 zusammen:

*“Wenn diese Induktion mit der Wahrheit einherginge, wäre sie als eine Entdeckung von größter Bedeutung anzusehen, weil dann der allgemeine Term der vorgelegten Reihe  $A$  angegeben werden könnte.”*

Diesen gibt Euler auch explizit an, aber sagt dann in § 4:

*“[...] , weil ja die obige Induktion, so wahr sie auch erschien, dennoch von der Wahrheit abkommt.”*

Die Abweichung stellt man beim Vergleich des 11. Terms der durch Induktion gefundenen Formel mit dem tatsächlichen Wert fest, womit das Euler’sche Beispiel “falscher Induktion” treffend gewählt ist<sup>47</sup>.

**Ein Beispiel vollständiger Induktion bei Euler: Der kleine Satz von Fermat** Jedoch findet man auch Beispiele von Induktion in heutigem Sinne bei Euler, ohne dass Euler selbst dies auch als Induktion bezeichnet hat. Dazu betrachte man den nachstehenden bekannten Lehrsatz.

**Theorem 1** (Kleiner Satz von Fermat). *Für eine Primzahl  $p$  und eine zu  $p$  teilerfremde Zahl  $a$  gilt:*

$$a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$$

Obschon Euler in der später veröffentlichten Arbeit *“Theoremata arithmetica nova methodo demonstrata”* ([EulerE271], 1763, ges. 1758) (E271: “Zahlentheoretische Theoreme – bewiesen mit einer neuen Methode”) einen allgemeinen Beweis, der sehr an moderne Versionen erinnert<sup>48</sup>, gegeben hat, war sein erster Beweis des obigen Lehrsatzes ein sehr untypischer. In seiner

---

<sup>47</sup>Sandifer hat über dieses Beispiel von Euler den Artikel *“A memorable example of false induction”* ([Sandifer7], 2005) verfasst.

<sup>48</sup>In besagter Arbeit führt Euler die Euler’sche  $\varphi$ -Funktion ein, welche die Anzahl der zur natürlichen Zahl  $n$  teilerfremden Zahlen, welche  $< n$  sind, angibt, und leitet den kleinen Satz von Fermat als Spezialfall seiner allgemeineren Untersuchungen ab. Man vergleiche insbesondere seine Ausführungen aus §61. In besagter Arbeit benutzt Euler allerdings noch kein eigenes Symbol für die  $\varphi$ -Funktion, sondern erläutert ihren Inhalt verbal. In seiner später verfassten Abhandlung *“Speculationes circa quasdam insignes proprietates numerorum”* ([EulerE564], 1784, ges. 1775) (E564: “Betrachtungen zu gewissen außerordentlichen Eigenschaften von Zahlen”) nutzt er den Formelbuchstaben  $\pi$ .

## Theorema.

Denotante  $p$  numerum primum, si  $a^p - a$  per  $p$  di-  
uidi potest; tum per idem  $p$  quoque formula  $(a + 1)^p -$   
 $a - 1$  diuidi poterit.

## Demonstratio.

Resoluat  $(1 + a)^p$  consueto more in seriem,  
erit  $(1 + a)^p = 1 + p a + \frac{p(p-1)}{1 \cdot 2} a^2 + \frac{p(p-1)(p-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} a^3 +$   
-----  $\frac{p}{1} a^{p-1} + a^p$ ; cuius seriei singuli termini  
per  $p$  diuidi possunt praeter primum et vltimum; si  
quidem  $p$  fuerit numerus primus. Quamobrem  $(1 + a)^p$   
 $- a^p - 1$  diuisionem per  $p$  admittet; haec autem for-  
mula congruit cum hac  $(1 + a)^p - a - 1 - a^p + a$ . At  
 $a^p - a$  per hypothesein per  $p$  diuidi potest, ergo et  
 $(1 + a)^p - a - 1$ . Q. E. D.

**Abbildung 2:** Eulers Beginn des Beweises kleinen Satzes von Fermat mittels vollständiger Induktion nach natürlichen Zahl  $a$  aus seiner Arbeit [EulerE54].

Arbeit “*Theorematum quorundam ad numeros primos spectantium demonstratio*” ([EulerE54], 1741, ges. 1736) (E54: “Beweis gewisser sich auf Primzahlen beziehender Theoreme”) beweist er selbigen ab § 3 mit Induktion – wie man sie heute in der Mathematik versteht – nach  $a$ .

Trotz der Vorteile der mathematischen Induktion (oder auch vollständigen Induktion) als ein generisches Beweisverfahren, muss sie für Euler unbefriedigend gewesen, weil sie die Kenntnis des nachzuweisenden Ergebnisses voraussetzt. Seinem Arbeitsethos entsprechend hat Euler im Verlauf seiner Karriere noch weitere Beweise des kleinen Satzes von Fermat geliefert, welche alle in der Arbeit “*Euler and Number Theory: A Study in Mathematical Invention*” ([Suzuki], 2007) detailliert besprochen werden. Einen Teil dieser Nachweise bespricht auch Sandifer in seinem Artikel “*Fermat’s Little Theorem*” ([Sandifer1], 2003).

### 3.1.6 Eulers Ansicht zur Physik

The miracle of the appropriateness of the language of mathematics for the formulation of the laws of physics is a wonderful gift which we neither understand nor deserve.

---

Eugene Wigner

Zu Eulers Zeiten herrschte zwischen Mathematik und Physik noch nicht eine solch scharfe Trennung wie es heute der Fall ist, weswegen die Euler'sche Ansicht zum Wesen der Physik bündig referiert wird. In seinem Essay [EulerE790] findet man diesbezüglich die Passage<sup>49</sup>:

*“Mag auch die Physik, welche die Ursachen aller Vorgänge in der Natur untersucht, eines offensichtlichen Nutzens entbehren, so muss doch jeder, der die Wahrheit liebt, die Würde und Erhabenheit des Ziels anerkennen. [...] Denn alle Veränderungen, die wir in der Natur beobachten, stammen von Bewegungen her; es ist also klar, dass die Mechanik, das heißt die Wissenschaft von der Bewegung notwendig ist, um selbst die kleinste Bewegung im Universum zu erklären.”*

Hier kristallisiert sich vor allem die Ansicht heraus, die sei Physik für die Wahrheitsfindung notwendig. Insbesondere bezogen auf die Bewegungslehre ist sie womöglich überdies hinreichend. Die Einschränkung geschieht hier, weil es unter Umständen noch andere Erklärungen für einen Sachverhalt geben kann. Moderne Terminologie gebrauchend, ist es wohl zutreffend, dass die Mechanik eine Abduktion, wie Peirce (1839–1914) den Begriff in seinen *“Vorlesungen über Pragmatismus”* ([Peirce], 1903) erläutert<sup>50</sup>, für die Bewegung ist.

Euler äußert insbesondere implizit die Ansicht, aus den Axiomen der Mechanik abgeleitete Sätze manifestieren sich zwangsläufig in der Natur, worin man – sich Kant'scher Terminologie bedienend – eine physiko–teleologische

---

<sup>49</sup>Die Übersetzung ist wie oben aus der von Burckhardt aus Serie 3, Band 2 der *Opera Omnia* ([Burckhardt1], 1942) entnommen.

<sup>50</sup>Peirce formuliert diesen Begriff wie folgt: *“Abduktion ist der Vorgang, in dem eine erklärende Hypothese gebildet wird.”* (CP 5.171).

Weltsicht erkennen kann<sup>51</sup>. Er schreibt dazu hingegen explizit in seiner Arbeit *“Meditationes super problemate nautico, quod illustrissima regia Parisiensis Academia Scientiarum proposuit”* ([EulerE4], 1738, ges. 1729) (E4: “Betrachtungen über das Problem aus der Nautik, welches die illustre Pariser Akademie der Wissenschaften gestellt hat”) in § 50:

*“Ich habe es nicht als nötig erachtet, diese meine Theorie durch das Experiment zu bestätigen, weil sie gänzlich aus sichersten und unanfechtbarsten Prinzipien abgeleitet worden ist, und daher kein Zweifel aufkommen kann, ob sie wahr ist und auch in der Praxis ihre Gültigkeit behalten kann.”*

Folgender Ausspruch aus seiner Arbeit *“Réflexions sur l’espace et le tems”* ([EulerE149], 1750, ges. 1748) (E149: “Gedanken zur Natur von Raum und Zeit”) unterstreicht dies; dort schreibt er unmittelbar zu Beginn:

*“Die Prinzipien der Mechanik sind schon dermaßen etabliert, dass es höchst töricht wäre, wenn man immer noch an ihrer Wahrheit zweifeln wollte. Obgleich wir nicht in der Lage sind, sie durch allgemeine Prinzipien der Metaphysik zu demonstrieren, sollte die wunderbare Übereinstimmung aller Folgerungen, welche man aus ihnen vermöge des Kalküls zieht, mit den Bewegungen der Festkörper sowie der Fluide und gar der Himmelskörper, hinreichen, ihre Gültigkeit zweifelsfrei zu belegen.”*<sup>52</sup>

In § V. schreibt er weiter zur Natur des Raums und der Zeit in diesem Zusammenhang:

*“Man muss vielmehr schließen, dass so die absolute Zeit wie der absolute Raum, wie Mathematiker sie darstellen, reelle Dinge sind, welche über*

---

<sup>51</sup>Kant (1724–1804) hat diesen Begriff in seinem Werk *“Kritik der reinen Vernunft”* ([Kant], 2009, urspr. 1781) eingeführt und meinte damit ein Weltbild, welches jede Wirkung in der Natur als einem höheren Ziel zweckdienlich sieht.

<sup>52</sup>Seine Auffassungen zu den Grundlagen der Mechanik hat Euler in seinem Opus *“Theoria motus corporum solidorum seu rigidorum”* ([EulerE289], 1765, ges. 1760) (E289: “Die Theorie der Bewegung von soliden und starren Körper”) gebündelt aufbereitet. Die Hydrostatik bespricht Euler in der Abhandlung *“Sectio prima de statu aequilibrü fluidorum”* ([EulerE375], 1769, ges. 1766) (E375: “Erster Abschnitt über den Gleichgewichtszustand von Fluiden”), seine Ideen zur Hydrodynamik sind in der Arbeit *“Sectio secunda de principiis motus fluidorum”* ([EulerE396], 1770, ges. 1766) (E396: “Zweiter Abschnitt über die Prinzipien der Bewegung von Fluiden”) zusammengefasst zu finden. Für Eulers Erkenntnisse zur Himmelsmechanik ist auf das Buch *“Leonhard Eulers Arbeiten zur Himmelsmechanik”* ([Verdun], 2014) verwiesen.

*die Vorstellung hinaus ebenfalls Bestand haben.”*

Heute wird die bis mindestens zu Leibniz (1646–1716) und Newton (1642–1726) zurückreichende Diskussion, ob Zeit und Raum relativ oder absolut sind<sup>53</sup>, als unentschieden betrachtet<sup>54</sup>, wohingegen Euler eindeutig Stellung bezieht. Somit ist folgende sehr apodiktisch anmutende Aussage aus § XV, aus welcher sich auch ein deterministisches Weltbild herauslesen lässt, fast schon folgerichtig:

*“Ich gehe damit konform, dass alle Dinge, welche existieren, vollständig bestimmt sind, [...]”*

Geht man nämlich von ein deterministischen Weltbild aus, so kann man auch die Physik bzw. die Mechanik als wahrheitskonform ansehen. Die Umkehrung dieser Aussage ist hingegen unrichtig.

Folgendes Zitat von Fellmann in seiner Euler-Biografie [Fellmann] (S. 24) fasst alles Vorgetragene zusammen:

*“Dieses fast blinde Vertrauen in die Stringenz der Prinzipien und in die apriorischer Deduktionen begleitete Euler bis in sein hohes Alter und kennzeichnet ein Paradigma seines Schaffens.”*

Umgekehrt, so würde Euler begründen, schreibt auch die Physik vor, welche Objekte in der Mathematik überhaupt einer Betrachtung wert sind. An kaum einer Stelle wird diese wechselseitige Befruchtung deutlicher als am Beispiel der schwingenden Saite, welche Euler in [EulerE322] gleichsam dazu zwang, seinen Funktionsbegriff dahingehend abzuwandeln, auch das mit einzuschließen, was heute als Distribution bezeichnen wird<sup>55</sup>.

Ein Vergleich zu dem modernen Artikel [Dirac2], welcher auch die Rela-

---

<sup>53</sup>Newton vertritt in seinen *“Philosophiae Naturalis Principia Mathematica”* ([Newton], 1687) (“Mathematische Prinzipien der Naturphilosophie”) die These, dass Raum und Zeit absolut sind.

<sup>54</sup>Die ursprüngliche Debatte zwischen Leibniz und Samuel Clarke (1675–1729), Newtons Fürsprecher, besteht aus 5 Abhandlungen von Leibniz und 5 jeweiligen Repliken von Clarke. Man findet sie im Buch *“The-Leibniz Correspondence”* ([Alexander], 1998) abgedruckt. Die wesentlichen Argumente werden beispielsweise in dem Büchlein *“Philosophy of Science – A Very Short Introduction”* ([Okasha], 2016) vorgestellt und diskutiert.

<sup>55</sup>Man konsultiere diesbezüglich insbesondere den Übersichtsartikel *“Euler’s Vision of a General Differential Calculus for a Generalized Kind of Function”* ([Lützen], 1983).

tion von Mathematik und Physik zum Inhalt hat, bestätigt das Erläuterte auf noch einmal mehr. Diracs Position wird prägnant durch folgenden Satz zusammengefasst:

*“One may describe the situation by saying that the mathematician plays a game in which he himself invents the rules while the physicist plays a game in which the rules are provided by Nature, but as times goes on it becomes increasingly evident that the rules which the mathematician finds interesting are the same as those which Nature has chosen.”*

## 3.2 Abriss von Eulers Vorgehensweise

Continuous improvement is  
better than delayed perfection.

---

Mark Twain

Die vorausgeschickten Abschnitte zur Euler’schen Auffassung der Essenz der Mathematik und Physik gestattet nun die Betrachtung der sich daraus ergebenden Konsequenzen für die konkrete Arbeitsweise Eulers. Es werden die Leitfäden seines Schaffens (Abschnitt 3.2.1) und Alleinstellungsmerkmale seines Präsentationsstils (Abschnitt 3.2.2) anhand Diskussion ihrer Teilfacetten auseinander gesetzt.

### 3.2.1 Leitfäden der Arbeitsweise

Immer mit den einfachsten  
Beispielen anfangen.

---

David Hilbert

Aus den grundlegenden sich aus dem Essay [EulerE790] herauskristallisierenden Euler’schen Auffassungen zum Wesen der Mathematik manifestieren sich insbesondere in seiner Arbeits- und seines Präsentationsstils grundlegende Unterschiede im Vergleich zum heutigen Leitbild. Während heutzutage erneut das Euklid’sche Vorbild des Dreischritts aus Definition, Satz und Beweis die Darstellung mathematischer Abhandlungen prägt, arbeitet sich Euler, nahezu diametral dazu, von Beispielen zur Allgemeinheit vor. Man vergleiche hierzu die Worte von Hankel (1839–1873) auf Seite 16 seines Buchs *“Die Entwicklung der Mathematik in den letzten Jahrhunderten”*

([Hankel2], 1869):

*“Euler’s Art zu arbeiten, war in der Hauptsache die, dass er zunächst seine Kräfte auf ein specielles Problem concentrirte, und so zu einer speciellen Auf Lösungsmethode gelangte. Daran schließt sich dann in einer folgenden Abhandlung häufig ein zweites, jenem verwandtes, ein drittes, viertes Problem, das er wiederum mit einer speciellen, jener ersten verwandten, aber dem neuen Probleme angepassten Form behandelt. Hierin ist er unübertrefflich; kein zweiter Mathematiker kommt ihm gleich an Fülle analytischer Gedanken und Geschick, die Methoden der speciellen Problem[SIC] zu accomodieren. [...]”.*

Dies kann man mit David Hilberts (1862–1943) Beschreibung aus seinem Buch *“Geometry and the Imagination”* ([Hilbert], 1952) ins Verhältnis setzen, wo er über den Forschungsprozess in der Mathematik schreibt:

*“In mathematics, as in any scientific research, we find two tendencies [...] [T]he tendency toward abstraction seeks to crystallize the logical relations inherent in the maze of material in a systematic and orderly manner. On the other hand, the tendency toward intuitive understanding fosters a more immediate grasp of the objects [...] a live rapport with them [...] which stresses the concrete meaning of their relations.”*

Hilbert lässt demnach Euler als Vertreter der zweiten Kategorie erkennen.

**Methodus Inveniendi und praktische Fragestellungen als Leitfa-**  
**den** Angesichts des Hankel’schen Zitats bildet sich die richtige Erwartung heraus, dass eine Großzahl von Eulers Arbeiten von der Entwicklung von Methoden zur Lösung eines spezifischen Problems handeln wird<sup>56</sup>. Während Euler demnach eigens spezielle Methoden zur Auflösung eines gestellten Problems entwickelt, besteht der moderne Ansatz zumeist zur Problemlösung in der Verallgemeinerung der vorhandenen Begriffe zu einem höheren Grad

---

<sup>56</sup>Eine hohe zweistellige Anzahl (ca. 70) seiner Arbeiten wie etwa sein wegweisendes Buch zur Variationsrechnung *“Methodus inveniendi lineas curvas maximi minime proprietate gaudentes, sive solutio problematis isoperimetrici lattissimo sensu accepti”* ([EulerE65], 1744, ges. 1743) (E65: “Eine Methode sich der Eigenschaft des Maximums oder Minimums erfreuende Kurven zu finden, oder die Lösung des im weitesten Sinne aufgefassten isoperimetrischen Problems”) tragen schon im Titel die Worte *“Methodus inveniendi”* oder ähnliche Formulierungen.

an Abstraktion, mit welchem dann Theoreme entwickelt werden, welche das ursprüngliche Problem als Spezialfall der abstrakten Theorie begreifen.

Während im Haupttext die Entdeckung der “Numeri Idonei“ (siehe Abschnitt 7.3.3) als Beispiel herangezogen werden wird, dass der Praxisbezug Euler bisweilen einen weiteren Fortschritt versperrte, soll hier ein Exempel gemacht werden, dass Euler selbst abstraktere Fragen zumeist mit praktischen Anwendungen im Hinterkopf behandelt hat. Die Arbeit “*Investigatio functionum ex data differentialium conditione*” ([EulerE285], 1764, ges. 1759) (E285: “Das Finden von Funktionen aus einer gegebenen Bedingung an die Differentiale”) nimmt sich der Frage an, wie partielle Differentialgleichungen mit allgemeiner gegebener Struktur gelöst werden können. Die Motivation für diese Untersuchung gibt Euler in der Mitte von § 5 dieser Abhandlung:

*“Obwohl aber Fragen von dieser Art fast gänzlich neu erscheinen, besteht indes kein Zweifel, dass die Methoden, sie entsprechend aufzulösen für die gesamte Mathematik einen Nutzen haben wird. Denn beim ganzen Problem der schwingenden Saite ist die Essenz der Lösung zu dieser Gattung zu rechnen, weil sie in einer gewissen Beziehung zwischen den Funktionen  $P$  und  $Q$  verborgen liegt. Überdies habe ich ebenfalls diese gesamte Wissenschaft von der Bewegung von Fluiden in Differentialformen von dieser Art erfasst, wo eine bestimmte Relation zwischen den Anteilen der jeweiligen Differentiale vorgeschrieben wird, aus welcher sich aber wegen des Mangels einer solchen Lösungsmethode kaum etwas ableiten lässt.”*<sup>57</sup>

Als weiteres Beispiel für Euler’sche Praxisnähe ließen sich im Allgemeinen seine Methoden nennen, die einer effizienteren numerischen Berechnung versprechen. Zu jedem Themenfeld, welchem Euler seine Aufmerksamkeit gewidmet hat, finden sich Arbeiten, die die explizite Berechnung zum Gegenstand haben. Allen voran geht dabei die Euler–Maclaurin’schen Summationsformel. Hergeleitet hat er sie zu ersten Mal vollständig in der Arbeit “*Inventio summae cuiusque seriei ex dato termino generali*” ([EulerE47], 1741, ges. 1735) (E47: “Das Finden jedweder Summe aus einem gegebenen

---

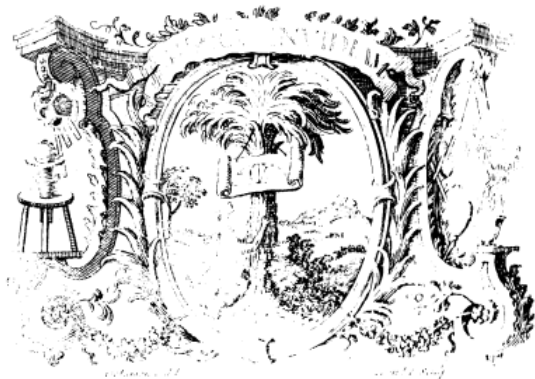
<sup>57</sup>Euler referiert dabei vermutlich auf seine Arbeiten “*De vibratione chordarum exercitatio*” ([EulerE119], 1749, ges. 1748) (E119: “Über die Vibration einer zum Schwingen angeregten Saite”) bezüglich der schwingenden Saite und “*Principia motus fluidorum*” ([EulerE258], 1761, ges. 1753) (E258: “Prinzipien der Bewegung von Fluiden”) bezüglich der Hydrodynamik. In letztgenannter Arbeit leitet Euler die nach ihm benannten Euler’schen Gleichungen für die Dynamik inkompressibler Fluide her.

**METHODUS**  
*INVENIENDI*  
**LINEAS CURVAS**  
Maximi Minimive proprietate gaudentes,  
*SIVE*  
**SOLUTIO**  
PROBLEMATIS ISOPERIMETRICI  
LATISSIMO SENSU ACCEPTI

*AUCTORE*

**LEONHARDO EULERO,**

*Professore Regio, & Academiae Imperialis Scientiarum PETROPOLITANÆ Socio.*



LAUSANNÆ & GENEVÆ,

Apud MARCUM-MICHAELEM BOUSQUET & Socios.

MDCCXLIV.

**Abbildung 3:** Das Titelblatt von Eulers Buch zur Variationsrechnung [EulerE65] als Pars Pro Toto für die von ihm bevorzugte *Methodus inveniendi*.

Vt nunc ex hac aequatione S in X exprimatur, accipio hanc aequationem:

$$S = \int X dx + \alpha X + \frac{\beta dx}{dx} + \frac{\gamma d^2x}{dx^2} + \frac{\delta d^3x}{dx^3} + \text{etc.}$$

cuius in illa facta substitutione habebitur

$$X = X + \frac{\alpha dX}{dx} + \frac{\beta d^2X}{dx^2} + \frac{\gamma d^3X}{dx^3} + \frac{\delta d^4X}{dx^4} \\ - \frac{dX}{1 \cdot 2 dx} - \frac{\alpha d^2X}{1 \cdot 2 dx^2} - \frac{\beta d^3X}{1 \cdot 2 \cdot 3 dx^3} - \frac{\gamma d^4X}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 dx^4} \\ + \frac{d^2X}{1 \cdot 2 \cdot 3 dx^2} + \frac{\alpha d^3X}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 dx^3} + \frac{\beta d^4X}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 dx^4} \\ - \frac{d^3X}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 dx^3} - \frac{\alpha d^4X}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 dx^4} \\ + \frac{d^5X}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 dx^5}$$

§. 27. Ex hac aequalitate nascuntur sequentes coefficientium  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ ,  $\delta$ , etc. determinationes.

$$\alpha = \frac{1}{1 \cdot 2} \\ \beta = \frac{\alpha}{1 \cdot 2} - \frac{\gamma}{1 \cdot 2 \cdot 3} \\ \gamma = \frac{\beta}{1 \cdot 2} - \frac{\alpha}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{\delta}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \\ \delta = \frac{\gamma}{1 \cdot 2} - \frac{\beta}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{\alpha}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} - \frac{\epsilon}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} \\ \epsilon = \frac{\delta}{1 \cdot 2} - \frac{\gamma}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{\beta}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} - \frac{\alpha}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} + \frac{\zeta}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} \\ \text{etc.}$$

Abbildung 4: Euler gibt die Euler-Maclaurin'sche Summenformel in [EulerE130] an. Zu sehen ist ganz oben die allgemeine Formel für eine Summe  $S$  bis hin zu  $n$  Termen summiert über den allgemeinen Term  $X$ . Am unteren Rand sind noch die ersten Entwicklungskoeffizienten  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ ,  $\delta$ ,  $\epsilon$  zu erkennen.

allgemeinen Term”) aus der Einsicht, dass der Ausdruck

$$f(x) := \sum_{k=1}^{x-1} g(k)$$

der Gleichung  $f(x+1) - f(x) = g(x)$  Genüge leistet. In just erwähnter Arbeit wählt Euler einen geschickten Ansatz und gelangt so zur bekannten Summenformel. Voll ausgeschrieben findet man die Summenformel überdies in der Arbeit “*De seriebus quibusdam considerationes*” ([EulerE130], 1750, ges. 1739) (E130: “Betrachtungen über gewisse Reihen”) (§§ 26–27)<sup>58</sup>.

**Dialektischer Ansatz** In seinen “*Briefen an eine deutsche Prinzessin*” [EulerE343] hat Euler auf den dialektischen Prozess bei epistemologischen

<sup>58</sup>Dies wird auch von Sandifer in seinem Artikel “*Bernoulli numbers*” ([Sandifer8], 2005) im Kontext der Bernoulli'schen Zahlen angemerkt.

Fragen hingewiesen und nimmt damit insbesondere die Ausführungen Hegels (1770–1831) vorweg, welcher den Fortschritt in dem Wort “*Aufhebung*” subsummiert hat. Eulers Ausführungen sind insofern erhellender, zumal er unterstreicht, dass sich gewisse Paradoxa durch entsprechende Einführung von neuen Konzepten auflösen und die Einzelteile sich synthetisieren lassen. Ein Beispiel dessen findet sich in Eulers Auflösung des Cramer’schen Paradoxons. Dieses besteht darin, dass eine Kubik, definiert über

$$a_1x^3 + a_2y^3 + a_3x^2y + a_4xy^2 + a_5x^2 + a_6y^2 + a_7xy + a_8x + a_9y + a_{10} = 0$$

mit den variablen  $x$  und  $y$  und den Koeffizienten  $a_1$  bis  $a_{10}$  im Allgemeinen durch 9 Punkte eindeutig festgelegt wird, sich jedoch zwei verschiedene Kubiken ebenfalls in 9 Punkten schneiden. Euler löst dieses in seiner Arbeit “*Démonstration sur le nombre des points, où deux lignes des ordres quelconques peuvent se couper*” ([EulerE148], 1748) (E148: “Beweis zur Anzahl der Punkte, in welchen sich zwei Kurven beliebiger Ordnung schneiden können”) auf. Dies wird in Sandifers Arbeit “*Cramer’s Paradox*” ([Sandifer6], 2004) diskutiert.

Jedoch ist Eulers Theorie des komplexen Logarithmus zur Demonstration dieses Prozesses noch illustrativer. Denn sie zeigt, wie sehr er über seine Vorgänger – insbesondere Leibniz (1646–1716) und Johann Bernoulli (1667–1748), aber auch seinen Zeitgenossen d’Alembert (1717–1783) hinausgeht<sup>59</sup>. Eine Darstellung von Eulers weiteren Leistungen zu diesem Gegenstand findet man auch im Artikel “*Euler, D’Alembert and the Logarithm Function*” ([Bradley], 2007) beschrieben.

Die Auflösung der Schwierigkeiten in der Theorie des Logarithmus gelingt Euler durch Aufdeckung von dessen Unendlichkeit. Euler stellt die Berechnung des Logarithmus einer allgemeinen komplexen Zahl in Problem 3 seiner Abhandlung “*De la controverse entre Mrs. Leibnitz et Bernoulli sur les logarithmes des nombres négatifs et imaginaires*” ([EulerE168], 1751, ges. 1747) (E168: “Über die Kontroverse der Herren Leibniz und Bernoulli über die Logarithmen von negativen und imaginären Zahlen”)<sup>60</sup> vor.

<sup>59</sup>Eulers gleich zu besprechende Betrachtung dieses Gegenstandes ist auch ein Musterbeispiel für eine gute Argumentation, wenn man die Maßstäbe der in der Philosophie viel beachteten Bücher zum Gegenstand der Argumentationstheorie “*Attacking Faulty Reasoning: A Practical Guide to Fallacy-Free Arguments*” ([Damer], 2013) und “*A Practical Study of Argument*” ([Govier], 2013) heranzieht.

<sup>60</sup>Eine Übersetzung ins Deutsche findet sich auch in dem Buch “*Ostwalds Klassiker*

Das vorausgehende Problem 1 mit der Behandlung einer beliebigen positiven Zahl und Problem 2 mit einer beliebigen negativen Zahl sind als Vorbereitungen auf den allgemeinen Fall zu verstehen. Die grundlegenden Gedanken Eulers werden an dieser Stelle unter Verwendung moderner Terminologie nachgezeichnet. Der folgende Grenzwert<sup>61</sup> bildet für ihn den Ausgangspunkt:

$$\log(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} n \left( z^{\frac{1}{n}} - 1 \right), \quad (4)$$

Für den Ausdruck  $z^{\frac{1}{n}}$  gilt:

$$z^{\frac{1}{n}} = |z|^{\frac{1}{n}} \left( \cos \left( \frac{\varphi + 2k\pi}{n} \right) + i \left( \sin \left( \frac{\varphi + 2k\pi}{n} \right) \right) \right)$$

mit  $\varphi$  als Argument der komplexen Zahl<sup>62</sup>,  $k$  ist eine beliebige ganze Zahl. Für endliches  $n$  hat man nur  $n$  verschiedene Werte, für unendliches  $n$ , so Euler, wird  $z^{\frac{1}{n}}$  folglich unendlich viele Werte aufweisen, was sich demnach auf den Logarithmus überträgt, denn:

$$\log(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} n \left( |z|^{\frac{1}{n}} \left( \cos \left( \frac{\varphi + 2k\pi}{n} \right) + i \left( \sin \left( \frac{\varphi + 2k\pi}{n} \right) \right) \right) - 1 \right),$$

Die Funktionalgleichung  $\log(x \cdot y)$  erlaubt die Fokussierung auf den Fall  $|z| = 1$  ohne die Allgemeinheit einzuschränken:

$$\log(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( n \left( \cos \left( \frac{\varphi + 2k\pi}{n} \right) + i \left( \sin \left( \frac{\varphi + 2k\pi}{n} \right) \right) \right) - 1 \right),$$

was zu diesem gleichwertig ist

$$\log(z) = \lim_{n \rightarrow 0} \frac{1}{n} (\cos(n(\varphi + 2k\pi)) + i \sin(n(\varphi + 2k\pi)) - 1).$$

Eine Aufteilung in

$$\log(z) = \lim_{n \rightarrow 0} \frac{\cos(n(\varphi + 2k\pi)) - 1}{n} + i \cdot \lim_{n \rightarrow 0} \frac{\sin(n(\varphi + 2k\pi))}{n}.$$

---

der exakten Wissenschaften Band 261: Zur Theorie komplexer Funktionen von Leonhard Euler" ([Wußing], 2007).

<sup>61</sup>Diesen nutzt Euler unter anderem in seinem berühmten Lehrbuch "Introductio in analysin infinitorum, volumen primum" [EulerE101], um – unter Verwendung des binomischen Lehrsatzes – die Taylorreihenentwicklung von  $\log(1+x)$  abzuleiten.

<sup>62</sup>Euler benutzt in diesem Zusammenhang meist das Wort "Winkel".

führt unter Anwendung bekannten Potenzreihen

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots \quad \text{und} \quad \sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots$$

zu

$$\log(z) = 0 + i\varphi + 2k\pi \cdot i,$$

woraus man für den Fall  $|z| \neq 1$  schließt:

$$\log(z) = \log|z| + i\varphi + 2k\pi \cdot i. \tag{5}$$

Nimmt man nun noch hinzu, dass sich das Argument  $\varphi$  mithilfe von inversen trigonometrischen Funktionen berechnen lässt, drückt Euler den komplexen Logarithmus somit über elementare Ausdrücke aus. Ganz konkret gibt Euler in § 100 seiner Arbeit *“Recherches sur les racines imaginaires des equations”* ([EulerE170], 1751, ges. 1746) (E170: “Untersuchung über die imaginären Wurzeln von Gleichungen”) den Ausdruck

$$\log(x + iy) = \log \sqrt{x^2 + y^2} + i \arctan \left( \frac{y}{x} \right), \tag{6}$$

an, wobei er jedoch nicht nur  $\arctan \left( \frac{y}{x} \right)$ , sondern auch die gleichwertigen Ausdrücke  $\arcsin \left( \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right)$  und  $\arccos \left( \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right)$  für das Argument angibt. Er gelangt hier über den Weg der Integration der Differentialform

$$d \arctan \left( \frac{y}{x} \right) = \frac{-ydx + xdy}{x^2 + y^2} \quad \text{und} \quad d \log \sqrt{x^2 + y^2} = \frac{xdx + ydy}{x^2 + y^2}$$

zu den besagten Ausdrücken, also auf anderen Wege als in [EulerE168]. Auch hier stellt Euler die Vieldeutigkeit des Logarithmus fest, zieht allerdings diesmal die aus geometrischen Betrachtungen evidente Vieldeutigkeit der inversen trigonometrischen Funktionen als Begründung heran, welche sich auf den Logarithmus überträgt.

Euler hat indes noch ein weiteres Argument für die Vieldeutigkeit des Logarithmus in seiner Abhandlung *“Sur les logarithmes des nombres négatifs et imaginaires”* ([EulerE807], 1862, ges. 1747) (E807: “Über die Logarithmen von negativen wie imaginären Zahlen”) vorgestellt, was diese Zusammenhänge nicht verwendet. Da dieses ein Paradebeispiel Euler’scher Ingeniosität ist (siehe auch [Dunham2]), soll es hier nicht vorenthalten werden:

$$\frac{ada + bdb}{aa + bb} + \frac{(adb - bda)\sqrt{-1}}{aa + bb} = dx + dy\sqrt{-1}$$

Soit encore  $\sqrt{(aa + bb)} = c$ , & l'angle  $\Phi$  tel, qu'il soit  $\cos \Phi = \frac{a}{c}$  &  $\sin \Phi = \frac{b}{c}$ ; & par l'integration on trouvera:  $x = l\sqrt{(aa + bb)}$   
 $= lc$  &  $y = A \operatorname{tang} \frac{b}{a} = \Phi$ . Donc nous aurons:

$$l(a + b\sqrt{-1}) = l\sqrt{(aa + bb)} + \sqrt{-1} \cdot A \operatorname{cof} \frac{a}{\sqrt{(aa + bb)}}$$

$$\text{ou } l(a + b\sqrt{-1}) = l\sqrt{(aa + bb)} + \sqrt{-1} \cdot A \operatorname{fin} \frac{b}{\sqrt{(aa + bb)}}$$

**C. Q. F. T.**

**Abbildung 5:** Eulers Herleitung von Ausdrücken für Logarithmen einer komplexen Zahl mithilfe von Differentialformen aus seiner Arbeit [EulerE170]. Euler schreibt hier, wie zumeist, für den natürlichen Logarithmus nur den Formelbuchstaben  $l$ .

Euler beginnt mit dem Integral

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} = \log(x + \sqrt{x^2+1}) + C,$$

wobei  $C$  eine Integrationskonstante anzeigt. Nun setzt Euler  $x = iu$ , sodass

$$\int \frac{idu}{\sqrt{1-u^2}} = \log(iu + \sqrt{1-u^2}) + C.$$

Das Integral linker Hand ist bekanntermaßen eine Arkusfunktion, sodass:

$$i \arcsin(u) = \log(iu + \sqrt{1-u^2}) + C.$$

Nun setzt Euler  $u = \sin \varphi$ , sodass

$$\begin{aligned} i \arcsin(\sin(\varphi)) &= i\varphi = \log(i \sin(\varphi) + \sqrt{1 - \sin^2(\varphi)}) + C \\ &= \log(\cos(\varphi) + i \sin \varphi) + C. \end{aligned}$$

Den Wert der Konstante  $C$  kann man aus dem Spezialfall  $\varphi = 0$  als  $= 0$  ermitteln, woraus die Formel

$$\log(\cos(\varphi) + i \sin(\varphi)) = i\varphi$$

entspringt. Durch Exponenzieren gelangt man zur berühmten Euler'schen Formel und Eulers Beweis ist abgeschlossen. In der Tat ist dieser auch im

Vergleich zum obigen aus moderner Sicht vollkommen streng. Umso mehr mag es verwundern, dass Euler das erste der Arbeit [EulerE168] nachempfundene Argument gegenüber dem just vorgestellten für eine Veröffentlichung den Vorzug gegeben hat<sup>63</sup>. Seine Wahl mag in der womöglich von ihm antizipierten Präferenz seiner Zeitgenossen für auf der Exponentialfunktion fußende Argumentationen begründet liegen, zumal die Wesensverwandschaft dieser zu Logarithmen zunächst enger ist als die zu den Kreisfunktionen. Bekräftigt wird diese Ansicht dadurch, dass trotz der Verbindung von Kreis- und Exponentialfunktionen über die Euler'sche Identität

$$e^{i\varphi} = \cos(\varphi) + i \sin(\varphi)$$

eine Unterscheidung zwischen ihren Umkehrfunktionen, den Logarithmen und Arkusfunktionen, üblich gewesen zu sein scheint. Euler selbst spricht insbesondere im Zusammenhang von Integration in späteren Arbeiten oft von "Logarithmen und Kreisbögen" und trennt sie somit ungeachtet ihrer mathematischen Äquivalenz sprachlich voneinander.

Explizit erwähnt hat er diese mathematische Verbindung der beiden Funktionen unter anderem in § 6 der in der Arbeit "*Speculationes analyticae*" ([EulerE475], 1776, ges. 1774) (E475: "Analytische Betrachtungen") durch Angabe dieser Formel

$$\log \left( \frac{1 + (p + q)\sqrt{-1}}{1 - (p + q)\sqrt{-1}} \right) = 2\sqrt{-1} \arctan(p + q),$$

wobei sich  $i = \sqrt{-1}$  zu denken ist.  $p$  und  $q$  sind für Euler in diesem Kontext beliebige reelle Zahlen. Eine Erwähnung des Nexus von Logarithmen komplexer Zahlen zu Kreiszahlen findet sich bereits in § 17 seiner Ausarbeitung "*De progressionibus harmonicis observationes*" ([EulerE43], 1740, ges. 1734) (E43: "Beobachtungen zu harmonischen Progressionen"). Die Formel erläutert Euler in Worten:

*"Es ist nämlich  $\frac{\sqrt{-3}}{2} \log \frac{3+\sqrt{-3}}{3-\sqrt{-3}}$  die Peripherie des Kreises dividiert durch  $\sqrt{3}$ , sofern der Durchmesser = 1 gesetzt worden ist, und  $\frac{\sqrt{-3}}{2} \log \frac{1-\sqrt{-3}}{1+\sqrt{-3}}$  die Hälfte dessen."*

---

<sup>63</sup>Die Abhandlung [EulerE807] wurde zwar erst posthum veröffentlicht, aber zeitlich leicht vor [EulerE168] verfasst. Im Vorwort zur Band 19 der *Opera Omnia* [Faber2] wird [EulerE807] gar als die sorgsame Ausarbeitung von [EulerE168] gesehen.

Euler liegt grundlegend richtig, ihm scheint indes ein Rechenfehler unterlaufen zu sein. Denn man hat, sofern man die Hauptwerte des  $\log$  nimmt:

$$\frac{\sqrt{3}i}{2} \log \left( \frac{1 - \sqrt{3}i}{1 + \sqrt{3}i} \right) = \frac{\pi}{\sqrt{3}} \quad \text{sowie} \quad -\frac{\pi}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}i}{2} \log \left( \frac{3 + \sqrt{3}i}{3 - \sqrt{3}i} \right).$$

### 3.2.2 Besonderheiten des Präsentationstils

The mediocre teacher tells. The  
good teacher explains. The  
superior teacher demonstrates.  
The great teacher inspires.

---

William Arthur Ward

Nach Beleuchtung der Facetten von Eulers Arbeitsweise soll die gleiche Aufmerksamkeit nun seiner Darstellungsweise zukommen. Jedes Merkmal wird dabei exemplarisch illustriert.

**Ausführliche Darstellung des Gedankengangs und Präsentation von Rechnungen** Euler hat selten an der ausführlichen Erläuterungen seiner Gedanken gespart, was ungeachtet der daraus resultierenden Länge seiner Arbeiten das Verständnis des Lernenden fördert. Hankel fasst dies auf Seite 16–17 seines Buches *“Die Entwicklung der Mathematik in den letzten Jahrhunderten”* ([Hankel2], 1869) wie folgt zusammen:

*“Er [Euler] war eine wesentlich concrete Natur, die sich mit wirklicher Liebe und Begeisterung dem Stoffe hingab und sich von ihm treiben liess. [...] Daher geht durch all seine Schriften ein warmer, lebendiger Zug; man ließt zwischen den Zeilen überall begeisterte Freude über die Schönheit und wunderbare Tiefe, die ihm der Gegenstand offenbart. Mit behaglicher Breite, die nicht jedes einzelne Wort ängstlich abwägt, erzählt er, was ihn seine Untersuchungen gelehrt haben – und so lesen sich – wie man gesagt hat, seine Schriften wie “Novellen”.”*

Hankels Beschreibung bestätigt sich in Eulers ausführlichen verbalen Erklärungen, sehr umfassend vorgetragenen Rechnungen und expliziter Exempel, welche zum Ende in einer allgemeinen Formel münden. Obschon diese Merkmale vielen Euler’schen Arbeiten zukommen, möge im Hinblick auf den späteren Teil der vorliegenden Abfassung die folgende Reihe an

Euler'schen Abhandlungen als pars pro toto herhalten: *“Theorema maxime memorabile circa formulam integram  $\int \frac{\partial\phi \cos \lambda\phi}{(1+aa-2a \cos \phi)^{n+1}}$ ”* ([EulerE672], 1794, ges. 1778) (E672: “Ein höchst bemerkenswertes Theorem über das Integral  $\int \frac{\partial\phi \cos \lambda\phi}{(1+aa-2a \cos \phi)^{n+1}}$ ”), *“Disquisitio coniecturalis super formula integrali  $\int \frac{\partial\phi \cos i\phi}{(\alpha+\beta \cos \phi)^n}$ ”* ([EulerE673], 1794, ges. 1778) (E673: “Eine auf Vermutung basierende Untersuchung über die Integralformel  $\int \frac{\partial\phi \cos i\phi}{(\alpha+\beta \cos \phi)^n}$ ”), *“Demonstratio theorematis insignis per coniecturam eruti circa intagrationem formulae  $\int \frac{\partial\phi \cos i\phi}{(1+aa-2a \cos \phi)^{n+1}}$ ”* ([EulerE674], 1794, ges. 1778)<sup>64</sup> (E674: “Beweis des außergewöhnlichen Theorems, welches nur auf einer Vermutung basierend über die Integralformel  $\int \frac{\partial\phi \cos i\phi}{(1+aa-2a \cos \phi)^{n+1}}$  entdeckt worden ist”) und *“Specimen transformationis singularis serierum”* ([EulerE710], 1801, ges. 1778) (E710: “Ein Beispiel einer einzigartigen Transformation von Reihen”). In der Tat scheinen sie nahezu ohne Nachbearbeitung in die Publikation übergegangen zu sein, da sie – selbst für Euler'sche Verhältnisse – sehr viele minutiös evaluierte Spezialfälle beinhalten. Den Inhalt bilden dabei die Integrale der Form

$$\int_0^\pi \frac{d\varphi \cos(\lambda\varphi)}{(1 + 2 \cos(\varphi)a + a^2)^n} \quad (7)$$

für beliebige Zahlen  $a$ , und natürliche Zahlen  $\lambda$  und  $n$ , deren Geltungsbereich Euler im Verlauf seiner Investigationen auf die ganzen Zahlen ausweitet. Dies geschieht durch systematische Betrachtung verschiedener Tupel  $(\lambda, n)$  für die kleinsten natürlichen Zahlen. Seine Anstrengungen kulminieren in einer Differenzgleichung in den Buchstaben  $\lambda$  und  $n$  sowie einer Funktionalgleichung in der Variablen  $n$ , welche die Berechnung der Integrale (7) von ganzzahligen negativen  $n$  auf die positiven zurückführt<sup>65</sup>. Zunächst als Vermutungen in [EulerE672] und [EulerE673] vorgestellt, enthält das Papier [EulerE674] schließlich die Beweise, welche allerdings auf Ergebnisse von [EulerE710] zurückgreifen. Unten (Abschnitt 5.2.4) werden die Integrale (7) demonstriert, die nach Legendre (1752–1833) benannten Polynome auszudrücken, und die Euler'schen Untersuchungen als eine Eruiierung einiger ihrer Eigenschaften umgedeutet. Letztgenannte Abhandlung enthält überdies wohl die erste Definition der hypergeometrischen Reihe, welche

<sup>64</sup>Die Arbeiten [EulerE672], [EulerE673], [EulerE674] waren ein Teil eines einzigen Abschnitts innerhalb des Buches *“Institutionum calculi integralis – Volumen 4”*.

<sup>65</sup>Sowohl die Funktionalgleichung als auch die Differenzgleichung werden unten in Abschnitt (5.2.4) Gegenstand der Diskussion bilden, weshalb sie an dieser Stelle noch nicht aufgeführt sind. Es handelt sich respektive um die Gleichungen (68) und (67)

Integratio formulae generalis

$$\int \frac{\partial \Phi \cos. i \Phi}{\Delta^{n+1}} \left[ \begin{array}{l} a \Phi = 0 \\ \text{ad } \Phi = 180 \end{array} \right]$$

existente  $\Delta = 1 + a a - 2 a \cos. \Phi$ .

§. 68. Haec formula generalis perinde tractari potest ac praecedens, dum valor integralis cujusque casus etiam a duobus casibus praecedentibus pendet, ita ut ponere queamus

$$\int \frac{\partial \Phi \cos. i \Phi}{\Delta^{n+1}} = \alpha \int \frac{\partial \Phi \cos. i \Phi}{\Delta^n} + \beta \int \frac{\partial \Phi \cos. i \Phi}{\Delta^{n-1}},$$

**Abbildung 6:** Die Integralfamilie von Interesse aus Eulers Arbeit [EulerE673]. Die angenommene Differenzgleichung mit zu bestimmenden Koeffizienten  $\alpha$  und  $\beta$  ist unten zu sehen.

den Inhalt von Abschnitt (5.2.5) bildet.

**Mitteilung von kuriosen Ergebnissen** Euler hat selten die Gelegenheit verstreichen lassen, Ergebnisse mitzuteilen, welche er selbst als kurios empfand, obgleich sie nach seiner Einschätzung nur eine lose Verbindung zum Gestand der eigentlichen Untersuchung haben. Zur Bekräftigung dieser Aussage sei ein Euler'sches Fundstück beigefügt, was in den sogenannten gebrochenen Ableitungen besteht. Diese findet er bereits in seiner Arbeit "*De progressionibus transcendentibus seu quarum termini generales algebraice dari nequeunt*" ([EulerE19], 1738, ges. 1729) (E19: "Über transzendente Progressionen oder solche, deren allgemeine Terme algebraisch nicht angegeben werden können"). In Paragraph § 28 entdeckt man, sofern in moderner Sprache präsentiert, den Ausdruck:

$$\frac{d^n z^\alpha}{dz^n} = \frac{\Gamma(\alpha + 1)}{\Gamma(\alpha + 1 - n)} z^{\alpha - n}, \quad (8)$$

wobei  $\alpha$  und  $n$  nicht ganzzahlig zu sein brauchen. Dabei ist hier

$$\Gamma(x) := \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} dt \quad \text{mit} \quad \text{Re}(x) > 0$$

die  $\Gamma$ -Funktion. Euler leitet den Leser dabei in § 27 der erwähnten Arbeit wie folgt zu seiner Entdeckung:

“Anstelle des Schlusschnörkels möchte ich noch etwas eher Kurioses als Nützlichendes mitteilen. Es ist freilich bekannt, dass unter  $d^n x$  das Differential  $n$ -ter Ordnung verstanden wird und  $dp^n$ , wenn  $p$  eine beliebige Funktion von  $x$  bedeutet und  $dx$  als konstant festgelegt wird, in einem endlichen Verhältnis zu  $dx^n$  stehen wird; aber immer wenn  $n$  eine ganze positive Zahl ist, wird dieses Verhältnis, welches  $d^n p$  zu  $dx^n$  hat, algebraisch ausgedrückt werden können; wie etwa wenn  $n = 2$  und  $p = x^3$  ist, so wird  $d^2(x^3)$  sich zu  $dx^2$  verhalten wie  $6x$  zu  $1$ . Nun stellt sich aber die Frage, wie das Verhältnis sein wird, wenn  $n$  eine gebrochene Zahl ist. Die Schwierigkeit in diesen Fällen sieht man leicht ein, denn wenn  $n$  eine ganze positive Zahl ist, wird  $d^n$  durch wiederholte Differentiation gefunden, aber ein solcher Weg steht einem nicht offen, wenn  $n$  eine gebrochene Zahl ist. Aber mithilfe der Interpolation von Progressionen, welche ich hier erläutert habe, wird sich die Angelegenheit klären lassen.”<sup>66</sup>

Was die Kuriosität betrifft, hat Euler Recht behalten, was die geringe Nützlichkeit betrifft dahingegen nicht. Anwendungen werden beispielsweise im Buch *“Special Functions”* ([Andrews2], 2011) gezeigt. Diese Entdeckung von Euler ist demnach nicht unbeachtet geblieben – wohl wegen der Wichtigkeit der Arbeit [EulerE19], welche die erste Definition der  $\Gamma$ -Funktion im Druck beinhaltet<sup>67</sup> –, wohingegen die Euler’sche Abhandlung *“Specimen aequationum differentialium indefiniti gradus earumque integrationis”* ([EulerE681], 1794, ges. 1781) (E681: “Ein Beispiel einer Differentialgleichung unbestimmten Grades und deren Integration”) einen geringeren Bekanntheitsgrad zu besitzen scheint.

In besagter Abhandlung betrachtet Euler die Differentialgleichung

$$\frac{d^q f}{dx^q} = g(x),$$

wobei nun  $q$  nicht notwendig eine ganze Zahl zu sein braucht. Und vermöge Interpolationstechniken findet er in § 40 – in moderner Notation geschrieben – den Ausdruck:

---

<sup>66</sup>Euler schreibt in der Originalarbeit beim ersten Auftreten von  $dx^n$  noch  $d^n x$ , geht dann aber im weiteren Text zur heute üblichen Schreibweise  $d^n x$  für das Differential im Nenner über.”

<sup>67</sup>Siehe dazu auch Sandifers Artikel *“Gamma the Function”* ([Sandifer17], 2007).

$\frac{d^n(z^e)}{dz^n} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot e}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (e-n)} z^{e-n}$ . Est autem per §. 14,  
 $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot e = \int dx (-lx)^e$  et  $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (e-n)$   
 $= \int dx (-lx)^{e-n}$ . Quare habetur  $\frac{d^n(z^e)}{dz^n} = z^{e-n}$   
 $\frac{\int dx (-lx)^e}{\int dx (-lx)^{e-n}}$  vel  $d^n(z^e) = z^{e-n} dz^n \frac{\int dx (-lx)^e}{\int dx (-lx)^{e-n}}$ .  
 Ponitur hic  $dz$  constans et  $\int dx (-lx)^e$  vt et  $\int dx (-lx)^{e-n}$   
 ita debent integrari, vt supra praeceptum est,  
 et tum ponere oportet  $x=1$ .

**Abbildung 7:** Euler nutzt in seiner Arbeit [EulerE19] die zuvor eruierte Interpolation der Fakultät zur Definition von gebrochenen Ableitungen. Die Integrale sind alle von  $x = 0$  bis zu  $x = 1$  erstreckt.

$$f(1) = \frac{1}{\Gamma(q)} \int_0^1 g(x)(1-x)^{q-1} dx.$$

Aus der Euler'schen Formel findet man leicht die Verallgemeinerung:

$$f(x) = \frac{1}{\Gamma(q)} \int_0^x g(t)(x-t)^{q-1} dt, \quad (9)$$

welche für ganzzahliges  $n$  oft Cauchy zugeschrieben wird, welcher sie in seinen "*Cours d'analyse de l' école royale polytechnique*" ([Cauchy2], 1821) ("Vorlesungen zur Analysis an der Ecole royale polytechnique") in der 25. Vorlesung beweist.

**Mitteilung bizarrer sowie unrichtiger Ergebnisse** Ein weiteres Charakteristikum von Eulers Präsentation mathematischer Sachverhalte besteht darin, wissentlich Formeln mitzuteilen, die in einigen Fällen freilich das richtige Ergebnis liefern, jedoch in anderen unrichtig sind. Dies quittiert Euler an entsprechender Stelle anschließend meist mit einer Bemerkung, die Mitteilung gemacht zu haben, um den Forschergeist seiner Kollegen zu wecken oder Ähnliches. Ein konkretes Beispiel dessen macht man in seiner Arbeit "*Consideratio progressionis cuiusdam ad circuli quadraturam inveniendam*

*idoneae*” ([EulerE125], 1750, ges. 1739) (E125: “Die Betrachtung einer gewissen Progression, welche sich zur Kreisquadratur eignet”) aus, wo das mitzuteilende Kuriosum die letzten drei Paragraphen einnimmt (§§ 17–20). Euler beginnt mit der Reihe

$$a_1 + a_2 + a_3 + \dots$$

bis ins Unendliche<sup>68</sup>. Aus der Differenzenrechnung lässt sich nach der Newton’schen Interpolationsformel<sup>69</sup> die Summe bis hin zu  $x$  Termen wie folgt darstellen:

$$\begin{aligned} a_x = a_1 + \frac{x-1}{1}(a_2 - a_1) + \frac{(x-1)(x-2)}{1 \cdot 2}(a_3 - 2a_2 + a_1) \\ + \frac{(x-1)(x-2)(x-3)}{1 \cdot 2 \cdot 3}(a_4 - 3a_3 + 3a_2 - a_1) + \text{etc.}, \end{aligned}$$

was sich mit Differenzenoperator  $\Delta^n$  für die  $n$ -te Differenz wie folgt schreiben lässt:

$$a_x = \sum_{n=0}^{x-1} \binom{x-1}{n} \Delta^n a_1.$$

Diese Formel benutzt Euler, um die Terme für negative ganze Zahlen und 0 als Index zu bestimmen. Durch Summierung all dieser Terme findet auf formalen Wege:

$$\sum_{n=0}^{\infty} f(n) \Delta^n a_1$$

mit

$$f(n) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{(1-x)^{n+1}},$$

sodass die einzelnen Terme der Reihe divergieren. Bei Euler findet man die entsprechende Identität wie folgt niedergeschrieben:

$$\frac{a_1}{1-1} + \frac{a_2 - a_1}{(1-1)^2} + \frac{a_3 - 2a_2 + a_1}{(1-1)^3} + \frac{a_4 - 3a_3 + 3a_2 - a_1}{(1-1)^3} + \text{etc.}$$

<sup>68</sup>Euler benutzt und schreibt keine Indizes  $a + b + c + d + e + f + g + h + \text{etc.}$ . Zur Erleichterung der Darstellung wird jedoch weiter die Indexschreibweise verwendet.

<sup>69</sup>Man findet die entsprechende Formel bereits in Newtons “*Philosophiae Naturalis Principia Mathematica*” ([Newton], 1687) (“Mathematische Prinzipien der Naturphilosophie”).

Diesen formalen Ausdruck ordnet Euler um und gelangt zu:

$$\begin{aligned}
&+a_1 \left( \frac{1}{(1-1)^1} + \frac{1}{(1-1)^2} + \frac{1}{(1-1)^3} + \frac{1}{(1-1)^4} + \text{etc.} \right) \\
&-a_2 \left( \frac{1}{(1-1)^2} + \frac{2}{(1-1)^3} + \frac{3}{(1-1)^4} + \frac{4}{(1-1)^5} + \text{etc.} \right) \\
&+a_3 \left( \frac{1}{(1-1)^3} + \frac{3}{(1-1)^4} + \frac{6}{(1-1)^5} + \frac{10}{(1-1)^6} + \text{etc.} \right) \\
&-a_4 \left( \frac{1}{(1-1)^4} + \frac{4}{(1-1)^5} + \frac{10}{(1-1)^6} + \frac{20}{(1-1)^7} + \text{etc.} \right)
\end{aligned}$$

Euler identifiziert die Ausdrücke in Klammern jeweils als entsprechende Ableitung der geometrischen Reihe, sodass er für die ersten Zeile findet:

$$+a_1 \left( \frac{1}{(1-1)^1} + \frac{1}{(1-1)^2} + \frac{1}{(1-1)^3} + \frac{1}{(1-1)^4} + \text{etc.} \right) = a_1 \frac{1}{(1-1) - 1} = -a_1$$

sowie für die zweite

$$-a_2 \left( \frac{1}{(1-1)^2} + \frac{2}{(1-1)^3} + \frac{3}{(1-1)^4} + \frac{4}{(1-1)^5} + \text{etc.} \right) = -a_2 \frac{1}{(1-1)^2 - 1} = +a_2$$

und die dritte

$$+a_3 \left( \frac{1}{(1-1)^3} + \frac{3}{(1-1)^4} + \frac{6}{(1-1)^5} + \frac{10}{(1-1)^6} + \text{etc.} \right) = +a_3 \frac{1}{(1-1)^3 - 1} = -a_3$$

und schließlich die vierte

$$-a_4 \left( \frac{1}{(1-1)^4} + \frac{4}{(1-1)^5} + \frac{10}{(1-1)^6} + \frac{20}{(1-1)^7} + \text{etc.} \right) = -a_4 \frac{1}{(1-1)^4 - 1} = a_4,$$

sodass das Muster schnell sichtbar wird und die Divergenzen nicht mehr zu finden sind. Schlussendlich gelangt Euler zur Identität

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_{-n} = - \sum_{n=1}^{\infty} a_n,$$

was ihn zu folgender Konklusion bewegt:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n = 0.$$

Euler drückt dies in Worten am Ende von § 18 wie folgt aus:

*“Wenn also irgendeine unendliche Reihe*

$$a + b + c + d + e + \text{etc.}$$

*auch nach links ins Unendliche fortgesetzt würde, wäre die Summe nach beiden Seiten hin ins Unendliche fortgesetzt immer = 0; wenn diese Begründung freilich richtig wäre.”*

Trotz der offenkundigen Invalidität der Formel führt sie, wie Euler auch zeigt, für die Wahl  $a_n = k^n$  zum richtigen Ergebnis, da unter völliger Missachtung von Konvergenzbetrachtungen gilt

$$\sum_{k=1}^{\infty} k^n = \frac{k}{1-k} \quad \text{und} \quad \sum_{k=0}^{\infty} k^{-n} = \frac{k}{k-1}$$

und

$$\frac{k}{1-k} + \frac{k}{k-1} = 0.$$

Jedoch führt die Wahl  $a_n = \frac{1}{(2n-1)^2}$  zum falschen Ergebnis, da

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2} = \frac{\pi^2}{4}$$

Euler schließt seine Arbeit mit den Worten:

*“Ich glaube, all dies vorgestellt zu haben, wird nicht weniger Nutzen haben als mit größter Strenge bewiesene Wahrheiten.”*

In gewisser Weise sollte Euler Recht behalten, weil der Durchgang durch das Divergente ihn und seine Nachfolger bisweilen zu interessanten Entdeckungen geführt hat, was in den Abschnitten über die  $\zeta$ -Funktion (Abschnitt 6.1.2) und über seine Theorie divergenter Reihen (Abschnitt 7.1.3) evident werden wird.

**Mithilfe formaler Rechnungen zu richtigen Erkenntnissen** Eulers Arbeiten zum Gebiet der Partitionen sind ein treffliches Beispiel für die

Illustration dessen, wie sich aus rein formalen Rechnungen ebenfalls Theoreme ableiten lassen<sup>70</sup>. Er erläutert seine Ideen diesbezüglich in Kapitel 16 seiner *Introductio* [EulerE101], man konsultiere aber auch seine Einzelarbeiten “*De partitione numerorum*” [EulerE191] (E191: “Über die Partition von Zahlen”) sowie “*De partitione numerorum in partes tam numero quam specie datas*” [EulerE394] (E394: “Über die Partition von Zahlen in so von der Anzahl wie der Gattung her vorgegebene Zahlen”), in welchen Arbeiten man überdies Grundsteine der Theorie der erzeugenden Funktionen erkennen kann. Eulers Einsicht und das sich daraus ableitende Vorgehen besteht darin, gewünschte zahlentheoretische Eigenschaften aus den Koeffizienten von gewissen Potenzreihen abzuleiten. Hier soll Eulers Nachweis für die Eindeutigkeit der Darstellbarkeit einer jeden Zahl mit den Potenzen von 3 in §§ 330–331 der *Introductio* [EulerE101] als Beispiel dienen. Euler betrachtet den Ausdruck:

$$f(x) = (x^{-1} + 1 + x^1)(x^{-3} + 1 + x^3)(x^{-9} + 1 + x^9)(x^{-27} + 1 + x^{27}) \dots$$

und setzt an, dass gilt

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n x^n, \quad (10)$$

was, moderne Terminologie gebrauchend, eine Laurententwicklung um den Ursprung mit zu bestimmenden Koeffizienten  $a_n$  ist. Euler bemerkt nun aus der Produktdarstellung, dass

$$f(x) = (x^{-1} + 1 + x^1)f(x^3)$$

gilt, sodass für den Ausdruck rechter Hand folgt:

$$(x^{-1} + 1 + x^1) \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n x^{3n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n x^{3n-1} + \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n x^{3n} + \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n x^{3n+1}.$$

Zumal dieser Ansatz nun mit (10) gleichwertig sein muss, entspringen nachstehende Gleichheiten für die Koeffizienten:

$$a_n = a_{3n-1} \quad \text{und} \quad a_n = a_{3n} \quad \text{und ebenso} \quad a_n = a_{3n+1},$$

---

<sup>70</sup>Solche formalen Operationen bespricht Sandifer auch kurz in seinem Artikel “*Formal sums and products*” ([Sandifer14], 2006).

welche für alle  $n \in \mathbb{Z}$  ihre Gültigkeit beibehalten müssen. Mit dem offenkundigen Wert  $a_0 = 1$  findet man, dass  $a_n = 1$  für jedwede ganze Zahl  $n$  gelten muss. Damit ist der Euler'sche Beweis vollendet. Euler hat im Verlauf seiner Karriere viele andere zahlentheoretische Tatsachen mit dieser Methode bewiesen<sup>71</sup>. Für ausführlichere moderne Darstellung konsultiere man etwa die Bücher *“The Theory of Partitions”* ([Andrews1], 2008) und auch *“An Introduction To The Theory Of Numbers”* ([Hardy4], 2009). Für eine kleine Diskussion der Ätiologie der Partitionstheorie bei Euler konsultiere man auch den Artikel *“Philip Naudé's problem”* ([Sandifer9], 2005).

Es sei an dieser Stelle nochmals auf die Nebensächlichkeit der Konvergenz der resultierenden Reihe hingewiesen, denn die Reihe

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x^n$$

konvergiert tatsächlich für keinen einzigen Punkt in der gesamten komplexen Ebene. Dennoch ergibt sich allein aus den Koeffizienten bereits das zu Beweisende<sup>72</sup>.

**Mitteilung von Misserfolgen** Die letzte in dieser Ausarbeitung vorgestellte Eigentümlichkeit von Eulers Arbeitsweise soll die vielleicht heutzutage unüblichste aller erläuterten sein: Die vollständige Darstellung von Rechnungen und Gedankengängen, *obwohl* sie schließlich nicht zum gewünschten Ziel führen. Ein epitomes Exempel dessen sind die Euler'schen Versuche der Evaluation der Summe

$$\zeta(3) := 1 + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{4^3} + \text{etc.}$$

oder der Apéry'schen Konstante, wie sie seit Apéry's (1916–1994) Nachweis ihrer Irrationalität in seiner Abhandlung *“Irrationalité de  $\zeta(2)$  et  $\zeta(3)$ ”* ([Apéry], 1979) (*“Die Irrationalität von  $\zeta(2)$  und  $\zeta(3)$ ”*) bezeichnet zu werden pflegt. Bis zum heutigen Tage sind alle Bestrebungen, diese Zahl mithilfe bereits bekannter Konstanten auszudrücken, fehlgeschlagen. Dieses Problem hat auch Euler zeitlebens nicht losgelassen. Wie im folgenden Abschnitt (4.1)

<sup>71</sup>Ein Beispiel: Die Anzahl der Partitionen einer Zahl  $n$  in ungerade Zahlen ist gleich der Anzahl an Partitionen derselben Zahl  $n$  in lauter verschiedene Zahlen.

<sup>72</sup>Die Summe hatte Euler in [EulerE125] in einem anderen Zusammenhang zu  $= 0$  summiert. Man vergleiche die Ausführung des letzten Paragraphen über die von Euler mitgeteilten Kuriositäten.

aufgezeigt werden wird, gelang Euler die Summation im Fall der Quadrate auf mannigfaltige Weise; ein Erfolg, welcher zu seinen größten Triumphen gerechnet werden darf. Bezüglich der Kuben konstatiert Euler nach einem weiteren Fehlschlag in § 17 von [EulerE352]:

*“Bezüglich der Reihen der Reziproken der Potenzen*

$$1 - \frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n} - \frac{1}{4^n} + \frac{1}{5^n} - \frac{1}{6^n} + \text{etc.}$$

*habe ich schon angemerkt, dass ihre Summen lediglich in den Fällen angegeben werden können<sup>73</sup>, in denen der Exponent  $n$  eine ganze gerade Zahl ist, jedoch für die Fälle, wo  $n$  eine ungerade Zahl ist, all meine Bestrebungen diesbezüglich ertraglos geblieben sind.“*

Die nachfolgenden Untersuchungen in derselben Arbeit, obwohl sie für Euler selbst zunächst vielversprechend erschienen, sind ebenfalls nicht von Erfolg gekrönt. In § 19 resümiert er:

*“Es mag freilich möglich sein, die Summen dieser zusammengesetzten Reihen der Form*

$$1^{2\lambda} \log(1) - 2^{2\lambda} \log(2) + 3^{2\lambda} \log(3) - 4^{2\lambda} \log(4) + \text{etc.}$$

*zu finden. Allerdings ist dieses Unterfangen womöglich schwieriger als das gegenwärtige und ich kann keine Anzeichen einer Methode erkennen, die uns zum gesteckten Ziel führt.“<sup>74</sup>*

Euler hat in seinen Investigationen zu diesem Gegenstand jedoch auch Formeln entdeckt, von denen ausgewählte hier Erwähnung finden sollen. Nennt man

$$\chi(s) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^s},$$

teilt Euler in § 38 seiner Arbeit [EulerE130] die Identität

<sup>73</sup>Euler hat seine Arbeit [EulerE352] in französischer Sprache verfasst und benutzt an dieser Stelle das Wort “savoir”, welches mit “können” übersetzt werden kann, dann allerdings auf ein durch fehlendes Wissen begründetes nicht bestehendes Vermögen verweist.

<sup>74</sup>Das gesteckte Ziel besteht hier nach wie vor in der Summation der Reihen für ungerades  $n$ .

$$1 - \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} - \frac{1}{4^3} + \text{etc.}$$

$$= \frac{\pi^2 \log(2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} - 2\pi^2 \left( \frac{\chi(2)}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} + \frac{\chi(4)}{4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7} + \frac{\chi(6)\pi^8}{6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9} + \text{etc.} \right),$$

mit, welche sich von Euler mit anderen Formelbuchstaben ausgedrückt ebenfalls in § 20 von [EulerE432] findet. In letztgenannter Arbeit gelangt Euler überdies in § 21 zur kompakten Formel:

$$\chi(3) = \frac{1}{1^3} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{5^3} + \frac{1}{7^3} + \text{etc.} = \frac{\pi^2}{4} \log(2) + 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \phi \log(\sin(\phi)) d\phi.$$

Nicht zuletzt diese Formel mag Euler in § 16 seiner Arbeit “*De relatione inter ternas pluresve quantitates instituenda*” ([EulerE591], 1785, ges. 1775) (E591: “Über das Herstellen einer Beziehung zwischen drei oder mehr Größen”) zur Vermutung verlasst haben, es könnte

$$a\chi(3) + b(\log(2))^3 + c \log(2) \frac{\pi^2}{6} = 0$$

mit ganzen Zahlen  $a, b, c$  gelten. Jedoch führen seine Untersuchungen ihn nicht zu gewünschten Ziel, sodass er sie nicht weiterverfolgt.

## 4 Eine Illustration von Eulers Arbeitsweise anhand ausgewählter Beispiele

Es ist wunderbar, dass man  
noch heute jede der  
Abhandlungen Eulers nicht bloss  
mit Belehrung, sondern mit  
Vergnügen liest.

---

Carl Gustav Jacob Jacobi

Wohingegen im vorherigen Abschnitt die Arbeitsweise allgemeiner diskutiert wurde, soll das Besprochene in diesem Abschnitt anhand zweier umfassender diskutierter Exempel noch stärker bekräftigt werden. Das erste Beispiel ist die Euler'sche Lösung des Baseler Problems (Abschnitt 4.1), das zweite widmet sich der Euler'schen Betrachtung von Differenzgleichungen mit konstanten Koeffizienten (Abschnitt 4.3). Zwischen den beiden genannten Exempeln wird die Betrachtung eines richtigen, jedoch falsch abgeleiteten, Resultats behandelt (Abschnitt 4.2).

### 4.1 Die Lösung des Baseler Problems

Every mathematical discipline  
goes through three periods of  
development: the naive, the  
formal, and the critical.

---

David Hilbert

Ein sehr bekanntes Beispiel für den Erfolg von Eulers Arbeitsweise ist die Lösung des sogenannten Baseler Problems, dies ist die Summierung der Reihe

$$1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \cdots = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}, \quad (11)$$

welches die gesamte Bandbreite von Eulers Einfallsreichtum und zugleich Hartnäckigkeit demonstriert. Lediglich auf seine publizierten Abhandlungen blickend sind bis zum ersten lückenlosen Beweis für die Richtigkeit der obigen Summe die Arbeiten “*De summatione innumerabilium progressionum*” ([EulerE20], 1738, ges. 1731) (E20: “Über die Summation von unzähligen Progressionen”), “*De summis serierum reciprocarum*” ([EulerE41], 1740,

ges. 1735) (E41: “Über die Summe der Reihen von Reziproken), “*De summis serierum reciprocarum ex potestatibus numerorum naturalium ortarum dissertatio altera, in qua eadem summationes ex fonte maxime diverso derivantur*” ([EulerE61], 1743, ges. 1742) (E61: “Ein andere Dissertation über die Summen der Reihen der Reziproken, welche aus den Potenzen der natürlichen Zahlen entspringen, in welcher dieselben Summationen aus einer gänzlich anderen Quellen abgeleitet werden”), und “*Demonstration de la somme de cette suite  $1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \dots$ ” ([EulerE63], 1743, ges. 1741) (E63: “Ein Beweis der Summe der Reihe  $1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \dots$ ”) zu nennen, welche einen Zeitraum von 10 Jahren umspannen. Die Teilschritte bis zum einem modernen Ansprüchen genügenden Nachweis sind:*

1. Transformation der Reihe aus (11) in § 22 von [EulerE20]
2. Entdeckung des exakten Werts in [EulerE41]
3. Ein alternativer Beweis in [EulerE61]
4. Ein “moderner” Beweis in [EulerE63]

Da die Geschichte der Lösung des Baseler Problem schon mehrfach dargestellt worden ist, – man siehe z.B. das Buch von Dunham “*Euler: The Master of Us All*” ([Dunham2], 1999) und die Artikel aus Sandifers Kolumne “*Estimating the Basel Problem*” ([Sandifer2], 2003)<sup>75</sup> und “*The Basel Problem with Integrals*” ([Sandifer4], 2004)<sup>76</sup> –, erfolgt in dieser Abhandlung eine komprimierte Darstellung.

#### 4.1.1 Transformation der Reihe

I think this is the start of  
something really big. Sometimes  
that first step is the hardest one,  
and we’ve just taken it.

\_\_\_\_\_  
Steve Jobs

Die langsame Konvergenz der Reihe aus (11) disqualifiziert sie in dieser Form für numerische Untersuchungen ihres Wertes, weswegen sich Euler in § 22 von [EulerE20] einer konvergenzbeschleunigenden Transformation bedient. Ausgehend vom Integral

<sup>75</sup>Diese Arbeit zeichnet den ersten Schritt der obigen Liste nach.

<sup>76</sup>Diese Arbeit betrachtet den 4. Schritt aus obiger Liste.

$$I = - \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\log(1-x)}{x} dx.$$

gelangt er über die Potenzreihenentwicklung des Logarithmus zunächst zu

$$I = \int_0^{\frac{1}{2}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{n} dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x^{n-1}}{n} dx.$$

Termweises Integrieren liefert:

$$I = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 \cdot 2^n}. \quad (12)$$

Andererseits gibt die Substitution  $1-x = u$  und somit  $-dx = du$ , wenn anschließend wieder  $x$  statt  $u$  im Integral geschrieben wird:

$$I = - \int_1^{\frac{1}{2}} \frac{\log(x)}{1-x} dx.$$

Mit der geometrischen Reihe ist dies:

$$I = - \sum_{n=0}^{\infty} \int_1^{\frac{1}{2}} x^n \log(x) dx.$$

Die Berechnung des Integrals führt Euler nicht explizit aus, was an dieser Stelle nachgereicht wird. Es gilt:

$$\int_{\frac{1}{2}}^1 x^n dx = \frac{1 - (\frac{1}{2})^{n+1}}{n+1}.$$

Differenziert man nun beide Seiten nach  $n$ , erhält man auch:

$$\int_{\frac{1}{2}}^1 x^n \log(x) dx = \frac{\log(2)}{2^{n+1} \cdot (n+1)} + \frac{1}{2^{n+1}(n+1)^2} - \frac{1}{(n+1)^2},$$

somit

$$\begin{aligned}
I &= \sum_{n=0}^{\infty} \left( -\frac{\log(2)}{2^{n+1} \cdot (n+1)} - \frac{1}{2^{n+1}(n+1)^2} + \frac{1}{(n+1)^2} \right) \\
&= -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\log(2)}{2^{n+1} \cdot (n+1)} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^{n+1}(n+1)^2} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^2} \\
&= -\log(2) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^{n+1} \cdot (n+1)} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^{n+1}(n+1)^2} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^2}.
\end{aligned}$$

Die erneute Verwendung der Potenzreihe des Logarithmus leitet einen zu:

$$I = -\log^2(2) - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^{n+1}(n+1)^2} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^2}. \quad (13)$$

Setzt man (12) mit diesem Ausdruck gleich, erreicht man nach einer Umformung – wie Euler – die Formel:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 \cdot 2^{n-1}} + \frac{\log^2(2)}{2}.$$

$\log^2(2)$  bzw.  $\log(2)$  lässt sich Tabellen entnehmen. Überdies konvergiert die Reihe auf der rechten Seite schneller als die auf der linken, sodass sie Euler befähigt, in § 22 von [EulerE20] den numerischen Wert

$$1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \dots \approx 1,644934$$

anzugeben<sup>77</sup>.

---

<sup>77</sup>Extensive numerische Berechnungen sind, wie zuvor schon einmal angesprochen, ein Charakteristikum für Eulers Arbeitsweise. Zahlreiche seiner Artikel enthalten entweder Passagen mit ausgiebigen Berechnungen oder sind ganz Methoden gewidmet, wie man selbige noch beschleunigen kann. Speziell im Kontext von  $\pi$ -Approximationen kann man die Arbeiten [EulerE125] sowie “*Annotationes in locum quendam Cartesii ad circuli quadraturam spectantem*” ([EulerE275], 1763, ges. 1758) (E275: “Anmerkungen zur Descartes’schen Quadratur des Kreises”) und weitere nennen.

### 4.1.2 Ermittlung des exakten Wertes – mit formalen Methoden

No great discovery was ever  
made without a bold guess.

---

Isaac Newton

Die Arbeit [EulerE41] enthält bereits den Wert aus (11). Jedoch dürfte selbst zu Eulers Zeiten sein Argument nicht als Beweis dienen, welcher berechtigten Kritik Euler auch in [EulerE61] entsprechend entgegnet ist. Genauer schreibt er in § 6 des letztgenannten Papiers auf die Einwände bezugnehmend:

*“Diese fast vollkommen in Vergessenheit geratene Sorge hat neulich ein vom hoch geehrten Herrn Daniel Bernoulli empfangener Brief in mir erneuert, in welchem er mir Gründe darlegt, meine Methode zu bezweifeln, und zugleich deutet er an, dass der hoch geehrte Herr Cramer dieselben Zweifel hegt, ob er meine Methode billigen kann.”*

Geteilt wird diese Kritik auch von Polya in seinem Buch [Polya] bezüglich dieses Beweises:

*“Euler’s step was daring. In strict logic, it was an outright fallacy [...] Yet it was justified by analogy, by the analogy of the most successful achievements of a rising science that he called [...] “Analysis of the Infinite.” Other mathematicians, before Euler, passed from finite differences to infinitely small differences, from sums with a finite number of terms to sums with an infinity of terms, from finite products to infinite products. And so Euler passed from equations of a finite degree (algebraic equations) to equations of infinite degree, applying the rules made for the finite [...].”*

Eulers Ansatz in der Arbeit [EulerE41] besteht darin, die für Polynome gültigen Relationen zwischen deren Koeffizienten und Nullstellen ohne weitere Rechtfertigung auf unendliche Reihen auszudehnen. Zur Lösung des Baseler Problems bedient Euler sich der Taylorreihe des Sinus

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots$$

und behauptet an dieser Stelle die Gültigkeit der alternativen Darstellung

$$\sin(x) = x \prod_{k=1}^{\infty} \left( 1 - \frac{x^2}{(k\pi)^2} \right) \quad (14)$$

und gewinnt durch Koeffizientenvergleich der beiden Ausdrücke die Summe (11). Denn die formale Multiplikation der führenden Terme des Sinus-Produktes gibt:

$$\sin(x) = x - \left( \frac{1}{1^2\pi^2} + \frac{1}{2^2\pi^2} + \frac{1}{3^2\pi^2} + \dots \right) x^3 + \text{etc..}$$

Euler verwendet demnach den Satz von Vieta (1540–1603) für den Fall eines Polynoms mit “unendlichem” Grad<sup>78</sup>. Bei dieser Begebenheit führt ihn sein Vorgehen zu einem richtigen Ergebnis, an anderer Stelle sollte ihn in ein analoger Übergang ins Unendliche indes zu Fehlern verleiten, was in Abschnitt (4.2) noch detaillierter besprochen werden wird.

#### 4.1.3 Ein strengerer Beweis

Ever tried. Ever failed. No matter. Try again. Fail again. Fail better.

---

Samuel Beckett

Die aus der Kritik von Cramer und D. Bernoulli (1700–1782) bereits zu erahnde mangelnde Validität der Herleitung des Sinus-Produktes (14) betrifft den fehlenden Nachweis der Nichtexistenz von weiteren Nullstellen der  $\sin$ -Funktion, was Euler implizit voraussetzt<sup>79</sup>. Daneben zeigt das Beispiel  $e^x \sin x$  die nichteindeutige Festlegung einer transzendenten Funktion mithilfe ihrer Nullstellen allein auf.

Diesen Einwänden begegnet Euler nun in seiner Arbeit [EulerE61] durch Nachweis des Sinusproduktes (14) mit den Mitteln der Infinitesimalrechnung. Die grundlegende Idee besteht in der allgemeinen Zerlegung des Aus-

---

<sup>78</sup>Euler hat sich weit später in seiner Laufbahn die umgekehrte Frage gestellt, wie sich von der rechten Seite von (14) die Gleichheit mit dem Sinus auf direktem Weg demonstrieren lässt. Die Antwort gibt er in der Arbeit “*Exercitatio analytica*” ([EulerE664], 1794, ges. 1776) (E664: “Eine analytische Übung”), aus Gründen der Kürze der Darstellung, jedoch für den Kosinus und nicht den Sinus.

<sup>79</sup>Einen ähnlichen Fehler begeht Euler auch anderenorts, an welchem er versuchte aus den Nullstellen des charakteristischen “Polynoms” die Lösung einer Differentialgleichung unendlicher Ordnung zu konstruieren. Dies wird Abschnitt (4.2) diskutiert werden.

drucks  $a^n - b^n$  in trinomiale Faktoren der Form  $a^2 - 2ab \cos \zeta + b^2$ . Anschließend hat man lediglich noch  $a = 1 + \frac{ix}{n}$  und  $b = 1 + \frac{-ix}{n}$  festzulegen und  $n$  gegen  $\infty$  streben zu lassen, wonach vermöge der Euler'schen Formel  $e^x = \cos x + i \sin x$  das Sinusprodukt (14) entspringt. Eulers Beweis lässt sich etwas ausführlicher wie folgt darstellen: Man betrachte das Polynom

$$Q_n(x) := \frac{\left(1 + \frac{ix}{n}\right)^n - \left(1 - \frac{ix}{n}\right)^n}{2ix} \quad (15)$$

Mithilfe der Euler'schen Zerlegungsformel für die Differenz zweier  $n$ -ter Potenzen findet man:

$$Q_n(x) = \frac{1}{2ix} \prod_{k=1}^n \left( \left(1 + \frac{ix}{n}\right)^2 - 2 \left(1 + \frac{ix}{n}\right) \left(1 - \frac{ix}{n}\right) \cos \zeta_k + \left(1 - \frac{ix}{n}\right)^2 \right)$$

oder nach Vereinfachen

$$Q_n(x) = \frac{1}{2ix} \prod_{k=1}^n \left( 2 \left(1 - \frac{x^2}{n^2}\right) - 2 \left(1 + \frac{x^2}{n^2}\right) \cos \zeta_k \right),$$

wobei  $\zeta_k$  hier  $= \frac{2k\pi}{n}$  ist. Da für unendliches  $n$  das Argument des Kosinus gegen Null strebt, setzt Euler die Näherung

$$\cos \zeta_k \approx 1 - \frac{2k^2\pi^2}{n^2}$$

in der Darstellung von  $Q_n$  ein. Für, wie Euler sagt, unendlich großes  $n$  kann demnach das Produkt als eines folgender Gestalt präsentiert werden:

$$Q_n(x) = \frac{C_n}{2ix} \prod_{k=1}^n \left( 1 - \frac{x^2}{k^2\pi^2} \right),$$

wobei  $C_n$  eine noch zu bestimmende Konstante ist<sup>80</sup>. Weiter ist bekannt, dass die rechte Seite von (15) (vermöge der Euler'schen Identität) gerade  $\frac{\sin x}{x}$  ist. Die Konstante  $C_n$  kann man anschließend aus dem Fall  $x = 0$  zu  $C_n = 2i$  bestimmen, sodass man das Sinus-Produkt (14) gewinnt. Auch dieser Beweis erfüllt noch nicht die modernen Ansprüche an den mathematischen Rigor; ein solider Nachweis entlang der Linien des eben skizzierten

<sup>80</sup>Euler formuliert das nicht mithilfe einer Konstanten, sondern sagt, was auf dasselbe zurückführt, dass der allgemeine Faktor des Produktes im Fall von unendlichem  $n$  die Form  $1 - \frac{ss}{kk\pi\pi}$  hat.

$$1 - \frac{s^2}{1 \cdot 2} + \frac{s^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} - \frac{s^6}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot 6} + \frac{s^8}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot 8} - \&c.$$

ea reducetur ad hanc formam  $\frac{\left(1 + \frac{s^{\sqrt{-1}}}{n}\right)^n + \left(1 - \frac{s^{\sqrt{-1}}}{n}\right)^n}{2}$

denotante  $n$  numerum infinitum. Divisores ergo binomii  $\left(1 + \frac{s^{\sqrt{-1}}}{n}\right)^n + \left(1 - \frac{s^{\sqrt{-1}}}{n}\right)^n$  simul erunt divisores seriei propositæ, & quidem omnes. Comparata hac forma cum  $a^n + b^n$  erit  $a = 1 + \frac{s^{\sqrt{-1}}}{n}$ ;  $b = 1 - \frac{s^{\sqrt{-1}}}{n}$ ;  $aa + bb = 2 -$

**Abbildung 8:** Der Beginn von Eulers Herleitung des Sinusproduktes aus der Zerlegung des Binoms  $a^n - b^n$  in lauter trinomische Faktoren in seiner Arbeit [EulerE61].

bedarf des Begriffs der normalen Konvergenz, welchen erst Weierstraß (1815–1897) später in die Analysis eingebracht hat<sup>81</sup>. Einen solchen ausführlichen Beweis nach dem Euler’schen Vorbild mit ausführlichen Erläuterungen findet man zum Beispiel im Buch *“Euler Through Time: A New Look at Old Themes”* ([Varadarajan], 2006).

Jedoch belässt es Euler in [EulerE61] nicht mit einem Beweis, sondern enthüllt mit einer weiteren nicht über (14) verlaufenden Argumentation zum Nachweis von (11) seine Motivation des Wortes “altera” im Titel seiner Arbeit. Sein neuer Ansatz fußt auf der Identität

$$\int_0^1 \frac{x^{p-1} - x^{q-p-1}}{1 - x^q} dx = \frac{\pi \cos \frac{p\pi}{q}}{q \sin \frac{p\pi}{q}},$$

welche für all jene Zahlen  $p$  und  $q$  gilt, für welche das Integral konvergiert. Entnommen hat Euler diese Formel aus seiner Abhandlung *“De inventione integralium, si post integrationem variabili quantitati determinatus valor tribuatur”* ([EulerE60], 1743, ges. 1742) (E60: “Über das Finden von In-

<sup>81</sup>Genau genommen wird der Begriff “normale Konvergenz” erst von Baire (1874–1932) in seinem Buch *“Leçons sur les théories générales de l’analyse”* ([Baire], 1908) (“Verlesungen zur allgemeinen Theorie der Analysis”) verwendet, dort aber Weierstraß zugeschrieben. Baire referiert auf das, was heute gleichmäßige absolute Konvergenz genannt wird und der Inhalt des Weierstraß’schen Majorantentest ist.

tegralen, wenn nach der Integration der variablen Größe ein bestimmter Wert zugeteilt wird”), wo er eigens solche Integrale untersucht hat. Aus seinen Forschungen ergibt sich die Gültigkeit des obigen Ausdrucks zunächst nur für entsprechende natürliche Zahlen  $p$  und  $q$ , Euler benötigt allerdings den Ausdruck auch für beliebige reelle Werte. Er greift daher in § 16 von [EulerE61] auf das *Kontinuitätsprinzip*<sup>82</sup> zurück, welchem ihm die benötigte Inferenz gestattet<sup>83</sup>. Er findet somit die für reelle  $s$  gültige Formel:

$$\cot(\pi s) = \frac{1}{s} - \frac{1}{1-s} + \frac{1}{1+s} - \frac{1}{2-s} + \frac{1}{2+s} - \dots, \quad (16)$$

welche natürlich auch unmittelbar durch logarithmisches Differenzieren aus dem Sinus-Produkt (14) folgt, welches umgekehrt aus der Partialbruchzerlegung des  $\cot(x)$  entspringt. Damit schließt Euler also die Lücke seines Arguments aus [EulerE41] und bestätigt überdies ein Charakteristikum seiner Arbeitsweise erneut: Die mehrfache Bestätigung eines Theorems auf verschiedenen Wegen.

#### 4.1.4 Ein moderner Beweis

Inspirational thunderbolts do  
not appear out of the blue. [...]   
Coming up with a grand idea  
without ever having been closely  
involved with an area of study is  
not impossible, but is very  
improbable.

Ulrich Kraft

Die letzte Aussage, Euler beweise ein und denselben Lehrsatz auf mehrere Weise, findet auch Bestätigung durch einen weiteren Beweis von (11) in [EulerE63], der sich nochmal von den beiden vorherigen Methoden unterscheidet und außerdem nicht heute obsoleete Begriffe wie das Kontinuitätsprinzip verwendet. In der Tat ist er auch nach modernen Ansprüchen als vollkom-

<sup>82</sup>Euler beruft sich hierbei vermutlich auf Leibniz (1646–1716), welcher in seiner Schrift *“Nouveaux Essais sur l’entendement humain”* ([Leibniz], 1765, ges. 1704) (“Neue Essays über den menschlichen Verstand”) den Ausspruch *“Natura non saltum facit”* – Die Natur macht keinen Sprung – verwendet.

<sup>83</sup>Da der Begriff der Stetigkeit noch nicht streng eingeführt worden ist, kann Euler natürlich nicht das gebräuchliche Argument Cauchys verwenden, mit dessen Hilfe man die den Gültigkeitsbereich zunächst auf die ganzen, dann die rationalen und schließlich auf die reellen Zahlen ausdehnen kann.

men streng anzusehen und kann s wörtlich ohne Einwände übernommen werden.

Für diesen Beweis bemerkt Euler zunächst, dass sich der Wert der gesuchten Reihe aus

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \int_0^x \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}}$$

ergibt. Man bedarf überdies der Reduktionsformel

$$\int_0^1 \frac{x^{n+2} dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{n+2}{n+1} \int_0^1 \frac{x^n dx}{\sqrt{1-x^2}},$$

welche Euler mit partieller Integration nachweist. Zudem ergibt sich unter Anwendung des binomischen Lehrsatzes<sup>84</sup> auf den Integranden und anschließender gliedweiser Integration

$$\int_0^x \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}} = x + \frac{1}{2 \cdot 3} x^3 + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 5} x^5 + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7} x^7 + \dots$$

sowie

$$\begin{aligned} & \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \int_0^x \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}} \\ &= \int_0^1 \frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{1}{2 \cdot 3} \int_0^1 \frac{x^3 dx}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 5} \int_0^1 \frac{x^5 dx}{\sqrt{1-x^2}} + \dots \end{aligned}$$

Mit der Reduktion vereinfacht sich das aber gerade zu:

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{1}{3 \cdot 3} \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{1}{5 \cdot 5} \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} + \text{etc.}$$

---

<sup>84</sup>Ein strenger Nachweis des binomischen Lehrsatzes für nicht natürliche Zahlen existierte zum Zeitpunkt der Verfassung der Arbeit [EulerE63] noch nicht. Einen solchen hat Euler selbst erst in der Abhandlung *“Demonstratio theorematis Neutoniani de evolutione potestatum binomii pro casibus, quibus exponentes non sunt numeri integri”* ([EulerE465], 1775, ges. 1773) (E465: “Beweis des Newton’schen Theorems über die Entwicklung der Potenzen des Binoms für die Fälle, in denen die Exponenten keine ganzen Zahlen sind”) gegeben.

Schnell berechnet man

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = 1,$$

wonach insgesamt gilt

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \int_0^x \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}} = 1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \text{etc.}$$

Jedoch hat man allgemein

$$\int f(x) \cdot f'(x) dx = \frac{f^2(x)}{2} + C,$$

somit wegen  $(\arcsin(x))' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$  an die Fragestellung angepasst

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \int_0^x \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}} = \frac{1}{2} ((\arcsin(1))^2 - (\arcsin(0))^2) = \frac{\pi^2}{8}.$$

Bringt man alles zusammen, lautet das Endergebnis:

$$\frac{\pi^2}{8} = 1 + \frac{1}{3 \cdot 3} + \frac{1}{5 \cdot 5} + \dots$$

Die Bemerkung

$$\begin{aligned} 1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \dots &= 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots - \left( \frac{1}{2^2 \cdot 1^2} + \frac{1}{2^2 \cdot 3^2} + \frac{1}{2^2 \cdot 5^2} + \dots \right) \\ &= \frac{3}{4} \left( 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots \right). \end{aligned}$$

lässt Euler schließlich zur gewünschten Formel gelangen:

$$\frac{4}{3} \cdot \frac{\pi^2}{8} = \frac{\pi^2}{6} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots,$$

was wieder (11) ist.

Neben diesem Beweis gibt Euler in selbigem Aufsatz [EulerE63] noch einen weiteren Beweis im selben Gewand. Statt  $\arcsin(x)$  gebraucht er die

$$\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{xy d^2y}{dx^2} - \frac{xy dy}{dx} - 1 = 0$$

qui substituant pour  $\frac{dy}{dx}$  et  $\frac{d^2y}{dx^2}$  les valeurs trouvées donne

$$(124) \quad \left. \begin{aligned} &+ 2\alpha + 3.4\beta x^2 + 5.6\gamma x^4 + 7.8\delta x^6 + \text{etc.} \\ &- 2\alpha x^2 - 3.4\beta x^4 - 5.6\gamma x^6 - \text{etc.} \\ &- 2\alpha x^2 - 4\beta x^4 - 6\gamma x^6 - \text{etc.} \end{aligned} \right\} = 1$$

$$\alpha = \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$\beta = \frac{2.2\alpha}{3.4} = \frac{2.2}{2.8.4}$$

$$\gamma = \frac{4.4\beta}{5.6} = \frac{2.2.4.4}{2.8.4.5.6}$$

$$\delta = \frac{6.6\gamma}{7.8} = \frac{2.2.4.4.6.6}{2.8.4.5.6.7.8}$$

$$\varepsilon = \frac{8.8\delta}{9.10} = \frac{2.2.4.4.6.6.8.8}{2.8.4.5.6.7.8.9.10}$$

etc.

Ayant trouvé ces nombres, on aura,

$$y = \frac{xx}{2} = \frac{xx}{2} + \frac{2}{3} \frac{x^4}{4} + \frac{2.4}{3.5} \frac{x^6}{6} + \frac{2.4.6}{3.5.7} \frac{x^8}{8} + \frac{2.4.6.8}{3.5.7.9} \frac{x^{10}}{10} + \text{etc.}$$

**Abbildung 9:** Euler leitet in seiner Arbeit [EulerE63] aus einem Potenzreihenansatz die Potenzreihe für  $\arcsin^2(x)$  her.

Potenzreihe für  $\arcsin^2(x)$ , welche Euler in Analogie zum vorgestellten Beweis mithilfe des Ansatzes von unbestimmten Koeffizienten aus der von  $\arcsin^2(x)$  erfüllten Differentialgleichung ableitet. Höhere Potenzsummen kann Euler, wie er auch selbst einräumt, indes mit den in [EulerE63] vorgestellten Methoden nicht behandeln.

#### 4.1.5 Zusammenfassung zum Baselproblem

There is eternal simplicity to a solution once it has been discovered!

Aleksandr Solzhenitsyn

Probleme haben Euler selten losgelassen, bevor er sie nicht selbst gelöst hatte. Beim Baseler Problem umfasst der Zeitraum mindestens 10 Jahre,

wobei er seine Teilfortschritte wie die Reihentransformation aus [EulerE20] ebenfalls mit der Öffentlichkeit geteilt hat<sup>85</sup>. Zu dem Beweis in [EulerE41], welcher zu diesem Zeitpunkt noch nicht als einer gelten konnte, was Euler auch bewusst war, ist hervorzuheben, dass Euler ihn publiziert hat, *obschon* er um seine Unvollständigkeit wusste. Er resümiert in [EulerE63] über seine Methode in [EulerE41]:

*“Sie ist also ebenso sicher und fundiert wie jede andere Methode, die man gewöhnlich bei der Summierung von unendlichen Reihen anwendet: Dies habe ich durch die perfekte Übereinstimmung einiger bereits bekannter Fälle und durch die Annäherungen gezeigt, die uns eine einfache Möglichkeit bieten, die Gültigkeit in der Praxis zu prüfen.”*

Die oben (Abschnitt 3.1.4) aufgestellte Behauptung, Euler vertrete die Meinung, Mathematik werde entdeckt und nicht geschaffen, findet demnach eine weitere Bestätigung. Gleiches gilt für die enge Verzahnung von Praxis und Theorie in seinem Schaffen. Diese Einstellung bezüglich Publikationen auch unvollständig behandelte Gegenstände unterscheidet ihn insbesondere von Gauß, welcher nichts vor seiner Vollendung publiziert hat<sup>87</sup>. Die Veröffentlichung des unfertigen Arguments aus Gründen der Sicherung der Priorität darf als unwahrscheinlich angesehen werden, zumal Euler bei anderen Gelegenheiten seine Entdeckungen entweder zurückgehalten hat<sup>88</sup> – oder Ideen trotz Prioritätsansprüchen nicht geltend gemacht hat, wie etwa bei der Summenformel von Euler und Maclaurin (siehe den entsprechenden

---

<sup>85</sup>Dies bedeutet im Zusammenhang des Baselerproblems wie gesehen etwa die Transformation der Reihe in eine schneller konvergente in [EulerE20], obwohl auch diese ihn dem eigentlichen Problem nicht näher zu bringen scheint. Dieser Schein trügt aber, da der durch die Reihe ermittelte Näherungswert Euler wohl auf die Verbindung zur Kreiszahl gebracht hat. Bekanntermaßen ist es unlängst leichter, sofern man bereits in Kenntnis dessen ist, was man zu zeigen versucht. Dies ist auch ein in der Psychologie – siehe etwa die Arbeit <sup>86</sup> ([Funke], 2014) – bekannter Sachverhalt. Für die definitorischen Grundlagen in diesem Bereich konsultiere man etwa das Buch *“Thinking, Problem Solving, Cognition”* ([Mayer], 1992) und gängige Einteilung von Problem in einfache und komplexe Probleme, wie sie unter Anderem im Buch *“Complex Problem Solving: The European Perspective”* ([Frebsch], 2014) erläutert werden. Man findet überdies in Fellmanns Buch [Fellmann] Daniel Bernoulli mit dem Ausspruch zitiert, dass er unter Kenntnis des exakten Wertes auch zu einer Lösung des Baseler Problems gelangt wäre.

<sup>87</sup>Der Ausspruch *“Pauca, sed matura”* (“Weniges, aber dafür Reifes”) zierte überdies seinen Petschaft.

<sup>88</sup>Gegenüber seinen Ideen zur Hydromechanik gab er Daniel Bernoullis Buch *“Hydrodynamica – Sive de viribus et motibus fluidorum commentarii* ([Bernoulli], 1738) (*“Hydrodynamik – Oder Kommentare über die Kräfte und Bewegungen von Fluiden”*) den Vorrang.

Abschnitt in [Varadarajan]). Zusätzlich hat Euler die Gewohnheit der Kommunikation von Teilfortschritten im Verlauf seiner Karriere nicht abgelegt. Außerdem ist die Aussage, dass er etwas schon jetzt für ein sicheres Theorem halte, es aber noch nicht beweisen kann, typisch für Euler, wovon oben (Abschnitt 3.1.4) ein anderes Exempel gegeben worden ist.

Es soll aber noch einmal kurz auf die Argumentationsstruktur im obigen Zitat eingegangen werden. So zeigt die Arbeit [EulerE61] die Anwendung des Prinzip der konvergenten Evidenz zur Erhärtung von Thesen. Konkret nimmt Euler Bezug auf die Reihen

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \text{etc.},$$

welche Leibniz bereits vorher anders gezeigt hatte, was Euler in § 10 auch erwähnt, sowie

$$\frac{\pi}{2\sqrt{2}} = 1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \text{etc.},$$

welche er aus dem Studium von Newtons Werken kennt. Diese Reihe gibt Euler in § 14 an. All dies muss ihn hinreichend überzeugt haben, dass insbesondere (14) trotz der mehrfach erwähnten lückenhaften Beweisführung richtig ist.

Nach diesen Beweisen sollte Euler im Verlauf seiner Karriere noch mehrmals auf die allgemeinen Summen

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{2n}}.$$

zurückkommen. In der Tat formuliert Euler in § 24 von [EulerE130] einen allgemeinen Ausdruck, welche sich in moderner Weise so darstellt

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{2n}} = \frac{(-1)^n \cdot (2\pi)^{2n} B_{2n}!}{2(2n)!}, \quad (17)$$

wobei  $B_n$  die Bernoulli-Zahlen sind, definiert über die Potenzreihenentwicklung

$$\frac{x}{e^x - 1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n x^n}{n!}.$$

Diese Definition geht ebenfalls auf Euler zurück, man entnimmt sie zwar bereits aus seiner Abhandlung *“Methodus generalis summandi progressionis”* ([EulerE25], 1738, ges. 1732) (E25: “Eine allgemeine Methode Progressionen zu summieren”) in § 2, deutlicher erkennbar ist sie allerdings der Arbeit *“Inventio summae cuiusque seriei ex dato termino generali”* ([EulerE47], 1741, ges. 1735) (E47: “Das Finden einer Summe aus dem gegebenen allgemeinen Term”). Dort findet man sie in § 15.

Die Lösung des Baseler Problems markiert zweifelsohne eine von Eulers größten Erfolgen. Sein Stolz über selbige ist ihm nicht zu verdenken, welcher sich auch darin ausdrückt, dass (11) eine der wenigen Wahrheiten ist, bei welchen Euler in späteren Arbeiten explizit seine Erstentdeckerschaft erwähnt<sup>89</sup>. Die Anzahl seiner Beweise für diese Summe zeigt zugleich auch sein riesiges Ausmaß an Kreativität. Dies betrifft nicht nur die reine Anzahl an verschiedenen Beweisen – insgesamt hat Euler in seiner Karriere mindestens 6 in ihrer Natur verschiedene Beweise von (11) vorgelegt<sup>90</sup> – sondern auch die Natur der Beweise selbst. Der Beweis über (11) zeigt die Uner-schrockenheit beim Ausdehnen von Konzepten über die eigentlichen vom Standpunkt der Logik erlaubten Grenzen hinaus, manifestiert in der Verwendung für den endlichen Fall gültigen Formeln im den Fall des Unendlichen. Insbesondere der Beweis aus [EulerE63] zeigt, dass Euler ebenfalls sehr

<sup>89</sup>Man vergleiche etwa § 60 von *“De serierum determinatione seu nova methodus inveniendi terminos generales serierum”* ([EulerE189], 1753, ges. 1749) (E189: “Über die Bestimmung von Reihen oder eine neue Methode die allgemeinen Termen von Reihen zu finden”), das Ende von § 9 seiner Arbeit *“De valore formulae integralis  $\int \frac{z^{\lambda-\omega} \pm z^{\lambda+\omega}}{1 \pm z^{2\lambda}} \frac{dz}{z} (\log z)^\mu$  im Fall, in welchem nach der Integration  $z = 1$  gesetzt wird”* ([EulerE463], 1775, ges. 1774) (E463: “Über den Wert der Integralformel  $\int \frac{z^{\lambda-\omega} \pm z^{\lambda+\omega}}{1 \pm z^{2\lambda}} \frac{dz}{z} (\log z)^\mu$  im Fall, in welchem nach der Integration  $z = 1$  gesetzt wird”), das Ende von § 74 der Abhandlung *“De formulis integralibus implicatis earumque evolutione et transformatione”* ([EulerE679], 1794, ges. 1778) (E679: “Über verschachtelte Integrale und deren Entwicklung sowie Transformation”) sowie § 1 von *“De summatione serierum in hac forma contentarum  $\frac{a}{1} + \frac{a^2}{4} + \frac{a^3}{9} + \frac{a^4}{16} + \frac{a^5}{25} + \frac{a^6}{36} + etc.$ ”* ([EulerE736], 1811, ges. 1779) (E736: “Über die Summe der in der Form  $\frac{a}{1} + \frac{a^2}{4} + \frac{a^3}{9} + \frac{a^4}{16} + \frac{a^5}{25} + \frac{a^6}{36} + etc.$  enthaltenen Reihen”), in welcher Euler die heute als Dilogarithmus bezeichnete Funktion einführt und untersucht.

<sup>90</sup>Den ersten Beweis findet man in [EulerE41], sofern man das Sinusprodukt (14) zulässt, einen in [EulerE61], zwei in [EulerE63], einen weiteren in *“De eximio usu methodi interpolationum in serierum doctrina”* ([EulerE555], 1783, ges. 1772) (E555: “Über den außerordentlichen Nutzen von Interpolationen in der Reihenlehre”) über einen Spezialfall der Lagrange-Interpolation, und einen in *“De resolutione fractionum transcendentium in infinitas fractiones simplices”* ([EulerE592], 1785, ges. 1775) (E592: “Über die Auflösung von transzendenten Brüchen in unendlich viele einfache Brüche”) mittels Partialbruchzerlegung von transzendenten Funktionen.

gut scheinbar lose Dinge verknüpfen kann, um einen Beweis zu konstruieren. Er verlangt nur elementare Konzepte, welche richtig zusammengebracht, zu der wohl elementarsten Lösungen des Baseler Problems führen, welche Euler jemals angegeben hat.

## 4.2 Ein richtiges Ergebnis mit unzulässiger Herleitung

All you need is ignorance and confidence and the success is sure.

---

Mark Twain

Anhand seiner Resultate zu Differentialgleichungen unendlicher Ordnung mit konstanten Koeffizienten wird ein Beispiel vorgestellt, in welchem Euler mit einer unzulässigen Herleitung dennoch ein richtiges Ergebnis deriviert. Im Kontrast zu im in [EulerE41] (Abschnitt 4.1.2) gegebenen Argument, sollte es Euler nicht gelingen, einen strengen Beweis nachzureichen. Die Präsentation folgt der Chronologie der Euler'schen Publikationen: Erst werden die Beiträge zu homogenen Differentialgleichungen (Abschnitt 4.2.1) betrachtet, gefolgt von den inhomogenen (Abschnitt 4.2.2).

### 4.2.1 Differentialgleichungen unendlicher Ordnung: Der homogene Fall

[W]ho takes a chance, who walks the line between the known and unknown, who is unafraid of failure, will succeed.

---

Gordon Parks

Mit glücklichem Erfolg hatte Euler die allgemeine Differentialgleichung

$$\left( a_0 + a_1 \frac{d}{dx} + a_2 \frac{d^2}{dx^2} + \cdots + a_n \frac{d^n}{dx^n} \right) f(x) = 0, \quad (18)$$

mit komplexen Koeffizienten  $a_1, a_2, \dots, a_n$ , welche Euler (in unnötiger Weise) durchgehend alle als reell annimmt<sup>91</sup>, behandelt und gelöst. Die

---

<sup>91</sup>Die konsequente Vermeidung Eulers von komplexen Zahlen in der Lösung solcher und verwandter Fragen wird in Abschnitt 7.3.1 noch einmal aufgenommen werden.

Lösungsmethode, welche er in der Arbeit *“De integratione aequationum differentialium altiorum graduum”* ([EulerE62], 1743, ges. 1742) (E62: “Über die Integration von Differentialgleichungen höherer Grade”) vorstellt, stimmt immer noch mit der heutigen überein. Sie findet sich in §§ 16–27 besagter Arbeit, woran sich Anwendungen auf spezielle Fälle anschließen, geordnet gemäß der Natur der Nullstellen des heute so bezeichneten charakteristischen Polynoms:

$$P(z) = a_0 + a_1z + a_2z^2 + \cdots + a_nz^n = 0.$$

Selbiges erhält man, wie Euler auch beschreibt, durch Ersetzung von  $\frac{d^n}{dx^n}$  mit  $z^n$  in (18). Von Interesse ist hier zunächst, dass Euler in seinen finalen Formeln keine komplexen Zahlen mehr auftreten lassen will<sup>92</sup>. Dies sei an Eulers Beispiel 4 aus § 32 illustriert. Hier möchte er folgende Gleichung lösen:

$$0 = y - a^4 \frac{d^4 y}{dx^4}. \quad (19)$$

$a$  ist hierbei reell und man findet von  $P(z) = 1 - a^4z^4$  ohne Mühe die Faktorisierung

$$P(z) = (1 - az)(1 + az)(1 + a^2z^2).$$

Aus den ersten beiden Faktoren deriviert Euler unmittelbar beiden Lösungen

$$y_1(x) = \mathfrak{A}e^{\frac{x}{a}} \quad \text{und} \quad y_2(x) = \mathfrak{B}e^{-\frac{x}{a}},$$

wobei  $\mathfrak{A}$  und  $\mathfrak{B}$  beliebige Integrationskonstanten sind. Für die restlichen Lösungen zerlegt Euler nun nicht, wie heute üblich,  $1 + a^2z^2$  weiter in  $(1 -iaz)(1 +iaz)$  und konstruiert die weiteren Lösungen

$$y_3(x) = \mathfrak{C}e^{-i\frac{x}{a}} \quad \text{und} \quad y_4(x) = \mathfrak{D}e^{-i\frac{x}{a}},$$

wobei  $\mathfrak{C}$  und  $\mathfrak{D}$  wieder beliebige Integrationskonstanten sind, sondern vermeidet das Komplexe gänzlich und setzt an, dass sich für gewisses  $f$  und  $\varphi$  schreiben lässt:

$$\frac{1}{a^2} + z^2 = f^2 - 2fz \cos \varphi + z^2.$$

---

<sup>92</sup>Die Annahme ausschließlicher reeller Koeffizienten von  $P(z)$  impliziert das Auftreten von komplexen Lösungen in konjugierten Paaren, sodass sich je zwei Linearfaktoren  $(z - \alpha)$  und  $(z - \bar{\alpha})$  zu einem reellen quadratischen zusammenfassen lassen.

Dies ist wegen der bekannter Eigenschaften der komplexen Lösungen von reellen Polynomen stets möglich und Euler findet durch direkten Vergleich entsprechende Werte und daraus die Lösungsfunktion:

$$y_E(x) = \gamma \sin\left(\frac{x}{a} - \beta\right),$$

mit beliebigen Konstanten  $\beta$  und  $\gamma$ . Dieses bewusste Umschiffen des Komplexen in der finalen Lösung ist typisch für Euler und zieht sich durch seinen gesamten Opus und wird unten (Abschnitt 7.3.1) Gestand der Ausführungen werden.

Nach diesen einleitenden Worten soll nun der Übergang zum Fall einer Differentialgleichung unendlicher Ordnung geschehen. Im letzten Problem dieser Arbeit [EulerE62] (Problem XI § 50) behandelt Euler eine nämliche, welche zugleich das erste Beispiel einer solchen Fragestellung überhaupt zu sein scheint. Euler möchte hier folgende Gleichung lösen:

$$0 = y - \frac{1}{2!} \frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{1}{4!} \frac{d^4 y}{dx^4} - \frac{1}{6!} \frac{d^6 y}{dx^6} + \text{etc.} \quad (20)$$

Ein wohlüberlegtes Beispiel, führt sie gemäß seiner Methode zum charakteristischen “Polynom”:

$$P(z) = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \frac{z^6}{6!} + \text{etc.},$$

was gerade die Potenzreihe für  $\cos z$  ist. Dessen unendlich viele Nullstellen sind – wie Euler dann kurz zuvor in [EulerE61] bewiesen hatte – gegeben als

$$\pm \frac{\pi}{2}, \pm \frac{3\pi}{2}, \pm \frac{5\pi}{2}, \pm \frac{7\pi}{2}, \dots$$

Dies führt somit zur Lösung:

$$y(x) = \alpha e^{\frac{\pi}{2}x} + a e^{-\frac{\pi}{2}x} + \beta e^{\frac{3\pi}{2}x} + b e^{-\frac{3\pi}{2}x} + \gamma e^{\frac{5\pi}{2}x} + c e^{-\frac{5\pi}{2}x} + \text{etc.} \quad (21)$$

mit beliebigen Konstanten  $\alpha$ ,  $a$  etc. Diese Lösung erfüllt per Konstruktion (20). Jedoch ist an dieser Stelle noch nicht sichergestellt, dass dies auch die *vollständige* Lösung darstellt. Im Fall endlicher Ordnung gibt die Euler’sche Vorgehensweise entsprechend eine Lösung mit  $n$  frei wählbaren Konstanten, woraus – wie Euler auch bemerkt – sich die Vollständigkeit der Lösung

ergibt. Im Fall unendlicher Ordnung ist dies weniger offenkundig, beinhaltet etwa

$$y_{\text{teil}}(x) = \alpha e^{\frac{\pi}{2}x} + \beta \alpha e^{\frac{3\pi}{2}x} + \gamma e^{\frac{5\pi}{2}x} + \text{etc.}$$

ebenfalls unendlich viele frei wählbare Konstanten, kann jedoch als Teillösung der zuvor hergeleiteten (21) nicht die vollständige sein. Gleichmaßen könnte man einwenden, dass auch die von Euler gefundene Lösung nur eine Teillösung einer noch allgemeineren ist. Die Kernfrage, ob es auch im Unendlichen zulässig ist<sup>93</sup>, die Lösung allein aus den Nullstellen des charakteristischen “Polynoms” zu konstruieren, lässt Euler somit unbehandelt zurück.

Ergänzend und in Vorbereitung auf den kommenden Abschnitt sei noch bemerkt, dass sich (20) als Differenzgleichung auffassen lässt:

$$0 = y(x+i) + y(x-i),$$

wobei Euler selbst wohl  $\sqrt{-1}$  statt  $i$  geschrieben hätte. Schnell wird verifiziert, dass Eulers Lösung (21) in dieser enthalten ist, überdies ist

$$y(x) = A(i)^{ix} + B(-i)^{ix}$$

mit beliebigen  $A$  und  $B$  die allgemeinste Lösung der Differenzgleichung. Vermöge der Euler’schen Formel

$$e^{ix} = \cos(x) + i \sin(x)$$

lässt sich die Euler’sche unendlich viele Terme umfassende Lösung schnell begreiflich machen. Dazu hat man

$$i = e^{i\frac{\pi}{2}} \quad \text{oder} \quad i = e^{5i\frac{\pi}{2}} \quad \text{oder auch} \quad i = e^{9i\frac{\pi}{2}} \quad \text{etc.}$$

zu schreiben. Für  $(-i)$  gehe man analog vor. Dann gibt eine unmittelbare Anwendung der Potenzgesetze:

$$i^{ix} = (e^{(4k+1)\frac{i\pi}{2}})^{ix} = e^{-(4k+1)\frac{\pi}{2}x},$$

analog

$$(-i)^{ix} = (e^{(4l+3)\frac{i\pi}{2}})^{ix} = e^{-(4l+3)\frac{\pi}{2}x}$$

---

<sup>93</sup>Auf die folgenden beiden Abschnitte vorgreifend, sei angemerkt, dass dies im Allgemeinen nicht richtig ist, was auch anhand Beispielen illustriert werden wird.

mit ganzen Zahlen  $l$  und  $k$ . Dieser Interpretation einer Differentialgleichung unendlicher Ordnung als Differenzgleichung hat sich Euler in der Arbeit “*De serierum determinatione seu nova methodus inveniendi terminos generales serierum*” ([EulerE189], 1753, ges. 1749) (E189: “Über die Bestimmung von Reihen oder eine neue Methode die allgemeinen Termen von Reihen zu finden”) in umgekehrter Weise bedient und dies bildet überdies den Inhalt von Abschnitt (4.3).

#### 4.2.2 Der inhomogene Fall

The only real mistake is the one  
from which we learn nothing.

---

Henry Ford

An der Behandlung homogener Differentialgleichungen unendlicher Ordnung kommt wie beim Baseler Problem (Abschnitt 4.1.2) die heutzutage unbedarft wirkende Haltung gegenüber dem Unendlichen zum Vorschein, welches für Euler bei dieser Begebenheit just als weitere Zahl gesehen wird. Während sich an dieser Stelle noch berechtigt vorbringen ließe, die Unvollständigkeit seiner Herangehensweise wäre aufgrund der Richtigkeit der Lösung und konvergierender Evidenz für Euler schwierig zu erkennen, kann dieser Einwand bei seiner Behandlung des inhomogenen Falles nicht mehr geltenden gemacht werden. Hier, so wird im Verlaufe gezeigt werden, gelangt er zu einer unrichtigen Lösung, welche er außerdem als solche hätte erkennen können.

Um den genauen Ursprung von Eulers Fehler zu eruieren, ist es hilfreich, zunächst seine Ausführungen zum Gegenstand der inhomogenen Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten aus der Arbeit “*Methodus aequationes differentiales altiorum graduum integrandi ulterius promotata*” ([EulerE188], 1753, ges. 1750) (E188: “Die Methode Differentialgleichungen höherer Grade zu integrieren weiter entwickelt”) nachzuverfolgen. Diese beginnen ab § 7 und sind in diesem Sinne typisch Euler’sch, dass er sich von den einfachsten Fällen zum allgemeinen vorarbeitet. Er beginnt mit dem Fall erster Ordnung

$$X(x) = Ay(x) + By'(x). \tag{22}$$

Euler bevorzugt in seinen Arbeiten zuhauf die Darstellung mit Differentialen und schreibt letztgenannte Gleichung als:

$$Xdx = Aydx + Bdy$$

und multipliziert dies mit  $e^{\alpha x}$ :

$$e^{\alpha x} Xdx = Ae^{\alpha x} ydx + e^{\alpha x} Bdy.$$

$\alpha$  ist nun so zu wählen, dass die rechte Seite wie die linke ein vollständiges Differential ist<sup>94</sup>. Nach Euler ist dies notwendigerweise als  $d(Be^{\alpha x}y)$  gegeben; damit hat man

$$d(Be^{\alpha x}y) = B\alpha e^{\alpha x} ydx + Be^{\alpha x} dy.$$

Dies führt zur Gleichung

$$B\alpha e^{\alpha x} ydx + Be^{\alpha x} dy = Ae^{\alpha x} ydx + e^{\alpha x} Bdy,$$

welche notwendig gelten muss. Ein Vergleich der entsprechenden Terme impliziert:  $A = \alpha B$  oder  $\alpha = \frac{A}{B}$ , woraus mit

$$\int e^{\alpha x} Xdx = \int d(Be^{\alpha x}y) = Be^{\alpha x}y$$

nach Einsetzen des Wertes für  $\alpha$  zur Lösung

$$y = \frac{\alpha}{A} e^{-\alpha x} \int e^{\alpha x} Xdx.$$

von (22) gelangt wird. Die beliebige Integrationskonstante geht über das Integral ein und weist die Lösung als die vollständige aus<sup>95</sup>.

Im nächsten Schritt seiner allgemeinen Lösung von (24) betrachtet Euler die Gleichung von zweiter Ordnung, schreitet also im Grad einen Schritt voran. Er setzt an:

---

<sup>94</sup>Die Idee der Multiplikation mit einer Exponentialfunktion motiviert Euler hier nicht, allerdings hat er solche Integrale in seiner Arbeit *“De infinitis curvis eiusdem generis seu methodus inveniendi aequationes pro infinitis curvis eiusdem generis”* ([EulerE44], 1740, ges. 1734) (E44: “Über unendlich viele Kurven derselben Art oder eine Methode die Gleichungen für unendlich viele Kurven derselben Art zu finden”) betrachtet und ist sich seitdem ihrer Eigenschaften bewusst gewesen.

<sup>95</sup>Eulers Ansatz, das gesuchte Differential  $d(Be^{\alpha x}y)$  zu betrachten, wird nachvollziehbar, wenn ein Vergleich mit der heute üblichen Methode der Variation der Konstanten zur Lösung von (22) angestellt wird. Selbiger offenbart, dass Euler in seinen Erklärungen die beiden Schritte dieser Methode (erst die Lösung der homogenen Gleichung zur Bestimmung von  $\alpha$  und die anschließende Variation der Konstanten zum Finden des vollständigen Differentials  $d(Be^{\alpha x}y)$ ) in seinem Ansatz gleichzeitig vollzieht.

$$X = A + B \frac{dy}{dx} + C \frac{dy^2}{dx^2}.$$

Multipliziert mit  $e^{\alpha x} dx$  führt dies zu

$$e^{\alpha x} X dx = e^{\alpha x} A dx + B e^{\alpha x} dy + C e^{\alpha x} \frac{dy}{dx},$$

was er nun auf den obigen Fall zurückführt, indem er

$$\int e^{\alpha x} X dx = e^{\alpha x} \left( A'y + B' \frac{dy}{dx} \right)$$

mit zu bestimmenden Größen  $A'$ ,  $B'$  festlegt. Durch Differenzieren dieser Gleichung und einen Vergleich mit der vorgelegten gelingt es ihm,  $A'$  und  $B'$  über  $A$  und  $B$  sowie  $\alpha$  auszudrücken, sodass er im letzten Schritt erneut eine Gleichung für  $\alpha$  ableiten kann; in diesem Fall lautet diese

$$0 = A - B\alpha + C\alpha^2.$$

Da die vorherige Integralgleichung dem vorherigen Fall erster Ordnung entspricht, ist das vorgelegte Problem mit dem Auffinden von  $\alpha$  abgehandelt.

Aus diesen Darstellungen scheint Euler das Muster offenkundig geworden zu sein: Der Fall  $n$ -ter Ordnung kann stets auf den  $n - 1$ -ter Ordnung zurückgeführt werden, welche Einsicht er in § 9 – 13 mit einem Beweis unterlegt. Da er auf diesem Wege zu einer Lösungsformel gelangt, die  $n$  Integrationskonstanten involviert, ist die Auflösung der allgemeinen inhomogenen Differentialgleichung von  $n$ -ter Ordnung grundlegend abgehandelt; ergänzt wird Eulers Ausführung noch durch eine Diskussion der Sonderfälle mehrfacher und komplexer Nullstellen und die Angabe expliziter Formeln.

Aus moderner Sicht leitet Euler eine Rekursionsvorschrift zur Lösung von (24) ab, weshalb seine gefundene Lösung (25) als richtig und vollständig ausweisen lässt. Nichtsdestotrotz liegt er nicht richtig, wenn er hieraus schließt, seine Methode behielte für  $n = \infty$  unverändert Geltung, welche Unrichtigkeit sich außerdem unmittelbar dem Euler'schen Gedanken selbst demonstrieren lässt: Die essentielle Größe  $\alpha$  bestimmt sich nach Euler aus der Nullstellensuche für das charakteristische Polynom:

$$P(z) = A + Bz + Cz^2 + \dots + Nz^n = 0.$$

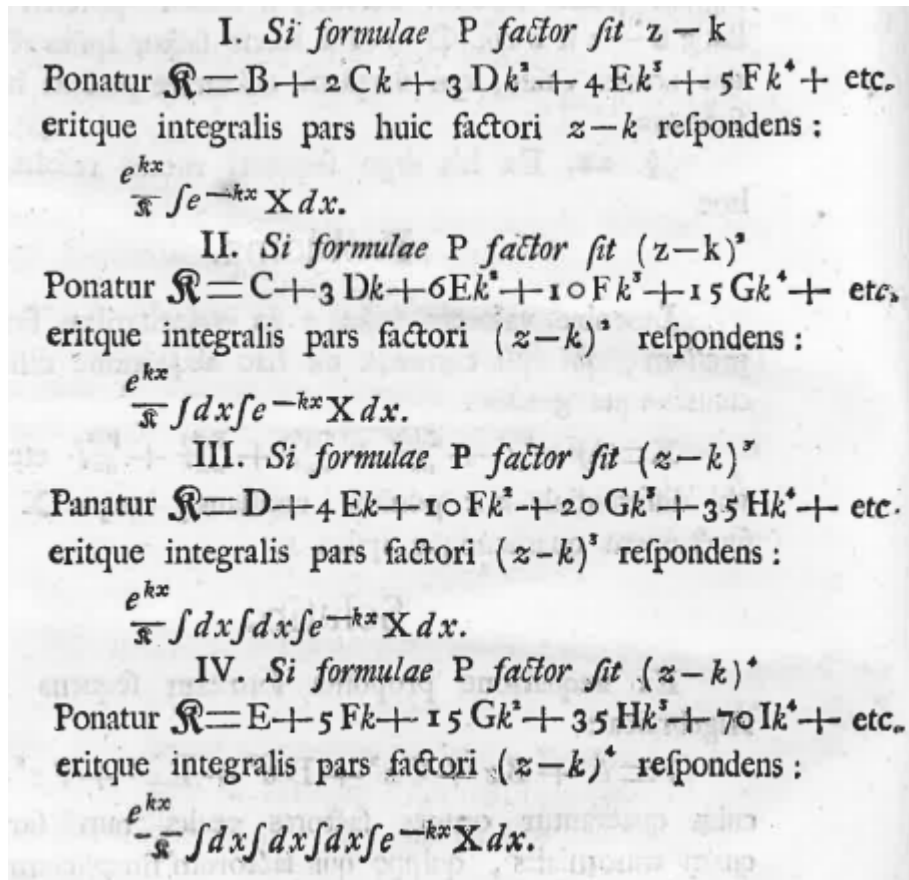


Abbildung 10: Eulers Auflistung der Lösung der allgemeinen inhomogenen gewöhnlichen Differentialgleichung aus seiner Arbeit [EulerE188] geordnet nach Vielfachheit der Nullstellen des charakteristischen Polynoms.

Diese besitzt – vermöge des Fundamentalsatzes der Algebra<sup>96</sup> – auch  $n$  Lösungen, die man zur vollständigen Lösung der Gleichung (24) benötigt. Im Unendlichen Fall hingegen kann  $P(z)$  Funktionen ohne Nullstellen bedeuten, wie etwa:

$$P(z) = 1 + z + z^2 + z^3 + \dots = \frac{1}{1 - z}.$$

Demnach kann man mit der Euler’schen Methode keine Lösung der Gleichung

$$y + \frac{dy}{dx} + \frac{dy^2}{dx^2} + \frac{dy^3}{dx^3} + \dots = X$$

finden, obwohl eine solche mit  $y = X - X'$  gegeben ist. Die Existenz einer Lösung von solchen Differentialgleichungen ist später überdies durch das Theorem von Malgrange (1928–2024) und Ehrenpreis (1930–2010) gesichert worden<sup>97</sup>. Auch wenn letzterer für inhomogene lineare partielle Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten formuliert ist, kann er auf den gewöhnlichen Fall appliziert werden. Dieser Umstand des tatsächlichen Vorliegens einer Lösung scheint Euler indes nicht aufgefallen zu sein, obwohl er in seinem Lehrbuch zur Integralrechnung *“Institutionum calculi integralis volumen secundum”* ([EulerE366], 1769, ges. 1763) (E366: “Grundlagen des Integralkalküls – Zweiter Band”) den endlichen Fall des Beispiels betrachtet (Problem 158, § 1194) und berechnet. Allerdings zeigt seine Lösung auch auf, dass sie nicht ins Unendliche überführbar ist. Selbiges betrifft sein Beispiel aus § 1209, welches ihn zum selben (unrichtigen) Ausdruck für die Lösung der einfachen Differenzgleichung wie in [EulerE189] führt, zur Besprechung welcher Arbeit im Folgenden übergegangen wird.

---

<sup>96</sup>Von der Gültigkeit des Fundamentalsatzes war Euler überzeugt, er hatte zuvor in [EulerE170] einen Beweis vorgelegt, welcher sich allerdings – nicht mehr zu seinen Lebzeiten – Kritik, insbesondere von Gauß, ausgesetzt sah. Dies wird weiter unten in Abschnitt 7.3.2 eingehender erläutert werden.

<sup>97</sup>Die Namensgeber beweisen den nach Ihnen benannten Satz in den Arbeiten *“Existence et approximation des solutions des équations aux dérivées partielles et des équations de convolution”* ([Malgrange], 1955), (*“Existenz und Approximation der Lösung von partiellen Differentialgleichungen und Faltungsgleichungen”*) (Malgrange (1928–2024)) und *“Solution of some problems of division. I. Division by a polynomial of derivation”* ([Ehrenpreis1], 1955) und *“Solution of some problems of division. II. Division by a punctual distribution”* ([Ehrenpreis2], 1955) (Ehrenpreis (1930–2010)). Wie aber auch unten (Abschnitt 7.3.2) erläutert werden wird, haben Existenzfragen Euler selten berührt.

### 4.3 Euler und inhomogene Differenzgleichungen mit konstanten Koeffizienten

Man muss immer generalisieren.

---

Carl Gustav Jacob Jacobi

Wäre man gezwungen, Eulers Arbeitsweise anhand einer einzigen Abhandlung zu beschreiben, so wäre die Arbeit *“De serierum determinatione seu nova methodus inveniendi terminos generales serierum”* ([EulerE189], 1753, ges. 1749) (E189: “Über die Bestimmung von Reihen oder eine neue Methode die allgemeinen Termen von Reihen zu finden”) eine treffliche Wahl. Dies begründet sich wie folgt: Zum einen erlaubt sie einen Einblick, wie Euler ein spezielles Gebiet – hier das der Differenzgleichungen – mit neuen Ideen expandiert. Präsentiert wird es vom Autor von bekannten Beispielen ausgehend. Alte Formeln werden mit der neuen Methode abgeleitet und erhalten so eine weitere Bestätigung. Zudem werden andere Themengebiete von Euler gestreift – hier die Darstellung einer periodischen Funktion als eine Reihe von trigonometrischen Funktionen. Ein unendliches Produkt, was dieser Arbeit zu eigen sein scheint, erwähnt Euler ebenfalls. Auf alles Aufgelistete wird in der vorliegenden Ausarbeitung entsprechend eingegangen werden. Vorangestellt wird diesen Einzelentdeckungen jedoch die Euler’sche Auflösungsmethode der einfachen Differenzgleichung (Abschnitt 4.3.1), welche in einer Herleitung der Stirling’schen Formel für die Fakultät ihre Anwendung finden wird (Abschnitt 4.3.3). Die Abweichung von Eulers Ergebnis wird ebenfalls diskutiert und entsprechend korrigiert (Abschnitt 4.3.4).

#### 4.3.1 Eulers Lösung der einfachen Differenzgleichung

Solving a problem simply means representing it so as to make the solution transparent.

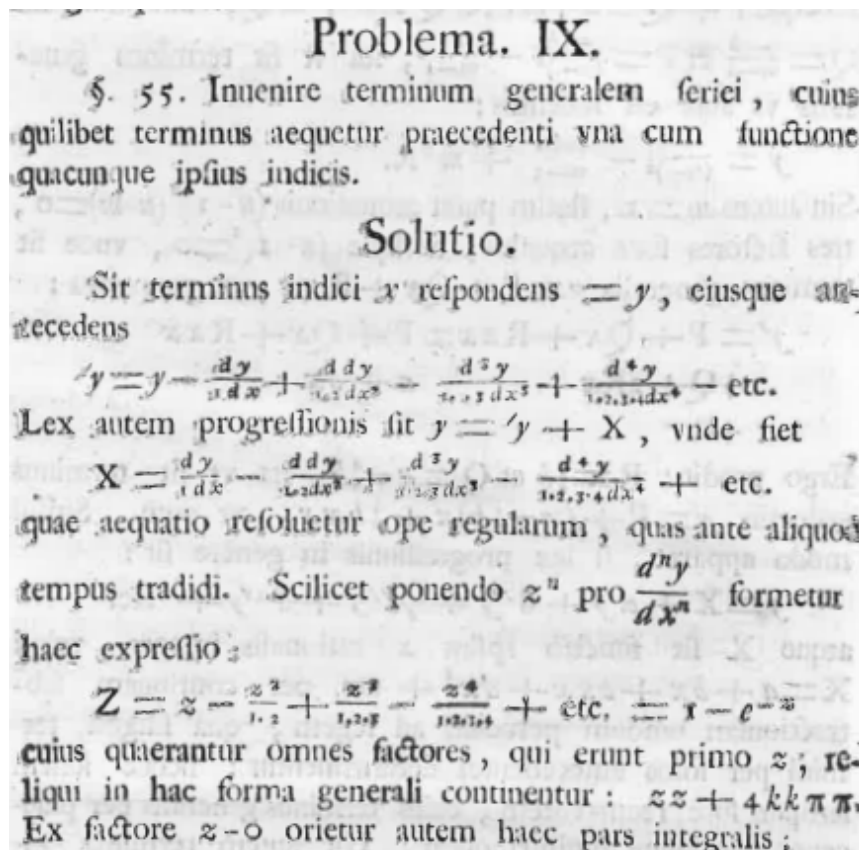
---

Herbert Simon

Das zentrale Ergebnis von [EulerE189] ist die Lösung der einfachen Differenzgleichung

$$f(x + 1) - f(x) = g(x). \quad (23)$$

Bereits in seiner Arbeit [EulerE47] hatte Euler bereits mit der heute als nach



**Abbildung 11:** Euler formuliert das Problem zur Lösung der einfachen Differenzgleichung in [EulerE189].

ihm und Maclaurin (1698–1746) benannten Summenformel eine *partikuläre* Lösung dieser Gleichung angegeben, in dieser Abhandlung reicht er die allgemeine Lösung nach. Diese soll in ihrer Herleitung nachvollzogen werden.

**Gewöhnliche Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten**  
Wie oben (Abschnitt 4.2) auseinander gesetzt, leitet Euler in [EulerE188] die Lösung der Differentialgleichung

$$\left( a_0 + a_1 \frac{d}{dx} + a_2 \frac{d^2}{dx^2} + \dots + a_n \frac{d^n}{dx^n} \right) f(x) = g(x), \quad (24)$$

mit komplexen Koeffizienten  $a_1, a_2, \dots, a_n$  her<sup>98</sup>. Aus den Nullstellen des Polynoms

$$P(z) = a_0 + a_1z + a_2z^2 + \dots + a_nz^n$$

wird nun explizit die Lösung konstruiert. Sei nun  $z = k$  eine solche Lösung bzw.  $P(k) = 0$ . Überdies sei  $k$  eine einfache Nullstelle<sup>99</sup> von  $P(z)$ ; dann ist die Lösung zu (24) gegeben als Summe über alle Ausdrücke der Form

$$f_k(x) = \frac{e^{kx}}{P'(k)} \int e^{-kx} g(x) dx. \quad (25)$$

Da jeder der  $n$  Bestandteile jeweils eine Integrationskonstante mitbringt, ist dies auch die vollständige Lösung.

Diese Erkenntnis wendet Euler folgend auf die einfache Differenzgleichung (23) an, indem er zunächst bemerkt, dass nach dem Satz von Taylor (1685–1731) gilt:

$$f(x+1) = f(x) + \frac{d}{dx} f(x) + \frac{1}{2} \frac{d^2}{dx^2} f(x) + \frac{1}{3!} \frac{d^3}{dx^3} f(x) + \dots,$$

sodass sich die einfache Differenzgleichung als

$$\left( \frac{d}{dx} + \frac{1}{2} \frac{d^2}{dx^2} + \frac{1}{3!} \frac{d^3}{dx^3} + \dots \right) f(x) = g(x) \quad (26)$$

schreiben lässt. Gemäß Eulers Lösungsmethode sind die Nullstellen des Ausdrucks

$$P(z) = \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^4}{4!} + \dots = e^z - 1. \quad (27)$$

zu ermitteln. Die allgemeine Lösung dieser Gleichung ist mit  $z = \log 1$  gegeben. Kurz zuvor hatte Euler aber auch die Mehr- bzw. Unendlichkeit der Logarithmusfunktion in seiner Abhandlung [EulerE168] nachgewiesen

<sup>98</sup>Für Euler waren die Koeffizienten zwar stets reell, seine Methode funktioniert aber gleichermaßen für den komplexen Fall.

<sup>99</sup>Im Folgenden wird ausschließlich der Fall einer einfachen Nullstelle benötigt und dementsprechend die Mitteilung der Euler'schen Ergebnisse darauf reduziert. Euler hat in [EulerE188] die Fälle der Ordnungen 1 bis 4 explizit angegeben, woraus sich leicht der allgemeine Fall erschließen lässt.

(siehe auch oben in Abschnitt (3.2.1)), sodass er entsprechend eine unendliche Menge von Wurzeln von (27) folgert, nämlich neben der offenkundigen reellen Lösung  $z = 0$  die weiteren:

$$\pm 2\pi i, \pm 4\pi i, \pm 6\pi i, \pm 8\pi i, \dots$$

Demnach liefert die Formel (25) angewandt auf (26) als Lösung von (23) den Ausdruck:

$$f(x) = \int g(x) dx + e^{-2\pi i x} \int g(x) e^{2\pi i x} dx + e^{2\pi i x} \int g(x) e^{-2\pi i x} dx \quad (28)$$

$$+ e^{-4\pi i x} \int g(x) e^{4\pi i x} dx + e^{4\pi i x} \int g(x) e^{-4\pi i x} dx + \dots$$

Diese Darstellung findet sich entsprechend bei Euler mit sin und cos ausgedrückt. Jedoch ist diese in dieser Form nicht ganz korrekt, kommt aber nur wenig von der richtigen Lösung ab, wie weiter unten (Abschnitt 4.3.4) erkennbar werden wird. Zuvor soll aber noch ein Nebenerkenntnis Erwähnung finden, welches Euler ebenfalls mitteilt.

### 4.3.2 Ein Nebenergebnis: Ein unendliches Produkt

One more thing.

---

Steve Jobs

In § 20 von [EulerE189] gibt Euler, in moderner Terminologie, folgendes Produkt an:

$$e^x - 1 = \lim_{n \rightarrow \infty} x \prod_{k=1}^{\frac{n}{2}} \left( 1 + \frac{x}{n} + \frac{x^2}{4k^2\pi^2} \right). \quad (29)$$

Dieses Produkt ist bemerkenswert, weil es den Term  $\frac{x}{n}$  enthält, der aber trotz des unendlich werdenden  $n$  nicht fortgelassen werden darf, was Euler entsprechend anmerkt. Insbesondere ergibt sich daraus, dass sich das Produkt – eben nicht wie etwa bei  $\sin x$  – bereits aus den Nullstellen ableiten lässt. Wie Euler zu dieser Erkenntnis gelangt ist, wird aus seinen Ausführungen in seiner Arbeit nicht deutlich<sup>100</sup>. Es ist aber anzunehmen, dass er sie auf indirektem Wege erlangt hat. Bereits in seiner *Introductio* [EulerE101] hatte er zuvor die Formel

---

<sup>100</sup> Auch die Ausführung in seiner *Introductio*, wo sich das Produkt in § 155 findet, geben keinen Aufschluss.

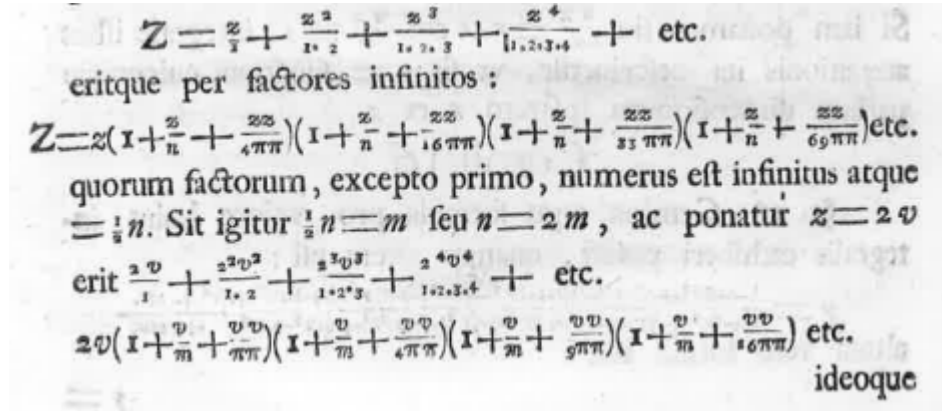


Abbildung 12: Eulers erklärt die Produktentwicklung von  $e^x - 1$  aus § 20 von seiner Arbeit [EulerE189].  $n$  und  $m$  versteht Euler hier als unendlich große Zahlen.

$$\frac{e^x - e^{-x}}{2} = x \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{x^2}{(n\pi)^2}\right)$$

angegeben, welche sich durch Fortlassen des Terms  $\frac{x}{n}$  in (29) ergäbe. Demnach würde es zu einem Widerspruch führen, selbigen tatsächlich auszulassen. Man findet gleichermaßen durch direktes Ausmultiplizieren von (29), dass das Weglassen vom richtigen Ergebnis wegführt, zumal

$$\prod_{k=1}^{\frac{n}{2}} \left(1 + \frac{x}{n} + \frac{x^2}{4k^2\pi^2}\right) = 1 + \frac{n}{2} \cdot \frac{x}{n} + \dots,$$

woraus sich direkt der richtige Term der Potenzreihenentwicklung ergibt, wenn man den Grenzwert  $n \rightarrow \infty$  nimmt. Weiter gibt Euler in § 21 von [EulerE189] auch die Partialbruchzerlegung

$$\frac{2e^{2v}}{e^{2v} - 1} - \frac{1}{v} = \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^m \frac{\frac{1}{m} + \frac{2v}{4\pi\pi}}{1 + \frac{v}{m} + \frac{v^2}{k^2\pi^2}}, \quad (30)$$

an, aus welcher er die Werte der Summen  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{2n}}$  ableitet<sup>101</sup>.

Obschon das Euler'sche Resultat richtig ist, scheint er keine Methode vorgelegt zu haben, mit welcher sich a priori zu (29) gelangen ließe.

<sup>101</sup>In Abschnitt (8.1.1) wird gar ein weiterer Beweis vorgestellt, diese Summen zu evaluieren, welcher alleinig auf den Erkenntnissen von Eulers Arbeit [EulerE189] basiert.

Für Beispiele wie das Sinus-Produkt (14) lassen sich die Erläuterungen aus seiner Arbeit *“Dilucidationes in capita postrema calculi mei differentialis de functionibus inexplicabilibus”* ([EulerE613], 1813, ges. 1780) (E613: “Erläuterungen zu den letzten Kapiteln meines *Caculi Differentialis* über unerklärbare Funktionen”) dahingehend auslegen, dass sie eine solche Methode darbieten. Wie etwa in der Arbeit *“Euler and the Gammafunction”* ([Aycock4], 2021) argumentiert und weiter unten (Abschnitt 5.2.2) noch einmal aufgegriffen nimmt Euler in besagter Arbeit die Weierstraß’sche Produktentwicklung für eine Funktion mit vorgegebenen Nullstellen vorweg, welche indes nicht auf  $e^x - 1$  anwendbar ist.

### 4.3.3 Stirling’sche Formel nach Euler

The most exciting phrase to hear in science, the one that heralds new discoveries, is not ‘Eureka!’ but ‘That’s funny...’

---

Isaac Asimov

Im letzten Abschnitt seiner Abhandlung [EulerE189] (ab §§ 56–60) möchte Euler sein allgemeines Ergebnis (28) auf die Fakultät anwenden<sup>102</sup>; selbige erfüllt die Gleichung

$$y(x + 1) = xy(x),$$

die durch Logarithmieren in eine Differenzgleichung der benötigten Form überführt wird

$$\log y(x + 1) - \log y(x) = \log(x).$$

Am Ende intensiver Rechnungen steht die Stirling’sche Formel

$$n! \sim \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n \quad \text{für } n \rightarrow \infty, \quad (31)$$

jedenfalls beinahe. Euler unterläuft wie weiter oben schon angedeutet auf der konzeptuellen Ebene ein Fehler, welcher aus der Vorstellung des Euler’schen Gedankenganges erkennbar werden wird.

---

<sup>102</sup>Euler betrachtet dabei nicht die Differenzgleichung für  $x!$ , sondern die für  $(x - 1)!$ , also eine, die von der  $\Gamma$ -Funktion erfüllt wird.

Die Applikation der allgemeinen Formel (28) führt in einem ersten Schritt zu

$$f(x) = x \log x - x + C + e^{2\pi i x} \int \log(x) e^{-2\pi i x} dx + e^{-2\pi i x} \int \log(x) e^{+2\pi i x} dx \\ + e^{4\pi i x} \int \log(x) e^{-4\pi i x} dx + e^{-4\pi i x} \int \log(x) e^{+4\pi i x} dx + \dots \quad (32)$$

wo  $\int \log(x) dx$  bereits zu  $x \log(x) - x$  ausgewertet worden ist und  $C$  eine beliebige Integrationskonstante bedeutet<sup>103</sup>. Um nun zur Stirling'schen Formel gelangen, sucht Euler zunächst den Ausdruck

$$e^{2k\pi i x} \int e^{-2k\pi i x} \log(x) dx.$$

Dafür verwendet er partielle Integration unendlich viele Male hintereinander mit  $e^{-2k\pi i x}$  als zu integrierender Funktion. In moderner und kompakter Notation ist das Ergebnis<sup>104</sup>:

$$e^{2k\pi i x} \int e^{-2k\pi i x} \log(x) dx = -\frac{\log(x)}{2k\pi i} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (n-1)!}{(2k\pi i)^{n+1} x^n} + C_k e^{2k\pi i x}.$$

$C_k$  ist eine beliebige durch Integration eingehende Konstante. Indem man so für alle unendlich vielen Ausdrücke verfährt, gelangt man zum Ausdruck:

$$\log y(x) = x \log x - x + C + \sum_{k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} \left( C_k e^{2k\pi i x} - \frac{\log(x)}{2k\pi i} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (n-1)!}{(2k\pi i)^{n+1} x^n} \right)$$

Zwecks Vereinfachung dieser Summe setze man zunächst

$$C + \sum_{k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} C_k e^{2k\pi i x} =: h(x);$$

$h$  ist demnach eine periodische Funktion, welche der Gleichung  $h(x) = h(x+1)$  Genüge leistet. Ferner gilt

<sup>103</sup>Dies ist die Lösung, welche Euler in [EulerE189] §59 angibt, er verwendet lediglich  $\cos$  und  $\sin$ -Funktion statt  $e$ -Funktionen. Überdies ist diese Darstellung als eine asymptotische und nicht wirkliche Gleichheit zu verstehen.

<sup>104</sup>Weil Euler  $\sin(2k\pi x)$  und  $\cos(2k\pi x)$  anstatt  $e^{-2k\pi i x}$  verwendet, weicht sein endgültiges Ergebnis in seiner Gestalt von dem ab, zu welchem hier gelangt werden wird. Die Herleitung ist allerdings in beiden Fällen dieselbe.

$$\sum_{k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} \frac{\log(x)}{2k\pi i} = 0,$$

da sich die Terme gegenseitig streichen. Demnach verbleibt die Berechnung der Doppelsumme. Mit einer formalen Rechnung eruiert man:

$$\sum_{k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (n-1)!}{(2k\pi i)^{n+1} x^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{k^{2n+2}} \cdot \frac{(-1)^n (2n)!}{(2\pi)^{2n+2} \cdot x^{2n+1}}. \quad (33)$$

Die Summe rechter Hand hatte Euler, wie oben in Form der Gleichung (150) erwähnt, zuvor berechnet; man entnimmt sie in [EulerE130] als:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{2n}} = \frac{(-1)^{n-1} (2\pi)^{2n} B_{2n}}{2(2n)!}, \quad (34)$$

wo  $B_n$  die Bernoulli Zahlen sind. Setzt man dies nun in (33) ein, wird dies zu

$$\sum_{k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (n-1)!}{(2k\pi i)^{n+1} x^n} = \sum_{n=0}^{\infty} 2 \cdot \frac{(-1)^n (2\pi)^{2n+2} B_{2n+2}}{2(2n+2)!} \cdot \frac{(-1)^n (2n)!}{(2\pi)^{2n+2} \cdot x^{2n+1}}.$$

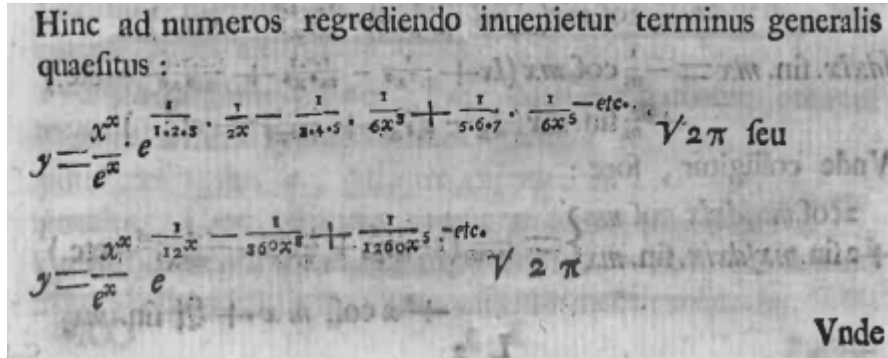
Viele Terme heben sich auf, sodass diese Gleichheit verbleibt:

$$\sum_{k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (n-1)!}{(2k\pi i)^{n+1} x^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{B_{2n}}{(2n-1)2n x^{2n-1}}.$$

Alles in eingesetzt (32) gibt:

$$\log y(x) = x \log x - x + h(x) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{B_{2n}}{(2n-1)2n x^{2n-1}}. \quad (35)$$

Diese Gleichung ist in moderner Terminologie als asymptotische Reihe aufzufassen und es ist die Formel zu welcher Euler selbst in § 60 von [EulerE189] gelangt ist, Euler hat lediglich die expliziten Zahlenwerte für die Bernoulli Zahlen substituiert. (35) mit (31) vergleichend, fehlt der Term  $\log(\sqrt{\frac{2\pi}{x}})$ , was Euler auch bemerkt. Er argumentiert diesbezüglich, dass besagter aus einem



**Abbildung 13:** Eulers (unrichtige) Version der Stirling’schen Formel aus seiner Arbeit [EulerE189] abgeleitet aus der Differenzgleichung der Fakultät.

Spezialfall folge, also etwa  $x = 1^{105}$  und der Anfangsbedingung  $y(1) = 1$  zur Gleichung  $y(x+1) = xy(x)$ , sodass man bei dieser finalen Formel angelangt:

$$\log y(x) = x \log x - x + \log(\sqrt{2\pi}) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{B_{2n}}{(2n-1)2nx^{2n-1}}, \quad (36)$$

sofern  $x$  unendlich groß ist.

Eulers Version der Formel liest sich dann wie folgt:

$$y(x) = \frac{x^x}{e^x} \left( 1 + \frac{1}{12x} + \frac{1}{288x^2} - \frac{139}{51840x^3} + \dots \right) \sqrt{2\pi}, \quad (37)$$

welche folgt, indem man die Zahlenwerte für die Bernoulli-Zahlen einsetzt, die Exponentialfunktion nimmt und dann ihre Taylorentwicklung heranzieht.

Wie Faber (1877–1966) in einer Fußnote der *Opera Omnia* Version der Arbeit [EulerE189] anmerkt, ist die von Euler angegebene Lösung (37) inkorrekt, und ist wie folgt zu korrigieren

<sup>105</sup>Genauer argumentiert Euler, dass in diesem Fall  $h(x)$  als konstante Größe zu verstehen ist und der Wert dieser Konstante hier dann der Summe  $1 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{B_{2n}}{(2n-1)2n}$  gleich ist, welche Euler ohne Beweis behauptet  $\frac{1}{2} \log(2\pi)$  zu sein, obwohl die Reihe wegen des raschen Anwachsens der Bernoulli Zahlen nicht konvergiert. Aber Euler war sich indes gewahr, dass man den zuvor erwähnten Wert der Summe zuschreiben kann, weil er der Konstante  $\sqrt{2\pi}$  in Stirlings Formel (31) entspricht. Euler selbst hat eine korrekte Berechnung der Stirling’schen Konstante in seinem Buch “*Calculi Differentialis*” (§§ 157–158) [EulerE212] gegeben.

$$\log y(x) = x \log x - x + \log\left(\sqrt{\frac{2\pi}{x}}\right) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{B_{2n}}{(2n-1)2nx^{2n-1}}, \quad (38)$$

In der Euler'schen Lösung ist demnach der Term  $-\log \sqrt{x}$  abhanden<sup>106</sup>.

#### 4.3.4 Ein Fehlschluss von Euler

The one who insists on never  
uttering an error must remain  
silent.

---

Werner Heisenberg

Zweifelsohne ist Eulers Antwort (28) zur Auflösung der Gleichung (23) unrichtig, weicht jedoch wenig von der vollständigen Lösung

$$\begin{aligned} f(x) = & -\frac{1}{2}g(x) + \int g(x)dx + e^{-2\pi ix} \int g(x)e^{2\pi ix} dx + e^{2\pi ix} \int g(x)e^{-2\pi ix} dx \\ & e^{-4k\pi ix} \int g(x)e^{4\pi ix} dx + e^{4\pi ix} \int g(x)e^{-4\pi ix} dx + \dots, \end{aligned} \quad (39)$$

ab. Genauer kommt Eulers Ergebnis lediglich um den Term  $-\frac{1}{2}g(x)$  von der Wahrheit ab. Euler hat diesen Term, wie bereits angedeutet, nicht aus Flüchtigkeit übersehen, sondern der Lapsus ist der Konstruktion der Lösung aus den Nullstellen des Ausdrucks  $P(z) = e^z - 1$  geschuldet. Obschon nämlich die Lösungsmethode für den Fall endlicher Ordnung zum richtigen Ergebnis führt, gelingt der Übergang zum Unendlichen nicht reibungslos. Für den erfolgreichen Übergang zum Fall unendlicher Ordnung wäre die Lösung aus dem Kehrwert des charakteristischen Polynoms zu konstruieren. Mit der Festlegung  $z = \frac{d}{dx}$  schreibe man (26) wie folgt:

$$f(x) = \frac{1}{P(z)}g(x). \quad (40)$$

Zur Anwendung des Operators  $\frac{1}{P(z)}$  auf  $g(x)$  ist selbiger in ganzzahligen Potenzen von  $z$  anzugeben, wofür mehrere mehrere Möglichkeiten offen stehen.

---

<sup>106</sup>Da sich  $y(x)$  als  $\Gamma(x)$  deuten lässt, gilt entsprechend für die Fakultät

$$\log(x!) = x \log x - x + \log \sqrt{2\pi x},$$

sofern auch hier das Gleichheitszeichen hier wieder als asymptotisch äquivalent gelesen wird.

Für den Nachweis von (39) ist die folgende Partialbruchzerlegung zuträglich, welche sich leicht mit Methoden aus der komplexen Analysis zeigen lässt<sup>107</sup>.

$$\frac{1}{e^z - 1} = -\frac{1}{2} + \sum_{k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} \frac{1}{z - 2k\pi i}. \quad (41)$$

Die nur bedingte Konvergenz der letzten Formel ist für das Folgende nicht weiter wichtig. Ist Man bedarf des Ausdrucks

$$\frac{1}{z - 2k\pi i} g(x), \quad (42)$$

welcher sich mit  $2k\pi = \alpha$  als

$$\frac{1}{z - \alpha} g(x) = \frac{1}{z \left(1 - \frac{\alpha}{z}\right)} g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{z^{n+1}} g(x)$$

erweist. Wegen  $\frac{d}{dx} = z$  ist  $\frac{1}{z}$  als  $\int$ -Operator aufzufassen, als Konsequenz  $\frac{1}{z^n}$  als  $n$ -fach iteriertes Integral<sup>108</sup>. Mit der Notation  $\int^n$  für das  $n$ -fach iterierte Integral gelangt man zur folgenden Formel:

$$\int^n g(x) dx = \int \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} g(t) dt. \quad (43)$$

Eingesetzt in (42) gibt dies

$$\frac{1}{z - \alpha} g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n \int \frac{(x-t)^n}{n!} g(t) dt = \int e^{\alpha(x-t)} g(t) dt.$$

Vermöge (41) und (40) zeigt dies:

$$f(x) = -\frac{1}{2} g(x) + \sum_{k \in \mathbb{Z}} \int e^{2k\pi i(x-t)} g(t) dt = -\frac{1}{2} g(x) + \sum_{k \in \mathbb{Z}} e^{2k\pi i x} \int e^{-2k\pi i t} g(t) dt,$$

welche (39) ist und mit der Lösung in der Arbeit “*Note on the simple Difference Equation* ([Wedderburn], 1914) übereinstimmt, wo sie mithilfe der

<sup>107</sup>Euler selbst hätte zu dieser Formel gelangen können, allerdings nicht mit einer allgemeinen Methode.

<sup>108</sup>Für iterierte Integrale hat Euler ebenfalls Formeln angegeben, und zwar in [EulerE681], allerdings erst nach der Veröffentlichung der Arbeit [EulerE189]. Man vergleiche 3.2.2.

komplexen Analysis abgeleitet wird. Auf die Art, wie im vorgestellten Argument mit Differentialoperatoren hantiert worden ist, ist auch Bourlet (1866–1913) in seiner Arbeit “*Sur certaines équations analogues aux équations différentielles*” ([Bourlet], 1899) (“Über gewisse den differentiellen analoge Gleichungen”) verfahren.

**Verbindung zur Euler–Maclaurin’schen Summenformel** Gründe der Vollständigkeit gebieten es, den Euler’schen Ansatz zur Lösung von Differentialgleichungen unendlicher Ordnung zur Herleitung der Euler-Maclaurin’schen Summenformel anzuwenden, welche wie eingangs angemerkt eine partikuläre Lösung der einfachen Differenzgleichung (23) gibt. Man hat demnach immer noch die Differentialgleichung (26) zu lösen, welche sich für  $z = \frac{d}{dx}$  als

$$f(x) = \frac{1}{e^z - 1} g(x) \quad (44)$$

schreiben lässt. Statt nun die Funktion  $\frac{1}{e^z - 1}$  in Partialbrüche zu umzuwandeln, suche man stattdessen die Laurent–Entwicklung um den Ursprung. Mit der schon oben eingeführten Definition der Bernoulli–Zahlen

$$\frac{z}{e^z - 1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{n!} z^n = B_0 + \frac{B_1}{1!} z + \frac{B_2}{2!} z^2 + \dots$$

findet man:

$$\frac{1}{e^z - 1} = \frac{B_0}{z} + \frac{B_1}{1!} + \frac{B_2}{2!} z + \dots,$$

sodass mit den Euler’schen Ideen  $\int$  als  $z^{-1}$  und  $z^n$  als  $\frac{d^n}{dx^n}$  zu sehen aus (44) nachstehende Formel entspringt:

$$f(x) = B_0 \int g(x) dx + \frac{B_1}{1!} g'(x) + \frac{B_2}{2!} g''(x) + \dots,$$

was gerade die Summenformel in einer von Euler bevorzugten Form ist. Er selbst scheint sie allerdings nicht auf diesem Wege in irgendeiner seiner Arbeiten hergeleitet zu haben.

**Mögliche Ursachen für den Euler’schen Fehlschluss** Abschließend soll die Euler’sche Lösung (28) zu (23) auf die Ursachen des Fehlen des Terms  $-\frac{1}{2}g(x)$  hin besprochen werden. Ein erster Grund für das Übersehen dieses

Terms von Eulers Seite mag folgender sein: In seiner Arbeit [EulerE189] behandelt Euler ausschließlich Beispiele, deren Lösung ihm bereits aus anderer Quelle bekannt ist. Daher wird es zur Überzeugung der Korrektheit seiner Methode beigetragen haben, dass sie in all seinen vorgestellten Beispielen zu den richtigen Ergebnissen führt. So wird etwa die Gleichung

$$f(x + 1) = f(x)$$

natürlich von der allgemeinen periodischen Funktion

$$f(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k e^{2k\pi i x}$$

gelöst. Auch für den Spezialfall

$$f(x + 1) - f(x) = K,$$

für eine beliebige Konstante  $K$  gelangt er vermöge seiner Formel (28) zur korrekten Lösung, da das Fehlen des Terms  $-\frac{1}{2}K$  hier nicht ins Gewicht fällt. Die einzigen Ausnahmen bilden besagte einfache Differenzgleichung (23) und der danach behandelte Spezialfall der Fakultät. Da er den Vergleich mit der Euler–Maclaurin’schen Summenformel nicht unternimmt, ist das Fehlen des Terms nicht zu bemerken, zumal Euler von der Richtigkeit seiner Methode zweifelsohne sehr überzeugt sein musste. Anders lässt sich es wohl auch nicht erklären, dass er am Beispiel der Stirling’schen Formel mit einem falschen Ergebnis konfrontiert – er hatte unter Anderem in seinen *Calculi Differentialis* [EulerE212] (§§ 157–158) einen Beweis der korrekten Formel gegeben – versucht, selbiges mit einer angeblichen Richtigkeit für unendlich große  $x$  zu erhärten versucht. Er scheint diesen Fehler in seiner Argumentation in keiner seiner späteren Arbeiten korrigiert zu haben.

Obgleich der Fehler ein kleiner ist, hätte er, so sollte plausibel geworden sein, Euler auffallen können. Selbstredend ist Euler von jedwedem Vorwurf frei zu sprechen, trotz Kenntnis aller seiner Bestandteile nicht den obigen Gedankengang angegeben zu haben<sup>109</sup>. Gleichermaßen kann Euler die Unkenntnis der Partialbruchzerlegung (41) nicht zur Last gelegt werden, welche ebenfalls Methoden aus der komplexen Analysis verlangt, um a priori zweifelsfrei bestätigt zu werden, obschon sie sich aus derjenigen für den cot auch

---

<sup>109</sup>Zumal dieser erst ruhigen Gewissens mit Kenntnis der Euler noch fremden Fourier-Analyse akzeptiert werden kann, welche die algebraische Handhabung der Differentialoperatoren überhaupt erst rechtfertigt.

herleiten ließe<sup>110</sup>. Zwar hat Euler auch die Partialbruchzerlegung von weiteren transzendenten Funktionen in seiner Arbeit “*De resolutione fractionum transcendentium in infinitas fractiones simplices*” ([EulerE592], 1785, ges. 1775) (E592: “Über die Auflösung von transzendenten Brüchen in unendlich viele einfache Brüche”) zum Gegenstand gemacht und dort viele Beispiele mit der dortigen Methode mit glücklichem Erfolg behandelt, jedoch versagt selbige just beim für die Differenzgleichung benötigten Beispiel  $\frac{1}{e^x-1}$ . Interessanterweise lässt sich aber die entsprechende Partialbruchzerlegung aus dem unendlichen Produkt (29) ableiten und Euler selbst hat in seiner Arbeit [EulerE189] (§ 21) eine Darstellung gefunden, die dieser gleichwertig ist. Er definiert nämlich zunächst

$$V := \frac{e^{2v} - 1}{2v},$$

sodass

$$\frac{dV}{Vdv} = \frac{2e^v}{e^v - e^{-v}} - \frac{1}{v},$$

aber, wie Euler schreibt, gilt ebenfalls

$$\frac{dV}{Vdv} = \frac{\frac{1}{m} + \frac{2v}{1\pi\pi}}{1 + \frac{v}{m} + \frac{vv}{1\pi\pi}} + \frac{\frac{1}{m} + \frac{2v}{4\pi\pi}}{1 + \frac{v}{m} + \frac{vv}{4\pi\pi}} + \frac{\frac{1}{m} + \frac{2v}{9\pi\pi}}{1 + \frac{v}{m} + \frac{vv}{9\pi\pi}} + \dots,$$

wobei  $m$  eine unendlich große Zahl ist. Modern ließe sich diese Formel wie folgt schreiben:

$$\frac{dV}{Vdv} = \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^m \frac{\frac{1}{m} + \frac{2v}{(n\pi)^2}}{1 + \frac{v}{m} + \frac{v^2}{(n\pi)^2}}.$$

---

<sup>110</sup>Man hat zunächst

$$\cot x = \frac{\cos x}{\sin x} = i \cdot \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{e^{ix} - e^{-ix}} = i \cdot \frac{e^{2ix} + 1}{e^{2ix} - 1}.$$

Mit  $y = 2ix$  gilt jedoch auch

$$\frac{1}{2} \left( \frac{e^y + 1}{e^y - 1} - 1 \right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{e^y + 1 - e^y + 1}{e^y - 1} = \frac{1}{e^y - 1},$$

sodass sich mit der Partialbruchzerlegung für  $\cot(x)$  aus (16) diese Formel ergibt

$$\frac{1}{e^y - 1} = \frac{1}{y} - \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2y}{y^2 + 4n^2\pi^2}.$$

Euler hätte jedoch bereits aus dem unendlichen Produkt (29) das Fehlen des Terms  $-\frac{1}{2}g(x)$  in seiner Lösung (28) auffallen können.

## 5 Von Euler vorweggenommene Entdeckungen

All mathematicians alive are his disciples: there is no one who is not guided and sustained by the genius of Euler.

---

Marquis de Condorcet

Dieser Abschnitt handelt von Schätzen, Funden, Lehrsätzen und dergleichen, die trotz Euler'scher Erstentdeckerschaft den Namen seiner Nachfolger tragen<sup>111</sup>. Diese Entdeckungen umfassen schlicht übersehene (Abschnitt 5.1) zum einen, in äquivalenter Gestalt bewiesene und dadurch missachtete (Abschnitt 5.2) zum anderen. Wohingegen der erstere durch direkte Angabe der Entdeckungen eine schnelle Behandlung erlauben, ist bei zweiteren der jeweilige Kontext mit einzubeziehen, um das Übergehen von Eulers Beiträgen zu erklären. Es wird sich zeigen, dass Euler, freilich in anderer Form, die Multiplikationsformel für die  $\Gamma$ -Funktion (Abschnitt 5.2.1) sowie einige Eigenschaften der Legendre-Polynome (Abschnitt 5.2.4) zutage gefördert hat. Andere Fragestellungen als die modernen Entsprechungen haben ihn sogar das Weierstraß-Produkt vorweg nehmen (Abschnitt 5.2.2) lassen und zur Mellin-Transformierten geführt (Abschnitt 5.2.3). Abschließend zeigt das Beispiel der hypergeometrischen Reihe (Abschnitt 5.2.5), dass die Unkenntnis der Euler'schen Beiträge zu einem Gegenstand deren Verstreuung auf verschiedene zeitlich und inhaltlich weit auseinander liegenden Abhandlungen zur Ursache haben kann.

---

<sup>111</sup>Dieses Phänomen, dass eine Entdeckung nicht immer nach ihrem Erstentdecker benannt wird, tritt neben der Mathematik auch in anderen Wissenschaften auf und wird in dem Artikel "*Stigler's law of eponymy*" von S. Stigler (1941-) aus dem Buch "*Science and social structure: A festschrift for Robert K. Merton*" ([Gieryn], 1980) in humoristischer Weise diskutiert und seitdem, nach dem Artikel, als *Stigler's law of eponymy* bezeichnet.

## 5.1 Von seinen Nachfolgern übersehene Entdeckungen

There are three stages in scientific discovery. First, people deny that it is true, then they deny that it is important; finally they credit the wrong person.

---

Bill Bryson

Bei der immensen Anzahl an Euler'schen Publikationen ist es Eulers Nachfolgern leicht nachzusehen, nicht jede Entdeckung ihres Vorgängers zu kennen. Gleichermäßen ist der Vorwegnahme einiger Ergebnisse durch Euler in exakt der Form, wie sie später von anderen unabhängig gefunden worden sind, so weniger verwunderlich, wovon zwei kleinere Beispiele hier erwähnt werden sollen: Das der Fourier-Koeffizienten (Abschnitt 5.1.1) und das der Produktformel der  $\Gamma$ -Funktion (Abschnitt 5.1.2), die für gewöhnlich Gauß zugeschrieben wird.

### 5.1.1 Die Fourierkoeffizienten

No scientific discovery is named after its original discoverer.

---

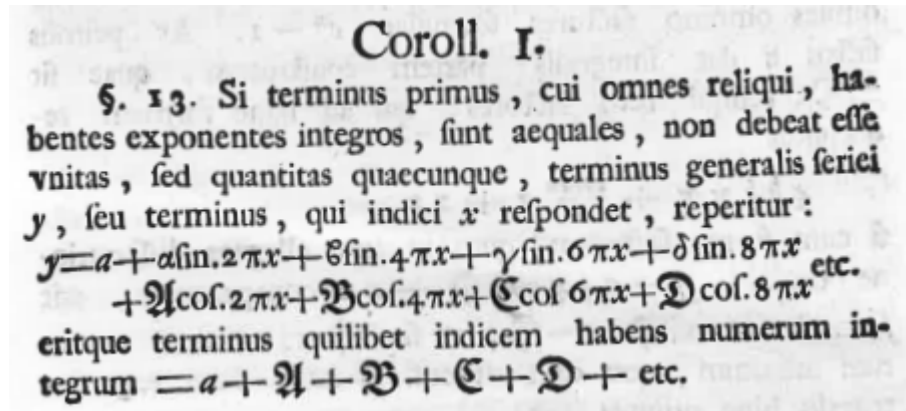
Stephen Stigler

Obschon die Fourier-Analyse von Euler kaum berührt und das Prinzipat ihrer Ausarbeitung J. Fourier (1768–1830) bzw. seinem Werk "*Théorie analytique de la chaleur*" ([Fourier], 1822) ("Analytische Theorie der Wärme") gebührt, findet sich eine zentrale Entdeckung bereits in den Euler'schen Werken vergraben: Die Fourierkoeffizienten. Zusätzlich soll angeschnitten werden, wie nahe Euler der Darstellung einer beliebigen Funktion durch trigonometrische Reihen kommt.

**Euler und Fourierreihen** In Problem 1 (§ 12–13) seiner Arbeit [EulerE189] gelangt Euler zur Aussage, dass eine periodische Funktion sich in eine Reihe von  $\sin$  und  $\cos$  zerlegen lässt. Eulers Gedankengang ist dabei folgender:

Er unternimmt in [EulerE189] die Auflösung der Gleichung

$$y(x + 1) = y(x),$$



**Abbildung 14:** Eulers Ausdruck der Lösung der Gleichung  $y(x + 1) = y(x)$  aus § 13 seiner Arbeit [EulerE189], welcher die allgemeine Fourierreihe einer periodischen Funktion darstellt.

zu welchem Zweck er gemäß seiner oben (Abschnitt 4.2.1) vorgestellten Methode zur Auflösung von Differentialgleichungen unendlicher Ordnung jedem der unendlich vielen Werte von  $\log(1)$  eine entsprechende Lösung zuordnet. Sein Vorgehen oder alternativ seine Formel (28) führen zu

$$y(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k e^{2k\pi i x},$$

was gerade die Entwicklung einer periodischen Funktion in eine Fourierreihe ist. Euler bevorzugt in [EulerE189] lediglich die Darstellung mit sin- und cos.

In dieser Arbeit geht Euler nicht weiter auf diesen Punkt ein. Jedoch nimmt er in den späteren Arbeiten “*Methodus facilis inveniendi series per sinus cosinusve angulorum multiplorum procedentes, quarum usus in universa theoria astronomiae est amplissimus*” ([EulerE703], 1798, ges. 1777) (E703: “Eine leichte Methode, nach Sinus und Kosinus vielfacher Winkel fortschreitender Reihen zu summieren, deren Nutzen in der ganzen Astronomie sehr umfassend ist”) und “*Disquisitio ulterior super seriebus secundum multipla cuiusdam anguli progredientibus*” ([EulerE704], 1798, ges. 1777) (E704: “Weitere Untersuchung über nach Vielfachen eines gewissen Winkels fortschreitende Reihen”) diese Frage nach den Koeffizienten wieder auf und gelangt zur Formel für die Koeffizienten. In der ersten Arbeit nähert er sich

$$\Phi = A + B \operatorname{cof.} \Phi + C \operatorname{cof.} 2 \Phi + D \operatorname{cof.} 3 \Phi \\ + E \operatorname{cof.} 4 \Phi + \text{etc.}$$

tum fingulae quantitates A, B, C, D, E, etc. per sequentes formulas integrales determinantur, siquidem in fingulis integratio a termino  $\Phi = 0$ , usque ad terminum  $\Phi = \pi$  extendatur, denotante  $\pi$  semiperipheriam circuli cuius radius = 1.

$$\begin{aligned} 1. A &= \frac{1}{\pi} \int \Phi \partial \Phi. \\ 2. B &= \frac{2}{\pi} \int \Phi \partial \Phi \operatorname{cof.} \Phi. \\ 3. C &= \frac{2}{\pi} \int \Phi \partial \Phi \operatorname{cof.} 2 \Phi. \\ 4. D &= \frac{2}{\pi} \int \Phi \partial \Phi \operatorname{cof.} 3 \Phi. \\ 5. E &= \frac{2}{\pi} \int \Phi \partial \Phi \operatorname{cof.} 4 \Phi. \\ &\text{etc.} \qquad \qquad \text{etc.} \end{aligned}$$

ubi notetur primum coefficientem esse  $\frac{1}{\pi}$  dum sequentes omnes sunt  $\frac{2}{\pi}$ .

**Abbildung 15:** Euler gelangt in seiner Abhandlung [EulerE704] zur heute immer noch gängigen Form der Fourierkoeffizienten.

dem Ausdruck an<sup>112</sup>, wohingegen man in § 4 der zweiten die moderne, oft Fourier zugeschriebene, Formel für die Fourierkoeffizienten entdeckt. In moderner Formulierung lautet sie:

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx \quad \text{und} \quad a_n = \frac{2}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx) f(x) dx \quad \text{für } n \geq 1.$$

Unabhängig von seinen Untersuchungen zu Differenzengleichungen findet er aus physikalischen Prinzipien heraus in der Abhandlung “*De vibratione chordarum exercitatio*” ([EulerE119], 1749, ges. 1748) (E119: “Über die Vibration einer zum Schwingen angeregten Saite”) zur schwingenden Saite erneut eine Fourierreihenentwicklung, widmet sich dort aber nicht der Bestimmung der Koeffizienten, sodass Euler über diesen ersten Berührungspunkt mit der Fourier’schen Analysis nicht hinausgeht.

<sup>112</sup>Die Darstellungen und Ausführungen Eulers bezüglich der Entwicklungskoeffizienten lassen sich als Riemann’sche Summe für ein Integral deuten, womit er aus moderner Sicht betrachtet, dem Ziel der Integraldarstellung für die Fourier-Koeffizienten schon sehr nahe kommt.

### 5.1.2 Produktdarstellung für die Gamma-Funktion

What is easiest to see is often overlooked.

---

Milton Hyland Erickson

Ein mittlerweile wohlbekanntes Beispiel für eine Euler'sche Erstentdeckung trotz Benennung nach einem seiner Nachfolger mag die Gauß'sche Produktformel für die Fakultät sein:

$$\Gamma(x+1) = \prod_{k=1}^{\infty} \frac{k^{1-x} \cdot (k+1)^x}{k+x}, \quad (45)$$

welche sich bei Euler bereits in § 1 seiner Arbeit [EulerE19] findet. Gauß, welcher sie – wohl unabhängig von Euler – gefunden hat, gibt sie in seiner Arbeit *“Disquisitiones generales circa Seriem infinitam  $1 + \frac{\alpha\beta}{1\cdot\gamma}x + \frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{1\cdot2\cdot\gamma(\gamma+1)}xx + \frac{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\beta(\beta+1)(\beta+2)}{1\cdot2\cdot3\cdot\gamma(\gamma+1)(\gamma+2)}x^3 + \text{etc. pars prior}$ ”* ([Gauß3], 1813, ges. 1812) (*“Allgemeine Untersuchungen über die unendliche Reihe  $1 + \frac{\alpha\beta}{1\cdot\gamma}x + \frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{1\cdot2\cdot\gamma(\gamma+1)}xx + \frac{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\beta(\beta+1)(\beta+2)}{1\cdot2\cdot3\cdot\gamma(\gamma+1)(\gamma+2)}x^3 + \text{etc.}$  – erster Teil”*) mit einem strengen Beweis an, wohingegen Euler sie lediglich in prosaischer Form plausibel macht<sup>113</sup>. Seine Arbeit beginnt nämlich wie folgt:

*“Nachdem ich neulich bei Gelegenheit dessen, was der hochgeehrte Herr Goldbach mit der Sozietät über Reihen geteilt hat, nach einem allgemeinen Ausdruck gesucht habe, welcher alle Terme dieser Progression gäbe*

$$1 + 1 \cdot 2 + 1 \cdot 2 \cdot 3 + 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 + \text{etc.},$$

*bin ich, bedenkend, dass sie ins Unendliche fortgesetzt schließlich mit der geometrischen zusammenfällt, auf den folgenden Ausdruck gestoßen*

$$\frac{1 \cdot 2^n}{1+n} \cdot \frac{2^{1-n} \cdot 3^n}{2+n} \cdot \frac{3^{1-n} \cdot 4^n}{3+n} \cdot \frac{4^{1-n} \cdot 5^n}{4+n} \cdot \text{etc.}$$

*welcher den Term der Ordnung  $n$  von besagter Progression darstellt.”*

---

<sup>113</sup>Die Formel (45) wird auch von Weierstraß in seiner Arbeit *“Über die Theorie der analytischen Facultäten”* ([Weierstraß1]) studiert. Während Weierstraß Gauß Werk [Gauß3] noch erwähnt, lässt er Euler dieses Privileg nicht zukommen.

inquirerem, quae huius Progressionis  $1 + 1, 2 + 1, 2 \cdot 3 + 1, 2 \cdot 3 \cdot 4 +$  etc. terminos omnes daret, incipendi considerans, quod ea in infinitum continuata tandem cum geometrica confundatur in sequentem expressionem,  $\frac{1 \cdot 2^n \cdot 2^{2-n} \cdot 3^n \cdot 3^{1-n} \cdot 4^n \cdot 4^{1-n} \cdot 5^n}{1 + n, 2 + n, 3 + n, 4 + n}$  etc. quae dictae progressionis terminum ordinae  $n$

Abbildung 16: Euler gibt in seiner Arbeit [EulerE19] die Produktdarstellung der  $\Gamma$ -Funktion bzw. der Fakultät.

Diese Erläuterung findet man erst in der Arbeit “*De termino generali serierum hypergeometricarum*” ([EulerE652], 1793, ges. 1777) (E652: “Über den allgemeinen Term von hypergeometrischen Reihen”) in einen mathematischen Beweis überführt.

Weniger bekannt mag die Feststellung sein, dass sich die oft Weierstraß zugeschriebene Formel

$$\Gamma(z) = \frac{e^{-\gamma z}}{z} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right)^{-1} e^{\frac{z}{n}} \quad (46)$$

bereits ohne große Mühen aus den in dem Artikel [EulerE613] angestellten Euler’schen Überlegungen ergibt; explizit findet man einen entsprechenden Ausdruck überdies in seinen *Calculi Differentialis* [EulerE212]. In Abschnitt (5.2.2) wird dies noch einmal zur Sprache kommen.

Solche Prioritätsfragen sollen in der gegenwärtigen Arbeit jedoch lediglich eine Randnotiz bleiben, zumal sie vergleichsweise leicht aufzuklären sind.

## 5.2 Von Euler in anderer Gestalt Bewiesenes

What does it matter that we  
take different roads so long as  
we reach the same goal?

---

Mahatma Gandhi

Nun werden Entdeckungen diskutiert werden, welche Euler gemacht hat, die jedoch in anderer, teils unerwarteter Gestalt in seinen Werken zum Vor-

schein treten. Das Maß des Nicht-Erwartens korreliert dabei positiv mit den beizufügenden Hintergrundinformationen. Es wird mit der Multiplikationsformel für die  $\Gamma$ -Funktion begonnen werden (Abschnitt 5.2.1), gefolgt vom Weierstraß'schen Produktsatz für Funktionen mit vorgegebenen Nullstellen (Abschnitt 5.2.2) und der Mellin-Transformation (Abschnitt 5.2.3). Während diese Gegenstände sich noch an einzelnen Euler'schen Ausarbeitungen erklären lassen, sind für die Diskussion von Eulers Beiträgen zu den Legendre'schen Polynomen (Abschnitt 5.2.4) und die hypergeometrische Funktion (Abschnitt 5.2.5) mehrere seiner Abhandlung in die Betrachtung mit einzubeziehen.

### 5.2.1 Die Form betreffend: Die Multiplikationsformel für die Gammafunktion

Always there will be someone  
who can tell it [the story]  
differently depending on where  
they are standing [...] this is the  
way I think the world's stories  
should be told: from many  
different perspectives.

---

Chinua Achebe

Die Stelle des ersten Beispiels nimmt die Multiplikationsformel für die  $\Gamma$ -Funktion ein, welche sich ebenfalls in Eulers Werk findet, jedoch erst erkannt werden kann, wenn der aus der Euler'schen Symbolik gebildete Schleier gelüftet wird. In moderner Sprache ausgedrückt ist die folgende Formel Fokus des Interesses:

$$\Gamma\left(\frac{x}{n}\right) \Gamma\left(\frac{x+1}{n}\right) \cdots \Gamma\left(\frac{x+n-1}{n}\right) = \frac{(2\pi)^{\frac{n-1}{2}}}{n^{x-\frac{1}{2}}} \cdot \Gamma(x). \quad (47)$$

Sie wurde in dieser Form von Gauß in seiner Abhandlung [Gauß3] in der obigen Form bewiesen<sup>114</sup>.

**Herleitung der Multiplikationsformel aus Eulers Formeln** Die Multiplikationsformel wird aus Eulers Formeln nach dem Vorbild der Arbeit *“Euler and the multiplication formula for the Gamma Function”* ([Aycoc4],

---

<sup>114</sup>Gauß verwendet in seiner Abhandlung das Symbol  $\Pi$ , womit er die Fakultät anzeigt, statt des von Legendre eingeführten und heute gebräuchlichen Symbols  $\Gamma$ .

$$\left[\frac{m}{n}\right] = \frac{m}{n} \sqrt[n^{n-m} \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (m-1) \left(\frac{1}{m}\right) \left(\frac{2}{m}\right) \left(\frac{3}{m}\right) \dots \left(\frac{n-1}{m}\right)].$$

**Abbildung 17:** Eulers Version der Multiplikationsformel für die  $\Gamma$ -Funktion aus seiner Arbeit [EulerE421] mit von ihm eigens eingeführten Symbolen.

2021) abgeleitet; sie findet sich in seinem Papier “*Evolutio formulae integralis  $\int x^{f-1} dx \log \frac{m}{n}(x)$  integratione a valore  $x = 0$  ad  $x = 1$  extensa*” ([EulerE421], 1772, ges. 1771) (E421: “Entwicklung der Integralformel  $\int x^{f-1} dx \log \frac{m}{n}(x)$ , wobei die Integration vom Wert  $x = 0$  bis hin zu  $x = 1$  erstreckt worden ist.”) in der Form

$$\left[\frac{m}{n}\right] = \frac{m}{n} \sqrt[n^{n-m} \cdot 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot (m-1) \left(\frac{1}{m}\right) \left(\frac{2}{m}\right) \dots \left(\frac{n-1}{m}\right)]. \quad (48)$$

In dieser Darstellung ist die Äquivalenz zu (47) nicht unmittelbar evident.

Eine Erklärung der von Euler gebrauchten Formelzeichen ist vorauszuschicken. Zunächst definiert Euler in § 44 den Ausdruck

$$\left(\frac{p}{q}\right) := \int_0^1 \frac{x^{p-1} dx}{(1-x^n)^{\frac{n-q}{n}}}.$$

Dabei sollen  $p, q, n$  natürliche Zahlen sein. Man beachte, dass der Buchstabe  $n$  im Euler’schen Symbol nicht auftritt<sup>115</sup>, für welchen man heute den folgenden Ausdruck bevorzugt

$$\left(\frac{p}{q}\right) = \frac{1}{n} \int_0^1 y^{\frac{p}{n}-1} dy (1-y)^{\frac{q}{n}-1} = \frac{1}{n} \cdot B\left(\frac{p}{n}, \frac{q}{n}\right), \quad (49)$$

wobei

$$B(x, y) = \int_0^1 t^{x-1} dt (1-t)^{y-1} \quad \text{für } \operatorname{Re}(x), \operatorname{Re}(y) > 0$$

<sup>115</sup>Euler untersucht die durch das Symbol  $\left(\frac{p}{q}\right)$  definierten Funktionen ausgiebig in der Abhandlung “*Observationes circa integralia formularum  $\int x^{p-1} dx (1-x^n)^{\frac{q}{n}-1}$  posito post integrationem  $x = 1$* ” ([EulerE321], 1766, ges. 1765) (E321: “Beobachtungen zu den Integralformeln  $\int x^{p-1} dx (1-x^n)^{\frac{q}{n}-1}$ , wenn nach der Integration  $x = 1$  gesetzt wird”).

die Beta-Funktion bzw. das Beta-Integral bedeutet. Mit dem Symbol  $[\lambda]$  meint Euler  $\lambda!$ , sodass  $[\lambda] = \Gamma(\lambda + 1)$ . Daher findet man bei Euler auch die Spiegelungsformel in der Gestalt

$$[\lambda] \cdot [-\lambda] = \frac{\pi\lambda}{\sin \pi\lambda}.$$

Die Formel findet sich in § 43 von [EulerE421] und wird heute als

$$\Gamma(x)\Gamma(1-x) = \frac{\pi}{\sin(\pi x)}$$

geschrieben. Unter Verwendung dieser Formel für  $x = \frac{i}{n}$ , für  $i = 1, 2, 3 \dots, n$ , findet man

$$\begin{aligned} \Gamma\left(\frac{1}{n}\right) \Gamma\left(\frac{n-1}{n}\right) &= \frac{\pi}{\sin \frac{\pi}{n}}, \\ \Gamma\left(\frac{2}{n}\right) \Gamma\left(\frac{n-2}{n}\right) &= \frac{\pi}{\sin \frac{2\pi}{n}}, \\ \Gamma\left(\frac{3}{n}\right) \Gamma\left(\frac{n-3}{n}\right) &= \frac{\pi}{\sin \frac{3\pi}{n}}, \\ &\dots = \dots \\ \Gamma\left(\frac{n-1}{n}\right) \Gamma\left(\frac{1}{n}\right) &= \frac{\pi}{\sin \frac{(n-1)\pi}{n}}. \end{aligned}$$

Das Produkt all dieser gibt demnach

$$\prod_{i=1}^{n-1} \Gamma\left(\frac{i}{n}\right)^2 = \frac{\pi^{n-1}}{\prod_{i=1}^{n-1} \sin\left(\frac{i\pi}{n}\right)}. \quad (50)$$

Vermöge der Formel

$$\prod_{i=1}^{n-1} \sin\left(\frac{i\pi}{n}\right) = \frac{n}{2^{n-1}},$$

welche sich zum Beispiel aus der allgemeineren aus § 240 der *Introductio* [EulerE101]

$$\begin{aligned} \sin n\varphi &= 2^{n-1} \sin \varphi \sin\left(\frac{\pi}{n} - \varphi\right) \sin\left(\frac{\pi}{n} + \varphi\right) \\ &\quad \sin\left(\frac{2\pi}{n} - \varphi\right) \sin\left(\frac{2\pi}{n} + \varphi\right) \cdot \text{etc.} \end{aligned}$$

ableitet, lässt sich demnach (50) geschlossen auswerten:

$$\Gamma\left(\frac{1}{n}\right)\Gamma\left(\frac{2}{n}\right)\cdots\Gamma\left(\frac{n-1}{n}\right) = \sqrt{\frac{(2\pi)^{n-1}}{n}}. \quad (51)$$

Um nun (47) aus (48) abzuleiten, bringe man letztere schrittweise in die Form der ersten. Erreicht wird dies durch Ersetzen der Formeln  $\left(\frac{p}{q}\right)$  mit (49) in Eulers Version, Schreiben von  $\Gamma(m)$  statt  $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (m-1)$  und entsprechend  $\Gamma\left(\frac{m}{n} + 1\right)$  statt  $\left[\frac{m}{n}\right]$ . Der Übersichtlichkeit wegen ersetze man noch  $m$  durch  $x$ , sodass gilt

$$\Gamma\left(\frac{x}{n}\right) = \sqrt[n]{n^{n-x}\Gamma(x)\frac{1}{n^{n-1}}B\left(\frac{1}{n}, \frac{x}{n}\right)B\left(\frac{2}{n}, \frac{x}{n}\right)\cdots B\left(\frac{n-1}{n}, \frac{x}{n}\right)}.$$

Mit der bekannten Formel

$$B(x, y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)} \quad (52)$$

lassen sich die Beta-Integrale ersetzen, sodass

$$\Gamma\left(\frac{x}{n}\right) = \sqrt[n]{n^{1-x}\Gamma(x)\frac{\Gamma\left(\frac{1}{n}\right)\Gamma\left(\frac{x}{n}\right)}{\Gamma\left(\frac{x+1}{n}\right)} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{2}{n}\right)\Gamma\left(\frac{x}{n}\right)}{\Gamma\left(\frac{x+2}{n}\right)} \cdots \frac{\Gamma\left(\frac{n-1}{n}\right)\Gamma\left(\frac{x}{n}\right)}{\Gamma\left(\frac{x+n-1}{n}\right)}}.$$

Hinüberschaffen aller  $\Gamma$ -Funktionen mit gebrochenem Argument auf die linke Seite gibt

$$\Gamma\left(\frac{x}{n}\right)\Gamma\left(\frac{x+1}{n}\right)\Gamma\left(\frac{x+2}{n}\right)\cdots\Gamma\left(\frac{x+n-1}{n}\right) = n^{1-x}\Gamma(x)\Gamma\left(\frac{1}{n}\right)\cdots\Gamma\left(\frac{n-1}{n}\right).$$

Mit (51) kontrahiert dies zu

$$\Gamma\left(\frac{x}{n}\right)\Gamma\left(\frac{x+1}{n}\right)\Gamma\left(\frac{x+2}{n}\right)\cdots\Gamma\left(\frac{x+n-1}{n}\right) = n^{1-x}\Gamma(x)\sqrt{\frac{(2\pi)^{n-1}}{n}},$$

was gerade die Gauß'sche Multiplikationsformel (47) ist.

**Gründe für die Euler’sche Darstellungsweise** Es bleibt die Frage, was Euler bewogen haben mag, nicht dieselbe Darstellungsweise wie Gauß gewählt zu haben. Für eine Beantwortung dieser ist es ratsam, die leichter zu beantwortende Frage nach Gauß’ Gründen für eine Darstellung wie (47) zu bevorzugen, voranzustellen. In seiner Abhandlung [Gauß3] widmet er einen eigenen Abschnitt der verallgemeinerten Fakultät und findet verschiedene Ausdrücke zur Interpolation<sup>116</sup>. Dementsprechend war er auf der Suche nach Eigenschaften der  $\Gamma$ -Funktion und (48) ist eine Funktionalgleichung, welcher sie genügt. Die Euler’sche Version (48) hingegen verschleiert dies, sodass Gauß wohl allein schon dieses Grundes wegen die heute nach ihm benannte Darstellung bevorzugt hätte.

Euler hingegen intendiert, kompliziertere Funktionen durch einfachere auszudrücken, wobei “kompliziert” in diesem Zusammenhang als Maß der Transzendenz verstanden werden kann<sup>117</sup>. Gleichermaßen verhält es sich in [EulerE421]. Man beachte nämlich, dass in (48) das Symbol linker Hand durch das Integral im Titel ausgedrückt wird:

$$\left[\frac{m}{n}\right] = \int_0^1 \left(\log\left(\frac{1}{x}\right)\right)^{\frac{m}{n}} dx,$$

welches ein Integral über eine *transzendente* Funktion ist. Alle Ausdrücke auf der rechten Seite von (48) sind hingegen *algebraische* Funktionen, sind also insbesondere durch Quadraturen leichter zugänglich<sup>118</sup>. Diesbezüglich schreibt insbesondere Euler in § 1 seiner Arbeit “*De constructione aequationum*” ([EulerE70], 1744, ges. 1737) (“Über die Konstruktion von Gleichungen”) zu einem vergleichbaren Gegenstand:

*“Sooft in der Auflösung von Problemen zu Differentialgleichungen gelangt wird, ist vor allem zu untersuchen, ob diese Gleichungen eine Integration zulassen; denn ein Problem ist als vollständigst gelöst anzusehen, welches auf die Konstruktion einer algebraischen Gleichung reduziert worden ist. Aber wenn die Gleichung, was auch sehr oft geschieht, in keiner*

<sup>116</sup>Euler hat über verschiedene Werke hinweg all diese Formeln ebenfalls, jedoch teilweise in völlig anderen Zusammenhängen, gefunden. Man vergleiche etwa [Aycocck4].

<sup>117</sup>So sind die algebraischen Funktionen  $x^n$  und  $\sqrt[n]{x}$  weniger kompliziert als die elementaren Transzendenten  $e^x$ ,  $\sin x$  und  $\log x$ ,  $\arcsin(x)$ , welche wiederum weniger kompliziert sind als elliptische Integrale usw.

<sup>118</sup>Es handelt sich gar um Perioden im Sinn der Arbeit “*Periods*” ([Kontsevich], 2001) von Kontsevich (1964–) und Zagier (1951–).

*Weise in eine algebraische Form überführt werden kann, dann müssen entweder Quadraturen oder Rektifikationen von Kurven, deren Konstruktion man gewahr ist, herangezogen werden.*”

Demnach hätte Euler vermutlich (47) nicht seiner Version vorgezogen. Dass er die Gauß’sche Version zumindest hätte ableiten können, ist aus der vorgestellten Rechnung ersichtlich, zumal der Beweis keine Formeln und Konzepte nutzt, die Euler unbekannt waren.

### 5.2.2 Eine andere Intention: Euler und das Weierstraß’sche Produkt

One can measure the importance of a scientific work by the number of earlier publications rendered superfluous by it.

---

David Hilbert

Der Weierstraß’sche Produktsatz lehrt, ob eine Funktion mit vorgegebenen Nullstellen existiert und gibt im zweiten Schritt – gegebenenfalls unter Hinzunahme konvergenzerzeugenden Faktoren – eine Möglichkeit zu ihrer Konstruktion an. Euler gelangt, wie auch im Vorwort zu Band 16,2 von Serie 1 der *Opera Omnia* ([Faber1], 1935) erwähnt wird, ebenfalls zu einem Ausdruck, welcher als Weierstraß–Produkt aufgefasst werden kann. Man findet seine Ideen hierzu in Kapitel 17 des zweiten Teils seiner *Calculi Differentialis* [EulerE212] und in ausführlicherer Darstellung in [EulerE613]. Der Euler’sche Weg ist jedoch vom Weierstraß’schen verschieden.

**Eulers Ansatz am Beispiel der harmonischen Reihe** Euler intendiert die Interpolation der Summe

$$F(x) := \sum_{k=1}^x f(k), \tag{53}$$

zu welchem Zweck er folgende trivial anmutende Identität anmerkt<sup>119</sup>:

---

<sup>119</sup>Dieses geschickte Addieren von 0 wurde auch von Ramanujan (1887–1920) mit Vorliebe benutzt, siehe etwa das Buch [Berndt].

$$F(x) = f(1) + f(2) + \cdots + f(x) + f(x+1) + \cdots \\ - f(x+1) - f(x+2) - \cdots$$

Nach Euler'scher Maxime<sup>120</sup> soll das Gesagte an einem Beispiel demonstriert werden: In § 17 wählt Euler  $f(x) = \frac{1}{x}$ <sup>121</sup>:

$$F(x) = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{x} + \frac{1}{x+1} + \cdots \\ - \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2} - \frac{1}{x+3} - \cdots$$

Spaltenweises Zusammenfassen der Terme liefert:

$$F(x) = \frac{x}{x+1} + \frac{x}{2(x+2)} + \frac{x}{3(x+3)} + \text{etc.}$$

Hieraus leitet Euler dann nach einiger Rechnung durch Integration die Potenzreihe für  $\int F(x)dx$  her und gelangt zur Reihenentwicklung (§ 23):

$$\int F(x)dx = \frac{\zeta(2)}{2}x^2 - \frac{\zeta(3)}{3}x^3 + \frac{\zeta(4)}{4}x^4 - \text{etc.},$$

wobei

$$\zeta(s) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$$

bedeutet. Eulers Wahl  $f(x) = \frac{1}{x}$  interpoliert die harmonische Reihe, sodass die Euler'sche Summation der Funktion

$$\psi(x) := \frac{d}{dx} \log(\Gamma(x))$$

sehr nahe kommt<sup>122</sup>

---

<sup>120</sup>Euler verwendet an vielerlei Stellen eine Version des Ausspruchs: "Man lehrt am besten anhand von Beispielen."

<sup>121</sup>Dieses Beispiel findet sich auch in Sandifers Artikel "Inexplicable functions" ([Sandifer19], 2007) in anderem Kontext besprochen.

<sup>122</sup>In [EulerE613] drückt Euler mit der letzten Formel nicht ganz diese Funktion aus, da er schlicht termweise integriert und die Integrationskonstanten ignoriert. Indes gelangt er in § 384 von Teil 2 seiner *Calculi Differentialis* [EulerE212] auf gleichem Wege zur Potenzreihenentwicklung von  $\psi$ .

vnde binarum illarum serierum in infinitum continuatarum valor erit  $= \Gamma(\infty + 1) - \text{Const.} - \Gamma(\infty) = -\text{Const.}$

Ex quo erit:

$\Gamma S = -x. 0, 5772156649015325$

$$+ \frac{1}{2}xx \left( 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \&c. \right)$$

$$- \frac{1}{3}x^3 \left( 1 + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{4^3} + \frac{1}{5^3} + \&c. \right)$$

$$+ \frac{1}{4}x^4 \left( 1 + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{4^4} + \frac{1}{5^4} + \&c. \right)$$

&c.

vnde differentialia cuiusque ordinis facile reperiuntur.

**Abbildung 18:** Euler gelangt in [EulerE212] zur Potenzreihe der  $\psi$ -Funktion. Die Euler-Mascheroni-Konstante  $\gamma$  ist hierbei für die ersten Stellen ausgeschrieben.

Er findet, modern ausgedrückt:

$$\psi(x+1) = -\gamma x + \frac{\zeta(2)}{2}x^2 - \frac{\zeta(3)}{3}x^3 + \frac{\zeta(4)}{4}x^4 - \text{etc.}$$

mit der Euler-Mascheroni-Konstante<sup>123</sup>

$$\gamma := \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \log(n) \right).$$

Nach der Definition von  $\psi(x)$  gelangt man durch Integration erneut zum “Weierstraß’schen” Produkt (46). Diese Euler’sche Vorgehensweise nimmt gleichsam die Idee der konvergenzerzeugenden Faktoren vorweg, zumal das geschickte Addieren von 0 gestattet, zwei eigentlich divergente Reihen voneinander in solcher Weise zu subtrahieren, dass sie eine konvergente Reihe ergeben.

**Behandlung von Produkten am Beispiel der Fakultät** Seine Ideen will Euler auch auf kompliziertere Reihen übertragen. Er bemerkt, dass

<sup>123</sup>Euler führt diese Konstante zum ersten Male in § 11 seiner Arbeit “*De progressionibus harmonicis observationes*” ([EulerE43], 1740, ges. 1734) (E43: “Bemerkungen zu harmonischen Progressionen”) ein.

## Species secunda,

ubi factores infinitesimi inter se fiunt aequales.

§. 5. Tum enim eorum logarithmi etiam inter se erunt aequales, ideoque differentiae primae omnes evanescent. Huc igitur accommodemus formulam supra §. 25: inventam, eritque:

$$\text{III: } x = x \text{ l}A \left\{ \begin{array}{l} + \text{ l}A + \text{ l}B + \text{ l}C \\ + \quad x \text{ l}B + \quad x \text{ l}C + \quad x \text{ l}D \\ - \quad \text{ l}X' - \quad \text{ l}X'' - \quad \text{ l}X''' \end{array} \right\} \text{ etc.}$$

unde ad numeros ascendendo habebimus:

$$\text{II: } x = A^x \cdot \frac{A^{1-x} \cdot B^{x^2}}{X'} \cdot \frac{B^{1-x} \cdot C^{x^2}}{X''} \cdot \frac{C^{1-x} \cdot D^{x^2}}{X'''} \cdot \text{ etc.}$$

**Abbildung 19:** Euler erklärt in seiner Arbeit [EulerE613] die Interpolation von Produktformeln.

je nach Wahl der Funktion  $f(x)$  in (53) dazu gegebenfalls mehr als eine Differenz gebildet werden muss, um die Konvergenz zu erzwingen. Die Behandlung von Produkten dieser Gestalt lässt sich durch Betrachtung der Logarithmen derselben mit denselben Methoden behandeln und bildet daher "lediglich" ein Supplement zu [EulerE613].

Aber auch die Behandlung der Produkte soll an einem Beispiel illustriert werden. Es sei also die  $\Gamma$ -Funktion vorgelegt, als ein unendliches Produkt darzustellen. Wegen der Funktionalgleichung  $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$  gilt auch  $\log \Gamma(x+1) - \log \Gamma(x) = \log x$ , sodass zunächst für natürliches  $x$ :

$$\log \Gamma(x+1) = \sum_{k=1}^x \log(k).$$

Zumal  $\log(k+1) - \log(k) = \log\left(1 + \frac{1}{k}\right)$  für  $k \rightarrow \infty$  zu 0 strebt, gehört diese Reihe zur zweiten Klasse, welche Euler in [EulerE613] definiert<sup>124</sup>. Eulers Methode lehrt, dass die letzte Summe wie folgt geschrieben werden kann:

<sup>124</sup>Die erste Klasse wird dabei von Reihen gebildet, deren Terme mit wachsendem  $k$  bereits selbst gegen 0 streben. Die Reihen der ersten Klasse bedürfen einer Differenzbildung, welche Differenz dann gegen 0 strebt, die der zweiten Klasse hingegen zwei usw.

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^x \log(k) &= (1-x)\log(1) + (1-x)\log(2) + (1-x)\log(3) + \text{etc.} \\ &+ x\log(1) + x\log(2) + x\log(3) + x\log(4) + \text{etc.} \\ &- \log(x+1) - \log(x+2) - \log(x+3) - \text{etc.} \end{aligned}$$

Spaltenweises Summieren liefert:

$$\log(\Gamma(x+1)) = \log(1^{1-x}) + \log\left(\frac{1^{1-x}2^x}{x+1}\right) + \log\left(\frac{2^{1-x}3^x}{x+2}\right) + \log\left(\frac{3^{1-x}4^x}{x+3}\right) + \text{etc.}$$

Nehmen der Exponentialfunktionen gibt die Formel für  $x!$ , welche Euler bereits in der Arbeit [EulerE19] mitgeteilt hat, nämlich:

$$x! = \Gamma(x+1) = 1^{1-x} \cdot \frac{1^{1-x}2^x}{x+1} \cdot \frac{2^{1-x}3^x}{x+2} \cdot \frac{3^{1-x}4^x}{x+3} \cdot \text{etc.} = \prod_{k=1}^{\infty} \frac{k^{1-x}(k+1)^x}{x+k}$$

**Ein Vergleich zum Weierstraß'schen Produktsatz** Ein abschließender Vergleich zum Weierstraß'schen Produktsatz aus seinen Vorlesungen ([Weierstraß2], 1878) und den Euler'schen Unternehmungen in [EulerE613] wird dem Verständnis förderlich sein, wobei neben den Ausführungen in [Aycock3] die Ausführungen von Faber (1877–1966) im Vorwort von Band 16,2 der Serie 1 der *Opera Omnia* das Gesagte treffend zusammenfassen. Faber schreibt auf Seite XLIII:

“Tatsächlich hat Euler nicht nur die Produktdarstellung (12)<sup>125</sup>, sondern sogar den Gedanken der Konvergenz erzeugenden Faktoren von Weierstraß vorweggenommen. Denn es bedeutet keinen Unterschied, ob man den Gliedern des divergenten Produktes  $\prod_{\nu=1}^{\infty} (1 + \frac{x}{\nu})$  die Konvergenz erzeugenden Faktoren  $e^{-\frac{x}{\nu}}$  oder den Gliedern der divergenten unendlichen Reihe  $\sum_{\nu=1}^{\infty} \log(1 + \frac{x}{\nu})$  die Konvergenz erzeugenden Summanden  $-\frac{x}{\nu}$  oder auch  $-x \log(1 + \frac{1}{\nu})$  beifügt. Das tat aber Euler mit voller Absicht in der Abhandlung 613.”

---

<sup>125</sup>Dies ist die Produktdarstellung  $x! = \Gamma(x+1) = 1^{1-x} \cdot \frac{1^{1-x}2^x}{x+1} \cdot \frac{2^{1-x}3^x}{x+2} \cdot \frac{3^{1-x}4^x}{x+3} \cdot \text{etc.} = \prod_{k=1}^{\infty} \frac{k^{1-x}(k+1)^x}{x+k}$ , welche im Beispiel diskutiert wurde.

### 5.2.3 Eine andere Fragestellung: Die Mellin–Transformierte

Over and over again, scientific discoveries have provided answers to problems that had no apparent connection with the phenomena that gave rise to the discovery.

---

Isaac Asimov

In der Arbeit *“Euler and Homogeneous Difference Equations with Linear Coefficients”* ([Aycock9], 2024) wird darauf hingewiesen, dass einige von Eulers Abhandlungen, die ihren Ursprung in der Konstruktion und Evaluation von Kettenbrüchen haben, zu einer Methode führen, zu einer gegebenen Mellin–Transformierten – ein Begriff, welcher erst weit nach Eulers Tod von Mellin (1854–1933) in seiner Arbeit *“Über die fundamentale Wichtigkeit des Satzes von Cauchy für die Theorien der Gamma- und hypergeometrischen Functionen”* ([Mellin], 1896) allgemein eingeführt wurde – ihre Inverse vermöge eines Systems von Differentiagleichungen, anstatt des heute üblichen Weges über Integration in der komplexen Ebene, zu finden. Dies soll hier noch einmal beleuchtet werden.

**Eulers Zugang** In seinen Ausarbeitungen *“De fractionibus continuis observationes”* ([EulerE123], 1750, ges. 1739) (E123: “Bemerkungen zu Kettenbrüchen”) sowie *“Methodus inveniendi formulas integrales, quae certis casibus datam inter se teneant rationem, ubi simul methodus traditur fractiones continuas summandi”* ([EulerE594], 1785, ges. 1775) (E594: “Eine Methode Integralformeln zu finden, welche in gewissen Fällen ein gegebenes Verhältnis zueinander haben, wo zugleich eine Methode angegeben wird, Kettenbrüche zu summieren”) präsentiert Euler eine Methode zur Lösung der Differenzgleichung

$$(a_0x + b_0)f(x) + (a_1x + b_1)f(x + 1) + \cdots + (a_nx + b_n)f(x + n) = 0 \quad (54)$$

mit komplexen Koeffizienten  $a_0, a_1, \dots, a_n$  und  $b_0, b_1, \dots, b_n$ , wobei mindestens einer der Koeffizienten  $a_0, a_1, \dots, a_n$  nicht verschwinden soll.

In seinen Arbeiten ist Euler an Kettenbrüchen interessiert<sup>126</sup>, weshalb

---

<sup>126</sup>Der Euler’sche Beitrag zu Kettenbrüchen wird in der Arbeit *“Euler und die analytische Theorie der Kettenbrüche”* ([Aycock2], 2015) umfassend diskutiert.

§. 51. Si fuerit etiam designante  $n$  numerum negativum  $(a+n\alpha)\int PR^n dx = (b+n\beta)\int PR^{n+1} dx + (c+n\gamma)\int PR^{n+2} dx$ , sequentes habebuntur aequationes.

$$\begin{aligned} (a-\alpha)\int \frac{Pdx}{R} &= (b-\beta)\int Pdx + (c-\gamma)\int PR dx \\ (a-2\alpha)\int \frac{Pdx}{R^2} &= (b-2\beta)\int \frac{Pdx}{R} + (c-2\gamma)\int Pdx \\ (a-3\alpha)\int \frac{Pdx}{R^3} &= (b-3\beta)\int \frac{Pdx}{R^2} + (c-3\gamma)\int \frac{Pdx}{R} \\ (a-4\alpha)\int \frac{Pdx}{R^4} &= (b-4\beta)\int \frac{Pdx}{R^3} + (c-4\gamma)\int \frac{Pdx}{R^2} \\ &\text{etc.} \end{aligned}$$

Hinc igitur pari modo conficietur :

$$\begin{aligned} \frac{\int PR dx}{\int Pdx} &= \frac{-(b-\beta)}{c-\gamma} + \frac{(a-\alpha)\int Pdx:R}{(c-\gamma)\int Pdx} \\ \frac{\int Pdx}{\int Pdx:R} &= \frac{-(b-2\beta)}{c-2\gamma} + \frac{(a-2\alpha)\int Pdx:R^2}{(c-2\gamma)\int Pdx:R} \\ \frac{\int Pdx:R}{\int Pdx:R^2} &= \frac{-(b-3\beta)}{c-3\gamma} + \frac{(a-3\alpha)\int Pdx:R^3}{(c-3\gamma)\int Pdx:R^2} \\ &\text{etc.} \end{aligned}$$

Ex his autem aequationibus producetur

Abbildung 20: Euler erklärt in seiner Arbeit [EulerE123] die Verwendung einer Differenzengleichung zur Bildung von Kettenbrüchen.

er nur den Fall  $n = 2$  betrachtet, jedoch erlauben seine Ausführungen eine wortgetreue Übertragung auf den allgemeinen Fall. Seine Idee ist die Lösung von (54) als

$$f(x) = \int_a^b t^x p(t) dt \quad (55)$$

anzunehmen und die unbekannte Funktion  $p(t)$  sowie die Grenzen  $a$ ,  $b$  zu ermitteln. Dazu führt er die Hilfsgleichung

$$(a_0x + b_0) \int t^x p(t) dt + \dots + (a_nx + b_n) \int t^{x+n} p(t) dt + t^x q(t) = 0, \quad (56)$$

mit einer weiteren unbekanntem Funktion  $q(t)$  ein. Diese Gleichung werde anschließend nach  $t$  differenziert, sodass sie gibt:

$$(a_0x + b_0)t^x p(t) + \dots + (a_nx + b_n)t^{x+n} p(t) + xt^{x-1} q(t) + t^x q'(t) = 0.$$

Nach Division durch  $t^{x-1} \neq 0$  findet man

$$(p(t)(a_0t + \dots + a_nt^{n+1}) + q(t)) \cdot x + p(t)(b_0t + \dots + b_nt^{n+1}) + tq'(t) = 0.$$

Nun lehrt Euler, die jeweiligen Koeffizienten der Potenzen von  $x$  auf den beiden Seiten der Gleichung zu vergleichen, um ein System von Differentialgleichungen für die Funktionen  $q$  und  $p$  abzuleiten.

Hat man diese Funktionen ausfindig gemacht, verbleibt Bestimmung der Grenzen der Integration. Dazu bedient sich Euler der Gleichung:

$$t^x q(t) = 0. \tag{57}$$

Je zwei Lösungen dieser Gleichung – sie seien  $t_1$  und  $t_2$  – konstituieren eine Lösung der Gleichung (54) als

$$f(x) = \int_{t_1}^{t_2} t^x p(t) dt. \tag{58}$$

Euler bedarf in seiner den Kettenbrüchen gewidmeten Untersuchung nur zweier Lösungen von (57); jedoch geben etwa 3 Lösungen  $t_1, t_2, t_3$  die Integrale

$$f_1(x) = \int_{t_1}^{t_2} t^x p(t) dt, \quad f_2(x) = \int_{t_1}^{t_3} t^x p(t) dt, \quad f_3(x) = \int_{t_2}^{t_3} t^x p(t) dt$$

und deren Linearkombinationen Lösungen der zu lösenden Gleichung (54). Die Verallgemeinerung für  $n$  Lösungen von (57) ist leicht ersichtlich. Unabhängig davon eröffnet Euler mit seiner Methode gleichzeitig einen Weg, die inverse Mellin-Transformation aus einer Differentialgleichung zu finden, anstatt sich der Kurvenintegration in der komplexen Ebene zu bedienen.

**Das Beispiel der Gammafunktion** Seine Methode wendet Euler in § 13 von [EulerE594] auf die  $\Gamma$ -Funktion an, dort ist sie sein drittes Beispiel. Folgende Gleichung ist also vorgelegt:

$$f(x+1) = xf(x). \tag{59}$$

Gemäß der Euler'schen Methode ist diese Hilfsgleichung zu betrachten:

$$\int p(t)t^x dt = x \int p(t)t^{x-1} dt + t^x q(t).$$

Differenzieren von selbiger gibt

$$p(t)t^x = xp(t)t^{x-1} + xt^{x-1}q(t) + t^x q'(t)$$

und daher nach Teilen durch  $t^x \neq 0$

$$p(t)t = xp(t) + xq(t) + tq'(t).$$

Die Koeffizienten der jeweiligen Potenzen von  $x$  vergleichend gelangt man zu diesem System von Gleichungen:

$$p(t) = q'(t) \quad \text{und} \quad q(t) = -p(t), \quad (60)$$

welches von

$$p(t) = -q(t) = C \cdot e^{-t} \quad \text{mit} \quad C \neq 0.$$

gelöst wird; somit ist zur Erkenntnis der Integrationsgrenzen die Gleichung

$$C \cdot t^x e^{-t} = 0 \quad (61)$$

zu lösen. Diese lässt für  $\text{Re}(x) > 0$  als Lösungen nur  $t_1 = 0$  und  $t = \infty$  zu, sodass (59) gelöst wird von

$$f(x) = C \cdot \int_0^{\infty} t^{x-1} e^{-t} dt. \quad (62)$$

Fordert man nun noch  $f(1) = 1$  ein, ergibt sich die klassische Darstellung der  $\Gamma$ -Funktion<sup>127</sup>.

---

<sup>127</sup>Im Allgemeinen reicht es bekanntermaßen zur *eindeutigen* Definition der  $\Gamma$ -Funktion nicht aus, lediglich  $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$  und  $\Gamma(1) = 1$  einzufordern. Denn jede Funktion  $f(x) = \Gamma(x)h(x)$  mit  $h(x) = h(x+1)$  und  $h(1) = f(1)$  genügt der Gleichung ebenfalls. Es muss noch mindestens eine weitere Bedingung hinzutreten, was Euler aber nicht angemerkt hat – weder in dieser Arbeit [EulerE594] noch in einer anderen. Dennoch gelangt man hier mit der Euler'schen Methode zum bekannten Ergebnis, weil der Ansatz über das Integral das Hinzutreten der periodischen Funktion verhindert.

$\int e^{-x} dx, \int e^{-x} x dx, \int e^{-x} x x dx, \int e^{-x} x^2 dx$  etc.  
 quibus integratis ita ut evanescant posito  $x = 0$ , tum vero  
 posito  $x = \infty$ , oritur sequens series facis simplex :  
 $1, 1, 1 \cdot 2, 1 \cdot 2 \cdot 3, 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4, 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5,$  etc.  
quae

**Abbildung 21:** Euler leitet in seiner Arbeit [EulerE594] die bekannte Integraldarstellung der  $\Gamma$ -Funktion aus seiner Theorie der Differenzgleichungen her.

### 5.2.4 Den Kontext betreffend: Die Legendre–Polynome

All the truths of mathematics  
are linked to each other, and all  
means of discovering them are  
equally admissible.

Andrien–Marie Legendre

Euler hat, wie beispielsweise in der Arbeit *“Euler and the Legendre Polynomials”* ([Aycock6], 2023) dargelegt wird, bereits einige Beschaffenheiten der Legendre–Polynome zutage gefördert. Von Interesse ist, dass er ausgehend von verschiedenen Fragestellungen zu denselben Gleichungen gelangt, dies aber nicht erkannt zu haben scheint.

Von Legendre wurden die nach ihm benannten Polynome in seiner Arbeit *“Recherches sur l’attraction des sphéroïdes homogènes”* ([Legendre8], 1785) (“Untersuchungen zur Attraktion von homogen Sphäroiden”) in seinen Studien zum Gravitationspotential

$$\frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} = \frac{1}{\sqrt{r^2 - 2rr' \cos(\beta) + (r')^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{r'^n}{r^{n+1}} P_n(\cos(\beta)),$$

mit den Längen  $r$  und  $r'$  der Vektoren  $\mathbf{x}$  und  $\mathbf{x}'$  und dem Winkel  $\beta$  zwischen ihnen als die Polynome  $P_n(t)$  eingeführt, womit das  $n$ -te Legendre-Polynom als Koeffizient einer Reihenentwicklung entspringt.

Vom mathematischen Standpunkt betrachtet sind sie als vollständiges Orthogonalsystem von Polynomen von Interesse und werden heute alternativ über den Ausdruck

$$\frac{1}{\sqrt{1-2xt+x^2}} := \sum_{n=0}^{\infty} P_n(t)x^n \quad (63)$$

als Koeffizienten einer Potenzreihenentwicklung definiert. Daneben existieren zahlreiche weitere Möglichkeiten, diese Polynome vorzustellen. In hiesiger Abhandlung soll ihre Definition über die nachstehende Differenzgleichung den Anfang bilden:

$$(n+1)P_{n+1}(t) = (2n+1)tP_n(t) - nP_{n-1}(t), \quad \text{für } n \in \mathbb{N}_0. \quad (64)$$

Die Zusatzforderungen  $P_0(t) = 1$  sowie  $P_1(t) = t$  bestimmen sie eindeutig, woraus sich insgesamt schnell die führenden Legendre-Polynome wie in der unten stehenden Tabelle errechnen.

$n$	$P_n(t)$
0	1
1	$t$
2	$\frac{1}{2}(3t^2 - 1)$
3	$\frac{1}{2}(5t^3 - 3t)$
4	$\frac{1}{8}(35t^4 - 30t^2 + 3)$
5	$\frac{1}{8}(63t^5 - 70t^3 + 15t)$
6	$\frac{1}{16}(231t^6 - 315t^4 + 105t^2 - 5)$
7	$\frac{1}{16}(429t^7 - 693t^5 + 315t^3 - 35t)$

**Tabelle 1:** Die ersten Legendre-Polynome für kleine Werte von  $n$ .

Die Gleichung (64) wird sich als Spezialfall allgemeinerer Formeln in einigen Abhandlungen von Euler herauskristallisieren; die Formel tritt unter anderem in den Euler'schen Publikationen "*Speculationes super formula in-*

tegrali  $\int \frac{x^n dx}{\sqrt{aa-2bx+cx}}$ , ubi simul egregiae observationes circa fractiones continuas occurrunt” ([EulerE606], 1786, ges. 1775) (E606: “Betrachtungen über die Integralformel  $\int \frac{x^n dx}{\sqrt{aa-2bx+cx}}$ , wo zugleich außerordentliche Beobachtungen über Kettenbrüche auftreten”) [EulerE672], [EulerE673], [EulerE674] sowie [EulerE710] auf. Wohingegen die Darstellung in der ersten Arbeit nicht allzu bekannt zu sein scheint<sup>128</sup>, können die in den verbleibenden Werken von Euler mitgeteilten Ausdrücke auf diese bekannte Darstellung zurückgeführt werden:

$$P_n(t) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \left( t + \sqrt{t^2 - 1} \cos \varphi \right)^n d\varphi, \quad (65)$$

welche von Laplace (1749–1827) in seinem Opus “*Traité de mécanique céleste*” ([Laplace], 1825) (“Traktat über die Himmelsmechanik”) bewiesen wurde<sup>129</sup>. Dieser wird sich nun vor der Darstellung (63) angenommen.

**Euler und die Laplace’sche Darstellung** In den drei unmittelbar aufeinander folgenden Arbeiten [EulerE672],[EulerE673], [EulerE674] betrachtet Euler die Integrale

$$A_n(a, i) := \int_0^\pi \frac{d\varphi \cos(i\varphi)}{(1 + a^2 - 2a \cos(\varphi))^n}, \quad (66)$$

und zeigt drei Eigenschaften von ihnen<sup>130</sup>. Zunächst gibt er eine explizite Formel für die obigen Integrale an. Weiterhin entdeckt er eine Funktionalgleichung, welcher sie Genüge leisten. Zuletzt teilt er eine Differenzgleichung in  $n$  für sie mit, welche sich für den Fall  $i = 0$  auf (64) reduziert.

Letztere findet sich in § 74 von [EulerE673] in der Form:

$$\begin{aligned} & n(n-1)(1-a^2)^2 \int \frac{d\varphi \cos(i\varphi)}{\Delta^{n+1}} \\ &= (n-1)(2n-1)(1+a^2) \int \frac{d\varphi \cos(i\varphi)}{\Delta^n} + (i^2 - (n-1)^2) \int \frac{d\varphi \cos(i\varphi)}{\Delta^{n-1}}, \quad (67) \end{aligned}$$

<sup>128</sup>Sie werden etwa nicht in der umfassenden Formeltabelle “*Table of Integrals, Series, and Products*” ([Zwillinger], 2014) genannt.

<sup>129</sup>In Band 16,2 der Serie 1 der *Opera Omnia* ([Faber1], 1935) wird ebenfalls Laplace als der Entdecker genannt.

<sup>130</sup>Hier stellt  $i$  eine ganze Zahl und nicht die komplexe Einheit  $\sqrt{-1}$  dar.

wo Euler die Integrale von 0 bis hin zu  $\pi$  erstreckt versteht. Das Zeichen  $\Delta$  entspricht  $1 - 2a \cos(\varphi) + a^2$ . Mit der Notation aus (66) drückt sich diese Gleichung folgendermaßen aus:

$$n(1 - a^2)^2 \cdot A_{n+1}(a) = (2n - 1)(1 + a^2) \cdot A_n(a) - (n - 1) \cdot A_{n-1}(a).$$

Eine Verschiebung des Index  $n \mapsto n + 1$  gibt

$$(n + 1)(1 - a^2)^2 \cdot A_{n+2}(a) = (2n + 1)(1 + a^2) \cdot A_{n+1}(a) - n \cdot A_n(a).$$

Zur weiteren Vereinfachung mache man die Einführung des Buchstaben  $a$  aus [EulerE673] rückgängig. Dort geht Euler nämlich von folgendem Integral aus:

$$\int \frac{d\varphi \cos(i\varphi)}{(\alpha + \beta \cos(\varphi))^n}.$$

Die Integrale  $A_n(a, i)$  aus (66) entspringen aus letzterem Integral durch die Festlegungen  $\alpha = 1 + a^2$  und  $\beta = -2a$ , welche Euler in § 42 von [EulerE673] ebenfalls macht. Demnach kann die vorausgehende Differenzgleichung in dieser Manier vorgestellt werden:

$$(n + 1)(\alpha^2 - \beta^2) \cdot A_{n+2}(a) = (2n + 1)\alpha \cdot A_{n+1}(a) - n \cdot A_n(a).$$

Setzt man  $\alpha = x$  sowie  $\beta = \sqrt{x^2 - 1}$  und schreibt der Übersicht wegen  $A_n(x)$  anstatt  $A_n(a)$ :

$$(n + 1) \cdot A_{n+2}(x) = (2n + 1)x \cdot A_{n+1}(x) - n \cdot A_n(x),$$

was gerade (64) ist. Überdies gilt  $A_{n+1}(x) = \pi P_n(x)$ , zumal durch direkte Rechnung

$$A_1(x) = \int_0^\pi \frac{d\varphi}{x + \sqrt{x^2 - 1} \cos \varphi} = \pi = \pi \cdot P_0(x),$$

$x \in [-1, 1]$  vorausgesetzt. Mit denselben Restriktionen an  $x$ , gilt ebenfalls

$$A_2(x) = \int_0^\pi \frac{d\varphi}{(x + \sqrt{x^2 - 1} \cos \varphi)^2} = \pi \cdot x = \pi \cdot P_1(x);$$

dies impliziert

$$P_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \frac{d\varphi}{(x + \sqrt{x^2 - 1} \cos(\varphi))^n},$$

welche (65) schon sehr nahe kommt. Um gänzlich zu Laplace'schen Darstellung zu gelangen, bedarf es der Funktionalgleichung, welche Euler für die Integrale  $A_n(a, i)$  ausfindig gemacht hat; den Beweis reicht er in § 21 von [EulerE710] nach<sup>131</sup>. Besagte Formel lautet:

$$\begin{aligned} & \binom{n+i}{i} (1-aa)^{-n} \int \Delta^n d\varphi \cos(i\varphi) \\ &= \binom{-n-1+i}{i} (1-aa)^{n+1} \int \Delta^{-n-1} d\varphi \cos(i\varphi), \end{aligned} \quad (68)$$

wo wieder  $\Delta = 1 - 2a \cos(\varphi) + a^2$  ist und die Integrale von 0 bis hin zu  $\pi$  zu nehmen sind.

Der Fall  $i = 0$  ist der wesentliche, in welchem die Binomialkoeffizienten in (68) alle = 1 werden. Nach derselben Substitution wie zuvor,  $a$  für  $x$  hinauswerfend, liest sich die Euler'sche Gleichung in der eingeführten Notation:

$$A_{-n}(a) = A_{n+1}(a),$$

wo  $1 - a^2 = \alpha^2 - \beta^2 = x^2 - (x^2 - 1) = 1$  benutze wurde. Verbinden der letzten Gleichung mit  $A_{n+1}(a) = \pi \cdot P_n(x)$  offenbart  $A_{-n}(x) = \pi \cdot P_n(x)$ , was nach der Definition von  $A_n(a)$  zu dieser Darstellung führt:

$$P_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi (x + \sqrt{x^2 - 1} \cos(\varphi))^n d\varphi,$$

was gerade (65) ist.

Unter ausschließlicher Applikation von Eulers Formeln ist demnach folgende Identität bewiesen worden:

$$\int_0^\pi (x + \sqrt{x^2 - 1} \cos(\varphi))^n d\varphi = \int_0^\pi (x + \sqrt{x^2 - 1} \cos(\varphi))^{-n-1} d\varphi, \quad (69)$$

---

<sup>131</sup>Euler teilt dieselbe Formel auch schon in seinen Arbeiten [EulerE672], [EulerE673], [EulerE674] mit. Allerdings ohne Beweis in den beiden erstgenannten, wo er sie mit dem Prädikat Vermutung vorstellt. Der erste Beweis findet sich in [EulerE674].

eine Formel, welche im Vorwort zu Band 16,2 der ersten Serie der *Opera Omnia* ([Faber1], 1935) Jacobi (1804 – 1851) zugeschrieben wird, der ebenfalls (68) in seiner Arbeit “Über die Entwicklung des Ausdrucks  $(aa - 2aa'[\cos \omega \cos \varphi + \sin \omega \sin \varphi \cos(\vartheta - \vartheta')] + a'a')^{-\frac{1}{2}}$ ” ([Jacobi7], 1843) bewiesen hat. Es lässt sich demnach behaupten, Euler hätte die Relation ebenfalls zu beweisen vermocht, hätte er sich der Aufgabe angenommen. Seine Funktionalgleichung (68) ist jedenfalls allgemeiner als (69). Überdies ist (68) ein Spezialfall der Euler’schen Transformation für die hypergeometrische Reihe, sprich der Formel

$${}_2F_1(a, b, c; x) = (1 - x)^{c-a-b} {}_2F_1(c - a, c - b, c; x),$$

welche Euler in § 9 von [EulerE710] nachweist. Hier steht  ${}_2F_1$  für die Gauß’sche hypergeometrische Funktion, die im nächsten Abschnitt noch eingehender behandelt werden wird (siehe Abschnitt 5.2.5). Demnach darf (69) als ein Spezialfall einer gewissen Eigenschaft der hypergeometrischen Funktion ausgelegt werden.

Die Vollständigkeit gebietet die Angabe der Gleichung, welche Euler für die Integrale  $A_n(a, i)$  deriviert. Diese lautet (siehe, e.g., § 43 in [EulerE673]):

$$\int_0^\pi \frac{d\varphi \cos(i\varphi)}{(1 + a^2 - 2a \cos(\varphi))^{n+1}} = \frac{\pi a^i}{(1 - a^2)^{2n+1}} \cdot V,$$

mit

$$V = \binom{n+i}{i} + \binom{n+i}{i+1} \binom{n-i}{1} a^2 + \binom{n+i}{i+2} \binom{n-i}{2} a^4 + \dots$$

Euler merkt aber in [EulerE672] wie auch [EulerE673] an, dass diese Formel für  $V$  auf einer Vermutung basiert; den Beweis hat er in [EulerE674] nachgeliefert.

**Legendres Untersuchung dieser Integrale** Es ist dem umfassenderen Verständnis zuträglich, an dieser Stelle Legendres Betrachtungen der Integrale (66) einzuschalten, bevor die weiteren Beiträge Eulers zu den Legendre’schen Polynomen ihre Erwähnung finden.

Legendre hat eben diese in seinem Buch “*Exercices du calcul intégral – Tome premier*” ([Legendre2], 1811) (“Übungen im Integralkalkül – erstes

Buch”) (p. 372), aber auch im späteren Werk *“Traité des fonctions elliptiques et intégrales Eulériennes – Tome second”* ([Legendre6], 1826) (“Traktat über die elliptischen Funktionen und die Euler’schen Integrale – zweites Buch”), genauer im ersten Anhang dieses Buches, einer Untersuchung unterworfen. Zum Zeitpunkt der Verfassung seines Buches [Legendre6] ist Legendre der Eigenschaften der Integrale bereits gewahr und hat Kenntnis des Euler’schen Beitrags genommen, welchen er an entsprechender Stelle auch zitiert, wohingegen Euler die ganzen Eigenschaften erst erarbeiteten musste. Die zutage geförderten Relationen unterscheiden sich bei den Autoren nicht grundlegend: So findet Euler, wie eben genauer ausgeführt, die Legendre’sche Gleichung (61), sogar in allgemeinerer Form; zur der in (64) von Legendre mitgeteilten Differentialgleichung gelangt Euler freilich nicht, jedoch gibt er in [EulerE710] (§ 9) gar die Differentialgleichung für die hypergeometrische Reihe an, welche die Legendre’sche als Spezialfall beinhaltet. Die Differenzengleichung, die sich bei Legendre als (62) findet, nimmt Euler ebenfalls vorweg. Legendre zueigen ist indes die Gleichung (33), welche sich als die bekannte Partititätsrelation für die Legendre’schen Polynome auffassen lässt. Naturgemäß lässt sie sich leicht aus den Euler’schen Formeln ableiten<sup>132</sup>. Legendre übertrifft Euler darin, dass er auch die Integrale

$$\int_0^\pi \frac{\cos(\lambda\varphi)d\varphi}{(1 + 2\cos(\varphi)a + a^2)^{\frac{1}{2}}}$$

explizit untersucht. Er deutet sie als elliptische Integrale in einer Weise, welche Euler zeitlebens versperrt geblieben ist. Die Gründe hierfür werden in Abschnitt (7.2.1) dargelegt werden.

**Eulers andere Integraldarstellung** Wie oben angeschnitten, findet sich in der Arbeit [EulerE606], welche sich eigentlich Kettenbrüchen widmet, eine weitere Integraldarstellung für die Legendre–Polynome. Nachdem Euler in den Abhandlungen [EulerE123] und [EulerE594] gezeigt hatte, wie homogene Differenzengleichungen mit linearen Koeffizienten mithilfe von Integralen aufgelöst werden können (siehe auch Abschnitt 5.2.3), wendet er die dort gewonnenen Einsichten in [EulerE606] nun auf die Familie von Integralen

<sup>132</sup>Einen Beweis dieser Behauptung findet man in Abschnitt (8.1.3).

§. 10. Ex forma integrali modo inuenta, si post integrationem statuatur  $x = \frac{b + \sqrt{(bb - aac)}}{c}$ , unde fit  $s = 0$ , erit

$$naa \int \frac{x^{n-1} dx}{\sqrt{(aa - 2bx + cxx)}} = (2n+1)b \int \frac{x^n dx}{\sqrt{(aa - 2bx + cxx)}} - (n+1)c \int \frac{x^{n+1} dx}{\sqrt{(aa - 2bx + cxx)}}$$

unde si breuitatis gratia ponamus

$$\int \frac{x^{n-1} dx}{\sqrt{(aa - 2bx + cxx)}} = P, \int \frac{x^n dx}{\sqrt{(aa - 2bx + cxx)}} = Q,$$

$$\int \frac{x^{n+1} dx}{\sqrt{(aa - 2bx + cxx)}} = R, \int \frac{x^{n+2} dx}{\sqrt{(aa - 2bx + cxx)}} = S, \text{ etc}$$

hae quantitates P, Q, R, S ita a se inuicem pendent vt fit

$$naaP = (2n+1)bQ - (n+1)cR;$$

$$(n+1)aaQ = (2n+3)bR - (n+2)cS;$$

$$(n+2)aaR = (2n+5)bS - (n+3)cT;$$

$$(n+3)aaS = (2n+7)bT - (n+4)cU;$$

$$(n+4)aaT = (2n+9)bU - (n+5)cW;$$

etc. etc.

**Abbildung 22:** Euler gelangt in seiner Arbeit [EulerE606] zur Darstellung der Legendre-Polynome mithilfe von Integralen. In der ersten Zeile ist die Differenzengleichung für die Legendre-Polynome zu sehen.

$$G(n) := \int_{\frac{b - \sqrt{b^2 - a^2c}}{c}}^{\frac{b + \sqrt{b^2 - a^2c}}{c}} \frac{x^n dx}{\sqrt{a^2 - 2bx + cx^2}}$$

an und weist nach, dass sie dieser Gleichung Genüge leisten:

$$na^2 \cdot G(n-1) = (2n+1)b \cdot G(n) - (n+1)c \cdot G(n+1).$$

Beschränkt man sich auf den Fall  $a = c = 1$  und schreibt  $t$  statt  $b$ , reduziert sich diese Gleichung auf die Differenzengleichung für die Legendre-Polynome (64), was folgenden Schluss gestattet:

$$C(t) \cdot P_n(t) = \int_{t-\sqrt{t^2-1}}^{t+\sqrt{t^2-1}} \frac{x^n dx}{\sqrt{1-2xt+x^2}}.$$

$C(t)$  ist dabei eine von  $n$  unabhängige im Weiteren zu eruiierende Funktion. Zu diesem Zweck werte man die Integrale für  $n = 0$  und  $n = 1$  explizit aus. Eine formale Rechnung liefert:

$$\int_{t-\sqrt{t^2-1}}^{t+\sqrt{t^2-1}} \frac{x^0 dx}{\sqrt{1-2xt+x^2}} = \log(-1)$$

sowie

$$\int_{t-\sqrt{t^2-1}}^{t+\sqrt{t^2-1}} \frac{x^1 dx}{\sqrt{1-2xt+x^2}} = \log(-1) \cdot t,$$

was die Funktion  $C(t)$  als Konstante enthüllt. Die Mehrdeutigkeit des Ausdrucks  $\log(-1)$  erzwingt die Wahl eines Wertes, jedoch bietet nach entsprechender Festlegung

$$P_n(t) = \frac{1}{\log(-1)} \cdot \int_{t-\sqrt{t^2-1}}^{t+\sqrt{t^2-1}} \frac{x^n dx}{\sqrt{1-2xt+x^2}}, \quad (70)$$

diese Gleichung die richtige Formel dar. Für die Wahl des Hauptzweiges des Logarithmus, sodass  $\log(-1) = i\pi$ , entspringt

$$P_n(t) = \frac{1}{i\pi} \cdot \int_{t-\sqrt{t^2-1}}^{t+\sqrt{t^2-1}} \frac{x^n dx}{\sqrt{1-2xt+x^2}}, \quad (71)$$

in welcher Form Stieltjes (1854–1894) in seiner Arbeit “*Sur les polynômes de Legendre*” ([Stieltjes1], 1890) (“Über die Legendre–Polynome”) die Legendre–Polynome mit Mitteln der komplexen Analysis ausgedrückt hat. Der Umstand der Mehrdeutigkeit ließe sich überdies durch nachstehendes unbestimmtes Integral in Gänze umgehen:

$$\int \frac{x^n dx}{\sqrt{1-2xt+x^2}}$$

$$= P_n(t) \operatorname{artanh} \left( \frac{x-t}{\sqrt{1-2xt+x^2}} \right) + Q_n(x,t) \sqrt{1-2xt+x^2} + C$$

wobei  $Q_n$  ein Polynom in  $x$  und  $t$  ist und  $C$  eine Integrationskonstante ist. Diese Formel kann beispielsweise mit Induktion und (64) nachgewiesen werden, was an dieser Stelle ausgespart wird.

**Ein weiterer Ansatz von Euler mit ähnlichen Ergebnissen** Hier rückt nun die Definition über die erzeugende Funktion (siehe Gleichung (63)) in den Vordergrund, welche in unerwartetem Zusammenhang in Eulers Arbeiten “*Observationes analyticae*” ([EulerE326], 1767, ges. 1763) (E326: “Analytische Beobachtungen”) und [EulerE551] auftritt. In diesen beiden Werken betrachtet er die allgemeinen Trinome  $(a + bx + cx^2)^n$  für  $n \in \mathbb{N}$  und  $a, b, c \in \mathbb{C}$  und ist dabei an der Folge der Koeffizienten der Potenz  $x^n$  in der Entwicklung dieser Trinome interessiert. Aus der Entwicklung

$$(a + bx + cx^2)^n = a^n + \cdots + B_n \cdot x^n + \cdots + c^n x^{2n},$$

wo die Koeffizienten  $B_n$  von den Zahlen  $a$ ,  $b$  und  $c$  abhängen, definiert Euler die Potenzreihe<sup>133</sup>:

$$F(x) := \sum_{n=0}^{\infty} B_n x^n. \quad (72)$$

Das Problem, welches Euler in [EulerE326] und [EulerE551] eröffnet und löst, besteht im Finden eines geschlossenen Ausdrucks für  $F(x)$ . Seine Lösung zu diesem Problem (siehe, z.B., § 21 von [EulerE551]) lautet:

$$F(x) := \frac{1}{\sqrt{1-2bx+(b^2-4ac)x^2}}.$$

Dieser Ausdruck ähnelt der erzeugenden Funktion für die Legendre–Polynome in (63), welche sich durch Schreiben von  $t$  für  $b$  und Setzen von  $b^2 - 4ac = 1$  auch ergibt.

Ein weiterer wichtiger Beitrag aus [EulerE551] besteht in der Entdeckung der Differenzengleichung zwischen drei unmittelbar aufeinander folgenden Legendre–Polynomen, also (64). Euler gibt die folgende Relation zwischen den aufeinander folgenden Koeffizienten der Taylor Reihe für  $F$  in

<sup>133</sup>Der Fall  $a = b = c = 1$  gibt die Koeffizienten der Folge A002426 aus Online Encyclopedia of Integer Sequences (<https://oeis.org/>).

§. 24. Ex seriei praeccedentis  
 $s = 1 + bx + (bb + 2ac)x^2 + (b^2 + 6abc)x^3 + \text{etc.}$   
 summa inuenta  
 $s = ((x - bx)^2 - 4acxx)^{-\frac{1}{2}}$   
 vicissim eius terminus generalis, seu coefficientis potestatis  $x^n$   
 erui potest. Cum enim, evolutione more solito facta, sit:  
 $s = \frac{1}{1-bx} + \frac{1}{2} \cdot \frac{acxx}{(1-bx)^2} + \frac{3 \cdot 4}{2 \cdot 2} \cdot \frac{a^2 x^2 x^2}{(1-bx)^3} + \frac{3 \cdot 5 \cdot 10}{1 \cdot 2 \cdot 2} \cdot \frac{a^2 b^2 x^4}{(1-bx)^4} \text{ etc.}$

Abbildung 23: Euler gelangt in seiner Arbeit [EulerE551] zur erzeugenden Funktion der Legendre-Polynome.

(72) in § 22 von [EulerE551] an:

$$r = bq + \frac{n-1}{n}(bq - p).$$

In seiner Notation unterdrückt Euler die Abhängigkeit der Buchstaben  $r, p, q$  von  $n$  sowie dem Buchstaben  $b$ , welches dasselbe  $b$  ist wie im expliziten Ausdruck für die Funktion  $F$ . Aber Euler lehrt uns, dass  $r$  der  $n$ -te Term in der Folge der Koeffizienten ist, woraus man  $q$  aus  $r$  durch Schreiben von  $n - 1$  anstelle von  $n$  in  $r$  erhält. Gleichermäßen findet man  $p$  aus  $r$ , indem man  $n - 2$  anstatt von  $n$  in  $r$  schreibt. Ersetzt man  $b$  mit  $t$  und stellt alles in moderner Manier mit Indizes dar, setzt demnach  $r = B_n(t)$ ,  $q = B_{n-1}(t)$  und  $p = B_{n-2}(t)$ , nimmt Eulers Formel diese Gestalt an:

$$B_n(t) = t \cdot B_{n-1}(t) + \frac{n-1}{n}(t \cdot B_{n-1}(t) - B_{n-2}(t)).$$

Eine einfache Rechnung zeigt die Gleichwertigkeit jener Gleichung zu dieser:

$$nB_n(t) = (2n-1)t \cdot B_{n-1}(t) - (n-1)B_{n-2}(t),$$

welche sich nach der Ersetzung  $n \mapsto n + 1$  als Differenzgleichung für die Legendre-Polynome (64) hervortut.

Aus diesen Überlegungen ließe sich aus den Euler'schen Überlegungen heraus folgende Definition der Legendre-Polynome formulieren

**Definition 1** (Legendre–Polynome). *Das  $n$ -te Legendre–Polynom  $P_n(t)$  ist gegeben als Koeffizient der Potenz  $x^n$  in der Entwicklung des folgenden Trinoms:*

$$T(t, x) = \left( \frac{t-1}{2} + xt + \frac{t+1}{2}x^2 \right)^n .$$

Trotz der mannigfachen Berührungspunkte mit den Legendre’schen Polynomen in diversen Kontexten, scheint Euler von alledem keine Notiz genommen zu haben, was folgende Äußerung in § 7 von [EulerE551] unterstreicht:

*“Auch wenn das Ausfindigmachen der Zahl  $N$  auf eine Differenzen-Differentialgleichung zurückgeführt werden kann, ist selbige dennoch so beschaffen, dass sie in keiner Weise eine Lösung zuzulassen scheint.”*

Was Euler hier  $N$  nennt, ist gerade das  $n$ -te Legendre–Polynom  $P_n(t)$ . Dass die Differenzen–Differentialgleichung<sup>134</sup>, welcher die Legendre’schen Polynome Genüge leisten, keine triviale Lösung aufweist, ist heute ebenfalls einsichtig. Sie werden mancherorts ja gerade umgekehrt als Lösung der Legendre’schen Differentialgleichung *definiert*, was Euler fern lag, wie oben (Abschnitt 3.1.3) diskutiert worden ist.

Unabhängig davon hat Euler mit (65) die ersehnte Lösung in [EulerE606] mit Integralen nachgereicht, was ihm allerdings ebenfalls entgangen zu sein scheint; er macht jedenfalls keine Erwähnung davon, was gleichermaßen das Auftreten der Differenzengleichung der Legendre–Polynome in den drei Arbeiten [EulerE551], [EulerE606] und [EulerE673] betrifft. Allerdings ist der Zusammenhang zwischen den Koeffizienten einer erzeugenden Funktion ([EulerE551]), Kettenbrüchen ([EulerE606]) und Untersuchungen zu speziellen Integralen ([EulerE673]) überaus schwierig zu erkennen und wurde auch nicht in den Vorworten zu Eulers *Opera Omnia* von den jeweiligen Editoren angemerkt.

---

<sup>134</sup>Euler benutzt diesen Begriff, um Differentialgleichungen zweiter Ordnung zu beschreiben.

### 5.2.5 Die Darstellung betreffend – Die hypergeometrische Reihe

The real voyage of discovery  
consists not in seeking new  
landscapes, but in having new  
eyes.

---

Marcel Proust

Den Abschluss der Gegenstände, welche bei Euler zwar auftreten, jedoch nach seinen Nachfolgern benannt werden, soll in dieser Ausarbeitung die hypergeometrische Reihe bilden:

$${}_2F_1(\alpha, \beta, \gamma; z) = 1 + \frac{\alpha\beta}{1 \cdot \gamma} \frac{z}{1!} + \frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{\gamma(\gamma+1)} \frac{z^2}{2!} + \text{etc.}, \quad (73)$$

also die Funktion, welche heute mit der linken Seite bezeichnet und seit seiner wegweisenden Arbeit [Gauß3] auch *Gauß'sche* hypergeometrische Funktion genannt wird. Im Vorwort zu Band 19 der ersten Serie der *Opera Omnia* ([Faber2], 1936) fasst Faber (1877–1966) die Situation wie folgt zusammen:

*“EULER scheint die Größe des Schatzes, den er aufgeschürft hatte, nicht voll ermessen zu haben; er hat manches davon, was er selbst hätte heben können, seinen Nachfahren, allen voran GAUSS, überlassen.”*

Es soll der Nachweis erbracht werden, dass dieses Zitat mit gewissen Einschränkungen zu versehen ist, um noch der Wahrheit zu entsprechen. Schon Klein schreibt auf Seite 269 seines Buchs [Klein]:

*“Die Gauß'sche Reihe – der Name ist wiederum höchst unhistorisch, denn schon Euler hat sie gekannt und die merkwürdigsten Eigenschaften gefunden, auch wenn er Gauß die Konvergenzfragen erledigt hat – [...]”*

Es wird nämlich nachfolgend argumentiert werden, dass sich die Euler'schen von den Gauß'schen Entdeckungen bezüglich der hypergeometrischen mehr in ihrer Darstellung als in ihrem Umfang unterscheiden.

**Themenübersicht** Die Gauß'sche Arbeit [Gauß3] gibt gleichsam die zu besprechenden Themen vor<sup>135</sup>. Es wird förderlich sein, eine entsprechende

---

<sup>135</sup>Gauß hat selbst zu Lebzeiten nur die Paragraphen 1 bis 37 veröffentlicht, die restlichen §§ 38 – 55 sind aus seinem Nachlass entnommen. Da besagter Nachlass jedoch inhaltlich

**C**ontemplatus sum hanc seriem:

$$s = 1 + \frac{a \cdot b}{1 \cdot c} x + \Pi \frac{(a+1)(b+1)}{2 \cdot c+1} x^2 + \Pi \frac{(a+2)(b+2)}{3(c+2)} x^3 + \text{etc.}$$

ubi more solito  $\Pi$  designat coefficientem termini praecedentis. Haec series ita comparata est, ut eius summa in genere nullo modo exhiberi posse videatur, cum tamen omnibus casibus, quibus vel  $a$  vel  $b$  est numerus integer negativus, abrumpatur eiusque summa finito modo exprimitur.

**Abbildung 24:** Euler führt die hypergeometrische Reihe in seiner Arbeit [EulerE710] ein. Euler verwendet dabei das Symbol  $\Pi$ , um den gesamten vorausgehenden Zahlenkoeffizienten der vorausgehenden Potenz anzuzeigen.

Übersicht mit Angabe, entsprechende Ergebnis bei Euler findet, der Untersuchung vorausgeschickt zu haben.

§3: Konvergenzbetrachtungen der hypergeometrischen Reihe in der Variable  $z$  – bei Euler in [EulerE43].

§6: Die Entwicklung der Reihe

$$(aa + bb - 2ab \cos \varphi)^{-n} = A + 2A' \cos \varphi + 2A'' \cos 2\varphi + 2A''' \cos 3\varphi + \text{etc.}$$

Bei Euler an verschiedenen Stellen, etwa [EulerE464].

§ 7: Die Nachbarschaftsrelationen – bei Euler in [EulerE123].

§ 12: Die Kettenbruchentwicklung des Quotienten zweier hypergeometrischer Funktionen – bei Euler in äquivalenter Form in [EulerE123].

§ 15: Die Gauß'sche Summationsformel für die hypergeometrische Funktion, Ermittlung des Wertes:  ${}_2F_1(a, b, c; 1)$  – bei Euler in äquivalenter Form in [EulerE575], [EulerE663].

§ 18: Die Produktformel (45) für die Gamma-Funktion  $\Gamma$ -Funktion – bei Euler in [EulerE19],[EulerE613], [EulerE652].

§ 25: Die Reflexionsformel für die  $\Gamma$ -Funktion – bei Euler in [EulerE352], [EulerE421].

---

nahtlos an den ersten Teil anknüpft, wird im Folgenden mit [Gauß3] auch der Nachlass gekennzeichnet.

§ 26: Die Multiplikationsformel für die  $\Gamma$ -Funktion, also  $\Gamma(nx)$  geschrieben als Produkt von  $\Gamma$ -Funktionen kleineren Arguments – bei Euler in äquivalenter Form in [EulerE421].

§ 27: *Elastica*-Integrale, bei Euler in [EulerE122], [EulerE321].

§ 28: Die typische Integraldarstellung für die  $\Gamma$ -Funktion mit Herleitung – bei Euler in [EulerE421], [EulerE19], [EulerE594].

§ 31: Die  $\psi$ -Funktion – bei Euler in [EulerE212], [EulerE613]

§ 35: Eine Integraldarstellung für die  $\psi$ -Funktion – nicht von Euler angegeben, aber leicht herzuleiten.

§ 36: Spezielle Frullian'sche Integrale – bei Euler in [EulerE464].

§ 38: Die Differentialgleichung für die hypergeometrische Funktion  ${}_2F_1(a, b, c; z)$  – bei Euler in [EulerE710].

§§ 49–55: Quadratische Transformationen für das letzte Argument – nicht von Euler betrachtet und auch nicht aus seinen Überlegungen abzuleiten.

§ 55: Ermittlung des Wertes  ${}_2F_1(a, b, c; \frac{1}{2})$  – nicht von Euler ermittelt und aus seinen Formeln heraus nicht möglich.

Bis auf die beiden letztgenannten Themen hat Euler demnach in verschiedenen Arbeiten die Gauß'schen Resultate ebenfalls zutage gefördert oder ist diesen aus auszuführenden Gründen dermaßen nahe gekommen, dass sie mit wenigen Strichen aus seinen Mitteilungen abgeleitet werden können. Die einzelnen Punkte werden nachstehend gemäß des Umfangs der beizufügenden Erklärungen geordnet abgehandelt.

**Konvergenzbetrachtungen** Gauß beginnt seine Untersuchung mit der Frage der Konvergenz der hypergeometrischen Reihe (73) im Parameter  $z$ . Das Ergebnis ist, wie heute wohlbekannt ist, dass  $|z| < 1$  zu setzen ist, sofern man die anderen Parameter  $\alpha, \beta, \gamma$  keinen weiteren nicht notwendigen Einschränkungen unterwirft. Das Gauß'sche Argument stützt sich dabei auf das Konzept, was später als Quotientenkriterium<sup>136</sup> von Reihen in die Mathematik eingegangen ist. Gauß schreibt in § 2 seiner Arbeit, wo er  $x$  statt

<sup>136</sup>Für absolute Konvergenz der Reihe  $S := \sum_{n=0}^{\infty} a_n$  mit  $a_n \in \mathbb{C}$  ist die Bedingung  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} \leq x < 1$  hinreichend, Gauß wendet dieses Theorem auf den allgemeinen Term der hypergeometrischen Reihe an, und zeigt so, dass  $|z| < 1$  zur Gewährleistung der Konvergenz sein muss.

$z$  als vierte Variable in (73) setzt:

“Die Koeffizienten der Potenzen  $x^m$ ,  $x^{m+1}$  in unserer Reihe verhalten sich wie

$$1 + \frac{\gamma + 1}{m} + \frac{\gamma}{mm} : 1 + \frac{1 + \beta}{m} + \frac{\alpha\beta}{mm}$$

und nähern sich daher dem Verhältnis der Gleichheit umso mehr, umso größer  $m$  angenommen wird. Wenn also auch dem vierten Element  $x$  ein bestimmter Wert zugeteilt wird, wird von dessen Gestalt die Konvergenz oder Divergenz abhängen. Sooft freilich  $x$  ein reeller Wert kleiner als die Einheit zugeteilt wird, ob positiv oder negativ, wird die Reihe, wenn nicht schon gleich zu Beginn, dennoch ab einem gewissen Punkt konvergent sein, und zu einer daraus gänzlich bestimmten endlichen Summe konvergieren. Dasselbe wird durch einen imaginären Wert von  $x$  der Form  $a + b\sqrt{-1}$  geschehen, sofern  $aa + bb < 1$  ist. Andererseits wird für einen reellen Wert von  $x$  größer als die Einheit oder einen imaginären der Form  $a + b\sqrt{-1}$ , mit  $aa + bb > 1$ , die Reihe, wenn nicht schon zu Beginn, dennoch nach einem gewissen Intervall divergent sein, sodass von ihrer Summe keine Rede sein kann. Schließlich wird für den Wert  $x = 1$  (oder allgemeiner einen der Form  $a + b\sqrt{-1}$  mit  $aa + bb = 1$ ) die Konvergenz von der Beschaffenheit von  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  abhängen, worüber wir, und im Speziellen von der Summe der Reihe für  $x = 1$ , im dritten Abschnitt sprechen werden.”

Trotz seines Konzeptes von divergenten Reihen<sup>137</sup>, welches Euler etwa in seiner Arbeit “*De seriebus divergentibus*” ([EulerE247], 1760, ges. 1746) (E247: “Über divergente Reihen”) und seinen *Calculi Differentialis* [EulerE212] vorstellt, besitzt er durchaus eine Auffassung der Konvergenz einer Reihe; diese bringt er in § 2 seiner Arbeit [EulerE43] sprachlich zum Ausdruck:

“Aber eine Reihe, welche ins Unendliche fortgesetzt eine endliche Summe hat, wird, auch wenn sie doppelt so weit fortgesetzt wird, keine Vermehrung erfahren, sondern das, was nach dem Unendlichen gedanklich hinzugefügt wird, wird in Wahrheit unendlich klein sein. Denn wenn es sich nicht so verhielte, wäre die Summe der unendlichen Reihe, auch wenn sie bis ins Unendliche fortgeführt wird, nicht bestimmt und deswegen auch nicht

<sup>137</sup>Die Euler’sche Behandlung divergenter Reihen wird in dieser Arbeit noch in Abschnitt (7.1.3) besprochen werden.

endlich. Daraus folgt, dass, wenn das, was aus der Fortsetzung über den infinitesimalen Term hinaus entspringt, von endlicher Größe ist, die Summe der Reihe notwendig unendlich sein muss.”

Möchte man die Euler’schen Erläuterungen in Formeln überführen, könnte man schreiben:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = s \quad \Rightarrow \quad \sum_{n=N}^{\infty} a_n = \tilde{s},$$

wobei  $s, \tilde{s}$  und  $N$  endliche Zahlen sind, sodass seine Definition modern anmutet. Man kann in seiner Formulierung die notwendige Bedingung für die Konvergenz oder äquivalent eine hinreichende Bedingung für Divergenz einer Reihe erkennen, allerdings nur für *reelle* Reihenglieder. Explizit verwendet scheint er diese Definition indes selten zu haben, sofern man von [EulerE43] absieht. Jedoch ist Euler von der Idee eines Konvergenzradius weit entfernt, welches Konzept unter anderem zeigt, dass die betrachtete Funktion als Funktion über den komplexen Zahlen zu verstehen ist<sup>138</sup>, einen Punkt den Gauß vehement unterstrichen hat. Somit erfährt das Klein’sche Resümee, Gauß habe die Konvergenzfragen der hypergeometrischen Reihe erledigt, seine Bestätigung.

**Entwicklung einer Funktion in eine Reihe** In § 6 von [Gauß3] betrachtet Gauß die Entwicklung der Funktion

$$\frac{1}{(a^2 - 2ab \cos \varphi + b^2)^n}$$

für eine beliebige natürliche Zahl  $n$  in eine Reihe von Kosinus:

$$\frac{1}{(a^2 - 2ab \cos \varphi + b^2)^n} = A_0 + 2A_1 \cos(\varphi) + 2A_2 \cos(2\varphi) + 2A_3 \cos(3\varphi) + \text{etc.}, \quad (74)$$

Sein Ergebnis für die Koeffizienten lautet:

$$A_k = \frac{n(n+1)(n+2) \cdots (n+k-1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots k} a^{-2n-k} b^k {}_2F_1 \left( n, n+k, k+1, \frac{b^2}{a^2} \right).$$

<sup>138</sup>Euler beschränkt dahingegen, aus Gründen, die unten in Abschnitt (7.3.1) noch erläutert werden, seine Betrachtungen meist auf die reelle Achse.

Faktoriert man  $a^2 - 2ab \cos \varphi + b^2$  in lineare Faktoren, entwickelt beide Faktoren in eine Reihe und multipliziert sie, ergibt sich aus einem Koeffizientenvergleich mit (74), gelangt man wie Gauß zur alternativen Darstellung:

$$A_k = \frac{n(n+1)(n+2) \cdots (n+k-1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots k} (a^2 + b^2)^{n-k} a^k b^k \times \\ {}_2F_1 \left( \frac{1}{2}n + \frac{3}{2}, \frac{1}{2}n + 2, k + 1, \frac{4a^2b^2}{(a^2 + b^2)^2} \right).$$

Demnach implizieren die beiden Ausdrücke die folgende Transformationsformel für die hypergeometrische Reihe

$${}_2F_1(a, b, 1 - a - b; z) = (1 + z)^{-a} {}_2F_1 \left( \frac{a}{2}, \frac{a+1}{2}, 1 - a - b; \frac{4z}{(1+z)^2} \right), \quad (75)$$

welche üblicherweise E. Kummer (1810–1893) zugeschrieben wird, welcher sie in der Arbeit *“Über die hypergeometrische Reihe  $1 + \frac{\alpha \cdot \beta}{1 \cdot \gamma} x + \frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{1 \cdot 2 \cdot \gamma(\gamma+1)} x^2 + \frac{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\beta(\beta+1)(\beta+2)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \gamma(\gamma+1)(\gamma+2)} x^3 + \text{etc.}$ ”* ([Kummer1], 1836) auf andere Weise aus einer allgemeineren Betrachtung heraus bewiesen hat.

Euler scheint solche Transformationen nie betrachtet zu haben, in welchen das letzte Argument einer quadratische Transformation untergeht, worauf gegen Ende dieses Abschnittes noch detaillierter eingegangen werden wird. Allerdings stößt Euler bei mehreren Begebenheiten auf die Reihe (74); exemplarisch sei seine Arbeit *“Nova methodus quantitates integrales determinandi”* ([EulerE464], 1775, ges. 1774) (E464: “Eine neue Methode Integrale zu bestimmen”), insbesondere §§ 32 – 39 erwähnt. Hier beginnt Euler von der Reihe

$$Q(z) = z \sin(u) + z^2 \sin(2u) + z^3 \sin(3u) + z^4 \sin(4u) + \text{etc.}$$

und zeigt, dass sie diesem Ausdruck gleichwertig ist

$$Q(z) = \frac{z \sin(u)}{1 - 2z \cos(u) + z^2}.$$

Über iterierte Integration und Differentiation lassen sich mehr Reihen aus der geschlossenen Formel für  $Q(z)$  ableiten, wie es Euler in besagter Arbeit auch tut; (74) ist ebenfalls darunter.

Ein anderer Weg, weder von Gauß noch von Euler bestritten, beginnt mit der geometrischen Reihe

$$\frac{1}{1-z} = 1 + z + z^2 + z^3 + z^4 + \text{etc.}$$

Setzt man nun  $z = re^{i\varphi}$ , sodass

$$\begin{aligned} \frac{1}{1-re^{i\varphi}} &= 1 + re^{i\varphi} + r^2e^{2i\varphi} + r^3e^{3i\varphi} + r^4e^{4i\varphi} + \text{etc.} \\ &= 1 + r \cos(\varphi) + r^2 \cos(2\varphi) + \dots + i(r \sin(\varphi) + r^2 \sin(2\varphi) + \dots) \end{aligned}$$

Die linke Seite kann beschrieben werden als

$$\begin{aligned} \frac{1}{1-re^{i\varphi}} &= \frac{1}{1-re^{i\varphi}} \cdot \frac{1-re^{-i\varphi}}{1-re^{-i\varphi}} = \frac{1-re^{-i\varphi}}{1-2re^{-i\varphi}-2re^{i\varphi}+r^2} \\ &= \frac{1-re^{-i\varphi}}{1-2\cos(\varphi)r+r^2} = \frac{1-r\cos(\varphi)}{1-2\cos(\varphi)r+r^2} + \frac{ir\sin(\varphi)}{1-2\cos(\varphi)r+r^2}. \end{aligned}$$

Also gibt ein Vergleich der Imaginärteile der beiden Seiten direkt die Euler'sche Formel. Entsprechend gelangt man durch  $(n-1)$ -fache Differentiation zu (74). Die Reihe taucht demnach unter anderem im Kontext anderer Integrale in Eulers Opus auf. Sie ließe sich ebenfalls in den schon diskutierten [EulerE672], [EulerE673], [EulerE674] entdecken (Abschnitt 5.2.4), zumal sie dort den Integranden des von Euler studierten Integrals bildet.

**Die Differentialgleichung für die hypergeometrische Funktion** Wöhingegen Gauß seine Investigationen mit der Differentialgleichung für die hypergeometrische Funktion beginnt<sup>139</sup>, haben Eulers Studien – diametral zu Gauß – in [EulerE710] ihren Ursprung in der Reihe (73), aus welcher er dann die Differentialgleichung deduziert. Seine Rechnungen sind sehr gradlinig und führen ihn zum bekannten Ergebnis, dass, wenn die hypergeometrische Reihe mit  $F$  abbreviiert wird, gilt:

$$0 = x(1-x) \frac{d^2F}{dx^2} + [c - (a+b+1)x] \frac{dF}{dx} - abF. \quad (76)$$

Die genauen Schritte können an dieser Stelle ausgespart werden.

<sup>139</sup>Dies bezieht sich auf den zweiten Teil von [Gauß3] aus dem Nachlass, ab § 38. Gauß erkennt hier insbesondere, dass es zweckmäßig ist, das Studium der hypergeometrischen Funktion von ihrer Differentialgleichung aus zu beginnen. Bei Euler bleibt sie ein Nebenprodukt.

§. 6. Hinc igitur adipiscimur hanc aequationem :

$$\partial . x^{b-a+1} \partial . x^a s = x^{b-c} \partial . x^c \partial s,$$

quae aequatio evoluta reducitur ad hanc formam :

$$x^{b+1} \partial \partial s + (a+b+1) x^b \partial s + a b x^{b-1} s = x^b \partial \partial s + c x^{b-1} \partial s.$$

Haec aequatio divisa per  $x^{b-1}$  et omnibus terminis ad partem dextram translatis induet hanc formam :

$$0 = x(1-x) \partial \partial s + [c - (a+b+1)x] \partial s - a b s$$

ita ut a resolutione huius aequationis differentialis secundi gradus summatio seriei propositae pendeat. At vero haec aequatio ita comparata esse videtur, ut in genere nullam integrationem admittat.

**Abbildung 25:** Euler gelangt in seiner Arbeit [EulerE710] zur Differentialgleichung für die hypergeometrische Funktion.

**Integrale zur Curva elastica** Die Elastica-Integrale, welche so genannt werden, weil sie bei Betrachtung der sogenannten *Curva elastica* auftreten, haben Euler an verschiedenen Stellen seiner Laufbahn eingenommen. Er behandelt sie unter anderem im zweiten Anhang der *Methodus* [EulerE65]; die Arbeit “*De miris proprietatibus curvae elasticae sub aequatione*  $y = \int \frac{xx}{\sqrt{1-x^4}}$  *contentae*” ([EulerE605], 1786, ges. 1775) (E605: “Über die wunderbaren Eigenschaften der Curva Elastica, welche mit der Gleichung  $y = \int \frac{xx}{\sqrt{1-x^4}}$  ausgedrückt wird”) ist in Gänze dieser Kurve gewidmet. Insbesondere die spezielle Formel

$$\int_0^1 \frac{x^2 dx}{\sqrt{1-x^4}} \cdot \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}} = \frac{\pi}{4} \quad (77)$$

hebt Euler wegen ihrer Symmetrie besonders hervor. Gauß tut es ihm in dieser Hinsicht gleich und bemerkt bei dieser Gelegenheit außerdem, dass Euler diese Formel und ähnliche andere “mit großer Arbeit” erlangt hat; “aus seinen Formeln folge sie hingegen leicht”. Es ist nicht ganz ersichtlich, auf welche Arbeit von Euler sich Gauß hier bezieht. Er könnte zum einen die Arbeit “*De productis ex infinitis factoribus ortis*” ([EulerE122], 1750, ges. 1739) (E122: “Über Produkte, die aus unendlich vielen Fakto-

ren entspringen”) meinen, wo Gleichung (77) sich in § 17 neben vielen anderen ähnlicher Gestalt findet. Jedoch ist besagte Abhandlung vornehmlich Produkten gewidmet, welche aus einem Quotienten bestehen, dessen Zähler und Nenner jeweils unendliche Produkte sind, deren Terme in einer arithmetischen Progression fortschreiten. Euler bemerkt, dass sich selbige als Quotient zweier Beta-Integrale darstellen lassen. Diese Integrale untersucht Euler dann gesondert in der Arbeit “*Observationes circa integralia formularum  $\int x^{p-1}dx(1-x^n)^{\frac{q}{n}-1}$  posito post integrationem  $x = 1$ ” ([EulerE321], 1766, ges. 1765) (E321: “Beobachtungen zu den Integralen der Form  $\int x^{p-1}dx(1-x^n)^{\frac{q}{n}-1}$ , wenn nach der Integration  $x = 1$  gesetzt wird”), wo sich auch alle von Gauß in [Gauß3] zu diesem Thema behandelten Integrale finden. Es ist wahrscheinlich, dass Gauß die letzte genannte Euler’sche Arbeit nicht bekannt war, weil die erwähnte Eigenschaft der *Elastica* ein leichtes Korollar der dortigen Untersuchungen ist. So wird Gauß sich aller Wahrscheinlichkeit nach auf die Arbeit [EulerE605] beziehen, wo Euler in seinen Studien zur *Curva elastica* erst in § 21 zur oben erwähnten Eigenschaft gelangt. Da Euler in diesen Abhandlungen alles aus den Eigenschaften der Kurve selbst heraus ableitet, ist der Beweis naturgemäß umfassender als der Gauß’sche Zugang (und identische Euler’sche in [EulerE321]) über das Beta-Integral.*

Seit Legendre wird (77) sie indes als Spezialfall der nach ihm benannten Relation

$$K(\varepsilon)E(\sqrt{1-\varepsilon^2}) + E(\varepsilon)K(\sqrt{1-\varepsilon^2}) + K(\varepsilon)K(\sqrt{1-\varepsilon^2}) = \frac{\pi}{2}$$

mit

$$K(\varepsilon) = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-\varepsilon^2x^2)}} \quad \text{und} \quad E(\varepsilon) = \int_0^1 \frac{\sqrt{1-\varepsilon^2x^2}}{\sqrt{1-x^2}} dx$$

gesehen. Diese Formel findet sich bei Legendre in seinem Buch [Legendre2] (S. 61).

**Die Integraldarstellung der Gamma-Funktion mitsamt Herleitung**  
 In § 28 gibt Gauß eine Herleitung der Integraldarstellung der Fakultät an, genauer:

*Théorème sur les fonctions de première et de seconde espèce, dont les modules sont complémens l'un de l'autre.*

(42). Dans les comparaisons qu'on vient d'établir entre les fonctions  $F'(c)$ ,  $E'(c)$ , qui se rapportent au module  $c = \frac{1}{2} \sqrt{2 - \sqrt{3}}$   $= \sin 15^\circ$ , et les fonctions  $F'(b)$ ,  $E'(b)$ , qui se rapportent au module complémentaire  $b = \frac{1}{2} \sqrt{2 + \sqrt{3}} = \cos 15^\circ$ , les trois équations trouvées conduisent à ce résultat remarquable

$$\frac{\pi}{2} = F'(c) E'(b) + F'(b) E'(c) - F'(b) F'(c) \dots (d')$$

**Abbildung 26:** Legendre gibt in seinem Buch [Legendre2] die nach ihm benannte Relation für die elliptischen Integrale für die speziellen Werte  $b = \frac{1}{2} \sqrt{2 + \sqrt{3}}$  und  $c = \frac{1}{2} \sqrt{2 - \sqrt{3}}$  an.

$$n! = \int_0^{\infty} y^{n-1} e^{-y} dy.$$

Gauß' Idee ist dabei, das Integral

$$\int_0^m y^{n-1} \left(1 - \frac{y}{m}\right)^m dy$$

zunächst für endliches  $m$  zu berechnen und anschließend  $m$  unendlich groß werden zu lassen. Gauß nimmt also an, dass

$$\begin{aligned} & \lim_{m \rightarrow \infty} \int_0^m y^{n-1} \left(1 - \frac{y}{m}\right)^m dy \\ &= \int_0^{\lim_{m \rightarrow \infty} m} y^{n-1} \lim_{m \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{y}{m}\right)^m dy = \int_0^{\infty} y^{n-1} e^{-y} dy. \end{aligned}$$

Das letzte Integral ist gerade die  $\Gamma$ -Funktion. Natürlich ist die Gauß'sche Herleitung aus moderner Sicht wegen der zwei gleichzeitig ins Unendliche wachsenden Ausdrücke nicht vollkommen streng. Ein rigoroser Beweis nach dem Gauß'schen Vorbild findet man beispielsweise in der Monografie "Die

*Gammafunktion*” von Nielsen (1865–1931) ([Nielsen], 1905).

Gauß leitet die  $\Gamma$ -Funktion aus einem Integral über algebraische Funktionen, genauer Beta-Integrale, her, was dem Euler’schen Ansatz aus [EulerE19] ähnelt<sup>140</sup>. Euler gelangt mit seinen Überlegungen im Unterschied zu Gauß zum Ausdruck

$$n! = \int_0^1 \left( \log \left( \frac{1}{x} \right) \right)^n dx,$$

welcher obigem vermöge der Substitution  $x = e^y$  gleichwertig ist. Weiterhin illustriert Euler durch die beigefügten verbalen Erläuterungen ein Beispiel für die Methodus inveniendi, welches hier nicht vorenthalten werden soll. In §§ 3–7 des besagten Papiers [EulerE19] schreibt er:

*“Ich hatte zuvor geglaubt, dass der allgemeine Term der Reihe 1, 2, 6, 24 etc., wenn nicht algebraisch, dennoch als Exponentialfunktion gegeben ist. Aber nachdem ich herausgefunden hatte, dass gewisse Terme von der Quadratur des Kreises abhängen<sup>141</sup>, bin ich zur Erkenntnis gelangt, dass weder algebraische noch exponentielle Größen hinreichen, um sie auszudrücken. [...] Nachdem ich beobachtet hatte, dass unter den Differentialen Formeln solcher Art existieren, welche eine Integration in gewissen Fällen zulassen und dann auch algebraische Größen geben, aber in anderen keine Integration zulassen und dann Quadraturen darbieten, welche von der Quadratur des Kreises abhängen, kam es mir in den Sinn, dass solche Formeln womöglich geeignet sind, den allgemeinen Term der erwähnten und anderen Progressionen auszudrücken. [...] Aber die Differentialform muss eine variable Größe beinhalten. [...] Der Klarheit wegen sage ich, dass  $\int p dx$  der allgemeine Term der aufzufindenden Progression ist, welche man wie folgt findet; man lasse  $p$  eine Funktion von  $x$  und Konstanten bedeuten, unter welchen  $n$  enthalten sein muss. Man stelle sich  $p dx$  integriert vor und eine solche Konstante addiert, dass für  $x = 0$  das ganze Integral verschwindet; dann setze man*

<sup>140</sup>Euler wiederholt die auf diesem Gedankengang basierende Herleitung in der deutlich später verfassten Arbeit [EulerE421]. Eulers Argumentationskette ist an vielen Stellen auseinander gesetzt, etwa im Buch [Dunham2] und umfassender in [Aycock3].

<sup>141</sup>Euler spricht hier die Tatsache an, dass modern ausgedrückt, etwa  $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$  ist. Zu diesem Ergebnis ist er über das Wallis’sche Produkt für  $\pi$  gelangt, also der Formel

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2 \cdot 2}{1 \cdot 3} \cdot \frac{4 \cdot 4}{3 \cdot 5} \cdot \frac{6 \cdot 6}{5 \cdot 7} \cdots$$

Man vergleiche seine Ausführungen in § 2 von [EulerE19].

*x einer bekannten Größe gleich. Danach, wenn im gefundenen Integral nur Größen, welche sich auf die Progression beziehen, aufgefunden werden, wird es den Term ausdrücken, dessen Index n ist. Anders ausgedrückt, wird das in dieser Weise ausgedrückte Integral der allgemeine Term sein. [...] Daher habe ich viele Differentialformeln betrachtet, welche nur eine Integration zulassen, wenn man n als eine ganze positive Zahl nimmt, sodass die Hauptterme algebraisch werden, und habe daraus Progressionen gebildet.”*

Eulers grundlegende Einsicht besteht im Postulat der Existenz einer Funktion  $p(x, n)$  solcher Art, dass

$$n! = \int_a^b p(x, n) dx \quad \text{für } n \in \mathbb{N}.$$

In den folgenden Paragraphen probiert Euler systematisch mannigfache Funktionen<sup>142</sup> und gelangt schließlich zur Integraldarstellung der  $\Gamma$ -Funktion. Euler zeigt nun zuerst

$$\frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n}{(f + g)(f + 2g) \cdots (f + ng)} = \frac{f + (n + 1)g}{g^{n+1}} \int_0^1 x^{\frac{f}{g}} dx (1 - x)^n,$$

was leicht mit Induktion gezeigt wird<sup>143</sup>. Für  $g = 0$  reduziert sich der Ausdruck linker Hand nun auf  $1 \cdot 2 \cdots n = n!$ , also

$$\frac{n!}{f^n} = f \lim_{g \rightarrow 0} \int_0^1 \frac{x^{\frac{f}{g}} (1 - x)^n}{g^{n+1}} dx.$$

Um sich nun  $g$  im Nenner zu entledigen, setzt Euler  $x = y^{\frac{g}{f+g}}$  und gelangt zu

$$\frac{n!}{f^n} = f \lim_{g \rightarrow 0} \int_0^1 \frac{g}{f + g} \frac{\left(1 - y^{\frac{g}{f+g}}\right)^n}{g^{n+1}} dx.$$

Der Fall  $f = 1$  ist nun von besonderem Interesse, denn:

<sup>142</sup>Alle von Euler betrachteten Funktionen lassen sich leicht auf das Beta-Integral reduzieren.

<sup>143</sup>Euler tut dies allerdings in seiner Arbeit [EulerE19] nicht, ist sich aber angesichts seiner vorherigen Ausführung der Gültigkeit dieses Ausdrucks ebenfalls sicher.

$$n! = \lim_{g \rightarrow 0} \int_0^1 \frac{g}{1+g} \frac{\left(1 - x^{\frac{g}{1+g}}\right)^n}{g^{n+1}} dx.$$

Dies ist aber dasselbe wie:

$$n! = \lim_{g \rightarrow 0} \int_0^1 \frac{\left(1 - x^{\frac{g}{1+g}}\right)^n}{g^n} dx.$$

Den Grenzwert lässt sich in das Integral hineinziehen

$$n! = \int_0^1 \lim_{g \rightarrow 0} \frac{(1 - x^g)^n}{g^n} dx.$$

Der Grenzwert ist in letzterer Formel im Nenner der Potenz  $x$  bereits gezogen, und Umschreiben besagter Formel gibt

$$n! = \int_0^1 \left( \lim_{g \rightarrow 0} \frac{(1 - x^g)}{g} \right)^n dx,$$

was die Stetigkeit der Funktion  $x^n$  zu tun gestattet.

Für natürliches, aber auch nicht natürliches,  $n$  kann dieser Grenzwert mit der l'Hospital'schen Regel ermittelt werden. Man findet:

$$n! = \int_0^1 \left( \log \frac{1}{x} \right)^n dx.$$

Und dies ist natürlich die Integraldarstellung für  $\Gamma(n+1)$ . Daher erschließt sich die Euler'sche Präferenz dieser Formel gegenüber der heute üblichen

$$\Gamma(n+1) = \int_0^\infty t^n e^{-t} dt,$$

denn Euler wurde auf natürlichem Wege zu seiner Version geführt.

§. 14. Cum igitur fit  $\frac{1-x^0}{0} = -lx$ , erit  $\frac{(1-x^0)^n}{0^n} = (-lx)^n$ , et propterea terminus generalis quaesitus  $\int \frac{dx(1-x^0)^n}{0^n}$  transmutatus est in  $\int dx(-lx)^n$ . Cuius valor inueniri per quadraturas potest. Quamobrem huius progressionis 1, 2, 6, 24, 120, 720, etc. terminus generalis est  $\int dx(-lx)^n$ , eodem modo adhibendus, quo supra praeceptum est. Hunc autem esse terminum generalem progressionis propositae ex eo quoque cognoscitur, quod terminos, quorum indices sunt numeri integri affirmatiui, reuera praebeat, fit v. g.  $n=3$ , erit  $\int dx(-lx)^3 = \int -dx(lx)^3 = -x(lx)^3 + 3(xlx)^2 - 6xlx + 6x$  constantis additione opus non est, cum facto  $x=0$  omnia euanescant, ponatur igitur  $x=1$ , quia  $lx=0$ , omnes termini logarithmis affecti

**Abbildung 27:** Euler gelangt in seiner Arbeit [EulerE19] durch Grenzwertbildung zur Integraldarstellung der  $\Gamma$ -Funktion.

**Die Frullian'schen Integrale** Gauß betrachtet im letzten Paragraphen seiner Publikation [Gauß3] (§ 37) das Integral

$$\int_0^1 \frac{u^{\alpha-1} - u^{\beta-1}}{\log u} du = \log \left( \frac{\alpha}{\beta} \right), \quad (78)$$

welches heute zu den Frullian'schen Integralen gerechnet wird. Dies sind seit ihrer Einführung in der Arbeit "Sopra Gli Integrali Definiti" ([Frulliani], 1828) ("Über gewisse bestimmte Integrale") uneigentliche Integrale der Form

$$\int_0^{\infty} \frac{f(ax) - f(bx)}{x} dx.$$

Setzt man etwa für eine stetige Funktion  $f$  zum einen  $f(\infty) = B$  und  $f(0) = A$ , entspringt der allgemeine Ausdruck:

$$\int_0^{\infty} \frac{f(ax) - f(bx)}{x} dx = (B - A) \log \frac{a}{b}.$$

Von dieser Formel findet sich bei Euler in § 27 von [EulerE464] (in leicht anderer Form vorgestellt) die Behandlung für die spezielle Wahl  $f(x) = e^{-x}$ <sup>144</sup>.

Euler betrachtet explizit ebenfalls obiges Integral (78) um seiner selbst willen. Seine erste systematische Untersuchung findet sich in seiner Arbeit [EulerE464]. Obiges, auch von Gauß behandeltes, Integral findet sich dabei in § 6 dieses Papiers. Euler stellt eine Herleitung über Differenzieren unter dem Integralzeichen nach einem Parameter vor, eine bis dahin nicht geläufige Methode, eine “*Methoda nova*”, wie Euler im Titel schreibt. Sein Argument lautet wie folgt: Bekanntermaßen gilt

$$\int_0^1 x^{\alpha-1} dx = \frac{1}{\alpha} \quad \text{für } \alpha > 0.$$

Integriert man diese Gleichheit nun über  $\alpha$  von  $x = a$  bis  $x = b$ , erhält man

$$\int_a^b \int_0^1 x^{\alpha-1} dx d\alpha = \int_0^1 \frac{x^{b-1} - x^{a-1}}{\log x} dx = \log \alpha \Big|_a^b = \log \left( \frac{b}{a} \right),$$

was gerade (78), lediglich mit anderen Buchstaben, ist.

In seiner Arbeit [Gauß3] sagt Gauß aber explizit, dass Euler ebenfalls – allerdings mit einer anderen Methode – zu diesem Integral gelangt ist. Er selbst deduziert (78) als speziellen Fall der  $\psi$ -Funktion, welche eigens noch gleich besprochen wird.

Mit den “anderen” Methoden bezieht sich Gauß allerdings wahrscheinlich auf die just vorgestellte Methode des Differenzierens unter dem Integralzeichen als auf die Euler’sche Abhandlung “*Observationes in aliquot theorematibus illustrissimis de la Grange*” ([EulerE587], 1785, ges. 1775) (E587:

---

<sup>144</sup>Integrale der Form

$$\int_0^1 \frac{R(x)}{\log x} dx$$

mit einer Funktion  $R$ , sodass  $R(0) = R(1) = 0$ , haben wiederholt Eulers Untersuchungen eingenommen. Stellvertretend sei Arbeit “*De valore formulae integralis  $\int \frac{x^{a-1} dx}{\log x} \cdot \frac{(1-x^b)(1-x^c)}{(1-x^n)}$  a termino  $x = 0$  usque ad  $x = 1$  extensae*” ([EulerE500], 1780, ges. 1776) (E500: “Über den Wert des Integrals  $\int \frac{x^{a-1} dx}{\log x} \cdot \frac{(1-x^b)(1-x^c)}{(1-x^n)}$  erstreckt von der Grenze  $x = 0$  bis hin zur Grenze  $x = 1$ ”) erwähnt.

§. 6. Simile ratiocinium etiam ad formulam  
 integrelem generaliore  $\int \frac{(z^m - 1) dz}{lz}$  accommodari  
 potest, ac tandem reperietur casu  $z = 1$  eius valo-  
 rem fore  $l(m + 1)$ ; quia igitur pari modo erit

$$\int \frac{(z^n - 1) dz}{lz} = l(n + 1),$$

si hanc ab illa subtrahamus, prodit sequens integratio

$$\int \frac{(z^m - z^n) dz}{lz} = l \frac{m + 1}{n + 1}$$

**Abbildung 28:** Euler gibt in seiner Arbeit [EulerE464] ein Frulliani'sches Integral an. Die Grenzen der Integration sind  $z = 0$ , was Euler nicht explizit erwähnt, und  $z = 1$  für die obere Grenze.

“Bemerkungen zu einigen Themen des höchst illustren Lagrange”). Denn hier, neben der in [EulerE464] präferierten Methode des Differenzierens unter dem Integralzeichen, bemerkt Euler in §§ 15–18, dass

$$x^\alpha = e^{\alpha \log x} = 1 + \frac{\alpha \log(x)}{1} + \frac{\alpha^2 \log^2(x)}{1 \cdot 2} + \frac{\alpha^3 \log^3(x)}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \text{etc..}$$

Weiterhin

$$x^\alpha - x^\beta = 1 + \frac{(\alpha - \beta) \log(x)}{1} + \frac{(\alpha^2 - \beta^2) \log^2(x)}{1 \cdot 2} + \frac{(\alpha^3 - \beta^3) \log^3(x)}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \text{etc.}$$

Zieht man nun die folgende Darstellung für die Fakultät heran

$$\int_0^1 \log^n(x) dx = (-1)^n n!,$$

entspringt durch durch gliedweises Integrieren die Formel

$$\int_0^1 \frac{x^\alpha - x^\beta}{\log x} dx = \frac{\alpha - \beta}{1} - \frac{\alpha^2 - \beta^2}{2} + \frac{\alpha^3 - \beta^3}{3} - \frac{\alpha^4 - \beta^4}{4} + \text{etc..}$$

Demnach zeigt die bekannte Potenzreihe  $\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots$ , dass gerade gilt:

$$\int_0^1 \frac{x^\alpha - x^\beta}{\log x} dx = \log(\alpha + 1) - \log(\beta + 1) = \log \frac{\alpha + 1}{\beta + 1},$$

welches (78) mit leicht anderen Buchstaben ist. Inhaltlich geht also Gauß auch hier nicht über Euler hinaus. Insbesondere der letzte Euler'sche Beweis ist gar unmittelbarer als der Gauß'sche, welcher die Formel auch hier als speziellen Wert einer Funktion auffasst.

**Die  $\psi$ -Funktion** Euler kommt in seinen Arbeiten der logarithmischen Ableitung der  $\Gamma$ -Funktion, welche oft mit  $\psi$  notiert wird, sehr nahe, wovon weiter oben (Abschnitt 5.2.2) schon Zeugnis abgelegt worden ist. In seiner Arbeit [Gauß3] definiert Gauß selbige als

$$\Psi(z) = \Psi(0) + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{z}. \quad (79)$$

Demnach ist  $\Psi$  eine Interpolation der harmonischen Summe  $H_n := \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$ . Die Gauß'sche Funktion  $\Psi(z)$  ist mit der heute gebräuchlicheren  $\psi$ -Funktion über die simple Gleichung  $\Psi(z-1) = \psi(z)$  verknüpft. Euler behandelt Interpolationsprobleme dieser Art an verschiedenen Stellen mit immer wieder anderen Methoden. Die harmonische Summe tritt etwa in [EulerE20] auf, genauer betrachtet Euler dort in § 4 das Integral

$$h(n) = \int_0^1 \frac{1-x^n}{1-x} dx. \quad (80)$$

Bemerkt man nun

$$1 + x + x^2 + x^3 + \dots + x^{n-1} = \frac{1-x^n}{1-x},$$

gilt

$$h(n) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k},$$

sodass  $h(n)$  ebenfalls die harmonische Reihe bedeutet. In besagter Abhandlung gibt Euler außerdem die exakten Summationen für die Werte  $n = \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}$  etc. an, deren erster

$$h\left(\frac{1}{2}\right) = 2 - 2 \log 2$$

ist.

Nach dem Vorwort zu Band 19 der Serie 1 der *Opera Omnia* ([Faber2], 1936) (S. LXV) findet man die Formel (Gleichung [77] in Gauß' Arbeit [Gauß3])

$$\psi(x) = \int_0^1 \left( -\frac{1}{\log z} - \frac{z^{x-1}}{1-z} \right) dz \quad (81)$$

nicht in den Euler'schen Arbeiten. Lediglich der Spezialfall  $x = 1$  taucht in Eulers Arbeiten auf; etwa in seinen Arbeiten "*De numero memorabili in summatione progressionis harmonicae naturalis occurrente*" ([EulerE583], 1785, ges. 1776) (E583: "Über die bemerkenswerte Zahl, die in der Summation der natürlichen harmonischen Progression auftritt"), besonders in § 18, und "*Evolutio formulae integralis  $\int dx \left( \frac{1}{1-x} + \frac{1}{\log x} \right)$  a termino  $x = 0$  ad  $x = 1$  extensae*" ([EulerE629], 1789, ges. 1776) (E629: "Entwicklung der Integralformel  $\int dx \left( \frac{1}{1-x} + \frac{1}{\log x} \right)$  erstreckt von der unteren Grenze  $x = 0$  bis hin zu  $x = 1$ "). Eulers Aufmerksamkeit richtet sich dabei auf die Euler-Mascheroni-Konstante, heute mit  $\gamma$  bezeichnet<sup>145</sup>, definiert als

$$\gamma := \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \log(n) \right).$$

Im Gegensatz zu Gauß betrachtet er das obige titelgebende Integral aus [EulerE629] nicht als einen Spezialfall einer allgemeineren Formel. Jedoch, Eulers Formel aus dem zuletzt genannten Werk gebrauchend

$$\gamma = \int_0^1 \left( \frac{dx}{1-x} + \frac{1}{\log x} \right) dx$$

und sie von seiner Interpolationsformel für die harmonische Reihe subtrahierend (80), offenbart unmittelbar die Gauß'sche Formel (81).

---

<sup>145</sup>Die Ursache, warum diese Konstante heute mit  $\gamma$  und nicht etwa mit  $C$ , wie Euler sie bei seiner Erstentdeckung in [EulerE43] genannt hat, notiert wird, eruiert Sandifer in seinem Artikel "*Gamma the constant*" ([Sandifer18], 2007).

Demnach hätte Euler ohne große Mühe auch diese Identität eruieren können. Zumal für Gauß (79) den Ausgangspunkt bildet, weiß er um die Wichtigkeit des Wertes  $\Psi(0)(= \psi(1)) = -\gamma$  für seine späteren Untersuchungen, wohingegen Euler aller Wahrscheinlichkeit nach diese Integraldarstellung nicht nieder geschrieben hat, weil andere Fragen sein Interesse auf sich zogen. Diese Unterschiedlichkeit der Ausgangsfrage bzw. der betrachteten Gegenstände kann überdies als ein zentrale Unterschied zwischen der Mathematikphilosophie Gauß' und Eulers angesehen werden.

**Die Nachbarschaftsrelationen und Kettenbrüche** Die sogenannten Nachbarschaftsrelation werden von Gauß in §§ 7–11 von [Gauß3] eingeführt und anschließend einem Studium unterworfen. Diese können als homogene Differenzgleichungen der ersten drei Argumente der hypergeometrischen Funktion  ${}_2F_1(\alpha, \beta, \gamma; z)$  gedeutet werden. In § 7 listet Gauß alle 15 möglichen Gleichungen dieser Art auf. Die Verbindung zum Euler'schen Werk wird erkannt, sofern man die Nachbarschaftsrelationen betrachtet, welche sich nur in einem Argument auf einmal verändern. Als Beispiel sei Gleichung [1] aus Gauß' Arbeit herangezogen:

$$0 = (\gamma - 2\alpha - (\beta - \alpha)z) {}_2F_1(\alpha, \beta, \gamma; z) \quad (82)$$

$$+ \alpha(1 - x) {}_2F_1(\alpha + 1, \beta, \gamma; z) - (\gamma - \alpha) {}_2F_1(\alpha - 1, \beta, \gamma; z).$$

Diese ist also eine Differenzgleichung in  $\alpha$ , von welchem Parameter die Koeffizienten lineare Funktionen sind, Gleichungen welcher Gattung oben (Abschnitt 5.2.3) auseinander gesetzt worden sind. Die Verbindung besagter Untersuchungen zur hypergeometrischen Funktion verlangt einige vorauszuschickende Erklärungen: Genauer bedarf es Eulers Arbeit "*Constructio aequationis differentio-differentialis*  $Aydu^2 + (B + Cu)dudy + (D + Eu + Fuu)ddy = 0$ " ([EulerE274], 1763, ges. 1760) (E274: "Konstruktion der Differentialgleichung  $Aydu^2 + (B + Cu)dudy + (D + Eu + Fuu)ddy = 0$ "). Diese Abhandlung, wie der Titel bereits andeutet, handelt von der Konstruktion einer Lösung zur allgemeinen Differentialgleichung

$$A \frac{d^2y}{du^2} + (B + Cu) \frac{dy}{du} + (D + Eu + Fu^2)y = 0. \quad (83)$$

Dafür nimmt Euler in § 3 von besagter Abhandlung an, dass eine Lösung in dieser Form gegeben ist

$$y = \int Pdx(u + x)^n,$$

$$\int P dx (u+x)^{n-2} \left( \begin{array}{l} + Auu \quad + 2Aux \quad + Axx \\ + nCuu \quad + nCux \quad + nBx \\ + nBu \quad + n(n-1)D \\ + n(n-1)Eu \quad + n(n-1)Eu \end{array} \right)$$

cuius propterea differentiale aequari oportet huic:

$$(u+x)^{n-2} \left( u dR + x dR + (n-1)R dx \right)$$

Quia autem R ab u pendere non debet, conditiones satisficientes his aequationibus continentur:

$$\begin{aligned} A + nC + n(n-1)F &= 0 \\ dR &= (2A + nC)Px dx + n(B + (n-1)E)P dx \\ x dR + (n-1)R dx &= APxx dx + nBPx dx + n(n-1)DP dx. \end{aligned}$$

**Abbildung 29:** Eulers Erläuterung der Wahl der Funktion  $P$  zur Erfüllung einer vorgelegten Differentialgleichung mit dem Ausdruck  $\int P dx (u+x)^n$  aus seiner Arbeit [EulerE274].

wo  $P$  eine zu diesem Zeitpunkt noch unbekannte Funktion von  $x$  und  $n$  ein von diesem  $x$  unabhängiger Parameter ist. Die Grenzen des Integrals sind an die jeweiligen Bedingungen anzupassen.

Der Vergleich von (83) mit der Differentialgleichung der hypergeometrischen Reihe (76) enthüllt letztere als Spezialfall der ersten. Die Arbeit [EulerE273] bricht unvermittelt nach ersten Beispielen ab<sup>146</sup>. So bleibt es im Unklaren, wie nahe Euler der Integraldarstellung von (73)

$$B(\beta, \gamma - \beta) {}_2F_1(\alpha, \beta, \gamma; z) = \int_0^1 t^{\beta-1} (1-t)^{\gamma-\beta-1} (1-zt)^{-\alpha} dt \quad (84)$$

wirklich kommt. Hier ist  $B(x, y)$  wieder das Beta-Integral definiert als

<sup>146</sup>In der *Opera Omnia* Version ([Speiser3], 1936) der Arbeit [EulerE274] erfährt der Leser von A. Speiser in einer Fußnote, dass der Rest der originalen Arbeit im editorialem Prozess verloren gegangen ist.

$$B(x, y) := \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1} dt \quad \text{für } \operatorname{Re}(x) > 0, \operatorname{Re}(y) > 0.$$

Die Darstellung (84), die oft als Integral des Euler'schen Typs bezeichnet wird<sup>147</sup>, obwohl Euler selbst diese Formel nie selbst niedergeschrieben zu haben scheint<sup>148</sup>. Am nächsten kommt der Integraldarstellung noch ein Ausdruck aus dem zweiten Teil seiner *Calculi Integralis* [EulerE366] Hier gibt Euler in § 1033, modern ausgedrückt

$$y(u) := \int_0^c x^{n-1}(u^2 + x^2)^\mu (c^2 - x^2)^\nu dx$$

als Lösung der Differentialgleichung

$$u(c^2 + u^2)y'' - ((n + 2\mu - 1)(c^2 + u^2) + 2(\mu + \nu)u^2)y' + 2\mu(n + 2\mu + 2\nu)uy = 0$$

an. Die Wesensnähe dieser Gleichung zur Differentialgleichung der hypergeometrischen Reihe (76) und der Integraldarstellung für  $y(u)$  zu (84) ist offenkundig.

Mit diesen Ausführungen kann die Verbindung von Eulers Werk zu (82) geschlagen werden. Genauer sind die Ergebnisse und Ideen der Arbeiten [EulerE123], “*De formatione fractionum continuarum*” ([EulerE522], 1782, ges. 1775) (E522: “Über die Konstruktion von Kettenbrüchen”), [EulerE594] vonnöten: Wie Gauß die Kettenbrüche aus den Nachbarschaftsrelationen ableitet, so tut Euler es ihm in den erwähnten Arbeiten gleich, indem er homogene Differenzgleichungen mit linearen Koeffizienten der Form wie folgt umschreibt (siehe auch Abschnitt (5.2.3) für den Bezug zur Mellin-Transformierten.):

$$(a + \alpha n)f(n) = (b + \beta n)f(n + 1) + (c + \gamma n)f(n + 2), \quad (85)$$

<sup>147</sup>Man konsultiere beispielsweise das Buch “*Theory of Hypergeometric Functions*” ([Aomoto], 2011).

<sup>148</sup>Verschiedene Autoren beziehen wie etwa [Weisstein] sich dabei auf Baileys Buch “*Generalized hypergeometric Series*” ([Bailey], 1935) als das erstzitierende Buch mit der Angabe, wo Euler diese Formel aufgeschrieben haben soll. Aber weder der entsprechende Abschnitt noch die Bibliographie von Baileys Monografie beinhalten eine Referenz zu Eulers Arbeiten.

1033. Si capiatur  $a=c$ , vt postrema pars fiat  $=0$ , siquidem exponens  $\nu+1$  sit nihilo maior, formula  $y = \int x^{\nu-1} dx (uu+xx)^{\mu} (cc-xx)^{\nu}$  posito  $x=c$  post integrationem ita peractam vt casu  $x=0$  fiat  $y=0$ , erit integrale huius aequationis

$$u(cc+uu)ddy - (n+2\mu-1)(cc+uu)dudy - 2(\mu+\nu)uududy + 2\mu(n+2\mu+2\nu)u^2du^2 = 0.$$

**Abbildung 30:** Euler gelangt in den Ausführungen seines Lehrbuchs zur Integralrechnung [EulerE366] zu einer Integraldarstellung einer Funktion, welche derjenigen der hypergeometrischen Reihe (84) sehr ähnlich ist.

sodass die Beziehung zum Gauß'schen Ergebnis aufgedeckt wird. Der Hauptunterschied der beiden Autoren besteht darin, dass Euler primär an Kettenbrüchen interessiert ist und bemerkt, dass er sie aus der Differenzgleichung heraus konstruieren kann, wohingegen Gauß von Differenzgleichung aus beginnt und die Kettenbrüche als Nebenprodukt erhält. Dieses Diametrale zwischen der Gaußschen und Euler'schen Herangehensweise spiegelt zugleich dem Unterschied der Arbeitsweise der beiden Mathematiker insgesamt wider.

Bündig soll betrachtet werden, wie Gauß die Kettenbrüche für den Quotienten zweier hypergeometrischer Reihen abgeleitet hat. Neben vielen anderen nennt er den folgenden Kettenbruch (Gleichung [25] in [Gauß3]):

$$\frac{{}_2F_1(\alpha, \beta + 1, \gamma + 1; x)}{{}_2F_1(\alpha, \beta, \gamma; x)} = \frac{1}{1 - \frac{ax}{1 - \frac{bx}{1 - \frac{cx}{1 - \frac{dx}{1 - \text{etc.}}}}}} \quad (86)$$

mit

$$\begin{array}{ll}
a = \frac{\alpha(\gamma - \beta)}{\gamma(\gamma + 1)} & b = \frac{(\beta + 1)(\gamma + 1 - \alpha)}{(\gamma + 1)(\gamma + 2)} \\
c = \frac{(\alpha + 1)(\gamma + 1 - \beta)}{(\gamma + 2)(\gamma + 3)} & d = \frac{(\beta + 2)(\gamma + 2 - \alpha)}{(\gamma + 3)(\gamma + 4)} \\
e = \frac{(\alpha + 2)(\gamma + 2 - \beta)}{(\gamma + 4)(\gamma + 5)} & f = \frac{(\beta + 3)(\gamma + 3 - \alpha)}{(\gamma + 5)(\gamma + 6)} \\
\text{etc.} & \text{etc.}
\end{array}$$

Gauß gibt weiter Kettenbrüche für andere Quotienten (siehe die Gleichungen [26]-[30] in [Gauß3]), von welchen

$$\frac{{}_2F_1(\alpha, \beta + 1, \gamma; x)}{{}_2F_1(\alpha, \beta, \gamma; x)} = \frac{1}{1 - \frac{\alpha x}{\gamma} \cdot \frac{{}_2F_1(\alpha, \beta + 2, \gamma; x)}{{}_2F_1(\alpha, \beta, \gamma; x)}}$$

erwähnt sei.

Auch Euler schreibt die Differenzgleichung (85) um, nämlich wie nachstehend:

$$\frac{f(n)}{f(n+1)} = \frac{b + \beta n}{a + \alpha n} + \frac{c + \gamma n}{a + \alpha n} \frac{f(n+2)}{f(n+1)}.$$

Auf diese Weise, indem man die letzte Gleichung wiederholt anwendet, gelangt man zu der Gleichung (siehe § 50 in [EulerE123]):

$$\frac{f(1)}{f(0)} = \frac{a}{b + \frac{(a + \alpha)c}{b + \beta + \frac{(a + 2\alpha)(c + \gamma)}{b + 2\beta + \frac{(a + 3\alpha)(c + 2\gamma)}{b + 3\beta + \frac{(a + 4\alpha)(c + 3\gamma)}{b + 4\beta + \text{etc.}}}}}.$$

Nach vielen Beispielen, setzt Euler schließlich in § 63 von [EulerE123]

$$P = x^{m-1}(1 - x^r)^n(p + qx^r)^\kappa \quad \text{und} \quad R = x^r, \quad (87)$$

was die folgende Differenzgleichung produziert

$$(a + \nu\alpha) \int_0^1 PR^\nu dx = (b + \nu\beta) \int_0^1 PR^{\nu+1} dx + (c + \nu\gamma) \int_0^1 PR^{\nu+2} dx,$$

Dummodo ergo  $m$  et  $n+1$  fuerint numeri affirmatiui, quo  $R^{m+r}S$  euanescat posito tam  $x=0$ , quam  $x=1$ , prodibit sequens expressio

$$\frac{\int_0^1 x^{m+r-1} dx (1-x^r)^n (p+qx^r)^\kappa}{\int_0^1 x^{m-1} dx (1-x^r)^n (p+qx^r)^\kappa} = \frac{\int PR dx}{\int P dx} \text{ quae propterea aequalis erit huic fractioni continuae}$$

$$\frac{m \cdot p}{m(p-q) + (n+1)pr - (n+1)qr + \frac{pq(m+r)(m+nr + (n+2)r)}{m(p-q) + (n+2)pr - (n+2)qr + \frac{pq(m+2r)(m+(n+1)r + (n+2)r)}{m(p-q) + (n+3)pr - (n+3)qr + \dots}}$$

**Abbildung 31:** Euler stellt in seiner Arbeit [EulerE123] den Quotienten von zwei hypergeometrischen Funktionen, hier ausgedrückt über Integrale, als Kettenbruch dar.

sodass in der Notation von (85) dann  $f(n) = \frac{1}{0} PR^n dx$  ist. Diese Gleichung führt zum Kettenbruch für den Quotienten

$$\frac{\int_0^1 PR dx}{\int_0^1 P dx} = \frac{\int_0^1 x^{m+r-1} dx (1-x^r)^n (p+qx^r)^\kappa}{\int_0^1 x^{m-1} dx (1-x^r)^n (p+qx^r)^\kappa}. \tag{88}$$

Bemerkt man weiter, dass

$$\int_0^1 x^{m+r-1} dx (1-x^r)^n (p+qx^r)^\kappa$$

vermöge (84) ausgedrückt werden kann, weist dies (88) als Quotienten zweier hypergeometrischer Reihen nach<sup>149</sup>. Demnach hat also auch Euler schon die Kettenbrüche für die benachbarten hypergeometrischen Funktionen zutage gefördert, obwohl er keine Erwähnung davon macht, nicht zuletzt weil er wie erwähnt die Integraldarstellung (84) nicht explizit niedergeschrieben zu haben scheint.

Den Abschluss dieses Themenblockes bildet die Erwähnung, dass der von Gauß ([36] in [Gauß3]) gegebene Kettenbruch

<sup>149</sup>Diesen findet man auch im Buch “Geschichte der Mathematik 1700–1900” [Dieudonné] (p. 38), jedoch ohne Bezugnahme auf die hypergeometrische Reihe.

$$\begin{aligned}
{}_2F_1\left(\frac{m}{n}, 1, \gamma, -\gamma nt\right) &= 1 - mt + m(m+n)nt - m(m+n)(m+2n)t^3 + \text{etc.} \\
&= \frac{1}{1 + \frac{mt}{1 + \frac{nt}{1 + \frac{(m+n)t}{1 + \frac{2nt}{1 + \frac{(m+2n)t}{1 + 3nt + \text{etc.}}}}}}}
\end{aligned}$$

von Euer in der Abhandlung “*De transformatione seriei divergentis 1 - mx + m(m+n)x^2 - m(m+n)(m+2n)x^3 + etc. in fractionem continuam*” ([EulerE616], 1788, ges. 1776) (E616: “Über die Transformation der divergenten Reihe  $1 - mx + m(m+n)x^2 - m(m+n)(m+2n)x^3 + \text{etc.}$  in einen Kettenbruch”) einer Untersuchung unterworfen wird. Auch dieses Exempel zeigt einen zentralen Unterschied zwischen Euler und Gauß: Euler widmet seine Arbeiten sehr oft einer einzigen sehr speziellen Frage, einem einzelnen Objekt oder einer Funktion, Technik oder Methode, Gauß hingegen stellt erst die allgemeine Theorie vor und geht dann zu Beispielen über, womit die Hankel’sche Analyse des Euler’schen Arbeitshabitus eine weitere Bestätigung erfährt (siehe den entsprechenden Paragraphen aus Abschnitt 3.2.2).

**Die Gauß’sche Summationsformel für die hypergeometrische Reihe** Hier wird nachgewiesen, dass Euler die sogenannte Gauß’sche Summationsformel für die hypergeometrische Reihe bereits gekannt hat. Grundlage des schon in der Arbeit “*Euler and the Gaussian Summation Formula for the Hypergeometric Series*” ([Aycock10], 2024) vorgetragenen Arguments konstituiert die Euler’sche Ausarbeitung “*Plenior expositio serierum illarum memorabilium, quae ex unciis potestatum binomii formantur*” ([EulerE663], 1794, ges. 1776) (E663: “Eine umfassendere Erklärung jener merkwürdigen Reihen, welche aus den Binomialkoeffizienten gebildet werden”). Es soll

$${}_2F_1(\alpha, \beta, \gamma; 1) = \frac{\Gamma(\gamma - \alpha - \beta)\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\gamma - \alpha)\Gamma(\gamma - \beta)} \quad \text{mit} \quad \text{Re}(\gamma) > \text{Re}(\alpha + \beta) \quad (89)$$

gezeigt werden. Die Darstellung (84) darf angesichts der vorherigen Betrachtungen als Euler ebenfalls bekannt vorausgesetzt werden. Natürlich kann

letztgenannte leicht gezeigt werden, indem man  $(1 - zt)^{-a}$  in eine Potenzreihe entwickelt und termweise integriert, von welchem Grundgedanken die gesamte Euler'sche Abhandlung [EulerE663] durchzogen ebenfalls durchzogen ist. So möchte Euler in § 19 die Reihe

$$S = 1 + \mathfrak{A}A + \mathfrak{B}B + \mathfrak{C}C + \mathfrak{D}D + \text{etc.}$$

summieren, wo er die Zahlen  $A, B, C, D$  etc. und  $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}, \mathfrak{D}$  etc. wie folgt definiert: Er setzt

$$(1 - x^b)^{-\frac{a}{b}} = 1 + Ax^b + Bx^{2b} + Cx^{3b} + \text{etc.}$$

und

$$(1 - x^b)^{-\frac{a}{b}} = 1 + \mathfrak{A}x^b + \mathfrak{B}x^{2b} + \mathfrak{C}x^{3b} + \text{etc.}$$

In moderner Notation ausgedrückt, nimmt Euler demnach die Summation der folgenden Reihe in Angriff:

$$S = 1 + \binom{\frac{a}{b}}{1} \binom{\frac{\alpha}{b}}{1} + \binom{\frac{a}{b}}{2} \binom{\frac{\alpha}{b}}{2} + \binom{\frac{a}{b}}{2} \binom{\frac{\alpha}{b}}{2} + \text{etc.} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\frac{a}{b}}{k} \binom{\frac{\alpha}{b}}{k}. \quad (90)$$

Sein Endresultat, immer noch im selben Paragraphen, ist

$$S = \frac{1}{\Delta} \int_0^1 \frac{x^{a-1} dx}{\sqrt[b]{(1-x^b)^{a+\alpha}}} \quad \text{mit} \quad \Delta = \frac{\pi}{b \sin \frac{a\pi}{b}}. \quad (91)$$

Vergleicht man das Integral in Eulers Formel mit (84) möchte man auf Grund der drei Parameter annehmen, dass die Euler'sche Formel schon zu (89) äquivalent ist. Allerdings zeigt eine schnelle Rechnung:

$$S = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\frac{a}{b}}{k} \binom{\frac{\alpha}{b}}{k} = {}_2F_1 \left( \frac{a}{b}, \frac{\alpha}{b}, 1; 1 \right).$$

Dass (91) tatsächlich nicht drei *unabhängige* Parameter beinhaltet bzw. nur von den zwei Verhältnissen  $a : b$  und  $\alpha : b$  abhängig ist, wird unter der Verwendung der Substitution  $y = x^b$  und anschließender Vereinfachung schnell eingesehen.

Um die Summationsformel (89) aus den Euler'schen Formeln heraus zu zeigen, bedarf es des Ergebnisses aus § 22 von [EulerE663]. In der Beschreibung des dort vorgestellten Problems möchte er die Summe der folgenden Reihe finden:

$$\binom{\frac{a}{b}}{n} \binom{\frac{a}{b}}{0} + \binom{\frac{a}{b}}{n+1} \binom{\frac{a}{b}}{1} + \binom{\frac{a}{b}}{n+1} \binom{\frac{a}{b}}{2} + \text{etc.} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\frac{a}{b}}{n+k} \binom{\frac{a}{b}}{k},$$

was gerade die "verschobene" Version der Reihe  $S$  in (90) ist; Euler notiert diese neue Reihe entsprechend  $S^{(n)}$ . Am Ende desselben Paragraphen gelangt er zur allgemeinen Formel

$$S^{(n)} = \frac{1}{\Delta} \int_0^1 \frac{x^{a+nb-1} dx}{\sqrt[b]{(1-x^b)^{\alpha+a}}}, \quad \text{mit} \quad \Delta = \frac{\pi}{b \sin \frac{a\pi}{b}}. \quad (92)$$

Das just zuvor über den Buchstaben  $b$  Bemerkte, behält auch hier seine Gültigkeit: Die Allgemeinheit der Formel erfährt keine Einschränkung der Allgemeinheit durch die Wahl  $b = 1$ . Demnach beinhaltet (92) tatsächlich drei unabhängige Parameter und (89) lässt sich gewiss daraus ableiten, zumal Eulers Formel natürlich ein spezieller Fall von (84) ist – nämlich der für  $z = 1$ .

Um aber die Gauß'sche Summationsformel herzuleiten, verwende man die von Euler in § 42 von [EulerE663] angegebene Identität:

$$\binom{m}{0} \binom{n}{p} + \binom{m}{1} \binom{n}{p+1} + \text{etc.} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{m}{k} \binom{n}{p+k} = \binom{m+n}{m+p}. \quad (93)$$

Euler<sup>150</sup> drückt somit eine Summe von Binomialkoeffizienten als einen einzelnen Binomialkoeffizienten aus. Die Buchstaben  $n$ ,  $m$  und  $p$  sind dabei nicht notwendig ganze Zahlen. Der Kürze wegen sei die linke Seite der letzten Gleichung  $S_g$  genannt, was  $S_g$  über  ${}_2F_1$  wie folgt ausgedrückt:

$$S_g = \binom{n}{p} {}_2F_1(-m, p-n, p+1; 1). \quad (94)$$

---

<sup>150</sup>Die Umbenennung der Buchstaben in dieser letzten Gleichung im Vergleich zu (90) und (92) wird auch von Euler ohne weitere Begründung vorgenommen.

dine scribendi sunt numeri 0, 1, 2, 3, 4, etc. ita vt fit  $S = f\left(\frac{m}{x}\right) \left(\frac{n}{p+x}\right)$ , ostendi fore  $S = \binom{m+n}{m+p}$  vel etiam  $S = \binom{m+n}{n-p}$ ; vnde patet hanc summam eandem fore, ac si series proposita esset  $\left(\frac{n+p}{x}\right) \left(\frac{n-p}{x}\right)$ . Quamobrem ad hanc summam formulae nostrae supra datae accommodabuntur, si in iis loco litterarum  $m$  et  $n$  scribantur hi valores,  $m+p$  et  $n-p$ , ficque ex priore formula haec summa erit:

$$S = \frac{1}{(m+p) \int x^{n-p} \partial x (1-x)^{m+p-1}},$$

ex posteriore autem erit:

$$S = \frac{1}{(n-p) \int x^{m+p} \partial x (1-x)^{n-p-1}},$$

ficque totum hoc argumentum ad finem perductum est censendum.

**Abbildung 32:** Eulers Formel, welche der Gauß'schen Summationsformel (89) gleichwertig ist, aus seiner Arbeit [EulerE663]. Das Symbol  $\binom{a}{b}$  bezeichnet bei Euler hier den Binomalkoeffizienten  $\binom{a}{b}$ . Weiter benutzt Euler hier das Integralzeichen  $\int$  statt  $\sum$ , um eine Summe anzuzeigen.

Um die Brücke zu (89) zu schlagen, hat man  $-m = \alpha$ ,  $\beta = p - n$  und  $\gamma = p + 1$  zu setzen, dass  $m = -\alpha$ ,  $p = \gamma - 1$  und  $n = \gamma - \beta - 1$  ist. Daher, indem man (93) und (94) kombiniert, entspringt die Gleichung

$$\binom{\gamma - \beta - 1}{\gamma - 1} {}_2F_1(\alpha, \beta, \gamma; 1) = \binom{-\alpha + \gamma - \beta - 1}{-\alpha + \gamma - 1}.$$

Auflösen nach  ${}_2F_1$  auf und Schreiben der Binomialkoeffizienten mithilfe von  $\Gamma$ -Funktionen liefert:

$$\begin{aligned} {}_2F(\alpha, \beta, \gamma; 1) &= \binom{-\alpha + \gamma - \beta - 1}{-\alpha + \gamma - 1} \binom{\gamma - \beta - 1}{\gamma - 1}^{-1} \\ &= \frac{\Gamma(\gamma - \beta - \alpha)}{\Gamma(\gamma - \alpha)\Gamma(1 - \beta)} \cdot \frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(1 - \beta)}{\Gamma(\gamma - \beta)} = \frac{\Gamma(\gamma - \alpha - \beta)\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\gamma - \alpha)\Gamma(\gamma - \beta)}. \end{aligned}$$

Das ist gerade die Gauß'sche Summationsformel (89), womit der Nachweis erbracht ist, dass Gauß' Formel aus den Euler'schen Formeln (92) und (93) mit leichter Rechnung folgt.

**Gauß eigene Formeln** Es sollen nun noch die Gauß allein zuzusprechenden Formeln der hypergeometrischen Reihe besprochen werden. Dies betrifft

insbesondere die quadratische Transformation im letzten Argument der hypergeometrischen Reihe. Diesen Gegenstand am nächsten kommt Euler in der Arbeit “*Consideratio aequationis differentio-differentialis*  $(a + bx)ddz + (c + ex)\frac{dx dz}{x} + (f + gx)\frac{z dx^2}{xx} = 0$ ” ([EulerE431], 1773, ges. 1772) (E431: “Betrachtung der Differenzen–Differentialgleichung  $(a + bx)ddz + (c + ex)\frac{dx dz}{x} + (f + gx)\frac{z dx^2}{xx} = 0$ ”), wo er die titelgebende Differentialgleichung betrachtet. Dass sich selbige für entsprechende Auswahl der Koeffizienten auf die Differentialgleichung für die hypergeometrische Reihe (76) reduziert, ist leicht einzusehen. In seiner Untersuchung stellt Euler nun die Frage, eine Relation welcher Art zwischen den Koeffizienten  $a, b, c, e, f, g$  zu bestehen hat, sodass ein Potenzreihenansatz zur Lösung der titelgebenden Differentialgleichung eine polynomiale ist. Findet man zwei solcher Lösungen, kann man indes die vollständige Lösung konstruieren. In der Sprache der hypergeometrischen Funktion  ${}_2F_1(\alpha, \beta, \gamma; z)$  sucht Euler also eine Relation zwischen den ersten drei Argumenten in  $\alpha, \beta$  und  $\gamma$ , sodass man eine abbrechende Reihe erhält. Ähnliche Ideen sollten sich in der später verfassten Arbeit [EulerE710] als fruchtbar erweisen und ihn zur Gleichung

$${}_2F_1(\alpha, \beta, \gamma, z) = (1 - x)^{c - \alpha - \beta} {}_2F_1(\gamma - \alpha, \gamma - \beta, \gamma; z)$$

führen, welche entsprechend als Euler’sche Transformation der hypergeometrischen Reihe bezeichnet wird, und den Legendre–Polynomen leiten<sup>151</sup>. Selbiger ließe sich noch die sog. Pfaff’sche Transformation zur Seite stellen:

$${}_2F_1(\alpha, \beta, \gamma, z) = (1 - x)^{c - \alpha} {}_2F_1\left(\gamma, \gamma - \beta, \gamma; \frac{z}{z - 1}\right),$$

welche sich zwar nicht direkt bei Euler findet, jedoch unmittelbar aus den allgemeineren Transformationsformeln für Reihen fließt, welche er in § 7 vom zweiten Teil seiner *Calculi Differentialis* [EulerE212] vorstellt.

Indes scheint Euler nicht die Frage gestellt zu haben, ob sich in der hypergeometrischen Reihen nicht gar das vierte Argument  $z$  verändern ließe, ohne dass selbiges auf Differentialgleichung zutrifft, wenn freilich sie in der Variable  $u = f(z)$  betrachtet wird<sup>152</sup>. Gauß kann aus seinen quadratischen Transformationen unter anderem seine zweite Summationsformel nachweisen:

<sup>151</sup>Genauer führte ihn dies zu Erkenntnissen über Integraldarstellung (66), welche in Abschnitt (5.2.4) auseinander gesetzt worden ist.

<sup>152</sup>Diese Frage leitet Kummer in seiner Arbeit [Kummer1] und lässt ihn überdies die Theorie der hypergeometrischen Reihe weiter ausbauen.

$${}_2F_1\left(a, b, \frac{1}{2}(a+b+1), \frac{1}{2}\right) = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}(a+b+1)\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}(a+1)\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}(b+1)\right)}, \quad (95)$$

welche ein direktes Korollar aus (89) und (75) darstellt, sich aber bei Euler nicht findet und auch aus seinen Resultaten nicht unmittelbar abgeleitet werden kann.

**Euler und die konfluente hypergeometrische Funktion** Den Abschluss Euler'schen Beitrages zur hypergeometrischen Funktion soll ein Gegenstand einnehmen, welcher sich bei Euler findet, jedoch von Gauß in [Gauß3] nicht behandelt wird. Geht man von (84) aus und setzt zunächst  $\frac{t}{\alpha}$  für  $t$  und betrachtet im Anschluss  $\alpha \rightarrow \infty$ , findet man einen Ausdruck der Form

$$B(\beta, \gamma - \beta) \int_0^1 t^{\beta-1} (1-t)^{\gamma-\beta-1} e^{\alpha t} dt,$$

wenn man den bekannten Grenzwert für  $e^x$ ,

$$e^x = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n,$$

verwendet. Analog kann man eine Funktion proportional zum Ausdruck

$$\int_0^\infty t^{\beta-1} (1-t)^{\gamma-\beta-1} e^{\alpha t} dt$$

ableiten. Diese beiden letzten sind heute in der Theorie der konfluenten hypergeometrischen Funktion relevant. Eingeführt wurden sie auf die beschriebene Weise von Kummer in seiner Arbeit "*De integralibus quibusdam definitis et seriebus infinitis*" ([Kummer2], 1837) ("Über gewisse bestimmte Integrale und unendliche Reihen"). Euler indes scheint diese Reihen nie explizit in Bezug auf die hypergeometrische Funktion betrachtet zu haben. Man findet sie allerdings in gänzlich anderem Zusammenhang in seiner Arbeit [EulerE70] mitgeteilt.

Während Kummer von der Reihendarstellung der konfluenten hypergeometrischen Reihe aus beginnt, wählt Euler ein Parameterintegral als Ausgangspunkt und konstruiert aus selbigem die entsprechende Differentialgleichung. Sein allgemeinstes Ergebnis formuliert er in § 11 und 12 von [EulerE70]: Der allgemeinen Differentialgleichung (§ 11)

$z = \int e^{ax} (b-x)^\lambda (b+x)^\mu dx + \int e^{-ax} (b+x)^\lambda (b-x)^\mu dx$   
 In qua si sumatur  $x = b$  et  $a$  tanquam variabilis tractetur prodibit sequens aequatio inter  $z$  et  $a$ , si  $da$  constans ponatur:  $\frac{daz}{da} + \frac{caz}{a} + (f + \frac{g}{a})z da = 0$ , quae in aequationem differentialem primi gradus transmutabitur facto  $z = e^{ftda}$ , prodibit enim  $dt + t^2 da + \frac{ct da}{a} + (f + \frac{g}{a}) da = 0$ . Ponatur  $t a^c = y$  seu  $t = a^{-c} y$  habebitur  $dy + y^2 da$

**Abbildung 33:** Euler konstruiert in seiner Arbeit [EulerE70] eine Differentialgleichung für einen Spezialfall der konfluenten hypergeometrischen Funktion.

$$\frac{d^2z}{ds^2} + \left( \frac{\eta}{\varepsilon} + \frac{\theta}{\zeta} + \frac{\lambda + \mu - 2}{a} \right) \frac{dz}{da} + \left( \frac{\eta(\mu + 1)}{\varepsilon a} + \frac{\theta(\lambda + 1)}{\zeta a} + \frac{\eta\theta}{\varepsilon\zeta} \right) z = A$$

mit beliebigen Konstanten  $\eta, \varepsilon, \theta, \mu, \lambda$  und  $A$  wird von einem Ausdruck der Form

$$z = E \int e^{ax} (\eta + \varepsilon x)^\lambda (\theta + \zeta x)^\mu dx + F \int e^{-ax} (\eta - \varepsilon x)^\lambda (\theta - \zeta x)^\mu dx. \quad (96)$$

Genüge geleistet. Euler behauptet sogar noch vielmehr, dass sich für beliebige Wahl der Konstanten  $E, F$  in der obigen Differentialgleichung sogar  $A = 0$  setzen lässt, sofern man eine gewisse Relation für die anderen freien Parameter voraussetzt, wovon Euler auch ein explizites Beispiel gibt.

Ein Vergleich mit der Differentialgleichung der konfluenten hypergeometrischen Reihe

$$z \frac{d^2w}{dz^2} + (b - z) \frac{dw}{dz} - aw = 0,$$

welche neben der klassischen von Kummer gegebenen Reihe

$$M(a, b, z) := 1 + \frac{a}{b} \frac{z}{1!} + \frac{a(a+1)}{b(b+1)} \frac{z^2}{2!} + \frac{a(a+1)(a+2)}{b(b+1)(b+2)} \frac{z^3}{3!} + \dots \quad (97)$$

auch vom Integral:

$$M(a, b, z) = \frac{\Gamma(b)}{\Gamma(a)\Gamma(b-a)} \int_0^1 e^{az} u^{a-1} (1-u)^{b-a-1} du \quad \text{für } \operatorname{Re}(b) > \operatorname{Re}(a) > 0$$

gelöst wird, hilft den Euler'schen Ansatz vom modernen Standpunkt aus zu verstehen. Weiter ist

$$U(a, b, z) := \frac{1}{\Gamma(a)} \int_0^\infty e^{-zu} u^{a-1} (1+u)^{b-a-1} du \quad \text{für } \operatorname{Re}(a) > 0$$

mit  $M(a, b, z)$  bekanntermaßen über die Beziehung

$$U(a, b, z) = \frac{\Gamma(1-b)}{\Gamma(a+1-b)} M(a, b, z) + \frac{\Gamma(b-1)}{\Gamma(a)} z^{1-b} M(a+1-b, 2-b, z)$$

verknüpft. Dies gibt also Anhaltspunkte, wie Euler seine Konstanten in (96) und die Integrationsgrenzen auch hätte wählen können. Euler scheint die Verbindung zur hypergeometrischen Reihe nicht hergestellt zu haben, so findet man auch die Reihendarstellung (97) im Euler'schen Opus nicht explizit nieder geschrieben. Jedoch findet sich in der Arbeit [EulerE522] in den Paragraphen 34 und 35 die Kettenbruchentwicklung für den Quotienten zweier konsekutiver Ausdrücke der Form

$$f(n) = \int_0^1 x^n e^{\alpha x} (1-x)^\lambda dx.$$

Selbiger lässt sich ohne Mühe als konfluente hypergeometrische Funktion deuten.

$$\begin{aligned}
& f = \delta, f' = \delta + 1, f'' = \delta + 2, f''' = \delta + 3, \text{ etc.} \\
& g = \delta + \lambda - \alpha, g' = \delta + 1 + \lambda - \alpha, g'' = \delta + 2 + \lambda - \alpha, \text{ etc.} \\
& h = \alpha, h' = \alpha, h'' = \alpha, \text{ etc.} \\
& \text{sequitur ista fractio continua:} \\
& \frac{\delta A}{B} = \frac{\delta + \lambda - \alpha + \frac{(\delta + 1)\alpha}{\delta + 1 + \lambda - \alpha + \frac{(\delta + 2)\alpha}{\delta + 2 + \lambda - \alpha + \frac{(\delta + 3)\alpha}{\delta + 3 + \lambda - \alpha + \text{etc.}}}}{\delta + 1 + \lambda - \alpha + \frac{(\delta + 2)\alpha}{\delta + 2 + \lambda - \alpha + \frac{(\delta + 3)\alpha}{\delta + 3 + \lambda - \alpha + \text{etc.}}}}
\end{aligned}$$

Vbi imprimis notari oportet, exponentes  $\lambda$  et  $\delta$  necessario nihilo maiores accipi debere, quia alioquin formula principalis  $x^n e^{\alpha x} (1-x)^\lambda$  casibus  $x = 1$  non evanesceret.

**Abbildung 34:** Euler gibt in seiner Arbeit [EulerE522] den Kettenbruch für zwei konsekutive konfluente konfluente hypergeometrische Reihe an. Hier ist in moderner Notation  $A = \int_0^1 x^{\delta-1} dx e^{\alpha x} (1-x)^{\lambda-1}$  und  $B = \int_0^1 x^\delta dx e^{\alpha x} (1-x)^{\lambda-1}$ .

## 6 Von Euler nicht bewiesene Entdeckungen

An author never does more damage to his readers than when he hides a difficulty.

---

Evariste Galois

Während die Legendre–Polynome (Abschnitt 5.2.4) einige von Eulers Untersuchungen miteinander verknüpft hätten, dies aber für ihn selbst nicht zuletzt wegen des fehlenden Anreizes, diese Verbindungen zu knüpfen, nahezu unmöglich zu sehen war, verhält sich dies bei den folgenden Themen anders. Zum einen betrifft dies Theoreme, die Euler selbst hätte beweisen können (Abschnitt 6.1), da sich das dafür Notwendige bereits in seinen Arbeiten befindet. Zum anderen betrifft dies Entdeckungen, die er jedoch nicht mit einem Beweis zum Rang eines Theorems zu erheben vermochte (Abschnitt 6.2).

## 6.1 Von Euler selbst beweisbare Lehrsätze

Sometimes the situation is only a problem because it is looked at in a certain way. Looked at in another way, the right course of action may be so obvious that the problem no longer exists.

---

Edward de Bono

Als explizite Beispiele solcher Theoreme, welche Euler trotz bestehender Möglichkeit nicht bewiesen hat, werden eine Frage nach der einer Asymptotik (Abschnitt 6.1.1) und die Funktionalgleichung der Riemann'schen  $\zeta$ -Funktion angeführt (Abschnitt 6.1.2). Auch Fragestellungen, bei denen die Schaffung der nötigen Mittel nur einen Schritt entfernt lagen, welchen Euler nicht gegangen ist, finden hier am Exempel der  $\vartheta$ -Funktionen (Abschnitt 6.1.3) ihre Erwähnung.

### 6.1.1 Durch Anwendung einer Methode: Seine Konstante $A$

[W]hen solving a problem, we should always profit from previously solved problems, using their result or method, or experience acquired in solving them.

---

George Poyla

Wie in der Abhandlung “*Answer to a question concerning Euler’s paper “*Variae considerationes circa series hypergeometricas*”*” ([Aycock5], 2022) kann die Euler’sche Methode zur Auflösung homogener Differenzgleichungen mit linearen Koeffizienten (Siehe Abschnitt 5.2.3 für die Erläuterung der Methode.) auch angewandt werden, um das spezifische von Faber im Vorwort von Band 16,2 von Serie 1 der *Opera Omnia* ([Faber1], 1935) formulierte Problem zu lösen:

“*Es würde sich vielleicht lohnen, die Euler’schen Bemühungen um die Ermittlung dieser Zahl  $A$  wieder aufzunehmen.*”

Dabei bezieht sich Faber auf Eulers Abhandlung “*Variae considerationes*

$$\Gamma : i = A (a - b + bi)^{\frac{a}{b} - \frac{1}{2} + i} \cdot e^{-i}.$$

Hic quidem conueniet potestatem exponentis  $i$  feorfim repraesentare hoc modo:

$$\Gamma : i = A (a - b + bi)^{\frac{a}{b} - \frac{1}{2}} (a - b + bi)^i \cdot e^{-i}.$$

**Abbildung 35:** Euler leitet in seiner Arbeit [EulerE661] die Asymptotik seiner verallgemeinerten Fakultät her.

*circa series hypergeometricas*” ([EulerE661], 1793, ges. 1776) (E661:“Verschiedene Betrachtungen über hypergeometrische Reihen”). Die Ätiologie dieser Konstante ist diese: In [EulerE661] betrachtet Euler die Funktion

$$\Gamma_E(x) = a \cdot (a + b) \cdot (a + 2b) \cdots (a + (x - 1)b) \quad \text{mit} \quad \operatorname{Re}(a), \operatorname{Re}(b) > 0, \quad (98)$$

für welche er vermöge der Euler–Maclaurin’schen Summenformel nachstehende Asymptotik<sup>153</sup> ableitet

$$\Gamma_E(x) \sim A \cdot e^{-x} (a - (b - 1)x)^{\frac{a}{b} + x - \frac{1}{2}}, \quad (99)$$

welche Asymptotik für den Grenzwert  $x \rightarrow \infty$  gilt. Nun soll die Konstante  $A$  gefunden werden, jedoch schreibt Euler in § 17:

*“Indes ist daraus dennoch nicht ersichtlich, wie die Konstante  $A$  als absoluter Wert bestimmt werden kann, [...]”*

**Ermittlung der Konstanten aus Eulers Formeln heraus** Bemerkt man nun, dass (98) die Gleichung

$$\Gamma_E(x + 1) = (a + bx)\Gamma_E(x) \quad (100)$$

erfüllt, lässt sich Eulers Ansatz zur Lösung von homogenen Differenzgleichungen mit linearen Koeffizienten auf diese anwenden (Abschnitt 5.2.3). Man findet auf diesem Wege

$$\Gamma_E(x) = \frac{b^x}{\Gamma\left(\frac{a}{b}\right)} \cdot \Gamma\left(x + \frac{a}{b}\right), \quad (101)$$

<sup>153</sup>Euler selbst benutzt in seiner Arbeit den Majuskel  $\Gamma$ . Um die Verwechslung mit der  $\Gamma$ -Funktion zu vermeiden, aber gleichzeitig möglichst nahe an der Euler’schen Notation zu bleiben, wird in dieser Arbeit  $\Gamma_E$  für die in (98) eingeführte Funktion geschrieben.

wobei hier  $\Gamma$  wieder die bekannte  $\Gamma$ -Funktion bedeutet. Zur Ermittlung der Konstante  $A$  in (99), gebrauche man die Stirling'sche Formel<sup>154</sup>

$$\Gamma(x+1) \sim \sqrt{2\pi x} \cdot x^x \cdot e^{-x} \quad \text{für } x \rightarrow \infty.$$

oder auch, falls man  $x-1$  statt  $x$  schreibt,

$$\Gamma(x) \sim \sqrt{2\pi}(x-1)^{\frac{1}{2}} \cdot (x-1)^{x-1} e^{-(x-1)} \quad \text{für } x \rightarrow \infty.$$

Dementsprechend entspringt aus (101) die Asymptotik

$$\Gamma_E(x) \sim \frac{b^x}{\Gamma\left(\frac{a}{b}\right)} \cdot \sqrt{2\pi} \left(x-1 + \frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{2}} \left(x + \frac{a}{b} - 1\right)^{x+\frac{a}{b}-1} e^{-(x+\frac{a}{b}-1)}.$$

was durch Vereinfachen zu

$$\Gamma_E(x) \sim \frac{\sqrt{2\pi}}{\Gamma\left(\frac{a}{b}\right)} \cdot b^{-\frac{1}{2}-\frac{a}{b}+1} (a+bx-b)^{-\frac{1}{2}+x+\frac{a}{b}} e^{-x} \cdot e^{-\frac{a}{b}+1}$$

wird, sodass

$$A = \frac{\sqrt{2\pi}}{\Gamma\left(\frac{a}{b}\right)} \cdot e^{-\frac{a}{b}+1} \cdot b^{\frac{1}{2}-\frac{a}{b}}. \quad (102)$$

Somit hätte Euler das sich selbst gesetzte Problem ebenfalls auflösen können.

**Ein Korollar seiner Untersuchungen: Die Legendre'sche Verdopplungsformel** Überdies, wie auch in der Arbeit *“Euler and the Duplication Formula for the Gamma-Function”* ([Aycock7], 2023) gezeigt, lässt sich aus den Euler'schen Überlegungen und nach Ermittlung der Konstante  $A$  die Legendre'sche Verdopplungsformel nachweisen. Dies bedeutet die Formel:

$$\Gamma(x) = \frac{2^{x-1}}{\sqrt{\pi}} \Gamma\left(\frac{x}{2}\right) \Gamma\left(\frac{x}{2} + 1\right). \quad (103)$$

Dies soll hier der Vollständigkeit wegen bündig demonstriert werden. Abgesehen von der Funktion  $\Gamma_E$ , führt Euler in seiner Arbeit [EulerE661] zwei eng mit dieser verwandte Funktionen ein:

<sup>154</sup>Selbige hat Euler wie an entsprechender Stelle erwähnt (Abschnitt 4.3.3) in seinen *Calculi Differentialis* [EulerE212] korrekt angegeben, weshalb sie in dieser Beweisführung ihre Verwendung finden darf.

$$\begin{aligned}\Delta(x) &= a \cdot (a + 2b) \cdot (a + 4b) \cdot (a + 6b) \cdots (a + (2x - 2)b), \\ \Theta(x) &= (a + b) \cdot (a + 3b) \cdot (a + 5b) \cdots (a + (2x - 1)b).\end{aligned}\tag{104}$$

In gänzlich gleicher Weise wie bei  $\Gamma_E$  findet Euler die asymptotischen Entwicklungen für seine Funktionen  $\Delta$  und  $\Theta$ :

$$\begin{aligned}\Delta(x) &\sim B \cdot e^{-x} \cdot (a - 2b + 2bx)^{\frac{a}{2b} + x - \frac{1}{2}} \\ \Theta(x) &\sim C \cdot e^{-x} \cdot (a - b + 2bx)^{\frac{a}{2b} + x},\end{aligned}\tag{105}$$

wo  $B$  und  $C$  die Rolle der Konstante gleich der von  $A$  bei  $\Gamma_E$  einnehmen, weswegen die Asymptotiken gleichermaßen für den Fall  $x \rightarrow \infty$  zu verstehen sind. Wie bereits angesprochen, sieht Euler sich nicht in der Lage auch nur eine der Konstanten  $A$ ,  $B$  und  $C$  zu bestimmen, es gelingt ihm aber aus den Relationen zwischen  $\Gamma_E$ ,  $\Delta$  und  $\Theta$  entsprechende zwischen den Konstanten abzuleiten:

$$A = \frac{B \cdot C}{\sqrt{e}}\tag{106}$$

und

$$B = C \cdot k \cdot \sqrt{e}\tag{107}$$

mit  $k = \Delta\left(\frac{1}{2}\right)$ . Hinter diesen Relationen verbirgt sich bereits die Legendre'sche Verdopplungsformel (103), wozu es aber zunächst der Konstante  $k$  bedarf.

Um selbige ausfindig zu machen, bemerke man zuerst, dass die Ersetzung  $b \mapsto 2b$  in  $\Gamma_E$  den Ausdruck für  $\Delta$  aus (105) entspringen lässt. Gleiches in der expliziten Formel (101) durchgeführt produziert:

$$\Delta(x) = \frac{(2b)^x}{\Gamma\left(\frac{a}{2b}\right)} \cdot \Gamma\left(x + \frac{a}{2b}\right).$$

Demnach für  $x = \frac{1}{2}$

$$k = \Delta\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{(2b)^{\frac{1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{a}{2b}\right)} \cdot \Gamma\left(\frac{1}{2} + \frac{a}{2b}\right).\tag{108}$$

Mit diesem Wert von  $k$  ausgestattet nutze man (106) sowie (107). Setzt man den Wert von  $C$  aus zweiter Gleichung in die erste ein, gibt dies:

$$A = \frac{B^2}{\Delta\left(\frac{1}{2}\right)} e^{-1}. \quad (109)$$

Da sich  $\Delta(x)$  aus der Substitution  $b \mapsto 2b$  aus  $\Gamma_E(x)$  ergibt, gilt selbiges für den Wert  $B$  aus  $A$ :

$$B = \frac{\sqrt{2\pi}}{\Gamma\left(\frac{a}{2b}\right)} \cdot (2b)^{\frac{1}{2} - \frac{a}{2b}} \cdot e^{1 - \frac{a}{2b}}. \quad (110)$$

Einsetzen der Werte von  $A$  aus (102),  $B$  aus (110) und  $k$  aus (108) wandelt die Relation (109) in:

$$\frac{\sqrt{2\pi}}{\Gamma\left(\frac{a}{b}\right)} \cdot e^{1 - \frac{a}{b}} \cdot b^{\frac{1}{2} - \frac{a}{b}} = \frac{\left(\frac{\sqrt{2\pi}}{\Gamma\left(\frac{a}{2b}\right)} \cdot (2b)^{\frac{1}{2} - \frac{a}{2b}} \cdot e^{1 - \frac{a}{2b}}\right)^2}{\frac{(2b)^{\frac{1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{a}{2b}\right)} \cdot \Gamma\left(\frac{1}{2} + \frac{a}{2b}\right)} \cdot e^{-1}.$$

Viele Terme streichen sich, sodass verbleibt

$$\frac{1}{\Gamma\left(\frac{a}{b}\right)} = \frac{\sqrt{2\pi} \cdot 2^{\frac{1}{2} - \frac{a}{b}}}{\Gamma\left(\frac{a}{2b}\right) \cdot \Gamma\left(\frac{1}{2} + \frac{a}{2b}\right)}.$$

Schreibt man schließlich  $x$  anstatt  $\frac{a}{b}$  und löst nach  $\Gamma(x)$ , steht nach einiger Vereinfachung:

$$\Gamma(x) = \frac{2^{x-1}}{\sqrt{\pi}} \cdot \Gamma\left(\frac{x}{2}\right) \cdot \Gamma\left(\frac{x+1}{2}\right),$$

was gerade die Legendre'sche Verdopplungsformel (103) ist.

### 6.1.2 Durch Kombinieren von Ergebnissen: Die $\zeta$ -Funktion

If you search everywhere, yet cannot find what you are seeking, it is because what you seek is already in your possession.

---

Laotse

Dass Euler in seiner Arbeit [EulerE352] als erster die Funktionalgleichung für die Riemann'sche  $\zeta$ -Funktion,

$$\zeta(s) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}, \quad \text{für } \operatorname{Re}(s) > 1, \quad (111)$$

nieder geschrieben hat, ist heute sehr bekannt. Man siehe etwa [Hardy3]<sup>155</sup> oder konsultiere den Übersichtsartikel [Ayoub].

Ergänzend sei vorausgeschickt, dass Euler die Funktionalgleichung für die Dirichlet'sche  $\eta$ -Funktion

$$\eta(s) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^s} \quad \text{für } \operatorname{Re}(s) > 0. \quad (112)$$

und nicht die für die  $\zeta$ -Funktion angibt. Sie lautet in moderner Darstellung

$$\eta(1-s) = \frac{2^s - 1}{1 - 2^{s-1}} \pi^{-s} \cos\left(\frac{\pi s}{2}\right) \Gamma(s) \eta(s). \quad (113)$$

Euler sagt explizit, dass er diese Gleichung zwar nicht streng beweisen kann, jedoch seine Ausführungen ihn von ihrer Richtigkeit überzeugen<sup>156</sup>. Entdeckt hat er sie mit routiniertem Umgang mit divergenten Reihen, die Euler'sche Auffassung zu welchen weiter unten (Abschnitt 7.1.3) umfassender auseinander gesetzt werden wird.

### Eulers Anwendung einer divergenten Reihe – Die Zeta-Funktion

Es sollen nur die Grundbausteine seiner Gedanken aus [EulerE352] an dieser Stelle vorgestellt werden, für Details ist auf [Ayoub] oder [Varadarajan] verwiesen. Die fundamentale Idee zur Erlangung der Funktionalgleichung für die  $\eta$ -Funktion besteht in der Verwendung zweier die Bernoulli-Zahlen involvierender Identitäten<sup>157</sup>. Bereits aus [EulerE130] weiß Euler, dass gilt:

<sup>155</sup>Auf Seite 22 schreibt Hardy Edmund Landau (1877–1938) und Cahen (1865–1941) das Verdienst zu, als erster erwähnt zu haben, dass Euler die Funktionalgleichung der Riemann'schen  $\zeta$ -Funktion in [EulerE352] angegeben hat. Hardy referiert dabei wohl auf Landaus Arbeit "*Euler und die Funktionalgleichung der Riemannschen Zetafunktion*" ([Landau], 1906). Dieser schreibt allerdings direkt zu Beginn, dass Cahen in seiner Arbeit "*Sur la fonction  $\zeta(s)$  de Riemann et sur les fonctions analogues*" ([Cahen], 1894) ("Über die Funktion  $\zeta(s)$  von Riemann und über analoge Funktion") bereits vor ihm die Euler'sche Erstentdeckerschaft der Funktionalgleichung bemerkt hat.

<sup>156</sup>Diese Gleichung ist bereits oben (Abschnitt 3.1.4) bei der Diskussion der Euler'schen Auffassung eines Beweises aufgetreten.

<sup>157</sup>Auch Ramanujan hat überdies die Funktionalgleichung der  $\zeta$ -Funktion auf diese Weise abgeleitet. Man siehe etwa das Buch "*Ramanujan's Notebooks – Part I*" ([Berndt], 1985).

$$\eta(2n) = (-1)^{n+1} \frac{2^{2n} - 1}{(2n)!} B_{2n} \pi^{2n},$$

welche er später interpolieren möchte, weswegen er sie wie folgt ausdrückt:

$$\eta(2n) = -\frac{1}{\cos(n\pi)} \frac{2^{2n} - 1}{\Gamma(2n + 1)} B_{2n} \pi^{2n},$$

somit kann Euler auch schreiben:

$$\eta(n) = -\frac{1}{\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)} \frac{2^n - 1}{\Gamma(n + 1)} B_n \pi^n. \quad (114)$$

Mithilfe der Methode der Abel'schen Summation<sup>158</sup>, aber auch der Euler-Maclaurin'schen Summationsformel, gelangt er in [EulerE352] zur Formel für  $\eta(1 - n)$ :

$$\eta(1 - n) = \frac{2^n - 1}{n} B_n.$$

Also gibt eine Division der beiden letzten Formeln, gerade die Gleichung:

$$\frac{\eta(1 - n)}{\eta(n)} = -\frac{\Gamma(n)}{\pi^n} \cdot \frac{2^n - 1}{2^{n-1} - 1} \cdot \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right),$$

was gerade die Version von (113) ist, welche schon in Abschnitt (3.1.4) erwähnt worden ist.

**Beweis der Funktionalgleichung aus Eulers Formeln** Der Beweis von (113) benötigt zwei Formeln von Euler aus anderer Quelle. Die erste stammt aus § 12 von Eulers Arbeit "*De resolutione fractionum transcendentium in infinitas fractiones simplices*" ([EulerE592], 1785, ges. 1775) (E592: "Über die Auflösung von transzendenten Brüchen in unendliche viele einfache Brüche"), sie lautet

$$\frac{\lambda\pi}{2 \sin \lambda\pi} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} n^2}{n^2 - \lambda^2}. \quad (115)$$

<sup>158</sup>Bei dieser wird eine Summe wie folgt als Grenzwert definiert:

$$s := \lim_{x \rightarrow 1^-} \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n,$$

wobei statt einer Potenzreihe prinzipiell auch andere Funktionenreihen stehen können, wie etwa Fourier- oder Dirichletreihen usw.

$$\begin{array}{l|l}
m=0 & 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - \&c. = \frac{1}{2} \\
m=1 & 1 - 2 + 3 - 4 + 5 - 6 + \&c. = +1 \frac{(2^2-1)}{2} A, \\
m=2 & 1 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + 5^2 - 6^2 + \&c. = 0, \\
m=3 & 1 - 2^3 + 3^3 - 4^3 + 5^3 - 6^3 + \&c. = -1 \cdot 2 \cdot 3 \frac{(2^4-1)}{2^3} B, \\
m=4 & 1 - 2^4 + 3^4 - 4^4 + 5^4 - 6^4 + \&c. = 0, \\
m=5 & 1 - 2^5 + 3^5 - 4^5 + 5^5 - 6^5 + \&c. = +1 \cdot 2 \dots 5 \cdot \frac{(2^6-1)}{2^5} C, \\
m=6 & 1 - 2^6 + 3^6 - 4^6 + 5^6 - 6^6 + \&c. = 0, \\
m=7 & 1 - 2^7 + 3^7 - 4^7 + 5^7 - 6^7 + \&c. = -1 \cdot 2 \dots 7 \cdot \frac{(2^8-1)}{2^7} D, \\
m=8 & 1 - 2^8 + 3^8 - 4^8 + 5^8 - 6^8 + \&c. = 0, \\
m=9 & 1 - 2^9 + 3^9 - 4^9 + 5^9 - 6^9 + \&c. = +1 \cdot 2 \dots 9 \cdot \frac{(2^{10}-1)}{2^9} E, \\
m=10 & 1 - 2^{10} + 3^{10} - 4^{10} + 5^{10} - 6^{10} + \&c. = 0, \\
& \&c.
\end{array}$$

**Abbildung 36:** Euler gibt in seiner Arbeit [EulerE352] die Werte einiger divergenten Reihen an. Die Zahlen  $A, B, C, D, E$  etc. sind die Bernoulli-Zahlen.

Über die Gleichung

$$\sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$$

findet man daraus leicht

$$\frac{u}{e^u - e^{-u}} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n^2}{n^2 + \frac{u^2}{\pi^2}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{1 + \left(\frac{u}{\pi n}\right)^2}. \quad (116)$$

Die zweite grundlegende Formel entnehme man aus § 8 (aus der *Opera Omnia* Version<sup>159</sup>) der Arbeit “*De valoribus integralium a termino variabilis  $x = 0$  usque ad  $x = \infty$  extensorum*” ([EulerE675], 1794, ges. 1778) (E675: “Über die Werte von Integralen, die von  $x = 0$  bis zu  $x = \infty$  erstreckt worden sind”):

$$\int y^{n-1} \partial y e^{-ky} = \frac{\Delta}{k^n}, \quad \text{mit } \Delta = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdots (n-1).$$

<sup>159</sup>Die Originalarbeit weist eine andere Nummerierung der Paragraphen auf. Hier befindet sich die Formel in § 131.

$$\frac{\varphi}{2\pi\sin\varphi} = \frac{\varphi^2}{\pi^2 - \varphi^2} - \frac{\varphi^4}{4\pi^2 - \varphi^2} + \frac{\varphi^6}{9\pi^2 - \varphi^2} - \frac{\varphi^8}{16\pi^2 - \varphi^2} + \text{etc.}$$

Ac si ponatur  $\varphi = \lambda\pi$ , prodibit

$$\frac{\lambda\pi}{2\sin\lambda\pi} = \frac{1}{1-\lambda\lambda} - \frac{1}{4-\lambda\lambda} + \frac{1}{9-\lambda\lambda} - \frac{1}{16-\lambda\lambda} + \text{etc.}$$

vnde si fuerit  $\lambda\lambda = -\mu\mu$ , seu  $\lambda = \mu\sqrt{-1}$ , ob

$$\sin\mu\pi\sqrt{-1} = \frac{e^{-\mu\pi} - e^{+\mu\pi}}{2\sqrt{-1}}, \text{ erit}$$

Abbildung 37: Euler gibt in der Arbeit [EulerE592] die Partialbruchzerlegung der Funktion  $\frac{\varphi}{\sin(\varphi)}$  an.

Hier ist das Integral von  $y = 0$  bis hin zu  $y = \infty$  zu nehmen,  $n$  sieht Euler als beliebige natürliche Zahl größer als 1 und  $k$  soll sogar eine beliebige komplexe Zahl sein<sup>160</sup>.

Man kann Eulers Formel wie folgt schreiben

$$\frac{\Gamma(x)}{k^x} = \int_0^{\infty} e^{-ku} u^{x-1} du, \quad (117)$$

wobei aus Gründen besserer Übersichtlichkeit  $n$  zu  $x$  geändert ist;  $x$  darf freilich auch eine reelle Zahl sein. Aus dieser Formel ergibt sich nun direkt

$$\frac{\Gamma(x)}{(2n+1)^x} = \int_0^{\infty} e^{-(2n+1)u} u^{x-1} du.$$

Summieren über  $n$  liefert

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(x)}{(2n+1)^x} = \Gamma(x) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^x} =: \Gamma(x)\lambda(x),$$

wobei

$$\lambda(x) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^x}, \quad (118)$$

eingeführt wurde. Nun gilt aber auch

<sup>160</sup> $k$  wäre noch der Einschränkung  $\text{Re}(k) > 0$  zu versehen, um die Konvergenz des Integrals zu gewährleisten, was Euler indes nicht bemerkt zu haben scheint.

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^{\infty} e^{-(2n+1)u} u^{x-1} du &= \int_0^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \left( e^{-(2n+1)u} \right) u^{x-1} du \\ &= \int_0^{\infty} \frac{u^{x-1} e^{-u} du}{1 - e^{-2u}} = \int_0^{\infty} \frac{u^{x-1} du}{e^u - e^{-u}}. \end{aligned}$$

Die Vertauschung von Summation und Integration ist leicht zu rechtfertigen; im zweiten Schritt wurde die geometrische Reihe angewandt. Insgesamt hat man:

$$\lambda(x)\Gamma(x) = \int_0^{\infty} u^{x-2} \cdot \frac{u du}{e^u - e^{-u}}, \quad (119)$$

sodass nun die Partialbruchzerlegung (116) ihre Anwendung finden kann, was zu

$$\lambda(x)\Gamma(x) = \int_0^{\infty} u^{x-2} du \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{1 + \left(\frac{u}{\pi n}\right)^2}.$$

führt. Substituiert man nun  $\frac{u}{\pi n} = v$ , gelangt man zu

$$\lambda(x)\Gamma(x) = \int_0^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \pi^{x-1} n^{x-1} \cdot \frac{v^{x-2} dv}{1 + v^2} = \pi^{x-1} \eta(1-x) \int_0^{\infty} \frac{v^{x-2} dv}{1 + v^2},$$

wobei im letzten Schritt die Definition der  $\eta$ -Funktion (112) genutzt wurde. Das verbleibende Integral berechnet Euler ebenfalls an entsprechender Stelle; es tritt etwa in der Arbeit *“Investigatio formulae integralis  $\int \frac{x^{m-1} dx}{(1+x^k)^n}$  casu, quo post integrationem statuitur  $x = \infty$ ”* ([EulerE588], 1785, ges. 1775) (E588: *“Untersuchung des Integrals  $\int \frac{x^{m-1} dx}{(1+x^k)^n}$  im Fall, im welchem man nach der Integration  $x = \infty$  setzt”*) auf. Daraus fließt die Formel:

$$\int_0^{\infty} \frac{v^{x-2} dv}{1 + v^2} = -\frac{1}{2} \frac{\pi}{\cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)},$$

welche in der letzten Gleichung eingesetzt gibt:

$$\Gamma(x)\lambda(x) = -\frac{1}{2} \frac{\pi}{\cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)} \pi^{x-1} \eta(1-x).$$

Unter Verwendung der elementaren Identität

$$\lambda(x) = \frac{2^x - 1}{2^x - 2} \eta(x)$$

gelangt man schlussendlich zu

$$\eta(1-x) = \frac{2^x - 1}{1 - 2^{x-1}} \pi^{-x} \cos\left(\frac{\pi x}{2}\right) \Gamma(x) \eta(x),$$

was gerade (113) ist. Somit ist ein Beweis geführt, welcher sich lediglich von Euler selbst eruierten Theoreme bedient.

**Bezug zur  $\zeta$ -Funktion** Die explizite Betonung, Euler habe die  $\eta$ -Funktion und nicht die  $\zeta$ -Funktion betrachtet, bedarf angesichts der sie verknüpfenden und Euler auch bekannten (siehe § 170 seiner *Introductio* [EulerE101]) Formel

$$\eta(s) = (1 - 2^{1-s}) \zeta(s) \tag{120}$$

weiterer Erläuterung. Freilich impliziert die Funktionalgleichung (113) unmittelbar die der  $\zeta$ -Funktion:

$$\zeta(s) = 2^s \pi^{s-1} \sin\left(\frac{\pi s}{2}\right) \Gamma(1-s) \zeta(1-s). \tag{121}$$

Einen direkten Beweis dieser Gleichung analog zu dem der  $\eta$ -Funktion misslingt allerdings und insgesamt scheint ein direkter Beweis aus den Euler'schen Formeln nicht möglich zu sein<sup>161</sup>. Auch seine Definition der Summe einer divergenten Reihe (siehe Abschnitt 7.1.3) hätte ihm diesbezüglich nicht zur Hilfe gereicht<sup>162</sup>. Vielmehr ließe sich argumentieren, dass Euler zwar (113) in just aufgezeigter Manier von einer Vermutung in die Form eines Theorems hätte überführen können, aber selbiges für (121) nicht hätte leisten können, ohne sich mit Widersprüchen seiner Theorie divergenter Reihen konfrontiert zu sehen. Nichtsdestotrotz darf konstatiert werden, dass Euler alles über die  $\zeta$ -Funktion zutage gefördert hat, was möglich ist, wenn man sie als Funktion einer *reellen* Variablen betrachtet. Die Auflösung der noch bestehenden Schwierigkeiten bedarf die Kenntnisse der komplexen Analysis, welche Euler jedoch aus unten (Abschnitt 7.3.1) auszuführenden Gründen verschlossen bleiben musste.

---

<sup>161</sup>Zum Zeitpunkt der Abgabe der hiesigen Ausführungen befindet sich eine Arbeit des Verfassers mit einem solchen Beweisversuch unter Begutachtung.

<sup>162</sup>Seine Auffassung einer divergenten Reihen zwingt Euler,  $\zeta(-k)$  für  $k \in \mathbb{N}$  alle zu  $\infty$  zu summieren, was natürlich unrichtig ist.

**Bemerkung zu Riemann und der Zeta-Funktion** Auch der von Riemann in seiner Arbeit (*“Über die Anzahl der Primzahlen unter einer gegebenen Größe”* [Riemann2], 1860, ges. 1859) mitgeteilte Beweis von (121) greift zu Mitteln, welche Euler nicht zur Verfügung standen. Riemann gibt in seiner Arbeit zwei Beweise, von denen ersterer auf Integration in der komplexen Ebene fußt, der zweite verwendet hingegen eine Transformationsformel für die Jacobi’sche Thetafunktion. Dies stellt in diesem Zusammenhang die Identität

$$\vartheta\left(-\frac{1}{\tau}\right) = \sqrt{\frac{\tau}{i}} \vartheta(\tau)$$

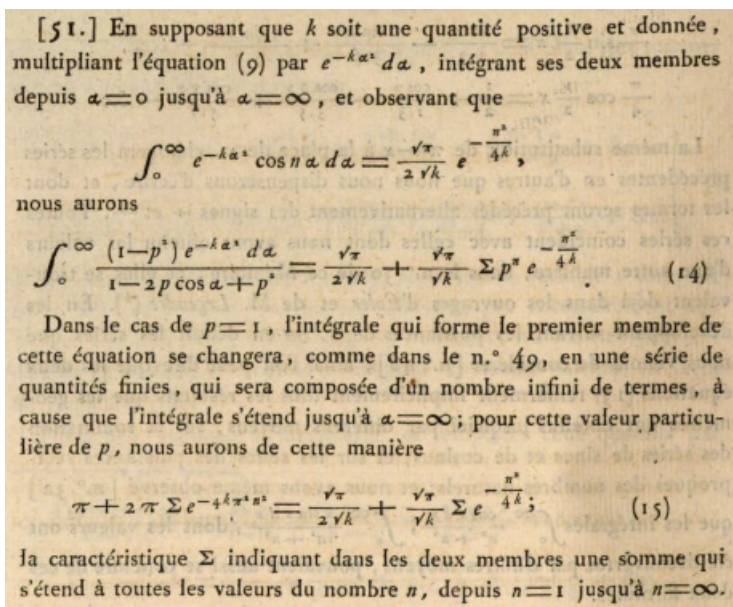
dar, wobei

$$\vartheta(\tau) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{i\pi n^2 \tau} \quad (122)$$

ist. Diese Transformationsformel ergibt sich aus den Ergebnissen von Jacobi’s Arbeit *“Fundamenta nova theoriae functionum ellipticarum”* ([Jacobi2], 1829) (*“Neue Grundlagen der Theorie der elliptischen Funktionen”*). Sie findet sich aber, wie auch Jacobi selbst in seiner Notiz *“Suite des Notices sur les Fonctions Ellitiques”* ([Jacobi1], 1828) (*“Weitere Notizen zu elliptischen Funktionen”*) zeitlich vor eben erwähnter verfassten Arbeit anmerkt, schon in S. Poissons (1781–1840) Arbeit *“Suite du Mémoire sur les Intégrales définies et sur la sommation des Séries”* ([Poisson], 1823) (*“Fortsetzung zur Abhandlung über bestimmte Integrale und die Summierung von Reihen”*). Dort steht sie auf Seite 284.

Man mag sich an dieser Stelle wundern, ob Riemann Kenntnis von der Euler’schen Arbeit [EulerE352] oder zumindest [EulerE432] hatte. Er macht jedenfalls keine direkte Erwähnung davon, lediglich das Euler-Produkt (127) nennt er explizit, was also wohl auf das Riemann’sche Studium der Arbeit [EulerE72] oder – unlängst wahrscheinlicher – der *Introductio* [EulerE101] hindeutet.

Es darf jedoch berechtigt davon ausgegangen werden, dass Riemann von einer externen Quelle auf die Funktionalgleichung hingewiesen worden ist. Denn unmittelbar auf den von Riemann angezeigten Integrationsweg zum Beweis der Funktionalgleichung zu stoßen, wäre ein übergroßer Zufall. Auch das Umschreiben auf eine Form, welche die  $\vartheta$ -Funktion verwenden lässt,



**Abbildung 38:** Poisson gelangt in seiner Arbeit [Poisson] zur Funktionalgleichung für die Thetafunktion (122). Es ist Gleichung (15) in seiner Arbeit.

setzt eine Intention mit dem Endergebnis im Blick voraus. Riemanns Anregungen mögen tatsächlich auch die erstgenannten Euler'schen Arbeiten gewesen sein, oder aber auch die von J. Malmstén (1814–1886) "*De integrabilibus quibusdam definitis seriebusque infinitis*" ([Malmstén], 1846) ("Über gewisse bestimmte Integrale und unendliche Reihen"), welche allerdings nur die Funktionalgleichung für die sogenannte Dirichlet'sche  $\beta$ -Funktion, definiert als

$$\beta(s) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^s} \quad \text{für } \operatorname{Re}(s) > 0 \quad (123)$$

enthält. Die entsprechende Gleichung findet sich auch bei Euler in [EulerE352].

Modern ausgedrückt liest sich die Euler'sche Formulierung wie folgt:

$$\beta(1-s) = \left(\frac{\pi}{2}\right)^{-s} \sin\left(\frac{\pi s}{2}\right) \beta(s) \Gamma(s). \quad (124)$$

Der Beweis kann analog zu dem für die  $\eta$ -Funktion geführt werden, die nötige Partialbruchzerlegung findet sich in § 29 von [EulerE592]. Malmstén

$$1 - 3^{n-1} + 5^{n-1} - 7^{n-1} + \&c. \quad \& \quad 1 - \frac{1}{3^n} + \frac{1}{5^n} - \frac{1}{7^n} + \frac{1}{9^n} - \&c.$$

& une conjecture semblable nous fournit ce *théorème*

$$\frac{1 - 3^{n-1} + 5^{n-1} - 7^{n-1} + \&c.}{1 - 3^{-n} + 5^{-n} - 7^{-n} + \&c.} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (n-1) \cdot 2^n}{\pi^n} \sin \frac{n\pi}{2},$$

**Abbildung 39:** Euler formuliert in seiner Arbeit [EulerE352] die Funktionalgleichung für die heute sogenannte Dirichlet'sche  $\beta$ -Funktion, definiert über (123), als Vermutung und gleichzeitig als Theorem.

indes sagt in seiner zitierten Arbeit, dass er die Funktionalgleichung "irgendwo bei Euler" gesehen hat. Er referiert wohl [EulerE352], da in [EulerE432] die  $\beta$ -Funktion nicht genannt wird. Der Vollständigkeit wegen sei noch die Arbeit "On Eisenstein's Copy of the *Disquisitiones*" ([Weil2], 1989) von André Weil (1906–1990) erwähnt; selbige argumentiert überzeugend, dass Eisenstein (1829–1852) bereits im Besitz eines Beweises von letztgenannter Funktionalgleichung (124) war und so Riemanns Untersuchung ihren Ursprung gegeben haben könnte. Das Eisenstein'sche Argument, datiert auf das Jahr 1849, ist ebenfalls, wie das entsprechende Riemann'sche, auf die Funktionalgleichung der Jacobi'schen  $\vartheta$ -Funktion gestützt.

Oft, wie etwa von Speiser im Vorwort von Band 9 der 1. Serie der *Opera Omnia* ([Speiser2], 1945), wird Oskar Schlömilch (1823–1901) als Entdecker von (121) genannt. Indes scheint Schlömilch diese Gleichung nicht gezeigt zu haben. Die Referenzen Speisers führen zur Arbeit ([Schlömilch2], 1858); in dieser Arbeit betrachtet der Autor jedoch ebenfalls die  $\beta$ -Funktion (123), liefert aber einen neuen Beweis über Lemmata aus der Fourier'schen Analysis. Schlömilch selbst verweist auch noch auf seine Arbeit "Über das Integral  $\int_0^\infty \frac{x^\mu dx}{r^2 + 2rx \cos u + x^2}$ " ([Schlömilch1], 1849), welche das Integral

$$\int_0^\infty \frac{y^\mu dy}{1 + 2y \cos u + y^2},$$

für welches die für  $-1 \leq \mu \leq 1$  gültige Gleichheit

$$\int_0^\infty \frac{y^\mu dy}{1 + 2y \cos u + y^2} = \int_0^\infty \frac{y^{-\mu} dy}{1 + 2y \cos u + y^2}$$

abgeleitet wird, untersucht. Die letzte Gleichung besitzt, wie in der Arbeit *“Euler and a Proof of the Functional Equation for the Riemann Zeta-Function He Could Have Given”* ([Aycock11], 2024) genauer dargestellt, eine Schlüsselrolle im Beweis der Funktionalgleichung für  $\eta(s)$  (113), sofern sie um ein entsprechendes Grenzwertargument ergänzt wird, welches Schlömilch indes nicht explizit angibt. Einen elementaren Beweis der Funktionalgleichung der  $\eta$ -Funktion gibt allerdings Hardy in seiner Arbeit *“A new proof of the functional equation for the Zeta-function”* ([Hardy1], 1922). Der Beweis ist insofern elementar, als dass er lediglich die Formel

$$(-1)^k \frac{\pi}{4} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\sin(2m+1)x}{2m+1}$$

mit einer ganzen Zahl  $k$  und  $k\pi < x < (k+1)\pi$  voraussetzt, welche Euler in entsprechender Form ebenfalls bekannt war. Man findet etwa in § 16 von [EulerE555] die Formel:

$$\frac{\pi - \omega}{2} = \sin \omega + \frac{\sin 2\omega}{2} + \frac{\sin 3\omega}{3} + \frac{\sin 4\omega}{4} + \text{etc.},$$

aus welcher sich die von Hardy ohne Mühe ergibt.

### 6.1.3 Durch einen neuen Gedanken: Die $\vartheta$ -Funktion

The answers you get depend  
upon the questions you ask.

---

Thomas Kuhn

Rückblickend lässt sich bei einigen Begebenheiten konstatieren, dass Euler lediglich einen grundlegenden Gedankengang von der Bergung eines neuen mathematischen Schatzes entfernt war. Um dies an der Jacobi’schen Thetafunktionen nachvollziehen zu können, ist allem voran die Euler’sche Methode Einführung neuer Funktionen in die Analysis zu erläutern. Diesbezüglich findet man in seinen Werken zwei Wege; beide scheint er jedoch explizit nicht umfassender diskutiert zu haben, vielmehr erwähnt er sie im Verlauf einer anderen Untersuchungen beiläufig.

**Einführung neuer Funktionen über bekannte Potenzreihen** Insbesondere seiner *Introductio* [EulerE101] ist die Einführung der elementaren

Funktionen, wie sie heute noch geläufig sind<sup>163</sup>, zu verdanken. In seinem Lehrbuch geht er dabei von der Annahme aus, dass sich jede Funktion in der Form

$$f(x) = Ax^\alpha + Bx^\beta + Cx^\gamma + Dx^\delta + \dots,$$

mit beliebigen Koeffizienten  $A, B, C, D$  etc. und Potenzen  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$  etc., darstellen lässt. Dies setzt er in Kapitel 4 von [EulerE101] auseinander, wo er in § 59 schreibt:

*“Es ist aber ersichtlich, dass keine nicht ganze Funktion von  $z$  mit Termen der Art  $A + Bz + Cz^2 + \text{etc.}$  dargestellt werden kann; denn ansonsten wären sie ja ganz; indes kann sie aber durch eine unendliche Reihe dargestellt werden, wenn jemand daran zweifelt, wird dieser Zweifel durch die Entwicklung der entsprechenden Funktion zerstreut werden. Damit sich diese Ausführungen aber weiter erstrecken, müssen neben den ganzen positiven Potenzen von  $z$  beliebige zugelassen werden. So wird freilich kein Zweifel bestehen, dass eine jede Funktion von  $z$  in einen unendlichen Ausdruck von dieser Art überführt werden kann:*

$$Az^\alpha + Bz^\beta + Cz^\gamma + Dz^\delta + \text{etc.},$$

*während die Exponenten  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$  etc. irgendwelche Zahlen bezeichnen.”*

Nachdem die ganz rationalen und die rationalen Funktionen zuvor bereits abgehandelt worden sind, möchte Euler die irrationalen und elementaren transzendenten Funktionen einführen. Grundlage ist dabei (§ 71) der binomische Lehrsatz. Die Wichtigkeit dieses Satzes für Euler kann kaum überschätzt werden. In der Arbeit *“Demonstratio theorematis Neutroniani de evolutione potestatum binomii pro casibus, quibus exponentes non sunt numeri integri”* ([EulerE465], 1775, ges. 1773) (E465: “Beweis des Newton’schen Theorems über die Entwicklung der Potenzen des Binoms für die Fälle, in denen die Exponenten keine ganzen Zahlen sind”), in welcher er ihn zum ersten Mal beweist<sup>164</sup>, schreibt er direkt im ersten Satz:

<sup>163</sup>Dies bedeutet Polynome, gebrochen rationale Funktionen, Wurzelausdrücke derselben, Winkel- und ihre Umkehrfunktionen, sowie Exponentialfunktion und Logarithmus.

<sup>164</sup>Tatsächlich sind auch moderne Beweise dem Euler’schen Beweis nachempfunden, siehe etwa das Lehrbuch von K. Knopp (1882–1957) *“Theorie und Anwendung der unendlichen Reihen”* ([Knopp], 1996).

modentur, forma generalis  $(P + Q)^{\frac{m}{n}}$  ita exponi potest  
 $P^{\frac{m}{n}} \left(1 + \frac{Q}{P}\right)^{\frac{m}{n}}$ : evoluta enim formula  $\left(1 + \frac{Q}{P}\right)^{\frac{m}{n}}$  Serieque  
resultante per  $P^{\frac{m}{n}}$  multiplicata, prodibit ipsa Series ante data.  
Tum vero si  $m$  non solum numeros integros denotet, sed  
etiam fractos, pro  $n$  tuto unitas collocari poterit. Quibus fac-  
tis, si pro  $\frac{Q}{P}$ , quæ est Functio ipsius  $x$ , ponatur  $Z$ , habebitur  
 $(1+Z)^m = 1 + \frac{m}{1} Z + \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2} Z^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} Z^3$   
 $+ \&c.$  Ad sequentes progressionum leges autem observandas  
conveniet hanc formulæ generalis in Seriem conversionem nota-  
tasse

Abbildung 40: Euler stellt in seiner *Introductio* [EulerE101] den binomischen Lehrsatz und die Binomalreihe vor.

*“Dieser Lehrsatz, für gewöhnlich so dargestellt*

$$(a + b)^n = a^n + \frac{n}{1} \cdot a^{n-1}b + \frac{n}{1} \cdot \frac{n-1}{2} a^{n-2}b^2 + \frac{n}{1} \cdot \frac{n-1}{2} \cdot \frac{n-2}{3} a^{n-3}b^3 + \text{etc.},$$

*sofern verstanden wird, dass er sich weitest möglich erstreckt und in dem Exponenten  $n$  alle denkbaren Zahlen erfasst werden, bildet das gesamte Fundament der höheren Analysis;[...]*”

Heute wird er mithilfe der Binomialkoeffizienten wie folgt präsentiert:

$$(1 + x)^\alpha = 1 + \binom{\alpha}{1}x + \binom{\alpha}{2}x^2 + \binom{\alpha}{3}x^3 + \dots, \quad (125)$$

in welcher Form Euler ihn auch ab § 72 verwendet.

Damit sind automatisch auch alle irrationalen Funktionen als Reihen dargestellt bzw. lassen sich mit seiner Hilfe angeben. In Kapitel 5 wendet er sich nun auch noch den elementaren transzendenten Funktion  $e^x$  und  $\log(1 + x)$  zu. Um erstere als Reihe darzustellen, bemerkt Euler

$$\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = e^x$$

für eine unendlich große Zahl  $n$ . Für die linke Seite findet er vermöge (125)

$$\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = 1 + \frac{n}{1} \cdot \frac{x}{n} + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} \frac{x^2}{n^2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \frac{x^3}{n^3} + \text{etc.}$$

Da  $n$  unendlich groß ist, so sagt Euler, ist

$$e^x = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1 \cdot 2} + \frac{x^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \cdots,$$

was ja gerade die bekannte Potenzreihe von  $e^x$  ist. Auch wenn aus moderner Sicht betrachtet Eulers Herleitung wegen der unzulässigen Grenzwertvertauschung nicht vollständig ist, zeigt sie dennoch zeigt seine Findigkeit, da er in seiner *Introductio* [EulerE101] vollkommen auf die Differentialrechnung verzichten möchte und somit den klassischen Taylor'schen Satz nicht für den Beweis heranziehen kann. Die Potenzreihe für  $\log(1+x)$  leitet er ähnlich aus dem Grenzwert

$$\log(1+x) = \lim_{n \rightarrow \infty} n((1+x)^{\frac{1}{n}} - 1)$$

her. Hieraus zeigt sich, dass Euler neue Funktionen mit Vorliebe aus den *bekannt*en Reihenentwicklungen ableitet, was in der Folge zur Kenntnis neuer Funktionen immer neuere Methoden verlangt, immer kompliziertere Potenzreihen geschlossen aufsummieren zu können. Dies bietet weiter eine Erklärung, weshalb das *Finden* von Summen in den Euler'schen Arbeiten einen solch großen Raum einnimmt<sup>165</sup>.

**Einführung über Integration von algebraischen Funktionen** Einen weiteren Weg, neue Funktionen in die Analysis einzuführen, hat Euler in seiner Arbeit "*De plurimis quantitibus transcendentibus, quas nullo modo per formulas integrales exprimere licet*" ([EulerE565], 1784, ges. 1775) (E565: "Über die vielen transzendenten Größen, welche sich in keiner Weise durch Integralformeln ausdrücken lassen") präsentiert, wo sich die Methode gleich in § 1 zeigt: Neue transzendente Funktionen können über die Integration algebraischer Differentialformen eingeführt werden. Als elementare Beispiele nennt Euler hier

$$\log x = \int_1^x \frac{dx}{x}, \quad \arctan(x) = \int_0^x \frac{dt}{1+tt}$$

<sup>165</sup> Allein 4 Bände seiner *Opera Omnia* (Band 14, 15, 16,1 und 16,2 der ersten Serie) enthalten einzig Arbeiten, die sich der Reihenlehre widmen.

und das nicht mehr triviale Beispiel

$$\int \sqrt{\frac{f + bxx}{g + kxx}} dx,$$

welches zu elliptischen Integralen führt und – wie Euler auch an vielen Stellen in seinem Opus bemerkt – sich nicht mit Logarithmen und Kreisbögen<sup>166</sup> ausdrücken lässt.

Die erwähnte Arbeit zieht jedoch ihr Interesse auf sich, weil, wie auch der Titel bereits suggeriert, viele Reihen existieren, die sich nicht auf die beschriebene Weise gewinnen lassen, wovon in § 5 Euler als Beispiel die Reihe

$$1 + x^1 + x^4 + x^9 + x^{16} + \text{etc.}, \quad (126)$$

nennt, welche man als heute  $\vartheta$ -Funktion ausmacht, da

$$1 + x^1 + x^4 + x^9 + x^{16} + \text{etc.} = \frac{1}{2} (\vartheta_3(x) + 1), \quad \text{da} \quad \vartheta_3(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x^{k^2}.$$

Euler ist öfters zu der Reihe (126) geführt worden, da sie bzw. ihre Potenzen Aussagen zur Darstellbarkeit von Zahlen als Quadratsummen erlaubt, sofern man denn einen leicht potenzierbaren geschlossenen Ausdruck für sie finden könnte. Dies mag sein Ausgangspunkt gewesen sein, überhaupt (126) zu erwähnen. Den Bezug zur Zahlentheorie macht er dabei explizit in § 6.

Aus den Erklärungen mag man bereits erahnen, dass es Euler zeitlebens nicht gelingen sollte, einen geschlossenen Ausdruck für (126) zu finden und ähnliche Reihen, deren Potenzen gemäß einer quadratischen Progression fortschreiten, aufzusummieren. In § 10 von [EulerE475] schreibt er diesem Zusammenhang:

*“Weil weiter unter Verwendung einer unendlichen Reihe gilt:*

$$\frac{\pi}{4} = \arctan\left(\frac{1}{2}\right) + \arctan\left(\frac{1}{8}\right) + \arctan\left(\frac{1}{18}\right) + \arctan\left(\frac{1}{32}\right)$$

---

<sup>166</sup>Diese würden heute eher als inverse trigonometrische Funktionen oder Arkusfunktionen bezeichnet. Euler nennt sie zumeist Kreisbögen.

§. 10. Nunc igitur feriem simplicem inuentam  
 quae aequalis est producto infinito proposito

$$(1-x)(1-xx)(1-x^2)(1-x^4) \text{ etc.}$$

perfecte cognoscimus. Cum enim haec series inuenta fit:

$$s = 1 - x^1 - x^2 + x^5 + x^7 - x^{12} - x^{15} + x^{22} + x^{26} \\
 - x^{35} - x^{40} + x^{51} + \text{etc.}$$

certi nunc fumus, in ea alias potestates ipsius  $x$  non  
 occurrere, nisi quarum exponentes contineantur in hac for-  
 muli generali:  $\frac{x^{nn} + n}{2}$ , et quidem ita, vt si  $n$  fuerit numerus  
 impar, bini termini inde nati habituri sint signum  $-$ , qui  
 autem ex paribus oriuntur signum  $+$ .

Abbildung 41: Euler spricht in seiner Arbeit [EulerE541] den Pentagonalzahlen-  
 satz aus.

$$+ \arctan\left(\frac{1}{50}\right) + \text{etc.},$$

der allgemeine Terme welcher Reihe  $\arctan\left(\frac{1}{2nn}\right)$  ist, werden wir diese be-  
 merkenswerte Integration haben:

$$\int \frac{dx}{x \log x} (x^2 + x^8 + x^{18} + x^{32} + \text{etc.}) \sin \log x = \frac{\pi}{4},$$

welche umso bemerkenswerter ist, weil die unendliche Reihe  $x^2 + x^8 + x^{18} +$   
 $x^{32} + \text{etc.}$  in keiner Weise auf eine endliche Summe reduziert werden kann.<sup>167</sup>

Jacobi, welcher Summen dieser Gestalt nachdrücklich in die Analysis  
 eingebracht hat, ist solche Probleme umgegangen, indem er solche Reihen  
 als summiert festlegt, wenn man sie auf elliptische Funktionen wie eben die  
 just genannte  $\vartheta_3$  zurückgeführt hat. Man vergleiche seine Arbeit "*Suite des*  
*Notices sur les Fonctions Ellitiques*" ([Jacobi1], 1828) ("Weitere Bemerkun-  
 gen über elliptische Funktionen").

Eine Summierung im eigentlichen Sinne gelingt Euler ebenfalls nicht bei

<sup>167</sup>Das Integral, so erklärt Euler vorher, ist von  $x = 0$  bis  $x = 1$  zu nehmen.

seinem berühmten Pentagonalzahlensatz:

$$\prod_{k=1}^{\infty} (1 - q^k) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n q^{\frac{3n^2+n}{2}},$$

welchen er bereits zum ersten Mal in Kapitel 16, § 323 von [EulerE101] angibt und durch Tabellen zu erhärten versucht. Einen Beweis reicht er sehr viel später in der Arbeit *“Evolutio producti infiniti  $(1-x)(1-xx)(1-x^3)(1-x^4)(1-x^5) \cdot \text{etc. in seriem simplicem}$ ”* ([EulerE541], 1783, ges. 1775) (E541: “Entwicklung des unendlichen Produktes  $(1-x)(1-xx)(1-x^3)(1-x^4)(1-x^5) \cdot \text{etc.}$  in eine unendliche Reihe”) nach<sup>168</sup>. Euler findet demnach aus dem Produkt die Summe, nicht aus der Summe das Produkt. Hierfür bedurfte es erst der Idee von Abel *“Recherches sur les fonctions elliptiques”* ([Abel3], 1827) (“Untersuchungen zu elliptischen Funktionen”), die elliptischen Funktionen als Umkehrfunktionen zu den elliptischen Integralen einzuführen und sie in Analogie zu den aus der Trigonometrie bekannten Arkusfunktionen und Sinusfunktionen zu behandeln. Der Abel’sche Ansatz liegt insofern diametral zu den Euler’schen Herangehensweisen, da er die Frage aufwirft, bis zu welcher Grenze eine Quadratur mit vorgegebenen Integranden erstreckt werden muss<sup>169</sup>, sodass selbige Quadratur einem beliebigen Wert gleich wird, wohingegen Euler Quadraturen mit variablen Grenzen überhaupt nicht eingehender untersucht zu haben scheint. Sie treten dann als Lösungen von Differentialgleichungen auf, werden aber dann nicht weiter diskutiert. Selbst an den Beispielen der  $\Gamma$ -Funktion etwa in [EulerE19] oder der hypergeometrischen Funktion in [EulerE274] findet sich bei Euler die variable Größe stets im Integranden und nicht in der Integralgrenze selbst.

## 6.2 Von Euler nicht beweisbare Entdeckungen

Today’s accomplishments were  
yesterday’s impossibilities.

---

Robert H. Schuller

Nach der Besprechung von Instanzen, in welchen Euler die Fähigkeit hatte, einen Beweis für seine Entdeckung zu liefern, es jedoch nicht tat,

---

<sup>168</sup>Der Euler’sche Beweis des Pentagonalzahlensatzes wird auch Polya’s Buch *“Mathematics and Plausible Reasoning”* ([Poyla], 2014) ausführlich als Beispiel für Induktion in Eulers Werk besprochen.

<sup>169</sup>In Abels erwähneter Arbeit [Abel3] waren dies die elliptischen Integrale, ein Spezialfall der nach Abel benannten Abel’schen Integrale.

werden nun von Euler nicht beweisbare Entdeckungen in den Fokus rücken. Die Gründe für das Ausbleiben eines Nachweises reichen dabei von einer unzureichenden Formulierung wie beim Primzahlsatz (Abschnitt 6.2.1) über das schlichte Fehlen von Mitteln wie beim quadratischen Reziprozitätsgesetz (Abschnitt 6.2.2) bis hin zu einer für Euler nicht erkennbaren Unvollständigkeit des Beweis wie beim großen Satz von Fermat für den Fall  $n = 3$  (Abschnitt 6.2.3).

### 6.2.1 Wegen fehlender Formulierung: Der Primzahlsatz

God may not play dice with the  
universe, but something strange  
is going on with the prime  
numbers.

---

Carl Pomerance

Der Primzahlsatz ist eines der großen Resultate der Zahlentheorie, so dass es verwundern mag, dass Euler nicht zumindest auf ihn gestoßen sein soll<sup>170</sup>. Denn, wie wenig verwundern dürfte, die Primzahlen auch Eulers Interesse auf sich, obwohl sie ihn bisweilen an seine Grenzen gebracht haben. Dies bringt er eines Beispiels wegen direkt in § 1 seiner Arbeit *“Découverte d’une loi tout extraordinaire des nombres par rapport à la somme de leurs diviseurs”* ([EulerE175], 1751, ges. 1747) (E175: “Entdeckung eines völlig außergewöhnlichen Gesetzes bezüglich der Summe ihrer Teiler”) folgendermaßen zum Ausdruck:

*“Die Mathematiker haben sich bis zum heutigen Tage vergebens bemüht, irgendeine Ordnung in der Folge der Primzahlen zu entdecken, und man ist geneigt zu glauben, dies sei ein Geheimnis, das der menschliche Geist niemals zu durchdringen wissen wird.”*

Jedoch liegt in den Euler’schen Arbeiten ein heuristisches Argument vergraben, mit welchem man zumindest zur Formulierung des Primzahlsatzes gelangen kann. Grundlage ist dabei das Euler-Produkt

---

<sup>170</sup>In der Literatur wird oft Gauß als der Erstentdecker genannt, der ihn basierend auf Primzahlentabellen vermutet hat. Es existiert ein Brief aus seinem Nachlass, in dem Gauß die Entdeckung des Primzahlsatzes auf das Jahr 1796 datiert; man vergleiche [Gauß6].

$$P = \frac{1}{(1 - \frac{1}{2})(1 - \frac{1}{3})(1 - \frac{1}{5})(1 - \frac{1}{7})(1 - \frac{1}{11})(1 - \frac{1}{13}) \&c.,}$$

fict

$$P = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \frac{1}{9} + \&c.,$$

**Abbildung 42:** Euler formuliert das Euler-Produkt für die harmonische Reihe. Hier ist die Version von [EulerE101] zu sehen.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \prod_{p \in \mathbb{P}} \frac{1}{1 - \frac{1}{p^s}}, \quad (127)$$

wobei  $\mathbb{P}$  die Menge der Primzahlen bedeutet, welches zu ersten Mal von Euler in Theorem 8 in der Arbeit “*Variae observationes circa Series infinitas*” ([EulerE72], 1744, ges. 1737) (E72: “Verschiedene Beobachtungen über unendliche Reihen”) abgeleitet wird. Eine geordnete Darstellung gibt Euler in § 173 seiner *Introductio* [EulerE101].

Hier soll aber die Aufmerksamkeit auf Theorem 7 und die Korollare aus selbigem in [EulerE72] gerichtet werden. In Korollar 3 zu diesem Theorem 7 schreibt Euler:

“Aber daraus sieht man auch ein, dass es unendlich mal weniger Primzahlen als ganze Zahlen gibt, denn dieser Ausdruck  $\frac{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot \text{etc.}}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot \text{etc.}}$  hat einen absolut unendlichen Wert, während derselbe, aber lediglich aus Primzahlen entstanden, der Logarithmus von jenem Unendlichen ist.”

Modern mag man Eulers Aussage vielleicht so ausdrücken:

$$\log \left( \prod_{k=1}^{\infty} \frac{k+1}{k} \right) = \prod_{p \in \mathbb{P}} \frac{p}{p-1} = \prod_{p \in \mathbb{P}} \frac{1}{1 - \frac{1}{p}},$$

wobei das = natürlich formal zu verstehen ist. Dass im Ausdruck rechter Hand die Primzahlen im Zähler und im Nenner dieselben weniger 1 zu schreiben sind, lehrt Euler im Beweis zu seinem Theorem 7. Anders ausgedrückt formuliert Euler hier, dass die harmonische Reihe wie der Logarithmus wächst:

$$\prod_{p \in \mathbb{P}} \frac{1}{1 - \frac{1}{p}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \log(\infty),$$

wie Euler auch in Korollar 1 zu selbigem Theorem 7 sagt<sup>171</sup>. Damit ist unter anderem die Unendlichkeit der Menge der Primzahlen nachgewiesen, wie auch Sandifer in seiner Notiz *“Infinitely many primes”* ([Sandifer12], 2006) hervorhebt. Aus heutiger Sicht mag Eulers Ausdrucksweise mehr zur Verwirrung als zur Erklärung beitragen und hat womöglich auch deswegen Sandifer in seinem Buch *“The Early Mathematics of Leonhard Euler”* ([Sandifer22], 2007) in der Besprechung von Eulers Arbeit [EulerE72] bewogen, die oben zitierte Aussage wie folgt in Formeln ausgedrückt zu sehen

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\pi(n)}{\log(n)} = 1,$$

mit  $\pi(n)$  als der Anzahl der Primzahlen unter  $n$ . Sandifer merkt aber auch an, dass er sich bei dieser Interpretation wegen Eulers Formulierungsweise nicht völlig sicher ist. Trotz alledem ist es möglich, aus den Euler’schen Überlegungen heraus eine Verbindung zu Primzahlsatz herzustellen.

Auf der formalen Ebene sagt Euler nämlich auch

$$\log \zeta(1) = \log(\log(\infty)),$$

wobei  $\zeta(1)$  hier der Kürze wegen für die harmonische Reihe steht, sodass

$$\zeta(1) = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots$$

Nach dem Euler–Produkt (127) gilt jedoch überdies:

$$\log \zeta(1) = - \sum_{p \in \mathbb{P}} \log \left( 1 - \frac{1}{p} \right) = - \sum_{n=2}^{\infty} (\pi(n) - \pi(n-1)) \log \left( 1 - \frac{1}{n} \right).$$

Ein Indexshift gibt:

---

<sup>171</sup>Mertens (1840–1927) hat später in seiner Arbeit *“Ein Beitrag zur analytischen Zahlentheorie”* ([Mertens], 1874) folgende Formel nachgewiesen:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\log(n)} \prod_{p \in \mathbb{P}} \frac{1}{1 - \frac{1}{p}} = e^{\gamma},$$

wobei  $\gamma$  die Euler–Mascheroni–Konstante bedeutet.

$$\log \zeta(1) = - \sum_{n=2}^{\infty} \pi(n) \left( \log \left( 1 - \frac{1}{n} \right) - \log \left( 1 - \frac{1}{n+1} \right) \right).$$

Weil

$$\int \frac{dx}{x(x-1)} = \log(1-x) - \log(x)$$

gilt, hat man folglich

$$\log \zeta(1) = \sum_{n=2}^{\infty} \pi(n) \int_n^{n+1} \frac{dx}{x(x-1)} = \int_2^{\infty} \frac{\pi(x) dx}{x(x-1)}.$$

Euler hätte dies wohl zunächst so geschrieben:

$$\log(\log(\infty)) = \int_2^{\infty} \frac{\pi(x) dx}{x(x-1)}.$$

Die letzte Gleichung<sup>172</sup> drückt aus, dass das Integral auf der rechten Seite divergiert wie  $\log(\log(x))$  für  $x \rightarrow \infty$ , was die inverse Frage impliziert, wie die Funktion  $\pi(x)$  zu wählen ist, dass sich das Integral zu  $\log(\log(x))$  integriert. Da

$$\frac{d}{dx} \log(\log(x)) = \frac{1}{\log(x)} \cdot \frac{1}{x}$$

gilt, müsste also

$$\frac{1}{x \cdot \log(x)} = \frac{\pi(x)}{x(x-1)}$$

gelten. Dies ergibt

$$\pi(x) = \frac{x-1}{\log(x)}.$$

---

<sup>172</sup>Dies ist ein spezieller Fall von Formel (1.1.3) aus dem Buch *“The Theory Of The Riemann Zeta-Function”* ([Titchmarsh], 1987) von Titchmarsh (1899–1963):

$$\log(\zeta(s)) = \int_2^{\infty} \frac{s\pi(x) dx}{x(x^s - 1)},$$

wobei  $\zeta(s)$  die Riemann’sche  $\zeta$ -Funktion (111) bezeichnet.

Für unendliches  $x$  demnach insbesondere:

$$\pi(x) \sim \frac{x}{\log(x)} \quad \text{für } x \rightarrow \infty,$$

was gerade der Primzahlsatz ist, wie in Gauß in seinen Tagebüchern zuerst formuliert hat<sup>173</sup>. Das vorgestellte Argument ist selbstredend rein heuristisch. Es zeigt allerdings, wie Euler zumindest auch aus seinen Überlegungen zum Primzahlsatz hätte gelangen können, sich wegen umständlicher Formulierungen diesen Weg jedoch versperrte.

### 6.2.2 Wegen fehlender Mittel: Das Reziprozitätsgesetz

The Difficult is that which can  
be done immediately; the  
Impossible that which takes a  
little longer.

---

George Santayana

Entsprechende algebraische Konzepte werden bereits schmerzlich bei kleineren Sätzen der Zahlentheorie vermisst, wie etwa dem Satz von Wilson (1741–1793), also den Satz

$$p|(p-1)! + 1 \iff p \in \mathbb{P}.$$

Während Euler diesen im Vergleich zu Lagrange<sup>174</sup> noch elegant zu beweisen vermag – Eulers Beweis aus seiner Arbeit *“Miscellanea analytica”* ([EulerE560], 1783, ges. 1773) (E560: “Verschiedenes Analytisches”) ist der heute übliche über die Primitivwurzel, welches Konzept er freilich nicht in der heutigen Form kennt, man aber aus seinen Erläuterungen leicht herauslesen kann – sind spätestens beim quadratischen Reziprozitätsgesetz Lehrsätze aus der höheren Algebra für einen ersten Beweis wohl unumgänglich. Freilich existieren heute analytische Beweise, sie setzen aber stets bei der Auswertung einer Gauß’schen Summe an, welche Euler ebenfalls unbekannt war. Wieder andere Beweise ziehen die Jacobi’schen  $\vartheta$ -Funktionen heran, die Euler wie oben (Abschnitt 6.1.3) diskutiert nur oberflächlich berührt. Am ehesten, was die analytischen Mittel betrifft, wäre Euler wohl zum dem

---

<sup>173</sup>Man vergleiche dazu den Brief aus [Gauß6] aus seinem Nachlass.

<sup>174</sup>Lagrange liefert den ersten Beweis dieses Resultats in seiner Arbeit *“Démonstration d’un théorème nouveau concernant les nombres premiers”* ([Lagrange3], 1773, ges. 1771) (“Beweis eines neuen Lehrsatzes über Primzahlen”).

Eisenstein'schen Beweis des Reziprozitätsgesetzes aus der Arbeit "Applications de l'Algèbre à l'Arithmétique transcendente" ([Eisenstein2], 1845) ("Anwendungen der Algebra auf die transzendente Zahlentheorie") fähig gewesen. Selbiger nutzt neben den dem bereits erwähnten Gauß'schen Lemma überdies das Legendre-Symbol<sup>175</sup>. Es gilt nämlich zunächst:

**Theorem 2** (Gauß'sches Lemma). *Es gilt*

$$\left(\frac{a}{p}\right) = (-1)^{\sum_{j=1}^{\frac{p-1}{2}} \left[\frac{2aj}{p}\right]}$$

mit dem Legendre-Symbol  $\left(\frac{a}{p}\right)$  und  $aj = \varepsilon_j(a) \cdot h_j(a) + e_j \cdot p$ . Dabei ist  $1 \leq h_j(a) \leq \frac{p-1}{2}$ ,  $\varepsilon_j(a)$  das Vorzeichen von  $ja \bmod p$  und  $e_j$  eine ganze Zahl.

Eisensteins Beweis nutzt die Identität<sup>176</sup>:

$$\frac{\sin(mx)}{\sin(x)} = (-4)^{\frac{m-1}{2}} \prod_{j=1}^{\frac{m-1}{2}} \left( \sin^2(x) - \sin^2\left(\frac{2\pi j}{m}\right) \right)$$

für eine ungerade Zahl  $m$ . Nennt man nun die Menge der Reste modulo einer ungeraden Primzahl  $p$ , die  $\leq \frac{p-1}{2}$  sind, der Kürze wegen  $R_p$ , so gilt mit dem Lemma von Gauß und der eben genannten Identität:

$$\left(\frac{q}{p}\right) = \prod_{j \in R_p} \frac{\sin\left(\frac{2\pi qj}{p}\right)}{\sin\left(\frac{2\pi j}{p}\right)} = \prod_{j \in R_p} (-4)^{\frac{q-1}{2}} \prod_{k \in R_q} \left( \sin^2\left(\frac{2\pi j}{q}\right) - \sin^2\left(\frac{2\pi k}{p}\right) \right)$$

oder unter Vertauschung der Summanden in der letzten Formel:

<sup>175</sup>Das Legendre-Symbol  $\left(\frac{a}{p}\right)$  für eine ganze Zahl  $a$  und eine Primzahl  $p$  kann bekanntermaßen nur die drei Werte  $-1, 0$  und  $1$  annehmen. Es ist  $1$ , sofern  $a$  ein quadratischer Rest modulo  $p$  ist,  $-1$ , falls  $a$  kein quadratischer Rest modulo  $p$  ist und  $0$ , dass  $p$  bereits  $a$  teilt.

<sup>176</sup>Man kann nachstehende Identität aus dem Euler'schen Opus heraus wie folgt nachweisen. Wegen  $e^{ix} = \cos x + i \sin x$  geht sie zunächst über in  $\frac{e^{imx} - e^{-imx}}{e^{ix} - e^{-ix}}$ . Setzt man nun  $y = e^{ix}$ , hat man  $\frac{y^m - (\frac{1}{y})^m}{y - \frac{1}{y}}$ . Nun bediene man sich der Zerlegungsformeln, welche Euler in § 151 seiner *Introductio* angibt. Dann hat man lediglich die Substitution rückgängig zu machen und sich der Formel  $\cos(2x) = 1 - \sin^2(x)$  zu bedienen und eine leichte Umformung vorzunehmen.

$$\left(\frac{q}{p}\right) = (-4)^{\frac{p-1}{2} \frac{q-1}{2}} \prod_{j \in R_p} \prod_{k \in R_q} \left( \sin^2 \left( \frac{2\pi k}{p} \right) - \sin^2 \left( \frac{2\pi j}{q} \right) \right) \quad (128)$$

Also gilt analog für vertauschte Rollen von  $p$  und  $q$ :

$$\left(\frac{p}{q}\right) = (-4)^{\frac{p-1}{2} \frac{q-1}{2}} \prod_{j \in R_p} \prod_{k \in R_q} \left( \sin^2 \left( \frac{2\pi k}{q} \right) - \sin^2 \left( \frac{2\pi j}{p} \right) \right).$$

Da das Produkt über  $R_p$  nun  $\frac{p-1}{2}$  und das über  $R_q$  entsprechend  $\frac{q-1}{2}$  Faktoren beinhaltet, gilt auch:

$$\left(\frac{p}{q}\right) = (-4)^{\frac{p-1}{2} \frac{q-1}{2}} (-1)^{\frac{p-1}{2} \frac{q-1}{2}} \prod_{j \in R_p} \prod_{k \in R_q} \left( \sin^2 \left( \frac{2\pi k}{p} \right) - \sin^2 \left( \frac{2\pi j}{q} \right) \right),$$

was jedoch nach (128) gerade wieder mit  $\left(\frac{q}{p}\right)$  ausgedrückt werden kann, sodass insgesamt:

$$\left(\frac{p}{q}\right) = (-1)^{\frac{p-1}{2} \frac{q-1}{2}} \left(\frac{q}{p}\right).$$

Dies ist genau die Formulierung des quadratischen Reziprozitätsgesetzes, wie sie Legendre in seinem Lehrbuch *“Essai sur la théorie des nombres”* ([Legendre1], 1797) (“Essay zur Zahlentheorie”) gegeben hat.

Euler selbst formuliert das Reziprozitätsgesetz in seiner Arbeit *“Observationes circa divisionem quadratorum per numeros primos”* ([EulerE552], 1783, ges. 1772) (E552: “Beobachtungen zur Teilung von Quadratzahlen durch Primzahlen”) wie folgt, sofern man seine Aussage gedrungen in moderner Terminologie darstellt:

*“Für eine ungerade Primzahl  $p$  mit  $(a, q) = 1$ , mit einer ganzen Zahl  $a$ , gelte  $p \equiv \pm q \pmod{4a}$  für eine weitere Primzahl  $q$ , dann gilt  $\left(\frac{a}{q}\right) = \left(\frac{a}{p}\right)$ , wobei hier die Legendre-Symbole gemeint sind.”*

Zum Vergleich und zur Untermauerung des durch die Legendre’sche Formulierung gewonnenen Vorteils sei auch noch Eulers Beschreibung aus besagter

### Conclusio.

§. 39. Quatuor hæc Theoremata postrema, quorum demonstratio adhuc desideratur, sequenti modo concinnius exhiberi possunt:

*Existente s numero quocunque primo, diuidantur tantum quadrata imparia 1, 9, 25, 49, etc. per diuisorem 4s, notenturque residua, quae omnia erunt formae 4q + 1, quorum quouis littera a indicetur, reliquorum autem numerorum, formae 4q + 1, qui inter residua non occurrunt, quilibet littera A indicetur, quo factio si fuerit*

diuisor numerus	
primus formae	tum est
$4ns + a$	$+s$ residuum et $-s$ residuum
$4ns - a$	$+s$ residuum et $-s$ non-residuum
$4ns + A$	$+s$ non-residuum et $-s$ non-residuum
$4ns - A$	$+s$ non-residuum et $-s$ residuum.

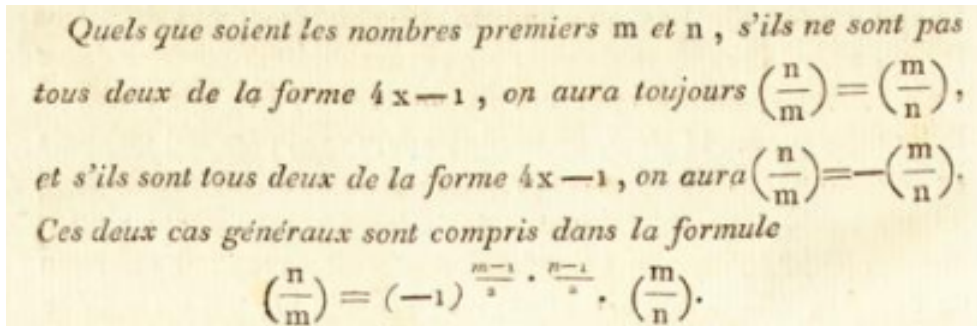
**Abbildung 43:** Euler formuliert im letzten Paragraphen seiner Arbeit [EulerE552] seine Version des quadratischen Reziprozitätsgesetzes und räumt ein, dass er es nicht beweisen kann.

Arbeit beigelegt. Er schreibt:

*“Während s eine beliebige Primzahl ist, teile man die ungeraden Quadrate 1, 9, 25 etc. durch den Teiler 4s, dann werden Reste entstehen, die alle von der Form 4q + 1 sein werden, von welchen man jeden mit dem Buchstaben a notiere, aber von den übrigen Zahlen der Form 4q + 1, welche nicht unter den Resten auftreten, zeige man jedwede mit dem Buchstaben A an, wonach es sich wie nachstehend verhalten wird:*

<i>Für Primteiler der Form</i>	<i>ist dann</i>
$4ns + a$	$+s$ ein Rest und $-s$ ein Rest
$4ns - a$	$+s$ ein Rest und $-s$ ein Nicht-Rest
$4ns + A$	$+s$ ein Nicht-Rest und $-s$ ein Nicht-Rest
$4ns - A$	$+s$ ein Nicht-Rest und $-s$ ein Rest”

Im Falle des quadratischen Reziprozitätsgesetzes ist demnach eine echte Grenze Eulers erreicht, angesichts des fehlenden algebraischen Rüstzeugs sowie einer entsprechenden Formulierung lässt sich zur Behauptung gelangen, dass sich ein Beweis des Reziprozitätsgesetzes aus dem Euler’schen Opus



**Abbildung 44:** Legendre formuliert in seinem Buch [Legendre1] das quadratische Reziprozitätsgesetz.

heraus nicht geben lässt, sondern eines darüber hinausgehenden Konzepts bedarf.

All dem zum Trotz sei an dieser Stelle noch ein Gedankengang mitgeteilt, wie sich Euler, sofern er von der Bedeutung des Legendre-Symbols gewusst hätte, sich von der Gültigkeit des Reziprozitätsgesetzes aus seinen Überlegungen heraus überzeugt haben könnte. Bereits in seiner Arbeit “*Theoremata circa divisores numerorum in hac forma  $paa \pm qbb$  contentorum*” ([EulerE164], 1751, ges. 1747) (E164: “Theoreme über die in der Form  $paa \pm qbb$  enthaltenen Zahlen”) findet sich, wenn auch verbal formuliert, in Annotatio 16 eine (von Euler nicht bewiesene) Aussage, welche sich wie folgt in moderne Terminologie überführen lässt:

**Theorem 3** (Eulers erste Version des Reziprozitätsgesetzes). *Für ungerade Primzahlen  $p$  und  $q$  hat man folgende Äquivalenz*

$$\left(\frac{q}{p}\right) = 1 \iff p \equiv \pm\beta^2 \pmod{4q},$$

wobei  $\left(\frac{q}{p}\right)$  das Legendre-Symbol meint und  $\beta$  eine ungerade Zahl ist.

Nun wäre für Euler wohl naheliegend gewesen, den nachstehenden Ausdruck einer Untersuchung zu unterwerfen:

$$f(p, q) := \left(\frac{q}{p}\right) \left(\frac{p}{q}\right) \tag{129}$$

und diesen zunächst weitestmöglich zu vereinfachen. Aus Eulers Vermutung gilt  $p = \pm\beta + 4ql$  mit einer ganzen Zahl  $l$ . Damit hat man

$$f(p, q) = \left(\frac{q}{p}\right) \left(\frac{\pm\beta^2 + 4ql}{q}\right).$$

Aus den Eigenschaften des Legendre-Symbols folgt weiter

$$f(p, q) = \left(\frac{q}{p}\right) \left(\frac{\pm\beta^2}{q}\right) = \left(\frac{q}{p}\right) \left(\frac{\beta^2}{q}\right) \left(\frac{\pm 1}{q}\right) = \left(\frac{q}{p}\right) \left(\frac{\pm 1}{q}\right).$$

Nun sind Fälle zu unterscheiden, je nachdem, ob das obere oder das untere Vorzeichen gilt. Es gelte zunächst das obere. Dann findet man folgendes vor:

$$f(p, q) = \left(\frac{q}{p}\right) \left(\frac{1}{q}\right) = \left(\frac{q}{p}\right) = 1,$$

wobei im letzten Schritt die Euler'sche Annahme, dass  $\left(\frac{q}{p}\right) = 1$  ist, aus dem Theorem genutzt wurde.

Jetzt gelte das untere Vorzeichen, woraus sich ergibt:

$$f(p, q) = \left(\frac{q}{p}\right) \left(\frac{-1}{q}\right) = \left(\frac{q}{p}\right) (-1)^{\frac{q-1}{2}} = (-1)^{\frac{q-1}{2}}.$$

Im letzten Schritt wurde wieder die Voraussetzung  $\left(\frac{q}{p}\right) = 1$  verwendet. Dass  $\left(\frac{-1}{q}\right) = (-1)^{\frac{q-1}{2}}$  gilt, was gerade der erste Ergänzungssatz zum quadratischen Reziprozitätsgesetz ist, hat Euler gleichsam durch den Nachweis des Zwei-Quadratesatzes aus Theorem (7) gezeigt<sup>177</sup>.

Weiter lässt sich  $f(p, q)$  zunächst einmal nicht einschränken. Man sieht jedoch leicht ein, dass die Auswahl

$$f(p, q) = (-1)^{\frac{p-1}{2} \frac{q-1}{2}}$$

den herausgearbeiteten Bedingungen Genüge leistet, zumal man zunächst einmal findet:

$$(-1)^{\frac{p-1}{2} \frac{q-1}{2}} = (-1)^{\frac{\pm\beta^2 + 4ql - 1}{2} \frac{q-1}{2}},$$

weshalb wieder nach den Vorzeichen unterschieden werden muss. Es gelte das obere und es sei  $\beta = 2\alpha + 1$ , da  $\beta$  als ungerade Zahl vorausgesetzt wird, sodass

---

<sup>177</sup>Dieser wird unten in Abschnitt (7.3.3) noch ausführlich diskutiert werden.

$$(-1)^{\frac{\beta^2+4ql-1}{2} \frac{q-1}{2}} = (-1)^{\frac{4\alpha^2+4\alpha+1+4ql-1}{2} \frac{q-1}{2}} = (-1)^{(2\alpha^2+2\alpha+2ql) \frac{q-1}{2}} = 1,$$

da  $(2\alpha^2 + 2\alpha + 2ql)$  eine gerade Zahl ist.

Für den anderen Fall gilt, sofern wieder  $\beta = 2\alpha + 1$  gesetzt wird,

$$(-1)^{\frac{+\beta^2+4ql-1}{2} \frac{q-1}{2}} = (-1)^{(-2\alpha^2-2\alpha+2ql-1) \frac{q-1}{2}} = (-1)^{\frac{q-1}{2}},$$

da  $-2\alpha^2 - 2\alpha + 2ql - 1$  eine ungerade Zahl ist, womit auch diese aus den Euler'schen Annahme herstammende Bedingung erfüllt wird, sodass Euler sich zweifelsohne bewogen sähe, zu behaupten, (129) stelle sich wie folgt dar:

$$f(p, q) := \left(\frac{q}{p}\right) \left(\frac{p}{q}\right) = (-1)^{\frac{p-1}{2} \frac{q-1}{2}},$$

was natürlich das Reziprozitätsgesetz in Legendre'scher Formulierung ist. Dass neben der Wahl von  $f(p, q)$  als  $(-1)^{\frac{p-1}{2} \frac{q-1}{2}}$  noch weitere mit seinen Annahmen verträgliche existieren, wäre Euler vermutlich auch bewusst gewesen. Jedoch unterscheiden sie sich lediglich im Exponenten um ein gerades Vielfaches vom Ausdruck  $\frac{p-1}{2} \frac{q-1}{2}$ , sodass Euler hier mit guten Recht sein Argument der Einfachheit als Maßstab für die Richtigkeit (wie oben im Abschnitt (3.1.4) am Beispiel der Funktionalgleichung  $\zeta$ -Funktion gesehen) seiner Auswahl geltend gemacht hätte. Überdies lässt sich mit den vorgeführten ähnlichen Rechnungen zeigen, dass das Reziprozitätsgesetz auch Eulers Vermutung aus Theorem (3) impliziert.

### 6.2.3 Wegen nicht zu sehender Unvollständigkeit: Der große Satz von Fermat für $n=3$

I have discovered a truly  
marvelous proof of this, which  
however the margin is not large  
enough to contain.

---

Pierre de Fermat

Wie bereits an verschiedenen Stellen angeklungen, sollte das Euler'sche Interesse an zahlentheoretischen Fragen, insbesondere an den Entdeckungen von Fermat, nie zum Erliegen kommen. Einen ausführlichen Bericht mit mathematischen Details finden man im Buch von Weil *“Number theory. An approach through history. From Hammurapi to Legendre”* ([Weil1],

**Lehrsatz:** Es ist nicht möglich zwey Cubos zu finden, deren Summe oder auch Differenz ein Cubus wäre.

Hier ist vor allen Dingen zu bemerken, daß wenn die Summe unmöglich ist, die Differenz auch unmöglich seyn müsse. Denn wenn es unmöglich ist daß  $x^3 + y^3 = z^3$ , so ist es auch unmöglich daß  $z^3 - y^3 = x^3$ , nun aber ist  $z^3 - y^3$  die Differenz von zwey Cubis:

Abbildung 45: Euler formuliert in seiner *Algebra* [EulerE387] den großen Satz von Fermat für  $n = 3$ .

1984) im Kapitel über Euler. Hier soll es um einen Spezialfall des großen Fermat'schen Satzes gehen, welchen Euler in § 243 des zweiten Teils seines Buchs "*Vollständige Anleitung zur Algebra*", bestehend aus den zwei Teilen ([EulerE387], 1770, ges. 1767) und ([EulerE388], 1770, ges. 1776), bewiesen hat. Er intendiert zu demonstrieren, dass

$$x^3 + y^3 = z^3$$

abgesehen von der offenkundigen Lösung  $x = y = z = 0$  keine andere ganzzahlige Lösung zulässt. Der Schlüssel zum gesuchten Nachweis besteht in folgender Erkenntnis: Ist  $ax^2 + cy^2$ , wobei  $-ac$  kein Quadrat sein soll<sup>178</sup>, und überdies ein Kubus, wo  $x$  und  $y$  teilerfremd sein sollen, so kann man stets ganze Zahlen  $p$  und  $q$  finden, sodass

$$x = ap^3 - 3cpq^2 \quad \text{und} \quad y = 3ap^2q - cq^3$$

gilt. Dass diese Wahl von  $x$  und  $y$  die Form  $ax^2 + by^2$  zu einem Kubus macht, ist durch direkte Rechnung schnell überprüft.

Der Euler'sche Gedankengang lässt sich aus dem Ansatz

$$x\sqrt{a} \pm y\sqrt{-c} = (p\sqrt{a} \pm q\sqrt{-c})^3$$

durch Ausmultiplizieren der rechten Seite und anschließendem Koeffizientenvergleich unmittelbar nachvollziehen. Konkret braucht Euler hier den

<sup>178</sup>Euler drückt dies aus, indem er fordert, dass die Form  $ax^2 + by^2$  sich nicht in lineare Faktoren zerlegen lassen soll.

Fall, in welchem  $a = 1$  und  $c = 3$  ist, sodass man im Erweiterungskörper  $\mathbb{Q}[\sqrt{-3}]$  arbeitet, die Eigenschaften welcher Zahlen Euler in seiner Abhandlung “*Solutio generalis quorundam problematum Diophanteorum, quae vulgo nonnisi solutiones speciales admittere videntur*” ([EulerE255], 1761, ges. 1754) (E255: “Die allgemeine Lösung gewisser Diophant’scher Probleme, die für gewöhnlich nur spezielle Lösungen zuzulassen scheinen”) herausgearbeitet hat. Eulers Beweis ist auf einem unendlichen Abstieg begründet und die Methode lässt sich auch als mathematisch valide nachweisen, da sich der Euklid’sche Algorithmus  $\mathbb{Q}[\sqrt{-3}]$  durchführen lässt. Das Problem des Euler’schen Arguments ist demnach folgendes: Freilich lässt sich, wie Euler es in § 243 seiner *Algebra* [EulerE387] tut,

$$p + q\sqrt{-3} = (t + u\sqrt{-3})^3 \quad \text{bzw.} \quad p - q\sqrt{-3} = (t - u\sqrt{-3})^3$$

und damit auch

$$p^2 + 3q^2 = (t^2 + 3u^2)^3$$

setzen, jedoch gilt die Umkehrung, aus dem Kubus auf die linke Seite zu schließen, nur wegen der Euklid’schen Struktur von  $\mathbb{Q}(\sqrt{-3})$ . Euler nimmt es allerdings ohne Beweis an, dass  $p^2 + 3q^2$  *nur* die Zerlegung  $(p + \sqrt{-3}q)(p - \sqrt{-3}q)$  zulässt. Er hat hier freilich Recht, jedoch ist dies für andere Ringe ähnlicher Gestalt falsch<sup>179</sup>.

Bei diesem Euler’schen Beweis folgender interessanter Fall vor: Einerseits muss, das heutige Stringenzmaßstäbe anlegend, Eulers Argument als unvollständig angesehen werden – er weist die Legitimität des unendlichen

---

<sup>179</sup>Die Wichtigkeit einer bis auf Einheiten und Reihenfolge eindeutigen Primzahlzerlegung in Untersuchungen dieser Art hat wohl als erster Gauß in seiner Arbeit “*Theoria residuorum biquadraticorum. Commentatio secunda.*” ([Gauß5], 1831) (“Theorie der biquadratischen Reste – zweite Mitteilung”) im Kontext der nach ihm benannten Gauß’schen Zahlen  $\mathbb{Z}[\sqrt{-1}]$  explizit erwähnt. Euler hat bei seinem Nachweis gleichsam die Eindeutigkeit der Eisensteinzahlen  $\mathbb{Z}[\omega]$  mit  $\omega^2 + \omega + 1 = 0$  genutzt. Diese wurden von Eisenstein in seiner Arbeit “*Beweis des Reciprocitätssatzes für die cubischen Reste in der Theorie der aus den dritten Wurzeln der Einheit zusammengesetzten Zahlen*” ([Eisenstein1], 1844) entsprechend eingeführt und zum Beweis des kubischen Reziprozitätsgesetzes herangezogen.

Abstiegs nicht nach<sup>180</sup>, andererseits wurden solche Existenzfragen<sup>181</sup> zu Eulers Lebzeiten selten bis gar nicht gestellt, sodass – aus dem Euler’schen Paradigma heraus argumentiert – der Beweis als vollständig angesehen werden muss. Diese Betrachtung kann demnach als stellvertretendes Exempel für den stattgefundenen Paradigmenwechsel in der Mathematik herangezogen werden.

---

<sup>180</sup>Dazu benötigt man die Eindeutigkeit der Primfaktorzerlegung im Ring  $\mathbb{Z}[\sqrt{-n}]$ , welche für beispielsweise für  $n = 5$  nicht vorliegt, zumal zum einen  $6 = (1 + \sqrt{-5})(1 - \sqrt{-5}) = 2 \cdot 3$  gilt, jedoch zum anderen all die Zahlen  $2, 3, 1 + \sqrt{-5}, 1 - \sqrt{-5}$  Einheiten in diesem Ring sind. Man vergleiche in diesem Zusammenhang auch die Ausführung von Weyl in seinem Buch *“Number theory. An approach through history. From Hammurapi to Legendre”* ([Weil1], 1984), welcher den Euler’schen Beweis des großen Satzes von Fermat für den Fall  $n = 3$ , trotz des erwähnten Mangels, als Meilenstein bei der Entstehung der algebraischen Zahlentheorie einordnet.

<sup>181</sup>Überdies scheint sich bei Euler kein Beispiel einer Zahl aus  $\mathbb{Z}[\sqrt{-n}]$  zu finden, woran sich eine nichteindeutige Zerlegung für ihn hätte erkennen lassen, wenn man alleinig seine Veröffentlichungen heranzieht. Im Buch *“4000 Jahre Zahlentheorie”* ([Lemmermeyer], 2023) wird indes auf einen Tagebucheintrag *“Fragmenta arithmetica ex Adversariis mathematicis deprompta”* ([EulerE806], 1862, ges. ?) (E806: “Auszüge aus den mathematischen Tagebüchern zum Gegenstand der Zahlentheorie”) verwiesen, wo die Gleichung  $181^2 + 7 = 32^3$  die Euler’sche Schlussweise zum Nachweis des Fermat’schen Satzes für den Fall  $n = 3$  als unvollständig ausweist, zumal hier nicht  $181 \pm \sqrt{-7} = (5 \pm \sqrt{-7})^3$  gilt. Es mag von Interesse sein, dass das von Euler gefundene Beispiel aus den elliptischen Kurven der Gestalt  $Y^2 = X^3 - N$  mit  $N \in \mathbb{N}$  das für  $N = 7$  ist, demnach das für das kleinste  $N$ , sodass man auf der elliptischen Kurve mehr als eine Lösung über den natürlichen Zahlen findet – das andere ist  $Y = 1$  und  $X = 2$ . In seiner *“Algebra”* [EulerE387] findet man in dieser Hinsicht nur den Fall  $\mathbb{Z}[\sqrt{10}]$  bzw. Zahlen der Form  $a + b\sqrt{10}$  diskutiert.

## 7 Mathematische Grenzen Eulers

The discovery of truth is prevented more effectively, not by the false appearance things present and which mislead into error, not directly by weakness of the reasoning powers, but by preconceived opinion, by prejudice.

---

Arthur Schopenhauer

Am Beispiel des quadratischen Reziprozitätsgesetzes (Abschnitt 6.2.2) ist bereits auf von Euler nicht zu überwindende Grenzen verwiesen worden. War dies in diesem Fall wegen einer unhandlichen Formulierung und fehlender algebraischer Mittel mehreren Gründen geschuldet, manifestieren sich bei anderen Begebenheiten überdies Grenzen gänzlich anderer, nämlich psychologischer, Natur: Hier sind vor allem die Begriffe selbst zu nennen, deren Verständnis nicht erwartete Restriktionen schaffen oder gar zu unauflösbaren Widersprüchen führen können, sofern sie nicht erweitert werden. Solche restringierenden Konzeptbildungen Eulers werden in Abschnitt (7.1) angeführt. Jedoch verhindern selbst korrekte Definitionen und Begriffe nicht das Stellen einer irreleitenden Frage, welchem Umstand Euler auch anheim gefallen ist (Abschnitt 7.2). Während eine solche Frage explizit formuliert werden muss, existieren gleichermaßen analoge implizite Fragestellungen, die ihren Ursprung im vorherrschenden Paradigma selbst haben, wie unterem Kuhn in seinem Buch *“The Structure of Scientific Revolutions”* ([Kuhn], 2012)<sup>182</sup> herausgearbeitet hat. Bedenkt man die führende Rolle Eulers bei der Konstruktion desselben in der Mathematik im 18. Jahrhundert, erlaubt dies zugleich einen Blick auf Eulers Gedankengebäude selbst. Verwandt damit ist die Untersuchung nach durch den eigenen Arbeitsethos gleichsam selbst unwillentlich gesetzten Schranken, welche in Abschnitt (7.3) anhand von Beispielen illustriert werden.

---

<sup>182</sup>Es handelt sich bei der zitierten Quelle um 50th Anniversary Edition.

## 7.1 Aus der Begriffsbildung resultierende Grenzen

To the reader of today much in the conception and mode of expression of that time appears strange and unusual. Between us and the mathematicians of the late seventeenth century stands Leonhard Euler [...] He is the real founder of our modern conception.

---

Josef Ehrenfried Hofman

Es ist bereits an diversen Stellen angeklungen, dass teilweise allein das Fehlen eines modernen Begriffs Euler am Weiterkommen gehindert hat, welche Behauptung nun exemplarisch untermauert werden soll. Zu diesem Zweck wird auf den zentralen Begriff der Funktion (Abschnitt 7.1.1) und damit verknüpfter Konzepte eingegangen werden, auch Eulers Auffassung von Grenzwerten wird besprochen werden (Abschnitt 7.1.2), ein Begriff, welchen Euler noch nicht im modernen Sinne begreift. Am Beispiel seines Konzepts einer Summe einer Reihe wird anschließend (Abschnitt 7.1.3) demonstriert werden, wie viel Euler mit einer aus moderner Sicht zum Scheitern verurteilten Definition zu leisten vermochte, bevor schlussendlich die Konsequenzen für ein bei Euler gänzlich fehlendes Konzept beleuchtet werden. Es wird sich zeigen (Abschnitt 7.1.4), wie mehrwertige Funktionen Euler wegen des Fehlens der Idee der Riemann'schen Fläche zu – auch nach seinem eigenen Verständnis – falschen Aussagen diesbezüglich führen musste.

### 7.1.1 Der Begriff der Funktion und damit eng verwandte

The difficulty lies, not in the new ideas, but in escaping from the old ones.

---

John Maynard Keynes

Euler hat das Konzept der Funktion nachdrücklich in die Analysis eingebracht; heute ist sich die Mathematik nicht mehr ohne diesen Begriff zu denken. Darum wird es förderlich sein, die Bedeutung des Begriffs bei Euler selbst zu beleuchten und Unterschiede zur modernen Auffassung zu illustrieren. Dies wird zeigen, dass Euler neben dem Funktionsbegriff selbst überdies

§. 7. Fit autem  $dx - \frac{x da}{a}$  integrabile si multipli-  
 eatur per  $\frac{1}{a}$ , integrale enim erit  $\frac{x}{a} + c$ , designante  $c$   
 quantitatem constantem quamcunque ab  $a$  non penden-  
 tem. Quocirca, si  $f(\frac{x}{a} + c)$  denotet functionem quam-  
 cunque.

**Abbildung 46:** Euler nutzt in [EulerE45] erstmalig die Notation  $f(x)$  für eine Funktion von  $x$ .

abweichende Anschauungen von ihren Eigenschaftsbegriffen wie etwa dem der Stetigkeit hatte.

**Entwicklung des Funktionsbegriffs bei Euler** In §4 seiner *Introductio* [EulerE101] gibt Euler die folgende Definition des Begriffs *Funktio*:

“Eine Funktion einer variablen Größe ist ein analytischer Ausdruck, beliebig zusammengesetzt aus dieser variablen Größe und Zahlen oder konstanten Größen.”

Später schreibt er im Vorwort seiner *Calculi Differentialis* [EulerE212]:

“Wenn [...]  $x$  eine variable Größe bezeichnet, werden alle Größen, die von ihr in beliebiger Weise abhängen, Funktionen von ihr genannt.”

Schließlich findet man in seinem Übersichtsartikel [EulerE322] in § 1 die Definition wiederholt, dass *eine Funktion eine Größe ist, beliebig definiert aus bestimmten Größen*.

Euler ändert seine Vorstellung des Funktionsbegriffs über die Jahre hinweg demnach wenig. Vergleicht man dies nun mit der modernen Auffassung des Begriffs der Funktion, also als Abbildungsvorschrift zwischen Mengen, die jedem Element der Ausgangsmenge ein Element aus der Zielmenge zuordnet, so fällt das Fehlen des Konzepts der Menge auf und somit auch all dessen, was sich daraus ableitet. Genauer findet im Buch “3000 Jahre Analysis: Geschichte - Kulturen - Menschen” ([Sonar], 2016) (SS. 512–513) die Bourbaki’sche Definition aus dem Buch “*Theory of Sets*” ([Bourbaki], 1968) von Sonar (1958–) wie folgt zitiert:

“Seien  $E$  und  $F$  zwei Mengen, die nicht notwendig verschieden sein

müssen: Eine Relation zwischen einem veränderlichem Element  $x$  von  $E$  und einem veränderlichem Element  $y$  von  $F$  heißt funktionale Relation in  $y$ , wenn für alle  $x \in E$  ein eindeutig bestimmtes  $y \in F$  existiert, das in der gegebenen Relation mit  $x$  steht. Wir vergeben den Namen Funktion für die Operation, die in dieser Art mit jedem Element  $x \in E$  das Element  $y \in F$  assoziiert, das in der gegebenen Relation  $x$  steht;  $y$  heißt der Wert der Funktion an dem Element  $x$  und die Funktion heißt bestimmt durch die gegebene funktionale Relation. Zwei äquivalente funktionale Relationen bestimmen dieselbe Funktion.”

Das Fehlen der eindeutigen Zuordnung der Elemente in der Euler’schen Definition lässt Euler, eines Beispiels wegen, den Ausdruck  $f : x \mapsto \sqrt{x}$  als eine Funktion sehen, die für jeden reellen (und auch komplexen Wert) zwei Werte hat. Euler spricht in diesem Zusammenhang von mehrwertigen Funktionen, welche den Inhalt von Abschnitt (7.1.4) bilden werden. Die moderne Auffassung verbietet hingegen solche Auslegungen wie die Euler’sche und schreibt im Fall der obigen Funktion die Wahl eines Zweiges der Wurzel vor<sup>183</sup>.

**Stetigkeit** Neben Unterschieden im Begriff der Funktion selbst, haben einige Euler’sche Eigenschaftsbegriffe derselben in der von ihm vorgeschlagenen Form keinen Eingang in moderne Mathematik gefunden, was hier am Beispiel des Konzepts der Stetigkeit gezeigt werden soll. Eine präzise Definition von Stetigkeit gibt Euler in seiner Arbeit [EulerE322] ein. Hier schreibt er nämlich in § 2:

“Nun ist indes allbekannt, dass in der höheren Geometrie lediglich Kurven betrachtet zu werden pflegen, deren Natur, mit einer gewissen Relation zwischen den Koordinaten ausgedrückt, über eine gewisse Gleichung bestimmt ist, sodass all ihre Punkte durch diese Gleichung gleichsam wie durch ein Gesetz festgelegt werden. Weil dieses Gesetz verstanden wird, das Prinzip der Stetigkeit in sich zu umfassen, nach welchem freilich alle Teile der Kurve mit einem so starken Band miteinander zusammenhängen, dass in jenen eine Veränderung bei vorliegender Stetigkeit nicht auftreten kann, werden dieses Grund wegen diese gekrümmten Linien stetig genannt, [...], solange wir nur verstehen, dass eine gewisse Gleichung gegeben ist, mit wel-

<sup>183</sup>Der Euler’schen Auffassung bezüglich mehrdeutiger Funktionen kommt heute das Konzept der *Korrespondenz* noch am nächsten, selbiges verlangt aber auch die Kenntnis von Mengen, welche bei Euler noch fehlen.

cher die Natur dieser Kurven zum Ausdruck gebracht wird.”

So fallen für Euler etwa, trotz ihrer beiden Äste, die Hyperbeln unter die stetigen Kurven, so wie alle anderen Kegelschnitte. Gleichermaßen wie alle anderen Kurven, welche durch eine Gleichung der Form  $F(x, y) = 0$  gegeben sind. Zu unstetigen Funktionen schreibt Euler indes in § 3 derselben Arbeit:

*“Nachdem also das Kriterium für Stetigkeit festgelegt worden ist, ist unmittelbar ersichtlich, was eine unstetige oder eine dem Kontinuitätsgesetz nicht unterworfenen Funktion ist: Denn alle durch keine feste Gleichung bestimmten gekrümmten Linien, von welcher Art etwa freihändig gezeichnete bezeichnet zu werden pflegen, geben solche unstetigen Funktionen an die Hand, weil ja in ihnen die Werte der Ordinaten nach keiner festen Vorschrift aus den Abszissen bestimmt werden können.”*

Kontrastiert man die Euler’schen Ausführungen etwa mit der modernen Definition, tritt die Euler’sche Emphase bezüglich der notwendig vorhandenen Gleichung hervor, was in modernen Definitionen von Stetigkeit keine Erwähnung findet. Ebenso ist Eulers Klassifikation der freihändig gezeichneten Funktionen zu den unstetigen Funktionen mit der modernen Auffassung unverträglich. Zwecks Illustration sei an dieser Stelle die Dirichet’sche Definition des Funktionen- und Stetigkeitsbegriffs zitiert. In seiner Arbeit *“Über die Darstellung ganz willkürlicher Functionen durch Sinus- und Cosinusreihen”* ([Dirichlet], 1837) findet sich seine Erläuterung zu diesem Gegenstand:

*“Entspricht nun jedem  $x$  ein einziges, endliches  $y$ , und zwar so, dass, während  $x$  das Intervall von  $a$  bis  $b$  stetig durchläuft,  $y = f(x)$  sich ebenfalls allmählich verändert, so heisst  $y$  eine stetige oder kontinuierliche Function von  $x$  für dieses Intervall. Es ist dabei gar nicht nöthig, dass  $y$  in diesem ganzen Intervalle nach demselben Gesetze von  $x$  abhängig sei, ja man braucht nicht einmal an eine durch mathematische Operationen ausdrückbare Abhängigkeit zu denken.”*

Dirichlets Konzept der Stetigkeit weist somit insbesondere bereits das Euler’sche zurück. Was Euler zu seiner Auffassung von Stetigkeit bewogen hat, wird wohl Spekulation bleiben. Jedoch wird dabei die praktische Anwendbarkeit die Inklusion einer Gleichung in der Definition begünstigt haben, welche – wie Dirichlet erkannt hat – zur Ableitung allgemeiner Eigenschaften nicht bekannt zu sein braucht. Überdies sind natürlich heute unstetige Funktionen bekannt, die sich mit einer Gleichung explizit ange-

ben lassen<sup>184</sup>. Man denke etwa an das bekannte Beispiel der Dirichlet’schen Sprungfunktion.

$$D(x) := \begin{cases} 1, & \text{für } x \text{ rational} \\ 0, & \text{für } x \text{ irrational} \end{cases} \quad (130)$$

Hier könnte man, in Eulers Sinne, entgegenen, dass solche Funktionen nicht betrachtet zu werden brauchen. Begründet wird dies von Euler von § 4 in [EulerE322] über ihre Unnatürlichkeit. Er schreibt:

*“Dass nun allen unstetigen Linien und Funktionen von dieser Art in der geometrischen Analysis kein Raum gelassen wird, ist per se offenkundig, weil diese ganze Betrachtung vom Ausfindigmachen Eigenschaften der Linien, welche untersucht werden, eingenommen ist, welche Aufgabe in keiner Weise in Angriff genommen werden könnte, wenn die Natur dieser Linien nicht in einem gewissen Gesetz oder einer Gleichung enthalten wäre.”*

Euler plädiert jedoch später in seiner Arbeit dafür, auch solche Funktionen in der Analysis zuzulassen – man ist gar dazu gezwungen – weil andernfalls das Problem der schwingenden Saite<sup>185</sup> sich als unlösbar herausstellen würde. Genauer schreibt er diesbezüglich in § 6 von [EulerE322]:

*“Um diesen Streit beizulegen, bemerke ich, dass weder in der gemeinen Algebra noch im dem Teil der Analysis des Unendlichen, der bisher hauptsächlich behandelt worden ist, unstetige Funktionen zugelassen werden können. Aber die Analysis des Unendlichen ist natürlich zu verstehen, sich um vieles weiter zu erstrecken und auch solche Zweige zu besitzen, welche von unstetigen Funktionen nicht nur nicht zurückweichen, sondern sie gar nach ihrer Natur so beinhalten, dass kein sich darauf beziehendes Problem als vollständig gelöst anzusehen ist, wenn nicht vollkommen beliebige, und daher auch unstetige, Funktionen in die Lösung eingeführt worden sind.”*

Zusammenfassend gesteht Euler also – notgedrungen – die Wichtigkeit unstetiger Funktionen in der Analysis ein<sup>186</sup>, jedoch nur im Falle mehrerer

<sup>184</sup>Euler scheint in seinen Arbeiten nicht das formal definiert zu haben, was man heute eine abschnittsweise definierte Funktion nennt. Er beschreibt die Funktion gegebenenfalls mit Worten, wie etwa in [EulerE322], aber belässt es dann dabei.

<sup>185</sup>Dies ist unter anderem seiner Untersuchung in [EulerE119] zur schwingenden Saite geschuldet.

<sup>186</sup>Diese Ansicht wird auch von Lützen in seiner Arbeit *“Euler’s Vision of a General Differential Calculus for a Generalized Kind of Function”* ([Lützen], 1983) geteilt, welcher

Variablen, gleichsam naturalistisch begründet<sup>187</sup>. in der Mathematik unstetige Funktionen zuzulassen. Demnach wäre es Euler wohl auch nicht in den Sinn gekommen, Funktionen zu betrachten, die zwar stetig sind, jedoch nicht differenzierbar. Hat man nämlich eine Gleichung vorgegeben, so hat man nach Euler zum Bilden der Differentiale statt  $x$  entsprechend  $x + dx$  und statt  $y$  entsprechend  $y + dy$  zu setzen, um anschließend unter Verwendung der Ausgangsgleichung das Verhältnis  $\frac{dy}{dx}$  zu ermitteln, was bei Vorlage einer die Funktion definierenden Gleichung, für Euler, stets möglich ist.

**Integrale** Neben dem Konzept der Stetigkeit, welcher einer Funktion als Eigenschaft zukommt, soll mit dem Integral ein Begriff betrachtet werden, welcher auf Funktionen angewendet wird. Das Integral definiert er konkret in seinem Buch *“Institutionum calculi integralis volumen primum”* [EulerE342] (*“Grundlagen des Integralkalküls, erster Band”*). Hier schreibt er in § 1:

*“Das Integralkalkül ist die Methode aus einem gegebenen Verhältnis der Differentiale die Beziehung der Größen selbst zu finden: Und die Operation, mit welcher dies geleistet wird, pflegt Integration genannt zu werden.”*

Obwohl Euler an anderer Stelle, die geometrische Interpretation der Integrale als Flächeninhaltsbilanz zwischen einem Graphen und der  $x$ -Achse verwendet, etwa in seinen Arbeiten *“Methodus universalis serierum convergentium summas quam proxime inveniendi”* ([EulerE46], 1741, ges. 1735) (E46: *“Eine allgemeine Methode, die Summen konvergenter Reihen näherungsweise zu ermitteln”*), die einen wichtigen Vorstoß Euler–Maclaurin’schen Summenformel bedeutet, sowie [EulerE587], wo die elementaren Eigenschaften des Integrals wie Linearität, Additivität und Verhalten und Grenzvertauschung aus der geometrischen Anschauung heraus erklärt werden (dort §§ 1–7) –, leitet Euler zumeist die Auffassung des Integrals als Inverse Operation des Differenzierens. So schreibt Euler im Zusammenhang mit Differentialgleichungen nahezu nie, dass diese *gelöst* werden müssen, sondern dass diese eben zu *integrieren* sind. Dass Euler auch wegen des fehlenden Begriffs des Grenzwerts die moderne Zugänge von Riemann vermöge Unter- und Obersummen oder gar Lebesgue (1875 – 1941) über Treppenfunktion

---

die Euler’sche Auffassung des Funktionsbegriffs zum Gegenstand hat.

<sup>187</sup>Einmal mehr mag man aus diesen Aussagen den Euler’schen Gedanken herauslesen, die Mathematik sei so eng mit den Naturgesetzen verwoben, dass sie gleichsam deckungsgleich sind. Was nicht durch physikalische Prinzipien erläutert werden kann, ist zugleich auch unnütz für die Mathematik.

### T h e o r e m a II.

Posito  $\Delta = 1.2.3\dots(n-1)$ , et pro litteris  $p$  et  $q$  numeros quoscunque positivos acciπendo, fiat inde  $\sqrt{(pp+qq)} = f$ , et quaeratur angulus  $\theta$ , ut sit tang.  $\theta = \frac{q}{p}$ , atque habebitur ista integratio memorabilis

$$\int x^{n-1} \partial x \cdot e^{-px} \sin. qx \left[ \begin{array}{l} \text{ab } x = 0 \\ \text{ad } x = \infty \end{array} \right] = \frac{\Delta \sin. n\theta}{f^n}.$$

**Abbildung 47:** Euler gibt in seiner Arbeit [EulerE675] eine allgemeine Formel zur Berechnung vieler Integrale an.

verwehrt bleiben mussten, braucht an dieser Stelle entsprechend nicht weiter ausgeführt zu werden. Euler wäre auf immense Probleme in den Beispielen gestoßen, welche sich mit der einen Methode evaluieren lassen, mit der anderen hingegen nicht. Ein klassisches Beispiel ist:

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2},$$

welches sich bei Euler auch schon in [EulerE675] als Spezialfall einer allgemeineren Formel findet und mit der Riemann’schen Idee ebenfalls ermittelt werden kann. Mit der Lebesgue’schen Integrationsvorschrift kann man diesem Integral hingegen keinen Wert zuordnen. Diese erlaubt dahingegen die Berechnung des Integrals der Dirchlet’schen Funktion (130), Riemanns Vorgehen kann den Wert nicht ausgeben.

Euler versteht ein Integral gleichermaßen als natürliche Verallgemeinerung des Begriffs der Summe. Der Begriff wird von den natürlichen Zahlen auf die reellen Zahlen ausgeweitet. Dies zeigt sich insbesondere in seinem Buch zur Variationsrechnung, der *Methodus*, [EulerE65] und auch in physikalischen Rechnungen war diese Herangehensweise für ihn überaus hilfreich. Euler scheint mit dieser Auffassung sogar nie auf konzeptuelle Probleme gestoßen zu sein<sup>188</sup>. Insgesamt drängte Euler nichts zu einer Modifikation seiner Vorstellung des Konzepts der Integration.

<sup>188</sup>Divergente Integrale, welche jedoch physikalisch motiviert endliche Werte ausgeben müssten – man denke hier etwa an die Selbstenergie eines Elektrons oder gar die divergenten Integrale in der Quantenfeldtheorie – scheinen bei Euler noch nicht aufgetreten zu sein.

### 7.1.2 Der Begriff des Grenzwerts und damit verknüpfte Konzepte

A new word is like a fresh seed  
sown on the ground of the  
discussion.

---

Ludwig Wittgenstein

Grenzwerte im heutigen Sinne waren Euler noch fremd, selbige wurden erst später ca. 40 Jahre nach Eulers Tod formal eingeführt; der moderne Begriff stammt von Cauchy aus seinem Lehrbuch *“Cours d’analyse de l’École royale polytechnique”* ([Cauchy2], 1821) (*“Kursus der Analysis der École Royale Polytechnique”*). Die Notwendigkeit eines präzisen Grenzwertbegriffs zeigt sich beim Auftreten der ersten Widersprüche, zu denen man geleitet wird, was bei Euler bei Differentialen und seiner Idee von infinitesimalen Größen geschah.

**Bei Differentialen** Euler hat sehr detailliert beschrieben, was man unter Differentialen zu verstehen hat. Eine erste Erklärung findet man im Vorwort von seiner *Calculi Differentialis* [EulerE212], woraus jedoch zunächst einmal seine Definition der Differentialkalküls zitiert sei. Euler schreibt auf Seite VII:

*“Das Differentialkalkül, das ist die Methode, das Verhältnis verschwindender Inkremente zueinander zu bestimmen, welche beliebige Funktionen erhalten, während der variablen Größe, von welcher sie Funktionen sind, verschwindende Inkremente zugeteilt werden.”*

Dieser Ausführung sei folgende aus [EulerE322] an die Seite gestellt, wo Euler in § 9 schreibt:

*“Wenn also zuerst  $y$  irgendeine Funktion einer einzigen Variable  $x$  war, pflegen die Zuwächse oder Abnahmen jener Funktion  $y$  betrachtet zu werden, während die Größe  $x$  um einen beliebigen Wert wächst. Dann wird dieses Inkrement aufgefasst, immer weiter verringert zu werden, bis es schließlich völlig verschwindet, in welchem Fall freilich auch das Inkrement jener Funktion  $y$  verschwindet; weil diese verschwindenden Inkremente Differentiale genannt zu werden pflegen, ist es ersichtlich, dass sie überhaupt keine Größe haben und daher gleich Null sind, sodass bezüglich ihrer Größe überhaupt keine Frage aufkommen kann. Aber dennoch besteht das Differentialkalkül*

*nicht aus dem Finden der Größe der Differentiale selbst, welche ja nicht vorhanden ist, sondern in der Bestimmung ihres Verhältnisses zueinander.”*

Die Euler’sche Begriffserklärung kann etwaige Schwierigkeiten, da wegen  $dx = 0$  auch  $2dx = dx$ , woraus man  $2 = 1$  ableiten müsste, obwohl  $\frac{dx}{dx} = 1$  sein soll, nicht umgehen, wenn man auch, wie Euler es in seinen Arbeiten tut und überdies in seinen *Calculi Differentialis* [EulerE212] auch erläutert, mit den Differentialen als absolute Größen rechnen möchte. Im Gegensatz dazu umgeht die moderne Definition über Grenzwerte

$$y'(x) := \lim_{h \rightarrow 0} \frac{y(x+h) - y(x)}{x+h-x}$$

das Problem der Euler’schen Definition von Differentialen, indem sie gar nicht erst genannt werden<sup>189</sup>. An seinen Ausführungen lässt Euler erneut seine charakteristische Art durchscheinen, jedem Objekt in irgendeiner Form eine Größe zuzuweisen, um mit selbiger greifbar und auch absolut, nicht nur in Verhältnissen<sup>190</sup>, rechnen zu können<sup>191</sup>.

Die Grundlage der Differentialrechnung besteht also für Euler darin, dass Differentiale eigentlich Differenzen sind<sup>192</sup>; aber nicht nur unendlich kleine, sondern sogar null. Da aber der Begriff des Grenzwerts bei Euler noch fehlt, hätte er etwa nicht zu erklären vermocht, weshalb die partiellen Ableitungen einer Funktion von zwei oder mehr Veränderlichen im Allgemeinen nicht vertauscht werden dürfen<sup>193</sup>, obgleich er die Vertauschbarkeit wie folgt in § 7 von [EulerE44] beweisen will:

*“Obwohl aber die Gültigkeit dieses Lehrsatzes demjenigen, der ihn prüfen will, leicht ersichtlich wird, möchte ich dennoch den folgenden aus der Natur der Differentiale abgeleiteten Beweis hinzufügen. Während A eine Funktion*

---

<sup>189</sup>Zudem versteht man unter einem Differential heute viel allgemeinere Objekte als Euler.

<sup>190</sup>Sonar bezeichnet daher in seinem Buch *“3000 Jahre Analysis: Geschichte - Kulturen - Menschen”* ([Sonar], 2016) die Euler’schen Ausführungen zu seinem Differentialkalkül als “Nullenrechnung” und würdigt auch die Leistungen Eulers in dieser Hinsicht entsprechend.

<sup>191</sup>Das Euler’sche Kalkül hat mehr als 150 Jahre nach Eulers Tod durch die Nicht-Standardanalysis, erläutert im Buch *“Nonstandard Analysis”* ([Robinson], 1966), auch eine strenge Rechtfertigung erhalten.

<sup>192</sup>Eine umfassende Diskussion der Euler’schen Ideen findet sich in Kapitel 3 des Buchs *“Euler as Physicist”* ([Suisky], 2010) von Suisky.

<sup>193</sup>Man vergleiche auch Sandifers Ausführungen in seiner Arbeit *“Mixed Partial Derivatives”* ([Sandifer5], 2004) zu diesem Gegenstand.

von  $t$  und  $u$  ist, gehe  $A$  in  $B$  über, wenn  $t+dt$  anstelle von  $t$  geschrieben wird; aber nach Setzen von  $u+du$  anstelle von  $u$  gehe  $A$  in  $C$  über. Nachdem aber zugleich  $t+dt$  anstelle von  $t$  und  $u+du$  anstelle von  $u$  geschrieben worden ist, ändere sich  $A$  zu  $D$ . Aus diesen Festlegungen ist ersichtlich, dass, wenn in  $B$  dann  $u+du$  anstelle von  $u$  geschrieben wird,  $D$  hervorgeht und wenn in  $C$  entsprechend  $t+dt$  anstelle von  $t$  gesetzt wird, dass gleichermaßen  $D$  hervorgeht. Nachdem all dies vorausgeschickt worden ist, wird, wenn nun  $A$  für konstantes  $t$  differenziert wird,  $C-A$  hervorgehen, denn nach Setzen von  $u+du$  anstelle von  $u$  geht  $A$  in  $C$  über, aber das Differential ist  $C-A$ . Wenn in  $C-A$  weiter  $t+dt$  anstelle von  $t$  gesetzt wird, wird  $D-B$  hervorgehen, woraus das Differential  $D-B-C+A$  sein wird. Nachdem aber in umgekehrter Reihenfolge  $t+dt$  anstelle von  $t$  in  $A$  gesetzt worden ist, wird man  $B$  haben, und das Differential von  $A$  für allein variables  $t$  wird  $B-A$  sein. Dieses Differential geht für  $u+du$  anstelle von  $u$  gesetzt in  $D-C$  über, woraus das Differential davon wiederum  $D-B-C+A$  sein wird, was mit dem Differential übereinstimmt, das mit der ersten Operation gefunden worden ist.”

Eulers Argumentation wird durch das von Peano (1858–1932) angegebene<sup>194</sup> und auch noch heute im Kontext des Satzes von Schwarz (1843–1921) vorgestellte Beispiel

$$f(x, y) = \frac{xy^3 - x^3y}{x^2 + y^2} \quad \text{für } (x, y) \neq (0, 0)$$

als fehlerhaft entlarvt<sup>195</sup>, für welches eben nicht gilt:

$$\frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} f = \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial}{\partial x} f,$$

wenn man den Ursprung betrachtet. Daher findet sich im Satz von Schwarz die Bedingung der Stetigkeit der zweiten partiellen Ableitungen, welche notwendig ist, will man die Vertauschbarkeit der zweiten Ableitungen garantieren. Selbst wenn man die eben vorgestellte Euler’sche Definition von Stetigkeit aus [EulerE322] anwendet, hätte Euler den Schwarz’schen Satz nicht

<sup>194</sup>Es wird unter anderem in Hobsons (1856–1933) Buch “*The theory of functions of a real variable and the theory of Fourier’s series. Vol. I*” ([Hobson2], 1921) Peano zugeschrieben.

<sup>195</sup>Der Fehler in Eulers Beweis besteht in der Annahme der Möglichkeit, man könne *gleichzeitig* in beiden Variablen die Differentiale einsetzen. Dies entspräche modern aufgefasst der Annahme, dass beim Differenzieren nach den Variablen  $x$  und  $y$  keine Reihenfolge festzulegen ist.

rechtfertigen können, da er auch hier zu einem Widerspruch in seinen Ansichten geführt worden wäre. Man sieht das wie folgt ein:

Durch seine Untersuchungen zu Funktionen im Allgemeinen sah Euler zur Annahme veranlasst (siehe die entsprechenden Ausführungen in Abschnitt 6.1.3.), mit Potenzreihen viele, wenn nicht gar alle, Funktionen darstellen zu können, sofern man beliebige Potenzen zulässt. Insbesondere findet man auch die Ableitungen der Funktionen im Ursprung unmittelbar aus der Potenzreihenentwicklung, wie der Satz von Taylor lehrt<sup>196</sup>. Bezogen auf das Peano'sche Exempel führt dies zur Ableitung  $\frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} f(0,0)$  sowie die von  $\frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial}{\partial x} f(0,0)$  aus dem Koeffizienten von  $xy$  bzw.  $yx$ . Entwickelt man aber nun

$$\frac{1}{x^2 + y^2} = \frac{1}{y^2} \left( 1 - \frac{x^2}{y^2} + \dots \right) \quad \text{bzw.} \quad = \frac{1}{x^2} \left( 1 - \frac{y^2}{x^2} + \dots \right)$$

findet man entsprechend aus den Koeffizienten  $xy$  von  $f$  hieraus einmal  $+1$  und einmal  $-1$ , somit auch

$$\frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} f(0,0) = -1 \quad \text{und} \quad \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial}{\partial x} f(0,0) = +1,$$

was Euler vermutlich aufgestoßen wäre, hätte er davon eine Erwähnung gemacht. Andererseits zeigt eine allgemeine Rechnung gemäß des Euler'schen "Beweises" die Nicht-Vertauschbarkeit nicht auf. Dann findet man natürlich zunächst:

$$\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} f = \frac{\partial^2}{\partial y \partial x} f = \frac{x^6 + 9x^4y^2 - 9x^2y^4 - y^6}{(x^2 + y^2)^3}.$$

Lediglich die Reihenfolge, in welcher man  $x$  und  $y$  gegen 0 streben lässt, kann den Widerspruch aufzeigen. Es ist eine interessante Diskussion, wie Euler dieses Problem wohl gedeutet hätte, wäre es ihm nur aufgefallen. Bezugnehmend auf seinen Beweisversuch des Vertauschungssatzes, ist anzunehmen, dass Euler  $x$  und  $y$  als gleichberechtigt behandelt hätte, zunächst  $x = y = a$  gesetzt hätte und dann  $a$  gegen 0 laufen lassen hätte oder, in seiner Sprache,  $a$  unendlich klein hätte werden lassen. Man findet auf diesem Wege

$$\frac{a^6 + 9a^4a^2 - 9a^2a^4 - a^6}{(a^2 + a^2)^3} = 0,$$

---

<sup>196</sup> Auf diesem Wege definiert Lagrange gar die Ableitung einer Funktion in seinem Buch "Théorie des Fonctions analytiques" ([Lagrange7], 1797) ("Theorie der analytischen Funktionen"). Er umgeht damit ebenfalls die unendlichen kleinen Größen von Euler.

was ja gerade der Mittelwert der obigen Werte  $+1$  und  $-1$  ist<sup>197</sup>. Diesen Fehlschluss entlarvt man an solchen, wenn man  $x = r \cos(\alpha)$  und  $y = r \sin(\alpha)$  werden lässt, sodass unter Verwendung trigonometrischer Identitäten gilt:

$$\frac{x^6 + 9x^4y^2 - 9x^2y^4 - y^6}{(x^2 + y^2)^3} = \frac{1}{2} (2 \cos(2\alpha) - \cos(6\alpha)),$$

was wegen des Herausfallens des Radius  $r$  die Wegabhängigkeit des Grenzwerts beim Zulaufen auf den Ursprung zeigt. Jedoch erfährt die vermutliche Euler'sche Ansicht durch die Betrachtung des "Durchschnitts" aller Grenzwerte

$$\left\langle \frac{1}{2} (2 \cos(2\alpha) - \cos(6\alpha)) \right\rangle := \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} (2 \cos(2\alpha) - \cos(6\alpha)) dx = 0$$

eine Rechtfertigung.

Neben dem Beispiel der Differentiation stellten die Differentiale Euler auch bei der Integration vor Schwierigkeiten – wieder sind die Funktionen dabei von zwei Variablen abhängig. Das tiefer liegende Problem ist freilich, dass Euler in seinen Betrachtungen zwar  $(du)^2 = 0$  bzw.  $(dt)^2 = 0$  benutzt, dies aber damit begründet, dass die Quadrate lediglich in Bezug auf  $du$  und  $dt$  verworfen werden müssen. Heute ist dies eine Konsequenz der Antikommutativität der Differentiale bzw. der Gleichung  $du \wedge dt = -dt \wedge du$  mit dem Symbol für das Dachprodukt  $\wedge$ . Führt man den oben zitierten Euler'schen Beweis der Vertauschbarkeit durch, ist man jedoch gezwungen  $dudt = dtdu$  zu verwenden, und die höheren Potenzen der Differentiale fortzulassen. Des antikommutativen Charakters von Differentialen wird Euler erstmalig explizit bei seiner Behandlung von Doppelintegralen in "*De formulis integralibus duplicatis*" ([EulerE391], 1770, ges. 1768) (E391: "Über Doppelintegrale") gewahrt. Dort bemerkt er, dass man bei einer Substitution in beiden Integrationsvariablen, welche  $u(a, b)$  und  $t(a, b)$  seien, nicht schlicht  $dudt = (Ada + Bdb)(Cda + Ddb)$  mit entsprechenden Funktionen  $A, B, C, D$  schreiben darf, sondern mit einem Faktor zu multiplizieren hat,

<sup>197</sup>Diesem Ergebnis wäre Euler zweifelsohne sehr zugetan gewesen, zumal sich die Situation ähnlich verhält wie bei der Tatsache, dass

$$1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \text{etc.} = \frac{1}{2}$$

als Mittelwert von 0 und 1 aufgefasst werden kann.

der heute als Jacobi-Determinante bezeichnet wird. Diese findet Euler (siehe §§ 23–27 der erwähnten Arbeit) für den Fall zweier Variablen, der allgemeine Fall von einer beliebigen Anzahl an Variablen wurde erst von Jacobi behandelt. Jacobi untersucht die nach ihm benannten Gebilde in den Arbeiten “*De Determinantium functionalibus*” ([Jacobi5], 1841) (“Über Funktional-determinanten”) sowie “*De formatione et proprietatibus Determinantium*” ([Jacobi6], 1841) (“Über die Bildung und die Eigenschaften von Determinanten”). Für die Einordnung des Euler’schen Beitrags zur Theorie der Multiplikation von Differentialformen konsultiere man den Artikel “*Euler and Differentias*” ([Ferzola], 1994), wo die Geschichte des Differentials von Euler bis hin zu E. Cartan (1869–1951) nachgezeichnet wird.

**Bei der Infinitesimalrechnung** Euler verwendet in seinen Arbeiten häufig den Begriff von *infinitesimalen Größen* oder spricht alternativ von unendlich kleinen oder unendlich großen Größen, was durch das Fehlen des Grenzwertbegriffs notwendig war. Trotz der generellen Invalidität der Euler’schen Argumente zu Grenzwertprozessen haben sie ihn überzufällig häufig zu richtigen Ergebnissen geleitet, sodass es aus seiner Sicht vermutlich keines neuen bzw. alternativen Begriffs bedurft hat. Seine *Introductio* [EulerE101] präsentiert viele Resultate mittels Infinitesimalrechnung, welche sich heute nur mithilfe von Grenzwerten deuten lassen. Neben dem schon erwähnten Beispiel des Sinus-Produktes (14) (siehe Abschnitt 4.1.2.), welches sich auch in seinem Lehrbuch findet, sei exemplarisch die Euler’sche Herleitung der Potenzreihe des Logarithmus aus dem binomischen Lehrsatz heraus demonstriert. Euler geht nun vom Grenzwert

$$\log(1+x) = \lim_{n \rightarrow \infty} n((1+x)^{\frac{1}{n}} - 1) \quad (131)$$

aus, wobei er statt dem heute gebräuchlichen  $\lim$  von unendlich großem  $n$  spricht. Kompakt zusammengefasst begründet Euler wie folgt:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} n((1+x)^{\frac{1}{n}} - 1) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left( n \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\frac{1}{n}}{k} x^k - 1 \right) = \sum_{k=1}^{\infty} \lim_{n \rightarrow \infty} n \binom{\frac{1}{n}}{k} x^k \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{x^k}{k}, \end{aligned}$$

was die Reihenentwicklung für  $\log(1+x)$  ist.

Natürlich ist die Vertauschung der Grenzwertprozesse gesondert zu rechtfertigen, was in diesem Fall auch leicht zu leisten wäre. Für Euler war es angesichts fehlender Gegenbeispiele nahezu unmöglich, die allgemeine Invalidität seines Vorgehens zu erkennen, zumal er aus anderer Quelle – etwa dem Satz von Taylor oder Integration der Reihe für  $\frac{1}{1+x}$  – auf alternativem Weg<sup>198</sup> zur Reihendarstellung des Logarithmus zu gelangen wusste<sup>199</sup>. Selbiges gilt für die weiteren bekannten Funktionen wie  $e^x$ ,  $\sin x$ ,  $\cos x$ ; sie lassen sich ebenfalls streng begründet nach dem Euler'schen Vorbild aus der Binomialreihe herleiten. Die Verwendung des Infinitesimalen scheint Euler überdies bei keiner Begebenheit zu einem falschen Resultat geführt zu haben.

**Exakte bzw. alternative Konvergenzbegriffe** Die bisher erläuterten Beispiele stehen auch stellvertretend für das häufige Auftauchen von Grenzwertvertauschungen bei Euler, worunter auch die zuvor erwähnten die Frulliani'schen Integrale (78), als Vertauschung von Ableitung und Integral (Abschnitt 5.2.5), fallen. Dass dieser Prozess bei letztgenannten gestattet ist, zeigt man heute mit wenig Mühe. Ebenso verhält es sich bei der gliedwei-

---

<sup>198</sup>Ergänzend sei angemerkt, dass sich aus dem Grenzwert (131) auch die Verbindung des Logarithmus zum Integral über die Hyperbel herstellen lässt. Denn bekanntermaßen gilt für alle  $s \neq 0$ :

$$\int_0^x (1+t)^{s-1} dt = \frac{(1+x)^s - 1}{s}.$$

Betrachtet man nun den Grenzwert  $s \rightarrow 0$ , hat man für die rechte Seite:

$$\lim_{s \rightarrow 0} \frac{(1+x)^s - 1}{s} = \lim_{s \rightarrow \infty} s((1+x)^s - 1) = \log(1+x),$$

wobei im letzten Schritt (131) benutzt wurde. Für die linke Seite ergibt sich:

$$\lim_{s \rightarrow 0} \int_0^x (1+t)^{s-1} dt = \int_0^x (1+t)^{-1} dt,$$

wo die Grenzwertvertauschung hier natürlich rechtens ist, weil das Integral rechter Hand existiert. Man gelangt zur bekannten Tatsache, dass

$$\log(1+x) = \int_0^x (1+t)^{-1} dt$$

Diesen Zugang scheint Euler selbst allerdings nicht in seinen Werken erläutert zu haben.

<sup>199</sup>Dies illustriert ein weiteres Mal das von Euler präferierte Prinzip der konvergenten Evidenz.

sen Integration und Differentiation von Potenzreihen innerhalb ihres Konvergenzradius, einer präferierten Methode Eulers. Weniger offenkundig ist dies bei seinen Grenzwertvertauschungen, welche er bei trigonometrischen Reihen durchführt. Dazu betrachte man eines Beispiels wegen § 40 von [EulerE464], in welcher er folgende Reihe untersucht:

$$\frac{\sin u}{1} + \frac{\sin 2u}{2} + \frac{\sin 3u}{3} + \frac{\sin 4u}{4} + \dots = A - \frac{u}{2},$$

wo er die Konstante  $A$  aus einem speziellen Fall zu bestimmen sucht. Aus dem Fall  $u = 0$  gelangt er wegen  $\sin u = u$  für “unendlich kleine  $u$ ” zu der Gleichung

$$(u + u + u + \dots) = A,$$

eine Gleichung der Gestalt  $\infty \cdot 0 = A$ , welchen jeden beliebigen Wert annehmen kann. Daher betrachtet Euler nun den Wert  $u = \pi$ , genauer den Fall  $u = \pi - \omega$ , für unendlich kleines  $\omega$ , was diese Reihe zur Folge hat

$$-\omega + \omega - \omega + \omega - \omega + \dots.$$

Diese Summe ist für Euler endlich, er hätte sie wohl unter Anwendung seiner Definition von divergenten Reihen (siehe unten in Abschnitt 7.1.3) zu  $-\frac{1}{2}\omega$  berechnet. Da nun aber  $\omega$  unendlich klein ist, ist diese Summe nun in der Tat  $= 0$ . Dies erlaubt Euler nun  $A = \frac{\pi}{2}$  zu bestimmen. Tatsächlich ist

$$\frac{\sin u}{1} + \frac{\sin 2u}{2} + \frac{\sin 3u}{3} + \frac{\sin 4u}{4} + \dots = \frac{\pi - u}{2} \quad (132)$$

für  $u \in (-\pi, \pi)$  richtig. Gegen das Euler'sche Argument lässt sich der Einwand erheben, dass man statt  $u = \pi - \omega$  auch den Wert  $u = \pi + \omega$  einsetzen könnte, wodurch man wieder auf den Fall  $0 \cdot \infty$  geführt werden würde, also nichts gewonnen hätte. Der Widerspruch lässt sich erst durch den eigens Fourierreihen zukommenden Konvergenzbegriff auflösen. Euler selbst hat vermutlich durch folgende Betrachtung Bestätigung für die Richtigkeit der letzten Gleichung erhalten: Die linke Seite ergibt sich gerade als imaginärer Teil der Reihe

$$-\log(1 - e^{iu}) = \frac{e^{iu}}{1} + \frac{e^{2iu}}{2} + \frac{e^{3iu}}{3} + \dots.$$

Die Berechnung von Imaginärteilen von Logarithmen hat Euler an mehreren Stellen auseinander gesetzt, sie reduziert sich auf Gleichung (6). Nun hat

man jedoch für  $1 - e^{iu} = 1 - \cos(u) - i \sin(u)$  nach Eulers Formel für das Argument einer komplexen Zahl:

$$-\arcsin\left(\frac{-\sin(u)}{\sqrt{(1-\cos(u))^2 + \sin^2(u)}}\right) = \arcsin\left(\frac{\sin(u)}{\sqrt{2-2\cos(u)}}\right),$$

was mit den Identitäten  $\sin(u) = 2 \sin\left(\frac{u}{2}\right) \cos\left(\frac{u}{2}\right)$  und  $\sin\left(\frac{x}{2}\right) = \sqrt{\frac{1-\cos(x)}{2}}$  zu

$$\arcsin\left(\cos\left(\frac{u}{2}\right)\right) = \arcsin\left(\sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{u}{2}\right)\right) = \frac{\pi - u}{2}$$

wird und somit (132) bestätigt. Diese Reihe stellt wieder ein Beispiel für ein mehrfach von Euler nachgewiesenes Ergebnis dar, so findet man sie – wie auch in Abschnitt (6.1.2) erwähnt – in der Arbeit [EulerE555] aus der Lagrange-Interpolation heraus abgeleitet. In § 92 des zweiten Teils seiner *Calculus Differentialis* [EulerE212] stellt Euler eine Herleitung aus der Potenzreihe des Arkustangens vor. Auf dem just vorgestellten Weg gelangt Euler in seiner Arbeit “*Summatio progressionum*  $\sin^\lambda(\phi) + \sin^\lambda(2\phi) + \sin^\lambda(3\phi) + \dots + \sin^\lambda(n\phi)$ ,  $\cos^\lambda(\phi) + \cos^\lambda(2\phi) + \cos^\lambda(3\phi) + \dots + \cos^\lambda(n\phi)$ ” ([EulerE447], 1774, ges. 1773) (E447: “Summation der Progressionen  $\sin^\lambda(\phi) + \sin^\lambda(2\phi) + \sin^\lambda(3\phi) + \dots + \sin^\lambda(n\phi)$ ,  $\cos^\lambda(\phi) + \cos^\lambda(2\phi) + \cos^\lambda(3\phi) + \dots + \cos^\lambda(n\phi)$ ”) zu dieser Reihe, wo sie sich im letzten Beispiel (Beispiel 2) findet.

### 7.1.3 Der Begriff der Summe einer Reihe

Discovery consists of looking at the same thing as everyone else and thinking something different.

---

Albert Szent-Gjorgyi

Wie in der Besprechung des Euler’schen Beitrags zur Riemann’schen  $\zeta$ -Funktion (Abschnitt 6.1.2) schon angedeutet worden ist, ist Euler über divergente Reihen zur Funktionalgleichung (113) für die Riemann’sche  $\zeta$ -Funktion gelangt. Dies ist zweifelsohne eine von Eulers erstaunlichsten Entdeckungen, was Abel indes nicht abhielt, in einem Brief (Brief XX. aus seinen gesammelten Werken [Abel5]) zu schreiben:

*“Divergente Reihen sind im Allgemeinen etwas sehr Verhängnisvolles, und es ist eine Schande es zu wagen, auf sie irgendeinen Beweis zu stützen. Man kann alles Mögliche mit ihrer Hilfe beweisen. Und sie haben so viel Unheil verursacht, so viele Paradoxa hervorgebracht.”*

Trotz der (berechtigten) Abel’schen Kritik hat sich Euler an verschiedenen Stellen mit divergenten Reihen beschäftigt und bemerkenswerte Ergebnisse zutage gefördert. Es soll seine Definition der divergenten Reihe selbst vorgestellt werden, anschließend die Anwendung auf die  $\zeta$ -Funktion erläutert werden, aber auch die Widersprüche aus der Definition sollen nicht unerwähnt bleiben.

**Eulers Definition von divergenten Reihen** Euler stellt seine Theorie der divergenten Reihen ausführlich in seiner Abhandlung *“De seriebus divergentibus”* ([EulerE247], 1760, ges. 1746) (E247: “Über divergente Reihen”) vor, aus welcher zunächst die Fundamente seiner Auffassung zitiert werden sollen. Direkt in § 1 schreibt er:

*“Während konvergente Reihen so definiert werden, dass sie aus stetig schrumpfenden Termen bestehen, die schließlich, wenn die Reihe ins Unendliche fortgesetzt wird, verschwinden<sup>200</sup>, sieht man leicht ein, dass die Reihen, deren infinitesimale Terme nicht verschwinden, sondern entweder endlich bleiben oder ins Unendliche anwachsen, weil sie nicht konvergent sind, zur Klasse der divergenten Reihen gerechnet werden müssen. Je nachdem, ob die letzten Terme der Reihe, zu welchem beim Fortsetzen der Progression bis ins Unendliche gelangt wird, von endlicher oder unendlicher Größe waren, wird man zwei Gattungen von divergenten Reihen haben, welche beide weiter in zwei Klassen unterteilt werden, je nachdem ob alle Terme mit demselben Vorzeichen behaftet sind oder die Vorzeichen + und – alternieren. Insgesamt werden wir also vier Klassen von divergenten Reihen haben, aus welchen ich zwecks der Verständlichkeit einige Beispiele beifügen möchte.”*

---

<sup>200</sup>Dass dieser Satz nicht gänzlich wörtlich zu verstehen ist, wird Euler bewusst gewesen sein, zumal er in der vorher verfassten Arbeit [EulerE43] Reihen wie

$$\log(3) = 1 + \frac{1}{2} - \frac{2}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{2}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} - \frac{1}{9} + \frac{1}{10} + \frac{1}{11} - \frac{2}{12} + \text{etc.}$$

betrachtet, welche zwar, absolute Werte betrachtend, aus im Unendlichen verschwindenden, aber nicht stetig kleiner werdenden Termen besteht. Diese Reihe und ähnliche andere studiert Euler in § 6 der erwähnten Arbeit.

Die von Euler angedeuteten Exempel sind in nachstehender Tabelle zu sehen:

I.)	1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + etc.
	$\frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \frac{3}{4} + \frac{4}{5} + \frac{5}{6} + \frac{6}{7} + \text{etc.}$
II.)	1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + etc.
	$\frac{1}{2} - \frac{2}{3} + \frac{3}{4} - \frac{4}{5} + \frac{5}{6} - \frac{6}{7} + \text{etc.}$
III.)	1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + etc.
	1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32 + etc.
IV.)	1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + etc.
	1 - 2 + 4 - 8 + 16 - 32 + etc.

Es wird förderlich sein, die grundlegenden Gedanken Eulers zu jeder ersten drei Klassen mitgeteilt zu haben, bevor die vierte gesondert betrachtet wird. Zur ersten Klasse schreibt er in § 2:

*“Und zuerst ist freilich ersichtlich, dass die Summen der Reihen, welche ich der ersten Klasse zugeordnet habe, in Wirklichkeit unendlich groß sind<sup>201</sup>, weil durch tatsächliches Sammeln der Terme zu einer Summe größer als jede gegebene Zahl gelangt wird. Daher besteht freilich kein Zweifel, dass die Summen dieser Reihen durch Ausdrücke der Gestalt  $\frac{a}{0}$  dargeboten werden können.”*

Seine Ausführungen zur zweiten Klasse findet man in § 3. Insbesondere das von Leibniz betrachtete Beispiel ist Kern seiner Diskussion. Euler schreibt:

*“Aus der zweiten Klasse hat als erster Leibniz diese Reihe betrachtet*

---

<sup>201</sup>Dies ist stark abhängig von der Summationsmethode, welcher man sich bedient, so ließe sich etwa das erste Beispiel von Euler mithilfe der Riemann’schen  $\zeta$ -Funktion als  $\zeta(0) = -\frac{1}{2}$  angeben. Auf die Widersprüche in der Euler’schen Definition von Summen divergenten Reihen wird auch weiter unten in diesem Abschnitt noch eingegangen werden.

$$1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \text{etc.},$$

deren Summe er festgelegt hatte  $= \frac{1}{2}$  zu sein, wobei er sich auf diese hinreichend soliden Gründe berief: Zuerst geht diese Reihe hervor, wenn dieser Bruch  $\frac{1}{1+a}$  durch unendlich viele Male wiederholte Division auf gewohnte Weise in diese Reihe  $1 - a + a^2 - a^3 + a^4 + \text{etc.}$  aufgelöst wird, und anschließend der Buchstabe  $a$  der Einheit gleich gewählt wird. Dann [...] gibt er folgendes Argument: Wenn die Reihe irgendwo abgebrochen wird, und die Anzahl der Terme gerade war, wird ihr Wert  $= 0$  sein, wenn aber die Anzahl der Terme ungerade war, wird der Wert der Reihe  $= 1$  sein. Wenn also die Reihe ins Unendliche fortschreitet und die Anzahl der Terme weder als gerade noch als ungerade angesehen werden kann, kann er daraus schließen, dass die Summe weder  $= 0$  noch  $= 1$  ist, sondern einen gewissen Zwischenwert, welcher von den beiden gleich weit entfernt ist, annehmen muss, welcher  $= \frac{1}{2}$  ist.”

Bereits in diesen Erläuterungen kristallisiert sich die Euler'sche Auffassung zum Umgang mit divergenten Reihen heraus, welche in seiner Besprechung der Reihen der dritten Klasse noch intensiver durchscheint. Er schreibt in § 6:

“Obwohl nämlich die Terme dieser Reihen [der dritten Klasse] ununterbrochen wachsen, und daher durch tatsächliches Sammeln der Terme zu einer Summe größer als jede angebbare Zahl gelangt werden kann, was die Definition des Unendlichen ist, sind dennoch die Fürsprecher von Reihen bei dieser Gattung gezwungen Reihen von dieser Art zuzulassen, deren Summen endlich sind, freilich sogar negativ oder kleiner als 0. Denn weil der Bruch  $\frac{1}{1-a}$  durch Division entwickelt  $1 + a + a^2 + a^3 + a^4 + \text{etc.}$  gibt, müsste auch gelten:

$$-1 = 1 + 2 + 4 + 8 + 16 + \text{etc.}$$

$$-\frac{1}{2} = 1 + 3 + 9 + 27 + 81 + \text{etc.}”$$

Nach einigen Erläuterungen allgemeinerer Natur präsentiert Euler in § 12 seine Definition der Summe einer divergenten Reihe. Hier schreibt er:

“Wenn wir also die übliche Auffassung einer Summe lediglich so abwandeln, dass wir sagen, dass die Summe einer Reihe der endliche Ausdruck

ist, aus dessen Entwicklung jene Reihe selbst entsteht, werden alle Schwierigkeiten [...] verschwinden.”

Da heute verschiedene Methoden zur Summation von divergenten Reihen bekannt sind, welche unterschiedliche Werte für ein und dieselbe divergente Reihe geben können, ist Eulers Aussage in der Allgemeinheit zwar zurückzuweisen, was für Euler selbst auch zu erkennen gewesen wäre, wie weiter unten in diesem Abschnitt deutlich werden wird. In seiner Arbeit [EulerE247] behandelt er jedoch unabhängig davon aus seiner vierten Klasse von Reihen das berühmte Beispiel der Fakultätenreihe

$$s(1) = 0! - 1! + 2! - 3! + 4! - \text{etc.} \quad (133)$$

mit

$$s(x) = 0! - 1!x + 2!x^2 - 3!x^3 + 4!x^4 - \text{etc.}, \quad (134)$$

zur Summierung welcher er 4 verschiedene Methoden vorstellt, die ihn alle zum selben Wert leiten<sup>202</sup>. Er findet mit all seinen Methoden annähernd denselben numerischen Wert, sodass das Prinzip der konvergenten Evidenz ihn (in diesem Fall berechtigt) von der Richtigkeit nachstehender Gleichheit überzeugt:

$$0! - 1! + 2! - 3! + 4! - \text{etc.} \approx 0.5963473621372$$

All diese Methoden sind genauer in den Artikeln “*Euler Subdues a Very Obsteporous Series*” ([Barbeau], 2007) und “*Divergent series*” ([Sandifer13], 2006) aus Sandifers Kolumne vorgestellt. Allgemein werden die Methoden in den Büchern “*Divergent Series*” ([Hardy3], 1949) und “*Euler Through Time: A New Look at Old Themes*” ([Varadarajan], 2006) besprochen, das Buch von Balsler “*From Divergent Power Series to Analytic Functions: Theory and Application of Multisummable Power Series*” ([Balsler], 2009) nimmt den Ausgangspunkt bei dem Ansatz über Potenzreihen – dem dritten Euler’schen Ansatz zur Summation der Fakultätenreihe. Aus moderner Sicht ist die Äquivalenz seiner Methoden in diesem Fall dem Alternieren der Reihe

---

<sup>202</sup>Die erste bedient sich der Differenzenrechnung (§ 13), die zweite führt die Summierung auf ein Interpolationsproblem zurück (§ 17), in § 19 wird dann die zur obigen Reihe assoziierte Potenzreihe zunächst auf eine Differentialgleichung reduziert, welche anschließend gelöst wird. Schließlich wird dieselbe Potenzreihe auch in einen Kettenbruch umgewandelt, welcher konvergiert. Besagter Kettenbruch ist ein Spezialfall desjenigen aus [EulerE616].

§. 19. Investigemus nunc etiam analytice huius seriei valorem, eam vero in latiori sensu accipiamus: fit igitur

$$s = x - 1x^2 + 2x^3 - 6x^4 + 24x^5 - 120x^6 + \text{etc.}$$

quae differentiata dabit:

$$\frac{ds}{dx} = 1 - 2x + 6xx - 24x^3 + 120x^4 - \text{etc.} = \frac{x-1}{x^2}$$

vnde fit  $ds + \frac{s dx}{x} = \frac{dx}{x}$ , cuius aequationis, si  $e$  sumatur pro numero, cuius logarithmus hyperbolicus est  $= 1$ ,

integrale erit  $e^{-1: x} s = \int \frac{e^{-1: x} dx}{x}$  et  $s = e^{1: x} \int \frac{e^{-1: x} dx}{x}$ .

Casu ergo quo  $x = 1$  erit  $1 - 1 + 2 - 6 + 24 - 120 + \text{etc.}$

$= e \int \frac{e^{-1: x} dx}{x}$ . Exprimit ergo haec series aream lineae curvae, cuius natura inter abscissam  $x$  et  $y$  hac

continetur aequatione  $y = \frac{e \cdot e^{-1: x}}{x}$ , si abscissa  $x$

ponatur  $= 1$ : seu erit  $y = \frac{e}{e^{1: x}}$ . Haec autem curva

**Abbildung 48:** Euler leitet in seiner Arbeit [EulerE247] eine Differentialgleichung (und ihre Lösung) zwecks Summierung der divergenten Fakultätenreihe her.

zuzuschreiben<sup>203</sup>. An dieser Stelle sei lediglich kleine Ergänzung zu seiner Methode über die Interpolation eingebracht. In § 17 bemerkt Euler, dass sich die gesuchte Reihe (133) aus der Funktion

$$P(n) := 1 + (n - 1) + (n - 1)(n - 2) + (n - 1)(n - 2)(n - 3) + \text{etc.}$$

für den speziellen Wert  $n = 0$  ergibt. Euler findet diesen numerischen Zahlenwert, welchen er  $A$  nennt, über Differenzenrechnung am Ende desselben Paragraphen. Jedoch bemerkt er bei der Konstruktion seiner Tabelle die Gleichung

$$P(n + 1) = nP(n) + 1,$$

<sup>203</sup>In der Tat hat Euler oft allein alternierende Reihen betrachtet – die Arbeit “*De summatione serierum, in quibus terminorum signa alternantur*” ([EulerE617], 1788, ges. 1776) (E617: “Über die Summation der Reihen, in welchen die Vorzeichen der Terme alternieren”) ist ein Zeugnis dessen. Die Gründe sind wohl in der leichteren Handhabbarkeit der teils auch numerischen Rechnungen zu suchen, welche sich über Ideen aus der komplexen Analysis auch vom mathematischen Standpunkt aus nachvollziehen lässt. Man vergleiche dazu auch die Ausführungen in [Hardy3] für den Nachweis der Äquivalenz der Methoden.

welche man alternativ als homogene Differenzengleichung mit linearen Koeffizienten darstellen könnte. Es gilt gleichermaßen:

$$P(n) = nP(n-1) - (n-2)P(n-2).$$

Dies erlaubt nun die Applikation der oben (Abschnitt 5.2.3) vorgestellten Methode, welche zur Gleichung

$$P(n) = e \cdot \int_1^{\infty} e^{-t} t^{n-1} dt$$

führt. Demnach ergibt sich für den Wert von (133) auf diesem Wege

$$P(0) = e \int_1^{\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt,$$

welches Integral numerisch ausgewertet ebenfalls den von Euler gefundenen Wert gibt. Euler gelangt überdies vermöge seines Ansatzes über die Lösung der Differentialgleichung, welche von (134) erfüllt wird, in § 19 zu dem gleichwertigen Integral

$$e \cdot \int_0^1 \frac{e^{-\frac{1}{u}}}{u} du$$

für die Fakultätenreihe (133). Es geht aus dem vorherigen durch die Substitution  $x = \frac{1}{u}$  hervor. In ähnlicher Manier findet man zur Reihe

$$z = 1 - 1 + 1 \cdot 3 - 1 \cdot 3 \cdot 5 + 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 - \dots$$

über die assoziierte Differenzengleichung

$$P_z(n+2) = (n+1)P_z(n) + 1$$

die Summe

$$z = P_z(0) = \sqrt{\frac{e\pi}{2}} \operatorname{erf}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \approx 0,65568 \quad \text{mit} \quad \operatorname{erf}(x) := \int_x^{\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} dt.$$

oder gar die Summe dieser allgemeineren Reihe

$$f(p, q) := 1 - p + p(p+q) - p(p+q)(p+2q) + p(p+q)(p+2q)(p+3q) - \dots$$

aus der assoziierten Differenzgleichung

$$P_f(n+q) = (n-p+q)P_f(n) + 1$$

als

$$P_f(0) = \sqrt[q]{e} \int_1^{\infty} u^{q-p-1} e^{-\frac{u^q}{q}} du,$$

welche sich entsprechend auch bei Euler finden<sup>204</sup>.

Alternativ mag man die Potenzreihe (134) auch wie folgt umformen:  
Man schreibe

$$s(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n n! x^n.$$

Mit der  $\Gamma$ -Funktion findet man auch:

$$s(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \left( \int_0^{\infty} e^{-t} t^n dt \right) x^n dt.$$

Eine Vertauschung von Summe und Integral und anschließende Verwendung der geometrischen Reihe gibt demnach:

$$s(x) = \int_0^{\infty} e^{-t} \sum_{n=0}^{\infty} (-xt)^n dt = \int_0^{\infty} \frac{e^{-t}}{1+xt} dt,$$

---

<sup>204</sup>Bei Euler steht in § 29

$$1x - 1x^3 + 1 \cdot 3x^5 - 1 \cdot 3 \cdot 5x^7 + 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7x^9 - \dots = e^{\frac{1}{2x^2}} \int_0^1 \frac{e^{-\frac{-1}{2x^2}}}{xx} dx$$

und bereits vorher in § 28 von [EulerE247]:

$$x^m - px^{m+q} + p(p+q)x^{m+2q} - p(p+q)(p+2q)x^{m+3q} + \dots = e^{-\frac{1}{x^q}} x^{m-p} \int_0^1 e^{-\frac{1}{x^q}} x^{p-q-1} dx.$$

Integrale welcher Gestalt für Borel (1871–1956) in seinen *“Leçons sur les séries divergentes”* ([Borel], 1901) (“Vorlesungen über divergente Reihen”) den Ausgangspunkt seiner Untersuchungen gebildet haben.

**Widersprüche aus der Euler’schen Definition** Wie erwähnt, führt Eulers Definition zu nicht auflösbaren Widersprüchen. Denn sie impliziert insbesondere die (in Wirklichkeit nicht vorhandene) Eindeutigkeit der Summe einer divergenten Reihe, welche Auffassung Eulers vermutlich aus der Betrachtung von Potenzreihen herrührt<sup>205</sup>. Gleichwohl die Anwendung seiner Ideen gar in der Funktionalgleichung der Riemann’schen  $\zeta$ -Funktion bzw. genauer der  $\eta$ -Funktion (113) mündeten, erzeugen sie am Beispiel dieser beiden Funktionen bereits Paradoxa. Beide Funktionen sind in elementarer Weise durch die Formel

$$1 - \frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n} - \dots = \left(1 - \frac{1}{2^{n-1}}\right) \left(1 + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n} - \dots\right) \quad (135)$$

verbunden, welche Gleichung formal für beliebiges  $n$  richtig ist<sup>206</sup>, auch wenn nur für  $\operatorname{Re}(n) > 1$  auf beiden Seiten zugleich konvergente Reihen stehen. Wie oben in Abschnitt (6.1.2) angedeutet, kann Euler die divergenten Reihen linker Hand evaluieren, sofern  $n$  negative ganze Zahlen sind. In [EulerE352] nennt er neben anderen explizit

$$1 - 1 + 1 - 1 - 1 + \dots = \frac{1}{2}, \quad 1 - 2 + 3 - 4 + \dots = \frac{1}{4}, \quad 1 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + \dots = 0 \quad \text{etc.}$$

Dabei bedient er sich entsprechender Potenzreihen wie etwa

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \dots, \quad \frac{1}{(1+x)^2} = 1 - 2x + 3x^2 - \text{etc.},$$

<sup>205</sup>In diesem Kontext lässt sich anmerken, dass Euler selbst, wenn auch lediglich implizit, in seiner Arbeit [EulerE47] über die Euler–Maclaurin’sche Summenformel eine Summationsmethode mitgeteilt hat, welche von denen in der gerade besprochenen [EulerE247] verschieden ist. Diese hat er, entsprechend interpretiert, unter anderem zur Summierung der harmonischen Reihe  $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots$  angewandt und ihren Wert als  $\gamma$ , die Euler–Mascheroni–Konstante, berechnet. Ramanujan hingegen hat dieselbe Methode explizit benutzt und divergente Reihen mithilfe der Euler–Maclaurin’schen Summenformel evaluiert. Man vergleiche dazu insbesondere Kapitel 6 des Buches *“Ramanujan’s Notebooks: Part I”* ([Berndt], 1985).

<sup>206</sup>Euler gibt sie in § 170 seiner *Introductio* an.

$$\frac{1-x}{(1+x)^3} = 1 - 2^2x + 3^2x^2 - \text{etc.},$$

aus welchen für  $x = 1$  die obigen Reihen folgen<sup>207</sup>. Weiter findet man aus (135) formal:

$$1 - 1 + 1 - 1 + \text{etc.} = (1 - 2)(1 + 1 + 1 + 1 + \text{etc.}),$$

woraus man mit dem bekannten Wert für die linke Seite auch

$$1 + 1 + 1 + 1 + \text{etc.} = -\frac{1}{2}$$

erhält, was dem Wert  $\zeta(0)$  entspricht. Alternativ hätte Euler diesen Wert aus der formalen Identität

$$\frac{1}{2} = \sum_{n=0}^{\infty} \cos(nx)$$

herleiten können, welche er etwa in § 11 seiner Arbeit [EulerE447] angibt<sup>208</sup>. Man hat lediglich  $x = 0$  zu setzen, Euler macht jedoch keine Erwähnung davon<sup>209</sup>.

Entsprechend fände man auch

$$1 + 2 + 3 + 4 + \text{etc.} = -\frac{1}{12}, \quad 1 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + \text{etc.} = 0 \quad \text{etc.}$$

und so weiter.

Will man jedoch direkt mit der Euler'schen Idee beginnen und etwa die Summe

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + \dots$$

<sup>207</sup>Diesen Vorgang der Zuschreibung einer Summe zu einer divergenten Reihe nennt man Abel'sche Summation. Der Name rührt von der Analogie zum Abel'schen Grenzwertsatz her, welcher die hier Grenzwertvertauschung unter entsprechenden Voraussetzungen gestattet. Abel hat den nach ihm benannten Satz in seiner Arbeit "*Untersuchungen über die Reihe*  $1 + mx + \frac{m \cdot (m-1)}{2 \cdot 1} x^2 + \frac{m \cdot (m-1) \cdot (m-2)}{3 \cdot 2 \cdot 1} x^3 + \dots$ ." ([Abel2], 1826) bewiesen.

<sup>208</sup>In dieser Arbeit begründet er die Richtigkeit dieser Formel ebenfalls mit seiner just vorgestellten Konzeption einer Reihe.

<sup>209</sup>Gleichermaßen ergeben sich aus der formal gültigen Gleichheit  $\frac{1}{2} = \sum_{n=0}^{\infty} \cos(nx)$  durch wiederholte Differentiation unmittelbar die Werte  $\zeta(-2k)$  für alle natürlichen  $k$  unmittelbar als  $= 0$ .

berechnen, würde man zunächst die Reihe

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 - \text{etc.}$$

verwenden wollen. Setzt man hier allerdings  $x = 1$ , so gelangt man zu der Aussage

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + \dots = \infty,$$

was dem zur mitgeteilten Ergebnis  $1 + 2 + 3 + 4 + \dots = \zeta(-1) = -\frac{1}{12}$  widerspricht. Eulers Vorgaben leiten demnach zu konträren Ergebnissen<sup>210</sup>.

Nichtsdestotrotz stellt Eulers Definition von divergenten Reihen ein sehr illustratives Beispiel für den Prozess der mathematischen Innovation dar. Zum einen sieht er sich durch viele Beispiele und sorgfältige Diskussion gleichsam gezwungen, diesen Begriff auf dem beschriebenen Wege zu definieren. Er hat ihn also gewissermaßen durch Induktion geleitet eingeführt, dann jedoch weiter streng deduktiv aus ihm heraus die Funktionalgleichung (113) abgeleitet, muss aber – obschon er es in seinen Arbeiten nicht explizit erwähnt zu haben scheint – gleichzeitig der Inkonsistenz seiner Auffassung von divergenten Reihen gewahr gewesen sein. Das Euler'sche Beispiel der Behandlung divergenter Reihen kann exemplarisch für die Illustration wissenschaftlichen Arbeitens herangezogen werden: Euler geht bis an die Grenze des für ihn Leistbaren und scheut nicht, auch neue Gebiete zu eröffnen, welches dann auch seine Nachfolger mit glücklichem Erfolg anzuwenden wussten. Es seien konkret Fourier und Poincaré (1854–1912) als Beispiele angeführt. Ersterer hat in seinem Hauptwerk *“Théorie analytique de la chaleur”* ([Fourier], 1822) (*“Die analytische Theorie der Wärme”*) Teile seiner Resultate über das Divergente erlangt<sup>211</sup>. Die Rolle der divergenten Reihen in Poincarés Arbeit *“Sur le problème des trois corps et les équations de la dynamique”* ([Poincaré1], 1890) (*“Über das Dreikörperproblem und die Gleichungen des Dynamik”*) zum Dreikörperproblem beim Nachweis seiner generellen Unlösbarkeit ist hinlänglich bekannt. Schließen soll diesen Paragraphen ein Zitat von Andreas Speiser aus Vorwort zu Band 9 von Serie 1 der *Opera Omnia* ([Speiser2], 1945), wo er auf den Seiten IX und X zu Eulers Handhabung der divergenten Reihen schreibt:

---

<sup>210</sup>Diese Reihen sind in der oben vorgestellten Taxonomie von divergenten Reihen der ersten Klasse, welche für Euler tatsächlich den Wert  $\infty$  haben.

<sup>211</sup>Man vergleiche auch die entsprechenden Ausführungen aus [Hardy3].

*“Euler hat in seinen unermesslichen Expeditionen im Reiche der Reihen die überwältigende Entdeckung gemacht, dass gerade die divergenten Reihen das kräftigste Mittel zur Auffindung unerwarteter Tatsachen bilden. Der Durchgang durch das Divergente ist noch ertragreicher als der Durchgang durch das Komplexe in der Funktionentheorie. So fand er auf diesem Weg die Produktentwicklung der Gammafunktion, ferner die Funktionalgleichung derselben und der Zetafunktion. Letztere Entdeckung, die zum Merkwürdigsten gehört, was in der Mathematik gefunden wurde, konnte er nicht beweisen.”*

Der letzte Satz von Speiser ist indes durch das oben (Abschnitt 6.1.2) Gesagte mit entsprechenden Erläuterungen bezüglich des Wortes “konnte” zu ergänzen.

#### **7.1.4 Mehrwertige Funktionen: Das fehlende Konzept der Riemann’schen Fläche**

It is tempting, if the only tool  
you have is a hammer, to treat  
everything as if it were a nail.

---

Abraham Maslow

Die Euler’sche Meinung, Paradoxa werden sich durch Einführung eines synthesesestiftenden übergeordneten Begriffs auflösen, ist oben (siehe den entsprechenden Paragraphen in Abschnitt 3.2.1) am Beispiel des komplexen Logarithmus illustriert worden. Die Auflösung aller Schwierigkeiten bestand dort darin, den Logarithmus im Bereich der komplexen Zahlen als unendlichwertige Funktion zu erkennen. Dass jedoch mehrwertige Funktionen selbst eines neuen widersprüchebeseitigenden Begriffs bedürfen, scheint bei Euler keine Erwähnung gefunden zu haben. Das Fehlen des Konzeptes des Riemann’schen Fläche, im Rahmen welcher verzweigte komplexe Funktionen heute behandelt werden, führte Euler bei verschiedenen Begebenheiten zu falschen Aussagen. Dies soll hier aufgezeigt werden. Überdies soll plausibel gemacht werden, dass es für Euler schwierig gewesen sein muss, überhaupt die Frage nach einem neuen Konzept für die mehrwertigen Funktionen aufkommen zu lassen.

**Zum Logarithmus** Es ist dem Verständnis zuträglich, die Erläuterungen von Eulers Theorie des Logarithmus aus zu beginnen. In den beiden an entsprechender Stelle erwähnten Abhandlungen [EulerE168] und [EulerE170]

nimmt Euler implizit die Gültigkeit der Funktionalgleichung  $\log(x \cdot y) = \log(x) + \log(y)$  für alle komplexen Zahlen an – ein Irrtum, wie heute bekannt ist<sup>212</sup>. Für den Beweis aus der ersten Abhandlung (dort findet sich die Annahme in Problem 1) ist das auch zwingend nötig, der Beweis über die Differentialformen aus der zweiten benötigt diese Annahme hingegen nicht. An dieser Stelle betritt Euler allerdings das Gebiet der inexakten Differentiale, woraus man die Mehrdeutigkeit des  $\log$  ebenfalls ableiten kann<sup>213</sup>.

Alternativ ließe sich für Euler aus dem Grenzwert (4) direkt die Gültigkeit der Funktionalgleichung

$$\log(x \cdot y) = \log(x) + \log(y),$$

nachweisen, zumal

$$\log(x \cdot y) = \lim_{n \rightarrow \infty} n \left( (xy)^{\frac{1}{n}} - 1 \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} n \left( (xy)^{\frac{1}{n}} - x^{\frac{1}{n}} + x^{\frac{1}{n}} - 1 \right).$$

Eine Aufteilung in zwei Grenzwerte gibt

$$\begin{aligned} \log(x \cdot y) &= \lim_{n \rightarrow \infty} n \left( (xy)^{\frac{1}{n}} - x^{\frac{1}{n}} \right) + \lim_{n \rightarrow \infty} n \left( x^{\frac{1}{n}} - 1 \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} x^{\frac{1}{n}} \cdot n \left( y^{\frac{1}{n}} - 1 \right) + \lim_{n \rightarrow \infty} n \left( x^{\frac{1}{n}} - 1 \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} x^{\frac{1}{n}} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} n \left( y^{\frac{1}{n}} - 1 \right) + \lim_{n \rightarrow \infty} n \left( x^{\frac{1}{n}} - 1 \right). \end{aligned}$$

Unter Gebrauch des Grenzwertes<sup>214</sup>

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x^{\frac{1}{n}} = 1,$$

---

<sup>212</sup>Die Funktionalgleichungen behält nur ihre Gültigkeit, sofern man bei der Addition der beiden Logarithmen nicht das entsprechende Blatt der Riemann'schen Fläche wechseln muss.

<sup>213</sup>In der Funktionentheorie hingegen ist das Integral

$$f(z) = \frac{1}{z}$$

bekannt, keine Stammfunktion zu haben, was auch in der Vieldeutigkeit des  $\log$  begründet liegt.

<sup>214</sup>Selbst unter der Mehrdeutigkeit des Ausdrucks  $x^{\frac{1}{n}} = |x|^{\frac{1}{n}} e^{\frac{i\varphi + 2k\pi i}{n}}$  wird dieser Grenzwert für unendliches  $n$  zu 1.

wo  $\varphi$  das Argument der komplexen Zahl  $x$  und  $k$  alle natürlichen Zahlen bis hin zu  $n$  bedeutet, ist der Grenzwert  $= 1$ , und der Definition (4), findet man schließlich

$$\log(x \cdot y) = \log(x) + \log(y),$$

wie gewünscht. Einen Beweis, welchen Euler wohl – in seiner Wortwahl versteht sich – anerkannt haben würde.

Jedoch gelangt man damit zu solch einer bizarren Gleichung

$$0 = \log(1) = \log((-1) \cdot (-1)) = \log(-1) + \log(-1) = 2 \log(-1).$$

Dies hätte  $\log(-1) = 0$  zur Folge, was natürlich nicht der Wahrheit entspricht, da ja bereits aus der Identität

$$e^{i\pi} + 1 = 0$$

und der zuvor erwiesenen Mehrdeutigkeit des Logarithmus die Gleichung

$$\log(-1) = i\pi + 2k\pi i \quad \text{für } k \in \mathbb{Z}$$

folgt. Dies ist für die Euler'sche Theorie ein Problem, welches er auch bemerkt hat. In der Lösung zu Problem 2 in seiner Arbeit [EulerE168] sieht sich Euler daher veranlasst zu behaupten, dass zwar  $2 \log(-a) = 2 \log(+a)$ , aber nicht  $\log(-a) = \log(+a)$  ist. Er versucht nun, diese Unannehmlichkeit zu umgehen, indem er richtig anmerkt, dass ja eigentlich

$$\log(-1) + \log(-1) = (2k + 1)\pi \cdot i + (2l + 1)\pi \cdot i$$

für ganze Zahlen  $k$  und  $l$  ist. Und letztere lassen sich eben stets so auswählen, dass tatsächlich

$$\log(-1) + \log(-1) = 0$$

gilt. Dies ist ebenfalls korrekt, suggeriert aber keine Erklärung, warum jeweils verschiedene Werte zu wählen sind, geschweige denn, welche. Denn die spezielle Wahl  $l = -k$  führt zur richtigen bzw. gewollten Gleichung. Unter diesen unendlich vielen Möglichkeiten sind aber anderweitig keine besonders ausgezeichnet. Dieser Umstand ist Euler ebenfalls bewusst, jedoch begnügt er sich mit just nachgezeichneten Ausführungen.

In anderem Zusammenhang erläutert er die paradoxe Rechnung

$$1 = \sqrt{1 \cdot 1} = \sqrt{(-1) \cdot (-1)} = \sqrt{-1} \cdot \sqrt{-1} = -1$$

nicht weiter als zu erwähnen, dass eine solche Rechnung unrichtig sei. Ursächlich verhält es dabei wie beim Logarithmus: Der Ausdruck  $\sqrt{-1}$  kann verschiedene Bedeutungen annehmen, modern gesprochen lässt sich für ihn  $i$  und  $-i$  setzen, von welchen jedoch meist ersterer gewählt wird. In obigen Beispiel tritt eben der Fall ein, in welchem  $\sqrt{-1}$  einmal  $= i$  und einmal  $-i$  gesetzt werden muss, um die Richtigkeit der allgemeinen Gleichung

$$\sqrt{x \cdot y} = \sqrt{x} \cdot \sqrt{y}$$

auch für negative Zahlen  $x$  und  $y$  zu erhalten. Deswegen kann man auch nicht schlicht  $\sqrt{-1}$  als die *einzig*e Zahl definieren, die mit sich selbst multipliziert  $-1$  ergibt, wie Euler es in § 145 seiner *Algebra* [EulerE387] tut. Er schreibt in seiner altertümlichen Ausdrucksweise:

*“Ungeacht aber diese Zahlen als z. E.  $\sqrt{-4}$ , ihrer Natur nach ganz und gar ohnmöglich sind, so haben wir davon doch einen hinlänglichen Begriff, indem wir wissen, daß dadurch eine solche Zahl angedeutet werde, welche mit sich selbst multipliziert zum Product  $-4$  hervorbringe; und dieser Begriff ist zureichend um diese Zahlen in der Rechnung gehörig zu behandeln.”*

Um dieses Problem zu umgehen, kann die Quadratwurzel mithilfe von Logarithmen  $\sqrt{x} := e^{\frac{1}{2} \log x}$  definiert werden, sofern man auf der komplexen Ebene arbeiten möchte. Es wird demnach gleichsam das Euler’sche Argument, den Logarithmus aus einer Wurzel wie in Gleichung (4) zu definieren, umgekehrt, und die Wurzel aus dem Logarithmus heraus definiert. Jedoch ist diese Erklärung *a posteriori*, zumal die Bedeutungen entsprechend des gewünschten Endergebnisses ausgewählt werden. Dies wäre für Euler angesichts seiner physiko-teleologischen Auffassung von der Mathematik und Natur höchst unbefriedigend gewesen. Jedoch fehlte ihm wie bereits erwähnt, das Konzept der Riemann’schen Fläche – und gar die geometrische Interpretation der komplexen Zahlen, was unten (Abschnitt 7.3.1) noch eingehender erläutert werden wird –, welche eine entsprechende Auswahl *a priori* gestattet.

**Falsche Aussagen zu mehrwertigen Funktion** Die Schwierigkeiten, welche die mehrdeutigen Funktionen Euler bereitet haben, zeigen sich auch

an den falschen Aussagen, welche er über sie tätigt. Dies betrifft, noch einmal auf den Logarithmus bezogen, solche Formulierungen wie diejenige, es ergäben sich die unendlich vielen Werte des Logarithmus daraus, dass die Gleichung

$$\left(1 + \frac{\log(x)}{n}\right)^n - x = 0$$

ja  $n$  Wurzeln haben muss, etwa wegen der Gültigkeit des Fundamentalsatzes der Algebra<sup>215</sup>. Dass  $n$  hier eine unendlich große Zahl ist, ändert dabei für ihn nichts. Auch wenn Euler in diesem Fall Recht behalten sollte, ist dieses Argument im Allgemeinen nicht schlüssig. Denn das Polynom

$$P_n(x) = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}$$

besitzt gleichermaßen  $n$  Nullstellen – sie sind  $e^{\frac{2k\pi i}{n}}$ , wobei  $k$  alle natürlichen Zahlen bis einschließlich  $n$  durchläuft –, aber im Grenzwert  $n \rightarrow \infty$  hat der entsprechende Ausdruck keine endliche Nullstelle mehr. Es ist zu vermuten, dass Euler es auch im Falle des Logarithmus nicht als zwingend ansieht, es jedoch erwähnt, um seine Leser durch die Analogie zum endlichen Fall von der Unendlichkeit des Logarithmus überzeugen. Unabhängig davon ist sein Beweis im Wesentlichen auf dieselbe Idee gestützt wie der des Sinusproduktes (14) – es wird die Zerlegung von  $a^n \pm b^n$  in trinomische Faktoren gesucht und der Grenzübergang  $n \rightarrow \infty$  vollzogen. Grundlegend waren also die Euler'sche Formel

$$e^{ix} = \cos(x) + i \sin(x)$$

und die Auffassung des Logarithmus als Umkehrfunktion zur Exponentialfunktion.

Kann man im Fall des Logarithmus die Euler'schen Ausführungen noch mit einer entsprechenden Auslegung auch im heutigen Verständnis als korrekt ansehen, ist dies beim nachstehenden Fall nicht mehr möglich. Hierfür ziehe man eine Aussage aus der Arbeit *“Methodus facilis inveniendi integrale huius formulae  $\int \frac{\partial x}{x} \cdot \frac{x^{n+p} - 2x^n \cos \zeta + x^{n-p}}{x^{2n} - 2x^n \cos \theta + 1}$  casu quo post integrationem ponitur vel  $x = 1$  vel  $x = \infty$ ”* ([EulerE620], 1788, ges. 1776) (E620: “Eine leichte Methode, die Integrale dieser Formel  $\int \frac{\partial x}{x} \cdot \frac{x^{n+p} - 2x^n \cos \zeta + x^{n-p}}{x^{2n} - 2x^n \cos \theta + 1}$  im

<sup>215</sup>Auch wenn Eulers Beweis in [EulerE170] erst etwas später erschien als seine Theorie des komplexen Logarithmus in [EulerE168], wird er dennoch von der Gültigkeit des Fundamentalsatzes überzeugt gewesen sein.

Fall zu finden, in welchem nach der Integration entweder  $x = 1$  oder  $x = \infty$  gesetzt wird“) heran. Dort findet er in § IX zunächst die Formel

$$\int_0^1 \frac{x^p + x^{-p}}{x^n + \left(f + \frac{1}{f}\right) + x^{-n}} \cdot \frac{dx}{x} = \frac{\pi \left(f^{\frac{p}{n}} - f^{-\frac{p}{n}}\right)}{n(f - f^{-1}) \sin \frac{p\pi}{n}}.$$

Ist die obere Grenze  $x = \infty$ , dann ist der Wert doppelt so groß, wie Euler ebenfalls mitteilt. Gleichwohl diese Formel aus dem Fall abgeleitet worden ist, in welchem  $n$  eine natürlich Zahl ist, und  $p$  so genommen werden muss, dass das Integral konvergiert, ist es zunächst ersichtlich – was Euler auch bemerkt –, dass die Formel auch für negatives ganzzahliges  $n$  gültig ist. Ebenso behält sie ihre Gültigkeit für rationale und sogar beliebige reelle  $n$ . Aber in § XII[a]<sup>216</sup> gelangt er zur Formel

$$\int_0^1 \frac{x^p + x^{-p}}{2 \cos(m \log x) - 2 \cos \theta} \cdot \frac{dx}{x} = \frac{p}{m\sqrt{-1}} \cdot \frac{e^{\frac{p}{m}(\pi-\theta)} - e^{-\frac{p}{m}(\pi-\theta)}}{\sin \theta \left(e^{\frac{\pi p}{m}} - e^{-\frac{\pi p}{m}}\right)}, \quad (136)$$

welche aus der vorherigen für  $f + \frac{1}{f} = 2 \cos(\pi - \theta)$  und  $n = \sqrt{-1} \cdot m$  nach einer leichten Vereinfachung hervorgeht. Euler behauptet demnach, dass dieses Integral einen rein imaginären Wert hat, obgleich man über eine rein reelle Funktion integriert, da nach Eulers Festlegungen alle involvierten Variablen  $m$ ,  $p$  und  $\theta$  reell sind. Euler argumentiert diesbezüglich folgendermaßen: Da

$$\int_0^1 \frac{dx}{x \cos(m \log x)} = - \int_0^\infty \frac{dz}{\cos(mz)}$$

sowie

$$\int \frac{d\varphi}{\sin \varphi} = \log \tan \frac{1}{2} \varphi$$

gilt, wie man schnell prüft, wird man zu einem Logarithmus geführt. Dieser erlaubt nun wiederum aus seiner Eigenschaft, für reelle Argumente auch komplexwertig werden zu können, dass (136) imaginär wird. Dabei belässt Euler seine Erklärungen.

---

<sup>216</sup>In der ursprünglichen Arbeit wird § XII irrtümlich wiederholt, weshalb in der *Opera Omnia* Version der wiederholte Paragraph mit § XII[a] bezeichnet wird, was hier übernommen ist.

Diese könnte man wie folgt fortführen, sofern man für  $m > 0$  die Formel

$$f(m) := \int_0^{\infty} \frac{dx}{\cosh(mx)} = \frac{2}{m} \cdot \arctan \left( \tanh \left( \frac{mx}{2} \right) \right) \Big|_0^{\infty} = \frac{2}{m} \cdot \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2m}.$$

bemerkt. Nun setze  $im$  statt  $m$ , sodass

$$f(im) = \int_0^{\infty} \frac{dx}{\cos(mx)} = \frac{\pi}{2im},$$

was mit Eulers Ergebnis in Einklang steht. Ursächlich für imaginären Werte der Integrale ist in diesem Zusammenhang ihre Divergenz. Diesen Integralen lässt sich, ebenso wie es Euler für Reihen in [EulerE247] getan hat (Abschnitt 7.1.3), ein endlicher Wert zuordnen. Für Integrale scheint Euler eine analoge Untersuchung nicht unternommen zu haben, was wiederum seiner Auffassung von Integralen als spezielle Summen geschuldet sein mag.

In diesem Zusammenhang sei bemerkt, dass nach Euler gewisse divergente Reihen einen rein imaginären Wert haben, sofern ihnen gemäß seiner Auffassung (siehe Abschnitt 7.1.3) ein endlicher Wert zugeordnet wird. Er schreibt zum Beispiel in seiner Arbeit *“De serie Lambertina plurimisque eius insignibus proprietatibus”* ([EulerE532], 1783, ges. 1779) (E532: *“Über die Lambert’sche Reihe und ihre wunderbaren Eigenschaften”*) in § 11, dass die stetig wachsenden Terme einer Reihe ein Zeichen für die Evaluation ihrer Summe zu einem imaginären Wert sind, genauer:

*“[...] , dass eine divergente Reihe resultieren würde, weil in der allgemeinen Form  $\frac{n^n}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n}$  der Zähler den Nenner immer mehr übersteigen würde und daher alle Terme sogar unendlich groß werden würden, was ein Anzeichen einer imaginären Summe ist.”*

Während sich also das Integral (136) noch in gewisser Weise konsistent deuten lässt, ist dies bei seinen Erläuterungen in § V von [EulerE620] nicht mehr möglich. Hier findet sich zunächst die Formel

$$\int_0^{\infty} \frac{x^{\pm p}}{x^n - 2 \cos \theta + x^{-n}} \cdot \frac{dx}{x} = \frac{\pi \sin \frac{p}{n} (\pi - \theta)}{n \sin \theta \sin \frac{p\pi}{n}},$$

welche, entsprechenden Restriktionen unterworfen, korrekt ist. Jedoch sagt Euler dann in § VI, die Formel behielte ihre Richtigkeit auch nach der Translation  $\theta \mapsto \theta + 2\pi k$  für beliebiges ganzzahliges  $k$  bei, was nicht richtig ist. Obige Formel gilt nur für  $0 < \theta < 2\pi$ . Euler fühlt sich dabei zu seiner Behauptung bewogen, *obwohl* das Integral bzw. der Integrand unter dieser Umbenennung keine Veränderung erfährt, anders als der Ausdruck auf der rechten Seite. Dies stellt für Euler jedoch kein Problem dar, sondern muss sich vielmehr so verhalten. Denn, so sagt Euler, das Integral linker Hand ist eigentlich mehrdeutig, was sich im analogen Beispiel  $\int \frac{dx}{1+xx}$  oder ausintegriert  $\arctan x$  einfach nur unmittelbarer zeigt, da  $\arctan(x)$  aufgefasst als Logarithmus  $= \frac{1}{2i} \log \frac{1+ix}{1-ix}$  als mehrwertige Funktion zu erkennen ist<sup>217</sup>. Auch hier schlosse sich, wie beim Auswahlproblem des Logarithmus, die Frage an, welchen der möglichen unendlich vielen Werte man in speziellen Betrachtungen – wie etwa die Addition mehrerer solcher Integrale – zu wählen hat. Jedoch bleibt Euler dem Leser diese Antwort schuldig.

## 7.2 Durch eine irreleitende Frage

When things get too  
complicated, it sometimes makes  
sense to stop and wonder: Have  
I asked the right question?

---

Enrico Bombieri

Manchmal trägt es sich zu, dass einem eine Einsicht verwehrt bleibt, weil man nicht die richtige Frage gestellt hat, wovor selbst Euler nicht gefeit war. Obwohl er alle Bausteine beisammen hatte und auch die entsprechenden Fähigkeiten mitbrachte, haben ihn bisweilen seine Fragestellungen an einem weiteren Vorankommen gehindert. Dies wird im Folgenden am Beispiel der Reduktion von elliptischen Integralen auf Normalform (Abschnitt 7.2.1) und der Auflösbarkeit von polynomialen Gleichungen durch Radikale (Abschnitt 7.2.2) verdeutlicht.

---

<sup>217</sup>In der Tat ist der  $\arctan(x)$  bzw. das ihn darstellende Integral in Eulers Formel erfasst und sie gibt gar, mit der Interpretation über  $\log$  als unendlichwertige Funktion, die richtigen Werte für alle Werte  $\theta = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ .

### 7.2.1 Die Normalform von elliptischen Integralen

The mind when it has an old experience will add that data into its current experience, and it keeps coming up with wrong answers.

---

L. Ron Hubbard

Euler ist unbestreitbar der Begründer der Theorie der elliptischen Integrale. Sein Additionstheorem für die elliptischen Integrale gehört zu seinen schönsten Entdeckungen. Andererseits konnte er trotz seiner umfassenden Untersuchungen zu diesem Gegenstand seine Ergebnisse nicht zu einer prägnanten Theorie bündeln<sup>218</sup>, anders als es ihm etwa bei der Variationsrechnung in seiner *Methodus* [EulerE65] gelang. Die Gründe hierfür sollen im Folgenden diskutiert werden. Seine Herleitung des Additionstheorems für elliptische Integrale soll dabei nicht ausgespart werden und bildet den Anfang der Besprechung; anschließend erfolgt der Übergang zu seinen Versuchen einer Reduktion auf Normalform.

**Erste Untersuchungen – Fagnanos Verdopplungsformel** Elliptische Integrale, wie man heute unter anderem die Integrale nennt, die aus der Rektifizierung von Ellipsenbogen entspringen, treten vielerorts bei Euler auf, bevor er ab der Arbeit *“De integratione aequationis differentialis  $\frac{mdx}{\sqrt{1-x^4}} = \frac{ndy}{\sqrt{1-y^4}}$ ”* ([EulerE251], 1761, ges. 1751) (E251: “Über die Integration der Differentialgleichung  $\frac{mdx}{\sqrt{1-x^4}} = \frac{ndy}{\sqrt{1-y^4}}$ ”) die Angelegenheit systematisch in Angriff nimmt. Das vehemente Interesse ist dabei einer Entdeckung von G. Fagnano (1682–1766) zu verdanken, dass man für

$$F(x) = \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1-t^4}}$$

die Verdopplungsformel

$$2F(x) = F\left(\frac{2x\sqrt{1-x^4}}{1+x^4}\right) \quad (137)$$

---

<sup>218</sup>Einer Tatsache, welcher er sich trotz seiner gesamten Erfolge in diesem Gebiet auch bewusst war.

nachweisen kann. Genauer beginnt die Euler'sche Entdeckungsreise in diesem Gebiet mit der zeitlich leicht vor [EulerE251] liegenden Arbeit "*Observationes de comparatione arcuum curvarum irrectificibilium*" ([EulerE252], 1761, ges. 1753) (E252: "Beobachtungen über den Vergleich von nicht rektifizierbaren Kurven"), wo Euler in Theorem 5 bzw. § 30 auch die Gleichung (137) beweist. Euler schreibt dies in leicht anderer jedoch äquivalenter Form, indem er sagt, dass die Gleichung  $u = \frac{2z\sqrt{1-z^4}}{1+z^4}$  der Differentialgleichung

$$\frac{du}{\sqrt{1-u^4}} = \frac{dz}{\sqrt{1-z^4}}$$

Genüge leistet. Diese Arbeit ist neben dem ersten erkennbaren Schritt zum Euler'schen Additionstheorem für elliptische Integrale wegen der findigen Versuche in den ersten Paragraphen, die vorgelegten Differentialgleichungen durch geschicktes Raten zu lösen, von Interesse. Charakteristisch für Euler werden dem Leser auch alle diversen, insbesondere die fehlgeschlagenen, Anläufe bis zum Ende vollends berechnet präsentiert. So sieht Euler sich in § 4 beispielsweise gezwungen, die Lösung

$$\int du \sqrt{\frac{1-nuu}{1-uu}} + \int dx \sqrt{\frac{1-nxx}{1-xx}} = xu\sqrt{n} + C,$$

wobei  $C$  eine Konstante ist und

$$u = \sqrt{\frac{1-nxx}{n-nxx}}$$

erfüllt, zu verwerfen, weil diese für erlaubte Werte von  $n$  zu einem komplexwertigen Bogen<sup>219</sup>, jedoch nicht zu Ellipsenbogen führt<sup>220</sup>. Die Lösung

$$\int du \sqrt{\frac{1-nuu}{1-uu}} + \int dx \sqrt{\frac{1-nxx}{1-xx}} + nxx = C,$$

wobei

$$\frac{1-nxx}{1-xx} = \frac{1}{u}$$

gilt, genügt indes seinen Ansprüchen.

<sup>219</sup>Da Euler dieses Problem als die Addition zweier *reeller* Ellipsenbogen auffasst, muss für ihn  $n < 1$  sein.

<sup>220</sup>Diese und ähnliche Vermeidungen des Komplexen wird Euler am Vordringen in das Gebiet der Funktionentheorie hindern, wie unten (Abschnitt 7.3.1) berichtet werden wird. Sie werden sich auch für das Scheitern bei der Reduktion der elliptischen Integrale als ursächlich herausstellen.

**Die kanonische Gleichung und das Additionstheorem** In § 7 der Arbeit “*Specimen alterum methodi novae quantitates transcendentes inter se comparandi: De comparatione arcuum ellipsis*” ([EulerE261], 1761, ges. 1755) (E261: “Ein anderes Beispiel der neuen Methode transzendente Größen miteinander zu vergleichen; über den Vergleich von Ellipsenbogen”) legt Euler die – wie er sie nennt – kanonische Gleichung vor

$$0 = \alpha + \gamma(xx + yy) + 2\delta xy + \zeta xyy, \quad (138)$$

in welcher man aus heutiger Sicht leicht eine elliptische Kurve erkennt. Euler nutzt diese nun, um einmal  $x$  als Funktion von  $y$  und umgekehrt  $y$  als Funktion von  $x$  zu schreiben. Sein Ergebnis lautet:

$$y = \frac{-\delta x + \sqrt{\delta\delta xx - (\alpha + \gamma xx)(\gamma + \zeta xx)}}{\gamma + \zeta xx},$$

$$x = \frac{-\delta y - \sqrt{\delta\delta yy - (\alpha + \gamma yy)(\gamma + \zeta yy)}}{\gamma + \zeta yy},$$

wo er später abkürzend

$$X = \sqrt{\delta\delta xx - (\alpha + \gamma xx)(\gamma + \zeta xx)} \quad \text{und} \quad Y = \sqrt{\delta\delta yy - (\alpha + \gamma yy)(\gamma + \zeta yy)}$$

schreibt. Damit berechnet man

$$X = \gamma y + \delta x + \zeta xyy \quad \text{und} \quad -Y = \gamma x + \delta y + \zeta xyy. \quad (139)$$

Differenziert man nun (138), findet man

$$0 = dx(\gamma x + \delta y + \zeta xyy) + dy(\gamma y + \delta x + \zeta xxy),$$

oder mit (139) auch

$$\frac{dy}{Y} - \frac{dx}{X} = 0.$$

Das ist gerade eine Differentialgleichung mit Polynomen vom Grad 4 unter der Wurzel, womit die kanonische Gleichung (138) ihr Integral ist.

Dass man statt der allgemeinen Gleichung

$$\frac{dx}{\sqrt{A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + Ex^4}} = \frac{dy}{\sqrt{A + By + Cy^2 + Dy^3 + Ey^4}} \quad (140)$$

für beliebige Koeffizienten  $A, B, C, D, E$  ohne Einschränkung der Allgemeinheit auch diese reduzierte

$$\frac{dx}{\sqrt{A + Cx^2 + Ex^4}} = \frac{dy}{\sqrt{A + Cy^2 + Ey^4}}$$

betrachten kann, hat Euler später unter Verwendung einer gebrochen linearen Substitution bewiesen. Er schreibt in § 2 seiner Abhandlung “*Integratio aequationis*  $\frac{dx}{\sqrt{A+Bx+Cx^2+Dx^3+Ex^4}} = \frac{dy}{\sqrt{A+By+Cy^2+Dy^3+Ey^4}}$ ” ([EulerE345], 1768, ges. 1765) (E345: “Integration der Gleichung  $\frac{dx}{\sqrt{A+Bx+Cx^2+Dx^3+Ex^4}} = \frac{dy}{\sqrt{A+By+Cy^2+Dy^3+Ey^4}}$ ”):

“Und zuerst bemerke ich freilich, dass die vorgelegte Gleichung immer in eine Form solcher Art überführt werden kann, in welcher die Koeffizienten  $B$  und  $D$  verschwinden, was freilich für je einen der beiden aus den Elementen hinreichend bekannt ist. Damit aber beide zugleich verschwinden können, bedarf es einer dafür eigenen Form: Für  $x = \frac{mz+a}{nz+b}$  geht nämlich die erste Form, welcher die andere ja ähnlich ist, zunächst in diese über [...]”

Euler präsentiert die Rechnungen sehr ausführlich und gelangt in § 4 schließlich zu letztgenannter Gleichung. Auch von dieser ist (138) wieder die Integralgleichung der letzten Gleichung, wenn die Koeffizienten  $\alpha, \gamma, \delta, \zeta$  entsprechend angepasst werden<sup>221</sup>. Euler selbst ist mit dieser vom Gesuchten ausgehenden Lösung unzufrieden gewesen, weil eben die Lösung bereits bekannt sein muss<sup>222</sup>. Eine Methode, die gemäß seiner Ansprüche hinreichend direkt zur Integration von (140) führt, stellt Euler später in seiner Arbeit “*Dilucidationes super methodo elegantissima, qua illustris de la Grange usus est in integranda aequatione differentiali*  $\frac{dx}{\sqrt{X}} = \frac{dy}{\sqrt{Y}}$ ” ([EulerE506], 1781, ges. 1778) (E506: “Erläuterungen zur höchst eleganten Methode, welche der illustre Lagrange für die Integration der Differentialgleichung  $\frac{dx}{\sqrt{X}} = \frac{dy}{\sqrt{Y}}$  verwendet hat”) vor. Zwar präsentiert er bereits in der schon genannten Arbeit [EulerE345] eine Methode, welche sich ebenfalls als direkte Methode sehen ließe, ihm selbst ist das dortige Vorgehen jedoch wegen der vielen Substitutionen zu unnatürlich. Genauer schreibt er in § 16:

<sup>221</sup>Da die Anzahl um eins größer ist als die von  $A, B, C$ , ist eine der ersten beliebig und nimmt den Platz der Integrationskonstante ein.

<sup>222</sup>Dies läuft wie schon bei anderen Begebenheiten seinem physiko-teleologischen Weltbild zuwider.

*“Zwar habe ich hier das Integral der vorgelegten Differentialgleichung mit einer direkten Methode erhalten, ich kann aber dennoch nicht in Abrede stellen, dass dies über viele Umwege geleistet worden ist, so dass kaum zu erwarten ist, dass jemandem diese Operationen in den Sinn hätten kommen können.”*<sup>223</sup>

Zusammenfassend lässt sich feststellen, dass Euler selbst keine Methode abzuleiten vermochte, die Differentialgleichung (140) direkt und gleichzeitig a priori zu integrieren, hatte er doch bereits in § 1 von [EulerE345] zu seiner Methode über die kanonische Gleichung (138) resümiert:

*“Mit einer völlig einzigartigen und zugleich merkwürdigen Methode war ich einst zur Integration dieser Gleichung gelangt, deren Integral, und gar das vollständige, ich entdeckt habe, in einer algebraischen Gleichung enthalten zu sein. Das scheint umso wundersamer, zumal das Integral jeder der beiden Formeln einzeln nicht nur nicht algebraisch, sondern nicht einmal durch die Quadratur des Kreises oder der Hyperbel ausgedrückt werden konnte. Dann trug sich indes dieses besonders bemerkenswerte Phänomen zu, dass kein direkter Weg offen stand, dieses algebraische Integral zu finden. Aber keine Gelegenheit scheint mehr geeignet, die Grenzen der Analysis zu erweitern, als wenn wir uns bemühen, dasselbe, was wir vermöge einer ungradlinigen Methode ermittelt haben, mit einer direkten Methode ausfindig zu machen.”*

Aus heutiger Sicht fehlten Euler für dieses Unterfangen die entsprechenden nicht elementaren Funktionen. Die Lösung von (140) verlangt nämlich die bewusste Einführung von neuen transzendenten Funktionen, die eben genau über diese Eigenschaft definiert werden und davon ausgehend untersucht werden<sup>224</sup>. Dass die üblichen elementaren Funktionen – also Logarithmen und Kreisfunktionen – hierfür nicht hinreichen, ist Euler vermutlich seit seiner Abhandlung *“Theorematum quorundam arithmetico-rum demonstrationes”* ([EulerE98], 1747, ges. 1738) (E98: “Beweise gewisser zahlentheoretischer Theoreme”) bewusst gewesen. Hier beweist er in Problem 2 die

---

<sup>223</sup>Die in [EulerE506] erwähnte Operation, wie bereits aus dem Titel ersichtlich, ist aber Lagrange zuzuschreiben, wie Euler auch gleich zu Beginn der Arbeit bemerkt. Sie beruht gleichermaßen beruht auf einem eher künstlichen Ansatz, welcher sich nicht auf höhere Grade von Polynomen verallgemeinern lässt.

<sup>224</sup>Euler selbst scheint in seinem Opus bei keiner Gelegenheit eine Funktion über ihre Differentialgleichung definiert zu haben. Differentialgleichungen waren für ihn immer gleichsam ein Problem, das es aufzulösen galt.

Unmöglichkeit der Auflösbarkeit der Gleichung

$$x^4 - y^4 = z^2$$

über den natürlichen Zahlen, woraus sich wiederum ergibt, dass bereits das Integral

$$\frac{du}{\sqrt{1-u^4}}$$

durch keine bekannte Substitution rational gemacht werden kann<sup>225</sup>. Somit implizieren Integrale von Formen wie das über letztgenannte Differentialformeln die Existenz neuer Transzendenten. Diese sind seit Legendres drei Werken *“Exercices du calcul intégral – Tome premier”* ([Legendre2], 1811) (‘‘Übungen zur Integralrechnung – Erstes Buch’’), *“Exercices du calcul intégral – Tome second”* ([Legendre3], 1817) (‘‘Übungen zur Integralrechnung – Zweites Buch’’), *“Exercices du calcul intégral – Tome troisième”* ([Legendre4], 1816) (‘‘Übungen zur Integralrechnung – Drittes Buch’’) die elliptischen Integrale. Genau diese bewusste Untersuchung von Funktionen aus ihren Eigenschaften heraus – eben ohne Zuhilfenahme von geometrischen Überlegungen – findet sich Euler bei Euler noch nicht. Er ist vielmehr an Fragen über die Eigenschaften der bekannten Funktionen selbst interessiert.

Auf die Legendre’sche Klassifikation von elliptischen Integralen Bezug nehmend, hat Euler jedoch – natürlich ohne Kenntnis von Legendres Einteilung gehabt zu haben – die Additionstheoreme für die elliptischen Integrale erster und zweiter Art in [EulerE345] vollständig abgehandelt, dasjenige für die dritter Art findet sich in seinen Formeln der Abhandlung *“Plenior explicatio circa comparationem quantitatum in formula integrali  $\int \frac{Zdz}{\sqrt{1+mzz+nz^4}}$  contentarum denotante  $Z$  functionem quamcunque rationalem ipsius  $zz$ ”* ([EulerE581], 1785, ges. 1775) (E581: ‘‘Eine umfassendere Erklärung zum Vergleich der in der Integralform  $\int \frac{Zdz}{\sqrt{1+mzz+nz^4}}$  enthaltenen Größen, wobei  $Z$  irgendeine rationale Funktion von  $zz$  ist’’).

**Versuch einer Reduktion auf Normalformen** Euler ist ebenfalls von der Entdeckung einer tiefer liegenden Struktur der elliptischen Integrale ein-

<sup>225</sup>Der Zusammenhang der Existenz einer solchen Substitution mit dem Geschlecht der Lemniskate und generell dem Geschlecht einer Kurve war Euler noch unbekannt. Der Begriff des Geschlechts einer algebraischen Kurve kam erst wesentlich später mit Clebsch (1833–1872), wie man etwa Kleins Buch *“Vorlesungen über die Entwicklung der Mathematik im 19. Jahrhundert”* ([Klein], 1956) entnehmen kann.

- I.  $\int dz \sqrt{\frac{f+gz}{b+kz}}$ , si fuerit  $fk > gb$ .
- II.  $\int dz \sqrt{\frac{f+gz}{b+kz}}$ , si fuerit  $gb > fk$ .
- III.  $\int dz \sqrt{\frac{f+gz}{b-kz}}$ , nulla limitatione adiuncta.
- IV.  $\int dz \sqrt{\frac{f+gz}{kz-b}}$ , nulla limitatione adiuncta.
- V.  $\int dz \sqrt{\frac{f-gz}{b+kz}}$ , nulla limitatione adiuncta.
- VI.  $\int dz \sqrt{\frac{f-gz}{b-kz}}$ , si fuerit  $fk > gb$ .
- VII.  $\int dz \sqrt{\frac{f-gz}{b-kz}}$ , si fuerit  $fk < gb$ .
- VIII.  $\int dz \sqrt{\frac{f-gz}{-b+kz}}$ , hic necessario est  $fk > gb$ .
- IX.  $\int dz \sqrt{\frac{-f+gz}{b+kz}}$ , nulla limitatione adiuncta.
- X.  $\int dz \sqrt{\frac{-f+gz}{b-kz}}$ , hic necessario est  $fk < gb$ .
- XI.  $\int dz \sqrt{\frac{-f+gz}{-b+kz}}$ , si fuerit  $fk > gb$ .
- XII.  $\int dz \sqrt{\frac{-f+gz}{-b+kz}}$ , si fuerit  $fk < gb$ .

Abbildung 49: Eulers Einteilung der elliptischen Integrale aus § 38 seiner Arbeit [EulerE295] in 12 Klassen.

genommen gewesen, was man heute am ehesten als die Reduktion auf die just erwähnten Normalformen bezeichnen würde. Insbesondere die Arbeiten “*Consideratio formularum, quarum integratio per arcus sectionum conicarum absolvi potest*” ([EulerE273], 1763, ges. 1760) (E273: “Betrachtung von Formeln, deren Integration mit den Bogen von Kegelschnitten durchgeführt werden kann”) sowie “*De reductione formularum integralium ad rectificationem ellipsis ac hyperbolae*” ([EulerE295], 1766, ges. 1764) (E295: “Über die Reduktion von Integralformeln auf die Rektifizierung der Ellipse und der Hyperbel”).

Hier lässt sich Euler allerdings von einem geometrischen Bild bei der Einteilung leiten, was – wie seit Legendres Untersuchungen bekannt ist – nicht zielführend sein konnte, wenn man die Legendre’sche Einteilung als Maßstab heranzieht. In [EulerE273] gelangte er dabei insgesamt zu 12 Formeln, die sich auf die 3 von Legendre reduzieren ließen, sofern man das geometrische Bild fallen lässt und die Integrale auch über der komplexen Ebene betrachtet. Die Situation wird von Adolf Krazer (1858–1926) in dem Vorwort zu Band 20 von Serie 1 der *Opera Omnia* ([Krazer], 1912) treffend zusammengefasst:

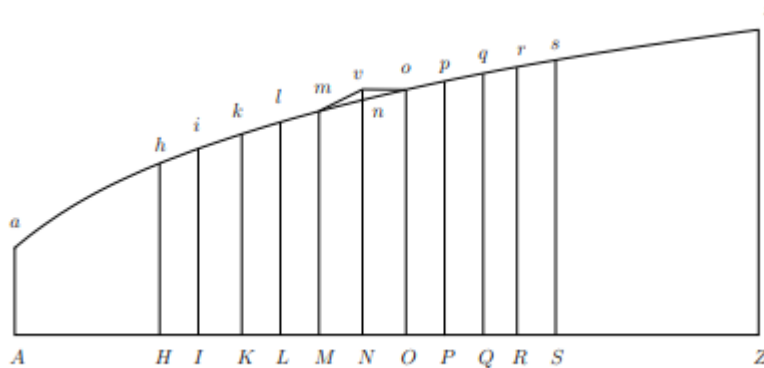


FIG. 4

**Abbildung 50:** Eulers (mit Latex nachgezeichnete) Figur aus seinem Buch [EulerE65], welche er zur Herleitung von den Euler-Lagrange'schen Differentialgleichung verwendet.

*“Fragen wir aber, warum das in dem anderen Hauptteil der Abhandlungen (insbesondere 295, 273) behandelte Problem der Reduktion der Integrale auf feste Normalformeln und der Zurückführung des allgemeinen Integrals auf diese, trotzdem es für Euler, der rechnen konnte und wollte wie kein anderer, wie geschaffen war, keine so glückliche Lösung gefunden hat, so müssen wir, wie schon oben erwähnt, dem Nichtloskommen von geometrischen Vorstellungen die Schuld geben. Ein entscheidender Fortschritt in dieser Richtung konnte erst geschehen, wenn die geometrische Grundlage, der allerdings die Lehre von den elliptischen Integralen bisher fast alles verdankte, zurücktrat und einer Behandlung der Integrale um ihrer selbst Willen Platz machte; [...]”*

**Die Variationsrechnung als weiteres analoges Beispiel** Bei dem Versuch der Reduktion auf Normalformen erweist sich insbesondere die Geometrie, die Euler bis zu diesem Punkt hatte vordringen lassen, als Hindernis für das Vorankommen bei der Theorie der elliptischen Integrale für Euler, was in merkwürdiger Parallelität auf die Variationsrechnung zutrifft. Eulers *Methodus* [EulerE65] liefert hierfür ein treffliches Beispiel.

Denn die geometrischen Methoden haben Euler zu den fundamentalen Erkenntnissen der Variationsrechnung geführt, so leitet er etwa die Euler-

Lagrange-Gleichungen<sup>226</sup> ab und kann auch Variationsprobleme mit Nebenbedingungen von geometrischen Vorstellungen geleitet entsprechend als Differentialgleichungen formulieren. Zusätzlich ist Euler hier von der Auffassung geleitet, dass Variationen stets existieren. Im zweiten Anhang seines Buchs, direkt in § 1, schreibt er:

*“Weil ja alle Wirkungen der Natur einem gewissen Gesetz von Maximum oder Minimum folgen, besteht kein Zweifel, dass bei den Kurven, welche Körper beschreiben, wenn sie von irgendwelchen Kräften angegriffen werden, eine gewisse Eigenschaft des Maximums oder Minimums auftritt.”*

Auf die mögliche Frage, warum alle Wirkungen einem solchen Gesetz folgen mögen, mag man die Euler’schen Ausführungen im ersten Anhang in [EulerE65] (über Elastische Kurven) heranziehen. Hier sagt er, gleichzeitig sein physiko-teleologisches Weltbild bestätigend, in § 1:

*“Denn weil die ganze Welt in vollkommener Art errichtet worden ist, und dies vom weisesten Schöpfer, gibt es in der Welt nichts, worin sich nicht das Prinzip der Maxima und Minima zeigt; deswegen besteht auch keinerlei Zweifel, dass jede Wirkung der Welt in endgültigen Ursachen mithilfe der Methode der Maxima und der Minima mit gleichem Erfolg bestimmt werden kann wie aus den sie bewirkenden Gründen selbst.”*

Damit ist für Euler zugleich die Frage der Existenz von Variationen geklärt<sup>227</sup>. Die Überführung der Variationsrechnung in ein reines Kalkül schreibt Euler indes Lagrange zu, dessen Methode, die konsequente Verwendung eines Symbols zur Anzeige der Variation  $\delta$  in vollkommener Analogie zum Differential  $d$ , Euler in aller Ausführlichkeit in seinen beiden Arbeiten *“Elementa calculi variationum”* ([EulerE296], 1766, ges. 1756) (E296: *“Elemente der Variationsrechnung”*) – in § 12 tritt die Definition des Variationssymbols  $\delta$  zum ersten Mal auf – und *“Analytica explicatio methodi*

<sup>226</sup>Dass die Euler-Lagrange Gleichungen der Variationsrechnung eine notwendige Bedingung für die Lösung eines Variationsproblems sind, hat Euler spätestens in seiner Arbeit *“De insigni paradoxo, quod in analysi maximorum et minimorum occurrit”* ([EulerE735], 1811, ges. 1779) (E735: *“Über ein außergewöhnliches Paradoxon, welches bei der Analysis von Maxima und Minima auftritt”*) bemerkt. Das Paradoxon, welches hier auftritt, besteht darin, dass die Lösung des dort untersuchten Variationsproblems nicht die Euler-Lagrange’schen Gleichungen auf dem gesamten untersuchten Intervall erfüllt. Die Lösungsfunktion ist eine lediglich Lipschitz-stetige Funktion.

<sup>227</sup>Gleichzeitig schimmert hier der Glaube von Euler an die Gültigkeit des Prinzips vom hinreichenden Grund hervor.

**per  $y + \delta y$  designemus, ita ut  $\delta y$  variationem deno-  
 zet, quam  $y$  ob variatam relationem patitur.**

**Abbildung 51:** Euler Definition des Wortes Variation und des Zeichens  $\delta$  für sein Kalkül in seiner Arbeit [EulerE296].

*maximorum et minimorum*” [EulerE297] (E297: “Analytische Erklärung der Methode der Maxima und Minima”) vorstellt. Die Arbeit “*Methodus nova et facilis calculum variationum tractandi*” ([EulerE420], 1772, ges. 1771) (E420: “Eine neue und leichte Methode das Variationsrechnung zu behandeln”) mutet indes sehr modern an (insbesondere die Ausführungen in §§ 5–7), weil Eulers Zugang zum Finden der Variation an die Methoden erinnert, wie sie noch gegenwärtig in einführenden Veranstaltungen zur theoretischen Physik gelehrt werden. Die Beifügung der Euler’schen Erläuterungen zum Nachweis des Gesagten hinreichen:

“Natürlich betrachte ich für jenes Inkrement, welches ich Variation genannt habe, die Größe  $y$  nicht weiter als eine Funktion der Variable  $x$  allein, sondern führe sie als Funktion der zwei Variablen  $x$  und  $t$  in die Rechnung ein, während auf diese Weise nämlich  $dx \left( \frac{dy}{dx} \right)$  das tatsächliche Differential von bezeichnet, wird diese Formel  $dt \left( \frac{dy}{dt} \right)$  dasselbe bedeuten können, was wir zuvor mit dem Symbol  $\delta y$  angezeigt haben. Um all das besser zu illustrieren, wollen wir  $y$  als die einer Abszisse  $x$  entsprechende Ordinate einer gewissen Kurve auffassen und im Variationskalkül wird nun eine andere Relation verlangt, welche alle anderen dieser hinreichend nahe kommenden Kurven zugleich erfasst; aber alle Kurven dieser Art, wenn  $X$  jene Funktion bedeutet, welcher  $y$  gleich wird, werden offenkundig in einer solchen Gleichung erfasst werden können  $y = X + tV$ , während  $V$  eine beliebige Funktion von  $x$  bedeutet. [...] Für das Finden der Variation ist demnach  $x$  wie eine Konstante zu behandeln und das Differential von  $y$  aus der Veränderlichkeit von  $t$  zu entnehmen.”

Die Anwendung auf Funktionale der Form  $\int y dx$  (Euler selbst benutzt wie in seiner *Methodus* [EulerE65] den Formelbuchstaben  $Z$ ) erfolgt schließlich ab § 8 bis § 15, wo sich in entsprechender Form auch die Euler–Lagrange Gleichungen finden.

Die Geometrie bzw. das Arbeiten mit Bildern hat Euler also nie ganz los-

gelassen, aber teilweise an weiteren Fortschritten gehindert. Dies mutet umso ironischer an, da Euler im Vorwort seiner *Calculi Differentialis* [EulerE212] nicht ohne Stolz verkündet, dass er seine Theorie der Differentialrechnung gänzlich ohne Zuhilfenahme von Bildern präsentieren wird. Lagrange sollte es ihm später in seinem Grundlagenwerk zur Mechanik “*Mécanique Analytique*” ([Lagrange6], 1788) später gleichtun. Man vergleiche das Zitat zu seinem Buch, welches man im Buch “*Mathematics, from the Points of View of the Mathematician and of the Physicist*” ([Hobson1], 1912) wie folgt ins Englische übersetzt findet:

*“We have already various treatises on Mechanics, but the plan of this one is entirely new. I intend to reduce the theory of this Science, and the art of solving problems relating to it, to general formulae, the simple development of which provides all the equations necessary for the solution of each problem. I hope that the manner in which I have tried to attain this object will leave nothing to be desired. No diagrams will be found in this work. The methods that I explain require neither geometrical, nor mechanical, constructions or reasoning, but only algebraical operations in accordance with regular and uniform procedure. Those who love Analysis will see with pleasure that Mechanics has become a branch of it, and will be grateful to me for having thus extended its domain.”*

### 7.2.2 Wegen Unbeweisbarkeit: Auflösbarkeit von polynomialen Gleichungen mit Radikalen

Niels Abel shocked the mathematical world by showing that no “solution by radicals” was possible for fifth- or higher-degree equations. [...] Abel’s proof [...] stands as a landmark in mathematics history.

---

William Dunham

Endlich soll noch ein Fall betrachtet werden, bei welchem die eigentliche Unbeweisbarkeit den Euler’schen Fortschritt verhindert hat: Die Lösung von polynomialen Gleichungen mithilfe von Radikalen. Stellt man hier wie Euler die Frage, wie die Auflösung solcher Gleichungen mit Wurzelausdrücken gelingt, ist man von Beginn an zu Scheitern verurteilt, wie man

seit Abels Arbeit *Mémoire sur les équations algébriques, ou l'on démontre l'Impossibilité de la Résolution de l'équation générale du cinquième Degré.* ([Abel1], 1824) (“Abhandlung über algebraische Gleichungen, oder der Nachweis der Unmöglichkeit der Auflösung der allgemeinen Gleichung vom fünften Grad”) weiß. Unabhängig davon wird im Folgenden neben den Euler’schen Auflösungsformeln mit Radikalen, welche er für spezielle Fälle zu finden vermochte, die Lambert’sche Reihe vorgestellt. Zudem lieferte Euler einen Ansatz, welcher die zu lösende algebraische Gleichung auf eine differentielle zurückführt.

**Auflösbarkeit mit Radikalen** Gegeben sei die Gleichung:

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0. \quad (141)$$

Euler versteht dabei stets die Koeffizienten als reell und ist in seiner Schaffenszeit wiederholt zur Frage nach einer expliziten Lösungsformel für die Wurzeln des Polynoms zurückgekehrt. Stellvertretend seien die Arbeiten “*De formis radicum aequationum cuiusque ordinis coniectatio*” ([EulerE30], 1738, ges. 1733) (E30: “Eine Vermutung über die Formen der Wurzeln von Gleichungen einer jeden Ordnung”), “*De resolutione aequationum cuiusvis gradus*” ([EulerE282], 1764, ges. 1753) (E282: “Über die Auflösung von Gleichungen jedweden Grades”), “*Innumerae aequationum formae ex omnibus ordinibus, quarum resolutio exhiberi potest*” ([EulerE644], 1790, ges. 1776) (E644: “Unzählige Formen von Gleichungen aus allen Ordnungen, deren Auflösung dargeboten werden kann”) in diesem Zusammenhang genannt. In den ersten beiden Arbeiten ist er dabei von der Vermutung

$$x = \sqrt[n]{A_1} + \sqrt[n]{A_2} + \sqrt[n]{A_3} + \cdots + \sqrt[n]{A_{n-1}} \quad (142)$$

mit konstanten  $A_1, A_2, \dots, A_{n-1}$ , die noch zu bestimmen sind, geleitet. Für die Fälle  $n = 1, n = 2, n = 3, n = 4$  gelangt er so zu den bekannten Lösungsformeln ( $pq$ -Formel für  $n = 2$ , die Cardano’sche Formel für  $n = 3$  und die Ferrari’sche Formel<sup>228</sup> für  $n = 4$ ). Dass er für  $n \geq 5$  seinen Erfolg nicht wiederholen kann, ist erst seit Abels eingangs erwähnter Abhandlung [Abel1] aus dem Jahr 1824 bekannt. Seine Misserfolge bei der allgemeinen Auflösung haben Euler zu speziellen Fällen übergehen lassen, in welchen

<sup>228</sup>Eulers Lösungsformel weicht leicht von der von Ferrari (1522–1565) ab. Der Ansatz, die biquadratische Gleichung auf die Lösung einer kubischen zu reduzieren, ist bei beiden Autoren zu finden. Man vergleiche auch Eulers Ausführungen in Kapitel 14 und 15 des zweiten Teils seiner *Algebra* zu diesem Gegenstand.

die Auflösbarkeit vermöge (142) gelingt. Die letzte der oben genannten Abhandlungen betrachtet hingegen spezielle Formen von Gleichungen beliebigen Grades, welche eine Reduktion auf eine Resolvente von einem niederen Grad zulassen. Es seien an dieser Stelle jedoch zunächst die wesentlichen Gedanken zu den Polynomen vom 5. Grade aus [EulerE282] mitgeteilt. Eulers Rechnungen beginnen ab § 30. Er setzt gemäß (142)

$$x = \mathfrak{A}\sqrt[5]{v} + \mathfrak{B}\sqrt[5]{v^2} + \mathfrak{C}\sqrt[5]{v^3} + \mathfrak{D}\sqrt[5]{v^4}$$

als Lösung der Gleichung

$$x^5 = Ax^3 + Bx^4 + Cx + D$$

an. Die Wurzeln dieser Gleichung nennt Euler  $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon$  und sagt, sie sind wie folgt gegeben:

$$\begin{aligned}\alpha &= \mathfrak{A} \cdot 1 \cdot \sqrt[5]{v} + \mathfrak{B} \cdot 1^2 \cdot \sqrt[5]{v^2} + \mathfrak{C} \cdot 1^3 \cdot \sqrt[5]{v^3} + \mathfrak{D} \cdot 1^4 \cdot \sqrt[5]{v^4} \\ \beta &= \mathfrak{A} \cdot \mathfrak{a} \cdot \sqrt[5]{v} + \mathfrak{B} \cdot \mathfrak{a}^2 \cdot \sqrt[5]{v^2} + \mathfrak{C} \cdot \mathfrak{a}^3 \cdot \sqrt[5]{v^3} + \mathfrak{D} \cdot \mathfrak{a}^4 \cdot \sqrt[5]{v^4} \\ \gamma &= \mathfrak{A} \cdot \mathfrak{b} \cdot \sqrt[5]{v} + \mathfrak{B} \cdot \mathfrak{b}^2 \cdot \sqrt[5]{v^2} + \mathfrak{C} \cdot \mathfrak{b}^3 \cdot \sqrt[5]{v^3} + \mathfrak{D} \cdot \mathfrak{b}^4 \cdot \sqrt[5]{v^4} \\ \delta &= \mathfrak{A} \cdot \mathfrak{c} \cdot \sqrt[5]{v} + \mathfrak{B} \cdot \mathfrak{c}^2 \cdot \sqrt[5]{v^2} + \mathfrak{C} \cdot \mathfrak{c}^3 \cdot \sqrt[5]{v^3} + \mathfrak{D} \cdot \mathfrak{c}^4 \cdot \sqrt[5]{v^4} \\ \varepsilon &= \mathfrak{A} \cdot \mathfrak{d} \cdot \sqrt[5]{v} + \mathfrak{B} \cdot \mathfrak{d}^2 \cdot \sqrt[5]{v^2} + \mathfrak{C} \cdot \mathfrak{d}^3 \cdot \sqrt[5]{v^3} + \mathfrak{D} \cdot \mathfrak{d}^4 \cdot \sqrt[5]{v^4}\end{aligned}$$

wobei  $1, \mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d}$  die fünften Einheitswurzeln sind und somit  $x^5 - 1 = 0$  lösen. Aus dieser Annahme leitet Euler unter Verwendung der Newton–Girad’schen Formeln Beziehungen zwischen den gegebenen Koeffizienten  $A, B, C, D$  und den angenommenen Größen  $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d}$  und  $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}, \mathfrak{D}$  sowie  $v$  her. In § 36 findet man die Relationen:

$$\begin{aligned}A &= 5(\mathfrak{A}\mathfrak{D} + \mathfrak{B}\mathfrak{C})v, \\ B &= 5(\mathfrak{A}^2\mathfrak{C} + \mathfrak{A}\mathfrak{B}^2 + \mathfrak{B}\mathfrak{D}^2v + \mathfrak{C}^2\mathfrak{D}v)v, \\ C &= 5(\mathfrak{A}^3\mathfrak{B} + \mathfrak{B}^3\mathfrak{D}v + \mathfrak{A}\mathfrak{C}^3v + \mathfrak{C}\mathfrak{D}^3v^2)v - 5(\mathfrak{A}^2\mathfrak{D}^2 + \mathfrak{B}^2\mathfrak{C}^2)v^2 + 5\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}\mathfrak{D}v^2, \\ D &= \mathfrak{A}^5v + \mathfrak{B}^5v^2 + \mathfrak{C}^5v^3 + \mathfrak{D}^5v^4 - 5(\mathfrak{A}^3\mathfrak{C}\mathfrak{D} + \mathfrak{A}\mathfrak{B}^3\mathfrak{C} + \mathfrak{B}\mathfrak{C}^3\mathfrak{D}v + \mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{D}^3v)v^2 \\ &\quad + 5(\mathfrak{A}^2\mathfrak{B}^2\mathfrak{D} + \mathfrak{A}^2\mathfrak{B}\mathfrak{C}^2 + \mathfrak{A}\mathfrak{C}^2\mathfrak{D}^2v + \mathfrak{B}^2\mathfrak{C}\mathfrak{D}^2v)v^2.\end{aligned}$$

Im folgenden Paragraphen erklärt Euler nun, dass man diese Gleichungen nach  $v$  aufzulösen hat, erwähnt aber auch die damit verbundenen Schwie-

rigkeiten. Er schreibt weiter:

*“Mit hinreichender Gewissheit lässt sich aber vermuten, wenn diese Elimination entsprechend durchgeführt werden würde, dass schließlich zu einer Gleichung vierten Grades gelangt werden kann, von welcher der Wert von  $v$  bestimmt wird. Wenn nämlich eine Gleichung höheren Grades hervorginge, dann würde auch der Wert von  $v$  Wurzelzeichen des selben Grades beinhalten, was absurd erscheint. Weil aber die Menge der Terme diese Aufgabe dermaßen schwierig gestaltet, dass sie nicht einmal mit Erfolg versucht werden kann, wird es nicht unangemessen sein, gewisse weniger allgemeine Fälle zu entwickeln, welche nicht zu dermaßen komplizierten Fällen führen.”*

In § 44 der Arbeit [EulerE282] gelangt er nach seinen Rechnungen zu einer *hinreichenden* Bedingung, wann eine Gleichung vom Grad 5 mit Radikalen auflösbar ist. Ist wie oben

$$x^5 = Ax^3 + Bx^2 + Cx + D$$

vorgelegt, gelingt eine Auflösung für die folgende Wahl der Koeffizienten:

$$\begin{aligned} A &= \frac{5}{gk}(g^3 + k^3), \\ B &= \frac{5}{mnr}((m+n)(m^2g^3 - n^2k^3) - (m-n)r^2), \\ C &= \frac{5}{mng^2k^2r^2}(g^3(m^2g^3 - n^2k^3)^2 \\ &\quad - (m(m+n)g^6 - (m^2 + mn - n^2)g^3k^3 + n(m-n)k^6)r^2 - k^3r^4), \\ D &= \frac{g^2}{m^2nk^4r^3}(m^2g^3 - n^2k^3)^3 - (m^2g^3 - n^2k^3)(m^2g^3 + 2n^2k^3)r^2 - n^2k^3r^4) \\ &\quad + \frac{k^2}{mn^2g^4r}(m^2g^3(m^2g^3 - n^2k^3) - (2m^2g^3 + n^2k^3)r^2 + r^4) \\ &\quad + \frac{5(m-n)(g^3 - k^3)(m^2g^3 - n^2k^3)}{mngkr} - \frac{5(m+n)(g^3 - k^3)r}{mngk}. \end{aligned}$$

Setzt man weiter

$$\begin{aligned}
 T &= (m^2g^3 - n^2k^3)^2 - 2(m^2g^3 + n^2k^3)r^2 + r^4 \\
 P &= \frac{(m^2g^3 - n^2k^3)^3 - (m^2g^3 - n^2k^3)(m^2g^3 + 2n^2k^3)r^2 - n^2k^3r^4 + ((m^2g^3 - n^2k^3)^2 - n^2k^3r^2)\sqrt{T}}{2m^2nr^3} \\
 Q &= \frac{(m^2g^3 - n^2k^3)^3 - (m^2g^3 - n^2k^3)(m^2g^3 + 2n^2k^3)r^2 - n^2k^3r^4 - ((m^2g^3 - n^2k^3)^2 - n^2k^3r^2)\sqrt{T}}{2m^2nr^3} \\
 R &= \frac{(m^2g^3 - n^2k^3)m^2g^3 - (2m^2g^3 + n^2k^3)r^2 + r^4 + (m^2g^3 - r^2)\sqrt{T}}{2mn^2r} \\
 S &= \frac{(m^2g^3 - n^2k^3)m^2g^3 - (2m^2g^3 + n^2k^3)r^2 + r^4 - (m^2g^3 - r^2)\sqrt{T}}{2mn^2r},
 \end{aligned}$$

so ist

$$x = \alpha \sqrt[5]{\frac{g^2}{k^4}} P + \alpha^2 \sqrt[5]{\frac{k^2}{g^4}} R + \alpha^3 \sqrt[5]{\frac{k^2}{g^4}} S + \alpha^4 \sqrt[5]{\frac{g^2}{k^4}} Q,$$

wo  $\alpha$  die erste von 1 verschiedene 5. Einheitswurzel ist.

Beispiele dieser allgemeineren Lösungsformel gibt Euler in § 46; im ersten findet er zur vorgelegten Gleichung

$$x^5 = 40x^3 + 70xx - 50x - 98$$

die Lösung

$$\begin{aligned}
 x &= \sqrt[5]{-31 + 3\sqrt{-7}} + \sqrt[5]{-18 + 10\sqrt{-7}} + \sqrt[5]{-18 + -10\sqrt{-7}} \\
 &\quad + \sqrt[5]{-31 - 3\sqrt{-7}}.
 \end{aligned}$$

Im zweiten Exempel gibt Euler für

$$x^5 = 2625x + 16600$$

die Lösung

$$\begin{aligned}
 x &= \sqrt[5]{75(5 + 4\sqrt{10})} + \sqrt[5]{225(35 + 11\sqrt{10})} + \sqrt[5]{225(35 - 11\sqrt{10})} \\
 &\quad + \sqrt[5]{75(5 - 4\sqrt{10})}
 \end{aligned}$$

an.

Welche Gleichungen Euler hingegen für beliebiges  $n$  lösen konnte, sind die Kreisteilungsgleichungen:

$$x^n - 1 = 0,$$

welche bekanntermaßen die Einheitswurzeln

$$x_k = \cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right) + i \sin\left(\frac{2k\pi}{n}\right)$$

als Lösungen besitzen. Es gelang ihm in seiner Arbeit *“De extractione radicum ex quantitatibus irrationalibus”* ([EulerE157], 1751, ges. 1740) (E157: “Über das Ziehen von Wurzeln aus irrationalen Größen”) darüber hinaus, die Einheitswurzeln für die Fälle  $n = \{1, 2, \dots, 10\}$  mithilfe von Radikalen entsprechend der Form (142) auszudrücken. Bei den 11-ten Einheitswurzeln muss er hingegen kapitulieren und schreibt im letzten Paragraphen dieser Arbeit:

*“Aber die elf Wurzeln der Gleichung  $x^{11} - 1 = 0$  können hingegen nur mithilfe einer Gleichung von fünf Dimensionen dargeboten werden, deren Auflösung noch im Verborgenen liegt, weshalb wir an dieser Stelle gezwungen sind aufzuhören.”*

Bereits an dieser Stelle schimmert Eulers Überzeugung der Möglichkeit der Auflösung der Gleichung vom 5. Grade hervor<sup>229</sup>. Sein gesamter Beitrag zu diesem Bereich wird detailliert im Artikel *“Cyclotomy: From Euler through Vandermonde to Gauss”* ([Neumann], 2007) dargestellt, aber auch der entsprechende Abschnitt im Buch *“Geschichte der Mathematik 1700–1900”* ([Dieudonné], 1985) ordnet die Kreisteilungsgleichungen in den historischen Kontext ein, weswegen die entsprechende Diskussion an dieser Stelle ausgespart wird.

---

<sup>229</sup>Euler wäre mit der Methode in seiner Arbeit [EulerE157] aus der Gleichung  $x^{11} - 1 = 0$  durch die Ersetzung  $x + \frac{1}{x} = y$  in dem Ausdruck  $1 + x + x^2 + \dots + x^{10} = 0$  zur einer Gleichung vom Grad 5 gelangt, führt dies aber nicht aus. Man erhielte die Gleichung  $0 = 1 - 3y + 3y^2 - 4y^3 + y^4 + y^5$ . Für den Fall  $n = 7$  zeigt er alle Schritte bis in Detail. Die wesentliche Erkenntnis ist dabei, dass die Gleichung für die Ersetzung von  $x$  mit  $\frac{1}{x}$  unverändert bleibt. Euler benutzt diese Erkenntnis indirekt, indem er eine Zerlegung  $1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6 = (x^2 + px + 1)(x^2 + rx + 1)(x^2 + qx + 1)$  sucht.

Gleichwohl Euler noch weit von den grundlegenden Gedanken der Galois-Theorie entfernt war, drängt sich die Frage auf, zu welchen Kriterien der Möglichkeit der Auflösbarkeit von (141) mittels Radikalen Euler hätte vordringen können. Hätte er es etwa vermocht, zu folgendem Satz zu gelangen?

**Theorem 4** (Auflösbarkeit von Gleichungen 5. Grades mit Radikalen). *Die Gleichung*

$$x^5 + ax + b = 0$$

*ist genau dann mit Wurzeln auflösbar, sofern sie diese Form aufweist:*

$$x^5 + \frac{5\mu^4(4\nu + 3)}{\nu^2 + 1}x + \frac{4\mu^5(2\nu + 1)(4\nu + 3)}{\nu^2 + 1} = 0, \quad (143)$$

*wobei  $\mu$  und  $\nu$  rationale Zahlen sind.*

Entsprechende Auflösungsversuche und den erwähnten Lehrsatz findet man respektive in den Arbeiten *“Solution of Solvable Irreducible Quintic Equations, Without the Aid of a Resolvent Sextic”*<sup>230</sup> ([Young], 1885) und *“Über die auflösbaren Gleichungen von der Form  $x^5 + ux + v = 0$ ”* ([Runge], 1885) gezeigt wird<sup>231</sup>. Eine Durchsicht der erwähnten Abhandlungen, insbesondere der zweitgenannten, zeigt die notwendigen gruppentheoretischen Überlegungen, welche Euler natürlich noch fremd waren. Der fundamentale Gedanke ist, über die symmetrischen Funktionen nachzuweisen, dass die Auflösbarkeit der Gleichung vom 5. Grade mit Wurzelausdrücken zu einer Resolvente vom 6. Grade führt. Man kann folgenden Satz zeigen:

**Theorem 5** (Cayley-Resolvente für Polynome von Grad 5). *Das Polynom*

$$y^5 + py^3 + qy^2 + ry + s = 0$$

*ist genau dann mit Radikalen auflösbar, wenn der Ausdruck (auch Cayley-Resolvente genannt)*

<sup>230</sup>Der scheinbare Widerspruch des Titels von Youngs Arbeit zum Gesagten löst sich auf, wenn man erwähnt, dass Young explizit nur die (algebraisch) auflösbaren Fälle betrachtet. Für diese, nicht jedoch für den allgemeinen Fall, gelingt es ihm, eine Resolvente vom Grad 4 zu finden.

<sup>231</sup>Dass sich die allgemeine Gleichung fünften Grades ohne Beschränkung der Allgemeinheit auf die Bring'sche (nach Erland Samuel Bring (1736–1798)) Form  $x^5 + ax + b$  reduzieren lässt, war Euler vermutlich nicht bekannt. Brings Dissertation *“Meletemata quaedam mathematica circa transformationem aequationum algebraicarum”* ([Bring], 1786) (“Gewisse mathematische Betrachtungen über die Transformation von algebraischen Gleichen”) mit der Methode, dies zu bewerkstelligen, erschien erst nach Eulers Tod.

$$P^2 - 1024z\Delta$$

eine rationale Wurzel in  $z$  hat. Dabei ist

$$\begin{aligned} P &= z^3 - z^2(20r + 3p^2) - z(8p^2r - 16pq^2 - 240r^2 + 400sq - 3p^4) \\ &\quad - p^6 + 28p^4r - 16p^3q^2 - 176p^2r^2 - 80p^2sq \\ &\quad + 224prq^2 - 64q^4 + 4000ps^2 + 320r^3 - 1600rsq \end{aligned}$$

und der Diskriminante

$$\begin{aligned} \Delta &= -128p^2r^4 + 3125s^4 - 72p^4pqrs + 560p^2qr^2s + 16p^4r^3 + 256r^5 + 108p^5s^2 \\ &\quad - 1600qr^3s + 144pq^2r^3 - 900p^3rs^2 + 2000pr^2s^2 - 3750pqs^3 + 825p^2q^2s^2 \\ &\quad + 2250q^2rs^2 + 108q^5s - 27q^4r^2 - 630pq^3rs + 16p^3q^3s - 4p^3q^2r^2. \end{aligned}$$

In diesem Zusammenhang sei des Weiteren auf die Arbeit “*Observationum ad Theoriam Aequationum pertinentes*” ([Jacobi3], 1834) (“Kleinere Bemerkungen zur Theorie von Gleichungen”) von Jacobi und die Abhandlung “*On a new auxiliary equation in the theory of equations of the fifth order*” ([Cayley], 1861) Cayley (1821–1895) verwiesen. Während Jacobi noch keine explizite Formel für die Koeffizienten der Resolvente 6. Grades angibt<sup>232</sup>, gelingt Cayley dies<sup>233</sup>.

Euler auf der anderen Seite schreibt in diesem Zusammenhang in § 14 der Arbeit [EulerE644]:

*“Wenn wir die Formen, welche wir für die Wurzeln dieser Gleichungen angegeben haben, genauer betrachten, werden sie alle entdeckt, hervorragend mit jener Vermutung übereinzustimmen, welche ich einst zu äußern gewagt habe, während ich für die Auflösung einer Gleichung beliebigen Grades, in welcher der zweite Term fehlt, wie etwa*

<sup>232</sup>Jacobi gibt einen der insgesamt drei Koeffizienten an und sagt, für die weiteren benötige man eine “ein klein wenig längere Rechnung”, was eine sehr euphemistische Formulierung ist.

<sup>233</sup>Für weitere Ausführungen vergleiche man auch den Artikel “*Resolvent sextics of quintic Equations*” ([Dickson], 1925) oder auch den moderneren “*Characterization of Solvable Quintics  $x^5 + ax + b$* ” ([Spearman], 1994). Der Artikel “*The Quintic, the Icosahedron, and Elliptic Curves*” ([Bartlett], 2024) fasst die Geschichte der quintischen Gleichung zusammen und betont auch die Verbindungen zur Ikosaedergruppe und elliptischen Kurve.

$$x^n = px^{n-2} + qx^{n-3} + rx^{n-4} + \text{etc.},$$

behauptete, dass immer eine auflösende Gleichung von einem Grad weniger gegeben ist:

$$y^{n-1} - Ay^{n-2} + By^{n-3} - Cy^{n-4} + Dy^{n-5} - \text{etc.} = 0,$$

wenn deren insgesamt  $n - 1$  Wurzeln  $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon$  etc. waren, dass dann stets gilt:

$$x = \sqrt[n]{\alpha} + \sqrt[n]{\beta} + \sqrt[n]{\gamma} + \sqrt[n]{\delta} + \text{etc.}."$$

Die zwei Arbeiten [Young] und [Runge] sowie die anderen genannten [Jacobi3] und [Cayley] weisen die Euler'sche Vermutung demnach als falsch aus. Es ist indes ein Kuriosum, aus welchem Grunde Euler für die Grade 1, 2, 3 und 4 Recht behält, jedoch ab dem 5. Grad der Resolvente den der Ausgangsgleichung zu übersteigen beginnt. In seiner Arbeit [EulerE644] gibt Euler zum Schluss (§ 15) jedoch bis hin zum 6. Grad Beispiele an, die seine Vermutung unterstützen.

Zu bemerken ist hierbei aber, dass es sich sowohl bei der Euler'schen Vermutung als auch bei der Aussage bezüglich (143) um eine bloße Existenzaussage handelt, sodass dieses Ergebnis Euler seinem Ziele nur einen Schritt näher gebracht hätte. Man sieht sich demnach insgesamt zu dem Schluss veranlasst, dass Euler ein allgemeines Kriterium wegen der fehlenden gruppentheoretischen Lehrsätze verborgen bleiben musste, obschon er in [EulerE282] und [EulerE644] zu speziellen Fällen des obigen Lehrsatzes gelangt. Zu den Überlegungen von Jacobi aus [Jacobi3] wäre er zweifelsohne in der Lage gewesen, scheint aber im Gegensatz zu seinem Nachfolger die Möglichkeit er höhergradigen Resolvente nicht zugelassen zu haben, sodass er sich den Weg zu dieser Erkenntnis wegen der falschen Ausgangsfrage bereits versperrt hatte.

**Ein Zugang über Differentialgleichungen** Es ist typisch für Euler, die Auflösung von (141) nicht nur auf die "klassische" Weise mit Radikalen zu versuchen, sondern für dasselbe Unterfangen auch die Methoden der Analysis zu gebrauchen. In § 24 der Arbeit "*Observationes circa radices aequationum*" ([EulerE406], 1771) (E406: "Beobachtungen über die Wurzeln von Gleichungen") stellt er die Lösung der kubischen Gleichung

IV. Pro aequatione sexti gradus:

$$x^6 = 15 ab x^4 + 20 ab(a+b) x^3 + 15 ab(aa+ab+bb) xx \\ + 6ab(a^3+aab+abb+b^3) + ab(a^4+a^3b+aabb+ab^3+b^4),$$

Hic igitur habebitur

$$x = \sqrt[6]{a^5 b} + \sqrt[6]{a^4 b b} + \sqrt[6]{a^3 b^3} + \sqrt[6]{a a b^4} + \sqrt[6]{a b^5}.$$

vnde si aequatio resoluens statuatur

$$y^5 - A y^4 + B y^3 - C y y + D y - E = 0,$$

eius radices erunt  $a^5 b$ ;  $a^4 b b$ ;  $a^3 b^3$ ;  $a a b^4$ ;  $a b^5$ , vnde colligitur fore

$$A = ab(a^4 + a^3 b + a a b b + a b^3 + b^4),$$

$$B = a^3 b^3 (a^4 + a^3 b + 2 a^2 b b + 2 a^3 b^3 + 2 a a b^4 + a b^5 + b^6),$$

$$C = a^5 b^5 (a^4 + a^3 b + 2 a^2 b b + 2 a^3 b^3 + 2 a a b^4 + a b^5 + b^6),$$

$$D = a^{10} b^{10} (a^4 + a^3 b + a a b b + a b^3 + b^4),$$

$$E = a^{15} b^{15}.$$

vbi formulae mediae B et C ita concinnius exprimi possunt:

$$B = a^3 b^3 (a a + b b) (a^4 + a^3 b + a a b b + a b^3 + b^4) \text{ et}$$

$$C = a^5 b^5 (a a + b b) (a^4 + a^3 b + a a b b + a b^3 + b^4),$$

quae determinationes fortasse aliquam lucem accendere possunt ad resolutionem aequationum generalem feliciori successu tractandam.

**Abbildung 52:** Euler gibt in seiner Arbeit [EulerE644] ein allgemeines Beispiel einer Gleichung vom Grad 6 an, die eine Resolvente vom Grad 5 besitzt. Beim ersten Term in der zweiten Zeile sollte wohl  $+6ab(a^3 + aab + abb + b^3)x$  statt nur  $+6ab(a^3 + aab + abb + b^3)$  stehen.

$$y^3 + py + q = 0$$

vermöge einer Differentialgleichung vor. Dazu möchte Euler sie auf die Differentialgleichung

$$ddy + Qdy + Ry = 0$$

mit noch zu bestimmenden Funktionen  $Q$  und  $R$  in den Variablen  $p$  und  $q$  überführen. Er findet nach zweimaliger Differentiation der Ausgangsgleichung und anschließender Vereinfachung:

$$Q = \frac{18p^2qdp^2 - 2(8p^3 - 27q^2)dpdq - 54pqdq^2}{(3qdp - 2pdq)(4p^3 + 27^2)} + \frac{2pddq - 3qddp}{3qdp - 2pdq},$$

$$R = \frac{6p(dq^3 + pdp^2dq - qdp^3)}{(3qdp - 2pdq)(4p^3 + 27q^2)} + \frac{dqddp - dpddq}{3qdp - 2pdq}.$$

Setzt man  $q^2 = \frac{4p^3x}{27}$ , wird die angenommene Differentialgleichung

$$ddy - dy \left( \frac{ddx}{dx} + \frac{dp}{p} - \frac{dx}{2x} - \frac{dx}{2(1+x)} \right) + y \left( \frac{dpddx}{2pdx} - \frac{ddp}{2p} + \frac{3dp^2}{4pp} - \frac{dpdx}{4px} - \frac{dpdx}{4p(1+x)} - \frac{dx^2}{36x(1+x)} \right) = 0.$$

Um sie integrierbar zu machen, multipliziert Euler diese mit

$$\frac{x(1+x)}{p^2dx^2} (2pdy - ydp)$$

und integriert sie zu

$$\frac{x(1+x)}{pdx^2} \left( dy - \frac{ydp}{2p} \right)^2 = \frac{C}{36} + \frac{y^2}{36p}$$

mit einer beliebigen Konstante  $C$ . Für  $y = z\sqrt{p}$  wird die letzte Gleichung zu

$$\frac{6dz}{\sqrt{C + z^2}} = \frac{dx}{\sqrt{x(1+x)}}.$$

Beide Seiten können uneingeschränkt mithilfe von Logarithmen integriert werden. Euler gibt direkt die Lösung

$$(z + \sqrt{C + z^2})^6 = D \left( \frac{1}{2} + x + \sqrt{x(1+x)} \right) = \frac{1}{2} D (\sqrt{x} + \sqrt{1+x})^2$$

mit einer konstanten Größe  $D$ . Daher erhält er für  $z$

$$z = \frac{y}{\sqrt{p}} = A (\sqrt{x} + \sqrt{1+x})^{\frac{1}{3}} + B (\sqrt{x} - \sqrt{1+x})^{\frac{1}{3}},$$

wobei  $A$  und  $B$  beliebige Größen sind. Der Kubus gibt schließlich

$$z^3 = -3ABz + (A^3 + B^3)\sqrt{x} + (A^3 - B^3)\sqrt{1+x}.$$

Mit diesem Ergebnis, gerade die Cardano'sche Formel zur Lösung von kubischen Gleichungen, sofern  $p$  und  $q$  wieder eingesetzt werden, schließt Euler seine Abhandlung [EulerE406].

Die Euler'sche Vorgehensweise ist höchst bemerkenswert und verdient gewiss eine weitere Untersuchung, welche jedoch an dieser Stelle nicht unternommen werden kann. Einschränkend ist zu festzuhalten, dass Euler im Wissen der korrekten Lösungsformel geleitet die entsprechenden Substitutionen zur Integration der Differentialgleichungen durchführt. Es wäre gewiss ebenfalls lohnenswert, die Euler'schen Einsichten – unter Kenntnis der Lösungen polynomialer Gleichungen höherer Grade – weiter auszuarbeiten. Man würde gewiss zum oben erwähnten Satz, welcher die Bedingungen zur Auflösbarkeit mit Radikalen beschreibt, geführt werden und vielleicht zum Satz von Hermite (1822–1901), wie man diese Gleichungen mit elliptischen Funktionen aufzulösen vermag<sup>234</sup>.

**Lambert'sche Reihen** Ein weiterer Auflösungsversuch Eulers von (141) besteht in der Lambert'schen Reihe, wie Euler sie etwa in [EulerE532] nennt, gleichwohl er schon bei der Betrachtung in der Arbeit [EulerE406] zu ihr gelangt war. Ihren Ursprung hat die Reihe in der Gleichung

$$1 = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x^3} + \frac{D}{x^4} + \text{etc.},$$

wobei sich die Koeffizienten beliebig wählen lassen. In der Arbeit "*Analysis facilis et plana ad eas series maxime abstrusas perducens, quibus omnium*

<sup>234</sup>Hermite beweist diesen Satz in seiner Arbeit "*Sur la résolution de l'Équation du cinquième degré*" ([Hermite], 1858) ("Über die Auflösung der Gleichung vom 5. Grade").

*aequationum algebraicarum non solum radices ipsae sed etiam quaevis earum potestates exprimi possunt* ([EulerE631], 1789, ges. 1776) (E631: “Eine leichte und verständliche Analysis, welche zu den höchst bizarren Reihen führt, mit welchen nicht nur die Wurzeln der Gleichungen selbst, sondern auch jede Potenz derselben ausgedrückt werden können”) betrachtet er in § 26 die verwandte Gleichung

$$1 - \frac{1}{Z^\alpha} = \frac{B}{Z^\beta} + \frac{C}{Z^\gamma} + \frac{D}{Z^\delta} + \frac{E}{Z^\varepsilon} + \text{etc..}$$

Für  $Z^n$  leitet er in Abhängigkeit der völlig beliebigen Potenzen  $\alpha, \beta, \dots$  und der Koeffizienten  $A, B, \dots$  und natürlich  $n$  eine Reihenentwicklung her, für deren allgemeinen Term er das Bildungsgesetz in Worten beschreibt<sup>235</sup>. Die vollkommen allgemeine Formel wendet Euler indes nicht über drei Terme hinaus an. Es sei an dieser Stelle Eulers zwecks einer Illustration die allgemeine Formel (sein *Theorema generale*) aus § 11 von [EulerE631] erwähnt. Ist die Gleichung

$$1 = \frac{A}{x^\alpha} + \frac{B}{x^\beta}$$

vorgelegt, so gilt

---

<sup>235</sup>Das von Euler beschriebene Bildungsgesetz ließe sich über äußerst verwickelte Rechnungen mit der von Lagrange in seiner Arbeit *“Nouvelle méthode pour résoudre les équations littérales par le moyen des séries”* ([Lagrange1], 1770, ges. 1768) (“Eine neue Methode zur Auflösung von Gleichungen mithilfe von Reihen”) heute nach ihm benannten Inversionsformel deuten. Lagrange beweist, dass eine Gleichung  $z = f(x)$  mit  $f'(a) \neq 0$  die formale Inverse

$$x = g(z) = a + \sum_{n=1}^{\infty} g_n \frac{(z - f(a))^n}{n!}$$

mit

$$g_n = \lim_{z \rightarrow a} \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} \left( \frac{z - a}{f(z) - f(a)} \right)^n$$

besitzt.

$$\begin{aligned}
x^n &= A \frac{n}{\alpha} + A \frac{n-\beta}{\alpha} B \cdot \frac{n}{\alpha} + A \frac{n-2\beta}{\alpha} B^2 \cdot \frac{n}{\alpha} \cdot \frac{n+\alpha-2\beta}{2\alpha} \\
&+ A \frac{n-3\beta}{\alpha} B^3 \cdot \frac{n}{\alpha} \cdot \frac{n+\alpha-3\beta}{2\alpha} \cdot \frac{n+2\alpha-3\beta}{3\alpha} \\
&+ A \frac{n-4\beta}{\alpha} B^4 \cdot \frac{n}{\alpha} \cdot \frac{n+\alpha-4\beta}{2\alpha} \cdot \frac{n+2\alpha-4\beta}{3\alpha} \cdot \frac{n+3\alpha-4\beta}{4\alpha} \\
&+ A \frac{n-5\beta}{\alpha} B^5 \cdot \frac{n}{\alpha} \cdot \frac{n+\alpha-5\beta}{2\alpha} \cdot \frac{n+2\alpha-5\beta}{3\alpha} \cdot \frac{n+3\alpha-5\beta}{4\alpha} \cdot \frac{n+4\alpha-5\beta}{5\alpha} \\
&+ \text{etc.}
\end{aligned}$$

Eulers Beispiel 4 aus § 15 von [EulerE631] ist die Gleichung

$$1 = \frac{A}{xx} + \frac{B}{x},$$

welche man natürlich direkt mit

$$x = \frac{B + \sqrt{BB + 4A}}{2}$$

auflösen kann. Vermöge der angesprochenen Reihenentwicklung findet Euler indes zunächst, dass für die Potenz  $x^n$  gelten müsste:

$$\begin{aligned}
(b + \sqrt{b^2 + a^2})^n &= a^n + \frac{n}{2} a^{n-1} \cdot 2b + \frac{n}{2} \cdot \frac{n}{4} n - 2 \cdot 4bb \\
&+ \frac{n}{2} \cdot \frac{n-1}{4} \cdot \frac{n+1}{6} a^{n-3} \cdot 8b^3 + \frac{n}{2} \cdot \frac{n-2}{4} \cdot \frac{n}{6} \cdot \frac{n+2}{8} a^{n-4} \cdot 16b^4 + \text{etc.}
\end{aligned}$$

mit  $A = a^2$  und  $2b = B$ ; und daher für  $n = 1$ :

$$\sqrt{b^2 + a^2} = a + \frac{1}{2} \cdot \frac{b^2}{a} - \frac{1 \cdot 1}{2 \cdot 4} \cdot \frac{b^4}{a^3} + \frac{1 \cdot 1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 6} \cdot \frac{b^6}{a^5} - \text{etc..}$$

Dies bestätigt die Richtigkeit der mit der Reihe gefundenen Lösung, wenn man den binomischen Lehrsatz (125) zum Vergleich heranzieht.

### 7.3 Grenzen durch den eigenen Arbeitsethos

Mathematical discoveries, like  
springtime violets in the woods,  
have their season which no  
human can hasten or retard.

---

Carl Friedrich Gauß

Die Arbeitsweise eines jeden Mathematikers ist von einer ihm eigenen Philosophie geleitet, welche selbigen eine bestimmte Sicht auf jeweilige Problemstellungen entwickeln lässt<sup>236</sup>. Es liegt in der Natur der Dinge, dass die subjektive Arbeitsweise einen bei den einen Problemstellungen unerwartet weit vorzudringen gestattet, bei anderen hingegen zur einer vollkommenen Stagnation des Fortschritts führen kann. Während der Großteil der vorliegenden Abhandlung Beispiele für den ersten Fall im Kontext von Eulers Arbeiten besprochen hat, sollen nun solche Begebenheiten den Diskussionsgegenstand bilden, in welchen ein tieferes Verständnis allein durch den Arbeitsethos unmöglich gemacht worden ist. So wird gezeigt werden (Abschnitt 7.3.1), dass Euler der Weg zur Theorie von Funktionen einer komplexen Variable trotz Entdeckungen einiger ihrer Grundbausteine – wie den Riemann–Cauchy–Differentialgleichungen – verwehrt bleiben musste. Weiter werden Beispiele für das “Missglücken” der von Euler präferierten *Methodus inveniendi* angeführt (Abschnitt 7.3.2), bevor schließlich zu möglichen Erkenntnissen übergegangen wird, die praktischen Anwendungen weichen mussten (7.3.3).

---

<sup>236</sup>Dies ist ein in der Psychologie umfassend untersuchtes Phänomen und unter dem Überbegriff *Einstellungseffekt* bekannt. Dieser Effekt besagt, dass man von einer Lösungsmethode mit einer Wahrscheinlichkeit umgekehrt proportional zur mit ihr erfolgreich gelösten Probleme wieder abweichen wird, *obwohl* die präferierte zuvor gewinnbringende Methode nicht zwingend das geeignetste Verfahren für eine andere, gegenwärtig zu bewältigende, ähnliche Aufgabe darstellt. Man konsultiere etwa die Arbeit “*Mechanization in problem solving: The Effect of Einstellung*” ([Luchins], 1942) und ähnliche für konkrete Beispiele zu diesem Gegenstand.

### 7.3.1 Eulers Nichtentdeckung der komplexen Analysis

The shortest path between two truths in the real domain passes through the complex domain.

---

Jacques Hadamard

Euler war zumeist bemüht, Fragestellungen aus anderen Bereichen auf die reelle Analysis zu reduzieren, wo die Betonung auf dem Wort *reell* liegt. Es wird sich nämlich zeigen, dass durch diesen Ansatz Euler die Theorie einer Funktion einer *komplexen* Variable nicht zur vollen Blüte entwickeln konnte. Obwohl, insbesondere aus moderner Sicht betrachtet, Euler wesentliche Beiträge zu diesem Teilbereich geleistet hat<sup>237</sup>, sind dennoch Hürden, die Euler nicht überwinden konnte, gemeinsam mit den Ursachen ihres Auftretens deutlich erkennbar<sup>238</sup>.

**Euler und die Riemann-Cauchy'schen Differentialgleichungen** Einer der grundlegenden Errungenschaften der Funktionentheorie sind die Riemann–Cauchy–Differentialgleichungen. Selbige sind Euler nicht entgangen, wenn er auch deren Tragweite nicht erfasst hat<sup>239</sup>. Dies war seinen Nachfolgern, vor allem Riemann<sup>240</sup> und Cauchy<sup>241</sup>, vorbehalten. Man kann sie wie folgt formulieren: Hat man eine differenzierbare Funktion  $f$  der variablen Größe  $z$  und schreibt diese als  $z = x + iy$  und setzt  $f(x, y) = u(x, y) + iv(x, y)$ ,

---

<sup>237</sup>Das Buch “*Ostwalds Klassiker der exakten Wissenschaften Band 261: Zur Theorie komplexer Funktionen von Leonhard Euler*” ([Wußing], 2007) ist eigens Beiträgen dieser Art gewidmet.

<sup>238</sup>So mag es begründet sein, warum das Buch über die Historie der komplexen Analysis “*The Real and the Complex: A History of Analysis in the 19th Century*” ([Gray], 2015) von Gray (1947–) nicht mit Euler beginnt, sondern mit Lagrange. Auch das in diesem Thema noch umfassender gewidmete Buch “*The Higher Calculus: A History of Real and Complex Analysis from Euler to Weierstrass*” ([Bottazini], 1986) von Bottazini (1947–) behandelt den Euler'schen Beitrag vergleichsweise kurz.

<sup>239</sup>Die Erstentdeckerschaft gebührt allerdings d'Alembert (1717–1783), der sie in seinem Buch “*Essai d'une nouvelle théorie de la résistance des fluides*” ([d'Alembert], 1752) (“Essay über eine neue Theorie des Widerstands von Fluiden”) niedergeschrieben hat.

<sup>240</sup>Riemann stellt die Theorie einer Funktion einer komplexen Variable in seiner Dissertation “*Grundlagen für eine allgemeine Theorie der Funktionen einer veränderlichen komplexen Größe*” ([Riemann1], 1851) vor.

<sup>241</sup>Cauchy gibt die nach ihm benannten Differentialgleichungen zum ersten Mal in seiner Arbeit “*Mémoire sur les intégrales définies, prises entre des limites imaginaires*” ([Cauchy1], 1825, ges. 1814) (“Abhandlung über bestimmte Integrale, erstreckt zwischen imaginären Grenzen”) an.

dann gelten die folgenden Differentialgleichungen:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \text{und} \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}. \quad (144)$$

Jede über den komplexen Zahlen differenzierbare Funktion erfüllt *notwendig* die obigen Differentialgleichungen, was ihr Aufkommen in Eulers Untersuchungen weniger überraschend macht; man findet sie in der Abhandlung “*De integrationibus maxime memorabilibus ex calculo imaginariorum oriundis*” ([EulerE656], 1793, ges. 1777) (E656: “Über höchst merkwürdige Integrationen, die aus dem Kalkül mit imaginären Größen entspringen”), direkt im ersten Paragraphen. Euler gelangt dabei, ebenso wie später in § 1–2 der Arbeit “*Uterior disquutio de formulis integralibus imaginariis*” ([EulerE694], 1797, ges. 1777) (E694: “Eine weitere Untersuchung über imaginäre Differentialformen”) noch einmal, wie folgt zu (144):

Er schreibt in erstgenannter Arbeit zunächst:

$$\Delta : (x + \sqrt{-1} \cdot y) = A : (x + \sqrt{-1} \cdot y) + \sqrt{-1} \cdot B : (x + \sqrt{-1} \cdot y),$$

wobei Euler statt dem heute geläufigem  $i$  hier wieder  $\sqrt{-1}$  verwendet<sup>242</sup>. Euler betrachtet somit die Funktion nicht als  $\Delta : \mathbb{C} \mapsto \mathbb{C}$ , sondern als  $\Delta : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}^2$ , wodurch  $\sqrt{-1}$  auf den Rang einer weiteren Konstante ohne eine tiefere Bedeutung herabgestuft wird. Auf die Funktionen, welche Euler  $M$  und  $N$  nennt, wendet Euler dann nun einen Satz aus der Integrationstheorie an. Er nimmt an

$$\Delta : z = \int Zdz,$$

dass also  $Zdz$  ein vollständiges Differential ist. Nun schreibt er:

$$Zdz = (M + N\sqrt{-1})(dx + \sqrt{-1}dy) = (Mdx - Ndy) + \sqrt{-1}(Mdy + Ndx).$$

Nun, so argumentiert Euler, ist  $Zdz$  ein vollständiges Differential, somit muss auch die rechte Seite integrierbar sein. Da  $\int Zdz$  ebenfalls wieder in

<sup>242</sup>Das Symbol  $i$  für  $\sqrt{-1}$  hat in der Tat ebenfalls Euler eingeführt und zwar in § 2 seiner Abhandlung “*De formulis differentialibus angularibus maxime irrationalibus, quas tamen per logarithmos et arcus circulares integrare licet*” ([EulerE671], 1794, ges. 1777) (E671: “Über höchst irrationale angulare Differentialformeln, welche sich dennoch durch Logarithmen und Kreisbogen integrieren lassen”). Jedoch verwendet Euler in seinen nachfolgenden Werken den Buchstaben  $i$  nicht, um  $\sqrt{-1}$  anzuzeigen.

integrale erit

$$\int(M\partial x - N\partial y) + \sqrt{-1} \int(N\partial x + M\partial y) = P + Q\sqrt{-1}.$$

Neceffe igitur est, vt posito  $z = x - y\sqrt{-1}$  fiat

$$P - Q\sqrt{-1} = \int(M\partial x - N\partial y) - \sqrt{-1} \int(N\partial x + M\partial y).$$

Hinc autem manifestum est fore

$$P = \int(M\partial x - N\partial y) \text{ et } Q = \int(N\partial x + M\partial y).$$

Ex quo intelligitur, in huiusmodi substitutionibus semper partes reales et imaginarias seorsim inter se aequari debere.

§. 2. Haec euolutio nobis iam suppeditat insignes proprietates, quae inter quantitates  $M$ ,  $N$ ,  $P$  et  $Q$  intercedunt. Primo enim cum fit  $P = \int(M\partial x - N\partial y)$ , quoniam haec formula semper integrationem admittit, erit per criterium huiusmodi formularum generale  $(\frac{\partial M}{\partial y}) = -(\frac{\partial N}{\partial x})$ . Eodem autem modo, quia habemus  $Q = \int(N\partial x + M\partial y)$ , ob integrabilitatem huius formulae erit  $(\frac{\partial M}{\partial x}) = (\frac{\partial N}{\partial y})$ . Ecce ergo per talem substitutionem semper inueniuntur eiusmodi duae functiones  $M$  et  $N$  binarum variarum  $x$  et  $y$ , his insignibus proprietatibus praeditae, vt fit tam  $(\frac{\partial M}{\partial y}) = -(\frac{\partial N}{\partial x})$  quam  $(\frac{\partial M}{\partial x}) = (\frac{\partial N}{\partial y})$ .

§. 3. Similis proprietas etiam conuenit quantitibus  $P$  et  $Q$ . Cum enim fit  $\partial P = M\partial x - N\partial y$  et  $\partial Q = M\partial y + N\partial x$ , erit per similes characteres

$$(\frac{\partial P}{\partial x}) = M \text{ et } (\frac{\partial P}{\partial y}) = -N,$$

$$(\frac{\partial Q}{\partial x}) = N \text{ et } (\frac{\partial Q}{\partial y}) = M,$$

Abbildung 53: Eulers Herleitung der Riemann–Cauchy Differentialgleichung aus seiner Arbeit [EulerE694] über die Theorie von Funktionen zweier reeller Variablen.

Real- und Imaginärteil zerlegt werden kann, so müssen auch der Real- und Imaginärteil auf der rechten Seite integrierbar sein. Daraus ergibt sich aus der Integrationstheorie die Implikation

$$\frac{\partial M}{\partial y} = -\frac{\partial N}{\partial x}$$

aus dem Realteil, analog folgt aus dem Imaginärteil die Gleichung

$$\frac{\partial M}{\partial x} = \frac{\partial N}{\partial y},$$

was gerade die Riemann-Cauchy'schen Differentialgleichungen (144) sind. Sie folgen also, wie bereits angedeutet, notwendig aus der Annahme der Differenzierbarkeit einer Funktion einer komplexen Variablen.

Man findet die Riemann-Cauchy Gleichungen in anderem Zusammenhang bereits in der Arbeit *“Considerationes de trajectoriis orthogonalibus”* ([EulerE390], 1770, ges. 1768) (E390: “Betrachtungen zu orthogonalen Trajektorien”), welche der Untersuchung von orthogonalen Trajektorien, also einem geometrischen Problem, gewidmet ist. Hier gelangt Euler über die Frage, welche Gleichungen zwei Kurven  $t(p, q) = t$ ,  $u(p, q) = u$ , die sich orthogonal zu schneiden haben, erfüllen müssen, zu der Bedingung:

$$\frac{\partial t}{\partial p} \frac{\partial t}{\partial q} + \frac{\partial u}{\partial p} \frac{\partial u}{\partial q} = 0.$$

Schnell kann man nachprüfen, dass diese äquivalent zu den Riemann-Cauchy-Differentialgleichungen sind. Obwohl diese Tatsache den Weg zur geometrischen Interpretation der komplexen Zahlen ebnet, scheint sie von Euler nicht erkannt worden zu sein<sup>243</sup>.

**Eulers Verhältnis zu den komplexen Zahlen** Die bahnbrechende Leistung Cauchys und Riemanns besteht demnach weniger in der Derivation der Gleichungen, sondern vielmehr im Nachweis, dass umgekehrt (144) auch bereits die Differenzierbarkeit von komplexen Funktionen impliziert, also insgesamt Differenzierbarkeit in der Variable  $z = x + iy$  und die Riemann-Cauchy-Differentialgleichungen äquivalent sind, ein Faktum, welches Euler

---

<sup>243</sup>Diese Ansicht wird von Wußing (1927–2011) und Juschkevitsch (1906–1993), den Autoren von *“Ostwalds Klassiker der exakten Wissenschaften Band 261: Zur Theorie komplexer Funktionen von Leonhard Euler”* ([Wußing], 2007), geteilt. Man konsultiere dazu das einleitende Vorwort.

entgangen ist<sup>244</sup>.

Den Hauptgrund für Eulers Übersehen der Implikation von (144) entnimmt man indirekt aus § 14 seines Papiers *“Integratio formulae differentialis maxime irrationalis, quam tamen per logarithmos et arcus circulares expedire licet”* ([EulerE689], 1795, ges. 1777) (E689: “Integration einer höchst irrationalen Integralformel, welche sich dennoch mit Logarithmen und Kreisbogen erledigen lässt”). In dieser Arbeit schreibt er seiner Lösung des gestellten Problems eine Sonderstellung zu, weil sie das Rechnen mit imaginären Größen *verlangt*<sup>245</sup>. Dementsprechend sind für Euler die komplexen Zahlen, wie auch schon oben angeklungen ist, ein reines Hilfsmittel für die reelle Analysis und bedürfen keiner eigenen Untersuchung. Von dieser Auffassung zeugt auch die Arbeit *“Nova methodus integrandi formulas differentiales rationales sine subsidio quantitatum imaginariarum”* ([EulerE572], 1784, ges. 1775) (E572: “Eine neue Methode rationale Differentialformeln ohne Hilfe von imaginären Größen zu integrieren”). Komplexe Größen werden also, wenn möglich, sogar umgangen, ein Phänomen, was auch schon oben (Abschnitt 4.2.1) bei Differentialgleichungen aufgetreten ist. Sie mögen zum Auffinden neuer Sachverhalte sehr von Nutzen sein, aber endgültig können alle Sachverhalte über reelle Funktionen auch hinreichend leicht und bequem formuliert werden, ohne das Reich der reellen Funktionen verlassen zu müssen. Weiter lässt sich seine Auffassung der Rolle komplexer Zahlen aus seinem Lehrbuch zur Algebra [EulerE387] entnehmen; hier schreibt er in altertümlicher Sprache in § 145 zu den Wurzeln negativer Zahlen:

*“Dahero bedeuten alle diese Ausdrücke  $\sqrt{-1}$ ,  $\sqrt{-2}$ ,  $\sqrt{-3}$ ,  $\sqrt{-4}$ , etc. solche ohnmögliche oder Imaginäre Zahlen, weil dadurch Quadratwurzeln von negativen Zahlen angezeigt werden. Von diesen behauptet man also mit altem Recht daß sie weder größer noch kleiner sind als nichts; und auch nicht einmal nichts selbst, als aus welchem Grund sie folglich für ohnmöglich gehalten werden müssen.*

Eine weitere Bestätigung dieser Einstellung gegenüber den imaginären Zahlen gibt Aussage am Ende von § 3 von [EulerE807]. Hier schreibt Euler nämlich bezüglich der Leibniz’schen Auffassung, die Logarithmen können

---

<sup>244</sup> Angesichts seiner Meinung (Abschnitt 6.1.3), man könne jede Funktion als verallgemeinerte Potenzreihe auffassen, kann man die Ansicht vertreten, Euler würde diese Frage sogar gar nicht gestellt haben.

<sup>245</sup> Er sieht sich jedenfalls außer Stande, einen direkten Weg, womit er wohl einen über die reelle Analysis im Sinn hat, anzugeben.

für negative Zahlen nicht definiert werden:

*“Ich muss indes gestehen, dass diese Antwort, wenn sie korrekt wäre, das Fundament der ganzen Analysis erschüttern würde, welches insbesondere in der Allgemeinheit der Regeln und der Operationen besteht, welche als wahr eingeschätzt worden sind, von welcher Natur auch immer man die Größen zu sein annimmt, auf welche sie angewendet werden.”*

Übertragen auf die komplexen Zahlen ließe sich das etwa so deuten, dass eine Funktion betrachtet als  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  keine anderen Eigenschaften haben kann als eine betrachtet als  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ . Dass diese Auffassung unrichtig ist, ist heute wohl bekannt. So ist eine Funktion, sofern sie nach  $z$  differenzierbar ist, auch nach  $x$  und  $y$  mit  $z = x + iy$  differenzierbar. Die Umkehrung dieser Aussage ist indes nicht korrekt, wie das Beispiel der Funktion  $f(z) = \bar{z} = x - iy$  durch das Nichterfüllen von (144) zeigt.

So überrascht es auch nicht, dass weitere Grundpfeiler der Theorie von Funktionen komplexer Variablen Euler verborgen bleiben mussten. Vor allem anderen ist hier der Residuensatz zu nennen, welchen man wohl überhaupt nur zu formulieren gedenkt, sofern man zahlreiche Integrationen in der komplexen Ebene entlang von Wegen betrachtet hat. Euler scheint nicht einmal explizit Wegintegrale in der *reellen* Ebene  $\mathbb{R}^2$  betrachtet zu haben. Doppelintegrale scheint er um ihre selbst willen lediglich in der einen einzigen Abhandlung [EulerE391] einer eingehenden Untersuchung unterworfen zu haben.

### 7.3.2 Methodus Inveniendi über Methodus Demonstrandi

The art of being wise is the art  
of knowing what to overlook.

---

William James

Die Frage nach dem Finden einer Lösung setzt implizit ihre Existenz voraus. Umgekehrt klammert dies die Frage nach der Existenz aus. Dies zieht, insbesondere vor dem Hintergrund eines modernen Verständnisses von mathematischer Strenge, unter Umständen etwaige Probleme nach sich, von welchen nachstehend einige angeführt werden sollen.

**Existenzfragen bei Euler im Allgemeinen** Allen voran ist zu erwähnen, dass das vollständige Umgehen von Existenzfragen in der Mathematik es Euler überhaupt erst ermöglicht hat, gewisse Schätze zu heben. Seine *Methodus* [EulerE65], welche die Variationsrechnung zu einem eigenständigen Bereich der Mathematik erhoben hat, ist eines der eindrucklichsten Beispiele dessen. Es sei noch einmal das Zitat aus § 1 des ersten Anhangs zu diesem Buch wiederholt:

*“Weil ja alle Wirkungen der Natur einem gewissen Gesetz von Maximum oder Minimum folgen, besteht kein Zweifel, dass bei den Kurven, welche Körper beschreiben, wenn sie von irgendwelchen Kräften angegriffen werden, eine gewisse Eigenschaft des Maximums oder Minimums auftritt.”*

Es es freilich schwerlich vorstellbar, wie sich ohne die in obiger Aussage enthaltene Ansicht der Existenz einer Variation überhaupt der Grundstein ihres Kalküls legen ließe. Dieser Behauptung verleiht die Bemerkung von Speiser im Vorwort von Band 29 der Serie 1 der *Opera Omnia* ([Speiser5], 1956) Nachdruck. Er schreibt dort bezüglich des Prozesses zum Auffinden einer Variation (pp. IX–X):

*“Der Übergang vom Variationsproblem zur Differentialgleichung gehört der Methodus inveniendi, der produktiven Phantasie, an. Wenn sich der Beweis daran versucht, so verstrickt er sich in Tautologien. So steht in einem Lehrbuch ein Satz von folgender Art: Es gibt eine Funktion, welche die Variation zum Verschwinden bringt. In einer Anmerkung wird aber gesagt: Dieser Satz kann nur bewiesen werden, wenn man für die Funktion die Existenz einer Ableitung voraussetzt. Das heißt offenbar: Um die Existenz der Funktion zu beweisen, muß man ihre Existenz voraussetzen.”*

Trotz der Fruchtbarkeit dieser Herangehensweise, welche schon in der *Methodus* [EulerE65] in den Euler–Lagrange–Gleichungen der Variationsrechnung und dem in der Physik seither nicht mehr wegzudenkenden Wirkungsprinzip<sup>246</sup> ihre Höhepunkte gefunden haben, sollen auch die aufgrund

---

<sup>246</sup>Hamilton (1805–1865) hat in seinen Arbeiten in expliziter Analogie in der Optik das nach ihm benannte Hamilton’sche Extremalprinzip formuliert. Man konsultiere etwa seine Arbeit *“On the application to dynamics of a general mathematical method previously applied to optics”* ([Hamilton], 1834). Sein Prinzip soll später Schrödinger (1887–1961) in der Formulierung der Quantenmechanik leiten. Er erwähnt Hamiltons Arbeit in seiner eigenen *“An undulatory theory of the mechanics of atoms and molecules”* ([Schrödinger], 1926). In der Quantenfeldtheorie ließe sich das Feynman’sche Pfadintegral von Feynman

dessen von Euler nicht tangierten Aspekte des Variationskalküls nicht verschwiegen werden. Sind Euler selbst die Grenzen des Anwendungsbereiches der Euler–Lagrange–Differentialgleichungen in seiner Arbeit “*De insigni paradoxo, quod in analysi maximorum et minimorum occurrit*” ([EulerE735], 1811, ges. 1779) (E735: “Über ein außergewöhnliches Paradoxon, welches bei der Analysis von Maxima und Minima auftritt”) noch vor Augen getreten – das Paradoxon besteht dabei darin, dass die Lösungsfunktion zu dem Variationsproblem von Interesse nicht von den Euler–Lagrange–Gleichungen erfasst wird<sup>247</sup> – und vermochte er durch explizites Einsetzen von Werten das Konzept der zweiten Variation<sup>248</sup> zur Überprüfung, ob das Extremum ein Minimum oder Maximum ist, noch zu umschiffen, musste ihm die etwaige globale Natur von Variationsproblemen, wie sie Jacobi durch sein Konzept der konjugierten Punkte in seinem Brief “*Zur Theorie der Variationsrechnung und der Differential-Gleichungen*” ([Jacobi4], 1836) völlig klar herausarbeitet, verborgen bleiben.

---

(1918–1988), aber noch vielmehr das Quantenwirkungsprinzip von Schwinger (1918–1994) nennen. Letzterer führt sein Variationsprinzip in der Arbeit “*On Theory of quantized fields I*” ([Schwinger], 1951) ein. Feynman erklärt das nach ihm benannte Integral in seiner Arbeit “*Space-Time Approach to Non-Relativistic Quantum Mechanics*” ([Feynman], 1948). Sowohl Feynman als auch Schwinger haben dabei von der Dirac’schen Arbeit “*The Lagrangian in Quantum Mechanics*” ([Dirac1], 1933) ausgehend ihre Untersuchungen begonnen.

<sup>247</sup>Euler betrachtet hier explizit das aus physikalischen Überlegungen herstammende Funktional  $\int_a^b \sqrt{x} \sqrt{1 + (y'(x))^2} dx$ . Die zugehörigen Euler–Lagrange–Gleichung – sie lautet in diesem Fall  $0 = \frac{d}{dx} \sqrt{x} \frac{y'}{\sqrt{1+(y')^2}}$  – werden von  $y(x) = 2c\sqrt{x - c^2} + d$  mit beliebigen Konstanten  $c, d$  gelöst. Jedoch, wie Euler auch in § 7 bemerkt, gibt es unzählige Funktionen, die das Funktional kleiner werden lassen als diese Lösung, wovon Euler auch explizite Beispiele vorrechnet. Die lokale Natur des durch die Euler–Lagrange–Gleichungen eruierten Minimums erläutert er im letzten Paragraphen der Arbeit. Euler streift hier somit den Unterschied zwischen den heute sogenannten *schwachen* und *starken Extrema* bei Funktionalen, hatte aber selbstredend noch kein Konzept davon gebildet. Die Euler–Lagrange’schen Differentialgleichungen erlauben, bei vorausgesetzter zweimaliger stetiger Differenzierbarkeit, lediglich ein schwaches Extrema zu finden.

<sup>248</sup>Erste entscheidende Anstöße zu diesem Konzept hat Legendre in seiner Arbeit “*Mémoire sur la manière de distinguer les Maxima des Minima dans le Calcul des Variations*” ([Legendre9], 1788, ges. 1786) (“Abhandlung über die Art und Weise Maxima und Minima im Variationskalkül zu unterscheiden”) gegeben. Die von Legendre mitgeteilte Bedingung ist jedoch wie die Euler–Lagrange’schen Gleichungen noch eine notwendige Bedingung für ein schwaches Extremum. Erst Weierstraß konnte in seinen “*Vorlesungen ueber Variationsrechnung*” ([Weierstraß3], 1879) eine umfassende Darstellung des Gegenstandes geben und auch notwendige Bedingungen für das Vorliegen eines starken Extremums formulieren. Die explizite Ausnutzung der zweiten Variation als quadratische Form in einem Hilbert–Raum geschieht erst viel später durch Morse (1892–1974) in seinem Werk “*Calculus of variations in the large*” ([Morse], 1934).

Ähnlich trägt es sich bei der Euler–Maclaurin’schen Summenformel zu. Geleitet vom Willen, die allgemeine Summe

$$f(x) := \sum_{k=1}^x g(k)$$

mit einer beliebigen Funktion  $g$ , auszuwerten zusammen mit der Erkenntnis, dass selbige der Gleichung

$$f(x) - f(x - 1) = g(x)$$

genügt, lässt einen wohl nur die Überzeugung der Äquivalenz der formal über eine Differentialgleichung unendlicher Ordnung gefundenen Lösung mit der obigen Summe erst zu dem Ausdruck gelangen, welcher heute – freilich in anderer Form präsentiert – als Euler–Maclaurin’sche Summenformel bekannt ist. In der Form, in welcher Euler die Formel niedergeschrieben hat (siehe Abschnitt 4.3.4), gelangt man nämlich zu einer asymptotischen Entwicklung. Die Existenz zweier Lösungen zu derselben Gleichung impliziert für Euler bereits die Gleichheit, den Aspekt der lediglich asymptotischen Gleichheit schob Euler meist beiseite, obschon er von der generellen Divergenz der durch die Summenformel ausgedrückten Reihe wusste. Eine Ansicht, welche sich auch bei der Euler’schen Untersuchung zur Fakultät bzw. der  $\Gamma$ -Funktion widerspiegelt. In seiner Arbeit “*De curva hypergeometrica hac aequatione expressa  $y = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots x$ ”* ([EulerE368], 1769, ges. 1765) (E368: “Über die mit der Gleichung  $y = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots x$  ausgedrückte hypergeometrische Kurve”) stellt er alle verschiedenen Ausdrücke, welche im Verlauf seiner Schaffenszeit als Interpolation der Fakultät vorgestellt hatte, zusammen. Sie finden sich in §§ 11–12 des besagten Papiers. Die Herleitungen und Diskussionen der entsprechenden Ausdrücke finden sich in der Arbeit [Aycock3] des Verfassers der hiesigen Ausarbeitung umfassend diskutiert. Euler behauptet, wenn auch indirekt, etwa, dass die Stirling’sche Formel (31) (siehe Abschnitt 4.3.4), die bekannte Integraldarstellung (62) (siehe Abschnitt 5.2.3) und anderem die Produktdarstellung (45) (siehe Abschnitt 5.1.2) identisch gleich sind, obwohl erstgenannte eine asymptotische Entwicklung ist, zweites Integral Realteile größer als 0 verlangt, das Produkt jedoch für alle nicht-ganzen Zahlen sinnvoll ist<sup>249</sup>.

---

<sup>249</sup>Dass die Produktformel und das Integral vom funktionentheoretischen Konzept der analytischen Fortsetzung aus betrachtet gleich sind, wusste Euler noch nicht.

$$\begin{aligned}
\text{III. } &ly = x l_{\frac{1}{2}} + x l_{\frac{2}{3}} + x l_{\frac{3}{4}} + x l_{\frac{4}{5}} + \text{etc.} \\
&\quad - l(1+x) - l(1+\frac{1}{2}x) - l(1+\frac{2}{3}x) - l(1+\frac{3}{4}x) - \text{etc.} \\
\text{IV. } &ly = x l_{\frac{1+\alpha}{\alpha}} + x l_{\frac{\alpha+1}{\alpha+1}} + x l_{\frac{\alpha+2}{\alpha+2}} + x l_{\frac{\alpha+3}{\alpha+3}} + x l_{\frac{\alpha+4}{\alpha+4}} + \text{etc.} \\
&\quad - l(1+x) - l(1+\frac{1}{\alpha}x) - l(1+\frac{2}{\alpha+1}x) - l(1+\frac{3}{\alpha+2}x) - \text{etc.} \\
\text{V. } &ly = -\Delta x + x + \frac{1}{2}x + \frac{1}{3}x + \frac{1}{4}x + \text{etc.} \\
&\quad - l(1+x) - l(1+\frac{1}{2}x) - l(1+\frac{1}{3}x) - l(1+\frac{1}{4}x) - \text{etc.} \\
\text{VI. } &ly = -\Delta x + \frac{1}{2}xx(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \text{etc.}) \\
&\quad + \frac{1}{3}x^2(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \text{etc.}) \\
&\quad + \frac{1}{4}x^3(1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \text{etc.}) \\
&\quad + \frac{1}{5}x^4(1 + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \text{etc.}) \\
&\quad + \text{etc.} \\
\text{VII. } &ly = \frac{1}{2}\pi + (x+\frac{1}{2})lx - x + \frac{A}{2x} - \frac{B}{2^2x^3} + \frac{C}{2^3x^5} - \frac{D}{2^4x^7} + \frac{E}{2^5x^9} + \text{etc.} \\
&\text{existente } \Delta = 0, 5772156649014225 \text{ et} \\
&\quad A = \frac{1}{6}, B = \frac{1}{30}, C = \frac{1}{42}, D = \frac{1}{42}, E = \frac{1}{42} \text{ etc.} \\
&\text{Tum in tribus postremis formis logarithmos natura-} \\
&\text{les accipi oportet.}
\end{aligned}$$

**Abbildung 54:** Euler gibt in seiner Arbeit [EulerE368] einige Ausdrücke für den Logarithmus der Fakultät an.

Tatsächlich stellen alle von Euler mitgeteilte Formeln die auf die eine oder andere  $\Gamma$ -Funktion dar, obschon Euler auch hier die Gleichheit der Ausdrücke nie explizit gezeigt hat; er hat hingegen auf jeweils unterschiedliche Art nachgewiesen, dass seine vorgestellten Ausdrücke der Funktionalgleichung  $f(x+1) = xf(x)$  zusammen mit Bedingung  $f(1) = 1$  Genüge leisten. Es ist anzunehmen, dass Euler bewusst gewesen ist, dass diese beiden Eigenschaften die Fakultät nicht eindeutig bestimmen, zumal ein Interpolationsproblem nie eindeutig lösbar ist, sofern nicht gewisse Einschränkungen hinzutreten<sup>250</sup>.

Es war Euler nicht möglich, bei seinen oben erwähnten Ausdrücken eine Diskrepanz auszumachen, was ihn von der Gleichheit all jener überzeugt haben wird. Heute wird die  $\Gamma$ -Funktion eindeutig charakterisiert, indem zu den oben genannten beiden Bedingungen noch mindestens eine weitere hinzutritt. Vielerorts ist dies eine Eigenschaft, welche die komplexe Analysis

<sup>250</sup>Euler erwähnt die Nicht-Eindeutigkeit des Interpolationsproblems in mehreren Arbeiten explizit, unter anderem in der schon umfassend diskutierten Arbeit [EulerE189]. Aber auch in der Abhandlung [EulerE555], welche eigens dem Thema Interpolation gewidmet ist, wo dies gleich in der Einleitung mitgeteilt wird.

für ihr Verständnis verlangt, und somit auch für Euler nicht zugänglich war, wie eben auseinandergesetzt worden ist (Abschnitt 7.3.1). Am ehesten wäre Euler wohl der zusätzlichen Eigenschaft der logarithmischen Konvexität zugehen gewesen, wie sie im Satz von Bohr–Møllerup<sup>251</sup> zur eindeutigen Charakterisierung von  $\Gamma(x)$  gefordert wird.

**Partialbruchzerlegungen transzendenter Funktionen** Wohingegen bei den obigen Beispielen das Ignorieren von Existenzfragen der Richtigkeit der Ergebnisse noch keinen Abbruch tut, verhält sich dies bei nachfolgenden Sachverhalten anders. Wie schon oben (Abschnitt 4.3.4) angedeutet, soll das Beispiel der Partialbruchzerlegung diskutiert werden. Seine Ideen zur Partialbruchzerlegungen von transzendenten Funktionen, welche Euler in den Arbeiten “*Nova methodus fractiones quascumque rationales in fractiones simplices resolvendi*” ([EulerE540], 1783, ges. 1775) (E540: “Eine neue Methode, beliebige rationalen Funktionen in einfache Brüche aufzulösen”) und “*De resolutione fractionum transcendentium in infinitas fractiones simplices*” [EulerE592] (E592: “Über die Auflösung von transzendenten Brüchen in unendlich viele einfache Brüche”) darlegt, nehmen die Existenz einer solchen Zerlegung in völliger Analogie zum endlichen Fall an. Wie im Fall von gebrochen rationalen Funktionen<sup>252</sup> versucht Euler, die gesuchte Entwicklung aus den Nullstellen des Nenners allein heraus zu konstruieren. Für den endlichen Fall führt dies zu keinerlei Problemen, im Gegensatz zum Fall unendlich vieler Nullstellen.

Eine kurze Illustration seiner Methode am Beispiel der Funktion  $\cot x = \frac{\cos x}{\sin x}$  wird dies bereits aufzeigen. Euler würde hier argumentieren, dass die Nullstellen des Nenners gegeben sind als  $x = 0, -1\pi, 1\pi, -2\pi, 2\pi, \dots$ , was er wie oben gesehen (4.1.3) auch nachgewiesen hatte. Sei also allgemein  $x = k\pi$  eine Nullstelle des Nenners. Euler setzt dann, weil die Nullstelle eine einfache ist, an:

---

<sup>251</sup>Die Namensgeber dieses Lehrsatzes haben ihn in ihrem Buch “*Lærebog i Komplex Analyse vol. III*” ([Bohr], 1922) (“Lehrbuch der komplexen Analysis, Band 3”) bewiesen.

<sup>252</sup>Die allgemeine Integration von gebrochen rationalen Funktionen mithilfe von Partialbruchzerlegungen hat Euler in seinen Arbeiten “*Methodus integrandi formulas differentiales rationales univariam variabilem involventes*” ([EulerE162], 1751, ges. 1748) (E162: “Eine Methode rationale Differentialformen einer Variable zu integrieren”) und “*Methodus facillior atque expeditior integrandi formulas differentiales rationales*” ([EulerE163], 1751, ges. 1748) (E163: “Eine leichtere und zügigere Methode rationale Differentialformen zu integrieren”) behandelt, im letzten Kapitel seiner *Calculi Differentials* [EulerE212] hat er eine weitere Methode für dieselbe Aufgabe angegeben.

$$\cot x = \frac{A_k}{x - k\pi} + R(x),$$

wobei  $R(x)$  eine Funktion ist, die den Faktor  $x - k\pi$  nicht enthält. Basierend darauf hat man

$$(x - k\pi) \cot x = A_k + (x - k\pi)R(x)$$

oder

$$A_k = (x - k\pi)R(x) + \frac{(x - k\pi) \cos x}{\sin x}.$$

Um nun  $A_k$  zu berechnen, betrachtet Euler den Grenzwert  $x \rightarrow k\pi$ :

$$A_k = \lim_{x \rightarrow k\pi} \left( (x - k\pi)R(x) + \frac{(x - k\pi) \cos x}{\sin x} \right).$$

Da  $R(x)$  per Annahme den Faktor  $x - k\pi$  nicht enthält, kann der erste Term der rechten Seite ignoriert werden, sodass

$$A_k = \lim_{x \rightarrow k\pi} \frac{(x - k\pi) \cos x}{\sin x} = \cos(k\pi) \lim_{x \rightarrow k\pi} \frac{x - k\pi}{\sin x} = \frac{\cos(k\pi)}{\cos(k\pi)} = 1,$$

wobei im vorletzten letzten Schritt die Formel  $\sin(x + k\pi) = \sin(x) \cos(k\pi)$  und der bekannte Grenzwert  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$  benutzt wurde. Alternativ ließe sich die l'Hospital'sche Regel anwenden. Davon ausgehend, so argumentiert Euler, hat man demnach die Partialbruchzerlegung

$$\cot x = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \frac{1}{x - k\pi},$$

was sich bei Euler ausgeschrieben wie folgt findet

$$\cot x = \frac{1}{x} + \frac{1}{x - \pi} + \frac{1}{x + \pi} + \frac{1}{x - 2\pi} + \frac{1}{x + 2\pi} + \dots,$$

was natürlich die bekannte Zerlegung des  $\cot x$  ist, wie sie schon oben (Abschnitt 4.1.3) angegeben worden ist, dort ist es Gleichung (16). Die anderen in [EulerE592] behandelten Beispiele sind ebenfalls gebrochene rationale Funktionen der trigonometrischen Funktionen, sodass Euler deren Richtigkeit schon auf andere Weise hatte nachweisen können<sup>253</sup>. Obgleich alle von

<sup>253</sup>Man findet ein Teil der in [EulerE592] gegebenen Beispiele schon in seiner *Introductio* [EulerE101], aber auch in seinen *Calculi Differentialis* [EulerE212] mit jeweils anderen Mitteln hergeleitet.

Euler in der erwähnten mitgeteilten Zerlegungen richtig sind, würde sein Vorgehen bei der Funktion

$$\frac{1}{e^z - 1}$$

scheitern, da sein Ansatz die Partialbruchzerlegung allein aus den Nullstellen des Nenners konstruieren will. Oben (Abschnitt 4.3.4) wurde die richtige Partialbruchzerlegung in (30) angegeben und der in ihr auftretende Term  $-\frac{1}{2}$  als ursächlich für falsche Stirling'sche Formel ausgemacht.

Das Erläuterte offenbart bereits, welche größtenteils impliziten Fragestellungen Euler in seinen Forschungen geleitet haben: Ausgehend von einer vorgegebenen Funktion unternimmt Euler etwa den Versuch, ihre Eigenschaften wie Nullstellen, Extremstellen oder Polstellen zu ermitteln, woraus er in der Folge etwaige Alternativdarstellungen ableitet. Das Sinus-Produkt (14) liefert wie die just besprochene Partialbruchzerlegung von  $\cot x$  ein Beispiel. Angesichts der damit einhergehenden Schwierigkeiten bezüglich der Validität wird es wenig überraschen, dass der moderne Ansatz gleichsam diametral zum Euler'schen ist: So gibt eines Beispiels wegen Weierstraß bei seinem Produktsatz die Nullstellen einer Funktion mitsamt weiterer allgemeiner Eigenschaften vor und geht erst anschließend dazu über, die Existenz einer solchen Funktion nachzuweisen. Man vergleiche die Ausführung zum Weierstraß'schen Produktsatz in Abschnitt (5.2.2). Ähnliches gilt natürlich für die Vorgabe von Polstellen beim Mittag-Leffler'schen Satz für Partialbruchzerlegungen. Diese modernen Ansätze geben indes keine direkte Möglichkeit, eine speziell vorgelegte Funktion auf ihre Eigenschaften hin zu untersuchen, sie werden ja im Gegenteil in der Formulierung der Theoreme mit vorgegeschrieben. Man kann so etwa mithilfe des Weierstraß'schen Satzes zeigen, dass

$$f(x) := x \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{x^2}{k^2\pi^2}\right)$$

eine holomorphe Funktion darstellt. Ihre Gleichheit zu  $\sin x$  erfordert jedoch einen gesonderten Beweis<sup>254</sup>. Dieses Studium von ganzen Klassen von Funktionen im Gegensatz zur Untersuchung einzelner Funktionen um ihrer selbst

<sup>254</sup>Euler stellt sich der Aufgabe, von der rechten Seite der letzten Gleichung ausgehend nachzuweisen, dass die linke tatsächlich  $\sin x$  ist, in seiner Arbeit "*Exercitatio analytica*" ([EulerE664], 1794, ges. 1776) (E664: "Eine analytische Übung"). Er sieht dies allerdings eher als eine kleine mathematische Fingerübung und hat diese "Übung" für andere Funktionen nicht wiederholt.

Willen ist später von Gauß, illustriert am Beispiel der hypergeometrischen Funktion (Abschnitt 5.2.5), und Riemann – man denke hier etwa an Theoreme wie den Satz von Riemann–Roch – weit umfassender betrieben worden und bestimmten seitdem den mathematischen Duktus.

**Eulers Beweisversuch des Fundamentalsatzes der Algebra** Bei kaum einem anderen Sachverhalt ist die Vernachlässigung der Existenzfrage dermaßen Inhalt der Kritik anderer Mathematiker gewesen wie beim Euler’schen Beweisversuch des Fundamentalsatzes der Algebra. Dies mag insbesondere darin begründet sein, dass der Euler’sche Beweis, trotz Richtigkeit des zu beweisenden Resultats, leicht nachweisbar unvollständig ist. Die Kritiken richten sich auf seine Argumente in der Arbeit “*Recherches sur les racines imaginaires des equations*” ([EulerE170], 1751, ges. 1746) (E170: “Untersuchung über die imaginären Wurzeln von Gleichungen”), in welcher Euler also demonstrieren möchte, dass die Gleichung

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0 = 0$$

mit reellen<sup>255</sup>Koeffizienten stets eine Lösung über den komplexen Zahlen zulässt. Für die Grade 1,2,3,4 gibt Euler sogar konkrete Formeln, was er wie oben besprochen (Abschnitt 7.2.2) für höhere Grade nicht wiederholen kann. Seine grundlegende Idee ist die folgende: Da er bereits weiß, wie man ein Polynom vom Grad 2 behandelt, setzt er für ein Polynom vom Grad 4 an (§ 27 in [EulerE170]):

$$x^4 + Bx^2 + Cx + D = (x^2 + ux + \alpha)(x^2 - ux + \beta). \quad (145)$$

Dieser Ansatz ist allgemein, weil sich die Potenz  $x^{n-1}$  durch eine generische Transformation in einem Polynom vom Grad  $n$  stets wegschaffen lässt<sup>256</sup>.

<sup>255</sup>Euler nimmt die Koeffizienten als reell an und diese Annahme ist auch für seinen Beweisversuch von fundamentaler Wichtigkeit.

<sup>256</sup>Speziell für ein Polynom vom vierten Grad findet sich der Ansatz, selbiges in zwei entsprechende vom Grad 2 zu zerlegen, bereits bei Descartes (1596–1650) in seiner “*La Géométrie*” von 1637. In der Übersetzung “*The Geometry of Rene Descartes*” ([Smith], 1954) findet man ein erstes Beispiel auf Seite 184. Aus Gründen der Vollständigkeit sei weiter angemerkt, dass in ähnlicher Manier, der Fall vom Grad  $n = 6$  mit glücklichem Erfolg in der Arbeit “*Johannis Huddenvii Epistula prima de Reductione Aequationum*” ([Hudde], 1637) (“Erster Brief von Johann Hudde: Über die Reduktion von Gleichungen”) von Hudde (1628–1704) abgehandelt worden. Dort wird das Polynom vom Grad 6 in eines vom vierten und zweiten Grad zerlegt, was zu einem Polynom vom Grad  $15 = \binom{6}{2}$  für die zu eruiierenden Koeffizienten führt. Da dieses Polynom als eines vom ungeraden Grad stets eine Nullstelle besitzt, beweist Hudde somit zugleich die Gültigkeit des Fundamentalsatzes für Polynome vom Grad 6. Euler betrachtet diesen Fall in § 50 von [EulerE170].

Die Koeffizienten  $B, C, D$  sind dabei vorgegeben, die Zahlen  $u, \alpha, \beta$  sind ausfindig zu machen. Multipliziert man die rechte Seite aus und führt einen Koeffizientenvergleich durch, gelangt man schließlich zur folgenden Gleichung für  $u$ :

$$u^6 - 2Bu^4 - (B^2 - 4D)u^2 - C^2 = 0.$$

Dies ist ein Polynom vom Grad  $6 = \binom{4}{2}$  in  $u$  und hat wegen des negativen absoluten Terms  $-C^2$  stets eine Lösung. Demnach kann man den Ansatz (145) stets verwirklichen. Da aber zusätzlich der Fall vom Grad 2 abgehandelt ist, ist es auch der Fall  $n = 4$ .

Damit bewaffnet geht Euler den Fall vom Grad 8 an und setzt an (§ 34 in [EulerE170]):

$$\begin{aligned} & x^8 + Bx^6 + Cx^5 + Dx^4 + Ex^3 + Fx^2 + Gx + H & (146) \\ & = (x^4 + ux^3 + \alpha x^2 + \beta x + \gamma)(x^4 - ux^3 + \delta x^2 + \varepsilon x + \eta) \end{aligned}$$

Die Idee ist dieselbe wie zuvor: Ein Polynom in  $u$  zu finden, welches sicher eine reell Nullstelle besitzt, sodass der Ansatz tatsächlich verwirklicht werden kann. Wie Euler auf kombinatorische Begründungen zurückgreifend erklärt, hat dieses Polynom einen Grad von  $70 = \binom{8}{4}$ , was die explizite Berechnung unmöglich werden lässt. Es genügt aber, wie im vorherigen Fall, nachzuweisen, dass der absolute Term negativ ist. Dies begründet Euler entsprechend – unter Annahme einer Zerlegung des Polynoms in lineare Faktoren – und kann somit nachweisen, dass (146) tatsächlich realisierbar ist. Da aber der Fall vom Grad 4 bereits abgehandelt ist, ist es somit auch der vom Grad 8.

Nun ist das allgemeine Argument (§ 45 in [EulerE170]), den Fall vom Grad  $2^n$  auf den Fall vom Grad  $2^{n-1}$  zu reduzieren, was Euler mit (145) und (146) entsprechenden Ansätzen erreicht. Damit ist der Euler'sche Beweis des Fundamentalsatzes der Algebra beendet. Und er selbst muss mit selbigem überaus zufrieden gewesen sein.

Allerdings gab es wie erwähnt, wenn auch nicht mehr zu seinen Lebzeiten kritische Gegenstimmen. Allen voran die von Gauß, welcher den ersten allgemein akzeptierten Beweis in der Abhandlung "*Demonstratio nova theorematis omnem functionem algebraicam rationalem integram unius variabilis in factores reales primi vel secundi gradus resolvi posse*" ([Gauß1], 1799) ("Ein neuer Beweis des Lehrsatzes, dass je ganz rationale Funktion

### Theoreme VII.

§. 45. *Toute équation d'un degré, dont l'exposant est une puissance du binaire comme  $2^n$  ( $n$  étant un nombre entier plus grand que 1) est résoluble en deux facteurs réels du degré  $2^{n-1}$ .*

#### DEMONSTRATION.

Ayant fait évanouir le second terme l'équation dont il s'agit, sera de cette forme :

$$x^{2^n} + Bx^{2^{n-2}} + Cx^{2^{n-3}} + Dx^{2^{n-4}} + \&c. = 0.$$

où le nombre des coefficients B, C, D, &c. est  $= 2^n - 1$ . Supposons maintenant les deux facteurs cherchés :

$$x^{2^{n-1}} - \mu x^{2^{n-2}} + \alpha x^{2^{n-3}} + \beta x^{2^{n-4}} + \&c. = 0$$

$$x^{2^{n-1}} + \nu x^{2^{n-2}} + \lambda x^{2^{n-3}} + \mu x^{2^{n-4}} + \&c. = 0$$

où le nombre des coefficients à déterminer  $\mu, \alpha, \beta, \&c.$  est aussi  $= 2^n - 1$ . Or la comparaison du produit de ces deux facteurs avec la

Abbildung 55: Eulers Ansatz aus [EulerE170] zur Zerlegung eines Polynoms vom Grad  $2^n$  in zwei vom Grad  $2^{n-1}$ .

von einer Variable in reelle Faktoren ersten oder zweiten Grades aufgelöst werden kann”) gibt. Der von Gauß gewählte Titel zeigt zwar einerseits indirekt an, dass er zuvor gegebene Beweise anerkennt, andererseits schreibt er in § 8, nach vorausgehender Reflexion des just vorgestellten Euler’schen Arguments:

“Die Regel, nach welcher Euler schließt, aus  $2m - 1$  Gleichungen die  $2m - 2$  Unbekannten  $\alpha, \beta$  etc.,  $\mu, \nu$  etc. alle rational bestimmen zu können, ist keineswegs allgemein gültig, sondern unterliegt oftmals einer Ausnahme.”

Damit ist bereits ein kritischer Punkt in Eulers Beweis getroffen. Letzterer nimmt nämlich an, dass sich mit hinreichender Rechenkraft wie bei (145) vorgehen ließe und man das entsprechende Polynom in  $u$  gewiss finden könnte. Ein Irrtum, wie Gauß aufzeigt. Unabhängig davon trifft aber folgender Einwand von Gauß noch härter:

“Euler nimmt stillschweigend an, dass die Gleichung  $X = 0$   $2m$  Wurzeln hat, und setzt deren Summe  $= 0$ , weil der zweite Term in  $X$  fehlt. Wie ich über diese Annahme (welche alle Autoren über diesen Gegenstand gebrauchen) richte, habe ich schon in § 3 erläutert.”

An nämlicher Stelle (§ 3) schreibt Gauß, dass man zuallererst die *Existenz* der Wurzeln nachzuweisen hat. Hier kristallisiert sich bereits ein zentraler Unterschied zwischen Euler und Gauß heraus: Nämlich dass Euler, im Gegensatz zu seinem Nachfolger, die Existenz der Nullstellen überhaupt nicht in Frage stellt. Das *Finden* der Wurzeln bestimmt Eulers Handeln, wohingegen Gauß noch einen Schritt weiter zurücktritt und zunächst die Existenz überhaupt erst einmal gesichert haben will. Euler begeht also hier einen Modalitätsfehlschluss und verwechselt die notwendige mit der hinreichenden Bedingung. Dieses Vorgehen, aus einer notwendigen Bedingung entsprechende Gleichungen abzuleiten, welche dann still schweigend auch als hinreichend annimmt, ist schon bei der Besprechung seiner Behandlung von Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten zutage getreten (Siehe Abschnitt 4.2.2).

Über den vorgestellten Euler’schen Beweis ist vielerorts in der Literatur diskutiert worden, mit unterschiedlicher Meinung bezüglich der Korrektheit. So nimmt etwa Dunham in seinem Artikel *“Euler and the Fundamental Theorem of Algebra”* ([Dunham1], 1991) eine ähnliche Position ein wie Gauß in [Gauß1]. Dahingegen vertritt Speiser im Vorwort von Band 29 der Serie 1 der *Opera Omnia*, genauer Seite X von ([Speiser5], 1956), eine fast gegenteilige Position und untermauert dort, wie weit diese Arbeitsweise Euler auch bei anderen Gelegenheiten, wie etwa der Variationsrechnung, geführt hat. Überdies lässt Speiser F. Frobenius (1849–1917) im Vorwort von Band 6 der Serie 1 der *Opera Omnia* ([Speiser1], 1921) mit folgendem Zitat zu diesem Gegenstand zu Wort kommen:

*“Für die Existenz der Wurzeln einer Gleichung führt er [Euler] jenen am meisten algebraischen Beweis, der darauf fußt, dass jede reelle Gleichung unpaaren Grades eine reelle Wurzel besitzt. Ich halte es für unrecht, diesen Beweis ausschließlich Gauss zuzuschreiben, der doch nur die letzte Feile daran gelegt hat.”*

Dem Frobenius–Zitat ist im Hinblick auf die moderneren Zugänge über algebraische Konstruktionen der Lösungen mithilfe von Körpererweiterungen umso mehr beizupflichten. In diesem Ansatz werden die Lösungen in Euler’scher Manier ebenfalls vorausgesetzt und deren Existenz durch Konstruktion der Erweiterungskörper auf entsprechende Weise gesichert<sup>257</sup>.

<sup>257</sup>Die Grundidee reicht bis auf den Vollständigkeitssatz von Ostrowski (1893–1986) (über

### 7.3.3 Praxis über Abstraktion

Die Wissenschaft soll die  
Freundin der Praxis sein, aber  
nicht ihre Sklavin.

---

Carl Friedrich Gauß

Zuletzt soll noch zur Sprache kommen, wie der von Euler angestrebte Praxisbezug sein Vorankommen bei gewissen Begebenheiten obstruiert hat. Der jeweilige Vergleich, mit den Ergebnissen seiner Nachfolger wird dem Gesagten dabei Nachdruck verleihen. Dabei bilden die Gebiete der quadratischen Formen in der Zahlentheorie und die Differentialgeometrie von Flächen den Diskussionsrahmen.

**Euler und quadratische Formen in der Zahlentheorie** Der starke Praxisbezug Eulers kommt eindrücklich zum Vorschein, wenn man seine Forschungen zu quadratischen Formen in der Zahlentheorie betrachtet, welche ihn über seine Laufbahn hinweg immer wieder eingenommen haben. Es wird zwecks der Illustration hinreichen, das Augenmerk auf den Zwei- und Vier-Quadrate-Satz sowie die Zahlen der Form  $nx^2 + y^2$  gerichtet zu haben. Eine Vorbereitung auf das nachstehend Präsentierte bietet die folgende Charakterisierung Eulers von Fueter (1880–1950) im vierten Band der ersten Serie der *Opera Omnia* ([Fueter1], 1941). Er schreibt auf Seite XVII:

*“[Es] ist ein typischer Zug seiner [Eulers] Forschungsmethode, sich ein riesiges Zahlenmaterial zu verschaffen, aus dem er vermöge seiner genialen Divinationsgabe die weitestgehenden Schlüsse zu ziehen vermochte. Heute verfährt man zuweilen umgekehrt, indem man große Theorien entwickelt und kaum oder erst später nach den Möglichkeiten der Realisierung fragt.”*

Nachdem diese Beschreibung vorausgeschickt worden ist, sei also mit dem Zwei-Quadrate Satz begonnen, sprich der Aussage, dass eine Primzahl  $p$  der Form  $x^2 + y^2$  eine der Form  $p = 4n + 1$  ist, aber eben auch die Umkehrung

---

vollständige archimedisch bewertete Körper) aus seiner Arbeit “Über einige Lösungen der Funktionalgleichung  $\varphi(x) \cdot \varphi(y) = \varphi(xy)$ ” ([Ostrowski], 1918) zurück, welchen man mit den Ideen von Artin (1898–1962) aus seiner Abhandlung “Über die Bewertungen algebraischer Zahlkörper” ([Artin1], 1931) oder seinem Buch “Algebraic Numbers and Algebraic Functions” ([Artin2], 1968) insbesondere Theorem 3 aus Kapitel 1 zu einem “algebraischen” Beweis des Fundamentalsatzes der Algebra überführen kann, welcher in seinen Grundzügen Euler’sch ist.

dieser Tatsache richtig ist<sup>258</sup>. Dieser Satz und sein Nachweis hat Euler einiges abverlangt. Den ersten großen Schritt zu seinem Beweis ist er dabei in der Arbeit *“De numeris, qui sunt aggregata duorum quadratorum”* ([EulerE228], 1758, ges. 1749) (E228: “Über die Zahlen, die Aggregate zweier Quadrate sind”) gegangen. Hier demonstriert er folgende auf das Ziel vorbereitende Sätze. Zunächst in § 5: Für zwei Primzahlen  $p = a^2 + b^2$  und  $q = c^2 + d^2$  gilt:

$$p \cdot q = (a^2 + b^2)(c^2 + d^2) = (ac + bd)^2 + (ad - bc)^2,$$

von welchem Satz er in § 8 (Proposition 1) eine Art Umkehrung vorstellt. Gilt  $pq = e^2 + f^2$  und ist  $p = a^2 + b^2$  eine Primzahl, so ist  $q$  zwingend die Summe zweier Quadrate. In § 14 (Proposition 2) zeigt er den verwandten Satz, dass falls  $pq = e^2 + f^2$ , aber nicht  $p = a^2 + b^2$  gilt, die Zahl  $q$  ebenfalls nicht die Summe zweier Quadrate ist. In § 19 (Proposition 4) präsentiert er dann einen zentralen Satz:

**Theorem 6** (Teiler der Summe zweier Quadrate). *Gilt für eine Primzahl  $p$ , dass  $p|(a^2 + b^2)$ , dann existiert eine Summe von zwei Quadraten  $c^2 + d^2$ , sodass  $p|(c^2 + d^2)$ .*

Dieser Satz wird dann ergänzt von Proposition 4 aus § 22, dass die Summe  $a^2 + b^2$  überhaupt nur von Primzahlen  $p$  geteilt werden kann, die selbst die Summe zweier Quadrate sind. In § 28[a]<sup>259</sup> formuliert Euler schließlich den Satz, den er zeigen möchte:

**Theorem 7** (Zwei-Quadrate-Satz). *Ist  $p$  eine Primzahl der Form  $4n + 1$ , so ist sie auch die Summe zweier Quadrate  $p = a^2 + b^2$ . Umgekehrt ist jede Primzahl der Form  $p = a^2 + b^2$  gleichzeitig eine der Form  $4n + 1$ .*

Diesen Satz vermochte Euler in [EulerE228] noch nicht zu beweisen, und weist seine Anstrengungen diesbezüglich entsprechend als “Tentamen demonstrationis” aus. In seiner Abhandlung *“Demonstratio theorematis Fermatiani omnem numerum primum formae  $4n + 1$  esse summam duorum quadratum”* ([EulerE241], 1760, ges. 1750) (E241: “Beweis des Fermat’schen Satzes, dass jede Primzahl der Form  $4n + 1$  die Summe zweier Quadrate ist”)

<sup>258</sup>Die Aussage, dass  $\left(\frac{-1}{p}\right) = (-1)^{\frac{p-1}{2}}$  mit dem Legendre-Symbol  $\left(\frac{p}{q}\right)$  ist, ist der von Euler bewiesenen gleichwertig, womit Euler demnach den ersten Ergänzungssatz zum quadratischen Reziprozitätsgesetz bewiesen hat.

<sup>259</sup>In der Originalarbeit wird irrtümlich § 28 wiederholt, weshalb hier die Notation der *Opera Omnia* Version übernommen wird.

reicht Euler den ersehnten Nachweis nach. Die Schwierigkeit besteht für Euler darin, ein Argument über die Methode des unendlichen Abstiegs zu finden, was ihm dann im letztgenannten Werk schließlich gelingt. Seine Idee sei hier in Kürze wiedergegeben. Für  $p = 4n + 1$  Euler geht von der allgemeinen Form  $a^{4n} - b^{4n}$  aus. Da  $p$  eine Primzahl ist, weiß er aus dem kleinen Satz von Fermat<sup>260</sup>, dass  $p|(a^{4n} - b^{4n})$  gilt. Wegen  $a^{4n} - b^{4n} = (a^{2n} - b^{2n})(a^{2n} + b^{2n})$  gilt aber auch  $p|(a^{2n} - b^{2n})$  oder  $p|(a^{2n} + b^{2n})$ . Euler möchte nun zeigen, dass  $p$  den zweiten Faktor teilt, wozu er nachweist, dass der erste  $p$  nicht als Teiler enthält. Euler argumentiert nun per Widerspruch und nimmt gegenteilig an, dass doch  $p|(a^{2n} - b^{2n})$  gilt. Dementsprechend müssen insbesondere die Differenzen:

$$2^{2n} - 1^{2n}, \quad 3^{2n} - 2^{2n}, \quad 4^{2n} - 3^{2n}, \quad \dots, \quad (4n)^{2n} - (4n - 1)^{2n}$$

alle durch  $p$  teilbar sein. Genauso müssen es die Differenzen dieser 1. Differenzen sein, weiter deren Differenzen, und erneut die Differenzen von letzteren usw. Euler nutzt nun aus, dass alle Differenzen der Ordnung  $2n$  einander gleich sind und kann sie auch zu  $(2n)!$  berechnen. Jedoch gilt offensichtlich nicht  $p|(2n)!$ , sodass in der Konsequenz auch nicht  $p|(a^{2n} - b^{2n})$  gelten kann, und damit das Gewünschte bewiesen ist:  $p = 4n + 1$  teilt stets die Summe zweier Quadrate, sodass verbunden mit der Eigenschaft aus Theorem (6) der Zwei-Quadrate-Satz (7) folgt.

Betrachtet man den Euler'schen Beweis<sup>261</sup>, mag man sich vielleicht vor der Euler'schen Kreativität verneigen, weiß aber indes auch den Wert der

<sup>260</sup>Wie oben in Abschnitt (3.1.5) beschrieben, hat Euler diesen Satz bereits in [EulerE54] bewiesen.

<sup>261</sup>In gleicher Manier, also über Betrachtung der Differenzen, hat Euler überdies bewiesen, dass für eine Primzahl  $p$  gilt:  $p = 8n + 1 \implies p = x^2 + 2y^2$  und  $p = 3$  oder  $p = 6n + 1 \iff p = x^2 + 3y^2$ , wobei die Darstellungen als Summen von Quadraten jeweils eindeutig sind. Den Beweis der ersten Aussage findet man in [EulerE256], die zweite wird in der Arbeit "*Supplementum quorundam theorematum arithmeti-  
corum, quae in nonnullis demonstrationibus supponuntur*" ([EulerE272], 1763, ges. 1759) (E272: "Supplement gewisser zahlentheoretischer Theoreme, welche bei einigen Beweisen vorausgesetzt werden") demonstriert. Den Nachweis, dass  $x^2 + 2y^2$  auch die Zahlen der Form  $8n + 3$  gleichermaßen wie die der Form  $8n + 1$  erfasst, konnte Euler, wie er auch in [EulerE256] einräumt, zunächst nicht beweisen. Es sollte ihm in der Arbeit "*Demonstrationes circa residua ex divisione potestatum per numeros primos resultantia*" ([EulerE449], 1774, ges. 1772) (E449: "Beweis über die Reste, welche aus der Teilung von Potenzen durch Primzahlen entstehen") gelingen. Dieses Verdienst wird oft Lagrange zugeschrieben (siehe etwa das Buch "*Elliptic Functions*" ([Chandrasekharan], 1985), wo dies auf S. 153 erwähnt wird), welcher dies aus seinen Untersuchungen in seinen Arbeiten "*Recherches d'arithmétique - Première Partie*" ([Lagrange4], 1775) ("Untersuchungen zur Zahlentheorie - Erster Teil") sowie

modernen Konzepte wie das Gauß'schen Zahlen, des Euklidischen Ringes und der Norm umso mehr zu schätzen<sup>262</sup>. Mit seinen Methoden und seiner Auffassung von Mathematik ist es für Euler meist schwerer gewesen, Beweise in der Zahlentheorie zu führen, da eine Analytisierung Euler bei dieser und ähnlichen Fragestellung meistens, wenn überhaupt, lediglich partiell gelungen ist. Als Beispiel hierfür sei die Arbeit [EulerE256] herangezogen, welche oben (Abschnitt 3.1.5) im Kontext der Induktion schon einmal genannt wurde. Diese Abhandlung hat einen eher didaktischen bzw. erläuternden Charakter und nicht zuletzt aus diesem Grunde sind die in dieser Arbeit über alte Sätze hinausgehenden Theoreme in ihrer Anzahl klein. Genauer beschränken sie sich auf den Satz, dass eine Zahl der Form  $2a^2 + b^2$  nur Primteiler derselben Form zulässt. Dies ist Beobachtung 6 in Eulers Arbeit, bewiesen wird sie dann in Theorem 9 (§ 42). Der Beweis wird mithilfe eines unendlichen Abstiegs geführt. In § 46 versucht Euler, den Beweis auf die Form  $ma^2 + b^2$  zu übertragen und gelangt zur Bedingung  $\frac{m+1}{4} \leq 1$ , was aber nur den Fall  $a^2 + b^2$  abdeckt, womit die angestrebte Verallgemeinerung misslingt. Diese Untersuchung und ohnehin die ganze Arbeit steht als pars pro toto für Eulers Forschungen zu den quadratischen Formen: Durch eine ihresgleichen suchende Beobachtungsgabe findet Euler sehr tiefe Wahrheiten in der Arithmetik, indes gelingen allgemeine Beweisversuche nicht, wodurch er gezwungen ist, jedes Problem mit einem neuen Geniestreich zu überwinden. Die nötigen Verallgemeinerungen konnten dann erst nach den entsprechenden Begriffsbildungen erfolgen<sup>263</sup>.

Einen Teilbeweis des Vier-Quadrate-Satzes, also der Aussage, dass jede natürlich Zahl die Summe vierer Quadrate ist, legt Euler in der Abhandlung *“Demonstratio theorematis Fermatiani omnem numerum sive integrum si-*

---

*Recherches d'arithmétique – Seconde Partie”* ([Lagrange5], 1777) (“Zahlentheoretische Untersuchungen – Zweiter Teil”) zu binären quadratischen Formen bewiesen hat. Lagrange und Euler haben damit gleichermaßen den zweiten Ergänzungssatz zum quadratischen Reziprozitätsgesetz entdeckt, dass  $\left(\frac{2}{p}\right) = (-1)^{\frac{p^2-1}{8}}$  mit dem Legendre-Symbol  $\left(\frac{p}{q}\right)$  gilt.

<sup>262</sup>Man bemerke etwa, dass Euler Formeln wie  $(a^2 + b^2)(c^2 + d^2) = (ac - bd)^2 + (ad + bc)^2$  ohne die Eigenschaften von Normfunktionen finden musste. Er wird in diesem Fall vermutlich über die komplexen Zahlen vorgegangen sein.

<sup>263</sup>Aus dem Gesagten erhellt sich auch, warum Euler seinen Traktat zur Zahlentheorie *“Tractatus de numerorum doctrina capita sedecim, quae supersunt”* ([EulerE792], begonnen ca. 1745) (E792: “Traktat über die Zahlentheorie in sechzehn Kapiteln”) nicht fertig gestellt hat. In selbigem findet man gar Ergänzungssätze des kubischen und biquadratischen Reziprozitätsgesetzes, welche Euler wie viele andere Beobachtungen aber zu seinen Lebzeiten nicht zu beweisen vermochte. Man konsultiere auch das Vorwort zu Band 5 der ersten Serie der *Opera Omnia* ([Fueter2], 1944).

*ve fractum esse summam quatuor pauciorumve quadratorum*” ([EulerE242], 1760, ges. 1751) (E242: “Beweis des Fermat’schen Satzes, dass jede ganze oder rationale Zahl die Summe von vier oder weniger Quadraten ist”) vor. Er beweist die Richtigkeit im Falle rationaler Zahlen, muss allerdings Lagrange den Vortritt beim Fall natürlicher Zahlen lassen<sup>264</sup>. Zentral für den Lagrange’schen Beweis in seiner Arbeit “*Démonstration d’un théorème d’arithmétique*” ([Lagrange2], 1770) (“Beweis eines Satzes in der Zahlentheorie”) war die Identität, die Euler in § 93 von [EulerE242] bewiesen hat. Modern würde man diese wohl mithilfe der Quaternionen<sup>265</sup> ableiten, Euler muss besagte Formel:

$$(a^2 + b^2 + c^2 + d^2)(p^2 + q^2 + r^2 + s^2) = x^2 + y^2 + z^2 + v^2$$

mit

$$x = ap + bq + cr + ds, \quad y = aq - bq \pm cs \mp dr, \quad z = ar \mp bs - cp \pm dq \quad \text{sowie}$$

$$v = as \pm br \mp cq - dp$$

dahingegen auf anderem, leider nicht zweifelsfrei rekonstruierbarem, Wege gefunden haben<sup>266</sup>.

Der Vier–Quadrate–Satz stellt gleichsam den Punkt dar, ab welchem Lagrange Euler in Bezug auf die Zahlentheorie überkommen hat. Noch eindrücklicher sollte dies dann schließlich bei den Numeri idonei werden, wozu auch auf das Buch “*Primes of the Form  $x^2 + ny^2$* ” ([Cox], 2013), insbesondere auf das erste Kapitel, verwiesen sei. Bei nämlichen benötigte Euler explizit ein Ergebnis von Lagrange über quadratische Formen, um auch selbst noch Fortschritte zu verzeichnen<sup>267</sup>. Die Numeri idonei, welche Euler

---

<sup>264</sup>Euler selbst reicht basierend auf der Lagrange’schen Arbeit einen Beweis für die ganzen Zahlen in der Abhandlung “*Novae demonstrationes circa resolutionem numerorum in quadrata*” ([EulerE445], 1773, ges. 1772) (E445: “Neue Beweise zur Auflösbarkeit von Zahlen in Quadrate”) nach.

<sup>265</sup>Die Quaternionen werden oft Hamilton zugeschrieben, der sie in 1843 entdeckt hat. Jedoch finden sich alle Eigenschaften bereits bei Rodrigues (1795–1851). Man konsultiere dazu die Arbeit “*Hamilton, Rodrigues and the quaternion scandal*” ([Altmann], 1989).

<sup>266</sup>Eine mögliche Erklärung findet sich in der Arbeit “*Leonhard Eulers handschriftlicher Nachlass zur Zahlentheorie*” aus dem Buch (“*Leonhard Euler 1707–1783 – Beiträge zu Leben und Werk*”) ([Burckhardt2], 1983) angedeutet.

<sup>267</sup>Lagrange hatte seinen “Vorteil” aus seiner Präferenz des algebraischen Zugangs gegenüber demjenigen über die Analysis, welchen Euler bevorzugte.

$$\begin{array}{l}
\text{numerator pluribus modis in quatuor quadrata resolui} \\
\text{potest; si esim ponatur } (aa + bb + cc + dd) \\
(pp + qq + rr + ss) = xx + yy + zz + vv, \text{ erit} \\
\left. \begin{array}{l}
x = ap + bq + cr + ds \\
y = aq - bp + cs + dr \\
z = ar + bs - cp + dq \\
v = as + br + cq - dp
\end{array} \right\} \begin{array}{l}
\text{qui quatuor numeri, si singuli} \\
\text{diuidantur per communem} \\
\text{denominatorem } pp + qq + rr \\
+ ss, \text{ dabunt radices quatuor} \\
\text{quadratorum, quorum summa} \\
\text{aequatur quoto proposito.}
\end{array}
\end{array}$$

Abbildung 56: Eulers berühmte Identität für das Produkt von zwei Summanden aus je vier Quadraten aus seiner Arbeit [EulerE242].

insbesondere in den drei Arbeiten “*De insigni promotione scientiae numerorum*” ([EulerE598], 1785, ges. 1775) (E598: “Über einen außergewöhnlichen Fortschritt der Zahlentheorie”), “*Novae demonstrationes circa divisores numerorum formae  $xx + nyy$* ” ([EulerE610], 1787, ges. 1775) (E610: “Neue Beweise über die Teiler der Form  $xx + nyy$ ”), “*De formulis speciei  $mxx + nyy$  ad numeros primos explorandos idoneis earumque mirabilibus proprietatibus*” ([EulerE708], 1801, ges. 1778) (E708: “Über die Formeln der Gattung  $mxx + nyy$ , welche zur Ermittlung von Primzahlen geeignet sind, und deren wundersame Eigenschaften”) untersucht. Das Prädikat “ideonei” (was sich mit geeignet oder tauglich übersetzen lässt) rührt aus ihrer Verwendbarkeit zum Testen auf Primalität her<sup>268</sup>. Letzteres musste Euler fast zu den Numeri ideonei führen. Zum einen war, wie gesehen, Euler für die Summe  $p = x^2 + y^2$  das Ergebnis schon lange bekannt, dass man  $p$  als Primzahl nachgewiesen hat, wenn es keine weitere Darstellung  $a^2 + b^2$  gibt, sodass  $x^2 + y^2 = a^2 + b^2$ , aber die alle natürlichen Zahlen  $x, y, a, b$  voneinander verschieden sind. Die Euler’sche Frage, für welche  $N$  in  $x^2 + Ny^2$  dieses Kriterium analog Geltung hat, ist demnach nur konsequent. Explizit formuliert er die Frage dabei in § 6 von [EulerE708], wo er schreibt:

“Weil also diese Proposition höchst gewiss ist, dass alle Zahlen, die auf

<sup>268</sup>Euler hat der Erstellung von Primzahlentabellen gar einzelne Arbeiten gewidmet. So ist etwa seine Arbeit “*Utrum hic numerus 1000009 sit primus necne inquiritur*” ([EulerE699], 1797, ges. 1778) (E699: “Ob die Zahl 1000009 eine Primzahl ist oder nicht, wird untersucht”) allein der Frage verschrieben, ob 1000009 eine Primzahl ist oder nicht. Dies kann Euler vermöge der Darstellung  $1000009 = 1000^2 + 3^3 = 972^2 + 235^2$  verneinen.

Moyennant cette règle j'ai été en état de trouver avec assez de facilité toutes les valeurs qu'on peut donner à la lettre  $n$ , pour que tout nombre contenu d'une seule façon dans la forme  $nxx + yy$  puisse être censé premier. Voici ces valeurs :

1	-	-	16	-	-	48	-	-	120	-	-	312
2	-	-	18	-	-	57	-	-	130	-	-	330
3	-	-	21	-	-	58	-	-	133	-	-	345
4	-	-	22	-	-	60	-	-	165	-	-	357
5	-	-	24	-	-	70	-	-	168	-	-	385
6	-	-	25	-	-	72	-	-	177	-	-	408
7	-	-	28	-	-	78	-	-	190	-	-	462
8	-	-	30	-	-	85	-	-	210	-	-	520
9	-	-	33	-	-	88	-	-	232	-	-	760
10	-	-	37	-	-	93	-	-	240	-	-	840
12	-	-	40	-	-	102	-	-	253	-	-	1320
13	-	-	42	-	-	105	-	-	273	-	-	1365
15	-	-	44	-	-	112	-	-	280	-	-	1848

Ces nombres, qui, loin d'être fermés au hasard, ont une loi de progression, qui est assez évidente lorsqu'on parcourt toutes les exclusions successives par lesquelles il faut passer pour trouver les valeurs convenables,

**Abbildung 57:** Euler listet seine 65 “Numeri idonei” in der Arbeit [EulerE498] auf.

*mehr als eine einzige Weise in derselben Formel  $mxx + nyy$  enthalten sind, nicht prim sondern zusammengesetzt sind, und daher eine Primzahl nur auf eine einzige Weise in einer solchen Form enthalten sein kann, wollen wir die Umkehrung dieser Proposition betrachten, welche man wie folgt formulieren kann: Alle zusammengesetzten Zahlen, die in der Form  $mxx + nyy$  enthalten sind, sind auch auf mehr als auf eine Weise in derselben Form enthalten, oder alle auf nur eine einzige Weise in dieser Form enthaltenen Zahlen sind gewiss prim.”*

Leicht sieht man ein, dass Eulers Proposition aus Sicht der modernen Zahlentheorie zu der Frage, welche quadratisch-imaginären Zahlkörper lediglich ambige Klassen besitzen, äquivalent ist. Gauß hat bekanntermaßen hingegen in seinen *Disquisitiones* ([Gauß2], 1801) einen vollkommen anderen Zugang zu diesen Zahlen gefunden und verfolgt, nämlich den über das Geschlecht<sup>269</sup>. Man weiß heute, dass die Anzahl der Klassen gleich der Anzahl der Geschlechter im Ring  $r(m)$  ist, welcher von  $(1, \sqrt{-m})$  erzeugt wird, wes-

<sup>269</sup>Euler spricht in seinen oben erwähnten Arbeiten zwar ebenfalls von “Genera”, was sich als Geschlechter übersetzen ließe, bezeichnet dabei aber nicht das, was Gauß in seinen *Disquisitiones* darunter verstanden hat und seither darunter verstanden wird.

wegen man auch – wie Gauß es getan hat – untersuchen kann, in welchen dieser Ringe jedes Geschlecht genau eine Klasse enthält<sup>270</sup>. Dies ist ein rein algebraischer und überdies nicht anwendungsorientierter Zugang, welcher es Gauß ermöglichte, die Natur der Numeri idonei tiefer zu verstehen als Euler. Rückblickend mag man konstatieren, dass die Vermeidung des Komplexen und fehlende Begriffe wie den der Diskriminante einer quadratischen Form Euler seine Numeri idonei nicht in einem für ihn über einen gewissen Punkt hinaus erhellendem Licht erscheinen ließen. Dennoch hat er durch explizites Probieren<sup>271</sup>, wie nach ihm Gauß, auf diesem Wege 65 entsprechende Zahlen ausfindig gemacht, von denen 1848 die größte ist<sup>272</sup>. Die vollständige Liste findet man bereits in Eulers Brief *“Extrait d’une lettre de M. Euler à M. Beguelin en Mai 1778”* ([EulerE498], 1779, ges. 1778) (E498: “Auszug eines Briefs an Hr. Beguelin im Mai 1778”). Euler schreibt bereits hier:

*“Zu diesem Zwecke habe ich folgende Regel gefunden und bewiesen: Wenn alle in der Form  $n + yy$  enthaltenen Zahlen, die zugleich kleiner sind als  $4n$ , (sofern man freilich für  $n$  zu  $y$  prime Zahlen einsetzt), entweder Primzahlen  $p$  oder das Doppelte von Primzahlen  $2p$  oder die Quadrate von Primzahlen  $pp$  oder schließlich irgendeine Potenz von  $2$  sind, dann wird der Wert von  $n$ , der diesen Bedingungen Genüge leistet, als geeignet für die Untersuchung einer solchen beliebigen vorgelegten Zahl, zugelassen werden können. [...] Vermöge dieser Regel war ich in der Lage, mit hinreichender Leichtigkeit alle Werte zu finden, welche man dem Buchstaben  $n$  zuteilen kann, sodass jede in auf nur eine einzige Weise in der Form  $nxx + yy$  enthaltene Zahl als Primzahl angesehen werden kann.”*

Nach diesen Ausführungen zu zahlentheoretischen Beiträgen Eulers, soll der Übergang zur Differentialgeometrie statt haben, in welchem Gebiet Euler

<sup>270</sup>Gauß war sich der Äquivalenz seiner Fragestellung mit der von Eulers bewusst; er zitiert Eulers Beitrag entsprechend. Gauß formuliert diese Äquivalenz zwar ebenfalls nicht explizit, aber sie ist implizit in seinen vorgestellten Faktorisierungsmethoden zu finden. Man betrachte insbesondere §§ 329–334 seiner *Disquisitiones* [Gauß2].

<sup>271</sup>Das Probieren basiert dabei auf einem Verfahren, das Euler in [EulerE708] genauer vorstellt.

<sup>272</sup>Euler hat, wie er in seiner Arbeit *“Illustratio paradoxo circa progressionem numerorum idoneorum sive congruorum”* ([EulerE725], 1806, ges. 1778) (E725: “Beleuchtung des Paradoxons über die Progression der geeigneten oder kongruenten Zahlen”) schreibt, seine Rechnungen bis hin zu 10000 ausgedehnt und keine weitere Zahl gefunden. Die scheinbare Endlichkeit der Menge der Numeri idonei bezeichnet er gar als paradox. Die Endlichkeit wurde erst 1973 in der Arbeit *“Exponents of the class groups of complex quadratic fields”* ([Weinberger], 1973) bewiesen. Ob die von Euler und Gauß gefundenen 65 Zahlen tatsächlich die einzigen sind, ist derzeit eine offene Frage.

wieder – und dies ist noch höherem Maße – von seinem Nachfolger Gauß überkommen wurde.

**Differentialgeometrie** Der zweite in diesem Abschnitt zu besprechende Zweig der Mathematik ist die Differentialgeometrie von Flächen, in welchem Euler höchst bemerkenswerte Ergebnisse zutage gefördert hat. Dennoch hat die Geschichte gezeigt, dass seine Nachfolger – allen voran Gauß und Riemann – seiner Ergebnisse nicht unbedingt bedurft haben und zugleich sehr weit über sie hinausgegangen sind, welche Aussage auch in der Arbeit “*Euler’s Contribution to Differential Geometry and its Reception*” ([Reich], 2007) weiter elaboriert wird.

Ein Großteil von Eulers Beiträgen zu diesem Themenfeld haben ihren Ursprung im Problem der Erstellung von Landkarten. Neben den beiden explizit der Kartenerstellung gewidmeten Arbeiten “*De projectione geographica superficiei sphaericae*” ([EulerE491], 1778, ges. 1775), (E491: “Über die stereographische Projektion auf die Kugeloberfläche”) und der unmittelbar folgenden “*De projectione geographica Deslisiana in mappa generali imperii russici usitata*” ([EulerE492], 1778, ges. 1775), (E492: “Über die stereographische Projektion, welche Deslisle für die Karte des russischen Reichs verwendet hat”) sei als stellvertretendes Exempel die Arbeit “*De solidis quorum superficiem in planum explicare licet*” ([EulerE419], 1772, ges. 1770), (E419: “Über Festkörper, deren Oberfläche sich in die Ebene ausbreiten lassen”) genannt. Letztgenannte handelt aus heutiger Sicht über die Art von Flächen, die als abwickelbar bezeichnet werden. Geleitet hat Euler dabei vermutlich ursprünglich die Frage nach der Abwickelbarkeit der Kugeloberfläche auf die Ebene, welche natürlich für die Kartenprojektion vonnöten ist. Einen ausführlichen Beweis der Unmöglichkeit einer längen- und winkeltreuen Abbildung von der Sphäre auf die Ebene hat Euler in der Arbeit “*De repraesentatione superficiei sphaericae super plano*” ([EulerE490], 1778, ges. 1775), (E490: “Über die Darstellung der Kugeloberfläche in der Ebene”) (§§ 1-8) gegeben<sup>273</sup>. Eulers Beweis benutzt nur das Linienelement und reduziert

---

<sup>273</sup>Dieser Beweis wird von Speiser im Vorwort zu Band 28 von Serie 1 der *Opera Omnia* ([Speiser4], 1955) ebenfalls nachvollzogen. Die Kugelgeometrie hat Euler auch unabhängig von der Kartenerstellung um ihrer selbst willen beschäftigt. Die allgemeinen Formeln, welche Euler in der Arbeit “*Trigonometria sphaerica universa, ex primis principiis breviter et dilucide derivata*” ([EulerE514], 1782, ges. 1775), (E514: “Die ganze Kugeltrigonometrie, aus ersten Grundlagen zügig und klar hergeleitet”) vorstellt, zeugen davon. Auch die Arbeit “*Variae speculationes super area triangulorum sphaericorum*” ([EulerE698], 1797, ges. 1775), (E698: “Verschiedene Betrachtungen über die Fläche von Kugeldreiecken”)

sich auf die Gleichung

$$dx^2 + dy^2 = du^2 + \cos^2 u dv^2$$

mit den rechtwinkligen Koordinaten  $x, y$  sowie den Längen- und Breitengraden  $u, v$  auf der Kugel. Für eine kongruente Abbildung von der Kugel auf die Ebene muss die obige Gleichung die Identität werden. Setzt man

$$dx = pdu + qdv \quad \text{und} \quad dy = rdu + sdv,$$

erzwingt dies die Gleichungen:

$$p^2 + r^2 = 1, \quad pq + rs = 0, \quad q^2 + s^2 = \cos^2 u,$$

welche Euler mit

$$p = \cos \varphi, \quad q = -\sin \varphi \cos u, \quad r = \sin \varphi, \quad s = \cos \varphi \cos u$$

löst. Damit gelangt Euler zu den Darstellungen:

$$dx = \cos \varphi du - \sin \varphi \cos u dv \quad \text{und} \quad dy = \sin \varphi du + \cos \varphi \cos u dv.$$

Die notwendige Integrierbarkeit dieser Differentialformen induziert dieses System von Gleichungen:

$$\begin{aligned} -\sin \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial v} &= -\cos u \cos \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial u} + \sin \varphi \sin u, \\ \cos \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial v} &= -\cos u \sin \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial u} - \cos \varphi \sin u, \end{aligned}$$

welche auf die zwei sich widersprechenden Gleichungen

$$-\cos u \frac{\partial \varphi}{\partial u} = 0 \quad \text{und} \quad \frac{\partial \varphi}{\partial v} = -\sin u$$

geführt werden. Die zuerst erwähnte Arbeit, eigens über abwickelbare Flächen, [EulerE419] erstreckt sich insofern weiter, da in ihr allgemeine Gleichungen für abwickelbare Flächen abgeleitet werden. Das Problem formuliert Euler dabei in § 1:

*“Eine allgemeine Gleichung für alle Festkörper zu finden, deren Oberfläche sich in die Ebene ausbreiten lassen.”*

---

kann in diesem Zusammenhang genannt werden.

Die analytische Lösung<sup>274</sup> gibt er schließlich in § 7 als folgenden Satz von Gleichungen:

“Nach Vorlage der zwei Variablen  $t$  und  $u$  sechs so beschaffene Funktionen  $l, m, n$  und  $\lambda, \mu, \nu$  derer zu finden, dass den folgenden sechs Bedingungen Genüge geleistet wird:

$$\text{I. } \frac{\partial l}{\partial u} = \frac{\partial \lambda}{\partial t}, \quad \text{II. } \frac{\partial m}{\partial \mu} = \frac{\partial \lambda}{\partial t}, \quad \text{III. } \frac{\partial n}{\partial \mu} = \frac{\nu \lambda}{\partial t},$$

$$\text{IV. } l^2 + m^2 + n^2 = 1, \quad \text{V. } \lambda^2 + \mu^2 + \nu^2 = 1,$$

$$\text{VI. } l\lambda + m\mu + n\nu = 0.”$$

Ein Anwendungsbeispiel findet man im letzten Paragraphen der Abhandlung. Euler behauptet von der Fläche definiert über

$$4y^3x + 72y^2xxz - yy - 18yxz + 27xxzz + 2z = 0,$$

eine abwickelbare Fläche zu sein. Dies ist wegen eines Rechenfehlers nicht der Fall, das Euler’sche Beispiel führt indes zur abwickelbaren Fläche

$$-4xy^3 - y^2 + 18xyz + 27x^2z^2 + 4z = 0,$$

wie Speiser in der *Opera Omnia* Version der Arbeit auch anmerkt.

Obwohl Euler in dieser Arbeit [EulerE419] sogar die Objekte benutzt, welche man heute Gauß’sche Koordinaten in der Flächentheorie nennt, ist der Euler’sche Beitrag von Gauß in seiner berühmten Arbeit “*Disquisitiones generales circa superficies curvas*” ([Gauß4], 1828, ges. 1827) (“Allgemeine Untersuchungen über gekrümmte Flächen”) nicht erwähnt. Unabhängig davon geht Gauß in dieser für die gesamte Differentialgeometrie wegweisenden Arbeit dermaßen über Eulers Erkenntnisse hinaus, dass letztere auch von anderen Mathematikern nach Gauß kaum noch aufgegriffen worden sind. Der wesentliche Unterschied zwischen Gauß und Euler betrifft das Anwendungsgebiet: Sind die Flächen, die Euler untersucht, stets Grenzflächen von Festkörpern<sup>275</sup>, sind die Flächen um ihrer selbst willen bei Gauß Gegen-

<sup>274</sup>Euler gibt weiterhin eine geometrische Lösung (§§ 8–37) und eine aus der Projektionstheorie (§§ 38–54) an.

<sup>275</sup>Gauß selbst resümiert die Situation in § 12 von [Gauß4] – unmittelbar nach Formulierung des Theorema egregium – dahingehend, dass der Spezialfall der abwickelbaren Flächen der ist, auf den die Mathematiker bis dahin ihre Untersuchungen beschränkt

stand der Untersuchung<sup>276</sup>, wodurch er zu einer zentralen Invariante der Flächentheorie gelangt ist: Der Gauß'schen Krümmung. Euler konnte durch seine Gedankengänge hingegen nur extrinsische Eigenschaften von Flächen behandeln. Den größten Grad an Allgemeinheit erreicht er dabei in seiner Arbeit *“Recherches sur la courbure des surfaces”* ([EulerE333], 1767, ges. 1763), (E333: “Untersuchungen über die Krümmung von Flächen”). Das Problem formuliert er in § 1:

*“Eine Fläche, deren Natur bekannt ist, sei von einer beliebigen Ebene geschnitten worden, die Krümmung des Schnittes zu ermitteln, welcher daraus entstanden ist.”*

Die zentrale Formel teilt Euler im letzten Paragraphen mit, sie lautet:

$$r = \frac{2fg}{f + g - (f - g) \cos(2\varphi)}$$

wobei  $r$  der Krümmungsradius des Normalschnittes ist, entsprechend dem Winkel  $\varphi$  durchgeführt,  $f$  und  $g$  sind die Krümmungsradien der Hauptschnitte. Euler beschreibt seine Formel selbst wie folgt:

*“So reduziert sich die Beurteilung über die Krümmung von Flächen, wie kompliziert sie auch immer anfangs erschienen mögen, für jedes Element auf die Kenntnis von zwei Krümmungsradien, von welchen der eine der größte und der andere der kleinste in diesem Element ist; diese zwei Dinge bestimmen gänzlich die Natur der Krümmung, indem sie uns die Krümmung von allen möglichen Schnitten enthüllt, welche senkrecht zum vorgelegten Element sind.”*

Vergleicht man dies mit dem ebenfalls Euler zugeschriebenen Satz:

$$k_n = k_1 \cos^2 \alpha + k_2 \sin^2 \alpha \quad (147)$$

mit der Normalkrümmung  $k_n$  und den Hauptkrümmungen  $k_1, k_2$  sowie dem Winkel  $\alpha$  zwischen gegebener Tangentialrichtung und zu  $k_1$  gehöriger Tangentialrichtung, erkennt man, dass Euler auch in diesem Fall die Bestandteile des allgemeineren Konzepts der Gaußkrümmung

---

haben.

<sup>276</sup>Natürlich hatten die Gauß'schen Untersuchungen auch in praktischen Fragestellungen des Autors ihren Ursprung, wie Klein in seinem Buch [Klein] auch entsprechend herausarbeitet, jedoch hat Gauß sich in dieser Arbeit von selbigen völlig gelöst gehabt.

$$K_G := k_1 \cdot k_2 \quad (148)$$

zwar zutage zu fördern vermochte, sie aber nicht wie Gauß verwoben. In § 8 (IV.) seiner Arbeit [Gauß4] fasst Gauß das Gesagte, beziehend auf Gleichung (147) folgendermaßen zusammen:

*“Diese Schlussfolgerungen beinhalten nahezu all jenes, was der illustre Herr Euler über die Krümmung gekrümmter Flächen als erster gelehrt hat.”*

Ebenfalls in § 8 (V.) gibt er die Definition (148) und reicht folgende Erklärung in Form eines Theorems nach:

*“Das Krümmungsmaß in jedwedem Punkt einer Fläche ist gleich dem Bruch, dessen Zähler die Einheit ist, der Nenner hingegen das Produkt der zwei extremalen Krümmungsradien in den Schnitten durch eine orthogonale Ebene ist.”*

Zu dem heute als “Theorema egregium” bezeichneten Satz gelangt er nach langwieriger Rechnung in § 12 und formuliert es in Worten wie folgt:

*“Wenn eine gekrümmte Fläche in eine beliebige andere Fläche ausgebreitet wird, bleibt das Krümmungsmaß in den einzelnen Punkten unverändert.”*

## 8 Herleitungen aus Eulers Formeln und Ideen

Noch viele Schätze sind in  
Eulers Werk zu heben, und wer  
Prioritäten jagen will, findet  
kein dankbareres Gefilde.

---

Andreas Speiser

Dieser den Schlusspunkt der vorliegenden Arbeit bildende Abschnitt ist der Anwendung der vorgetragenen Euler'schen Ideen gewidmet. Vorgestellt werden Korollare aus den Hauptergebnissen Eulers (Abschnitt 8.1). Desweiteren soll, indem aus Eulers Gedanken bekanntere Formeln von Ramanujan abgeleitet werden, eine Verbindung zwischen diesen beiden Mathematikern hergestellt werden (Abschnitt 8.2).

### 8.1 Unmittelbare Korollare aus den vorgestellten Euler'schen Formeln

It appears to me that if one  
wants to make progress in  
mathematics, one should study  
the masters and not the pupils.

---

Niels Henrik Abel

Euler hat im Laufe seiner Karriere dermaßen zahlreiche Entdeckungen gemacht, dass es für ihn unmöglich gewesen ist, alle unmittelbaren Korollare aus selbigen ebenfalls mitzuteilen. Dies soll hier für ausgewählte im oberen Teil präsentierte Gegenstände nachgeholt werden. So wird aus seinem Ergebnis zur Lösung der einfachen Differenzgleichung (Abschnitt 4.3.1) ein weiterer Nachweis der Formel für die Summe der reziproken Potenzsummen abgeleitet (Abschnitt 8.1.1), weiter wird seine Theorie zur Auflösung von homogenen Differenzgleichungen mit linearen Koeffizienten (siehe Abschnitt 5.2.3) auf andere bekannte Orthogonalpolynome angewendet werden (8.1.2), bevor endlich sehr bekannte sowie weniger bekannte Eigenschaften der Legendre-Polynome (Abschnitt 8.1.3) aus den Euler'schen Formeln bewiesen werden.

### 8.1.1 Herleitung Formel für die Potenzsummen der Reziproken

Once a day [...] call yourselves to an account what new ideas, what new proposition or truth you have gained, what further confirmation of known truths, and what advances you have made in any part of knowledge.

---

Isaac Watts

Es ist förderlich, mit einem Beweis der Formeln für die Summen über die Potenzen der Reziproken der natürlichen Zahlen zu beginnen. Grundlage bildet die Euler'sche Formel zur Auflösung der einfachen Differenzgleichung (siehe Abschnitt 4.3.1)

$$f(x+1) - f(x) = g(x).$$

Eulers Lösung lautet in korrigierter Fassung

$$f(x) = \int g(x)dx - \frac{1}{2}g(x) + \sum_{k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} e^{2k\pi ix} \int e^{-2k\pi ix} g(x)dx, \quad (149)$$

mithilfe welcher die Summen

$$\zeta(2n) := \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{2n}} \quad (150)$$

berechnen werden sollen<sup>277</sup>, was Euler vielerorts geleistet hat, insbesondere in [EulerE130]. Vermöge der mit elementaren Mitteln nachweisbaren Formel

$$e^{ax} \int e^{-ax} x^n dx = -\frac{1}{a^{n+1}} \sum_{k=0}^n \frac{n!}{k!} a^k x^k$$

vereinfacht sich (149) für die Wahl  $g(x) = x^n$  zu

$$f(x) = \frac{x^{n+1}}{n+1} - \frac{x^n}{2} - \sum_{k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} \frac{1}{(2k\pi i)^{n+1}} \cdot \sum_{j=0}^n \frac{n!}{j!} (2k\pi i)^j x^j + h(x), \quad (151)$$

---

<sup>277</sup>Dies wurde auch in der Arbeit "On Euler's Solution of the Simple Difference Equation" ([Aycock8], 2023) aufgezeigt.

wobei  $h$  die Gleichung  $h(x+1) = h(x)$  erfüllt. Andererseits wird dieselbe Differenzgleichung gleichfalls von

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{k=1}^{x-1} k^n = \sum_{k=1}^x k^n - x^n = \frac{x^{n+1}}{n+1} + \frac{x^n}{2} + \frac{1}{n+1} \sum_{j=2}^n \binom{n+1}{j} B_j x^{n+1-j} - x^n \\ &= \frac{x^{n+1}}{n+1} - \frac{x^n}{2} + \frac{1}{n+1} \sum_{j=2}^n \binom{n+1}{j} B_j x^{n+1-j} \end{aligned} \quad (152)$$

erfüllt, was die Faulhaber'sche Formel für die Potenzsummen darstellt. Ignoriert man nun die periodische Funktion  $h$  in (151), gelangt man nach einer kurzen Rechnung zu:

$$f(x) = \frac{x^{n+1}}{n+1} - \frac{x^n}{2} - \sum_{j=0}^n \frac{n!}{j!} \sum_{k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} (2k\pi i)^{j-(n+1)} x^j. \quad (153)$$

Da sich diese Formel und (152) lediglich um eine periodische Funktion unterscheiden, ist ein Koeffizientenvergleich der Potenzen von  $x$  möglich. Mit

$$B(n, j) := \frac{1}{n+1} \binom{n+1}{j} B_j \quad \text{für } j \geq 2, \quad (154)$$

wobei alle anderen Werte von  $j$  den Ausdruck verschwinden lassen, sowie

$$A(n, j) := -\frac{n!}{j!} \sum_{k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} (2k\pi i)^{j-(n+1)} \quad (155)$$

führt dieser Koeffizientenvergleich zu

$$A(n, n+1-j) = B(n, j).$$

Mit den jeweiligen Definitionen wird dies zu

$$-\frac{n!}{(n+1-j)!} \sum_{k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} (2k\pi i)^{-j} = \frac{1}{n+1} \binom{n+1}{j} B_j.$$

Umstellen nach der Summe gibt

$$\sum_{k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} (2k\pi i)^{-j} = -\frac{(n+1-j)!}{n!} \cdot \frac{1}{n+1} \cdot \frac{(n+1)!}{j!(n+1-j)!} B_j = -\frac{B_j}{j!}$$

oder auch

$$\sum_{k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} k^{-j} = -(2\pi i)^j \frac{B_j}{j!}.$$

Weil nun die ungeraden Potenzen von  $j$  jeweils zu sich aufhebenden Termen führen, findet sich

$$\zeta(2j) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{2j}} = \frac{(-1)^{j-1} (2\pi)^{2j} B_{2j}}{2(2j)!}, \quad (156)$$

was den Beweis abschließt.

### 8.1.2 Explizite Formeln aus Eulers Theorie zu Differenzgleichungen

Knowing is not enough. We must apply. Willing is not enough. We must do.

---

Bruce Lee

Hier werden weitere konkrete Applikationen von Eulers Theorie zu Differenzgleichungen vorgestellt. Den Anfang bildet eine von Euler angegebene Gleichung, welche er selbst auf anderem als dem vorzustellendem Wege aufgelöst hat. Gefolgt wird dies von der Ableitung von alternativen Darstellungen für spezielle Orthogonalpolynome und Funktionen.

**Eine Anwendung auf eine Formel von Euler** In seiner Abhandlung *“Solutio quaestionis curiosae ex doctrina combinationum”* ([EulerE738], 1811, ges. 1779) (E738: “Die Lösung einer interessanten Frage aus der Kombinatorik”) gelangt Euler in der Diskussion eines Problems aus der Wahrscheinlichkeitsrechnung – genauer die Anzahl der Fehlstände einer Menge von Zahlen – zu einer Funktion, welche folgende Differenzgleichung erfüllt (siehe § VII der erwähnten Arbeit):

$$\Pi(n) = (n - 1) [\Pi(n - 1) + \Pi(n - 2)]. \quad (157)$$

Selbige ist eine homogene Differenzgleichung mit linearen Koeffizienten, welche sich demnach mit der in Abschnitt (5.2.3) vorgestellten Methode auflösen lässt. Gemäß selbiger nehme man an, dass eine Lösung zu selbiger in der Form

$$\Pi(n) = \int_a^b t^n p(t) dt$$

mit einer unbekanntem Funktion  $p(t)$  gegeben ist. Man hat die Hilfsgleichung

$$\int t^n p(t) dt = (n-1) \int t^{n-1} p(t) dt + (n-1) \int t^{n-2} p(t) + t^n q(t)$$

mit einer weiteren unbekanntem Funktion  $q(t)$  zu betrachten, welche differenziert gibt:

$$t^{n-2} p(t) = (n-1)t^{n-1} p(t) + (n-1)t^{n-2} p(t) + nt^{n-1} q(t) + t^n q'(t).$$

Man teile diese durch  $t^n$ :

$$t^2 p(t) = (n-1)t^1 p(t) + (n-1)p(t) + ntq(t) + t^2 q'(t).$$

Aus dem Koeffizientenvergleich leitet man folgendes System von gekoppelten Differentialgleichungen ab:

$$\text{Aus } n^0 : t^2 p(t) = -tp(t) - p(t) + t^2 q'(t) \quad \text{und aus } n^1 : 0 = tp(t) + p(t) + tq(t).$$

Dieses System wird gelöst von:

$$p(t) = C \cdot e^{-t} \quad \text{und} \quad q(t) = C \cdot e^{-t} \frac{t+1}{t}$$

mit  $C \neq 0$ , womit

$$t^n \cdot q(t) = C \cdot t^{n-1} e^{-t} \cdot (t+1) = 0$$

zur Auffindung der Grenzen zu lösen ist. Man findet

$$1) \quad t = 0, \quad 2) \quad t = -1 \quad \text{und} \quad t = \infty.$$

Dementsprechend kommen als mögliche Lösungen von (157) die folgenden in Frage:

$$1.) \quad f_1(n) = C \int_{-1}^0 t^n e^{-t} dt, \quad 2.) \quad f_2(n) = C \int_{-1}^{\infty} t^n e^{-t} dt$$

und

$$3.) f_3(n) = C \int_0^{\infty} t^n e^{-t} dt.$$

Nun bleibt an dieser Stelle nichts anderes übrig, als die Lösungen nacheinander auf ihre Verträglichkeit mit der Problemstellung hin zu prüfen. Hierzu benötigt man die Anfangsbedingungen  $\Pi(1) = 0$  und  $\Pi(2) = 1$ , welche Euler in seiner Arbeit [EulerE738] ebenfalls angibt.  $f_3$  kann also nicht als Lösung in Betracht kommen, da  $f_3(1) = C \cdot 1$  und somit müsste  $C = 0$  sein. Nimmt man nun  $f_1$ , ist freilich zunächst

$$f_1(1) = C \int_{-1}^0 t^1 e^{-t} dt = C \cdot (-1).$$

Allerdings müsste hier wieder  $C = 0$  sein, um die Anfangsbedingung  $f_1(1) = 0$  zu gewährleisten, sodass diese Lösung ebenfalls nicht in Frage kommt.

Probiert man nun  $f_2(n)$ , führt dies zu

$$f_2(1) = C \int_{-1}^{\infty} t^1 e^{-t} dt = C \cdot 0,$$

sodass die erste Bedingung automatisch erfüllt ist. Unglücklicherweise ist die Konstante  $C$  hieraus nicht zu bestimmen, weshalb man sich der zweiten Gleichung bediene:

$$f_2(2) = C \int_{-1}^{\infty} t^2 e^{-t} dt = C \cdot e.$$

Wegen  $f_2(2) = 1$  muss  $C = \frac{1}{e}$  sein, was zu nachstehendem Ausdruck für (157) führt:

$$\Pi(n) = f_2(n) = \frac{1}{e} \cdot \int_{-1}^{\infty} t^n e^{-t} dt. \quad (158)$$

Diese Formel scheint in der Tat richtig zu sein, denn man findet durch direktes Rechnen:

$$f_2(3) = \frac{2e}{e} = 2, \quad f_2(3) = \frac{9e}{e} = 9, \quad f_2(5) = \frac{44e}{e} = 44, \quad f_2(6) = \frac{265e}{e} = 265,$$

NOMBRE DES CARTES										
	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X
a	1	1	2	6	24	120	720	5040	40320	362880
b	-	0	1	4	18	96	600	4320	35280	322560
c	-	-	1	3	14	78	504	3720	30960	387280
d	-	-	-	2	11	64	426	3216	27240	256320
e	-	-	-	-	9	53	362	2790	24024	229080
f	-	-	-	-	-	44	309	2428	21234	205056
g	-	-	-	-	-	-	265	2119	18806	183822
h	-	-	-	-	-	-	-	1854	16687	165016
i	-	-	-	-	-	-	-	-	14833	148329
k	-	-	-	-	-	-	-	-	-	133496

Abbildung 58: Eulers Tabelle aus [EulerE201] zu den Fehlständen beim Spiel “Rencontre”.

was gerade die von Euler in [EulerE738] mitgeteilten Werte sind.

In seiner Abhandlung “*Calcul de la probabilité dans le jeu de rencontre*” ([EulerE201], 1753) (E201: “Die Wahrscheinlichkeitsrechnung im Spiel Rencontre”) ist Euler beim Betrachten des Kartenspiels “Rencontre” zum selben Problem der Fehlstände gelangt. In der späteren Arbeit [EulerE738] hat er diese Verbindung allerdings nicht erwähnt. Unabhängig davon gelangt er in § XLIV des zuerst genannten Papiers zur expliziten Formel:

$$\Pi(n) = n! \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{1}{k!}. \quad (159)$$

Die Gleichheit dieser Formel mit (158) lässt sich wie folgt nachweisen. Zunächst bemerke man die für  $k > 0$  gültige Formel:

$$\int_{-1}^{\infty} e^{-kt} dt = \left[ -\frac{e^{-kt}}{k} \right]_{-1}^{\infty} = \frac{e^k}{k}.$$

$n$ -faches Differenzieren gibt für die linke Seite

$$\frac{d^n}{dk^n} \int_{-1}^{\infty} e^{-kt} dt$$

$$= \int_{-1}^{\infty} \frac{d^n}{dk^n} e^{-kt} dt = \int_{-1}^{\infty} (-t)^n e^{-kt} dt$$

und für die rechte Seite findet man unter Verwendung der Leibniz-Regel zur Ableitung von Produkten

$$\begin{aligned} \frac{d^n}{dk^n} e^{-k} \cdot (k^{-1}) &= \sum_{l=0}^n \binom{n}{l} \frac{d^l}{dk^l} e^k \cdot \frac{d^{n-l}}{dk^{n-l}} (k^{-1}) \\ &= \sum_{l=0}^n \binom{n}{l} e^k \cdot (-1)^{n-l} (n-l)! k^{-(n+l+1)}. \end{aligned}$$

Demnach zusammengefasst:

$$\int_{-1}^{\infty} (-t)^n e^{-kt} dt = \sum_{l=0}^n \binom{n}{l} e^k \cdot (-1)^{n-l} (n-l)! k^{-(n+l+1)}.$$

Somit hat man für  $k = 1$  und nach Division beider Seiten durch  $(-1)^n$

$$\int_{-1}^{\infty} t^n e^{-t} dt = e \cdot \sum_{l=0}^n \binom{n}{l} \cdot (-1)^l (n-l)!$$

oder alternativ

$$\frac{1}{e} \cdot \int_{-1}^{\infty} t^n e^{-t} dt = \sum_{l=0}^n \binom{n}{l} \cdot (-1)^l (n-l)! = \sum_{l=0}^n \frac{(-1)^l \cdot n!}{l!(n-l)!} \cdot (n-l)! = n! \sum_{l=0}^n \frac{(-1)^l}{l!}.$$

Die linke Seite ist die eben gezeigte Lösung (158) und die rechte Seite ist Eulers Formel (159), womit die Gleichheit der beiden Formeln nachgewiesen ist. In [Dunham2] findet man einen alternativen Beweis von (159) mittels Induktion.

**Orthogonale Polynome** Die Theorie der Orthogonalpolynome wird heute angesehen, mit der wegweisenden Arbeit von Stieltjes *“Recherches sur les fractions continues”* ([Stieltjes2], 1894) (“Untersuchungen über Kettenbrüche”) entscheiden vorangebracht worden zu sein. Stieltjes führte in dieser Arbeit das nach ihm benannte Stieltjes-Integral ein und verband das Momentenproblem mit Kettenbrüchen und auch den Orthogonalpolynomen. Obschon Stieltjes seinen Vorgänger Euler weit in seinen Erkenntnissen

zu diesen Gegenständen übersteigt, lassen sich in den Euler'schen Arbeiten auch explizite Formeln für Orthogonal-Polynome herauslesen, wovon oben (Abschnitt 5.2.4) mit den Legendre-Polynomen schon ein Beispiel umfassender diskutiert worden ist<sup>278</sup>.

An dieser Stelle wird mit den Tschebycheff-Polynomen ein Beispiel für eine Differenzgleichung mit konstanten Koeffizienten präsentiert, sodass die Ergebnisse aus Abschnitt (4.3.1) hier zum Tragen kommen. Die Hermite-Polynome erfüllen hingegen eine Differenzgleichung mit linearen Koeffizienten, womit sie von dem in Abschnitt (5.2.3) Diskutierten erfasst werden. Gefolgt wird dies von den Laguerre-Polynomen – ein Beispiel, in welchem die Euler'sche Methode an seine Grenzen stößt. Schließlich soll mit den Omega-Funktionen, noch ein Beispiel einer etwas allgemeineren Funktionenklasse mit Eulers Ansatz behandelt werden.

**Die Tschebycheff-Polynome** Die Tschebycheff-Polynome erfüllen die folgende Differenzgleichung:

$$T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x), \quad (160)$$

also eine Differenzgleichung mit konstanten Koeffizienten in der Variable  $n$ . Eulers Methode befolgend, ist diese Gleichung zu betrachten:

$$0 = e^z - 2x + e^{-z}$$

und nach  $z$  aufzulösen. Man findet diese unendlichen vielen Lösungen:

$$z_k = \log(x \pm \sqrt{x^2 - 1}) + 2k\pi i \quad \text{mit} \quad k \in \mathbb{Z}.$$

---

<sup>278</sup>Man beachte in diesem Kontext den Lehrsatz von Favard (1902–1965) aus seiner Arbeit *“Sur les polynomes de Tchebicheff”* ([Favard], 1935) (“Über die Tschebycheff'schen Polynome”), dass für Polynome  $p_n(x)$ , welche nachstehender Rekurrenzrelation genüge leisten:

$$p_n(x) = (A_n x + B_n)p_{n-1}(x) + C_n p_{n-2}(x)$$

gewiss ist, dass sie einen Satz von Orthogonalpolynomen bilden. Überdies ist die Umkehrung dieser Aussage ebenfalls wahr. Demnach erkennt man in der für Euler in seinen Untersuchungen zu Kettenbrüchen führenden Gleichung (54) auch eine für entsprechende Orthogonalpolynome. Überdies lassen sich seine Beiträge zur Mellin-Transformierten (5.2.3) als Beiträge zum Momenten-Problem umdeuten. Stieltjes hat demnach in seiner Arbeit [Stieltjes2] die drei scheinbar unverwandten Gebiete von Kettenbrüchen, Momentproblemen – ein Begriff, der zu Eulers Lebenszeiten noch gar nicht existierte – und Orthogonalpolynomen synthetisiert.

Eulers Ansatz führt also zur folgenden Lösung von (160):

$$T_n(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{n(\log(x+\sqrt{x^2-1})+2k\pi i)} + b_k e^{n(\log(x-\sqrt{x^2-1})+2k\pi i)}$$

mit beliebigen Konstanten  $c_k$  und  $b_k$ . Dies vereinfacht sich zu:

$$(x + \sqrt{x^2 - 1})^n \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{2k\pi i n} + (x - \sqrt{x^2 - 1})^n \sum_{k=-\infty}^{\infty} b_k e^{2k\pi i n},$$

sodass man zur folgenden Lösung von (160) gelangt

$$T_{n,E}(x) = f(n)(x + \sqrt{x^2 - 1})^n + g(n)(x - \sqrt{x^2 - 1})^n,$$

wenn  $f(n) = f(n+1)$  und  $g(n) = g(n+1)$  gilt. Der zusätzliche Index  $E$  zeigt an, dass es eine aus der Euler'schen Vorgehensweise derivierte Lösung ist.

Vergleicht man dieses Ergebnis mit der bekannten Darstellung:

$$T_n(x) = \frac{(x + \sqrt{x^2 - 1})^n + (x - \sqrt{x^2 - 1})^n}{2}, \quad (161)$$

ergibt sich  $T_n(x)$  aus  $T_{n,E}(x)$  für die spezielle Wahl  $f(n) = g(n) = \frac{1}{2}$ . Man kann dies auch aus  $T_{n,E}(x)$  selbst ableiten, sofern man das Polynom  $T_1(x) = x$  betrachtet. Dann müsste gelten

$$\begin{aligned} x &= T_{1,E} = f(1)(x + \sqrt{x^2 - 1}) + g(1)(x - \sqrt{x^2 - 1}) \\ &= (f(0) + g(0))x + (f(0) - g(0))\sqrt{x^2 - 1}, \end{aligned}$$

wobei  $f(n+1) = f(n)$  und  $g(n) = g(n+1)$  benutzt wurde. Ein Koeffizientenvergleich führt nun zu den Gleichungen:

$$1.) \quad f(0) + g(0) = 1 \quad \text{und} \quad 2.) \quad f(0) - g(0) = 0.$$

Die Lösungen dieses Gleichungssystems sind  $f(0) = g(0) = \frac{1}{2}$ . Somit reduziert sich für natürliche und ganzzahlige  $n$  die Euler'sche Lösung  $T_{n,E}(x)$  genau auf die explizite Formel für die Tschebyscheff Polynome (161).

**Die Hermite-Polynome** Die Hermite-Polynome erfüllen die Differenzengleichung

$$H_{n+1}(x) = 2xH_n(x) - 2nH_{n-1}(x) \quad (162)$$

mit  $H_0(x) = 1$  und  $H_1(x) = 2x$ . Nach der Euler'schen Methode setze man

$$\int t^{n+1}p(t)dt = 2x \int t^n p(t)dt - 2n \int t^{n-1}p(t)dt + t^n q(t),$$

wobei die Funktionen  $p(t)$  und  $q(t)$  zu bestimmen sind. Differenzieren der Gleichungen und anschließendes Vereinfachen ergibt

$$t^2 p(t) = 2xtp(t) - 2np(t) + nq(t) + tq'(t).$$

Der Vergleich der Koeffizienten der jeweiligen Potenzen von  $n$  impliziert:

$$1) \quad t^2 p(t) = 2xtp(t) + tq'(t) \quad \text{und} \quad 2) \quad 0 = -2p(t) + q(t).$$

Dieses System von gekoppelten Differenzialgleichungen besitzt die Lösungen:

$$p(t) = \frac{1}{2}C(x)e^{\left(\frac{t^2}{4}-xt\right)} \quad \text{sowie} \quad q(t) = C(x)e^{\left(\frac{t^2}{4}-xt\right)},$$

wobei  $C(x)$  eine Funktion  $\neq 0$  ist. Um nun die Grenzen zu bestimmen, hat man nach Eulers Vorgabe die Gleichung  $t^n \cdot q(t) = 0$  zu betrachten, was  $t_{1,2} = \pm i\infty$  bedeutet, sodass zunächst folgender Ansatz gemacht werden kann:

$$H_n(x) = 2C(x) \int_{-i\infty}^{i\infty} t^n e^{\left(\frac{t^2}{4}-xt\right)} dt.$$

Um sich der imaginären Grenzen zu entledigen, setze man  $t = iy$ ; damit wird

$$H_n(x) = 2C(x)i^{n+1} \int_{-\infty}^{\infty} y^n e^{-\frac{y^2}{4}-iyx} dy.$$

Aus  $H_0(x) = 1$  muss demnach gelten:

$$H_0(x) = 1 = 2C(x)i \int_{-\infty}^{\infty} y^0 e^{-\frac{y^2}{4}-iyx} dy = 2C(x)i \cdot 2\sqrt{\pi}e^{-x^2},$$

sodass

$$C(x) = \frac{e^{x^2}}{4i\sqrt{\pi}}.$$

Einsetzen dieses Wertes von  $C(x)$  in den Ansatz gibt als finalen Ausdruck:

$$H_n(x) = \frac{e^{x^2}}{2\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} (iy)^n e^{-\frac{y^2}{4} - iyx} dy.$$

**Die Laguerre-Polynome** Anhand der Laguerre-Polynome sei zuletzt ein Exempel angegeben, beim welchem Eulers Ansatz an seine Grenzen stößt. Die Laguerre-Polynome erfüllen die Differenzgleichung

$$(n+1)L_{n+1}(x) = (2n+1-x)L_n(x) - nL_{n-1}(x). \quad (163)$$

Vermöge des Ansatzes

$$(n+1) \int t^{n+1} p(t) dt = (2n+1-x) \int t^n p(t) dt - n \int t^{n-1} p(t) dt + t^n q(t)$$

gelangt man zum folgenden System von Differentialgleichungen für die zu findenden Funktion  $p(t)$  und  $q(t)$ :

$$1.) \quad t^2 p'(t) = 2tp(t) - p(t) + q(t) \quad \text{und} \quad 2.) \quad tp'(t) = (1-x)p(t) + q'(t).$$

Die Lösung lautet

$$p(t) = \frac{C(x)}{t-1} e^{-\frac{x}{t-1}} \quad \text{und} \quad q(t) = C(x)(t-1)e^{-\frac{x}{t-1}}$$

mit einer Funktion  $C(x) \neq 0$ .

Will man nun die Grenzen der Integration ermitteln, hat man die Gleichung

$$0 = q(t) = C(x)(t-1)e^{-\frac{x}{t-1}}$$

nach  $t$  aufzulösen. Jedoch findet man hier lediglich die eine Lösung  $t = 1$ , obwohl man zweier zur Anwendung von Eulers Methode bedürfte. Mithilfe der komplexen Analysis findet man

$$L_n(x) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{e^{-\frac{xt}{t-1}}}{(1-t)t^{n+1}} dt$$

wobei  $C$  ein geschlossener Weg um den Ursprung ist, welcher  $t = 1$  nicht mit einschließt.

Um diese Vorstellung der Euler'schen Ideen nicht auf einem Missklang enden zu lassen, sei die Bemerkung gestattet, dass die Euler'sche Herangehensweise an Differenzgleichungen, insbesondere der Ansatz aus (56), dem modernen Ansatz im Studium der Feynman'schen Integrale in der Physik entspricht. Die Arbeit *“Decomposition of Feynman Integrals on the Maximal Cut by Intersection Numbers”* ([Frellesvig], 2019) war eine der ersten, welche sich Methoden aus der Mathematik bedient, welche ihre Wurzel in der Euler'schen Methode haben. Das Buch *“Feynman Integrals: A Comprehensive Treatment for Students and Researchers”* ([Weinzierl], 2022) stellt die Theorie und Methodik umfassend dar. Man konsultiere auch das entsprechende Kapitel in [Aycock3] für einen Bezug der Überlegungen in der Physik zu den Euler'schen Formeln.

**Omega-Funktionen** Die Beispiele der Orthogonalpolynome haben gezeigt, dass die Euler'sche Methode zur Auflösungsmethode einiges zu leisten vermag, jedoch auch an ihre Grenzen stößt, wenn die zu behandelnde Differenzgleichung entsprechende unliebsame Eigenschaften aufweist. Daher soll abschließend noch ein Beispiel diskutiert werden, wo Eulers Ansatz die gewünschten Ergebnisse zutage fördert. Die zum Verfassungszeitpunkt dieser Arbeit noch nicht publizierte Arbeit *“Difference Equations and Omega Functions”* ([Perez], vorauss. 2025)<sup>279</sup> hat die sogenannten  $\Omega$ -Funktionen zum Gegenstand, welche mit funktionentheoretischen Mitteln untersucht werden. Sie werden in erwähnter Abhandlung über ihre Differenzgleichung eingeführt. Sie erfüllen diese:

$$s\Omega(s) = \sum_{k=1}^d \alpha_k \Omega(s + d),$$

sodass sie sich mit der Euler'schen Methode behandeln lassen. Mit dem Ansatz

---

<sup>279</sup>Die Arbeit von Marco-Perez wurde dem Verfasser der gegenwärtigen Ausarbeitung mit einem Gesuch nach Revision vom *American Journal of Mathematics* zugesandt und anschließend auch mit Perez selbst diskutiert.

$$\Omega(s) = \int_a^b t^{s-1} p(t) dt \quad (164)$$

und der Hilfsgleichung

$$s \int t^{s-1} p(t) dt = \sum_{k=1}^d \alpha_k \int t^{s-1+k} p(t) dt + t^s q(t)$$

mit zu bestimmenden Funktionen  $p(t)$  und  $q(t)$  und zu eruiierenden Integrationsgrenzen  $a$  und  $b$  wird man analog zu den vorherigen Beispielen verfahren und zu folgenden System von Gleichungen für  $p(t)$  und  $q(t)$  geleitet:

$$1. \quad p(t) = q(t) \quad \text{und} \quad 0 = \sum_{k=1}^d \alpha_k t^k p(t) + t q'(t).$$

Dieses System besitzt die Lösung

$$p(t) = q(t) = C \cdot e^{\left(-\sum_{k=1}^d \alpha_k \frac{t^k}{k}\right)},$$

wobei die Integrationskonstante  $C$  nicht verschwindend gewählt werden kann. Für die Grenzen ist demnach die Gleichung

$$t^s q(t) = t^s \cdot e^{\left(-\sum_{k=1}^d \alpha_k \frac{t^k}{k}\right)}$$

zu betrachten. Die Lösung  $t = 0$  ist leicht ersichtlich. Für eine weitere  $t_0$  kann man an dieser Stelle nur sagen, dass sie so zu wählen ist, dass das Polynom  $\sum_{k=1}^d \alpha_k \frac{t^k}{k}$  unendlich wird. Dies hängt insbesondere von der Natur des Koeffizienten  $\alpha_k$  ab. Aus der Funktionstheorie ist jedoch bekannt, dass ein Polynom als unbeschränkte holomorphe Funktion auch unendlich werden kann, wenn  $t = \infty$  als Wert zugelassen wird. Die Existenz eines solchen  $t_0$  kann demnach garantiert werden, sodass man mit dem Ansatz (164) in jedem Fall eine Darstellung der Form

$$\Omega(s) = C \int_0^{t_0} t^{s-1} \cdot e^{\left(-\sum_{k=1}^d \alpha_k \frac{t^k}{k}\right)} dt$$

findet. Eine weitere Untersuchung soll aber hier nicht erfolgen, zumal sie in der bald erscheinenden Arbeit [Perez] nachgereicht werden würden. Ebenso

wird der Vergleich der Euler'schen Methoden zur Auflösung von Differenzengleichungen mit denen von Nørlund aus seinem Buch "Vorlesungen über Differenzenrechnung" ([Nørlund], 1924) auf einen zukünftigen Zeitpunkt verlegt. Stattdessen sollen noch die Bessel'schen Funktionen eine Behandlung mit dieser Methode finden.

**Besselfunktionen** Bekanntermaßen, man konsultiere etwa das Buch "A Treatise on the Theory of Bessel Functions" ([Watson], 1995), erfüllen die Bessel'schen Funktionen, definiert über die Reihe

$$J_\alpha(x) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n! \Gamma(n + \alpha + 1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n+\alpha}, \quad (165)$$

folgende Rekursionsvorschrift im Index  $\alpha$ :

$$2\alpha \cdot J_\alpha = x(J_{\alpha-1} + J_{\alpha+1}), \quad (166)$$

wobei das Argument der Kürze wegen fortgelassen wurde. Nun mache man zur Lösung dieser entsprechend Euler'scher Vorgabe hier den Ansatz

$$J_\alpha = \int_a^b e^{-\alpha t} p(t) dt, \quad (167)$$

sodass im Gegensatz zu oben (Abschnitt 5.2.3) statt der Mellin-Transformierten eine Laplace-Transformierte als Lösungsform gewählt wird<sup>280</sup>. Die entsprechende Hilfsgleichung lautet entsprechend:

$$2\alpha \int e^{-\alpha t} p(t) dt = x \left( \int e^{-(\alpha-1)t} p(t) dt + \int e^{-(\alpha+1)t} p(t) dt \right) + e^{-\alpha t} q(t)$$

mit zu bestimmenden Funktionen  $p(t)$  und  $q(t)$ , für welche man, wie oben verfahren, folgende Gleichungen ableitet:

$$1. \quad 2p(t) = -q(t) \quad \text{sowie} \quad 0 = x(e^t + e^{-t})p(t) + q'(t).$$

<sup>280</sup>Dies bedeutet für die Methode an sich keinen Unterschied, zumal die beiden Transformierten vermöge einer Substitution ineinander überführt werden können. Jedoch wird bei praktischen Rechnungen bisweilen der Aufwand für entsprechend anders gewähltem Ansatz merklich reduziert. Die Bessel'schen Funktionen statuieren ein Exempel dessen. Euler selbst scheint in seinen Untersuchungen stets den Ansatz des Mellin'schen Typus gewählt zu haben.

Eine kurze Rechnung ergibt für  $q(t)$  und  $p(t)$ :

$$p(t) = Ce^{x \sinh(t)} \quad \text{und} \quad q(t) = -2Ce^{x \sinh(t)},$$

wobei  $C$  eine nicht verschwindende Konstante ist. Demnach sind die Grenzen der Integration aus der Gleichung

$$0 = e^{-\alpha t + x \sinh(t)}$$

zu ermitteln. Demnach muss das Argument der Exponentialfunktion  $-\infty$  werden. Für die weitere Betrachtung seien  $\alpha, x > 0$ . Dann ist eine erste Lösung mit  $t = -\infty$  gegeben, zumal das Wachstum von  $\sinh(t)$  das der linearen Funktion  $-\alpha t$  dominiert. Zur Ermittlung einer weiteren bemerke man die elementare Identität

$$\sinh(u \pm i\pi) = -\sinh(u) = \sinh(-u),$$

sodass  $t = \infty \pm i\pi$  ebenfalls Lösungen sind. Insgesamt führt der Ansatz (167) also zunächst zu

$$J_\alpha^{1,2} = C_{1,2} \int_{-\infty}^{\infty \pm i\pi} e^{-\alpha t + x \sinh(t)} dt, \quad (168)$$

woraus allerdings die Konstanten  $C_{1,2}$  schwer zu ermitteln sind. Darum behelfe man sich durch Betrachtung der Summe der beiden Lösungen, welche natürlich immer noch (166) Genüge leistet. Zudem sei  $C_1 = -C_2 = C$ . Dementsprechend ist zunächst

$$J_\alpha^1 + J_\alpha^2 = C \int_{-\infty}^{\infty + i\pi} e^{-\alpha t + x \sinh(t)} dt - C \int_{-\infty}^{\infty - i\pi} e^{-\alpha t + x \sinh(t)} dt,$$

welche sich mit elementaren Regeln der Integralrechnung zu

$$C \int_{\infty - i\pi}^{\infty + i\pi} e^{-\alpha t + x \sinh(t)} dt$$

kontrahieren lässt. Eine leichte Anwendung des Residuensatzes und Hin- und Zurücknahme der Periodizität von  $\sinh(t)$  gestattet<sup>281</sup>, für ganzzahliges  $\alpha$ , die Reduktion des letzten auf das folgende Integral:

<sup>281</sup>Man integriere entgegen des Uhrzeigersinnes über das Rechteck mit den Eckpunkten  $0 - i\pi$ ,  $\infty - i\pi$ ,  $\infty + i\pi$ ,  $0 + i\pi$ . Der Residuensatz gibt dieses Integral als  $= 0$  aus. Aus der

$$C \int_{-i\pi}^{+i\pi} e^{x \sinh(t) - \alpha t} dt.$$

Hier lasse man schließlich  $t = i\omega$  werden, sodass man zu nachstehendem Integral gelangt:

$$F_\alpha := Ci \int_{-\pi}^{\pi} e^{ix \sin(\omega) - i\omega\alpha} d\omega.$$

Die einfachere Gestalt erlaubt nun die Ermittlung der Konstanten  $C$  durch den Vergleich mit der Bessel-Funktion in (165). Man nehme  $\alpha = 0$  an und betrachte zunächst  $F_\alpha$  für diesen Wert, sprich, das Integral

$$Ci \int_{-\pi}^{\pi} e^{ix \sin(\omega)} d\omega,$$

welches keine Integration in elementaren Funktionen zulässt. Daher entwickle man den Integranden in eine Potenzreihe, wodurch man hat

$$F_0 = Ci \int_{-\pi}^{\pi} e^{ix \sin(\omega)} d\omega = \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(ix \sin(\omega))^n}{n!} d\omega,$$

sodass sich nach Vertauschung von Summe und Integral folgende Potenzreihe ergibt:

$$F_0 = Ci \sum_{n=0}^{\infty} \left( \int_{-\pi}^{\pi} \sin^n(\omega) d\omega \right) \frac{(ix)^n}{n!}. \quad (169)$$

Es verbleibt demnach die Berechnung des Integrals, welches gleichsam der Koeffizient der Reihe ist. Für ungerades  $n$  verschwindet besagtes als ein Integral über die Periode einer punktsymmetrischen Funktion. Für gerades

Periodizität von  $\sinh(t)$  und  $e^{i\alpha t}$  folgert man indes

$$\int_{i\pi}^{\infty+i\pi} e^{x \sinh(t) - \alpha t} dt = \int_{-i\pi}^{\infty-i\pi} e^{x \sinh(t) - \alpha t} dt,$$

sodass die unendlichen Teilwege sich beim angezeigten Rundwege gegenseitig aufheben.

$n$  findet man vermöge der Formel  $\sin(\omega) = \frac{e^{i\omega} - e^{-i\omega}}{2i}$  und dem binomischen Lehrsatz in leichter Rechnung

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin^{2n}(\omega) d\omega = 2\pi \cdot \frac{1}{2^{2n}} \binom{2n}{n},$$

womit (169) nachstehende Form annimmt:

$$F_0 = 2\pi Ci \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^{2n}} \binom{2n}{n} \cdot \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} = 2\pi Ci \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n!)^2} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n}.$$

Ein Vergleich mit  $J_0(x)$  aus (165) weist die Konstante  $C$  als  $= \frac{1}{2\pi i}$  aus, sodass man aus dem Ansatz (167) schließlich

$$J_\alpha(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{ix \sin(\omega) - i\alpha\omega} d\omega$$

erlangt, sofern  $\alpha$  ganzzahlig ist. In dieser Form hat bereits Bessel (1784–1846) selbst in seiner Arbeit “*Untersuchung des Theils der planetarischen Störungen, welcher aus der Bewegung der Sonne entsteht*” ([Bessel], 1824) die heute sogenannten Bessel’schen Funktionen erster Art aus (165) angegeben und verwendet. Nach Ermittlung der Konstante  $C$  lassen sich die beiden Zwischenlösungen aus (168) als

$$H_\alpha^{(1)}(x) = \frac{1}{i\pi} \int_{-\infty}^{\infty+i\pi} e^{-\alpha t + x \sinh(t)} dt \quad \text{und} \quad H_\alpha^{(2)}(x) = -\frac{1}{i\pi} \int_{-\infty}^{\infty-i\pi} e^{-\alpha t + x \sinh(t)} dt$$

identifizieren, welche heute als Hankel’sche Funktionen bezeichnet werden. Man konsultiere diesbezüglich wieder Watsons (1886–1965) Buch [Watson], insbesondere Abschnitt 6.21., wo man die Verbindung

$$H_\alpha^{(1)}(x) + H_\alpha^{(2)}(x) = 2J_\alpha(x)$$

herauslesen zu den Bessel’schen Funktionen erster Art aus (165) kann<sup>282</sup>.

<sup>282</sup>Hankel hat die nach ihm benannten Funktionen – in leicht anderer Form – unter Verwendung von Kurvenintegralen in der komplexen Ebene in seiner Arbeit “*Die Zylinderfunktionen erster und zweiter Art*” ([Hankel1], 1869) eingeführt und studiert.

### 8.1.3 Weitere Untersuchungen zu den Legendre–Polynomen

Things are recalibrated  
according to new perspectives  
and perceptions. It's fascinating  
to me.

---

Tim Gunn

Hier werden die Euler'schen Erkenntnisse bezüglich der Legendre–Polynome ergänzt, indem von (70) aus Abschnitt (5.2.4) ausgehend, weitere Formeln und Einsichten abgeleitet werden.

**Reduktion auf eine bekannte Darstellung** Da Euler, an anderen Dingen interessiert, (70) nicht nieder geschrieben hat, soll hier zunächst eine kleine Untersuchung der Formel nachgereicht werden. Als erstes kann sie auf die Laplace'sche Darstellung (65) reduziert werden, was man wie folgt einsieht: Man hat mit der Festlegung

$$t + \sqrt{t^2 - 1} \cos \varphi = y$$

in dieser Darstellung für die Differentiale

$$\sqrt{t^2 - 1} \sin \varphi d\varphi = dy \quad \text{oder auch} \quad d\varphi = \frac{dy}{-\sqrt{t^2 - 1} \sin \varphi}.$$

Weil vermöge der Substitution  $\cos \varphi = \frac{y-t}{\sqrt{t^2-1}}$  gilt, hat man

$$\sin \varphi = \sqrt{1 - \frac{(y-t)^2}{t^2-1}}.$$

All dies gibt in (65) eingesetzt

$$P_n(t) = -\frac{1}{\pi} \int_{t+\sqrt{t^2-1}}^{t-\sqrt{t^2-1}} \frac{y^n dy}{\sqrt{t^2-1} \cdot \sqrt{1 - \frac{y-t}{t^2-1}}}.$$

Das “–” kann durch Vertauschen der Integrationsgrenzen verarbeitet werden, sodass

$$P_n(t) = \frac{1}{\pi} \int_{t-\sqrt{t^2-1}}^{t+\sqrt{t^2-1}} \frac{y^n dy}{\sqrt{(t^2-1) - (y^2 - 2ty + t^2)}} = \frac{1}{\pi} \int_{t-\sqrt{t^2-1}}^{t+\sqrt{t^2-1}} \frac{y^n dy}{\sqrt{-1 + 2ty - y^2}}.$$

Schreibt man  $\sqrt{-1} = i$  und zieht  $-1$  aus der Wurzel heraus, gelangt man zu

$$P_n(t) = \frac{1}{i\pi} \int_{t-\sqrt{t^2-1}}^{t+\sqrt{t^2-1}} \frac{y^n dy}{\sqrt{+1-2ty+y^2}}.$$

Indem man also (70) mit dieser letzten Formel vergleicht, findet man auch hier über einen Umweg  $\log(-1) = i\pi$  basierend auf der Wahl  $\sqrt{-1} = i$ . Für die andere mögliche Wahl  $\sqrt{-1} = -i$  erhielte man  $\log(-1) = -i\pi$ . Die erste Wahl erscheint indes “etwas natürlicher”, da  $\log(-1) = i\pi$  resultiert, wenn der Hauptzweig des komplexen Logarithmus gewählt wird. Wie an entsprechender Stelle erwähnt, erfährt die natürliche Wahl durch die Arbeit “*Sur les polynômes de Legendre*” ([Stieltjes1], 1890) (“Über die Legendre-Polynome”) ihre Bestätigung.

**Elementare Eigenschaften aus dieser Formel abgeleitet** (70) erlaubt indes eine bequemere Ableitung gewisser bekannter Eigenschaften der Legendre-Polynome. Dies sei am Beispiel der Parität aufgezeigt. Dies ist die Eigenschaft:

$$P_n(-t) = (-1)^n P_n(t). \quad (170)$$

Aus (70) ergibt sich unmittelbar:

$$i\pi P_n(t) = \int_{t-\sqrt{t^2-1}}^{t+\sqrt{t^2-1}} \frac{x^n dx}{\sqrt{1-2xt+x^2}}$$

und das Schreiben von  $-t$  statt  $t$  gibt

$$i\pi P_n(-t) = \int_{-t-\sqrt{t^2-1}}^{-t+\sqrt{t^2-1}} \frac{x^n dx}{\sqrt{1+2xt+x^2}}.$$

Weiter erhält man für  $x = -y$  und daher  $dx = -dy$

$$i\pi P_n(-t) = - \int_{-(-t-\sqrt{t^2-1})}^{-(-t+\sqrt{t^2-1})} \frac{(-y)^n dy}{\sqrt{1-2ty+y^2}}.$$

Vereinfacht man nun und vertauscht die Integrationsgrenzen, entspringt

$$i\pi P_n(t) = (-1)^n \int_{t-\sqrt{t^2-1}}^{t+\sqrt{t^2-1}} \frac{y^n dy}{\sqrt{1-2yt+y^2}} = (-1)^n i\pi P_n(t),$$

was gerade (170) ist.

Auch die Funktionalgleichung (171), welche Euler in den Arbeiten [EulerE672], [EulerE673], [EulerE674] in großem Ausmaß eingenommen hat, lässt sich aus (70) beweisen. In moderner Sprache bedeutet dies die Gleichung

$$P_n(t) = P_{-(n+1)}(t) \quad \text{für } n \in \mathbb{N}. \quad (171)$$

Zu diesem Zwecke präsentiere man (70) wie folgt

$$i\pi P_n(t) = \int_{a(t)}^{b(t)} \frac{x^n dx}{\sqrt{1-2xt+x^2}}$$

mit  $a(t) = t - \sqrt{t^2 - 1}$  und  $b(t) = t + \sqrt{t^2 - 1}$ . Dann ist mit  $x = \frac{1}{y}$ , und daher  $dx = -\frac{dy}{y^2}$ :

$$i\pi P_n(t) = - \int_{\frac{1}{a(t)}}^{\frac{1}{b(t)}} \frac{y^{-n}}{\sqrt{1-2ty^{-1}+y^{-2}}} \frac{dy}{y^2},$$

welche nach Vertauschen der Integrationsgrenzen diese Form annimmt

$$i\pi P_n(t) = \int_{\frac{1}{b(t)}}^{\frac{1}{a(t)}} \frac{y^{-n-1} dy}{\sqrt{1-2ty^1+y^2}}.$$

Mit der leicht nachweisbaren Identität

$$\frac{1}{a(t)} = \frac{1}{t - \sqrt{t^2 - 1}} = \frac{t + \sqrt{t^2 - 1}}{t^2 - t^2 + 1} = t + \sqrt{t^2 - 1} = b(t), \quad (172)$$

lässt sich die letzte Gleichung wie folgt darstellen:

$$i\pi P_n(t) = i\pi P_{-(n+1)}(t),$$

welche natürlich mit (171) gleichwertig ist.

Aber auch weniger bekannte, wenn nicht gar neue Formeln lassen sich aus (70) herleiten, wie der Grenzwert:

$$\begin{aligned}
 i\pi P_n(-1) &= i\pi \cdot (-1)^n = \lim_{t \rightarrow -1} \int_{t-\sqrt{t^2-1}}^{t+\sqrt{t^2-1}} \frac{x^n dx}{\sqrt{1-2xt+x^2}} \\
 &= \frac{\sqrt{\pi}\Gamma(n+1)}{\Gamma(n+\frac{3}{2})} \lim_{t \rightarrow -1} {}_2F_1\left(\frac{1}{2}, n+1, n+\frac{3}{2}, (b(t))^2\right) \cdot ((b(t))^{n+1} - (a(t))^{n+1}).
 \end{aligned}$$

**Integral- und Reihenidentitäten** Von größerem Interesse mögen allerdings gewisse Integral- und Reihenidentitäten sein, womit auch die erzeugende Funktion der Legendre'schen Polynome (63) Anwendung findet, sie lautete:

$$\frac{1}{\sqrt{1-2xt+x^2}} = \sum_{k=0}^{\infty} P_k(t)x^k.$$

Da der Ausdruck der auf der linken Seite in (70) auftritt, kann der entsprechende Anteil durch den Integranden ersetzt werden. Lässt man auch hier  $a(t) = t - \sqrt{t^2-1}$  und  $b(t) = t + \sqrt{t^2-1}$  sein und setzt (63) ein, gelangt man zu:

$$\begin{aligned}
 i\pi P_n(t) &= \int_{a(t)}^{b(t)} x^n \sum_{k=0}^{\infty} P_k(t)x^k = \sum_{k=0}^{\infty} P_k(t) \int_{a(t)}^{b(t)} x^{n+k} dx \\
 &= \sum_{k=0}^{\infty} P_k(t) \frac{(b(t))^{n+k+1} - (a(t))^{n+k+1}}{n+k+1}.
 \end{aligned}$$

Der Kürze wegen setze man  $t = \cos(\varphi)$ , sodass

$$b(t) = \cos(\varphi) + \sqrt{\cos^2(\varphi) - 1} = \cos(\varphi) + i \sin(\varphi) = e^{i\varphi}$$

und gleichermaßen

$$a(t) = \cos(\varphi) - i \sin(\varphi) = e^{-i\varphi}.$$

Demnach ist

$$\begin{aligned}
i\pi P_n(\cos(\varphi)) &= \sum_{k=0}^{\infty} P_k(\cos(\varphi)) \frac{e^{i(n+k+1)\varphi} - e^{-i(n+k+1)\varphi}}{n+k+1} \\
&= 2i \cdot \sum_{k=0}^{\infty} P_k(\cos(\varphi)) \frac{\sin((n+k+1)\varphi)}{n+k+1}.
\end{aligned}$$

Schließlich hat man

$$\frac{\pi}{2} P_n(\cos(\varphi)) = \sum_{k=0}^{\infty} P_k(\cos(\varphi)) \frac{\sin((n+k+1)\varphi)}{n+k+1}, \quad (173)$$

welche Formel ein einzelnes Legendre-Polynom als Summe aller anderen ausdrückt. Diesem Ausdruck lassen sich mit ähnlichen Überlegungen viele weitere derselben Gestalt an die Seite stellen.

Jedoch soll auch die Herleitung von Integralidentitäten dargestellt werden. Aus (63) leitet sich folgende Formel ab:

$$\sum_{k=0}^{\infty} P_k(t) = \frac{1}{\sqrt{2-2t}}.$$

Für  $|t| < 1$ , ist diese Formel natürlich richtig, sodass vermöge (70) entspringt:

$$\frac{1}{\sqrt{2-2t}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{i\pi} \cdot \int_{t-\sqrt{t^2-1}}^{t+\sqrt{t^2-1}} \frac{x^n dx}{\sqrt{1-2xt+x^2}} = \frac{1}{i\pi} \int_{t-\sqrt{t^2-1}}^{t+\sqrt{t^2-1}} \frac{dx}{(1-x)\sqrt{1-2tx+x^2}},$$

wo die Reihenfolge der Summation und Integration vertauscht und im letzten Schritt die geometrische Reihe verwendet wurde. Auch hier setze man  $t = \cos(\varphi)$ . Mit der elementaren Identität  $2 - 2\cos(2x) = 4\sin^2(x)$  gibt dies:

$$\frac{1}{2\sin\frac{\varphi}{2}} = \frac{1}{i\pi} \int_{e^{-i\varphi}}^{e^{i\varphi}} \frac{dx}{(1-x)\sqrt{1-2\cos(\varphi)x+x^2}},$$

wobei, wie schon zuvor,  $t \pm \sqrt{t^2-1} = e^{\pm i\varphi}$ , genutzt wurde. Statt einer Diskussion der Spezialfälle dieser Formel sei die folgende mitgeteilt

$$\frac{1}{2 \cos\left(\frac{\varphi}{2}\right)} = \frac{1}{i\pi} \int_{e^{-i\varphi}}^{e^{i\varphi}} \frac{dx}{(1+x)\sqrt{1-2\cos(\varphi)x+x^2}},$$

welche sich durch die Ersetzung  $\varphi \mapsto \varphi + \pi$  aus der vorherigen ergibt.

**Interpolation** Euler war in seiner Arbeit [EulerE606] freilich nicht am Fall  $n \notin \mathbb{N}$  interessiert. Jedoch erlaubt (70) auch eine Darstellung über die hypergeometrische Reihe (73), welche natürlich eine unmittelbare Interpolation auf die nicht-ganzzahligen Fälle erlaubt. Faktorisiert man in

$$i\pi \cdot P_n(t) = \int_{t-\sqrt{t^2-1}}^{t+\sqrt{t^2-1}} \frac{x^n dx}{\sqrt{1-2xt+x^2}}$$

den Integranden, gelangt man nach einer etwas längeren, aber gradlinigen Rechnung unter Zuhilfenahme der Integraldarstellung der hypergeometrischen Reihe (siehe auch (84))

$$\frac{\Gamma(\gamma-\beta)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\gamma)} {}_2F_1(\alpha, \beta, \gamma, z) = \int_0^1 t^{\beta-1} (1-x)^{\gamma-\beta-1} (1-zx)^{-\alpha} dx,$$

zu

$$i\pi \left( \frac{\sqrt{\pi}\Gamma(n+1)}{\Gamma\left(n+\frac{3}{2}\right)} \right)^{-1} P_n(t) = \quad (174)$$

$$\left( (b(t))^{n+1} {}_2F_1\left(\frac{1}{2}, n+1, n+\frac{3}{2}, (a(t))^2\right) - (a(t))^{n+1} {}_2F_1\left(\frac{1}{2}, n+1, n+\frac{3}{2}, (b(t))^2\right) \right).$$

wobei die Formel  $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$  genutzt wurde.

Für den speziellen Fall  $(a(t))^2 = (b(t))^2$  vereinfacht sich diese Formel zu

$$\begin{aligned} & i\pi \left( \frac{\sqrt{\pi}\Gamma(n+1)}{\Gamma\left(n+\frac{3}{2}\right)} \right)^{-1} P_n(t) \\ &= {}_2F_1\left(\frac{1}{2}, n+1, n+\frac{3}{2}, (b(t))^2\right) \cdot ((b(t))^{n+1} - (a(t))^{n+1}). \end{aligned} \quad (175)$$

Man bemerke, dass trotz  $(a(t))^2 = (b(t))^2$  nicht notwendig  $a(t) = b(t)$  gilt<sup>283</sup>. Um nun die resultierende hypergeometrische Reihe zu evaluieren, bemühe man den Kummer'schen Satz aus [Kummer2] (siehe auch (75))

$${}_2F_1(a, b, 1 - a - b, -1) = \frac{\Gamma(1 - a - b)\Gamma(1 + \frac{1}{2}a)}{\Gamma(1 + a)\Gamma(1 + \frac{1}{2}a - b)}. \quad (176)$$

Setzt man hier also  $b = n + 1$  und  $a = \frac{1}{2}$  in der Formel, liefert (174) für diesen Fall:

$$i\pi P_n(0) = \frac{\sqrt{\pi}\Gamma(n+1)}{\Gamma(n+\frac{3}{2})} \cdot \frac{\Gamma(n+\frac{3}{2})\Gamma(\frac{n}{2}+\frac{3}{2})}{\Gamma(n+2)\Gamma(\frac{n}{2}+1)} \cdot ((i)^{n+1} - (-i)^{n+1}).$$

Mit  $i = e^{\frac{i\pi}{2}}$  und  $-i = e^{-\frac{i\pi}{2}}$  und unter Verwendung der Formel  $2i \sin x = e^{ix} - e^{-ix}$  hat man

$$i\pi P_n(0) = \frac{\sqrt{\pi}\Gamma(n+1)}{\Gamma(n+\frac{3}{2})} \cdot \frac{\Gamma(n+\frac{3}{2})\Gamma(\frac{n}{2}+\frac{3}{2})}{\Gamma(n+2)\Gamma(\frac{n}{2}+1)} \cdot 2i \sin\left(\frac{n+1}{2}\pi\right).$$

Vereinfachen, Verwendung der Relation  $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$  und erneute Vereinfachung, reduziert dies auf

$$i\pi P_n(0) = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{\Gamma(\frac{1}{2} + \frac{n}{2})}{\Gamma(\frac{n}{2} + 1)} \cdot 2i \sin\left(\frac{n+1}{2}\pi\right).$$

Mit der Reflektionsformel

$$\Gamma(x)\Gamma(1-x) = \frac{\pi}{\sin(\pi x)}$$

gibt dies schließlich

$$i\pi P_n(0) = i\sqrt{\pi} \frac{\Gamma(\frac{n}{2} + \frac{1}{2})}{\Gamma(\frac{n}{2} + 1)} \cdot \frac{\pi}{\Gamma(\frac{n+1}{2})\Gamma(\frac{1-n}{2})}$$

oder

$$P_n(0) = \frac{\sqrt{\pi}}{\Gamma(1 + \frac{n}{2})\Gamma(\frac{1-n}{2})},$$

---

<sup>283</sup>Es sei eines Beispiels wegen  $t = 0$ . Dann hat man  $b(0) = \sqrt{-1} = i$  sowie  $a(0) = -\sqrt{-1} = -i$  und  $(b(0))^2 = (a(0))^2 = -1$ .

welche Formel sich auch aus der Rekursionsvorschrift (64) und den Werten  $P_0(0) = 1$  und  $P_1(0) = 0$  mit den Eigenschaften der  $\Gamma$ -Funktion unmittelbar nachweisen lässt.

## 8.2 Mit Eulers Ideen zu Formeln von Ramanujan

Euler and Ramanujan are mathematicians of the greatest importance in the history of constants (and of course in the history of Mathematics [...])

---

Edgar William Middlemast

Da Euler und Ramanujan bezüglich ihrer Fähigkeiten in der Herleitung neuer Formeln, ihrer Virtuosität zur Manipulation arithmetischer Identitäten und mathematischer Intuition vielerorts bis zum heutigen Tage miteinander verglichen werden, scheint ein diese Verbindung illustrierender Abschnitt den passenden Abschluss der vorliegenden Ausarbeitung zu bilden. Exemplarisch werden drei Resultate von Ramanujan in Euler'scher Manier behandelt. Zunächst wird ein spezielles bestimmtes Integral abgeleitet (Abschnitt 8.2.1), gefolgt vom Ramanujan'schen Mastertheorem (Abschnitt 8.2.2). Den Abschluss bilden die Formeln zur Kreisquadratur (Abschnitt 8.2.3). Bei alledem wird auf nichts zurückgegriffen, was Eulers Kenntnisstand wesentlich übersteigt.

### 8.2.1 Ein bestimmtes Integral von Ramanujan

An equation means nothing to me unless it expresses a thought of God.

---

Srinivasa Ramanujan

In 1913 erhielt Godfrey Harold Hardy einen heute berühmten Brief aus Inden von Srinivasa Ramanujan. Einen Nachdruck dieses Briefes findet man unter anderem in Kapitel 2 des Buches "*Ramanujan: Letters and Commentary*" ([Ramanujan3], 1995). In seinem Schreiben listet Ramanujan mehrere Formeln auf. Unter diesen befindet sich diese

$$\int_0^{\infty} \frac{\left(1 + \frac{x^2}{(b+1)^2}\right)}{\left(1 + \frac{x^2}{a^2}\right)} \cdot \frac{\left(1 + \frac{x^2}{(b+2)^2}\right)}{\left(1 + \frac{x^2}{(a+1)^2}\right)} \cdots dx = \frac{1}{2} \sqrt{\pi} \cdot \frac{\Gamma\left(a + \frac{1}{2}\right) \Gamma(b+1) \Gamma\left(b - a + \frac{1}{2}\right)}{\Gamma(a) \Gamma\left(b + \frac{1}{2}\right) \Gamma(b - a + 1)}$$

mit der Einschränkung  $0 < a < b + \frac{1}{2}$ .  $\Gamma(x)$  ist auch hier die  $\Gamma$ -Funktion, definiert über

$$\Gamma(x) := \int_0^{\infty} t^{x-1} e^{-t} dt \quad \text{für } \operatorname{Re}(x) > 0. \quad (177)$$

In seiner Arbeit “*Some Definite Integrals*” ([Ramanujan1], 1915) hat Ramanujan die obige Formel hingegen wie folgt vorgestellt

$$\int_0^{\infty} \frac{\left(1 + \frac{x^2}{b^2}\right)}{\left(1 + \frac{x^2}{a^2}\right)} \cdot \frac{\left(1 + \frac{x^2}{(b+1)^2}\right)}{\left(1 + \frac{x^2}{(a+1)^2}\right)} \cdots dx = \frac{1}{2} \sqrt{\pi} \cdot \frac{\Gamma\left(a + \frac{1}{2}\right) \Gamma(b) \Gamma\left(b - a - \frac{1}{2}\right)}{\Gamma(a) \Gamma\left(b - \frac{1}{2}\right) \Gamma(b - a)}. \quad (178)$$

Euler hat Integrale ähnlicher Gestalt in seiner Arbeit “*De summo usu calculi imaginariorum in analysi*” ([EulerE621], 1788, ges. 1776) (E621: “Über den gewaltigen Nutzen des der imaginären Größen in der Analysis”) betrachtet, wenn man statt den Produkten in Ramanujans Formel sich  $\sin$  und  $\cos$ -Funktionen bei Euler denkt. Eine kurze Darstellung der für unsere Zwecke nötigen Ergebnisse wird der Herleitung der Ramanujan’schen Formel (178) vorangestellt.

**Herleitung von Ramanujans Integral aus Eulers Ideen** Ramanujans Formel (178) scheint kein Spezialfall einer von Euler entwickelten Formel aus [EulerE621] zu sein. Nichtsdestoweniger lässt sie sich durch Kombination einiger Ergebnisse von Euler ableiten, die nachstehend noch einmal genannt werden.

**Theorem 8** (Legendre’sche Verdopplungsformel). *Die  $\Gamma$ -Funktion erfüllt die Identität:*

$$\Gamma(2\alpha) = \frac{2^{2\alpha-1}}{\sqrt{\pi}} \cdot \Gamma(\alpha) \cdot \Gamma\left(\alpha + \frac{1}{2}\right).$$

Obwohl diese Formel nach Legendre benannt ist, ist in den Arbeiten [Aycock4] sowie [Aycock7] erläutert und auch in Abschnitt (6.1.1) dieser

Arbeit diskutiert worden, dass sie sich auf andere Weise ausgedrückt bereits in Eulers Arbeiten findet.

**Theorem 9** (Gauß'sche Summationsformel). *Definiert man*

$${}_2F_1(\alpha, \beta, \gamma; x) :=$$

$$1 + \frac{\alpha\beta}{\gamma} \frac{x}{1!} + \frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{\gamma(\gamma+1)} \frac{x^2}{2!} + \frac{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\beta(\beta+1)(\beta+2)}{\gamma(\gamma+1)(\gamma+2)} \frac{x^3}{3!} \dots,$$

*gilt die folgende Formel:*

$${}_2F_1(\alpha, \beta, \gamma; 1) = \frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\gamma - \beta - \alpha)}{\Gamma(\gamma - \alpha)\Gamma(\gamma - \beta)}.$$

Wie in [Aycock10] argumentiert und oben (Abschnitt 5.2.5) auch besprochen, findet sich dieser Lehrsatz bereits in anderer Form in der Euler'schen Arbeit [EulerE663]. Gauß hat sie im Jahr 1813 in der Form, wie sie im Theorem zu sehen ist, in seiner Arbeit [Gauß3] bewiesen.

**Theorem 10** (Eine Produktformel). *Die folgende Formel ist gültig*

$$\left(1 + \left(\frac{x}{a}\right)^2\right) \left(1 + \left(\frac{x}{a+1}\right)^2\right) \dots = \frac{\Gamma^2(a)}{\Gamma(a+ix)\Gamma(a-ix)}.$$

*Beweis.* Diese Formel teilt Ramanujan in [Ramanujan2] ohne Beweis mit. Um sie aus den Euler'schen Formeln heraus zu beweisen, bedarf es eines Ausdrucks aus § 1 seiner Arbeit [EulerE19]. In moderner Schreibweise, findet sich hier die Formel:

$$\Gamma(1+n) = \frac{1^{1-n} \cdot 2^n}{1+n} \cdot \frac{2^{1-n} \cdot 3^n}{2+n} \cdot \frac{3^{1-n} \cdot 4^n}{3+n} \dots.$$

Also gilt auch

$$\Gamma(1+in+\alpha) = \frac{1^{1-(in+\alpha)} \cdot 2^{in+\alpha}}{1+ni+\alpha} \cdot \frac{2^{1-(in+\alpha)} \cdot 3^{in+\alpha}}{2+ni+\alpha} \cdot \frac{3^{1-(in+\alpha)} \cdot 4^{in+\alpha}}{3+ni+\alpha} \dots.$$

Analog hat man

$$\Gamma(1-in+\alpha) = \frac{1^{1-(-in+\alpha)} \cdot 2^{-in+\alpha}}{1-ni+\alpha} \cdot \frac{2^{1-(-in+\alpha)} \cdot 3^{-in+\alpha}}{2-in+\alpha} \cdot \frac{3^{1-(-in+\alpha)} \cdot 4^{-in+\alpha}}{3-ni+\alpha} \dots.$$

Daher gibt das Produkt der beiden vorherigen Ausdrücke

$$\frac{1^{-2\alpha} \cdot 2^{2\alpha}}{(1+\alpha)^2 + n^2} \cdot \frac{2^{-2\alpha} \cdot 3^{2\alpha}}{(2+\alpha)^2 + n^2} \cdot \frac{3^{-2\alpha} \cdot 4^{2\alpha}}{(3+\alpha)^2 + n^2} \cdots$$

Dies vereinfacht sich zu

$$\begin{aligned} & \Gamma(1+in+\alpha)\Gamma(1-in+\alpha) = \\ = & \frac{1}{(1+\alpha)^2} \cdot \frac{1}{(2+\alpha)^2} \cdot \frac{1}{(3+\alpha)^2} \cdots \times \frac{1}{1+\left(\frac{n}{1+\alpha}\right)^2} \cdot \frac{1}{1+\left(\frac{n}{2+\alpha}\right)^2} \cdot \frac{1}{1+\left(\frac{n}{3+\alpha}\right)^2} \cdots \end{aligned}$$

Der Spezialfall  $n = 0$  reduziert sich auf

$$\Gamma^2(1+\alpha) = \frac{1}{(1+\alpha)^2} \cdot \frac{1}{(2+\alpha)^2} \cdot \frac{1}{(3+\alpha)^2} \cdots$$

Demnach

$$\Gamma(1+in+\alpha)\Gamma(1-in+\alpha) = \Gamma^2(1+\alpha) \cdot \frac{1}{1+\left(\frac{n}{1+\alpha}\right)^2} \cdot \frac{1}{1+\left(\frac{n}{2+\alpha}\right)^2} \cdot \frac{1}{1+\left(\frac{n}{3+\alpha}\right)^2} \cdots$$

Somit, indem man  $a$  anstelle von  $1+\alpha$  und  $x$  anstatt  $n$  schreibt, folgt das Theorem.  $\square$

**Theorem 11** (Eine erste Partialbruchzerlegung). *Das Produkt*

$$\frac{1}{1+\frac{x^2}{a^2}} \cdot \frac{1}{1+\frac{x^2}{(a+1)^2}} \cdot \frac{1}{1+\frac{x^2}{(a+2)^2}} \cdots$$

ist der folgenden unendlichen Partialbruchzerlegung gleichwertig

$$A_0 \cdot \frac{a}{a^2+x^2} + A_1 \cdot \frac{a+1}{(a+1)^2+x^2} + A_2 \cdot \frac{a+2}{(a+2)^2+x^2} + \cdots$$

mit

$$A_0 = \frac{2\Gamma(2a)}{\Gamma^2(a)}, \quad A_1 = \frac{2\Gamma(2a)}{\Gamma^2(a)} \cdot \left(-\frac{2a}{1!}\right), \quad A_2 = \frac{2\Gamma(2a)}{\Gamma^2(a)} \cdot \frac{2a(2a+1)}{2!} \quad \text{etc.}$$

*Beweis.* Für die Berechnung der Koeffizienten  $A_0, A_1, A_2$  etc. kann man sich der Methode bedienen, welche Euler in seiner Arbeit [EulerE592] vorgestellt

hat und welche in Abschnitt (7.3.2) zur am Beispiel der Partialbruchzerlegung von  $\cot(x)$  Sprache kam. Es wird für das Verständnis hinreichen, stellvertretend für den allgemeinen Fall den ersten Koeffizienten  $A_0$  berechnet zu haben. Nach Eulers Vorgehen nehme man an:

$$\frac{1}{1 + \frac{x^2}{a^2}} \cdot \frac{1}{1 + \frac{x^2}{(a+1)^2}} \cdot \frac{1}{1 + \frac{x^2}{(a+2)^2}} \cdots = A_0 \frac{a}{a^2 + x^2} + R_0,$$

wo  $R_0$  eine Funktion ist, die den Faktor  $a^2 + x^2$  nicht beinhaltet. Gemäß Theorem (10) liest sich diese Gleichung als

$$\frac{\Gamma(a + ix)\Gamma(a - ix)}{\Gamma^2(a)} = A_0 \cdot \frac{a}{a^2 + x^2} + R_0,$$

welche gleichwertig ist zu

$$1 = A_0 \cdot \frac{a}{a^2 + x^2} \frac{\Gamma^2(a)}{\Gamma(a + ix)\Gamma(a - ix)} + R_0 \cdot \frac{\Gamma^2(a)}{\Gamma(a + ix)\Gamma(a - ix)}.$$

Man nehme den Grenzwert  $x \rightarrow ia$ . Dies gibt

$$1 = A_0 \cdot a \lim_{x \rightarrow ia} \frac{\Gamma^2(a)}{\Gamma(a + ix)\Gamma(a - ix)} \frac{1}{a^2 + x^2},$$

weil der zweite Term auf der rechten Seite für diesen Grenzwert verschwindet. Unter Bemerkung der Gleichheit  $a^2 + x^2 = (a + ix)(a - ix)$  und Verwendung der Relation  $\Gamma(z + 1) = z\Gamma(z)$  erhält man:

$$1 = A_0 \cdot a \lim_{x \rightarrow ia} \frac{\Gamma^2(a)}{\Gamma(a + ix + 1)\Gamma(a - ix + 1)}.$$

Der Grenzwert kann evaluiert werden und führt zur Gleichung

$$1 = A_0 \cdot a \cdot \frac{\Gamma^2(a)}{\Gamma(1)\Gamma(2a + 1)} = A_0 \cdot a \cdot \frac{\Gamma^2(a)}{2a\Gamma(2a)},$$

wo  $\Gamma(z + 1) = z\Gamma(z)$  und  $\Gamma(1) = 1$  im letzten Schritt gebraucht wurden. Durch Auflösen nach  $A_0$  gelangt man zu

$$A_0 = \frac{2\Gamma(2a)}{\Gamma^2(a)}.$$

Die Berechnung der weiteren Koeffizienten  $A_1, A_2$  verläuft analog. Das Muster der Werte wird schnell sichtbar, sodass eine detaillierte Untersuchung hier ausgespart wird.  $\square$

**Theorem 12** (Eine zweite Partialbruchzerlegung). *Das Produkt*

$$\frac{\Gamma^2(b)\Gamma(a+ix)\Gamma(a-ix)}{\Gamma^2(a)\Gamma(b+ix)\Gamma(b-ix)} = \frac{1 + \frac{x^2}{b^2}}{1 + \frac{x^2}{a^2}} \cdot \frac{1 + \frac{x^2}{(b+1)^2}}{1 + \frac{x^2}{(a+1)^2}} \cdot \frac{1 + \frac{x^2}{(b+1)^2}}{1 + \frac{x^2}{(a+1)^2}} \cdots$$

kann als die folgende Partialbruchzerlegung dargestellt werden

$$\frac{\Gamma^2(b)\Gamma(a+ix)\Gamma(a-ix)}{\Gamma^2(a)\Gamma(b+ix)\Gamma(b-ix)} = B_0 \cdot \frac{a}{a^2 + x^2} + B_1 \cdot \frac{a+1}{(a+1)^2 + x^2} + B_2 \cdot \frac{a+2}{(a+2)^2 + x^2} \cdots$$

mit Koeffizienten

$$B_0 = A_0 \cdot \frac{\Gamma^2(b)}{\Gamma(b-a)\Gamma(b+a)}, \quad B_1 = \frac{\Gamma^2(b)}{\Gamma(b-a)\Gamma(b+a)} \cdot A_1 \cdot \frac{b-a-1}{b+a},$$

$$B_2 = \frac{\Gamma^2(b)}{\Gamma(b-a)\Gamma(b+a)} \cdot A_2 \cdot \frac{b-a-1}{b+a} \cdot \frac{b-a-2}{b+a+1} \quad \text{etc.}$$

wo  $A_0, A_1, A_2$  etc. die Koeffizienten von Theorem (11) andeutet, also

$$A_0 = \frac{2\Gamma(2a)}{\Gamma^2(a)}, \quad A_1 = \frac{2\Gamma(2a)}{\Gamma^2(a)} \cdot \left(-\frac{2a}{1!}\right), \quad A_2 = \frac{2\Gamma(2a)}{\Gamma^2(a)} \cdot \frac{2a(2a+1)}{2!} \quad \text{etc.}$$

*Beweis.* Der Beweis verläuft analog zu dem von Theorem (11). Zwecks Illustration wird der Koeffizient  $B_0$  hier explizit ausgerechnet. Wieder dem Euler'schen Vorgehen aus [EulerE592] folgend, betrachte man den Ansatz

$$\frac{\Gamma^2(b)\Gamma(a+ix)\Gamma(a-ix)}{\Gamma^2(a)\Gamma(b+ix)\Gamma(b-ix)} = B_0 \cdot \frac{a}{a^2 + x^2} + R_0,$$

wo  $R_0$  eine Funktion ist, die den Faktor  $a^2 + x^2$  nicht aufweist. Daraus inferiert man den Grenzwert

$$\frac{\Gamma^2(b)}{\Gamma(b-a)\Gamma(b+a)} = B_0 \cdot a \cdot \lim_{x \rightarrow ia} \frac{1}{x^2 + a^2} \frac{1}{\Gamma(a+ix)\Gamma(a-ix)}.$$

Der noch vorhandene Grenzwert ist aus dem vorherigen Theorem bekannt. Unter Verwendung des Koeffizienten  $A_0$  aus nämlichen Theorem (11), gibt dies insgesamt die Gleichung

$$B_0 = A_0 \cdot \frac{\Gamma^2(b)}{\Gamma(b-a)\Gamma(b+a)}.$$

Gleichermaßen ist

$$B_1 = \frac{\Gamma^2(b)}{(b+a)\Gamma(b+a)} \cdot \frac{b-a-1}{\Gamma(b-a)} \cdot A_1 = -\frac{\Gamma^2(b)}{\Gamma(b+a)\Gamma(b-a)} \cdot A_1 \cdot \frac{a-b+1}{b+a}$$

und

$$B_2 = \frac{\Gamma^2(b)}{\Gamma(b-a)\Gamma(b+a)} \cdot A_2 \cdot \frac{a-b+1}{b+a} \cdot \frac{a-b+2}{b+a+1}.$$

Analoges gilt für die weiteren Koeffizienten.  $\square$

**Herleitung des Ramanujan'schen Integrals** Nach diesen Vorbereitungen kann nun (178) hergeleitet werden. Aus Theorem (12) lässt sich das Integral wie folgt umschreiben

$$\int_0^{\infty} \left( B_0 \cdot \frac{a}{a^2 + x^2} + B_1 \cdot \frac{a+1}{(a+1)^2 + x^2} + B_2 \cdot \frac{a+2}{(a+2)^2 + x^2} \cdots \right) dx.$$

Im Allgemeinen gilt

$$\int_0^{\infty} \frac{k dx}{x^2 + k^2} = \frac{\pi}{2}$$

für eine reelle Zahl  $k$ . Demnach erhält man durch Einsetzen der Koeffizienten  $B_0, B_1, B_2, \dots$  aus Lehrsatz (12) und separates Integrieren jedes Terms:

$$\int_0^{\infty} \frac{\Gamma^2(b)\Gamma(a+ix)\Gamma(a-ix)}{\Gamma^2(a)\Gamma(b+ix)\Gamma(b-ix)} dx = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{\Gamma^2(b)}{\Gamma(b-a)\Gamma(b+a)} \cdot \frac{2\Gamma^2(2a)}{\Gamma^2(a)} \times$$

$$\left( 1 + \frac{2a}{1} \cdot \frac{a-b+1}{a+b} + \frac{2a(2a+1)}{2!} \cdot \frac{a-b+1}{a+b} \cdot \frac{a-b+2}{a+b+1} + \dots \right). \quad (179)$$

Die Summe, welche den zweiten Faktor bildet, kann vermöge Theorem (9) gefunden werden. Die Gauß'sche Formel liefert:

$${}_2F_1(2a, a - b + 1, a + b; 1) = \frac{\Gamma(a + b)\Gamma(2(b - a) - 1)}{\Gamma(b - a)\Gamma(2b - 1)}.$$

Unter Verwendung von  $\Gamma(x + 1) = x\Gamma(x)$  und anschließend der Legendre'schen Verdopplungsformel (Theorem 8) ergibt sich die rechte Seite zu

$$\frac{\Gamma(a + b)}{\Gamma(b - a)} \cdot \frac{2^{2(b-a)-1}}{2^{2b-1}} \cdot \frac{\Gamma(b - a)\Gamma(b - a + \frac{1}{2})}{\Gamma(b)\Gamma(b + \frac{1}{2})} \cdot \frac{2(b - \frac{1}{2})}{2(b - 1 - \frac{1}{2})},$$

sodass sich viele Terme aufheben. Schlussendlich gelangt man zum Ausdruck:

$$\frac{\Gamma(a + b)}{\Gamma(b)} \cdot 2^{-2a} \cdot \frac{\Gamma(b - a - \frac{1}{2})}{\Gamma(b - \frac{1}{2})}.$$

Setzt man dies in (179) ein, ergibt sich

$$\int_0^\infty \frac{\Gamma^2(b)\Gamma(a + ix)\Gamma(a - ix)}{\Gamma^2(a)\Gamma(b + ix)\Gamma(b - ix)} dx = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{\Gamma^2(b)}{\Gamma(b - a)\Gamma(b + a)} \frac{2\Gamma^2(2a)}{\Gamma^2(a)} \times \frac{\Gamma(a + b)}{\Gamma(b)} \cdot 2^{-2a} \cdot \frac{\Gamma(b - a - \frac{1}{2})}{\Gamma(b - \frac{1}{2})}.$$

Mit Theorem (8) ersetze man  $\Gamma(2a)$  und vereinfache anschließend; die rechte Seite wird dann zu

$$\frac{1}{2} \sqrt{\pi} \cdot \frac{\Gamma(a + \frac{1}{2})\Gamma(b)\Gamma(b - a - \frac{1}{2})}{\Gamma(a)\Gamma(b - \frac{1}{2})\Gamma(b - a)}.$$

Vermöge der Produktformel (10) kann der Integrand als Produkt ausgedrückt werden, womit (178) bewiesen ist – allein unter Verwendung Euler'scher Formeln und Ideen.

**Gründe warum Euler Ramanujans Formel nicht selbst entdeckt hat** Obwohl Euler alle Bausteine und Fähigkeiten besaß, um (178) selbst zu entdecken, findet sich die Ramanujan'sche Formel nicht unter den seinen. Euler scheint überdies die Produkte in der Form von Theorem (10) nur für den Fall betrachtet  $a = 1$  zu haben<sup>284</sup>. Unabhängig davon hat Euler in seinen Untersuchungen über die  $\Gamma$ -Funktion seine Forschungen nie *explizit*

<sup>284</sup>In diesem Fall wird das Produkt  $\frac{\sinh(\pi x)}{\pi x}$ .

auf komplexe Zahlen ausgedehnt. Vielmehr präferierte Euler generell die reelle Gerade in seinen Ausführungen, wie oben (Abschnitt 7.3.1) dargelegt wurde. Daher lässt sich die Nichtentdeckung von (178) durch Euler wohl zum großen Teil auf Eulers Art der Behandlung von Funktionen einer komplexen Variable zurückführen.

### 8.2.2 Ramanujans Mastertheorem

If you have to prove a theorem, do not rush. First of all, understand fully what the theorem says, try to see clearly what it means. [...] When you have satisfied yourself that the theorem is true, you can start proving it.

---

George Polya

Ramanujan hat in seiner Arbeit [Ramanujan2] weiterhin die allgemeine Formel

$$\int_0^{\infty} x^{s-1} f(x) dx = \varphi(-s) \Gamma(s) \quad \text{und} \quad f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\varphi(k)}{k!} (-x)^k \quad (180)$$

angegeben. Während Ramanujan in erwähnter Abhandlung keinen Beweis mitteilt, soll hier ein Weg aufgezeigt werden, wie ein solcher sich aus Eulers Formeln finden lässt. Dafür bedarf es zweier Ausdrücke aus Eulers Arbeiten.

**Theorem 13** (Euler'sche Transformationsformel). *Die Potenzreihe*

$$B(x) := b_1 x - b_2 x^2 + b_3 x^3 - b_4 x^4 + \dots$$

kann auch wie folgt geschrieben werden:

$$B(x) = b_1 \frac{x}{1+x} - \Delta^1 b_1 \left( \frac{x}{1+x} \right)^2 + \Delta^2 b_1 \left( \frac{x}{1+x} \right)^3 - \Delta^3 b_1 \left( \frac{x}{1+x} \right)^4 - \dots$$

Dabei sind  $\Delta^1 b_1, \Delta^2 b_1, \Delta^3 b_1$  etc. die Differenzen erster, zweiter, dritter etc. Ordnung.

Euler weist diese Identität unter anderem in § 8 des zweiten Teils seiner *Calculi Differentialis* [EulerE212] nach<sup>285</sup>. Weiter benötigt man den folgenden Lehrsatz, welchen Euler in § 4 seiner Arbeit [EulerE613] beweist.

**Theorem 14** (Euler-Newton-Interpolation). *Ist eine Funktion  $f$  auf den natürlichen Zahlen gegeben, kann sie wie folgt geschrieben werden:*

$$f(n) = f(0) + \frac{n-1}{1} \Delta^1 f(0) + \frac{n-1}{1} \frac{n-2}{2} \Delta^2 f(0) + \frac{n-1}{1} \frac{n-2}{2} \frac{n-3}{3} \Delta^3 f(0) + \text{etc.}$$

mit den Differenzenoperatoren  $\Delta^1$ ,  $\Delta^2$ ,  $\Delta^3$  etc. erster, zweiter, dritter etc. Ordnung, sodass die rechte Seite auch für nicht-natürliche  $n$  sinnvoll ist.

Diese Interpolationsformel ist auch als Newton-Interpolation bekannt<sup>286</sup>. Mit ihr und dem ersten Satz kann nun Ramanujans Formel (180) bewiesen werden. Wie in Theorem (13) setze man

$$B(x) = b_1 x - b_2 x^2 + b_3 x^3 - b_4 x^4 + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} b_n x^n$$

und betrachte das Integral

$$F(s) := \int_0^{\infty} x^{s-1} B(x) dx.$$

Nach der Euler'schen Transformationsformel (13) gilt:

$$F(s) = \int_0^{\infty} x^{s-1} \sum_{n=0}^{\infty} \Delta^n b_1 \left( \frac{x}{1+x} \right)^{n+1} dx.$$

Unter Annahme entsprechender Annahmen über die Koeffizienten, lassen sich die Integration und Summation vertauschen, sodass gilt:

$$F(s) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \Delta^n b_1 \int_0^{\infty} \frac{x^{s+n} dx}{(1+x)^{n+1}}.$$

<sup>285</sup>Diese Formel ließe sich auch in der Untersuchung über von Euler mitgeteilte Kuriositäten (Abschnitt 3.1.4) herauslesen.

<sup>286</sup>Euler hat sie auch in § 17 seiner viel früher verfassten Arbeit [EulerE125] aus dem Jahr 1739 angegeben und beschreibt sie dort als "bekannt". Damit könnte Euler auf Newtons Werk referieren, wo man sie im dritten Buch seiner "*Philosophiae naturalis principia mathematica*" ([Newton], 1687) findet, mit welchem Euler gut vertraut war.

Mit den Darstellungen des Beta-Integrals

$$B(x, y) = \int_0^1 \frac{t^{x-1} dt}{(1+t)^{x+y}} = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}$$

vereinfacht sich die letzte Formel zu:

$$F(s) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \Delta^n b_1 \frac{\Gamma(-s)\Gamma(s+n+1)}{\Gamma(n+1)}.$$

Unter wiederholter Anwendung der Funktionalgleichung  $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$  ergibt sich

$$F(s) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \Delta^n b_1 \Gamma(s)\Gamma(1-s) \frac{s+1}{1} \frac{s+2}{2} \cdots \frac{s+n}{n},$$

welche Formel sich unter Berücksichtigung der Formel

$$\Gamma(s)\Gamma(1-s) = \frac{\pi}{\sin(\pi s)}$$

als

$$F(s) = \frac{\pi}{\sin(-s\pi)} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \Delta^n b_1 \frac{s+1}{1} \frac{s+2}{2} \cdots \frac{s+n}{n}$$

schreiben lässt. Hier lasse man nun  $s$  in  $-s$  übergehen:

$$F(-s) = \frac{\pi}{\sin(s\pi)} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \Delta^n b_1 \frac{-s+1}{1} \frac{-s+2}{2} \cdots \frac{-s+n}{n},$$

oder

$$F(-s) = \frac{\pi}{\sin(s\pi)} \sum_{n=0}^{\infty} \Delta^n b_1 \frac{s-1}{1} \frac{s-2}{2} \cdots \frac{s+n}{n}.$$

Die Summe kann nun mit der Newton'schen-Interpolationsformel aus Theorem (14) ausgewertet werden, sodass insgesamt gilt:

$$F(-s) = \frac{\pi}{\sin(\pi s)} b(s)$$

oder auch

$$F(s) = \int_0^{\infty} x^{s-1} B(x) dx = -\frac{\pi}{\sin(\pi s)} b(-s). \quad (181)$$

Weil

$$-B(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n b_n x^n,$$

interpoliert die soeben bewiesene Formel die Koeffizienten  $b_n$ . Um nun zur Ramanujan'schen Formel (180) zu gelangen, ist in den Formeln  $b_n$  in  $\frac{\varphi(n)}{n!}$  übergehen zu lassen, woraus die Formel unmittelbar folgt.

Die Ramanujan'sche Interpolationsformel (180) kann also ebenfalls aus Euler'schen Formeln hergeleitet werden. Die Verbindung zur Euler'schen Transformationsformel aus Theorem (14) ist auch von Hardy auf Seite 192 seines Buches *“Ramanujan”* ([Hardy2], 2002) bemerkt worden. In selbigem Buch findet sich auch ein Beweis von Ramanujans Theorem und ähnlichen derselben Gestalt mit den Mitteln komplexer Analysis.

### 8.2.3 Ramanujans Formeln zur Kreisquadratur

The mathematician's patterns,  
like the painter's or the poet's  
must be beautiful; the ideas, like  
the colours or the words must fit  
together in a harmonious way.  
Beauty is the first test: there is  
no permanent place in the world  
for ugly mathematics.

---

Godfrey Harold Hardy

Euler hat seine Definition der Summe von divergenten Reihen (siehe Abschnitt (7.1.3) für die Definition) an vielen anderen Stellen verwendet, um gewisse Hindernisse zu überwinden – das angesprochene Beispiel der  $\zeta$ -Funktion (Abschnitt 6.1.2) kann als pars pro toto dessen angesehen werden. Statt einer Besprechung weiterer Beispiele von Euler sich kann sich auf modernere Arbeiten wie *“Proof of some conjectured formulas for  $\frac{1}{\pi}$  by Z.W.Sun”* ([Almkvist], 2011) und *“On proving some of Ramanujan's formulas for  $\frac{1}{\pi}$  with an elementary method”* ([Aycock1], 2013) berufen werden, welche im Zusammenhang von Reihen der Form

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{1}{2}\right)_n (s)_n (1-s)_n}{(1)_n^3} (An + B)(x_0)^n = \frac{C}{\pi}, \quad (182)$$

wo  $s = \frac{1}{2}, \frac{1}{3}$  oder  $\frac{1}{6}$  und  $A, B$  rationale sowie  $C$  und  $x_0$  komplexe Zahlen sind und

$$(x)_n := x(x+1) \cdots (x+n)$$

das Pochhammer-Symbol bedeutet, ebenfalls in Euler'scher Manier mit divergenten Reihen hantieren, um gewisse Resultate nachzuweisen. Die Betrachtung und Behandlung dieser Reihen stellt eine schöne Parallele zur Euler'schen Lösung des Basel-Problems (Abschnitt 4.1) dar. Von den ursprünglichen Ramanujan'schen Arbeiten, wie *“Modular equations and approximations to  $\pi$ ”* ([Ramanujan1], 1914), motiviert sind in der Arbeit *“Some new series for  $\frac{1}{\pi}$  and related congruences”* ([Sun], 2011) viele Reihen der Form (182) mit Hilfe computerunterstützter Methoden gefunden worden, verlangten aber nach einem expliziten Beweis, was für einen Teil der dort mitgeteilten Identitäten in [Almkvist] mit elementaren Methoden geschehen ist, welche in ihrer Essenz nicht über die aus den Euler'schen Arbeiten und [Gauß3] hinausgehen. Die grundlegende Identität ist die Gauß'sche Formel (95), welche dann mit den zahlreichen Transformationsformeln für die hypergeometrische Funktion, welche Euler und Gauß noch nicht bekannt waren, und etwa im Buch *“Special Functions”* ([Andrews2], 2011) zu finden sind, in die in [Sun] entdeckten Reihen überführt worden sind. Diese Idee wird in der Übersichtsarbeit [Aycock1] dargestellt. Hier sollen die oben genannten Arbeiten am Beweis der sogenannten Bauer'schen Reihe nachvollzogen werden. Dies ist die Summierung

$$\frac{2}{\pi} = 1 - 5 \left(\frac{1}{2}\right)^3 + 9 \left(\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}\right)^3 - 13 \left(\frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}\right)^3 + \cdots \quad (183)$$

Diese Reihe wurde ebenfalls von Ramanujan in seinem oben (Abschnitt 8.2.1) erwähnten Brief an Hardy mitgeteilt. Daneben wurde ihr unlängst die Arbeit *“The Bauer–Ramanujan formula: historical analyses and perspectives”* ([Campell], 2024) gewidmet, welche verschiedene Beweise dieser Formel gesammelt darstellt.

**Die grundlegende Formel** Für den Beweis der Bauer'schen Reihe bedarf es einer Hilfsformel aus [Almkvist].

**Theorem 15** (Hilfsformel). *Es gilt*

$$\sum_{n=0}^{\infty} n \left(\frac{1}{2}\right)^n \sum_{k=0}^n \left(\frac{(s)_k(1-s)_k}{(k!)}\right)^2 \left(\frac{(s)_{n-k}(1-s)_{n-k}}{(n-k)!}\right)^2$$

mit dem Pochhammer-Symbol

$$(s)_n = \frac{\Gamma(s+n)}{\Gamma(s)} = (s+n-1)(s+n-2)\cdots s.$$

*Beweis.* Man betrachte das Quadrat der hypergeometrischen Funktion  ${}_2F_1(s, 1-s, 1; x)$ , denn mit dem Cauchy-Produkt für Potenzreihen gilt:

$$({}_2F_1(s, 1-s, 1; x))^2 = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \sum_{k=0}^n \left(\frac{(s)_k(1-s)_k}{(k!)}\right)^2 \left(\frac{(s)_{n-k}(1-s)_{n-k}}{(n-k)!}\right)^2.$$

Nun werde der Operator  $x \frac{d}{dx}$  auf beide Seiten appliziert:

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} nx^n \sum_{k=0}^n \left(\frac{(s)_k(1-s)_k}{(k!)}\right)^2 \left(\frac{(s)_{n-k}(1-s)_{n-k}}{(n-k)!}\right)^2 = \\ 2s(1-s)x {}_2F_1(s, 1-s, 1; x) {}_2F_1(1+s, 2-s, 2; x). \end{aligned}$$

Die linke Seite hat bereits die gewünschte Form. Zur Vereinfachung der rechten Seite greife man auf die zweite Gauß'sche Summationsformel zurück, welche auch oben in (95) schon auftrat. Sie lautet

$${}_2F_1\left(a, b, \frac{a+b+1}{2}; \frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi} \frac{\Gamma\left(\frac{a+b+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{a+1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{b+1}{2}\right)},$$

mit welcher die rechte Seite übergeht in:

$$2 \cdot \frac{1}{2} s(1-s)\pi \cdot \frac{\Gamma(1)}{\Gamma\left(\frac{1}{2} + \frac{s}{2}\right) \Gamma\left(1 - \frac{s}{2}\right)} \cdot \frac{\Gamma(2)}{\Gamma\left(1 + \frac{s}{2}\right) \Gamma\left(\frac{3}{2} - s\right)}.$$

Mit der Formel  $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$  folgt dann:

$$2 \cdot \frac{1}{2} s(1-s)\pi \cdot \frac{\Gamma(1)}{\Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \frac{s}{2} \Gamma\left(1 - \frac{s}{2}\right)} \cdot \frac{\Gamma(2)}{\Gamma\left(1 + \frac{s}{2}\right) \left(\frac{1}{2} - \frac{s}{2}\right) \Gamma\left(\frac{1}{2} - \frac{s}{2}\right)}.$$

Dies lässt sich vermöge der Reflexionsformel  $\frac{\pi}{\sin(\pi s)} = \Gamma(s)\Gamma(1-s)$  vereinfachen zu:

$$4\pi \cdot \frac{\sin\left(\frac{\pi s}{2}\right)}{\pi} \cdot \frac{\sin\left(\pi\left(\frac{1}{2} - \frac{s}{2}\right)\right)}{\pi} = \frac{4}{\pi} \sin\left(\frac{\pi s}{2}\right) \cos\left(\frac{\pi s}{2}\right) = \frac{2}{\pi} \sin(\pi s),$$

wobei im letzten Schritt die Verdopplungsformel für den Sinus benutzt wurde.  $\square$

**Das Beispiel der Bauer'schen Reihe** Nun erfolgt der Beweis von (183), welche mithilfe des Pochhammer-Symbols auch wie folgt angeschrieben werden kann:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{1}{2}\right)_n \left(\frac{1}{2}\right)_n \left(\frac{1}{2}\right)_n}{(1)_n (1)_n (1)_n} (4n+1)(-1)^n = \frac{2}{\pi}.$$

Denn die Verwendung einer weiteren Transformationsformel für hypergeometrische Reihe, die Johann Pfaff (1765–1825) zugeschrieben wird, sich aber wie erwähnt (Abschnitt 5.2.5) sich aus der Euler'schen Formel aus Theorem (13) ergibt, nämlich:

$${}_2F_1(\alpha, \beta, \gamma; x) = (1-x)^{-\beta} {}_2F_1\left(\gamma - \alpha, \beta, \gamma; \frac{x}{x-1}\right), \quad (184)$$

für den Fall  $\alpha = \frac{3}{4}$ ,  $\beta = \frac{1}{4}$ ,  $\gamma = 1$  und anschließender Quadratur ergibt:

$$\left({}_2F_1\left(\frac{1}{4}, \frac{3}{4}, 1; x\right)\right)^2 = (1-x)^{-\frac{1}{2}} \left({}_2F_1\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, 1; \frac{x}{x-1}\right)\right)^2$$

Mithilfe der folgenden Clausen'schen Formel aus der Arbeit (*“Ueber die Fälle, wenn die Reihe von der Form  $y = 1 + \frac{\alpha}{1} \cdot \frac{\beta}{\gamma} x + \frac{\alpha \cdot \alpha + 1}{1 \cdot 2} \cdot \frac{\beta \cdot \beta + 1}{\gamma \cdot \gamma + 1} x^2 + \text{etc.}$  ein Quadrat der Form  $z = 1 + \frac{\alpha'}{1} \cdot \frac{\beta'}{\gamma'} \cdot \frac{\delta'}{\varepsilon'} x + \frac{\alpha' \cdot \alpha' + 1}{1 \cdot 2} \cdot \frac{\beta' \cdot \beta' + 1}{\gamma' \cdot \gamma' + 1} \cdot \frac{\delta' \cdot \delta' + 1}{\varepsilon' \cdot \varepsilon' + 1} x^2 + \text{etc.}$  hat”*) ([Clausen], 1828)

$${}_2F_1\left(a, b, a + b + \frac{1}{2}; z\right)^2 = {}_3F_2\left(2a, 2b, a + b; 2a + 2b, a + b + \frac{1}{2}\right) \quad (185)$$

mit

$${}_3F_2(\alpha, \beta, \gamma; a, b; z) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_n (\beta)_n (\gamma)_n}{(a)_n (b)_n} \frac{z^n}{n!}, \quad (186)$$

hat man demnach insgesamt:

$$\left( {}_2F_1\left(\frac{1}{4}, \frac{3}{4}, 1; x\right) \right)^2 = (1-x)^{-\frac{1}{2}} {}_3F_2\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}; 1, 1; \frac{x}{x-1}\right).$$

Nun wende man auf beide Seiten dieser Gleichung den Operator  $x \frac{d}{dx}$  und setze anschließend  $x = \frac{1}{2}$ . Die linke Seite lässt sich dann mit dem Hilfssatz (15) berechnen. Es bleibt die rechte Seite zu betrachten. Mit der Festlegung

$${}_3F_2\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}; 1, 1; x\right) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n,$$

gilt:

$$\begin{aligned} x \frac{d}{dx} (1-x)^{-\frac{1}{2}} {}_3F_2\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}; 1, 1; \frac{x}{x-1}\right) &= x \frac{d}{dx} \sum_{n=0}^{\infty} a_n \left(\frac{x}{x-1}\right)^n \\ &= \frac{x(1-x)^{-\frac{3}{2}}}{2} \sum_{n=0}^{\infty} a_n \left(\frac{x}{x-1}\right)^n + (1-x)^{-\frac{3}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} n a_n \left(\frac{x}{x-1}\right)^n. \end{aligned}$$

Setzt man in der Hilfsformel (15) nun  $s = \frac{1}{4}$ , findet man schließlich:

$$\frac{\sin \frac{\pi}{4}}{\pi} = \frac{\sqrt{2}}{2\pi} = \frac{\sqrt{2}}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{1}{2}\right)_n^3}{(1)_n^3} (4n+1)(-1)^n,$$

was gerade die Bauer'sche Reihe (183) ist. Wie auch in [Hardy2] erwähnt, ist unklar, wie Ramanujan selbst die Bauer'sche Reihe gezeigt hat. Obwohl man Reihen ähnlicher Natur, die auch in seinen Brief [Ramanujan3] zu finden sind, mithilfe der Clausen'schen Formel (185) und Summationstheoremen für die hypergeometrische Reihe zeigen kann, ist zu vermuten, dass Ramanujan sie aus einer allgemeineren Summationsformel für die verallgemeinerte hypergeometrische Reihe abgeleitet hat. Während also der Ramanujan'sche Zugang eher ein "top-down" Vorgang ist, ist der eben präsentierte ein eher "bottom-up" Vorgang.

**Divergente Reihen derselben Form** Mit derselben Methode, mit welcher die Bauer'sche Formel (183) nachgewiesen worden ist, lassen sich weitere Reihen der Form (182) zeigen. Man konsultiere die schon oben genannte Arbeit [Almkvist] für mehrere Beispiele. Darunter finden sich unter anderen die divergenten Reihen:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{1}{2}\right)_n^3}{(1)_n^3} (3n+1)(-8)^n = \frac{1}{\pi}$$

sowie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{1}{2}\right)_n^3}{(1)_n^3} (3n+1)(4)^n = -\frac{2i}{\pi}.$$

Die erste alternierende Reihe lässt sich mit den von Euler in [EulerE247] vorgestellten Ideen ebenfalls zum selben Wert berechnen. Die zweite Reihe hingegen nicht, allerdings erinnert sie an die oben (Abschnitt 7.1.4) zitierte Euler'sche Äußerung, die Addition von lauter positiven Termen führe zu einer imaginären Summe, sofern man natürlich Summen einer divergenten Reihe im Euler'schen Sinne zulässt. Mit dem Beispiel des Ramanujan'schen Typs erfährt demnach auch diese Euler'sche Behauptung eine weitere Bestätigung und in der Tat ließen sich beide angeführten Reihen verwenden, um weitere ebenfalls richtige Reihen der Form (182) nachzuweisen. Streng bewiesen und eingeordnet wurden diese divergenten Reihen dann von vielen weiteren Autoren. Eine zusammenfassende Darstellung findet man etwa im entsprechenden Kapitel des Buchs *“Ramanujan's Theta Functions”* ([Cooper], 2017) und dem Schlagwort *Ramanujan–Sato Series*.

**Ein Beispiel ähnlicher Form bei Euler** Abschließend soll noch eine Reihe der Gestalt (182) aus dem Euler'schen Opus angegeben werden. In seiner Arbeit *“De eximio usu methodi interpolationum in serierum doctrina”* ([EulerE555], 1783, ges. 1773) (E555: “Über den riesigen Nutzen der Interpolationsmethoden bei der Reihenlehre”) gelangt Euler in seinen Untersuchungen zu Interpolationen in § 54 zu der allgemeinen Formel:

$$\begin{aligned} \frac{\sin(\omega\pi)}{\omega\pi} &= 1 + \frac{\omega^2(\omega^2-1)}{1 \cdot 2 \cdot 1^2} + \frac{\omega^2(\omega^2-1)^2(\omega^2-4)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 1^2 \cdot 2^2} + \dots \\ &- \frac{\omega^2}{1} - \frac{\omega^2(\omega^2-1)^2}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 1^2 \cdot 2} - \frac{\omega^2(\omega^2-1)^2(\omega^2-4)^2}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 1^2 \cdot 2^2 \cdot 3} - \dots \end{aligned}$$

Euler betrachtet hiervon den Spezialfall  $\omega = \frac{1}{2}$ , welche Reihe sich wie nachstehend schreiben lässt:

$$1 - \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{(2n-1)!!}{n!} \right)^3 \frac{2n+1}{2n-1} \frac{1}{2^{5n}} - \frac{1}{4} \left( 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{(2n-1)!!}{n!} \right)^3 \frac{2n+1}{n+1} \frac{1}{2^{5n}} \right).$$

Mithilfe der verallgemeinerten hypergeometrischen Funktion  ${}_3F_2$  aus (186) lässt sich dies wie folgt ausdrücken:

$$\frac{2}{\pi} = {}_3F_2\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}; 1, 1; \frac{1}{4}\right) - \frac{1}{16} \cdot {}_3F_2\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{3}{2}; 2, 2; \frac{1}{4}\right) - \frac{1}{4} \left( {}_3F_2\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}; 1, 2; \frac{1}{4}\right) + \frac{1}{32} \cdot {}_3F_2\left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}, \frac{3}{2}; 2, 3; \frac{1}{4}\right) \right).$$

Man kann sie also nicht ganz in die Ramanujan'sche Form bringen, jedoch ist die Ähnlichkeit vorhanden. Denn setzt man

$${}_3F_2\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}; 1, 1; x\right) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \quad \text{und} \quad {}_3F_2\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}; 1, 1; x\right) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n,$$

kann man auch schreiben:

$$\frac{2}{\pi} = \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1)a_n \left(\frac{1}{4}\right)^n - \frac{1}{4} \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1)b_n \left(\frac{1}{4}\right)^n$$

oder

$$\frac{8}{\pi} = \sum_{n=0}^{\infty} (4a_n - b_n)(2n+1) \left(\frac{1}{4}\right)^n$$

oder gar nach Vereinfachung der Differenz  $4a_n - b_n$ , indem man nur  $a_n$  übrig behält:

$$\frac{8}{\pi} = \sum_{n=0}^{\infty} 3 \cdot \frac{(2n+1)^2}{n+1} a_n \left(\frac{1}{4}\right)^n,$$

welche Reihe "fast" den Ramanujan'schen Typ (182) hat, zumal der Term  $\frac{(2n+1)^2}{n+1}$  das Polynom  $4n$  als Asymptote besitzt.

## 9 Zusammenfassung

To do easily what is difficult for others is the mark of talent. To do what is impossible for talent is the mark of genius.

---

Henri-Frédéric Amiel

Die vorliegende Arbeit soll mit einer knappen Zusammenfassung der vorgetragenen Euler'schen Arbeitsexzerpte ihren Schlusspunkt finden.

### 9.1 Grundlegendes

In a different time, in a different place, it is always some other side of our common human nature that has been developing itself. The actual truth is the sum of all these.

---

Thomas Carlyle

Zu Eulers Zeiten, dem 18. Jahrhundert, ist Mathematik gänzlich anders betrieben und präsentiert worden als heutzutage. Die Kernaspekte der Euler'schen Philosophie und insbesondere die Unterschiede zum modernen Gegenstück sind anhand kurzer Beispiele illustriert worden (Abschnitt 3). Die wesentlichen Differenzen betreffen unter anderem die Auffassung eines Beweises (3.1.4), die Rolle der Definition (3.1.3) und auch die bewusste Darstellung kurioser Sachverhalte (3.2.2). Während bei Euler die Beweise bisweilen eine heuristische Essenz haben und Euler den Leser durch induktive Argumente zu überzeugen versucht, wird heute wieder der synthetisch-deduktive Stil nach Euklid'schem Vorbild gewählt.

Neben der Vorstellung der Euler'schen Schaffensweise anhand bekannter Beispiele wie dem Baseler Problem (Abschnitt 4.1) sind außerdem weniger in der Literatur diskutierte Exempel wie seine Auflösung von Differenzgleichungen (Abschnitt 4.3) vorgestellt worden. Insbesondere seine Behandlung des inhomogenen Falls mit konstanten Koeffizienten enkapsuliert die gesamte Bandbreite seiner Schaffensweise in einer einzigen Arbeit: Sie lässt die umfangreichen Euler'schen verbalen Erklärungen erkennen, illustriert Eulers genauen Kenntnisstand über von seinen Vorgängern erzielte Resultate.

te, zeugt von seiner eigenen Kreativität und demonstriert überdies Eulers Fähigkeiten, sein gesamtes Wissen ertragreich zu synthetisieren. Überdies darf der Leser miterleben, wie ihn mathematisch waghalsige Manöver Bekanntes auf neue Art demonstrieren lassen, ihm erlauben die Grenzen der Mathematik auszudehnen, aber ihn auch auf Irrwege führen.

Überdies wurden einige Beispiele von modernen Konzepten genannt, welche Euler in seinen Arbeiten vorweg nimmt, wovon vielleicht die Mellin-Transformation (Abschnitt 5.2.3) und die Legendre-Polynome (Abschnitt 5.2.4) die am wenigsten erwarteten Erwähnungen sein dürften.

## 9.2 Grenzen Eulers

You can do anything, but not  
everything.

---

David Allen

Jedoch sind auch die Grenzen, an welche Euler gestoßen ist, Teil der Diskussionen gewesen (Abschnitt 7), welche am eindrucklichsten in der Zahlentheorie ersichtlich geworden sind. So ist es nicht dem Zufall zuzuschreiben, dass in diesem Zweig der Mathematik das Verhältnis zwar gemachter, jedoch nicht bewiesener Euler'scher Entdeckungen mit weitem Abstand das größte ist. Das Reziprozitätsgesetz (Abschnitt 6.2.2) und (unter wohlwollender Auslegung seiner Ausführungen) gar den Primzahlsatz (Abschnitt 6.2.1) mag Euler zwar entdeckt haben, konnte selbige aber nicht mit einem Beweis sichern (Abschnitt 6.2).

An anderer Stelle waren schlicht die fehlenden modernen Auslegungen von ihm selbst eingebrachter Konzepte, wofür dasjenige der Funktion (7.1.1) und ihrer Eigenschaftsbegriffe (wie die Notion der Stetigkeit) sowie auf selbige angewandte Begriffe (wie das Integral) stellvertretend stehen, einem Vorankommen abträglich und verhinderten gar die Entwicklung neuer Begrifflichkeiten. Während eine gewisse Stagnation durch Stellen einer irreleitenden Frage (Abschnitt 7.2), wie bei der Reduktion von elliptischen Integralen auf Normalformen (Abschnitt 7.2.1) und Auflösungsformeln für die Wurzeln von Polynomen (Abschnitt 7.2.2), leicht nachvollziehbar wird, mag sich das angesichts der vielen Einzelbeiträge beim Gegenstand der komplexen Analysis anders verhalten, welche Euler (Abschnitt 7.3.1) bis auf ihre Grundzüge versperrt geblieben ist. Dies war seinem Arbeitsethos geschuldet (Abschnitt 7.3), welcher sich unter anderem in der, aus heutiger Sicht ge-

urteilt, überbetonten Präferenz des Reellen und der damit einhergehenden unverstandenen Sonderstellung der komplexen Zahlen in der Analysis manifestiert. Daraus erklärt sich wohl auch, jedenfalls zum Teil, warum im Euler'schen Opus wenig zu den Jacobi'schen Theta-Funktionen gefunden wird (Abschnitt 6.1.3), die ihre Eigenschaften in Gänze erst als Funktion über der komplexen Ebene zu erkennen geben. Nichtsdestotrotz erlaubte Euler sein Arbeitsduktus neben anderen Dingen die Etablierung der Variationsrechnung als eigenen Teilbereich der Mathematik, die Entdeckung der Euler-Maclaurin'schen Summenformel und die Derivation diverser Summen- und Integralidentitäten, welche anderweitig schwer zu finden sind. Nicht zuletzt dieses Grundes wegen, ist die Euler'sche Priorität an vielerlei Stellen erst nach seinen Lebzeiten (wie bei der  $\zeta$ -Funktion (Abschnitt 6.1.2)) von nachfolgenden Mathematikergenerationen bemerkt worden. Bei Euler noch verstreut zu findende Ergebnisse wie beim Beispiel der hypergeometrischen Funktion (Abschnitt 5.2.5) sind zwar zur Kenntnis genommen worden, jedoch scheint entsprechendes bei anderen Kontexten (insbesondere bei den Legendre-Polynomen (Abschnitt 5.2.4) und der Mellin-Transformation (Abschnitt 5.2.3)) erst vor kurzem erstmalig geschehen zu sein. Die bei diesen und ähnlichen Fragen von Euler vernachlässigte Frage nach der Existenz einer Lösung hatte zwar bei seinem Beweis des Fundamentalsatzes der Algebra einen unglücklichen Ausgang (Abschnitt 7.3.2), was allerdings eine der wenigen Ausnahmen dieser Art bleiben sollte. Überdies hat, wie ebenfalls ausgeführt, der Euler'sche Ansatz durch die Entwicklung der Algebra über 150 Jahre nach seinem Tod eine Rechtfertigung erfahren.

Schlussendlich enthielt der letzte Abschnitt (8) Beispiele dafür, wie weit sich mit den Euler'schen Kenntnissen allein noch gelangen ließe. So wurden etwa über 150 Jahre später von Ramanujan bewiesene Formeln lediglich unter Zuhilfenahme Euler'scher Resultate abgeleitet. Es wird ist zweifelsohne eine lohnenswerte Aufgabe sein, zu untersuchen, wie weit zum einen Euler selbst bei anderen Fragestellungen noch hätte vordringen können – der für ihn selbst mögliche Nachweis der Funktionalgleichung der Riemann'schen  $\zeta$ -Funktion (Abschnitt (6.1.2)) ist hierfür ein Beispiel – und zum anderen, wie vieles sich unter alleiniger Verwendung Euler'scher Resultate derivieren ließe<sup>287</sup>.

---

<sup>287</sup>Zum gegenwärtigen Zeitpunkt planen die Betreiber des *Euleriana* Journals eine Kolonne über diesen Gegenstand.

### 9.3 Diskussion der Euler’schen Arbeitsweise

Euler fehlt nur eine Eigenschaft  
zu einem vollkommenen Genie:  
nämlich unverständlich zu sein.

---

Georg Ferdinand Frobenius

Obschon die Euler’schen Argumentationen, nach heutigem Verständnis, mancherorts rein formaler Natur sind und daher einen heute praktizierenden Mathematiker in dieser Hinsicht kaum überzeugen dürfen, entbehren sie selten eines gewissen Reizes. Denn selbst in den Fällen eines Misserfolgs sind die Gründe dessen zumeist wenig offenkundig, insbesondere sofern man den tiefer liegenden Grund ausfindig zu machen sucht (Siehe eines Beispiele wegen Abschnitt (4.3.4), wo ein Fehler Eulers zum Beweis der Stirling’schen Formel für die Fakultät diskutiert worden ist.).

Abgesehen davon sind, nicht zuletzt wegen ihrer heutigen Seltenheit, die Euler’schen Exempel der *Methodus inveniendi* äußerst illustrativ für die Arbeitsweise eines Mathematikers abseits der Publikationen und bringen einen bei eingehendem Studium womöglich der Frage näher, wie sich in der Mathematik (und anderen Wissenschaften) überhaupt zu Einsichten gelangen lässt. Denn trotz vieler Erklärungsversuche aus der Philosophie wie etwa “*The Logic of Scientific Discovery*” ([Popper], 2002) oder auch “*Erkenntnistheorie*” ([Baumann], 2014), der Psychologie zur Kreativitätsforschung “*FLOW und Kreativität: Wie Sie Ihre Grenzen überwinden und das Unmögliche schaffen*” ([Csikszentmihalyi], 2014), aber auch aus den Naturwissenschaften “*The Art of Scientific Investigation*” ([Beveridge], 2004) und der Mathematik selbst wie etwa “*The Mathematician’s Mind: The Psychology of Invention in the Mathematical Field*” ([Hadamard], 1996) bleibt Eulers Werk eine Bereicherung in dieser Hinsicht. Hat nämlich Euler selbst die wohl zuträglichste Methode zum *Erlernen* der Mathematik erläutert, muss seine Methode, Mathematik zu betreiben und zu schaffen, aus seinen Arbeiten dahingegen in indirekter Weise entnommen werden. Dies ist jedoch eine Untersuchung für eine andere Abhandlung. In seiner auch in [Fellmann] (S. 11–12) zitierten Autobiographie schreibt Euler über seinen Unterricht bei Johann Bernoulli:

“*Privat Lectionen schlug er mir zwar wegen seiner Geschäfte gänzlich ab: er gab mir aber einen weit heilsameren Rath, welcher darin bestund, dass ich selbst einige mathematische Bücher vor mich nehmen, und mit*

*allem Fleiss durchgehen sollte, und wo ich einigen Anstoss oder Schwierigkeiten finden möchte, gab er mir alle Sonnabend Nachmittag einen freyen Zutritt bey sich, und hatte die Güte mir die gesammelete Schwierigkeiten zu erläutern, welches mit so erwünschtem Vortheile geschah, dass wann er mir einen Anstoss gegeben hatte, dadurch zehn andere auf einmahl verschwanden, welches gewiss die beste Methode ist, um in den mathematischen Wissenschaften glückliche Progressen zu machen.”*

Diese Euler’schen Ausführungen decken sich mit entsprechenden modernen Psychologie-Forschungen im Bereich Gedächtnis und Lernen. Genauer findet man in Eulers Zitat unter anderem den sogenannten “Processing Difficulty Effect”<sup>288</sup>. Hingegen gibt es bezüglich des kreativen Schaffens von Mathematik noch keine universell konsensuellen Theorien. Am trefflichsten fasst dies wohl der Weierstraß’sche Ausspruch zusammen (siehe [Fellmann], Seite 124):

*“Dass dem Forscher, solange er sucht, jeder Weg gestattet ist, versteht sich von selbst.”*

Es scheint jedoch indes eine Notwendigkeit, sich das Wissen in einer solchen Weise angeeignet zu haben, dass man es konsistent miteinander weben kann. Den Schluss bildet nachstehender in *“Euler and the Calculus of Variations”* ([Thiele2], 2007) zitierter Ausspruch von Kneser (1898–1973):

*“Why do we rummage in rubble for some antiques? To enrich the ars inveniendi, to explain the methods by excellent examples, and last but not least to appreciate the intellectual company.”*

---

<sup>288</sup>Dieser Effekt wird zum Beispiel in Arbeit *“When comprehension difficulty improves memory for text”* ([O’Brien], 1985) in Zusammenhang des Memorierens von Textinhalten diskutiert, lässt sich aber analog auf andere Gebiete übertragen. Der Effekt besagt, dass man sich Inhalte umso besser einprägt, je schwieriger sie für einen selbst zu Beginn zu durchdringen waren.

## 10 Danksagung

Die vorliegende Arbeit verdankt vielen weiteren Personen, von denen ich hier leider nicht alle erwähnen kann, ihre Entstehung. Zuallererst bedanken möchte ich mich bei meinen beiden Betreuern, Prof. Tilman Sauer und Prof. Duco van Straten, die mich überhaupt erst dazu ermutigt haben, meine Ausarbeitungen zu Leonhard Euler zu einer Promotionsarbeit zu bündeln. Besagte Abhandlungen gäbe wohl gar nicht, hätte Prof. van Straten damals nicht den *Euler-Kreis Mainz* ins Leben gerufen, in welchem ich mich, meiner Leidenschaft nachgehend, voll auswirken konnte. Neben dem Korrekturlesen standen mir meine Betreuer stets mit Rat und Tat und hilfreichen Anregungen, was Quellen und die Präsentation des Inhalts betrifft, zur Seite.

Weiterhin möchte ich Prof. Vadim Kostykin danken, mit welchem ich unter anderem einige Ergebnisse von Euler vom modernen funktionalanalytischen Gesichtspunkt diskutieren durfte. Ohne diese Konversationen wäre mein Verständnis unlängst geringer geblieben. So konnte ich guten Gewissens Abschnitt über Differentialgleichungen unendlicher Ordnung in die Ausarbeitungen einbringen. Außerdem haben nicht zuletzt Prof. Kostykins Worte entscheidend dazu beigetragen, mich für den Masterstudiengang Mathematik einzuschreiben.

Dr. Anton Malevich, dem ich über zwei Jahre als Übungsassistent bei seiner Dozententätigkeit zu Seite stehen durfte, möchte ich ebenfalls meinen Dank aussprechen. Die zahlreichen Gespräche über die optimale Präsentation des Lehrinhalts und die entsprechende Lektüre darüber haben insbesondere das Verständnis von Eulers Gedankengängen gefördert, weil sie mir einen anderen Blickwinkel eröffnet haben.

Ich danke überdies, Dr. Martin Sobotzik, einem wunderbaren Kommilitonen und Freund, für die zahlreichen ausgedehnten “Denker-Spaziergänge”, auf denen wir in regelmäßigen Abständen immer an die Grenzen unser Erkenntnisse gestoßen sind. Ich erwarte das angekündigte Buch mit höchster Vorfreude.

Zuletzt danke ich meiner Mutter, Andrea Aycock, die ich bei allen Widrigkeiten stets an meiner Seite wusste.

## Literatur

- [Abel1] Abel, N. (1824). “Mémoire sur les équations algébriques, ou l’on démontre l’Impossibilité de la Résolution de l’équation générale du cinquième Degré.” *Brochure imprimée chez Grøndahl, Christiania* (1824). Nachdruck im Buch *Ouvres Complètes de Niels Henrik Abel Nouvelle édition Volume 1 – Edited by Sylow and S. Lie*. Digital gedruckte Version, Cambridge University Press (2012).
- [Abel2] Abel, N. (1826). “Untersuchungen über die Reihe  $1 + mx + \frac{m \cdot (m-1)}{2 \cdot 1} x^2 + \frac{m \cdot (m-1) \cdot (m-2)}{3 \cdot 2 \cdot 1} x^3 + \dots$ .” *Crelle Journal für die reine und angewandte Mathematik, Band 1* (1826): pp. 331–339. Nachdruck im Buch *Ouvres Complètes de Niels Henrik Abel Nouvelle édition Volume 1 – Edited by Sylow and S. Lie*. Digital gedruckte Version, Cambridge University Press (2012).
- [Abel3] Abel, N. (1827). “Recherches sur les fonctions elliptiques.” *Crelle Journal für reine und angewandte Mathematik, Band 2* (1827): pp. 101–181. Abrufbar online unter: [https://www.digizeitschriften.de/id/243919689\\_0002?tify=%7B%22pages%22%3A%5B113%5D%2C%22view%22%3A%22info%22%7D](https://www.digizeitschriften.de/id/243919689_0002?tify=%7B%22pages%22%3A%5B113%5D%2C%22view%22%3A%22info%22%7D). Nachdruck im Buch *Ouvres Complètes de Niels Henrik Abel Nouvelle édition Volume 1 – Edited by Sylow and S. Lie*. Digital gedruckte Version, Cambridge University Press (2012).
- [Abel4] Abel, N. (2012). *Ouvres Complètes de Niels Henrik Abel Nouvelle édition Volume 1 – Edited by Sylow and S. Lie*. Digital gedruckte Version, Cambridge University Press (2012).
- [Abel5] Abel, N. (2012). *Ouvres Complètes de Niels Henrik Abel Nouvelle édition Volume 2 – Edited by Sylow and S. Lie*. Digital gedruckte Version, Cambridge University Press (2012).
- [Alexander] Alexander, H.G. (1998). *The Leibniz–Clarke Correspondence*. Manchester University Press, 1. Edition (1998).
- [Almkvist] Almkvist, G.; Aycok, A.; Meurman, A. (2011). “Proof of some conjectured formulas for  $\frac{1}{\pi}$  by Z.W.Sun”. Abrufbar online unter: <https://doi.org/10.48550/arXiv.1112.3259>.
- [Altmann] Altmann, S. (1989). “Hamilton, Rodrigues and the quaternion scandal.” *Mathematics Magazine*. 62 (5) (1989): pp. 291–308. Die Ar-

beit ist auch abrufbar online unter: <https://www.tandfonline.com/doi/abs/10.1080/0025570X.1989.11977459>.

[Andrews1] Andrews, G. E. (2008). *The Theory of Partitions*, Reprint Edition, Cambridge University Press (2008).

[Andrews2] Andrews, G. E.; Askey, R.; Roy, R. (2011). *Special Functions*, Cambridge University Press, 1. Edition (2011).

[Aomoto] Aomoto, K.; Kita, M. (2011) *Theory of Hypergeometric Functions (Springer Monographs in Mathematics)*. Springer–Verlag Japan, 1. Edition (2011).

[Apéry] Apéry, R. (1979). “Irrationalité de  $\zeta(2)$  et  $\zeta(3)$ .” *Astérisque*, 61 (1979): pp. 11–13. Die Arbeit ist auch abrufbar online unter: [http://www.numdam.org/item/AST\\_1979\\_\\_61\\_\\_11\\_0/](http://www.numdam.org/item/AST_1979__61__11_0/).

[Artin1] Artin, E. (1931). “Über die Bewertungen algebraischer Zahlkörper.” *Crelle Journal für die reine und angewandte Mathematik, Band 167* (1931): pp. 157–159. Der Band des Journals ist abrufbar online unter: [https://gdz.sub.uni-goettingen.de/id/PPN243919689\\_0167?tify=%7B%22pages%22%3A%5B3%5D%2C%22pan%22%3A%7B%22x%22%3A0.499%2C%22y%22%3A0.706%7D%2C%22view%22%3A%22info%22%2C%22zoom%22%3A0.484%7D](https://gdz.sub.uni-goettingen.de/id/PPN243919689_0167?tify=%7B%22pages%22%3A%5B3%5D%2C%22pan%22%3A%7B%22x%22%3A0.499%2C%22y%22%3A0.706%7D%2C%22view%22%3A%22info%22%2C%22zoom%22%3A0.484%7D).

[Artin2] Artin, E. (1968). *Algebraic Numbers and Algebraic Functions*, Gordon and Breach, New York. Edition von 1968.

[Aycock1] Aycock, A. (2013). “On proving some of Ramanujan’s formulas for  $\frac{1}{\pi}$  with an elementary method.” Abrufbar online unter: <https://arxiv.org/abs/1309.1140>.

[Aycock2] Aycock, A. (2015). “Euler und die analytische Theorie der Kettenbrüche.” *Mathematische Semesterberichte, Band 62* (2015): pp. 143–158. Abrufbar online unter: <https://link.springer.com/article/10.1007/s00591-015-0152-x>.

[Aycock3] Aycock, A. (2021). “Euler and the Gammafunction.” Abrufbar online unter: <https://arxiv.org/abs/1908.01571>.

[Aycock4] Aycock, A. (2021). “Euler and the multiplication formula for the Gamma Function.” *Euleriana*: 3(2), pp. 136–146. Abrufbar online unter: <https://scholarlycommons.pacific.edu/euleriana/vol1/iss2/8/>.

- [Aycock5] Aycock, A. (2022). “Answer to a question concerning Euler’s paper *Variae considerationes circa series hypergeometricas*.” *Euleriana*: 2(2), pp. 113-119. Abrufbar online unter: <https://scholarlycommons.pacific.edu/euleriana/vol2/iss2/7/>.
- [Aycock6] Aycock, A. (2023). “Euler and the Legendre Polynomials.” *Euleriana*: 3(2), pp.124-135. Abrufbar online unter: <https://scholarlycommons.pacific.edu/euleriana/vol3/iss2/4/>.
- [Aycock7] Aycock, A. (2023). “Euler and the Duplication Formula for the Gamma-Function.” *Euleriana*: 3(1), pp.31-35. Abrufbar online unter: <https://scholarlycommons.pacific.edu/euleriana/vol3/iss1/4/>.
- [Aycock8] Aycock, A. (2023). “On Euler’s Solution of the Simple Difference Equation.” *Euleriana*: 1(2), pp. 197-204. Abrufbar online unter: <https://scholarlycommons.pacific.edu/euleriana/vol3/iss2/5/>.
- [Aycock9] Aycock, A. (2024). “Euler and Homogeneous Difference Equations with Linear Coefficients.” *Euleriana*: 4(1), pp.63-69. Abrufbar online unter: <https://scholarlycommons.pacific.edu/euleriana/vol4/iss1/4/>.
- [Aycock10] Aycock, A. (2024). “Euler and the Gaussian Summation Formula for the Hypergeometric Series.” *Euleriana*: Euleriana: 4(1), pp.70-76. Abrufbar online unter: <https://scholarlycommons.pacific.edu/euleriana/vol4/iss1/5/>.
- [Aycock11] Aycock, A. (2024). “Euler and a Proof of the Functional Equation for the Riemann Zeta-Function He Could Have Given.” *Euleriana*: 4(1), pp.77-88. Abrufbar online unter: <https://scholarlycommons.pacific.edu/euleriana/vol4/iss1/6/>.
- [Ayoub] Ayoub, R. (1974). “Euler and the Zeta Function.” *American Mathematical Monthly*, Vol. 81, Dec. (1974): pp. 1067–1086. Nachdruck als Artikel im Buch: *The Genius of Euler – Reflections on his Life and Work*, pp. 113–132. Editor: Dunham, W., The Mathematical Association of America, 1. Edition (2007).
- [Bailey] Bailey, W. N. (1935). *Generalized hypergeometric Series*. Erstdruck in 1935 von Cambridge University Press. Originaltext abrufbar online unter <http://plouffe.fr/simon/math/Bailey%20W.N.>

%20Generalized%20Hypergeometric%20Serie%20%281964%29%28L%29%28T%29%2859s%29.pdf.

- [Balsler] Balsler, W. (2009). *From Divergent Power Series to Analytic Functions: Theory and Application of Multisummable Power Series*, Springer-Verlag, 1. Edition (2009).
- [Baire] Baire, B. (1908) *Leçons sur les théories générales de l'analyse*, Paris, Gauthier-Villars (1908). Zugänglich online: <https://archive.org/details/leonssurlesth02bairuoft/page/n9/mode/1up?view=theater>.
- [Barbeau] Barbeau, R. (2007) "Euler Subdues a Very Obsteporous Series." Publiziert als Artikel im Buch: *Leonhard Euler: Life, Work and Legacy*, pp. 255–278. Editoren: Bradley, R.; Sandifer C., Elsevier 1. Edition (2007).
- [Bartlett] Bartlett, B. (2024). "The Quintic, the Icosahedron, and Elliptic Curves." *Notices of the American Mathematical Society* (2024). Abrufbar online unter <https://www.ams.org/journals/notices/202404/noti2923/noti2923.html>.
- [Baumann] Baumann, P. (2015) *Erkenntnistheorie: Lehrbuch Philosophie*, J. B. Metzler; 3., aktualisierte Edition (2015).
- [Barwise] Barwise, J. (1977). *Handbook of mathematical logic (= Studies in logic and the foundations of mathematics. Volume 90)*. North-Holland Publ. Co, Amsterdam (1977).
- [Berndt] Berndt, B. (1985). *Ramanujan's Notebooks: Part I*, 1. Edition (1985), Springer.
- [Bernoulli] Bernoulli, D. (1738) *Hydrodynamica – Sive de viribus et motibus fluidorum commentarii*, gedruckt 1738 in Basel. Online zugänglich unter: [https://archive.org/details/bub\\_gb\\_VP5xrx373N4C/page/n3/mode/2up](https://archive.org/details/bub_gb_VP5xrx373N4C/page/n3/mode/2up).
- [Bessel] Bessel, F. (1826). "Untersuchung des Theils der planetarischen Störungen, welcher aus der Bewegung der Sonne entsteht." *Abhandlungen der Berliner Akademie* (1826): pp. 1–52.
- [Beveridge] Beveridge, W.I. (2004). *The Art of Scientific Investigation*, The Blackburn Press; Illustrated Edition (2004).

- [Bohr] Bohr, H., Mollerup, J. *Lærebog i Komplex Analyse vol. III*, Jul. Gjellerups Forlag, Kopenhagen (1922).
- [Borel] Borel, É. (1901). *Leçons sur les séries divergentes*. Paris: Gauthier-Villars, Edition von 1901. Abrufbar online: <https://archive.org/details/leconssurlesseri00boreuoft/page/n13/mode/2up>.
- [Bottazini] Bottazini, U. (1986). *The Higher Calculus: A History of Real and Complex Analysis from Euler to Weierstrass*. Springer-Verlag New York Inc., 1. Edition (1987).
- [Bottazini] Bottazini, U.; Gray, J. (2013). *Hidden Harmony—Geometric Fantasies: The Rise of Complex Function Theory (Sources and Studies in the History of Mathematics and Physical Sciences)*. Springer, 1. Edition (2013).
- [Bourbaki] Bourbaki, N. (1968). *Theory of Sets*. Springer Berlin, Heidelberg, 1. Edition (1968).
- [Bourlet] Bourlet, C. (1899) “Sur certain equations analogues aux différentielles.”, *Annales de l’Ecole Normale Supérieure*, 3. Reihe, Band 16: (1899), pp. 333–375. Abrufbar unter: <http://www.numdam.org/articles/10.24033/asens.468/>.
- [Bradley] Bradley, R. (2007) “Euler, D’Alembert and the Logarithm Function.” Publiziert als Artikel im Buch: *Leonhard Euler: Life, Work and Legacy*, pp. 255–278. Editoren: Bradley, R.; Sandifer C., Elsevier 1. Edition (2007).
- [Bring] Bring, E.S. (1786). *Meletemata quaedam mathematica circa transformationem aequationum algebraicarum*. Eine Übersetzung ins Englische von Alexander Chen, Yang-Hui He und John McKay ist online zugänglich unter: <https://arxiv.org/abs/1711.09253>.
- [Bromwich] Bromwich, T.J. (1908). *An Introduction of The Theory of infinite Series*, Merchant Books. Abrufbar online unter: <https://archive.org/details/introductiontoth00bromuoft>.
- [Burckhardt1] Burckhardt, J. (1942). Vorwort zu *Leonhardi Euleri Rechenkunst Accesserunt Commentationes ad Physicam generalem pertinentes et Miscellanea – ediderunt Edmund Hoppe, Karl Matter, Johann Jakob Burckhardt*, Leonhard Eulers Opera Omnia, Serie 3, Band 12, gedruckt von B.G. Teubner in Leipzig und Berlin 1942.

- [Burckhardt2] Burckhardt J.; Fellman, E.; Habicht, W. (Redaktionskomitee) (1983). *Leonhard Euler 1707–1783 – Beiträge zu Leben und Werk*. Birkhäuser Verlag Basel, 1. Edition (1983).
- [Cahen] Cahen, P. (1894). “Sur la fonction  $\zeta(s)$  de Riemann et sur les fonctions analogues.” *Annales scientifiques de l'École Normale Supérieure, Serie 3, Band 11* (1894). pp. 75–164. Abrufbar online unter: <http://www.numdam.org/articles/10.24033/asens.401/>.
- [Campell] Campell, J; Levrie, P. (2024). “The Bauer–Ramanujan formula: historical analyses and perspectives.” Publiziert online in *British Journal for the History of Mathematics*. Abrufbar online unter: <https://doi.org/10.1080/26375451.2024.2400707>.
- [Calinger] Calinger, R. (2015). *Leonhard Euler: Mathematical Genius in the Enlightenment*. Princeton University Press.
- [Cauchy1] Cauchy, A.–L. (1825). *Mémoire sur les intégrales définies, prises entre des limites imaginaires*, Paris: De Bure (1825). Abrufbar online unter: <https://archive.org/details/mmoiresurlesin00cauc/page/n3/mode/2up>.
- [Cauchy2] Cauchy, A. (1821). *Cours d'analyse de l'École royale polytechnique*, Paris: Imprimerie Royale (1821). Online abrufbar unter <https://archive.org/details/coursdanalysede00caucgoog/page/n5/mode/2up>.
- [Cayley] Cayley, A. (1861). “On a new auxiliary equation in the theory of equations of the fifth order.” *Philosophical Transactions of the Royal Society of London Volume 151, Issue 151* (1861). pp. 263–276. Abrufbar online unter: <https://royalsocietypublishing.org/doi/epdf/10.1098/rstl.1861.0014>.
- [Chandrasekharan] Chandrasekharan, K. (1985). *Elliptic Functions*, Springer–Verlag (1985).
- [Clausen] Clausen, T. (1828). “Ueber die Fälle, wenn die Reihe von der Form  $y = 1 + \frac{\alpha}{1} \cdot \frac{\beta}{\gamma} x + \frac{\alpha \cdot \alpha + 1}{1 \cdot 2} \cdot \frac{\beta \cdot \beta + 1}{\gamma \cdot \gamma + 1} x^2 + \text{etc.}$  ein Quadrat der Form  $z = 1 + \frac{\alpha'}{1} \cdot \frac{\beta'}{\gamma'} \cdot \frac{\delta'}{\varepsilon'} x + \frac{\alpha' \cdot \alpha' + 1}{1 \cdot 2} \cdot \frac{\beta' \cdot \beta' + 1}{\gamma' \cdot \gamma' + 1} \cdot \frac{\delta' \cdot \delta' + 1}{\varepsilon' \cdot \varepsilon' + 1} x^2 + \text{etc.}$  hat.” *Crelle Journal für die reine und angewandte Mathematik, Band 3* (1828): pp. 89–91.
- [Cooper] Cooper, S. (2017). *Ramanujan's Theta Functions*, 1. Edition (2017).

- [Cox] Cox, D. (2013). *Primes of the Form  $x^2 + ny^2$ : Fermat, Class Field Theory, and Complex Multiplication*, Wiley; 2. Edition (2013).
- [Csikszentmihalyi] Csikszentmihalyi, M. (2014). *FLOW und Kreativität: Wie Sie Ihre Grenzen überwinden und das Unmögliche schaffen*, Klett-Cotta, 5. Edition (2014).
- [Damer] Damer, T. (2013). *Attacking Faulty Reasoning: A Practical Guide to Fallacy-Free Arguments*, 7th Edition, WADSWORTH INC FULFILLMENT.
- [d'Alembert] d'Alembert, J. (1752). *Essai d'une nouvelle théorie de la résistance des fluides*. A Paris : Chez David l'ainé (1752). Abrufbar online unter: <https://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k206036b/f2.item.langFR>
- [Dickson] Dickson, L. (1925). "Resolvent sextics of quintic equations." *Bull. Amer. Math. Soc.* 31(9-10) (1925). pp. 515–523. Abrufbar online unter: <https://projecteuclid.org/journals/bulletin-of-the-american-mathematical-society-new-series/volume-31/issue-9-10/Resolvent-sextics-of-quintic-equations/bams/1183486686.full>.
- [Dieudonné] Dieudonné, J. (Editor) (1985). *Geschichte der Mathematik 1700–1900*. Friedr. Vieweg & Sohn. Deutsche Ausgabe von 1985.
- [Dirac1] Dirac, P. (1933). "The Lagrangian in Quantum Mechanics." *Physikalische Zeitschrift der Sowjetunion.* 3 (1933): pp. 64–72. Abrufbar online unter: <https://www.hep.anl.gov/czachos/soysoy/Dirac33.pdf>
- [Dirac2] Dirac, P. (1939). "The Relation between Mathematics and Physics." Vorlesung gehalten bei der Präsentation des James Scott Prize, am 6. Februar 1939. Gedruckte Version in *Proceedings of the Royal Society (Edinburgh) Vol.59, 1938–39, Part II*: pp.112–129. Online abrufbar unter: <https://mcs.une.edu.au/~pmth213/PapersOfInterest/Paul%20Dirac%20%281902%20-%201984%29%20The%20Relation%20between%20Mathematics%20and%20Physics%20.pdf>.
- [Dirichlet] Dirichlet, L. (1837). "Über die Darstellung ganz willkürlicher Functionen durch Sinus- und Cosinusreihen." *Repertorium der Physik, Band I* (1837): pp. 152-174. Nachdruck in Eisenstein – Mathematische Werke Band I, pp. 291–298, Chelsea Publishing Company New York, N.Y. 2. Edition (1989).

- [Dubislav] Dubislav, W. (1994). *Die Definition*, Felix Meiner Verlag; 1. Edition.
- [Dunham1] Dunham, W. (1991). “Euler and the Fundamental Theorem of Algebra.” *The College Mathematics Journal* (1991): pp. 282–293. Abrufbar online unter: <https://doi.org/10.1080/07468342.1991.11973397>.
- [Dunham2] Dunham, W. (1999). *Euler: The Master of Us All*. Mathematical Association of America (MAA), 1. Edition (1999).
- [Edwards] Edwards, H. (1983) “Euler and Quadratic Reciprocity.” Nachdruck als Artikel im Buch: *The Genius of Euler – Reflections on his Life and Work*, pp. 233–242. Editor: Dunham, W., The Mathematical Association of America, 1. Edition (2007).
- [Eisenstein1] Eisenstein, G. (1844). “Beweis des Reciprocitätssatzes für die cubischen Reste in der Theorie der aus den dritten Wurzeln der Einheit zusammengesetzten Zahlen.” *Crelle Journal für Mathematik, Band 27* (1844): pp. 289–310.
- [Eisenstein2] Eisenstein, G. (1845). “Applications de l’Algèbre à l’Arithmétique transcendente.” *Crelle Journal für Mathematik, Band 29* (1845): pp. 177–184. Nachdruck in Eisenstein – Mathematische Werke Band I, pp. 291–298, Chelsea Publishing Company New York, N.Y. 2. Edition (1989).
- [Eneström] Eneström, G. (1910). *Die Schriften Eulers chronologisch nach den Jahren geordnet, in denen sie verfasst worden sind*. *Crelle Journal für Mathematik, Band 29* B.G. Teubner (1910).
- [EulerE4] Euler, L. (1728). “Meditationes super problemate nautico, quod illustrissima regia Parisiensis Academia Scientiarum proposuit” (E4). *Pièce qui ont remporté le prix de l’académie royale des sciences, Band 1727* (1726): pp. 1–48. Nachdruck in Opera Omnia: Serie 2, Band 20, pp. 1–35.
- [EulerE19] Euler, L. (1738). “De progressionibus transcendentibus seu quarum termini generales algebraice dari nequeunt” (E19). *Commentarii academiae scientiarum Petropolitanae, Band 5* (1729): pp. 1–24. Nachdruck in Opera Omnia: Serie 1, Band 14, pp. 1–21. Originaltext abrufbar online unter <https://scholarlycommons.pacific.edu/euler/>.

Eine Übersetzung ins Englische von Stacy G. Langton abrufbar unter:  
<https://scholarlycommons.pacific.edu/euler/>.

[EulerE20] Euler, L. (1738). “De summatione innumerabilium progressionum” (E20). *Commentarii academiae scientiarum Petropolitanae, Band 5* (1731): pp. 91–105. Nachdruck in Opera Omnia: Serie 1, Band 14, pp. 25–41. Originaltext abrufbar online unter <https://scholarlycommons.pacific.edu/euler/>.

[EulerE25] Euler, L. (1738). “Methodus generalis summandi progressionem” (E25). *Commentarii academiae scientiarum Petropolitanae, Band 6* (1732): pp. 64–97. Nachdruck in Opera Omnia: Serie 1, Band 14, pp. 42–72. Originaltext abrufbar online unter <https://scholarlycommons.pacific.edu/euler/>.

[EulerE26] Euler, L. (1738). “Observationes de theoremate quodam Fermatiano aliisque ad numeros primos spectantibus” (E26). *Commentarii academiae scientiarum Petropolitanae, Band 6* (1732): pp. 103–107. Nachdruck in Opera Omnia: Serie 1, Band 2, pp. 1–5. Originaltext abrufbar online unter <https://scholarlycommons.pacific.edu/euler/>. Eine Übersetzung ins Englische von Jordan Bell ist online abrufbar unter: <https://scholarlycommons.pacific.edu/euler-works/26/>.

[EulerE30] Euler, L. (1738). “De formis radicum aequationum cuiusque ordinis coniectatio” (E30). *Commentarii academiae scientiarum Petropolitanae, Band 6* (1733): pp. 216–231. Nachdruck in Opera Omnia: Serie 1, Band 6, pp. 1–19. Originaltext abrufbar online unter <https://scholarlycommons.pacific.edu/euler/>. Eine Übersetzung von Jordan Bell ins Englische findet sich unter: <https://scholarlycommons.pacific.edu/euler-works/30/>.

[EulerE41] Euler, L. (1740). “De summis serierum reciprocarum” (E41). *Commentarii academiae scientiarum Petropolitanae, Band 7* (1735): pp. 123–134. Nachdruck in Opera Omnia: Serie 1, Band 14, pp. 73–86. Originaltext abrufbar online unter <https://scholarlycommons.pacific.edu/euler/>.

[EulerE43] Euler, L. (1740). “De progressionibus harmonicis observationes” (E43). *Commentarii academiae scientiarum Petropolitanae, Band 7* (1734): pp. 150–161. Nachdruck in Opera Omnia: Serie 1,

Band 14, pp. 87–100. Originaltext abrufbar online unter <https://scholarlycommons.pacific.edu/euler/>.

[EulerE44] Euler, L. (1740). “De infinitis curvis eiusdem generis seu methodus inveniendi aequationes pro infinitis curvis eiusdem generis” (E44). *Commentarii academiae scientiarum Petropolitanae, Band 7* (1734): pp. 174–189, 180–183. Nachdruck in Opera Omnia: Serie 1, Band 22, pp. 36–56. Originaltext abrufbar online unter <https://scholarlycommons.pacific.edu/euler/>.

[EulerE45] Euler, L. (1740). “Additamentum ad dissertationem de infinitis curvis eiusdem generis” (E45). *Commentarii academiae scientiarum Petropolitanae, Band 7* (1734): pp. 184–200. Nachdruck in Opera Omnia: Serie 1, Band 22, pp. 57–75. Originaltext abrufbar online unter <https://scholarlycommons.pacific.edu/euler/>.

[EulerE46] Euler, L. (1741). “Methodus universalis serierum convergentium summas quam proxime inveniendi” (E46). *Commentarii academiae scientiarum Petropolitanae, Band 8* (1735): pp. 3–9. Nachdruck in Opera Omnia: Serie 1, Band 14, pp. 101–107. Originaltext abrufbar online unter <https://scholarlycommons.pacific.edu/euler/>.

[EulerE47] Euler, L. (1741). “Inventio summae cuiusque seriei ex dato termino generali” (E47). *Commentarii academiae scientiarum Petropolitanae, Band 8* (1735): pp. 9–22. Nachdruck in Opera Omnia: Serie 1, Band 14, pp. 108–132. Originaltext abrufbar online unter <https://scholarlycommons.pacific.edu/euler/>.

[EulerE53] Euler, L. (1741). “Solutio problematis ad geometriam situs pertinentis” (E53). *Commentarii academiae scientiarum Petropolitanae, Band 8* (1735): pp. 128–141. Nachdruck in Opera Omnia: Serie 1, Band 7, pp. 1–10. Originaltext abrufbar online unter <https://scholarlycommons.pacific.edu/euler/>.

[EulerE54] Euler, L. (1741). “Theorematum quorundam ad numeros primos spectantium demonstratio” (E54). *Commentarii academiae scientiarum Petropolitanae, Band 8* (1736): pp. 141–146. Nachdruck in Opera Omnia: Serie 1, Band 2, pp. 33–37. Originaltext abrufbar online unter <https://scholarlycommons.pacific.edu/euler/>. Eine Übersetzung ins Englische von David Zhao ist online abrufbar unter: <https://scholarlycommons.pacific.edu/euler-works/54/>.

- [EulerE60] Euler, L. (1743). “De inventione integralium, si post integrationem variabili quantitati determinatus valor tribuatur” (E60). *Miscellanea Berolinensia, Band 7* (1742): pp. 129–171. Nachdruck in Opera Omnia: Serie 1, Band 17, pp. 35–69. Originaltext abrufbar online unter <https://scholarlycommons.pacific.edu/euler/>.
- [EulerE61] Euler, L. (1743). “De summis serierum reciprocarum ex potestatibus numerorum naturalium ortarum dissertatio altera, in qua eadem summationes ex fonte maxime diverso derivantur” (E61). *Miscellanea Berolinensia, Band 7* (1742): pp. 172–192. Nachdruck in Opera Omnia: Serie 1, Band 14, pp. 138–155. Originaltext abrufbar online unter <https://scholarlycommons.pacific.edu/euler/>.
- [EulerE62] Euler, L. (1743). “De integratione aequationum differentialium altiorum graduum” (E62). *Miscellanea Berolinensia, Band 7* (1742): pp. 193–242. Nachdruck in Opera Omnia: Serie 1, Band 22, pp. 108–149. Originaltext abrufbar online unter <https://scholarlycommons.pacific.edu/euler/>.
- [EulerE63] Euler, L. (1743). “Demonstration de la somme de cette suite  $1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16}$ ” (E63). *Journal littéraire d’Allemagne, de Suisse et du Nord, Band 2* (1741): pp. 115–127. Nachdruck in Opera Omnia: Serie 1, Band 14, pp. 177–186. Originaltext abrufbar online unter <https://scholarlycommons.pacific.edu/euler/>.
- [EulerE65] Euler, L. (1744). “Methodus inveniendi lineas curvas maximi minimive proprietate gaudentes, sive solutio problematis isoperimetrici lattissimo sensu accepti” (E65). Gedruckt als Buch von *Lausanne et Geneva: Marcum-Michaelem Bousquet* (1743): pp. 1–322. Nachdruck in Opera Omnia: Serie 1, Band 24, pp. 1–308. Originaltext abrufbar online unter <https://scholarlycommons.pacific.edu/euler/>.
- [EulerE70] Euler, L. (1744). “De constructione aequationum” (E70). *Commentarii academiae scientiarum Petropolitanae, Band 9* (1737): pp. 85–97. Nachdruck in Opera Omnia: Serie 1, Band 22, pp. 150–161. Originaltext abrufbar online unter <https://scholarlycommons.pacific.edu/euler/>.
- [EulerE72] Euler, L. (1744). “Variae observationes circa Series infinitas” (E72). *Commentarii academiae scientiarum Petropolitanae, Band 9* (1737): pp. 160–199. Nachdruck in Opera Omnia: Serie 1,

Band 14, pp. 217–244. Originaltext abrufbar online unter <https://scholarlycommons.pacific.edu/euler/>.

[EulerE98] Euler, L. (1747). “Theorematum quorundam arithmeti-  
corum demonstrationes” (E98). *Commentarii academiae scientiarum Petro-  
politanae, Band 10* (1738): pp. 125–146. Nachdruck in Opera Om-  
nia: Serie 1, Band 2, pp. 38–58. Originaltext abrufbar online unter  
<https://scholarlycommons.pacific.edu/euler/>.

[EulerE101] Euler, L. (1748). “Introductio in analysin infinitorum, volumen  
primum” (E101). Gedruckt als Buch: *Lausanne: Marcum-Michaelem  
Bousquet, Band 1* (1745): pp. 1–320. Nachdruck in Opera Omnia: Se-  
rie 1, Band 8, pp. 1–392. Originaltext abrufbar online unter <https://scholarlycommons.pacific.edu/euler/>.

[EulerE119] Euler, L. (1749). “De vibratione chordarum exercitatio”  
(E119). *Nova acta eruditorum, Band aus dem Jahr 1749* (1748): pp.  
512–527. Nachdruck in Opera Omnia: Serie 2, Band 10, pp. 50–62. Ori-  
ginaltext abrufbar online unter <https://scholarlycommons.pacific.edu/euler/>.

[EulerE122] Euler, L. (1750). “De productis ex infinitis factoribus ortis”  
(E122). *Commentarii academiae scientiarum Petropolitanae, Band 11*  
(1739): pp. 3–31. Nachdruck in Opera Omnia: Serie 1, Band 14, pp. 260–  
290. Originaltext abrufbar online unter <https://scholarlycommons.pacific.edu/euler/>.

[EulerE123] Euler, L. (1750). “De fractionibus continuis observatio-  
nes” (E123). *Commentarii academiae scientiarum Petropolitanae,  
Band 11* (1739): pp. 32–81. Nachdruck in Opera Omnia: Serie 1,  
Band 14, pp. 291–349. Originaltext abrufbar online unter <https://scholarlycommons.pacific.edu/euler/>.

[EulerE125] Euler, L. (1750). “Consideratio progressionis cuiusdam ad cir-  
culi quadraturam inveniendam idoneae” (E125). *Commentarii academi-  
ae scientiarum Petropolitanae, Band 11* (1739): pp. 116–127. Nachdruck  
in Opera Omnia: Serie 1, Band 14, pp. 350–363. Originaltext abrufbar  
online unter <https://scholarlycommons.pacific.edu/euler/>.

[EulerE130] Euler, L. (1750). “De seriebus quibusdam consideratio-  
nes” (E130). *Commentarii academiae scientiarum Petropolitanae,  
Band 12* (1739): pp. 53–96. Nachdruck in Opera Omnia: Serie 1,

Band 14, pp. 407–462. Originaltext abrufbar online unter <https://scholarlycommons.pacific.edu/euler/>.

- [EulerE148] Euler, L. (1750). “Démonstration sur le nombre des points, où deux lignes des ordres quelconques peuvent se couper” (E148). *Mémoires de l’académie des sciences de Berlin, Band 4* (1748): pp. 234–248. Nachdruck in Opera Omnia: Serie 1, Band 26, pp. 46–59. Originaltext abrufbar online unter <https://scholarlycommons.pacific.edu/euler/>. Ein Übersetzung ins Englische von Sandrah Eckel ist abrufbar unter: <https://scholarlycommons.pacific.edu/euler-works/148/>.
- [EulerE149] Euler, L. (1750). “Réflexions sur l’espace et le tems ” (E149). *Mémoires de l’académie des sciences de Berlin, Band 4* (1748): pp. 324–333. Nachdruck in Opera Omnia: Serie 3, Band 2, pp. 376–383. Originaltext abrufbar online unter <https://scholarlycommons.pacific.edu/euler/>. Ein Übersetzung ins Englische von Michael P. Saclolo ist abrufbar unter: <https://scholarlycommons.pacific.edu/euler-works/149/>.
- [EulerE152] Euler, L. (1750). “De numeris amicabilebus” (E152). *Opuscula varii argumenti, Band 2* (1747): pp. 23–107. Nachdruck in Opera Omnia: Serie 1, Band 2, pp. 86–162. Originaltext abrufbar online unter <https://scholarlycommons.pacific.edu/euler/>.
- [EulerE157] Euler, L. (1751). “De extractione radicum ex quantitibus irrationalibus” (E157). *Commentarii academiae scientiarum Petropolitanae, Volume 11* (1740): pp. 16–60. Nachdruck in Opera Omnia: Serie 1, Band 6, pp. 31–77. Originaltext abrufbar online unter <https://scholarlycommons.pacific.edu/euler/>.
- [EulerE162] Euler, L. (1751). “Methodus integrandi formulas differentiales rationales unicam variabilem involventes” (E162). *Commentarii academiae scientiarum Petropolitanae, Band 14* (1748): pp. 3–91. Nachdruck in Opera Omnia: Serie 1, Band 17, pp. 70 – 148. Originaltext abrufbar online unter <https://scholarlycommons.pacific.edu/euler/>.
- [EulerE163] Euler, L. (1751). “Methodus facilior atque expeditior integrandi formulas differentiales rationales” (E163). *Methodus facilior atque expeditior integrandi formulas differentiales rationales* (1748): pp. 99–150. Nachdruck in Opera Omnia: Serie 1, Band 2, pp. 149 – 194. Original-

text abrufbar online unter <https://scholarlycommons.pacific.edu/euler/>.

[EulerE164] Euler, L. (1751). “Theoremata circa divisores numerorum in hac forma  $paa \pm qbb$  contentorum” (E164). *Commentarii academiae scientiarum Petropolitanae, Band 14* (1747): pp. 139–179. Nachdruck in Opera Omnia: Serie 1, Band 2, pp. 151 – 181. Originaltext abrufbar online unter <https://scholarlycommons.pacific.edu/euler/>. Eine Übersetzung ins Englische von Stacy G. Langton abrufbar unter: <https://scholarlycommons.pacific.edu/euler/>.

[EulerE168] Euler, L. (1751). “De la controverse entre Mrs. Leibniz et Bernoulli sur les logarithmes des nombres negatifs et imaginaires” (E168). *Mémoires de l’académie des sciences de Berlin, Band 5* (1747): pp. 139–179. Nachdruck in Opera Omnia: Serie 1, Band 17, pp. 195–232. Originaltext abrufbar online unter <https://scholarlycommons.pacific.edu/euler/>. Eine Übersetzung in Englische von Stacy G. Langton ist online abrufbar unter: <https://scholarlycommons.pacific.edu/euler/>.

[EulerE170] Euler, L. (1751). “Recherches sur les racines imaginaires des equations” (E170). *Mémoires de l’académie des sciences de Berlin, Band 5* (1746): pp. 222–288. Nachdruck in Opera Omnia: Serie 1, Band 6, pp. 78–150. Originaltext abrufbar online unter <https://scholarlycommons.pacific.edu/euler/>. Eine Übersetzung ins Englische von Todd Doucet ist abrufbar unter: <https://scholarlycommons.pacific.edu/euler-works/170/>.

[EulerE175] Euler, L. (1751). “Découverte d’une loi tout extraordinaire des nombres par rapport à la somme de leurs diviseurs” (E175). *Bibliothèque impartiale, Band 3* (1747): pp. 10–31. Nachdruck in Opera Omnia: Serie 1, Band 2, pp. 241–253. Originaltext abrufbar online unter <https://scholarlycommons.pacific.edu/euler/>. Eine Übersetzung ins Englische von Todd Doucet ist abrufbar unter: <https://scholarlycommons.pacific.edu/euler-works/175/>.

[EulerE188] Euler, L. (1753). “Methodus aequationes differentiales altiorum graduum integrandi ulterius promota” (E188). *Novi Commentarii academiae scientiarum Petropolitanae, Volume 3* (1750): pp. 3–35. Nachdruck in Opera Omnia: Serie 1, Band 22, pp. 181–213. Originaltext online abrufbar unter: <https://scholarlycommons.pacific.edu/euler/>.

- [EulerE189] Euler, L. (1753). “De serierum determinatione seu nova methodus inveniendi terminos generales serierum” (E189). *Novi Commentarii academiae scientiarum Petropolitanae, Band 3* (1749): pp. 36–85. Nachdruck in Opera Omnia: Serie 1, Band 14, pp. 463–515. Originaltext abrufbar online unter <https://scholarlycommons.pacific.edu/euler/>.
- [EulerE190] Euler, L. (1753). “Consideratio quarumdam serierum, quae singularibus proprietatibus sunt praeditae” (E190). *Novi Commentarii academiae scientiarum Petropolitanae, Band 3* (1749): pp. 86–108. Nachdruck in Opera Omnia: Serie 1, Band 14, pp. 516–541. Originaltext abrufbar online unter <https://scholarlycommons.pacific.edu/euler/>. Eine Übersetzung ins Englische von Martin Mattmüller ist online abrufbar unter: <https://scholarlycommons.pacific.edu/euler-works/190/>.
- [EulerE191] Euler, L. (1753). “De partitione numerorum” (E191). *Novi Commentarii academiae scientiarum Petropolitanae, Band 3* (1750): pp. 125–179. Nachdruck in Opera Omnia: Serie 1, Band 2, pp. 254–294. Originaltext abrufbar online unter <https://scholarlycommons.pacific.edu/euler/>. Eine Übersetzung ins Niederländische von Carlos Hermans und Andy Jiao ist online abrufbar unter: <https://scholarlycommons.pacific.edu/euler-works/191/>.
- [EulerE201] Euler, L. (1753). “Calcul de la probabilité dans le jeu de rencontre” (E201). *Mémoires de l’académie des sciences de Berlin, Band 7*, (1753): pp. 255–270. Nachdruck in Opera Omnia Serie 1, Band 7, pp. 11–25. Originaltext abrufbar online unter <https://scholarlycommons.pacific.edu/euler/>. Eine Übersetzung ins Englische von Richard J. Pulskamp, ist online abrufbar unter <https://scholarlycommons.pacific.edu/euler-works/201/>.
- [EulerE212] Euler, L. (1755). “Institutiones calculi differentialis cum eius usu in analysi finitorum ac doctrina serierum” (E212). *Academiae Imperialis Scientiarum Petropolitanae* 1748: pp. 1–880. Nachdruck in Opera Omnia: Serie 1, Band 10, pp. 1–676. Originaltext abrufbar online unter <https://scholarlycommons.pacific.edu/euler/>.
- [EulerE228] Euler, L. (1758). “De numeris, qui sunt aggregata duorum quadratorum” (E228). *Novi Commentarii academiae scientiarum Petropolitanae, Band 4* (1749): pp. 3–40. Nachdruck in Opera Omnia: Serie 1, Band 2, pp. 295–327. Originaltext abrufbar online unter

<https://scholarlycommons.pacific.edu/euler/>. Eine Übersetzung ins Englische von Paul R. Bialek ist online abrufbar unter: <https://scholarlycommons.pacific.edu/euler-works/228/>.

[EulerE241] Euler, L. (1760). “Demonstratio theorematis Fermatiani omnem numerum primum formae  $4n + 1$  esse summam duorum quadratum” (E241). *Novi Commentarii academiae scientiarum Petropolitanae, Band 5* (1750): pp. 3–13. Nachdruck in Opera Omnia: Serie 1, Band 2, pp. 328–337. Originaltext abrufbar online unter <https://scholarlycommons.pacific.edu/euler/>. Eine Übersetzung ins Englische von Mark R. Snively und Phil Woodruff ist online abrufbar unter: <https://scholarlycommons.pacific.edu/euler-works/241/>.

[EulerE242] Euler, L. (1760). “Demonstratio theorematis Fermatiani omnem numerum sive integrum sive fractum esse summam quatuor pauciorumve quadratorum” (E242). *Novi Commentarii academiae scientiarum Petropolitanae, Band 5* (1751): pp. 13–58. Nachdruck in Opera Omnia: Serie 1, Band 2, pp. 338–372. Originaltext abrufbar online unter <https://scholarlycommons.pacific.edu/euler/>.

[EulerE247] Euler, L. (1760). “De seriebus divergentibus” (E247). *Novi Commentarii academiae scientiarum Petropolitanae, Band 5* (1746): pp. 205–237. Nachdruck in Opera Omnia: Serie 1, Band 14, pp. 585–617. Originaltext abrufbar online unter <https://scholarlycommons.pacific.edu/euler/>.

[EulerE251] Euler, L. (1761). “De integratione aequationis differentialis  $\frac{mdx}{\sqrt{1-x^4}} = \frac{ndy}{\sqrt{1-y^4}}$ ” (E251). *Novi Commentarii academiae scientiarum Petropolitanae, Band 6* (1751): pp. 37–57. Nachdruck in Opera Omnia: Serie 1, Band 20, pp. 58–79. Originaltext abrufbar online unter <https://scholarlycommons.pacific.edu/euler/>.

[EulerE252] Euler, L. (1761). “Observationes de comparatione arcuum curvarum irrectificibilium” (E252). *Novi Commentarii academiae scientiarum Petropolitanae, Band 6* (1753): pp. 58–84. Nachdruck in Opera Omnia: Serie 1, Band 20, pp. 80–107. Originaltext abrufbar online unter <https://scholarlycommons.pacific.edu/euler/>.

[EulerE255] Euler, L. (1761). “Solutio generalis quorundam problematum Diophanteorum, quae vulgo non nisi solutiones speciales admittere videntur” (E255). *Novi Commentarii academiae scientiarum Petropolitanae, Band 6* (1754): pp. 155–184. Nachdruck in Opera Omnia: Se-

rie 1, Band 2, pp. 428–458. Originaltext abrufbar online unter <https://scholarlycommons.pacific.edu/euler/>.

[EulerE256] Euler, L. (1761). “Specimen de usu observationum in mathe-  
si pura” (E256). *Novi Commentarii academiae scientiarum Petropoli-  
tanae, Band 6* (1754): pp. 185–230. Nachdruck in Opera Omnia: Se-  
rie 1, Band 2, pp. 459–492. Originaltext abrufbar online unter <https://scholarlycommons.pacific.edu/euler/>.

[EulerE258] Euler, L. (1761). “Principia motus fluidorum.” (E258). *Novi  
Commentarii academiae scientiarum Petropolitanae, Band 6* (1753):  
pp. 271–311. Nachdruck in Opera Omnia: Serie 2, Band 12, pp. 133–  
168. Originaltext abrufbar online unter <https://scholarlycommons.pacific.edu/euler/>. Eine Übersetzung ins Englische ist online abruf-  
bar unter: [https://scholarlycommons.pacific.edu/euler-works/  
258/](https://scholarlycommons.pacific.edu/euler-works/258/).

[EulerE261] Euler, L. (1761). “Specimen alterum methodi novae quantita-  
tes transcendentes inter se comparandi; de comparatione arcuum el-  
lipsis” (E261). *Novi Commentarii academiae scientiarum Petropoli-  
tanae, Band 7* (1755): pp. 3–48. Nachdruck in Opera Omnia: Serie  
1, Band 20, pp. 153–200. Originaltext abrufbar online unter <https://scholarlycommons.pacific.edu/euler/>.

[EulerE262] Euler, L. (1761). “Theoremata circa residua ex divisione po-  
testatum relictata” (E262). *Novi Commentarii academiae scientiarum  
Petropolitanae, Band 7* (1755): pp. 49–82. Nachdruck in Opera Om-  
nia: Serie 1, Band 2, pp. 493–518. Originaltext abrufbar online unter  
<https://scholarlycommons.pacific.edu/euler/>.

[EulerE271] Euler, L. (1763). “Theoremata arithmetica nova methodo de-  
monstrata” (E271). *Novi Commentarii academiae scientiarum Petro-  
politanae, Band 8* (1758): pp. 74–104. Nachdruck in Opera Omnia:  
Serie 1, Band 22, pp. 531–555. Originaltext abrufbar online unter  
<https://scholarlycommons.pacific.edu/euler/>.

[EulerE272] Euler, L. (1763). “Supplementum quorundam theorematum  
arithmeticorum, quae in nonnullis demonstrationibus supponuntur”  
(E272). *Novi Commentarii academiae scientiarum Petropolitanae,  
Band 8* (1759): pp. 105–128. Nachdruck in Opera Omnia: Serie 1,  
Band 2, pp. 556–575. Originaltext abrufbar online unter [https://  
scholarlycommons.pacific.edu/euler/](https://scholarlycommons.pacific.edu/euler/).

- [EulerE273] Euler, L. (1763). “Consideratio formularum, quarum integratio per arcus sectionum conicarum absolvi potest” (E273). *Novi Commentarii academiae scientiarum Petropolitanae, Band 8* (1760): pp. 129–149. Nachdruck in Opera Omnia: Serie 1, Band 20, pp. 235–255. Originaltext abrufbar online unter <https://scholarlycommons.pacific.edu/euler/>.
- [EulerE274] Euler, L. (1763). “Constructio aequationis differentio-differentialis  $Aydu^2 + (B + Cu)dudy + (D + Eu + Fuu)ddy = 0$ ” (E274). *Novi Commentarii academiae scientiarum Petropolitanae, Band 8* (1758): pp. 150–156. Nachdruck in Opera Omnia: Serie 1, Band 22, pp. 395–402. Originaltext abrufbar online unter <https://scholarlycommons.pacific.edu/euler/>.
- [EulerE275] Euler, L. (1763). “Annotationes in locum quendam Cartesii ad circuli quadraturam spectantem” (E275). *Novi Commentarii academiae scientiarum Petropolitanae, Band 8* (1758): pp. 157–168. Nachdruck in Opera Omnia: Serie 1, Band 15, pp. 1–15. Originaltext abrufbar online unter <https://scholarlycommons.pacific.edu/euler/>. Eine Übersetzung ins Englische von Jordan Bell ist online abrufbar unter: <https://scholarlycommons.pacific.edu/euler-works/275/>.
- [EulerE282] Euler, L. (1764). “De resolutione aequationum cuiusvis gradus” (E282). *Novi Commentarii academiae scientiarum Petropolitanae, Band 9* (1753): pp. 70–98. Nachdruck in Opera Omnia: Serie 1, Band 6, pp. 170–196. Originaltext abrufbar online unter <https://scholarlycommons.pacific.edu/euler/>. Eine Übersetzung von Henry J. Stevens und T. Christine Stevens ins Englische findet sich unter <https://scholarlycommons.pacific.edu/euler-works/282/>.
- [EulerE285] Euler, L. (1764). “Investigatio functionum ex data differentia-  
lium conditione.” (E285). *Novi Commentarii academiae scientiarum Petropolitanae, Band 9* (1759): pp. 170–212. Nachdruck in Opera Omnia: Serie 1, Band 23, pp. 1–41. Originaltext abrufbar online unter <https://scholarlycommons.pacific.edu/euler/>.
- [EulerE289] Euler, L. (1760). “Theoria motus corporum solidorum seu rigidorum” (E289). Publiziert als Buch (1765). Nachdruck in Opera Omnia: Serie 2, Band 3. Originaltext abrufbar online unter <https://scholarlycommons.pacific.edu/euler/>.

- [EulerE295] Euler, L. (1766). “De reductione formularum integralium ad rectificationem ellipsis ac hyperbolae” (E295). *Novi Commentarii academiae scientiarum Petropolitanae, Band 10*, (1764): pp. 3–50. Nachdruck in Opera Omnia: Serie 1, Band 20, pp. 256–301. Originaltext abrufbar online unter <https://scholarlycommons.pacific.edu/euler/>.
- [EulerE296] Euler, L. (1766). “Elementa calculi variationum” (E296). *Novi Commentarii academiae scientiarum Petropolitanae, Band 10*, (1756): pp. 51–93. Nachdruck in Opera Omnia: Serie 1, Band 25, pp. 141–176. Originaltext abrufbar online unter <https://scholarlycommons.pacific.edu/euler/>.
- [EulerE297] Euler, L. (1766). “Analytica explicatio methodi maximorum et minimorum” (E297). *Novi Commentarii academiae scientiarum Petropolitanae, Band 10*, (1756): pp. 93–134. Nachdruck in Opera Omnia: Serie 1, Band 25, pp. 177–207. Originaltext abrufbar online unter <https://scholarlycommons.pacific.edu/euler/>.
- [EulerE321] Euler, L. (1766). “Observationes circa integralia formularum  $\int x^{p-1} dx (1-x^n)^{\frac{q}{n}-1}$  posito post integrationem  $x = 1$ ” (E321). *Mélanges de philosophie et de la mathématique de la société royale de Turin, Band 3* (1765): pp. 156–177. Nachdruck in Opera Omnia: Serie 1, Band 17, pp. 268–288. Originaltext abrufbar online unter <https://scholarlycommons.pacific.edu/euler/>.
- [EulerE322] Euler, L. (1767). “De usu functionum discontinuarum in analysi” (E322). *Novi Commentarii academiae scientiarum Petropolitanae, Band 11*, (1762): pp. 67–102. Nachdruck in Opera Omnia: Serie 1, Band 23, pp. 74–91. Originaltext abrufbar online unter <https://scholarlycommons.pacific.edu/euler/>.
- [EulerE325] Euler, L. (1767). “Solutio facilis problematum quorundam geometricorum difficillimorum” (E325). *Novi Commentarii academiae scientiarum Petropolitanae, Band 11*, (1763): pp. 103–123. Nachdruck in Opera Omnia: Serie 1, Band 26, pp. 139–157. Originaltext abrufbar online unter <https://scholarlycommons.pacific.edu/euler/>.
- [EulerE326] Euler, L. (1767). “Observationes analyticae” (E326). *Novi Commentarii academiae scientiarum Petropolitanae, Band 11*, (1763): pp. 124–143. Nachdruck in Opera Omnia: Serie 1, Band 15, pp. 50–

69. Originaltext abrufbar online unter <https://scholarlycommons.pacific.edu/euler/>.

[EulerE333] Euler, L. (1767). “Recherches sur la courbure des surfaces” (E333). *Mémoires de l’académie des sciences de Berlin, Band 16*, (1763): pp. 119–143. Nachdruck in Opera Omnia: Serie 1, Band 28, pp. 1–28. Originaltext abrufbar online unter <https://scholarlycommons.pacific.edu/euler/>. Eine Übersetzung ins Englische von einem unbekanntem Autor findet man online unter: <https://scholarlycommons.pacific.edu/euler-works/333/>.

[EulerE342] Euler, L. (1768). “Institutionum calculi integralis volumen primum” (E342). Gedruckt als Buch von der St. Petersburger Akademie der Wissenschaften (1763): pp. 1-542. Nachdruck in Opera Omnia: Serie 1, Band 11, pp. 1-462. Originaltext abrufbar online unter <https://scholarlycommons.pacific.edu/euler/>.

[EulerE343] Euler, L. (1768). “Lettres à une princesse d’Allemagne sur divers sujets de physique et de philosophie – Tome premiere” (E343). Gedruckt als Buch von der St. Petersburger Akademie der Wissenschaften (1760-61): pp. 1-314. Nachdruck in Opera Omnia: Serie 3, Band 11. Originaltext abrufbar online unter <https://scholarlycommons.pacific.edu/euler/>.

[EulerE344] Euler, L. (1768). “Lettres à une princesse d’Allemagne sur divers sujets de physique et de philosophie – Tome seconde” (E344). Gedruckt als Buch von der St. Petersburger Akademie der Wissenschaften (1760–61): pp. 1-340. Nachdruck in Opera Omnia: Serie 3, Band 11. Originaltext abrufbar online unter <https://scholarlycommons.pacific.edu/euler/>.

[EulerE345] Euler, L. (1768). “Integratio aequationis  $\frac{dx}{\sqrt{A+Bx+Cx^2+Dx^3+Ex^4}} = \frac{dy}{\sqrt{A+By+Cy^2+Dy^3+Ey^4}}$ ” (E345). *Novi Commentarii academiae scientiarum Petropolitanae, Band 12* (1765): pp. 3–16. Nachdruck in Opera Omnia: Serie 1, Band 20, pp. 302–317. Originaltext abrufbar online unter <https://scholarlycommons.pacific.edu/euler/>.

[EulerE352] Euler, L. (1768). “Remarques sur un beau rapport entre les Serie des puissances tant directes que reciproques” (E352). *Mémoires de*

*l'académie des sciences de Berlin, Band 17* (1749): pp. 83–106. Nachdruck in *Opera Omnia: Serie 1, Band 15*, pp. 70–90. Originaltext abrufbar online unter <https://scholarlycommons.pacific.edu/euler/>.

[EulerE366] Euler, L. (1769). “Institutionum calculi integralis volumen secundum” (E366). Gedruckt als Buch von der St. Petersburger Akademie der Wissenschaften (1763): pp. 1–526. Nachdruck in *Opera Omnia: Serie 1, Band 12*, pp. 1–542. Originaltext abrufbar online unter <https://scholarlycommons.pacific.edu/euler/>.

[EulerE368] Euler, L. (1769). “De curva hypergeometrica hac aequatione expressa  $y = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots x$ ” (E368). *Novi Commentarii academiae scientiarum Petropolitanae, Band 13* (1765): pp. 3–66. Nachdruck in *Opera Omnia: Serie 1, Band 28*, pp. 41–98. Originaltext abrufbar online unter <https://scholarlycommons.pacific.edu/euler/>.

[EulerE375] Euler, L. (1769). “Sectio prima de statu aequilibrum fluidorum” (E375). *Novi Commentarii academiae scientiarum Petropolitanae, Band 12* (1766): pp. 305–416. Nachdruck in *Opera Omnia: Serie 2, Band 13*, pp. 1–72. Originaltext abrufbar online unter <https://scholarlycommons.pacific.edu/euler/>.

[EulerE387] Euler, L. (1770). “Vollständige Anleitung zur Algebra, Erster Theil” (E387). *St. Petersburg: Imperiale Academie der Wissenschaften* (1767): pp. 1–356. Nachdruck in *Opera Omnia: Serie 1, Band 1*, pp. 1–208. Originaltext abrufbar online unter <https://scholarlycommons.pacific.edu/euler/>.

[EulerE388] Euler, L. (1770). “Vollständige Anleitung zur Algebra, Zweiter Theil” (E388). *St. Petersburg: Imperiale Academie der Wissenschaften* (1767): pp. 1–532. Nachdruck in *Opera Omnia: Serie 1, Band 1*, pp. 209–498. Originaltext abrufbar online unter <https://scholarlycommons.pacific.edu/euler/>.

[EulerE390] Euler, L. (1770). “Considerationes de trajectoriis orthogonalibus” (E390). *Novi Commentarii academiae scientiarum Petropolitanae, Band 14* (1768): pp. 104–128. Nachdruck in *Opera Omnia: Serie 1, Band 28*, pp. 99–119. Originaltext abrufbar online unter <https://scholarlycommons.pacific.edu/euler/>.

[EulerE391] Euler, L. (1770). “De formulis integralibus duplicatis” (E391). *Novi Commentarii academiae scientiarum Petropolitanae, Band 14*

- (1768): pp. 72–103. Nachdruck in Opera Omnia: Serie 1, Band 18, pp. 289–315. Originaltext abrufbar online unter <https://scholarlycommons.pacific.edu/euler/>.
- [EulerE394] Euler, L. (1770). “De partitione numerorum in partes tam numero quam specie datas” (E394). *Novi Commentarii academiae scientiarum Petropolitanae, Band 14* (1768): pp. 168–187. Nachdruck in Opera Omnia: Serie 1, Band 3, pp. 131–147. Originaltext abrufbar online unter <https://scholarlycommons.pacific.edu/euler/>. Eine Übersetzung ins Englische von Jordan Bell ist online abrufbar unter: <https://scholarlycommons.pacific.edu/euler-works/394/>.
- [EulerE396] Euler, L. (1770). “Sectio secunda de principiis motus fluidorum” (E396). *Novi Commentarii academiae scientiarum Petropolitanae, Band 14* (1766): pp. 270–386. Nachdruck in Opera Omnia: Serie 2, Band 13, pp. 73–153. Originaltext abrufbar online unter <https://scholarlycommons.pacific.edu/euler/>.
- [EulerE406] Euler, L. (1771). “Observationes circa radices aequationum” (E406). *Novi Commentarii academiae scientiarum Petropolitanae, Band 15* (1771): pp. 51–74. Nachdruck in Opera Omnia: Serie 1, Band 6, pp. 263–286. Originaltext abrufbar online unter <https://scholarlycommons.pacific.edu/euler/>.
- [EulerE417] Euler, L. (1772). “Lettres à une princesse d’Allemagne sur divers sujets de physique et de philosophie – Tome troisieme” (E417). Gedruckt als Buch von der St. Petersburger Akademie der Wissenschaften (1762): pp. 1–340. Nachdruck in Opera Omnia: Serie 3, Band 12. Originaltext abrufbar online unter <https://scholarlycommons.pacific.edu/euler/>.
- [EulerE419] Euler, L. (1772). “De solidis quorum superficiem in planum explicare licet” (E419). *Novi Commentarii academiae scientiarum Petropolitanae, Band 16* (1770): pp. 3–34. Nachdruck in Opera Omnia: Serie 1, Band 28, pp. 161–186. Originaltext abrufbar online unter <https://scholarlycommons.pacific.edu/euler/>.
- [EulerE420] Euler, L. (1772). “Methodus nova et facilis calculum variationum tractandi” (E420). *Novi Commentarii academiae scientiarum Petropolitanae, Band 16* (1771): pp. 35–70. Nachdruck in Opera Omnia: Serie 1, Band 25, pp. 208–235. Originaltext abrufbar online unter <https://scholarlycommons.pacific.edu/euler/>.

- [EulerE421] Euler, L. (1772). “Evolutio formulae integralis  $\int x^{f-1} dx \log^{\frac{m}{n}}(x)$  integratione a valore  $x = 0$  ad  $x = 1$  extensa” (E421). *Novi Commentarii academiae scientiarum Petropolitanae, Band 16* (1771): pp. 91–139. Nachdruck in Opera Omnia: Serie 1, Band 17, pp. 316–357. Originaltext abrufbar online unter <https://scholarlycommons.pacific.edu/euler/>.
- [EulerE428] Euler, L. (1773). “Observationes circa bina biquadrata, quorum summam in duo alia biquadrata resolvere liceat” (E428). *Novi Commentarii academiae scientiarum Petropolitanae, Band 17* (1772): pp. 64–69. Nachdruck in Opera Omnia: Serie 1, Band 3, pp. 211–217. Originaltext abrufbar online unter <https://scholarlycommons.pacific.edu/euler/>. Eine Übersetzung ins Englische von Jordan Bell ist online abrufbar unter: <https://scholarlycommons.pacific.edu/euler-works/428/>.
- [EulerE431] Euler, L. (1773). “Consideratio aequationis differentio-differentialis  $(a + bx)ddz + (c + ex)\frac{dx dz}{x} + (f + gx)\frac{z dx^2}{xx} = 0$ ” (E431). *Novi Commentarii academiae scientiarum Petropolitanae, Band 17* (1772): pp. 125–154. Nachdruck in Opera Omnia: Serie 1, Band 23, pp. 142–173. Originaltext abrufbar online unter <https://scholarlycommons.pacific.edu/euler/>.
- [EulerE432] Euler, L. (1773). “Exercitationes analyticae” (E432). *Novi Commentarii academiae scientiarum Petropolitanae, Band 17* (1772): pp. 173–204. Nachdruck in Opera Omnia: Serie 1, Band 15, pp. 131–167. Originaltext abrufbar online unter <https://scholarlycommons.pacific.edu/euler/>.
- [EulerE445] Euler, L. (1773). “Novae demonstrationes circa resolutionem numerorum in quadrata” (E445). *Nova acta eruditorum, Band von 1773* (1772): pp. 193–211. Nachdruck in Opera Omnia: Serie 1, Band 3, pp. 218–238. Originaltext abrufbar online unter <https://scholarlycommons.pacific.edu/euler/>. Eine Übersetzung ins Englische von Jordan Bell ist online abrufbar unter: <https://scholarlycommons.pacific.edu/euler-works/445/>.
- [EulerE447] Euler, L. (1774). “Summatio progressionum  $\sin^\lambda(\phi) + \sin^\lambda(2\phi) + \sin^\lambda(3\phi) + \dots + \sin^\lambda(n\phi)$ ,  $\cos^\lambda(\phi) + \cos^\lambda(2\phi) + \cos^\lambda(3\phi) + \dots + \cos^\lambda(n\phi)$ ” (E447). *Novi Commentarii academiae scientiarum Petropolitanae, Band 18* (1773): pp. 24–36. Nachdruck in Opera Omnia:

Serie 1, Band 15, pp. 168–184. Originaltext abrufbar online unter <https://scholarlycommons.pacific.edu/euler/>. Eine Übersetzung ins Englische ist online abrufbar unter: <https://scholarlycommons.pacific.edu/euler-works/447/>.

[EulerE449] Euler, L. (1774). “Demonstrationes circa residua ex divisione potestatum per numeros primos resultantia .” (E449) *Novi Commentarii academiae scientiarum Petropolitanae, Band 18* (1772): pp. 85–135. Nachdruck in Opera Omnia: Serie 1, Band 3, pp. 240–281. Originaltext abrufbar online unter <https://scholarlycommons.pacific.edu/euler/>.

[EulerE463] Euler, L. (1775). “De valore formulae integralis  $\int \frac{z^{\lambda-\omega} \pm z^{\lambda+\omega}}{1 \pm z^{2\lambda}} \frac{dz}{z} (\log z)^\mu$  casu quo post integrationem ponitur  $z = 1$ .” (E463) *Novi Commentarii academiae scientiarum Petropolitanae, Band 19* (1774): pp. 30–66. Nachdruck in Opera Omnia: Serie 1, Band 17, pp. 384–420. Originaltext abrufbar online unter <https://scholarlycommons.pacific.edu/euler/>.

[EulerE464] Euler, L. (1775). “Nova methodus quantitates integrales determinandi” (E464). *Novi Commentarii academiae scientiarum Petropolitanae, Band 19* (1774): pp. 66–102. Nachdruck in Opera Omnia: Serie 1, Band 17, pp. 421–457. Originaltext abrufbar online unter <https://scholarlycommons.pacific.edu/euler/>.

[EulerE465] Euler, L. (1775). “Demonstratio theorematis Neutoniani de evolutione potestatum binomii pro casibus, quibus exponentes non sunt numeri integri” (E465). *Novi Commentarii academiae scientiarum Petropolitanae, Band 19* (1773): pp. 103–111. Nachdruck in Opera Omnia: Serie 1, Band 15, pp. 207–216. Originaltext abrufbar online unter <https://scholarlycommons.pacific.edu/euler/>.

[EulerE475] Euler, L. (1776). “Speculationes analyticae” (E475). *Novi Commentarii academiae scientiarum Petropolitanae, Band 19* (1774): pp. 59–79. Nachdruck in Opera Omnia: Serie 1, Band 18, pp. 1–22. Originaltext abrufbar online unter <https://scholarlycommons.pacific.edu/euler/>.

[EulerE490] Euler, L. (1778). “De repraesentatione superficiei sphaericae super plano” (E490). *Acta Academiae Scientiarum Imperialis Petropolitanae, Band 1777: I* (1775): pp. 107–132. Nachdruck in Opera Omnia: Serie 1, Band 28, pp. 248–276. Originaltext abrufbar online unter

<https://scholarlycommons.pacific.edu/euler/>. Eine Übersetzung ins Englische von George Heine ist online abrufbar unter: <https://scholarlycommons.pacific.edu/euler-works/490/>.

[EulerE491] Euler, L. (1778). “De projectione geographica superficiei sphaericae” (E491). *Acta Academiae Scientiarum Imperialis Petropolitanae, Band 1777: I* (1775): pp. 133–142. Nachdruck in Opera Omnia: Serie 1, Band 28, pp. 276–287. Originaltext abrufbar online unter <https://scholarlycommons.pacific.edu/euler/>. Eine Übersetzung ins Englische von George Heine ist online abrufbar unter: <https://scholarlycommons.pacific.edu/euler-works/491/>.

[EulerE492] Euler, L. (1778). “De projectione geographica Deslisiana in mappa generali imperii russici usitata” (E492). *Acta Academiae Scientiarum Imperialis Petropolitanae, Band 1777: I* (1775): pp. 143–153. Nachdruck in Opera Omnia: Serie 1, Band 28, pp. 288–297. Originaltext abrufbar online unter <https://scholarlycommons.pacific.edu/euler/>. Eine Übersetzung ins Englische von George Heine ist online abrufbar unter: <https://scholarlycommons.pacific.edu/euler-works/492/>.

[EulerE498] Euler, L. (1779). “Extrait d’une lettre de M. Euler à M. Beugelin en Mai 1778” (E498). *Nouveaux Mémoires de l’académie royale des sciences de Berlin, Band von 1776* (1778): pp. 337–339. Nachdruck in Opera Omnia: Serie 1, Band 3, pp. 418–420. Originaltext abrufbar online unter <https://scholarlycommons.pacific.edu/euler/>. Eine Übersetzung ins Englische von Benjamin Linowitz und eine von Todd Doucet sind online abrufbar unter: <https://scholarlycommons.pacific.edu/euler-works/498/>.

[EulerE500] Euler, L. (1780). “De valore formulae integralis  $\int \frac{x^{a-1} dx}{\log x} \cdot \frac{(1-x^b)(1-x^c)}{(1-x^n)}$  a termino  $x = 0$  usque ad  $x = 1$  extensae” (E500). *Acta Academiae Scientiarum Imperialis Petropolitanae, Band 1777: II* (1776): pp. 29–47. Nachdruck in Opera Omnia: Serie 1, Band 18, pp. 51–68. Originaltext abrufbar online unter <https://scholarlycommons.pacific.edu/euler/>.

[EulerE506] Euler, L. (1781). “Dilucidationes super methodo elegantissima, qua illustris de la Grange usus est in integranda aequatione differentiali  $\frac{dx}{\sqrt{X}} = \frac{dy}{\sqrt{Y}}$ ” (E506). *Acta Academiae Scientiarum Imperialis Petropolitanae, Band 1778: I* (1778): pp. 20–57. Nachdruck in Opera

Omnia: Serie 1, Band 20, pp. 1–38. Originaltext abrufbar online unter <https://scholarlycommons.pacific.edu/euler/>.

[EulerE514] Euler, L. (1782). “Trigonometria sphaerica universa, ex primis principiis breviter et dilucide derivata” (E514). *Acta Academiae Scientiarum Imperialis Petropolitanae, 1779 Band I* (1775): pp. 72–86. Nachdruck in Opera Omnia: Serie 1, Band 26, pp. 224–236. Originaltext abrufbar online unter <https://scholarlycommons.pacific.edu/euler/>.

[EulerE522] Euler, L. (1782). “De formatione fractionum continuarum” (E522). *Acta Academiae Scientiarum Imperialis Petropolitanae, Band 1779, I* (1775): pp. 3–29. Nachdruck in Opera Omnia: Serie 1, Band 15, pp. 314–337. Originaltext abrufbar online unter <https://scholarlycommons.pacific.edu/euler/>.

[EulerE530] Euler, L. (1782). “Recherches sur un nouvelle espèce de quarrés magique” (E530). *Verhandelingen uitgegeven door het zeeuwsch Genootschap der Wetenschappen te Vlissingen, Band 9* (1782): pp. 85–239. Nachdruck in Opera Omnia: Serie 1, Band 7, pp. 291–292. Originaltext abrufbar online unter <https://scholarlycommons.pacific.edu/euler/>. Eine Übersetzung ins Englische von Andie Ho und Dominic Klyve ist online abrufbar unter: <https://scholarlycommons.pacific.edu/euler-works/530/>.

[EulerE532] Euler, L. (1783). “De serie Lambertina plurimisque eius insignibus proprietatibus” (E532). *Acta Academiae Scientiarum Imperialis Petropolitanae, Band 1779: II* (1776): pp. 29–51. Nachdruck in Opera Omnia: Serie 1, Band 6, pp. 350–369. Originaltext abrufbar online unter <https://scholarlycommons.pacific.edu/euler/>.

[EulerE540] Euler, L. (1783). “Nova methodus fractiones quascumque racionales in fractiones simplices resolvendi” (E540). *Acta Academiae Scientiarum Imperialis Petropolitanae, Band 1780: I* (1775): pp. 32–46. Nachdruck in Opera Omnia: Serie 1, Band 6, pp. 370–383. Originaltext abrufbar online unter <https://scholarlycommons.pacific.edu/euler/>.

[EulerE541] Euler, L. (1783). “Evolutio producti infiniti  $(1-x)(1-xx)(1-x^3)(1-x^4)(1-x^5) \cdot \text{etc}$ , in seriem simplicem” (E541). *Acta Academiae Scientiarum Imperialis Petropolitanae, Band 1780: I* (1775): pp. 47–55. Nachdruck in Opera Omnia: Serie 1, Band 3, pp. 472–479. Ori-

ginaltext abrufbar online unter <https://scholarlycommons.pacific.edu/euler/>.

[EulerE551] Euler, L. (1783). “Varia artificia in serierum indolem inquirendi” (E551). *Opuscula Analytica, Band 1* (1772): pp. 48–63. Nachdruck in Opera Omnia: Serie 1, Band 15, pp. 383–399. Originaltext abrufbar online unter <https://scholarlycommons.pacific.edu/euler/>. Englische Übersetzung von Cynthia Huffman, PH.D. (2023) Abrufbar online unter: <https://scholarlycommons.pacific.edu/euleriana/>.

[EulerE552] Euler, L. (1783). “Observationes circa divisionem quadratorum per numeros primos” (E552). *Opuscula analytica, Band 1* (1772): pp. 64–84. Nachdruck in Opera Omnia: Serie 1, Band 3, pp. 497–512. Originaltext abrufbar online unter <https://scholarlycommons.pacific.edu/euler/>.

[EulerE555] Euler, L. (1783). “De eximio usu methodi interpolationum in serierum doctrina” (E555). *Opuscula analytica, Band 1* (1772): pp. 157–210. Nachdruck in Opera Omnia: Serie 1, Band 15, pp. 435–497. Originaltext abrufbar online unter <https://scholarlycommons.pacific.edu/euler/>.

[EulerE560] Euler, L. (1783). “Miscellanea analytica” (E560). *Opuscula analytica, Band 1* (1773): pp. 329–344. Nachdruck in Opera Omnia: Serie 1, Band 4, pp. 91–104. Originaltext abrufbar online unter <https://scholarlycommons.pacific.edu/euler/>. Eine Übersetzung ins Italienische von Francesco Venti ist abrufbar unter: <https://scholarlycommons.pacific.edu/euler-works/560/>.

[EulerE564] Euler, L. (1784). “Speculationes circa quasdam insignes proprietates numerorum” (E564). *Acta Academiae Scientiarum Imperialis Petropolitanae, Band 1780: II* (1775): pp. 18–30. Nachdruck in Opera Omnia: Serie 1, Band 4, pp. 105–115. Originaltext abrufbar online unter <https://scholarlycommons.pacific.edu/euler/>. Eine Übersetzung ins Englische von Jordan Bell abrufbar unter: <https://scholarlycommons.pacific.edu/euler-works/564/>.

[EulerE565] Euler, L. (1784). “De plurimis quantitibus transcendentibus, quas nullo modo per formulas integrales exprimere licet” (E565). *Acta Academiae Scientiarum Imperialis Petropolitanae, Band 1780: II* (1775): pp. 31–37. Nachdruck in Opera Omnia: Serie 1, Band 15, pp. 522–527. Originaltext abrufbar online unter <https://>

[scholarlycommons.pacific.edu/euler/](https://scholarlycommons.pacific.edu/euler/). Eine Übersetzung ins Englische von Jordan Bell abrufbar unter: <https://scholarlycommons.pacific.edu/euler-works/565/>.

- [EulerE572] Euler, L. (1784). “Nova methodus integrandi formulas differentiales rationales sine subsidio quantitatum imaginariarum” (E572). *Acta Academiae Scientiarum Imperialis Petropolitanae, Band 1780: II* (1775): pp. 3–47. Nachdruck in Opera Omnia: Serie 1, Band 18, pp. 113–155. Originaltext abrufbar online unter <https://scholarlycommons.pacific.edu/euler/>.
- [EulerE575] Euler, L. (1784). “De mirabilibus proprietatibus unciarum, quae in evolutione binomii ad potestatem quamcunque evecti occurrunt” (E575). *Acta Academiae Scientiarum Imperialis Petropolitanae, Band 1781: I* (1776): pp. 74–111. Nachdruck in Opera Omnia: Serie 1, Band 15, pp. 528–568. Originaltext abrufbar online unter <https://scholarlycommons.pacific.edu/euler/>.
- [EulerE581] Euler, L. (1785). “Plenior explicatio circa comparisonem quantitatum in formula integrali  $\int \frac{Zdz}{\sqrt{1+mzz+nz^4}}$  contentarum denotante  $Z$  functionem quamcunque rationalem ipsius  $zz$ ” (E581). *Acta Academiae Scientiarum Imperialis Petropolitanae, Band 1781: II* (1775): pp. 3–22. Nachdruck in Opera Omnia: Serie 1, Band 20, pp. 39–56. Originaltext abrufbar online unter <https://scholarlycommons.pacific.edu/euler/>.
- [EulerE583] Euler, L. (1785). “De numero memorabili in summatione progressionis harmonicae naturalis occurrente” (E583). *Acta Academiae Scientiarum Imperialis Petropolitanae, Band 1781: II* (1776): pp. 45–75. Nachdruck in Opera Omnia: Serie 1, Band 15, pp. 569–603. Originaltext abrufbar online unter <https://scholarlycommons.pacific.edu/euler/>.
- [EulerE587] Euler, L. (1785). “Observationes in aliquot theoremata illustrissimi de la Grange” (E587). *Opuscula analytica, Band 2* (1775): pp. 16–41. Nachdruck in Opera Omnia: Serie 1, Band 18, pp. 156–177. Originaltext abrufbar online unter <https://scholarlycommons.pacific.edu/euler/>.
- [EulerE588] Euler, L. (1785). “Investigatio formulae integralis  $\int \frac{x^{m-1}dx}{(1+x^k)^n}$  casu, quo post integrationem statuitur  $x = \infty$ ” (E588). *Opuscula analytica, Band 2* (1775): pp. 42–54. Nachdruck in Opera Omnia: Serie

- 1, Band 18, pp. 178–189. Originaltext abrufbar online unter <https://scholarlycommons.pacific.edu/euler/>.
- [EulerE589] Euler, L. (1785). “Investigatio valoris integralis  $\int \frac{x^{m-1} dx}{1-2x^k \cos \theta + x^{2k}}$  a termino  $x = 0$  ad  $x = \infty$  extensi” (E589). *Opuscula analytica, Band 2* (1775): pp. 55–75. Nachdruck in Opera Omnia: Serie 1, Band 18, pp. 190–208. Originaltext abrufbar online unter <https://scholarlycommons.pacific.edu/euler/>.
- [EulerE591] Euler, L. (1785). “De relatione inter ternas pluresve quantitates instituenda” (E591). *Opuscula analytica, Band 2* (1775): pp. 91–101. Nachdruck in Opera Omnia: Serie 1, Band 4, pp. 136–145. Originaltext abrufbar online unter <https://scholarlycommons.pacific.edu/euler/>. Eine Übersetzung ins Englische von Geoffrey Smith ist online abrufbar unter: <https://scholarlycommons.pacific.edu/euler-works/591/>.
- [EulerE592] Euler, L. (1785). “De resolutione fractionum transcendentium in infinitas fractiones simplices” (E592). *Opuscula Analytica, Band 2* (1775): pp. 102–137. Nachdruck in Opera Omnia: Serie 1, Band 15, pp. 621–660. Originaltext abrufbar online unter <https://scholarlycommons.pacific.edu/euler/>.
- [EulerE594] Euler, L. (1785). “Methodus inveniendi formulas integrales, quae certis casibus datam inter se teneant rationem, ubi simul methodus traditur fractiones continuas summandi” (E594). *Opuscula Analytica, Band 2* (1775): pp. 102–137. Nachdruck in Opera Omnia: Serie 1, Band 15, pp. 621–660. Originaltext abrufbar online unter <https://scholarlycommons.pacific.edu/euler/>.
- [EulerE598] Euler, L. (1785). “De insigni promotione scientiae numerorum” (E598). *Opuscula analytica, Band 2* (1775): pp. 275–314. Nachdruck in Opera Omnia: Serie 1, Band 4, pp. 163–196. Originaltext abrufbar online unter <https://scholarlycommons.pacific.edu/euler/>.
- [EulerE605] Euler, L. (1786). “De miris proprietatibus curvae elasticae sub aequatione  $y = \int \frac{xx}{\sqrt{1-x^4}}$  contentae” (E605). *Acta Academiae Scientiarum Imperialis Petropolitanae, Band 1782: II*, (1775): pp. 34–61. Nachdruck in Opera Omnia: Serie 1, Band 21, pp. 91 – 118. Originaltext abrufbar online unter <https://scholarlycommons.pacific.edu/euler/>.

- [EulerE606] Euler, L. (1786). “Speculationes super formula integrali  $\int \frac{x^n dx}{\sqrt{aa-2bx+cx}}$ , ubi simul egregiae observationes circa fractiones continuas occurrunt” (E606). *Acta Academiae Scientiarum Imperialis Petropolitanae, Band 1782: II*, (1775): pp. 62–84. Nachdruck in Opera Omnia: Serie 1, Band 18, pp. 244 – 264. Originaltext abrufbar online unter <https://scholarlycommons.pacific.edu/euler/>.
- [EulerE610] Euler, L. (1787). “Novae demonstrationes circa divisores numerorum formae  $xx + nyy$ ” (E610). *Nova Acta Academiae Scientiarum Imperialis Petropolitanae, Band 1* (1775): pp. 47–74. Nachdruck in Opera Omnia: Serie 1, Band 4, pp. 197–220. Originaltext abrufbar online unter <https://scholarlycommons.pacific.edu/euler/>.
- [EulerE613] Euler, L. (1813). “Dilucidationes in capita postrema calculi mei differentialis de functionibus inexplicabilibus” (E613). *Mémoires de l’académie des sciences de St.-Petersbourg, Band 4* (1780): pp. 1–33. Nachdruck in Opera Omnia: Serie 1, Band 16,2, pp.88–119. Originaltext abrufbar online unter <https://scholarlycommons.pacific.edu/euler/>.
- [EulerE616] Euler, L. (1788). “De transformatione seriei divergentis  $1 - mx + m(m + n)x^2 - m(m + n)(m + 2n)x^3 + \text{etc.}$  in fractionem continuam” (E616). *Nova Acta Academiae Scientiarum Imperialis Petropolitanae, Band 2* (1776): pp. 36–45. Nachdruck in Opera Omnia: Serie 1, Band 16,1, pp.34–46. Originaltext abrufbar online unter <https://scholarlycommons.pacific.edu/euler/>.
- [EulerE617] Euler, L. (1788). “De transformatione seriei divergentis  $1 - mx + m(m + n)x^2 - m(m + n)(m + 2n)x^3 + \text{etc.}$  in fractionem continuam” (E617). *Nova Acta Academiae Scientiarum Imperialis Petropolitanae, Band 2* (1776): pp. 46–69. Nachdruck in Opera Omnia: Serie 1, Band 16,1, pp.47–74. Originaltext abrufbar online unter <https://scholarlycommons.pacific.edu/euler/>.
- [EulerE620] Euler, L. (1788). “Methodus facilis inveniendi integrale huius formulae  $\int \frac{\partial x}{x} \cdot \frac{x^{n+p} - 2x^n \cos \zeta + x^{n-p}}{x^{2n} - 2x^n \cos \theta + 1}$  casu quo post integrationem ponitur vel  $x = 1$  vel  $x = \infty$ ” (E620). *Nova Acta Academiae Scientiarum Imperialis Petropolitanae, Band 3* (1776): pp. 3–24. Nachdruck in Opera Omnia: Serie 1, Band 18, pp. 265–290. Originaltext abrufbar online unter <https://scholarlycommons.pacific.edu/euler/>.

- [EulerE621] Euler, L. (1788). “De summo usu calculi imaginariorum in analysi” (E621). *Nova Acta Academiae Scientiarum Imperialis Petropolitanae, Band 3* (1776): pp. 25–46. Nachdruck in Opera Omnia: Series 1, Band 18, pp. 291–317. Original abrufbar online unter <https://scholarlycommons.pacific.edu/euler/>.
- [EulerE629] Euler, L. (1789). “Evolutio formulae integralis  $\int dx \left( \frac{1}{1-x} + \frac{1}{\log(x)} \right)$  a termino  $x = 0$  ad  $x = 1$  extensae” (E629). *Nova Acta Academiae Scientiarum Imperialis Petropolitanae, Band 4* (1776): pp. 3–16. Nachdruck in Opera Omnia: Serie 1, Band 18, pp. 318–334. Originaltext abrufbar online unter <https://scholarlycommons.pacific.edu/euler/>.
- [EulerE631] Euler, L. (1789). “Analysis facilis et plana ad eas series maxime abstrusas perducens, quibus omnium aequationum algebraicarum non solum radices ipsae sed etiam quaevis earum potestates exprimi possunt” (E631). *Nova Acta Academiae Scientiarum Imperialis Petropolitanae, Band 4* (1776): pp. 55–73. Nachdruck in Opera Omnia: Serie 1, Band 6, pp. 384–404. Originaltext abrufbar online unter <https://scholarlycommons.pacific.edu/euler/>.
- [EulerE644] Euler, L. (1790). “Innumerae aequationum formae ex omnibus ordinibus, quarum resolutio exhiberi potest” (E644). *Nova Acta Academiae Scientiarum Imperialis Petropolitanae, Band 6*, (1776): pp. 25–35. Nachdruck in Opera Omnia: Serie 1, Band 6, pp. 434–446. Originaltext abrufbar online unter <https://scholarlycommons.pacific.edu/euler/>. Eine Übersetzung von Henry J. Stevens und T. Christine Stevens ins Englische findet sich unter <https://scholarlycommons.pacific.edu/euler-works/644/>.
- [EulerE652] Euler, L. (1793). “De termino generali serierum hypergeometricarum” (E652). *Nova Acta Academiae Scientiarum Imperialis Petropolitinae, Band 7*, (1777): pp. 42–82. Nachdruck in Opera Omnia: Serie 1, Band 16,1 , pp. 139–162. Originaltext abrufbar online unter <https://scholarlycommons.pacific.edu/euler/>.
- [EulerE656] Euler, L. (1793). “De integrationibus maxime memorabilibus ex calculo imaginariorum oriundis” (E656). *Nova Acta Academiae Scientiarum Imperialis Petropolitanae, Band 7* (1777): pp. 99–133. Nachdruck in Opera Omnia: Serie 1, Band 19, pp. 1–44. Originaltext abrufbar online unter <https://scholarlycommons.pacific.edu/euler/>.

- [EulerE657] Euler, L. (1793). “Supplementum ad dissertationem praecedentem circa integrationem formulae  $\int \frac{z^{m-1} \partial z}{1-z^n}$  casu quo ponitur  $z = v(\cos \phi + \sqrt{-1} \sin \phi)$ ” (E657). *Nova Acta Academiae Scientiarum Imperialis Petropolitanae, Band 7* (1777): pp. 134–148. Nachdruck in Opera Omnia: Serie 1, Band 19, pp. 45–62. Originaltext abrufbar online unter <https://scholarlycommons.pacific.edu/euler/>.
- [EulerE661] Euler, L. (1793). “Variae considerationes circa series hypergeometricas” (E661). *Nova Acta Academiae Scientiarum Imperialis Petropolitinae, Band 8* (1776): pp. 3–14. Nachdruck in Opera Omnia: Serie 1, Band 16,1, pp. 178–192. Originaltext abrufbar online unter <https://scholarlycommons.pacific.edu/euler/>.
- [EulerE663] Euler, L. (1794). “Plenior expositio serierum illarum memorabilium, quae ex unciis potestatum binomii formantur” (E663). *Nova Acta Academiae Scientiarum Imperialis Petropolitanae, Band 8* (1776): pp. 32–68. Nachdruck in Opera Omnia: Serie 1, Band 16,1, pp. 193–234. Originaltext abrufbar online unter <https://scholarlycommons.pacific.edu/euler/>.
- [EulerE664] Euler, L. (1794). “Exercitatio analytica” (E664). *Nova Acta Academiae Scientiarum Imperialis Petropolitanae, Band 8* (1776): pp. 69–72. Nachdruck in Opera Omnia: Serie 1, Band 16,1, pp. 235–240. Originaltext abrufbar online unter <https://scholarlycommons.pacific.edu/euler/>. Eine Übersetzung von Jordan Bell in Englische ist online abrufbar unter: <https://scholarlycommons.pacific.edu/euler-works/664/>.
- [EulerE671] Euler, L. (1777). “De formulis differentialibus angularibus maxime irrationalibus, quas tamen per logarithmos et arcus circulares integrare licet” (E671). *Institutionum calculi integralis, Band 4*, (1794): pp. 183–194. Nachdruck in Opera Omnia: Serie 1, Band 19, pp. 129–140. Originaltext abrufbar online unter <https://scholarlycommons.pacific.edu/euler/>.
- [EulerE672] Euler, L. (1778). “Theorema maxime memorabile circa formulam integram  $\int \frac{\partial \phi \cos \lambda \phi}{(1+aa-2a \cos \phi)^{n+1}}$ ” (E672). *Institutionum calculi integralis, Band 4*, (1794): pp. 194–217. Nachdruck in Opera Omnia: Serie 1, Band 19, pp. 141–167. Originaltext abrufbar online unter <https://scholarlycommons.pacific.edu/euler/>.

- [EulerE673] Euler, L. (1778). “Disquisitio coniecturalis super formula integrali  $\int \frac{\partial \phi \cos i \phi}{(\alpha + \beta \cos \phi)^n}$ ” (E673). *Institutionum calculi integralis, Band 4*, 1794: pp. 217–242. Nachdruck in Opera Omnia: Serie 1, Band 19, pp. 168–196. Originaltext abrufbar online unter <https://scholarlycommons.pacific.edu/euler/>.
- [EulerE674] Euler, L. (1778). “Demonstratio theorematis insignis per coniecturam eruti circa integrationem formulae  $\int \frac{\partial \phi \cos i \phi}{(1 + a a - 2 a \cos \phi)^{n+1}}$ ” (E674). *Institutionum calculi integralis, Band 4*, 1794: pp. 242–259. Nachdruck in Opera Omnia: Serie 1, Band 19, pp. 197–216. Originaltext abrufbar online unter <https://scholarlycommons.pacific.edu/euler/>.
- [EulerE675] Euler, L. (1794). “De valoribus integralium a termino variabilis  $x = 0$  usque ad  $x = \infty$  extensorum” (E675). *Institutionum calculi integralis, Band 4* (1781): pp. 337–345. Nachdruck in Opera Omnia: Serie 1, Band 19, pp. 217–227. Originaltext abrufbar online unter <https://scholarlycommons.pacific.edu/euler/>. Eine Übersetzung ins Englische von Jordan Bell abrufbar unter: <https://scholarlycommons.pacific.edu/euler/>.
- [EulerE679] Euler, L. (1794). “De formulis integralibus implicatis earumque evolutione et transformatione” (E679). *Institutionum calculi integralis, Band 4* (1778): pp. 544–563. Nachdruck in Opera Omnia: Serie 1, Band 23, pp. 250–267. Originaltext abrufbar online unter <https://scholarlycommons.pacific.edu/euler/>.
- [EulerE681] Euler, L. (1794). “Specimen aequationum differentialium indefiniti gradus earumque integrationis” (E681). *Institutionum calculi integralis, Band 4* (1781): pp. 577–589. Nachdruck in Opera Omnia: Serie 1, Band 23, pp. 281–295. Originaltext abrufbar online unter <https://scholarlycommons.pacific.edu/euler/>.
- [EulerE689] Euler, L. (1795). “Integratio formulae differentialis maxime irrationalis, quam tamen per logarithmos et arcus circulares expedire licet” (E689). *Nova Acta Academiae Scientiarum Imperialis Petropolitanae, Band 9* (1777): pp. 118–126. Nachdruck in Opera Omnia: Serie 1, Band 19, pp. 251–262. Originaltext abrufbar online unter <https://scholarlycommons.pacific.edu/euler/>.
- [EulerE694] Euler, L. (1797). “Uterior disquisitio de formulis integralibus imaginariis” (E694). *Nova Acta Academiae Scientiarum Imperialis Pe-*

*tropolitanae*, Band 10 (1777): pp. 3–19. Nachdruck in Opera Omnia: Serie 1, Band 19, pp. 268–286. Originaltext abrufbar online unter <https://scholarlycommons.pacific.edu/euler/>.

[EulerE698] Euler, L. (1797). “Variae speculationes super area triangulorum sphaericorum” (E698). *Nova Acta Academiae Scientiarum Imperialis Petropolitanae*, Band 10 (1778): pp. 47–61. Nachdruck in Opera Omnia: Serie 1, Band 29, pp. 253–266. Originaltext abrufbar online unter <https://scholarlycommons.pacific.edu/euler/>.

[EulerE699] Euler, L. (1797). “Utrum hic numerus 1000009 sit primus necne inquiritur” (E699). *Nova Acta Academiae Scientiarum Imperialis Petropolitanae*, Band 10 (1778): pp. 63–73. Nachdruck in Opera Omnia: Serie 1, Band 4, pp. 244–254. Originaltext abrufbar online unter <https://scholarlycommons.pacific.edu/euler/>. Eine Übersetzung ins Englische von Jordan Bell ist online abrufbar unter: <https://scholarlycommons.pacific.edu/euler-works/699/>.

[EulerE703] Euler, L. (1798). “Methodus facilis inveniendi Serie per sinus cosinusve angulorum multiplorum procedentes, quarum usus in universa theoria astronomiae est amplissimus” (E703). *Nova Acta Academiae Scientiarum Imperialis Petropolitanae*, Band 11 (1777): pp. 94–113. Nachdruck in Opera Omnia: Serie 1, Band 16,1, pp. 311–332. Originaltext abrufbar online unter <https://scholarlycommons.pacific.edu/euler/>.

[EulerE704] Euler, L. (1798). “Disquisitio ulterior super seriebus secundum multipla cuiusdam anguli progredientibus” (E704). *Nova Acta Academiae Scientiarum Imperialis Petropolitanae*, Band 11 (1777): pp. 114–132. Nachdruck in Opera Omnia: Serie 1, Band 16,2, pp. 333–345. Originaltext abrufbar online unter <https://scholarlycommons.pacific.edu/euler/>.

[EulerE708] Euler, L. (1801). “De formulis speciei  $mx + ny$  ad numeros primos explorandos idoneis earumque mirabilibus proprietatibus” (E708). *Nova Acta Academiae Scientiarum Imperialis Petropolitanae*, Band 12 (1778): pp. 22–46. Nachdruck in Opera Omnia: Serie 1, Band 4, pp. 269–289. Originaltext abrufbar online unter <https://scholarlycommons.pacific.edu/euler/>.

[EulerE710] Euler, L. (1801). “Specimen transformationis singularis serierum” (E710). *Nova Acta Academiae Scientiarum Imperialis Petro-*

*politanae, Band 12, (1778):* pp. 242–259. Nachdruck in Opera Omnia Serie 1, Band 16,2, pp. 41–55. Originaltext abrufbar online unter <https://scholarlycommons.pacific.edu/euler/>.

[EulerE715] Euler, L. (1802). “De variis modis numeros praegrandes examinandi, utrum sint primi necne?” (E715). *Nova Acta Academiae Scientiarum Imperialis Petropolitanae, Band 13, (1778):* pp. 14–44. Nachdruck in Opera Omnia Serie 1, Band 4, pp. 303–328. Originaltext abrufbar online unter <https://scholarlycommons.pacific.edu/euler/>.

[EulerE716] Euler, L. (1802). “Resolutio formulae Diophanteae  $ab(maa + nbb) = cd(mcc + ndd)$  per numeros rationales” (E716). *Nova Acta Academiae Scientiarum Imperialis Petropolitanae, Band 13, (1778):* pp. 45–63. Nachdruck in Opera Omnia Serie 1, Band 4, pp. 329–351. Originaltext abrufbar online unter <https://scholarlycommons.pacific.edu/euler/>. Eine Übersetzung ins Englische von Georg Ehlers ist online abrufbar unter <https://scholarlycommons.pacific.edu/euler-works/716/>.

[EulerE718] Euler, L. (1805). “Facillima methodus plurimos numeros primos praemagnos inveniendi” (E718). *Nova Acta Academiae Scientiarum Imperialis Petropolitanae, Band 14, (1778):* pp. 3–10. Nachdruck in Opera Omnia Serie 1, Band 4, pp. 352–359. Originaltext abrufbar online unter <https://scholarlycommons.pacific.edu/euler/>. Eine Übersetzung ins Englische von Jordan Bell ist online abrufbar unter: <https://scholarlycommons.pacific.edu/euler-works/718/>.

[EulerE719] Euler, L. (1805). “Methodus generalior numeros quosvis satis grandes perscrutandi utrum sint primi necne?” (E719). *Nova Acta Academiae Scientiarum Imperialis Petropolitanae, Band 14, (1778):* pp. 11–41. Nachdruck in Opera Omnia Serie 1, Band 4, pp. 360–394. Originaltext abrufbar online unter <https://scholarlycommons.pacific.edu/euler/>.

[EulerE725] Euler, L. (1806). “Illustratio paradoxii circa progressionem numerorum idoneorum sive congruorum” (E725). *Nova Acta Academiae Scientiarum Imperialis Petropolitanae, Band 15, (1778):* pp. 29–32. Nachdruck in Opera Omnia Serie 1, Band 4, pp. 395–398. Originaltext abrufbar online unter <https://scholarlycommons.pacific.edu/euler/>. Eine Übersetzung ins Englische von Jordan Bell ist online abrufbar unter: <https://scholarlycommons.pacific.edu/euler-works/725/>.

- [EulerE735] Euler, L. (1811). “De insigni paradoxo, quod in analysi maximorum et minimorum occurrit” (E735). *Mémoires de l’académie des sciences de St.-Petersbourg, Band 3*, (1779): pp. 16–25. Nachdruck in Opera Omnia Serie 1, Band 25, pp. 286–292. Originaltext abrufbar online unter <https://scholarlycommons.pacific.edu/euler/>.
- [EulerE736] Euler, L. (1811). “De summatione serierum in hac forma contentarum  $\frac{a}{1} + \frac{a^2}{4} + \frac{a^3}{9} + \frac{a^4}{16} + \frac{a^5}{25} + \frac{a^6}{36} + \text{etc.}$ ” (E736). *Mémoires de l’académie des sciences de St.-Petersbourg, Band 3*, (1779): pp. 26–42. Nachdruck in Opera Omnia Serie 1, Band 16,2, pp. 117–138. Originaltext abrufbar online unter <https://scholarlycommons.pacific.edu/euler/>.
- [EulerE738] Euler, L. (1811). “Solutio quaestionis curiosae ex doctrina combinationum” (E738). *Mémoires de l’académie des sciences de St.-Petersbourg, Band 3*, (1779): pp. 57–64. Nachdruck in Opera Omnia Serie 1, Band 7, pp. 435–440. Originaltext abrufbar online unter <https://scholarlycommons.pacific.edu/euler/>. Eine Übersetzung ins Englische von Richard J. Pulskamp, ist online abrufbar unter <https://scholarlycommons.pacific.edu/euler-works/738/>.
- [EulerE776] Euler, L. (1830). “Dilucidationes circa binas summas duorum biquadratorum inter se aequales” (E776). *Mémoires de l’académie des sciences de St.-Petersbourg, Band 11*, (1780): pp. 49–57. Nachdruck in Opera Omnia Serie 1, Band 5, pp. 135–145. Originaltext abrufbar online unter <https://scholarlycommons.pacific.edu/euler/>.
- [EulerE790] Euler, L. (1847). “Commentatio de matheseos sublimioris utilitate” (E790). *Journal für die reine und angewandte Mathematik, Band 35*, (1741): pp. 109–116. Nachdruck in Opera Omnia Serie 3, Band 2, pp. 392–399. Originaltext abrufbar online unter <https://scholarlycommons.pacific.edu/euler/>.
- [EulerE792] Euler, L. (1849). “Tractatus de numerorum doctrina capita sedecim, quae supersunt” (E792). *Commentationes arithmeticae collectae, Band 2*, (?): pp. 503–575. Nachdruck in Opera Omnia Serie 1, Band 5, pp. 182–283. Originaltext abrufbar online unter <https://scholarlycommons.pacific.edu/euler/>.
- [EulerE795] Euler, L. (1849). “De quadratis magicis” (E795). *Commentationes arithmeticae collectae, Band 2*, (1776): pp. 593–602. Nachdruck in Opera Omnia Serie 1, Band 7, pp. 441–457. Originaltext abrufbar online unter <https://scholarlycommons.pacific.edu/euler/>.

Eine Übersetzung ins Englische Jordan Bell ist online abrufbar unter <https://scholarlycommons.pacific.edu/euler-works/795/>.

- [EulerE806] Euler, L. (1862). “Fragmenta arithmetica ex Adversariis mathematicis deprompta ” (E806). *Opera Postuma, Band 1*, (17??): pp. 157–266. Originaltext abrufbar online unter <https://scholarlycommons.pacific.edu/euler/>.
- [EulerE807] Euler, L. (1862). “Sur les logarithmes des nombres négatifs et imaginaires” (E807). *Opera Postuma, Band 1*, (1747): pp. 269–281. Nachdruck in Opera Omnia Serie 1, Band 19, pp. 417–438. Originaltext abrufbar online unter <https://scholarlycommons.pacific.edu/euler/>. Eine Übersetzung ins Englische von Todd Doucet ist online abrufbar unter <https://scholarlycommons.pacific.edu/euler-works/807/>.
- [EulerE842] Euler, L. (1862). “Anleitung zur Naturlehre” (E842). *Opera Postuma, Band 2*, (ca. 1750): pp. 449–560. Nachdruck in Opera Omnia Serie 3, Band 1, pp. 16–180. Originaltext abrufbar online unter <https://scholarlycommons.pacific.edu/euler/>.
- [Elkies] Elkies, N. (1988) “On  $A^4 + B^4 + C^4 = D^4$ .” *Mathematics of Computation*. 51 (184) (1988): pp. 825–835.
- [Ehrenpreis1] Ehrenpreis, L. (1954). “Solution of some problems of division. I. Division by a polynomial of derivation.” *Amer. J. Math.*, Band 76 (1954): pp. 883–903.
- [Ehrenpreis2] Ehrenpreis, L. (1955). “Solution of some problems of division. II. Division by a punctual distribution.” *Amer. J. Math.*, Band 77 (1955): pp. 286–293.
- [Faber1] Faber, G. (1935). Vorwort zu *Leonhardi Euleri Commentationes Analyticae Ad Theoriam Integralium Ellipticorum Pertinentes – Volumen prius Edidit Adolf Krazer*, Leonhard Euler’s Opera Omnia, Serie 1, Band 20, gedruckt in Basel 1912.
- [Faber2] Faber, G; Krazer, A. (1936). Vorwort zu *Leonhardi Euleri Commentationes Analyticae Ad Theoriam Integralium Pertinentes – Volumen tertium Edidit Alexander Liapounoff, Adolf Krazer, Georg Faber.*, Leonhard Euler’s Opera Omnia, Serie 1, Band 19, gedruckt in Basel 1932.

- [Favard] Favard, J. (1935) “Sur les polynomes de Tchebicheff.” *C. R. Acad. Sci. Paris*, 200 (1935): pp. 2052–2053. Abrufbar online unter: <https://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k3152t/f2052.item>.
- [Fellmann] Fellmann, E. (1995). *Leonhard Euler*, Rowohlt Tb., 1. Edition (1995).
- [Ferzola] Ferzola, A. (1994). “Euler and Differentials.” *College Mathematics Journal*, Vol. 25, March (1994): pp. 102–111. Nachdruck als Artikel im Buch: *The Genius of Euler – Reflections on his Life and Work*, pp. 155–166. Editor: Dunham, W., The Mathematical Association of America, 1. Edition (2007).
- [Feynman] Feynman, R. (1948) “Space-Time Approach to Non-Relativistic Quantum Mechanics.” *Reviews of Modern Physics*. 20 (2) (1948): pp. 367–387. Abrufbar online unter: <https://journals.aps.org/rmp/abstract/10.1103/RevModPhys.20.367>.
- [Fourier] Fourier, J. (1822). *Théorie analytique de la chaleur*, Nachdruck der Originalversion herausgegeben von Firmin Didot, père et fils in 1822 in Paris. Auch online abrufbar: <https://archive.org/details/thorieanalytiqu00fourgoog/page/n11/mode/2up>.
- [Frebsch] Frebsch, P. A.; Funke, J. (Editoren) (2014). *Complex Problem Solving: The European Perspective*. Hove, Sussex: Psychology Press, 1. Edition (2014).
- [Frellesvig] Frellesvig, H. et al. (2019) “Decomposition of Feynman Integrals on the Maximal Cut by Intersection Numbers.” Abrufbar online unter: [arXiv:1901.1151](https://arxiv.org/abs/1901.1151).
- [Frulliani] Frulliani, G. (1828) “Sopra Gli Integrali Definiti.” *Memorie della Società Italiana delle Scienze*, Modena, XX: pp. 448—467.
- [Fueter1] Fueter, R. (1941). Vorwort zu *Leonhardi Euleri Commentationes arithmeticae Volumen Tertium edidit Rudolf Fueter*, Leonhard Euler’s Opera Omnia, Serie 1, Band 5, gedruckt in Genf 1941.
- [Fueter2] Fueter, R. (1944). Vorwort zu *Leonhardi Euleri Commentationes arithmeticae Volumen Quartum edidit Rudolf Fueter*, Leonhard Euler’s Opera Omnia, Serie 1, Band 5, gedruckt in Genf 1944.

- [Funke] Funke, J. (2014) “Analysis of minimal complex systems and complex problem solving require different forms of causal cognition” *Frontiers in Psychology*, 5, 10.3389/fpsyg.2014.00739.
- [Gauß1] Gauß, C. (1799). “Demonstratio nova theorematis omnem functionem algebraicam rationalem integram unius variabilis in factores reales primi vel secundi gradus resolvi posse.” *Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen* (1799): pp. 1–31. Nachdruck in G. F. Gauss Werke Band 3.
- [Gauß2] Gauß, C. (1801). *Disquisitiones arithmeticae*, gedruckt und herausgegeben von Gerhard Fleischer, Lipsiae (1798). Nachdruck in Gauss Werke Band 1. Abrufbar online unter: <https://gdz.sub.uni-goettingen.de/id/PPN235993352>.
- [Gauß3] Gauß, C. (1813). “Disquisitiones generales circa Seriem infinitam  $1 + \frac{\alpha\beta}{1\cdot\gamma}x + \frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{1\cdot2\cdot\gamma(\gamma+1)}xx + \frac{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\beta(\beta+1)(\beta+2)}{1\cdot2\cdot3\cdot\gamma(\gamma+1)(\gamma+2)}x^3 + \text{etc.}$  pars prior.” *Commentationes societatis regiae scientiarum Göttingens recentiores, Band II* (1812): pp. 3–46. Nachdruck in G. F. Gauss Werke Band 3, pp. 123–162. Eine englische Übersetzung ist online abrufbar: [https://en.wikisource.org/wiki/Translation:Disquisitiones\\_generales\\_circa\\_seriem\\_infinitam\\_...](https://en.wikisource.org/wiki/Translation:Disquisitiones_generales_circa_seriem_infinitam_...)
- [Gauß4] Gauß, C. (1828). “Disquisitiones generales circa superficies curvas.” *Commentationes Societatis Regiae Scientiarum Göttingensis recentiores 6 (classis mathematicae)* (1827): pp. 99–146. Nachdruck in G. F. Gauss Werke Band 4, pp. 219–258. Online abrufbar unter <https://gdz.sub.uni-goettingen.de/id/PPN236005081>.
- [Gauß5] Gauß, C. (1831). “Theoria residuorum biquadraticorum. Commentatio secunda.” *Commentationes Societatis Regiae Scientiarum Göttingensis recentiores 7 (classis mathematicae)* (1831): pp. 89–148. Online abrufbar unter <https://babel.hathitrust.org/cgi/pt?id=mdp.39015073697180&view=1up&seq=285>.
- [Gauß6] Gauß, C. (1849). “Brief an Encke.” *Aus dem Nachlass von Gauß*, Nachdruck in G. F. Gauss Werke Band 2, pp. 444–447. Online abrufbar unter <https://gdz.sub.uni-goettingen.de/id/PPN23599524X?tify=%7B%22pages%22%3A%5B448%5D%2C%22pan%22%3A%7B%22x%22%3A0.462%2C%22y%22%3A0.466%7D%2C%22view%22%3A%22info%22%2C%22zoom%22%3A0.456%7D>.

- [Gettier] Gettier, E. (1963). “Is Justified True Belief Knowledge?” *Analysis, Volume 23* (1963): pp. 121–123. Online abrufbar unter <https://www.ditext.com/gettier/gettier.html>.
- [Gieryn] Gieryn, T. (1980). *Science and social structure: a festschrift for Robert K. Merton*, New York: NY Academy of Sciences, 1. Edition (1980).
- [Govier] Govier, T. (2013). *A Practical Study of Argument*, 7. erweiterte Edition, Wadworth Inc. Fulfillment.
- [Gray] Gray, J. (2015). *The Real and the Complex: A History of Analysis in the 19th Century*, Springer Undergraduate Mathematics Series, 1. Edition (2015).
- [Grinstein] Grinstein, L.; Lipsey, S. (2001). *Encyclopedia of Mathematics Education*, Springer-Verlag, Edition von (2001).
- [Hadamard] Hadamard, J. (1996). *The Mathematician’s Mind: The Psychology of Invention in the Mathematical Field*, Princeton University Press, Reprint Edition (1996).
- [Halpern] Halpern, D.; Dunn, D. (2022). *Thought and Knowledge: An Introduction to Critical Thinking*, 6. Edition, Routledge.
- [Hamilton] Hamilton, R. (1834). “On the application to dynamics of a general mathematical method previously applied to optics.” *British Association Report* (1834): pp. 513–518.
- [Hankel1] Hankel, H. (1869). “Die Zylinderfunktionen erster und zweiter Art.” *Mathematische Annalen* (1869): pp. 467–501. Die Arbeit ist online abrufbar unter: [https://gdz.sub.uni-goettingen.de/id/PPN235181684\\_0001](https://gdz.sub.uni-goettingen.de/id/PPN235181684_0001).
- [Hankel2] Hankel, H. (1869). *Die Entwicklung der Mathematik in den letzten Jahrhunderten*, L. Fr. Fues’sche Sortimentsbuchhandlung, Tübingen (1869). Abrufbar online: [https://books.google.de/books?id=TE3kAAAAMAAJ&pg=PA1&hl=de&source=gbs\\_toc\\_r&cad=2#v=onepage&q&f=false](https://books.google.de/books?id=TE3kAAAAMAAJ&pg=PA1&hl=de&source=gbs_toc_r&cad=2#v=onepage&q&f=false)
- [Hardy1] Hardy, G.H. (1922). “A new proof of the functional equation for the Zeta-function.” *Matematisk Tidsskrift B* (1922): pp. 71–73.

- [Hardy2] Hardy, G.H. (2002). *Ramanujan*. American Mathematical Society (2002), reprint of the original published by Cambridge University Press, 3. Edition (1978).
- [Hardy3] Hardy, G.H. (1949). *Divergent Series*, Oxford: Clarendon Press. Originaltext abrufbar online unter: <https://archive.org/details/dli.ernet.285939/page/15/mode/2up>.
- [Hardy4] Hardy, G.H. (2009). *An Introduction To The Theory Of Numbers*, Oxford University Press, 6. Edition (2009).
- [Hermite] Hermite, C. (1858). “Sur la résolution de l'équation du cinquième degré”. *Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des sciences, Band 46* (1858): pp. 508–518.
- [Hilbert] Hilbert, D. (1952). *Geometry and the Imagination*, Chelsea Publishing Company, Edition aus dem Jahr 1952.
- [Hobson1] Hobson, W. (1912). *Mathematics, from the Points of View of the Mathematician and of the Physicist: An Address Delivered to the Mathematical and Physical Society of University College, London.*
- [Hobson2] Hobson, W. (1921). *The theory of functions of a real variable and the theory of Fourier's series. Vol. I*. Cambridge University Press (1921).
- [Hübner] Hübner, J. (2015). *Einführung in die theoretische Philosophie*, J.B. Metzler; 2-farbige Edition (2015).
- [Hudde] Hudde, G.H. (1637). “Johannis Huddenii Epistula prima de Reductione Aequationum” zuerst publiziert in “*Geometria a Renato Descartes*” (1637): pp. 407–506.
- [Jacobi1] Jacobi, C. (1828). “Suite des Notices sur les Fonctions Elliptiques.” Auszug eines Briefes an Crelle. Nachdruck zu finden in *C. G. J. Jacobi's Gesammelte Werke – Erster Band*, herausgegebenen von C. W. Borchardt, Berlin. Verlag von G. Reimer (1881).
- [Jacobi2] Jacobi, C. (1829). *Fundamenta nova theoriae functionum ellipticarum*, Königsberg: Borntraeger. Nachdruck von Cambridge University Press 2012. Also Abrufbar online unter <https://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k90209g/f62>.

- [Jacobi3] Jacobi, C. (1834). “Observatiunculæ ad Theoriam Aequationum pertinentes.” *Crelle Journal für die reine und angewandte Mathematik, Band 13* (1834): pp. 340-352. Einen Nachdruck findet man in Band 3 von Jacobis gesammelten Werken, pp. 269–284. Die gesammelten Werke sind herausgegeben auf Veranlassung der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften und sind online abrufbar unter: [https://web.archive.org/web/20130513144451/http://portail.mathdoc.fr/cgi-bin/oetoc?id=OE\\_JACOBI\\_\\_1](https://web.archive.org/web/20130513144451/http://portail.mathdoc.fr/cgi-bin/oetoc?id=OE_JACOBI__1).
- [Jacobi4] Jacobi, C. (1836). “Zur Theorie der Variations–Rechnung und der Differentialgleichungen.” Auszug eines Schreiben an Encke. Einen Nachdruck findet man in Band 4 von Jacobis gesammelten Werken, pp. 39–55. Die gesammelten Werke sind herausgegeben auf Veranlassung der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften und sind online abrufbar unter: [https://web.archive.org/web/20130513144451/http://portail.mathdoc.fr/cgi-bin/oetoc?id=OE\\_JACOBI\\_\\_1](https://web.archive.org/web/20130513144451/http://portail.mathdoc.fr/cgi-bin/oetoc?id=OE_JACOBI__1).
- [Jacobi5] Jacobi, C. (1841). “De Determinantium functionalibus.” *Crelle Journal für die reine und die angewandte Mathematik, Band 22*, 1841: pp. 285-318. Auch abrufbar online unter: <https://zenodo.org/records/2108544>.
- [Jacobi6] Jacobi, C. (1841). “De formatione et proprietatibus Determinantium.” *Crelle Journal für die reine und die angewandte Mathematik, Band 22*, 1841: pp. 319-352.
- [Jacobi7] Jacobi, C. (1843). “Über die Entwicklung des Ausdrucks  $(aa - 2aa'[\cos \omega \cos \varphi + \sin \omega \sin \varphi \cos(\vartheta - \vartheta')] + a'a')^{-\frac{1}{2}}$ .” *Crelle Journal für die reine und die angewandte Mathematik, Band 26*, 1843: pp. 81-87.
- [Kant] Kant, I. (2009). *Kritik der reinen Vernunft: Vollständige Ausgabe nach der zweiten, hin und wieder verbesserten Auflage von 1787, vermehrt um die Vorrede zur ersten Auflage von 1781*, Anaconda Verlag (2009).
- [Katz] Katz, V. (1982) “Change of Variables in Multiples Integrals: Euler to Cartan.” Nachdruck als Artikel im Buch: *The Genius of Euler – Reflections on his Life and Work*, pp. 185–196. Editor: Dunham, W., The Mathematical Association of America, 1. Edition (2007).
- [Klein] Klein, F. (1956). *Vorlesungen über die Entwicklung der Mathematik im 19. Jahrhundert*, Chelsea Publishing Company New York, N.Y.: Edition von 1956.

- [Kylve] Klyve, D.; Stemkoski, L. (2006). “Graeco-Latin Squares and a Mistaken Conjecture of Euler.” *The College Mathematics Journal*, Vol. 37, No. 1 (2006): pp. 2–15. Abrufbar online unter: <https://www.jstor.org/stable/27646265?origin=JSTOR-pdf&seq=1>.
- [Knopp] Knopp, K. (1996). *Theorie und Anwendung der unendlichen Reihen*, Springer: 6. Edition (1996).
- [Kontsevich] Kontsevich, M; Zagier, D. (2001) “Periods“. Gedruckt auf den Seiten 771—808 im Buch *Mathematics unlimited—2001 and beyond* editiert von Engquist, B.; Schmid, W., Berlin, New York: Springer-Verlag (2001).
- [Krazer] Krazer, A. (1912). Vorwort zu *Leonhardi Euleri Commentationes Analyticae Ad Theoriam Integralium Pertinentes – Volumen tertium Edidit Alexander Liapounoff, Adolf Krazer, Georg Faber*. Leonhard Euler’s Opera Omnia, Serie 1, Band 19, gedruckt in Basel 1932.
- [Kronecker] Kronecker, L. (1876). “Bemerkungen zur Geschichte der Reciprocitätsgesetzes.” *Monatsberichte der mathematischen Wissenschaften zu Berlin* (1875): pp. 268—274.
- [Kuhn] Kuhn, T. (2012). *The Structure of Scientific Revolutions: 50th Anniversary Edition*, University of Chicago Press (2012).
- [Kummer1] Kummer, E. (1836). “Über die hypergeometrische Reihe  $1 + \frac{\alpha \cdot \beta}{1 \cdot \gamma} x + \frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{1 \cdot 2 \cdot \gamma(\gamma+1)} x^2 + \frac{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\beta(\beta+1)(\beta+2)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \gamma(\gamma+1)(\gamma+2)} x^3 + \text{etc.}$ .” *Crelle Journal für die reine und angewandte Mathematik*. (1836): pp. 39—127. Auch abrufbar online unter [https://gdz.sub.uni-goettingen.de/id/PPN243919689\\_0015](https://gdz.sub.uni-goettingen.de/id/PPN243919689_0015).
- [Kummer2] Kummer, E. (1837). “De integralibus quibusdam definitis et seriebus infinitis.” *Crelle Journal für die reine und angewandte Mathematik*. (1837): pp. 228—242. Auch abrufbar online unter [https://gdz.sub.uni-goettingen.de/id/PPN243919689\\_0017](https://gdz.sub.uni-goettingen.de/id/PPN243919689_0017).
- [Lagrange1] Lagrange, J.L. (1770). “Nouvelle méthode pour résoudre les équations littérales par le moyen des séries.” *Mémoires de l’Académie Royale des Sciences et Belles-Lettres de Berlin*, 24. Jahrgang (1768): pp. 251—326. Auch abrufbar online unter [https://archive.ph/20120630182344/http://gdz.sub.uni-goettingen.de/no\\_cache/dms/load/img/?IDDOC=41070](https://archive.ph/20120630182344/http://gdz.sub.uni-goettingen.de/no_cache/dms/load/img/?IDDOC=41070).

- [Lagrange2] Lagrange, J.L. (1770). “Démonstration d’un théorème d’arithmétique.” *Nouveaux mémoires de l’Académie royale des sciences et belles-lettres de Berlin* (1770): pp. 123–133. Auch abrufbar online unter <https://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k229222d/f190.item>.
- [Lagrange3] Lagrange, J.L. (1773). “Démonstration d’un théorème d’arithmétique.” *Nouveaux mémoires de l’Académie royale des sciences et belles-lettres de Berlin* (1771): p. 125.
- [Lagrange4] Lagrange, J.L. (1775). “Recherches d’arithmétique – Première Partie.” *Nouveaux mémoires de l’Académie royale des sciences et belles-lettres de Berlin* (1773): pp. 265–312. Online abrufbar unter: <https://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k229222d/f696>.
- [Lagrange5] Lagrange, J.L. (1777). “Recherches d’arithmétique – Seconde Partie.” *Nouveaux mémoires de l’Académie royale des sciences et belles-lettres de Berlin* (1775): pp. 323–356?. Online abrufbar unter: <https://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k229222d/f760>.
- [Lagrange6] Lagrange, J.L. (1788). *Mécanique Analytique*, Desaint, Paris (1788). 2. Auflage in 2 Bänden.
- [Lagrange7] Lagrange, J.L. (1797). *Théorie Des Fonctions Analytiques*, Paris: Imprimerie de la République, Prairial an V (1797).
- [Landau] Landau, E. (1906). “Euler und die Funktionalgleichung der Riemannschen Zetafunktion.” *Bibliotheca Mathematica, Serie 3, Band 7* (1906): pp. 69–79.
- [Laplace] Laplace, P.-S. (1825). *Traité de mécanique céleste, Tome 5, Livre IX, Chap. II.* De L’Imprimerie de Crapelet. Originaltext abrufbar online unter: <https://catalog.hathitrust.org/Record/100242426>.
- [Lander] Lander, L.; Parkin, T. (1966) “Counterexample to Euler’s conjecture on sums of like powers.” *Bull. Amer. Math. Soc.* 72 (6): 1079. Abrufbar online unter: <https://www.ams.org/journals/bull/1966-72-06/S0002-9904-1966-11654-3/>.
- [Leibniz] Leibniz, G. (1704). *Nouveaux Essais sur l’entendement humain*, erstmals veröffentlicht 1765. Eine Version von 1886 ist abrufbar online unter: <https://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k5667240g>.

Übersetzung ins Englische: G. W. Leibniz, *New Essays on Human Understanding*. Translated and edited by Peter Remnant and Jonathan Bennett. New York: Cambridge University Press, 1. Edition (1981).

[Legendre1] Legendre, A. (1797). *Essai sur la théorie des nombres*, Paris, An VI, Duprat (1797–1798). Abrufbar online unter: <https://www.e-rara.ch/zut/content/zoom/1089246>.

[Legendre2] Legendre, A. (1811). *Exercices du calcul intégral – Tome première*, Paris, Huzard-Coursier (1811). Abrufbar unter: <https://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k65244863.texteImage>.

[Legendre3] Legendre, A. (1817). *Exercices du calcul intégral – Tome second*, Paris, Huzard-Coursier (1817). Abrufbar unter: <https://archive.org/details/exercicescalculi02legerich/page/n5/mode/2up>.

[Legendre4] Legendre, A. (1816). *Exercices du calcul intégral – Tome troisième*, Paris, Huzard-Coursier (1816). Abrufbar unter: <https://archive.org/details/exercicesdecalc00legegoog/page/n11/mode/2up>.

[Legendre5] Legendre, A. (1825). *Traité des fonctions elliptiques et intégrales Eulériennes – Tome premier*, Paris, Huzard-Coursier (1825). Abrufbar online unter: <https://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k110147r>.

[Legendre6] Legendre, A. (1826). *Traité des fonctions elliptiques et intégrales Eulériennes – Tome second*, Paris, Huzard-Coursier (1826). Abrufbar unter: <https://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k1101484>.

[Legendre7] Legendre, A. (1828). *Traité des fonctions elliptiques et intégrales Eulériennes – Tome troisième*, Paris, Huzard-Coursier (1828). Abrufbar unter: <https://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k110149h>.

[Legendre8] Legendre, A. (1782). “Recherches sur l’attraction des sphéroïdes homogènes.” *Mémoires de Mathématiques et de Physique, présentés à l’Académie Royale des Sciences, par divers savans, et lus dans ses Assemblées Vol. X.* (1785): pp. 411–435.

[Legendre9] Legendre, A. (1788). “Memoire sur la manière de distinguer les maxima des minima dans le Calcul des Variations.” *Mémoires de l’Acad. roy. des Sciences* (1786): pp. 7–37.

- [Lemmermeyer] Lemmermeyer, F. (1985). *4000 Jahre Zahlentheorie: Geschichte - Kulturen - Menschen I. Von Babel bis Abel (Vom Zählstein zum Computer)*, Springer Spektrum (2023).
- [Luchins] Luchins, A. (1942) “Mechanization in problem solving: The Effect of Einstellung.” *Psychological Monographs*, 54(6) pp. i–95 (1942). Abrufbar online unter: <https://psycnet.apa.org/record/2011-21639-001>.
- [Lützen] Lützen, J. (1983) “Euler’s Vision of a General Differential Calculus for a Generalized Kind of Function.” Nachdruck als Artikel im Buch: *The Genius of Euler – Reflections on his Life and Work*, pp. 197–208. Editor: Dunham, W., The Mathematical Association of America, 1. Edition (2007).
- [Malgrange] Malgrange, B. (1955). “Existence et approximation des solutions des équations aux dérivées partielles et des équations de convolution.” *Ann. Inst. Fourier, Band 6* (1955–1956): pp. 271—355.
- [Malmstén] Malmstén, C. (1849). “De integralibus quibusdam definitis seriebusque infinitis.” *Crelle Journal für Mathematik, Bd. 38* (1846): pp. 1–39.
- [Mayer] Mayer, R. E. (1992). *Thinking, Problem Solving, Cognition*. Freeman New York, N.Y., 2. Edition (1992).
- [Mellin] Mellin, H. (1896) “Über die fundamentale Wichtigkeit des Satzes von Cauchy für die Theorien der Gamma- und hypergeometrischen Functionen”. *Suomen Tiedeseura: Acta Societatis Scientiarum Fennicae*, 21,1 (1895).
- [Mertens] Mertens, F. (1874). “Ein Beitrag zur analytischen Zahlentheorie.” *Crelle Journal für die reine und angewandte Mathematik, Band 78* (1874): pp. 46—62. Auch abrufbar online unter [https://gdz.sub.uni-goettingen.de/id/PPN243919689\\_0078](https://gdz.sub.uni-goettingen.de/id/PPN243919689_0078).
- [Morse] Morse, M. (1934) *Calculus of variations in the large*. American Mathematical Society (1934).
- [Neumann] Neumann, O. (2007) “Cyclotomy: From Euler through Vandermonde to Gauss.” Publiziert als Artikel im Buch: *Leonhard Euler: Life, Work and Legacy*, pp. 323–362. Editoren: Bradley, R.; Sandifer C., Elsevier 1. Edition (2007).

- [Newton] Newton, I. (1687) *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica*. Jussu Societatis Regiae ac typis Josephi Streater, London. 1. Edition (1687).
- [Nielsen] Nielsen, N. (2005) *Die Gammafunktion*. AMS Chelsea Publishing, American Mathematical Society (2005).
- [Nørlund] Nørlund, N. (2005) *Vorlesungen über Differenzenrechnung*. Berlin: Springer-Verlag. (1924).
- [O'Brien] O'Brien, J.; Myers, J. (1985) "When comprehension difficulty improves memory for text." *Journal of Experimental Psychology: Learning, Memory, and Cognition* (1985): 11 (1): pp.: 12—21. Abrufbar online unter: <https://psycnet.apa.org/doiLanding?doi=10.1037%2F0278-7393.11.1.12>.
- [Okasha] Okasha, S. (2016). *Philosophy of Science – A Very Short Introduction*. Oxford University Press, 2. Edition (2016).
- [Ostrowski] Ostrowski, A. (1918) "Über einige Lösungen der Funktionalgleichung  $\varphi(x) \cdot \varphi(y) = \varphi(xy)$ ." *Acta Mathematica* 41 (1916): pp. 271—284. Abrufbar online unter: <https://archive.org/details/actamathematica40upps/page/274/mode/2up>.
- [Perez] Perez–Marco, R. (2025). "Difference Equations and Omega Functions". *Zum Zeitpunkt der Verfassung der vorliegenden Arbeit noch nicht offiziell erschienen*.
- [Peirce] Peirce, C. (1903). *Vorlesungen über Pragmatismus*. Nachdruck im Buch *Collected papers of Charles Sanders Peirce : vol. 5 :Pragmatism and pragmaticism* Belknap Press of Harvard U.P (1974).
- [Poyla] Polya, G. (2014). *Mathematics and Plausible Reasoning [Two Volumes in One]*, Martino Fine Books.
- [Poincaré1] Poincaré, H. (1890). "Sur le problème des trois corps et les équations de la dynamique." *Acta Mathematica, Band 13* (1890): pp. 1–270.
- [Poincaré2] Poincaré, H.; Bourguignon, J.–P. (Herausgeber) (2024). *La science selon Henri Poincaré: La science et l'hypothèse - La valeur de la science - Science et méthode*, DUNOD, 1. Edition (2024).

- [Popper] Popper, K. (2002). *The Logic of Scientific Discovery (Routledge Classics)*, Routledge. Reprinted edition (2002).
- [Poisson] Poisson, S. (1823). “Suite du Mémoire sur les Intégrales définies et sur la sommation des Séries”. *Journal de l'école polytechnique, cahier 19* (1823): pp. 404–504. Abrufbar online unter <https://www.digitale-sammlungen.de/de/view/bsb10052920?page=412,413>.
- [Pohlers] Pohlers, W. (2008). *Proof Theory: The First Step into Impredicativity*, Springer Berlin Heidelberg. 2. Edition (2008).
- [Putnam] Putnam, H. (1975). “What is mathematical truth?” *Historia Mathematica, Volume 2, Issue 4* (1975): pp. 529—533. Abrufbar online unter [https://doi.org/10.1016/0315-0860\(75\)90116-0](https://doi.org/10.1016/0315-0860(75)90116-0).
- [Ramanujan1] Ramanujan, S. (1914). “Modular equations and approximations to  $\pi$ .” *Quart. J. Math. (Oxford) (2)45* (1914): pp. 350—372.
- [Ramanujan2] Ramanujan, S. (1915). “Some Definite Integrals”. *Messenger of Mathematics, XLIV* (1915): pp. 10–18. Nachdruck in *Collected Papers of Srinivasa Ramanujan*, edited by Hardy, G.H; Seshu Aiyar P.V.; Wilson, B.M., AMS Chelsea (1962).
- [Ramanujan3] Ramanujan, S.; Berndt, B.; Rankin, R. (1995). *Ramanujan: Letters and Commentary*, American Mathematical Society.
- [Remmert] Remmert, R. “Wielandt’s theorem about the  $\Gamma$ -function.” *The American Mathematical Monthly, Volume 103* (1996): pp. 214–220.
- [Reich] Reich, K. (2007) “Euler’s Contribution to Differential Geometry and its Reception.” Publiziert als Artikel im Buch: *Leonhard Euler: Life, Work and Legacy*, pp. 479–503. Editoren: Bradley, R.; Sandifer C., Elsevier 1. Edition (2007).
- [Rescher] Rescher, B. (1973). *The Coherence Theory of Truth*, Oxford University Press, Oxford; 1. Edition (1973).
- [Riemann1] Riemann, B. (1851) “Grundlagen für eine allgemeine Theorie der Funktionen einer veränderlichen komplexen Grösse”. Dissertation geschrieben im Jahr 1851. Nachdruck auf den Seiten 3–48 im Buch: *Riemann’s gesammelte math. Werke*, Dover (1953).
- [Riemann2] Riemann, B. (1860). “Über die Anzahl der Primzahlen unter einer gegebenen Größe.” *Monatsberichte der Preußischen Akademie*

*der Wissenschaften* (1859): pp. 671–680. Transkript online abrufbar unter: [https://de.wikisource.org/wiki/%C3%9Cber\\_die\\_Anzahl\\_der\\_Primezahlen\\_unter\\_einer\\_gegebenen\\_Gr%C3%B6%C3%9Fe](https://de.wikisource.org/wiki/%C3%9Cber_die_Anzahl_der_Primezahlen_unter_einer_gegebenen_Gr%C3%B6%C3%9Fe).

- [Robinson] Robinson, A. (1966). *Nonstandard Analysis. Studies in Logic and the Foundations of Mathematics*, North-Holland, Amsterdam (1966).
- [Runge] Runge, C. (1885). “Über die auflösbaren Gleichungen von der Form  $x^5 + ux + v = 0$ .” *Acta Math. Band 7* (1885): pp. 173–186. Online abrufbar unter: <https://projecteuclid.org/journals/acta-mathematica/volume-7/issue-none/%c3%9cber-die-aufl%C3%B6sbaren-Gleichungen-von-der-Form-x5uxvo/10.1007/BF02402200.full>.
- [Sandifer1] Sandifer, E. (2003). “Fermat’s Little Theorem.” Teil der Reihe *How Euler did it*, abrufbar online unter: <http://eulerarchive.maa.org/hedi/HEDI-2003-11.pdf>.
- [Sandifer2] Sandifer, E. (2003). “Estimating the Basel Problem.” Teil der Reihe *How Euler did it*, abrufbar online unter: <http://eulerarchive.maa.org/hedi/HEDI-2003-12.pdf>.
- [Sandifer3] Sandifer, E. (2004). “Venn Diagrams.” Teil der Reihe *How Euler did it*, abrufbar online unter: <http://eulerarchive.maa.org/hedi/HEDI-2004-01.pdf>.
- [Sandifer4] Sandifer, E. (2004). “The Basel Problem with Integrals.” Teil der Reihe *How Euler did it*, abrufbar online unter: <http://eulerarchive.maa.org/hedi/HEDI-2004-03.pdf>.
- [Sandifer5] Sandifer, E. (2004). “Mixed Partial Derivatives.” Teil der Reihe *How Euler did it*, abrufbar online unter: <http://eulerarchive.maa.org/hedi/HEDI-2004-05.pdf>.
- [Sandifer6] Sandifer, E. (2004). “Cramer’s Paradox.” Teil der Reihe *How Euler did it*, abrufbar online unter: <http://eulerarchive.maa.org/hedi/HEDI-2004-08.pdf>.
- [Sandifer7] Sandifer, E. (2005). “A memorable example of false induction.” Teil der Reihe *How Euler did it*, abrufbar online unter: <http://eulerarchive.maa.org/hedi/HEDI-2005-08.pdf>.

- [Sandifer8] Sandifer, E. (2005). “Bernoulli numbers.” Teil der Reihe *How Euler did it*, abrufbar online unter: <http://eulerarchive.maa.org/hedi/HEDI-2005-09.pdf>.
- [Sandifer9] Sandifer, E. (2005). “Philip Naudé’s problem.” Teil der Reihe *How Euler did it*, abrufbar online unter: <http://eulerarchive.maa.org/hedi/HEDI-2005-10.pdf>.
- [Sandifer10] Sandifer, E. (2005). “Amicable numbers.” Teil der Reihe *How Euler did it*, abrufbar online unter: <http://eulerarchive.maa.org/hedi/HEDI-2005-11.pdf>.
- [Sandifer11] Sandifer, E. (2006). “ $2aa + bb$ .” Teil der Reihe *How Euler did it*, abrufbar online unter: <http://eulerarchive.maa.org/hedi/HEDI-2006-01.pdf>.
- [Sandifer12] Sandifer, E. (2006). “Infinitely many primes.” Teil der Reihe *How Euler did it*, abrufbar online unter: <http://eulerarchive.maa.org/hedi/HEDI-2006-03.pdf>.
- [Sandifer13] Sandifer, E. (2006). “Divergent series.” Teil der Reihe *How Euler did it*, abrufbar online unter: <http://eulerarchive.maa.org/hedi/HEDI-2006-06.pdf>.
- [Sandifer14] Sandifer, E. (2006). “Formal Sums and Products.” Teil der Reihe *How Euler did it*, abrufbar online unter: <http://eulerarchive.maa.org/hedi/HEDI-2006-07.pdf>.
- [Sandifer15] Sandifer, E. (2007). “Factoring  $F_5$ .” Teil der Reihe *How Euler did it*, abrufbar online unter: <http://eulerarchive.maa.org/hedi/HEDI-2007-03.pdf>.
- [Sandifer16] Sandifer, E. (2007). “Partial fractions.” Teil der Reihe *How Euler did it*, abrufbar online unter: <http://eulerarchive.maa.org/hedi/HEDI-2007-06.pdf>.
- [Sandifer17] Sandifer, E. (2007). “Gamma the Function.” Teil der Reihe *How Euler did it*, abrufbar online unter: <http://eulerarchive.maa.org/hedi/HEDI-2007-09.pdf>.
- [Sandifer18] Sandifer, E. (2007). “Gamma the constant.” Teil der Reihe *How Euler did it*, abrufbar online unter: <http://eulerarchive.maa.org/hedi/HEDI-2007-10.pdf>.

- [Sandifer19] Sandifer, E. (2007). “Inexplicable functions.” Teil der Reihe *How Euler did it*, abrufbar online unter: <http://eulerarchive.maa.org/hedi/HEDI-2007-11.pdf>.
- [Sandifer20] Sandifer, E. (2007). “A false logarithm series.” Teil der Reihe *How Euler did it*, abrufbar online unter: <http://eulerarchive.maa.org/hedi/HEDI-2007-12.pdf>.
- [Sandifer21] Sandifer, E. (2007). *How Euler Did It*. Cambridge University Press, 1. Edition (2007).
- [Sandifer22] Sandifer, E. (2007). *The Early Mathematics of Leonhard Euler*, American Mathematical Society, 1 Edition (2007).
- [Sandifer23] Sandifer, E. (2009). “The Euler line.” Teil der Reihe *How Euler did it*, abrufbar online unter: <http://eulerarchive.maa.org/hedi/HEDI-2009-01.pdf>.
- [Schlömilch1] Schlömilch, O. (1849). “Über das Integral  $\int_0^{\infty} \frac{x^{\mu} dx}{r^2 + 2rx \cos u + x^2}$ ”. *Archiv der Mathematik und Physik* (1858): pp. 198–204 Auch abrufbar online unter: <https://archive.org/details/archivdermathem34unkngoog/page/198/mode/2up>.
- [Schlömilch2] Schlömilch, O. (1858). *Kleinere Mitteilungen: XIII Über eine Eigenschaft gewisser Reihen*, *Zeitschrift für Mathematik und Physik*, Band 3 (1858): pp. 130–132. Auch abrufbar online unter: [https://gdz.sub.uni-goettingen.de/id/PPN599415665\\_0003?tify=%7B%22pages%22%3A%5B134%5D%2C%22view%22%3A%22info%22%7D](https://gdz.sub.uni-goettingen.de/id/PPN599415665_0003?tify=%7B%22pages%22%3A%5B134%5D%2C%22view%22%3A%22info%22%7D).
- [Schrödinger] Schrödinger, E. (1926) “An undulatory theory of the mechanics of atoms and molecules.” *Phys. Rev., second series 28 (6)* (1926): pp. 1040–1049.
- [Schwinger] Schwinger, J. (1951) “On Theory of quantized fields I.” *Physical Review series 82* (1951): p. 914. Abrufbar online unter: <https://doi.org/10.1103/PhysRev.82.914>
- [Smith] Smith, E.; Latham, M. (1954). *The Geometry of Rene Descartes with a facsimile of the first edition*, Dover Publications, Inc. Newyork, 1. Edition (1954).
- [Sonar] Sonar, T. (2016). *3000 Jahre Analysis: Geschichte - Kulturen - Menschen*, Springer Spektrum; 2. korrigierte Edition (2016).

- [Spearman] Spearman, B.; Williams, K. (1994) “Characterization of Solvable Quintics  $x^5 + ax + b$ .” *The American Mathematical Monthly*, Vol. 101, No. 10 (1994): pp. 986–992.
- [Speiser1] Speiser, A. (1921). Vorwort zu *Leonhardi Euleri Commentationes Algebrae ad Theoriam Aequationum Pertinentes Ediderunt Ferdinand Rudio, Adolf Krazer, Paul Stückel.*, Leonhard Eulers Opera Omnia, Serie 1, Band 6, gedruckt in Leipzig und Berlin 1921.
- [Speiser2] Speiser, A. (1945). Vorwort zu *Leonhardi Euleri Introductio in Analysin Infinitorum – Tomus secundus Edidit Andreas Speiser.*, Leonhard Euler’s Opera Omnia, Serie 1, Band 9, gedruckt in Genf 1945.
- [Speiser3] Speiser, A. (1936). Vorwort zu *Leonhardi Euleri Commentationes Analyticae Ad Theoriam Aequationum Differentialium Pertinentes – Volumen prius Edidit Henri Dulac.*, Leonhard Eulers Opera Omnia, Serie 1, Band 22, gedruckt in Basel 1936.
- [Speiser4] Speiser, A. (1955). Vorwort zu *Leonhardi Euleri Commentationes Geometricae Volumen Quartum – Volumen tertium Edidit Andreas Speiser.*, Leonhard Eulers Opera Omnia, Serie 1, Band 28, gedruckt in Basel 1955.
- [Speiser5] Speiser, A. (1956). Vorwort zu *Leonhardi Euleri Commentationes Geometricae Volumen Quartum – Volumen quartum Edidit Andreas Speiser.*, Leonhard Eulers Opera Omnia, Serie 1, Band 29, gedruckt in Basel 1956.
- [Stieltjes1] Stieltjes, T. (1890) “Sur les polynômes de Legendre.” *Ann. Fac. Sci., Toulouse*, 4 (1890): pp. 1–17. Nachdruck im Buch *Thomas Jan Stieltjes – Oeuvres Complètes (Collected Papers) Volume 2*, Springer-Verlag Berlin Heidelberg GmbH, Nachdruck von 1993: pp. 236–252.
- [Stieltjes2] Stieltjes, T. (1894/5) “Recherches sur les fractions continues.” *Ann. Fac. Sci., Toulouse*, 8 (1894): pp. 1–122 und *Ann. Fac. Sci., Toulouse*, 9 (1895): pp. 1–47 Nachdruck im Buch *Thomas Jan Stieltjes – Oeuvres Complètes (Collected Papers) Volume 2*, Springer-Verlag Berlin Heidelberg GmbH, Nachdruck von 1993: pp. 406–566.
- [Sun] Sun, Z.-W. (2011). “Some new series for  $\frac{1}{\pi}$  and related congruences.” Abrufbar online unter: <https://arxiv.org/abs/1104.3856>.
- [Suisky] Suisky, D. (2007). *Euler as Physicist*, Springer 1. Edition (2009).

- [Suzuki] Suzuki, J. (2007) “Euler and Number Theory: A Study in Mathematical Invention.” Publiziert als Artikel im Buch: *Leonhard Euler: Life, Work and Legacy*, pp. 363–384. Editoren: Bradley, R.; Sandifer C., Elsevier 1. Edition (2007).
- [Thiele1] Thiele, R. (2006) “The Mathematics and Science of Leonhard Euler (1707–1783).” Publiziert als Artikel im Buch: *Mathematics and the Historian’s Craft – The Kenneth O. May Lectures*, Springer; 2005. 1. Edition (2005).
- [Thiele2] Thiele, R. (2007) “Euler and the Calculus of Variations.” Publiziert als Artikel im Buch: *Leonhard Euler: Life, Work and Legacy*, pp. 235–254. Editoren: Bradley, R.; Sandifer C., Elsevier 1. Edition (2007).
- [Titchmarsh] Titchmarsh, E. C. (1987). *The Theory Of The Riemann Zeta-Function (Oxford Science Publications)*, Oxford University Press, U.S.A.; 2. Edition (1987). Das Buch ist auch online abrufbar unter: <https://sites.math.rutgers.edu/~zeilberg/EM18/TitchmarshZeta.pdf>.
- [Varadarajan] Varadarajan, V. S. (2006). *Euler Through Time: A New Look at Old Themes*. American Mathematical Society, 1. Edition (2006).
- [Verdun] Verdun, A. (2014). *Leonhard Eulers Arbeiten zur Himmelsmechanik*, Springer Spektrum 1. Edition (2014).
- [Watson] Watson, G. (1995). *A Treatise on the Theory of Bessel Functions (Cambridge Mathematical Library)*, Cambridge University Press; 2. Edition (1995).
- [Wedderburn] Wedderburn, J. (1915) “Note on the simple Difference Equation.” *Annals of Mathematics, Volume 16, 2nd Series* (1914-1915): pp. 82–85.
- [Weierstraß1] Weierstraß, K. (1856) “Über die Theorie der analitischen Fakultäten.” *Crelle Journal für die reine und angewandte Mathematik, Band 51*: (1854): pp. 1–61. Online abrufbar unter: [https://www.digizeitschriften.de/id/243919689\\_0051|log1?tify=%7B%22pages%22:%5B1%5D,%20%22view%22:%22info%22%7D&origin=/search?filter%25BZeitschriften%25D%25B1%25D%3D243919689%257Clog1%26filter%25BObjekttyp%25D%25B1%255D%3Dvolume%26page%3D3](https://www.digizeitschriften.de/id/243919689_0051|log1?tify=%7B%22pages%22:%5B1%5D,%20%22view%22:%22info%22%7D&origin=/search?filter%25BZeitschriften%25D%25B1%25D%3D243919689%257Clog1%26filter%25BObjekttyp%25D%25B1%255D%3Dvolume%26page%3D3).

- [Weierstraß2] Weierstraß, K. (1878) *“Einleitung in die Theorie der analytischen Funktionen. Vorlesung, Berlin 1878”*. Nachdruck von: Vieweg, Braunschweig Wiesbaden 1988
- [Weierstraß3] Weierstraß, K. (1879) *“Vorlesungen ueber Variationsrechnung”*. Nachdruck in: *Mathematische Werke*: Herausgegeben Unter Mitwirkung Einer Von Der Königlich Preussischen Akademie Der Wissenschaften Eingesetzten Commission: Band 4 (1902).
- [Weil1] Weil, A. (1984). *Number theory. An approach through history. From Hammurapi to Legendre*, Birkhäuser 1. Edition (1984).
- [Weil2] Weil, A. (1989). “On Eisenstein’s Copy of the Disquisitiones.” *Advanced Studies in Pure Mathematics 17* (1989): pp. 463–469.
- [Weinberger] Weinberger, P. (1973). “Exponents of the class groups of complex quadratic fields.” *Acta Arithmetica, Band XXII* (1973): pp. 117–123.
- [Weinzierl] Weinzierl, S. (2022). *Feynman Integrals: A Comprehensive Treatment for Students and Researchers*, Springer Spektrum 1. Edition (2022).
- [White] White, H. (2007) “The Geometry of Leonhard Euler.” Publiziert als Artikel im Buch: *Leonhard Euler: Life, Work and Legacy*, pp. 303–322. Editoren: Bradley, R.; Sandifer C., Elsevier 1. Edition (2007).
- [Weisstein] Weisstein, E. (2024) “Hypergeometric Function.” From From MathWorld—A Wolfram Web Resource. Abgerufen online in 2024: <https://mathworld.wolfram.com/HypergeometricFunction.html>.
- [Wußing] Wußing, H; Juschke-witsch, A. et. al (2007). *Ostwalds Klassiker der exakten Wissenschaften Band 261: Zur Theorie komplexer Funktionen von Leonhard Euler*, Verlag Harri Deutsch, 2. Edition (2007).
- [Young] Young, G.P. (1885). “Solution of Solvable Irreducible Quintic Equations, Without the Aid of a Resolvent Sextic” *Amer. J. Math. Band 7* (1885): pp. 170–177.
- [Zwillinger] Zwillinger, D. (Editor) (2014). *Table of Integrals, Series, and Products*, Academic Press, 8. Edition (2014).