

Photo- und Elektropionproduktion in chiraler effektiver Feldtheorie

Dissertation
zur Erlangung des Grades
„Doktor der Naturwissenschaften“

am Fachbereich Physik, Mathematik und Informatik
der Johannes Gutenberg-Universität
in Mainz

Marius Hilt,
geboren in Neunkirchen (Saar)

Mainz, September 2011

Dekan:

1. Gutachter:

2. Gutachter:

Datum der mündlichen Prüfung: 13.12.2011

Zusammenfassung

In der vorliegenden Arbeit werden Photopionproduktion (PPP) und Elektropionproduktion (EPP) im Rahmen der manifest lorentzinvarianten baryonischen chiralen Störungstheorie untersucht. Dabei werden zwei verschiedene Ansätze verfolgt. Zum einen wird eine Rechnung auf Einschleifenniveau bis zur chiralen Ordnung $\mathcal{O}(q^4)$ mit Pionen und Nukleonen als Freiheitsgrade durchgeführt, um die Energieabhängigkeit der Reaktionen über einen möglichst großen Bereich zu beschreiben. Um die Abhängigkeit von der Photonvirtualität in der EPP zu verbessern, werden zum anderen in einer zweiten Rechnung Vektormesonen in die Theorie einbezogen. Diese Rechnung wird bis zur chiralen Ordnung $\mathcal{O}(q^3)$ auf Einschleifenniveau durchgeführt.

Von den vier physikalischen Prozessen in PPP und EPP sind nur drei experimentell zugänglich. Untersucht werden diese Reaktionen an mehreren verschiedenen Anlagen, z.B. in Mainz, Bonn oder Saskatoon. Die dort gewonnenen Daten werden hier verwendet, um die Grenzen der chiralen Störungstheorie auszuloten.

Diese Arbeit stellt die erste, vollständige, manifest lorentzinvariante Rechnung in $\mathcal{O}(q^4)$ für PPP und EPP, und die erste jemals durchgeführte Rechnung mit Vektormesonen als Freiheitsgrade für diesen Prozess, dar. Neben der Berechnung der physikalischen Observablen wird auch eine Partialwellenzerlegung durchgeführt und die wichtigsten Multipole untersucht. Diese lassen sich aus den gewonnenen Amplituden extrahieren und bieten eine gute Möglichkeit das Nukleon und Resonanzen zu untersuchen.

Um das Matrixelement für die Prozesse berechnen zu können, wurden verschiedene Routinen für das Computeralgebrasystem Mathematica entwickelt, da die Anzahl der zu bestimmenden Diagramme sehr groß ist. Für die Multipolzerlegung werden zwei verschiedene Programme verwendet. Zum einen das bereits existierende Programm χ MAID, welches für diese Arbeit entsprechend modifiziert wurde. Zum anderen wurden vergleichbare Routinen für Mathematica entwickelt. Am Ende der Analysen werden die verschiedenen Rechnungen bezüglich ihrer Anwendbarkeit auf PPP und EPP verglichen.

Abstract

This thesis is concerned with pion photoproduction (PPP) and pion electroproduction (PEP) in the framework of manifestly Lorentz-invariant baryon chiral perturbation theory. For that purpose two different approaches are used. Firstly, a one-loop-order calculation up to chiral order $\mathcal{O}(q^4)$ including pions and nucleons as degrees of freedom, is performed to describe the energy dependence of the reactions over a large range. To improve the dependence on the virtuality of the photon in PEP, in a second approach vector mesons are included as explicit degrees of freedom. The latter calculation includes one-loop contributions up to chiral order $\mathcal{O}(q^3)$.

Only three of the four physical processes of PPP and PEP can be accessed experimentally. These reactions are measured at several different facilities, e.g. Mainz, Bonn, or Saskatoon. The data obtained there are used to explore the limits of chiral perturbation theory.

This thesis is the first complete manifestly Lorentz-invariant calculation up to order $\mathcal{O}(q^4)$ for PPP and PEP, and the first calculation ever for these processes including vector mesons explicitly. Beside the calculation of physical observables, a partial wave decomposition is performed and the most important multipoles are analyzed. They may be extracted from the calculated amplitudes and allow one to examine the nucleon and resonances.

The number of diagrams one has to calculate is very large. In order to handle these expressions, several routines were developed for the computer algebra system Mathematica. For the multipole decomposition, two different programs are used. On the one hand, a modified version of the so-called χ MAID has been employed. On the other hand, similar routines were developed for Mathematica. In the end, the different calculations are compared with respect to their applicability to PPP and PEP.

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	1
2	Quantenchromodynamik	9
2.1	Die Lagrangedichte der QCD	9
2.2	QCD im chiralen Grenzfall	11
2.3	Green'sche Funktionen und QCD mit externen Quellen	14
2.4	Spontane Symmetriebrechung	15
3	Chirale Störungstheorie	17
3.1	Das Weinberg'sche Zählschema	18
3.2	Mesonen in χ PT	19
3.3	χ PT für Nukleonen	21
3.4	Vektormesonen in χ PT	25
3.5	Renormierung	33
4	Photo- und Elektropionproduktion	39
4.1	Das Matrixelement	40
4.2	Isospinamplituden	49
4.3	Wirkungsquerschnitte	51
5	Berechnung der Pionproduktion	59
5.1	Das Matrixelement	59
5.2	Tests der Ergebnisse	62
5.3	Multipolzerlegung	63
6	Ergebnisse	67
6.1	Neutrale Photopionproduktion	67
6.2	Neutrale Elektropionproduktion	84
6.3	Geladene Photopionproduktion	94
6.4	Geladene Elektropionproduktion	104
7	Zusammenfassung und Ausblick	109

A	Notationen, Definitionen und Konstanten	113
B	Stromerhaltung	115
B.1	Baumdiagramme	115
B.2	Schleifendiagramme	116
B.3	Teilchenmassen in χ PT	118
C	Bestimmung verschiedener LECs	121
C.1	Selbstenergie des Pions	121
C.2	Pionzerfallskonstante	124
C.3	Elektromagnetischer Formfaktor des Pions	126
C.4	Selbstenergie des Nukleons	130
C.5	Axialer Formfaktor des Nukleons	132
C.6	Pion-Nukleon-Vertex	136
C.7	Elektromagnetische Formfaktoren des Nukleons	138
D	Cusp-Effekt	145
E	Ergänzende Plots	149
F	Parametrisierungen der Multipole	153
F.1	$\gamma + p \rightarrow \pi^0 + p$	154
F.2	$\gamma^{(*)} + p \rightarrow \pi^0 + p$	155
F.3	$\gamma + n \rightarrow \pi^- + p$	157
F.4	$\gamma + p \rightarrow \pi^+ + n$	158
G	Feynmandiagramme	159
G.1	Diagramme ohne Vektormesonen	159
G.2	Diagramme mit Vektormesonen	168

Kapitel 1

Einleitung

Die moderne Physik kennt vier fundamentale Wechselwirkungen bzw. Kräfte: Gravitation, Elektromagnetismus, starke und schwache Kernkraft. Die Gravitation ist die am längsten bekannte Wechselwirkung. Sie wurde bereits im 17. Jahrhundert durch Sir Isaac Newton physikalisch erklärt. Anfang des 20. Jahrhunderts fand Albert Einstein eine noch genauere Beschreibung, die allgemeine Relativitätstheorie. Mit der Quantenelektrodynamik (QED) wurde eine mikroskopische, quantenfeldtheoretische Formulierung der Elektrodynamik entwickelt, welche bis dahin durch die klassischen Feldgleichungen von James Clerk Maxwell zusammengefasst wurde. Der Aufbau von Protonen und Neutronen, den Bestandteilen des Atomkerns, wird durch die starke Wechselwirkung erklärt. Genau wie die starke ist auch die schwache Wechselwirkung auf der makroskopischen Skala unseres Alltags nicht sichtbar. Sie erklärt jedoch z.B. bestimmte radioaktive Zerfälle und spielt eine wichtige Rolle in der Sonne bei der Fusion von Wasserstoffkernen zu Helium.

Die moderne theoretische Physik verwendet so genannte Eichtheorien, um Wechselwirkungen beschreiben zu können. Dieses Konzept hat sich bei elektromagnetischer, schwacher und starker Wechselwirkung als sehr erfolgreich erwiesen. Diese drei werden im Standardmodell der Elementarteilchenphysik zusammengefasst (siehe z.B. [Wei 95b]). Nach diesem Modell setzt sich unser Universum aus zwei Arten von Materie zusammen, Leptonen und Quarks. Diese sind Spin-1/2-Teilchen. Elektron, Myon und Tau, die zugehörigen Neutrinos ν_e, ν_μ und ν_τ sowie die zugehörigen Antiteilchen bilden die Familie der Leptonen. Bei den Quarks findet man auch sechs unterschiedliche, nämlich up (u), down (d), strange (s), charm (c), bottom (b) und top (t). Im Gegensatz zu den Leptonen kommen die Quarks jedoch in der Natur nicht als freie Teilchen vor. Dies wird mit Hilfe der Hypothese eines Farbeinschlusses (engl. *colour confinement*) erklärt. Die Quarks besitzen eine Farbladung, welche die Werte rot (r), grün (g) und blau (b) annehmen kann. Die Farbeinschluss-
hy-

pothese besagt nun, dass nur „farbneutrale“ Teilchen existieren. So lassen sich drei Quarks unterschiedlicher Farbe in einem vollständig antisymmetrischen Farbsingulett zu einem Baryon zusammensetzen. In einem Meson bilden ein Quark und ein Antiquark eine farbneutrale Kombination. Tabelle 1.1 fasst die wichtigsten Eigenschaften der Leptonen und Quarks zusammen.

Familie	Generation			elektrische Ladung [e]	Farbe
	1	2	3		
Leptonen	ν_e	ν_μ	ν_τ	0	-
	e	μ	τ	-1	
Quarks	u	c	t	$2/3$	r,g,b
	d	s	b	$-1/3$	

Tabelle 1.1: Materieteilchen im Standardmodell

Eichtheorien liefern eine anschauliche Erklärung für die Wechselwirkungen von Materie. Zwischen zwei Teilchen werden Eichbosonen ausgetauscht, welche dadurch die Kräfte zwischen den Teilchen vermitteln. Jede Wechselwirkung besitzt eine bestimmte Anzahl an Eichbosonen, die durch die zugehörige Eichgruppe festgelegt ist. Die elektromagnetische Kraft wird durch ein masseloses Eichboson, genannt Photon, vermittelt. Die zugehörige Eichgruppe der QED ist die $U(1)$. Bei der schwachen Wechselwirkung ist die Eichgruppe die $SU(2)$ und die zugehörigen Eichbosonen werden $W^\pm$ und Z^0 genannt. Diese sind jedoch im Gegensatz zum Photon massebehaftet. Eine Erklärung hierfür fand sich durch die Vereinigung der schwachen und elektromagnetischen Kraft zur elektroschwachen Kraft [Wei 67]. Man nimmt an, dass in Wirklichkeit drei W-Bosonen (also zusätzlich ein W^0) und das B^0 existieren, welche aus der Eichgruppe $SU(2)_L \times U(1)_Y$ stammen. Die dieser Eichgruppe zugrundeliegende Symmetrie ist jedoch spontan nach $U(1)_{\text{e.m.}}$ gebrochen, wodurch die bereits genannten Austauschteilchen der elektromagnetischen und schwachen Wechselwirkung entstehen. Der Mechanismus der spontanen Symmetriebrechung verleiht auch den Eichbosonen der schwachen Wechselwirkung ihre Masse. Die Eichtheorie der starken Wechselwirkung wird Quantenchromodynamik (QCD) genannt [FGM 73]. Die zugehörige Eichgruppe ist die $SU(3)_C$, wobei das C für *colour* steht, da die Austauschteilchen an die Farbladung koppeln. Diese Teilchen werden Gluonen genannt, von denen es acht verschiedene gibt. Es wird angenommen, dass sie masselos sind. Da Leptonen im Gegensatz zu Quarks keine Farbladung besitzen, unterliegen nur letztere der starken Wechselwirkung. Tabelle 1.2 fasst die Wechselwirkungen des Standardmodells kurz zusammen.

Um aus Eichtheorien physikalische Vorhersagen treffen zu können, bedient man sich quantenfeldtheoretischer Methoden. Das Lösen der betref-

Wechselwirkung	koppelt an	Eichboson	Masse [GeV]
elektromagnetisch	elektrische Ladung	Photon	0
schwach	schwache Ladung	$W^\pm, Z^0$	$\approx 10^2$
stark	Farbladung	acht Gluonen	0

Tabelle 1.2: Wechselwirkungen im Standardmodell

fenden Gleichungen ist jedoch i.Allg. nicht exakt möglich. Man kann auf Störungstheorie zurückgreifen, d.h. man führt eine Entwicklung in einem kleinen Störparameter (z.B. dem Plank'schen Wirkungsquantum $\hbar$) durch und löst die Gleichungen Ordnung für Ordnung. Die Kopplungskonstante der Wechselwirkung hängt auch vom untersuchten Energiebereich ab, d.h. sie ist nur noch eine effektive Konstante. Die Kopplungskonstante der QCD verschwindet im Limes unendlich hoher Energien (asymptotische Freiheit [GW 73a, GW 73b, Pol 73]). Bei sehr niedrigen Energien steigt ihr Wert stark an, weshalb Störungstheorie im üblichen Sinne hier nicht mehr anwendbar ist. Dies trifft auch auf die in dieser Arbeit untersuchte Photo- und Elektropionproduktion in der Schwellenregion zu. Einen Ausweg liefern so genannte effektive Feldtheorien. Deren Konzept geht auf ein Theorem von Weinberg zurück, wonach man eine fundamentale Theorie durch die allgemeinste effektive Lagrangedichte beschreiben kann, welche die Symmetrien der ursprünglichen Theorie berücksichtigt [Wei 79]. Dabei werden i.Allg. nicht die fundamentalen Freiheitsgrade, sondern effektive Freiheitsgrade verwendet. Von Gasser und Leutwyler wurde, ausgehend von Weinbergs Theorem, eine effektive Theorie entwickelt, welche nur Goldstonebosonen als Freiheitsgrade verwendet. Diese Theorie heißt chirale Störungstheorie (engl. *chiral perturbation theory*, kurz χ PT) [Wei 79, GL 85]. Der Ausgangspunkt für χ PT ist der chirale Grenzfall der QCD. Hier werden als Näherung die leichten Quarks (u, d und eventuell auch s) als masselos betrachtet. Verschiedene experimentelle Befunde legen nahe, dass die chirale Symmetrie der QCD spontan gebrochen ist. Das Goldstonetheorem sagt nun voraus, dass deswegen masselose Goldstonebosonen existieren. In der Tat findet man diese in der Natur, nämlich Pionen, Kaonen und das Eta. Diese besitzen jedoch eine endliche Masse, was sich darauf zurückführen lässt, dass die Quarks selbst eine (sehr kleine) Masse besitzen. Die chirale Störungstheorie verwendet die leichten Quarkmassen und kleine externe Impulse als Entwicklungsparameter. Dadurch kann man die Wichtigkeit verschiedener Beiträge zu einem Prozess abschätzen. Dies ist in der Literatur als *power counting* bekannt.

In einem weiteren Schritt wurde χ PT auf leichte Baryonen erweitert [GSS 88]. Oft wird in diesem Zusammenhang von χ EFT (engl. *chiral effective field theory*) gesprochen; in dieser Arbeit wird jedoch der Begriff χ PT

durchgehend verwendet. Der Einbau von Baryonen führt eine neue große Skala in die Theorie ein, nämlich deren Masse. Dies führt zu inkonsistenten Ergebnissen, sobald Schleifendiagramme berücksichtigt werden. Schleifendiagramme mit „schweren“ Freiheitsgraden können Beiträge niedrigerer Ordnung im Entwicklungsparameter haben, als das *power counting* vorhersagt. Der erste Ausweg aus dieser Problematik war die Formulierung der chiralen Störungstheorie für schwere Baryonen (engl. *heavy baryon χPT* , kurz HB χPT) [JM 91, Ber+ 92], bei der das Nukleonfeld in einen kleinen und einen großen Anteil zerlegt wird. Ein anderer Ausweg wurde von Becher und Leutwyler gefunden [BL 99], indem sie zeigten, dass diese zählschemaverletzenden Beiträge durch Anpassung entsprechender Schleifenintegrale bzw. Gegenterme nicht auftreten. Das von ihnen entwickelte Renormierungsschema wird Infrarotregularisierung genannt. In der Praxis ist es jedoch mühselig anzuwenden, da die entsprechenden Integrale schwer zu berechnen sind. Alternativ dazu wurde das EOMS- (*extended on-mass-shell*)-Schema entwickelt [Fuc+ 03a]. Außerdem existiert noch das reformulierte Infrarotschema [SGS 04], welches in der Praxis meist besonders einfach anzuwenden ist. In den beiden letztgenannten Renormierungsschemata sind die auftretenden Schleifenintegrale nicht nur leichter zu berechnen, sondern diese Schemata lassen sich leicht auf Resonanzen erweitern. Der Einbau dieser Resonanzen oder Freiheitsgrade ist sehr wichtig. Der Bereich, bis zu welcher Energie χPT anwendbar ist, wird nämlich durch den leichtesten nicht explizit in der Theorie berücksichtigten Freiheitsgrad begrenzt. Baut man weitere Resonanzen ein, so kann man den Konvergenzradius der Theorie vergrößern. Phänomenologische Betrachtungen helfen dabei, die wichtigsten Freiheitsgrade auszuwählen. So zeigt einem das Konzept der Vektormesondominanz (VMD), dass Vektormesonen wie z.B. das neutrale ρ -Meson oder auch das ω eine wichtige Rolle für die Ankopplung des elektromagnetischen Feldes an Hadronen spielen.

	I^G	J^P	Masse [MeV]	Lebensdauer [s]	Zerfallsart
π^0	1^-	0^-	134.9766(6)	$(8.4 \pm 0.4)10^{-17}$	$\gamma\gamma$ (98.8) $\gamma e^+ e^-$ (1.2)
$\pi^\pm$	1^-	0^-	139.57018(35)	$(2.6033 \pm 0.0005)10^{-8}$	$\mu^\pm \bar{\nu}_\mu$ (≈ 100)

Tabelle 1.3: Wichtige Eigenschaften der Pionen [Nak+ 10]. Bei den Zerfallsarten ist in Klammern die Wahrscheinlichkeit in % für den jeweiligen Kanal angegeben.

In dieser Arbeit wird die Produktion eines Pions durch die Wechselwirkung eines reellen oder virtuellen Photons mit einem Nukleon untersucht. Im Falle reeller Photonen spricht man von Photopionproduktion. Bei der inelas-

tischen Streuung eines Elektrons an einem Nukleon wird die elektromagnetische Wechselwirkung durch virtuelle Photonen vermittelt. Man spricht dann von Elektropionproduktion. In [DT 92] wird ein kurzer historischer Abriss der Pionproduktion gegeben, welcher im Folgenden vorgestellt wird.

Das Pion wurde im Jahr 1935 von Yukawa [Yuk 35] postuliert, um den kurzreichweitigen Anteil der Kernkräfte zu erklären. Unter Annahme von Isospinsymmetrie wurde von Kemmer [Kem 38] eine entsprechende Theorie formuliert. Die von Yukawa vorhergesagten Pionen wurden mehr als eine Dekade später experimentell nachgewiesen; die geladenen ($\pi^\pm$) von Lattes et al. [Lat+ 47] und das neutrale (π^0) von Panofsky et al. [SPS 50]. Die wichtigsten Eigenschaften der Pionen sind in Tabelle 1.3 zusammengefasst. Das Photon als Vermittler der elektromagnetischen Wechselwirkung stellt eine hervorragende Sonde zur Untersuchung der Eigenschaften des Nukleons dar. Bei Energien knapp oberhalb der Pionproduktionsschwelle lässt sich diese Reaktion sehr gut untersuchen, da aufgrund der geringen Energie keine anderen Prozesse mit ausschließlich Hadronen im Endzustand möglich sind. Von Kroll und Ruderman wurde 1954 die erste modellunabhängige Vorhersage für die Photoproduktion eines Pions am Nukleon an der Schwelle gemacht, indem sie die Konsequenzen von Eichinvarianz und Lorentzinvarianz untersuchten. Solche modellunabhängigen Vorhersagen werden Niederenergiethoreme genannt. Der allgemeine Formalismus wurde 1957 von Chew et al. [Che+ 57] entwickelt und von Dennery auf die Elektroproduktion ausgeweitet [Den 61]. Durch Einbau der PCAC-Hypothese (PCAC=partially conserved axial current) wurden die bekannten Niederenergiethoreme noch erweitert [Bae 70, VZ 72]. Dadurch konnte die Amplitude an der Schwelle als Reihenentwicklung in M_π/m_N berechnet werden. Nahe der Produktionsschwelle wird die Amplitude meist durch ihre Multipolentwicklung beschrieben. Dabei wird eine Zerlegung des Pion-Nukleon-Endzustands nach Zuständen mit wohldefiniertem Drehimpuls und Transformationsverhalten unter Parität durchgeführt. In der Schwellenregion tragen dabei näherungsweise nur Multipole mit Drehimpulsquantenzahl $l = 0, 1$ (S- und P-Wellen) bei. Mittlerweile werden auch D-Wellen untersucht, da Mischungsterme von S- und D-Wellen wichtige Beiträge liefern [FBD 09a]. Durch die Multipolzerlegung lassen sich Beiträge von Resonanzen sehr leicht identifizieren. So wird z.B. der M_{1+} -Multipol fast vollständig von der $\Delta(1232)$ -Resonanz dominiert. Die Pionproduktion wurde in verschiedenen Modellen theoretisch untersucht, z.B. so genannten „Chiral Bag“-Modellen [SDT 87] oder auch in σ -Modellen [Dav 93]. Sehr erfolgreich bei der Bestimmung der Multipole ist das phänomenologische Modell MAID, aktuell in der Version von 2007 [DKT 07]. Dieses berücksichtigt verschiedene Resonanzen und unitarisiert die Partialwellen mit Hilfe des Watson-Theorems [GW 67]. Dadurch gelingt eine sehr

gute Beschreibung der existierenden experimentellen Daten für den Bereich der ersten Baryonresonanzen sowie für hohe Virtualität des Photons (im Falle der Elektroproduktion). Ein weiteres Beispiel ist das DMT-Modell (Dubna, Mainz, Taipei) [Kam+ 01, KY 99], welches ein dynamisches Modell zur Beschreibung der Photo- und Elektropionproduktion darstellt.

Besonders vielversprechend für eine Untersuchung der Pionproduktion ist die chirale Störungstheorie, da sie eine systematische Entwicklung des Prozesses in kleinen Größen (Massen und externen Impulsen) erlaubt. Erste Rechnungen von Bernard et al. [Ber+ 91] wurden insbesondere dadurch motiviert, dass die zu dieser Zeit neuen Experimente [Maz+ 86, Bec+ 90] für die Photoproduktion neutraler Pionen an der Schwelle starke Abweichungen von den bekannten Niederenergiethereomen [Bae 70] zeigten. In [BKM 92b] konnte gezeigt werden, dass die Niederenergiethereome durch Infrarotsingularitäten modifiziert werden. Diese treten jedoch erst in Schleifendiagrammen in Form von Logarithmen der Pionmasse auf. Ausgehend von Untersuchungen von [GSS 88] berücksichtigt eine Einschleifenrechnung bereits die wichtigen Effekte dieser Art. Für die Produktion geladener Pionen bleiben die Niederenergiethereome im Wesentlichen erhalten. Auch die Elektroproduktion wurde in manifest lorentzinvarianter χ PT untersucht [Ber+ 94]. Dabei steht zusätzlich eine longitudinale Kopplung des Photons an das Nukleon zur Verfügung, wodurch man weitere Informationen über das Nukleon gewinnen kann. Problematisch bei den frühen Untersuchungen in χ PT war, dass kein konsistentes Renormierungsschema existierte. Deswegen wurden in den folgenden Jahren weitere Untersuchungen im Rahmen der HB χ PT durchgeführt [BKM 96a, BKM 96b, BKM 01]. Dabei wurden alle Reaktionskanäle sowohl der Photo- als auch der Elektroproduktion untersucht. HB χ PT hat allerdings den Nachteil, die relativistische Kovarianz aufgeben zu müssen.

Experimentell ist die Erzeugung eines neutralen Pions an einem freien Neutron schwer zugänglich, da man kein Target aus Neutronen zur Verfügung hat. Dies hängt unter anderem mit seiner sehr kurzen Halbwertszeit zusammen. Ein Ausweg hierbei stellt die Untersuchung von Deuterium dar. Auch dies wurde sowohl experimentell [Ewa+ 00] als auch theoretisch im Rahmen der HB χ PT vorangetrieben [Bea+ 97, BKM 00, KBM 03, KBM 04]. Nicht zuletzt spielt die Isospinsymmetrie bzw. deren Brechung eine wichtige Rolle in der Schwellenregion. Bei der Produktion neutraler Pionen findet man einen so genannten Cusp-Effekt im E_{0+} -Multipol an der Produktionsschwelle für geladene Pionen. Die chirale Störungstheorie ist jedoch nicht gut geeignet, solche Effekte systematisch zu beschreiben. Diese sind von so hoher Ordnung, dass in einer konsistenten Rechnung somit auch Zweischleifenkorrekturen berücksichtigt werden müssten. Eine solche Rechnung ist allerdings sehr aufwendig. In [Fuh 10] wurde deswegen ein nichtrelativistisches Modell

entwickelt, welches speziell die Isospinsymmetriebrechung systematisch berücksichtigt.

Die Produktion geladener Pionen in der Schwellenregion ist insgesamt weniger gut untersucht, aber auch weniger interessant. Das Kroll-Ruderman-Theorem [KR 54] beschreibt schon den wichtigsten Beitrag zur Amplitude für die Produktion geladener Pionen. Korrekturen zu diesem dominanten Beitrag sind sehr gering und auch experimentell sehr schwer nachzuweisen. Die Photoproduktion geladener Pionen wird nur mit Protonen als Target gemessen. Der zweite Reaktionskanal der geladenen Pionproduktion wird nicht in dieser Form gemessen. Stattdessen untersucht man zum einen die Umkehrreaktion, d.h. den Strahlungseinfang eines geladenen Pions durch ein Nukleon. Hierzu gibt es auch bereits Rechnungen im Rahmen der HB χ PT [Fea+ 00]. Zum anderen gibt es auch Messungen an Targets wie z.B. Helium. Die entsprechenden Wirkungsquerschnitte für die Pionproduktion am Neutron werden dann extrahiert. Die Elektroproduktion geladener Pionen ist experimentell nur für hohe Photonvirtualitäten untersucht worden, für die χ PT nur noch begrenzt anwendbar ist. Mittlerweile ist das Interesse an der Photopionproduktion wieder gestiegen. So ist an MAMI in Mainz, ELSA in Bonn sowie JLAB in Newport News ein so genanntes vollständiges Experiment geplant, bei dem alle zugrundeliegenden Amplituden bestimmt werden können [Wor+ 11]. Dazu benötigt man polarisierte Photonen, ein polarisiertes Target und auch die Rückstoßpolarisation des gestreuten Nukleons. Damit lässt sich die Produktionsamplitude bis auf eine Phase vollständig bestimmen, was insbesondere für Interferenzterme in der Amplitude interessant ist, da diese meist sehr klein sind.

Das Ziel dieser Arbeit ist die Untersuchung der Photo- und Elektropionproduktion im Rahmen der manifest lorentzinvarianten chiralen Störungstheorie. Dabei werden zwei verschiedene Ansätze verfolgt. Zum einen wird eine vollständige Rechnung bis zur chiralen Ordnung $\mathcal{O}(q^4)$ durchgeführt. Bisher fanden lediglich erste Untersuchungen bis zur Ordnung $\mathcal{O}(q^3)$ statt [BKM 05, Len 07]. In dieser Arbeit werden auch die vollständigen Amplituden berechnet, so dass eine komplette Multipolzerlegung durchgeführt werden kann. Ein besonderes Augenmerk wird dabei auf die neuesten Messungen der Photopionproduktion von [Hor+ 11] gelegt. In einer davon unabhängigen Rechnung werden die leichtesten Vektormesonen (ρ und ω) explizit als Freiheitsgrade in der Theorie berücksichtigt. Diese Rechnung wird bis zur chiralen Ordnung $\mathcal{O}(q^3)$ durchgeführt. Die Motivation für den Einbau der Vektormesonen liegt in ihrem Beitrag zu den elektromagnetischen Formfaktoren des Pions bzw. des Nukleons [BBS 11]. Dort lässt sich die Beschreibung der experimentellen Daten durch Einbau der Vektormesonen verbessern und zu deutlich höheren Impulsüberträgen erweitern. In [SK 91] wurden modell-

unabhängige Untersuchungen für die S-Wellen-Multipole durchgeführt. Diese zeigten, dass die Formfaktoren des Nukleons einen wichtigen Beitrag für die S-Wellen liefern. Dies motiviert letzten Endes den Einbau der Vektormesonen in die Pionproduktion. Auch in dieser Rechnung werden alle Schleifenkorrekturen bis zur untersuchten Ordnung berücksichtigt und die vollständige Amplitude berechnet. Die Multipolzerlegung wird im nächsten Schritt ebenso durchgeführt.

Die Arbeit ist wie folgt aufgebaut: In Kapitel 2 wird die QCD vorgestellt und ihre Eigenschaften diskutiert. Der chirale Grenzfall, welcher für die Entwicklung der χ PT notwendig ist, wird besonders untersucht. Kapitel 3 gibt eine kurze Einführung in die chirale Störungstheorie. Die wichtigsten Konzepte werden kurz erläutert und alle für die hier durchgeführten Rechnungen relevanten Grundlagen werden präsentiert. Das Thema Renormierung spielt dabei eine wichtige Rolle und wird in diesem Kapitel deswegen auch näher erläutert. Das vierte Kapitel gibt eine Einführung in die Photo- und Elektropionproduktion. Die Prozesse und deren wichtigsten Eigenschaften werden dargestellt. Des Weiteren werden die benötigten Formeln für die Amplituden, Wirkungsquerschnitte und die Multipolzerlegung erläutert. Im fünften Kapitel werden die technischen Details erläutert, d.h. die für die Berechnung der Amplituden bzw. Multipole eingesetzten Algorithmen und Computerprogramme. Kapitel 6 enthält die erzielten Ergebnisse für die Photo- und Elektropionproduktion. Die Bestimmung der Niederenergiekonstanten mittels χ^2 -Fits an die Experimente ist dort besonders wichtig. Es werden alle Prozesse untersucht, für die Daten vorliegen. Im Falle der Photoproduktion ist dies für drei der vier Reaktionskanäle der Fall. Für die Elektroproduktion stehen nur Daten aus zwei Kanälen zur Verfügung. Gezeigt werden die Ergebnisse für die verschiedenen Observablen und, soweit sinnvoll, die wichtigsten zugehörigen Multipole. Das siebte Kapitel fasst die Ergebnisse dieser Arbeit zusammen.

Kapitel 2

Quantenchromodynamik

In diesem Kapitel werden die grundlegenden Eigenschaften der Quantenchromodynamik (QCD), der Eichtheorie der starken Wechselwirkung, dargelegt. Ausgehend von der Lagrangedichte und deren Symmetrien wird der Spezialfall masseloser leichter Quarks diskutiert. Die dadurch entstehende chirale Symmetrie wird genauer untersucht. Die Darstellung folgt im Wesentlichen [Sch 03].

2.1 Die Lagrangedichte der QCD

Fundamentale Wechselwirkungen können mittels des Konzepts der Eichtheorie konstruiert werden. Startpunkt ist die freie Lagrangedichte für die der jeweiligen Wechselwirkung unterliegenden Teilchen. Im Falle der QCD sind das die Quarks, von denen sechs *flavour* bekannt sind (siehe Tabelle 2.1). Die Wechselwirkung zwischen diesen wird durch acht Spin-1-Teilchen, die Gluonen, vermittelt. Die Kopplung zwischen Quarks und Gluonen findet durch die Farbladung statt. Es gibt drei Farben und ihre jeweiligen Antifarben: rot/antirot, grün/antigrün, blau/antiblau. Die zugrundeliegende Symmetriegruppe für diese Wechselwirkung ist die $SU(3)_C$, wobei der Index C für *colour* sich auf die Farbladung bezieht. Folgt man dem Konstruktionsprinzip für Eichtheorien, so erhält man die Lagrangedichte der QCD:¹

$$\mathcal{L}_{QCD} = \sum_{f=u,d,s,c,b,t} \bar{q}_f (i\not{D} - m_f) q_f - \frac{1}{4} \mathcal{G}_{\mu\nu,a} \mathcal{G}_a^{\mu\nu}. \quad (2.1)$$

¹Hier und im Weiteren wird Einstein'sche Summenkonvention verwendet.

Die Quarkfelder q_f sind nochmal unterteilt in die drei möglichen Farbzustände. Diese wiederum werden mittels Diracfelder beschrieben:

$$q_f = \begin{pmatrix} q_{f,r} \\ q_{f,g} \\ q_{f,b} \end{pmatrix}. \quad (2.2)$$

Die Feldstärketensoren $\mathcal{G}_{\mu\nu,a}$, $a = 1, \dots, 8$ enthalten die Gluonfelder in den Potentialen $\mathcal{A}_{\mu,a}$.

$$\mathcal{G}_{\mu\nu,a} = \partial_\mu \mathcal{A}_{\nu,a} - \partial_\nu \mathcal{A}_{\mu,a} + gf_{abc} \mathcal{A}_{\mu,b} \mathcal{A}_{\nu,c}. \quad (2.3)$$

Das Objekt f_{abc} bezeichnet die Strukturkonstanten der Gruppe SU(3). Ei-

<i>flavour</i>	u	d	s
Ladung [e]	2/3	-1/3	-1/3
Masse [MeV]	1.7 - 3.1	4.1 - 5.7	100^{+30}_{-20}
<i>flavour</i>	c	b	t
Ladung [e]	2/3	-1/3	2/3
Masse [GeV]	$1.29^{+0.05}_{-0.11}$	$4.19^{+0.18}_{-0.06}$	$172.9 \pm 0.6 \pm 0.9$

Tabelle 2.1: Ladung und Masse der Quarks nach [Nak+ 10].

ne Eichtheorie basiert auf der Invarianz der jeweiligen Lagrangedichte unter lokalen Transformationen. Im Falle der QCD lauten diese Transformationen für die Quarkfelder

$$q_f \mapsto q'_f = \exp \left(-i \sum_{a=1}^8 \Theta_a(x) \frac{\lambda_a^C}{2} \right) q_f = U[g(x)] q_f. \quad (2.4)$$

Die λ_a^C bezeichnen die Gell-Mann-Matrizen, wobei der Index C auch hier die Wirkung im Farbraum andeuten soll. Die $\Theta_a(x)$ sind beliebige, von der Raumzeitkoordinate x abhängige Parameter. Das Eichprinzip definiert auch die kovariante Ableitung $D_\mu q_f$:

$$D_\mu \begin{pmatrix} q_{f,r} \\ q_{f,g} \\ q_{f,b} \end{pmatrix} = \partial_\mu \begin{pmatrix} q_{f,r} \\ q_{f,g} \\ q_{f,b} \end{pmatrix} - ig \sum_{a=1}^8 \frac{\lambda_a^C}{2} \mathcal{A}_{\mu,a} \begin{pmatrix} q_{f,r} \\ q_{f,g} \\ q_{f,b} \end{pmatrix}. \quad (2.5)$$

Dieser Term sorgt für die Wechselwirkung zwischen Quarks und Gluonen und ist offensichtlich unabhängig vom *flavour* der Quarks. Der Parameter

g ist die Kopplungskonstante. Damit $\mathcal{L}_{QCD}$ auch wirklich invariant unter lokalen Transformationen der Quarkfelder ist (Gleichung (2.4)), müssen die Potentiale bzw. der Feldstärketensor gleichzeitig wie folgt transformieren

$$\begin{aligned} \frac{\lambda_a^C}{2} \mathcal{A}_{\mu,a}(x) = \mathcal{A}_\mu(x) &\mapsto U[g(x)] \mathcal{A}_\mu(x) U^\dagger[g(x)] \\ &\quad - \frac{i}{g} \partial_\mu U[g(x)] U^\dagger[g(x)], \end{aligned} \quad (2.6)$$

$$\frac{\lambda_a^C}{2} \mathcal{G}_{\mu\nu,a}(x) = \mathcal{G}_{\mu\nu}(x) \mapsto U[g(x)] \mathcal{G}_{\mu\nu}(x) U^\dagger[g(x)]. \quad (2.7)$$

Eichinvarianz würde noch einen Term der Form

$$\frac{g^2 \bar{\Theta}}{64\pi^2} \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \sum_{a=1}^8 \mathcal{G}_{\mu\nu}^a \mathcal{G}_{\rho\sigma}^a \quad (2.8)$$

in der Lagrangedichte der QCD zulassen. Dieser so genannte Θ -Term hat negative Parität, während $\mathcal{L}_{QCD}$ positive Parität hat. Existierte ein solcher Term, so müsste z.B. das Neutron ein (sehr kleines) elektrisches Dipolmoment haben. Experimentell konnte dafür bis jetzt nur eine Obergrenze bestimmt werden [Bak+ 06]. Deswegen wird der Θ -Term hier für weitere Betrachtungen vernachlässigt.

2.2 QCD im chiralen Grenzfall

Die Quarks werden üblicherweise aufgrund ihrer Masse folgendermaßen unterteilt,

$$m_u, m_d, m_s \ll 1 \text{ GeV} \leq m_c, m_b, m_t. \quad (2.9)$$

Die Skala von 1 GeV steht im Zusammenhang mit den leichtesten Hadronen, die keine Goldstonebosonen sind. Auch die Energieskala, welche in Zusammenhang mit der spontanen Symmetriebrechung steht ($4\pi F_\pi \approx 1170 \text{ MeV}$), liegt in dieser Größenordnung. Die Goldstonebosonen und die spontane Symmetriebrechung werden in Kapitel 2.4 näher erläutert. Mit obiger Aufteilung der Quarks lässt sich die Lagrangedichte (2.1) entsprechend sortieren:

$$\mathcal{L}_{QCD} = \sum_{l=u,d,s} \bar{q}_l (i\not{D} - m_l) q_l + \sum_{h=c,b,t} \bar{q}_h (i\not{D} - m_h) q_h - \frac{1}{4} \mathcal{G}_{\mu\nu,a} \mathcal{G}_a^{\mu\nu} \quad (2.10)$$

$$= \mathcal{L}_{\text{leichte Quarks}} + \mathcal{L}_{\text{schwere Quarks}} - \frac{1}{4} \mathcal{G}_{\mu\nu,a} \mathcal{G}_a^{\mu\nu}. \quad (2.11)$$

Vergleicht man z.B. die Masse der Quarks, aus denen ein Proton zusammengesetzt ist, mit seiner Gesamtmasse m_p ,

$$2m_u + m_d \ll m_p, \quad (2.12)$$

so sieht man, dass der Beitrag der Quarks zur Gesamtmasse vernachlässigt werden kann, da diese im Wesentlichen dynamisch generiert wird. Dies motiviert die Untersuchung des chiralen Grenzfalles. Dabei werden die leichten Quarks im Limes $m_u, m_d, m_s \rightarrow 0$ betrachtet. Damit und unter Vernachlässigung der schweren Quarks erhält man folgende Lagrangedichte:

$$\mathcal{L}_{\text{QCD}}^0 = \sum_{l=u,d,s} i \bar{q}_l \not{D} q_l - \frac{1}{4} \mathcal{G}_{\mu\nu,a} \mathcal{G}_a^{\mu\nu}. \quad (2.13)$$

Man kann nun folgende Projektionsoperatoren einführen,

$$P_R = \frac{1}{2}(1 + \gamma_5), \quad P_L = \frac{1}{2}(1 - \gamma_5). \quad (2.14)$$

Definiert man zusätzlich links- und rechtshändige Quarkfelder als

$$q_L = P_L q, \quad q_R = P_R q, \quad (2.15)$$

so lässt sich die Lagrangedichte aus Gleichung (2.13) schreiben als

$$\mathcal{L}_{\text{QCD}}^0 = \sum_{k=u,d,s} i (\bar{q}_{L,k} \not{D} q_{L,k} + \bar{q}_{R,k} \not{D} q_{R,k}) - \frac{1}{4} \mathcal{G}_{\mu\nu,a} \mathcal{G}_a^{\mu\nu}. \quad (2.16)$$

In dieser Lagrangedichte gibt es keine Mischung mehr zwischen links- und rechtshändigen Quarkfeldern. Somit transformieren sie auch unabhängig voneinander unter der Gruppe $\text{SU}(3)$. Damit liegt eine globale $\text{SU}(3)_L \times \text{SU}(3)_R$ -Symmetrie vor. Diese Symmetrie ist nicht perfekt, sondern wird durch die Quarkmassen gebrochen (explizite Symmetriebrechung). Es lässt sich auch zeigen, dass die Lagrangedichte aus Gleichung (2.16) eine $\text{U}(1)_V$ -Symmetrie besitzt, welche im Zusammenhang mit der Baryonenzahlerhaltung steht. Die Gesamtsymmetrie im hier betrachteten Grenzfall ist sogar $\text{SU}(3)_L \times \text{SU}(3)_R \times \text{U}(1)_V \times \text{U}(1)_A$. Der Axialvektorstrom (folgt aus $\text{U}(1)_A$) ist nur klassisch erhalten. Deswegen ist die tatsächliche Symmetrie nur $\text{SU}(3)_L \times \text{SU}(3)_R \times \text{U}(1)_V$. Zusätzlich gilt zu beachten, dass die Lagrangedichte aus Gleichung (2.1) (und somit die Lagrangedichten aus Gleichung (2.13) und (2.16)) invariant unter Paritätstransformation (P), Zeitumkehrtransformation (T) und Ladungskonjugation (C) ist. Lorentzinvarianz ist per Konstruktion ebenfalls erfüllt.

Um die Symmetrien von $\mathcal{L}_{\text{QCD}}^0$ näher untersuchen zu können, bedient man sich des Noethertheorems, welches die Verknüpfung zwischen Symmetrien eines Systems und Erhaltungsgrößen aufzeigt. Allgemein betrachtet man eine Lagrangedichte $\mathcal{L} = \mathcal{L}(\Phi_i, \partial_\mu \Phi_i)$, die von Feldern Φ_i und ihren ersten Ableitungen abhängt. Für jeden Generator der zugrunde liegenden Symmetriegruppe kann man eine lokale, infinitesimale Transformation der Felder erzeugen:

$$\Phi_i(x) \mapsto \Phi'_i(x) = \Phi_i(x) + \delta \Phi_i(x) = \Phi_i(x) - i \epsilon_a(x) F_i^a[\Phi_j(x)]. \quad (2.17)$$

Bildet man damit die Variation der Lagrangedichte (entwickeln bis zur Ordnung ϵ)

$$\delta\mathcal{L} = \mathcal{L}(\Phi'_i, \partial_\mu\Phi'_i) - \mathcal{L}(\Phi_i, \partial_\mu\Phi_i), \quad (2.18)$$

so lassen sich folgende Ströme und deren Divergenzen definieren:

$$J_a^\mu = \frac{\partial\delta\mathcal{L}}{\partial\partial_\mu\epsilon_a}, \quad \partial_\mu J_a^\mu = \frac{\partial\delta\mathcal{L}}{\partial\epsilon_a}. \quad (2.19)$$

Das Noethertheorem besagt, dass für erhaltene Ströme ($\partial_\mu J^{\mu,a} = 0$) die zugehörige Ladung zeitunabhängig ist:

$$Q_a(t) = \int d^3x J_a^0(\vec{x}, t). \quad (2.20)$$

Für eine zugrundeliegende Lie-Gruppe mit Strukturkonstanten C_{abc} bilden diese Ladungsoperatoren eine Lie-Algebra

$$[Q_a(t), Q_b(t)] = iC_{abc}Q_c(t). \quad (2.21)$$

Wendet man dies auf die Lagrangedichte aus Gleichung (2.13) an, so findet man folgende Ströme

$$L_a^\mu = \bar{q}_L \gamma^\mu \frac{\lambda_a}{2} q_L, \quad R_a^\mu = \bar{q}_R \gamma^\mu \frac{\lambda_a}{2} q_R. \quad (2.22)$$

Die acht Ströme L_a^μ transformieren unter $SU(3)_L \times SU(3)_R$ als (8,1) Multiplett, d.h. als Oktett und Singulett. Die R_a^μ transformieren unter derselben Gruppe als ein (1,8) Multiplett. Folgende Linearkombinationen der Ströme werden weiterhin verwendet,

$$V_a^\mu = R_a^\mu + L_a^\mu, \quad A_a^\mu = R_a^\mu - L_a^\mu. \quad (2.23)$$

Diese verhalten sich unter Paritätstransformationen wie Vektor- und Axialvektorströme. Im Folgenden werden qualitativ die Effekte untersucht, welche aus den nicht verschwindenden Massen der u-, d- und s-Quarks resultieren. Fügt man diese durch folgende Matrix wieder in die Lagrangedichte $\mathcal{L}_0$ ein,

$$M = \begin{pmatrix} m_u & 0 & 0 \\ 0 & m_d & 0 \\ 0 & 0 & m_s \end{pmatrix}, \quad (2.24)$$

so mischen sich rechts- und linkshändige Quarkfelder wieder:

$$\mathcal{L}_M = -(\bar{q}_R M q_L + \bar{q}_L M q_R). \quad (2.25)$$

Nun verschwinden die Divergenzen der Vektor- und Axialvektorströme nicht mehr und man erhält stattdessen

$$\partial_\mu V_a^\mu = i\bar{q} \left[M, \frac{\lambda_a}{2} \right] q, \quad (2.26)$$

$$\partial_\mu A_a^\mu = i\bar{q} \left\{ \frac{\lambda_a}{2}, M \right\} \gamma_5 q, \quad (2.27)$$

$$\partial_\mu V^\mu = 0, \quad (2.28)$$

$$\partial_\mu A^\mu = 2i\bar{q}M\gamma_5 q. \quad (2.29)$$

Wie man sehen kann, sind im Falle masseloser Quarks alle Vektor- und Axialvektorströme erhalten. Der Singulettaxialvektorstrom A^μ erhält jedoch bei der Quantisierung eine zusätzliche Divergenz, die hier nicht aufgeführt ist. Der Singulettvektorstrom ist für beliebige Quarkmassen erhalten, da er die Flavourunabhängigkeit der starken Wechselwirkung widerspiegelt. Der hier interessanteste Fall ergibt sich, wenn man die leichten Quarkmassen gleichsetzt, d.h. $m_u = m_d = m_s$. Die Vektorströme sind nämlich immer noch erhalten. Dies ist die Grundlage für den von Gell-Mann und Ne'eman vorgeschlagenen „Eightfold way“ [GN 64].

2.3 Green'sche Funktionen und QCD mit externen Quellen

Wenn man einen physikalischen Prozess beschreiben möchte, so ist das Standardwerkzeug die Berechnung von Green'schen Funktionen und Anwendung des LSZ-Formalismus [LSZ 55]. Die Green'schen Funktionen sind Vakuum Erwartungswerte zeitgeordneter Produkte von Operatoren. Die Symmetrien einer Theorie liefern dabei Bedingungen an Größen wie z.B. Streuamplituden, aber sie liefern insbesondere auch Bedingungen an und zwischen Green'schen Funktionen. Die Beziehungen, die sich aus den Bedingungen ableiten lassen, werden als Ward-Fradkin-Takahashi- oder kurz Ward-Identitäten bezeichnet [War 50, Fra 55, Tak 57]. Im Folgenden soll eine Technik vorgestellt werden, mit der alle benötigten Green'schen Funktionen der QCD aus einem erzeugenden Funktional abgeleitet werden können, welches durch seine Invarianzeigenschaften automatisch die Ward-Identitäten erfüllt. Das Ziel ist die Wechselwirkungen der Quarks mit externen Quellen, welche als C-Zahlenfelder eingeführt werden, zu beschreiben. Dabei werden auch die Massen der Quarks in Form solcher Quellen betrachtet. Man addiert diese externen Quellen zur Lagrangedichte im chiralen Grenzfall,

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_{\text{QCD}}^0 + \bar{q}\gamma_\mu(v^\mu + \frac{1}{3}v_{(s)}^\mu + \gamma_5 a^\mu)q - \bar{q}(s - i\gamma_5 p)q. \quad (2.30)$$

Die externen Felder sind farbneutrale, hermitesche 3×3 Matrizen und folgendermaßen definiert:

$$\begin{aligned} v^\mu &= \sum_{a=1}^8 \frac{\lambda_a}{2} v_a^\mu, & a^\mu &= \sum_{a=1}^8 \frac{\lambda_a}{2} a_a^\mu, & s &= \sum_{a=0}^8 \lambda_a s_a, \\ p &= \sum_{a=0}^8 \lambda_a p_a, & v_{(s)}^\mu &= v_{(s)}^\mu \mathbb{1}_{3 \times 3}. \end{aligned} \quad (2.31)$$

Den Fall für nicht verschwindende Quarkmassen, aber ohne externe Felder, erhält man z.B. durch $v^\mu = a^\mu = p = 0$, $s = \text{diag}(m_u, m_d, m_s)$. Das erzeugende Funktional ist definiert als

$$\exp(iZ[v, a, s, p]) = \langle 0 | T \exp \left[i \int d^4x \mathcal{L}_{ext}(x) \right] | 0 \rangle. \quad (2.32)$$

Der Operator T steht für den Zeitordnungsoperator. Damit die Lagrangedichte aus Gleichung (2.30) hermitesch sowie invariant unter Ladungskonjugation, Parität, Zeitumkehr und insbesondere unter lokalen $\text{SU}(3)_L \times \text{SU}(3)_R$ -Transformationen ist, müssen folgende Bedingungen für das Transformationsverhalten der externen Felder erfüllt sein:

$$\begin{aligned} r^\mu &\mapsto V_R r^\mu V_R^\dagger + i V_R \partial^\mu V_R^\dagger, \\ l^\mu &\mapsto V_L l^\mu V_L^\dagger + i V_L \partial^\mu V_L^\dagger, \\ v_\mu^{(s)} &\mapsto v_\mu^{(s)} - \partial_\mu \Theta(x) \\ s + ip &\mapsto V_R (s + ip) V_L^\dagger, \\ s - ip &\mapsto V_L (s - ip) V_R^\dagger, \end{aligned} \quad (2.33)$$

mit

$$v_\mu = \frac{1}{2}(r_\mu + l_\mu), \quad a_\mu = \frac{1}{2}(r_\mu - l_\mu). \quad (2.34)$$

2.4 Spontane Symmetriebrechung

Der Hamiltonoperator, welcher aus $\mathcal{L}_{\text{QCD}}^0$ aus Gleichung (2.13) folgt, lässt Folgendes erwarten: Die Hadronen ordnen sich in näherungsweise entarteten Multipletts an, welche Darstellungen der Gruppe $\text{SU}(3)_L \times \text{SU}(3)_R \times \text{U}(1)_V$ sind. Die zu $\text{SU}(3)_L \times \text{SU}(3)_R$ gehörenden Ladungsoperatoren $Q_{a,V}$ und $Q_{a,A}$ aus dem vorherigen Kapitel besitzen entgegengesetzte Parität, weswegen man eine Paritätsverdopplung der Zustände erwarten würde, d.h. zu jedem Zustand positiver Parität existiert ein gleicher Zustand negativer Parität. Dies

ist in der Natur jedoch nicht der Fall. Eine Erklärung hierfür liefert das Goldstonetheorem [Gol 61]. Eine Symmetrie gilt als spontan gebrochen, wenn der Grundzustand des Systems nicht invariant unter der vollen Symmetriegruppe G des Hamiltonoperators ist. Das System kann jedoch immer noch invariant unter einer Untergruppe $H \subset G$ sein. Nach dem Goldstonetheorem führt eine solche Situation zum Auftreten masseloser Goldstonebosonen. Deren Anzahl n ist gegeben durch

$$n = n_G - n_H, \quad (2.35)$$

wobei n_G die Anzahl der Generatoren der Gruppe und n_H die Anzahl der Generatoren der Untergruppe ist. Nach dem Colemantheorem [Col 66] ist die Symmetrie eines Systems durch die Symmetrie des Grundzustands gegeben und nicht durch die des Hamiltonoperators. Betrachtet man nun wieder den Fall der QCD, so findet man genau eine solche Situation wieder. Zum Baryonoktett positiver Parität gibt es kein entsprechendes Oktett negativer Parität. Das Teilchenspektrum besitzt somit eine andere Symmetrie als der Hamiltonoperator, nämlich $SU(3)_V$. Es lässt sich folgern, dass der Grundzustand der QCD nicht invariant unter axialen Transformationen ist, oder anders ausgedrückt

$$Q_{a,A}|0\rangle \neq 0. \quad (2.36)$$

Nach dem Goldstonetheorem folgt daraus die Existenz von $16 - 8 = 8$ masselosen Goldstonebosonen. Man identifiziert das pseudoskalare Mesonoktett mit ihnen. Dies erklärt, warum diese Mesonen so viel leichter sind als die Vektormesonen, z.B. vergleiche man die Masse des Pions ($M_\pi \approx 140$ MeV) mit der des ρ -Mesons ($M_\rho \approx 770$ MeV). Letzteres besteht aus den gleichen Quarks wie das Pion, besitzt jedoch einen Gesamtspin von 1. Dennoch sind die pseudoskalaren Mesonen nicht masselos. Dies liegt daran, dass die Quarks selbst eine Masse besitzen. Die Betrachtung des chiralen Grenzfalles ist also lediglich eine (gute) Näherung.

Kapitel 3

Chirale Störungstheorie

Um einen physikalischen Prozess wie z.B. die Streuung zweier Teilchen zu beschreiben, bedient man sich üblicherweise der Quantenfeldtheorie. Hier gibt es systematische Verfahren, um eine beliebige Wechselwirkung mathematisch beschreiben und berechnen zu können. In der Praxis sind diese Verfahren jedoch sehr kompliziert und es lassen sich für die ursprünglich exakten Gleichungen nur Näherungsmethoden verwenden. Deswegen bedient man sich des Konzepts der Störungstheorie. Eine Wechselwirkung ist i.Allg. verknüpft mit einer Kopplungskonstanten. Die Störungstheorie führt nun z.B. eine systematische Entwicklung des Problems in der Kopplungskonstanten g durch. Die Gleichungen können dann Ordnung für Ordnung in dieser Entwicklung gelöst werden. Dieses Konzept ist jedoch nur anwendbar, wenn g klein genug ist, da sonst die zugehörige Reihenentwicklung nicht schnell oder gar nicht konvergiert¹. Als problematisch erweist sich dabei die Tatsache, dass der Wert der nun effektiven Kopplungskonstanten vom betrachteten Energiebereich abhängig ist, $g = g(E)$. In der QCD wächst die effektive Kopplung bei niedrigen Energien, wie sie hier betrachtet werden, derart, dass das konventionelle Verfahren nicht anwendbar ist. Einen Ausweg stellen effektive Theorien dar. Hierbei beschreibt man einen Prozess nicht durch die fundamentalen Freiheitsgrade, sondern lediglich durch die für diesen Fall relevanten. In dieser Arbeit werden für praktische Rechnungen nicht Quarks und Gluonen als Freiheitsgrade betrachtet, sondern die aus ihnen zusammengesetzten Hadronen, also Mesonen und Nukleonen. Die zugehörige effektive Theorie wird chirale Störungstheorie (χ PT) genannt.

Zunächst wird in diesem Kapitel das Weinberg'sche Zählschema (engl. *power counting*) erläutert, welches die Basis für die Anwendung effektiver Feldtheorien liefert. Danach wird die chirale Störungstheorie vorgestellt. Aus-

¹Störungsreihen konvergieren i.Allg. nicht absolut sondern nur asymptotisch für $g \rightarrow 0$.

gangspunkt ist hierbei der Sektor der pseudoskalaren Mesonen. Die Theorie kann auch auf Baryonen erweitert werden, was im nächsten Unterkapitel dargestellt wird. Danach wird gezeigt, wie man die leichtesten Vektormesonen in die Theorie einbauen kann. Ein weiterer wichtiger Gesichtspunkt bei einer effektiven Theorie ist die Renormierbarkeit, welcher zuletzt noch erklärt wird. Insbesondere der Einbau von „schweren“ Freiheitsgraden in die Theorie verkompliziert dieses Verfahren, weswegen hier die benötigten Methoden noch näher erläutert werden sollen. Die in diesem Kapitel vorgestellten Methoden folgen im Wesentlichen der Darstellung von [Sch 03].

3.1 Das Weinberg'sche Zählschema

Das Konzept der effektiven Feldtheorie geht im Wesentlichen auf Weinberg [Wei 79] zurück und lässt sich folgendermaßen zusammenfassen:

Eine störungstheoretische Beschreibung durch die allgemeinste Lagrangedichte, die alle möglichen Terme beinhaltet, welche die angenommenen Symmetrien berücksichtigt, liefert die allgemeinste S-Matrix, die verträglich ist mit den Grundprinzipien der Quantenfeldtheorie und den angenommenen Symmetrien.

Eine auf diese Art konstruierte Lagrangedichte besitzt jedoch i.Allg. eine unendliche Anzahl an Termen. Um in der Praxis Rechnungen durchführen zu können, muss man also in der Lage sein, diese systematisch zu ordnen, wobei der Ordnungsparameter die Wichtigkeit der Beiträge einzelner Terme widerspiegelt. Dieses Verfahren ist als Weinberg'sches Zählschema bekannt. Es wurde ursprünglich für die chirale Störungstheorie im Sektor der pseudoskalaren Mesonen entwickelt. Dabei soll einem Feynmandiagramm eine so genannte chirale Ordnung zugewiesen werden, die sich folgendermaßen ergibt. Man reskaliert externe Impulse linear, d.h. $p \mapsto tp$ und die Massen der leichten Quarks quadratisch, $m_q \mapsto t^2 m_q$. Die chirale Dimension D , welche die Wichtigkeit eines Diagramms angibt, ist folgendermaßen mit der Amplitude $\mathcal{M}(p, m_q)$ eines Feynmandiagramms verknüpft

$$\mathcal{M}(tp, t^2 m_q) = t^D \mathcal{M}(p, m_q). \quad (3.1)$$

Je größer D für ein gegebenes Diagramm, desto geringer sollte sein Beitrag zur Gesamtamplitude sein. Für den Sektor der pseudoskalaren Mesonen lässt sich folgende allgemeine Formel für die chirale Dimension angeben:

$$D = 2 + \sum_{n=1}^{\infty} 2(n-1)N_{2n} + 2N_L. \quad (3.2)$$

N_{2n} bezeichnet die Anzahl an Vertizes, welche aus $\mathcal{L}_{2n}$ stammen, und N_L ist die Anzahl unabhängiger Schleifenimpulse.

3.2 Mesonen in χPT

Das Ziel ist es, die allgemeinste Theorie zu finden, welche die Dynamik der Goldstonebosonen beschreibt, da diese mit der spontanen Symmetriebrechung in der QCD in Verbindung stehen. Im chiralen Grenzfall soll die zugehörige Lagrangedichte invariant unter $SU(3)_L \times SU(3)_R \times U(1)_V$ sein (siehe Kapitel 2.2). In dieser Arbeit soll jedoch auch das s-Quark zu den schweren Quarks gezählt werden, weswegen nur noch eine Invarianz unter $SU(2)_L \times SU(2)_R \times U(1)_V$ benötigt wird. Man beschreibt die Pionfelder mittels einer nichtlinearen Realisierung der Gruppe $G = SU(2)_L \times SU(2)_R \times U(1)_V$, damit der Grundzustand aufgrund der spontanen Symmetriebrechung lediglich unter $SU(2)_V \times U(1)$ invariant ist. Die Pionfelder werden dabei folgendermaßen durch eine speziell unitäre Matrix beschrieben:

$$U(x) = \exp\left(\frac{i\Phi(x)}{F}\right), \quad \Phi(x) = \sum_{i=1}^3 \tau_i \phi_i(x) = \begin{pmatrix} \pi^0(x) & \sqrt{2}\pi^+(x) \\ \sqrt{2}\pi^-(x) & -\pi^0(x) \end{pmatrix}. \quad (3.3)$$

Der Parameter F ist die Pionzerfallskonstante im chiralen Grenzfall, wobei gilt $F_\pi = F(1 + \mathcal{O}(\hat{m}))$ und $\hat{m}$ die mittlere Masse aus u- und d-Quark bezeichnet. Für $SU(2)$ -Symmetrie gilt $m_u = m_d = \hat{m}$ [GL 84]. Das Transformationsverhalten der Pionfelder ist durch

$$U \mapsto V_R U V_L^\dagger, \quad (3.4)$$

gegeben mit $(V_L, V_R) = (V_L(x), V_R(x)) \in SU(2)_L \times SU(2)_R$. Der nächste Schritt ist der Einbau von Wechselwirkungen mit externen Feldern. Realisiert wird dies mit folgenden weiteren Bausteinen,

$$\begin{aligned} D_\mu U &= \partial_\mu U - ir_\mu U + iUl_\mu, \\ f_{\mu\nu}^R &= \partial_\mu r_\nu - \partial_\nu r_\mu - i[r_\mu, r_\nu], \\ f_{\mu\nu}^L &= \partial_\mu l_\nu - \partial_\nu l_\mu - i[l_\mu, l_\nu], \\ \chi &= 2B(s + ip), \end{aligned} \quad (3.5)$$

mit $r_\mu = v_\mu + a_\mu$, $l_\mu = v_\mu - a_\mu$ und $2F^2B = -\langle \bar{q}q \rangle$. Die letzte Gleichung liefert eine Beziehung für das skalare Quarkkondensat im chiralen Grenzfall und die darin auftauchende Konstante B wird dadurch bestimmt. Das Transformationsverhalten der Bausteine wurde bereits in Gleichung (2.33) angegeben.

Um die allgemeinste Lagrangedichte für die Pionen und ihre Wechselwirkungen mit externen Feldern zu erhalten, gilt es die Bausteine aus Gleichung (3.5) auf alle erlaubten Arten zu kombinieren. Die so erzeugten Terme müssen jedoch alle Symmetrien der QCD korrekt berücksichtigen (siehe Kapitel 2). Die verbleibenden Terme sind in der Regel nicht unabhängig voneinander und deswegen kann man z.B. durch Anwenden der Bewegungsgleichungen, Spurrelationen und anderer Techniken einige der erzeugten Terme ineinander überführen [FS 96]. Dennoch verbleibt eine unendliche Anzahl an Termen. Damit man diese handhaben kann, wird eine Systematik für ihre Anordnung benötigt. Dabei greift man auf das Prinzip des Weinberg'schen Zählschemas zurück, um den einzelnen Termen eine chirale Ordnung zuzuweisen. Für die Bausteine lautet sie

$$U = \mathcal{O}(q^0), \quad D_{\mu_1} \cdots D_{\mu_i} U = \mathcal{O}(q^i), \quad f_{\mu\nu}^{R/L}, \chi = \mathcal{O}(q^2). \quad (3.6)$$

Der Parameter q soll hierbei allgemein für eine kleine Größe, d.h. Pionmasse oder kleine Impulse stehen. Die zu konstruierende Lagrangedichte muss ein Lorentzskalar sein, d.h. es dürfen keine freien Lorentzindizes auftreten. Damit ist die chirale Ordnung eines erlaubten Terms stets gerade, da lediglich die kovariante Ableitung ungerade Ordnungen liefern könnte, aber stets eine gerade Anzahl von kovarianten Ableitungen auftreten muss. Die Lagrangedichte ist somit symbolisch von der Form

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_2 + \mathcal{L}_4 + \cdots. \quad (3.7)$$

In der niedrigsten Ordnung lautet die vollständige Lagrangedichte

$$\mathcal{L}_\pi^{(2)} = \frac{F^2}{4} \text{Tr}[D_\mu U (D^\mu U)^\dagger] + \frac{F^2}{4} \text{Tr}[\chi U^\dagger + U \chi^\dagger]. \quad (3.8)$$

In dieser Arbeit wird auch die Lagrangedichte der vierten Ordnung benötigt [GL 84, GSS 88]. Im Folgenden soll jedoch nur der Anteil angegeben werden, welcher tatsächlich von Relevanz für die Elektropionproduktion ist. Dieser lautet

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_\pi^{(4)} = & \frac{l_3 + l_4}{16} [\text{Tr}(\chi U^\dagger + U \chi^\dagger)]^2 + \frac{l_4}{8} \text{Tr}[D_\mu U (D^\mu U)^\dagger] \text{Tr}(\chi U^\dagger + U \chi^\dagger) \\ & + i \frac{l_6}{2} \text{Tr}[f_{\mu\nu}^R D^\mu U (D^\nu U)^\dagger + f_{\mu\nu}^L (D^\mu U)^\dagger D^\nu U] + \dots \end{aligned} \quad (3.9)$$

Die Größen l_i stellen genauso wie B und F Niederenergiekonstanten (engl. *low-energy constants*, kurz LECs) dar. Diese lassen sich nicht aus χ PT direkt ableiten. Sie spiegeln jedoch die Eigenschaften der QCD bei niedrigen Energien wider. Die numerischen Werte dieser LECs werden in der Praxis durch Anpassung an experimentelle Daten oder Ergebnisse der Gitter-QCD bestimmt.

3.3 χ PT für Nukleonen

Da in dieser Arbeit Nukleonen als baryonische Freiheitsgrade verwendet werden, soll im Folgenden erklärt werden, wie diese in die Theorie eingebaut werden. Man fasst hierfür Proton und Neutron zu einem Isospinor zusammen, da beide Isospin $1/2$ haben,

$$\Psi = \begin{pmatrix} p \\ n \end{pmatrix}. \quad (3.10)$$

Die Einträge p und n sind dabei selbst wieder vierkomponentige Diracfelder. Da man hier Fermionen betrachtet, stehen die Gammamatrizen als zusätzliche Bausteine für die Konstruktion der Lagrangedichte zur Verfügung. Dadurch kann man auch Terme mit einer ungeraden Anzahl an kovarianten Ableitungen in der Lagrangedichte konstruieren, wodurch diese eine ungerade chirale Ordnung besitzen können. Man erhält folgende weitere Bausteine für die Konstruktion der Lagrangedichte:

$$\begin{aligned} D_\mu \Psi &= (\partial_\mu + \Gamma_\mu - i v_\mu^{(s)}) \Psi, \\ \Gamma_\mu &= \frac{1}{2} [u^\dagger (\partial_\mu - i r_\mu) u + u (\partial_\mu - i l_\mu) u^\dagger], \\ u_\mu &= i [u^\dagger (\partial_\mu - i r_\mu) u - u (\partial_\mu - i l_\mu) u^\dagger], \\ \chi_\pm &= u^\dagger \chi u^\dagger \pm u \chi^\dagger u, \\ f_{\mu\nu}^\pm &= u f_{\mu\nu}^L u^\dagger \pm u^\dagger f_{\mu\nu}^R u, \\ v_{\mu\nu}^{(s)} &= \partial_\mu v_\nu^{(s)} - \partial_\nu v_\mu^{(s)}, \end{aligned} \quad (3.11)$$

mit unitärem

$$u(x) = \sqrt{U(x)}, \quad (3.12)$$

wobei U durch Gleichung (3.3) definiert ist. Die chirale Ordnung dieser Ausdrücke ist

$$\begin{aligned} \Psi, \bar{\Psi} &= \mathcal{O}(q^0), & D_\mu \Psi &= \mathcal{O}(q^0), & 1, \gamma_\mu, \gamma_5 \gamma_\mu, \sigma_{\mu\nu} &= \mathcal{O}(q^0), \\ \chi_\pm, f_{\mu\nu}^\pm, v_{\mu\nu}^{(s)} &= \mathcal{O}(q^2), & u_\mu &= \mathcal{O}(q^1), & \gamma_5 &= \mathcal{O}(q^1), \\ (i \not{D} - m) \Psi &= \mathcal{O}(q^1). \end{aligned} \quad (3.13)$$

Die hier angegebene Ordnung stellt immer die niedrigste chirale Ordnung eines Terms dar. So besitzt z.B. γ_μ einen Teil der Ordnung q^0 (γ_0) und einen Teil der Ordnung q^1 (γ_i). Außerdem muss noch das Verhalten der oben angegebenen Bausteine unter chiralen Transformationen bekannt sein. Dieses

lautet

$$\begin{aligned}
\Psi &\mapsto K(V_L, V_R, U)\Psi, \\
\bar{\Psi} &\mapsto \bar{\Psi}K^{-1}(V_L, V_R, U), \\
X &\mapsto K(V_L, V_R, U)XK^{-1}(V_L, V_R, U), \quad X \in \{u_\mu, \chi_\pm, f_{\mu\nu}^\pm\}, \\
v_{\mu\nu}^{(s)} &\mapsto v_{\mu\nu}^{(s)},
\end{aligned} \tag{3.14}$$

wobei gilt

$$K(V_L, V_R, U) = \sqrt{V_R U V_L^\dagger}^{-1} V_R \sqrt{U}. \tag{3.15}$$

Man beachte, dass in der Funktion $K(V_L, V_R, U)$ die Goldstonebosonen enthalten sind. Nach dem Eichprinzip transformiert die kovariante Ableitung $D_\mu \Psi$ wie das Feld Ψ ,

$$D_\mu \Psi \mapsto K(V_L, V_R, U) D_\mu \Psi. \tag{3.16}$$

Somit erhält man für die Lagrangedichte erster Ordnung [GSS 88]

$$\mathcal{L}_{\pi N}^{(1)} = \bar{\Psi} \left(i\gamma^\mu D_\mu - m + \frac{\overset{\circ}{g}_A}{2} \gamma^\mu \gamma_5 u_\mu \right) \Psi. \tag{3.17}$$

Die Parameter m und $\overset{\circ}{g}_A$ sind Niederenergiekonstanten, welche mit der Masse des Nukleons und der Axialvektorkopplungskonstante im chiralen Grenzfall identifiziert werden. Auf Baumniveau tragen bei der Elektropionproduktion in einer Rechnung bis zur vierten Ordnung auch Diagramme mit Vertizes von $\mathcal{L}_{\pi N}^{(2)}$, $\mathcal{L}_{\pi N}^{(3)}$ und $\mathcal{L}_{\pi N}^{(4)}$ bei. Hier werden lediglich die relevanten Terme angegeben (insgesamt sind es in der zweiten Ordnung sieben, in der dritten Ordnung 23 und in der vierten Ordnung 118 Terme) [Fet+ 00]:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{\pi N}^{(2)} &= c_1 \bar{\Psi} \text{Tr}(\chi_+) \Psi - \frac{c_2}{4m^2} \text{Tr}(u_\mu u_\nu) [\bar{\Psi} D^\mu D^\nu \Psi + (\bar{\Psi} D^\mu D^\nu \Psi)^\dagger] \\
&\quad + \frac{c_3}{2} \bar{\Psi} \text{Tr}(u_\mu u^\mu) \Psi + \frac{ic_4}{4} \bar{\Psi} (u_\mu, u_\nu) \sigma^{\mu\nu} \Psi \\
&\quad + \frac{1}{2} c_6 \bar{\Psi} f_{\mu\nu}^+ \sigma^{\mu\nu} \Psi + \frac{1}{2} c_7 \bar{\Psi} v_{\mu\nu}^{(s)} \sigma^{\mu\nu} \Psi + \dots \quad .
\end{aligned} \tag{3.18}$$

Bei den c_i handelt es sich um Niederenergiekonstanten. Gleiches gilt für die d_i in $\mathcal{L}_{\pi N}^{(3)}$

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{\pi N}^{(3)} = & d_6 \frac{i}{2m} \left\{ \bar{\Psi} [D^\mu, f_{\mu\nu}^+] D^\nu \Psi - \left(\bar{\Psi} [D^\mu, \tilde{f}_{\mu\nu}^+] D^\nu \Psi \right)^\dagger \right\} \\
& + d_7 \frac{i}{2m} \left\{ \bar{\Psi} [D^\mu, \text{Tr}[f_{\mu\nu}^+ + 2v_{\mu\nu}^{(s)}]] D^\nu \Psi \right. \\
& \left. - \left(\bar{\Psi} [D^\mu, \text{Tr}[f_{\mu\nu}^+ + 2v_{\mu\nu}^{(s)}]] D^\nu \Psi \right)^\dagger \right\} \\
& + d_8 \frac{i}{2m} \left\{ \bar{\Psi} \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} \text{Tr}[\tilde{f}_{\mu\nu}^+ u_\alpha] D_\beta \Psi - \left(\bar{\Psi} \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} \text{Tr}[\tilde{f}_{\mu\nu}^+ u_\alpha] D_\beta \Psi \right)^\dagger \right\} \\
& + d_9 \frac{i}{2m} \left\{ \bar{\Psi} \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} \text{Tr}[f_{\mu\nu}^+ + 2v_{\mu\nu}^{(s)}] u_\alpha D_\beta \Psi \right. \\
& \left. - \left(\bar{\Psi} \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} \text{Tr}[f_{\mu\nu}^+ + 2v_{\mu\nu}^{(s)}] u_\alpha D_\beta \Psi \right)^\dagger \right\} \\
& + \frac{1}{2} d_{16} \bar{\Psi} \gamma^\mu \gamma_5 \text{Tr}(\chi_+) u_\mu \Psi + \frac{i}{2} d_{18} \bar{\Psi} \gamma^\mu \gamma_5 [D_\mu, \chi_-] \Psi \\
& - d_{20} \frac{i}{8m^2} \left\{ \bar{\Psi} \gamma^\mu \gamma_5 [\tilde{f}_{\mu\nu}^+, u_\lambda] D^{\lambda\nu} \Psi - \left(\bar{\Psi} \gamma^\mu \gamma_5 [\tilde{f}_{\mu\nu}^+, u_\lambda] D^{\lambda\nu} \Psi \right)^\dagger \right\} \\
& + \frac{i}{2} d_{21} \bar{\Psi} \gamma^\mu \gamma_5 [\tilde{f}_{\mu\nu}^+, u^\nu] \Psi + \frac{1}{2} d_{22} \bar{\Psi} \gamma^\mu \gamma_5 [f_{\mu\nu}^-, D^\nu] \Psi + \dots \quad (3.19)
\end{aligned}$$

Folgende Konventionen wurden hierbei verwendet

$$\begin{aligned}
D^{\alpha\beta} &= \{D^\alpha, D^\beta\}, \\
\tilde{X} &= X - \frac{1}{2} \text{Tr}(X). \quad (3.20)
\end{aligned}$$

Des Weiteren wird noch

$$h_{\mu\nu} = [D_\mu, u_\nu] + [D_\nu, u_\mu], \quad (3.21)$$

benötigt, welches symmetrisch unter Vertauschung der beiden Lorentzindizes ist. Außerdem tritt noch eine n -fache kovariante Ableitung auf:

$$D_{\alpha\beta\dots\omega}^n = \{D_\alpha, \{D_\beta, \{\dots, D_\omega\}\}\}. \quad (3.22)$$

Für die Rechnung bis zur chiralen Ordnung $\mathcal{O}(q^4)$ werden folgende 19 Terme benötigt, wobei h.c. für das hermitesch konjugierte des Ausdrucks in Klam-

mern steht und die e_i Niederenergiekonstanten bezeichnen

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{\pi N}^{(4)} = & -e_{48} \frac{1}{4m} \{i\bar{\Psi} \text{Tr}[f_{\lambda\mu}^+ + 2v_{\lambda\mu}^{(s)}] h_\nu^\lambda \gamma_5 \gamma^\mu D^\nu \Psi + h.c.\} \\
& -e_{49} \frac{1}{4m} \{i\bar{\Psi} \text{Tr}[f_{\lambda\mu}^+ + 2v_{\lambda\mu}^{(s)}] h_\nu^\lambda \gamma_5 \gamma^\nu D^\mu \Psi + h.c.\} \\
& +e_{50} \frac{1}{24m^3} \{i\bar{\Psi} \text{Tr}[f_{\lambda\mu}^+ + 2v_{\lambda\mu}^{(s)}] h_{\nu\rho} \gamma_5 \gamma^\lambda D^{\mu\nu\rho} \Psi + h.c.\} \\
& -e_{51} \frac{1}{4m} \{i\bar{\Psi} u^\lambda [D_\lambda, \text{Tr}[f_{\mu\nu}^+ + 2v_{\mu\nu}^{(s)}]] \gamma_5 \gamma^\mu D^\nu \Psi + h.c.\} \\
& -e_{52} \frac{1}{4m} \{i\bar{\Psi} u_\mu [D^\lambda, \text{Tr}[f_{\lambda\nu}^+ + 2v_{\lambda\nu}^{(s)}]] \gamma_5 \gamma^\mu D^\nu \Psi + h.c.\} \\
& -e_{53} \frac{1}{4m} \{i\bar{\Psi} u_\mu [D_\lambda, \text{Tr}[f_{\lambda\nu}^+ + 2v_{\lambda\nu}^{(s)}]] \gamma_5 \gamma^\nu D^\mu \Psi + h.c.\} \\
& -e_{54} \frac{1}{2} \{i\bar{\Psi} [D^\lambda, [D_\lambda, \text{Tr}[f_{\mu\nu}^+ + 2v_{\mu\nu}^{(s)}]]] \sigma^{\mu\nu} \Psi + h.c.\} \\
& -e_{67} \frac{1}{4m} \{i\bar{\Psi} \text{Tr}[\tilde{f}_{\lambda\mu}^+ h_\nu^\lambda] \gamma_5 \gamma^\mu D^\nu \Psi + h.c.\} \\
& -e_{68} \frac{1}{4m} \{i\bar{\Psi} \text{Tr}[\tilde{f}_{\lambda\mu}^+ h_\nu^\lambda] \gamma_5 \gamma^\nu D^\mu \Psi + h.c.\} \\
& +e_{69} \frac{1}{24m^3} \{i\bar{\Psi} \text{Tr}[\tilde{f}_{\lambda\mu}^+ h_{\nu\rho}] \gamma_5 \gamma^\mu D^{\mu\nu\rho} \Psi + h.c.\} \\
& -e_{70} \frac{1}{4m^2} \{i\bar{\Psi} [\tilde{f}_{\lambda\mu}^+, h_{\nu\rho}] \epsilon_\tau^{\lambda\mu\nu} D^{\rho\tau} \Psi + h.c.\} \\
& -e_{71} \frac{1}{4m} \{i\bar{\Psi} \text{Tr}[u^\lambda [D_\lambda, \tilde{f}_{\mu\nu}^+]] \gamma_5 \gamma^\mu D^\nu \Psi + h.c.\} \\
& -e_{72} \frac{1}{4m} \{i\bar{\Psi} \text{Tr}[u_\mu [D^\lambda, \tilde{f}_{\lambda\nu}^+]] \gamma_5 \gamma^\mu D^\nu \Psi + h.c.\} \\
& -e_{73} \frac{1}{4m} \{i\bar{\Psi} \text{Tr}[u_\mu [D^\lambda, \tilde{f}_{\lambda\nu}^+]] \gamma_5 \gamma^\nu D^\mu \Psi + h.c.\} \\
& -e_{74} \frac{1}{2} \bar{\Psi} [D^\lambda, [D_\lambda, \tilde{f}_{\mu\nu}^+]] \sigma^{\mu\nu} \Psi \\
& -e_{105} \frac{1}{2} \bar{\Psi} \text{Tr}[f_{\mu\nu}^+ + 2v_{\mu\nu}^{(s)}] \text{Tr}[\chi^+] \sigma^{\mu\nu} \Psi \\
& -e_{106} \frac{1}{2} \bar{\Psi} \text{Tr}[\tilde{f}_{\mu\nu}^+] \text{Tr}[\chi^+] \sigma^{\mu\nu} \Psi \\
& -e_{112} \frac{1}{4m} \{\bar{\Psi} \text{Tr}[f_{\mu\nu}^+ + 2v_{\mu\nu}^{(s)}] \tilde{\chi}_- \gamma_5 \gamma^\mu D^\nu \Psi + h.c.\} \\
& -e_{113} \frac{1}{4m} \{\bar{\Psi} \text{Tr}[\tilde{f}_{\mu\nu}^+ \tilde{\chi}_-] \gamma_5 \gamma^\mu D^\nu \Psi + h.c.\}. \tag{3.23}
\end{aligned}$$

3.4 Vektormesonen in χPT

In diesem Unterkapitel wird ein systematischer Weg vorgestellt, die Vektormesonen ρ und ω in mesonische und baryonische chirale Störungstheorie einzubauen. Die Relevanz von Vektormesonen für hadronische Prozesse ist schon lange phänomenologisch bekannt. Zusätzlich soll hier illustriert werden, welche Auswirkungen durch den Einbau von Vektormesonen in die Theorie zu erwarten sind und wodurch sie entstehen.

3.4.1 Grundlagen

Bereits 1957 postulierte Nambu [Nam 57] die Existenz eines neutralen Vektormesons, um die elektromagnetische Struktur des Nukleons zu erklären (siehe [Sak 69] für weitere Details). In den Jahren 1961-63 wurden Vektormesonen entdeckt, welche die benötigten Quantenzahlen besitzen [Als+ 61, Erw+ 61, Mag+ 61, Con+ 63, Sch+ 63]. Es zeigte sich, dass diese Mesonen phänomenologisch von großer Wichtigkeit sind, weswegen sie auf verschiedene Arten in effektiven Lagrangedichten berücksichtigt wurden (siehe z.B. [Sch 67, WZ 67, Wei 68]). In diesem Zusammenhang wurde der Begriff der Vektormesondominanz (VMD) bzw. des Vektormesondominanzmodells geprägt, welches die oben genannte Struktur des Nukleons sehr gut erklären konnte. Dabei wird angenommen, dass die Kopplung des Photons an das Nukleon im Wesentlichen durch Vektormesonen im Zwischenzustand vermittelt wird. Das Photon mischt sich dabei mit dem Vektormeson, welches dann an das Hadron ankoppelt. Die VMD spiegelt sich auch in der chiralen Störungstheorie durch die so genannte Resonanzsaturierung wieder. In [Eck+ 89a] wurde gezeigt, dass der Einbau von Vektormesonen in die Theorie dazu führt, dass die auftretenden Niederenergiekonstanten fast vollständig durch deren Beiträge bestimmt sind. Insbesondere wurde dort auch gezeigt, dass in der mesonischen chiralen Störungstheorie bei niedrigen Energien keine weiteren schweren Freiheitsgrade benötigt werden.

Ein weiterer interessanter Aspekt der Vektormesonen stellt die Universalität ihrer Kopplung dar. Man konnte zeigen, dass die Kopplungsstärke von Vektormesonen an Pionen und Nukleonen bzw. für alle Teilchen mit Isospin näherungsweise gleich ist. Historisch wurde dies als eine Konsequenz der Vektormesondominanz gesehen. In chiraler Störungstheorie konnte gezeigt werden, dass die Universalität schon rein aus der Forderung nach Konsistenz der Theorie bezüglich Renormierbarkeit folgt [Dju+ 04].

Ein Ziel dieser Arbeit ist eine Verbesserung der Beschreibung der Q^2 -Abhängigkeit der Elektropionproduktion durch den Einbau von Vektormesonen zu erreichen. Neben der bereits genannten Vektormesondominanz führt

der Einbau von Resonanzen oder schwereren Freiheitsgraden i.Allg. immer zu einer Erhöhung des beschreibbaren Energiebereichs einer physikalischen Reaktion.

Durch den Einbau von Vektormesonen in die Theorie tritt ein Mischungsterm mit dem Photon auf. Dabei kommt der Propagator des Vektormesons in bestimmten Diagrammen vor. Stark vereinfacht gesprochen erhält man dabei einen Term der Form

$$\frac{1}{-Q^2 - M_V^2}, \quad (3.24)$$

wobei M_V die Masse des Vektormesons darstellt. Entwickelt man diesen Ausdruck um $Q^2 = 0$, so erhält man symbolisch eine Reihe der Form

$$-\frac{1}{M_V^2} + \frac{Q^2}{M_V^4} - \frac{Q^4}{M_V^6} + \dots \quad (3.25)$$

Deshalb erwartet man für größere Werte von Q^2 , dass sich das Q^2 -Verhalten durch den geschlossenen Ausdruck (3.24) besser beschreiben lässt. Für die Nukleonformfaktoren konnte dies z.B. in [KM 00, SGS 05] gezeigt werden. Diese Rechnung wird auch in Anhang C.7 noch einmal kurz vorgestellt. In Elektropionproduktion wird auch eine Verbesserung erwartet, da die Nukleonformfaktoren z.B. in der S-Welle eine wichtige Rolle spielen [SK 91]. In chiraler Störungstheorie ohne Resonanzen sind die Terme aus Gleichung (3.25) bis zur berechneten Ordnung in den Niederenergiekonstanten versteckt. Durch Einbauen der entsprechenden Freiheitsgrade lassen sich diese Beiträge jedoch vollständig berücksichtigen.

3.4.2 Die Lagrangedichte für ρ - und ω -Mesonen

Eine Lagrangedichte für Vektormesonen lässt sich auf verschiedene Arten konstruieren. Grundlegend unterscheidet man hierbei zwischen zwei verschiedenen Formulierungen für die Felder. Sie lassen sich mittels eines antisymmetrischen Tensorfeldes $V^{\mu\nu}$ oder eines Vektorfeldes V^μ beschreiben. Der Isospin soll hierbei zunächst vernachlässigt werden. Unter bestimmten Voraussetzungen sind beide Formulierungen formal äquivalent [Nei 11], d.h. sie führen zu den gleichen Ergebnissen für physikalische Observable. Dies wurde für den mesonischen Sektor zuerst in [Eck+ 89b] gezeigt, indem entsprechende chirale invariante lokale Operatoren hinzugefügt wurden. Eine Erweiterung auf Wechselwirkungen mit Baryonen wurde in [BM 96] untersucht. Hier wird die Vektorfeldformulierung verwendet. Der freie Term der Lagrangedichte aus [Eck+ 89b] hat folgende Form,

$$\mathcal{L}_2 = -\frac{1}{2}\text{Tr}[V_{\mu\nu}V^{\mu\nu}] + M_\rho^2\text{Tr}[V_\mu V^\mu]. \quad (3.26)$$

Die 2 in $\mathcal{L}_2$ gibt die Anzahl der auftretenden Vektorfelder an. Hierbei gilt für ρ -Mesonen

$$V_\mu = \rho_{\mu,a} \frac{\tau^a}{2}, \quad (3.27)$$

$$V_{\mu\nu} = \rho_{\mu\nu} = \partial_\mu \rho_\nu - \partial_\nu \rho_\mu, \quad (3.28)$$

wobei M_ρ die Masse des ρ -Mesons im chiralen Grenzfall ist. Wie bereits oben erwähnt, besitzen Vektorfelder in dieser Darstellung ein besonders einfaches Transformationsverhalten,

$$V_\mu \rightarrow K V_\mu K^\dagger, \quad (3.29)$$

d.h. sie transformieren homogen unter der chiralen Gruppe.

Die hier verwendete Lagrangedichte soll einer systematischen Entwicklung in kleinen Parametern, d.h. Massen und Impulsen folgen. Auch Kopplungskonstanten sollen umso stärker unterdrückt sein, je höher ihre inverse Massendimension ist. Für die Elektropionproduktion werden damit bis zur chiralen Ordnung $\mathcal{O}(q^3)$ Wechselwirkungen mit einer bestimmten Anzahl an ρ -Feldern benötigt. Terme mit mehr als zwei ρ -Feldern sollen somit als niedrigste Ordnung eine dimensionslose Kopplungskonstante besitzen. Berücksichtigt man Lorentzinvarianz und Paritätserhaltung, so erhält man für eine allgemeine Wechselwirkung zwischen drei Vektorfeldern die Lagrangedichte

$$\mathcal{L}_3 = -g_{abc} V_{\mu,a} V_{\nu,b} \partial^\mu V_c^\nu, \quad (3.30)$$

und für vier Felder

$$\mathcal{L}_4 = -h_{abcd} V_{\mu,a} V_{\nu,b} V_c^\mu V_d^\nu, \quad (3.31)$$

wobei g_{abc} ($a, b, c \in \{1, 2, 3\}$) und h_{abcd} ($a, b, c, d \in \{1, 2, 3\}$) Kopplungskonstanten sind [DGS 10]. Die Anzahl der Kopplungen für diese Terme lässt sich für g_{abc} auf sieben und für h_{abcd} auf fünf verringern, wenn man Hermitizität und Invarianz unter globalen $U(1)$ -Transformationen fordert. Da die Theorie selbstkonsistent sein soll, führt eine Quantisierung auf Zwangsbedingungen für die Kopplungen. Dies liefert Beziehungen zwischen ihnen. Damit sind alle Kopplungskonstanten für Selbstwechselwirkungen von vier Feldern durch die Kopplungskonstanten für drei Felder darstellbar. Zuletzt müssen noch alle UV-Divergenzen durch Redefinition von Massen und Kopplungskonstanten absorbiert werden können. Damit bleibt nur noch eine unabhängige Konstante, nämlich

$$g_{abc} = g_0 \epsilon_{abc}. \quad (3.32)$$

Wechselwirkungen zwischen Vektormesononen, externen Feldern und Pionen, welche die geforderten Symmetrien berücksichtigen, wurden bereits zu der hier benötigten chiralen Ordnung vollständig untersucht [Eck+ 89b]. Dabei

wird die chirale Ordnung der Terme wie folgt ermittelt: Vektormesonen selbst werden als schwere Teilchen angesehen. Ableitungen auf Vektormesonfelder werden als chirale Ordnung $\mathcal{O}(q^1)$ gezählt. Veranschaulichen lässt sich dies am einfachsten am $\gamma\rho$ -Mischungsververtex, bei dem das ρ den Impuls des Photons übernimmt, welcher eine kleine Größe ist. Somit lässt sich rechtfertigen, dass Ableitungen auf Vektormesonen kleine Impulse erzeugen. Der Propagator wird als chirale Ordnung $\mathcal{O}(q^0)$ (plus höhere Ordnungen) gezählt, wie man z.B. an der Reihenentwicklung in Gleichung (3.25) leicht ablesen kann. Hier benötigt man noch folgende, weitere Wechselwirkungsterme für das ρ , wobei der Term proportional zu d_x eine Umformung bestimmter Terme aus [Eck+ 89b] darstellt:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{\pi\rho} = & -\frac{1}{2\sqrt{2}}f_V\text{Tr}(\rho_{\mu\nu}f_+^{\mu\nu}) + id_x\text{Tr}[\rho_{\mu\nu}\Gamma^{\mu\nu}] \\ & + g_{\gamma\rho\pi}\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\text{Tr}[\rho_\mu\{u_\nu, v_{\rho\sigma}^{(s)}\}],\end{aligned}\quad (3.33)$$

mit

$$\Gamma^{\mu\nu} = \partial^\mu\Gamma^\nu - \partial^\nu\Gamma^\mu + [\Gamma^\mu, \Gamma^\nu]. \quad (3.34)$$

Damit die bisher angegebene Lagrangedichte störungstheoretisch renormierbar ist, wird im Folgenden eine Feldredefinition vorgenommen, da nur für diesen Fall die Renormierbarkeit in [DGS 10] gezeigt wurde. Dafür wird auch zusätzlich die KS RF-Relation [KS 66, RF 66]

$$M_\rho^2 = 2F^2g_0^2, \quad (3.35)$$

benötigt. Nach dem Äquivalenztheorem [KOS 61] hängen physikalische Größen nicht von Feldredefinitionen ab. Dennoch ergeben sich Konsequenzen für die Feynmanregeln, die im nächsten Unterkapitel an einem Beispiel illustriert werden sollen. Es wird nun

$$\rho_\mu \rightarrow \rho_\mu - \alpha\Gamma_\mu \quad (3.36)$$

gewählt, wobei der Parameter α folgendermaßen festgelegt wird:

$$\alpha = \frac{i}{g_0}. \quad (3.37)$$

Die vollständige hier verwendete Wechselwirkungslagrangedichte für Pionen und ρ -Mesonen lautet nun:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{\pi\rho} = & \frac{M_\rho^2 + c_x\text{Tr}(\chi_+)/4}{g_0^2}\text{Tr}[(g_0\rho^\mu - i\Gamma^\mu)(g_0\rho_\mu - i\Gamma_\mu)] \\ & - \frac{1}{2}\text{Tr}(\rho_{\mu\nu}\rho^{\mu\nu}) + id_x\text{Tr}(\rho_{\mu\nu}\Gamma^{\mu\nu}) - \frac{1}{2\sqrt{2}}f_V\text{Tr}(\rho_{\mu\nu}f_+^{\mu\nu}) \\ & + g_{\gamma\rho\pi}\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\text{Tr}(\rho_\mu\{u_\nu, v_{\rho\sigma}^{(s)}\}),\end{aligned}\quad (3.38)$$

mit

$$\rho^{\mu\nu} \rightarrow \rho^{\mu\nu} - ig_0[\rho^\mu, \rho^\nu]. \quad (3.39)$$

Der Term proportional zu c_x liefert eine höhere chirale Korrektur an die Masse des ρ -Mesons und wird zusätzlich berücksichtigt. Die Lagrangedichte liegt nun in der so genannten Weinberg'schen Parametrisierung vor. Den Grund, warum der Startpunkt für die Lagrangedichte ein anderer war, erkennt man an dem nun inhomogenen Transformationsverhalten für das ρ -Feld, welches wesentlich komplizierter ist als im homogenen Fall (K wurde in Gleichung (3.15) definiert, Argument hier unterdrückt):

$$\rho_\mu \rightarrow K\rho_\mu K^\dagger + \frac{i}{g_0}K\partial_\mu K^\dagger. \quad (3.40)$$

Mit diesem inhomogenen Transformationsverhalten wäre es wesentlich schwerer die vollständige Lagrangedichte zu konstruieren.

Für das ω -Meson ist die Formulierung einer im Sinne einer effektiven Feldtheorie renormierbaren Wechselwirkungslagrangedichte weit weniger kompliziert, da es sich um ein isoskalares Teilchen handelt. Deswegen ist es invariant unter chiralen Transformationen. Damit lässt sich die benötigte Wechselwirkungslagrangedichte direkt angeben, wobei im Folgenden nur Terme gezeigt werden, welche für die Elektropionproduktion relevante Wechselwirkungen erzeugen:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\pi\rho\omega} = & -f_\omega\omega^{\mu\nu}v_{\mu\nu}^{(s)} + \frac{1}{2}g_{\pi\rho\omega}\epsilon_{\mu\nu\alpha\beta}\omega^\nu\text{Tr}(\rho^{\alpha\beta}u^\mu), \\ & + g_{\gamma\omega\pi}\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\text{Tr}(\omega^\mu\{u^\nu, f_+^{\rho\sigma}\}) \end{aligned} \quad (3.41)$$

$$\omega^{\mu\nu} = \partial^\mu\omega^\nu - \partial^\nu\omega^\mu. \quad (3.42)$$

Unter der Verwendung der Feldredefinition für das ρ -Meson erhält man für die Wechselwirkung von Vektormesononen mit Nukleonen in niedrigster chiraler Ordnung

$$\mathcal{L}_{N\rho\omega} = \bar{\Psi} \left[g_{\rho NN} \left(\rho_\mu - \frac{i}{g_0}\Gamma_\mu \right) \gamma^\mu + \frac{1}{2}g_\omega\omega_\mu\gamma^\mu \right] \Psi. \quad (3.43)$$

Hier werden für das ρ jedoch noch Terme höherer chiraler Ordnung benötigt. Da sich das Photon ähnlich wie das ρ -Meson verhält, ist der Ausgangspunkt für die Konstruktion der Terme die Pion-Nukleon-Lagrangedichte aus Kapitel 2, bei der folgende Ersetzungen vorgenommen werden und die Feldredefinition aus Gleichung (3.36) erst hinterher durchgeführt wird (somit transformiert hier das Feld ρ_μ in $\rho_{\mu\nu}$ vor der Feldredefinition nach Gleichung (3.29)):

$$f_{\mu\nu}^+ \rightarrow \rho_{\mu\nu}, \quad (3.44)$$

$$iD_\mu \rightarrow \rho_\mu. \quad (3.45)$$

Man erhält folgende weitere Terme für die Lagrangedichte, wobei hier die Feldredefinition aus Gründen der Übersichtlichkeit weggelassen wird und nur relevante Terme angegeben werden,

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{N\rho,\text{Add}} = & \bar{\Psi} \left(G\sigma^{\mu\nu}\partial_\mu\rho_\nu + G_2[D^\mu, \rho_{\mu\nu}]D^\nu + id_8^p\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}\text{Tr}[\rho_{\mu\nu}u_\alpha]D_\beta \right. \\ & + id_{18}^p\gamma_\mu\gamma_5[\rho^\mu, \chi^-] + id_{20}^p\gamma^\mu\gamma_5[\rho_{\mu\nu}, u_\lambda]D^{\lambda\nu} \\ & \left. + id_{21}^p\gamma^\mu\gamma_5[\rho_{\mu\nu}, u^\nu] + 2J_1[\gamma_5\psi\phi - \phi\psi\gamma_5] \right) \Psi.\end{aligned}\quad (3.46)$$

Zuletzt ergibt sich, wie oben bereits erwähnt, aus der Forderung nach störungstheoretischer Renormierbarkeit die Universalität der ρ -Meson-Kopplung durch folgende Beziehung [Dju+ 04]

$$g_{\rho NN} = g_0. \quad (3.47)$$

Die Darstellung des ρ -Mesons durch seine physikalischen Freiheitsgrade erhält man aus den kartesischen Feldern mittels

$$\rho_\mu^\pm = (\rho_{\mu,1} \mp i\rho_{\mu,2})/\sqrt{2}, \quad \rho_\mu^0 = \rho_{\mu,3}. \quad (3.48)$$

Für das bereits erwähnte Zählschema gilt es noch Folgendes zu beachten. Da die Masse des ρ -Mesons im chiralen Grenzfall nicht verschwindet und auch keine kleine Größe ist, treten die gleichen Komplikationen wie beim Nukleon auf. Allerdings konnte in [Fuc+ 03b] gezeigt werden, dass auch Vektormesonen im EOMS-Renormierungsschema bzw. im reformulierten Infrarotregularisierungsschema derart berücksichtigt werden können, dass man ein konsistentes Zählschema erhält.

Mit der Lagrangedichte für Pionen und Nukleonen aus Kapitel 2 und den Wechselwirkungslagrangedichten aus Gleichungen (3.38), (3.41), (3.43) und (3.46) sind nun alle Wechselwirkungen zusammengetragen, welche für eine Berechnung der Elektropionproduktion in chiraler Ordnung $\mathcal{O}(q^3)$ inklusive ρ - und ω -Mesonen notwendig sind.

Nun lässt sich ein konsistentes Zählschema angeben. Der Impuls des einlaufenden/auslaufenden Nukleons wird als Term der nullten chiralen Ordnung gezählt. Der Photonpolarisationsvektor, sowie die Masse des Pions und der Viererimpuls des Photons stellen hier kleine Größen der ersten Ordnung dar. Der Propagator des Pions wird als Ordnung -2 und der Propagator des Nukleons als Ordnung -1 gezählt. Da die Vektormesonen nur virtuell auftreten und dabei entweder den Photonimpuls oder einen Schleifenimpuls tragen, wird ihr Propagator entsprechend ihrer Entwicklung nach diesen Größen als Term der nullten chiralen Ordnung gezählt.



Abbildung 3.1: Linkes Bild: Pionformfaktor in niedrigster chiraler Ordnung. Rechtes Bild: Durch Einbau des ρ -Mesons wird die Kopplung des Photons hauptsächlich durch dieses Diagramm vermittelt.

3.4.3 Beispiele für Konsequenzen aus der Feldredefinition

Als Erstes soll der Vektorformfaktor des Pions in niedrigster chiraler Ordnung betrachtet werden (für Details siehe Anhang C.3). Ohne Vektormesonen als explizite Freiheitsgrade koppelt das Photon direkt an das Pion und der Formfaktor ergibt sich zu (siehe auch Abbildung 3.1)

$$F_\pi^V = 1, \quad (3.49)$$

d.h. der Pionformfaktor in niedrigster Ordnung entspricht genau der Ladung des π^+ (in Einheiten der Elementarladung). Durch den Einbau des ρ -Mesons trägt zusätzlich das rechte Diagramm aus Abbildung 3.1 bei und man erhält für den Formfaktor

$$F_\pi^V = \frac{1}{2} \left(\frac{k^2 M_\rho^2}{F^2 g_0^2 (M_\rho^2 - k^2)} + 2 \right). \quad (3.50)$$

Entwickelt man dieses Ergebnis bis zur niedrigsten Ordnung in k^2 um $k^2 = 0$, so erhält man wieder das Resultat aus der Rechnung ohne Vektormesonen. Das modifizierte Ergebnis demonstriert auf einfache Weise die Vektormesondominanz. Die Impulsabhängigkeit des Pionformfaktors wird hier schon in niedrigster chiraler Ordnung vollständig durch die Kopplung des ρ -Mesons beschrieben. Verwendet man zusätzlich die KSFRF-Relation, so verschwindet die direkte Ankopplung des Photons an das Pion in niedrigster Ordnung.

Als zweites Beispiel wird die Pion-Nukleon-Streuung in niedrigster chiraler Ordnung betrachtet (siehe auch linkes Bild in Abbildung 3.2). Der hier auftretende Wechselwirkungsterm wird häufig auch als Weinberg-Tomozawa-Term bezeichnet [Wei 66, Tom 66]. Unter Vernachlässigung der Isospinindizes und unter der Annahme, dass das Nukleon sich auf der Massenschale

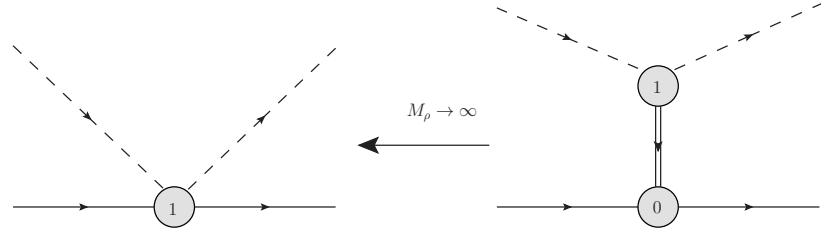


Abbildung 3.2: Linkes Bild: Die Pion-Nukleon-Streuung wird in niedrigster Ordnung durch den Weinberg-Tomozawa-Term beschrieben. Rechtes Bild: Durch Einbau des ρ verschwindet die direkte Pion-Nukleon-Kopplung im linken Bild. In niedrigster Ordnung findet sie sich jedoch im rechten Diagramm wieder.

befindet, erhält man

$$V = \frac{\gamma \cdot q'}{2F^2}, \quad (3.51)$$

wobei q'^μ der Viererimpuls des auslaufenden Pions ist. Durch den Einbau der ρ -Mesonen in die Theorie und durch die Feldredefinition verschwindet der Beitrag des linken Diagramms zur Pion-Nukleon-Streuung vollständig. Er findet sich jedoch in dem neuen Diagramm (rechtes Bild in Abbildung 3.2) wieder. Dazu berechnet man den Term wie oben und erhält

$$V = -\frac{M_\rho^2 \gamma \cdot q'}{2F^2 [(q - q')^2 - M_\rho^2]}, \quad (3.52)$$

wobei q^μ den Viererimpuls des einlaufenden Pions bezeichnet. Dieses Ergebnis kann man nun um $M_\rho = \infty$ entwickeln. Physikalisch gesprochen wird das ρ damit nicht mehr als expliziter Freiheitsgrad berücksichtigt. Das Ergebnis ist in niedrigster Ordnung wieder der Weinberg-Tomozawa-Term aus Gleichung (3.51).

3.5 Renormierung

Die Berechnung eines Prozesses mit Hilfe der Quantenfeldtheorie ist meist nur störungstheoretisch möglich. Ausgehend vom Pfadintegralformalismus entwickelte Richard Feynman eine einfache Methode, eine solche Störungsreihe aufzustellen. Die zu berechnenden Ausdrücke lassen sich als Bilder (Feynmandiagramme) darstellen, denen nach vorgegebenen Regeln mathematische Ausdrücke entsprechen (siehe z.B. [Ryd 85, PS 97]). Man kann diese Diagramme klassifizieren als Baum- und Schleifendiagramme. Letztere stellen Korrekturen der Störungsreihe im Entwicklungsparameter $\hbar$ dar. Innerhalb der Schleifen tritt ein so genannter Schleifenimpuls auf, über den integriert werden muss. Der Integrationsbereich erstreckt sich dabei für alle Komponenten des Impulses von $-\infty$ bis ∞ . Dies führt dazu, dass viele Integrale divergieren. Damit wären auch Observable divergent und die Theorie könnte keine Vorhersagen machen. Man entwickelte daraufhin Methoden, um diese unphysikalischen Divergenzen zu beseitigen. Ein Beispiel ist die Pauli-Villars-Regularisierung [Col 84, Ryd 85]. Bei dieser wird ein zusätzlicher Parameter im Integranden eingeführt, so dass der entsprechende Ausdruck konvergiert. Im nächsten Schritt kann man zeigen, dass man in renormierbaren Theorien die Abhängigkeit von diesem Parameter systematisch in eine Redefinition der Kopplungen der Lagrangedichte absorbieren kann. In dieser Arbeit wird ein anderes Verfahren verwendet, nämlich die dimensionale Regularisierung (siehe z.B. [HV 72, Vel 94]). Diese bietet den Vorteil, die vorhandenen Symmetrien vollständig zu erhalten. Dabei wird die Integration des Schleifenimpulses nicht in vier, sondern durch analytische Fortsetzung in die komplexe Ebene, in D Dimensionen vorgenommen. Dabei ist D eine komplexe Zahl. Führt man nun die Integration aus und entwickelt das Ergebnis in einer Laurentreihe um $D = 4$, so erhält man einen endlichen Anteil und einen Term proportional zu $1/(D - 4)$, welcher die Divergenz für $D \rightarrow 4$ enthält. Der nächste Schritt ist die Renormierung des Integrals, d.h. das Entfernen oder „Verstecken“ der Divergenz durch Umformulierung der Störungsreihe. Dies ist folgendermaßen möglich: In der Lagrangedichte treten diverse Parameter wie z.B. Massen von Teilchen oder Kopplungskonstanten auf. Betrachtet man diese Parameter als „nackte“, d.h. nicht messbare Größen, so kann man sie in einem nächsten Schritt umschreiben in einen physikalisch messbaren Anteil und einen divergenten Anteil. Letzterer wird nun genau so gewählt, dass die Divergenzen in den Schleifenintegralen weggehoben werden. Dieses Verfahren ist nur für manche Quantenfeldtheorien möglich. Dies sind die so genannten renormierbaren Theorien. Effektive Feldtheorien sind renormierbar im modernen Sinne, d.h. man kann alle auftretenden Divergenzen mittels Umformulierung der Kopplungen wegheben [Wei 95a]. Dafür ist jedoch eine

unendliche Anzahl an Kopplungskonstanten nötig.

Im Sektor der mesonischen χ PT wird das so genannte modifizierte minimale Abzugsverfahren ($\widetilde{\text{MS}}$) angewandt. Dabei wird nicht nur eine Divergenz der Form $1/(D-4)$ sondern Ausdrücke proportional zu

$$\frac{2}{D-4} + \gamma_E - 1 - \ln(4\pi) \quad (3.53)$$

subtrahiert, wobei γ_E die Eulerkonstante bezeichnet. Überträgt man diese Methode auf die baryonische χ PT so treten jedoch Probleme auf [GSS 88]. Bestimmt man formal die chirale Ordnung eines Diagramms und vergleicht das Ergebnis mit dem expliziten Ausdruck für das Diagramm, so tritt unter Umständen Folgendes auf: Bei Schleifendiagrammen mit inneren Nukleonlinien können Terme beitragen, deren chirale Ordnung niedriger ist, als durch das *power counting* bestimmt. Diese Terme verletzen also das chirale Zähl-schema. Da Vektormesonen hier auch als schwer betrachtet werden, tritt das Problem des inkonsistenten Zählschemas dort genauso auf.

Ein Ausweg aus dieser Diskrepanz stellt die Formulierung für schwere Baryonen (HB χ PT) dar [JM 91, Ber+ 92]. Hier wird der Impuls des Nukleons aufgespalten in einen Anteil in der Größenordnung der Nukleonmasse und einen kleinen Rest. Im nächsten Schritt ist eine Entwicklung in Termen der Form $1/m_N$ möglich. Dieses Verfahren liefert ein konsistentes Zähl-schema. Als Nachteil stellt sich jedoch die nicht manifest lorentzinvariante Form dieser Methode heraus. Des Weiteren liefert HB χ PT z.B. das falsche analytische Verhalten für die Schwellenregion des skalaren Nukleonformfaktors. Nur eine Aufsummierung unendlich vieler Beiträge würde dieses Problem beheben. Gezeigt wurde dies in [BL 99], wo ein Renormierungsschema entwickelt wurde, welches angewandt auf baryonische chirale Störungstheorie ein konsistentes Zähl-schema ermöglicht. Dieses wird Infrarotregularisierung genannt. Im Folgenden sollen kurz wesentliche Schritte davon an einem Beispiel nachvollzogen werden. Man betrachte das dimensional regularisierte Integral

$$I_{N\pi}(-p, 0) = i \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{1}{[(k-p)^2 - m_N^2 + i0^+][k^2 - M^2 + i0^+]}, \quad (3.54)$$

wobei m_N die Nukleonmasse, M die Pionmasse und p^μ einen Viererimpuls der chiralen Ordnung $\mathcal{O}(q^0)$ bezeichnet. Mittels der Feynmanparametrisierung

$$\frac{1}{ab} = \int_0^1 \frac{dz}{[az + b(1-z)]^2}, \quad (3.55)$$

lässt sich das Integral umschreiben und man erhält

$$I_{N\pi}(-p, 0) = -\frac{1}{(4\pi)^{D/2}} \Gamma\left(2 - \frac{D}{2}\right) \int_0^1 dz [A(z)]^{(D/2)-2}, \quad (3.56)$$

mit

$$\begin{aligned} a &= (k-p)^2 - m_N^2 + i0^+, \quad b = k^2 - M^2 + i0^+, \\ A(z) &= -p^2(1-z)z + m_N^2 z + M^2(1-z) - i0^+. \end{aligned} \quad (3.57)$$

Das Integral aus Gleichung (3.56) wird nun aufgespalten in den so genannten infrarotsingulären Anteil I und den infrarotregulären Anteil R :

$$I_{N\pi} = I + R. \quad (3.58)$$

Diese sind definiert als

$$I = -\frac{1}{(4\pi)^{D/2}} \Gamma(2 - D/2) \int_0^\infty dz [A(z)]^{(D/2)-2}, \quad (3.59)$$

und

$$R = \frac{1}{(4\pi)^{D/2}} \Gamma(2 - D/2) \int_1^\infty dz [A(z)]^{(D/2)-2}. \quad (3.60)$$

Führt man eine chirale Entwicklung der beiden Ausdrücke durch, so ergibt sich

$$I = O(q^{D-3}) + O(q^{D-2}) + O(q^{D-1}) + \dots, \quad (3.61)$$

$$R = O(q^0) + O(q^1) + O(q^2) + \dots, \quad (3.62)$$

wobei q für $(p^2 - m_N^2)/m_N$ bzw. M steht. Der infrarotsinguläre Anteil des Integrals enthält somit nur Terme, welche nicht ganzzahlige Potenzen in q sind, falls D nicht ganzzahlig ist. Der infrarotreguläre Anteil stellt eine gewöhnliche Potenzreihe dar. Die zählschemaverletzenden Terme sind ausschließlich in R enthalten. Das Renormierungsschema von Becher und Leutwyler sieht nun vor, diesen Anteil der Schleifenintegrale abzuziehen, wodurch das chirale Zählschema wiederhergestellt wird. Weiterhin bleibt dabei die chirale Symmetrie der Lagrangedichte erhalten. Die beiden Teilintegrale enthalten jedoch noch immer Divergenzen. Als renormierte Ausdrücke (hier mit Querstrich bezeichnet) findet man schließlich

$$\bar{I} = I - \bar{\lambda}\nu, \quad (3.63)$$

$$\bar{R} = R + (2 + \nu)\bar{\lambda}, \quad (3.64)$$

$$\bar{H} = H + 2\bar{\lambda}, \quad (3.65)$$

mit

$$\bar{\lambda} = \frac{m_N^{D-4}}{(4\pi)^2} \left(\frac{1}{D-4} - \frac{1}{2} (\ln(4\pi) - \gamma_E + 1) \right), \quad (3.66)$$

$$\nu = -\frac{p^2 - m_N^2 + M^2}{p^2}. \quad (3.67)$$

Die Methode ist auch vollständig konsistent mit der rein mesonischen χ PT. Treten im Integranden nur Pionmassen auf, so verschwindet der infrarotreguläre Anteil des Integrals. Treten in einem Integral jedoch nur Nukleonmassen auf, so verschwindet der infrarotsinguläre Anteil und es liefert nach der Renormierung keinen Beitrag mehr. Das Verfahren lässt sich auch mühelos auf Tensorintegrale, d.h. Integrale mit Integrationsimpulsen im Zähler anwenden. Dazu kann man nach einem Standardverfahren [PV 79] diese Integrale zu skalaren Integralen reduzieren. In dieser Formulierung ist jedoch noch nicht geklärt, wie bei Integralen mit zwei verschiedenen schweren Teilchenmassen im Integranden vorgegangen werden muss. Des Weiteren ist die Berechnung des infrarotsingulären Anteils eines Integrals meist recht aufwendig. Unabhängig davon wurde das EOMS- (*extended on-mass-shell*)-Renormierungsschema entwickelt [Fuc+ 03a]. Dieses ist für praktische Berechnungen leichter anwendbar. Außerdem ist die Vorgehensweise für mehrere unterschiedliche Teilchenmassen und eine beliebige Anzahl von Schleifenintegralen bekannt. Auch das reformulierte Infrarotschema [SGS 04], welches danach entwickelt worden ist, bietet diese Vorteile. In den beiden letztgenannten Schemata wird nicht der vollständige infrarotreguläre Anteil eines Schleifenintegrals abgezogen, sondern lediglich die ersten Terme seiner Entwicklung nach kleinen Größen. Als Beispiel wird wieder das Integral aus Gleichung (3.54) verwendet. Hier wird nun eine gleichzeitige Entwicklung in Potenzen der kleinen Größen M und $p^2 - m_N^2$ vorgenommen:

$$\begin{aligned}
& \sum_{l,j=0}^{\infty} \frac{(p^2 - m_N^2)^l (M^2)^j}{l!j!} \left[\left(\frac{1}{2p^2} p^\mu \frac{\partial}{\partial p_\mu} \right)^l \left(\frac{\partial}{\partial M^2} \right)^j \right. \\
& \quad \left. \frac{1}{[(k-p)^2 - m_N^2 + i0^+][k^2 - M^2 + i0^+]} \right] \Big|_{p^2=m_N^2, M^2=0} \\
= & \frac{1}{(k^2 - 2k \cdot p + i0^+)(k^2 + i0^+)} \Big|_{p^2=m_N^2} \\
& + M^2 \frac{1}{(k^2 - 2k \cdot p + i0^+)(k^2 + i0^+)^2} \Big|_{p^2=m_N^2} \\
& + (p^2 - m_N^2) \left[\frac{1}{2m_N^2} \frac{1}{(k^2 - 2k \cdot p + i0^+)^2} \right. \\
& - \frac{1}{2m_N^2} \frac{1}{(k^2 - 2k \cdot p + i0^+)(k^2 + i0^+)} \\
& \left. - \frac{1}{(k^2 - 2k \cdot p + i0^+)^2(k^2 + i0^+)} \right] \Big|_{p^2=m_N^2} + \dots \quad (3.68)
\end{aligned}$$

Führt man nun die Integration aller Terme aus, so ergibt sich

$$R_{N\pi} = - \frac{m_N^{D-4}\Gamma(2-D/2)}{(4\pi)^{D/2}(D-3)} \left[1 - \frac{p^2 - m_N^2}{2m_N^2} + \frac{(D-6)(p^2 - m_N^2)^2}{4m_N^4(D-5)} + \frac{(D-3)M^2}{2m_N^2(D-5)} + \dots \right]. \quad (3.69)$$

Im reformulierten Infrarotschema werden i.Allg. Terme bis zu einer ausreichend hohen Ordnung abgezogen und das renormierte Integral $I_{N\pi}^r$ ergibt sich zu

$$I_{N\pi}^r(-p, 0) = I_{N\pi}(-p, 0) - R_{N\pi}. \quad (3.70)$$

Unterschiedliche Vorfaktoren der Integrale in einem Diagramm führen jedoch dazu, dass in den einzelnen Termen unterschiedlich hohe Ordnungen abgezogen werden. Dieser Unterschied ist allerdings immer von einer höheren Ordnung, als die der durchgeführten Rechnung. Somit ist der dadurch erzeugte Fehler von höherer Ordnung in der jeweiligen Rechnung.

Im EOMS-Schema werden stattdessen exakt diejenigen Terme abgezogen, welche das Zählschema verletzen. Damit ist dieses Verfahren unter Umständen aufwendiger, da nicht nur die Entwicklung des jeweiligen Integrals durchgeführt wird, sondern auch die genaue Ordnung aller Terme bestimmt werden muss, in denen das jeweilige Integral vorkommt.

In dieser Arbeit wird das EOMS-Schema mit einer kleinen Modifikation angewendet, welche die Durchführung der Renormierung wesentlich vereinfacht. Statt in jedem Fall explizit die zählchemaverletzenden Terme zu bestimmen, abzuziehen und hinterher die renormierten Niederenergiekonstanten numerisch an verfügbare Daten anzupassen, wird das Berechnen der Abzugsterme selbst nicht durchgeführt und der numerische Wert der Niederenergiekonstanten wird direkt durch Anpassung bestimmt. Eine kurze Illustration soll zeigen, dass beide Ansätze äquivalent sind. Um die Darstellung möglichst einfach zu halten, betrachte man eine Größe, welche nicht von kinematischen Faktoren abhängt, z.B. die Masse m eines Teilchens. Diese sei in einer Rechnung bis einschließlich Einschleifenniveau berechnet. Des Weiteren hänge sie nur von einer Niederenergiekonstante der nullten chiralen Ordnung ab. Ein konsistentes Zählschema fordert außerdem, dass der Schleifenbeitrag von chiraler Ordnung Eins plus höhere Korrekturen ist,

$$m = \text{LEC}^{(0)} + \text{Loop}^{(0)}. \quad (3.71)$$

Der Ausdruck $\text{LEC}^{(0)}$ bezeichnet die Niederenergiekonstante und $\text{Loop}^{(0)}$ bezeichnet den Schleifenbeitrag. Beide Terme sind so zu verstehen, dass keine UV-Divergenzen mehr vorhanden sind, jedoch das Zählschema noch nicht

konsistent berücksichtigt wird. Die Niederenergiekonstante wird nun so angepasst, dass man den physikalischen Wert der berechneten Masse reproduziert. Dies liefert

$$\text{LEC}^{(0)} = m - \text{Loop}^{(0)}. \quad (3.72)$$

Im EOMS-Schema ergibt die Berechnung der Masse

$$m = \text{LEC}^{(R)} + \text{Loop}^{(R)}, \quad (3.73)$$

wobei der Index R andeutet, dass diese Größen im Sinne des EOMS-Schemas renormiert wurden. Um nun den Zusammenhang zwischen beiden Schemata zu finden, betrachte man die Entwicklung des infrarotregulären Anteil des Integrals nach der kleinen Größe q :

$$\text{Loop}^{(0)} = \alpha_0 + \alpha_1 q^1 + \alpha_2 q^2 + \dots, \quad (3.74)$$

$$\text{Loop}^{(R)} = \alpha_1 q^1 + \alpha_2 q^2 + \dots. \quad (3.75)$$

Wie man sieht, unterscheiden sich die Ausdrücke um den Term α_0 . Dieser stellt den zählschemaverletzenden Beitrag dar. Da die Gleichungen (3.71) und (3.73) beide die Masse des Teilchens beschreiben, erhält man durch Einsetzen der Entwicklung und Koeffizientenvergleich zwischen beiden Ausdrücken (man beachte, dass sowohl $\text{LEC}^{(0)}$ als auch $\text{LEC}^{(R)}$ von chiraler Ordnung $\mathcal{O}(q^0)$ sind)

$$\text{LEC}^{(0)} + \alpha_0 = \text{LEC}^{(R)}. \quad (3.76)$$

Auf dem Niveau der numerischen Anpassung sind somit beide Verfahren äquivalent. Man kann also eine Renormierung im EOMS-Schema durchführen, ohne explizit die zählschemaverletzenden Terme zu bestimmen und immer den Zusammenhang zu einer Rechnung herstellen, bei der diese Terme explizit berücksichtigt wurden. Als Nachteil stellt sich jedoch heraus, dass man die Konvergenz der Reihe schwerer überprüfen kann, da die Schleifenbeiträge alleine nicht das Zählschema erfüllen. Nur die Summe aus Beiträgen der Baumdiagramme und der Schleifendiagramme erfüllt das Zählschema. Im normalen EOMS-Schema hingegen könnte man numerisch überprüfen, ob Beiträge höherer Ordnungen tatsächlich kleiner werden im Sinne einer Reihenentwicklung. Bei den in dieser Arbeit berechneten Diagrammen treten jedoch auch Integrale mit zwei unterschiedlichen schweren Massen (M_ρ und m_N) auf. Die Abzugsterme für diese Integrale zu berechnen wäre sehr aufwendig, weswegen die hier beschriebene Modifikation des Renormierungsverfahrens sinnvoll ist. Außerdem lässt sich die Konvergenz indirekt überprüfen, indem man die vollständige Rechnung der Ordnung $\mathcal{O}(q)$, $\mathcal{O}(q^2)$, $\mathcal{O}(q^3)$, ... vergleicht.

Kapitel 4

Photo- und Elektropionproduktion

Unter dem Begriff Elektropionproduktion versteht man i.Allg. die Erzeugung eines oder mehrerer Pionen durch inelastische Streuung eines geladenen Leptons (hier Elektron) an einem Nukleon. In dieser Arbeit wird angenommen, dass die Gesamtenergie im Schwerpunktsystem so gewählt ist, dass nur ein Pion erzeugt werden kann. Somit sind folgende Prozesse möglich:

$$e + p \rightarrow e + p + \pi^0, \quad (4.1)$$

$$e + p \rightarrow e + n + \pi^+, \quad (4.2)$$

$$e + n \rightarrow e + n + \pi^0, \quad (4.3)$$

$$e + n \rightarrow e + p + \pi^-. \quad (4.4)$$

Hierbei steht p für Proton, n für Neutron, e für das Elektron und $\pi^{0,\pm}$ sind die verschiedenen Pionen.

Unter der Photopionproduktion versteht man die Erzeugung von Pionen durch Absorption eines reellen Photons durch das Nukleon. Hier soll es wie im Falle der Elektropionproduktion um die Erzeugung eines einzelnen Pions gehen. Damit sind folgende Reaktionen möglich:

$$\gamma + p \rightarrow p + \pi^0, \quad (4.5)$$

$$\gamma + p \rightarrow n + \pi^+, \quad (4.6)$$

$$\gamma + n \rightarrow n + \pi^0, \quad (4.7)$$

$$\gamma + n \rightarrow p + \pi^-. \quad (4.8)$$

Dabei steht γ für ein reelles Photon. Später wird gezeigt, wie man die Photopionproduktion als Spezialfall der Elektropionproduktion behandeln kann,

denn ein virtuelles Photon mit Viererimpuls k^μ wird im Grenzfall $k^2 \rightarrow 0$ zu einem reellen. Somit lassen sich beide Prozesse mittels des gleichen Formalismus beschreiben. Des Weiteren werden alle Formeln vorgestellt, welche für die Beschreibung der Prozesse in dieser Arbeit nötig sind. Die Darstellung orientiert sich an [AFF 79, DT 92, MS 03, PDT 07].

4.1 Das Matrixelement

Die elektromagnetische Wechselwirkung wird im Falle der Photo- bzw. Elektropionproduktion durch die Absorption eines reellen bzw. den Austausch virtueller Photonen beschrieben. Die elektromagnetische Kopplungskonstante $\alpha \approx 1/137$ sorgt dafür, dass ein Beitrag vom Austausch mehrerer virtueller Photonen stark unterdrückt ist. Der Prozess der Elektropionproduktion lässt sich somit sehr gut in der so genannten Einphotonenaustauschnäherung beschreiben. Die Wechselwirkung zwischen Elektron und Nukleon wird dabei durch den Austausch eines einzelnen virtuellen Photons erzeugt (siehe Abbildung 4.1). Das Matrixelement besteht aus einem leptonischen Vertex, dem Propagator des Photons und einem hadronischen Vertex. Der leptonische Vertex ist aus der QED sehr gut bekannt. Der hadronische Vertex wird im Folgenden im Rahmen der chiralen Störungstheorie untersucht. Das Matrixelement für die Elektropionproduktion lässt sich somit schreiben als

$$\begin{aligned} \mathcal{M} &= \underbrace{i \bar{u}(k_f, s_f) \gamma^\nu u(k_i, s_i)}_{\text{leptonischer Vertex}} \underbrace{\left(-i \frac{g_{\nu\mu}}{k^2 + i\epsilon} + \text{Eichterme} \right)}_{\text{Propagator des virtuellen Photons}} \underbrace{(-ie \langle N' \pi | J^\mu(0) | N \rangle)}_{\text{hadronischer Vertex}} \\ &= -ie \epsilon^\mu \underbrace{\langle N' \pi | J^\mu(0) | N \rangle}_{\mathcal{M}^\mu}. \end{aligned} \quad (4.9)$$

Hierbei bezeichnen s_i und s_f den Spin des Elektrons im Anfangs- bzw. Endzustand. Für die Photoproduktion vernachlässigt man leptonischen Vertex und Propagator und verwende für ϵ^μ den Polarisationsvektor eines reellen Photons. In der Elektropionproduktion wird der Polarisationsvektor als

$$\epsilon^\mu = \frac{e \bar{u}(k_f, s_f) \gamma^\mu u(k_i, s_i)}{k^2} \quad (4.10)$$

definiert. Die Eichterme im Matrixelement werden im Folgenden vernachlässigt, da sie wegen der Stromerhaltung keinen Beitrag zu physikalischen Observablen liefern.

Für die Viererimpulse der beteiligten Teilchen gilt (siehe Abbildung 4.1)

$$p_i^\mu + k_i^\mu = p_f^\mu + k_f^\mu + q^\mu, \quad (4.11)$$

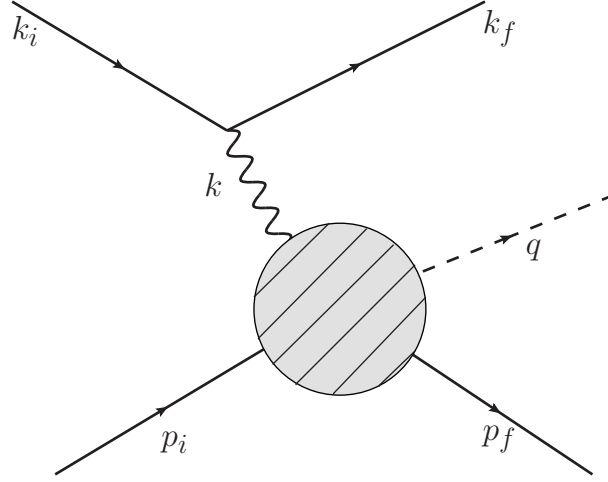


Abbildung 4.1: Elektropionproduktion in der Einphotonenaustauschnäherung. Der Impuls des ein-/auslaufenden Nukleons wird dabei mit p_i/p_f bezeichnet. Der Impuls des ein-/auslaufenden Elektrons wird mit k_i/k_f bezeichnet, wobei $k = k_i - k_f$ den Impulsübertrag auf das Nukleon darstellt. Der Impuls des auslaufenden Pions wird mit q bezeichnet. Der schraffierte Kreis stellt den hadronischen Vertex dar.

wobei es für die weiteren Betrachtungen ausreicht, statt des Impulses des einlaufenden bzw. auslaufenden Elektrons lediglich den Impulsübertrag

$$k^\mu = k_i^\mu - k_f^\mu \quad (4.12)$$

zu berücksichtigen. Die Notation für die Komponenten der Viererimpulse lautet

$$\begin{aligned} k_i^\mu &= (\mathcal{E}_i, \vec{k}_i), \\ k_f^\mu &= (\mathcal{E}_f, \vec{k}_f), \\ p_i^\mu &= (E_i, \vec{p}_i), \\ p_f^\mu &= (E_f, \vec{p}_f), \\ k^\mu &= (k_0, \vec{k}), \\ q^\mu &= (E_\pi, \vec{q}). \end{aligned} \quad (4.13)$$

Da man lediglich drei unabhängige Impulse hat, kann man die so genannten Mandelstamvariablen einführen. Diese sind definiert als

$$\begin{aligned} s &= (p_i + k)^2 = (p_f + q)^2, \\ u &= (p_i - q)^2 = (p_f - k)^2, \\ t &= (p_i - p_f)^2 = (q - k)^2, \end{aligned} \quad (4.14)$$

und sie erfüllen zusätzlich die Beziehung

$$s + t + u = 2m_N^2 + M_\pi^2 + k^2. \quad (4.15)$$

Außerdem gilt

$$\begin{aligned} t &= (k - q)^2 \\ &= k^2 + q^2 - 2k \cdot q \\ &= k^2 + M_\pi^2 - 2(k_0 E_\pi - |\vec{k}| |\vec{q}| \cos \Theta_\pi), \end{aligned} \quad (4.16)$$

wobei Θ_π den Winkel zwischen $\vec{k}$ und $\vec{q}$ aufspannt (siehe Abbildung 4.2 auf Seite 51). Für Elektropionproduktion, d.h. Streuung eines Elektrons an einem Nukleon, ist k^2 immer negativ. Deswegen wird meistens die positive Größe $Q^2 = -k^2$ verwendet. Dass Q^2 hier immer positiv ist, lässt sich sehr einfach zeigen: Man betrachte das Ruhesystem des auslaufenden Elektrons, d.h. $k_f^\mu = (m_e, 0)$; dort gilt

$$\begin{aligned} Q^2 &= -(k_i - k_f)^2 \\ &= 2k_i \cdot k_f - 2m_e^2 \\ &= 2m_e \mathcal{E}_i - 2m_e^2 \\ &= 2m_e \left(\underbrace{\sqrt{m_e^2 + |\vec{k}_i|^2}}_{> m_e} - m_e \right). \end{aligned} \quad (4.17)$$

Ein kinematisch sehr interessanter Punkt ist die Schwellenenergie, d.h. die minimale Energie, welche benötigt wird, um überhaupt ein Pion erzeugen zu können. Hier gilt

$$s|_{\text{Schwelle}} = (m_N + M_\pi)^2, \quad (4.18)$$

$$t|_{\text{Schwelle}} = -\frac{m_N(M_\pi^2 + Q^2)}{m_N + M_\pi}, \quad (4.19)$$

$$u|_{\text{Schwelle}} = \frac{m_N^3 - M_\pi^2 m_N - M_\pi(m_N^2 + Q^2)}{m_N + M_\pi}. \quad (4.20)$$

Diese Beziehungen gelten für den isospinsymmetrischen Fall.

Für spätere Betrachtungen ist das Pion-Nukleon-Schwerpunktsystem von besonderer Relevanz. Deswegen werden hier noch die wichtigsten kinematischen Beziehungen für dieses System angegeben. Dabei bezeichnet ein * an einer kinematischen Größe, dass diese im Pion-Nukleon-Schwerpunktsystem definiert ist. Für die Dreierimpulse gilt hier

$$\vec{p}_i^* = -\vec{k}^*, \quad (4.21)$$

$$\vec{p}_f^* = -\vec{q}^*. \quad (4.22)$$

Für die Energien gilt mit $W = \sqrt{s}$:

$$k_0^* = \frac{W^2 - m_N^2 - Q^2}{2W}, \quad (4.23)$$

$$E_\pi^* = \frac{W^2 + M_\pi^2 - m_N^2}{2W}, \quad (4.24)$$

$$E_i^* = \frac{W^2 + m_N^2 + Q^2}{2W}, \quad (4.25)$$

$$E_f^* = \frac{W^2 + m_N^2 - M_\pi^2}{2W}. \quad (4.26)$$

Die Dreierimpulse erfüllen folgende Gleichungen:

$$|\vec{k}^*| = \sqrt{\left(\frac{W^2 - m_N^2 - Q^2}{2W}\right)^2 + Q^2}, \quad (4.27)$$

$$|\vec{q}^*| = \sqrt{\left(\frac{W^2 - m_N^2 + M_\pi^2}{2W}\right)^2 - M_\pi^2}. \quad (4.28)$$

Weiterhin findet man häufig in der Literatur folgende dimensionslose, invariante kinematische Variablen:¹

$$\nu = \frac{k \cdot (p_i + p_f)}{2m_N^2} = \frac{s - u}{4m_N^2}, \quad (4.29)$$

$$\nu_1 = \frac{k \cdot q}{2m_N^2} = \frac{M_\pi^2 - Q^2 - t}{4m_N^2}, \quad (4.30)$$

$$\nu_2 = -\frac{Q^2}{m_N^2}. \quad (4.31)$$

Der hadronische Vertex (siehe Gleichung (4.9)) lässt sich auf verschiedene Arten parametrisieren. Eine häufig in der Literatur verwendete Darstellung, die so genannten Ball-Amplituden [Bal 61], lautet²

$$\mathcal{M}^\mu = \bar{u}(p_f) \left(\sum_{i=1}^8 B_i V_i^\mu \right) u(p_i), \quad (4.32)$$

wobei $u(p)$ einen Diracspinor mit der Normierung $\bar{u}(p)u(p) = 1$ bezeichnet. Mit der Definition $P^\mu = (p_i^\mu + p_f^\mu)/2$ sind die Lorentz-Strukturen V_i^μ gegeben

¹Unter $k \rightarrow -k$, $q \rightarrow -q$ (*crossing*) gilt $\nu \rightarrow -\nu$, $\nu_1 \rightarrow \nu_1$ und $\nu_2 \rightarrow \nu_2$.

²Im Folgenden sind die Spinvektoren des Nukleons unterdrückt.

durch

$$\begin{aligned}
V_1^\mu &= \gamma^\mu \gamma_5, & V_2^\mu &= \gamma_5 P^\mu, \\
V_3^\mu &= \gamma_5 q^\mu, & V_4^\mu &= \gamma_5 k^\mu, \\
V_5^\mu &= \gamma^\mu \not{k} \gamma_5, & V_6^\mu &= \not{k} \gamma_5 P^\mu, \\
V_7^\mu &= \not{k} \gamma_5 q^\mu, & V_8^\mu &= \not{k} \gamma_5 k^\mu.
\end{aligned} \tag{4.33}$$

Stromerhaltung ist eine wichtige Eigenschaft des Matrixelements, denn sie liefert eine Bedingung an das Matrixelement, die sich folgendermaßen herleiten lässt. Aus der Translationsinvarianz folgt für den Stromoperator $J^\mu(x) = e^{iP \cdot x} J^\mu(0) e^{-iP \cdot x}$ und er erfüllt auf dem Operatorniveau $\partial_\mu J^\mu(x) = 0$. Als Konsequenz ergibt sich

$$\begin{aligned}
0 &= \langle N(p_f), \pi(q) | \partial_\mu J^\mu(x) | N(p_i) \rangle \\
&= \partial_\mu \langle N(p_f), \pi(q) | J^\mu(x) | N(p_i) \rangle \\
&= \partial_\mu \langle N(p_f), \pi(q) | e^{iP \cdot x} J^\mu(0) e^{-iP \cdot x} | N(p_i) \rangle \\
&= \partial_\mu \langle N(p_f), \pi(q) | e^{i(p_f+q) \cdot x} J^\mu(0) e^{-ip_i \cdot x} | N(p_i) \rangle \\
&= \partial_\mu e^{i(p_f+q-p_i) \cdot x} \langle N(p_f), \pi(q) | J^\mu(0) | N(p_i) \rangle \\
&= ik_\mu e^{ik \cdot x} \langle N(p_f), \pi(q) | J^\mu(0) | N(p_i) \rangle.
\end{aligned}$$

Da $e^{ik \cdot x} \neq 0$ für beliebiges x , gilt

$$k_\mu \mathcal{M}^\mu = 0. \tag{4.34}$$

Für die Ball-Amplituden bedeutet dies:

$$\begin{aligned}
k_\mu \mathcal{M}^\mu &= \bar{u}(p_f) \not{k} \gamma_5 (B_1 + B_6 k \cdot P + B_7 k \cdot q + B_8 k^2) u(p_i) \\
&\quad + \bar{u}(p_f) \gamma_5 (B_2 k \cdot P + B_3 k \cdot q + B_4 k^2 + B_5 k^2) u(p_i) \\
&= 0.
\end{aligned} \tag{4.35}$$

Da die beiden Diracstrukturen unabhängig sind, gilt somit

$$\begin{aligned}
B_1 + B_6 k \cdot P + B_7 k \cdot q + B_8 k^2 &= 0, \\
B_2 k \cdot P + B_3 k \cdot q + B_4 k^2 + B_5 k^2 &= 0.
\end{aligned} \tag{4.36}$$

Als notwendige Bedingung stellt dies einen sehr guten Test für das Ergebnis der Rechnung dar (siehe Kapitel 5). Dadurch lassen sich zwei der acht Amplituden eliminieren. Man kann somit das Matrixelement auch schreiben als

$$\mathcal{M}^\mu = \bar{u}(p_f) \left(\sum_{i=1}^6 A_i M_i^\mu \right) u(p_i). \tag{4.37}$$

In der Literatur werden die A_i als invariante Amplituden bezeichnet. In der Standardparametrisierung nach [Den 61] gilt hierbei

$$\begin{aligned}
M_1^\mu &= -\frac{1}{2}i\gamma_5 (\gamma^\mu \not{k} - \not{k} \gamma^\mu), \\
M_2^\mu &= 2i\gamma_5 \left[P^\mu k \cdot (q - \frac{1}{2}k) - (q - \frac{1}{2}k)^\mu k \cdot P \right], \\
M_3^\mu &= -i\gamma_5 (\gamma^\mu k \cdot q - \not{k} q^\mu), \\
M_4^\mu &= -2i\gamma_5 (\gamma^\mu k \cdot P - \not{k} P^\mu) - 2m_N M_1^\mu, \\
M_5^\mu &= i\gamma_5 (k^\mu k \cdot q - k^2 q^\mu), \\
M_6^\mu &= -i\gamma_5 (\not{k} k^\mu - k^2 \gamma^\mu). \tag{4.38}
\end{aligned}$$

Für reelle Photonen tragen A_5 und A_6 nicht bei, da $k^2 = 0$ und $k \cdot \epsilon = 0$. Eine Beziehung zwischen den invarianten und den Ball-Amplituden erhält man durch Vergleich beider Parametrisierungen, d.h.

$$\sum_{i=1}^6 A_i M_i^\mu \stackrel{!}{=} \sum_{i=1}^8 B_i V_i^\mu, \tag{4.39}$$

und unter Verwendung von Gleichung (4.35) bzw. (4.36):

$$A_1 = i(B_5 + B_6 m_N), \tag{4.40}$$

$$A_2 = -i \frac{k \cdot q B_3 + k^2 (B_4 + B_5)}{(k \cdot P)(k^2 - 2k \cdot q)}, \tag{4.41}$$

$$A_3 = iB_7, \tag{4.42}$$

$$A_4 = \frac{i}{2}B_6, \tag{4.43}$$

$$A_5 = \frac{i}{k^2 - 2k \cdot q}(B_3 + 2B_4 + 2B_5), \tag{4.44}$$

$$A_6 = -iB_8. \tag{4.45}$$

Eine weitere wichtige Parametrisierung des hadronischen Matrixelementes liefern die im Schwerpunktsystem definierten CGLN-Amplituden $\mathcal{F}_i$ (Chew, Goldberger, Low, Nambu) [Che+ 57, Den 61]:

$$\bar{u}(p_f) \sum_{i=1}^6 A_i \epsilon_\mu M_i^\mu u(p_i) = \frac{4\pi W}{m_N} \chi_f^\dagger \mathcal{F} \chi_i, \tag{4.46}$$

mit

$$\begin{aligned}
\mathcal{F} &= -i(\vec{\sigma} \cdot \vec{b})\mathcal{F}_1 - (\vec{\sigma} \cdot \hat{q}^*)\vec{b} \cdot (\vec{\sigma} \times \hat{k}^*)\mathcal{F}_2 - i(\vec{b} \cdot \hat{q}^*)(\vec{\sigma} \cdot \hat{k}^*)\mathcal{F}_3 \\
&\quad - i(\vec{b} \cdot \hat{q}^*)(\vec{\sigma} \cdot \hat{q}^*)\mathcal{F}_4 + \vec{\sigma} \cdot \hat{k}^* b_0 \frac{|\vec{k}^*|}{k_0^*} \mathcal{F}_5 + i(\vec{\sigma} \cdot \hat{q}^*) b_0 \frac{|\vec{k}^*|}{k_0^*} \mathcal{F}_6, \tag{4.47}
\end{aligned}$$

wobei gilt

$$b^\mu = \epsilon^\mu - (\vec{\epsilon} \cdot \hat{k}^*) \frac{k^{*\mu}}{|\vec{k}^*|}. \quad (4.48)$$

χ bezeichnet einen Paulispinor und die Komponenten des Vektors $\vec{\sigma}$ sind die Pauli-Matrizen. Die $\mathcal{F}_i$ sind Funktionen von W , Θ_π^* und Q^2 . Die Amplituden $\mathcal{F}_5$ und $\mathcal{F}_6$ verschwinden im Falle der Photopionproduktion. Die Beziehung zwischen den CGLN-Amplituden und den invarianten Amplituden ist gegeben durch (alle kinematischen Größen sind im Pion-Nukleon-Schwerpunktsystem gewählt, die Kennzeichnung mittels * aber unterdrückt):

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_1 &= \frac{W - m_N}{8\pi W} \sqrt{(E_i + m_N)(E_f + m_N)} \left[A_1 + (W - m_N)A_4 \right. \\ &\quad \left. - \frac{2m_N\nu_B}{W - m_N}(A_3 - A_4) + \frac{Q^2}{W - m_N}A_6 \right], \\ \mathcal{F}_2 &= \frac{W + m_N}{8\pi W} |\vec{q}| \sqrt{\frac{E_i - m_N}{E_f + m_N}} \left[-A_1 + (W + m_N)A_4 \right. \\ &\quad \left. - \frac{2m_N\nu_B}{W + m_N}(A_3 - A_4) + \frac{Q^2}{W + m_N}A_6 \right], \\ \mathcal{F}_3 &= \frac{W + m_N}{8\pi W} |\vec{q}| \sqrt{(E_i - m_N)(E_f + m_N)} \left[\frac{2W^2 - 2m_N^2 + Q^2}{2(W + m_N)} A_2 \right. \\ &\quad \left. + A_3 - A_4 - \frac{Q^2}{W + m_N}A_5 \right], \\ \mathcal{F}_4 &= \frac{W - m_N}{8\pi W} |\vec{q}|^2 \sqrt{\frac{E_i + m_N}{E_f + m_N}} \left[-\frac{2W^2 - 2m_N^2 + Q^2}{2(W - m_N)} A_2 \right. \\ &\quad \left. + A_3 - A_4 + \frac{Q^2}{W - m_N}A_5 \right], \\ \mathcal{F}_5 &= \frac{k_0}{8\pi W} \sqrt{\frac{E_f + m_N}{E_i + m_N}} \left\{ (E_i + m_N)A_1 \right. \\ &\quad + \left[4m_N\nu_B(W - \frac{3}{4}k_0) - \vec{k}^2 W + E_\pi(W^2 - m_N^2 + \frac{1}{2}Q^2) \right] A_2 \\ &\quad + [E_\pi(W + m_N) + 2m_N\nu_B]A_3 \\ &\quad + [(E_i + m_N)(W - m_N) - E_\pi(W + m_N) - 2m_N\nu_B]A_4 \\ &\quad + (2m_N\nu_B k_0 - E_\pi Q^2)A_5 \\ &\quad \left. - (E_i + m_N)(W - m_N)A_6 \right\}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}_6 = & \frac{k_0 |\vec{q}|}{8\pi W \sqrt{(E_f + m_N)(E_i - m_N)}} \left\{ - (E_i - m_N) A_1 \right. \\
& + \left[\vec{k}^2 W - 4m_N \nu_B (W - \frac{3}{4} k_0) - E_\pi (W^2 - m_N^2 + \frac{1}{2} Q^2) \right] A_2 \\
& + [E_\pi (W - m_N) + 2m_N \nu_B] A_3 \\
& + [(E_i - m_N)(W + m_N) - E_\pi (W - m_N) - 2m_N \nu_B] A_4 \\
& + (E_\pi Q^2 - 2m_N \nu_B k_0) A_5 \\
& \left. - (E_i - m_N)(W + m_N) A_6 \right\}. \tag{4.49}
\end{aligned}$$

Der Vorteil der CGLN-Amplituden liegt in der recht einfachen Darstellung als Multipolreihe, d.h. Entwicklung nach Drehimpuls- und Paritätseigenzuständen des Pion-Nukleon-Systems. Die Darstellung lautet (Argumente unterdrückt):

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}_1 &= \sum_{l=0}^{\infty} \left\{ [lM_{l+} + E_{l+}] P'_{l+1} + [(l+1)M_{l-} + E_{l-}] P'_{l-1} \right\}, \\
\mathcal{F}_2 &= \sum_{l=1}^{\infty} \left\{ (l+1)M_{l+} + lM_{l-} \right\} P'_l, \\
\mathcal{F}_3 &= \sum_{l=1}^{\infty} \left\{ [E_{l+} - M_{l+}] P''_{l+1} + [E_{l-} + M_{l-}] P''_{l-1} \right\}, \\
\mathcal{F}_4 &= \sum_{l=2}^{\infty} \left\{ M_{l+} - E_{l+} - M_{l-} - E_{l-} \right\} P''_l, \\
\mathcal{F}_5 &= \sum_{l=0}^{\infty} \left\{ (l+1)L_{l+} P'_{l+1} - lL_{l-} P'_l \right\}, \\
\mathcal{F}_6 &= \sum_{l=1}^{\infty} \left\{ lL_{l-} - (l+1)L_{l+} \right\} P'_l, \\
\mathcal{F}_7 &= \sum_{l=1}^{\infty} \left\{ lS_{l-} - (l+1)S_{l+} \right\} P'_l = \frac{|\vec{k}^*|}{k_0^*} \mathcal{F}_6, \\
\mathcal{F}_8 &= \sum_{l=0}^{\infty} \left\{ (l+1)S_{l+} P'_{l+1} - lS_{l-} P'_l \right\} = \frac{|\vec{k}^*|}{k_0^*} \mathcal{F}_5, \tag{4.50}
\end{aligned}$$

wobei l den Bahndrehimpuls des Pion-Nukleon-Systems kennzeichnet und das $\pm$ angibt, ob der Spin des Nukleons mit dem Bahndrehimpuls zu Gesamtdrehimpuls $J = l+1/2$ oder $J = l-1/2$ gekoppelt wird. Die $P_l(x)$ bezeichnen die Legendre-Polynome, welche ein vollständiges Orthonormalsystem bilden.

Die Entwicklung erfolgt nach dem Streuwinkel im Schwerpunktsystem, d.h. $x = \cos \Theta_\pi^*$ (siehe Abbildung 4.2 auf Seite 53). In Abhängigkeit vom Typ der elektromagnetischen Strahlung im Anfangszustand spricht man von elektrischen (E) und magnetischem (M) Multipolen. Für Elektroproduktion existieren noch zusätzlich longitudinale (L) bzw. skalare (S) Multipole. Diese sind jedoch aufgrund der Stromerhaltung miteinander verknüpft:

$$L_{l\pm} = \frac{k_0^*}{|\vec{k}^*|} S_{l\pm}. \quad (4.51)$$

Multipole besitzen ein wohldefiniertes Verhalten bezüglich Spin und Parität (siehe Tabelle 4.1). Sie lassen sich mit Hilfe der Orthogonalitätsrelationen für die Legendre-Polynome aus den CGLN-Amplituden herausprojizieren. Man erhält für die Multipole [Dav 95]

$$\begin{aligned} E_{l+} &= \int_{-1}^1 \frac{dx}{2(l+1)} \left[P_l \mathcal{F}_1 - P_{l+1} \mathcal{F}_2 \right. \\ &\quad \left. + \frac{l}{2l+1} (P_{l-1} - P_{l+1}) \mathcal{F}_3 + \frac{l+1}{2l+3} (P_l - P_{l+2}) \mathcal{F}_4 \right], \\ E_{l-} &= \int_{-1}^1 \frac{dx}{2l} \left[P_l \mathcal{F}_1 - P_{l-1} \mathcal{F}_2 \right. \\ &\quad \left. - \frac{l+1}{2l+1} (P_{l-1} - P_{l+1}) \mathcal{F}_3 + \frac{l}{2l-1} (P_l - P_{l-2}) \mathcal{F}_4 \right], \\ M_{l+} &= \int_{-1}^1 \frac{dx}{2(l+1)} \left[P_l \mathcal{F}_1 - P_{l+1} \mathcal{F}_2 - \frac{1}{2l+1} (P_{l-1} - P_{l+1}) \mathcal{F}_3 \right], \\ M_{l-} &= \int_{-1}^1 \frac{dx}{2l} \left[-P_l \mathcal{F}_1 + P_{l-1} \mathcal{F}_2 + \frac{1}{2l+1} (P_{l-1} - P_{l+1}) \mathcal{F}_3 \right], \\ S_{l+} &= \int_{-1}^1 \frac{dx}{2(l+1)} [P_{l+1} \mathcal{F}_7 + P_l \mathcal{F}_8], \\ S_{l-} &= \int_{-1}^1 \frac{dx}{2l} [P_{l-1} \mathcal{F}_7 + P_l \mathcal{F}_8]. \end{aligned} \quad (4.52)$$

Während die vollständigen Amplituden Funktionen von drei kinematischen Variablen sind, hängen die Multipole nur noch von zwei Variablen ab (in der Photoproduktion je eine Variable weniger). Die Winkelabhängigkeit wird dabei vollständig in die Legendre-Polynome gesteckt. Ein weiterer Vorteil dieser Multipole ist, dass bei Energien nahe der Produktionsschwelle für ein Pion, d.h. $W \gtrsim m_N + M_\pi$, praktisch nur wenige Multipole von Relevanz sind. Für diese Multipole gilt $l \leq 2$ und sie werden als S-Wellen ($l = 0$), P-Wellen ($l = 1$) und D-Wellen ($l = 2$) bezeichnet. In dieser Näherung erhält man die

vereinfachte Beziehung (Argumente unterdrückt)

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}_1 &= E_{2-} + E_{0+} + \frac{3}{2} [2M_{2-} - 2M_{2+} - E_{2+} \\
&\quad + 2x(E_{1+} + M_{1+}) + 5x^2(E_{2+} + 2M_{2+})], \\
\mathcal{F}_2 &= 2M_{1+} + M_{1-} + x(6M_{2-} + 9M_{2+}), \\
\mathcal{F}_3 &= 3[E_{1+} - M_{1+} + 5x(E_{2+} - M_{2+})], \\
\mathcal{F}_4 &= 3(M_{2+} - E_{2-} - E_{2+} - M_{2-}), \\
\mathcal{F}_5 &= L_{0+} - 2L_{2-} + 6xL_{1+} + \frac{9}{2}(5x^2 - 1)L_{2+}, \\
\mathcal{F}_6 &= L_{1-} - 2L_{1+} + x(6L_{2-} - 9L_{2+}).
\end{aligned} \tag{4.53}$$

In der Literatur findet sich für die P-Wellen noch eine andere häufig verwendete Linearkombination

$$\begin{aligned}
P_1 &= 3E_{1+} + M_{1+} - M_{1-}, & P_2 &= 3E_{1+} - M_{1+} + M_{1-}, & P_3 &= 2M_{1+} + M_{1-}, \\
P_4 &= 4L_{1+} + L_{1-}, & P_5 &= L_{1-} - 2L_{1+}.
\end{aligned} \tag{4.54}$$

J	L	Parität	Notation	$l_{\min}$
$l + 1/2$	$l + 1$	$(-1)^L$	E_{l+}	0
$l - 1/2$	$l - 1$	$(-1)^L$	E_{l-}	2
$l + 1/2$	l	$(-1)^{L+1}$	M_{l+}	1
$l - 1/2$	l	$(-1)^{L+1}$	M_{l-}	1
$l + 1/2$	$l + 1$	$(-1)^L$	L_l	0
$l - 1/2$	$l - 1$	$(-1)^L$	L_{l-}	1

Tabelle 4.1: Wichtige Eigenschaften der Multipole der Photo- und Pionproduktion. L kennzeichnet den Gesamtdrehimpuls des Photons und J den Gesamtdrehimpuls des Pion-Nukleon-Systems.

4.2 Isospinamplituden

Da hier Isospinsymmetrie angenommen wird ($m_u = m_d = \hat{m}$) und die elektromagnetische Wechselwirkung in erster Ordnung beschrieben wird, lässt sich der Stromoperator durch die Summe zweier Tensoren beschreiben:

$$J^\mu = \underbrace{\frac{1}{6} \bar{q} \gamma^\mu q}_{J^{\mu[0]}_0} + \underbrace{\bar{q} \gamma^\mu \frac{\tau_3}{2} q}_{J^{\mu[1]}_0}. \tag{4.55}$$

Hierbei enthält $q = (u \ d)^T$ die Quarkfelder und bei τ_3 handelt es sich um die dritte Paulimatrix. Verwendet man das Wigner-Eckart-Theorem, so lässt sich zeigen, dass die vier physikalischen Reaktionen aus Gleichungen (4.1) bis (4.4) bzw. (4.5) bis (4.8) durch nur drei physikalische Amplituden beschrieben werden. Dies wird in Tabelle 4.2 dargestellt. Um das Matrixelement im

$\langle \pi N $	Tensoroperator	$ N\rangle$	Anzahl Amplituden
$1 \otimes \frac{1}{2} = \frac{3}{2} \oplus \frac{1}{2}$	0	$\otimes \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$	1
$1 \otimes \frac{1}{2} = \frac{3}{2} \oplus \frac{1}{2}$	1	$\otimes \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \oplus \frac{3}{2}$	2

Tabelle 4.2: Quelle der Isospinamplituden für Pionproduktion im isospinsymmetrischen Grenzfall. Der elektromagnetische Stromoperator besteht dabei aus einem Tensor nullter und der nullten Komponente eines Tensor erster Stufe.

Isospinraum zu beschreiben, wird üblicherweise folgende Konvention verwendet:

$$A(\pi^\alpha) = \chi_f^\dagger \left(\frac{1}{2} [\tau_{-\alpha}, \tau_0] A^{(-)} + \tau_{-\alpha} A^{(0)} + \frac{1}{2} \{ \tau_{-\alpha}, \tau_0 \} A^{(+)} \right) \chi_i. \quad (4.56)$$

$\chi_{i,f}$ bezeichnet den Isospinor des ein- bzw. auslaufenden Nukleons und α gibt die Ladung des erzeugten Pions an. Die drei Isospinamplituden werden mit $A^{(0,\pm)}$ bezeichnet. Gleichung (4.56) ist in einer Notation aufgeschrieben, die auf die physikalischen Pionzustände Bezug nimmt. Die Berechnung der Amplituden ist i.Allg. in kartesischen Koordinaten einfacher. Für diese werden die Paulimatrizen τ_i verwendet. Hierbei gilt folgender Zusammenhang zwischen den Darstellungen:

$$\tau_\pm = \frac{1}{\sqrt{2}} (\tau_1 \pm i\tau_2), \quad \tau_0 = \tau_3. \quad (4.57)$$

Die Amplituden in den kartesischen Koordinaten lauten

$$A_{a,i} = \chi_f^\dagger \left(i\epsilon_{a3k} \tau^k A_i^{(-)} + \tau_a A_i^{(0)} + \delta_{3a} A_i^{(+)} \right) \chi_i. \quad (4.58)$$

Sie besitzen eine so genannte „Crossing-Symmetrie“. Vertauscht man die Mandelstamvariablen s und u so gilt für die invarianten Amplituden

$$\begin{aligned} A_i^{(0,+)} &\xrightarrow{s \leftrightarrow u} \chi A_i^{(0,+)}, \\ A_i^{(-)} &\xrightarrow{s \leftrightarrow u} - \chi A_i^{(-)}, \end{aligned} \quad (4.59)$$

wobei $\chi = 1$ für $i = 1, 2, 4$ und $\chi = -1$ für $i = 3, 5, 6$. Der Zusammenhang zwischen den Isospinamplituden und den physikalischen Amplituden ist gegeben durch:

$$\begin{aligned} A_i(\gamma^{(*)}p \rightarrow n\pi^+) &= \sqrt{2} \left(A_i^{(-)} + A_i^{(0)} \right), \\ A_i(\gamma^{(*)}p \rightarrow p\pi^0) &= A_i^{(+)} + A_i^{(0)}, \\ A_i(\gamma^{(*)}n \rightarrow p\pi^-) &= -\sqrt{2} \left(A_i^{(-)} - A_i^{(0)} \right), \\ A_i(\gamma^{(*)}n \rightarrow n\pi^0) &= A_i^{(+)} - A_i^{(0)}. \end{aligned} \quad (4.60)$$

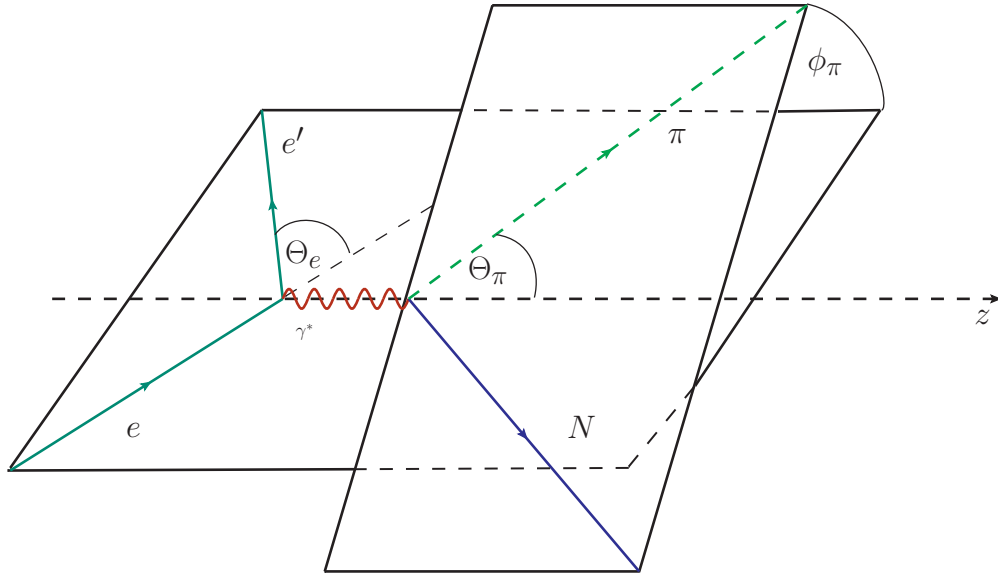


Abbildung 4.2: Räumliche Darstellung der Elektropionproduktion. Die Impulsrichtung des virtuellen Photons legt die z-Achse fest. Der Winkel Θ_e liegt zwischen den Dreierimpulsen $\vec{k}_i$ und $\vec{k}_f$ des einlaufenden bzw. auslaufenden Elektrons. Der Winkel Φ_π gibt an um welchen Winkel die Reaktionsebene (aufgespannt durch die Dreierimpulse des auslaufenden Nukleons und des Pions) um die Elektronenstreuungsebene (aufgespannt durch die Dreierimpulse von ein- und auslaufendem Elektron) verdreht ist. Der Winkel zwischen der z-Achse und dem Dreierimpuls des Pions definiert Θ_π im Laborsystem.

4.3 Wirkungsquerschnitte

Experimentellen Zugang zur Pionproduktion erreicht man durch Messung von Wirkungsquerschnitten. Im Folgenden werden die relevanten Formeln

und Messgrößen kurz motiviert.

Startpunkt für die Berechnung des differentiellen Wirkungsquerschnitts einer exklusiven Reaktion ist die Formulierung von Bjorken und Drell [BD 67].

$$d\sigma = \frac{\mathcal{E}_i}{|\vec{k}_i|} \frac{m_e}{\mathcal{E}_i} \frac{m_N}{E_i} \frac{m_e}{\mathcal{E}_f} \frac{d^3 k_f}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_\pi} \frac{d^3 q}{(2\pi)^3} \frac{m_N}{E_f} \frac{d^3 p_f}{(2\pi)^3} (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_i + q - k - p_f) |\langle p_f, k | J^\mu | p_i \rangle k^{-2} \langle k_f | j_\mu | k_i \rangle|^2. \quad (4.61)$$

An dieser Stelle wird von einem rein elektromagnetischen Prozess ausgegangen, d.h. eine Wechselwirkung durch den Austausch eines Z^0 (schwache Wechselwirkung) wird vernachlässigt. Ist die Polarisierung der beteiligten Teilchen im Anfangs- und Endzustand nicht bekannt, so muss über alle möglichen Anfangszustände gemittelt und Endzustände summiert werden. Hier wird der Einfachheit halber davon ausgegangen, dass das Nukleon im Anfangszustand unpolarisiert ist und dass das Elektron am Anfang longitudinal polarisiert ist, d.h. in einem Helizitätszustand $h = \pm 1$ vorliegt. Das quadrierte leptonische bzw. hadronische Matrixelement lässt sich jeweils durch einen Lorentztensor zweiter Stufe beschreiben ($\eta_{\mu\nu}$ für das leptonische und $W_{\mu\nu}$ für das hadronische Matrixelement). Der leptonische Tensor ist gegeben durch

$$\begin{aligned} \eta_{\mu\nu} &= \sum_{s_f} (\bar{u}(k_f, s_f) \gamma_\mu u(k_i, s_i)) (\bar{u}(k_f, s_f) \gamma_\nu u(k_i, s_i))^* \\ &= \frac{e^2}{2m_e^2} (\overline{\eta_{\mu\nu}} + h \Delta \eta_{\mu\nu}), \end{aligned} \quad (4.62)$$

mit

$$\overline{\eta_{\mu\nu}} = 2K_\mu K_\nu - \frac{1}{2} k_\mu k_\nu + \frac{1}{2} k^2 g_{\mu\nu}, \quad (4.63)$$

$$\Delta \eta_{\mu\nu} = i \epsilon_{\mu\nu\alpha\beta} k^\alpha K^\beta, \quad (4.64)$$

$$K^\mu = \frac{1}{2} (k_i^\mu + k_f^\mu), \quad (4.65)$$

$$\epsilon_{0123} = +1. \quad (4.66)$$

Der symmetrische Teil $\overline{\eta_{\mu\nu}}$ entspricht gerade dem unpolarisierten Fall. Für den hadronischen Tensor gilt

$$W_{\mu\nu} = \left(\frac{m_N}{4\pi W} \right)^2 \langle \chi_f | J_\mu | \chi_i \rangle \langle \chi_f | J_\nu | \chi_i \rangle^*. \quad (4.67)$$

Dabei bezeichnen $|\chi_{i,f}\rangle$ die Paulispinoren des Nukleons im Anfangs- bzw. Endzustand. Der Stromoperator $J^\mu = (\rho, \vec{J})$ lässt sich durch die CGLN-

Amplituden ausdrücken (Argumente der Funktionen unterdrückt):

$$\vec{J} = \frac{4\pi W}{m_N} \left[i\tilde{\vec{\sigma}}\mathcal{F}_1 + (\vec{\sigma} \cdot \hat{q}^*)(\vec{\sigma} \times \hat{k}^*)\mathcal{F}_2 + i\tilde{\vec{q}}^*(\vec{\sigma} \cdot \hat{k}^*)\mathcal{F}_3 + i\tilde{\vec{q}}^*(\vec{\sigma} \cdot \hat{q}^*)\mathcal{F}_4 + i\hat{k}^*(\vec{\sigma} \cdot \hat{k}^*)\mathcal{F}_5 + i\hat{k}^*(\vec{\sigma} \cdot \hat{q}^*)\mathcal{F}_6 \right], \quad (4.68)$$

$$\rho = \frac{4\pi W}{m_N} \left[i(\vec{\sigma} \cdot \hat{q}^*)\mathcal{F}_7 + i(\vec{\sigma} \cdot \hat{k}^*)\mathcal{F}_8 \right] = \frac{\vec{k}^* \cdot \vec{J}}{k_0^*}, \quad (4.69)$$

mit

$$\tilde{\vec{\sigma}} = \vec{\sigma} - (\vec{\sigma} \cdot \hat{k}^*)\hat{k}^*, \quad \tilde{\vec{q}}^* = \vec{q}^* - (\vec{q}^* \cdot \hat{k}^*)\hat{k}^*. \quad (4.70)$$

Sowohl beim leptonischen als auch beim hadronischen Matrixelement sind die raum- und zeitartigen Komponenten des Tensors aufgrund der Stromerhaltung miteinander verknüpft. Die verschiedenen Raumrichtungen im hadronischen Tensor entsprechen der Absorption von teilweise polarisierten virtuellen Photonen. Um diesen Umstand zu beschreiben, wird der Grad der transversalen Polarisation eingeführt,

$$\epsilon = \left(1 + 2 \frac{\vec{k}^2}{Q^2} \tan^2 \left(\frac{\Theta_e}{2} \right) \right)^{-1}, \quad (4.71)$$

wobei die Größen $\vec{k}$ und Θ_e , im Laborsystem berechnet werden müssen. Die longitudinale Polarisation ist dabei durch

$$\epsilon_L = (Q^2/k_0^2)\epsilon \quad (4.72)$$

gegeben. Auch k_0 ist hier im Laborsystem gewählt. Nach allgemein üblicher Konvention sind alle Größen, welche sich auf das leptonische Matrixelement beziehen im Laborsystem und die Größen im hadronischen Matrixelement im Pion-Nukleon-Schwerpunktsystem definiert.

Kombiniert man nun die Formeln (4.61) bis (4.72), so erhält der differentielle Wirkungsquerschnitt folgende Form

$$\frac{d\sigma}{d\Omega_f d\mathcal{E}_f d\Omega_\pi^*} = \Gamma \frac{d\sigma_\nu}{d\Omega_\pi^*}, \quad (4.73)$$

mit

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma_\nu}{d\Omega_\pi^*} &= \frac{d\sigma_T}{d\Omega_\pi^*} + \epsilon \frac{d\sigma_L}{d\Omega_\pi^*} + \sqrt{2\epsilon(1+\epsilon)} \frac{d\sigma_{LT}}{d\Omega_\pi^*} \cos \Phi_\pi + \epsilon \frac{d\sigma_{TT}}{d\Omega_\pi^*} \cos 2\Phi_\pi \\ &\quad + h \sqrt{2\epsilon(1-\epsilon)} \frac{d\sigma_{LT'}}{d\Omega_\pi^*} \sin \Phi_\pi + h \sqrt{1-\epsilon^2} \frac{d\sigma_{TT'}}{d\Omega_\pi^*}. \end{aligned} \quad (4.74)$$

Der Winkel Φ_π ist in Labor- und Schwerpunktsystem gleich. Die Größe

$$\Gamma = \frac{\alpha}{2\pi^2} \frac{\mathcal{E}_f}{\mathcal{E}_i} \frac{k_\gamma}{Q^2} \frac{1}{1-\epsilon} \quad (4.75)$$

beschreibt den Fluss des virtuellen Photonfeldes, wobei

$$k_\gamma = (W^2 - m_N^2)/(2m_N) \quad (4.76)$$

als Photonäquivalentenergie bezeichnet wird und $\mathcal{E}_i$ bzw. $\mathcal{E}_f$ die Energie des ein- bzw. auslaufenden Elektrons im Laborsystem kennzeichnet. Die Photonäquivalentenergie beschreibt die Energie, die ein reelles Photon im Laborsystem haben muss, um ein Pion-Nukleon System mit Schwerpunktsenergie W zu erzeugen. Die Größen mit dem Index T bzw. L werden als transversale bzw. longitudinale Strukturfunktionen bezeichnet und beschreiben den Wirkungsquerschnitt für unpolarisierte transversale bzw. (virtuelle) longitudinale Photonen. Sie sind unabhängig vom Azimuthalwinkel Φ_π und lassen sich in eine Multipolreihe nach $\cos \Theta_\pi^*$ entwickeln. Die Terme LT und LT' beschreiben longitudinal-transversale Interferenzen. Letzterer tritt jedoch nur bei Polarisation des einlaufenden Elektrons auf. Beide müssen entlang der Achse des Impulsübertrags verschwinden, weswegen sie explizit von $\sin \Theta_\pi^*$ abhängen. Der TT -Term beschreibt transversal-transversal Interferenzen und verschwindet ebenfalls entlang der Achse des Impulsübertrags, da er proportional zu $\sin^2 \Theta_\pi^*$ ist. Der TT' -Term ist nur messbar bei Target- oder Rückstoßpolarisation. Der Wirkungsquerschnitt lässt sich auch mittels des hadronischen Tensors ausdrücken:³

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma_\nu}{d\Omega_\pi^*} &= \frac{|\vec{q}^*|}{k_\gamma^*} \left(\frac{W_{xx} + W_{yy}}{2} + \epsilon W_{zz} - \sqrt{2\epsilon(1+\epsilon)} \operatorname{Re}(W_{xz}) \right. \\ &\quad + \epsilon \frac{W_{xx} - W_{yy}}{2} + h \sqrt{2\epsilon(1-\epsilon)} \operatorname{Im}(W_{yz}) \\ &\quad \left. + h \sqrt{1-\epsilon^2} \operatorname{Im}(W_{xy}) \right). \end{aligned} \quad (4.77)$$

Die Größe

$$k_\gamma^* = \frac{m_N}{W} k_\gamma \quad (4.78)$$

wird als Photonäquivalentenergie im Schwerpunktsystem bezeichnet. Ein Ver-

³ $W_{\mu\nu}$ ist im Schwerpunktsystem definiert.

gleich mit Gleichung (4.74) motiviert die so genannten Antwortfunktionen,

$$R_T = \frac{1}{2}(W_{xx} + W_{yy}), \quad (4.79)$$

$$R_L = W_{zz}, \quad (4.80)$$

$$\cos(\Phi_\pi)R_{LT} = -\text{Re}(W_{xz}), \quad (4.81)$$

$$\sin(\Phi_\pi)R_{LT'} = \text{Im}(W_{yz}), \quad (4.82)$$

$$\cos(2\Phi_\pi)R_{TT} = \frac{1}{2}(W_{xx} - W_{yy}), \quad (4.83)$$

$$R_{TT'} = \text{Im}(W_{xy}). \quad (4.84)$$

Sie hängen von drei unabhängigen kinematischen Variablen (z.B. $Q^2, k_\gamma, \Theta_\pi^*$) ab. Möchte man die Antwortfunktionen experimentell separieren, so benötigt man Messungen für verschiedene Polarisationen des Photons und des Elektrons, sowie mindestens einen nicht komplanaren Winkel Θ_π^* . Im Falle der Photopionproduktion verschwinden alle Größen mit longitudinalem Anteil, da ein reelles Photon nur transversale Komponenten besitzt.

Der totale Wirkungsquerschnitt ist nun

$$\sigma_\nu = \sigma_T + \epsilon\sigma_L. \quad (4.85)$$

Der totale transversale Wirkungsquerschnitt σ_T und der totale longitudinale Wirkungsquerschnitt σ_L sind gegeben durch

$$\sigma_T = \int \frac{d\sigma_T}{d\Omega^*} d\Omega^*, \quad (4.86)$$

$$\sigma_L = \int \frac{d\sigma_L}{d\Omega^*} d\Omega^*. \quad (4.87)$$

Durch die stetige Verbesserung der Beschleunigeranlagen wie MAMI in Mainz ist es nun möglich, Polarisationsexperimente für Photo- und Elektropionproduktion durchzuführen [Wor+ 11]. Bei diesen können auch sehr kleine Amplituden aus den Wirkungsquerschnitten extrahiert werden. Der Formalismus zur Beschreibung solcher Experimente wurde in [DR 86, RD 89] entwickelt. Aufgrund der Polarisation des gestreuten Protons enthält der Wirkungsquerschnitt nun 18 Strukturfunktionen

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma_\nu}{d\Omega} = \frac{|\vec{q}^*|}{k_\gamma^{\text{CM}}} \Big\{ & (R_T + P_n R_T^n) + \epsilon(R_L + P_n R_L^n) \\ & + \sqrt{2\epsilon(1+\epsilon)}[(R_{LT} + P_n R_{LT}^n) \cos \Phi_\pi + (P_l R_{LT}^l + P_t R_{LT}^t) \sin \Phi_\pi] \\ & + \epsilon[(R_{TT} + P_n R_{TT}^n) \cos(2\Phi_\pi) + (P_l R_{TT}^l + P_t R_{TT}^t) \sin(2\Phi_\pi)] \\ & + h\sqrt{2\epsilon(1-\epsilon)}[(R_{LT'} + P_n R_{LT'}^n) \sin \Phi_\pi + (P_l R_{LT'}^l + P_t R_{LT'}^t) \cos \Phi_\pi] \\ & + h\sqrt{1-\epsilon^2}(P_l R_{TT'}^l + P_t R_{TT'}^t) \Big\}, \end{aligned} \quad (4.88)$$

denn zusätzlich zu h , der Helizität des Elektrons, tritt noch die Projektion des Spins des Protons auf. Betrachtet werden die Projektion des Protonspins auf die Achsen $\hat{n} = \hat{k}^* \times \hat{q}^* / \sin \Theta_\pi^*$ (senkrecht zur Reaktionsebene), $\hat{l}$ (entlang des Vektors des Protonimpulses) und $\hat{t} = \hat{n} \times \hat{l}$. So ist z.B. $P_n = \hat{n} \cdot \hat{S}_R$ die Projektion des Protonspins $\hat{S}_R$ (in dessen Ruhesystem) auf die Achse senkrecht zur Reaktionsebene. In Polarisationsexperimenten werden i.Allg. folgende Observable definiert [Wal 68, Moo 78] (Argumente unterdrückt):

- die polarisierte Photonasymmetrie

$$\Sigma = -R_{TT}/R_T; \quad (4.89)$$

- die polarisierte Targetasymmetrie

$$T = R_T(n_i)/R_T = -R_{TT}(n_f)/R_T; \quad (4.90)$$

- die Polarisation des gestreuten Nukleons

$$P = R_T(n_f)/R_T = -R_{TT}(n_i)/R_T. \quad (4.91)$$

Des Weiteren gibt es noch vier Observable, welche mit gleichzeitiger Polarisation von Strahl und Target in Verbindung stehen:

$$E = R_{TT'}(l_i)/R_T, \quad (4.92)$$

$$F = R_{TT'}(t_i)/R_T, \quad (4.93)$$

$$G = -R_{TT}(l_i)/R_T, \quad (4.94)$$

$$H = R_{TT}(t_i)/R_T. \quad (4.95)$$

Dementsprechend gibt es noch vier Observable für polarisierten Strahl und polarisiertes gestreutes Nukleon, welche man durch $l_i, t_i \rightarrow l_f, t_f$ in den Gleichungen (4.92) bis (4.95) erhält. Die letzten vier Observablen erhält man durch gleichzeitige Polarisation von Target und gestreutem Nukleon. Die Beziehungen zwischen den Antwortfunktionen und den CGLN-Amplituden findet man z.B. in [DT 92]. Hier seien nur die benötigten Gleichungen ange-

geben:

$$\begin{aligned}
 R_T &= |F_1|^2 + |F_2|^2 + \frac{1}{2} \sin^2 \Theta_\pi^* (|F_3|^2 + |F_4|^2) \\
 &\quad - \operatorname{Re} (2 \cos \Theta_\pi^* F_1^* F_2 - \sin^2 \Theta_\pi^* (F_1^* F_4 + F_2^* F_3 \\
 &\quad + \cos \Theta_\pi^* F_3^* F_4)) , \tag{4.96}
 \end{aligned}$$

$$R_L = |F_5|^2 + |F_6|^2 + 2 \cos \Theta_\pi^* \operatorname{Re} (F_5^* F_6) , \tag{4.97}$$

$$\begin{aligned}
 R_{LT} &= -\sin \Theta_\pi^* \operatorname{Re} ((F_2^* + F_3^* + \cos \Theta_\pi^* F_4^*) F_5 \\
 &\quad + (F_1^* + F_4^* + \cos \Theta_\pi^* F_3^*) F_6) , \tag{4.98}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 R_{TT} &= \sin^2 \Theta_\pi^* \left(\frac{1}{2} (|F_3|^2 + |F_4|^2) \right. \\
 &\quad \left. + \operatorname{Re} (F_1^* F_4 + F_2^* F_3 + \cos \Theta_\pi^* F_3^* F_4) \right) \tag{4.99}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 R_{LT'} &= -\sin \Theta_\pi^* \operatorname{Im} ((F_2^* + F_3^* + \cos \Theta_\pi^* F_4^*) F_5 \\
 &\quad + (F_1^* + F_4^* + \cos \Theta_\pi^* F_3^*) F_6) . \tag{4.100}
 \end{aligned}$$

$$\tag{4.101}$$

Die Beziehungen zu den einzelnen Wirkungsquerschnitten lauten

$$\frac{d\sigma_T}{d\Omega_\pi^*} = \frac{|\vec{q}^*|}{k_\gamma^{CM}} R_T, \tag{4.102}$$

$$\frac{d\sigma_L}{d\Omega_\pi^*} = \frac{|\vec{q}^*|}{k_\gamma^{CM}} \frac{Q^2}{k_0^{*2}} R_L, \tag{4.103}$$

$$\frac{d\sigma_{LT}}{d\Omega_\pi^*} = \frac{|\vec{q}^*|}{k_\gamma^{CM}} \frac{Q}{|k_0^*|} R_{LT}, \tag{4.104}$$

$$\frac{d\sigma_{TT}}{d\Omega_\pi^*} = \frac{|\vec{q}^*|}{k_\gamma^{CM}} R_{TT}, \tag{4.105}$$

$$\frac{d\sigma_{LT'}}{d\Omega_\pi^*} = \frac{|\vec{q}^*|}{k_\gamma^{CM}} \frac{Q}{|k_0^*|} R_{LT'}. \tag{4.106}$$

Kapitel 5

Berechnung der Pionproduktion

Das Matrixelement der Photo- und Elektropionproduktion in chiraler Störungstheorie bis einschließlich Einschleifenniveau zu berechnen ist technisch eine große Herausforderung. Es gilt eine beträchtliche Anzahl Baum- und insbesondere Schleifendiagramme zu berechnen. Bis einschließlich chiraler Ordnung $\mathcal{O}(q^4)$ tragen in baryonischer χ PT ($B\chi$ PT) 20 Baum- und 85 Schleifendiagramme bei. Für die Rechnung in $\mathcal{O}(q^3)$ inklusive Vektormesonen sind es 40 Baum- und 88 Schleifendiagramme. Um diese Ausdrücke handhaben zu können, ist der Einsatz eines modernen Computeralgebrasystems (CAS) unabdingbar. Im Folgenden sollen die verwendeten Programme vorgestellt werden. Außerdem wird die allgemeine Vorgehensweise für die Berechnung des Matrixelements erläutert. Die wichtigsten Aspekte bei computergestützten Rechnungen sind Kontrolle und Transparenz. Da die meisten Ausdrücke nicht von Hand überprüft werden können, muss zu jedem Zeitpunkt sichergestellt werden, dass die eingesetzten Routinen korrekt arbeiten. Dafür wurden an verschiedenen Stellen Kontrollmechanismen und Tests eingebaut. Die wichtigsten werden im weiteren Verlauf kurz erläutert. Da die Schritte zur Berechnung der Pionproduktion teilweise sehr technischer Natur sind, soll die prinzipielle Vorgehensweise anhand des einfachen Flussdiagramms in Abbildung 5.1 auf Seite 66 illustriert werden.

5.1 Das Matrixelement

Um die immer komplexer werdenden Ausdrücke bei der Berechnung eines quantenfeldtheoretisch beschriebenen Prozesses bearbeiten zu können, wurden im Laufe der Zeit diverse Programme und Programmpakete entwickelt. Die meisten stammen aus der Hochenergiephysik, da dort Prozesse auch typischerweise mittels quantenfeldtheoretischer Methoden berechnet werden.

Beispiele für Programmpakete sind FeynArts [KBA 90], FeynCalc [MBA 91], Form [Ver 08], FormCalc [HP 99] und LoopTools [Hah 01] (welches auf dem FF-Paket beruht [OV 90]). Manche von diesen sind zum Teil eigenständig in der Lage Berechnungen auszuführen (z.B. Form) oder aber sie stellen Hilfsmittel für bestehende CAS dar (z.B. FeynArts oder FeynCalc). Für diese Arbeit wurde das Programm Mathematica als CAS eingesetzt. Dabei handelt es sich um eines der leistungsfähigsten verfügbaren Programme dieser Art. Um die Pionproduktion berechnen zu können, werden Zusatzpakete wie folgt eingesetzt.

FeynArts ist ein nützliches Paket zur Erzeugung aller Feynmandiagramme zu einer gegebenen Schleifenordnung. Unter Angabe der Anzahl der Teilchen in Anfangs- und Endzustand erzeugt FeynArts die allgemeinsten Topologien, die möglich sind. In einem nächsten Schritt lassen sich dem Programm die Arten der Teilchen sowie die zugehörigen Feynmanregeln vorgeben. Damit erhält man alle benötigten Diagramme für den gewünschten Prozess. FeynArts wurde jedoch für Berechnungen im Standardmodell entwickelt. Dort existieren keine Vertizes mit mehr als vier anknüpfenden Teilchen. Das Programm lässt sich jedoch problemlos auf Vertizes mit fünf oder sechs Teilchen (hier maximal benötigt) erweitern. In effektiven Feldtheorien treten oftmals die gleichen Vertizes in verschiedenen Ordnungen auf, so dass man topologisch mehrmals das gleiche Diagramm hat. FeynArts ist standardmäßig nicht in der Lage Vertizes in verschiedenen Ordnungen zu berücksichtigen. Dieses Problem lässt sich jedoch auch ohne Computerprogramme lösen. Die Diagramme unterscheiden sich durch die chirale Ordnung der Vertizes. Somit muss man sich lediglich die möglichen chiralen Ordnungen der Topologie eines Diagramms überlegen. FeynArts ist auch in der Lage die Feynmanregeln für ein Diagramm korrekt zusammenzusetzen. Dabei wird jedoch meist eine ungünstige Verteilung für die Impulse gewählt, welche die Berechnung des Diagramms unnötig erschwert. Deswegen wird von dieser Möglichkeit hier Abstand genommen. Da die Liste aller Diagramme automatisch generiert wird, sollte sie zusätzlich auf Vollständigkeit überprüft werden. Für die Rechnung in $B\chi PT$ existiert zum einen schon eine Liste von Topologien [BKM 92b]. Zum anderen kann man sich alle Diagramme auch kombinatorisch mit folgendem Trick überlegen. Eine stromerhaltende Subklasse von Diagrammen erhält man, indem man ein Diagramm der Elektropionproduktion zeichnet, jedoch die Photonlinie streicht. Fügt man diese nun auf alle erlaubten Arten an dieses Diagramm an, so bildet die Summe dieser Diagramme einen stromerhaltenden Beitrag zur invarianten Amplitude. Da es nur wenige Topologien gibt, wenn man das Photon streicht, erhält man so leichter die Liste aller Diagramme. Für die Rechnung inklusive Vektormesonen existierte bisher keine Aufstellung möglicher Topologien. Die von FeynArts

erzeugte Liste wurde deswegen zuerst mittels dieses Tricks überprüft. Es gibt jedoch noch eine weitere Möglichkeit die Diagramme mit Vektormesonen auf Vollständigkeit zu testen. Entwickelt man die Amplitude eines Diagramms in führender Ordnung um $M_\rho = \infty$, so erhält man die entsprechende Amplitude der normalen $B\chi PT$ (siehe auch Kapitel 3.4.3). Topologisch zieht man die Vektormesonlinie auf einen Punkt zusammen, so dass man die Diagramme aus der Rechnung mit Vektormesonen mit denen aus der Rechnung ohne Vektormesonen vergleichen kann. Dennoch existieren in chiraler Ordnung $\mathcal{O}(q^3)$ für die Pionproduktion mehr Diagramme mit Vektormesonen als in normaler $B\chi PT$. Dies liegt im Wesentlichen daran, dass das ρ nun zusätzlich zum Photon an ein Diagramm ankoppeln kann. Zieht man jedoch die ρ -Linie auf einen Punkt zusammen, so hat man zwei Beiträge zum gleichen Diagramm.

Die Berechnung der mit FeynArts ermittelten Diagramme wurde mit dem Programmpaket FeynCalc durchgeführt. Dieses ermöglicht die wichtigsten algebraischen Manipulationen, welche typischerweise bei der Berechnung eines Feynmandiagramms auftreten, automatisch durchzuführen. Es existieren verschiedene weitere Programme, welche für diesen Zweck auch geeignet wären. Allen voran sei hier Form zu nennen. Dieses ist ein in der Programmiersprache C geschriebenes Programm, welches vorgegebene algebraische Manipulationen sehr schnell und für sehr große Ausdrücke durchführen kann. Allerdings ist es nicht sehr anwenderfreundlich und die Rechnungen selbst sind zum Teil intransparent. FeynCalc hingegen ist wesentlich langsamer, dafür kann man jedoch einzelne Schritte sehr genau nachvollziehen und hat damit eine gute Kontrolle über die Zwischenergebnisse. Da man vollständig auf das CAS angewiesen ist, spielen Transparenz und Kontrolle hier eine größere Rolle als Geschwindigkeit. Dennoch sind Mittel und Wege notwendig die Rechenzeit zu optimieren. Ein einfacher Trick ist z.B. die Trennung von Isospin- und Lorentzstruktur eines Diagramms, falls dies möglich ist. So können beide Teile unabhängig voneinander berechnet und am Ende wieder zusammengesetzt werden. Bei der Vereinfachung der Isospinstruktur wird im Wesentlichen die $su(2)$ -Algebra verwendet (siehe Anhang A), um am Ende eine Zerlegung nach den drei möglichen Isospinstrukturen zu erhalten (siehe Kapitel 4.2). Für die Lorentzstrukturen müssen die notwendigen Kontraktionen der auftretenden Vierervektoren, metrischen Tensoren und Gammamatrizen durchgeführt werden. Außerdem werden die Rechenregeln der Diracalgebra eingesetzt, um die Gammamatrizen geschickt zu verschieben. Ziel hierbei ist es, Ausdrücke der Form $\not{p}_i$ bzw. $\not{p}_f$ mit Impulsen des Nukleons im Anfangs- bzw. Endzustand so zu verschieben, dass die Diracgleichung angewendet werden kann:

$$\not{p}_i u(p_i) = m_N u(p_i), \quad \bar{u}(p_f) \not{p}_f = \bar{u}(p_f) m_N. \quad (5.1)$$

Dies wird von FeynCalc automatisch erledigt. Der schwierigste Schritt jedoch

tritt ausschließlich bei den Schleifendiagrammen auf, nämlich die Integration über den Schleifenimpuls. Dafür kommt die Routine OneLoop aus dem FeynCalc-Paket zum Einsatz. Sie muss die Struktur des auftretenden Schleifenintegrals so ermitteln, dass LoopTools eingesetzt werden kann. Folgt man der Konvention von LoopTools, so hat man es im Wesentlichen mit einer einfachen Identifikation zu tun. OneLoop hingegen versucht weitere Vereinfachungen durchzuführen, weswegen dieser Rechenschritt sehr aufwendig ist. Außerdem erhält man die Integrale in einer besonderen Struktur, so dass das Programm noch in der Lage ist, die Tensorintegrale zu skalaren Integralen zu reduzieren. Der Tensorrang ist dabei definiert als die Anzahl der Integrationsimpulse im Zähler. Je höher dieser Rang, desto schwieriger ist i.Allg. die Berechnung des Integrals. FeynCalc ist jedoch nur in der Lage Integrale mit maximal Tensorrang drei zu berechnen. Bei den hier berechneten Diagrammen traten jedoch Ausdrücke mit einem Tensorrang von bis zu acht auf. Deswegen bestand ein wesentlicher Teil der Berechnung in der Reduktion des Tensorrangs durch algebraische Umformungen. Dafür wurden passende Algorithmen geschrieben, welche diese Vereinfachungen durchführen können. Eine Reduktion zu skalaren Integralen wurde jedoch nicht durchgeführt, da die Ausdrücke sonst so groß würden, dass sie selbst für die eingesetzten Computerprogramme nicht mehr handhabbar wären.

5.2 Tests der Ergebnisse

Nach der Berechnung und Vereinfachung aller Lorentz- und Isospinstrukturen wurden die auftretenden Skalarprodukte der Impulse noch mittels der Mandelstamvariablen umgeschrieben (siehe Gleichung (4.14)). Das Matrixelement hängt dann nur noch von diesen drei unabhängigen kinematischen Variablen ab. Im letzten Schritt wurde das Ergebnis eines Diagramms so umgeschrieben, dass nur noch die Strukturen der Ball-Amplituden übrig bleiben. Als Test kann man diese Strukturen entfernen, wodurch das Ergebnis identisch verschwinden muss. War dies erfüllt, so wurden die Ball-Amplituden aus dem Ergebnis extrahiert. Um zu überprüfen, ob dies erfolgreich war, werden die extrahierten Ball-Amplituden wieder vom Ergebnis abgezogen, wodurch man bei korrekter Extraktion Null erhält.

Die hier soweit beschriebenen Schritte sind zwar innerhalb des Programms vollkommen transparent nachvollziehbar, jedoch sind die Ausdrücke so groß, dass man nur für sehr einfache Diagramme eine Rechnung von Hand zum Vergleich heranziehen kann. Lediglich simple Tests wie die korrekte Massendimension der Ausdrücke oder die korrekte Lorentz- und Isospinstruktur lassen sich noch von Hand durchführen. Deswegen sind unbedingt weitere

Tests nötig, welche sicherstellen sollen, dass die berechneten Ergebnisse korrekt sind.

Für numerische Untersuchungen kommt das Programmpaket LoopTools zum Einsatz. Dieses ist in Fortran geschrieben und ermöglicht eine sehr schnelle Berechnung von Einschleifenintegralen. Dabei stehen verschiedene Renormierungsschemata wie z.B. $\overline{\text{MS}}$ oder $\widetilde{\text{MS}}$ zur Auswahl. Auch die Größe des 't Hooft-Parameters μ lässt sich beliebig wählen. In dieser Arbeit wurde hierfür durchgehend die Protonmasse verwendet.

Als erster Test für die Schleifendiagramme bietet sich eine Betrachtung des Imaginärteils an. Dieser muss unabhängig vom verwendeten Renormierungsschema sein, da die Imaginärteile nicht in den Niederenergiekonstanten absorbiert werden können. LoopTools wurde nun verwendet, um für zufällig ausgewählte Kinematiken und Renormierungsschemata numerisch den Imaginärteil der Amplituden zu überprüfen. Innerhalb der Rechengenauigkeit der verwendeten Programme konnten dabei keine Abweichungen für die Schleifendiagramme bei gleicher Kinematik aber unterschiedlichen Renormierungsschemata festgestellt werden, d.h. dieser Test ist für alle Rechnungen erfolgreich gewesen.

Ein weiterer Test ist die Stromerhaltung. Details für die Vorgehensweise finden sich in Anhang B. Der Check wurde in einem ersten Schritt numerisch durchgeführt. War dieser erfolgreich, so wurde die Rechnung analytisch durchgeführt. Alle hier berechneten Diagramme erfüllen Stromerhaltung. Nur wenn diese Bedingung erfüllt ist, kann man die invarianten Amplituden (siehe Kapitel 4.1) aus den Ball-Amplituden korrekt bestimmen.

Abschließender Test war die Überprüfung der Crossing-Symmetrie, welche die verschiedenen Isospinanteile der invarianten Amplituden der Diagramme miteinander verknüpft (siehe Kapitel 4.2). Dabei sind typischerweise ein s - und ein u -Kanal-Diagramm miteinander verknüpft. Die t -Kanal-Diagramme erfüllen Crossing-Symmetrie einzeln. Dies wurde für alle Diagramme sowohl numerisch als auch analytisch überprüft.

Zusammenfassend wurden somit verschiedene Checks an den Ergebnissen durchgeführt. Man kann die Resultate nur mittels solcher Tests überprüfen, da die Gesamtausdrücke unüberschaubar groß sind.

5.3 Multipolzerlegung

Ziel aller hier angestellten Berechnungen ist die Beschreibung der Photo- und Elektropionproduktionsdaten in der Nähe der Reaktionsschwelle. Die Observablen sind dabei von theoretischer Seite Funktionen der CGLN-Amplituden, welche unmittelbar mit den aus dem Matrixelement berechneten invarianten

Amplituden verknüpft sind. Diese CGLN-Amplituden hängen im Falle der Elektroproduktion jedoch von drei kinematischen Variablen und im Falle der Photoproduktion von zwei kinematischen Variablen ab. Da hier auf Einschleifenniveau die CGLN-Amplituden vollständig sind, könnte man alle Observablen auch aus diesen berechnen. Führt man jedoch eine Multipolentwicklung durch, so kann man die Winkelabhängigkeit der Funktionen ausintegrieren und in den Observablen durch einfache Legendre-Polynome darstellen. Nahe der Schwelle sind auch nur wenige Multipole nötig. Die Multipolzerlegung liefert somit weitaus einfacher handhabbare Ausdrücke. Dafür ist sie technisch aufwendig, da eine Integration über den kompletten Bereich der Winkelvariablen durchgeführt werden muss (siehe Gleichung (4.52)). Insbesondere für die Schleifendiagramme ist dies nur numerisch möglich. Für diese Arbeit wurden dafür zwei unabhängige Programmroutinen verwendet bzw. entwickelt, welche unterschiedliche Vor- und Nachteile haben. Sie dienen jedoch auch als Check für die jeweils andere verwendete Methode. Zum Tragen kommen zum einen das so genannte Programm χ MAID sowie eine in Mathematica implementierte Routine. Beide sollen im Folgenden näher erläutert werden.

5.3.1 χ MAID

Das MAID-Modell wurde entwickelt, um eine möglichst gute Beschreibung der existierenden Photo- und Elektropionproduktionsdaten zu liefern. Dafür enthält das Modell Bornsterme und verschiedene Resonanzbeiträge. Dieses Modell wurde als Fortranprogramm umgesetzt. Verschiedene Subroutinen übernehmen dabei die Berechnung der Größen wie z.B. Multipole, CGLN-Amplituden oder Wirkungsquerschnitte. In [Len 07] wurde ein Teil dieser Subroutinen modifiziert, damit eine Multipolzerlegung aus den in chiraler Störungstheorie berechneten invarianten Amplituden ermöglicht wird. Dabei musste insbesondere das Programm LoopTools mit in den Code implementiert werden, damit die Schleifendiagramme numerisch berechnet werden können. Dieses neue Programm trägt den Namen χ MAID. Dort war die Amplitude jedoch unvollständig und wurde auch nur bis zur Ordnung $\mathcal{O}(q^3)$ untersucht. Außerdem wurden lediglich S-Wellen berechnet.

In dieser Arbeit wurde χ MAID soweit modifiziert, dass es die vollständige Amplitude der $B\chi$ PT bis Ordnung $\mathcal{O}(q^4)$ bzw. mit Vektormesonen bis Ordnung $\mathcal{O}(q^3)$ enthält. Auch alle Niederenergiekonstanten wurden entsprechend eingebaut. Das Programm ist in der Lage die CGLN-Amplituden bzw. Multipole für vorgegebene Kinematik (W , Q^2 , Θ_π^*) zu berechnen. Dabei kann man beliebige Baum- bzw. Schleifendiagramme einschalten oder weglassen. Die Winkelintegration für die Multipole setzt dabei auf das numerische Verfahren der Gauß-Integration [Pre+ 07]. Die Anzahl der Stützstellen ist be-

liebig veränderbar. Für praktische Berechnungen hat sich gezeigt, dass eine Stützstellenzahl von 20 vollkommen ausreicht. Als zusätzlicher Check können auch die invarianten Amplituden wieder aus den CGLN-Amplituden berechnet werden. Der große Vorteil von χ MAID ist, dass Fortran als Programmiersprache verwendet wird. Diese ist sehr gut geeignet, wenn es um so genanntes „number crunching“ geht, d.h. möglichst schnell numerische Berechnungen durchzuführen (typischerweise mehr als ein Datenpunkt eines Multipols pro Sekunde auf aktuellen Rechnern). Das ist jedoch auch gleichzeitig der große Nachteil von χ MAID. Symbolische Ausdrücke können damit nicht verarbeitet werden.

5.3.2 Mathematica-Routine

Die gleichen Routinen, welche für die χ MAID zum Einsatz kommen, kann man auch in Mathematica implementieren. Da dies ein CAS für analytische Berechnungen ist, kann man bis zu dem Punkt, an dem über die Winkelvariable integriert wird, symbolisch rechnen. Sind keine Schleifenintegrale involviert, so kann man theoretisch auch die Multipole analytisch berechnen. In der Praxis hat sich gezeigt, dass viele der Ausdrücke bereits auf Baumniveau so kompliziert sind, dass die Multipolzerlegung der vollständigen relativistischen Beiträge der Baumgraphen Probleme bereitet. In manchen Fällen lässt sich die Integration analytisch nicht durchführen und in anderen Fällen erhält man sehr große Terme, deren numerische Berechnung sehr lange dauert. Da diese Ausdrücke für Fits bestimmter Niederenergiekonstanten benötigt werden, wird vorher eine Heavy-Baryon-Entwicklung bis zu einer gewünschten Ordnung durchgeführt. Die Details dafür sind jedoch nur für die Fits relevant und werden deswegen in Kapitel 6 erklärt. Da Mathematica auf symbolisches Rechnen optimiert ist, sind die Routinen für numerische Kalkulationen teilweise sehr langsam. Typischerweise sind sie um einen Faktor 10 bis 50 langsamer als die von χ MAID. Jedoch können hier alle Parameter wesentlich leichter modifiziert werden als es im Fortran-Programm möglich ist. So ist die Mathematica-Routine besser geeignet, wenn man bestimmte Terme oder Diagramme näher untersuchen will. Geht es hingegen um die Berechnung der Multipole bei vorgegebenen Kinematiken und bekannten Werten für die Niederenergiekonstanten, so ist χ MAID besser geeignet. Beide Verfahren liefern innerhalb der zu erwartenden numerischen Genauigkeit die gleichen Ergebnisse. Der größte Unterschied liegt in der numerischen Integration. Mathematica wählt an dieser Stelle automatisch ein Verfahren, welches es für geeignet erachtet, während χ MAID über die Anzahl der Stützstellen bei der Gauß-Integration gesteuert wird.

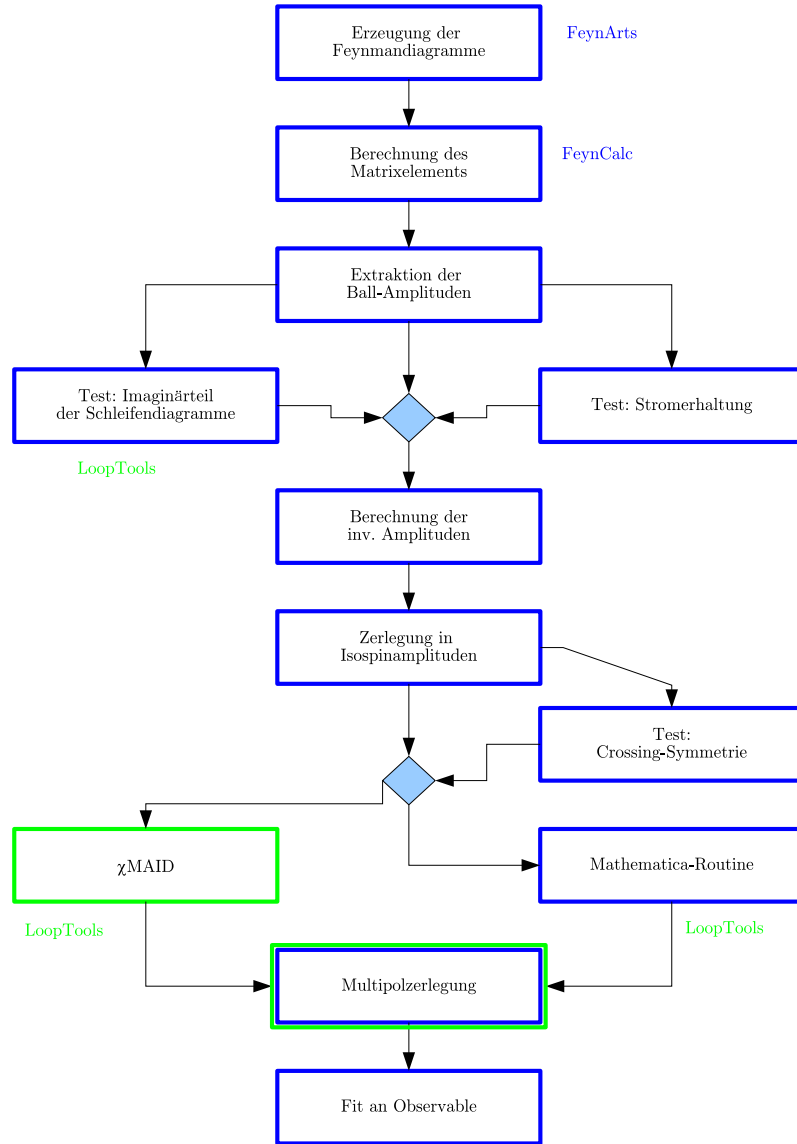


Abbildung 5.1: Dieses vereinfachte Flussdiagramm beschreibt die Vorgehensweise für die Berechnung der Multipole/Observablen für Pionproduktion in χ PT. Die farbliche Umrandung deutet jeweils an, womit der jeweilige Schritt durchgeführt wurde. Blau steht für Abläufe, welche innerhalb von Mathematica durchgeführt wurden. Grün steht für Fortranroutinen. Neben den einzelnen Schritten steht das jeweilige Zusatzpaket, welches zum Einsatz kam. An den Rauten laufen mehrere Schritte zusammen. Nur wenn diese alle erledigt sind, kann zum nächsten Schritt übergegangen werden.

Kapitel 6

Ergebnisse

In diesem Kapitel werden die Ergebnisse der Rechnungen in manifest lorentz-invarianter chiraler Störungstheorie für Photo- und Elektropionproduktion vorgestellt. Dabei wurden alle Reaktionskanäle untersucht, für die experimentelle Daten vorliegen. Es wurden die Wirkungsquerschnitte und – falls verfügbar – andere Observable betrachtet. Für die untersuchten Kanäle und Kinematiken werden auch die zugehörigen Multipole dargestellt. Zunächst wird jedoch erläutert, wie die jeweiligen Resultate erzielt wurden. Ausgangspunkt waren die CGLN-Amplituden. Aus diesen wurden jeweils die Observablen berechnet. Lediglich bei der π^0 -Produktion wurde zuerst eine Multipolzerlegung durchgeführt und die Observablen aus den Multipolen berechnet. In jedem Fall treten noch Niederenergiekonstanten auf, deren numerische Werte unbekannt sind. Diese wurden durch Fits an Messdaten angepasst. Die einzelnen Schritte bis hin zu den Ergebnissen werden in diesem Kapitel erläutert und am Ende die Resultate diskutiert. Für die neutrale Pionproduktion am Proton wird noch ein Vergleich mit HB χ PT angestellt. Gezeigt werden die Rechnung in Ordnung $\mathcal{O}(q^4)$ mit Nukleonen und Pionen als Freiheitsgrade sowie die Rechnung in Ordnung $\mathcal{O}(q^3)$ inklusive Vektormesonen. Um den Einfluss der Vektormesonen besser untersuchen zu können, wird zusätzlich das Ergebnis in Ordnung $\mathcal{O}(q^3)$ ohne Vektormesonen präsentiert und diskutiert. Wie in Kapitel 4 werden alle im Schwerpunktsystem definierten Größen mit einem Stern gekennzeichnet.

6.1 Neutrale Photopionproduktion

Im Laufe der Zeit wurde in verschiedenen Experimenten die Reaktion

$$p + \gamma \rightarrow p + \pi^0 \tag{6.1}$$

nahe der Reaktionsschwelle gemessen (siehe z.B. [Bec+ 90, Sch+ 01a]). Für die Anpassung der LECs in dieser Arbeit wurde das neueste Experiment von [Hor+ 11] verwendet (siehe auch [HB 11]), da dieses besonders darauf ausgelegt war auch die Photonasymmetrie Σ zu bestimmen. Somit ist es bestens dafür geeignet die Multipole zu extrahieren, wie gleich genauer erläutert wird. Im Folgenden wird beschrieben, wie die LECs an die vorliegenden experimentellen Daten angefitet wurden. Dazu werden die in Kapitel 4.3 vorgestellten Formeln für die Observablen benötigt. Eine Möglichkeit wäre gewesen, die Observablen direkt aus den CGLN-Amplituden zu berechnen. Sie hängen in der Photoproduktion noch von zwei unabhängigen kinematischen Variablen ab. Die Zerlegung der CGLN-Amplituden in Multipole stellt jedoch eine nützliche Alternative dar. Letztere hängen nur noch von einer Variablen ab und können somit leichter untersucht werden. Außerdem arbeiten die hier verwendeten Fitroutinen wesentlich effizienter mit den Multipolen, da diese dank einer geschickten Parametrisierung, welche gleich erläutert wird, leicht zu berechnen sind. Theoretisch benötigt man unendlich viele Multipole, um die CGLN-Amplituden vollständig zu beschreiben. In der Schwellenregion reicht es jedoch aus, sich auf S-, P- und D-Wellen zu beschränken. Der Fehler dieser Näherung in der untersuchten Region ist sehr klein. Um dies zu illustrieren ist in Abbildung 6.1 ein Vergleich der Amplitude $\mathcal{F}_1$ mit verschiedenen Näherungen aus den verwendeten Multipolen dargestellt (siehe Gleichung (4.53)). Das Ergebnis unterscheidet sich bei der Verwendung von S-, P- und D-Wellen nur minimal von $\mathcal{F}_1$. Die Multipole besitzen an der Schwelle eine wohldefinierte Entwicklung nach Potenzen des Pionimpulses und der Pionenergie. Außerdem findet man in diesem Reaktionskanal eine Zacke (engl. *cusp*) an der Reaktionsschwelle für $p + \gamma \rightarrow n + \pi^+$. Diese ist besonders deutlich im Multipol E_{0+} . Hier wurde für die P-Wellen die Linearkombination aus Gleichung (4.54) verwendet, da damit die Formeln für die Observablen kompakter werden. Außerdem wurden die P-Wellen in HB χ PT in dieser Form untersucht (siehe z.B. [BKM 96a]), was einen Vergleich erleichtert. Um den Verlauf der Multipole möglichst gut wiederzugeben, bietet sich eine Entwicklung in einer Potenzreihe mit folgender Entwicklungsfunktion an [DHT 11],

$$Q(E_\pi^*) = i \frac{\sqrt{(E_\pi^*)^2 - m_c^2}}{m_c}. \quad (6.2)$$

Der Parameter m_c stellt die Energie dar, welche ein Pion im Endzustand an der Reaktionsschwelle für $p + \gamma \rightarrow n + \pi^+$ hat, d.h. $m_c = 140.11$ MeV. Die Funktion $Q(E_\pi^*)$ ist nun rein reell unterhalb dieser Reaktionsschwelle, wie es auch die Multipole sind. Oberhalb der Schwelle liefern gerade Potenzen von Q einen Beitrag zum Realteil und ungerade Potenzen zum Imaginärteil

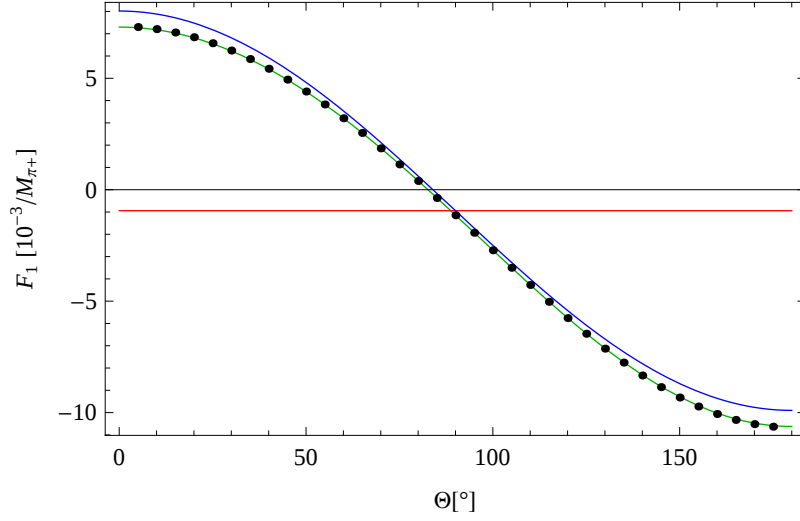


Abbildung 6.1: Winkelabhängigkeit des Realteils der Amplitude $\mathcal{F}_1$ für $E_\pi^* = 158.1$ MeV ($W = 1100$ MeV) in Photopionproduktion in der $\mathcal{O}(q^4)$ -Rechnung. Die Punkte wurden mittels χ MAID direkt aus der Amplitude berechnet. Die rote Kurve stellt die Näherung von $\mathcal{F}_1$ mittels S-Welle, die blaue mittels S- und P-Wellen und die grüne mittels S-, P- und D-Wellen dar. Die LECs aus den Kontaktgraphen wurden in diesen Ergebnissen weggelassen.

der Multipole. Die Division durch m_c macht die Funktion zusätzlich dimensionslos. Aus [GW 67] ist bekannt, dass die Imaginärteile der verschiedenen Multipole an der Schwelle mit immer höheren Potenzen in Q beginnen. Während S-Wellen mit Q starten, ist die niedrigste Potenz des Imaginärteils bei P-Wellen Q^3 und bei D-Wellen Q^5 . Des Weiteren erweist es sich als günstig, statt der Multipole so genannte reduzierte Multipole $\overline{M}_l$ zu betrachten, da für einen Multipol M mit Drehimpuls l und Pionimpuls $\vec{q}^*$ an der Schwelle gilt: $M_l = |\vec{q}^*|^l \overline{M}_l$. Somit definiert man

$$\overline{M}_l = \frac{M_l}{|\vec{q}^*|^l}, \quad (6.3)$$

um die starke Abhängigkeit vom Pionimpuls zu entfernen. Im Folgenden werden reduzierte P-Wellen mit einem Querstrich und reduzierte D-Wellen mit zwei Querstrichen dargestellt. Alle Multipole wurden in einer Potenzreihe der Form

$$M_l^N = \sum_{k=0}^N a_{k,l} Q^k(E_\pi^*) \quad (6.4)$$

entwickelt. Es hat sich als ausreichend erwiesen, die Potenzreihe bis $N = 3$ für die S-Welle, $N = 5$ für P-Wellen und $N = 4$ für D-Wellen zu entwickeln.

Die Koeffizienten dieser Potenzreihe wurden durch einen Fit an die Multipole aus χ MAID im Energiebereich $W = 1074 - 1120$ MeV (entspricht $E_\pi^* = 135.6 - 175.1$ MeV) bestimmt. Als Beispiel ist in Abbildung 6.2 der Multipol E_{0+} dargestellt. Wie man sehen kann, genügt $N = 3$ um diesen

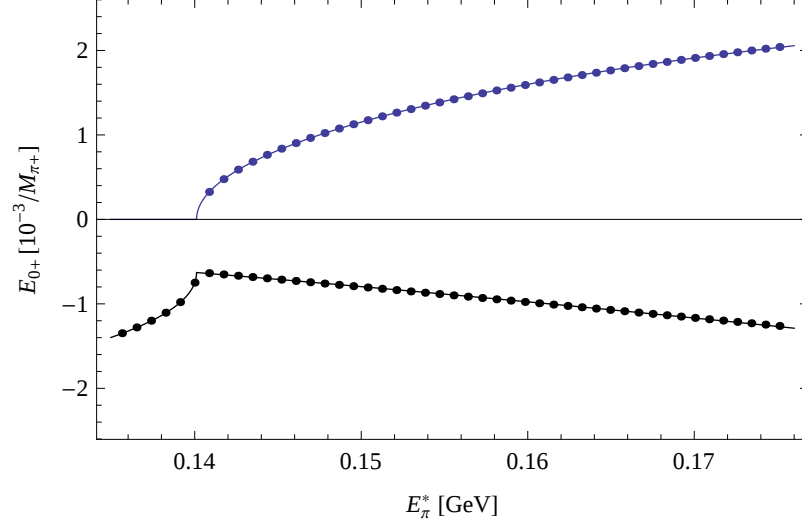


Abbildung 6.2: Imaginärteil (oben) und Realteil (unten) des Multipols E_{0+} in Ordnung $\mathcal{O}(q^4)$ unter Vernachlässigung der Niederenergiekonstanten aus den Kontaktgraphen. Die Punkte wurden mittels χ MAID ausgerechnet und die Kurven stellen eine Parametrisierung nach Formel (6.4) für $N = 3$ dar.

zu beschreiben. Die ermittelten Koeffizienten der einzelnen Multipole sind in Tabelle F.1 zusammengefasst. Für diese Ergebnisse wurden die noch unbekannten Niederenergiekonstanten weggelassen. Der Beitrag dieser Terme zu den Multipolen lässt sich nämlich analytisch berechnen und, da die Multipole lineare Funktionen aus den Amplituden sind, einfach hinzuaddieren. Bei den Fits hat sich allerdings gezeigt, dass die vollen relativistischen Beiträge der Ausdrücke, in denen die LECs vorkommen, für die Multipole auch zu viel Rechenzeit benötigen. Es ist jedoch sehr einfach möglich eine Heavy-Baryon-Entwicklung dieser Beiträge in den Amplituden vorzunehmen. Die volle Amplitude ist dabei eine unendliche Reihe in Termen von $1/m_N$. Eine Entwicklung um $m_N = \infty$ bis zu einer gegebenen Ordnung liefert das entsprechende Ergebnis in HB χ PT bis zu dieser Ordnung. Dies ist als erstes auch ein guter Test, da die Beiträge der Niederenergiekonstanten zu den Multipolen in HB χ PT bis zur chiralen Ordnung $\mathcal{O}(q^4)$ bekannt sind [BKM 01]. In einer gewöhnlichen Heavy-Baryon-Rechnung zeigt sich auch, dass die vorhandenen Niederenergiekonstanten sich so darstellen lassen, dass eine Separation nach den Multipolen möglich ist. In der vollständigen relativistischen Rechnung

bekommt man jedoch in jeder weiteren Ordnung in $1/m_N$ neue Linearkombinationen der Niederenergiekonstanten, so dass eine eindeutige Zuordnung von Niederenergiekonstanten zu den Multipolen nicht möglich ist. Für die Multipole wurde hier eine Entwicklung bis einschließlich Terme der Ordnung $1/m_N^4$ verwendet. Da diese Niederenergiekonstanten mit dritter bzw. vierter chiraler Ordnung starten, sind somit Korrekturen bis Ordnung $\mathcal{O}(q^7)$ bzw. $\mathcal{O}(q^8)$ berücksichtigt. Bei diesen Ordnungen ist der Unterschied zum vollständigen relativistischen Ergebnis vernachlässigbar. Mit den Multipolen, die nun die LECs enthalten, kann im nächsten Schritt ein Fit durchgeführt werden. Da in Abhängigkeit der chiralen Ordnung sowie der Berücksichtigung der Vektormesonen eine unterschiedliche Anzahl von Niederenergiekonstanten beiträgt, werden im Folgenden alle Fälle getrennt betrachtet.

6.1.1 Ordnung $\mathcal{O}(q^3)$

In dieser Ordnung stehen lediglich zwei freie Niederenergiekonstanten zur Verfügung, nämlich d_8 und d_9 (siehe Gleichung (3.19)). Diese tragen in den Isospinamplituden $A_i^{(+)}$ bzw. $A_i^{(0)}$ (siehe Gleichung 4.60) bei. Die Struktur ist in beiden Fällen jedoch die gleiche, so dass lediglich eine unabhängige Niederenergiekonstante verbleibt, welche folgendermaßen definiert wird,

$$\tilde{d}_9 := d_8 + d_9. \quad (6.5)$$

Diese hat die besondere Eigenschaft fast ausschließlich im Multipol P_3 beizutragen. Für alle anderen Partialwellen ist sie vernachlässigbar klein. Aus diesem Grund wurde hier kein Fit an die experimentellen Daten für die Observablen sondern direkt an die Daten aus dem Single-Energy-Fit (SE-Fit) für P_3 durchgeführt [Tia 11a]. Ein Fit an die experimentellen Daten würde eine geringfügig bessere Beschreibung im Bereich $\Theta_\pi^* = 90^\circ$ bei höheren Energien bewirken. Das Ergebnis für den P_3 -Multipol weicht dann jedoch sehr stark von den SE-Daten ab.

Die SE-Fits sind einfache Parametrisierungen mit je einer freien Konstanten für den komplex gewählten Multipol E_{0+} ¹ und die drei als reell angenommenen P-Wellen P_1 , P_2 und P_3 . Die D-Wellen sind durch die Born-Terme gegeben:

$$\begin{aligned} A &= |E_{0+}|^2 + \frac{1}{2}(P_2^2 + P_3^2), & B &= 2\text{Re}(E_{0+}P_1), \\ C &= P_1^2 - \frac{1}{2}(P_2^2 + P_3^2), & D &= \frac{1}{2}(P_3^2 - P_2^2). \end{aligned} \quad (6.6)$$

¹Beachte, dass der Imaginärteil von E_{0+} modellabhängig ist.

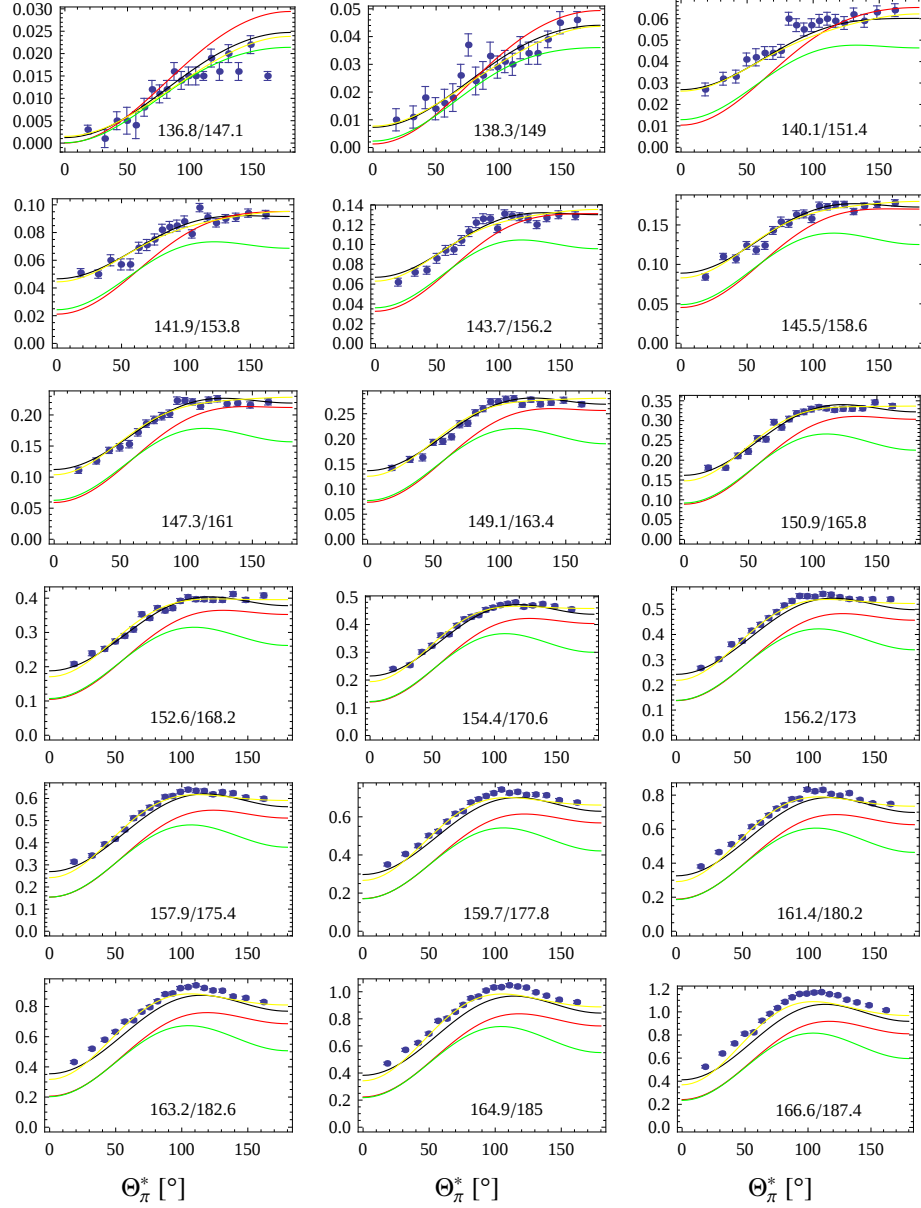


Abbildung 6.3: Differentielle Wirkungsquerschnitte in $\mu\text{b/sr}$ in Abhängigkeit des Winkels Θ_π^* . Die jeweiligen Pionenergien E_π^* /Photonenergien k_γ (im Laborsystem) sind in den einzelnen Bildern in MeV angegeben. Die experimentellen Daten stammen aus [Hor+ 11]. Die rote Kurve zeigt das Ergebnis der manifest lorentzinvarianten Rechnung in Ordnung $\mathcal{O}(q^3)$. Die schwarze Kurve ist das Ergebnis der $\mathcal{O}(q^4)$ -Rechnung. Die grüne Kurve ist die $\mathcal{O}(q^3)$ -Rechnung inklusive Vektormesonen und die gelbe Kurve zeigt das Ergebnis in HB χ PT in $\mathcal{O}(q^4)$. Die Reaktionsschwelle liegt bei 135.0/144.7 MeV.

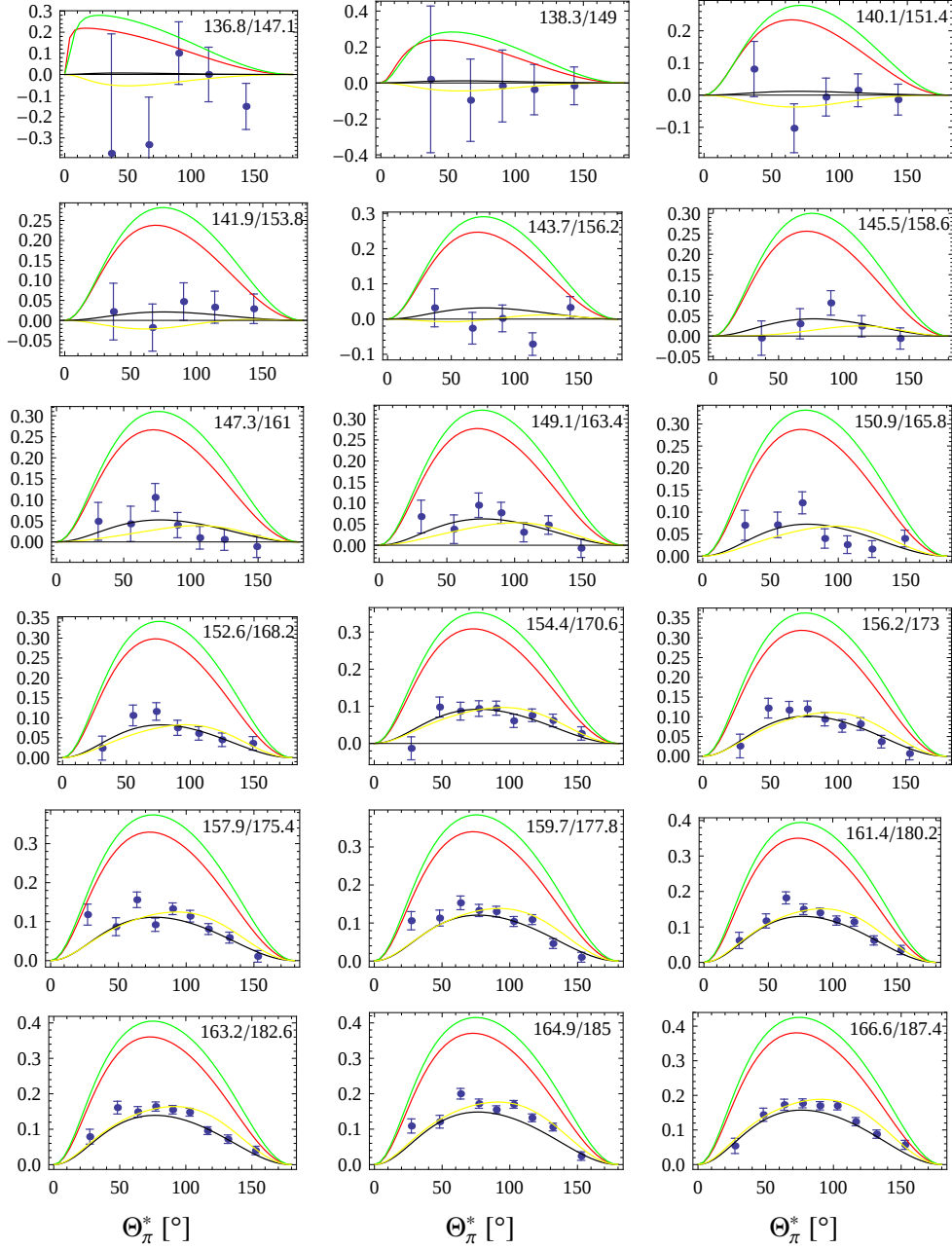


Abbildung 6.4: Die Photonasymmetrie Σ in Abhängigkeit des Winkels Θ_π^* . Die jeweiligen Pionenergien E_π^* /Photonenergien k_γ (im Laborsystem) sind in den einzelnen Bildern in MeV angegeben. Die experimentellen Daten stammen aus [Hor+11]. Bezüglich der Kennzeichnung der Kurven siehe Abbildung 6.3.

Diese vier Konstanten lassen sich nun für jede Energie einzeln an vereinfachte Observable der Form

$$\frac{d\sigma_T}{d\Omega_\pi^*} = \frac{|\vec{q}^*|}{|\vec{k}^*|} (A + B \cos \Theta_\pi^* + C \cos^2 \Theta_\pi^*), \quad \frac{d\sigma_T}{d\Omega_\pi^*} \Sigma = \frac{|\vec{q}^*|}{|\vec{k}^*|} D \sin^2 \Theta_\pi^*, \quad (6.7)$$

anfitten, welche ebenfalls vier Konstanten beinhalten.

Der P_3 -Multipol lässt sich aufgrund der gleichen freien Niederenergiekonstante in einer $\mathcal{O}(q^3)$ -Rechnung so gut wie in der $\mathcal{O}(q^4)$ -Rechnung beschreiben. Der Fitbereich für $\tilde{d}_9$ ergibt sich aus dem Ergebnis für letztere Rechnung. Dort lässt sich abschätzen, wie weit der P_3 -Multipol mit dem Experiment übereinstimmt. Es wurden die ersten zwölf Energien ($E_\pi^* = 136.8 - 157.9$ MeV) verwendet. Der ermittelte Wert der LEC aus dem Fit ist in Tabelle 6.1 angegeben.

Die Ergebnisse für die Observablen sind in den Abbildungen 6.3 und 6.4 gezeigt. Wie man sieht, gelingt eine Beschreibung der Wirkungsquerschnitte und der Photonasymmetrie in dieser $\mathcal{O}(q^3)$ -Rechnung nur für die ersten beiden Energien. Für Energien ab der π^+n -Schwelle ($k_\gamma = 151.4$ MeV) ist diese Rechnung nicht mehr in der Lage die Daten zu beschreiben. Ein Blick auf die Ergebnisse für die wichtigsten Multipole (Abbildungen 6.5 und 6.6) liefert dafür die Erklärung. Alle Kurven liegen vom Betrag unterhalb der jeweiligen Daten für die SE-Fits. Lediglich $\overline{P}_1$ stimmt bei der niedrigsten Energie überein. $\overline{P}_3$ stimmt zwar für einen großen Energiebereich mit dem SE-Fit überein, aber dies liegt, wie oben beschrieben, an der gezielten Anpassung an diesen Multipol. Dominant unterhalb der π^+n -Schwelle ist der Multipol E_{0+} , der jedoch über den ganzen Energiebereich zu niedrig liegt. Nur in Kombination mit den P-Wellen gelingt somit eine Beschreibung der Observablen bei sehr niedrigen Energien innerhalb der Messfehler. Die D-Wellen werden im Unterkapitel 6.1.3 diskutiert.

6.1.2 Ordnung $\mathcal{O}(q^4)$

In dieser Ordnung treten in der Photoproduktion zehn weitere Niederenergiekonstanten auf, welche angepasst werden müssen. Zusätzlich bedarf es einer erneuten Anpassung der Linearkombination der beiden Konstanten der dritten Ordnung, da diese nun zusätzlich zählschemaverletzende Terme absorbieren müssen. Da jedoch auch die Konstanten der vierten Ordnung als untrennbare Kombinationen auftreten, müssen insgesamt lediglich sechs Niederenergiekonstanten bestimmt werden. Besonders interessant ist hier die Kombination $\tilde{e}_{49} := e_{49} + e_{68}$. Diese beeinflusst hauptsächlich den Multipol

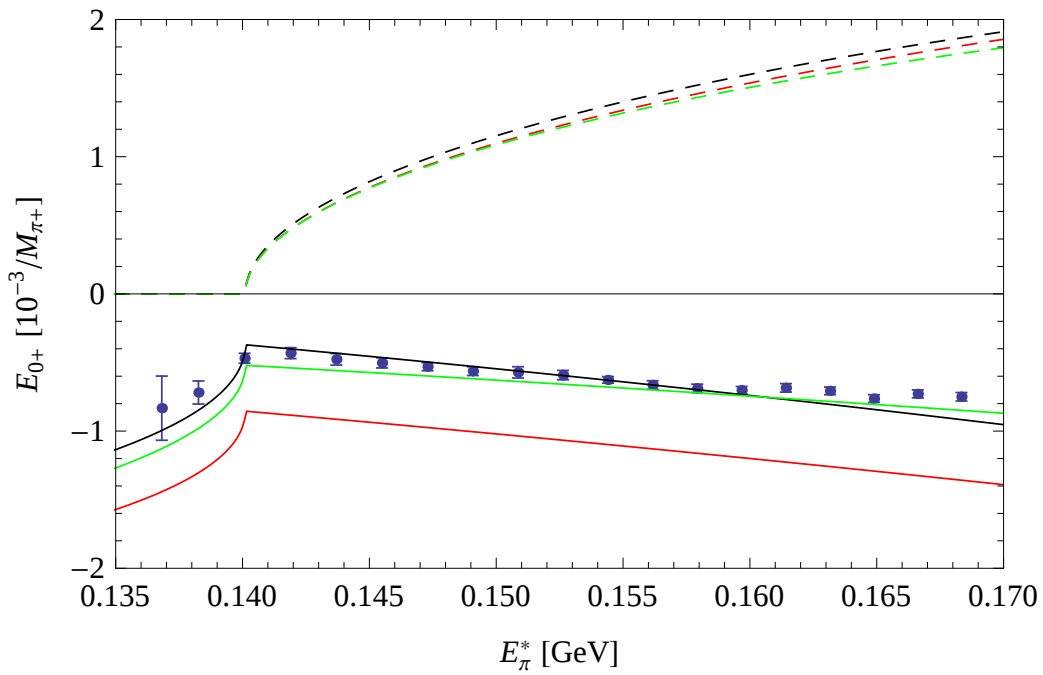


Abbildung 6.5: Der Multipol E_{0+} in Abhängigkeit der Pionenergie E_{π}^* . Die experimentellen Daten stammen aus SE-Fits von [Tia 11a]. Realteile werden mit durchgezogenen, Imaginärteile mit gestrichelten Linien dargestellt. Die Kennzeichnung der Kurven wird in Abbildung 6.3 auf Seite 72 erläutert.

E_{2-} . Dieser spielt für die Wirkungsquerschnitte eine untergeordnete Rolle. Da er jedoch in einem Interferenzterm mit E_{0+} auftritt, beeinflusst seine Größe maßgeblich die Extraktion des Multipoles E_{0+} [FBD 09, FBD 09a]. Der Multipol E_{2-} ist im Wesentlichen durch Born-Beiträge festgelegt und erhält nur geringe Korrekturen durch Schleifenbeiträge. Bei einem komplett freien Fit ergibt sich mathematisch eine Lösung, bei der $\tilde{e}_{49}$ einen sehr großen Wert annimmt. Damit ändert auch der Multipol E_{2-} komplett sein Verhalten: Er bleibt zwar vom Betrag fast gleich, ändert jedoch sein Vorzeichen (siehe Abbildung 6.8 auf Seite 80). Somit weicht er vollständig vom Ergebnis in allen anderen Modellen ab. Diese Lösung wird deswegen als falsch angenommen. Außerdem erhalten auch die anderen Niederenergiekonstanten sehr große Werte. Des Weiteren fällt der Multipol E_{0+} deshalb oberhalb der π^+n -Schwelle zu stark ab. Die restlichen Multipole sind hiervon nicht betroffen. Aus diesem Grund wird für den Fit $\tilde{e}_{49} = 0$ gewählt, da jede andere Wahl willkürlich erscheint. Dieses Problem beim Anpassen der Konstante entsteht, weil die zur Verfügung stehenden Daten des Experiments noch nicht präzise genug sind. Alternativ würden auch Daten einer weiteren Observablen helfen $\tilde{e}_{49}$ korrekt zu bestimmen.

Da in dieser Rechnung die Observablen über einen größeren Energiebereich beschrieben werden können als in der Ordnung $\mathcal{O}(q^3)$, muss für einen Fit der zu verwendende Datenbereich ermittelt werden, welcher eine gute Beschreibung des Experiments in dieser Region liefert. Dabei hat sich gezeigt, dass die ersten drei Energiebins aus dem Fit ausgenommen werden sollten, da sie einen relativ großen Fehler besitzen, was man besonders gut an den SE-Fits für die Multipole sieht. Die Fits wurden bis zu verschiedenen Maximalenergien durchgeführt. Der größte dabei untersuchte Energiebereich war bis $E_{\pi}^* = 168$ MeV. Orientieren kann man sich an den Ergebnissen von HB χ PT, womit typischerweise ein ähnlich großer Energiebereich beschrieben werden kann wie in der relativistischen Rechnung. Vom mathematischen Standpunkt her ist das reduzierte Chi-Quadrat χ_{red}^2 ein wichtiges Kriterium für die Güte des Fits. Es handelt sich allerdings um nichtlineare Fits. Deswegen muss man besonders vorsichtig sein, da es sich bei der gefundenen Lösung möglicherweise um ein lokales Minimum des χ_{red}^2 handelt. Um dieses Problem zu umgehen, wurden die Fits mit zufälligen Startwerten mehrere tausend mal durchgeführt. Damit konnte das globale Minimum des χ_{red}^2 ermittelt werden. Lösungen mit extrem großen Werten für die Niederenergiekonstanten wurden dafür jedoch verworfen. Diese können theoretisch auftreten, da das globale Vorzeichen der Multipole für die Wirkungsquerschnitte keine Rolle spielt. Somit können ausreichend große Niederenergiekonstanten Multipole liefern, die vom Betrag her nahe am gesuchten Wert liegen, jedoch das falsche Vorzeichen haben. Dadurch wären die Beiträge der Niederenergiekonstanten auch

dominant gegenüber Born- und Schleifenbeiträgen und die Theorie wäre sicherlich nicht konvergent. Versucht man nun die Daten bis zu möglichst hohen Energien zu beschreiben, so verschlechtert sich zum einen das χ_{red}^2 und zum anderen werden Daten bei niedrigeren Energien weniger gut beschrieben. Als bester Fit wird hier ein Energiebereich bis $E_\pi^* = 154.4$ MeV ($\chi_{\text{red}}^2 = 1.603$) gewählt. Damit ist es möglich, die differentiellen Wirkungsquerschnitte bis ca. $E_\pi^* = 157.9$ MeV gut zu beschreiben (siehe Abbildung 6.3). Jenseits dieser Pionenergie ist das Ergebnis der Rechnung tendenziell etwas zu klein. Die Photonasymmetrie in Abbildung 6.4 lässt sich sogar für alle hier dargestellten Energien gut beschreiben. Für höhere Energien handelt es sich jedoch um einen Zufall, da in die Photonasymmetrie der Wirkungsquerschnitt im Nenner eingeht. Dieser ist jedoch für hohe Energien zu niedrig, was aber durch zu kleine Werte für die wichtigsten P-Wellen-Beiträge im Zähler kompensiert wird, so dass die Asymmetrie auch bei höheren Energien noch korrekt erscheint. In den Abbildungen 6.5 und 6.6 kann man sehen, dass die Multipole die Ergebnisse für die Wirkungsquerschnitte bestätigen. Hier gelingt eine ähnlich gute Beschreibung der Daten über den gleichen Energiebereich. Die D-Wellen werden im Unterkapitel 6.1.3 diskutiert.

LEC	$\mathcal{O}(q^3)$	$\mathcal{O}(q^4)$	$\mathcal{O}(q^3)+\text{VM}$
$\tilde{d}_9 := d_8 + d_9$	$-3.627(20)$	$-2.337(0)$	$-2.318(21)$
$\tilde{e}_{48} := e_{48} + e_{67}$	-	$-2.668(8)$	-
$\tilde{e}_{49} := e_{49} + e_{68}$	-	0	-
$\tilde{e}_{50} := e_{50} + e_{69}$	-	$-0.826(49)$	-
$\tilde{e}_{51} := e_{51} + e_{71}$	-	$2.218(18)$	-
$\tilde{e}_{112} := e_{112} + e_{113}$	-	$-2.560(47)$	-

Tabelle 6.1: Ergebnisse der Niederenergiekonstanten durch Fits an experimentelle Daten für die $\pi^0 p$ -Photoproduktion. Die Fehler wurden durch die Fitroutine ermittelt. Die Konstante $\tilde{d}_9$ hat Dimension GeV^{-2} und die $\tilde{e}_i$ haben Dimension GeV^{-3} .

6.1.3 Ordnung $\mathcal{O}(q^3)$ inklusive Vektormesonen

In dieser Rechnung treten zusätzlich zu den Konstanten d_8 und d_9 in den Amplituden $A_i^{(+)}$ die Konstanten d_8^ρ , $g'_{\omega\rho\pi} := g_{\omega\rho\pi}g_\omega$ und J_1 auf. Deren Beitrag verschwindet jedoch in der Photoproduktion entweder vollständig oder ist numerisch vernachlässigbar. Deswegen wurde, genau wie in der gewöhnlichen Rechnung in $\mathcal{O}(q^3)$, nur $\tilde{d}_9$ angepasst. Auch hier wurden die Daten

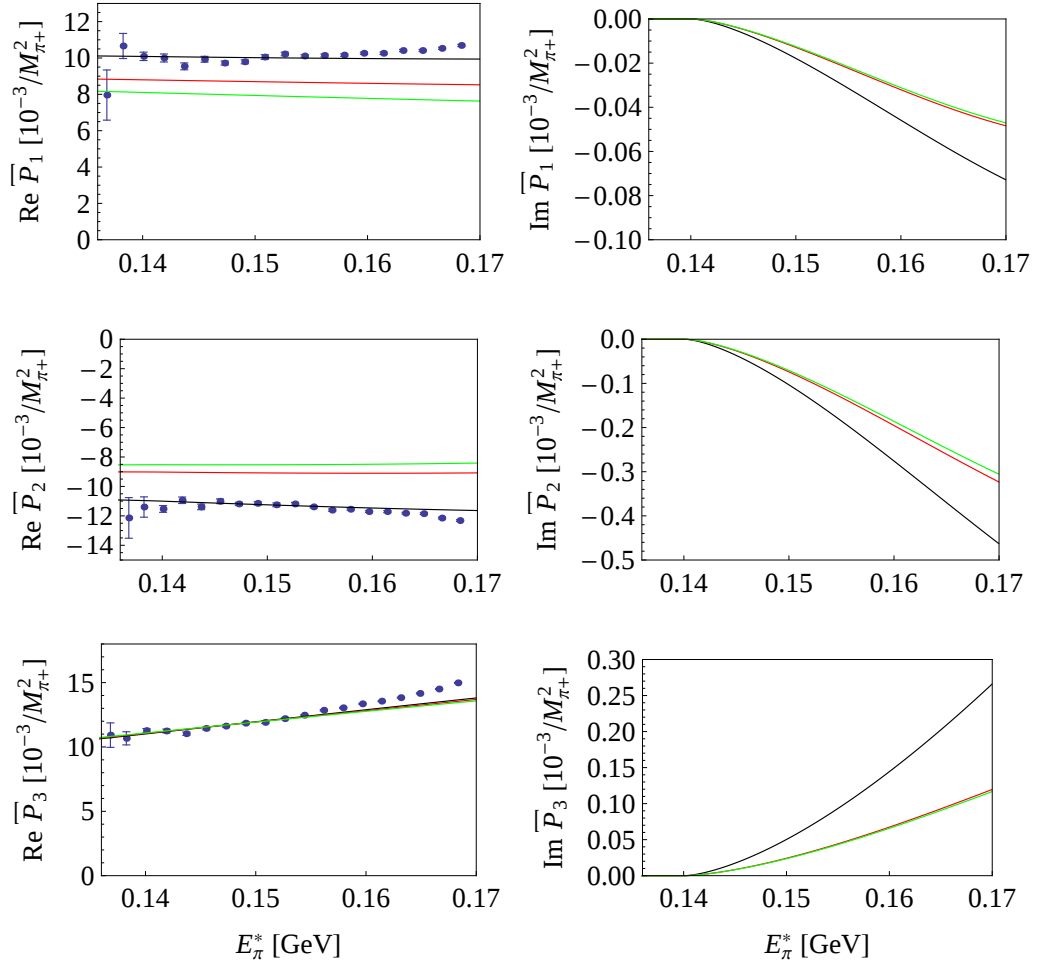


Abbildung 6.6: Die drei $\bar{P}$ -Multipole in Abhängigkeit der Pionenergie E_π^* . Die experimentellen Daten stammen aus SE-Fits von [Tia 11a]. Die Kennzeichnung der Kurven wird in Abbildung 6.3 erläutert. Im Realteil des Multipoles $\bar{P}_3$ sind die Ergebnisse aufgrund der Anpassung so ähnlich, dass die Kurven sich gegenseitig verdecken.

für den Multipol P_3 im Bereich $E_\pi^* = 136.8 - 157.9$ MeV verwendet. In der Photoproduktion sollte sich diese Rechnung mit Vektormesonen nicht zu stark von einer Rechnung ohne Vektormesonen unterscheiden. In der Tat lassen sich auch hier differentielle Wirkungsquerschnitte und Photonasymmetrien nur unterhalb der π^+n -Schwelle gut beschreiben. Dennoch erkennt man gewisse Unterschiede in den Ergebnissen. Diese lassen sich besser verstehen, wenn man einen Blick auf die Multipole wirft. Der Multipol E_{0+} wird in dieser Rechnung wesentlich besser beschrieben als in einer gewöhnlichen Rechnung in dritter Ordnung. Der Unterschied kommt hauptsächlich durch die zusätzlichen t-Kanal-Diagramme 130 und 131 zustande (siehe Anhang G.2.2). Dort tritt eine Kopplung zwischen dem Vektormeson ρ bzw. ω , dem Pion und dem Photon auf. Diese lässt sich durch die Zerfallsbreite des Vektormesons bestimmen. In der Literatur finden sich für die Kopplung teilweise stark unterschiedliche Werte [Ber+ 80, Chi+ 02, DKT 07, Nak+ 10]. In dieser Arbeit werden die beiden Diagramme so eingebaut, dass sie die Kopplungen wie MAID 2007 berücksichtigen. Damit wird der Multipol E_{0+} etwas angehoben. In den P-Wellen führt dies jedoch zu einer Verschlechterung gegenüber der gewöhnlichen $\mathcal{O}(q^3)$ -Rechnung. Deswegen gelingt bei sehr niedrigen Energien eine geringfügig bessere Beschreibung des differentiellen Wirkungsquerschnitts, da hier die S-Welle dominiert. Für höhere Energien wirken sich jedoch die P-Wellen stark aus.

Die Ergebnisse für die D-Wellen sind in Abbildung 6.7 gezeigt. Der wichtigste Multipol, $\overline{\overline{E}}_{2-}$, stimmt in den Rechnungen der Ordnung $\mathcal{O}(q^3)$ und $\mathcal{O}(q^4)$ sehr gut überein. Er wird von den Borntermen dominiert. Die Rechnung inklusive Vektormesonen führt auch hier zu einer leichten Verschiebung im Verlauf des Multipols. Dies ist wieder auf die Diagramme 130 und 131 zurückzuführen. Der Multipol $\overline{\overline{M}}_{2+}$ ist um eine Größenordnung kleiner. Hier liegen die Ergebnisse aller Rechnungen ähnlich. Die letzten beiden Multipole sind numerisch am kleinsten und damit auch sehr schwer zu bestimmen. Dort machen sich Unterschiede in den Rechnungen am deutlichsten bemerkbar. Imaginärteile werden keine dargestellt, da diese vernachlässigbar klein sind.

6.1.4 Vergleich mit HB χ PT

HB χ PT enthält die führenden Terme einer Entwicklung der relativistischen Rechnung um $m_N = \infty$. Ein Vergleich zwischen den beiden Rechnungen liefert somit auch eine Aussage über die Wichtigkeit der höheren Ordnungen in dieser Entwicklung. Die Ergebnisse für die S- und P-Wellen in HB χ PT stammen aus [BKM 96a, BKM 01]. Dort wurden diese Partialwellen bis zur vier-

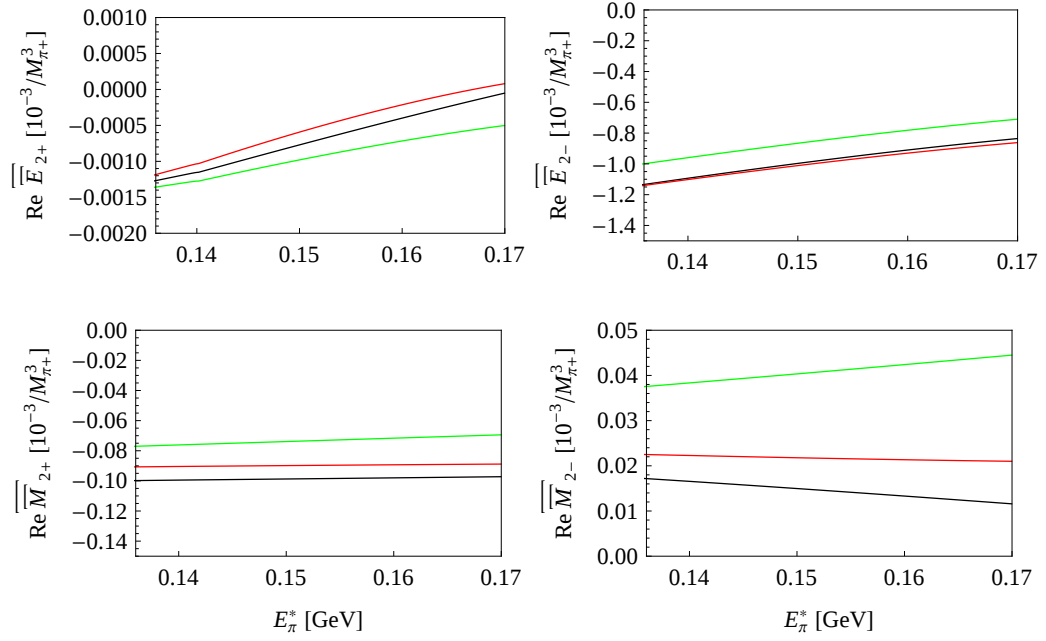


Abbildung 6.7: Die Realteile der vier D-Wellen-Multipole in Abhängigkeit der Pionenergie E_π^* . Die Kennzeichnung der Kurven wird in Abbildung 6.3 auf Seite 72 erläutert.

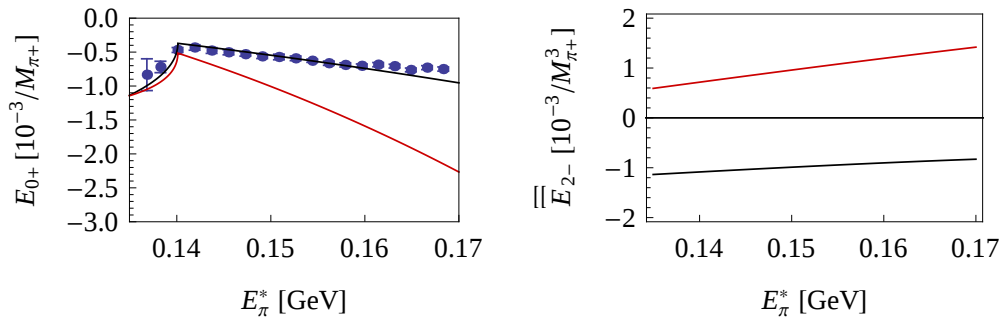


Abbildung 6.8: Realteil der Multipole E_{0+} und $\bar{E}_{2-}$ in $\mathcal{O}(q^4)$ mit $\tilde{e}_{49} = 0$ (schwarze Linie) bzw. $\tilde{e}_{49} = -27.375 \text{ GeV}^{-3}$ (rote Linie).

ten chiralen Ordnung berechnet. Die Ergebnisse wurden hier auf die gleiche Art wie das relativistische Resultat an die differentiellen Wirkungsquerschnitte und die Photonasymmetrie angepasst. Da jedoch keine Ergebnisse für die D-Wellen vorliegen, wurde eine Parametrisierung mittels Born-Termen aus dem MAID2007-Modell vorgenommen. Zusätzlich liefert die Entwicklung der relativistischen Multipole einen Beitrag einer weiteren Niederenergiekonstanten zum Multipol E_{2-} , welcher noch nie zuvor in $\text{HB}\chi\text{PT}$ untersucht wurde. Somit galt es auch hier, wie in der relativistischen $\mathcal{O}(q^4)$ -Rechnung, sechs Niederenergiekonstanten zu bestimmen. Die Beiträge dieser Terme zu den Multipolen lauten

$$\begin{aligned}
E_{0+} &= e E_{\pi}^* (a_1 M^2 + a_2 (E_{\pi}^*)^2), \\
P_1 &= \frac{e g_A |\vec{q}^*| (E_{\pi}^*)^2}{m_N (4\pi F)^3} \xi_1, \\
P_2 &= \frac{e g_A |\vec{q}^*| (E_{\pi}^*)^2}{m_N (4\pi F)^3} \xi_2, \\
P_3 &= e |\vec{q}^*| \left(E_{\pi}^* - \frac{M^2}{2m_N} \right) b_p, \\
E_{2-} &= \frac{e |\vec{q}^*|^2 E_{\pi}^*}{6\pi F} e_{49HB}.
\end{aligned} \tag{6.8}$$

Die Niederenergiekonstante e_{49HB} stammt aus der Entwicklung des Terms in der relativistischen Rechnung, welcher $\tilde{e}_{49}$ enthält. Hier zeigt sich das gleiche Phänomen wie in der relativistischen Rechnung beim Fit. Die Konstante e_{49HB} erhält einen großen Wert und beeinflusst damit den Multipol E_{2-} und somit E_{0+} maßgeblich. Deswegen wurde diese Konstante wie in der relativistischen Rechnung für den Fit vernachlässigt. Es ergibt sich bei einem Fit an den gleichen Energiebereich $\chi_{\text{red}}^2 = 1.74$. Die Werte der Niederenergiekonstanten sind in Tabelle 6.2 angegeben.

a_1	12.041(78) GeV^{-4}
a_2	-4.544(67) GeV^{-4}
ξ_1	33.346(17)
ξ_2	-31.100(14)
b_p	20.836(2) GeV^{-3}
e_{49HB}	0

Tabelle 6.2: Niederenergiekonstanten in $\text{HB}\chi\text{PT}$, welche durch Fits an experimentelle Daten für die $\pi^0 p$ -Photoproduktion aus [Hor+ 11] ermittelt wurden.

Ein Blick auf die differentiellen Wirkungsquerschnitte und die Photonasymmetrie (Abbildungen 6.3 und 6.4) zeigt, dass beide Observablen in den

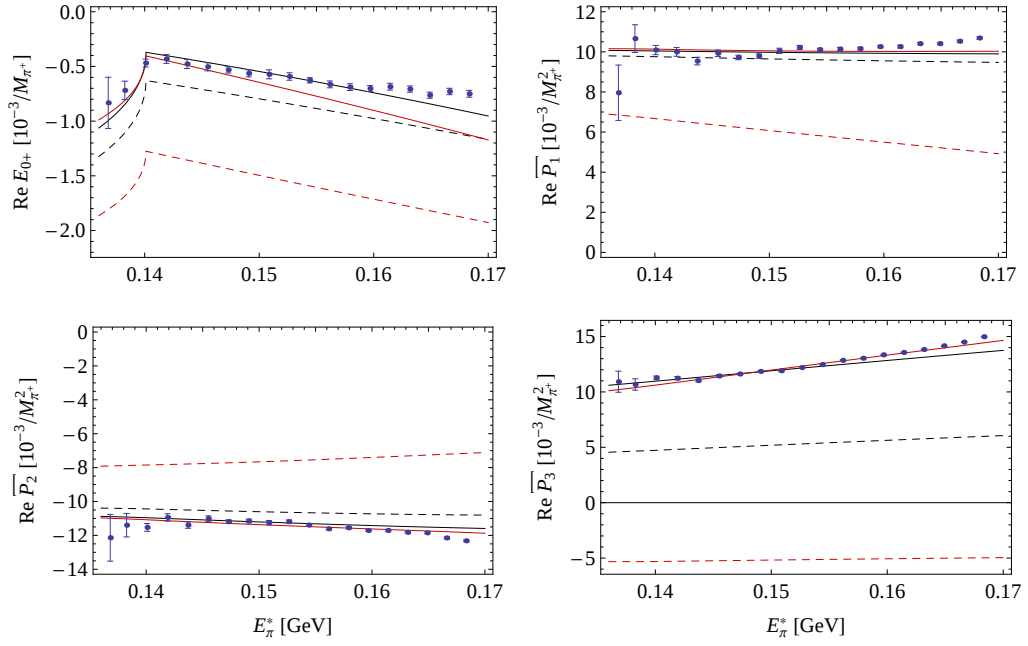


Abbildung 6.9: Vergleich der Realteile von S- und P-Wellen der $\mathcal{O}(q^4)$ -Rechnungen von relativistischer χ PT (schwarze Linie) und HB χ PT (rote Linie) in Abhängigkeit der Pionenergie E_π^* . Die durchgezogene Linie gibt jeweils das vollständige Ergebnis an. Die gestrichelte Linie stellt die Ergebnisse unter Vernachlässigung der Niederenergiekonstanten dar. Die Differenz zwischen diesen beiden Linien stammt somit aus den Niederenergiekonstanten und liefert ein Maß für die Konvergenz der jeweiligen Rechnung.

angefitteten Bereichen so gut wie in der relativistischen Rechnung vierter Ordnung beschrieben werden. In den Wirkungsquerschnitten erscheint diese Rechnung sogar besser, da auch eine Übereinstimmung mit dem Experiment für höhere Energien als in der relativistischen Rechnung vorhanden ist. In Abbildung 6.9 sind zusätzlich die Realteile der S- und P-Wellen gezeigt. Dort zeigt sich ein ähnliches Bild. Obwohl der Multipol E_{0+} insgesamt etwas schlechter erscheint, stimmen die P-Wellen über den gesamten Energiebereich sehr gut mit den SE-Fits überein. Untersucht man jedoch den Beitrag der Niederenergiekonstanten in den Multipolen, so zeigt sich, dass die HB χ PT-Rechnung weniger gut im Sinne der Konvergenz ist. Die Niederenergiekonstanten tragen in großem Maße zu dieser Rechnung bei. In der relativistischen Rechnung liefern sie wesentlich geringere Korrekturen, d.h. die Beiträge höherer Ordnung spielen eine wichtige Rolle.

6.2 Neutrale Elektropionproduktion

Im Folgenden wird die Reaktion

$$p + \gamma^* \rightarrow p + \pi^0 \quad (6.9)$$

untersucht. Nahe der Reaktionsschwelle existieren nur wenige experimentelle Daten für diesen Prozess. Hier liegt der Fokus auf dem Experiment von Weis *et al.* [Wei+ 08], da dieses bei einem sehr geringen $Q^2 = 0.05 \text{ GeV}^2$ durchgeführt wurde und dabei vier verschiedene Observable über einen recht großen Energiebereich untersucht wurden. Nachteil dieses Experiments ist jedoch, dass alle Daten bei einem festen Winkel $\Theta_\pi = 90^\circ$ gemessen wurden. Die Observable

$$\frac{d\sigma_0}{d\Omega_\pi^*} = \frac{d\sigma_T}{d\Omega_\pi^*} + \epsilon \frac{d\sigma_L}{d\Omega_\pi^*} \quad (6.10)$$

(vergleiche Formel (4.74)) konnte auch nicht weiter in ihre Komponenten zerlegt werden, da der Polarisationsgrad des virtuellen Photons in diesem Experiment immer $\epsilon = 0.933$ betrug. Die dort gemessene Observable $\sigma_{LT'}$ ist sehr klein im Vergleich mit dem unpolarisierten Wirkungsquerschnitt. Stattdessen wurde die Asymmetrie

$$A_{LT'} = \frac{\sigma^+ - \sigma^-}{\sigma^+ + \sigma^-} = \frac{\sqrt{2\epsilon(1-\epsilon)}\sigma_{LT'}}{\sigma_T + \epsilon(\sigma_L - \sigma_{TT})} \quad (6.11)$$

angegeben. Die Vorgehensweise zur Untersuchung der Ergebnisse ist die gleiche wie im Falle der Photoproduktion. Die S-, P- und D-Wellen wurden in χ MAID berechnet und mit der Formel (6.4) bis $N = 5$ und $\Delta W = W - W_{\text{thresh}} = 40 \text{ MeV}$ parametrisiert. Dabei wurden die in der Photoproduktion ermittelten Niederenergiekonstanten verwendet. Die noch unbekannten Niederenergiekonstanten wurden auch hier in einer $1/m_N$ -Entwicklung bis zur vierten Ordnung berücksichtigt (entspricht z.B. $\mathcal{O}(q^7)$ in der $\mathcal{O}(q^3)$ -Rechnung). Hier wurde für die P-Wellen wie in der Photoproduktion die Linearkombination aus Gleichung (4.54) verwendet. Aus den Multipolen wurden die vier Observablen berechnet und damit ein χ^2 -Fit durchgeführt, um die Niederenergiekonstanten zu bestimmen. In den folgenden Unterkapiteln werden wieder die verschiedenen Rechnungen getrennt untersucht. Die Parametrisierungen der Multipole sind in Anhang F gegeben. Experimentelle Daten stehen für die Multipole nicht zur Verfügung. Deswegen werden sie mit den Multipolen aus dem DMT-Modell [Kam+ 01] verglichen. D-Wellen werden keine gezeigt, da die wichtigsten Beiträge wieder fast ausschließlich aus den Borntermen stammen.

6.2.1 Ordnung $\mathcal{O}(q^3)$

In dieser Ordnung stehen keine weiteren Niederenergiekonstanten zur Verfügung. Alle Ergebnisse sind somit Vorhersagen. Da in der Photoproduktion bereits die Daten nur bis zur π^+n -Schwelle beschrieben werden konnten, wird hier jede Übereinstimmung bei höheren Energien als zufällig angesehen. Der differentielle Wirkungsquerschnitt σ_0 (Abbildung 6.10) stimmt auch lediglich für die beiden niedrigsten Energien mit dem Experiment überein. Die Größe σ_{LT} (Abbildung 6.11) erscheint für weit höhere Energien gut beschrieben zu werden, was jedoch, wie bereits erwähnt, als Zufall zu werten ist. Dass diese Rechnung nur geringe Vorhersagekraft besitzt, lässt sich nämlich in der Abbildung 6.12 an der Observable σ_{TT} gut erkennen. Das Experiment gibt für niedrige Energien einen sehr kleinen positiven Wert an, während die Kurve steil nach unten abfällt. Die Asymmetrie $A_{LT'}$ (Abbildung 6.13) zeigt auch nur für die ersten beiden Datenpunkte eine Übereinstimmung mit dem Experiment. Da $\sigma_{LT'}$ durch den Imaginärteil bilinearer Amplituden beschrieben wird, ist auch $A_{LT'}$ sensitiv auf den Imaginärteil der Multipole. Unterhalb der π^+n -Schwelle verschwindet dieser in den Rechnungen, was auch mit dem Experiment verträglich ist.

Die Multipole sind in den Abbildungen 6.14 und 6.15 gezeigt. Der Imaginärteil der S-Wellen stimmt sehr gut mit dem DMT-Modell überein. Die Realteile zeigen zwar den gleichen Verlauf, jedoch stimmt nur der Multipol L_{0+} mit DMT annähernd überein. Die reduzierten P-Wellen P_1 und P_2 zeigen auch eine gute Übereinstimmung mit DMT. Lediglich P_3 zeigt eine deutliche Abweichung. Die beiden letzten P-Wellen sind sehr klein. Dementsprechend sind hier die Unterschiede besonders deutlich.

6.2.2 Ordnung $\mathcal{O}(q^4)$

In dieser Ordnung stehen noch zwei weitere Niederenergiekonstanten, $\tilde{e}_{52}$ und $\tilde{e}_{53}$, zur Anpassung zur Verfügung. Diese beiden beeinflussen im Wesentlichen den Verlauf der S-Wellen. Deswegen werden hier zwei mögliche Anpassungen untersucht. Zuerst ein Fit an die Daten bis zu einer Energie von $E_\pi^* = 154.4$ MeV. Dies entspricht dem gleichen Energiebereich, in dem auch die Photoproduktion angepasst wurde. Der entsprechende Fit liefert $\chi_{\text{red}}^2 = 11.4$. Die Werte der Kopplungen sind in Tabelle 6.3 gegeben. Dieser Fit weicht in den Ergebnissen für die S-Wellen von den anderen Rechnungen in χ PT und dem DMT-Modell ab. Deswegen wird noch ein zweites Ergebnis untersucht, bei dem die Niederenergiekonstanten so abgeschätzt wurden, dass eine gute Übereinstimmung mit den S-Wellen im DMT-Modell erzielt wird.

Durch die Anpassung der Niederenergiekonstanten an die Wirkungsquer-

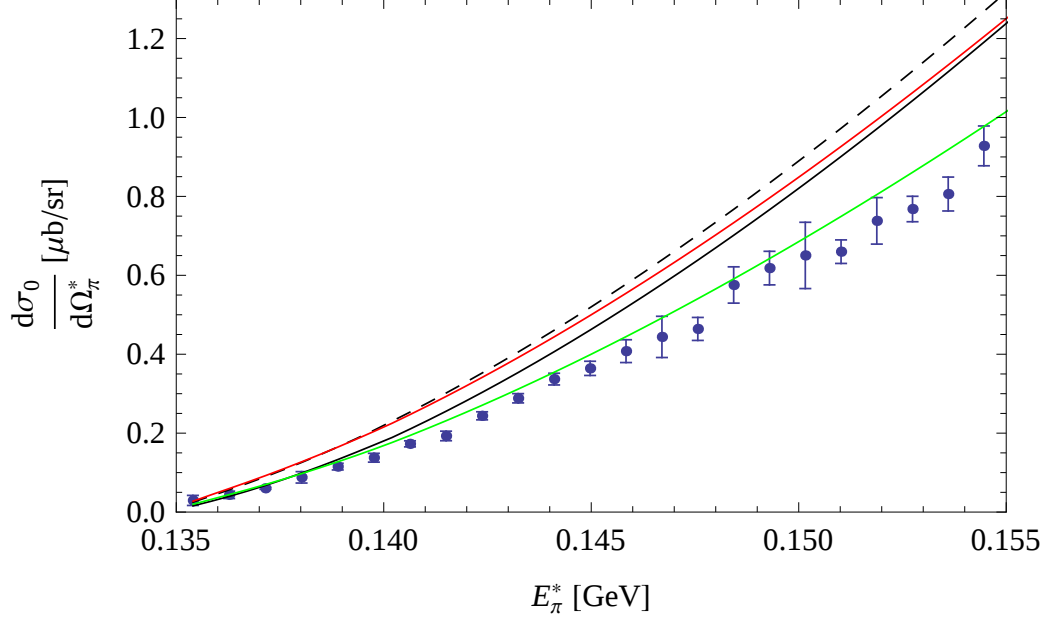


Abbildung 6.10: Der Wirkungsquerschnitt $\frac{d\sigma_0}{d\Omega_\pi^*}$ für $Q^2 = 0.05 \text{ GeV}^2$ und $\Theta_\pi^* = 90^\circ$ in Abhängigkeit der Pionenergie E_π^* . Die rote Kurve zeigt das Ergebnis in lorentzinvarianter χ PT in Ordnung $\mathcal{O}(q^3)$. Die schwarze durchgezogene Linie zeigt das Ergebnis eines Fits an die Daten in Ordnung $\mathcal{O}(q^4)$. Die gestrichelte Linie zeigt die gleiche Rechnung, jedoch mit einer Anpassung der LECs an die S-Wellen des DMT-Modells. Die grüne Kurve zeigt das Ergebnis des Fits in Ordnung $\mathcal{O}(q^3)$ inklusive Vektormesonen. Die Daten stammen aus [Wei+ 08].

LEC	$\mathcal{O}(q^3)$	$\mathcal{O}(q^4)$ Fit	$\mathcal{O}(q^4)$ Mult	$\mathcal{O}(q^3)+\text{VM}$
$\tilde{e}_{52} := e_{52} + e_{72}$	-	7.3	6	-
$\tilde{e}_{53} := e_{53} + e_{73}$	-	-3.4	2.5	-
J_1	-	-	-	20.2

Tabelle 6.3: Niederenergiekonstanten für die $\pi^0 p$ -Elektroproduktion. Die Werte in der Spalte „ $\mathcal{O}(q^4)$ Mult“ wurden so abgeschätzt, dass die S-Wellen des DMT-Modells näherungsweise reproduziert werden. Die e_i sind in Einheiten von GeV^{-3} , J_1 in Einheiten von GeV^{-1} gegeben.

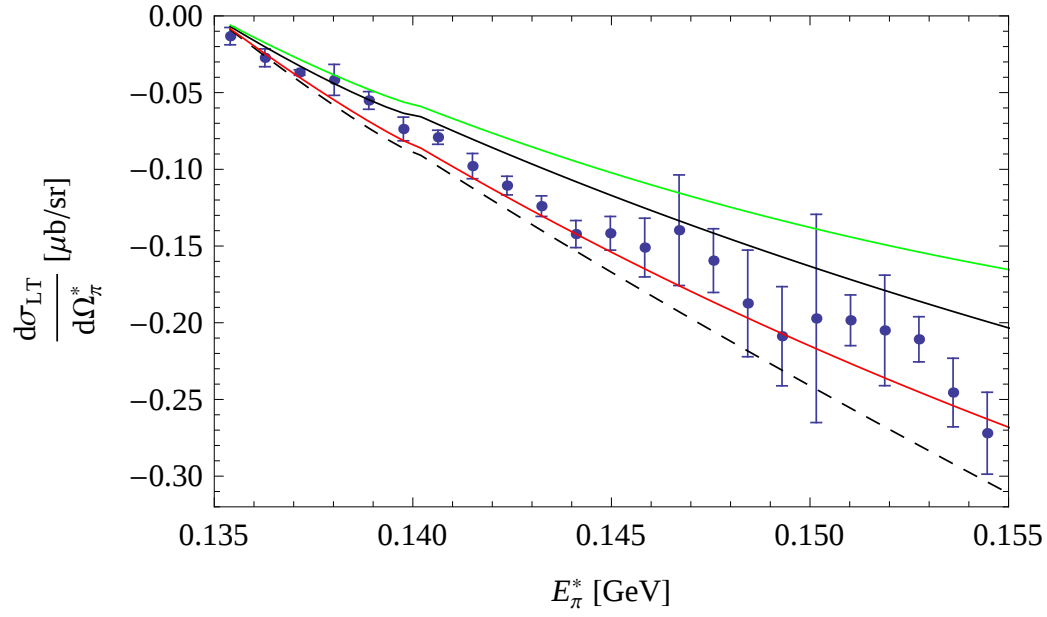


Abbildung 6.11: Der differentielle Wirkungsquerschnitt $\frac{d\sigma_{LT}}{d\Omega^*}$. Für weitere Erläuterungen siehe Abbildung 6.10.

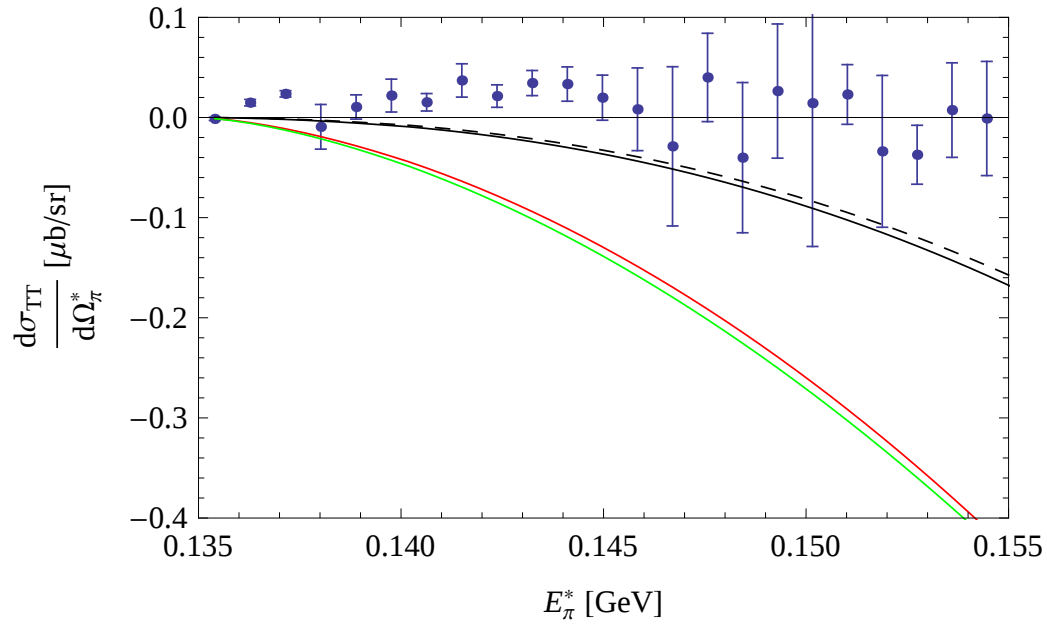


Abbildung 6.12: Der differentielle Wirkungsquerschnitt $\frac{d\sigma_{TT}}{d\Omega^*}$. Für weitere Erläuterungen siehe Abbildung 6.10.

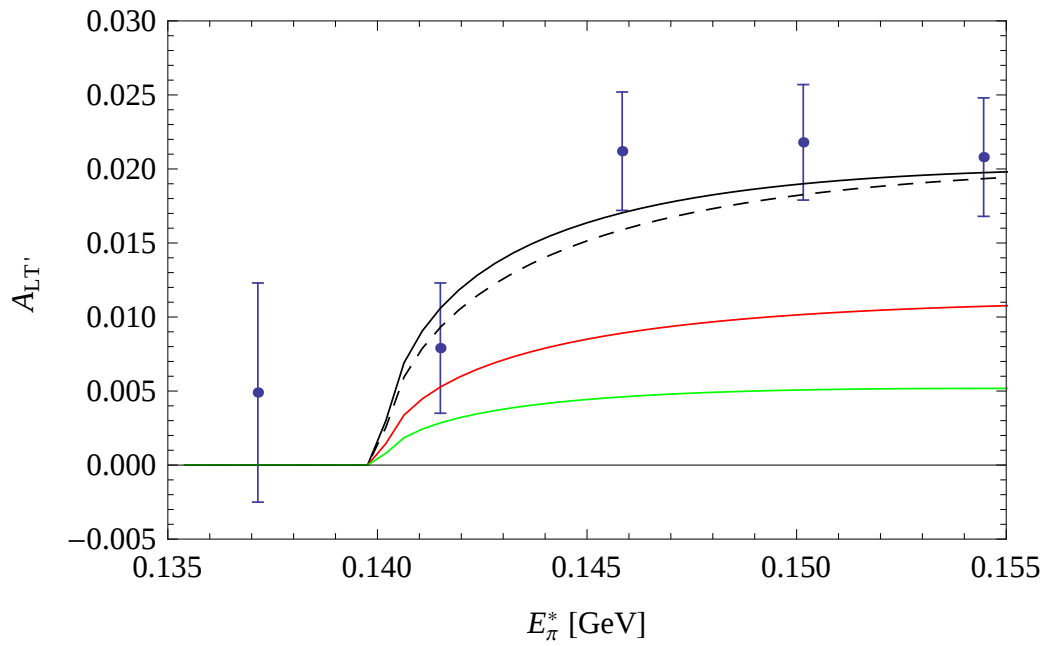


Abbildung 6.13: Die Asymmetrie in Abhängigkeit der Pionenergie E_{π}^* . Für weitere Erläuterungen siehe Abbildung 6.10. Beachte, dass $A_{LT'}$ unterhalb der π^+n -Schwelle identisch verschwindet (siehe Text).

schnitte gelingt für σ_0 (Abbildung 6.10) zumindest eine Beschreibung der Daten bei sehr niedrigen Energien. Die Kurve steigt jedoch frühzeitig stärker an als die Daten. Das Ergebnis mit den angepassten S-Wellen verläuft hingegen zu steil und liegt damit sogar noch schlechter als das Ergebnis in dritter Ordnung. Der in Abbildung 6.11 gezeigte Wirkungsquerschnitt σ_{LT} wird etwas besser in beiden untersuchten Ergebnissen beschrieben. Der recht große Fehler der Messwerte liefert auch eine Übereinstimmung mit dem Experiment bei den höchsten hier untersuchten Energien. Auch hier ist das Ergebnis, welches auf den angepassten Multipolen basiert, schlechter als die Rechnung dritter Ordnung. Die Observable σ_{TT} (Abbildung 6.12) hängt nur geringfügig von den Niederenergiekonstanten ab. Beide Sätze der Niederenergiekonstanten führen zu einer weniger stark abfallenden Kurve als in Ordnung $\mathcal{O}(q^3)$. Dennoch liegen die Kurven immer im negativen Bereich, während das Experiment eher einen kleinen positiven Wirkungsquerschnitt zu haben scheint. Die in Abbildung 6.13 gezeigte Asymmetrie stimmt für beide Sätze der Niederenergiekonstanten mit den Daten überein. Die Niederenergiekonstanten haben auch hier nur eine geringe Auswirkung auf das Ergebnis. Allerdings sind die Fehler des Experiments hier sehr groß.

Die zugehörigen Multipole sind in den Abbildungen 6.14 und 6.15 gezeigt. In den S-Wellen stimmen die Imaginärteile in allen gezeigten Modellen sehr gut überein. Die Realteile unterscheiden sich jedoch beim freien Fit deutlich. Dies war die Motivation auch ein Ergebnis zu untersuchen, bei dem die S-Wellen mit DMT übereinstimmen. Wie man jedoch in den verschiedenen Wirkungsquerschnitten sehen kann, werden die Daten dadurch wesentlich schlechter beschrieben. Dass die S-Wellen in dieser Rechnung bei einem freien Fit anders aussehen, hängt maßgeblich mit den P-Wellen zusammen. Die drei wichtigsten reduzierten P-Wellen, $\bar{P}_1$, $\bar{P}_2$ und $\bar{P}_3$, sind alle deutlich größer als im DMT-Modell. Dort spielen die Niederenergiekonstanten auch eine sehr kleine Rolle, wie man an der Übereinstimmung der Kurven mit unterschiedlichen Werten für die LECs erkennen kann. Lediglich bei $\bar{P}_4$ und $\bar{P}_5$ zeigen sich Unterschiede. Diese Partialwellen sind jedoch sehr klein, so dass sie absolut gesehen empfindlicher auf die Wahl der Niederenergiekonstanten sind.

6.2.3 Ordnung $\mathcal{O}(q^3)$ inklusive Vektormesonen

Hier sind die Niederenergiekonstanten $d_8^p, g_{\omega\rho\pi'} = g_{\omega\rho\pi}g_{\omega N}$ und J_1 noch nicht festgelegt. Die Beiträge, welche in Zusammenhang mit den Konstanten d_8^p und $g_{\omega\rho\pi'}$ stehen, können numerisch vernachlässigt werden. Deswegen werden sie im Fit nicht berücksichtigt. Die Konstante J_1 wurde an die Wirkungsquerschnitte angepasst. Da bei der Photoproduktion Wirkungsquerschnitte bis

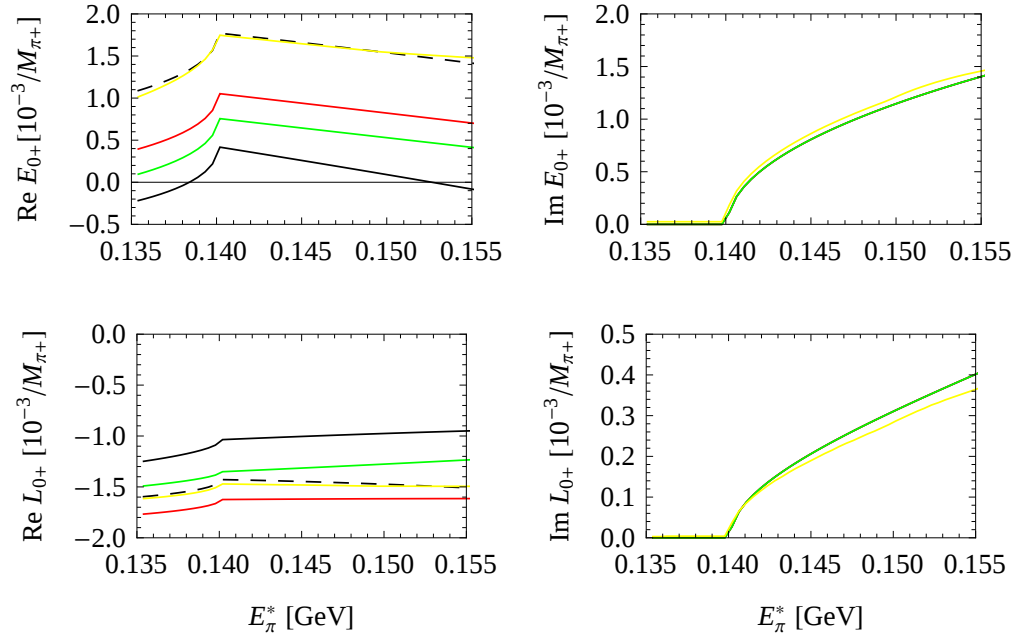


Abbildung 6.14: Real- und Imaginärteile der S-Wellen für $Q^2 = 0.05 \text{ GeV}^2$ in Abhängigkeit der Pionenergie. Die Zuordnung der verschiedenen Kurven wird in Abbildung 6.10 erläutert. Hinzu kommt hier noch das DMT-Modell (gelbe Kurve). Beim Imaginärteil liegen alle Rechnungen in χ PT so nahe zusammen, dass sie in den gezeigten Abbildungen nicht mehr unterschieden werden können.

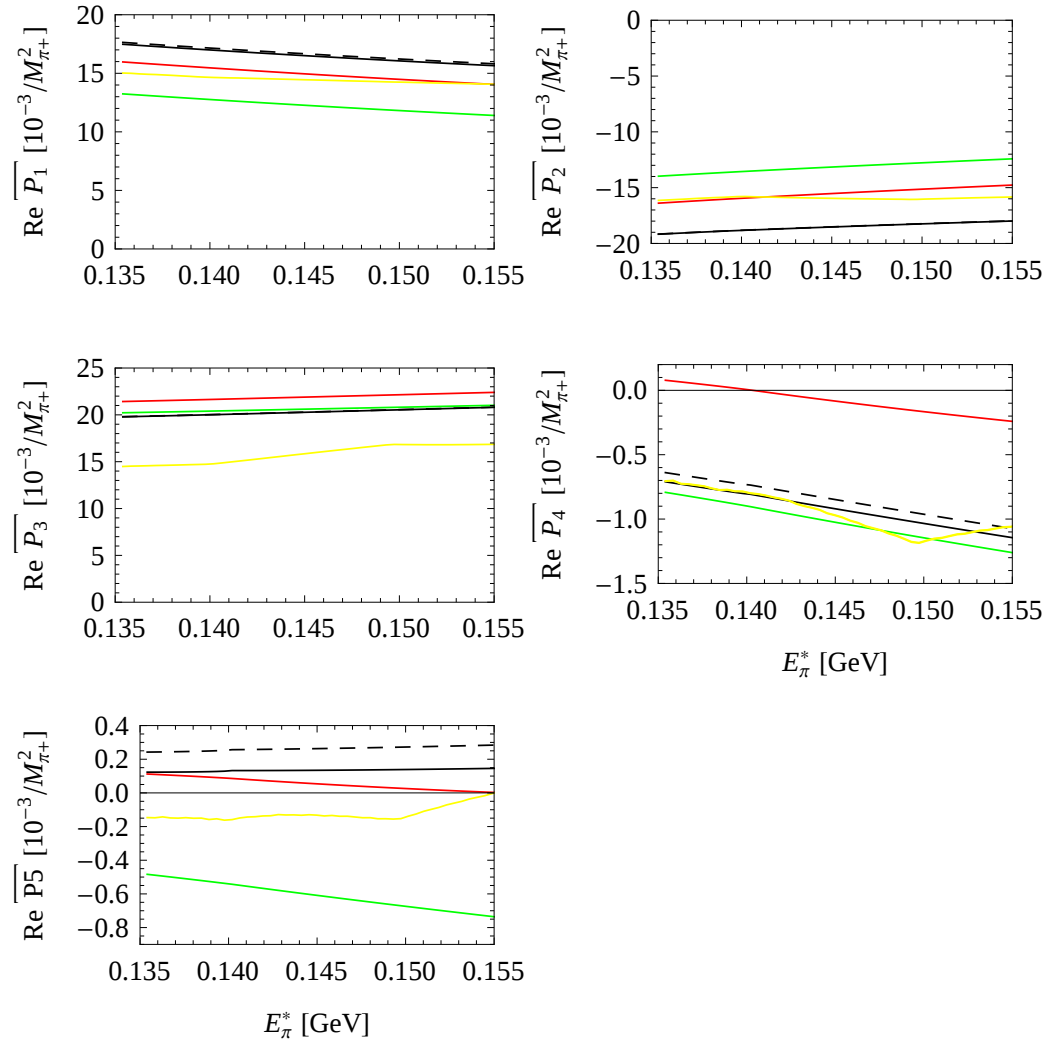


Abbildung 6.15: Realteile der P-Wellen für $Q^2 = 0.05 \text{ GeV}^2$ in Abhängigkeit der Pionenergie E_π^* . Die Zuordnung der verschiedenen Kurven wird in Abbildung 6.14 bzw. 6.10 erläutert. Die Knicke im DMT-Modell sind auf die dort verwendeten Interpolationsroutinen zurückzuführen.

zur Reaktionsschwelle für den π^+n -Kanal beschrieben wurden, diene diese Grenze auch als obere Grenze für die hier angefitzten Datenpunkte, d.h. $E_\pi^* = 140.6$ MeV. Damit ergibt sich $\chi_{\text{red}}^2 = 17$.

Die in Abbildung 6.10 gezeigten experimentellen Daten für σ_0 lassen sich im angefitzten Bereich sehr gut beschreiben. Oberhalb der π^+n -Schwelle stimmt zwar die Kurve auch gut mit den Messdaten überein, jedoch liegen diese Energien außerhalb des Bereichs, in dem diese Rechnung Vorhersagekraft besitzt. Dies sieht man besser an der Observable σ_{LT} in Abbildung 6.11. Die Kurve fällt flacher ab als die Daten, so dass die Daten nur bis $E_\pi^* = 140$ MeV gut beschrieben werden. Die Observable σ_{TT} (Abbildung 6.12) wird durch den Einbau der Vektormesonen nur geringfügig beeinflusst. Deswegen stimmen die Ergebnisse mit der Rechnung ohne Vektormesonen fast überein. Die Asymmetrie, dargestellt in Abbildung 6.13, ist hier noch kleiner als in der gleichen Ordnung ohne Vektormesonen.

Die Ergebnisse für die Multipole sind in den Abbildungen 6.14 und 6.15 gezeigt. Die Steigung der S-Wellen erscheint in allen Rechnungen und dem DMT-Modell sehr ähnlich. Jedoch zeigt sich eine gewisse Diskrepanz in den unterschiedlichen Rechnungen. Auch die reduzierten P-Wellen haben in den χ PT-Rechnungen fast immer die gleiche Steigung, sind jedoch immer parallel verschoben. Eine Anpassung von J_1 an das DMT-Modell erscheint hier nicht sinnvoll, da neben E_{0+} auch L_{0+} und zum Teil die P-Wellen durch diese Niederenergiekonstante beeinflusst werden. Somit würde durch eine Anpassung eines Multipols an DMT alle anderen deutlich verändert.

6.2.4 Q^2 -Abhängigkeit

Eines der Ziele dieser Arbeit ist die Q^2 -Abhängigkeit in der Elektropionproduktion durch Einbau von Vektormesonen in χ PT besser zu beschreiben. Nachdem für die π^0 -Produktion alle Niederenergiekonstanten festgelegt wurden, werden im Folgenden experimentelle Daten für totale Wirkungsquerschnitte in Abhängigkeit von Q^2 betrachtet [Mer 09b]. Diese wurden bei fester Strahlenergie gemessen, so dass keine Zerlegung des Wirkungsquerschnitts $\sigma_0 = \sigma_T + \epsilon\sigma_L$ durchgeführt werden konnte, da ϵ bei festem Q^2 somit konstant ist. Die Resultate sind in Abbildung 6.16 gezeigt. Die Ergebnisse der Rechnung in Ordnung $\mathcal{O}(q^3)$ liegen in allen Fällen etwas zu hoch. Ihnen fehlt auch die nötige Krümmung. Die Q^2 -Abhängigkeit ist näherungsweise durch eine Gerade gegeben. Fügt man die Vektormesonen hinzu, so erhält man die gewünschte Krümmung. Dies wird erwartet, da die Formfaktoren des Nukleons hier eine wichtige Rolle spielen [SK 91]. Durch den Einbau der Vektormesonen lässt sich dort nämlich die Q^2 -Abhängigkeit wesentlich verbessern (siehe Anhang C.7). Die totalen Wirkungsquerschnitte der Elektropionproduktion

werden hier somit durch den Einbau der Vektormesonen verbessert. Die Ergebnisse in Ordnung $\mathcal{O}(q^4)$ sind stark durch die Niederenergiekonstanten beeinflusst. In Kapitel 6.2.2 wurden die Niederenergiekonstanten $\tilde{e}_{52}$ und $\tilde{e}_{53}$ auf zwei verschiedene Arten bestimmt. Die erste Anpassung liefert für die totalen Wirkungsquerschnitte zu niedrige, die zweite eher zu hohe Werte. Dieser Unterschied zeigt sehr deutlich, dass die Niederenergiekonstanten noch genauer bestimmt werden müssen. Dazu sind jedoch mehr und vor allem präzisere Daten für die Elektroproduktion in der Schwellenregion nötig. Dies müssen differentielle Wirkungsquerschnitte und andere Observable bei verschiedenen Winkeln Θ_π^* sein, da nur so die Multipole korrekt bestimmt werden können. Außerdem kann in einer $\mathcal{O}(q^3)$ -Rechnung der Nutzen der Vektormesonen nur bei Energien gezeigt werden, bei denen die S-Wellen dominieren.

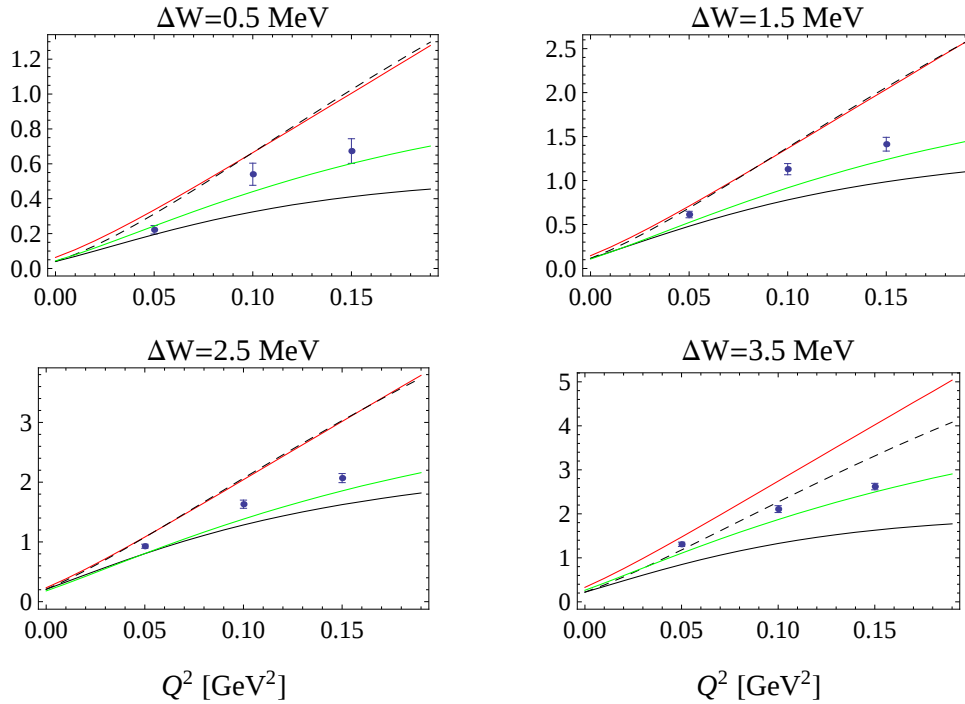


Abbildung 6.16: Totale Wirkungsquerschnitte in μb für feste Strahlenergie in Abhängigkeit von Q^2 bei verschiedenen Schwerpunktsenergien $\Delta W = W - W_{\text{thresh}}$. Die rote Kurve ist die Rechnung in Ordnung $\mathcal{O}(q^3)$, die durchgezogene schwarze in $\mathcal{O}(q^4)$ mit Anpassung von $\tilde{e}_{52}$ und $\tilde{e}_{53}$ an die Observable in Kapitel 6.2.2. Die gestrichelte schwarze Linie ist die Anpassung selbiger LECs an die S-Wellen des DMT-Modells. Die grüne Kurve zeigt das Ergebnis in $\mathcal{O}(q^3)$ mit Vektormesonen als expliziten Freiheitsgraden. Die Daten stammen aus [Mer 09a].

6.3 Geladene Photopionproduktion

Im Folgenden werden die beiden Reaktionen

$$p + \gamma \rightarrow \pi^+ + n, \quad (6.12)$$

$$n + \gamma \rightarrow \pi^- + p, \quad (6.13)$$

gemeinsam diskutiert. In beiden treten die gleichen Linearkombinationen von Niederenergiekonstanten auf, jedoch mit unterschiedlichen Vorzeichen (siehe Gleichung 4.60). Die LECs wurden durch einen gleichzeitigen Fit an beide Reaktionskanäle bestimmt. Dies ist notwendig, da hier die Niederenergiekonstanten in jeder Reaktion einzeln eindeutig bestimmbar sind, im Gegensatz zu den Reaktionskanälen der neutralen Pionproduktion. Die Reaktion (6.13) wird in dieser Form nicht untersucht, da das Neutron nicht als freies Target zur Verfügung steht. Stattdessen wird die Umkehrreaktion, der so genannte Strahlungseinfang eines Pions gemessen. Die dort gemessenen Wirkungsquerschnitte lassen sich einfach mit den Wirkungsquerschnitten der Pionproduktion in Verbindung bringen [Fea+ 00]. Alternativ wurden auch Experimente an Deuterium und anderen Targets durchgeführt und die entsprechenden Wirkungsquerschnitte für die Pionproduktion am Neutron extrahiert. Für die geladenen Reaktionskanäle wird im Folgenden nicht ein einzelnes Experiment, sondern viele verschiedene Experimente gleichzeitig untersucht, da keines der Experimente eine ausreichende Zahl an Messwerten zur Verfügung stellt. Im untersuchten Energiebereich existieren Daten für differentielle Wirkungsquerschnitte, die polarisierte Photonasymmetrie Σ , die polarisierte Targetasymmetrie T und die Rückstoßpolarisation P . Die beiden letztgenannten hängen nur von den Imaginärteilen bilinearer Amplituden ab. Des Weiteren wurden sie nur bei sehr hohen Energien gemessen. Sie werden somit hier nicht untersucht, da ohne die Deltaresonanz bei hohen Energien die wichtigsten Beiträge in den Imaginärteilen fehlen und somit eine Beschreibung dieser Observablen nicht möglich wäre.

In der geladenen Photopionproduktion dominiert die S-Welle bei niedrigen Energien. In der Literatur ist das entsprechende Niederenergiethem als Kroll-Ruderman-Theorem bekannt [KR 54]. Dementsprechend lassen sich die Reaktionen zu höheren Energien als in der neutralen Photoproduktion beschreiben. Deswegen ist die Vorgehensweise für die Berechnung der Observablen hier eine andere wie in der π^0 -Produktion. Denn zusätzlich wird der Pionpolterm bei höheren Energien wichtig und eine Partialwellenzerlegung konvergiert in der Nähe des Pols nur noch schlecht. Man müsste somit mehr als nur die niedrigsten Multipole verwenden, um die Observablen korrekt zu bestimmen. Deswegen werden sie für die geladene Produktion aus

den CGLN-Amplituden berechnet, da diese alle Partialwellen beinhalten. Als Funktionen zweier kinematischer Variable sind sie jedoch nicht so einfach zu parametrisieren wie die Multipole. Um einen Fit durchführen zu können, wurde deswegen folgendermaßen vorgegangen. Die CGLN-Amplituden wurden in Mathematica für diejenigen Kinematiken berechnet, für die experimentelle Daten vorlagen. Bei einem Fit benötigt der Algorithmus die Amplituden nämlich nur an diesen Stellen. Ansonsten müsste das Programm sie in jeder Iteration des Fits neu berechnen, was sehr zeitintensiv wäre. Durch das Vorberechnen war es möglich die Fits stark zu beschleunigen und die LECs zu bestimmen. Einziger Nachteil dieses Verfahrens ist, dass Mathematica dann keine Fehler für die Niederenergiekonstanten ermitteln kann. Die Multipole wurden danach mit den aus dem Fit bestimmten Konstanten berechnet. Sie können auch mittels Formel (6.4) parametrisiert werden. Da hier höhere Energien untersucht werden, müssen auch mehr Potenzen in der Entwicklung mitgenommen werden. In Anhang F ist eine Parametrisierung bis $N = 6$ und $W = 1140$ MeV gegeben. Für die geladene Pionproduktion mag diese Potenzreihe weniger gut geeignet sein, jedoch hat man so einen besseren Vergleich zur π^0 -Produktion. Die Imaginärteile der Multipole werden der Übersichtlichkeit halber nicht dargestellt, da sie eine untergeordnete Rolle im Vergleich zu den jeweiligen Realteilen spielen. Die D-Wellen und höhere Multipole werden hier nicht gezeigt, da die wichtigsten Beiträge durch die Bornsterme gegeben sind.

Für die Berechnung der Multipole wurde auch hier Isospinsymmetrie angenommen, d.h. für die physikalischen Massen wurde (mit Ausnahme der Propagatoren in den Schleifen) immer die Masse des neutralen Pions und des Protons verwendet. Deswegen besitzen die Multipole mit Drehimpuls $l > 0$ bereits an der jeweiligen Reaktionsschwelle einen endlichen Wert. Im Sinne der chiralen Störungstheorie ist der Effekt durch die unterschiedliche Pion- bzw. Nukleonmasse ein Effekt höherer Ordnung. Hier wird deswegen insbesondere wegen der Konsistenz in den Amplituden immer die gleiche Masse verwendet. Deshalb sollte ein Vergleich mit dem Kroll-Ruderman-Theorem an der π^0 -Schwelle durchgeführt werden. Gezeigt werden die Wirkungsquerschnitte in den verschiedenen Rechnungen sowie die niedrigsten Multipole. Da keine experimentellen Daten für die Multipole vorliegen, wird zusätzlich das DMT-Modell dargestellt, um einen Vergleich mit anderen Rechnungen anstellen zu können. Die experimentellen Daten stammen von [Ahr+ 04, Arg+ 78, Bag+ 88, Bla+ 00, Ben+ 73, Bet+ 68, Bou+ 73, Bra+ 00, Bri+ 95, Bue+ 94, Com+ 75, Dut+ 96, Fau+ 84, Fis+ 70, Fis+ 72, Fis+ 96, Fuj+ 77, Gan+ 76, Get+ 81, Hol+ 74, Kon+ 74, Kor+ 99, Kuz+ 71, LLL 64, Len 77, Liu 94, Ros+ 73, Sal+ 84, SM 63, Sta+ 94, TM 60, Tra+ 79, Tia 11b, WB 62].

Da die geladenen Reaktionskanäle bis zu deutlich höheren Energien be-

schrieben werden können als der $\pi^0 p$ -Kanal, musste der anzupassende Bereich ermittelt werden. Die Vorgehensweise hierfür war die gleiche wie in Kapitel 6.1.2. Das χ_{red}^2 wurde für alle Daten bis zu einer festgelegten Maximalenergie ermittelt. Im nächsten Schritt wurde diese minimal erhöht und wieder ein χ^2 -Fit durchgeführt. Anhand der Entwicklung des χ_{red}^2 in Abhängigkeit der berücksichtigten Daten wurde der mögliche Fitbereich ermittelt. Erschwerend kommt jedoch hinzu, dass das χ_{red}^2 hier immer ein wenig größer wird, je mehr Daten im Fit berücksichtigt werden. Deswegen wurde nach dem ersten größeren Sprung im χ_{red}^2 gesucht und nur die Daten bis zu diesem Anstieg verwendet. Die ermittelten Bereiche werden in den folgenden Unterkapiteln einzeln erläutert. Genau wie in der neutralen Pionproduktion wurden die Fits an nichtlineare Größen durchgeführt. Deswegen wurden auch hier tausende Fits mit zufällig gewählten Startwerten durchgeführt, um sicherzustellen, dass das globale Minimum des χ_{red}^2 gefunden wird.

Da für sehr viele verschiedene Energien Daten zur Verfügung standen, wird in den folgenden Unterkapiteln nur eine Auswahl der Ergebnisse gezeigt. Die restlichen Figuren sind in Anhang E dargestellt. Differentielle Wirkungsquerschnitte bei Energien, welche nur einen einzelnen Datenpunkt enthalten, werden nicht gezeigt, da sonst eine sehr große Anzahl zusätzlicher Abbildungen entstehen würde.

6.3.1 Ordnung $\mathcal{O}(q^3)$

In dieser Ordnung gilt es drei Niederenergiekonstanten zu bestimmen, nämlich d_9 , d_{20} und d_{21} . Nach dem oben beschriebenen Verfahren wurde als Obergrenze der zu verwendenden Daten $W = 1129$ MeV bzw. $k_\gamma = 210$ MeV bestimmt. Bis zu dieser Energie liegen jedoch nur Daten für differentielle Wirkungsquerschnitte vor, d.h. die Observable Σ wurde nicht angefitet. Das Resultat des Fits liefert $\chi_{\text{red}}^2 = 2.43$. Die Werte der Niederenergiekonstanten sind in Tabelle 6.4 auf Seite 103 angegeben. Die Ergebnisse für die differentiellen Wirkungsquerschnitte sind in den Abbildungen 6.17 und 6.18 und Anhang E gezeigt. Der angefitete Bereich wird sehr gut beschrieben. Auch bei den nächsthöheren Energien findet sich noch eine sehr gute Übereinstimmung mit den Experimenten. In den höchsten hier gezeigten Energien fällt der Wirkungsquerschnitt insbesondere bei Winkeln um $\Theta_\pi^* = 90^\circ$ zu niedrig aus. Bei 0° bzw. 180° ist die Abweichung hingegen meist geringer. Die Vorhersagen für die Photonasymmetrie sind in den Abbildungen 6.19 und 6.20 und Anhang E gezeigt. Für beide Reaktionskanäle findet sich nur bei den niedrigsten untersuchten Energien eine gewisse Übereinstimmung mit den Experimenten. Für höhere Energien fallen die Ergebnisse der Rechnungen zu klein aus. Dominant für diese Observable ist der Multipol M_{1+} , welcher

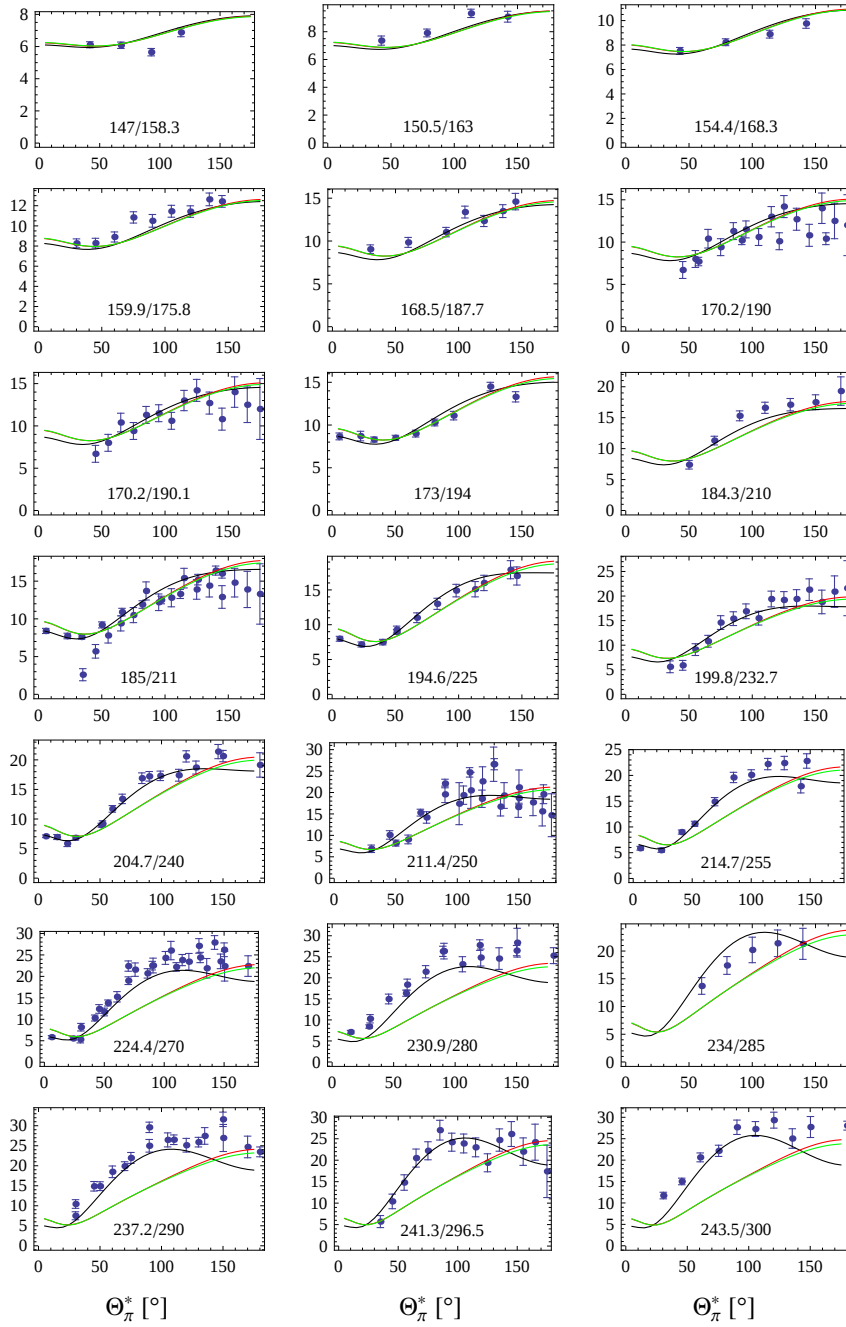


Abbildung 6.17: Differentielle Wirkungsquerschnitte für die Reaktion $\gamma + n \rightarrow p + \pi^-$. Aufgetragen ist jeweils der Wirkungsquerschnitt in $\mu\text{b/sr}$ in Abhängigkeit des Winkels Θ_π^* . In den Bildern ist die zugehörige Schwerpunktsenergie des Pions im Endzustand bzw. die Photonenergie im Laborsystem in MeV angegeben. Für die Kennzeichnung der Kurven siehe Abbildung 6.3.

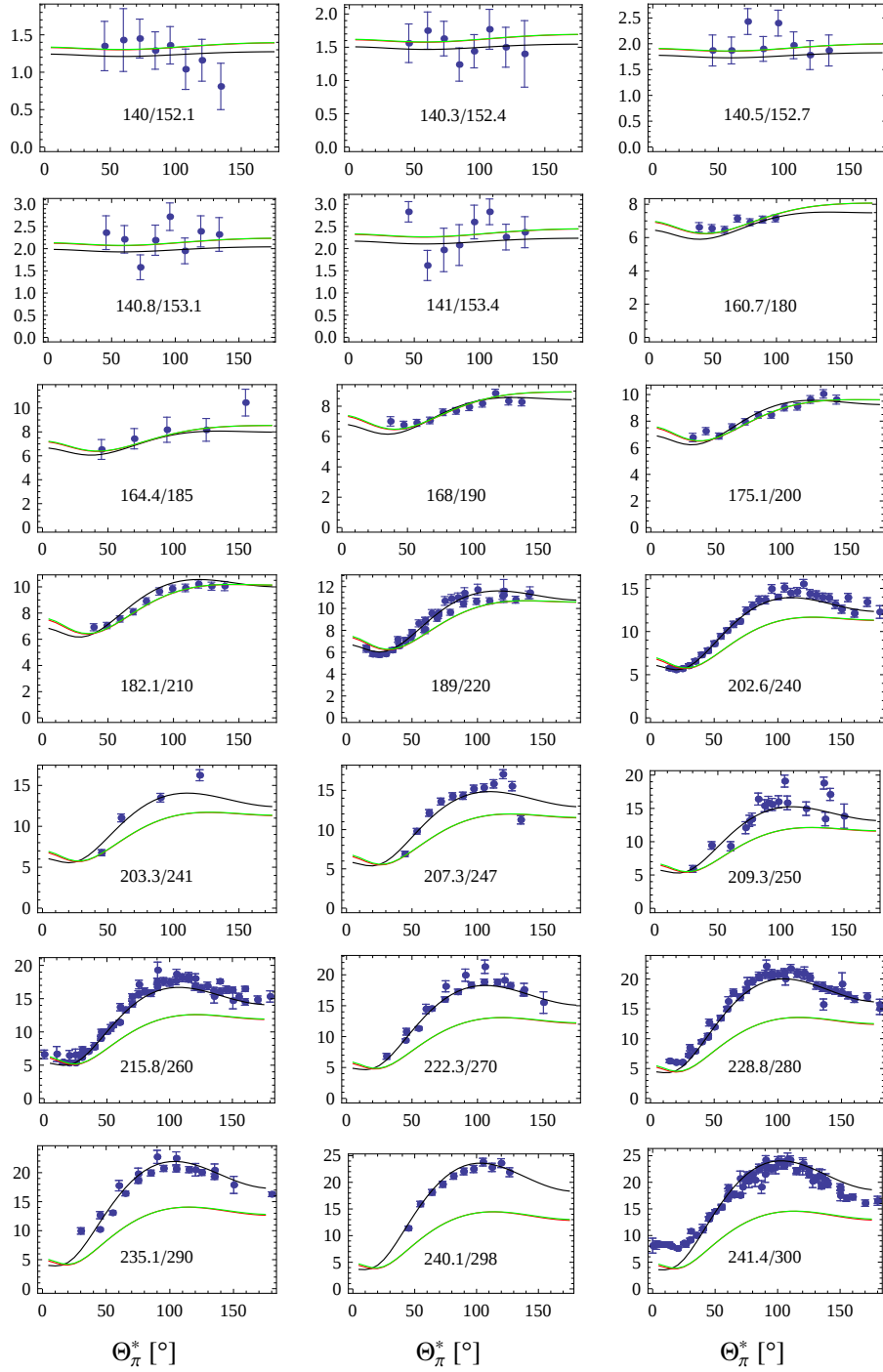


Abbildung 6.18: Differentielle Wirkungsquerschnitte für die Reaktion $\gamma + p \rightarrow n + \pi^+$. Für die Kennzeichnung der Achsen und die Zuordnung der einzelnen Kurven siehe Abbildung 6.17 bzw. 6.3.

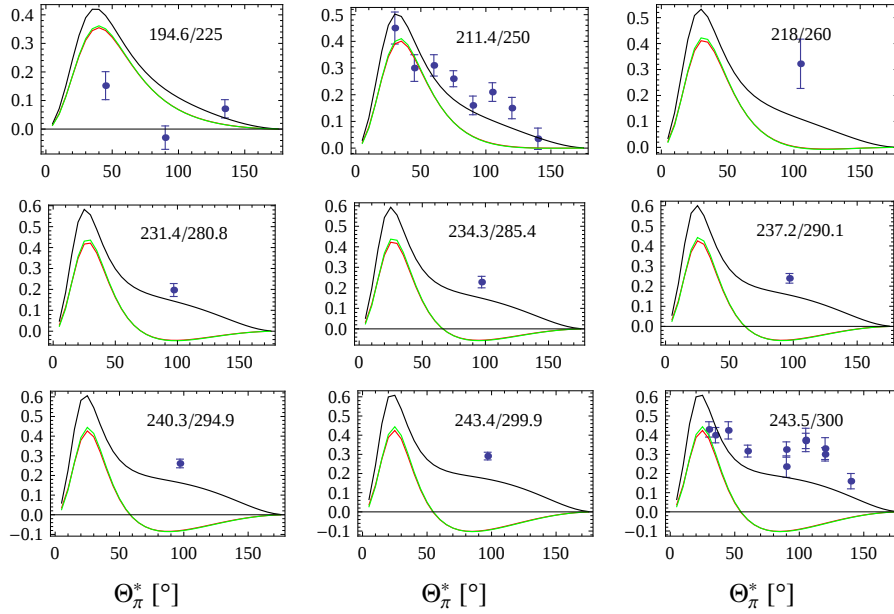


Abbildung 6.19: Photon asymmetrie Σ in Abhängigkeit von Θ_π^* für die Reaktion $\gamma + n \rightarrow p + \pi^-$. Die Zuordnung der einzelnen Kurven ist in Abbildung 6.3 erläutert.

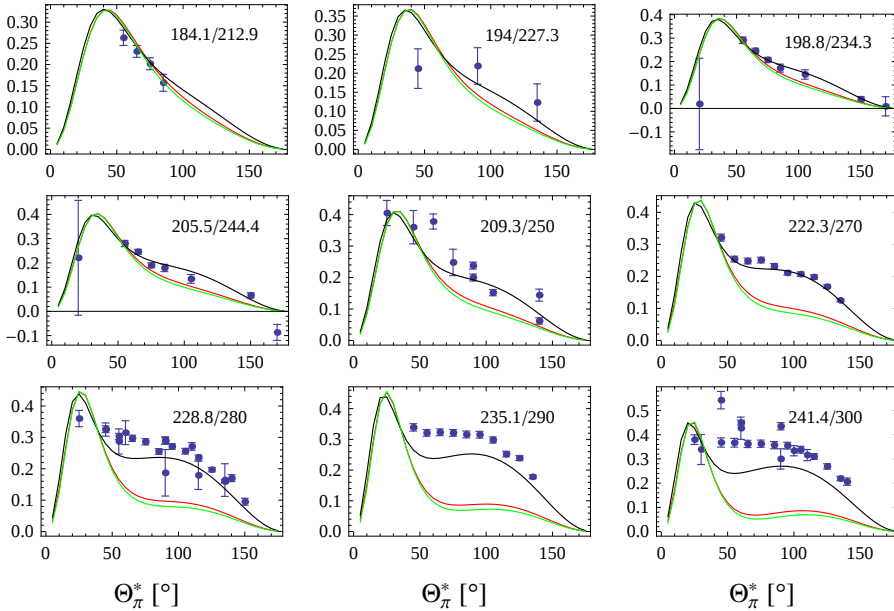


Abbildung 6.20: Photon asymmetrie Σ in Abhängigkeit von Θ_π^* für die Reaktion $\gamma + p \rightarrow n + \pi^+$. Die Zuordnung der einzelnen Kurven ist in Abbildung 6.3 erläutert.

in einer $\mathcal{O}(q^3)$ -Rechnung zu klein ausfällt. Dieser und die anderen Multipole sind in der Abbildung 6.21 dargestellt. Die S-Welle stimmt für beide Reaktionskanäle sehr gut mit DMT überein. Ab einer Pionenergie/Photonenergie von ca. 220/260 MeV wird der Einfluss der Deltaresonanz ($m_\Delta = 1232$ MeV) in den P-Wellen sichtbar. Der Realteil von E_{1+} und M_{1+} verschwindet genau auf der Resonanzposition des Deltas. Deswegen müssen diese beiden Multipole, welche anfänglich vom Betrag her monoton ansteigen, entsprechend abfallen. In DMT ist die Deltaresonanz berücksichtigt und deshalb auch das korrekte Verhalten der Multipole. Die hier durchgeführte Rechnung berücksichtigt jedoch die Deltaresonanz nicht explizit und kann deswegen diesen Effekt nicht reproduzieren. Auch der Multipol M_{1-} stimmt nur unterhalb einer Pionenergie von 220 MeV gut mit den anderen Modellen überein, insgesamt ist er jedoch in beiden Reaktionskanälen (insbesondere bei höheren Energien) zu groß.

6.3.2 Ordnung $\mathcal{O}(q^4)$

In dieser Rechnung müssen die drei Konstanten aus der $\mathcal{O}(q^3)$ -Rechnung erneut angepasst werden. Hinzu kommen noch sechs weitere Niederenergiekonstanten, fünf für die $A_i^{(0)}$ -Amplituden und eine weitere für die $A_i^{(-)}$ -Amplituden. Somit gilt es insgesamt neun Konstanten in einem Fit zu bestimmen. Als Maximalenergie nach der oben beschriebenen Methode hat sich $W = 1159.3$ MeV bzw. $k_\gamma = 247$ MeV ergeben. Ein Fit an alle Daten bis zu dieser Energie liefert $\chi^2_{\text{red}} = 2.39$. Die Werte der Niederenergiekonstanten sind in Tabelle 6.4 angegeben. Die differentiellen Wirkungsquerschnitte (Abbildungen 6.17, 6.18 und Anhang E) werden im gesamten angefiteten Bereich sehr gut beschrieben. Des Weiteren findet sich eine sehr gute Übereinstimmung mit dem Experiment bis zu den höchsten hier dargestellten Energien von $W = 1202.6$ MeV bzw. $k_\gamma = 300$ MeV. Dies ist ein weit größerer Bereich als man erwarten könnte, da man nun sehr nahe an der Deltaresonanz ist, welche jedoch nicht explizit eingebaut wurde. Erklären lässt sich dies, wenn man sich die Ergebnisse für die Photonasymmetrie, gezeigt in den Abbildungen 6.19 und 6.20 und Anhang E und die Daten, welche zum Fitten verwendet wurden, näher betrachtet. Im Fitbereich liegen 153 Datenpunkte für den differentiellen Wirkungsquerschnitt $\sigma(\pi^-p)$ bzw. 214 für $\sigma(\pi^+n)$. Bei $\Sigma(\pi^-p)$ sind es drei Datenpunkte und 51 für $\Sigma(\pi^+n)$. Außerdem haben die differentiellen Wirkungsquerschnitte im Vergleich zur Photonasymmetrie meist einen sehr kleinen Fehler. Deswegen werden Wirkungsquerschnitte im Fit viel stärker gewichtet. Eine gute Übereinstimmung mit dem Experiment findet sich deshalb nur bei $\Sigma(\pi^+n)$. Ein besseres Verständnis für die Ergebnisse erhält man durch die Multipole (Abbildung 6.21). Unmittelbar an der

Schwelle werden die Wirkungsquerschnitte durch die S-Welle dominiert. Bei etwas höheren Energien spielt insbesondere der Multipol M_{1+} eine wichtige Rolle. Betrachtet man nun die S-Welle in dieser $\mathcal{O}(q^4)$ -Rechnung, so sieht man beim π^+n -Kanal, dass zwar im angefitteten Bereich eine recht gute Übereinstimmung mit DMT vorliegt, darüber hinaus ist jedoch die Krümmung hier stärker. Der π^-p -Kanal fällt insgesamt etwas zu steil ab. Der Multipol M_{1+} stimmt in beiden Reaktionskanälen sehr gut mit DMT überein, ist jedoch etwas größer. Dies kompensiert unter anderem ein wenig das Verhalten der S-Welle. Den zu erwartenden Nulldurchgang an der Resonanzposition des Delta kann jedoch auch die $\mathcal{O}(q^4)$ -Rechnung nicht erzeugen, da auch hier die Deltaresonanz als expliziter Freiheitsgrad fehlt. Der Multipol E_{1+} stimmt im π^-p -Kanal sehr gut mit den anderen Modellen überein. Im π^+n -Kanal zeigt sich eine kleine Abweichung. Der Multipol M_{1-} weicht in beiden Kanälen etwas von den anderen Modellen ab. Die Ungenauigkeiten in den Multipolen sind sicherlich auch auf die LECs zurückzuführen. Die insgesamt neun Niederenergiekonstanten ermöglichen einen großen Spielraum beim Fit. Um den tatsächlichen Energiebereich zu bestimmen, in welchem diese Rechnung gültig ist, wären somit mehr Daten für Σ bei niedrigeren Energien nötig. Damit würden die Multipole sicherlich auch besser bestimmt. Zuletzt kommt noch hinzu, dass bei niedrigen Energien auch bei den Wirkungsquerschnitten nur wenige Daten zur Verfügung stehen. Da diese im Vergleich zu Daten bei hohen Energien einen großen relativen Fehler haben, ist ihr Gewicht für den Fit auch gering. Dies erschwert die Bestimmung der Multipole weiter. Dieser Effekt ist in der Ordnung $\mathcal{O}(q^4)$ stärker ausgeprägt als in $\mathcal{O}(q^3)$, da dort weniger Daten bei hohen Energien verwendet wurden.

6.3.3 Ordnung $\mathcal{O}(q^3)$ inklusive Vektormesonen

In dieser Rechnung gilt es die gleichen Niederenergiekonstanten wie in der $\mathcal{O}(q^3)$ -Rechnung ohne Vektormesonen zu bestimmen, da alle anderen Konstanten entweder bereits festgelegt wurden, oder nicht beitragen. Der Fit liefert hier $\chi^2_{\text{red}} = 2.38$ und somit ein nahezu gleiches χ^2_{red} wie in der gleichen Ordnung ohne Vektormesonen. Die Werte der Niederenergiekonstanten finden sich in Tabelle 6.4. Wie bereits in der neutralen Pionproduktion sind nur geringe Unterschiede durch den Einbau der Vektormesonen in der Photoproduktion zu erwarten. Dies zeigt sich auch bei einem Blick auf die differentiellen Wirkungsquerschnitte in den Abbildungen 6.17 und 6.18 bzw. Anhang E. Die beiden $\mathcal{O}(q^3)$ -Rechnungen zeigen nur geringe Abweichungen voneinander. Häufig verdecken sich die beiden Kurven sogar gegenseitig. Somit lassen sich alle Aussagen bezüglich der Güte der $\mathcal{O}(q^3)$ mit Vektormesonen aus den Ergebnissen ohne Vektormesonen aus Kapitel 6.3.1 übernehmen. Gleiches

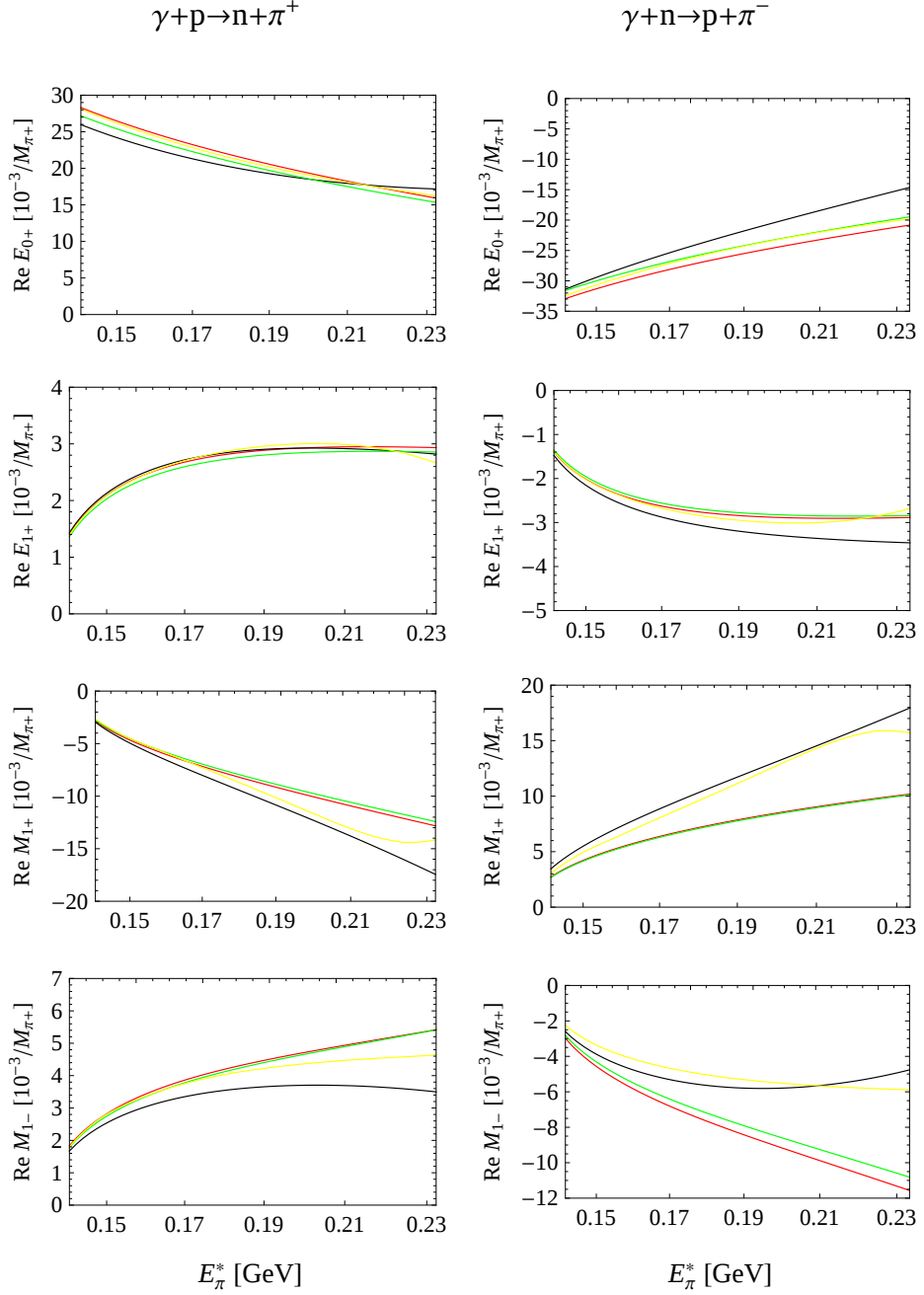


Abbildung 6.21: Ergebnisse für S-Wellen und P-Wellen in den geladenen Reaktionskanälen in Abhängigkeit der Schwerpunktsenergie E_π^* des geladenen Pions im Endzustand. Für die Kennzeichnung der Kurven siehe Abbildung 6.17 auf Seite 97.

gilt auch für die Photonasymmetrie in den Abbildungen 6.19 und 6.20 und Anhang E. Ein Blick auf die Multipole (Abbildung 6.21) bestätigt diese Aussage im Wesentlichen. Die Unterschiede sind zwar etwas größer als z.B. in den Wirkungsquerschnitten, aber immer noch sehr klein. Die Kurven stimmen in ihrer Steigung und Krümmung nahezu vollständig überein. Lediglich eine minimale Parallelverschiebung ist erkennbar. Dies läßt sich durch die Beiträge höherer Ordnung und die beiden zusätzlichen t-Kanal-Diagramme 130 und 131 der Rechnung mit Vektormesonen erklären.

LEC	$\mathcal{O}(q^3)$	$\mathcal{O}(q^4)$	$\mathcal{O}(q^3)+\text{VM}$
d_9	0.717	-1.216	0.756
d_{20}	-3.574	4.337	-3.259
d_{21}	2.612	-4.260	2.960
e_{48}	-	5.235	-
e_{49}	-	0.925	-
e_{50}	-	2.205	-
e_{51}	-	6.629	-
e_{70}	-	3.910	-
e_{112}	-	9.342	-

Tabelle 6.4: Ergebnisse der Niederenergiekonstanten durch Fits an experimentelle Daten für die Photoproduktion geladener Pionen. Die Konstanten d_i sind in Einheiten von GeV^{-2} und die e_i in Einheiten von GeV^{-3} angegeben.

6.4 Geladene Elektropionproduktion

Wie bereits im Falle der Photoproduktion, sind die hier vorgestellten Resultate nur sinnvoll im Energiebereich unterhalb der Deltaresonanz. Für geladene Elektropionproduktion bei kleinen Werten von Q^2 und unterhalb $W = m_\Delta$ existieren nur drei unabhängige Experimente [Bar+ 75, Bre+ 78, Bau 05], welche alle die Reaktion $\gamma^* + p \rightarrow \pi^+ + n$ untersucht haben. Hier werden nur die neuesten Daten aus dem Mainzer Experiment verwendet, da dieses bei der niedrigsten Schwerpunktsenergie $W = 1125$ MeV durchgeführt wurde. Gemessen wurde jeweils der unpolarisierte differentielle Wirkungsquerschnitt bei verschiedenen Polarisierungen ϵ des virtuellen Photons, so dass eine Separation des Wirkungsquerschnitts in den transversalen und longitudinalen Anteil durchgeführt werden konnte. Gemessen wurde immer bei einem festen Winkel $\Theta_\pi^* = 0^\circ$. Die Ergebnisse für die Wirkungsquerschnitte der Rechnungen in chiraler Störungstheorie in Ordnung $\mathcal{O}(q^3)$ und $\mathcal{O}(q^4)$ mit Pionen und Nukleonen bzw. die Rechnung in $\mathcal{O}(q^3)$ mit Vektormesonen als zusätzliche Freiheitsgrade werden einzeln diskutiert und verglichen. Da die Schwerpunktsenergie dieses Experiments bereits jenseits der Schwellenregion liegt, wurden hier wie in der geladenen Photoproduktion die CGLN-Amplituden verwendet, um die Wirkungsquerschnitte zu berechnen. Aufgrund der hohen Rechenzeit für die CGLN-Amplituden wurden wieder einzelne Punkte vorberechnet. Dementsprechend ist es im Falle eines Fits auch hier nicht möglich, einen Fehler für die Fitparameter anzugeben, da das Programm Mathematica dies nicht ermöglicht. Aufgrund der Tatsache, dass nur sehr wenige Datenpunkte zur Bestimmung der Niederenergiekonstanten vorhanden sind und das Experiment bei einem festen Winkel Θ_π^* durchgeführt wurde, ist es nicht dazu geeignet, Multipole zu bestimmen. Aus diesem Grund wird auf die Darstellung der Multipole verzichtet.

6.4.1 Ordnung $\mathcal{O}(q^3)$

In dieser Ordnung stehen keine weiteren Niederenergiekonstanten zur Verfügung. Die Ergebnisse in Abbildung 6.22 sind somit reine Vorhersagen. Der longitudinale Anteil des Wirkungsquerschnitts erscheint hier beim Datenpunkt mit dem kleinsten Q^2 gut. Für größere Werte ist er jedoch zu klein. Die Q^2 -Abhängigkeit des transversalen Anteils hingegen weicht vollständig vom Experiment ab. Die Kurve steigt leicht an, während das Experiment zeigt, dass der Wirkungsquerschnitt fallen sollte.

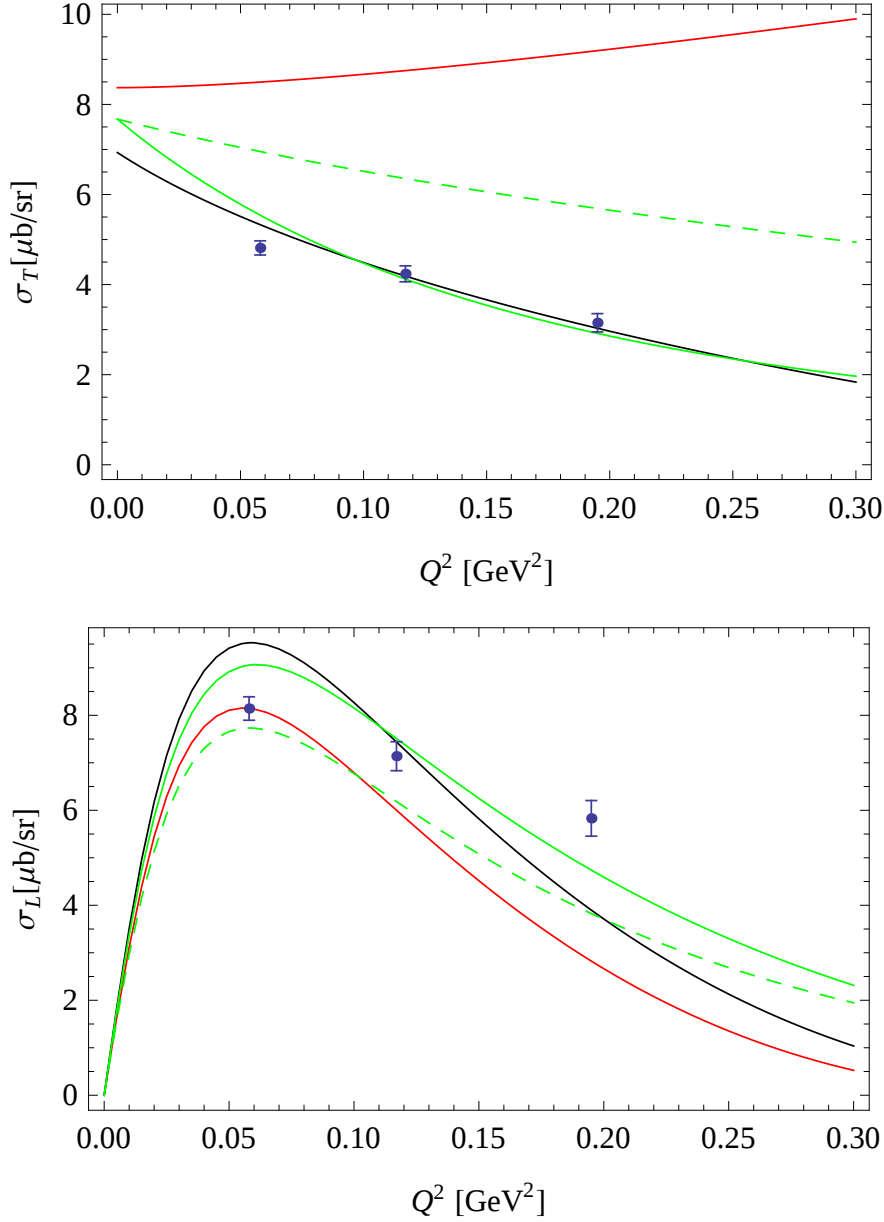


Abbildung 6.22: Differentielle Wirkungsquerschnitte der Reaktion $\gamma^* + p \rightarrow \pi^+ + n$ für $W = 1125$ MeV und festen Winkel $\Theta_\pi^* = 0^\circ$ in Abhängigkeit von Q^2 . Die Daten stammen aus [Bau 05]. Die rote Kurve kennzeichnet die Ergebnisse in Ordnung $\mathcal{O}(q^3)$, die schwarze Kurve in $\mathcal{O}(q^4)$ und die grüne Kurve in $\mathcal{O}(q^3)$ mit Vektormesonen. Die gestrichelte Linie zeigt das Ergebnis mit Vektormesonen unter Vernachlässigung der für diese Reaktion angefiteten LECs.

6.4.2 Ordnung $\mathcal{O}(q^4)$

In dieser Rechnung sind die beiden Niederenergiekonstanten e_{52} und e_{53} noch unbestimmt. Sie werden mittels eines χ^2 -Fits an die gezeigten Daten angepasst. Der Fit ergibt $\chi^2_{\text{red}} = 22.8$. Die ermittelten Werte der Niederenergiekonstanten sind in Tabelle 6.5 gegeben. In Abbildung 6.22 sind die entsprechenden Ergebnisse gezeigt. Im Gegensatz zum Ergebnis in $\mathcal{O}(q^3)$ stimmt σ_T nun sehr gut mit den Daten überein. Das Ergebnis für σ_L zeigt eine geringere Übereinstimmung mit dem Experiment. Für das kleinste Q^2 liegt die Kurve etwas zu hoch und beim größten Wert gleichermaßen darunter. Nur bei der mittleren Energie liegt eine gute Übereinstimmung vor.

LEC	$\mathcal{O}(q^4)[\text{GeV}^{-3}]$	$\mathcal{O}(q^3)+\text{VM} [\text{GeV}^{-2}]$
e_{52}	-6.421	-
e_{53}	-2.344	-
d_{18}^ρ	-	-229.396
d_{20}^ρ	-	-11.462
d_{21}^ρ	-	32.698

Tabelle 6.5: Ergebnisse der Niederenergiekonstanten durch Fits an die in Abbildung 6.22 gezeigten Daten für die π^+ -Elektroproduktion.

6.4.3 Ordnung $\mathcal{O}(q^3)$ inklusive Vektormesonen

In dieser Rechnung sind die Niederenergiekonstanten d_{18}^ρ , d_{20}^ρ und d_{21}^ρ noch nicht festgelegt und müssen mittels eines Fits bestimmt werden. Es zeigt sich jedoch, dass die Beiträge dieser Terme numerisch sehr klein sind und Korrekturen der Wirkungsquerschnitte sehr große Werte für die Niederenergiekonstanten bedeuten. Der Fit liefert ein $\chi^2_{\text{red}} = 15.6$, also deutlich besser als in der Ordnung $\mathcal{O}(q^4)$. Jedoch zeigt ein Blick auf die Werte der LECs in Tabelle 6.5, dass zumindest eine der drei Niederenergiekonstanten dabei einen so großen Wert annimmt, dass man nicht mehr von einer natürlichen Größe dieser Konstanten sprechen kann, oder anders ausgedrückt, die Konvergenz der Reihe ist mit solchen Zahlenwerten sehr schlecht oder überhaupt nicht gegeben. Um die Auswirkungen der hier angepassten LECs besser zu verdeutlichen, sind in Abbildung 6.22 die Ergebnisse sowohl mit den angepassten Konstanten als auch unter Vernachlässigung selbiger dargestellt. Selbst wenn man die verfügbaren Niederenergiekonstanten weglässt, erhält man im Vergleich zur $\mathcal{O}(q^3)$ -Rechnung ohne Vektormesonen insgesamt ein besseres Ergebnis. Die Größe σ_L ist in beiden Fällen etwa gleich gut beschrieben. Für σ_T erhält man jedoch zumindest das korrekte Vorzeichen für

die Steigung der Kurve, auch wenn diese zu wenig abfällt. Die Vektormesonen verbessern somit wie erwartet die Q^2 -Abhängigkeit. Das Resultat mit angepassten Niederenergiekonstanten kann aufgrund der großen Werte, insbesondere für d_{18}^ρ , nicht als Ergebnis der chiralen Störungstheorie, sondern vielmehr als rein phänomenologisches Ergebnis gesehen werden.

Kapitel 7

Zusammenfassung und Ausblick

In dieser Arbeit wurden Photo- und Elektropionproduktion im Rahmen der manifest lorentzinvarianten baryonischen chiralen Störungstheorie untersucht. Dabei wurden zwei verschiedene Ansätze verfolgt. Zum einen wurde eine Rechnung bis Einschleifenniveau und bis zur chiralen Ordnung $\mathcal{O}(q^4)$ mit Pionen und Nukleonen als Freiheitsgrade durchgeführt. Diese zielte darauf ab, die Energieabhängigkeit der verschiedenen Reaktionen über einen möglichst großen Bereich beschreiben zu können. In einer zweiten Rechnung wurden zusätzlich die Vektormesonen ρ und ω explizit mit in die Theorie aufgenommen, um die Q^2 -Abhängigkeit der Prozesse zu verbessern. Hierbei wurde bis einschließlich Einschleifenniveau und chirale Ordnung $\mathcal{O}(q^3)$ gerechnet.

Startpunkt für alle Berechnungen ist der chirale Grenzfall der QCD. Davon ausgehend wurden die wichtigsten Konzepte der chiralen Störungstheorie vorgestellt. Ein besonderer Augenmerk lag dabei auf dem Einbau von Resonanzen, speziell den Vektormesonen. Es wurden zusätzlich die fehlenden Teile der Lagrangedichte für die Beschreibung von Photo- und Elektropionproduktion mit Vektormesonen bis zur chiralen Ordnung $\mathcal{O}(q^3)$ konstruiert. Da die Bestimmung von Abzugstermen für die Rechnung mit Vektormesonen sehr aufwändig ist, wurde ein anderer Zugang für die Renormierung gewählt und vorgestellt. Dieses Renormierungsschema wurde auch für die Rechnung ohne Vektormesonen verwendet. In allen Fällen war es deshalb jedoch notwendig, verschiedene einfachere Prozesse zusätzlich zu berechnen, um die dort beitragenden Niederenergiekonstanten zu bestimmen. Damit ist jedoch eine vollständige Konsistenz bei der Verwendung der Niederenergiekonstanten in der Photo- und Elektropionproduktion gesichert, da alle Konstanten im gleichen Renormierungsschema bestimmt wurden. Dafür mussten z.B. die Pionzerfallskonstante, die Pion-Nukleon-Kopplung, der axiale Formfaktor des Nukleons und insbesondere auch elektromagnetische Formfaktoren für das Pion bzw. das Nukleon bestimmt werden. Diese Rechnungen finden

sich in Anhang C wieder. Des Weiteren wurde der Formalismus der Pionproduktion vorgestellt. Das Matrixelement der Elektroproduktion wurde in der Einphotonenaustauschnäherung berechnet. Damit ist das Ergebnis für den leptonischen Anteil des Matrixelements vollständig bekannt und der Fokus lag auf der Untersuchung des hadronischen Anteils, welcher dann mit Hilfe der chiralen Störungstheorie berechnet wurde. Der Formalismus enthält somit auch die Photopionproduktion als Spezialfall, wodurch beide Prozesse gleichzeitig berechnet werden können. Außerdem wurde die Multipolzerlegung erläutert und die Zusammenhänge zwischen dem Matrixelement und den physikalischen Observablen hergestellt. Ein Großteil der Arbeit bestand in der technischen Realisierung der Rechnungen. Die verwendeten bzw. entwickelten Algorithmen und Programme wurden hier vorgestellt. Insbesondere die Tests an die Rechnungen spielen eine wichtige Rolle, da die Ausdrücke wegen ihrer unüberschaubaren Größe lediglich mit Hilfe von Computerprogrammen handhabbar sind. Für diese Arbeit wurde des Weiteren das Programm χ MAID soweit modifiziert, dass es die Amplituden und Multipole für die hier erzielten Ergebnisse numerisch berechnet. Als Gegenprobe und auch als nützliche Alternative wurde eine Mathematica-Routine geschrieben, welche neben der numerischen Berechnung zusätzlich analytische Untersuchungen zulässt.

Der Hauptteil der Arbeit war die Untersuchung der verschiedenen Reaktionskanäle. Ein Aspekt war die Bestimmung der noch unbekannten Niederenergiekonstanten mittels χ^2 -Fits. Die Präzision, mit welcher die Konstanten bestimmt werden konnten, ist in den verschiedenen Prozessen sehr unterschiedlich und hängt im Wesentlichen von der Art und der Qualität der experimentellen Daten ab. Aufgrund der sehr präzisen neuen Daten [Hor+ 11] konnte die π^0 -Produktion am Proton in der Photoproduktion besonders gut untersucht werden. Die beiden Rechnungen in Ordnung $\mathcal{O}(q^3)$ ohne bzw. mit Vektormesonen liefern hier ähnlich gute Ergebnisse, welche jedoch nur bis zur π^+n -Schwelle gute Übereinstimmung mit dem Experiment zeigen. In der vierten chiralen Ordnung war es möglich die Energieabhängigkeit der Reaktion um einiges auszudehnen. Die Niederenergiekonstanten konnten mit Ausnahme der Konstanten $\tilde{e}_{49}$ sehr gut bestimmt werden. Um diese letzte Konstante genau festzulegen, benötigt man noch präzisere Daten oder eventuell weitere Observable. Limitiert in ihrer Energieabhängigkeit wird diese Rechnung dadurch, dass die Deltaresonanz schon weit unter ihrer Produktionsschwelle einen wichtigen Beitrag liefert, sie jedoch hier nicht explizit mitberücksichtigt wurde. In zukünftigen Arbeiten wäre dies sicherlich eine Möglichkeit die Rechnungen weiter zu verbessern. Dabei gilt es viele weitere, vor allem technische Schwierigkeiten zu lösen, da der Formalismus zur Beschreibung der Deltaresonanz sehr komplex ist [Hac+ 05] und somit

Ausdrücke entstehen, welche selbst moderne Computerprogramme zum Teil überfordern. Im Falle der π^0 -Elektroproduktion bei kleinem Q^2 ist die experimentelle Lage etwas schwieriger, weswegen nur wenige Daten zur Analyse zur Verfügung stehen. Die chirale Störungstheorie ist auch nur begrenzt dazu in der Lage die Q^2 -Abhängigkeit korrekt zu beschreiben. Der Einbau der Vektormesonen als expliziter Freiheitsgrad führte jedoch zu einer sichtbaren Verbesserung, da dadurch im Wesentlichen die Nukleonformfaktoren besser beschrieben werden, welche für die Elektropionproduktion eine wichtige Rolle spielen [SK 91]. Dies zeigte sich insbesondere bei der Q^2 -Abhängigkeit der totalen Wirkungsquerschnitte. Die Bestimmung der Niederenergiekonstanten sollte jedoch wiederholt werden, sobald präzisere experimentelle Daten zur Verfügung stehen. Besonders deutlich konnte man diese Problematik in der $\mathcal{O}(q^4)$ -Rechnung sehen, bei der die entsprechenden S-Wellen-Multipole, welche jeweils von einer freien Niederenergiekonstante abhängen, sich sichtbar von anderen Modellen unterscheiden. Deswegen wurden die Elektroproduktionsdaten auch immer mit einer Anpassung der beiden Niederenergiekonstanten an das DMT-Modell verglichen. Dadurch konnte man insbesondere bei den totalen Wirkungsquerschnitten sehen, dass die Werte der LECs einen großen Einfluss auf das Ergebnis haben. Die zur Verfügung stehenden Daten ermöglichen jedoch keine bessere Bestimmung der Niederenergiekonstanten zu diesem Zeitpunkt. Die Vektormesonen konnten zwar erfolgreich in die Theorie eingebaut werden, ihr Nutzen ließ sich jedoch nur begrenzt zeigen, da sie nur bis zur chiralen Ordnung $\mathcal{O}(q^3)$ eingebaut wurden. In Zukunft sollte hier versucht werden, sie auch bis zur vierten Ordnung konsistent mitzuberücksichtigen. Ein Problem dabei ist die Konstruktion aller in dieser Ordnung zusätzlich benötigten Wechselwirkungsterme. Auch die technische Umsetzung dieser Rechnung wird aufgrund der Größe der zu berechnenden Ausdrücke sehr schwer.

In der geladenen Photopionproduktion ist die Vorhersagekraft der Theorie wesentlich besser als im Falle der π^0 -Produktion. Dies hängt unter anderem mit dem Kroll-Ruderman-Theorem zusammen, welches die S-Welle sehr genau festlegt [KR 54]. Sie dominiert in der geladenen Pionproduktion den Schwellenbereich. Außerdem fällt die Deltaresonanz erst bei höheren Energien ins Gewicht als im π^0 -Kanal. Die experimentelle Situation ist dort jedoch insofern wenig zufriedenstellend, als die meisten Daten erst oberhalb der Schwellenregion verfügbar sind. Somit gelang zwar in allen Rechnungen eine gute Beschreibung der Daten, in der $\mathcal{O}(q^4)$ -Rechnung konnten die vielen Niederenergiekonstanten und damit die Multipole allerdings nicht präzise genug bestimmt werden. Außerdem standen hauptsächlich Daten für differentielle Wirkungsquerschnitte zur Verfügung. Deswegen wurde die Anpassung der Niederenergiekonstanten durch sie dominiert, was eine zu gute Vor-

hersage der differentiellen Wirkungsquerschnitte jenseits des tatsächlichen Anwendbarkeitsbereichs der Theorie zur Folge hat. Sichtbar wird dies nur in den Daten für die Photonasymmetrie. Hier wären neue Experimente bei niedrigeren Energien notwendig, um eine präzisere Bestimmung der Niederenergiekonstanten zu ermöglichen. Zuletzt wurden noch Daten für die π^+ -Elektroproduktion untersucht. Dabei handelt es sich um sehr wenige Messwerte, so dass nur eine erste Betrachtung möglich war. Es zeigt sich auch hier, dass die Vektormesonen in der Ordnung $\mathcal{O}(q^3)$ bereits zu einer besseren Beschreibung des Q^2 -Verhaltens führen. Die für dieses Experiment verbleibenden Niederenergiekonstanten müssen im Fit jedoch zu groß gewählt werden. Erst eine Rechnung in Ordnung $\mathcal{O}(q^4)$ würde eine Beschreibung der Daten ermöglichen. Dies bestätigt auch das Ergebnis in Ordnung $\mathcal{O}(q^4)$ ohne Vektormesonen, welches eine recht gute Beschreibung der wenigen Daten liefert.

Da keine experimentellen Daten für die Produktion neutraler Pionen am freien Neutron vorliegen, wurde darauf verzichtet Vorhersagen für Multipole bzw. Observable für diesen Prozess zu zeigen. Die verschiedenen Reaktionskanäle der Pionproduktion sind im isospinsymmetrischen Fall jedoch miteinander verknüpft. Somit lässt sich aus den hier erzielten Ergebnissen (durch Bildung entsprechender Linearkombinationen) jegliche gewünschte Größe für diesen Prozess berechnen, da alle benötigten Niederenergiekonstanten bereits bestimmt wurden.

Zusammenfassend konnte diese Arbeit die Grenzen der chiralen Störungstheorie im Bereich der Photo- und Elektropionproduktion ausloten. In manchen Fällen ist eine Verbesserung der Ergebnisse durch präzisere experimentelle Daten möglich. Die Rechnungen selbst können zum einen durch den Einbau weiterer Resonanzen, insbesondere dem Delta, noch zu höheren Energien hin angewendet werden. Zum anderen wird eine weitere Verbesserung der Elektroproduktion durch Hinzunahme der Vektormesonen in der nächsthöheren Ordnung erzielt. Wie gezeigt werden konnte, erhält man bereits in Ordnung $\mathcal{O}(q^3)$ durch Berücksichtigung von Vektormesonen als explizite Freiheitsgrade deutlich bessere Ergebnisse.

Anhang A

Notationen, Definitionen und Konstanten

- In dieser Arbeit werden natürliche Einheiten verwendet ($\hbar = c = 1$).
- Es gilt Summenkonvention (über doppelt auftretende Indizes wird summiert).
- Die Paulimatrizen sind eine Darstellung der Generatoren der Gruppe $SU(2)$. Sie sind hermitesch und spurlos. Sie sind gegeben durch

$$\tau_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \tau_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \tau_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (\text{A.1})$$

Sie erfüllen folgende Beziehungen:

$$\tau_i \tau_j = \delta_{ij} + i\epsilon_{ijk} \tau_k, \quad [\tau_i, \tau_j] = 2i\epsilon_{ijk} \tau_k, \quad \{\tau_i, \tau_j\} = 2\delta_{ij}. \quad (\text{A.2})$$

- Die Diracmatrizen erfüllen folgende Eigenschaften:

$$\begin{aligned} \{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} &= 2g^{\mu\nu}, & (\gamma^0)^2 &= \mathbb{1}_D, & (\gamma^i)^2 &= -\mathbb{1}_D, \\ (\gamma^0)^\dagger &= \gamma^0, & (\gamma^i)^\dagger &= -\gamma^i, \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

wobei $\mathbb{1}_D$ eine D -dimensionale Einheitsmatrix darstellt. Des Weiteren gilt in D Dimensionen

$$\gamma^\mu \gamma_\mu = D. \quad (\text{A.4})$$

In der Standarddarstellung in vier Dimensionen sind die Dirac-Matrizen gegeben durch

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} \mathbb{1}_2 & 0 \\ 0 & -\mathbb{1}_2 \end{pmatrix}, \quad \gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & \tau^i \\ -\tau^i & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma^5 = \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{1}_2 \\ \mathbb{1}_2 & 0 \end{pmatrix}, \quad (\text{A.5})$$

wobei $\mathbb{1}_2$ eine 2×2 -Einheitsmatrix bezeichnet. Weiterhin ist γ_5 allgemein definiert durch

$$\gamma^5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3. \quad (\text{A.6})$$

- Für Massen und Kopplungskonstanten werden folgende Werte verwendet

$$\begin{aligned} m_N &= 938.272 \text{ MeV}, & M_\pi &= 134.964 \text{ MeV}, \\ M_\rho &= 770 \text{ MeV}, & M_\omega &= 782.6 \text{ MeV}, \\ e &= 0.3028, & F_\pi &= 92.4 \text{ MeV}, \\ g_A &= 1.2695, & g_0 &= \sqrt{M_\rho^2/(2F_\pi^2)}. \end{aligned} \quad (\text{A.7})$$

Für die Massen innerhalb der Schleifenintegrale wird $m_N = 939.563$ MeV und $M_\pi = 139.57$ MeV verwendet.

- In der Arbeit tauchen auch Abkürzungen für Schleifenintegrale auf. Diese folgen der Konvention von [HP 99]

$$A_0(m^2) = \frac{(2\pi\mu)^{4-D}}{i\pi^2} \int d^D l \frac{1}{l^2 - m^2}, \quad (\text{A.8})$$

$$B_0(p^2, m_1^2, m_2^2) = \frac{(2\pi\mu)^{4-D}}{i\pi^2} \int d^D l \frac{1}{[(l^2 - m_1^2)][(l+p)^2 - m_2^2]}. \quad (\text{A.9})$$

In den Ergebnissen für die Pionproduktion tauchen noch weitere Integrale auf. Da sie in der Arbeit selbst jedoch nicht explizit stehen, sei auf [HP 99] für weitere Definitionen verwiesen.

Anhang B

Stromerhaltung

Wie bereits in Kapitel 4.1 erläutert wurde, liefert die Forderung nach Erhaltung des elektromagnetischen Stroms die Bedingung

$$k_\mu \mathcal{M}^\mu = 0. \quad (\text{B.1})$$

Dieser Test an die Amplitude muss auf jeden Fall erfüllt sein, da z.B. die Ableitung der invarianten Amplituden aus den Ball-Amplituden nur unter dieser Bedingung eindeutig ist. Im Folgenden wird illustriert, was für die Überprüfung zu beachten ist. Gleichung (B.1) muss dabei in allen Ordnungen in $\hbar$ bzw. den chiralen Ordnungen unabhängig voneinander erfüllt sein. Dazu werden zuerst die Diagramme nach Ordnungen von $\hbar$ getrennt untersucht, was in dieser Arbeit einer Unterteilung in Baum- und Einschleifendiagramme entspricht. Um die Diskussion möglichst kurz zu halten, wird hier nur die Rechnung mit Vektormesonen in chiraler Ordnung $\mathcal{O}(q^3)$ diskutiert.

B.1 Baumdiagramme

Für die Elektropionproduktion bis zur dritten chiralen Ordnung erhält man Beiträge in den Ordnungen $\mathcal{O}(q^1) - \mathcal{O}(q^3)$ (siehe Anhang G). Wichtig bei dieser Rechnung ist, dass man bei den Massen der auftretenden Teilchen genau zwischen dem Parameter aus der Lagrangedichte und der physikalischen Masse unterscheidet. Dies wird detaillierter in Anhang B.3 erläutert. Hier benötigen wir nur folgendes Ergebnis: Der Unterschied zwischen der physikalischen Masse von Pion und Nukleon zu deren Massenparametern ist jeweils mindestens von chiraler Ordnung $\mathcal{O}(q^2)$. Bei Baumdiagrammen der chiralen Ordnung zwei bzw. drei führt also eine Korrektur der physikalischen Masse eines Teilchens automatisch zu Termen, welche von höherer Ordnung sind als die erzielte Genauigkeit der Rechnung. Somit sind bei solchen Diagrammen

die physikalische Masse und der Massenparameter bis auf Korrekturen höherer Ordnung identisch. Unter Verwendung dieser Tatsache erhält man die Stromerhaltung hier auf triviale Weise.

Bei den Baumdiagrammen der chiralen Ordnung $\mathcal{O}(q^1)$ gilt es genauere Überlegungen bezüglich der Massen anzustellen. Korrekturen der physikalischen Masse des Nukleons bzw. des Pions führen hier nämlich zu Beiträgen der chiralen Ordnung drei. Dabei treten auch Terme der Ordnung $\hbar$ auf, welche für die Schleifendiagramme relevant sind (siehe nächstes Unterkapitel). Bei Baumdiagrammen der chiralen Ordnung $\mathcal{O}(q^1)$ führt die Untersuchung der entstehenden Terme auf Ausdrücke der Form

$$(m_N - m) \approx -4c_1 M^2, \quad (M_\pi^2 - M^2) \approx \frac{2l_3 M^4}{F^2}, \quad (\text{B.2})$$

wobei M, m den Massenparameter und M_π, m_N die physikalische Masse von Pion bzw. Nukleon bezeichnen und das $\approx$ -Zeichen die Genauigkeit bis auf höhere Ordnungen impliziert. Der Parameter l_3 ist eine Niederenergiekonstante aus der mesonischen Lagrangedichte und c_1 eine Niederenergiekonstante aus der baryonischen Lagrangedichte. In einer Rechnung der Pionproduktion bis zur Ordnung $\mathcal{O}(q^4)$ bekommt die Nukleonmasse weitere Korrekturen von Niederenergiekonstanten aus $\mathcal{L}_{\pi N}^{(4)}$ des Nukleonsektors. Diese kann man jedoch genauso absorbieren wie c_1 . Man beachte, dass die Massenparameter in der Lagrangedichte nicht messbare und damit unbekannte Größen sind. Man kann somit diese Parameter auch umdefinieren. Um die Stromerhaltung einfach zu zeigen, ist folgende Wahl günstig:

$$m_2 := m - 4c_1 M^2 + \mathcal{O}(M^3), \quad (\text{B.3})$$

$$M_2^2 := M^2 + \frac{2l_3 M^4}{F^2} + \mathcal{O}(M^6). \quad (\text{B.4})$$

Damit kann man leicht zeigen, dass Stromerhaltung für die Baumdiagramme der chiralen Ordnung $\mathcal{O}(q^1)$ erfüllt ist.

B.2 Schleifendiagramme

Die Einschleifendiagramme für die Elektropionproduktion mit Vektormesonen lassen sich topologisch in neun Klassen einteilen (siehe Tabelle B.1), welche alle unabhängig voneinander Stromerhaltung erfüllen müssen. Für die Rechnungen in B χ PT ohne Vektormesonen wurden bereits in [Ber+ 94] die Diagrammklassen angegeben. Hier vereinfacht sich die Betrachtung der Massenterme, da sowohl Korrekturen der chiralen Ordnung bzw. Ordnung in $\hbar$ jeweils jenseits der hier betrachteten Genauigkeit liegen. Dennoch sind

nur bestimmte Klassen der Schleifendiagramme unmittelbar stromerhaltend. Bei den restlichen Diagrammen werden noch Beiträge von Baumdiagrammen benötigt, bei denen die Schleifenentwicklung des Massenparameters berücksichtigt wurde (siehe dazu Anhang B.3). Die Summe aller Beiträge einer Diagrammkategorie in dieser Rechnung ist i.Allg. sehr groß und selbst mit einem Computerprogramm nur schwer zu untersuchen. Eine numerische Überprüfung der Stromerhaltung hingegen ist leichter zu realisieren, garantiert jedoch nur innerhalb der erreichbaren Genauigkeit korrekte Ergebnisse. Deswegen wurden hier alle Terme einer Diagrammkategorie zuerst numerisch auf Erfüllung von Gleichung (B.1) untersucht. War dies gegeben, so wurde im nächsten Schritt eine analytische Untersuchung durchgeführt. Dazu wurden alle auftretenden Tensorintegrale zu skalaren Integralen reduziert. Dadurch wird die Anzahl an Termen nochmal immens vergrößert. Dafür hat man aber nun die Möglichkeit innerhalb des verwendeten Programms sich nur auf Terme zu beschränken, welche proportional zu einem bestimmten skalaren Integral sind. Die Summe all dieser Terme verschwindet genau dann, wenn alle skalaren Integrale unabhängig voneinander sind. In der hier durchgeführten Rechnung ist dies der Fall. Es reichte somit aus zu zeigen, dass die Koeffizienten aller skalaren Integrale verschwinden. Dadurch war es möglich Stromerhaltung aller Schleifendiagramme auch analytisch zu zeigen.

Diagrammkategorie	Nr. der Diagramme
I	1-9
II*	10-15
III*	16-31
IV	32-46
V	47-49
VI	50-62
VII	63-75
VIII	76-81
IX*	82-88

Tabelle B.1: Schleifendiagrammkategorien der Pionproduktion in Ordnung $\mathcal{O}(q^3)$ mit Vektormesonen. Die zugehörigen Diagramme sind in Anhang G dargestellt. Diagrammkategorien mit * erhalten noch zusätzliche Beiträge aus den $\hbar$ -Korrekturen der Baumdiagramme (siehe Anhang B.3).

B.3 Teilchenmassen in χ PT

In der chiralen Störungstheorie lässt sich die physikalische Masse eines Teilchens als eine unendliche Summe von Termen darstellen. Bei den Termen handelt es sich um so genannte Selbstenergieeinschübe (siehe Abbildung B.1). Deren systematische Entwicklung erfolgt in Potenzen von $\hbar$. Die in

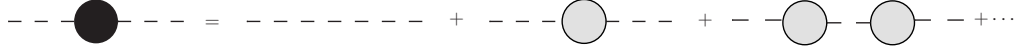


Abbildung B.1: Propagator eines Teilchens als unendliche Summe von Selbstenergiendiagrammen.

der Lagrangedichte auftretenden Massenterme (M , m , etc.) sind LECs und stellen dabei immer die physikalische Masse in niedrigster chiraler Ordnung dar. Im Folgenden wird gezeigt, inwieweit zwischen der physikalischen Masse und dem Term aus der Lagrangedichte unterschieden werden muss. Zur Illustration wird zusätzlich ein Beitrag explizit untersucht.

Teilchen im Anfangs- bzw. Endzustand bei der Pionproduktion erfüllen die Massenschalenbedingung, d.h. es gilt $p^2 = m_{phys}^2$, wobei p^μ der Viererimpuls des jeweiligen Teilchens ist. Für die exakte Masse von Pionen bzw. Nukleonen lässt sich folgende Entwicklung nach Ordnungen von $\hbar$ angeben (siehe z.B. [Sch 03]):

$$M_\pi^2 = M_2^2 + \alpha\hbar + \beta\hbar^2 + \mathcal{O}(\hbar^3), \quad (\text{B.5})$$

$$m_N = m_2 + \alpha'\hbar + \beta'\hbar^2 + \mathcal{O}(\hbar^3), \quad (\text{B.6})$$

wobei m_2 und M_2 in Gleichungen (B.3) bzw. (B.4) definiert wurden. Hier und im Folgenden soll genau zwischen der physikalische Masse (M_π , m_N) und dem undefinierten Parameter aus der Lagrangedichte (M_2 , m_2) unterschieden werden. Für die in dieser Arbeit berechneten Diagramme ergibt sich nun folgendes: Bei Diagrammen, welche eine Schleife beinhalten, sind physikalische Masse und Massenparameter identisch bis auf höhere Ordnungen, da jede Korrektur der Masse mindestens von Ordnung $\hbar^2$ wäre (ein Einschleifendiagramm ist bereits von $\mathcal{O}(\hbar)$). Bei Baumdiagrammen hingegen muss genau unterschieden werden zwischen physikalischer Masse und dem jeweiligen Term aus der Lagrangedichte. Möchte man die physikalische Masse durch ihre Reihenentwicklung darstellen, hat man Beiträge in diesen Diagrammen in allen Ordnungen von $\hbar$. Zur Illustration dieses Sachverhalts betrachte man folgenden Beitrag der Ball-Amplitude B_3 der Baumdiagramme 94 und 107

aus der Rechnung mit Vektormesonen:

$$B_3^{(94+107)} = -\frac{ieg_A m_N \epsilon_{3ak} \sigma^k}{F(M_2^2 - t)} \left(2 - \frac{k^2 M_\rho^2}{F^2 g_0^2 (k^2 - M_\rho^2)} \right). \quad (\text{B.7})$$

Hier soll nun die Entwicklung der physikalischen Masse des Pions eingesetzt werden. Dies scheint auf den ersten Blick jedoch gar nicht nötig, da M_π nicht explizit auftritt. Wenn man jedoch die Mandelstambeziehung

$$s + t + u = 2m_N^2 + k^2 + M_\pi^2 \quad (\text{B.8})$$

in Gleichung (B.7) berücksichtigt, so ist die physikalische Pionmasse in der Mandelstamvariable t versteckt. Umstellen von Gleichung (B.8) nach t und einsetzen in Gleichung (B.7) liefert einen Term, der explizit von der Pionmasse abhängt. Für die Berechnung des Beitrags proportional zu $\hbar$ wird Gleichung (B.5) in Gleichung (B.7) eingesetzt und eine Taylorreihenentwicklung nach $\hbar$ durchgeführt. Hierfür wird noch der Wert von α benötigt. Dessen Berechnung wird in Anhang C.1 erläutert. Im Folgenden soll nun jedoch nicht die physikalische Masse des Pions entwickelt werden, sondern der Parameter aus der Lagrangedichte. Dies vereinfacht die Überprüfung der Stromerhaltung. Es gilt:

$$M_2^2 = M_\pi^2 - \alpha \hbar + \mathcal{O}(\hbar^2). \quad (\text{B.9})$$

Einsetzen aller benötigten Gleichungen liefert für den Beitrag proportional zu $\hbar$ in Gleichung (B.7):

$$\begin{aligned} B_3^{(94+107)} = & \quad ieg_A m_N \left(2F^2 g_0^2 + \frac{M_\rho^2 k^2}{M_\rho^2 - k^2} \right) \\ & \left(\frac{((M_\rho^2 - 4M_\pi^2)B_0(M_\pi^2, M_2^2, M_\rho^2) - A_0(M_\rho^2))M_\rho^4}{32\pi^2 F^7 g_0^4 (M_\pi^2 - t)^2} \right. \\ & \left. + \frac{(M_\rho^4 - 2M_\pi^2 M_\rho^2 + F^2 g_0^2 M_\pi^2)A_0(M_\pi^2)}{32\pi^2 F^7 g_0^4 (M_\pi^2 - t)^2} \right) \epsilon_{3ak} \sigma^k. \quad (\text{B.10}) \end{aligned}$$

In diesem Ausdruck sind M_2 und M_π nun gleich bis auf höhere Korrekturen in $\hbar$. Diese Vorgehensweise muss bei einer Rechnung bis zur chiralen Ordnung $\mathcal{O}(q^3)$ für alle Baumdiagramme der Ordnung $\mathcal{O}(q^1)$ durchgeführt werden. Bei einer Rechnung bis $\mathcal{O}(q^4)$ müssen unter Umständen noch weitere Korrekturterme der Massen berücksichtigt werden.

Anhang C

Bestimmung verschiedener Niederenergiekonstanten

In diesem Kapitel wird dargelegt, wie diejenigen Niederenergiekonstanten angepasst wurden, welche schon in elementarerer Prozessen wie z.B. dem Pionformfaktor vorkommen. Der Hintergrund hierfür ist Selbstkonsistenz in χ PT. Diese Prozesse werden nämlich auch in der Pionproduktion konsistent berücksichtigt. Divergenzen werden an dieser Stelle nicht explizit aufgeführt, um die Diskussion und die Ergebnisse übersichtlicher darzustellen.

C.1 Selbstenergie des Pions

Die Masse und die Wellenfunktionsrenormierungskonstante eines Teilchens lassen sich aus der Selbstenergie berechnen. Dafür betrachtet man den Propagator eines (pseudo-)skalaren Feldes, welcher als die Fouriertransformierte folgender Zweipunktfunktion definiert ist [Sch 03]:

$$i\Delta(p) = \int d^4x e^{-ip \cdot x} \langle 0 | T [\Phi_0(x), \Phi_0(0)] | 0 \rangle. \quad (\text{C.1})$$

T stellt den Zeitordnungsoperator dar und Φ_0 steht symbolisch für das unrenormierte Feld. Die rechte Seite der Gleichung lässt sich nun in eine unendliche Summe von einteilchenirreduziblen Diagrammen entwickeln, welche so genannte Selbstenergieeinschübe $-i\Sigma(p^2)$ enthalten (siehe Anhang B). Summiert man alle diese Beiträge als geometrische Reihe, so ergibt sich für den Propagator

$$i\Delta = \frac{i}{p^2 - M_0^2 - \Sigma(p^2) + i0^+}. \quad (\text{C.2})$$

Hierbei ist M_0 der nackte Massenparameter aus der Lagrangedichte. Die physikalische Masse M eines Teilchens ist definiert als Pol der Gleichung

(C.2),

$$M^2 - M_0^2 - \Sigma(M^2) = 0. \quad (\text{C.3})$$

Bis zu der in dieser Arbeit berechneten Genauigkeit tragen die in den Abbildungen C.1 dargestellten Diagramme zur Selbstenergie des Pions bei.

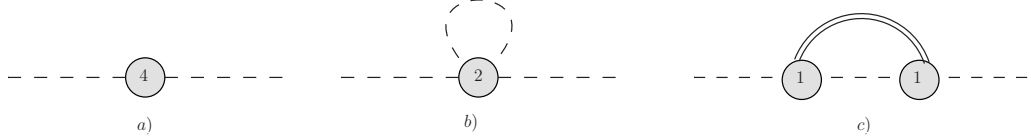


Abbildung C.1: Selbstenergiediagramme des Pions in chiraler Ordnung $\mathcal{O}(q^4)$. Das Diagramm c) tritt nur mit ρ -Mesonen als explizitem Freiheitsgrad auf.

Die Beiträge der einzelnen Diagramme zur Selbstenergie lauten

$$\Sigma_a = \frac{2M^2 (l_3 M^2 + l_4 (M^2 - p^2))}{F^2}, \quad (\text{C.4})$$

$$\Sigma_b = \frac{(M^2 - 4p^2) A_0(M^2)}{96F^2\pi^2}, \quad (\text{C.5})$$

$$\Sigma_b^\rho = \frac{M_\rho^2 (M^2 + p^2) A_0(M^2)}{32F^4 g_0^2 \pi^2}, \quad (\text{C.6})$$

$$\begin{aligned} \Sigma_c = & -\frac{M_\rho^2}{32F^4 g_0^2 \pi^2} \left(A_0(M^2) M_\rho^2 + (M^2 - M_\rho^2 - p^2) A_0(M_\rho^2) \right. \\ & \left. + \left((p^2)^2 - 2(M^2 + M_\rho^2) p^2 + (M^2 - M_\rho^2)^2 \right) B_0(p^2, M^2, M_\rho^2) \right). \end{aligned} \quad (\text{C.7})$$

Σ_a kennzeichnet den Beitrag von Diagramm a) aus Abbildung C.1 und Σ_b, Σ_c entsprechend. Der Beitrag Σ_b^ρ bzw. Σ_c ist nur relevant, wenn das ρ -Meson explizit berücksichtigt wird, da dadurch Feynmanregeln geändert werden bzw. neue hinzukommen. Die Definition von $A_0(\dots)$ und $B_0(\dots)$ ist in Anhang A gegeben. Die Masse des Pions lässt sich bis zur chiralen Ordnung $\mathcal{O}(q^4)$ mit der Formel (C.3) und den Ergebnissen (C.4)-(C.7) bestimmen. Der Beitrag in Σ_a proportional zu l_3 wird in der Berechnung der Pionproduktionsamplitude nicht benötigt, da er im Massenterm M absorbiert werden kann. Siehe dazu auch Anhang B.

Da der numerische Wert des Massenparameters M aus einer Anpassung an experimentelle Daten stammt, besitzt M auch einen Fehler. Die Masse des Pions ist jedoch so genau bekannt, dass dieser Fehler gegenüber anderen Fehlern vernachlässigt werden kann.

Die Wellenfunktionsrenormierungskonstante ist definiert als das Residuum des Propagators. Für das Pion ergibt sich hier bis Einschleifenniveau

$$Z_\pi = 1 + \Sigma'(p^2)|_{p^2=M_\pi^2}. \quad (\text{C.8})$$

Diese lässt sich mit den Ergebnissen (C.4)-(C.7) leicht bestimmen.

C.2 Pionzerfallskonstante

Die Pionzerfallskonstante ist durch folgendes Matrixelement definiert [GL 84]:

$$-i\langle 0|A_a^\mu(0)|\pi_b(q)\rangle = q^\mu \delta_{ab} F_\pi. \quad (\text{C.9})$$

Das Feld A_a^μ ist der axiale Strom und die Konstante F_π wird Pionzerfallskonstante genannt. Diese wurde experimentell zu

$$F_\pi = 92.42(26) \text{ MeV}, \quad (\text{C.10})$$

bestimmt [Sch+ 07].

C.2.1 Ergebnisse ohne ρ -Meson

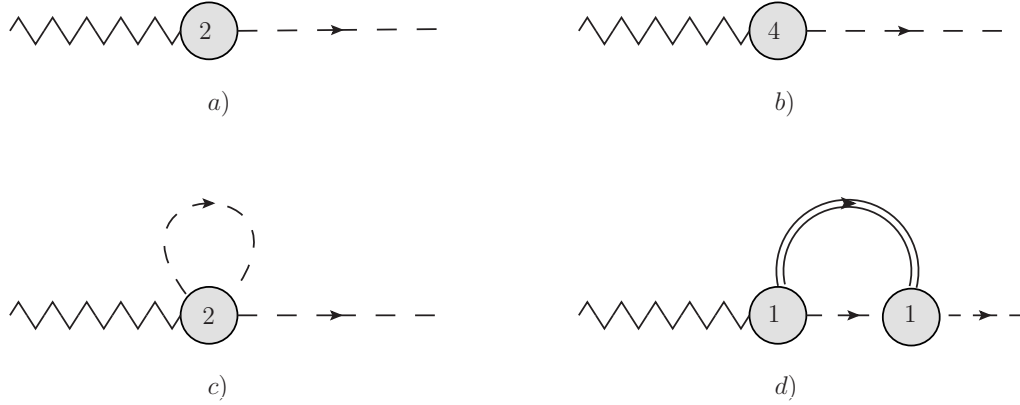


Abbildung C.2: Pionzerfallskonstante bis zur chiralen Ordnung $\mathcal{O}(q^4)$. Das Diagramm d) tritt nur auf, wenn ρ -Mesonen als expliziter Freiheitsgrad verwendet werden, da dadurch zusätzliche Feynmanregeln entstehen.

In dieser Arbeit wird die Pionzerfallskonstante bis zur chiralen Ordnung $\mathcal{O}(q^4)$ benötigt. Hierzu tragen die Diagramme aus Abbildung C.2 a)-c) bei. Hier ist F identisch mit F_π im chiralen Grenzfall, wie man an den Beiträgen D_i der Diagramme sehen kann:

$$D_a = F, \quad (\text{C.11})$$

$$D_b = \frac{2l_4 M^2}{F}, \quad (\text{C.12})$$

$$D_c = -\frac{M^2 \ln\left(\frac{M^2}{\mu^2}\right)}{12F\pi^2}. \quad (\text{C.13})$$

Mit Ausnahme von D_a kann für alle Diagramme $F = F_\pi$ verwendet werden, da der Unterschied zwischen beiden Größen dann von höherer Ordnung ist. Außerdem muss D_a noch mit $\sqrt{Z_\pi}$ multipliziert werden. Somit erhält man

$$F_\pi = F\sqrt{Z_\pi} + \frac{l_4 M^2}{F_\pi} - \frac{\ln\left(\frac{M}{\mu}\right) M^2}{8F_\pi \pi^2}. \quad (\text{C.14})$$

Damit kann man nun F berechnen. Unter Verwendung von l_4 aus [GL 84] ergibt sich

$$F = 86.91(26) \text{ MeV}. \quad (\text{C.15})$$

C.2.2 Ergebnisse mit ρ -Meson

Durch den Einbau des ρ -Mesons unterscheiden sich F_π im chiralen Grenzfall und F voneinander. Dies liegt an dem zusätzlichen Schleifendiagramm d) in Abbildung C.2. Außerdem erhält das Diagramm D_c einen zusätzlichen Beitrag D_c^ρ , da der Vertex durch die Feldredefinition modifiziert wird:

$$D_c^\rho = \frac{M^2 M_\rho^2 \ln\left(\frac{M^2}{\mu^2}\right)}{16F^3 g_0^2 \pi^2}, \quad (\text{C.16})$$

$$D_d = \frac{\ln\left(\frac{M_\rho^2}{\mu^2}\right) M_\rho^6 - M^2 (2M^2 + M_\rho^2) \ln\left(\frac{M^2}{\mu^2}\right) M_\rho^2}{64F_\pi^3 g_0^2 M^2 \pi^2} + \frac{(M_\rho^6 - 4M^2 M_\rho^4) B_0(M^2, M^2, M_\rho^2)}{64F_\pi^3 g_0^2 M^2 \pi^2}. \quad (\text{C.17})$$

Wie in Kapitel C.2.1 kann man nun den Parameter F ausrechnen. Dies führt jedoch zu einem unübersichtlichen Ausdruck, weswegen hier kein analytisches Ergebnis dafür angegeben wird. Numerisch ergibt sich

$$F = 87.92(26) \text{ MeV}. \quad (\text{C.18})$$

C.3 Elektromagnetischer Formfaktor des Pions

Das Matrixelement des elektromagnetischen Stromoperators ausgewertet zwischen einem positiv geladenen Pion im Anfangs- und Endzustand definiert den elektromagnetischen Formfaktor. Das Matrixelement lässt sich folgendermaßen parametrisieren [Sch 03],

$$\langle \pi_a(q) | J^\mu(0) | \pi_b(p) \rangle = i\epsilon_{3ba}(p^\mu + q^\mu)F_\pi^V(k^2), \quad (\text{C.19})$$

mit

$$k^\mu = q^\mu - p^\mu. \quad (\text{C.20})$$

In dieser Arbeit wird der Pionformfaktor bis zur chiralen Ordnung $\mathcal{O}(q^4)$ benötigt. Die Diagramme aus den Abbildungen C.3 und C.4 tragen bis zu dieser Ordnung bei. Ein wichtiger Test für das Ergebnis des Formfaktors ist die elektrische Ladung der Pionen. Es muss gelten (in Einheiten der Elementarladung)

$$F_\pi^V(k^2 = 0) = 1. \quad (\text{C.21})$$

Allgemein müssen für das korrekte Ergebnis eines Prozesses nicht nur die Diagramme berechnet werden, sondern auch der LSZ-Formalismus angewandt werden. Somit erhält man für jedes externe Feld einen multiplikativen Vorfaktor $\sqrt{Z}$, wobei Z die Wellenfunktionsrenormierungskonstante des jeweiligen Teilchens bezeichnet. Für das Photon als externes Feld ist diese in der untersuchten Genauigkeit $Z_\gamma = 1$. Für Z_π des Pions erhält man zum einen eine Entwicklung in kleinen Parametern und zum anderen in Ordnungen von $\hbar$. Hier wird Z_π bis einschließlich Ordnung q^2 und $\hbar^1$ benötigt. Da jedoch auch die Formfaktoren eine Entwicklung in diesen beiden Parametern tragen, können Terme höherer Ordnung vernachlässigt werden. Für den Formfaktor ergibt sich damit

$$F_{\pi,\text{phys}}^V = F_{\pi,2}^V Z_\pi + F_{\pi,4}^V. \quad (\text{C.22})$$

$F_{\pi,2}^V$ enthält dabei ausschließlich Beiträge von Baumdiagrammen der chiralen Ordnung $\mathcal{O}(q^2)$ und $F_{\pi,4}^V$ enthält sowohl Baumdiagramme als auch Schleifendiagramme der Ordnung $\mathcal{O}(q^4)$. Da die chirale Störungstheorie mit schweren Freiheitsgraden immer Terme enthält, welche von höherer Ordnung sind, muss in der Rechnung mit den ρ -Mesonen ein Diagramm der chiralen Ordnung $\mathcal{O}(q^6)$ berücksichtigt werden, um Gleichung (C.21) zu erfüllen. Dieses hat die gleiche Struktur in der Kopplungskonstante und ist topologisch von der gleichen Form wie die anderen Diagramme mit ρ -Mesonen. Der physikalische Formfaktor $F_{\pi,\text{phys}}^V$ enthält in dieser Rechnung zählschemaverletzende Terme aus den Schleifendiagrammen des Formfaktors und der Wellenfunktionsrenormierungskonstante. Zur Renormierung der Kopplungskonstanten

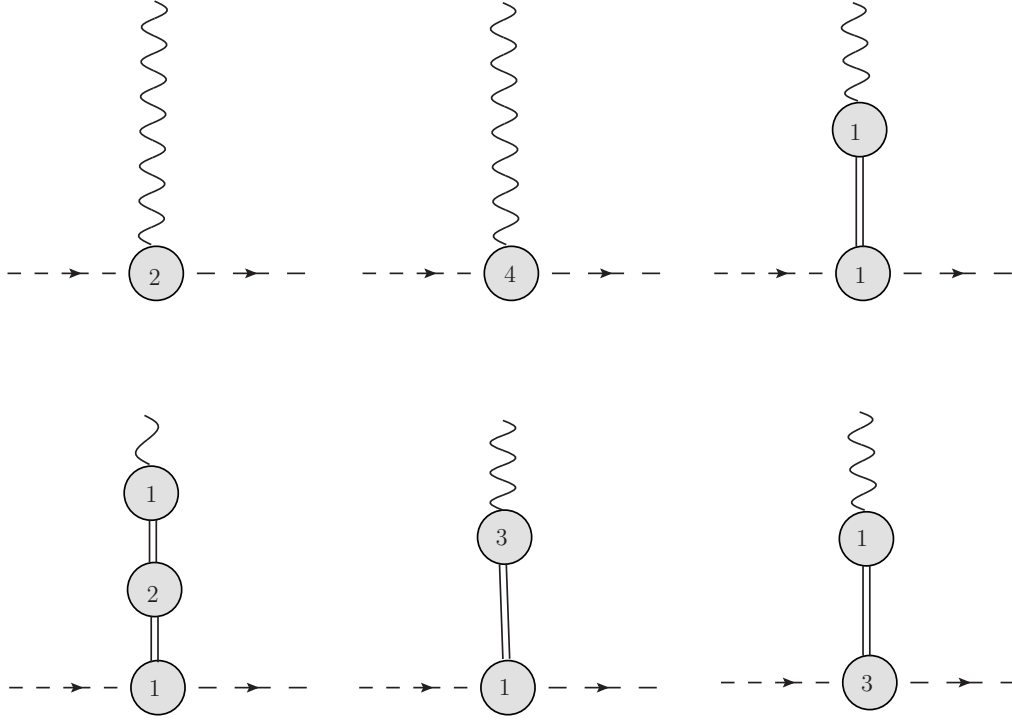


Abbildung C.3: Formfaktordiagramme des Pions bis chirale Ordnung vier auf Baumniveau. Untersucht werden zwei unterschiedliche Rechnungen. Zum einen eine Rechnung mit ausschließlich Pionen als Freiheitsgrad und zum anderen eine Rechnung, bei der ρ -Mesonen explizit beitragen. Bei ersterer tragen nur die beiden Diagramme oben links und bei letzterer alle hier gezeigten Diagramme bei.

wird das Verfahren aus Kapitel 3.5 angewandt. Dafür wird ein Fit der existierenden experimentellen Daten an die noch nicht festgelegten Niederenergiekonstanten durchgeführt. Hierbei tritt eine Linearkombination folgender beider Konstanten auf

$$P := 3\sqrt{2}d_X - 4f_V. \quad (\text{C.23})$$

Die Niederenergiekonstanten l_4 und l_6 werden dabei aus [GL 84] übernommen, da die Niederenergiekonstanten aus der Lagrangedichte mit Vektormesonen mit diesen eine Linearkombination bilden, welche sich erst in höherer Ordnung unterscheiden. Die restlichen Niederenergiekonstanten wurden bei einem Fit an die elektromagnetischen Formfaktoren des Nukleons bestimmt (siehe dazu Kapitel C.7), da der Pionformfaktor nur eine Messgröße ist, während bei den Nukleonformfaktoren vier unabhängige Größen gemessen werden und somit eine geringere Korrelation im Fit erwartet wird. Somit gilt es

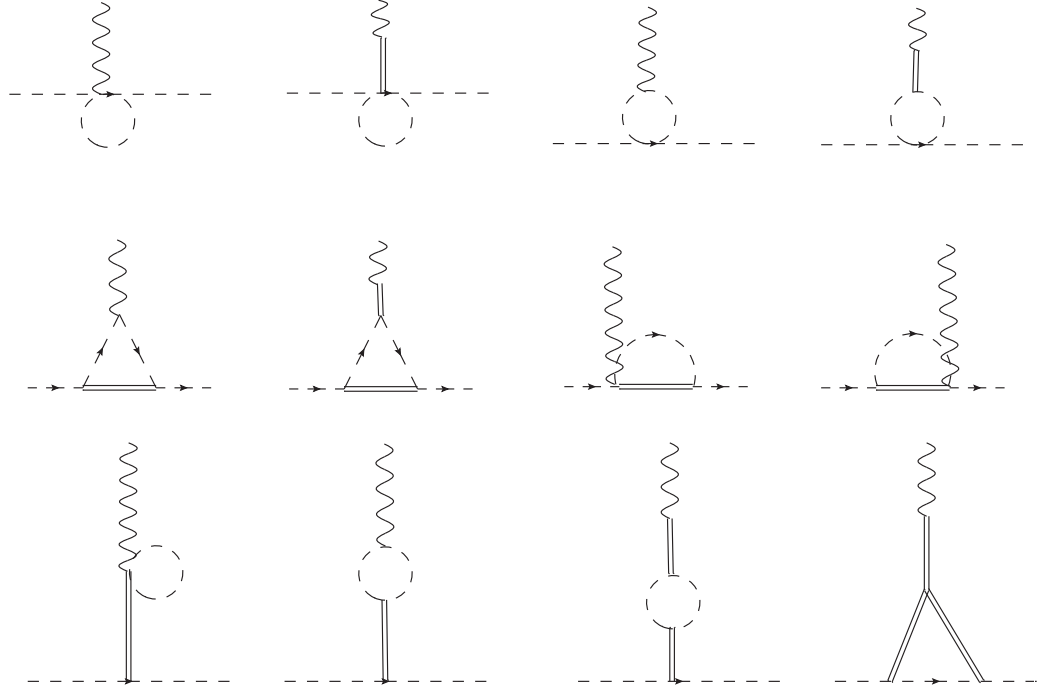


Abbildung C.4: Formfaktordiagramme des Pions in chiraler Ordnung $\mathcal{O}(q^4)$ auf Schleifenniveau. Die Vertizes sind jeweils von der niedrigst möglichen chiralen Ordnung. Für die Rechnung ohne Vektormesonen tragen nur das erste und das dritte Diagramme aus der ersten Zeile bei.

nur noch die Niederenergiekonstante P zu bestimmen. Das Ergebnis lautet

$$P = 0.3547(72). \quad (\text{C.24})$$

In Abbildung C.5 sind die zugehörigen Plots des Pionformfaktors gezeigt. Da der Photonimpuls hier immer raumartig ist, wird die übliche Konvention $Q^2 = -k^2$ verwendet. Beide Rechnungen stimmen sehr gut mit den experimentellen Daten überein. Die Rechnung mit ρ -Mesonen scheint für größere Q^2 -Werte geringfügig besser zu sein.

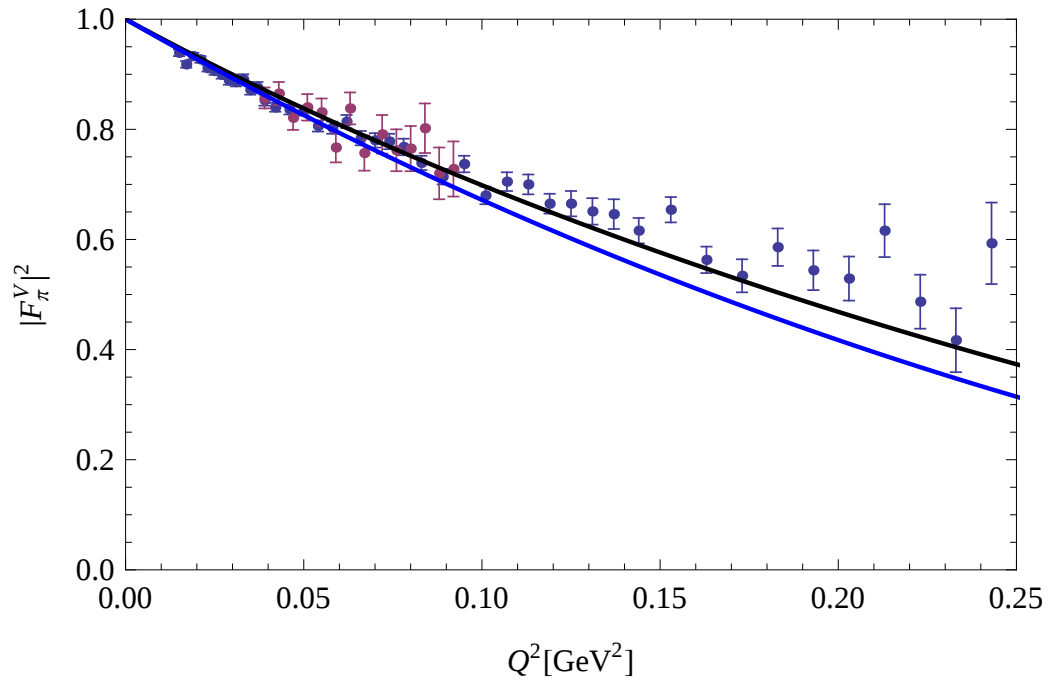


Abbildung C.5: Der elektromagnetische Formfaktor des Pions in chiraler Störungstheorie bis Ordnung $\mathcal{O}(q^4)$. Die schwarze Kurve zeigt das Ergebnis mit Pionen und ρ -Mesonen als Freiheitsgrad und die blaue Kurve ist eine Rechnung mit lediglich Pionen als Freiheitsgrad. Die experimentellen Daten stammen aus [Ame+ 84, Ame+ 86, Dal+ 77, Dal+ 82].

C.4 Selbstenergie des Nukleons

Ähnlich wie beim Pion (Anhang C.1) lässt sich der Propagator des Nukleons als unendliche Summe von eiteilchenirreduziblen Diagrammen darstellen, welche eine systematische Entwicklung der Nukleonmasse und Wellenfunktionsrenormierungskonstante ermöglichen. Herleitungen für die hier verwendeten Formeln finden sich z.B. in [Sch 03]. Die Selbstenergie des Nukleons lässt sich folgendermaßen parametrisieren,

$$\Sigma(p) = -f(p^2)\not{p} + g(p^2)m, \quad (\text{C.25})$$

wobei m für den Massenparameter des Nukleons in der Lagrangedichte steht. Auf Baumniveau bekommt dieser Massenparameter in Ordnung $\mathcal{O}(q^2)$ bzw. $\mathcal{O}(q^4)$ noch Korrekturen (siehe auch Anhang B), welche sich jedoch durch eine Redefinition des Parameters m absorbieren lassen. Auf Schleifenniveau trägt in chiraler Ordnung $\mathcal{O}(q^3)$ bzw. $\mathcal{O}(q^4)$ jeweils ein weiteres Diagramm bei. Diese sind in Abbildung C.6 zu finden. Mit Vektormesonen als explizitem Freiheitsgrad existiert auch ein Beitrag eines Diagramms vom Typ *a*), bei dem jedoch ein ρ -Meson statt des Pions in der Schleife propagiert. Solch ein Diagramm enthält jedoch nur schwere Freiheitsgrade und lässt sich somit vollständig in den Niederenergiekonstanten absorbieren. Die Ergebnisse der

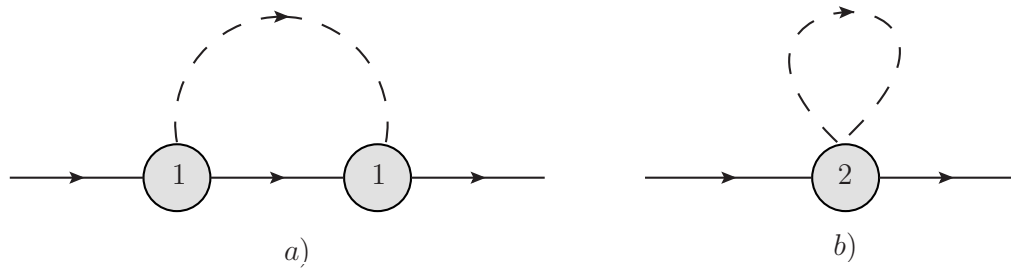


Abbildung C.6: Selbstenergiebeiträge des Nukleons auf Einschleifenniveau. Diagramm a) ist von chiraler Ordnung $\mathcal{O}(q^3)$, Diagramm b) von Ordnung $\mathcal{O}(q^4)$.

Diagramme lauten

$$f_a = \frac{3g_A^2}{128F^2p^2\pi^2} \left((m_N^2 - p^2) A_0(M^2) - (m_N^2 + p^2) A_0(m_N^2) \right. \\ \left. + (m_N^4 - M^2m_N^2 + p^2(-M^2 - 2m_N^2 + p^2)) \right. \\ \left. B_0(p^2, M^2, m_N^2) \right), \quad (C.26)$$

$$f_b = 0, \quad (C.27)$$

$$g_a = \frac{3g_A^2 (B_0(p^2, M^2, m_N^2) M^2 + A_0(m_N^2))}{64F^2\pi^2}, \quad (C.28)$$

$$g_b = -\frac{3M^2 (c_2 M^2 p^2 + (8(c_3 - 2c_1)m_N^2 + 2c_2 p^2) A_0(M^2))}{128F^2 m_N^3 \pi^2}. \quad (C.29)$$

Für die physikalische Masse des Nukleons erhält man

$$m_{N,\text{phys}} = m \left(1 + g(p^2 = m_N^2) - f(p^2 = m_N^2) \right). \quad (C.30)$$

Aus dieser Gleichung lässt sich der Massenparameter bestimmen. Da die Massen des Protons bzw. Neutrons jedoch sehr gut bekannt sind, kann der Fehler, welcher in der Niederenergiekonstante m auftritt, an dieser Stelle vernachlässigt werden. Fehler anderer Observablen sind nämlich um Größenordnungen signifikanter.

Die Wellenfunktionsrenormierungskonstante für das Nukleon ergibt sich aus den Selbstenergiendiagrammen zu

$$Z_N = 1 - f(m_N) + 2m_N^2 (f'(m_N) - g'(m_N)), \quad (C.31)$$

mit

$$f'(m_N) = \frac{\partial}{\partial p} f(p)|_{p=m_N}, \quad g'(m_N) = \frac{\partial}{\partial p} g(p)|_{p=m_N}. \quad (C.32)$$

C.5 Axialer Formfaktor des Nukleons

Den axialen Formfaktor des Nukleons erhält man aus der Kopplung des isovectoriellen axialen Stromoperators an ein Nukleon. In der QCD ist dieser Operator definiert als

$$A_a^\mu = \bar{q} \gamma^\mu \gamma_5 \frac{\tau_a}{2} q, \quad (\text{C.33})$$

wobei q im Isospinraum ein zweidimensionaler Vektor mit u- und d-Quark als Einträgen ist. In χ PT erhält man den entsprechenden Operator, wenn man die externe Quelle $a_\mu = a_{\mu,a} \frac{\tau_a}{2}$ wählt. Unter der Annahme von Isospinsymmetrie lässt sich das Matrixelement folgendermaßen parametrisieren (siehe [Sch+ 07])

$$\langle N(p_i) | A_a^\mu(0) | N(p_f) \rangle = \bar{u}(p_f) \left(\gamma^\mu \gamma_5 G_A(q^2) + \frac{q^\mu}{2m_N} \gamma_5 G_P(q^2) \right) \frac{\tau_a}{2} u(p_i), \quad (\text{C.34})$$

wobei gilt $q^\mu = p_f^\mu - p_i^\mu$. Die Größe $G_A(q^2)$ wird axialer Formfaktor und $G_P(q^2)$ wird induzierter pseudoskalarer Formfaktor genannt. Letzterer ist für die Bestimmung der hier benötigten Niederenergiekonstanten irrelevant und wird nicht weiter betrachtet. Der axiale Formfaktor wurde hier bis zur dritten bzw. vierten chiralen Ordnung berechnet. Die zugehörigen Baum-

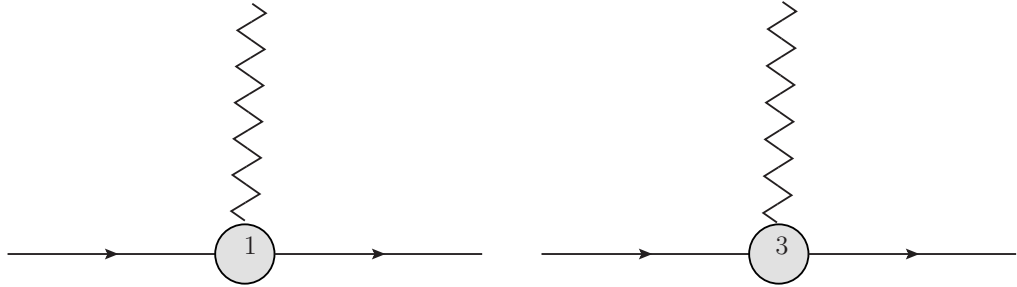


Abbildung C.7: Baumdiagramme bis zur chiralen Ordnung $\mathcal{O}(q^3)$ für den axialen Formfaktor. Die gezackte Linie stellt das axiale Feld dar.

und Schleifendiagramme sind in den Abbildungen C.7 bis C.9 zu finden. Vereinfacht dargestellt erhält man für den axialen Formfaktor

$$G_A(q^2) = \overset{\circ}{g}_A + 4M^2 d_{16} - d_{22} q^2 + \dots \quad (\text{C.35})$$

Für $q^2 = 0$ erhält man die Axialvektorkopplungskonstante [Nak+ 10]:

$$G_A(q^2 = 0) = g_A = 1.2695(29). \quad (\text{C.36})$$

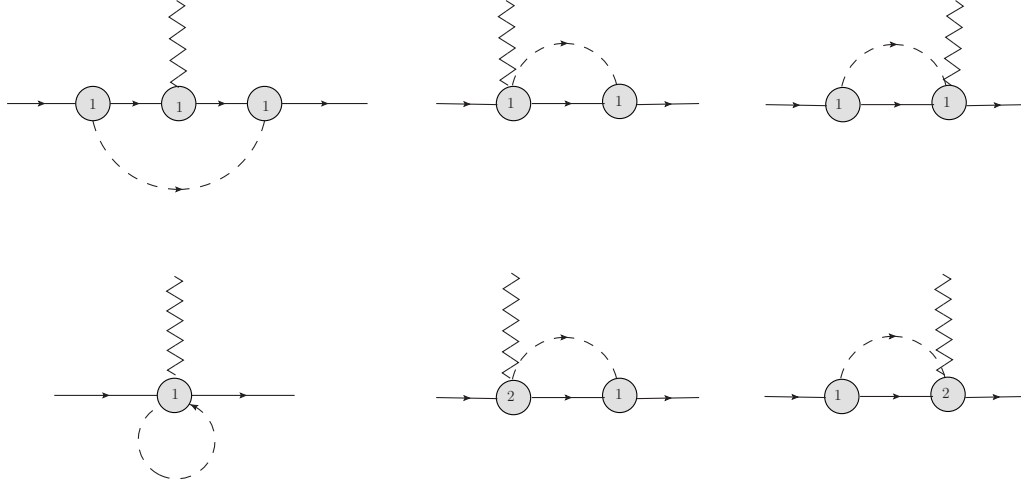


Abbildung C.8: Schleifendiagramme des axialen Formfaktors der chiralen Ordnung $\mathcal{O}(q^3)$ und $\mathcal{O}(q^4)$.

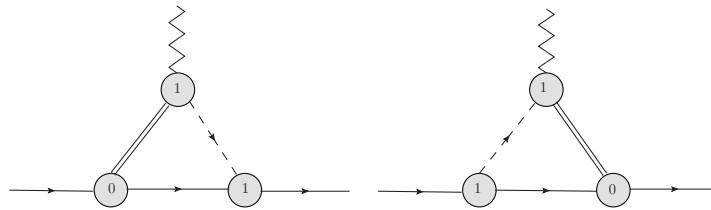


Abbildung C.9: Durch Einbau des ρ -Mesons tragen diese beiden Diagramme zusätzlich zum axialen Formfaktor bei.

Um dies zu reproduzieren, wird folgende Niederenergiekonstante entsprechend angepasst:

$$\widetilde{g}_A := \overset{\circ}{g}_A + 4M^2 d_{16}. \quad (\text{C.37})$$

Numerisch ergibt sich folgender Wert für die Konstante

$$\widetilde{g}_A^{(3)} = 2.2655(29), \quad (\text{C.38})$$

$$\widetilde{g}_A^{(\rho)} = 3.0986(29), \quad (\text{C.39})$$

$$\widetilde{g}_A^{(4)} = 3.7293(29). \quad (\text{C.40})$$

Die Größen $\widetilde{g}_A^{(3)}$, $\widetilde{g}_A^{(\rho)}$ und $\widetilde{g}_A^{(4)}$ bezeichnen die Niederenergiekonstante für eine Rechnung der Ordnung $\mathcal{O}(q^3)$, $\mathcal{O}(q^3)$ mit ρ -Mesonen bzw. $\mathcal{O}(q^4)$. Während bei einer Rechnung in niedrigster chiraler Ordnung noch $\widetilde{g}_A = \overset{\circ}{g}_A = g_A$ gilt, muss die Größe $\widetilde{g}_A$ bei Schleifenkorrekturen noch die zählschemaverletzenden Terme absorbieren, weswegen sie immer stärker von g_A abweicht. Entwickelt man G_A nach q^2 , so erhält man folgende Reihendarstellung

$$G_A(q^2) = g_A + \frac{1}{6}g_A \langle r_A^2 \rangle q^2 + \frac{g_A^3}{4F^2}H(q^2), \quad (\text{C.41})$$

wobei r_A den mittleren axialen Radius des Nukleons bezeichnet. Die Funktion $H(q^2)$ enthält weitere Schleifenkorrekturen. Auf Einschleifenniveau gilt $H(0) = H'(0) = 0$. Da der axiale Formfaktor für kleine $Q^2 = -q^2$ näherungsweise eine Dipolform hat, wird er auch gerne folgendermaßen parametrisiert,

$$G_A(q^2) = \frac{g_A}{\left(1 - \frac{q^2}{M_A^2}\right)^2}. \quad (\text{C.42})$$

Die axiale Masse M_A ist nun mit dem mittleren axialen Radius mittels

$$\langle r_A^2 \rangle = \frac{12}{M_A^2} \quad (\text{C.43})$$

verknüpft. In der Literatur finden sich leicht unterschiedliche Werte für die axiale Masse. Hier wird $M_A = (1.026 \pm 0.021) \text{ GeV}$, der globale Durchschnitt, welcher sich aus Neutrinostreuexperimenten ergibt [Lis+ 99], verwendet. Aus diesen Zusammenhängen lässt sich die Niederenergiekonstante d_{22} anpassen. In den verschiedenen Rechnungen erhält man

$$d_{22}^{(3)} = -2.2875(987) \text{ GeV}^{-2}, \quad (\text{C.44})$$

$$d_{22}^{(\rho)} = -1.7256(987) \text{ GeV}^{-2}, \quad (\text{C.45})$$

$$d_{22}^{(4)} = -2.2875(987) \text{ GeV}^{-2}. \quad (\text{C.46})$$

Da die Schleifendiagramme der Ordnung $\mathcal{O}(q^4)$ für $q^2 = 0$ verschwinden, stimmt $d_{22}^{(4)}$ mit der Rechnung in Ordnung $\mathcal{O}(q^3)$ überein. In der Rechnung mit Vektormesonen müssen andere zählschemaverletzende Terme absorbiert werden. Deswegen ergibt sich ein anderer Wert für $d_{22}^{(\rho)}$.

C.6 Pion-Nukleon-Vertex

Der Prozess $N(p_i) \rightarrow N(p_f) + \pi(q)$ kann aus energetischen Gründen nicht als realer physikalischer Prozess auftreten. Virtuell ist dies jedoch möglich und stellt insbesondere einen Subbaustein für den Prozess der Elektropionproduktion dar (siehe Abbildung C.10). In der Literatur wird er auch einfach als Pion-Nukleon-Vertex bezeichnet. Dieser ist nur eine Hilfsgröße, die jedoch die interessante Eigenschaft hat, für $q^2 = M_\pi^2$ identisch mit dem Pion-Nukleon-Formfaktor $G_{\pi N}$ zu sein [Sch+ 07]. Dieser ist definiert durch die Kopplung eines äußeren pseudoskalaren Feldes p_a an den Operator $P_a = i\bar{q}\gamma_5\tau_a q$. Für die Elektropionproduktion lässt sich aus dieser Größe die Niederenergiekonstante d_{18} bestimmen. Man betrachtet also das Matricelement des Pion-Nukleon-Vertex:

$$\begin{aligned} -\bar{u}(p_f)\Gamma(q^2 = M_\pi^2)\gamma_5\tau_a u(p_i) &\Rightarrow -\frac{\overset{\circ}{g}_A m}{F}Z_N\sqrt{Z_\pi} + \frac{2M^2}{F}m(d_{18} - 2d_{16}) + \dots \\ &= g_{\pi N}. \end{aligned} \quad (\text{C.47})$$

Hier wird zwischen der physikalischen Masse m_N und dem Massenparameter m unterschieden. Die Größe $g_{\pi N}$ wird Pion-Nukleon-Kopplungskonstante genannt. Als experimenteller Wert wird hier

$$g_{\pi N} = 13.21_{-0.05}^{+0.11}, \quad (\text{C.48})$$

verwendet [Sch+ 01]. Damit erhält man folgenden Wert für d_{18} :

$$d_{18}^{(3)} = 0.0175(2974) \text{ GeV}^{-2}, \quad (\text{C.49})$$

$$d_{18}^{(\rho)} = 16.2196(2974) \text{ GeV}^{-2}, \quad (\text{C.50})$$

$$d_{18}^{(4)} = 17.1537(2974) \text{ GeV}^{-2}. \quad (\text{C.51})$$

Die Größen $d_{18}^{(3)}$, $d_{18}^{(\rho)}$ und $d_{18}^{(4)}$ bezeichnen die Kopplungskonstante für eine Rechnung in Ordnung $\mathcal{O}(q^3)$, Ordnung $\mathcal{O}(q^3)$ mit ρ -Mesonen bzw. $\mathcal{O}(q^4)$.

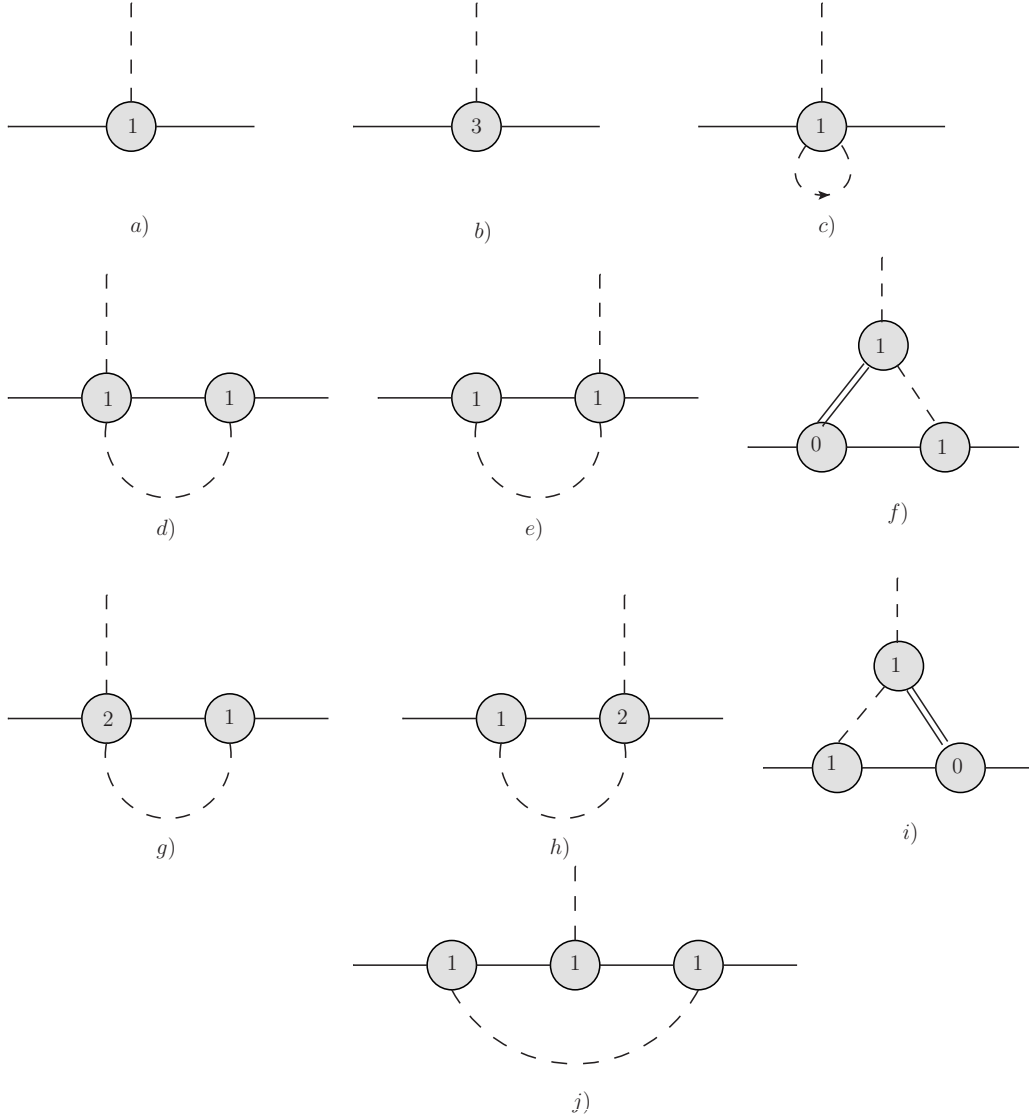


Abbildung C.10: Diagramme des Pion-Nukleon-Vertex. Diagramme a)-e) sowie j) treten in chiraler Ordnung $\mathcal{O}(q^3)$ auf. Mit dem ρ -Meson als zusätzlichem Freiheitsgrad tragen Diagramme d) und e) nicht bei, dafür jedoch f) und i). In Ordnung $\mathcal{O}(q^4)$ kommen noch die Diagramme g) und h) dazu.

C.7 Elektromagnetische Formfaktoren des Nukleons

Die Ankopplung des elektromagnetischen Stromes an ein Nukleon definiert den elektromagnetischen Formfaktor. Das Matrixelement lässt sich folgendermaßen parametrisieren

$$\langle N(p_f) | J^\mu(0) | N(p_i) \rangle = \bar{u}(p_f) \left(\gamma^\mu F_1(k^2) + i \frac{\sigma^{\mu\nu} k_\nu}{2m_N} F_2(k^2) \right) u(p_i). \quad (\text{C.52})$$

Im Isospinraum besitzen die beiden Formfaktoren F_1 und F_2 jeweils einen isoskalaren und einen isovektoriellen Anteil, $F_i^{(s)}$ und $F_i^{(v)}$:

$$F_i^N = \frac{1}{2} F_i^{(s)} + \frac{\tau_3}{2} F_i^{(v)}, \quad i = 1, 2. \quad (\text{C.53})$$

Die Formfaktoren des Nukleons F_i^N lassen sich nun in die Beiträge für Proton und Neutron aufteilen

$$F_i^p = \frac{1}{2} \left(F_i^{(s)} + F_i^{(v)} \right), \quad F_i^n = \frac{1}{2} \left(F_i^{(s)} - F_i^{(v)} \right), \quad i = 1, 2. \quad (\text{C.54})$$

Bis einschließlich chiraler Ordnung $\mathcal{O}(q^4)$ tragen die Baumdiagramme aus Abbildung C.11 und die Schleifendiagramme aus Abbildung C.12 bei. Durch Einbau von Vektormesonen muss man zusätzlich die Diagramme aus den Abbildungen C.13 und C.14 berücksichtigen. Die Formfaktoren ergeben

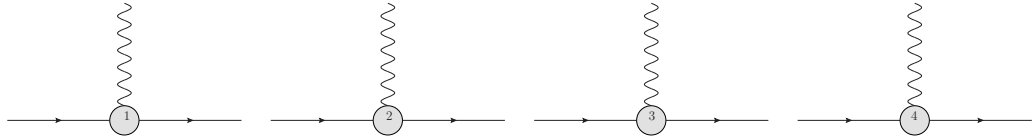


Abbildung C.11: Formfaktordiagramme des Nukleons bis chirale Ordnung $\mathcal{O}(q^4)$ auf Baumniveau.

sich ähnlich wie beim Formfaktor des Pions durch Anwendung des LSZ-Formalismus, d.h. multiplizieren mit der Wellenfunktionsrenormierungskonstante Z_N . Um die Diskussion einfach zu halten, wird zur Illustration nur die Rechnung bis zur Ordnung $\mathcal{O}(q^3)$ betrachtet. Damit ergibt sich also

$$F_{i,\text{phys}} = Z_N F_i^{(1)} + F_i^{(2)} + F_i^{(3)}, \quad i = 1, 2. \quad (\text{C.55})$$

Hierbei bezeichnet $F_{i,\text{phys}}$ die physikalischen Formfaktoren und $F_i^{(\alpha)}$ Beiträge von Diagrammen der chiralen Ordnung α . Die Schleifendiagramme sind

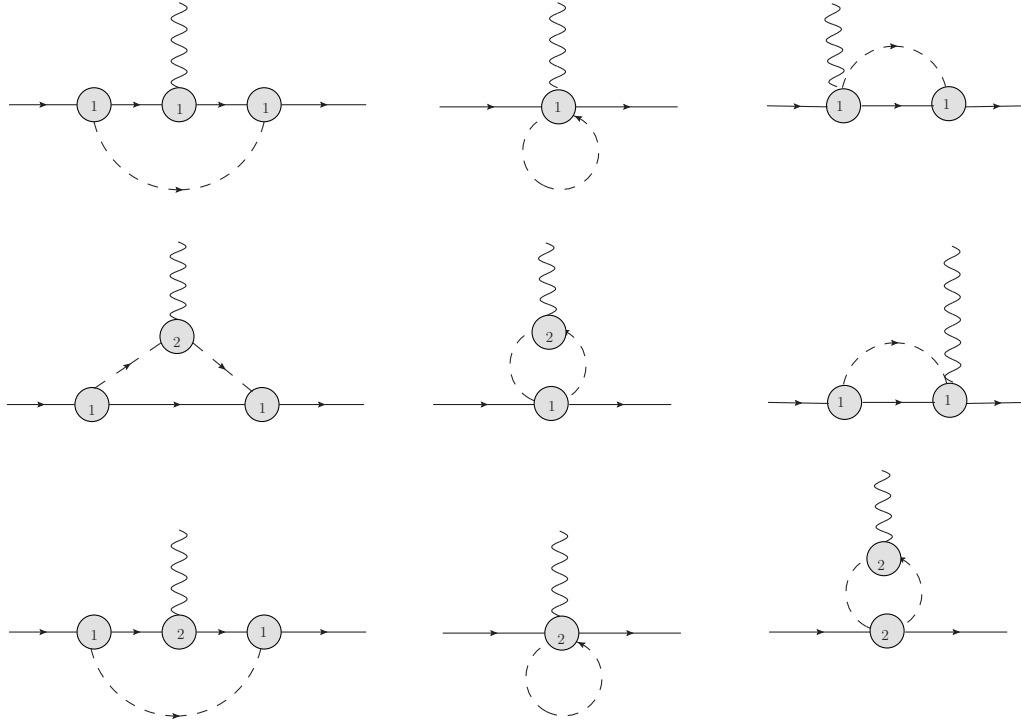


Abbildung C.12: Formfaktordiagramme des Nukleons bis zur vierten chiralen Ordnung auf Schleifenniveau. Die Diagramme in den ersten beiden Zeilen sind von Ordnung $\mathcal{O}(q^3)$, der Rest ist $\mathcal{O}(q^4)$.

hierbei alle in $F_i^{(3)}$ berücksichtigt. Da Z_N von Ordnung $\mathcal{O}(q^2)$ ist, wären Beiträge der Form $Z_N F_i^{(2,3)}$ von höherer chiraler Ordnung und können somit vernachlässigt werden. In der Literatur findet man häufig folgende Linearkombination der Formfaktoren F_1 und F_2 :

$$G_E^N(Q^2) = F_1^N(Q^2) - \frac{Q^2}{4m_N^2} F_2^N(Q^2), \quad (\text{C.56})$$

$$G_M^N(Q^2) = F_1^N(Q^2) + F_2^N(Q^2). \quad (\text{C.57})$$

Die Größe $Q^2 = -k^2$ gibt die Photonvirtualität an, wobei $k^\mu = p_f^\mu - p_i^\mu$ gilt. In einer konsistenten Rechnung muss folgende Bedingung erfüllt sein:

$$G_E^p(Q^2 = 0) = 1, \quad G_E^n(Q^2 = 0) = 0, \quad (\text{C.58})$$

da dies die Ladung von Proton und Neutron in Einheiten der Elementarladung widerspiegelt. In den verschiedenen durchgeführten Rechnungen muss eine unterschiedliche Anzahl an Niederenergiekonstanten an die experimentellen Daten angepasst werden. Allen Rechnungen ist gemein, dass die An-

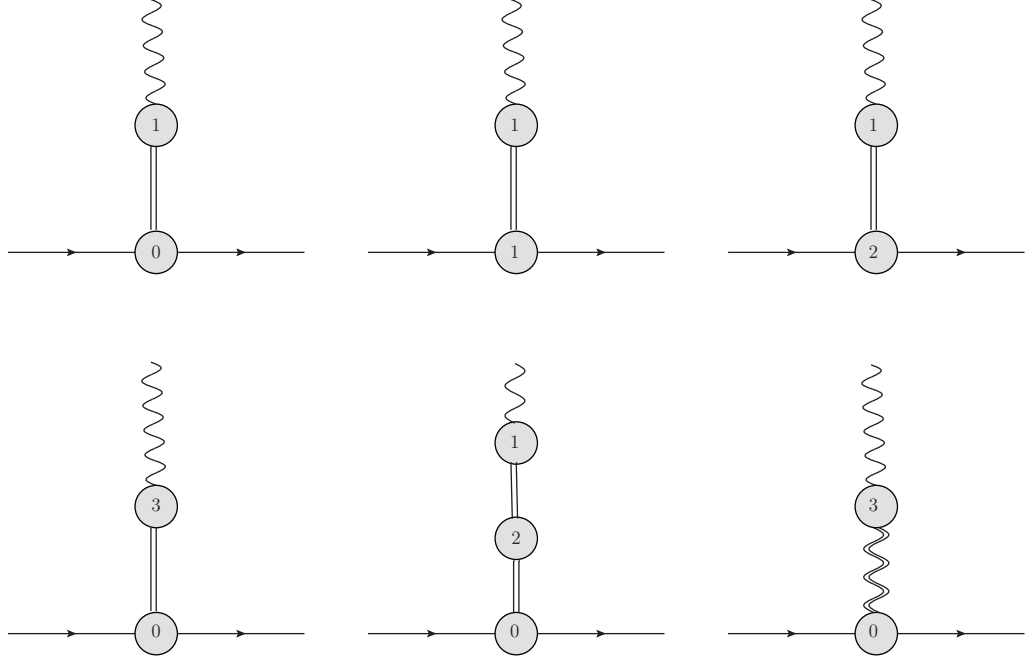


Abbildung C.13: Durch Einbau von ρ - und ω -Meson erhält man zusätzlich diese Baumdiagramme bis Ordnung $\mathcal{O}(q^3)$. Die doppelte geschlängelte Linie stellt hier das ω -Meson dar.

passung der Niederenergiekonstanten c_6 und c_7 die experimentellen Werte des magnetischen Moments von Proton bzw. Neutron [Nak+ 10]

$$\mu_p = 2.792847356(23), \quad \mu_n = -1.9130427(5), \quad (\text{C.59})$$

reproduzieren soll. Für die Rechnung mit Vektormesonen tritt ähnlich wie beim Pionformfaktor eine (andere) Linearkombination der beiden Niederenergiekonstanten d_X und f_V auf.

$$P' = d_X - \sqrt{2}f_V. \quad (\text{C.60})$$

Genauso lässt sich folgende Kombination von Kopplungskonstanten für das Baumdiagramm mit ω -Meson zusammenfassen,

$$f_{g\omega} = f_\omega g_\omega. \quad (\text{C.61})$$

Die Niederenergiekonstanten e_{105} bzw. e_{106} , welche in chiraler Ordnung $\mathcal{O}(q^4)$ auftreten, werden in c_6 und c_7 absorbiert. Die Zahlenwerte für die Niederenergiekonstanten c_2 bis c_4 werden aus [BL 01] übernommen. Dies ist problemlos möglich, da diese Konstanten hier nur in Schleifendiagrammen auftreten und

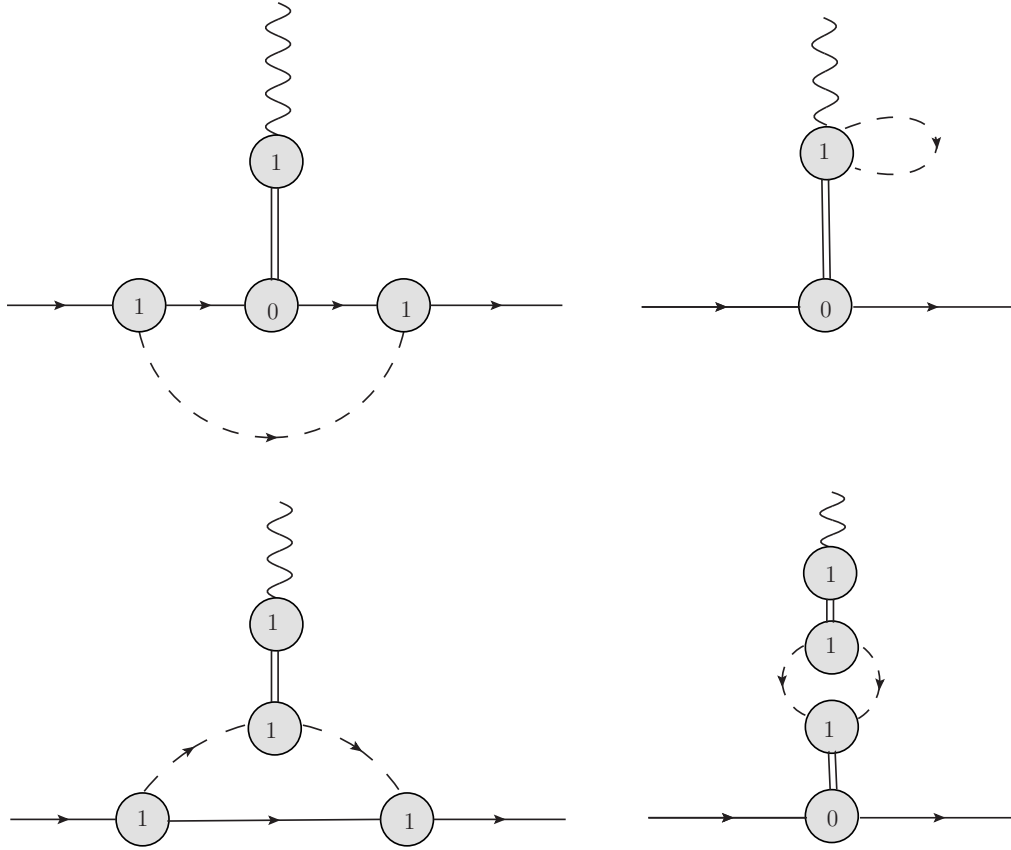


Abbildung C.14: Zusätzliche Schleifendiagramme, die durch den Einbau des ρ -Mesons beitragen.

die Diagramme Beiträge der Ordnung $\hbar$ sind. Da die Niederenergiekonstanten in [BL 01] auch bis zu dieser Ordnung bestimmt wurden, ist der Fehler beim Verwenden dieser Zahlen von der Ordnung $\hbar^2$ und somit jenseits der Genauigkeit dieser Rechnung. Die Zahlenwerte sind

$$c_2 = 2.5/m_N, \quad c_3 = -4.2/m_N, \quad c_4 = 2.3/m_N. \quad (\text{C.62})$$

Alle noch nicht festgelegten Niederenergiekonstanten werden simultan an die Daten für $G_E^p, G_E^n, G_M^p, G_M^n$ im Bereich $Q^2 < 0.5 \text{ GeV}^2$ angepasst. Die Ergebnisse sind in Tabelle C.1 zusammengefasst. Wie man sieht, sind in beiden Rechnungen der dritten chiralen Ordnung die Zahlenwerte für c_6 und c_7 gleich. Dies wird auch erwartet, da der Einbau der Vektormesonen die Formfaktoren nur für $Q^2 \neq 0$ beeinflussen sollte (solange Schleifendiagramme mit ausschließlich schweren Teilchenmassen vernachlässigt werden). Die Konstante c_X wird analog zu den Konstanten l_3 und c_1 für Pionmasse und

Nukleonmasse im Massenparameter M_ρ absorbiert.

LEC	$\mathcal{O}(q^3)$	$\mathcal{O}(q^4)$	$\mathcal{O}(q^3)+\text{VM}$
$c_6[\text{GeV}^{-1}]$	-0.0630	0.0288	-0.0630
$c_7[\text{GeV}^{-1}]$	1.5271	-0.7756	1.5271
$d_6[\text{GeV}^{-2}]$	-0.0705(691)	-0.3359(130)	0.2652(240)
$d_7[\text{GeV}^{-2}]$	-0.1466(652)	-0.4477(125)	0.1363(77)
$e_{54}[\text{GeV}^{-3}]$	-	0.1917(207)	-
$e_{74}[\text{GeV}^{-3}]$	-	0.7395(103)	-
$G[\text{GeV}^{-1}]$	-	-	-1.8112(2050)
$G_2[\text{GeV}^{-3}]$	-	-	2.751(1249)
P'	-	-	-0.0080(103)
$f_{g\omega}$	-	-	1.1212(328)

Tabelle C.1: Ergebnisse der Niederenergiekonstanten, welche an die Nukleonformfaktoren angepasst wurden. Die Fehler von c_6 und c_7 können vernachlässigt werden, da die magnetischen Momente mit ausreichender Genauigkeit bekannt sind. Die restlichen Fehler werden durch die Fitroutine bestimmt.

Die Ergebnisse für die Formfaktoren mit den hier bestimmten Niederenergiekonstanten sind in den Abbildungen C.15 und C.16 dargestellt. Wie erwartet, führt der Einbau der Vektormesonen bei den elektromagnetischen Formfaktoren des Nukleons zu einer signifikant verbesserten Beschreibung der experimentellen Daten gegenüber einer Rechnung ohne diese. Selbst in der vierten Ordnung werden ohne Vektormesonen die Daten nicht so gut beschrieben. Damit ist bestätigt, dass die Vektormesonen eine wichtige Rolle für die Formfaktoren spielen.

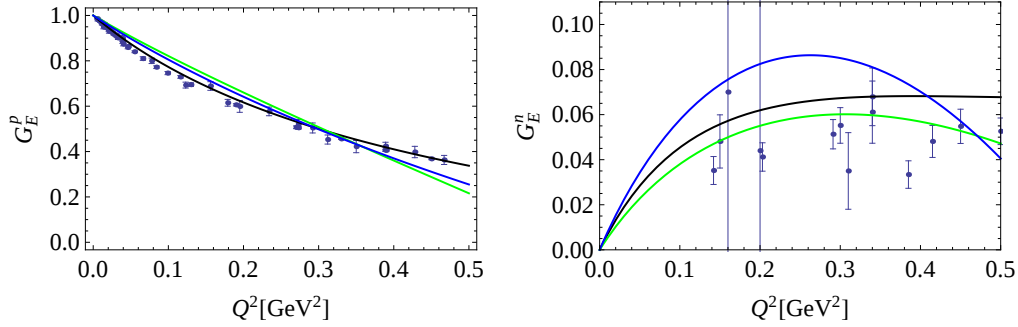


Abbildung C.15: Q^2 -Abhängigkeit des elektrischen Formfaktors von Proton und Neutron. Die grüne Linie stellt die Rechnung in chiraler Störungstheorie bis Ordnung $\mathcal{O}(q^3)$ dar. Die schwarze Linie stellt das Ergebnis mit Vektormesonen dar. Die blaue Linie ist das Ergebnis der Rechnung in vierter chiraler Ordnung. Die experimentellen Daten sind die Welt Daten für die Nukleonformfaktoren [Mer 09a].

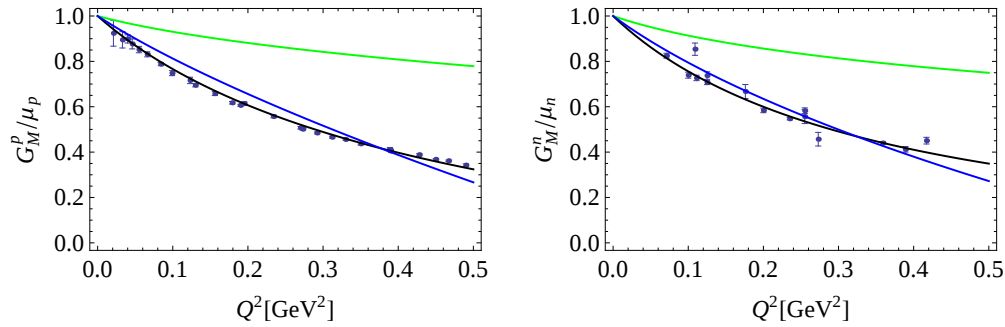


Abbildung C.16: Q^2 -Abhängigkeit des magnetischen Formfaktors von Proton und Neutron (in Einheiten von μ_p bzw. μ_n). Die Kennzeichnung der Kurven wird in Abbildung C.15 erläutert. Die experimentellen Daten sind die Welt Daten für die Nukleonformfaktoren [Mer 09a].

Anhang D

Cusp-Effekt

In dieser Arbeit ist in den Rechnungen die Isospinsymmetrie perfekt erhalten. Im Experiment sieht man jedoch einen Knick (Cusp) in der E_{0+} -Amplitude der neutralen Pionproduktion, welcher sich auf die unterschiedliche Masse von neutralem und geladenen Pionen zurückführen lässt. Nach [Ber+ 94] kann man diesen Effekt, welcher in χ PT erst in höherer Ordnung auftritt, phänomenologisch in der neutralen Pionproduktion berücksichtigen, indem man für die Pionpropagatoren in den Schleifenintegralen die Masse des geladenen Pions verwendet, jedoch für die Massenschalenbeziehung die Masse des π^0 verwendet. Im Folgenden soll das Entstehen des Cusp-Effekts illustriert werden. Dazu betrachte man das Diagramm aus Abbildung D.1. Um

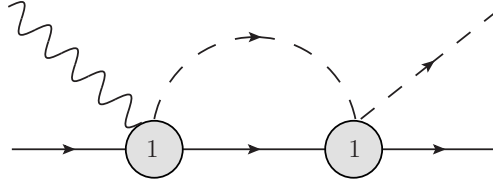


Abbildung D.1: In diesem Diagramm tritt beim Prozess $\gamma + p \rightarrow \pi^0 + p$ der Cusp-Effekt auf, da in der Schleife ein π^+ und ein Neutron propagieren.

die Illustration möglichst einfach zu halten, wird nur das Ergebnis der Ball-Amplitude B_2 untersucht. Als weitere Einschränkung wird der Isospinindex des freien Pions $a = 3$ gewählt, was der Erzeugung eines neutralen Pions im Endzustand entspricht. Das Ergebnis dieser Amplitude lautet

$$B_2 = C [B_0(s, M^2, m_N^2) (m_N^2 - M^2 - s) + A_0(M^2) - A_0(m_N^2)], \quad (\text{D.1})$$

mit dem Faktor

$$C = \frac{eg_A m_N}{32F^3 \pi^2 s}. \quad (\text{D.2})$$

Berechnet man die gleiche Amplitude und berücksichtigt dabei jedoch, welches Pion in der Schleife propagiert, so erhält man

$$\begin{aligned} B_2^{\text{Cusp}} = & \frac{C}{2} [B_0(s, M_1^2, m_N^2) (m_N^2 - M_1^2 - s) \\ & + A_0(M_1^2) - A_0(m_N^2)] \\ & + \frac{C}{2} [B_0(s, M_2^2, m_N^2) (m_N^2 - M_2^2 - s) \\ & + A_0(M_2^2) - A_0(m_N^2)]. \end{aligned} \quad (\text{D.3})$$

Es gilt

$$M_1 = M_2 = M_{\pi^\pm}. \quad (\text{D.4})$$

Wie man sieht, erhält man im Grenzfall $M_1 = M_2 = M$ wieder das Ergebnis für B_2 aus Gleichung (D.1). In dem hier untersuchten Diagramm (unter der Annahme eines neutralen Pions im Endzustand) treten somit innerhalb der Schleife nur geladene Pionen auf. In Abbildung D.2 ist der Verlauf der Amplitude B_2 in Abhängigkeit der Schwerpunktsenergie dargestellt. Die Amplitude bekommt einen Imaginärteil, sobald die Schwerpunktsenergie ausreicht, um das virtuelle Pion in der Schleife auch reell zu erzeugen. Für B_2 aus Gleichung (D.1) ist das für $W = m_p + M_{\pi^0} = 1.07325$ GeV der Fall, für die Amplitude aus Gleichung (D.3) für $W = m_n + M_{\pi^+} = 1.07913$ GeV. Die Masse des Protons bzw. Neutrons spielt für den Cusp eine untergeordnete Rolle. Er entsteht in diesem Beispiel durch das D -dimensionale Schleifenintegral

$$I = i\mu^{4-D} \int \frac{d^D l}{(2\pi)^D} \frac{1}{[(l + p_i + k)^2 - m_N^2 + i0^+][k^2 - M_\pi^2 + i0^+]}. \quad (\text{D.5})$$

Der Parameter μ ist der 't Hooft-Parameter. Das Ergebnis dieses Integrals mit $(p_i + k)^2 = s$ lautet in vier Dimensionen

$$I = 2\bar{\lambda} + \frac{1}{16\pi^2} \left[-1 + \frac{s - m_N^2 + M_\pi^2}{s} \ln \left(\frac{M_\pi}{\mu} \right) + \frac{2m_N M_\pi}{s} F(\Omega) \right], \quad (\text{D.6})$$

mit

$$\bar{\lambda} = \frac{1}{16\pi^2} \left(\frac{1}{D-4} - \frac{1}{2} [\ln(4\pi) + \Gamma'(1) + 1] \right). \quad (\text{D.7})$$

$$F(\Omega) = \sqrt{\Omega^2 - 1} \arccos(-\Omega), \quad 1 \leq \Omega \leq 1 \quad (\text{D.8})$$

$$F(\Omega) = \sqrt{\Omega^2 - 1} \ln(-\Omega - \sqrt{\Omega^2 - 1}) - i\pi\sqrt{\Omega^2 - 1}, \quad 1 \leq \Omega \quad (\text{D.9})$$

$$\Omega = \frac{s - m_N^2 - M_\pi^2}{2m_N M_\pi}. \quad (\text{D.10})$$

Wie man sieht, hängt das Ergebnis davon ab, in welchem Intervall Ω liegt. Für $W = m_n + M_{\pi^+}$ erhält man, wenn man die Brechung der Isospinsymmetrie berücksichtigt, bei diesem Integral für Ω den Wert 1. An dieser Stelle ist die Ableitung des Integrals nach der Schwerpunktsenergie jedoch divergent, was zu dem Cusp führt. Außerdem hängt die Amplitude B_2^{Cusp} unterhalb der π^+n -Schwelle viel stärker von der Schwerpunktsenergie ab als B_2 . Dies lässt sich auf die Lösung des Schleifenintegrals für $\Omega < 1$ zurückführen.

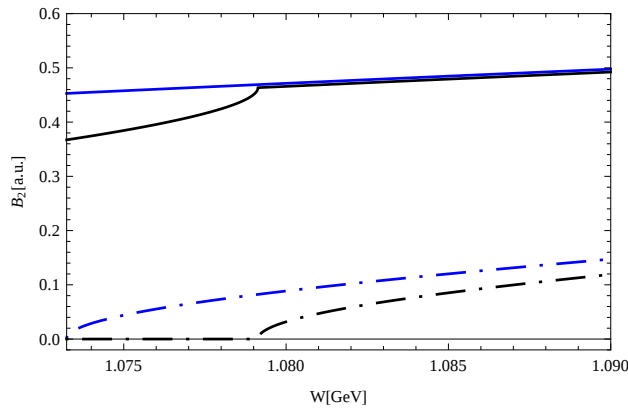


Abbildung D.2: Der Cusp-Effekt in der Amplitude B_2 des Diagramms aus Abbildung D.1. Die durchgezogenen Linien stellen den Realteil, die gestrichelten Linien den Imaginärteil dar. Die jeweils blaue Linie zeigt den isospinsymmetrischen Fall und die schwarze Linie das Ergebnis mit Isospinsymmetriebrechung.

Anhang E

Ergänzende Plots

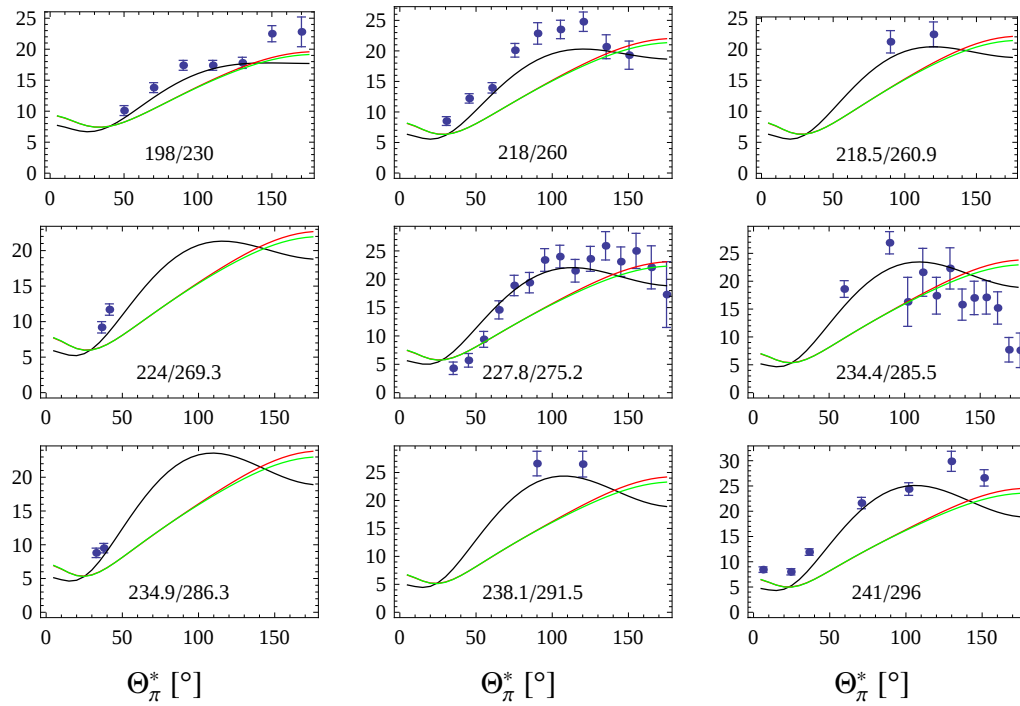


Abbildung E.1: Differentielle Wirkungsquerschnitte für die Reaktion $\gamma + n \rightarrow p + \pi^-$. Für die Kennzeichnung der Achsen und die Zuordnung der einzelnen Kurven siehe Abbildung 6.17 auf Seite 97.

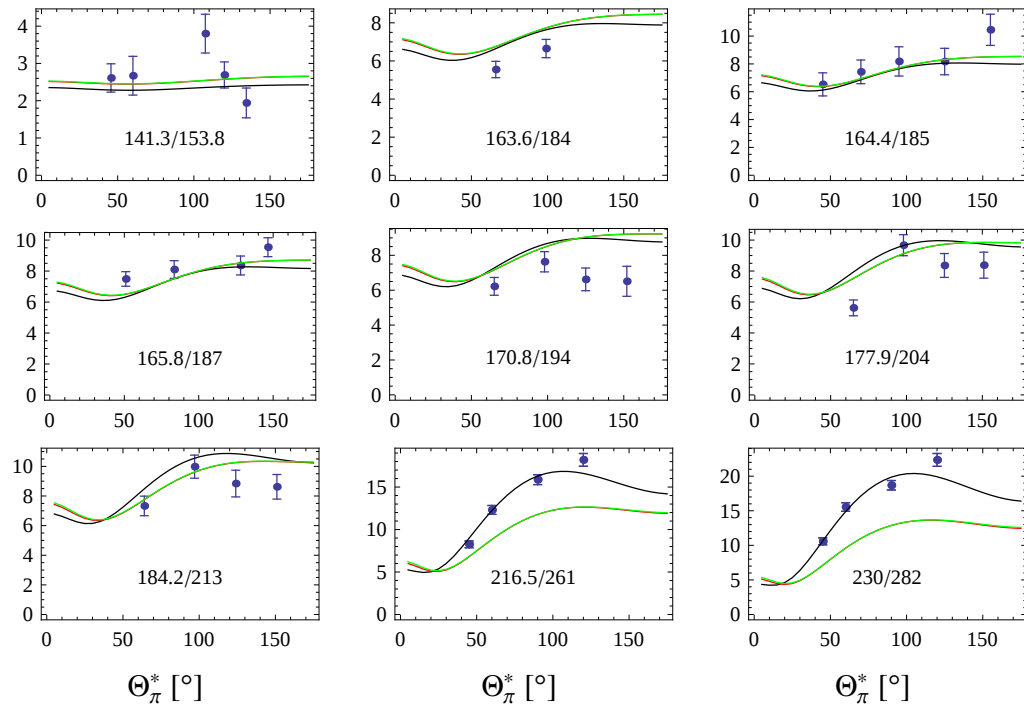


Abbildung E.2: Differentielle Wirkungsquerschnitte für die Reaktion $\gamma + p \rightarrow n + \pi^+$. Für die Kennzeichnung der Achsen und die Zuordnung der einzelnen Kurven siehe Abbildung 6.17 auf Seite 97.

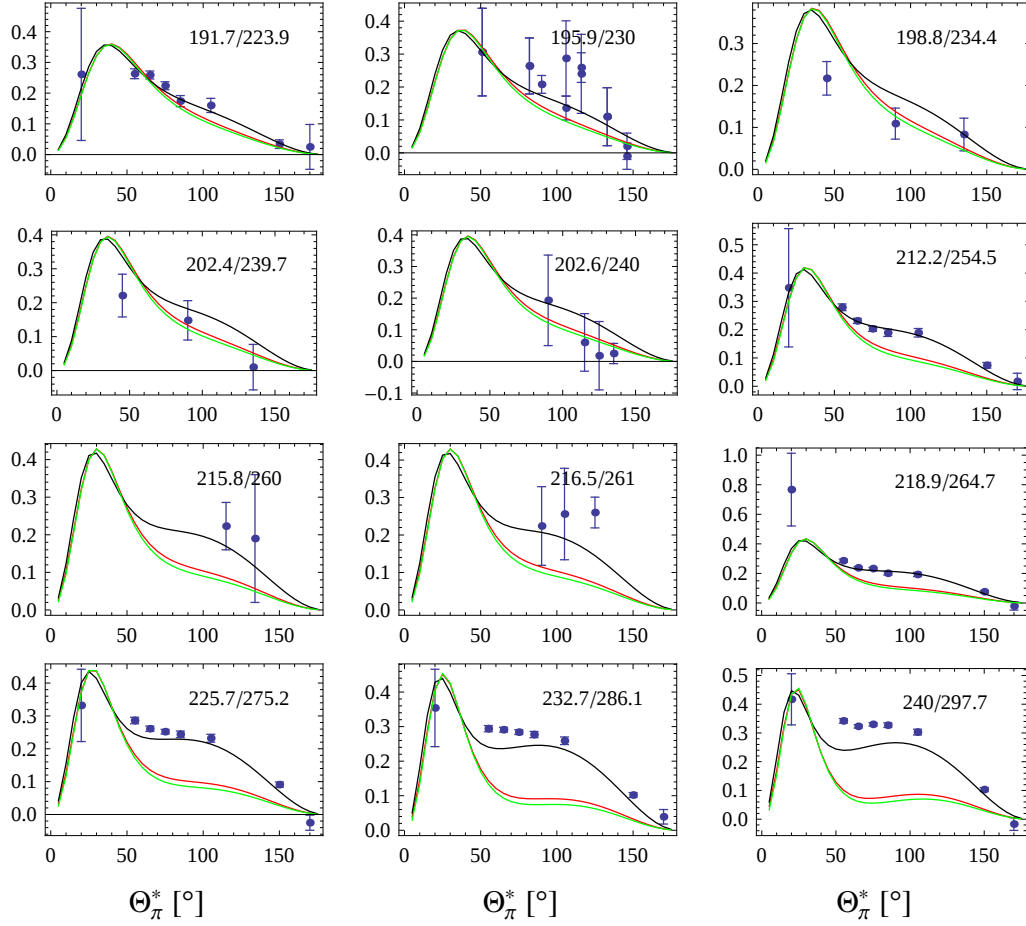


Abbildung E.3: Die Photonasymmetrie Σ für die Reaktion $\gamma + p \rightarrow n + \pi^+$. Für die Kennzeichnung der Achsen und die Zuordnung der einzelnen Kurven siehe Abbildung 6.17 auf Seite 97.

Anhang F

Parametrisierungen der Multipole

Hier werden die für die Multipole nach Gleichung (6.2) ermittelten Parameterwerte für die verschiedenen Reaktionskanäle aufgeführt. Die Niederenergiekonstanten der Kontaktterme sind hier noch nicht berücksichtigt. Der Eintrag „VM“ bezeichnet jeweils die Parametrisierung in Ordnung $\mathcal{O}(q^3)$ mit Vektormesonen.

F.1 $\gamma + p \rightarrow \pi^0 + p$

M	Rechnung	a_0	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5
E_{0+}	$\mathcal{O}(q^3)$	-0.855	2.945	1.134	0.518	-	-
	$\mathcal{O}(q^4)$	-0.629	3.118	1.140	0.714	-	-
	VM	-0.519	2.944	0.727	0.705	-	-
$\bar{P}_1$	$\mathcal{O}(q^3)$	8.798	-	0.730	0.267	0.319	0.250
	$\mathcal{O}(q^4)$	9.800	-	0.818	0.362	0.464	0.291
	VM	8.104	-	1.191	0.257	0.392	0.238
$\bar{P}_2$	$\mathcal{O}(q^3)$	-9.025	-	0.523	1.470	0.860	1.002
	$\mathcal{O}(q^4)$	-10.48	-	1.288	2.038	1.086	1.292
	VM	-8.525	-	0.141	1.413	0.811	0.998
$\bar{P}_3$	$\mathcal{O}(q^3)$	1.331	-	-0.963	-0.462	-0.370	-0.197
	$\mathcal{O}(q^4)$	4.753	-	-3.231	-0.935	-0.881	-0.244
	VM	4.878	-	-2.592	-0.451	-0.817	-0.193
$\bar{\bar{E}}_{2+}$	$\mathcal{O}(q^3)$	-0.001	0	-0.003	-0.001	-0.002	-
	$\mathcal{O}(q^4)$	-0.001	0	-0.003	-0.001	-0.001	-
	VM	-0.001	0	-0.002	-0.001	-0.001	-
$\bar{\bar{E}}_{2-}$	$\mathcal{O}(q^3)$	-1.100	0	-0.660	0.003	-0.327	-
	$\mathcal{O}(q^4)$	-1.103	0	-0.689	0.003	-0.332	-
	VM	-0.953	0	-0.685	0.003	-0.323	-
$\bar{\bar{M}}_{2+}$	$\mathcal{O}(q^3)$	-0.090	0	-0.004	0.001	-0.002	-
	$\mathcal{O}(q^4)$	-0.101	0	-0.004	0	-0.001	-
	VM	-0.076	0	-0.015	0.001	-0.003	-
$\bar{\bar{M}}_{2-}$	$\mathcal{O}(q^3)$	0.021	0	0.003	0	0.002	-
	$\mathcal{O}(q^4)$	0.022	0	0.003	0	0.001	-
	VM	0.041	0	-0.018	0	-0.001	-

Tabelle F.1: Parametrisierung der Multipole in den verschiedenen Rechnungen für neutrale Photopionproduktion am Proton. Die Koeffizienten der S-, $\bar{P}$ -, $\bar{\bar{D}}$ -Wellen sind in Einheiten von $10^{-3}/M_{\pi^+}$, $10^{-3}/M_{\pi^+}^2$, $10^{-3}/M_{\pi^+}^3$.

F.2 $\gamma^{(*)} + p \rightarrow \pi^0 + p$

M	Rechnung	a_0	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5
E_{0+}	$\mathcal{O}(q^3)$	1.055	2.986	1.630	0.147	0.262	-0.091
	$\mathcal{O}(q^4)$	1.198	3.051	1.921	0.345	0.047	-0.137
	VM	3.152	2.989	0.487	0.304	0.120	-0.101
L_{0+}	$\mathcal{O}(q^3)$	-1.624	0.567	-0.075	-0.481	-0.151	-0.139
	$\mathcal{O}(q^4)$	-1.151	0.735	-0.240	-0.554	-0.458	-0.211
	VM	-1.916	0.434	0.532	-0.298	-0.272	-0.159
$\bar{P}_1$	$\mathcal{O}(q^3)$	15.457	-0.004	7.244	0.457	4.206	0.348
	$\mathcal{O}(q^4)$	17.081	0.022	6.912	0.048	4.127	0.056
	VM	13.085	-0.002	6.904	0.438	3.872	0.333
$\bar{P}_2$	$\mathcal{O}(q^3)$	-15.947	-0.003	-5.965	1.072	-3.088	0.602
	$\mathcal{O}(q^4)$	-18.837	-0.030	-4.342	2.070	-2.605	1.117
	VM	-13.577	-0.004	-5.702	0.917	-2.820	0.536
$\bar{P}_3$	$\mathcal{O}(q^3)$	21.646	0.005	-3.493	-0.731	-0.573	-0.421
	$\mathcal{O}(q^4)$	20.022	-0.019	-3.673	-0.955	-0.575	-0.331
	VM	20.072	0.003	-2.842	-0.681	-0.574	-0.400
$\bar{P}_4$	$\mathcal{O}(q^3)$	0.004	0.001	1.270	0.890	0.768	0.401
	$\mathcal{O}(q^4)$	0.150	0.051	0.902	0.310	0.488	0.230
	VM	0.385	0.005	0.845	0.788	0.659	0.372
$\bar{P}_5$	$\mathcal{O}(q^3)$	0.086	0	0.472	0.507	0.434	0.334
	$\mathcal{O}(q^4)$	1.114	0.049	-0.799	-0.203	0.071	0.198
	VM	0.818	0.004	-0.078	0.447	0.312	0.303

Tabelle F.2: Parametrisierung der Multipole in den verschiedenen Rechnungen für neutrale Elektropionproduktion am Proton für $Q^2 = 0.05 \text{ GeV}^2$. Die Koeffizienten der S- und $\bar{P}$ -Wellen sind in Einheiten von $10^{-3}/M_{\pi^+}$ und $10^{-3}/M_{\pi^+}^2$.

M	Rechnung	a_0	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5
$\overline{\overline{E}}_{2+}$	$\mathcal{O}(q^3)$	0	0	-0.003	-0.001	-0.001	0.001
	$\mathcal{O}(q^4)$	-0.002	0	-0.004	-0.001	-0.001	0.001
	VM	-0.001	0	-0.002	-0.001	0	0.001
$\overline{\overline{E}}_{2-}$	$\mathcal{O}(q^3)$	-1.295	0	-0.877	0.002	-0.506	0
	$\mathcal{O}(q^4)$	-1.284	0	-0.950	0.002	-0.531	0.001
	VM	-1.083	0	-0.851	0.002	-0.474	0.001
$\overline{\overline{M}}_{2+}$	$\mathcal{O}(q^3)$	-0.290	0	-0.231	0	-0.153	-0.001
	$\mathcal{O}(q^4)$	-0.301	0	-0.245	0	-0.161	-0.001
	VM	-0.219	0	-0.210	0	-0.136	-0.001
$\overline{\overline{M}}_{2-}$	$\mathcal{O}(q^3)$	0.033	0	0.059	0	0.032	0
	$\mathcal{O}(q^4)$	0.038	0	0.060	0	0.034	0
	VM	0.102	0	0.038	0	0.028	0
$\overline{\overline{L}}_{2+}$	$\mathcal{O}(q^3)$	-0.003	0	-0.005	0	-0.003	0.001
	$\mathcal{O}(q^4)$	-0.004	0	-0.006	0	-0.003	0.001
	VM	-0.004	0	-0.004	0	-0.002	0
$\overline{\overline{L}}_{2-}$	$\mathcal{O}(q^3)$	0.316	0	0.183	0	0.080	0
	$\mathcal{O}(q^4)$	0.302	0	0.199	0	0.081	0
	VM	0.262	0	0.189	0	0.080	0

Tabelle F.3: Parametrisierung der Multipole in den verschiedenen Rechnungen für neutrale Elektropionproduktion am Proton für $Q^2 = 0.05 \text{ GeV}^2$. Die Koeffizienten $\overline{\overline{D}}$ -Wellen sind in Einheiten von $10^{-3}/M_{\pi^+}^3$.

F.3 $\gamma + n \rightarrow \pi^- + p$

M	Rechnung	a_0	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6
E_{0+}	$\mathcal{O}(q^3)$	-33.27	-2.06	-13.33	0.36	-7.89	0.26	-2.68
	$\mathcal{O}(q^4)$	-29.84	0.18	-16.66	-0.78	-8.47	-0.20	-2.83
	VM	-31.60	-2.06	-13.50	0.20	-7.62	0.25	-2.58
$\bar{P}_1$	$\mathcal{O}(q^3)$	1.61	0.01	-4.10	1.11	-3.90	0.47	-1.51
	$\mathcal{O}(q^4)$	10.70	-0.01	-10.05	-0.07	-5.15	0.29	-1.79
	VM	1.32	0.01	-3.79	1.14	-3.64	0.47	-1.41
$\bar{P}_2$	$\mathcal{O}(q^3)$	-30.98	-0.01	-18.65	-1.15	-11.41	-0.47	-3.81
	$\mathcal{O}(q^4)$	-41.00	0.01	-12.36	1.34	-9.61	0.17	-3.35
	VM	-29.77	0	-18.00	-1.09	-10.97	-0.45	-3.66
$\bar{P}_3$	$\mathcal{O}(q^3)$	11.26	-0.01	-0.73	-1.15	-0.94	-0.47	-0.34
	$\mathcal{O}(q^4)$	6.08	0	2.75	-0.40	0.07	-0.27	-0.09
	VM	11.64	-0.01	-0.99	-1.15	-0.99	-0.46	-0.35
$\bar{\bar{E}}_{2+}$	$\mathcal{O}(q^3)$	-1.34	0	-1.42	0	-1.06	0	-0.38
	$\mathcal{O}(q^4)$	-1.38	0	-1.46	0	-1.09	0	-0.40
	VM	-1.28	0	-1.33	0	-0.98	0	-0.35
$\bar{\bar{E}}_{2-}$	$\mathcal{O}(q^3)$	-9.33	0	-8.55	0	-6.07	0	-2.15
	$\mathcal{O}(q^4)$	-9.56	0	-8.81	0	-6.24	0	-2.21
	VM	-9.04	0	-8.28	0	-5.88	0	-2.08
$\bar{\bar{M}}_{2+}$	$\mathcal{O}(q^3)$	0.56	0	0.43	0	0.25	0	0.08
	$\mathcal{O}(q^4)$	0.57	0	0.44	0	0.25	0	0.08
	VM	0.54	0	0.41	0	0.23	0	0.07
$\bar{\bar{E}}_{2-}$	$\mathcal{O}(q^3)$	-1.00	0	-0.66	0	-0.37	0	-0.12
	$\mathcal{O}(q^4)$	-1.03	0	-0.68	0	-0.38	0	-0.12
	VM	-0.96	0	-0.63	0	-0.35	0	-0.11

Tabelle F.4: Parametrisierung der Multipole für die Reaktion $\gamma + n \rightarrow \pi^- + p$ bis $W = 1140$ MeV. Die Koeffizienten der S, $\bar{P}$, $\bar{\bar{D}}$ -Wellen sind in Einheiten von $10^{-3}/M_{\pi^+}$, $10^{-3}/M_{\pi^+}^2$, $10^{-3}/M_{\pi^+}^3$.

F.4 $\gamma + p \rightarrow \pi^+ + n$

M	Rechnung	a_0	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6
E_{0+}	$\mathcal{O}(q^3)$	28.44	1.63	13.41	0.42	7.79	0.20	2.65
	$\mathcal{O}(q^4)$	25.18	-0.63	16.75	0.70	7.97	0.12	2.73
	VM	26.96	1.63	13.35	0.54	7.60	0.22	2.57
$\overline{P}_1$	$\mathcal{O}(q^3)$	1.99	0.01	5.05	-0.66	4.38	-0.31	1.69
	$\mathcal{O}(q^4)$	-2.19	0.02	0.20	-0.71	5.00	-0.40	1.81
	VM	2.00	0.01	4.81	-0.67	4.14	-0.31	1.60
$\overline{P}_2$	$\mathcal{O}(q^3)$	27.33	-0.01	17.50	0.67	10.98	0.32	3.77
	$\mathcal{O}(q^4)$	32.52	0.02	14.03	-0.54	9.82	-0.03	3.47
	VM	26.34	-0.01	16.84	0.63	10.53	0.31	3.61
$\overline{P}_3$	$\mathcal{O}(q^3)$	-10.67	-0.01	0.21	0.85	0.65	0.37	0.26
	$\mathcal{O}(q^4)$	-15.12	-0.02	2.68	0.93	1.17	0.36	0.39
	VM	-10.12	-0.01	-0.01	0.85	0.59	0.37	0.25
$\overline{\overline{E}}_{2+}$	$\mathcal{O}(q^3)$	1.31	0	1.39	0	1.05	0	0.39
	$\mathcal{O}(q^4)$	1.35	0	1.43	0	1.08	0	0.40
	VM	1.26	0	1.31	0	0.97	0	0.36
$\overline{\overline{E}}_{2-}$	$\mathcal{O}(q^3)$	7.57	0	7.46	0	5.46	0	2.00
	$\mathcal{O}(q^4)$	7.75	0	7.79	0	5.65	0	2.06
	VM	7.36	0	7.23	-0.01	5.30	0	1.94
$\overline{\overline{M}}_{2+}$	$\mathcal{O}(q^3)$	-0.60	0	-0.43	0	-0.25	0	-0.08
	$\mathcal{O}(q^4)$	-0.63	0	-0.45	0	-0.26	0	-0.08
	VM	-0.57	0	-0.41	0	-0.23	0	-0.08
$\overline{\overline{M}}_{2-}$	$\mathcal{O}(q^3)$	1.00	0	0.65	0	0.37	0	0.12
	$\mathcal{O}(q^4)$	1.03	0	0.68	0	0.38	0	0.12
	VM	0.96	0	0.62	0	0.35	0	0.11

Tabelle F.5: Parametrisierung der Multipole für die Reaktion $\gamma + p \rightarrow \pi^+ + n$ bis $W = 1140$ MeV. Die Koeffizienten der S, $\overline{P}$, $\overline{\overline{D}}$ -Wellen sind in Einheiten von $10^{-3}/M_{\pi^+}$, $10^{-3}/M_{\pi^+}^2$, $10^{-3}/M_{\pi^+}^3$.

Anhang G

Feynmandiagramme

Hier werden alle Diagramme aufgelistet, welche in den verschiedenen Ordnungen zur Photo- und Elektropionproduktion beitragen. Nukleonen werden hier mittels durchgezogener Linien, Pionen mittels gestrichelter Linien, ρ -Mesonen durch doppelte Linien, Photonen durch geschlängelte Linien und das ω durch doppelte geschlängelte Linien dargestellt. Die Pfeile an den Linien geben die Richtung des jeweiligen Teilchenimpulses an. Die Zahlen in den Kreisen kennzeichnen die chirale Ordnung des jeweiligen Vertex. Die Nummerierung in Kapitel G.1 folgt [Len 07]. Für die Diagramme mit Vektormesonen werden auf Schleifenniveau keine Ordnungen der Vertizes angegeben, da es sich immer um die jeweils niedrigst mögliche Ordnung handelt.

G.1 Diagramme ohne Vektormesonen

G.1.1 Schleifendiagramme

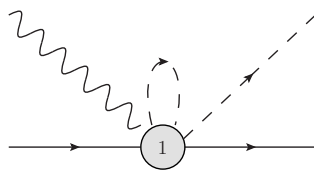


Diagramm 1

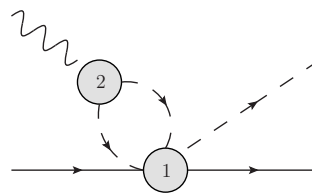


Diagramm 2

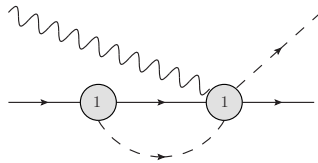


Diagramm 3

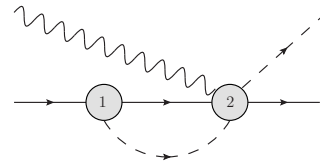


Diagramm 4

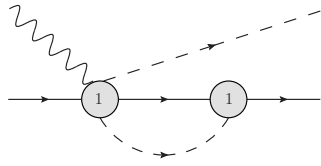


Diagramm 5

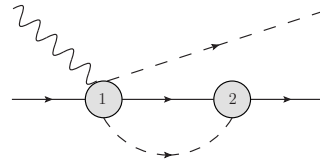


Diagramm 6

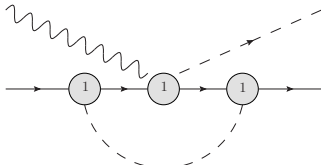


Diagramm 7

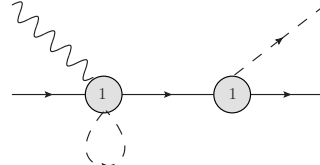


Diagramm 8

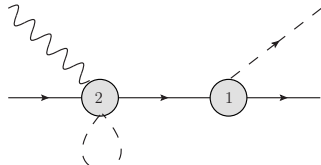


Diagramm 9

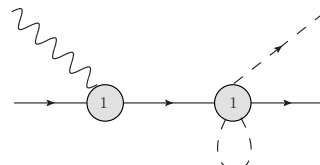


Diagramm 10

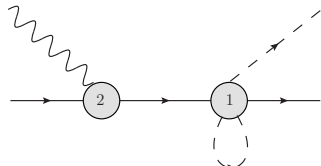


Diagramm 11

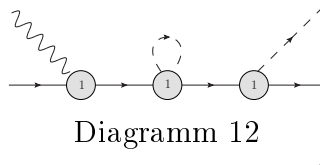


Diagramm 12

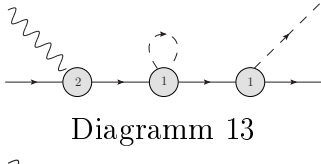


Diagramm 13

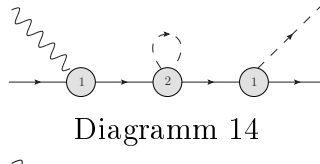


Diagramm 14

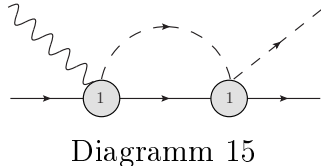


Diagramm 15

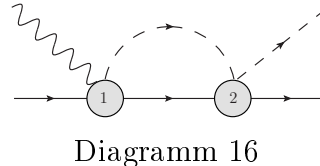


Diagramm 16

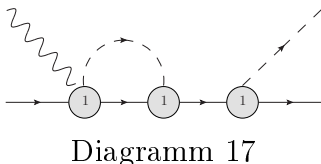


Diagramm 17

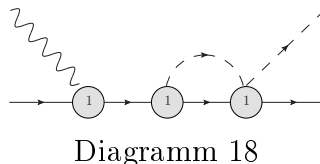


Diagramm 18

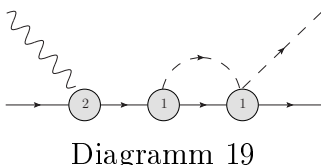


Diagramm 19

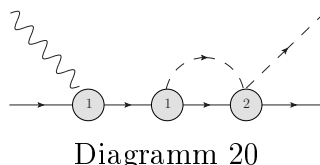


Diagramm 20

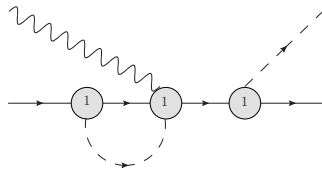


Diagramm 21

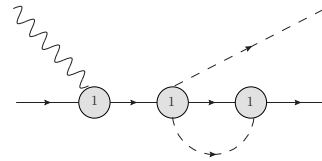


Diagramm 22

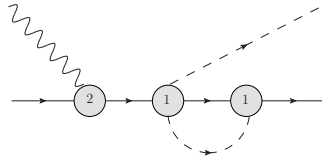


Diagramm 23

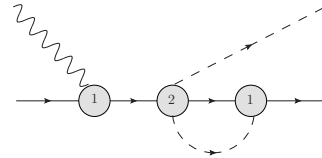


Diagramm 24

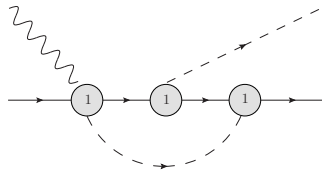


Diagramm 25

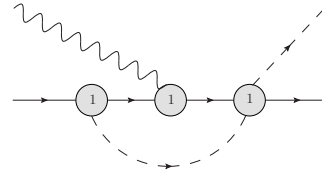


Diagramm 26

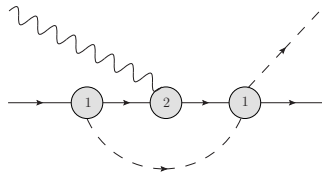


Diagramm 27

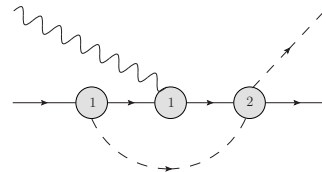


Diagramm 28

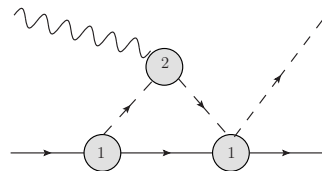


Diagramm 29

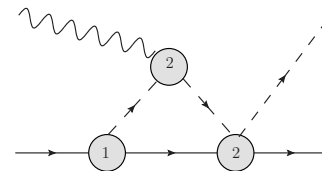


Diagramm 30

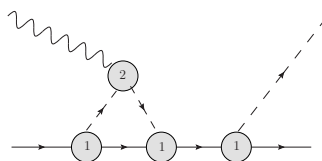


Diagramm 31

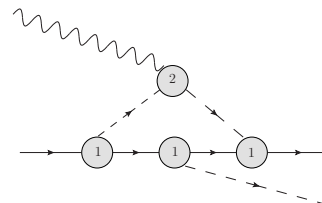


Diagramm 32

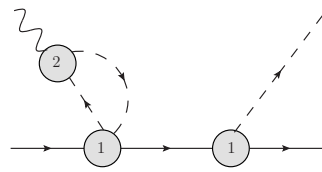


Diagramm 33

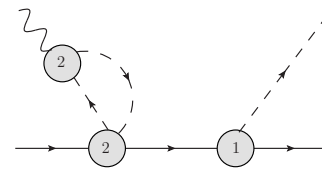


Diagramm 34

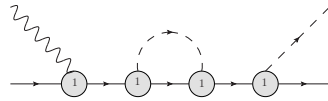


Diagramm 35

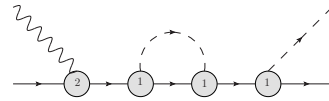


Diagramm 36

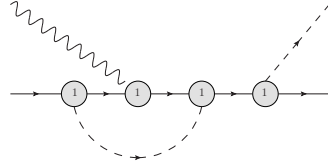


Diagramm 37

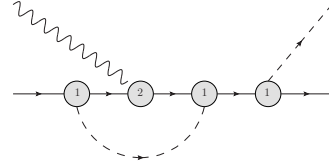


Diagramm 38

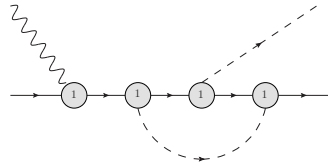


Diagramm 39

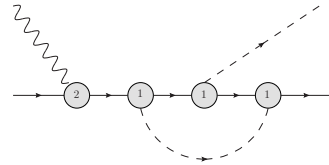


Diagramm 40

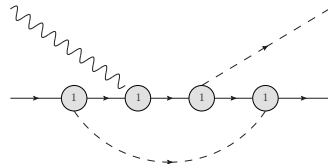


Diagramm 41

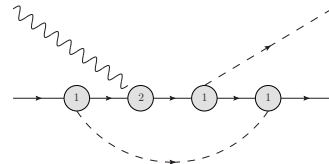


Diagramm 42

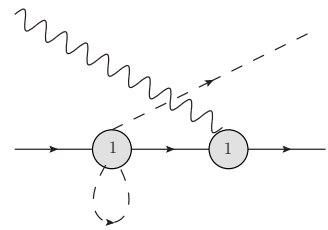


Diagramm 43

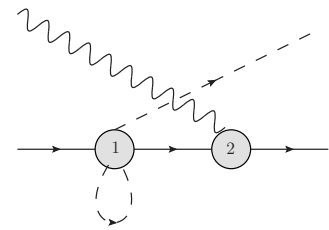


Diagramm 44

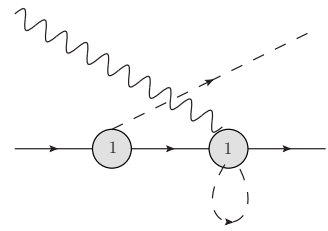


Diagramm 45

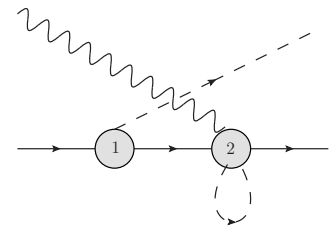


Diagramm 46

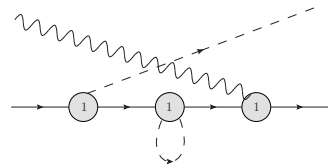


Diagramm 47

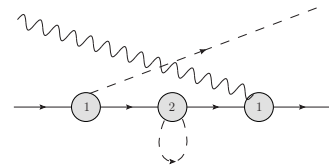


Diagramm 48

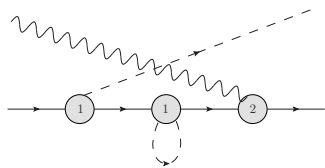


Diagramm 49

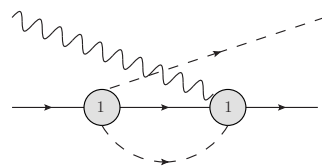


Diagramm 50

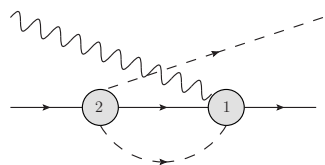


Diagramm 51

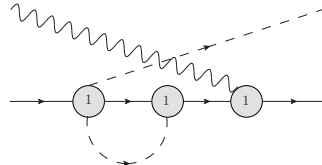


Diagramm 52

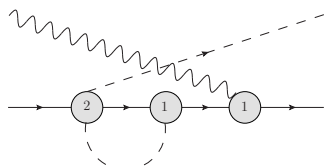


Diagramm 53

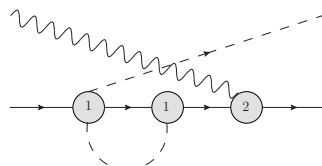


Diagramm 54

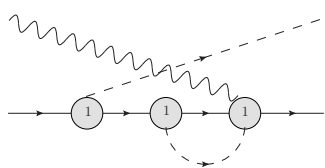


Diagramm 55

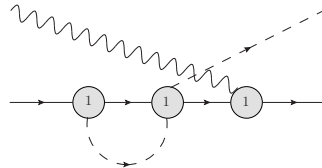


Diagramm 56

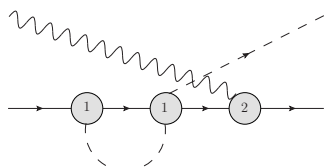


Diagramm 57

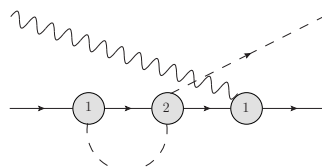


Diagramm 58

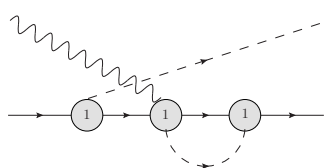


Diagramm 59

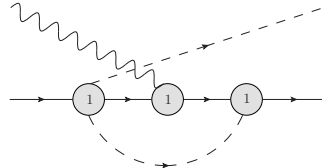


Diagramm 60

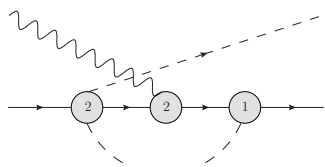


Diagramm 61

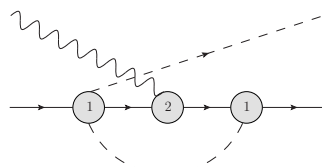


Diagramm 62

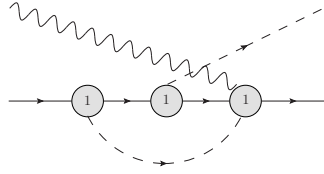


Diagramm 63

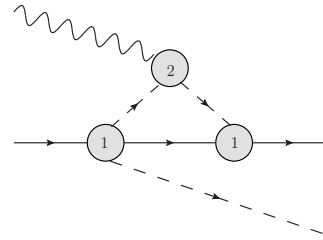


Diagramm 64

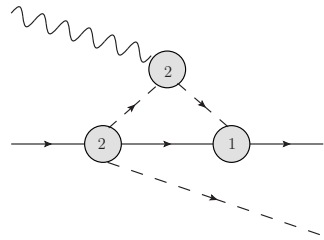


Diagramm 65

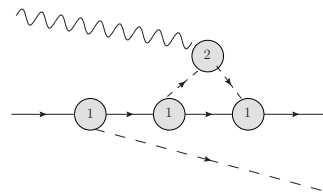


Diagramm 66

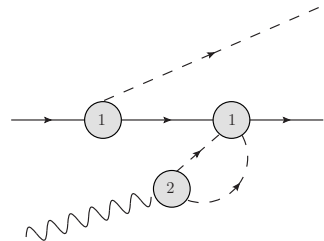


Diagramm 67

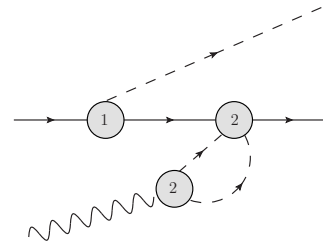


Diagramm 68

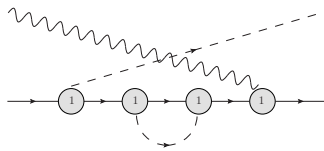


Diagramm 69

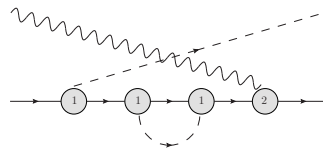


Diagramm 70

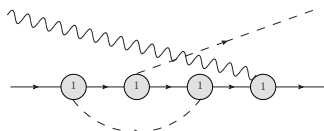


Diagramm 71

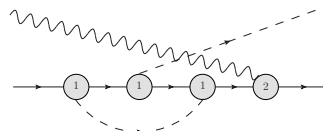


Diagramm 72

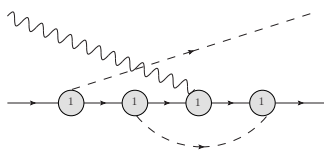


Diagramm 73

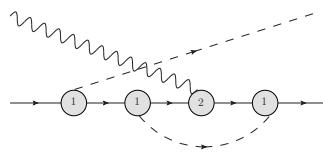


Diagramm 74

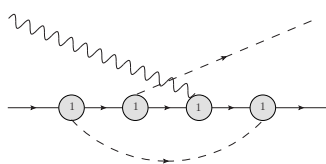


Diagramm 75

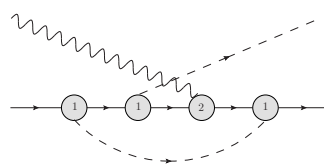


Diagramm 76

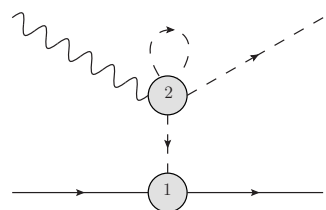


Diagramm 77

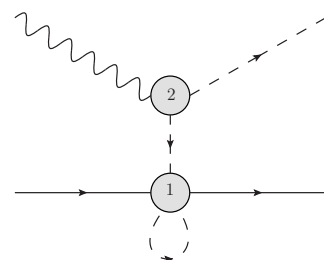


Diagramm 78

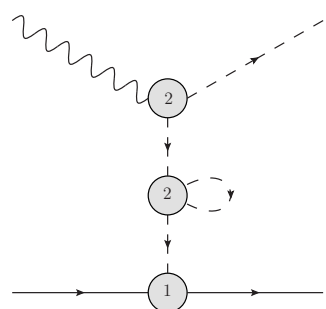


Diagramm 79

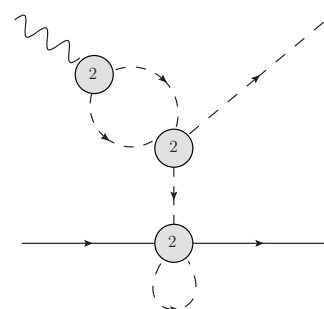


Diagramm 80

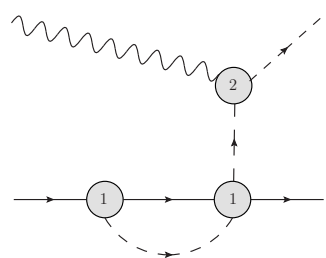


Diagramm 81

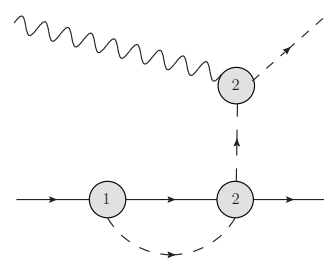


Diagramm 82

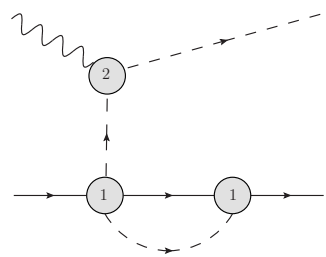


Diagramm 83

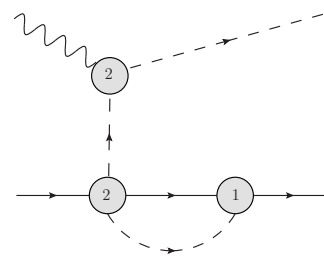


Diagramm 84

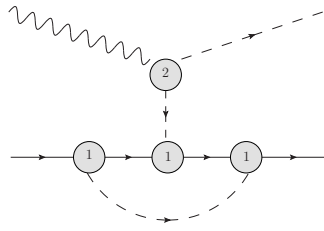


Diagramm 85

G.1.2 Baumdiagramme

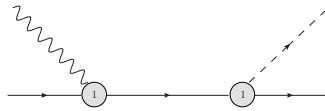


Diagramm 86

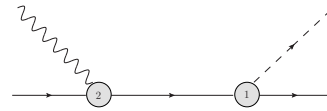


Diagramm 87

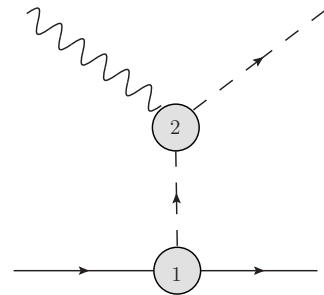


Diagramm 88

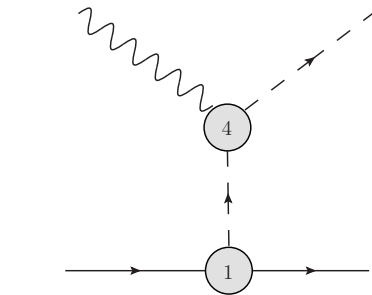


Diagramm 89

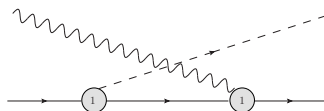


Diagramm 90

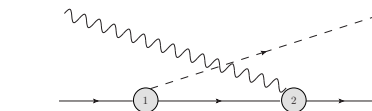


Diagramm 91

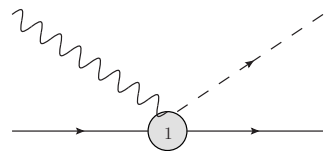


Diagramm 92

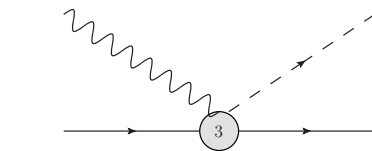


Diagramm 93

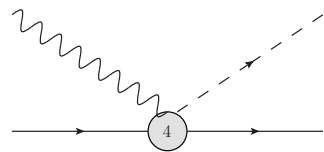


Diagramm 94

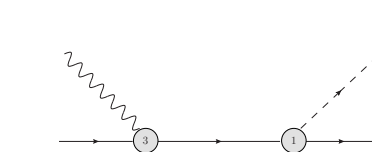


Diagramm 95



Diagramm 96

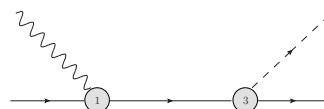


Diagramm 97



Diagramm 98

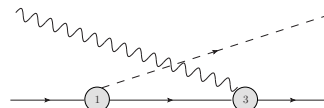


Diagramm 99

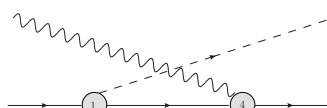


Diagramm 100

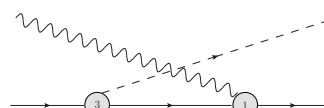


Diagramm 101

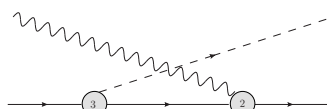


Diagramm 102

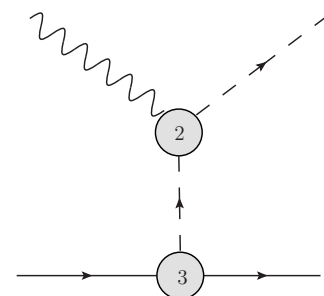


Diagramm 103

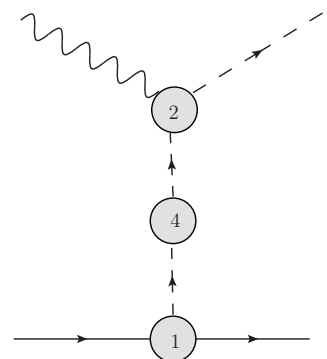


Diagramm 104

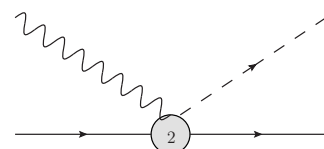


Diagramm 105

G.2 Diagramme mit Vektormesonen

G.2.1 Schleifendiagramme

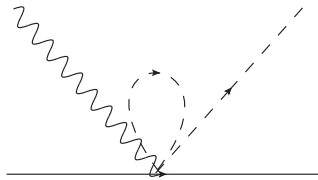


Diagramm 1

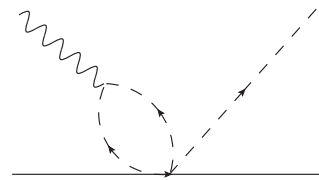


Diagramm 2

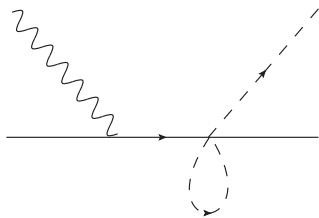


Diagramm 3

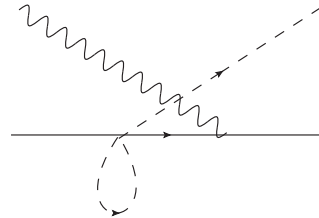


Diagramm 4

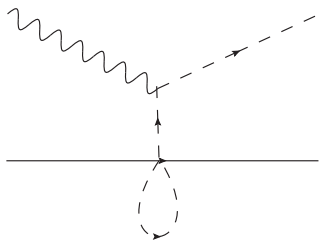


Diagramm 5

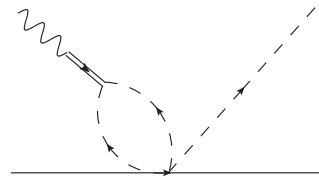


Diagramm 6

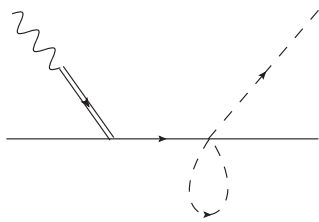


Diagramm 8

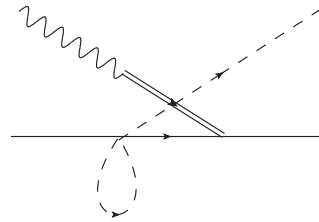


Diagramm 8

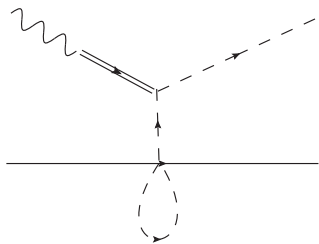


Diagramm 9

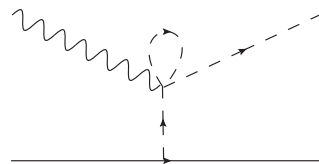


Diagramm 10

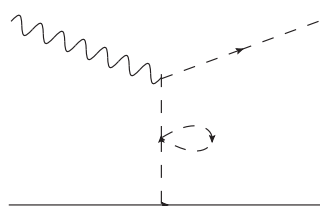


Diagramm 11

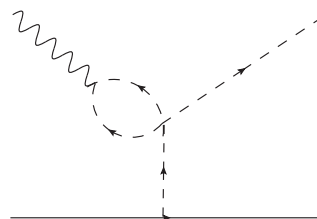


Diagramm 12

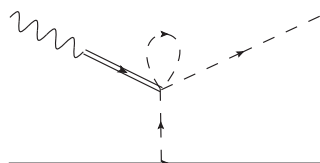


Diagramm 13

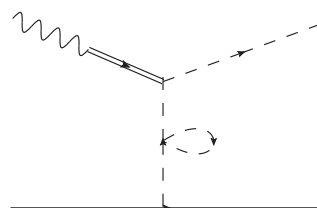


Diagramm 14

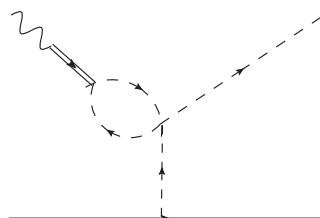


Diagramm 15



Diagramm 16

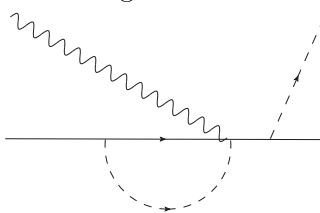


Diagramm 17

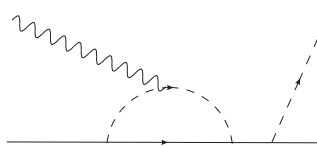


Diagramm 18

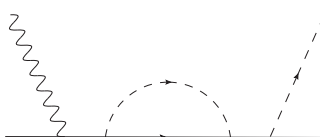


Diagramm 19

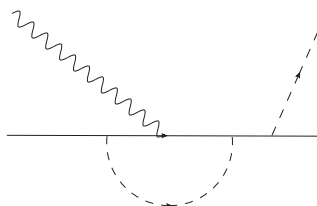


Diagramm 20

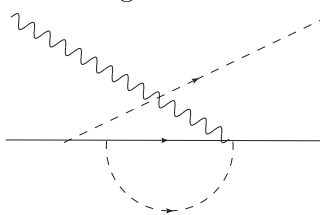


Diagramm 21

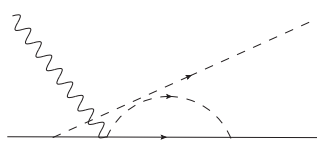


Diagramm 22

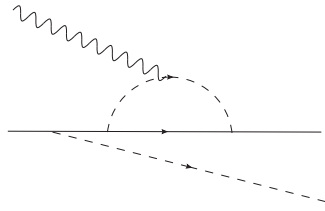


Diagramm 23

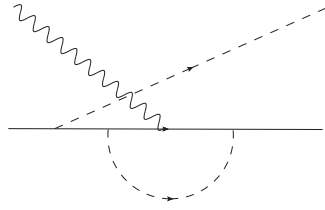


Diagramm 25

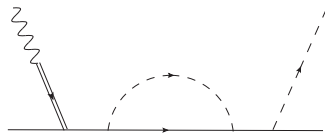


Diagramm 27

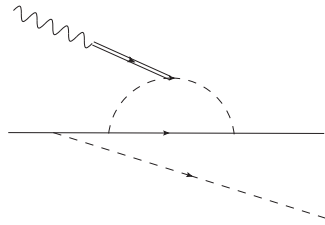


Diagramm 29

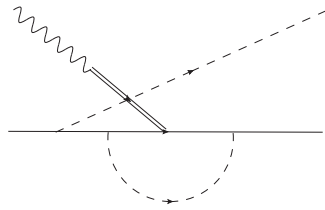


Diagramm 31

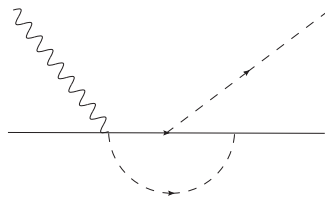


Diagramm 33

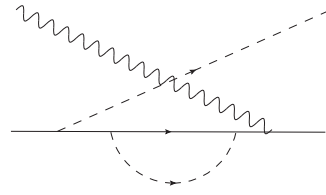


Diagramm 24

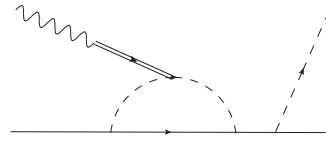


Diagramm 26

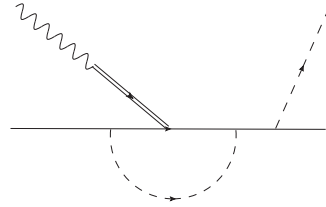


Diagramm 28

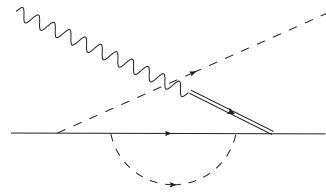


Diagramm 30

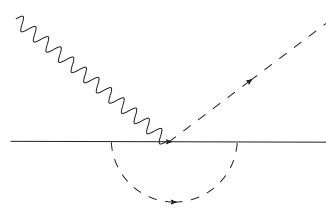


Diagramm 32

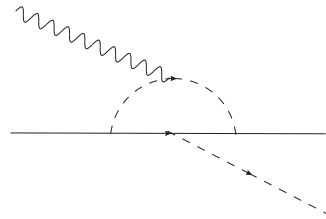


Diagramm 34

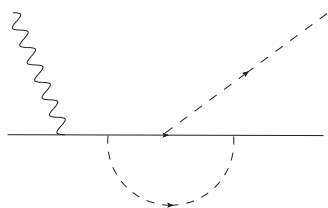


Diagramm 35

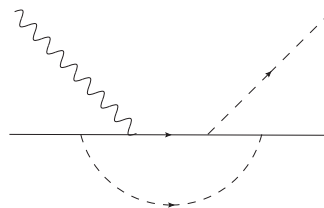


Diagramm 36

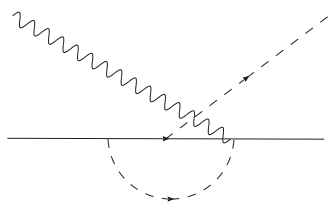


Diagramm 37

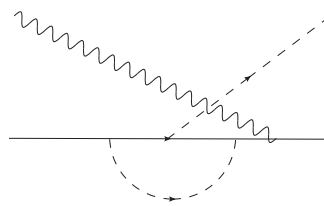


Diagramm 38

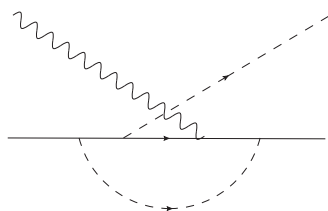


Diagramm 39

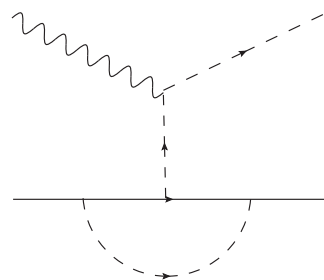


Diagramm 40

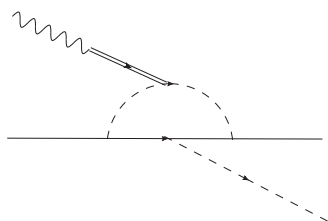


Diagramm 41

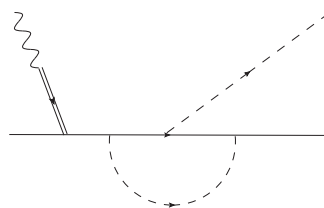


Diagramm 42

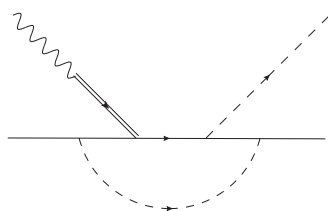


Diagramm 43

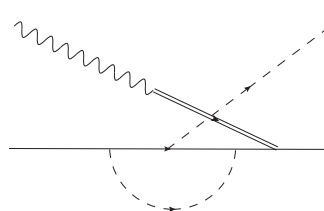


Diagramm 44

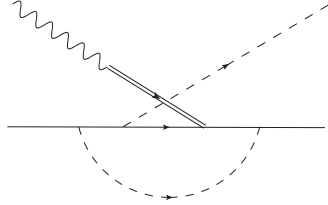


Diagramm 45

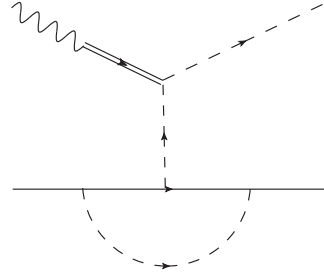


Diagramm 46

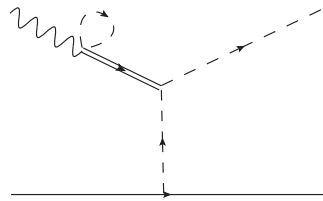


Diagramm 47

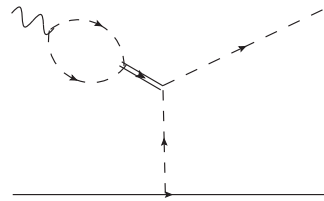


Diagramm 48

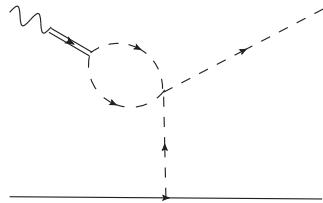


Diagramm 49

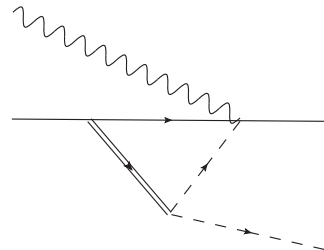


Diagramm 50

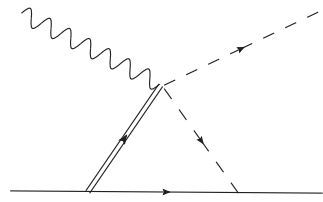


Diagramm 51

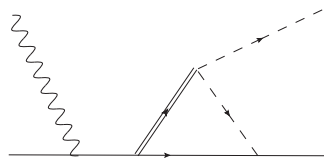


Diagramm 52

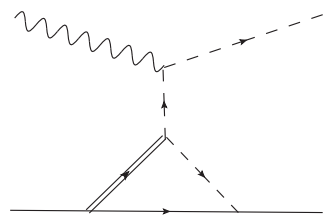


Diagramm 53

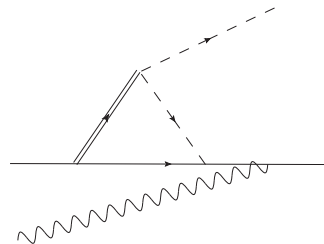


Diagramm 54

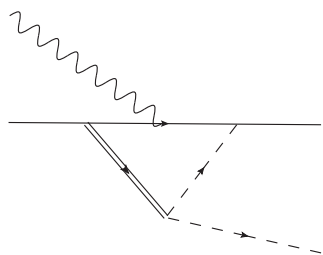


Diagramm 55

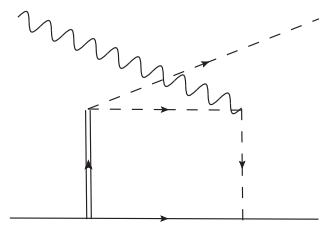


Diagramm 56

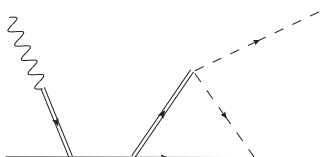


Diagramm 57

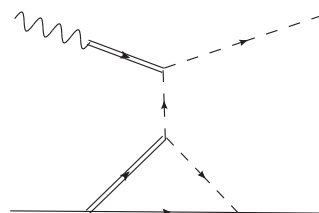


Diagramm 58

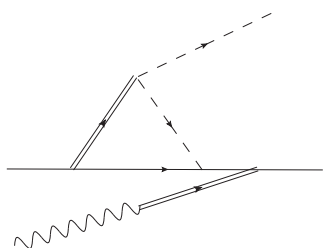


Diagramm 59

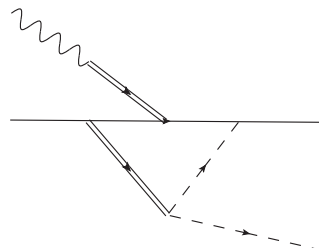


Diagramm 60

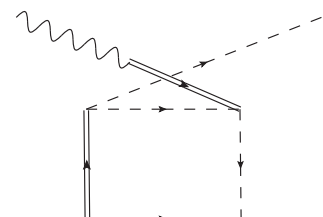


Diagramm 61

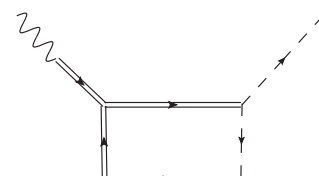


Diagramm 62

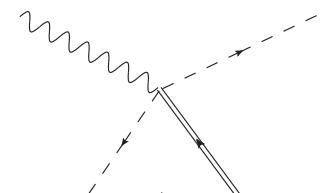


Diagramm 63

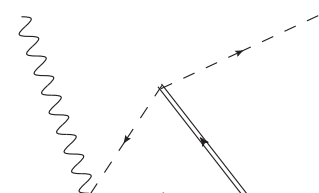


Diagramm 64

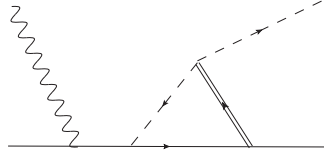


Diagramm 65

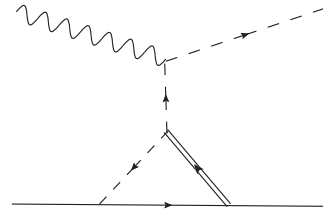


Diagramm 66

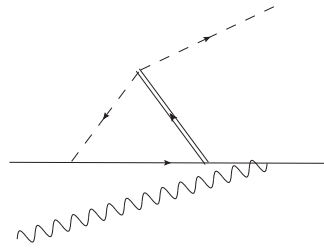


Diagramm 67

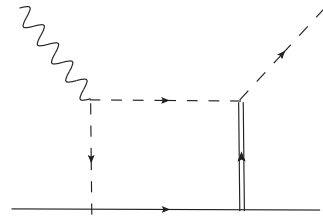


Diagramm 68

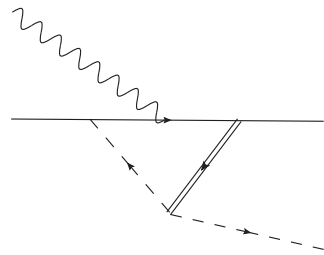


Diagramm 69

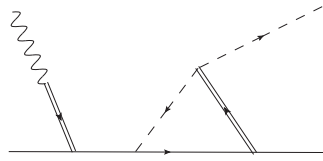


Diagramm 70

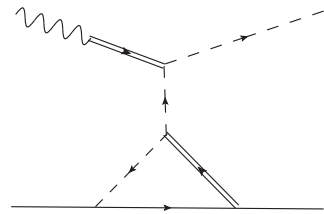


Diagramm 71

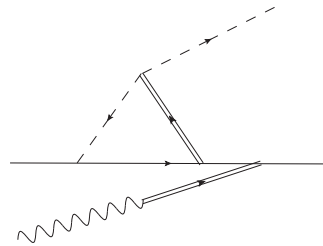


Diagramm 72

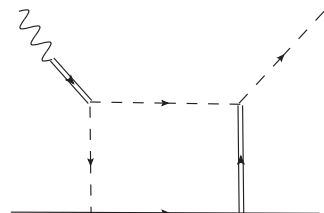


Diagramm 73

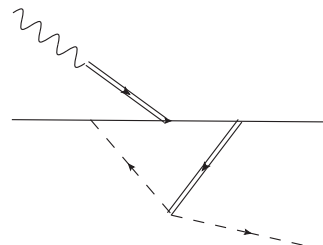


Diagramm 74

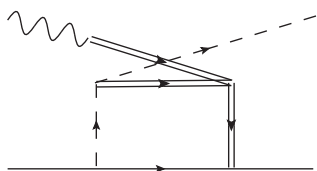


Diagramm 75

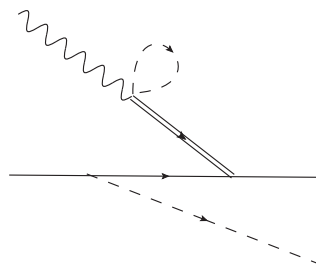


Diagramm 76



Diagramm 77

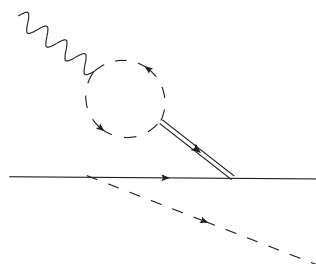


Diagramm 78



Diagramm 79

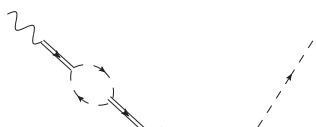


Diagramm 80

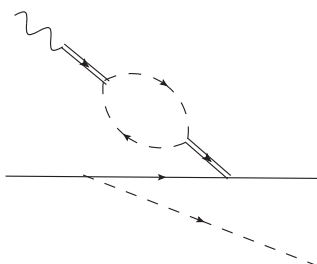


Diagramm 81

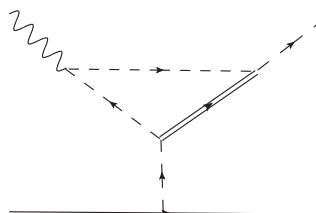


Diagramm 82

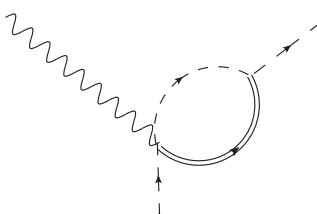


Diagramm 83

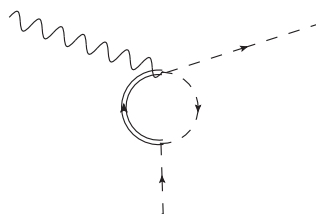


Diagramm 84

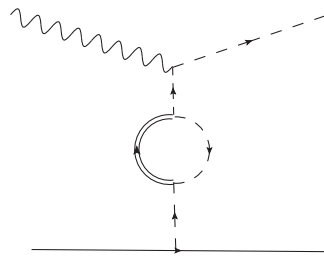


Diagramm 85

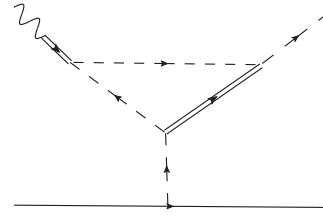


Diagramm 86

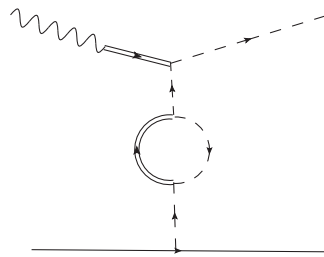


Diagramm 87

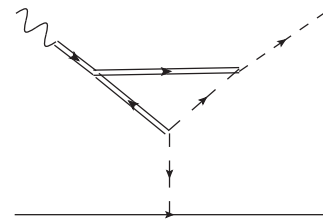


Diagramm 88

G.2.2 Baumdiagramme

Die Schleifenkorrekturen für die Masse von Pion bzw. Nukleon für die Baumdiagramme der Ordnung $\mathcal{O}(q^1)$ (siehe Anhang B.3) wurden innerhalb der Programme als Diagramme 89-91 bezeichnet, weswegen die Nummerierung hier erst mit 92 weitergeht.



Diagramm 92

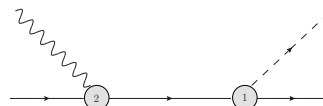


Diagramm 93

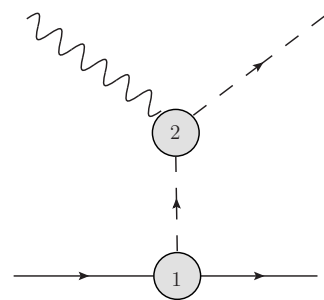


Diagramm 94

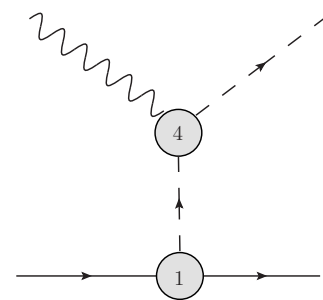


Diagramm 95

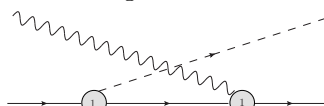


Diagramm 96

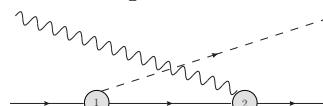


Diagramm 97

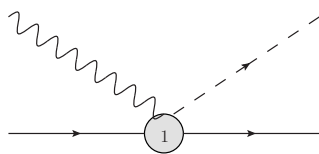


Diagramm 98

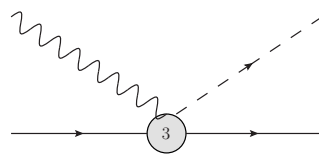


Diagramm 99

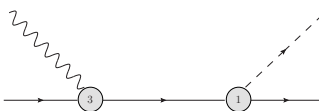


Diagramm 100

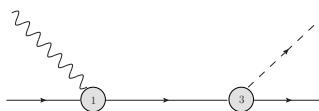


Diagramm 101

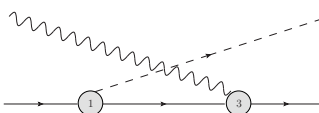


Diagramm 102

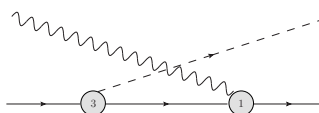


Diagramm 103

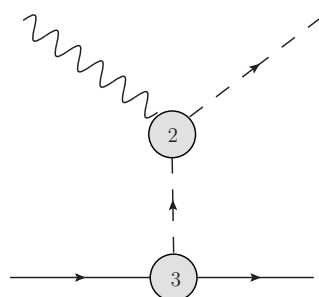


Diagramm 104

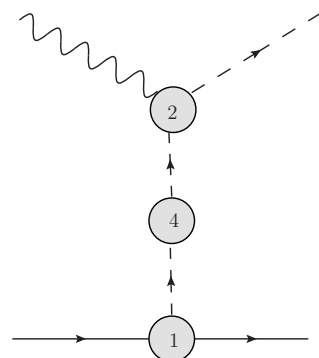


Diagramm 105

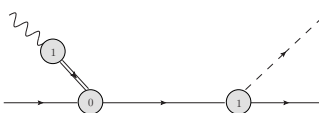


Diagramm 106

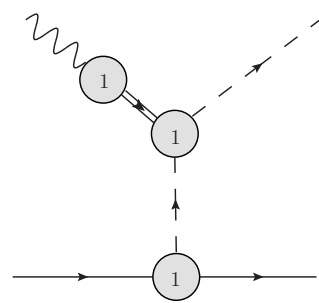


Diagramm 107

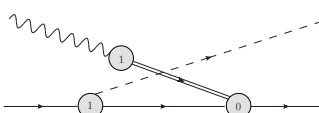


Diagramm 108

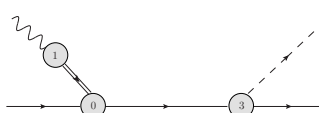


Diagramm 109

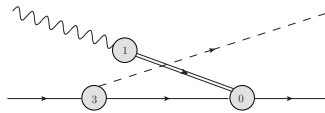


Diagramm 110

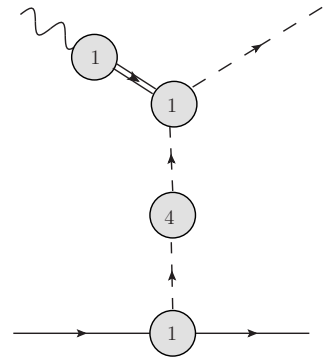


Diagramm 112

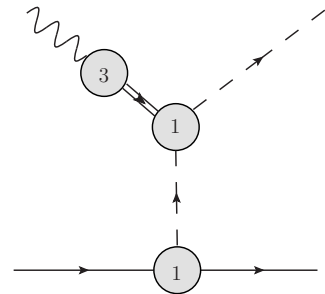


Diagramm 114

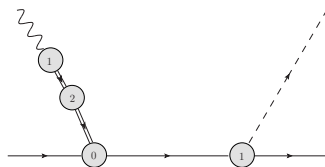


Diagramm 116

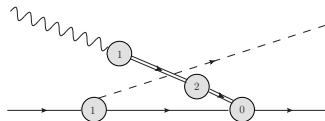


Diagramm 118

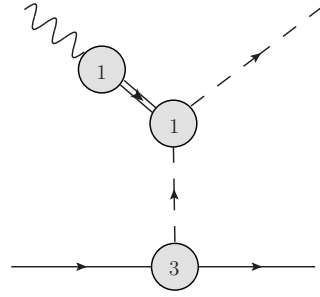


Diagramm 111



Diagramm 113

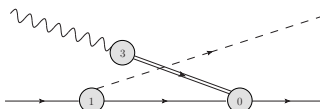


Diagramm 115

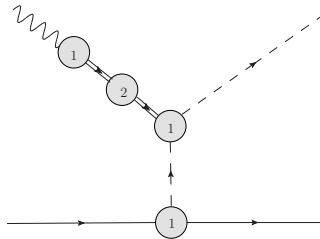


Diagramm 117

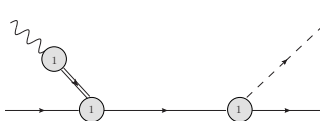


Diagramm 119

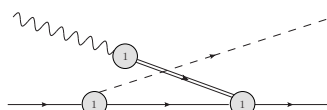


Diagramm 120

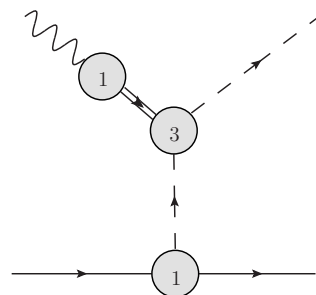


Diagramm 121



Diagramm 122

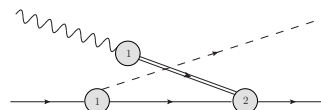


Diagramm 123

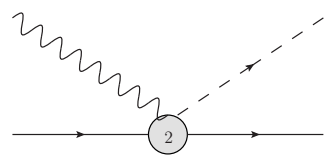


Diagramm 124

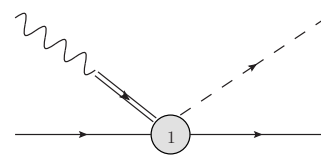


Diagramm 125

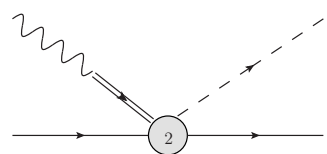


Diagramm 126

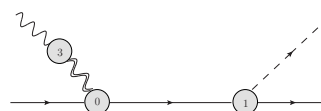


Diagramm 127

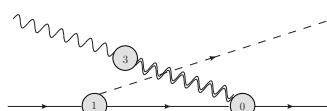


Diagramm 128

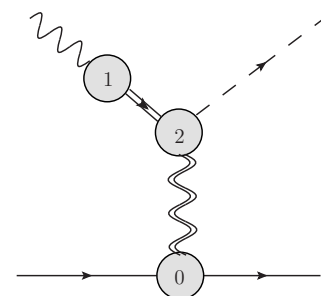


Diagramm 129

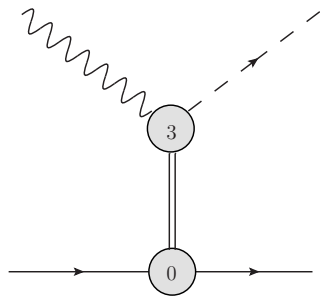


Diagramm 130

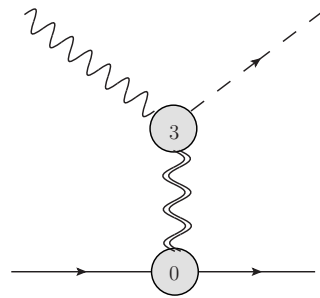


Diagramm 131

Literaturverzeichnis

- [Arg+ 78] P. E. Argan *et al.*, Nucl. Phys. **A296**, 373 (1978).
- [AFF 79] E. Amaldi, S. Fubini, G. Furlan, Springer Tracts Mod. Phys. **83**, (1979).
- [Ahr+ 04] J. Ahrens *et al.* (GDH und A2 Collaboration), Eur. Phys. J. A **21**, 323 (2004).
- [Als+ 61] M. Alston *et al.*, Phys. Rev. Lett. **6**, 300 (1961).
- [Ame+ 84] S. R. Amendolia *et al.*, Phys. Lett. B **146**, 116 (1984).
- [Ame+ 86] S. R. Amendolia *et al.* (NA7 Collaboration), Nucl. Phys. **B277**, 168 (1986).
- [Bae 70] P. De Baenst, Nucl. Phys. **B24**, 633 (1970).
- [Bag+ 88] A. Bagheri *et al.*, Phys. Rev. C **38**, 875 (1988).
- [Bak+ 06] C. A. Baker *et al.*, Phys. Rev. Lett. **97**, 131801 (2006).
- [Bal 61] J. S. Ball, Phys. Rev. **124**, 2014 (1961).
- [Bar+ 75] G. Bardin *et al.*, Lett. Nuovo Cim. **13** 485 (1975).
- [Bau 05] D. Baumann, π^+ -Elektroproduktion an der Schwelle, Doktorarbeit, Johannes Gutenberg-Universität Mainz 2005.
- [BBS 11] T. Bauer, J. Bernauer, S. Scherer, Veröffentlichung in Vorbereitung.
- [BCT 98] J. Bijnens, G. Colangelo und P. Talavera, JHEP **9805**, 014 (1998).
- [BD 67] J. D. Bjorken und S. D. Drell, Relativistische Quantenmechanik (Bibliograph. Inst., Mannheim, 1967).

- [Bea+ 97] S. R. Beane *et al.*, Nucl. Phys. **A618**, 381 (1997).
- [Bec+ 90] R. Beck *et al.*, Phys. Rev. Lett. **65**, 1841 (1990).
- [Ben+ 73] P. Benz *et al.* (Aachen-Bonn-Hamburg-Heidelberg-München Collaboration), Nucl. Phys. **B65**, 158 (1973).
- [Ber+ 80] D. Berg *et al.*, Phys. Rev. Lett. **44**, 706 (1980).
- [Ber+ 91] V. Bernard *et al.*, Phys. Lett. B **268**, 291 (1991).
- [Ber+ 92] V. Bernard *et al.*, Nucl. Phys. **B388**, 315 (1992).
- [Ber+ 94] V. Bernard *et al.*, Phys. Rept. **246**, 315 (1994).
- [Ber+ 96] J. C. Bergstrom *et al.*, Phys. Rev. C **53**, 1052 (1996).
- [Bet+ 68] C. Betourne *et al.*, Phys. Rev. **172**, 1343 (1968).
- [BL 99] T. Becher und H. Leuwyler, Eur. Phys. J. C **9**, 643 (1999).
- [BL 01] T. Becher und H. Leutwyler, JHEP **0106**, 017 (2001).
- [BKM 92a] V. Bernard, N. Kaiser und U.-G. Meißner, Phys. Lett. B **282**, 448 (1992).
- [BKM 92b] V. Bernard, N. Kaiser und U.-G. Meißner, Nucl. Phys. **B383**, 442 (1992).
- [BKM 95] V. Bernard, N. Kaiser und U.-G. Meißner, Phys. Rev. Lett. **74**, 3752 (1995).
- [BKM 96a] V. Bernard, N. Kaiser und U.-G. Meißner, Z. Phys. C **70**, 483 (1996).
- [BKM 96b] V. Bernard, N. Kaiser und U.-G. Meißner, Nucl. Phys. **A607**, 379 (1996) [Erratum-ibid. **A633**, 695 (1998)].
- [BKM 00] V. Bernard, H. Krebs und U.-G. Meißner, Phys. Rev. C **61**, 058201 (2000).
- [BKM 01] V. Bernard, N. Kaiser und U.-G. Meißner, Eur. Phys. J. A **11**, 209 (2001).
- [BKM 05] V. Bernard, B. Kubis, U.-G. Meißner, Eur. Phys. J. A **25**, 419 (2005).

- [Bla+ 00] G. Blanpied *et al.*, Phys. Rev. C **61**, 024604 (2000).
- [Blo+ 96] K. I. Blomqvist *et al.*, Z. Phys. A **353**, 415 (1996).
- [Blo+ 97] K. I. Blomqvist *et al.*, Nucl. Phys. **A626**, 871 (1997).
- [BM 96] B. Borasoy und U.-G. Meißner, Int. J. Mod. Phys. A **11**, 5183 (1996).
- [Bou+ 73] J. Boucrot *et al.*, Nuovo Cim. A **18**, 635 (1973).
- [Bra+ 00] D. Branford *et al.*, Phys. Rev. C **61**, 014603 (2000).
- [Bre+ 78] H. Breuker *et al.*, Nucl. Phys. **B146**, 285 (1978).
- [Bri+ 95] H. B. van den Brink *et al.*, Nucl. Phys. **A587**, 657 (1995).
- [Bue+ 94] K. Buechler *et al.*, Nucl. Phys. **A570**, 580 (1994).
- [Che+ 57] G. F. Chew *et al.*, Phys. Rev. **106**, 1345 (1957).
- [Chi+ 02] W. T. Chiang *et al.*, Phys. Rev. C **68**, 045202 (2003).
- [Col 66] S. Coleman, J. Math. Phys. **7**, 787 (1966).
- [Col 84] J. Collins, Renormalization (Cambridge University Press, Cambridge, 1984).
- [Com+ 75] J. C. Comiso *et al.*, Phys. Rev. **D12**, 719 (1975).
- [Con+ 63] P. L. Connolly *et al.*, Phys. Rev. Lett. **10**, 371 (1963).
- [Dal+ 77] E. B. Dally *et al.*, Phys. Rev. Lett. **39**, 1176 (1977).
- [Dal+ 81] E. B. Dally *et al.*, Phys. Rev. D **24**, 1718 (1981).
- [Dal+ 82] E. B. Dally *et al.*, Phys. Rev. Lett. **48**, 375 (1982).
- [Dav 93] R. M. Davidson, Phys. Rev. C **47**, 2492 (1993).
- [Dav 95] R. M. Davidson, Czech. J. Phys. **44**, 365 (1995).
- [Den 61] P. Denner, Phys. Rev. **124**, 2000 (1961).
- [DGS 10] D. Djukanovic, J. Gegelia und S. Scherer, Int. J. Mod. Phys. A **25**, 3603 (2010).

- [DHT 11] D. Drechsel, M. Hilt und L. Tiator, Veröffentlichung in Vorbereitung.
- [Dis+ 98] M. O. Distler *et al.*, Phys. Rev. Lett. **80**, 2294 (1998).
- [Dju+ 04] D. Djukanovic *et al.*, Phys. Rev. Lett. **93**, 122002 (2004).
- [Dju+ 05] D. Djukanovic *et al.*, Phys. Rev. Lett. **95**, 012001 (2005).
- [DKT 07] D. Drechsel, S. S. Kamalov und L. Tiator, Eur. Phys. J. A **34**, 69 (2007).
- [DR 86] T. W. Donnelly und A. S. Raskin, Annals Phys. **169**, 247 (1986).
- [DT 92] D. Drechsel und L. Tiator, J. Phys. G **18**, 449 (1992).
- [DW 07] D. Drechsel und Th. Walcher, Rev. Mod. Phys. **80**, 731 (2008).
- [Dut+ 96] H. Dutz *et al.*, Nucl. Phys. **A601**, 319 (1996).
- [Eck+ 89a] G. Ecker *et al.*, Nucl. Phys. **B321**, 311 (1989).
- [Eck+ 89b] G. Ecker *et al.*, Phys. Lett. B **223**, 425 (1989).
- [Erw+ 61] A. R. Erwin *et al.*, Phys. Rev. Lett. **6**, 628 (1961).
- [Ewa+ 00] I. Ewald *et al.*, Phys. Lett. B **499**, 238 (2001).
- [Fau+ 84] J. L. Faure *et al.*, Nucl. Phys. **A424**, 383 (1984).
- [FBD 09] C. Fernandez-Ramirez, A. M. Bernstein und T. W. Donnelly, Phys. Lett. B **679**, 41 (2009).
- [FBD 09a] C. Fernandez-Ramirez, A. M. Bernstein und T. W. Donnelly, Phys. Rev. C **80**, 065201 (2009).
- [Fea+ 00] H. W. Fearing *et al.*, Phys. Rev. **C 62**, 054006 (2000).
- [Fet+ 00] N. Fettes *et al.*, Annals Phys. **283**, 273 (2000) [Erratum-ibid. **288**, 249 (2001)].
- [FGM 73] H. Fritzsch, M. Gell-Mann und H. Leutwyler, Phys. Lett. B **47**, 365 (1973).
- [FGS 04a] T. Fuchs, J. Gegelia und S. Scherer, Eur. Phys. J. A **19**, 35 (2004).

- [FGS 04b] T. Fuchs, J. Gegelia und S. Scherer, J. Phys. G **30**, 1407 (2004).
- [Fis+ 70] G. Fischer *et al.*, Nucl. Phys. **B16**, 119 (1970).
- [Fis+ 72] G. Fischer *et al.*, Z. Phys. **253**, 38 (1972).
- [Fis+ 96] K. G. Fissum *et al.*, Phys. Rev. C **53**, 1278 (1996).
- [FS 96] H. W. Fearing und S. Scherer, Phys. Rev. D **53**, 315 (1996).
- [Fuc+ 03a] T. Fuchs *et al.*, Phys. Rev. D **68**, 056005 (2003).
- [Fuc+ 03b] T. Fuchs *et al.*, Phys. Lett. B **575**, 11 (2003).
- [Fra 55] E. S. Fradkin, Zh. Eksp. Teor. Fiz. **29**, 258 (1955).
- [Fuh 10] A. Fuhrer, Phys. Lett. B **692**, 130 (2010).
- [Fuj+ 71] T. Fujii *et al.*, Phys. Rev. Lett. **26**, 1672 (1971).
- [Fuj+ 77] T. Fujii *et al.*, Nucl. Phys. **B120**, 395 (1977).
- [Gan+ 76] V. B. Ganenko *et al.*, Sov. J. Nucl. Phys. **23**, 511 (1976).
- [Get+ 81] V. A. Getman *et al.*, Nucl. Phys. **B188**, 397 (1981).
- [GL 84] J. Gasser und H. Leutwyler, Annals. Phys. **158**, 142 (1984).
- [GL 85] J. Gasser und H. Leutwyler, Nucl. Phys. **B250**, 465 (1985).
- [GN 64] M. Gell-Mann und Y. Ne'eman, The Eightfold Way (Benjamin, New York, 1964).
- [Gol 61] J. Goldstone, Nuovo Cim. **19**, 154 (1961).
- [GSS 88] J. Gasser, M. E. Sainio und A. Švarc, Nucl. Phys. **B307**, 779 (1988).
- [GW 67] M. L. Goldberger und K. M. Watson, Collision Theory (Wiley, New York, 1967).
- [GW 73a] D. J. Gross und F. Wilczek, Phys. Rev. Lett. **30**, 1343 (1973).
- [GW 73b] D. J. Gross und F. Wilczek, Phys. Rev. D **8**, 3633 (1973).
- [Hac+ 05] C. Hacker *et al.*, Phys. Rev. C **72**, 055203 (2005).
- [Hah 01] T. Hahn, Comput. Phys. Commun. **140**, 418 (2001).

- [HB 11] D. Hornidge und A. M. Bernstein, [arXiv:1108.6029 [nucl-ex]].
- [HHK 98] T. R. Hemmert, B. R. Holstein und J. Kambor, J. Phys. G **24**, 1831 (1998).
- [Hol+ 74] G. Von Holtey *et al.*, Nucl. Phys. **B70**, 379 (1974).
- [Hor+ 11] D. Hornidge *et al.*, Veröffentlichung in Vorbereitung.
- [HP 99] T. Hahn und M. Perez-Victoria, Comput. Phys. Commun. **118**, 153 (1999).
- [HV 72] G. 't Hooft und M. J. G. Veltman, Nucl. Phys. **B44**, 189 (1972).
- [JM 91] E. E. Jenkins und A. V. Manohar, Phys. Lett. B **255**, 558 (1991).
- [Kam+ 01] S. S. Kamalov *et al.*, Phys. Rev. C **64**, 032201 (2001).
- [KBA 90] J. Kublbeck, M. Bohm und A. Denner, Comput. Phys. Commun. **60**, 165 (1990).
- [KBM 03] H. Krebs, V. Bernard und U.-G. Meißner, Nucl. Phys. **A713**, 405 (2003).
- [KBM 04] H. Krebs, V. Bernard und U.-G. Meißner, Eur. Phys. J. A **22**, 503 (2004).
- [Kem 38] N. Kemmer, Proc. Camb. Phil. Soc. **34**, 354 (1938).
- [KM 00] B. Kubis und, U.-G. Meißner, Nucl. Phys. **A679**, 698 (2001).
- [Kon+ 74] K. Kondo *et al.*, Phys. Rev. D **9**, 529 (1974).
- [Kor+ 99] E. J. Korkmaz *et al.*, Phys. Rev. Lett. **83**, 3609 (1999).
- [KOS 61] S. Kamefuchi, L. O'Rai feartaigh, A. Salam, Nucl. Phys. **28**, 529 (1961).
- [KR 54] N. M. Kroll und M.A. Ruderman, Phys. Rev. **93**, 233 (1954).
- [KS 66] K. Kawarabayashi und M. Suzuki, Phys. Rev. Lett. **16**, 255 (1966).
- [Kuz+ 71] V. M. Kuznetsov *et al.*, Lett. Nuovo Cim. **1S2**, 233 (1971).

- [KY 99] S. S. Kamalov und S. N. Yang, Phys. Rev. Lett. **83**, 4494 (1999).
- [Len 77] M. Leneke, An Experiment for Photoproduction of Positive Pions at Backward Angles in the Resonance Region, Doktorarbeit, Universität Bonn, 1977.
- [Len 07] B. Lenhart, Elektromagnetische Pionproduktion in manifest Lorentz-invarianter baryonischer chiraler Störungstheorie, Doktorarbeit, Johannes Gutenberg-Universität Mainz, 2007.
- [Lis+ 99] A. Liesenfeld *et al.* (A1 Collaboration), Phys. Lett. B **468**, 20 (1999).
- [Liu 94] K. Liu, Doktorarbeit, Universität von Kentucky, 1994.
- [LLL 64] D. W. G. S. Leith, R. Little und E. M. Lawson, Phys. Lett. **8**, 355 (1964).
- [Lat+ 47] C. M. G. Lattes *et al.*, Nature **159**, 694 (1947).
- [LSZ 55] H. Lehmann, K. Symanzik und W. Zimmermann, Nuovo Cim. **1**, 205 (1955).
- [Maz+ 86] E. Mazzucato *et al.*, Phys. Rev. Lett. **57**, 3144 (1986).
- [Mag+ 61] B. C. Maglic *et al.*, Phys. Rev. Lett. **7**, 178 (1961).
- [MBA 91] R. Mertig, M. Bohm und A. Denner, Comput. Phys. Commun. **64**, 345 (1991).
- [Mer+ 02] H. Merkel *et al.*, Phys. Rev. Lett. **88**, 012301 (2002).
- [Mer 09a] H. Merkel, private Mitteilung.
- [Mer 09b] H. Merkel, PoS **CD09**, 112 (2009).
- [Moo 78] R. G. Moorhouse, in: Electromagnetic Interactions Of Hadrons, Vol.1, hrsg von A. Donnachie A, G. Shaw (Nuclear Physics Monographs, New York ,1978) S.83.
- [MS 03] U. Müller und S. Scherer, Vorlesung Elektropionproduktion am MAMI, Johannes Gutenberg-Universität Mainz, Wintersemester 2001/2002.

- [Nak+ 10] K. Nakamura *et al.* (Particle Data Group), J. Phys. G **37**, 075021 (2010).
- [Nam 57] Y. Nambu, Phys. Rev. **106**, 1366 (1957).
- [Nei 11] A. Neiser, Effective field theories for vector particles and constraint analysis, Diplomarbeit, Johannes Gutenberg-Universität Mainz 2011.
- [OV 90] G. J. van Oldenborgh und J. A. M. Vermaseren, Z. Phys. C **46**, 425 (1990).
- [PDT 07] B. Pasquini, D. Drechsel und L. Tiator, Eur. Phys. J. A **34**, 387 (2007).
- [Pol 73] H. D. Politzer, Phys. Rev. Lett. **30**, 1346 (1973).
- [PP 03] V. Pascalutsa und D. R. Phillips, Phys. Rev. C **67**, 055202 (2003).
- [Pre+ 07] W. Press *et al.*, Numerical Recipes: The Art of Scientific Computing (3rd ed.) (Cambridge University Press, New York, 2007).
- [PS 97] M. E. Peskin und D. V. Schroeder, An Introduction to Quantum Field Theory, (Addison-Wesley Publishing Company, Reading, 1997).
- [PV 79] G. Passarino und M. J. Veltman, Nucl. Phys. **B160**, 151 (1979).
- [RD 89] A. S. Raskin und T. W. Donnelly, Annals Phys. **191**, 78 (1989).
- [RF 66] Riazuddin, Fayyazuddin, Phys. Rev. **147**, 1071 (1966).
- [Ros+ 73] V. Rossi *et al.*, Nuovo Cim. **A13**, 59 (1973).
- [Ryd 85] L. H. Ryder, Quantum Field Theory (Cambridge University Press, Cambridge, 1985).
- [Sak 69] J. J. Sakurai, Lectures on „Currents and Mesons“ (The University of Chicago Press, Chicago, 1969).
- [Sal+ 84] M. Salomon *et al.*, Nucl. Phys. **A414**, 493 (1984).
- [Sch+ 63] P. E. Schlein *et al.*, Phys. Rev. Lett. **10**, 368 (1963).

- [Sch 67] J. S. Schwinger, Phys. Lett. B **24**, 473 (1967).
- [Sch+ 01] H. C. Schröder *et al.*, Eur. Phys. J. C **21**, 473 (2001).
- [Sch+ 01a] A. Schmidt *et al.*, Phys. Rev. Lett. **87**, 232501 (2001).
- [Sch 03] S. Scherer, Adv. Nucl. Phys. **27**, 277 (2003).
- [Sch+ 07] M. R. Schindler *et al.*, Phys. Rev. C **75**, 025202 (2007).
- [SDT 87] S. Scherer, D. Drechsel und L. Tiator, Phys. Lett. **B193**, 1 (1987).
- [SGS 04] M. R. Schindler, J. Gegelia und S. Scherer, Phys. Lett. B **586**, 258 (2004).
- [SGS 04] M. R. Schindler, J. Gegelia und S. Scherer, Nucl. Phys. **B682**, 367 (2004).
- [SGS 05] M. R. Schindler, J. Gegelia und S. Scherer, Eur. Phys. J. A **26**, 1 (2005).
- [SK 91] S. Scherer und J. H. Koch, Nucl. Phys. **A534**, 461 (1991).
- [SM 63] R. C. Smith und R. F. Mozley, Phys. Rev. **130**, 2429 (1963).
- [SPS 50] J. Steinberger, W. K. H. Panofsky und J. Steller, Phys. Rev. **78**, 802 (1950).
- [Sta+ 94] J. C. Stasko *et al.*, Phys. Rev. Lett. **72**, 973 (1994).
- [Tak 57] Y. Takahashi, Nuovo Cim. **6**, 371 (1957).
- [Tia 11a] L. Tiator, private Mitteilung.
- [Tia 11b] L. Tiator, private Mitteilung.
- [TM 60] R. E. Taylor und R. F. Mozley, Phys. Rev. **117**, 835 (1960).
- [Tom 66] Y. Tomozawa, Nuovo Cim. **A46**, 707 (1966).
- [Tra+ 79] M. T. Tran *et al.*, Nucl. Phys. **A324**, 301 (1979).
- [Vel 94] M. Veltman, Digrammatica: The Path to Feynman Diagrams (Cambridge University Press, Cambridge, 1994).
- [Ver 08] J. A. M. Vermaseren, Nucl. Phys. Proc. Suppl. **183**, 19 (2008).

- [VZ 72] A. I. Vainshtein und V. I. Zakharov, Nucl. Phys. **B36**, 589 (1972).
- [Wal 68] R. L. Walker, Phys. Rev. **182**, 1729 (1969).
- [WB 62] J.K. Walker und J. P. Burg, Phys. Rev. Lett. **8**, 37 (1962).
- [War 50] J. C. Ward, Phys. Rev. **78**, 182 (1950).
- [Wei 66] S. Weinberg, Phys. Rev. Lett. **17**, 616 (1966).
- [Wei 67] S. Weinberg, Phys. Rev. Lett. **19**, 1264 (1967).
- [Wei 68] S. Weinberg, Phys. Rev. **166**, 1568 (1968).
- [Wei 79] S. Weinberg, Physica A **96**, 327 (1979).
- [Wei 95a] S. Weinberg, The Quantum Theory of Fields Volume I (Cambridge University Press, Cambridge, 1995).
- [Wei 95b] S. Weinberg, The Quantum Theory of Fields Volume II (Cambridge University Press, Cambridge, 1995).
- [Wei+ 08] M. Weis *et al.* (A1 Collaboration), Eur. Phys. J. A **38**, 27 (2008).
- [WGS 06] N. Wies, J. Gegelia und S. Scherer, Phys. Rev. **D73**, 094012 (2006).
- [Wor+ 11] R. L. Workman *et al.*, [arXiv:1102.4897 [nucl-th]].
- [WZ 67] J. Wess und B. Zumino, Phys. Rev. **163**, 1727 (1967).
- [Yuk 35] H. Yukawa, Proc. Phys. Math. Soc. Jap. **17**, 48 (1935).