L^2-Kohomologie von Calabi-Yau-Familien über Kurven

Dissertation zur Erlangung des Grades

Doktor der Naturwissenschaften

am Fachbereich 08 – Physik, Mathematik und Informatik

der Johannes Gutenberg-Universität Mainz

vorgelegt von

Henning Hollborn

geboren in Ludwigshafen am Rhein

Mainz, im Januar 2014

1. Berichterstatter:
2. Berichterstatter:
Datum der mündlichen Prüfung: 7. März 2014
D77 – Mainzer Dissertation

Zusammenfassung

Ist $f : X \to S$ eine glatte Familie von Calabi-Yau-Mannigfaltigkeiten der Dimension m über einer quasiprojektiven Kurve, so trägt nach einem Resultat von Zucker die erste L^2-Kohomologiegruppe $H^1_{(2)}(S, R^m f_* \mathbb{C}_X)$ eine reine Hodgestruktur vom Gewicht $m+1$. In dieser Arbeit berechnen wir die Hodgezahlen solcher Hodgestrukturen für $m = 1, 2, 3$ und verallgemeinern dabei Formeln aus einem Artikel von del Angel, Müller-Stach, van Straten und Zuo auf den Fall, in dem die lokalen Monodromiematrizen bei Unendlich nicht unipotent, sondern echt quasi-unipotent sind. Wir verwenden dazu den L^2-Higgs-Komplex nach Jost, Yang und Zuo. Für Familien von Kurven führt dies auf eine bereits bekannte Formel von Cox und Zucker. Schließlich wenden wir die Ergebnisse im Fall $m = 3$ auf 14 Familien von Calabi-Yau-Mannigfaltigkeiten an, die eine Rolle in der Spiegelsymmetrie spielen, sowie auf eine von Rohde konstruierte Familie ohne Punkte mit maximal unipotenter Monodromie.

Abstract

We consider a smooth family $f : X \to S$ of Calabi–Yau m-folds over a quasi-projective curve. In this situation, a result due to Zucker states that the first L^2-cohomology group $H^1_{(2)}(S, R^m f_* \mathbb{C}_X)$ carries a pure Hodge structure of weight $m+1$. The aim of this thesis is to compute the Hodge numbers of such Hodge structures in the cases $m = 1, 2, 3$. Thereby we generalize formulae of an article by del Angel, Müller-Stach, van Straten and Zuo from the case of unipotent local monodromy matrices around infinity to the quasi-unipotent case. To this end, we use the L^2-Higgs complex from the work of Jost, Yang and Zuo. In the case of families of curves, we obtain a formula already known by Cox and Zucker. Finally, we apply the results to 14 families of Calabi–Yau threefolds which play a role in mirror symmetry, and to Rohde's family of Calabi–Yau threefolds without points of maximal unipotent monodromy.

Inhaltsverzeichnis

Einleitung

Diese Arbeit widmet sich der Berechnung der Hodgezahlen von Hodgestrukturen auf L^2-Kohomologiegruppen mit Werten in lokalen Systemen, die von der Kohomologie von Familien von Calabi-Yau-Mannigfaltigkeiten kommen. Eine *Calabi-Yau-Mannigfaltigkeit* ist eine kompakte Kählermannigfaltigkeit X, deren kanonisches Bündel trivial ist und deren Hodgezahlen $h^{k,0}(X)$ für $0 < k < \dim X$ alle verschwinden. In dieser Arbeit betrachten wir die folgenden Klassen von Calabi-Yau-Mannigfaltigkeiten:

(a) $\dim X = 1$: Kurven mit trivialem kanonischen Bündel haben Geschlecht $g = 1$ und sind somit gerade die *elliptischen Kurven*.

(b) $\dim X = 2$: In Dimension zwei führt die Definition (triviales kanonisches Bündel und verschwindende erste Kohomologie) zu den *K3-Flächen*.

(c) $\dim X = 3$: Die dreidimensionalen Calabi-Yau-Mannigfaltigkeiten spielen eine zentrale Rolle in der Spiegelsymmetrie. Wir untersuchen einige spezielle Familien von dreidimensionalen Calabi-Yau-Mannigfaltigkeiten.

Für solche niedrigdimensionalen Calabi-Yau-Mannigfaltigkeiten ist aufgrund der Definition und des *Hard-Lefschetz-Theorems* vor allem die mittlere Kohomologie interessant, daher betrachten wir im Folgenden nur diese. Ist also $f : X \to S$ eine glatte Familie von m-dimensionalen Calabi-Yau-Mannigfaltigkeiten, so liefern die m-ten Kohomologiegruppen der Fasern $X_t = f^{-1}(t)$, $t \in S$, das *lokale System* $R^m f_* \mathbb{C}_X$ auf S, und die Hodgestrukturen auf den m-ten Kohomologiegruppen der Fasern setzen sich zu einer *Variation von Hodgestrukturen* (vom Gewicht m) zusammen.

Ist die Basis S nicht kompakt, so treten hierbei zwei interessante Phänomene auf, zum einen *Degenerationen* der Fasern und der zugeordneten Hodgestrukturen, zum anderen *Monodromie*. Beides sind lokale Phänomene, und für die Beschreibung beider ist es nützlich anzunehmen, dass die Basis eindimensional ist (eine Bedingung, die wir später für die Verwendung der Resultate sowohl von Simpson als auch von Zucker ohnehin benötigen).

Hinsichtlich der Degeneration der Fasern nutzen wir aus, dass eine glatte Familie von Calabi-Yau-Mannigfaltigkeiten über einer eindimensionalen Basis S automatisch eine Fortsetzung zu einer *flachen* Familie über der Kompaktifizierung $\bar{S}$ hat. Dies bedeutet insbesondere, dass alle Fasern die gleiche Dimension haben.

In Bezug auf die Monodromie zitieren wir das Monodromietheorem von Borel und Landman, das besagt, dass die bei einer Degeneration von Kählermannigfaltigkeiten auftretenden Monodromiematrizen auf der Kohomologie einer glatten Faser in der Nähe einer

Singularität stets quasi-unipotent sind. Im Artikel [8] von del Angel/Müller-Stach/van Straten/Zuo wurden diese lokalen Monodromien als unipotent vorausgesetzt. In der vorliegenden Arbeit zeigen wir, dass man diese Annahme fallen lassen kann und dennoch ähnliche Resultate erhält.

Grundlegend für diese Arbeit ist Zuckers Hauptresultat aus [39], dass die erste L^2-Kohomologiegruppe einer quasiprojektiven Kurve mit Werten in dem lokalen System (zur Familie von m-dimensionalen Calabi-Yau-Mannigfaltigkeiten), das der (polarisierten) Variation von Hodgestrukturen vom Gewicht m zugrunde liegt, eine (reine) Hodgestruktur vom Gewicht $m+1$ trägt.

Um nun die Hodgezahlen solcher Hodgestrukturen zu berechnen, wechseln wir die Sichtweise und gehen von lokalen Systemen via der Simpsonkorrespondenz zu Higgsbündeln über.

Die Simpsonkorrespondenz, eine Aussage über nicht-abelsche Kohomologie, ist eine 1:1-Korrespondenz zwischen lokalen Systemen bzw. Vektorbündeln mit flachem Zusammenhang einerseits und Higgsbündeln andererseits. Damit können wir Resultate von Zucker über die Existenz einer Hodgestruktur auf den L^2-Kohomologiegruppen von quasiprojektiven Kurven mit Werten in gewissen lokalen Systemen umformulieren zu einer Aussage über die Existenz einer Hodgestruktur auf der L^2-Kohomologie mit Werten in einem Higgsbündel. Letztere lässt sich gut mit Hilfe eines gewissen Komplexes berechnen, dem L^2-Higgs-Komplex, für dessen Definition man nur die Gewichtsfiltrierungen zu den lokalen Monodromiematrizen braucht. Dieser Komplex ähnelt von der Gestalt her dem entsprechenden Komplex aus Zuckers Arbeit, hat aber überdies den Vorteil, dass er in direkte Summanden zerfällt. Dies hat zur Folge, dass die Hyperkohomologiespektralfolge besonders einfach ist. In der Anwendung der Simpsonkorrespondenz auf die L^2-Kohomologie folgen wir Artikeln von Jost/Yang/Zuo, wobei wir die Gestalt des L^2-Higgs-Komplexes im quasi-unipotenten Fall einer Notiz von Ye verdanken.

Bei der Berechnung der Hodgezahlen ist im Fall dreidimensionaler Fasern (hier hat die untersuchte Hodgestruktur Gewicht 4) insbesondere das Nichtverschwinden der mittleren Hodgezahl $h^{2,2}$ von Bedeutung, da der Raum $H^{2,2}$ via der Leray-Spektralfolge und der Hodgevermutung in Zusammenhang zur zweiten Chowgruppe des Totalraumes steht, und deren Nichtverschwinden garantiert die Existenz rationaler Zykel.

Die Arbeit ist folgendermaßen gegliedert:

In Kapitel 1 werden lokale Systeme und Variationen von Hodgestrukturen auf den zugehörigen Vektorbündeln eingeführt. Die Simpsonkorrespondenz über kompakter Basis wird behandelt; diese ordnet einem lokalen System ein Higgsbündel und der zugehörigen Variation von Hodgestrukturen ein System von Hodgebündeln zu.

Kapitel 2 verallgemeinert die Begriffe und Sätze aus Kapitel 1 auf den nichtkompakten Fall. Dies ist im Allgemeinen nur möglich, falls die Basis eine Kurve ist. Der Satz über halbstabile Reduktion wird vorgestellt sowie der Satz von Borel/Landman, eine Aussage über die Monodromiematrizen einer Familie über nichtkompakter Basis. Des Weiteren wird die Degeneration zu einer gemischten Hodgestruktur behandelt, welche im Allgemeinen in nichtkompakten Fällen auftritt, sowie logarithmische Pole eines Zusammenhangs und die Deligne-Fortsetzung von Vektorbündeln. Schließlich wird die Simpsonkorrespon-

denz über nichtkompakten Kurven vorgestellt, dafür werden filtrierte reguläre Higgsbündel eingeführt.
Im Zentrum des dritten Kapitels steht Zuckers Resultat der Existenz einer reinen Hodgestruktur vom Gewicht $m+1$ auf der L^2-Kohomologiegruppe $H^1_{(2)}(S, \mathbb{V})$ für den Fall, dass $\mathbb{V}$ ein lokales System ist, das einer polarisierten Variation von Hodgestrukturen vom Gewicht m zugrunde liegt. Dieses wird dann nach Jost/Yang/Zuo [19, 20] umformuliert zu einer Aussage über die Kohomologie mit Werten in Higgsbündeln.
In Kapitel 4 werden schließlich konkret Hodgezahlen berechnet. Dies sind die neuen Resultate dieser Arbeit, die im Preprint [18] schon teilweise veröffentlicht wurden und hier genauer ausgeführt werden. Das Higgsbündel kommt dabei vom lokalen System der m-ten Kohomologiegruppen einer Familie von m-dimensionalen Calabi-Yau-Mannigfaltigkeiten und der Variation von Hodgestrukturen darauf. Im Fall von Familien von Kurven erhalten wir als Resultat unserer Berechnungen eine Formel, die mit früheren Resultaten von Cox/Zucker übereinstimmt. Im Fall von Familien dreidimensionaler Calabi-Yau-Mannigfaltigkeiten können wir in den im Artikel [8] von del Angel/Müller-Stach/van Straten/Zuo begonnenen Tabellen von Hodgezahlen einige Leerstellen füllen. Dort werden 14 Familien, die gewissen Calabi-Yau-Operatoren zugeordnet sind (siehe Datenbank von Almkvist/van Enckevort/van Straten/Zudilin [1]), betrachtet. Schließlich wenden wir unsere Methode noch auf eine Familie dreidimensionaler Calabi-Yau-Mannigfaltigkeiten an, die von Rohde in [30] konstruiert und bereits von Garbagnati/van Geemen [14, 13] untersucht wurde.

Kapitel 1

Reine Hodgestrukturen und Higgsbündel auf kompakten Kählermannigfaltigkeiten

1.1 Lokale Systeme und der Gauß-Manin-Zusammenhang

Wir folgen im ersten Abschnitt Kulikov [24, Abschnitt 2.5] und erinnern an einige Fakten zu lokalen Systemen. Außerdem führen wir den Gauß-Manin-Zusammenhang ein.
Sei S ein zusammenhängender, lokal zusammenhängender topologischer Raum. Eine lokal freie Garbe von $\mathbb{C}$-Vektorräumen $\mathbb{V}$ auf S (das heißt, eine Garbe, die lokal zur konstanten Garbe $\mathbb{C}^n$ für ein $n \in \mathbb{N}$ isomorph ist) heißt *lokales System* auf S.

Satz 1.1. *Die Fundamentalgruppe $\pi_1(S, t_0)$, $t_0 \in S$, operiert auf der Faser $\mathbb{V}_{t_0} \cong \mathbb{C}^n$. Der Funktor $\mathbb{V} \mapsto \mathbb{V}_{t_0}$ liefert eine Äquivalenz zwischen der Kategorie der lokalen Systeme auf S und der Kategorie der komplexwertigen Darstellungen der Gruppe $\pi_1(S, t_0)$.*

Nun sei S spezieller eine komplexe Mannigfaltigkeit.

Satz 1.2. *Sei $\mathbb{V}$ ein lokales System auf S. Wir betrachten die lokal freie Garbe V der holomorphen Schnitte von $\mathbb{V}$, also $V = \mathbb{V} \otimes_{\mathbb{C}} \mathcal{O}_S$. Dann existiert ein Zusammenhang ∇ auf V, für den die Garbe der flachen Schnitte mit $\mathbb{V}$ zusammenfällt,* $\operatorname{Ker} \nabla = \mathbb{V}$. *Man nennt diesen den* kanonischen Zusammenhang *auf V. Er ist durch die Formel $\nabla(gs) = dg\, s$ definiert, wo g und s Schnitte von $\mathcal{O}_S$ bzw. $\mathbb{V}$ sind. Dieser kanonische Zusammenhang ist* flach, *das heißt, es gilt $\nabla \circ \nabla = 0$.*
Umgekehrt gilt: Sei ∇ ein Zusammenhang auf einer lokal freien Garbe V. Wir setzen $\mathbb{V} = \operatorname{Ker} \nabla = \{s \in V;\ \nabla s = 0\}$. Ist ∇ flach, so ist $\mathbb{V}$ ein lokales System auf S und $V = \mathbb{V} \otimes_{\mathbb{C}} \mathcal{O}_S$.
Insgesamt liefern die Funktoren

(a) ein lokales System $\mathbb{V} \longmapsto$ die Garbe $V = \mathbb{V} \otimes_{\mathbb{C}} \mathcal{O}_S$ und der kanonische Zusammenhang ∇

und

(b) *eine lokal freie Garbe V mit einem flachen Zusammenhang* $\nabla \longmapsto \mathbb{V} = \operatorname{Ker} \nabla$

eine Äquivalenz der Kategorie der lokalen Systeme auf S und der Kategorie der lokal freien Garben mit flachem Zusammenhang.

Beispiel 1.3. Sei $f : X \to S$ eine glatte Familie von kompakten Kählermannigfaltigkeiten, also eine eigentliche submersive holomorphe Abbildung zwischen komplexen Mannigfaltigkeiten, wobei X kählersch ist und alle Fasern glatt sind. Die höhere direkte Bildgarbe $\mathbb{V} = R^n f_* \mathbb{C}_X$ ist ein lokales System mit Koeffiziententengruppe $H^n(X_t, \mathbb{C})$. (Dies ist unabhängig von t, da nach dem Satz von Ehresmann die Fasern von f alle zueinander diffeomorph sind.) Mit anderen Worten ist der Halm $\mathbb{V}_t$ gerade $H^n(X_t, \mathbb{C})$.
Der zugehörige flache holomorphe Zusammenhang ∇ auf $V = \mathbb{V} \otimes \mathcal{O}_S$ heißt *Gauß-Manin-Zusammenhang.*

1.2 Variationen von Hodgestrukturen

Definition 1.4. Eine *($\mathbb{Q}$-)Hodgestruktur vom Gewicht n* ist ein endlichdimensionaler $\mathbb{Q}$-Vektorraum $H_{\mathbb{Q}}$ zusammen mit einer Zerlegung seiner Komplexifizierung

$$H = H_{\mathbb{Q}} \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{C} = \bigoplus_{p+q=n} H^{p,q}$$

in komplexe Unterräume mit der Eigenschaft $\overline{H^{p,q}} = H^{q,p}$. Die *Hodgezahlen* sind die Dimensionen der Hodgekomponenten, $h^{p,q} = \dim H^{p,q}$.

Beispiel 1.5 (geometrische Situation). Sei X eine kompakte Kählermannigfaltigkeit oder eine glatte vollständige (nicht notwendig projektive) algebraische Varietät über $\mathbb{C}$. Dann tragen die Kohomologiegruppen $H^n(X, \mathbb{Q})$ jeweils eine Hodgestruktur vom Gewicht n.

Bemerkung 1.6. In Kapitel 3 treten Hodgestrukturen auf Kohomologiegruppen mit Werten in lokalen Systemen auf. Es ist das Ziel dieser Arbeit, die Hodgezahlen solcher Hodgestrukturen auszurechnen.

Bemerkung 1.7. Zu einer gegebenen Hodgestruktur vom Gewicht n ist die *Hodgefiltrierung* die abnehmende Filtrierung F auf H, die durch

$$F^p = \bigoplus_{k=p}^{n} H^{k,n-k}$$

gegeben ist. Die Hodgefiltrierung hat für jedes p die Eigenschaft $H = F^p \oplus \overline{F^{n-p+1}}$. Ist umgekehrt eine abnehmende Filtrierung F mit dieser Eigenschaft gegeben, so erhält man die Hodgezerlegung zurück, indem man jeweils

$$H^{p,n-p} = F^p \cap \overline{F^{n-p}}$$

setzt.

Beispiel 1.8. Wir betrachten wieder eine glatte Familie $f : X \to S$ von kompakten Kählermannigfaltigkeiten und $n \in \mathbb{N}$. Dann trägt jede Faser des holomorphen Vektorbündels $V = R^n f_* \mathbb{C} \otimes \mathcal{O}_S$ eine Hodgefiltrierung, und dies liefert eine Hodgefiltrierung von V durch Unterbündel

$$V = \mathcal{F}^0 \supseteq \mathcal{F}^1 \supseteq \cdots \supseteq \mathcal{F}^n \supseteq \mathcal{F}^{n+1} = 0,$$

welche holomorphe Unterbündel von V sind. Des Weiteren erfüllt der Gauß-Manin-Zusammenhang die *Griffithstransversalität*

$$\nabla \mathcal{F}^p \subset \mathcal{F}^{p-1} \otimes \Omega^1_S.$$

Dies ist ein geometrisches Beispiel für eine Variation von Hodgestrukturen im Sinne der folgenden Definition:

Definition 1.9. Eine *Variation von Hodgestrukturen* ist ein Quadrupel $(S, \mathbb{V} = \mathbb{V}_{\mathbb{Q}} \otimes \mathbb{C}, \nabla, \mathcal{F})$ mit einer komplexen Mannigfaltigkeit S, einem lokalen System $\mathbb{V}$ auf S mit Koeffizientengruppe $\mathbb{C}^h$ für ein $h \in \mathbb{N}$, und einem flachen Zusammenhang ∇ auf dem holomorphen Vektorbündel $V = \mathbb{V} \otimes \mathcal{O}_S$ derart, dass die Schnitte von $\mathbb{V}$ flach sind bezüglich ∇. Schließlich ist $\mathcal{F}$ eine Hodgefiltrierung auf V, die auf jedem Halm V_t eine Hodgefiltrierung induziert und die Griffithstransversalität erfüllt.

Bemerkung 1.10. Ist eine Variation von Hodgestrukturen gegeben, so induziert der Gauß-Manin-Zusammenhang auf den *Hodgebündeln* $\mathcal{F}^p/\mathcal{F}^{p+1}$ Abbildungen

$$\mathrm{Gr}^p \nabla : \mathcal{F}^p/\mathcal{F}^{p+1} \to \mathcal{F}^{p-1}/\mathcal{F}^p \otimes \Omega^1_S,$$

die $\mathcal{O}_S$-linear sind. Die Hodgebündel spielen eine wichtige Rolle bei der Simpsonkorrespondenz (siehe Abschnitte 1.5 und 2.5).

Bemerkung 1.11. Die rationale Struktur $\mathbb{V}_{\mathbb{Q}} \subset \mathbb{V}$ ist beispielsweise in den geometrischen Situationen automatisch gegeben (durch die Kohomologie mit rationalen Koeffizienten). In der Simpsonkorrespondenz spielt sie jedoch keine Rolle, weswegen wir sie in späteren Abschnitten häufig weglassen werden.

1.3 Polarisierte Hodgestrukturen

Das verwendete Material in diesem Abschnitt findet sich in Peters/Steenbrink [29, Abschnitte 1.2.2 und 2.1.2], Carlson/Müller-Stach/Peters [5, Abschnitt 2.3], Griffiths [16] und Voisin [37, Abschnitt 7.1.2].

Definition 1.12. Sei $(H_{\mathbb{Q}}, F)$ eine Hodgestruktur vom Gewicht n. Eine *Polarisierung* ist eine Bilinearform $Q : H \times H \to \mathbb{C}$ mit den Eigenschaften

(a) Q nimmt auf $H_{\mathbb{Q}}$ rationale Werte an,

(b) Q ist $(-1)^n$-symmetrisch,

(c) das orthogonale Komplement von F^p ist F^{n-p+1},

(d) die durch $Q(C\,\cdot,\bar{\cdot})$ gegebene hermitesche Form auf H ist positiv definit. Dabei ist C der Weiloperator, der auf $H^{p,q}$ durch Multiplikation mit $\sqrt{-1}^{p-q}$ operiert.

Beispiel 1.13 (geometrische Situation). Sei X eine kompakte Kählermannigfaltigkeit der komplexen Dimension m, deren Kählerform ω rational ist (die also komplex-projektiv ist). Wir bezeichnen mit L den Operator, den man durch Anwendung des Cupproduktes mit der Kählerform erhält. Nach dem *Hard-Lefschetz-Theorem* liefert die $(m-k)$-fache Iteration von L jeweils einen Isomorphismus $H^k(X,\mathbb{Q}) \xrightarrow{\cong} H^{2m-k}(X,\mathbb{Q})$.
Sei nun $k \leq m$. Die *primitive k-te Kohomologie* ist definiert durch

$$H^k_{\mathrm{prim}}(X,\mathbb{Q}) = \ker(L^{m-k+1} : H^k(X,\mathbb{Q}) \to H^{2m-k+2}(X,\mathbb{Q})).$$

Für $k > m$ setzt man $H^k_{\mathrm{prim}}(X,\mathbb{Q}) = 0$. Damit erhält man die *Lefschetz-Zerlegung*

$$H^k(X,\mathbb{Q}) = H^k_{\mathrm{prim}}(X,\mathbb{Q}) \oplus LH^{k-2}_{\mathrm{prim}}(X,\mathbb{Q}) \oplus L^2H^{k-4}_{\mathrm{prim}}(X,\mathbb{Q}) \oplus \ldots$$

Diese ist mit der Hodgestruktur verträglich, das heißt, für

$$H^{p,q}_{\mathrm{prim}}(X) = \ker(L^{m-p-q+1} : H^{p,q}(X) \to H^{m-q+1,m-p+1}(X)) \quad (\text{für } p+q \leq m)$$

gilt

$$\begin{aligned} H^k_{\mathrm{prim}}(X,\mathbb{Q}) \otimes \mathbb{C} &= \bigoplus_{p+q=k} H^{p,q}_{\mathrm{prim}}(X) \quad \text{und} \\ H^{p,q}(X) &= H^{p,q}_{\mathrm{prim}}(X) \oplus LH^{p-1,q-1}_{\mathrm{prim}}(X) \oplus L^2H^{p-2,q-2}_{\mathrm{prim}}(X) \oplus \ldots \end{aligned}$$

Die Hodge-Riemann-Bilinearrelationen stellen nun sicher, dass die primitiven Kohomologiegruppen einer kompakten Kählermannigfaltigkeit polarisierte Hodgestrukturen tragen. Die Polarisierung ist die Hodge-Riemann-Bilinearform

$$Q([\alpha],[\beta]) = (-1)^{\frac{k(k-1)}{2}} \int_X \alpha \wedge \beta \wedge \omega^{m-k} \qquad [\alpha],[\beta] \in H^k(X,\mathbb{Q}).$$

Bemerkung 1.14. Ist X eine dreidimensionale Calabi-Yau-Mannigfaltigkeit, so erhält man aus der Lefschetz-Zerlegung, dass die dritte Kohomologie insgesamt primitiv ist, da die erste (und somit auch die fünfte) Kohomologie nach Voraussetzung verschwindet.

Definition 1.15. Eine *polarisierte Variation von Hodgestrukturen* besteht aus einer Variation von Hodgestrukturen $(S,\mathbb{V},\nabla,\mathcal{F})$ und einer Polarisierung darauf, genauer, einer Abbildung $\mathcal{Q} : \mathbb{V} \times \mathbb{V} \to \underline{\mathbb{C}}$, die horizontal ist (das heißt, die $\nabla\mathcal{Q} = 0$ erfüllt) und faserweise eine Polarisierung der Hodgestrukturen auf den Fasern bildet. (Hierbei ist $\underline{\mathbb{C}}$ das konstante lokale System mit Koeffizientengruppe $\mathbb{C}$.)

1.4 Von Variationen von Hodgestrukturen zu Systemen von Hodgebündeln

Definition 1.16. Sei S eine kompakte Kählermannigfaltigkeit. Ein *System von Hodgebündeln* auf S ist eine direkte Summe von holomorphen Vektorbündeln $E = \bigoplus_{p+q=n} E^{p,q}$ zusammen mit Abbildungen $\vartheta : E^{p,q} \to E^{p-1,q+1} \otimes \Omega^1_S$, die $\vartheta \wedge \vartheta = 0$ erfüllen.

Beispiel 1.17. Wir führen Bemerkung 1.10 fort. Sei eine Variation von Hodgestrukturen $(S, \mathbb{V}, \nabla, \mathcal{F})$ vom Gewicht n gegeben. Nach Voraussetzung erfüllt der Gauß-Manin-Zusammenhang die Griffithstransversalität

$$\nabla : \mathcal{F}^p \to \mathcal{F}^{p-1} \otimes \Omega^1_S.$$

Betrachtet man die dadurch induzierten Abbildungen auf den Hodgebündeln

$$\mathrm{Gr}^p \nabla : \mathcal{F}^p/\mathcal{F}^{p-1} \to \mathcal{F}^{p-1}/\mathcal{F}^p \otimes \Omega^1_S$$

und bezeichnet diese alle mit ϑ, so erhält man ein System von Hodgebündeln, wenn man $E^{p,n-p} = \mathcal{F}^p/\mathcal{F}^{p-1}$ setzt. Die Bedingung $\vartheta \wedge \vartheta = 0$ ist erfüllt, da der Gauß-Manin-Zusammenhang flach ist. Kommt die Variation von Hodgestrukturen von einer glatten Familie von Varietäten $f : X \to S$ und deren n-ter Kohomologie, so sind die Hodgebündel von der Gestalt $E^{p,n-p} = R^{n-p} f_* \Omega^p_{X/S}$, und das Higgsfeld erhält man durch Anwendung des Cup-Produktes mit der Kodaira-Spencer-Klasse.

Bemerkung 1.18. Das vorige Beispiel enthält Resultate von Griffiths. Diese wurden später von Simpson verallgemeinert, wie im folgenden Abschnitt dargestellt. Er untersuchte allgemein Korrespondenzen zwischen Darstellungen der Fundamentalgruppe von S und gewissen holomorphen Objekten auf S, den Higgsbündeln. Insbesondere konstruierte er umgekehrt mit Hilfe von nichtlinearer Analysis Variationen von Hodgestrukturen ausgehend von Higgsbündeln.

1.5 Die Simpsonkorrespondenz im kompakten Fall

Definition 1.19. Ein *Higgsbündel* auf einer kompakten Kählermannigfaltigkeit S ist ein Paar (E, ϑ), wobei E ein holomorphes Vektorbündel ist und $\vartheta : E \to E \otimes \Omega^1_S$ eine endomorphismenwertige 1-Form mit $\vartheta \wedge \vartheta = 0$.

Nun passen wir Mumfords Begriff der Stabilität eines Vektorbündels auf die Situation der Higgsbündel an. Dazu erinnern wir zunächst daran, dass der Grad eines Vektorbündels E auf S gegeben ist durch $\deg(E) = \mathrm{ch}_1(E) \cdot [\omega]^{n-1}$, wobei n die Dimension von S ist, $\mathrm{ch}_1(E)$ die erste Chernklasse des Vektorbündels E bezeichnet und ω die Kählerform auf S ist. Der Quotient des Grades durch den Rang des Vektorbündels heißt *Steigung* von E, in Formeln $\mu(E) = \deg E / \operatorname{rank} E$.

Definition 1.20. Ein Higgsbündel E heißt *stabil* bzw. *halbstabil*, falls für jedes durch ϑ erhaltene Unterbündel $M \subset E$ mit $0 < \operatorname{rank} M < \operatorname{rank} E$ stets $\mu(M) < \mu(E)$ bzw. $\mu(M) \leq \mu(E)$ gilt. Ein Higgsbündel heißt *polystabil*, falls es die direkte Summe von stabilen Higgsbündeln der gleichen Steigung ist.

Das folgende Resultat (*Simpsonkorrespondenz*) bzw. dessen Verallgemeinerung auf den nichtkompakten Fall spielt eine wichtige Rolle für die späteren Kapitel:

Theorem 1.21 (Simpson [34, Theorem 1]). *Sei S eine glatte projektive Varietät. Dann steht die Menge der stabilen Higgsbündel E auf S mit verschwindenden Chernklassen in 1:1-Korrespondenz zur Menge der irreduziblen Darstellungen der Fundamentalgruppe von S. Eine Darstellung trägt genau dann eine Variation von Hodgestrukturen (mit Hilfe der Identifikationen aus Abschnitt 1.1), wenn das zugehörige Higgsbündel ein System von Hodgebündeln zulässt. In diesem Fall wurde die Korrespondenz im vorigen Abschnitt beschrieben.*

Theorem 1.22 (Simpson [35, Korollar 1.3]). *Sei S eine kompakte Kählermannigfaltigkeit. Die Kategorie der halbeinfachen Vektorbündel mit flachem Zusammenhang auf S ist äquivalent zur Kategorie der polystabilen Higgsbündel auf S mit verschwindenden Chernklassen.*

Zum Beweis dieser Äquivalenz definiert Simpson *harmonische Metriken* und eine Kategorie der *harmonischen Bündel* (also Vektorbündel mit harmonischer Metrik). Anschließend zeigt er, dass die beiden in Theorem 1.22 genannten Kategorien zu dieser isomorph sind. Dies geschieht mit Hilfe des folgenden Theorems:

Theorem 1.23 (Simpson [35, Theorem 1]). *(a) Ein flaches Vektorbündel V hat genau dann eine harmonische Metrik, wenn es halbeinfach ist.*

(b) Ein Higgsbündel E hat genau dann eine hermitesche Yang-Mills-Metrik, wenn es polystabil ist. Eine solche Metrik ist genau dann harmonisch, wenn

$$\mathrm{ch}_1(E) \cdot [\omega]^{\dim S-1} = 0 \textit{ und } \mathrm{ch}_2(E) \cdot [\omega]^{\dim S-2} = 0$$

gelten.

Kapitel 2

Degenerationen von Hodgestrukturen und harmonische Bündel auf nichtkompakten Kurven

2.1 Gemischte Hodgestrukturen

Betrachtet man Varietäten, die nicht notwendigerweise kompakt und glatt sind, so führt dies zu *gemischten Hodgestrukturen* auf der Kohomologie:

Theorem 2.1 (Deligne [10, 11], zitiert nach Durfee [12]). *Sei X eine quasiprojektive algebraische Varietät. Dann tragen die Kohomologiegruppen eine* gemischte Hodgestruktur*, das heißt, zu jedem m existieren eine (aufsteigende) Gewichtsfiltrierung*

$$0 = W_{-1} \subset W_0 \subset \ldots \subset W_{2m} = H^m(X; \mathbb{Q})$$

auf der rationalen Kohomologie von X und eine (absteigende) Hodgefiltrierung

$$H^m(X; \mathbb{C}) = F^0 \supset F^1 \supset \ldots \supset F^m \supset F^{m+1} = 0$$

auf der komplexen Kohomologie von X mit der Eigenschaft, dass die durch F auf den l-ten graduierten Quotienten $\mathrm{Gr}_l^W = W_l/W_{l-1}$ der Gewichtsfiltrierung induzierte Filtrierung eine Hodgestruktur vom Gewicht l induziert.
Dabei gilt: Die Kohomologiegruppen von projektiven Varietäten haben Gewichte 0 bis m, die von glatten Varietäten Gewichte m bis $2m$.

2.2 Degenerationen

2.2.1 Halbstabile Reduktion und das Theorem von Borel und Landman

Wir folgen Kulikov/Kurchanov [25, Kap. 1, §10 und Kap. 5, §1] bzw. Morrison [15, Kap. VI]. Alle Betrachtungen in diesem Abschnitt sind lokal über der Einheitskreisscheibe.

Definition 2.2. Sei Δ die Einheitskreisscheibe und X eine Kählermannigfaltigkeit. Wir nennen eine eigentliche flache holomorphe Abbildung $\pi : X \to \Delta$ *Degeneration* mit *degenerierter Faser* $X_0 = \pi^{-1}(0)$, falls für alle $t \neq 0$ die Fasern $X_t = \pi^{-1}(t)$ nichtsinguläre komplexe Varietäten sind. Eine Degeneration heißt *halbstabil*, falls die degenerierte Faser ein Divisor mit normalen Überkreuzungen ist.

Sei $\alpha : \Delta \to \Delta$ eine holomorphe Selbstabbildung der Kreisscheibe Δ mit der Eigenschaft $\alpha(0) = 0$. Ausgehend von einer Degeneration $\pi : X \to \Delta$ erhalten wir eine neue Degeneration $\pi_\alpha = \mathrm{pr}_\Delta : X_\alpha = X \times_\Delta \Delta \to \Delta$ mittels des Basiswechsels α.

Theorem 2.3 (Halbstabile Reduktion, Mumford [22, Kap. II]). *Sei $\pi : X \to \Delta$ eine Degeneration. Dann existiert ein Basiswechsel $\alpha : \Delta \to \Delta$, definiert durch $t \mapsto t^k$ für ein $k \in \mathbb{N}$, eine halbstabile Degeneration $\psi : Y \to \Delta$ und ein Diagramm*

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[r, dashed, "f"] \arrow[dr, "\psi"'] & X_\alpha \arrow[r] \arrow[d, "\pi_\alpha"] & X \arrow[d, "\pi"] \\ & \Delta \arrow[r, "\alpha"] & \Delta \end{tikzcd}$$

mit der Eigenschaft, dass $Y \overset{f}{\dashrightarrow} X_\alpha$ eine bimeromorphe Abbildung ist, die man durch Hintereinanderausführung von Auf- und Niederblasungen von nichtsingulären Untermannigfaltigkeiten der degenerierten Faser erhält.

Sei nun $\pi : X \to \Delta$ eine Degeneration und $\pi^* : X^* \to \Delta^*$ die Einschränkung auf die punktierte Einheitskreisscheibe. Wir fixieren eine glatte Faser X_{t_0}. Die Gruppe $\pi_1(\Delta^*; t_0)$ ist isomorph zu $\mathbb{Z}$ und wird von einer Rotation um 0 im positiven Sinn erzeugt. Dieser Erzeuger liefert für jedes n einen Isomorphismus $T : H^n(X_{t_0}, \mathbb{Q}) \to H^n(X_{t_0}, \mathbb{Q})$, die *Picard-Lefschetz-Transformation* oder *Monodromietransformation* der Familie π.

Theorem 2.4 (Borel/Landman [26]). *Sei $\pi : X \to \Delta$ eine Degeneration. Ferner sei $T : H^n(X_{t_0}, \mathbb{Q}) \to H^n(X_{t_0}, \mathbb{Q})$ die Picard-Lefschetz-Transformation. Dann gilt:*

(a) T ist quasi-unipotent mit Unipotenzindex höchstens n, das heißt, es existiert ein $k > 0$ mit $(T^k - 1)^{n+1} = 0$.

(b) Ist π eine halbstabile Degeneration, so ist T unipotent ($k = 1$).

Definition 2.5. Wir nennen eine Familie $X \to \Delta$ von m-dimensionalen Mannigfaltigkeiten *maximal unipotent in* 0, falls die Monodromietransformation $T : H^m(X_{t_0}, \mathbb{Q}) \to H^m(X_{t_0}, \mathbb{Q})$ unipotent ist mit Unipotenzindex m, das heißt, falls $(T - \mathrm{I})^m \neq 0$ gilt.

2.2.2 Degenerationen von Hodgestrukturen

Die Darstellung hier folgt Gross [17, Kap. 16]. Alle wesentlichen Resultate in diesem Abschnitt gehen auf Schmid [31] zurück und finden sich auch in [15, Kap. IV und VI].

Ist T unipotent mit Unipotenzindex n, so definieren wir den Logarithmus der Monodromie mit Hilfe der Taylorreihe, die nach n Summanden abbricht:

$$N = \log(T) = (T - \mathrm{I}) - \frac{(T-\mathrm{I})^2}{2} + \ldots + (-1)^{n+1}\frac{(T-\mathrm{I})^n}{n}.$$

Dieses N ist offensichtlich nilpotent, daher können wir es verwenden, um die Monodromiegewichtsfiltrierung auf $H^n(X_{t_0}, \mathbb{Q})$ zu definieren:
Für einen nilpotenten Operator $N : H \to H$ auf einem Vektorraum H mit $N^{n+1} = 0$, $n \in \mathbb{N}$, existiert nämlich eine Filtrierung

$$0 \subseteq W_0 \subseteq \cdots \subseteq W_{2n} = H,$$

welche

$$N(W_i) \subseteq W_{i-2}$$

und

$$N^k : W_{n+k}/W_{n+k-1} \xrightarrow{\cong} W_{n-k}/W_{n-k-1}$$

erfüllt. Um diese zu konstruieren, bemerken wir zunächst, dass

$$N^n : W_{2n}/W_{2n-1} \cong W_0$$

gilt, also

$$W_{2n-1} = \operatorname{Ker} N^n \quad \text{and} \quad W_0 = \operatorname{Im} N^n.$$

Wir fahren induktiv fort, indem wir $H' = W_{2n-1}/W_0$ setzen. Dann induziert N wegen $N(W_0) = 0$ einen Operator N' auf H'. Es gilt $(N')^n = 0$. Somit erhalten wir induktiv eine Filtrierung

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r, phantom, "\subseteq"] & W'_0 \arrow[d, "\cong"] \arrow[r, phantom, "\subseteq"] & \cdots \arrow[r, phantom, "\subseteq"] & W'_{2n-2} \arrow[d, "\cong"] \arrow[r, phantom, "="] & H' \\
& W_1/W_0 \arrow[r, phantom, "\subseteq"] & \cdots \arrow[r, phantom, "\subseteq"] & W_{2n-1}/W_0. &
\end{tikzcd}$$

Also sind W_{2n-2} und W_1 die Urbilder von W'_{2n-3} bzw. W'_0 unter der Projektion $W_{2n-1} \to H'$. Dieser Prozess lässt sich fortführen und liefert die gewünschte Filtrierung auf H in eindeutiger Weise.

Definition 2.6. Ist $N = \log(T)$ der Logarithmus der Picard-Lefschetz-Transformation auf $H = H^n(X_{t_0}, \mathbb{Q})$, so nennt man die oben konstruierte Filtrierung W die *Monodromiegewichtsfiltrierung.*

Bemerkung 2.7. Bei Jost/Yang/Zuo [19] und del Angel/Müller-Stach/van Straten/Zuo [8] wird die Monodromiegewichtsfiltrierung in 0 zentriert. Wir wählen hier allerdings für die Monodromiegewichtsfiltrierung auf der n-ten Kohomologiegruppe das Zentrum n, um in Übereinstimmung mit Abschnitt 2.1 Gewichte von 0 bis $2n$ zu erhalten.

Das allgemeine Existenzresultat ist nun

Theorem 2.8 (Schmid [31, Theorem 6.16]). *Ist $f : X \to \Delta$ eine Familie von kompakten Kählermannigfaltigkeiten mit unipotenter Monodromie, dann existiert eine Grenz-Hodgefiltrierung*

$$H^n(X_{t_0}, \mathbb{C}) = F_\infty^0 \supseteq \cdots \supseteq F_\infty^n$$

die zusammen mit der Monodromiegewichtsfiltrierung

$$W_0 \subseteq \cdots \subseteq W_{2n} = H^n(X_{t_0}, \mathbb{Q})$$

eine gemischte Hodgestruktur bildet.

Bemerkung 2.9. Mit Hilfe der Clemens-Schmid-Sequenz kann man die gemischte Hodgestruktur aus diesem Theorem mit der gemischten Hodgestruktur auf der singulären Faser in Relation setzen. Siehe dazu Morrison [15, Kapitel VI].

2.3 Logarithmische Pole

Wir definieren den logarithmischen De-Rham-Komplex sowie Zusammenhänge mit logarithmischen Polen und folgen dabei Voisin [37, Abschnitt 8.2.2] bzw. Peters/Steenbrink [29, Kap. 11]

Für ein Paar (S, Σ) mit einem einfachen Divisor mit normalen Überkreuzungen Σ in einer komplexen Mannigfaltigkeit S definieren wir den *holomorphen De-Rham-Komplex mit logarithmischen Singularitäten entlang* Σ:

Sei $\Omega_S^k(\log \Sigma)$ die Untergarbe der Garbe $\Omega_S^k(*\Sigma)$ der meromorphen Formen auf S, die holomorph auf $S \setminus \Sigma$ sind und der folgenden Bedingung genügen: Ist α eine meromorphe Differentialform auf U, holomorph auf $U \setminus \Sigma \cap U$, so ist $\alpha \in \Omega_S^k(\log \Sigma)|_U$, falls α und $d\alpha$ einen Pol höchstens erster Ordnung entlang (jeder Komponente von) Σ haben.

Wir können den logarithmischen De-Rham-Komplex lokal wie folgt beschreiben: Seien $z_1, \ldots, z_n$ lokale Koordinaten auf einer offenen Teilmenge U von S, auf der $\Sigma \cap U$ durch die Gleichung $z_1 \cdot \ldots \cdot z_r = 0$ gegeben ist. Dann ist $\Omega_S^k(\log \Sigma)|_U$ die Garbe der freien $\mathcal{O}_U$-Moduln, mit der Basis $\frac{dz_{i_1}}{z_{i_1}} \wedge \ldots \wedge \frac{dz_{i_l}}{z_{i_l}} \wedge dz_{j_1} \wedge \ldots \wedge dz_{j_m}$ (für $i_s \leq r$, $j_s > r$ und $l + m = k$).

Sei nun U das Komplement von Σ in S, V ein holomorphes Vektorbündel auf S und ∇ ein Zusammenhang auf $V|_U$. Man sagt, ∇ hat *logarithmische Pole entlang* Σ, falls es sich zu einem Morphismus $\nabla : V \to V \otimes_{\mathcal{O}_S} \Omega_S^1(\log \Sigma)$ fortsetzen lässt, der die Leibnizregel erfüllt.

2.4 Die Deligne-Fortsetzung

Wir zitieren zunächst zwei Resultate von Deligne [9], um die sogenannte Deligne-Fortsetzung zu definieren. Hier ist S eine komplexe Mannigfaltigkeit, die eine Kompaktifizierung $\bar{S}$ besitzt mit der Eigenschaft, dass das Komplement $\Sigma = \bar{S} \setminus S$ ein Divisor mit normalen Überkreuzungen ist.

Satz 2.10 (aus Deligne [9, Prop. 5.2]). *Sei V ein Vektorbündel mit flachem Zusammenhang auf S mit unipotenter Monodromie entlang Σ. Dann existiert eine eindeutige Fortsetzung $\bar{V}$ des Vektorbündels V zu einem Vektorbündel auf $\bar{S}$ mit den folgenden Eigenschaften:*

(a) Die Matrix des Zusammenhangs von V hat in jeder lokalen Basis von $\bar{V}$ höchstens einen logarithmischen Pol entlang Σ.

(b) Das Residuum des Zusammenhangs entlang jeder Komponente von Σ ist nilpotent.

Definition 2.11. Man nennt $\bar{V}$ die *kanonische Fortsetzung* von V.

Bemerkung 2.12. Ist V nicht unipotent entlang Σ, so hängt die Konstruktion der Fortsetzung von der vorherigen Wahl eines Schnittes τ der Projektion von $\mathbb{C}$ nach $\mathbb{C}/\mathbb{Z}$ ab. Eine Wahl von τ läuft auf die Wahl einer Logarithmusfunktion hinaus; man setzt $\log_\tau(z) = 2\pi \mathrm{i}\tau(\frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \log z)$. Eine geeignete Wahl ist etwa $0 \leq \mathrm{Re}(\tau) < 1$.

Satz 2.13 (Deligne [9, Prop. 5.4]). *Sei V ein Vektorbündel mit flachem Zusammenhang auf S und τ wie in Bemerkung 2.12 gewählt. Es existiert eine eindeutige Fortsetzung $\bar{V}(\tau)$ des Vektorbündels V zu einem Vektorbündel auf $\bar{S}$, die die folgenden Bedingungen erfüllt:*

(a) Die Matrix des Zusammenhangs von V hat in jeder lokalen Basis von $\bar{V}(\tau)$ höchstens einen logarithmischen Pol entlang Σ.

(b) Das Residuum des Zusammenhangs entlang jeder Komponente von Σ hat Eigenwerte im Bild von τ.

Die Fortsetzung $\bar{V}(\tau)$ von V ist funktoriell und exakt in V.

Definition 2.14. Definiert man τ wie in Bemerkung 2.12, so nennt man $\bar{V}(\tau)$ *quasikanonische Fortsetzung* von V.

Bemerkung 2.15. Eine Fortsetzung der Form $\bar{V}(\tau)$ hat die Eigenschaft, dass die Matrix des Zusammenhangs in einer geeigneten Basis von $\bar{V}(\tau)$ die Form $\Gamma = \sum_i \Gamma_i \frac{dz_i}{z_i}$ hat, wobei die Γ_i konstante, jeweils miteinander kommutierende Matrizen sind.

Wir wenden diese Resultate nun wieder auf unsere geometrische Situation an und folgen dazu Müller-Stach [27], allerdings verzichten wir auf die Einschränkung auf unipotente lokale Monodromien.

Sei $f : X \to S$ ein glatter projektiver Morphismus zwischen quasiprojektiven Mannigfaltigkeiten. Dabei sei S eindimensional und habe eine glatte Kompaktifizierung $\bar{S}$. Somit ist das Komplement $\Sigma = \bar{S} \setminus S$ automatisch ein Divisor mit normalen Überkreuzungen, da es nur aus endlich vielen Punkten besteht. Ferner lasse sich f zu einer flachen Familie über $\bar{S}$ fortsetzen.

Wir betrachten die m-ten Kohomologiegruppen $H^m(X_t, \mathbb{C})$ und das zugehörige lokale System $\mathbb{V} = R^m f_* \mathbb{C}$. Wie in Abschnitt 1.2 liefert $\mathbb{V}$ ein Vektorbündel $V = \mathbb{V} \otimes \mathcal{O}_S$ auf S, und die Hodgefiltrierung $V = \mathcal{F}^0 \supset \mathcal{F}^1 \supset \dots$ definiert eine Flagge von Untervektorbündeln. Die infinitesimale Monodromie ist wieder durch den Gauß-Manin-Zusammenhang gegeben, und dieser liefert (wie in Bemerkung 1.10) $\mathcal{O}_S$-lineare Abbildungen auf den Hodgebündeln $\mathcal{F}^p/\mathcal{F}^{p+1}$. In Peters [28, Abschnitt 2.1] wird die quasikanonische Fortsetzung der Vektorbündel V und $\mathcal{F}^p$ ausführlich dargestellt. Die obigen Sätze 2.10 und 2.13 liefern dann:

Theorem 2.16 („Deligne-Fortsetzung"[9], zitiert nach Müller-Stach [27]). *V und die Unterbündel $\mathcal{F}^p$ haben als Vektorbündel Fortsetzungen auf $\bar{S}$ mit der Eigenschaft, dass*

$$\mathrm{Gr}^p \nabla : \mathcal{F}^p/\mathcal{F}^{p+1} \to \mathcal{F}^{p-1}/\mathcal{F}^p \otimes \Omega^1_{\bar{S}}(\log \Sigma)$$

weiterhin Abbildungen von Vektorbündeln sind. Um Eindeutigkeit zu garantieren, fordern wir analog zu Bemerkung 2.12, dass die Realteile der Eigenwerte der lokalen Monodromien im Intervall $[0, 1)$ liegen.

Mit Hilfe der Deligne-Fortsetzung lässt sich also das System von Hodgebündeln

$$E = \bigoplus E^{p,q} = \bigoplus \mathcal{F}^p/\mathcal{F}^{p+1}$$

auf $\bar{S}$ fortsetzen, zusammen mit den Homomorphismen $\vartheta = \mathrm{Gr}^p \nabla : E^{p,q} \to E^{p-1,q+1} \otimes \Omega^1_{\bar{S}}(\log \Sigma)$. In Analogie zu Abschnitt 1.4 und Definition 1.19 motiviert dies die folgende Definition:

Definition 2.17. Ein *logarithmisches Higgsbündel* (E, ϑ) auf $\bar{S}$ besteht aus einem holomorphen Vektorbündel E zusammen mit einer $\mathcal{O}_{\bar{S}}$-linearen Abbildung $\vartheta : E \to E \otimes \Omega^1_{\bar{S}}(\log \Sigma)$, dem *Higgsfeld.*

Bemerkung 2.18. Da es sich bei $\bar{S}$ um eine Kurve handelt, ist die Bedingung $\vartheta \wedge \vartheta = 0$, die man zusätzlich an ein Higgsfeld stellt, automatisch erfüllt.

Im Fall quasi-unipotenter Monodromien braucht man zusätzlich zu der logarithmischen außerdem noch eine *parabolische Struktur*, also die eines *filtrierten* Vektorbündels, wie im folgenden Abschnitt beschrieben.

2.5 Die Simpsonkorrespondenz für nichtkompakte Kurven

Wir folgen Simpsons Artikel über harmonische Bündel [33]. Stets sei S eine quasiprojektive Kurve mit glatter Vervollständigung $\bar{S}$. Wir bezeichnen das Komplement von S in $\bar{S}$ wieder mit Σ.

Definition 2.19. Ein *filtriertes Vektorbündel* ist ein algebraisches Vektorbündel E zusammen mit einer Sammlung von Fortsetzungen $\{E_{\alpha,s}\}_{\alpha\in\mathbb{R}}$ in die Punktierungen $s \in \Sigma$ mit den folgenden Eigenschaften:

(a) die Fortsetzungen bilden eine absteigende linksstetige Filtrierung:
$E_{\alpha,s} \subset E_{\beta,s}$ für $\alpha \geq \beta$ und $E_{\alpha-\varepsilon,s} = E_{\alpha,s}$ für kleine $\varepsilon > 0$, und

(b) für eine lokale Koordinate z, die in s in erster Ordnung verschwindet, gilt $E_{\alpha+1,s} = zE_{\alpha,s}$.

Bemerkung 2.20. Die Filtrierung wird bereits durch die α zwischen 0 und 1 beschrieben. Sei $\bar{E}$ das Vektorbündel auf $\bar{X}$, das man erhält, wenn man in allen Punktierungen $E_{0,s}$ nimmt. Dann ist die Faser $\bar{E}(s)$ ein Vektorraum mit einer Filtrierung $\bar{E}_\alpha(s)$, die durch $0 \leq \alpha < 1$ indiziert ist.

Definition 2.21. Der *parabolische Grad* eines filtrierten Vektorbündels ist definiert als

$$\deg_p E = \deg \bar{E} + \sum_{s\in\Sigma} \sum_{0\leq\alpha<1} \alpha \dim(\mathrm{Gr}_\alpha(\bar{E}(s))).$$

Definition 2.22. Ein *filtriertes reguläres Higgsbündel* besteht aus einem filtrierten Vektorbündel E und einer Abbildung $\vartheta : E \to E \otimes \Omega^1_S$ von Garben von $\mathcal{O}_S$-Moduln, die eine Regularitätsbedingung bezüglich der Filtrierungen erfüllen: $\vartheta : E_{\alpha,s} \to E_{\alpha,s} \otimes \Omega^1_{\bar{S}}(\log s)$. Der *(parabolische) Grad* von E ist einfach der parabolische Grad des filtrierten Vektorbündels. E heißt *stabil*, wenn für jedes Unterbündel $M \subset E$ (mit der induzierten Filtrierung), das von ϑ erhalten wird, die Ungleichung

$$\frac{\deg M}{\operatorname{rank} M} < \frac{\deg E}{\operatorname{rank} E}$$

gilt.

Definition 2.23. Ein *filtriertes lokales System* ist ein lokales System L zusammen mit Filtrierungen $\{L_{\beta,s}\}_{\beta\in\mathbb{R}}$ auf den Halmen L_s, $s \in \Sigma$, mit den folgenden Eigenschaften:

(a) Die Filtrierungen sind abnehmend und linksseitig stetig in β.

(b) $L_{\beta,s}$ wird von der Monodromietransformation erhalten.

Der *Grad* eines filtrierten lokalen Systems ist definiert als

$$\deg L = \sum_s \sum_\beta \beta \dim(\mathrm{Gr}_\beta(L_s)).$$

Ein filtriertes lokales System heißt *stabil*, falls für jedes Untersystem $M \subset L$ (mit der induzierten Filtrierung)

$$\frac{\deg M}{\operatorname{rank} M} < \frac{\deg L}{\operatorname{rank} L}$$

gilt.

Theorem 2.24 (Simpson [33, Theorem aus der Einleitung]). *Über jeder quasiprojektiven Kurve S gibt es eine natürliche 1:1-Korrespondenz zwischen stabilen filtrierten regulären Higgsbündeln vom (parabolischen) Grad Null und stabilen filtrierten lokalen Systemen vom Grad Null.*

Ähnlich wie im kompakten Fall zeigt Simpson diese Korrespondenz, indem er *harmonische Bündel* (hier mit einer Zusatzeigenschaft, der *Zahmheit*) definiert und Äquivalenzen zu dieser Kategorie zeigt.

Definition 2.25. Ein *harmonisches Bündel* auf S besteht aus einer Darstellung der Fundamentalgruppe $\pi_1(S,x) \to \mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$ zusammen mit einer harmonischen Abbildung von der universellen Überlagerung $\tilde{S}$ in den symmetrischen Raum $\mathrm{GL}(n,\mathbb{C})/U(n)$ derart, dass die harmonische Abbildung äquivariant ist bezüglich der Wirkung der Fundamentalgruppe auf beiden Seiten. Das harmonische Bündel ist *irreduzibel*, wenn die Darstellung nicht in eine direkte Summe zerlegt werden kann, die mit der harmonischen Abbildung verträglich ist.

Man beachte dabei, dass die harmonische Abbildung Irreduzibilität erzwingen kann, selbst wenn die Darstellung reduzibel ist.
Das Konzept der Zahmheit hängt mit dem Wachstum der harmonischen Abbildung in der Nähe der Punktierungen zusammen:

Definition 2.26. Ein harmonisches Bündel heißt *zahm*, falls entlang eines jeden Strahls in eine Punktierung ein Lift der harmonischen Abbildung zu einer Abbildung nach $\mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$ existiert, der höchstens polynomiell im euklidischen Abstand zur Punktierung wächst.

Nach Simpson liefert nun ein irreduzibles zahmes harmonisches Bündel ein stabiles filtriertes lokales System vom Grad Null und ein stabiles filtriertes reguläres Higgsbündel vom Grad Null. Beide Konstruktionen sind Eins-zu-Eins. Die Monodromiedarstellung des lokalen Systems ist die selbe wie die Darstellung des harmonischen Bündels, und andererseits liefert das Higgsfeld des Higgsbündels im Wesentlichen die Ableitung der harmonischen Abbildung. In beiden Fällen tragen die Objekte, lokale Systeme oder Higgsbündel, glatt variierende hermitesche Metriken, definiert über S. Diese *harmonischen Metriken* erfüllen nichtlineare partielle Differentialgleichungen. Die Filtrierungen messen das Wachstum der Metriken an den Punktierungen.

Definition 2.27. Ein *filtriertes reguläres Sytem von Hodgebündeln* ist ein filtriertes reguläres Higgsbündel, das eine Zerlegung $E = \bigoplus E^{p,q}$ von filtrierten Vektorbündeln besitzt, derart, dass ϑ den Bigrad $(-1,1)$ in dieser Graduierung hat: $\vartheta : E^{p,q} \to E^{p-1,q+1} \otimes \Omega^1_S$ (wobei ϑ auch die Regularitätsbedingungen in Bezug auf die Filtrierung erfüllt).

Bemerkung 2.28. Unter der Simpsonkorrespondenz entsprechen die harmonischen Bündel, die von irreduziblen komplexen Variationen von Hodgestrukturen kommen, den stabilen filtrierten regulären Systemen von Hodgebündeln vom Grad Null.

Zusammengefasst lautet Simpsons Resultat:

Theorem 2.29 (Simpson [33, Main Theorem]). *Die Kategorie der zahmen harmonischen Bündel ist natürlich äquivalent zu den Kategorien der direkten Summen von stabilen filtrierten regulären Higgsbündel vom (parabolischen) Grad Null und von direkten Summen von stabilen filtrierten lokalen Systemen vom Grad Null.*

Kapitel 3

L^2-Kohomologie

3.1 Der L^2-Komplex nach Zucker

In diesem Abschnitt stellen wir Resultate von Zucker vor. Startpunkt seiner Arbeit [39] ist das folgende nicht publizierte Resultat von Deligne:

Theorem 3.1 (Deligne, zitiert nach Zucker [39, Theorem 2.9]). *Sei S nichtsinguläre projektive Varietät (kompakte Kählermannigfaltigkeit) und sei $\mathbb{V}$ ein lokales System von komplexen Vektorräumen, das einer polarisierbaren Variation von Hodgestrukturen vom Gewicht m über S zugrunde liegt. Dann trägt $H^i(S, \mathbb{V})$ eine natürliche Hodgestruktur vom Gewicht $i + m$, und diese ist zur Variation von Hodgestrukturen assoziiert.*

Dieses Resultat wird anschließend vom projektiven auf den quasiprojektiven Fall verallgemeinert, was allerdings nur für den Fall möglich ist, dass S eine Kurve ist. Folglich sind Zuckers Ergebnisse für uns nur für $i = 1$ relevant, weswegen wir hier nur diesen Fall behandeln.
Zucker benutzt in seiner Arbeit Resultate von Schmid [31] zu allgemeinen Variationen von Hodgestrukturen. Wir interessieren uns in der vorliegenden Arbeit allerdings nur für den *geometrischen Fall*, also den einer Variation von Hodgestrukturen, die durch die m-te Kohomologie entlang der Fasern einer glatten Familie $f : X \to S$ von komplex-projektiven Varietäten gegeben ist. Hier ist $\mathbb{V} = R^m f_* \mathbb{C}$ das lokale System der Kohomologie entlang der Fasern und $V = \mathcal{O}_S \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{V}$ das zugehörige Kohomologiebündel über S. Der Gauß-Manin-Zusammenhang ∇ liefert den Komplex $\Omega^\bullet_S(\mathbb{V}) = \Omega^\bullet_S \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{V} = \Omega^\bullet_S \otimes_{\mathcal{O}_S} V$, und definiert man die Hodgefiltrierung auf $\Omega^\bullet_S(\mathbb{V})$ durch $F^p\Omega^r_S(\mathbb{V}) = \Omega^r_S(\mathcal{F}^{p-r})$, so liefert dies eine Filtrierung $\{F^p\Omega^\bullet_S(\mathbb{V})\}$ von $\Omega^\bullet_S(\mathbb{V})$ durch Unterkomplexe.
Nun sei also S eine quasiprojektive Kurve mit projektiver Kompaktifizierung $\bar{S}$, und wir bezeichnen die Inklusion mit $j : S \to \bar{S}$. Ist $s \in S$ ein Basispunkt, so erhält man durch Fortsetzung von Elementen von $\mathbb{V}_s$ horizontal um eine Singularität die Monodromietransformation T wie in Abschnitt 2.2.
Wir betrachten zunächst den Fall, in dem T *unipotent* ist. Hier können wir wie in Definition 2.6 die Monodromiegewichtsfiltrierung $W = \{W_k\}$ auf $\mathbb{V}_s$ definieren. Diese liefert eine Filtrierung von $\mathbb{V}$ durch lokal konstante Garben, die wir wieder mit W bezeichnen.

Wie in Abschnitt 2.4 beschrieben hat das Vektorbündel V nach Deligne eine kanonische Fortsetzung $\overline{V}$ auf $\bar{S}$ ($=_{lokal} \Delta$), und ebenso induziert die Gewichtsfiltrierung durch kanonische Fortsetzung eine Filtrierung $\{\overline{W}_k\}$ auf $\overline{V}$. Damit erhält man

Theorem 3.2 (Zucker [39, Prop. 4.1]). *Sei $j : S \to \bar{S}$ die Inklusion, und liege $\mathbb{V}$ einer Variation von Hodgestrukturen vom Gewicht m auf S zugrunde. Dann ist die folgende Sequenz exakt:*

$$0 \to j_*\mathbb{V} \to [\overline{W}_m + t\overline{V}] \xrightarrow{\nabla} \frac{dt}{t} \otimes [\overline{W}_{m-2} + t\overline{V}] \to 0.$$

Bemerkung 3.3. Dies ist als wohldefinierte Extension der exakten Sequenz von Garben auf S

$$0 \to \mathbb{V} \to \mathcal{O}_S(\mathbb{V}) \to \Omega^1_S(\mathbb{V}) \to 0$$

auf $\bar{S}$ aufzufassen, und ergibt global Sinn, indem man zu jedem singulären Punkt die entsprechende Extension macht. Dabei ist t jeweils eine komplexe im singulären Punkt zentrierte Koordinate.

Wir definieren mittels $\mathcal{O}_S(\mathbb{V})_{(2)} := [\overline{W}_m + t\overline{V}]$ und $\Omega^1_S(\mathbb{V})_{(2)} := \frac{dt}{t} \otimes [\overline{W}_{m-2} + t\overline{V}]$ einen Komplex

$$\Omega^\bullet_S(\mathbb{V})_{(2)} = [\mathcal{O}_S(\mathbb{V})_{(2)} \to \Omega^1_S(\mathbb{V})_{(2)}].$$

Es folgt:

Theorem 3.4 (Zucker [39, Theorem 4.8]). *Ist $\mathbb{V}$ das lokale System einer polarisierten Variation von Hodgestrukturen über einer algebraischen Kurve S mit unipotenter lokaler Monodromie, so gilt*

$$H^1(\bar{S}, j_*\mathbb{V}) \cong \mathbb{H}^1(\bar{S}, \Omega^\bullet_S(\mathbb{V})_{(2)}).$$

Nun betrachten wir den Fall *rein quasi-unipotenter* lokaler Monodromie. Hier hat V nach Deligne eine quasikanonische Fortsetzung $\overline{V}$, und wir erhalten das folgende Resultat:

Theorem 3.5 (Zucker [39, Prop. 6.9]). *Hat $\mathbb{V}$ quasi-unipotente Monodromie ohne unipotenten Anteil, so gilt $\mathcal{O}_S(\mathbb{V})_{(2)} = \overline{V}$ und $\Omega^1_S(\mathbb{V})_{(2)} = \frac{dt}{t} \otimes \overline{V}$. Der dadurch definierte Zwei-Term-Komplex $\Omega^\bullet_S(\mathbb{V})_{(2)}$ liefert eine Auflösung von $j_*\mathbb{V}$. Beachte dabei, dass $j_*\mathbb{V}$ bei $t = 0$ den Nullhalm hat.*

Insgesamt erhält man die beiden folgenden Resultate:

Theorem 3.6 (Zucker [39, Theorem 7.15]). *In der geometrischen Situation*

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, hook] \arrow[d, "f"'] & \bar{X} \arrow[d, "\bar{f}"] \\ S \arrow[r, hook, "j"] & \bar{S}, \end{tikzcd}$$

mit f und $\bar{f}$ projektiv, f glatt über der Kurve S, gibt es natürliche polarisierbare Hodgestrukturen vom Gewicht $m+1$ auf den Kohomologiegruppen $H^1(\bar{S}, j_*R^m f_*\mathbb{C})$.

Theorem 3.7 (Zucker [39, Theorem 11.6]). *Ist $\mathbb{V}$ die lokal konstante Garbe, die einer (über $\mathbb{R}$ definierten) polarisierbaren Variation von Hodgestrukturen vom Gewicht m auf der glatten algebraischen Kurve S zugrundeliegt, so existiert eine zugehörige (funktorielle) Hodgestruktur vom Gewicht $m+1$ auf $H^1(\bar{S}, j_*\mathbb{V}) \cong \mathbb{H}^1(\bar{S}, \Omega^\bullet_{\bar{S}}(\mathbb{V})_{(2)})$, und die Hodgefiltrierung wird von der Hodgefiltrierung auf dem Komplex $\Omega^\bullet_{\bar{S}}(\mathbb{V})_{(2)}$ induziert.*

Bemerkung 3.8. Die Bedingung, dass die Variation von Hodgestrukturen über $\mathbb{R}$ definiert ist, ist im geometrischen Fall eines über $\mathbb{Z}$ definierten lokalen Systems automatisch erfüllt.

Bemerkung 3.9. Da man die Kohomologiegruppen, die in diesem Theorem vorkommen, auch mit Hilfe eines Komplexes von L^2-Differentialformen berechnen kann (siehe dazu Abschnitt 6 in Zucker [39]), spricht man von *L^2-Kohomologie* und schreibt auch $H^1_{(2)}(S, \mathbb{V})$ statt $H^1(\bar{S}, j_*\mathbb{V})$.

3.2 Anwendung auf elliptische Flächen nach Cox/Zucker [7]

Eine Fläche X heißt elliptische Fläche, falls sie eine elliptische Faserung zulässt, also eine eigentliche zusammenhängende holomorphe Abbildung $f : X \to S$ auf eine Kurve S mit der Eigenschaft, dass die allgemeine Faser X_t eine nicht-singuläre elliptische Kurve ist.
Sei nun $\bar{f} : \bar{X} \to \bar{S}$ eine minimale elliptische Faserung mit nicht-konstanter j-Invariante, die einen Schnitt hat. (*Minimal* bedeutet *frei von* (-1)*-Kurven.*) Wir bezeichnen die Inklusion $S \hookrightarrow \bar{S}$ wieder mit j. Dann lässt sich die Gruppe $\mathfrak{S}$ der Schnitte von $\bar{f}$ mit der Gruppe der rationalen Punkte der generischen Faser identifizieren.
Cox und Zucker verwenden nun die Resultate von Zucker [39] und zeigen damit das folgende

Theorem 3.10 (Cox/Zucker [7, Prop. 3.22], nach Shioda [32, Cor. 2.7]). *Wir bezeichnen mit r den Rang von $\mathfrak{S}$, mit g das Geschlecht von $\bar{S}$, mit ν die Gesamtanzahl der singulären Fasern, mit ν_1 die Anzahl der Fasern vom Typ I_b in der Kodaira-Klassifikation, und mit $p_g (= \dim H^{2,0}(\bar{X}))$ das geometrische Geschlecht von $\bar{X}$. Dann gilt für die Hodgezahlen $h^{2,0}$ und $h^{1,1}$ der Hodgestruktur auf $H^1(\bar{S}, j_*R^1f_*\mathbb{C})$:*

$$r \leq 4g - 4 + 2\nu - \nu_1 - 2p_g = 4g - 4 + 2\nu - \nu_1 - 2h^{2,0} = h^{1,1}.$$

Auf dieses Resultat werden wir später (in Abschnitt 4.2) zurückkommen.

3.3 Der L^2-Higgs-Komplex und L^2-Higgs-Kohomologie

Wir übertragen jetzt Zuckers Resultate aus Abschnitt 3.1 auf die entsprechenden Higgs-Versionen. Die Hauptreferenz hierfür ist der Artikel [19] von Jost/Yang/Zuo, die Verallgemeinerung auf quasi-unipotente Monodromie folgt einer Notiz von Ye [38].
Betrachte die folgende Situation: Sei (E, ϑ) ein logarithmisches Higgsbündel auf einer Kurve $\bar{S}$, und sei $P \in \Sigma$ ein Randpunkt. Ist die Monodromie um P unipotent, so stimmt das Residuum $\mathrm{Res}_P\, \vartheta$ des Higgsfeldes mit der logarithmischen Monodromie $\log T_P = N_P$

überein und ist überdies nilpotent. Wie in Abschnitt 2.2, Definition 2.6 können wir die zugehörige Monodromiegewichtsfiltrierung W definieren.
Sei E ein Higgsbündel, das die Struktur eines Systemes von Hodgebündeln trägt und dessen zugehörige Variation von Hodgestrukturen Gewicht m hat.

Definition 3.11. Wir definieren einen Komplex $\{\mathcal{A}^\bullet_{(2)}(E), D''\}$ feiner Garben auf $\bar{S}$ wie folgt: Sei $U \subset \bar{S}$ offen. Dann ist $\mathcal{A}^i_{(2)}(E)(U)$ definiert als Menge der j_*E-wertigen i-Formen η auf $U \cap S$ mit messbaren Koeffizienten und messbarer äußerer Ableitung $\bar{\partial}\eta$ derart, dass η und $D''\eta$ endliche L^2-Norm auf $K \cap S$ haben für jede kompakte Teilmenge $K \subset U$. Dabei ist $D'' = \bar{\partial} + \vartheta$ mit der holomorphen Struktur $\bar{\partial}$ und dem Higgsfeld ϑ.

Bemerkung 3.12. $\{\mathcal{A}^\bullet_{(2)}(E), D''\}$ ist in der Tat ein Komplex aufgrund der Higgsbedingung $(D'')^2 = 0$.

Definition 3.13. Wir nennen die Hyperkohomologie des Komplexes $\{\mathcal{A}^\bullet_{(2)}(E), D''\}$ die L^2-*Higgs-Kohomologie* von $\bar{S}$ mit Werten im Higgsbündel E und bezeichnen sie mit $H^*_{(2)}(\bar{S}, E)$.

Man kann die L^2-Higgs-Kohomologie einfacher mit Hilfe eines anderen Komplexes berechnen, dem L^2-Higgs-Komplex. Dieser ist wie folgt definiert:

Definition 3.14. Der L^2-*Higgs-Komplex* ist ein Zwei-Term-Komplex

$$\Omega^\bullet_{(2)}(E) = [\Omega^0_{(2)}(E) \xrightarrow{\vartheta} \Omega^1_{(2)}(E)],$$

bestehend aus $\Omega^0_{(2)}(E) \subset E$ und $\Omega^1_{(2)}(E) \subset E \otimes \Omega^1_{\bar{S}}(\log \Sigma)$:
Ist die Monodromie in einem Punkt $P = \{t = 0\} \in \Sigma$ unipotent, so sind die Untergarben in der Nähe von P mit Hilfe der Monodromiegewichtsfiltrierung W definiert durch $\Omega^0_{(2)}(E) := W_m + tE$ und $\Omega^1_{(2)}(E) := (W_{m-2} + tE) \otimes \Omega^1_{\bar{S}}(\log \Sigma)$.
In den Punkten $P \in S$ (also außerhalb von Σ) ist der L^2-Higgs-Komplex einfach durch den Komplex $[E \xrightarrow{\vartheta} E \otimes \Omega^1_{\bar{S}}(\log \Sigma)]$ gegeben.

Theorem 3.15 ([8]). *Nach Jost/Yang/Zuo [19, 20] gilt, falls alle Monodromien unipotent sind:*

$$H^1_{(2)}(S, \mathbb{V}) = H^1_{(2)}(S, E) = \mathbb{H}^1(\Omega^\bullet_{(2)}(E), \vartheta).$$

Dabei folgt die erste Gleichheit aus den Kähleridentitäten für harmonische Bündel.

Für den Fall quasi-unipotenter Monodromie haben wir außerdem das folgende Resultat, das uns von Ye mitgeteilt wurde:

Satz 3.16 (Ye [38]). *Theorem 3.15 bleibt auch im Fall quasi-unipotenter Monodromien richtig, falls man in solchen Punkten lokal* $\Omega^0_{(2)}(E) = E$ *und* $\Omega^1_{(2)}(E) = \frac{dt}{t} \otimes E$ *setzt.*

Kapitel 4

Hodgezahlen für die Kohomologie lokaler Systeme vom Calabi-Yau-Typ

4.1 Vorbemerkungen

In diesem Kapitel stellen wir die Ergebnisse des Preprints [18] vor. Wir verallgemeinern Methoden und Resultate von del Angel/Müller-Stach/van Straten/Zuo [8] vom Fall unipotenter Monodromie auf den Fall, dass die Monodromie in Unendlich quasi-unipotent ist. (Man beachte aber die einschränkenden Annahmen 4.7 und 4.13 unten.)
Ist $\mathbb{V}$ ein lokales System, welches einer Variation von Hodgestrukturen vom Gewicht m über einer glatten, quasiprojektiven Kurve S mit glatter Vervollständigung $S \overset{j}{\hookrightarrow} \bar{S}$ zugrunde liegt, so trägt (nach Theorem 3.7) die erste L^2-Kohomologiegruppe $H^1_{(2)}(S, \mathbb{V}) = H^1(\bar{S}, j_*\mathbb{V})$ eine reine Hodgestruktur vom Gewicht $m+1$.
Wir betrachten nur die geometrische Situation, in der $\mathbb{V}$ von der Form $\mathbb{V} \subset R^m f_*\mathbb{C}$ ist für eine glatte projektive Familie von m-dimensionalen Calabi-Yau-Mannigfaltigkeiten $f : X \to S$ über einer glatten Kurve S mit glatter Kompaktifizierung $\bar{S}$, und wir bezeichnen mit $\bar{f} : \bar{X} \to \bar{S}$ die Fortsetzung von f zu einer flachen Familie über $\bar{S}$.
Ferner nehmen wir an, dass alle Hodgezahlen der Hodgestrukturen auf den Fasern von $\mathbb{V} \subset R^m f_*\mathbb{C}$ gleich 1 sind. Solche Situationen treten auf

- für die erste Kohomologie von Familien elliptischer Kurven
- für die transzendente (zweite) Kohomologie von K3-Flächen mit generischer Picardzahl 19
- und für die dritte Kohomologie gewisser Familien von dreidimensionalen Calabi-Yau-Mannigfaltigkeiten, wie sie etwa bereits im Artikel [8] untersucht wurden. In Rohdes Artikel [30] findet sich ein weiteres Beispiel einer solchen Familie.

In diesen Fällen ist das zugeordnete Higgsbündel vom Typ $(1, 1, \ldots, 1)$, das heißt, jeder Summand $E^{p,m-p}$ von E ist ein Geradenbündel.
Wir berechnen nun die Hodgezahlen auf den L^2-Kohomologiegruppen mit Hilfe der Degenerationsdaten, also der Monodromiematrizen der Familie $\bar{f}$, zunächst allgemein für die Fälle $m = 1$, 2 und 3. Anschließend konkretisieren wir die Formeln auf die 14 Beispiele aus dem Artikel [8] und berechnen schließlich die Hodgezahlen für Rohdes Beispiel.
Dabei benutzen wir, dass $\bar{f}$ lokal um jeden Punkt von $\Sigma = \bar{S}\setminus S$ eine Degeneration ist, wir also die Ergebnisse aus Abschnitt 2.2 verwenden können: Theorem 2.4 (Borel/Landman) besagt, dass die Monodromie in allen Punkten von Σ quasi-unipotent ist, und in den Punkten mit unipotenter Monodromie liefert Definition 2.6 die Monodromiegewichtsfiltrierung. Mit Hilfe dieser Filtrierung definieren wir den L^2-Higgs-Komplex $(\Omega^\bullet_{(2)}(E), \vartheta)$. Nach Theorem 3.15 und Satz 3.16 berechnet dessen erste Hyperkohomologie die L^2-Kohomologie $H^1_{(2)}(S, \mathbb{V})$.
Wir untersuchen jeweils zunächst die lokale Struktur des L^2-Higgs-Komplexes. Für die Punkte $P \in \Sigma$ muss man dafür verschiedene Fälle unterscheiden, je nachdem, welche Jordansche Normalform des Endormorphismus N (bzw. T) vorliegt.
Wie bereits von del Angel/Müller-Stach/van Straten/Zuo in [8] bemerkt wurde, besteht der Vorteil der L^2-Higgs-Kohomologie darin, dass man die Hodgezerlegung darauf recht explizit beschreiben kann: Die durch $F^p := \bigoplus_{i \geq p} E^{i,m-i}$ definierte (Hodge-)Filtrierung auf E liefert durch Durchschnittbildung mit dem L^2-Unterkomplex $\Omega^\bullet_{(2)}(E)$ eine Filtrierung, und die zugehörige Hyperkohomologiespektralfolge degeneriert bei E_1 und induziert so eine Hodgestruktur auf $H^1_{(2)}(S, E)$.
Konkret induziert die Zerlegung

$$E = \bigoplus_{p=0}^{m} E^{p,m-p}$$

eine Zerlegung

$$\Omega^\bullet_{(2)}(E) = \bigoplus_{p=0}^{m} \Omega^\bullet_{(2)}(E)^{p,m-p}$$

durch

$$\begin{aligned}
\Omega^0_{(2)}(E)^{p,m-p} &:= \Omega^0_{(2)}(E) \cap E^{p,m-p}, \\
\Omega^1_{(2)}(E)^{p,m-p} &:= \Omega^1_{(2)}(E) \cap E^{p-1,m-p+1} \otimes \Omega^1_{\bar{S}}(\log \Sigma),
\end{aligned}$$

und die F-graduierten Anteile haben die folgende Form:

$$\begin{aligned}
\mathrm{Gr}^{m+1}_F \Omega^\bullet_{(2)}(E) &= [0 \to \Omega^1_{(2)}(E)^{m,0}] \\
\mathrm{Gr}^{m}_F \Omega^\bullet_{(2)}(E) &= [\Omega^0_{(2)}(E)^{m,0} \xrightarrow{\vartheta} \Omega^1_{(2)}(E)^{m-1,1}] \\
&\cdots \\
\mathrm{Gr}^{1}_F \Omega^\bullet_{(2)}(E) &= [\Omega^0_{(2)}(E)^{1,m-1} \xrightarrow{\vartheta} \Omega^1_{(2)}(E)^{0,m}] \\
\mathrm{Gr}^{0}_F \Omega^\bullet_{(2)}(E) &= [\Omega^0_{(2)}(E)^{0,m} \xrightarrow{\vartheta} 0].
\end{aligned}$$

Wir benötigen noch folgendes Resultat aus dem Artikel [8] von del Angel, Müller-Stach, van Straten und Zuo:

Satz 4.1 ([8, Prop. 3.6]). *Sei $\mathbb{V}$ ein nicht-triviales irreduzibles lokales System über einer Kurve S. Dann gilt für die Dimensionen $h^i(\mathbb{V}) := \dim H^i(\bar{S}, j_*\mathbb{V})$:*

(a) $h^0(\mathbb{V}) = h^2(\mathbb{V}) = 0$.

(b) Die Dimension $h^1(\mathbb{V}) = \dim H^1(\bar{S}, j_*\mathbb{V})$ lässt sich wie folgt berechnen:

$$h^1(\mathbb{V}) = (2g(\bar{S}) - 2)\,\mathrm{rank}(\mathbb{V}) + \sum_{P\in\Sigma} R(P).$$

Dabei ist $R(P) := \mathrm{rank}(\mathbb{V}) - \dim(\mathbb{V}^{T_P})$ der Verzweigungsindex im Punkt P und T_P die lokale Monodromie um den Punkt P.

Beweis. Zu (a): Nach Voraussetzung gilt $h^0 = 0$, da $\mathbb{V}$ keinen Schnitt hat. Zu h^2: Aus der exakten Sequenz

$$0 \to j_!\mathbb{V} \to j_*\mathbb{V} \to i^*j_*\mathbb{V} \to 0$$

mit der Inklusion $i : \Sigma \hookrightarrow \bar{S}$ erhält man $H^2(\bar{S}, j_!\mathbb{V}) = H^2(\bar{S}, j_*\mathbb{V})$, und wegen der Poincarédualität weiter

$$H^2(\bar{S}, j_!\mathbb{V}) = H^2_c(S, \mathbb{V}) = H^0(S, \mathbb{V}^*)^*.$$

Die Behauptung ergibt sich nun aus $H^0(S, \mathbb{V}^*) = 0$.
Zu (b): Dies wurde bereits in [8] bewiesen. Dabei benutzt man, dass die Eulercharakteristik $\chi(j_*\mathbb{V}) = h^0(\mathbb{V}) - h^1(\mathbb{V}) + h^2(\mathbb{V})$ multiplikativ für Faserbündel und additiv auf disjunkten Vereinigungen ist. □

4.2 Familien elliptischer Kurven

Wir betrachten zunächst den Fall $m = 1$. Sei also $f : X \to S$ eine glatte Familie elliptischer Kurven über einer quasiprojektiven Kurve. Die unterschiedlichen Möglichkeiten für die Gestalt der singulären Fasern über $\Sigma = \bar{S}\backslash S$ wurden durch Kodaira in [23] klassifiziert und sind beispielsweise in Barth/Hulek/Peters/van de Ven [2, Abschnitt V.7] dargestellt. In dieser Klassifikation sind nur die Fasern vom Kodaira-Typ $I_b, b \geq 0$, *stabil* (also reduziert, mit höchstens Doppelpunkten als Singularitäten, ohne enthaltene (-1)-Kurven) und haben daher unipotente lokale Monodromie. Alle anderen singulären Fasern haben rein quasi-unipotente lokale Monodromie. (Gemischte Fälle können nicht auftreten, da die Monodromiematrizen stets in $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ liegen.)
Nun bezeichne I die Menge aller Punkte mit unipotenter Monodromie und II die Menge der verbleibenden nicht-unipotenten singulären Punkte. In den Punkten vom Typ I ist die Jordansche Normalform der lokalen Monodromiematrix T durch

$$T_I = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

gegeben, in den Punkten vom Typ II ist T zu

$$T_{II} = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \quad \text{oder} \quad T_{II} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

äquivalent für passende Einheitswurzeln $\lambda, \lambda_i \neq 1$.
Im ersten (unipotenten) Fall ist $N = \log T = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, und wir erhalten für die Monodromiegewichtsfiltrierung

$$V = W_2 \supset W_1 = \ker N = W_0 = \operatorname{Bild} N \supset W_{-1} = 0.$$

Definition 3.14 liefert dann $\Omega^0_{(2)}(E) = W_1 + tE$ und $\Omega^1_{(2)}(E) = (W_{-1} + tE) \otimes \Omega^1_{\bar{S}}(\log \Sigma)$ lokal in einem Punkt $P = \{t = 0\} \in I$, und es folgt $\Omega^0_{(2)}(E) = tE^{1,0} \oplus E^{0,1}$ sowie $\Omega^1_{(2)}(E) = tE \otimes \Omega^1_{\bar{S}}(\log \Sigma)$.
Im zweiten Fall gilt nach Satz 3.16: $\Omega^0_{(2)}(E) = E$ und $\Omega^1_{(2)}(E) = E \otimes \Omega^1_{\bar{S}}(\log \Sigma)$.
Wir bezeichnen mit $\mathcal{O}_{\bar{S}}(-I)$ und $\mathcal{O}_{\bar{S}}(-II)$ die Idealgarben der Punkte vom Typ I bzw. II. Damit erhalten wir:

Theorem 4.2. *Der L^2-Higgs-Komplex für E ist gegeben durch*

$$\begin{aligned} \Omega^0_{(2)}(E)^{1,0} &= E^{1,0}(-I), \\ \Omega^0_{(2)}(E)^{0,1} &= E^{0,1}, \\ \Omega^1_{(2)}(E)^{1,0} &= E^{1,0}(II) \otimes \Omega^1_{\bar{S}}, \\ \Omega^1_{(2)}(E)^{0,1} &= E^{0,1}(II) \otimes \Omega^1_{\bar{S}}. \end{aligned}$$

Beweis. Dies lässt sich unmittelbar an den Positionen der Parameter t in der vorangegangenen lokalen Beschreibung des L^2-Higgs-Komplexes ablesen. □

Damit können wir die Hodgezahlen berechnen. Wir setzen $a := \deg E^{1,0}$ und $a' := -\deg E^{0,1}$.

Theorem 4.3. *Es sei $\mathbb{V}$ irreduzibel, es gelte die Abschätzung $a + |II| > 0$, und es sei $\vartheta : E^{1,0} \to E^{0,1} \otimes \Omega^1_{\bar{S}}(\log \Sigma)$ nicht die Nullabbildung. Dann sind die Hodgezahlen für die reine Hodgestruktur vom Gewicht 2 auf $H^1(\bar{S}, j_*\mathbb{V})$ gegeben durch*

$$h^{2,0} = h^{0,2} = g - 1 + a + |II|, \quad h^{1,1} = 2g - 2 - 2a + |I|.$$

Hieraus erhält man die Formel $h^1(j_*\mathbb{V}) = 4g - 4 + |I| + 2|II|$, die mit Theorem 3.10 im Einklang steht und auf Cox/Zucker [7, Seite 39] zurückgeht. Des Weiteren gilt $a' = a + |II|$.

Beweis. Der Higgskomplex ist durch

$$\begin{tikzcd} E^{1,0}(-I) \arrow[dr, "\vartheta", "\neq 0"'] & E^{0,1} \\ E^{1,0}(II) \otimes \Omega^1_{\bar{S}} & E^{0,1}(II) \otimes \Omega^1_{\bar{S}} \end{tikzcd}$$

gegeben. Wir bemerken, dass weder $\Omega^0_{(2)}(E)^{0,1} = E^{0,1}$ noch $\Omega^1_{(2)}(E)^{1,0} = E^{1,0}(\mathit{II}) \otimes \Omega^1_{\bar{S}}$ ein- oder ausgehendes Higgsdifferenzial haben. Durch Hodgedualität (also $h^{2,0} = h^{0,2}$) erhalten wir $h^1(E^{0,1}) = h^0(E^{1,0}(\mathit{II}) \otimes \Omega^1_{\bar{S}})$. Zusammen mit der Annahme $a+|\mathit{II}| > 0$ liefert dies die Formel für $h^{2,0}$, indem man den Satz von Riemann-Roch auf das Geradenbündel $E^{1,0}(\mathit{II}) \otimes \Omega^1_{\bar{S}}$ anwendet: Die Annahme $a+|\mathit{II}| > 0$ stellt sicher, dass $h^1(E^{1,0}(\mathit{II}) \otimes \Omega^1_{\bar{S}}) = 0$ ist, denn nach Serredualität ist $H^1(E^{1,0}(\mathit{II}) \otimes \Omega^1_{\bar{S}})$ dual zu $H^0((E^{1,0}(\mathit{II})^\vee)$, und dieser Raum verschwindet für $\deg(E^{1,0}(\mathit{II})^\vee) = -a - |\mathit{II}| < 0$. Also gilt

$$h^{2,0} = h^0(E^{1,0}(\mathit{II}) \otimes \Omega^1_{\bar{S}}) = \deg(E^{1,0}(\mathit{II}) \otimes \Omega^1_{\bar{S}}) + 1 - g = a + |\mathit{II}| + 2g - 2 + 1 - g = a + |\mathit{II}| + g - 1.$$

Als nächstes berechnen wir $h^{0,2} = h^1(E^{0,1})$: Mit Hilfe des Satzes von Riemann-Roch ist dies gleich $h^0(E^{0,1}) - \deg E^{0,1} - 1 + g$, und falls $\deg E^{0,1} = -a' < 0$ gilt, erhält man $h^{0,2} = a' + g - 1$. Dies ist nach Hodgedualität gerade $h^{2,0} = a + |\mathit{II}| + g - 1$. Hieraus folgt $a' = a + |\mathit{II}|$, was wir ohnehin als positiv vorausgesetzt haben.
$h^{1,1}$ ist h^0 vom Kokern von $\vartheta : \Omega^0_{(2)}(E)^{1,0} \to \Omega^1_{(2)}(E)^{0,1}$, also die Differenz der Grade der beiden Geradenbündel:

$$h^{1,1} = \deg(E^{0,1}(\mathit{II}) \otimes \Omega^1_{\bar{S}}) - \deg(E^{1,0}(-I)) = -a' + |\mathit{II}| + 2g - 2 - a + |I|.$$

Wegen $a' = a + |\mathit{II}|$ liefert dies die Behauptung. □

Bemerkung 4.4. Die Annahme $a + |\mathit{II}| > 0$ als untere Schranke für den Grad des Hodgebündels $E^{1,0}$ ist häufig erfüllt: In Definition 2.21 wurde der parabolische Grad eines Unterbündels $F \subset E$ definiert als

$$\deg_p F := \deg F + \sum_{P \in \mathit{II}} \sum_{0 \le \alpha < 1} \alpha \dim(\mathrm{Gr}_\alpha \cap F_P),$$

wobei Gr_α der graduierte Anteil der parabolischen Filtrierung zur Monodromie $\exp(2\pi \mathrm{i} \alpha)$ ist. Für $F = E^{0,1}$, ein Unterhiggsbündel von (E, ϑ) mit $\vartheta_F = 0$, erhält man wegen der Simpsonkorrespondenz (genauer, der Halbstabilität von E): $\deg_p(E^{0,1}) \le \deg_p(E) = 0$, was auf $\deg_p(E^{1,0}) = -\deg_p(E^{0,1}) \ge 0$ führt. Ist die Doppelsumme nicht Null und existiert somit ein $\alpha > 0$, erhalten wir die Abschätzung $0 \le \deg_p E^{1,0} < a + |\mathit{II}|$, da alle Hodgezahlen gleich 1 sind.

Bemerkung 4.5. Im Fall $\bar{S} = \mathbb{P}^1$ und $\deg E^{0,1} \le -2$ besagt der Beweis, dass $h^0((E^{0,1})^\vee \otimes \Omega^1_{\bar{S}}) = h^1(E^{0,1}) = h^0(E^{1,0}(\mathit{II}) \otimes \Omega^1_{\bar{S}})$ gilt. Die erste Gleichheit folgt dabei aus der Serre-Dualität, die zweite aus der Hodgedualität. Dies liefert $E^{0,1} = (E^{1,0})^{-1}(-\mathit{II})$.

4.3 Familien von K3-Flächen

Ist X_t eine K3-Fläche, so hat $H^2(X_t, \mathbb{Q})$ Dimension 22, und die Hodgezahlen sind $h^{0,2} = h^{2,0} = 1$ und $h^{1,1} = 20$.

Definition 4.6. Die *Picardzahl* von X_t ist definiert als der Rang der *Néron-Severi-Gruppe* $NS(X_t) = H^2(X_t, \mathbb{Z}) \cap H^{1,1}(X_t)$. Das *transzendente Gitter* ist das orthogonale Komplement der Néron-Severi-Gruppe in $H^2(X_t, \mathbb{Z})$, seine Komplexifizierung heißt *transzendente Kohomologie.*

Für K3-Flächen mit Picardzahl 19 hat die transzendente Kohomologie folglich Hodgezahlen (1,1,1), und wir sind in der gewünschten Situation:
Sei nun also $f : X \to S$ eine glatte projektive Familie von K3-Flächen mit generischer Picardzahl 19 über einer glatten Kurve S. Wir betrachten das lokale System $\mathbb{V} \subset R^2 f_* \mathbb{C}$ vom Rang 3, das über einer dichten offenen Teilmenge durch die transzendente Kohomologie gegeben ist, und das Vektorbündel $V := \mathbb{V} \otimes \mathcal{O}_S$ auf S. Sei

$$E := E^{2,0} \oplus E^{1,1} \oplus E^{0,2}$$

das zugehörige Higgsbündel mit Higgsfeld

$$\vartheta : E \to E \otimes \Omega^1_{\bar{S}}(\log \Sigma).$$

Nun treffen wir die

Annahme 4.7. Jede lokale Monodromiematrix ist entweder unipotent oder hat keinen unipotenten Anteil.

Wir gehen dalso davon aus, dass keine gemischten Fälle mit nichtverschwindenden unipotenten und nicht-unipotenten Anteilen vorkommen, dass also die Jordanformen der lokalen Monodromiematrizen die folgende Form haben:

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} \text{ oder } \begin{pmatrix} \lambda_1 & 1 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

mit Einheitswurzeln $\lambda, \lambda_i \neq 1$.

Lemma 4.8. *Bei den Monodromiematrizen treten nur die Jordanschen Normalformen*

$$T_I = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, T_{II} = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}, T_{II} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} \textit{ und } T_{II} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 1 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

mit $\lambda, \lambda_i \neq 1$ auf. Der Fall I ist unipotent, die Fälle II sind streng quasi-unipotent.

Beweis. Im unipotenten Fall sind die beiden Abbildungen in der Sequenz

$$E^{2,0} \xrightarrow{N} E^{1,1} \xrightarrow{N} E^{0,2}$$

dual zueinander (wie in [8, S. 11, Case m=2]). Daher müssen im Fall $N^2 = 0$ beide die Nullabbildung sein, also gilt dann bereits $N = 0$, und der Fall $T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ kann nicht auftreten. □

Wir berechnen nun den L^2-Higgs-Komplex unter der Annahme 4.7.

Theorem 4.9. *Der L^2-Higgs-Komplex für E ist gegeben durch*

$$\begin{aligned}
\Omega^0_{(2)}(E)^{2,0} &= E^{2,0}(-I),\\
\Omega^0_{(2)}(E)^{1,1} &= E^{1,1},\\
\Omega^0_{(2)}(E)^{0,2} &= E^{0,2},\\
\Omega^1_{(2)}(E)^{2,0} &= E^{2,0}(II) \otimes \Omega^1_{\bar{S}},\\
\Omega^1_{(2)}(E)^{1,1} &= E^{1,1}(II) \otimes \Omega^1_{\bar{S}},\\
\Omega^1_{(2)}(E)^{0,2} &= E^{0,2}(I + II) \otimes \Omega^1_{\bar{S}}.
\end{aligned}$$

Auch hier bezeichnet I die Menge der Punkte mit unipotenter lokaler Monodromie und II die Menge der verbleibenden nicht-unipotenten singulären Punkte.

Beweis. Wir betrachten zunächst den Fall I unipotenter Monodromie:
Hier ist $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, also ist die Monodromiegewichtsfiltrierung von der Form

$$W_3 = \ker N^2 = W_2 \supset W_1 = \mathrm{Bild}\, N^2 = W_0 \supset W_{-1} = 0,$$

wobei W_2 zweidimensional und W_0 eindimensional ist. Man erhält nach Definition 3.14: $\Omega^0_{(2)}(E) = W_2 + tE$, $\Omega^1_{(2)}(E) = (W_0 + tE) \otimes \Omega^1_{\bar{S}}(\log \Sigma)$, also $\Omega^0_{(2)}(E) = tE^{2,0} \oplus E^{1,1} \oplus E^{0,2}$ und $\Omega^1_{(2)}(E) = (tE^{2,0} \oplus tE^{1,1} \oplus E^{0,2}) \otimes \Omega^1_{\bar{S}}(\log \Sigma)$.
Im Fall II rein quasi-unipotenter Monodromie verwendet man Satz 3.16 wie im eindimensionalen Fall und erhält wieder $\Omega^0_{(2)}(E) = E$ und $\Omega^1_{(2)}(E) = E \otimes \Omega^1_{\bar{S}}(\log \Sigma)$. □

Wir setzen $a := \deg E^{2,0}$.

Theorem 4.10. *Es sei $\mathbb{V}$ irreduzibel, es sei $a + |II| > 0$, und es mögen die Abbildungen $\vartheta : E^{2,0} \to E^{1,1} \otimes \Omega^1_{\bar{S}}(\log \Sigma)$ und $\vartheta : E^{1,1} \to E^{0,2} \otimes \Omega^1_{\bar{S}}(\log \Sigma)$ nicht verschwinden. Nach Satz 4.1 gilt dann $h^1(j_*\mathbb{V}) = 6g - 6 + 2|I| + 3|II|$, und die Hodgezahlen für die reine Hodgestruktur vom Gewicht 3 auf $H^1(\bar{S}, j_*\mathbb{V})$ sind gegeben durch*

$$h^{3,0} = h^{0,3} = g - 1 + a + |II|, \quad h^{2,1} = h^{1,2} = 2g - 2 - a + |I| + \frac{1}{2}|II|.$$

Beweis. Der Higgskomplex ist durch

$$\begin{tikzcd}
E^{2,0}(-I) \arrow[dr, "\vartheta", "\neq 0"'] & E^{1,1} \arrow[dr, "\vartheta", "\neq 0"'] & E^{0,2} \\
E^{2,0}(II) \otimes \Omega^1_{\bar{S}} & E^{1,1}(II) \otimes \Omega^1_{\bar{S}} & E^{0,2}(I + II) \otimes \Omega^1_{\bar{S}}
\end{tikzcd}$$

gegeben. Wir bemerken, dass weder $\Omega^0_{(2)}(E)^{0,2} = E^{0,2}$ noch $\Omega^1_{(2)}(E)^{2,0} = E^{2,0}(+II) \otimes \Omega^1_{\bar{S}}$ ein- oder ausgehendes Higgsdifferenzial haben. Hodgedualität, also $h^{3,0} = h^{0,3}$, liefert

$h^0(E^{2,0}(II)\otimes\Omega^1_{\bar{S}}) = h^1(E^{0,2})$. Die Anwendung des Satzes von Riemann-Roch auf $E^{2,0}(II)$ ergibt die Formel für $h^{3,0} = h^{0,3}$ unter der Annahme $a + |II| > 0$: Die Annahme stellt sicher, dass wegen Serre-Dualität $h^1(E^{2,0}(II) \otimes \Omega^1_{\bar{S}}) = 0$ ist, folglich erhält man

$$h^{3,0} = h^0(E^{2,0}(II) \otimes \Omega^1_{\bar{S}}) = \deg(E^{2,0}(II) \otimes \Omega^1_{\bar{S}}) + 1 - g = a + |II| + 2g - 2 + 1 - g.$$

Der Raum $H^{2,1}$ lässt sich als globale Schnitte des Kokernes der Abbildung

$$\Omega^0_{(2)}(E)^{2,0} \xrightarrow{\vartheta} \Omega^1_{(2)}(E)^{1,1}$$

darstellen, also zählen wir die Nullstellen einer Abbildung von Geradenbündeln

$$E^{2,0}(-I) \to E^{1,1}(+II) \otimes \Omega^1_{\bar{S}}.$$

Diese Zahl ist die Differenz der Grade der Geradenbündel, also

$$h^{2,1} = h^{1,2} = \deg E^{1,1}(+II) \otimes \Omega^1_{\bar{S}} - \deg E^{2,0}(-I) = 2g - 2 + \deg E^{1,1} - a + |I| + |II|.$$

Im nicht-unipotenten Fall gilt im Allgemeinen nicht $\deg E^{1,1} = 0$. Setze also $b := \deg E^{1,1}$. Wir erhalten somit $h^{2,1} = 2g - 2 + b - a + |I| + |II|$.
Jetzt benutzen wir eine Prüfsumme: Aus Satz 4.1 wissen wir, dass

$$h^1(j_*\mathbb{V}) = h^{3,0} + h^{2,1} + h^{1,2} + h^{0,3} = 6g - 6 + 2|I| + 3|II|$$

gelten muss, da nach unserer Annahme die nicht-unipotenten lokalen Monodromien als invarianten Unterraum nur den Nullraum besitzen. Dies liefert $b = -\frac{1}{2}|II|$.
Nun kann man zur Überprüfung der Rechnung noch $h^{1,2}$ separat berechnen: Setzt man $a' := -\deg E^{0,2}$, so führt dies auf

$$h^{1,2} = \deg(E^{0,2}(I + II) \otimes \Omega^1_{\bar{S}}) - \deg(E^{1,1}) = -a' + |I| + |II| + 2g - 2 + \frac{1}{2}|II|.$$

Oben haben wir bereits $h^{1,2} = 2g-2-a+|I|+\frac{1}{2}|II|$ berechnet, also gilt $a' = a+|II|$. $\square$

Bemerkung 4.11. Die Bedingung $a + |II| > 0$ ist wieder in vielen Fällen erfüllt (vgl. Bemerkung 4.4).

Bemerkung 4.12. Wir nehmen $\bar{S} = \mathbb{P}^1$ und $\deg E^{0,2} \leq -2$ an. Dann besagt der Beweis, dass $h^0((E^{0,2})^\vee \otimes \Omega^1_{\bar{S}}) = h^1(E^{0,2}) = h^0(E^{2,0}(II) \otimes \Omega^1_{\bar{S}})$ nach Serre- bzw. Hodgedualität gilt. Dies liefert wiederum $E^{0,2} = (E^{2,0})^{-1}(-II)$.

4.4 Familien dreidimensionaler Calabi-Yau-Mannigfaltigkeiten

Wir betrachten eine glatte projektive Familie von dreidimensionalen Calabi-Yau-Mannigfaltigkeiten $f : X \to S$ über einer glatten Kurve S wie in del Angel/Müller-Stach/van Straten/Zuo [8]. Wir nehmen an, dass $\bar{S}$ eine glatte Kompaktifizierung ist, und betrachten eine reelle Variation von Hodgestrukturen $\mathbb{V} \subset R^3 f_*\mathbb{C}$ vom Rang 4 mit Hodgezahlen (1,1,1,1). Wir verwenden die bisherige Notation und treffen wieder die

Annahme 4.13. Jede lokale Monodromiematrix ist entweder unipotent oder hat keinen unipotenten Anteil.

Dies bedeutet, dass die Jordanformen für die lokale Monodromie T von der folgenden Form sind:

$$\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&1&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1&1&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&1\\0&0&0&1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1&1&0&0\\0&1&1&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1&1&0&0\\0&1&1&0\\0&0&1&1\\0&0&0&1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}\lambda_1&0&0&0\\0&\lambda_2&0&0\\0&0&\lambda_3&0\\0&0&0&\lambda_4\end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix}\lambda_1&0&0&0\\0&\lambda_2&1&0\\0&0&\lambda_2&0\\0&0&0&\lambda_3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}\lambda_1&1&0&0\\0&\lambda_1&0&0\\0&0&\lambda_2&1\\0&0&0&\lambda_2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}\lambda_1&1&0&0\\0&\lambda_1&1&0\\0&0&\lambda_1&0\\0&0&0&\lambda_2\end{pmatrix} \quad \text{oder} \quad \begin{pmatrix}\lambda&1&0&0\\0&\lambda&1&0\\0&0&\lambda&1\\0&0&0&\lambda\end{pmatrix},$$

mit Einheitswurzeln $\lambda, \lambda_i \neq 1$.

Lemma 4.14. *Nur die acht Jordanformen*

$$T_I = \begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&1&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}, \; T_{II} = \begin{pmatrix}1&1&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&1\\0&0&0&1\end{pmatrix}, \; T_{III} = \begin{pmatrix}1&1&0&0\\0&1&1&0\\0&0&1&1\\0&0&0&1\end{pmatrix},$$

$$T_{IV} = \begin{pmatrix}\lambda_1&0&0&0\\0&\lambda_2&0&0\\0&0&\lambda_3&0\\0&0&0&\lambda_4\end{pmatrix}, \; T_{IV} = \begin{pmatrix}\lambda_1&0&0&0\\0&\lambda_2&1&0\\0&0&\lambda_2&0\\0&0&0&\lambda_3\end{pmatrix}, \; T_{IV} = \begin{pmatrix}\lambda_1&1&0&0\\0&\lambda_1&0&0\\0&0&\lambda_2&1\\0&0&0&\lambda_2\end{pmatrix},$$

$$T_{IV} = \begin{pmatrix}\lambda_1&1&0&0\\0&\lambda_1&1&0\\0&0&\lambda_1&0\\0&0&0&\lambda_2\end{pmatrix} \quad \text{oder} \quad T_{IV} = \begin{pmatrix}\lambda&1&0&0\\0&\lambda&1&0\\0&0&\lambda&1\\0&0&0&\lambda\end{pmatrix}$$

mit $\lambda, \lambda_i \neq 1$ treten auf. Die Fälle I, II und III sind unipotent, die Fälle IV sind streng quasi-unipotent.

Beweis. Siehe die Diskussion der möglichen Jordanschen Normalformen in [8, Abschnitt 1] analog zu Lemma 4.8. Dies schränkt den unipotenten Fall ein. □

Theorem 4.15. *Der L^2-Higgs-Komplex für E ist gegeben durch*

$$\begin{aligned}
\Omega^0_{(2)}(E)^{3,0} &= E^{3,0}(-\mathit{II}-\mathit{III})\\
\Omega^0_{(2)}(E)^{2,1} &= E^{2,1}(-\mathit{I}-\mathit{III})\\
\Omega^0_{(2)}(E)^{1,2} &= E^{1,2}(-\mathit{II})\\
\Omega^0_{(2)}(E)^{0,3} &= E^{0,3}\\
\Omega^1_{(2)}(E)^{3,0} &= E^{3,0}(IV)\otimes\Omega^1_{\bar S}\\
\Omega^1_{(2)}(E)^{2,1} &= E^{2,1}(IV)\otimes\Omega^1_{\bar S}\\
\Omega^1_{(2)}(E)^{1,2} &= E^{1,2}(IV)\otimes\Omega^1_{\bar S}\\
\Omega^1_{(2)}(E)^{0,3} &= E^{0,3}(\mathit{III}+IV)\otimes\Omega^1_{\bar S}
\end{aligned}$$

Dabei sind die Mengen I, II, III bzw. IV wieder die Mengen der singulären Punkte mit unipotenter bzw. quasi-unipotenter Monodromie entsprechend der obigen Jordanschen Normalformen.

Beweis. Die unipotenten Fälle sind bereits in Proposition 3.1 des Artikels [8] behandelt. Der Beweis für den rein quasi-unipotenten Fall verläuft wie in den vorigen Abschnitten unter Verwendung von Satz 3.16. □

Wir setzen $a := \deg E^{3,0}$, $b := \deg E^{2,1}$, $b' := -\deg E^{1,2}$ und $a' := -\deg E^{0,3}$. Insgesamt erhalten wir das folgende Resultat, das mit Satz 4.1 im Einklang steht:

Theorem 4.16. *Sei $\mathbb{V}$ irreduzibel, sei $a+|IV|>0$, und seien $\vartheta : E^{3,0}\to E^{2,1}\otimes\Omega^1_{\bar S}(\log\Sigma)$ sowie $\vartheta : E^{2,1}\to E^{1,2}\otimes\Omega^1_{\bar S}(\log\Sigma)$ und $\vartheta : E^{1,2}\to E^{0,3}\otimes\Omega^1_{\bar S}(\log\Sigma)$ jeweils nicht die Nullabbildung. Dann sind die Hodgezahlen für die reine Hodgestruktur vom Gewicht 4 auf $H^1(\bar S, j_*\mathbb{V})$ gegeben durch*

$$\begin{aligned}
h^{4,0} &= h^{0,4} = g-1+a+|IV|,\\
h^{3,1} &= h^{1,3} = 2g-2+b-a+|\mathit{II}|+|\mathit{III}|+|IV|,\\
h^{2,2} &= |I|+|\mathit{III}|-2b+2g-2.
\end{aligned}$$

In der Summe erhält man

$$h^1(j_*\mathbb{V}) = 8g-8+|I|+2|\mathit{II}|+3|\mathit{III}|+4|IV|.$$

Beweis. Der Higgskomplex ist durch

$$\begin{tikzcd}
E^{3,0}(-\mathit{II}-\mathit{III}) \arrow[dr, "\vartheta", "\neq 0"'] & E^{2,1}(-I-\mathit{III}) \arrow[dr, "\vartheta", "\neq 0"'] & E^{1,2}(-\mathit{II}) \arrow[dr, "\vartheta", "\neq 0"'] & E^{0,3} \\
E^{3,0}(IV)\otimes\Omega^1_{\bar S} & E^{2,1}(IV)\otimes\Omega^1_{\bar S} & E^{1,2}(IV)\otimes\Omega^1_{\bar S} & E^{0,3}(\mathit{III}+IV)\otimes\Omega^1_{\bar S}
\end{tikzcd}$$

gegeben. Wir bemerken, dass weder $\Omega^0_{(2)}(E)^{0,3} = E^{0,3}$ noch $\Omega^1_{(2)}(E)^{3,0} = E^{3,0}(IV)\otimes\Omega^1_{\bar S}$ ein- oder ausgehendes Higgsdifferenzial haben. Die Hodgedualität $h^{4,0} = h^{0,4}$ liefert

$h^0(E^{3,0}(IV) \otimes \Omega^1_{\bar{S}}) = h^1(E^{0,3})$. Die Anwendung des Satzes von Riemann-Roch auf $E^{3,0}(IV)$ ergibt nun die Formel für $h^{4,0} = h^{0,4}$ unter der Annahme $a + |IV| > 0$: Die Annahme stellt sicher, dass $h^1(E^{3,0}(IV) \otimes \Omega^1_{\bar{S}}) = 0$ ist (wieder wegen Serre-Dualität), somit erhält man

$$h^{4,0} = h^0(E^{3,0}(IV) \otimes \Omega^1_{\bar{S}}) = \deg(E^{3,0}(IV) \otimes \Omega^1_{\bar{S}}) + 1 - g = a + |IV| + 2g - 2 + 1 - g.$$

Andererseits ist nach dem Satz von Riemann-Roch

$$h^{0,4} = h^1(E^{0,3}) = h^0(E^{0,3}) - \deg E^{0,3} - 1 + g = 0 + a' - 1 + g,$$

falls $-a' = \deg E^{0,3} < 0$ ist, und dann erhalten wir $a' = a + |IV|$, was wir ohnehin als positiv vorausgesetzt hatten.
Wie in [8] lässt sich der Raum $H^{3,1}$ darstellen als Raum der globalen Schnitte des Kokernes der Abbildung $\Omega^0_{(2)}(E)^{3,0} \xrightarrow{\vartheta} \Omega^1_{(2)}(E)^{2,1}$, also zählen wir die Nullstellen einer Abbildung von Geradenbündeln

$$E^{3,0}(-II - III) \to E^{2,1}(IV) \otimes \Omega^1_{\bar{S}}.$$

Diese Zahl ist als die Differenz der Grade der Geradenbündel gegeben, das heißt

$$h^{3,1} = h^{1,3} = \deg E^{2,1}(IV) \otimes \Omega^1_{\bar{S}} - \deg E^{3,0}(-II - III) = b + 2g - 2 - a + |II| + |III| + |IV|.$$

Jetzt berechnet man noch $h^{1,3}$ als Differenz der Grade der Geradenbündel in der Abbildung $E^{1,2}(-II) \to E^{0,3}(III + IV) \otimes \Omega^1_{\bar{S}}$:

$$h^{1,3} = \deg E^{0,3}(III + IV) \otimes \Omega^1_{\bar{S}} - \deg E^{1,2}(-II) = -a' + |III| + |IV| + 2g - 2 + b' + |II|$$

und vergleicht dies mit der Formel für $h^{1,3}$ oben. Da wir bereits wissen, dass $a' = a + |IV|$ gilt, erhalten wir hieraus $b' = b + |IV|$.
Auf ähnliche Weise lässt sich $H^{2,2}$ darstellen durch globale Schnitte des Kokernes der Abbildung $\Omega^0_{(2)}(E)^{2,1} \xrightarrow{\vartheta} \Omega^1_{(2)}(E)^{1,2}$, also zählen wir die Nullstellen einer Abbildung von Geradenbündeln

$$E^{2,1}(-I - III) \to E^{1,2}(IV) \otimes \Omega^1_{\bar{S}}.$$

Die Differenz der Grade der Geradenbündel liefert

$$\begin{aligned} h^{2,2} &= \deg(E^{1,2}(IV) \otimes \Omega^1_{\bar{S}}) - \deg(E^{2,1}(-I - III)) \\ &= -b' + |IV| + 2g - 2 - b + |I| + |III| = |I| + |III| - 2b + 2g - 2. \end{aligned}$$

□

Bemerkung 4.17. Die Bedingung $a + |IV| > 0$ ist wieder in vielen Fällen erfüllt, siehe Bemerkung 4.4.

Bemerkung 4.18. Aus dem Beweis folgt, dass für die Grade der beteiligten Geradenbündel $a' = a + |IV|$ und $b' = b + |IV|$ gilt.

Bemerkung 4.19. Sei $\bar{S} = \mathbb{P}^1$ und $\deg(E^{0,3}) \leq -2$. Der Beweis besagt, dass dann nach Serre- bzw. Hodgedualität $h^0((E^{0,3})^\vee \otimes \Omega^1_{\bar{S}}) = h^1(E^{0,3}) = h^0(E^{3,0}(IV) \otimes \Omega^1_{\bar{S}})$ gilt. Dies hat $E^{0,3} = (E^{3,0})^{-1}(-IV)$ zur Folge.

Wir benötigen nun noch eine Gradabschätzung nach oben aus einer Arbeit von Jost/Zuo:

Theorem 4.20 (Jost/Zuo [21, Theorem 1]). *Es gilt*

$$\deg E^{3,0} \leq \left(\frac{1}{2}(h^{2,1} - h_0^{2,1}) + (h^{3,0} - h_0^{3,0})\right)(2g - 2 + \#\Sigma),$$

wobei eine tiefgestellte 0 den Kern von ϑ bezeichnet. Allgemeiner hat man für eine reelle Variation von Hodgestrukturen $\mathbb{V}$ von ungeradem Gewicht $k = 2l+1 \geq 1$ die Abschätzung

$$\deg E^{k,0} \leq \left(\frac{1}{2}(h^{k-l,l} - h_0^{k-l,l}) + \sum_{j=0}^{l-1}(h^{k-j,j} - h_0^{k-j,j})\right)(2g - 2 + \#\Sigma).$$

Wenn wir annehmen, dass alle Komponenten des Higgsfeldes ϑ (außer der auf $E^{0,3}$) von der Nullabbildung verschieden sind, und alle Ränge $h^{p,q}$ jeweils 1 sind wie in unserem Fall, dann vereinfacht sich die Abschätzung auf

$$\deg E^{3,0} \leq \frac{3}{2}(2g - 2 + \#\Sigma).$$

Für den Fall, dass $\bar{S} = \mathbb{P}^1$ gilt, erhalten wir also $\deg E^{3,0} \leq \frac{3}{2}(\#\Sigma - 2)$. Im Fall dreier singulärer Punkte erhalten wir daraus $\deg E^{3,0} \leq \frac{3}{2}$, also $a = \deg E^{3,0} \leq 1$.

4.5 Die 14 Beispiele aus dem Artikel [8]

Wir verwenden jetzt die in Theorem 4.16 erhaltenen Formeln, um die Tabellen mit den Hodgezahlen der 14 Calabi-Yau-Familien in [8] zu vervollständigen. Für diese Familien gilt stets $\bar{S} = \mathbb{P}^1$. In den Tabellen ist e der Grad der Überlagerungsabbildung $\mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^1$ der Form $z \mapsto z^e$ mit Verzweigungen in 0 und ∞. Die Nummerierung ist wie in der Datenbank von Almkvist/van Enckevort/van Straten/Zudilin [1]; wir verwenden allerdings anstelle der Operatoren die via Spiegelsymmetrie zugeordneten geometrischen Modelle (genauer gesagt, deren Kuranishifamilien) wie in Chen/Yang/Yui [6]. Dabei bedeutet beispielsweise die Notation $\mathbb{P}(1,1,1,1,4,6)[2,12]$, dass es sich um den Schnitt einer Hyperfläche vom Grad 2 mit einer Hyperfläche vom Grad 12 im (fünfdimensionalen) gewichtet projektiven Raum mit den Gewichten 1, 1, 1, 1, 4 und 6 handelt. (Im Vergleich zu [8] wurden Tippfehler bei den geometrischen Modellen Nr. 9, 12, 13 und 14 korrigiert, und im Preprint [18] wurden teilweise die Werte für $h^{4,0}$ und $a = \deg E^{3,0}$ zu optimistisch abgeschätzt.) In diesen 14 Fällen haben wir:

- quasi-unipotente Monodromie bei ∞,
- maximal unipotente Monodromie bei 0,

- nicht-maximal unipotente Monodromie (Typ I) im verbleibenden singulären Punkt.

Die Hodgezahlen zu den Familien Nr. 1, 3, 4, 6, 8 und 10 wurden bereits in [8] vollständig berechnet. Der Vollständigkeit halber führen wir sie trotzdem mit auf.
Bei den 14 Familien treten bei den Monodromiematrizen bei ∞ folgende Fälle auf (vgl. oben Lemma 4.14, dabei ist ζ_k jeweils eine k-te primitive Einheitswurzel):

(a) halbeinfache Monodromie $\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_4 \end{pmatrix}$ in den Fällen 1, 2, 7, 8, 9, 11, 12:

Nr.	Modell // λ_i	e	h^1	$h^{4,0}$	$h^{3,1}$	$h^{2,2}$	a	b
1	$\mathbb{P}^4[5]$	1	0	0	0	0	0	0
		2	1	0	0	1	0	0
	$\lambda_1 = \zeta_5, \lambda_2 = \zeta_5^2$	5	0	0	0	0	1	2
	$\lambda_3 = \zeta_5^3, \lambda_4 = \zeta_5^4$	10	5	1	1	1	2	4
2	$\mathbb{P}(1,1,1,2,5)[10]$	1	0	0	0	0	0	0
		2	1	0	0	1	0	0
	$\lambda_1 = \zeta_{10}, \lambda_2 = \zeta_{10}^3$	5	4	$0,1,2$	$0,1,2$	$4,2,0$	$0,1,2$	$0,1,2$
	$\lambda_3 = \zeta_{10}^7, \lambda_4 = \zeta_{10}^9$	10	5	$0,1,2$	$0,1,2$	$5,3,1$	$1,2,3$	$2,3,4$
7	$\mathbb{P}(1,1,1,1,4)[8]$	1	0	0	0	0	0	0
		2	1	0	0	1	0	0
	$\lambda_1 = \zeta_8, \lambda_2 = \zeta_8^3$	4	3	0 oder 1	0 oder 1	3 oder 1	0 oder 1	0 oder 1
	$\lambda_3 = \zeta_8^5, \lambda_4 = \zeta_8^7$	8	3	0 oder 1	0 oder 1	3 oder 1	1 oder 2	2 oder 3
8	$\mathbb{P}(1,1,1,1,2)[6]$	1	0	0	0	0	0	0
	$\lambda_1 = \zeta_6, \lambda_2 = \zeta_6^2$	2	1	0	0	1	0	0
	$\lambda_3 = \zeta_6^4, \lambda_4 = \zeta_6^5$	6	1	0	0	1	1	2
9	$\mathbb{P}(1,1,1,1,4,6)[2,12]$	1	0	0	0	0	0	0
		2	1	0	0	1	0	0
	$\lambda_1 = \zeta_{12}, \lambda_2 = \zeta_{12}^5$	3	2	0 oder 1	0 oder 1	2 oder 0	0 oder 1	0 oder 1
	$\lambda_3 = \zeta_{12}^7, \lambda_4 = \zeta_{12}^{11}$	4	3	0 oder 1	0 oder 1	3 oder 1	0 oder 1	0 oder 1
		6	5	$0,1,2$	$0,1,2$	$5,3,1$	$0,1,2$	$0,1,2$
		12	7	$0,1,2,3$	$0,1,2,3$	$7,5,3,1$	$1,2,3,4$	$2,3,4,5$
11	$\mathbb{P}(1,1,1,2,2,3)[4,6]$	1	0	0	0	0	0	0
	$\lambda_1 = \zeta_4, \lambda_2 = \zeta_3$	2	1	0	0	1	0	0
	$\lambda_3 = \zeta_3^2, \lambda_4 = \zeta_4^3$	12	7	$0,1,2,3$	$0,1,2,3$	$7,5,3,1$	$1,2,3,4$	$2,3,4,5$
12	$\mathbb{P}(1,1,1,1,1,2)[3,4]$	1	0	0	0	0	0	0
		2	1	0	0	1	0	0
	$\lambda_1 = \zeta_6, \lambda_2 = \zeta_4$	3	2	0 oder 1	0 oder 1	2 oder 0	0 oder 1	0 oder 1
	$\lambda_1 = \zeta_4^3, \lambda_2 = \zeta_6^5$	12	7	$0,1,2,3$	$0,1,2,3$	$7,5,3,1$	$1,2,3,4$	$2,3,4,5$

Wir führen die Berechnung der Hodgezahlen mit Hilfe von Theorem 4.16 an einigen Beispielen durch:

Die Familie Nr. 11:
Nach der Überlagerung $z \mapsto z^e$ hat man zunächst je einen Punkt vom Typ *III* und *IV* sowie e Punkte vom Typ I.

- $e = 1$: Hier ist $h^1 = |I| + 2|II| + 3|III| + 4|IV| - 8 = 1 + 3 + 4 - 8 = 0$, also verschwinden alle Hodgezahlen und auch a und b.
- $e = 2$: Nun gilt $h^1 = 2 + 3 + 4 - 8 = 1$, also ist $h^{2,2} = 1$ und die übrigen Hodgezahlen sind 0. Wegen $h^{4,0} = a - 1 + |IV| = a$ und $h^{3,1} = b - a - 2 + |III| + |IV| = b - a$ verschwinden auch a und b.
- $e = 3$, $e = 4$, $e = 6$: Hier treten jeweils Matrizen mit unipotentem und quasi-unipotentem Anteil auf, und unsere Formeln sind nicht anwendbar.
- $e = 12$: Die Singularität vom Typ IV bei ∞ verschwindet bei dieser Überlagerung, somit hat man $|I| = 12$ und $|III| = 1$, und folglich $h^1 = 12 + 3 - 8 = 7$. Für die Hodgezahlen gilt $h^{4,0} = a - 1$ (dies kann also 0, 1, 2 oder 3 sein), $h^{3,1} = b - a - 2 + |III| = b - a - 1$ (dies kann ebenfalls 0, 1, 2 oder 3 sein), und $h^{2,2} = |I| + |III| - 2b - 2 = 11 - 2b$ (dies kann 1, 3, 5 oder 7 sein, b ist dann jeweils 5, 4, 3 oder 2).

Die Berechnungen für die Familie Nr. 9 verlaufen genauso, hier kann man zusätzlich für $e = 3$, $e = 4$ und $e = 6$ die Hodgezahlen berechnen. In diesen drei Fällen gilt $h^1 = e + 3 + 4 - 8 = e - 1$, und es verbleiben die in der Tabelle angegebenen Möglichkeiten.
Für die Familien Nr. 12, 2 und 7 verlaufen die Rechnungen ähnlich.

(b) drei Jordanblöcke $\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$ in den Fällen 5, 6 und 14:

Nr.	Modell // λ_i	e	h^1	$h^{4,0}$	$h^{3,1}$	$h^{2,2}$	a	b
5	$\mathbb{P}^6[2,2,3]$	1	0	0	0	0	0	0
	$\lambda_1 = \zeta_3, \lambda_2 = -1, \lambda_3 = \zeta_3^2$	6	2	$0,1$	$0,1$	$2,0$	$1,2$	$2,3$
6	$\mathbb{P}^5[2,4]$	1	0	0	0	0	0	0
	$\lambda_1 = \zeta_4, \lambda_2 = -1, \lambda_3 = \zeta_4^3$	4	0	0	0	0	1	2
		8	4	1	1	0	2	4
14	$\mathbb{P}(1,1,1,1,1,3)[2,6]$	1	0	0	0	0	0	0
	$\lambda_1 = \zeta_6, \lambda_2 = -1, \lambda_3 = \zeta_6^5$	3	2	$0,1$	$0,1$	$2,0$	$0,1$	$0,1$
		6	2	$0,1$	$0,1$	$2,0$	$1,2$	$2,3$

Berechnung der Hodgezahlen für die Familie Nr. 14:
Nach der Überlagerung $z \mapsto z^e$ hat man wieder zunächst je einen Punkt vom Typ *III* und *IV* sowie e Punkte vom Typ I.

- $e = 1$: Hier ist wieder $h^1 = 1 + 3 + 4 - 8 = 0$, und alle Hodgezahlen sowie a und b verschwinden.

- $e = 2$: Diesen Fall können wir nicht berechnen, da hier gemischte unipotente/quasi-unipotente Monodromie auftritt.

- $e = 3$: Hier ist $h^1 = |I| + 3|III| + 4|IV| - 8 = 3 + 3 + 4 - 8 = 2$, und außerdem $h^{4,0} = a - 1 + |IV| = a$ (kann also 0 oder 1 sein), $h^{3,1} = b - a - 2 + |III| + |IV| = b - a$ (kann ebenfalls 0 oder 1 sein), sowie $h^{2,2} = |I| + |III| - 2b - 2 = 2 - 2b$ (kann 2 oder 0 sein, je nachdem, ob b gleich 0 ist oder 1).

- $e = 6$: Hier wird der Punkt bei ∞ zu einem vom Typ I, und es ist $h^1 = 7 + 3 - 8 = 2$. Ferner ist $h^{4,0} = a - 1$, $h^{3,1} = b - a - 1$ und $h^{2,2} = 6 - 2b$. Man erhält die in der Tabelle angegebenen Werte.

Die Familie Nr. 5 berechnet sich im Prinzip genauso, mit dem Unterschied, dass dort auch im Fall $e = 3$ gemischte unipotente/quasi-unipotente Monodromie auftritt, die wir nicht berechnen können.
Die Familie Nr. 6 wurde schon in [8] behandelt.

(c) zwei Jordanblöcke $\begin{pmatrix} \lambda_1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$ in den Fällen 4, 10 und 13:

Nr.	Modell // λ_i	e	h^1	$h^{4,0}$	$h^{3,1}$	$h^{2,2}$	a	b
4	$\mathbb{P}^5[3,3]$	1	0	0	0	0	0	0
		2	1	0	0	1	0	0
	$\lambda_1 = \zeta_3, \lambda_2 = \zeta_3^2$	3	0	0	0	0	1	1
		6	3	1	0	1	2	2
10	$\mathbb{P}(1,1,1,1,2,2)[4,4]$	1	0	0	0	0	0	0
		2	1	0	0	1	0	0
	$\lambda_1 = \zeta_4, \lambda_2 = \zeta_4^3$	4	1	0	0	1	1	1
		8	5	1	0	3	2	2
13	$\mathbb{P}(1,1,2,2,3,3)[6,6]$	1	0	0	0	0	0	0
		2	1	0	0	1	0	0
	$\lambda_1 = \zeta_6, \lambda_2 = \zeta_6^5$	3	2	0 oder 1	0 oder 1	2 oder 0	0 oder 1	0 oder 1
		6	3	0 oder 1	0 oder 1	3 oder 1	1 oder 2	1 oder 2

Die Fälle 4 und 10 wurden schon in [8] behandelt, und der Fall 13 verläuft analog zu Fall 14 oben, mit dem Unterschied, dass hier der Punkt vom Typ IV bei ∞ schließlich (bei $e = 6$) zu einem vom Typ II wird.

(d) einen maximalen Jordanblock $\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$ im Fall 3:

Nr.	Modell // λ_i	e	h^1	$h^{4,0}$	$h^{3,1}$	$h^{2,2}$	a	b
3	$\mathbb{P}^7[2,2,2,2]$	1	0	0	0	0	0	0
	$\lambda = -1$	2	0	0	0	0	1	1
		$2k$	$2k-2$	$k-1$	0	0	k	k

Dieser Fall wurde schon in [8] behandelt. Hier wird der Punkt vom Typ IV bei ∞ zu einem vom Typ III, und zwar schon bei $e = 2$.

4.6 Rohdes Beispiel

Rohde konstruiert in [30] Beispiele von eindimensionalen Familien bestimmter dreidimensionaler Calabi-Yau-Mannigfaltigkeiten. Diese wurden von Garbagnati und van Geemen in [14] und [13, §3] eingehend untersucht. Die Konstruktion ist so ähnlich wie bei Borcea [4] und Voisin [36], das heißt, man erhält sie durch Anwendung bestimmter Automorphismen auf ein Produkt einer festen elliptischen Kurve E und einer K3-Fläche S_λ. Im Gegensatz zu den Arbeiten von Borcea und Voisin werden bei Rohde aber Automorphismen der Ordnung drei statt zwei verwendet.
Wir folgen zunächst dem Artikel von Garbagnati/van Geemen [14]. In diesem Abschnitt ist S eine K3-Fläche, nicht die Basiskurve, und E ist eine elliptische Kurve.
Sei ein Automorphismus α auf einer K3-Fläche S gegeben, der auf $H^{2,0}(S) \cong \mathbb{C}$ als $\bar{\xi}$ operiert, wobei $\xi = e^{\frac{2\pi i}{3}}$ eine dritte Einheitswurzel ist. Wir nehmen an, der Fixort von α bestehe aus k disjunkten glatten rationalen Kurven und $k+3$ isolierten Fixpunkten.

Theorem 4.21 (Rohde [30, Theorem 1.2]). *Für $0 \le k \le 6$ werden solche K3-Flächen durch den r-Ball $\mathbb{B}_r$, $r = 6-k$, parametrisiert.*

Sei nun $E \cong \mathbb{C}/\mathbb{Z} + \mathbb{Z}\xi$ die elliptische Kurve mit j-Invariante Null, das heißt, E ist isomorph zur Fermatkubik und hat folglich Weierstraßgleichung $y^2 = x^3 + 1$. Definiere einen Automorphismus von E durch

$$\alpha_E : E \to E,\ (x,y) \mapsto (\xi x, y) \qquad (E : y^2 = x^3 + 1),$$

dieser operiert auf $H^{1,0}(E) = \mathbb{C}\frac{dx}{y}$ als Multiplikation mit ξ. Dann hat das Produkt $S \times E$ den Automorphismus (α, α_E), der trivial auf $H^{2,0}(S) \otimes H^{1,0}(E)$ operiert.

Theorem 4.22 (Rohde [30, Theorem 1.9 und Construction 1.4]). *Der Quotient $(S \times E)/_{(\alpha,\alpha_E)}$ ist birational isomorph zu einer dreidimensionalen Calabi-Yau-Mannigfaltigkeit X mit $h^{2,1}(X) = r = 6-k$ und $h^{1,1}(X) = 18 + 11k$. Diese Calabi-Yau-Mannigfaltigkeiten werden vom r-Ball $\mathbb{B}_r$ parametrisiert, und ihr Modulraum ist ein Quotient des Balles nach einer arithmetischen Untergruppe von $SU(1,r)$.*

Um wieder eine Situation zu erreichen, in der die dritte Kohomologie Hodgezahlen (1,1,1,1) hat, benötigen wir also die Bedingung $r = 1$.
Nun wird die Konstruktion von Rohde auf eine K3-Fläche S_f angewendet, die eine elliptische Faserung $\pi : S_f \to \mathbb{P}^1_t$ mit Weierstraßmodell $Y^2 = X^3 + f(t)^2$, $f = gh^2$, $\deg g = \deg h = 2$ hat. Dies definiert eine dreidimensionale Calabi-Yau-Mannigfaltigkeit X_f. In diesem Fall ist $r = 1$ (siehe [14, Abschnitt 1.2]), und man kann die Kohomologiegruppe $H^3(X_f, \mathbb{Q})$ aus der Kohomologiegruppe $H^1(C_f, \mathbb{Q})$ einer Kurve C_f erhalten.
Die Kurve C_f ist definiert durch $v^3 = f(t)$ mit f wie eben. Sie ist glatt und projektiv, und hat Geschlecht zwei. Wie in [13, Abschnitt 3.3] bemerkt wird, kann man hierbei $g(t) = t(t-1)$ und $h(t) = t - \lambda$ wählen, das heißt, die zweite Nullstelle von h ist bei ∞. Infolgedessen schreiben wir ab jetzt C_λ, S_λ und X_λ statt C_f, S_f und X_f.
Die definierende Gleichung zeigt, dass C_λ eine zyklische Überlagerung von $\mathbb{P}^1_t$ vom Grad drei mit Decktransformation $\beta_\lambda : C_\lambda \to C_\lambda$, $(t, v) \mapsto (t, \xi v)$ ist.
Seien $H^{p,q}(C_\lambda)_\xi$ und $H^{p,q}(C_\lambda)_{\bar\xi}$ die Unterräume von $H^{p,q}(C_\lambda)$, auf denen β_λ als ξ bzw. $\bar\xi$ operiert. Dann zerlegt sich $H^1(C_\lambda, \mathbb{C})$ wie folgt in vier eindimensionale Eigenräume:

$$H^1(C_\lambda, \mathbb{C}) = H^{1,0}(C_\lambda)_\xi \oplus H^{1,0}(C_\lambda)_{\bar\xi} \oplus H^{0,1}(C_\lambda)_\xi \oplus H^{0,1}(C_\lambda)_{\bar\xi}.$$

Es gilt $\overline{H^{p,q}(C_\lambda)_\xi} = H^{q,p}(C_\lambda)_{\bar\xi}$, außerdem $H^{1,0}(C_\lambda)_\xi = \mathbb{C}g\frac{dt}{v^2}$ und $H^{1,0}(C_\lambda)_{\bar\xi} = \mathbb{C}\frac{dt}{v}$.
Die Kohomologiegruppen von X_λ und C_λ hängen wie folgt zusammen:

Satz 4.23 (Garbagnati/van Geemen [14, Prop. 2.2]). *Sei X_λ die dreidimensionale Calabi-Yau-Mannigfaltigkeit wie oben und C_λ die zugehörige Kurve vom Geschlecht zwei. Dann existiert ein Isomorphismus*

$$\phi : H^1(C_\lambda, \mathbb{Q}) \xrightarrow{\cong} H^3(X_\lambda, \mathbb{Q}),$$

unter dem $\phi(H^{1,0}(C_\lambda)_{\bar\xi}) = H^{3,0}(X_\lambda)$ und $\phi(H^{0,1}(C_\lambda)_{\bar\xi}) = H^{2,1}(X_\lambda)$ gilt.

Hilfreich in diesem Zusammenhang sind noch das folgende Lemma und die folgende Bemerkung, die sich im Artikel [13] von Garbagnati/van Geemen finden:

Lemma 4.24 (nach Garbagnati/van Geemen [13, Abschnitt 3.3, Tippfehler korrigiert]). *Ist die Kurve C_λ durch die Gleichung $v^3 = t(t-1)(t-\lambda)^2$ gegeben, so ist die Picard-Fuchs-Gleichung für $\eta = dt/v$ gegeben durch*

$$\left(\lambda(\lambda-1)\frac{\partial^2}{\partial\lambda^2} + (2\lambda-1)\frac{\partial}{\partial\lambda} + \frac{2}{9}\right)\eta = 0.$$

Beweis. Leitet man

$$\eta = \frac{dt}{v} = \frac{dt}{t^{1/3}(t-1)^{1/3}(t-\lambda)^{2/3}} = t^{-\frac{1}{3}}(t-1)^{-\frac{1}{3}}(t-\lambda)^{-\frac{2}{3}}dt$$

ab, so erhält man

$$\frac{\partial\eta}{\partial\lambda} = \frac{2}{3}t^{-\frac{1}{3}}(t-1)^{-\frac{1}{3}}(t-\lambda)^{-\frac{5}{3}}dt$$

und

$$\frac{\partial^2\eta}{\partial\lambda^2} = \frac{10}{9} t^{-\frac{1}{3}}(t-1)^{-\frac{1}{3}}(t-\lambda)^{-\frac{8}{3}} dt.$$

Setzt man nun

$$f = t^{\frac{2}{3}}(t-1)^{\frac{2}{3}}(t-\lambda)^{-\frac{5}{3}}$$

und berechnet

$$\begin{aligned} df &= \frac{2}{3} t^{-\frac{1}{3}}(t-1)^{\frac{2}{3}}(t-\lambda)^{-\frac{5}{3}} dt + \frac{2}{3} t^{\frac{2}{3}}(t-1)^{-\frac{1}{3}}(t-\lambda)^{-\frac{5}{3}} dt - \frac{5}{3} t^{\frac{2}{3}}(t-1)^{\frac{2}{3}}(t-\lambda)^{-\frac{8}{3}} dt \\ &= (t-1)\frac{\partial\eta}{\partial\lambda} + t\frac{\partial\eta}{\partial\lambda} - \frac{3}{2} t(t-1)\frac{\partial^2\eta}{\partial\lambda^2} \\ &= ((t-\lambda)+(\lambda-1))\eta' + ((t-\lambda)+\lambda)\eta' - \frac{3}{2}((t-\lambda)+\lambda)((t-\lambda)+(\lambda-1))\eta'', \end{aligned}$$

so erhält man unter Verwendung von

$$(t-\lambda)\eta' = \frac{2}{3}\eta, \quad (t-\lambda)\eta'' = \frac{5}{3}\eta', \quad (t-\lambda)^2\eta'' = \frac{10}{9}\eta$$

schließlich

$$\begin{aligned} df &= \frac{2}{3}\eta + (\lambda-1)\eta' + \frac{2}{3}\eta + \lambda\eta' - \frac{3}{2}\cdot\frac{10}{9}\eta - \frac{3}{2}\cdot\frac{5}{3}(\lambda-1)\eta' - \frac{3}{2}\cdot\frac{5}{3}\lambda\eta' - \frac{3}{2}\lambda(\lambda-1)\eta'' \\ &= -\frac{1}{3}\eta - \frac{3}{2}(2\lambda-1)\eta' - \frac{3}{2}\lambda(\lambda-1)\eta'', \end{aligned}$$

was auf

$$-\frac{2}{3} df = \left(\lambda(\lambda-1)\frac{\partial^2}{\partial\lambda^2} + (2\lambda-1)\frac{\partial}{\partial\lambda} + \frac{2}{9}\right)\eta$$

führt. □

Ein Koeffizientenvergleich mit der klassischen hypergeometrischen Gleichung

$$\lambda(\lambda-1)\frac{\partial^2\eta}{\partial\lambda^2} + ((p+q+1)\lambda - r)\frac{\partial\eta}{\partial\lambda} + pq\,\eta = 0$$

liefert $p+q=1$ und $pq=\frac{2}{9}$, also $p=\frac{1}{3}$, $q=\frac{2}{3}$, $r=1$. Das Riemann-Schema (siehe Beukers [3, S. 18]) liefert allgemein die folgenden lokalen Exponenten:

0	1	∞
0	0	p
$1-r$	$r-p-q$	q

Also haben hier M_0 und M_1 jeweils zweimal den Eigenwert 1, und M_∞ hat Eigenwerte $\exp(\frac{2\pi i}{3})$ und $\exp(\frac{4\pi i}{3})$, also hat die Variation von Hodgestrukturen zwei unipotente und einen echt quasi-unipotenten Punkt.

Bemerkung 4.25 (Garbagnati/van Geemen [13, S. 11 unten]). Die Picard-Fuchs-Gleichung aus Lemma 4.24 ist gleichzeitig die Picard-Fuchs-Gleichung für die holomorphe 3-Form auf der zugehörigen Familie von dreidimensionalen Calabi-Yau-Mannigfaltigkeiten.

Die Higgskohomologie: Nun verwenden wir diese Resultate, um die Hodgezahlen der L^2-Higgs-Kohomologie der zugehörigen Higgsbündel zu berechnen. Ab hier ist S wieder die Basiskurve.
Der obige Satz 4.23 liefert

$$\begin{aligned} H^{3,0}(X_\lambda) &\cong H^{1,0}(C_\lambda)_{\bar{\xi}}, \quad & H^{2,1}(X_\lambda) &\cong H^{0,1}(C_\lambda)_{\bar{\xi}}, \\ H^{1,2}(X_\lambda) &\cong H^{1,0}(C_\lambda)_{\xi}, \quad & H^{0,3}(X_\lambda) &\cong H^{0,1}(C_\lambda)_{\xi}. \end{aligned}$$

Weiterhin wird die Familie C_λ von einer Shimurafamilie induziert, siehe dazu [14]. Als Konsequenz daraus induziert die Higgsabbildung zwei nichtverschwindende Abbildungen

$$\vartheta : E^{3,0} \to E^{2,1} \otimes \Omega^1_{\bar{S}}(\log \Sigma) \quad \text{und} \quad \vartheta : E^{1,2} \to E^{0,3} \otimes \Omega^1_{\bar{S}}(\log \Sigma),$$

die von den entsprechenden Higgsfeldern für die Familie C_λ induziert werden, und einen Nullmorphismus

$$\vartheta : E^{2,1} \xrightarrow{0} E^{1,2} \otimes \Omega^1_{\bar{S}}(\log \Sigma).$$

Dieser ist Null, da die Higgsfelder die Eigenraumzerlegungen erhalten.
Man weiß noch mehr über $a = \deg E^{3,0}$ und $b = \deg E^{2,1}$: Es gilt $\bar{S} = \mathbb{P}^1$, und wir haben $\#\Sigma = 3$ singuläre Punkte, einer davon vom Typ IV (das folgt aus Lemma 4.24). Da die Abbildung $\vartheta : E^{2,1} \xrightarrow{0} E^{1,2} \otimes \Omega^1_{\bar{S}}(\log \Sigma)$ Null ist, können die Monodromiematrizen nicht vom Typ I oder III sein, und wir erhalten $|IV| = 1$ und $|II| = 2$.
Sei $F = F^{1,0} \oplus F^{0,1}$ das Higgsbündel zur Variation der Geschlecht-2-Kurven C_λ. Dann zerlegt sich F in Eigenräume, $F = F_\xi \oplus F_{\bar{\xi}}$. Wegen der nicht-unipotenten Punkte sind $F^{1,0}_\square$ und $F^{0,1}_\square$ (für $\square \in \{\xi, \bar{\xi}\}$) nicht dual zueinander. Wir erhalten

Lemma 4.26. *In Rohdes Beispiel hat jedes Rang-zwei-Higgsbündel $F_\square$ ein maximales Higgsfeld, das heißt $\vartheta : F^{1,0}_\square \xrightarrow{\cong} F^{0,1}_\square \otimes \Omega^1_{\mathbb{P}^1}(\log \Sigma)$ ist ein Isomorphismus. Weiterhin gilt* $\deg F^{1,0}_\square = 0$ *und* $\deg F^{0,1}_\square = -1$.

Beweis. Die Arakelov-Ungleichung von Jost und Zuo (Theorem 4.20) liefert $\deg F^{1,0}_\square \leq \frac{1}{2}$, also sogar $\deg F^{1,0}_\square \leq 0$.
Andererseits gilt $\deg F^{1,0}_\square \geq 0$: Betrachte das lokale System $\mathbb{W}_\square$ zu $F_\square$. Dieses erfüllt $h^2(\mathbb{P}^1, j_*\mathbb{W}_\square) = h^0(\mathbb{P}^1, j_*\mathbb{W}_\square) = 0$ nach Satz 4.1, Teil (a). Der Higgskomplex für $F_\square$ ist gegeben durch

$$\begin{tikzcd} F^{1,0}_\square(-I) \arrow[dr, "\vartheta", "\neq 0"'] & F^{0,1}_\square \\ F^{1,0}_\square(II) \otimes \Omega^1_{\mathbb{P}^1} & F^{0,1}_\square(II) \otimes \Omega^1_{\mathbb{P}^1} \end{tikzcd}$$

wie im Beweis von Theorem 4.3. Daher ist $H^1(\mathbb{P}^1, F^{1,0}_\square(II) \otimes \Omega^1_{\mathbb{P}^1})$ der direkte Summand vom Hodgetyp (2,1) in $H^2(\mathbb{P}^1, j_*\mathbb{W}_\square) = 0$.
Wegen $|II| = 1$ erhalten wir $0 = h^1(\mathbb{P}^1, F^{1,0}_\square(1) \otimes \Omega^1_{\mathbb{P}^1}) = h^0(\mathbb{P}^1, (F^{1,0}_\square)^{-1}(-1))$. Also $F^{1,0}_\square = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}$.

Analog trägt $H^0(F^{0,1})$ zu $H^0(\bar{S}, j_*\mathbb{W}_\square) = 0$ bei, also $\deg F^{0,1} < 0$.
Da ϑ nicht die Nullabbildung ist, und $\deg(\Omega^1_{\bar{S}}(\log\Sigma)) = 1$ gilt, erhalten wir $\deg F^{0,1}_\square = -1$ und $F^{0,1}_\square = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-1)$. □

Korollar 4.27. *Für das Higgsbündel E folgt $a = 0$ und $b = -1$. Weiterhin sind die beiden Abbildungen $\vartheta : E^{3,0} \to E^{2,1} \otimes \Omega^1_{\mathbb{P}^1}(\log\Sigma)$ und $\vartheta : E^{1,2} \to E^{0,3} \otimes \Omega^1_{\mathbb{P}^1}(\log\Sigma)$ Isomorphismen.*

Wir stellen fest, dass die Gleichungen $a' = a + |IV|$ und $b' = b + |IV|$ aus Bemerkung 4.18 für die Grade der beteiligten Geradenbündel auch hier gelten.
Die Eigenschaften von E fassen wir in der folgenden Definition zusammen:

Definition 4.28. Ein logarithmisches Higgsbündel $E = E^{3,0} \oplus E^{2,1} \oplus E^{1,2} \oplus E^{0,3}$ vom Gewicht $m = 3$ und Rang 4 auf $\bar{S}$ heißt *zerlegt*, falls $\vartheta : E^{3,0} \to E^{2,1} \otimes \Omega^1_{\bar{S}}(\log\Sigma)$ und $\vartheta : E^{1,2} \to E^{0,3} \otimes \Omega^1_{\bar{S}}(\log\Sigma)$ Isomorphismen sind und $\vartheta : E^{2,1} \to E^{1,2} \otimes \Omega^1_{\bar{S}}(\log\Sigma)$ die Nullabbildung.

Theorem 4.29. *Die L^2-Higgs-Kohomologie eines zerlegten Higgsbündels E vom Gewicht $m = 3$ und Rang 4 lässt sich unter der Annahme $a + |IV| > 0$ wie folgt beschreiben:*

$h^1_{L^2}(S, \mathbb{V})^{(4,0)} = h^0(\bar{S}, E^{3,0}(IV) \otimes \Omega^1_{\bar{S}}) = g - 1 + a + |IV|$,
$h^1_{L^2}(S, \mathbb{V})^{(3,1)} = h^1_{L^2}(S, \mathbb{V})^{(1,3)} = 0$,
$h^1_{L^2}(S, \mathbb{V})^{(2,2)} = h^0(\bar{S}, E^{1,2}(IV) \otimes \Omega^1_{\bar{S}}) \oplus h^1(\bar{S}, E^{2,1}(-I - III)) = 2h^0(\bar{S}, E^{1,2}(IV) \otimes \Omega^1_{\bar{S}})$.

Ferner gilt $|I| = |III| = 0$ und $a = b + 2g - 2 + \#\Sigma$.

Beweis. Wir benutzen für den L^2-Higgs-Komplex $\Omega^0_{(2)}(E) \xrightarrow{\vartheta} \Omega^1_{(2)}(E)$ dieselbe Notation wie in Abschnitt 4.4 oben. Da E zerlegt ist, ist der Pfeil $\Omega^0_{(2)}(E)^{2,1} \to \Omega^1_{(2)}(E)^{1,2}$ die Nullabbildung. Hieraus folgt aus Gründen der Symmetrie $|I| = |III| = 0$. Die anderen beiden Pfeile im folgenden Diagramm bleiben Isomorphismen:

$$\begin{tikzcd}
E^{3,0}(-II - III) \arrow[dr, "\vartheta", "\cong"'] & E^{2,1}(-I - III) \arrow[dr, "\vartheta", "0"'] & E^{1,2}(-II) \arrow[dr, "\vartheta", "\cong"'] & E^{0,3} \\
E^{3,0}(IV) \otimes \Omega^1_{\bar{S}} & E^{2,1}(IV) \otimes \Omega^1_{\bar{S}} & E^{1,2}(IV) \otimes \Omega^1_{\bar{S}} & E^{0,3}(III + IV) \otimes \Omega^1_{\bar{S}}.
\end{tikzcd}$$

Aus dem linken Isomorphismus folgt $a = b + 2g - 2 + |II| + |III| + |IV|$. Mit Hilfe des Satzes von Riemann-Roch gilt unter Verwendung der Annahme $a + |IV| > 0$:

$$h^1_{L^2}(S, \mathbb{V})^{(4,0)} = h^1_{L^2}(S, \mathbb{V})^{(0,4)} = h^0(\bar{S}, E^{3,0}(IV) \otimes \Omega^1_{\bar{S}}) = g - 1 + a + |IV|,$$

und weiter erhält man

$$\begin{aligned}
h^1_{L^2}(S, \mathbb{V})^{(3,1)} &= h^1_{L^2}(S, \mathbb{V})^{(1,3)} = 0,\\
h^1_{L^2}(S, \mathbb{V})^{(2,2)} &= h^0(\bar{S}, E^{1,2}(IV) \otimes \Omega^1_{\bar{S}}) \oplus h^1(\bar{S}, E^{2,1}(-I - III)).
\end{aligned}$$

In der letzten Zeile sind die beiden Summanden dual zueinander, was wiederum $|I| = |III| = 0$ und schließlich $h^1_{L^2}(S, \mathbb{V})^{(2,2)} = 2h^0(\bar{S}, E^{1,2}(IV) \otimes \Omega^1_{\bar{S}})$ liefert. □

Korollar 4.27 und Theorem 4.29 liefern

Korollar 4.30. *In Rohdes Beispiel erhält man* $h^1_{L^2}(S, \mathbb{V}) = 0$*, somit verschwinden alle Hodgezahlen:*

$$h^1_{L^2}(S, \mathbb{V})^{(4,0)} = h^1_{L^2}(S, \mathbb{V})^{(0,4)} = h^1_{L^2}(S, \mathbb{V})^{(3,1)} = h^1_{L^2}(S, \mathbb{V})^{(1,3)} = h^1_{L^2}(S, \mathbb{V})^{(2,2)} = 0.$$

Beweis. Dies folgt unmittelbar mit $a = g = 0$, $b = -1$. □

Insbesondere ist wegen $|I| = |III| = 0$ und $|II| = 2$, $|IV| = 1$ die Prüfsumme

$$h^1(j_*\mathbb{V}) = h^{4,0} + h^{3,1} + h^{2,2} + h^{1,3} + h^{0,4} = 8g - 8 + |I| + 2|II| + 3|III| + 4|IV| = 0$$

korrekt. Basiswechselabbildungen $z \mapsto z^e : \mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^1$ führen zu weiteren Familien, auf die das Theorem angewendet werden kann (dabei ist in jedem Fall $h^{3,1} = 0$):

Der Fall $e = 2$: Hier ist $|II| = 3$ und $|IV| = 1$, also folgt $a = b + 2$ und über die Prüfsumme $h^1 = 2$. Entweder ist $a = 1$ und $b = -1$, dann gilt $h^{4,0} = 1$ und $h^{2,2} = 0$, oder es ist $a = 0$ und $b = -2$, dann gilt $h^{4,0} = 0$ und $h^{2,2} = 2$.

Der Fall $e = 3$: Hier ist $|II| = 5$ und $|IV| = 0$, da der nicht-unipotente Punkt zu einem unipotenten (vom Typ *II*) wird. Es folgt $a = b + 3$ und $h^1 = 2$.
Es können drei Fälle auftreten:
Ist $a = 2$, dann ist $b = -1$, und wir erhalten $h^{4,0} = 1$ und $h^{2,2} = 0$.
Ist $a = 1$, dann ist $b = -2$, und es gilt $h^{4,0} = 0$ und $h^{2,2} = 2$.
Ist $a = 0$, so ist die Annahme $a + |IV| > 0$ nicht mehr erfüllt, und wir müssen neu rechnen: Es ist $E^{3,0}(IV) \otimes \Omega^1_{\bar{S}} = \Omega^1_{\mathbb{P}^1}$, und dies hat Grad -2. Somit gilt auch hier $h^{4,0} = h^0(E^{3,0}(IV) \otimes \Omega^1_{\bar{S}}) = 0$. Über die Prüfsumme erhält man dann, dass auch in diesem Fall $h^{2,2} = 2$ gilt.

Literaturverzeichnis

[1] G. Almkvist, C. van Enckevort, D. van Straten, and W. Zudilin, *Tables of Calabi-Yau equations*, `arXiv:math/0507430v2 [math.AG]`, 2010.

[2] W. P. Barth, K. Hulek, C. A. M. Peters, and A. van de Ven, *Compact complex surfaces*, second ed., Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete. 3. Folge. A Series of Modern Surveys in Mathematics, vol. 4, Springer-Verlag, Berlin, 2004.

[3] F. Beukers, *Notes on differential equations and hypergeometric functions*, Vorlesungen der Sommerschule über lokale Systeme in Mainz, 2009.

[4] C. Borcea, *$K3$ surfaces with involution and mirror pairs of Calabi-Yau manifolds*, Mirror symmetry, II, AMS/IP Stud. Adv. Math., vol. 1, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1997, pp. 717–743.

[5] J. Carlson, S. Müller-Stach, and C. A. M. Peters, *Period mappings and period domains*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, vol. 85, Cambridge University Press, Cambridge, 2003.

[6] Y.-H. Chen, Y. Yang, and N. Yui, *Monodromy of Picard-Fuchs differential equations for Calabi-Yau threefolds*, J. Reine Angew. Math. **616** (2008), 167–203, mit einem Anhang von C. Erdenberger.

[7] D. A. Cox and S. Zucker, *Intersection numbers of sections of elliptic surfaces*, Invent. Math. **53** (1979), no. 1, 1–44.

[8] P. L. del Angel, S. Müller-Stach, D. van Straten, and K. Zuo, *Hodge classes associated to 1-parameter families of Calabi-Yau 3-folds*, Acta Math. Vietnam. **35** (2010), no. 1, 7–22.

[9] P. Deligne, *Équations différentielles à points singuliers réguliers*, Lecture Notes in Mathematics, Vol. 163, Springer-Verlag, Berlin, 1970.

[10] ———, *Théorie de Hodge. II*, Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. (1971), no. 40, 5–57.

[11] ———, *Théorie de Hodge. III*, Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. (1974), no. 44, 5–77.

[12] A. H. Durfee, *A naive guide to mixed Hodge theory*, Singularities, Part 1 (Arcata, Calif., 1981), Proc. Sympos. Pure Math., vol. 40, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1983, pp. 313–320.

[13] A. Garbagnati and B. van Geemen, *Examples of Calabi-Yau threefolds parametrised by Shimura varieties*, Rend. Semin. Mat. Univ. Politec. Torino **68** (2010), no. 3, 271–287.

[14] ———, *The Picard-Fuchs equation of a family of Calabi-Yau threefolds without maximal unipotent monodromy*, Int. Math. Res. Not. IMRN (2010), no. 16, 3134–3143.

[15] P. A. Griffiths (ed.), *Topics in transcendental algebraic geometry*, Annals of Mathematics Studies, vol. 106, Princeton, NJ, Princeton University Press, 1984.

[16] ———, *Hodge theory and geometry*, Bull. London Math. Soc. **36** (2004), no. 6, 721–757.

[17] M. Gross, D. Huybrechts, and D. Joyce, *Calabi-Yau manifolds and related geometries*, Universitext, Springer-Verlag, Berlin, 2003, Vorlesungen der Sommerschule in Nordfjordeid, Juni 2001.

[18] H. Hollborn and S. Müller-Stach, *Hodge numbers for the cohomology of Calabi-Yau type local systems*, `arXiv:math/1302.3047v4 [math.AG]`, erscheint im Proceedings-Band zur Konferenz anlässlich von Klaus Huleks 60. Geburtstag im Springer-Verlag, 2013.

[19] J. Jost, Y.-H. Yang, and K. Zuo, *Cohomologies of unipotent harmonic bundles over noncompact curves*, J. Reine Angew. Math. **609** (2007), 137–159.

[20] ———, *The cohomology of a variation of polarized Hodge structures over a quasi-compact Kähler manifold*, J. Algebraic Geom. **16** (2007), no. 3, 401–434.

[21] J. Jost and K. Zuo, *Arakelov type inequalities for Hodge bundles over algebraic varieties. I. Hodge bundles over algebraic curves*, J. Algebraic Geom. **11** (2002), no. 3, 535–546.

[22] G. Kempf, F. F. Knudsen, D. Mumford, and B. Saint-Donat, *Toroidal embeddings. I*, Lecture Notes in Mathematics, Vol. 339, Springer-Verlag, Berlin, 1973.

[23] K. Kodaira, *On compact analytic surfaces. II, III*, Ann. of Math. (2) **77** (1963), 563–626; ibid. **78** (1963), 1–40.

[24] V. S. Kulikov, *Mixed Hodge structures and singularities*, Cambridge Tracts in Mathematics, vol. 132, Cambridge University Press, Cambridge, 1998.

[25] V. S. Kulikov and P. F. Kurchanov, *Complex algebraic varieties: periods of integrals and Hodge structures*, Algebraic geometry, III, Encyclopaedia Math. Sci., vol. 36, Springer, Berlin, 1998, pp. 1–217, 263–270.

[26] A. Landman, *On the Picard-Lefschetz transformation for algebraic manifolds acquiring general singularities*, Trans. Amer. Math. Soc. **181** (1973), 89–126.

[27] S. Müller-Stach, *Higgs bundles and families of special varieties*, Votragsnotizen für GAEL 2009 in Leiden, am 16. Juli 2013 abgerufen von `http://hodge.mathematik.uni-mainz.de/~stefan/LecturesGAEL2009.pdf`.

[28] C. A. M. Peters, *A criterion for flatness of Hodge bundles over curves and geometric applications*, Math. Ann. **268** (1984), no. 1, 1–19.

[29] C. A. M. Peters and J. H. M. Steenbrink, *Mixed Hodge structures*, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete. 3. Folge. A Series of Modern Surveys in Mathematics, vol. 52, Springer-Verlag, Berlin, 2008.

[30] J. C. Rohde, *Maximal automorphisms of Calabi-Yau manifolds versus maximally unipotent monodromy*, Manuscripta Math. **131** (2010), no. 3-4, 459–474.

[31] W. Schmid, *Variation of Hodge structure: the singularities of the period mapping*, Invent. Math. **22** (1973), 211–319.

[32] T. Shioda, *On elliptic modular surfaces*, J. Math. Soc. Japan **24** (1972), 20–59.

[33] C. T. Simpson, *Harmonic bundles on noncompact curves*, J. Amer. Math. Soc. **3** (1990), no. 3, 713–770.

[34] ———, *The ubiquity of variations of Hodge structure*, Complex geometry and Lie theory (Sundance, UT, 1989), Proc. Sympos. Pure Math., vol. 53, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1991, pp. 329–348.

[35] ———, *Higgs bundles and local systems*, Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. (1992), no. 75, 5–95.

[36] C. Voisin, *Miroirs et involutions sur les surfaces $K3$*, Astérisque (1993), no. 218, 273–323, Journées de Géométrie Algébrique d'Orsay (Orsay, 1992).

[37] ———, *Hodge theory and complex algebraic geometry. I*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, vol. 76, Cambridge University Press, Cambridge, 2002, aus dem französischen Original übersetzt von Leila Schneps.

[38] X. Ye, *L^2-Higgs cohomology of quasi-unipotent variation of Hodge structures over curves*, unveröffentliche Notizen, 2012.

[39] S. Zucker, *Hodge theory with degenerating coefficients. L_2 cohomology in the Poincaré metric*, Ann. of Math. (2) **109** (1979), no. 3, 415–476.