Fixpunktmengen von halbeinfachen Automorphismen in halbeinfachen Lie-Algebren

Klaus Pommerening

Fachbereich Mathematik der Johannes-Gutenberg-Universität, Saarstraße 21, D-6500 Mainz, Bundesrepublik Deutschland

Einleitung

Das Ziel dieser Arbeit ist die Bestimmung aller Fixpunktmengen halbeinfacher Automorphismen von halbeinfachen Lie-Algebren über einem algebraisch abgeschlossenen Körper der Charakteristik 0. Die Ergebnisse werden auf folgende Probleme über beschränkte symmetrische Gebiete („BS-Gebiete“) angewandt:

1) die Bestimmung aller Fixpunktmengen von analytischen Automorphismen in BS-Gebieten;

2) die Bestimmung aller Spiegelungen in BS-Gebieten, für die es bereits verschiedene (weniger durchsichtige) Methoden gibt [2, 7, 8];

3) eine von E. Freitag gestellte Frage: Gegeben ein BS-Gebiet D und ein Automorphismus δ von D. Wann läßt sich ein Automorphismus der Fixpunktmenge D^{δ} zu einem von D fortsetzen?

Zur Bezeichnung: Ich nenne die Automorphismen einer Lie-Algebra oder eines BS-Gebietes, die in der Zusammenhangskomponente der Identität liegen, *innere* Automorphismen, die übrigen dann *äußere*. Die Bezeichnung „konjugiert“ bezieht sich immer auf eine Operation der inneren Automorphismengruppe.

§ 1. Die inneren Fixpunkt-Algebren

Sei K stets eine algebraisch abgeschlossener Körper der Charakteristik 0, $\mathfrak{g}$ eine halbeinfache K-Lie-Algebra. $\mathfrak{g}$ heiße *in Standard-Dressing*, wenn gewählt sind: a) eine Cartan-Unteralgebra $\mathfrak{h}$ von $\mathfrak{g}$, b) eine Basis $\Delta = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_l\}$ des Wurzelsystems Φ von $\mathfrak{g}$ bezüglich $\mathfrak{h}$, c) ein Standard-Erzeugendensystem $\{h_i, x_i, y_i | 1 \leqq i \leqq l\}$ [4].

Sei also $\mathfrak{g}$ in Standard-Dressing. Jeder Automorphismus τ von $\mathfrak{g}$, der $\mathfrak{h}$ elementweise festläßt, bildet alle Wurzelräume in sich ab, ist inner und als lineare Abbildung halbeinfach [4, 6]; ein solcher Automorphismus heißt *Diagonal-Automorphismus* (von $\mathfrak{g}$ bezüglich $\mathfrak{h}$) und ist durch das Koeffizienten-l-Tupel $(\mu_1, \ldots, \mu_l) \in K^{\times l}$ mit $\tau(x_i) = \mu_i x_i$ eindeutig bestimmt. Für $\alpha = k_1\alpha_1 + \ldots + k_l\alpha_l \in \Phi$ sei dann stets $\mu_\alpha := \mu_1^{k_1} \ldots \mu_l^{k_l}$. Jeder Automorphismus des Dynkin-Diagramms von $\mathfrak{g}$ induziert einen sogenannten *Diagramm-Automorphismus* von $\mathfrak{g}$; ein solcher wird also durch eine Permutation π von $\{1,\ldots,l\}$ beschrieben. Jeder halbeinfache Automorphismus von $\mathfrak{g}$ ist konjugiert zu einem der Form $\eta=\sigma\circ\tau$, wobei σ ein Diagramm-Automorphismus (zur Permutation π) und τ ein Diagonal-Automorphismus [zu $(\mu_1,\ldots,\mu_l)$] ist und $\mu_i=\mu_{\pi(i)}$ für $i=1,\ldots,l$ gilt *(Gantmachers kanonische Form* [6]*)*. Insbesondere ist $\sigma\circ\tau=\tau\circ\sigma$ und $\eta|_{\mathfrak{h}}=\sigma|_{\mathfrak{h}}$. Ist S der durch π induzierte Automorphismus von Φ, so gilt ferner $\mu_{S_\alpha}=\mu_\alpha$ für alle $\alpha\in\Phi$.

Um alle Fixpunkt-Algebren von halbeinfachen Automorphismen bis auf Konjugation zu bestimmen, genügt es also, Automorphismen in Gantmachers kanonischer Form zu untersuchen.

Nach [6] ist die Fixpunkt-Algebra $\mathfrak{g}^\eta$ eines halbeinfachen Automorphismus η von $\mathfrak{g}$ reduktiv in $\mathfrak{g}$; ist η inner, so ist $\mathfrak{g}^\eta$ sogar von maximalem Rang, d. h., enthält eine Cartan-Unteralgebra von $\mathfrak{g}$.

Sei $\mathfrak{g}_\alpha$ der Wurzelraum zu $\alpha\in\Phi$, $h_\alpha\in[\mathfrak{g}_\alpha\mathfrak{g}_{-\alpha}]\subseteq\mathfrak{h}$ mit $\alpha(h_\alpha)=2$. Ist η ein Automorphismus von $\mathfrak{g}$ mit $\eta(\mathfrak{h})=\mathfrak{h}$, so sei $\eta^*:\mathfrak{h}^*\to\mathfrak{h}^*$ die transponierte Abbildung. Es ist $\eta^*(\Phi)=\Phi$ und $\eta(h_\alpha)=h_{\eta^{*-1}(\alpha)}$.

Eine Unteralgebra $\mathfrak{g}'$ von $\mathfrak{g}$, die $\mathfrak{h}$ enthält, ist stets regulär, d. h., von der Form $\mathfrak{g}'=\mathfrak{h}\oplus\bigoplus_{\alpha\in\Phi'}\mathfrak{g}_\alpha$ mit $\Phi'\subseteq\Phi$ [1; S. 152]. $\mathfrak{g}'$ ist genau dann reduktiv, wenn Φ' ein Untersystem von Φ ist.

Ist $\mathfrak{g}''$ eine weitere reduktive Unteralgebra mit $\mathfrak{h}\subseteq\mathfrak{g}''$ zu $\Phi''\subseteq\Phi$, so sind äquivalent: (i) Es gibt einen inneren Automorphismus τ von $\mathfrak{g}$ mit $\tau(\mathfrak{g}')=\mathfrak{g}''$. (ii) Es gibt ein T aus der Weyl-Gruppe von Φ mit $T(\Phi')=\Phi''$.

Ist η ein Diagonal-Automorphismus von $\mathfrak{g}$ bezüglich $\mathfrak{h}$, so ist

$$\Phi^\eta:=\{\alpha\in\Phi\,|\,\eta|_{\mathfrak{g}_\alpha}=\mathbb{1}_{\mathfrak{g}_\alpha}\}$$

ein Untersystem von Φ, und die Fixpunkt-Algebra $\mathfrak{g}^\eta$ von η ist die zu Φ^η gehörige reguläre reduktive Unteralgebra von $\mathfrak{g}$.

Lemma 1. *Sei $\mathfrak{g}'$ eine reduktive Unteralgebra von $\mathfrak{g}$ mit $\mathfrak{h}\subseteq\mathfrak{g}'$ zum Untersystem Φ' von Φ. Dann sind äquivalent:*

(Fix 1) *Es gibt einen Diagonal-Automorphismus η von $\mathfrak{g}$, dessen Fixpunkt-Algebra $\mathfrak{g}'$ ist.*

(Fix 2) *Es gibt einen Gruppen-Homomorphismus $f:\mathbb{Z}\Phi\to K^\times$ mit $\Phi'=\Phi\cap\ker f$.* ($\mathbb{Z}\Phi$ als Untergruppe von $\mathfrak{h}^*$.)

Beweis. η ist durch das Koeffizienten-l-Tupel $(\mu_1,\ldots,\mu_l)$ bestimmt. Die behauptete Äquivalenz folgt, wenn man $\mu_i=f(\alpha_i)$ setzt. Q.E.D.

Lemma 2. *Sei Φ' ein Untersystem von Φ, $\Phi'':=\Phi\cap\mathbb{Q}\Phi'$. Dann gilt:*

(i) *Jede Basis von Φ'' ist zu einer Basis von Φ ergänzbar.*

(ii) (Fix 2), *und damit* (Fix 1), *ist äquivalent zu:*

(Fix 3) *Es gibt einen Homomorphismus $g:\mathbb{Z}\Phi''\to K^\times$ mit $\Phi'=\Phi''\cap\ker g$.*

(iii) *Ist $\mathbb{Z}\Phi''/\mathbb{Z}\Phi'$ eine endliche zyklische Gruppe, so ist* (Fix 3) *erfüllt.*

Beweis. (i) Sei $\{\beta_1,\ldots,\beta_r\}$ eine Basis von Φ''; diese werde durch $\gamma_{r+1},\ldots,\gamma_l\in\mathbb{Q}\Phi$ zu einer Basis des $\mathbb{Q}$-Vektorraums $\mathbb{Q}\Phi$ ergänzt. Sei $\prec$ die lexikographische Ordnung in $\mathbb{Q}\Phi$ bezüglich der geordneten Basis $(\gamma_{r+1},\ldots,\gamma_l,\beta_1,\ldots,\beta_r)$. Die $\prec$-unzerlegbaren Elemente $\succ 0$ von Φ bilden eine Basis von Φ, und dazu gehören auch $\beta_1,\ldots,\beta_r$, wie man leicht (indirekt) sieht.

(ii) „(Fix 2)$\Rightarrow$(Fix 3)“: trivial mit $g := f|_{\mathbb{Z}\Phi''}$.

„(Fix 3)$\Rightarrow$(Fix 2)“: Da $\mathbb{Z}\Phi' \subseteq \ker g$, ist $\mathbb{Z}\Phi''/\ker g$ endlich, also (als Untergruppe von $K^\times$) zyklisch. Daher gibt es einen Homomorphismus $f:\mathbb{Z}\Phi \to K^\times$ mit $\ker f = \ker g$. Es folgt: $\Phi' = \Phi'' \cap \ker g = \Phi \cap \mathbb{Z}\Phi'' \cap \ker f = \Phi \cap \ker f$.

(iii) Es gibt einen Homomorphismus $g:\mathbb{Z}\Phi'' \to K^\times$ mit $\mathbb{Z}\Phi' = \ker g$, also $\Phi \cap \ker g = \Phi'$. Q.E.D.

Das Untersystem $\Phi'' = \Phi \cap \mathbb{Q}\Phi'$ heiße die *$\mathbb{Q}$-Hülle* von Φ'; Φ' heiße *$\mathbb{Q}$-abgeschlossen*, wenn es mit seiner $\mathbb{Q}$-Hülle übereinstimmt. Ist Φ' $\mathbb{Q}$-abgeschlossen, so ist (Fix 2) erfüllt.

Die Schwierigkeit bei der Anwendung von (Fix 3) ist, daß nicht unbedingt $\ker g = \mathbb{Z}\Phi'$ sein muß. Im folgenden Lemma wird etwas Allgemeinheit geopfert, um ein übersichtlicheres Kriterium zu erhalten. Dieses erfaßt allerdings trotzdem noch fast alle Spezialfälle.

Lemma 3. *Sei Φ ein irreduzibles Wurzelsystem, Φ' ein Untersystem vom gleichen Rang. Es gelte zusätzlich: $\mathbb{Z}\Phi/\mathbb{Z}\Phi' \cong \mathbb{Z}_2^k = \mathbb{Z}_2 \oplus \ldots \oplus \mathbb{Z}_2$. Dann sind äquivalent:*

(i) (Fix 3), *d. h., es gibt einen Homomorphismus $f:\mathbb{Z}\Phi \to K^\times$ mit $\Phi' = \Phi \cap \ker f$.*

(ii) *Es gibt einen Homomorphismus $f:\mathbb{Z}\Phi \to K^\times$ mit* $\ker f = \mathbb{Z}\Phi'$.

(iii) $k=0$ *oder* $k=1$.

Beweis. Es ist nur „(i)$\Rightarrow$(ii)“ zu zeigen: Klar ist, daß $\mathbb{Z}\Phi' \subseteq \ker f$ und daß $2\alpha \in \mathbb{Z}\Phi'$ für jedes $\alpha \in \Phi - \Phi'$ und somit $f(\alpha) = -1$.

Sei Δ eine Basis von Φ, α, $\beta \in \Delta - \Phi'$. Dann ist $\alpha + \beta \in \mathbb{Z}\Phi'$ (man sieht das leichter ein, wenn man zuerst annimmt, daß alle Elemente zwischen α und β im Dynkin-Diagramm zu Φ' gehören). Daher liegt eine ganzzahlige Linearkombination der Elemente von $\Delta - \Phi'$ genau dann in $\mathbb{Z}\Phi'$, wenn die Summe der Koeffizienten gerade ist.

Ich zeige jetzt, daß $\ker f \subseteq \mathbb{Z}\Phi'$:

Sei $x \in \ker f$. Reduktion modulo $\mathbb{Z}\Phi'$ ergibt $y \in \ker f$ der Gestalt $y = \alpha_1 + \ldots + \alpha_m$ mit $\alpha_i \in \Delta - \Phi'$. Da $f(y) = 1$, ist m gerade, also $y \in \mathbb{Z}\Phi'$, also auch $x \in \mathbb{Z}\Phi'$. Q.E.D.

Ein Untersystem von Φ ist durch eine Basis bestimmt. Diese erhält man aus einer geeigneten Basis von Φ durch eine endliche Folge von *elementaren Abänderungen* (d. h., man ersetzt endlich oft ein Basiselement einer irreduziblen Komponente durch die niedrigste Wurzel dieser Komponente). Die Anzahl der benötigten elementaren Abänderungen ist im allgemeinen nicht eindeutig bestimmt.

Satz 1. *Sei $\mathfrak{g}$ eine halbeinfache Lie-Algebra, $\mathfrak{g}'$ eine Unteralgebra von $\mathfrak{g}$. Dann sind die folgenden Aussagen* (A) *und* (B) *äquivalent:*

(A) *$\mathfrak{g}'$ ist Fixpunkt-Algebra eines halbeinfachen inneren Automorphismus von $\mathfrak{g}$.*

(B) *$\mathfrak{g}'$ ist reduktive Unteralgebra von $\mathfrak{g}$ und enthält eine Cartan-Unteralgebra $\mathfrak{h}$ von $\mathfrak{g}$; ist Φ das Wurzelsystem von $\mathfrak{g}$ bezüglich $\mathfrak{h}$, Φ' das zu $\mathfrak{g}'$ gehörige Untersystem, Φ'' die $\mathbb{Q}$-Hülle von Φ', so gilt:*

(Fix 4) *Φ' entsteht aus Φ'' durch je höchstens eine elementare Abänderung in jeder irreduziblen Komponente von Φ''.*

Beweis. Zunächst ist klar, daß man o.B.d.A. $\mathfrak{g}$ als einfach und $\Phi = \Phi''$ annehmen kann.

„(Fix 4)⇒(Fix 3)“: Sei $\{\alpha_1,\dots,\alpha_r\}$ eine Basis von Φ, $\gamma=\sum_{i=1}^{r} c_i\alpha_i$ die höchste Wurzel von Φ. Φ' habe $\{\alpha_1,\dots,\alpha_{r-1},-\gamma\}$ als Basis. Dann ist $\mathbb{Z}\Phi/\mathbb{Z}\Phi'$ zyklisch von der Ordnung $c_r\neq 0$, also die Behauptung nach Lemma 2 (iii) erfüllt.

„(Fix 3)⇒(Fix 4)“: Ich verfolge alle möglichen Serien von echten elementaren Abänderungen $\Phi=\Phi_0, \Phi_1, \Phi_2, \dots$. Φ_1 erfüllt natürlich (Fix 3) und (Fix 4). Falls $k\geqq 2$ und $\mathbb{Z}\Phi/\mathbb{Z}\Phi_k$ zyklisch ist, so gilt (Fix 3) nach Lemma 2 (iii); es ist dann zu zeigen, daß Φ_k auf einem anderen Wege durch eine einzige elementare Abänderung gewonnen werden kann. Falls $k\geqq 2$ und $\mathbb{Z}\Phi/\mathbb{Z}\Phi_k$ nicht zyklisch ist, so brauche ich nur zu beweisen, daß (Fix 3) nicht gilt.

1. *Fall:* Φ vom Typ A_l, B_l, C_l oder D_l. Dann folgt die Behauptung aus Lemma 3, da $\mathbb{Z}\Phi/\mathbb{Z}\Phi_k\cong\mathbb{Z}_2^k$ für alle k; das beweist man leicht mit Hilfe folgender Überlegungen:

a) Bei jeder elementaren Abänderung erhält man wieder nur irreduzible Komponenten der Typen A–D.

b) In der Basis-Darstellung der höchsten Wurzel treten jeweils nur die Koeffizienten 1 und 2 auf.

2. *Fall:* Φ vom Typ E_6 oder G_2. Dann ist die maximale Länge der Serien von echten elementaren Abänderungen 1; es ist also nichts zu beweisen.

3. *Fall:* Φ vom Typ E_7. Es ist stets $\mathbb{Z}\Phi/\mathbb{Z}\Phi_k\cong\mathbb{Z}_2^k$ für $k\geqq 2$, außer bei der Serie $E_7, D_6\cup A_1, 2A_3\cup A_1$. Dieser Fall ist aber auch klar, da $2A_3\cup A_1$ (bis auf Konjugation mit der Weyl-Gruppe) auf anderem Wege durch eine einzige elementare Abänderung erreichbar ist.

4. *Fall:* Φ vom Typ F_4. Wie bei E_7.

5. *Fall:* Φ vom Typ E_8. Fast wie bei E_7 – es bleiben zwei Sonderfälle:

a) Die Serie E_8, $E_6\cup A_2$, $\Phi_2=4A_2$.

b) Die Serie $E_8, D_5\cup A_3$, $\Phi_2=2A_3\cup 2A_1$.

In beiden Fällen führt aber die Annahme eines Homomorphismus $g:\mathbb{Z}\Phi\to K^\times$ mit $\Phi_2=\Phi\cap\ker g$ sofort auf einen Widerspruch, wenn man versucht, die g-Bilder der Wurzeln auszurechnen. Q.E.D.

Aus den Tab. 9 und 11 von [1] kann man nun z. B. ablesen:

Korollar. *Die Fixpunkt-Algebren der halbeinfachen inneren Automorphismen der Algebra*

(i) A_l, E_6 *oder* G_2 *sind genau die reduktiven Unteralgebren vom maximalen Rang;*

(ii) B_l *sind genau diejenigen reduktiven Unteralgebren vom maximalen Rang, die höchstens einen Summanden vom Typ* D *enthalten;*

(iii) C_l *bzw.* D_l *sind genau diejenigen reduktiven Unteralgebren vom maximalen Rang, die höchstens zwei Summanden vom Typ* C *bzw.* D *enthalten.*

§ 2. Die äußeren Fixpunkt-Algebren

Seien $\mathfrak{g}$ und $\mathfrak{g}'$ halbeinfache Lie-Algebren, $\mathfrak{h}$ und $\mathfrak{h}'$ Cartan-Unteralgebren davon. Für einen Homomorphismus $f:\mathfrak{g}'\to\mathfrak{g}$ mit $f(\mathfrak{h}')\subseteq\mathfrak{h}$ sei stets $f^*:\mathfrak{h}^*\to\mathfrak{h}'^*$ die zu $f|_{\mathfrak{h}'}$ transponierte Abbildung. Sind $\Phi\subseteq\mathfrak{h}^*$ und $\Phi'\subseteq\mathfrak{h}'^*$ die Wurzelsysteme und ist f injektiv, so ist $f^*(\Phi)\supseteq\Phi'$.

Die Bestimmung der Fixpunkt-Algebren wird wie folgt auf den Fall „$\mathfrak{g}$ einfach" zurückgeführt:

Sei $\mathfrak{g}=\mathfrak{g}_{11}\oplus\ldots\oplus\mathfrak{g}_{1m_1}\oplus\ldots\oplus\mathfrak{g}_{r1}\oplus\ldots\oplus\mathfrak{g}_{rm_r}$ die Zerlegung von $\mathfrak{g}$ in einfache Ideale, wobei $\mathfrak{g}_{ij}\cong\mathfrak{g}_{hk}$ genau dann, wenn $i=h$. Die Gruppe $\operatorname{Aut}_0\mathfrak{g}:=\operatorname{Aut}\mathfrak{g}_{11}\times\ldots\times\operatorname{Aut}\mathfrak{g}_{rm_r}$ und das Produkt $\mathcal{S}:=\mathcal{S}_{m_1}\times\ldots\times\mathcal{S}_{m_r}$ der vollen symmetrischen Gruppen $\mathcal{S}_i$ operieren auf natürliche Weise auf $\mathfrak{g}$, und $\operatorname{Aut}\mathfrak{g}=\mathcal{S}\cdot\operatorname{Aut}_0\mathfrak{g}$ semidirekt.

Ist nun $\eta\in\operatorname{Aut}\mathfrak{g}$, $\eta=\varphi\circ\tau$ mit $\varphi\in\mathcal{S}$, $\tau\in\operatorname{Aut}_0\mathfrak{g}$, so betrachte ich eine Bahn $\mathfrak{g}_1,\ldots,\mathfrak{g}_m$ der Operation von φ auf den einfachen Idealen von $\mathfrak{g}$, also $\varphi(\mathfrak{g}_i)=\mathfrak{g}_{i+1}$ für $i=1,\ldots,m-1$, $\varphi(\mathfrak{g}_m)=\mathfrak{g}_1$. Sei $\tau_i:=\tau|_{\mathfrak{g}_i}\in\operatorname{Aut}\mathfrak{g}_i$. Ist $x_i\in\mathfrak{g}_i$, so wird $(x_1,\ldots,x_m)\in\mathfrak{g}_1\oplus\ldots\oplus\mathfrak{g}_m$ von η also auf $(\tau_m(x_m),\tau_1(x_1),\ldots,\tau_{m-1}(x_{m-1}))$ abgebildet. Mit $\tau_0:=\tau_m\circ\ldots\circ\tau_1$ ist also

$$\begin{aligned}\mathfrak{g}^\eta\cap(\mathfrak{g}_1\oplus\ldots\oplus\mathfrak{g}_m)&=\{(x_1,\tau_1(x_1),\ldots,\tau_{m-1}\ldots\tau_1(x_1))\,|\,x_1\in\mathfrak{g}_1^{\tau_0}\}\\&\cong\mathfrak{g}_1^{\tau_0},\end{aligned}$$

und $\mathfrak{g}^\eta$ ist direkte Summe von Idealen dieses Typs.

Sei jetzt $\mathfrak{g}$ halbeinfach in Standard-Dressing und $\eta=\sigma\circ\tau$ ein Automorphismus in Gantmachers kanonischer Form, σ durch die Permutation π und τ durch $(\mu_1,\ldots,\mu_l)$ beschrieben. $S:=\eta^{*-1}$ ist der durch π induzierte Automorphismus des Wurzelsystems Φ und $\eta(h_\alpha)=h_{S\alpha}$, $\eta(\mathfrak{g}_\alpha)=\mathfrak{g}_{S\alpha}$ für jede Wurzel α. Sei $r(\alpha)\in\mathbb{N}=\{0,1,2,\ldots\}$ minimal mit $S^{r(\alpha)+1}\alpha=\alpha$. Natürlich ist $r(\alpha)=r(-\alpha)$ und

$$\eta(\mathfrak{g}_\alpha+\ldots+\mathfrak{g}_{S^{r(\alpha)}\alpha})=\mathfrak{g}_\alpha+\ldots+\mathfrak{g}_{S^{r(\alpha)}\alpha}\,.$$

Aus der Form des charakteristischen Polynoms folgt sofort:

η hat auf $\mathfrak{g}_\alpha+\ldots+\mathfrak{g}_{S^{r(\alpha)}\alpha}$ höchstens einmal den Eigenwert 1. Das ist genau dann der Fall, wenn $\eta^{r(\alpha)+1}$ auf $\mathfrak{g}_\alpha$ die Identität ist, oder wenn η auf $\mathfrak{g}_{-\alpha}+\ldots+\mathfrak{g}_{S^{r(\alpha)}(-\alpha)}$ den Eigenwert 1 hat. Ein Eigenvektor zu 1 ist dann $u_\alpha:=x_\alpha+\eta(x_\alpha)+\ldots+\eta^{r(\alpha)}(x_\alpha)$ mit $x_\alpha\in\mathfrak{g}_\alpha-\{0\}$. Sei $\Psi_\eta\subsetneqq\Phi$ ein Vertretersystem derjenigen Bahnen $\{\alpha,\ldots,S^{r(\alpha)}\alpha\}$ von Φ unter S, für die η auf $\mathfrak{g}_\alpha+\ldots+\mathfrak{g}_{S^{r(\alpha)}\alpha}$ den Eigenwert 1 hat. Sei $(i_{11},\ldots,i_{1m_1})\ldots(i_{r1},\ldots,i_{rm_r})$ die Zykel-Zerlegung von π. Ich schreibe kurz $\alpha_{jk}:=\alpha_{i_{jk}}$ usw. Dann bilden $h'_1:=h_{11}+\ldots+h_{1m_1},\ldots,h'_r:=h_{r1}+\ldots+h_{rm_r}$ eine Basis von $\mathfrak{h}^\sigma=\mathfrak{h}^\eta$. $\mathfrak{g}^\eta$ hat also die Basis $\{h'_1,\ldots,h'_r\}\cup\{u_\alpha|\alpha\in\Psi_\eta\}$.

Lemma 4. (i) *$\mathfrak{h}^\eta$ ist Cartan-Unteralgebra der reduktiven Lie-Algebra $\mathfrak{g}^\eta$.*

(ii) *Die Wurzelraum-Zerlegung von $\mathfrak{g}^\eta$ bezüglich $\mathfrak{h}^\eta$ ist*

$$\mathfrak{g}^\eta=\mathfrak{h}^\eta\oplus\bigoplus_{\alpha\in\Psi_\eta}Ku_\alpha\,,$$

die Wurzeln sind die $\alpha|_{\mathfrak{h}^\eta}=S\alpha|_{\mathfrak{h}^\eta}=\ldots$ mit $\alpha\in\Psi_\eta$.

Beweis. $\mathfrak{h}^\eta$ ist abelsch und reduktiv in $\mathfrak{g}^\eta$. Da man für jedes u_α ein $h\in\mathfrak{h}^\eta$ findet mit $[hu_\alpha]\neq0$, ist $\mathfrak{h}^\eta$ maximal abelsch. Der Rest ist klar. Q.E.D.

Für $\alpha\in\Phi$ sei stets $\alpha':=\alpha|_{\mathfrak{h}^\sigma}$. Bekanntlich ist $\mathfrak{g}^\sigma$ halbeinfach (sogar einfach, wenn $\mathfrak{g}$ einfach), und die α'_{i1}, $i=1,\ldots,r$, bilden eine Basis des Wurzelsystems Φ^σ von $\mathfrak{g}^\sigma$ bezüglich $\mathfrak{h}^\sigma$. Ist $\sigma^{r(\alpha)+1}|_{\mathfrak{g}_\alpha}=\nu_\alpha\cdot\mathbb{1}_{\mathfrak{g}_\alpha}$ für $\alpha\in\Phi$, so ist $\alpha'\in\Phi^\sigma$ zu $\nu_\alpha=1$ äquivalent.

Es ist $\eta(\mathfrak{g}^\sigma)=\mathfrak{g}^\sigma$; $\eta|_{\mathfrak{g}^\sigma}$ ist Diagonal-Automorphismus bezüglich $\mathfrak{h}^\sigma$ und bestimmt η eindeutig (mit der Bedingung $\mu_{\pi(i)}=\mu_i$).

Sei $\Phi^\eta \subseteqq (\mathfrak{h}^\eta)^* = (\mathfrak{h}^\sigma)^*$ das Wurzelsystem von $\mathfrak{g}^\eta$ bezüglich $\mathfrak{h}^\eta$; man beachte, daß selbst im Fall $\Phi^\eta \subseteqq \Phi^\sigma$ nicht unbedingt Φ^η Untersystem von Φ^σ sein muß. $\mathfrak{g}^\sigma \cap \mathfrak{g}^\eta$ ist die Fixpunkt-Algebra von $\eta|_{\mathfrak{g}^\sigma}$; sei $\Phi^{\sigma,\eta}$ das zugehörige Untersystem von Φ^σ. Im allgemeinen ist $\Phi^{\sigma,\eta} \neq \Phi^\sigma \cap \Phi^\eta$, aber natürlich stets $\Phi^{\sigma,\eta} \subseteqq \Phi^\eta$. Die Möglichkeiten für $\Phi^{\sigma,\eta}$ kann man aus § 1 vollständig entnehmen. Um die sämtlichen äußeren Fixpunkt-Algebren zu bestimmen, fehlt also noch ein Verfahren, mit dem man zu jedem $\Phi^{\sigma,\eta}$ alle möglichen Φ^η errechnen kann. Der erste Schritt ist:

Für eine Wurzel $\alpha \in \Phi$ gilt $\alpha' \in \Phi^\eta$ genau dann, wenn eine der drei Möglichkeiten (i) $\alpha' \in \Phi^{\sigma,\eta}$, (ii) $\alpha' \in \Phi^\sigma \cap \Phi^\eta, \alpha' \notin \Phi^{\sigma,\eta}$, (iii) $\alpha' \in \Phi^\eta, \alpha' \notin \Phi^\sigma$ zutrifft. Diese drei Alternativen lassen sich durch die oben eingeführten Koeffizienten μ_α und ν_α beschreiben:

(i) $\nu_\alpha = 1,\ \mu_\alpha = 1.$

(ii) $\nu_\alpha = 1,\ \mu_\alpha \neq 1,\ \mu_\alpha^{r(\alpha)+1} = 1.$

(iii) $\nu_\alpha \neq 1,\ \mu_\alpha \neq 1,\ \mu_\alpha^{r(\alpha)+1} = 1/\nu_\alpha.$

Ich betrachte von jetzt an nur noch den einfachsten, aber wichtigsten Spezialfall, nämlich, daß $\sigma^2 = \mathbb{1}_{\mathfrak{g}}$ und $\alpha' \in \Phi^\sigma$ für alle $\alpha \in \Phi$ ist. Damit sind die drei Fälle $\mathfrak{g} = E_6, A_{2r-1}$ mit $r \geqq 2$ und D_l mit $l \geqq 5$ erfaßt. Die beiden übrigen, A_{2r} mit $r \geqq 1$ und D_4, erfordern zusätzliche individuelle Überlegungen ähnlicher Art.

In dem betrachteten Spezialfall entfällt oben die Alternative (iii), es ist stets $r(\alpha) = 0$ oder 1, und außerdem läßt sich der Diagonal-Automorphismus $\eta^2|_{\mathfrak{g}^\sigma}$ von $\mathfrak{g}^\sigma$ mit seiner Fixpunkt-Algebra $\mathfrak{g}^{\sigma,\eta^2}$ ins Spiel bringen. Das zugehörige Untersystem von Φ^σ ist $\Phi^{\sigma,\eta^2} := \{\alpha' \in \Phi^\sigma | \mu_\alpha = \pm 1\}$.

1. *Schritt.* Bestimme alle Möglichkeiten für Φ^{σ,η^2} aus Φ^σ nach § 1.

2. *Schritt.* Bestimme alle Möglichkeiten für $\Phi^{\sigma,\eta}$ aus Φ^{σ,η^2} mit Hilfe der folgenden Bemerkung: η bildet $\mathfrak{g}^{\sigma,\eta^2}$ auf sich ab und ist dort Involution (oder die Identität). Also entsteht $\Phi^{\sigma,\eta}$ aus Φ^{σ,η^2} auf folgende Weise: Man nehme aus jeder Komponente von Φ^{σ,η^2} je ein maximales Untersystem der Charakteristik 0 oder 2 oder die volle Komponente und bilde davon die Vereinigung [11; S. 555, 556, 560, 569].

3. *Schritt.* Φ^η ist dann eindeutig bestimmt, nämlich

$$\Phi^\eta = \Phi^{\sigma,\eta} \cup \{\alpha' \in \Phi^{\sigma,\eta^2} | r(\alpha) = 1\}.$$

Natürlich genügt es, die Möglichkeiten für Φ^{σ,η^2} bis auf Konjugation mit der Weyl-Gruppe von Φ^σ und die Möglichkeiten für $\Phi^{\sigma,\eta}$ bis auf Konjugation mit der Weyl-Gruppe von Φ^{σ,η^2} in Betracht zu ziehen.

Ich will als Beispiel den Fall A_{2r-1} etwas genauer andeuten:

Da Φ^σ vom Typ C_r ist, ist Φ^{σ,η^2} (und ebenso $\Phi^{\sigma,\eta}$) vom Typ $\Phi^{\sigma,\eta^2} = \Psi_1 \cup \Psi_2$ mit $\Psi_1 = A_{r_1} \cup \ldots \cup A_{r_m}$ und $\Psi_2 = \emptyset$, C_s oder $C_{s_1} \cup C_{s_2}$ (mit geeigneter Einschränkung der Indizes r_i, s und s_i). Natürlich ist $\Phi^{\sigma,\eta} = (\Psi_1 \cap \Phi^{\sigma,\eta}) \cup (\Psi_2 \cap \Phi^{\sigma,\eta})$, und man sieht leicht, daß $\Phi^\eta = \Psi_1 \cup (\Psi_2 \cap \Phi^\eta)$, wobei $\Psi_2 \cap \Phi^\eta = (\Psi_2 \cap \Phi^{\sigma,\eta}) \cup \{\alpha' \in \Psi_2 | r(\alpha) = 1\}$. Es sind also nur noch alle Möglichkeiten für $\Psi_2 \cap \Phi^\eta$ zu bestimmen. Dabei ist $\Psi_2 \cap \Phi^{\sigma,\eta}$ als Untersystem von Ψ_2 von dem in „2. Schritt" beschriebenen Typ.

a) Im Falle $\Psi_2 = \emptyset$ ist $\Phi^\eta = \Phi^{\sigma,\eta^2}$, $\mathfrak{g}^\eta$ also die reguläre Unteralgebra

$$K^{r-r_1-\ldots-r_m} \oplus A_{r_1} \oplus \ldots \oplus A_{r_m} \quad (m \geqq 0,\ r_1 + \ldots + r_m + m \leqq r)$$

von $\mathfrak{g}^\sigma = C_r$.

b) Im Falle $\Psi_2 = C_s$ $(s \geqq 1)$ gibt es drei Möglichkeiten:

b$_1$) $\Psi_2 \cap \Phi^{\sigma,\eta} = C_s$. Dann ist $\Phi^\eta = \Phi^{\sigma,\eta^2}$ und $\mathfrak{g}^\eta$ die reguläre Unteralgebra $K^{r-r_1-\dots-r_m-s} \oplus A_{r_1} \oplus \dots \oplus A_{r_m} \oplus C_s$ $(m \geqq 0, s \geqq 1, s + r_1 + \dots + r_m + m \leqq r)$ von $\mathfrak{g}^\sigma = C_r$.

b$_2$) $\Psi_2 \cap \Phi^{\sigma,\eta} = A_{s-1}$. Falls $s = 1$, führt das auf den Fall a. Ist $s \geqq 2$, so ist $\Psi_2 \cap \Phi^\eta$ vom Typ D_s, wie man durch Hinschreiben der Wurzeln sieht. $\mathfrak{g}^\eta$ ist also vom Typ $K^{r-r_1-\dots-r_m-s} \oplus A_{r_1} \oplus \dots \oplus A_{r_m} \oplus D_s$ $(m \geqq 0, s \geqq 2, s + r_1 + \dots + r_m + m \leqq r)$. Die einfachen Ideale A_{r_i} sind wie bei a in $\mathfrak{g}$ eingebettet, D_s ist als $\mathfrak{so}(2s) \subseteqq \mathfrak{sl}(2s)$ in die reguläre Unteralgebra A_{2s-1} von $\mathfrak{g}$ eingebettet.

b$_3$) $\Psi_2 \cap \Phi^{\sigma,\eta} = C_{s_1} \cup C_{s_2}$ $(s_1 + s_2 = s \geqq 2,\ s_1, s_2 \geqq 1)$. Dann ist $\Phi^\eta = \Phi^{\sigma,\eta^2}$ und $\mathfrak{g}^\eta$ wie in b$_1$.

c) Im Falle $\Psi_2 = C_{s_1} \cup C_{s_2}$ $(s_1, s_2 \geqq 1)$ ist stets $\Psi_2 \cap \Phi^{\sigma,\eta} \neq \Psi_2$ und $\neq A_{s_1-1} \cup A_{s_2-1}$. Es bleibt also o.B.d.A. als einzige neue Möglichkeit $\Phi^{\sigma,\eta} = C_{s_1} \cup A_{s_2-1}$ $(s_2 \geqq 2)$. Das führt auf $\mathfrak{g}^\eta = K^{r-r_1-\dots-r_m-s_1-s_2} \oplus A_{r_1} \oplus \dots \oplus A_{r_2} \oplus C_{s_1} \oplus D_{s_2}$ $(m \geqq 0, s_1 \geqq 1, s_2 \geqq 2, s_1 + s_2 + r_1 + \dots + r_m + m \leqq r)$, wobei die A_{r_i} wie in a, C_{s_1} wie in b$_1$ und D_{s_2} wie in b$_2$ in $\mathfrak{g}$ eingebettet sind.

Zur Anwendung in § 3 will ich noch die Ergebnisse im Fall D_l $(l \geqq 5)$ angeben: Die äußeren Fixpunkt-Algebren sind genau die Algebren der Typen

$$K^{l-1-r_1-\dots-r_m-s_1-s_2} \oplus A_{r_1} \oplus \dots \oplus A_{r_m} \oplus B_{s_1} \oplus B_{s_m}$$

mit $m \geqq 0$, $s_i \geqq 0$, $s_1 + s_2 + r_1 + \dots + r_m + m \leqq l - 1$. Dabei sind die A_i reguläre Unteralgebren von D_l, und $B_{s_1} \oplus B_{s_2}$ ist als $\mathfrak{so}(2s_1+1) \oplus \mathfrak{so}(2s_2+1)$ kanonisch in die reguläre Unteralgebra $D_{s_1+s_2+1} = \mathfrak{so}(2s_1 + 2s_2 + 2)$ von D_l eingebettet.

§ 3. Fixpunktmengen in *BS*-Gebieten

Ich verwende für die irreduziblen BS-Gebiete die folgenden Bezeichnungen: Typ $\mathrm{I}_{p,q} = \mathbb{M}_{p,q}$ $(1 \leqq p \leqq q)$, Typ $\mathrm{II}_r = \mathbb{T}_r$ $(5 \leqq r)$, Typ $\mathrm{III}_r = \mathbb{S}_r$ $(2 \leqq r)$, Typ $\mathrm{IV}_n = \mathbb{L}_n$ $(5 \leqq n)$, und $\mathbb{E}_{16}$ bzw. $\mathbb{E}_{27}$ für das 16- bzw. 27-dimensionale Ausnahme-Gebiet.

$\Omega(D)$ ist stets die Gruppe aller analytischen Automorphismen des BS-Gebiets $D \subseteqq \mathbb{C}^n$, G die Zusammenhangskomponente der Lie-Gruppe $\Omega(D)$, die die identische Abbildung $\mathbb{1}_D$ enthält. Es sei stets $0 \in D$, $\Sigma(D)$ die Stabilitätsgruppe von 0 in $\Omega(D)$, $K := \Sigma(D) \cap G$. Es darf o.B.d.A. $\Sigma(D) \subseteqq \mathbb{GL}_n(\mathbb{C})$ angenommen werden. Mit $\mathbb{U}(1)$ wird immer der Einheitskreis $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$ bezeichnet.

Da die Reduktion auf den Fall „*D irreduzibel*" ganz analog wie bei den Lie-Algebren geht, will ich von jetzt an stets D als irreduzibel annehmen.

Seien $\mathfrak{g}$ und $\mathfrak{k} \subseteqq \mathfrak{g}$ die Lie-Algebren von G und K, $\mathfrak{h}$ eine Cartan-Unteralgebra von $\mathfrak{k}$, $\mathfrak{g}^\sim$, $\mathfrak{k}^\sim$ und $\mathfrak{h}^\sim$ die Komplexifizierungen. $\mathfrak{g}^\sim$ sei in Standard-Dressing bezüglich $\mathfrak{h}^\sim$. Jeder Automorphismus $\delta \in \Sigma(D)$ induziert auf kanonische Weise einen sogenannten (H_2)-Automorphismus [9] von $\mathfrak{g}^\sim$, nämlich $\eta = \mathrm{Ad}\,\delta$. η ist trivialerweise halbeinfach.

Lemma 5. (i) *Die Fixpunktmenge D^δ ist hermitescher symmetrischer Unterraum von D (d. h.,* BS-*Gebiet im* 1-*Eigenraum der linearen Abbildung δ). Ist $\delta \in K$, so ist D^δ regulär (d. h., die zugehörige Unteralgebra von $\mathfrak{g}$ ist regulär).*

(ii) *Die Fixpunkt-Algebra $(\mathfrak{g}^\sim)^\eta$ hat eine direkte Zerlegung $(\mathfrak{g}^\sim)^\eta = \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{g}' \oplus \mathfrak{g}''$, wobei $\mathfrak{a}$ abelsch, $\mathfrak{g}' \cap \mathfrak{g}$ kompakte halbeinfache $\mathbb{R}$-Lie-Algebra und $\mathfrak{g}'' \cap \mathfrak{g}$ nicht-*

kompakte halbeinfache $\mathbb{R}$*-Lie-Algebra ist. Dabei ist* $\mathfrak{g}''\cap\mathfrak{g}$ *die zur Fixpunktmenge* D^δ *gehörige,* (H_1)*-eingebettete Unteralgebra von* $\mathfrak{g}$.

Beweis. Einfache Routine-Überlegungen. Q.E.D.

Sei α_1 die nicht-kompakte Basis-Wurzel und Φ_0 das von $\Delta-\{\alpha_1\}$ erzeugte Untersystem von Φ. Jeder (H_2)-Automorphismus ist sogar mit $\mathrm{Ad}\,K\subseteq \mathrm{Aut}\,\mathfrak{g}^\sim$ auf Gantmachers kanonische Form transformierbar. Ein Automorphismus η in Gantmachers kanonischer Form erfüllt offensichtlich genau dann (H_2), wenn $S\alpha_1=\alpha_1$ und $|\mu_\alpha|=1$ für alle $\alpha\in\Phi$ (S und μ_α in der üblichen Bedeutung zu η gehörig). (Fix 2) ist offenbar äquivalent zu

(Fix 2′) Es gibt einen Gruppen-Homomorphismus

$$g:\mathbb{Z}\Phi\to\mathbb{U}(1) \quad \text{mit} \quad \Phi'=\Phi\cap\ker g\,.$$

Daher ist fast unmittelbar klar:

Satz 2. *Man findet alle „inneren" Fixpunktmengen in dem* BS*-Gebiet D bis auf Konjugation, indem man im zugehörigen Wurzelsystem* Φ *alle diejenigen nicht-kompakten Untersysteme bis auf Konjugation mit der Weyl-Gruppe von* Φ_0 *heraussucht, die* (Fix 4) *erfüllen.*

(Dabei heißt ein Untersystem *nicht-kompakt*, wenn jede irreduzible Komponente nicht-kompakte Wurzeln enthält.)

Für „äußere" Fixpunktmengen gilt ein ähnlicher Satz. Unter Verwendung der Ergebnistabellen in [5] und [9] folgt:

Korollar 1. *Außer der leeren Menge und den einelementigen Teilmengen sind die Fixpunktmengen der analytischen Automorphismen der* BS*-Gebiete*

(i) $\mathbb{M}_{p,q}$ $(1\leqq p<q)$, $\mathbb{L}_n$ *($n\geqq 5$ ungerade),* $\mathbb{E}_{16}$, $\mathbb{E}_{27}$, $\mathbb{T}_r$ $(5\leqq r\leqq 8)$ *und* $\mathbb{S}_2$ *genau die regulären hermiteschen symmetrischen Unterräume (und deren Konjugierte);*

(ii) $\mathbb{T}_r$ $(r\geqq 9)$ *bzw.* $\mathbb{S}_r$ $(r\geqq 3)$ *genau diejenigen hermiteschen symmetrischen Unterräume (und deren Konjugierte), die höchstens zwei irreduzible Komponenten vom Typ* $\mathbb{T}_k$ $(3\leqq k\leqq r-6)$ *bzw.* $\mathbb{S}_k$ $(1\leqq k\leqq r-2)$ *besitzen.*

Korollar 2. *Außer der leeren Menge und den einelementigen Teilmengen sind die Fixpunktmengen*

(i) *der inneren analytischen Automorphismen der* BS*-Gebiete* $\mathbb{M}_{p,p}$ $(2\leqq p)$ *und* $\mathbb{L}_n$ *($n\geqq 6$ gerade) genau die regulären hermiteschen symmetrischen Unterräume (und deren Konjugierte);*

(ii) *der äußeren analytischen Automorphismen von* $\mathbb{M}_{p,p}$ $(2\leqq p)$ *diejenigen hermiteschen symmetrischen Unterräume (und deren Konjugierte),*

a) *die regulär in* $\mathbb{S}_p\subseteq\mathbb{M}_{p,p}$ *sind und höchstens einen irreduziblen Faktor vom Typ* $\mathbb{S}_s$ $(1\leqq s\leqq p)$ *besitzen,*

b) *die regulär in* $\mathbb{T}_p\subseteq\mathbb{M}_{p,p}$ *sind und höchstens einen irreduziblen Faktor vom Typ* $\mathbb{T}_s$ $(3\leqq s\leqq p)$ *besitzen,*

c) *die vom Typ* $D'\times\mathbb{T}_s$ *sind, wobei* D' *regulär in* $\mathbb{S}_{p-s}$ *von dem in* a *beschriebenen Typ ist;*

(iii) *der äußeren analytischen Automorphismen von* $\mathbb{L}_n$ *($n\geqq 6$ gerade) die hermiteschen symmetrischen Unterräume vom Typ* $\mathbb{M}_{1,r}$ $\left(1\leqq r\leqq\frac{n}{2}-1\right)$ *oder* $\mathbb{L}_m$ *(m ungerade mit $1\leqq m\leqq n-1$) (und deren Konjugierte).*

Insbesondere sind in $\mathbb{L}_n$ $(n \geqq 5)$ *alle hermiteschen symmetrischen Unterräume Fixpunktmengen von analytischen Automorphismen.*

Ich will die gefundenen Ergebnisse nun auf das Problem der Bestimmung aller Spiegelungen in BS-Gebieten anwenden.

Da die Gebiete $\mathbb{M}_{p,q}$ $(2 \leqq p, 3 \leqq q)$, $\mathbb{T}_r$ $(r \geqq 5)$, $\mathbb{S}_r$ $(r \geqq 3)$, $\mathbb{E}_{16}$ und $\mathbb{E}_{27}$ keine hermiteschen symmetrischen Unterräume, also erst recht keine Fixpunktmengen, der Codimension 1 besitzen, müssen sie spiegelungsfrei sein.

Ein Beispiel für ein positives Ergebnis: $\mathbb{L}_n$ ($n \geqq 5$ ungerade) hat eine Konjugationsklasse von Fixpunktmengen der Codimension 1, nämlich $\mathbb{L}_{n-1}$. Das zu $\mathbb{L}_n$ gehörige Wurzelsystem Φ hat eine Basis $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_l\}$ (mit $l = (n+1)/2$), in der α_1 die nicht-kompakte Wurzel ist. Das zu $\mathbb{L}_{n-1}$ gehörige Untersystem Φ' hat etwa die Basis $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_{l-1}, \beta\}$ mit $\beta = \alpha_{l-1} + 2\alpha_l$ [9; S. 289]. Ein (H_2)-Diagonal -Automorphismus η zum Koeffizienten-l-Tupel $(\mu_1, \ldots, \mu_l) \in \mathbb{U}(1)^l$ erfülle $\Phi^\eta = \Phi'$. Dann ist notwendig $\mu_1 = \ldots = \mu_{l-1} = 1$, $\mu_l = -1$; η ist somit eindeutig bestimmt und induziert tatsächlich eine Spiegelung, denn die Eigenwerte des zugehörigen (linearen) Automorphismus von $\mathbb{L}_n$ sind $\mu_1, \mu_1\mu_2, \ldots, \mu_1 \ldots \mu_l$. In $\mathbb{L}_n$ (n ungerade) gibt es also genau eine Konjugationsklasse von Spiegelungen.

Genau so mühelos findet man auch alle anderen Spiegelungen in den BS-Gebieten.

Für die Lösung des Fortsetzungsproblems aus der Einleitung benütze ich die folgenden Bezeichnungen: D, $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{k}$, $\mathfrak{g}^\sim$, … seien wie bisher, D' ein regulärer hermitescher symmetrischer Unterraum von D mit $\mathfrak{g}'$, $\mathfrak{k}'$, … (für nicht reguläre Unterräume kann man analoge Überlegungen anstellen). D' sei durch das Untersystem Φ' von Φ definiert. Φ_0 sei die Menge der kompakten, Ψ^+ die Menge der positiven nicht-kompakten Wurzeln. Sei σ ein (H_2)-Automorphismus von $\mathfrak{g}'^\sim$, ω der zugehörige Automorphismus von D'. Da die Fortsetzung von inneren Automorphismen trivialerweise immer möglich ist, interessiert nur der Fall, daß σ Diagramm-Automorphismus ist. $S := \sigma^{*-1}$ werde als Automorphismus von Φ' aufgefaßt. Eine leichte Überlegung zeigt, daß folgende Aussagen äquivalent sind:

(i) ω ist zu einem Automorphismus von D fortsetzbar.
(ii) σ ist zu einem (H_2)-Automorphismus von $\mathfrak{g}^\sim$ fortsetzbar.
(iii) S ist zu einem Automorphismus T von Φ mit $T(\Phi_0) = \Phi_0$ und $T(\Psi^+) = \Psi^+$ fortsetzbar.

Darüber hinaus ist die Fortsetzung von ω zu einem inneren Automorphismus von D genau dann möglich, wenn T in (iii) aus der Weyl-Gruppe von Φ gewählt werden kann. Man kann daher alle Einzelfälle durch elementare Rechnungen in den Wurzelsystemen entscheiden; die Ergebnisse sind nicht gut systematisch zu formulieren. Als Beispiel führe ich an:

Korollar 3. *Sei D ein irreduzibles* BS-*Gebiet vom Typ* $\mathbb{L}_n$ $(n \geqq 5)$, $\mathbb{E}_{16}$ *oder* $\mathbb{E}_{27}$ *und* δ *ein innerer Automorphismus von D. Dann ist jeder analytische Automorphismus von* D^δ *zu einem (inneren) Automorphismus von D fortsetzbar außer in den drei Fällen*

(i) $D = \mathbb{E}_{16}$, $D^\delta \cong \mathbb{L}_8$; (ii) $D = \mathbb{E}_{27}$, $D^\delta \cong \mathbb{L}_{10}$; (iii) $D = \mathbb{E}_{27}$, $D^\delta \cong \mathbb{M}_{1,1} \times \mathbb{L}_{10}$.

Literatur

1. Dynkin, E. B.: Semisimple subalgebras of semisimple Lie algebras. Mat. Sbornik **30**, 349—462 (1952); — Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2, Vol. **6**, 111—244 (1957)
2. Gottschling, E.: Reflections in bounded symmetric domains. Comm. Pure Appl. Math. **22**, 693—714 (1969)
3. Helgason, S.: Differential Geometry and Symmetric Spaces. New York, London: Academic Press 1962
4. Humphreys, J. E.: Introduction to Lie Algebras and Representation Theory. Berlin, Heidelberg, New York: Springer 1972
5. Ihara, S.: Holomorphic imbeddings of symmetric domains. J. Math. Soc. Japan **19**, 261—302 und 543—544 (1967)
6. Jacobson, N.: A note on automorphisms of Lie algebras. Pacific J. Math. **12**, 303—315 (1962)
7. Meschiari, M.: On the reflections in bounded symmetric domains. Ann. Sc. Norm. Sup. Pisa **26**, 403—435 (1972)
8. Pommerening, K.: Reflections in bounded symmetric domains. Ann. Sc. Norm. Sup. Pisa **27**, 769—786 (1973)
9. Satake, I.: Holomorphic imbeddings of symmetric domains into a Siegel space. Amer. J. Math. **87**, 425—461 (1965)
10. Tits, J.: Tabellen zu den einfachen Lie-Gruppen und ihren Darstellungen. Berlin, Heidelberg, New York: Springer 1967
11. Wallach, N. R.: On maximal subsystems of root systems. Canad. J. Math. **20**, 555—574 (1968)

Angenommen am 9. Mai 1975