SieB

Ralf Krömer und Gregor Nickel (Hrsg.)

Band 10 • 2018

Siegener Beiträge zur Geschichte und Philosophie der Mathematik

Mit Beiträgen von

E. Kanterian | K. Kuhlemann |

A. Reichenberger | T. Sauer & G. Klaedtke |

S. Shokrani & S. Spies | K. Volkert | M. Wille

Ralf Krömer, Gregor Nickel (Hrsg.)

SieB

Siegener Beiträge zur Geschichte und Philosophie der Mathematik

Band 10 (2018)

Mit Beiträgen von:

E. Kanterian | K. Kuhlemann | A. Reichenberger | T. Sauer & G. Klaedtke

S. Shokrani & S. Spies | K. Volkert | M. Wille

universi
UNIVERSITÄTSVERLAG SIEGEN

Eine Leibnizsche Identität

Tilman Sauer und Gabriel Klaedtke

1 Einleitung

Gottfried Wilhelm Leibniz (1646–1716), einer der Begründer der modernen Analysis, warb 1702 in einem Brief an den französischen Mathematiker Pierre Varignon (1654–1722) für ein Vertrauen in die begrifflichen Grundlagen der neuen Infinitesimalmathematik, ungeachtet des ungeklärten Status der unendlich kleinen Grössen. Mit diesen verhielte es sich nämlich wie mit den imaginären Wurzeln:

> Mehr noch, so wie die imaginären Wurzeln ihre *Begründung in der Sache* haben—sodass der verstorbene Herr Huygens, als ich ihm mitteilte, dass
>
> $$\sqrt{1+\sqrt{-3}}+\sqrt{1-\sqrt{-3}} \text{ gleich } \sqrt[2]{6} \tag{1}$$
>
> sei, dies so bewundernswert fand, dass er mir antwortete, es gäbe darin etwas für uns Unbegreifliches [...].[1]

Der Brief von Leibniz an Varignon wurde 1702 im *Journal des Scavans* publiziert. Der dort zitierte Ausspruch stammt von Christiaan Huygens (1629–1695) und dieser schrieb ihn fast dreissig Jahre vorher in einem Brief an Leibniz. Der junge Leibniz war damals sehr stolz, dass der ältere und viel erfahrenere Huygens ihm selbstlos zu einer mathematischen Einsicht gratulierte. Was hat es mit dieser Identität auf sich?

1. „‘De plus comme les racines imaginaires ont leur *fondamentum in re*, de sorte que feu Mons. Hughens lors que je luy communiquay que $\sqrt{1+\sqrt{-3}}+\sqrt{1-\sqrt{-3}}$ est egal à $\sqrt[2]{6}$, le trouva si admirable qu'il me repondit qu'il y a là dedans quelque chose qui nous est incomprehensible;“ Leibniz an Pierre Varignon, 2. Februar 1702, auszugsweise publiziert in (Leibniz 1702), kritisch ediert in (Leibniz 2017, S. 13). Die deutsche Übersetzung dieser Stelle folgt (Leibniz 2011, S. 354); soweit nicht anders angegeben, stammen die deutschen Übersetzungen der anderen lateinischen Zitate von Natalia Poleacova.

In den mit viel Liebe zum Detail und wissenschaftshistorischer Kenntnis akribisch aufbereiteten Werkeditionen bedeutender Mathematiker finden sich, oft in Fussnoten versteckt, immer wieder kleine interessante Episoden, in denen beispielsweise deutlich wird, wie in der Vergangenheit auch grosse Mathematiker noch mit Fragen gerungen haben, welche heute in den Schulunterricht fallen. Auf die im folgenden diskutierte Episode weist Pieper (1985, S. 204; 1988, Aufgabe 38) hin. Die Identität selbst findet sich bereits bei Kästner (1794, S. 24–25), Tropfke (1902, S. 171) und Remmert (1983, S. 48).

2 Historischer Hintergrund

Komplexe Zahlen traten historisch zuerst bei der Lösung quadratischer, kubischer und quartischer Gleichungen auf, und bei der Lösung quadratischer Gleichungen können sie auch im Schulunterricht eingeführt werden. Historisch wurde das Wurzelziehen aus negativen Grössen bei der Lösung quadratischer Gleichungen jedoch lange vermieden. Es wurden stets unterschiedliche Fälle von quadratischen Gleichungen unterschieden, je nachdem ob die Koeffizienten, die ursprünglich immer als ganze Zahlen gedacht wurden, positiv oder negativ waren, und Fälle negativer Diskriminante wurden ausgeschlossen. Ähnliche Fallunterscheidungen wurden auch noch beim Lösen kubischer Gleichungen getroffen.

Die Geschichte der Lösung der kubischen (und quartischen) Gleichungen ist eine an menschlichen Dramen reiche Episode, die man in vielen Darstellungen der Mathematikgeschichte nachlesen kann. Erste Verfahren zur Lösung kubischer Gleichung wurden von dem italienischen Mathematiker Scipione del Ferro (ca. 1465–1526) um das Jahr 1500 herum gefunden. Vor seinem Tod teilte Ferro seine Lösung noch seinem Schüler Antonio Maria Fior mit.

Als Fior jedoch den Rechenmeister Niccolò Tartaglia (ca.1500–1567) zu einem öffentlichen Wettbewerb, bei dem es um die Auflösung von kubischen Gleichungen der Form $x^3 = px + q$ ging, aufforderte, musste er feststellen, dass Tartaglia seinerseits bereits die Formeln zur Lösung kubischer Gleichungen gefunden hatte. Tartaglia gab dann dem Drängen seines Landsmannes Geronimo Cardano (1501–1576) nach und verriet ihm seine Formeln unter dem Versprechen, dass Cardano sie nicht publizieren würde. Cardano brach sein Versprechen aber, vielleicht auch weil er erfuhr, dass Tartagla gar nicht die Priorität gebührte, und publizierte die später so genannten Cardanischen Formeln in seiner *Ars magna* von 1545, nicht jedoch ohne Tartaglia als den Urheber dieser Formeln explizit zu nennen. Die *Ars magna* enthielt ausserdem noch das Lösungsverfahren für quartische Gleichungen, welches von Cardanos Schüler Ludovico Ferrari (1522–1565) gefunden worden war.

Für die Geschichte der komplexen Zahlen ist schliesslich eine neue zusammenfassende Darstellung der algebraischen Methoden durch Raphael Bombelli (ca. 1526–1573) wichtig. Dieser verfasste etwa um das Jahr 1560 herum sein Werk *L'Algebra*, in dem er eine zusammenfassende Darstellung gab und dabei auch bemerkte, dass Wurzelausdrücke negativer Zahlen, die bei Anwendung der Formeln von Cardano und Ferrari regelmässig auftreten, in speziellen Fällen einfachen reellen Wurzelausdrücken gleich sind. Bombellis *L'Algebra* wurde erst 1572, kurz vor seinem Tod teilweise publiziert.

Wie Hofmann (1972) bemerkt, stellt Bombellis Werk einen Höhepunkt der Tradition der frühen italienischen Algebraiker dar, die sich dann aber nicht weiter entwickelte. Auch Bombellis *L'Algebra* geriet für mehrere Jahrzehnte in Vergessenheit. Nachdem aber der junge Leibniz in seinen Pariser Lehrjahren 1672–1676 mehr oder weniger durch Zufall in der königlichen Bibliothek in Paris auf Bombellis *L'Algebra* gestoßen war, erkannte er, dass die dort gegebenen Verfahren zur Auflösung von Gleichungen dritter und vierter Ordnung ohne Einschränkungen, also auch ohne Fallunterscheidungen gültig sind. Jedenfalls berichtete er seinem Mentor Huygens von dieser Einsicht Mitte 1675 in einem Brief und nahm gleichzeitig Priorität für diese Einsicht in Anspruch. Er schrieb:

> So denke ich als Erster dargelegt zu haben
> 1. dass die Cardanischen Formeln absolut gute und allgemeine Formeln sind, ob ausziehbare, oder nicht ausziehbare; ob wahre, ob falsche oder negative;
> 2. dass wir durch dieses Mittel die allgemeine Lösung aller kubischen Gleichungen haben.

und dann fuhr er fort

> 3. Ich habe als Erster herausgefunden, dass man nicht ausziehbare zusammengesetzte Wurzeln aller gradzahligen Grade, die die imaginären Zahlen enthalten, formen kann und dass deren Realität nichtsdestoweniger ohne Extraktion handfest gemacht werden kann: Um zu beurteilen, dass die Realität solcher Formeln nicht durch Extrahierbarkeit begrenzt ist: davon ist das Beispiel der Formel $\sqrt{1+\sqrt{-3}}+\sqrt{1-\sqrt{-3}}$, die $\sqrt{6}$ ergibt, ein beachtlicher Beweis.[2]

2. "Ainsi je croy d'avoir demonstré le premier (1) que les formules de Cardan sont absolument bonnes et generales, soit extrahibles, soit non extrahibles; soit vrayes, soit fausses ou negatives; (2) que nous avons par ce moyen la resolution generale de toutes les equations cubiques. (3) J'ay trouvé le premier qu'on peut former des racines composées non extrahibles de tous les

Huygens war in der Tat beeindruckt und antwortete am 30. September 1675 mit jenem Satz, den Leibniz viele Jahre später wieder zitieren sollte:

> Die Bemerkung, die Sie bezüglich der extrahierbaren Wurzeln machen, und mit imaginären Quantitäten, die dennoch eine reelle Quantität ergeben, wenn sie zusammengefügt werden, ist erstaunlich und auf jeden Fall neu. Man hätte niemals geglaubt, dass $\sqrt{1+\sqrt{-3}}+\sqrt{1-\sqrt{-3}}=\sqrt{6}$ wird, und es gibt da drin etwas Verborgenes, was uns unverständlich ist.[3]

3 Moderne Behandlung des Leibnizschen Ausdrucks

Unser Problem ist also die Bedeutung des Leibnizschen Ausdrucks

$$\sqrt{1+\sqrt{-3}}+\sqrt{1-\sqrt{-3}} =: \sqrt{a}+\sqrt{b} =: x+y =: z, \tag{2}$$

wo $a, b, x, y, z \in \mathbb{C}$. Es ist dabei zu beachten, dass fast alle Techniken, mit denen wir heute komplexe Zahlen handhaben, Leibniz und seinen Zeitgenossen noch nicht zur Hand standen. So verstehen wir erst seit Gauss komplexe Zahlen als Punkte in der komplexen Zahlenebene, was uns erlaubt, zur Berechnung der Wurzeln von a und b diese in Polarkoordinaten zu schreiben. Die Auffassung der komplexen Zahlen als Punkte in der komplexen Zahlenebene erlaubt uns ausserdem eine graphische Veranschaulichung von der Mehrdeutigkeit der Wurzelfunktion.

Schreiben wir also eine komplexe Zahl $z \in \mathbb{C}$ als

$$z = \mathrm{Re}(z) + i\,\mathrm{Im}(z) = |z| \cdot e^{i\varphi_z} \tag{3}$$

mit

$$|z| = \sqrt{\mathrm{Re}(z)^2 + \mathrm{Im}(z)^2} \tag{4}$$

degrez pairs, qui contiennent des imaginares, et dont neantmoins la realité peut estre rendüe palpable sans extraction: pour faire juger que la realité de telles formules n'est pas bornée par l'extrahibilité: dont l'example de la formule $\sqrt{1+\sqrt{-3}}+\sqrt{1-\sqrt{-3}}$ qui vaut $\sqrt{6}$, est une preuve tres considerable." Leibniz an Huygens, etwa Mitte September 1675 (Huygens 1899, Vol.8, No. 2057, S. 501, Leibniz 1976, 278).

3. "La remarque que vous faites touchant des racines inextrahibles, et avec des quantitez imaginaires, qui pourtant adjoutées ensemble composent une quantitè reelle, est suprenante et tout à fait nouvelle. L'on n'auroit jamais cru que $\sqrt{1+\sqrt{-3}}+\sqrt{1-\sqrt{-3}}$ fist $\sqrt{6}$, et il y a quelque chose de cachè là dedans qui nous est incomprehensible." Huygens an Leibniz, 30. September 1675 (Huygens 1899, Vol.8, No. 2058, S. 505–6, Leibniz 1976, 284).

und

$$\varphi = \arctan\left(\frac{\mathrm{Im}(z)}{\mathrm{Re}(z)}\right). \tag{5}$$

Es sind dann also der Betrag von a und b gegeben durch

$$|a| = |b| = \sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{4} = 2 \tag{6}$$

und ihre Winkel durch

$$\varphi_a = \arcsin\left(\frac{\mathrm{Im}(a)}{|a|}\right) = \arcsin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{\pi}{3}, \tag{7}$$

$$\varphi_b = \arcsin\left(\frac{\mathrm{Im}(b)}{|b|}\right) = \arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\frac{\pi}{3}. \tag{8}$$

Mit Verwendung der Eulerschen Formel

$$e^{i\varphi} = \cos(\varphi) + i\sin(\varphi) \tag{9}$$

und der Formel von de Moivre

$$[\cos(x) + i\sin(x)]^n = \cos(nx) + i\sin(nx) \text{ für } n \in \mathbb{N}, x \in \mathbb{R} \tag{10}$$

und unter Beachtung der Periodizität der trigonometrischen Funktionen erhalten wir also für die Wurzeln von a und b

$$x_1 = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{6}} \tag{11}$$

$$x_2 = \sqrt{2}e^{i(\frac{\pi}{6}+\pi)} = \sqrt{2}e^{i\frac{7\pi}{6}} = -\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{6}} \tag{12}$$

$$y_1 = \sqrt{2}e^{i\frac{11\pi}{6}} = \sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{6}} \tag{13}$$

$$y_2 = \sqrt{2}e^{i(\pi-\frac{\pi}{6})} = \sqrt{2}e^{i\frac{5\pi}{6}} = -\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{6}} \tag{14}$$

Entsprechend erhalten wir für den gesamten Wurzelausdruck z vier verschiedene Kombinationsmöglichkeiten:

$$z_1 = x_1 + y_1 = +\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{6}} + \sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{6}} = +2\sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \sqrt{6}, \tag{15}$$

$$z_2 = x_1 + y_2 = +\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{6}} - \sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{6}} = +i2\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = i\sqrt{2}, \tag{16}$$

$$z_3 = x_2 + y_1 = -\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{6}} + \sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{6}} = -i2\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = -i\sqrt{2}, \tag{17}$$

$$z_4 = x_2 + y_2 = -\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{6}} - \sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{6}} = -2\sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = -\sqrt{6}. \tag{18}$$

Welche von den vier Möglichkeiten ist nun das richtige Ergebnis? Die Tatsache, dass wir vier unterschiedliche Ausdrücke erhalten haben, liegt daran, dass wir die Zweideutigkeit der Quadratwurzelfunktion noch nicht beseitigt haben. Diese Zweideutigkeit zeigt sich hier an der Periodizität der trigonometrischen Funktionen, also daran, dass zu jeder komplexen Zahl $\neq 0$, welche Quadratwurzel einer anderen Zahl ist, eine weitere Quadratwurzel der ursprünglichen Zahl gefunden werden kann, indem man den Winkel um π erhöht oder vermindert.

Im Reellen wird die Mehrdeutigkeit der Wurzelfunktion gewöhnlich dadurch beseitigt, dass man sich auf die positive Quadratwurzel beschränkt. Im Komplexen entspricht dies dem Auszeichnen eines Hauptwertes. Diese Auszeichnung unterliegt nun aber prinzipiell einer konventionellen Festlegung.

Versteht man unter $\sqrt{w}$ den Hauptwert einer komplexen Zahl w und definieren wir als Hauptwert der n-ten Wurzel einer komplexen Zahl $z = re^{i\theta}$ die Zahl $\sqrt[n]{r}\cdot e^{i\frac{\theta}{n}}$ mit $0 \leq \frac{\theta}{n} < \frac{2\pi}{n}$, für die Quadratwurzel also $0 \leq \theta < 2\pi$, dann sind als Hauptwerte der Wurzeln von a und b die Zahlen x_1 und y_2 anzusehen. Im Sinne dieser Konvention des Hauptwertes wäre also z_2 die eindeutige Lösung der Summe $\sqrt{a} + \sqrt{b}$ und der Leibnizsche Ausdruck ergäbe sich, anders als von Leibniz angegeben, eindeutig als

$$\sqrt{1 + \sqrt{-3}} + \sqrt{1 - \sqrt{-3}} = i\sqrt{2}. \tag{19}$$

Die Festlegung auf eine Definition des Hauptwerts ist prinzipiell willkürlich, solange die Definition die Eindeutigkeit der Wurzelfunktion herstellt. Eine andere oft verwendete Definition des Hauptwertes legt fest, dass man die Lösung mit positivem Realteil betrachtet, also $-\pi/2 < \theta/2 \leq \pi/2$. Bei dieser Konvention ergibt sich in der Tat Leibnizens Ausdruck.[4]

Will man die willkürliche Einschränkung der Quadratwurzelfunktion auf den eindeutigen Zweig des Hauptwertes vermeiden und stattdessen die volle Lösungsmannigfaltigkeit der Wurzelfunktion beibehalten, dann kann man die Mehrdeutigkeit durch Einführen Riemannscher Flächen beseitigen, wie dies in der Funktionentheorie gezeigt wird. Hier wird die komplexe Ebene gewissermassen verdoppelt und die zwei gleichen Argumente für die zwei unterschiedlichen Wurzelausdrücke liegen dann auf unterschiedlichen Blättern. Um die Stetigkeit der Abbildung zu gewährleisten, müssen die beiden Blätter so miteinander verknüpft werden, dass es, vom Mittelpunkt aus ins Unendliche gezogen, einen Schnitt gibt, so dass bei einem Übergang des Argumentvektors über die Schnittline das Blatt gewechselt wird.

4. Pieper (1985) ist an dieser Stelle inkonsistent. Seine Definition des Hauptwertes (S. 127) entspricht $0 \leq \theta < 2\pi$ und führt zu dem Ergebnis $i\sqrt{2}$ wie auf S. 238 angegeben, ohne dass beim Zitat der Leibnizischen Identität (S. 204) darauf hingewiesen wird.

Den verschiedenen Definitionen des Hauptwertes entsprechen dann unterschiedliche Schnitte der komplexen Ebene, in denen der Übergang zwischen den beiden Blättern passiert. Im Fall der ersten Definition liegt der Schnitt auf der positiven Realteilachse, im zweiten Fall auf der negativen Realteilachse. Für unser Problem der Addition zweier Wurzelausdrücke muss man bei beiden Summanden auf demselben Blatt bleiben. Im ersten Fall erhält man als zweite Lösung, also auf dem zweiten Blatt $z_3 = -i\sqrt{2}$, im zweiten Fall entsprechend $-\sqrt{6}$.

Bei einer konsequenten Beseitigung der Mehrdeutigkeit der Wurzelfunktion mithilfe Riemannscher Blätter wird also die volle Kombinationsvielfalt von 4 Lösungen z_1 bis z_4 in Gl. (15)–(18) derart eingeschränkt, dass wir nur jeweils zwei Lösungen erhalten, eine für jedes Blatt, und zwar im Falle, dass der Schnitt in der positiven Realteilachse liegt, $\pm\sqrt{6}$, im Fall, dass der Schnitt auf der negativen Realteilachse liegt, $\pm i\sqrt{2}$.

4 Herleitung des Leibnizschen Ausdrucks aus den Cardanischen Formeln

Betrachten wir die kubische Gleichung

$$\rho^3 - 8 = 0 \tag{20}$$

mit der offensichtlichen Lösung

$$\rho_1 = 2, \tag{21}$$

dann erhalten wir mit Polynomdivision

$$(\rho - \rho_1)(\rho^2 + 2\rho + 4) = \rho^3 - 8 = 0. \tag{22}$$

Also sind die Ausdrücke

$$\rho_{2,3} = -1 \pm \sqrt{-3} \tag{23}$$

Nullstellen der Gleichung (20).

Bilden wir andererseits aus den vier Zahlen z_1 bis z_4 das Polynom vierten Grades

$$P(z) \equiv (z - z_1)(z - z_2)(z - z_3)(z - z_4), \tag{24}$$

so erhalten wir das einfache Polynom

$$P(z) = (z-\sqrt{6})(z-i\sqrt{2})(z+\sqrt{6})(z+i\sqrt{2}) = (z^2-6)(z^2+2) = z^4-4z^2-12, \tag{25}$$

dessen Nullstellen per Konstruktion die z_i sind.

Betrachten wir nun andererseits die Gleichung

$$P(z) = z^4 - 4z^2 - 12 = 0 \tag{26}$$

als gegeben und fragen wir uns nach seiner Lösung, indem wir das Verfahren von Ferrari anwenden. Dieses verlangt in einem ersten Schritt, dass wir die allgemeine Polynomgleichung vierten Grades $x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ mit x, a, b, c, $d \in \mathbb{C}$ durch die Substitution $x = z - \frac{a}{4}$ auf die Form

$$z^4 + pz^2 + qz + r = 0 \tag{27}$$

reduzieren. Unser Polynom $P(z)$ hat aber bereits diese Form mit

$$p = -4, \quad q = 0, \quad r = -12. \tag{28}$$

Diese zerlegen wir nun in einem zweiten Schritt in zwei Gleichungen zweiten Grades. Dafür addieren wir zuerst auf beiden Seiten der Gleichung $2z^2u + u^2$, um eine quadratische Ergänzung durchführen zu können. Damit ergibt sich

$$(z^2 + u)^2 = (2u - p)z^2 - qz + (u^2 - r). \tag{29}$$

Als Nächstes wird rechts eine Null addiert, um eine weitere quadratische Ergänzung durchführen zu können

$$(z^2 + u)^2 = (2u - p)z^2 - qz + \left(\frac{q}{2\sqrt{2u - p}}\right)^2 + (u^2 - r) - \left(\frac{q}{2\sqrt{2u - p}}\right)^2 \tag{30}$$

$$= \left[\sqrt{2u - p}z - \frac{q}{2\sqrt{2u - p}}\right]^2 + (u^2 - r) - \left(\frac{q}{2\sqrt{2u - p}}\right)^2. \tag{31}$$

Die rechte Seite wird ein Quadrat, wenn

$$(u^2 - r) = \left(\frac{q}{2\sqrt{2u - p}}\right)^2, \tag{32}$$

was auf eine Gleichung dritten Grades in u hinausläuft,

$$u^3 - \frac{p}{2}u^2 - ru + \frac{pr}{2} - \frac{q^2}{8} = 0. \tag{33}$$

Falls wir eine reelle Lösung u_0 dieser Gleichung finden, können wir sie in Gleichung

(31) einsetzen und die Wurzel ziehen. Wir erhalten dann

$$z_1^2 + u_0 = +\left(\sqrt{2u_0 - p}\right) z_1 - \frac{q}{2\sqrt{2u_0 - p}} \tag{34}$$

und

$$z_2^2 + u_0 = -\left(\sqrt{2u_0 - p}\right) z_2 + \frac{q}{2\sqrt{2u_0 - p}} \tag{35}$$

mit den Lösungen

$$z_{1,\pm} = +\frac{\sqrt{2u_0 - p}}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sqrt{2u_0 - p}}{2}\right)^2 - \left(u_0 + \frac{q}{2\sqrt{2u_0 - p}}\right)} \tag{36}$$

$$z_{2,\pm} = -\frac{\sqrt{2u_0 - p}}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sqrt{2u_0 - p}}{2}\right)^2 - \left(u_0 - \frac{q}{2\sqrt{2u_0 - p}}\right)}. \tag{37}$$

Um u_0 für unser Problem zu bestimmen, brauchen wir nun nicht die vollen Cardanischen Gleichungen für die Lösung der kubischen Gleichung (33), sondern wir nutzen aus, dass in unserem Fall (28) die Bedingung (32) lautet

$$u^2 + 12 = 0 \tag{38}$$

mit der Lösung

$$u_{0,\pm} = \pm 2\sqrt{-3}. \tag{39}$$

Setzt man nun $u_{0,\pm}$ und (28) in (36) oder in (37) ein, so erhält man jeweils die vier Kombinationen (15)–(18)

$$z_{1,2,3,4} = \pm\sqrt{1 + \sqrt{-3}} \pm \sqrt{1 - \sqrt{-3}}, \tag{40}$$

also auch genau den Ausdruck, den Leibniz in seinen Briefen mehrfach erwähnt.

5 Historische Diskussion

Wir sehen also, dass die konsequente Anwendung des Verfahrens und der Regeln von Ferrari und Cardano auf die relativ einfache Gleichung vierten Grades (26) als Lösung genau den Leibnizschen Ausdruck (40) produziert. Das ist für uns nicht weiter verwunderlich, da wir das Polynom $P(z)$ ja gerade so gebildet haben, dass alle vier Wurzeln z_i seine Nullstellen sind. Da Cardano seine Formeln ja bereits publiziert hatte, ist also denkbar, dass Leibniz auf seinen Ausdruck durch

Anwendung dieser Formeln auf den Ausdruck (40) gekommen ist. Andererseits ist leicht nachzuprüfen, dass $\pm\sqrt{6}$ jeweils eine Lösung der Gleichung ist.

Es ist nun darauf hinzuweisen, dass wir z.B. bei dem Schritt von (34) zu (36) die Gültigkeit der Rechenregel

$$\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} \stackrel{?}{=} \sqrt{a \cdot b} \tag{41}$$

vorausgesetzt haben, welche für komplexe Zahlen im Allgemeinen nicht gilt, wie man z.B. an folgendem Beispiel sieht

$$-1 = i^2 = (\sqrt{-1})^2 = \sqrt{-1} \cdot \sqrt{-1} \neq \sqrt{(-1)\cdot(-1)} = \sqrt{1} = 1. \tag{42}$$

Andererseits benutzt Leibniz gerade diese Rechenregel an anderer Stelle, um nachzurechnen, dass sein Ausdruck sich genau auf $\sqrt{6}$ reduziert. Er schreibt nämlich in seiner Schrift *De resolutionibus aequationum cubicarum triradicalium, de radicibus realibus, quae interventu imaginarium exprimuntur, deque sexta quadam operatione arithmetica*:

> Schliesslich kam es mir in den Sinn, ein Verfahren aufzustellen, welches ich hier mitteile:
>
> $$d \sqcap \underbrace{\sqrt{\frac{b}{2} + \sqrt{\frac{b^2}{4} - c^2}}}_{A} + \underbrace{\sqrt{\frac{b}{2} - \sqrt{\frac{b^2}{4} - c^2}}}_{B} \text{ oder } d \sqcap A + B.$$
>
> Also auf beiden Seiten quadriert
>
> $$d^2 \sqcap \overbrace{\frac{b}{2} + \sqrt{\frac{b^2}{4} - c^2}}^{+A^2} + \overbrace{\frac{b}{2} - \sqrt{\frac{b^2}{4} - c^2}}^{+B^2} + \overbrace{2c}^{+2AB},$$
>
> denn das Rechteck AB oder das Produkt von $\sqrt{\frac{b}{2} + \sqrt{\frac{b^2}{4} - c^2}}$ mal $\sqrt{\frac{b}{2} - \sqrt{\frac{b^2}{4} - c^2}}$ macht c, wie die Rechnung zeigt; es wird also $d^2 \sqcap b + 2c$ und daher $d \sqcap \sqrt{b+2c}$. Setzt man also beide Werte von d einander gleich, ergibt dies
>
> $$\sqrt{b+2c} \sqcap \sqrt{\frac{b}{2} + \sqrt{\frac{b^2}{4} - c^2}} + \sqrt{\frac{b}{2} - \sqrt{\frac{b^2}{4} - c^2}};$$
>
> und daher, wenn wir als Zahlen einsetzen $b \sqcap 2$ und c auch $\sqcap 2$, ergibt

dies $\sqrt{6} \sqcap \sqrt{1+\sqrt{-3}} + \sqrt{1-\sqrt{-3}}$.[5]

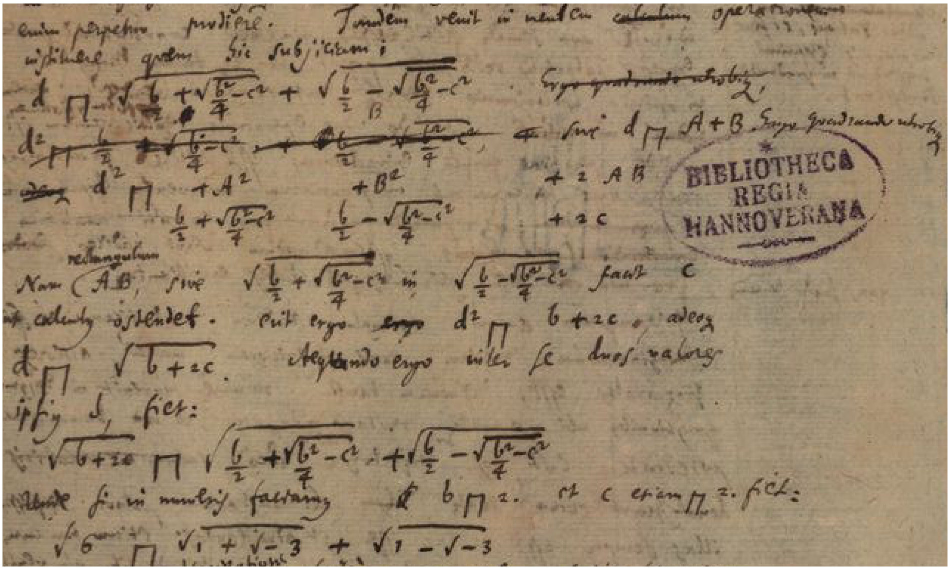

Abbildung 1: Facsimile des Leibnizschen Textes LH 35,4, 7, f2.

Wir sehen also, dass Leibniz hier ganz explizit in seinem „Verfahren“ die Rechen-

5. „Tandem venit in mentem operationem instituere quam hic subiciam:

$$d\sqcap \underbrace{\sqrt{\frac{b}{2}+\sqrt{\frac{b^2}{4}-c^2}}}_{A} + \underbrace{\sqrt{\frac{b}{2}-\sqrt{\frac{b^2}{4}-c^2}}}_{B} \text{ oder } d \sqcap A+B.$$

Ergo quadrando utrobique

$$d^2 \sqcap \overset{+A^2}{\frac{b}{2}+\sqrt{\frac{b^2}{4}-c^2}} + \overset{+B^2}{\frac{b}{2}-\sqrt{\frac{b^2}{4}-c^2}} \overset{+2AB}{+2c}.$$

Nam rectangulum AB, sive $\sqrt{\frac{b}{2}+\sqrt{\frac{b^2}{4}-c^2}}$ in $\sqrt{\frac{b}{2}-\sqrt{\frac{b^2}{4}-c^2}}$ facit c ut calculus ostendet. Erit ergo $d^2 \sqcap b+2c$, adeoque $d \sqcap \sqrt{b+2c}$. Aequando ergo inter se duos valores ipsius d, fiet

$$\sqrt{b+2c} \sqcap \sqrt{\frac{b}{2}+\sqrt{\frac{b^2}{4}-c^2}} + \sqrt{\frac{b}{2}-\sqrt{\frac{b^2}{4}-c^2}}.$$

Unde si in numeris faciamus $b \sqcap 2$. et c etiam $\sqcap 2$. fiet $\sqrt{6} \sqcap \sqrt{1+\sqrt{-3}} + \sqrt{1-\sqrt{-3}}$.“ (Leibniz 1971, S. 141, Gerhardt 1987, S. 553, Leibniz 1996, S. 683). Ein Facsimile des entsprechenden Textstücks im Originalmanuskript zeigt Abb. 1).

regel (41) implementiert und dass dieses Verfahren ihm die Identität (1) liefert. Andererseits ist es möglich, dass Leibniz auf seinen Ausdruck durch Lösung der quartischen Gleichung (26) gekommen ist und er die Identität (1) dadurch bestätigt sah, dass $\pm\sqrt{6}$ offenbar eine Lösung von (26) ist, wie man durch Einsetzen sofort sieht. Man muss sich aber klar machen, dass Leibniz in aller Wahrscheinlichkeit die quartische Gleichung (26) nicht durch Kenntnis ihrer Nullstellen erhalten hatte. Es ist auch zu beachten, dass zwar offenbar ein Polynom, das durch Kenntnis und Ausmultiplikation seiner n Nullstellen entsteht, vom n-ten Grade ist. Daraus folgt aber noch nicht umgekehrt, dass jedes Polynom n-ten Grades auch n Nullstellen besitzt, was wir erst seit dem Fundamentalsatz der Algebra sicher wissen.

Jedenfalls erwähnte Leibniz seine Identität einige Monate später nochmals. Am 27. August 1676 schrieb Leibniz nämlich einen wichtigen und später berühmten Brief, in welchem er seine eigenen bis dato erlangten Einsichten zusammenfasste, um sich seinem Konkurrenten Newton gegenüber zu behaupten. In einem Brief an Henry Oldenburg (ca. 1619–1677), den Sekretär der Royal Society, schrieb Leibniz unter Anderem:

> Ich glaube, dass die Hoffnung auf Aufhebung der imaginären Größen, die in den Ausdrücken realer Wurzeln enthalten sind, vergeblich ist, ja selbst die Suche danach. Jene sind nämlich weder den Rechnungen noch den Konstruktionen in irgendeiner Weise hinderlich: Und zwar sind Großen wahre und reale Größen, wenn sie miteinander verbunden werden, wegen der virtuellen Zerstörungen. Dies deckte ich durch viele elegante Beispiele und Beweise auf.
>
> Zum Beispiel: $\sqrt{1+\sqrt{-3}}+\sqrt{1-\sqrt{-3}}=\sqrt{6}$. Obgleich nämlich weder aus dem Binom $\sqrt{1+\sqrt{-3}}$ noch aus dem Binom $\sqrt{1-\sqrt{-3}}$ die Wurzel gezogen werden wird, und daher auf diese Weise die imaginäre Größe $\sqrt{-3}$ nicht zerstört wird, ist dennoch anzunehmen, dass sie virtuell zerstört worden ist, was sich in Wirklichkeit zeigen würde, wenn die Wurzelausziehung stattfinden könnte. Jedoch wird auf einem anderen Weg ermittelt, dass diese Summe $\sqrt{6}$ ist.[6]

6. "Imaginarium quantitatum in Realium Radicum expressiones ingredientium sublationem frustra puto sperari, imo quaeri. Neque enim illae ullo modo vel Calculis vel Constructionibus obsunt: Et verae Realesque sunt Quantitates, si inter se conjunguntur, ob destructiones virtuales. Quod multis elegantibus Exemplis et Argumentis deprehendi.
Exempli gratia $\sqrt{1+\sqrt{-3}}+\sqrt{1-\sqrt{-3}}=\sqrt{6}$. Tametsi enim neque ex Binomio $\sqrt{1+\sqrt{-3}}$ neque ex Binomio $\sqrt{1-\sqrt{-3}}$ radix extrahetur, nec proinde sic destruetur imaginaria $\sqrt{-3}$ supponenda tamen est destructa esse virtualiter, quod actu appareret si fieri posset Extractio. Alia tamen via haec summa reperitur esse $\sqrt{6}$." Leibniz an Oldenburg, 27.August 1676 (Leibniz 1976, 581); englische Übersetzung in (Hall und Hall 1986, Nr.2956).

Welches dieser andere Weg ist, auf dem die Identität (1) bewiesen werden kann, lässt Leibniz hier offen. Zwei Möglichkeiten haben wir vorgestellt: 1) als Lösung der Gleichung (26), oder 2) mittels seines „Verfahrens“, bei dem die Rechenregel (41) zugrundegelegt wird.

Leibnizens Behauptungen blieben unter seinen Zeitgenossen nicht unwidersprochen. Oldenburg hatte nämlich als Sekretär der Royal Society die Aufgabe, Abschriften oder Exzerpte der ihm zugehenden Briefe auch an andere Mathematiker weiterzuleiten. So informierte er auch den englischen Mathematiker John Wallis (1616–1703), der sich ebenfalls viel mit der Lösung algebraischer Gleichungen beschäftigt hatte (Scriba 1966; Mayer 2004; Probst 2018). Oldenburgs Brief an Wallis ist nicht erhalten, aber in Reaktion auf Leibnizens Brief schrieb John Wallis an seinen Kollegen John Collins (1625–1683) am 16. September 1676:

> Was meiner Meinung nach über die unmögliche Zahl $\sqrt{1+\sqrt{-3}} + \sqrt{1-\sqrt{-3}} = \sqrt{6}$ zu sagen wäre, sollst Du aus dem sehen, was zum Brief an Herrn Tschirnhaus gesagt wurde. Im Ganzen ist es sicherlich wahr, dass $\sqrt{1+\sqrt{-3}}+\sqrt{1-\sqrt{-3}}$ in sich geführt, das Quadrat 6 wieder herstellt und dass es deswegen gewissermaßen dessen Wurzel sei, jedoch nicht die Wurzel des wahren Quadrats, sondern nur eines monströsen und imaginären Quadrats, was nämlich das doppelte Rechteck hat und größer als die Summe der Quadrate der Teile der Wurzel ist. Schaue, ob nicht eher zu sagen wäre $\sqrt{1+\sqrt{-3}} + \sqrt{1-\sqrt{-3}} = -\sqrt{-6}$.[7]

Wallis gesteht Leibniz zwar die Gültigkeit der Identität (1) zu, aber er bezweifelt, ob dies die einzige oder vielleicht sogar die wahre Lösung sei. Seine alternative Lösung ist rätselhaft vor dem Hintergrund des mathematischen Sachverhalts, es handelt sich bei dem Minuszeichen in der Wurzel vielleicht um einen Schreibfehler. Interessant ist aber sein Versuch der geometrischen Deutung des Quadrats einer imaginären Zahl. Etwas früher hatte er an Collins dazu Folgendes geschrieben

7. „De numero impossibili $\sqrt{1+\sqrt{-3}}+\sqrt{1-\sqrt{-3}} = \sqrt{6}$ quid dicendum censeam, videas ex eis quae ad D. Tschirnhausii literas dicta sunt. Omnino quidem verum est $\sqrt{1+\sqrt{-3}}+\sqrt{1-\sqrt{-3}}$ in se ductam restituere quadratum 6; adeoque hujus radicem quadantenus esse, non tamen quadrati veri, sed monstrosi et imaginarii tantum, utpote quod habeat duplum rectangulum, majus summa quadratorum partium radicis. Vide annon dicendum potius $\sqrt{1+\sqrt{-3}} + \sqrt{1-\sqrt{-3}} = -\sqrt{-6}$.“ (Rigaud 1965, Nr. CCCXLIII, S.599). In Rigaud’s Edition wurde hier stillschweigend ein Fehler korrigiert. Es steht nämlich im Original bei der ersten Identität $\sqrt{1+\sqrt{-3}} + \sqrt{1-\sqrt{-3}} = 6$, also ohne das Wurzelzeichen auf der rechten Seite. Dagegen sind beide Minuszeichen auf der rechten Seite der zweiten Identität im Original so vorhanden, d.h. es handelt sich hier nicht um einen Transkriptionsfehler des Herausgebers Rigaud.

> [...] that a negative plane may as well be admitted in algebra as a negative length, both being in nature equally impossible; for there can no more be a line less than nothing than a plane less than nothing, both being but imaginable; and if we suppose such a negative square, we may as well suppose it to have a side, not indeed an affirmative, or a negative length, but a supposed mean proportional between a negative and positive thus designable, $\sqrt{-n}$, or rather $\sqrt{-n^2}$, that is $\sqrt{+n \times -n}$, a mean proportional between $+n$ and $-n$. Rigaud 1965, Nr.CCCXXXVI, S.577–8

In der geometrischen Deutung eines binomischen Quadrats $(a+b)^2$ ist für reelle a und b die Summe der Quadrate a^2+b^2 immer grösser als die Summe der Rechtecke $2ab$. Bei dem Quadrat des Leibnizschen Ausdrucks $\left(\sqrt{1+\sqrt{-3}}+\sqrt{1-\sqrt{-3}}\right)^2$ ist dies allerdings nicht der Fall. Daher spricht Wallis auch von einem "monströsen" oder "imaginären" Quadrat.

6 Eine Verallgemeinerung des Leibnizschen Ausdrucks

Betrachten wir abschliessend nochmals allgemein und aus heutiger Sicht die Summe

$$z = \sqrt{a} + \sqrt{\overline{a}} \tag{43}$$

der Wurzeln zweier konjugiert komplexer Zahlen $a = j + ik = re^{i\varphi}$ und $\overline{a} = j - ik = re^{-i\varphi}$ mit j, k, $\varphi \in \mathbb{R}$, $0 \leq r \in \mathbb{R}$, dann gilt wieder

$$r = |a| = |\overline{a}| = \sqrt{j^2 + k^2} \tag{44}$$

und

$$\pm\,\varphi = \arcsin\left(\frac{\pm k}{r}\right). \tag{45}$$

Die Wurzeln lauten dann

$$x_{1/2} = \pm\sqrt{r}e^{i\frac{\varphi}{2}} \tag{46}$$

$$y_{1/2} = \pm\sqrt{r}e^{-i\frac{\varphi}{2}}, \tag{47}$$

und wir erhalten wieder vier Kombinationsmöglichkeiten

$$\begin{aligned}
z_1 = x_1 + y_1 &= \sqrt{r}e^{i\frac{\varphi}{2}} + \sqrt{r}e^{-i\frac{\varphi}{2}} \\
&= \sqrt{r}\left[\cos\left(\frac{\varphi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{\varphi}{2}\right) + \cos\left(\frac{\varphi}{2}\right) - i\sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)\right] \\
&= 2\sqrt{r}\cos\left(\frac{\varphi}{2}\right) \qquad (48) \\
z_2 = x_1 + y_2 &= \sqrt{r}e^{i\frac{\varphi}{2}} - \sqrt{r}e^{-i\frac{\varphi}{2}} \\
&= \sqrt{r}\left[\cos\left(\frac{\varphi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{\varphi}{2}\right) - \cos\left(\frac{\varphi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)\right] \\
&= 2i\sqrt{r}\sin\left(\frac{\varphi}{2}\right) \qquad (49) \\
z_3 = x_2 + y_1 &= -\sqrt{r}e^{i\frac{\varphi}{2}} + \sqrt{r}e^{-i\frac{\varphi}{2}} = -(x_1 + y_2) \\
&= -2i\sqrt{r}\sin\left(\frac{\varphi}{2}\right) \qquad (50) \\
z_4 = x_2 + y_2 &= -\sqrt{r}e^{i\frac{\varphi}{2}} - \sqrt{r}e^{-i\frac{\varphi}{2}} = -(x_1 + y_1) \\
&= -2\sqrt{r}\cos\left(\frac{\varphi}{2}\right). \qquad (51)
\end{aligned}$$

Graphisch aufgetragen, sieht man die Zusammenhänge in Abb. (2). Die Zahlen a

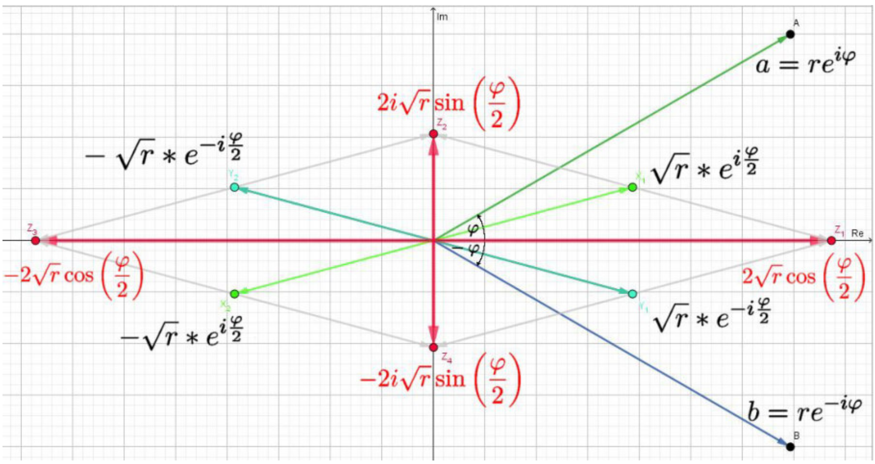

Abbildung 2: Grafische Darstellung der komplex konjugierten Zahlen a und b, deren Wurzeln x_1, x_2, y_1, y_2 sowie die Ergebnisse der Summen z_1, z_2, z_3 und z_4.

und $\overline{a}$ sind an der Reellen-Achse gespiegelt, da sie komplex konjugiert sind.

Zur Berechnung der Wurzel von a, stellen wir uns vor, wir bewegen den Punkt

A gegen den Uhrzeigersinn und mit Abstand r um das Zentrum, d.h. wir lassen φ kontinuierlich wachsen von 0 bis 4π, und betrachten als Wurzel den Ausdruck $\sqrt{r}e^{i\varphi/2}$. Je nachdem, ob der Schnitt zwischen den Riemannschen Flächen auf der Realteilachse links oder rechts vom Zentrum gelegt wird, erhalten wir unterschiedliche Hauptwerte für die Wurzel.

Legen wir den Schnitt für den Übergang zwischen Riemannschen Blättern auf die positive Realteilachse, d.h. betrachten wir als Hauptwert den Winkel zwischen 0 und π, dann ist der Hauptwert der Summe $\sqrt{a}+\sqrt{\bar{a}}$ gleich der Summe von x_1 und y_2. Die Wurzeln mit den Hauptwerten haben beide $\sqrt{r}$ als Betrag und halbieren jeweils den positiven Winkel ihres Quadrats. Die Summe der Hauptwerte x_1 und y_2 ist dann rein imaginär (Fall z_2). Die Leibnizsche Identität müsste in diesem Fall also allgemein lauten

$$\sqrt{re^{i\varphi}} + \sqrt{re^{-i\varphi}} = 2i\sin\left(\frac{\varphi}{2}\right). \tag{52}$$

Legt man den Schnitt allerdings auf die negative Realteilachse, d.h. betrachten wir als Hauptwert Winkel zwischen $-\pi$ und $+\pi$, dann ist der Hauptwert der Summe rein reell (Fall z_1), und die Leibnizsche Identität müsste allgemein lauten

$$\sqrt{re^{i\varphi}} + \sqrt{re^{-i\varphi}} = 2\cos\left(\frac{\varphi}{2}\right). \tag{53}$$

Danksagung. Wir danken Philip Beeley für eine Kopie des Briefes von Wallis an Collins vom 16.9.1676, Siegmund Probst und Steffen Fröhlich für hilfreiche Hinweise und Natalia Poleacova für die Übersetzung der Zitate.

Literaturverzeichnis

Gerhardt, C.I., Hrsg. 1987. *Der Briefwechsel von Gottfried Wilhelm Leibniz mit Mathematikern.* Nachdruck der Ausgabe Berlin: Mayer und Müller, 1899. Hildesheim, Zürich, New York: Georg Olms Verlag.

Hall, A. Rupert, und Maria Boas Hall, Hrsg. 1986. *The Correspondence of Henry Oldenburg. Vol. XIII. July 1676–July 1681.* London / Philadelphia: Taylor / Francis.

Hofmann, Josef Ehrenfried. 1972. Bombellis Algebra—eine genialische Einzelleistung und ihre Einwirkung auf Leibniz. *Studia Leibnitiana* 4 (3/4): 196–252.

Huygens, Christiaan. 1899. *Oeuvres Complètes. Tome Huitième. Correspondance 1676-1684.* La Haye: Martinus Nijhoff.

Kästner, Abraham Gotthelf. 1794. *Anfangsgründe der Analysis endlicher Grössen.* Göttingen: Vandenhoeck und Ruprecht.

Leibniz, Gottfried Wilhelm. 1702. Extrait d'une lettre de M.Leibnitz a M.Varignon. *Journal des Scavans:* 183–186.

———. 1971. *Mathematische Schriften. Band VII. Die mathematischen Abhandlungen.* Nachdruck der Ausgabe Halle 1863. Hildesheim, New York: Georg Olms Verlag.

———. 1976. *Sämtliche Schriften und Briefe. 3. Reihe. Mathematischer, naturwissenschaftlicher und technischer Briefwechsel. 1. Band. 1672–1676.* Berlin: Akademie-Verlag.

———. 1996. *Sämtliche Schriften und Briefe. 7. Reihe. Mathematische Schriften. 2. Band. 1672–1676 Algebra (2. Teil).* Berlin: Akademie-Verlag.

———. 2011. *Die mathematischen Zeitschriftenartikel. Übersetzt und kommentiert von Heinz-Jürgen Heß und Malte-Ludolf Babin.* Hildesheim, Zürich, New York: Georg Olms Verlag.

———. 2017. *Sämtliche Schriften und Briefe. 3. Reihe. Mathematischer, naturwissenschaftlicher und technischer Briefwechsel. 9. Band. Januar 1702–Dezember 1705.* Online-Vorabdruck vom 21.9.2017 auf leibnizedition.de, eingesehen am 18.9.2018. Berlin: Akademie-Verlag.

Mayer, Uwe. 2004. "Neither unuseful nor absurd when rightly understood"—Imaginäre Zahlen und ihre Darstellung bei Wallis, Tschirnhaus und Leibniz. In *Mathematik im Fluss der Zeit. Tagung zur Geschichte der Mathematik in Attendorn / Neu-Listernohl (28.5. bis 1.6.2003),* 172–187. Augsburg: Dr. Erwin Rauner Verlag.

Pieper, Herbert. 1985. *Die komplexen Zahlen. Theorie—Praxis—Geschichte.* Thun und Frankfurt/Main: Harri Deutsch.

———. 1988. *Heureka. Ich hab's gefunden. 55 historische Aufgaben der Elementarmathematik.* Berlin: VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften.

Probst, Siegmund. 2018. The Relation between Leibniz and Wallis: An Overview from New Sources and Studies. *Quaderns d'Historia de l'Enginyeria* 16:189–208.

Remmert, Reinhold. 1983. Komplexe Zahlen. In *Zahlen,* herausgegeben von H.-D. Ebbinghaus, H. Hermes, F. Hirzebruch, M. Koecher, K. Mainzer, A. Prestel und R. Remmert, 45–77. : Springer.

Rigaud, Stephen Jordan, Hrsg. 1965. *Correspondence of scientific men of the seventeenth century. Vol. II.* Nachdruck der Ausgabe Oxford 1981. Hildesheim: Georg Olms Verlagsbuchhandlung.

Scriba, Christoph J. 1966. *Studien zur Mathematik des John Wallis (1616–1703).* Wiesbaden: Franz Steiner Verlag.

Tropfke, Johannes. 1902. *Geschichte der Elementarmathematik. Erster Band. Rechnen und Algebra.* Leipzig: Von Veit & Comp.