CHARAKTERISIERUNG UND KONVERGENZ MEHRDIMENSIONALER KONTINUIERLICHER VERZWEIGUNGSPROZESSE

Dissertation zur Erlangung des Grades
"Doktor der Naturwissenschaften"
am Fachbereich Mathematik der
Johannes Gutenberg-Universität in Mainz

Christoph Frisch
geb. in Mainz

Mainz, August 2000

Jahr der Prüfung: 2001

VORWORT

An dieser Stelle möchte ich dem Gutachter für die Themenstellung dieser Arbeit sowie die Betreuung während ihrer Erstellung danken. Weiter bin ich allen zu Dank verpflichtet, die durch Korrekturlesen oder moralische Unterstützung zum Gelingen beigetragen haben. Schließlich möchte ich meine Eltern erwähnen, deren Unterstützung diese Dissertation erst ermöglicht hat.

Zum Satz dieser Arbeit wurden auf $\mathcal{AMS}$-TEX basierende TEX-Makros verwendet.

INHALTSVERZEICHNIS

EINFÜHRUNG

Seit den Untersuchungen von Galton und Watson zum Aussterben von Adelsnamen ist die Theorie der Verzweigungsprozesse umfangreichen Abstraktionen unterzogen worden. Die Vielzahl der stochastischen Prozesse, die sich den Namen Verzweigungsprozesse teilen, wird durch eine fundamentale Eigenschaft verknüpft, die sich im wesentlichen wie folgt formulieren läßt: Ist der Zustand des stochastischen Prozesses zu einem bestimmten Zeitpunkt als Summe zweier Größen darstellbar, so ergibt sich der weitere zeitliche Verlauf als Summe von unabhängigen Kopien des betrachteten Prozesses mit diesen Ausgangsgrößen, d.h., einzelne Komponenten des Zustandes entwickeln sich unabhängig voneinander und ergeben in ihrer Summe die Gesamtentwicklung. Diese Eigenschaft dient zur pfadweisen Konstruktion des zugehörigen Prozesses und wird graphisch in einem sich verzweigenden Baum (Stammbaum) ausgedrückt.

Im Zuge der Verallgemeinerung auf kontinuierliche oder sogar maßwertige Verzweigungsprozesse wird das Konzept der pfadweisen Konstruktion in Frage gestellt. Ist man lediglich an den Verteilungen des Prozesses interessiert, so läßt sich die Verzweigungseigenschaft als Faltungseigenschaft der zugehörigen Übergangsfunktion formulieren. Dieser rein analytische Ansatz untersucht unter Voraussetzung dieser abstrakten Verzweigungseigenschaft die Struktur der Übergangsfunktion und zeichnet sich durch die Geschlossenheit der Darstellung aus. Unter dem Gesichtspunkt der Reinheit der Methode kommt diese Betrachtung ohne den Begriff der Zufallsvariable aus. Wir werden diesen jedoch trotzdem verwenden, wo er einen natürlicheren Zugang bietet.

In dieser Arbeit beschäftigen wir uns mit dem Zustandsraum $\mathrm{E} := [0, \infty)^d$ für ein $d \in \mathbb{N}$ sowie seiner Ein-Punkt-Kompaktifizierung E^Δ und betrachten zeitlich homogene Übergangsfunktionen, die eine Verzweigungseigenschaft besitzen. Die zugehörigen Markov-Prozesse werden als mehrdimensionale kontinuierliche Verzweigungsprozesse bezeichnet. Da wir es mit keinen anderen Prozessen zu tun haben, sprechen wir im folgenden nur noch kurz von Verzweigungsprozessen und Verzweigungsübergangsfunktionen. In Analogie zu diskreten Verzweigungsprozessen kann und wird auch der Begriff der Mehrtypigkeit verwendet werden.

Die Fragestellung der Charakterisierung mehrdimensionaler kontinuierlicher Verzweigungsprozesse umfaßt sowohl die Bestimmung zugehöriger charakteristischer Größen (Charakterisierungen) als auch die Konstruktion der Verzweigungsprozesse aus diesen Größen, beschäftigt sich also mit den Problemen von Existenz und Eindeutigkeit. Darauf aufbauend untersucht man die stetige Abhängigkeit dieser Prozesse von ihren Charakterisierungen und die Approximation durch einfachere, bekannte Verzweigungsprozesse, was unter dem Begriff der Konvergenz zusammengefaßt werden kann.

Die hier gewählte Darstellung ist ein Versuch, den traditionellen, an der Laplace-Transformation orientierten Ansatz mit der modernen Theorie der Markovschen Operatorhalbgruppen zu vereinen. Da die Verzweigungseigenschaft eine Faltungseigenschaft von Sub-Wahrscheinlichkeitsmaßen ist, stellt die Laplace-Transformation die geeigneten Funktionale zur Untersuchung der zugrunde liegenden Verteilungen zur Verfügung. Es stellt sich jedoch heraus, daß die Charakterisierungen Verteilungen auf den Raum $\mathrm{X} := \mathbb{R}^d$ und seiner Ein-Punkt-Kompaktifizierung X^{Δ} sind. Der erste Teil dieser Arbeit beschäftigt sich daher mit der Entwicklung eines Laplace-Kalküls für Sub-Wahrscheinlichkeitsmaße auf $\mathbb{R}^d$ und hat mit Verzweigungsprozessen nichts zu tun. Da jedoch wesentliche Ergebnisse auf diesen Untersuchungen beruhen, und in der Hoffnung, daß dieses Laplace-Kalkül von allgemeinem Interesse sein könnte, wurde seine Darstellung nicht in einen Anhang verbannt. Darüber hinaus stellt das erste Kapitel exemplarisch die Fragestellungen von Charakterisierung und Konvergenz vor. Damit entsprechen die einzelnen Abschnitte dieses Kapitels in gewisser Weise den übrigen Kapiteln dieser Arbeit. Es wird empfohlen, sich einen Überblick über die wesentlichen Resultate zu verschaffen, und dann zu den Verzweigungsprozessen überzugehen.

Im zweiten Kapitel bestimmen wir ausgehend von der abstrakten Verzweigungseigenschaft Struktur und Eigenschaften einer Verzweigungsübergangsfunktion. Die räumliche Abhängigkeit dieser Verzweigungsübergangsfunktion drückt sich explizit in der zugehörigen Laplace-Transformierten aus. Dies führt zu einer Separation der zeitlichen Abhängigkeit, die durch die sogenannte kumulantenerzeugende Funktion der Übergangsfunktion gegeben ist. Durch eine Untersuchung dieser Funktion wird gezeigt, daß jede nicht entartete Verzweigungsübergangsfunktion (zeitlich) stochastisch stetig ist und durch eine einzige Funktion $L : \mathrm{E} \mapsto \mathbb{R}^d$ eindeutig bestimmt ist. Wir betrachten den Zusammenhang dieser Charakterisierung mit der kumulantenerzeugenden Funktion, der durch eine autonome Differentialgleichung gegeben ist, bestimmen die Eigenschaften der zur Verzweigungsübergangsfunktion gehörenden Operatorhalbgruppe und drücken mit Hilfe der Laplace-Transformation deren infinitesimalen Erzeuger durch die Charakterisierung L aus.

Wir untersuchen im dritten Kapitel unter Verwendung des Laplace-Kalküls auf $\mathbb{R}^d$ die allgemeine Form der Charakterisierung einer Verzweigungsübergangsfunktion. Es wird gezeigt, daß diese Charakterisierung mit einem Tupel spektral positiver unendlich teilbarer Verteilungen auf $\mathbb{R}^d$ korrespondiert. Umgekehrt konstruieren wir zu jedem solchen Tupel eine zugehörige Verzweigungsübergangsfunktion. Damit ist die Klasse der mehrdimensionalen kontinuierlichen Verzweigungsprozesse vollständig beschrieben.

Im vierten Kapitel wenden wir uns schließlich der Fragestellung der Konvergenz zu. Wir zeigen mit Hilfe der Eigenschaften der zu einer Verzweigungsübergangsfunktion gehörenden Operatorhalbgruppe, daß die betrachteten Übergangsfunktionen als Verteilungen auf dem Raum der càdlàg-Funktionen mit Werten in E^Δ betrachtet werden können, und untersuchen diese auf schwache Konvergenz. Dies entspricht der Konvergenz der zugehörigen Verzweigungsprozesse in der Verteilung. Hierzu verwenden wir Konvergenzaussagen aus der Theorie der Markovschen Operatorhalbgruppen und das im ersten Kapitel entwickelte Laplace-Kalkül auf $\mathbb{R}^d$. Es wird nachgewiesen, daß eine Verzweigungsübergangsfunktion stetig von ihrer Charakterisierung abhängt. Wir übertragen diese Resultate auf die Approximation (der Verteilungen) einer Folge von normierten mehrtypigen Galton Watson-Prozessen, und zeigen damit, daß ein mehrdimensionaler kontinuierlicher Verzweigungsprozeß in natürlicher Weise aus bekannten diskreten Verzweigungsprozessen hervorgeht. Abschließend betrachten wir die Diffusionen in der Klasse der Verzweigungsprozesse und formulieren die mehrdimensionale Fellersche Diffusionsapproximation.

KAPITEL I

LAPLACE-KALKÜL

Vorbemerkungen

Wir rekapitulieren die Konzepte der vagen und schwachen Konvergenz von endlichen Borel-Maßen. Sei (S, ϱ) ein lokal kompakter metrischer Raum und $\mathcal{O}$ die durch die Metrik ϱ induzierte Topologie auf S. Sei $\mathcal{B}(\mathrm{S})$ die Borel-σ-Algebra von S und $\mathcal{M}(\mathrm{S})$ die Menge der endlichen Borel-Maße auf S mit $\|\mu\| := \mu(S)$ für $\mu \in \mathcal{M}(\mathrm{S})$. Eine Folge $\{\mu_n\} \subseteq \mathcal{M}(\mathrm{S})$ konvergiert schwach gegen $\mu \in \mathcal{M}(\mathrm{S})$, kurz $\mu_n \xrightarrow{\mathrm{w}} \mu$, falls

$$\int f\, d\mu_n \longrightarrow \int f\, d\mu, \qquad f \in \overline{\mathrm{C}}(\mathrm{S}).$$

Hierbei ist $\overline{\mathrm{C}}(\mathrm{S})$ der Banach-Raum der stetigen und beschränkten reellwertigen Funktionen auf S mit Norm $\|f\| := \sup_{x \in \mathrm{S}} |f(x)|$. Für $\{f_n\} \subseteq \overline{\mathrm{C}}(\mathrm{S})$ schreibe $f_n \to f \in \overline{\mathrm{C}}(\mathrm{S})$, falls $\|f_n - f\| \to 0$. Wir verwenden im folgenden häufig die Tatsache, daß im Fall der schwachen Konvergenz $\mu_n \xrightarrow{\mathrm{w}} \mu$ für eine Folge $\{f_n\} \subseteq \overline{\mathrm{C}}(\mathrm{S})$ mit $f_n \to f \in \overline{\mathrm{C}}(\mathrm{S})$ und $A \in \mathcal{B}(\mathrm{S})$ mit $\mu(\partial A) = 0$ die Konvergenz $\int_A f_n\, d\mu_n \to \int_A f\, d\mu$ gilt. Gilt umgekehrt $\mu_n(A) \to \mu(A)$ für alle $A \in \mathcal{B}(\mathrm{S})$ mit $\mu(\partial A) = 0$, so gilt $\mu_n \xrightarrow{\mathrm{w}} \mu$.

Eine Folge $\{\mu_n\} \subseteq \mathcal{M}(\mathrm{S})$ konvergiert vage gegen $\mu \in \mathcal{M}(\mathrm{S})$, kurz $\mu_n \xrightarrow{\mathrm{v}} \mu$, falls obige Bedingung für alle f aus dem Banachraum $\widehat{\mathrm{C}}(\mathrm{S})$ der im Unendlichen verschwindenden stetigen Funktionen auf S erfüllt ist. Es gilt $f \in \widehat{\mathrm{C}}(\mathrm{S})$ genau dann, wenn $f \in \overline{\mathrm{C}}(\mathrm{S})$ und zu jedem $\epsilon > 0$ ein Kompaktum $K \subseteq \mathrm{E}$ existiert mit $f(x) < \epsilon$ für alle $x \notin K$. Obige Aussagen gelten analog, falls die Beschränktheit von $A \in \mathcal{B}(\mathrm{S})$ vorausgesetzt wird.

Wir betrachten im folgenden die Menge $\mathcal{S}(\mathrm{S})$ der Sub-Wahrscheinlichkeitsmaße und die Teilmenge $\mathcal{P}(\mathrm{S})$ der Wahrscheinlichkeitsmaße auf S. Zur Charakterisierung der vagen Konvergenz benötigen wir die Ein-Punkt-Kompaktifizierung $\mathrm{S}^\Delta := \mathrm{S} \cup \{\Delta\}$ von S. Diese wird durch Hinzufügung eines (unendlich fernen) Punktes Δ gebildet. Die Topologie $\mathcal{O}^\Delta$ von S^Δ entsteht aus der Topologie von S durch Hinzunahme von Komplementen kompakter Umgebungen von Null (die Komplementbildung erfolgt dabei in S^Δ). Demgemäß gilt $x_n \to \Delta$ für eine Folge $\{x_n\} \subseteq \mathrm{S}^\Delta$ genau dann, wenn zu jedem Kompaktum $K \subseteq \mathrm{S}$ ein $N \in \mathbb{N}$ existiert mit $x_n \notin K$ für alle $n \geq N$. Der Raum $(\mathrm{S}^\Delta, \mathcal{O}^\Delta)$ ist metrisierbar und kompakt. Wir bezeichnen die zugehörige Metrik mit ϱ^Δ. Der Raum (S, ϱ) ist stetig eingebettet.

Jedes $P \in \mathcal{S}(\mathrm{S})$ kann eindeutig zu einem Wahrscheinlichkeitsmaß P^Δ auf S^Δ mit $P^\Delta(\Delta) := 1 - \|P\|$ fortgesetzt werden (erweitertes Wahrscheinlichkeitsmaß). Umgekehrt gilt $P := P'|_\mathrm{S} \in \mathcal{S}(\mathrm{S})$ für $P' \in \mathcal{P}(\mathrm{S}^\Delta)$. Ist $\{P_n\} \subseteq \mathcal{S}(\mathrm{S})$ eine Folge und gilt $P_n \xrightarrow{\mathrm{v}} P \in \mathcal{S}(\mathrm{S})$, so folgt

$$\int f\, dP_n^\Delta = \int \big(f - f(\Delta)\big)\, dP_n + f(\Delta) \longrightarrow \int \big(f - f(\Delta)\big)\, dP + f(\Delta) = \int f\, dP^\Delta$$

(wir unterscheiden nicht zwischen Funktionen auf S^Δ und ihren Einschränkungen auf S) für alle $f \in \mathrm{C}(\mathrm{S}^\Delta) = \overline{\mathrm{C}}(\mathrm{S}^\Delta)$, d.h., $P_n^\Delta \xrightarrow{\mathrm{w}} P^\Delta$. Umgekehrt gilt offensichtlich $P_n \xrightarrow{\mathrm{v}} P$, falls $P_n^\Delta \xrightarrow{\mathrm{w}} P^\Delta$. Damit können wir die Räume $\mathcal{S}(\mathrm{S})$ und $\mathcal{P}(\mathrm{S}^\Delta)$ identifizieren.

Ist der Raum (S, ϱ) separabel, so gilt dies auch für $(\mathrm{S}^\Delta, \varrho^\Delta)$, und die Räume $\mathcal{P}(\mathrm{S})$ und $\mathcal{P}(\mathrm{S}^\Delta)$ sind metrisierbar. Nach dem Satz von Prohorov ist $\mathcal{P}(\mathrm{S}^\Delta)$ in diesem Fall kompakt, da S^Δ kompakt ist. Daher existiert zu jeder Folge $\{P_n\} \subseteq \mathcal{S}(\mathrm{S})$ eine Teilfolge, die vage gegen ein $P \in \mathcal{S}(\mathrm{S})$ konvergiert.

1. Zusammenfassung

Betrachte den Raum $\mathrm{X} := \mathbb{R}^d$ für ein $d \in \mathbb{N}$. Das Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$ auf X ist definiert durch $\langle x, y \rangle := \sum_{j=1}^d x_j y_j$ für $x = (x_1, \ldots, x_d)$ und $y = (y_1, \ldots, y_d) \in \mathrm{X}$. Wir bezeichnen die kanonischen Basisvektoren mit $e_1, \ldots, e_d$ und verwenden häufig die Darstellung $x_j = \langle x, e_j \rangle$ für $x \in \mathrm{X}$ und $1 \leq j \leq d$, um Kollisionen von Indizes zu vermeiden. Der durch $|x| := \langle x, x \rangle^{1/2}$ für $x \in \mathrm{X}$ normierte Raum $(\mathrm{X}, |\cdot|)$ ist lokal kompakt und separabel. Schreibe ϵ_x für das Dirac-Maß in $x \in \mathrm{X}$.

Eine häufig verwendete Methode zum Nachweis der schwachen Konvergenz von Wahrscheinlichkeitsmaßen besteht darin, einen hinreichend großen Unterraum $M \subseteq \overline{\mathrm{C}}(\mathrm{X})$ derart zu finden, daß für jede Folge $\{P_n\} \subseteq \mathcal{P}(\mathrm{X})$ und jedes $P \in \mathcal{P}(\mathrm{X})$ die Konvergenz

$$\int f\, dP_n \longrightarrow \int f\, dP, \qquad f \in M,$$

die schwache Konvergenz $P_n \xrightarrow{\mathrm{w}} P$ nach sich zieht. So verwendet man für die Fourier-Transformation die von $\{\exp(i\langle u, \cdot \rangle) \mid u \in \mathbb{R}^d\}$ erzeugte Algebra von (komplexwertigen) Funktionen. Im Fall von Wahrscheinlichkeitsmaßen auf $\mathrm{E} := [0, \infty)^d$ liefert die von $\{\exp(-\langle \lambda, \cdot \rangle) \mid \lambda \in \mathrm{E}\} \subseteq \widehat{\mathrm{C}}(\mathrm{E})$ erzeugte Algebra die Theorie der Laplace-Transformation. Eine Verallgemeinerung auf die vage Konvergenz ist hier nicht ohne weiteres möglich. Dies liegt im Fall der Fourier-Transformation daran, daß die Funktion $\exp(i\langle u, \cdot \rangle) : \mathbb{R}^d \mapsto \mathbb{C}$ für $u \neq 0$ nicht im Unendlichen verschwindet. Für die Laplace-Transformation ist die Fortsetzung der Funktion $\exp(-\langle \lambda, \cdot \rangle) : \mathrm{E} \mapsto [0, \infty)$ auf $\mathbb{R}^d$ für $\lambda \neq 0$ sogar unbeschränkt. Andererseits besitzen alle in dieser Arbeit betrachteten Verteilungen eine Laplace-Transformierte. Wir definieren daher für ein

Sub-Wahrscheinlichkeitsmaß $P \in \mathcal{S}(\mathrm{X})$ die Laplace-Transformierte $\check{P} : \mathrm{E} \mapsto [0,\infty]$ durch

$$\check{P}(\lambda) := \int \exp(-\langle \lambda, y\rangle)\, P(dy), \qquad \lambda \in \mathrm{E}, \tag{1.1}$$

und betrachten im folgenden lediglich solche $P \in \mathcal{S}(\mathrm{X})$, die $\check{P} : \mathrm{E} \mapsto [0,\infty)$ erfüllen. Ein wichtiges Hilfsmittel ist im Fall $P \neq 0$ die kumulantenerzeugende Funktion, die durch $\psi := -\log \check{P} : \mathrm{E} \mapsto \mathbb{R}$ definiert ist.

Ausgehend von dieser Definition zeigen wir in Abschnitt 2, daß die bekannten Eigenschaften der Laplace-Transformierten erhalten bleiben. Damit können wir den Eindeutigkeitssatz für Laplace-Transformierte von Sub-Wahrscheinlichkeitsmaßen auf X formulieren. Zur Untersuchung der stetigen Abhängigkeit einer Folge $\{P_n\} \subseteq \mathcal{S}(\mathrm{X})$ von den zugehörigen Laplace-Transformierten führen wir die Bedingung der (punktweisen) Beschränktheit der Laplace-Transformierten ein, und zeigen, daß unter dieser Voraussetzung der bekannte Stetigkeitssatz gilt.

In Abschnitt 3 beschäftigen wir uns mit der Verallgemeinerung des Begriffs der unendlichen Teilbarkeit auf Sub-Wahrscheinlichkeitsmaße. Wir nennen $P \in \mathcal{S}(\mathrm{X})$ unendlich teilbar, falls zu jedem $n \in \mathbb{N}$ ein $P_n \in \mathcal{S}(\mathrm{X})$ mit $P = P_n^{\star n}$ existiert, wobei ${}^{\star n}$ die n-fache Faltung mit sich selbst bedeutet. Die unendlich teilbaren Verteilungen aus $\mathcal{P}(\mathrm{X})$ sind wohlbekannt, und es bereitet prinzipiell keine Schwierigkeiten, ihre Darstellungen mittels Fourier-Transformation auf $\mathcal{S}(\mathrm{X})$ auszudehnen. Jedoch ist die Fourier-Transformation aufgrund der beschriebenen Schwierigkeiten kein geeignetes Mittel zur Untersuchung der vagen Konvergenz. Wir benötigen daher ein Laplace-Kalkül für unendlich teilbare Verteilungen aus $\mathcal{S}(\mathrm{X})$. Dabei beschränken wir uns auf die Klasse von unendlich teilbaren Verteilungen auf X mit kumulantenerzeugenden Funktionen

$$\psi(\lambda) := \langle a, \lambda\rangle - \frac{1}{2}\langle \Sigma\lambda, \lambda\rangle - \int M(\lambda, y)\, \mu(dy) + \delta, \qquad \lambda \in \mathrm{E}. \tag{1.2}$$

wobei $a \in \mathrm{X}$, $\delta \geq 0$, $\Sigma \in \mathbb{R}_{d\times d}$ eine symmetrische, positiv semidefinite Matrix, $r > 0$, μ ein Borel-Maß auf $\big(\mathrm{E} \cup U_r(0)\big) \setminus \{0\}$ mit $\int (|y|^2 \wedge 1)\, \mu(dy) < \infty$ und

$$M(\lambda, y) := \exp(-\langle \lambda, y\rangle) - 1 + \frac{\langle \lambda, y\rangle}{1+|y|^2}, \qquad (\lambda, y) \in \mathrm{E} \times \mathrm{X}.$$

Die Darstellung (1.2) ist die Laplacesche Version der Lévy Khintchine-Darstellung einer unendlich teilbaren Verteilung, deren Spektralmaß μ für ein $r > 0$ auf der Menge $\big(\mathrm{E} \cup U_r(0)\big) \setminus \{0\}$ konzentriert ist. Wir bezeichnen diese Verteilungen als spektral beschränkte Verteilungen. Als Teilmenge der spektral beschränkten unendlich teilbaren Verteilungen erhalten wir die Klasse der spektral positiven unendlich teilbaren Verteilungen, deren Spektralmaß μ auf E konzentriert ist.

Davon ausgehend untersuchen wir schließlich in Abschnitt 4 die vage Konvergenz einer Folge $\{P_n\} \subseteq \mathcal{S}(\mathrm{X})$ in zwei verschiedenen Fällen. Ist $P_n \in \mathcal{S}(\mathrm{X})$ für jedes $n \in \mathbb{N}$

eine spektral beschränkte unendlich teilbare Verteilung, so führen wir die Bedingung der gleichmäßigen spektralen Beschränktheit der Folge $\{P_n\}$ ein. Unter dieser vergleichbar einfachen Voraussetzung erhalten wir den bekannten Konvergenzsatz und eine Verallgemeinerung der Konvergenzkriterien von Gnedenko & Kolmogorov. Den Fall $P_n = {Q_n}^{\star k_n}$ für $\{Q_n\} \subseteq \mathcal{S}(\mathrm{X})$ und $\{k_n\} \subseteq \mathbb{N}$ mit $k_n \to \infty$ führen wir auf den zuerst betrachteten Fall zurück und erhalten damit einen Approximationssatz für spektral beschränkte unendlich teilbare Verteilungen auf X sowie analoge Konvergenzkriterien.

2. Allgemeine Theorie

2.1 Definition. (a) Für ein Sub-Wahrscheinlichkeitsmaß $P \in \mathcal{S}(\mathrm{X})$ definiere die Laplace-Transformierte $\check{P} : \mathrm{E} \mapsto [0, \infty]$ durch

$$\check{P}(\lambda) := \int \exp(-\langle \lambda, y \rangle)\, P(dy), \qquad \lambda \in \mathrm{E}. \tag{2.1}$$

Wir nennen die Laplace-Transformierte endlich, falls $\check{P} : \mathrm{E} \mapsto [0, \infty)$ gilt. Besitzt $P \in \mathcal{S}(\mathrm{X}) \setminus \{0\}$ eine endliche Laplace-Transformierte, so heißt die durch

$$\psi(\lambda) := -\log \check{P}(\lambda), \qquad \lambda \in \mathrm{E},$$

definierte Funktion $\psi : \mathrm{E} \mapsto \mathbb{R}$ kumulantenerzeugende Funktion von P.

(b) Besitzt $P \in \mathcal{S}(\mathrm{X})$ eine endliche Laplace-Transformierte, so existiert das Integral (2.1) für $\lambda \in \mathbb{L}^d$, wobei $\mathbb{L} := \{\lambda \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} \lambda \geq 0\}$. In diesem Fall erweitern wir den Definitionsbereich der Laplace-Transformierten auf $\mathbb{L}$.

2.2 Lemma. *Seien $\eta \in \mathrm{E}$ und $y \in \mathrm{X}$. Dann gilt für jedes $\lambda \in \mathbb{L}^d$ mit $\operatorname{Re} \lambda \leq \eta$ die Abschätzung*

$$\big| \exp(-\langle \lambda, y \rangle) \big| \leq \prod_{j=1}^{d} \big(1 + \exp(-\eta_j y_j)\big). \tag{2.2}$$

Beweis. Sei $\lambda \in \mathbb{L}^d$ mit $\operatorname{Re} \lambda \in [0, \eta]$. Durch getrennte Abschätzung der positiven und negativen reellen Halbachsen erhält man

$$\begin{aligned} \big| \exp(-\langle \lambda, y \rangle) \big| &= \prod_{j=1}^{d} \exp\big(- \operatorname{Re} \lambda_j y_j \big) \\ &\leq \prod_{j=1}^{d} \big(1_{[0,\infty)}(y_j) + 1_{(-\infty,0)}(y_j) \exp(-\eta_j y_j) \big) \\ &\leq \prod_{j=1}^{d} \big(1 + \exp(-\eta_j y_j)\big), \qquad y \in \mathrm{X}. \end{aligned}$$

Dies ist gerade die Behauptung. $\square$

2.3 Proposition. *Besitzt $P \in \mathcal{S}(\mathrm{X})$ eine endliche Laplace-Transformierte, so ist die Abbildung $\check{P} : \mathbb{L}^d \mapsto \mathbb{C}$ stetig.*

Beweis. Ausmultiplizieren von (2.2) und die Endlichkeit der Laplace-Transformierten liefert mit dominierter Konvergenz die Stetigkeit. □

2.4 Proposition. *Besitzt $P \in \mathcal{S}(\mathrm{X})$ eine endliche Laplace-Transformierte, so ist die Abbildung $\check{P} : \mathbb{L}^d \mapsto \mathbb{C}$ in jeder Variablen holomorph.*

Beweis. Verwende die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen. Wir zeigen exemplarisch die Holomorphie von $\check{P}(\cdot, \lambda') : \mathbb{L}^\circ \mapsto \mathbb{C}$ für festes $\lambda' \in \mathbb{L}^{d-1}$. Setze

$$u(\sigma, t) := \operatorname{Re} \check{P}(\sigma + it, \lambda'), \quad v(\sigma, t) := \operatorname{Im} \check{P}(\sigma + it, \lambda'), \qquad \sigma \in (0, \infty), t \in \mathbb{R}.$$

Seien nun $\sigma \in (0, \infty)$, $t \in \mathbb{R}$ fest und $h \in \mathbb{R}$ mit $\sigma + h > 0$. Der Differenzenquotient von u besitzt die Gestalt

$$\frac{u(\sigma + h, t) - u(\sigma, t)}{h} = \int \frac{\exp\big(-(\sigma + h)y_1\big) - \exp(-\sigma y_1)}{h} J(t, y)\, P(dy), \tag{2.3}$$

wobei

$$J(t, y) := \exp(-\operatorname{Re}\langle \lambda', y' \rangle) \cos(t y_1 + \operatorname{Im}\langle \lambda', y' \rangle), \qquad y \in \mathrm{X},$$

und $y' := (y_2, \dots, y_d)$. Wir bezeichnen den Integranden in Gleichung (2.3) mit $f(h, y)$. Nach dem Mittelwertsatz existiert ein (von h und y abhängiges) $0 < \vartheta < 1$ mit

$$f(h, y) = -y_1 \exp\big(-(\sigma + \vartheta h)y_1\big) J(t, y), \qquad y \in \mathrm{X}.$$

Unter Verwendung der Abschätzungen $x \exp(-x) \le 1$ für $x \in [0, \infty)$ und $-x \le \exp(-x)$ für $x \in (-\infty, 0)$ erhält man

$$|f(h, y)| \le \begin{cases} \dfrac{1}{\sigma + \vartheta h} |J(t, y)|, & y_1 \ge 0, \\ \dfrac{1}{\sigma + \vartheta h} \exp\big(-2(\sigma + \vartheta h)y_1\big) |J(t, y)|, & y_1 < 0. \end{cases}$$

Damit folgt für $|h| < \sigma/2$ die Abschätzung

$$|f(h, y)| \le \frac{2}{\sigma}\big(1 + \exp(-3\sigma y_1)\big) \exp(-\operatorname{Re}\langle \lambda', y' \rangle), \qquad y \in \mathrm{X}. \tag{2.4}$$

Aufgrund der Endlichkeit der Laplace-Transformierten von P gilt daher nach (2.3) und dominierter Konvergenz

$$\frac{\partial u(\sigma, t)}{\partial \sigma} = -\int y_1 \exp(-\sigma y_1) J(t, y)\, P(dy), \qquad \sigma \in (0, \infty), t \in \mathbb{R}.$$

Entsprechend erhält man durch eine zu (2.4) analoge Abschätzung den Differentialquotienten

$$\frac{\partial u(\sigma,t)}{\partial t} = -\int y_1 \exp(-\sigma y_1) K(t,y)\, P(dy), \qquad \sigma \in (0,\infty), t \in \mathbb{R},$$

wobei

$$K(t,y) := \exp(-\operatorname{Re}\langle \lambda', y' \rangle) \sin(t y_1 + \operatorname{Im}\langle \lambda', y' \rangle), \qquad y \in \mathrm{X}.$$

Durch eine ähnliche Rechnung erhält man die Differentialquotienten des Imaginärteils der Laplace-Transformierten als

$$\frac{\partial v(\sigma,t)}{\partial \sigma} = \int y_1 \exp(-\sigma y_1) K(t,y)\, P(dy),$$
$$\frac{\partial v(\sigma,t)}{\partial t} = -\int y_1 \exp(-\sigma y_1) J(t,y)\, P(dy), \qquad \sigma \in (0,\infty), t \in \mathbb{R}.$$

Also gilt $\nabla_\sigma u = \nabla_t v$, $\nabla_t u = -\nabla_\sigma v$, und es folgt die Behauptung. $\square$

2.5 KOROLLAR. *Besitzt $P \in \mathcal{S}(\mathrm{X}) \setminus \{0\}$ eine endliche Laplace-Transformierte, so ist die kumulantenerzeugende Funktion $\psi : \mathrm{E} \mapsto \mathbb{R}$ von P auf E° lokal Lipschitz-stetig.*

BEWEIS. Nach Proposition 2.4 ist $\check{P} : \mathrm{E} \mapsto [0,\infty)$ auf E° unendlich oft (partiell) differenzierbar. Nach dem Mittelwertsatz ist $\check{P}$ daher auf E° lokal Lipschitz-stetig. Ist $K \subseteq \mathrm{E}^\circ$ kompakt, so wende mit $\inf_{\lambda \in K} \check{P}(\lambda) > 0$ erneut den Mittelwertsatz an. $\square$

2.6 LEMMA. *Für $k = 1,2$ seien $f_k : \mathbb{L}^d \mapsto \mathbb{C}$ stetig und in jeder Variablen holomorph. Ist $[\alpha,\beta] \subseteq \mathrm{E}$ ein Intervall mit nichtleerem Inneren und $f_1|_{[\alpha,\beta]} = f_2|_{[\alpha,\beta]}$, so gilt $f_1 = f_2$.*

BEWEIS. Im Fall $d = 1$ liefert dies gerade der Identitätssatz für holomorphe Funktionen und die Stetigkeit. Für $d > 1$ schreibe $[\alpha,\beta] = [\alpha_1,\beta_1] \times [\alpha',\beta']$ mit $[\alpha',\beta'] \subseteq [0,\infty)^{d-1}$ und wähle $\lambda' \in [\alpha',\beta']$ beliebig, aber fest. Die holomorphen Funktionen $f_k(\cdot,\lambda')$ stimmen auf $[\alpha_1,\beta_1]$ überein, also nach Induktionsanfang auch auf $\mathbb{L}$. Wende nun für beliebiges $\lambda \in \mathbb{L}$ die Induktionsvoraussetzung auf die Funktionen $f_k(\lambda,\cdot)$ an. $\square$

Wir sind nun in der Lage, den Eindeutigkeitssatz für Laplace-Transformierte zu zeigen. Wir formulieren ihn zunächst etwas allgemeiner, da wir diese Version später benötigen.

2.7 PROPOSITION. *Besitzen $P, Q \in \mathcal{S}(\mathrm{X})$ endliche Laplace-Transformierte und ist $[\alpha,\beta] \subseteq \mathrm{E}$ ein Intervall mit nichtleerem Inneren und $\check{P}|_{[\alpha,\beta]} = \check{Q}|_{[\alpha,\beta]}$, so gilt $P = Q$.*

BEWEIS. Wende Lemma 2.6 auf $\check{P}$ und $\check{Q}$ an. Wir erhalten aufgrund der Stetigkeit und Holomorphie der Laplace-Transformierten $\check{P}(\lambda) = \check{Q}(\lambda)$ für alle $\lambda \in \mathbb{L}^d$. Insbesondere folgt die Identität der Fourier-Transformierten von P und Q (setze $\lambda = -iu$ mit $u \in \mathbb{R}^d$). Eine Auswertung im Punkt Null liefert $\|P\| = \|Q\| =: \delta \geq 0$. Ist $\delta = 0$, so ist nichts weiter zu zeigen. Andernfalls gilt $\delta^{-1}\, dP = \delta^{-1}\, dQ$ nach dem Eindeutigkeitssatz für Fourier-Transformierte von Wahrscheinlichkeitsmaßen auf X. Damit folgt $P = Q$. $\square$

2.8 Theorem (Eindeutigkeitssatz). *Besitzen $P, Q \in \mathcal{S}(\mathrm{X})$ endliche Laplace-Transformierte und stimmen diese auf E° überein, so gilt $P = Q$.*

Beweis. Dies ist ein Spezialfall von Proposition 2.7. □

2.9 Definition. Sei $\{P_n\} \subseteq \mathcal{S}(\mathrm{X})$ eine Folge von Sub-Wahrscheinlichkeitsmaßen. Wir bezeichnen $\{P_n\}$ als Folge mit beschränkten Laplace-Transformierten, falls die Folge $\{\check{P}_n(\lambda)\}$ für jedes $\lambda \in \mathrm{E}$ beschränkt ist.

2.10 Lemma. *Sei $\{P_n\} \subseteq \mathcal{S}(\mathrm{X})$ eine Folge mit beschränkten Laplace-Transformierten. Dann ist die Funktionenfolge $\{\check{P}_n\}$ lokal gleichmäßig auf E beschränkt.*

Beweis. Ausmultiplizieren und Integrieren der Ungleichung (2.2). □

2.11 Proposition. *Sei $\{P_n\} \subseteq \mathcal{S}(\mathrm{X})$ eine Folge mit beschränkten Laplace-Transformierten und $P \in \mathcal{S}(\mathrm{X})$ mit $P_n \xrightarrow{\mathrm{v}} P$ ($P_n \xrightarrow{\mathrm{w}} P$). Dann besitzt P eine endliche Laplace-Transformierte, und es gilt $\check{P}_n \to \check{P}$ lokal gleichmäßig auf E° (E).*

Beweis. Zu $\lambda \in \mathrm{E}$ definiere $f_\lambda(y) := \exp(-\langle \lambda, y \rangle)$ für $y \in \mathrm{X}$. Setze ferner

$$[\eta, \Delta) := \{x \in \mathrm{X} \mid x_j \geq \eta_j, 1 \leq j \leq d\}, \qquad \eta \in \mathrm{X}.$$

Für $k \in \mathbb{N}$ sei $\varrho_k \in [k, \infty)^d$ mit $P\big(\partial[-\varrho_k, \Delta)\big) = 0$. Für festes $k \in \mathbb{N}$ erhalten wir aufgrund der vagen (schwachen) Konvergenz

$$\int_{[-\varrho_k, \Delta)} f_\lambda \, dP_n \longrightarrow \int_{[-\varrho_k, \Delta)} f_\lambda \, dP, \qquad \lambda \in \mathrm{E}^\circ \; (\mathrm{E}). \tag{2.5}$$

Analog erhalten wir für $\sigma_k \in [k, \infty)^d$ mit $P\big(\partial[-\varrho_k, \sigma_k)\big) = 0$ die Abschätzung

$$\int_{[-\varrho_k, \sigma_k)} f_\lambda \, dP = \lim_{n \to \infty} \int_{[-\varrho_k, \sigma_k)} f_\lambda \, dP_n \leq \overline{\lim_{n \to \infty}} \, \check{P}_n(\lambda), \qquad \lambda \in \mathrm{E},$$

und mit $k \to \infty$ erhalten wir aufgrund der Beschränktheit der Folge $\{\check{P}_n(\lambda)\}$ die Endlichkeit der Laplace-Transformierten von P. Zum Nachweis der lokal gleichmäßigen Konvergenz in (2.5) für festes $k \in \mathbb{N}$ genügt es zu zeigen, daß zu festem $\lambda \in \mathrm{E}^\circ$ (E) und jedem $\epsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert mit

$$\overline{\lim_{n \to \infty}} \left| \int_{[-\varrho_k, \Delta)} f_\lambda \, dP_n - \int_{[-\varrho_k, \Delta)} f_{\lambda+h} \, dP_n \right| \leq \epsilon, \qquad \lambda + h \in \mathrm{E}, |h| \leq \delta. \tag{2.6}$$

Im Fall der vagen Konvergenz wähle $\delta_0 > 0$ so klein, daß $\overline{U_{\delta_0}(\lambda)} \subseteq \mathrm{E}^\circ$ und ein Kompaktum $[-\varrho_k, \varrho_k] \subseteq K$ mit $\sup_{\lambda \in \overline{U_{\delta_0}(\lambda)}} f_\lambda(y) < \epsilon/3$ für alle $y \in [-\varrho_k, \Delta) \setminus K$. Dann gilt

$$\overline{\lim_{n \to \infty}} \int_{[-\varrho_k, \Delta) \setminus K} f_{\lambda+h} \, dP_n \leq \epsilon/3, \qquad \lambda + h \in \mathrm{E}, |h| < \delta_0. \tag{2.7}$$

Sonst wähle $\delta_0 > 0$ beliebig, ein Kompaktum $[-\varrho_k, \varrho_k] \subseteq K_0$ und ein $M \geq 0$ derart, daß

$$f_{\lambda+h}(y) \leq M, \qquad \lambda + h \in \mathrm{E}, |h| < \delta_0, y \in [-\varrho_k, \Delta) \setminus K_0.$$

Wählen wir ein Kompaktum $K_0 \subseteq K$ so, daß $\overline{\lim}_{n\to\infty} P_n([-\varrho_k, \Delta) \setminus K) < \epsilon/(3M)$, so ist (2.7) ebenfalls erfüllt. Wegen $|f_\lambda(y) - f_{\lambda+h}(y)| \leq f_\lambda(y)\,|1 - \exp(-\langle h, y\rangle)|$ für $\lambda, \lambda + h \in \mathrm{E}$ existiert ein $0 < \delta \leq \delta_0$ mit

$$\sup_{y \in K} |f_\lambda(y) - f_{\lambda+h}(y)| < \epsilon/3, \qquad \lambda + h \in \mathrm{E}, |h| \leq \delta.$$

Damit folgt (2.6), also die lokal gleichmäßige Konvergenz in (2.5) für festes $k \in \mathbb{N}$. Nach monotoner Konvergenz und Wahl der Folge $\{\varrho_k\}$ gilt

$$\lim_{k\to\infty} \int_{\mathrm{X}\setminus[-\varrho_k,\Delta)} \exp(-\langle \lambda, y\rangle)\, P(dy) = 0, \qquad \lambda \in \mathrm{E}.$$

Nach Lemma 2.2 ist diese Konvergenz lokal gleichmäßig auf E, und es genügt zu zeigen, daß

$$\overline{\lim_{k\to\infty}} \sup_{n\in\mathbb{N}} \int_{\mathrm{X}\setminus[-\varrho_k,\Delta)} \exp(-\langle \lambda, y\rangle)\, P_n(dy) = 0, \qquad \lambda \in \mathrm{E},$$

lokal gleichmäßig. Verwende dazu die (nach Lemma 2.10 lokal gleichmäßige) Beschränktheit der Folge $\{\check{P}_n(\lambda)\}$ für jedes $\lambda \in \mathrm{E}$. Für ein beliebiges $h > 0$ gilt

$$\begin{aligned}
\sup_{n\in\mathbb{N}} \int_{\mathrm{X}\setminus[-\varrho_k,\Delta)} & \exp(-\langle \lambda, y\rangle)\, P_n(dy) \\
&\leq \sum_{j=1}^{d} \int_{(y_j<-k)} \exp(hy_j) \exp(-\langle \lambda + he_j, y\rangle)\, P_n(dy) \\
&\leq \exp(-hk) \sum_{j=1}^{d} \sup_{n\in\mathbb{N}} \check{P}_n(\lambda + he_j), \qquad k \in \mathbb{N}, \lambda \in \mathrm{E}.
\end{aligned}$$

Damit folgt die Behauptung. □

Wir benötigen zunächst wieder eine etwas allgemeiner formulierte Fassung eines Konvergenzkriteriums für spätere Anwendungen, bevor wir den Stetigkeitssatz formulieren.

2.12 Proposition. *Sei $\{P_n\} \subseteq \mathcal{S}(\mathrm{X})$ eine Folge von Sub-Wahrscheinlichkeitsmaßen mit beschränkten Laplace-Transformierten. Existiert ein Intervall $[\alpha, \beta] \subseteq \mathrm{E}$ mit nichtleerem Inneren derart, daß die Folge $\{\check{P}_n(\lambda)\}$ für jedes $\lambda \in [\alpha, \beta]$ konvergiert, so existiert ein $P \in \mathcal{S}(\mathrm{X})$ mit $P_n \xrightarrow{\mathrm{v}} P$. In diesem Fall besitzt P eine endliche Laplace-Transformierte, und es gilt $\check{P}_n(\lambda) \to \check{P}(\lambda)$ für alle $\lambda \in \mathrm{E}^\circ$.*

Beweis. Die Folge $\{P_n\}$ ist stets relativ kompakt in $\mathcal{S}(\mathrm{X})$, also ist nur zu zeigen, daß jede Teilfolge von $\{P_n\}$, die in $\mathcal{S}(\mathrm{X})$ konvergiert, denselben vagen Grenzwert besitzt. Ist $\{P_{n_k}\}$ eine solche Teilfolge mit vagem Grenzwert $P \in \mathcal{S}(\mathrm{X})$, so folgt wegen der Beschränktheit der Laplace-Transformierten mit Proposition 2.11 die Endlichkeit der Lacplace-Transformierten von P und die Konvergenz $\check{P}_{n_k}(\lambda) \to \check{P}(\lambda)$ für alle $\lambda \in \mathrm{E}^\circ$. Ist $\{P_{m_k}\}$ eine weitere Teilfolge mit vagem Grenzwert $Q \in \mathcal{S}(\mathrm{X})$, so folgt analog $\check{P}_{m_k}(\lambda) \to \check{Q}(\lambda)$ für alle $\lambda \in \mathrm{E}^\circ$. Da die Folge $\{\check{P}_n\}$ auf $[\alpha,\beta]$ konvergiert, stimmen diese Grenzwerte dort überein, d.h., es gilt $\check{P}(\lambda) = \check{Q}(\lambda)$ für alle $\lambda \in [\alpha,\beta]$. Nach Proposition 2.7 folgt $P = Q$, also die Behauptung. □

2.13 Lemma. *Sei $\{P_n\} \subseteq \mathcal{S}(\mathrm{X})$ und $P \in \mathcal{S}(\mathrm{X})$ mit $P_n \xrightarrow{\mathrm{v}} P$. Gilt $\|P_n\| \to \|P\|$, so gilt $P_n \xrightarrow{\mathrm{w}} P$. Dies ist insbesondere der Fall, wenn $P \in \mathcal{P}(\mathrm{E})$.*

Beweis. (a) Wir zeigen zuerst den zweiten Teil der Behauptung. Ist $P \in \mathcal{P}(\mathrm{X})$, so wähle eine Folge $\{f_k\} \subseteq \widehat{\mathrm{C}}(\mathrm{X})$ mit $1_{U_k(0)} \le f_k \le 1_{U_{2k}(0)}$ für $k \in \mathbb{N}$. Dann gilt

$$\varliminf_{n\to\infty} \|P_n\| \ge \lim_{n\to\infty} \int f_k\, dP_n = \int f_k\, dP \ge P\big(U_k(0)\big), \qquad k \in \mathbb{N},$$

und mit $k \to \infty$ erhalten wir $1 \ge \varliminf_{n\to\infty} \|P_n\| \ge \|P\| = 1$, also $\|P_n\| \to 1$.

(b) Sei $\epsilon > 0$ vorgegeben. Wähle ein Kompaktum $K \subseteq \mathrm{X}$ mit $P(\partial K) = 0$ und $P(\mathrm{X} \setminus K) < \epsilon/2$. Dann gilt

$$P_n(\mathrm{X} \setminus K) = \|P_n\| - P_n(K) \longrightarrow \|P\| - P(K) = P(E \setminus K) < \epsilon/2.$$

Betrachte nun für $f \in \overline{\mathrm{C}}(\mathrm{X})$ die Ungleichung

$$\begin{aligned} &|\int f\, dP_n - \int f\, dP| \\ &\quad \le |\int_K f\, dP_n - \int_K f\, dP| + \int_{X\setminus K} |f| dP_n + \int_{X\setminus K} |f| dP \\ &\quad \le |\int_K f\, dP_n - \int_K f\, dP| + \|f\| \cdot P_n(X \setminus K) + \|f\| \cdot P(X \setminus K). \end{aligned}$$

Hieraus folgt $\varlimsup_{n\to\infty} |\int f\, dP_n \to \int f\, dP| \le \epsilon \|f\|$, also $\int f\, dP_n \to \int f\, dP$. □

2.14 Theorem (Stetigkeitssatz). *Sei $\{P_n\} \subseteq \mathcal{S}(\mathrm{X})$ eine Folge von Sub-Wahrscheinlichkeitsmaßen mit beschränkten Laplace-Transformierten.*

(a) *Konvergiert die Folge $\{\check{P}_n(\lambda)\}$ für jedes $\lambda \in \mathrm{E}^\circ$ (E) gegen einen endlichen Grenzwert, so existiert ein $P \in \mathcal{S}(\mathrm{X})$ mit $P_n \xrightarrow{\mathrm{v}} P$ ($P_n \xrightarrow{\mathrm{w}} P$). In diesem Fall besitzt P eine endliche Laplace-Transformierte, und es gilt $\check{P}_n(\lambda) \to \check{P}(\lambda)$ für alle $\lambda \in \mathrm{E}^\circ$ (E).*

(b) *Existiert ein $P \in \mathcal{S}(\mathrm{X})$ mit $P_n \xrightarrow{\mathrm{v}} P$ ($P_n \xrightarrow{\mathrm{w}} P$), so besitzt P eine endliche Laplace-Transformierte, und es gilt $\check{P}_n(\lambda) \to \check{P}(\lambda)$ für alle $\lambda \in \mathrm{E}^\circ$ (E).*

Beweis. Teil (b) ist in Proposition 2.11 bereits gezeigt. Teil (a) folgt im Fall der Konvergenz auf E° unmittelbar aus Proposition 2.12. Liegt darüber hinaus Konvergenz auf ganz E vor, so erhalten wir $\|P_n\| \to \|P\|$ durch eine Auswertung in Null, also nach Lemma 2.13 die schwache Konvergenz. Die Konvergenz der Laplace-Transformierten auf E folgt wiederum mit Proposition 2.11. □

In vielen Fällen ist es einfacher, mit kumulantenerzeugenden Funktionen zu rechnen. Deshalb formulieren wir für den Fall, daß die Grenzverteilung nicht Null ist, eine Folgerung aus dem Stetigkeitssatz für kumulantenerzeugende Funktionen.

2.15 Proposition. *Sei* $\{P_n\} \subseteq \mathcal{S}(\mathrm{X})$ *eine Folge von Sub-Wahrscheinlichkeitsmaßen mit beschränkten Laplace-Transformierten und* $P \in \mathcal{S}(\mathrm{X}) \setminus \{0\}$ *mit* $P_n \xrightarrow{\mathrm{v}} P$ $(P_n \xrightarrow{\mathrm{w}} P)$. *Sind* ψ_n *und* ψ *die zugehörigen kumulantenerzeugenden Funktionen, so gilt* $\psi_n \to \psi$ *lokal gleichmäßig auf* E° (E) *und* $\nabla_j \psi_n \to \nabla_j \psi$ *für* $1 \leq j \leq d$ *lokal gleichmäßig auf* E°.

Beweis. Wegen $P \neq 0$ existiert ein $f \in \widehat{\mathrm{C}}(\mathrm{X})$ mit $\int f \, dP \neq 0$. Aufgrund der Konvergenz $\int f \, dP_n \to \int f \, dP$ folgt $P_n \neq 0$ für hinreichend großes $n \in \mathbb{N}$. Daher besitzt P_n o.B.d.A. eine kumulantenerzeugende Funktion. Nach Proposition 2.11 besitzt auch P eine endliche Laplace-Transformierte (also eine kumulantenerzeugende Funktion), und es gilt $\check{P}_n \to \check{P}$ lokal gleichmäßig auf E° (E). Sei $K \subseteq \mathrm{E}^\circ$ (E) kompakt. Wegen $P(\lambda) > 0$ für $\lambda \in \mathrm{E}$ gilt $\inf_{\lambda \in K} P(\lambda) > 0$, und aufgrund der lokal gleichmäßigen Konvergenz $\inf_{\lambda \in K} P_n(\lambda) > 0$ für hinreichend großes $n \in \mathbb{N}$.

(a) Nach Definition gilt $\psi_n := -\log \check{P}_n$, und mit dem Mittelwertsatz folgt die Existenz von $M \geq 0$ derart, daß

$$|\psi_n(\lambda) - \psi(\lambda)| \leq M \, |\check{P}_n(\lambda) - \check{P}(\lambda)|, \qquad \lambda \in K.$$

Damit folgt die lokal gleichmäßige Konvergenz der kumulantenerzeugenden Funktionen aus der lokal gleichmäßigen Konvergenz der Laplace-Transformierten.

(b) Aufgrund der Holomorphie der Laplace-Transformierten nach Proposition 2.4 erhalten wir

$$\nabla_j \check{P}_n(\lambda) = \int y_j \exp(-\langle \lambda, y \rangle) \, P_n(dy), \qquad \lambda \in \mathrm{E}^\circ,$$

und mit den dort angegebenen Abschätzungen $\nabla_j \check{P}_n \to \nabla_j \check{P}$ für $1 \leq j \leq d$ lokal gleichmäßig auf E° analog zum Beweis von Proposition 2.11. Dies liefert

$$|\nabla_j \psi_n(\lambda) - \nabla_j \psi(\lambda)| = \frac{1}{\check{P}_n(\lambda) \check{P}(\lambda)} \, |\nabla_j \check{P}_n(\lambda) \check{P}(\lambda) - \nabla_j \check{P}(\lambda) \check{P}_n(\lambda)|, \qquad \lambda \in K,$$

und die Behauptung folgt wie in Teil (a). □

2.16 Bemerkung. (a) Wir erhalten den (wohlbekannten) Eindeutigkeits- und Stetigkeitssatz für Sub-Wahrscheinlichkeitsmaße auf E als Spezialfall des hier entwickelten Kalküls. Dies folgt unmittelbar aus der Tatsache, daß $\check{P} \leq 1$ für jedes $P \in \mathcal{S}(\mathrm{E})$. Daher besitzt jedes $P \in \mathcal{S}(\mathrm{E})$ eine endliche Laplace-Transformierte und $\{P_n\} \subseteq \mathcal{S}(\mathrm{E})$ ist stets eine Folge mit beschränkten Laplace-Transformierten.

(b) Im Fall $d = 1$ ist für eine Folge $\{P_n\} \subseteq \mathcal{S}(\mathbb{R})$ von Sub-Wahrscheinlichkeitsmaßen unter der Voraussetzung der Konvergenz von $\{\check{P}_n(\lambda)\}$ für jedes $\lambda \in (0, \infty)$ stets die Beschränktheit der Laplace-Transformierten gewährleistet, da $\check{P}_n(0) = \|P_n\| \leq 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Wir werden diese Tatsache im folgenden ohne weiteren Hinweis verwenden.

3. Unendlich teilbare Verteilungen

3.1 Definition. (a) Definiere die Faltung $P \star Q \in \mathcal{S}(\mathrm{X})$ zweier Sub-Wahrscheinlichkeitsmaße $P, Q \in \mathcal{S}(\mathrm{X})$ durch

$$\int f(x)\,(P \star Q)(dx) := \iint f(y+z)\,P(dy)\,Q(dz), \qquad f \in \overline{\mathrm{C}}(\mathrm{X}).$$

(b) Für ein endliches Borel-Maß $\mu \in \mathcal{M}(\mathrm{X})$ definiere die Laplace-Transformierte $\check{\mu} : \mathrm{E} \mapsto [0, \infty]$ durch

$$\check{\mu}(\lambda) := \int \exp(-\langle \lambda, y \rangle)\,\mu(dy), \qquad \lambda \in \mathrm{E}.$$

(c) Ein Sub-Wahrscheinlichkeitsmaß $P \in \mathcal{S}(\mathrm{X})$ heißt unendlich teilbare Verteilung, falls zu jedem $n \in \mathbb{N}$ ein $P_n \in \mathcal{S}(\mathrm{X})$ mit $P = P_n^{\star n}$ existiert.

3.2 Lemma. *Sind μ, ν endliche Borel-Maße auf* X *und ist $\varrho := \mu \star \nu$, so gilt $\check{\varrho} = \check{\mu} \cdot \check{\nu}$.*

Beweis. Dies folgt aus der Funktionalgleichung der Exponentialfunktion. □

3.3 Proposition (Zusammengesetzte Poisson-Verteilung). *Sei $r > 0$ und μ ein endliches, auf $\mathrm{E} \cup U_r(0)$ konzentriertes Borel-Maß. Definiere $P_\mu : \mathcal{B}(\mathrm{X}) \mapsto [0, \infty)$ durch*

$$P_\mu(\Gamma) := \exp(-\|\mu\|) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\,\mu^{\star n}(\Gamma), \qquad \Gamma \in \mathcal{B}(\mathrm{X}), \tag{3.1}$$

wobei $\mu^{\star 0} := \epsilon_0$. Dann ist P_μ ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf X. *Ist μ auf* E *konzentriert, so gilt $P_\mu \in \mathcal{P}(\mathrm{E})$. Die kumulantenerzeugende Funktion ψ von P_μ ist gegeben durch*

$$\psi(\lambda) = \int \big(1 - \exp(-\langle \lambda, y \rangle)\big)\,\mu(dy), \qquad \lambda \in \mathrm{E}. \tag{3.2}$$

Beweis. Man überzeugt sich anhand der Definition leicht davon, daß P_μ ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf X (E) ist. Nach Fubini und Lemma 3.2 gilt

$$\begin{aligned}\check{P}_\mu(\lambda) &= \exp(-\|\mu\|)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\left(\check{\mu}(\lambda)\right)^n \\ &= \exp\Big(-\|\mu\| + \int \exp(-\langle\lambda, y\rangle)\,\mu(dy)\Big) \\ &= \exp\Big(-\int\big(1-\exp(-\langle\lambda,y\rangle)\big)\,\mu(dy)\Big), \qquad \lambda\in \mathrm{E}.\end{aligned}$$

Damit ist die Darstellung (3.2) gezeigt. □

3.4 Proposition (Normalverteilung). (a) *Sei $D \in [0,\infty)_{d\times d}$ eine Diagonalmatrix mit Einträgen $\sigma_1^2,\dots,\sigma_d^2 \geq 0$. Dann besitzt $N_D := \bigotimes_{j=1}^d N(0,\sigma_j^2) \in \mathcal{P}(\mathrm{X})$ die kumulantenerzeugende Funktion $\psi(\lambda) = -\sum_{j=1}^d \sigma_j\lambda_j^2/2$ für $\lambda\in\mathrm{E}$.*

(b) *Sei $\Sigma \in \mathbb{R}_{d\times d}$ eine symmetrische, positiv semidefinite Matrix. Dann existiert eine orthogonale Matrix $A\in\mathbb{R}_{d\times d}$ und eine Diagonalmatrix $D\in[0,\infty)_{d\times d}$ mit $\Sigma = ADA^T$. Das zur Abbildung $A:\mathrm{X}\mapsto\mathrm{X}$ gehörende transportierte Maß $N_\Sigma := N_D{}^{(A)} \in \mathcal{P}(\mathrm{X})$ besitzt die kumulantenerzeugende Funktion $\psi(\lambda) = -\langle\Sigma\lambda,\lambda\rangle/2$ für $\lambda\in\mathrm{E}$.*

Beweis. (a) Sei $1\leq j\leq d$. Ist $\sigma_j^2 > 0$, so erhält man durch eine quadratische Ergänzung

$$\begin{aligned}\check{N}(0,\sigma_j^2)(\lambda) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_j}\int \exp(-y^2/2\sigma_j^2)\exp(-\lambda y)\,dy \\ &= \exp(\sigma_j^2\lambda^2/2)\,\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_j}\int\exp(-(y+\sigma_j^2\lambda)^2/2\sigma_j^2)\,dy \\ &= \exp(\sigma_j^2\lambda^2/2), \qquad \lambda\in[0,\infty).\end{aligned}$$

Wegen $\check{N}(0,0)=1$ und $\check{N}_D(\lambda) = \prod_{j=1}^d \check{N}(0,\sigma_j^2)(\lambda_j)$ für $\lambda\in\mathrm{E}$ folgt die Behauptung.

(b) Da $\Sigma\in\mathbb{R}_{d\times d}$ symmetrisch ist, existiert ein orthonormales System von zugehörigen Eigenvektoren. Wählen wir diese Eigenvektoren als Spalten der Matrix $A\in\mathbb{R}_{d\times d}$, so existiert eine Diagonalmatrix $D\in\mathbb{R}_{d\times d}$ mit $\Sigma A = AD$. Da Σ positiv semidefinit ist, sind die Einträge $\sigma_1^2,\dots,\sigma_d^2$ in D nichtnegativ. Mit dem Transformationssatz folgt

$$\check{N}_\Sigma(\lambda) = \int \exp(-\langle\lambda, Ay\rangle)\,N_D(dy) = \check{N}_D(A^T\lambda), \qquad \lambda\in\mathrm{E}.$$

Setzen wir $A =: (a_{kl})$ und $\Sigma =: (\sigma_{kl})$, so erhalten wir die kumulantenerzeugende Funktion

$$\begin{aligned}\psi(\lambda) &= -\frac{1}{2}\sum_{j=1}^d \sigma_j^2\langle A^T\lambda, e_j\rangle^2 = -\frac{1}{2}\sum_{k,l=1}^d\Big(\sum_{j=1}^d a_{kj}\sigma_j^2 a_{lj}\Big)\lambda_k\lambda_l \\ &= -\frac{1}{2}\sum_{k,l=1}^d \sigma_{kl}\lambda_k\lambda_l = -\frac{1}{2}\langle\Sigma\lambda,\lambda\rangle, \qquad \lambda\in\mathrm{E}.\end{aligned}$$

Damit ist die angegebene Darstellung gezeigt. □

Wir benötigen einige technische Hilfsmittel, um eine unendlich teilbare Verteilung in der Form (1.2) zu konstruieren. Da dies durch eine Approximation stattfindet, sind hier Konvergenz- und Darstellungsuntersuchungen nicht sauber voneinander zu trennen.

3.5 LEMMA. *Definiere die Funktion* $M : \mathrm{X} \times \mathrm{X} \mapsto \mathbb{R}$ *durch*

$$M(\lambda, y) := \exp(-\langle \lambda, y\rangle) - 1 + \frac{\langle \lambda, y\rangle}{1 + |y|^2}, \qquad (\lambda, y) \in \mathrm{X} \times \mathrm{X}. \tag{3.3}$$

Dann existiert eine stetige Funktion $r : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ *mit* $r(0) = 0$ *derart, daß für jedes* $R > 0$

$$|M(\lambda, y)| \leq R\,|\lambda||y|^2 + \frac{1}{2}\,\langle \lambda, y\rangle^2 \Big(1 + \sup_{|y|\leq R} \big|r(\langle \lambda, y\rangle)\big|\Big), \qquad \lambda \in \mathrm{X}, |y| \leq R.$$

BEWEIS. Wähle die Funktion r als quadratisches Restglied der Taylor-Entwicklung der Exponentialfunktion. Es gilt

$$\exp(-x) - 1 = -x + \frac{1}{2}x^2\big(1 + r(x)\big), \qquad x \in \mathbb{R}. \tag{3.4}$$

Damit erhalten wir

$$M(\lambda, y) = -\langle \lambda, y\rangle + \frac{\langle \lambda, y\rangle}{1 + |y|^2} + \frac{1}{2}\langle \lambda, y\rangle^2\big(1 + r(\langle \lambda, y\rangle)\big), \qquad (\lambda, y) \in \mathrm{X} \times \mathrm{X},$$

und wegen

$$\langle \lambda, y\rangle - \frac{\langle \lambda, y\rangle}{1 + |y|^2} = \langle \lambda, y\rangle\,\frac{|y|^2}{1 + |y|^2}$$

folgt die Behauptung. □

3.6 LEMMA. *Sei* $r > 0$. *Für* $n \in \mathbb{N}$ *sei* $a_n \in \mathrm{X}$, $\delta_n \geq 0$, $\Sigma_n \in \mathbb{R}_{d\times d}$ *eine symmetrische, positiv semidefinite Matrix und* μ_n *ein Borel-Maß auf* $\mathrm{E} \cup U_r(0)$, *das die Bedingung* $\int (|y|^2 \wedge 1)\,\mu_n(dy) < \infty$ *erfüllt. Definiere*

$$\psi_n(\lambda) := \langle a_n, \lambda\rangle - \frac{1}{2}\langle \Sigma_n\lambda, \lambda\rangle - \int M(\lambda, y)\,\mu_n(dy) + \delta_n, \qquad \lambda \in \mathrm{E}. \tag{3.5}$$

Dann ist die Folge $\{\psi_n(\lambda)\}$ *genau dann für jedes* $\lambda \in \mathrm{E}^\circ$ (E) *beschränkt, wenn die Folgen* $\{a_n\}$, $\{\delta_n\}$, $\{\mathrm{Spur}\,\Sigma_n\}$ *beschränkt sind und* $\sup_{n\in\mathbb{N}} \int \big(|y|^2 \wedge 1\big)\,\mu_n(dy) < \infty$ *gilt.*

BEWEIS. (a) Wir nehmen zuerst an, daß die angegebenen Bedingungen erfüllt sind. Wegen Lemma 3.5 und der Beschränktheit von $M(\lambda, \cdot)$ auf $E\backslash U_r(0)$ genügt es zu zeigen, daß die Folge $\{\langle \Sigma_n\lambda, \lambda\rangle\}$ für jedes $\lambda \in \mathrm{E}$ beschränkt ist. Für $n \in \mathbb{N}$ sei $\Sigma_n = A_n D_n A_n^T$, wobei $A_n \in \mathbb{R}_{d\times d}$ orthogonal und $D_n \in [0,\infty)_{d\times d}$ diagonal. Wegen $\|D_n\| \leq \mathrm{Spur}(\Sigma_n)$ und $\|A_n\| = 1$ folgt

$$\langle \Sigma_n\lambda, \lambda\rangle = \langle D_n A_n^T\lambda, A_n^T\lambda\rangle \leq \|D_n\| \cdot \|A_n^T\|^2|\lambda|^2 \leq \mathrm{Spur}(\Sigma_n) \cdot |\lambda|^2, \qquad \lambda \in \mathrm{E}.$$

(b) Ist die Folge $\{\psi_n(\lambda)\}$ für jedes $\lambda \in \mathrm{E}^\circ$ beschränkt, so betrachte die Darstellung

$$\begin{aligned} 2\psi_n(\lambda) - \psi_n(2\lambda) &= \langle \Sigma_n \lambda, \lambda\rangle - \int \big(2M(\lambda,y) - M(2\lambda,y)\big)\,\mu_n(dy) + \delta_n \\ &= \langle \Sigma_n \lambda, \lambda\rangle + \int \big(1-\exp(-\langle\lambda,y\rangle)\big)^2\,\mu_n(dy) + \delta_n, \qquad \lambda\in\mathrm{E}^\circ. \end{aligned}$$

Alle Terme auf der rechten Seite sind nichtnegativ, also beschränkt. Wir betrachten zunächst die Folge $\{\Sigma_n\}$. Sei wieder $\Sigma_n = A_n D_n A_n^T$, wobei $A_n \in \mathbb{R}_{d\times d}$ orthogonal und $D_n \in [0,\infty)_{d\times d}$ diagonal mit Einträgen $\big({\sigma_j}^{(n)}\big)^2$ für $1 \le j \le d$. Wir zeigen nun, daß zu jedem $1 \le j \le d$ und jeder Teilfolge von $\{\Sigma_n\}$ eine weitere Teilfolge (die wir genauso bezeichnen) derart existiert, daß $\sup_{n\in\mathbb{N}} \big({\sigma_j}^{(n)}\big)^2 < \infty$. Dann folgt die Beschränktheit von $\{\mathrm{Spur}(\Sigma_n)\}$. Sei also $1 \le j \le d$ fest. Wegen $\|A_n\| = 1$ können wir o.B.d.A. annehmen, daß $\{A_n\}$ gegen eine Matrix $A \in \mathbb{R}_{d\times d}$ konvergiert. Offensichtlich ist A ebenfalls orthogonal. Da E° eine Basis von X enthält, können wir ein $\lambda \in \mathrm{E}^\circ$ mit $\langle A^T\lambda, e_j\rangle > 0$ wählen. Für $n \in \mathbb{N}$ setze $\lambda^{(n)} := A_n^T \lambda$. Dann gilt ${\lambda_j}^{(n)} = \langle A_n^T\lambda, e_j\rangle \to \langle A^T\lambda, e_j\rangle > 0$. Also existiert ein $\epsilon > 0$ mit ${\lambda_j}^{(n)} > \epsilon$ für hinreichend großes $n \in \mathbb{N}$. Die Behauptung folgt wegen

$$\langle \Sigma_n\lambda,\lambda\rangle = \langle D_n A_n^T\lambda, A_n^T\lambda\rangle = \sum_{k=1}^d \big({\sigma_k}^{(n)}\big)^2\big({\lambda_k}^{(n)}\big)^2 \ge \big({\sigma_j}^{(n)}\big)^2\big({\lambda_j}^{(n)}\big)^2.$$

Verwende nun $\sup_{n\in\mathbb{N}} \int \big(1-\exp(-\langle\lambda,y\rangle)\big)^2\,\mu_n(dy) < \infty$ für alle $\lambda \in \mathrm{E}^\circ$. Dies liefert unmittelbar die Beschränktheit von $\big\{\mu_n\big(\mathrm{E}\setminus U_r(0)\big)\big\}$. Mit einer linearen Taylor-Entwicklung der Exponentialfunktion erhalten wir $\sup_{n\in\mathbb{N}} \int_{U_r(0)} \langle\lambda,y\rangle^2\,\mu_n(dy) < \infty$ für alle $\lambda\in\mathrm{E}^\circ$. Definiere die Matrix $\Sigma_n' := ({\sigma_{lm}}^{(n)})$ durch

$${\sigma_{lm}}^{(n)} := \int_{U_r(0)} y_l y_m\,\mu_n(dy), \qquad 1 \le l,m \le d.$$

Offensichtlich ist Σ_n' symmetrisch. Wegen $\langle\Sigma_n' x, x\rangle = \int_{U_r(0)} \langle x,y\rangle^2\,\mu_n(dy) \ge 0$ für $x \in \mathrm{X}$ ist Σ_n' positiv semidefinit, und es gilt $\sup_{n\in\mathbb{N}}\langle\Sigma_n'\lambda,\lambda\rangle < \infty$ für alle $\lambda\in\mathrm{E}^\circ$. Wie vorher folgt die Beschränktheit von $\{\mathrm{Spur}(\Sigma_n')\}$, also $\sup_{n\in\mathbb{N}}\int_{U_r(0)} |y|^2\,\mu_n(dy) < \infty$. Damit haben wir gezeigt, daß $\sup_{n\in\mathbb{N}}\int \big(|y|^2\wedge 1\big)\,\mu_n(dy) < \infty$. Eine Anwendung von Lemma 3.5 auf die Darstellung (3.5) liefert die Beschränktheit von $\{\langle a_n,\lambda\rangle\}$ für $\lambda\in\mathrm{E}^\circ$. Wegen $\mathrm{X} = \mathrm{E}^\circ - \mathrm{E}^\circ$ gilt dies für alle $\lambda\in\mathrm{X}$. Die Behauptung folgt nun durch Einsetzen der kanonischen Basisvektoren. □

3.7 Lemma. *Sei $r>0$. Für $n\in\mathbb{N}$ sei $a_n \in \mathrm{X}$, $\delta_n \ge 0$, $\Sigma_n \in \mathbb{R}_{d\times d}$ eine symmetrische, positiv semidefinite Matrix und μ_n ein Borel-Maß auf $\mathrm{E}\cup U_r(0)$, das die Bedingung $\int(|y|^2\wedge 1)\,\mu_n(dy) < \infty$ erfüllt. Definiere*

$$\psi_n(\lambda) := \langle a_n,\lambda\rangle - \frac{1}{2}\langle\Sigma_n\lambda,\lambda\rangle - \int M(\lambda,y)\,\mu_n(dy) + \delta_n, \qquad \lambda\in\mathrm{E}.$$

Sei ferner $a \in \mathrm{X}$, $\delta \geq 0$, $\Sigma \in \mathbb{R}_{d\times d}$ *eine symmetrische, positiv semidefinite Matrix und* μ *ein Borel-Maß auf* $\mathrm{E} \cup U_r(0)$ *mit* $\int (|y|^2 \wedge 1)\,\mu(dy) < \infty$. *Es gelte:*

(a) $a_n \longrightarrow a$.

(b) $\lim_{\epsilon\to 0} \overline{\lim_{n\to\infty}} \left| \left(\langle \Sigma_n \lambda, \lambda\rangle + \int_{\overline{U_\epsilon(0)}} \langle \lambda, y\rangle^2\,\mu_n(dy) \right) - \langle \Sigma\lambda, \lambda\rangle \right| = 0$ *für alle* $\lambda \in \mathrm{E}^\circ$.

(c) $1_{\mathrm{X}\setminus\overline{U_\epsilon(0)}} \cdot \nu_n \xrightarrow{\mathrm{v}} 1_{\mathrm{X}\setminus\overline{U_\epsilon(0)}} \cdot \nu$ *für alle* $\epsilon > 0$ *mit* $\nu\big(\partial U_\epsilon(0)\big) = 0$.

(d) $\lim_{R\to\infty} \overline{\lim_{n\to\infty}} \left| \left(\mu_n\big(\mathrm{E}\setminus U_R(0)\big) + \delta_n \right) - \delta \right| = 0$.

Dabei ist $\nu_n(dy) := |y|^2(1+|y|^2)^{-1}\mu_n(dy)$ *und* $\nu(dy) := |y|^2(1+|y|^2)^{-1}\mu(dy)$. *Dann existiert der Grenzwert* $\psi(\lambda) := \lim_{n\to\infty}\psi_n(\lambda)$ *für alle* $\lambda \in \mathrm{E}^\circ$, *und dieser besitzt die Darstellung*

$$\psi(\lambda) = \langle a, \lambda\rangle - \frac{1}{2}\langle \Sigma\lambda, \lambda\rangle - \int M(\lambda, y)\,\mu(dy) + \delta, \qquad \lambda \in \mathrm{E}^\circ.$$

Beweis. Definiere $N_\lambda : \mathrm{X}\setminus\{0\} \mapsto \mathbb{R}$ für $\lambda \in \mathrm{E}^\circ$ durch $N_\lambda(y) := M(\lambda, y)(1+|y|^2)|y|^{-2}$. Seien $\{\epsilon_k\}$, $\{R_k\} \subseteq (0,\infty)$ Folgen mit $\nu(\partial U_{\epsilon_k}(0)) = \nu(\partial U_{R_k}(0)) = 0$ und $\epsilon_k \to 0$, $R_k \to \infty$. Dann gilt für hinreichend großes $k \in \mathbb{N}$ die Ungleichung

$$\begin{aligned}
|\psi_n(\lambda) - \psi(\lambda)| \leq{}& |a_n - a|\,|\lambda| \\
&+ \left| \left(\frac{1}{2}\langle \Sigma_n\lambda, \lambda\rangle + \int_{\overline{U_{\epsilon_k}(0)}} M(\lambda, y)\,\mu_n(dy) \right) - \frac{1}{2}\langle \Sigma\lambda, \lambda\rangle \right| \\
&+ \int_{\overline{U_{\epsilon_k}(0)}} |M(\lambda, y)|\,\mu(dy) \\
&+ \left| \int_{U_{R_k}(0)\setminus\overline{U_{\epsilon_k}(0)}} N_\lambda(y)\,\nu_n(dy) - \int_{U_{R_k}(0)\setminus\overline{U_{\epsilon_k}(0)}} N_\lambda(y)\,\nu(dy) \right| \\
&+ \left| \left(-\int_{\mathrm{E}\setminus U_{R_k}(0)} M(\lambda, y)\,\mu_n(dy) + \delta_n \right) - \delta \right| \\
&+ \int_{\mathrm{E}\setminus U_{R_k}(0)} |M(\lambda, y)|\,\mu(dy), \qquad \lambda \in \mathrm{E}^\circ.
\end{aligned}$$

Wegen Bedingung (a) geht der erste Term mit $n \to \infty$ gegen Null, wegen Bedingung (c) und der Stetigkeit von N_λ der vierte ebenfalls. Nach Lemma 3.5 existiert eine stetige Funktion $r : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ mit $r(0) = 0$ und

$$\begin{aligned}
\int_{\overline{U_{\epsilon_k}(0)}} |M(\lambda, y)|\,\mu(dy) \leq{}& \epsilon_k\,|\lambda| \int_{\overline{U_{\epsilon_k}(0)}} |y|^2\,\mu(dy) \\
&+ \frac{1}{2}\left(1 + \sup_{|y|\leq\epsilon_k} \big|r(\langle\lambda, y\rangle)\big|\right) \int_{\overline{U_{\epsilon_k}(0)}} \langle\lambda, y\rangle^2\,\mu(dy), \qquad \lambda \in \mathrm{E}^\circ.
\end{aligned}$$

Damit geht der dritte Term wegen $\int(|y|^2 \wedge 1)\,\mu(dy) < \infty$ für $k \to \infty$ gegen Null. Aufgrund der Beschränktheit von $M(\lambda,\cdot)$ auf $E \setminus U_{R_k}(0)$ gilt dies ebenfalls für den letzten Term. Wende nun Lemma 3.5 auf den zweiten Term an. Es gilt

$$\begin{aligned}
&\left|\left(\frac{1}{2}\langle\Sigma_n\lambda,\lambda\rangle + \int_{\overline{U_{\epsilon_k}(0)}} M(\lambda,y)\,\mu_n(dy)\right) - \frac{1}{2}\langle\Sigma\lambda,\lambda\rangle\right| \\
&\qquad \le \frac{1}{2}\left|\left(\langle\Sigma_n\lambda,\lambda\rangle + \int_{\overline{U_{\epsilon_k}(0)}} \langle\lambda,y\rangle^2\,\mu_n(dy)\right) - \langle\Sigma\lambda,\lambda\rangle\right| \\
&\qquad\quad + \epsilon_k\,|\lambda| \int_{\overline{U_{\epsilon_k}(0)}} |y|^2\,\mu_n(dy) \\
&\qquad\quad + \frac{1}{2}\sup_{|y|\le\epsilon_k}\big|r(\langle\lambda,y\rangle)\big| \int_{\overline{U_{\epsilon_k}(0)}} \langle\lambda,y\rangle^2\,\mu_n(dy), \qquad \lambda \in \mathrm{E}^\circ.
\end{aligned}$$

Schließlich erhalten wir

$$\begin{aligned}
&\left|\left(-\int_{\mathrm{E}\setminus U_{R_k}(0)} M(\lambda,y)\,\mu_n(dy) + \delta_n\right) - \delta\right| \\
&\qquad \le \left|\Big(\mu_n\big(\mathrm{E}\setminus U_{R_k}(0)\big) + \delta_n\Big) - \delta\right| \\
&\qquad\quad + \sup_{y\in\mathrm{E}\setminus U_{R_k}(0)} \big|M(\lambda,y)+1\big|\,\mu_n(\mathrm{E}\setminus U_{R_k}(0)), \qquad \lambda\in\mathrm{E}^\circ.
\end{aligned}$$

Damit folgt die Behauptung mit $n\to\infty$, $k\to\infty$ wegen (b), (d) und der Konvergenz $\lim_{k\to\infty}\sup_{y\in\mathrm{E}\setminus U_{R_k}(0)}\big|M(\lambda,y)+1\big| = 0$ für $\lambda\in\mathrm{E}^\circ$. □

3.8 Lemma. *Sei $r>0$. Für $n\in\mathbb{N}$ sei $a_n\in\mathrm{X}$, $\delta_n\ge 0$, $\Sigma_n\in\mathbb{R}_{d\times d}$ eine symmetrische, positiv semidefinite Matrix und μ_n ein Borel-Maß auf $\mathrm{E}\cup U_r(0)$, das die Bedingung $\int(|y|^2\wedge 1)\,\mu_n(dy)<\infty$ erfüllt. Definiere*

$$\psi_n(\lambda) := \langle a_n,\lambda\rangle - \frac{1}{2}\langle\Sigma_n\lambda,\lambda\rangle - \int M(\lambda,y)\,\mu_n(dy) + \delta_n, \qquad \lambda\in\mathrm{E}.$$

Ist die Folge $\{\psi_n(\lambda)\}$ für jedes $\lambda\in\mathrm{E}^\circ$ beschränkt, so existiert ein $a\in\mathrm{X}$, ein $\delta\ge 0$, eine symmetrische, positiv semidefinite Matrix $\Sigma\in\mathbb{R}_{d\times d}$ und ein Borel-Maß μ auf $\mathrm{E}\cup U_r(0)$ mit $\int(|y|^2\wedge 1)\,\mu(dy)<\infty$ derart, daß die Bedingungen (a) – (d) *von Lemma* 3.7 *für eine Teilfolge von $\{\psi_n\}$ erfüllt sind.*

Beweis. Nach Lemma 3.6 sind die Folgen $\{a_n\}$, $\{\delta_n\}$, $\{\mathrm{Spur}\,\Sigma_n\}$ beschränkt, und es gilt $\sup_{n\in\mathbb{N}}\int\big(|y|^2\wedge 1\big)\,\mu_n(dy) < \infty$. Wir können also o.B.d.A. annehmen, daß $a := \lim_{n\to\infty} a_n \in \mathrm{X}$ und $\delta_0 := \lim_{n\to\infty}\delta_n \ge 0$ existieren. Insbesondere ist damit Bedingung (a) bereits erfüllt. Ferner ist die Folge $\{\|\Sigma_n\|\}$ beschränkt. Also können wir davon ausgehen, daß $\Sigma_0 := \lim_{n\to\infty}\Sigma_n \in \mathbb{R}_{d\times d}$ komponentenweise existiert. Offensichtlich ist Σ_0 symmetrisch und positiv semidefinit. Setze $\nu_n(dy) := |y|^2(1+|y|^2)^{-1}\mu_n(dy)$. Wegen $\sup_{n\in\mathbb{N}}\|\nu_n\|<\infty$ können wir durch Teilfolgenbildung o.B.d.A. annehmen, daß $\nu_n \xrightarrow{\mathrm{w}} \nu^\Delta$ für ein endliches Borel-Maß ν^Δ auf $\mathrm{E}^\Delta\cup U_r(0)$. Ist ν die Einschränkung von ν^Δ

auf X und $\mu(dy) := 1_{\mathrm{E}\setminus\{0\}}(y)(1+|y|^2)|y|^{-2}\nu(dy)$, so ist Bedingung (c) ebenfalls erfüllt. Wähle nun eine monotone Nullfolge $\{\epsilon_k\} \subseteq (0,1)$. Wegen $\sup_{n\in\mathbb{N}} \int_{\overline{U_1(0)}} |y|^2\, \mu_n(dy) < \infty$ können wir durch Teilfolgenbildung o.B.d.A. annehmen, daß für alle $k \in \mathbb{N}$ die Grenzwerte

$$\sigma_{lm}^{(k)} := \lim_{n\to\infty} \int_{\overline{U_{\epsilon_k}(0)}} y_l y_m\, \mu_n(dy), \qquad 1 \le l,m \le d,$$

existieren. Setze nun $\Sigma^{(k)} := \big(\sigma_{lm}^{(k)}\big)$ und beachte, daß die Folge $\big\{\operatorname{Spur}\big(\Sigma^{(k)}\big)\big\}$ beschränkt ist. Also existiert o.B.d.A. der Grenzwert $\Sigma_1 := \lim_{k\to\infty} \Sigma^{(k)} \in \mathbb{R}_{d\times d}$. Für $k \in \mathbb{N}$ ist $\Sigma^{(k)}$ symmetrisch, und es gilt

$$\big\langle \Sigma^{(k)}x, x\big\rangle = \lim_{n\to\infty} \int_{\overline{U_{\epsilon_k}(0)}} \langle y, x\rangle^2\, \mu_n(dy) \ge 0, \qquad x \in \mathrm{X},$$

also ist die Matrix Σ_1 symmetrisch und positiv semidefinit. Damit ist Bedingung (b) mit $\Sigma := \Sigma_0 + \Sigma_1 \in \mathbb{R}_{d\times d}$ erfüllt. Sei schließlich $\{R_k\} \subseteq (0,\infty)$ mit $R_k \to \infty$. Wegen $\sup_{n\in\mathbb{N}} \int \big(|y|^2 \wedge 1\big)\, \mu_n(dy) < \infty$ können wir durch erneute Teilfolgenbildung o.B.d.A. annehmen, daß $\delta^{(k)} := \lim_{n\to\infty} \mu_n\big(\mathrm{E} \setminus U_{R_k}(0)\big)$ für alle $k \in \mathbb{N}$ existiert. Da die Folge $\{\delta^{(k)}\}$ monoton fällt, existiert der Grenzwert $\delta_1 := \lim_{k\to\infty} \delta^{(k)} \ge 0$, und die Bedingung (d) ist mit $\delta := \delta_0 + \delta_1 \ge 0$ erfüllt. □

3.9 Lemma. *Sei $a \in \mathrm{X}$, $\delta \ge 0$, $\Sigma \in \mathbb{R}_{d\times d}$ eine symmetrische, positiv semidefinite Matrix, $r > 0$ und μ ein Borel-Maß auf $\big(\mathrm{E} \cup U_r(0)\big) \setminus \{0\}$ mit $\int (|y|^2 \wedge 1)\, \mu(dy) < \infty$. Definiere*

$$\psi(\lambda) := \langle a, \lambda\rangle - \frac{1}{2}\langle \Sigma\lambda, \lambda\rangle - \int M(\lambda, y)\, \mu(dy) + \delta, \qquad \lambda \in \mathrm{E}.$$

Dann existiert eine Folge $\{\mu_n\}$ von endlichen Borel-Maßen auf $\mathrm{E} \cup U_r(0)$ derart, daß mit $a_n := a$, $\Sigma_n := \Sigma$ und $\delta_n := \delta$ die Bedingungen von Lemma 3.7 erfüllt sind.

Beweis. Sei $\{\epsilon_n\} \subseteq (0,\infty)$ eine Nullfolge. Definiere $\mu_n(dy) := 1_{\mathrm{X}\setminus U_{\epsilon_n}}(y)\, \mu(dy)$ und

$$\psi_n(\lambda) := \langle a, \lambda\rangle - \frac{1}{2}\langle \Sigma\lambda, \lambda\rangle - \int M(\lambda, y)\, \mu_n(dy) + \delta, \qquad \lambda \in \mathrm{E}.$$

Offensichtlich ist Bedingung (a) von Lemma 3.7 erfüllt. Man überzeugt sich nun leicht davon, daß wegen $\int (|y|^2 \wedge 1)\, \mu(dy) < \infty$ und Lemma 3.5 die Bedingungen (b) – (d) ebenfalls erfüllt sind. Damit folgt die Behauptung. □

3.10 Lemma. *Sei $r > 0$. Für $n \in \mathbb{N}$ sei $a_n \in \mathrm{X}$, $\delta_n \ge 0$, $\Sigma_n \in \mathbb{R}_{d\times d}$ eine symmetrische, positiv semidefinite Matrix und μ_n ein Borel-Maß auf $\mathrm{E} \cup U_r(0)$, das die Bedingung $\int (|y|^2 \wedge 1)\, \mu_n(dy) < \infty$ erfüllt. Definiere*

$$\psi_n(\lambda) := \langle a_n, \lambda\rangle - \frac{1}{2}\langle \Sigma_n\lambda, \lambda\rangle - \int M(\lambda, y)\, \mu_n(dy) + \delta_n, \qquad \lambda \in \mathrm{E}.$$

Sei ferner $a \in \mathrm{X}$, $\delta \geq 0$, $\Sigma \in \mathbb{R}_{d\times d}$ *eine symmetrische, positiv semidefinite Matrix und* μ *ein Borel-Maß auf* $\mathrm{E} \cup U_r(0)$ *mit* $\int (|y|^2 \wedge 1)\,\mu(dy) < \infty$. *Setze*

$$\psi(\lambda) := \langle a, \lambda\rangle - \frac{1}{2}\langle \Sigma\lambda, \lambda\rangle - \int M(\lambda, y)\,\mu(dy) + \delta, \qquad \lambda \in \mathrm{E}.$$

Besitzt $P_n \in \mathcal{S}(\mathrm{X})$ *die kumulantenerzeugende Funktion* ψ_n, *und sind die Bedingungen von Lemma 3.7 erfüllt, so ist* ψ *die kumulantenerzeugende Funktion eines Sub-Wahrscheinlichkeitsmaßes* $P \in \mathcal{S}(\mathrm{X})$, *und es gilt* $P_n \xrightarrow{\mathrm{v}} P$.

Beweis. Nach Lemma 3.6 ist die Folge $\{\psi_n(\lambda)\}$ für jedes $\lambda \in \mathrm{E}$ beschränkt, also $\{P_n\}$ eine Folge mit beschränkten Laplace-Transformierten. Nach dem Stetigkeitssatz 2.14 existiert ein $P \in \mathcal{S}(\mathrm{X})$ mit $P_n \xrightarrow{\mathrm{v}} P$, und die kumulantenerzeugende Funktion von P stimmt auf E° mit ψ überein. Eine stetige Fortsetzung liefert die Behauptung. □

3.11 Theorem (Darstellungssatz). *Sei* $a \in \mathrm{X}$, $\delta \geq 0$, $\Sigma \in \mathbb{R}_{d\times d}$ *eine symmetrische, positiv semidefinite Matrix,* $r > 0$ *und* μ *ein Borel-Maß auf* $\big(\mathrm{E} \cup U_r(0)\big) \setminus \{0\}$ *mit* $\int (|y|^2 \wedge 1)\,\mu(dy) < \infty$. *Definiere die Funktion* $\psi : \mathrm{E} \mapsto \mathbb{R}$ *durch*

$$\psi(\lambda) := \langle a, \lambda\rangle - \frac{1}{2}\langle \Sigma\lambda, \lambda\rangle - \int M(\lambda, y)\,\mu(dy) + \delta, \qquad \lambda \in \mathrm{E}. \tag{3.6}$$

Dann ist ψ *die kumulantenerzeugende Funktion einer unendlich teilbaren Verteilung* $P \in \mathcal{S}(\mathrm{X})$. *Diese Darstellung (Lévy Khintchine-Darstellung) ist eindeutig.*

Beweis. Nach Lemma 3.9 existiert eine Folge $\{\mu_n\}$ von endlichen Borel-Maßen auf der Menge $\mathrm{E} \cup U_r(0)$ derart, daß $\psi(\lambda) = \lim_{n\to\infty} \psi_n(\lambda)$ für alle $\lambda \in \mathrm{E}^\circ$, wobei

$$\psi_n(\lambda) := \langle a_n, \lambda\rangle - \frac{1}{2}\langle \Sigma\lambda, \lambda\rangle + \int \big(1 - \exp(-\langle \lambda, y\rangle)\big)\,\mu_n(dy) + \delta, \qquad \lambda \in \mathrm{E},$$

und $a_n := a - \int y/(1+|y|^2)^{-1}\,\mu_n(dy)$. Nach Lemma 3.2, Proposition 3.3 und Proposition 3.4 ist ψ_n die kumulantenerzeugende Funktion des Sub-Wahrscheinlichkeitsmaßes $P_n := \epsilon_{a_n} \star N_\Sigma \star P_{\mu_n} \star e^{-\delta}\epsilon_0 \in \mathcal{S}(\mathrm{X})$. Nach Lemma 3.10 existiert ein $P \in \mathcal{S}(\mathrm{X})$ mit $P_n \xrightarrow{\mathrm{v}} P$, und ψ ist die kumulantenerzeugende Funktion von P. Man zeigt analog zum Beweis von Proposition 2.4, daß die Fortsetzung φ von ψ auf $\mathbb{L}^d$ stetig und in jeder Variablen holomorph ist. Da $\check{P}$ und $\exp\circ\varphi$ nach Voraussetzung auf E übereinstimmen, folgt $\check{P} = \exp\circ\varphi$ nach Proposition 2.4 und Lemma 2.6. Insbesondere besitzt die Fourier-Transformierte $\hat{P}$ von P die Gestalt $\hat{P}(u) = \exp\big(\vartheta(u)\big)$ für $u \in \mathbb{R}^d$, wobei

$$\vartheta(u) = i\langle a, u\rangle - \frac{1}{2}\langle \Sigma u, u\rangle + \int N(u, y)\,\mu(dy) - \delta, \qquad u \in \mathbb{R}^d,$$

und

$$N(u, y) := \exp(i\langle u, y\rangle) - 1 - \frac{i\langle u, y\rangle}{1+|y|^2}, \qquad (u, y) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d. \tag{3.7}$$

Verwende nun, daß $\|P\| = \exp(-\delta)$. Damit erhalten wir die Behauptung aus der (Eindeutigkeit der) Lévy Khintchine-Darstellung von $\exp(\delta)P \in \mathcal{P}(\mathrm{X})$ (siehe z.B. Parthasarathy (1967), Theorem VI.4.10). □

3.12 Bemerkung. Die Größen a, δ, Σ und μ sind nach dem Darstellungssatz charakteristische Größen der unendlich teilbaren Verteilung $P \in \mathcal{S}(\mathrm{X})$. Wir schreiben daher $P = [a, \Sigma, \mu, \delta]$, und gehen, falls keine näheren Angaben gemacht werden, davon aus, daß die in Theorem 3.11 angegebenen Bedingungen an diese Größen erfüllt sind.

Wir führen nun in einem Spezialfall ähnliche Konvergenzuntersuchungen durch. Die Methoden und die dabei erzielten Resultate sind zu den bereits durchgeführten Untersuchungen analog. Deshalb verweisen wir hier auf die entsprechenden Beweise.

3.13 Lemma. *Für $n \in \mathbb{N}$ sei $a_n \in \mathrm{E}$, $\delta_n \geq 0$ und ϱ_n ein Borel-Maß auf E, das die Bedingung $\int(|y| \wedge 1)\, \varrho_n(dy) < \infty$ erfüllt. Definiere*

$$\psi_n(\lambda) := \langle a_n, \lambda\rangle + \int \big(1 - \exp(\langle\lambda, y\rangle)\big)\, \varrho_n(dy) + \delta_n, \qquad \lambda \in \mathrm{E}.$$

Sei $a \in \mathrm{E}$, $\delta \geq 0$ und ϱ ein Borel-Maß auf E mit $\int(|y| \wedge 1)\, \varrho(dy) < \infty$. Setze $\gamma_n(dy) := |y|(1+|y|)^{-1} \varrho_n(dy)$ und $\gamma(dy) := |y|(1+|y|)^{-1} \varrho(dy)$. Es gelte

(a) $\displaystyle\lim_{\epsilon\to 0} \overline{\lim_{n\to\infty}} \left| \left(a_n + \int_{\overline{U_\epsilon(0)}} y\, \varrho_n(dy) \right) - a \right| = 0.$

(b) $1_{\mathrm{E}\setminus\overline{U_\epsilon(0)}} \cdot \gamma_n \xrightarrow{\mathrm{v}} 1_{\mathrm{E}\setminus\overline{U_\epsilon(0)}} \cdot \gamma$ *für alle $\epsilon > 0$ mit $\gamma\big(\partial U_\epsilon(0)\big) = 0$.*

(c) $\displaystyle\lim_{R\to\infty} \overline{\lim_{n\to\infty}} \left| \Big(\varrho_n\big(\mathrm{E} \setminus U_R(0)\big) + \delta_n \Big) - \delta \right| = 0.$

Dann existiert der Grenzwert $\psi(\lambda) := \lim_{n\to\infty} \psi_n(\lambda)$ für alle $\lambda \in \mathrm{E}^\circ$, und dieser besitzt die Darstellung

$$\psi(\lambda) = \langle a, \lambda\rangle + \int \big(1 - \exp(\langle\lambda, y\rangle)\big)\, \varrho(dy) + \delta, \qquad \lambda \in \mathrm{E}^\circ.$$

Die Folge $\{\psi_n(\lambda)\}$ ist genau dann für jedes $\lambda \in \mathrm{E}^\circ$ (E) beschränkt, wenn die Folgen $\{a_n\}$, $\{\delta_n\}$ beschränkt ist und die Bedingung $\sup_{n\in\mathbb{N}} \int \big(|y| \wedge 1\big)\, \varrho_n(dy) < \infty$ erfüllt ist. In diesem Fall existiert eine Teilfolge von $\{\psi_n\}$, die den Bedingungen (a) – (c) *genügt.*

Beweis. Analog zu den Beweisen von Lemma 3.6, Lemma 3.7 und Lemma 3.8. □

3.14 Lemma. *Sei $a \in \mathrm{E}$, $\delta \geq 0$ und ϱ ein Borel-Maß auf E mit $\int(|y| \wedge 1)\, \varrho(dy) < \infty$. Definiere*

$$\psi(\lambda) := \langle a, \lambda\rangle + \int \big(1 - \exp(\langle\lambda, y\rangle)\big)\, \varrho_n(dy) + \delta_n, \qquad \lambda \in \mathrm{E}.$$

Dann existiert eine Folge $\{\mu_n\}$ von endlichen Borel-Maßen auf E derart, daß mit $a_n := a$ und $\delta_n := \delta$ die Bedingungen von Lemma 3.13 erfüllt sind. Definiere

$$\psi_n(\lambda) := \langle a_n, \lambda\rangle + \int \big(1 - \exp(\langle\lambda, y\rangle)\big)\, \varrho_n(dy) + \delta_n, \qquad \lambda \in \mathrm{E}.$$

Besitzt $P_n \in \mathcal{S}(\mathrm{E})$ die kumulantenerzeugende Funktion ψ_n, und sind die Bedingungen von Lemma 3.13 erfüllt, so ist ψ die kumulantenerzeugende Funktion eines Sub-Wahrscheinlichkeitsmaßes $P \in \mathcal{S}(\mathrm{E})$, und es gilt $P_n \xrightarrow{\mathrm{v}} P$.

Beweis. Analog zu den Beweisen von Lemma 3.9 und Lemma 3.10. □

3.15 Lemma. *Sei $\{\alpha_n\} \subseteq (0,\infty)$ eine Folge und $\{k_n\} \subseteq \mathbb{N}_0$ mit $k_n \to \infty$. Dann besitzen die Folgen $\{\alpha_n^{k_n}\}$ und $\{e^{k_n(\alpha_n-1)}\}$ dieselben Häufungswerte.*

Beweis. Wir können (durch Teilfolgenbildung) o.B.d.A. annehmen, daß die jeweils betrachtete Folge konvergiert. Gilt $e^{k_n(\alpha_n-1)} \to \alpha \in [0,\infty]$, so folgt $k_n(\alpha_n - 1) \to \ln \alpha$ und

$$\alpha_n^{k_n} = \left(1 + \frac{k_n(\alpha_n - 1)}{k_n}\right)^{k_n} \longrightarrow \alpha.$$

Gilt umgekehrt $\alpha_n^{k_n} \to \alpha \in [0,\infty]$, so folgt $k_n \ln \alpha_n \to \ln \alpha$, und es sind drei Fälle zu unterscheiden. Ist $\overline{\lim}_{n\to\infty} \alpha_n < 1$, so folgt $\alpha = 0$ und $k_n(\alpha_n - 1) \to -\infty$. Ist $\underline{\lim}_{n\to\infty} \alpha_n > 1$, so folgt $\alpha = \infty$ und $k_n(\alpha_n - 1) \to \infty$. Gilt schließlich $\alpha_n \to 1$, so können wir o.B.d.A. annehmen, daß $\alpha_n \neq 1$ für hinreichend großes $n \in \mathbb{N}$, und erhalten wegen $(x-1)/\ln x \to 1$ für $x \to 1$

$$\lim_{n\to\infty} k_n(\alpha_n - 1) = \lim_{n\to\infty} k_n \ln \alpha_n = \ln \alpha.$$

Damit folgt die Behauptung. □

3.16 Theorem (Nichtnegativität). *$P \in \mathcal{S}(\mathrm{X}) \setminus \{0\}$ ist genau dann eine unendlich teilbare Verteilung auf E, wenn die kumulantenerzeugende Funktion ψ von P die Darstellung*

$$\psi(\lambda) = \langle a, \lambda\rangle + \int \big(1 - \exp(-\langle\lambda, y\rangle)\big)\, \varrho(dy) + \delta, \qquad \lambda \in \mathrm{E},$$

besitzt. Dabei ist $a \in \mathrm{E}$, $\delta \geq 0$ und ϱ ein Borel-Maß auf $\mathrm{E}\setminus\{0\}$ mit $\int (|y| \wedge 1)\, \varrho(dy) < \infty$.

Beweis. (a) Wir zeigen zunächst, daß jede Funktion ψ mit der angegebenen Darstellung eine unendlich teilbare Verteilung auf E definiert. Nach dem Darstellungssatz 3.11 ist ψ die kumulantenerzeugende Funktion einer spektral beschränkten unendlich teilbaren Verteilung auf X. Daher genügt es zu zeigen, daß diese Verteilung auf E konzentriert ist. Nach Lemma 3.14 existiert eine Folge $\{\varrho_n\}$ von endlichen Borel-Maßen auf der Menge E derart, daß $\psi(\lambda) = \lim_{n\to\infty} \psi_n(\lambda)$ für alle $\lambda \in \mathrm{E}^\circ$, wobei

$$\psi_n(\lambda) := \langle a, \lambda\rangle + \int \big(1 - \exp(-\langle\lambda, y\rangle)\big)\, \varrho_n(dy) + \delta, \qquad \lambda \in \mathrm{E}.$$

Nach Lemma 3.2 und Proposition 3.3 ist ψ_n die kumulantenerzeugende Funktion des Sub-Wahrscheinlichkeitsmaßes $P_n := \epsilon_a \star P_{\varrho_n} \star e^{-\delta}\epsilon_0 \in \mathcal{S}(\mathrm{E})$. Durch eine erneute Anwendung von Lemma 3.14 sehen wir, daß ψ die kumulantenerzeugende Funktion eines Sub-Wahrscheinlichkeitsmaßes $P \in \mathcal{S}(\mathrm{E})$ ist.

(b) Wir zeigen nun umgekehrt, daß jede unendlich teilbare Verteilung $P \in \mathcal{S}(\mathrm{E}) \setminus \{0\}$ eine kumulantenerzeugende Funktion mit der angegebenen Darstellung besitzt. Nach Definition existiert zu jedem $n \in \mathbb{N}$ ein $P_n \in \mathcal{S}(\mathrm{X})$ mit $P = P_n^{\star n}$. Offensichtlich gilt $P_n \in \mathcal{S}(\mathrm{E}) \setminus \{0\}$. Wegen $\check{P} = (\check{P}_n)^n$ folgt mit Lemma 3.15

$$n\big(1 - \check{P}_n(\lambda)\big) \longrightarrow \psi(\lambda), \qquad \lambda \in \mathrm{E}.$$

Damit erhalten wir $\psi(\lambda) = \lim_{n\to\infty} \psi_n(\lambda)$ für alle $\lambda \in \mathrm{E}$, wobei

$$\psi_n(\lambda) := \int \big(1 - \exp(-\langle \lambda, y\rangle)\big)\, nP_n(dy) + n\delta_n, \qquad \lambda \in \mathrm{E},$$

und $\delta_n := 1 - \|P_n\|$. Da alle auftretenden Terme nichtnegativ sind, ist die Folge $\{n\delta_n\}$ beschränkt, und es gilt $\sup_{n\in\mathbb{N}} \int (|y| \wedge 1)\, nP_n(dy) < \infty$. Nach Lemma 3.13 existiert eine Teilfolge von $\{\psi_n\}$, die den dort angegebenen Bedingungen (a) – (c) genügt, d.h., es existiert ein $a \in \mathrm{E}$, ein $\delta \geq 0$ und ein Borel-Maß ϱ auf $\mathrm{E} \setminus \{0\}$ mit $\int (|y| \wedge 1)\, \varrho(dy) < \infty$ derart, daß

$$\psi(\lambda) = \langle a, \lambda\rangle + \int \big(1 - \exp(-\langle \lambda, y\rangle)\big)\, \varrho(dy) + \delta, \qquad \lambda \in \mathrm{E}^\circ.$$

Die Behauptung folgt nun durch stetige Fortsetzung auf E. □

4. Konvergenzsätze

4.1 Proposition. *Sei $P \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ ein Sub-Wahrscheinlichkeitsmaß. Ist $\hat{P} : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{C}$ die Fourier-Transformierte von P, so gilt*

$$\int \exp(-y^2/2)\, P(dy) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int \exp(-u^2/2) \hat{P}(u)\, du.$$

Beweis. Definiere $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ durch $f(y) := \exp(-y^2/2)$ für $y \in \mathbb{R}$. Die Fourier-Transformierte von f ist gegeben durch

$$\hat{f}(u) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int \exp(-iuy) f(y)\, dy, \qquad u \in \mathbb{R}.$$

Da $f/\sqrt{2\pi}$ die Dichte der Standardnormalverteilung ist, folgt $\hat{f}(u) = \exp(-u^2/2)$ für alle $u \in \mathbb{R}$. Nach Rudin (1973), Theorem 7.7, gilt $f(y) = (\sqrt{2\pi})^{-1} \int \hat{f}(u) \exp(iuy)\, du$ für alle $y \in \mathbb{R}$. Es folgt

$$\begin{aligned}\int f(y)\, P(dy) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\!\!\int \exp(-u^2/2) \exp(iuy)\, du\, P(dy) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int \exp(-u^2/2) \hat{P}(u)\, du.\end{aligned}$$

Dabei ist die Vertauschung der Integrale wegen $|\exp(iuy)| = 1$ zulässig. □

4.2 Korollar. *Sei $\{P_n\} \subseteq \mathcal{S}(\mathrm{X})$ eine Folge von Sub-Wahrscheinlichkeitsmaßen mit Fourier-Transformierten $\hat{P}_n$. Gilt $\hat{P}_n \to 0$ fast überall auf $\mathbb{R}$, so folgt $P_n \xrightarrow{\mathrm{v}} 0$.*

Beweis. Wir erhalten $\int \exp(-y^2/2)\, P_n(dy) \to 0$ mit Proposition 4.1 und dominierter Konvergenz. Dies ist aber äquivalent zu $P_n \xrightarrow{\mathrm{v}} 0$. □

4.3 Lemma. *Sei $\{P_n\} \subseteq \mathcal{S}(\mathrm{X})$, $\pi_j : X \mapsto \mathbb{R}$ für $1 \leq j \leq d$ die j-te kanonische Projektion und ${P_n}^{(\pi_j)} \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ das zugehörige transportierte Maß.*

(a) *Gilt ${P_n}^{(\pi_j)} \xrightarrow{\mathrm{v}} 0$ für ein $1 \leq j \leq d$, so folgt $P_n \xrightarrow{\mathrm{v}} 0$.*

(b) *Ist $\{{\check{P}_n}^{(\pi_j)}\}$ für jedes $1 \leq j \leq d$ eine Folge mit beschränkten Laplace-Transformierten, so ist $\{\check{P}_n\}$ eine Folge mit beschränkten Laplace-Transformierten.*

Beweis. (a) Definiere $f \in \widehat{\mathrm{C}}(\mathbb{R})$ durch $f(z) := \exp(-z^2/2)$ für $z \in \mathbb{R}$. Nach dem Transformationssatz gilt

$$\int f(y_j)\, P_n(dy) = \int f(z)\, {P_n}^{(\pi_j)}(dz) \longrightarrow 0.$$

Wegen $\exp(-|y|^2/2) \leq f(y_j)$ für alle $y \in \mathbb{R}^d$ folgt die Behauptung.

(b) Wir zeigen die Aussage durch eine Induktion nach $d \in \mathbb{N}$. Für $d = 1$ ist nichts zu zeigen. Ist $d > 1$, so erhalten wir mit $\lambda' := (\lambda_2, \dots, \lambda_d)$ und der Cauchy-Ungleichung

$$\begin{aligned}
\check{P}_n(\lambda) &= \int \prod_{j=1}^{d} \exp(-\lambda_j y_j)\, P_n(dy) \\
&\leq \left(\int \exp(-2\lambda_1 y_1)\, P_n(dy) \right)^{1/2} \left(\int \prod_{j=2}^{d} \exp(-2\lambda_j y_j)\, P_n(dy) \right)^{1/2} \\
&= \big({\check{P}_n}^{(\pi_1)}(2\lambda_1)\big)^{1/2} \big({\check{P}_n}^{(\pi_2,\dots,\pi_d)}(2\lambda')\big)^{1/2}, \qquad \lambda \in \mathrm{E},
\end{aligned}$$

und die Behauptung folgt mit der Induktionsvoraussetzung. □

4.4 Lemma. *Sei $\{P_n\} \subseteq \mathcal{S}(\mathrm{X})$ und $\{k_n\} \subseteq \mathbb{N}_0$ mit $k_n \to \infty$. Dann existiert genau dann ein Kompaktum $K \subseteq \mathrm{X}$ mit $\underline{\lim}_{n\to\infty} P_n^{\star k_n}(K) > 0$, wenn die folgenden Bedingungen erfüllt sind:*

(a) $\displaystyle \overline{\lim_{n\to\infty}} \left| \int_{[-R,R]} y\, k_n P_n(dy) \right| < \infty$ *für alle $R > 0$.*

(b) $\displaystyle \overline{\lim_{n\to\infty}} \int_{[-R,R]} y^2\, k_n P_n(dy) < \infty$ *für alle $R > 0$.*

(c) $\displaystyle \overline{\lim_{n\to\infty}}\, k_n P_n\big(\mathbb{R} \setminus [-R,R]\big) < \infty$ *für alle $R > 0$.*

(d) $\displaystyle \underline{\lim_{n\to\infty}}\, \|P_n\|^{k_n} > 0$.

Beweis. Dies ist eine einfache Verallgemeinerung von Feller (1971), Lemma IX.7. □

4.5 Definition. (a) Das zu einer in Theorem 3.11 betrachteten unendlich teilbaren Verteilung $P \in \mathcal{S}(\mathrm{X})$ gehörende Borel-Maß μ auf $(\mathrm{E} \cup U_r(0)) \setminus \{0\}$ heißt Spektralmaß der Verteilung P. In der allgemeinen Theorie der unendlich teilbaren Verteilungen auf X ist dieses Maß auf der Menge $X \setminus \{0\}$ definiert. Deshalb sprechen wir in unserem Fall von einer spektral beschränkten Verteilung (dies bezieht sich auf die Beschränktheit des Durchschnitts des Trägers von μ mit $\mathrm{X} \setminus \mathrm{E}$). Ist das Spektralmaß auf E konzentriert, so heißt die zugehörige unendlich teilbare Verteilung spektral positiv.

(b) Ist $\{P_n\}$ eine Folge von spektral beschränkten unendlich teilbaren Verteilungen und existiert ein $r > 0$ derart, daß das zu P_n gehörende Spektralmaß μ_n für jedes $n \in \mathbb{N}$ auf $\big(\mathrm{E} \cup U_r(0)\big) \setminus \{0\}$ konzentriert ist, so nennen wir die Folge $\{P_n\}$ gleichmässig spektral beschränkt.

Wir zeigen nun, daß wir auf gleichmäßig spektral beschränkte Folgen von unendlich teilbaren Verteilungen auf X den Stetigkeitssatz für Laplace-Transformierte uneingeschränkt anwenden können.

4.6 Proposition. *Sei $\{P_n\} \subseteq \mathcal{S}(\mathrm{X})$ eine Folge von gleichmäßig spektral beschränkten unendlich teilbaren Verteilungen und $K \subseteq \mathrm{X}$ ein Kompaktum mit $\underline{\lim}_{n\to\infty} P_n(K) > 0$. Dann besitzt die Folge $\{P_n\}$ beschränkte Laplace-Transformierte.*

Beweis. (a) Wir zeigen zunächst den Fall $d = 1$. Mit $P_n =: [a_n, \sigma_n, \mu_n, \delta_n]$ erhalten wir die Darstellung

$$\psi_n(\lambda) = a_n\lambda - \frac{1}{2}\sigma_n\lambda^2 - \int M(\lambda, y)\,\mu_n(dy) + \delta_n, \qquad \lambda \in [0, \infty), \tag{4.1}$$

wobei $r > 0$, $a_n \in \mathbb{R}$, $\sigma_n, \delta_n \geq 0$ und μ_n ein Borel-Maß auf $(-r, \infty)$, das die Bedingung $\int (y^2 \wedge 1)\,\mu_n(dy) < \infty$ erfüllt. Die Fourier-Transformierte $\hat{P}_n$ von P_n besitzt die Gestalt $\hat{P}_n(u) = \exp\big(\vartheta_n(u)\big)$ für $u \in \mathbb{R}$, wobei $\vartheta_n : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{C}$ durch

$$\vartheta_n(u) = ia_n u - \frac{1}{2}\sigma_n u^2 + \int N(u, y)\,\mu_n(dy) - \delta_n, \qquad u \in \mathbb{R},$$

gegeben ist. Dabei ist die Funktion $N(\cdot,\cdot) : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mapsto \mathbb{C}$ nach Gleichung (3.7) definiert durch

$$N(u, y) := \exp(iuy) - 1 - \frac{iuy}{1 + y^2}, \qquad (u, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}.$$

Damit erhalten wir die Darstellung $|\hat{P}_n(u)| = \exp\big(\operatorname{Re}\vartheta_n(u)\big)$ des Absolutbetrages mit

$$\operatorname{Re}\vartheta_n(u) = -\frac{1}{2}\sigma_n u^2 - \int \big(1 - \cos(uy)\big)\,\mu_n(dy) - \delta_n, \qquad u \in \mathbb{R}. \tag{4.2}$$

Beachte, daß alle hier auftretenden Größen nichtnegativ sind. Nehmen wir an, daß eine der Folgen $\{\sigma_n\}, \{\delta_n\} \subseteq [0,\infty)$ unbeschränkt ist, so erhalten wir o.B.d.A. (Teilfolgenbildung) $\hat{P}_n(u) \to 0$ für alle $u \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, und mit Lemma 4.2 folgt $P_n \xrightarrow{\mathrm{v}} 0$, im Widerspruch zur Voraussetzung. Wir nehmen nun an, daß $\sup_{n\in\mathbb{N}} \int_{(-\epsilon,\epsilon)} y^2 \mu_n(dy) = \infty$ für alle $\epsilon > 0$. Dann existiert eine Teilfolge von $\{P_n\}$ (die wir genauso bezeichnen) mit $\int_{(-\epsilon,\epsilon)} y^2 \mu_n(dy) \to \infty$ für alle (rationalen) $\epsilon > 0$. Sei $0 \neq u \in \mathbb{R}$ fest. Wählen wir $\epsilon > 0$ so klein, daß $1 + r(uy) > 1/2$ für alle $|y| \leq \epsilon$ in der Taylor-Entwicklung

$$1 - \cos(uy) = \frac{u^2}{2}\, y^2(1 + r(uy)), \qquad y \in \mathbb{R},$$

so folgt

$$\varliminf_{n\to\infty} \int \big(1 - \cos(uy)\big)\, \mu_n(dy) \geq \frac{u^2}{4} \varliminf_{n\to\infty} \int_{(-\epsilon,\epsilon)} y^2\, \mu_n(dy) = \infty.$$

Damit erhalten wir mit (4.2) wiederum $\hat{P}_n(u) \to 0$ für alle $u \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$, also einen Widerspruch zur Voraussetzung. Damit existiert ein $\epsilon > 0$ mit $\sup_{n\in\mathbb{N}} \int_{(-\epsilon,\epsilon)} y^2 \mu_n(dy) < \infty$.

Wir zeigen als nächstes, daß für $0 < \epsilon < r$ die Folge $\big\{\mu_n\big([-r,r] \setminus (-\epsilon,\epsilon)\big)\big\}$ beschränkt ist. Nach Korollar 4.2 besitzt die Borel-Menge

$$\Gamma := \left\{ u \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \;\middle|\; \varliminf_{n\to\infty} \big|\hat{P}_n(u)\big| > 0 \right\}$$

ein positives Lebesgue-Maß. Wähle $u_i \in \Gamma$, $i = 1,2$, derart, daß $u_2 \neq 0$ und $u_1/u_2 \notin \mathbb{Q}$. Dies ist möglich, da die Menge $\big\{uq \mid q \in \mathbb{Q}\big\}$ für jedes $u \in \Gamma$ abzählbar ist und damit Lebesgue-Maß Null besitzt. Wegen $u_i \in \Gamma$ für $i = 1,2$ und (4.2) gilt

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \int \big(1 - \cos(u_i y)\big)\, \mu_n(dy) < \infty, \qquad i = 1,2.$$

Die durch $f(y) := \big(1 - \cos(u_1 y)\big) + \big(1 - \cos(u_2 y)\big)$ definierte Funktion $f : \mathbb{R} \mapsto [0,\infty)$ besitzt auf dem Kompaktum $I := [-r,r] \setminus (-\epsilon,\epsilon)$ keine Nullstellen und damit ein positives Minimum. Wegen $\sup_{n\in\mathbb{N}} \int f(y)\, \mu_n(dy) < \infty$ erhalten wir $\sup_{n\in\mathbb{N}} \mu_n(I) < \infty$.

Wir gehen nun über zur kumulantenerzeugenden Funktion in der Darstellung (4.1) und nehmen an, daß die Folge $\{\check{P}_n(\lambda_0)\}$ für ein $\lambda_0 \in (0,\infty)$ unbeschränkt ist, also o.B.d.A. gegen Unendlich strebt. Setze $b_n := a_n - \int_{(r,\infty)} y(1+y^2)^{-1}\, \mu_n(dy)$ und schreibe

$$\begin{aligned} \psi_n(\lambda) = b_n\lambda - \frac{1}{2}\sigma_n\lambda^2 - \int_{[-r,r]} M(\lambda,y)\, \mu_n(dy) \\ + \int_{(r,\infty)} \big(1 - \exp(-\lambda y)\big)\, \mu_n(dy) + \delta_n, \qquad \lambda \in [0,\infty). \end{aligned} \tag{4.3}$$

Beachte nun, daß die Folgen $\{\sigma_n\}$ und $\{\delta_n\}$ beschränkt sind, und dies nach obigen Überlegungen und Lemma 3.5 für $\{\int_{[-r,r]} M(\lambda, y)\, \mu_n(dy)\}$ mit $\lambda \in (0,\infty)$ ebenfalls gilt. Damit ist $\check{P}_n(\lambda_0) \to \infty$ nur möglich, wenn $b_n \to -\infty$ und

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \Big(-\lambda_0 + \frac{1}{|b_n|} \int_{(r,\infty)} \big(1 - \exp(-\lambda_0 y)\big)\, \mu_n(dy) \Big) \le 0. \tag{4.4}$$

Setze nun $k_n := [|b_n|] \in \mathbb{N}_0$. Dann gilt $k_n \to \infty$. Wir definieren $c_n := b_n/k_n$, $\varrho_n(dy) := 1_{(r,\infty)}(y)\mu_n(dy)/k_n$ und

$$\varphi_n(\lambda) := c_n\lambda + \int \big(1 - \exp(-\lambda y)\big)\, \varrho_n(dy), \qquad \lambda \in [0,\infty).$$

Offensichtlich gilt $c_n \to -1$. Wegen (4.4) erhalten wir

$$\big(1 - \exp(-\lambda_0 r)\big) \overline{\lim_{n\to\infty}} \|\varrho_n\| \le \int \big(1 - \exp(-\lambda_0 y)\big)\, \varrho_n(dy) \le \lambda_0.$$

Damit ist $\{\|\varrho_n\|\}$ beschränkt. Insbesondere gilt $\sup_{n\in\mathbb{N}} \int (y \wedge 1)\, \varrho_n(dy) < \infty$, und nach Lemma 3.13 können wir durch Teilfolgenbildung o.B.d.A. annehmen, daß $a, \delta \ge 0$ und ein Borel-Maß ϱ auf $[0,\infty)$ mit $\int (y \wedge 1)\, \varrho(dy) < \infty$ derart existieren, daß

$$\int \big(1 - \exp(-\lambda y)\big)\, \varrho_n(dy) \longrightarrow a + \int \big(1 - \exp(-\lambda y)\big)\, \varrho(dy) + \delta, \qquad \lambda \in (0,\infty).$$

Beachte nun, daß ϱ_n auf (r,∞) konzentriert ist. Nach Bedingung (a) von Lemma 3.13 folgt $a = 0$. Mit (4.3) folgt wegen $k_n \to \infty$ die Konvergenz

$$\psi_n(\lambda)/k_n \longrightarrow -\lambda + \int \big(1 - \exp(-\lambda y)\big)\, \varrho(dy) + \delta, \qquad \lambda \in (0,\infty). \tag{4.5}$$

Ist $Q_n \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ die zu ψ_n/k_n gehörende spektral positive unendlich teilbare Verteilung, so gilt $Q_n \xrightarrow{\text{v}} [-1, 0, \varrho, \delta]$ nach dem Stetigkeitssatz 2.14. Andererseits gilt offensichtlich $Q_n^{\star k_n} = P_n$, und nach Lemma 4.4 (c) und (d) folgt $Q_n \xrightarrow{\text{w}} \epsilon_0 = [0, 0, 0, 0]$, im Widerspruch zur Eindeutigkeit dieser Darstellung nach Theorem 3.11. Damit ist die Behauptung gezeigt.

(b) Im allgemeinen Fall genügt es zu zeigen, daß jede Teilfolge von $\{P_n\}$ eine weitere Teilfolge mit beschränkten Laplace-Transformierten besitzt. Beachte dazu, daß für $1 \le j \le d$ das transportierte Maß ${P_n}^{(\pi_j)}$ relativ kompakt in $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ ist. Also können wir durch Teilfolgenbildung o.B.d.A. annehmen, daß zu $1 \le j \le d$ ein $P_j \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ existiert mit ${P_n}^{(\pi_j)} \xrightarrow{\text{v}} P_j$. Nehmen wir an, daß $P_j = 0$ für ein $1 \le j \le d$, so existiert nach Lemma 4.3 (a) eine weitere Teilfolge, die, im Widerspruch zur Voraussetzung, vage gegen Null strebt. Also gilt $P_j \ne 0$ für $1 \le j \le d$. Nach Teil (a) besitzen die Folgen $\{{P_n}^{(\pi_j)}\}$ für $1 \le j \le d$ beschränkte Laplace-Transformierte, und nach Lemma 4.3 (b) gilt dies ebenfalls für die Folge $\{P_n\}$. $\square$

4.7 THEOREM (KONVERGENZSATZ). *Sei $\{P_n\} \subseteq \mathcal{S}(\mathrm{X})$ eine Folge von gleichmäßig spektral beschränkten unendlich teilbaren Verteilungen mit $P_n =: [a_n, \Sigma_n, \mu_n, \delta_n]$. Dann existiert genau dann ein $P \in \mathcal{S}(\mathrm{X}) \setminus \{0\}$ mit $P_n \xrightarrow{\mathrm{v}} P$, wenn P eine spektral beschränkte unendlich teilbare Verteilung ist und mit $P =: [a, \Sigma, \mu, \delta]$ die folgenden Bedingungen erfüllt sind:*

(a) $a_n \longrightarrow a$.

(b) $\lim_{\epsilon\to 0} \overline{\lim_{n\to\infty}} \left| \left(\langle \Sigma_n \lambda, \lambda \rangle + \int_{\overline{U_\epsilon(0)}} \langle \lambda, y \rangle^2 \, \mu_n(dy) \right) - \langle \Sigma\lambda, \lambda\rangle \right| = 0$ *für alle* $\lambda \in \mathrm{E}^\circ$.

(c) $1_{\mathrm{E}\setminus\overline{U_\epsilon(0)}} \cdot \nu_n \xrightarrow{\mathrm{v}} 1_{\mathrm{E}\setminus\overline{U_\epsilon(0)}} \cdot \nu$ *für alle* $\epsilon > 0$ *mit* $\nu\big(\partial U_\epsilon(0)\big) = 0$.

(d) $\lim_{R\to\infty} \overline{\lim_{n\to\infty}} \left| \left(\mu_n\big(\mathrm{E} \setminus U_R(0)\big) + \delta_n \right) - \delta \right| = 0.$

Dabei ist $\nu_n(dy) := |y|^2(1+|y|^2)^{-1}\mu_n(dy)$ und $\nu(dy) := |y|^2(1+|y|^2)^{-1}\mu(dy)$. In diesem Fall besitzt die Folge $\{P_n\}$ beschränkte Laplace-Transformierte. Ist ψ_n die kumulantenerzeugende Funktion von P_n und ψ die kumulantenerzeugende Funktion von P, so gilt $\lim_{n\to\infty} \psi_n(\lambda) = \psi(\lambda)$ *für alle* $\lambda \in \mathrm{E}^\circ$.

BEWEIS. Sind die angegebenen Bedingungen erfüllt, so folgt die Behauptung unmittelbar aus Lemma 3.7 und Lemma 3.10.

Existiert umgekehrt ein $P \in \mathcal{S}(\mathrm{X}) \setminus \{0\}$ mit $P_n \xrightarrow{\mathrm{v}} P$, so besitzt die Folge $\{P_n\}$ nach Proposition 4.6 beschränkte Laplace-Transformierte. Nach dem Stetigkeitssatz 2.14 besitzt auch P eine endliche Laplace-Transformierte. Ist ψ die kumulantenerzeugende Funktion von P, so erhalten wir $\psi_n(\lambda) \to \psi(\lambda)$ für alle $\lambda \in \mathrm{E}^\circ$ nach Proposition 2.15. Insbesondere ist die Folge $\{\psi_n(\lambda)\}$ für alle $\lambda \in \mathrm{E}^\circ$ beschränkt. Damit sind die Bedingungen von Lemma 3.6 erfüllt. Nach Lemma 3.8 existiert zu jeder Teilfolge von $\{P_n\}$ eine weitere Teilfolge und Größen a, Σ, μ und δ derart, daß die Bedingungen (a)–(d) für diese Teilfolge erfüllt sind. Nach dem bereits gezeigten Teil der Behauptung und dem Darstellungssatz 3.11 sind a, Σ, μ und δ charakteristische Größen von P und hängen daher nicht von der gewählten Teilfolge ab. Damit bleibt zu zeigen, daß die Folge $\{P_n\}$ selbst die Bedingungen (a)–(d) erfüllt. Dies ist im Fall von Bedingung (a) offensichtlich. Nehmen wir an, daß Bedingung (b) nicht erfüllt ist, so existieren ein $\vartheta > 0$, eine Nullfolge $\{\epsilon_k\} \subseteq (0, \infty)$ und eine Teilfolge $\{P_{l_n}\}$ mit

$$\left| \left(\langle \Sigma_{l_n} \lambda, \lambda \rangle + \int_{\overline{U_{\epsilon_k}(0)}} \langle \lambda, y \rangle^2 \, \mu_{l_n}(dy) \right) - \langle \Sigma\lambda, \lambda\rangle \right| \geq \vartheta, \qquad k, n \in \mathbb{N},$$

im Widerspruch zur Existenz einer weiteren Teilfolge, die diese Bedingung erfüllt. Die Gültigkeit von Bedingung (d) folgt analog. Beachte nun $\sup_{n\in\mathbb{N}} \int \big(|y|^2 \wedge 1\big)\, \mu_n(dy) < \infty$. Damit existiert ein $\varrho > 0$ mit $\|\nu_n\| \leq \varrho$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Ist $\epsilon > 0$ mit $\nu\big(\partial U_\epsilon(0)\big) = 0$ vorgegeben, so setze $\tau_n := 1_{\mathrm{E}\setminus\overline{U_\epsilon(0)}} \cdot \nu_n$, $\tau := 1_{\mathrm{E}\setminus\overline{U_\epsilon(0)}} \cdot \nu$ und verwende, daß $\tau_n/\varrho \in \mathcal{S}(\mathrm{X})$ gilt. Da zu jeder Teilfolge von $\{\tau_n/\varrho\} \subseteq \mathcal{S}(\mathrm{X})$ eine weitere Teilfolge existiert, die vage gegen τ/ϱ strebt, gilt $\tau_n/\varrho \xrightarrow{\mathrm{v}} \tau/\varrho$, also $\tau_n \xrightarrow{\mathrm{v}} \tau$. Damit ist Bedingung (c) erfüllt. $\square$

Die in Theorem 4.7 aufgeführten Konvergenzkriterien werden in vielen Fällen nicht benötigt. Daher formulieren wir den Stetigkeitssatz in einer darstellungsfreien Form.

4.8 Theorem (Stetigkeitssatz). *Sei $\{P_n\} \subseteq \mathcal{S}(\mathrm{X})$ eine Folge von gleichmäßig spektral beschränkten unendlich teilbaren Verteilungen. Ist ψ_n die kumulantenerzeugende Funktion von P_n, so existiert genau dann ein $P \in \mathcal{S}(\mathrm{X}) \setminus \{0\}$ mit $P_n \xrightarrow{\mathrm{v}} P$, wenn die Folge $\psi_n(\lambda)$ für jedes $\lambda \in \mathrm{E}^\circ$ konvergiert. In diesem Fall ist P eine spektral beschränkte unendlich teilbare Verteilung. Ist ψ die kumulantenerzeugende Funktion von P, so gilt $\lim_{n\to\infty} \psi_n(\lambda) = \psi(\lambda)$ für alle $\lambda \in \mathrm{E}^\circ$.*

4.9 Lemma. *Sei $r > 0$, $\{P_n\} \subseteq \mathcal{S}(\mathrm{X})$ eine Folge von Sub-Wahrscheinlichkeitsmaßen, die auf $\mathrm{E} \cup U_r(0)$ konzentriert sind, und $\{k_n\} \subseteq \mathbb{N}_0$ mit $k_n \to \infty$.*

(a) *Setze $a_n := \int y/(1+|y|^2)\, P_n(dy)$, $\delta_n := 1 - \|P_n\|$ und $Q_n := [k_n a_n, 0, k_n P_n, k_n \delta_n]$. Dann besitzen $\{(\check{P}_n(\lambda))^{k_n}\}$ und $\{\check{Q}_n(\lambda)\}$ für jedes $\lambda \in \mathrm{E}$ dieselben Häufungswerte.*

(b) *Es existiere ein Kompaktum $K \subseteq \mathrm{X}$ mit $\underline{\lim}_{n\to\infty} P_n^{\star k_n}(K) > 0$. Dann besitzt die Folge $\{P_n^{\star k_n}\}$ beschränkte Laplace-Transformierte.*

Beweis. (a) Für festes $\lambda \in \mathrm{E}$ setze $\alpha_n := \check{P}_n(\lambda)$. Nach Lemma 3.15 besitzt die Folge $\{\alpha_n^{k_n}\}$ dieselben Häufungswerte wie die Folge $\{\exp\big(-\big(k_n(1-\alpha_n)\big)\big)\}$. Es gilt

$$
\begin{aligned}
k_n(1-\alpha_n) &= k_n\left(1 - \int \exp(-\langle\lambda, y\rangle)\, P_n(dy)\right) \\
&= k_n\left(\int \big(1 - \exp(-\langle\lambda, y\rangle)\big)\, P_n(dy) + 1 - \|P_n\|\right) \\
&= k_n\left(a_n - \int M(\lambda, y)\, P_n(dy) + 1 - \|P_n\|\right) \\
&= k_n a_n - \int M(\lambda, y)\, k_n P_n(dy) + k_n \delta_n.
\end{aligned}
$$

Damit gilt $\check{Q}_n(\lambda) = \exp\big(-\big(k_n(1-\alpha_n)\big)\big)$ für $n \in \mathbb{N}$, und es folgt die Behauptung.

(b) Wir zeigen die Behauptung für $d = 1$. Der allgemeine Fall folgt dann wie im Beweis von Proposition 4.6. Nach (a) und Lemma 3.6 genügt es dazu zu zeigen, daß die Folgen $\{k_n a_n\}$ und $\{k_n \delta_n\}$ beschränkt sind und $\sup_{n\in\mathbb{N}} \int \big(y^2 \wedge 1\big)\, k_n P_n(dy) < \infty$ gilt. Verwende dazu die Bedingungen (a)–(d) von Lemma 4.4. Nach den Bedingungen (a) und (c) ist die Folge $\{k_n a_n\}$ beschränkt. Nach (d) gilt $\underline{\lim}_{n\to\infty} \|P_n\|^{k_n} > 0$, also $\underline{\lim}_{n\to\infty} \exp(k_n(\|P_n\| - 1) > 0$ nach Lemma 3.15. Dies ist aber äquivalent zur Beschränktheit der Folge $\{k_n \delta_n\}$. Schließlich folgt $\sup_{n\in\mathbb{N}} \int \big(y^2 \wedge 1\big)\, k_n P_n(dy) < \infty$ aus den Bedingungen (b) und (c). $\square$

4.10 BEMERKUNG. Ist $r > 0$, $P_n \in \mathcal{S}(\mathrm{X})$ ein auf $\mathrm{E} \cup U_r(0)$ konzentriertes Sub-Wahrscheinlichkeitsmaß und $k \in \mathbb{N}_0$, so heißt die spektral beschränkte unendlich teilbare Verteilung $Q := [ka, 0, kP, k\delta]$ aus Lemma 4.9 die $P^{\star k}$ BEGLEITENDE UNENDLICH TEILBARE VERTEILUNG. Wir führen mit diesem Lemma das Konvergenzverhalten der Folge $\{P_n^{\star k_n}\}$ auf das Konvergenzverhalten der Folge $\{Q_n\}$ der begleitenden unendlich teilbaren Verteilungen zurück, und erhalten auf diese Weise einen Approximationssatz für spektral beschränkte unendlich teilbare Verteilungen.

4.11 THEOREM (APPROXIMATIONSSATZ). *Sei $r > 0$, $\{P_n\} \subseteq \mathcal{S}(\mathrm{X})$ eine Folge von Sub-Wahrscheinlichkeitsmaßen, die auf $\mathrm{E} \cup U_r(0)$ konzentriert sind, und $\{k_n\} \subseteq \mathbb{N}_0$ mit $k_n \to \infty$. Es existiert genau dann ein $P \in \mathcal{S}(\mathrm{X}) \setminus \{0\}$ mit $P_n^{\star k_n} \xrightarrow{\mathrm{v}} P$, wenn P eine spektral beschränkte unendlich teilbare Verteilung ist und mit $P =: [a, \Sigma, \mu, \delta]$ die folgenden Bedingungen erfüllt sind:*

(a) $\displaystyle\int \frac{y}{1+|y|^2}\, k_n P_n(dy) \longrightarrow a.$

(b) $\displaystyle\lim_{\epsilon\to 0} \varlimsup_{n\to\infty} \left| \int_{\overline{U_\epsilon(0)}} \langle \lambda, y\rangle^2\, k_n P_n(dy) - \langle \Sigma\lambda, \lambda\rangle \right| = 0$ *für alle* $\lambda \in \mathrm{E}^\circ$.

(c) $1_{\mathrm{E}\setminus\overline{U_\epsilon(0)}} \cdot \nu_n \xrightarrow{\mathrm{v}} 1_{\mathrm{E}\setminus\overline{U_\epsilon(0)}} \cdot \nu$ *für alle* $\epsilon > 0$ *mit* $\nu\big(\partial U_\epsilon(0)\big) = 0$.

(d) $\displaystyle\lim_{R\to\infty} \varlimsup_{n\to\infty} \left| k_n \Big(P_n\big(\mathrm{E} \setminus U_R(0)\big) + \delta_n \Big) - \delta \right| = 0.$

Dabei ist $\nu_n(dy) := |y|^2(1+|y|^2)^{-1} k_n P_n(dy)$, $\nu(dy) := |y|^2(1+|y|^2)^{-1}\mu(dy)$ und $\delta_n := 1 - \|P_n\|$. In diesem Fall besitzt die Folge $\{P_n^{\star k_n}\}$ beschränkte Laplace-Transformierte. Ist ψ_n die kumulantenerzeugende Funktion von P_n und ψ die kumulantenerzeugende Funktion von P, so gilt $\lim_{n\to\infty} k_n \psi_n(\lambda) = \psi(\lambda)$ für alle $\lambda \in \mathrm{E}^\circ$.

BEWEIS. Setze $a_n := \int y/(1+|y|^2)\, P_n(dy)$ und $Q_n := [k_n a_n, 0, k_n P_n, k_n \delta_n]$. Nach Lemma 4.9 (a) besitzen die Folgen $\{\big(\check{P}_n(\lambda)\big)^{k_n}\}$ und $\{\check{Q}_n(\lambda)\}$ für jedes $\lambda \in \mathrm{E}$ dieselben Häufungswerte.

Existiert ein $P \in \mathcal{S}(\mathrm{X}) \setminus \{0\}$ mit $P_n^{\star k_n} \xrightarrow{\mathrm{v}} P$, so besitzt $\{P_n^{\star k_n}\}$ nach Lemma 4.9 (a) beschränkte Laplace-Transformierte. Nach dem Stetigkeitssatz 2.14 besitzt P eine endliche Laplace-Transformierte, und es gilt $\big(\check{P}_n(\lambda)\big)^{k_n} \to \check{P}(\lambda)$ für alle $\lambda \in \mathrm{E}^\circ$. Eine erneute Anwendung des Stetigkeitssatzes liefert $Q_n \xrightarrow{\mathrm{v}} P$. Nach dem Konvergenzsatz 4.7 ist P eine spektral beschränkte unendlich teilbare Verteilung, und mit $P =: [a, \Sigma, \mu, \delta]$ sind die Bedingungen (a)–(d) erfüllt. Sind umgekehrt diese Bedingungen erfüllt, so existiert nach dem Konvergenzsatz 4.7 eine spektral beschränkte unendlich teilbare Verteilung $P \in \mathcal{S}(\mathrm{X}) \setminus \{0\}$ mit $Q_n \xrightarrow{\mathrm{v}} P$ und $\check{Q}_n(\lambda) \to \check{P}(\lambda)$ für alle $\lambda \in \mathrm{E}^\circ$. Nach Proposition 4.6 besitzt die Folge $\{Q_n\}$ beschränkte Laplace-Transformierte. Damit folgt $P_n^{\star k_n} \xrightarrow{\mathrm{v}} P$ mit dem Stetigkeitssatz 2.14. $\square$

Auch in diesem Fall erhalten wir eine darstellungsfreie Form des Stetigkeitssatzes, falls die Konvergenzkriterien nicht benötigt werden.

4.12 Theorem (Stetigkeitssatz). *Sei $r > 0$, $\{P_n\} \subseteq \mathcal{S}(\mathrm{X})$ eine Folge von Sub-Wahrscheinlichkeitsmaßen, die auf $\mathrm{E} \cup U_r(0)$ konzentriert sind, und $\{k_n\} \subseteq \mathbb{N}_0$ mit $k_n \to \infty$. Ist ψ_n die kumulantenerzeugende Funktion von P_n, so existiert genau dann ein $P \in \mathcal{S}(\mathrm{X}) \setminus \{0\}$ mit $P_n \xrightarrow{\mathrm{v}} P$, wenn die Folge $k_n\psi_n(\lambda)$ für jedes $\lambda \in \mathrm{E}^\circ$ konvergiert. In diesem Fall ist P eine spektral beschränkte unendlich teilbare Verteilung. Ist ψ die kumulantenerzeugende Funktion von P, so gilt $\lim_{n\to\infty} k_n\psi_n(\lambda) = \psi(\lambda)$ für alle $\lambda \in \mathrm{E}^\circ$.*

5. Anmerkungen & Literatur

Eine allgemeine Darstellung der Theorie der schwachen Konvergenz endlicher Borel-Maße findet man in Parthasarathy (1967). Zur Ein-Punkt-Kompaktifizierung lokal kompakter Hausdorff-Räume vergleiche Cohn (1980). Die Metrisierbarkeit des Raumes der Wahrscheinlichkeitsmaße im Fall der Vollständigkeit und Separabilität wird z.B. in Ethier & Kurtz (1986), Kapitel 3, behandelt.

Die Darstellung der Laplace-Transformation auf dem Raum $\mathcal{S}(\mathrm{X})$ wurde der bekannten Darstellung auf dem Raum $\mathcal{S}(\mathrm{E})$ angepaßt. Hier wurde auf größtmögliche Allgemeinheit verzichtet. Zum Beispiel werden keine notwendigen und hinreichenden Bedingungen für die Endlichkeit der Laplace-Transformierten untersucht. Zum Nachweis des Stetigkeitssatzes wird in Proposition 2.11 ein Argument von Grimvall (1974) verwendet. Die Bedingung der punktweisen Beschränktheit der Laplace-Transformierten geht ursprünglich auf Feller (1971) zurück, wo in Abschnitt XIII.1 der Stetigkeitssatz für beliebige Borel-Maße auf E formuliert wird.

Die Anwendung der Laplace-Transformation auf unendlich teilbare Verteilungen auf X, die nicht auf E konzentriert sind, ist in der Literatur unüblich. Deshalb mußte dieses Laplace-Kalkül hier eigens entwickelt werden. Die Darstellung orientiert sich an Parthasarathy (1967), wo die allgemeine Form der Fourier-Transformierten von unendlich teilbare Verteilungen auf einem Hilbert-Raum zu finden ist. Die notwendigen und hinreichenden Konvergenzbedingungen wurden im eindimensionalen erstmals von Gnedenko & Kolomogorov (1975) nachgewiesen.

KAPITEL II

DEFINITION & EIGENSCHAFTEN

Vorbemerkungen

Sei (S, ϱ) ein vollständiger und separabler metrischer Raum und $\mathrm{B}(\mathrm{S})$ der Banachraum der beschränkten Borel-meßbaren Funktionen auf S mit Werten in $\mathbb{R}$. Für uns ist ein (zeitlich homogener) Markov-Prozeß mit Zustandsraum S immer durch eine Übergangsfunktion auf S definiert. Dies ist eine Familie $\{P(t,x) \mid (t,x) \in [0,\infty) \times \mathrm{S}\} \subseteq \mathcal{P}(\mathrm{S})$, die die folgenden Bedingungen erfüllt:

(a) $P(0,x) = \epsilon_x, \qquad x \in \mathrm{S}.$

(b) $P(\cdot,\cdot,\Gamma) \in \mathrm{B}([0,\infty) \times \mathrm{S}), \qquad \Gamma \in \mathcal{B}(\mathrm{S}).$

(c) $P(s+t,x,\Gamma) = \displaystyle\int P(t,y,\Gamma)\, P(s,x,dy), \qquad s,t \geq 0, x \in \mathrm{E}, \Gamma \in \mathcal{B}(\mathrm{S}).$

Bedingung (c) ist die Chapman Kolmogorov-Gleichung. Wir bezeichnen einen stochastischen Prozeß $Z := \{Z(t) \mid t \geq 0\}$ auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ mit Zustandsraum S als einen zu $\{P(t,x)\}$ korrespondierenden Prozeß, falls

$$P\big(Z(s+t) \in \Gamma \mid \mathcal{F}_s^Z\big) = P\big(t, Z(s), \Gamma\big), \qquad s,t \geq 0, \Gamma \in \mathcal{B}(\mathrm{S}).$$

Dabei ist $\mathcal{F}_t^Z$ die von $\{Z(s) \mid 0 \leq s \leq t\}$ erzeugte σ-Algebra. Ein zu einer Übergangsfunktion auf S korrespondierender Prozeß ist notwendig ein Markov-Prozeß. Umgekehrt läßt sich zu jeder Übergangsfunktion auf S und jedem $\nu \in \mathcal{P}(\mathrm{S})$ mit Hilfe des Kolmogorovschen Fortsetzungssatzes ein Wahrscheinlichkeitsmaß P auf dem Raum $\Omega := \mathrm{S}^{[0,\infty)}$ derart konstruieren, daß durch $Z(t,\omega) := \pi_t(\omega)$ ein korrespondierender Prozeß definiert ist und $Z(0)$ die Verteilung ν besitzt. Dabei ist $\pi_t : \Omega \mapsto \mathrm{S}$ für $t \geq 0$ die durch $\pi_t(\omega) := \omega(t)$ definierte kanonische Projektion. Die endlichdimensionalen Verteilungen von Z sind durch $\{P(t,x)\}$ eindeutig bestimmt.

Ist der Raum (S, ϱ) lokal kompakt, so kann die Definition einer Übergangsfunktion auf S verallgemeinert werden. Wir verlangen hier lediglich, daß $\{P(t,x)\} \subseteq \mathcal{S}(\mathrm{S})$ gilt. Ist $P^\Delta(t,x)$ für $(t,x) \in [0,\infty) \times \mathrm{S}$ die Fortsetzung von $P(t,x)$ zu einem Wahrscheinlichkeitsmaß auf S^Δ, und setzen wir $P^\Delta(t,\Delta) := \epsilon_\Delta$ für $t \geq 0$, so ist $\{P^\Delta(t,x)\} \subseteq \mathcal{P}(\mathrm{S}^\Delta)$ eine Übergangsfunktion auf S^Δ (erweiterte Übergangsfunktion), und es existiert ein korrespondierender Markov-Prozeß mit Zustandsraum S^Δ. Wir nennen die Übergangsfunktion $\{P(t,x)\}$ konservativ, falls $P(t,x) \in \mathcal{P}(\mathrm{S})$ für alle $(t,x) \in [0,\infty) \times \mathrm{S}$, andernfalls defekt. Beachte, daß $\{P^\Delta(t,x)\} \subseteq \mathcal{P}(\mathrm{S}^\Delta)$ stets konservativ ist. Eine Übergangsfunktion $\{P(t,x)\}$ auf S heißt stochastisch stetig, falls $P(t,x) \xrightarrow{\mathrm{v}} \epsilon_x$ für jedes $x \in \mathrm{S}$ und $t \to 0$. Dies bedeutet, daß für jedes $x \in \mathrm{S}$ der korrespondierende Prozeß mit Startverteilung ϵ_x in Null stochastisch stetig ist.

Zu einer Übergangsfunktion $\{P(t,x)\} \subseteq \mathcal{S}(\mathrm{S})$ definiere für $t \geq 0$ den linearen Operator $T(t) : \widehat{\mathrm{C}}(\mathrm{S}) \mapsto \mathrm{B}(\mathrm{S})$ durch

$$T(t)f(x) := \int f(y)\, P(t,x,dy), \qquad f \in \widehat{\mathrm{C}}(\mathrm{S}).$$

Dieser Operator ist für jedes $t \geq 0$ eine positive Kontraktion. Die Familie $\{T(t) \mid t \geq 0\}$ bildet eine Operatorhalbgruppe, die sogenannte korrespondierende Halbgruppe. Sie wird als Feller-Halbgruppe bezeichnet, falls $T(t)$ für jedes $t \geq 0$ den Raum $\widehat{\mathrm{C}}(\mathrm{S})$ in sich selbst abbildet und die Abbildung $T(\cdot)f : [0,\infty) \mapsto \widehat{\mathrm{C}}(\mathrm{S})$ für jedes $f \in \widehat{\mathrm{C}}(\mathrm{S})$ in Null stetig ist. Jede Feller-Halbgruppe besitzt einen infinitesimalen Erzeuger G. Dies ist ein linearer Operator auf $\widehat{\mathrm{C}}(\mathrm{E})$, der durch

$$Gf := \lim_{t\to 0} \frac{T(t)f - f}{t}, \qquad f \in \mathcal{D}(G),$$

definiert ist. Dabei ist $\mathcal{D}(G)$ der dichte Unterraum aller $f \in \widehat{\mathrm{C}}(\mathrm{E})$, für die der Grenzwert existiert. Der Operator G ist abgeschlossen, d.h., er besitzt einen abgeschlossenen Graphen $\mathcal{G}(G)$, und bestimmt eindeutig die zugehörige Kontraktionshalbgruppe $\{T(t)\}$. In den meisten Fällen ist es unmöglich, $\mathcal{D}(G)$ (und damit G) vollständig zu bestimmen. Es genügt jedoch oft, G auf einem hinreichend großen Unterraum von $\mathcal{D}(G)$ zu kennen. Ein dichter Unterraum $D \subseteq \widehat{\mathrm{C}}(\mathrm{E})$ heißt Core von G, falls der Abschluß des Graphen der Einschränkung von G auf D den Operator G selbst liefert, d.h., $\overline{\mathcal{G}(G|_D)} = G$, und damit G durch seine Werte auf D eindeutig bestimmt ist.

1. Zusammenfassung

Wir betrachten den Raum $\mathrm{E} := [0,\infty)^d$ für ein $d \in \mathbb{N}$ und verwenden die in Kapitel I eingeführten Bezeichnungen. Ein Verzweigungsprozeß ist ein (zeitlich homogener) Markovprozeß mit Zustandsraum E^Δ , dessen zugehörige Übergangsfunktion $\{P(t,x)\} \subseteq \mathcal{S}(\mathrm{E})$ die Verzweigungseigenschaft

$$P(t,x+y) = P(t,x) \star P(t,y), \qquad t \in [0,\infty), x,y \in \mathrm{E}, \tag{1.1}$$

erfüllt. In diesem Kapitel wird ausgehend von dieser Verzweigungseigenschaft auf rein analytischem Wege die Struktur der zugehörigen Verzweigungsübergangsfunktion bestimmt. Wir formulieren eine zusätzliche Regularitätsbedingung, unter der wir die allgemeine Form und alle wesentlichen Eigenschaften einer solchen Verzweigungsübergangsfunktion vollständig bestimmen können. Wie sich im Verlauf der Untersuchungen herausstellen wird, schließt diese Regularitätsbedingung, von der wir in dieser Darstellung ausgehen, lediglich pathologische Fälle aus.

Wir untersuchen in Abschnitt 2, ausgehend von der Verzweigungseigenschaft (1.1), die Darstellung der Laplace-Transformierten von $P(t,x)$ für $(t,x) \in [0,\infty) \times \mathrm{E}$. Es kann gezeigt werden, daß diese Laplace-Transformierten durch eine Funktion $\psi : [0,\infty) \times \mathrm{E} \mapsto \mathrm{E}$ in der Form

$$\check{P}(t,x,\lambda) = \exp\big(-\langle x, \psi(t,\lambda)\rangle\big), \qquad (t,x) \in [0,\infty) \times \mathrm{E}, \lambda \in \mathrm{E}, \tag{1.2}$$

dargestellt werden können. Wir nennen ψ kurz die kumulantenerzeugende Funktion der Verzweigungsübergangsfunktion $\{P(t,x)\}$. Die Chapman Kolmogorov-Gleichung wird hier durch die Funktionalgleichung

$$\psi(s+t,\lambda) = \psi(s,\psi(t,\lambda)), \qquad s,t \geq 0, \lambda \in \mathrm{E}, \tag{1.3}$$

ausgedrückt. Anschließend untersuchen wir, unter welchen Bedingungen eine Verzweigungsübergangsfunktion durch eine solche Funktion ψ gegeben ist.

In Abschnitt 3 befassen wir uns mit der stochastischen Stetigkeit einer Verzweigungsübergangsfunktion $\{P(t,x)\}$. Wir können hier mit Hilfe der Darstellung (1.2) und der Funktionalgleichung (1.3) zeigen, daß eine Verzweigungsübergangsfunktion in allen nichtpathologischen Fällen stochastisch stetig ist. Damit kann nachgewiesen werden, daß die zugehörige Operatorhalbgruppe $\{T(t)\}$ eine Feller-Halbgruppe ist.

Ist ψ die kumulantenerzeugende Funktion einer Verzweigungsübergangsfunktion, so existiert der Differentialquotient

$$L(\lambda) := \left.\frac{\partial \psi(t,\lambda)}{\partial t}\right|_{t=0}, \qquad \lambda \in \mathrm{E}^\circ, \tag{1.4}$$

was in Abschnitt 4 gezeigt wird. Dies ist der Schlüssel zu fast allen weiteren Ergebnissen. Die einzelnen Komponenten L_j der Funktion $L : \mathrm{E}^\circ \mapsto \mathbb{R}^d$ können zu kumulantenerzeugenden Funktionen von spektral positiven unendlich teilbaren Verteilungen $P_j \in \mathcal{S}(\mathrm{X})$ fortgesetzt werden. Wir können aus (1.3) und (1.4) folgern, daß die Funktion $\psi(\cdot,\lambda) : \mathrm{E} \mapsto \mathbb{R}^d$ für jedes $\lambda \in \mathrm{E}$ das autonome Anfangswertproblem $y' = L(y)$, $y(0) = \lambda$ löst (diese Differentialgleichung entspricht der Kolmogorovschen Rückwärtsgleichung des zugehörigen Markov-Prozesses). Für $\lambda \in \mathrm{E}^\circ$ ist dieses Anfangswertproblem sogar eindeutig lösbar. Damit ist die kumulantenerzeugende Funktion ψ einer Verzweigungsübergangsfunktion $\{P(t,x)\}$ eindeutig durch die (Fortsetzung der) Funktion $L : \mathrm{E} \mapsto \mathbb{R}^d$ bestimmt. Wir bezeichnen deshalb die Funktion L oder das Tupel $\mathbb{P} := (P_1, \ldots, P_d)$ als die Charakterisierung der Verzweigungsübergangsfunktion $\{P(t,x)\}$. Ferner kann gezeigt werden, daß die einzelnen Komponenten ψ_j der kumulantenerzeugenden Funktion ψ ein System von partiellen Differentialgleichungen lösen (das der Kolmogorovschen Vorwärtsgleichung des zugehörigen

Markov-Prozesses entspricht). Als ein weiteres Resultat erhalten wir, daß die Funktion $P(\cdot, x) : [0, \infty) \mapsto \mathcal{S}(\mathrm{E})$ für jedes $x \in \mathrm{E}$ stetig in der schwachen Topologie ist. Schließlich kann mit (1.4) der infinitesimale Erzeuger G der zugehörigen Feller-Halbgruppe $\{T(t)\}$ bestimmt werden. Dieser ist eindeutig bestimmt durch

$$Gf_\lambda(x) = -\langle x, L(\lambda)\rangle\, f_\lambda(x), \qquad \lambda \in \mathrm{E}^\circ. \tag{1.5}$$

Dabei ist $f_\lambda \in \widehat{\mathrm{C}}(\mathrm{E})$ für $\lambda \in \mathrm{E}^\circ$ durch $f_\lambda(x) := \exp(-\langle \lambda, x\rangle)$ für $x \in \mathrm{E}$ definiert. Wir beschließen dieses Kapitel mit einigen Betrachtungen zur Konservativität.

2. Übergangsfunktionen

2.1 Definition. Eine Übergangsfunktion $\{P(t,x)\}$ auf E heißt Verzweigungsübergangsfunktion, falls

$$P(t, x+y) = P(t,x) \star P(t,y), \qquad t \in [0,\infty), x, y \in \mathrm{E}. \tag{2.1}$$

Wir nennen eine Verzweigungsübergangsfunktion $\{P(t,x)\}$ nichtdegeneriert, falls ein Paar $(t_0, x_0) \in (0,\infty) \times \mathrm{E}^\circ$ existiert mit $P(t_0, x_0) \neq 0$, und regulär, falls ein $t_0 \in (0,\infty)$ existiert mit $P\big(t_0, e_j, E \setminus \{0\}\big) > 0$ für alle $1 \le j \le d$.

2.2 Bemerkung. Die Nichtdegeneriertheit einer Verzweigungsübergangsfunktion bedeutet, daß bei einer Startpopulation, in der jeder Typ mit einer positiven Größe auftritt, ein Zeitpunkt existiert, zu der die Population (noch) nicht fast sicher unendlich groß geworden ist. Eine degenerierte Verzweigungsübergangsfunktion weist daher auf eine falsche Modellbildung hin und ist in diesem Sinne ein pathologischer Fall. Wir werden sehen, daß im Fall der Nichtdegeneriertheit die Population zu keinem Zeitpunkt fast sicher unendlich groß ist. Im nächsten Abschnitt erfolgt eine analoge Interpretation irregulärer Verzweigungsübergangsfunktionen.

2.3 Lemma. *Sei $\{P(t,x)\}$ eine Verzweigungsübergangsfunktion. Dann gilt für jedes $t \in [0,\infty)$ und jedes Paar $x, y \in \mathrm{E}$*

$$\check{P}(t, x+y, \lambda) = \check{P}(t,x,\lambda) \cdot \check{P}(t,y,\lambda), \qquad \lambda \in \mathrm{E}. \tag{2.2}$$

Beweis. Dies ist gerade Lemma I.3.2. □

2.4 Bemerkung. Sei $\{P(t,x)\}$ eine Verzweigungsübergangsfunktion. Ist $t_0 \in (0,\infty)$ mit $P\big(t_0, e_j, E \setminus \{0\}\big) > 0$ für $1 \le j \le d$, so folgt $P(t_0, x_0) \neq 0$ mit $x_0 := \sum_{j=1}^d e_j$ und Lemma 2.3. Daher ist jede reguläre Verzweigungsübergangsfunktion nichtdegeneriert.

2.5 Lemma. *Sei $P \in \mathcal{S}(\mathrm{E})$ ein Sub-Wahrscheinlichkeitsmaß. Gilt $\check{P}(\lambda) < 1$ für ein $\lambda \in \mathrm{E}^\circ$, so gilt dies für alle $\lambda \in \mathrm{E}^\circ$. Gilt $\check{P}(\lambda) > 0$ für ein $\lambda \in \mathrm{E}^\circ$, so gilt dies ebenfalls für alle $\lambda \in \mathrm{E}^\circ$.*

Beweis. Wir zeigen die Umkehrungen. Gilt $\check{P}(\lambda) = 1$ für ein $\lambda \in \mathrm{E}^\circ$, so folgt $P(E) = \check{P}(0) = 1$. Damit gilt $P \in \mathcal{P}(\mathrm{E})$ und $\int \big(1 - \exp(-\langle\lambda, y\rangle)\big)\, P(dy) = 0$, also $P = \epsilon_0$, d.h., $\check{P}(\lambda) = 1$ für alle $\lambda \in \mathrm{E}^\circ$. Ist $\check{P}(\lambda) = 0$ für ein $\lambda \in \mathrm{E}^\circ$, so folgt $P = 0$, also $\check{P}(\lambda) = 0$ für alle $\lambda \in \mathrm{E}^\circ$. □

2.6 Theorem (Kumulantenerzeugende Funktion). *Sei $\{P(t, x)\}$ eine nichtdegenerierte Verzweigungsübergangsfunktion. Dann gibt es zu jedem $(t, \lambda) \in [0, \infty) \times \mathrm{E}$ ein eindeutig bestimmtes $\psi(t, \lambda) \in \mathrm{E}$ mit*

$$\check{P}(t, x, \lambda) = \exp\big(- \langle x, \psi(t, \lambda)\rangle\big), \qquad x \in \mathrm{E}. \tag{2.3}$$

Die Funktion $\psi(\cdot, \lambda) : [0, \infty) \mapsto \mathrm{E}$ ist für jedes $\lambda \in \mathrm{E}$ Borel-meßbar mit $\psi(0, \lambda) = \lambda$ und erfüllt die Funktionalgleichung

$$\psi(s + t, \lambda) = \psi(s, \psi(t, \lambda)), \qquad s, t \geq 0, \lambda \in \mathrm{E}. \tag{2.4}$$

Die Funktion $\psi_j(t, \cdot) : \mathrm{E} \mapsto [0, \infty)$ ist für $1 \leq j \leq d$ und $t \in [0, \infty)$ die kumulantenerzeugende Funktion von $P(t, e_j)$. Wir nennen $\psi : [0, \infty) \times \mathrm{E} \mapsto \mathrm{E}$ kurz die kumulantenerzeugende Funktion *von $\{P(t, x)\}$.*

Beweis. Wir zeigen zunächst, daß $P(t, 0) = \epsilon_0$ für alle $t \geq 0$. Nach Voraussetzung existiert ein Paar $(t_0, x_0) \in (0, \infty) \times \mathrm{E}^\circ$ mit $P(t_0, x_0) \neq 0$. Wegen Lemma 2.3 gilt

$$\check{P}(t_0, x_0, \lambda) = \check{P}(t_0, x_0, \lambda) \cdot \check{P}(t_0, 0, \lambda), \qquad \lambda \in \mathrm{E}.$$

Wegen $\check{P}(t_0, x_0, \lambda) \neq 0$ für alle $\lambda \in \mathrm{E}$ folgt $\check{P}(t_0, 0, \lambda) = 1$ für alle $\lambda \in \mathrm{E}$, d.h., es gilt $P(t_0, 0) = \epsilon_0$. Ferner gilt

$$\check{P}(t, 0, \lambda) = \check{P}(t, 0, \lambda)^2, \qquad t \in [0, \infty), \lambda \in \mathrm{E}.$$

Mit Lemma 2.5 folgt $P(t, 0) = \epsilon_0$ oder $P(t, 0) = 0$ für $t \geq 0$. Damit ist $P(t, 0) = \epsilon_0$ äquivalent zu $P(t, 0, \mathrm{E}) > 0$. Verwende nun die Chapman Kolmogorov-Gleichung

$$P(s + t, x, \mathrm{E}) = \int P(t, y, \mathrm{E})\, P(s, x, dy), \qquad s, t \geq 0, x \in \mathrm{E}. \tag{2.5}$$

Damit folgt $P(t, 0, E) > 0$ (also $P(t, 0) = \epsilon_0$) für $t \in [\,0, t_0]$ wegen

$$0 < P(t_0, 0, \mathrm{E}) = \int P(t_0 - t, y, \mathrm{E})\, P(t, 0, dy), \qquad t \in [\,0, t_0].$$

Unter erneuter Verwendung von (2.5) erhält man $P(t_0+t,0)=\epsilon_0$ für $t\in[\,0,t_0]$, d.h., $P(t,0)=\epsilon_0$ für $t\in[\,0,2t_0]$, und die Behauptung folgt mit vollständiger Induktion. Wir verwenden nun die aus Lemma 2.3 resultierende Darstellung

$$\check{P}(t,x,\lambda)=\prod_{j=1}^{d}\check{P}(t,x_je_j,\lambda),\qquad (t,x)\in[0,\infty)\times\mathrm{E},\lambda\in\mathrm{E}. \tag{2.6}$$

Nach Voraussetzung gilt $\prod_{j=1}^{d}\check{P}(t_0,\langle x_0,e_j\rangle e_j,\lambda)>0$ für alle $\lambda\in\mathrm{E}$. Damit folgt $P(t_0,\langle x_0,e_j\rangle e_j)\neq 0$ für $1\le j\le d$, und wie vorher erhält man $P(t,\langle x_0,e_j\rangle e_j)\neq 0$ für $t\in[\,0,t_0]$ mit (2.5). Sei nun $1\le j\le d$, $t\in[\,0,t_0]$ und $\lambda\in\mathrm{E}$ fest. Definiere die Funktion $\varphi_j:[0,\infty)\mapsto[0,\infty)$ durch

$$\varphi_j(\xi):=\check{P}(t,\xi e_j,\lambda),\qquad \xi\in[0,\infty).$$

Nach Lemma 2.3 gilt

$$\varphi_j(\eta+\xi)=\varphi_j(\eta)\varphi_j(\xi),\qquad \eta,\xi\in[0,\infty).$$

Nach Bedingung (b) der Definition einer Übergangsfunktion ist die Funktion φ_j Borel-meßbar. Nach Hille & Phillips (1957), Theorem 9.7.1, ist damit φ_j auf $(0,\infty)$ stetig. Ist φ_j auch in Null stetig, so existiert ein (eindeutig bestimmtes) $\psi_j(t,\lambda)\in[0,\infty)$ mit

$$\varphi_j(\xi)=\exp\big(-\xi\psi_j(t,\lambda)\big),\qquad \xi\in[0,\infty). \tag{2.7}$$

Beachte, daß $\langle x_0,e_j\rangle>0$ und $\varphi_j(\langle x_0,e_j\rangle)=\check{P}(t,\langle x_0,e_j\rangle e_j,\lambda)>0$. Für $h\to 0$ gilt

$$\varphi_j(h)\varphi_j(\langle x_0,e_j\rangle)=\varphi_j(h+\langle x_0,e_j\rangle)\longrightarrow\varphi_j(\langle x_0,e_j\rangle),$$

also $\varphi_j(h)\to 1=\varphi_j(0)$. Mit (2.6) und (2.7) erhalten wir

$$\begin{aligned}\check{P}(t,x,\lambda)&=\prod_{j=1}^{d}\exp\big(-\langle x,e_j\rangle\psi_j(t,\lambda)\big)\\&=\exp\big(-\langle x,\psi(t,\lambda)\rangle\big),\qquad (t,x)\in[\,0,t_0]\times\mathrm{E},\lambda\in\mathrm{E},\end{aligned} \tag{2.8}$$

wobei $\psi(t,\lambda):=(\psi_1(t,\lambda),\ldots,\psi_d(t,\lambda))$. Für $s,t\in[\,0,t_0]$ folgt mit der Chapman-Kolmogorov-Gleichung

$$\begin{aligned}\check{P}(s+t,x,\lambda)&=\int\exp(-\langle\lambda,y\rangle)\,P(s+t,x,dy)\\&=\iint\exp(-\langle\lambda,y\rangle)\,P(t,z,dy)\,P(s,x,dz)\\&=\int\exp\big(-\langle z,\psi(t,\lambda)\rangle\big)\,P(s,x,dz)\\&=\check{P}\big(s,x,\psi(t,\lambda)\big)=\exp\big(-\langle x,\psi(s,\psi(t,\lambda))\rangle\big),\qquad x,\lambda\in\mathrm{E}.\end{aligned} \tag{2.9}$$

Setzt man $\psi(t_0 + t, \lambda) := \psi(t_0, \psi(t, \lambda))$ für $\lambda \in \mathrm{E}$, so gilt damit Gleichung (2.3) für $(t, \lambda) \in [0, 2t_0] \times \mathrm{E}$ sowie die Funktionalgleichung (2.4) für $s, t \in [0, t_0]$ und $\lambda \in \mathrm{E}$. Die allgemeine Gültigkeit folgt mit vollständiger Induktion. Die Borel-Meßbarkeit der Funktion $\psi(\cdot, \lambda) : [0, \infty) \mapsto \mathrm{E}$ folgt unmittelbar aus der Meßbarkeitseigenschaft einer Übergangsfunktion und der Darstellung $\psi_j(\cdot, \lambda) = -\log \check{P}(\cdot, e_j, \lambda)$ für $1 \le j \le d$. Wegen $P(0, e_j) = \epsilon_{e_j}$ für $1 \le j \le d$ gilt $\psi(\lambda) = \lambda$ für alle $\lambda \in \mathrm{E}$. $\square$

Wir ziehen nun aus Theorem 2.6 zwei einfache Schlußfolgerungen, von denen die erste offensichtlich ist und die zweite für spätere Anwendungen benötigt wird.

2.7 Korollar. *Sei $\{P(t, x)\}$ eine nichtdegenerierte Verzweigungsübergangsfunktion. Dann gilt $P(t, x) \neq 0$ für alle $(t, x) \in [0, \infty) \times \mathrm{E}$ und $P(t, 0) = \epsilon_0$ für alle $t \in [0, \infty)$.*

2.8 Korollar. *Sei $\{P(t, x)\}$ eine nichtdegenerierte Verzweigungsübergangsfunktion. Existiert ein $t_0 > 0$ mit $P(t, e_j) \in \mathcal{P}(\mathrm{E})$ für alle $t \in [0, t_0]$ und alle $1 \le j \le d$, so ist $\{P(t, x)\}$ konservativ.*

Beweis. Sei ψ die zugehörige kumulantenerzeugende Funktion. Aufgrund der Darstellung (2.3) genügt es zu zeigen, daß $\psi(t, 0) = 0$ für alle $t \ge 0$. Nach Voraussetzung gilt dies für alle $t \in [0, t_0]$. Verwende nun die Funktionalgleichung (2.4). Danach gilt $\psi(s + t, 0) = \psi(s, \psi(t, 0)) = 0$ für $s, t \in [0, t_0]$. Die Behauptung folgt nun mit vollständiger Induktion. $\square$

Wir benötigen zur Umkehrung von Theorem 2.6 zwei technische Hilfsmittel. Die hier eingeführte Algebra $\mathcal{A} \subseteq \widehat{\mathrm{C}}(\mathrm{E})$ wird uns bis zum Ende dieser Arbeit begleiten.

2.9 Lemma. *Zu $\lambda \in \mathrm{E}^\circ$ definiere $f_\lambda \in \widehat{\mathrm{C}}(\mathrm{E})$ durch $f_\lambda(x) := \exp(-\langle \lambda, x \rangle)$ für $x \in \mathrm{E}$. Dann ist die von $\{f_\lambda \mid \lambda \in \mathrm{E}^\circ\}$ erzeugte Algebra $\mathcal{A} := \langle f_\lambda \mid \lambda \in \mathrm{E}^\circ \rangle$ dicht in $\widehat{\mathrm{C}}(\mathrm{E})$.*

Beweis. Die Menge $\mathcal{A}$ ist nach Definition eine Algebra in $\widehat{\mathrm{C}}(\mathrm{E})$, die auf E nirgends verschwindet. Sind $x, y \in \mathrm{E}$ mit $f_\lambda(x) = f_\lambda(y)$ für alle $\lambda \in \mathrm{E}^\circ$, so folgt $\langle \lambda, x - y \rangle = 0$ für alle $\lambda \in \mathrm{E}^\circ$. Wegen $X = \mathrm{E}^\circ - \mathrm{E}^\circ$ erhält man $x = y$. Damit ist $\mathcal{A}$ nach dem Satz von Stone-Weierstraß (siehe Cohn (1980), Appendix D.23) dicht in $\widehat{\mathrm{C}}(\mathrm{E})$. $\square$

2.10 Lemma. *Sei $\{P(t, x)\}$ eine Familie von Sub-Wahrscheinlichkeitsmaßen auf* E *mit*

$$\check{P}(t, x, \lambda) = \exp(-\langle x, \psi(t, \lambda) \rangle), \qquad (t, x) \in [0, \infty) \times \mathrm{E}, \lambda \in \mathrm{E}.$$

Ist die Funktion $\psi(\cdot, \lambda) : [0, \infty) \mapsto \mathrm{E}$ für jedes $\lambda \in \mathrm{E}^\circ$ Borel-meßbar, so ist die Abbildung $P(\cdot, \cdot, \Gamma) : [0, \infty) \times \mathrm{E} \mapsto [0, \infty)$ für jedes $\Gamma \in \mathcal{B}(\mathrm{E})$ Borel-meßbar.

Beweis. Betrachte $\mathcal{A} = \langle f_\lambda \mid \lambda \in \mathrm{E}^\circ \rangle$. Sei $\lambda \in \mathrm{E}^\circ$ zunächst fest. Nach Voraussetzung ist die durch $\tau(t,x) := (x, \psi(t,\lambda))$ definierte Abbildung $\tau : [0,\infty) \times \mathrm{E} \mapsto \mathrm{E} \times \mathrm{E}$ Borel-meßbar. Offensichtlich ist die durch $\sigma(x,y) := \exp(-\langle x,y \rangle)$definierte Abbildung $\sigma : \mathrm{E} \times \mathrm{E} \mapsto \mathbb{R}$ ebenfalls Borel-meßbar. Wegen $\check{P}(t,x,\lambda) = (\sigma \circ \tau)(t,x)$ folgt daher

$$\int f_\lambda \, dP(\cdot,\cdot) = \check{P}(\cdot,\cdot,\lambda) \in \mathrm{B}([0,\infty) \times \mathrm{E}), \qquad \lambda \in \mathrm{E}^\circ.$$

Da $\mathcal{A}$ dicht in $\widehat{\mathrm{C}}(\mathrm{E})$ ist, ist auch die Abbildung $\int f \, dP(\cdot,\cdot)$ für $f \in \widehat{\mathrm{C}}(\mathrm{E})$ Borel-meßbar. Mit der üblichen Approximation von Indikatorfunktionen folgt die Meßbarkeit von $P(\cdot,\cdot,K)$ für jedes Kompaktum $K \subseteq \mathrm{E}$. Da jedes endliche Borel-Maß auf $\mathbb{R}^d$ regulär ist (vergleiche Cohn (1980), Proposition 1.5.6), gilt

$$P(t,x,\Gamma) = \sup\{P(t,x,K) \mid K \subseteq \Gamma \text{ kompakt}\}, \qquad x \in \mathrm{E}, \Gamma \in \mathcal{B}(\mathrm{E}),$$

was die Borel-Meßbarkeit von $P(\cdot,\cdot,\Gamma)$ für jedes $\Gamma \in \mathcal{B}(\mathrm{E})$ liefert. □

2.11 Proposition. *Für $\lambda \in \mathrm{E}$ sei $\psi(\cdot,\lambda) : [0,\infty) \mapsto \mathrm{E}$ eine Abbildung mit $\psi(0,\lambda) = \lambda$ und*

$$\psi(s+t,\lambda) = \psi(s,\psi(t,\lambda)), \qquad s,t \geq 0, \lambda \in \mathrm{E}. \tag{2.10}$$

Ist $\psi(\cdot,\lambda) : [0,\infty) \mapsto \mathrm{E}$ für jedes $\lambda \in \mathrm{E}$ Borel-meßbar und $\{P(t,x)\}$ eine Familie von Sub-Wahrscheinlichkeitsmaßen auf E mit Darstellung

$$\check{P}(t,x,\lambda) = \exp\big(-\langle x, \psi(t,\lambda)\rangle\big), \qquad (t,x) \in [0,\infty) \times \mathrm{E}, \lambda \in \mathrm{E}, \tag{2.11}$$

so ist $\{P(t,x)\}$ eine nichtdegenerierte Verzweigungsübergangsfunktion.

Beweis. Die Verzweigungseigenschaft und die Nichtdegeneriertheit folgen direkt aus Gleichung (2.11). Es bleiben also nur die Eigenschaften einer Übergangsfunktion zu zeigen. Wegen $\psi(0,\lambda) = \lambda$ für $\lambda \in \mathrm{E}$ gilt $P(0,x) = \epsilon_x$ für $x \in \mathrm{E}$. Zum Nachweis der Chapman Kolmogorov-Gleichung berechnen wir die Laplace-Transformierte auf beiden Seiten. Mit der Funktionalgleichung (2.10) erhalten wir

$$\check{P}(s+t,x,\lambda) = \exp\big(-\langle x, \psi(s,(\psi(t,\lambda)))\rangle\big), \qquad s,t \in [0,\infty), x,\lambda \in \mathrm{E}.$$

Dieser Ausdruck stimmt mit der rechten Seite überein, denn die Darstellung (2.11) liefert

$$\begin{aligned}
\int\int \exp(-\langle \lambda, y\rangle)\, P(t,z,dy)\, P(s,x,dz)& \\
&= \int \check{P}(t,z,\lambda)\, P(s,x,dz) \\
&= \int \exp\big(-\langle z, \psi(t,\lambda)\rangle\big)\, P(s,x,dz) \\
&= \exp\big(-\langle x, \psi(s,\psi(t,\lambda))\rangle\big), \qquad s,t \in [0,\infty), x,\lambda \in \mathrm{E}.
\end{aligned}$$

Die Meßbarkeitseigenschaft einer Übergangsfunktion folgt aus Lemma 2.10. □

2.12 Bemerkung. Proposition 2.11 ist ein einfaches Kriterium dafür, wann eine Übergangsfunktion eine Verzweigungsübergangsfunktion ist. Viel schwieriger ist es, die Klasse aller Übergangsfunktion zu finden, die die Voraussetzungen von Proposition 2.11 erfüllen. Dies wird uns in Abschnitt III.3 beschäftigen.

3. Stochastische Stetigkeit

3.1 Lemma. *Sei $\{P(t,x)\}$ eine reguläre Verzweigungsübergangsfunktion und ψ die zugehörige kumulantenerzeugende Funktion. Dann gilt*

$$\psi(t,\lambda) \in \mathrm{E}^\circ, \qquad (t,\lambda) \in [0,\infty) \times \mathrm{E}^\circ. \tag{3.1}$$

Beweis. Nach der Regularitätsbedingung gibt es zu jedem $1 \le j \le d$ ein $\lambda_j \in \mathrm{E}^\circ$ mit $\psi_j(t_0,\lambda_j) > 0$. Mit Lemma 2.5 folgt $\psi_j(t_0,\lambda) > 0$ für alle $\lambda \in \mathrm{E}^\circ$. Verwende nun die Funktionalgleichung (2.4). Danach gilt

$$\psi_j(t,\psi(t_0-t,\lambda)) = \psi_j(t_0,\lambda) > 0, \qquad t \in [0,t_0], \lambda \in \mathrm{E}^\circ.$$

Mit Lemma 2.5 folgt $\psi_j(t,\lambda) > 0$ für alle $1 \le j \le d$, $t \in [0,t_0]$ und alle $\lambda \in \mathrm{E}^\circ$. Also gilt

$$\psi(t,\lambda) \in \mathrm{E}^\circ, \qquad (t,\lambda) \in [0,t_0] \times \mathrm{E}^\circ.$$

Die Funktionalgleichung (2.4) liefert $\psi(t_0+t,\lambda) = \psi(t_0,\psi(t,\lambda)) \in \mathrm{E}^\circ$ für alle $t \in [0,t_0]$ und $\lambda \in \mathrm{E}^\circ$, und die Behauptung folgt mit vollständiger Induktion. □

3.2 Proposition. *Sei $\{P(t,x)\}$ eine reguläre Verzweigungsübergangsfunktion mit korrespondierender Operatorhalbgruppe $\{T(t)\}$. Dann bildet der Operator $T(t)$ für jedes $t \ge 0$ den Raum $\widehat{\mathrm{C}}(\mathrm{E})$ und die Algebra $\mathcal{A} = \langle f_\lambda \mid \lambda \in \mathrm{E}^\circ \rangle$ in sich selbst ab.*

Beweis. Sei $t \ge 0$ und $\lambda \in \mathrm{E}^\circ$. Nach Lemma 3.1 gilt $\psi(t,\lambda) \in \mathrm{E}^\circ$ für die kumulantenerzeugende Funktion ψ von $\{P(t,x)\}$. Nach Theorem 2.6 folgt

$$T(t)f_\lambda = \check{P}(t,\cdot,\lambda) = \exp(-\langle \cdot, \psi(t,\lambda)\rangle) \in \mathcal{A}.$$

Aufgrund der Linearität von $T(t)$ wird damit $\mathcal{A}$ in sich selbst abgebildet. Beachte nun, daß nach Theorem 2.6 die Abbildung $P(t,\cdot) : [0,\infty) \mapsto \mathcal{S}(\mathrm{E})$ stetig ist. Damit gilt $T(t)f \in \overline{\mathrm{C}}(\mathrm{E})$ für $f \in \widehat{\mathrm{C}}(\mathrm{E})$. Es bleibt zu zeigen, daß $T(t)f$ im Unendlichen verschwindet. Verwende dazu, daß $\mathcal{A}$ dicht in $\widehat{\mathrm{C}}(\mathrm{E})$ ist. Zu $f \in \widehat{\mathrm{C}}(\mathrm{E})$ und $\epsilon > 0$ wähle $g \in \mathcal{A}$ mit $\|f-g\| < \epsilon/2$ und ein Kompaktum $K \subseteq \mathrm{E}$ mit $|T(t)g(x)| < \epsilon/2$ für $x \notin K$. Dann gilt

$$\begin{aligned} |T(t)f(x)| &\le |T(t)g(x)| + \|T(t)f - T(t)g\| \\ &\le |T(t)g(x)| + \|T(t)\| \cdot \|f-g\| < \epsilon, \qquad x \notin K. \end{aligned}$$

Damit folgt die Behauptung. □

Die stochastische Stetigkeit einer Verzweigungsübergangsfunktion $\{P(t,x)\}$ und die Eigenschaften der korrespondierenden Operatorhalbgruppe $\{T(t)\}$ hängen eng zusammen. Dies nutzen wir im folgenden aus.

3.3 Lemma. *Ist $\{P(t,x)\}$ eine Verzweigungsübergangsfunktion und $\{T(t)\}$ die korrespondierende Halbgruppe, so ist $T(\cdot)f : [0,\infty) \mapsto \widehat{\mathrm{C}}(\mathrm{E})$ für $f \in \widehat{\mathrm{C}}(\mathrm{E})$ auf $(0,\infty)$ stetig.*

Beweis. Aufgrund der Meßbarkeitseigenschaft einer Übergangsfunktion ist für jedes $f \in \widehat{\mathrm{C}}(\mathrm{E})$ die Abbildung $T(\cdot)f(\cdot) : [0,\infty) \times \mathrm{E} \mapsto \mathbb{R}$ Borel-meßbar. Ist μ ein endliches signiertes Borel-Maß auf E, so folgt damit die Borel-Meßbarkeit der Abbildung $\int T(\cdot)f(x)\,\mu(dx) : [0,\infty) \mapsto \mathbb{R}$. Beachte, daß $\widehat{\mathrm{C}}(\mathrm{E})$ separabel ist. Daher ist die Meßbarkeit hinreichend für die Stetigkeit der Abbildung $T(\cdot)f : [0,\infty) \mapsto \widehat{\mathrm{C}}(\mathrm{E})$ auf $(0,\infty)$ (Dynkin (1965), Theorem I.1.5). $\square$

3.4 Lemma. *Sei $P \in \mathcal{S}(\mathrm{E})$ mit $P(\mathrm{E} \setminus \{0\}) > 0$. Dann gilt $\check{P}(\lambda_1) > \check{P}(\lambda_2)$ für alle $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathrm{E}$ mit $\lambda_1 < \lambda_2$.*

Beweis. Offensichtlich gilt $\check{P}(\lambda_1) \geq \check{P}(\lambda_2)$. Nehmen wir die Gleichheit an, so folgt $\int \big(\exp(-\langle\lambda_1, y\rangle) - \exp(-\langle\lambda_2, y\rangle)\big)\, P(dy) = 0$, also $P(\mathrm{E} \setminus \{0\}) = 0$. $\square$

3.5 Lemma. *Sei $\{P(t,x)\}$ eine Verzweigungsübergangsfunktion und $t_0 \in (0,\infty)$ mit $P\big(t_0, e_j, E \setminus \{0\}\big) > 0$ für $1 \leq j \leq d$. Ist ψ die zugehörige kumulantenerzeugende Funktion, so existiert ein Intervall $[\alpha,\beta] \subseteq \mathrm{E}$ mit nichtleerem Inneren und $[\alpha,\beta] \subseteq \psi(t_0, \mathrm{E}^\circ)$.*

Beweis. Wähle $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathrm{E}^\circ$ mit $\lambda_1 < \lambda_2$. Die Funktion $\psi_j(t_0, \cdot) : \mathrm{E} \mapsto [0,\infty)$ ist für $1 \leq j \leq d$ als kumulantenerzeugende Funktion von $P(t_0, e_j)$ stetig. Nach Lemma 3.4 gilt $\psi_j(t_0, \lambda_1) < \psi_j(t_0, \lambda_2)$. Damit nimmt die durch $f_j(h) := \psi_j(t_0, \lambda_1 + h(\lambda_2 - \lambda_1))$ definierte stetige Funktion $f_j : [0,1] \mapsto [0,\infty)$ für $1 \leq j \leq d$ jeden Zwischenwert an, also existiert ein Intervall $[\alpha,\beta] \subseteq \mathrm{E}$ mit nichtleerem Inneren und $[\alpha,\beta] \subseteq \psi(t_0, \mathrm{E}^\circ)$. $\square$

3.6 Lemma. *Sei $\{P(t,x)\}$ eine irreguläre Verzweigungsübergangsfunktion. Dann existiert ein $1 \leq j \leq d$ und ein $\delta \in [0,1]$ mit $P(t, e_j) = \delta\epsilon_0$ für alle $t > 0$.*

Beweis. Nach Voraussetzung existiert zu festem $t_0 \in (0,\infty)$ ein $1 \leq j \leq d$ und ein $\delta_0 \in [0,1]$ mit $P(t_0, e_j) = \delta_0\epsilon_0$. Zeige nun, daß $P(t, e_j) = \delta_0\epsilon_0$ für alle $t \geq t_0$. Nach der Chapman Kolmogorov-Gleichung gilt

$$P(t_0 + h, e_j, \Gamma) = \delta_0 \cdot P(t_0, 0, \Gamma), \qquad h \in [0,\infty), \Gamma \in \mathcal{B}(\mathrm{E}).$$

Ist $\delta_0 = 0$, so ist nichts zu zeigen. Andernfalls gilt $P(t_0, e_j) \neq 0$, und mit der Verzweigungseigenschaft folgt $\check{P}(t_0, e_j, \lambda) = \check{P}(t_0, e_j, \lambda) \cdot \check{P}(t_0, 0, \lambda)$ für alle $\lambda \in \mathrm{E}$, also $P(t_0, 0) = \epsilon_0$. Damit ist die Zwischenbehauptung gezeigt. Wähle nun eine Nullfolge $\{t_n\} \subseteq (0, \infty)$. Dann existiert ein $1 \leq j \leq d$ und eine Teilfolge $\{t_{n_k}\}$ mit

$$P(t_{n_k}, e_j) = \delta_{n_k} \epsilon_0, \qquad k \in \mathbb{N}.$$

Wegen $P(t, e_j) = \delta_{n_k} \epsilon_0$ für alle $t \in [t_{n_k}, \infty)$ folgt $\delta_{n_k} = \delta \in [0, 1]$ für alle $k \in \mathbb{N}$, und wir erhalten $P(t, e_j) = \delta \epsilon_0$ für alle $t > 0$. □

3.7 Bemerkung. Die Irregularität einer Verzweigungsübergangsfunktion bedeutet, daß ein Typ derart existiert, daß bei einer Startpopulation, in der genau dieser Typ mit einer positiven Größe auftritt, die Population zu jedem positiven Zeitpunkt fast sicher entweder unendlich groß geworden oder ausgestorben ist, also keine Meßgrößen (Observablen) vorhanden sind. Eine irreguläre Verzweigungsübergangsfunktion weist daher ebenso wie ein degenerierte (vergleiche Bemerkung 2.2) auf eine falsche Modellbildung hin. In der nächsten Proposition sehen wir, daß lediglich die regulären Verzweigungsübergangsfunktionen mathematisch interessant sind. Wir werden dann im folgenden stets reguläre Verzweigungsübergangsfunktionen betrachten.

3.8 Proposition. *Eine Verzweigungsübergangsfunktion ist genau dann stochastisch stetig, wenn sie regulär ist. Ist ψ die zugehörige kumulantenerzeugende Funktion, so ist die Funktion $\psi(\cdot, \lambda) : [0, \infty) \mapsto \mathrm{E}$ in diesem Fall für jedes $\lambda \in \mathrm{E}^\circ$ stetig.*

Beweis. Nach Lemma 3.6 ist nur noch die stochastische Stetigkeit im Fall der Regularität zu zeigen. Nach Lemma 3.3 ist $\check{P}(\cdot, e_j, \lambda) = T(\cdot) f_\lambda(e_j) : [0, \infty) \mapsto [0, \infty)$ für $1 \leq j \leq d$ und $\lambda \in \mathrm{E}^\circ$ auf $(0, \infty)$ stetig. Sei ψ die zugehörige kumulantenerzeugende Funktion. Nach dem Stetigkeitssatz I.2.14 und Proposition I.2.15 ist die Abbildung $\psi_j(\cdot, \lambda) : [0, \infty) \mapsto \mathrm{E}^\circ$ für $1 \leq j \leq d$ und $\lambda \in \mathrm{E}^\circ$ stetig auf $(0, \infty)$. Nach der Funktionalgleichung (2.4) gilt für $h \to 0$

$$\psi_j(h, \psi(t, \lambda)) = \psi_j(h + t, \lambda) \longrightarrow \psi_j(t, \lambda), \qquad (t, \lambda) \in (0, \infty) \times \mathrm{E}^\circ.$$

Nach Lemma 3.5 existieren ein $t_0 \in (0, \infty)$ sowie ein Intervall $[\alpha, \beta] \subseteq \mathrm{E}$ mit nichtleerem Inneren und $[\alpha, \beta] \subseteq \psi(t_0, \mathrm{E}^\circ)$. Damit gilt $\psi_j(h, \lambda) \to \lambda_j$ für alle $\lambda \in [\alpha, \beta]$. Dies ist nach Proposition I.2.12 aber bereits hinreichend für die Konvergenz für alle $\lambda \in \mathrm{E}^\circ$. Also gilt $\lim_{h \to 0} \psi(h, \lambda) = \lambda$ für alle $\lambda \in \mathrm{E}^\circ$, und mit der Darstellung (2.3) folgt die stochastische Stetigkeit. □

3.9 Proposition. *Sei $\{P(t, x)\}$ eine Verzweigungsübergangsfunktion. Dann ist die korrespondierende Operatorhalbgruppe $\{T(t)\}$ eine Feller-Halbgruppe.*

Beweis. Nach Proposition 3.8 gilt $P(t,x) \xrightarrow{\mathrm{v}} \epsilon_x$ für $x \in \mathrm{E}$ und $t \to 0$. Damit erhalten wir für $f \in \widehat{\mathrm{C}}(\mathrm{E})$

$$T(t)f(x) = \int f(y)\, P(t,x,dy) \longrightarrow f(x), \qquad x \in \mathrm{E}. \tag{3.2}$$

Nach Proposition 3.2 ist $\{T(t)\}$ eine Kontraktionshalbgruppe auf $\widehat{\mathrm{C}}(\mathrm{E})$. Beachte nun, daß nach Rogers & Williams (1994), Lemma III.6.7, in diesem Fall die punktweise Konvergenz in (3.2) bereits die gleichmäßige Konvergenz nach sich zieht. □

4. Die zugehörige Differentialgleichung

4.1 Proposition. *Sei $\{P(t,x)\}$ eine Verzweigungsübergangsfunktion und ψ die zugehörige kumulantenerzeugende Funktion. Dann existiert*

$$L(\lambda) := \lim_{t\to 0} \frac{\psi(t,\lambda)-\lambda}{t}, \qquad \lambda \in \mathrm{E}^\circ.$$

Beweis. Nach Proposition 3.8 ist die Funktion $\psi(\cdot,\lambda)\colon [0,\infty) \mapsto \mathrm{E}$ für jedes $\lambda \in \mathrm{E}^\circ$ stetig mit $\psi(0,\lambda) = \lambda$. Dies gilt nach Proposition I.2.15 sogar lokal gleichmäßig auf E°. Definiere

$$\theta(h,\lambda) := \frac{1}{h}\int_0^h \psi(s,\lambda)\, ds, \qquad h > 0, \lambda \in \mathrm{E}^\circ.$$

Für $h \to 0$ gilt $\theta(h,\lambda) \to \lambda$ lokal gleichmäßig auf E°. Ferner ist für $1 \le j,k \le d$ und $\lambda \in \mathrm{E}^\circ$ die Funktion $\nabla_k\psi_j(\cdot,\lambda) : [0,\infty) \mapsto \mathbb{R}$ in Null (lokal gleichmäßig auf E°) stetig mit $\nabla_k\psi_j(0,\lambda) = \delta_{jk}$ (Kronecker-Symbol). Für $h \to 0$ folgt mit dominierter Konvergenz

$$\nabla_k\theta_j(h,\lambda) = \frac{1}{h}\int_0^h \nabla_k\psi_j(s,\lambda)\, ds \longrightarrow \delta_{jk}, \qquad 1 \le j,k \le d, \tag{4.1}$$

lokal gleichmäßig auf E°. Die wesentliche (aus der Theorie der Operatorhalbgruppen stammende) Gleichung ist

$$\begin{aligned}
\theta(h,\psi(t,\lambda)) - \theta(h,\lambda) &= \frac{1}{h}\int_t^{t+h} \psi(s,\lambda)\, ds - \frac{1}{h}\int_0^h \psi(s,\lambda)\, ds \\
&= \frac{1}{h}\int_0^{t+h} \psi(s,\lambda)\, ds - \frac{1}{h}\int_0^t \psi(s,\lambda)\, ds - \frac{1}{h}\int_0^h \psi(s,\lambda)\, ds \\
&= \frac{1}{h}\int_h^{t+h} \psi(s,\lambda)\, ds - \frac{1}{h}\int_0^t \psi(s,\lambda)\, ds, \qquad h > 0, (t,\lambda) \in (0,\infty)\times\mathrm{E}^\circ.
\end{aligned} \tag{4.2}$$

Hierbei folgt die erste Identität aus der Definition und Funktionalgleichung (2.4). Auf der linken Seite dieser Gleichung ist noch die Funktion θ zu eliminieren. Sei $h > 0$

fest. Da die Funktion $\theta(h,\cdot)$ nach (4.1) auf E° differenzierbar ist und $\psi(t,\lambda)$ für $(t,\lambda) \in (0,\infty) \times \mathrm{E}^\circ$ nach Lemma 3.1 in E° liegt, existiert nach dem Mittelwertsatz zu $1 \le j \le d$ ein $\delta_j(t,\lambda) \in (0,1)$ mit

$$\theta_j(h,\psi(t,\lambda)) - \theta_j(h,\lambda) = \big\langle \nabla\theta_j\big(h, \lambda + \delta_j(t,\lambda)(\psi(t,\lambda)-\lambda)\big), \psi(t,\lambda)-\lambda\big\rangle. \tag{4.3}$$

Definiere nun für $(t,\lambda) \in (0,\infty) \times \mathrm{E}^\circ$ die Matrix

$$D(t,\lambda) := \Big(\nabla_k\theta_j\big(h, \lambda + \delta_j(t,\lambda)(\psi(t,\lambda)-\lambda)\big)\Big)_{jk} \in \mathbb{R}_{d\times d}. \tag{4.4}$$

Sei nun $\lambda \in \mathrm{E}^\circ$ fest. Wegen $\psi(t,\lambda) \to \lambda$ lokal gleichmäßig auf E° für $t \to 0$ existiert ein (von $h > 0$ unabhängiges) Kompaktum $K \subseteq \mathrm{E}^\circ$ und ein $t_0 > 0$ derart, daß $\lambda + \delta_j(t,\lambda)(\psi(t,\lambda)-\lambda) \in K$ für alle $t \in [0,t_0]$. Wähle $h > 0$ so klein, daß die Matrix $D(t,\lambda)$ für alle $t \in [0,t_0]$ invertierbar ist, was nach (4.1) möglich ist. Mit (4.2) und (4.3) erhalten wir die Darstellung

$$\begin{aligned} \frac{\psi(t,\lambda)-\lambda}{t} &= D(t,\lambda)^{-1}\big(\theta(h,\psi(t,\lambda)) - \theta(h,\lambda)\big) \\ &= D(t,\lambda)^{-1}\frac{1}{h}\bigg(\frac{1}{t}\int_h^{h+t}\psi(s,\lambda)\,ds - \frac{1}{t}\int_0^t \psi(s,\lambda)\,ds\bigg), \qquad t \in (0,t_0). \end{aligned}$$

Für $t \to 0$ gilt $D(t,\lambda) \to D(0,\lambda) = D\theta(h,\lambda) := \big(\nabla_k\theta_j(h,\lambda)\big)_{jk}$. Da die Invertierung von Matrizen stetig ist, folgt die Existenz des Grenzwertes

$$L(\lambda) := \lim_{t\to 0}\frac{\psi(t,\lambda)-\lambda}{t} = D\theta(h,\lambda)^{-1}\frac{\psi(h,\lambda)-\lambda}{h}, \qquad \lambda \in \mathrm{E}^\circ. \tag{4.5}$$

Dies ist gerade die Behauptung. □

4.2 PROPOSITION. *Sei $\{P(t,x)\}$ eine Verzweigungsübergangsfunktion, ψ die zugehörige kumulantenerzeugende Funktion und*

$$L(\lambda) := \lim_{t\to 0}\frac{\psi(t,\lambda)-\lambda}{t}, \qquad \lambda \in \mathrm{E}^\circ. \tag{4.6}$$

(a) *Die Funktion $L : \mathrm{E}^\circ \mapsto \mathbb{R}^d$ ist lokal Lipschitz-stetig und kann stetig auf E fortgesetzt werden. Wir bezeichnen diese stetige Fortsetzung ebenfalls mit L. Die Komponente L_j ist für $1 \le j \le d$ die kumulantenerzeugende Funktion einer spektral positiven unendlich teilbaren Verteilung $P_j \in \mathcal{S}(\mathrm{X}) \setminus \{0\}$.*

(b) *Sei $\{t_n\} \subseteq (0,\infty)$ eine Nullfolge und ${P_j}^{(n)} := P(t_n, e_j/t_n) \star \epsilon_{-e_j/t_n}$ für $1 \le j \le d$. Dann ist $\{{P_j}^{(n)}\}$ eine Folge von spektral positiven unendlich teilbaren Verteilungen auf X, und es gilt ${P_j}^{(n)} \xrightarrow{\mathrm{v}} P_j$.*

Beweis. Sei $1 \leq j \leq d$ fest. Der betrachtete Grenzwert existiert nach Proposition 4.1. Nach Definition von L erhalten wir

$$\varphi_n(\lambda) := \frac{\psi_j(t_n,\lambda) - \lambda_j}{t_n} \longrightarrow L_j(\lambda), \qquad \lambda \in \mathrm{E}^\circ. \tag{4.7}$$

Dabei ist φ_n die kumulantenerzeugende Funktion des Sub-Wahrscheinlichkeitsmaßes $P_n := P(t_n, e_j/t_n) \star \epsilon_{-e_j/t_n}$. Nach Definition einer Verzweigungsübergangsfunktion ist $P(t,x)$ für jedes $(t,x) \in [0,\infty) \times \mathrm{E}$ eine unendlich teilbare Verteilung auf E. Damit ist $\{P_n\}$ nach Theorem I.3.16 eine Folge von spektral positiven unendlich teilbaren Verteilungen auf X. Nach dem Stetigkeitssatz I.4.8 existiert eine spektral positive Verteilung $P_j \in \mathcal{S}(\mathrm{X})$ mit $P_n \xrightarrow{\mathrm{v}} P_j$. Nach (4.7) stimmen L_j und die kumulantenerzeugende Funktion ψ_j von P_j auf E° überein. Nach Korollar I.2.5 ist L lokal Lipschitz-stetig. Die Behauptung folgt nun durch stetige Fortsetzung auf E. □

4.3 Definition. Sei $\{P(t,x)\}$ eine Verzweigungsübergangsfunktion, ψ die zugehörige kumulantenerzeugende Funktion, $L : \mathrm{E} \mapsto \mathbb{R}^d$ die stetige Fortsetzung der durch (4.6) definierten Funktion auf E und $P_j \in \mathcal{S}(\mathrm{X}) \setminus \{0\}$ für $1 \leq j \leq d$ das zu L_j gehörende Sub-Wahrscheinlichkeitsmaß. Wir bezeichnen wahlweise $L = (L_1, \ldots, L_d)$ oder $\mathbb{P} := (P_1, \ldots, P_d) \in \mathcal{S}(\mathrm{X})^d$ als Charakterisierung von $\{P(t,x)\}$.

4.4 Theorem (Eindeutigkeitssatz). *Verschiedene Verzweigungsübergangsfunktionen besitzen verschiedene Charakterisierungen.*

Beweis. Dies folgt aus dem nächsten Lemma und der nächsten Proposition. □

4.5 Lemma. *Sei $U \subseteq \mathrm{E}$ nichtleer, $L : U \mapsto \mathrm{X}$ lokal Lipschitz-stetig und $y_0 \in U$. Dann besitzt das autonome Anfangswertproblem $y' = L(y)$, $y(0) = y_0$, höchstens eine Lösung.*

Beweis. Aufgrund der Stetigkeit von L ist das Anfangswertproblem äquivalent zu

$$y(t) = y_0 + \int_0^t L\big(y(s)\big)\, ds, \qquad t \in [0,\infty).$$

Sind nun y_k für $k = 1,2$ Lösungen, und ist $t_0 \in [0,\infty)$, so gibt es ein Kompaktum $K \subseteq U$ mit $y_k(s) \in K$ für $k = 1,2$ und $s \in [0,t_0]$. Da L lokal Lipschitz-stetig ist, existiert ein $M > 0$ mit

$$\big|L\big(y_1(s)\big) - L\big(y_2(s)\big)\big| \leq M|y_1(s) - y_2(s)|, \qquad s \in [0,t_0].$$

Mit $z := y_1 - y_2$ folgt $|z(t)| \leq M \int_0^t |z(s)|\, ds$ für alle $t \in [0,t_0]$, und mit der Gronwallschen Ungleichung (siehe z.B. Ethier & Kurtz (1986), Appendix 5.1) erhält man $z(t) = 0$ für $t \in [0,t_0]$. Da $t_0 \in [0,\infty)$ beliebig war, folgt die Eindeutigkeit. □

4.6 Proposition. *Sei* $\{P(t,x)\}$ *eine Verzweigungsübergangsfunktion mit Charakterisierung* $L : \mathrm{E} \mapsto \mathbb{R}^d$. *Ist* ψ *die zugehörige kumulantenerzeugende Funktion, so ist die Funktion* $\psi(\cdot,\lambda) : [0,\infty) \mapsto \mathrm{E}^\circ$ *für jedes* $\lambda \in \mathrm{E}^\circ$ *die eindeutige Lösung des autonomen Anfangswertproblems* $y' = L(y)$, $y(0) = \lambda$.

Beweis. Zum Nachweis der Gültigkeit der Differentialgleichung beachte die Stetigkeit von $L : \mathrm{E}^\circ \mapsto \mathbb{R}^d$ und für $\lambda \in \mathrm{E}^\circ$ die Gleichung

$$\frac{\psi(t+h,\lambda)-\lambda}{h} = \frac{\psi(h,\psi(t,\lambda))-\lambda}{h}, \qquad t \in [0,\infty), h > 0.$$

Nach Proposition 4.1 gilt $\partial^+\psi(\cdot,\lambda)/\partial t = L\big(\psi(\cdot,\lambda)\big)$ für $\lambda \in \mathrm{E}^\circ$. Da die Funktion $\psi(\cdot,\lambda) : [0,\infty) \mapsto \mathrm{E}^\circ$ ebenfalls stetig ist, gilt dies auch für $\partial^+\psi(\cdot,\lambda)/\partial t$. Dies ist eine hinreichende Bedingung für die Existenz des Differentialquotienten, und die Gültigkeit der Differentialgleichung ist gezeigt. Zum Nachweis der Eindeutigkeit setze $U := \mathrm{E}^\circ$ und $y_0 := \lambda$ für festes $\lambda \in \mathrm{E}^\circ$ in Lemma 4.5. □

Wir formulieren nun ein entsprechendes System von partiellen Differentialgleichungen, das jedoch erst später verwendet wird.

4.7 Proposition. *Sei* $\{P(t,x)\}$ *eine Verzweigungsübergangsfunktion mit Charakterisierung* $L : \mathrm{E} \mapsto \mathbb{R}^d$. *Ist* ψ *die zugehörige kumulantenerzeugende Funktion, so löst die Funktion* $\psi(\cdot,\lambda) : [0,\infty) \mapsto \mathrm{E}^\circ$ *für jedes* $\lambda \in \mathrm{E}^\circ$ *das System von partiellen Differentialgleichungen*

$$\frac{\partial}{\partial t}\psi_j(t,\lambda) = \langle \nabla\psi_j(t,\lambda), L(\lambda)\rangle, \quad \psi_j(0,\lambda) = \lambda_j, \qquad 1 \le j \le d.$$

Beweis. Sei $1 \le j \le d$ und $t \in [0,\infty)$ fest. Verwende hier für $\lambda \in \mathrm{E}^\circ$ die Gleichung

$$\frac{\psi(t+h,\lambda)-\lambda}{h} = \frac{\psi(t,\psi(h,\lambda))-\lambda}{h}, \qquad h > 0.$$

Nach dem Mittelwertsatz existiert zu $\lambda \in \mathrm{E}^\circ$ und $h > 0$ ein $\delta(h,\lambda) \in (0,1)$ mit

$$\frac{\psi_j(t+h,\lambda)-\lambda_j}{h} = \big\langle \nabla\psi_j\big(t, \lambda + \delta(h,\lambda)(\psi(h,\lambda)-\lambda)\big), h^{-1}\big(\psi(h,\lambda)-\lambda\big)\big\rangle.$$

Nach Proposition 4.1 folgt $\partial^+\psi_j(\cdot,\lambda)/\partial t = \langle \nabla\psi_j(t,\lambda), L(\lambda)\rangle$ für $\lambda \in \mathrm{E}^\circ$. Da die Funktion $\nabla\psi_j(\cdot,\lambda) : [0,\infty) \mapsto \mathrm{E}^\circ$ stetig ist, gilt dies auch für $\partial^+\psi(\cdot,\lambda)/\partial t$. Damit ist die Behauptung gezeigt. □

Wir beschäftigen uns nun mit der Ausdehnung der Lösbarkeit des Anfangswertproblems $y' = L(y)$, $y(0) = \lambda$ auf den Rand $\partial\mathrm{E}$ von E und dem damit zusammenhängenden Problem der Stetigkeit der Abbildung $P(\cdot, x) : [0, \infty) \mapsto \mathcal{S}(\mathrm{X})$ in der schwachen Topologie von $\mathcal{S}(\mathrm{X})$.

4.8 Lemma. *Sei $\{P(t, x)\}$ eine Verzweigungsübergangsfunktion und ψ die zugehörige kumulantenerzeugende Funktion. Existiert ein $t_0 > 0$ derart, daß die Funktion $\psi : [0, \infty) \times \mathrm{E} \mapsto \mathrm{E}$ auf $[0, t_0] \times \mathrm{E}$ stetig ist, so ist ψ stetig.*

Beweis. Sei $\{h_n\} \subseteq [0, \infty)$ eine Nullfolge und $\{\lambda_n\} \subseteq \mathrm{E}$ mit $\lambda_n \to \lambda \in \mathrm{E}$. Dann gilt nach Voraussetzung $\psi(h_n, \lambda_n) \to \lambda$. Wir erhalten

$$\psi(t + h_n, \lambda_n) = \psi(t, \psi(h_n, \lambda_n)) \longrightarrow \psi(t, \lambda), \qquad t \in [0, \infty).$$

Ist $t \in [0, t_0]$, so folgt ebenfalls nach Voraussetzung

$$\psi(t_0 + t - h_n, \lambda_n) = \psi(t_0 - h_n, \psi(t, \lambda_n)) \longrightarrow \psi(t_0, \psi(t, \lambda)) = \psi(t_0 + t, \lambda).$$

Damit ist ψ auf $[0, 2t_0] \times \mathrm{E}$ stetig, und die Behauptung folgt mit Induktion. □

4.9 Lemma. *Sei $\{P(t, x)\}$ eine Verzweigungsübergangsfunktion mit Charakterisierung $L : \mathrm{E} \mapsto \mathbb{R}^d$. Ist ψ die zugehörige kumulantenerzeugende Funktion, so löst die Funktion $\psi(\cdot, 0) : [0, \infty) \mapsto \mathrm{E}$ das autonome Anfangswertproblem $y' = L(y)$, $y(0) = 0$.*

Beweis. Nach Proposition 4.6 ist $\psi(\cdot, \lambda) : [0, \infty) \mapsto \mathrm{E}^\circ$ für jedes $\lambda \in \mathrm{E}^\circ$ die eindeutige Lösung des autonomen Anfangswertproblems $y' = L(y)$, $y(0) = \lambda$. Dies ist aber wegen der Stetigkeit von L äquivalent zu

$$\psi(t, \lambda) = \lambda + \int_0^t L\big(\psi(s, \lambda)\big)\, ds, \qquad t \in [0, \infty).$$

Beachte nun, daß $P(h, e_j) \xrightarrow{\mathrm{v}} \epsilon_{e_j}$ für $h \to 0$ und $1 \le j \le d$ nach Proposition 3.8. Nach Lemma I.2.13 und Proposition I.2.15 gilt $\psi_j(h, \lambda) \to \lambda_j$ für $h \to 0$ lokal gleichmäßig auf E. Damit folgt $\psi(h, \lambda) \to \lambda$ für $h \to 0$ lokal gleichmäßig auf E. Also existiert zu jedem Kompaktum $K \subseteq \mathrm{E}$ ein $t_0 > 0$ und ein $M > 0$ mit $|\psi(s, \lambda)| \le M$ für alle $(s, \lambda) \in [0, t_0] \times K$. Mit $\lambda \to 0$ und dominierter Konvergenz folgt

$$\psi(t, 0) = \int_0^t L\big(\psi(s, 0)\big)\, ds, \qquad t \in [0, t_0]. \tag{4.8}$$

Insbesondere ist $\psi(\cdot, 0)$ auf $[0, t_0]$ stetig. Eine erneute Anwendung von Lemma I.2.13 liefert $\psi(t + h, \lambda) \to \psi(t, \lambda)$ für $t \in [0, t_0]$ und $h \to 0$ lokal gleichmäßig auf E. Daher ist ψ auf $[0, t_0] \times \mathrm{E}$ stetig, also nach Lemma 4.8 stetig. Damit kann $t_0 > 0$ beliebig groß gewählt werden, und es folgt die Behauptung. □

4.10 Theorem (Schwache Stetigkeit). *Sei $\{P(t,x)\}$ eine Verzweigungsübergangsfunktion. Dann ist die Abbildung $P(\cdot,x) : [0,\infty) \mapsto \mathcal{S}(\mathrm{E})$ für jedes $x \in \mathrm{E}$ stetig in der schwachen Topologie. Ist ψ die kumulantenerzeugende Funktion und $L : \mathrm{E} \mapsto \mathbb{R}^d$ die Charakterisierung von $\{P(t,x)\}$, so gilt*

$$L(\lambda) = \lim_{t\to 0} \frac{\psi(t,\lambda) - \lambda}{t}, \qquad \lambda \in \mathrm{E}. \tag{4.9}$$

Beweis. Nach Proposition 4.6 ist die Abbildung $\psi(\cdot,\lambda) : [0,\infty) \mapsto [0,\infty)$ für jedes $\lambda \in \mathrm{E}^\circ$ stetig. Dies gilt nach Proposition 4.9 auch für $\lambda = 0$. Damit folgt wegen Lemma I.2.13 die schwache Stetigkeit der Abbildung $P(\cdot,x) : [0,\infty) \mapsto \mathcal{S}(\mathrm{E})$. Sei nun $1 \le j \le d$ fest und $\{t_n\} \subseteq (0,\infty)$ eine Nullfolge. Nach Proposition 4.2 ist

$$\varphi_j{}^{(n)}(\lambda) := \frac{\psi_j(t_n,\lambda) - \lambda_j}{t_n}, \qquad \lambda \in \mathrm{E}, \tag{4.10}$$

die kumulantenerzeugende Funktion von $P_j{}^{(n)} := P(t_n, e_j/t_n) \star \epsilon_{-e_j/t_n} \in \mathcal{S}(\mathrm{X})$, und es gilt $P_j{}^{(n)} \xrightarrow{\text{v}} P_j$, wobei $P_j \in \mathcal{S}(\mathrm{X})\backslash\{0\}$ das zu L_j gehörende Sub-Wahrscheinlichkeitsmaß ist. Nach Proposition 4.9 gilt $\varphi_j{}^{(n)}(0) \to L_j(0)$, und mit Proposition I.2.13 folgt $P_j{}^{(n)} \xrightarrow{\text{w}} P_j$. Wir erhalten $\varphi_j{}^{(n)}(\lambda) \to L_j(\lambda)$ für alle $\lambda \in \mathrm{E}$ nach Proposition I.2.11. Damit ist die Behauptung gezeigt. □

4.11 Theorem (Zugehörige Differentialgleichung). *Sei $\{P(t,x)\}$ eine Verzweigungsübergangsfunktion mit kumulantenerzeugender Funktion ψ und Charakterisierung $L : \mathrm{E} \mapsto \mathbb{R}^d$. Dann löst die Funktion $\psi(\cdot,\lambda) : [0,\infty) \mapsto \mathrm{E}$ für jedes $\lambda \in \mathrm{E}$ das autonome Anfangswertproblem $y' = L(y)$, $y(0) = \lambda$. Für $\lambda \in \mathrm{E}^\circ$ ist $\psi(\cdot,\lambda) : [0,\infty) \mapsto \mathrm{E}$ dadurch eindeutig bestimmt.*

Beweis. Man zeigt unter Verwendung von Theorem 4.10 analog zum Beweis von Proposition 4.6, daß $\psi(\cdot,\lambda) : [0,\infty) \mapsto \mathrm{E}$ für jedes $\lambda \in \mathrm{E}$ das autonome Anfangswertproblem $y' = L(y)$, $y(0) = \lambda$ löst. Die behauptete Eindeutigkeit wurde dort bereits gezeigt. □

Zur Bestimmung des infinitesimalen Erzeugers der korrespondierenden Feller-Halbgruppe benötigen wir das folgende technische Hilfsmittel.

4.12 Lemma. *Seien $\{s_n\} \subseteq [0,\infty)$, $\{a_n\} \subseteq \mathbb{R}^d$ Folgen mit $s_n \to \infty$ und $s_n a_n \to a \in \mathbb{R}^d$. Für $\lambda \in \mathrm{E}^\circ$ definiere $g_\lambda{}^{(n)} : \mathrm{E} \mapsto \mathbb{R}$ durch*

$$g_\lambda{}^{(n)}(x) := s_n\big(\exp(-\langle x, a_n\rangle) - 1\big) \cdot \exp(-\langle \lambda, x\rangle), \qquad x \in \mathrm{E},$$

und $g_\lambda(x) := -\langle x, a\rangle \exp(-\langle \lambda, x\rangle)$ für $x \in \mathrm{E}$. Dann gilt $g_\lambda{}^{(n)} \to g_\lambda$ für jedes $\lambda \in \mathrm{E}^\circ$.

Beweis. Es gilt $|\exp(-y) - 1 + y| \leq y^2 \exp(|y|)$ für $y \in \mathbb{R}$. Also erhalten wir mit $a_n' := \sum_{j=1}^d |\langle a_n, e_j\rangle| \cdot e_j \in \mathrm{E}$ für festes $\lambda \in \mathrm{E}^\circ$ die Abschätzung

$$\begin{aligned}&\left|g_\lambda{}^{(n)}(x) + \langle x, s_n a_n\rangle \exp(-\langle\lambda, x\rangle)\right| \\ &\qquad = s_n \left|\exp(-\langle x, a_n\rangle) - 1 + \langle x, a_n\rangle\right| \cdot \exp(-\langle\lambda, x\rangle) \\ &\qquad \leq s_n \langle x, a_n\rangle^2 \exp(\langle x, a_n'\rangle) \cdot \exp(-\langle\lambda, x\rangle) \\ &\qquad \leq s_n |a_n|^2 \cdot |x|^2 \exp(-\langle\lambda - a_n', x\rangle), \qquad x \in \mathrm{E}.\end{aligned}$$

Wegen $a_n \to 0$ gilt $a_n' \to 0$, also strebt dieser Ausdruck gleichmäßig auf E gegen Null. Ferner gilt

$$\begin{aligned}&\left|\langle x, a\rangle \exp(-\langle\lambda, x\rangle) - \langle x, s_n a_n\rangle \exp(-\langle\lambda, x\rangle)\right| \\ &\qquad\qquad \leq |a - s_n a_n| \cdot |x| \exp(-\langle\lambda, x\rangle), \qquad x \in \mathrm{E}.\end{aligned}$$

Damit folgt die Behauptung. □

4.13 Theorem (Infinitesimaler Erzeuger). *Sei $\{P(t,x)\}$ eine Verzweigungsübergangsfunktion mit Charakterisierung $L : \mathrm{E} \mapsto \mathbb{R}^d$. Ist G der infinitesimale Erzeuger der korrespondierenden Feller-Halbgruppe $\{T(t)\}$, so gilt*

$$G f_\lambda(x) = -\langle x, L(\lambda)\rangle f_\lambda(x), \qquad \lambda \in \mathrm{E}^\circ.$$

Dadurch ist G eindeutig bestimmt. Die Algebra $\mathcal{A} = \langle f_\lambda \mid \lambda \in \mathrm{E}^\circ\rangle$ ist ein Core von G.

Beweis. Nach Definition des infinitesimalen Erzeugers ist zu zeigen, daß für jede Nullfolge $\{t_n\} \subseteq (0, \infty)$ und jedes $\lambda \in \mathrm{E}^\circ$

$$t_n^{-1}\big(T(t_n) f_\lambda(x) - f_\lambda(x)\big) \longrightarrow -\langle x, L(\lambda)\rangle f_\lambda(x)$$

gleichmäßig auf E. Sei dazu $\lambda \in \mathrm{E}^\circ$ fest. Ist ψ die kumulantenerzeugende Funktion von $\{P(t,x)\}$, so definiere $a_n := \psi(t_n, \lambda) - \lambda$ und $s_n := t_n^{-1}$ für $n \in \mathbb{N}$. Nach Proposition 4.1 gilt $s_n a_n \to L(\lambda) =: a \in \mathbb{R}^d$. Also sind die Voraussetzungen von Lemma 4.12 erfüllt. Mit den dortigen Bezeichnungen gilt

$$\begin{aligned}t_n^{-1}\big(T(t_n) f_\lambda(x) - f_\lambda(x)\big) &= t_n^{-1}\Big(\exp\big(-\langle x, \psi(t_n, \lambda)\rangle\big) - \exp(-\langle\lambda, x\rangle)\Big) \\ = t_n^{-1}\Big(\exp\big(-\big\langle x, \psi(t_n, \lambda) - \lambda\big\rangle\big) - 1\Big) &\cdot \exp(-\langle\lambda, x\rangle) \\ = s_n\big(\exp(-\langle x, a_n\rangle) - 1\big) \cdot \exp(-\langle\lambda, x\rangle) &= g_\lambda{}^{(n)}(x), \qquad x \in \mathrm{E},\end{aligned}$$

und

$$-\langle x, L(\lambda)\rangle f_\lambda(x) = -\langle x, a\rangle \exp(-\langle\lambda, x\rangle) = g_\lambda(x), \qquad x \in \mathrm{E}.$$

Damit folgt die behauptete Konvergenz. Es bleibt zu zeigen, daß $\mathcal{A}$ ein Core von G ist. $\mathcal{A}$ ist nach Lemma 2.9 dicht in $\widehat{\mathrm{C}}(\mathrm{E})$ und wird von $T(t)$ für jedes $t \geq 0$ nach Proposition 3.2 in sich selbst abgebildet. Dies ist aber nach Ethier & Kurtz (1986), Proposition 1.3.3, eine hinreichende Bedingung. □

Wir formulieren im folgenden zwei einfache Kriterien, die sich mit der Konservativität einer Verzweigungsübergangsfunktion beschäftigen.

4.14 Lemma. *Sei $\{P(t,x)\}$ eine Verzweigungsübergangsfunktion mit Charakterisierung $L : \mathrm{E} \mapsto \mathbb{R}^d$. Ist $\{P(t,x)\}$ konservativ, so gilt $L(0) = 0$.*

Beweis. Wir zeigen die Umkehrung. Gilt $L(0) > 0$, so ist Null keine Lösung des Anfangswertproblems $y' = L(y)$, $y(0) = 0$. Also existieren nach Lemma 4.9 ein $1 \leq j \leq d$ und ein $t > 0$ mit $\psi_j(t,0) > 0$, d.h., $P(t,e_j) \notin \mathcal{P}(\mathrm{E})$. □

4.15 Proposition. *Sei $\{P(t,x)\}$ eine Verzweigungsübergangsfunktion mit Charakterisierung $L : \mathrm{E} \mapsto \mathbb{R}^d$. Ist $L(0) = 0$ und L lokal Lipschitz-stetig auf E, so ist $\{P(t,x)\}$ konservativ.*

Beweis. Nach Voraussetzung ist Null eine Lösung des Anfangswertproblems $y' = L(y)$, $y(0) = 0$. Setzen wir $U := \mathrm{E}$ und $y_0 := 0$ in Lemma 4.5, so sehen wir, daß dies die einzige Lösung ist. Mit Proposition 4.9 folgt $\psi(t,0) = 0$ für alle $t \in [0,\infty)$. Mit der Darstellung

$$\check{P}(t,x,\lambda) = \exp(-\langle x, \psi(t,\lambda)\rangle), \qquad (t,x) \in [0,\infty) \times \mathrm{E}, \lambda \in \mathrm{E},$$

folgt $\check{P}(t,x,0) = 1$ für alle $(t,x) \in [0,\infty) \times \mathrm{E}$, also ist $\{P(t,x)\}$ konservativ. □

Für $d = 1$ ist jede autonome Differentialgleichung (prinzipiell) durch eine Trennung der Variablen lösbar. Daher können wir in diesem Fall eine notwendige und hinreichende Bedingung für die Konservativität einer Verzweigungsübergangsfunktion angeben.

4.16 Proposition. *Sei $d = 1$ und $\{P(t,x)\}$ eine Verzweigungsübergangsfunktion mit Charakterisierung $L : \mathrm{E} \mapsto \mathbb{R}$. Dann ist $\{P(t,x)\}$ genau dann defekt, wenn*

$$0 < \lim_{\epsilon \to 0} \int_0^\epsilon \frac{d\lambda}{L(\lambda)} < \infty. \tag{4.11}$$

Beweis. Sei ψ die kumulantenerzeugende Funktion von $\{P(t,x)\}$. Wir nehmen zuerst an, daß $L(\lambda) \leq 0$ für alle $\lambda \in (0,\infty)$. Mit (4.8) folgt $\psi(\cdot,0) \leq 0$, d.h., $\psi(\cdot,0) = 0$. Also ist $\{P(t,x)\}$ konservativ. Wir können daher nun annehmen, daß ein $\epsilon > 0$ mit $L(\epsilon) > 0$ existiert. Ist L die kumulantenerzeugende Funktion von $P \in \mathcal{S}(\mathrm{X})$, so folgt für $\alpha \in (0,1)$ und $\beta := 1 - \alpha$ mit der Hölder-Ungleichung ($p := \alpha^{-1}$, $q := \beta^{-1}$)

$$\check{P}(\alpha\lambda + \beta\varrho) \leq \check{P}(\lambda)^\alpha \cdot \check{P}(\varrho)^\beta, \qquad \lambda, \varrho \in [0,\infty).$$

Damit ist L konkav. Wir erhalten also $L(\lambda) > 0$ für alle $\lambda \in (0,\epsilon]$.

(a) Es gelte $\delta := \int_0^\epsilon L(\lambda)^{-1} d\lambda < \infty$. Dann existiert ein $\varphi : [0,\delta] \mapsto [0,\epsilon]$ mit $\int_0^{\varphi(t)} L(\lambda)^{-1} d\lambda = t$ für $t \in [0,\delta]$. Die Funktion φ löst das Anfangswertproblem $y' = L(y)$, $y(0) = 0$, auf dem Intervall $[0,\delta]$. Ist λ so klein, daß $\int_\lambda^\epsilon L(\lambda)^{-1} d\lambda > \delta/2$, so folgt

$$\int_\lambda^{\psi(t,\lambda)} \frac{d\lambda'}{L(\lambda')} = t = \int_0^{\varphi(t)} \frac{d\lambda'}{L(\lambda')}, \qquad t \in [0,\delta/2],$$

und mit $\lambda \to 0$ erhalten wir $\psi(t,0) = \varphi(t)$ für alle $t \in [0,\delta/2]$. Offensichtlich ist φ auf $(0,\delta)$ positiv. Damit ist $\{P(t,x)\}$ defekt.

(b) Sei umgekehrt $\{P(t,x)\}$ defekt. Wegen $\psi(s+t,0) = \psi(s,\psi(t,0)) \geq \psi(s,0)$ für $s,t \geq 0$ $\big(\psi(s,\cdot)$ ist monoton wachsend$\big)$ ist $\psi(\cdot,0)$ monoton wachsend. Daher existieren ein $t_0 \geq 0$ und ein $\delta > 0$ mit $\psi(t_0,0) = 0$ und $\psi(t_0+t,0) \in (0,\epsilon]$ für alle $t \in (t_0, t_0+\delta]$. Definiere $\varphi : [0,\delta] \mapsto [0,\epsilon]$ durch $\varphi(t) := \psi(t_0+t,0)$ für $t \in [0,\delta]$. Dann löst φ das Anfangswertproblem $y' = L(y)$, $y(0) = 0$, auf dem Intervall $[0,\delta]$, und es folgt

$$\delta = \int_0^\delta \frac{\varphi'(t)}{L(\varphi(t))}\, dt = \int_0^{\varphi(\delta)} \frac{d\lambda}{L(\lambda)}\,.$$

Wegen $0 < \varphi(\delta) \leq \epsilon$ folgt $\int_0^\epsilon L(\lambda)^{-1} d\lambda < \infty$, also die Behauptung. $\square$

5. Anmerkungen & Literatur

Die Theorie der Übergangsfunktionen und der korrespondierenden Prozesse findet man z.B. in Ethier & Kurtz (1986), Abschnitt 4.1, oder Rogers & Williams (1994), Abschnitt III.2. In der Literatur unterscheiden sich die Definitionen einer Feller-Halbgruppe. Wir verwenden hier die Definition von Rogers & Williams (1994).

Die bisher durchgeführten Untersuchungen der Laplace-Transformierten von Verzweigungsübergangsfunktionen beschränken sich auf den konservativen Fall. Die Pionierarbeit wurde von Lamperti (1967b) im Fall $d = 1$ geleistet. Die Regularität einer Verzweigungsübergangsfunktion entspricht in diesem Fall der dort verwendeten Nichtdegeneriertheit.

Untersuchungen zum Verhalten im Zeitpunkt Null wurden für mehrdimensionale Verzweigungsprozesse erstmals von Gihman & Skorohod (1975) vorgenommen. Dabei werden jedoch über die (hier nicht geforderte) stochastische Stetigkeit der Übergangsfunktion hinausgehende Voraussetzungen verwendet. Die dort mit Methoden der Funktionentheorie mehrerer Veränderlicher gefundenden Gleichungen (siehe Abschnitt V.2) konnten hier mit reellen Methoden entwickelt und auf den nichtkonservativen Fall ausgedehnt werden.

Der Nachweis der Feller-Eigenschaft der zugehörigen Operatorhalbgruppe verallgemeinert die Ergebnisse von Lamperti (1967a) auf mehrdimensionale Verzweigungsprozesse mit Zustandsraum E^Δ. Eine (nicht korrekte) Darstellung des infinitesimalen Erzeugers der Feller-Halbgruppe findet man in Gihman & Skorohod (1975), Abschnitt V.2. In dieser Arbeit wurde erstmals eine vollständige Darstellung dieses Erzeugers allein mit Hilfe von Laplace-Transformierten vorgenommen. Für die allgemein übliche Darstellung mit Hilfe abstrakter Funktionenräume vergleiche auch Abschnitt IV.4 dieser Arbeit.

Die notwendige und hinreichende Bedingung für Konservativität im Fall $d = 1$ (Proposition 4.16) stammt von Grimvall (1974).

KAPITEL III

CHARAKTERISIERUNG & KONSTRUKTION

1. Zusammenfassung

In diesem Kapitel untersuchen wir die Charakterisierung einer Verzweigungsübergangsfunktion mit Hilfe des Laplace-Kalküls auf $\mathcal{S}(\mathrm{X})$. Wir bestimmen die Lévy Khintchine-Darstellung dieser Charakterisierung und konstruieren umgekehrt zu jeder solchen Darstellung eine zugehörige Verzweigungsübergangsfunktion.

Wie wir in Kapitel II gesehen haben, ist die j-te Komponente L_j der Charakterisierung die kumulantenerzeugende Funktion einer spektral positiven unendlich teilbaren Verteilung $P_j \in \mathcal{S}(\mathrm{X})$. Jedoch kommen nicht alle spektral positiven unendlich teilbaren Verteilungen als Charakterisierungen in Frage. Wir zeigen in Abschnitt 2, daß $L_j : \mathrm{E} \mapsto \mathbb{R}$ für $1 \leq j \leq d$ notwendig die folgende Form besitzt:

$$L_j(\lambda) = \langle a_j, \lambda \rangle - \frac{1}{2}\sigma_j^2 \lambda_j^2 - \int M_j(\lambda, y)\, \mu_j(dy) + \delta_j, \qquad \lambda \in \mathrm{E}. \tag{1.1}$$

Dabei ist

$$M_j(\lambda, y) := \exp(-\langle \lambda, y \rangle) - 1 + \frac{\lambda_j y_j}{1 + |y|^2}, \qquad (\lambda, y) \in \mathrm{E} \times \mathrm{X},$$

$a_j \in \mathrm{X}$ mit $\langle a_j, e_k \rangle \in [0, \infty)$ für $k \neq j$, $\sigma_j, \delta_j \geq 0$ und μ_j ein σ-endliches Borel-Maß auf $\mathrm{E} \setminus \{0\}$ mit

$$\int \Big(\big(\sum_{k \neq j} y_k + y_j^2 \big) \wedge 1 \Big) \mu_j(dy) < \infty.$$

Dazu verwenden wir die Tatsache, daß die Verteilungen einer Verzweigungsübergangsfunktion unendlich teilbare Verteilungen auf E sind, und das in Kapitel I entwickelte Laplace-Kalkül spektral beschränkter unendlich teilbarer Verteilungen.

Den Hauptteil dieses Kapitels bildet Abschnitt 3, in dem gezeigt wird, daß umgekehrt zu jedem Tupel solcher spektral positiver unendlich teilbarer Verteilungen eine Verzweigungsübergangsfunktion existiert, die durch dieses Tupel charakterisiert wird. Wie in der allgemeinen Theorie der Charakterisierung von Markov-Prozessen überdecken sich hier die Konzepte von Charakterisierung und Approximation. Zur Konstruktion der allgemeinen Verzweigungsübergangsfunktion formulieren wir daher Konvergenzaussagen, die auch im folgenden Kapitel benötigt werden.

In Abschnitt 4 erhalten wir mit Darstellung (1.1) der Charakterisierung einer Verzweigungsübergangsfunktion ein einfaches Kriterium für Konservativität und betrachten im eindimensionalen Fall die Klassen der durch Poisson-Verteilungen oder stabile Verteilungen charakterisierten Verzweigungsübergangsfunktionen.

2. Charakterisierung

2.1 Lemma. *Sei* $\{P_n\} \subseteq \mathcal{P}(\mathrm{X})$ *mit* $P_n \xrightarrow{\mathrm{v}} P \in \mathcal{S}(\mathrm{X})$ *und* $1 \leq j \leq d$*. Ist* $\pi_j : X \mapsto \mathbb{R}$ *die* j*-te kanonische Projektion, und für jedes* $n \in \mathbb{N}$ *das transportierte Maß* ${P_n}^{(\pi_j)}$ *auf* $[0, \infty)$ *konzentriert, so gilt dies auch für* $P^{(\pi_j)}$*.*

2.2 Bemerkung. Diese Aussage folgt NICHT trivialerweise aus ${P_n}^{(\pi_j)} \xrightarrow{\mathrm{v}} P^{(\pi_j)}$, da die kanonischen Projektionen für $d > 1$ keine stetigen Fortsetzungen auf X^Δ besitzen. So gilt z.B. $P_n \xrightarrow{\mathrm{v}} 0$ für $P_n := \epsilon_{(0,n)}$, aber ${P_n}^{(\pi_1)} = \epsilon_0$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Beweis. Wir zeigen die Behauptung für $j = 1$. Sei dazu $[\alpha, \beta] \subseteq (-\infty, 0)$ ein Intervall mit $P^{(\pi_1)}(\partial[\alpha, \beta]) > 0$. Dann gilt nach Definition $P([\alpha, \beta] \times \mathbb{R}^{d-1}) > 0$. Damit existiert ein Intervall $[\gamma, \delta] \subseteq \mathbb{R}^{d-1}$ mit $P(\partial([\alpha, \beta] \times [\gamma, \delta])) = 0$ und $P([\alpha, \beta] \times [\gamma, \delta]) > 0$ (Stetigkeit von unten). Wegen $P_n \xrightarrow{\mathrm{v}} P$ gilt $P_n([\alpha, \beta] \times [\gamma, \delta]) > 0$, also ${P_n}^{(\pi_1)}([\alpha, \beta]) > 0$ für hinreichend große $n \in \mathbb{N}$. Damit haben wir gezeigt, daß $P^{(\pi_1)}(K) = 0$ für jedes Kompaktum $K \subseteq (-\infty, 0)$. Es folgt die Behauptung. □

2.3 Lemma. *Sei* $P \in \mathcal{S}(\mathrm{X})$ *eine spektral positive unendlich teilbare Verteilung mit Darstellung* $P =: [a, \Sigma, \mu, \delta]$, $\Sigma =: (\sigma_{kl})$ *und* $1 \leq j \leq d$*. Dann ist das transportierte Maß* $P^{(\pi_j)}$ *genau dann auf* $[0, \infty)$ *konzentriert, wenn* $\sigma_{jl} = 0$ *für* $1 \leq l \leq d$, $\int (y_j \wedge 1)\, \mu(dy) < \infty$ *und* $a_j - \int y_j (1 + |y|^2)^{-1}\, \mu(dy) \in [0, \infty)$*.*

Beweis. Wir berechnen die Laplace-Transformierte von $P^{(\pi_j)}$ mit dem Transformationssatz. Es gilt

$$\check{P}^{(\pi_j)}(\lambda) = \int \exp(\lambda y_j)\, P(dy) = \check{P}(\lambda e_j), \qquad \lambda \in [0, \infty).$$

Damit besitzt $P^{(\pi_j)}$ die kumulantenerzeugende Funktion

$$\psi_j(\lambda) := a_j \lambda - \frac{1}{2}\sigma_{jj}\lambda^2 - \int M(\lambda e_j, y)\, \mu(dy) + \delta, \qquad \lambda \in [0, \infty),$$

wobei

$$M(\lambda, y) := \exp(-\langle \lambda, y \rangle) - 1 + \frac{\langle \lambda, y \rangle}{1 + |y|^2}, \qquad (\lambda, y) \in \mathrm{E} \times \mathrm{X}. \tag{2.1}$$

Wir definieren $a_j' := \int \big(y_j/(1 + y_j^2) - y_j/(1 + |y|^2) \big)\, \mu(dy)$. Zum Nachweis der Existenz dieses Integrals verwende $\int (|y|^2 \wedge 1)\, \mu(dy) < \infty$ und die Darstellung

$$\frac{y_j}{1 + y_j^2} - \frac{y_j}{1 + |y|^2} = \frac{y_j}{(1 + y_j^2)} \cdot \frac{1}{1 + |y|^2} \sum_{k \neq j} y_k^2, \qquad y \in \mathrm{E}.$$

Definieren wir die Funktion N analog zu (2.1) auf $[0,\infty)\times[0,\infty)$, so erhalten wir die Darstellung

$$\psi_j(\lambda) = (a_j + a_j')\lambda - \frac{1}{2}\sigma_{jj}\lambda^2 - \int N(\lambda,y)\,\mu^{(\pi_j)}(dy) + \delta, \qquad \lambda\in[0,\infty). \tag{2.2}$$

(a) Gelten die angegebenen Bedingungen, so gilt $\sigma_{jj}=0$ und $\int (y\wedge 1)\mu^{(\pi_j)}(dy)<\infty$. Definiere $b_j' := \int y(1+y^2)^{-1}\mu^{(\pi_j)}(dy)$ und

$$b_j := a_j + a_j' - b_j' = a_j - \int \frac{y_j}{1+|y|^2}\,\mu(dy)\in[0,\infty).$$

Beachte nun, daß $\mu^{(\pi_j)}$ auf $[0,\infty)$ konzentriert ist. Nach Theorem I.3.16 ist $P^{(\pi_j)}$ auf $[0,\infty)$ konzentriert wegen

$$\psi_j(\lambda) = b_j\lambda + \int \big(1-\exp(-\lambda y)\big)\,\mu^{(\pi_j)}(dy) + \delta, \qquad \lambda\in[0,\infty).$$

(b) Gilt umgekehrt $P^{(\pi_j)}\in\mathcal{S}([0,\infty))$, so folgt wiederum mit Theorem I.3.16 die Darstellung

$$\psi_j(\lambda) = b_j\lambda + \int \big(1-\exp(-\lambda y)\big)\,\nu(dy) + \eta, \qquad \lambda\in[0,\infty),$$

wobei $b_j\in[0,\infty)$, $\eta\geq 0$ und ν ein σ-endliches Borel-Maß auf $(0,\infty)$, das die Bedingung $\int (y\wedge 1)\,\nu(dy)<\infty$ erfüllt. Mit $b_j' := \int y(1+y^2)^{-1}\nu(dy)$ erhält man

$$\psi_j(\lambda) = (b_j + b_j')\lambda - \int N(\lambda,y)\,\nu(dy) + \eta, \qquad \lambda\in[0,\infty).$$

Nach dem Theorem I.3.11 ist diese Darstellung eindeutig. Ein Vergleich mit (2.2) liefert $a_j + a_j' = b_j + b_j'$, $\sigma_{jj}=0$, $\delta=\eta$ und $\mu^{(\pi_j)}=\nu$. Damit erhalten wir die Abschätzung $\int (y_j\wedge 1)\,\mu(dy) = \int (y\wedge 1)\,\nu(dy)<\infty$ und

$$a_j - \int \frac{y_j}{1+|y|^2}\,\mu(dy) = a_j + a_j' - b_j' = b_j\in[0,\infty).$$

Es bleibt zu zeigen, daß $\sigma_{jl}=0$ für $l\neq j$. Schreibe dazu $f(x) := \langle \Sigma x, x\rangle$ für $x\in\mathbb{R}^d$. Wegen $\sigma_{jj}=0$ gilt

$$f(x) = \sum_{k,l\neq j}\sigma_{kl}x_kx_l + 2\big(\sum_{l\neq j}\sigma_{jl}x_l\big)x_j, \qquad x\in\mathbb{R}^d.$$

Damit ist $f:\mathbb{R}^d\mapsto\mathbb{R}$ in der j-ten Variablen linear. Da Σ positiv semidefinit ist, gilt notwendig $\sum_{l\neq j}\sigma_{jl}x_l = 0$ für alle $x\in\mathbb{R}^d$, d.h., $\sigma_{jl}=0$ für $l\neq j$. □

Wir formulieren eine einfache, zu Lemma I.3.5 analoge Abschätzung für den Integranden in der Darstellung (1.1), die jedoch erst später benötigt wird.

2.4 Lemma. *Definiere für* $1 \le j \le d$ *die Funktion* $M_j : \mathrm{X} \times \mathrm{X} \mapsto \mathbb{R}$ *durch*

$$M_j(\lambda, y) := \exp(-\langle \lambda, y\rangle) - 1 + \frac{\lambda_j y_j}{1+|y|^2}, \qquad (\lambda, y) \in \mathrm{X} \times \mathrm{X}. \tag{2.3}$$

Dann existiert eine stetige Funktion $r : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ *mit* $r(0) = 0$ *derart, daß für jedes* $R > 0$

$$\begin{aligned}|M_j(\lambda, y)| \le |\lambda| \Big(\sum_{k\neq j} |y_k| + R|y|^2 \Big) \\ + \frac{1}{2}\,|\lambda|^2 |y|^2 \Big(1 + \sup_{|y|\le R} \big| r(\langle \lambda, y\rangle)\big| \Big), \qquad \lambda \in \mathrm{X}, |y| \le R.\end{aligned}$$

Beweis. Wähle die Funktion r als quadratisches Restglied der Taylor-Entwicklung der Exponentialfunktion. Es gilt

$$\exp(-x) - 1 = -x + \frac{1}{2}x^2(1 + r(x)), \qquad x \in \mathbb{R}. \tag{2.4}$$

Damit erhalten wir

$$M_j(\lambda, y) = -\langle \lambda, y\rangle + \frac{\lambda_j y_j}{1+|y|^2} + \frac{1}{2}\langle \lambda, y\rangle^2 \big(1 + r(\langle \lambda, y\rangle)\big), \qquad (\lambda, y) \in \mathrm{X} \times \mathrm{X},$$

und wegen

$$\langle \lambda, y\rangle - \frac{\lambda_j y_j}{1+|y|^2} = \sum_{k\neq j} \lambda_k y_k + \lambda_j y_j \,\frac{|y|^2}{1+|y|^2}$$

folgt die Behauptung. □

2.5 Theorem (Charakterisierung). *Sei* $\{P(t, x)\}$ *eine Verzweigungsübergangsfunktion mit Charakterisierung* $L : \mathrm{E} \mapsto \mathbb{R}^d$ $\big(\mathbb{P} = (P_1, \dots, P_d) \in \mathcal{S}(\mathrm{X})^d\big)$. *Dann ist* P_j *für jedes* $1 \le j \le d$ *eine spektral positive unendlich teilbare Verteilung mit kumulantenerzeugender Funktion*

$$L_j(\lambda) = \langle a_j, \lambda\rangle - \frac{1}{2}\sigma_j^2 \lambda_j^2 - \int M_j(\lambda, y)\, \mu_j(dy) + \delta_j, \qquad \lambda \in \mathrm{E}. \tag{2.5}$$

Dabei ist $a_j \in \mathrm{X}$ *mit* $\langle a_j, e_k\rangle \in [0, \infty)$ *für* $k \neq j$, $\sigma_j, \delta_j \ge 0$ *und* μ_j *ein* σ*-endliches Borel-Maß auf* $\mathrm{E} \setminus \{0\}$ *mit*

$$\int \Big(\big(\sum_{k\neq j} y_k + y_j^2\big) \wedge 1 \Big) \mu_j(dy) < \infty. \tag{2.6}$$

Wir verwenden im folgenden die (eindeutige) Darstellung $P_j =: \langle a_j, \sigma_j^2, \mu_j, \delta_j\rangle$.

Beweis. Sei $1 \le j \le d$ fest. Setze $P_n := P(1/n, ne_j) \star \epsilon_{-ne_j}$. Nach Proposition II.4.2 ist $\{P_n\}$ eine Folge von spektral positiven unendlich teilbaren Verteilungen auf X, und es gilt $P_n \stackrel{v}{\to} P_j \in \mathcal{S}(\mathrm{X}) \setminus \{0\}$. Nach dem Stetigkeitssatz I.4.8 ist P_j eine spektral positive unendlich teilbare Verteilung. Mit der Darstellung $P_j =: [b, \Sigma, \mu, \delta]$ erhalten wir

$$L_j(\lambda) = \langle b, \lambda \rangle - \frac{1}{2}\langle \Sigma\lambda, \lambda \rangle - \int M(\lambda, y)\, \mu(dy) + \delta, \qquad \lambda \in \mathrm{E},$$

wobei

$$M(\lambda, y) := \exp(-\langle \lambda, y \rangle) - 1 + \frac{\langle \lambda, y \rangle}{1 + |y|^2} \qquad (\lambda, y) \in \mathrm{E} \times \mathrm{E}.$$

Dabei ist $b \in \mathrm{X}$, $\delta \ge 0$, $\Sigma = (\sigma_{jk}) \in \mathbb{R}_{d\times d}$ eine symmetrische, positiv semidefinite Matrix und μ ein σ-endliches Borel-Maß auf $\mathrm{E} \setminus \{0\}$ mit $\int (|y|^2 \wedge 1)\, \mu(dy) < \infty$. Nach Definition von P_n ist das transportierte Maß ${P_n}^{(\pi_k)}$ für $k \ne j$ auf $[0, \infty)$ konzentriert. Nach Lemma 2.1 gilt dies auch für ${P_j}^{(\pi_k)}$. Mit Lemma 2.3 folgt $\sigma_{kl} = \delta_{jk}\delta_{jl}\sigma^2$ für ein $\sigma \ge 0$, $\int (y_k \wedge 1)\, \mu(dy) < \infty$ für $k \ne j$ und

$$a_k := b_k - \int \frac{y_k}{1 + |y|^2}\, \mu(dy) \in [0, \infty), \qquad k \ne j.$$

Setzen wir $a_j := b_j$, so folgt Bedingung (2.6) und die Darstellung (2.5). □

3. Konstruktion

3.1 Definition. Ist $\varphi : \mathrm{E} \mapsto \mathrm{E}$ eine Abbildung, so sei $\varphi^{\langle k \rangle}$ für $k \in \mathbb{N}_0$ die k-te Iterierte von φ. Dabei ist $\varphi^{\langle 0 \rangle}(\lambda) := \lambda$ für alle $\lambda \in \mathrm{E}$.

3.2 Proposition. *Für $n \in \mathbb{N}$ und $1 \le j \le d$ sei ${\varphi_j}^{(n)}$ die kumulantenerzeugende Funktion eines Sub-Wahrscheinlichkeitsmaßes auf* E. *Ferner sei $\varphi_n := \big({\varphi_1}^{(n)}, \dots, {\varphi_d}^{(n)}\big)$ und $\langle {\varphi_n}^{\langle k \rangle}, e_j \rangle$ für jedes $1 \le j \le d$ und jedes $k \in \mathbb{N}_0$ die kumulantenerzeugende Funktion eines Sub-Wahrscheinlichkeitsmaßes auf* E. *Sei $\{k_n\} \subseteq \mathbb{N}_0$ mit $k_n \to \infty$. Definiere*

$$\psi_n(t, \lambda) := \varphi_n^{\langle [k_n t] \rangle}(\lambda), \qquad (t, \lambda) \in [0, \infty) \times \mathrm{E}.$$

Es existiere ein $t_0 > 0$ derart, daß der Grenzwert $\psi(t, \lambda) := \lim_{n\to\infty} \psi_n(t, \lambda)$ für alle $(t, \lambda) \in [0, t_0] \times \mathrm{E}^\circ$ existiert. Ferner gelte $\lim_{t\to 0} \psi(t, \lambda) = \lambda$ für alle $\lambda \in \mathrm{E}^\circ$.

Dann gilt $\varphi_n(\lambda) \to \lambda$ für alle $\lambda \in \mathrm{E}^\circ$ und der Grenzwert $\psi(t, \lambda) := \lim_{n\to\infty} \psi_n(t, \lambda) \in \mathrm{E}^\circ$ existiert für alle $(t, \lambda) \in [0, \infty) \times \mathrm{E}^\circ$. Ist (die Fortsetzung von) $\psi_j(t, \cdot)$ für jedes $1 \le j \le d$ und jedes $t \ge 0$ die kumulantenerzeugende Funktion einer unendlich teilbaren Verteilung auf E, *so existiert eine reguläre Verzweigungsübergangsfunktion $\{P(t, x)\}$ mit kumulantenerzeugender Funktion $\psi := (\psi_1, \dots, \psi_d)$.*

Beweis. Wir benötigen zunächst ein technisches Hilfsmittel. Man überlegt sich leicht, daß für eine beliebige Folge $\{m_n\} \subseteq \mathbb{N}_0$ mit $m_n \to \infty$ die Menge

$$\Gamma_N := \left\{ t \in [0, t_0] \,\middle|\, m_n t - [m_n t] < \frac{1}{2}, n \geq N \right\}$$

für jedes $N \in \mathbb{N}$ Lebesgue-Maß Null besitzt. Daher existieren stets beliebig kleine $0 < t \leq t_0$ derart, daß unendlich viele $n \in \mathbb{N}$ mit $m_n t - [m_n t] \geq 1/2$ existieren. In diesem Fall gilt $[m_n 2t] = 2[m_n t] + 1$ unendlich oft.

Wegen $\lim_{t \to 0} \psi(t, \lambda) = \lambda$ für jedes $\lambda \in \mathrm{E}^\circ$ kann $t_0 > 0$ so gewählt werden, daß $\psi(t, \lambda) \in \mathrm{E}^\circ$ für alle $(t, \lambda) \in [0, t_0] \times \mathrm{E}^\circ$ (Dies gilt zunächst wegen der Konvergenz der zugehörigen kumulantenerzeugenden Funktionen für festes $\lambda \in \mathrm{E}^\circ$, aber nach Lemma II.2.5 auf ganz E°). Wir betrachten nun eine beliebige Teilfolge von $\{\varphi_n\}$ (die wir genauso bezeichnen). Mit obiger Überlegung, vollständiger Induktion und Diagonalfolgenbildung können wir o.B.d.A. annehmen, daß eine Folge $\{t_k\} \subseteq [0, t_0/2]$ mit $t_k \to 0$ und eine Teilfolge $\{\varphi_{l_n}\}$ derart existieren, daß $[k_{l_n} 2t_k] = 2[k_{l_n} t_k] + 1$ für alle $k, n \in \mathbb{N}$. Damit erhalten wir

$$\psi_{l_n}(2t_k, \lambda) = {\varphi_{l_n}}^{\langle 2[k_{l_n} t_k]+1 \rangle}(\lambda) = \varphi_{l_n}\big(\psi_{l_n}(t_k, \psi_{l_n}(t_k, \lambda))\big), \qquad \lambda \in \mathrm{E}^\circ. \tag{3.1}$$

Nach Voraussetzung ist die Abbildung $\langle \psi_n(t_k, \cdot), e_j \rangle : \mathrm{E} \mapsto \mathrm{E}$ für $1 \leq j \leq d$ die kumulantenerzeugende Funktion eines Sub-Wahrscheinlichkeitsmaßes auf E, die nach Proposition I.2.15 lokal gleichmäßig auf E° konvergiert. Wegen $\psi(t_k, \lambda) \in \mathrm{E}^\circ$ für $\lambda \in \mathrm{E}^\circ$ gilt $\lim_{n \to \infty} \psi_n(t_k, \psi_n(t_k, \lambda)) = \psi\big(t_k, \psi(t_k, \lambda)\big) \in \mathrm{E}^\circ$ für alle $\lambda \in \mathrm{E}^\circ$. Betrachte nun das zu $\langle \varphi_{l_n}(\cdot), e_j \rangle$ gehörige Sub-Wahrscheinlichkeitsmaß ${P_j}^{(l_n)} \in \mathcal{S}(\mathrm{E})$. Die Folge $\{{P_j}^{(l_n)}\}$ ist für jedes $1 \leq j \leq d$ relativ kompakt in $\mathcal{S}(\mathrm{E})$. Damit existiert eine weitere Teilfolge (die wir genauso bezeichnen) derart, daß ${P_j}^{(l_n)} \to P_j \in \mathcal{S}(\mathrm{E})$ für alle $1 \leq j \leq d$. Da das Argument auf der rechten Seite von (3.1) für jedes $k \in \mathbb{N}$ und jedes $\lambda \in \mathrm{E}^\circ$ gegen $\psi(t_k, \psi(t_k, \lambda)) \in \mathrm{E}^\circ$ konvergiert, können wir mit Proposition I.2.11 schließen, daß $P_j \neq 0$ für $1 \leq j \leq d$. Damit besitzt P_j für $1 \leq j \leq d$ eine kumulantenerzeugende Funktion φ_j, und es gilt $\varphi_{l_n} \to \varphi$ lokal gleichmäßig auf E°. Ein Grenzübergang in (3.1) liefert für jedes $k \in \mathbb{N}$ die Darstellung

$$\psi(2t_k, \lambda) = \varphi\big(\psi(t_k, \psi(t_k, \lambda))\big), \qquad \lambda \in \mathrm{E}^\circ.$$

Mit $k \to \infty$ folgt $\varphi(\lambda) = \lambda$ für alle $\lambda \in \mathrm{E}^\circ$ wegen der lokal gleichmäßigen Konvergenz $\psi(t, \lambda) \to \lambda$ für $t \to 0$. Fassen wir die Argumentation zusammen, so haben wir gezeigt, daß jede Teilfolge von $\{\varphi_n\}$ eine weitere Teilfolge $\{\varphi_{l_n}\}$ derart besitzt, daß $\varphi_{l_n}(\lambda) \to \lambda$ für alle $\lambda \in \mathrm{E}^\circ$. Dies ist aber äquivalent zu $\varphi_n(\lambda) \to \lambda$ für alle $\lambda \in \mathrm{E}^\circ$.

Seien nun $s, t \in [0, t_0]$ und $\lambda \in \mathrm{E}^\circ$ fest. Wegen $0 \leq [k_n(s+t)] - \big([k_n s] + [k_n t]\big) \leq 1$ gibt es zu jedem $n \in \mathbb{N}$ ein $\delta_n \in \{0, 1\}$ mit

$$\psi_n(s+t, \lambda) = {\varphi_n}^{\langle \delta_n \rangle}\big({\varphi_n}^{\langle [k_n s]+[nt] \rangle}(\lambda)\big) = {\varphi_n}^{\langle \delta_n \rangle}\big(\psi_n(s, \psi_n(t, \lambda))\big), \qquad \lambda \in \mathrm{E}^\circ.$$

Die Abbildung $\langle \psi_n(s,\cdot), e_j\rangle : \mathrm{E} \mapsto \mathrm{E}$ ist für $1 \le j \le d$ die kumulantenerzeugende Funktion eines Sub-Wahrscheinlichkeitsmaßes auf E, die nach Proposition I.2.15 lokal gleichmäßig auf E° konvergiert. Beachte nun, daß nach obigen Überlegungen $\varphi_n(\lambda) \to \lambda$ lokal gleichmäßig auf E° und $\psi(t,\lambda) \in \mathrm{E}^\circ$ für alle $\lambda \in \mathrm{E}^\circ$. Damit existiert der Grenzwert $\psi(t,\lambda) = \lim_{n\to\infty} \psi_n(t,\lambda) \in \mathrm{E}^\circ$ für alle $t \in [0, 2t_0]$, und es gilt

$$\psi(s+t,\lambda) = \psi\big(s, \psi(t,\lambda)\big), \qquad s,t \in [0,t_0], \lambda \in \mathrm{E}^\circ.$$

Vollständige Induktion liefert die Existenz des Grenzwerts für alle $(t,\lambda) \in [0,\infty) \times \mathrm{E}^\circ$ und die Gültigkeit dieser Funktionalgleichung für alle $s,t \in [0,\infty)$. Diese kann durch stetige Fortsetzung auf E ausgedehnt werden. Die Funktion $\psi(\cdot,\lambda) : [0,\infty) \mapsto \mathrm{E}$ ist damit als punktweiser Limes meßbarer Funktionen für jedes $\lambda \in \mathrm{E}$ meßbar. Offensichtlich gilt $\psi(0,\lambda) = \lambda$ für alle $\lambda \in \mathrm{E}$. Nach Voraussetzung ist $\psi_j(t,\cdot) : \mathrm{E} \mapsto \mathrm{E}$ für jedes $1 \le j \le d$ die kumulantenerzeugende Funktion einer unendlich teilbaren Verteilung auf E. Daher wird durch

$$\check{P}(t,x,\lambda) := \exp\big(- \langle x, \psi(t,\lambda)\rangle\big), \qquad (t,x) \in [0,\infty) \times \mathrm{E}, \lambda \in \mathrm{E},$$

eine Familie $\{P(t,x)\} \subseteq \mathcal{S}(\mathrm{E})$ definiert. Nach Proposition II.2.11 ist $\{P(t,x)\}$ eine nichtdegenerierte Verzweigungsübergangsfunktion und ψ die zugehörige kumulantenerzeugende Funktion. Wegen $\lim_{t\to 0} \psi(t,\lambda) = \lambda$ für $\lambda \in \mathrm{E}^\circ$ ist $\{P(t,x)\}$ stochastisch stetig, also nach Proposition II.3.8 regulär. □

3.3 Lemma. *Unter den Voraussetzungen von Proposition* 3.2 *sei* $L_n(\lambda) := k_n\big(\varphi_n(\lambda) - \lambda\big)$ *für* $\lambda \in \mathrm{E}$. *Dann gilt*

$$\psi_n(t,\lambda) = \lambda + \int_0^{[k_n t]/k_n} L_n\big(\psi_n(s,\lambda)\big)\, ds, \qquad (t,\lambda) \in [0,\infty) \times \mathrm{E}.$$

Beweis. Für $n \in \mathbb{N}$ erhalten wir durch Teleskopsummenbildung die Darstellung

$$\begin{aligned}
{\varphi_n}^{\langle [k_n t]\rangle}(\lambda) &= \lambda + \sum_{l=1}^{[k_n t]} \big({\varphi_n}^{\langle l\rangle}(\lambda) - {\varphi_n}^{\langle l-1\rangle}(\lambda)\big) \\
&= \lambda + \frac{1}{k_n} \sum_{l=1}^{[k_n t]} L_n\big({\varphi_n}^{\langle l-1\rangle}(\lambda)\big), \qquad (t,\lambda) \in [0,\infty) \times \mathrm{E}.
\end{aligned}$$

Dies ist gerade die Behauptung. □

3.4 Lemma. *Für* $1 \le j \le d$ *sei* φ_j *die kumulantenerzeugende Funktion einer unendlich teilbaren Verteilung* $P_j \in \mathcal{S}(\mathrm{E})$ *und* $\varphi := (\varphi_1, \ldots, \varphi_d)$. *Zu* $k \in \mathbb{N}_0$ *und* $x \in \mathrm{E}$ *existiert ein* $P(k,x) \in \mathcal{S}(\mathrm{E})$ *mit*

$$\check{P}(k,x,\lambda) := \exp(-\langle x, \varphi^{\langle k\rangle}(\lambda)\rangle), \qquad \lambda \in \mathrm{E}. \tag{3.2}$$

Insbesondere ist $\langle \varphi^{\langle k\rangle}, e_j\rangle$ *die kumulantenerzeugende Funktion von* $P(k, e_j)$.

Beweis. Für $k = 0, 1$ und $x \in \mathrm{E}$ definiere $P(k, x) \in \mathcal{S}(\mathrm{E})$ durch (3.2). Dies ist für $k = 0$ trivial und für $k = 1$ möglich, da φ_j für $1 \le j \le d$ die kumulantenerzeugende Funktion einer unendlich teilbaren Verteilung ist. Nach Lemma II.2.10 $\big($setze $\psi(\cdot, \lambda) :\equiv \varphi(\lambda)\big)$ ist die Abbildung $P(1, \cdot, \Gamma) : \mathrm{E} \mapsto [0, \infty)$ für jedes $\Gamma \in \mathcal{B}(\mathrm{E})$ Borel-meßbar. Setze

$$P(k, x, \Gamma) := \int P(1, y, \Gamma)\, P(k-1, x, dy), \qquad x \in \mathrm{E}, \Gamma \in \mathcal{B}(\mathrm{E}).$$

Offensichtlich gilt $P(k, x) \in \mathcal{S}(\mathrm{E})$. Zeige mit vollständiger Induktion die Darstellung (3.2). Für $k = 0$ ist nach obiger Definition nichts zu zeigen. Für $k > 0$ gilt

$$\begin{aligned}
\check{P}(k, x, \lambda) &= \int\!\!\int \exp(-\langle \lambda, y\rangle)\, P(1, z, dy)\, P(k-1, x, dz) \\
&= \int \check{P}(1, z, \lambda)\, P(k-1, x, dz) \\
&= \int \exp\big(-\langle z, \varphi(\lambda)\rangle\big)\, P(k-1, x, dz) \\
&= \exp\big(-\langle x, \varphi^{\langle k-1\rangle}(\varphi(\lambda))\rangle\big), \qquad x, \lambda \in \mathrm{E}.
\end{aligned}$$

Damit folgt die Behauptung. $\square$

Wir definieren nun die Bausteine, die zur Konstruktion einer Verzweigungsübergangsfunktion mit vorgegebener Charakterisierung benötigt werden.

3.5 Lemma. *Sei $1 \le j \le d$, $a \in \mathrm{X}$ mit $a_k \in [0, \infty)$ für $k \ne j$, $\sigma, \delta \ge 0$ und μ ein σ-endliches Borel-Maß auf $\mathrm{E} \setminus \{0\}$ mit*

$$\int \Big(\big(\sum_{k \ne j} y_k + y_j^2 \big) \wedge 1 \Big) \mu(dy) < \infty. \tag{3.3}$$

Definiere $L : \mathrm{E} \mapsto \mathbb{R}$ durch

$$L(\lambda) := \langle a, \lambda\rangle - \frac{1}{2}\sigma^2 \lambda_j^2 - \int M_j(\lambda, y)\, \mu(dy) + \delta, \qquad \lambda \in \mathrm{E}.$$

Es existiert eine Folge $\{P_n\}$ von unendlich teilbaren Verteilungen auf E mit kumulantenerzeugenden Funktionen φ_n derart, daß $L(\lambda) = \lim_{n\to\infty} n\big(\varphi_n(\lambda) - \lambda_j\big)$ für alle $\lambda \in \mathrm{E}$. Diese Folge kann so gewählt werden, daß die Konvergenz lokal gleichmäßig ist.

Beweis. Definiere $\sigma_n := \sigma^2 \cdot \epsilon_{e_j/\sqrt{n}}$, $\varrho_n(dy) := n^{-1}\big(1 - \exp(-\sqrt{n}\,|y|)\big)\mu(dy)$ und $\mu_n := \sigma_n + \varrho_n$. Wegen $1 - \exp(-x) \le x$ für $x \in \mathbb{R}$ gilt

$$\begin{aligned}
\int_{\overline{U_1(0)}} \frac{y_j}{1 + |y|^2}\, \varrho_n(dy) &\le \frac{1}{n} \int_{\overline{U_1(0)}} y_j \big(1 - \exp(-\sqrt{n}\, y_j)\big)\mu(dy) \\
&\le \frac{1}{\sqrt{n}} \int_{\overline{U_1(0)}} y_j^2 \mu(dy), \qquad n \in \mathbb{N}.
\end{aligned}$$

Damit gilt $\int (|y| \wedge 1)\, \varrho_n(dy) < \infty$ für $n \in \mathbb{N}$ und $\int y_j/(1+|y|^2)^{-1}\, \varrho_n(dy) \to 0$. Entsprechend erhalten wir

$$\int \frac{y_j}{1+|y|^2}\, \sigma_n(dy) = \sigma^2 \cdot \frac{1/\sqrt{n}}{1+\frac{1}{n}} \longrightarrow 0.$$

Wir definieren nun die spektral positive unendlich teilbare Verteilung $P_n \in \mathcal{S}(\mathrm{X})$ durch die kumulantenerzeugende Funktion

$$\varphi_n(\lambda) := \langle a_n, \lambda\rangle + \int \big(1 - \exp(-\langle \lambda, y\rangle)\big)\, \mu_n(dy) + \frac{\delta}{n}, \qquad \lambda \in \mathrm{E},$$

wobei

$$a_n := \frac{a}{n} + e_j\bigg(1 - \int \frac{y_j}{1+|y|^2}\, \mu_n(dy)\bigg), \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Für hinreichend großes $n \in \mathbb{N}$ gilt nach obigen Überlegungen $\langle a_n, e_j\rangle \in [0,\infty)$, also $a_n \in \mathrm{E}$. Nach Proposition I.3.16 ist P_n für hinreichend große $n \in \mathbb{N}$ eine unendlich teilbare Verteilung auf E. Wir schreiben nun

$$\varphi_n(\lambda) = \langle a_n', \lambda\rangle - \int M(\lambda, y)\, \mu_n(dy) + \frac{\delta}{n}.$$

Dabei ist $a_n' := a_n + \int y/(1+|y|^2)\, \mu_n(dy) \in \mathrm{E}$. Damit erhalten wir für $n \in \mathbb{N}$ die Darstellung

$$\begin{aligned} n(\varphi_n(\lambda) - \lambda_j) &= \langle n(a_n' - e_j), \lambda\rangle + \int M(\lambda, y)\, n\mu_n(dy) + \delta \\ &= \langle b_n, \lambda\rangle - \int M(\lambda, y)\, n\mu_n(dy) + \delta, \qquad \lambda \in \mathrm{E}, \end{aligned} \tag{3.4}$$

wobei

$$b_n := a + \sum_{k\neq j} e_k \int \frac{y_k}{1+|y|^2}\, n\mu_n(dy).$$

Wählen wir für die kumulantenerzeugende Funktion L eine analoge Darstellung, so gilt

$$L(\lambda) = \langle b, \lambda\rangle - \frac{1}{2}\sigma^2\lambda_j^2 - \int M(\lambda, y)\, \mu(dy) + \delta, \qquad \lambda \in \mathrm{E}, \tag{3.5}$$

wobei

$$b := a + \sum_{k\neq j} e_k \int \frac{y_k}{1+|y|^2}\, \mu(dy).$$

Zum Nachweis der Konvergenz auf E° sind nach dem Konvergenzsatz I.4.7 und den Darstellungen (3.4), (3.5) die folgenden Bedingungen zu überprüfen:

(a) $b_n \longrightarrow b$.

(b) $\lim_{\epsilon\to 0} \overline{\lim_{n\to\infty}} \left| \int_{\overline{U_\epsilon(0)}} \langle \lambda, y\rangle^2\, n\mu_n(dy) - \sigma^2\lambda_j^2 \right| = 0$ für alle $\lambda \in \mathrm{E}^\circ$.

(c) $1_{\mathrm{E}\setminus\overline{U_\epsilon(0)}} \cdot \nu_n \xrightarrow{\mathrm{v}} 1_{\mathrm{E}\setminus\overline{U_\epsilon(0)}} \cdot \nu$ für alle $\epsilon > 0$ mit $\nu\big(\partial U_\epsilon(0)\big) = 0$.

(d) $\lim_{R\to\infty} \overline{\lim_{n\to\infty}} \big| n\mu_n\big(\mathrm{E} \setminus U_R(0)\big)\big| = 0$.

Dabei ist $\nu_n(dy) := |y|^2(1+|y|^2)^{-1}n\mu_n(dy)$ und $\nu(dy) := |y|^2(1+|y|^2)^{-1}\mu(dy)$. Die Bedingungen (c) und (d) sind nach Wahl von μ_n offensichtlich erfüllt. Die Gültigkeit von Bedingung (a) folgt damit wegen $\int y_k/(1+|y|^2)\, n\sigma_n(dy) = 0$ für $k \neq j$. Ferner gilt $\lim_{\epsilon\to 0}\int_{\overline{U_\epsilon(0)}}\langle\lambda,y\rangle^2\, n\varrho_n(dy) = 0$. Also genügt es zu zeigen, daß σ_n Bedingung (b) erfüllt. Sei dazu $\epsilon > 0$ vorgegeben. Dann gilt für hinreichend großes $n \in \mathbb{N}$

$$\int_{\overline{U_\epsilon(0)}}\langle\lambda,y\rangle^2\, n\sigma_n(dy) = n\sigma^2\cdot\left(\frac{\lambda_j}{\sqrt{n}}\right)^2 = \sigma^2\lambda_j^2\,.$$

Damit ist Bedingung (b) erfüllt, also die Konvergenz auf E° gezeigt. Definieren wir $L_n(\lambda) := n(\varphi_n(\lambda) - \lambda_j)$ für $\lambda \in \mathrm{E}$, so ist L_n die kumulantenerzeugende Funktion einer spektral positiven unendlich teilbaren Verteilung $Q_n \in \mathcal{S}(\mathrm{X})$. Ist L die kumulantenerzeugende Funktion von $Q \in \mathcal{S}(\mathrm{X})$, so gilt $Q_n \xrightarrow{\mathrm{v}} Q$. Beachte nun, daß $L_n(0) = \delta = L(0)$, also $\|Q_n\| = \|Q\|$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt. Nach Lemma I.2.13 gilt $Q_n \xrightarrow{\mathrm{w}} Q$, und nach Proposition I.2.15 folgt die gleichmäßige Konvergenz auf E. □

3.6 Theorem (Existenzsatz). *Für $1 \le j \le d$ sei $a_j \in \mathrm{X}$ mit $\langle a_j, e_k\rangle \in [0,\infty)$ für $k \neq j$, $\sigma_j, \delta_j \ge 0$ und μ_j ein σ-endliches Borel-Maß auf $\mathrm{E}\setminus\{0\}$ mit*

$$\int\Big(\big(\sum_{k\neq j} y_k + y_j^2\big)\wedge 1\Big)\mu_j(dy) < \infty. \tag{3.6}$$

Definiere $L : \mathrm{E} \mapsto \mathbb{R}^d$ durch

$$L_j(\lambda) = \langle a_j,\lambda\rangle - \frac{1}{2}\sigma_j^2\lambda_j^2 - \int M_j(\lambda,y)\,\mu_j(dy) + \delta_j, \qquad \lambda \in \mathrm{E}. \tag{3.7}$$

Dann existiert eine Verzweigungsübergangsfunktion $\{P(t,x)\}$ mit Charakterisierung L.

Beweis. Nach Lemma 3.5 existiert zu $n \in \mathbb{N}$ und $1 \le j \le d$ eine unendlich teilbare Verteilung ${P_j}^{(n)}$ auf E mit kumulantenerzeugenden Funktionen ${\varphi_j}^{(n)}$ derart, daß

$${L_j}^{(n)}(\lambda) := n({\varphi_j}^{(n)}(\lambda) - \lambda_j) \longrightarrow L_j(\lambda), \qquad 1 \le j \le d,$$

lokal gleichmäßig auf E. Setze $L_n := ({L_1}^{(n)},\dots,{L_d}^{(n)})$ und $\varphi_n := ({\varphi_1}^{(n)},\dots,{\varphi_d}^{(n)})$. Dann gilt

$$L_n(\lambda) = n(\varphi_n(\lambda) - \lambda), \qquad \lambda \in \mathrm{E}.$$

Nach Lemma 3.4 ist $\langle{\varphi_n}^{\langle k\rangle}, e_j\rangle$ für $1 \le j \le d$ und $k \in \mathbb{N}_0$ die kumulantenerzeugende Funktion einer unendlich teilbaren Verteilung $P_n(k,e_j)$ auf E. Setze

$$\psi_n(t,\lambda) := {\varphi_n}^{\langle [nt]\rangle}(\lambda), \qquad t \in [0,\infty), \lambda \in \mathrm{E}.$$

Dann ist $\langle\psi_n(t,\cdot), e_j\rangle : \mathrm{E} \mapsto [0,\infty)$ für $1 \le j \le d$ die kumulantenerzeugende Funktion von $P_n([nt],e_j) \in \mathcal{S}(\mathrm{E})$. Zur Konstruktion einer regulären Verzweigungsübergangsfunktion $\{P(t,x)\}$ genügt es nach Proposition 3.2 zu zeigen, daß ein $t_0 > 0$ derart existiert, daß für eine Teilfolge von $\{\psi_n\}$ (die wir genauso bezeichnen) der Grenzwert $\psi(t,\lambda) := \lim_{n\to\infty} \psi_n(t,\lambda)$ für alle $(t,\lambda) \in [0,t_0] \times \mathrm{E}^\circ$ existiert und $\lim_{t\to 0} \psi(t,\lambda) = \lambda$ für jedes $\lambda \in \mathrm{E}^\circ$ gilt. Nach dem Stetigkeitssatz I.4.7 ist dann $\psi_j(t,\cdot) : \mathrm{E} \mapsto \mathrm{E}$ für jedes $1 \le j \le d$ und jedes $t \ge 0$ die kumulantenerzeugende Funktion einer unendlich teilbaren Verteilung.

Wir zeigen dazu zunächst, daß $\sup_{n\in\mathbb{N}} |\psi_n(t,\lambda) - \lambda| \to 0$ für $t \to 0$ lokal gleichmäßig auf E. Sei dazu $\varrho > 0$ beliebig und $\epsilon > 0$ vorgegeben. Aufgrund der lokal gleichmäßigen Konvergenz $L_n \to L$ gilt

$$M := \sup\left\{|L_n(\lambda)| \,\middle|\, n \in \mathbb{N}, |\lambda| \le \varrho\right\} < \infty.$$

Wähle $t > 0$ so klein, daß $tM < \epsilon \wedge \varrho$, und zeige mit vollständiger Induktion nach $k \in \mathbb{N}_0$, daß

$$|{\varphi_n}^{\langle k\rangle}(\lambda) - \lambda| \le \frac{k}{n} M, \qquad n \in \mathbb{N}, k \le nt, |\lambda| \le \varrho.$$

Für $k = 0$ folgt dies gerade aus ${\varphi_n}^{\langle 0\rangle}(\lambda) = \lambda$. Ist $k > 0$, so gilt nach Definition von L_n

$${\varphi_n}^{\langle k\rangle}(\lambda) - {\varphi_n}^{\langle k-1\rangle}(\lambda) = \frac{1}{n} L_n\big({\varphi_n}^{\langle k-1\rangle}(\lambda)\big), \qquad \lambda \in \mathrm{E},$$

und wegen $|{\varphi_n}^{\langle k-1\rangle}(\lambda)| \le \varrho + tM \le 2\varrho$ (nach Induktionsvoraussetzung) erhalten wir die Ungleichung

$$\begin{aligned} |{\varphi_n}^{\langle k\rangle}(\lambda) - \lambda| &\le |{\varphi_n}^{\langle k-1\rangle}(\lambda) - \lambda| + \frac{1}{n}\big|L_n\big({\varphi_n}^{\langle k-1\rangle}(\lambda)\big)\big| \\ &\le \frac{k-1}{n} M + \frac{1}{n} M = \frac{k}{n} M. \end{aligned}$$

Damit folgt die lokal gleichmäßige Konvergenz wegen

$$|\psi_n(t,\lambda) - \lambda| = |{\varphi_n}^{\langle [nt]\rangle}(\lambda) - \lambda| \le \frac{[nt]}{n} M < \epsilon, \qquad n \in \mathbb{N}, |\lambda| \le \varrho.$$

Wähle nun ein beliebiges Kompaktum $K \subseteq \mathrm{E}^\circ$ mit nichtleerem Inneren. Dann existieren wegen der lokal gleichmäßigen Konvergenz $\sup_{n\in\mathbb{N}} |\psi_n(t,\lambda) - \lambda| \to 0$ für $t \to 0$ ein Kompaktum $K' \subseteq \mathrm{E}^\circ$ und ein $t_0 > 0$ derart, daß

$$\psi_n(t,\lambda) \in K' \subseteq \mathrm{E}^\circ, \qquad n \in \mathbb{N}, t \in [0,t_0], \lambda \in K. \tag{3.8}$$

Wir können nun o.B.d.A. (durch Teilfolgenbildung) annehmen, daß zu $r \in [0,t_0] \cap \mathbb{Q}$ und $1 \le j \le d$ ein $P(r,e_j) \in \mathcal{S}(\mathrm{E})$ existiert mit

$$P_n([nr],e_j) \xrightarrow{\mathrm{v}} P(r,e_j), \qquad 1 \le j \le d, r \in [0,t_0] \cap \mathbb{Q}.$$

Nach Definition ist $\langle \psi_n(r,\cdot), e_j\rangle$ die kumulantenerzeugende Funktion von $P_n([nr],e_j)$, und in Hinblick auf (3.8) folgt $0 < \check{P}(r,e_j,\lambda) < 1$ für alle $1 \le j \le d$, $r \in [0,t_0] \cap \mathbb{Q}$

und $\lambda \in K$, was mit Lemma II.2.5 auf $\lambda \in \mathrm{E}^\circ$ ausgedehnt werden kann. Damit existiert die kumulantenerzeugende Funktion $\psi_j(r,\cdot)$ von $P(r,e_j)$, und mit Proposition I.2.15 und $\psi(r,\cdot) := \big(\psi_1(r,\cdot),\dots,\psi_d(r,\cdot)\big)$ folgt

$$\psi_n(r,\lambda) \longrightarrow \psi(r,\lambda) \in \mathrm{E}^\circ, \qquad (r,\lambda) \in ([\,0,t_0] \cap \mathbb{Q}) \times \mathrm{E}^\circ. \tag{3.9}$$

Nach Lemma 3.3 erhalten wir für eine (durch die Teilfolgenbildung entstandene) Folge $\{k_n\} \subseteq \mathbb{N}_0$ mit $k_n \to \infty$ die Integralgleichung

$$\psi_n(t,\lambda) = \lambda + \int_0^{[k_n t]/k_n} L_n\big(\psi_n(s,\lambda)\big)\,ds, \qquad (t,\lambda) \in [0,\infty) \times \mathrm{E}. \tag{3.10}$$

Damit folgt wegen (3.8) die Abschätzung

$$|\psi_n(s,\lambda) - \psi_n(t,\lambda)| \le \left(|s-t| + \frac{2}{k_n}\right) \sup_{\lambda' \in K'} \big|L_n(\lambda')\big|, \qquad s,t \in [\,0,t_0], \lambda \in K.$$

Wegen (3.9) folgt die Konvergenz von $\{\psi_n(t,\lambda)\}$ für alle $t \in [\,0,t_0]$ und $\lambda \in K$, was nach Proposition I.2.12 sogar auf $\lambda \in \mathrm{E}^\circ$ ausgedehnt werden kann, da K° nicht leer ist. Definiere

$$\psi(t,\lambda) := \lim_{n\to\infty} \psi_n(t,\lambda) \in \mathrm{E}^\circ, \qquad (t,\lambda) \in [\,0,t_0] \times \mathrm{E}^\circ.$$

Aufgrund der lokal gleichmäßigen Konvergenz $L_n \to L$ und der Integralgleichung (3.10) erhalten wir mit dominierter Konvergenz

$$\psi(t,\lambda) = \lambda + \int_0^t L\big(\psi(s,\lambda)\big)\,ds, \qquad (t,\lambda) \in [\,0,t_0] \times K.$$

Da zu jedem Kompaktum $K \subseteq \mathrm{E}^\circ$ ein solches $t_0 > 0$ existiert, folgt aufgrund der Stetigkeit von L (als lokal gleichmäßiger Limes stetiger Funktionen) auf E°

$$\left.\frac{\partial}{\partial t}\psi(t,\lambda)\right|_{t=0} = L\big(\psi(t,\lambda)\big), \qquad \lambda \in \mathrm{E}^\circ. \tag{3.11}$$

Insbesondere ist die Funktion $\psi(\cdot,\lambda) : [0,\infty) \mapsto \mathrm{E}$ für jedes $\lambda \in \mathrm{E}^\circ$ in Null stetig. Nach Proposition 3.2 existiert eine reguläre Verzweigungsübergangsfunktion $\{P(t,x)\}$ mit kumulantenerzeugender Funktion ψ. Nach Gleichung (3.11) ist L die zugehörige Charakterisierung. □

4. Anwendungen

4.1 Proposition. *Sei $\{P(t,x)\}$ eine Verzweigungsübergangsfunktion mit Charakterisierung $L : \mathrm{E} \mapsto \mathbb{R}^d$ gemäß (3.7). Ist das Borel-Maß μ_j für jedes $1 \le j \le d$ auf eine beschränkte Teilmenge von* E *konzentriert, so ist $\{P(t,x)\}$ genau dann konservativ, wenn $\delta_1 = \cdots = \delta_d = 0$.*

Beweis. Nach Lemma II.4.14 ist nur noch die Konservativität im Fall $\delta_1 = \cdots = \delta_d = 0$ zu zeigen. In diesem Fall gilt $L(0) = (\delta_1, \ldots, \delta_d) = 0$. Daher genügt es nach Proposition II.4.15 zu zeigen, daß für $1 \le j \le d$ die Funktion $L_j : \mathrm{E} \mapsto \mathbb{R}$ lokal Lipschitz-stetig ist. Nach (3.7) ist dies nur für die Funktion $\int M_j(\cdot, y)\, \mu(dy)$ nachzuweisen. Schreibe dazu

$$\begin{aligned} M_j(\lambda, y) - M_j(\varrho, y) &= \exp(-\langle \varrho, y\rangle) M_j(\lambda - \varrho, y) \\ &\quad + \big(1 - \exp(\langle \varrho, y\rangle)\big) \frac{(\lambda_j - \varrho_j) y_j}{1 + |y|^2}, \qquad \lambda, \varrho \in \mathrm{E}. \end{aligned}$$

Da das Integral $\int y_j (1 + |y|^2)^{-1} \mu_j(dy)$ existiert, brauchen wir nur den ersten Term zu betrachten. Sei μ_j auf $U_{R_j}(0)$ konzentriert. Nach Lemma 2.4 gilt

$$\begin{aligned} |M_j(\lambda - \varrho, y)| &\le |\lambda - \varrho| \bigg(\sum_{k \ne j} |y_k| + R_j |y|^2 \bigg) \\ &\quad + \frac{1}{2} |\lambda - \varrho|^2 |y|^2 \bigg(1 + \sup_{|y| \le R_j} \big| r(\langle \lambda, y \rangle) \big| \bigg), \qquad \lambda, \varrho \in \mathrm{E}, |y| \le R_j, \end{aligned}$$

und nach (3.6) folgt die Behauptung. □

4.2 Beispiel. Für $d = 1$ sei $\mu := \sigma \epsilon_\varrho$ mit $\sigma \ge 0$, $\varrho > 0$, und $\delta \ge 0$. Definiere $L : [0, \infty) \mapsto [0, \infty)$ durch

$$L(\lambda) := \sigma(1 - \exp(-\varrho\lambda)) + \delta, \qquad \lambda \in [0, \infty).$$

Dann ist die zugehörige Verteilung eine (möglicherweise defekte) Poisson-Verteilung. Das Anfangswertproblem für $\lambda \in [0, \infty)$ lautet

$$y' = \sigma(1 - \exp(-\varrho y)) + \delta, \qquad y(0) = \lambda.$$

Wir schließen den trivialen Fall $\sigma = \delta = 0$ aus. Die kumulantenerzeugende Funktion $\psi : [0, \infty) \times [0, \infty) \mapsto [0, \infty)$ ist dann als eindeutige Lösung dieses Anfangswertproblems gegeben durch

$$\psi(t, \lambda) = \frac{1}{\varrho} \ln \left[\frac{\sigma}{\sigma + \delta} + e^{\varrho(\sigma+\delta)t} \left(e^{\varrho\lambda} - \frac{\sigma}{\sigma + \delta} \right) \right], \qquad (t, \lambda) \in [0, \infty)^2.$$

Ist $\{P(t, x)\}$ die zugehörige Verzweigungsübergangsfunktion, so sehen wir mit $\lambda = 0$, daß der Defekt von $P(t, x)$ für $(t, x) \in [0, \infty) \times [0, \infty)$ gegeben ist durch $1 - \exp(-\delta(t, x))$ mit

$$\delta(t, x) = \frac{x}{\varrho} \ln \left[1 + \frac{\delta}{\sigma + \delta} \big(e^{\varrho(\sigma+\delta)t} - 1 \big) \right], \qquad (t, x) \in [0, \infty)^2.$$

Also ist $\{P(t, x)\}$ genau dann konservativ ist, wenn $\delta = 0$ (was wir nach Proposition 4.1 bereits wissen). Im Fall $\delta > 0$ gilt $\delta(t, x) \to \infty$ für $t \to \infty$ und $x \in (0, \infty)$, d.h., $P(t, x) \xrightarrow{\mathrm{w}} 0$. Im Fall $\delta = 0$ gilt (auch für $\sigma = 0$)

$$\psi(t, \lambda) = \frac{1}{\varrho} \ln \Big[1 + e^{\sigma t} \big(e^{\varrho\lambda} - 1 \big) \Big], \qquad (t, \lambda) \in [0, \infty)^2.$$

Im konservativen Fall gilt damit $P(t, x) \xrightarrow{\mathrm{v}} 0$ für $t \to \infty$ und $x \in (0, \infty)$, falls $\sigma > 0$.

4.3 Beispiel. Für $d = 1$ sei $\xi \in \mathbb{R}$ und $\mu(dy) := \varrho y^{-(1+\alpha)}dy$ mit $\varrho \geq 0$ und $0 < \alpha < 2$. Definiere $L : [0,\infty) \mapsto [0,\infty)$ durch

$$L(\lambda) = \xi\lambda - \varrho \int_0^\infty \left(\exp(-\lambda y) - 1 + \frac{\lambda y}{1+y^2} \right) \frac{dy}{y^{1+\alpha}}, \qquad \lambda \in [0,\infty).$$

Dann ist die zugehörige Verteilung eine (spektral positive) stabile Verteilung mit Exponent α. Die Funktion $f : [0,\infty) \mapsto [0,\infty)$ sei meßbar mit

$$\int_0^\infty \left| f(y) - \frac{y}{1+y^2} \right| \frac{dy}{y^{1+\alpha}} < \infty. \tag{4.1}$$

Dann erhalten wir mit einer Substitution $u = \lambda y$ die Darstellung

$$\begin{aligned} &\int_0^\infty \left(\exp(-\lambda y) - 1 + \frac{\lambda y}{1+y^2} \right) \frac{dy}{y^{1+\alpha}} \\ &\qquad = \lambda^\alpha \int_0^\infty \big(\exp(-u) - 1 + f(u) \big) \frac{du}{u^{1+\alpha}} + \int_0^\infty \left(\frac{\lambda y}{1+y^2} - f(\lambda y) \right) \frac{dy}{y^{1+\alpha}}\,. \end{aligned}$$

(a) Für $1 < \alpha < 2$ wird (4.1) von der identischen Abbildung erfüllt. Definiere

$$\begin{aligned} \frac{\sigma^2}{2(\alpha-1)} &:= \varrho \int_0^\infty \Big(u - \big(1 - \exp(-u)\big) \Big) \frac{du}{u^{1+\alpha}} \geq 0, \\ \frac{a}{\alpha-1} &:= \xi + \int_0^\infty \frac{u^3}{1+u^2} \frac{du}{u^{1+\alpha}} \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Damit erhalten wir die (auch für den Fall $\alpha = 2$ der Normalverteilung gültige) Darstellung

$$L(\lambda) = \frac{a\lambda}{\alpha-1} - \frac{\sigma^2\lambda^\alpha}{2(\alpha-1)}, \qquad \lambda \in [0,\infty).$$

Das zugehörige Anfangswertproblem für $\lambda \in [0,\infty)$ lautet

$$y' = \frac{ay}{\alpha-1} - \frac{\sigma^2 y^\alpha}{2(\alpha-1)}, \qquad y(0) = \lambda.$$

Wir setzen $p := \alpha - 1 \in (0,1]$. Im Fall $a = 0$ erhalten wir die kumulantenerzeugende Funktion

$$\psi(t,\lambda) = \frac{\lambda}{\big(1 + \frac{t\sigma^2}{2}\lambda^p\big)^{1/p}}\,, \qquad (t,\lambda) \in [0,\infty)^2,$$

und im Fall $a \neq 0$

$$\psi(t,\lambda) = \frac{\lambda e^{at/p}}{\big(1 + \frac{\sigma^2}{2a}(e^{at}-1)\lambda^p\big)^{1/p}}\,, \qquad (t,\lambda) \in [0,\infty)^2.$$

Ist $\{P(t,x)\}$ die zugehörige Verzweigungsübergangsfunktion, so sehen wir durch Einsetzen von $\lambda = 0$, daß $\{P(t,x)\}$ konservativ ist. Im Fall $a \leq 0$ gilt $\psi(t,\lambda) \to 0$ für $t \to \infty$ und $\lambda \in [0,\infty)$, d.h., $P(t,x) \xrightarrow{\text{w}} \epsilon_0$. Sei nun $a > 0$. Ist $\sigma > 0$, so gilt

$$\psi(t,\lambda) \longrightarrow \left(\frac{2a}{\sigma^2}\right)^{1/p} =: \gamma > 0, \qquad \lambda \in (0,\infty),$$

d.h., $P(t,x) \xrightarrow{\text{v}} \exp(-x\gamma)\epsilon_0$ für $x \in [0,\infty)$. Ist $\sigma = 0$, so gilt $P(t,x) \xrightarrow{\text{v}} 0$ für $x \in (0,\infty)$.

(b) Für $\alpha = 1$ wird (4.1) von der Arcustangensfunktion erfüllt. Definiere in diesem Fall

$$a := \xi - \varrho \int_0^\infty \left(\arctan u - \big(1 - \exp(-u)\big) \right) \frac{du}{u^2} \in \mathbb{R},$$

und beachte

$$\int_0^\infty \left(\frac{\lambda y}{1+y^2} - \arctan(\lambda y) \right) \frac{dy}{y^2} = \lambda \ln \lambda, \qquad \lambda \in [0,\infty).$$

Damit erhalten wir für $\lambda \in [0,\infty)$ das Anfangswertproblem $y' = ay - \varrho y \ln y$, $y(0) = \lambda$. Nach den obigen Überlegungen brauchen wir nur den Fall $\varrho > 0$ zu betrachten. Es gilt

$$\psi(t,\lambda) = \lambda^{e^{-\varrho t}} e^{\frac{a}{\varrho}(1-e^{-\varrho t})}, \qquad (t,\lambda) \in [0,\infty)^2.$$

$\{P(t,x)\}$ ist konservativ. Hier gilt $P(t,x) \xrightarrow{\text{v}} \exp(-xe^{a/\varrho})\epsilon_0$ für $t \to \infty$ und $x \in (0,\infty)$.

(c) Für $0 < \alpha < 1$ wird (4.1) von der Nullfunktion erfüllt. Definiere

$$\begin{aligned} \frac{\sigma^2}{2(1-\alpha)} &:= \varrho \int_0^\infty \big(1 - \exp(-u)\big) \frac{du}{u^{1+\alpha}} \geq 0, \\ \frac{a}{1-\alpha} &:= \xi - \int_0^\infty \frac{u}{1+u^2} \frac{du}{u^{1+\alpha}} \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Damit erhalten wir für $\lambda \in [0,\infty)$ das zugehörige Anfangswertproblem

$$y' = \frac{ay}{1-\alpha} + \frac{\sigma^2 y^\alpha}{2(1-\alpha)}, \qquad y(0) = \lambda.$$

Hier setzen wir $q := 1-\alpha \in (0,1)$. Im Fall $a = 0$ erhalten wir die kumulantenerzeugende Funktion

$$\psi(t,\lambda) = \left(\lambda^q + \frac{t\sigma^2}{2} \right)^{1/q}, \qquad (t,\lambda) \in [0,\infty)^2,$$

und im Fall $a \neq 0$

$$\psi(t,\lambda) = \left(\lambda^q e^{at} + \frac{\sigma^2}{2a}(e^{at} - 1) \right)^{1/q}, \qquad (t,\lambda) \in [0,\infty)^2.$$

Wir können nun annehmen, daß $\sigma > 0$ gilt. Dann ist $\{P(t,x)\}$ defekt. Setzen wir wieder $1 - P(t,x) =: 1 - \exp(-\delta(t,x))$, so erhalten wir im Fall $a = 0$

$$\delta(t,x) = x \left(\frac{t\sigma^2}{2} \right)^{1/q}, \qquad (t,x) \in [0,\infty)^2,$$

und im Fall $a \neq 0$

$$\delta(t,x) = x \left(\frac{\sigma^2}{2a}(e^{at} - 1) \right)^{1/q}, \qquad (t,x) \in [0,\infty)^2.$$

Es folgt das Grenzverhalten $P(t,x) \xrightarrow{\text{w}} 0$ für $t \to \infty$ und $x \in (0,\infty)$, falls $a \geq 0$, und

$$\psi(t,\lambda) \longrightarrow \left(\frac{\sigma^2}{2a} \right)^{1/q} =: \gamma^{-1} > 0, \qquad \lambda \in (0,\infty),$$

falls $a < 0$, d.h., $P(t,x) \xrightarrow{v} \exp(-x\gamma^{-1})\epsilon_0$ für $t \to \infty$ und $x \in [0,\infty)$. Die zu den (spektral positiven) stabilen Verteilungen gehörenden Verzweigungsprozesse sind ein Beispiel dafür, daß defekte Verzweigungsübergangsfunktionen existieren, deren Charakterisierung in Null verschwindet. Damit ist die Umkehrung von Lemma II.4.14 im allgemeinen falsch. Daß diese Verzweigungsübergangsfunktionen defekt sind, kann man auch mit Proposition II.4.16 ohne Kenntnis der expliziten Lösung des Anfangswertproblems sehen, denn in diesem Fall gilt $\int_0^\epsilon L(\lambda)^{-1}d\lambda < \infty$ für hinreichend kleine $\epsilon > 0$.

5. Anmerkungen & Literatur

Die Form der Charakterisierung einer Verzweigungsübergangsfunktion wurde zuerst in Gihman & Skorohod (1975), Kapitel V, Abschnitt 2, für mehrdimensionale konservative Verzweigungsübergangsfunktionen mit Hilfe der zugehörigen Fourier-Transformierten bestimmt. Für die allgemeine Form mußte hier das Laplace-Kalkül entwickelt werden.

Die ursprüngliche Form von Proposition 3.2 ist in Lamperti (1967b) zu finden. Das Problem, daß für $k \in \mathbb{N}_0$ und $s,t \geq 0$ die $[k(s+t)]$-ten Iterierten der betrachteten Funktionen im allgemeinen nicht mit den $([ks]+[kt])$-ten Iterierten übereinstimmen, wurde dort und in darauf aufbauenden Arbeiten übersehen.

Der Beweis des Existenzsatzes 3.6 verwendet einige Argumente aus Grimvall (1974), wo die Konvergenz einer Folge von normierten Galton Watson-Prozessen untersucht wird.

Die Klasse der Verzweigungsübergangsfunktionen, deren Charakterisierung eine stabile Verteilung mit Exponent $1 < a \leq 2$ ist, wurde in Lamperti (1967c) vorgestellt. In dieser Arbeit ist es gelungen, dies auf stabile Verteilungen mit beliebigem Exponenten auszudehnen. In Bingham (1976) findet man für den eindimensionalen konservativen Fall Untersuchungen über den zeitlichen Verlauf eines kontinuierlichen Verzweigungsprozesses (Aussterbewahrscheinlichkeit, Wachstumsraten, etc.).

Für den Fall $d > 1$ konnte kein interessantes Beispiel für die explizite Darstellung der kumulantenerzeugenden Funktion eines Verzweigungsprozesses gefunden werden, da die hier auftretenden nichtlinearen Differentialgleichungen abgesehen von trivialen Fällen (entkoppelte Charakterisierungen und quasideterministische Prozesse) nicht ohne größeren Aufwand lösbar erscheinen.

KAPITEL IV

STETIGE ABHÄNGIGKEIT & APPROXIMATION

Vorbemerkungen

Wir fassen kurz die Theorie der stochastischen Prozesse mit Pfaden in $\mathrm{D}[0,\infty)$ zusammen. Sei (S,ϱ) ein vollständiger und separabler metrischer Raum. Die Menge $\mathrm{D_S}[0,\infty)$ besteht aus allen Funktionen $x:[0,\infty)\mapsto \mathrm{S}$ mit den Eigenschaften

$$x(t+)=x(t),\quad t\geq 0,\qquad x(t-)\in\mathrm{S}\text{ existiert},\quad t>0.$$

Diese Menge ist derart metrisierbar, daß der entstehende metrische Raum $(\mathrm{D_S}[0,\infty),\rho)$ ebenfalls vollständig und separabel ist. Wir bezeichnen die Menge der Wahrscheinlichkeitsmaße auf $\mathrm{D_S}[0,\infty)$ mit $\mathcal{P}\big(\mathrm{D_S}[0,\infty)\big)$.

Sei $Z:=\{Z(t)\mid t\geq 0\}$ ein stochastischer Prozeß auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega,\mathcal{F},P)$ mit Zustandsraum S. Besitzt Z Pfade im Raum $\mathrm{D_S}[0,\infty)$, d.h., liegt die Abbildung $Z(\cdot,\omega):[0,\infty)\mapsto\mathrm{S}$ für jedes $\omega\in\Omega$ in $\mathrm{D_S}[0,\infty)$, so kann $Z:\Omega\mapsto\mathrm{D_S}[0,\infty)$ aufgrund der Separabilität von $\mathrm{D_S}[0,\infty)$ als Zufallsvariable mit Werten in $\mathrm{D_S}[0,\infty)$ aufgefaßt werden.

Ist (S,ϱ) lokal kompakt und $\{T(t)\}$ eine Operator-Halbgruppe auf $\widehat{\mathrm{C}}(\mathrm{S})$, so bezeichnen wir einen stochastischen Prozeß $Z:=\{Z(t)\mid t\geq 0\}$ auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega,\mathcal{F},P)$ mit Zustandsraum S als einen zu $\{T(t)\}$ korrespondierenden Prozeß, falls

$$E\big(f\big(Z(s+t)\big)\mid\mathcal{F}_s^Z\big)=T(t)f\big(Z(s)\big),\qquad s,t\geq 0, f\in\widehat{\mathrm{C}}(\mathrm{S}).$$

Dabei ist $\mathcal{F}_t^Z$ die von $\{Z(s)\mid 0\leq s\leq t\}$ erzeugte σ-Algebra. Ein durch eine Übergangsfunktion $\{P(t,x)\}\subseteq\mathcal{P}(\mathrm{S})$ gegebener (zeitlich homogener) Markov-Prozeß korrespondiert stets zur zugehörigen Operatorhalbgruppe $\{T(t)\}$.

Zur Formulierung des Existenzsatzes benötigen wir einen weiteren Begriff. Eine Folge $\{f_n\}\subseteq\mathrm{B}(\mathrm{S})$ heißt beschränkt und punktweise (boundedly and pointwise) konvergent gegen $f\in\mathrm{B}(\mathrm{S})$, kurz $f=\mathrm{bp}-\lim_{n\to\infty}f_n$, falls $\sup_{n\in\mathbb{N}}\|f_n\|<\infty$ und $f(x)=\lim_{n\to\infty}f_n(x)$ für alle $x\in\mathrm{S}$. Wir schreiben kurz $\mathrm{bp}-\overline{M}$ für die kleinste in der Topologie der punktweise und beschränkten Konvergenz abgeschlossene Obermenge von $M\subseteq\mathrm{B}(\mathrm{S})$.

Ist nun $\{T(t)\}$ eine Feller-Halbgruppe, und gilt $(1,0)\in\mathrm{bp}-\overline{\mathcal{G}(G)}$ für den infinitesimalen Erzeuger G von $\{T(t)\}$, so existiert zu jedem $\nu\in\mathcal{P}(\mathrm{S})$ ein Wahrscheinlichkeitsmaß $P\in\mathcal{P}\big(\mathrm{D_S}[0,\infty)\big)$ derart, daß durch $Z(t,\omega):=\pi_t(\omega)$ ein korrespondierender

Prozeß definiert ist und $Z(0)$ die Verteilung ν besitzt (Startverteilung). Dabei ist $\pi_t : \mathrm{D_S}[0,\infty) \mapsto \mathrm{S}$ für $t \geq 0$ die durch $\pi_t(\omega) := \omega(t)$ definierte kanonische Projektion. Insbesondere sind hierdurch die endlichdimensionalen Verteilungen von Z eindeutig bestimmt. Für einen durch eine Übergangsfunktion $\{P(t,x)\} \subseteq \mathcal{P}(\mathrm{S})$ gegebenen Markov-Prozeß bedeutet dies, daß eine Version dieses Prozesses mit Pfaden in $\mathrm{D_S}[0,\infty)$ existiert.

Der Konvergenzsatz für korrespondierende Prozesse besitzt folgende Form: Für $n \in \mathbb{N}$ sei $\{T_n(t)\}$ eine Feller-Halbgruppe, $\nu_n \in \mathcal{P}(\mathrm{S})$ und Z_n ein korrespondierender stochastischer Prozeß mit Startverteilung ν_n und Verteilung $P_n \in \mathcal{P}\big(\mathrm{D_S}[0,\infty)\big)$. Sei $\{T(t)\}$ eine weitere Feller-Halbgruppe, $\nu \in \mathcal{P}(\mathrm{S})$ und Z ein korrespondierender stochastischer Prozeß mit Startverteilung ν und Verteilung $P \in \mathcal{P}\big(\mathrm{D_S}[0,\infty)\big)$. Gilt $\nu_n \xrightarrow{\mathrm{w}} \nu$ und

$$T_n(t)f \longrightarrow T(t)f, \qquad t \geq 0, f \in \widehat{\mathrm{C}}(\mathrm{S}),$$

so folgt $P_n \xrightarrow{\mathrm{w}} P$. Dies bedeutet $Z_n \xrightarrow{\mathrm{d}} Z$ (als Zufallsvariable mit Werten) in $\mathrm{D_S}[0,\infty)$.

Zur Formulierung des entsprechenden Approximationssatzes benötigen wir einige Definitionen. Sei $\mathrm{S}' \subseteq \mathrm{S}$. Eine Familie $\{P(k,x) \mid (k,x) \in \mathbb{N}_0 \times \mathrm{S}'\} \subseteq \mathcal{P}(\mathrm{S}')$ heißt (zeitlich) diskrete Übergangsfunktion auf S', falls $P(0,x) = \epsilon_x$ für alle $x \in \mathrm{S}'$ und

$$P(k+l,x,\Gamma) = \int P(l,y,\Gamma)\, P(k,x,dy), \qquad k,l \in \mathbb{N}_0, x \in \mathrm{S}', \Gamma \in \mathcal{B}(\mathrm{S}').$$

Wir bezeichnen einen stochastischen Prozeß $Y := \{Y(k) \mid k \in \mathbb{N}_0\}$ auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega,\mathcal{F},P)$ mit Zustandsraum S' als einen zu $\{P(k,x)\}$ korrespondierenden Prozeß, falls

$$P\big(Y(k+l) \in \Gamma \mid \mathcal{F}_k^Y\big) = P\big(l, Y(k), \Gamma\big), \qquad k,l \in \mathbb{N}_0, \Gamma \in \mathcal{B}(\mathrm{S}').$$

Dabei ist $\mathcal{F}_k^Y$ die von $\{Y(l) \mid 0 \leq l \leq k\}$ erzeugte σ-Algebra. Wie vorher existiert zu jeder diskreten Übergangsfunktion $\{P(k,x)\}$ auf S' und jedem $\nu \in \mathcal{P}(\mathrm{S}')$ ein Wahrscheinlichkeitsmaß P auf dem Raum $\Omega := (\mathrm{S}')^{\mathbb{N}_0}$ derart, daß durch $Y(k,\omega) := \omega_k$ ein korrespondierender Prozeß definiert ist und $Z(0)$ die Verteilung ν besitzt. Zu einer diskreten Übergangsfunktion $\{P(k,x)\}$ auf S' definiere den korrespondierenden Operator $T : \widehat{\mathrm{C}}(\mathrm{S}') \mapsto \mathrm{B}(\mathrm{S}')$ durch

$$Tf(x) := \int f(y)\, P(1,x,dy), \qquad f \in \widehat{\mathrm{C}}(\mathrm{S}'), x \in \mathrm{S}'.$$

Ist $\mathrm{S}_n \subseteq \mathrm{S}$ für $n \in \mathbb{N}$ und $\pi_n : \widehat{\mathrm{C}}(\mathrm{S}) \mapsto \widehat{\mathrm{C}}(\mathrm{S}_n)$ die durch $\pi_n f := f|_{\mathrm{S}_n}$ für $f \in \widehat{\mathrm{C}}(\mathrm{E})$ definierte kanonische Projektion, so schreiben wir für eine Folge $\{f_n\} \subseteq \widehat{\mathrm{C}}(\mathrm{S}_n)$ und $f \in \widehat{\mathrm{C}}(\mathrm{S})$ kurz $f_n \to f$, falls $\|f_n - \pi_n f\| \to 0$.

Für $n \in \mathbb{N}$ sei nun $\{P_n(k,x)\}$ eine diskrete Übergangsfunktion auf S_n mit korrespondierendem Operator $T_n : \widehat{\mathrm{C}}(\mathrm{S}_n) \mapsto \widehat{\mathrm{C}}(\mathrm{S}_n)$, $\nu_n \in \mathcal{P}(\mathrm{S}_n)$ und Y_n ein korrespondierender stochastischer Prozeß mit Startverteilung ν_n. Der durch

$$Z_n(t) := Y_n([nt]), \qquad t \geq 0,$$

definierte stochastische Prozeß Z_n besitze die Verteilung $P_n \in \mathcal{P}\big(\mathrm{D_S}[0,\infty)\big)$. Sei ferner $\{T(t)\}$ eine Feller-Halbgruppe, $\nu \in \mathcal{P}(\mathrm{S})$ und Z ein korrespondierender stochastischer Prozeß mit Startverteilung ν und Verteilung $P \in \mathcal{P}\big(\mathrm{D_S}[0,\infty)\big)$. Gilt $\nu_n \xrightarrow{\mathrm{w}} \nu$ und

$$T_n^{[nt]} f \longrightarrow T(t)f, \qquad t \geq 0, f \in \widehat{\mathrm{C}}(\mathrm{S}),$$

so folgt $P_n \xrightarrow{\mathrm{w}} P$. Dies bedeutet $Z_n \xrightarrow{\mathrm{d}} Z$ (als Zufallsvariable mit Werten) in $\mathrm{D_S}[0,\infty)$.

1. Zusammenfassung

Wir weisen in diesem Kapitel nach, daß stets eine Version eines Verzweigungsprozesses mit Pfaden im Raum $\mathrm{D}_{\mathrm{E}^\Delta}[0,\infty)$ existiert. Darauf aufbauend untersuchen wir die stetige Abhängigkeit (der Verteilung) eines Verzweigungsprozesses von der Charakterisierung der zugehörigen Verzweigungsübergangsfunktion und die Approximation durch mehrtypige Galton Watson-Prozesse.

In Abschnitt 1 erweitern wir die Feller-Halbgruppe einer Verzweigungsübergangsfunktion $\{P(t,x)\}$ zu einer Feller-Halbgruppe auf den Raum $\mathrm{C}(\mathrm{E}^\Delta)$ und erhalten so zu einer gegebenen Startverteilung $\nu \in \mathcal{P}(\mathrm{E}^\Delta)$ eine zugehörige Verteilung aus $\mathcal{P}\big(\mathrm{D}_{\mathrm{E}^\Delta}[0,\infty)\big)$. Ist $\{P(t,x)\}$ konservativ und $\nu \in \mathcal{P}(\mathrm{E})$, so kann diese Verteilung auf $\mathrm{D_E}[0,\infty)$ gewählt werden. Anschließend verwenden wir die explizite Abhängigkeit des zugehörigen infinitesimalen Erzeugers G von der Charakterisierung L von $\{P(t,x)\}$, die durch

$$G f_\lambda(x) = -\langle x, L(\lambda)\rangle\, f_\lambda(x), \qquad \lambda \in \mathrm{E}^\circ,$$

gegeben ist. Mit Hilfe des Konvergenzsatzes können wir zeigen, daß ein Verzweigungsprozeß (als Zufallsvariable mit Werten im Raum $\mathrm{D}_{\mathrm{E}^\Delta}[0,\infty)$) stetig von der Charakterisierung L (und der Startverteilung) abhängt. Diese stetige Abhängigkeit betrifft ebenso die endlichdimensionalen Verteilungen des Verzweigungsprozesses. Umgekehrt zeigen wir, daß bei geeigneter Wahl der Startverteilungen bereits im Fall der Konvergenz der eindimensionalen Verteilungen keine anderen (stochastisch stetigen) Grenzprozesse auftreten können. Die Klasse der Verzweigungsprozesse ist also in diesem Sinne bezüglich der schwachen Konvergenz abgeschlossen. Wir fassen diese Ergebnisse in einem allgemeinen Konvergenzsatz zusammen. Schließlich erhalten wir mit den Konvergenzkriterien für spektral beschränkte unendlich teilbare Verteilungen aus Kapitel I entsprechende Kriterien für die schwache Konvergenz von Verzweigungsprozessen.

Im nächsten Abschnitt definieren wir einen (d-typigen) Galton Watson-Prozeß mit Nachwuchsverteilungen $\xi_1, \dots, \xi_d \in \mathcal{P}(\mathbb{N}_0{}^d)$ durch eine diskrete Übergangsfunktion. Ist Y_n für $n \in \mathbb{N}$ ein solcher Prozeß mit Nachwuchsverteilungen $\xi_1{}^{(n)}, \dots, \xi_d{}^{(n)}$ und $\{k_n\} \subseteq \mathbb{N}$ mit $k_n \to \infty$, so untersuchen wir die durch

$$Z_n(t) := \frac{Y_n([nt])}{k_n}, \qquad t \geq 0, \tag{1.1}$$

definierte Folge $\{Z_n\}$ von stochastischen Prozessen auf schwache Konvergenz. Hier wenden wir den Approximationssatz für diskrete Übergangsfunktionen auf die Mengen $E_{k_n} := \{x/k_n \mid x \in \mathbb{N}_0{}^d\} \subseteq \mathrm{E}$ an, und erhalten zu Abschnitt 1 analoge Ergebnisse. Die Rolle der Charakterisierungen wird im diskreten Fall von aus den Nachwuchsverteilungen hervorgehenden transportieren Maßen übernommen. Diese sind gegeben durch die Abbildung $\kappa_j{}^{(k_n)}(x) := (x - e_j)/k_n$ für $1 \le j \le d$ und $x \in \mathbb{N}_0{}^d$. Wir können damit das durch $P_j{}^{(n)} := \big(\xi_j{}^{(n)}\big)^{(\kappa_j{}^{(k_n)})}$ für $1 \le j \le d$ definierte Tupel $\mathbb{P}_n := \big(P_1{}^{(n)}, \dots, P_d{}^{(n)}\big)$ als Charakterisierung der zu Z_n gehörenden diskreten Übergangsfunktion auffassen. Ist nun Z ein Verzweigungsprozeß mit Charakterisierung $\mathbb{P} := (P_1, \dots, P_d)$ so erhalten wir $Z_n \xrightarrow{\mathrm{d}} Z$ in $\mathrm{D}_{\mathrm{E}^\Delta}[0,\infty)$ und in den endlichdimensionalen Verteilungen, falls die zugehörigen Startverteilungen konvergieren und $\big(P_j{}^{(n)}\big)^{\star n k_n} \xrightarrow{\mathrm{v}} P_j$ für $1 \le j \le d$ gilt. Konvergieren umgekehrt die eindimensionalen Verteilungen der in (1.1) definierten Prozesse bei geeigneter Wahl der Startverteilungen, so ist der Grenzprozeß im Fall der stochastischen Stetigkeit notwendig ein Verzweigungsprozeß. Auch hier erhalten wir einen allgemeinen Approximationssatz und entsprechende Konvergenzkriterien.

Schließlich behandeln wir in Abschnitt 4 eine spezielle Klasse von Verzweigungsprozessen. Dies sind konservative Prozesse, in deren Charakterisierung sämtliche Spektralmaße Null sind. Wir weisen nach, daß dies gerade die Diffusionen auf E sind, deren infinitesimaler Erzeuger die Form

$$Gf(x) = \sum_{k=1}^{d} \left(\sum_{j=1}^{d} x_j \langle a_j, e_k \rangle \right) \nabla_k f(x) + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{d} x_k \sigma_k^2 \, \nabla_k^2 f(x), \qquad f \in \mathrm{D(E)},$$

besitzt. Hierbei sind $a_j \in \mathrm{X}$ und $\sigma_j^2 \ge 0$ für $1 \le j \le d$ die nichtverschwindenden Größen der zugehörigen Charakterisierung, und D(E) ist der Raum der schnell fallenden Funktionen auf E. Wir betrachten in einem Beispiel die für $d = 1$ entstehende Diffusion und zeigen abschließend eine mehrdimensionale Version der Fellerschen Diffusionsapproximation.

2. Stetige Abhängigkeit

2.1 Lemma. *Sei $\{T(t)\}$ eine Feller-Halbgruppe auf $\widehat{\mathrm{C}}(\mathrm{E})$. Dann wird durch die linearen Operatoren*

$$T^{\Delta}(t)f := f(\Delta) + T(t)\big(f - f(\Delta)\big), \qquad t \ge 0, f \in \mathrm{C}(\mathrm{E}^{\Delta}),$$

eine Feller-Halbgruppe $\{T^{\Delta}(t)\}$ auf $\mathrm{C}(\mathrm{E}^{\Delta})$ definiert. Ist G^{Δ} der infinitesimale Erzeuger von $\{T^{\Delta}(t)\}$, so gilt $\mathcal{D}(G^{\Delta}) = \mathbb{R} + \mathcal{D}(G)$ und $G^{\Delta} f = G\big(f - f(\Delta)\big)$ für alle $f \in \mathcal{D}(G^{\Delta})$. Es gilt $(1,0) \in \mathcal{G}(G^{\Delta})$. Ist $D \subseteq \widehat{\mathrm{C}}(\mathrm{E})$ ein Core von G, so ist $\mathbb{R} + D$ ein Core von G^{Δ}.

BEWEIS. Nach Ethier & Kurtz (1986), Lemma 4.2.3, ist $\{T^\Delta(t)\}$ eine Feller-Halbgruppe auf $\mathrm{C}(\mathrm{E}^\Delta)$. Die Gestalt von G^Δ folgt durch Einsetzen in die Definition eines infinitesimalen Erzeugers. Wegen $T(t)f = 0$ für $t \geq 0$ und $f = 0$ folgt $(1,0) \in \mathcal{G}(G^\Delta)$. Ist $D \subseteq \widehat{\mathrm{C}}(\mathrm{E})$ ein Core von G, so ist D dicht in $\widehat{\mathrm{C}}(\mathrm{E})$, also $\mathbb{R} + D$ dicht in $\mathrm{C}(\mathrm{E}^\Delta)$. Sei $(f, G^\Delta f) \in \mathcal{G}(G^\Delta)$. Dann gilt $f - f(\Delta) \in \mathcal{D}(G)$, und es existiert nach Voraussetzung eine Folge $\{g_n\} \subseteq D$ mit $g_n \to f - f(\Delta)$ und $Gg_n \to G\big(f - f(\Delta)\big)$. Setze $f_n := f(\Delta) + g_n \in \mathbb{R} + D$. Dann gilt $f_n \to f$ und $G^\Delta f_n = Gg_n \to G\big(f - f(\Delta)\big) = G^\Delta f$. Damit ist $\mathbb{R} + D$ ein Core von G^Δ. $\square$

2.2 PROPOSITION. *Sei $\{P(t,x)\}$ eine Übergangsfunktion auf E, $\{T(t)\}$ die korrespondierende Operatorhalbgruppe auf $\widehat{\mathrm{C}}(\mathrm{E})$ und $\{T^\Delta(t)\}$ deren Fortsetzung auf $\mathrm{C}(\mathrm{E}^\Delta)$. Ist Z ein stochastischer Prozeß mit Zustandsraum E^Δ, so ist Z genau dann ein zu $\{P(t,x)\}$ korrespondierender Prozeß, wenn er ein zu $\{T^\Delta(t)\}$ korrespondierender Prozeß ist. Ist $\{P(t,x)\}$ konservativ, so kann dabei $\{T^\Delta(t)\}$ durch $\{T(t)\}$ ersetzt werden.*

BEWEIS. Nach Definition der Halbgruppe $\{T^\Delta(t)\}$ erhalten wir die Darstellung

$$
\begin{aligned}
T^\Delta(t)f(Z(s)) &= f(\Delta) + T(t)\big(f - f(\Delta)\big)\big(Z(s)\big) \\
&= f(\Delta) + \int \big(f(y) - f(\Delta)\big)\, P\big(t, Z(s), dy\big) \\
&= \int f(y)\, P\big(t, Z(s), dy\big) + f(\Delta)\big(1 - \big\|P(t, Z(s)\big\|\big) \\
&= \int f(y)\, P^\Delta\big(t, Z(s), dy\big), \qquad s,t \geq 0, f \in \mathrm{C}(\mathrm{E}^\Delta).
\end{aligned}
$$

Damit ist die Korrespondenz des Prozesses Z zur Halbgruppe $\{T^\Delta(t)\}$ äquivalent zu $P\big((Z(s+t) \in \Gamma \mid \mathcal{F}_s^Z\big) = P^\Delta\big(t, Z(s), \Gamma\big)$ für alle $s,t \geq 0$ und $\Gamma \in \mathcal{B}(\mathrm{E}^\Delta)$. Im Fall der Konservativität ist nichts zu zeigen. $\square$

2.3 PROPOSITION. *Sei $\{P(t,x)\}$ eine Übergangsfunktion auf E. Ist die korrespondierende Operatorhalbgruppe $\{T(t)\}$ eine Feller-Halbgruppe auf $\widehat{\mathrm{C}}(\mathrm{E})$, so existiert zu jedem $\nu \in \mathcal{P}(\mathrm{E}^\Delta)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ und ein korrespondierender stochastischer Prozeß Z mit Startverteilung ν und Pfaden im Raum $\mathrm{D}_{\mathrm{E}^\Delta}[0,\infty)$. Ist $\{P(t,x)\}$ konservativ, so gilt $(1,0) \in \mathrm{bp}{-}\overline{\mathcal{G}(G)}$ für den infinitesimalen Erzeuger G von $\{T(t)\}$. Ist darüber hinaus $\nu \in \mathcal{P}(\mathrm{E})$, so kann Z so gewählt werden, daß die Pfade im Raum $\mathrm{D}_\mathrm{E}[0,\infty)$ liegen.*

BEWEIS. Die Familie $\{T^\Delta(t)\}$ von linearen Operatoren ist nach Lemma 2.1 eine Feller-Halbgruppe mit $(1,0) \in \mathrm{bp}{-}\overline{\mathcal{G}(G^\Delta)}$, wobei G^Δ der infinitesimale Erzeuger von $\{T^\Delta(t)\}$ ist. Damit existiert nach Proposition 2.2 und dem Existenzsatz ein zu $\{P(t,x)\}$ korrespondierender Prozeß mit Pfaden in $\mathrm{D}_{\mathrm{E}^\Delta}[0,\infty)$. Ist $\{P(t,x)\}$ konservativ und $\nu \in \mathcal{P}(\mathrm{E})$, so folgt die Behauptung analog, falls wir zeigen können, daß $(1,0) \in \mathrm{bp}{-}\overline{\mathcal{G}(G)}$ für den infinitesimalen Erzeuger G von $\{T(t)\}$. Dazu ist zu zeigen, daß eine Folge $\{f_n\} \subseteq \mathcal{D}(G)$ existiert mit $\text{bp-}\lim_{n\to\infty} f_n = 1$ und $\text{bp-}\lim_{n\to\infty} Gf_n = 0$. Wähle dazu $\{g_n\} \subseteq \widehat{\mathrm{C}}(\mathrm{E})$ mit $\text{bp-}\lim_{n\to\infty} g_n = 1$. Nach Ethier & Kurtz (1986), Lemma 1.2.2, ist die Abbildung $(\mathrm{id} - G) : \mathcal{D}(G) \mapsto \widehat{\mathrm{C}}(\mathrm{E})$ bijektiv mit

$$f_n := (\mathrm{id} - G)^{-1} g_n = \int_0^\infty \exp(-t) T(t) g_n \, dt \in \mathcal{D}(G). \tag{2.1}$$

Wegen $\|T(t)g_n\| \leq \|g_n\|$ für alle $t \geq 0$ folgt damit $\sup_{n\in\mathbb{N}} \|f_n\| < \infty$. Nach Definition gilt

$$T(t)g_n(x) = \int g_n(y)\, P(t,x,dy), \qquad (t,x) \in [0,\infty) \times \mathrm{E}.$$

Da $\{P(t,x)\}$ konservativ ist, erhalten wir $\text{bp-}\lim_{n\to\infty} T(t)g_n = 1$ mit dominierter Konvergenz, und eine nochmalige Anwendung auf (2.1) liefert $\text{bp-}\lim_{n\to\infty} f_n = 1$. Die Behauptung folgt nun wegen $Gf_n = f_n - g_n$ für $n \in \mathbb{N}$. □

2.4 Theorem (Pfadeigenschaften). *Sei $\{P(t,x)\}$ eine Verzweigungsübergangsfunktion. Dann existiert zu jedem $\nu \in \mathcal{P}(\mathrm{E}^\Delta)$ ein korrespondierender Verzweigungsprozeß Z mit Startverteilung ν und Pfaden im Raum $\mathrm{D}_{\mathrm{E}^\Delta}[0,\infty)$. Ist $\{P(t,x)\}$ konservativ und $\nu \in \mathcal{P}(\mathrm{E})$, so kann Z so gewählt werden, daß die Pfade im Raum $\mathrm{D}_\mathrm{E}[0,\infty)$ liegen.*

Beweis. Nach Proposition II.3.9 ist die zu $\{P(t,x)\}$ korrespondierende Operatorhalbgruppe eine Feller-Halbgruppe auf $\widehat{\mathrm{C}}(\mathrm{E})$. Die Behauptung folgt nun unmittelbar aus Proposition 2.3. □

2.5 Definition. Wir gehen im folgenden stets davon aus, daß für einen Verzweigungsprozeß Z eine Version mit Pfaden in $\mathrm{D}_{\mathrm{E}^\Delta}[0,\infty)$ $\big(\mathrm{D}_\mathrm{E}[0,\infty)\big)$ gewählt ist, und bezeichnen die Charakterisierung $L : \mathrm{E} \mapsto \mathbb{R}^d$ $\big(\mathbb{P} = (P_1, \ldots, P_d)\big)$ der zugehörigen Übergangsfunktion $\{P(t,x)\}$ als Charakterisierung des Verzweigungsprozesses Z. Beachte, daß (die Verteilung von) Z dadurch nur bei gegebener Startverteilung bestimmt ist.

Wir wenden uns nun der stetigen Abhängigkeit eines Verzweigungsprozesses von seiner Charakterisierung zu. Dazu benötigen wir einige technische Hilfsmittel.

2.6 Proposition. *Für $n \in \mathbb{N}$ sei $\{T_n(t)\}$ eine Feller-Halbgruppe mit infinitesimalem Erzeuger G_n, $\nu_n \in \mathcal{P}(\mathrm{E}^\Delta)$ und Z_n ein zu $\{T_n^\Delta(t)\}$ korrespondierender stochastischer Prozeß mit Startverteilung ν_n und Pfaden in $\mathrm{D}_{\mathrm{E}^\Delta}[0,\infty)$. Sei ferner $\{T(t)\}$ eine Feller-Halbgruppe mit infinitesimalem Erzeuger G, $\nu \in \mathcal{P}(\mathrm{E}^\Delta)$ und Z ein zu $\{T^\Delta(t)\}$ korrespondierender stochastischer Prozeß mit Startverteilung ν und Pfaden in $\mathrm{D}_{\mathrm{E}^\Delta}[0,\infty)$.*

Sei $D \subseteq \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{D}(G_n)$ ein Core von G. Gilt $G_n f \to Gf$ für alle $f \in D$ und $\nu_n \xrightarrow{\mathrm{w}} \nu$, so folgt $Z_n \xrightarrow{\mathrm{d}} Z$ in $\mathrm{D}_{\mathrm{E}^\Delta}[0,\infty)$. Besitzen alle Prozesse Pfade in $\mathrm{D}_\mathrm{E}[0,\infty)$, und sind alle Startverteilungen auf E konzentriert, so gilt $Z_n \xrightarrow{\mathrm{d}} Z$ in $\mathrm{D}_\mathrm{E}[0,\infty)$.

Beweis. Seien G_n^Δ, G^Δ die infinitesimalen Erzeuger von $\{T_n^\Delta(t)\}$, $\{T^\Delta(t)\}$. Nach Lemma 2.1 ist $D^\Delta := \mathbb{R} + D$ ein Core von G^Δ. Ferner gilt

$$G_n^\Delta f = G_n\big(f - f(\Delta)\big) \to G\big(f - f(\Delta)\big) = G^\Delta f, \qquad f \in D^\Delta.$$

Dies ist nach Ethier & Kurtz (1986), Theorem 1.6.1, äquivalent zu $T_n^\Delta(t)f \to T^\Delta(t)f$ für alle $t \in [0,\infty)$ und $f \in \mathrm{C}(\mathrm{E}^\Delta)$. Damit folgt $Z_n \xrightarrow{\mathrm{d}} Z$ in $\mathrm{D}_{\mathrm{E}^\Delta}[0,\infty)$ nach dem Stetigkeitssatz. Die zweite Behauptung folgt analog. □

2.7 Lemma. *Für $n \in \mathbb{N}$ sei Z_n ein stochastischer Prozeß mit Pfaden in $\mathrm{D}_{\mathrm{E}^\Delta}[0,\infty)$. Sei ferner $\{T(t)\}$ eine Feller-Halbgruppe und Z ein zu $\{T^\Delta(t)\}$ korrespondierender stochastischer Prozeß mit Pfaden in $\mathrm{D}_{\mathrm{E}^\Delta}[0,\infty)$. Gilt $Z_n \xrightarrow{\mathrm{d}} Z$ in $\mathrm{D}_{\mathrm{E}^\Delta}[0,\infty)$, so folgt $Z_n \xrightarrow{\mathrm{d}} Z$ in den endlichdimensionalen Verteilungen.*

Beweis. Definiere $\Gamma := \big\{t \geq 0 \mid P\big(Z(t) = Z(t-)\big) = 1\big\}$. Nach Ethier & Kurtz (1986), Theorem 3.7.8, gilt $\big(Z_n(t_1), \ldots, Z_n(t_k)\big) \xrightarrow{\mathrm{d}} \big(Z(t_1), \ldots, Z(t_k)\big)$ für alle endlichen Mengen $(t_1, \ldots, t_k) \subseteq \Gamma$. Ist G^Δ der infinitesimal Erzeuger der Feller-Halbgruppe $\{T^\Delta(t)\}$, so ist $\mathcal{D}(G)$ dicht in $\mathrm{C}(\mathrm{E}^\Delta)$, also separiert $\mathcal{D}(G)$ die Wahrscheinlichkeitsmaße auf E^Δ. Nach Ethier & Kurtz (1986), Proposition 4.1.7 und Theorem 4.3.12, folgt $\Gamma = [0,\infty)$, also die Konvergenz der endlichdimensionalen Verteilungen. □

2.8 Lemma. *Für $n \in \mathbb{N}$ sei $L_n =: \big({L_1}^{(n)}, \ldots, {L_d}^{(n)}\big)$ $\big(\mathbb{P}_n := ({P_1}^{(n)}, \ldots, {P_d}^{(n)})\big)$ die Charakterisierung der Verzweigungsübergangsfunktion $\{P_n(t,x)\}$. Sei $L : \mathrm{E} \mapsto \mathbb{R}^d$ $\big(\mathbb{P} := (P_1, \ldots, P_d)\big)$ die Charakterisierung einer weiteren Verzweigungsübergangsfunktion $\{P(t,x)\}$. Es gilt $L_n(\lambda) \to L(\lambda)$ für alle $\lambda \in \mathrm{E}^\circ$ genau dann, wenn ${P_j}^{(n)} \xrightarrow{\mathrm{v}} P_j$ für alle $1 \leq j \leq d$.*

Beweis. Nach Theorem III.2.5 ist ${L_j}^{(n)}$ für $1 \leq j \leq d$ die kumulantenerzeugende Funktion der spektral positiven unendlich teilbaren Verteilung ${P_j}^{(n)} \in \mathcal{S}(\mathrm{X}) \setminus \{0\}$. Mit dem Stetigkeitssatz I.4.8 folgt daher die Behauptung. □

2.9 Theorem (Stetige Abhängigkeit). *Für $n \in \mathbb{N}$ sei Z_n ein Verzweigungsprozeß mit Charakterisierung $L_n : \mathrm{E} \mapsto \mathbb{R}^d$ $\big(\mathbb{P}_n := ({P_1}^{(n)}, \ldots, {P_d}^{(n)})\big)$ und Startverteilung $\nu_n \in \mathcal{P}(\mathrm{E}^\Delta)$. Sei ferner Z ein Verzweigungsprozeß mit Charakterisierung $L : \mathrm{E} \mapsto \mathbb{R}^d$ $\big(\mathbb{P} := (P_1, \ldots, P_d)\big)$ und Startverteilung $\nu \in \mathcal{P}(\mathrm{E}^\Delta)$.*

Gilt $L_n(\lambda) \to L(\lambda)$ für alle $\lambda \in \mathrm{E}^\circ$ $\big({P_j}^{(n)} \xrightarrow{\mathrm{v}} P_j$ für alle $1 \leq j \leq d\big)$ und $\nu_n \xrightarrow{\mathrm{w}} \nu$, so gilt $Z_n \xrightarrow{\mathrm{d}} Z$ in $\mathrm{D}_{\mathrm{E}^\Delta}[0,\infty)$ und $Z_n \xrightarrow{\mathrm{d}} Z$ in den endlichdimensionalen Verteilungen. Sind darüber hinaus alle Verzweigungsübergangsfunktionen konservativ und alle Startverteilungen auf E konzentriert, so gilt $Z_n \xrightarrow{\mathrm{d}} Z$ in $\mathrm{D}_{\mathrm{E}}[0,\infty)$.

Beweis. Seien $\{T_n(t)\}$ und $\{T(t)\}$ die korrespondierenden Feller-Halbgruppen mit infinitesimalen Erzeugern G_n und G. Nach Theorem II.4.13 ist mit $f_\lambda(x) := \exp(-\langle \lambda, x\rangle)$ für $x \in \mathrm{E}$ die Algebra $\mathcal{A} := \langle f_\lambda \mid \lambda \in \mathrm{E}^\circ\rangle$ ein Core von G_n und G. Damit genügt es nach Proposition 2.6 die Konvergenz $G_n f_\lambda \to G f_\lambda$ für alle $\lambda \in \mathrm{E}^\circ$ zu zeigen. Die Konvergenz der endlichdimensionalen Verteilungen folgt dann aus Lemma 2.7. Sei dazu $\lambda \in \mathrm{E}^\circ$ fest. Nach Theorem II.4.13 gilt

$$\begin{aligned}
\|G_n f_\lambda - G f_\lambda\| &= \sup_{x\in \mathrm{E}} \big|\langle x, L_n(\lambda) - L(\lambda)\rangle f_\lambda(x)\big| \\
&\le \sup_{x\in \mathrm{E}} \sum_{j=1}^{d} x_j \big|L_j{}^{(n)}(\lambda) - L_j(\lambda)\big| f_\lambda(x) \\
&\le \sum_{j=1}^{d} \big|L_j{}^{(n)}(\lambda) - L_j(\lambda)\big| \cdot \|g_j\|.
\end{aligned}$$

Dabei ist für $1 \le j \le d$ die Funktion $g_j \in \widehat{\mathrm{C}}(\mathrm{E})$ durch $g_j(x) := x_j f_\lambda(x)$ für $x \in \mathrm{E}$ definiert. Damit gilt $G_n f_\lambda \to G f_\lambda$ für alle $\lambda \in \mathrm{E}^\circ$. □

Wir zeigen nun die Abgeschlossenheit der Klasse der Verzweigungsprozesse bezüglich der schwachen Konvergenz. Da wir die Struktur des möglichen Grenzprozesses im voraus nicht kennen, fordern wir hier die stochastische Stetigkeit anstelle der Regularität im Sinne von Definition II.2.1.

2.10 Proposition. *Für $n \in \mathbb{N}$ sei ψ_n die kumulantenerzeugende Funktion einer Verzweigungsübergangsfunktion $\{P_n(t,x)\}$. Es existiere ein $t_0 > 0$ derart, daß der Grenzwert $\psi(t,\lambda) := \lim_{n\to\infty} \psi_n(t,\lambda)$ für alle $(t,\lambda) \in [0,t_0] \times \mathrm{E}^\circ$ existiert. Ferner gelte $\lim_{t\to 0} \psi(t,\lambda) = \lambda$ für alle $\lambda \in \mathrm{E}^\circ$.*

Dann existiert der Grenzwert $\psi(t,\lambda) := \lim_{n\to\infty} \psi_n(t,\lambda) \in \mathrm{E}^\circ$ für alle $(t,\lambda) \in [0,\infty)\times\mathrm{E}^\circ$ und (die stetige Fortsetzung von) ψ ist die kumulantenerzeugende Funktion einer regulären Verzweigungsübergangsfunktion $\{P(t,x)\}$.

Beweis. Analog zum Beweis von Proposition III.3.2. □

2.11 Theorem (Abgeschlossenheit). *Für $n \in \mathbb{N}$ sei $\{P_n(t,x)\}$ eine Verzweigungsübergangsfunktion und $Z_j{}^{(n)}$ für $1 \le j \le d$ ein korrespondierender Verzweigungsprozeß mit Startverteilung ϵ_{e_j}. Sei ferner $t_0 > 0$ und $\eta_j(t)$ für $1 \le j \le d$ und $t \in [0,t_0]$ eine Zufallsvariable mit Werten in E^Δ derart, daß $\eta_j(t) \xrightarrow{\mathrm{d}} \eta_j(0)$ für $t \to 0$.*

Gilt $Z_j{}^{(n)}(t) \xrightarrow{\mathrm{d}} \eta(t)$ für alle $1 \le j \le d$ und alle $t \in [0,t_0]$, so existiert eine Verzweigungsübergangsfunktion $\{P(t,x)\}$ und zu jedem $1 \le j \le d$ ein korrespondierender

Verzweigungsprozeß Z_j mit Startverteilung ϵ_j derart, daß ${Z_j}^{(n)} \xrightarrow{\mathrm{d}} Z_j$ in $\mathrm{D}_{\mathrm{E}^\Delta}[0,\infty)$ und ${Z_j}^{(n)} \xrightarrow{\mathrm{d}} Z_j$ in den endlichdimensionalen Verteilungen. In diesem Fall gilt $Z_j(t) \stackrel{\mathrm{d}}{=} \eta_j(t)$ für $1 \le j \le d$ und $t \in [0,t_0]$.

Sind alle Verzweigungsübergangsfunktionen $\{P_n(t,x)\}$ konservativ und besitzt $\eta_j(t)$ für $1 \le j \le d$ und $t \in [0,t_0]$ Werte in E, so können wir annehmen, daß Z Pfade in $\mathrm{D}_{\mathrm{E}}[0,\infty)$ besitzt. Dann gilt ${Z_j}^{(n)} \xrightarrow{\mathrm{d}} Z_j$ in $\mathrm{D}_{\mathrm{E}}[0,\infty)$ für $1 \le j \le d$.

Beweis. Nach Voraussetzung gilt $\eta_j(0) \stackrel{\mathrm{d}}{=} \epsilon_{e_j}$. Wir bezeichnen die Einschränkung der Verteilung von $\eta_j(t)$ auf E für $1 \le j \le d$ und $t \in [0,t_0]$ mit $P(t,e_j) \in \mathcal{S}(\mathrm{E})$. Wegen $\eta_j(t) \xrightarrow{\mathrm{d}} \eta_j(0)$, gilt $\check{P}(t,e_j,\lambda) \to \exp(-\lambda_j)$ für $1 \le j \le d$, $\lambda \in \mathrm{E}^\circ$ und $t \to 0$. Daher kann $t_0 > 0$ so gewählt werden, daß $P(t,e_j)$ für $t \in [0,t_0]$ und $1 \le j \le d$ eine kumulantenerzeugende Funktion $\psi_j : \mathrm{E} \mapsto \mathrm{E}$ besitzt. Setze $\psi := (\psi_1,\dots,\psi_d)$. Dann gilt $\lim_{t\to 0} \psi(t,\lambda) = \lambda$ für alle $\lambda \in \mathrm{E}^\circ$. Ist $\psi_n =: \big({\psi_1}^{(n)},\dots,{\psi_d}^{(n)}\big)$ die kumulantenerzeugende Funktion von $\{P_n(t,x)\}$, so gilt $\psi_j(t,\lambda) = \lim_{n\to\infty} {\psi_j}^{(n)}(t,\lambda)$ für alle $1 \le j \le d$ und alle $(t,\lambda) \in [0,t_0] \times \mathrm{E}^\circ$, da ${\psi_j}^{(n)}(t,\cdot)$ die kumulantenerzeugende Funktion von ${Z_j}^{(n)}(t)$ ist. Damit erhalten wir $\psi(t,\lambda) = \lim_{n\to\infty} \psi_n(t,\lambda)$ für alle $(t,\lambda) \in [0,t_0] \times \mathrm{E}^\circ$. Nach Proposition 2.10 kann ψ zur kumulantenerzeugenden Funktion einer regulären Verzweigungsübergangsfunktion $\{P(t,x)\}$ fortgesetzt werden.

Sei $L_n : \mathrm{E} \mapsto \mathbb{R}^d$ die Charakterisierung von $\{P_n(t,x)\}$. Wir zeigen zunächst, daß die Folge $\{L_n(\lambda)\}$ für jedes $\lambda \in \mathrm{E}^\circ$ konvergiert. Definiere dazu

$$\theta(t,\lambda) := \frac{1}{t} \int_0^t \psi(s,\lambda)\,ds, \qquad t > 0, \lambda \in \mathrm{E}^\circ.$$

Wegen $\lim_{t\to 0} \psi(t,\lambda) = \lambda$ für alle $\lambda \in \mathrm{E}^\circ$ gilt $\nabla_k \psi_j(t,\lambda) \to \delta_{jk}$ für $1 \le j,k \le d$, $\lambda \in \mathrm{E}^\circ$ und $t \to 0$ nach Proposition I.2.15. Mit dominierter Konvergenz folgt $\nabla_k \theta_j(t,\lambda) \to \delta_{jk}$ für $1 \le j,k \le d$, $\lambda \in \mathrm{E}^\circ$ und $t \to 0$. Sei nun $\lambda \in \mathrm{E}^\circ$ fest. Wähle $t \in (0,t_0)$ so klein, daß die Matrix $D\theta(t,\lambda) := \big(\nabla_k \theta_j(t,\lambda)\big)_{jk}$ invertierbar ist. Definiere analog

$$\theta^{(n)}(t,\lambda) := \frac{1}{t} \int_0^t \psi^{(n)}(s,\lambda)\,ds, \qquad t > 0, \lambda \in \mathrm{E}^\circ.$$

Wegen $P_n(t,e_j) \xrightarrow{\mathrm{v}} P(t,e_j)$ erhalten wir $\nabla_k {\psi_j}^{(n)}(t,\lambda) \to \nabla_k \psi_j(t,\lambda)$ für alle $1 \le j,k \le d$ nach Proposition I.2.15. Mit dominierter Konvergenz folgt $\nabla_k {\theta_j}^{(n)}(t,\lambda) \to \nabla_k \theta_j(t,\lambda)$ für alle $1 \le j,k \le d$. Nach Proposition II.4.7 löst ${\psi_j}^{(n)}(\cdot,\lambda) : [0,\infty) \mapsto [0,\infty)$ für $1 \le j \le d$ die partielle Differentialgleichung

$$\frac{\partial}{\partial t} {\psi_j}^{(n)}(t,\lambda) = \langle \nabla {\psi_j}^{(n)}(t,\lambda), L_n(\lambda) \rangle, \qquad t \ge 0. \tag{2.2}$$

Formulieren wir dies als Integralgleichung, so erhalten wir

$${\psi_j}^{(n)}(t,\lambda) - \lambda_j = \int_0^t \langle \nabla {\psi_j}^{(n)}(s,\lambda), L_n(\lambda) \rangle\,ds, \qquad 1 \le j \le d. \tag{2.3}$$

Erneute Anwendung von dominierter Konvergenz liefert für $1 \leq j \leq d$ die Darstellung

$$t^{-1}\big(\psi_j{}^{(n)}(t,\lambda) - \lambda_j\big) = \langle \nabla\theta_j{}^{(n)}(t,\lambda), L_n(\lambda)\rangle, \tag{2.4}$$

also

$$t^{-1}\big(\psi_n(t,\lambda) - \lambda\big) = D\theta_n(t,\lambda)L_n(\lambda),$$

wobei $D\theta_n(t,\lambda) := \big(\nabla_k\theta_j{}^{(n)}(t,\lambda)\big)_{jk}$. Wegen $D\theta_n(t,\lambda) \to D\theta(t,\lambda) := \big(\nabla_k\theta_j(t,\lambda)\big)_{jk}$ ist $D\theta_n(t,\lambda)$ für hinreichend großes $n \in \mathbb{N}$ invertierbar, und aufgrund der Stetigkeit der Inversion von Matrizen folgt die Existenz von

$$\lim_{n\to\infty} L_n(\lambda) = \lim_{n\to\infty} D\theta_n(t,\lambda)^{-1}\,\frac{\psi_n(t,\lambda)-\lambda}{t} = D\theta(t,\lambda)^{-1}\,\frac{\psi(t,\lambda)-\lambda}{t}\,.$$

Wir bezeichnen diesen Grenzwert für $\lambda \in \mathrm{E}^\circ$ mit $L(\lambda)$ und zeigen nun, daß (die stetige Fortsetzung von) $L : \mathrm{E} \mapsto \mathbb{R}^d$ die Charakterisierung von $\{P(t,x)\}$ ist. Verwende mit Proposition II.4.6 für festes $\lambda \in \mathrm{E}^\circ$ die Darstellung

$$\psi_n(t,\lambda) = \lambda + \int_0^t L_n\big(\psi_n(s,\lambda)\big)\,ds, \qquad t \geq 0. \tag{2.5}$$

Beachte nun, daß die Konvergenz $L_n(\lambda) \to L(\lambda)$ für $\lambda \in \mathrm{E}^\circ$ nach Proposition I.2.15 lokal gleichmäßig auf E° ist. Wegen $\psi_n(t,\lambda) \to \psi(t,\lambda) \in \mathrm{E}^\circ$ für alle $t \geq 0$ und alle $\lambda \in \mathrm{E}^\circ$ erhalten wir mit dominierter Konvergenz

$$\psi(t,\lambda) = \lambda + \int_0^t L\big(\psi(s,\lambda)\big)\,ds, \qquad t \geq 0.$$

Da L (als lokal gleichmäßiger Limes stetiger Funktionen) stetig ist, folgt die Darstellung

$$\left.\frac{\partial\psi(t,\lambda)}{\partial t}\right|_{t=0} = L(\lambda), \qquad \lambda \in \mathrm{E}^\circ.$$

Dies ist jedoch gerade die Definition der Charakterisierung von $\{P(t,x)\}$. Für $1 \leq j \leq d$ sei schließlich Z_j ein zu $\{P(t,x)\}$ korrespondierender Verzweigungsprozeß mit Startverteilung ϵ_{e_j}. Die schwache Konvergenz in $\mathrm{D}_{\mathrm{E}^\Delta}[0,\infty)$ und in den endlichdimensionalen Verteilungen folgt mit Theorem 2.9. Insbesondere können wir aufgrund der Konvergenz der eindimensionalen Verteilungen die Grenzverteilungen identifizieren. Beachte nun, daß die zusätzliche Voraussetzung aufgrund dieser Identifikation mit Korollar II.2.8 die Konservativität von $\{P(t,x)\}$ zur Folge hat. □

Wir fassen nun die Ergebnisse in einem allgemeinen Konvergenzsatz zusammen. Da wir hier einen Verzweigungsprozeß als Grenzprozeß voraussetzen, benötigen wir keine einschränkenden Bedingungen.

2.12 THEOREM (KONVERGENZSATZ). *Für $n \in \mathbb{N}$ und $1 \leq j \leq d$ sei ${Z_j}^{(n)}$ ein Verzweigungsprozeß mit Charakterisierung $L_n : \mathrm{E} \mapsto \mathbb{R}^d$ $\big(\mathbb{P}_n := ({P_1}^{(n)}, \dots, {P_d}^{(n)})\big)$ und Startverteilung ϵ_{e_j}. Sei ferner Z_j für $1 \leq j \leq d$ ein Verzweigungsprozeß mit Charakterisierung $L : \mathrm{E} \mapsto \mathbb{R}^d$ $\big(\mathbb{P} := (P_1, \dots, P_d)\big)$ und Startverteilung ϵ_{e_j}. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

(a) ${P_j}^{(n)} \xrightarrow{\mathrm{v}} P_j$ *für alle* $1 \leq j \leq d$.

(b) $L_n(\lambda) \to L(\lambda)$ *für alle* $\lambda \in \mathrm{E}^\circ$.

(c) ${Z_j}^{(n)} \xrightarrow{\mathrm{d}} Z_j$ *in* $\mathrm{D}_{\mathrm{E}^\Delta}[0, \infty)$ *für alle* $1 \leq j \leq d$.

(d) ${Z_j}^{(n)} \xrightarrow{\mathrm{d}} Z_j$ *in den endlichdimensionalen Verteilungen für alle* $1 \leq j \leq d$.

(e) ${Z_j}^{(n)} \xrightarrow{\mathrm{d}} Z_j$ *in den eindimensionalen Verteilungen für alle* $1 \leq j \leq d$.

Sind darüber hinaus alle Verzweigungsübergangsfunktionen konservativ, so kann hierbei der Raum $\mathrm{D}_{\mathrm{E}^\Delta}[0, \infty)$ *durch den Raum* $\mathrm{D}_{\mathrm{E}}[0, \infty)$ *ersetzt werden.*

Wir verwenden nun das in Kapitel I entwickelte Laplace-Kalkül zur Formulierung von notwendigen und hinreichenden Bedingungen für die Konvergenz in Theorem 2.12.

2.13 PROPOSITION (KONVERGENZKRITERIEN). *Unter den Voraussetzungen von Theorem 2.12 sei ${P_j}^{(n)} =: \langle {a_j}^{(n)}, \big({\sigma_j}^{(n)}\big)^2, {\mu_j}^{(n)}, {\delta_j}^{(n)} \rangle$ und $P_j =: \langle a_j, \sigma_j^2, \mu_j, \delta_j \rangle$. Es liegt Konvergenz genau dann vor, wenn für alle $1 \leq j \leq d$ die folgenden Bedingungen erfüllt sind:*

(a) $\langle {a_j}^{(n)}, e_j \rangle \longrightarrow \langle a_j, e_j \rangle$.

(b) $\langle {a_j}^{(n)}, e_k \rangle + \displaystyle\int \frac{y_k}{1 + |y|^2}\, {\mu_j}^{(n)}(dy) \longrightarrow \langle a_j, e_k \rangle + \int \frac{y_k}{1 + |y|^2}\, \mu_j(dy)$ *für alle* $k \neq j$.

(c) $\displaystyle\lim_{\epsilon \to 0} \varlimsup_{n \to \infty} \left| \left(\big({\sigma_j}^{(n)}\big)^2 + \int_{\overline{U_\epsilon(0)}} y_j^2\, {\mu_j}^{(n)}(dy) \right) - \sigma_j^2 \right| = 0.$

(d) $1_{\mathrm{E} \setminus \overline{U_\epsilon(0)}} \cdot {\nu_j}^{(n)} \xrightarrow{\mathrm{v}} 1_{\mathrm{E} \setminus \overline{U_\epsilon(0)}} \cdot \nu_j$ *für alle* $\epsilon > 0$ *mit* $\nu\big(\partial U_\epsilon(0)\big) = 0$.

(e) $\displaystyle\lim_{R \to \infty} \varlimsup_{n \to \infty} \left| \left({\mu_j}^{(n)}\big(\mathrm{E} \setminus U_R(0)\big) + {\delta_j}^{(n)} \right) - \delta_j \right| = 0.$

Dabei ist ${\nu_j}^{(n)}(dy) := |y|^2(1 + |y|^2)^{-1}{\mu_j}^{(n)}(dy)$ *und* $\nu_j(dy) := |y|^2(1 + |y|^2)^{-1}\mu_j(dy)$.

Beweis. Sei $1 \le j \le d$ fest. Nach Theorem III.2.5 besitzt die kumulantenerzeugende Funktion ${L_j}^{(n)}$ die Darstellung

$$ {L_j}^{(n)}(\lambda) = \langle {a_j}^{(n)}, \lambda\rangle - \frac{1}{2}\big({\sigma_j}^{(n)}\big)^2 \lambda_j^2 - \int M_j(\lambda, y)\, {\mu_j}^{(n)}(dy) + {\delta_j}^{(n)}, \qquad \lambda \in \mathrm{E}. $$

Dabei ist ${a_j}^{(n)} \in \mathrm{X}$ mit $\langle {a_j}^{(n)}, e_k\rangle \in [0,\infty)$ für $k \ne j$, ${\sigma_j}^{(n)}, {\delta_j}^{(n)} \ge 0$ und ${\mu_j}^{(n)}$ ein σ-endliches Borel-Maß auf $\mathrm{E} \setminus \{0\}$ mit

$$ \int \Big(\big(\sum_{k \ne j} y_k + y_j^2 \big) \wedge 1 \Big) {\mu_j}^{(n)}(dy) < \infty. $$

Wir verwenden nun eine dem Konvergenzsatz für spektral beschränkte Verteilungen angepaßte Schreibweise. Setze

$$ {L_j}^{(n)}(\lambda) = \langle {b_j}^{(n)}, \lambda\rangle - \frac{1}{2}\big({\sigma_j}^{(n)}\big)^2 \lambda_j^2 - \int M(\lambda, y)\, {\mu_j}^{(n)}(dy) + {\delta_j}^{(n)}, \qquad \lambda \in \mathrm{E}. $$

Dabei ist ${b_j}^{(n)} \in \mathrm{X}$ definiert durch $\langle {b_j}^{(n)}, e_j\rangle := {a_j}^{(n)}$ und

$$ \langle {b_j}^{(n)}, e_k\rangle := \langle {a_j}^{(n)}, e_k\rangle + \int \frac{y_k}{1+|y|^2}\, {\mu_j}^{(n)}(dy), \qquad k \ne j. \tag{2.6} $$

Wir erhalten die Darstellung $\langle {a_j}^{(n)}, ({\sigma_j}^{(n)})^2, {\mu_j}^{(n)}, {\delta_j}^{(n)}\rangle = [{b_j}^{(n)}, {\Sigma_j}^{(n)}, {\mu_j}^{(n)}, {\delta_j}^{(n)}]$, wobei $\big({\Sigma_j}^{(n)}\big)_{kl} = \delta_{jk}\delta_{jl}\big({\sigma_j}^{(n)}\big)^2$. Schreiben wir analog $\langle a_j, \sigma_j^2, \mu_j, \delta_j\rangle = [b_j, \Sigma_j, \mu_j, \delta_j]$ mit $\big(\Sigma_j\big)_{kl} = \delta_{jk}\delta_{jl}\sigma_j^2$, so liegt nach Theorem I.4.7 Konvergenz genau dann vor, wenn die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

(a′) ${b_j}^{(n)} \longrightarrow b_j$.

(b′) $\lim\limits_{\epsilon\to 0} \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \left| \left(\big({\sigma_j}^{(n)}\big)^2 \lambda_j^2 + \int_{\overline{U_\epsilon(0)}} \langle \lambda, y\rangle^2\, {\mu_j}^{(n)}(dy) \right) - \sigma_j^2\lambda_j^2 \right| = 0$ für alle $\lambda \in \mathrm{E}^\circ$.

(c′) $1_{\mathrm{E}\setminus\overline{U_\epsilon(0)}} \cdot {\nu_j}^{(n)} \xrightarrow{\mathrm{v}} 1_{\mathrm{E}\setminus\overline{U_\epsilon(0)}} \cdot \nu_j$ für alle $\epsilon > 0$ mit $\nu(\partial U_\epsilon(0)) = 0$.

(d′) $\lim\limits_{R\to\infty} \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \left| \left({\mu_j}^{(n)}\big(\mathrm{E}\setminus U_R(0)\big) + {\delta_j}^{(n)} \right) - \delta_j \right| = 0$.

Offensichtlich ist (a′) äquivalent zu (a) und (b), (c′) äquivalent zu (d) und schließlich (d′) äquivalent zu (e). Offensichtlich folgt (c) aus (b′). Beachte nun, daß aus (a′) nach (2.6) die Beschränktheit der Folge $\{\int_{\overline{U_1(0)}} y_k\, {\mu_j}^{(n)}(dy)\}$ für $k \ne j$ folgt, da alle dort auftretenden Terme nichtnegativ sind. Für $0 < \epsilon < 1$ und $1 \le l \le d$ erhalten wir

$$ \overline{\lim_{n\to\infty}} \int_{\overline{U_\epsilon(0)}} y_k y_l\, {\mu_j}^{(n)}(dy) \le \epsilon \cdot \sup_{n\in\mathbb{N}} \int_{\overline{U_1(0)}} y_k\, {\mu_j}^{(n)}(dy), \qquad k \ne j. $$

Damit folgt die Behauptung. □

2.14 Beispiel. Für $d = 1$ sei $\sigma \geq 0$, $\varrho > 0$ und $\delta \geq 0$. Definiere $L : [0,\infty) \mapsto [0,\infty)$ durch

$$L(\lambda) := \sigma(1 - \exp(-\varrho\lambda)) + \delta, \qquad \lambda \in [0,\infty).$$

Die kumulantenerzeugende Funktion $\psi : [0,\infty) \times [0,\infty) \mapsto [0,\infty)$ der zugehörigen Verzweigungsübergangsfunktion $\{P(t,x)\}$ ist nach Beispiel III.4.2 als Lösung des Anfangswertproblems

$$y' = \sigma(1 - \exp(-\varrho y)) + \delta, \qquad y(0) = \lambda, \tag{2.7}$$

gegeben durch

$$\psi(t,\lambda) = \frac{1}{\varrho} \ln\left[\frac{\sigma}{\sigma+\delta} + e^{\varrho(\sigma+\delta)t}\left(e^{\varrho\lambda} - \frac{\sigma}{\sigma+\delta}\right)\right], \qquad (t,\lambda) \in [0,\infty)^2.$$

(a) In dieser expliziten Form ist die stetige Abhängigkeit von zugehörigen Verzweigungsprozessen mit vorgegebener Startverteilung ϵ_x für $x \in \mathrm{E}$ ein Problem der stetigen Abhängigkeit der Lösungen des Anfangswertproblems (2.7) von den Parametern $\sigma \geq 0$, $\varrho > 0$ und $\delta \geq 0$. Offensichtlich gehen die Anfangswertprobleme wie die eindimensionalen Verteilungen der zugehörigen Verzweigungsprozesse auch für $\varrho \to 0$ und $\varrho \to \infty$ stetig ineinander über (in Übereinstimmung mit den Konvergenzkriterien aus Proposition 2.13). Für $\sigma \to \infty$ oder $\delta \to \infty$ gilt $\psi(t,\lambda) \to \infty$ für alle $(t,\lambda) \in (0,\infty)^2$, d.h., die eindimensionalen Verteilungen streben vage gegen Null.

(b) Natürlich liegt auch bei beliebig vorgegebener Startverteilung $\nu \in \mathcal{P}([0,\infty])$ Konvergenz vor, falls die Parameter stetig ineinander übergehen. Die zugehörigen Prozesse konvergieren ebenfalls schwach in $\mathrm{D}_{[0,\infty]}[0,\infty)$. Wir wissen bereits aus Beispiel III.4.2, daß diese Prozesse genau dann konservativ sind, wenn $\delta = 0$ gilt. In diesem Fall liegt schwache Konvergenz in $\mathrm{D}_{[0,\infty)}[0,\infty)$ vor, falls $\nu \in \mathcal{P}([0,\infty))$ gewählt ist.

3. Approximation

3.1 Definition. Eine diskrete Übergangsfunktion $\{P(k,x)\} \in \mathcal{P}({\mathbb{N}_0}^d)$ auf ${\mathbb{N}_0}^d$ heißt diskrete Verzweigungsübergangsfunktion, falls

$$P(k, x+y) = P(k,x) \star P(k,y), \qquad k \in \mathbb{N}_0, x,y \in {\mathbb{N}_0}^d.$$

3.2 Proposition. *Sei $\{P(k,x)\}$ eine diskrete Verzweigungsübergangsfunktion. Ist ϑ_j für $1 \leq j \leq d$ die kumulantenerzeugende Funktion von $\xi_j := P(1,e_j) \in \mathcal{P}({\mathbb{N}_0}^d)$ und $\vartheta := (\vartheta_1, \ldots, \vartheta_d)$, so gilt*

$$\check{P}(k,x,\lambda) = \exp\big(-\langle x, \vartheta^{\langle k\rangle}(\lambda)\rangle\big), \qquad (k,x) \in \mathbb{N}_0 \times {\mathbb{N}_0}^d, \lambda \in \mathrm{E}. \tag{3.1}$$

Damit ist $\{P(k,x)\}$ durch $(\xi_1, \ldots, \xi_d)$ eindeutig bestimmt. Umgekehrt existiert zu jedem Tupel $(\xi_1, \ldots, \xi_d)$ mit $\xi_j \in \mathcal{P}({\mathbb{N}_0}^d)$ für $1 \leq j \leq d$ eine diskrete Verzweigungsübergangsfunktion $\{P(k,x)\}$ mit der angegebenen Darstellung.

Beweis. Die Darstellung (3.1) zeigt man analog zum Beweis von Proposition II.2.6. Verwende dort anstelle der Nichtdegeneriertheit, daß eine diskrete Verzweigungsübergangsfunktion per Definition konservativ ist. Die Existenz einer Verzweigungsübergangsfunktion $\{P(k,x)\}$ zu $(\xi_1,\dots,\xi_d)$ folgt analog zum Beweis von Lemma III.3.4 und Proposition II.2.11. □

3.3 Bemerkung. Der zu einer diskreten Verzweigungsübergangsfunktion korrespondierende Prozeß heißt Galton Watson-Prozess. In der Tat ist Definition 3.1 die analytische Definition eines d-typigen Galton Watson-Prozesses, der gewöhnlich pfadweise konstruiert wird. Die Verteilungen $\xi_j \in \mathcal{S}(\mathbb{N}_0{}^d)$ sind die Nachwuchsverteilungen der einzelnen Typen.

Zur Anwendung des Approximationssatzes auf eine Folge von Galton Watson-Prozessen benötigen wir wieder einige technische Hilfsmittel.

3.4 Definition. (a) Für $n \in \mathbb{N}$ sei $\mathrm{E}_n := \{x/n \mid x \in \mathbb{N}_0{}^d\}$ und $\mathrm{X}_n := \{x/n \mid x \in \mathbb{Z}^d\}$. Für $1 \le j \le d$ definiere die Abbildung $\kappa_j{}^{(n)} : \mathbb{N}_0{}^d \mapsto \mathrm{X}_n$ durch

$$\kappa_j{}^{(n)}(x) := (x - e_j)/n, \qquad x \in \mathbb{N}_0{}^d.$$

(b) Wir definieren die Ein-Punkt-Kompaktifizierung von E_n analog zur Ein-Punkt-Kompaktifizierung von E und erweitern $\pi_n : \widehat{\mathrm{C}}(\mathrm{E}) \mapsto \widehat{\mathrm{C}}(\mathrm{E}_n)$ zu der durch $\pi_n{}^\Delta f := f|_{\mathrm{E}_n^\Delta}$ für $f \in \mathrm{C}(\mathrm{E}^\Delta)$ definierten kanonischen Projektion $\pi_n{}^\Delta : \mathrm{C}(\mathrm{E}^\Delta) \mapsto \mathrm{C}(\mathrm{E}_n^\Delta)$.

3.5 Proposition. *Sei $\{k_n\} \subseteq \mathbb{N}$ eine Folge mit $k_n \to \infty$. Für $n \in \mathbb{N}$ sei $\{P_n(k,x)\}$ eine Übergangsfunktion auf E_{k_n} mit korrespondierendem Operator $T_n : \widehat{\mathrm{C}}(\mathrm{E}_{k_n}) \mapsto \widehat{\mathrm{C}}(\mathrm{E}_{k_n})$, $G_n f := n(T_n f - f)$ für $f \in \widehat{\mathrm{C}}(\mathrm{E}_{k_n})$, $\nu_n \in \mathcal{P}(\mathrm{E}_{k_n})$ und Y_n ein zu $\{P_n(k,x)\}$ korrespondierender stochastischer Prozeß mit Startverteilung ν_n. Definiere $Z_n(t) := Y_n([nt])$ für $t \ge 0$. Sei ferner $\{T(t)\}$ eine Feller-Halbgruppe mit infinitesimalem Erzeuger G, $\nu \in \mathcal{P}(\mathrm{E}^\Delta)$ und Z ein zu $\{T^\Delta(t)\}$ korrespondierender stochastischer Prozeß mit Startverteilung ν und Pfaden im Raum $\mathrm{D}_{\mathrm{E}^\Delta}[0,\infty)$.*

Sei $D \subseteq \widehat{\mathrm{C}}(\mathrm{E})$ ein Core von G. Gilt $G_n \pi_{k_n} f \to Gf$ für alle $f \in D$ und $\nu_n \xrightarrow{\mathrm{w}} \nu$, so folgt $Z_n \xrightarrow{\mathrm{d}} Z$ in $\mathrm{D}_{\mathrm{E}^\Delta}[0,\infty)$. Besitzt Z Pfade in $\mathrm{D}_{\mathrm{E}}[0,\infty)$ und ist ν auf E konzentriert, so gilt $Z_n \xrightarrow{\mathrm{d}} Z$ in $\mathrm{D}_{\mathrm{E}}[0,\infty)$.

Beweis. Sei G^Δ der infinitesimale Erzeuger von $\{T^\Delta(t)\}$. Nach Lemma 2.1 ist die Menge $D^\Delta := \mathbb{R} + D$ ein Core von G^Δ. Setze $T_n^\Delta f := f(\Delta) + T_n\big(f - f(\Delta)\big)$ für $f \in \mathrm{C}(\mathrm{E}_{k_n}^\Delta)$. Nach Voraussetzung gilt $T_n^\Delta : \mathrm{C}(\mathrm{E}_{k_n}^\Delta) \mapsto \mathrm{C}(\mathrm{E}_{k_n}^\Delta)$ und

$$T_n^\Delta f(x) = \int f(y)\, P_n^\Delta(1,x,dy), \qquad f \in \mathrm{C}(\mathrm{E}_{k_n}^\Delta), x \in \mathrm{E}_{k_n}^\Delta.$$

Dabei ist $P_n^\Delta(1,x) \in \mathcal{P}(\mathrm{E}_{k_n}^\Delta)$ die eindeutig bestimmte Fortsetzung von $P_n(1,x)$ zu einem Wahrscheinlichkeitsmaß. Mit $G_n^\Delta f := n\big(T_n^\Delta f - f\big)$ für $f \in \mathrm{C}(\mathrm{E}_{k_n}^\Delta)$ erhalten wir

$$G_n^\Delta \pi_{k_n}^\Delta f = G_n \pi_{k_n}\big(f - f(\Delta)\big) \to G\big(f - f(\Delta)\big) = G^\Delta f, \qquad f \in D^\Delta.$$

Dies ist aber nach Ethier & Kurtz (1986), Theorem 1.6.5, äquivalent zur Konvergenz $\big(T_n^\Delta\big)^{[nt]}\pi_{k_n}^\Delta f \to T^\Delta(t) f$ für alle $t \in [0,\infty)$ und $f \in \mathrm{C}(\mathrm{E}^\Delta)$. Damit folgt die Konvergenz nach dem Approximationssatz. Die zweite Behauptung folgt analog. □

3.6 Lemma. *Sei $\{\xi_n\} \subseteq \mathcal{P}\big(\mathbb{N}_0{}^d\big)$ und $\{k_n\} \subseteq \mathbb{N}$ eine Folge mit $k_n \to \infty$. Für $1 \le j \le d$ definiere das transportierte Maß $P_j{}^{(n)} := \xi_n{}^{(\kappa_j{}^{(k_n)})} \in \mathcal{P}(\mathrm{X}_{k_n})$. Ist ϑ_n die kumulantenerzeugende Funktion von ξ_n, so besitzt $\big(P_j{}^{(n)}\big)^{\star n k_n}$ die kumulantenerzeugende Funktion*

$$L_j{}^{(n)}(\lambda) = n k_n\big(\vartheta_n(\lambda/k_n) - \lambda_j/k_n\big), \qquad \lambda \in \mathrm{E}. \tag{3.2}$$

Ferner existiert zu $1 \le j \le d$ genau dann ein $P_j \in \mathcal{S}(\mathrm{X}) \setminus \{0\}$ mit $(P_j{}^{(n)})^{\star n k_n} \xrightarrow{\mathrm{v}} P$, wenn die Folge $\{L_j{}^{(n)}(\lambda)\}$ für alle $\lambda \in \mathrm{E}^\circ$ konvergiert. Ist L_j die kumulantenerzeugende Funktion von P_j, so gilt in diesem Fall $L_j{}^{(n)}(\lambda) \to L_j(\lambda)$ für alle $\lambda \in \mathrm{E}^\circ$.

Beweis. Offensichtlich ist $\{P_j{}^{(n)}\} \subseteq \mathcal{P}(\mathrm{X})$ für $1 \le j \le d$ eine Folge von auf $\mathrm{E} \cup U_1(0)$ konzentrierten Wahrscheinlichkeitsmaßen. Daher folgt die behauptete Äquivalenz nach dem Stetigkeitssatz I.4.12. Die Darstellung (3.2) erhalten wir unmittelbar aus dem Transformationssatz. □

3.7 Lemma. *Sei $\{P(k,x)\}$ eine diskrete Verzweigungsübergangsfunktion und Y ein korrespondierender Galton Watson-Prozeß mit Nachwuchsverteilungen $\big(\xi_1,\dots,\xi_d\big)$ und zugehörigen kumulantenerzeugenden Funktionen $\vartheta := \big(\vartheta_1,\dots,\vartheta_d\big)$. Dann korrespondiert der stochastische Prozeß $n^{-1}Y$ für $n \in \mathbb{N}$ zur Übergangsfunktion $\{Q_n(k,x)\}$ auf E_n, die durch*

$$\check{Q}_n(k,x,\lambda) = \exp\big(-\langle x, n\vartheta_n^{\langle k\rangle}(\lambda/n)\rangle\big), \qquad (k,x) \in \mathbb{N}_0 \times \mathrm{E}_n, \lambda \in \mathrm{E},$$

gegeben ist. Ist T_n der zu $\{Q_n(k,x)\}$ korrespondierende Operator, so gilt insbesondere $T_n\pi_n f_\lambda(x) = \exp(-\langle x, n\vartheta_n(\lambda/n)\rangle)$ für alle $\lambda \in \mathrm{E}^\circ$ und alle $x \in \mathrm{E}_n$.

Beweis. Es ist nur die angegebene Darstellung zu zeigen. Nach Proposition 3.2 und der Verzweigungseigenschaft erhalten wir

$$\begin{aligned} E\big(f_\lambda\big(n^{-1}Y(k+l)\big) \mid \mathcal{F}_k{}^{n^{-1}Y}\big) &= E\big(f_{\lambda/n}\big(Y(k+l)\big) \mid \mathcal{F}_k{}^{Y}\big) \\ &= \check{P}_n\big(l, Y(k), \lambda/n\big) = \big(\check{P}_n(l, n^{-1}Y(k), \lambda/n)\big)^n \\ &= \exp\big(-\langle n^{-1}Y(k), n\vartheta_n^{\langle l\rangle}(\lambda/n)\rangle\big) = \check{Q}_n(l, n^{-1}Y(k), \lambda), \qquad k,l \in \mathbb{N}_0, \lambda \in \mathrm{E}^\circ. \end{aligned}$$

Damit folgt Behauptung, da die Algebra $\pi_n(\mathcal{A})$ dicht in $\widehat{\mathrm{C}}(\mathrm{E}_n)$ ist. □

3.8 Theorem (Approximation). *Sei* $\{k_n\} \subseteq \mathbb{N}$ *eine Folge mit* $k_n \to \infty$. *Für* $n \in \mathbb{N}$ *sei* Y_n *ein Galton Watson-Prozeß mit Nachwuchsverteilungen* $\big(\xi_1{}^{(n)}, \dots, \xi_d{}^{(n)}\big)$. *Der durch*

$$Z_n(t) := \frac{Y_n([nt])}{k_n}, \qquad t \geq 0,$$

definierte stochastische Prozeß Z_n *besitze die Startverteilung* $\nu_n \in \mathcal{P}(\mathrm{E}_{k_n})$. *Das für* $1 \leq j \leq d$ *durch* $P_j{}^{(n)} := \big(\xi_j{}^{(n)}\big)^{(\kappa_j{}^{(k_n)})} \in \mathcal{P}(\mathrm{X}_{k_n})$ *definierte Wahrscheinlichkeitsmaß besitze die kumulantenerzeugende Funktion* $L_j{}^{(n)}$. *Setze* $L_n := (L_1{}^{(n)}, \dots, L_d{}^{(n)})$. *Sei ferner* Z *ein Verzweigungsprozeß mit Charakterisierung* L $\big(\mathbb{P} := (P_1, \dots, P_d)\big)$ *und Startverteilung* $\nu \in \mathcal{P}(\mathrm{E}^{\Delta})$.

Gilt $L_n(\lambda) \to L(\lambda)$ *für alle* $\lambda \in \mathrm{E}^{\circ}$ $\big((P_j{}^{(n)})^{\star nk_n} \xrightarrow{\mathrm{v}} P_j$ *für alle* $1 \leq j \leq d\big)$ *und* $\nu_n \xrightarrow{\mathrm{w}} \nu$, *so gilt* $Z_n \xrightarrow{\mathrm{d}} Z$ *in* $\mathrm{D}_{\mathrm{E}^{\Delta}}[0,\infty)$ *und* $Z_n \xrightarrow{\mathrm{w}} Z$ *in den endlichdimensionalen Verteilungen. Ist darüber hinaus die zu* Z *gehörende Verzweigungsübergangsfunktion konservativ und* ν *auf* E *konzentriert, so gilt* $Z_n \xrightarrow{\mathrm{d}} Z$ *in* $\mathrm{D}_{\mathrm{E}}[0,\infty)$.

Beweis. Sei $\lambda \in \mathrm{E}^{\circ}$ fest. Ist $\vartheta_j{}^{(n)}$ für $1 \leq j \leq d$ die kumulantenerzeugende Funktion von $\xi_j{}^{(n)}$ und $\vartheta_n := \big(\vartheta_1{}^{(n)}, \dots, \vartheta_d{}^{(n)}\big)$, so gilt nach Lemma 3.7 für den zur Übergangsfunktion von $k_n^{-1} Y_n$ korrespondierenden Operator

$$T_n \pi_{k_n} f_\lambda(x) = \exp(-\langle x, k_n \vartheta_n(\lambda/k_n)\rangle), \qquad x \in \mathrm{E}. \tag{3.3}$$

Mit $G_n f := n(T_n f - f)$ für $f \in \widehat{\mathrm{C}}(\mathrm{E}_{k_n})$ erhalten wir daher

$$\begin{aligned} G_n \pi_{k_n} f_\lambda(x) &= n\big(\exp(-\langle x, k_n \vartheta_n(\lambda/k_n)\rangle) - \exp(-\langle x, \lambda\rangle)\big) \\ &= n\Bigg(\exp\big(-\langle x, k_n(\vartheta_n(\lambda/k_n) - \lambda/k_n)\rangle\big) - 1\Bigg) \cdot \exp(-\langle x, \lambda\rangle), \qquad x \in \mathrm{E}. \end{aligned}$$

Ist $\{P(t,x)\}$ die zu Z gehörende Übergangsfunktion und G deren infinitesimaler Erzeuger, so gilt $G f_\lambda(x) = -\langle x, L(\lambda)\rangle f_\lambda(x)$ für $x \in \mathrm{E}$. Wir zeigen nun, daß T_n für hinreichend großes $n \in \mathbb{N}$ den Raum $\widehat{\mathrm{C}}(\mathrm{E}_{k_n})$ in sich selbst abbildet. Nach Lemma 3.6 besitzt $\big(P_j{}^{(n)}\big)^{\star nk_n} \xrightarrow{\mathrm{v}} P_j$ für $1 \leq j \leq d$ die kumulantenerzeugende Funktion

$$L_j{}^{(n)}(\lambda) = nk_n\big(\vartheta_j{}^{(n)}(\lambda/k_n) - \lambda_j/k_n\big), \qquad \lambda \in \mathrm{E}.$$

Wegen $L_n(\lambda) \to L(\lambda)$ erhalten wir $k_n \vartheta_j{}^{(n)}(\lambda/k_n) \to \lambda_j$ für $1 \leq j \leq d$. Daher gilt $n\vartheta_j{}^{(n)}(\lambda/n) > 0$ für $1 \leq j \leq d$ und hinreichend großes $n \in \mathbb{N}$. Nach (3.3) folgt damit $T_n : \pi_{k_n}(\mathcal{A}) \mapsto \pi_{k_n}(\mathcal{A})$, und wie im Beweis von Proposition II.3.2 erhalten wir $T_n : \widehat{\mathrm{C}}(\mathrm{E}_{k_n}) \mapsto \widehat{\mathrm{C}}(\mathrm{E}_{k_n})$, da $\pi_{k_n}(\mathcal{A})$ dicht in $\widehat{\mathrm{C}}(\mathrm{E}_{k_n})$ ist. Verwende nun Lemma II.4.12 mit $s_n := n$, $a_n := k_n(\vartheta_n(\lambda/k_n) - \lambda/k_n)$ und $a := L(\lambda)$. Dann gilt $s_n a_n \to a$, und mit den dortigen Bezeichnungen erhalten wir $G_n \pi_{k_n} f_\lambda = g_\lambda{}^{(n)}|_{\mathrm{E}_{k_n}}$ und $G f_\lambda = g_\lambda$. Damit folgt

$$\sup_{x \in \mathrm{E}_{k_n}} \big|G_n \pi_{k_n} f_\lambda - G \pi_{k_n} f_\lambda\big| \leq \|g_\lambda{}^{(n)} - g_\lambda\| \longrightarrow 0,$$

also mit Proposition 3.5 die Konvergenz in $\mathrm{D}_{\mathrm{E}^{\Delta}}[0,\infty)$ $\big(\mathrm{D}_{\mathrm{E}}[0,\infty)\big)$. Die Konvergenz der endlichdimensionalen Verteilungen erhalten wir mit Lemma 2.7. □

Wir zeigen nun wie im vorherigen Abschnitt, daß beim Grenzübergang die Verzweigungseigenschaft der Prozesse erhalten bleibt.

3.9 Theorem (Abgeschlossenheit). *Sei $\{k_n\} \subseteq \mathbb{N}$ eine Folge mit $k_n \to \infty$. Für $n \in \mathbb{N}$ und $1 \leq j \leq d$ sei ${Y_j}^{(n)}$ ein Galton Watson-Prozeß mit Nachwuchsverteilungen $\left({\xi_1}^{(n)}, \dots, {\xi_d}^{(n)}\right)$ und Startverteilung $\epsilon_{k_n e_j}$. Definiere für $1 \leq j \leq d$ den stochastischen Prozeß ${Z_j}^{(n)}$ durch*

$$ {Z_j}^{(n)}(t) := \frac{{Y_j}^{(n)}([nt])}{k_n}, \qquad t \geq 0. $$

Sei ferner $t_0 > 0$ und $\eta_j(t)$ für $1 \leq j \leq d$ und $t \in [0, t_0]$ eine Zufallsvariable mit Werten in E^{Δ} derart, daß $\eta_j(t) \xrightarrow{\mathrm{d}} \eta_j(0)$ für $t \to 0$.

Gilt ${Z_j}^{(n)}(t) \xrightarrow{\mathrm{d}} \eta(t)$ für alle $1 \leq j \leq d$ und alle $t \in [0, t_0]$, so existiert eine Verzweigungsübergangsfunktion $\{P(t,x)\}$ und zu jedem $1 \leq j \leq d$ ein korrespondierender Verzweigungsprozeß Z_j mit Startverteilung ϵ_j derart, daß ${Z_j}^{(n)} \xrightarrow{\mathrm{d}} Z_j$ in $\mathrm{D}_{\mathrm{E}^{\Delta}}[0,\infty)$ und ${Z_j}^{(n)} \xrightarrow{\mathrm{d}} Z_j$ in den endlichdimensionalen Verteilungen. In diesem Fall gilt $Z_j(t) \stackrel{\mathrm{d}}{=} \eta_j(t)$ für $1 \leq j \leq d$ und $t \in [0, t_0]$.

Besitzt darüber hinaus $\eta_j(t)$ für $1 \leq j \leq d$ und $t \in [0, t_0]$ Werte in E, so können wir annehmen, daß Z Pfade in $\mathrm{D}_{\mathrm{E}}[0,\infty)$ besitzt. Dann gilt ${Z_j}^{(n)} \xrightarrow{\mathrm{d}} Z_j$ in $\mathrm{D}_{\mathrm{E}}[0,\infty)$.

Beweis. Der Nachweis verläuft im wesentlich analog zum Beweis von Theorem 2.11. Wir beschränken uns daher auf die hier vorzunehmenden Modifikationen.

Anstelle der kumulantenerzeugenden Funktionen der Verzweigungsprozesse betrachte die kumulantenerzeugenden Funktionen von ${Z_j}^{(n)}(t)$ für $1 \leq j \leq d$ und $t \in [0,\infty)$. Diese sind nach Lemma 3.7 gegeben durch

$$ {\psi_j}^{(n)}(t,\lambda) := \langle k_n {\vartheta_n}^{\langle [nt] \rangle}(\lambda / k_n), e_j \rangle, \qquad \lambda \in \mathrm{E}. $$

Dabei ist $\vartheta_n := \left({\vartheta_1}^{(n)}, \dots, {\vartheta_d}^{(n)}\right)$ und ${\vartheta_j}^{(n)}$ für $1 \leq j \leq d$ die kumulantenerzeugende Funktion von ${\xi_j}^{(n)}$. Zum Nachweis der Konvergenz $\psi(t,\lambda) = \lim_{n\to\infty} \psi_n(t,\lambda) \in \mathrm{E}^{\circ}$ für $(t,\lambda) \in [0,\infty) \times \mathrm{E}^{\circ}$ und der Fortsetzbarkeit von ψ zur kumulantenerzeugenden Funktion einer regulären Verzweigungsübergangsfunktion $\{P(t,x)\}$ verwende Proposition III.3.2 anstelle von Proposition 2.10. Definiere dazu $\varphi_n(\lambda) := k_n \vartheta_n(\lambda / k_n)$ für $\lambda \in \mathrm{E}$, und beachte, daß ${\varphi_n}^{\langle k \rangle}(\lambda) := k_n {\vartheta_n}^{\langle k \rangle}(\lambda / k_n)$ für $k \in \mathbb{N}_0$ gilt. Nach Lemma 3.7 ist damit $\langle {\varphi_n}^{\langle k \rangle}, e_j \rangle$ für $1 \leq j \leq d$ die kumulantenerzeugende Funktion eines Sub-Wahrscheinlichkeitsmaßes auf E. Damit sind die Voraussetzungen für die behauptete Konvergenz erfüllt. Wegen $k_n \to \infty$ folgt mit dem Stetigkeitssatz I.4.12 für $1 \leq j \leq d$ die unendliche Teilbarkeit der zu $\psi_j(t,\cdot)$ gehörenden Verteilung. Also kann ψ zur kumulantenerzeugenden Funktion einer regulären Verzweigungsübergangsfunktion $\{P(t,x)\}$ fortgesetzt werden. Mit Proposition III.3.2 erhalten wir $\varphi_n(\lambda) \to \lambda$ für alle $\lambda \in \mathrm{E}^{\circ}$.

Definiere nun $\theta : (0,\infty) \times \mathrm{E}^{\circ} \mapsto \mathrm{E}$ wie vorher. Wir erhalten wieder $\nabla_k \theta_j(t,\lambda) \to \delta_{jk}$ für $1 \leq j,k \leq d$, $\lambda \in \mathrm{E}^{\circ}$ und $t \to 0$. Wähle $t \in (0, t_0)$ zu festem $\lambda \in \mathrm{E}^{\circ}$ so klein, daß die Matrix $D\theta(t,\lambda) := \big(\nabla_k \theta_j(t,\lambda)\big)_{jk}$ invertierbar ist. Definiere für den vorliegenden diskreten Fall

$$\theta^{(n)}(t,\lambda) := \frac{1}{t}\int_0^{[nt]/n} \psi^{(n)}(s,\lambda)\,ds, \qquad t>0, \lambda \in \mathrm{E}^{\circ}.$$

Wir erhalten analog $\nabla_k {\theta_j}^{(n)}(t,\lambda) \to \nabla_k \theta_j(t,\lambda)$ für alle $1 \le j,k \le d$. Beachte hier, daß diese Konvergenz lokal gleichmäßig auf E° ist. Wir benötigen nun eine diskrete Version der Gleichung (2.4). Für $1 \le j \le d$ erhalten wir durch Teleskopsummenbildung

$$\begin{aligned}
t^{-1}\big({\psi_j}^{(n)}(t,\lambda) - \lambda_j\big) &= t^{-1}\sum_{k=1}^{[nt]} \langle k_n {\vartheta_n}^{\langle k\rangle}(\lambda/k_n) - k_n {\vartheta_n}^{\langle k-1\rangle}(\lambda/k_n), e_j\rangle \\
&= t^{-1}\sum_{k=1}^{[nt]} \langle k_n {\vartheta_n}^{\langle k-1\rangle}\big(\varphi_n(\lambda)\big) - k_n {\vartheta_n}^{\langle k-1\rangle}(\lambda), e_j\rangle \\
&= \frac{n}{t}\int_0^{[nt]/n} \Big({\psi_j}^{(n)}\big(s,\varphi_n(\lambda)\big) - {\psi_j}^{(n)}(s,\lambda)\Big)\,ds \\
&= n\Big({\theta_j}^{(n)}\big(t,\varphi_n(\lambda)\big) - {\theta_j}^{(n)}(t,\lambda)\Big), \qquad t>0.
\end{aligned}$$

Nach dem Mittelwertsatz existiert zu $1 \le j \le d$ ein $\delta_j \in (0,1)$ mit

$$t^{-1}\big({\psi_j}^{(n)}(t,\lambda) - \lambda_j\big) = \langle \nabla {\theta_j}^{(n)}\big(t, \lambda + \delta_j(\varphi_n(\lambda) - \lambda)\big), L_n(\lambda)\rangle,$$

wobei $L_n(\lambda) := n\big(\varphi_n(\lambda) - \lambda\big) = nk_n\big(\vartheta_n(\lambda/k_n) - \lambda/k_n\big)$. Wir erhalten nun die Darstellung

$$t^{-1}\big(\psi_n(t,\lambda) - \lambda\big) = D_n(t,\lambda)L_n(\lambda),$$

mit $D_n(t,\lambda) := \big(\nabla_k {\theta_j}^{(n)}\big(t, \lambda + \delta_j(\varphi_n(\lambda) - \lambda)\big)\big)_{jk}$. Wegen $\varphi_n(\lambda) \to \lambda$ und der lokal gleichmäßigen Konvergenz $\nabla_k {\theta_j}^{(n)}(t,\lambda) \to \nabla_k \theta_j(t,\lambda)$ für alle $1 \le j,k \le d$ ist damit $D_n(t,\lambda)$ für hinreichend großes $n \in \mathbb{N}$ invertierbar, und aufgrund der Stetigkeit der Inversion von Matrizen folgt die Existenz von

$$\lim_{n\to\infty} L_n(\lambda) = \lim_{n\to\infty} D_n(t,\lambda)^{-1}\,\frac{\psi_n(t,\lambda) - \lambda}{t} = D\theta(t,\lambda)^{-1}\,\frac{\psi(t,\lambda) - \lambda}{t}.$$

Verwende zum Nachweis, daß dieser Grenzwert die Charakterisierung der Verzweigungsübergangsfunktion $\{P(t,x)\}$ ist, die diskrete Variante von (2.5), die nach Lemma III.3.3 durch

$$\psi_n(t,\lambda) = \lambda + \int_0^{[nt]/n} L_n\big(\psi_n(s,\lambda)\big)\,ds, \qquad (t,\lambda) \in [0,\infty) \times \mathrm{E},$$

gegeben ist. Die schwache Konvergenz in $\mathrm{D}_{\mathrm{E}^{\triangle}}[0,\infty)$ und in den endlichdimensionalen Verteilungen folgt hier mit Theorem 3.8 anstelle von Theorem 2.9. Die übrigen Behauptungen folgen wörtlich wie im Beweis von Theorem 2.11. □

Wie vorher haben wir unterwegs den allgemeinen Approximationssatz gezeigt. Auch hier brauchen wir die stochastische Stetigkeit nicht vorauszusetzen.

3.10 Theorem (Approximationssatz). *Sei* $\{k_n\} \subseteq \mathbb{N}$ *eine Folge mit* $k_n \to \infty$. *Für* $n \in \mathbb{N}$ *und* $1 \le j \le d$ *sei* ${Y_j}^{(n)}$ *ein Galton Watson-Prozeß mit Nachwuchsverteilungen* $\big({\xi_1}^{(n)}, \dots, {\xi_d}^{(n)}\big)$ *und Startverteilung* $\epsilon_{k_n e_j}$. *Definiere für* $1 \le j \le d$ *den stochastischen Prozeß* ${Z_j}^{(n)}$ *durch*

$$ {Z_j}^{(n)}(t) := \frac{{Y_j}^{(n)}([nt])}{k_n}, \qquad t \ge 0. $$

${P_j}^{(n)} := \big({\xi_j}^{(n)}\big)^{(\kappa_j{}^{(k_n)})} \in \mathcal{P}(\mathrm{X}_{k_n})$ *besitze für* $1 \le j \le d$ *die kumulantenerzeugende Funktion* ${L_j}^{(n)}$. *Setze* $L_n := ({L_1}^{(n)}, \dots, {L_d}^{(n)})$. *Sei ferner* Z_j *für* $1 \le j \le d$ *ein Verzweigungsprozeß mit Charakterisierung* $L : \mathrm{E} \mapsto \mathbb{R}^d$ $\big(\mathbb{P} := (P_1, \dots, P_d)\big)$ *und Startverteilung* ϵ_{e_j}. *Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

(a) $\big({P_j}^{(n)}\big)^{\star n k_n} \xrightarrow{\mathrm{v}} P_j$ *für alle* $1 \le j \le d$.

(b) $L_n(\lambda) \to L(\lambda)$ *für alle* $\lambda \in \mathrm{E}^\circ$.

(c) ${Z_j}^{(n)} \xrightarrow{\mathrm{d}} Z_j$ *in* $\mathrm{D}_{\mathrm{E}^\triangle}[0,\infty)$ *für alle* $1 \le j \le d$.

(d) ${Z_j}^{(n)} \xrightarrow{\mathrm{d}} Z_j$ *in den endlichdimensionalen Verteilungen für alle* $1 \le j \le d$.

(e) ${Z_j}^{(n)} \xrightarrow{\mathrm{d}} Z_j$ *in den eindimensionalen Verteilungen für alle* $1 \le j \le d$.

Ist darüber hinaus die zu Z *gehörende Verzweigungsübergangsfunktion konservativ, so kann hierbei der Raum* $\mathrm{D}_{\mathrm{E}^\triangle}[0,\infty)$ *durch den Raum* $\mathrm{D}_{\mathrm{E}}[0,\infty)$ *ersetzt werden.*

3.11 Proposition (Konvergenzkriterien). *Unter den Voraussetzungen von Theorem 3.10 sei* $P_j =: \langle a_j, \sigma_j^2, \mu_j, \delta_j \rangle$. *Es liegt Konvergenz genau dann vor, wenn für alle* $1 \le j \le d$ *die folgenden Bedingungen erfüllt sind:*

(a) $\displaystyle\int \frac{y_j}{1+|y|^2}\, n k_n {P_j}^{(n)}(dy) \longrightarrow \langle a_j, e_j \rangle.$

(b) $\displaystyle\int \frac{y_k}{1+|y|^2}\, n k_n {P_j}^{(n)}(dy) \longrightarrow \langle a_j, e_k \rangle + \int \frac{y_k}{1+|y|^2}\, \mu_j(dy)$ *für alle* $k \ne j$.

(c) $\displaystyle\lim_{\epsilon \to 0} \varlimsup_{n \to \infty} \left| \int_{\overline{U_\epsilon(0)}} y_j^2\, n k_n {P_j}^{(n)}(dy) - \sigma_j^2 \right| = 0.$

(d) $1_{\mathrm{E} \setminus \overline{U_\epsilon(0)}} \cdot {\nu_j}^{(n)} \xrightarrow{\mathrm{v}} 1_{\mathrm{E} \setminus \overline{U_\epsilon(0)}} \cdot \nu_j$ *für alle* $\epsilon > 0$ *mit* $\nu\big(\partial U_\epsilon(0)\big) = 0$.

(e) $\displaystyle\lim_{R \to \infty} \varlimsup_{n \to \infty} \big| n k_n {P_j}^{(n)}\big(\mathrm{E} \setminus U_R(0)\big) - \delta_j \big| = 0.$

Dabei ist ${\nu_j}^{(n)}(dy) := |y|^2(1+|y|^2)^{-1} n k_n {P_j}^{(n)}(dy)$ *und* $\nu_j(dy) := |y|^2(1+|y|^2)^{-1}\mu_j(dy)$.

Beweis. Dies zeigt man analog zum Beweis von Proposition 2.13. Verwende hierbei den Approximationssatz I.4.11 anstelle des Konvergenzsatzes I.4.7. □

Wir betrachten nun zwei Beispiele, in denen der Approximationssatz im eindimensionalen Fall auf einen einzigen Galton Watson-Prozeß angewendet wird.

3.12 Beispiel. Sei $\xi \in \mathcal{P}(\mathbb{N}_0)$, $\{X_n\}$ eine Folge von i.i.d. Zufallsvariablen mit $X_1 \stackrel{\mathrm{d}}{=} \xi$, $S_n := \sum_{k=1}^{n} X_k$ für $n \in \mathbb{N}_0$ und P_α eine stabile Verteilung mit Exponent $1 < \alpha \leq 2$ und kumulantenerzeugender Funktion

$$L(\lambda) = \frac{a\lambda}{\alpha - 1} - \frac{\sigma^2 \lambda^\alpha}{2(\alpha - 1)}, \qquad \lambda \in [0, \infty),$$

mit $a \in \mathbb{R}$ und $\sigma^2 \geq 0$. Nach Beispiel III.4.3 ist P_α die Charakterisierung einer Verzweigungsübergangsfunktion. Liegt ξ im normalen Anziehungsbereich (vergleiche Feller (1971), Abschnitt XVII.9) von P_α, so gilt nach Feller (1971), Theorem XVII.5.3, $n^{-1/\alpha} S_n - n^{(\alpha-1)/\alpha} \stackrel{\mathrm{d}}{\to} P_\alpha$. Setze $k_n := [n^{1/(\alpha-1)}]$ und betrachte die Teilfolge $\{S_{nk_n}\}$. Es gilt die asymptotische Äquivalenz $(nk_n)^{1/\alpha} \sim (n^{\alpha/(\alpha-1)})^{1/\alpha} = n^{1/(\alpha-1)} \sim k_n$ und analog $(nk_n)^{(\alpha-1)/\alpha} \sim n$. Also folgt $k_n^{-1} S_{nk_n} - n \stackrel{\mathrm{d}}{\to} P_\alpha$. Ist Y_n für $n \in \mathbb{N}$ ein Galton Watson-Prozeß mit Nachwuchsverteilung ξ und Startverteilung ϵ_{k_n}, so erhalten wir mit Theorem 3.10 die schwache Konvergenz der durch

$$Z_n(t) := \frac{Y_n([nt])}{k_n}, \qquad t \geq 0,$$

definierten Folge $\{Z_n\}$ von stochastischen Prozessen gegen den durch P_α charakterisierten Verzweigungsprozeß Z mit Startverteilung ϵ_1.

3.13 Beispiel. Sei $\xi \in \mathcal{P}(\mathbb{N}_0)$ und X eine Zufallsvariable mit $X \stackrel{\mathrm{d}}{=} \xi$. Es gelte $E(X) = 1$ und $0 < \sigma^2 = \mathit{Var}(X) < \infty$. Ist Y_n für $n \in \mathbb{N}$ ein Galton Watson-Prozeß mit Nachwuchsverteilung ξ und Startverteilung ϵ_n, so definiere

$$Z_n(t) := \frac{Y_n([nt])}{n}, \qquad t \geq 0.$$

Nach den Überlegungen in Beispiel 3.12 mit $\alpha = 2$ konvergiert Z_n schwach in $\mathrm{D_E}[0, \infty)$ und in den endlichdimensionalen Verteilungen gegen einen Verzweigungsprozeß mit Charakterisierung $N(0, \sigma^2)$, da ξ nach dem zentralen Grenzwertsatz im normalen Anziehungsbereich von $N(0, \sigma^2)$ liegt.

4. Diffusionen

4.1 Definition. Betrachte die Menge D(E) aller unendlich oft differenzierbaren Funktionen $f : \mathrm{E} \mapsto \mathbb{R}$ mit

$$\sup_{|\alpha| \leq n} \sup_{x \in \mathrm{E}} \left(1 + |x|^2\right)^n \cdot \left|D_\alpha f(x)\right| < \infty, \qquad n \in \mathbb{N}_0.$$

Dabei ist $|\alpha| := \sum_{j=1}^{d} \alpha_j$ und $D_\alpha f := \prod_{j=1}^{d} {\nabla_j}^{\alpha_j} f$ für $\alpha \in {\mathbb{N}_0}^d$. $\mathrm{D(E)} \subseteq \widehat{\mathrm{C}}(\mathrm{E})$ heißt Raum der schnell fallenden Funktionen auf E.

4.2 Theorem (Diffusion). *Für* $1 \le j \le d$ *sei* $a_j \in \mathrm{X}$ *mit* $\langle a_j, e_k\rangle \in [0,\infty)$ *für* $k \neq j$ *und* $\sigma_j \ge 0$. *Sei ferner* $L : \mathrm{E} \mapsto \mathbb{R}^d$ *definiert durch*

$$L_j(\lambda) := \langle a_j, \lambda\rangle - \frac{1}{2}\sigma_j^2\lambda_j^2, \qquad \lambda \in \mathrm{E}.$$

Dann existiert zu jedem $\nu \in \mathcal{P}(\mathrm{E})$ *ein Verzweigungsprozeß* Z *mit Charakterisierung* L, *Startverteilung* ν *und Pfaden im Raum* $\mathrm{C_E}[0,\infty)$ *der stetigen Funktionen auf* $[0,\infty)$ *mit Werten in* E. *Dieser Verzweigungsprozeß* Z *ist eine Diffusion auf* E. *Der Raum* $\mathrm{D(E)}$ *ist ein Core des zugehörigen infinitesimalen Erzeugers* G, *und es gilt*

$$Gf(x) = \sum_{k=1}^{d}\left(\sum_{j=1}^{d} x_j\langle a_j, e_k\rangle\right)\nabla_k f(x) + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{d} x_k\sigma_k^2\,\nabla_k^2 f(x), \qquad f \in \mathrm{D(E)}. \tag{4.1}$$

Beweis. Nach Theorem III.3.6 existiert eine Verzweigungsübergangsfunktion $\{P(t,x)\}$ mit Charakterisierung L. Nach Proposition III.4.1 ist $\{P(t,x)\}$ konservativ, und wir können nach Theorem 2.4 einen korrespondierenden Verzweigungsprozeß Z mit Pfaden in $\mathrm{D_E}[0,\infty)$ wählen. Nach Theorem II.4.13 gilt für den infinitesimalen Erzeuger G der korrespondierenden Feller-Halbgruppe

$$Gf_\lambda(x) = -\langle x, L(\lambda)\rangle\, f_\lambda(x), \qquad \lambda \in \mathrm{E}^\circ.$$

Ist die angegebene Darstellung des infinitesimalen Erzeugers gezeigt, so ist Z nach Ethier & Kurtz (1986), Kapitel 8, Abschnitt 1, eine Diffusion auf E. Ferner ist die Algebra $\mathcal{A} = \langle f_\lambda \mid \lambda \in \mathrm{E}^\circ\rangle$ ein Core von G. Wegen $\mathcal{A} \subseteq \mathrm{D(E)}$ ist $\mathrm{D(E)}$ dann ebenfalls ein Core von G. Zeige (4.1) zunächst auf der Algebra $\mathcal{A}$. Sei dazu $\lambda \in \mathrm{E}^\circ$ fest. Es gilt

$$\begin{aligned}
Gf_\lambda(x) &= -\sum_{j=1}^{d} x_j L_j(\lambda) f_\lambda(x)\\
&= -\sum_{j=1}^{d} x_j\langle a_j, \lambda\rangle f_\lambda(x) + \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{d} x_j\sigma_j^2\lambda_j^2 f_\lambda(x)\\
&= \sum_{k=1}^{d}\left(\sum_{j=1}^{d} x_j\langle a_j, e_k\rangle\right)\big(-\lambda_k f_\lambda(x)\big) + \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{d} x_j\sigma_j^2\lambda_j^2 f_\lambda(x), \qquad x \in \mathrm{E}.
\end{aligned}$$

Wegen $\nabla_k\, f_\lambda(x) = -\lambda_k f_\lambda(x)$ und $\nabla_k^2\, f_\lambda(x) = \lambda_k^2 f_\lambda(x)$ folgt (4.1). Wir definieren nun den Operator H auf $\widehat{\mathrm{C}}(\mathrm{E})$ durch die rechte Seite von Gleichung (4.1). Offensichtlich ist H eine Fortsetzung von $G|_{\mathcal{A}}$. Wir nehmen nun an, daß $f \in \mathrm{D(E)}$ in $x_0 \in \mathrm{E}$ maximal ist und $f(x_0) \ge 0$ gilt. Gilt $\langle x_0, e_k\rangle > 0$, so folgt $\nabla_k f(x_0) = 0$ und $\nabla_k^2 f(x_0) \le 0$. Gilt $\langle x_0, e_k\rangle = 0$, so erhalten wir $\nabla_k f(x_0) \le 0$ und $\sum_{j\neq k}\langle x_0, e_j\rangle\langle a_j, e_k\rangle \ge 0$, also in jedem Fall $Hf(x_0) \le 0$. Nach Dynkins Maximum-Prinzip (siehe z.B. Rogers & Williams (1994), Lemma III.6.8) folgt damit $H = G|_{\mathrm{D(E)}}$.

Schließlich ist zu zeigen, daß Z so gewählt werden kann, daß die Pfade in $\mathrm{C_E}[0,\infty)$ liegen. Sei dazu $x_0 \in \mathrm{E}$ und $\epsilon > 0$ vorgegeben. Wähle nun ein $f \in \mathrm{D(E)}$ mit $f(x_0) = \|f\|$, $\sup_{y\in \mathrm{E}\setminus U_\epsilon(x_0)} f(y) < \|f\|$ und $\nabla_k^2 f(x_0) = 0$. Dann gilt $Gf(x_0) = 0$. Nach Ethier & Kurtz (1986), Remark 4.2.10, ist dies eine hinreichende Bedingung. $\square$

4.3 Beispiel. Ist $d = 1$ und $L(\lambda) = a\lambda - \sigma^2\lambda^2/2$ mit $a \in \mathbb{R}$ und $\sigma \geq 0$, d.h., $P = N(a, \sigma^2)$, so ist der infinitesimale Erzeuger G der zugehörigen Diffusion gegeben durch

$$Gf(x) = axf'(x) + \frac{1}{2}x\sigma^2 f''(x), \qquad f \in \mathrm{D}([0,\infty)).$$

Wir nehmen nun an, daß $\sigma^2 > 0$ gilt. Um die Randpunkte $r_0 := 0$ und $r_1 := \infty$ der zugehörigen Diffusion auf $[0,\infty)$ zu klassifizieren, definiere für festes $r \in (0,\infty)$

$$p(x) := \int_r^x e^{-\frac{2a}{\sigma^2}(y-r)}\,dy, \quad m(x) := \frac{2}{\sigma^2}\int_r^x y^{-1}e^{\frac{2a}{\sigma^2}(y-r)}\,dy, \qquad x \in [0,\infty),$$

und

$$u(x) := \int_r^x m(y)p'(y)\,dy, \quad v(x) := \int_r^x p(y)m'(y)\,dy, \qquad x \in [0,\infty).$$

Der Randpunkt $r_0 = 0$ ist erreichbar (accessible), d.h., es gilt $u(0) < \infty$ (zur Terminologie vergleich Ethier & Kurtz (1986), Kapitel 8, Abschnitt 1). Setze dazu $\gamma := 2a/\sigma^2$ und schreibe

$$u(0) = \frac{2}{\sigma^2}\int_0^r e^{-\gamma y}\int_y^r z^{-1}e^{\gamma z}\,dz\,dy \leq \frac{2}{\sigma^2}e^{|\gamma| r}\int_0^r\int_y^r z^{-1}\,dz\,dy < \infty.$$

Sei P_x die Verteilung einer zugehörige Diffusion auf $\mathrm{C}_{[0,\infty)}[0,\infty)$ mit Startverteilung ϵ_x und $Z(t) := \pi_t(\omega)$ für $t \geq 0$ und $\omega \in \mathrm{C}_{[0,\infty)}[0,\infty)$. Setzen wir $\tau_y := \inf\{t \geq 0 \mid Z(t) = y\}$ für $y \in [0,\infty)$, so bedeutet die Erreichbarkeit von $r_0 = 0$ nach Ethier & Kurtz (1986), Problem 8.4.1, daß ein $x > 0$ und ein $t > 0$ derart existieren, daß

$$\inf_{y\in(0,x)} P_x(\tau_y \leq t) > 0.$$

Da wir über eine explizite Darstellung der zugehörigen kumulantenerzeugenden Funktion verfügen, können wir sogar zeigen, daß dies für alle $(t,x) \in (0,\infty)\times(0,\infty)$ gilt. In Beispiel III.4.3 haben wir gesehen, daß die zugehörige kumulantenerzeugende Funktion ψ im Fall $a = 0$ die Form

$$\psi(t,\lambda) = \frac{\lambda}{1 + \frac{t\sigma^2}{2}\lambda}, \qquad (t,\lambda) \in [0,\infty)^2,$$

und im Fall $a \neq 0$ die Form

$$\psi(t,\lambda) = \frac{\lambda e^{at}}{1 + \frac{\sigma^2\lambda}{2a}(e^{at} - 1)}, \qquad (t,\lambda) \in [0,\infty)^2,$$

besitzt. Damit gilt $P_x\big(Z(t) = 0\big) = \lim_{\lambda\to\infty} \exp\big(-x\psi(t,\lambda)\big) > 0$ für $t, x > 0$, wie man diesen Gleichungen leicht entnehmen kann. Aufgrund der Stetigkeit der Pfade gilt $P_x\big(Z(t) = 0\big) \le P_x(\tau_y \le t)$ für $y \in (0, x)$. Betrachte nun

$$v(0) = \frac{2}{\sigma^2} \int_0^r y^{-1} \left(e^{\gamma y} \int_y^r e^{-\gamma z}\, dz \right) dy.$$

Da der Term in Klammern für $y \to 0$ gegen eine positiven Ausdruck strebt, erfüllt $r_0 = 0$ die Ausgangs-Bedingung $v(0) = \infty$ (exit boundary). Wir wenden uns nun dem Randpunkt $r_1 = \infty$ zu. Es gilt

$$u(\infty) = \frac{2}{\sigma^2} \int_r^\infty e^{-\gamma y} \int_r^y z^{-1} e^{\gamma z}\, dz\, dy \ge \frac{2}{\sigma^2} \int_r^\infty y^{-1} \left(e^{-\gamma y} \int_r^y e^{\gamma z}\, dz \right) dy.$$

Der Term in Klammern strebt hier für $y \to \infty$ ebenfalls gegen einen positiven Ausdruck (oder Unendlich). Damit gilt $u(\infty) = \infty$, d.h., $r_1 = \infty$ ist unerreichbar. Analog erhalten wir $v(\infty) = \infty$, d.h., $r_1 = \infty$ ist ein natürlicher Randpunkt (natural boundary). Damit sind für jedes $t > 0$ die folgenden Bedingungen erfüllt:

$$\lim_{y\to\infty} P_x(\tau_y \le t) = 0, \quad x \in (0,\infty), \qquad \lim_{x\to\infty} P_x(\tau_y \le t) = 0, \quad y \in (0,\infty).$$

In Beispiel 3.13 haben wir bereits für den Fall $d = 1$ eine einfache Diffusionsapproximation gesehen. Wir betrachten nun die allgemeine Form dieser Approximation.

4.4 Theorem (Diffusionsapproximation). *Für $n \in \mathbb{N}$ sei Y_n ein Galton Watson-Prozeß mit Nachwuchsverteilungen $\big(\xi_1{}^{(n)}, \ldots, \xi_d{}^{(n)}\big)$, die für $1 \le j \le d$ durch Zufallsvariable $X_j{}^{(n)}$ mit Werten in* E *repräsentiert werden. Der durch*

$$Z_n(t) := \frac{Y_n([nt])}{n}, \qquad t \ge 0,$$

definierte stochastische Prozeß Z_n besitze die Startverteilung $\nu_n \in \mathcal{P}(\mathrm{E}_n)$. Für $1 \le j \le d$ sei ferner $a_j \in \mathrm{X}$ mit $\langle a_j, e_k\rangle \in [0,\infty)$ für $k \ne j$ und $\sigma_j^2 \ge 0$. Es gelte

(a) $E\big(n(X_j{}^{(n)} - e_j)\big) \longrightarrow a_j$ *für alle* $1 \le j \le d$.

(b) $\mathrm{Var}\big(\langle X_j{}^{(n)}, e_k\rangle\big) \longrightarrow \delta_{jk}\, \sigma_j^2$ *für alle* $1 \le j, k \le d$.

(c) $\{\langle X_j{}^{(n)}, e_j\rangle\}$ *ist für jedes* $1 \le j \le d$ *gleichgradig quadratisch integrierbar.*

Existiert ein $\nu \in \mathcal{P}(\mathrm{E})$ mit $\nu_n \xrightarrow{\mathrm{w}} \nu$, so konvergiert Z_n schwach in $\mathrm{D_E}[0,\infty)$ und in den endlichdimensionalen Verteilungen gegen eine Diffusion mit Startverteilung ν und infinitesimalem Erzeuger

$$Gf(x) = \sum_{k=1}^d \left(\sum_{j=1}^d x_j \langle a_j, e_k\rangle \right) \nabla_k f(x) + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^d x_k \sigma_k^2\, \nabla_k^2 f(x), \qquad f \in \mathrm{D(E)}.$$

Beweis. Nach dem Approximationssatz 3.10 ist lediglich zu zeigen, daß für jedes $1 \leq j \leq d$ die Sub-Wahrscheinlichkeitsmaße ${P_j}^{(n)} := \big({\xi_j}^{(n)}\big)^{({\kappa_j}^{(n)})} \in \mathcal{P}(\mathrm{X}_n)$ die Bedingung $\big({P_j}^{(n)}\big)^{\star n^2} \xrightarrow{\mathrm{w}} N(a_j, \sigma_j^2)$ erfüllen. Dabei ist $N(a_j, \sigma_j^2) \in \mathcal{P}(\mathrm{E})$ gegeben durch die kumulantenerzeugende Funktion $L_j(\lambda) := \langle a_j, \lambda\rangle - \sigma_j^2 \lambda_j^2/2$ für $\lambda \in \mathrm{E}$. Setze ${\mu_j}^{(n)} := \int y \, {P_j}^{(n)}(dy)$ und beachte, daß

$$n^2 {\mu_j}^{(n)} = n^2 \int \frac{y - e_j}{n} \, {\xi_j}^{(n)}(dy) = E\big(n({X_j}^{(n)} - e_j)\big) \longrightarrow a_j.$$

Definiere daher ${Q_j}^{(n)} \in \mathcal{S}(\mathrm{X})$ durch ${\check{Q}_j}^{(n)}(\lambda) := {\check{P}_j}^{(n)}(\lambda) \cdot \exp(\langle \lambda, {\mu_j}^{(n)}\rangle)$ für $\lambda \in \mathrm{E}$. Dann gilt $\int y \, {Q_j}^{(n)}(dy) = 0$. Nun ist ${P_j}^{(n)}$ auf $\mathrm{E} \cup U_1(0)$ konzentriert, und es gilt ${\mu_j}^{(n)} \to 0$. Also können wir annehmen, daß ${Q_j}^{(n)}$ auf $\mathrm{E} \cup U_2(0)$ konzentriert ist. Wir verwenden den Stetigkeitssatz für Laplace-Transformierte I.2.14. Danach genügt es zu zeigen, daß $\big({Q_j}^{(n)}(\lambda)\big)^{n^2} \to \exp(\sigma_j^2 \lambda_j^2/2)$ für alle $\lambda \in \mathrm{E}$. Benutze hierzu die Taylor-Entwicklung

$$\exp(-x) = 1 - x + \frac{1}{2} x^2 \big(1 + r(x)\big), \qquad x \in \mathbb{R},$$

wobei $r(x) := 1 - \exp(-\vartheta x)$ für ein $\big($von x abhängiges $\vartheta \in (0,1)\big)$. Sei $\lambda \in \mathrm{E}$ fest. Dann existiert ein $M > 0$ mit $|r(\langle \lambda, y\rangle)| \leq M \wedge \big(\exp(|\lambda|\,|y|) - 1\big)$ für alle $y \in \mathrm{E} \cup U_2(0)$. Mit dieser Abschätzung erhalten wir

$$\begin{aligned} &\left| n^2 \big({\check{Q}_j}^{(n)}(\lambda) - 1\big) - \frac{n^2}{2} \int \langle \lambda, y\rangle^2 \, {Q_j}^{(n)}(dy) \right| \\ &\qquad \leq \frac{n^2}{2} \int \langle \lambda, y\rangle^2 \Big(M \wedge \big(\exp(|\lambda|\,|y|) - 1\big)\Big) \, {Q_j}^{(n)}(dy). \end{aligned} \tag{4.2}$$

Zeige nun, daß der erste Integralterm gegen $\sigma_j^2 \lambda_j^2/2$ und der zweite gegen Null strebt. Für $1 \leq k \leq d$ erhalten wir wegen ${\varrho_j}^{(n)} := E\big({X_j}^{(n)}\big) = n{\mu_j}^{(n)} + e_j$ die Konvergenz

$$\begin{aligned} n^2 \int y_k^2 \, {Q_j}^{(n)}(dy) &= n^2 \int \left(\frac{y_k - \delta_{jk}}{n} - \langle {\mu_j}^{(n)}, e_k\rangle \right)^2 {\xi_j}^{(n)}(dy) \\ &= \int \big(y_k - \langle {\varrho_j}^{(n)}, e_k\rangle \big)^2 \, {\xi_j}^{(n)}(dy) \\ &= \mathit{Var}\big(\langle {X_j}^{(n)}, e_k\rangle\big) \longrightarrow \delta_{jk}\, \sigma_j^2. \end{aligned}$$

Nach der Cauchy-Ungleichung streben sämtliche Covarianz-Terme gegen Null, und die Konvergenz des ersten Terms ist gezeigt. Für den zweiten Term ist analog (wegen der Beschränktheit des Restgliedes) nur noch zu zeigen, daß

$$\begin{aligned} &n^2 \int y_j^2 \Big(M \wedge \big(\exp(|\lambda|\,|y|) - 1\big)\Big) \, {Q_j}^{(n)}(dy) \\ &= \int \big(y_j - \langle {\varrho_j}^{(n)}, e_j\rangle\big)^2 \Big(M \wedge \big(\exp(|\lambda|\,|(y - {\varrho_j}^{(n)})/n|) - 1\big)\Big) \, {\xi_j}^{(n)}(dy) \longrightarrow 0. \end{aligned}$$

Sei dazu $\epsilon > 0$ beliebig. Beachte nun, daß $\{\varrho_j{}^{(n)}\}$ beschränkt ist. Wähle $R > 0$ so, daß $\sup_{n\in\mathbb{N}} \int_{\mathrm{E}\setminus U_R(0)} \big(y_j - \langle \varrho_j{}^{(n)}, e_j\rangle\big)^2 \xi_j{}^{(n)}(dy) \le \epsilon/M$, was aufgrund der gleichgradigen quadratischen Integrierbarkeit von $\{\langle X_j{}^{(n)}, e_j\rangle\}$ möglich ist. Daher existiert ein $C > 0$ derart, daß

$$\int \big(y_j - \langle \varrho_j{}^{(n)}, e_j\rangle\big)^2 \Big(M \wedge \big(\exp(|\lambda|\,|(y-\varrho_j{}^{(n)})/n|) - 1\big)\Big)\,\xi_j{}^{(n)}(dy)$$
$$\le (R+C)^2\big(\exp(|\lambda|(R+C)/n) - 1\big) + \epsilon, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Mit $n \to \infty$ folgt die Konvergenz gegen Null, da $\epsilon > 0$ beliebig war. Mit (4.2) erhalten wir $n^2\big(\check{Q}_j{}^{(n)}(\lambda) - 1\big) \to \sigma_j^2\lambda_j^2/2$, also

$$\big(Q_j{}^{(n)}(\lambda)\big)^{n^2} = \left(1 + \frac{n^2\big(\check{Q}_j{}^{(n)}(\lambda) - 1\big)}{n^2}\right)^{n^2} \longrightarrow \exp(\sigma_j^2\lambda_j^2/2).$$

Damit folgt die Behauptung. □

5. Anmerkungen & Literatur

Die Standardreferenz für stochastische Prozesse mit Pfaden in $\mathrm{D}[0,\infty)$ ist Ethier & Kurtz (1986). So findet man die topologischen Eigenschaften von $\mathrm{D}[0,\infty)$ dort in Abschnitt 3.5. Zu Fragen der Meßbarkeit von stochastischen Prozessen mit Pfaden in $\mathrm{D}[0,\infty)$ bezüglich $\mathcal{B}\big(\mathrm{D}[0,\infty)\big)$ vergleiche die Diskussion in Abschnitt 3.7. Der Existenzsatz ist Theorem 4.2.7. Weiter wurde hier der Stetigkeitssatz Theorem 4.2.5 und der Approximationssatz 4.2.12 verwendet. Beachte, daß dort die Definition einer Feller-Halbgruppe die Eigenschaft $(1,0) \in \text{bp}-\overline{\mathcal{G}(G)}$ des infinitesimalen Erzeugers G beinhaltet.

Die stetige Abhängigkeit der Verzweigungsprozesse von ihren Charakterisierungen wurde in der Literatur bisher nicht untersucht. Die Darstellung wurde hier den entsprechenden Approximationsuntersuchungen angepaßt. Die Eigenschaft $(1,0) \in \text{bp}-\overline{\mathcal{G}(G)}$ für den zu einer konservativen Übergangsfunktion gehörenden infinitesimalen Erzeuger G (Proposition 2.3) ist Korollar 4.2.8 aus Ethier & Kurtz (1986).

Approximationssätze für eindimensionale konservative Verzweigungsprozesse werden in der Literatur vielfach behandelt. Ausgehend von der Diffusionsapproximation von Feller (1951), die in Jiřina (1967) bewiesen wird, wurden Verallgemeinerungen in verschiedene Richtungen vorgenommen. Die Approximation eindimensionaler allgemeiner konservativer Verzweigungsprozesse wurde zuerst in Lamperti (1967a) und Lamperti (1967b) formuliert. Notwendige und hinreichende Bedingungen für die schwache Konvergenz stammen von Grimvall (1974). Dort wird auch die Erhaltung der Verzweigungseigenschaft unter der schwächeren Bedingung der Regularität des möglichen Grenzprozesses nachgewiesen. Die dort verwendete Methode ist jedoch stark dem eindimensionalen konservativen Fall angepaßt und konnte hier nicht verallgemeinert werden.

Die Frage der schwachen Konvergenz für defekte Grenzprozesse konnte bisher auch im eindimensionalen Fall nicht befriedigend beantwortet werden. In Helland (1978) wurde eigens eine schwächere Topologie auf dem Raum $\mathrm{D}_{[0,\infty]}[0,\infty)$ eingeführt, in der diese Konvergenz für Markovsche Verzweigungsprozesse nachgewiesen werden konnte. Jedoch ist diese Topologie im allgemeinen zu schwach. In Frisch (1995) konnten diese Resultate für Galton Watson-Prozesse reproduziert werden. Diese Arbeiten verwenden

den Ansatz, einen Verzweigungsprozeß über einen Random Time Change aus einem Lévy-Prozeß zu konstruieren und die schwache Konvergenz mit Hilfe des Satzes von Skorohod pfadweise nachzuweisen. Dieser Random Time Change geht auf Lamperti (1967c) zurück.

Das hier gewählte Verfahren zur Approximation ist nicht auf die Näherung durch Galton Watson-Prozesse beschränkt. Die Beweise können ohne größere Modifikationen für die Approximation durch mehrdimensionale Jiřina-Prozesse oder Markovsche Verzweigungsprozesse verwendet werden. In der Tat ist die Konstruktion der Übergangsfunktion zu einer gegebenen Charakterisierung in Abschnitt III.3 eine Näherung durch geeignete Jiřina-Prozesse.

Beispiel 3.12 ist die teilweise Umkehrung einer Aussage aus Lamperti (1967a), die besagt, daß im Fall der schwachen Konvergenz der stochastischen Prozesse die Nachwuchsverteilung ξ stets im partiellen Anziehungsbereich einer stabilen Verteilung mit Exponent $1 < \alpha \leq 2$ liegt.

Die Diffusionsapproximation in ihrer ursprünglicher Form von Feller (1951) ist Beispiel 3.13. Die hier dargestellte Approximation verallgemeinert Theorem 3.2 von Grimvall (1974).

LITERATURVERZEICHNIS

Bingham, N.H. (1976), *Continuous Branching Processes and Spectral Positivity*, Stochastic Processes Appl. **4**, 217–242.

Cohn, Donald L. (1980), *Measure Theory*, Birkhäuser.

Dynkin, E.B. (1965), *Markov Processes*, Springer.

Ethier, Stewart N. & Kurtz, Thomas G. (1986), *Markov Processes*, Wiley.

Feller, William (1951), *Diffusion Processes in Genetics*, Proc. Second Berkeley Symp. Math. Stat. Prob., Berkeley, pp. 227–246.

Feller, William (1971), *An Introduction to Probability Theory and Its Applications II*, Wiley.

Frisch, Christoph (1995), *Konvergenz und Limiten einer Folge von normierten Verzweigungsprozessen*, Diplomarbeit, Universität Mainz.

Gihman, I.I. & Skorohod, A.V. (1975), *The Theory of Stochastic Processes II*, Springer.

Gnedenko, B.V. & Kolmogorov, A.N. (1968), *Limit Distributions for Sums of Independent Random Variables*, Addison-Wesley.

Grimvall, A. (1974), *On the Convergence of Sequences of Branching Processes*, Ann. Probability **2**, 1027–1045.

Helland, Inge S. (1978), *Continuity of a Class of Random Time Transformations*, Stoch. Process. Appl. **7**, 79–99.

Hille, Einar & Phillips, Ralph S. (1957), *Functional Analysis and Semigroups*, American Mathematical Society.

Jiřina, Miloslav (1967), *On Fellers Branching Diffusion Processes*, Časopis Pěst. Mat. **94**, 84–90.

Lamperti, John (1967a), *Limiting Distributions for Branching Processes*, Proc. Fifth Berkeley Symp. Math. Stat. Prob., vol. 2, Berkeley, pp. 225–241.

Lamperti, John (1967b), *The Limit of a Sequence of Branching Processes*, Z. Wahrsch. Verw. Gebiete **7**, 271–288.

Lamperti, John (1967c), *Continuous State Branching Processes*, Bull. Am. Math. Soc. **73**, 382–386.

Parthasarathy, K.R. (1967), *Probability Measures on Metric Spaces*, Academic Press.

Rogers, L.C.G. & Williams, David (1994), *Diffusions, Markov Processes and Martingales I*, Springer.

Rudin, Walter (1973), *Functional Analysis*, McGraw-Hill.

NOTATIONEN & SYMBOLE

Nicht in diese Liste aufgenommen wurden elementare Symbole und bekannte mengentheoretische Schreibweisen, die sich von selbst verstehen.

Für $x, y \in \mathbb{R}$ schreiben wir $x \wedge y := \min(x, y)$ und $x \vee y := \max(x, y)$. Ist (S, ϱ) ein metrischer Raum und $A \subseteq \mathrm{S}$, so bezeichnet A° das Innere, $\overline{A}$ den Abschluß und ∂A den Rand von A. Für $\mathrm{S} = \mathbb{R}^d$ und $\epsilon > 0$ ist $U_\epsilon(0)$ die ϵ-Umgebung von Null. Ist $x : [0, \infty) \mapsto \mathbb{R}^d$ eine Abbildung, so sei $x(t+)$ für $t \geq 0$ der rechtsseitige, und $x(t-)$ für $t > 0$ der linksseitige Grenzwert in t. Für eine (partiell differenzierbare) Abbildung $f : \mathbb{R}^d \mapsto \mathbb{R}$ schreiben wir $\nabla f = (\nabla_1 f, \dots, \nabla_d f)$ für den Gradienten von f.