Einzelnes Kapitel aus
Jens Gallenbacher [Hrsg.]: GeLb-DIng Abschlussbericht des Verbundprojekts der Johannes Gutenberg-Universität Mainz (JGU), Universität zu Köln (UzK) und Universität des Saarlands (UdS)
DOI des Gesamtbandes: https://doi.org/10.25358/openscience-12500
Kapitel-DOI: https://doi.org/10.25358/openscience-12488
Kapitel verfasst von: Inge Schwank (UzK)

12 – Spezifische Bedarfe sonderpädagogischer Förderung – Für ein Primat des Verstehens

Die Stoffdidaktik der Informatik im Hinblick auf sonderpädagogische Förderbedarfe steht erst am Anfang. Ein wichtiges Thema ist die Behandlung von natürlichen Zahlen als algorithmische Konstruktionen, die von der Zahl Null ausgehend gleichmäßig immer um eins größer werden. Die Übersichtlichkeit, wo genau man sich im dadurch erzeugten Zahlenraum befindet, geht jedoch schnell verloren. Hier kommt die Idee ‚Stellenwertsystem' ins Spiel. Sie gilt als besonders anspruchsvoll. Die heute gängige dezimale Zahlschrift ist eine hochgradig komprimierte, formal-symbolische Notationsform für Zahlen. Zugänge zu schaffen, die die Funktionsweise des Stellenwertsystems verstehen lassen, ist eine große Herausforderung. Der gezielte Einsatz von Embodiment, also reale Welten zu kreieren, in denen Zahlen geeignet verkörpert werden und Rechnungen durchgeführt werden können, bietet vielfältige Möglichkeiten, verstehensorientiertes Lernen zu fördern. Aufgezeigt wird ein Weg, der von ersten Anfängen der Beschäftigung mit kleinen Zahlräumen über Stellenwertsystem-Ideen, dabei auch Einbezug unterschiedlicher Basen, bis hin zur Behandlung der Äthiopischen Multiplikation führt. Erforderlich ist dabei die Stärkung des funktional-logischen Denkens, da das Verstehen von Zahlen, ihren Darstellungen und daran geknüpften Rechnungen wesentlich auf ihm beruht.

Einführung

In der informatischen Bildung von Schülerinnen und Schülern mit sonderpädagogischen Förderbedarfen zeigen sich spezifische Bedarfe vor allem in den Bereichen kognitiver Adaption, sprachlicher Unterstützung, motorischer Zugänglichkeit, emotional-sozialer Begleitung sowie in der Gestaltung adaptiver Lernumgebungen (s. z. B. [BOO2011]; [FLO2014]). Für einen inklusiven Zugang sind mehrkanalige didaktische Arrangements, visuelle, auditive und haptische Lernmaterialien wie auch strukturierende und individualisierte Lernsettings essenziell (s. z. B. [KRE2010]).

Von zentraler Bedeutung ist dabei die kognitiv-sinnliche Zugänglichkeit informatischer Inhalte – insbesondere bei Begriffsbildungs- und Verstehensprozessen. Formale Symbolik und Abstraktion allein genügen nicht, um Lernprozesse in der Informatik und der damit einhergehenden Mathematik tragfähig zu gestalten (s. z. B. [BRU1965]; [LAK2000]). Es bedarf lernförderlicher

Erfahrungsräume, die kognitiv anregend und sinnlich erfahrbar gestaltet sind und, fachdidaktisch reflektiert, Anschlüsse an die je spezifische Erfahrungswelt der Lernenden ermöglichen (s. z. B. [BAR2008]). Kurz gefasst: *Verstehen geht der Symbolik voraus*.

Der auf digitale Lehr-Lerntechnologien spezialisierte Mathematikdidaktiker Justin Dimmel schreibt: „My learned, professional life depends, primarily, on symbolic abstraction." ([DIM2023], S. 206). Seine Ausführungen zum Verhältnis von (digitalen) Bildern zur realen Welt stehen beispielhaft für die Auswirkungen eines westlichen traditionellen Wissenschaftsverständnisses, in dem Abstraktion und die damit verbundenen symbolischen Repräsentationen als Schlüssel zum Weltverständnis gelten. Dieses Verständnis ist bis in die Gegenwart bei vielen prägend und beeinflusst schulische Fachkulturen nachhaltig. So erwarten viele Eltern und Lehrkräfte, dass Schülerinnen und Schüler im Mathematikunterricht schon von Beginn an Symbole (Zahlzeichen, wenig später Rechenzeichen und das Gleichheitszeichen) verwenden: Wer über ein Anfangsstadium hinaus Anschauungsmaterial benötigt, hängt hinterher. Diese Haltung verkennt grundlegende Prinzipien nachhaltigen Verstehens und kann die fachliche – und damit auch die personale – Entwicklung vieler Schülerinnen und Schüler, unabhängig von etwaigen Förderbedarfen, erheblich beeinträchtigen (s. z. B. [GME2014]; [NEM2009]).

Dem gegenüber stehen schon seit Längerem modernere Ansätze, die auf die Verkörperung (Embodiment) von Wissen, auf Interaktion sowie auf konkrete Anschauung als Grundlage von Begriffsbildungsprozessen setzen (s. z. B. [LAK2000]; [ABD2016]) – Ansätze, die jedoch noch an Bekanntheit und Wertschätzung gewinnen müssen. Beispielhaft sei hier Edmund Husserl (1954) genannt, der in seiner Krisis der europäischen Wissenschaften eindringlich auf die problematische Entfremdung von Lebenswelt und mathematischer Symbolik hingewiesen hat [HUS1954].

Gerade in der sonderpädagogischen Förderung gewinnen solche Sichtweisen zunehmend Eingang. Ansätze des Embodied Learning und der multimodalen, semiotischen Kommunikation gewinnen hier an Bedeutung (s. z. B. [KRE2010]; [TAN2021]). Zentral ist die Erkenntnis, dass Lernen in sensomotorischer Aktivität verankert ist: Abstrakte Konzepte werden durch physische oder vorgestellte Interaktionen mit der Umwelt unmittelbar und konkret, ohne besondere Sprachexpertise erfahrbar: Der Körper – insbesondere Hände, Füße, Bewegungen sowie die räumliche und zeitliche Wahrnehmung – spielen eine zentrale Rolle bei der Bildung von Begriffen (s. z. B. [BAR2008]; [NEM2009]; [CAS2024]), so eben auch bei den mathematischen und informatischen Begriffen.

Die Umsetzung solcher Zugänge ist herausfordernd. Die Forschungsbereiche mit ihrer notwendigen Spezialisierung auf die einzelnen sonderpädagogischen Förderbedarfe sind im Vergleich zu den allgemeinen Fachdidaktiken – gerade im Hinblick auf deren Stoffdidaktiken – weitaus weniger entwickelt. Die Spanne reicht weit, die Diversität ist hoch. Die anerkannten Förderbereiche – Lernen, Emotional-Soziale-Entwicklung, Hören und Kommunikation, Sprache, Körperlich-Motorische Entwicklung, Sehbeeinträchtigungen, Geistige Entwicklung – einschließlich ihrer Überschneidungen – erfordern ein konsequent zielgruppenspezifisches Arbeiten, so dass immer wieder neue Zugänge zu fachlichen Inhalten zu erschließen und auszuarbeiten sind (s. z. B. [FLO2014]). Im Sinne von Special Education Embodied Design (SpEED), Multimodal Semiotic Reasoning in Special Educational Needs (SEN) Contexts sowie Movement-Based Learning sind Lernumgebungen zu den spezifischen fachlichen Inhalten zu entwickeln (s. z. B. [TAN2021]; [ABD2016]).

Während selbst an Gymnasien ausgebildete Informatiklehrkräfte weiterhin nicht in ausreichender Zahl zur Verfügung stehen, sind sie an Mittelschulen kaum und an Förderschulen nahezu gar nicht präsent. An vielen Universitäten ist bislang noch kein Lehramtsstudiengang mit dem Unterrichtsfach Informatik eingerichtet worden oder lediglich für das gymnasiale Lehramt – ein strukturelles Defizit, das nicht nur die Ausbildung künftiger Lehrkräfte betrifft, sondern vor allem die informatische Bildung von Schülerinnen und Schülern nachhaltig beeinträchtigt und somit die gesellschaftliche Entwicklung insgesamt spürbar hemmt (s. z. B. [HUB2015]; [LYE2014]; [GRO2013]). Ein struktureller Ausbau der professionellen Ausbildung zukünftiger Informatiklehrkräfte ist nicht nur bildungspolitisch überfällig, sondern gesellschaftlich unabdingbar [UNE2023].

Angesichts der tiefgreifenden gesellschaftlichen Veränderungen durch die digitale Transformation, insbesondere im Zuge der (generativen) Künstliche Intelligenz, ist offenkundig, dass weder ein anhaltender Fachkräftemangel noch digitale Ausgrenzung infolge unzureichender Grundkompetenzen im Umgang mit digitalen Technologien gesellschaftlich tragfähig sind. Menschen mit Beeinträchtigungen sind gleichwertige Mitglieder der Gesellschaft und haben – wie alle anderen – Anspruch auf eine zukunftsorientierte und chancengerechte Bildung.

Erfreulicherweise hat die Stiftung Innovation in der Hochschullehre die besondere Relevanz von Lehramtsstudiengängen mit dem Unterrichtsfach Informatik – insbesondere auch im Bereich der sonderpädagogischen Förderung – erkannt und dies durch die Förderung und Verlängerung des GeLb-DIng-Projekts zudem finanziell unterstrichen.

Im Folgenden werden beispielhaft Lernsettings vorgestellt, die von einem ersten Zahlen- und Operationsverständnis (s. z. B. [SCH2015]) bis hin zum Verständnis des Binärsystems und der Äthiopischen Multiplikation führen. Soweit von Zahlen die Rede ist, sind stets die natürlichen Zahlen beginnend mit Null gemeint. Als grundlegende mathematische Objekte sind die natürlichen Zahlen konstitutiv für zentrale Bereiche sowohl der Mathematik – etwa Arithmetik und Algebra – als auch der Informatik, insbesondere in der Datenrepräsentation, digitalen Codierung und Algorithmik.

A: Erste Aktionen im Zahlenraum: ZARAO

Fachlicher Inhalt: Zahlenraum von null bis vier bzw. von null bis neun. Wo? Woher? Wohin? Aktionen durchführen und vergleichen. Orte erreichen und vergleichen. Nachbarorte erreichen und vergleichen. Besonderheit des untersten Ortes. Zahlenstrahl.

Grundlegend für ein Zahlenverständnis sind die Orte von Zahlen im Zahlenraum einhergehend mit ihrer Erreichbarkeit. Mit Akteuren, den Spielfiguren, wird der Zahlenraum erschlossen. Voraussetzung dafür ist eine konsistente Verkörperung des betrachteten Zahlenraums. Die Akteure können in ihrer Ausgestaltung den Vorlieben der jeweiligen Lerngruppe angepasst werden.

Einen Zugang zum Denken in Aktionen zu schaffen, ist für ein rechnerisches Zurechtfinden im Zahlenraum fundamental. Ist ein solches Denken nicht möglich, fehlen die Grundlagen für ein Verständnis von Rechenoperationen und damit der Unterbau für ein Verständnis von Variablen und Funktionen. Algorithmisches Denken, das auf dem Verständnis von Befehlen und deren Organisation zu funktionierenden Prozessen beruht, ist kaum entwickelbar.

Abbildung 12.1
Zahlenraumorientierungsrahmen – ZARAO. Oben links: Einstieg in den Zahlenraum von null bis vier. Oben rechts: Fortführung mit dem Zahlenraum von null bis neun. Zunächst ist den Kindern damit einfach ein Spielangebot gegeben. Insgesamt: Kugel können zu Mustern verschoben, Moosgummi- und Plexiglasscheiben platziert werden und mit Spielfiguren die Treppen hoch- und runtergehüpft sowie der Weg in beide Richtungen entlang gehüpft werden. Spielfiguren können passend zu Rahmengeschichten und Jahreszeiten gewählt werden.

Der Zahlenraum-Orientierungs-Rahmen [ZARAO] ist ein Lernmaterial, mit dem in vielfältiger Weise erste Erkundungen im Zahlenraum vorgenommen werden können. Es gibt ihn in zwei Ausführungen (Abb.12.1):

Subitizing
Fähigkeit, die Anzahl von Objekten intuitiv ohne Zählen zu erkennen

- ZARAO-NV: Zahlenraum von null bis vier – passend zum klassischen Subitizing-Bereich der Wahrnehmungsfähigkeit von besonders kleinen Vielheiten. Diese sind im Regelfall ohne explizites Zählen, sprich ohne eine sequentielle Zuordnung eines Zahlwortreihenabschnitts, erfassbar. Tatsächlich können bereits in diesem sehr überschaubaren Zahlenraum besondere Unterstützungsbedarfe notwendig sein und der Zahlenraum zunächst noch weiter eingeschränkt werden. Z. B. mag ein Sprachtraining erforderlich sein. Zur Erleichterung der Handhabung sind die Kugeln vergleichsweise groß.
- ZARAO-NN: Zahlenraum von null bis neun – passend zum Ziffernbereich des Dezimalsystems. Hier sind vergleichsweise kleinere Kugeln möglich.

Die Kugeln sind auf Metallstangen angebracht. Ihre Anordnung ist in der Grundform linear und passend zum Aufbau des Zahlenraums treppenförmig: Jede nächste Treppenstufe aufwärts ist um eine Kugel höher, jede nächste Treppenstufe abwärts um eine Kugel tiefer, wobei die unterste Treppenstufe keine Kugeln aufweist. Spielfiguren hüpfen im Zahlenraum aufwärts und abwärts. Zum sicheren Stand der Figuren ist auf jeder Treppenstufe eine Plexiglasscheibe angebracht. Deren Größe ermöglicht, dass auf einer Scheibe auch zwei Figuren Platz finden, diese sich also besuchen können.

Vor den Kugeln verläuft am Boden ein dunkelbrauner Weg, auf dem ebenfalls Spielfiguren entlang hüpfen können und sich dabei von dem Ort mit null Kugeln entfernen oder sich diesem Ort wieder nähern. Ihre Hüpfweite entspricht dem Stangenabstand. Inhaltlich betrachtet verkörpert der braune Weg entlang der Stangen einen Zahlenstrahl.

In die Kugeln integrierte Magnete sorgen dafür, dass diese beim Verschieben auf den Stangen nicht herunter rutschen. So lassen sich kreativ Kugelmuster erzeugen. Im Beispiel (Abb. 12.1 unten links) fällt auf, dass sich bei jeder übernächsten Stange oben und unten gleich viele Kugeln anordnen lassen oder aber, dass in der Mitte eine Kugel übrig bleibt – eine Verkörperung der im Zahlenraum gegebenen Eigenschaft von abwechselnd geraden und ungeraden Zahlen.

Mit geschlitzten blauen Moosgummischeiben können ebenfalls Muster im Zahlenraum erzeugt und so Zahleigenschaften ersichtlich werden. Im Beispiel (Abb. 12.1 unten rechts) geht es inhaltlich betrachtet wieder um gerade und ungerade Zahlen: Bei jeder übernächsten Stange kann eine Scheibe so angebracht werden, dass darunter und darüber gleich viele Kugeln sind, zwischen zwei solcher Stangen ist dies nicht möglich. Dabei kann auch auffallen, dass der unterste Ort eine blaue Scheibe bzw. keine mittige Kugel aufweist – eine Verkörperung der Eigenschaft eine gerade Zahl zu sein, die auch auf die Zahl Null zutrifft. Es geht nicht darum, dass Kinder diese arithmetischen Zusammenhänge direkt erfassen, sondern darum, dass sie beginnen, sich in Regelmäßigkeiten des Aufbaus des Zahlenraums einzufinden. Die Zahl Null nimmt als Ausgangszahl für diesen Aufbau eine zentrale Rolle ein und ist von Beginn an Bestandteil des Zahlenraums. Ohne ein fest verankertes Verständnis der Zahl Null wird später die Funktionsweise des Stellenwertsystems nicht erschließbar sein.

Sich auf die Dynamik der Hüpfer einlassen zu können, ist nicht selbstverständlich. Es mag sein, dass die statischen Orte anziehender sind und der Fokus auf sie gerichtet ist. Dann wird wenig plausibel, warum die Ausgangsposition beim Hüpfen nicht mitgezählt wird – und später beim Zahlenstrahl die erste Markierung mit ‚0' beschriftet wird (Abb. 12.2). Die Beschriftung hängt der Anzahl der Markierungen bzw. Orte immer um eins hinterher, da es auf die Anzahl der Hüpfer ankommt. Bei Würfelspielen fällt schon früh auf, ob es Kindern gelingt, diese prozessorientierte Sichtweise einzunehmen. In der Dynamik, den Veränderungen, stecken die Rechnungen – und deren geistige Bewältigung gilt es, von früh an zu fördern.

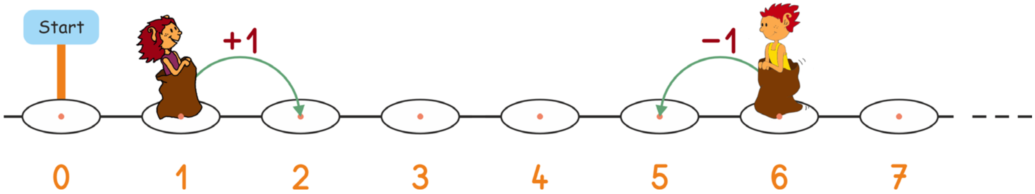
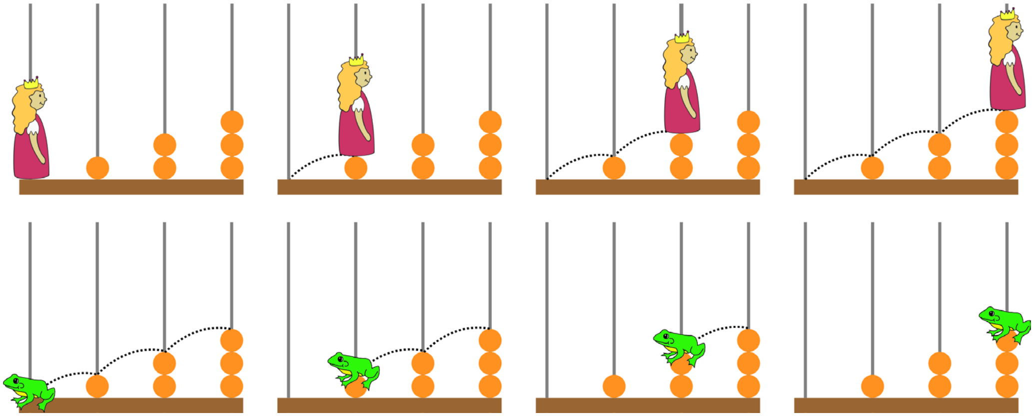


Abbildung 12.2
Auf dem Zahlenweg (später Zahlenstrahl) wird wie beim Würfelspielen gehüpft. Der Wechsel von einem Ort zum nächsten Ort – damit sind zwei Orte involviert – wird mittels eines Hüpfers vollzogen. Nicht nur anfangs kann dies zu Irritationen führen. Die dynamische Sichtweise bedarf der intensiven Förderung. Die Zahl Null nimmt als Ausgangszahl für den Aufbau des Zahlenraums eine bedeutsame Rolle ein.

Entdeckungen beim Spielen mit Figuren im ZARAO sind spannend und können angeregt werden. In Abbildung 12.3 hüpft die Prinzessin aufwärts von null auf drei Kugeln, der Frosch abwärts von drei auf null Kugeln. Erstaunlich: Gleichwohl benötigen beide gleich viele Hüpfer. Wie auch: Hüpfen Prinzessin bzw. Frosch wieder zurück auf ihre Ausgangsposition, benötigen sie wieder genauso viele Hüpfer wie auf dem Hinweg. Was selbstverständlich erscheinen mag, gilt es zunächst zu entdecken und geeignet kognitiv zugänglich zu machen.

Abbildung 12.3
Auf und ab ist Unterschiedliches, gleichwohl gibt es Gemeinsamkeiten – dies insbesondere hinsichtlich der Anzahl der Hüpfer.



Ein kleiner Auszug an weiteren Erkundungs-Möglichkeiten ist in Tabelle 12.1 zusammengestellt. Was hier zur besseren Nachvollziehbarkeit sprachlich ausformuliert ist, erfolgt im tatsächlichen Spiel sehr deiktisch, z. B. „die [auf die Spielfigur wird gezeigt] möchte von da nach dort [auf den jeweiligen Ort wird gezeigt]".

Mit der Zeit können auch Zahlwörter eingeführt werden – aber erst, nachdem der Zahlenraum gut genug anhand der Aktionen erschlossen worden ist. Insbesondere für Kinder mit Förderbedarfen ist diese Erkenntnis sehr wichtig. Anders als in den gängigen Ansichten bezüglich Regelkindergarten und Regelschule, die als erste Stufe der Zahlerschließung voraussetzen, dass zunächst rein lautsprachlich eine erste Abfolge an bedeutungslosen Wörtern wie ein Kinderreim gelernt wird (eins-zwei-drei-…), zeigt eine Zahlenraumverkörperung wie der ZARAO, dass gleichwohl erste grundlegende Zahlenraumideen erschlossen werden können, ohne dafür zunächst Wörter erlernt haben zu müssen. Dies ist für die Förderung der kognitiven Entwicklung der Kinder sehr bedeutsam. So wie beispielsweise Farbwörter haben auch Zahlwörter eine Bedeutung, die sich aus dem Kontext ergibt.

Zahlwörter (oder auch Zahlzeichen) ohne grundlegende Vorstellungen zum Zahlenaufbau zu verwenden, ist tatsächlich kontraproduktiv. Die deutsche Sprache gehört – anders als z. B. die chinesische Sprache – zu denjenigen Sprachen, in denen die Funktionsweise des Dezimalsystems nur unzureichend abgebildet ist. Z. B. klingen ‚zehn', ‚elf' als einsilbige Namen von ihrer Art her wie ‚acht', ‚neun'. Hier ist vollkommen unklar, warum später in der dezimalen Zahlschrift je zwei Zeichen für ‚zehn' und ‚elf' verwendet werden müssen – 10, 11 – reicht doch bei ‚acht' und ‚neun' jeweils ein Individualzeichen – 8, 9. Ein aufgewecktes Kind bemerkte dazu einmal: „Warum sollen eins und null zusammen mehr sein als neun?"

Der Fokus auf Aktionen sichert nicht nur ein Zahlenraum- und Zahlenaktionsverständnis, sondern fördert auch die Entwicklung der Grundlagen für das algorithmische Denken. Insofern sind solche Beschäftigungen mit dem Zahlenraum insbesondere für Kinder mit erschwerten Lernvoraussetzungen von besonderem pädagogischem Wert.

Situation	Aktionsauftrag	Mathematischer Bezug
Eine Spielfigur (Hund) sitzt ganz unten.	Wohin schaut der Hund? Lass den Hund ganz nach oben hüpfen.	0+1+1+1+1 bzw. 0+1+1+1+1+1+1+1+1+1
Eine Spielfigur (Hund) sitzt ganz oben.	Wohin schaut der Hund? Lass den Hund ganz nach unten hüpfen.	4-1-1-1-1 = 0 bzw. 9-1-1-1-1-1-1-1-1-1 =0
Eine Spielfigur (Hund) sitzt ganz unten. Eine Spielfigur (Katze) sitzt irgendwo zwischen den Randpositionen.	Wohin schaut der Hund? Lass den Hund so hüpfen, dass er eins höher als die Katze ankommt. Kurz: Der Hund soll eins höher ankommen.	Passend oft: +1 Nachbarzahl: um eins höher
Eine Spielfigur (Hund) sitzt ganz oben. Eine Spielfigur (Katze) sitzt irgendwo zwischen den Randpositionen.	Wohin schaut der Hund? Lass den Hund so hüpfen, dass er eins tiefer als die Katze ankommt. Kurz: Der Hund soll eins tiefer ankommen.	Passend oft: -1 Nachbarzahl: um eins tiefer
Eine Spielfigur (Hund) sitzt irgendwo auf der Treppe. Eine Spielfigur (Kobold) sitzt am Anfang des Weges.	Wohin schaut der Kobold? Lass den Kobold so oft auf dem Weg hüpfen, dass er direkt unter dem Hund ankommt und sich beide zuwinken können. Kurz: Der Kobold soll dem Hund zuwinken können.	Orientierung am Zahlenstrahl Passend oft: +1
Eine Spielfigur (Hund) sitzt irgendwo auf der Treppe. Eine Spielfigur (Kobold) sitzt am Ende des Weges.	Wohin schaut der Kobold? Lass den Kobold so oft auf dem Weg hüpfen, dass er direkt unter dem Hund ankommt und sich beide zuwinken können. Kurz: Der Kobold soll dem Hund zuwinken können.	Orientierung am Zahlenstrahl Passend oft: -1
Eine Spielfigur (Hund) sitzt irgendwo auf der Treppe. Eine Spielfigur (Kobold) sitzt am Anfang des Weges.	Mit einem speziell markierten Würfel (Bögen mit Richtungspfeilen für Hüpfer) wird bestimmt, in welche Richtung und wie oft der Kobold hüpft. Ziel ist, dass er direkt unter dem Hund ankommt.	Orientierung am Zahlenstrahl -0, +0, -1, +1, -2, +2
Zwei Spielfiguren (Hund, Katze) sitzen in einem bestimmten Abstand auf der Treppe. Eine Spielfigur (Prinzessin) sitzt ganz unten.	Wohin schaut die Prinzessin? Lass die Prinzessin so oft hüpfen, dass sie zwischen dem Hund und der Katze ankommt.	Eine Zahl b in Beziehung zu zwei anderen Zahlen a, c setzen: $a < b < c$

Tabelle 12.1 Erkundungsmöglichkeiten im ZARAO

B: Erstes Ausnutzen von Stellenwertsystem-Ideen: RWT

Fachlicher Inhalt: Zahlenraum von null bis neunzehn, dezimal strukturierter Aufbau von Zahlen ab zehn durch Berechnungsvorschrift, dadurch gegebene Eigenschaften und Zusammenhänge von Zahlen, Parallelität von Aktionen, geschickte Aktionen, Besonderheit der Zahlprozedurnamen.

Die gleichförmig verlaufende Treppe, in der jede Stufe um eine weitere Normkugel erhöht ist, verkörpert die Uridee der Entwicklung der Zahlen (in den Peano-Dedekind-Axiomen als Nachfolgerfunktion implementiert). Im Zahlenstrahl findet sie sich wieder, indem der Weg immer um den gleichen Normabstand fortgesetzt und markiert wird. Sind größere Zahlenräume zu erkunden, sind Gestaltungsideen notwendig, die diese Zahlenräume weiterhin überschaubar halten. Orientierung bieten die Stellenwertsystem-Ideen, die letztlich zu einer erstaunlichen Komprimierung führen. Weltweit hat sich die dezimale Zahlschrift durchgesetzt, und damit ein Stellenwertsystem zur Zahlbezeichnung basierend auf den Ziffern von 0 bis 9.

Mit Zahlbezeichnungssystemen soll jede Zahl eine Bezeichnung und damit einen Namen erhalten. Um alle Zahlen zu erreichen (in der Historie zumindest bis zu einer bestimmten Größe), fungieren diese Bezeichnungssysteme zugleich als Zählsysteme: Für jede Bezeichnung einer Zahl entlang des Systems muss eindeutig festgelegt sein, wie die Bezeichnung für die ihr nachfolgende Zahl lautet. Mit der Funktionsweise des Stellenwertsystems ist dafür ein besonders eleganter, aber zugleich komplexer Algorithmus entwickelt worden. Mit den so entwickelten Bezeichnungen wird über beliebig große Zahlen in besonderer Weise verfügt – nämlich als Zusammensetzungen aus Additionen, Multiplikationen und Potenzen. Der kompakten, verkürzenden Zahlschrift ist dies nicht anzusehen. Warum sollte 5678 für fünftausend und sechshundert und siebzig und acht stehen? Genau genommen sogar für:

- fünfmal zehn mal zehn mal zehn und
- sechsmal zehn mal zehn und
- siebenmal zehn und
- acht

bzw. in der formal-symbolischen Notation: $5678=5\cdot 10^3+6\cdot 10^2+7\cdot 10^1+8\cdot 10^0$.

Es dauert lange, diese kompakte, hoch komprimierte Zahlschrift wirklich kundig und fehlerfrei nutzen zu können; einerseits, um Zahlen darzustellen, andererseits, um diese Notationsform von Zahlen beim Rechnen effektiv zu nutzen. Viele Kinder – gerade solche mit Förderbedarfen – können damit erhebliche Schwierigkeiten haben. In Folge kommt es zu beachtlichen Fehlern und Verständnisproblemen bei den halbschriftlichen sowie den schriftlichen Rechenverfahren und damit zu sinnlosen Ergebnissen auch bei Sachaufgaben, die weniger dem Aufgabenverständnis als der ‚Rechenkunst' geschuldet sind.

Es bedarf einer behutsamen und viel Zeit in Anspruch nehmenden Einführung. Erste Berührungen mit den Stellenwertsystem-Ideen können im Zahlenraum von null bis neunzehn anhand der Rechenwendeltreppe (RWT, Abb. 12.4) erlebt werden.

Es gibt einen Innenkreis, der den Stangen mit Kugeln im ZARAO-NN entspricht, sowie einen parallel dazu verlaufenden Außenkreis. Dabei wird der Innenkreis im Außenkreis fortgeführt,

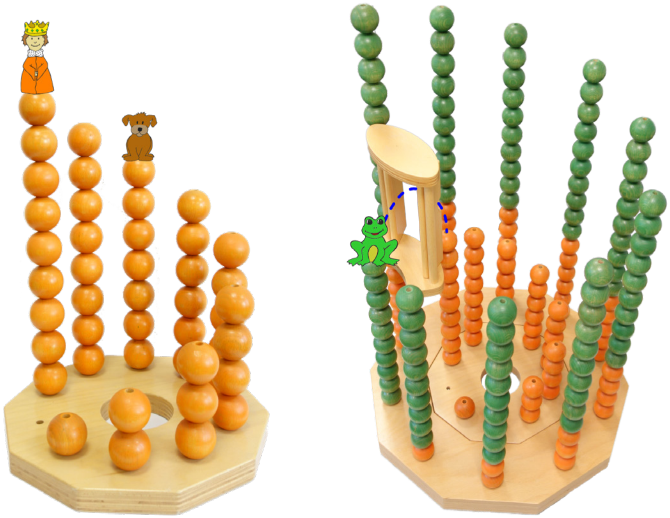


Abbildung 12.4
Rechenwendeltreppe – RWT. Links: Innenkreis zum Zahlenraum von null bis neun. Rechts: Zusätzlicher Außenkreis als Erweiterung zum Zahlenraum von zehn bis neunzehn.

dies allerdings mit zehn zusätzlichen grünen Kugeln an jeder Position, so dass hier die Zahlen von zehn bis neunzehn verkörpert sind. Der Weg vom Innen- zum Außenkreis und zurück führt durch ein Tor. An dessen Decke kann eine Glocke angebracht werden, um die Aufmerksamkeit noch deutlicher auf den Übergang zwischen den beiden Bereichen zu lenken.

Der Innenkreis ist herausnehmbar und wird zunächst ohne den Außenkreis in seinem Aufbau erkundet. Die Kugeln sind lose auf die Stangen gesteckt, so dass die Rechenwendeltreppe auf- und abgebaut werden kann, dies auch teilweise. Des Weiteren können mit geschlitzten Moosgummischeiben wieder Muster gesteckt werden. Daraus ergeben sich viele Erkundungsanlässe zum Zahlenraum und dem damit verbundenen Aufbau von Zahlen aus anderen Zahlen.

Zu den wichtigen zu erwerbenden Kompetenzen gehört das zahlengebundene logische Schließen – nicht nur im Kontext des Konzepts Stellenwertsystem, sondern auch in vielen weiteren Fällen und dies von früh an. Ein Beispiel zeigt Abbildung 12.5 links: Wenn auf der Stange für neun Kugeln bereits fünf vorhanden sind, so kann durch das Hinzufügen weiterer Kugeln ermittelt werden, dass vier Kugeln gefehlt haben. Werden nun auf die Stange für acht Kugeln ebenfalls fünf Kugeln gesteckt, stellt sich die Frage: Wie viele Kugeln fehlen hier? Da acht Kugeln eine weniger

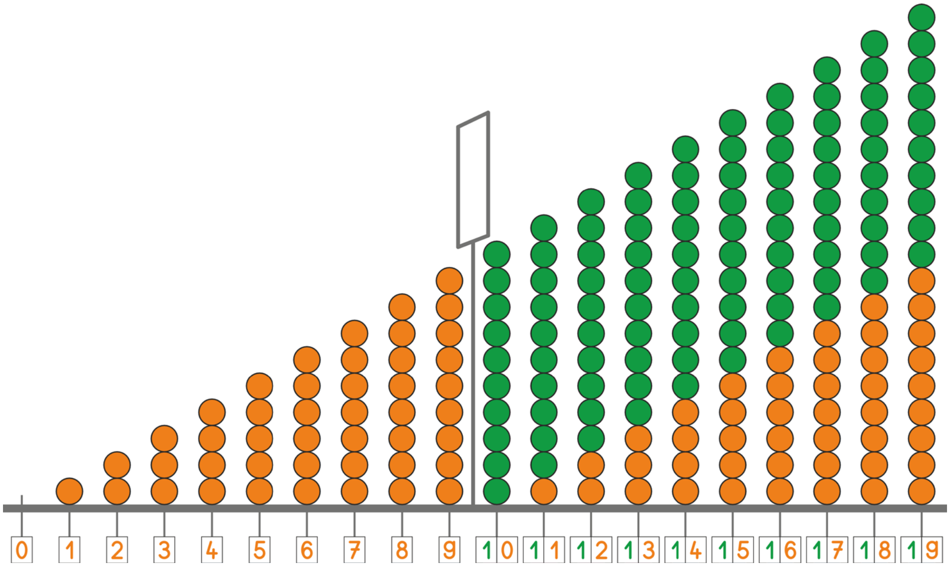
Abbildung 12.5
Es gilt, gedankliche Flexibilität zu erreichen, erstes logisches Schlussfolgern zu lernen und sich damit im Zahlenraum zurecht zu finden. [K1,K2: Kind 1, Kind 2. SP: Spielleiterin]

sind als neun Kugeln, wird auch eine Kugel weniger fehlen, also drei. Oder auch nochmal ein Beispiel, wie sich Null in ihrer Eigenschaft, eine gerade Zahl zu sein, anhand eines gedanklichen Eintauchens in die aufbereitete reale Welt erschließen lässt (Abbildung 12.5 rechts). Die Rechenwendeltreppe ist daraufhin zu untersuchen, an welchen Kugelstangen eine Moosgummischeibe so angebracht werden kann, dass sich über und unter ihr gleich viele Kugeln befinden. Es ergibt sich, dass auch an der Position mit null Kugeln eine Moosgummischeibe fehlt. Die Begründung dafür liefern die Kinder auf die Rückfrage „Warum?“.

Mit Spielfiguren wird zunächst der Innenkreis – Zahlen von null bis neun – erschlossen (analog zum ZARAO-NN) und dies später in der Erweiterung um den Außenkreis – Zahlen von zehn bis neunzehn – fortgeführt. In der Erweiterung fällt auf, dass die Anzahl oranger Kugeln im Innen- und Außenkreis gleich verläuft, im Außenkreis aber zusätzlich an jeder Position noch weitere zehn grüne Kugeln vorhanden sind. Hieran zeigt sich bereits, dass über größere Zahlen verfügt wird als eine bestimmte operative Zusammensetzung aus anderen Zahlen. Die Zahlnamen werden zu Bezeichnungen für Zahlprozeduren und somit zu Zahlprozedurnamen. Nahezu alle Zahlnamen sind – näher betrachtet – Rechenanweisungen, z. B. drei und zwanzig ergibt schlicht dreiundzwanzig; die Rechnung wird in der Sprache nicht vollzogen, anders als etwa bei fünf und vier ergibt neun, wobei zwei Label gegen ein drittes, formal gleichartiges Label ausgetauscht werden. Bei Zahlnamen wie dreiundzwanzig fungiert eine Rechenanweisung als Zahlnamen. Dieser Wechsel von schlichten Zahlnamen (als Label/Etikett) zu Rechenanweisungen als Zahlnamen stellt viele Kinder mit Lernschwierigkeiten vor große Herausforderungen, auch weil der Wechsel vom sprachlichen Label zur sprachlichen Rechenanweisung bei den Zahlwörtern nicht stringent vollzogen ist (z. B. zehn, elf, zwölf) und nicht der Funktionsweise des Dezimalsystems entspricht. Offenkundig fördert ein Prozessverständnis das Zahlenverständnis sowie das zugehörige Operationsverständnis.

Aufgeklappt und vom Innen- zum Außenkreis hintereinander gelegt, entspricht die Rechenwendeltreppe dem Verlauf eines Zahlenstrahls; die Stangen (gestutzt auf ein kurzes Einheitsmaß und im Einheitsabstand angeordnet) bilden dessen Abschnittsstriche (Abb. 12.6).

Abbildung 12.6
Der Zahlenstrahl als Kurzform der aufgeklappten Rechenwendeltreppe. Das Tor signalisiert den Wechsel zwischen Innen- und Außenkreis.



Die in Abbildung 12.6 gewählte formal-symbolische Bezeichnung für die Zahlen greift die Farbgebung der Kugeln auf: Die Ziffern von 0 bis 9, die zur Beschriftung oranger Kugeln dienen, sind in Orange geschrieben; ebenso wie in der Schreibweise von 10 bis 19. Die hinzukommende 1 steht für einmal zehn grüne Kugeln und wird in Grün geschrieben.

Die zum dezimalen Stellenwertsystem passende Anordnung der Kugeln im Innen- und Außenkreis erleichtert die Erschließung der Ergebnisse zu Rechenaufgaben: Eine Figur, beispielsweise der König, kann im Innenkreis unterwegs sein, eine andere Figur, beispielsweise der Hund, im Außenkreis. Ist der König bereits drei Hüpfer vom Start entfernt und hüpft zwei weitere Hüpfer nach oben, ist er insgesamt fünf Hüpfer vom Start entfernt. Oder anders ausgedrückt: hüpft er von drei orangen Kugeln um zwei orange Kugeln höher, landet er auf fünf orangen Kugeln. Steht der Hund parallel dazu auf dreizehn Kugeln (drei orangen, zehn grünen) und hüpft ebenfalls um zwei Kugeln höher, ist bereits mit der Aktion des Königs klar, dass er auf fünfzehn (fünf orangen, zehn grünen) Kugeln landen wird. Falls drei plus zwei gleich fünf, dann gilt: dreizehn plus zwei gleich fünfzehn.

Mit der Fortsetzung von Zahlbezeichnungen für größere Zahlen als Zusammensetzung von Zahlbezeichnungen bekannter kleinerer Zahlen und einer Konstanten, hier zehn, erweisen sich bestimmte Aufgaben als einfach. Das Wissen über Rechenvorgänge mit den kleineren Zahlen kann auf die größeren übertragen werden. Das Wissen zum Unterschied von zehn ist hierbei hilfreich. Im Folgenden ist eine Auswahl weiterer wichtiger Ereignisse angegeben:

- Von einer Position im Innenkreis soll eine Figur um zehn Kugeln höher hüpfen: Die Figur hüpft von ihrer Position aus einfach auf die zugehörige Position im Außenkreis: drei plus zehn gleich dreizehn.
- Von einer Position im Außenkreis soll eine Figur um zehn Kugeln tiefer hüpfen: Die Figur hüpft von ihrer Position aus einfach auf die zugehörige Position im Innenkreis: dreizehn minus zehn gleich drei.
- Von einer Position im Innenkreis soll eine Figur um elf Kugeln höher hüpfen: Die Figur hüpft von ihrer Position aus einfach auf die zugehörige Position im Außenkreis und noch eins höher: drei plus elf gleich drei plus zehn plus eins. Alternative Hüpfweise: drei plus eins, dann plus zehn.
- Von einer Position im Außenkreis soll eine Figur um elf Kugeln tiefer hüpfen: Die Figur hüpft von ihrer Position aus einfach auf die zugehörige Position im Innenkreis und noch eins tiefer: dreizehn minus elf gleich dreizehn minus zehn minus eins. Alternative Hüpfweise: dreizehn minus eins, dann minus zehn.
- Von einer Position im Innenkreis soll eine Figur um neun Kugeln höher hüpfen: Die Figur hüpft von ihrer Position aus einfach auf die zugehörige Position im Außenkreis und dann eins tiefer: drei plus neun gleich drei plus zehn minus eins. Alternative Hüpfweise: drei minus eins, dann plus zehn.
- Von einer Position im Außenkreis soll eine Figur um neun Kugeln tiefer hüpfen: Die Figur hüpft von ihrer Position aus einfach auf die zugehörige Position im Innenkreis und dann eins höher: dreizehn minus neun gleich dreizehn minus zehn plus eins. Alternative Hüpfweise: dreizehn plus eins, dann minus zehn.

Die Struktur des Aufbaus der Rechenwendeltreppe legt auch nahe, sich zur Vereinfachung von Berechnungen Aufgaben in Teilaufgaben zu zerlegen, d.h. erst einen Teil der notwendigen Hüpfer auszuführen und danach den noch verbleibenden Teil an Hüpfern.

Zu den besonders einfachen Hüpfaufgaben im Außenkreis gehören solche, bei denen die Position mit zehn grünen und null orangen Kugeln als Start oder Ziel fungiert:

- Im Außenkreis ist von zehn grünen und null orangen Kugeln aus um eine bestimmte Anzahl an Kugeln (von null bis neun) höher zu hüpfen: Die erreichte Position hat nach wie vor zehn grüne Kugeln, die Anzahl der orangen Kugeln entspricht der Sprungweite; z. B. zehn plus acht gleich achtzehn.
- Im Außenkreis ist von einer Position aus um so viele Kugeln tiefer zu hüpfen, wie an dieser Position orange Kugeln vorhanden sind: Es wird immer die Position mit zehn grünen Kugeln und null orangen Kugeln erreicht; z. B. fünfzehn minus fünf gleich zehn. Im Zahlwort ‚zehn' sind die null orangen Kugeln kein Bestandteil.

Damit wird die Position mit zehn grünen und null orangen Kugeln zu einem attraktiven Ort für einen Zwischenstopp sowohl bei Rechnungen, die vom Innenkreis in den Außenkreis führen (Plus-Aufgaben) als auch bei Rechnungen, die vom Außenkreis in den Innenkreis führen (Minus-Aufgaben):

- Aufwärts wird mit einer besonders leichten Aktion aufgehört. Z. B. sieben plus acht: Hüpfe zunächst einfach von sieben orangen Kugeln im Innenkreis auf zehn grüne und null orange Kugeln im Außenkreis. Zu verstehen ist: Damit sind von der Aufgabe, um acht Kugeln höher zu hüpfen, bereits drei Kugeln an Höhe umgesetzt. Die Figur muss also im Außenkreis von zehn grünen und null orangen Kugeln aus nur noch fünf Kugeln höher hüpfen. Kein Problem von zehn grünen und null orangen Kugeln aus einfach die Position mit zehn grünen und fünf orangen Kugeln erreichen, also fünfzehn Kugeln.
- Abwärts wird mit einer besonders leichten Aktion begonnen. Z. B. fünfzehn minus acht: Hüpfe zunächst im Außenkreis von zehn grünen und fünf orangen Kugeln auf zehn grüne und null orange Kugeln. Damit sind offenkundig von der Aufgabe, um acht Kugeln tiefer zu hüpfen, bereits fünf Kugeln an Höhe umgesetzt – die fünf orangen Kugeln an der Ausgangsposition zeigen dies direkt an. Zu verstehen ist: Die Figur muss noch weitere drei Kugeln tiefer hüpfen. Letztendlich landet sie im Innenkreis auf der Position mit sieben Kugeln.

Erst wenn ein Kind genügend viele Kompetenzen zur sicheren und verständnisbasierten Ausführung von Aktionen im Zahlenraum von null bis neunzehn unter Ausnutzung der hier in der Rechenwendeltreppe gegebenen dezimalen Anordnung erworben hat, ist eine Erweiterung des Zahlenraums didaktisch sinnvoll. Leider wird sich für die Grundsicherung der Basiskompetenzen noch allzu häufig zu wenig Zeit genommen. Das ergibt wenig Sinn, steigen die kognitiven Anforderungen beim Größerwerden des Zahlenraumes doch immens an. Selbst eine gut strukturierte Anordnung von gegenständlichen Objekten ist in riesigen Zahlenräumen von z. B. über Tausenden oder Millionen an Objekten offenkundig nicht mehr beherrschbar. Mit dem Stellenwertsystem kommt für die Lernenden eine ganz neue Dimension im Umgang mit Vielheiten hinzu: eine radikale Komprimierung, d.h. eine Verdichtung der realen Gegebenheiten auf das zur Durchführung von Berechnungen Notwendigste, ohne dabei Wesentliches zu verlieren.

C: Buchführungssystem der Stellaner

Fachlicher Inhalt: Beliebig große Zahlen, Stellenwertsystem, Auswirkung unterschiedlicher Basen, Zahlidee – Zahlverkörperung – Zahlschrift, Sichtbarkeit von Zahleigenschaften in Zahldarstellungen.

Beim ZARAO und der Rechenwendeltreppe ist mit den Kugeln ein Raum ausgestaltet, in dem sich Akteure bewegen, die durch ihre jeweilige Position die Verkörperung einer bestimmten Zahl im Zahlenraum fokussieren und mittels ihrer Bewegungen Rechenereignisse vollziehen lassen. Parallel verläuft ein Weg als Zahlenstrahl bzw. ein solcher kann hinzu genommen werden.

Während der Innenkreis der Rechenwendeltreppe lediglich aus einer Runde an null bis neun Kugeln besteht, setzt sich ein erweiterter Außenkreis aus mehreren Runden zusammen: Nach neunzehn Kugeln beginnt die nächste Runde mit zwanzig bis neunundzwanzig Kugeln; so geht es weiter bis hin zur letzten Runde, der neunten Runde, mit neunzig bis neunundneunzig Kugeln. Zur besseren Sichtbarkeit werden in den dazukommenden Runden grüne Moosgummischeiben zwischen jeweils zehn grüne Kugeln gesteckt – sowie zuunterst bei den ersten zehn und zuoberst bei den letzten zehn grünen Kugeln. Insgesamt werden hier bei der höchsten Position zehn grüne Moosgummischeiben benötigt. Der nächste RWT-Kreis würde mit hundert – z. B. violetten („v" auch in der Bedeutung von „viele") – Kugeln beginnen, dabei mit null grünen und null orangen Kugeln. Dieser dritte RWT-Kreis hätte wahrlich viele Runden sowie eine beachtliche Höhe für den Aufbau der Kugeln bis hin zu neunhundertneunundneunzig – zwischen je hundert violetten Kugeln würde zur Kenntlichmachung eine violette Moosgummischeibe gesteckt sein, wie auch zuunterst bei den ersten hundert und zuoberst bei den letzten hundert violetten Kugeln. Insgesamt werden hier bei der höchsten Position zehn violette Moosgummischeiben benötigt.

Es zeigt sich schnell: Hinsichtlich größerer Zahlenräume ist der Aufbau von Kugeln zu Treppen offenkundig unpraktikabel – Material und Platz reichen nicht aus. Eine neue Idee wird benötigt: Komprimierung. Aber, was ist unverzichtbar? Wie kann darüber verfügt werden? Wie kann die Verdichtung auch im Fall von Förderbedarfen erlernt werden? Wichtig ist, dass ohne gefestigte Grundlagen, wie sie in den Abschnitten A und B erarbeitet worden sind, die angestrebte Komprimierung keinerlei Grundlage hat und ihre geistige Er- und Verarbeitung kaum gelingen kann.

Analyse hin zu zentralen Ideen: An jeder Position der Rechenwendeltreppe ist bedeutsam, wie viele Kugeln vorhanden sind. Diese sind im Fall der violetten und grünen Kugeln stets durch die farblich passenden Moosgummischeiben in je gleich große Abschnitte strukturiert: Hunderter-Kugelketten bzw. Zehner-Kugelketten. Zur Vereinheitlichung können auch bei den orangen Kugeln zur Markierung oranger Moosgummischeiben angebracht werden; einschließlich der untersten und der obersten werden bei der höchsten Position wieder zehn, diesmal orange, Moosgummischeiben benötigt. Hier sind die Abschnitte schlicht Einer-Kugeln. Mathematiker würden dazu neigen, sie als Einer-Kugelketten zu bezeichnen. Tatsächlich steckt allein in den Moosgummischeiben, die sich unter einer Figur befinden, die Information über die jeweilige Anzahl an Kugeln, auf der sie steht. Die Scheiben zeigen exakt den Aufbau jeder der in ihrer Verkörperung betrachteten Zahl an: Soundsoviele Hunderter-Kugelketten, soundsoviele Zehner-Kugelketten, soundsoviele Einer-Kugeln/Einer-Kugelketten.

Als entscheidender Tipp ergibt sich aus den Beobachtungen, die Moosgummi-Scheiben pro Farbe mit Nummern zu versehen und zwar jeweils beginnend mit null, da sich ja zunächst noch keine

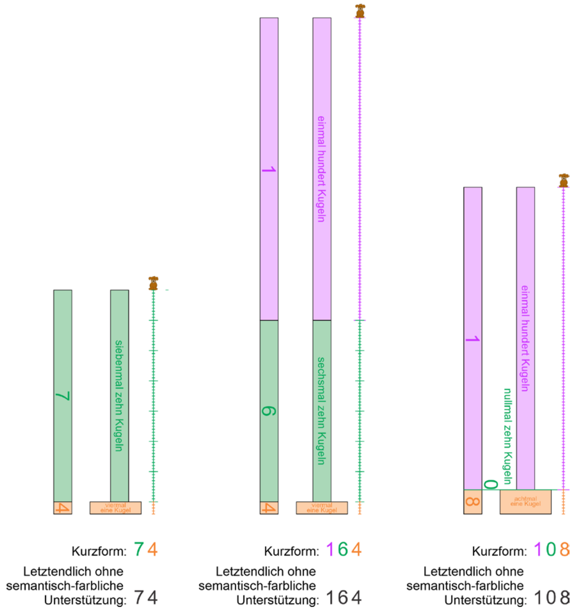


Abbildung 12.7
Fokussierung auf das Notwendige und damit Wesentliche mit dem Ziel der Komprimierung. Relevant ist der strukturierte Aufbau der Kugeln in den unterschiedlichen RWT-Kreisen, sichtbar durch die farbigen Moosgummischeiben. Um die Information zu bewahren, welche Position im Zahlenraum gemeint ist, reicht es aus, die Anzahl der durch diese Scheiben kenntlich gemachten Abschnitte zu kennen. Von der Vertikalen nach links in die Horizontale gekippt, entspricht der Kugelverlauf unmittelbar dem Verlauf der dezimalen Zahlnotation.

Kugeln unter einer Scheibe befinden, bis hin zu maximal neun, die höchstmögliche Anzahl an Einer-Kugeln oder Kugel-Ketten einer Sorte. So könnte sich für die Position, die eine Figur einnimmt, beispielsweise schlicht anhand der Moosgummischeiben ergeben: diese Figur steht – und zwar in dieser Reihenfolge von oben nach unten – auf drei Hunderter-Kugelketten, sieben Zehner-Kugelketten sowie vier Einer-Kugeln, letztendlich also in dezimaler Zahlschrift mit 374 bzw. einfarbig mit 374 verschriftlicht; oder auch auf neun Hunderter-Kugelketten, zwei Zehner-Kugelketten sowie null Einer-Kugeln, letztendlich in dezimaler Zahlschrift mit 920 bzw. einfarbig mit 920 verschriftlicht. Bis hin zum erfolgreichen Zurechtkommen mit einfarbigen, aneinander gereihten Ziffern als symbolische Darstellung einer Zahl ist ein weiter Weg, die kognitive Herausforderung ist groß. Die zeichnerische Darstellung zur Zahlverkörperung nutzt die Idee des Zahlenstrahls mit farblicher Kennung der Kugelsorte und Hervorhebung der benötigten Moosgummischeiben (Abb. 12.7).

Beispiele für Übergänge von der Rechenwendeltreppe zur dezimalen Zahlschrift zeigt Abbildung 12.7 anhand der Zahlenbeispiele vierundsiebzig, einhundertvierundsechzig und einhundertacht. Auch bei der Zahlenraumerweiterung sind die deutschen Zahlwörter nicht wirklich hilfreich, da sie die Perfektionierung der dezimalen Zahlschrift nicht beinhalten. Kinder mit sprachlichen Beeinträchtigungen profitieren davon, dass sie speziell für nicht-sprachlich gefasste Ideen empfänglich sein können. Systematisierte Handlungsmöglichkeiten zu Zahlideen, einhergehend mit strukturierten Zeichnungen, können wesentlich zu ihrer kognitiven Entwicklung und damit zu ihrem Verständnis der dezimalen Zahlschrift beitragen.

Weitere zentrale Idee: Die Idee der Kreise der Rechenwendeltreppe und damit den Stellen ist noch weiter zu elaborieren und mit Aktionen zu verknüpfen. Die Darstellungen in Abbildung 12.7 können dazu umgebaut werden. Platz in der Höhe wird eingespart, indem die Kugeln sortenweise geordnet von rechts nach links nebeneinander gesetzt werden (Abb. 12.8).

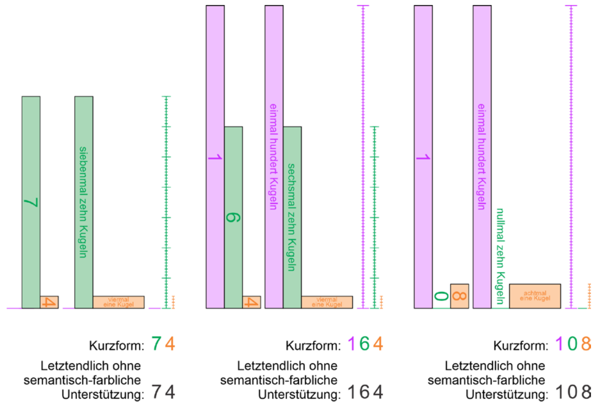


Abbildung 12.8
Die Entwicklung von rechts nach links in der dezimalen Zahlschrift wird in der Darstellung den von innen nach außen benötigten Kreise der Rechenwendeltreppe entnommen. Z. B. gilt es, um bei einhundertvierundsechzig anzukommen, ausgehend vom Innenkreis (Einer-Kugeln) über den zweiten RWT-Kreis (zusätzliche Zehner-Kugelketten) den dritten RWT-Kreis (zusätzliche Hunderter-Kugelketten) zu erreichen; bei vierundsiebzig, genügt es nach dem Innenkreis den zweiten RWT-Kreis zu erreichen.

Aber, wo soll jetzt die Hunde-Figur platziert werden, die anzeigen soll, welche der Zahlen im Zahlenraum in ihrer Verkörperung jeweils fokussiert wird? Es gibt pro Zahl nicht mehr eine einzige oberste Moosgummischeibe wie in den Beispielen in Abbildung 12.7. Die Information an Höhe ist auf mehrere Stellen verteilt worden – und so kommen mehrere Figuren ins Spiel.

In unseren Beispielen ruft der Hund seine Geschwister zur Hilfe und leitet sie an: Der violette Hund übernimmt den violetten Part, der grüne den grünen und der orange den orangen (Abb. 12.9). Damit kann anhand der von den Figuren eingenommenen Positionen wieder abgelesen werden, welche der Zahlen im Zahlenraum verkörpert ist – hier nun in einer wahrnehmungstechnisch deutlich komplexeren Konfiguration als Zusammensetzung mehrerer Hunde-Positionen. Während zunächst ‚schlicht' die unterschiedlichen Höhen, auf denen Figuren platziert sind, miteinander verglichen werden können (Abb. 12.7), müssen nun Kompositionen in Augenschein genommen werden. Anhand eines sorgfältigen Vergleichs der Höhen der einzelnen Hunde können Zahlen miteinander in Relation gesetzt werden. Beispielsweise lässt sich in Abbildung 12.9 die größte der drei dort verkörperten Zahlen bestimmen: Zwei violette Hunde überragen alle anderen Hunde. Damit gehören die beiden Zahlen, an denen sie beteiligt sind, zunächst einmal zu den Favoriten. Die links dargestellte Zahl entfällt, auch wenn der grüne Hund die insgesamt höchste Position aller grünen Hunde einnimmt. Übrig bleibt schließlich die in der Mitte verkörperte Zahl, weil hier der grüne Hund den rechten grünen Hund an Höhe übertrumpft, auch wenn

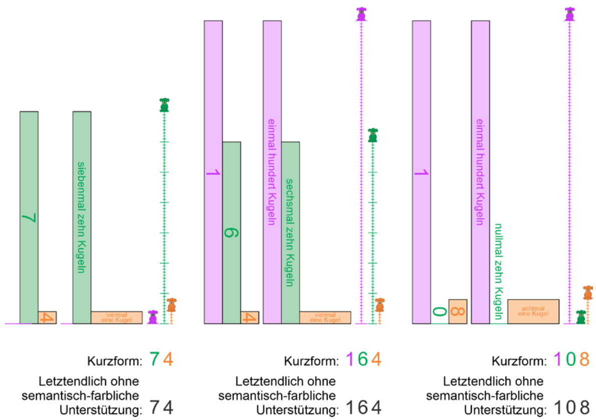


Abbildung 12.9
Die Hunde übernehmen unterschiedliche Rollen. Je nach Farbe ist ein Hund für die Einer-Kugeln (orange), Zehner-Kugelketten (grün) oder Hunderter-Kugelketten (violett) zuständig.

dort der orange Hund die insgesamt höchste Position aller orangen Hunde einnimmt. Als größte Zahl lässt sich hier anhand der Hunde-Positionen die in der Mitte verkörperte Zahl erschließen.

Soweit überhaupt Kugeln einer Sorte vorhanden sind, markiert der violette Hund den höchsten Gewinn an Höhe (100 bis maximal 900), der grüne Hund den nächst kleineren (10 bis maximal 90) und der orange Hund schließlich den geringsten (0 bis maximal 9). Diesem Größenunterschieden muss in der Unterrichtspraxis viel Raum und Zeit gegeben werden. Eine solche Sichtweise auf Zahlen ist alles andere als selbstverständlich. Sträflich wäre, dabei die Fälle ‚null von einer Sorte' zu vernachlässigen. Im Gegenteil: Diese gilt es ganz besonders hervorzuheben. Zu untersuchen wären sehr viele Zahlen in ihrer Verkörperung gemäß Abbildung 12.9, z. B.: 10, 11, 20, 22, …, 100, 110, 101, 111, …, 200, 220, 202, 222. Wichtig zu untersuchen sind auch Fälle wie 12, 21, 13, 31, 23, 32, … und 89, 98, 999, 989, 899, 888, 889, 898, 988, … und 123, 321, … . Wohlgemerkt: Nicht in der Zahlschrift, sondern in der Erforschung der Gegebenheiten in der Spielwelt des Figuren-Kugel-Zahlenraums werden tragfähige Ideen entwickelt und Verständnis aufgebaut. Zahlen-Beispiele gibt es genug. Es gilt, sie in den Unterricht zu integrieren und erst nach ausgiebiger, erfolgreicher Erarbeitung und Festigung dieser ideenlastigen Handhabung von Zahlen inhaltlich weiter fortzufahren. Es kann nicht oft genug betont werden: Der Schlüssel zum Zugang zentraler Einsichten liegt in der geeigneten Verkörperung von Zahlen. Die formal-symbolische, Konventionen unterworfene, dezimale Zahlschrift ist dabei wenig hilfreich – genau genommen erst einmal hinderlich.

Aufschluss weiterer zentraler Ideen: Nun bleibt noch, einen entscheidenden weitaus komplexeren Erkenntnis-Schritt zu meistern. Dieser setzt sich zusammen aus:

- Pro Kugelfarbe ist nur wichtig zu wissen, wie viele der durch die Moosgummischeiben gekennzeichneten Abschnitte vorhanden sind.
- Die jeweilige Größe eines Abschnitts muss nicht extra angegeben werden – sie ist implizit in der Farbe einer Moosgummischeibe enthalten.
- Es reicht, für die Größe aller Abschnitte dasselbe Einheitsmaß zu nehmen. Die pro Farbe erreichbare Höhe reduziert sich auf das null- bis neunfache dieses Einheitsmaßes.
- Es ist möglich, von der unterschiedlichen Farbgebung abzusehen und nur eine Farbe, z. B. schwarz, zuzulassen. Dann allerdings ist unverzichtbar, sich der Anordnung des Gemeinten von rechts nach links als maßgebendem Bedeutungsträger bewusst zu sein.

Zunächst soll die Farbgebung noch beibehalten werden. Man könnte versuchen, für die starke Komprimierung in der Darstellung die bereits bekannten Hunde zu verwenden (Abb. 12.10). Dies wäre aber höchst irritierend, da nun mit den Positionen der Hunde auf eine ganz andere Art als bislang bekannt und gewohnt, Zahlen im Zahlenraum verkörpert sind. An allen Stellen sind aufwärts zehn Markierungen vorhanden, aber sie stehen für extrem Unterschiedliches. Wie kann das mit erfasst werden? Ein Hauptgrund bei den häufigen Fehlern, wenn es um verschriftlichtes Rechnen wie z. B. die schriftliche Addition oder gar die schriftliche Division geht, sind tiefgreifende Lücken im Verständnis der dezimalen Zahlschrift. Die Größenunterschiede in den einzelnen Stellen werden nicht mitbedacht, die Ziffern an den einzelnen Stellen lediglich wie Einer(-Kugeln) behandelt und der Wechsel zwischen den Stellen, die Bedeutung ihrer Positionen nicht ausreichend verstanden und überblickt.

Hilfe kommt von den Stellanern, die die Hunde in deren RWT-Zahlendarstellungswelt besuchen. Sie übernehmen als Aufgabe, durch ihre Positionen in Leitersystemen Zahlen zu verkörpern und

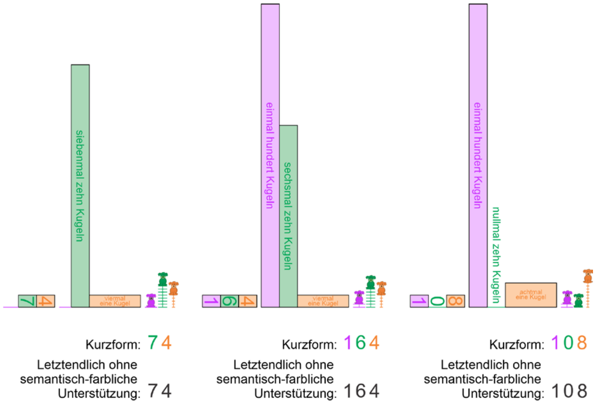


Abbildung 12.10
Hunde-Figuren in ungewohntem Gebrauch. Im Vergleich hat der orangene Hund die höchste Position, nämlich Acht, ergattert. Auch der grüne Hund steht nicht schlecht da, aber mit Position Sieben im Gesamtvergleich etwas tiefer als der orangene Hund. Der violette Hund kann gar nicht mithalten. Er schafft es nur bis zur Position Eins. Warum sollte mit der mittleren Darstellung die höchste Zahl verkörpert sein? Wie wäre es mit einer Zahl wie 111 statt 164? Sieht 108 nicht größer als 111 aus? Die ‚große' Zahl Acht wirkt doch bedeutender als drei einzelne ‚kleine' Einsen.

durch ihr Auf- und Abwärtshüpfen Rechnungen zu vollziehen. Inspiriert sind sie durch die bereits in der Hunde-Kugel-Welt vollzogene Komprimierung mit Fokus auf die Moosgummischeiben aufgeteilt nach Einer-Kugeln, Zehner-Kugelketten und Hunderter-Kugelketten.

Die Stellaner haben tatsächlich eine sehr praktikable Lösung entwickelt, um ihr ständig wechselndes Guthaben an Sterntalern zu verwalten. Dieses wird in einer Schatzkammer aufbewahrt. Gelegentlich gibt es Einnahmen und Ausgaben. Von außen ist die Höhe des Guthabens ersichtlich anhand ihrer cleveren Leiterdokumentation. Tatsächlich setzen sie die großartige Idee einer immensen Komprimierung um (Abb. 12.11). Anders als in der Rechenwendeltreppe gibt es hier zur Ausgestaltung des Zahlenraums keine Kreisstruktur und auch nicht immens viele Kugeln. Maßgeblich sind die Moosgummischeiben mit den von ihnen angezeigten Abständen. Die zur Abdeckung des Zahlenraums notwendigen Informationen werden allerdings nur noch ganz puristisch verkörpert: Für jede Kugelketten-Sorte bzw. Sterntaler-Päckchen-Sorte gibt es eine Leiter mit prinzipiell gleichem Aussehen, die in neun gleich große Abstände mit Sprossen von null bis neun unterteilt ist. Die Leitern sind nebeneinander angeordnet: ganz rechts jene zur Verbuchung einzelner Sterntaler von null bis neun, links daneben eine zur Verbuchung von je zehn Sterntalern von zehn bis neunzig, und wiederum links daneben eine zur Verbuchung von je hundert Sterntalern von hundert bis neunhundert. Zur Unterstützung und damit kognitiven Entlastung kann eine unterschiedliche farbliche Gestaltung der Leitern und Stellaner erfolgen.

Der Unterschied der Leitern liegt in ihrer Verwendung. Tatsächlich können sie zur Dokumentation und Verbuchung – abhängig von Rahmengeschichten – für unterschiedliche Objekte eingesetzt werden, z. B. die Kugelanzahlen bei den Hundepositionen in der RWT, Steine, die eine Königin für ihre Burgbauten verwaltet, Muscheln, die Insulaner für die Verzierung ihrer Kultstätten verwenden, usw. – oder eben wie hier zur Verwaltung des Guthabens an Sterntalern.

Für jede Leiter ist – von rechts nach links – ein bestimmter Stellaner zuständig:

- Ella [E]: Einer-Kugel-Leiter – ein Sterntaler ist per einem Hüpfer verbuchbar
- Zella [Z]: Zehner-Kugelketten-Leiter – zehn Sterntaler sind per einem Hüpfer verbuchbar
- Hella [H]: Hunderter-Kugelketten-Leiter – hundert Sterntaler sind per einem Hüpfer verbuchbar.

Anhand der von Ella, Zella, Hella eingenommenen Positionen kann das aktuelle Guthaben an Sterntalern abgelesen werden. Zunächst sollte dabei folgende Sprechweise eingehalten werden:

Zusammen zeigen die drei Stellaner das Guthaben an:

- Hella zeigt: soundsovielmal hundert Sterntaler,
- Zella zeigt: soundsovielmal zehn Sterntaler,
- Ella zeigt: soundsovielmal einen Sterntaler an.

Im Beispiel (Abb. 12.11 rechts):

Zusammen zeigen die drei Stellaner das Guthaben an:

- Hella zeigt: siebenmal hundert Sterntaler,
- Zella zeigt: zweimal zehn Sterntaler,
- Ella zeigt: siebenmal einen Sterntaler.

Damit ist das Guthaben der Stellaner derzeit:

- siebenmal hundert und zweimal zehn und siebenmal ein Sterntaler. Später mag diese verschriftlicht werden zu $7 \cdot 100 + 2 \cdot 10 + 7 \cdot 1$ Sterntaler, schließlich in Kurzform zu 727.

Entscheidend ist, dass Lernenden mit Förderbedarfen auch ermöglicht wird, die dezimale Zahlnotation 727 vorzulesen oder zu sprechen als eben: siebenmal hundert und zweimal zehn und siebenmal eins. Diese ausführlichere Zahlbezeichnung ist im Aufbau logischer, konsistenter und gehaltvoller ist als das Zahlwort, das sich dafür in der deutschen Sprache einbürgert hat: siebenhundertsiebenundzwanzig.

Sind drei solcher Leitern mit Sprossen von null bis neun vorhanden, kann der Zahlenraum von null bis neunhundertneunundneunzig abgedeckt werden. Weitere solcher Leitern hinzuzunehmen, ist leicht vorstellbar und wesentlich unaufwändiger als die Rechenwendeltreppe mit immer größeren Außenkreisen zu erweitern. Gedanklich gibt es mit der Fortsetzung der Leitern (wie auch prinzipiell mit der Kreisstruktur der Rechenwendeltreppe) kein Ende, passend zur unendlichen Weiterführbarkeit des Zahlenraums. Weitere Leitern bedeuten zugleich weitere Stellaner: Auf Ella, Zella, Hella folgend kommt Tella hinzu; Namen für die insgesamt benötigten Stellaner können ausgehandelt werden. Fundamental ist die Regel, dass jeder Stellaner, der auf seiner Leiter von der untersten Sprosse aus versucht, zehnmal nach oben zu hüpfen, schließlich wieder auf seiner untersten Sprosse landet und dafür sein jeweils linker Nachbar um eine Sprosse nach oben hüpft (bzw. auch dieser auf seiner untersten Sprosse landet und seinen linken Nachbarn zur Aktivität veranlasst). Damit wird auch ersichtlich, dass von zwei benachbarten Stellanern, die gleich hoch stehen, der linke das Zehnfache des Sterntaler-Guthabens wie der rechte anzeigt bzw. der rechte ein Zehntel des Guthabens des linken. Diese fundamentale Regel muss anhand vieler Beispiele erarbeitet und überprüft werden. So selbstverständlich sie klingen mag, erfordert ihr Verständnis doch einen hohen kognitiven Aufwand.

Die Stellaner sind wandlungsfähig und können sich in Leitersystemen unterschiedlicher Höhe tummeln (Abb. 12.12-12.15): Je nach Rahmengeschichte können sie sich farblich anpassen, aber auch ihre Beschriftung ändern und damit anzeigen, für welche Größe der Abstand zwischen ihren Sprossen bei den verschiedenen Leitersystemen steht. Tatsächlich entspricht in allen Lei-

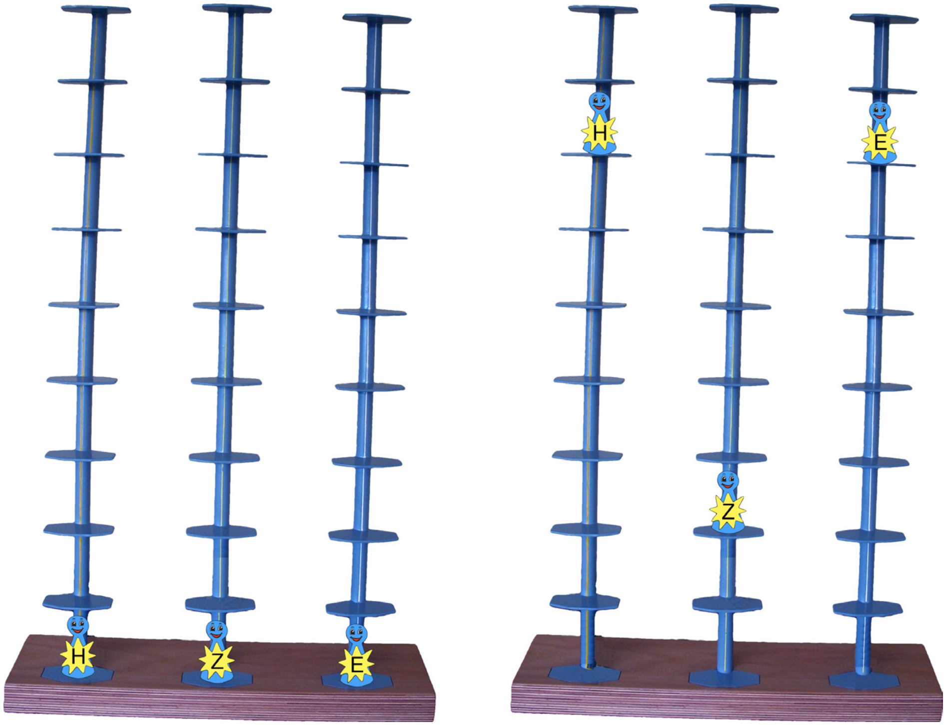


Abbildung 12.11
Die Stellaner Hella [H], Zella [Z], Ella [E] mit ihrem Leiteraufbau. Je nach Bedarf können die Leitern farblich unterschieden werden. Die Dokumentation des Guthabens an Sterntalern teilen die drei Stellaner untereinander auf.
Rechts: Hella zeigt siebenmal hundert (siebenhundert) Sterntaler an, Zella zweimal zehn (zwanzig) und Ella siebenmal einen (sieben), schriftlich in Kurzform 727.
Links: Sind keine Sterntaler vorhanden, ist das Guthaben also null, stehen sie alle ganz unten.
Das Leitersystem ist leicht erweiterbar, so dass prinzipiell beliebig große Zahlenräume abgedeckt werden können.

tersystemen der Sprossenabstand der ganz rechten Leiter dem Unterschied um einen Sterntaler. Bei der jeweils nächsten linken Leiter erhöht sich der Unterschied an sprossenweise verbuchten Sterntalern jeweils um ein bestimmtes Vielfaches – dieses ergibt sich aus der im jeweiligen Leitersystem pro Leiter gegebenen Sprossenzahl. Beispiel: Im Binärsystem werden in den Leitern von rechts nach links pro Hüpfer zunächst 1 Sterntaler verbucht, in der nächsten Leiter 2 (=2·1), in der nächsten 4 (=2·2), in der nächsten 8 (=2·2·2) usw. oder im Quinärsystem erst 1, dann 5 (=5·1), dann 25 (=5·5), dann 125 (=5·5·5) Sterntaler usw. – im bekannten Dezimalsystem sind es erst 1, dann 10 (=10·1), dann 100 (=10·10), dann 1000 (=10·10·10) Sterntaler usw. Die fundamentale Regel zum Verhältnis des dokumentierten Guthabens durch zwei benachbarte Stellaner auf Sprossen gleicher Höhe ist verallgemeinerbar: Der linke Stellaner zeigt stets ein Vielfaches an Guthaben wie der rechte an – bzw. umgekehrt der rechte einen Bruchteil des linken; der Faktor richtet sich dabei nach der in einem Leitersystem gegebenen Höhe, gemessen in Sprossen. Der entscheidende Unterschied zwischen verschiedenen Leitersystemen ist also ihre Sprossenzahl pro Leiter. Die Sprossen sind statisch und markieren – wie bereits in Abschnitt A, Abbildung 12.2, vorbereitet – die Anzahl der Hüpfer, die zu ihrer dynamischen Erreichung notwendig sind. Gerade dieses Wechselspiel bereitet Schwierigkeiten. Die Sprossenanzahl pro Leiter ist immer um eins größer als die Anzahl der dort von der untersten zur obersten Sprosse möglichen Hüpfer. Von der Leiter ganz rechts mit ihrer Anzahl an Sprossen leiten sich die Bezeichnungen der verschiedenen Leitersysteme in ihrer Verschriftlichung ab, z. B. zehn Sprossen: dezimale Zahlschrift, dezimales Stellenwertsystem oder einfach Dezimalsystem, zwei Sprossen: binäre Zahlschrift, binäres Stellenwertsystem oder einfach Binärsystem.

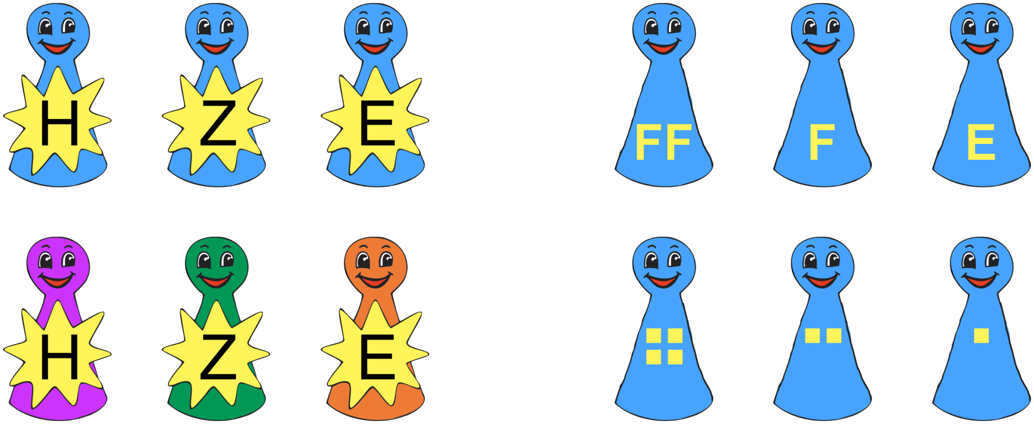


Abbildung 12.12
Links: Stellaner, die in einem 10er-Leitersystem unterwegs sind; die unteren in Freundschaftsfarben zu den Hunden aus Abb. 12.9 bzw. Abb. 12.10. [E: Einer-Stellaner, Z: Zehner-Stellaner, H: Hunderter-Stellaner]. Rechts: Stellaner, die sich einem 5er-Leitersystem bewegen, [E: Einer-Stellaner, F: Fünfer-Stellaner, FF: Fünfundzwanziger-Stellaner] sowie solche, die in einem 2er-Leitersystem binär operieren. [Einzel-Quadrat: Einer-Stellaner, Doppel-Quadrat: Zweier-Stellaner, Quadro-Quadrat: Vierer-Stellaner].

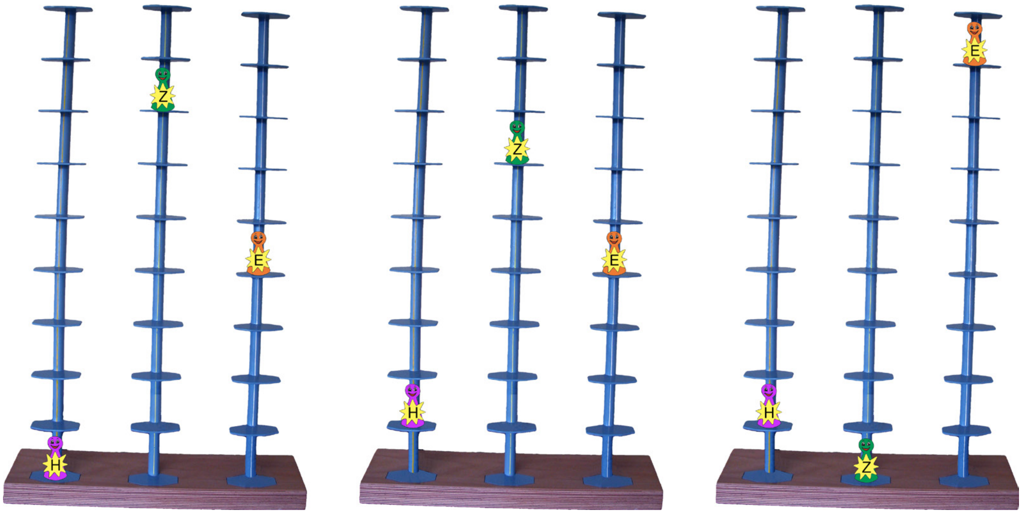


Abbildung 12.13
Stellaner in Freundschaftsfarben: Sie verkörpern mit ihren Positionen im Zahlenraum von null bis neunhundertneunundneunzig die durch die Hunde in Abb. 12.9 bzw. 12.10 verkörperten Zahlen: 74, 164, 108.

Abbildung 12.14
In jedem Leitersystem steht die Leiter ganz rechts mit ihrem Sprossenabstand für einen Sterntaler pro Hüpfer. Wofür die Hüpfer auf den weiteren Leitern eines Leitersystems stehen, hängt vom ‚Takt', also einer bestimmten Vervielfachung, ab. Diese wird von der in jedem Leitersystem für alle Leitern konstanten Sprossenzahl bestimmt. Links: 5 Sprossen pro Leiter, also 5er-System; verkörpert ist 1FF+0F+1E, kurz: 101. Rechts: 2 Sprossen pro Leiter, also 2er-System; verkörpert ist ebenfalls 101, hier aber in der Bedeutung 1·4 + 0·2 + 1·1.

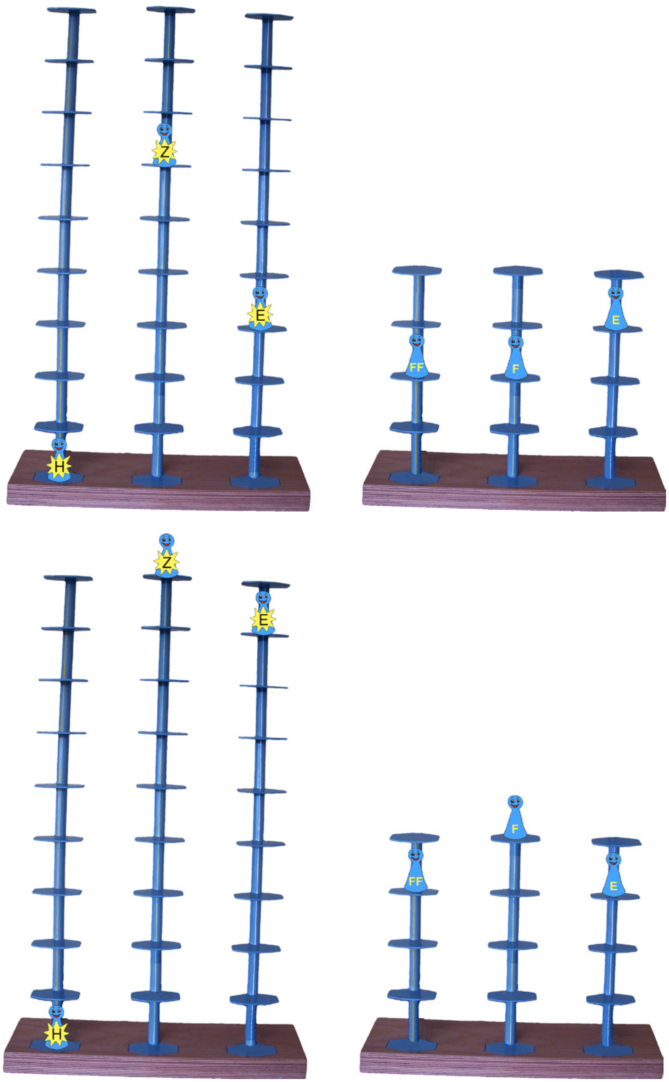


Abbildung 12.15
Oben: Sowohl anhand eines 10er-Leitersystems als auch anhand eines 5er-Leitersystems wird ein Guthaben an dreiundsechzig Sterntalern angezeigt.
Die Einer-Leiter ist in beiden Systemen für die Verbuchung von drei Sterntalern ausreichend. Damit stimmen beide formalen Zahldarstellungen in der Einer-Stelle überein.
Für die Verbuchung der verbleibenden sechzig Sterntaler reicht im Dezimalsystem bereits die nächste Leiter, nämlich die Zehner-Leiter, aus – schriftlich ergibt sich insgesamt in Kurzform 63 (dezimal).
Im Quinärsystem können anhand der nächsten Leiter, der 5er-Leiter, nur maximal zwanzig Sterntaler verbucht werden. Das reicht zur Verkörperung von sechzig nicht aus. Daher muss zusätzlich die nächste Leiter, die 25er-Leiter, einbezogen werden.
Auf ihr können fünfzig Sterntaler verbucht werden, die Verbuchung weiterer zehn auf der 5er-Leiter führt zur gewünschten Verbuchung von sechzig Sterntalern – schriftlich ergibt sich insgesamt in Kurzform 223 (quinär).
Unten: Analoge Überlegungen führen zur Verkörperung von achtundneunzig Sterntalern im 10er- bzw. 5er-Leitersystem sowie zu den schriftlichen Kurzformen 98 (dezimal) bzw. 343 (quinär).

Festzuhalten ist, dass in jedem dieser Leitersystem – ausgehend von null Sterntalern – jeder weitere hinzukommende Sterntaler ordnungsgemäß verbucht werden kann, wenn auch einem unterschiedlichen Takt folgend. Damit lässt sich in jedem Leitersystem prinzipiell jede Zahl verkörpern, so dass die universelle Darstellbarkeit von Zahlen gegeben ist.

Entscheidend sind die Bewegungen der Stellaner, die sie in einem Leitersystem bei Veränderungen des Guthabens an Sterntalern vornehmen. Solange der Einer-Stellaner bei der Einnahme bzw. der Ausgabe um einen Sterntaler dazu passend eine Sprosse nach oben oder unten hüpfen kann, ist die Verbuchung einfach. Schwieriger wird es, wenn er bereits auf der obersten bzw. untersten Sprosse steht. Der Einer-Stellaner kann dann die notwendige Verbuchungs-Arbeit nicht mehr allein übernehmen; Abbildung 12.16 zeigt dazu Beispiele.

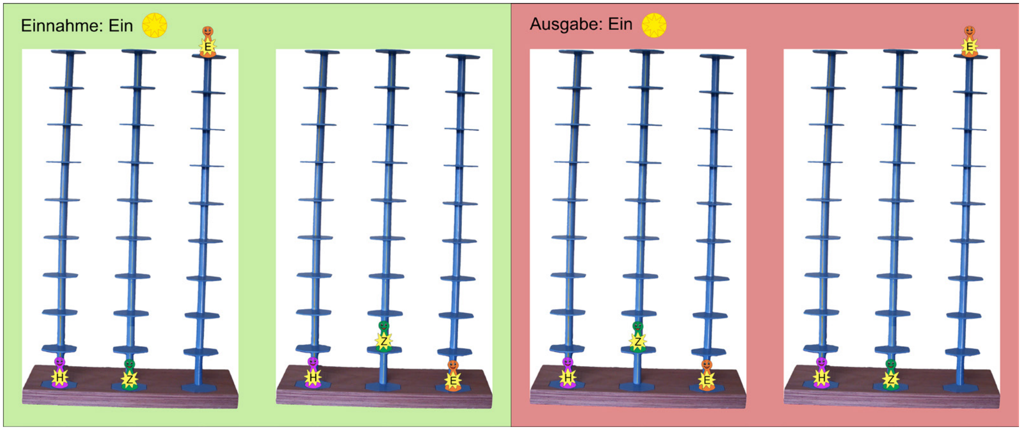


Abbildung 12.16
Weder die Verbuchung der Einnahme noch der Ausgabe eines Sterntalers kann vom Einer-Stellaner alleine übernommen werden. Links: Einnahme eines Sterntalers. Problem: Es ist keine weitere Sprosse vorhanden, auf die der Einer-Stellaner hochhüpfen kann. Um gleichwohl eine Zunahme beim Guthaben zu dokumentieren, gibt er seinem linken Nachbarn ein Signal, so dass dieser eine Sprosse nach oben hüpft. Damit wird allerdings eine Zunahme von zehn Sterntalern verbucht. Dies gleicht der Einer-Stellaner aus, indem er neunmal nach unten hüpft, also auf seiner untersten Sprosse ankommt. Insgesamt wird hier die Einnahme eines Sterntalers verbucht als + 10 [Zehner-Stellaner] - 9 [Einer-Stellaner] = +1. Rechts: Ausgabe eines Sterntalers. Problem: Es ist keine weitere Sprosse vorhanden, auf die der Einer-Stellaner nach unten hüpfen kann. Um gleichwohl eine Abnahme beim Guthaben zu dokumentieren, gibt er seinem linken Nachbarn ein Signal, so dass dieser eine Sprossen nach unten hüpft. Damit wird allerdings eine Abnahme von zehn Sterntalern verbucht. Dies gleicht der Einer-Stellaner aus, indem er neunmal nach oben hüpft, also auf seiner obersten Sprosse ankommt. Insgesamt wird hier die Ausgabe eines Sterntalers verbucht als - 10 [Zehner-Stellaner] + 9 [Einer-Stellaner] = -1.

Im Falle der Einnahme eines Sterntalers, ist die Vorgehensweise des Einer-Stellaners also davon abhängig, welche Position er auf seiner Leiter bereits erreicht hat. Folgende zwei Fälle sind zu unterscheiden:

- Ja, über dem Einer-Stellaner ist eine weitere Sprosse: Er hüpft eine Sprosse weiter nach oben.
- Nein, über dem Einer-Stellaner ist keine weitere Sprosse. Er hüpft auf seine unterste Sprosse und sendet seinem linken Nachbarn, dem Zehner-Stellaner, ein Nach-Oben-Signal. Dieser hat seinerseits dieselben zwei Fälle zu unterscheiden:
  - Ja, über ihm ist eine weitere Sprosse: Er hüpft eine Sprosse weiter nach oben.
  - Nein, über ihm ist keine weitere Sprosse. Er hüpft zurück auf seine unterste Sprosse und gibt seinem linken Nachbarn, dem Hunderter-Stellaner, ein Nach-Oben-Signal. Dieser hat seinerseits dieselben zwei Fälle zu unterscheiden.
    - …… diese Aktionen setzen sich fort, bis die Verbuchung der Einnahme dieses einen Sterntalers erfolgt ist. Ist beispielsweise bereits ein Guthaben an 999 Sterntalern verbucht und wird ein weiterer Sterntaler eingenommen, muss zur Dokumentation links eine weitere Leiter mit dem Stellaner Tella hinzugenommen werden. Bei der Verbuchung hüpft dann letztendlich Tella von ihrer untersten Sprosse eine Sprosse nach oben; also insgesamt: 999+1 = (999-9-90-900)+1000.

Damit gibt es für jeden der Stellaner zwei Arten von Hüpfern bei der Verbuchung der Einnahme eines Sterntalers:

- Den *einfachen Nach-Oben-Hüpfer* eines Stellaners – ein Hüpfer um eine Sprosse nach oben auf seiner Leiter
- Den *aufwändigen Signal-Nach-Oben-Hüpfer* eines Stellaners – dieser erfolgt, wenn keine weitere Sprosse über ihm vorhanden ist, und führt zu einem leiterübergreifenden Handeln:
  - *Hüpfer zurück* auf die unterste Sprosse seiner Leiter
  - *Senden eines Nach-Oben-Signals* an seinen linken Nachbarn, damit dieser tätig wird

Im Unterricht können dazu Rollenspiele durchgeführt werden, wobei Guthabenveränderungen vorgenommen werden und Lernende mit den Stellanern dazu passende Hüpfer durchführen.

Sind solche Verbuchungen ausreichend geklärt, kann untersucht werden, dass Analoges für Zella und Hella gilt, falls zehn bzw. hundert Sterntaler eingenommen werden, wobei ggfs. links einen weitere Leiter hinzugenommen werden muss und Tella mit ins Spiel kommt.

Auch bei der *Ausgabe* eines Sterntalers, ist die Vorgehensweise des Einer-Stellaners davon abhängig, welche Position er auf seiner Leiter bereits erreicht hat. Folgende zwei Fälle sind zu unterscheiden:

- Ja, unter dem Einer-Stellaner ist eine weitere Sprosse: Er hüpft eine Sprosse weiter nach unten.
- Nein, unter dem Einer-Stellaner ist keine weitere Sprosse. Er hüpft auf seine oberste Sprosse und sendet seinem linken Nachbarn, dem Zehner-Stellaner, ein Nach-Unten-Signal. Dieser hat seinerseits dieselben zwei Fälle zu unterscheiden:
  - Ja, unter ihm ist eine weitere Sprosse: Er hüpft eine Sprosse weiter nach unten.
  - Nein, unter ihm ist keine weitere Sprosse. Er hüpft auf seine oberste Sprosse und sendet seinem linken Nachbarn, dem Hunderter-Stellaner, ein Nach-Unten-Signal. Dieser hat seinerseits dieselben zwei Fälle zu unterscheiden.
    - …… diese Aktionen setzen sich fort, bis die Verbuchung der Ausgabe dieses einen Sterntalers erfolgt ist. Ist beispielsweise mit vier Leitern unter Zunahme von Tella bereits ein Guthaben an 1000 Sterntalern verbucht und wird ein Sterntaler ausgegeben werden alle vier Stellaner tätig. Ella: +9, Zella: +90, Hella: +900, Tella: -1000; also: 1000-1 = (9+90+900)+(1000-1000)

Damit gibt es für jeden der Stellaner zwei Sorten Hüpfer bei der Verbuchung der Ausgabe eines Sterntalers:

- Den *einfachen Nach-Unten-Hüpfer* eines Stellaners – ein Hüpfer um eine Sprosse nach unten auf seiner Leiter
- Den *aufwändigen Signal-Nach-Unten-Hüpfer* eines Stellaners, der aufgrund einer mangelnden weiteren Sprossen unter ihm ein leiterübergreifendes Handeln bewirkt:
  - *Hüpfer* auf die oberste Sprosse seiner Leiter
  - *Senden eines Nach-Unten-Signals* an seinen linken Nachbarn, damit dieser tätig wird

Die Ausgabe eines Sterntalers in unterschiedlichen Ausgangssituationen wird wieder in Rollenspielen ausgiebig erkundet.

Die Überlegungen zur Einnahme bzw. Ausgabe von zehn, hundert, tausend, usw. Sterntalern sind analog. Hier zahlt sich die Komprimierung aus. Zella, Hella, Tella sind auf Leitern gleicher Struktur wie Ella unterwegs. Das heißt sie verhalten sich auf ihren Sprossen wie Ella, nur dass Ella keinen rechten Nachbarn hat (es sei denn, Dezimalzahlen werden eingeführt) und dass ihre einzelnen Sprünge für die jeweils um eins höhere Zehnerpotenz stehen. Der Unterschied ist also ‚lediglich' die Größenordnung; Das Verhalten der Stellaner in ihren Leitern unter Einbezug ihres jeweils linken Nachbar-Stellaners gleicht sich. Dies ist einerseits nützlich, da stets dieselben Aktionen erfolgen und die algorithmische Vorgehensweise dadurch einfach bleibt, andererseits jedoch ‚gefährlich' und ‚undurchsichtig', da die jeweilige Größenordnung allzu leicht gedanklich vernachlässigt wird und dadurch z. B. bei Sachaufgaben unbedacht merkwürdige Ergebnisse ‚ausgerechnet' werden.

Abbildung 12.17
Die Stellaner müssen zusammenarbeiten, wenn einer alleine die Buchung nicht vornehmen kann. Links: Ein Sterntaler kommt hinzu. Der Einer-Stellaner steht auf seiner höchsten Stufe. Er kann diesen nicht verbuchen. Er sendet dem Zehner-Stellaner ein Nach-Oben-Signal. Links oben: Der Zehner-Stellaner kann mit einem Hüpfer nach oben eine Erhöhung des Guthabens verbuchen, allerdings dokumentiert er damit einen Anstieg um zehn Sterntaler. Dies korrigiert der Einer-Stellaner, indem er neun Hüpfer nach unten durchführt und seine unterste Sprosse erreicht. [239+1=239+10-9=240] Links unten: Auch der Zehner-Stellaner kann keine weitere Erhöhung des Guthabens verbuchen. Er sendet dem Hunderter-Stellaner ein Signal. Dieser hüpft eine Sprosse nach oben, allerdings dokumentiert er damit einen Anstieg um hundert Sterntaler. Dies korrigiert zunächst der Zehner-Stellaner, indem er mit neun Hüpfern nach unten auf seine unterste Sprosse den Guthaben-Anstieg auf nur noch zehn Sterntaler korrigiert. Dies korrigiert schließlich der Einer-Stellaner, indem er mit neun Hüpfern nach unten auf seine unterste Sprosse den Guthaben-Anstieg auf einen Sterntaler korrigiert. [499+1=499+100-99=500]

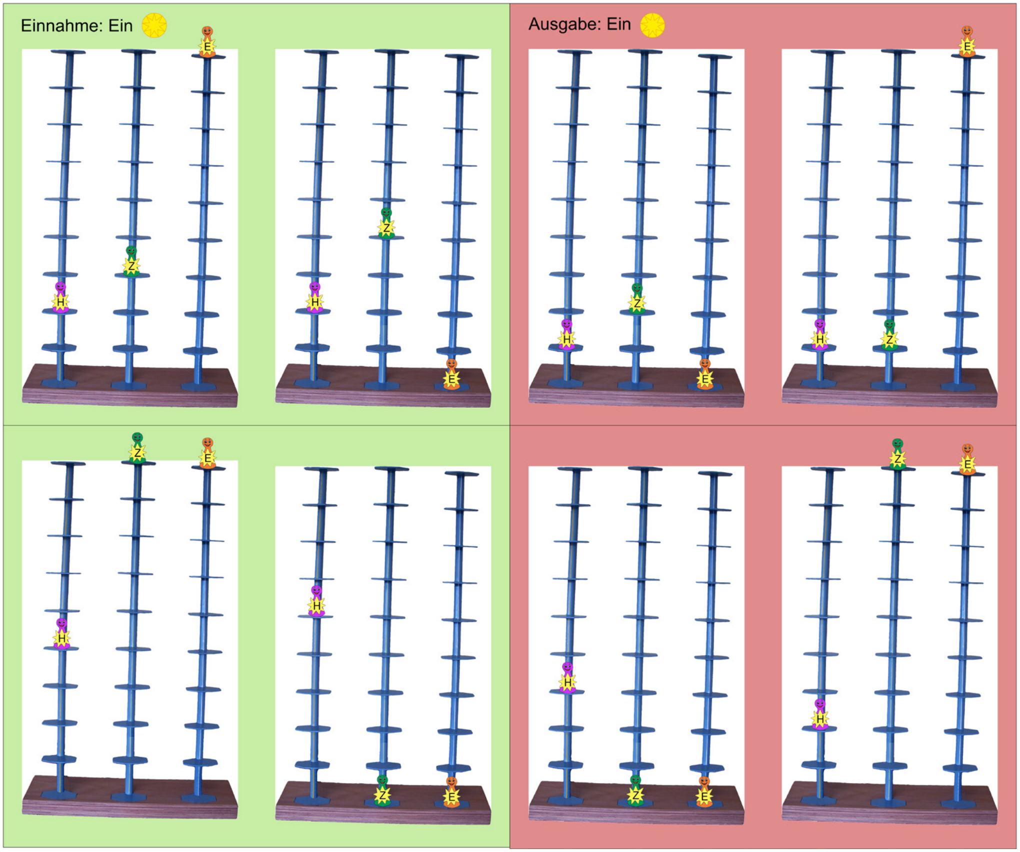


Abbildung 12.17 zeigt Beispiele, die eine aufwändigere Team-Arbeit der Stellaner bei der Verbuchung der Einnahme bzw. Ausgabe eines Sterntalers erfordern: 239+1, 499+1, 120-1, 300-1.

Die Leitern laden zu vielen Erkundungen ein. Z. B. kann überlegt werden, wie so gebucht werden kann, dass die Stellaner mehr oder weniger aufwändig tätig werden müssen. So kann etwa untersucht werden, wie 58+23 berechnet werden kann, z. B. als 58+3+20=61+20 oder als 58+2+21=60+21. Hierzu gibt es sehr viele Aufgabenbeispiele, die von den Lernenden auch selbst aufgestellt werden können, so z. B. die Untersuchung von 297+428 (297 ist fast 300). Erhellend ist auch, dass die Stellaner nicht zwingend von rechts nach links in ihren Leitern tätig werden müssen. So kann in Rollenspielen untersucht werden, was passiert, wenn die Reihenfolgen geändert werden, also nicht erst Ella tätig wird, sondern Hella oder Zella.

Interessant ist zudem, auffällige Bewegungsmuster durchzuspielen. Zum Beispiel:

- 0+11+11+11+11+11+11+11+11+11 (also 11 neunmal zu addieren), was faktisch immer +1+10 entspricht, wobei Ella und Zella im Gleichklang hüpfen können und immer auf benachbarten Sprossen landen: 0,11,22,33,44,55,66,77,88,99.

- 9+9+9+9+9+9+9+9+9+9 (also zu 9 weitere neunmal 9 zu addieren), was faktisch immer +10-1 entspricht, wobei Zella und Ella gegenläufig hüpfen: Zella immer eine Sprosse nach oben, Ella immer eine Sprosse nach unten: 9,18,27,36,45,54,63,72,81,90.

Einige Rechnungen machen gerade in der Ausführung der Bewegungen richtig Spaß. Es gibt noch vieles Weiteres zu erkunden und die Lernenden vertiefen sich dabei in Zahlbeziehungen die maßgeblich durch die Art und Weise der Verkörperung von Zahlen in dezimaler Stellenwertnotation bestimmt sind.

Anzustreben ist, solche Untersuchungen in Leitersystemen unterschiedlicher Höhe vorzunehmen und hierbei Gleichheiten und Unterschiede festzustellen.

Tatsächlich ist der Einfluss der Höhe eines Leitersystems, seine Sprossenzahl pro Leiter, auffällig. Plus/minus zehn, plus/minus hundert, plus/minus tausend usw. lässt sich besonders leicht in einem Leitersystem der Höhe zehn Sprossen verbuchen. Was gilt in Leitersystemen anderer Höhe? Das Dreier-Einmaleins ist z. B. besonders einfach im Leitersystem der Höhe drei Sprossen abzuhüpfen, auch steht bei solchen Zahlen Ella immer auf der untersten Sprosse. In einem Leitersystem der Höhe sechs Sprossen steht Ella bei Zahlen aus dem Dreier-Einmaleins abwechselnd auf der untersten Sprosse bzw. drei Hüpfer weiter oben. Verdoppeln / Halbieren ist besonders einfach im kleinsten Leitersystem, dem 2er-System, analog das Verzehnfachen / Zehnteln im 10er-System oder eben allgemein das n-fache oder n-teln in einem n-er-System. Zum Beispiel gilt:

$254 \cdot 10 = (2 \cdot 100 + 5 \cdot 10 + 4 \cdot 1) \cdot 10 = 2 \cdot 100 \cdot 10 + 5 \cdot 10 \cdot 10 + 4 \cdot 1 \cdot 10 = 2 \cdot 1000 + 5 \cdot 100 + 4 \cdot 10.$

Im 10er-Leitersystem ändern sich die Positionen der Stellaner systematisch: Für jeden Sterntaler, den Ella verbucht hat, verbucht Zella nun das Zehnfache, im Beispiel also $4 \cdot 10$. Ebenso verbucht Hella das Zehnfache dessen, was ursprünglich Hella verbucht hatte, im Beispiel also $5 \cdot 10 \cdot 10$ und schließlich Tella das Zehnfache dessen, was ursprünglich Hella verbucht hatte, im Beispiel also $2 \cdot 100 \cdot 10$. Wird gezehntelt, gilt die Umkehrung, wobei ein Rest größer null anfallen kann, nämlich die Anzahl der ursprünglich von Ella angezeigten Sterntaler. Steht Ella zu Beginn auf Sprosse null, geht die Rechnung glatt auf.

Dies gilt analog in jedem Leitersystem, wenn eine darin verkörperte Zahl mit dessen Höhe, also der Anzahl der Sprossen seiner Leitern vervielfacht oder geteilt wird. Interessant im 2er-Leitersystem ist, dass die Position von Ella nur 0 oder 1 sein kann. Daran lässt sich unmittelbar erkennen, ob eine gerade oder ungerade Zahl verkörpert ist, sich beim Halbieren also der Rest null oder eins ergibt.

Es ist wichtig, solche Zusammenhänge hinsichtlich der Basis eines Stellenwertsystems zu erkunden, sich in diese einzudenken und diese dadurch wirklich zu verstehen. Redeweisen wie „eine ‚0' anhängen" oder „die letzte Ziffer abschneiden" drücken keine mathematische Operation aus und beziehen sich nur auf das Schriftbild einer Zahl.

Interessant ist die Untersuchung von Möglichkeiten wie ein Guthaben an Sterntalern, das in einem Leitersystem verbucht ist, in einem anderen Leitersystem verbucht werden kann. Das Guthaben ändert sich nicht, wohl aber die Art und Weise der Darstellung. Erkundet werden können z. B. folgende Vorgehensweisen:

- Im Ausgangs-Leitersystem wird fortwährend um eins rückwärts gezählt und dafür im Ziel-Leitersystem um eins vorwärts gezählt. Das mag lange dauern, vertieft aber das Verständnis der Stellaner-Team-Arbeit, auf welche Weise sie ihr Guthaben in den beiden Leitersystemen dokumentieren.

- Im Ausgangs-Leitersystem wird der größtmögliche Wert abgebucht, der hinsichtlich des Ziel-Leitersystems in einer Leiter möglich ist. Damit kann mit Hüpfern, die größeren Beträgen entsprechen, schneller die Dokumentation eines Guthabens nachgehüpft werden. Soll z. B. ein Guthaben, das von Stellanern in ihrem 10er-Leitersystem dokumentiert ist, von Stellanern in deren 2er-Leitersystem verbucht werden, kann von der hier höchstwertigen Leitersprosse aus gedacht werden, die für möglichst viel des Ausgangs-Guthabens steht. Im Fall von 41 Sterntalern wären direkt 32 Sterntaler im 2er-Leitersystem verbuchbar auf der oberen Sprosse der sechsten Leiter. Werden diese im 10er-Leitersystem verbucht, können dort die Stellaner mit ihren neuen Positionen anzeigen, dass noch weitere 9 Sterntaler zu verbuchen sind. Im 2er-Leitersystem kann dafür nun ein Stellaner auf der vierten Leiter auf die obere Sprosse hüpfen. Antizipiert werden kann, dass damit nur noch ein Sterntaler zur Verbuchung übrigbleibt, um den Prozess abzuschließen. Es sollte nicht versäumt werden, die Lernenden zu ermuntern, die Handlungen vollständig auszuführen, sprich im 10er-Leitersystem die 8 Sterntaler zu verbuchen, dafür die Verbuchung im 2er-Leitersystem vorzunehmen und schließlich den wechselweisen Prozess mit der Verbuchung letzten Sterntaler zu vollenden.

Wertvoll ist in diesem Zusammenhang auch, im Falle eines vorgegebenen Guthabens zu entscheiden, in welchem Leitersystem es verbucht werden soll. Daran anschließend kann entschieden werden, in welchem anderen Leitersystem es ebenfalls verbucht werden soll. Manche Leitersysteme harmonieren gut wie etwa die 2er-, 4er- , 8er-Leitersysteme, nicht aber beispielsweise die 3er- und 8er-Leitersysteme. Wichtig ist, die Zusammenhänge nicht vorzugeben, sondern die Lernenden anhand geeigneter Aufgabenstellungen selbst erkunden zu lassen und sie dabei behutsam anzuleiten.

Je nach Stellenwertsystem fällt spätestens ab dem Einbezug der zweiten Leiter von rechts die verkürzte schriftliche Zahldarstellung unterschiedlich aus. Interessante Vergleiche von Ziffernmustern und damit zusammenhängenden Zahleigenschaften sind möglich, einige zu untersuchende Fälle sind in den Tabellen 12.2 und 12.3 aufgeführt. Regelmäßige Muster in der einen Zahldarstellung können Regelmäßigkeiten in einer anderen Zahldarstellung entsprechen oder auch nicht. Solche Übungen sind eine gute Gelegenheit, sich die Zusammensetzung einer Zahl aus Bauteilen wie sie in der Zahlschrift ausgedrückt ist, bewusst zu machen und sich dessen gewahr zu sein, dass immer die Größenordnung einer Stelle mitbedacht werden muss. Wichtige Erkenntnis ist: Ein und dieselbe Zahl ist unterschiedlich zusammensetzbar, unterschiedlich verkörperbar und unterschiedlich formal-symbolisch notierbar.

Eine Balance mag erstrebenswert sein zwischen benötigter Anzahl an Stellen und symbolischer Komplexität oder auch der Eigenschaften von Ziffernmuster im Hinblick auf die Eigenschaften einer Zahl.

Hilfreich ist auch, wieder den Zahlenstrahl einzusetzen. Hier wird besonders gut deutlich, dass dieselbe Zahl gemeint ist, auch denn die Beschriftung unterschiedlich ausfällt. Abbildung 12.18 zeigt wie Stellaner-Hunde jeweils ausgehend von ihrer Position null zu ihrer Position acht gehüpft sind, wofür alle acht Hüpfer benötigen. In welchem System sie unterwegs sind, wird durch die Beschriftung ihrer Hüte angezeigt. Der Zahlenstrahl ist zwar nur zur Beschäftigung mit kleineren Zahlenräumen geeignet, Zahlenstrahle mit unterschiedlichen Beschriftungen sollten aber gleichwohl im Zusammenhang mit unterschiedlichen Leitersystemen eingesetzt. In Rollenspielen kann von den Lernenden erkundet werden, wie Stellaner-Hunde im Vergleich zu den Stellanern hüpfen und was dies für die jeweilige Beschriftung einer erreichten Zahlenstrahl-Position bedeutet.

Binärsystem

Das Binärsystem bildet die Grundlage der digitalen Informationsverarbeitung. Seiner unterrichtlichen Behandlung kommt eine Schlüsselfunktion zu. Hierfür stehen Stellaner bereit, die – zumindest für die kleineren Zweierpotenzen – passende Quadrat- oder Punkt-Muster aufweisen. Sie stehen so dicht zueinander, dass statt vom Senden eines Signals auch die Rede davon sein kann, dass ein Stellaner einen anderen schubst.

Dezimal-system 	Binär-system 	Quaternär-system 	Oktal-system 	Quinär-system 
2 [2·**1**]	10 [1·**2**+0·**1**]	2 [2·**1**]	2 [2·**1**]	2 [2·**1**]
4 [4·**1**]	100 [1·**4**+0·**2**+0·**1**]	10 [1·**4**+0·**1**]	4 [4·**1**]	4 [4·**1**]
5 [5·**1**]	101 [1·**4**+0·**2**+1·**1**]	11 [1·**4**+1·**1**]	5 [5·**1**]	10 [1·**5**+0·**1**]
8 [8·**1**]	1000 [1·**8**+0·**4**+0·**2**+0·**1**]	20 [2·**4**+0·**1**]	10 [1·**8**+0·**1**]	13 [2·**5**+3·**1**]
10 [1·**10**+0·**1**]	1010 [1·**8**+0·**4**+1·**2**+0·**1**]	22 [2·**4**+2·**1**]	12 [1·**8**+2·**1**]	20 [4·**5**+0·**1**]
16 [1·**10**+6·**1**]	10000 [1·**16**+0·**8**+0·**4**+0·**2**+0·**1**]	100 [1·**16**+0·**4**+0·**1**]	20 [2·**8**+0·**1**]	31 [3·**5**+1·**1**]
25 [2·**10**+5·**1**]	11001 [1·**16**+1·**8**+0·**4**+0·**2**+1·**1**]	121 [1·**16**+2·**4**+1·**1**]	31 [3·**8**+1·**1**]	100 [1·**25**+0·**5**+0·**1**]
50 [5·**10**+0·**1**]	110010 [1·**32**+1·**16**+0·**8**+0·**4**+1·**2**+0·**1**]	302 [3·**16**+0·**4**+2·**1**]	62 [6·**8**+2·**1**]	200 [2·**25**+0·**5**+0·**1**]
100 [1·**100**+0·**10**+0·**1**]	1100100 [1·**64**+1·**32**+0·**16**+0·**8**+1·**4**+0·**2**+0·**1**]	1210 [1·**64**+2·**16**+1·**4**+0·**1**]	144 [1·**64**+4·**8**+4·**1**]	400 [4·**25**+0·**5**+0·**1**]
625 [6·**100**+2·**10**+5·**1**]	1001110001 [1·**512**+0·**256**+0·**128**+1·**64** +1·**32**+1·**16**+0·**8**+1·**4**+0·**2**+1·**1**]	21301 [2·**256**+1·**64** +3·**16**+0·**4**+1·**1**]	1161 [1·**512**+1·**64**+6·**8**+1·**1**]	10000 [1·**625**+0·**125** +0·**25**+0·**5**+0·**1**]

Tabelle 12.2
Das „Aussehen“ schriftlicher Zahldarstellungen vergleichen. Nicht eine Zahl selbst ist „rund“, sondern ihre schriftliche Zahldarstellung endet mit einer bestimmten Ziffer (z. B. …0) oder Ziffernfolge (z. B. …00). Nicht eine Zahl selbst besitzt eine bestimmte Stelligkeit/Ziffrigkeit (z. B. zweistellig, zweiziffrig), sondern ihre schriftliche Zahldarstellung besteht aus einer bestimmten Anzahl an Ziffern bzw. benötigt eine bestimmte Anzahl an Stellen (z. B. acht: dezimal: eine Ziffer/Stelle, binär: vier Ziffern/Stellen).

Dezimal-system	Binär-system	Quaternär-system	Oktal-system	Quinär-system
3	11	3	3	3
15	1111	33	17	30
31	11111	133	37	111
63	111111	333	77	223
64	1000000	1000	100	234

Tabelle 12.3
Manche Ziffernmuster sind auffällig und laden zur näheren Betrachtung und zum Vergleichen ein.

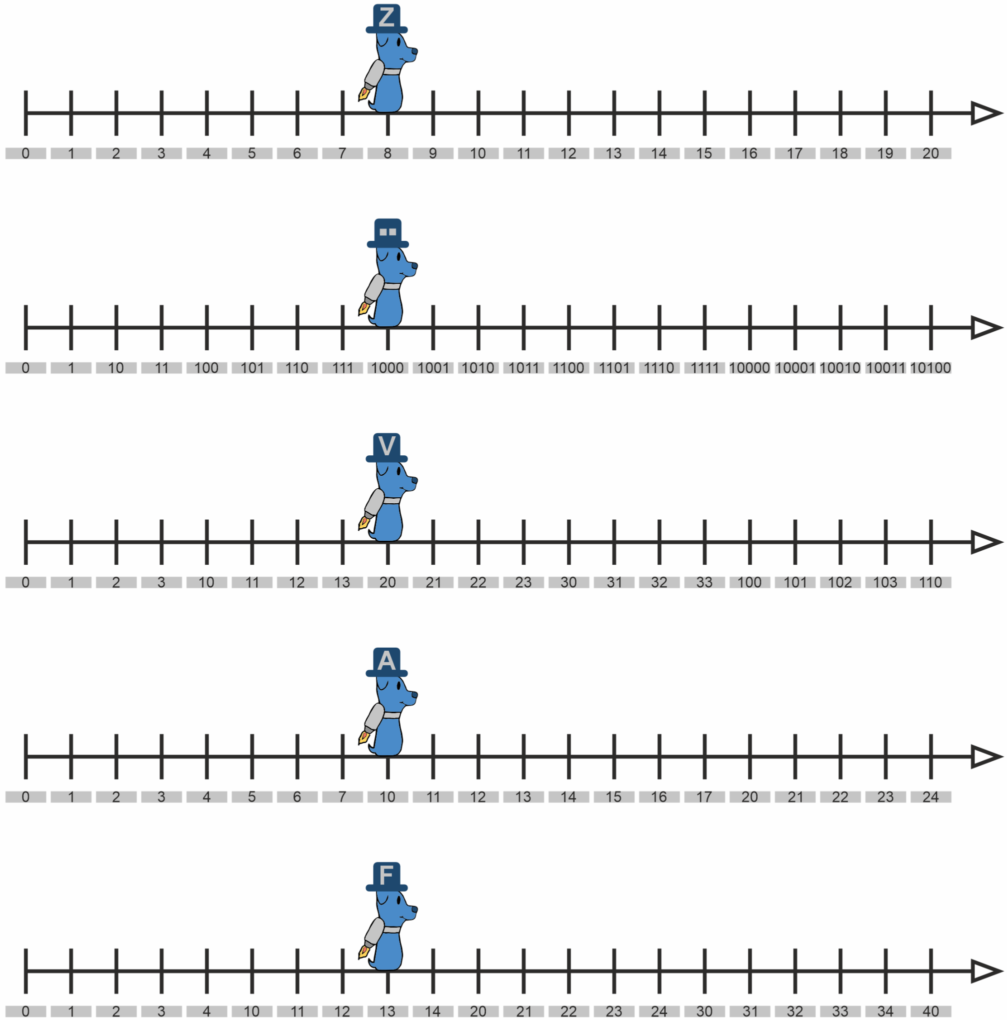


Abbildung 12.18
Wird eine bestimmte Zahl gewählt – in diesem Beispiel die Zahl Acht – offenbart sich am Zahlenstrahl ihre Zusammensetzung aus acht Hüpfern, also aus achtmaligem ‚+1‘ von der Startzahl 0 aus. Die von den Hunden erreichte Position ist immer dieselbe. Allerdings fällt die Beschriftung der Positionen unterschiedlich aus: sie richtet sich nach dem gewähltem Stellenwertsystem und damit nach der Entscheidung, welche Basis für die Aufschlüsselung einer Zahl gemäß der Stellenwertsystem-Idee gewählt wird. Die Beschriftung der Hüte zeigt an, in welchem System sie unterwegs sind. Die kann auch dadurch abgeleitet werden, dass untersucht wird, an welcher Position erstmalig die Beschriftung mit der Ziffernfolge 10 gegeben ist.

Die Berechnungen im kleinen Eins-plus-Eins wie auch im kleinen Ein-mal-Eins reduzieren sich im Binärsystem auf sehr wenige, einfache Fälle (die binäre Zahldarstellung wird in der Schriftform nur im Fall 1+1 sichtbar):

- Addition: $0+0=0$, $0+1=1$, $1+0=1$, $1+1=10$
- Multiplikation: $0\cdot0=0$, $0\cdot1=0$, $1\cdot0=0$, $1\cdot1=1$

Abbildung 12.19 zeigt die Addition dreier Summanden. In der untersten Reihe haben die Stellaner die drei darüber angezeigten Guthaben zusammengeführt, also aufaddiert. Wie sie zu ihrer Endstellung gelangt sind, ist natürlich zu erforschen. Im nachfolgenden Kapitel wird diese Berechnung wieder aufgegriffen.

Im Prinzip kann in der untersten Reihe jeder Stellaner mit seiner Aktivität beginnen, und jeder weitere die Verbuchung fortsetzen. Aus praktischen Gründen ist es ratsam, stellenweise in einer

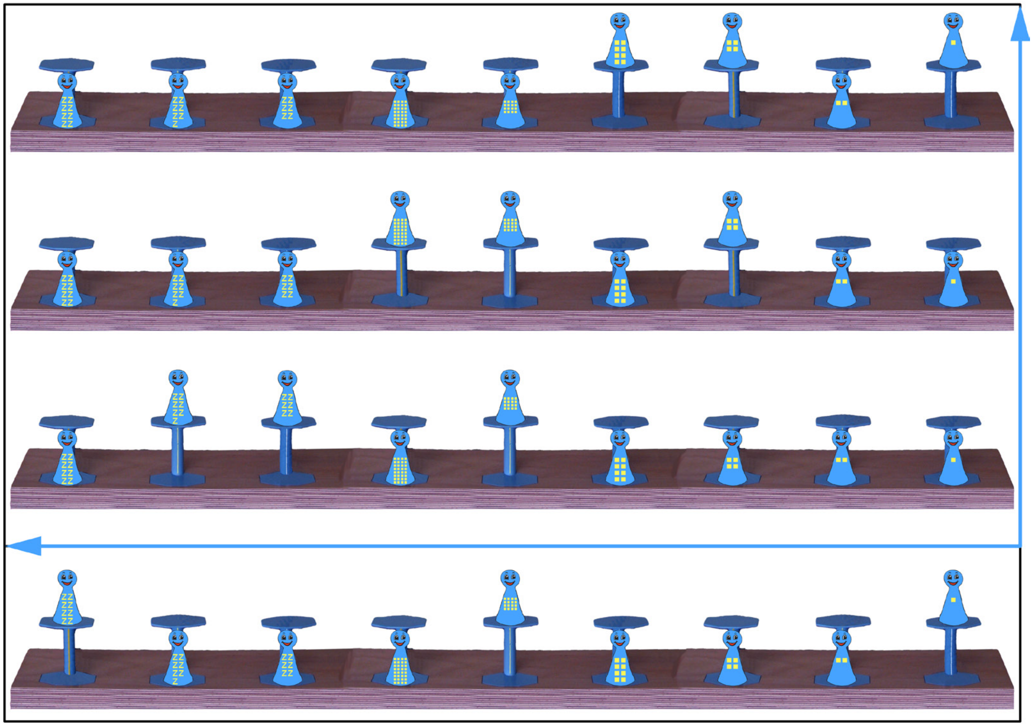


Abbildung 12.19
Wie hoch ist das Gesamtguthaben an Sterntalern?
Die Verwaltung dreier einzelner Guthaben wird zur Ermittlung zusammengeführt und liefert mit der unteren Stellaner-Konstellation das Ergebnis.
Das Gesamtguthaben beträgt:
$1 \cdot 256 + 0 \cdot 128 + 0 \cdot 64 + 0 \cdot 32 + 1 \cdot 16 + 0 \cdot 8 + 0 \cdot 4 + 0 \cdot 2 + 1 \cdot 1$ Sterntaler;
und damit kurz in Binärschrift: 100010001.

festen Reihenfolge von rechts nach links vorzugehen und dabei die darüber gegebenen Positionen von unten nach oben zu verarbeiten.

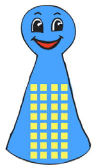
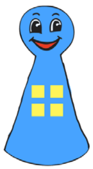
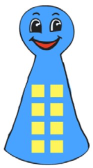
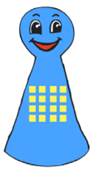
Weiteres Experimentieren mit anderen Vorgehensweisen macht Spaß und ist lernförderlich. Zum Beispiel könnte man sich fragen, warum im Ergebnis der ganz linke Stellaner überhaupt zum Einsatz kommt oder weshalb hierbei sechs Stellaner ganz unten stehen. Haben sie nichts zu tun? In Abbildung 12.20 ist eine mögliche Vorgehensweise zur Erzeugung des Ergebnisses vorgeführt. In Abbildung 12.21 erfolgt eine verkürzte Darstellung aus einer Außenperspektive heraus.

Wichtig ist, die Prozesssicht einzunehmen: Die Stellaner, die an der Verbuchung beteiligt sind, hüpfen um eins nach oben oder unten – allerdings nur dann, wenn sie dran sind und es für sie tatsächlich etwas zu tun gibt.

Ein großer Fehler besteht darin, den Lernenden nicht genügend Zeit zu lassen, um sich mit dem Prozess dieser schrittweisen Verbuchung vertraut zu machen. Was für Erwachsene umständlich erscheinen mag, ist im Lernprozess unverzichtbar. Nur ein tiefes Verständnis der Funktionsweise eines Stellenwertsystems hilft, grundlegende Fehler zu vermeiden – etwa die Stellenwertgröße nicht mitzudenken oder notwendiges stellenübergreifendes Handeln zu missachten.

Wird eine Zahl daraufhin untersucht, ob sie gerade oder ungerade ist, also beim Teilen durch zwei den Rest null oder eins ergibt, lässt sich dies in ihrer Darstellung im Binärsystem besonders leicht ablesen: Steht an der Stelle ganz rechts 0, so ist die Zahl gerade, steht dort 1, so ist die Zahl ungerade. Wird eine Zahl halbiert, also durch zwei geteilt, bedeutet das hinsichtlich ihrer Darstellung im Binärsystem, dass die Einträge aus allen Stellen um eine Stelle nach rechts rücken und

Abbildung 12.20
Aktion für Aktion: Eine Vorgehensweise der Stellaner zur Ermittlung ihres Gesamtguthabens aus Abb. 12.19: Vom 1er-Stellaner bis zum 256er-Stellaner, also von rechts nach links – und in einer Zusammenführung der Teilverbuchungen von unten nach oben.

 Sieht einen 1er-Stellaner in Position null → bleibt stehen. Sieht einen weiteren 1er-Stellaner in Position null → bleibt stehen. Sieht einen 1er-Stellaner in Position eins ⟶ hüpft eins nach oben.	 REAGIERT auf den Schubser seines 32er-Nachbarn → hüpft nach oben. Sieht einen 32er-Stellaner in Position null → bleibt stehen. Sieht einen 32er-Stellaner in Position eins → hüpft nach unten UND schubst seinen 64er-Nachbarn. Sieht einen weiteren 32er-Stellaner in Position null → bleibt stehen.
 Sieht einen 2er-Stellaner in Position null → bleibt stehen. Sieht einen weiteren 2er-Stellaner in Position null → bleibt stehen. Sieht noch einen 2er-Stellaner in Position null → bleibt stehen.	 REAGIERT auf den Schubser seines 32er-Nachbarn → hüpft nach oben. Sieht einen 64er-Stellaner in Position eins → hüpft nach unten UND schubst seinen 128er-Nachbarn. Sieht einen 32er-Stellaner in Position null → bleibt stehen. Sieht einen weiteren 32er-Stellaner in Position null → bleibt stehen.
 Sieht einen 4er-Stellaner in Position null → bleibt stehen. Sieht einen 4er-Stellaner in Position eins → hüpft nach oben. Sieht noch einen 4er-Stellaner in Position eins → hüpft nach unten UND schubst seinen 8er-Nachbarn.	 REAGIERT auf den Schubser seines 64er-Nachbarn → hüpft nach oben. Sieht einen 128er-Stellaner in Position eins → hüpft nach unten UND schubst seinen 256er-Nachbarn. Sieht einen 128er-Stellaner in Position null → bleibt stehen. Sieht einen weiteren 128er-Stellaner in Position null → bleibt stehen.
 REAGIERT auf den Schubser seines 4er-Nachbarn → hüpft nach oben. Sieht einen 8er-Stellaner in Position null → bleibt stehen. Sieht einen weiteren 8er-Stellaner in Position null → bleibt stehen. Sieht zudem einen 8er-Stellaner in Position eins → hüpft nach unten UND schubst seinen 16er-Nachbarn.	 REAGIERT auf den Schubser seines 128er-Nachbarn → hüpft nach oben. Sieht einen 256er-Stellaner in Position null → bleibt stehen. Sieht einen weiteren 256er-Stellaner in Position null → bleibt stehen. Sieht noch einen 256er-Stellaner in Position null → bleibt stehen.
 REAGIERT auf den Schubser seines 8er-Nachbarn → hüpft nach oben. Sieht einen 16er-Stellaner in Position eins → hüpft nach unten UND schubst seinen 32er-Nachbarn. Sieht einen weiteren 16er-Stellaner in Position eins → hüpft nach oben.	Weitere Leitern und zugehörige Stellaner werden nicht benötigt.

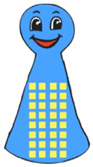
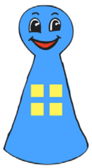
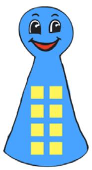
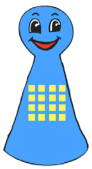
 Übernimmt einfach die Position aus der ersten Reihe.	 Mit der Übergabe seines rechten Nachbarn ist er bereits auf seine obere Position gehüpft. Er sieht eine weitere zweiunddreißig. Dies ergibt vierundsechzig. Dafür ist sein linker Nachbar zuständig. Er übergibt und hüpft wieder auf Position null.
 Hat nicht zu tun.	 Mit der Übergabe seines rechten Nachbars ist er bereits auf seine obere Position gehüpft. Er sieht eine weitere vierundsechzig. Dies ergibt einhunderachtundzwanzig. Dafür ist sein linker Nachbar zuständig. Er übergibt und hüpft wieder auf Position null.
 Sieht zwei Vierer, zusammen acht. Dafür ist sein linker Nachbar zuständig. Er übergibt und kann selbst auf Position null bleiben.	 Mit der Übergabe seines rechten Nachbarn ist er bereits auf seine obere Position gehüpft. Er sieht eine weitere einhundertachtundzwanzig. Dies ergibt zweihundertsechsundfünzig. Dafür ist sein linker Nachbar zuständig. Er übergibt und hüpft wieder auf Position null.
 Mit der Übergabe seines rechten Nachbarn ist er bereits auf seine obere Position gehüpft. Er sieht eine weitere acht. Dies ergibt sechzehn. Dafür ist sein linker Nachbar zuständig. Er übergibt und hüpft wieder auf Position null.	 Mit der Übergabe seines rechten Nachbars ist er bereits auf seine obere Position gehüpft. Mehr gibt es für ihn nicht zu tun.
 Mit der Übergabe seines rechten Nachbarn ist er bereits auf seine obere Position gehüpft. Er sieht zwei weitere Sechzehner, also zweiundreißig. Dafür ist sein linker Nachbar zuständig. Er übergibt und kann selbst auf seiner oberen Position bleiben.	Weitere Leitern und zugehörige Stellaner werden nicht benötigt.

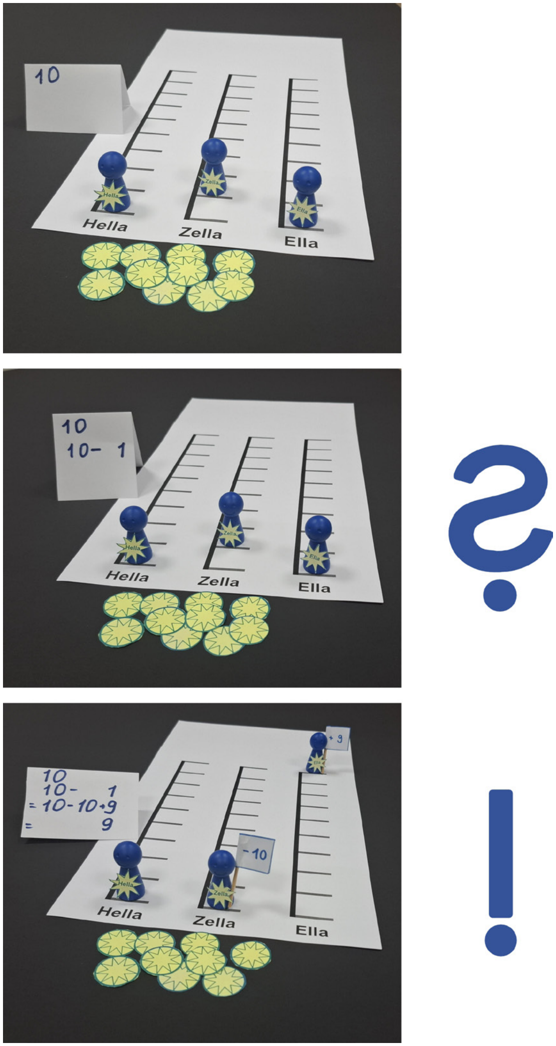
Abbildung 12.21
Verdichtete Sichtweise von außen zur Ermittlung des Gesamtguthabens aus Abb. 12.19: Die unteren Positionen können bei den Verbuchungen der Teilguthaben außer Acht gelassen werden. Bei den oberen Positionen gilt die besondere Aufmerksamkeit der Frage, ob im Ergebnis ein Schubser des jeweils linken Nachbarn zustande kommt, sodass hier mit zwei Stellanern stellenübergreifend zu handeln ist.

die Stelle ganz rechts dabei entfällt, wenn es nicht auf den Rest ankommt bzw. zusätzlich der Rest mit 0 oder 1 notiert. Wichtig ist, dass wie weiter oben betont, die Lernenden zunächst ein Verständnis in aller Ausführlichkeit mit der Verkörperung von Zahlenräumen in unterschiedlichen Leitersystemen erwerben, den Sinn sprichwörtlich im Handeln begreifen, um dann mit den für sich genommen sinnleeren Symbolen sinnhaft umgehen zu können.

Es ist einfach, Spielpläne für die Stellaner zu erstellen und an die Lernenden zur individuellen Arbeit zu verteilen. Ein Beispiel zeigt Abbildung 12.22. Die einzelnen Leitern werden in der gewünschten Höhe durch Zahlenstrahle dargestellt, das wichtige handelnde Erkunden erfolgt anhand von Spielfiguren, die passend zu Rahmengeschichten gestaltet werden können.

Die hier vorgestellte Verwendung von Leitersystemen zur Erarbeitung und Behandlung von Zahlen in Stellenwertschreibweise befindet sich in guter Tradition des Ansatzes „Kernidee Zähler“

Abbildung 12.22
Die Leitersysteme sind leicht auf Papier darstellbar und können mit Figuren bespielt werden.



von Peter Gallin, der gemeinsam mit seinem Kollegen Urs Ruf mit dem Konzept „Dialogisches Lernen“ sehr bekannt geworden ist. Bei den Leitersystemen der Stellaner handelt es sich faktisch um eine enaktive, sprich handlungsbasierte Umsetzung des Zählerkonzepts. Zur Abgrenzung und Einordnung zu anderen Ansätzen der Behandlung des Stellenwertsystems wie etwa den Multibasen siehe beispielsweise [GAL2012] oder [HEF2023].

D. Äthiopische Multiplikation

Fachlicher Inhalt: Zahlen als Summen von Zweierpotenzen, Anwendung Binärsystem, historischer, eleganter Multiplikations-Algorithmus.

Zwei Zahlen miteinander zu multiplizieren, ist nicht einfach. Im informatischen Kontext ist lehrreich, sich über das bekannte schriftliche Multiplikationsverfahren hinaus eingehender mit der Äthiopischen Multiplikation zu beschäftigen [GAL2021, S. 123-127], vgl. z. B. [SCH2000, S. 20]. Zum einen handelt es sich um einen Algorithmus, der allein aus historischer Sicht Interesse weckt, zum anderen zeigt sich ein bemerkenswerter Zusammenhang zum Binärsystem, sodass hierfür ein guter Anwendungsfall vorliegt. Die Stoffdidaktik der Informatik mit Fokus auf sonderpädagogische Förderaspekte kann davon profitieren. Wieder kann Verständnis mithilfe von Embodiment erreicht werden.

Grundsätzlich kann man ein paar Multiplikationsergebnisse auswendig wissen (z. B. das Kleine oder auch Große Einmaleins) oder aber man muss sich die Ergebnisse erzeugen. Ein Standard ist dabei, Zwischenschritte mit einfacheren Teilmultiplikationen zu nutzen, deren Produkte schließlich addiert werden. So könnte man z. B. $625 \cdot 24$ rechnen als

$(500 + 125) \cdot 24 = (500 \cdot 24) + (125 \cdot 24)$

$= [(500 \cdot 20) + (500 \cdot 4)]+[(125 \cdot 20) + (125 \cdot 4)]$

$= 10.000 + 2.000 + 2500 + 500$

$= 15.000$

und auf viele andere Weisen der Aufteilung sowohl von 625 als auch von 24.

Um eine Zahl z mit einer anderen einfach zu multiplizieren, sprich als Ergebnis das Produkt der beiden Zahlen zu erhalten, kann man sich tatsächlich auch der Zerlegung von z in Zweierpotenzen bedienen. Wie beim Erforschen der Stellenwertsysteme mit unterschiedlich hohen Leitern – intuitiv, ohne formalen Beweis – ergründet worden ist, gilt: In der Welt der Stellaner kann jede beliebige Zahl in jedem ihrer Leitersysteme, bestehend aus genügend vielen gleich hohen Leitern, verkörpert werden – darunter auch ausschließlich solchen Leitern mit lediglich zwei Sprossen.

Eine systematische Verkörperung von Zahlen ist auf vielfältige Weise möglich. Schwerpunkt des vorliegenden Beitrags ist die Annäherung und vertiefte Auseinandersetzung mit der Stellenwertsystem-Idee. Auch wenn das Verdoppeln und Halbieren einer Zahl im Binärsystem äußerst einfach ist, soll gleichwohl noch eine weitere Darstellungsform genutzt werden. Damit wird alternativ ermöglicht, das Verfahren der Äthiopischen Multiplikation zu verstehen, ohne zuvor das Binärsystem eingeführt zu haben. So eröffnen sich zwei Wege: Zunächst wird in die Stellenwertsystem-Idee einschließlich ihrer Konkretisierung als Binärsystem eingeführt, worauf aufbauend die Äthiopische Multiplikation erarbeitet wird – bzw. umgekehrt zunächst die Äthiopische Multiplikation eingeführt, um anschließend die universelle Zerlegungsmöglichkeit einer beliebigen Zahl in die Summe von Zweierpotenzen sowie die grundlegende Stellenwertsystem-Idee näher zu erkunden.

Zweierpotenzen hängen eng mit dem Halbieren und Verdoppeln und damit auch der Eigenschaft einer Zahl, entweder gerade oder ungerade zu sein, zusammen. In den Abbildungen 12.23 und 12.24 ist für den geraden Anteil einer Zahl ein Kästchen vorgesehen, daneben ein grau gefärbter Kreis, der orange eingefärbt wird, falls ein Überschuss um Eins vorliegt, sprich eine ungerade Zahl vorliegt.

Wie in Abbildung 12.23 vorgeführt, genügt es, um die Zerlegung einer Zahl z als Summe von Zweierpotenzen zu ermitteln, einen iterativen Prozess des Halbierens der jeweils geraden Anteile von Zahlen durchzuführen und dabei zu den überschüssigen Einser-Anteilen mit den orange eingefärbten Kreisen Buch zu führen.

Durch das so vorgenommene fortgesetzte Halbieren erfolgt eine Zerlegung in zwei, dann vier, dann acht, usw. Summanden – dies tatsächlich solange bis mit orangen Kreisen ausschließlich Einser-Teile vorliegen und der Prozess des Halbierens stoppt. Zusätzlich zu den in der abschließenden Reihe erzeugten Einser-Teilen können weitere Einser-Teile im Verlauf des Prozesses entstanden sein, die ebenfalls additive Bestandteile der Ausgangszahl sind: Zunächst ein oranger Kreis, falls die Ausgangszahl ungerade ist, dann weitere in den Fällen, dass als Zwischenergebnis eine ungerade Zahl erreicht wird. Bemerkenswert ist, dass die Anzahl der neu hinzu kommenden orangen Kreise immer einer Zweierpotenz entspricht, da sie in Kombination mit den sich zeilenweise verdoppelnden Summanden-Kästchen entstehen.

Schlussendlich ist eine strukturierte Zerlegung von z in orange Kreise erreicht, deren zeilenweise Anzahl – von oben nach unten – aufsteigenden Zweierpotenzen entspricht.

Nur wenn die Ausgangszahl selbst eine Zweierpotenz ist, geht jeder Halbierungsschritt glatt auf, wobei die im Halbierungsprozess zuletzt erreichte Reihe anzeigt, um welche es sich handelt. Mit der Zeit sind die kleineren Zweierpotenzen und deren Umrechnung bekannt, so dass auf den Halbierungsprozess verzichtet werden kann.

Die Ergebnisse zu den Zweierpotenzen in der ersten und der letzten Reihe lassen sich mit recht wenigen Kenntnissen direkt im Voraus erschließen:

- Mit der Ausgangszahl ist unmittelbar klar, ob 1 als Summand in der gesuchten Zweierpotenz-Zerlegung vorkommt: Ist die Ausgangszahl ungerade, dann ja, ansonsten nicht.
- Vorab erschließbar ist auch, welche Anzahl an orangen Kreisen in der letzten Reihe im Prozess erzeugt wird. Sie entspricht der größten Zweierpotenz, die unterhalb der Ausgangszahl liegt.

Hilfreich ist, im Unterricht mit Schablonen für dieses Zerlegungsverfahren zu arbeiten (Abb. 12.24 links oben). Zunehmend wird Allgemeingültiges thematisiert und dabei Grundlagen für das Verständnis des Variablenkonzepts sowie damit einhergehenden Operationen gelegt.

Bezüglich der Verschriftlichung im Binärsystem können die Lernen sich folgendes erschließen:

- Die Stelle ganz rechts in der binären Darstellung (gerade/ungerade) ist unmittelbar ersichtlich.

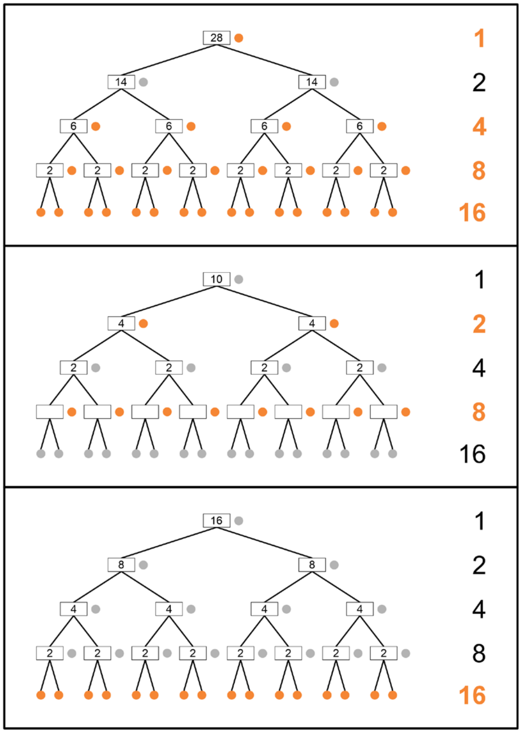


Abbildung 12.23
Beginnend mit einer Zahl wird der iterative Prozess des Halbierens des jeweiligen geraden Zahl-Anteils gestartet. Dieser wird solange durchgeführt, bis schließlich nichts zum weiteren Halbieren übrigbleibt, da nur noch Einer-Kreise vorliegen. Durch die Kombination aus Kästchen und einem optional orange eingefärbten Kreis ist eine Darstellung für die additive Zusammensetzung einer Zahl aus ihrem geraden Anteil und möglicherweise eines zusätzlichen Einser-Anteils geben. Aufgrund des durchgängigen Halbierens verdoppeln sich die Kreise zeilenweise und die Anzahl der orange eingfärbten entspricht von oben nach unten den aufsteigenden Zweierpotenzen.
Oben: 29 ergibt sich zu 16 plus 8 plus 4 plus 1 orangen Kreisen; also $29 = 16 + 8 + 4 + 1 = 2^4 + 2^3 + 2^2 + 2^0$.
Mitte: 10 ergibt sich zu 8 plus 2 orangen Kreisen; also $10 = 8 + 2 = 2^3 + 2^1$
Unten: 16 ergibt sich zu 16 orangen Kreisen; also $16 = 2^4$

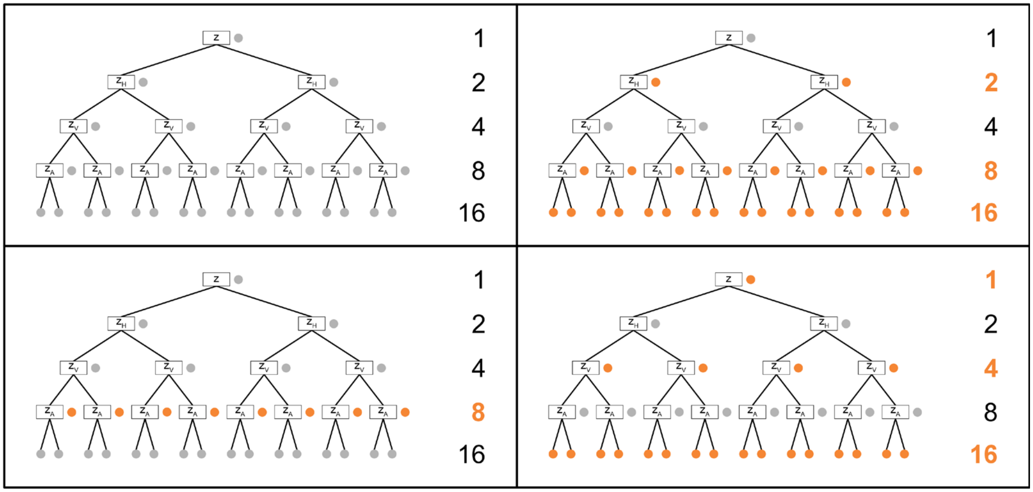


Abbildung 12.24
Ist eine Zerlegung durch fortwährendes Halbieren gegeben, kann auf die Ausgangszahl geschlossen werden. Links oben: Schablone für Ausgangszahlen z von 0 bis 31. Sie kann genutzt werden, indem für z eine Zahl eingesetzt wird, dann fortwährend halbiert wird, mit Markierung des ungeraden Anteils an orangen Kreisen, die im Weiteren aus der Halbierung herausfallen. Diese Struktur ist beliebig fortsetzbar. Links unten / rechts: Die Schablone kann auch ‚ausgemalt' genutzt werden. Zu ermitteln ist dann, welche Zahl z vorliegt:
Fall rechts oben: z = 16 + 8 + 2, also z = 26 bzw. in der gewünschten binären Darstellung z = 11010.
Fall rechts unten: z = 16 + 4+ 1, also z = 21 bzw. in der gewünschten binären Darstellung z = 10101. Eine Überprüfung ist Selbstverständlichkeit und erhöht das Verständnis wie auch das leichte Verändern der Ausgangszahl und das Verfolgung der Auswirkungen.

- Die Stelle ganz links (höchste Zweierpotenz, damit auch Hinweis auf die Stellenzahl) ist insofern ersichtlich als eine Zahl immer zwischen zwei unmittelbaren Zweierpotenzen-Nachbarn liegt und ausgehend von der kleineren der beiden additiv aufgebaut wird – bzw. sie in seltenen Fällen selbst direkt einer Zweierpotenz entspricht. Beispielsweise liegen 26 wie auch 21 zwischen 16 und 32, kommen also mit $16=2^4$ und damit von 2^0 bis 2^4 mit 5 Stellen in binärer Zahlschrift aus.

Die Zerlegung einer Zahl in die Summe von Zweierpotenzen erweist sich als nützlich für ein einfaches Multiplikationsverfahren, das anstelle aufwändiger Multiplikationsreihen lediglich Verdoppeln und Halbieren benötigt. Im Sinne der oben gewählten Berechnung von 625 • 24 ist eine Berechnung des Produkts z. B. für 21 · 13 mit 21= 16 + 4 +1 wie folgt möglich:

$21 \cdot 13 = (24 + 22 + 20) \cdot 13 = 24 \cdot 13 + 23 \cdot 13 + 20 \cdot 13.$

Man beachte wieder die Schreibweise für 1 als 20 – wieder ein Beispiel einer nützlichen symbolisch-formalen Vereinheitlichung. Legt man die vollständige Zerlegung in Zweierpotenzen zugrunde – so wie sie in der binären Stellenschreibweise in verkürzter Form verwendet wird – ergibt sich:

$21 \cdot 13 = (1 \cdot 16 + 0 \cdot 8 + 1 \cdot 4 + 0 \cdot 2 + 1 \cdot 1) \cdot 13$

$21 \cdot 13 = (1 \cdot 2^4 + 0 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0) \cdot 13$

$21 \cdot 13 = (1 \cdot 2^4 \cdot 13) + (0 \cdot 2^3 \cdot 13) + (1 \cdot 2^2 \cdot 13) + (0 \cdot 2^1 \cdot 13) + (1 \cdot 2^0 \cdot 13).$

$21 \cdot 13 = (16 \cdot 13) + (4 \cdot 13) + (1 \cdot 13)$

$21 \cdot 13 = 208 + 52 + 13$

$21 \cdot 13 = 273$

Es fällt auf, dass 13 immer mit Zweierpotenzen multipliziert wird, wobei in der vollständigen Notation (mittlere Zeile) ersichtlich wird, dass sinnvollerweise alle Zweierpotenzen, von der kleinsten (2^0) bis zur größten benötigten, notiert werden. Von einer zur nächsten findet jeweils eine Verdopplung statt, von einer Zweierpotenz zur nächsten zu gelangen bedeutet ja nichts weiter als sie mal zwei zu nehmen.

Ein einfacher Weg, die erforderlichen Zweierpotenz-Vielfachen von 13 zu erhalten besteht nun in Folgendem:

Ausgehend von 13 wird das jeweils aktuelle Zwischenergebnis so oft verdoppelt, bis das höchste der benötigten Zweierpotenz-Vielfachen von 13 erreicht ist – hier $24 \cdot 13 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 13 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 26 = 2 \cdot 2 \cdot 52 = 2 \cdot 104 = 208$. Von diesen Teilergebnissen werden dann nur die in der Summe benötigten Teilergebnisse aufaddiert, die anderen werden außer Acht gelassen – sie dienen lediglich als Hilfsmittel beim fortwährenden Verdoppeln. Zum erhaltenen Ergebnis ist noch $1 \cdot 13$ zu addieren, da sich bei der Zahl 21 als ungeradem Multiplikationsfaktor auch ein Eintrag bei $2^0=1$ ergibt.

Wichtig sind allerdings alle Teilergebnisse sowie der Fall 2^0 als wichtige Information für die in der binären Zahlschrift notwendigen Ziffern 0 und 1, die in die Zahldarstellung mit dem 0-fachen bzw. 1-fachem einer Zweierpotenz eingehen – im vorliegenden Beispiel gilt: 21=16+4+1 [dezimal] entspricht 10101 [binär].

Eine solche Vorgehensweise zur Multiplikation zweier Zahlen ist bereits seit dem Altertum in verschiedenen Hochkulturen belegt, etwa in Ägypten, Indien und China. Moderne Formen formal-symbolischer Notation, wie hier angewendet, werden dafür tatsächlich nicht benötigt. Gelehrte oder gebildete Handeltreibende bedienten sich vom Prinzip her einer schlauen Auflistung. oder tabellarischen Darstellung der Berechnung. Letztere wird hier übernommen, ist aber in moderner Zahlschrift ausgefüllt (Abb. 12.25). Die Zahl in der linken Spalte wird fortwährend halbiert und zwar mit Kennzeichnung im Fall einer ungeraden Zahl. Die Zahl in der rechten

21	13
20 + 1	13
10	26
4 + 1	52
2	104
1	208
	273

16	8	4	2	1	256	128	64	32	16	8	4	2	1
I	0	I	0	I						I	I	0	I
	I	0	I	0					I	I	0	I	0
		I	0	I				I	I	0	I	0	0
			I	0			I	I	0	I	0	0	0
				I		I	I	0	I	0	0	0	0
					I	0	0	0	I	0	0	0	I

Abbildung 12.25
Äthiopische Multiplikation: Multiplizieren zweier Zahlen, indem bestimmte Verdopplungsergebnisse aufaddiert werden. Welche, ergibt sich aus der jeweils linken Zahl in der Tabelle. Einer Halbierung entspricht eine Verdopplung der Partnerzahl in der jeweiligen rechten Spalte. Im Falle ungerader Zahlen, wird der Überschuss festgehalten und ist am Ende in der Aufsummierung mit zu berücksichtigen (vgl. Abb. 12.23, 12.24).
Hinter der Aufsummierung von Verdopplunsgsergebnissen aus bestimmten Zeilen verbirgt sich eine Umformungsabfolge:
21·13=(20+1)·13
[Damit Halbierung von 21 möglich wird, wird 1 ‚ausgesondert']
21·13=10·(2·13)+1·13
[Halbierung von 10 klappt direkt]
21·13=(4+1) · (2·2·13)+1·13
[Damit Halbierung von 5 möglich wird, wird 1 ‚ausgesondert']
21·13=2·(2·2·2·13)+1·2·2·13+1·13
[Halbierung von 2 klappt direkt.]
21·13=1·(2·2·2·2·13)+1·2·2·13+1·13
[Eine weitere Halbierung ist nicht möglich]
Insgesamt ergibt sich:
21·13
=[1·2·2·2·2·13]+[1·2·2·13]+[1·13]
bzw.
21·13=[1·2·2·2·2·13]+[0·2·2·2·13]
+[1·2·2·13]+[0·2·13]+[1·13]

Spalte wird fortwährend verdoppelt, wohl wissend, dass womöglich nicht alle Zwischenergebnisse benötigt werden. Tatsächlich werden nur in den seltenen Fällen der ‚echten' Vorkommnisse aller Zweierpotenzen (keine ‚0-Fälle') auch alle Zeilen benötigt. Dies ist z. B. bei der Multiplikation mit fünfzehn der Fall: 15=8+4+2+1 [dezimal] entspricht 1111 [binär], wie auch bei allen weiteren Zahlen, die um eins geringer ausfallen als eine Zweierpotenz.

Unnötige Zeilen, in denen Fälle verbucht sind, in denen die Halbierung glatt vollzogen werden kann, werden gestrichen, bzw. die notwendigen Zeilen extra markiert (Abb. 12.25: in orange).

Besonders einfach wird die Rechnung im Binärsystem (Abb. 12.25 rechts). Bereits im vorhergehenden Abschnitt ist die Besonderheit des Teilens oder Vervielfachens mit zwei erkundet worden. Beim Halbieren entfällt die letzte Stelle, beim Verdoppeln verschieben sich die Ziffern um eine Stelle nach links und rechts kommt das Zeichen 0 dazu.

Wie Abbildung 12.25 zu entnehmen ist, wird die letzte Zeile in einer solchen Tabelle (höchste in der Zahl enthaltene Zweierpotenz) immer benötigt, die erste Zeile nur, falls die Zahl nicht mit Rest 0 (gerade), sondern mit Rest 1 (ungerade) durch zwei teilbar ist (vgl. auch Abb. 12.23, 12.24). Die Art und Weise, sich in der Tabelle zurecht zu finden, überzeugt. Der Dokumentationsaufwand ist vergleichsweise gering, das Verfahren im Allgemeinen effizient.

Lernende mit sonderpädagogischen Förderbedarfen können in besonderer Weise von der Beschäftigung mit der Äthiopischen Multiplikation profitieren, erlaubt sie doch mithilfe der einfachen Grundoperationen des Halbierens, Verdoppelns und Addierens tief in die Funktionsweise eines Algorithmus' einzutauchen. Diese klaren, zeilenweisen Transformationen fördern genau jene Denkprozesse, die für diese Lernenden oft besonders hilfreich sind: Schrittfolge verstehen, Regelhaftigkeiten erkennen und funktionale Abhängigkeiten nachvollziehen. Die klare Übersicht und die reduzierte Informationsmenge pro Schritt machen den Berechnungsvorgang transparent und kontrollierbar, was die Selbstwirksamkeit der Lernenden stärkt. Voraussetzung ist natürlich, dass die Funktionsweise des Binärsystems bzw. die Zerlegung von Zahlen als Summe von Zweierpotenzen (vgl. Abb. 12.23, 12.24) zuvor tatsächlich verstanden worden ist.

E. Funktional-logisches versus prädikativ-logisches Denken

Weltweit bekannt geworden sind die Matrizenaufgaben von Spearman, die als Raven-Tests [RAV1965] eingesetzt werden. Unser Interesse gilt der Förderung und Entwicklung jener Kognition, die Aktionen erfassen und zu einem Prozess zusammenführen kann. Während sich die Original-Raven-Aufgaben erfolgreich lösen lassen, indem entweder visuell mit den vorhandenen Lösungsvorschlägen abgeglichen oder in Strukturen und Kategorien gedacht wird, arbeiten wir daher gezielt mit Aufgabenvarianten, die sich unterschiedlich leicht erfassen lassen – je nachdem, ob eine Präferenz bzw. Fähigkeit zum prädikativ-logischen Denken [P-LD] oder zum funktional-logischen Denken [F-LD] gegeben ist. P-LD orientiert sich an statischen Eigenschaften und Strukturen, während sich F-LD an dynamischen Aktionen orientiert, die zu Prozessen verschaltet werden. Beim P-LD bilden Invarianten und Ähnlichkeiten die Grundlage, beim F-LD Unterschiede und Werkzeuge. Eine erste Idee vermittelt die Abbildung 12.26.

Anhand einer weiteren Matrix (Abb. 27) seien die beiden Analyseformen im Einzelnen erläutert

Prädikativ-logisches Schließen: In den Ecken befinden sich Flächen: links die kleinen, rechts die großen. Zeilenweise ist das Farbmuster wie folgt: in der oberen Reihe weiß-grau, in der unteren grau-weiß. Die Pfeile gehören zwar zueinander, spielen für die Lösungsfigur jedoch keine Rolle. Aus dieser Analyse ergibt sich als Lösungsfigur die große Figur oben rechts mit der Einfärbung grau-weiß.

Funktional-logisches Schließen: Die jeweils mittleren Objekte in den Zeilen und Spalten fungieren als Werkzeuge. In der obersten Zeile wird mit dem Pfeil die linke Figur zur rechten Figur vergrößert. In der mittleren Zeile wird mit dem Drehkreuz der linke Doppelpfeil in die Position der rechten Figur gedreht. In der ersten Spalte passiert ein Farbwechsel, in der mittleren Spalte wieder eine Drehung. Die beiden übrigen Pfeile sind Werkzeug-Verkettungen: in der untersten Zeile wird die linke Figur zunächst vergrößert, dann gedreht. In der letzten Spalte wird die obere Figur zuerst gedreht, dann erfolgt ein Farbwechsel. Aus dieser Analyse ergibt sich als Lösungsfigur ein auf der Spitze stehendes Quadrat (Karo), halbiert durch die von links unten nach rechts oben verlaufende Mittellinie, wobei die Fläche oberhalb dieser Linie grau und die darunterliegende Fläche weiß eingefärbt ist.

Wie der in diesem Kapitel dargestellte Weg vom ZARAO-null-bis-vier über den ZARAO-null-bis-neun, die Rechenwendeltreppe und das Buchführungssystem der Stellaner mit ihren unterschiedlichen Leitersystemen zeigt, ist ein kognitives Einlassen auf die dynamischen Gegebenheiten des Zahlenraums sowie ein Zurechtfinden in ihnen außerordentlich hilfreich. Analysen zu Problembearbeitungen der jährlichen Mathematik-Olympiade für Drittklässlerinnen und Drittklässler weisen sehr deutlich darauf hin, dass insbesondere in der Arithmetik funktional-logisches Denken zu äußerst erfolgreichen Herangehensweisen führen kann [SCH2020]. Embodiment von Zahlräumen und von Umgangsweisen mit Zahlen kommt eine Schlüsselfunktion zu insofern hier Handlungen im Vordergrund stehen.

In der philosophisch-logischen Entwicklung der Mathematik gibt es viele Hinweise darauf, dass die dynamische Produktionssicht auf Zahlen eine zentrale und für das Verständnis unverzichtbare Rolle spielt, darunter von Persönlichkeiten wie Leibniz, Frege und Dedekind. Zitiert seien hier zwei Bemerkungen aus Freges Schrift „Die Grundlagen der Arithmetik. Eine logisch mathematische Untersuchung über den Begriff der Zahl“ [FRE1884, S. IV bzw. S. 8]:

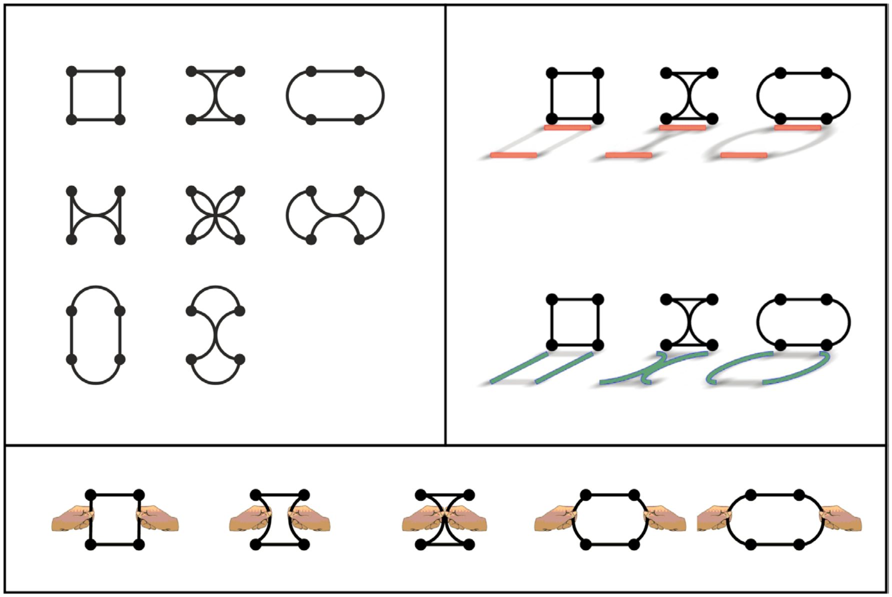


Abbildung 12.26
In der abgebildeten Matrix [SCH2000, S. 1] fehlt unten rechts eine Figur? Welche könnte es sein? Sie soll sich gut ins Gesamtbild einfügen. Eine Fokussierung auf Invarianten (rote gefärbte Seiten) oder Unterschiede (grün gefärbte Seiten) ist möglich. Die Matrix ist als statisches Bild gegeben, mental können dynamisch Handlungen erfolgen, die Abfolgen an Figuren zeilen- wie auch spaltenweise erzeugen.

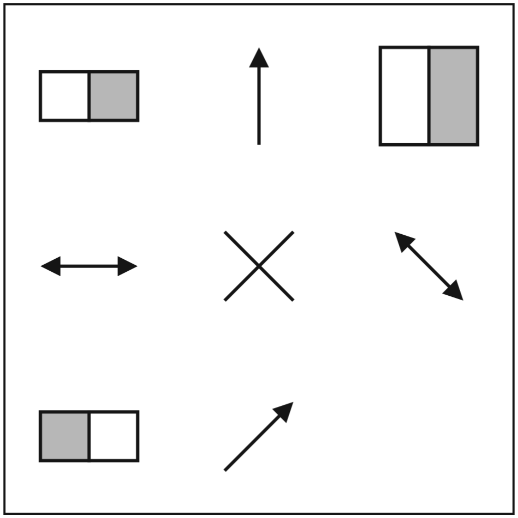


Abbildung 12.27
Eine weitere, etwas komplizierter zu bedenkende Konstellation liegt hier vor [SCH2000, S. 20]. Eine einfache prädikativ-logische Analyse könnte zu einer Lösungsfigur führen, die der flächigen, großen Figur oben rechts entspricht mit der Farbverteilung der flächigen kleinen Figur unten links. Wie könnte funktional-logisch argumentiert werden und welche Lösungsfigur könnte sich ergeben?

„Man kann freilich die Zahlzeichen mechanisch gebrauchen, wie man papageimässig sprechen kann; aber Denken möchte das doch kaum zu nennen sein."

„Es ist dann jede Zahl aus der vorhergehenden zu definiren. In der That sehe ich nicht, wie uns etwa die Zahl 437986 angemessener gegeben werden könnte als in der leibnizischen Weise. Wir bekommen sie so, auch ohne eine Vorstellung von ihr zu haben, doch in unsere Gewalt."

Eine Zahl verstehen die Lernenden, indem sie begreifen, wie sie diese konstruieren und damit deren Erreichbarkeit fokussieren, womit ihnen die Grundlagen der Arithmetik gelegt werden [SCH2013]. Dieser Ansatz ist insbesondere in sonderpädagogisch geprägten Fördersituationen noch weitaus stärker zu berücksichtigen – erst recht, wenn informatische Bildung für diese Lernenden ernst genommen wird. Sie müssen Zugang zu Denkweisen erhalten, die Regelhaftigkeit, Sequenzen, Zustandsveränderungen und algorithmische Schritte verständlich machen. Die dynamische Produktionssicht auf Zahlen bietet dafür eine ideale Brücke, weil sie dieselben kognitiven Grundoperationen nutzt wie algorithmisches Denken: schrittweises Konstruieren, explizite Zustandsfolgen und funktionale Abhängigkeiten. Sie stärkt somit genau jenes kognitives Zurechtfinden, das später für das Programmieren und informatische Problemlösungen zentral ist. Lernende mit sonderpädagogischem Förderbedarf dürfen hiervon nicht ausgeschlossen werden, vielmehr ist es Aufgabe einer inklusiven Bildungslandschaft ebenso wie ausgewiesener Förderschulen, ihnen den Zugang zu diesen grundlegenden mathematisch-informatischen Denkweisen nachhaltig zu eröffnen.

Literatur

[ABD2016] Dor Abrahamson & Raúl Sánchez-García „Learning is moving in new ways: The ecological dynamics of mathematics education". Journal of the Learning Sciences, 25(2), 203–239, 2016. https://doi.org/10.1080/10508406.2016.1143370

[BAR2008] Lawrence W. Barsalou „Grounded cognition". Annual Review of Psychology, 59, 617–645, 2008. https://doi.org/10.1146/annurev.psych.59.103006.093639

[BOO2011] Tony Booth & Mel Ainscow „The index for inclusion: Developing learning and participation in schools". CSIE, 2011.

[BRU1965] Jerome S. Bruner „Toward a theory of instruction". Harvard University Press, 1965.

[CAS2024] J. Juan C. Castro-Alonso, Paul Ayres, Shirong Zhang,·Björn B. de Koning, Fred Paas „Research Avenues Supporting Embodied Cognition in Learning and Instruction". Educational Psychology Review, 36, Nr. 10, 2024. https://doi.org/10.1007/s10648-024-09847-4

[DIM2023] Dimmel, Justin K. „Reduction and enactment with digital images: What can 0s and 1s represent?" Constructivist Foundations, 18(2), 206–209. Special issue Education in the 21st Century (Ronnie Videla, Tomas Veloz & Alexander Riegler, Eds.). 2023.

[FLO2014] Lani Florian „What counts as evidence of inclusive education?". European Journal of Special Needs Education, 29(3), 286–294, 2014. https://doi.org/10.1080/08856257.2014.933551

[GAL2021] Jens Gallenbacher „Abenteuer Informatik: IT zum Anfassen – vom Navi bis Social Media" (5. Auflage). Springer, 2021.

[GAL2012] Peter Gallin „Die Praxis des Dialogischen Mathematikunterrichts in der Grundschule". IPN, 2012.

[GME2014] Susan Goldin-Meadow „How gesture works to change our minds". Trends in Neuroscience and Education, 3(1), 4–6, 2014. https://doi.org/10.1016/j.tine.2014.01.002

[HEH2023] Lisa Hefendehl-Hebeker & Inge Schwank „Arithmetik: Leitidee Zahl". In Regina Bruder, Andreas Büchter, Hedwig Gasteiger, Barbara Schmidt-Thieme & Hans-Georg Weigand (Hrsg.), Handbuch der Mathematikdidaktik (S. 85–121). Springer Spektrum, 2023.

[GRO2013] Shuchi Grover & Roy Pea „Computational Thinking in K–12: A Review of the State of the Field". Educational Researcher, 42(1), 38–43, 2013. https://doi.org/10.3102/0013189X12463051

[HUB2015] Peter Hubwieser, Michail N. Giannakos, Marc Berges, Torsten Brinda, Ira Diethelm, Johannes Magenheim, Yogendra Pal, Jana Jackova & Egle Jasute „A global snapshot of computer science education in K–12 schools". ACM Transactions on Computing Education, ITICSE-WGR ‚15: Proceedings of the 2015 ITiCSE Working Group Reports, S. 65–83, 2015. https://doi.org/10.1145/2858796.2858799

[HUS1954] Edmund Husserl „Die Krisis der europäischen Wissenschaften und die transzendentale Phänomenologie". In Walter Biemel (Hrsg.), Sammlung Husserliana, Band VI. Martinus Nijhoff, 1954.

[KRE2010] Gunther Kress „Multimodality: A social semiotic approach to contemporary communication". Routledge, 2010.

[LAK2000] George Lakoff & Rafael E. Núñez „Where mathematics comes from: How the embodied mind brings mathematics into being". Basic Books, 2000.

[LYE2014] Sze Yee Lye & Joyce Hwee Ling Koh „Review on teaching and learning of computational thinking through programming: What is next for K-12?". Computers in Human Behavior, 41, 51–61, 2014. https://doi.org/10.1016/j.chb.2014.09.012

[NEM2009] Ricardo Nemirovsky & Francesca Ferrara „Mathematical imagination and embodied cognition". Educational Studies in Mathematics, 70(2), 159–174, 2009. https://doi.org/10.1007/s10649-008-9150-4

[RAV1965] John Carlyle Raven „Advanced Progressive Matrices. Sets I and II". Lewis, 1965.

[SCH2000] Inge Schwank „QuaDiPF – Qualitatives Diagnoseinstrument für prädikatives versus funktionales Denken". Forschungsinstitut für Mathematikdidaktik, 2000.

[Sch2013] Inge Schwank „Die Schwierigkeit des Dazu-Denkens". In Michael von Aster & Jens-Holger Lorenz (Hrsg.), Rechenstörungen bei Kindern. – Neurowissenschaft, Psychologie, Pädagogik. 93-138. 2. überarbeitete und erweiterte Auflage. Vandenhoeck & Ruprecht.

[SCH2015] Inge Schwank & Elisabeth Schwank „Development of mathematical concepts during early childhood across cultures". In James D. Wright (Ed.), International Encyclopedia of the Social and Behavioral Sciences (2. Aufl., S. 772–784). Elsevier, 2015.

[SCH2020] Inge Schwank „Herausfordernde Aufgaben – 13 Jahre Zwergen-Mathematik-Olympiade". In Lukas Baumanns, Janine Dick, Anna-Christin Söhling, Nina Sturm & Benjamin Rott (Hrsg.), Wat jitt dat, wenn et fädich es? Tagungsband der Herbsttagung des GDM-Arbeitskreises Problemlösen in Köln 2019 (S. 107–120). WTM, 2020.

[TAN2021] Sofia Tancredi, Rachel S.Y. Chen, Christina Krause, Dor Abrahamson & Filippo Gomez Paloma „Getting up to SpEED: Special Education Embodied Design for Sensorially Equitable Inclusion". Education Sciences & Society, 1, 114–136, 2021.

[UNE2023] UNESCO „Technology in education: A tool on whose terms? Global Education Monitoring Report". UNESCO, 2023. https://unesdoc.unesco.org/ark:/48223/pf0000385723