

Untersuchungen zum
nichtstörungstheoretischen
Renormierungsverhalten der
Quanten-Einstein-Gravitation

DISSERTATION

zur Erlangung des Grades
“Doktor der Naturwissenschaften”
am Fachbereich Physik der
Johannes Gutenberg-Universität
in Mainz

OLIVER LAUSCHER
geboren in Rheine

MAINZ, 2002

Datum der mündlichen Prüfung: 08.01.2003

Inhaltsverzeichnis

Einführung	1
Teil I: UV Aspekte der Gravitation	18
1 Die exakte Renormierungsgruppengleichung	18
1.1 Das Konzept der eff. Mittelwertwirkung - Allgemeines und Spezielles . . .	18
1.2 Eichfixierung	25
1.3 Zerlegung der Quantenfelder	26
1.4 Impuls-abhängige Redefinition der Komponentenfelder	30
1.5 Die effektive Mittelwertwirkung der QEG	32
1.6 Herleitung der exakten Flußgleichung der QEG	37
1.7 Betrachtung eines Spezialfalls: Einstein-Hintergründe	40
2 Trunkierungen und die daran angepaßten Cutoffs	42
2.1 Eine allgemeine Klasse von Trunkierungen	42
2.2 Anpassungsregel und Spezifizierung des Cutoffoperators	45
3 Die Einstein-Hilbert-Trunkierung	50
3.1 Der Trunkierungsansatz	50
3.2 Die Projektionsmethodik	52
3.3 Auswertung der rechten Seite der Flußgleichung	54
3.4 Das Flußgleichungssystem für g_k und λ_k	60
3.5 Vergleich der Cutoffs A und B	62
4 Die Fixpunkte im allgemeinen und in der Einstein-Hilbert-Trunkierung	64
4.1 Fixpunkte, kritische Exponenten, nichtperturbative Renormierbarkeit . . .	64
4.2 Der Gaußsche Fixpunkt in der Einstein-Hilbert-Trunkierung	69
4.3 Der nicht-Gaußsche Fixpunkt in der Einstein-Hilbert-Trunkierung	73
4.3.1 Der $2 + \varepsilon$ -dimensionale Fall	73

4.3.2	Die Position des Fixpunkts im $d = 4$ -dimensionalen Fall	75
4.3.3	Höhere und niedrigere Dimensionen	84
4.3.4	Die kritischen Exponenten im $d = 4$ -dimensionalen Fall	86
4.3.5	Zusammenstellung und Bewertung der Ergebnisse	90
5	Die R^2-Trunkierung	93
5.1	Der Ansatz	93
5.2	Projektion der Flußgleichung	94
5.3	Das Flußgleichungssystem für λ_k , g_k und β_k	104
6	Die Fixpunkte in der R^2-Trunkierung	106
6.1	Ausblick auf die Fixpunktanalyse	106
6.2	Das Schicksal des Gaußschen Fixpunkts	108
6.2.1	Der Fall $d = 4$	113
6.2.2	Der Fall $d \neq 4$	115
6.3	Der nicht-Gaußsche Fixpunkt	118
6.3.1	Die Position des Fixpunkts im $d = 4$ -dimensionalen Fall	119
6.3.2	Der linearisierte Fluß im $d = 4$ -dimensionalen Fall	122
6.3.3	Cutoffschema-Abhängigkeit der kritischen Exponenten im $d = 4$ - dimensionalen Fall	125
6.3.4	Der $2 + \varepsilon$ -dimensionale Fall	127
6.3.5	Zusammenstellung und Bewertung der Ergebnisse	129
7	Positivität der Wirkung, des Hesse-Matrixoperators und des Cutoffs	131
7.1	Positivität der Wirkung	131
7.2	Positivität des Hesse-Matrixoperators	132
7.3	Positivität des Cutoffs	135
	Teil II: IR Aspekte der Gravitation	141
8	Ein skalares Modell mit nichttrivialer Vakuumstruktur	141
8.1	Einführung in das Konzept der dynamischen Stabilisierung	141
8.2	Spinwellen und ihr Fluktuationsspektrum	151
9	Die effektive Theorie des skalaren Modells	155
9.1	Die effektive Mittelwertwirkung für das skalare Modell	155
9.2	Γ_k in der Umgebung des Ursprungs & klass. Renormierungseffekte	158

10 Das absolute Minimum von S_k^J	164
10.1 Eine hinreichende Bedingung für das absolute Minimum	164
10.2 Die Suche nach dem absoluten Minimum	165
11 Der Renormierungsgruppenfluß von $\Gamma_k[\phi]$	168
11.1 Renormierungsgruppenfluß von $G_k(p^2)$ bei verschwindendem Feld	168
11.2 Bereiche im Feldraum ohne klassische Renormierung	176
11.3 Die Struktur der effektiven Mittelwertwirkung	179
11.3.1 Der Fall $ p \neq M$	179
11.3.2 Der Fall $ p = M$	185
11.4 Konsequenzen für die Gravitation	189
12 IR Stabilität durch eine nichtlokale Invariante	192
Zusammenfassung und Ausblick	201
Teil III: Anhang	209
A Abkürzungsverzeichnis und Einzelheiten zu Konventionen und Notation	209
B Die TT-Zerlegung	212
B.1 Pseudo-Projektoren für die TT-Zerlegung	212
B.2 Konstruktion des Cutoffs und der Quellenterme	215
C Auswertung der rechten Seite der trunkierten Flußgleichung	218
C.1 Inversion der Operatoren $\Gamma_k^{(2)} + \mathcal{R}_k$ und $S_{\text{gh}}^{(2)} + \mathcal{R}_k$	218
C.2 Auswertung der Spuren	222
C.2.1 Allgemeine Betrachtungen	222
C.2.2 Anwendung auf die Einstein-Hilbert-Trunkierung	225
C.2.3 Anwendung auf die R^2 -Trunkierung	226
D Flußgleichung in der $d = 4$-dimensionalen Einstein-Hilbert-Trunkierung	231
E Die sphärischen Harmonischen für symmetrische Tensoren	234
F Heat-Kernel-Koeffizienten für Felder mit diff. Nebenbedingungen	236
G Koeffizienten aus $\Gamma_k^{(2)}[g, g]$	245

H	Koeffizientenfunktionen in den β-Funktionen der R^2-Trunkierung	246
H.1	Die Koeffizientenfunktionen	246
H.2	Diverse d -abhängige Koeffizienten	251
I	Kommutatorrelationen für maximal symmetrische Hintergründe	254
J	Näherungslösungen für den nicht-Gaußschen Fixpunkt	256
J.1	Der nicht-Gaußsche Fixpunkt in der Einstein-Hilbert-Trunkierung	256
J.2	Der nicht-Gaußsche Fixpunkt in der R^2 -Trunkierung	258
K	Einige Eigenschaften der Schwellenfunktionen	261
L	Abschätzung von $(\mathcal{R}_k)_{\bar{\phi}\bar{\sigma}}$: Beweis der Ungleichung (7.14)	265
M	Globales Minimum bei Vorgabe von ebenen Wellen als Quellen	267
M.1	Lösungen der Bewegungsgleichung	267
M.1.1	Die Lösung $\chi \propto \exp(ipx + i\beta)$	268
M.1.2	Verkörpert $\chi \propto \exp(ipx + i\beta)$ das globale Minimum?	269
M.2	Eine notwendige Bedingung für das globale Minimum	274
M.3	Wie gelangt man an das "richtige" $\chi_0^{(n)}$?	277
N	Symmetriebrechung durch eine feste Spinwellen-Konfiguration	279
O	Der effektive kinetische Term in drei und vier Dimensionen	282
P	Die Vier-Punkt-Funktion	284

Abbildungsverzeichnis

4.1	s -Abhängigkeit von g_* in der Einstein-Hilbert-Trunkierung (bei $\lambda_* \equiv 0$) . . .	77
4.2	s -Abhängigkeit von g_* in der Einstein-Hilbert-Trunkierung (bei $\lambda_* \neq 0$) . . .	78
4.3	s -Abhängigkeit von λ_* in der Einstein-Hilbert-Trunkierung (bei $g_* \neq 0$) . . .	79
4.4	s - und α -Abhängigkeit von (λ_*, g_*) in der Einstein-Hilbert-Trunkierung . . .	80
4.5	s -Abhängigkeit von $g_*\lambda_*$ in der Einstein-Hilbert-Trunkierung (Cutoff B) . . .	81
4.6	s -Abhängigkeit von $g_*\lambda_*$ in der Einstein-Hilbert-Trunkierung (Cutoff A) . . .	82
4.7	b -Abhängigkeit von (λ_*, g_*) und $g_*\lambda_*$ in der Einstein-Hilbert-Trunkierung (Cutoff B)	83
4.8	d -Abhängigkeit von (λ_*, g_*) in der Einstein-Hilbert-Trunkierung (Cutoff B)	84
4.9	s -Abhängigkeit von θ' und θ'' in der Einstein-Hilbert-Trunkierung (Cutoff B)	87
4.10	b -Abhängigkeit von θ' und θ'' in der Einstein-Hilbert-Trunkierung (Cutoff B)	88
4.11	s -Abhängigkeit von θ' und θ'' in der Einstein-Hilbert-Trunkierung (Cutoff A)	89
6.1	Renormierungsgruppenfluß der R^2 -Trunkierung in der Nähe von $(\lambda, g, \beta) =$ $(0, 0, 0)$ und seine Projektion auf die $\beta = 0$ -Ebene (für $d = 4$)	114
6.2	Renormierungsgruppenfluß der R^2 -Trunkierung in der Umgebung des quasi- Gaußschen Fixpunkts (für $d = 3$ und $d = 5$)	117
6.3	s -Abhängigkeit von λ_*, g_*, β_* und $g_*\lambda_*$ in der R^2 -Trunkierung	120
6.4	b -Abhängigkeit von λ_*, g_*, β_* und $g_*\lambda_*$ in der R^2 -Trunkierung	121
6.5	Renormierungsgruppentrajektorie im Einzugsbereich des nicht-Gaußschen Fixpunkts der R^2 -Trunkierung	124
6.6	s -Abhängigkeit von θ', θ'' und θ_3 in der R^2 -Trunkierung	126
6.7	b -Abhängigkeit von θ', θ'' und θ_3 in der R^2 -Trunkierung	126
7.1	s -Abhängigkeit der Parameter x_0 und x_1 für den Cutoff der R^2 -Trunkierung	138
7.2	s -Abhängigkeit von f_0 für $l = 2$ sowie von f_1 für $l = 0$ und $l = 1$ im Fall des Cutoffs der R^2 -Trunkierung	139
8.1	Impuls-Abhängigkeit des klass. und des eff. inversen Propagators des ska- laren Modells	149

8.2	Das Fluktuationsspektrum des klassischen skalaren Modells	153
11.1	Renormierungsgruppenfluß des effektiven kinetischen Terms anhand von diskreten k -Werten (für $d = 3$ und $d = 4$)	173
11.2	Renormierungsgruppenfluß des effektiven kinetischen Terms im Bereich $k \leq k_{\text{cr}}$ (für $d = 3$)	174
11.3	Renormierungsgruppenfluß des effektiven kinetischen Terms im Bereich $k \leq k_{\text{cr}}$ (für $d = 4$)	175
11.4	Qualitatives Verhalten von $U_k(A; p^2)$ für $p^2 \in \{0\} \cup [2M^2, \infty)$	182
11.5	A -Abhängigkeit von $U^{(\text{cl})}(A; p^2)$, $U_{k=0}^{(2)}(A; p^2)$ und $U_{k=0}^{(4)}(A; p^2)$ für $p = 0$ und $ p = 3M$	183
11.6	Qualitatives Verhalten von $U_k(A; p^2)$ für $p^2 \in (0, 2M^2) \setminus \{M^2\}$	185
11.7	Renormierungsgruppenfluß von $U_k(A; M^2)$	188

Tabellenverzeichnis

6.t1	Koordinaten des Fixpunkts und kritische Exponenten	128
A.t1	Abkürzungsverzeichnis	209
A.t1	Verwendete Konventionen und Notation	210
A.t2	Variationen verschiedener geometrischer Größen	211
E.t1	Eigenwerte von $-\bar{D}^2$ und ihre Entartung für d -Sphären	235
F.t1	Heat-Kernel-Koeffizienten	243

Einführung

*In nova fert animus mutatas dicere formas
corpora; . . .*
Ovid [1]

“Was treibt einen Menschen eigentlich dazu an, einen Großteil seiner Zeit damit zu verbringen, apathisch vor sich hin zu grübeln, um dann schließlich irgendwelche seltsamen Formeln niederzuschreiben?” Eine Frage, die in dieser oder ähnlicher Form dem Autor in regelmäßigen Abständen gestellt wird und die wohl jedem (theoretischen) Physiker nicht ganz unbekannt sein dürfte. In der Regel gibt man dann natürlich bereitwillig Auskunft und legt mehr oder minder ausschweifend seine Beweggründe dar. Nun mögen diese ja von Physiker zu Physiker durchaus (leicht) variieren, weshalb der Autor hier in erster Linie auch nur für sich selbst sprechen möchte, wenn er seine Standardantwort auf diese Frage, vielleicht etwas vereinfachend, folgendermaßen zusammenfaßt: Das Verlangen nach fundamentalem Verständnis (Wißbegier), gepaart mit einer gehörigen Portion Spieltrieb. Während die erste dieser beiden Eigenschaften den meisten danach Fragenden unmittelbar einleuchtet, ruft die zweite bei so manchem im ersten Augenblick Erstaunen/Verwunderung/Unverständnis/Entsetzen... hervor. Das möge man doch bitte näher erläutern. Nun gut, man versucht dann seinem Gegenüber so gut wie möglich zu vermitteln, daß man die mathematische Komponente seiner Arbeit gewissermaßen als ein faszinierendes Spiel(zeug) mit seinen eigenen Regeln und nicht als notwendiges Mittel zum Zweck wahrnimmt und daß dies wahrscheinlich auch erforderlich ist, um auf lange Sicht ein Vergnügen an der theoretischen Physik empfinden zu können. Nachdem hiermit die Frage nach der Motivation in der Regel abgehakt ist, wird sich oftmals noch erkundigt, auf welchem Gebiet man nun eigentlich forscht. Auf die Antwort “Gravitationsphysik” erfährt man dann die unterschiedlichsten Reaktionen. Während viele im positiven Sinn Interesse bekunden, gibt es auch die eine oder andere eher kritische Stimme. Die Skeptiker fragen daraufhin meist, was es denn da überhaupt noch zu forschen gebe, denn es sei ihnen durchaus bekannt, daß eine sehr gute theoretische Beschreibung von Gravitationseffekten bereits vorliege. Und genau an diesem Punkt beginnt die vorliegende Arbeit eigentlich.

In der Tat stellt die Allgemeine Relativitätstheorie Einsteins eine äußerst zuverlässige Theorie der Gravitation dar, die bislang durch alle Experimente und Beobachtungen ausnahmslos Bestätigung findet [2]. Sie läßt sich durch die sogenannte Einstein-Hilbert-Wirkung

$$S_{\text{EH}} = \frac{1}{16\pi G} \int d^4x \sqrt{-g} \{-R + 2\Lambda\} \quad (1)$$

beschreiben [3]. Ihr Gültigkeitsbereich erstreckt sich von irdischen bis hin zu kosmologischen Skalen. Im gleichen Atemzug muß man allerdings einräumen, daß die Allgemeine Relativitätstheorie lediglich eine klassische Theorie darstellt, wohingegen sich die drei übrigen fundamentalen Wechselwirkungen im Rahmen der Teilchenphysik als Quantenfeldtheorien formulieren lassen. Der Versuch, die durch die Einstein-Hilbert-Wirkung beschriebene Allgemeine Relativitätstheorie auf analoge Weise zu quantisieren, schlägt zumindest in dem Sinne fehl, daß das Resultat eine störungstheoretisch nichtrenormierbare Theorie verkörpert. Was dies im einzelnen bedeutet, wird weiter unten kurz erläutert werden. In diesem Zusammenhang sei lediglich darauf hingewiesen, daß das Auftreten der angesprochenen Problematik im wesentlichen darauf zurückzuführen ist, daß die Massendimension der Gravitationskonstante G negativ ist: $\dim(G) = -2$. Aufgrund dieser perturbativen Nichtrenormierbarkeit herrscht die weitverbreitete Ansicht, daß eine gewöhnliche Quantisierung der metrischen Freiheitsgrade in (1) zu keiner sinnvollen Theorie führt, die bis hin zu kleinsten Raumzeitdistanzen Vorhersagekraft besitzt und somit als *fundamental* gelten kann. Vielmehr wird landläufig angenommen, daß die Einstein-Hilbert-Wirkung lediglich eine *effektive* Theorie verkörpert, die die Gravitation nur bei solchen Raumzeitabständen korrekt beschreibt, die weitaus größer sind als die Planck-Länge $\ell_{\text{Pl}} \equiv \sqrt{G}$.

An dieser Stelle muß man sich aber die folgende Frage stellen: Was ist denn überhaupt die Bedingung dafür, daß eine Theorie als fundamental angesehen werden kann? In der Teilchenphysik betrachtet man eine Theorie in der Regel als fundamental, wenn sie störungstheoretisch renormierbar ist. Solche Theorien zeichnen sich dadurch aus, daß die Unendlichkeiten, die durch den Quantisierungsprozeß eingeschleust werden, durch eine Redefinition von *endlich* vielen grundlegenden Parametern der Theorie, wie Massen oder Eichkopplungen, entfernt werden können. Die Werte dieser Parameter sind nicht durch die Theorie selbst festgelegt, sie müssen vielmehr den Experimenten entnommen werden. Durch das Fixieren dieser *relevanten* Kopplungen werden automatisch auch den übrigen, *irrelevanten* Kopplungen feste Werte zugewiesen, denn letztere verkörpern hier eindeutige Funktionen der relevanten Parameter. Auf der anderen Seite ist bei perturbativ nichtrenormierbaren Theorien die Divergenzstruktur von der Form, daß mit zunehmender Ordnung der Störungsreihe die Anzahl der erforderlichen Gegenterme, die die Divergenzen wegheben, immer weiter anwächst. Somit hat man es hier im Endeffekt mit einer unend-

lichen Anzahl von freien Parametern zu tun, die bei sehr hohen Energien typischerweise allesamt in gleichem Maße beitragen. Infolgedessen büßt die Theorie bei *fundamentaler* Skala ihre Vorhersagekraft vollständig ein, zumindest im Rahmen der Störungstheorie. (Das soll nicht heißen, das dies auch bei kleineren Energien geschieht. Vielmehr sind dann auch in der Störungstheorie oft nur endlich viele Parameter wichtig, und die übrigen, unendlich vielen liefern vernachlässigbare Beiträge.)

Es wäre allerdings ein Trugschluß, wenn man nun annehmen würde, daß automatisch alle perturbativ nichtrenormierbaren Theorien nicht als fundamentale Theorien existieren können. Es gibt nämlich durchaus Gegenbeispiele, wie zum Beispiel das Gross-Neveu-Modell in $d > 2$ Dimensionen, siehe [4]. Solche Theorien, die zwar perturbativ nichtrenormierbar, aber dennoch fundamental sind, gehören zu der Klasse der Theorien, die “nichtperturbativ renormierbar” im Sinne von Wilsons modernem Zugang zur Renormierungstheorie sind [5]. Um die Bedeutung des Terminus technicus “nichtperturbativ renormierbar” verstehen zu können, ist es notwendig, den Formalismus der “exakten Renormierungsgruppengleichungen” kurz zu erläutern.

Die exakten Renormierungsgruppen- oder Flußgleichungen [6] stellen die Kontinuumsversion von Wilsons diskreter Renormierungsgruppe dar [5], welche auf iterierten Blockspin-Transformationen beruht. Sie besitzen einen vollständig nichtstörungstheoretischen Charakter und eignen sich daher ausgezeichnet für Untersuchungen nichtperturbativer Phänomene, wie sie sowohl in der statistischen Physik als auch in der Quantenfeldtheorie auftreten. Es gibt mehrere Darstellungsformen für exakte Flußgleichungen. Im Rahmen der Quantenfeldtheorie ist hier insbesondere die Flußgleichung der sogenannten effektiven Mittelwertwirkung [7, 8] hervorzuheben, da sie eine besonders günstige Struktur und Interpretation besitzt. Die anschließende Diskussion wird sich auf diese Form der Flußgleichungen beschränken, sobald sie sich ausschließlich auf die Quantenfeldtheorie bezieht.

In der Statistischen Physik ebenso wie in der Quantenfeldtheorie besteht die wesentliche Idee der Renormierungsgruppe darin, sämtliche Fluktuationen (im Sinne der Mittelwertbildung) “auszuintegrieren”, deren (verallgemeinerte) Impulse p größer sind als eine bestimmte Cutoffskala k , d.h. $p^2 > k^2$, und die Beiträge dieser Moden dann implizit zu berücksichtigen, und zwar in Form einer modifizierten Dynamik für die übrigen Fluktuationen mit $p^2 < k^2$. Im Rahmen der Feldtheorie wird diese “renormierte” Dynamik durch ein Skalen-abhängiges effektives Wirkungsfunktional Γ_k beschrieben. Seine Abhängigkeit von der Impulsskala k läßt sich durch eine funktionale Differentialgleichung ausdrücken, und genau diese bezeichnet man als die exakte Renormierungsgruppengleichung [6]. Sie generiert gewissermaßen ein “Fließen” der Wirkung, das sich im Raum aller Wirkungsfunktionale, dem sogenannten Theorienraum, abspielt. Startet man den Renor-

mierungsgruppenfluß bei einer ultravioletten (UV) Skala \widehat{k} mit einem noch nicht näher festgelegten Funktional $\Gamma_{\widehat{k}}$ und senkt die Skala kontinuierlich auf $k < \widehat{k}$ ab, so beschreibt das laufende Γ_k eine Trajektorie im Theorienraum. Im Limes $k \rightarrow 0$ endet diese bei der herkömmlichen effektiven Wirkung $\Gamma = \Gamma_{k \rightarrow 0}$. Da $\Gamma_{\widehat{k}}$ nicht näher spezifiziert wurde, hängt Γ natürlich noch von freien Parametern ab. Indem man diese festlegt, wählt man eine bestimmte Trajektorie aus dem Raum aller Wirkungsfunktionale aus. Gibt es Trajektorien, für die der Kontinuumsliches $\lim_{\widehat{k} \rightarrow \infty} \Gamma_{\widehat{k}}$ existiert, nachdem man nur *endlich* viele Parameter in der Wirkung redefiniert (d.h. im klassischen Sinne renormiert) hat, so läßt sich eine vollständige Quantisierung der Theorie erreichen, in dem Sinn, daß die Theorie auch bei fundamentaler Skala Vorhersagekraft besitzt. Solche Trajektorien interpolieren dann zwischen der klassischen Wirkung $S = \lim_{k \rightarrow \infty} \Gamma_k$ und einer effektiven Wirkung $\Gamma = \Gamma_{k \rightarrow 0}$, die von der jeweiligen Trajektorie abhängt und dementsprechend durch Aufprägen von Renormierungsbedingungen fixiert werden kann.

Offensichtlich ist im Rahmen der Wilsonschen Renormierungsgruppe die Existenz des oben beschriebenen Kontinuumsliches die Bedingung dafür, daß eine Theorie auf fundamentalem Niveau existiert. Tatsächlich stellt dieses Renormierbarkeitsprinzip eine nicht-perturbative Verallgemeinerung des herkömmlichen, perturbativen Renormierbarkeitsbegriffs dar. Das läßt sich folgendermaßen erkennen: Bei genauer Betrachtung der Renormierungsgruppenflüsse ergibt sich, daß die fundamentalen Theorien jeweils auf einem UV attraktiven Fixpunkt aufbauen. Die entsprechenden Trajektorien werden im Limes $k \rightarrow \infty$ in diesen hineingezogen. Die Menge aller Trajektorien, die in diesem Limes im Fixpunkt landen, bildet die sogenannte UV kritische Hyperfläche \mathcal{S}_{UV} . Ist diese endlichdimensional, dann hängt die auf der Grundlage dieser Trajektorien konstruierte Theorie nur von endlich vielen freien Parametern ab (deren Werte man den Experimenten entnehmen muß). Somit behält die Theorie auch bei beliebig großen Impulsskalen ihre Vorhersagekraft. Dieses Szenario greift bereits bei perturbativ renormierbaren Theorien [9]. In der Tat basieren sie, zumindest implizit, auf einem sogenannten Gaußschen Fixpunkt [6]. Dieser zeichnet sich dadurch aus, daß die dimensionslosen Koordinaten g_i , mit deren Hilfe man üblicherweise die Position eines Fixpunkts im Theorienraum beschreibt, in diesem Fall allesamt verschwinden: $g_i = 0 \forall i$. Es gibt aber noch eine weitere Klasse von Fixpunkten, die die Existenz des Kontinuumsliches sicherstellen können, nämlich die sogenannten nicht-Gaußschen Fixpunkte. Sie definieren sich dadurch, daß nicht alle ihrer Koordinaten g_i verschwinden. Und genau auf solchen nicht-Gaußschen Fixpunkten beruhen diejenigen fundamentalen Theorien, die perturbativ nichtrenormierbar sind. Sie ergänzen die perturbativ renormierbaren Theorien in dem Sinn, daß die Gesamtheit dieser Theorien die vollständige Klasse der nichtperturbativ renormierbaren Theorien bildet. Insgesamt läßt sich somit festhalten, daß das Wissen um die Fixpunktstruktur von entscheidender Be-

deutung sein kann, wenn man erfahren möchte, ob ein Modell auf fundamentalem Niveau existiert oder nicht.

Im Rahmen der Gravitation, die ja störungstheoretisch nichtrenormierbar ist, war es Weinberg, der als erster die Idee hatte, daß eine entsprechende fundamentale Quantenfeldtheorie möglicherweise auf der Grundlage eines nicht-Gaußschen Fixpunkts konstruiert werden könnte [10, 11]. Eine solche Quantentheorie der Gravitation wäre, wie Weinberg es selbst ausdrückt, “asymptotisch sicher”, was nichts anderes heißt als “nichtperturbativ renormierbar”. Unter Verwendung der ε -Entwicklung zeigte er dann auch schon vor relativ langer Zeit, daß dies für die Gravitation in $2 + \varepsilon$ Dimensionen ($0 < \varepsilon \ll 1$) mit großer Wahrscheinlichkeit tatsächlich der Fall ist [10]. Da jedoch kein Rechenschema vorlag, das sich für weiterführende Studien wie z.B. die Untersuchung des 4-dimensionalen Falls eignete, stagnierte danach der Fortschritt in diesem Forschungszweig. Erst in der jüngeren Vergangenheit ist diese Idee wieder aufgegriffen worden.

Es ist klar, daß man auf vollkommen nichtstörungstheoretische Methoden zurückgreifen muß, wenn man den Renormierungsgruppenfluß einer Quantentheorie der Gravitation und seine Fixpunktstruktur analysieren möchte. In diesem Zusammenhang ist der Zugang der effektiven Mittelwertwirkung besonders hervorzuheben. Die effektive Mittelwertwirkung Γ_k stellt ein im Wilsonschen Sinne “vergrößertes” Funktional für die freie Energie dar, das das effektive Verhalten der betrachteten Theorie bei einer infraroten (IR) Cutoffskala k beschreibt und das oben erwähnte Grenzwertverhalten an den Tag legt, d.h. $\Gamma = \Gamma_{k \rightarrow 0}$ und, falls existent, $S = \Gamma_{k \rightarrow \infty}$. Auf diesem Wirkungsfunktional Γ_k basierten im wesentlichen auch schon die obigen Ausführungen zu den exakten Renormierungsgruppengleichungen. Eine solche wurde für die effektive Mittelwertwirkung der Euklidischen Quanten-Einstein-Gravitation (QEG) zum ersten Mal von M. Reuter konstruiert [12]. Dabei bezieht sich der Begriff “Quanten-Einstein-Gravitation” im weiteren Sinn auf die Klasse von Theorien, die durch Wirkungsfunktionale beschrieben werden, deren einzige dynamische Variable die Metrik ist und die gleichzeitig invariant unter allgemeinen Koordinatentransformationen sind. Diese Definition wird im weiteren Verlauf noch etwas verfeinert bzw. eingeschränkt werden.

Ebenso wie das Pfadintegral, das Γ_k definiert, läßt sich die Renormierungsgruppengleichung für Γ_k nicht exakt lösen. Im Gegensatz zum Pfadintegral besitzt die Flußgleichung aber die angenehme Eigenschaft, daß sich bei ihr auf relativ einfache und natürliche Weise Näherungen vornehmen lassen, die von nichtperturbativem Charakter sind und somit nicht auf der Entwicklung nach einem als klein vorausgesetzten Parameter beruhen. Ein äußerst leistungsfähiges Approximationsschema stellt hier die sogenannte Trunkierung des Theorienraumes dar. Diese besteht darin, daß der Renormierungsgruppenfluß, der sich im Fall der exakten Theorie in dem unendlichdimensionalen Raum aller möglichen Wir-

kungfunktionale abspielt, auf einen kleineren, typischerweise endlichdimensionalen Unterraum projiziert wird. Dadurch vereinfacht sich die Renormierungsgruppengleichung für Γ_k zu einem gekoppelten System von gewöhnlichen Differentialgleichungen für einen (endlichen) Satz von Kopplungskonstanten. Letztere lassen sich dann als Koordinaten auf dem trunkierten Unterraum der Wirkungsfunktionale interpretieren. Offensichtlich besteht das Hauptproblem bei diesem Näherungsverfahren darin, genau denjenigen Unterraum ausfindig zu machen, der für das betrachtete Problem besonders relevant ist und die wesentlichen Gesichtspunkte der exakten Theorie optimal widerspiegelt.

In einem ersten Versuch, die Flußgleichung für die Euklidische Quanten-Einstein-Gravitation zu lösen, wurde in [12] der Renormierungsgruppenfluß auf einen zweidimensionalen Unterraum des Theorienraums projiziert, und zwar auf denjenigen, der durch die Invarianten $\int d^d x \sqrt{g}$ und $\int d^d x \sqrt{g} R$ aufgespannt wird. Diese sogenannte Einstein-Hilbert-Trunkierung ist durch den Ansatz

$$\Gamma_k[g, \bar{g}] = (16\pi G_k)^{-1} \int d^d x \sqrt{g} \{-R(g) + 2\bar{\lambda}_k\} + \text{klassische Eichfixierung} \quad (2)$$

definiert. Sie enthält als laufende Kopplungen die laufende Newton-Konstante G_k und die laufende kosmologische Konstante $\bar{\lambda}_k$. Ihre Ähnlichkeit mit der Wirkung der klassischen Allgemeinen Relativitätstheorie sollte nicht zu der Annahme verleiten, daß sie automatisch schon die beste aller Trunkierungen ist. Vielmehr würden allgemeinere und somit genauere Trunkierungen außerdem Terme von höheren Potenzen in der Krümmung sowie nichtlokale Terme enthalten, siehe z.B. [13, 14, 15].

Die in [12] hergeleiteten Flußgleichungen für G_k und $\bar{\lambda}_k$ lassen sich in vielerlei Hinsicht verwenden, auch dann, wenn man sich zunächst einmal auf den Standpunkt stellt, daß die quantisierte Einstein-Gravitation aufgrund ihrer perturbativen Nichtrenormierbarkeit lediglich eine effektive Feldtheorie darstellt [16]. In der Tat wurde in [17, 18] mit ihrer Hilfe untersucht, inwieweit Quanteneffekte die Struktur von schwarzen Löchern beeinflussen, und es wurden in [19] ihre Auswirkungen auf die Kosmologie studiert. Außerdem läßt sich aus den in [20] unter Verwendung eines ähnlichen Zugangs hergeleiteten Ergebnissen schließen, daß Quanteneffekte die kosmologische Konstante eventuell dazu antreiben könnten, im IR Limes auf dynamische Weise zu verschwinden.

Von noch größerer Bedeutung ist jedoch die Möglichkeit, daß die quantisierte Einstein-Gravitation nichtperturbativ renormierbar sein könnte. Auch für derartige Untersuchungen sind die Flußgleichungen der Einstein-Hilbert-Trunkierung sehr gut geeignet. Dazu geht man am besten zu einer Beschreibung mittels der dimensionslosen Kopplungen $\lambda_k \equiv \bar{\lambda}_k/k^2$ und $g_k \equiv G_k k^{d-2}$ über und betrachtet den Fluß in der λ - g -Ebene. Unter Verwendung der entsprechenden Flußgleichungen aus [12] wurde zunächst die Existenz des Fixpunkts in $d = 2 + \varepsilon$ Dimensionen bestätigt [12], und dann wurde der wesentlich wichti-

gere Fall $d = 4$ analysiert [21, 18]. Dabei ergab sich, daß die Einstein-Hilbert-Trunkierung tatsächlich zu einem nicht-Gaußschen Fixpunkt $(\lambda_*, g_*) \neq (0, 0)$ führt, der in beide Richtungen der λ - g -Ebene UV attraktiv wirkt. Außerdem liefert sie den “trivialen” Fixpunkt $(\lambda_*, g_*) = (0, 0)$, d.h. den Gaußschen Fixpunkt. Weiterhin wurde in [14, 22] auf der Grundlage dieser Flußgleichungen der vollständige Fluß der Einstein-Hilbert-Trunkierung numerisch berechnet, wobei ein sogenannter “scharfer” Cutoff verwendet wurde. Außerdem enthalten die Arbeiten [23] und [24] Analysen hinsichtlich der Eichabhängigkeit der Flußgleichungen und einiger aus ihnen folgenden Größen. Zuguter Letzt sei hier noch erwähnt, daß in [25] eine Einführung in die Thematik der Flußgleichungen aus [12] gegeben wird.

Es ist natürlich nicht von vornherein klar, ob dieser nicht-Gaußsche Fixpunkt auch tatsächlich in der *exakten* 4-dimensionalen Theorie existiert oder ob er ein bloßes Produkt der verwendeten Trunkierung verkörpert und in der exakten Theorie somit gar nicht vorhanden ist. Nehmen wir für den Moment einmal an, daß er in der Tat auch in der exakten 4-dimensionalen Theorie existiert. Dann ist die Quanten-Einstein-Gravitation im engeren Sinne durch die Klasse derjenigen Trajektorien definiert, die im Limes $k \rightarrow \infty$ in diesen Fixpunkt hineinlaufen. In der Nähe des Fixpunkts verhält sich die Newton-Konstante demzufolge gemäß $G_k \approx g_*/k^2$. Offensichtlich verschwindet sie im Limes $k \rightarrow \infty$. Das bedeutet, hypothetisch gesprochen, daß die Quanten-Einstein-Gravitation asymptotisch frei ist, zumindest was diese Kopplung angeht. Insofern ist sie der QCD sehr ähnlich. Außerdem hat die $1/k^2$ -Abhängigkeit der laufenden Newton-Konstante zur Folge, daß in den Wirkungsquerschnitten für Graviton-Graviton-Streuungen sowie für Graviton-vermittelte Materie-Materie-Streuungen eine charakteristische Impulsabhängigkeit auftritt. Anhand dieser ließe sich die Quanten-Einstein-Gravitation (zumindest im Prinzip) experimentell von alternativen Theorien der Quantengravitation wie z.B. der Stringtheorie unterscheiden.

Kommen wir noch einmal auf die allgemeine Struktur der (mutmaßlichen) Quanten-Einstein-Gravitation zurück. Sie besitzt $\dim(\mathcal{S}_{UV})$ freie Parameter. Indem man letztere fixiert, wählt man eine bestimmte Trajektorie $k \mapsto \Gamma_k$ aus dem kompletten Theorienraum aus. Diese Trajektorie läuft im Limes $k \rightarrow \infty$ (wie auch alle anderen Trajektorien auf \mathcal{S}_{UV}) gegen die Fixpunktwirkung Γ_* . Man kann hier Γ_* als Punkt in einem Raum auffassen, der durch alle erlaubten Invarianten aufgespannt wird, wobei die Koordinaten dieses Punkts durch die (unendlich vielen, dimensionslosen) Kopplungsparameter (λ_*, g_*, \dots) gegeben sind. Offensichtlich ist die Fixpunktwirkung Γ_* das Pendant der “nackten” bzw. “klassischen” Wirkung, wie man sie aus der herkömmlichen Feldtheorie kennt. Im Gegensatz zu der letzteren wird Γ_* aber nicht von vornherein per definitionem festgelegt, sondern vielmehr mit Hilfe der Renormierungsgruppengleichung *hergeleitet*, welche ihrerseits durch den vorgegebenen Theorienraum fixiert ist. (Im vorliegenden Fall ist das der

Raum aller Wirkungsfunktionale $\Gamma[g_{\mu\nu}]$, die ausschließlich von symmetrischen Tensoren zweiter Stufe abhängen, und zwar derart, daß sie invariant unter allgemeinen Koordinatentransformationen sind.) Sowohl die gewöhnliche kanonische Quantisierung als auch die herkömmliche Pfadintegralquantisierung basieren hingegen auf einer Mutmaßung hinsichtlich der Gestalt der klassischen Wirkung. Im Rahmen von Weinbergs Szenario der asymptotischen Sicherheit wird die “klassische” Wirkung statt dessen durch die Forderung nach nichtperturbativer Renormierbarkeit festgelegt; sie läßt sich nicht einfach aus den üblichen “power-counting”- und Symmetrieüberlegungen ableiten. Vielmehr liefert die effektive Mittelwertwirkung den mathematischen Apparat, um sie zu bestimmen.

Bis zu diesem Punkt bezog sich die Diskussion auf die exakte Theorie, die auf dem kompletten Theorienraum “lebt”. Wenn man sie auf den Unterraum projiziert, der von der Einstein-Hilbert-Trunkierung aufgespannt wird, dann muß zwangsläufig auch die Fixpunktwirkung Γ_* vom Einstein-Hilbert-Typ sein. Dabei ist zu betonen, daß dies tatsächlich nur eine direkte Folge der Projektion auf den gewählten Unterraum ist; es existiert hier kein Grund zu der Annahme, daß auch das exakte Funktional Γ_* vom Einstein-Hilbert-Typ ist. Wie im Rahmen dieser Arbeit gezeigt wird, führen kompliziertere Trunkierungen in der Tat zu einer Fixpunktwirkung, die nicht die Einstein-Hilbert-Form aufweist, sondern eine allgemeinere. Der Begriff “Quanten-Einstein-Gravitation” bedeutet somit (aller Wahrscheinlichkeit nach) nicht, daß die Einstein-Hilbert-Wirkung S_{EH} die zu quantisierende nackte Wirkung darstellt. Vielmehr deutet dieser Befund darauf hin, daß die fundamentale Theorie durch ein Wirkungsfunktional beschrieben wird, das allgemeiner ist als S_{EH} . In dieser Hinsicht unterscheidet sich der in dieser Arbeit gewählte Zugang nunmehr offensichtlich von demjenigen der kanonischen Quantengravitation, der beispielsweise Ashtekars Methode zugrunde liegt [26]. Letzterer beruht nämlich auf S_{EH} als nackter Wirkung. (Interessanterweise wurden vor kurzem auch im Rahmen dieses Zugangs bemerkenswerte Endlichkeitseigenschaften der Theorie festgestellt [27].)

Natürlich wäre es äußerst begrüßenswert, wenn eine nichtperturbativ renormierbare Theorie des metrischen Feldes wirklich existieren würde. Dann läge nämlich kein Grund mehr dafür vor, den Rahmen der Quantenfeldtheorie zu verlassen, um an eine konsistente mikroskopische, d.h. fundamentale Theorie der Quantengravitation zu gelangen. Daher sollte man äußerst gewissenhaft überprüfen, ob der Fixpunkt, den die Einstein-Hilbert-Trunkierung vorhersagt, nur ein bloßes Produkt der Trunkierung verkörpert oder ob er tatsächlich unabhängig von der gewählten Trunkierung vorhanden ist.

Der Zugang über die Flußgleichung eröffnet im wesentlichen zwei Möglichkeiten, die Verlässlichkeit von Trunkierungen zu überprüfen. Die erste und wohl auch zuverlässigste Methode besteht darin, den Trunkierungsansatz um zusätzliche Invarianten zu erweitern und zu testen, ob sich die Vorhersagen der ursprünglichen, simpleren Trunkierung

bestätigen. Wenn das der Fall ist, so darf man letztere als verlässlich betrachten, da die zusätzlichen Terme offensichtlich zu vernachlässigbaren Beiträgen führen. Es gibt aber noch ein zweites, eher indirektes Verfahren, um an Informationen über die Qualität einer Trunkierung zu gelangen. Dabei macht man sich zunutze, daß durch das Trunkieren eine näherungsbedingte Abhängigkeit vom Cutoffschema in die Flußgleichungen und somit auch in die aus ihnen folgenden Größen induziert wird. (Diese tritt dann in Verbindung mit der teilweise vorhandenen systematischen Schema-Abhängigkeit auf.) Um verstehen zu können, was damit genau gemeint ist, muß man sich vor Augen führen, wie die Abhängigkeit von der Skala k in Γ_k implementiert wird. Dies geschieht dadurch, daß man das Euklidische Pfadintegral, das die herkömmliche effektive Wirkung Γ definiert, derart modifiziert, daß man die klassische Wirkung im Integranden durch einen k -abhängigen IR Cutoffterm $\Delta_k S$ ergänzt. Dieser Term sorgt dafür, daß jede Eigenmode des kovarianten Laplace-Operators $-D^2$ zum Eigenwert p^2 mit einer "Impuls"-abhängigen Masse $\mathcal{R}_k(p^2)$ versehen wird, die für $p^2 \gg k^2$ verschwindet und somit (bei Wahl des "korrekten" $\mathcal{R}_k(p^2)$ -Vorzeichens) im Pfadintegral die gewünschte Unterdrückung der Beiträge von den *niederenergetischen* Moden hervorruft. Eine Variation des Cutoffoperators $\mathcal{R}_k(-D^2)$, der innerhalb gewisser Grenzen frei wählbar ist, bewirkt eine Veränderung des Cutoffschemas. Damit hängt bereits das exakte Γ_k für sich genommen vom Cutoffschema ab. Trunkiert man nun den Theorienraum, so werden gewisse von \mathcal{R}_k abhängige Terme vernachlässigt, was zu einer zusätzlichen ("unnatürlichen") Cutoffschema-Abhängigkeit des Wirkungsfunktionals und des daraus folgenden Flußgleichungssystems führt.

Hinsichtlich der Überprüfung der Verlässlichkeit einer beliebigen Trunkierung sind sogenannte universelle Größen von besonderer Bedeutung. Per definitionem sind das diejenigen Größen, die bei exakter Behandlung einer Theorie strikt Schema-unabhängig sind, d.h., alle von \mathcal{R}_k abhängigen Terme heben sich hier gegenseitig weg. Typische Beispiele sind die kritischen Exponenten und das Produkt der Fixpunktkoordinaten $g_* \lambda_*$. Jede Trunkierung führt nun dazu, daß in den universellen Größen \mathcal{R}_k -abhängige Terme übrigbleiben, und ruft somit bei diesen eine unphysikalische Schema-Abhängigkeit hervor. Ihre Größe läßt sich dann als ein natürlicher Maßstab für die Qualität der gewählten Trunkierung interpretieren [28]. Auch die Existenz oder Nichtexistenz eines Fixpunkts ist (im Gegensatz zu seiner Position) eine universelle Eigenschaft, so daß man nur solche Trunkierungen als verlässlich ansehen kann, die für alle erlaubten Cutoffs zu derselben Fixpunktstruktur führen.

Prinzipiell stehen uns also für die Analyse der Qualität der Einstein-Hilbert-Trunkierung die oben beschriebenen Methoden zur Verfügung. Was das erste dieser beiden Verfahren, also die Erweiterung des Trunkierungsansatzes betrifft, so ergibt sich hier allerdings das folgende Problem: Aus technischen Gründen lassen sich mit der in [12] formu-

lierten Flußgleichung gerade solche Trunkierungen, die höhere Potenzen der Krümmung enthalten, nicht auswerten. In der vorliegenden Arbeit wird daher auf der Grundlage von Yorks TT-Zerlegung des metrischen Feldes [29] eine verallgemeinerte Flußgleichung für die Euklidische Quanten-Einstein-Gravitation konstruiert, die für eine weitaus größere Klasse von Trunkierungen (inklusive der soeben angesprochenen) zugänglich ist.

Ein Spezialfall der verallgemeinerten Flußgleichung wurde bereits in [30] dazu benutzt, um die effektive Gravitationswirkung mit angekoppelter Materie zu untersuchen. Eine ähnliche Analyse wurde in [31] unter Verwendung der “alten” Flußgleichung aus [12] durchgeführt. Dagegen wird in dieser Arbeit mit Hilfe der “neuen” Flußgleichung zunächst der Renormierungsgruppenfluß innerhalb der reinen Einstein-Hilbert-Trunkierung reanalysiert und daraufhin eine detaillierte Untersuchung der Cutoffschema-Abhängigkeit ihrer Vorhersagen vorgenommen. Dabei werden die entsprechenden Ergebnisse mit denjenigen verglichen, die sich aus der “alten” Flußgleichung aus [12] ergeben. Hierzu ist anzumerken, daß der Cutoffoperator \mathcal{R}_k bei dieser Analyse in zweierlei Hinsicht variiert wird. Zum einen weist er eine Matrixstruktur auf, die von dem jeweils zugrundeliegenden Feldraum abhängt und die im Fall der “neuen” Flußgleichung anders ist als bei der “alten”. (Während im Rahmen der “alten” Flußgleichung ein Cutoff vom sogenannten “Typ A” verwendet wird, basiert die “neue” auf einem Cutoff vom “Typ B”, der an die TT-Zerlegung der Metrik angepaßt ist.) Zum anderen hängen die Einträge der Cutoffmatrix \mathcal{R}_k in beiden Fällen von einer “Profilfunktion” $R^{(0)}(p^2/k^2)$ ab, die die Art und Weise festlegt, auf die die Modenunterdrückung erfolgt, wenn p^2 unterhalb von k^2 abfällt. Unabhängig von der Benutzung der beiden unterschiedlichen Cutofftypen läßt sich die Abhängigkeit der Vorhersagen vom Cutoffschema also zusätzlich durch eine Veränderung der Profilfunktion $R^{(0)}$ untersuchen.

Bei dieser Analyse wird sich herausstellen, daß der UV attraktive Fixpunkt der Einstein-Hilbert-Trunkierung unabhängig vom gewählten Cutoff existiert und die \mathcal{R}_k -Abhängigkeit der mit ihm in Verbindung stehenden universellen Größen nur sehr schwach ist. Das weist bereits stark darauf hin, daß diese relativ einfache Trunkierung zumindest bei hinreichend großen Skalen k wahrscheinlich ziemlich verlässliche Ergebnisse liefert und die exakte Theorie somit in der Tat nichtperturbativ renormierbar sein könnte.

Um diese Resultate zu überprüfen, wird in der vorliegenden Arbeit anschließend eine kompliziertere Trunkierung mit Hilfe der verallgemeinerten Flußgleichung studiert. Welche zusätzliche Invariante bietet sich an dieser Stelle an? Generell läßt sich die Relevanz von Monomen in den anwesenden Feldern anhand ihrer Skalendimension beurteilen. In der gewöhnlichen Störungstheorie, die ja (zumindest implizit) auf einem Gaußschen Fixpunkt basiert, stimmt die Skalendimension mit der kanonischen Dimension überein. Eine derartig einfache Beziehung liegt bei nicht-Gaußschen Fixpunkten nicht vor, denn hier verschwinden die anomalen Dimensionen nicht und können im Gegenteil sogar sehr groß

werden. Man hat also in diesem Fall erst einmal keine Möglichkeit, die besonders relevanten Invarianten ausfindig zu machen. Daher liegt es nahe, den Trunkierungsansatz (2) auf die denkbar einfachste Weise zu verallgemeinern, indem man diesem die Invariante $\int d^d x \sqrt{g} R^2$ hinzufügt. Dementsprechend wird in dieser Arbeit der Renormierungsgruppenfluß der sogenannten “ R^2 -Trunkierung”

$$\Gamma_k[g, \bar{g}] = \int d^d x \sqrt{g} \{ (16\pi G_k)^{-1} [-R(g) + 2\bar{\lambda}_k] + \bar{\beta}_k R^2(g) \} + \text{klass. Eichfixierung} \quad (3)$$

studiert. Der trunkierte Unterraum des Theorienraums ist in diesem Fall dreidimensional und wird durch die Größen G , $\bar{\lambda}$ und $\bar{\beta}$ parametrisiert. Wiederum bietet es sich hier an, zu einer Beschreibung mittels der entsprechenden dimensionslosen Variablen $\lambda_k \equiv \bar{\lambda}_k/k^2$, $g_k \equiv G_k k^{d-2}$ und $\beta_k \equiv \bar{\beta}_k k^{4-d}$ überzugehen.

Man mag sich an diesem Punkt die Frage stellen, warum die beiden anderen in der Krümmung quadratischen Invarianten $\int d^d x \sqrt{g} R_{\mu\nu} R^{\mu\nu}$ und $\int d^d x \sqrt{g} R_{\mu\nu\rho\sigma} R^{\mu\nu\rho\sigma}$, welche ja von $\int d^d x \sqrt{g} R^2$ unabhängig¹ sind, hier keine Berücksichtigung finden. Das hat sowohl konzeptionelle als auch technische Gründe. Zunächst einmal ist klar, daß die drei Invarianten bei konventioneller störungstheoretischer Behandlung aus Konsistenzgründen alle gleichberechtigt behandelt werden müssen, denn sie besitzen die gleiche kanonische Dimension und sind somit am Gaußschen Fixpunkt allesamt gleich relevant. Den obigen Bemerkungen entsprechend gilt das jedoch nicht am nicht-Gaußschen Fixpunkt; hier lassen sich keine Informationen bzgl. der verhältnismäßigen Wichtigkeit von Invarianten aus allgemeinen Prinzipien ableiten, und es gibt keinen offensichtlichen Grund zu der Annahme, daß die Skalendimensionen der drei quadratischen Invarianten identisch sein sollten. Folglich besteht die beste Option, die man hier hat, ohnehin darin, einen “Schritt ins Dunkle” zu wagen. Außerdem übersteigt eine gleichzeitige Berücksichtigung aller drei quadratischen Invarianten die rechentechnischen Möglichkeiten, die der vorliegende Zugang eröffnet, bei weitem. Man müßte dann nämlich eine viel ausgefeiltere Projektionstechnik verwenden.

Kommen wir nun zum Renormierungsgruppenfluß der erweiterten Trunkierung. An erster Stelle ist hier zu erwähnen, daß in [32] bereits eine Trunkierung mit Termen von höheren Ableitungen diskutiert wurde. Die dort vorgenommene Analyse ist aber insofern unvollständig, als das Laufen der (Krümmung)²-Invarianten darin vernachlässigt wurde. Außerdem wird in [32] keine Aussage über eventuelle Fixpunkte gemacht. Dahingegen wird in der vorliegenden Arbeit das (sehr komplizierte) λ - g - β -Flußgleichungssystem der R^2 -Trunkierung hergeleitet und seine Fixpunktstruktur detailliert untersucht. Dabei ergeben sich die folgenden Resultate: Der Gaußsche Fixpunkt der Einstein-Hilbert-

¹Das gilt natürlich nur für $d \neq 4$. Im Fall $d = 4$ stehen die drei quadratischen Invarianten über die Gauß-Bonnet-Identität in Beziehung, so daß eine von ihnen eliminiert werden kann.

Trunkierung findet sich in der R^2 -Trunkierung *nicht* wieder. Im Gegensatz dazu ist der nicht-Gaußsche Fixpunkt sehr wohl auch in dieser Trunkierung vorhanden. Aus einer Analyse seiner Schema-Abhängigkeit geht hervor, daß sowohl er als auch der Fluß in seiner Umgebung für alle Cutoffs sehr gut durch die entsprechenden Resultate der Einstein-Hilbert-Trunkierung approximiert werden. Der zusätzliche R^2 -Term übt also im Vergleich zu den beiden übrigen Invarianten nahezu keinen Einfluß auf den Renormierungsgruppenfluß aus. Somit verdichten sich die Hinweise darauf, daß der UV attraktive Fixpunkt auch in der exakten Theorie existieren könnte. Infolgedessen steigt auch die Wahrscheinlichkeit dafür, daß die Quanten-Einstein-Gravitation möglicherweise tatsächlich nichtperturbativ renormierbar ist.

Um einige Vorurteile gegen die Gravitationstheorien höherer Ableitungen aus der Welt zu schaffen oder wenigstens zu mildern, ist es an dieser Stelle angebracht, die berühmt-berüchtigten Unitaritäts- und Kausalitätsprobleme anzusprechen, die ihnen bei *störungstheoretischer* Behandlung (im Lorentzischen Fall) anhaften [33, 34]. Entwickelt man nämlich die allgemeinste Form einer (Krümmung)²-Theorie in $d = 4$ Dimensionen um den flachen Raum, so stellt sich heraus, daß diese Theorie zwar “power counting”-renormierbar ist, aber auf klassischem Niveau Anregungen mit negativer linearisierter Energie besitzt, die beim Übergang zur quantentheoretischen Betrachtungsweise zu Zuständen mit negativer Norm führen [33]. Diese sogenannten “Poltergeister” weisen eine Masse von der Größenordnung der Planck-Masse $m_{\text{Pl}} \equiv 1/\sqrt{G}$ auf, wobei G den Infrarotwert der laufenden Newton-Konstante verkörpert: $G \equiv G_{k=0}$. Wenn man nun analog dazu einen Trunkierungsansatz des (Krümmung)²-Typs um den flachen Raum entwickelt, dann erhält man einen k -abhängigen effektiven Propagator $(\delta^2\Gamma_k/\delta g\delta g)^{-1} \equiv (\Gamma_k^{(2)})^{-1}$, der ähnliche Poltergeister mit Massen $\propto 1/\sqrt{G_k}$ mit sich bringt. Im Prinzip stellt dies für sich genommen hier aber keinerlei Problem dar, da der flache Raum i.a. ohnehin keine Lösung der effektiven Bewegungsgleichung verkörpert. Vielmehr tritt das potentielle, mit der Anregung von Poltergeistern verbundene Problem beim Euklidischen Renormierungsgruppenzugang in einer Form auf, die sich konzeptionell von der bei der störungstheoretischen Quantisierung vorliegenden unterscheidet und zudem besser handhabbar ist. Zum einen liegt das daran, daß dabei um solche Hintergrundräume linearisiert wird, die für den Projektionsvorgang benötigt werden, und nicht um den flachen Raum. Zum anderen sind für unsere Zwecke lediglich gewisse k -Intervalle der Renormierungsgruppentrajektorien von Interesse, und für eine wohldefinierte Bestimmung ebendieser Intervalle reicht es aus, wenn das (trunkierte) Γ_k nur diejenigen Moden mit einer positiven linearisierten Energie ausstattet, die in dem betrachteten Intervall zum Renormierungsgruppenfluß beitragen. Es wird sich im Rahmen dieser Arbeit herausstellen, daß dies für die R^2 -Trunkierung im Bereich genügend großer Skalen k , in dem sie aller Voraussicht nach als verläßlich betrach-

tet werden kann, in der Tat der Fall ist. (Näheres dazu läßt sich den unmittelbar folgenden Paragraphen entnehmen.) Demgegenüber scheint es weitaus schwieriger zu sein, zu einer Lorentzschen Interpretation der Theorie überzugehen. Die Fragen nach der Gestalt des Lorentzschen Gegenstücks und insbesondere nach seinen Kausalitätseigenschaften lassen sich erst dann wirklich stellen, wenn die vollständige Renormierungsgruppentrajektorie, die zwischen dem UV und dem IR Bereich interpoliert, und vor allem die exakte Gestalt der Fixpunktwirkung bekannt sind. Zumindest spricht aber zum gegenwärtigen Zeitpunkt nichts dagegen, daß die exakte Quanten-Einstein-Gravitation im übertragenen Sinn “kausal” sein könnte.

Die R^2 -Trunkierung ist nicht nur hinsichtlich ihrer Fixpunktstruktur, sondern auch unter einem ganz anderen Aspekt sehr interessant. Letzterer steht in direktem Zusammenhang mit dem Problem, das der sogenannte konforme Faktor der Metrik in der herkömmlichen Euklidischen Quantengravitation verursacht. Dieses äußert sich darin, daß die Einstein-Hilbert-Wirkung S_{EH} dem konformen Faktor einen negativen kinetischen Term verleiht und infolgedessen nicht nach unten beschränkt ist. Somit kann auch kein Vakuumzustand (absolutes Minimum) gefunden werden. Das geschilderte Problem überträgt sich in natürlicher Weise auf den Renormierungsgruppenfluß der Einstein-Hilbert-Trunkierung, wenn es dort auch etwas andere Züge annimmt. Um diese erkennen zu können, muß man sich folgendes vor Augen führen: Bei der Formulierung von trunkierten Flußgleichungen wird der Cutoffoperator \mathcal{R}_k in der Regel derart an die Trunkierung angepaßt, daß der inverse Propagator jeder masselosen Feldmode, also im wesentlichen p^2 , und \mathcal{R}_k im Grenzfall $p^2 \ll k^2$ zu $p^2 + k^2$ kombinieren. Bei dieser Vorgehensweise tritt genau dann ein Problem auf, wenn der kinetische Term, wie z.B. derjenige des konformen Faktors aus der Einstein-Hilbert-Trunkierung, negativ definit ist, d.h., wenn der inverse Propagator von der Form $-p^2$ ist. In [12] wurden Argumente dafür vorgebracht, daß in diesem Fall auch das Vorzeichen von \mathcal{R}_k gewechselt werden sollte, so daß der regularisierte inverse Propagator die Gestalt $-(p^2 + k^2)$ annimmt. Während diese Vorschrift i.a. zu einer wohldefinierten Flußgleichung führt, ergibt sich damit aber die scheinbar paradoxe Situation, daß die zu dem negativ definiten kinetischen Term gehörigen Moden - im Fall der Einstein-Hilbert-Trunkierung also die Moden des konformen Faktors - im Euklidischen Pfadintegral mit abnehmendem “Impuls” vielmehr verstärkt als gedämpft werden [12].

Im Gegensatz zur Einstein-Hilbert-Trunkierung entspricht die R^2 -Trunkierung einem Wirkungsfunktional $\Gamma_k[g_{\mu\nu}]$, das nach unten beschränkt ist und das, wie im Laufe dieser Arbeit gezeigt wird, jede Mode mit einer positiven kinetischen Energie ausstattet, sofern sich die Theorie in der Nähe des UV attraktiven Fixpunkts befindet. Folglich ist die Theorie im Bereich hinreichend großer Skalen k stabil, und die Konstruktion des Cutoffs ist in diesem Fall frei von Komplikationen. Infolgedessen ist auch die im Rahmen

der vorliegenden Arbeit durchgeführte Analyse des nicht-Gaußschen Fixpunkts der R^2 -Trunkierung nicht von dem Problem betroffen, das der konforme Faktor grundsätzlich bei der Einstein-Hilbert-Trunkierung verursacht.

Die Instabilität des konformen Faktors läßt sich im UV Bereich also durch bloßes Hinzufügen eines R^2 -Terms zur Einstein-Hilbert-Wirkung beseitigen. Aber ist dies auch im IR Bereich der Fall? Um diese Frage beantworten zu können, ist es erforderlich, näher auf die Gestalt des entsprechenden kinetischen Terms des konformen Faktors einzugehen. Bei sehr großen "Impulsen" wird er durch einen $(p^2)^2$ -Term dominiert, der dem R^2 -Term entstammt und (bei passender Wahl des Vorzeichens dieser Invariante) einen stabilisierenden Einfluß auf den konformen Sektor der Theorie ausübt. Bei hinreichend kleinen "Impulsen" ist sein Verhalten jedoch durch den $-p^2$ -Term bestimmt, der dem Einstein-Hilbert-Term $\int d^d x \sqrt{g} R$ entspringt, was zu einer Destabilisierung des konformen Sektors führt. Im IR Bereich ist also auch eine Gravitationstheorie des Typs (3) - trotz des zusätzlichen R^2 -Terms - instabil.

Es stellt sich somit die Frage, wie aus einer Theorie, die auf klassischem Niveau instabil ist, eine stabile effektive Theorie entstehen kann. Als vielversprechender Lösungsansatz ist hier das Konzept der dynamischen Stabilisierung zu nennen. Dabei besteht die Idee darin, daß während des Renormierungsgruppenflusses in Richtung $k \rightarrow 0$ insbesondere solche Invarianten angeregt werden, die die Theorie im IR Bereich in zunehmendem Maße stabilisieren. Das läuft letztendlich darauf hinaus, daß die vollständig quantisierte Theorie (d.h. $\Gamma_{k=0}$) von allen Instabilitäten befreit ist.

Von den bisher bekannten Beispielen für klassisch instabile Euklidische Feldtheorien, deren Instabilitäten auf die oben beschriebene Weise dynamisch kuriert werden, weiß man, daß mit der Stabilisierung nicht selten eine "Kondensation" von räumlich inhomogenen Moden einhergeht. Das bedeutet, daß die betroffenen Moden nichtverschwindende Vakuum Erwartungswerte annehmen. Infolge der räumlichen Inhomogenität dieses "Kondensats" besitzt das Quanten-Vakuum dann eine äußerst nichtriviale Struktur, die insbesondere die spontane Brechung der räumlichen Symmetrien mit sich bringt. Im Fall eines Euklidisch flachen Raums werden diese durch die Euklidische Poincaré-Gruppe $ISO(d)$ beschrieben.

Es ist nun kein weiter Schritt mehr bis zu der Vermutung, daß sich möglicherweise der konforme Faktor der Gravitation analog zu den oben erwähnten Modellen dynamisch stabilisiert. Falls sich diese Hypothese bewahrheitet und sich dabei herausstellen sollte, daß auch die Gravitation ein räumlich inhomogenes Kondensat ausbildet, so müßte natürlich die Struktur des nichtrivialen Quanten-Vakuums derjenigen des flachen Raums sehr ähnlich sein.

Bis zum jetzigen Zeitpunkt ist allerdings noch nicht klar, wie die exakte effektive Wirkung der Gravitation und der daraus resultierende Quanten-Vakuumzustand wirklich

aussehen. Um erste Informationen darüber zu sammeln, ob sie tatsächlich aus einer dynamischen Stabilisierung der nackten Theorie hervorgehen könnten, wird in der vorliegenden Arbeit ein Spielzeugmodell untersucht, das gewisse Ähnlichkeiten mit dem konformen Sektor der Gravitation aufweist. Als Ausgangspunkt dient hier eine klassische Euklidische Feldtheorie eines masselosen komplexen Skalarfeldes, das mit einem herkömmlichen quartischen Selbstwechselwirkungsterm ausgestattet ist, aber über einen kinetischen Term verfügt, der vom Standard abweicht. Er ist vom Typ $-p^2 + (p^2)^2$ und ahmt somit den aus einer nackten Wirkung der Form $S[g_{\mu\nu}] \propto \int d^d x \sqrt{g} \{-R + \gamma R^2\}$ folgenden kinetischen Term des konformen Faktors nach. (γ verkörpert hier eine positive Konstante.) Das skalare Modell weist eine globale U(1)-Phasensymmetrie sowie Invarianz unter starren ISO(d)-Raumzeit-Translationen und -Rotationen auf.

In dieser Arbeit werden zunächst die Vakuumstruktur und das zugehörige Fluktuationspektrum der klassischen Theorie analysiert. Dabei stellt sich unter anderem heraus, daß die Feldkonfiguration χ_{\min} , die das klassische Vakuum beschreibt, räumlich inhomogen ist. Das weist bereits darauf hin, daß das resultierende Quanten-Vakuum durch ein symmetriebrechendes Kondensat charakterisiert sein könnte.

Die Untersuchung des skalaren Modells wird dann mit einer Renormierungsgruppenstudie der zugehörigen Quantentheorie fortgesetzt. Dazu wird wieder der Zugang der effektiven Mittelwertwirkung gewählt. In diesem Fall verwenden wir für unsere Analyse aber keine exakte Renormierungsgruppengleichung, sondern unterziehen das definierende Pfadintegral für die effektive Mittelwertwirkung Γ_k einer semiklassischen Entwicklung und beziehen unsere Informationen aus der führenden Ordnung dieser Entwicklung. Dabei gilt unser Hauptinteresse natürlich den Stabilitätseigenschaften der effektiven Theorie und der Struktur des zugehörigen Quanten-Vakuums. Die durchgeführten Untersuchungen führen zu dem Resultat, daß die Struktur des Quanten-Vakuums - zumindest im Rahmen der semiklassischen Approximation - durch ein räumlich inhomogenes Kondensat bestimmt ist, das die anwesenden Symmetrien bricht. Außerdem stellt man folgendes fest: Mit der Kondensation geht im Grunde genommen eine Massenerzeugung einher, die dafür sorgt, daß der effektive kinetische Term positiv definit wird. Auf diese Weise wird die effektive Theorie stabilisiert.

Es stellt sich nun die Frage, inwieweit sich dieses Ergebnis auf den konformen Sektor der Gravitation übertragen läßt. Es ist klar, daß die Forderung nach allgemeiner Koordinateninvarianz der Erzeugung eines naiven Massenterms für die Fluktuationen des Gravitationsfeldes im Wege steht bzw. diese verbietet. Es kommen hier also nur zusätzliche *Invarianten* für eine Stabilisierung in Frage. Allerdings können Erweiterungen der Einstein-Hilbert-Theorie um beliebige *lokale* Invarianten von höheren Potenzen in der Krümmung keine dynamische Stabilisierung hervorrufen, da sie, wie uns durch das Bei-

spiel der R^2 -Theorie vor Augen geführt wurde, im IR Bereich gegenüber dem $\int d^d x \sqrt{g} R$ -Term vernachlässigbar sind. Ergo könnten nur nichtlokale Invarianten die gewünschte Stabilisierung des konformen Sektors herbeiführen.

Um einen ersten Eindruck davon zu gewinnen, ob der Weg über die nichtlokalen Invarianten hinsichtlich ihrer Konsequenzen für die Vakuumstruktur tatsächlich erfolgversprechend ist, schließen wir unsere Erörterungen mit einer Studie einer nichtlokalen Invariante der Form $I_{\text{nl}} = \int d^d x \sqrt{g} R (-D^2 + \varepsilon |R| + m^2)^{-1} R$ ab. Letztere hängt offensichtlich noch von verschiedenen freien Parametern ab, und zwar von der dimensionslosen Größe ε und der ‘‘Masse’’ m . Wenn man diese in einem bestimmten Verhältnis zueinander wählt, so stellt man folgendes fest: Die kombinierte Wirkung $S_{\text{EH}} + I_{\text{nl}}$ liefert für den konformen Faktor einen positiv definiten kinetischen Term und besitzt beim flachen Raum ein Minimum. Es geht aus der Analyse jedoch nicht hervor, ob das Minimum auch wirklich global ist. Wenn das der Fall sein sollte, so wäre die kombinierte Wirkung in der Tat stabil, und das sogar in ‘‘trivialer’’ Weise. Abgesehen von dem Status dieses Minimums wäre dann als nächstes zu überprüfen, ob es wirklich Renormierungsgruppentrajektorien gibt, die im IR Limes $k \rightarrow 0$ gegen eine effektive Wirkung dieses Typs konvergieren. Das ist jedoch nicht mehr Gegenstand dieser Arbeit.

Die vorliegende Arbeit gliedert sich im wesentlichen in 3 Teile:

Der erste Teil umfaßt die Kapitel 1 bis 7 und beschäftigt sich hauptsächlich mit den UV Aspekten der Gravitation. Zunächst wird in Kapitel 1 die angesprochene verallgemeinerte Flußgleichung für die Quanten-Einstein-Gravitation hergeleitet, welche dann in Kapitel 2 auf eine Klasse von Trunkierungen, die mit den Ward-Identitäten konsistent sind, projiziert wird. Ferner wird dort ein geeigneter Cutoffoperator definiert. Die unmittelbar anschließenden Kapitel 3 und 4 befassen sich explizit mit der Einstein-Hilbert-Trunkierung. Während in Kapitel 3 die Flußgleichungen für die beiden laufenden Kopplungen der Einstein-Hilbert-Trunkierung bestimmt werden, widmet sich Kapitel 4 der Auswertung dieser Gleichungen, wobei insbesondere die Fixpunktstruktur dieser Trunkierung untersucht wird. Ganz analog zu der Vorgehensweise in diesen beiden Kapiteln wird in den zwei darauf folgenden Kapiteln verfahren. In Kapitel 5 werden die Differentialgleichungen für die drei Kopplungen der R^2 -Trunkierung ermittelt, und in Kapitel 6 wird die daraus resultierende Fixpunktstruktur sowie der Renormierungsgruppenfluß in der Umgebung der Fixpunkte analysiert.

Daran schließt der zweite Teil an, der sich aus den Kapiteln 8 bis 12 zusammensetzt und sich mit IR Aspekten der Gravitation beschäftigt. In Kapitel 8 wird zunächst das Konzept der dynamischen Stabilisierung erläutert und dann ein skalares Spielzeugmodell

eingeführt, das den konformen Sektor der Gravitation simuliert und in den darauf folgenden Kapiteln hinsichtlich seiner Stabilitätseigenschaften im IR Bereich untersucht wird. Das Kapitel 9 enthält die Herleitung der effektiven Mittelwertwirkung für dieses Modell sowie eine Erörterung der verwendeten Auswertungsmethoden. In diesem Zusammenhang wird auch das Phänomen der “klassischen” (instabilitätsinduzierten) Renormierung ausführlich diskutiert. Für die Auswertung der effektiven Mittelwertwirkung Γ_k ist es hier erforderlich, das absolute Minimum der im Integranden des definierenden Pfadintegrals für Γ_k auftauchenden gesamten Wirkung S_k^J zu kennen. Das Kapitel 10 beschäftigt sich mit der Berechnung dieses Minimum. In Kapitel 11 wird daraufhin der Renormierungsgruppenfluß des effektiven Propagators sowie von verschiedenen “verallgemeinerten” Potentialen U_k ermittelt. Das Kapitel 12 widmet sich schließlich der Untersuchung der oben erwähnten nichtlokalen Invariante I_{nl} hinsichtlich ihres stabilisierenden Einflusses auf die Einsteinsche Gravitationstheorie.

Teil drei bildet den Anhang zu den in dieser Arbeit vorgenommenen Studien. Er beginnt mit einem Abkürzungverzeichnis und einer tabellarischen Auflistung verschiedener Einzelheiten zur Notation und zu den verwendeten Konventionen, zusammengefaßt in Anhang A. Weiterhin liefern die Anhänge B bis L verschiedene rechentechnische Details zu der im ersten Teil dieser Arbeit durchgeführten Analyse, die zum größten Teil die UV Aspekte der Gravitation betrifft. Analog dazu enthalten die Anhänge M bis P diverse ergänzende Rechnungen zum zweiten Teil dieser Arbeit, also zu der Untersuchung der IR Aspekte der Gravitation.

Die Erörterungen werden durch eine Zusammenfassung komplettiert, in der die wesentlichen Ergebnisse dieser Arbeit rekapituliert und bewertet werden sowie ein kleiner Ausblick gegeben wird. Sie ist zwischen dem zweiten Teil und dem Anhang eingeschoben.

Zuguter Letzt sei der anglophile Leser an dieser Stelle noch darauf hingewiesen, daß ein Großteil dieser Arbeit, aufgespalten in verschiedene Teile, auch in englischer Version existiert, siehe [35, 36, 37, 38, 39].

Kapitel 1

Die exakte

Renormierungsgruppengleichung

1.1 Das Konzept der effektiven Mittelwertwirkung - Allgemeines und Spezielles

Aus der Einleitung dürfte bereits deutlich hervorgegangen sein, daß die effektive Mittelwertwirkung der Euklidischen Quanten-Einstein-Gravitation das Herzstück der im Rahmen dieser Arbeit durchgeführten Betrachtungen bildet. Für sie wurde erstmalig in [12] eine exakte Renormierungsgruppengleichung aufgestellt. Letztere ist jedoch aus rechen-technischen Gründen für praktische Anwendungen nur bedingt geeignet, denn bestimmte komplexere Studien wie z.B. diejenigen, die uns im weiteren Verlauf beschäftigen werden, lassen sich mit ihr kaum realisieren. Dementsprechend widmet sich dieses Kapitel der Aufgabe, die Flußgleichung aus [12] dahingehend zu verallgemeinern, daß sie für eine möglichst große Klasse von Wirkungsfunktionalen ausgewertet werden kann. Im vorliegenden Abschnitt werden zunächst die wesentlichen konzeptionellen Details der effektiven Mittelwertwirkung in einem relativ allgemeinen Zusammenhang erläutert, bevor dann im einzelnen darauf eingegangen wird, warum und inwiefern die Flußgleichung aus [12] zu modifizieren ist.

Die effektive Mittelwertwirkung [7, 8] ist ein im Wilsonschen Sinn “vergrößertes” Funktional für die freie Energie, das gewöhnlich mit Γ_k bezeichnet wird. Es definiert eine effektive Feldtheorie, deren Gültigkeitsbereich gerade solche Wechselwirkungsprozesse umfaßt, deren relevante Impulse allesamt in der Nähe der Impulsskala k liegen. Wertet man die effektive Mittelwertwirkung auf Baumgraphenniveau aus, dann enthalten die daraus resultierenden Ausdrücke bereits alle Loop-Effekte, die von Quantenfluktuationen mit $p^2 > k^2$ stammen. Durch sukzessive Verkleinerung der Skala k lassen sich demgemäß mehr und

mehr Quanteneffekte ausintegrieren. Aufgrund dieser Eigenschaften kann man die effektive Mittelwertwirkung mit einem Mikroskop vergleichen, das eine variable Auflösung besitzt. Ist k sehr groß, so kann man anhand des zugehörigen Funktionals Γ_k das Verhalten bei kurzen Abständen $\ell = 1/k$ erkennen. Wenn man nun k auf einen kleineren Wert "herunterfährt", dann sieht man ein dementsprechend vergrößertes Bild der Theorie, das nur solche Strukturen erkennen läßt, deren Ausmaß einer verhältnismäßig großen charakteristischen Längenskala $\ell = 1/k$ entspricht.

Die Konstruktion von Γ_k verläuft nahezu analog zu derjenigen der herkömmlichen effektiven Wirkung Γ , welche das erzeugende Funktional für die ein-Teilchen-irreduziblen Greenschen Funktionen darstellt. (Darüber hinaus fällt Γ_k im IR Limes $k \rightarrow 0$ sogar mit Γ zusammen.) In beiden Fällen geht man von dem gewöhnlichen Euklidischen Funktionalintegral aus, das das erzeugende Funktional W für die verbundenen Greenschen Funktionen definiert. Der entscheidende Unterschied zwischen der Herleitung von Γ und derjenigen der effektiven Mittelwertwirkung Γ_k besteht nun darin, daß man bei der letzteren an dieser Stelle eine Abhängigkeit von der Cutoffskala k in das Pfadintegral einführt, indem man die im Integranden enthaltene klassische Wirkung durch einen IR Cutoffterm $\Delta_{k,S}$ ergänzt. Dieser bewirkt, daß jede Mode der Fluktuationsvariable zum (verallgemeinerten) Impuls p mit einem Impuls-abhängigen Massenterm $\propto \mathcal{R}_k(p^2)$ versehen wird. Die sogenannte Cutofffunktion $\mathcal{R}_k(p^2)$ sorgt hier dafür, daß die zu hohen Impulsen gehörigen Moden unbeeinflusst ausintegriert werden, während die Moden zu niedrigen Impulsen im Pfadintegral unterdrückt werden. Das geschilderte Cutoffverhalten erreicht man dadurch, daß man diese Funktion so wählt, daß sie einerseits für $p^2 \gg k^2$ verschwindet und sich andererseits im Grenzfall $p^2 \ll k^2$ gemäß $\mathcal{R}_k(p^2) \propto k^2$ verhält. Demnach erfolgt die Unterdrückung der Moden zu niedrigen Impulsen also durch einen Massenterm $\propto k^2$. Unterzieht man anschließend das Skalen-abhängige Funktional W_k , das aus dieser Modifikation von W hervorgeht, einer Legendre-Transformation, so erhält man die effektive Mittelwirkung Γ_k bis auf einen zusätzlichen Korrekturterm [7, 8]. Ihre Abhängigkeit von der Skala k läßt sich durch eine Renormierungsgruppentrajektorie im Raum aller Wirkungsfunktionale darstellen. Unter Berücksichtigung der oben genannten Eigenschaften von $\mathcal{R}_k(p^2)$ läßt sich dabei relativ leicht verifizieren, daß sie zwischen der klassischen (nackten) Wirkung $S = \Gamma_{\hat{k}}$ und der gewöhnlichen effektiven Wirkung $\Gamma = \Gamma_{k=0}$ interpoliert, wobei \hat{k} die UV Cutoffskala bezeichnet. (Strenggenommen gilt die Beziehung $S = \Gamma_{\hat{k}}$ nur näherungsweise, solange \hat{k} endlich ist. Erst in solchen Fällen, in denen der Grenzwert $\hat{k} \rightarrow \infty$ gebildet werden kann, läßt sich diese Gleichung i.a. als exakt interpretieren.)

Die Veränderung, die Γ_k durch eine infinitesimale Variation von k erfährt, wird durch eine funktionale Differentialgleichung beschrieben, und genau diese ist die bereits in der Einleitung ausführlich diskutierte exakte Renormierungsgruppengleichung. Mehr oder

minder symbolisch geschrieben, nimmt sie die folgende Form an:

$$k \partial_k \Gamma_k = \frac{1}{2} \text{Tr} \left[\left(\Gamma_k^{(2)} + \mathcal{R}_k(-\Delta) \right)^{-1} k \partial_k \mathcal{R}_k(-\Delta) \right]. \quad (1.1)$$

Die rechte Seite dieser Gleichung kann man gewissermaßen als “Beta-Funktional” auffassen, das die Beta-Funktionen der (unendlich vielen) anwesenden Kopplungen enthält. Vom mathematischen Standpunkt aus betrachtet, stellt sie die Spur eines recht komplizierten Operators dar, der sich im wesentlichen aus dem Hesse-Matrixoperator $\Gamma_k^{(2)}$, d.h. der zweiten Funktionalableitung von Γ_k nach den dynamischen Variablen, und dem Cutoffoperator $\mathcal{R}_k(-\Delta)$ zusammensetzt. Letzteren erhält man dadurch, daß man das Argument der oben eingeführten Cutofffunktion $\mathcal{R}_k(p^2)$ durch den Operator $-\Delta$ ersetzt. Dementsprechend orientiert sich das Abschneideverhalten an dem Spektrum von Δ . Während die Eigenmoden von $-\Delta$ zu “großen” Eigenwerten $p^2 > k^2$ nahezu vollständig zu Γ_k beitragen, erscheinen darin die Beiträge von $-\Delta$ -Eigenmoden zu “kleinen” Eigenwerten $p^2 < k^2$ lediglich in unterdrückter Form. Bei Theorien, die auf dem flachen Raum definiert sind und keine Eichsymmetrien aufweisen, liegt es nahe, Δ mit dem “freien” Laplace-Operator zu identifizieren, d.h. $\Delta = \partial_\mu \partial^\mu$. Dessen Eigenwerte sind die Quadrate der tatsächlichen Impulse p_μ , und die zugehörigen Eigenmoden sind somit die herkömmlichen Impuls-Eigenzustände. Es stellt sich hier allerdings die Frage, wie man den Operator Δ bei komplizierteren Theorien wählen soll, deren kovariante Laplace-Operatoren nicht dem freien entsprechen. Im Rahmen der Yang-Mills-Theorie [40, 41, 42] hat es sich diesbezüglich als günstig erwiesen, auf den Formalismus der Hintergrundeichfixierung [43, 44] zurückzugreifen und Δ aus der kovarianten Ableitung hinsichtlich des Hintergrundfeldes zu konstruieren, welche man üblicherweise mit \bar{D}_μ bezeichnet. Denn neben der günstigen Situation, daß die effektive Mittelwertwirkung durch die Hintergrundeichfixierung zu einem eichinvarianten Funktional seiner Argumente wird, birgt diese Technik den Vorteil in sich, daß man der Flußgleichung eine verhältnismäßig einfache, handhabbare Struktur verleihen kann, indem man $\Delta = \bar{D}_\mu \bar{D}^\mu$ wählt. Die Eigenfunktionen dieses Operators sind natürlich nicht die einfachen Impuls-Eigenzustände, und bei seinen Eigenwerten kann man strenggenommen nur von generalisierten Impulsquadraten p^2 sprechen.¹ Die Struktur des zugehörigen Cutoffterms $\Delta_k S$ ist aber derjenigen sehr ähnlich, die sich im Falle der oben erwähnten “einfachen” Theorien ohne Eichsymmetrie bei Verwendung des freien Laplace-Operators $\Delta = \partial_\mu \partial^\mu$ ergibt. Im Gegensatz dazu erhält der Cutoff eine viel kompliziertere Struktur, wenn man Δ gemäß $\Delta = D_\mu D^\mu$ aus der kovarianten Ableitung hinsichtlich des dynamischen Eichfeldes, also aus D_μ konstruiert. Das führt dann i.a. dazu, daß die entsprechende Flußgleichung eine unhandliche Form annimmt.

¹Nichtsdestotrotz werden im Laufe dieser Arbeit die Eigenwerte solcher Operatoren der Einfachheit halber oftmals schlicht als Impulse bezeichnet.

Im Fall der Euklidischen Quanten-Einstein-Gravitation verfährt man vollkommen analog zu der oben geschilderten Vorgehensweise bei der Yang-Mills-Theorie. Wie dort führt man eine Hintergrundeichfixierung durch und wählt $\Delta = \bar{D}_\mu \bar{D}^\mu$, wobei \bar{D}_μ die aus der Hintergrundmetrik $\bar{g}_{\mu\nu}$ konstruierte kovariante Ableitung bezeichnet. Wenn man die Faddeev-Popov-Geister für den Augenblick außer Acht läßt, ergibt sich damit für die effektive Mittelwertwirkung ein Funktional $\Gamma_k[g_{\mu\nu}, \bar{g}_{\mu\nu}]$, das von zwei unterschiedlichen Metriken abhängt, nämlich von der herkömmlichen dynamischen Metrik $g_{\mu\nu}$ und der Hintergrundmetrik $\bar{g}_{\mu\nu}$. Identifiziert man in diesem Funktional die beiden Metriken und betrachtet das daraus resultierende Funktional $\Gamma_k[g_{\mu\nu}, \bar{g}_{\mu\nu} = g_{\mu\nu}]$ im Limes $k \rightarrow 0$, so erhält man die gewöhnliche effektive Wirkung $\Gamma[g_{\mu\nu}]$ zurück. Weiterhin ist das Funktional $\Gamma_k[g_{\mu\nu}, \bar{g}_{\mu\nu} = g_{\mu\nu}]$ für alle k -Werte invariant unter allgemeinen Koordinatentransformationen, was eine direkte Konsequenz der Hintergrundeichfixierung ist. In der Tat ist die sich einstellende Koordinateninvarianz auch der wesentliche Grund für die Wahl dieser Technik. Sie wurde bereits in [12, 25] angewendet, um eine effektive Mittelwertwirkung für die d -dimensionale Quanten-Einstein-Gravitation zu formulieren und die zugehörige Flußgleichung herzuleiten. In den folgenden Abschnitten wird die dortige Vorgehensweise zur Herleitung dieser Objekte ein wenig modifiziert werden, um die Flußgleichung für die im weiteren Verlauf dieser Arbeit anstehenden Betrachtungen zugänglich zu machen.

In der Einleitung wurde bereits erwähnt, daß sich Renormierungsgruppengleichungen der Form (1.1) in der Regel nicht exakt lösen lassen und man somit gezwungen ist, auf Näherungen zurückzugreifen, wobei sich als geeignetes, nichtperturbatives Approximationsschema in erster Linie die Trunkierung des Theorienraums anbietet. Dabei handelt es sich, wie oben schon angedeutet wurde, um eine Projektion des exakten Renormierungsgruppenflusses auf einen endlichdimensionalen Unterraum des vollständigen Theorienraums. Im folgenden werden die Grundzüge dieses Näherungsverfahrens erläutert, wobei wir uns an dieser Stelle auf die technischen Aspekte des Trunkierens beschränken. Denn es bedarf lediglich des Verständnisses ebendieser Details, um nachvollziehen zu können, warum die Flußgleichung aus [12] hier nicht ausreicht und inwiefern sie zu modifizieren ist. Die anschaulichen Aspekte des Trunkierens bzw. die Motivation, die sich dahinter verbirgt, werden weiter unten an geeigneter Stelle näher erörtert werden, siehe Abschnitt 2.1.

Im Rahmen der Euklidischen Quanten-Einstein-Gravitation beginnt das besagte Näherungsverfahren damit, für die effektive Mittelwertwirkung einen Ansatz der Form $\Gamma_k = \sum_{i=1}^n g_i(k) I_i$ aufzustellen, der sich aus n unter allgemeinen Koordinatentransformationen invarianten Operatoren $I_i[g_{\mu\nu}, \bar{g}_{\mu\nu}]$ zusammensetzt. Dabei verkörpern die $g_i(k)$ die zugehörigen Skalen-abhängigen Kopplungen. Sie lassen sich als Koordinaten auf dem durch die I_i aufgespannten Raum interpretieren. Um den Renormierungsgruppenfluß auf diesen

n -dimensionalen (trunkierten) Raum zu projizieren, muß man als erstes den obigen Ansatz für Γ_k in beide Seiten der Gleichung (1.1) einsetzen. Die komplizierte Aufgabe, die es nun zu bewältigen gilt, besteht darin, die Spur auf der rechten Seite der resultierenden Gleichung nach einem vollständigen Satz von Invarianten $\{\gamma_j[g_{\mu\nu}, \bar{g}_{\mu\nu}]\}$ zu entwickeln, der von der Form sein muß, daß die in dem Trunkierungsansatz enthaltenen I_i eine Teilmenge der γ_j bilden. Im Anschluß daran werden die Koeffizienten derjenigen γ_j , die nicht in dem Ansatz vorkommen, gleich Null gesetzt. Die übriggebliebenen Terme vergleicht man dann mit den entsprechenden Termen auf der linken Seite der Flußgleichung und leitet daraus ein System von gekoppelten Differentialgleichungen für die verallgemeinerten Kopplungen $g_i(k)$ ab.

In der Praxis geht man bei dieser Projektion auf den $\{I_i\}$ -Unterraum derart vor, daß man nacheinander verschiedene Sätze von Metriken $(g_{\mu\nu}, \bar{g}_{\mu\nu})$, für die jeweils nur bestimmte Linearkombinationen der I_i übrigbleiben und die restlichen verschwinden, in beide Seiten von (1.1) einsetzt und die Operatorspur gemäß dem obigen Schema für die einzelnen Paare von Metriken auswertet. Falls dies für eine ausreichende Anzahl von Paaren $(g_{\mu\nu}, \bar{g}_{\mu\nu})$ gelingt, kann man aus der Gesamtheit der somit erhaltenen Gleichungen das gesuchte Flußgleichungssystem für die $g_i(k)$ eindeutig bestimmen.

Betrachten wir nun das oben geschilderte Projektionsverfahren am Beispiel der beiden in der Einleitung vorgestellten Trunkierungsansätze (2) und (3). Läßt man hier jeweils den Fluß des Eichfixierungsterms außer Acht, so wird der Raum, in dem sich der projizierte Fluß abspielt, durch $\mathcal{I}^{\text{EH}} \equiv \{I_1, I_2\}$ bzw. $\mathcal{I}^{R^2} \equiv \{I_1, I_2, I_3\}$ mit $I_1 = \int d^d x \sqrt{g}$, $I_2 = \int d^d x \sqrt{g} R$ und $I_3 = \int d^d x \sqrt{g} R^2$ aufgespannt. In beiden Fällen reicht es für die Projektion aus, in der Flußgleichung $\bar{g}_{\mu\nu} = g_{\mu\nu}$ zu setzen und für die miteinander identifizierten Metriken die Familie der Sphären S^d einzusetzen. Denn wenn man den Radius r der Sphären, der diese Familie parametrisiert, nicht fixiert, sondern ihn als freien Parameter behält, dann lassen sich $I_1 \propto r^d$, $I_2 \propto r^{d-2}$ und $I_3 \propto r^{d-4}$ voneinander unterscheiden. Dementsprechend besteht die Aufgabe, die es hier noch zu bewältigen gilt, darin, die Spur des Operators $(\Gamma_k^{(2)} + \mathcal{R}_k)^{-1} k \partial_k \mathcal{R}_k$, der sich für sphärische Metriken $\bar{g}_{\mu\nu} = g_{\mu\nu}$ erheblich vereinfacht, passend auszuwerten und die von \mathcal{I}^{EH} bzw. \mathcal{I}^{R^2} aufgespannten Anteile zu extrahieren. Darauf werden wir anschließend zu sprechen kommen. Vorher sei allerdings noch erwähnt, daß diese spezielle Projektionsmethodik jedoch nicht ausreicht, wenn man beispielsweise alle drei in der Krümmung quadratischen Invarianten im Trunkierungsansatz berücksichtigen möchte. Denn für sphärische Metriken sind neben I_3 auch $\int d^d x \sqrt{g} R_{\mu\nu} R^{\mu\nu}$ und $\int d^d x \sqrt{g} R_{\mu\nu\rho\sigma} R^{\mu\nu\rho\sigma}$ proportional zu r^{d-4} , so daß eine Unterscheidung dieser Invarianten unmöglich wird.

Kommen wir nun zu den Problemen, auf die man bei der oben beschriebenen Auswertung der Flußgleichung (1.1) stößt. Dieser stehen im wesentlichen zweierlei Hürden von

ganz unterschiedlicher Natur im Wege.

Die erste Schwierigkeit hängt mit der “richtigen” Wahl des Cutoffterms $\Delta_k S[h_{\mu\nu}, \bar{g}_{\mu\nu}]$ zusammen. Wie bereits zuvor angedeutet wurde, wird das Funktional $\Delta_k S[h_{\mu\nu}, \bar{g}_{\mu\nu}]$ so gewählt, daß es quadratisch von der Metrik-Fluktuation $h_{\mu\nu}$ abhängt, aber via $\mathcal{R}_k \equiv \mathcal{R}_k[\bar{g}]$ auch von der Hintergrundmetrik $\bar{g}_{\mu\nu}$. (Die vollständige Quantenmetrik ergibt sich aus der Summe dieser beiden Anteile, d.h., sie ist gleich $\bar{g}_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}$.) Unglücklicherweise erweist es sich als äußerst schwierig, einen Cutoffoperator $\mathcal{R}_k[\bar{g}]$ zu konstruieren, der die gewünschten Abschneideeigenschaften (siehe oben) zumindest für diejenigen Hintergrundmetriken besitzt, die bei der Projektion benötigt werden. Das hängt unter anderem damit zusammen, daß es erforderlich ist, $\mathcal{R}_k[\bar{g}]$ in gewissem Sinn an den jeweiligen Trunkierungsansatz anzupassen, wenn man aus der Projektion ein einigermaßen handhabbares Gleichungssystem gewinnen möchte, das für weiterführende Rechnungen zugänglich ist. Eigentlich stellt diese Anpassung schon für sich genommen eine weitere Komplikation dar.

Angenommen, man hat einen geeigneten Cutoffoperator $\mathcal{R}_k[\bar{g}]$ gefunden und ihn zusammen mit dem Trunkierungsansatz in die Flußgleichung (1.1) eingesetzt. Dann hat man, den obigen Bemerkungen entsprechend, die Operatorspur auf der rechten Seite von (1.1) für ein oder mehrere Paare $(g_{\mu\nu}, \bar{g}_{\mu\nu})$ auszuwerten. Legt man Wert darauf, den Renormierungsgruppenfluß des Eichparameters, den wir hier mit α_k bezeichnen, zu berücksichtigen, so darf man die beiden Metriken nicht miteinander identifizieren. Dadurch werden die Rechnungen verständlicherweise erheblich komplizierter als in dem weiter oben angesprochenen Fall, bei dem der Eichparameter als Konstante $\alpha_k = \alpha$ behandelt wird und dementsprechend $\bar{g}_{\mu\nu} = g_{\mu\nu}$ gesetzt werden kann. (Dieser Fall wird in der vorliegenden Arbeit diskutiert.) Aber selbst wenn man die Metriken miteinander identifiziert, besitzt der Hesse-Matrixoperator $\Gamma_k^{(2)}[g, \bar{g} = g]$ unter der Spur immer noch eine sehr komplizierte Struktur. Im wesentlichen setzt er sich aus Potenzen des Krümmungstensors und kovarianten Ableitungen D_μ zusammen. Um die Operatorspur in (1.1) mittels Standardmethoden wie der Heat-Kernel-Entwicklung auswerten zu können, ist es erforderlich, daß alle in $\Gamma_k^{(2)}$ enthaltenen kovarianten Ableitungen D_μ in Gestalt des kovarianten Laplace-Operators $D^2 \equiv D_\mu D^\mu$ erscheinen. Dies ist allerdings für generische Trunkierungen bei Wahl einer beliebigen Metrik $\bar{g}_{\mu\nu} = g_{\mu\nu}$ nicht der Fall, und sogar für maximal symmetrische Metriken gilt dies nicht von vornherein. Im Spezialfall der Einstein-Hilbert-Trunkierung (2) mit $\alpha = 1$, der in [12] diskutiert wurde, läßt sich bei Wahl solcher Metriken dieser Zustand zwar sehr leicht herstellen, indem man einfach das Feld $h_{\mu\nu}$ in seinen reinen Spurateil und seinen spurfreien Anteil zerlegt.² Bei komplizierteren Trunkierungen wie z.B. der R^2 -Trunkierung (3) reicht aber diese Vorgehensweise allein, unabhängig von der

²Die Gültigkeit dieser Aussage hängt natürlich von der verwendeten Eichbedingung ab. Sie bezieht sich auf die sogenannte harmonische Eichbedingung, die sowohl in [12] als auch dieser Arbeit benutzt wird. Für andere Eichbedingungen stimmt sie i.a. nicht.

Wahl des Eichparameters α , nicht aus, um $\Gamma_k^{(2)}$ in die erforderliche Form zu bringen. Nach der gerade beschriebenen Zerlegung treten dort auch für maximal symmetrische Metriken “nichtdiagonale” Terme in den Ableitungen D_μ auf.

In der vorliegenden Arbeit wird eine Strategie verfolgt, die zu der Lösung der oben geschilderten Probleme führt oder zumindest einen Beitrag dazu leistet. Sie beruht auf Yorks sogenannter “TT-Zerlegung” des metrischen Feldes [29], welche nahezu auf jeder Raumzeit-Mannigfaltigkeit, die für die Projektion benötigt wird, anwendbar ist. Die TT-Zerlegung gestaltet sich wie folgt: Man spaltet das Fluktuationsfeld $h_{\mu\nu}$ in einen transversalen, spurfreien Tensor $h_{\mu\nu}^T$, einen longitudinalen, spurfreien Tensor und einen reinen Spuranteil $\propto \phi$ auf, wobei ϕ ein Skalarfeld darstellt. Den longitudinalen, spurfreien Tensor zerlegt man dann weiter in einen longitudinal-transversalen Anteil, der durch einen transversalen Vektor $\widehat{\xi}_\mu$ parametrisiert wird, und einen longitudinal-longitudinalen Anteil, der sich mit Hilfe eines Skalarfeldes $\widehat{\sigma}$ ausdrücken läßt. Der Effekt dieser Zerlegung liegt nun darin, daß in dem Operator $\Gamma_k^{(2)}[g, \bar{g} = g]$ tatsächlich alle D_μ ausschließlich in Form von kovarianten Laplace-Operatoren auftreten, wenn er bezüglich der Basis aus den Komponentenfeldern $\{h_{\mu\nu}^T, \widehat{\xi}_\mu, \widehat{\sigma}, \phi\}$ ausgedrückt wird und gleichzeitig eine beliebige sphärisch symmetrische Metrik $g_{\mu\nu}$ in ihn eingesetzt wird. Es sei an dieser Stelle aber noch einmal ausdrücklich darauf hingewiesen, daß die TT-Zerlegung auf einer großen Klasse von Hintergründeräumen durchgeführt werden kann und nicht nur auf d -Spären S^d . Für sphärische Hintergründe besitzt sie lediglich noch die zusätzliche angenehme Eigenschaft, daß sie vollständig orthogonal ist. Das ist bei anderen Hintergründeräumen in der Regel nicht der Fall.

Auch was das erste der beiden oben angesprochenen Probleme, also die Konstruktion von \mathcal{R}_k betrifft, ist die TT-Zerlegung durchaus von Nutzen. Denn formuliert man den Cutoffterm $\Delta_k S$ auf dem Niveau der Komponentenfelder anstelle des vollständigen Feldes $h_{\mu\nu}$, so erhält er eine viel transparentere Struktur, die es ermöglicht, die potentielle Problematik hinsichtlich der korrekten Abschneideeigenschaften besser einzugrenzen.

In einigen Arbeiten, die auf der ursprünglichen Arbeit [12] aufbauen, wurde die TT-Zerlegung bereits für weiterführende Studien angewendet, siehe [24, 30, 23, 31, 32]. Die dortigen Betrachtungen beschränken sich aber von vornherein auf sphärische Hintergründeräume S^d , und es wurde darin ([30] ausgenommen) die explizite Formulierung des Cutoffterms $\Delta_k S$ sowie der zugehörigen Flußgleichung umgangen. Die folgenden Abschnitte dienen dazu, diese Lücken zu schließen und eine Flußgleichung auf der Grundlage der TT-Zerlegung herzuleiten, die für alle Hintergründe gilt, welche diese Zerlegung zulassen.

1.2 Eichfixierung

Gemäß den obigen Erläuterungen beginnen wir unsere Betrachtungen mit der Formulierung eines Euklidischen Funktionalintegrals, das eine Quantentheorie der Gravitation definiert. Dabei greifen wir auf die Hintergrundeichfixierungstechnik zurück, welche in [43, 44] eingeführt wurde. Diese beruht darauf, daß die Integrationsvariable $\gamma_{\mu\nu}$ des Funktionalintegrals über alle Metriken gemäß der Gleichung

$$\gamma_{\mu\nu}(x) = \bar{g}_{\mu\nu}(x) + h_{\mu\nu}(x) \quad (1.2)$$

in eine feste, aber beliebige Hintergrundmetrik $\bar{g}_{\mu\nu}$ und ein Fluktuationsfeld $h_{\mu\nu}$ zerlegt wird. Die Integration über $\gamma_{\mu\nu}$ kann danach durch eine Integration über $h_{\mu\nu}$ ersetzt werden. Unter Verwendung dieser Eichfixierungstechnik wird nun in Anlehnung an [12] ein Funktional \mathbf{Z}_k definiert, das eine Skalen-abhängige Verallgemeinerung des herkömmlichen erzeugenden Funktional für die Greenschen Funktionen darstellt. Es wird durch das folgende Pfadintegral beschrieben:

$$\begin{aligned} \mathbf{Z}_k[\text{Quellen}] &= \int \mathcal{D}h_{\mu\nu} \mathcal{D}C^\mu \mathcal{D}\bar{C}_\mu \\ &\times \exp \left[-S[\bar{g} + h] - S_{\text{gf}}[h; \bar{g}] - S_{\text{gh}}[h, C, \bar{C}; \bar{g}] - \Delta_k S[h, C, \bar{C}; \bar{g}] - S_{\text{Quellen}} \right] . \end{aligned} \quad (1.3)$$

Der erste Term des Arguments der Exponentialfunktion, $S[\gamma] = S[\bar{g} + h]$, verkörpert die klassische Wirkung, von der wir annehmen, daß sie invariant unter den allgemeinen Koordinatentransformationen

$$\delta\gamma_{\mu\nu} = \mathcal{L}_u \gamma_{\mu\nu} \equiv u^\rho \partial_\rho \gamma_{\mu\nu} + \gamma_{\rho\nu} \partial_\mu u^\rho + \gamma_{\mu\rho} \partial_\nu u^\rho \quad (1.4)$$

ist, wobei \mathcal{L}_u die Lie-Ableitung bzgl. des Vektorfelds u^μ darstellt. Ferner wollen wir bis auf weiteres annehmen, daß S strikt positiv ist; ansonsten soll S an dieser Stelle aber nicht näher spezifiziert werden.

Weiterhin bezeichnet S_{gf} den Eichfixierungsterm

$$S_{\text{gf}}[h; \bar{g}] = \frac{1}{2\alpha} \int d^d x \sqrt{\bar{g}} \bar{g}^{\mu\nu} F_\mu[\bar{g}, h] F_\nu[\bar{g}, h] , \quad (1.5)$$

welcher die Eichbedingung $F_\mu[\bar{g}, h] = 0$ implementiert. Die damit einhergehende Faddeev-Popov-Determinante wird wie üblich durch ein Funktionalintegral über Geistfelder, die wir hier mit C^μ und \bar{C}_μ bezeichnen, ausgedrückt, was zu dem folgenden Geisteranteil S_{gh} in der Wirkung führt, vgl. [12]:

$$S_{\text{gh}}[h, C, \bar{C}; \bar{g}] = -\kappa^{-1} \int d^d x C^\mu \bar{g}^{\mu\nu} \frac{\delta F_\nu}{\delta h_{\alpha\beta}} \mathcal{L}_C(\bar{g}_{\alpha\beta} + h_{\alpha\beta}) . \quad (1.6)$$

Die oben eingeführte Konstante κ ist durch

$$\kappa \equiv (32\pi\bar{G})^{-\frac{1}{2}} \quad (1.7)$$

definiert, wobei \bar{G} die nackte Newton-Konstante repräsentiert. Im Prinzip läßt sich mittels (1.5) und (1.6) jede beliebige Eichfixierung vornehmen. Es erweist sich jedoch i.a. als ausgesprochen günstig, ein Funktional F_μ zu wählen, das linear in dem Quantenfeld $h_{\mu\nu}$ und somit von der nachstehenden Form ist:

$$F_\mu[\bar{g}, h] = \sqrt{2}\kappa \mathcal{F}_\mu^{\alpha\beta}[\bar{g}] h_{\alpha\beta} . \quad (1.8)$$

In der vorliegenden Arbeit wird auf die sogenannte harmonische Eichbedingung³ zurückgegriffen, bei welcher $\mathcal{F}_\mu^{\alpha\beta}$ durch den folgenden Differentialoperator erster Ordnung gegeben ist:

$$\mathcal{F}_\mu^{\alpha\beta}[\bar{g}] = \delta_\mu^\beta \bar{g}^{\alpha\gamma} \bar{D}_\gamma - \frac{1}{2} \bar{g}^{\alpha\beta} \bar{D}_\mu . \quad (1.9)$$

Dabei bezeichnet \bar{D}_μ die aus der Hintergrundmetrik konstruierte kovariante Ableitung. Demgegenüber symbolisiert D_μ im weiteren Verlauf die kovariante Ableitung, welche die vollständige Metrik $\gamma_{\mu\nu}$ einbezieht. Im Falle der harmonischen Eichung, also (1.8) mit (1.9), ergibt sich für den Geisteranteil S_{gh} aus Gleichung (1.6) der Ausdruck

$$S_{\text{gh}}[h, C, \bar{C}; \bar{g}] = -\sqrt{2} \int d^d x \sqrt{\bar{g}} \bar{C}_\mu \mathcal{M}[\bar{g} + h, \bar{g}]^\mu{}_\nu C^\nu , \quad (1.10)$$

wobei der Operator \mathcal{M} die nachstehende Form annimmt:

$$\mathcal{M}[\gamma, \bar{g}]^\mu{}_\nu = \bar{g}^{\mu\rho} \bar{g}^{\sigma\lambda} \bar{D}_\lambda (\gamma_{\rho\nu} D_\sigma + \gamma_{\sigma\nu} D_\rho) - \bar{g}^{\rho\sigma} \bar{g}^{\mu\lambda} \bar{D}_\lambda \gamma_{\sigma\nu} D_\rho . \quad (1.11)$$

Die letzten beiden Terme in (1.3), $\Delta_k S$ und S_{Quellen} , verkörpern den Cutoffanteil und den Quellenanteil der Wirkung. Der Infrarot-Cutoffterm $\Delta_k S$ sorgt für eine Unterdrückung der Beiträge von denjenigen $-\bar{D}^2$ -Eigenmoden, die zu Eigenwerten p^2 mit $p^2 \ll k^2$ gehören, und S_{Quellen} liefert die Quellen, an welche die Felder $h_{\mu\nu}$, C^μ und \bar{C}_μ koppeln. Auf die explizite Form dieser beiden Anteile wird weiter unten näher eingegangen werden.

1.3 Zerlegung der Quantenfelder

Um die in den sich anschließenden Kapiteln präsentierten Rechnungen in dieser Form überhaupt zu ermöglichen, erweist es sich als notwendig, das Gravitationsfeld $h_{\mu\nu}$ gemäß der Gleichung

$$h_{\mu\nu} = h_{\mu\nu}^T + \bar{D}_\mu \hat{\xi}_\nu + \bar{D}_\nu \hat{\xi}_\mu + \bar{D}_\mu \bar{D}_\nu \hat{\sigma} - \frac{1}{d} \bar{g}_{\mu\nu} \bar{D}^2 \hat{\sigma} + \frac{1}{d} \bar{g}_{\mu\nu} \phi \quad (1.12)$$

³Für die zweidimensionale Liouville-Quantengravitation ist auch bereits eine Flußgleichung unter Verwendung der konformen Eichung formuliert worden, siehe [45, 46].

zu zerlegen. Diese Aufspaltung stellt die sogenannte ‘‘TT-Zerlegung’’⁴ von symmetrischen Tensoren $h_{\mu\nu}$ dar, welche z.B. in [29] ausgiebig diskutiert wurde. Um den Ausdruck auf der rechten Seite von (1.12) zu erhalten, muß man im einzelnen wie folgt vorgehen: Zuerst spaltet man den Spuranteil $h_{\mu\nu}^{Tr} \equiv \bar{g}_{\mu\nu}\phi/d$ von $h_{\mu\nu}$ ab. Dieser wird durch das Skalarfeld ϕ parametrisiert. Den übriggebliebenen symmetrischen, spurfreien Tensor zerlegt man dann weiter in seine transversale (ST^2 -)Komponente $h_{\mu\nu}^T$ und seine longitudinale Komponente $h_{\mu\nu}^L$. Letztere kann man wiederum gemäß $h_{\mu\nu}^L = h_{\mu\nu}^{LT} + h_{\mu\nu}^{LL}$ in eine longitudinal-transversale Komponente $h_{\mu\nu}^{LT} \equiv \bar{D}_\mu \hat{\xi}_\nu + \bar{D}_\nu \hat{\xi}_\mu$ und eine longitudinal-longitudinale Komponente $h_{\mu\nu}^{LL} \equiv \bar{D}_\mu \bar{D}_\nu \hat{\sigma} - \bar{g}_{\mu\nu} \bar{D}^2 \hat{\sigma}/d$ aufspalten. Diese Anteile werden durch einen transversalen (T-)Vektor $\hat{\xi}_\mu$ bzw. ein Skalarfeld $\hat{\sigma}$ parametrisiert. Die auf diese Weise eingeführten *Komponentenfelder* $h_{\mu\nu}^T, \hat{\xi}_\mu, \hat{\sigma}$ und ϕ erfüllen somit die Bedingungen

$$\bar{g}^{\mu\nu} h_{\mu\nu}^T = 0, \quad \bar{D}^\mu h_{\mu\nu}^T = 0, \quad \bar{D}^\mu \hat{\xi}_\mu = 0, \quad \phi = \bar{g}_{\mu\nu} h^{\mu\nu}. \quad (1.13)$$

Die Gesamtheit der oben vorgenommenen Zerlegungen führt dann schließlich zu der durch (1.12) beschriebenen TT-Zerlegung. Sie gilt für alle vollständigen, geschlossenen, d -dimensionalen Riemannschen Räume(, d.h. für alle kompakten Riemannschen Mannigfaltigkeiten ohne Rand). Wie in [29] dargelegt wird, erstreckt sich ihr Gültigkeitsbereich zudem auf offene, asymptotisch flache d -Räume, sofern man gewisse Annahmen hinsichtlich des asymptotischen Verhaltens der Felder macht, die auf diesen Räumen definiert sind. Von nun an wollen wir annehmen, daß der gravitative Hintergrund zu diesen Klassen von Räumen gehört.

Betrachten wir nun die Zerlegung (1.12) etwas genauer. Offensichtlich liefern gerade solche $\hat{\xi}_\mu$ - und $\hat{\sigma}$ -Moden, die die Killing-Gleichung

$$\bar{D}_\mu \hat{\xi}_\nu + \bar{D}_\nu \hat{\xi}_\mu = 0 \quad (1.14)$$

bzw. die skalare Gleichung

$$\bar{D}_\mu \bar{D}_\nu \hat{\sigma} - \frac{1}{d} \bar{g}_{\mu\nu} \bar{D}^2 \hat{\sigma} = 0 \quad (1.15)$$

erfüllen, keinen Beitrag zum vollständigen Feld $h_{\mu\nu}$. Diese Moden treten zwar nicht in jedem Fall, d.h. für einen generischen Hintergrund auf, jedoch gibt es durchaus verschiedene Klassen von Hintergrundräumen, die solche Moden zulassen. Ist letzteres der Fall, so müssen diese Moden, die wir von nun an als unphysikalische Moden bezeichnen, von den Rechnungen ausgeschlossen werden. Dadurch vermeidet man, daß die einzelnen $h_{\mu\nu}$ -Konfigurationen mehrfach zum Pfadintegral (1.3) beitragen, wenn man darin die Integration über $h_{\mu\nu}$ durch eine über die Komponentenfelder ersetzt.

⁴Das Kürzel ‘‘TT’’ entstammt dem englischen ‘‘transverse traceless’’.

Die unphysikalischen Moden lassen sich wie folgt klassifizieren: Alle $\widehat{\xi}_\mu$ -Moden, die die Gleichung (1.14) lösen, stellen Killing-Vektoren (KV) dar. Demgegenüber lassen sich die Lösungen der skalaren Gleichung (1.15) in zwei Klassen einteilen. Zum einen erfüllen konstante Skalarfelder $\widehat{\sigma}$ sicherlich die Gleichung (1.15). Zum anderen wird sie auch von solchen $\widehat{\sigma}$ gelöst, deren kovariante Ableitungen $\bar{D}_\mu \widehat{\sigma}$ "echten" konformen Killing-Vektoren (PCKV) entsprechen. Dabei definieren wir die PCKV als diejenigen konformen Killing-Vektoren (CKV) \mathcal{C}_μ , d.h. Lösungen der konformen Killing-Gleichung

$$\bar{D}_\mu \mathcal{C}_\nu + \bar{D}_\nu \mathcal{C}_\mu - \frac{2}{d} \bar{g}_{\mu\nu} \bar{D}_\lambda \mathcal{C}^\lambda = 0, \quad (1.16)$$

welche rein longitudinal sind,⁵ vgl. [47].

Kommen wir nun zu der Zerlegung des Skalarprodukts auf dem Raum der symmetrischen Tensorfelder. Es zerfällt unter der Zerlegung (1.12) gemäß der Gleichung⁶

$$\begin{aligned} \langle h^{(1)}, h^{(2)} \rangle &\equiv \int d^d x \sqrt{\bar{g}} h_{\mu\nu}^{(1)} \bar{g}^{\mu\rho} \bar{g}^{\nu\sigma} h_{\rho\sigma}^{(2)} \\ &= \int d^d x \sqrt{\bar{g}} \left\{ h_{\mu\nu}^{(1)T} h^{(2)T\mu\nu} - 2\widehat{\xi}_\mu^{(1)} (\bar{g}^{\mu\nu} \bar{D}^2 + \bar{R}^{\mu\nu}) \widehat{\xi}_\nu^{(2)} - 2\widehat{\xi}_\mu^{(1)} \bar{R}^{\mu\nu} \bar{D}_\nu \widehat{\sigma}^{(2)} \right. \\ &\quad \left. - 2\widehat{\xi}_\mu^{(2)} \bar{R}^{\mu\nu} \bar{D}_\nu \widehat{\sigma}^{(1)} + \widehat{\sigma}^{(1)} \left(\frac{d-1}{d} (\bar{D}^2)^2 + \bar{D}_\mu \bar{R}^{\mu\nu} \bar{D}_\nu \right) \widehat{\sigma}^{(2)} + \frac{1}{d} \phi^{(1)} \phi^{(2)} \right\}. \quad (1.17) \end{aligned}$$

Anhand von (1.17) kann man erkennen, daß für eine generische Hintergrundmetrik nur $h_{\mu\nu}^T$, $h_{\mu\nu}^L$ und $h_{\mu\nu}^{Tr}$ einen orthogonalen Satz von Feldern bilden, wohingegen $h_{\mu\nu}^{LT}$ und $h_{\mu\nu}^{LL}$ i.a. nicht zueinander orthogonal sind. Letzteres spiegelt sich in den auftretenden $\widehat{\xi}_\mu$ - $\widehat{\sigma}$ -Mischtermen wieder. Diese Mischterme verschwinden jedoch zumindest im Falle von Einstein-Räumen. Diese Räume sind durch die Beziehung $\bar{R}_{\mu\nu} = C \bar{g}_{\mu\nu}$ charakterisiert, wobei C eine Konstante darstellt, so daß $\bar{D}_\mu \bar{R}^{\mu\nu} = C \bar{D}_\mu \bar{g}^{\mu\nu} \equiv 0$ gilt. Daraus resultiert $\langle h^{LT}, h^{LL} \rangle = 4C \int d^d x \sqrt{\bar{g}} \widehat{\sigma} \bar{D}^\mu \widehat{\xi}_\mu = 0$. Somit verkörpert $\{h_{\mu\nu}^T, h_{\mu\nu}^{LT}, h_{\mu\nu}^{LL}, h_{\mu\nu}^{Tr}\}$ in diesem Fall in der Tat einen orthogonalen Satz von Feldern.

Der nächste Schritt besteht darin, im Funktionalintegral (1.3) die Integration über die vollständigen Felder durch eine über die Komponentenfelder zu ersetzen. Um die Jacobi-Determinante zu bestimmen, die mit der Variablentransformation $h_{\mu\nu} \longrightarrow \{h_{\mu\nu}^T, \widehat{\xi}_\mu, \widehat{\sigma}, \phi\}$

⁵Aufgrund der Linearität der konformen Killing-Gleichung kann man zu jeder Lösung jeden beliebigen Killing-Vektor addieren, und man erhält eine weitere Lösung. Um der daraus folgenden Ambiguität der CKV aus dem Wege zu gehen, bezeichnen wir hier ausschließlich die rein longitudinalen CKV als "echte" CKV bzw. PCKV (= "proper conformal killing vectors"). Offensichtlich stehen die nichtkonstanten Lösungen von (1.15) somit in einer Eins-Zu-Eins-Beziehung zu den PCKV.

⁶Eine Anmerkung zur Notation: In der vorliegenden Arbeit wirken sämtliche kovarianten Ableitungen auf alles, was sich rechts von diesen befindet, solange nicht ausdrücklich (durch Klammersetzung) auf Gegenteiliges hingewiesen wird.

einhergeht, geht man wie folgt vor (vgl. [47]): Man formuliert ein Gaußsches Integral über $h_{\mu\nu}$ und drückt es dann unter Verwendung von (1.17) gemäß

$$\int \mathcal{D}h_{\mu\nu} \exp \left[-\frac{1}{2} \langle h, h \rangle \right] = J_1 \int \mathcal{D}h_{\mu\nu}^T \mathcal{D}\hat{\xi}_\mu \mathcal{D}\hat{\sigma} \mathcal{D}\phi \exp \left[-\frac{1}{2} \int d^d x \sqrt{\bar{g}} \right. \\ \left. \times \left\{ h_{\mu\nu}^T h^{T\mu\nu} + \frac{1}{d} \phi^2 + \left(\hat{\xi}_\mu, \hat{\sigma} \right) M^{(\mu,\nu)} \begin{pmatrix} \hat{\xi}_\nu \\ \hat{\sigma} \end{pmatrix} \right\} \right] \quad (1.18)$$

durch die Komponentenfelder aus. Dabei verkörpert

$$M^{(\mu,\nu)} \equiv \begin{pmatrix} -2(\bar{g}^{\mu\nu} \bar{D}^2 + \bar{R}^{\mu\nu}) & -2\bar{R}^{\mu\lambda} \bar{D}_\lambda \\ 2\bar{D}_\lambda \bar{R}^{\lambda\nu} & \frac{d-1}{d} (\bar{D}^2)^2 + \bar{D}_\lambda \bar{R}^{\lambda\rho} \bar{D}_\rho \end{pmatrix} \quad (1.19)$$

einen Hermiteschen Matrix-Differentialoperator. Da alle in (1.18) enthaltenen Funktionalintegrale vom Gaußschen Typ sind, können sie leicht ausgewertet werden. Das führt dann zu dem nachstehenden Ausdruck für die Jacobi-Determinante:

$$J_1 = N \sqrt{\det'_{(1T,0)} M^{(\mu,\nu)}}. \quad (1.20)$$

Hier stellt N eine (unendliche) Konstante dar, die formal durch geeignetes Normieren des Integrationsmaßes $\mathcal{D}h_{\mu\nu}$ entfernt werden kann.

Die in Gleichung (1.20) gewählte Notation ist allgemein wie folgt zu interpretieren. Ein Strich an der Determinante oder der Spur eines beliebigen Operators \mathcal{A} weist darauf hin, daß alle unphysikalischen $\hat{\xi}_\mu$ - und $\hat{\sigma}$ -Eigenmoden von \mathcal{A} , d.h. alle Eigenmoden, die (1.14) oder (1.15) erfüllen, bei der Berechnung des jeweiligen Ausdrucks nicht berücksichtigt werden dürfen. Sie sind von den Rechnungen auszuschließen. Weiterhin beschreibt ein Subskript an Determinanten oder Spuren den Feldtyp, auf den der Operator \mathcal{A} wirkt. In der vorliegenden Arbeit werden z.B. die Subskripten (0), (1T) und (2ST²) für Spin-0-Felder $\hat{\sigma}$, transversale Spin-1-Felder $\hat{\xi}_\mu$ bzw. symmetrische, transversale, spurfreie Spin-2-Felder $h_{\mu\nu}^T$ verwendet. Das in Gleichung (1.20) auftretende Subskript (1T, 0) bezieht sich auf einen $(d+1) \times (d+1)$ -Matrix-Differentialoperator, dessen erste d Spalten auf transversale Spin-1-Felder $\hat{\xi}^\nu$ wirken, während seine letzte Spalte auf Spin-0-Felder $\hat{\sigma}$ wirkt.

Anschließend werden die Geistfelder in ähnlicher Weise zerlegt wie das Feld $h_{\mu\nu}$ in (1.12). Dabei spaltet man im Rahmen einer sogenannten T -Zerlegung für Vektorfelder⁷ die Geister gemäß den Gleichungen

$$\bar{C}_\mu = \bar{C}_\mu^T + \bar{D}_\mu \hat{\eta}, \quad C^\mu = C^{T\mu} + \bar{D}^\mu \hat{\eta} \quad (1.21)$$

⁷“T” steht hier natürlich für “transversal”.

jeweils in ihre transversale Komponente, \bar{C}_μ^T bzw. $C^{T\mu}$, und ihre longitudinale Komponente auf, welche man wiederum durch kovariante Ableitungen von Skalarfeldern $\bar{\eta}$ bzw. η ausdrückt. Offensichtlich erfüllen dann die transversalen Anteile die Beziehungen $\bar{D}^\mu \bar{C}_\mu^T = 0$ bzw. $\bar{D}_\mu C^{T\mu} = 0$. Ferner sind hier die konstanten $\widehat{\bar{\eta}}$ - und $\widehat{\eta}$ -Moden auszuschließen, da sie offensichtlich keinen Beitrag zu (1.21) leisten und somit unphysikalische Moden verkörpern.

Jetzt führt man im Funktionalintegral (1.3) auch die Variablentransformationen $\bar{C}_\mu \longrightarrow \{\bar{C}_\mu^T, \widehat{\bar{\eta}}\}$ und $C^\mu \longrightarrow \{C^{T\mu}, \widehat{\eta}\}$ durch. Um die sich daraus ergebende Jacobi-Determinante J_2 zu bestimmen, geht man wie bereits oben beschrieben vor. Man stellt zunächst ein Gaußsches Integral über die vollständigen Felder auf, die in diesem Fall allerdings Grassmann-Variablen verkörpern. Dieses Integral drückt man mit Hilfe von (1.21), der Gleichung

$$\begin{aligned} & \int \mathcal{D}C^\mu \mathcal{D}\bar{C}_\mu \exp [-\langle \bar{C}, C \rangle] \\ &= J_2 \int \mathcal{D}C^{T\mu} \mathcal{D}\bar{C}_\mu^T \mathcal{D}\widehat{\bar{\eta}} \mathcal{D}\widehat{\eta} \exp \left[- \int d^d x \sqrt{\bar{g}} \{ \bar{C}_\mu^T C^{T\mu} + \widehat{\bar{\eta}}(-\bar{D}^2)\widehat{\eta} \} \right] \end{aligned} \quad (1.22)$$

entsprechend, durch die Komponentenfelder aus und führt dann die Integrationen über die Grassmann-Variablen explizit aus. Als Resultat ergibt sich

$$J_2 = [\det'_{(0)}(-\bar{D}^2)]^{-1}. \quad (1.23)$$

Dabei weist der Strich an der Determinante in Einklang mit der oben eingeführten Notation darauf hin, daß Beiträge von den unphysikalischen Moden $\widehat{\bar{\eta}} = \text{konstant}$ und $\widehat{\eta} = \text{konstant}$ zu entfernen sind.

1.4 Impuls-abhängige Redefinition der Komponentenfelder

Für die weiteren Rechnungen erweist es sich als günstig, $\widehat{\xi}_\mu$, $\widehat{\sigma}$, $\widehat{\bar{\eta}}$ und $\widehat{\eta}$ durch neue Variablen ξ_μ , σ , $\bar{\eta}$ und η zu ersetzen, die in folgender Beziehung zu den "alten" Integrationsvariablen stehen:

$$\begin{aligned} \xi^\mu &\equiv \sqrt{-\bar{D}^2 - \bar{\text{Ric}}} \widehat{\xi}^\mu, \\ \sigma &\equiv \sqrt{(\bar{D}^2)^2 + \frac{d}{d-1} \bar{D}_\mu \bar{R}^{\mu\nu} \bar{D}_\nu} \widehat{\sigma}, \\ \bar{\eta} &\equiv \sqrt{-\bar{D}^2} \widehat{\bar{\eta}}, \quad \eta \equiv \sqrt{-\bar{D}^2} \widehat{\eta}. \end{aligned} \quad (1.24)$$

Der oben eingeführte Operator $\overline{\text{Ric}}$ bildet Vektoren auf Vektoren ab und ist durch die folgende Gleichung definiert:

$$(\overline{\text{Ric}} v)^\mu = \bar{R}^{\mu\nu} v_\nu . \quad (1.25)$$

Die Transformationsgleichungen (1.24) beziehen kovariante Laplace-Operatoren ein und hängen somit von deren Eigenwerten, den generalisierten Impulsen, ab. Diese “impuls-abhängigen” Redefinitionen sind hochgradig nichtlokal. Ferner ist hier zu erwähnen, daß sie wohldefiniert und invertierbar sind, da die Operatoren unter den Quadratwurzeln in (1.24) für alle erlaubten, d.h. physikalischen Eigenmoden ausschließlich strikt positive Eigenwerte besitzen.⁸ Die Positivität hat im wesentlichen zwei Ursachen. Die erste besteht darin, daß man die Operatoren aus Quadraten von $h_{\mu\nu}^{LT}$ bzw. $h_{\mu\nu}^{LL}$ und aus $(\bar{D}_\mu \hat{\eta})(\bar{D}^\mu \hat{\eta})$ gewinnt, indem man alle darin auftretenden kovarianten Ableitungen durch partielles Integrieren “nach rechts verschiebt”. Aus diesem Grunde können sie keine negativen Eigenwerte annehmen. Dies wird anhand des folgenden Beispiels deutlich: Das Skalarprodukt von $h_{\mu\nu}^{LL}$ läßt sich wie folgt schreiben:

$$\begin{aligned} 0 \leq \langle h^{LL}, h^{LL} \rangle &= \int d^d x \sqrt{\bar{g}} \left(\bar{D}_\mu \bar{D}_\nu \hat{\sigma} - \frac{1}{d} \bar{g}_{\mu\nu} \bar{D}^2 \hat{\sigma} \right) \left(\bar{D}^\mu \bar{D}^\nu \hat{\sigma} - \frac{1}{d} \bar{g}^{\mu\nu} \bar{D}^2 \hat{\sigma} \right) \\ &= \frac{d-1}{d} \int d^d x \sqrt{\bar{g}} \hat{\sigma} \left((\bar{D}^2)^2 + \frac{d}{d-1} \bar{D}_\mu \bar{R}^{\mu\nu} \bar{D}_\nu \right) \hat{\sigma} . \end{aligned} \quad (1.26)$$

Der Operator in der zweiten Zeile entspricht in der Tat demjenigen, der in der Definitionsgleichung für das Feld σ auftaucht, siehe (1.24).

Dies allein erklärt aber noch nicht die *strikte* Positivität. Diese ergibt sich nämlich erst aus der Tatsache, daß die potentiellen Nullmoden mit den zuvor erwähnten unphysikalischen Moden identisch sind und daher nicht zu den Spektren der Operatoren beitragen. Z.B. ist ξ^μ genau dann eine Nullmode von $-\bar{D}^2 - \overline{\text{Ric}}$, wenn ξ^μ ein Killing-Vektor ist.

Fahren wir nun mit der Durchführung der durch (1.24) beschriebenen Transformationen der Integrationsvariablen fort. Zur Bestimmung der auftretenden Jacobi-Determinanten J_i bedient man sich wieder des im vorigen Abschnitt erläuterten Verfahrens. Damit erhält man folgende Ausdrücke für die J_i , die aus den Transformationen $\hat{\xi}_\mu \rightarrow \xi_\mu$, $\hat{\sigma} \rightarrow \sigma$ bzw. $\hat{\eta} \rightarrow \bar{\eta}$, $\hat{\eta} \rightarrow \eta$ hervorgehen:

$$\begin{aligned} J_3 &= [\det'_{(1[T])} (-\bar{D}^2 - \overline{\text{Ric}})]^{-\frac{1}{2}} , \\ J_4 &= \left[\det'_{(0)} \left((\bar{D}^2)^2 + \frac{d}{d-1} \bar{D}_\mu \bar{R}^{\mu\nu} \bar{D}_\nu \right) \right]^{-\frac{1}{2}} , \\ J_5 &= \det'_{(0)} (-\bar{D}^2) . \end{aligned} \quad (1.27)$$

⁸Um sicherzustellen, daß die Operatoren tatsächlich invertierbar sind, muß man noch zusätzlich annehmen, daß ihre Eigenwerte keinen Häufungspunkt bei Null aufweisen.

Dabei wurden die Integrationsmaße wieder derart gewählt bzw. normiert, daß keine zusätzlichen (unendlichen) Konstanten in den Jacobi-Determinanten erscheinen. Außerdem wurde in dem Ausdruck für die Determinante J_3 eine leicht modifizierte Notation verwendet. Die neu eingeführten eckigen Klammern in dem Subskript $(1, [T])$ sollen darauf hinweisen, daß der betrachtete Operator auf Spin-1-Felder wirkt, die nur für bestimmte Hintergrundmetriken transversal sind. Das liegt daran, daß die Transversalitätseigenschaft nicht notwendigerweise von $\widehat{\xi}^\mu$ auf ξ^μ übertragen wird. Aber zumindest im Fall von Einstein-Räumen ist auch ξ^μ transversal.

Nachdem man nun auch diese Transformationen der Integrationsvariablen vorgenommen hat, treten zunächst einmal fünf Jacobi-Determinanten, also J_1, \dots, J_5 , im erzeugenden Funktional \mathbf{Z}_k auf. Da sich J_2 und J_5 aber gegenseitig wegheben, bleiben lediglich J_1 , J_3 und J_4 übrig.

1.5 Die effektive Mittelwertwirkung der QEG

Kommen wir nun zur Herleitung der effektiven Mittelwertwirkung. Dazu ist es zunächst erforderlich, die Struktur des Cutoffterms $\Delta_k S$ und des Quellenterms S_{Quellen} festzulegen.

Ausgehend von der Definition der quantisierten Theorie durch ein herkömmliches Euklidisches Pfadintegral, erhält man durch Hinzufügen des IR Cutoffterms $\Delta_k S$ zur klassischen Wirkung ein Skalen-abhängiges erzeugendes Funktional \mathbf{Z}_k , vgl. (1.3). Dabei stellt der Term $\Delta_k S$ in der Regel ein Funktional der Fluktuationsvariablen dar. Dieses wird so gewählt, daß diejenigen $-\bar{D}^2$ -Eigenmoden dieser Variablen, die zu "großen" Eigenwerten $p^2 \gg k^2$ gehören, ungedämpft, d.h. ohne merkliche Unterdrückung in (1.3) ausintegriert werden, während die Beiträge der Eigenmoden zu hinreichend kleinen Eigenwerten $p^2 \ll k^2$ unterdrückt werden. Dies hat zur Folge, daß \mathbf{Z}_k eine effektive Theorie bei der Skala $k < \widehat{k}$ beschreibt, wobei \widehat{k} die UV Cutoffskala verkörpert. Der Einfachheit halber implementiert man die oben geschilderte Unterdrückung von Moden zu kleinen "Impulsen" $|p|$ in Form von Impuls-abhängigen Massentermen, d.h. durch einen Cutoffterm $\Delta_k S$, der quadratisch in den Fluktuationsfeldern ist. Dementsprechend wählt man

$$\Delta_k S [h, C, \bar{C}; \bar{g}] = \frac{1}{2} \langle h, \mathcal{R}_k^{\text{grav}} h \rangle + \langle \bar{C}, \mathcal{R}_k^{\text{gh}} C \rangle . \quad (1.28)$$

Die in (1.28) eingeführten Operatoren $\mathcal{R}_k^{\text{grav}}$ und $\mathcal{R}_k^{\text{gh}}$ werden auf der Grundlage der kovarianten Ableitungen \bar{D}_μ konstruiert und hängen somit nicht von der vollständigen Quantenmetrik $\gamma_{\mu\nu}$, sondern nur von der Hintergrundmetrik $\bar{g}_{\mu\nu}$ ab. Nur auf diese Weise läßt sich erreichen, daß der Cutoffterm (1.28) tatsächlich quadratisch in den Fluktuationsfeldern ist. Um im Pfadintegral die gewünschte Dämpfung hervorrufen zu können, müssen die Cutoffoperatoren $\mathcal{R}_k^{\text{grav}}$ und $\mathcal{R}_k^{\text{gh}}$ im Grenzfall $p^2/k^2 \rightarrow \infty$ (und somit insbesondere für

$k \rightarrow 0$) verschwinden und außerdem für $p^2/k^2 \rightarrow 0$ das Grenzverhalten $\mathcal{R}_k \rightarrow \mathcal{Z}_k k^2$ aufweisen. (Die Bedeutung der Konstante \mathcal{Z}_k wird später erläutert.) Letzteres hat zur Folge, daß allen Eigenmoden mit Eigenwerten $p^2 \ll k^2$ eine zu k proportionale Masse verliehen wird.

An dieser Stelle ist es noch nicht erforderlich, die explizite Struktur der Cutoffoperatoren festzulegen. In Hinblick auf die sich unmittelbar anschließenden Betrachtungen muß man lediglich folgendes vorwegnehmen: Wie in Anhang B gezeigt wird, kann man $\mathcal{R}_k^{\text{grav}}$ und $\mathcal{R}_k^{\text{gh}}$ derart wählen, daß sich $\Delta_k S$ wie folgt durch die Komponentenfelder ausdrücken läßt:

$$\Delta_k S [h, C, \bar{C}; \bar{g}] = \frac{1}{2} \sum_{\zeta_1, \zeta_2 \in I_1} \langle \zeta_1, (\mathcal{R}_k)_{\zeta_1 \zeta_2} \zeta_2 \rangle + \frac{1}{2} \sum_{\psi_1, \psi_2 \in I_2} \langle \psi_1, (\mathcal{R}_k)_{\psi_1 \psi_2} \psi_2 \rangle. \quad (1.29)$$

Hier läuft die Summation über die sich aus den einzelnen Komponentefeldern zusammensetzenden Indexmengen $I_1 \equiv \{h^T, \xi, \sigma, \phi\}$ und $I_2 \equiv \{\bar{C}^T, C^T, \bar{\eta}, \eta\}$. Der große Vorteil der in Anhang B konstruierten Cutoffoperatoren $\mathcal{R}_k^{\text{grav}}$ und $\mathcal{R}_k^{\text{gh}}$ liegt darin, daß man jederzeit von der Formulierung über die vollständigen Felder, also Gleichung (1.28), zu derjenigen über die Komponentenfelder, Gleichung (1.29), wechseln kann und umgekehrt. Dies ist bei Verwendung generischer Cutoffoperatoren nicht von vornherein möglich. Die explizite Gestalt der Cutoffoperatoren $(\mathcal{R}_k)_{\zeta_1 \zeta_2}$ und $(\mathcal{R}_k)_{\psi_1 \psi_2}$, die bei der Konstruktion dieses speziellen Cutoffs eingeführt werden, ist hier noch nicht von Bedeutung. Eine Spezifizierung wird erst dann vorgenommen, wenn dies nötig wird. Es sei hier lediglich erwähnt, daß diese Operatoren die Bedingungen $(\mathcal{R}_k)_{\zeta_2 \zeta_1} = (\mathcal{R}_k)_{\zeta_1 \zeta_2}^\dagger$ und $(\mathcal{R}_k)_{\psi_2 \psi_1} = -(\mathcal{R}_k)_{\psi_1 \psi_2}^\dagger$ erfüllen müssen, um Hermitezität zu gewährleisten. Außerdem gilt $(\mathcal{R}_k)_{\psi_1 \psi_2} \equiv 0$ für alle $(\psi_1, \psi_2) \in \{C^T, \eta\} \times \{C^T, \eta\} \cup \{\bar{C}^T, \bar{\eta}\} \times \{\bar{C}^T, \bar{\eta}\}$.

Wenden wir uns jetzt dem Quellenanteil S_{Quellen} zu. Wir formulieren ihn zunächst auf dem Niveau der vollständigen Felder, d.h. wir führen externe Quellen $J^{\mu\nu}$, K^μ und \bar{K}_μ ein und koppeln sie gemäß

$$S_{\text{Quellen}}[h, C, \bar{C}, J, K, \bar{K}; \bar{g}] = -\langle J, h \rangle - \langle \bar{K}, C \rangle - \langle K, \bar{C} \rangle \quad (1.30)$$

an die Felder $h_{\mu\nu}$, \bar{C}_μ und C^μ . Ähnlich wie im Falle des Cutoffs zerlegt man nun auch die Quellenterme aus (1.30) in Anteile, die nur die Komponentenfelder enthalten. Die entsprechenden Rechnungen finden sich in Anhang B wieder. Dort wird dabei so vorgegangen, daß nach der Zerlegung jedes Komponentefeld an eine bestimmte Komponente der fundamentalen Quellen koppelt. In Abhängigkeit von diesen "Komponentenquellen", die hier mit J_ζ , \bar{K}_ψ und K_ψ bezeichnet werden, läßt sich der Quellenanteil S_{Quellen} dann wie folgt schreiben:

$$S_{\text{Quellen}}[h, C, \bar{C}, J, K, \bar{K}; \bar{g}] = -\sum_{\zeta \in I_1} \langle J_\zeta, \zeta \rangle - \sum_{\psi \in \{C^T, \eta\}} \langle \bar{K}_\psi, \psi \rangle - \sum_{\psi \in \{\bar{C}^T, \bar{\eta}\}} \langle K_\psi, \psi \rangle. \quad (1.31)$$

Wir sind jetzt in der Lage, das in (1.3) mehr oder weniger symbolisch formulierte Funktionalintegral für \mathbf{Z}_k explizit niederzuschreiben. Nach den im letzten Abschnitt diskutierten Variablentransformationen nimmt es die folgende Form an:

$$\begin{aligned} \mathbf{Z}_k[J, K, \bar{K}; \bar{g}] &= J_1 J_3 J_4 \int \mathcal{D}h_{\mu\nu}^T \mathcal{D}\xi_\mu \mathcal{D}\sigma \mathcal{D}\phi \mathcal{D}C^{T\mu} \mathcal{D}\bar{C}_\mu^T \mathcal{D}\eta \mathcal{D}\bar{\eta} \exp \left[-S[\bar{g} + h] \right. \\ &\quad \left. -S_{\text{gf}}[h; \bar{g}] - S_{\text{gh}}[h, C, \bar{C}; \bar{g}] - \Delta_k S[h, C, \bar{C}; \bar{g}] - S_{\text{Quellen}}[h, C, \bar{C}, J, K, \bar{K}; \bar{g}] \right]. \end{aligned} \quad (1.32)$$

Die oben beschriebene Konstruktion des Cutoffterms und der Quellenterme hat nun zur Folge, daß \mathbf{Z}_k und somit auch das Skalen-abhängige erzeugende Funktional für die verbundenen Greenschen Funktionen

$$W_k[J, K, \bar{K}; \bar{g}] \equiv \ln \mathbf{Z}_k[J, K, \bar{K}; \bar{g}] \quad (1.33)$$

sowohl als Funktional der vollständigen Quellen als auch als Funktional der Komponentenquellen betrachtet werden können. Dementsprechend können sowohl für die vollständigen als auch für die Komponentfelder k -abhängige klassische Felder aus W_k hergeleitet werden. Sie sind durch die ersten Funktionalableitungen von W_k nach den externen Quellen definiert. In beiden Fällen verkörpern die klassischen Felder Erwartungswerte $\langle q \rangle$ der Quantenfelder q , in dem Sinn, daß alle Quantenfluktuationen zu Impulsen $p^2 > k^2$ ausintegriert sind. Die klassischen vollständigen Felder sind durch die Gleichungen

$$\bar{h}_{\mu\nu} \equiv \langle h_{\mu\nu} \rangle = \frac{1}{\sqrt{\bar{g}}} \frac{\delta W_k}{\delta J^{\mu\nu}}, \quad \bar{v}_\mu \equiv \langle \bar{C}_\mu \rangle = \frac{1}{\sqrt{\bar{g}}} \frac{\delta W_k}{\delta K^\mu}, \quad v^\mu \equiv \langle C^\mu \rangle = \frac{1}{\sqrt{\bar{g}}} \frac{\delta W_k}{\delta \bar{K}_\mu} \quad (1.34)$$

definiert und die klassischen Komponentfelder durch

$$\varphi_i \equiv \langle \chi_i \rangle = \frac{1}{\sqrt{\bar{g}}} \frac{\delta W_k}{\delta \mathcal{J}^i}. \quad (1.35)$$

Dabei wurden in (1.35) die Kurzformen $\chi \equiv (h^T, \xi, \sigma, \phi, \bar{C}^T, C^T, \bar{\eta}, \eta)$ für die Quanten-Komponentenfelder, $\mathcal{J} \equiv (J_{h^T}, J_\xi, J_\sigma, J_\phi, K_{\bar{C}^T}, \bar{K}_{C^T}, K_{\bar{\eta}}, \bar{K}_\eta)$ für ihre Quellen und $\varphi \equiv (\bar{h}^T, \bar{\xi}, \bar{\sigma}, \bar{\phi}, \bar{v}^T, v^T, \bar{\varrho}, \varrho)$ für die klassischen Komponentfelder eingeführt. Analog zu den Zerlegungen (1.12) bzw. (1.21) lassen sich die klassischen vollständigen Felder gemäß den Gleichungen

$$\begin{aligned} \bar{h}_{\mu\nu} &= \bar{h}_{\mu\nu}^T + \bar{D}_\mu [-\bar{D}^2 - \overline{\text{Ric}}]^{-\frac{1}{2}} \bar{\xi}_\nu + \bar{D}_\nu [-\bar{D}^2 - \overline{\text{Ric}}]^{-\frac{1}{2}} \bar{\xi}_\mu + \frac{1}{d} \bar{g}_{\mu\nu} \bar{\phi} \\ &\quad + \bar{D}_\mu \bar{D}_\nu \left[(\bar{D}^2)^2 + \frac{d-1}{d} \bar{D}_\rho \bar{R}^{\rho\lambda} \bar{D}_\lambda \right]^{-\frac{1}{2}} \bar{\sigma} - \frac{1}{d} \bar{g}_{\mu\nu} \bar{D}^2 \left[(\bar{D}^2)^2 + \frac{d-1}{d} \bar{D}_\rho \bar{R}^{\rho\lambda} \bar{D}_\lambda \right]^{-\frac{1}{2}} \bar{\sigma}, \end{aligned} \quad (1.36)$$

und

$$\bar{v}_\mu = \bar{v}_\mu^T + \bar{D}_\mu (-\bar{D}^2)^{-\frac{1}{2}} \bar{\varrho}, \quad v^\mu = v^{T\mu} + \bar{D}^\mu (-\bar{D}^2)^{-\frac{1}{2}} \varrho \quad (1.37)$$

aus φ rekonstruieren.

Damit sind sämtliche Grundvoraussetzungen für die Herleitung der effektiven Mittelwertwirkung geschaffen. Der nächste Schritt besteht nun darin, die Legendre-Transformierte von W_k nach den externen Quellen zu bilden. Bezeichnet man diese mit $\tilde{\Gamma}_k$, so ist sie folglich durch den nachstehenden Ausdruck definiert:

$$\tilde{\Gamma}_k [\bar{h}, v, \bar{v}; \bar{g}] = \langle J, \bar{h} \rangle + \langle \bar{K}, v \rangle + \langle K, \bar{v} \rangle - W_k [J, K, \bar{K}; \bar{g}] . \quad (1.38)$$

Das Funktional $\tilde{\Gamma}_k$ stellt eine Skalen-abhängige Verallgemeinerung der herkömmlichen effektiven Wirkung Γ dar. Dank der verwendeten Konstruktionsvorschrift für den Cutoffterm und die Quellenterme besitzt es eine bemerkenswerte, für die anstehenden Betrachtungen immens wichtige Eigenschaft: Es ist vollkommen egal, ob die Legendre-Transformation in (1.38) bzgl. der vollständigen oder der Komponentenquellen durchgeführt wird. Die Struktur der Legendre-Transformierten ist in beiden Fällen die gleiche. Wenn man die Legendre-Transformierte bzgl. der Komponentenquellen mit $\tilde{\Gamma}_k^{\text{comp}}$ bezeichnet, gilt somit

$$\tilde{\Gamma}_k^{\text{comp}} [\bar{h}^T, \bar{\xi}, \bar{\sigma}, \bar{\phi}, v^T, \bar{v}^T, \varrho, \bar{\varrho}; \bar{g}] \equiv \tilde{\Gamma}_k [\bar{h}, v, \bar{v}; \bar{g}] , \quad (1.39)$$

wobei die Argumente von $\tilde{\Gamma}_k^{\text{comp}}$ und $\tilde{\Gamma}_k$ über die Gleichungen (1.36) und (1.37) zueinander in Beziehung stehen. Diese Eigenschaft von $\tilde{\Gamma}_k$ hat zweierlei Ursachen. Zum einen kann man W_k , wie oben bereits erwähnt wurde, sowohl als Funktional der vollständigen als auch als Funktional der Komponentenquellen auffassen. Zum anderen ziehen die Gleichungen (1.30) und (1.31) die Beziehung

$$\langle \mathcal{J}, \varphi \rangle = \langle J, \bar{h} \rangle + \langle \bar{K}, v \rangle + \langle K, \bar{v} \rangle \quad (1.40)$$

nach sich. Insgesamt ergibt sich daraus, daß die beiden geschilderten Legendre-Transformationen zu demselben Ergebnis (1.38) führen.

Die effektive Mittelwertwirkung wird gemeinhin mit Γ_k bezeichnet und ist wie folgt definiert:

$$\Gamma_k [g, \bar{g}, v, \bar{v}] \equiv \tilde{\Gamma}_k [g - \bar{g}, v, \bar{v}; \bar{g}] - \Delta_k S [g - \bar{g}, v, \bar{v}; \bar{g}] . \quad (1.41)$$

Sie ergibt sich also aus der Differenz von $\tilde{\Gamma}_k$ und dem Cutoffterm $\Delta_k S$, in den hier anstelle der Quantenfelder die entsprechenden klassischen Felder eingesetzt sind, vgl. [48, 40]. Zudem wurde in (1.41) das Feld $\bar{h}_{\mu\nu}$ durch die Metriken $\bar{g}_{\mu\nu}$ und $g_{\mu\nu}$ ausgedrückt. Letztere verkörpert das klassische Gegenstück der Quantenmetrik $\gamma_{\mu\nu} \equiv \bar{g}_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}$ und ist wie folgt definiert:

$$g_{\mu\nu}(x) \equiv \bar{g}_{\mu\nu}(x) + \bar{h}_{\mu\nu}(x) . \quad (1.42)$$

Eine der wichtigsten Eigenschaften des Funktionals Γ_k ist seine Invarianz unter allgemeinen Koordinatentransformationen, bei denen alle anwesenden Felder als Tensoren der jeweiligen Stufe zu behandeln sind und dementsprechend transformieren, vgl. [12]. In Gleichungen ausgedrückt, besagt dies:

$$\Gamma_k[\Phi] = \Gamma_k[\Phi + \mathcal{L}_u \Phi] \quad , \quad \Phi \equiv (g_{\mu\nu}, \bar{g}_{\mu\nu}, v^\mu, \bar{v}_\mu) \quad . \quad (1.43)$$

Hier stellt \mathcal{L}_u wieder die Lie-Ableitung bzgl. des Vektorfelds $u^\mu(x)$ dar, welches die Transformation generiert. Die allgemeine Koordinateninvarianz resultiert aus der Verwendung der Hintergrundeichung und ist somit einer ihrer Hauptvorteile. Sie ist von großer Bedeutung für praktische Anwendungen dieses Formalismus, da sie dafür sorgt, daß Terme, die die Symmetrie (1.43) verletzen, im Laufe des Renormierungsgruppenflusses nicht auftreten können. Dies hat wiederum zur Folge, daß nur solche Trunkierungen von Γ_k erlaubt sind, deren Terme sich allesamt aus invarianten Feldkombinationen zusammensetzen. In diesem Zusammenhang ist es wichtig zu erwähnen, daß aufgrund der Beziehung (1.39) die obigen Invarianzeigenschaften auch dann erhalten bleiben, wenn man zu einer Beschreibung mittels der Komponentenfelder übergeht. Ohne die in Anhang B erläuterte Konstruktion von $\Delta_k S$ und S_{Quellen} wäre dies nicht unbedingt gewährleistet.

Hinsichtlich der im Rahmen dieser Arbeit diskutierten Anwendungen von Γ_k gilt unser hauptsächlichliches Interesse dem ausschließlich von $g_{\mu\nu}$ abhängigen Funktional

$$\bar{\Gamma}_k[g] \equiv \Gamma_k[g, g, 0, 0] \quad . \quad (1.44)$$

Offensichtlich ist es invariant unter $\delta g_{\mu\nu} = \mathcal{L}_u g_{\mu\nu}$. Im Grenzfall $k \rightarrow 0$ stimmt es mit der herkömmlichen effektiven Wirkung $\Gamma[g_{\mu\nu}]$, dem erzeugenden Funktional für die ein-Teilchen-irreduziblen Greenschen Funktionen (siehe [43]), überein: $\Gamma[g] = \lim_{k \rightarrow 0} \bar{\Gamma}_k[g]$. Für die Herleitung einer exakten Flußgleichung reicht das Funktional $\bar{\Gamma}_k[g]$ aber nicht aus. Dazu ist es vielmehr notwendig, die Abhängigkeit von den Geistfeldern und von $\bar{g}_{\mu\nu}$ beizubehalten, wie wir im nächsten Abschnitt sehen werden.

Die effektive Mittelwertwirkung läßt sich auch mit Hilfe einer Integro-Differentialgleichung beschreiben. Diese ist von der folgenden Form:

$$\begin{aligned} \exp \{ -\Gamma_k[g, \bar{g}, v, \bar{v}] \} &= \int \mathcal{D}h_{\mu\nu} \mathcal{D}C^\mu \mathcal{D}\bar{C}_\mu \exp \left[-\tilde{S}[h, C, \bar{C}; \bar{g}] \right. \\ &\quad \left. + \int d^d x \left\{ (h_{\mu\nu} - g_{\mu\nu} + \bar{g}_{\mu\nu}) \frac{\delta \Gamma_k}{\delta \bar{h}_{\mu\nu}} + (C^\mu - v^\mu) \frac{\delta \Gamma_k}{\delta v^\mu} + (\bar{C}_\mu - \bar{v}_\mu) \frac{\delta \Gamma_k}{\delta \bar{v}_\mu} \right\} \right] \\ &\quad \times \exp \{ -\Delta_k S [h - g + \bar{g}, C - v, \bar{C} - \bar{v}; \bar{g}] \} \quad . \end{aligned} \quad (1.45)$$

Das oben eingeführte Funktional \tilde{S} ist dabei wie folgt definiert:

$$\tilde{S}[h, C, \bar{C}; \bar{g}] \equiv S[\bar{g} + h] + S_{\text{gf}}[h; \bar{g}] + S_{\text{gh}}[h, C, \bar{C}; \bar{g}] \quad . \quad (1.46)$$

Die Gleichung (1.45) erhält man, indem man die Definition von Γ_k , also Gleichung (1.41), in Verbindung mit (1.38) in das Funktionalintegral (1.32) einsetzt und darin anschließend die Quellen unter Verwendung der Beziehungen

$$J^{\mu\nu} = \frac{1}{\sqrt{\bar{g}}} \frac{\delta \tilde{\Gamma}_k}{\delta \bar{h}_{\mu\nu}}, \quad K^\mu = -\frac{1}{\sqrt{\bar{g}}} \frac{\delta \tilde{\Gamma}_k}{\delta \bar{v}_\mu}, \quad \bar{K}_\mu = -\frac{1}{\sqrt{\bar{g}}} \frac{\delta \tilde{\Gamma}_k}{\delta v^\mu} \quad (1.47)$$

durch Funktionalableitungen von Γ_k nach den klassischen Feldern ersetzt. Diese Integro-Differentialgleichung wird sich bei der Bestimmung der Anfangsbedingungen für den Renormierungsgruppenfluß von Γ_k als nützlich erweisen.

1.6 Herleitung der exakten Flußgleichung der QEG

Die exakte Renormierungsgruppen- oder Flußgleichung für die effektive Mittelwertwirkung beschreibt die Veränderung, die Γ_k durch eine infinitesimale Veränderung der Cutoffskala k erfährt. Um sie herzuleiten, verfährt man folgendermaßen: Zuerst führt man die sogenannte Renormierungsgruppenzeit $t \equiv \ln k$ ein und leitet das Funktionalintegral (1.32) partiell nach t ab, wobei $\partial_t \equiv \partial/\partial t = k \partial/\partial k \equiv k \partial_k$ gilt. Auf dem Niveau der Komponentenfelder ergibt sich dadurch der folgende Ausdruck:

$$-\partial_t W_k = \frac{1}{2} \text{Tr}' \left[\sum_{\zeta_1, \zeta_2 \in I_1} \langle \zeta_1 \otimes \zeta_2 \rangle \partial_t (\mathcal{R}_k)_{\zeta_1 \zeta_2} \right] + \frac{1}{2} \text{Tr}' \left[\sum_{\psi_1, \psi_2 \in I_2} \langle \psi_1 \otimes \psi_2 \rangle \partial_t (\mathcal{R}_k)_{\psi_1 \psi_2} \right]. \quad (1.48)$$

Hier wurde auf der rechten Seite der Flußgleichung eine ‘‘Matrixschreibweise’’ gewählt. Dabei symbolisiert $\text{Tr}'[\mathcal{A}]$ die Spur des jeweiligen Operators \mathcal{A} in den eckigen Klammern, welche sowohl bzgl. der ‘‘Raumzeitpunkte’’ x als auch bzgl. der Lorentz-Indizes zu bilden ist. (Weiter unten wird anhand eines Beispiels illustriert, wie man solche Spuren auszuwerten hat.) Der Strich an den Spuren soll darauf verweisen, daß eventuelle Beiträge von unphysikalischen Moden, die, wie in Abschnitt 1.3 erläutert wurde, aus der TT- und T-Zerlegung hervorgehen können, von den Spuren abzuziehen sind.

Die rechte Seite von (1.48) läßt sich nun wiederum durch die zweiten Funktionalableitungen von Γ_k , d.h. durch

$$(\tilde{\Gamma}_k^{(2)})^{ij}(x, y) \equiv (-1)^{[j]} \frac{1}{\sqrt{\bar{g}(x)\bar{g}(y)}} \frac{\delta^2 \tilde{\Gamma}_k}{\delta \varphi_i(x) \delta \varphi_j(y)} \quad (1.49)$$

ausdrücken, wobei hier $[j] = 0$ für kommutierende Felder φ_j gilt und $[j] = 1$ für Grassmann-Felder φ_j . Dabei macht man sich zunutze, daß die verbundene Zwei-Punkt-Funktion

$$(G_k)_{ij}(x, y) \equiv \langle \chi_i(x) \chi_j(y) \rangle - \varphi_i(x) \varphi_j(y) = \frac{1}{\sqrt{\bar{g}(x)\bar{g}(y)}} \frac{\delta^2 W_k}{\delta \mathcal{J}^i(x) \delta \mathcal{J}^j(y)} \quad (1.50)$$

und $\tilde{\Gamma}_k^{(2)}$ in dem Sinn zueinander invers sind, daß sie die Gleichung

$$\int d^d y \sqrt{\bar{g}(y)} (G_k)_{ij}(x, y) (\tilde{\Gamma}_k^{(2)})^{jl}(y, z) = \delta_i^l \frac{\delta(x-z)}{\sqrt{\bar{g}(z)}} \quad (1.51)$$

erfüllen. Demzufolge lassen sich die Erwartungswerte $\langle \chi_i(x) \chi_j(y) \rangle$ in (1.48) einfach durch $(\tilde{\Gamma}_k^{(2)})_{ij}^{-1}(x, y) + \varphi_i(x) \varphi_j(y)$ ersetzen. Im Anschluß daran wird in die linke Seite von (1.48) die Legendre-Transformation (1.38) eingesetzt und dann auf beiden Seiten der Cutoffterm $\Delta_k S[\bar{h}, v, \bar{v}; \bar{g}]$ abgezogen, was schließlich zu der gewünschten exakten Renormierungsgruppengleichung für Γ_k führt:

$$\begin{aligned} \partial_t \Gamma_k [g, \bar{g}, v, \bar{v}] &= \frac{1}{2} \text{Tr}' \left[\sum_{\zeta_1, \zeta_2 \in \bar{I}_1} \left(\Gamma_k^{(2)} [g, \bar{g}, v, \bar{v}] + \mathcal{R}_k \right)_{\zeta_1 \zeta_2}^{-1} \partial_t (\mathcal{R}_k)_{\zeta_2 \zeta_1} \right] \\ &+ \frac{1}{2} \text{Tr}' \left[\sum_{\psi_1, \psi_2 \in \bar{I}_2} \left(\Gamma_k^{(2)} [g, \bar{g}, v, \bar{v}] + \mathcal{R}_k \right)_{\psi_1 \psi_2}^{-1} \partial_t (\mathcal{R}_k)_{\psi_2 \psi_1} \right]. \quad (1.52) \end{aligned}$$

Dabei wurde $(\mathcal{R}_k)_{\langle \hat{\zeta}_1 \rangle \langle \hat{\zeta}_2 \rangle} \equiv (\mathcal{R}_k)_{\hat{\zeta}_1 \hat{\zeta}_2} \forall \hat{\zeta}_1, \hat{\zeta}_2 \in I_1$ und $(\mathcal{R}_k)_{\langle \hat{\psi}_1 \rangle \langle \hat{\psi}_2 \rangle} \equiv (\mathcal{R}_k)_{\hat{\psi}_1 \hat{\psi}_2} \forall \hat{\psi}_1, \hat{\psi}_2 \in I_2$ gesetzt, und es wurden die sich aus den klassischen Komponentefeldern zusammensetzenden Indexmengen

$$\bar{I}_1 \equiv \{ \bar{h}^T, \bar{\xi}, \bar{\sigma}, \bar{\phi} \}, \quad \bar{I}_2 \equiv \{ \bar{v}^T, v^T, \bar{\varrho}, \varrho \} \quad (1.53)$$

eingeführt.

Gehen wir nun kurz auf die Operatorspuren in (1.52) ein. In Ortsraumdarstellung verkörpern die Operatoren unter den Spuren x -abhängige Matrixelemente. Somit werden hier die Spuren mittels Integration über die Ortsraumvariablen und durch Kontrahieren der freien Lorentz-Indizes ausgewertet. Zum Beispiel wird die Spur des transversalen Anteils im Geistsektor wie folgt berechnet:

$$\int d^d x d^d y \sqrt{\bar{g}(x)} \sqrt{\bar{g}(y)} \left(\left(\Gamma_k^{(2)} + \mathcal{R}_k \right)_{v^T \bar{v}^T}^{-1} \right)_{\mu x}^{\nu y} (\partial_t (\mathcal{R}_k)_{\bar{v}^T v^T})_{\nu y}^{\mu x}. \quad (1.54)$$

Die in (1.54) verwendete Schreibweise für die Matrixelemente lehnt sich eng an die in (1.49) gewählte an. Beispielsweise ist das in (1.54) enthaltene Matrixelement $\left(\Gamma_k^{(2)} \right)_{\bar{v}^T v^T}$ durch

$$\left(\left(\Gamma_k^{(2)} \right)_{\bar{v}^T v^T} \right)_{\nu y}^{\mu x} = \frac{1}{\sqrt{\bar{g}(y)}} \frac{\delta}{\delta v^{T\nu}(y)} \frac{1}{\sqrt{\bar{g}(x)}} \frac{\delta \Gamma_k}{\delta \bar{v}_\mu^T(x)} \quad (1.55)$$

definiert. Sämtliche in der Flußgleichung enthaltenen Spuren sind für alle Skalen $k \leq \hat{k}$ konvergent. Dafür sorgen die Cutoffoperator mit ihren oben dargelegten Eigenschaften.

Stellt man die korrekten Anfangsbedingungen bei der UV Skala $k = \hat{k}$, dann läßt sich prinzipiell das Funktionalintegral (1.3) indirekt berechnen, indem man die Flußgleichung von $\hat{k} \rightarrow \infty$ bis hinunter zu k integriert. Vollzieht man danach zusätzlich den Grenzübergang $k \rightarrow 0$, so erreicht man, daß alle Freiheitsgrade in (1.3) ausintegriert werden und erhält somit die “vollständige” effektive Theorie. Wie bereits zuvor angedeutet wurde, kann man die Anfangsbedingung bei $k = \hat{k}$, also $\Gamma_{\hat{k}}$, mit Hilfe der Integro-Differentialgleichung (1.45) bestimmen. Bei genügend großen k -Werten sorgt der Cutoffterm in (1.45) für eine starke Unterdrückung derjenigen Beiträge, die von den Fluktuationen $(h, C, \bar{C}) \neq (\bar{h}, v, \bar{v})$ stammen. Somit kommt der wesentliche Beitrag zum Funktionalintegral von kleinen Fluktuationen um die Feldkonfiguration $(h, C, \bar{C}) = (\bar{h}, v, \bar{v})$, welche in diesem Fall das globale Minimum der gesamten in (1.3) enthaltenen Wirkung darstellt. Führt man nun eine Sattelpunktentwicklung des Funktionalintegrals um dieses Minimum durch, so ergibt sich

$$\Gamma_k[g, \bar{g}, v, \bar{v}] = \tilde{S}[g - \bar{g}, v, \bar{v}; \bar{g}] - \frac{1}{2} \ln \text{Det}' \left(\tilde{S}^{(2)} + \mathcal{R}_k \right) . \quad (1.56)$$

Hierbei verkörpert der zweite Term Ein-Loop-Effekte. Diese sorgen im Fall $k = \hat{k} \rightarrow \infty$ für eine Transformation der nackten Parameter von \tilde{S} , die in der Regel unwesentlich ist und daher vernachlässigt werden kann. Bei endlichem \hat{k} treten zusätzliche Beiträge von der Determinante in Erscheinung, die proportional zu negativen Potenzen von \hat{k} sind und dementsprechend unterdrückt werden, vgl. [45]. Im Limes $\hat{k} \rightarrow \infty$ nimmt die Anfangsbedingung für die effektive Mittelwertwirkung somit die folgende Form an:

$$\Gamma_{\hat{k}}[g, \bar{g}, v, \bar{v}] = S[g] + S_{\text{gf}}[g - \bar{g}; \bar{g}] + S_{\text{gh}}[g - \bar{g}, v, \bar{v}; \bar{g}] . \quad (1.57)$$

Auf dem Niveau des Funktionals $\bar{\Gamma}_k[g_{\mu\nu}]$ aus Gleichung (1.44) vereinfacht sich diese Anfangsbedingung zu

$$\bar{\Gamma}_{\hat{k}}[g] = S[g] . \quad (1.58)$$

Wenden wir uns nun wieder der Flußgleichung (1.52) zu. Zum ersten Mal wurde eine derartige Flußgleichung für die Quanten-Einstein-Gravitation von M. Reuter in [12] formuliert. Die dortige Herleitung basiert allerdings nicht auf der TT- bzw. T-Zerlegung der anwesenden Felder, sondern auf den vollständigen Feldern. Das hat zur Folge, daß in der entsprechenden Flußgleichung keine Summationen über die Komponentenfelder wie in (1.52) auftreten, sondern sie enthält jeweils nur einen Gravitations- und einen Geistterm. Ansonsten besitzt diese Flußgleichung aber die gleiche Struktur wie (1.52). Wie wir im weiteren Verlauf explizit sehen werden, ist diese etwas einfacher gestaltete Flußgleichung im Gegensatz zu der “verallgemeinerten” aus Gleichung (1.52) nur für eine begrenzte

Klasse von Trunkierungen zugänglich. (Dieser Aspekt wurde auch schon in Abschnitt 1.1 angesprochen.)

Bis zu diesem Punkt wurde stillschweigend vorausgesetzt, daß die fundamentale (nackte) Wirkung positiv definit ist. Aber z.B. die Einstein-Hilbert-Wirkung besitzt diese Eigenschaft nicht. Der Grund dafür liegt darin, daß hier der kinetische Term des konformen Faktors der Metrik das “falsche” Vorzeichen aufweist. Dadurch ist das zugehörige Euklidische Pfadintegral strenggenommen zwar nicht wohldefiniert, es läßt sich in solchen Fällen üblicherweise aber trotzdem eine wohldefinierte Flußgleichung formulieren, falls man die Vorzeichen der Cutoffoperatoren \mathcal{R}_k passend wählt, siehe [12]. Wir werden uns im nächsten Kapitel näher mit diesem Problem beschäftigen.

1.7 Betrachtung eines Spezialfalls: Einstein-Hintergründe

Im folgenden werden die Vereinfachungen aufgelistet, die sich bei der Verwendung von Einstein-Hintergründen für einige der im Laufe dieses Kapitels diskutierten Größen und Gleichungen ergeben. An erster Stelle ist hier zu erwähnen, daß die Zerlegung (1.12) von $h_{\mu\nu}$ bei Verwendung von Einstein-Hintergründen vollständig orthogonal ist. Die Struktur der Einstein-Bedingung $\bar{R}_{\mu\nu} = C\bar{g}_{\mu\nu}$ mit $C = \text{konstant}$, welche die Klasse von Einstein-Räumen charakterisiert, sorgt nämlich dafür, daß die im Skalarprodukt (1.17) enthaltenen $\hat{\xi}_\mu$ - $\hat{\sigma}$ -Mischterme verschwinden. Demzufolge bilden $h_{\mu\nu}^T$, $h_{\mu\nu}^{LT}$, $h_{\mu\nu}^{LL}$ und $h_{\mu\nu}^{Tr}$ in diesem Fall einen Satz von paarweise orthogonalen Feldern.

Ferner heben sich in dem zur Diskussion stehenden Spezialfall die Jacobi-Determinanten J_1 , J_3 und J_4 , die im allgemeinen Fall im Pfadintegral (1.32) in Form ihres Produkts auftreten, zumindest bis auf eine (unendliche) Konstante weg. Letztere kann dann wiederum durch passendes Normieren des Integrationsmaßes entfernen. Das Wegheben der Determinanten läßt sich wie folgt veranschaulichen:

$$\begin{aligned}
 J_1 &= N \sqrt{\det'_{(1T,0)} M^{(\mu,\nu)}} & (1.59) \\
 &= \left(\int \mathcal{D}\hat{\xi}_\mu \mathcal{D}\hat{\sigma} \exp \left[\int d^d x \sqrt{\bar{g}} \left\{ 2\hat{\xi}_\mu (\bar{D}^2 + C) \hat{\xi}^\mu - \hat{\sigma} \left(\frac{d-1}{d} (\bar{D}^2)^2 + C \bar{D}^2 \right) \hat{\sigma} \right\} \right] \right)^{-1} \\
 &= N_1 \sqrt{\det'_{(1T)} (-\bar{D}^2 - C)} \sqrt{\det'_{(0)} (-\bar{D}^2)} \sqrt{\det'_{(0)} \left(-\bar{D}^2 - \frac{dC}{d-1} \right)} = N_2 J_3^{-1} J_4^{-1} .
 \end{aligned}$$

Hier verkörpern N_1 und N_2 unwichtige Konstanten, so daß $J_1 J_3 J_4$ in der Tat von sämtlichen Feldern unabhängig ist.

Schließlich nehmen bei Verwendung von Einstein-Hintergründen die Redefinitionen der Felder (1.24) im Gravitationssektor die nachstehende Form an:

$$\xi^\mu = \sqrt{-\bar{D}^2 - C} \hat{\xi}^\mu, \quad \sigma = \sqrt{-\bar{D}^2} \sqrt{-\bar{D}^2 - \frac{dC}{d-1}} \hat{\sigma}. \quad (1.60)$$

Aus der ersten der beiden Gleichungen in (1.60) resultiert unmittelbar die Beziehung $\bar{D}_\mu \xi^\mu = \sqrt{-\bar{D}^2 - 2C} \bar{D}_\mu \hat{\xi}^\mu$. Somit folgt hier aus der Transversalität von $\hat{\xi}^\mu$, daß auch ξ^μ transversal ist.

Kapitel 2

Trunkierungen und die daran angepaßten Cutoffs

2.1 Eine allgemeine Klasse von Trunkierungen

Nachdem wir uns im letzten Kapitel mit der Herleitung der Flußgleichung (1.52) und ihren technischen Details befaßt haben, wollen wir uns im folgenden überlegen, in welchem Rahmen man sie am besten anwenden kann. In der Praxis scheint die Berechnung von *exakten* Lösungen zu (1.52) nahezu unmöglich zu sein oder erweist sich zumindest als extrem schwierig. Denn der durch die exakte Flußgleichung beschriebene Renormierungsgruppenfluß findet in dem *unendlichdimensionalen* Raum aller erlaubten¹ Wirkungsfunktionale statt, was üblicherweise zu einem *unendlichen* System von gekoppelten Differentialgleichungen führt, die es prinzipiell zu lösen gilt. Allein der Versuch ist i.a. von vornherein zum Scheitern verurteilt. Daher ist man gezwungen, auf Näherungsverfahren zurückzugreifen. Ein äußerst leistungsfähiges *nichtperturbatives* Approximationsverfahren stellt die sogenannte Trunkierung des Parameterraums dar. Diese besteht darin, daß man bei der Untersuchung des Renormierungsgruppenflusses von Γ_k nur eine endliche Teilmenge der Menge aller Kopplungen, die den unendlichdimensionalen Raum der Wirkungsfunktionale parametrisieren, berücksichtigt und die übrigen (unendlich vielen) Kopplungen per Hand gleich Null setzt. Auf diese Weise wird der Fluß des Wirkungsfunktional auf einen *endlichdimensionalen* Unterraum des Raums aller Wirkungsfunktionale projiziert. Wenn der Fluß in die Richtungen, die durch die Projektion “verloren gehen”, im Verhältnis zu dem projizierten Fluß eher vernachlässigbar ist, dann liefert letzterer eine qualitativ und teilweise auch quantitativ korrekte Beschreibung der zugrundeliegenden Theorie.

Die technischen Aspekte des Projektionsverfahrens wurden bereits in Abschnitt 1.1

¹Erlaubt sind sämtlich Funktionale, die den oben geschilderten Symmetrieanforderungen genügen.

geschildert, wobei die dortige Diskussion sich explizit auf den Fall der Quanten-Einstein-Gravitation bezieht. Im folgenden wollen wir in Worten noch einmal kurz zusammenfassen, wie man dabei generell in der Praxis vorgeht. Man macht einen Ansatz für Γ_k , der nur wenige Kopplungen umfaßt, und setzt ihn in beide Seiten von (1.52) ein, wodurch man eine trunkierte Flußgleichung erhält. Deren rechte Seite enthält i.a. neben den Anteilen, die den Renormierungsgruppenfluß in dem trunkierten Parameterraum bestimmen, noch zusätzliche Anteile, die keinen Beitrag dazu leisten. Indem man nun die rechte Seite auf den Raum projiziert, der von den Operatoren auf der linken Seite der Flußgleichung aufgespannt wird, kann man die zum trunkierten Fluß beitragenden Anteile extrahieren. Dadurch erhält man einen endlichen Satz von gekoppelten Differentialgleichungen für die berücksichtigten Kopplungen.

Dieses Näherungsverfahren beruht nicht auf einer Entwicklung nach irgendeinem (genügend kleinen) Parameter, es besitzt ausschließlich rein nichtperturbative Charakterzüge. Daher ist es in idealer Weise für Studien solcher physikalischer Bereiche geeignet, die für die Störungstheorie nicht zugänglich sind. Insbesondere eignet es sich zur Untersuchung von störungstheoretisch nichtrenormierbaren Theorien wie der Quantengravitation.

Bei der Wahl eines Trunkierungsansatzes stellt sich natürlich die Frage, welche Terme vornehmlich zu berücksichtigen sind und welche man eher vernachlässigen kann oder gar nicht verwenden darf. In dieser Hinsicht spielen u.a. Ward-Identitäten eine wichtige Rolle. Wie bereits in [45, 49] dargelegt wurde, läßt sich mit ihrer Hilfe beurteilen, ob der jeweilige Ansatz überhaupt zulässig ist, und sie liefern erste Informationen über die Verlässlichkeit seiner theoretischen Vorhersagen. Der Grund dafür liegt darin, daß Näherungslösungen der Flußgleichung im Gegensatz zu ihren exakten Lösungen nicht automatisch die Ward-Identitäten erfüllen und somit nur diejenigen Trunkierungen, die zumindest bis zu einem gewissen Grad mit ihnen verträglich sind, verlässliche Resultate liefern können. Dabei ist anzumerken, daß wir es im Fall der effektiven Mittelwertwirkung Γ_k strenggenommen mit modifizierten Ward-Identitäten zu tun haben. Diese enthalten neben den Anteilen, welche die gewöhnlichen Ward-Identitäten für Γ bilden, noch zusätzliche, zu den Cutoffoperatoren \mathcal{R}_k proportionale Terme. Da die \mathcal{R}_k für $k \rightarrow 0$ verschwinden, erhält man in diesem Grenzfall die gewöhnlichen Ward-Identitäten zurück.

Die modifizierten Ward-Identitäten für die Gravitation wurden zum ersten Mal in [12] berechnet. Das dort betrachtete Wirkungsfunktional $\Gamma_k[g, \bar{g}, v, \bar{v}; \beta, \tau]$ stellt eine Verallgemeinerung der in der vorliegenden Arbeit definierten effektiven Wirkung dar. Es hängt zusätzlich von den Quellen $\beta^{\mu\nu}$ und τ_μ ab, die an die BRS-Variationen des Gravitationsfeldes $h_{\mu\nu}$ und des Geistfeldes C_μ koppeln. Man benötigt sie für die Formulierung der Ward-Identitäten. Setzt man in diesem verallgemeinerten Funktional $\beta^{\mu\nu} = 0$ und $\tau_\mu = 0$, so vereinfacht es sich zu dem Funktional $\Gamma_k[g, \bar{g}, v, \bar{v}]$, das die Grundlage für die in der

vorliegenden Arbeit durchgeführten Studien bildet. (Die verallgemeinerte Flußgleichung (1.52) könnte auch problemlos unter Beibehaltung der Abhängigkeit von den BRS-Quellen $\beta^{\mu\nu}$ und τ_μ formuliert werden. Da die BRS-Quellen hier aber nicht benötigt werden, lassen wir sie der Einfachheit halber weg.)

In [12] wurden die Ward-Identitäten dazu benutzt, die Qualität von Trunkierungen der Form

$$\Gamma_k[g, \bar{g}, v, \bar{v}] = \bar{\Gamma}_k[g] + \hat{\Gamma}_k[g, \bar{g}] + S_{\text{gf}}[g - \bar{g}; \bar{g}] + S_{\text{gh}}[g - \bar{g}, v, \bar{v}; \bar{g}] \quad (2.1)$$

zu überprüfen. Dabei ist $\bar{\Gamma}_k[g]$ wie in Gleichung (1.44) definiert. Weiterhin verkörpert hier der Term $\hat{\Gamma}_k[g, \bar{g}]$ die Quantenkorrekturen zum Eichfixierungsterm. Das sieht man wie folgt. Man erhält den vollständigen Eichfixierungsanteil des Funktionals (2.1), indem man seinen reinen Gravitationsanteil $\Gamma_k[g, \bar{g}, 0, 0]$ für $\bar{g}_{\mu\nu} \neq g_{\mu\nu}$ betrachtet und davon das entsprechende Funktional $\Gamma_k[g, g, 0, 0]$ mit identifizierten Metriken $\bar{g}_{\mu\nu} = g_{\mu\nu}$ subtrahiert. Setzt man per definitionem $\hat{\Gamma}_k[g, g] = 0$, so ergibt sich für diese Differenz die Beziehung $\Gamma_k[g, \bar{g}, 0, 0] - \Gamma_k[g, g, 0, 0] = \hat{\Gamma}_k[g, \bar{g}] + S_{\text{gf}}[g - \bar{g}; \bar{g}]$. Da die linke Seite den vollständigen Eichfixierungsterm definiert und $S_{\text{gf}}[g - \bar{g}; \bar{g}]$ seinen klassischen Anteil verkörpert, stellt $\hat{\Gamma}_k[g, \bar{g}]$ gezwungenermaßen die zugehörigen Quantenkorrekturen dar.

Den Ansatz (2.1) erhält man im wesentlichen dadurch, daß man aus der effektiven Wirkung die Abhängigkeit von den Geistern extrahiert und in dem so gewonnenen separaten Geistterm den Renormierungsgruppenfluß vernachlässigt. Somit tritt in (2.1) lediglich der *klassische* Geistterm S_{gh} auf. Dadurch wird sichergestellt, daß die Anfangsbedingung (1.57) im Geistsektor automatisch erfüllt ist. Um zu erreichen, daß auch der reine Gravitationsanteil von (2.1) mit ihr verträglich ist, muß man zusätzlich $\bar{\Gamma}_{\hat{k}} = S$ und $\hat{\Gamma}_{\hat{k}} = 0$ fordern. Weiterhin verlangen die Ward-Identitäten bei Trunkierungen des Typs (2.1), daß $\bar{\Gamma}_k[g]$ ein eichinvariantes Funktional von $g_{\mu\nu}$ darstellt, und sie führen zudem zu einer Zwangsbedingung, die sich auf das Funktional $\hat{\Gamma}_k[g, \bar{g}]$ bezieht [12]. In niedrigster Ordnung, d.h. bei Vernachlässigung aller Loop-Effekte, wird diese Gleichung durch $\hat{\Gamma}_k = 0 \forall k \leq \hat{k}$ gelöst. Im Rahmen der in dieser Arbeit untersuchten Trunkierungen gehen wir über diese einfachste aller Approximationen hinaus und setzen $\hat{\Gamma}_k \propto S_{\text{gf}}$, wobei die Proportionalitätskonstante hier so gewählt wird, daß sie im Grenzfall $k = \hat{k}$ verschwindet. Sie bezieht den Renormierungsgruppenfluß der Graviton-Wellenfunktion ein. (Siehe weiter unten.)

Setzt man den Ansatz (2.1) in die exakte Renormierungsgruppengleichung (1.52) ein, so erhält man eine trunkierte Renormierungsgruppengleichung, die den Fluß von Γ_k in dem Unterraum der Wirkungsfunktionale beschreibt, der von (2.1) aufgespannt wird. Betrachtet man lediglich den reinen Gravitationsanteil der Wirkung (2.1), also

$$\Gamma_k[g, \bar{g}] \equiv \Gamma_k[g, \bar{g}, 0, 0] = \bar{\Gamma}_k[g] + S_{\text{gf}}[g - \bar{g}; \bar{g}] + \hat{\Gamma}_k[g, \bar{g}] \quad (2.2)$$

so vereinfacht sich diese zu

$$\begin{aligned} \partial_t \Gamma_k [g, \bar{g}] &= \frac{1}{2} \text{Tr}' \left[\sum_{\zeta_1, \zeta_2 \in \bar{I}_1} \left(\Gamma_k^{(2)} [g, \bar{g}] + \mathcal{R}_k \right)_{\zeta_1 \zeta_2}^{-1} \partial_t (\mathcal{R}_k)_{\zeta_2 \zeta_1} \right] \\ &+ \frac{1}{2} \text{Tr}' \left[\sum_{\psi_1, \psi_2 \in \bar{I}_2} \left(S_{\text{gh}}^{(2)} [g, \bar{g}] + \mathcal{R}_k \right)_{\psi_1 \psi_2}^{-1} \partial_t (\mathcal{R}_k)_{\psi_2 \psi_1} \right]. \end{aligned} \quad (2.3)$$

Hier stellen $\Gamma_k^{(2)}$ und $S_{\text{gh}}^{(2)}$ die zweiten Funktionalableitungen von $\Gamma_k [g, \bar{g}]$ und $S_{\text{gh}} [\bar{h}, v, \bar{v}; \bar{g}]$ nach den Komponenten des Gravitationsfeldes bzw. der Geistfelder dar. Sie werden jeweils bei festem $\bar{g}_{\mu\nu}$ gebildet.

2.2 Anpassungsregel und Spezifizierung des Cutoffoperators

Um eine handhabbare, wohldefinierte Renormierungsgruppengleichung zu erhalten, ist es angebracht, einen Cutoff zu benutzen, der in gewissem Sinn an die gewählte Trunkierung angepaßt ist. Dieser sollte aber (wenn möglich) immer noch die in Abschnitt 1.5 beschriebenen Unterdrückungseigenschaften besitzen. Beides gleichzeitig ist aber leider nicht immer realisierbar. Daher ist anzuraten, bei der Definition des Cutoffs seine Form zunächst so allgemein zu halten, daß sie einerseits an eine möglichst große Klasse von Trunkierungen angepaßt werden kann, aber andererseits bei geeigneter Justierung der freien Parameter noch die “korrekte” Unterdrückung der Beiträge von Moden mit niedrigen Impulsen liefert. Außerdem ist es wünschenswert, daß diese beiden Arten der Feinabstimmung bei möglichst vielen Hintergrundräumen funktionieren.

Wir werden uns hier zuerst mit der Anpassung des Cutoffs beschäftigen. Nach welchen Kriterien soll man dabei also vorgehen?

Wie sich bei einigen Anwendungen der Flußgleichung herausgestellt hat, läßt sich ein geeigneter Cutoff mit Hilfe der folgenden Regel finden, vgl. [12, 30]. Angenommen, eine Trunkierung sei vorgegeben, und die Einträge des zugehörigen kinetischen Matrix-Differentialoperators, dessen Matrixstruktur durch die anwesenden Felder bzw. ihre Komponenten bestimmt ist, besitzen für $\bar{g}_{\mu\nu} = g_{\mu\nu}$ die Form $(\Gamma_k^{(2)})_{ij} = f_{ij}(-\bar{D}^2, k, \dots)$. Dabei soll $\{f_{ij}\}$ einen Satz von reellen Funktionen darstellen und die Indizes i, j beziehen sich auf die beteiligten Feldtypen. (An dieser Stelle sei nochmals angemerkt, daß die Zerlegung in Komponentenfelder hauptsächlich deswegen vorgenommen wurde, weil sie es ermöglicht, $\Gamma_k^{(2)}$ in diese Form zu bringen. Denn zumindest für maximal symmetrische Hintergrundräume lassen sich danach in der Tat alle kovarianten Ableitungen eliminieren,

die nicht in Form von kovarianten Laplace-Operatoren $\bar{D}^2 \equiv \bar{g}^{\mu\nu} \bar{D}_\mu \bar{D}_\nu$ auftreten.) Man wählt dann den Cutoff derart, daß der “regularisierte” kinetische Term die nachstehende Gestalt annimmt:

$$(\Gamma_k^{(2)} + \mathcal{R}_k)_{ij} = f_{ij} \left(-\bar{D}^2 + k^2 R^{(0)}(-\bar{D}^2/k^2), k, \dots \right) . \quad (2.4)$$

Die hier eingeführte Funktion $R^{(0)}(y)$, $y = -\bar{D}^2/k^2$, beschreibt, wie die Unterdrückung der Moden im Detail aussieht; sie legt also im wesentlichen das Profil des jeweiligen Cutoffs fest. Aus diesem Grund werden wir $R^{(0)}$ von nun an als Profildfunktion bezeichnen. Sie muß die Randbedingungen $R^{(0)}(0) = 1$ und $\lim_{y \rightarrow \infty} R^{(0)}(y) = 0$ erfüllen, damit die Cutoffoperatoren \mathcal{R}_k das in Abschnitt 1.5 geforderte Grenzverhalten an den Tag legen können, sie ist aber ansonsten beliebig. Aus der Regel (2.4) folgt nun, daß der inverse Propagator einer masselosen Feldmode mit kovariantem Impulsquadrat $p^2 = -\bar{D}^2$ proportional zu $p^2 + k^2 R^{(0)}(p^2/k^2)$ ist. Dieser Ausdruck entspricht ungefähr p^2 für $p^2 \gg k^2$ und $p^2 + k^2$ für $p^2 \ll k^2$. Das bedeutet, daß die Moden mit kleinem p^2 , und nur diese, eine zu k proportionale Masse annehmen, was zu der gewünschten Unterdrückung dieser Moden führt.

In den folgenden Kapiteln werden wir sehen, daß wir im Rahmen der in dieser Arbeit diskutierten Trunkierungen der obigen Regel nachkommen können, wenn wir die Cutoffoperatoren wie folgt wählen:

$$\begin{aligned} (\mathcal{R}_k)_{\bar{h}^T \bar{h}^T}^{\mu\nu\alpha\beta} &= \frac{1}{4} (\bar{g}^{\mu\alpha} \bar{g}^{\nu\beta} + \bar{g}^{\mu\beta} \bar{g}^{\nu\alpha}) \left\{ \mathcal{Z}_k^{\bar{h}^T \bar{h}^T} \kappa^2 + \mathcal{Y}_k^{\bar{h}^T \bar{h}^T} \bar{R}, k^2 R^{(0)}(-\bar{D}^2/k^2) \right\} , \\ (\mathcal{R}_k)_{\bar{\xi} \bar{\xi}}^{\mu\nu} &= \mathcal{Z}_k^{\bar{\xi} \bar{\xi}} \kappa^2 \bar{g}^{\mu\nu} k^2 R^{(0)}(-\bar{D}^2/k^2) , \\ (\mathcal{R}_k)_{\bar{\sigma} \bar{\sigma}} &= \mathcal{X}_k^{\bar{\sigma} \bar{\sigma}} (-2\bar{D}^2 k^2 R^{(0)}(-\bar{D}^2/k^2) + k^4 R^{(0)}(-\bar{D}^2/k^2)^2) \\ &\quad + \frac{1}{2} \left\{ \mathcal{Z}_k^{\bar{\sigma} \bar{\sigma}} \kappa^2 + \mathcal{Y}_k^{\bar{\sigma} \bar{\sigma}} \bar{R}, k^2 R^{(0)}(-\bar{D}^2/k^2) \right\} , \\ (\mathcal{R}_k)_{\bar{\phi} \bar{\sigma}} &= (\mathcal{R}_k)_{\bar{\sigma} \bar{\phi}}^\dagger = \mathcal{X}_k^{\bar{\phi} \bar{\sigma}} \left[\bar{P}_k \sqrt{\left(\bar{P}_k + \frac{d}{d-1} \bar{D}_\mu \bar{R}^{\mu\nu} \bar{D}_\nu (-\bar{D}^2)^{-1} \right) \bar{P}_k} \right. \\ &\quad \left. + \bar{D}^2 \sqrt{(\bar{D}^2)^2 + \frac{d}{d-1} \bar{D}_\mu \bar{R}^{\mu\nu} \bar{D}_\nu} \right] \\ &\quad + \left(\mathcal{Y}_k^{\bar{\phi} \bar{\sigma}} \bar{R} + \mathcal{Z}_k^{\bar{\phi} \bar{\sigma}} \kappa^2 \right) \left[\sqrt{\left(\bar{P}_k + \frac{d}{d-1} \bar{D}_\mu \bar{R}^{\mu\nu} \bar{D}_\nu (-\bar{D}^2)^{-1} \right) \bar{P}_k} \right. \\ &\quad \left. - \sqrt{(\bar{D}^2)^2 + \frac{d}{d-1} \bar{D}_\mu \bar{R}^{\mu\nu} \bar{D}_\nu} \right] , \\ (\mathcal{R}_k)_{\bar{\phi} \bar{\phi}} &= \mathcal{X}_k^{\bar{\phi} \bar{\phi}} (-2\bar{D}^2 k^2 R^{(0)}(-\bar{D}^2/k^2) + k^4 R^{(0)}(-\bar{D}^2/k^2)^2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{2} \left\{ \mathcal{Z}_k^{\bar{\phi}\bar{\phi}} \kappa^2 + \mathcal{Y}_k^{\bar{\phi}\bar{\phi}} \bar{R}, k^2 R^{(0)}(-\bar{D}^2/k^2) \right\} , \\
(\mathcal{R}_k)_{\bar{v}^T v^T}^{\mu\nu} &= -(\mathcal{R}_k)_{v^T \bar{v}^T}^{\mu\nu} = \mathcal{Z}_k^{\bar{v}^T v^T} \bar{g}^{\mu\nu} k^2 R^{(0)}(-\bar{D}^2/k^2) , \\
(\mathcal{R}_k)_{\bar{\varrho}\varrho} &= -(\mathcal{R}_k)_{\varrho\bar{\varrho}} = \mathcal{Z}_k^{\bar{\varrho}\varrho} k^2 R^{(0)}(-\bar{D}^2/k^2) .
\end{aligned} \tag{2.5}$$

Dabei stellt \bar{P}_k den durch

$$\bar{P}_k \equiv -\bar{D}^2 + k^2 R^{(0)}(-\bar{D}^2/k^2) \tag{2.6}$$

definierten Operator dar, und die geschweiften Klammern bezeichnen den Antikommutator von beliebigen Operatoren, d.h. $\{A, B\} \equiv AB + BA$ für Operatoren A, B . Die übrigen in (1.29) auftauchenden Operatoren, welche hier nicht aufgelistet sind, wurden gleich Null gesetzt. Ferner verkörpern die $\mathcal{X}_k, \mathcal{Y}_k$ und \mathcal{Z}_k k -abhängige Größen, die unter Verwendung der Regel (2.4) noch an die jeweilige Trunkierung anzupassen sind, siehe Kapitel 3 bzw. 5. Sie enthalten danach im wesentlichen die im Trunkierungsansatz auftauchenden generalisierten (k -abhängigen) Kopplungen. Ein auf der Verwendung von sphärischen Hintergründen S^d basierender Spezialfall dieses Cutoffs wurde bereits in [30] verwendet. Dieser diente auch als Ausgangspunkt für die Konstruktion von (2.5).

Wenden wir uns nun den Unterdrückungseigenschaften des durch (2.5) und (1.29) definierten Cutoffs zu. Falls es uns die Regel (2.4) bei vorgegebener Trunkierung beispielsweise erlauben würde, für alle $\zeta \in \{\bar{h}^T, \bar{\xi}, \bar{\sigma}, \bar{\phi}\}$ $\mathcal{Z}_k^{\zeta\zeta} > 0$ sowie $\mathcal{Z}_k^{\bar{v}^T v^T} > 0$ und $\mathcal{Z}_k^{\bar{\varrho}^T \varrho^T} > 0$ zu wählen und alle übrigen in (2.5) vorkommenden $\mathcal{X}_k, \mathcal{Y}_k$ und \mathcal{Z}_k gleich Null zu setzen, so wäre der Cutoffterm $\Delta_k S$ tatsächlich positiv definit. In diesem Fall würde dann im Funktionalintegral (1.32) $\exp(-\Delta_k S)$ als exponentieller Dämpfungsterm fungieren, der, wie gewünscht, die Beiträge von den Moden mit niedrigen Impulsen unterdrückt. Leider ist diese Wahl des Cutoffs bei den in der vorliegenden Arbeit diskutierten Trunkierungen nicht möglich, wenn man sich an die Regel (2.4) halten will(, und das ist für explizite Rechnungen erforderlich). Zuerst werden wir die Einstein-Hilbert-Trunkierung untersuchen, die auch schon Gegenstand der Studien in [12, 30] war. Auf die explizite Gestalt des zugehörigen Ansatzes für Γ_k werden wir später genauer eingehen (siehe auch Gleichung (2)), an dieser Stelle ist lediglich das diesem Ansatz anhaftende ‘‘Problem mit dem konformen Faktor’’ von Bedeutung. Dies besteht darin, daß der kinetische Term des konformen Faktors negativ definit ist.² Das hat zur Folge, daß der in $\bar{\phi}$ quadratische Anteil des trunkierten Wirkungsfunktional negativ ist und die Regel (2.4) uns somit vorschreibt, ein negatives $\mathcal{Z}_k^{\bar{\phi}\bar{\phi}} < 0$ zu benutzen. Damit ist auch der in $\bar{\phi}$ quadratische Anteil von $\Delta_k S$ negativ, und wenn man einmal von den möglichen (wohl eher leichten) Einflüssen der $\bar{\sigma}$ - $\bar{\phi}$ -Mischterme absieht, scheint der Cutoff im $\bar{\phi}$ -Sektor die Beiträge der Moden mit niedrigen

²Dies wird in Kapitel 7 explizit gezeigt.

Impulsen, naiv betrachtet, eher zu verstärken, als sie zu unterdrücken. Wie in [12] aber bereits detailliert erläutert wurde, ist davon auszugehen, daß die Regel (2.4) auch in diesem Fall, trotz des negativen $\mathcal{Z}_k^{\bar{\phi}\bar{\phi}}$, das “richtige” Resultat liefert. Denn sie sorgt dafür, daß die rechte Seite der Flußgleichung, im Gegensatz zum Euklidischen Pfadintegral, allgemein auch dann wohldefiniert ist, wenn S und Γ_k nicht positiv definit sind.

Was das oben geschilderte Problem betrifft, das durch den konformen Faktor bzw. den skalaren Sektor verursacht wird, so verbessert sich die Situation erheblich, wenn man der klassischen Wirkung S und dem Trunkierungsansatz für Γ_k Terme höherer Ableitungen hinzufügt. Denn solche Wirkungen sind bei Wahl des korrekten Vorzeichens vor diesen Termen nach unten beschränkt und unter gewissen Voraussetzungen sogar strikt positiv. Ferner sind ihre quadratischen Formen, also ihre kinetischen Operatoren, zumindest für genügend große Impulse positiv definit. Durch die Anpassung gemäß der Regel (2.4) überträgt sich diese Eigenschaft auf den Cutoff. In Kapitel 7 wird dies explizit für einen verallgemeinerten Trunkierungsansatz gezeigt, der neben den Termen der reinen Einstein-Hilbert-Wirkung noch einen zusätzlichen R^2 -Term enthält. Weiterhin untersuchen wir in Kapitel 5 den Renormierungsgruppenfluß innerhalb dieser Trunkierung und vergleichen die Resultate mit denjenigen der reinen Einstein-Hilbert-Trunkierung, was wiederum Rückschlüsse auf die Qualität der Anpassungsregel (2.4) zuläßt.

Im Vergleich zu dem Cutoff, der in der ursprünglichen Arbeit zu diesem Themengebiet [12] benutzt wurde, besitzt der Cutoff (1.29) mit (2.5) eine recht komplexe Struktur. Das liegt daran, daß letzterer auf der Grundlage der Komponentenfelder, die aus den Zerlegungen (1.12) und (1.21) hervorgehen, formuliert ist, wohingegen der Cutoffterm in [12] auf der Verwendung der vollständigen Felder beruht. Im Gegensatz zu diesem “ursprünglichen” Cutoff ist der in der vorliegenden Arbeit verwendete “neue” Cutoff für alle Werte des Eichparameters α definiert. Dies ist einer der Hauptvorteile bei der neu formulierten, verallgemeinerten Flußgleichung.

In diesem Zusammenhang sei nochmals erwähnt, daß die TT-Zerlegung in einer etwas anderen Form bereits in ähnlichen Arbeiten [23, 24] verwendet wurde. Die dortige Vorgehensweise ist, vom mathematischen Standpunkt aus betrachtet, allerdings eher “unsauber”. Denn zum einen wird darin direkt von einem sphärischen Hintergrundraum ausgegangen, und zum anderen, was noch viel schwerwiegender ist, wird dort die eigentliche (auf der Grundlage der TT-Zerlegung durchzuführende) Konstruktion des Cutoffterms $\Delta_k S$, der effektiven Mittelwertwirkung und der Flußgleichung weggelassen und durch eine ad hoc vorgenommene Modifizierung der Standard-Ein-Loop-Determinanten ersetzt. Das hat den folgenden Nachteil: Es ist nicht mehr sichergestellt, daß die auf diese Weise konstruierte Skalen-abhängige Wirkung die allgemeinen Eigenschaften einer effektiven Mittelwertwirkung besitzt, siehe z.B. [7, 8].

Obwohl in [23, 24] die Komponentenfelder benutzt werden, scheint der durch die Modifikation der Determinanten realisierte Cutoff dem originalen aus [12] ähnlicher zu sein als dem neuen aus dieser Arbeit. Man kann ihn sogar als α -abhängige Modifikation des Cutoffs in [12] ansehen, wenn man berücksichtigt, daß man letzteren aus dem in [23, 24] verwendeten zurückerhält, indem man darin $\alpha = 1$ setzt.

Von nun an werden wir den Cutoff aus der Originalarbeit [12] und aus den Arbeiten [21, 23, 24] als Cutoff vom **Typ A** bezeichnen. Dabei sollte man aber im Hinterkopf behalten, daß die Existenz eines entsprechenden Cutoffterms $\Delta_k S$ nur im Fall $\alpha = 1$, also in dem in [12, 21] betrachteten Fall, sichergestellt ist. Weiterhin bezeichnen wir den durch (1.29) und (2.5) festgelegten Cutoff im folgenden als Cutoff vom **Typ B**; dieser ist für beliebiges α definiert.

Jeder dieser beiden Cutofftypen enthält die Profilfunktion $R^{(0)}$. Als besonders geeignet für praktische Anwendungen hat sich die exponentielle Profilfunktion

$$R^{(0)}(y) = y [\exp(y) - 1]^{-1} \quad (2.7)$$

erwiesen. Um die Abhängigkeit verschiedener Größen vom verwendeten Cutoffschema in einfacher Weise überprüfen zu können, wird in den folgenden Kapiteln u.a. eine in [24] eingeführte Verallgemeinerung von (2.7) verwendet, und zwar

$$R^{(0)}(y; s) = sy [\exp(sy) - 1]^{-1} . \quad (2.8)$$

Diese einparametrische Familie von Funktionen wird von nun an als die **Klasse von exponentiellen Profilfunktionen** bezeichnet. Durch Variation des Profilparameters s läßt sich hier leicht eine Veränderung des Profils von $R^{(0)}$ bewirken. Außerdem werden wir im Rahmen unserer numerischen Studien auf eine **Klasse von Profilfunktionen mit kompaktem Träger** zurückgreifen, welche wie folgt definiert ist:

$$R^{(0)}(y; b) = \begin{cases} 1 & y \leq b \\ \exp[(y - 1.5)^{-1} \exp[(b - y)^{-1}]] & b < y < 1.5 \\ 0 & y \geq 1.5 \end{cases} . \quad (2.9)$$

Hier ermöglicht der Profilparameter $b \in [0, 1.5)$ eine Veränderung des Profils von $R^{(0)}$ [50].

Für die in den Kapiteln 4 und 6 präsentierten Analysen des Renormierungsgruppenflusses werden beide Cutofftypen in Kombination mit beiden Familien von Profilfunktionen verwendet.

Kapitel 3

Die Einstein-Hilbert-Trunkierung

3.1 Der Trunkierungsansatz

Kommen wir nun zu einer relativ einfachen Anwendung der trunkierten Flußgleichung (2.3). Dazu wird ein Ansatz verwendet, der lediglich die kosmologische und die Gravitationskonstante als laufende Kopplungen enthält. Man geht dabei zunächst davon aus, daß bei der UV Skala \hat{k} die d -dimensionale Gravitation durch die Einstein-Hilbert Wirkung

$$\bar{\Gamma}_{\hat{k}}[g] = S[g] = \frac{1}{16\pi\bar{G}} \int d^d x \sqrt{\bar{g}} \{ -R(g) + 2\bar{\lambda} \} \quad (3.1)$$

beschrieben wird. Hier bezeichnen \bar{G} und $\bar{\lambda}$ die nackte Gravitations- bzw. die nackte kosmologische Konstante. Um den Renormierungsgruppenfluß von $\Gamma_k[g, \bar{g}]$ zu kleineren Skalen $k < \hat{k}$ hin zu untersuchen, betrachtet man dann das folgende Wirkungsfunktional:

$$\begin{aligned} \Gamma_k[g, \bar{g}] &= 2\kappa^2 Z_{Nk} \int d^d x \sqrt{\bar{g}} \{ -R(g) + 2\bar{\lambda}_k \} \\ &\quad + \kappa^2 \frac{Z_{Nk}}{\alpha} \int d^d x \sqrt{\bar{g}} \bar{g}^{\mu\nu} (\mathcal{F}_\mu^{\alpha\beta} g_{\alpha\beta}) (\mathcal{F}_\nu^{\rho\sigma} g_{\rho\sigma}) . \end{aligned} \quad (3.2)$$

Dieses gewinnt man ganz einfach dadurch, daß man in $S + S_{\text{gf}}$ die nackten Kopplungen \bar{G} , $\bar{\lambda}$ und α wie folgt durch entsprechende k -abhängige Größen ersetzt:

$$\bar{G} \rightarrow G_k \equiv Z_{Nk}^{-1} \bar{G} , \quad \bar{\lambda} \rightarrow \bar{\lambda}_k , \quad \alpha \rightarrow Z_{Nk}^{-1} \alpha \quad (3.3)$$

Hinsichtlich seiner Form ist das trunkierte Wirkungsfunktional (3.2) mit dem Gravitationssektor des allgemeinen Ansatzes (2.1) verträglich, wobei hier die Quantenkorrekturen zum Eichfixierungsterm durch das nachstehende Funktional beschrieben werden:

$$\hat{\Gamma}_k[g, \bar{g}] = \kappa^2 \frac{Z_{Nk} - 1}{\alpha} \int d^d x \sqrt{\bar{g}} \bar{g}^{\mu\nu} (\mathcal{F}_\mu^{\alpha\beta} g_{\alpha\beta}) (\mathcal{F}_\nu^{\rho\sigma} g_{\rho\sigma}) . \quad (3.4)$$

Weiterhin hat die aus (2.2) resultierende Beziehung $\Gamma_k[g, g] = \bar{\Gamma}_k[g]$ zur Folge, daß die Skalen-abhängigen Kopplungen die Anfangsbedingungen $\bar{\lambda}_{\hat{k}} = \bar{\lambda}$ und $Z_{N\hat{k}} = 1$ erfüllen, was wiederum $G_{\hat{k}} = \bar{G}$ nach sich zieht. Dabei setzen wir zunächst eine sehr große, aber endliche UV Skala \hat{k} voraus.

Im Grunde genommen müßte auch der Eichparameter α als laufende Kopplung behandelt werden, d.h. $\alpha \rightarrow \alpha_k$. Die Berechnung der zugehörigen β -Funktion läßt sich aber vermeiden, wenn man berücksichtigt, daß es schlüssige Argumente für einen (IR attraktiven) Fixpunkt bei $\alpha_* = 0$ gibt. Denn das bedeutet, daß die Anfangsbedingung $\alpha_{\hat{k}} = 0$ für alle Skalen $k \leq \hat{k}$ zu $\alpha_k = 0$ führt. Somit kann man den korrekten Fluß des Eichfixierungsterms auch aus einer Trunkierung mit konstantem α gewinnen, indem man einfach $\alpha = 0$ setzt.

Wie sehen also die Argumente für die Existenz des besagten IR attraktiven Fixpunkts aus? Zunächst einmal gibt es einige direkte Beweise dafür, daß er zumindest in der Yang-Mills Theorie vorhanden ist. In [49] wird unter Verwendung einer Trunkierung, die einen kovarianten Eichfixierungsterm enthält, explizit gezeigt, daß der Fixpunkt $\alpha_* = 0$ existiert. Ferner wird in einer weiteren Arbeit ein nichtperturbativer Beweis auf der Grundlage einer allgemeinen axialen Eichung geführt [51]. Es liegt nun nahe, per Analogieschluß anzunehmen, daß dieser Fixpunkt auch in der Gravitation, die man ja gewissermaßen mit einer nichtabelschen Eichtheorie vergleichen kann, existent ist. Tatsächlich gibt es ein allgemeines, suggestives Argument, welches auf seine universelle Existenz in *jeder Eichtheorie* hinweist [52]: Wenn man in einem gewöhnlichen, eichfixierten Funktionalintegral den Grenzübergang $\alpha \rightarrow 0$ vollzieht, wird der Eichfixierungsterm $\exp(-S_{\text{gf}})$ proportional zu $\delta[F_\mu]$. Der Limes $\alpha \rightarrow 0$ führt also zu einer "scharfen" Implementierung der Eichbedingung. In diesem Fall besteht das Integrationsmaß des Pfadintegrals ausschließlich aus denjenigen Konfigurationen $h_{\mu\nu}(x)$, die die Eichbedingung $F_\mu = 0$ exakt erfüllen. Die Addition eines IR Cutoffs bei der Skala k bewirkt nun allgemein, daß die Beiträge der im Integrationsbereich befindlichen Moden abhängig von ihrem Impuls mehr oder weniger unterdrückt werden. Da hier aber all diese Moden der Eichbedingung $F_\mu = 0$ nachkommen, kann eine Variation der Skala k natürlich keine qualitative Änderung des Integrationsmaßes hervorrufen. Ist das Delta-Funktional $\delta[F_\mu]$ für irgendeinen Wert von k vorhanden, so liegt es automatisch auch für alle anderen vor. Folglich verschwindet dann α für jedes beliebige k , und das Fixpunkt-Kriterium $\partial\alpha_k/\partial k = 0 \forall k$ ist an der Stelle $\alpha_* = 0$ somit erfüllt.

3.2 Die Projektionsmethodik

Als nächstes gilt es nun zu klären, wie man aus der trunkierten Flußgleichung (2.3) die Renormierungsgruppengleichungen für die in dem Ansatz (3.2) enthaltenen Kopplungen G_k und $\bar{\lambda}_k$ herleiten kann. Man beginnt damit, den Ansatz in beide Seiten der trunkierten Flußgleichung einzusetzen. Daraufhin setzt man $g_{\mu\nu} = \bar{g}_{\mu\nu}$, was zur Folge hat, daß der Eichfixierungsterm auf der linken Seite der Flußgleichung wegfällt. Für diese Seite von (2.3) erhält man somit

$$\partial_t \Gamma_k[\bar{g}, \bar{g}] = 2\kappa^2 \int d^d x \sqrt{\bar{g}} \left[-\bar{R}(\bar{g}) \partial_t Z_{Nk} + 2\partial_t (Z_{Nk} \bar{\lambda}_k) \right]. \quad (3.5)$$

Offensichtlich wird (3.5) lediglich von den beiden Operatoren $\int d^d x \sqrt{\bar{g}}$ und $\int d^d x \sqrt{\bar{g}} R$ aufgespannt. Durch eine Entwicklung nach Potenzen in den Ableitungen kann man nun auf der rechten Seite der Flußgleichung diejenigen Anteile extrahieren, die proportional zu ebendiesen Operatoren sind. Wenn man dann das Resultat dieser Entwicklung mit (3.5) gleichsetzt, läßt sich durch einen Koeffizientenvergleich das System gekoppelter Differentialgleichungen für Z_{Nk} und $\bar{\lambda}_k$ bestimmen. Dieses System beschreibt die Projektion des Renormierungsgruppenflusses auf denjenigen zweidimensionalen Unterraum des Raums aller Wirkungsfunktionale, der von $\int d^d x \sqrt{\bar{g}}$ und $\int d^d x \sqrt{\bar{g}} R$ aufgespannt wird.

Die entsprechenden Rechnungen sind im allgemeinen technisch äußerst kompliziert. Um sie dennoch so einfach wie möglich zu gestalten, nutzt man aus, daß man jede Metrik $\bar{g}_{\mu\nu}$ einsetzen darf, solange sie eine eindeutige Unterscheidung der Invarianten $\int d^d x \sqrt{\bar{g}}$ und $\int d^d x \sqrt{\bar{g}} R$ erlaubt. In der Praxis erweisen sich maximal symmetrische Metriken $\bar{g}_{\mu\nu}$ für solche Zwecke als besonders geeignet. Die maximal symmetrischen Räume bilden eine spezielle Klasse von Einstein-Räumen, welche durch die Beziehungen

$$\bar{R}_{\mu\nu\rho\sigma} = \frac{\bar{R}}{d(d-1)} (\bar{g}_{\mu\rho} \bar{g}_{\nu\sigma} - \bar{g}_{\mu\sigma} \bar{g}_{\nu\rho}), \quad \bar{R}_{\mu\nu} = \frac{\bar{R}}{d} \bar{g}_{\mu\nu} \quad (3.6)$$

mit *konstantem* \bar{R} charakterisiert ist. Der Krümmungsskalar \bar{R} sollte hier also nicht als Funktional der Metrik betrachtet werden, sondern vielmehr als eine von außen vorgegebene Zahl. Aus technischen Gründen beschränken wir uns im folgenden auf maximal symmetrische Räume mit positivem Krümmungsskalar $\bar{R} > 0$. Die Gesamtheit dieser Räume ergibt gerade die Klasse der d -Sphären S^d . Sie werden durch ihren Radius r parametrisiert, welcher gemäß den nachstehenden Gleichungen mit dem Krümmungsskalar und dem Volumen in Beziehung steht:

$$\bar{R} = \frac{d(d-1)}{r^2}, \quad \int d^d x \sqrt{\bar{g}} = \frac{\Gamma(\frac{d}{2})}{\Gamma(d)} (4\pi r^2)^{\frac{d}{2}}. \quad (3.7)$$

Für die Auswertung der rechten Seite der Flußgleichung ist es erforderlich, einige wesentliche Eigenschaften der auf einem sphärischen Hintergrund definierten Felder zu

kennen. Wie in Anhang E beschrieben wird, kann man die Quanten- und die klassischen Komponentenfelder nach sogenannten sphärischen Harmonischen $T_{\mu\nu}^{lm}$, T_{μ}^{lm} , T^{lm} entwickeln. Diese bilden jeweils einen vollständigen Satz orthogonaler Eigenfunktionen bzgl. des zugehörigen kovarianten Laplace-Operators. Die Entwicklungen von $h_{\mu\nu}^T$, ϕ , C^{μ} , \bar{C}_{μ} und ihrer klassischen Gegenstücke kann man direkt der Gleichung (E.3) entnehmen. Die übrigen Komponentenfelder sind durch folgende Entwicklungen charakterisiert:

$$\begin{aligned}\xi_{\mu}(x) &= \sum_{l=2}^{\infty} \sum_{m=1}^{D_l(d,1)} \xi_{lm} T_{\mu}^{lm}(x), & \sigma(x) &= \sum_{l=2}^{\infty} \sum_{m=1}^{D_l(d,0)} \sigma_{lm} T^{lm}(x), \\ \eta(x) &= \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{D_l(d,0)} \eta_{lm} T^{lm}(x), & \bar{\eta}(x) &= \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{D_l(d,0)} \bar{\eta}_{lm} T^{lm}(x).\end{aligned}\quad (3.8)$$

Analoge Entwicklungen gelten für die entsprechenden klassischen Felder.

Im Gegensatz zu den Reihenentwicklungen in (E.3) beginnen die Summationen in (3.8) *nicht* bei $l = 1$ für Vektoren und bei $l = 0$ für Skalare, sondern bei $l = 2$ für ξ_{μ} und σ , und bei $l = 1$ für die skalaren Geistfelder. Die hier weggelassenen Moden sind gerade die KV ($T_{\mu}^{l=1,m}$), die Lösungen der Gleichung (1.15) ($T^{l=1,m}$), deren erste kovariante Ableitungen genau den PCKV entsprechen, und die Konstanten ($T^{l=0,m=1}$). Wie bereits in Abschnitt 1.3 erwähnt, liefern diese Moden keine physikalischen Beiträge zu den vollständigen Feldern und dürfen daher nicht in die Entwicklungen (3.8) eingehen.

Der Ausschluß dieser Moden ist auch von großer Wichtigkeit für die impulsabhängigen Redefinitionen (1.24), da diese ansonsten nicht wohldefiniert wären. Das kann man z.B. anhand der folgenden Gleichung erkennen:

$$\hat{\sigma}(x) = \sum_{l=2}^{\infty} \sum_{m=1}^{D_l(d,0)} \frac{\sigma_{lm}}{\sqrt{\Lambda_l(d,0) \left(\Lambda_l(d,0) - \frac{\bar{R}}{d-1} \right)}} T^{lm}(x). \quad (3.9)$$

Man erhält (3.9) durch Invertieren von (1.24) und anschließendes Einsetzen von (3.8). Gerade diejenigen Eigenwerte, die zu den ausgeschlossenen Moden gehören, also $\Lambda_0(d,0) = 0$ und $\Lambda_1(d,0) = \bar{R}/(d-1)$ (siehe Tabelle E.t1 in Anhang E), würden dazu führen, daß der Nenner in (3.9) Null wird. Ganz Ähnliches trifft auf die übrigen Felder in (1.24) zu.

Weiterhin erweist es sich als günstig, das Quantenfeld ϕ wie folgt zu zerlegen.

$$\phi(x) = \phi_0(x) + \phi_1(x), \quad \phi_0(x) = \sum_{l=0}^1 \sum_{m=1}^{D_l(d,0)} \phi_{lm} T^{lm}(x), \quad \phi_1(x) = \sum_{l=2}^{\infty} \sum_{m=1}^{D_l(d,0)} \phi_{lm} T^{lm}(x) \quad (3.10)$$

Der Anteil ϕ_1 wird von denselben Eigenfunktionen aufgespannt wie σ , während ϕ_0 die Beiträge von den übrigen Moden enthält. Aus der Orthogonalität der sphärischen Harmonischen folgt dann direkt $\langle \phi_1, \phi_0 \rangle = \langle \sigma, \phi_0 \rangle = 0$, was $\langle \phi, \phi \rangle = \langle \phi_0, \phi_0 \rangle + \langle \phi_1, \phi_1 \rangle$ und

insbesondere $\langle \sigma, \phi \rangle = \langle \sigma, \phi_1 \rangle$ nach sich zieht. Somit stellt die obige Zerlegung von ϕ (3.10) sicher, daß jeder in den skalaren Feldern bilineare, nichtverschwindende Term von derartiger Gestalt ist, daß die beteiligten Skalare von demselben Satz von Eigenfunktionen aufgespannt werden. Dasselbe gilt dann natürlich auch für die zugehörigen klassischen Felder $\bar{\phi}_0$ und $\bar{\phi}_1$.

3.3 Auswertung der rechten Seite der Flußgleichung

Mit dem notwendigen mathematischen Rüstzeug ausgestattet, können wir uns jetzt wieder der Auswertung der Flußgleichung zuwenden. Für die Berechnung ihrer rechten Seite benötigt man die Operatoren $(\Gamma_k^{(2)}[g, \bar{g}] + \mathcal{R}_k[\bar{g}])^{-1}$ und $(S_k^{(2)}[g, \bar{g}] + \mathcal{R}_k[\bar{g}])^{-1}$. Da nach Einsetzen des Trunkierungsansatzes (3.2) die beiden Metriken $g_{\mu\nu}$ und $\bar{g}_{\mu\nu}$ gleichgesetzt werden, reicht es für unsere Zwecke völlig aus, diese Operatoren bei $g_{\mu\nu} = \bar{g}_{\mu\nu}$ zu bestimmen. Wenden wir uns hierfür zunächst dem reinen Gravitationssektor zu. Zuerst entwickelt man den Trunkierungsansatz gemäß

$$\Gamma_k[\bar{g} + \bar{h}, \bar{g}] = \Gamma_k[\bar{g}, \bar{g}] + \mathcal{O}(\bar{h}) + \Gamma_k^{\text{quad}}[\bar{h}; \bar{g}] + \mathcal{O}(\bar{h}^3) \quad (3.11)$$

und behält nur den in $\bar{h}_{\mu\nu}$ quadratischen Anteil, also $\Gamma_k^{\text{quad}}[\bar{h}; \bar{g}] \equiv \langle h, \Gamma_k^{(2)}[\bar{g}, \bar{g}] h \rangle / 2$. Man erhält dabei den folgenden Ausdruck:

$$\begin{aligned} \Gamma_k^{\text{quad}}[\bar{h}; \bar{g}] &= \kappa^2 Z_{Nk} \int d^d x \sqrt{\bar{g}} \bar{h}_{\mu\nu} \left\{ - \left[\frac{1}{2} \delta_\rho^\mu \delta_\sigma^\nu + \frac{1-2\alpha}{4\alpha} \bar{g}^{\mu\nu} \bar{g}_{\rho\sigma} \right] \bar{D}^2 \right. \\ &\quad + \frac{1}{4} [2\delta_\rho^\mu \delta_\sigma^\nu - \bar{g}^{\mu\nu} \bar{g}_{\rho\sigma}] (\bar{R} - 2\bar{\lambda}_k) + \bar{g}^{\mu\nu} \bar{R}_{\rho\sigma} - \delta_\sigma^\mu \bar{R}_\rho^\nu - \bar{R}_\rho^\nu{}^\mu{}_\sigma \\ &\quad \left. + \frac{1-\alpha}{\alpha} [\bar{g}^{\mu\nu} \bar{D}_\rho \bar{D}_\sigma - \delta_\sigma^\mu \bar{D}^\nu \bar{D}_\rho] \right\} \bar{h}^{\rho\sigma}. \end{aligned} \quad (3.12)$$

Bis zu diesem Punkt ist die Hintergrundmetrik $\bar{g}_{\mu\nu}$ zwar fixiert, aber noch beliebig. Um die obige quadratische Form (teilweise) zu diagonalisieren wird nun die Familie der sphärischen Metriken in (3.12) eingesetzt und anschließend das vollständige klassische Feld $\bar{h}_{\mu\nu}$ gemäß der Gleichung (1.36) in seine Komponenten zerlegt. Dann verwendet man das klassische Gegenstück zu (3.10), um auch noch $\bar{\phi}$ zu zerlegen. Diese Rechenschritte verleihen Γ_k^{quad} schließlich die nachstehende Form:

$$\begin{aligned} \Gamma_k^{\text{quad}}[\bar{h}; \bar{g}] &= \kappa^2 Z_{Nk} \int d^d x \sqrt{\bar{g}} \frac{1}{2} \left\{ \bar{h}_{\mu\nu}^T [-\bar{D}^2 + A_T(d) \bar{R} - 2\bar{\lambda}_k] \bar{h}^{T\mu\nu} \right. \\ &\quad + \frac{2}{\alpha} \bar{\xi}_\mu [-\bar{D}^2 + A_V(d, \alpha) \bar{R} - 2\alpha \bar{\lambda}_k] \bar{\xi}^\mu \\ &\quad \left. + C_{S2}(d, \alpha) \left(\bar{\sigma} [-\bar{D}^2 + A_{S2}(d, \alpha) \bar{R} + B_{S2}(d, \alpha) \bar{\lambda}_k] \bar{\sigma} \right) \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +2C_{S3}(d, \alpha) \bar{\phi}_1 \sqrt{-\bar{D}^2} \sqrt{-\bar{D}^2 - \frac{\bar{R}}{d-1} \bar{\sigma}} \\
& + C_{S1}(d, \alpha) \sum_{\bar{\phi} \in \{\bar{\phi}_0, \bar{\phi}_1\}} \bar{\phi} \left[-\bar{D}^2 + A_{S1}(d, \alpha) \bar{R} + B_{S1}(d, \alpha) \bar{\lambda}_k \right] \bar{\phi} \Bigg\}. \quad (3.13)
\end{aligned}$$

Die verschiedenen Koeffizienten A , B , und C in (3.13) sind Funktionen der Dimensionalität d und des Eichparameters α . Ihre explizite Gestalt kann man Anhang G entnehmen.

Offensichtlich weist der durch (3.13) definierte Matrix-Differentialoperator $\Gamma_k^{(2)}[\bar{g}, \bar{g}]$ Blockdiagonalform auf, was eine analytische Bestimmung des Inversen von $\Gamma_k^{(2)}[g, \bar{g}] + \mathcal{R}_k[\bar{g}]$ überhaupt erst ermöglicht. Und genau darin liegt der Hauptgrund für die TT-Zerlegung (1.36) in die Komponentenfelder und die Beschränkung auf sphärisch symmetrische Hintergrundmetriken. An dieser Stelle sei erwähnt, daß man hier, im Gegensatz zu dem in [12] behandelten Spezialfall $\alpha = 1$, die quadratische Form nicht einfach durch bloßes Aufspalten von $\bar{h}_{\mu\nu}$ in einen spurfreien und einen reinen Spuranteil diagonalisieren kann. Denn die quadratische Form (3.12) enthält bestimmte Terme, die zu Mischungen des spurfreien Anteils und $\bar{\phi}$ führen. Im einzelnen sind dies die Terme in $\int d^d x \sqrt{\bar{g}} \bar{h}_{\mu\nu} [\bar{g}^{\mu\nu} \bar{D}_\rho \bar{D}_\sigma - \delta_\sigma^\mu \bar{D}^\nu \bar{D}_\rho] \bar{h}^{\rho\sigma}$. Dieser Ausdruck tritt in der quadratischen Form mit einem Vorfaktor $1 - \alpha$ auf und fällt somit in dem in [12] diskutierten Spezialfall $\alpha = 1$ weg.

Auf dem Niveau der Komponentenfelder bleiben von den zuvor erwähnten Misch- oder Kreuztermen nur rein skalare $\bar{\sigma}$ - $\bar{\phi}$ -Mischungen übrig, die für die sphärischen Harmonischen $T^{l=0, m=1}$ und $T^{l=1, m}$ verschwinden. Da exakt diese Moden sehr wohl zu $\bar{\phi}$, aber nicht zu $\bar{\sigma}$ beitragen, ist es nicht auf direktem Wege möglich, den zugehörigen Matrix-Differentialoperator $((\Gamma_k^{(2)})_{ij})_{i, j \in \{\bar{h}^T, \bar{\xi}, \bar{\sigma}, \bar{\phi}\}}$ zu invertieren. Um genau dieses Problem zu umgehen, wird $\bar{\phi}$ gemäß (3.10) in $\bar{\phi}_0$ und $\bar{\phi}_1$ aufgespalten. Denn dadurch erreicht man, daß ausschließlich skalare Mischterme übrigbleiben, die durch denselben Satz von Eigenfunktionen $\{T^{lm} | l \geq 2\}$ aufgespannt werden, und das sind genau die $\bar{\sigma}$ - $\bar{\phi}_1$ -Mischterme. Somit ist der resultierende Matrix-Differentialoperator $((\Gamma_k^{(2)})_{ij})_{i, j \in \{\bar{h}^T, \bar{\xi}, \bar{\phi}_0, \bar{\sigma}, \bar{\phi}_1\}}$ invertierbar. Jedoch führt diese zusätzliche Zerlegung von $\bar{\phi}$ zu einer Veränderung der Matrixstruktur von $\Gamma_k^{(2)}[\bar{g}, \bar{g}]$, die wiederum eine leichte Modifikation der Flußgleichung (2.3) zur Folge hat. Diese ist derart, daß auf der rechten Seite von (2.3) die Summation im Gravitationssektor nun über den Satz von Feldern $\{\bar{h}^T, \bar{\xi}, \bar{\phi}_0, \bar{\sigma}, \bar{\phi}_1\}$ läuft, wobei $(\mathcal{R}_k)_{\bar{\phi}_0 \bar{\phi}_0} \equiv (\mathcal{R}_k)_{\bar{\phi}_1 \bar{\phi}_1} \equiv (\mathcal{R}_k)_{\bar{\phi} \bar{\phi}}$ und $(\mathcal{R}_k)_{\bar{\sigma} \bar{\phi}_1} \equiv (\mathcal{R}_k)_{\bar{\sigma} \bar{\phi}}$ gesetzt wird.

Im Rahmen der Einstein-Hilbert-Trunkierung sorgt lediglich die α -Abhängigkeit für das Auftreten von Mischungen zwischen $\bar{\phi}$ und dem spurfreien Anteil von $\bar{h}_{\mu\nu}$. Wenn man Terme höherer Ableitungen wie $\int d^d x \sqrt{\bar{g}} R^2$ oder Materiefelder in den Trunkierungsansatz einfügt, erhält man in der Regel ähnliche Mischterme. Da letztere aber im allgemeinen

nicht von einem Eichparameter abhängen und somit auch nicht für eine bestimmte Wahl des Eichparameters wegfallen können, sind für die Diagonalisierung der entsprechenden quadratischen Formen die Zerlegungen (1.12) und (3.10) immer notwendig, also insbesondere auch im Fall $\alpha = 1$. Darauf werden wir in Kapitel 5 zurückkommen.

Im nächsten Schritt bestimmen wir die Beiträge der Geistfelder zu der rechten Seite von (2.3). Zu diesem Zweck setzt man für $g_{\mu\nu} = \bar{g}_{\mu\nu}$ die Familie der sphärischen Metriken in S_{gh} ein und zerlegt dann die vollständigen Geistfelder gemäß (1.37) in ihre Komponenten. Dadurch erhält man

$$S_{\text{gh}}[0, v, \bar{v}; \bar{g}] = \sqrt{2} \int d^d x \sqrt{\bar{g}} \left\{ \bar{v}_\mu^T \left[-\bar{D}^2 - \frac{\bar{R}}{d} \right] v^{T\mu} + \bar{\varrho} \left[-\bar{D}^2 - 2\frac{\bar{R}}{d} \right] \varrho \right\}. \quad (3.14)$$

Hierzu sei angemerkt, daß die Zerlegung der Geistfelder im Grunde genommen nicht erforderlich ist. Sie ermöglicht aber einen direkten Vergleich der im Rahmen dieser Arbeit erzielten Resultate mit denjenigen aus [30], siehe Anhang D.

Im weiteren Verlauf dieses Kapitels gilt durchgehend $g_{\mu\nu} = \bar{g}_{\mu\nu}$. Um die Notation dementsprechend zu vereinfachen, werden bis auf weiteres die Querstriche über der Metrik, dem Krümmungsskalar und den Operatoren D^2 und P_k weggelassen.

An dieser Stelle können wir mit der Anpassung des Cutoffs an die Operatoren $\Gamma_k^{(2)}$ und $S_{\text{gh}}^{(2)}$ aus den Gleichungen (3.13) bzw. (3.14) fortfahren. Hier verlangt die Regel (2.4), daß die verschiedenen \mathcal{X}_k , \mathcal{Y}_k und \mathcal{Z}_k wie folgt zu wählen sind:

$$\begin{aligned} \mathcal{X}_k^{\bar{\phi}_1\bar{\sigma}} &= \mathcal{X}_k^{\bar{\sigma}\bar{\sigma}} = \mathcal{X}_k^{\bar{\phi}_0\bar{\phi}_0} = \mathcal{X}_k^{\bar{\phi}_1\bar{\phi}_1} = \mathcal{Y}_k^{\bar{h}^T\bar{h}^T} = \mathcal{Y}_k^{\bar{\phi}_1\bar{\sigma}} = \mathcal{Y}_k^{\bar{\sigma}\bar{\sigma}} = \mathcal{Y}_k^{\bar{\phi}_0\bar{\phi}_0} = \mathcal{Y}_k^{\bar{\phi}_1\bar{\phi}_1} = 0, \\ \mathcal{Z}_k^{\bar{h}^T\bar{h}^T} &= Z_{Nk}, \quad \mathcal{Z}_k^{\bar{\xi}\bar{\xi}} = \frac{2}{\alpha} Z_{Nk}, \quad \mathcal{Z}_k^{\bar{\phi}_1\bar{\sigma}} = C_{S2}(d, \alpha) C_{S3}(d, \alpha) Z_{Nk}, \\ \mathcal{Z}_k^{\bar{\sigma}\bar{\sigma}} &= C_{S2}(d, \alpha) Z_{Nk}, \quad \mathcal{Z}_k^{\bar{\phi}_0\bar{\phi}_0} = \mathcal{Z}_k^{\bar{\phi}_1\bar{\phi}_1} = C_{S2}(d, \alpha) C_{S1}(d, \alpha) Z_{Nk}, \\ \mathcal{Z}_k^{\bar{v}^T v^T} &= \mathcal{Z}_k^{\bar{\varrho}\varrho} = \sqrt{2}. \end{aligned} \quad (3.15)$$

Damit nehmen die nichtverschwindenden Einträge der beiden Matrix-Differentialoperatoren $\Gamma_k^{(2)} + \mathcal{R}_k$ und $S_{\text{gh}}^{(2)} + \mathcal{R}_k$ bei $g_{\mu\nu} = \bar{g}_{\mu\nu}$ die nachstehende Form an:

$$\begin{aligned} \left(\Gamma_k^{(2)}[g, g] + \mathcal{R}_k \right)_{\bar{h}^T\bar{h}^T} &= Z_{Nk} \kappa^2 [P_k + A_T(d)R - 2\bar{\lambda}_k], \\ \left(\Gamma_k^{(2)}[g, g] + \mathcal{R}_k \right)_{\bar{\xi}\bar{\xi}} &= Z_{Nk} \kappa^2 \frac{2}{\alpha} [P_k + A_V(d, \alpha)R - 2\alpha\bar{\lambda}_k], \\ \left(\Gamma_k^{(2)}[g, g] + \mathcal{R}_k \right)_{\bar{\sigma}\bar{\sigma}} &= Z_{Nk} \kappa^2 C_{S2}(d, \alpha) [P_k + A_{S2}(d, \alpha)R + B_{S2}(d, \alpha)\bar{\lambda}_k], \\ \left(\Gamma_k^{(2)}[g, g] + \mathcal{R}_k \right)_{\bar{\phi}_1\bar{\sigma}} &= \left(\Gamma_k^{(2)}[g, g] + \mathcal{R}_k \right)_{\bar{\sigma}\bar{\phi}_1} \\ &= Z_{Nk} \kappa^2 C_{S2}(d, \alpha) C_{S3}(d, \alpha) \sqrt{P_k} \sqrt{P_k - \frac{R}{d-1}}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \left(\Gamma_k^{(2)}[g, g] + \mathcal{R}_k \right)_{\bar{\phi}_0 \bar{\phi}_0} &= \left(\Gamma_k^{(2)}[g, g] + \mathcal{R}_k \right)_{\bar{\phi}_1 \bar{\phi}_1} \\
 &= Z_{Nk} \kappa^2 C_{S2}(d, \alpha) C_{S1}(d, \alpha) \left[P_k + A_{S1}(d, \alpha) R + B_{S1}(d, \alpha) \bar{\lambda}_k \right] , \\
 \left(S_{\text{gh}}^{(2)}[g, g] + \mathcal{R}_k \right)_{\bar{v}^T \bar{v}^T} &= - \left(S_{\text{gh}}^{(2)}[g, g] + \mathcal{R}_k \right)_{v^T \bar{v}^T} = \sqrt{2} \left[P_k - \frac{R}{d} \right] , \\
 \left(S_{\text{gh}}^{(2)}[g, g] + \mathcal{R}_k \right)_{\bar{\varrho} \bar{\varrho}} &= - \left(S_{\text{gh}}^{(2)}[g, g] + \mathcal{R}_k \right)_{\varrho \bar{\varrho}} = \sqrt{2} \left[P_k - 2 \frac{R}{d} \right] . \tag{3.16}
 \end{aligned}$$

Hier wurde $\left(S_{\text{gh}}^{(2)}[0, v, \bar{v}; g] \right)_{\psi_1 \psi_2} \equiv \left(S_{\text{gh}}^{(2)}[g, g] \right)_{\psi_1 \psi_2}$ gesetzt, wobei $\psi_1, \psi_2 \in \bar{I}_2$.

Jetzt stehen uns alle Mittel zur Verfügung, die wir benötigen, um die rechte Seite der Flußgleichung für $g_{\mu\nu} = \bar{g}_{\mu\nu}$ explizit angeben zu können. Letztere wollen wir von nun an mit $\mathcal{S}_k(R)$ bezeichnen. Die Berechnung der in $\mathcal{S}_k(R)$ auftretenden inversen Operatoren $(\Gamma_k^{(2)} + \mathcal{R}_k)^{-1}$ und $(S_{\text{gh}}^{(2)} + \mathcal{R}_k)^{-1}$ wird in Anhang C.1 durchgeführt. Setzt man die resultierenden Ausdrücke in $\mathcal{S}_k(R)$ ein, so erhält man

$$\begin{aligned}
 \mathcal{S}_k(R) &= \\
 &\text{Tr}_{(2S^2)} \left[\left(P_k + A_T(d) R - 2\bar{\lambda}_k \right)^{-1} \mathcal{N} \right] + \text{Tr}'_{(1T)} \left[\left(P_k + A_V(d, \alpha) R - 2\alpha \bar{\lambda}_k \right)^{-1} \mathcal{N} \right] \\
 &+ \text{Tr}''_{(0)} \left[\left(P_k + A_{S3}(d) R - 2\bar{\lambda}_k \right)^{-1} \left(P_k + A_{S4}(d, \alpha) R - 2\alpha \bar{\lambda}_k \right)^{-1} \right. \\
 &\times \left\{ \left(F_{S1}(d, \alpha) P_k + A_{S5}(d, \alpha) R - 2(\alpha + 1) \bar{\lambda}_k \right) \mathcal{N} \right. \\
 &+ F_{S2}(d, \alpha) \sqrt{P_k} \sqrt{P_k - \frac{R}{d-1}} \\
 &\times \frac{1}{2Z_{Nk}} \partial_t \left[Z_{Nk} \left(\sqrt{P_k} \sqrt{P_k - \frac{R}{d-1}} - \sqrt{-D^2} \sqrt{-D^2 - \frac{R}{d-1}} \right) \right] \left. \right\} \\
 &- 2 \text{Tr}_{(1T)} \left[\left(P_k - \frac{R}{d} \right)^{-1} \mathcal{N}_0 \right] - 2 \text{Tr}'_{(0)} \left[\left(P_k - 2 \frac{R}{d} \right)^{-1} \mathcal{N}_0 \right] \tag{3.17} \\
 &+ \frac{1}{2Z_{Nk}} \sum_{l=0}^1 \left[D_l(d, 0) \frac{\partial_t [Z_{Nk} k^2 R^{(0)}(\Lambda_l(d, 0)/k^2)]}{\Lambda_l(d, 0) + k^2 R^{(0)}(\Lambda_l(d, 0)/k^2) + A_{S1}(d, \alpha) R + B_{S1}(d, \alpha) \bar{\lambda}_k} \right] .
 \end{aligned}$$

Hier stellen \mathcal{N} und \mathcal{N}_0 Operatoren dar, die wie folgt definiert sind:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{N} &\equiv (2Z_{Nk})^{-1} \partial_t [Z_{Nk} k^2 R^{(0)}(-D^2/k^2)] \\
 &= \left[1 - \frac{1}{2} \eta_N(k) \right] k^2 R^{(0)}(-D^2/k^2) + D^2 R^{(0)' }(-D^2/k^2) , \\
 \mathcal{N}_0 &\equiv 2^{-1} \partial_t [k^2 R^{(0)}(-D^2/k^2)] = k^2 R^{(0)}(-D^2/k^2) + D^2 R^{(0)' }(-D^2/k^2) . \tag{3.18}
 \end{aligned}$$

Dabei bezeichnet

$$\eta_N(k) \equiv -\partial_t \ln Z_{Nk} \quad (3.19)$$

die anomale Dimension des Operators $\int d^d x \sqrt{g} R$ und der Strich an $R^{(0)}$ die Ableitung nach dem Argument. Weiterhin repräsentieren auch die zuvor noch nicht eingeführten, in (3.17) enthaltenen Koeffizienten A und F Funktionen von d und α . Die zugehörigen Ausdrücke werden in Anhang G aufgelistet.

In Gleichung (3.17) wurde die Notation bzgl. der Striche an den Spuren etwas verfeinert. Für den Rest dieses Kapitels weist ein einzelner Strich auf die Subtraktion des vom niedrigsten $-D^2$ -Eigenwert stammenden Beitrags hin, während zwei Striche anzeigen, daß die Beiträge von den zwei niedrigsten $-D^2$ -Eigenwerten zu subtrahieren sind.

Indem man als nächstes $\mathcal{S}_k(R)$ nach $R \propto r^{-2}$ entwickelt und die Spuren auswertet, kann man die zu $\int d^d x \sqrt{g}$ bzw. $\int d^d x \sqrt{g} R$ proportionalen Beiträge extrahieren. Aufgrund der Beziehungen $\int d^d x \sqrt{g} \propto r^d$ und $\int d^d x \sqrt{g} R \propto r^{d-2}$ werden hier lediglich die Terme der Ordnung r^d und r^{d-2} benötigt. Zunächst einmal ergibt sich aus der Entwicklung von (3.17) nach R :

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_k(R) &= \text{Tr}_{(2ST^2)} \left[(P_k - 2\bar{\lambda}_k)^{-1} \mathcal{N} \right] + \text{Tr}'_{(1T)} \left[(P_k - 2\alpha\bar{\lambda}_k)^{-1} \mathcal{N} \right] \\ &+ \text{Tr}''_{(0)} \left[(P_k - 2\bar{\lambda}_k)^{-1} \mathcal{N} \right] + \text{Tr}''_{(0)} \left[(P_k - 2\alpha\bar{\lambda}_k)^{-1} \mathcal{N} \right] \\ &- 2\text{Tr}_{(1T)} [P_k^{-1} \mathcal{N}_0] - 2\text{Tr}'_{(0)} [P_k^{-1} \mathcal{N}_0] - R \left\{ A_T(d) \text{Tr}_{(2ST^2)} \left[(P_k - 2\bar{\lambda}_k)^{-2} \mathcal{N} \right] \right. \\ &+ A_V(d, \alpha) \text{Tr}'_{(1T)} \left[(P_k - 2\alpha\bar{\lambda}_k)^{-2} \mathcal{N} \right] + A_{S3}(d) \text{Tr}''_{(0)} \left[(P_k - 2\bar{\lambda}_k)^{-2} \mathcal{N} \right] \\ &+ A_{S4}(d, \alpha) \text{Tr}''_{(0)} \left[(P_k - 2\alpha\bar{\lambda}_k)^{-2} \mathcal{N} \right] + \frac{2}{d} \text{Tr}_{(1T)} [P_k^{-2} \mathcal{N}_0] \\ &\left. + \frac{4}{d} \text{Tr}'_{(0)} [P_k^{-2} \mathcal{N}_0] - \frac{\delta_{d,2}}{4\pi} \int d^2 x \sqrt{g} \frac{\partial_t (Z_{Nk} k^2)}{Z_{Nk} (k^2 - 2\bar{\lambda}_k)} \right\} + \mathcal{O}(r^{<d-2}). \quad (3.20) \end{aligned}$$

Dabei weist $\mathcal{O}(r^{<d-2})$ darauf hin, daß alle Terme $\propto r^n$ mit Potenzen $n < d - 2$ vernachlässigt werden.

Der zu $\delta_{d,2}$ proportionale Term in (3.20) entstammt dem letzten Term aus (3.17). Im Gegensatz zu den übrigen Termen von (3.17) enthält die Reihenentwicklung dieses Terms keine d -abhängigen Potenzen von r , sondern ist von der Form $\sum_{m=0}^{\infty} b_{2m} r^{-2m}$, wobei $\{b_{2m}\}$ einen Satz von r -unabhängigen Koeffizienten darstellt. Hinsichtlich des Koeffizientenvergleichs der relevanten r -Potenzen r^d und r^{d-2} hat dies die folgenden Konsequenzen: Da unter den Voraussetzungen $m \geq 0$ und $d > 0$ die Bedingung $-2m = d - 2$ nur für $(m, d) = (0, 2)$ erfüllt ist und die Gleichung $-2m = d$ überhaupt keine Lösung besitzt,

leistet der letzte Term aus (3.17) ausschließlich im $d = 2$ -dimensionalen Fall einen Beitrag zum Fluß von $\bar{\lambda}_k$ und Z_{Nk} . Unter Verwendung von (3.7) kann der beitragende Anteil, also $b_{2m=0} r^0$, durch den Operator $\int d^2x \sqrt{g} R$ ausgedrückt werden. Dadurch erhält man schließlich den letzten Term in (3.20).

Anschließend wertet man die in (3.20) auftretenden Spuren mit Hilfe von Heat-Kernel-Methoden aus. Die entsprechenden Rechnungen werden in Anhang C.2 durchgeführt. Wenn man danach $\mathcal{S}_k(R)$ mit der durch (3.5) gegebenen linken Seite der Flußgleichung in Verbindung bringt und die Koeffizienten der Invarianten $\int d^d x \sqrt{g}$ und $\int d^d x \sqrt{g} R$ vergleicht, ergibt sich letztendlich das gesuchte System von gekoppelten Differentialgleichungen für Z_{NK} und $\bar{\lambda}_k$. Es besitzt die folgende Form:

$$\begin{aligned} \partial_t (Z_{Nk} \bar{\lambda}_k) &= (4\kappa^2)^{-1} (4\pi)^{-d/2} k^d \left\{ \frac{1}{2} d(d-1) \Phi_{d/2}^1(-2\bar{\lambda}_k/k^2) + d \Phi_{d/2}^1(-2\alpha\bar{\lambda}_k/k^2) \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{2} \eta_N(k) \left[\frac{1}{2} d(d-1) \tilde{\Phi}_{d/2}^1(-2\bar{\lambda}_k/k^2) + d \tilde{\Phi}_{d/2}^1(-2\alpha\bar{\lambda}_k/k^2) \right] \right. \\ &\quad \left. - 2d \Phi_{d/2}^1(0) \right\}, \end{aligned} \quad (3.21)$$

$$\begin{aligned} \partial_t Z_{Nk} &= -(2\kappa^2)^{-1} (4\pi)^{-d/2} k^{d-2} \left\{ c_1(d) \Phi_{d/2-1}^1(-2\bar{\lambda}_k/k^2) + c_2(d) \Phi_{d/2-1}^1(-2\alpha\bar{\lambda}_k/k^2) \right. \\ &\quad \left. + c_3(d) \Phi_{d/2}^2(-2\bar{\lambda}_k/k^2) + c_4(d, \alpha) \Phi_{d/2}^2(-2\alpha\bar{\lambda}_k/k^2) \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{2} \eta_N(k) \left[c_1(d) \tilde{\Phi}_{d/2-1}^1(-2\bar{\lambda}_k/k^2) + c_2(d) \tilde{\Phi}_{d/2-1}^1(-2\alpha\bar{\lambda}_k/k^2) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + c_3(d) \tilde{\Phi}_{d/2}^2(-2\bar{\lambda}_k/k^2) + c_4(d, \alpha) \tilde{\Phi}_{d/2}^2(-2\alpha\bar{\lambda}_k/k^2) \right] \right. \\ &\quad \left. - 2c_2(d) \Phi_{d/2-1}^1(0) + c_5(d) \Phi_{d/2}^2(0) \right. \\ &\quad \left. + 3\delta_{d,2} \left(1 - \frac{1}{2} \eta_N(k) \right) \left[\frac{1}{1 - 2\bar{\lambda}_k/k^2} - \frac{1}{1 - 2\alpha\bar{\lambda}_k/k^2} \right] \right\}. \end{aligned} \quad (3.22)$$

Hier stellen Φ_n^p und $\tilde{\Phi}_n^p$ Cutoff-abhängige ‘‘Schwellenfunktionen’’ dar, die wie folgt definiert sind:

$$\begin{aligned} \Phi_n^p(w) &\equiv \begin{cases} \frac{1}{\Gamma(n)} \int_0^\infty dy y^{n-1} \frac{R^{(0)}(y) - yR^{(0)'(y)}}{(y+R^{(0)}(y)+w)^p}, & n > 0 \\ (1+w)^{-p}, & n = 0 \end{cases}, \\ \tilde{\Phi}_n^p(w) &\equiv \begin{cases} \frac{1}{\Gamma(n)} \int_0^\infty dy y^{n-1} \frac{R^{(0)}(y)}{(y+R^{(0)}(y)+w)^p}, & n > 0 \\ (1+w)^{-p}, & n = 0 \end{cases}. \end{aligned} \quad (3.23)$$

Weiterhin sind die d - und α -abhängigen Koeffizienten c_i durch die nachstehenden Ausdrücke festgelegt:

$$\begin{aligned} c_1(d) &\equiv \frac{d^3 - 2d^2 - 11d - 12}{12(d-1)}, & c_2(d) &\equiv \frac{d^2 - 6}{6d}, & c_3(d) &\equiv -\frac{d^3 - 4d^2 + 7d - 8}{2(d-1)}, \\ c_4(d, \alpha) &\equiv -\frac{\alpha d(d-2) - d - 1}{d}, & c_5(d) &\equiv -\frac{2(d+1)}{d}. \end{aligned} \quad (3.24)$$

Natürlich taucht in dem obigen Differentialgleichungssystem der zu $\delta_{d,2}$ proportionale Term aus Gleichung (3.20) wieder auf. Dieser alleine ist aber nicht für den vollständigen $\delta_{d,2}$ -Term in (3.22) verantwortlich. Vielmehr enthält der zuletzt genannte Term zusätzliche Anteile, die zwei weiteren Quellen entstammen. Zum einen ergeben sich derartige Beiträge aus den mit Strichen versehenen Spuren. Sie kommen im einzelnen dadurch zustande, daß von den vollständigen Spuren die Beiträge von den unphysikalischen Moden explizit abgezogen werden. Diese Subtraktionsterme stellen Funktionen von R dar, die wir hier allgemein mit $f(R)$ bezeichnen wollen. Durch Entwickeln dieser Funktionen $f(R)$ kann man diejenigen Anteile extrahieren, die in dem jeweiligen trunkierten Parameterbereich einen Beitrag liefern. Im Fall der Einstein-Hilbert-Trunkierung tragen nur die Terme nullter Ordnung $f(0)$ bei. Weitere Details hierzu kann man Anhang C entnehmen. Zum anderen sorgen die Heat-Kernel-Koeffizienten für Felder mit differentiellen Nebenbedingungen, welche in Anhang F berechnet werden, in Gleichung (3.22) für zusätzliche Terme $\propto \delta_{d,2}$.

Von besonderem Interesse ist sicherlich die Gestalt der Differentialgleichungen (3.21) und (3.22) in $d = 4$ Dimensionen. In Anhang D befassen wir uns mit diesem Fall und vergleichen unsere Resultate für $\mathcal{S}_k(R)$ und für den Renormierungsgruppenfluß von $\bar{\lambda}_k$ und Z_{Nk} mit denjenigen aus [30]. Letztere basieren ebenso wie unsere auf der Verwendung eines Cutoffs vom Typ B.

3.4 Das Flußgleichungssystem für g_k und λ_k

Der nächste Schritt besteht darin, die Flußgleichungen (3.21) und (3.22) auf dimensionslose Variablen umzuschreiben. Zu diesem Zweck führen wir die dimensionslose, laufende Newton-Konstante

$$g_k \equiv k^{d-2} G_k \equiv k^{d-2} Z_{Nk}^{-1} \bar{G} \quad (3.25)$$

und die dimensionslose, laufende kosmologische Konstante

$$\lambda_k \equiv k^{-2} \bar{\lambda}_k \quad (3.26)$$

ein, wobei G_k dementsprechend die dimensionsbehaftete, laufende Newton-Konstante bezeichnet. Setzt man (3.26) in $\partial_t(Z_{Nk}\bar{\lambda}_k)$ ein, so ergibt sich die Beziehung

$$\partial_t \lambda_k = -(2 - \eta_N(k)) \lambda_k + 32\pi g_k \kappa^2 k^{-d} \partial_t (Z_{Nk}\bar{\lambda}_k) . \quad (3.27)$$

Unter Verwendung der Differentialgleichung (3.21) erhält man dann aus (3.27) die folgende Differentialgleichung für die dimensionslose kosmologische Konstante:

$$\partial_t \lambda_k = \beta_\lambda(\lambda_k, g_k; \alpha, d) \equiv A_1(\lambda_k, g_k; \alpha, d) + \eta_N(k) A_2(\lambda_k, g_k; \alpha, d) . \quad (3.28)$$

Die obige β -Funktion β_λ enthält die Größen A_1 und A_2 , die wie folgt definiert sind:

$$\begin{aligned} A_1(\lambda_k, g_k; \alpha, d) \equiv & -2\lambda_k + (4\pi)^{1-d/2} g_k \left\{ d(d-1) \Phi_{d/2}^1(-2\lambda_k) \right. \\ & \left. + 2d \Phi_{d/2}^1(-2\alpha\lambda_k) - 4d \Phi_{d/2}^1(0) \right\} , \end{aligned} \quad (3.29)$$

$$A_2(\lambda_k, g_k; \alpha, d) \equiv \lambda_k - (4\pi)^{1-d/2} g_k \left\{ \frac{1}{2} d(d-1) \tilde{\Phi}_{d/2}^1(-2\lambda_k) + d \tilde{\Phi}_{d/2}^1(-2\alpha\lambda_k) \right\} .$$

Die entsprechende β -Funktion für g_k läßt sich ebenso leicht bestimmen. Durch bloßes Ableiten von (3.25) nach k erhält man

$$\partial_t g_k = \beta_g(\lambda_k, g_k; \alpha, d) \equiv [d - 2 + \eta_N(k)] g_k . \quad (3.30)$$

Für die anomale Dimension η_N ergibt sich aus (3.22) zunächst der Ausdruck

$$\eta_N(k) = g_k B_1(\lambda_k; \alpha, d) + \eta_N(k) g_k B_2(\lambda_k; \alpha, d) . \quad (3.31)$$

Hier stellen B_1 und B_2 Funktionen von λ_k , d und α dar, die wie folgt definiert sind:

$$\begin{aligned} B_1(\lambda_k; \alpha, d) \equiv & 4(4\pi)^{1-d/2} \left\{ c_1(d) \Phi_{d/2-1}^1(-2\lambda_k) + c_2(d) \Phi_{d/2-1}^1(-2\alpha\lambda_k) \right. \\ & + c_3(d) \Phi_{d/2}^2(-2\lambda_k) + c_4(d, \alpha) \Phi_{d/2}^2(-2\alpha\lambda_k) - 2c_2(d) \Phi_{d/2-1}^1(0) \\ & \left. + c_5(d) \Phi_{d/2}^2(0) + 3\delta_{d,2} \left[\frac{1}{1-2\lambda_k} - \frac{1}{1-2\alpha\lambda_k} \right] \right\} , \\ B_2(\lambda_k; \alpha, d) \equiv & -2(4\pi)^{1-d/2} \left\{ c_1(d) \tilde{\Phi}_{d/2-1}^1(-2\lambda_k) + c_2(d) \tilde{\Phi}_{d/2-1}^1(-2\alpha\lambda_k) \right. \\ & + c_3(d) \tilde{\Phi}_{d/2}^2(-2\lambda_k) + c_4(d, \alpha) \tilde{\Phi}_{d/2}^2(-2\alpha\lambda_k) \\ & \left. + 3\delta_{d,2} \left[\frac{1}{1-2\lambda_k} - \frac{1}{1-2\alpha\lambda_k} \right] \right\} . \end{aligned} \quad (3.32)$$

Löst man nun (3.31) nach der anomalen Dimension auf, so erhält man einen von λ_k , g_k , α und d abhängigen Ausdruck für η_N , und zwar

$$\eta_N(k) = \frac{g_k B_1(\lambda_k; \alpha, d)}{1 - g_k B_2(\lambda_k; \alpha, d)} . \quad (3.33)$$

Das durch (3.28) und (3.30) gegebene gekoppelte Differentialgleichungssystem ist das Hauptresultat dieses Kapitels. Es stellt das Herzstück der im nächsten Kapitel anstehenden Fixpunktanalyse dar.

3.5 Vergleich der Cutoffs A und B

Zum ersten Mal wurden in [12] Flußgleichungen für die Einstein-Hilbert-Trunkierung hergeleitet. Dort beschränken sich die Betrachtungen auf den Fall $\alpha = 1$, und außerdem wird darin ein Cutoff vom Typ A verwendet. Dieser besitzt eine andere Struktur als der vom Typ B, welcher in der vorliegenden Arbeit benutzt wird. Beim Typ A ist das Funktional $\Delta_k S$ im wesentlichen auf der Grundlage des *vollständigen* Feldes $h_{\mu\nu}$ formuliert, es ist also, symbolisch geschrieben, von der Form $\Delta_k S \propto \int h_{\mu\nu} \mathcal{R}_k h^{\mu\nu}$. Das $\Delta_k S$ vom Typ B hat zwar prinzipiell eine ähnliche Form, ist aber derart konstruiert, daß die einzelnen Komponentenfelder von $h_{\mu\nu}$ individuell unterdrückt werden, d.h. $\Delta_k S \propto \int h_{\mu\nu}^T(\mathcal{R}_k)_{h^T h^T} h^{T\mu\nu} + \int \xi_\mu(\mathcal{R}_k)_{\xi\xi} \xi^\mu + \dots$.

Die β -Funktion β_λ aus Gleichung (3.28) stimmt für $\alpha = 1$ vollkommen mit dem entsprechenden Resultat in [12] überein, wohingegen die Koeffizienten B_1 und B_2 in der β -Funktion β_g aus Gleichung (3.30) sich für $\alpha = 1$ von den entsprechenden Größen in [12] unterscheiden. Ihre allgemeine Struktur ist jedoch unabhängig vom Cutoff. Sowohl im Fall des Typs A als auch im Fall des Typs B erhält man

$$B_1(\lambda_k; \alpha = 1, d) = \frac{1}{3}(4\pi)^{1-d/2} k^{d-2} \left\{ e_1(d) \Phi_{d/2-1}^1(-2\lambda_k) + e_2(d) \Phi_{d/2}^2(-2\lambda_k) + e_3(d) \Phi_{d/2-1}^1(0) + e_4(d) \Phi_{d/2}^2(0) \right\}, \quad (3.34)$$

$$B_2(\lambda_k; \alpha = 1, d) = -\frac{1}{6}(4\pi)^{1-d/2} k^{d-2} \left\{ e_1(d) \tilde{\Phi}_{d/2-1}^1(-2\lambda_k) + e_2(d) \tilde{\Phi}_{d/2}^2(-2\lambda_k) \right\}.$$

In der vorliegenden Arbeit, also bei Verwendung des Cutoffs B, ergeben sich für die Koeffizienten e_i die Ausdrücke

$$\begin{aligned} e_1(d) &= \frac{d^4 - 13d^2 - 24d + 12}{d(d-1)}, \quad e_2(d) = -6 \frac{d^4 - 2d^3 - d^2 - 4d + 2}{d(d-1)}, \\ e_3(d) &= -4 \frac{d^2 - 6}{d}, \quad e_4(d) = -24 \frac{d+1}{d}, \end{aligned} \quad (3.35)$$

während sie in [12], also bei Benutzung des Cutoffs A, die folgende Form annehmen:

$$e_1(d) = d(d+1), \quad e_2(d) = -6d(d-1), \quad e_3(d) = -4d, \quad e_4(d) = -24. \quad (3.36)$$

Zieht man die Koeffizienten aus Gleichung (3.35) von den entsprechenden aus (3.36) ab, so erhält man $\Delta e_1 = -\Delta e_2 = 12(d^2 + 2d - 1)/(d(d - 1))$ und $\Delta e_3 = -\Delta e_4 = -24/d$. Erstaunlicherweise ist die Summe der Abweichungen Δe_i nicht nur im ganzen Null, sondern verschwindet auch separat für die reinen Gravitationsanteile, die e_1 und e_2 enthalten, und für die Anteile von den Geistern, die e_3 und e_4 umfassen. Es treten also gewissermaßen Verschiebungen sowohl zwischen dem $(p = 1, n = d/2 - 1)$ - und dem $(p = 2, n = d/2)$ -Gravitationssektor als auch zwischen den entsprechenden Geistsektoren auf. Vermutlich tritt dieses sonderbare Phänomen nicht zufällig auf, eine Erklärung dafür liegt aber noch nicht vor.

Kapitel 4

Die Fixpunkte im allgemeinen und in der Einstein-Hilbert-Trunkierung

4.1 Der Zusammenhang zwischen Fixpunkten, kritischen Exponenten und nichtperturbativer Renormierbarkeit

Aufgrund seiner komplizierten Struktur läßt sich das System von Flußgleichungen für g_k und λ_k , das sich aus (3.28) und (3.30) zusammensetzt, auf analytischem Wege nicht exakt lösen. Auch bei Anwendung numerischer Methoden kann man eine exakte Lösung nur unter gewissen Voraussetzungen, d.h. bei Verwendung bestimmter Profildfunktionen finden, siehe [14, 22].

An diesem Punkt stellt sich die Frage, wie man generell aus derart komplizierten β -Funktionen verläßliche Informationen über den Fluß der jeweiligen Kopplungen gewinnen kann. In solchen Fällen erweist es sich als äußerst hilfreich, die Fixpunktstruktur des Renormierungsgruppenflusses zu kennen. Untersucht man nämlich den linearisierten Fluß in der Umgebung von Fixpunkten, so läßt sich oftmals das bei sehr kleinen und/oder sehr großen Skalen vorliegende Verhalten der betrachteten Theorie vorhersagen. Bevor dies im Detail erklärt werden kann, ist es erforderlich (oder zumindest zweckmäßig), das in diesem Zusammenhang gebräuchliche Standardvokabular einzuführen und zu erläutern. Dazu gehen wir von einem nicht näher spezifizierten Satz von β -Funktionen aus, der zu einem beliebigen Satz von dimensionslosen, wesentlichen Kopplungen $g_i(k)$ gehört. Dabei sind wesentliche Kopplungen gerade diejenigen im Wirkungsfunktional auftretenden Kopplungen, welche unter Punkttransformationen der anwesenden Felder invariant sind. Außerdem erhält man die dimensionslosen Kopplungen, wie z.B. g_k und λ_k in (3.25) und

(3.26), aus den entsprechenden dimensionsbehafteten Größen, indem man letztere mit den passenden Potenzen der Cutoffskala k reskaliert.

Die Fixpunkte sind nun genau diejenigen Punkte mit Koordinaten g_{*i} in dem von den g_i aufgespannten Raum, bei denen alle β -Funktionen gleichzeitig verschwinden. Wenn ein Fixpunkt mit dem Koordinatenursprung zusammenfällt, also $g_{*i} = 0 \forall i$ gilt, dann bezeichnet man ihn als Gaußschen Fixpunkt. Alle anderen sind per definitionem nicht-Gaußsche Fixpunkte. Ferner lassen sich die Fixpunkte nach ihren Stabilitätseigenschaften klassifizieren. Letztere kann man ohne großen Aufwand aus den β -Funktionen bestimmen. Dazu ist es lediglich notwendig, diese um g_* zu linearisieren und das resultierende System von linearen Differentialgleichungen zu lösen. Die allgemeine Lösung wird durch die Eigenvektoren des linearisierten Flusses aufgespannt. Sie beschreiben die sogenannten “Eigenrichtungen” des linearisierten Systems, welche sich in folgende Klassen einordnen lassen: Eine vorgegebene Eigenrichtung bezeichnet man als UV attraktiv (oder stabil), wenn die Renormierungsgruppentrajektorien im Limes $k \rightarrow \infty$ entlang dieser Richtung vom Fixpunkt angezogen werden, und als IR attraktiv, falls ein analoges Verhalten der Trajektorien im Limes $k \rightarrow 0$ festzustellen ist. Dementsprechend sind die UV bzw. IR repulsiven Eigenrichtungen gerade diejenigen, in die der Fixpunkt in dem jeweiligen Limes abstoßend wirkt.

Der Vollständigkeit halber sei erwähnt, daß zur Klassifizierung der Eigenrichtungen häufig die alternativen Begriffe “relevant” und “irrelevant” verwendet werden. Generell sind die relevanten Eigenrichtungen als diejenigen definiert, entlang welcher sich die Trajektorien bei Verkleinerung der Skala k vom benachbarten Fixpunkt wegbewegen. Demzufolge entsprechen an einem UV Fixpunkt die relevanten den attraktiven Richtungen und die irrelevanten den repulsiven. An einem IR Fixpunkt kehren sich die Verhältnisse um. Dort sind die relevanten Richtungen gerade mit den repulsiven identisch und die irrelevanten mit den attraktiven.

Die Menge all derjenigen Trajektorien, die im Limes $k \rightarrow \infty$ ($k \rightarrow 0$) in den Fixpunkt g_* laufen, bildet eine Hyperfläche im Raum aller Kopplungen, die sogenannte UV (IR) kritische Hyperfläche \mathcal{S}_{UV} (\mathcal{S}_{IR}) von g_* . Ihre Dimensionalität $\Delta_{UV} \equiv \dim(\mathcal{S}_{UV})$ ($\Delta_{IR} \equiv \dim(\mathcal{S}_{IR})$) entspricht der Anzahl der UV attraktiven (IR attraktiven) Eigenrichtungen.

Im Rahmen der modernen Formulierung des Renormierungsprinzips im Sinne Wilsons [5] spielen Fixpunkte in der Quantenfeldtheorie eine überaus wichtige Rolle. Von besonderer Bedeutung sind hier die UV attraktiven Fixpunkte mit *endlichdimensionaler* Hyperfläche \mathcal{S}_{UV} . Denn bei Theorien, die durch Trajektorien beschrieben werden, welche auf derartigen Hyperflächen liegen, läßt sich der sogenannte Kontinuumslimes $k \rightarrow \infty$ bilden, ohne daß dabei i.a. unphysikalische Singularitäten auftreten. Sie besitzen auch bei fundamentaler Skala Vorhersagekraft, da sie nur von einer *endlichen* Anzahl freier (wesentlicher)

Parameter abhängen. In diesem Zusammenhang entscheidet also die Antwort auf die Frage nach der Existenz eines solchen Fixpunkts darüber, ob eine Theorie auf fundamentalem Niveau existiert oder nicht. Dies führt zu einer nichtperturbativen Verallgemeinerung des herkömmlichen (störungstheoretischen) Renormierbarkeitsbegriffs. Denn zum einen entspricht die Klasse derjenigen Theorien, die auf einer endlichdimensionalen UV kritischen Hyperfläche eines *Gaußschen* Fixpunkts $g_{*i} = 0$ liegen, im Grunde genommen der Klasse der störungstheoretisch renormierbaren Theorien. Zum anderen werden dadurch zusätzlich diejenigen störungstheoretisch nichtrenormierbaren Theorien abgedeckt, die auf einer entsprechenden Hyperfläche eines *nicht-Gaußschen* Fixpunkts $g_{*i} \neq 0$ liegen.

Was die Gravitation betrifft, so war es S. Weinberg, der als erster vorschlug, eine fundamentale Theorie der Gravitation auf der Grundlage eines nicht-Gaußschen Fixpunkts zu konstruieren, siehe [10]. Eine solche Theorie wäre, wie Weinberg es ausdrückt, “asymptotisch sicher”. Der Begriff “asymptotische Sicherheit” (kurz: AS) ist dabei als Synonym für nichtperturbative Renormierbarkeit in dem oben genannten Sinn aufzufassen.

Nachdem bis hierhin im wesentlichen qualitative Überlegungen zur Philosophie des Wilsonschen Renormierbarkeitsprinzips im Vordergrund standen, werden wir uns nun etwas näher mit seinen mathematischen Gesichtszügen beschäftigen. Zu diesem Zweck betrachten wir einen beliebigen Satz von n dimensionslosen wesentlichen Kopplungen $g(k) \equiv \{g_1(k), \dots, g_n(k)\}$. (In der Regel ist die Anzahl der möglichen Kopplungen n unendlich. Erst durch Trunkieren des Parameterraums ergibt sich ein endlicher Satz von Kopplungen.) Der Renormierungsgruppenfluß dieser Kopplungen läßt sich allgemein durch das System von Differentialgleichungen

$$k \partial_k g_i(k) = \beta_i(g) \tag{4.1}$$

ausdrücken. Wir nehmen nun an, daß g_* einen Fixpunkt von (4.1) darstellt, also $\beta_i(g_*) = 0$ für alle $i = 1, \dots, n$ erfüllt. Linearisiert man den durch (4.1) beschriebenen Renormierungsgruppenfluß um g_* , so ergibt sich

$$k \partial_k g_i(k) = \sum_{j=1}^n B_{ij} (g_j(k) - g_{*j}) . \tag{4.2}$$

Dabei stellen die $B_{ij} \equiv \partial_j \beta_i(g_*)$ die Einträge der sogenannten Stabilitätsmatrix $\mathbf{B} = (B_{ij})$ dar. Man diagonalisiert nun \mathbf{B} gemäß $S^{-1} \mathbf{B} S = -\text{diag}(\theta_1, \dots, \theta_n)$, $S = (V^1, \dots, V^n)$, wobei V^I den Rechtseigenvektor von \mathbf{B} zum Eigenwert $-\theta_I$ verkörpert. Somit gilt

$$\sum_{j=1}^n B_{ij} V_j^I = -\theta_I V_i^I , \quad I = 1, \dots, n . \tag{4.3}$$

Damit läßt sich jetzt die allgemeine Lösung zu (4.2) leicht angeben. Diese ist von der

Form

$$g_i(k) = g_{*i} + \sum_{I=1}^n C_I V_i^I \left(\frac{k_0}{k} \right)^{\theta_I} . \quad (4.4)$$

Hier stellt k_0 eine Bezugsskala dar, und die C_I verkörpern konstante Parameter, die in folgender Beziehung zu den Integrationskonstanten $g_i(k_0)$ stehen:

$$C_I \equiv \sum_{j=1}^n (S^{-1})_{Ij} g_j(k_0) . \quad (4.5)$$

Da \mathbf{B} im allgemeinen nicht symmetrisch ist, sind die θ_I nicht unbedingt reell.¹ Daher sind generell komplexe Integrationskonstanten $g_i(k_0)$ zu wählen, und man muß dann dementsprechend den Realteil von (4.4) nehmen, um die allgemeinste reelle Lösung zu erhalten.

Um zu erreichen, daß die Lösung $g_i(k)$ aus (4.4) im Kontinuumslimes $k \rightarrow \infty$ in den Fixpunkt läuft, muß man C_I für all diejenigen I gleich Null setzen, für welche $\text{Re } \theta_I < 0$ gilt. Folglich stimmt die Dimensionalität der UV kritischen Hyperfläche Δ_{UV} mit der Anzahl der Eigenwerte von \mathbf{B} mit negativem Realteil, also mit der Anzahl der θ_I mit positivem Realteil überein. (Setzt man umgekehrt alle C_I , die zu den θ_I mit positivem Realteil gehören, gleich Null, so wirkt der Fixpunkt IR attraktiv (d.h. attraktiv für $k \rightarrow 0$), und die Dimensionalität der entsprechende IR kritische Hyperfläche Δ_{IR} gleicht der Anzahl der θ_I mit negativem Realteil.) Im folgenden werden wir die θ_I *kritische Exponenten* nennen.

Nach dem oben beschriebenen “Ausschalten” der UV repulsiven Terme, also der Terme, welche die kritischen Exponenten mit negativem Realteil enthalten, verkörpert (4.4) die *komplette Klasse* von Trajektorien, die für $k \rightarrow \infty$ in den Fixpunkt laufen. Um eine Trajektorie aus dieser Klasse auszuwählen, muß man die Δ_{UV} noch freien Parameter C_J fixieren. Welche dieser Trajektorien physikalisch realisiert ist, ist jedoch durch die Theorie i.a. nicht vorherbestimmt.² Dementsprechend müssen die freien Parameter an die experimentell gefundenen Daten angepaßt werden. Je kleiner Δ_{UV} ist, um so “leichter” ist es somit, Vorhersagen über die physikalisch realisierte Theorie zu treffen. In jedem Fall sorgt ein endlicher Δ_{UV} -Wert dafür, daß die nach dem obigen Schema konstruierte Quantenfeldtheorie die gleiche Vorhersagekraft besitzt wie ein perturbativ renormierbares Modell mit Δ_{UV} “renormierbaren”³ Kopplungen. (Ist $g_* = 0$, so gehört die durch (4.1) definierte

¹Trotzdem gehen wir hier davon aus, daß die Eigenvektoren ein vollständiges System bilden.

²Ist allerdings auch das Verhalten im IR Limes $k \rightarrow 0$ durch einen Fixpunkt bestimmt, so kann sich die Zahl der Freiheitsgrade reduzieren. Denn man darf dann nur diejenigen Trajektorien auf \mathcal{S}_{UV} wählen, die nach dem Übergang von sehr großen zu sehr kleinen Skalen k schließlich auf der IR kritischen Hyperfläche \mathcal{S}_{IR} des IR Fixpunkts landen.

³Auf dem Niveau der dimensionsbehafteten Parameter sind die störungstheoretisch renormierbaren Kopplungen gerade diejenigen, die eine positive kanonische Dimension besitzen. Diese bezeichnet man dann gemeinhin als “power counting renormierbare” Kopplungen.

Theorie ohnehin schon zur Klasse der perturbativ renormierbaren Theorien.) In diesem Sinn sind beide Klassen von Modellen miteinander vergleichbar.

Interessanterweise existiert ein plausibles, aber mathematisch nicht sonderlich rigoroses Argument dafür, daß die Hyperfläche \mathcal{S}_{UV} in der Tat endlichdimensional ist. Angenommen, $\{G_1, G_2, \dots\}$ verkörpert einen (i.a. unendlichen) Satz von ursprünglichen, d.h. dimensionsbehafteten Kopplungen G_i mit kanonischen Dimensionen (Massendimensionen) d_i . Dann gehen die dimensionslosen Kopplungen g_i der Gleichung $g_i(k) = k^{-d_i}G_i(k)$ entsprechend aus den G_i hervor. Daraus folgt, daß die β -Funktionen und die Einträge der zugehörigen \mathbf{B} -Matrix von der Form $\beta_i = -d_i g_i + \dots$ bzw. $B_{ij} = -d_i \delta_{ij} + \dots$ sind, wobei die Punkte für die Loop-Beiträge stehen. Vernachlässigen wir diese, so gilt $\theta_i = d_i$. Betrachten wir ausschließlich lokale Wirkungen, so enthalten sämtliche in der Wirkung auftretenden Terme nur Monome von positiver kanonischer Dimension m_i , was zur Folge hat, daß es nur eine endliche Anzahl von positiven $d_i \equiv d - m_i$ geben kann. Wenn man einmal von der unrealistischen Möglichkeit absieht, daß die Loop-Beiträge die Vorzeichen von unendlich vielen Eigenwerten von \mathbf{B} ändern könnten, so ergibt sich aus dem obigen Zusammenhang zwischen θ_i und d_i , daß $\Delta_{UV} \equiv \dim(\mathcal{S}_{UV})$ tatsächlich endlich ist, vgl. [10].

Ein weiterer wichtiger Punkt, den es zu erörtern gilt, ist der Einfluß, den eine Veränderung des Cutoffschemas auf den Renormierungsgruppenfluß ausübt. Da das Pfadintegral, das Γ_k definiert, als wesentlichen Bestandteil den Cutoffterm $\Delta_k S$ enthält, sind die laufenden Kopplungen und somit auch ihre Fixpunktwerte offensichtlich von der Wahl des durch $\Delta_k S$ bzw. \mathcal{R}_k verkörperten Cutoffschemas abhängig. Folglich ruft eine Variation des Cutoffschemas, d.h. eine Veränderung von \mathcal{R}_k , eine Veränderung in der zugehörigen \mathbf{B} -Matrix hervor. Dies verleitet zu der Annahme, daß auch ihre Eigenwerte und somit die kritischen Exponenten vom Cutoffschema abhängig sind. Dies trifft jedoch nicht zu. Denn der allgemeinen Theorie der kritischen Phänomene und einer kürzlich im Rahmen der exakten Renormierungsgruppengleichungen durchgeführten Untersuchung [28] zufolge läßt sich jede Variation des Cutoffschemas durch eine Koordinatentransformation im Raum der Kopplungen erzeugen, bei welcher der Cutoff festgehalten wird. Solche Transformationen verändern die Eigenwerte der \mathbf{B} -Matrix nicht, was zur Folge hat, daß das kritische Verhalten in der Nähe eines jeden Fixpunkts *universell* ist, d.h., nicht vom Cutoffschema abhängt. Insgesamt ist somit zwar i.a. die Position eines Fixpunkts Schema-abhängig, jedoch seine An- oder Abwesenheit sowie die qualitative Struktur des Renormierungsgruppenflusses in seiner Nähe sind universelle Eigenschaften. Dabei ist aber zu beachten, daß dies strenggenommen nur für die *exakte* Theorie gilt. In der Regel werden die in einer exakten Theorie universellen Eigenschaften und Größen nämlich bei Trunkierungen des Parameterraums vom Cutoffschema abhängig. Diese induzierte Schema-Abhängigkeit hat aber durchaus ihren Nutzen, denn sie stellt ein natürliches Maß für die Qualität von

Trunkierungen dar. Demnach kann man nur solche Trunkierungen, die für alle zulässigen Cutoffoperatoren \mathcal{R}_k die gleiche Fixpunktstruktur liefern, als verlässlich ansehen.

Im Fall der Einstein-Hilbert-Trunkierung wird der Raum der dimensionslosen wesentlichen Kopplungen durch $g_1 = \lambda$ und $g_2 = g$ parametrisiert. Die in den beiden Flußgleichungen

$$\partial_t \lambda_k = \beta_\lambda(\lambda_k, g_k), \quad \partial_t g_k = \beta_g(\lambda_k, g_k) \quad (4.6)$$

auf tretenden β -Funktionen sind in (3.28) und (3.30) definiert. Eine detaillierte Untersuchung ergibt, daß sie einen Fixpunkt bei $(\lambda_*, g_*) = (0, 0)$ und einen bei $(\lambda_*, g_*) \neq (0, 0)$ aufweisen. Im nächsten Abschnitt werden wir uns mit den wesentlichen Eigenschaften des “trivialen” **Gaußschen Fixpunkt** $(\lambda_*, g_*) = (0, 0)$ beschäftigen, während der übernächste Abschnitt für eine genaue Analyse des **nicht-Gaußschen Fixpunkts** $(\lambda_*, g_*) \neq (0, 0)$ reserviert ist. Dort werden wir uns vornehmlich mit der Untersuchung der Schema-Abhängigkeit dieses Fixpunkts sowie verschiedener universeller Größen befassen. Dazu werden sowohl die oben hergeleiteten β -Funktionen vom Typ B als auch diejenigen aus den Arbeiten [12, 23, 24], die auf der Verwendung eines Cutoffs vom Typ A basieren, herangezogen. Darin werden jeweils die Familien von Profildfunktionen (2.8) oder (2.9) eingesetzt.

4.2 Der Gaußsche Fixpunkt in der Einstein-Hilbert-Trunkierung

In diesem Abschnitt werden die Eigenschaften des Gaußschen Fixpunkts $(\lambda_*, g_*) = (0, 0)$ untersucht. Um den Renormierungsgruppenfluß in seiner unmittelbaren Nähe zu bestimmen, entwickelt man zunächst die β -Funktionen in (3.28) und (3.30) um $\lambda_* = g_* = 0$, was zu den in (J.4) aufgeführten Ausdrücken führt, siehe Anhang J.1. Von den linearen Termen in (J.4) läßt sich dann die **B**-Matrix ablesen. Diese nimmt die folgende Form an:

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} -2 & \nu_d d \\ 0 & d - 2 \end{pmatrix}. \quad (4.7)$$

Dabei stellt ν_d einen d -abhängigen Parameter dar, der wie folgt definiert ist:

$$\nu_d \equiv (d - 3)(4\pi)^{1 - \frac{d}{2}} \Phi_{d/2}^1(0). \quad (4.8)$$

Durch Diagonalisieren der Matrix (4.7) ergeben sich die (offensichtlich universellen) kritischen Exponenten $\theta_1 = 2$ und $\theta_2 = 2 - d$. Die zugehörigen Eigenvektoren sind $V^1 = (1, 0)^T$ und $V^2 = (\nu_d, 1)^T$. Somit folgt in Verbindung mit Gleichung (4.4), daß die allgemeine

Lösung des linearisierten Gleichungssystems in diesem Fall die nachstehende Form annimmt:

$$\begin{aligned}\lambda_k &= (\lambda_{k_0} - \nu_d g_{k_0}) \left(\frac{k_0}{k}\right)^2 + \nu_d g_{k_0} \left(\frac{k}{k_0}\right)^{d-2}, \\ g_k &= g_{k_0} \left(\frac{k}{k_0}\right)^{d-2}.\end{aligned}\quad (4.9)$$

Da die entwickelte β -Funktion β_g aus (J.4) bis einschließlich zur zweiten Ordnung in den Kopplungen unabhängig von λ_k ist, läßt sich die in der Umgebung des Fixpunkts geltende Näherungslösung für g_k sogar bis zur nächsthöheren Ordnung bestimmen. Für die entsprechende dimensionsbehaftete Größe G_k ist diese verbesserte Lösung von der Form

$$G_k = G_{k_0} [1 - \omega_d(\alpha) G_{k_0} (k_0^{d-2} - k^{d-2})]^{-1}, \quad (4.10)$$

wobei

$$\begin{aligned}\omega_d(\alpha) \equiv -\frac{1}{d-2} B_1(0; \alpha, d) &= -2(4\pi)^{1-\frac{d}{2}} \left\{ \frac{(d+2)(d^3 - 6d^2 + 3d - 6)}{6d(d-1)(d-2)} \Phi_{d/2-1}^1(0) \right. \\ &\quad \left. - \left(\frac{d^4 - 4d^3 + 9d^2 - 8d - 2}{d(d-1)(d-2)} + 2\alpha \right) \Phi_{d/2}^2(0) \right\}\end{aligned}\quad (4.11)$$

einen d - und α -abhängigen Parameter verkörpert. Beschränkt man sich auf solche Skalen, die $k \ll |\omega_d(\alpha)G_{k_0}|^{-1/(d-2)}$ erfüllen, und benutzt $k_0 = 0$ als Referenzskala(, was nur bei den Trajektorien erlaubt ist, die auf der IR kritischen Hyperfläche des Fixpunkts liegen), dann resultiert aus (4.10) der Ausdruck

$$G_k = G_0 [1 - \omega_d(\alpha)G_0 k^{d-2} + \mathcal{O}(G_0^2 k^{2(d-2)})] . \quad (4.12)$$

Ferner ergibt sich aus (4.9) für die dimensionsbehaftete kosmologische Konstante:

$$\bar{\lambda}_k = \bar{\lambda}_{k_0} + \nu_d G_{k_0} (k^d - k_0^d) . \quad (4.13)$$

Vergleichen wir nun die obigen Ausdrücke mit den Resultaten aus der Originalarbeit [12], in der ein ähnliches Näherungsschema für die Berechnung von G_k und λ_k verwendet wurde. Die dort gefundenen Ausdrücke - das sind die Gleichungen (5.18) und (5.25) aus dieser Arbeit - beziehen sich auf den Fall $d = 4$, $\alpha = 1$. Sie stimmen mit den Ausdrücken, die sich in diesem Fall aus den Gleichungen (4.12) und (4.13) ergeben, nahezu überein. Die einzige Abweichung, die auftritt, ist ein leichter Unterschied zwischen den beiden Definitionen von ω_d , der durch die Verwendung verschiedener Cutoffs verursacht wird.

Kommen wir nun zur Analyse des um den Fixpunkt $(\lambda_*, g_*) = (0, 0)$ linearisierten Flusses. Da $\theta_1 = 2$ positiv ist, ist die durch den Eigenvektor V^1 festgelegte Eigenrichtung, welche hier mit der λ -Richtung identisch ist, IR repulsiv (und somit UV attraktiv), d.h., die Trajektorien in der Nähe des Fixpunkts werden im Limes $k \rightarrow 0$ von diesem abgestoßen (im Limes $k \rightarrow \infty$ von ihm angezogen). Das Vorzeichen von θ_2 (und somit auch die Stabilitätseigenschaft des Fixpunkts) hängt von der Dimensionalität d ab. Ist $d < 2$, so ist θ_2 positiv, was zur Folge hat, daß auch die V^2 -Eigenrichtung des Gaußschen Fixpunkts UV attraktiv ist. Somit werden in diesem Fall alle Trajektorien im λ - g -Raum, die in seinem Einzugsbereich liegen, für $k \rightarrow \infty$ vom Fixpunkt angezogen und enden schließlich dort. Ist hingegen $d > 2$, so erhält man einen negativen Wert für θ_2 . Demzufolge ist die V^2 -Eigenrichtung hier IR attraktiv (und UV repulsiv). In diesem Fall sind also sowohl die UV als auch die IR kritische Hyperfläche des Gaußschen Fixpunkts eindimensional, d.h. sie bestehen aus einer einzigen Trajektorie. Für genügend kleine Werte von k wird die IR kritische Trajektorie, die im Limes $k \rightarrow 0$ den Fixpunkt $(\lambda_*, g_*) = (0, 0)$ trifft, durch

$$\bar{\lambda}_k = \nu_d G_k k^d \iff \lambda_k = \nu_d g_k \quad (4.14)$$

beschrieben, siehe auch [14, 22]. Dabei ist G_k durch die Gleichung (4.12) festgelegt. Der Parameter ν_d wurde bereits weiter oben eingeführt. Er ist keine universelle Größe, da er den von $R^{(0)}$ abhängigen Parameter $\Phi_{d/2}^1(0)$ enthält. Folglich ist die durch ν_d bestimmte Steigung der ausgezeichneten Trajektorie (4.14) nicht in universeller Weise festgelegt. Dies war auch nicht anders zu erwarten, denn den Überlegungen des vorangegangenen Abschnitts entsprechend, müssen zwar die Eigenwerte der Stabilitätsmatrix \mathbf{B} universell sein, jedoch nicht ihre Eigenvektoren.

Die Gleichung (4.14) liefert genau die Bedingung für die sogenannte ‘‘Separatrix’’, die in [14, 22] im Rahmen der Einstein-Hilbert-Trunkierung in $d = 4$ Dimensionen gefunden wurde. In der in [14, 22] eingeführten Terminologie ausgedrückt, entspricht die Separatrix der Trajektorie vom ‘‘Typ IIa’’, die sich dadurch auszeichnet, daß sie zwischen dem Gaußschen und dem nicht-Gaußschen Fixpunkt der Einstein-Hilbert-Trunkierung interpoliert. Sie trennt den Bereich, in dem die Trajektorien mit divergierender kosmologischer Konstante $\lambda_{k \rightarrow 0} \rightarrow -\infty$ liegen (Typ Ia), von der Region mit Trajektorien, die bei irgendeinem endlichen k -Wert den Rand des Parameterraums treffen (Typ IIIa).⁴ (Der Rand des Parameterraums ist dabei durch den λ -Wert festgelegt, bei dem $\Phi_n^p(-2\lambda_k)$ und $\tilde{\Phi}_n^p(-2\lambda_k)$ für $\alpha \leq 1$ bzw. $\Phi_n^p(-2\alpha\lambda_k)$ und $\tilde{\Phi}_n^p(-2\alpha\lambda_k)$ für $\alpha > 1$ divergieren.)

Für die Separatrix, und nur für diese, gilt die Gleichung (4.12), die den Fluß von G_k beschreibt, für beliebig kleine Skalen bis hin zu $k = 0$. Das liegt daran, daß λ_k , und somit

⁴In Abschnitt 6.2 wird eine Abbildung mit den verschiedenen Trajektorientypen nachgereicht, siehe Abbildung 6.1(a).

auch g_k , sich nur in diesem Fall für hinreichend kleine k immer in der Nähe des Ursprungs aufhalten und daher die Entwicklung nicht zusammenbricht.

Betrachten wir den in G_k enthaltenen Parameter $\omega_d(\alpha)$ nun etwas genauer. Für $d \neq 2$ stellt $\omega_d(\alpha)$ keine universelle Größe dar, da die darin auftauchenden Parameter $\Phi_{d/2-1}^1(0)$ und $\Phi_{d/2}^2(0)$ in diesem Fall abhängig vom Cutoffschema sind. Außerdem weist ω_d zusätzlich eine Abhängigkeit vom Eichparameter α auf. Im Fall $d = 4$, welcher hier natürlich von besonderem Interesse ist, nimmt dieser Parameter die folgende Form an:

$$\omega_4(\alpha) = \frac{1}{24\pi} [13\Phi_1^1(0) + (55 + 24\alpha)\Phi_2^2(0)] . \quad (4.15)$$

Der obige Ausdruck besitzt bei $\alpha = \alpha_0 \equiv [-13\Phi_1^1(0)/\Phi_2^2(0) - 55]/24$ eine Nullstelle. Da sowohl $\Phi_1^1(0)$ als auch $\Phi_2^2(0)$ für jede zulässige Profilfunktion positive Werte annehmen, ist α_0 immer negativ. Weiterhin folgt damit aus Gleichung (4.15), daß ω_4 für alle $\alpha > \alpha_0$ positiv ist und für alle $\alpha < \alpha_0$ negativ. Identifiziert man nun die Einstein-Gravitation mit der Theorie, die durch die IR kritische Trajektorie des Gaußschen Fixpunkts beschrieben wird, so hat dies die folgenden Konsequenzen: Einerseits ergibt sich aus (4.12), daß die Gravitationskonstante G_k im IR Bereich für alle $\alpha > \alpha_0$ mit abnehmendem k , d.h. bei Vergrößerung des Abstandes, zunimmt. In diesem Fall wäre die Gravitation im IR Limes also ein mit zunehmender Längenskala anwachsender Effekt (“antiscreening”). Andererseits besagt (4.12), daß sie im IR Bereich für alle $\alpha < \alpha_0$ einen mit wachsender Längenskala abnehmenden Effekt (“screening”) verkörpert, da in diesem Fall G_k mit abnehmendem k abfällt. Welcher dieser beiden gegensätzlichen Mechanismen ist nun tatsächlich physikalische Realität? Diese Frage läßt sich hier nicht mit absoluter Sicherheit beantworten, aber zumindest existiert ein schlagkräftiges Argument, welches die erste der beiden Möglichkeiten favorisiert: Wie bereits in Abschnitt 3.1 erläutert wurde, stellt der Eichparameter bei exakter Behandlung der Theorie eine Skalen-abhängige Größe dar, die im Limes $k \rightarrow 0$ gegen den Fixpunktwert $\alpha_* = 0$ läuft. Setzt man in Einklang damit von vornherein $\alpha = 0$, so ergibt sich wegen $\alpha_0 < 0$ das bei $\alpha > \alpha_0$ vorliegende Verhalten (“antiscreening”).

Dieses Ergebnis basiert auf der Verwendung des Cutoffs vom Typ B. Eine entsprechende Analyse auf der Grundlage des Cutoffs vom Typ A wird in [23] durchgeführt. Das dort gefundene Verhalten von G_k ist demjenigen, welches oben ermittelt wurde, sehr ähnlich. Leichte Unterschiede treten lediglich zwischen den jeweiligen Definitionen der Parameter ω_4 und α_0 auf, die somit keine universellen Größen verkörpern. Im Fall des Cutoffs A ergibt sich für $\omega_4 \equiv \omega_4^{(A)}$ der folgende Ausdruck, siehe [23]:

$$\omega_4^{(A)}(\alpha) = \frac{1}{6\pi} [(18 + 6\alpha)\Phi_2^2(0) - \Phi_1^1(0)] . \quad (4.16)$$

Demzufolge erhält man hier $\alpha_0 = [\Phi_1^1(0)/\Phi_2^2(0) - 18]/6$. Im Gegensatz dazu ist ν_4 für beide Cutofftypen gleich. Wählt man die Eichung $\alpha = 1$, so vereinfacht sich (4.16) zu

$\omega_4^{(A)}(\alpha = 1) = [24\Phi_2^2(0) - \Phi_1^1(0)] / (6\pi)$, was mit dem Resultat aus der Originalarbeit [12] übereinstimmt. Das war auch nicht anders zu erwarten, da für $\alpha = 1$ der Cutofftyp A mit dem in [12] verwendeten Cutoff zusammenfällt. Um dieses Resultat mit dem entsprechenden vom Cutoff B vergleichen zu können, setzt man nun in (4.15) $\alpha = 1$ ein, was zu $\omega_4^{(B)}(\alpha = 1) = [13\Phi_1^1(0) + 79\Phi_2^2(0)] / (24\pi)$ führt. Bei Benutzung der exponentiellen Profilkfunktion $R^{(0)}$ mit $s = 1$ ergibt sich $\Phi_1^1(0) = \pi^2/6$ und $\Phi_2^2(0) = 1$ (siehe Anhang K), so daß man im Fall des Cutoffs B $\omega_4^{(B)}(\alpha = 1) \approx 1.33$ erhält. Dieser Wert liegt sehr nahe bei dem Wert, der sich im Fall des Cutoffs A bei Verwendung derselben Profilkfunktion ergibt: $\omega_4^{(A)}(\alpha = 1) \approx 1.19$, siehe [12, 23]. Weiterhin gilt bei Benutzung dieser Profilkfunktion die Beziehung $\Phi_2^1(0) = 2\zeta(3)$, wobei ζ die Riemannsche Zeta-Funktion bezeichnet. Daraus resultiert $\nu_4 \approx 0.19$ sowohl im Fall des Cutoffs A als auch im Fall des Cutoffs B.

4.3 Der nicht-Gaußsche Fixpunkt in der Einstein-Hilbert-Trunkierung

Wenden wir uns nun den nichttrivialen Nullstellen des Satzes von β -Funktionen $\{\beta_\lambda, \beta_g\}$ zu, welche durch (3.28) und (3.30) definiert sind. Aus diesen Gleichungen folgt unmittelbar, daß solche nicht-Gaußschen Fixpunkte $(\lambda_*, g_*) \neq (0, 0)$ notwendigerweise die Bedingung

$$\eta_{N^*} = 2 - d \tag{4.17}$$

erfüllen.

4.3.1 Der $2 + \varepsilon$ -dimensionale Fall

Um uns mit nicht-Gaußschen Fixpunkten vertraut zu machen, untersuchen wir zunächst den relativ leicht zu handhabenden Fall von $d = 2 + \varepsilon$ Dimensionen mit $0 < |\varepsilon| \ll 1$. Dieser ist einer analytischen Betrachtung zugänglich, was bereits in den Arbeiten [10, 12, 53, 54, 55] dazu ausgenutzt wurde, die Existenz eines nicht-Gaußschen Fixpunkts in der $2 + \varepsilon$ -dimensionalen (trunkierten) Theorie zu beweisen. Im folgenden wird dieser Fixpunkt reproduziert und der Renormierungsgruppenfluß in seiner unmittelbaren Nähe untersucht.

In $2 + \varepsilon$ Dimensionen nimmt die notwendige Bedingung (4.17) die Form $\eta_{N^*} = -\varepsilon$ an, wobei η_{N^*} der Gleichung (3.33) zufolge durch den nachstehenden Ausdruck bestimmt ist:

$$\eta_{N^*} = \frac{g_*(\varepsilon) B_1(\lambda_*(\varepsilon); \alpha, 2 + \varepsilon)}{1 - g_*(\varepsilon) B_2(\lambda_*(\varepsilon); \alpha, 2 + \varepsilon)} . \tag{4.18}$$

Diese Gleichung löst man nun nach $g_*(\varepsilon)$ auf und entwickelt das Resultat nach ε , was zu

$$g_*(\varepsilon) = - [B_1(\lambda_*(0); \alpha, 2)]^{-1} \varepsilon + \mathcal{O}(\varepsilon^2) \tag{4.19}$$

führt. Im Anschluß daran entwickelt man die linke Seite der zweiten Fixpunktbedingung $\beta_\lambda(\lambda_*(\varepsilon), g_*(\varepsilon); \alpha, 2 + \varepsilon) = 0$ nach ε und führt einen Koeffizientenvergleich hinsichtlich der Potenzen von ε durch. Auf diese Weise ergibt sich

$$\lambda_*(\varepsilon) = [B_1(0; \alpha, 2)]^{-1} \Phi_1^1(0) \varepsilon + \mathcal{O}(\varepsilon^2) . \quad (4.20)$$

Insbesondere erhält man $\lambda_*(0) = 0$, so daß sich der Ausdruck aus Gleichung (4.19) zu $g_*(\varepsilon) = -[B_1(0; \alpha, 2)]^{-1} \varepsilon + \mathcal{O}(\varepsilon^2)$ vereinfacht.

Um die Parameter $B_i(0; \alpha, 2)$, $i = 1, 2$, zu bestimmen, entwickelt man die Koeffizientenfunktionen $B_i(\lambda_k; \alpha, 2 + \varepsilon)$ zunächst gemäß $B_i(\lambda_k; \alpha, 2 + \varepsilon) = B_i^{(0)}(\lambda_k; \alpha) + B_i^{(1)}(\lambda_k; \alpha)\varepsilon + \mathcal{O}(\varepsilon^2)$ nach ε . Für die Terme nullter Ordnung ergeben sich dabei die folgenden Ausdrücke:

$$\begin{aligned} B_1^{(0)}(\lambda_k; \alpha) &= -\frac{34}{3} (1 - 2\lambda_k)^{-1} - \frac{2}{3} (1 - 2\alpha\lambda_k)^{-1} + 4\Phi_1^2(-2\lambda_k) + 6\Phi_1^2(-2\alpha\lambda_k) - \frac{32}{3} , \\ B_2^{(0)}(\lambda_k; \alpha) &= \frac{17}{3} (1 - 2\lambda_k)^{-1} + \frac{1}{3} (1 - 2\alpha\lambda_k)^{-1} - 2\tilde{\Phi}_1^2(-2\lambda_k) - 3\tilde{\Phi}_1^2(-2\alpha\lambda_k) . \end{aligned} \quad (4.21)$$

Setzt man nun in (4.21) $\lambda_k = 0$ ein und verwendet, daß $\Phi_1^2(0) = 1$ ein von $R^{(0)}$ unabhängiger und somit universeller Parameter ist, vgl. [12], so erhält man schließlich

$$\begin{aligned} B_1(0; \alpha, 2) &= B_1^{(0)}(0; \alpha) = -\frac{38}{3} , \\ B_2(0; \alpha, 2) &= B_2^{(0)}(0; \alpha) = 6 - 5\tilde{\Phi}_1^2(0) . \end{aligned} \quad (4.22)$$

Offensichtlich verkörpert $B_1^{(0)}(0; \alpha)$ eine universelle Größe. Im Gegensatz dazu hängt $B_2^{(0)}(0; \alpha)$ über den (nichtuniversellen) Parameter $\tilde{\Phi}_1^2(0)$ von der Form von $R^{(0)}$ ab. Letzteres spielt hier aber keine Rolle, da $\lambda_*(\varepsilon)$ und $g_*(\varepsilon)$ ihrerseits in führender Ordnung unabhängig von $B_2^{(0)}(0; \alpha)$ sind, wie man direkt von den Gleichungen (4.19) und (4.20) ablesen kann. Setzt man in diese jetzt $B_1^{(0)}(0; \alpha) = -38/3$ ein, so ergibt sich

$$\begin{aligned} \lambda_*(\varepsilon) &= -\frac{3}{38} \Phi_1^1(0) \varepsilon + \mathcal{O}(\varepsilon^2) , \\ g_*(\varepsilon) &= \frac{3}{38} \varepsilon + \mathcal{O}(\varepsilon^2) . \end{aligned} \quad (4.23)$$

Obwohl $B_2^{(0)}(0; \alpha)$ hier keinen Einfluß ausübt, ist der führende Term von $\lambda_*(\varepsilon)$ dennoch nichtuniversell. Das liegt daran, daß er den $R^{(0)}$ -abhängigen Parameter $\Phi_1^1(0)$ enthält. Bei $g_*(\varepsilon)$ ist dies nicht der Fall. Hier kommt dem führenden Term tatsächlich eine universelle Bedeutung zu.

Kommen wir nun zur Analyse des Renormierungsgruppenflusses, der sich in der Umgebung des Fixpunkts (4.23) abspielt. Aus den um diesen Fixpunkt entwickelten β -Funktionen resultiert die folgende Stabilitätsmatrix \mathbf{B} :

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} -2 + \frac{12\alpha-13}{19} \varepsilon + \mathcal{O}(\varepsilon^2) & -2\Phi_1^1(0) + \mathcal{O}(\varepsilon) \\ \mathcal{O}(\varepsilon^2) & -\varepsilon + \mathcal{O}(\varepsilon^2) \end{pmatrix} . \quad (4.24)$$

Durch Diagonalisieren von (4.24) erhält man die kritischen Exponenten $\theta_1 = 2 - \frac{12\alpha-13}{19} \varepsilon + \mathcal{O}(\varepsilon^2)$ und $\theta_2 = \varepsilon + \mathcal{O}(\varepsilon^2)$. θ_1 und θ_2 sind bis auf Terme von zweiter und höherer Ordnung in ε unabhängig vom Cutoffschema. θ_1 hängt jedoch noch vom Eichparameter ab. Im Fall $\alpha = 1$ stimmen die kritischen Exponenten mit denjenigen überein, die sich aus den in [12] hergeleiteten β -Funktionen ergeben. Letztere basieren auf der Verwendung eines Cutoffs vom Typ A. Wir können somit zusammenfassend konstatieren, daß die kritischen Exponenten in niedrigster Ordnung in der Tat *für beide Cutofftypen A und B identisch und außerdem unabhängig von der Profildfunktion $R^{(0)}$ sind*. Gemäß den Erörterungen des vorangegangenen Abschnitts ist dies ein starkes Indiz dafür, daß der Fixpunkt aller Wahrscheinlichkeit nach kein Produkt der Trunkierung darstellt, sondern auch in der exakten Theorie vorhanden sein sollte.

Wenn wir uns auf positive Werte von ε beschränken, dann sind beide kritischen Exponenten positiv. Folglich wirkt der nicht-Gaußsche Fixpunkt (4.23) in diesem Fall auf alle Trajektorien in seinem Einzugsbereich UV attraktiv, so daß - zumindest im trunkierten Parameterraum - alle Bedingungen für die Ingangsetzung des AS Szenarios erfüllt sind. Als nächstes müßte man überprüfen, ob sich dieses Resultat bestätigt und sich die Vorhersagen stabilisieren, wenn man den Trunkierungsansatz um Terme von höheren Potenzen des Krümmungstensors erweitert. Von besonderem Interesse ist hier die Dimensionalität der UV kritischen Hyperfläche Δ_{UV} . Diese sollte bei sukzessiver Erweiterung des Trunkierungsansatzes irgendwann nicht mehr ansteigen, da andernfalls die *exakte* Theorie zumindest bei genügend großen Skalen k ihre Vorhersagekraft einbüßen würde. Auf diesen Punkt werden wir in Kapitel 6 im Rahmen einer verallgemeinerten Trunkierung näher eingehen.

4.3.2 Die Position des Fixpunkts im $d = 4$ -dimensionalen Fall

Was den nicht-Gaußschen Fixpunkt der Einstein-Hilbert-Trunkierung im $d = 4$ -dimensionalen Fall betrifft, so wurde dieser zum ersten Mal von W. Souma in [21] unter Verwendung eines Cutoffs vom Typ A diskutiert. Derselbe Autor untersuchte zudem in [24] die α - und $R^{(0)}$ -Abhängigkeit seiner Projektion $(0, g_*)$ auf die g -Richtung. Da aber, wie oben bereits erwähnt wurde, der Cutoff A im Fall $\alpha \neq 1$ lediglich durch eine ad hoc vorgenommene Modifizierung der Standard-Ein-Loop-Determinanten realisiert wird, ist es unklar, ob er durch einen entsprechenden Cutoffterm $\Delta_k S$ ausgedrückt werden kann. Nur im Fall $\alpha = 1$ ist dies sichergestellt, siehe [12]. Die Formulierung von $\Delta_k S$ ist jedoch für die Konstruktion von Γ_k unerlässlich. Aufgrund dessen und wegen der Unsicherheiten, die durch das Trunkieren verursacht werden, ist nicht von vornherein klar, inwieweit die in [24] erzielten Ergebnisse verlässlich sind. Um dies zu überprüfen, werden im folgenden der Fixpunkt und seine Eigenschaften unter Benutzung eines anderen Cutoffs, und zwar des Cutoffs

vom Typ B bestimmt. Für diesen existiert ein Cutoffterm $\Delta_k S$, siehe Abschnitt 1.5, so daß die daraus folgenden Ergebnisse zumindest in dieser Hinsicht verläßlich sind. Durch Vergleich dieser Ergebnisse mit den entsprechenden Resultaten vom Typ A läßt sich dann insgesamt die Verläßlichkeit der Einstein-Hilbert-Trunkierung beurteilen.

Beginnen wir zunächst damit, so viele Informationen über die Position des nicht-Gaußschen Fixpunkts wie möglich auf *analytischem* Wege zu sammeln. Dazu sind allerdings Näherungen erforderlich. In einer ersten Näherung vernachlässigen wir die kosmologische Konstante und setzen dementsprechend $\lambda_k = \lambda_* = 0$. Dadurch wird der Renormierungsgruppenfluß auf den eindimensionalen Raum projiziert, der durch g parametrisiert wird. In diesem Fall ergibt sich die Position des nicht-Gaußschen Fixpunkts aus der nicht-trivialen Lösung von $\beta_g(0, g_*; \alpha, d) = 0$. Sie wird in Anhang J.1 berechnet, wobei sich das Resultat aus Gleichung (J.2) ergibt. Um einen ersten Eindruck von der Position des Fixpunkts g_* zu gewinnen, setzt man beispielsweise die exponentielle Profilfunktion mit $s = 1$ in (J.2) ein und setzt $d = 4$ und $\alpha = 1$. Daraus folgt $g_* \approx 0.590$.

Unter der Annahme, daß im Falle des kombinierten λ - g -Systems die Zahlenwerte sowohl für g_* als auch für λ_* von derselben Größenordnung sind wie der obige g_* -Wert, entwickeln wir nun die β -Funktionen um $(\lambda_k, g_k) = (0, 0)$ und vernachlässigen Terme von höherer Ordnung in den Kopplungen. Aus dem daraus resultierenden System von Differentialgleichungen wird dann die Position des nicht-Gaußschen Fixpunkts bestimmt. Die zugehörigen Rechnungen finden sich abermals in Anhang J.1. Benutzt man wie oben die Profilfunktion (2.7) und setzt $d = 4$ und $\alpha = 1$, so erhält man in diesem Fall $(\lambda_*, g_*) \approx (0.287, 0.751)$.

Will man die *exakte*⁵ Position des nicht-Gaußschen Fixpunkts (λ_*, g_*) ermitteln, so ist man gezwungen, auf numerische Methoden zurückzugreifen. Das Programm, das hierfür benutzt wurde, arbeitet wie folgt: Man gibt zunächst einen Startwert für die Fixpunktkoordinaten vor, beispielsweise eine der oben bestimmten Näherungslösungen. Ausgehend von diesem Startwert bestimmt das Programm auf iterativem Wege eine numerische Lösung, die bis zu einem beliebig wählbaren Genauigkeitsgrad exakt ist. Unter denselben Voraussetzungen wie oben, d.h. Verwendung von (2.8) mit $s = 1$ und Betrachtung des Falls $d = 4$, ergibt sich damit

$$(\lambda_*, g_*) = \begin{cases} (0.348, 0.272) & \text{für } \alpha = 1 \\ (0.339, 0.344) & \text{für } \alpha = 0 \end{cases} \quad (4.25)$$

Als nächstes wollen wir die Abhängigkeit des nicht-Gaußschen Fixpunkts von der Eichung und vom Cutoffschema studieren. Letztere testen wir, indem wir für $R^{(0)}$ die Familie von exponentiellen Profilfunktionen (2.8) einsetzen und die auf diese Weise eingeführte Abhängigkeit von dem Parameter s betrachten, welcher diese Familie parametrisiert.

⁵“Exakt” heißt hier “exakt im Rahmen der Einstein-Hilbert-Trunkierung”.

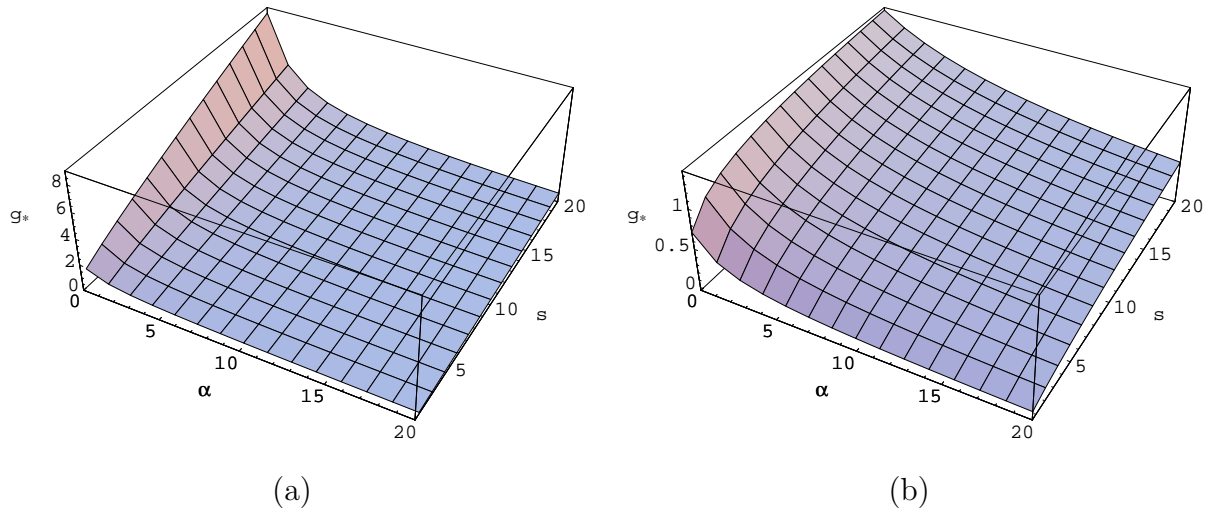


Abbildung 4.1: g_* als Funktion von s und α auf der Grundlage der Näherung $\lambda_k = \lambda_* = 0$. Hierfür wurden (a) der Cutofftyp A und (b) der Cutofftyp B in Verbindung mit der Familie von exponentiellen Profildfunktionen (2.8) benutzt.

Abbildung 4.1 zeigt die Funktion $g_*(\alpha, s)$, die sich aus der anfangs durchgeführten Näherung $\lambda_k = \lambda_* = 0$ ergibt, wohingegen die Abbildungen 4.2 und 4.3 die (exakten) Funktionen $g_*(\alpha, s)$ und $\lambda_*(\alpha, s)$ wiedergeben, welche aus dem kombinierten λ - g -System resultieren. In jeder dieser Abbildungen zeigt der Graph auf der linken Seite (d.h. Abb. 4.1-4.3(a)) die Resultate, die sich mit dem Cutofftyp A ergeben, während der Graph auf der rechten Seite (d.h. Abb. 4.1-4.3(b)) die Ergebnisse widerspiegelt, die auf der Verwendung des Cutoffs B basieren.

Die anhand dieser Graphen illustrierten Ergebnisse weisen die Existenz des nicht-Gaußschen Fixpunkts für einen weiten Bereich von α - und s -Werten nach. Wie erwartet, stellt sich heraus, daß die Position des Fixpunkts vom Cutoffschema abhängig ist. Von entscheidender Bedeutung ist hier aber, daß der Fixpunkt für alle verwendeten Cutoffs existiert. Dies ist als eines der wichtigsten Resultate dieser Analyse zu werten, denn es weist darauf hin, daß die Einstein-Hilbert-Trunkierung bei sehr großen Skalen k in der Tat verlässliche Ergebnisse liefern könnte.

Was die α -Abhängigkeit betrifft, so ist folgendes zu beachten. Es ist - wie bereits in Abschnitt 3.1 dargelegt wurde - anzunehmen, daß $\alpha = 0$ den “physikalischen” Wert des Eichparameters verkörpert. Somit ist im Prinzip nur dieser Fall von Relevanz. In der Praxis wird aber oftmals der Wert $\alpha = 1$ bevorzugt, da die Auswertung der Flußgleichung dadurch erheblich vereinfacht oder sogar erst ermöglicht wird. Beispielsweise werden alle (weiterführenden) Rechnungen zur R^2 -Trunkierung, welche in den sich anschließenden Kapiteln studiert wird, in dieser Eichung durchgeführt. Somit ist es hier notwendig, die

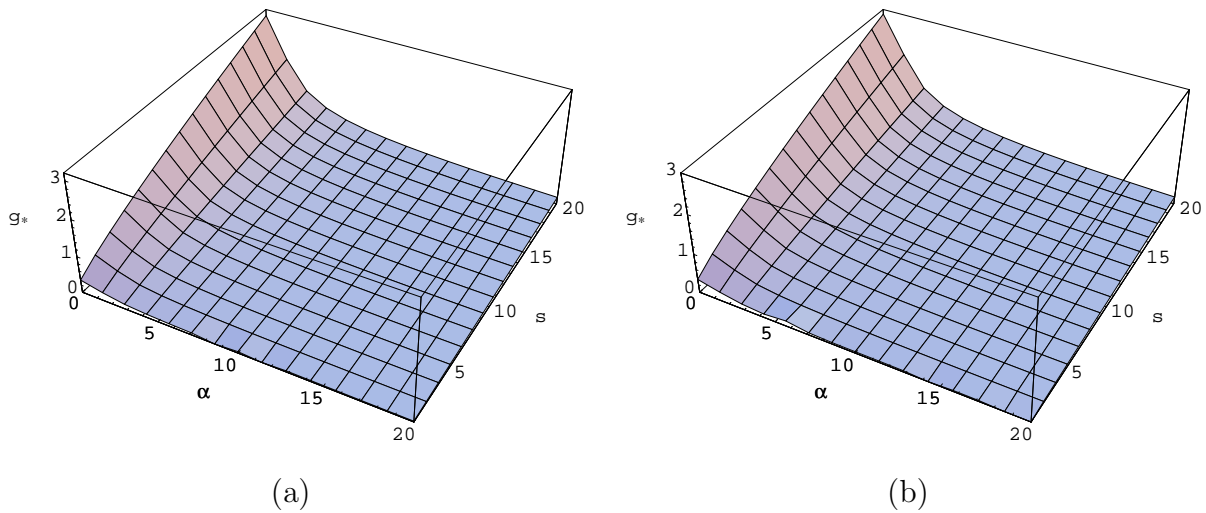


Abbildung 4.2: g_* als Funktion von s und α auf der Grundlage des kombinierten λ - g -Systems. Hierfür wurden (a) der Cutofftyp A und (b) der Cutofftyp B in Verbindung mit der Familie von exponentiellen Profilfunktionen (2.8) benutzt.

Eichungen $\alpha = 0$ und $\alpha = 1$ hinsichtlich der jeweiligen Ergebnisse zu vergleichen, um beurteilen zu können, ob die Wahl $\alpha = 1$ eine sinnvolle Näherung zum physikalischen Fall $\alpha = 0$ darstellt. Anhand der obigen Graphen und anhand von Gleichung (4.25) läßt sich erkennen, daß dies tatsächlich der Fall ist.

Was den Vergleich der verschiedenen Cutofftypen betrifft, so kann man Abbildung 4.1 entnehmen, daß in der Näherung $\lambda_k = \lambda_* = 0$ die s -Abhängigkeit von g_* bei Verwendung des Cutoffs B viel schwächer ist als bei Verwendung des Cutoffs A. Im Gegensatz dazu liefern beide Cutofftypen sowohl für g_* als auch für λ_* nahezu identische Resultate, wenn man das kombinierte λ - g -System betrachtet, siehe Abbildungen 4.2 und 4.3. Ferner ist die in Abbildung 4.2 dargestellte Schema-Abhängigkeit von g_* einerseits stärker ausgeprägt als diejenige in Abbildung 4.1(b), aber andererseits viel schwächer als diejenige in Abbildung 4.1(a). Hierzu sei ergänzend angemerkt, daß die Abbildung 4.1(a) eine exakte Reproduktion der Ergebnisse ist, die in [24] mit demselben Cutoff A gefunden wurden, siehe Abbildung 2 in [24].

An dieser Stelle sei darauf hingewiesen, daß sich die numerischen Betrachtungen hier gezwungenermaßen auf Profilfunktionen (2.8) mit $s \geq 1$ beschränken. Wenn man nämlich den Profilparameter aus dem Bereich $s < 1$ wählt, dann treten bei den numerischen Integrationen Konvergenzprobleme auf, die darauf zurückzuführen sind, daß die in β_λ und β_g enthaltenen Schwellenfunktionen im $d = 4$ -dimensionalen Fall beim Grenzübergang $s \rightarrow 0$ divergieren. (Etwas ausführlicher wird hierauf in [24] eingegangen.)

Die Schema-Abhängigkeit der Funktionen $k \mapsto \lambda_k, g_k$ und ihrer UV Grenzwerte λ_*, g_*

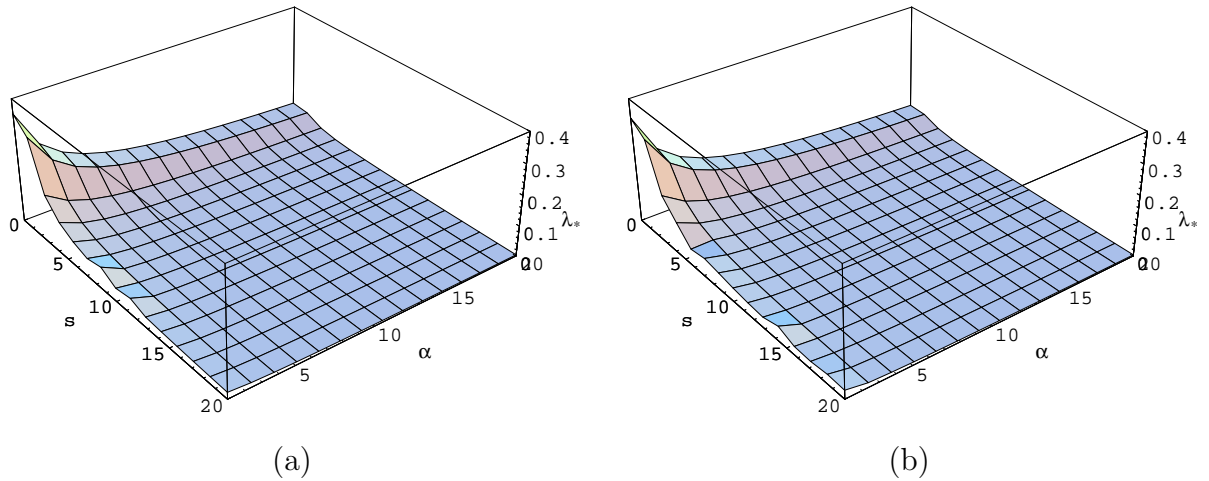


Abbildung 4.3: λ_* als Funktion von s und α auf der Grundlage des kombinierten λ - g -Systems. Hierfür wurden (a) der Cutofftyp A und (b) der Cutofftyp B in Verbindung mit der Familie von exponentiellen Profildfunktionen (2.8) benutzt.

wird sofort verständlich, wenn man sich vergegenwertigt, daß die Skala k mittels des Schema-abhängigen Cutoffoperators \mathcal{R}_k eingeführt wird, und ihr somit in erster Linie nur eine rein mathematische und keine direkte physikalische Bedeutung zukommt. Folglich sind λ_* und g_* für sich genommen keine Observablen. Es läßt sich jedoch auf relativ einfache Weise begründen, daß ihr Produkt $g_*\lambda_*$ universell ist: Ausgehend von den Größen k , G_k und $\bar{\lambda}_k$, welche nicht separat meßbar sind, löst man dazu z.B. die Funktion $G_k \equiv G(k)$ schematisch nach k auf und setzt die daraus resultierende Funktion $k = k(G)$ in die Funktion $\bar{\lambda}_k \equiv \bar{\lambda}(k)$ ein. Dadurch elimiert man die durch die Skala k verkörperte Abhängigkeit vom Cutoffschema vollständig, so daß die sich ergebende Beziehung $\bar{\lambda} = \bar{\lambda}(G)$ zwischen der Newtonschen und der kosmologischen Konstante zumindest im Prinzip experimentell bestimmbar sein sollte. Natürlich hängt diese Beziehung i.a. von der gewählten Renormierungsgruppentrajektorie ab, wobei die Spezifizierung der jeweiligen Trajektorie z.B. durch Vorgabe der IR Werte $\bar{\lambda}_0$ und G_0 erfolgt. Im Einzugsbereich des UV Fixpunkts “vergesen” sämtliche dort landenden Trajektorien aber die Informationen bzgl. ihres Verhaltens im IR Bereich und werden im Limes $k \rightarrow \infty$ durch $\bar{\lambda}_k = \lambda_* k^2$ und $G_k = g_*/k^2$ beschrieben, was zu der Beziehung

$$\bar{\lambda}(G) = \frac{g_*\lambda_*}{G} \quad (4.26)$$

führt. Diese Gleichung gilt, wenn $\bar{\lambda}$ und G in folgender Beziehung zur Planck-Masse stehen: $\bar{\lambda} \gg m_{\text{Pl}}^2$ und $G \ll m_{\text{Pl}}^{-2}$. (Hier ist die Planck-Masse wieder durch den IR Wert von G_k definiert: $m_{\text{Pl}} \equiv G_0^{-1/2}$.) Unter der Annahme, daß $\bar{\lambda}$ und G Meßgrößen darstellen, läßt sich aus (4.26) schließen, daß auch $g_*\lambda_*$ eine Observable ist. (Ganz ähnlich wird in [54]

argumentiert.) Unterhalb des Planck-Skala, d.h. im Bereich $k < m_{\text{Pl}}$, nimmt die Funktion $\bar{\lambda}(G)$, wie bereits oben schon angedeutet wurde, eine Form an, die viel komplizierter ist als $\bar{\lambda} \propto 1/G$. Das liegt daran, daß die dimensionsbehafteten IR Werte $\bar{\lambda}_0$ und G_0 , die notwendigerweise in $\bar{\lambda}(G)$ enthalten sind, aus Dimensionsgründen nur in bestimmten, relativ komplizierten Kombinationen mit G darin auftreten können.

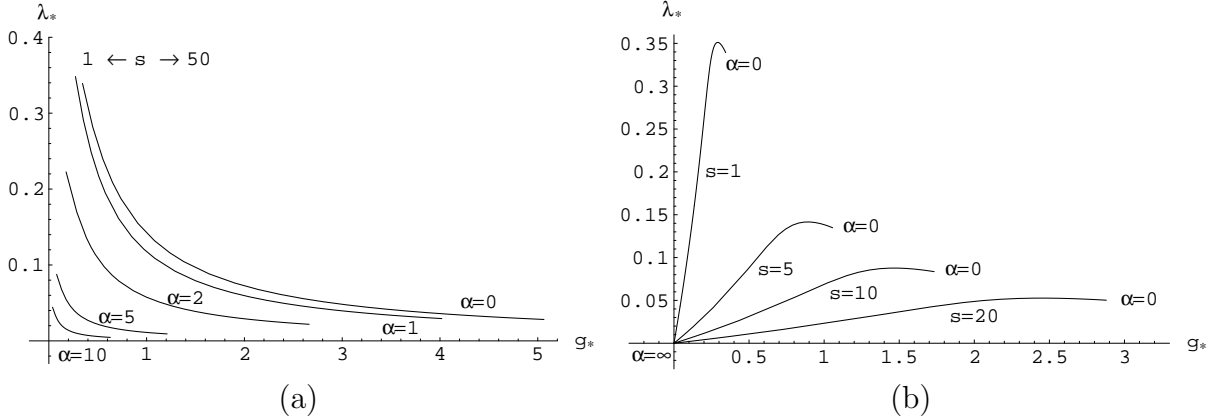


Abbildung 4.4: (a) Parametrischer Plot von $(\lambda_*(s), g_*(s))$ im Parameterbereich $1 \leq s \leq 50$. Die einzelnen Kurven beziehen sich auf verschiedene α -Werte und starten jeweils links bei $s = 1$ und enden rechts bei $s = 50$. (b) Parametrischer Plot von $(\lambda_*(\alpha), g_*(\alpha))$ im Parameterbereich $0 \leq \alpha < \infty$. Die einzelnen Kurven beziehen sich auf verschiedene s -Werte. Sowohl in (a) als auch in (b) wird der Cutoff B in Verbindung mit der Familie von Profilfunktionen (2.8) benutzt.

In diesem Zusammenhang ist es von besonderem Interesse, daß das Produkt $g_k \lambda_k = G_k \bar{\lambda}_k$ im $d = 4$ -dimensionalen Fall im wesentlichen mit dem “on-shell”-Wert von Γ_k übereinstimmt. Das sieht man wie folgt: Setzt man $\bar{g}_{\mu\nu} = g_{\mu\nu}$, so stimmen die Feldgleichungen, deren Lösungen die stationären Stellen von (2) liefern, mit den Einstein-Gleichungen $G_{\mu\nu} = -\bar{\lambda}_k g_{\mu\nu}$ überein. Durch Kontrahieren dieses Ausdrucks erhält man $R = 4\bar{\lambda}_k$. Mit Hilfe dieser Gleichung läßt sich in (2) der Krümmungsskalar R zugunsten von $\bar{\lambda}_k$ eliminieren, so daß die “on-shell”-Wirkung im $d = 4$ -dimensionalen Fall schließlich die folgende Form annimmt:

$$\Gamma_k[\text{on-shell}] = -\frac{v}{8\pi G_k \bar{\lambda}_k} = -\frac{v}{8\pi g_k \lambda_k} . \quad (4.27)$$

Dabei wurde verwendet, daß aus Dimensionsgründen $\int d^4x \sqrt{g} = v/\bar{\lambda}_k^2$ gilt, wobei v für jede Lösung mit endlichem 4-Volumen eine endliche, positive Konstante darstellt.

Die erzielten numerischen Ergebnisse spiegeln die Universalität des Produkts $g_* \lambda_*$ nahezu perfekt wider. Dies wird anhand der Abbildungen 4.4-4.7 veranschaulicht. Abbildung 4.4(a) enthält einige parametrische Plots von $(\lambda_*(s), g_*(s))$, die sich auf verschiedene Werte von α beziehen. Sie wurden aus den β -Funktionen (3.28) und (3.30) bestimmt, welche

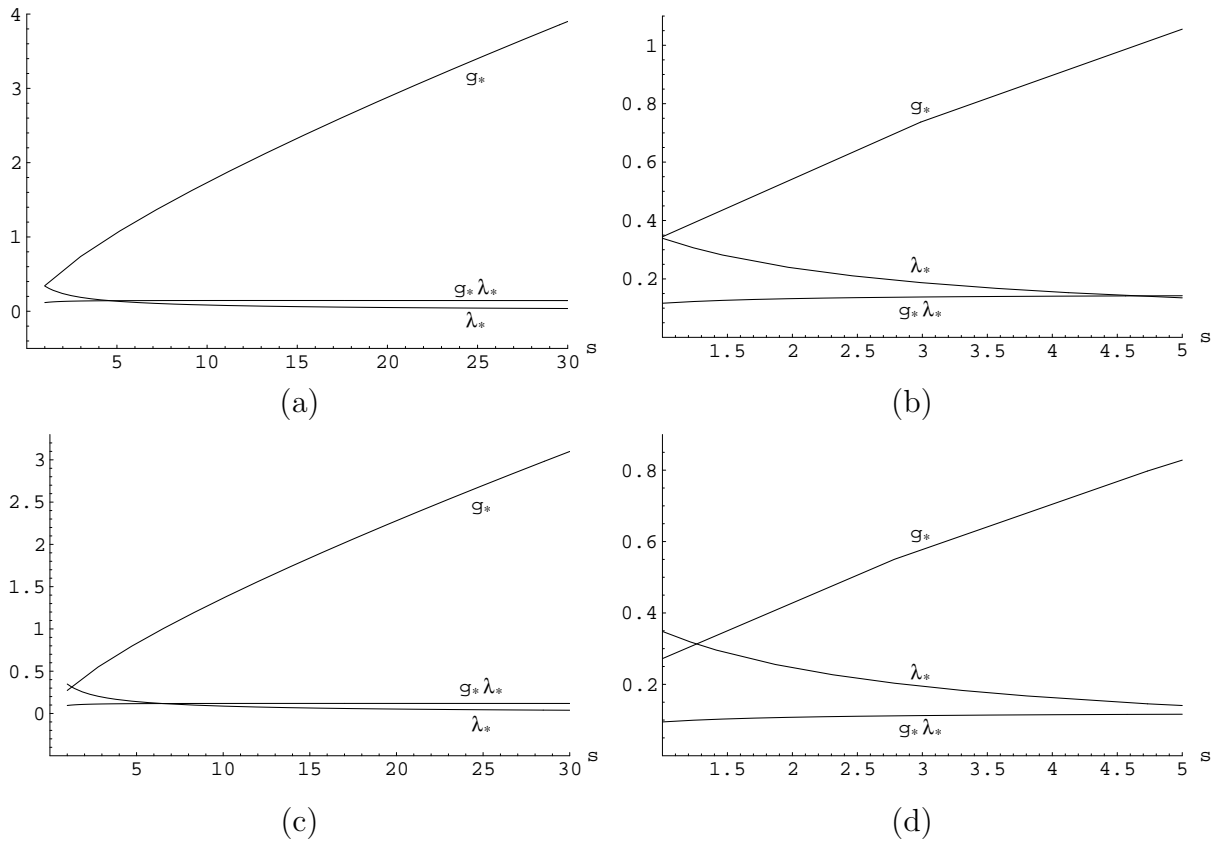


Abbildung 4.5: g_* , λ_* , und $g_*\lambda_*$ als Funktionen von s . Die einzelnen Plots beziehen sich auf die Fälle: (a) $\alpha = 0$, $1 \leq s \leq 30$, (b) $\alpha = 0$, $1 \leq s \leq 5$, (c) $\alpha = 1$, $1 \leq s \leq 30$ und (d) $\alpha = 1$, $1 \leq s \leq 5$. Dabei wurde der Cutofftyp B in Verbindung mit der Familie von exponentiellen Profildfunktionen (2.8) benutzt.

auf dem Cutoff des Typs B basieren. Die hyperbolische Form dieser Kurven läßt bereits vermuten, daß die s -Abhängigkeit des Produkts $g_*\lambda_*$ nur relativ schwach sein kann. Die direkte Bestätigung dieser Vermutung liefert Abbildung 4.5, welche g_* , λ_* , und $g_*\lambda_*$ als Funktionen von s zeigt, und zwar für die beiden Eichungen $\alpha = 0$ (Abb. 4.5(a),(b)) und $\alpha = 1$ (Abb. 4.5(c),(d)). Zur numerischen Berechnung dieser Kurven wurden wieder die auf dem Cutoff B beruhenden β -Funktionen herangezogen. In den Abbildungen 4.5(a),(c) werden die genannten Funktionen in dem Bereich $1 \leq s \leq 30$ dargestellt, während die Abbildungen 4.5(b),(d) Ausschnittsvergrößerungen der Plots aus 4.5(a),(c) zeigen, und zwar von dem Bereich $1 \leq s \leq 5$, in dem λ_* und g_* die größten Veränderungen erfahren. Bei jedem dieser Plots ist das Produkt von λ_* und g_* in dem kompletten s -Bereich nahezu konstant. Es nimmt darin den folgenden universellen Wert an:

$$g_*\lambda_* \approx \begin{cases} 0.12 & \text{for } \alpha = 1 \\ 0.14 & \text{for } \alpha = 0 \end{cases} . \tag{4.28}$$

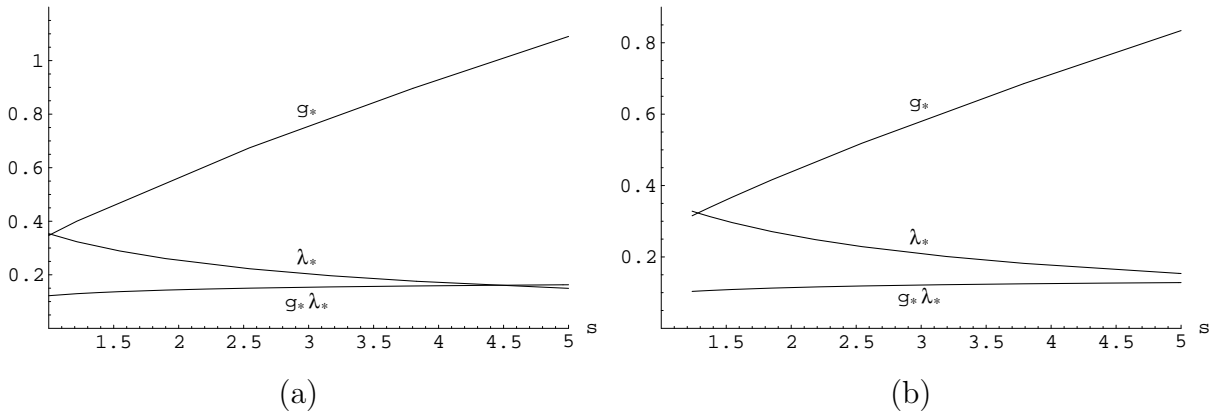


Abbildung 4.6: g_* , λ_* , und $g_* \lambda_*$ als Funktionen von s . Die einzelnen Plots beziehen sich auf die Fälle: (a) $\alpha = 0$ und (b) $\alpha = 1$. Dabei wurde der Cutofftyp A in Verbindung mit der Familie von exponentiellen Profilfunktionen (2.8) benutzt.

Offensichtlich ist der Unterschied zwischen den Werten, die sich im “physikalischen” Fall $\alpha = 0$ und dem technisch günstigeren Fall $\alpha = 1$ ergeben, verhältnismäßig klein.

Eine analoge Auswertung der β -Funktionen aus den Arbeiten [23, 24], welche auf der Verwendung des Cutofftyps A basieren, bestätigt die obigen Resultate in eindrucksvoller Weise. Die Ergebnisse werden anhand der Abbildung 4.6 illustriert, welche g_* , λ_* und $g_* \lambda_*$ als Funktionen von s zeigt, und zwar wiederum für die beiden Eichungen $\alpha = 0$ (Abb. 4.6(a)) und $\alpha = 1$ (Abb. 4.6(b)). Hier beschränken sich die dargestellten Resultate allerdings auf den Bereich $1 \leq s \leq 5$. Es treten kaum merkliche Unterschiede zu den entsprechenden Plots aus Abbildung 4.5 auf. Insbesondere erhält man auch in diesem Fall wieder die $g_* \lambda_*$ -Werte aus Gleichung (4.28).

Kommen wir nun zu einem weiteren wichtigen Test der obigen Resultate. Dabei werden die β -Funktionen (3.28) und (3.30) vom Typ B dieses Mal in Verbindung mit den Profilfunktionen mit kompaktem Träger $R^{(0)}(y; b)$ aus (2.9) ausgewertet, wobei $b \in [0, 1.5)$ das Profil von $R^{(0)}(y; b)$ parametrisiert. Die daraus folgenden Ergebnisse werden im Anschluß mit den obigen verglichen.

Abbildung 4.7(a) enthält einen parametrischen Plot von $(\lambda_*(b), g_*(b))$, der den vollständigen Parameterbereich $b \in [0, 1.5)$ abdeckt und sich auf die Eichung $\alpha = 0$ bezieht. Ferner stellt Abbildung 4.7(b) das Produkt $g_* \lambda_*$ als Funktion von b dar. Die beiden Kurven in dieser Abbildung entsprechen den Fällen $\alpha = 0$ und $\alpha = 1$. Im Bereich $b \leq 1.2$ weist die in Abbildung 4.7(a) dargestellte Kurve ein näherungsweise lineares Verhalten auf, was in Abbildung 4.7(b) zu einem $g_* \lambda_*$ -Plateau führt, in dessen Verlauf das Produkt nahezu konstant ist. Ein entsprechendes $g_* \lambda_*$ -Plateau ergibt sich auch im Fall $\alpha = 1$. (Der zugehörige parametrische Plot von $(\lambda_*(b), g_*(b))$ wurde hier aus Gründen der Übersicht

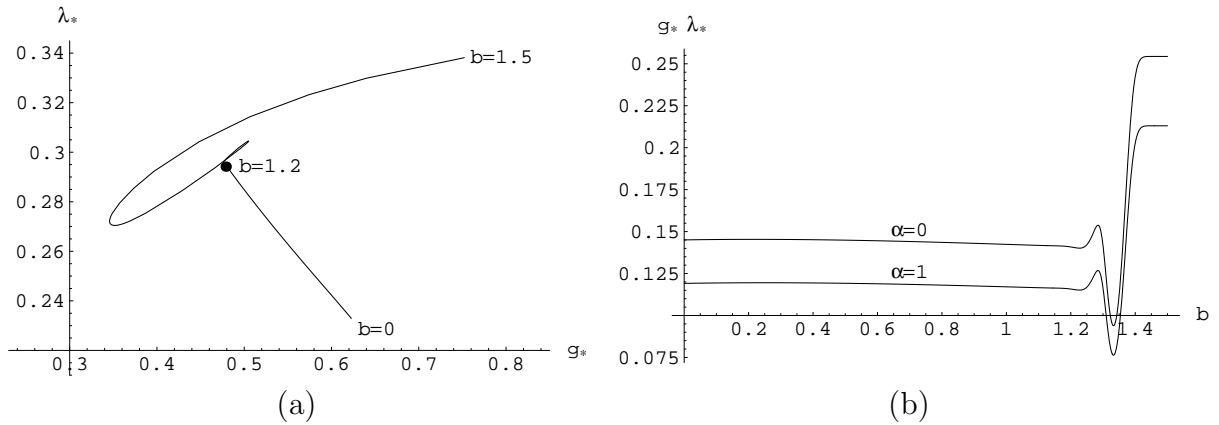


Abbildung 4.7: (a) Parametrischer Plot von $(\lambda_*(b), g_*(b))$ im Parameterbereich $0 \leq b \leq 1.5$ unter Verwendung der Eichung $\alpha = 0$. (b) $g_* \lambda_*$ als Funktion von b . Die beiden Kurven beziehen sich auf die Eichungen $\alpha = 0$ und $\alpha = 1$. Für (a) und (b) wurde jeweils der Cutofftyp B in Verbindung mit der Familie von Profilfunktionen mit kompaktem Träger (2.9) benutzt.

weggelassen. Bemerkenswerterweise stimmen die Positionen der beiden Plateaus aus Abb. 4.7(b) ziemlich genau mit denjenigen der entsprechenden Plateaus aus den Abbildungen 4.5 und 4.6, die sich aus den anderen Cutoffs ergeben, überein. Dieses äußerst nichttriviale Resultat verstärkt den Eindruck, daß die Einstein-Hilbert-Trunkierung in der Umgebung des Fixpunkts in der Tat verläßlich sein könnte.

Im Parameterbereich $b > 1.2$ weisen die Kurven aus Abbildung 4.7 eine relativ starke Abhängigkeit von b auf. Dieses eher sprunghafte Verhalten läßt sich dadurch erklären, daß $R^{(0)}(y; b)$ im Limes $b \rightarrow 1.5$ gegen eine Stufenfunktion konvergiert. Dies hat dann nämlich zur Folge, daß für $b = 1.5$ Unstetigkeiten in den Integranden der Schwellenfunktionen Φ_n^p und $\tilde{\Phi}_n^p$ auftreten. Die β -Funktionen scheinen nun bereits für $b \gtrsim 1.2$ den sich anbahnenden “scharfen” Cutoff zu “spüren”, so daß man in diesem Bereich den Resultaten nicht unbedingt vertrauen darf.

Kehren wir noch einmal kurz zur Eich-Abhängigkeit des Fixpunkts zurück. Abbildung 4.4(b) zeigt einige parametrische Plots von $(\lambda_*(\alpha), g_*(\alpha))$ im Parameterbereich $\alpha \in [0, \infty)$, die sich auf verschiedene, feste Werte des Profilparameters s beziehen. Die entsprechenden Profilfunktionen (2.8) wurden hier in Verbindung mit den β -Funktionen vom Typ B benutzt. Die einzelnen Kurven starten bei $\alpha = 0$ in unterschiedlichen, vom Koordinatenursprung verschiedenen Punkten des λ - g -Raums. Im Limes $\alpha \rightarrow \infty$ laufen alle Kurven in den Gaußschen Fixpunkt. In diesem Limes fallen also die beiden im Rahmen der Einstein-Hilbert-Trunkierung gefundenen Fixpunkte zusammen.

4.3.3 Höhere und niedrigere Dimensionen

Bevor wir die Analyse des $d = 4$ -dimensionalen Falls weiterführen, wollen wir uns mit dem nicht-Gaußschen Fixpunkt in höheren und niederen Dimensionen beschäftigen. In erster Linie ist hier von Interesse, inwieweit sich seine Position in der λ - g -Ebene bei Variation von d verändert. Um dies zu testen, bietet es sich an, die Dimensionalität d übergangsweise als einen kontinuierlichen Parameter zu betrachten, der alle reellen, positiven Werte annehmen kann. Anhand von parametrischen Plots von $(\lambda_*(d), g_*(d))$ läßt sich dann die "Spur", die der Fixpunkt bei kontinuierlicher Veränderung von d in der λ - g -Ebene hinterläßt, in besonders anschaulicher Weise illustrieren. Für die entsprechenden Rechnungen wurden die β -Funktionen vom Typ B aus den Gleichungen (3.28) und (3.30) herangezogen und in Verbindung mit der exponentiellen Profilfunktion (2.8) mit $s = 1$ benutzt.

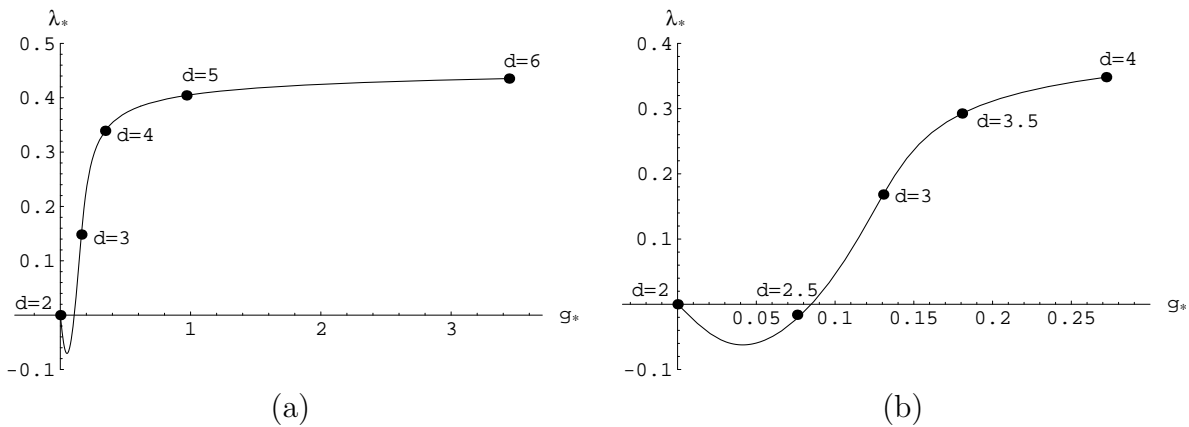


Abbildung 4.8: Parametrischer Plot von $(\lambda_*(d), g_*(d))$ (a) im Bereich $2 \leq d \leq 6$, für den Fall $\alpha = 0$ und (b) im Bereich $2 \leq d \leq 4$, für den Fall $\alpha = 1$. Für (a) und (b) wurde jeweils der Cutofftyp B in Verbindung mit der exponentiellen Profilfunktion (2.8) mit $s = 1$ verwendet.

Die Ergebnisse der numerischen Auswertung sind in Abbildung 4.8 dargestellt. Abbildung 4.8(b) zeigt $(\lambda_*(d), g_*(d))$ in dem Parameterbereich $2 \leq d \leq 4$, und zwar für den Fall $\alpha = 1$. Dieser Plot stimmt bemerkenswerterweise beinahe genau mit demjenigen überein, der in Abbildung 4 der Arbeit [21] dargestellt ist. Abgesehen davon, daß darin der Cutofftyp A verwendet wird, sind die Voraussetzungen, unter welchen der dortige Plot bestimmt wurde, mit denen für Abbildung 4.8(b) identisch, d.h. $\alpha = 1, s = 1$. Ausgehend von $(\lambda_*, g_*) = (0, 0)$ bei $d = 2$, wächst g_* bei Vergrößerung von d stetig an, während λ_* zunächst kurz in den negativen Bereich abrutscht, um dann relativ bald wieder anzusteigen. Nachdem die Koordinate λ_* ihre zweite Nullstelle, die leicht oberhalb von $d = 2.5$ liegt, passiert hat, steigt sie in dem abgebildeten Bereich weiterhin stetig an und bleibt

somit positiv.

Um Informationen über das Verhalten der Fixpunktkoordinaten in höheren Dimensionen mit $d > 4$ zu erhalten, wurde die Abbildung 4.8(a) angefertigt, die $(\lambda_*(d), g_*(d))$ im Bereich $2 \leq d \leq 6$ zeigt. Abgesehen davon, daß in diesem Fall die Eichung $\alpha = 0$ gewählt wurde, sind die Voraussetzungen mit denen für die Abbildung 4.8(b) identisch. Im Bereich $2 \leq d \leq 4$ besitzt die dargestellte Kurve qualitativ und im wesentlichen auch quantitativ die gleiche Form wie diejenige aus Abbildung 4.8(b). Im Bereich höherer Dimensionen $d > 4$ läßt sich vor allem feststellen, daß jenseits von $d \approx 5$ der g_* -Wert beträchtlich zunimmt, während die Koordinate λ_* nahezu konstant wird. Dieses Resultat könnte allerdings in die Irre führen. Denn es ist anzunehmen, daß die Einstein-Hilbert-Trunkierung in höheren Dimensionen weniger verläßlich ist. Dies läßt sich wie folgt erklären: Bei fest vorgegebener Trunkierung vernachlässigt man mit steigender Dimensionalität $d > d_T$ mehr und mehr relevante Terme, wobei der Parameter d_T durch die jeweilige Trunkierung festgelegt ist. Das liegt daran, daß die Anzahl der Terme bzw. Richtungen, die an einem Fixpunkt relevant sind, generell mit wachsendem d ansteigt. Am Gaußschen Fixpunkt ist dies offensichtlich. Denn dort entscheiden bei festem d die *kanonischen* (Massen-)Dimensionen der einzelnen Monome darüber, welche Monome relevant sind und welche nicht. Genauer gesagt, sind in diesem Fall all diejenigen lokalen Monome R, R^2, \dots relevant oder marginal,⁶ deren kanonische Dimension n_i nicht größer ist als die Dimensionalität d .⁷ Folglich nimmt mit wachsendem d die Anzahl relevanter Terme zu. Da eine sinnvolle Trunkierung zumindest im günstigsten Fall alle relevanten (und marginalen) Terme enthalten sollte, steigt hier also die Zahl der benötigten Terme mit zunehmendem d . (Im $d = 4$ -dimensionalen Fall sind $\int d^4x \sqrt{g}$ und $\int d^4x \sqrt{g} R$ relevant, und die in der Krümmung quadratischen Invarianten sind marginal.) Am nicht-Gaußschen Fixpunkt bestimmen die *Skalendimensionen*⁸ der lokalen Invarianten darüber, welche von diesen zu relevanten Richtungen im Raum der Wirkungsfunktionale führen. Die Skalendimensionen sind zwar nicht von vornherein bekannt, es lassen sich aber durch relativ allgemeine Betrachtungen die nötigen Informationen über sie gewinnen. Dazu macht man sich wieder das Argument aus Abschnitt 4.1 zunutze, welches besagt, daß die kritischen Exponenten von der folgenden Form sind: $\theta_i = d_i + \text{Loopeffekte}$, $d_i \equiv d - n_i$. Dabei verkörpern die $-d_i$

⁶Am Gaußschen Fixpunkt sind genau diejenigen Monome marginal, deren kanonische Dimension mit der Dimensionalität d übereinstimmt. Im allgemeinen Fall sollte man besser von marginalen (relevanten, irrelevanten) *Richtungen im Raum aller Wirkungsfunktionale* sprechen, siehe oben. Die marginalen Richtungen sind genau diejenigen Eigenrichtungen des um g_* linearisierten Flusses, deren Eigenwerte Null sind.

⁷In der folgenden Diskussion wird die kanonische Dimension von Monomen immer mit n_i bezeichnet.

⁸Die Skalendimension eines Operators bzw. einer Invariante ist die Summe aus seiner kanonischen und seiner anomalen Dimension. Am Gaußschen Fixpunkt sind die anomalen Dimensionen der einzelnen Wirkungsterme Null, so daß dort die Skalendimension und die kanonische Dimension zusammenfallen.

die *kanonischen Dimensionen* der erlaubten Invarianten. Am UV Fixpunkt sind die Eigenrichtungen zu positiven θ_i relevant. Somit führt auch in diesem Fall eine Vergrößerung von d in der Regel zu einer steigenden Anzahl von relevanten Richtungen.

4.3.4 Die kritischen Exponenten im $d = 4$ -dimensionalen Fall

Kehren wir nun zum $d = 4$ -dimensionalen Fall zurück und analysieren den Renormierungsgruppenfluß in der Umgebung des nicht-Gaußschen Fixpunkts. Um einen ersten Eindruck von seinen Eigenschaften zu erhalten, ist es ausreichend, die Betrachtungen zunächst auf die Eichung $\alpha = 1$ und einen bestimmten Cutoff zu beschränken. Hierfür wählen wir wieder den Cutofftyp B in Verbindung mit der exponentiellen Profilkfunktion (2.8) mit $s = 1$. In diesem Fall ergeben sich die Fixpunktkoordinaten $(\lambda_*, g_*) = (0.348, 0.272)$, siehe Gleichung (4.25). Linearisiert man den durch die Gleichungen (3.28) und (3.30) beschriebenen Renormierungsgruppenfluß gemäß (4.2) um diesen Fixpunkt, so erhält man die folgende B-Matrix:

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} -0.187 & 5.129 \\ -3.228 & -2.907 \end{pmatrix}. \quad (4.29)$$

Man diagonalisiert nun diese Matrix, was zu einem Paar von *komplexen* kritischen Exponenten $\theta_1 \equiv \theta' + i\theta''$ und $\theta_2 = \theta_1^* \equiv \theta' - i\theta''$ führt. Die reellen Größen θ' und θ'' nehmen hier die Werte $\theta' = 1.547$ und $\theta'' = 3.835$ an. (Liegen solche komplex konjugierten Paare $\theta_1 = \theta_2^*$ vor, so wird im Rahmen dieser Arbeit θ_1 als derjenige kritische Exponent definiert, dessen Imaginärteil positiv ist, d.h. $\text{Im } \theta_1 \equiv \theta'' > 0$.) Wie bereits erwähnt wurde, wird im Fall von komplexen kritischen Exponenten der linearisierte Fluß durch den Realteil von (4.4) beschrieben. Nutzt man aus, daß im vorliegenden Fall $V^2 = (V^1)^*$ gilt und setzt $V^1 \equiv V$ und $C_1 \equiv C$, so nimmt die Lösung des linearisierten Differentialgleichungssystems für λ_k und g_k die nachstehende Form an:

$$\begin{pmatrix} \lambda_k \\ g_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_* \\ g_* \end{pmatrix} + 2 \left\{ \begin{aligned} & [\text{Re } C \cos(\theta'' t) + \text{Im } C \sin(\theta'' t)] \text{Re } V \\ & + [\text{Re } C \sin(\theta'' t) - \text{Im } C \cos(\theta'' t)] \text{Im } V \end{aligned} \right\} e^{-\theta' t}. \quad (4.30)$$

Hier wurde $t \equiv \ln(k/k_0)$ gesetzt. Anhand von (4.30) läßt sich erkennen, daß die Bedingung für UV Attraktivität in diesem Fall $\text{Re } \theta_1 \equiv \theta' > 0$ lautet. Sie ist hier in der Tat erfüllt. Folglich wirkt der nicht-Gaußsche Fixpunkt in beide Richtungen der λ - g -Ebene UV attraktiv. Alle Trajektorien, die sich im Einzugsbereich des Fixpunkts befinden, laufen im Limes $k \rightarrow \infty$ in ihn hinein. Der von Null verschiedene Imaginärteil $\pm\theta''$ hat keinen Einfluß auf die Stabilität des Fixpunkts, er beeinflußt aber die Form der Trajektorien. Die

in Gleichung (4.30) auftauchenden $\cos(\theta'' t)$ - und $\sin(\theta'' t)$ -Terme sorgen nämlich dafür, daß die Trajektorien spiralförmig in den Fixpunkt hineinlaufen.

Diesen Resultaten nach zu urteilen, erfüllt der nicht-Gaußsche Fixpunkt der Einstein-Hilbert-Trunkierung die nötigen Voraussetzungen, um als Ausgangspunkt für eine fundamentale Theorie der $d = 4$ -dimensionalen Gravitation in Frage zu kommen. Natürlich gibt die Einstein-Hilbert-Trunkierung keinen Aufschluß darüber, ob es noch weitere attraktive Richtungen im Raume *aller* Kopplungen gibt; dazu muß man den Trunkierungsansatz verallgemeinern, wie dies beispielsweise im folgenden Kapitel vorgenommen wird. Mittels einer Studie der Schema-Abhängigkeit der kritischen Exponenten läßt sich aber überprüfen, ob zumindest die oben gefundenen Resultate für den linearisierten Fluß verlässlich sind.

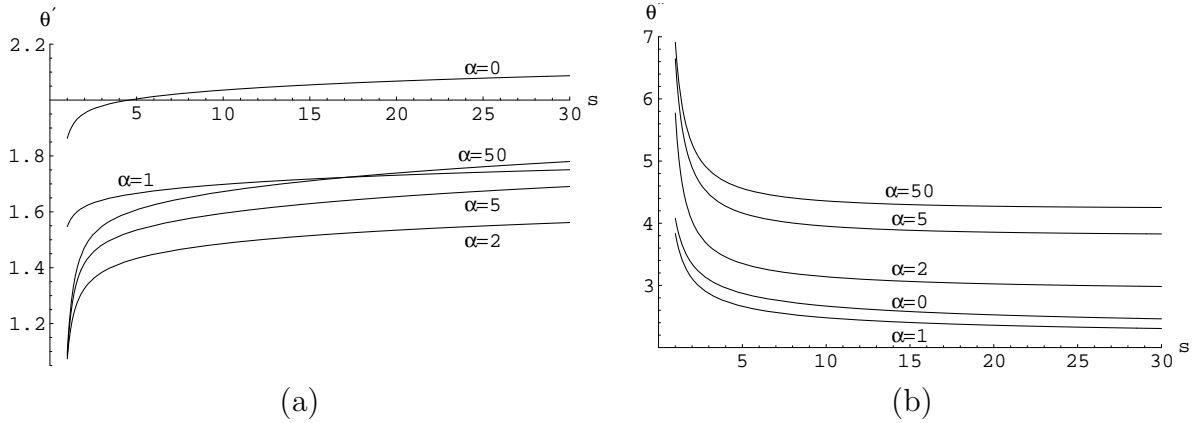


Abbildung 4.9: (a) $\theta' = \text{Re } \theta_1$ und (b) $\theta'' = \text{Im } \theta_1$ als Funktionen von s für verschiedene α -Werte. Dabei wurde der Cutofftyp B in Verbindung mit der Familie der exponentiellen Profilfunktionen (2.8) verwendet.

Wie in Abschnitt 4.1 dargelegt wurde, verkörpern die kritischen Exponenten, im Gegensatz zu den Fixpunktkoordinaten g_* und λ_* , in einer *exakten* Theorie universelle Größen. Das Trunkieren des Parameterraums führt aber i.a. zu einer Schema-Abhängigkeit von universellen Größen. Anhand ihres Ausmaßes läßt sich die Verlässlichkeit der jeweiligen Trunkierung beurteilen. Davon wurde bereits bei der Analyse der Fixpunktstruktur, und insbesondere des Produkts $g_* \lambda_*$ Gebrauch gemacht. Auch was die kritischen Exponenten betrifft, liefert die Einstein-Hilbert-Trunkierung in dieser Hinsicht zufriedenstellende Ergebnisse. Diese sind in den Abbildungen 4.9-4.11 dargestellt. An erster Stelle ist hier zu erwähnen, daß die kritischen Exponenten für alle verwendeten Cutoffs einen nichtverschwindenden Imaginärteil $\theta'' \neq 0$ aufweisen. Dieser ist in den Abbildungen 4.9-4.11(b) dargestellt, während ihr Realteil θ' in den Abbildungen 4.9-4.11(a) gezeigt wird. Letzteren kann man entnehmen, daß θ' immer positiv ist. Dies ist als wichtigstes Resultat

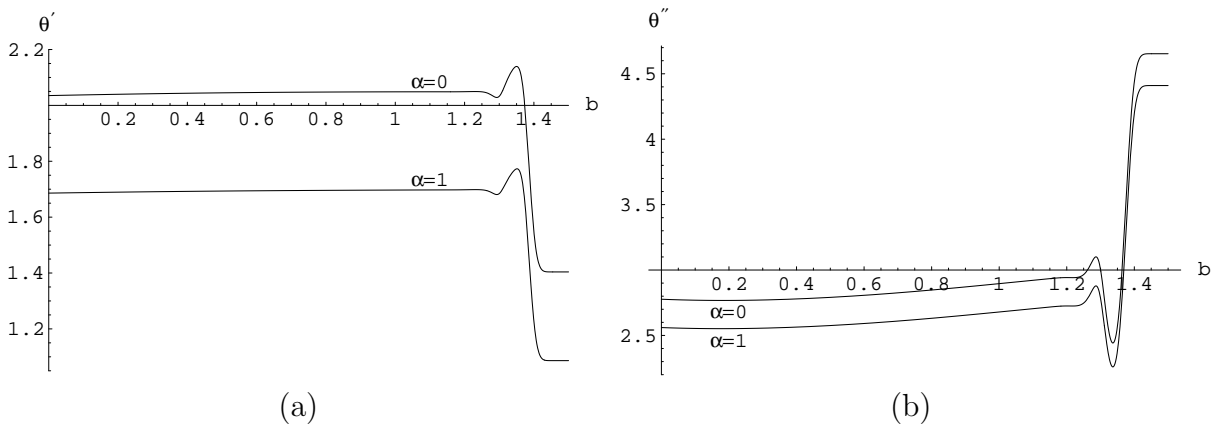


Abbildung 4.10: (a) $\theta' = \operatorname{Re} \theta_1$ und (b) $\theta'' = \operatorname{Im} \theta_1$ als Funktionen von b für $\alpha = 0$ und $\alpha = 1$. Hier wurde der Cutofftyp B in Verbindung mit der Familie von Profildfunktionen mit kompaktem Träger (2.9) verwendet.

dieses Unterabschnitts zu werten, da daraus folgt, daß sich der nicht-Gaußsche Fixpunkt *unabhängig von der Wahl des Cutoffs* als UV attraktiv erweist.

Die Abbildungen 4.9 und 4.10 entstammen den β -Funktionen der vorliegenden Arbeit, also den Gleichungen (3.28) und (3.30), welche auf dem Cutofftyp B beruhen. Zur Bestimmung der in Abbildung 4.9 dargestellten Kurven wurde in diese Gleichungen die Familie von exponentiellen Profildfunktionen (2.8) eingesetzt, wohingegen zur Berechnung der Kurven aus Abbildung 4.10 die Familie von Profildfunktionen mit kompaktem Träger (2.9) herangezogen wurde. Um einen Vergleich hinsichtlich des Cutofftyps zu ermöglichen, wurden außerdem entsprechende Kurven aus den β -Funktionen vom Typ A (siehe [23, 24]) bestimmt, wobei sich die Betrachtungen in diesem Fall auf die exponentiellen Profildfunktionen (2.8) beschränken. Die zugehörigen Ergebnisse werden anhand von Abbildung 4.11 illustriert. Sämtliche aufgeführten Abbildungen enthalten mehrere Kurven, die sich auf verschiedene α -Werte beziehen und die s - bzw. b -Abhängigkeit von θ' und θ'' darstellen.

Die $\theta'(s)$ -Kurven aus den Abbildungen 4.9(a) (Typ B) und 4.11(a) (Typ A) weisen einen sehr ähnlichen Verlauf auf. Gleiches trifft auf die $\theta''(s)$ -Kurven aus den Abbildungen 4.9(b) und 4.11(b) zu. In dem Bereich $1 \leq s \leq 5$ treten jeweils die größten Veränderungen auf. Diese sind ungefähr von der Größenordnung der zugehörigen θ' - bzw. θ'' -Werte. Im Bereich $s > 5$ liegt nur noch eine relativ schwache Abhängigkeit von s vor. Hier nehmen die Funktionen $\theta'(s)$ und $\theta''(s)$ eine Form an, die annähernd einem Plateau gleicht. Bei gleichen α -Werten unterscheiden sich die Positionen der einzelnen “Plateaus” aus den Abbildungen 4.9 (Typ B) und 4.11 (Typ A) leicht. Verwendet man beispielsweise die Eichung $\alpha = 1$, so ergibt sich im Fall des Cutoffstyps A $\theta'(s = 30) \approx 1.56$ und $\theta''(s = 30) \approx 3.06$, während man im Fall des Cutoffstyps B die Werte $\theta'(s = 30) \approx 1.75$ und

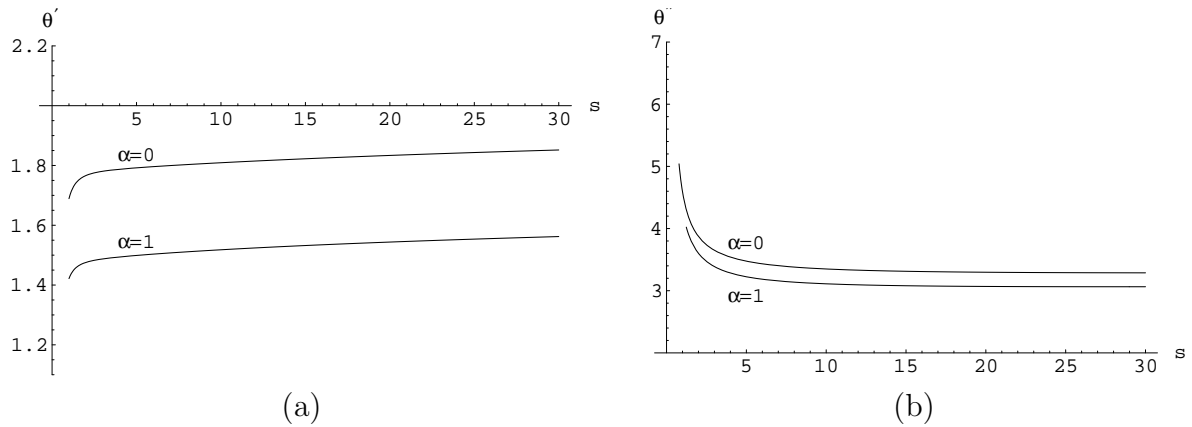


Abbildung 4.11: (a) $\theta' = \operatorname{Re} \theta_1$ und (b) $\theta'' = \operatorname{Im} \theta_1$ als Funktionen von s für $\alpha = 0$ und $\alpha = 1$. Hier wurde der Cutofftyp A in Verbindung mit der Familie von exponentiellen Profilfunktionen (2.8) verwendet.

$\theta''(s = 30) \approx 2.31$ erhält. Diese Unterschiede dürften als bloßes Produkt der Trunkierung zu interpretieren sein. Gleiches gilt für die zwar nicht sehr stark ausgeprägte, aber dennoch vorhandene s -Abhängigkeit der einzelnen Kurven. Diese ist bei den Kurven des Cutofftyps B noch etwas stärker zu verzeichnen als bei denen des Typs A.

Vergleichen wir nun die obigen Resultate mit denjenigen, die aus der Verwendung des Cutoffs B in Verbindung mit den Profilfunktionen mit kompaktem Träger (2.9) hervorgehen. Letztere sind in Abbildung 4.10 dargestellt. In dem Bereich $0 \leq b \leq 1.2$ weisen die $\theta'(b)$ -Plots erstaunlicherweise nahezu keine Abhängigkeit vom Profilparameter b auf, und auch die beobachtbaren Veränderungen von $\theta''(b)$ sind jeweils nur sehr schwach und treten hauptsächlich in dem Bereich $b \gtrsim 0.4$ auf. In dem Bereich $1.2 < b < 1.5$ ist dagegen die b -Abhängigkeit von θ' und θ'' sehr stark ausgeprägt; die einzelnen Kurven sind dort unregelmäßigen Schwankungen unterworfen. Dieses Verhalten wird durch den sich ankündigenden “scharfen” Cutoff bei $b = 1.5$ verursacht. Seine Effekte wurden bereits ausführlich in Unterabschnitt 4.3.2 erörtert. Hinsichtlich der zur Diskussion stehenden Verlässlichkeit der Einstein-Hilbert-Trunkierung ist weiterhin ermutigend, daß die einzelnen Positionen der θ' - bzw. θ'' -Plateaus aus der Abbildung 4.10 nahezu mit denjenigen identisch sind, die sich ergeben, wenn man denselben Cutofftyp B in Verbindung mit den exponentiellen Profilfunktionen (2.8) benutzt. Im Fall $\alpha = 1$ erhält man aus Abbildung 4.10 beispielsweise $\theta'(b = 0) \approx 1.69$ und $\theta''(b = 0) \approx 2.56$, was sehr gut zu den oben aufgeführten Resultaten aus Abbildung 4.9 paßt.

Gehen wir schließlich noch kurz auf die α -Abhängigkeit der kritischen Exponenten ein. Wie bereits in Unterabschnitt 4.3.2 erläutert wurde, ist anzunehmen, daß $\alpha = 0$ den “physikalischen” Wert des Eichparameters verkörpert, während in der Praxis die

Eichung $\alpha = 1$ aus technischen Gründen vorzuziehen ist. Anhand der obigen Resultate läßt sich beurteilen, ob die Eichung $\alpha = 1$ eine sinnvolle Näherung zu $\alpha = 0$ darstellt. Vergleicht man die jeweiligen Werte für die kritischen Exponenten, so stellt man fest, daß sie zumindest qualitativ übereinstimmen, d.h. sie sind von derselben Größenordnung und besitzen dasselbe Vorzeichen. Sie weichen aber qualitativ voneinander ab, und zwar um ca. 10 bis 20 Prozent der jeweiligen Absolutwerte. Dies gilt es zu berücksichtigen, wenn Rechnungen in der Eichung $\alpha = 1$ durchgeführt werden.

4.3.5 Zusammenstellung und Bewertung der Ergebnisse

Fassen wir die wesentlichen Ergebnisse dieses Abschnitts und ihre Konsequenzen kurz zusammen:

(**1_{E.H.}**) Universelle Existenz: Im $d = 4$ -dimensionalen Fall weisen die Flußgleichungen der Einstein-Hilbert-Trunkierung einen nicht-Gaußschen Fixpunkt auf. Dieser existiert für alle verwendeten Profildfunktionen $R^{(0)}$, sowohl im Fall des Cutofftyps A als auch im Fall des Cutofftyps B. Demzufolge erscheint es als sehr unwahrscheinlich, daß sich überhaupt ein zulässiger Cutoff finden läßt, für den dieser Fixpunkt nicht vorhanden ist. Um zu betonen, daß dies ein äußerst nichttriviales Ergebnis ist, sei darauf hingewiesen, daß der Fixpunkt in höheren Dimensionen ($d \gtrsim 5$) zwar für einige Cutoffs existiert, für andere jedoch nicht, siehe [14, 22]. (Man kann somit davon ausgehen, daß die Einstein-Hilbert-Trunkierung in höheren Dimensionen weniger zuverlässig ist.)

(**2_{E.H.}**) Positive Newton-Konstante: Zwar sind die Koordinaten des Fixpunkts g_* und λ_* (wie erwartet) vom Cutoffschema abhängig, sie sind aber immer positiv. Die Positivität von g_* ist ein weiteres wichtiges Resultat, denn ein negatives g_* wäre aller Wahrscheinlichkeit nach nicht mit einer stabilen Theorie in Einklang zu bringen. In diesem Zusammenhang sei erwähnt, daß die Flußgleichung nicht “automatisch” zu positiven g_* -Werten führt. Vielmehr erlaubt sie auch negative g_* -Werte, wie sich anhand von Gleichung (4.23) erkennen läßt. Offensichtlich gilt $g_* < 0$ für $d < 2$. Somit ist auch die Positivität von g_* als nichttriviales Ergebnis zu werten.

(**3_{E.H.}**) Stabilität: Für alle benutzten Cutoffs wirkt der nicht-Gaußsche Fixpunkt in beide Richtungen der λ - g -Ebene UV attraktiv. Linearisiert man die Flußgleichungen gemäß (4.2), so erhält man immer ein Paar von komplex konjugierten kritischen Exponenten $\theta_1 = \theta_2^*$ mit positivem Realteil θ' und Imaginärteilen $\pm\theta'' \neq 0$. Aufgrund der Positivität von θ' werden alle Trajektorien, die sich im Einzugsbereich des Fixpunkts befinden, im Limes $k \rightarrow \infty$ in diesen hineingezogen. Der von Null verschiedene Imaginärteil θ'' beeinflußt zwar nicht die Stabilität des Fixpunkts, sehr wohl aber die Form der Trajektorien in seiner Umgebung. Sie laufen für $k \rightarrow \infty$ spiralförmig in den Fixpunkt.

Alle Trajektorien auf der UV kritischen Hyperfläche des Fixpunkts erfüllen für genügend große $k \rightarrow \infty$ offensichtlich die Beziehungen

$$G_k \approx \frac{g_*}{k^2} \quad , \quad \bar{\lambda}_k \approx \lambda_* k^2 . \quad (4.31)$$

Folglich verschwindet die Newton-Konstante G_k im Limes $k \rightarrow \infty$. Zumindest was diese Kopplung angeht, ist die Gravitation in $d = 4$ Dimensionen also *asymptotisch frei*.

Die Resultate der Arbeit [22], in der die Flußgleichungen der Einstein-Hilbert-Trunkierung unter Verwendung eines scharfen Cutoffs vollständig gelöst werden, weisen darauf hin, daß sich der “asymptotische” Skalenbereich, in dem der Fluß in guter Näherung durch das linearisierte Gleichungssystem (4.2) beschrieben wird, von $k = \infty$ bis ungefähr zu $k \approx m_{\text{Pl}}$ erstreckt. Dabei ist die Planck-Masse in Abhängigkeit des IR Werts der Newton-Konstante definiert: $m_{\text{Pl}} \equiv G_0^{-1/2}$. Ergo stellt der gesamte Bereich *oberhalb* der Planck-Masse den Skalenbereich dar, in dem die Gravitation zunehmend schwach ankoppelt und asymptotisch frei ist.

(4E.H.) Schema- und Eich-Abhängigkeit: Universelle Größen, wie das Produkt $g_*\lambda_*$ und die kritischen Exponenten, sind nur bei exakter Behandlung der Theorie vom Cutoff-Schema unabhängig. Trunkierungen führen i.a. zu einer Schema-Abhängigkeit dieser Größen. Anhand ihres Ausmaßes läßt sich erkennen, inwieweit die jeweilige Trunkierung verläßlich ist. Die Einstein-Hilbert-Trunkierung führt zu einer erstaunlich schwachen Schema-Abhängigkeit des Produkts $g_*\lambda_*$, trotz der relativ starken Schema-Abhängigkeit seiner einzelnen Bestandteile g_* und λ_* , siehe Abb. 4.5. Es ergibt sich $g_*\lambda_* \approx 0.12$ bei $\alpha = 1$ und $g_*\lambda_* \approx 0.14$ bei $\alpha = 0$. Auch die Schema-Abhängigkeit der kritischen Exponenten ist eher schwach, sie ist aber größer als diejenige von $g_*\lambda_*$. Beispielsweise erhält man $1.4 \lesssim \theta' \lesssim 1.8$, $2.3 \lesssim \theta'' \lesssim 4$ bei $\alpha = 1$ und $1.7 \lesssim \theta' \lesssim 2.1$, $2.5 \lesssim \theta'' \lesssim 5$ bei $\alpha = 0$. Der Quotient des sich jeweils ergebenden maximalen und minimalen Werts liegt in all diesen Fällen zwischen 1.2 und 2.

Was die Eich-Abhängigkeit der oben diskutierten universellen Größen betrifft, so erhält man eine relative Abweichung zwischen den auf der “physikalischen” Eichung $\alpha = 0$ basierenden und den auf der technisch günstigeren Eichung $\alpha = 1$ beruhenden Resultaten, welche bei circa 10 bis 20 Prozent liegt.

Insgesamt erweisen sich also sowohl die qualitativen Eigenschaften des Fixpunkts (Existenz, UV Attraktivität) als auch die ihm zugeordneten universellen Größen ($g_*\lambda_*$, θ' , θ'') als sehr unempfindlich gegenüber Variationen des Cutoff-Schemas. Das deutet, den obigen Äußerungen entsprechend, stark darauf hin, daß die Einstein-Hilbert-Trunkierung bei genügend großen Skalen k oberhalb der Planck-Masse vermutlich durchaus verläßliche Ergebnisse liefert. Insbesondere stellt der UV attraktive nicht-Gaußsche Fixpunkt mit

ziemlicher Wahrscheinlichkeit kein Produkt der Trunkierung dar, sondern dürfte die Projektion eines in der *exakten* Theorie tatsächlich vorhandenen Fixpunkts verkörpern. Somit sind die Resultate als äußerst nichttriviale Hinweise auf die Existenz einer fundamentalen Theorie der vierdimensionalen Gravitation, die in Weinbergs Sinne asymptotisch sicher ist, zu interpretieren.

Wie lassen sich diese Resultate weiter untermauern? Die wohl überzeugendste Bestätigung würde man sicherlich dann erhalten, wenn sich die Vorhersagen bei Betrachtung allgemeinerer Trunkierungsansätze, die zusätzliche Invarianten enthalten, nur unwesentlich ändern. Einen ersten Schritt in diese Richtung wird in den beiden folgenden Kapiteln unternommen. Dort wird der Trunkierungsansatz um einen R^2 -Term erweitert und der Renormierungsgruppenfluß in dem zugehörigen, vergrößerten Parameterraum studiert.

Kapitel 5

Die R^2 -Trunkierung

5.1 Der Ansatz

Im folgenden werden wir mit Hilfe der verallgemeinerten Flußgleichung aus Abschnitt 2.1 eine Trunkierung studieren, die über die reine Einstein-Hilbert-Trunkierung hinausgeht. Letztere wird dabei dahingehend erweitert, daß zusätzlich zu den in (3.2) enthaltenen Termen ein R^2 -Term mit laufender Kopplung $\bar{\beta}_k$ berücksichtigt wird. Dementsprechend werden wir die auf diese Weise verallgemeinerte Trunkierung im weiteren Verlauf als “ R^2 -Trunkierung” bezeichnen. Sie beschreibt den Renormierungsgruppenfluß in dem dreidimensionalen Parameterraum, der sich aus der laufenden Newton-Konstante, der laufenden kosmologischen Konstante und der laufenden R^2 -Kopplung zusammensetzt.

Wir beginnen unsere Betrachtungen mit der Annahme, daß die bei der UV Skala $\hat{k} \rightarrow \infty$ vorliegende (nackte) Gravitationswirkung von der folgenden Form ist:

$$\bar{\Gamma}_{\hat{k}}[g] = S[g] = \int d^d x \sqrt{g} \left\{ \frac{1}{16\pi\bar{G}} (-R(g) + 2\bar{\lambda}) + \bar{\beta} R^2(g) \right\}. \quad (5.1)$$

Sie setzt sich aus der herkömmlichen Einstein-Hilbert-Wirkung in d Dimensionen und einem mit nackter Kopplung $\bar{\beta}$ ausgestatteten Term von höheren Ableitungen, dem R^2 -Term, zusammen. In Analogie zu (3.2) definieren wir nun ein k -abhängiges Funktional $\Gamma_k[g, \bar{g}]$, das die durch (5.1) beschriebene Theorie in Richtung kleinerer Skalen $k < \hat{k}$ evolviert:

$$\begin{aligned} \Gamma_k[g, \bar{g}] = & \int d^d x \sqrt{g} \left\{ 2\kappa^2 Z_{Nk} (-R(g) + 2\bar{\lambda}_k) + \bar{\beta}_k R^2(g) \right\} \\ & + \kappa^2 \frac{Z_{Nk}}{\alpha} \int d^d x \sqrt{\bar{g}} \bar{g}^{\mu\nu} (\mathcal{F}_\mu^{\alpha\beta} g_{\alpha\beta}) (\mathcal{F}_\nu^{\rho\sigma} g_{\rho\sigma}). \end{aligned} \quad (5.2)$$

Bei der Formulierung dieses Ansatzes wird hier wie in Abschnitt 3.1 verfahren, d.h. man

tauscht in $S + S_{\text{gf}}$ die nackten Kopplungen gemäß

$$\bar{G} \rightarrow G_k \equiv Z_{Nk}^{-1} \bar{G}, \quad \bar{\lambda} \rightarrow \bar{\lambda}_k, \quad \bar{\beta} \rightarrow \bar{\beta}_k, \quad \alpha \rightarrow Z_{Nk}^{-1} \alpha \quad (5.3)$$

durch entsprechende Skalen-abhängige Größen aus, wobei S_{gf} wie in Gleichung (1.5) definiert ist. Infolgedessen stimmt (5.2) abgesehen von dem zusätzlich enthaltenen R^2 -Term völlig mit (3.2) überein. Ferner ist der Trunkierungsansatz auch im vorliegenden Fall mit dem Gravitationsanteil des allgemeinen Ansatzes (2.1), der zu der trunkierten Flußgleichung (2.3) führt, verträglich. Zudem ist die Form des in (2.1) eingeführten Funktionals $\widehat{\Gamma}_k[g, \bar{g}]$ hier wie im Fall der Einstein-Hilbert-Trunkierung durch (3.4) festgelegt.

Bei der Einstein-Hilbert-Trunkierung wurde der Renormierungsgruppenfluß des Eichparameters vernachlässigt und α als ein freier, konstanter Parameter betrachtet. Diese Vorgehensweise wurde damit gerechtfertigt, daß die Eichkopplung bei $\alpha = 0$ einen IR attraktiven Fixpunkt besitzt und somit eine dynamische Behandlung nachgeahmt werden kann, indem man nachträglich $\alpha = 0$ setzt. Auch im Falle der R^2 -Trunkierung verwenden wir ein konstantes, zunächst noch beliebiges α . Aus technischen Gründen sind wir allerdings später gezwungen, die Eichung $\alpha = 1$ zu wählen. Unseren Informationen aus der Einstein-Hilbert-Trunkierung nach zu urteilen, liefert diese Eichung zumindest qualitativ (und in einem gewissen Rahmen auch quantitativ) korrekte Ergebnisse und stellt somit eine verlässliche Approximation zur "physikalischen" Eichung dar.

5.2 Projektion der Flußgleichung

Der Ansatz (5.2) umfaßt drei k -abhängige Kopplungen. Diese erfüllen die Anfangsbedingungen $\bar{\lambda}_{\widehat{k}} = \bar{\lambda}$, $Z_{N\widehat{k}} = 1$, was $G_{\widehat{k}} = \bar{G}$ zur Folge hat, und $\bar{\beta}_{\widehat{k}} = \bar{\beta}$. (Das ergibt sich aus der Beziehung $\Gamma_k[g, g] = \bar{\Gamma}_k[g]$.) Um den Renormierungsgruppenfluß von $\bar{\lambda}_k$, Z_{Nk} und $\bar{\beta}_k$ in Richtung kleinerer Skalen zu bestimmen, muß man die Flußgleichung auf den Raum projizieren, der durch den Trunkierungsansatz aufgespannt wird. Dazu verfährt man nach demselben allgemeinen Schema wie bei der Einstein-Hilbert-Trunkierung, vgl. Abschnitt 3.2. Man setzt den Ansatz (5.2) in beide Seiten der Flußgleichung (2.3) ein, führt die in $\Gamma_k^{(2)}$ und $S_{\text{gh}}^{(2)}$ implizit enthaltenen Ableitungen nach $g_{\mu\nu}$ aus und identifiziert danach die beiden Metriken: $g_{\mu\nu} = \bar{g}_{\mu\nu}$. Dadurch fällt der Eichfixierungsterm aus der linken Seite von (2.3) heraus, die daraufhin die nachstehende Gestalt annimmt:

$$\partial_t \Gamma_k[\bar{g}, \bar{g}] = \int d^d x \sqrt{\bar{g}} \left\{ 2\kappa^2 \left[-\bar{R}(\bar{g}) \partial_t Z_{Nk} + 2\partial_t (Z_{Nk} \bar{\lambda}_k) \right] + \bar{R}^2(\bar{g}) \partial_t \bar{\beta}_k \right\}. \quad (5.4)$$

Im vorliegenden Fall spannen also die Operatoren $\int d^d x \sqrt{\bar{g}}$, $\int d^d x \sqrt{\bar{g}} R$ und $\int d^d x \sqrt{\bar{g}} R^2$ die linke Seite der Flußgleichung auf. Das bedeutet, daß auf der zugehörigen rechten Seite

diejenigen Beiträge aus den Spuren extrahiert werden müssen, die proportional zu diesen Operatoren sind. Wie im Falle der Einstein-Hilbert-Trunkierung bewerkstelligt man dies mittels einer Entwicklung nach Potenzen in den Ableitungen (“derivative expansion”). Setzt man dann die auf diese Weise herausgefilterten Anteile mit (5.4) gleich und vergleicht die Koeffizienten der genannten Operatoren, so erhält man schließlich ein System von gekoppelten Differentialgleichungen für $\bar{\lambda}_k$, Z_{Nk} und $\bar{\beta}_k$.

Um das oben beschriebene Verfahren in die Tat umsetzen zu können, ist man wie in Abschnitt 3.2 darauf angewiesen, die Familie von S^d -Hintergrundräumen in die Flußgleichung einzusetzen. Wie dort bereits hervorgehoben wurde, stellt der Krümmungsskalar \bar{R} für diese Räume eine konstante, positive Zahl dar, die über die Gleichungen in (3.6) zu $\bar{R}_{\mu\nu\rho\sigma}$ und $\bar{R}_{\mu\nu}$ in Beziehung steht. Außerdem gelten für die Familie von sphärischen Räumen die in (3.7) angegebenen Relationen zwischen \bar{R} , dem Sphärenradius r und dem Volumen der Kugel.

Außerdem wurden in Abschnitt 3.2 sowie in Anhang E die wesentlichen Eigenschaften der auf sphärischen Hintergrundräumen definierten Skalar-, Vektor- und Tensorfelder zusammengefaßt. Wir werden sie an dieser Stelle nicht wiederholen. Vielmehr sei hier auf die entsprechenden Passagen in den angegebenen Abschnitten verwiesen.

Für die Familie von S^d -Hintergrundräumen nimmt die Flußgleichung eine besonders einfache Gestalt an, was eine analytische Auswertung überhaupt erst ermöglicht. Es sei hier aber nachdrücklich darauf hingewiesen, daß die β -Funktionen von $\bar{\lambda}_k$, Z_{Nk} und $\bar{\beta}_k$, die sich später daraus ergeben werden, nicht von dieser Wahl von $\bar{g}_{\mu\nu}$ abhängen; die Spezifizierung des Hintergrunds ist lediglich ein technischer Trick ohne jegliche physikalische Bedeutung. Wäre es technisch möglich, die β -Funktionen ohne Spezifizierung des Hintergrunds zu berechnen, so würde man exakt dieselben Resultate erhalten wie mit festgelegtem Hintergrund.

Allerdings weist diese Projektionsmethodik auch gewisse Schwächen auf, die dazu führen, daß sie nicht unbegrenzt, d.h. für beliebige Trunkierungen, anwendbar ist. Denn sie ermöglicht es zwar, $\int d^d x \sqrt{g} \propto r^d$ sowohl von $\int d^d x \sqrt{g} R \propto r^{d-2}$ als auch von $\int d^d x \sqrt{g} R^2 \propto r^{d-4}$ zu unterscheiden, es lassen sich mit ihr aber beispielsweise die drei in der Krümmung quadratischen Invarianten $\int d^d x \sqrt{g} R^2$, $\int d^d x \sqrt{g} R_{\mu\nu}^2$ und $\int d^d x \sqrt{g} R_{\mu\nu\rho\sigma}^2$ nicht auseinanderhalten, da sie alle proportional zu r^{d-4} sind. Möchte man diese einzeln herausprojizieren, so muß man Hintergrundräume verwenden, die nicht maximal symmetrisch sind. Dann wird aber die Auswertung der Spuren auf der rechten Seite von (2.3) zu einer nahezu unlösbaren Aufgabe, zumindest mit der hier verwendeten Technik. Dies ist eigentlich auch der Hauptgrund dafür, daß die beiden anderen in der Krümmung quadratischen Invarianten im obigen Trunkierungsansatz keine Berücksichtigung finden.

Konzentrieren wir uns jetzt auf die Auswertung der rechten Seite von (2.3). Unser Ziel

ist es, die für den Koeffizientenvergleich mit (5.4) benötigten Anteile zu bestimmen. Dazu gehen wir vollkommen analog zu der entsprechenden Rechnung in Abschnitt 3.3 vor. Nachdem der Trunkierungsansatz (5.2) in die rechte Seite von (2.3) eingesetzt worden ist, werden die beiden Metriken $g_{\mu\nu}$ und $\bar{g}_{\mu\nu}$ identifiziert. Somit reicht es aus, die darin enthaltenen Operatoren $(\Gamma_k^{(2)}[g, \bar{g}] + \mathcal{R}_k[\bar{g}])^{-1}$ und $(S_{\text{gh}}^{(2)}[g, \bar{g}] + \mathcal{R}_k[\bar{g}])^{-1}$ für $g_{\mu\nu} = \bar{g}_{\mu\nu}$ zu berechnen. Zu diesem Zweck wird zunächst der quadratische Anteil $\Gamma_k^{\text{quad}}[\bar{h}; \bar{g}]$ gemäß der Gleichung (3.11) aus dem Trunkierungsansatz (5.2) extrahiert. Dabei ergibt sich der folgende Ausdruck:

$$\begin{aligned}
\Gamma_k^{\text{quad}}[\bar{h}; \bar{g}] = & \int d^d x \sqrt{\bar{g}} \bar{h}_{\mu\nu} \left\{ \kappa^2 Z_{Nk} \left[- \left(\frac{1}{2} \delta_\rho^\mu \delta_\sigma^\nu + \frac{1-2\alpha}{4\alpha} \bar{g}^{\mu\nu} \bar{g}_{\rho\sigma} \right) \bar{D}^2 \right. \right. \\
& + \frac{1}{4} (2\delta_\rho^\mu \delta_\sigma^\nu - \bar{g}^{\mu\nu} \bar{g}_{\rho\sigma}) (\bar{R} - 2\bar{\lambda}_k) + \bar{g}^{\mu\nu} \bar{R}_{\rho\sigma} - \delta_\sigma^\mu \bar{R}_\rho^\nu - \bar{R}_\rho^\nu{}_\sigma \\
& \left. \left. + \frac{1-\alpha}{\alpha} (\bar{g}^{\mu\nu} \bar{D}_\rho \bar{D}_\sigma - \delta_\sigma^\mu \bar{D}^\nu \bar{D}_\rho) \right] \right. \\
& + \frac{1}{2} \bar{\beta}_k \left[\frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} \bar{g}^{\mu\nu} \bar{g}_{\rho\sigma} - \delta_\rho^\mu \delta_\sigma^\nu \right) \bar{R}^2 + 2\bar{g}^{\mu\nu} \bar{R} (-\bar{R}_{\rho\sigma} + \bar{D}_\rho \bar{D}_\sigma - \bar{g}_{\rho\sigma} \bar{D}^2) \right. \\
& + 2\bar{R} (\delta_\sigma^\nu \bar{R}_\rho^\mu - \bar{R}^\mu{}_{\rho\sigma} - 3\delta_\sigma^\nu \bar{D}^\mu \bar{D}_\rho + 2\bar{g}_{\rho\sigma} \bar{D}^\mu \bar{D}^\nu + 2\delta_\rho^\mu \delta_\sigma^\nu \bar{D}^2 - \delta_\sigma^\nu \bar{D}_\rho \bar{D}^\mu) + 2\delta_\sigma^\nu \bar{D}_\rho \bar{R} \bar{D}^\mu \\
& - 3\delta_\rho^\mu \delta_\sigma^\nu \bar{D}^\lambda \bar{R} \bar{D}_\lambda + 4\delta_\sigma^\nu \bar{D}^\mu \bar{R} \bar{D}_\rho - 4\bar{g}_{\rho\sigma} \bar{D}^\mu \bar{R} \bar{D}^\nu + \bar{g}^{\mu\nu} \bar{g}_{\rho\sigma} \bar{D}^\lambda \bar{R} \bar{D}_\lambda + 2\bar{R}^{\mu\nu} \bar{R}_{\rho\sigma} \\
& \left. \left. - 4\bar{R}^{\mu\nu} (\bar{D}_\rho \bar{D}_\sigma - \bar{g}_{\rho\sigma} \bar{D}^2) + 2\bar{D}^\mu \bar{D}^\nu \bar{D}_\rho \bar{D}_\sigma - 4\bar{g}^{\mu\nu} \bar{D}^2 \bar{D}_\rho \bar{D}_\sigma + 2\bar{g}^{\mu\nu} \bar{g}_{\rho\sigma} (\bar{D}^2)^2 \right] \right\} \bar{h}^{\rho\sigma} .
\end{aligned} \tag{5.5}$$

Im nächsten Schritt wird diese quadratische Form (teilweise) diagonalisiert. Dazu setzt man in (5.5) die Familie von S^d -Hintergrundräumen ein und zerlegt danach $\bar{h}_{\mu\nu}$ gemäß (1.36) in seine Komponenten. Weiterhin spaltet man $\bar{\phi}$ der Gleichung (3.10) entsprechend in die Anteile $\bar{\phi}_0$ und $\bar{\phi}_1$ auf. Dadurch erhält man

$$\begin{aligned}
\Gamma_k^{\text{quad}}[\bar{h}; \bar{g}] = & \int d^d x \sqrt{\bar{g}} \frac{1}{2} \left\{ \bar{h}_{\mu\nu}^T \left[Z_{Nk} \kappa^2 (-\bar{D}^2 + A_T(d) \bar{R} - 2\bar{\lambda}_k) \right. \right. \\
& \left. \left. + \bar{\beta}_k (\bar{R} \bar{D}^2 + G_T(d) \bar{R}^2) \right] \bar{h}^{T\mu\nu} \right. \\
& + \bar{\xi}_\mu \left[\frac{2}{\alpha} Z_{Nk} \kappa^2 (-\bar{D}^2 + A_V(d, \alpha) \bar{R} - 2\alpha \bar{\lambda}_k) + G_V(d) \bar{\beta}_k \bar{R}^2 \right] \bar{\xi}^\mu \\
& + \bar{\sigma} \left[C_{S2}(d, \alpha) Z_{Nk} \kappa^2 (-\bar{D}^2 + A_{S2}(d, \alpha) \bar{R} + B_{S2}(d, \alpha) \bar{\lambda}_k) \right. \\
& \left. + \bar{\beta}_k \left(H_S(d) (\bar{D}^2)^2 - G_{S1}(d) (2\bar{R} \bar{D}^2 + \bar{R}^2) \right) \right] \bar{\sigma} \\
& \left. + 2\bar{\phi}_1 \left[C_{S2}(d, \alpha) C_{S3}(d, \alpha) Z_{Nk} \kappa^2 + \bar{\beta}_k (-H_S(d) \bar{D}^2 + 2G_{S1}(d) \bar{R}) \right] \right\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \times \sqrt{-\bar{D}^2} \sqrt{-\bar{D}^2 - \frac{\bar{R}}{d-1} \bar{\sigma}} \\
& + \sum_{\bar{\phi} \in \{\bar{\phi}_0, \bar{\phi}_1\}} \bar{\phi} \left[C_{S2}(d, \alpha) C_{S1}(d, \alpha) Z_{Nk} \kappa^2 \left(-\bar{D}^2 + A_{S1}(d, \alpha) \bar{R} + B_{S1}(d, \alpha) \bar{\lambda}_k \right) \right. \\
& \left. + \bar{\beta}_k \left(H_S(d) (\bar{D}^2)^2 - G_{S2}(d) \bar{R} \bar{D}^2 + G_{S3}(d) \bar{R}^2 \right) \right] \bar{\phi} \}. \tag{5.6}
\end{aligned}$$

Die verschiedenen A , B , C , G und H_S stellen Funktionen der Dimensionalität d und des Eichparameters α dar. Einige von diesen Funktionen sind schon im Rahmen der Einstein-Hilbert-Trunkierung aufgetreten. Sie sind allesamt in Anhang G definiert.

Wie im Fall der Einstein-Hilbert-Trunkierung wird diese teilweise Diagonalisierung durchgeführt, um das Invertieren des Operators $\Gamma_k^{(2)}[\bar{g}, \bar{g}] + \mathcal{R}_k[\bar{g}]$ zu vereinfachen bzw. erst zu ermöglichen. In diesem Zusammenhang sollte folgendes angemerkt werden. Bei der Einstein-Hilbert-Trunkierung sind all diejenigen Terme von Γ_k^{quad} , die zu Vermischungen des spurfreien Anteils von $\bar{h}_{\mu\nu}$ und $\bar{\phi}$ führen, proportional zu $1 - \alpha$. Für $\alpha = 1$ läßt sich in diesem Fall also eine vollständige Diagonalisierung durch bloßes Abspalten des Spuranteils von $\bar{h}_{\mu\nu}$ bewerkstelligen. Dies verhält sich bei der vorliegenden R^2 -Trunkierung anders. Hier sorgt der R^2 -Term nämlich für zusätzliche Vermischungen des spurfreien Anteils von $\bar{h}_{\mu\nu}$ und $\bar{\phi}$. Diese Kreuzterme verschwinden offenkundig *nicht* für $\alpha = 1$. Folglich läßt sich die komplette Zerlegung von $\bar{h}_{\mu\nu}$ hier nicht einmal im Fall $\alpha = 1$ vermeiden, wenn man eine (teilweise) Diagonalisierung erreichen will.

Wie im Fall der Einstein-Hilbert-Trunkierung vereinfachen sich die besagten Kreuzterme nach der Zerlegung von $\bar{h}_{\mu\nu}$ auf S^d -Hintergründen zu reinen $\bar{\sigma}$ - $\bar{\phi}$ -Mischtermen. In Abschnitt 3.3 wurde bereits detailliert erläutert, daß diese Mischterme bei der Invertierung von $((\Gamma_k^{(2)})_{ij})_{i,j \in \{\bar{h}^T, \bar{\xi}, \bar{\sigma}, \bar{\phi}\}}$ gewisse Probleme bereiten und daß man $\bar{\phi}$ gemäß (3.10) zerlegen muß, um diese Probleme zu umgehen. Nach dieser zusätzlichen Zerlegung erhält man schließlich einen Matrix-Differentialoperator mit modifizierter Matrixstruktur, $((\Gamma_k^{(2)})_{ij})_{i,j \in \{\bar{h}^T, \bar{\xi}, \bar{\phi}_0, \bar{\sigma}, \bar{\phi}_1\}}$, der sich problemlos invertieren läßt. Durch die Veränderung der Matrixstruktur wird allerdings auch die Struktur der Flußgleichung (2.3) leicht modifiziert, und zwar wird darin die Menge der Summationsindizes $\{\bar{h}^T, \bar{\xi}, \bar{\sigma}, \bar{\phi}\}$ durch $\{\bar{h}^T, \bar{\xi}, \bar{\phi}_0, \bar{\sigma}, \bar{\phi}_1\}$ ersetzt. Weiterhin gilt dann $(\mathcal{R}_k)_{\bar{\phi}_0 \bar{\phi}_0} \equiv (\mathcal{R}_k)_{\bar{\phi}_1 \bar{\phi}_1} \equiv (\mathcal{R}_k)_{\bar{\phi} \bar{\phi}}$ sowie $(\mathcal{R}_k)_{\bar{\sigma} \bar{\phi}_1} \equiv (\mathcal{R}_k)_{\bar{\sigma} \bar{\phi}}$. Darauf sei an dieser Stelle nochmals ausdrücklich hingewiesen.

Der nächste Schritt besteht darin, den Operator $(S_{\text{gh}}^{(2)}[g, g] + \mathcal{R}_k)^{-1}$ zu bestimmen. Seine Herleitung verläuft vollkommen analog zu der in Abschnitt 3.3 geschilderten und führt auch zu demselben Ergebnis (3.14). Da im folgenden kein Unterschied mehr zwischen $g_{\mu\nu}$ und $\bar{g}_{\mu\nu}$ gemacht wird, können von nun an wieder die Querstriche über der Metrik, dem Krümmungsskalar und den Operatoren D^2 und P_k ohne Bedenken weggelassen werden.

Fahren wir jetzt mit der Anpassung des Cutoffoperators an die Trunkierung fort. Wendet man die Regel (2.4) auf die Ausdrücke für $\Gamma_k^{(2)}$ und $S_{\text{gh}}^{(2)}$ aus den Gleichungen (5.6) und (3.14) an, so führt dies automatisch zu der Form (2.5), wobei die diversen \mathcal{X}_k , \mathcal{Y}_k und \mathcal{Z}_k folgendermaßen zu wählen sind:

$$\begin{aligned}
\mathcal{X}_k^{\bar{\phi}_1\bar{\sigma}} &= \mathcal{X}_k^{\bar{\sigma}\bar{\sigma}} = \mathcal{X}_k^{\bar{\phi}_0\bar{\phi}_0} = \mathcal{X}_k^{\bar{\phi}_1\bar{\phi}_1} = H_S(d) \bar{\beta}_k, \quad \mathcal{Y}_k^{\bar{h}^T\bar{h}^T} = -\bar{\beta}_k, \\
\mathcal{Y}_k^{\bar{\phi}_1\bar{\sigma}} &= \mathcal{Y}_k^{\bar{\sigma}\bar{\sigma}} = 2G_{S1}(d) \bar{\beta}_k, \quad \mathcal{Y}_k^{\bar{\phi}_0\bar{\phi}_0} = \mathcal{Y}_k^{\bar{\phi}_1\bar{\phi}_1} = G_{S2}(d) \bar{\beta}_k, \quad \mathcal{Z}_k^{\bar{h}^T\bar{h}^T} = Z_{Nk}, \\
\mathcal{Z}_k^{\bar{\xi}\bar{\xi}} &= \frac{2}{\alpha} Z_{Nk}, \quad \mathcal{Z}_k^{\bar{\phi}_1\bar{\sigma}} = C_{S2}(d, \alpha) C_{S3}(d, \alpha) Z_{Nk}, \quad \mathcal{Z}_k^{\bar{\sigma}\bar{\sigma}} = C_{S2}(d, \alpha) Z_{Nk}, \\
\mathcal{Z}_k^{\bar{\phi}_0\bar{\phi}_0} &= \mathcal{Z}_k^{\bar{\phi}_1\bar{\phi}_1} = C_{S2}(d, \alpha) C_{S1}(d, \alpha) Z_{Nk}, \quad \mathcal{Z}_k^{\bar{v}^T\bar{v}^T} = \mathcal{Z}_k^{\bar{\rho}\bar{\rho}} = \sqrt{2}. \tag{5.7}
\end{aligned}$$

Infolgedessen erhält man bei identifizierten Metriken $g_{\mu\nu} = \bar{g}_{\mu\nu}$ die nachstehenden Ausdrücke für die nichtverschwindenden Einträge der Matrix-Differentialoperatoren $\Gamma_k^{(2)} + \mathcal{R}_k$ und $S_{\text{gh}}^{(2)} + \mathcal{R}_k$:

$$\begin{aligned}
\left(\Gamma_k^{(2)}[g, g] + \mathcal{R}_k\right)_{\bar{h}^T\bar{h}^T} &= Z_{Nk}\kappa^2 (P_k + A_T(d) R - 2\bar{\lambda}_k) + \bar{\beta}_k (-R P_k + G_T(d) R^2), \\
\left(\Gamma_k^{(2)}[g, g] + \mathcal{R}_k\right)_{\bar{\xi}\bar{\xi}} &= \frac{2}{\alpha} Z_{Nk}\kappa^2 (P_k + A_V(d, \alpha) R - 2\alpha\bar{\lambda}_k) + G_V(d) \bar{\beta}_k R^2, \\
\left(\Gamma_k^{(2)}[g, g] + \mathcal{R}_k\right)_{\bar{\sigma}\bar{\sigma}} &= C_{S2}(d, \alpha) Z_{Nk}\kappa^2 (P_k + A_{S2}(d, \alpha) R + B_{S2}(d, \alpha) \bar{\lambda}_k) \\
&\quad + \bar{\beta}_k (H_S(d) P_k^2 + G_{S1}(d) (2R P_k - R^2)), \\
\left(\Gamma_k^{(2)}[g, g] + \mathcal{R}_k\right)_{\bar{\phi}_1\bar{\sigma}} &= \left(\Gamma_k^{(2)}[g, g] + \mathcal{R}_k\right)_{\bar{\sigma}\bar{\phi}_1} \\
&= \left[C_{S2}(d, \alpha) C_{S3}(d, \alpha) Z_{Nk}\kappa^2 + \bar{\beta}_k (H_S(d) P_k + 2G_{S1}(d) R) \right] \\
&\quad \times \sqrt{P_k} \sqrt{P_k - \frac{R}{d-1}}, \\
\left(\Gamma_k^{(2)}[g, g] + \mathcal{R}_k\right)_{\bar{\phi}_0\bar{\phi}_0} &= \left(\Gamma_k^{(2)}[g, g] + \mathcal{R}_k\right)_{\bar{\phi}_1\bar{\phi}_1} \\
&= C_{S2}(d, \alpha) C_{S1}(d, \alpha) Z_{Nk}\kappa^2 (P_k + A_{S1}(d, \alpha) R + B_{S1}(d, \alpha) \bar{\lambda}_k) \\
&\quad + \bar{\beta}_k (H_S(d) P_k^2 + G_{S2}(d) R P_k + G_{S3}(d) R^2), \\
\left(S_{\text{gh}}^{(2)}[g, g] + \mathcal{R}_k\right)_{\bar{v}^T\bar{v}^T} &= - \left(S_{\text{gh}}^{(2)}[g, g] + \mathcal{R}_k\right)_{\bar{v}^T\bar{v}^T} = \sqrt{2} \left[P_k - \frac{R}{d} \right], \\
\left(S_{\text{gh}}^{(2)}[g, g] + \mathcal{R}_k\right)_{\bar{\rho}\bar{\rho}} &= - \left(S_{\text{gh}}^{(2)}[g, g] + \mathcal{R}_k\right)_{\bar{\rho}\bar{\rho}} = \sqrt{2} \left[P_k - 2\frac{R}{d} \right]. \tag{5.8}
\end{aligned}$$

Um die Notation zu vereinfachen, wurde hier wie im Fall der Einstein-Hilbert-Trunkierung $(S_{\text{gh}}^{(2)}[0, v, \bar{v}; g])_{\psi_1\psi_2} \equiv (S_{\text{gh}}^{(2)}[g, g])_{\psi_1\psi_2}$ gesetzt, wobei $\psi_1, \psi_2 \in \bar{I}_2$.

Aus den obigen Einträgen lassen sich jetzt die Operatoren $(\Gamma_k^{(2)} + \mathcal{R}_k)^{-1}$ und $(S_{\text{gh}}^{(2)} + \mathcal{R}_k)^{-1}$ explizit bestimmen. Die entsprechenden Rechnungen kann man Anhang C.1 entnehmen. Die somit vorliegenden inversen Operatoren setzt man dann in die bei $g_{\mu\nu} = \bar{g}_{\mu\nu}$ betrachtete rechte Seite von (2.3) ein, die hier wie im Fall der Einstein-Hilbert-Trunkierung mit $\mathcal{S}_k(R)$ bezeichnet wird. Dadurch erhält man für $\mathcal{S}_k(R)$ das unten angegebene, recht komplizierte Resultat:

$$\begin{aligned}
\mathcal{S}_k(R) = & \text{Tr}_{(2ST^2)} \left[\left(P_k + A_T(d) R - 2\bar{\lambda}_k + (Z_{Nk}\kappa^2)^{-1} \bar{\beta}_k (-R P_k + G_T(d) R^2) \right)^{-1} \right. \\
& \times \left(\mathcal{N} - (Z_{Nk}\kappa^2)^{-1} \bar{\beta}_k R \mathcal{T}_1 \right) \left. \right] \\
& + \text{Tr}'_{(1T)} \left[\left(P_k + A_V(d, \alpha) R - 2\alpha \bar{\lambda}_k + G_V(d) (Z_{Nk}\kappa^2)^{-1} \bar{\beta}_k R^2 \right)^{-1} \mathcal{N} \right] \\
& + \text{Tr}''_{(0)} \left[\left\{ \left(C_{S2}(d, \alpha) (P_k + A_{S2}(d, \alpha) R + B_{S2}(d, \alpha) \bar{\lambda}_k) \right. \right. \right. \\
& \left. \left. \left. + (Z_{Nk}\kappa^2)^{-1} \bar{\beta}_k (H_S(d) P_k^2 + G_{S1}(d) (2R P_k - R^2)) \right) \right. \right. \\
& \times \left(C_{S2}(d, \alpha) C_{S1}(d, \alpha) (P_k + A_{S1}(d, \alpha) R + B_{S1}(d, \alpha) \bar{\lambda}_k) \right. \\
& \left. \left. \left. + (Z_{Nk}\kappa^2)^{-1} \bar{\beta}_k (H_S(d) P_k^2 + G_{S2}(d) R P_k + G_{S3}(d) R^2) \right) \right. \right. \\
& \left. \left. \left. - \left(C_{S2}(d, \alpha) C_{S3}(d, \alpha) + (Z_{Nk}\kappa^2)^{-1} \bar{\beta}_k (H_S(d) P_k + 2G_{S1}(d) R) \right)^2 P_k \left(P_k - \frac{R}{d-1} \right) \right\}^{-1} \right. \\
& \times \left\{ \left(C_{S2}(d, \alpha) (P_k + A_{S2}(d, \alpha) R + B_{S2}(d, \alpha) \bar{\lambda}_k) \right. \right. \\
& \left. \left. \left. + (Z_{Nk}\kappa^2)^{-1} \bar{\beta}_k (H_S(d) P_k^2 + G_{S1}(d) (2R P_k - R^2)) \right) \right. \right. \\
& \times \left(C_{S2}(d, \alpha) C_{S1}(d, \alpha) \mathcal{N} + (Z_{Nk}\kappa^2)^{-1} \bar{\beta}_k (H_S(d) \mathcal{T}_2 + G_{S2}(d) R \mathcal{T}_1) \right) \\
& \left. \left. \left. + \left(C_{S2}(d, \alpha) C_{S1}(d, \alpha) (P_k + A_{S1}(d, \alpha) R + B_{S1}(d, \alpha) \bar{\lambda}_k) \right. \right. \right. \\
& \left. \left. \left. + (Z_{Nk}\kappa^2)^{-1} \bar{\beta}_k (H_S(d) P_k^2 + G_{S2}(d) R P_k + G_{S3}(d) R^2) \right) \right. \right. \\
& \times \left(C_{S2}(d, \alpha) \mathcal{N} + (Z_{Nk}\kappa^2)^{-1} \bar{\beta}_k (H_S(d) \mathcal{T}_2 + 2G_{S1}(d) R \mathcal{T}_1) \right) \\
& \left. \left. \left. + 2 \left(C_{S2}(d, \alpha) C_{S3}(d, \alpha) + (Z_{Nk}\kappa^2)^{-1} \bar{\beta}_k (H_S(d) P_k + 2G_{S1}(d) R) \right) \sqrt{P_k} \sqrt{P_k - \frac{R}{d-1}} \right. \right. \\
& \left. \left. \left. \times \frac{1}{2Z_{Nk}\kappa^2} \partial_t \left(H_S(d) \bar{\beta}_k \left[P_k \sqrt{P_k} \sqrt{P_k - \frac{R}{d-1}} + D^2 \sqrt{-D^2} \sqrt{-D^2 - \frac{R}{d-1}} \right] \right) \right. \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \left(2G_{S1}(d) \bar{\beta}_k R + C_{S2}(d, \alpha) C_{S3}(d, \alpha) Z_{Nk} \kappa^2 \right) \\
& \times \left[\sqrt{P_k} \sqrt{P_k - \frac{R}{d-1}} - \sqrt{-D^2} \sqrt{-D^2 - \frac{R}{d-1}} \right] \Bigg\} \Bigg] \\
& - 2\text{Tr}_{(1T)} \left[\left(P_k - \frac{R}{d} \right)^{-1} \mathcal{N}_0 \right] - 2\text{Tr}'_{(0)} \left[\left(P_k - 2\frac{R}{d} \right)^{-1} \mathcal{N}_0 \right] \\
& + \frac{1}{2Z_{Nk} \kappa^2} \sum_{l=0}^1 \left[D_l(d, 0) \left\{ C_{S2}(d, \alpha) C_{S1}(d, \alpha) \left(\Lambda_l(d, 0) + k^2 R^{(0)} (\Lambda_l(d, 0)/k^2) \right. \right. \right. \\
& \left. \left. \left. + A_{S1}(d, \alpha) R + B_{S1}(d, \alpha) \bar{\lambda}_k \right) \right. \right. \\
& \left. \left. + (Z_{Nk} \kappa^2)^{-1} \bar{\beta}_k \left(H_S(d) \left(\Lambda_l(d, 0) + k^2 R^{(0)} (\Lambda_l(d, 0)/k^2) \right)^2 \right. \right. \right. \\
& \left. \left. \left. + G_{S2}(d) R \left(\Lambda_l(d, 0) + k^2 R^{(0)} (\Lambda_l(d, 0)/k^2) \right) + G_{S3}(d) R^2 \right) \right\}^{-1} \right. \\
& \left. \times \partial_t \left\{ C_{S2}(d, \alpha) C_{S1}(d, \alpha) Z_{Nk} \kappa^2 k^2 R^{(0)} (\Lambda_l(d, 0)/k^2) \right. \right. \\
& \left. \left. + \bar{\beta}_k \left(H_S(d) \left(2\Lambda_l(d, 0) k^2 R^{(0)} (\Lambda_l(d, 0)/k^2) + k^4 R^{(0)} (\Lambda_l(d, 0)/k^2)^2 \right) \right. \right. \right. \\
& \left. \left. \left. + G_{S2}(d) R k^2 R^{(0)} (\Lambda_l(d, 0)/k^2) \right) \right\} \right] . \tag{5.9}
\end{aligned}$$

Die Operatoren \mathcal{N} und \mathcal{N}_0 wurden bereits im Rahmen der Einstein-Hilbert-Trunkierung eingeführt. Sie besitzen die in Gleichung (3.18) angegebene Gestalt. Ferner sind die neu in Erscheinung tretenden Operatoren \mathcal{T}_1 und \mathcal{T}_2 folgendermaßen definiert:

$$\begin{aligned}
\mathcal{T}_1 & \equiv (2\bar{\beta}_k)^{-1} \partial_t [\bar{\beta}_k k^2 R^{(0)}(-D^2/k^2)] \\
& = \left[1 - \frac{1}{2} \eta_\beta(k) \right] k^2 R^{(0)}(-D^2/k^2) + D^2 R^{(0)' }(-D^2/k^2) , \\
\mathcal{T}_2 & \equiv (2\bar{\beta}_k)^{-1} \partial_t [\bar{\beta}_k (-2D^2 k^2 R^{(0)}(-D^2/k^2) + k^4 R^{(0)}(-D^2/k^2)^2)] \\
& = 2P_k \left[k^2 R^{(0)}(-D^2/k^2) + D^2 R^{(0)' }(-D^2/k^2) \right] \\
& \quad - \frac{1}{2} \eta_\beta(k) \left(-2D^2 k^2 R^{(0)}(-D^2/k^2) + k^4 R^{(0)}(-D^2/k^2)^2 \right) . \tag{5.10}
\end{aligned}$$

Hier verkörpert

$$\eta_\beta(k) \equiv -\partial_t \ln \bar{\beta}_k \tag{5.11}$$

die anomale Dimension des Operators $\int d^d x \sqrt{g} R^2$. Die anomale Dimension des Operators

$\int d^d x \sqrt{g} R$, also $\eta_N(k) \equiv -\partial_t \ln Z_{Nk}$, wurde bereits in Abschnitt 3.3 eingeführt, siehe Gleichung (3.19).

Was die diversen Subskripten und Striche angeht, so wurde dieselbe Notation wie in den Kapiteln 1 und 3 gewählt. Das bedeutet im einzelnen: (1) Ein Strich an $R^{(0)}$ bezeichnet die Ableitung nach dem Argument. (2) Ein einzelner Strich an einer Spur besagt, daß die Eigenmoden zum niedrigsten $-D^2$ -Eigenwert auszuschließen sind. (3) Zwei Striche an einer Spur symbolisieren die Subtraktion der Beiträge von den Eigenmoden zu den beiden kleinsten $-D^2$ -Eigenwerten. (4) Die Subskripten (0), (1T) und (2ST²) an den Spuren weisen darauf hin, daß die Operatoren unter den Spuren auf Spin-0-Felder, transversale (T) Spin-1-Felder bzw. symmetrische, transversale, spurfreie (ST²) Spin-2-Felder wirken.

Wir fahren jetzt damit fort, aus der Flußgleichung (2.3) das gesuchte Differentialgleichungssystem für die Kopplungen herzuleiten. Um die sehr komplizierten Rechnungen überhaupt durchführen zu können, beschränken wir uns gezwungenermaßen von nun an auf die vom technischen Standpunkt äußerst günstige Eichung $\alpha = 1$.

Im folgenden werden aus der Funktion $\mathcal{S}_k(R)$, die man wegen $R \propto r^{-2}$ als Funktion des Krümmungsradius r auffassen kann, diejenigen Anteile herausprojiziert, die proportional zu den in (5.4) enthaltenen Potenzen von r sind, also $r^d \propto \int d^d x \sqrt{g}$, $r^{d-2} \propto \int d^d x \sqrt{g} R$ und $r^{d-4} \propto \int d^d x \sqrt{g} R^2$. Dazu muß man den Ausdruck für $\mathcal{S}_k(R)$ aus Gleichung (5.9) zunächst nach r entwickeln und anschließend die darin enthaltenen Spuren auswerten.

Beginnen wir also mit der Entwicklung von $\mathcal{S}_k(R)$ nach r . Dadurch ergibt sich der Ausdruck

$$\begin{aligned}
\mathcal{S}_k(R) = & \text{Tr}_{(2ST^2)} [\mathcal{A}_1^{-1} \mathcal{N}] + \text{Tr}'_{(1T)} [\mathcal{A}_1^{-1} \mathcal{N}] - h_1(d) \text{Tr}''_{(0)} [\mathcal{A}_2^{-1} \mathcal{N}] + a_k \text{Tr}''_{(0)} [\mathcal{A}_2^{-1} \mathcal{T}_2] \\
& + a_k \text{Tr}''_{(0)} [(\mathcal{A}_1 \mathcal{A}_2)^{-1} P_k^2 \mathcal{N}] - 2 \text{Tr}_{(1T)} [P_k^{-1} \mathcal{N}_0] - 2 \text{Tr}'_{(0)} [P_k^{-1} \mathcal{N}_0] \\
& + \left\{ -a_k \text{Tr}_{(2ST^2)} [\mathcal{A}_1^{-1} \mathcal{T}_1] + a_k \text{Tr}_{(2ST^2)} [\mathcal{A}_1^{-2} P_k \mathcal{N}] - A_T(d) \text{Tr}_{(2ST^2)} [\mathcal{A}_1^{-2} \mathcal{N}] \right. \\
& - A_V(d, 1) \text{Tr}'_{(1T)} [\mathcal{A}_1^{-2} \mathcal{N}] + h_2(d) a_k \text{Tr}''_{(0)} [(\mathcal{A}_1 \mathcal{A}_2)^{-1} \mathcal{T}_2] \\
& + h_3(d) a_k \text{Tr}''_{(0)} [(\mathcal{A}_1 \mathcal{A}_2)^{-1} P_k \mathcal{N}] + h_4(d) \text{Tr}''_{(0)} [(\mathcal{A}_1 \mathcal{A}_2)^{-1} \mathcal{N}] + h_3(d) a_k \text{Tr}''_{(0)} [\mathcal{A}_2^{-1} \mathcal{T}_1] \\
& - h_2(d) a_k^2 \text{Tr}''_{(0)} [\mathcal{A}_1^{-1} \mathcal{A}_2^{-2} P_k^2 \mathcal{T}_2] - h_3(d) a_k^2 \text{Tr}''_{(0)} [\mathcal{A}_2^{-2} P_k \mathcal{T}_2] - h_4(d) a_k \text{Tr}''_{(0)} [\mathcal{A}_2^{-2} \mathcal{T}_2] \\
& - h_2(d) a_k^2 \text{Tr}''_{(0)} [(\mathcal{A}_1 \mathcal{A}_2)^{-2} P_k^4 \mathcal{N}] - h_3(d) a_k^2 \text{Tr}''_{(0)} [\mathcal{A}_1^{-1} \mathcal{A}_2^{-2} P_k^3 \mathcal{N}] \\
& - 2h_4(d) a_k \text{Tr}''_{(0)} [\mathcal{A}_1^{-1} \mathcal{A}_2^{-2} P_k^2 \mathcal{N}] + h_1(d) h_3(d) a_k \text{Tr}''_{(0)} [\mathcal{A}_2^{-2} P_k \mathcal{N}] \\
& + h_1(d) h_4(d) \text{Tr}''_{(0)} [\mathcal{A}_2^{-2} \mathcal{N}] - \frac{2}{d} \text{Tr}_{(1T)} [P_k^{-2} \mathcal{N}_0] - \frac{4}{d} \text{Tr}'_{(0)} [P_k^{-2} \mathcal{N}_0] \\
& \left. + \frac{\delta_{d,2}}{4\pi} [(\bar{\beta}_k k^4)^{-1} \partial_t (\bar{\beta}_k k^4)] \int d^d x \sqrt{g} \right\} R
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \left\{ -a_k^2 \operatorname{Tr}_{(2ST^2)} [\mathcal{A}_1^{-2} P_k \mathcal{T}_1] + a_k A_T(d) \operatorname{Tr}_{(2ST^2)} [\mathcal{A}_1^{-2} \mathcal{T}_1] - G_T(d) a_k \operatorname{Tr}_{(2ST^2)} [\mathcal{A}_1^{-2} \mathcal{N}] \right. \\
& + a_k^2 \operatorname{Tr}_{(2ST^2)} [\mathcal{A}_1^{-3} P_k^2 \mathcal{N}] - 2A_T(d) a_k \operatorname{Tr}_{(2ST^2)} [\mathcal{A}_1^{-3} P_k \mathcal{N}] + A_T(d)^2 \operatorname{Tr}_{(2ST^2)} [\mathcal{A}_1^{-3} \mathcal{N}] \\
& - G_V(d) a_k \operatorname{Tr}'_{(1T)} [\mathcal{A}_1^{-2} \mathcal{N}] + A_V(d, 1)^2 \operatorname{Tr}'_{(1T)} [\mathcal{A}_1^{-3} \mathcal{N}] - h_5(d) a_k^2 \operatorname{Tr}''_{(0)} [(\mathcal{A}_1 \mathcal{A}_2)^{-1} \mathcal{T}_2] \\
& + h_6(d) a_k \operatorname{Tr}''_{(0)} [(\mathcal{A}_1 \mathcal{A}_2)^{-1} \mathcal{N}] - \frac{2}{d^2} a_k^2 \operatorname{Tr}''_{(0)} [(\mathcal{A}_1 \mathcal{A}_2)^{-1} P_k \mathcal{T}_1] \\
& + h_2(d) h_3(d) a_k \operatorname{Tr}''_{(0)} [(\mathcal{A}_1 \mathcal{A}_2)^{-1} \mathcal{T}_1] - h_2(d)^2 a_k^2 \operatorname{Tr}''_{(0)} [(\mathcal{A}_1 \mathcal{A}_2)^{-2} P_k^2 \mathcal{T}_2] \\
& + \frac{1}{2} h_2(d) a_k^3 \operatorname{Tr}''_{(0)} [\mathcal{A}_1^{-1} \mathcal{A}_2^{-2} P_k^2 \mathcal{T}_2] - 2h_2(d) h_3(d) a_k^2 \operatorname{Tr}''_{(0)} [\mathcal{A}_1^{-1} \mathcal{A}_2^{-2} P_k \mathcal{T}_2] \\
& - \frac{3}{2} h_2(d) h_4(d) a_k \operatorname{Tr}''_{(0)} [\mathcal{A}_1^{-1} \mathcal{A}_2^{-2} \mathcal{T}_2] - h_6(d) a_k^2 \operatorname{Tr}''_{(0)} [\mathcal{A}_2^{-2} \mathcal{T}_2] \\
& + \frac{1}{2} h_2(d) a_k^3 \operatorname{Tr}''_{(0)} [(\mathcal{A}_1 \mathcal{A}_2)^{-2} P_k^4 \mathcal{N}] - 2h_2(d) h_3(d) a_k^2 \operatorname{Tr}''_{(0)} [(\mathcal{A}_1 \mathcal{A}_2)^{-2} P_k^3 \mathcal{N}] \\
& - \frac{3}{2} h_2(d) h_4(d) a_k \operatorname{Tr}''_{(0)} [(\mathcal{A}_1 \mathcal{A}_2)^{-2} P_k^2 \mathcal{N}] - h_7(d) a_k^2 \operatorname{Tr}''_{(0)} [\mathcal{A}_1^{-1} \mathcal{A}_2^{-2} P_k^2 \mathcal{N}] \\
& - 3h_3(d) h_4(d) a_k \operatorname{Tr}''_{(0)} [\mathcal{A}_1^{-1} \mathcal{A}_2^{-2} P_k \mathcal{N}] - \frac{3}{2} h_4(d)^2 \operatorname{Tr}''_{(0)} [\mathcal{A}_1^{-1} \mathcal{A}_2^{-2} \mathcal{N}] \\
& + h_1(d) h_6(d) a_k \operatorname{Tr}''_{(0)} [\mathcal{A}_2^{-2} \mathcal{N}] - h_2(d) h_3(d) a_k^2 \operatorname{Tr}''_{(0)} [\mathcal{A}_1^{-1} \mathcal{A}_2^{-2} P_k^2 \mathcal{T}_1] \\
& - h_3(d)^2 a_k^2 \operatorname{Tr}''_{(0)} [\mathcal{A}_2^{-2} P_k \mathcal{T}_1] - h_3(d) h_4(d) a_k \operatorname{Tr}''_{(0)} [\mathcal{A}_2^{-2} \mathcal{T}_1] \\
& + h_2(d)^2 a_k^3 \operatorname{Tr}''_{(0)} [\mathcal{A}_1^{-2} \mathcal{A}_2^{-3} P_k^4 \mathcal{T}_2] + 2h_2(d) h_3(d) a_k^3 \operatorname{Tr}''_{(0)} [\mathcal{A}_1^{-1} \mathcal{A}_2^{-3} P_k^3 \mathcal{T}_2] \\
& + 2h_2(d) h_4(d) a_k^2 \operatorname{Tr}''_{(0)} [\mathcal{A}_1^{-1} \mathcal{A}_2^{-3} P_k^2 \mathcal{T}_2] + h_3(d)^2 a_k^3 \operatorname{Tr}''_{(0)} [\mathcal{A}_2^{-3} P_k^2 \mathcal{T}_2] \\
& + 2h_3(d) h_4(d) a_k^2 \operatorname{Tr}''_{(0)} [\mathcal{A}_2^{-3} P_k \mathcal{T}_2] + h_4(d)^2 a_k \operatorname{Tr}''_{(0)} [\mathcal{A}_2^{-3} \mathcal{T}_2] \\
& + h_2(d)^2 a_k^3 \operatorname{Tr}''_{(0)} [(\mathcal{A}_1 \mathcal{A}_2)^{-3} P_k^6 \mathcal{N}] + 2h_2(d) h_3(d) a_k^3 \operatorname{Tr}''_{(0)} [\mathcal{A}_1^{-2} \mathcal{A}_2^{-3} P_k^5 \mathcal{N}] \\
& + 3h_2(d) h_4(d) a_k^2 \operatorname{Tr}''_{(0)} [\mathcal{A}_1^{-2} \mathcal{A}_2^{-3} P_k^4 \mathcal{N}] + h_3(d)^2 a_k^3 \operatorname{Tr}''_{(0)} [\mathcal{A}_1^{-1} \mathcal{A}_2^{-3} P_k^4 \mathcal{N}] \\
& + 4h_3(d) h_4(d) a_k^2 \operatorname{Tr}''_{(0)} [\mathcal{A}_1^{-1} \mathcal{A}_2^{-3} P_k^3 \mathcal{N}] + 3h_4(d)^2 a_k \operatorname{Tr}''_{(0)} [\mathcal{A}_1^{-1} \mathcal{A}_2^{-3} P_k^2 \mathcal{N}] \\
& - h_1(d) h_3(d)^2 a_k^2 \operatorname{Tr}''_{(0)} [\mathcal{A}_2^{-3} P_k^2 \mathcal{N}] - 2h_1(d) h_3(d) h_4(d) a_k \operatorname{Tr}''_{(0)} [\mathcal{A}_2^{-3} P_k \mathcal{N}] \\
& - h_1(d) h_4(d)^2 \operatorname{Tr}''_{(0)} [\mathcal{A}_2^{-3} \mathcal{N}] - \frac{2}{d^2} \operatorname{Tr}_{(1T)} [P_k^{-3} \mathcal{N}_0] - \frac{8}{d^2} \operatorname{Tr}'_{(0)} [P_k^{-3} \mathcal{N}_0] \\
& + \int d^d x \sqrt{g} \left[\frac{\delta_{d,2}}{8\pi k^4} \left(1 - 3R^{(0)'}(0) \right) \left((\bar{\beta}_k k^2)^{-1} \partial_t (\bar{\beta}_k k^4) - \bar{\beta}_k^{-1} \partial_t (\bar{\beta}_k k^2) \right) \right. \\
& \left. + \frac{\delta_{d,4}}{8(4\pi)^2} \left(9a_k k^4 - 2(k^2 - 2\bar{\lambda}_k) \right)^{-1} \left(9a_k \bar{\beta}_k^{-1} \partial_t (\bar{\beta}_k k^4) - 2Z_{Nk}^{-1} \partial_t (Z_{Nk} k^2) \right) \right] \Big\} R^2
\end{aligned}$$

$$+\mathcal{O}(r^{<d-4}). \quad (5.12)$$

Die hier eingeführten Größen \mathcal{A}_1 , \mathcal{A}_2 und a_k sind wie folgt definiert:

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_1 &\equiv P_k - 2\bar{\lambda}_k, \\ \mathcal{A}_2 &\equiv a_k P_k^2 - \frac{1}{2}h_1(d) (P_k - 2\bar{\lambda}_k) \end{aligned} \quad (5.13)$$

und

$$a_k \equiv (Z_{Nk}\kappa^2)^{-1}\bar{\beta}_k. \quad (5.14)$$

Weiterhin bedeutet $\mathcal{O}(r^{<d-4})$, daß alle Terme $\propto r^n$ mit Potenzen $n < d - 4$ vernachlässigt werden.

Die Terme in (5.12), die proportional zu $\delta_{d,2}$ bzw. $\delta_{d,4}$ sind, gehen aus dem letzten Term von Gleichung (5.9) hervor. Dieser Term besitzt eine Reihenentwicklung der Form $\sum_{m=0}^{\infty} b_{2m}r^{-2m}$, wobei $\{b_{2m}\}$ einen Satz von r -unabhängigen Koeffizienten verkörpert und die Potenzen von r allesamt d -unabhängig sind. Dies verhält sich bei allen anderen Termen in (5.9) anders; ihre Reihenentwicklungen enthalten ausschließlich d -abhängige Potenzen von r . Für unsere Zwecke benötigen wir die zu r^d , r^{d-2} bzw. r^{d-4} proportionalen Terme aus Gleichung (5.9). Identifizieren wir nun die entsprechenden Terme in $\sum_{m=0}^{\infty} b_{2m}r^{-2m}$. Unter den gegebenen Voraussetzungen $m \geq 0$ und $d > 0$ werden die Gleichungen $-2m = d - 4$ oder $-2m = d - 2$ nur von den Tupeln $(m, d) \in \{(0, 2), (1, 2), (0, 4)\}$ gelöst. Außerdem besitzt die Gleichung $-2m = d$ hier keine Lösung. Folglich trägt der letzte Term in (5.9) nur im $d = 2$ - und im $d = 4$ -dimensionalen Fall zum Renormierungsgruppenfluß von $\bar{\lambda}_k$, Z_{Nk} und $\bar{\beta}_k$ bei. Mit Hilfe von (3.7) lassen sich die entsprechenden Anteile, also $b_{2m=0} r^0$ in $d = 2$ und $d = 4$ Dimensionen sowie $b_{2m=2} r^{-2}$ in $d = 2$ Dimensionen, durch die Operatoren $\int d^2x \sqrt{g}R$, $\int d^2x \sqrt{g}R^2$ oder $\int d^4x \sqrt{g}R^2$ ausdrücken. Daraus resultieren schließlich die zu $\delta_{d,2}$ bzw. $\delta_{d,4}$ proportionalen Terme in (5.12).

Der nächste Schritt besteht darin, die in (5.12) enthaltenen Spuren auszuwerten. Wie im Fall der Einstein-Hilbert-Trunkierung wird dazu auf die Schwinger-De Witt-Entwicklung des Heat-Kernels zurückgegriffen. Die technischen Details zu dieser Rechnung lassen sich in Anhang C.2 nachlesen. Den daraus hervorgehenden Ausdruck für $\mathcal{S}_k(R)$ führt man dann wieder mit der linken Seite der Flußgleichung, also Gleichung (5.4), zusammen und nimmt dann einen Koeffizientenvergleich hinsichtlich der r -Potenzen $r^d \propto \int d^d x \sqrt{g}$, $r^{d-2} \propto \int d^d x \sqrt{g}R$ und $r^{d-4} \propto \int d^d x \sqrt{g}R^2$ vor. Auf diese Weise erhält man schließlich das angestrebte System von Flußgleichungen für $\bar{\lambda}_k$, Z_{Nk} und $\bar{\beta}_k$. Dieses liest sich wie folgt:

$$\begin{aligned} \partial_t (Z_{Nk} \bar{\lambda}_k) &= Z_{Nk} \left\{ 2\bar{\lambda}_k + k^2 A_1 (k^{-2}\bar{\lambda}_k, k^{d-2}(32\pi Z_{Nk}\kappa^2)^{-1}, k^{4-d}\bar{\beta}_k; d) \right. \\ &\quad \left. + \eta_N(k) [-\bar{\lambda}_k + k^2 A_2 (k^{-2}\bar{\lambda}_k, k^{d-2}(32\pi Z_{Nk}\kappa^2)^{-1}, k^{4-d}\bar{\beta}_k; d)] \right\} \end{aligned}$$

$$+\eta_\beta(k) k^2 A_3 \left(k^{-2} \bar{\lambda}_k, k^{d-2} (32\pi Z_{Nk} \kappa^2)^{-1}, k^{4-d} \bar{\beta}_k; d \right) \}, \quad (5.15)$$

$$\begin{aligned} \partial_t Z_{Nk} &= -(32\pi \kappa^2)^{-1} k^{d-2} \left\{ B_1 \left(k^{-2} \bar{\lambda}_k, k^{d-2} (32\pi Z_{Nk} \kappa^2)^{-1}, k^{4-d} \bar{\beta}_k; d \right) \right. \\ &\quad + \eta_N(k) B_2 \left(k^{-2} \bar{\lambda}_k, k^{d-2} (32\pi Z_{Nk} \kappa^2)^{-1}, k^{4-d} \bar{\beta}_k; d \right) \\ &\quad \left. + \eta_\beta(k) B_3 \left(k^{-2} \bar{\lambda}_k, k^{d-2} (32\pi Z_{Nk} \kappa^2)^{-1}, k^{4-d} \bar{\beta}_k; d \right) \right\}, \quad (5.16) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \partial_t \bar{\beta}_k &= k^{d-4} \left\{ C_1 \left(k^{-2} \bar{\lambda}_k, k^{d-2} (32\pi Z_{Nk} \kappa^2)^{-1}, k^{4-d} \bar{\beta}_k; d \right) \right. \\ &\quad + \eta_N(k) C_2 \left(k^{-2} \bar{\lambda}_k, k^{d-2} (32\pi Z_{Nk} \kappa^2)^{-1}, k^{4-d} \bar{\beta}_k; d \right) \\ &\quad \left. + \eta_\beta(k) C_3 \left(k^{-2} \bar{\lambda}_k, k^{d-2} (32\pi Z_{Nk} \kappa^2)^{-1}, k^{4-d} \bar{\beta}_k; d \right) \right\}. \quad (5.17) \end{aligned}$$

Die in den drei Gleichungen enthaltenen Größen A_i , B_i , C_i , $i = 1, 2, 3$, sind äußerst komplizierte Funktionen der Kopplungen und der Dimensionalität d . Die expliziten Ausdrücke für diese Koeffizientenfunktionen sind in Anhang H.1 aufgeführt. Sie enthalten die “neuen” Schwellenfunktionen Ψ und $\tilde{\Psi}$, die durch die Gleichungen (C.31) und (C.32) aus Anhang C.2 definiert sind. Letztere sind Funktionale der Profildfunktion $R^{(0)}$ und stellen Verallgemeinerungen der Schwellenfunktionen Φ und $\tilde{\Phi}$ dar, die im Rahmen der Einstein-Hilbert-Trunkierung eingeführt wurden, siehe Gleichung (3.23).

5.3 Das Flußgleichungssystem für λ_k , g_k und β_k

Für die sich anschließenden Anwendungen erweist es sich als zweckmäßig, die Differentialgleichungen (5.15)-(5.17) durch dimensionslose Variablen auszudrücken. Dazu ziehen wir die in (3.25) und (3.26) definierten Parameter $g_k \equiv k^{d-2} G_k \equiv k^{d-2} Z_{Nk}^{-1} \bar{G}$ und $\lambda_k \equiv k^{-2} \bar{\lambda}_k$ heran, die die dimensionslose, laufende Newton-Konstante bzw. die dimensionslose, laufende kosmologische Konstante verkörpern, und führen außerdem die dimensionslose, laufende R^2 -Kopplung

$$\beta_k \equiv k^{4-d} \bar{\beta}_k \quad (5.18)$$

ein. Wie bereits in Abschnitt 3.4 erwähnt wurde, bezeichnet $G_k \equiv \bar{G}/Z_{Nk}$ die zugehörige dimensionsbehaftete, laufende Newton-Konstante.

Ersetzt man mit Hilfe dieser Gleichungen $\bar{\lambda}_k$, Z_{Nk} und $\bar{\beta}_k$ in (5.15)-(5.17) durch λ_k , g_k und β_k und verwendet außerdem die Beziehung (3.27), so nimmt das obige System von Flußgleichungen die nachstehende Form an:

$$\begin{aligned} \partial_t \lambda_k &= \beta_\lambda(\lambda_k, g_k, \beta_k; d) \\ &\equiv A_1(\lambda_k, g_k, \beta_k; d) + \eta_N(k) A_2(\lambda_k, g_k, \beta_k; d) + \eta_\beta(k) A_3(\lambda_k, g_k, \beta_k; d), \quad (5.19) \end{aligned}$$

$$\partial_t g_k = \beta_g(\lambda_k, g_k, \beta_k; d) \equiv [d - 2 + \eta_N(k)] g_k , \quad (5.20)$$

$$\partial_t \beta_k = \beta_\beta(\lambda_k, g_k, \beta_k; d) \equiv [4 - d - \eta_\beta(k)] \beta_k . \quad (5.21)$$

Für die anomalen Dimensionen ergeben sich aus (5.16) und (5.17) zunächst die Gleichungen

$$\eta_N = g_k B_1(\lambda_k, g_k, \beta_k; d) + \eta_N g_k B_2(\lambda_k, g_k, \beta_k; d) + \eta_\beta g_k B_3(\lambda_k, g_k, \beta_k; d) \quad (5.22)$$

und

$$\eta_\beta = -\beta_k^{-1} C_1(\lambda_k, g_k, \beta_k; d) - \eta_N \beta_k^{-1} C_2(\lambda_k, g_k, \beta_k; d) - \eta_\beta \beta_k^{-1} C_3(\lambda_k, g_k, \beta_k; d) . \quad (5.23)$$

Man löst nun das durch (5.22) und (5.23) beschriebene Gleichungssystem nach η_N und η_β auf. Dadurch erhält man für die anomalen Dimensionen explizite Ausdrücke, die von den dimensionslosen Kopplungen und von der Dimensionalität d abhängen. Sie sind von der folgenden Form:

$$\eta_N(k) \equiv \eta_N(\lambda_k, g_k, \beta_k; d) = \quad (5.24)$$

$$g_k \frac{B_1(\lambda_k, g_k, \beta_k; d) [\beta_k + C_3(\lambda_k, g_k, \beta_k; d)] - C_1(\lambda_k, g_k, \beta_k; d) B_3(\lambda_k, g_k, \beta_k; d)}{[1 - g_k B_2(\lambda_k, g_k, \beta_k; d)] [\beta_k + C_3(\lambda_k, g_k, \beta_k; d)] + g_k C_2(\lambda_k, g_k, \beta_k; d) B_3(\lambda_k, g_k, \beta_k; d)} ,$$

$$\eta_\beta(k) \equiv \eta_\beta(\lambda_k, g_k, \beta_k; d) = \quad (5.25)$$

$$\frac{C_1(\lambda_k, g_k, \beta_k; d) [1 - g_k B_2(\lambda_k, g_k, \beta_k; d)] + g_k B_1(\lambda_k, g_k, \beta_k; d) C_2(\lambda_k, g_k, \beta_k; d)}{[1 - g_k B_2(\lambda_k, g_k, \beta_k; d)] [\beta_k + C_3(\lambda_k, g_k, \beta_k; d)] + g_k C_2(\lambda_k, g_k, \beta_k; d) B_3(\lambda_k, g_k, \beta_k; d)} .$$

Vom technischen Standpunkt aus betrachtet, gehören die drei β -Funktionen β_λ , β_g und β_β aus den Gleichungen (5.19)-(5.21) zu den wichtigsten Resultaten der vorliegenden Arbeit. Mit ihrer Hilfe wird im nächsten Abschnitt der auf den λ - g - β -Raum projizierte Renormierungsgruppenfluß der Gravitationswirkung detailliert analysiert.

Kapitel 6

Die Fixpunkte in der R^2 -Trunkierung

6.1 Ausblick auf die Fixpunktanalyse

Das im vorangegangenen Kapitel hergeleitete Differentialgleichungssystem (5.19)-(5.21) ist weitaus komplizierter als sein Gegenstück aus der Einstein-Hilbert-Trunkierung, welches sich aus den Gleichungen (3.28) und (3.30) zusammensetzt. Zum einen liegt das daran, daß es den Renormierungsgruppenfluß in einem *dreidimensionalen* Parameterraum, dem λ - g - β -Raum, beschreibt, während bei der Einstein-Hilbert-Trunkierung der Fluß auf die lediglich *zweidimensionale* λ - g -Ebene projiziert wird. Die Anzahl der laufenden Parameter und somit auch der Differentialgleichungen ist also im Vergleich zur Einstein-Hilbert-Trunkierung um eins gestiegen. Zum anderen sind die β -Funktionen aus dem Gleichungssystem der R^2 -Trunkierung (5.19)-(5.21) allesamt viel umfangreicher als diejenigen aus den Gleichungen (3.28) und (3.30).

War es schon bei der reinen Einstein-Hilbert-Trunkierung nicht möglich, das zugehörige Gleichungssystem auf analytischem Wege exakt zu lösen, so ist dies für die R^2 -Trunkierung erst recht nicht realisierbar. Aus der Untersuchung der Einstein-Hilbert-Trunkierung läßt sich zudem schließen, daß auch eine numerische Lösung zu (5.19)-(5.21) sehr schwer zu finden sein dürfte.¹ Wir werden uns daher wie in Kapitel 4 auf die Analyse der Fixpunktstruktur des Renormierungsgruppenflusses konzentrieren, um an Informationen bezüglich seiner allgemeinen Struktur zu gelangen. Insbesondere werden wir im folgenden überprüfen, ob die Fixpunkte der Einstein-Hilbert-Trunkierung und ihre Eigenschaften sich im Rahmen der R^2 -Trunkierung reproduzieren. Dabei richten wir unser Hauptaugenmerk

¹Wie bereits zuvor erwähnt wurde, ist es im Falle der Einstein-Hilbert-Trunkierung tatsächlich gelungen, das System von Differentialgleichungen bei Vorgabe eines bestimmten ("scharfen") Cutoffs numerisch zu lösen, siehe [14, 22].

wieder auf den nicht-Gaußschen Fixpunkt, da dieser, wie bereits eingehend in Kapitel 4 erläutert wurde, hinsichtlich der vermuteten Existenz einer nichtperturbativ renormierbaren Quantentheorie der Gravitation von immenser Bedeutung sein könnte. Aber auch der Status des in Abschnitt 4.2 gefundenen Gaußschen Fixpunkts bei $\lambda = g = 0$ wird im folgenden sorgfältig überprüft.

Bevor wir mit unserer Fixpunktanalyse starten, ist es angebracht, die dafür gegebenen Voraussetzungen noch einmal kurz zusammenzufassen. Der von der R^2 -Trunkierung aufgespannte Unterraum des Raums aller Wirkungsfunktionale wird durch die Koordinaten $g_1 = \lambda$, $g_2 = g$ und $g_3 = \beta$ parametrisiert. Die drei zugehörigen β -Funktionen, welche in den Flußgleichungen

$$\partial_t \lambda_k = \beta_\lambda(\lambda_k, g_k, \beta_k), \quad \partial_t g_k = \beta_g(\lambda_k, g_k, \beta_k), \quad \partial_t \beta_k = \beta_\beta(\lambda_k, g_k, \beta_k) \quad (6.1)$$

auftreten, sind durch die Gleichungen (5.19), (5.20) und (5.21) festgelegt. Uns interessieren im weiteren Verlauf hauptsächlich die Fixpunkte des Renormierungsgruppenflusses, d.h. die Punkte im λ - g - β -Raum, bei denen alle drei β -Funktionen simultan verschwinden.

In nächsten Abschnitt werden wir untersuchen, welche Auswirkungen die Vergrößerung des Parameterraums auf den in Abschnitt 4.2 diskutierten Gaußschen Fixpunkt der Einstein-Hilbert-Trunkierung $(\lambda_*, g_*) = (0, 0)$ hat. Bemerkenswerterweise wird sich dabei herausstellen, daß dieser Fixpunkt im λ - g - β -Raum der verallgemeinerten Trunkierung nicht mehr existiert. Im Gegensatz dazu findet sich der nicht-Gaußsche Fixpunkt der Einstein-Hilbert-Trunkierung auch in der R^2 -Trunkierung wieder. Mit diesem werden wir uns dann sehr intensiv beschäftigen. Im einzelnen werden wir mit Hilfe der Familien von Profildfunktionen (2.8) und (2.9) seine Cutoff-Schema-Abhängigkeit sowie diejenige seiner kritischen Exponenten studieren, den linearisierten Fluß in seiner Umgebung genau unter die Lupe nehmen und schließlich sämtliche Resultate mit den entsprechenden der Einstein-Hilbert-Trunkierung aus Abschnitt 4.3 vergleichen. Dabei erhält man ein äußerst erstaunliches Resultat: Sämtliche Eigenschaften des nicht-Gaußschen Fixpunkts werden durch den zusätzlichen R^2 -Term kaum beeinflußt. Mit einer Schilderung der Konsequenzen, die sich daraus ergeben, beenden wir unsere Fixpunktanalyse.

An dieser Stelle sei ergänzend angemerkt, daß im Fall der verallgemeinerten Trunkierung ausschließlich ein Cutoff vom Typ B benutzt wird. Im Gegensatz zur reinen Einstein-Hilbert-Trunkierung erscheint hier die Implementierung eines Cutoffs vom Typ A, der auf den vollständigen Feldern beruht, vom technischen Standpunkt aus betrachtet, nicht realisierbar zu sein. Im weiteren Verlauf werden wir daher jedesmal, wenn wir uns auf die Resultate der R^2 -Trunkierung beziehen, stillschweigend den Cutofftyp B voraussetzen und auf die explizite Spezifizierung des Cutofftyps verzichten.

6.2 Das Schicksal des Gaußschen Fixpunkts

In Abschnitt 4.2 wurde gezeigt, daß die β -Funktionen der Einstein-Hilbert-Trunkierung β_g und β_λ aus den Gleichungen (3.28) und (3.30) zu einem Gaußschen Fixpunkt $(\lambda_*, g_*) = (0, 0)$ führen. Weiterhin wurde dort der zweidimensionale Renormierungsgruppenfluß in seiner Umgebung analysiert, und es wurden die damit einhergehenden Stabilitätseigenschaften dieses Fixpunkts erläutert. Es stellt sich nun die Frage, was mit diesem Fixpunkt geschieht, wenn man den Parameterraum durch Erweiterung des Trunkierungsansatzes vergrößert.

Dies wollen wir im folgenden anhand der R^2 -Trunkierung diskutieren; sie beschreibt den auf den dreidimensionalen λ - g - β -Raum projizierten Fluß von Γ_k . (Im Vergleich zur Einstein-Hilbert-Trunkierung wird hier also eine zusätzliche Richtung, die β -Richtung, berücksichtigt.) Verblüffenderweise stellt sich heraus, daß der Gaußsche Fixpunkt ein "tragisches" Schicksal erleidet: Es gibt ihn in dieser Trunkierung nicht mehr, d.h. $(\lambda, g, \beta) = (0, 0, 0)$ ist keine gemeinsame Nullstelle der drei β -Funktionen aus den Gleichungen (5.19)-(5.21). Während β_λ und β_g am Ursprung $(\lambda, g, \beta) = (0, 0, 0)$ verschwinden, nimmt β_β für $\lambda_k = g_k = 0$ die nachstehende Form an:

$$\beta_\beta(0, 0, \beta_k; d) = \beta_\beta(0, 0, 0; d) = \gamma_d \quad \forall \beta_k. \quad (6.2)$$

Hier verkörpert γ_d eine nichtverschwindende Konstante, die folgendermaßen definiert ist:

$$\gamma_d \equiv (4\pi)^{-\frac{d}{2}} \{ h_{31}(d) \Phi_{d/2-2}^1(0) + h_{32}(d) \Phi_{d/2-1}^2(0) + h_{33}(d) \Phi_{d/2}^3(0) \}. \quad (6.3)$$

Die Ausdrücke für die in (6.3) auftauchenden h_i lassen sich dem Anhang H.2 entnehmen. In $d = 4$ Dimensionen stellt

$$\gamma_4 = \frac{419}{1080} (4\pi)^{-2} \quad (6.4)$$

offensichtlich eine universelle Größe dar. Das liegt daran, daß unabhängig von der Profilmfunktion $R^{(0)}$ die Beziehung $\Phi_0^1(0) = \Phi_1^2(0) = 2\Phi_2^3(0) = 1$ gilt, vgl. Anhang K.

Wir stellen somit fest, daß β_β am Ursprung von Null verschieden ist und demzufolge kein Gaußscher Fixpunkt vorliegt. Dennoch ist es durchaus von Interesse, den Renormierungsgruppenfluß in der Nähe von $(\lambda, g, \beta) = (0, 0, 0)$ zu untersuchen. Der Einfachheit halber beschränken wir uns dabei auf den Fall $d > 2$. Für die geplante Studie ist es erforderlich, $(\beta_\lambda, \beta_g, \beta_\beta)$ um den Ursprung zu entwickeln. Anstelle des homogenen Gleichungssystems (4.2), das sich im Fall eines Fixpunkts ergibt, erhält man dadurch das *inhomogene* System

$$k \partial_k g_i(k) = \gamma_d \delta_{i,3} + \sum_{j=1}^3 M_{ij} g_j(k). \quad (6.5)$$

Der linearisierte Renormierungsgruppenfluß ist offensichtlich durch die Jacobi-Matrix $\mathbf{M} = (M_{ij})$, $M_{ij} \equiv \partial_j \beta_i|_{\lambda_k=g_k=\beta_k=0}$, bestimmt. Sie besitzt hier die folgende Form:

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} -2 & \nu_d d & 0 \\ 0 & d-2 & 0 \\ \varsigma_d & \tau_d & 4-d \end{pmatrix}. \quad (6.6)$$

Ihre Einträge lassen sich den entwickelten β -Funktionen (J.11) aus Anhang J.2 entnehmen. Sie enthalten die d -abhängigen Parameter ν_d , ς_d und τ_d , die wie folgt definiert sind:

$$\begin{aligned} \nu_d &\equiv (d-3)(4\pi)^{1-\frac{d}{2}} \Phi_{d/2}^1(0), \\ \varsigma_d &\equiv (4\pi)^{-\frac{d}{2}} \{ h_{34}(d) \Phi_{d/2-2}^2(0) + h_{35}(d) \Phi_{d/2-1}^3(0) + h_{36}(d) \Phi_{d/2}^4(0) \}, \\ \tau_d &\equiv -(4\pi)^{1-d} \left\{ [h_{37}(d) \Phi_{d/2-1}^1(0) + h_{38}(d) \Phi_{d/2}^2(0)] \right. \\ &\quad \times \left[\frac{1}{4} h_{34}(d) \tilde{\Phi}_{d/2-2}^1(0) + \frac{1}{8} h_{35}(d) \tilde{\Phi}_{d/2-1}^2(0) + \frac{1}{12} h_{36}(d) \tilde{\Phi}_{d/2}^3(0) \right] \\ &\quad + [h_{31}(d) \Phi_{d/2-2}^1(0) + h_{32}(d) \Phi_{d/2-1}^2(0) + h_{33}(d) \Phi_{d/2}^3(0)] \\ &\quad \times [h_{39}(d) \tilde{\Phi}_{d/2-2}^0(0) + h_{40}(d) \tilde{\Phi}_{d/2-1}^1(0) \\ &\quad \left. + h_{41}(d) \tilde{\Phi}_{d/2}^2(0) + h_{42}(d) \tilde{\Phi}_{d/2+1}^3(0) + \frac{3}{2}] \right\}. \end{aligned} \quad (6.7)$$

An dieser Stelle ist anzumerken, daß ν_d exakt mit dem entsprechenden Parameter aus der Einstein-Hilbert-Trunkierung übereinstimmt, siehe Gleichung (4.8) in Abschnitt 4.2. Die Analogien zwischen den beiden Trunkierungen gehen aber noch darüber hinaus. Denn tatsächlich ist sogar die komplette Submatrix $(M_{ij})_{i,j \in \{1,2\}}$ mit der Stabilitätsmatrix (4.7) des Gaußschen Fixpunkts der Einstein-Hilbert-Trunkierung identisch.

Man diagonalisiert nun die Matrix (6.6) und erhält dadurch die (offenkundig universonen) Eigenwerte $\vartheta_1 = -2$, $\vartheta_2 = d-2$ und $\vartheta_3 = 4-d$. Die zugehörigen Eigenvektoren sind

$$V^1 = \left(1, 0, \varsigma_d/(d-6) \right)^{\mathbf{T}}, \quad V^2 = \left(\nu_d, 1, (\varsigma_d \nu_d + \tau_d)/(2(d-3)) \right)^{\mathbf{T}}, \quad V^3 = (0, 0, 1)^{\mathbf{T}}. \quad (6.8)$$

Genauer gesagt, gilt (6.8) nur für $d \neq 3, 6$. Im Fall $d = 3$ lauten die Eigenvektoren $V^1 = (1, 0, -\varsigma_3/3)$, $V^2 = V^3 = (0, 0, 1)$, und der $d = 6$ -dimensionale Fall liefert $V^1 = V^3 = (0, 0, 1)$, $V^2 = (\nu_6, 1, (\varsigma_6 \nu_6 + \tau_6)/6)$. Somit ist in beiden Fällen der von den Eigenvektoren aufgespannte Raum lediglich zweidimensional, d.h. sie bilden kein vollständiges System. Für alle d -Werte, inklusive $d = 3$ und $d = 6$, nehmen die Lösungen für λ_k und g_k , die sich

aus dem linearisierten System (6.5) ergeben, die nachstehende Form an:

$$\begin{aligned}\lambda_k &= (\lambda_{k_0} - \nu_d g_{k_0}) \left(\frac{k_0}{k}\right)^2 + \nu_d g_{k_0} \left(\frac{k}{k_0}\right)^{d-2}, \\ g_k &= g_{k_0} \left(\frac{k}{k_0}\right)^{d-2}.\end{aligned}\quad (6.9)$$

Das obige Gleichungssystem stimmt exakt mit seinem Gegenstück (4.9) aus der Einstein-Hilbert-Trunkierung überein. Das hat zweierlei Gründe. Der erste besteht darin, daß die oben erwähnte Beziehung $(M_{ij})_{i,j \in \{1,2\}} = \mathbf{B}$ gilt, wobei \mathbf{B} die Stabilitätsmatrix aus Gleichung (4.7) verkörpert. Das allein reicht aber für die besagte Äquivalenz der beiden Fälle noch nicht aus. Diese wird erst durch das Verschwinden der Matrixeinträge M_{13} und M_{23} gewährleistet: $M_{13} = M_{23} = 0$.

Die entwickelte β -Funktion β_g aus Gleichung (J.11) ist bis einschließlich zur zweiten Ordnung in den Kopplungen unabhängig von λ_k und β_k und fällt sogar in dieser Approximation mit dem entsprechenden Ausdruck aus der Einstein-Hilbert-Trunkierung, Gleichung (J.4), zusammen, wenn man in letzterem $\alpha = 1$ setzt. Somit lassen sich die Ausdrücke, die g_k bzw. G_k in nächsthöherer Ordnung beschreiben, direkt aus der Einstein-Hilbert-Trunkierung übernehmen. Im einzelnen sind dies die Gleichungen (4.10)-(4.12) mit $\alpha = 1$. Beispielsweise ergibt sich im Fall $k \ll |\omega_d G_{k_0}|^{-1/(d-2)}$ und bei gleichzeitiger Wahl der Bezugsskala $k_0 = 0$ gemäß Gleichung (4.12) der nachstehende Ausdruck für die dimensionsbehaftete, laufende Newton-Konstante G_k :

$$G_k = G_0 [1 - \omega_d G_0 k^{d-2} + \mathcal{O}(G_0^2 k^{2(d-2)})]. \quad (6.10)$$

Der d -abhängige Parameter ω_d ist durch

$$\omega_d \equiv -\frac{1}{d-2} B_1(0, 0, 0; d) = (4\pi)^{1-\frac{d}{2}} \{h_{43}(d) \Phi_{d/2-1}^1(0) + h_{44}(d) \Phi_{d/2}^2(0)\} \quad (6.11)$$

definiert und stimmt mit der Größe $\omega_d(\alpha = 1)$ aus Gleichung (4.11) vollkommen überein. Analog zur Einstein-Hilbert-Trunkierung erhält man ferner für die dimensionsbehaftete, laufende kosmologische Konstante

$$\bar{\lambda}_k = \bar{\lambda}_{k_0} + \nu_d G_{k_0} (k^d - k_0^d). \quad (6.12)$$

Wenden wir uns nun der Lösung für β_k zu. Zu ihrer Bestimmung geht man am besten wie folgt vor. Man beginnt damit, die $i = 3$ -Komponente des Gleichungssystems (6.5) durch bloßes Umschreiben in die folgende Form zu bringen:

$$\partial_k [k^{d-4} \beta_k] = k^{d-5} [\gamma_d + \varsigma_d \lambda_k + \tau_d g_k]. \quad (6.13)$$

Dann setzt man die Lösungen für g_k und λ_k aus (6.9) in die obige Gleichung (6.13) ein. Die daraus resultierende Differentialgleichung läßt sich leicht lösen. Für $d \neq 3, 4, 6$ ergibt sich dabei der folgende Ausdruck:

$$\begin{aligned} \beta_k = & \frac{\gamma_d}{d-4} + \frac{(\lambda_{k_0} - \nu_d g_{k_0}) \varsigma_d}{d-6} \left(\frac{k_0}{k}\right)^2 + \frac{\nu_d \varsigma_d + \tau_d}{2(d-3)} g_{k_0} \left(\frac{k}{k_0}\right)^{d-2} \\ & + \left[\beta_{k_0} - \frac{\gamma_d}{d-4} - \frac{(\lambda_{k_0} - \nu_d g_{k_0}) \varsigma_d}{d-6} - \frac{\nu_d \varsigma_d + \tau_d}{2(d-3)} g_{k_0} \right] \left(\frac{k_0}{k}\right)^{d-4}. \end{aligned} \quad (6.14)$$

In den Fällen $d = 3$, $d = 4$ und $d = 6$ lassen sich die Lösungen aus (6.14) gewinnen, indem man diesen Ausdruck in dem jeweiligen Limes $d \rightarrow 3$, $d \rightarrow 4$ oder $d \rightarrow 6$ betrachtet. Im Fall $d = 4$, der natürlich wieder von besonderem Interesse ist, führt dies zu

$$\begin{aligned} \beta_k = & \beta_{k_0} + \frac{(\lambda_{k_0} - \nu_4 g_{k_0}) \varsigma_4}{2} - \frac{\nu_4 \varsigma_4 + \tau_4}{2} g_{k_0} + \frac{419}{1080} (4\pi)^{-2} \ln \left(\frac{k}{k_0}\right) \\ & - \frac{(\lambda_{k_0} - \nu_4 g_{k_0}) \varsigma_4}{2} \left(\frac{k_0}{k}\right)^2 + \frac{\nu_4 \varsigma_4 + \tau_4}{2} g_{k_0} \left(\frac{k}{k_0}\right)^2. \end{aligned} \quad (6.15)$$

Die in (6.15) enthaltenen Parameter nehmen folgende Form an:

$$\begin{aligned} \nu_4 = & \frac{1}{4\pi} \Phi_2^1(0), \\ \varsigma_4 = & (4\pi)^{-2} \left\{ -\frac{559}{432} + \frac{71}{36} \Phi_1^3(0) + \frac{347}{24} \Phi_2^4(0) \right\}, \\ \tau_4 = & (4\pi)^{-3} \left\{ \left[\frac{13}{3} \Phi_1^1(0) + \frac{79}{3} \Phi_2^2(0) \right] \left[-\frac{559}{1728} + \frac{71}{288} \tilde{\Phi}_1^2(0) + \frac{347}{288} \tilde{\Phi}_2^3(0) \right] \right. \\ & \left. + \frac{419}{1080} \left[-\frac{299}{180} + \frac{13}{3} \tilde{\Phi}_1^1(0) + \frac{40}{3} \tilde{\Phi}_2^2(0) \right] \right\}. \end{aligned} \quad (6.16)$$

Verwendet man beispielsweise die exponentielle Profilfunktion aus (2.8) mit $s = 1$ und setzt die entsprechenden Werte der in Anhang K aufgelisteten $\Phi_n^p(0)$ - und $\tilde{\Phi}_n^p(0)$ -Integrale in (6.16) ein, so erhält man

$$\begin{aligned} \nu_4 = & \zeta(3)/(2\pi) \approx 0.19, \quad \varsigma_4 = (4\pi)^{-2} \left\{ -\frac{559}{432} + \frac{278}{4} \ln(2) - \frac{347}{24} \ln(3) \right\} \approx 0.20, \\ \tau_4 = & \frac{2817356 + 25(474 + 13\pi^2)(-559 + 4590 \ln(2) - 2082 \ln(3))}{49766400\pi^3} \approx 0.0051. \end{aligned} \quad (6.17)$$

Mit Hilfe der oben bestimmten Lösungen für λ_k , g_k und β_k kann nun der Renormierungsgruppenfluß in der Umgebung des Ursprungs $(\lambda, g, \beta) = (0, 0, 0)$ analysiert werden. Eigentlich erstreckt sich die folgende Analyse sogar über sämtliche Punkte des λ - g - β -Raums, für die $|\lambda|, |g| \ll 1$ und $|\beta| \ll 1/|g|$ gilt. Das liegt daran, daß in jeder der

drei β -Funktionen alle Terme von zweiter und höherer Ordnung in β_k proportional zu Produkten der Form $g_k^n \beta_k^m$ mit $n \geq m$ sind.

Wie weiter oben festgestellt wurde, liefert die R^2 -Trunkierung in der Nähe von $\lambda = g = 0$ dieselben Ergebnisse für λ_k und g_k wie die Einstein-Hilbert-Trunkierung. Daher entspricht das Verhalten dieser Kopplungen dem in Abschnitt 4.2 beschriebenen. Fassen wir die wesentlichen Charakteristika des Flusses von λ_k und g_k noch einmal zusammen. Im Fall $d > 2$ ist $\vartheta_2 = d - 2 > 0$ erfüllt, so daß sowohl g_k als auch der zweite Term von λ_k aus (6.9) im Limes $k \rightarrow 0$ verschwinden. Da andererseits $\vartheta_1 = -2 < 0$ gilt, beginnt der erste Term von λ_k aus (6.9) zu wachsen, sobald k die Referenzskala k_0 unterschritten hat. Das hat zur Folge, daß die Linearisierung zusammenbricht, es sei denn, die Kopplungen bewegen sich entlang einer Trajektorie, die für hinreichend kleine k die Bedingung

$$\lambda_k = \nu_d g_k \iff \bar{\lambda}_k = \nu_d G_k k^d \quad (6.18)$$

erfüllt [14, 22], wobei G_k durch (6.10) festgelegt ist. In diesem Fall konvergieren λ_k und g_k im Limes $k \rightarrow 0$ gegen $\lambda = g = 0$.

Wie bereits in Abschnitt 4.2 erklärt wurde, entspricht (6.18) der Bedingung für die Separatrix. Das ist diejenige Renormierungsgruppentrajektorie in der λ - g -Ebene, die zwischen den beiden Fixpunkten der $d = 4$ -dimensionalen Einstein-Hilbert-Trunkierung interpoliert und dabei den Bereich der Typ Ia-Trajektorien mit divergierender kosmologischer Konstante $\lambda_k \rightarrow -\infty$ von demjenigen separiert, in dem die Trajektorien vom Typ IIIa liegen, also diejenigen Trajektorien, die bei irgendeinem $k > 0$ auf dem Rand des Parameterraums landen und dort abbrechen, vgl. [14, 22]. Abbildung 6.1(a) zeigt die Separatrix, eine Trajektorie vom Typ Ia und eine vom Typ IIIa in der Nähe von $(\lambda, g) = (0, 0)$. Im Rahmen der R^2 -Trunkierung sollte man sich diese Abbildung als die Projektion des im dreidimensionalen λ - g - β -Raum angesiedelten Flusses auf die zugehörige $\beta = 0$ -Ebene vorstellen.

Gehen wir noch kurz auf die dimensionsbehafteten Kopplungen ein. Erfüllen G_k und $\bar{\lambda}_k$ die Separatrix-Bedingung (6.18), so gelten die entsprechenden Gleichungen (6.10) und (6.12) für beliebig kleine k -Werte bis hin zu $k = 0$. Während $\bar{\lambda}_k$ in diesem Fall für $k \rightarrow 0$ gegen Null läuft, konvergiert G_k offensichtlich gegen den IR Wert G_0 . In Abschnitt 4.2 stellte sich heraus, daß der Parameter $\omega_d(\alpha)$, der das Verhalten von G_k für hinreichend kleine k bestimmt, in dem uns am meisten interessierenden Fall $d = 4$ für alle Profildfunktionen $R^{(0)}$ positiv ist, wenn man sich gleichzeitig auf den "relevanten" Eichparameter-Bereich $\alpha \geq 0$ beschränkt. Insbesondere ergibt sich in dem hier diskutierten Fall $\alpha = 1$: $\omega_4 = [13\Phi_1^1(0) + 79\Phi_2^2(0)] / (24\pi) > 0$. Wenn man also die $d = 4$ -dimensionale Quanten-Einstein-Gravitation mit einer Theorie identifiziert, die durch eine derjenigen Trajektorien im λ - g - β -Raum beschrieben wird, deren λ - und g -Koordinate im Limes $k \rightarrow 0$ entlang

der Separatrix laufen, dann folgt aus Gleichung (6.10), daß die Newton-Konstante im IR-Bereich mit wachsender Längenskala zunimmt (“antiscreening“).

Weitere Details zu den Lösungen für G_k und $\bar{\lambda}_k$, wie z.B. ihre Cutoff-Abhängigkeit, möge man Abschnitt 4.2 entnehmen.

Bis zu diesem Punkt wurde nur die $\beta = 0$ -Projektion des Renormierungsgruppenflusses im λ - g - β -Raum untersucht. Wir vervollständigen nun unsere Analyse, indem wir den Renormierungsgruppenfluß der β -Komponente diskutieren. Dabei unterscheiden wir die beiden Fälle $d = 4$ und $d \neq 4$.

6.2.1 Der Fall $d = 4$

Im $d = 4$ -dimensionalen Fall divergiert die entsprechende Lösung für β_k , also Gleichung (6.15), im Limes $k \rightarrow 0$. Gilt im Bereich sehr kleiner k -Werte $\lambda_k \neq \nu_4 g_k$, so ist die führende Divergenz quadratisch in k . Aus der vorangegangenen Diskussion ist jedoch bekannt, daß dann die Lösungen des linearisierten Differentialgleichungssystems im Bereich beliebig kleiner Skalen k nicht mehr verlässlich sind, denn die durch $\lambda_k \neq \nu_4 g_k$ charakterisierten Trajektorien werden im Limes $k \rightarrow 0$ letztendlich von $(\lambda, g) = (0, 0)$ abgestoßen. Daher wird im folgenden nicht weiter auf diesen Fall eingegangen.

Bei den ausgezeichneten Trajektorien, die für $k \rightarrow 0$ der Separatrix-Bedingung (6.18) Folge leisten, verschwindet der Koeffizient des zu $(k_0/k)^2$ proportionalen Terms aus Gleichung (6.15), so daß für hinreichend kleine k -Werte nur ein logarithmisches Laufen übrig bleibt. Man erhält:

$$\beta_k = \beta_{k_0} - \frac{\nu_4 \zeta_4 + \tau_4}{2} g_{k_0} + \frac{419}{1080} (4\pi)^{-2} \ln \left(\frac{k}{k_0} \right) + \mathcal{O}(k^2). \quad (6.19)$$

Bemerkenswerterweise ist der Koeffizient des logarithmischen Terms *universell*.

Höhere Ordnungen in β_k treten hier (und auch in den Lösungen für λ_k und g_k) ausschließlich in Gestalt von Produkten $g_k^n \beta_k^m$ mit $n \geq m$ auf. Das Verschwinden von $g_k^n (\ln(k/k_0))^m \propto (k/k_0)^{2n} (\ln(k/k_0))^m$ im Limes $k \rightarrow 0$ bewirkt somit, daß sämtliche $\mathcal{O}(\beta_k^2)$ -Terme auch im Bereich sehr kleiner Skalen $k \geq 0$ vernachlässigbar bleiben. Im vorliegenden Fall bricht also die Linearisierung im Limes $k \rightarrow 0$ nicht zusammen, obwohl β_k für sich genommen bei diesem Grenzübergang divergiert.

Aus den Gleichungen (6.9) und (6.18) geht hervor, daß λ_k und g_k für $k \rightarrow 0$ schnell gegen $\lambda = g = 0$ konvergieren. Das hat zur Folge, daß die entsprechenden Trajektorien im Bereich sehr kleiner k -Werte beinahe entlang der β -Achse verlaufen. Somit wird der Renormierungsgruppenfluß dann im wesentlichen eindimensional, und dieser eindimensionale Fluß ist durch den logarithmischen Term aus Gleichung (6.19) charakterisiert. Den

im Rahmen der herkömmlichen Störungstheorie durchgeführten Studien [34] nach zu urteilen, war dieses logarithmische Laufen von β_k auch zu erwarten. Die entsprechenden Resultate postulieren, daß die (Krümmung)²-Kopplung in dem Sinn “asymptotisch frei” ist, daß $|\beta_k|$ mit zunehmendem k logarithmisch *abfällt*. Das ist hier in der Tat der Fall. Dabei ist allerdings folgendes zu berücksichtigen. Die Resultate dieser Arbeit deuten darauf hin, daß dieses logarithmische Laufen lediglich in der Nähe von $g = \lambda = 0$ auftritt und nicht das wahre Verhalten der Theorie bei *kurzen* Abständen darstellt. Tatsächlich werden wir feststellen, daß β_k im Limes $k \rightarrow \infty$ gegen einen (zwar sehr kleinen, aber von Null verschiedenen) Fixpunktwert β_* konvergiert.

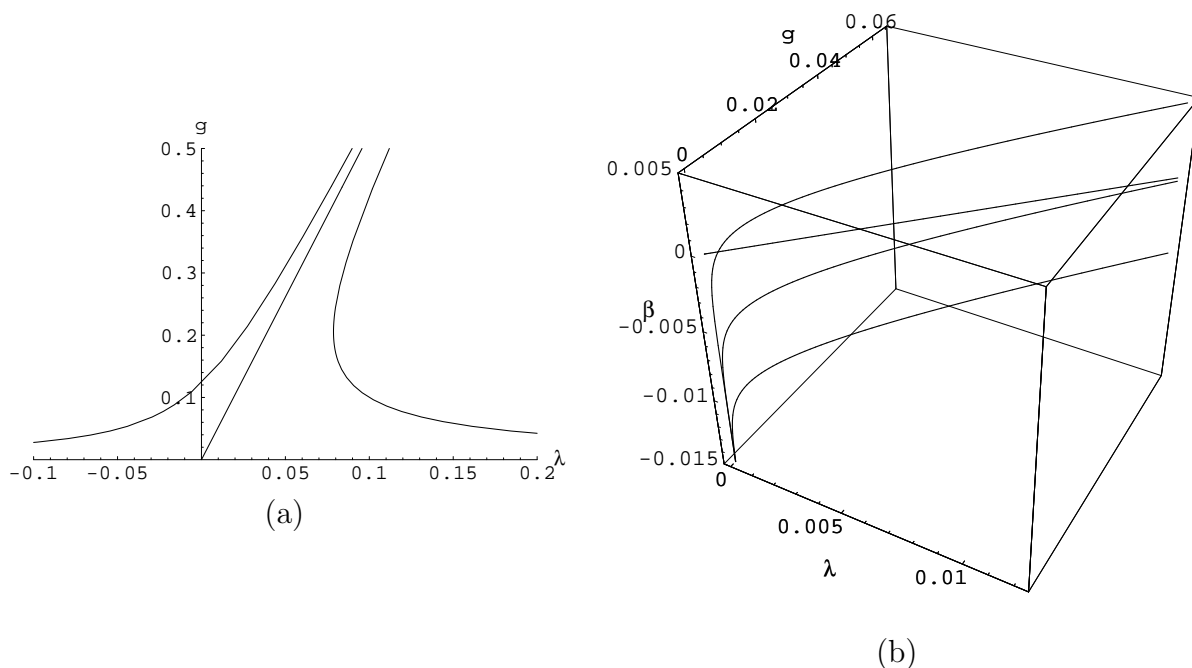


Abbildung 6.1: Der Fall $d = 4$: (a) Trajektorien vom Typ Ia, Typ IIa und Typ IIIa (von links nach rechts), die aus der λ - g -Projektion (6.9) resultieren. Sie stimmen genau mit den entsprechenden Trajektorien der Einstein-Hilbert-Trunkierung überein. Die Trajektorie vom Typ IIa ist die Separatrix mit $\lambda_{k=0} = 0$. Sie trennt den Bereich der Trajektorien mit $\lambda_{k \rightarrow 0} \rightarrow -\infty$ (Typ Ia) von demjenigen, in dem die Trajektorien am Rand des Parameterraums abbrechen (Typ IIIa). (b) Drei typische Trajektorien der linearisierten λ - g - β -Gleichungen. Sie basieren auf unterschiedlichen β_{k_0} -Werten, aber sie erfüllen alle (6.18). Außerdem ist ihre Projektion auf die $\beta = 0$ -Ebene abgebildet. Sie entspricht der Separatrix der Einstein-Hilbert-Trunkierung.

Das oben geschilderte Verhalten der Theorie wird anhand von Abbildung 6.1(b) illustriert. Sie zeigt drei typische Trajektorien der R^2 -Trunkierung in der Nähe von $(\lambda, g, \beta) = (0, 0, 0)$. Jede dieser Trajektorien erfüllt die Separatrix-Bedingung (6.18). Ihre β -Komponente divergiert jeweils logarithmisch gegen $-\infty$, wenn die Skala auf $k = 0$ abgesenkt

wird. Das erklärt sich dadurch, daß der Koeffizient des $\ln(k/k_0)$ -Terms in (6.19) positiv ist. In dem Plot ist außerdem die (gemeinsame) Projektion der Trajektorien auf die $\beta = 0$ -Ebene abgebildet. Da die drei dargestellten Trajektorien allesamt die Separatrix-Bedingung (6.18) erfüllen, ist ihre Projektion natürlich mit der Separatrix der Einstein-Hilbert-Trunkierung identisch, d.h. mit der Kurve aus Abbildung 6.1(a), die den Punkt $(\lambda, g) = (0, 0)$ erreicht. Umgekehrt ergeben sich alle Trajektorien der R^2 -Trunkierung, die (6.18) erfüllen, aus der Separatrix, indem man diese durch "Einschalten" von β_k gemäß Gleichung (6.19) in β -Richtung anhebt. Diese Trajektorien unterscheiden sich dann offensichtlich durch ihre β_{k_0} - und g_{k_0} -Werte.

6.2.2 Der Fall $d \neq 4$

Analysieren wir nun den Fluß von β_k für $2 < d \neq 4$. Auch in diesem Fall bricht die Linearisierung für solche Trajektorien zusammen, die im Limes $k \rightarrow 0$ die Separatrix-Bedingung (6.18) nicht erfüllen, weil wieder $|\lambda_{k \rightarrow 0}| \rightarrow \infty$ gilt. Daher beschränken wir unsere Betrachtungen von nun an auf Trajektorien, für die im Bereich hinreichend kleiner Skalen $\lambda_k = \nu_d g_k$ gilt. In diesem Fall fällt der zweite, quadratisch divergente Term aus Gleichung (6.14) heraus, und die einzigen noch in β_k enthaltenen Potenzen von k sind k^{d-2} und k^{4-d} .

Im Bereich $2 < d < 4$ sind sowohl $\vartheta_2 = d - 2$ als auch $\vartheta_3 = 4 - d$ positiv, was zur Folge hat, daß die berücksichtigten Trajektorien bei Absenkung der Skala $k \rightarrow 0$ allesamt von dem Punkt $(\lambda, g, \beta) = (0, 0, \gamma_d/(d - 4))$ angezogen werden und schließlich auch in diesem landen.

Gilt $d > 4$, so ist ϑ_3 negativ, was dazu führt, daß β_k einen IR divergenten Term der Ordnung k^{4-d} enthält. Will man erreichen, daß eine Trajektorie den Punkt $(\lambda, g, \beta) = (0, 0, \gamma_d/(d - 4))$ im Limes $k \rightarrow 0$ trifft, dann muß der Koeffizient des divergenten Terms in diesem Grenzfall verschwinden. Das bedeutet, daß bei kleinen Skalen k die Bedingung

$$\begin{aligned} \beta_k &= \frac{\nu_d \mathcal{S}_d + \tau_d}{2(d-3)} g_k = \frac{\nu_d \mathcal{S}_d + \tau_d}{2(d-3)\nu_d} \lambda_k \\ \iff \bar{\beta}_k &= \frac{\nu_d \mathcal{S}_d + \tau_d}{2(d-3)} G_k k^{2(d-3)} = \frac{\nu_d \mathcal{S}_d + \tau_d}{2(d-3)\nu_d} \bar{\lambda}_k k^{d-6} \end{aligned} \quad (6.20)$$

erfüllt sein muß. Es gibt dann in der Tat nur eine einzige ausgezeichnete Trajektorie, die in dem besagten Punkt endet, und zwar diejenige, die die obige Bedingung (6.20) erfüllt. Bei allen anderen Trajektorien divergiert die β -Komponente für $k \rightarrow 0$. Aber auch bei diesen sind höhere Ordnungen in β_k durch entsprechende Potenzen von g_k unterdrückt, solange nur (6.18) gilt, mit der Folge, daß man die entsprechenden Terme vernachlässigen kann. (Dazu sei angemerkt, daß $\lim_{k \rightarrow 0} g_k^n \beta_k^m \propto \lim_{k \rightarrow 0} k^{n(d-2)-m(d-4)} = 0$ für $n \geq m$ gilt.)

Folglich liefert die Linearisierung auch in diesem Fall Ergebnisse, die bis hin zu beliebig kleinen Skalen k verlässlich sind. Die Form der entsprechenden Trajektorien ähnelt dann derjenigen, die sich typischerweise im Fall $d = 4$ ergibt, siehe oben. Während die β -Komponente im Limes $k \rightarrow 0$ divergiert, $|\beta_k| \rightarrow \infty$, laufen die λ - und die g -Komponente indessen gegen $\lambda = g = 0$. Demzufolge stellen die Trajektorien im Bereich sehr kleiner Skalen k praktisch Geraden dar, die nahezu mit der β -Achse zusammenfallen.

Betrachtet man die β -Funktionen etwas genauer, so stellt man fest, daß das IR Verhalten der Trajektorien in $d \neq 4$ Dimensionen eigentlich durch einen **“quasi-Gaußschen” Fixpunkt** bestimmt wird, der bei

$$(\lambda_*, g_*, \beta_*) = \left(0, 0, \gamma_d/(d-4)\right) \quad (6.21)$$

liegt. Dieser quasi-Gaußsche Fixpunkt existiert im $d = 4$ -dimensionalen Fall *nicht*.

Wenn man den Renormierungsgruppenfluß um diesen Fixpunkt linearisiert, dann ergeben sich im wesentlichen dieselben Ergebnisse wie bei der oben diskutierten Entwicklung um $(0, 0, 0)$. Die um $(0, 0, \gamma_d/(d-4))$ linearisierten β -Funktionen mit Stabilitätsmatrix \mathbf{B} und die daraus folgenden Näherungslösungen lassen sich aus den Gleichungen (6.5), (6.6), (6.9), (6.14) und (6.20) herleiten, indem man darin einfach den Parameter τ_d durch

$$\hat{\tau}_d \equiv \tau_d - \frac{2(4\pi)^{1-d}}{d-4} (h_{39}(d) + h_{45}(d) \Phi_{d/2}^2(0)) \quad (6.22)$$

ersetzt. Insbesondere gilt hier $\mathbf{B} = \mathbf{M}(\tau_d \rightarrow \hat{\tau}_d)$. Ferner werden die Konstanten $\theta_I = -\vartheta_I$ zu kritischen Exponenten, und ihre Vorzeichen legen die Dimensionalität Δ_{IR} der (trunkierten) IR kritischen Hyperfläche \mathcal{S}_{IR} des quasi-Gaußschen Fixpunkts fest.

Im Fall $2 < d < 4$ liegen ein positiver und zwei negative kritische Exponenten vor: $\theta_1 > 0$, $\theta_2, \theta_3 < 0$. Somit ist \mathcal{S}_{IR} im Rahmen dieser Trunkierung zweidimensional, d.h. $\Delta_{\text{IR}} = 2$, was auch aus den oben diskutierten Lösungen hervorgeht.

Ist $d > 4$, dann sind θ_1 und θ_3 positiv, und θ_2 ist negativ. Daher ist in diesem Fall $\Delta_{\text{IR}} = 1$, was bedeutet, daß \mathcal{S}_{IR} nur aus einer einzelnen Trajektorie besteht. Bei hinreichend kleinen k -Werten wird diese IR kritische Trajektorie durch die modifizierte Version von Gleichung (6.20) beschrieben, in der τ_d durch $\hat{\tau}_d$ ersetzt wurde. Da die in (6.20) auftauchenden Parameter ν_d , ζ_d und $\hat{\tau}_d R^{(0)}$ -abhängige Integrale $\Phi_n^p(0)$ und $\tilde{\Phi}_n^p(0)$ enthalten, sind sie nicht universell. Folglich sind die Steigungen der ausgezeichneten Trajektorie (6.20) in beiden Richtungen nicht in universeller Weise festgelegt. Aber das war auch nicht anders zu erwarten, denn, wie in Abschnitt 4.1 erklärt wurde, sind die Eigenvektoren von \mathbf{B} i.a. keine universellen Größen.

Die Resultate für den Fall $d \neq 4$ werden anhand der Abbildung 6.2 veranschaulicht. In Abbildung 6.2(a) wird der Fall $d = 3$ betrachtet und in Abbildung 6.2(b) der $d = 5$ -dimensionale Fall. Jeder der beiden Plots zeigt drei typische Trajektorien in der Nähe des

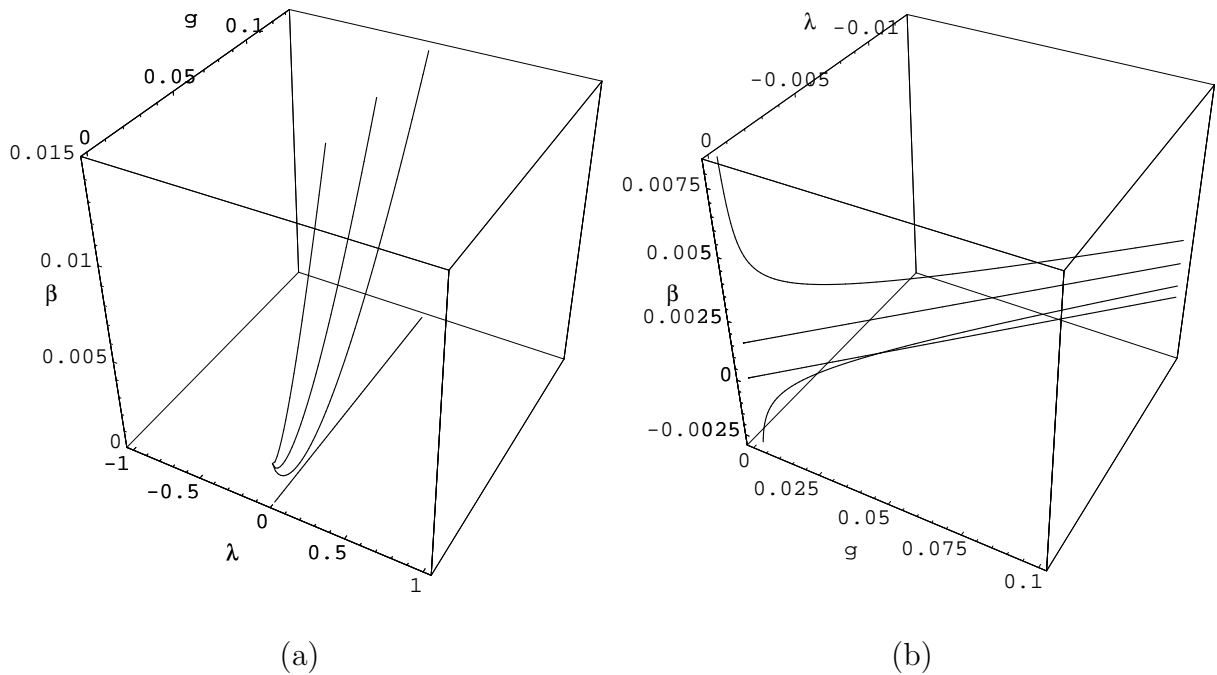


Abbildung 6.2: (a) Der Fall $d = 3$: Drei typische Trajektorien des linearisierten Flusses. Sie unterscheiden sich durch den jeweiligen β_{k_0} -Wert, aber sie erfüllen allesamt (6.18). Infolgedessen enden alle drei Trajektorien im quasi-Gaußschen Fixpunkt. (b) Der Fall $d = 5$: Drei typische Trajektorien des linearisierten Flusses, die sich durch den jeweiligen β_{k_0} -Wert unterscheiden. Jede von ihnen erfüllt (6.18), aber im Gegensatz zu den beiden anderen Kurven erfüllt die mittlere Kurve zusätzlich (6.20). Infolgedessen trifft sie den quasi-Gaußschen Fixpunkt im Limes $k \rightarrow 0$. Sowohl in (a) als auch in (b) wird außerdem die Projektion der Kurven auf die $\beta = 0$ -Ebene abgebildet.

quasi-Gaußschen Fixpunkts. Sie erfüllen allesamt die Separatrix-Bedingung (6.18), so daß ihre Projektionen auf die $\beta = 0$ -Ebene sowohl im Fall $d = 3$ als auch im Fall $d = 5$ mit der Separatrix der Einstein-Hilbert-Trunkierung übereinstimmen.

In Abbildung 6.2(a), die den Fall $d = 3$ zeigt, enden alle drei Trajektorien im Fixpunkt, unabhängig von ihrem jeweiligen β_{k_0} -Wert, durch den sie sich unterscheiden. ($\lambda_{k_0} = \nu_d g_{k_0}$ wurde für alle drei Trajektorien gleich gewählt. Das gilt auch für die drei Trajektorien aus Abbildung 6.2(b).) Wie bereits oben erläutert wurde, wirkt der quasi-Gaußsche Fixpunkt im Fall $d < 4$ auf *alle* Trajektorien IR attraktiv, die die Separatrix-Bedingung (6.18) erfüllen. Für $d > 4$ ist dies nicht mehr der Fall. Das wird anhand der Kurven aus Abbildung 6.2(b) veranschaulicht, die den $d = 5$ -dimensionalen Fall beschreiben. Hier trifft nur eine der Trajektorien den quasi-Gaußschen Fixpunkt im Limes $k \rightarrow 0$, und zwar genau diejenige, die die zusätzliche Bedingung (6.20) erfüllt. Die beiden anderen in Abbildung 6.2(b) enthaltenen Trajektorien entsprechen β_{k_0} -Werten, die sich von demjenigen aus Gleichung (6.20) unterscheiden, und somit divergiert ihre jeweilige β -Komponente für

$k \rightarrow 0$. Dabei hängt es vom β_{k_0} -Wert ab, ob β_k gegen $+\infty$ oder $-\infty$ läuft.

6.3 Der nicht-Gaußsche Fixpunkt

In Abschnitt 4.3 wurde im Rahmen der Einstein-Hilbert-Trunkierung ein nicht-Gaußscher Fixpunkt gefunden, und es wurde eine detaillierte Analyse seiner Eigenschaften vorgenommen. Im einzelnen wurden dort der linearisierte Renormierungsgruppenfluß in seiner Umgebung untersucht und die Qualität der Trunkierung überprüft, indem die Cutoff-Abhängigkeit des Fixpunkts und verschiedener universeller Größen, die mit ihm in Zusammenhang stehen, studiert wurden. Dabei ergaben sich im wesentlichen die folgenden Resultate: Erstens erwies sich der Fixpunkt als äußerst stabil gegenüber der Variation des Cutoffschemas. Er existiert für alle verwendeten Cutoffs. Zweitens ist der Fixpunkt für alle benutzten Cutoffs UV attraktiv, und drittens ist die Cutoff-Abhängigkeit der betrachteten universellen Größen recht klein. Diese Resultate wurden dahingehend interpretiert, daß ein entsprechender UV attraktiver Fixpunkt mit ziemlicher Wahrscheinlichkeit auch in der exakten Theorie vorhanden ist. Ist dies tatsächlich der Fall, so wären alle Voraussetzungen für die Realisierung von Weinbergs AS Szenario gegeben. Letzteres würde sicherstellen, daß die Quanten-Einstein-Gravitation auch als fundamentale Theorie existiert.

Im folgenden gehen wir einen Schritt weiter und testen, inwieweit sich die oben geschilderten Verhältnisse verändern, wenn man im Trunkierungsansatz zusätzlich den R^2 -Term berücksichtigt.

In der Tat findet sich der nicht-Gaußsche Fixpunkt der Einstein-Hilbert-Trunkierung auch in der verallgemeinerten Trunkierung (5.2) wieder. Zur Analyse seiner Eigenschaften verfahren wir wie im Fall der Einstein-Hilbert-Trunkierung, vgl. Abschnitt 4.3. Ausgehend von den β -Funktionen (5.19), (5.20) und (5.21), bestimmen wir seine Position im λ - g - β -Raum und den linearisierten Fluß in seiner Nähe. Ferner untersuchen wir die Cutoff-Abhängigkeit verschiedener Größen und vergleichen die jeweiligen Resultate mit den entsprechenden aus der Einstein-Hilbert-Trunkierung.

Beginnen wir nun mit unserer Analyse. Gesucht sind die nichttrivialen simultanen Nullstellen der β -Funktionen $\{\beta_\lambda, \beta_g, \beta_\beta\}$ aus den Gleichungen (5.19), (5.20) und (5.21). Solche *nichttrivialen*² nicht-Gaußschen Fixpunkte zeichnen sich dadurch aus, daß die Fixpunktkoordinaten λ_* , g_* und β_* allesamt von Null verschieden sind. Sie besitzen die anomalen Dimensionen

$$\eta_{N_*} = 2 - d, \quad \eta_{\beta_*} = d - 4, \quad (6.23)$$

²Im Prinzip ist auch der quasi-Gaußsche Fixpunkt aus dem vorangegangenen Abschnitt ein nicht-Gaußscher Fixpunkt, da zumindest eine seiner Koordinaten von Null verschieden ist. Dieser Fixpunkt ist aber in dem Sinn trivial, daß er sich problemlos auf analytische Weise bestimmen läßt.

was unmittelbar aus den Gleichungen (5.20) und (5.21) folgt.

6.3.1 Die Position des Fixpunkts im $d = 4$ -dimensionalen Fall

Wie im Fall der Einstein-Hilbert-Trunkierung, so läßt sich auch hier die exakte Position des nicht-Gaußschen Fixpunkts nicht analytisch bestimmen. Für die somit numerisch durchzuführende Analyse ist es jedoch erforderlich, einen ungefähren Eindruck von seiner Lage zu haben. Aus diesem Grund berechnen wir zunächst einige analytische Ausdrücke, die die Fixpunktkoordinaten approximieren. Dabei greifen wir wieder auf die Näherungsmethoden aus Abschnitt 4.3 zurück.

Das erste Approximationsverfahren, das nun angewendet wird, besteht darin, den Renormierungsgruppenfluß auf die g -Richtung zu projizieren, indem man die kosmologische Konstante und die R^2 -Kopplung vernachlässigt und dementsprechend $\lambda_k \equiv \lambda_* = 0$ und $\beta_k \equiv \beta_* = 0$ setzt. Die nichttriviale Lösung der Gleichung $\beta_g(0, g_*, 0; d) = 0$ liefert dann die Position des Fixpunkts in dieser Näherung. Die entsprechende Rechnung wird in Anhang J.2 durchgeführt, mit (J.10) als Ergebnis. Für alle d -Werte stimmt diese Lösung exakt mit dem Ausdruck überein, der sich ergibt, wenn man in dem analogen Resultat (J.2) aus der Einstein-Hilbert-Trunkierung $\alpha = 1$ setzt. Daher erhält man trivialerweise auch bei Spezifizierung der Profilfunktion $R^{(0)}$ und der Dimensionalität d in beiden Fällen dieselben Ergebnisse. So ergibt sich beispielsweise bei Verwendung der exponentiellen Profilfunktion (2.8) mit $s = 1$ im $d = 4$ -dimensionalen Fall $g_* \approx 0.590$.

Ermutigt durch die entsprechenden Resultate aus der Einstein-Hilbert-Trunkierung, entwickeln wir die β -Funktionen als nächstes um $(\lambda_k, g_k, \beta_k) = (0, 0, 0)$, wobei wir die Terme von höherer Ordnung in den Kopplungen vernachlässigen, und bestimmen daraus die Fixpunktkoordinaten λ_* , g_* und β_* für das kombinierte λ - g - β -System. Was die explizite Rechnung hierzu angeht, so verweisen wir erneut auf Anhang J.2. Als wesentlicher Punkt ist hier zu nennen, daß die Koordinaten λ_* und g_* - unabhängig von der Profilfunktion - mit den analogen Ausdrücken aus der Einstein-Hilbert-Trunkierung, die unter Verwendung desselben Approximationsverfahrens in Anhang J.1 bestimmt wurden, identisch sind, wenn man dort $\alpha = 1$ setzt. Wie schon zuvor werden wir uns auch hier wieder damit begnügen, die Resultate aufzuführen, die sich im $d = 4$ -dimensionalen Fall bei Verwendung der exponentiellen Profilfunktion (2.8) mit $s = 1$ ergeben. Man erhält $(\lambda_*, g_*, \beta_*) \approx (0.287, 0.751, 0.002)$.

Wir setzen nun unsere Studie mit der Bestimmung der *exakten* Position des nicht-Gaußschen Fixpunkts $(\lambda_*, g_*, \beta_*)$ fort. Als Ausgangspunkt für die dazu notwendige numerische Analyse der β -Funktionen dienen dabei die obigen Näherungslösungen. Genauer gesagt, fungieren sie als Startwerte für einen Iterationsprozeß, der auf dem Computer

durchgeführt wird. (Eine etwas detailliertere Stellungnahme hierzu findet sich in Abschnitt 4.3.) Bis auf weiteres bezieht sich die anschließende Diskussion auf den Fall $d = 4$.

Im ersten Schritt betrachten wir den Spezialfall $s = 1$. Bei Verwendung der entsprechenden exponentiellen Profilkfunktion erhält man

$$(\lambda_*, g_*, \beta_*) = (0.330, 0.292, 0.005) . \quad (6.24)$$

Im Fall der Einstein-Hilbert-Trunkierung ergaben sich unter denselben Voraussetzungen die Fixpunktkoordinaten $(\lambda_*, g_*) = (0.348, 0.272)$, siehe (4.25). Offensichtlich unterscheiden sich die λ_* - und g_* -Werte beider Trunkierungen kaum voneinander. Ferner läßt sich hier folgendes feststellen: Während λ_* und g_* von derselben Größenordnung sind, erhält man für β_* einen Wert, der bedeutend kleiner ist als die Werte für die beiden anderen Koordinaten.

Um zu überprüfen, ob diese Eigenschaften des Fixpunkts von universeller Natur sind, untersuchen wir nun seine Cutoffschema-Abhängigkeit. Dabei gehen wir nach demselben Schema wie in Abschnitt 4.3 vor, d.h. wir studieren seine Abhängigkeit von den Profilparametern s bzw. b , die man künstlich einführt, indem man für $R^{(0)}$ die einparametrischen Familien von Profilkfunktionen (2.8) bzw. (2.9) einsetzt. An dieser Stelle sei daran erinnert, daß s die Familie von exponentiellen Profilkfunktionen (2.8) parametrisiert, während der Profilparameter b es uns ermöglicht, die Form der Profilkfunktionen mit kompaktem Träger (2.9) zu variieren. In diesem Zusammenhang ist es angebracht, nochmals darauf hinzuweisen, daß Profilparameter, die den Bereichen $s < 1$ bzw. $b > 1.2$ entstammen, bei den mit den jeweiligen Untersuchungen einhergehenden numerischen Integrationen zu Konvergenzproblemen führen. Daher wird im Rahmen der folgenden Diskussion auf solche s - und b -Werte nicht eingegangen.

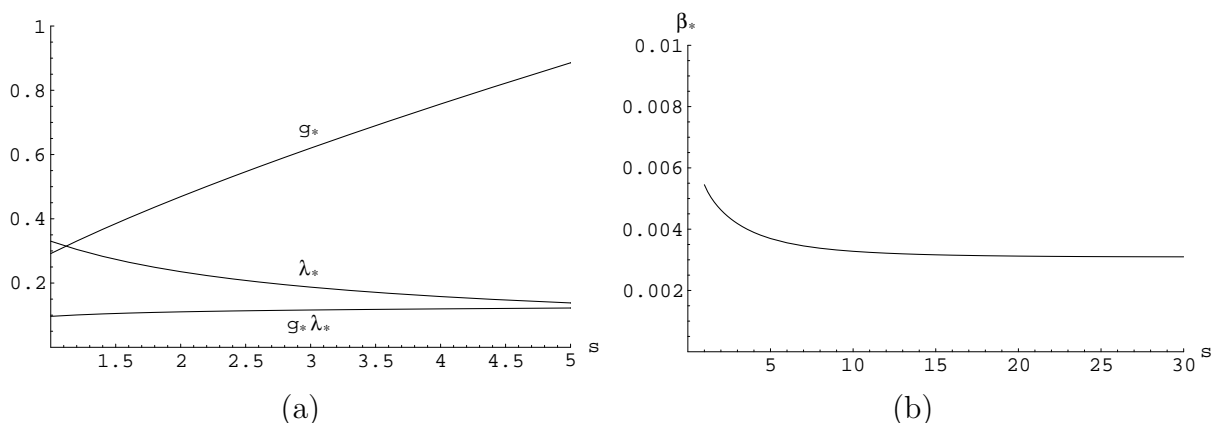


Abbildung 6.3: (a) g_* , λ_* und $g_* \lambda_*$ als Funktionen von s , dargestellt im Bereich $1 \leq s \leq 5$. (b) β_* als Funktion von s , dargestellt im Bereich $1 \leq s \leq 30$. Beide Plots basieren auf der Verwendung der Familie von exponentiellen Profilkfunktionen (2.8).

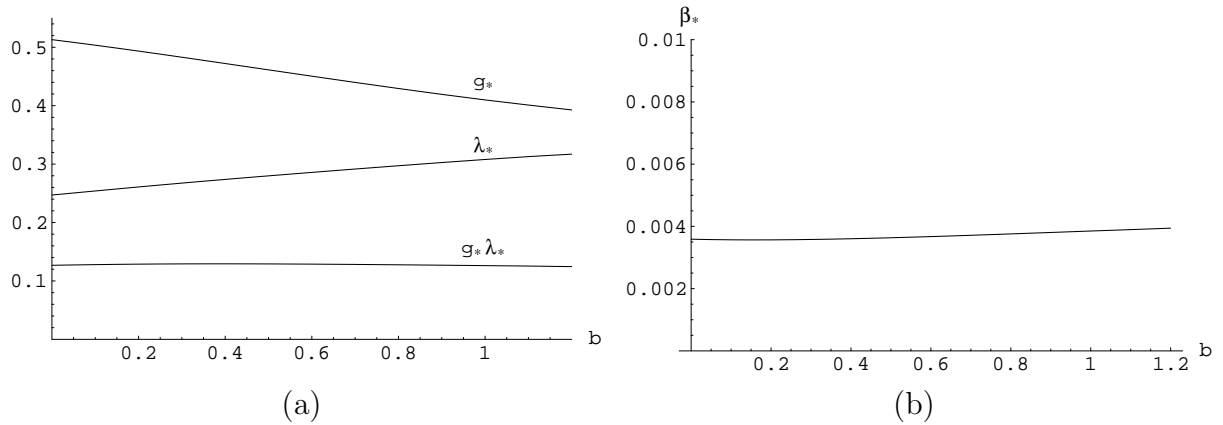


Abbildung 6.4: (a) g_* , λ_* und $g_*\lambda_*$ sowie (b) β_* als Funktionen von b , dargestellt im Bereich $0 \leq b \leq 1.2$. Beide Plots wurden unter Verwendung der Familie von Profildfunktionen mit kompaktem Träger (2.9) erstellt.

Wie im Fall der Einstein-Hilbert-Trunkierung, so geht auch in diesem Fall aus erzielten Resultaten hervor, daß der nicht-Gaußsche Fixpunkt in einem weiten Bereich von s - und b -Werten existiert. Tatsächlich ist er für alle verwendeten Cutoffs vorhanden, was als eines der wichtigsten Ergebnisse dieser Untersuchung zu werten ist. Die Position erweist sich dabei erwartungsgemäß als s - bzw. b -abhängig. In den Abbildungen 6.3 und 6.4 sind seine Koordinaten $(\lambda_*, g_*, \beta_*)$ sowie das Produkt $g_*\lambda_*$ in Abhängigkeit des Profilparameters s bzw. b dargestellt. Abbildung 6.3(a), welche die durch die Familie (2.8) eingeführte s -Abhängigkeit von λ_* , g_* und $g_*\lambda_*$ beschreibt, zeigt lediglich den Ausschnitt, in dem λ_* und g_* den größten Veränderungen unterworfen sind. Die in dieser Abbildung aufgeführten Parameter wurden jedoch für einen weitaus umfangreicheren Bereich berechnet, nämlich für $1 \leq s \leq 30$. Ein Vergleich mit den entsprechenden Resultaten aus Abschnitt 4.3 ergibt, daß die λ_* - und g_* -Werte, die sich in den beiden Trunkierungen ergeben, für jeden einzelnen s - bzw. b -Wert fast identisch sind. Somit überrascht es nicht, daß das Produkt $g_*\lambda_*$ auch im vorliegenden Fall nahezu konstant ist. Ferner unterscheidet sich sein Wert nur sehr leicht von dem analogen Wert aus der Einstein-Hilbert-Trunkierung. Während sowohl Abbildung 6.3(a) als auch Abbildung 6.4(a) auf einen universellen Wert bei $g_*\lambda_* \approx 0.14$ schließen lassen, liefert die Einstein-Hilbert-Trunkierung in der Eichung $\alpha = 1$ den Wert $g_*\lambda_* \approx 0.12$, siehe (4.28). Somit kann man erwarten, daß der ermittelte $g_*\lambda_*$ -Wert bis auf eine relative Ungenauigkeit von 10 bis 20 Prozent exakt ist. Vermutlich ist dieser Grad an Genauigkeit im Rahmen der vorliegenden Rechnungen nicht zu übertreffen, denn wir mußten bereits in Abschnitt 4.3 erkennen, daß die Benutzung der technisch günstigen Eichung $\alpha = 1$ anstelle der ‐korrekten‐ Eichung $\alpha = 0$ zu einem Fehler von ungefähr derselben Größe führt.

Weiterhin zeigen die vorliegenden Resultate, daß β_* immer (d.h. für alle verwendeten

$R^{(0)}$) wesentlich kleiner ist als g_* und λ_* . Dieses Resultat ist ziemlich bemerkenswert, denn es deutet im Rahmen der begrenzten Genauigkeit der zugrundeliegenden Rechnungen darauf hin, daß der prinzipiell im dreidimensionalen λ - g - β -Raum angesiedelte Fixpunkt der R^2 -Trunkierung praktisch in der λ - g -Ebene mit verschwindender β -Komponente $\beta = 0$ liegt, d.h. im Parameterraum der reinen Einstein-Hilbert-Trunkierung.

Schließlich ist noch erwähnenswert, daß sich die Schema-Abhängigkeit von β_* als unerwartet klein herausstellt. Betrachten wir hier zunächst die Schema-Abhängigkeit, die aus der Verwendung der Familie von exponentiellen Profilfunktionen (2.8) hervorgeht. Die damit einhergehende Funktion $\beta_*(s)$ ist in Abbildung 6.3(b) dargestellt. Sie weist im Bereich von nicht allzu kleinen s -Werten die Form eines Plateaus auf. Verwendet man die Familie von Profilfunktionen mit kompaktem Träger (2.9), so ist die Abhängigkeit vom Cutoffschema sogar noch schwächer. Abbildung 6.4(b) zeigt die entsprechende Funktion $\beta_*(b)$; sie ist in dem kompletten abgebildeten Bereich $0 \leq b \leq 1.2$ beinahe konstant. Darüber hinaus stimmen die Positionen der beiden Plateaus nahezu überein. Während Abbildung 6.3(b) den Wert $\beta_* \approx 0.0031$ liefert, resultiert $\beta_* \approx 0.0036$ aus Abbildung 6.4(b). Insgesamt deutet dies darauf hin, daß auch β_* im $d = 4$ -dimensionalen Fall eine universelle Größe sein könnte.

6.3.2 Der linearisierte Fluß im $d = 4$ -dimensionalen Fall

Der nächste Schritt besteht darin, das kritische Verhalten des Renormierungsgruppenflusses in der Nähe des nicht-Gaußschen Fixpunkts zu untersuchen. Nehmen wir das entscheidende Resultat gleich vorweg: Für alle verwendeten Cutoffs erweist sich der nicht-Gaußsche Fixpunkt der R^2 -Trunkierung als UV attraktiv, und zwar in allen drei Richtungen des λ - g - β -Raums. Das sieht man wie folgt: Linearisiert man den Renormierungsgruppenfluß gemäß (4.2) und diagonalisiert dann die daraus hervorgehende Stabilitätsmatrix \mathbf{B} , so erhält man immer ein Paar von komplex konjugierten kritischen Exponenten $\theta_1 = \theta' + i\theta'' = \theta_2^*$ mit $\theta' > 0$ sowie einen einzelnen reellen, positiven kritischen Exponenten $\theta_3 > 0$. Damit erhält man die allgemeine Lösung der linearisierten Flußgleichungen einfach dadurch, daß man den Realteil von (4.4) bildet. Unter Verwendung der in Abschnitt 4.3 eingeführten Renormierungsgruppenzeit $t \equiv \ln(k/k_0)$ läßt sich diese Lösung folgendermaßen schreiben:

$$\begin{aligned} (\lambda_k, g_k, \beta_k)^{\mathbf{T}} &= (\lambda_*, g_*, \beta_*)^{\mathbf{T}} + 2 \left\{ [\operatorname{Re} C \cos(\theta'' t) + \operatorname{Im} C \sin(\theta'' t)] \operatorname{Re} V \right. \\ &\quad \left. + [\operatorname{Re} C \sin(\theta'' t) - \operatorname{Im} C \cos(\theta'' t)] \operatorname{Im} V \right\} e^{-\theta' t} + C_3 V^3 e^{-\theta_3 t} . \end{aligned} \quad (6.25)$$

Die obige Lösungsschar enthält als freie Parameter die komplexe Integrationskonstante $C \equiv C_1 = (C_2)^*$ und die reelle Integrationskonstante C_3 . Weiterhin verkörpern $V \equiv V^1 = (V^2)^*$ und V^3 die Rechtseigenvektoren der Stabilitätsmatrix $(B_{ij})_{i,j \in \{\lambda, g, \beta\}}$ zum Eigenwert $-\theta_1 = -\theta_2^*$ bzw. $-\theta_3$. Offensichtlich konvergiert der Ausdruck aus Gleichung (6.25) im Limes $k \rightarrow \infty$ genau dann gegen $(\lambda_*, g_*, \beta_*)$, wenn θ' und θ_3 positiv sind. Da das hier in der Tat (unabhängig vom Cutoff) der Fall ist, wirkt der nicht-Gaußsche Fixpunkt folglich auf alle Trajektorien in seinem Einzugsbereich UV attraktiv. Betrachtet man die durch (6.25) beschriebenen Trajektorien etwas genauer, so stellt man fest, daß sie sich aus drei voneinander unabhängigen Normalmoden zusammensetzen, deren Amplituden proportional zu $\text{Re } C$, $\text{Im } C$ bzw. C_3 sind. Die ersten beiden beschreiben eine Spirale und die dritte eine Gerade.

Betrachten wir jetzt die verschiedenen Gesichtspunkte des nicht-Gaußschen Fixpunkts anhand eines Beispiels. Dazu verwenden wir wieder die exponentielle Profilfunktion (2.8) mit $s = 1$. Für die entsprechenden Fixpunktkoordinaten ergibt sich $(\lambda_*, g_*, \beta_*) = (0.330, 0.292, 0.005)$, vgl. (6.24). Ferner nimmt die Stabilitätsmatrix \mathbf{B} in diesem Fall die folgende Form an:

$$\mathbf{B} = - \begin{pmatrix} 8.83 & 2.61 & 401.75 \\ 6.18 & 4.46 & 89.24 \\ 0.29 & 0.32 & 19.82 \end{pmatrix}. \quad (6.26)$$

Sie liefert das Paar komplexer kritischer Exponenten $\theta_1 = \theta_2^*$ mit $\theta' = 2.15$ und $\theta'' = 3.79$ sowie den reellen kritischen Exponenten $\theta_3 = 28.8$. Die zugehörigen Rechtseigenvektoren sind durch

$$\begin{aligned} \text{Re } V &= (-0.164, 0.753, -0.008)^{\mathbf{T}}, \\ \text{Im } V &= (0.64, 0, -0.01)^{\mathbf{T}}, \\ V^3 &= -(0.92, 0.39, 0.04)^{\mathbf{T}} \end{aligned} \quad (6.27)$$

festgelegt. (Die Vektoren sind derartig normiert, daß $\|V\| = \|V^3\| = 1$ gilt.) Mit Hilfe dieser numerischen Ergebnisse läßt sich nun der linearisierte Fluß graphisch darstellen. Abbildung 6.5 zeigt eine typische Trajektorie, bei der alle drei Normalmoden gleich stark angeregt sind (d.h. $\text{Re } C = \text{Im } C = 1/\sqrt{2}$, $C_3 = 1$). Offensichtlich ist sie in dem kompletten abgebildeten Bereich, der sich von $k = \infty$ bis hinunter zu $k \approx m_{\text{Pl}}$ erstreckt, auf einen "Kasten" mit sehr kleiner Ausdehnung in β -Richtung beschränkt. Dieser umgibt die $\beta = 0$ -Ebene, also den Parameterraum der Einstein-Hilbert-Trunkierung.

Tatsächlich ergibt eine umfassende Analyse, daß der linearisierte Fluß unabhängig vom Cutoff durch einige bemerkenswerte Eigenschaften charakterisiert ist, die durch die

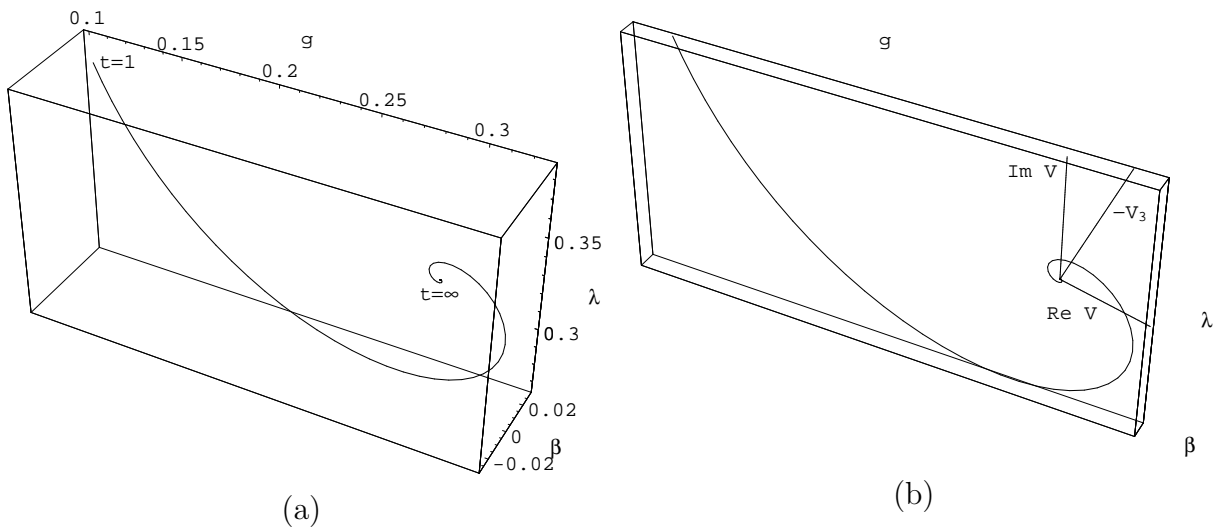


Abbildung 6.5: Eine typische Trajektorie, die den linearisierten Fluß in der Umgebung des nicht-Gaußschen Fixpunkts der R^2 -Trunkierung beschreibt. Der dargestellte Bereich entspricht $1 \leq t = \ln(k/k_0) < \infty$. In (b) sind sowohl die Eigenrichtungen als auch der “Kasten” abgebildet, auf den sich die Trajektorie in ihrer Ausdehnung beschränkt.

oben angesprochene Abbildung 6.5 bereits angedeutet werden. Die Art und Weise, in der diese verschiedenen Eigenschaften zusammenspielen, läßt darauf schließen, daß der Renormierungsgruppenfluß in der Umgebung des Fixpunkts bereits in sehr guter Näherung durch die reine Einstein-Hilbert-Trunkierung beschrieben wird. Diese Merkmale werden im folgenden aufgelistet.

(a) Die β -Komponenten von $\text{Re } V$ und $\text{Im } V$ sind im Verhältnis zu den übrigen (von Null verschiedenen) Komponenten sehr klein. Folglich spannen diese beiden Vektoren eine Ebene auf, die praktisch mit dem λ - g -Unterraum bei $\beta = 0$ zusammenfällt und somit mit dem Parameterraum der Einstein-Hilbert-Trunkierung nahezu identisch ist. Daraus resultiert wiederum, daß die $\text{Re } C$ - und $\text{Im } C$ -Normalmoden im wesentlichen dieselben Trajektorien beschreiben wie die beiden “altbekannten” $\text{Re } C$ - und $\text{Im } C$ -Normalmoden aus Gleichung (4.30), die sich ohne zusätzliche Berücksichtigung des R^2 -Terms ergeben. Weiterhin sind auch die θ' - und θ'' -Werte aus den beiden Trunkierungen relativ gut miteinander verträglich, siehe Unterabschnitt 6.3.3 (weiter unten).

(b) Für alle benutzten Cutoffs ist der “neue” Eigenwert θ_3 , der durch den R^2 -Term hervorgerufen wird, bedeutend größer als θ' , vgl. Unterabschnitt 6.3.3. Das hat folgende Konsequenzen: Nehmen wir an, eine Trajektorie hat sich bei stetiger Vergrößerung der Skala k bzw. t so weit dem Fixpunkt genähert, daß sie in guter Approximation durch (6.25) beschrieben wird. Dann sind die $\text{Re } C$ - und $\text{Im } C$ -Normalmoden proportional zu $\exp(-\theta' t)$ und werden bei weiterer Vergrößerung von t dementsprechend gedämpft, während die “neue” C_3 -Normalmode proportional zu $\exp(-\theta_3 t)$ ist und dadurch im Limes $t \rightarrow \infty$

viel schneller abklingt als die beiden anderen Moden. Sobald t groß genug ist, liegen daher die Trajektorien, die in den Fixpunkt laufen und somit in seiner Nähe durch (6.25) approximiert werden, für jede beliebige Wahl der Integrationskonstanten ($\text{Re } C, \text{Im } C, C_3$) nahezu vollständig im $\text{Re } V\text{-Im } V$ -Unterraum, also praktisch in der $\beta = 0$ -Ebene.

Aufgrund des großen Betrags von θ_3 ist die neue Eigenrichtung sehr "relevant". Wenn man aber, vom Fixpunkt bei $t = \infty$ ausgehend, die Skala verkleinert, dann bleibt der $\exp(-\theta_3 t)$ -Term solange gegenüber den anderen Termen aus (6.25) vernachlässigbar, bis die Skala $k \approx m_{\text{Pl}}$ ($t \approx 0$) erreicht wird, bei der er von der Größenordnung eins ist. Erst an diesem Punkt beginnt der Bereich, in dem eine weitere Verkleinerung von t dazu führt, daß dieser Term schnell anwächst.

(c) Da die Matrix \mathbf{B} nicht symmetrisch ist, gibt es keinen zwingenden Grund dafür, daß ihre Eigenvektoren orthogonal sein sollten. Tatsächlich findet man, daß V^3 beinahe in der $\text{Re } V\text{-Im } V$ -Ebene liegt. Berechnet man beispielsweise die Winkel zwischen den Eigenvektoren aus (6.27), so erhält man $\angle(\text{Re } V, \text{Im } V) = 102.3^\circ$, $\angle(\text{Re } V, V^3) = 100.7^\circ$, $\angle(\text{Im } V, V^3) = 156.7^\circ$. Ihre Summe beträgt 359.7° , wodurch bestätigt wird, daß $\text{Re } V$, $\text{Im } V$ und V^3 nahezu komplanar sind. Das bedeutet, daß auch aus der Anregung der C_3 -Normalmode in erster Linie Beiträge zu den $\int d^d x \sqrt{g}$ - und $\int d^d x \sqrt{g} R$ -Termen von Γ_k hervorgehen. Ihr Beitrag zum $\int d^d x \sqrt{g} R^2$ -Term ist wiederum vergleichsweise klein.

Aus der Kombination der unter (a), (b) und (c) aufgelisteten Resultate läßt sich schließen, daß der Renormierungsgruppenfluß in der Umgebung des Fixpunkts im wesentlichen zweidimensional ist und daß dieser zweidimensionale Fluß in guter Näherung durch die Flußgleichungen der Einstein-Hilbert-Trunkierung beschrieben wird.

6.3.3 Cutoffschema-Abhängigkeit der kritischen Exponenten im $d = 4$ -dimensionalen Fall

Wie bereits in Abschnitt 4.1 dargelegt wurde, sind die kritischen Exponenten universelle Größen. Durch Trunkieren des Parameterraums wird jedoch in diese Größen eine Cutoffschema-Abhängigkeit induziert. Diese kann aber durchaus zum Vorteil gereichen, da sich anhand ihres Ausmaßes die Verlässlichkeit einer Trunkierung erkennen läßt. Die kritischen Exponenten der R^2 -Trunkierung liefern in dieser Hinsicht zufriedenstellende Resultate. Diese werden in den Abbildungen 6.6 und 6.7 dargestellt. Die Abbildungen 6.6(a) und 6.7(a) zeigen den Realteil θ' und den Imaginärteil θ'' des komplex konjugierten Paares $\theta_1 = \theta_2^*$ in Abhängigkeit vom Cutoff, während die Cutoffschema-Abhängigkeit des reellen kritischen Exponenten θ_3 anhand der Abbildungen 6.6(b) und 6.7(b) illustriert wird. Die Plots aus Abbildung 6.6 wurden unter Verwendung der Familie von exponentiellen Profildfunktionen (2.8) erstellt, und diejenigen aus Abbildung 6.7 basieren auf der

Familie von Profilfunktionen mit kompaktem Träger (2.9). Dementsprechend zeigen sie die kritischen Exponenten als Funktionen des jeweiligen Profilparameters s bzw. b .

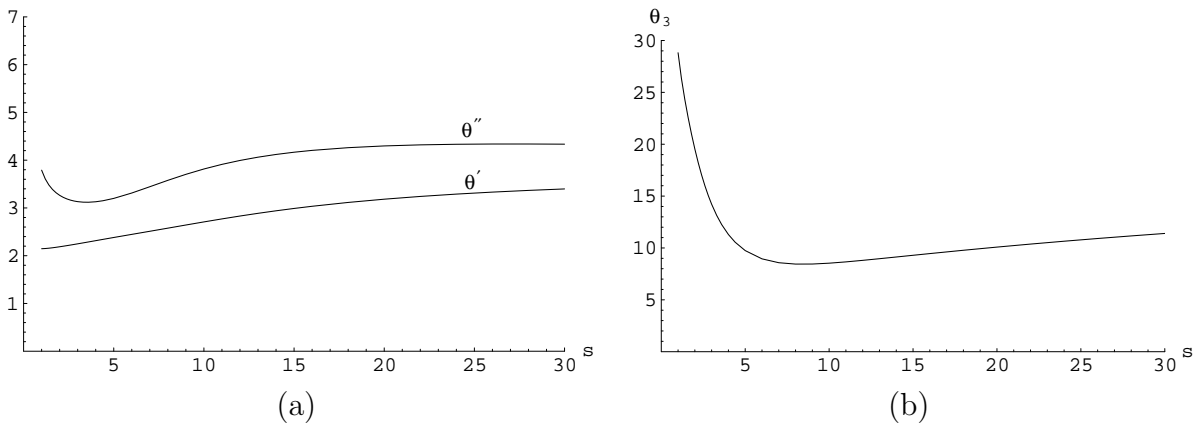


Abbildung 6.6: (a) $\theta' = \operatorname{Re} \theta_1$ und $\theta'' = \operatorname{Im} \theta_1$, sowie (b) θ_3 als Funktionen von s . Die beiden Plots wurden unter Verwendung der Familie von exponentiellen Profilfunktionen (2.8) erstellt.

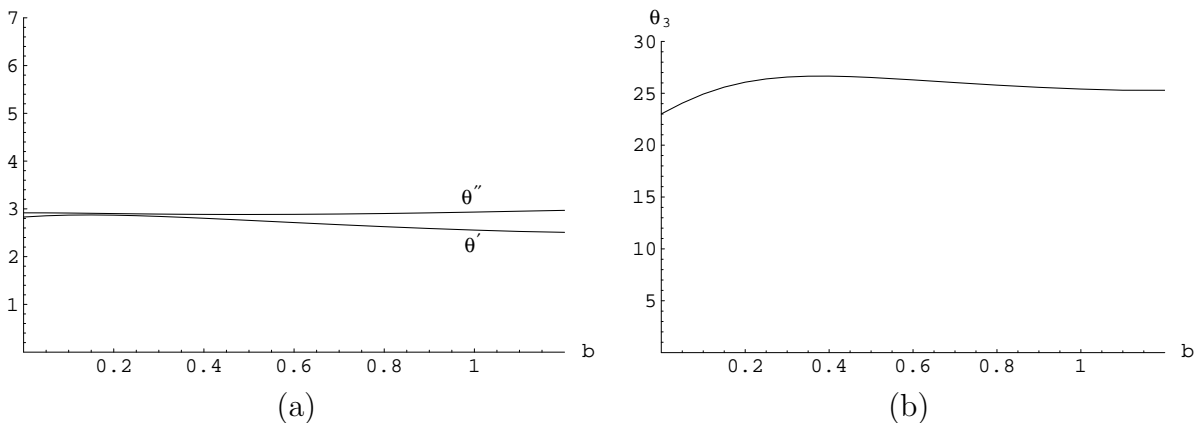


Abbildung 6.7: (a) $\theta' = \operatorname{Re} \theta_1$ und $\theta'' = \operatorname{Im} \theta_1$ sowie (b) θ_3 als Funktionen von b . Die beiden Plots wurden unter Verwendung der Familie von Profilfunktionen mit kompaktem Träger (2.9) erstellt.

Was das komplex konjugierte Paar von kritischen Exponenten angeht, so stellt sich heraus, daß ihre Schema-Abhängigkeit von derselben Größenordnung ist wie bei der Einstein-Hilbert-Trunkierung. Während die Schema-Abhängigkeit von θ'' schwächer ist als die in Abschnitt 4.3 für den entsprechenden Parameter gefundene, weist θ' im Vergleich zu seinem Analogon aus 4.3 eine etwas stärkere Abhängigkeit von $R^{(0)}$ auf. Bei Verwendung der exponentiellen Profilfunktionen mit $1 \leq s \leq 30$ ergeben sich im vorliegenden Fall θ' - und θ'' -Werte, die in den Intervallen $2.1 \lesssim \theta'(s) \lesssim 3.4$ bzw. $3.1 \lesssim \theta''(s) \lesssim 4.3$ liegen. Im Vergleich dazu führen die Profilfunktionen mit kompaktem Träger zu einer schwächeren Abhängigkeit vom Profilparameter b . Die sich für $\theta'(b)$ und $\theta''(b)$ ergebenden Werte

sind aber sehr wohl mit denjenigen verträglich, die aus den exponentiellen Profilkfunktionen hervorgehen. In der Tat liegen sie allesamt in den oben angegebenen $\theta'(s)$ - und $\theta''(s)$ -Intervallen. Die Mittelwerte für θ' und θ'' sind etwas größer als die entsprechenden aus der Einstein-Hilbert-Trunkierung. Die Differenz zwischen den jeweiligen Mittelwerten liegt sowohl für θ' als auch für θ'' ungefähr bei eins.

Wenden wir uns nun dem neuen kritischen Exponenten θ_3 zu, der in der Einstein-Hilbert-Trunkierung nicht vorhanden ist. Bei Verwendung der exponentiellen Profilkfunktionen (2.8) weist dieser kritische Exponent eine deutlich ausgeprägte Schema-Abhängigkeit auf. In dem untersuchten Bereich $1 \leq s \leq 30$ unterliegt er relativ starken Schwankungen und nimmt sämtliche Werte aus dem Intervall $8.4 \lesssim \theta_3(s) \lesssim 28.8$ an. Im Vergleich zu den exponentiellen Profilkfunktionen führen diejenigen mit kompaktem Träger hingegen zu einer ziemlich schwachen Schema-Abhängigkeit. Für den Parameterbereich $b \in [0, 1.2]$ ergibt sich hier das Intervall $23.0 \lesssim \theta_3(b) \lesssim 26.7$. Offensichtlich sind auch in diesem Fall die Resultate, die sich in Zusammenhang mit den beiden Familien von Profilkfunktionen ergeben, miteinander verträglich. Außerdem stellt sich hiermit heraus, daß θ_3 für alle verwendeten Cutoffs bedeutend größer ist als θ' (und θ''). Folglich ist die "Hierarchie" der kritischen Exponenten, die unter dem Punkt (b) des vorangegangenen Unterabschnitts 6.3.2 erwähnt wurde und die die Trajektorien nahezu auf die $\beta = 0$ -Ebene einschränkt, eine universelle Eigenschaft der Theorie.

Die kritischen Exponenten, insbesondere θ_3 , weisen offenkundig eine merklich stärkere Schema-Abhängigkeit auf als das Produkt $g_*\lambda_*$. Der Grund dafür liegt wahrscheinlich darin, daß weitere (am nicht-Gaußschen Fixpunkt) relevante Operatoren neben denjenigen existieren, die in der R^2 -Trunkierung Berücksichtigung finden, und somit die vorliegende \mathbf{B} -Matrix, die ja die kritischen Exponenten liefert, wohl noch "zu klein" ist.

6.3.4 Der $2 + \varepsilon$ -dimensionale Fall

Die obigen Resultate und ihr konsistentes Zusammenspiel weisen stark darauf hin, daß die $d = 4$ -dimensionale Quanten-Einstein-Gravitation tatsächlich einen nicht-Gaußschen Fixpunkt besitzen könnte, der mit genau den Eigenschaften ausgestattet ist, die zur nicht-perturbativen Renormierbarkeit oder "asymptotischen Sicherheit" der Theorie führen. Im Rahmen des gewählten Zugangs ist es allerdings nicht möglich, die Dimensionalität Δ_{UV} der UV kritischen Hyperfläche zu bestimmen, die ja mit der Anzahl der am nicht-Gaußschen Fixpunkt relevanten Invarianten identisch ist. Aus der Studie der kanonischen Dimensionen geht hervor, daß die (Krümmung) ^{n} -Invarianten in $d = 4$ Dimensionen auf *klassischem* Niveau für $n = 2$ marginal und für $n > 2$ irrelevant sind. Die Ergebnisse für θ_3 zeigen jedoch, daß große *nichtklassische* Beiträge in Erscheinung treten. Demzufolge könnte es, wie oben bereits angedeutet, darüber hinaus noch weitere relevante Operato-

Tabelle 6.t1: Koordinaten des Fixpunkts und kritische Exponenten

s	$\lambda_*(+\mathcal{O}(\varepsilon^2))$	$g_*(+\mathcal{O}(\varepsilon^2))$	$\beta_*(+\mathcal{O}(\varepsilon))$	$\theta_1(+\mathcal{O}(\varepsilon))$	$\theta_2(+\mathcal{O}(\varepsilon^2))$	$\theta_3(+\mathcal{O}(\varepsilon))$
1	-0.131ε	0.087ε	-0.083	2	0.963ε	-1.968
5	-0.055ε	0.092ε	-0.312	2	0.955ε	-1.955
10	-0.035ε	0.095ε	-0.592	2	0.955ε	-1.956

ren von noch höherer Potenz in der Krümmung geben. Da es aber schwer vorstellbar ist, daß die Quanteneffekte die Vorzeichen von unendlich vielen negativen klassischen Skalendimensionen ändern, die ja vom Betrag her beliebig großen werden können, sollte Δ_{UV} eigentlich endlich sein. Eine etwas ausführlichere Diskussion hierzu findet sich in Abschnitt 4.1; siehe auch [10].

Eine erste Bestätigung dieser Annahme kommt aus der R^2 -Trunkierung in $d = 2 + \varepsilon$ Dimensionen (mit $0 < \varepsilon \ll 1$). In diesem Fall ergibt sich in der Tat, daß die dritte, klassisch irrelevante Eigenrichtung auch auf nichtklassischem Niveau irrelevant bleibt, was sich durch einen (für alle verwendeten Cutoffs) negativen θ_3 -Wert ausdrückt. (Bei der Identifizierung von (klassisch) relevanten und irrelevanten Invarianten ist hier zu beachten, daß der Grenzwert für die kanonische Dimension, der diese beiden Bereiche voneinander trennt, gegenüber dem $d = 4$ -dimensionalen Fall um zwei Einheiten verschoben ist.)

Im Gegensatz zu der entsprechenden Rechnung in der Einstein-Hilbert-Trunkierung, die sich noch analytisch durchführen ließ, ist man im Rahmen der R^2 -Trunkierung in $d = 2 + \varepsilon$ Dimensionen dazu gezwungen, bei der Auswertung auf numerische Methoden zurückzugreifen. Im einzelnen wurden hier die Koordinaten des Fixpunkts und die zugehörigen kritischen Exponenten mit Hilfe der ε -Entwicklung für ausgewählte Werte des Profilparameters s numerisch bestimmt. Bei allen berechneten Größen wurden nur die führenden nichttrivialen Ordnungen der ε -Entwicklung berücksichtigt. Die entsprechenden numerischen Resultate sind in Tabelle 6.t1 aufgelistet.

Für alle verwendeten Cutoffs erhält man in diesem Fall drei *reelle* kritische Exponenten, die ersten beiden sind positiv, und der dritte ist negativ. Demnach ist die zugehörige V^3 -Richtung UV repulsiv. Das läßt wiederum die Vermutung zu, daß die Dimensionalität der kritischen Hyperfläche bei $\Delta_{UV} = 2$ liegen sollte. Allerdings stellt dieses Argument natürlich keinen rigorosen Beweis dafür dar. Falls dies aber tatsächlich so sein sollte, dann wäre die Quantentheorie nur durch zwei freie Parameter vollständig charakterisiert, z.B. durch die renormierte Newton-Konstante G_0 und die renormierte kosmologische Konstante $\bar{\lambda}_0$.

Vergleichen wir zum Abschluß die obigen Resultate mit denen aus der Einstein-Hilbert-Trunkierung, die bereits in Abschnitt 4.3 diskutiert wurden. Man stellt dabei fest, daß

die λ - und die g -Koordinate des Fixpunkts sowie die kritischen Exponenten θ_1 und θ_2 den analogen Größen aus der Einstein-Hilbert-Trunkierung sehr ähnlich sind. Allerdings treten dennoch gewisse wesentliche Unterschiede auf. Während in der Einstein-Hilbert-Trunkierung die Resultate für g_* und θ_2 in führender Ordnung unabhängig vom Cutoffschema sind ($g_* = 3/38 \varepsilon + \mathcal{O}(\varepsilon^2) \approx 0.079 \varepsilon + \mathcal{O}(\varepsilon^2)$, $\theta_2 = \varepsilon + \mathcal{O}(\varepsilon^2)$, vgl. Abschnitt 4.3), ist bei den entsprechenden Größen in der R^2 -Trunkierung eine zwar schwache, aber nichtverschwindende Schema-Abhängigkeit zu verzeichnen. Andererseits führen beide Resultate in Einklang miteinander zu dem Ergebnis $\theta_1 = 2 + \mathcal{O}(\varepsilon)$.

6.3.5 Zusammenstellung und Bewertung der Ergebnisse

Um dieses Kapitel in angemessener Form zu Ende zu bringen, werden im folgenden kurz die wichtigsten Eigenschaften des nicht-Gaußschen Fixpunkts der R^2 -Trunkierung rekapituliert und ihre Konsequenzen aufgezeigt.

(1 R^2) Position des Fixpunkts: Der im Rahmen der Einstein-Hilbert-Trunkierung gefundene nicht-Gaußsche Fixpunkt ist auch in der allgemeineren Trunkierung mit zusätzlichem R^2 -Term vorhanden. Er existiert für alle verwendeten Profilfunktionen und erweist sich gegenüber der Variation des Cutoffschemas als sehr stabil. Ferner liegt der Fixpunkt für alle Profilfunktionen $R^{(0)}$ praktisch in der $\beta = 0$ -Ebene. Darüber hinaus stimmt seine Position für jedes einzelne $R^{(0)}$ beinahe genau mit derjenigen überein, die der Fixpunkt der Einstein-Hilbert-Trunkierung bei Verwendung desselben $R^{(0)}$ einnimmt. Insgesamt ist dies als ein hochgradig nichttriviales Resultat zu werten, denn am Beispiel des Gaußschen Fixpunkts, der zwar in der Einstein-Hilbert-Trunkierung, aber nicht in der R^2 -Trunkierung vorhanden ist, läßt sich erkennen, daß der Fortbestand eines Fixpunkts bei Erweiterung des Trunkierungsansatzes nicht garantiert ist.

(2 R^2) Eigenwerte und -vektoren: Für alle verwendeten Cutoffs wirkt der Fixpunkt in jede der drei Richtungen des λ - g - β -Raums UV attraktiv. Der linearisierte Fluß in seiner Umgebung ist immer durch ein Paar von komplex konjugierten kritischen Exponenten $\theta_1 = \theta' + i\theta'' = \theta_2^*$ mit $\theta' > 0$ und einen einzelnen reellen, positiven kritischen Exponenten $\theta_3 > 0$ bestimmt. Dieser Fluß ist im wesentlichen zweidimensional und wird in guter Näherung durch die Renormierungsgruppengleichungen der Einstein-Hilbert-Trunkierung beschrieben.

(3 R^2) Cutoffschema-Abhängigkeit: Die Schema-Abhängigkeit der kritischen Exponenten $\theta_1 = \theta_2^*$ und des Produkts $g_*\lambda_*$ ist von derselben Größenordnung wie bei der Einstein-Hilbert-Trunkierung. Bei θ'' ist sie im vorliegenden Fall schwächer als im Fall der Einstein-Hilbert-Trunkierung, während sie bei θ' hier etwas stärker ausgeprägt ist. Der neue Exponent θ_3 hingegen weist eine relativ starke Abhängigkeit vom Cutoffschema auf. Das angesprochene Produkt $g_*\lambda_*$ zeichnet sich wiederum durch eine erstaunlich schwache,

kaum registrierbare Schema-Abhängigkeit aus.

(4_{R^2}) Dimensionalität von \mathcal{S}_{UV} : Im Rahmen des hier gewählten Zugangs läßt sich die Dimensionalität Δ_{UV} der UV kritischen Hyperfläche nicht bestimmen. Die Resultate, die aus den Rechnungen zur R^2 -Trunkierung in $2 + \varepsilon$ Dimensionen folgen, deuten jedoch an, daß Δ_{UV} auch im $d = 4$ -dimensionalen Fall endlich sein sollte.

Den obigen Resultaten nach zu urteilen, wird es immer unwahrscheinlicher, daß der nunmehr im Rahmen *beider* Trunkierungen gefundene nicht-Gaußsche Fixpunkt ein Trunkierungsprodukt repräsentiert. Vielmehr erscheint es hier weitaus logischer anzunehmen, daß er auch in der exakten Theorie existiert und daß dieser “exakte” Fixpunkt bei den vorliegenden Rechnungen lediglich in Form seiner Projektion auf den jeweiligen trun-kierten Parameterraum in Erscheinung tritt. Im einzelnen wurde hier gezeigt, daß der Fixpunkt mitsamt all seinen qualitativen (und teilweise auch quantitativen) Eigenschaften kaum durch die Erweiterung des Trunkierungsansatzes um den R^2 -Term sowie durch die zusätzliche Variation des Cutoffschemas beeinflusst wird. Daraus läßt sich schließen, daß bereits die relativ “einfache” Einstein-Hilbert-Trunkierung zumindest bei hinreichend großen Skalen k oberhalb der Planck-Masse aller Voraussicht nach verläßlich ist. Insbesondere stellen die Ergebnisse dieses Abschnitts ein weiteres starkes Indiz dafür dar, daß die $d = 4$ -dimensionale Quanten-Einstein-Gravitation in der Tat asymptotisch sicher, also nichtperturbativ renormierbar sein könnte.

Kapitel 7

Positivität der Wirkung, des Hesse-Matrixoperators und des Cutoffs

7.1 Positivität der Wirkung

Nachdem wir uns in den vorangegangenen Kapiteln mit der Auswertung der Flußgleichung beschäftigt haben, werden wir nun, um das Gesamtbild abzurunden, noch einige technische und auch konzeptionelle Details diskutieren, die für die effektive Mittelwertwirkung Γ_k und ihre Flußgleichung von Bedeutung sind. Genauer gesagt werden wir erkunden, in welchem Maße die Addition des R^2 -Terms zur Beseitigung der Probleme beitragen könnte, die der konforme Sektor des Einstein-Hilbert-Terms hinsichtlich der Positivität der Wirkung und der Stabilität der Theorie verursacht.

Der Euklidischen Einstein-Hilbert-Wirkung

$$S_{\text{EH}}[g] = \frac{1}{16\pi G} \int d^d x \sqrt{g} \{-R(g) + 2\bar{\lambda}\} \quad (7.1)$$

haftet ein wohlbekanntes Problem an, und zwar, daß sie in $d > 2$ Dimensionen nicht nach unten beschränkt ist. Das läßt sich sehr leicht zeigen. Dazu zerlegt man die Metrik gemäß $g_{\mu\nu} = \exp(2\chi)\bar{g}_{\mu\nu}$, wobei $\bar{g}_{\mu\nu}$ eine feste Bezugsmetrik darstellt und $\chi(x)$ den sogenannten konformen Faktor verkörpert, und schreibt damit (7.1) wie folgt um:

$$S_{\text{EH}}[g] = \frac{1}{16\pi G} \int d^d x \sqrt{\bar{g}} e^{(d-2)\chi} [-\bar{R} + 2\bar{\lambda} e^{2\chi} - (d-1)(d-2) \bar{g}^{\mu\nu} (\bar{D}_\mu \chi) (\bar{D}_\nu \chi)] \quad (7.2)$$

Anhand dieser Gleichung wird klar, daß S_{EH} jeden beliebigen negativen Wert annehmen kann. Denn durch Wahl eines entsprechend schnell variierenden konformen Faktors $\chi(x)$ läßt sich erreichen, daß das Integral über $(\bar{D}_\mu \chi)^2$ Werte von beliebiger Größe zu (7.2)

beisteuern kann. Da dieses Integral mit einem negativen Vorzeichen in (7.2) auftaucht, ist S somit nicht nach unten beschränkt. Aufgrund dieser Unbeschränktheit dürfte es sehr schwierig sein, für die Euklidische Quantengravitation ein wohldefiniertes Pfadintegral der Form $Z = \int \mathcal{D}g_{\mu\nu} \exp(-S_{\text{EH}})$ zu finden.

Die Situation verbessert sich erheblich, wenn man der Wirkung S_{EH} die Invariante $\int d^d x \sqrt{g} R^2$ hinzufügt und den Koeffizienten dieses Terms positiv wählt. Denn die daraus resultierende Wirkung ist tatsächlich *nach unten beschränkt*, vgl. [13]. Während der Einstein-Hilbert-Term $\int d^d x \sqrt{g} R$ einen negativen Beitrag zum kinetischen Term des konformen Faktors liefert, der hier bei kleinen Impulsen dominiert, resultiert aus dem R^2 -Term ein positiver Beitrag zum kinetischen Term, der sein Verhalten bei großen Impulsen bestimmt. Infolgedessen besitzen sowohl das trunkierte Wirkungsfunktional $\Gamma_k[g, \bar{g}]$ aus Gleichung (5.2) als auch die nackte Wirkung $S[g] = \Gamma_{\hat{k} \rightarrow \infty}[g, g]$ ein absolutes Minimum. Wenn man nun den Trunkierungsansatz (5.2) mit identifizierten Metriken $\bar{g}_{\mu\nu} = g_{\mu\nu}$ durch Umschreiben in die Form

$$\Gamma_k[g, g] = \int d^d x \sqrt{g} \left\{ \bar{\beta}_k \left(R - \frac{Z_{Nk} \kappa^2}{\bar{\beta}_k} \right)^2 + Z_{Nk} \kappa^2 \left(4\bar{\lambda}_k - \frac{Z_{Nk} \kappa^2}{\bar{\beta}_k} \right) \right\} \quad (7.3)$$

bringt, so läßt sich zudem eine hinreichende Bedingung für eine strikt *positive* Wirkung $\Gamma_k[g, g] > 0$ sehr leicht bestimmen. Auf dem Niveau der dimensionslosen Kopplungen nimmt sie die folgende Form an: $g_k > 0$, $\beta_k > 0$ und

$$128\pi g_k \lambda_k \beta_k > 1. \quad (7.4)$$

7.2 Positivität des Hesse-Matrixoperators

Auf der rechten Seite der Flußgleichung (2.3) tritt Γ_k in Form seiner zweiten Funktionalableitung, des Hesse-Matrixoperators $\Gamma_k^{(2)}$, auf, an den der Cutoffoperator \mathcal{R}_k gemäß der Regel (2.4) angepaßt wird. Infolge dieser Anpassung führt der Cutoff nur dann zu einer “korrekten” Unterdrückung der Beiträge von niederenergetischen Moden, wenn $\Gamma_k^{(2)}$ ein positiv definitiver Operator ist. Da ohnehin zu erwarten ist, daß die R^2 -Trunkierung nur im Bereich großer Skalen k verläßlich ist, reicht es für unsere Zwecke im Grunde genommen aus, wenn $\Gamma_k^{(2)}$ und \mathcal{R}_k lediglich für hinreichend große Impulse $p^2 \equiv -\bar{D}^2$ positiv definit sind. Der Grund dafür liegt in der Tatsache, daß der Faktor $\partial_t \mathcal{R}_k(p^2)$ hauptsächlich im Bereich um $p^2 \approx k^2$ “große” Werte annimmt, und somit dafür sorgt, daß die Spuren auf der rechten Seite von (2.3) ihre Hauptbeiträge von Moden erhalten, deren Eigenwerten p^2 in der Nähe von k^2 liegen.

Im allgemeinen hängt $\Gamma_k^{(2)}[g, \bar{g}]$ sowohl von $g_{\mu\nu}$ als auch von der Hintergrundmetrik $\bar{g}_{\mu\nu}$ ab. Im folgenden werden wir uns aber auf den Operator $\Gamma_k^{(2)}[g, g] \equiv \Gamma_k^{(2)}$ mit identifizierten

Metriken konzentrieren. Weiterhin nehmen wir an, daß $g_{\mu\nu} = \bar{g}_{\mu\nu}$ die Metrik einer d -Sphäre vom Radius r darstellt, da wir uns in der vorliegenden Arbeit bei der Projektion der Flußgleichung ohnehin immer auf diese Klasse von Hintergründen beschränken. Somit sind im vorliegenden Fall die Eigenwerte die in Anhang E tabellierten $p^2 = \Lambda_l(d, s)$, welche von der diskreten Quantenzahl l abhängen. Die $\Lambda_l(d, s)$ stellen streng monoton wachsende Funktionen von l dar, für die $\lim_{l \rightarrow \infty} \Lambda_l(d, s) = \infty$ gilt.

Im folgenden werden wir zeigen, daß $\Gamma_k^{(2)}$ bei sehr großen Skalen k in der Tat positiv definit wird, wenn der Feldraum, auf den er wirkt, auf den Unterraum beschränkt wird, der von $-D^2$ -Eigenfunktionen zu hinreichend großen Eigenwerten aufgespannt wird. Um die Positivität zu gewährleisten, ist es allerdings zusätzlich erforderlich, daß die Kopplungen gewissen Bedingungen nachkommen.

Welche Struktur besitzt nun der oben erwähnte Unterraum? Offensichtlich läßt sich eine besonders geeignete Basis für diesen Raum aus den sphärischen Harmonischen $T_{\mu\nu}^{lm}$, T_{μ}^{lm} und T^{lm} konstruieren. Dabei gehen dann nur solche Harmonischen in die jeweilige Basis ein, deren l -Werte einen bestimmten Minimalwert l_{\min} überschreiten. Bis auf weiteres spielen für die folgende Diskussion nur sehr große l -Werte eine Rolle. Daher reicht es aus, die angesprochenen Positivitätsbedingungen für die Kopplungen aus den Anteilen von $\Gamma_k^{(2)}$ herzuleiten, die die führenden l -Potenzen enthalten.

Nachdem in dem Hesse-Matrixoperator $\Gamma_k^{(2)}[g, g]$, der durch die quadratische Form (5.6) bestimmt ist, $-D^2$ durch $\Lambda_l(d, s)$ ersetzt worden ist, stellt dieser eine *symmetrische* Blockdiagonalmatrix dar. Daher läßt sich hier das Hauptminorenkriterium anwenden, um an die Positivitätsbedingungen zu gelangen. Sie sind hier von der folgenden, sehr einfachen Form: $(\Gamma_k^{(2)})_{\bar{h}T\bar{h}T} > 0$, $(\Gamma_k^{(2)})_{\bar{\xi}\bar{\xi}} > 0$, $(\Gamma_k^{(2)})_{\bar{\phi}\bar{\phi}} > 0$ und $(\Gamma_k^{(2)})_{\bar{\sigma}\bar{\sigma}} (\Gamma_k^{(2)})_{\bar{\phi}\bar{\phi}} - (\Gamma_k^{(2)})_{\bar{\sigma}\bar{\phi}}^2 > 0$. Bei genügend großen l -Werten verkörpern die führenden l -Potenzen von $\Lambda_l(d, s)$ die dominierenden Beiträge zu den Einträgen von $\Gamma_k^{(2)}$ aus Gleichung (5.6), so daß sich die obigen Bedingungen in diesem Grenzfall zu den nachstehenden Ungleichungen vereinfachen:

$$0 < \left(\Gamma_k^{(2)} \right)_{\bar{h}T\bar{h}T} \xrightarrow{l \rightarrow \infty} (Z_{Nk}\kappa^2 - \bar{\beta}_k R) \Lambda_l(d, 2) \implies Z_{Nk}\kappa^2 - \bar{\beta}_k R > 0 \quad (7.5)$$

$$0 < \left(\Gamma_k^{(2)} \right)_{\bar{\xi}\bar{\xi}} \xrightarrow{l \rightarrow \infty} 2 \frac{Z_{Nk}\kappa^2}{\alpha} \Lambda_l(d, 1) \implies \frac{Z_{Nk}\kappa^2}{\alpha} > 0 \quad (7.6)$$

$$0 < \left(\Gamma_k^{(2)} \right)_{\bar{\phi}\bar{\phi}} \xrightarrow{l \rightarrow \infty} 2 \left(\frac{d-1}{d} \right)^2 \bar{\beta}_k (\Lambda_l(d, 0))^2 \implies \bar{\beta}_k > 0 \quad (7.7)$$

$$0 < \left(\Gamma_k^{(2)} \right)_{\bar{\sigma}\bar{\sigma}} \left(\Gamma_k^{(2)} \right)_{\bar{\phi}\bar{\phi}} - \left(\Gamma_k^{(2)} \right)_{\bar{\sigma}\bar{\phi}}^2 \xrightarrow{l \rightarrow \infty} \left(\frac{d-1}{d} \right)^2 \frac{Z_{Nk}\kappa^2 \bar{\beta}_k}{\alpha} (\Lambda_l(d, 0))^3 > 0 \implies \frac{Z_{Nk}\kappa^2 \bar{\beta}_k}{\alpha} > 0 \quad (7.8)$$

Bei positiven Werten des Eichparameters, also für $\alpha > 0$ (und auch im Limes $\alpha \searrow 0$),

führt dies dazu, daß die dimensionslosen Kopplungen den folgenden Einschränkungen unterliegen:

$$g_k > 0, \quad \beta_k > 0, \quad k^2/(32\pi g_k \beta_k) > R. \quad (7.9)$$

In der Umgebung des UV Fixpunkts in $d = 4$ Dimensionen gelten die Beziehungen $g_k \approx g_*$ und $\beta_k \approx \beta_*$ mit $g_*, \beta_* > 0$. Demnach sind in der Nähe des nicht-Gaußschen Fixpunkts die ersten beiden Bedingungen aus (7.9) offensichtlich erfüllt. Ferner nimmt die dritte Bedingung in diesem Fall die Form $R < k^2/(32\pi g_* \beta_*)$ an. Für festes R ist auch diese Bedingung erfüllt, solange k nur groß genug ist. Beschränkt man also den Feldraum auf Moden zu hinreichend großen Eigenwerten und wählt die Skala k groß genug, so ist der auf diese Weise eingeschränkte Operator $\Gamma_k^{(2)}$ positiv. Folglich sollte der daran angepaßte Cutoffoperator die gewünschten Unterdrückungseigenschaften besitzen.

Bei der obigen Erörterung wird R als ein konstanter Parameter behandelt. Wenn man bedenkt, daß bei der Auswertung der Flußgleichung (2.3) ein Koeffizientenvergleich bezüglich der Potenzen des Radius $r \propto R^{-1/2}$ vorgenommen wurde, dann ist es in der Tat klar, daß man in diesem Zusammenhang r und R als feste, von k unabhängige Größen ansehen sollte. Es ist hier dennoch sehr aufschlußreich, einen alternativen Standpunkt zu vertreten. Dazu betrachten wir den Operator $\Gamma_k^{(2)}[g^{\text{os}}(k), g^{\text{os}}(k)]$, wobei $g^{\text{os}}(k)$ die k -abhängige, sphärische “on-shell” -Metrik darstellt, die die Bewegungsgleichung $\delta\Gamma_k/\delta g_{\mu\nu} = 0$ für $g_{\mu\nu} = \bar{g}_{\mu\nu}$ löst. Der Unterschied zu der oben diskutierten Situation besteht darin, daß R in diesem Fall eine Funktion von k verkörpert, die aus $g^{\text{os}}(k)$ zu berechnen ist. (Hierzu sei außerdem angemerkt, daß der Operator $\Gamma_k^{(2)}[g^{\text{os}}(k), g^{\text{os}}(k)]$ bei einer gewöhnlichen Ein-Loop-Rechnung mittels Sattelpunktentwicklung in Form seiner Ein-Loop-Determinante auftauchen würde, wenn man von Γ_k als “klassischer” Wirkung ausgehen würde.)

Fahren wir mit der Bestimmung von $g^{\text{os}}(k)$ fort. Für das trunkierte Wirkungsfunktional Γ_k aus Gleichung (5.2) nimmt die Feldgleichung, nachdem darin die Metriken identifiziert worden sind ($\bar{g}_{\mu\nu} = g_{\mu\nu}$), die folgende Form an:

$$2Z_{Nk}\kappa^2 [G_{\mu\nu} + g_{\mu\nu} \bar{\lambda}_k] + \bar{\beta}_k [-(G_{\mu\nu} + R_{\mu\nu})R + 2D_\mu D_\nu R - 2g_{\mu\nu} D^2 R] = 0. \quad (7.10)$$

Dabei verkörpert $G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - g_{\mu\nu}R/2$ den Einstein-Tensor. Im Fall $d = 4$, und nur in diesem Fall, erfüllen die maximal symmetrischen Lösungen zu (7.10) die Einstein-Gleichung $G_{\mu\nu} = -g_{\mu\nu}\bar{\lambda}_k$. Das liegt daran, daß die Beiträge vom R^2 -Term in diesem Fall verschwinden. Setzt man nun die kontrahierte Gleichung $R = 4\bar{\lambda}_k$ in die dritte Ungleichung aus (7.9) ein, so erhält man

$$128\pi g_k \lambda_k \beta_k < 1. \quad (7.11)$$

Diese Bedingung ist interessanterweise genau dann erfüllt, wenn $\Gamma_k[g, g]$ *kein* manifest positives Funktional von $g_{\mu\nu}$ darstellt, was sich anhand von Gleichung (7.4) unmittelbar

erkennen läßt. Das bedeutet, daß die S^d -Lösungen von Gleichung (7.10) im Fall $d = 4$ zumindest dann nicht zum absoluten Minimum von $\Gamma_k[g, g]$ führen können, wenn $\Gamma_k[g, g]$ manifest positiv ist.

Im Bereich des UV Fixpunkts vereinfacht sich die Bedingung (7.11) zu $128\pi g_* \lambda_* \beta_* < 1$. Aus der Fixpunktanalyse des vorangegangenen Kapitels geht hervor, daß die linke Seite dieser Ungleichung für alle benutzten Cutoffs Werte annimmt, die in dem Intervall $0.17 \lesssim 128\pi g_* \lambda_* \beta_* \lesssim 0.22$ liegen. Somit ist die Bedingung (7.11) in der Nähe des Fixpunkts in der Tat erfüllt. Das heißt, daß die Hesse-Matrix $\Gamma_k^{(2)}$ auch dann für hinreichend große l - und k -Werte (unabhängig vom Cutoff) positiv definit wird, wenn man darin die S^4 -Lösung zu Gleichung (7.10) einsetzt. Es liegt somit “on-shell” im UV Bereich keine Instabilität vor.

Weiterhin hat die mit der obigen Ungleichung $128\pi g_* \lambda_* \beta_* < 1$ gleichbedeutende Verletzung der Bedingung (7.4) zur Folge, daß das Funktional $\Gamma_k[g, g]$ in der Nähe des Fixpunkts zwar nach unten beschränkt, aber nicht manifest positiv ist. Es ist jedoch möglich, $\Gamma_k[g, g]$ auf triviale Weise in ein manifest positives Funktional umzuwandeln. Dazu muß man lediglich eine geeignete Konstante addieren.

7.3 Positivität des Cutoffs

Es ist zu erwarten, daß die Bedingungen, unter denen $\Delta_k S$ positiv definit ist, mit den Positivitätsbedingungen für den Hesse-Matrixoperator $\Gamma_k^{(2)}$ aus dem vorigen Abschnitt identisch sind. Mit dieser Einschätzung wollen wir uns hier aber nicht begnügen, sondern wir möchten genauere Informationen über den Minimalwert l_{\min} und somit über den Impulsbereich gewinnen, in dem $\Delta_k S$ positiv ist. Daher setzen wir unsere Analyse mit einer expliziten Untersuchung des Cutoffoperators \mathcal{R}_k fort. Der Einfachheit halber beschränken wir uns dabei wieder auf sphärische Hintergründe und auf den Fall $d = 4$, der uns naturgemäß am meisten interessiert.

Als Ausgangspunkt für die anstehenden Betrachtungen dienen die Einträge des Cutoffoperators aus (2.5). Wir setzen nun $(\mathcal{R}_k)_{\bar{h}^T \bar{h}^T}^{\mu\nu\alpha\beta} \equiv 1/2 (g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta} + g^{\mu\beta} g^{\nu\alpha}) (\mathcal{R}_k)_{\bar{h}^T \bar{h}^T}$ und $(\mathcal{R}_k)_{\bar{\xi}\bar{\xi}}^{\mu\nu} \equiv g^{\mu\nu} (\mathcal{R}_k)_{\bar{\xi}\bar{\xi}}$ und ersetzen dann in sämtlichen Ausdrücken aus (2.5) die kovarianten Laplace-Operatoren D^2 durch ihre Eigenwerte $-\Lambda_l(4, s)$. Dadurch erhält man

$$\begin{aligned} (\mathcal{R}_k)_{\bar{h}^T \bar{h}^T} &= \frac{k^4 R^{(0)}(\Lambda_l(4, 2)/k^2)}{32\pi g_k} \left\{ 1 - 32\pi g_k \beta_k \frac{R}{k^2} \right\}, \\ (\mathcal{R}_k)_{\bar{\xi}\bar{\xi}} &= \frac{k^4 R^{(0)}(\Lambda_l(4, 1)/k^2)}{16\pi g_k \alpha}, \\ (\mathcal{R}_k)_{\bar{\sigma}\bar{\sigma}} &= \frac{k^4 R^{(0)}(\Lambda_l(4, 0)/k^2)}{32\pi g_k} \left\{ 36\pi g_k \beta_k (2\Lambda_l(4, 0)/k^2 + R^{(0)}(\Lambda_l(4, 0)/k^2)) + \frac{3}{4} \right\}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (\mathcal{R}_k)_{\bar{\phi}\bar{\sigma}} &= (\mathcal{R}_k)_{\bar{\sigma}\bar{\phi}_1}^\dagger = \frac{9}{8}\beta_k k^4 \left\{ \left[\Lambda_l(4,0)/k^2 + R^{(0)}(\Lambda_l(4,0)/k^2) \right]^{\frac{3}{2}} \right. \\
 &\quad \times \sqrt{\Lambda_l(4,0)/k^2 + R^{(0)}(\Lambda_l(4,0)/k^2) - \frac{R}{3k^2}} \\
 &\quad \left. - \left[\Lambda_l(4,0)/k^2 \right]^{\frac{3}{2}} \sqrt{\Lambda_l(4,0)/k^2 - \frac{R}{3k^2}} \right\}, \tag{7.12}
 \end{aligned}$$

$$(\mathcal{R}_k)_{\bar{\phi}\bar{\phi}} = \frac{k^4 R^{(0)}(\Lambda_l(4,0)/k^2)}{32\pi g_k} \left\{ 36\pi g_k \beta_k (2\Lambda_l(4,0)/k^2 + R^{(0)}(\Lambda_l(4,0)/k^2)) - \frac{1}{4} \right\}.$$

Während in (2.5) eine Beschreibung des Cutoffs gewählt wurde, die auf den dimensionsbehafteten Größen $Z_{N_k k^2}$, $\bar{\lambda}_k$ und $\bar{\beta}_k$ basiert, wurden hier sämtliche Einträge von \mathcal{R}_k durch die entsprechenden dimensionslosen Größen ausgedrückt.

Offensichtlich besitzt die durch (7.12) festgelegte Cutoff-Matrix \mathcal{R}_k Blockdiagonalform. In Analogie zu den Bedingungen an die Hesse-Matrix $\Gamma_k^{(2)}$ aus dem vorigen Abschnitt lauten die Positivitätsbedingungen für \mathcal{R}_k somit: $(\mathcal{R}_k)_{\bar{h}T\bar{h}T} > 0$, $(\mathcal{R}_k)_{\bar{\xi}\bar{\xi}} > 0$, $(\mathcal{R}_k)_{\bar{\phi}\bar{\phi}} > 0$ und $(\mathcal{R}_k)_{\bar{\phi}\bar{\phi}} (\mathcal{R}_k)_{\bar{\sigma}\bar{\sigma}} - (\mathcal{R}_k)_{\bar{\phi}\bar{\sigma}}^2 > 0$. Setzt man wieder genügend große l -Werte und damit genügend große Eigenwerte $p^2 = \Lambda_l(d, s)$ voraus, so reproduzieren diese Bedingungen, wie erwartet, die Einschränkungen an die Kopplungen, die aus $\Gamma_k^{(2)}$ hervorgehen. Unter der Voraussetzung $\alpha > 0$ erhält man den Satz von Ungleichungen $g_k > 0$, $\beta_k > 0$ und $k^2/(32\pi g_k \beta_k) > R$, der in der Tat exakt mit (7.9) übereinstimmt.

Wie sehen nun die Verhältnisse bei beliebigen, nicht unbedingt großen l -Werten aus? Dies gilt es nun zu überprüfen. Dazu gibt man zunächst einen beliebigen Satz von Parametern (R, k, g_k, β_k) vor, der die drei Ungleichungen aus (7.9) erfüllt. Aus (7.12) folgt dann einerseits, daß die Bedingungen $(\mathcal{R}_k)_{\bar{h}T\bar{h}T} > 0$ und $(\mathcal{R}_k)_{\bar{\xi}\bar{\xi}} > 0$ (und auch $(\mathcal{R}_k)_{\bar{\sigma}\bar{\sigma}} > 0$) für *jeden* erlaubten l -Wert erfüllt sind. Auf der anderen Seite gilt dies nicht für die beiden anderen Ungleichungen, die aus dem skalaren Sektor von (7.9) stammen. Denn offensichtlich kann $(\mathcal{R}_k)_{\bar{\phi}\bar{\phi}}$ aus (7.12) bei hinreichend kleinen l -Werten negative Werte annehmen, vorausgesetzt, g_k , β_k und R/k^2 sind klein genug. Da unter den obigen Voraussetzungen immer $(\mathcal{R}_k)_{\bar{\sigma}\bar{\sigma}} > 0$ gilt, hat ein negatives $(\mathcal{R}_k)_{\bar{\phi}\bar{\phi}}$ offenkundig zur Folge, daß auch $(\mathcal{R}_k)_{\bar{\phi}\bar{\phi}} (\mathcal{R}_k)_{\bar{\sigma}\bar{\sigma}} - (\mathcal{R}_k)_{\bar{\phi}\bar{\sigma}}^2$ negativ wird.

Die l -Werte, für die $(\mathcal{R}_k)_{\bar{\phi}\bar{\phi}}$ *positiv* ist, erfüllen notwendigerweise die Bedingung

$$2\Lambda_l(4,0)/k^2 + R^{(0)}\left(\Lambda_l(4,0)/k^2\right) > \frac{1}{144\pi g_k \beta_k}. \tag{7.13}$$

In Anhang L wird eine ähnliche Ungleichung aus dem obigen $\bar{\phi}$ - $\bar{\sigma}$ -Mischterm hergeleitet. Dabei stellt sich heraus, daß $(\mathcal{R}_k)_{\bar{\phi}\bar{\phi}} (\mathcal{R}_k)_{\bar{\sigma}\bar{\sigma}} - (\mathcal{R}_k)_{\bar{\phi}\bar{\sigma}}^2$ zumindest für all diejenigen l -Werte positiv ist, die die folgende Bedingung erfüllen:

$$2\Lambda_l(4,0)/k^2 + R^{(0)}\left(\Lambda_l(4,0)/k^2\right) > \frac{1}{96\pi g_k \beta_k}. \tag{7.14}$$

Beide Ungleichungen, sowohl (7.13) als auch (7.14), hängen von $g_k\beta_k$, von p^2/k^2 (mit $p^2 = \Lambda_l(4, 0) = l(l+3)R/12$) und von der Profilfunktion $R^{(0)}$ ab. Gibt man irgendeinen erlaubten Satz $(R, k, g_k, \beta_k; R^{(0)}; T^{lm})$ vor, wobei T^{lm} eine der möglichen skalaren Eigenmoden darstellt, dann läßt sich anhand dieser Ungleichungen erkennen, ob der Beitrag von dieser Mode korrekt unterdrückt wird oder nicht. Dabei bezieht sich die restriktivere Ungleichung (7.14) auf die skalaren Eigenmoden $\{T^{lm}\}$ mit $l \geq 2$, während (7.13) nur auf die konstante Mode $T^{l=0, m=1}$ und auf die PCKV $\{T^{l=1, m}\}$ angewendet werden darf.

Richten wir unser Hauptaugenmerk nun auf solche Renormierungsgruppentrajektorien, die im Limes $k \rightarrow \infty$ in den nicht-Gaußschen Fixpunkt laufen. Ferner nehmen wir an, daß R entweder fest oder von der Form $R = a_k k^2$ ist, wobei der k -abhängige Parameter a_k die Ungleichung $a_k < (32\pi g_k\beta_k)^{-1}$ erfüllen soll. Dann gelten für genügend große k -Werte die Beziehungen $g_k \approx g_* > 0$, $\beta_k \approx \beta_* > 0$ und $k^2/(32\pi g_*\beta_*) > R$. Daraus folgt unmittelbar, daß die Bedingungen für die Positivität von $\Gamma_k^{(2)}$ und \mathcal{R}_k bei hinreichend großen l und k -Werten erfüllt sind. Außerdem vereinfachen sich dann die rechten Seiten der Ungleichungen (7.13) und (7.14), die Aufschluß über den oben angesprochenen l_{\min} -Wert für \mathcal{R}_k geben sollen, zu $(144\pi g_*\beta_*)^{-1}$ bzw. zu $(96\pi g_*\beta_*)^{-1}$.

Damit sind wir nun in der Lage, den l -Bereich zu bestimmen, in dem der Cutoff manifest positiv definit ist. (Dieser l -Bereich bezieht sich dann natürlich nur auf den Fall, in dem die Theorie in der Nähe des UV Fixpunkts liegt.) Verwendet man die exponentiellen Profilfunktionen (2.8) mit $1 \leq s \leq 30$, so ergibt eine numerische Analyse, daß *jeder* Wert des Quotienten $x \equiv p^2/k^2 = \Lambda_l(4, 0)/k^2$ die Ungleichung (7.13) bzw. (7.14) erfüllt, solange $s \gtrsim 2$ bzw. $s \gtrsim 7$ gilt. Insgesamt sind somit unter den gegebenen Voraussetzungen alle Cutoffs, die eine exponentielle Profilfunktion mit $s \gtrsim 7$ enthalten, für alle Impulse, d.h. für alle Quantenzahlen l , manifest positiv.

Dieses Ergebnis könnte darauf hindeuten, daß exponentielle Cutoffs mit $s > 7$ zu besonders verlässlichen Resultaten führen. Eine solche Information ist natürlich für numerische Auswertungen der Flußgleichung von sehr großem Wert.

Umgekehrt existiert für jedes $s \lesssim 7$ ein bestimmter Wert $x_0(s)$, so daß sämtliche x -Werte aus dem Intervall $[0, x_0(s)]$, und nur diese, die Bedingung (7.14) verletzen. Ferner läßt sich für jedes $s \lesssim 2$ ein $x_1(s)$ finden, so daß für alle x -Werte aus dem Intervall $[0, x_1(s)]$, und nur für diese, eine Verletzung von (7.13) vorliegt. Abbildung 7.1 zeigt die Funktionen $x_0(s)$ und $x_1(s)$ in den Bereichen $1 \leq s \leq 6$ bzw. $1 \leq s \leq 2$. Aus diesen Plots geht hervor, daß für alle betrachteten s -Werte die Beziehungen $x_0(s) < 0.7$ und $x_1(s) < 0.26$ gelten. Auch dieses Resultat ist ziemlich wichtig, denn es bedeutet, daß der Cutoff im Bereich des UV Fixpunktes für alle Moden, deren Impulse von ∞ bis hinunter zu solchen Werten reichen, die sichtlich unterhalb von k liegen, die gewünschten Unterdrückungseigenschaften besitzt.

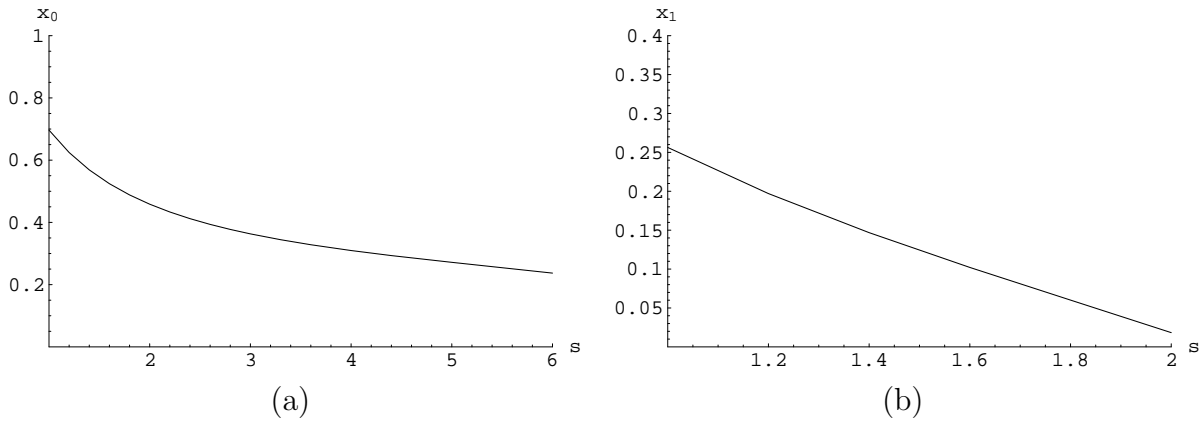


Abbildung 7.1: (a) x_0 und (b) x_1 als Funktionen von s . Die beiden Plots basieren auf der Verwendung der Familie von exponentiellen Profilkfunktionen (2.8).

Um die Analyse zu vervollständigen, werden die Ungleichungen (7.13) und (7.14) nun noch am sphärisch symmetrischen stationären Punkt $g^{\text{os}}(k)$ von $\Gamma_k[g, g]$ ausgewertet, welcher bereits im vorigen Abschnitt diskutiert wurde. In der Nähe des Fixpunkts besitzt der Krümmungsskalar den “on-shell”-Wert $R \approx 4\lambda_* k^2$. Infolgedessen nehmen die Ungleichungen (7.13) und (7.14) im vorliegenden Fall die Form

$$f_1[R^{(0)}; l] \equiv \frac{2l(l+3)\lambda_*}{3} + R^{(0)}(l(l+3)\lambda_*/3) - \frac{1}{144\pi g_*\beta_*} > 0, \quad l = 0, 1 \quad (7.15)$$

bzw.

$$f_0[R^{(0)}; l] \equiv \frac{2l(l+3)\lambda_*}{3} + R^{(0)}(l(l+3)\lambda_*/3) - \frac{1}{96\pi g_*\beta_*} > 0, \quad l \geq 2 \quad (7.16)$$

an. Die erste dieser beiden Ungleichungen bezieht sich auf die skalaren Eigenmoden T^{lm} mit $l = 0, 1$ und die zweite auf die übrigen, d.h. auf die T^{lm} mit $l \geq 2$. Sowohl (7.15) als auch (7.16) hängen von l und $R^{(0)}$ ab.

Im folgenden beschränken wir uns wieder auf die Familie von exponentiellen Profilkfunktionen mit $1 \leq s \leq 30$. Damit werden die zu untersuchenden linken Seiten der Ungleichungen (7.15) und (7.16) zu Funktionen von s und l : $f_1[R^{(0)}; l] \equiv f_1(s, l)$, $f_0[R^{(0)}; l] \equiv f_0(s, l)$. Unabhängig vom Profilparameter s ergibt sich hier die Beziehung $f_0(s; l) \geq f_0(s; l = 2)$. Weiterhin geht aus einer numerischen Studie hervor, daß $f_0(s; l = 2)$ immer positiv ist. Folglich erfüllt *jeder* Eigenwert $p^2 = \Lambda_l(4, 0)$ mit $l \geq 2$ die Bedingung (7.16), und zwar für alle berücksichtigten s -Werte. Außerdem zeigt eine numerische Analyse, daß für alle verwendeten Cutoffs auch $f_1(s, l = 1) > 0$ gilt. Demgegenüber ist $f_1(s, l = 0)$ nicht immer positiv. Im einzelnen ergibt sich hier, daß im Bereich $s \gtrsim 2$ Positivität vorliegt, d.h. $f_1(s, l = 0) > 0$ gilt, während diese Funktion im komplementären Bereich $s \lesssim 2$ negative Werte annimmt: $f_1(s, l = 0) < 0$.

Die obigen Resultate werden anhand von Abbildung 7.2 veranschaulicht. Abbildung 7.2(a) zeigt die Funktion $f_0(s; l = 2)$, die im betrachteten Intervall $1 \leq s \leq 30$ ausschließlich positive Werte annimmt. Das gleiche gilt für die in Abbildung 7.2(b) dargestellte Funktion $f_0(s; l = 1)$, wohingegen die darin enthaltene $f_0(s; l = 1)$ -Kurve erst oberhalb von $s \approx 2$ im positiven Bereich liegt.

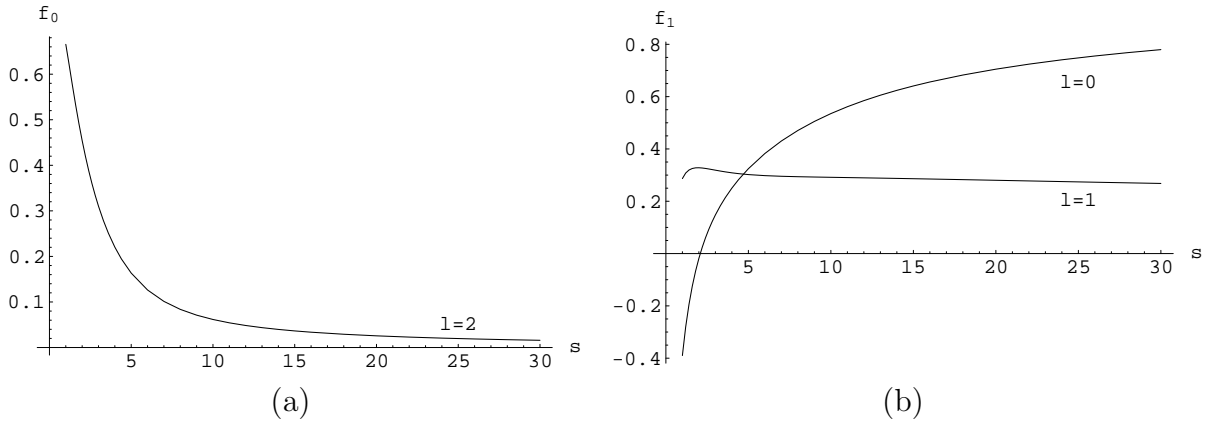


Abbildung 7.2: (a) $f_0(s, l = 2)$ sowie (b) $f_1(s, l = 0)$ und $f_1(s, l = 1)$ als Funktionen von s . Die beiden Plots basieren auf der Verwendung der Familie von exponentiellen Profilfunktionen (2.8).

Kommen wir zur Interpretation der obigen Resultate. Angenommen, k liegt im UV Skalenbereich, und man betrachtet den entsprechenden Cutoffoperator am sphärisch symmetrischen stationären Punkt, also $\mathcal{R}_k[g^{os}(k)]$. Dann läßt sich konstatieren, daß dieser Operator auf dem Raum, der von *sämtlichen* sphärischen Harmonischen aufgespannt wird, strikt positiv ist und somit in einem Pfadintegral, das diesen “on-shell”-Cutoff enthält, die Beiträge aller Moden korrekt gewichtet, sofern man eine exponentielle Profilfunktion mit $s \gtrsim 2$ wählt. Verwendet man hingegen einen s -Wert aus dem Bereich $s \lesssim 2$, dann werden nur die Beiträge von der konstanten Mode zum Eigenwert $p^2 = 0$ nicht korrekt unterdrückt. Für alle anderen Moden ist der Cutoff auch in diesem Fall positiv.

Fassen wir die wesentlichen Ergebnisse dieses Kapitels kurz zusammen. Es wurde argumentiert, daß die Addition des $\bar{\beta} \int d^d x \sqrt{g} R^2$ -Terms zur Einstein-Hilbert-Wirkung bei Wahl des richtigen $\bar{\beta}$ -Vorzeichens zu einer nach unten beschränkten Wirkung führt. Gleiches gilt für das trunkierte effektive Wirkungsfunktional Γ_k aus (5.2). Weiterhin stellte sich heraus, daß sowohl der aus (5.2) folgende kinetische Operator $\Gamma_k^{(2)}$ als auch der daran angepaßte Cutoff \mathcal{R}_k für genügend große k - und p^2 -Werte positiv definit sind. Bei geschickter Wahl der Profilfunktion $R^{(0)}$ läßt sich sogar erreichen, daß der Cutoff zumindest im asymptotischen Skalenbereich, der für die Untersuchung des Fixpunkts von Relevanz ist,

für *alle möglichen* Eigenwerte p^2 positiv ist. Folglich gehen in diesem Fall aus $\exp(-\Delta_k S)$ auch keine Terme hervor, die mit sinkendem p^2 anwachsen, so daß im Pfadintegral alle Moden mit der korrekten Gewichtung ausintegriert werden. Insgesamt tritt hier somit im UV Bereich hinsichtlich des konformen Faktors kein Problem auf.

Kapitel 8

Ein skalares Modell mit nichttrivialer Vakuumstruktur

8.1 Einführung in das Konzept der dynamischen Stabilisierung

Im vorangegangenen Kapitel wurde gezeigt, daß die R^2 -Trunkierung (5.2) im UV Skalenbereich nicht von Stabilitätsproblemen betroffen ist. Wie sich herausstellte, besitzen dort alle $-D^2$ -Eigenmoden zu genügend großen Eigenwerten p^2 einen positiv definiten kinetischen Term, sogar diejenigen des skalaren Sektors bzw. des konformen Faktors von $\bar{h}_{\mu\nu}$. Es sind nur solche Moden instabil, die zu so kleinen Eigenwerten gehören, daß sie im Bereich großer Skalen k einen vernachlässigbaren Beitrag zum Fluß der effektiven Mittelwertwirkung Γ_k liefern. Im IR Skalenbereich sind die Beiträge der instabilen Moden allerdings keineswegs vernachlässigbar, so daß die R^2 -Trunkierung hier nicht zur Lösung des Stabilitätsproblems hinsichtlich des konformen Faktors, das in erster Linie der reinen Einstein-Hilbert-Theorie anhaftet, führen kann. Es stellt sich somit die Frage, auf welche Weise dieses Problem im Bereich kleiner Skalen k behoben werden kann. Eine durchaus naheliegende Möglichkeit besteht darin, daß die Theorie sich eventuell auf dynamische Weise stabilisieren könnte. Das hieße, daß im Laufe des Renormierungsgruppenflusses in Richtung kleinerer Skalen k gerade solche Invarianten verstärkt generiert würden, die im IR Bereich einen stabilisierenden Einfluß auf die Theorie ausüben. Im folgenden werden wir uns intensiv mit diesem Lösungsansatz beschäftigen.

Es gilt als hinlänglich bekanntes Phänomen, daß es bei bestimmten Euklidischen Feldtheorien, die sich dadurch auszeichnen, daß sie auf klassischem Niveau instabil sind, durch Ausbildung einer nichttrivialen Vakuumstruktur zu einer dynamischen Stabilisierung kommen kann. Bei diesen Theorien ist oftmals festzustellen, daß die jeweilige klassische Wir-

kung durch räumlich inhomogene, d.h. nichtkonstante Feldkonfigurationen minimiert wird und nicht durch homogene. Das hat zur Folge, daß diese inhomogenen Konfigurationen - zumindest auf semiklassischem Niveau - in der Regel das Pfadintegral, das das erzeugende Funktional für die effektive Wirkung Γ definiert, dominieren und somit auch den Quanten-Vakuumszustand $|0\rangle$ festlegen. In einem solchen Fall ist i.a. folgendes zu erwarten: Das korrekte Verhalten der quantisierten Theorie wird durch eine effektive Wirkung beschrieben, die sich durch eine Entwicklung nach Quantenfluktuationen um einen Satz von Vakuum-Feldkonfigurationen darstellen läßt, deren Feldvariablen ortsabhängig und nichttranslationsinvariant sind. Häufig bezeichnet man diese Feldkonfigurationen, die das Quanten-Vakuum charakterisieren, auch als “Kondensat”.

Eine derartige “Kondensation” von räumlich inhomogenen Moden führt zu einigen sehr interessanten Konsequenzen. So ergibt sich beispielsweise, daß die Vakuumerwartungswerte von skalaren Operatoren \mathcal{O} , die sich in solcher Weise aus den Ableitungen der fundamentalen Feldoperatoren zusammensetzen, daß sich die nichtverschwindende kinetische Energie der Vakuum-Feldkonfigurationen in ihnen widerspiegelt, nicht Null sind: $\langle 0|\mathcal{O}|0\rangle \neq 0$. (In einem entsprechenden Modell für ein skalares Feld ϕ ist z.B. $\mathcal{O} = (\partial_\mu\phi)(\partial^\mu\phi)$ ein Operator dieser Art.) In Anlehnung daran bezeichnet man derartige Erwartungswerte als “kinetische Kondensate”. Diese sind von den wohlbekannteren translationsinvarianten “Potentialkondensaten” zu unterscheiden, die die gewöhnliche, durch einen *konstanten* Vakuum-Erwartungswert eines Skalarfeldes verursachte spontane Symmetriebrechung charakterisieren.

An dieser Stelle ist es angebracht, kurz auf die verschiedenen physikalischen Situationen einzugehen, die man in diesem Zusammenhang antreffen kann. Gehen wir also davon aus, daß das entartete Minimum der effektiven Wirkung Γ einem Satz von *inhomogenen* Feldkonfigurationen entspricht, was eine Brechung von äußeren (d.h. räumlichen) Symmetrien bedeutet. Es existiert nun zunächst einmal die Möglichkeit, daß diese Vakuum-Feldkonfigurationen zusätzlich irgendeine *globale innere* Symmetrie¹ \mathcal{G} von Γ nicht aufweisen, wie z.B. die Invarianz unter Rotationen oder Translationen. Dann ist auch diese Symmetrie spontan gebrochen, und man darf nur die übriggebliebenen ungebrochenen Symmetrien zur Klassifizierung des Spektrums von Teilchenanregungen heranziehen. In diesem Spektrum treten typischerweise sogenannte “Goldstone-Anregungen” auf. Das sind masselose Teilchenanregungen, die gewissermaßen aus den gebrochenen Symmetrien hervorgehen. Ihre Anzahl stimmt nämlich genau mit der Anzahl derjenigen Generatoren von \mathcal{G} überein, die nicht zu der (eventuell vorhandenen) Untergruppe von Symmetrieeoperationen “gehören”, unter denen das Vakuum noch invariant ist.² Ein weiterer wichtiger

¹Wir beschränken uns bei dieser Diskussion auf kontinuierliche Symmetrien.

²Wie wir im weiteren Verlauf sehen werden, hat die Brechung von äußeren Symmetrien Auswirkungen

Punkt bei dieser Art der spontanen Symmetriebrechung liegt in der Tatsache, daß hier typischerweise ein sogenannter Ordnungsparameter vorhanden ist. Das ist ein von Null verschiedener Erwartungswert der Form $\langle 0|\mathcal{U}|0\rangle$, der zusätzlich zu den nichtverschwindenden Erwartungswerten der oben erwähnten kinetischen Operatoren auftritt, im Gegensatz zu diesen aber die Symmetrie bricht. Dabei setzt sich der Operator \mathcal{U} i.a. aus den fundamentalen Feldoperatoren, aber nicht aus deren Ableitungen zusammen.

Alternativ zu einer *globalen* inneren Symmetrie \mathcal{G} könnte auch eine *lokale* innere Symmetrie \mathcal{L} vorliegen. Ist dies der Fall, so existiert bekanntermaßen kein nichtinvarianter Ordnungsparameter, und es kommt somit zu keiner spontanen Symmetriebrechung im eigentlichen Sinne. Auch die Goldstone-Anregungen sind in diesem Fall nicht vorhanden. Dennoch lehrt uns der Higgs-Mechanismus des Standardmodells der Teilchenphysik, hervorgerufen durch einen konstanten Erwartungswert eines Skalarfeldes, daß man die physikalischen Abläufe nach passender Eichfixierung auch in diesem Fall in der Sprache der spontanen Symmetriebrechung beschreiben kann. In der Tat erweist es sich hier sogar als sehr hilfreich, von spontaner Symmetriebrechung zu sprechen. Bei dieser Variante der spontanen Symmetriebrechung werden die Goldstone-Anregungen gewissermaßen durch Eichbosonen absorbiert, welche dadurch als massive Teilchen in Erscheinung treten. Liegt wie im Fall des Standardmodells eine ungebrochene Restsymmetrie von \mathcal{L} vor, so bleibt eine bestimmte Menge von Eichbosonen masselos. Ihre Anzahl gleicht der Anzahl der Generatoren der Restsymmetriegruppe. (Beim Standardmodell der Teilchenphysik entspricht letztere - wenn man den Sektor der starken Wechselwirkung mit seiner ungebrochenen $SU(3)$ -Farbsymmetrie außer Acht läßt - gerade der elektromagnetischen $U(1)$ -Symmetrie. Es tritt hier dementsprechend nur ein masseloses Eichboson auf.) Weiterhin manifestiert sich diese Symmetriebrechung durch nichtperturbative Beiträge zu den angesprochenen kinetischen Kondensaten.³

Kommen wir nun zu einem typischen Beispiel für kinetische Kondensate, und zwar zum Gluon-Kondensat in der Quantenchromodynamik (QCD). Während die klassische QCD-Yang-Mills-Wirkung $1/4 \int d^d x F_{\mu\nu}^a F_{\mu\nu}^a$ durch $F_{\mu\nu}^a = 0$ minimiert wird, nimmt die effektive Wirkung Γ bereits auf Ein-Loop-Niveau ihr Minimum bei einer Feldkonfiguration mit $F_{\mu\nu}^a \neq 0$ an. In diesem Zusammenhang versucht man, den korrekten Grundzustand durch das sogenannte Savvidy-Vakuum [56] zu beschreiben, das durch ein kovariant konstantes Farbmagnetfeld charakterisiert ist. Die effektive Wirkung ist für diese Feldkonfi-

auf das Teilchenspektrum, die sich von den hier erörterten unterscheiden.

³Erwartungswerte von invarianten kinetische Operatoren (wie z.B. $\langle 0|F_{\mu\nu}^a F_{\mu\nu}^a|0\rangle$ in der QCD) enthalten auch perturbative Beiträge, die nicht aus der Kondensation von Moden hervorgehen. Es würde allerdings den Rahmen dieser Arbeit sprengen, eine befriedigende Antwort auf die Frage nach der Unterscheidung dieser beiden voneinander unabhängigen Beiträge zu finden. Der Einfachheit halber werden diese Erwartungswerte in der vorliegenden Arbeit meistens mit den kinetischen Kondensaten identifiziert.

guration in der Tat geringer als für $F_{\mu\nu}^a = 0$. Es ist jedoch sehr wohl bekannt, daß das Savvidy-Vakuum im IR Bereich instabil ist. Daher wird mittlerweile vermutet, daß die Konfigurationen, die die dominierenden Beiträge zum Pfadintegral für Γ liefern, räumlich inhomogen sind. (Denn es ist durchaus nicht unwahrscheinlich, daß dieser Ansatz die Position der Confinement-Skala Λ_{QCD} (d.h. die Skala, bei der die laufende Eichkopplung $g^2(k)$ in herkömmlichen (störungstheoretischen) Rechnungen zu divergieren beginnt) in passender Weise reproduzieren sowie zu dem korrekten Verhalten der Theorie im IR Bereich führen könnte.) Diese nichttrivialen Eigenschaften des QCD-Vakuums würden sich dann in dem Erwartungswert $\langle 0 | F_{\mu\nu}^a F_{\mu\nu}^a | 0 \rangle$ und ähnlichen Kondensaten von noch komplizierteren eich- und Lorentz-invarianten Operatoren widerspiegeln.

Ein weiteres Modell, bei welchem gemutmaßt wird, daß ihm eine Variante des kinetischen Kondensats innewohnt, ist die Liouville-Feldtheorie [57, 46, 45]. Um die Möglichkeit seiner Existenz erkennen zu können, betrachtet man am besten den Erwartungswert der auf Operatorniveau formulierten Bewegungsgleichung dieser Theorie. Dieser besitzt die nachstehende Form:

$$\langle 0 | \partial_\mu \partial_\mu \phi | 0 \rangle + \frac{m^2}{\beta} \langle 0 | e^{\beta\phi} | 0 \rangle = 0 . \quad (8.1)$$

Unter der Voraussetzung, daß es möglich ist, aus $\exp(\beta\phi)$ einen wohldefinierten Operator zu gewinnen, der zudem noch positiv definit ist, läßt sich aus Gleichung (8.1) folgern, daß $\langle 0 | \partial_\mu \partial_\mu \phi | 0 \rangle$ nicht Null ist. Daraus ließe sich dann schließen, daß das Vakuum $|0\rangle$ nicht translationsinvariant ist.

Motiviert durch die obigen Beispiele, liegt es nun nahe zu vermuten, daß auch das in Abschnitt 7.1 anhand von Gleichung (7.2) erläuterte Stabilitätsproblem, das dem konformen Faktor χ der Einstein-Hilbert-Wirkung anhaftet, sich eventuell auf dynamische Weise selbst behebt. Nichtkonstante χ -Moden könnten dabei in einer Form kondensieren, die zur Folge hat, daß das resultierende Quanten-Vakuum stabil ist und das absolute Minimum eines bis zum jetzigen Zeitpunkt noch unbekanntes *effektiven* Wirkungsfunktional beschreibt. Natürlich dürfte der Erwartungswert der Metrik in diesem Zustand nur unwesentlich von der Metrik des flachen Raums (welcher *nicht* dem Minimum der Einstein-Hilbert-Wirkung S_{EH} entspricht) abweichen, damit Konsistenz mit den Beobachtungen gewährleistet ist. Ferner sollten dann kinetische Operatoren wie $(\bar{D}_\mu \chi)^2$ nichtverschwindende Erwartungswerte annehmen. Würde man diese experimentell verifizieren, so hätte man einen sehr ernstzunehmenden Hinweis darauf gefunden, daß das physikalisch realisierte Vakuum tatsächlich aus einer durch Kondensation von nichtkonstanten χ -Moden angetriebenen dynamischen Stabilisierung der klassisch instabilen Theorie hervorgehen könnte.

Allen oben aufgeführten Theorien ist gemein, daß die Bestimmung des *echten* Vaku-

umzustands jeweils ein seriöses Problem darstellt, das noch nicht gelöst worden ist. Um dennoch einen direkten Einblick in die Möglichkeiten zu gewinnen, die der zur Diskussion stehende Mechanismus eröffnet, werden wir den Schwierigkeitsgrad reduzieren und im folgenden die Bildung eines kinetischen Kondensats anhand eines skalaren Spielzeugmodells illustrieren. Wie sich zeigen wird, läßt sich dieses Modell zum einen aufgrund seiner relativ einfachen Struktur noch analytisch behandeln, und zum anderen stabilisiert es sich dynamisch, also genau auf die Weise, wie man es von der QCD und der Gravitation erhofft.

Kommen wir nun zur Formulierung des angesprochenen Modells. Die folgenden Betrachtungen beziehen sich auf eine Euklidische Feldtheorie eines komplexen Skalarfeldes χ , das auf dem d -dimensionalen (Euklidisch) flachen Raum definiert ist. Sie ist durch die nachstehende nackte Wirkung festgelegt:

$$S[\chi] = \int d^d x \left\{ \chi^* \Omega(-\square) \chi + \frac{\lambda}{2} |\chi|^4 \right\}. \quad (8.2)$$

Das Feld χ ist masselos und besitzt einen gewöhnlichen $\lambda|\chi|^4$ -Selbstwechselwirkungsterm, ist aber mit einem kinetischen Term $\Omega(-\square)$ ausgestattet, der sich aus höheren Ableitungen zusammensetzt und somit nicht dem Standard entspricht. Er ist durch

$$\Omega(-\square) = \square + \frac{\square^2}{2M^2}, \quad \square = \partial_\mu \partial_\mu \quad (8.3)$$

definiert, so daß er in Impuls-Darstellung die Form

$$\Omega(p^2) = -p^2 + \frac{(p^2)^2}{2M^2} \quad (8.4)$$

annimmt.⁴ Dabei stellt M eine Konstante mit der Dimension einer Masse dar. Da eine Euklidische Signatur gewählt wurde, gilt $p^2 \equiv p_\mu p_\mu \geq 0$, was zur Folge hat, daß der kinetische Term $\Omega(p^2)$ für $p^2 > 2M^2$ positiv und für $0 < p^2 < 2M^2$ negativ ist. Er besitzt Nullstellen bei $p^2 = 0$ und $p^2 = 2M^2$ sowie ein Minimum bei $p^2 = M^2$, bei dem er den Wert $-M^2/2$ annimmt, siehe auch Abbildung 8.1 (weiter unten).

Betrachten wir nun die Symmetrien der Theorie. Zunächst einmal weist die Wirkung (8.2) eine globale $U(1)$ -Symmetrie auf, und zwar ist sie invariant unter Phasenrotationen $\chi \rightarrow \chi \exp(i\varphi)$, wobei φ eine Konstante darstellt. Außerdem zeichnet sie sich durch Invarianz unter starren Raumzeit-Translationen und -Rotationen aus. Die Gesamtheit dieser Transformationen bildet die Euklidische Poincaré-Gruppe $ISO(d)$.

⁴An dieser Stelle sind einige Anmerkungen zur Notation angebracht: Da die zugrundeliegende Raumzeit Euklidisch flach ist, gibt es keinen triftigen Grund mehr dafür, zwischen kovarianten und kontravarianten Indizes zu unterscheiden. Daher werden im folgenden der Einfachheit halber nur noch kovariante Indizes verwendet. Weiterhin ist hier hervorzuheben, daß \square den kovarianten Laplace-Operator des Euklidisch flachen Raumes verkörpert: $\square \equiv (D_\mu D^\mu)|_{g_{\mu\nu}=\delta_{\mu\nu}}$.

Wie bereits angemerkt wurde, besteht die Hauptmotivation für die Studie dieses speziellen skalaren Spielzeugmodells darin, Informationen über physikalische Abläufe zu erlangen, die auch die Struktur der effektiven Gravitationstheorie und des zugehörigen Quanten-Vakuumszustands mitbestimmen könnten. Diese Hoffnung nährt sich dadurch, daß $\Omega(p^2)$ aus Gleichung (8.4) sehr große Ähnlichkeit mit dem kinetischen Term besitzt, den der konforme Sektor einer Gravitationstheorie des Typs $S[g_{\mu\nu}] = \int d^d x \sqrt{g} \{-2\kappa^2 R + \bar{\beta} R^2\}$ aufweist. Aus den Kapiteln 5 bzw. 7 geht hervor, daß der besagte kinetische Term bei sehr großen “Impulsquadraten” p^2 im wesentlichen durch einen $(p^2)^2$ -Term dominiert wird. Dieser entstammt der R^2 -Invariante und sorgt somit bei passender Wahl des Vorzeichens von $\bar{\beta}$ dafür, daß der kinetische Term in diesem Impulsbereich stabil ist. Bei sehr kleinen Impulsen hingegen ist das Verhalten des kinetischen Terms durch einen destabilisierenden $-p^2$ -Term bestimmt, der aus dem R -Term hervorgeht. Ein Blick auf den Ansatz (8.4) reicht aus, um zu erkennen, daß das skalare Modell die soeben beschriebenen Stabilitätseigenschaften des konformen Sektors perfekt simuliert.

Der mit dem “falschen” Vorzeichen ausgestattete p^2 -Term in (8.4) bewirkt, daß das naive Vakuum mit $\chi = 0$ instabil ist und das System für einen Übergang in einen räumlich inhomogenen Grundzustand anfällig wird. Denn es ist bestrebt, seine Euklidische Wirkung zu minimieren, indem es ihren kinetischen Anteil $\int d^d p \Omega(p^2) |\tilde{\chi}(p)|^2 / (2\pi)^d$ (der nur wegen des “falschen” p^2 -Vorzeichens kleiner als Null werden kann) so weit wie möglich in den negativen Bereich absenkt und gleichzeitig den Potentialterm möglichst klein hält. Da dies durch nichtkonstante Feldkonfigurationen erreicht wird, deren Impulse typischerweise von der Größenordnung der Skala M sind, ist zu erwarten, daß das Vakuum durch ebendiese Moden dominiert wird. Wie sich im weiteren Verlauf zeigen wird, ist dies tatsächlich der Fall.

Ferner wird sich herausstellen, daß die Rotationssymmetrie dieses nichttrivialen Quanten-Vakuums spontan gebrochen ist, wohingegen eine modifizierte Translationssymmetrie erhalten bleibt. Überträgt man dies auf ein klassisches statistisches System in $d = 3$ Dimensionen (oder auf den (bei verschwindender Temperatur vorliegenden) Grundzustand eines quantisierten statistischen Systems in $d = 4$ Dimensionen), so wird dadurch die spontane Ausbildung von zweidimensionalen Schichten beschrieben, die die Rotationssymmetrie brechen. Geht man von einer Schicht zu der nächsten über, so wird dabei der Phasenfaktor des komplexen Feldes durch eine “effektive” Translationssymmetrie um den Betrag 2π rotiert. In $d = 2$ Dimensionen manifestiert sich die Symmetriebrechung in analoger Weise durch das spontane Auftreten von linienartigen Strukturen. In diesem Zusammenhang ist zu betonen, daß die mikroskopische (fundamentale) Wirkung (8.2) die Rotations- und Translationssymmetrie tatsächlich besitzt, im Gegensatz zu entsprechenden Gittermodellen. Das hat zur Folge, daß durch unser Spielzeugmodell in der Tat ein

Übergang von einer trivialen zu einer nichttrivialen geometrischen Struktur beschrieben werden kann. Eine winzige Störung der Symmetrien kann hier schon ausreichen, um diesen Übergang auszulösen.

Nach der obigen Einführung des skalaren Spielzeugmodells und dem flüchtigen Ausblick auf sein dynamisches Verhalten ist es an der Zeit, einige Worte darüber zu verlieren, wie bei der Analyse des Modells im weiteren Verlauf vorgegangen wird. Während der nächste Abschnitt dazu dient, gewisse wichtige Eigenschaften der klassischen Theorie (8.2) zu studieren, wollen wir den Rest dieses Abschnitts für eine kurze Erläuterung der Methoden nutzen, die in den anschließenden Kapiteln zur Untersuchung der quantisierten Theorie herangezogen werden. Dabei werden wir aus Gründen der Anschaulichkeit einige der erst in den nächsten Kapiteln erzielten Ergebnisse schon vorwegnehmen.

Da es sich bei dem zur Diskussion stehenden Phänomen um eine *dynamische* Stabilisierung handelt, bietet es sich an, zu seiner Untersuchung auf den Formalismus der exakten Renormierungsgruppe zurückzugreifen. Dabei werden wir uns im folgenden wieder des Zugangs der effektiven Mittelwertwirkung [48, 40] bedienen. Dementsprechend wird hier der Renormierungsgruppenfluß eines Wirkungsfunktionals Γ_k betrachtet, das die aus den vorangegangenen Kapiteln bereits bekannten allgemeinen Eigenschaften besitzt - insbesondere $\lim_{k \rightarrow \infty} \Gamma_k = S$ und $\lim_{k \rightarrow 0} \Gamma_k = \Gamma$ - und im Spezialfall des vorliegenden Modells von einem Skalarfeld ϕ abhängt, das den von der Impulsskala k abhängigen Erwartungswert des Quantenfeldes χ verkörpert. $\Gamma_k[\phi]$ besitzt dieselben $U(1)$ - und $ISO(d)$ -Symmetrien wie die nackte Wirkung $S[\chi]$, was unter anderem zur Folge hat, daß sein kinetischer Anteil dieselbe Struktur aufweist wie derjenige von S , wobei lediglich der nackte inverse Propagator $\Omega(p^2)$ durch sein Skalen-abhängiges, effektives Gegenstück ersetzt wird. Die "wahre" Vakuumkonfiguration $\langle \chi \rangle$ erhält man aus der gewöhnlichen effektiven Wirkung $\Gamma[\phi] \equiv \Gamma_{k=0}[\phi]$, indem man die "renormierte" Feldgleichung $\delta\Gamma/\delta\phi = 0$ löst. Eine Entwicklung von $\Gamma[\phi]$ um dieses Minimum ermöglicht dann die Identifikation des physikalischen Teilchenspektrums.

Das effektive Wirkungsfunktional $\Gamma_k[\phi]$ ist durch ein Funktionalintegral definiert, dessen allgemeine Form mit derjenigen des entsprechenden Ausdrucks für die Gravitation, Gleichung (1.45), übereinstimmt. Sein Integrand enthält eine modifizierte klassische Wirkung S_k^J , die sich aus S , einem IR Cutoffterm und einem Term für die Quellen J zusammensetzt. Aus diesem Funktionalintegral läßt sich durch Ableiten nach der Skala k eine Renormierungsgruppengleichung des Typs (1.1) herleiten. Diese wird im Laufe der anschließenden Betrachtungen jedoch keine Rolle spielen. Vielmehr wird die Renormierungsgruppentrajektorie $k \mapsto \Gamma_k$ für das skalare Modell aus der führenden (klassischen) Ordnung der semiklassischen Entwicklung des definierenden Pfadintegrals bestimmt werden. Dabei wird sich herausstellen, daß die wesentlichen Renormierungseffekte bereits

dadurch erfaßt werden.

Dem aufmerksamen Leser sollte an dieser Stelle der scheinbare⁵ Widerspruch zu dem herkömmlichen, aus der Störungstheorie bekannten Resultat, daß die führende Ordnung der semiklassischen Entwicklung von Γ_k mit der klassischen Wirkung S zusammenfällt und dementsprechend in dieser (klassischen) Näherung eigentlich keine Renormierungseffekte zu erwarten sind, nicht entgangen sein. Hierzu ist jedoch anzumerken, daß das Resultat $\Gamma_k = S + \text{Loopeffekte}$ auf dem trivialen Vakuum mit $\chi = 0$ aufbaut. Es gilt aber in der Regel nicht mehr, wenn die Theorie auf klassischem Niveau instabil ist und das klassische Vakuum somit durch nichtverschwindende Feldkonfigurationen $\chi \neq 0$ beschrieben wird. In solchen Fällen kommt es sogar auf klassischem Niveau zu Renormierungseffekten. Im Gegensatz zu der herkömmlichen, durch die Quantenfluktuationen induzierten (Loop-)Renormierung bezeichnet man derartige nichttriviale klassische Effekte [58] als “instabilitätsinduzierte” Renormierung [59].⁶ Oftmals reicht es aus, die Auswirkungen dieser klassischen Renormierung zu kennen, um die vollständige Quantentheorie eines gegebenen Modells zumindest qualitativ korrekt verstehen zu können. Sie liefert bereits die wesentlichen Informationen, die den Übergang zu dem “wahren” Quanten-Vakuumzustand (d.h. dem Minimum von $\Gamma_{k=0}$) erklären.

Vom mathematischen Standpunkt aus betrachtet, liegt der Grund für das Auftreten der klassischen Renormierung darin, daß die Entwicklung des Funktionalintegrals immer um das “wahre” (absolute) Minimum von S_k^J zu vollziehen ist, und genau dieses entspricht in solchen Fällen mit $\Gamma_k \neq S$ nicht dem trivialen Extremum bei $\chi(J) = 0 + \mathcal{O}(J)$. Letzteres stellt nur in klassisch stabilen Theorien das absolute Minimum dar und führt dort auch zu dem üblichen Resultat $\Gamma_k = S + \text{Loopeffekte}$. Somit hängt das Auffinden des tatsächlichen Verhaltens der effektiven Theorie empfindlich davon ab, ob man das Minimum von S_k^J korrekt identifizieren kann.

Bei der Untersuchung des quantisierten Spielzeugmodells wird in den anschließenden Kapiteln folgendermaßen vorgegangen: Nach der Diskussion einiger Details zur instabilitätsinduzierten Renormierung wird zunächst der effektive inverse Propagator $\Omega_{\text{eff}}(p^2)$, d.h. der bilineare Term von $\Gamma[\phi]$, aus der führenden Ordnung der semiklassischen Entwicklung des definierenden Pfadintegrals bestimmt. Das Resultat ist zusammen mit seinem klassischen Gegenstück $\Omega(p^2)$ in Abbildung 8.1 dargestellt.⁷ Dem Plot läßt sich entnehmen, daß der kinetische Term infolge der klassischen Renormierungseffekte sogar für ver-

⁵Man beachte hier den kleinen, aber feinen Unterschied zwischen “scheinbar” und “anscheinend”.

⁶Aus dem Blickwinkel der exakten Renormierungsgruppengleichung betrachtet, verschwindet dieser Unterschied, siehe [60, 7].

⁷Die Abbildung entstammt dem $d = 3$ -dimensionalen Fall, sie repräsentiert gewissermaßen aber auch die beiden anderen in dieser Arbeit explizit untersuchten Fälle $d = 2$ und $d = 4$. Denn die Form des kinetischen Terms ist zumindest in diesen drei Fällen nahezu identisch.

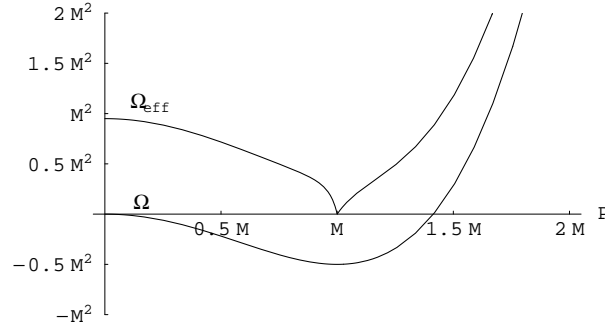


Abbildung 8.1: Der klassische inverse Propagator Ω und der effektive inverse Propagator Ω_{eff} (für verschwindendes Hintergrundfeld) als Funktionen von $p \equiv |p|$.

schwindendes Hintergrundfeld ϕ positiv semidefinit geworden ist. Zum einen haben sich alle $-\square$ -Eigenmoden zu Eigenwerten $p^2 \neq M^2$ im Laufe des Renormierungsgruppenflusses dynamisch stabilisiert. Das erkennt man daran, daß ihr kinetischer Term jeweils strikt positiv ist, so daß man offensichtlich Energie investieren muß, wenn man sie anregen will. Zum anderen lassen sich die Eigenmoden mit $p^2 = M^2$ “gratis”, d.h. ohne Energiezufuhr anregen, da ihr kinetischer Term Null ist. Das deutet stark darauf hin, daß diese Moden möglicherweise insofern instabil sind, als sie für die Ausbildung eines Kondensats anfällig sein könnten.

Anhand von einer Familie verallgemeinerter, Impuls-abhängiger Potentiale $U_k(A; p^2)$ wird dann eine Analyse durchgeführt, die Aufschluß darüber geben soll, ob das vermutete Kondensationsphänomen hier tatsächlich in Erscheinung tritt. (Die angesprochenen Potentiale erhält man, indem man $\Gamma_k[\phi]$ für ebene Wellen der Form $\phi = A \exp(ip_\mu x_\mu + i\beta)$ auswertet.) Bei dieser Untersuchung, die wieder im Rahmen der semiklassischen Entwicklung durchgeführt wird, stellt sich folgendes heraus: Alle $U_k(A; p^2)$ mit $p^2 \neq M^2$ nehmen im IR Limes $k \rightarrow 0$ ihr absolutes Minimum bei $A = 0$ an und sind strikt konvex. Daraus folgt, daß die zugehörigen Moden den Erwartungswert Null annehmen und somit nicht kondensieren. Für Potentiale mit $p^2 = M^2$ ist die Sachlage anders. In diesem Fall tritt das absolute Minimum von $U_k(A; M^2)$ für alle $k > 0$ bei nichtverschwindenden “Amplituden” $A \neq 0$ auf, wobei allerdings die Krümmung am Minimum für $k \rightarrow 0$ stetig abnimmt und sich in diesem Limes schließlich ein flacher Boden ausbildet. Bei $k = 0$ ist das effektive Potential dann zwar konvex, aber nicht strikt konvex, was üblicherweise ein sicheres Anzeichen für einen nichtverschwindenden Erwartungswert ist. Das bedeutet, daß es in der Tat zu einer Kondensation von Moden mit Impulsen $p_\mu = M n_\mu$ kommt, wobei n_μ einen beliebigen Einheitsvektor darstellt.

Aus den Ergebnissen für die $U_k(A; p^2)$ läßt sich schließen, daß der Vakuum-Erwartungs-

wert des fundamentalen Feldes in führender Ordnung der semiklassischen Entwicklung die folgende Form annimmt:

$$\langle \chi(x) \rangle = \frac{M}{\sqrt{2\lambda}} \exp(iMn_\mu x_\mu + i\alpha) . \quad (8.5)$$

Er ist durch seine Phase α und den Vektor n_μ eindeutig festgelegt. Das bedeutet, daß der obige Erwartungswert eine spontane Brechung der $U(1)$ - und der $ISO(d)$ -Symmetrie mit sich bringt. Was die Translationen in n_μ -Richtung betrifft, so bleibt lediglich eine gewisse Restsymmetrie übrig. Diese entspricht einer Invarianz unter kombinierten Transformationen der Form

$$\begin{aligned} x'_\mu &= x_\mu + \frac{\xi}{M} n_\mu , \\ \alpha' &= \alpha - \xi , \end{aligned} \quad (8.6)$$

wobei ξ einen reellen, konstanten Parameter darstellt. Bei solchen kombinierten Transformationen wird der aus den Raumzeit-Translationen hervorgehende Symmetrie-rechende Term durch eine passende Phasenrotation kompensiert, so daß $Mn_\mu x_\mu + \alpha = Mn_\mu x'_\mu + \alpha'$ gilt. Dabei nimmt der Spezialfall, in dem der freie Parameter ein ganzzahliges Vielfaches von 2π ist, d.h. $\xi = 2\pi m$, $m \in \mathbb{Z}$, eine Sonderstellung ein. Denn in diesem Fall bedarf es keiner kompensierenden Phasenrotation, um Invarianz zu gewährleisten. Man erhält somit eine Symmetrie hinsichtlich diskreter Raumzeit-Translationen, die durch

$$x'_\mu = x_\mu + \frac{2\pi m}{M} n_\mu \quad (8.7)$$

festgelegt sind. Wie bereits weiter oben erwähnt wurde, verkörpert die spontane Symmetriebrechung der $ISO(d)$ -Symmetrie zu dieser diskreten Symmetrie das quantenfeldtheoretische Analogon zu der spontanen Ausbildung von Schichtstrukturen, wie man sie bisweilen bei statistischen Systemen registrieren kann. Dort werden durch Transformationen der Form (8.7) Übergänge zwischen den einzelnen Schichten beschrieben.

Insgesamt ergibt sich aus den Betrachtungen, daß es zwei verschiedene Kandidaten für die "Vakuum-Feldkonfiguration" gibt, und zwar das triviale Resultat $\langle \chi \rangle = 0$, welches das "falsche", d.h. das gegenüber Kondensationen instabile perturbative Vakuum beschreibt, und den symmetriebrechenden Erwartungswert (8.5), auf dessen Stabilitätseigenschaften wir gleich eingehen werden. Die beiden Kandidaten lassen sich anhand ihrer Beiträge zum Erwartungswert von $\partial_\mu \chi^* \partial_\mu \chi$ unterscheiden. Während im Fall des perturbativen Vakuums offensichtlich $\langle \partial_\mu \chi^* \partial_\mu \chi \rangle = 0$ gilt, ergibt sich in dem durch (8.5) charakterisierten Vakuumzustand:

$$\langle \partial_\mu \chi^* \partial_\mu \chi \rangle = \frac{M^4}{2\lambda} . \quad (8.8)$$

Der obige Ausdruck (8.8) stellt - ganz analog zu dem aus der QCD bekannten Gluon-Kondensat - ein translationsinvariantes "kinetisches Kondensat" dar. Dieses Kondensat hängt in nichtanalytischer Weise von der Kopplung λ ab und würde daher aus einer rein störungstheoretischen Behandlung *nicht* hervorgehen.

Kommen wir, wie angekündigt, noch kurz zu den Stabilitätseigenschaften des nicht-trivialen Vakuums. Diese lassen sich aus dem Spektrum von kleinen Fluktuationen um das Vakuum herum bestimmen. Das Fluktuationsspektrum folgt seinerseits aus der Entwicklung von $\Gamma[\phi]$ um die Vakuum-Konfiguration (8.5). Uns steht zwar kein geschlossener Ausdruck für die effektive Wirkung $\Gamma[\phi]$ zur Verfügung, es ist hier aber dennoch möglich, an die gewünschten Informationen zu gelangen. Denn wie wir im weiteren Verlauf sehen werden, gilt für Felder ϕ , die nur leicht von der Konfiguration (8.5) abweichen, die "klassische" Beziehung $\Gamma[\phi] = S[\phi]$. Folglich lassen sich die Stabilitätseigenschaften des Vakuums (in führender Ordnung der semiklassischen Entwicklung) von der nackten Wirkung S ablesen. Anhand einer Entwicklung von S um sein entartetes Minimum, das von der Form dem Ausdruck (8.5) entspricht, wird im nächsten Abschnitt gezeigt, daß alle physikalischen Teilchenanregungen einen positiven kinetischen Term besitzen und somit in der Tat stabil sind.

Hierzu sei abschließend angemerkt, daß diese Art der dynamischen Stabilisierung, die aus einer auf klassischem Niveau vorliegenden Instabilität des kinetischen Terms hervorgeht, formal durchaus mit dem Mechanismus zu vergleichen ist, der bei der Vorgabe eines symmetriebrechenden ("Mexican-hat") Potentials $V = -\mu^2|\chi|^2 + (\lambda/2)|\chi|^4$ in Verbindung mit einem gewöhnlichen kinetischen Term "+ p^2 " in Gang gesetzt wird. In diesem Fall ist das naive Vakuum mit $\chi = 0$ aufgrund des negativen Massenterms instabil, und es bedarf lediglich einer Verschiebung der Feldvariable um eine Konstante, um zu dem stabilen Vakuumzustand überzuwechseln. Auch bei dem skalaren Spielzeugmodell geht das korrekte Vakuum aus einer solchen "Verschiebung" hervor. Diese ist hier allerdings komplizierter, da sie durch ein explizit x_μ -abhängiges Feld erfolgt. Insofern unterscheiden sich also die beiden Mechanismen.

8.2 Spinwellen und ihr Fluktuationsspektrum

In jeder Euklidischen Feldtheorie ist die Feldkonfiguration χ_{\min} , bei der die klassische Wirkung S ihren kleinsten Wert annimmt, von besonderer Bedeutung. Dies wollen wir nun anhand der in den folgenden Kapiteln zur Diskussion stehenden $|\chi|^4$ -Theorie erläutern. Die $|\chi|^4$ -Theorie beschreibt ein masseloses komplexes Skalarfeld χ mit quartischer Selbstwechselwirkung $\lambda|\chi|^4$ ($\lambda > 0$) und mit kinetischem Term $\Omega(p^2)$. Ist der kinetische Term wie gewöhnlich von der Form $\Omega = +p^2$ und somit positiv, dann ist die Wirkung S positiv und

nimmt bei $\chi_{\min}(x) = 0$ ihr globales Minimum an. Bei dieser Feldkonfiguration werden die potentielle und die kinetische Energie unabhängig voneinander Null. Im vorliegenden Fall ist der Sachverhalt allerdings weniger trivial, denn der kinetische Term $\Omega(p^2)$ aus (8.4), der aus den eingangs genannten Gründen gewählt wurde, nimmt im Bereich $0 < p^2 < 2M^2$ *negative* Werte an und ist somit in der Lage, die vom Potentialterm ausgehenden positiven Beiträge zu kompensieren. Infolgedessen liefert $\chi = 0$ in diesem Fall nicht das absolute Minimum der Wirkung (8.2). Tatsächlich werden wir weiter unten in einem etwas allgemeineren Zusammenhang beweisen, daß es aus einer “Spinwellen”-Konfiguration der folgenden Form hervorgeht:

$$\chi_{\min}(x) = \frac{M}{\sqrt{2\lambda}} \exp(iMn_\mu x_\mu + i\alpha) . \quad (8.9)$$

Hier stellt n_μ einen beliebigen Einheitsvektor (einen Punkt auf S^{d-1}) dar, und die Phase α liegt im Intervall $[0, 2\pi)$. Das globale Minimum von S ist demnach also entartet, und die zugehörige “Vakuummannigfaltigkeit” ist $S^1 \times S^{d-1}$. Unterschiedliche Punkte dieser Mannigfaltigkeit entsprechen unterschiedlichen klassischen Grundzuständen der Theorie. Greift man nun einen speziellen Grundzustand heraus, indem man sich auf ein bestimmtes Tupel (α, n) aus $S^1 \times S^{d-1}$ festlegt, so führt dies dazu, daß die $ISO(d)$ -Symmetrie von Raumzeit-Rotationen und -Translationen sowie die globale $U(1)$ -Phasensymmetrie spontan gebrochen werden.

Aufgrund ihrer x -Abhängigkeit führen die klassischen (α, n) -Vakua bei Operatoren, die sich aus Ableitungen des fundamentalen Feldes χ zusammensetzen, zu nichtverschwindenden Vakuum-Erwartungswerten. So ergibt die Spinwellen-Lösung (8.9) beispielsweise für den kinetischen Operator $\partial_\mu \chi^* \partial_\mu \chi$ das bereits im vorangegangenen Abschnitt angesprochene kinetische Kondensat

$$\langle \partial_\mu \chi^* \partial_\mu \chi \rangle \equiv \partial_\mu \chi_{\min}^* \partial_\mu \chi_{\min} = \frac{M^4}{2\lambda} . \quad (8.10)$$

Wir wollen nun untersuchen, welche darüber hinausgehenden Auswirkungen diese Art der spontanen Symmetriebrechung auf die Physik hat. Dazu zerlegen wir χ gemäß $\chi = \chi_{\min} + \delta\chi$ in die Vakuum-Feldkonfiguration χ_{\min} und eine Fluktuationsvariable $\delta\chi$, die die “physikalischen” Felder (Teilchenanregungen) repräsentiert. Dann setzen wir unter der Annahme, daß $\delta\chi$ klein ist, diese Zerlegung in (8.2) ein und bestimmen daraus das Fluktuationsspektrum. Bis auf Terme von dritter und höherer Ordnung in den Fluktuationen erhält man

$$S[\chi_{\min} + \delta\chi] = S[\chi_{\min}] + S_{\text{fluct}}[\chi_{\min}, \delta\chi] + \mathcal{O}(\delta\chi^3) \quad (8.11)$$

mit

$$S_{\text{fluct}}[\chi_{\min}, \delta\chi] = \frac{1}{2} \int d^d x (\delta\chi^*, \delta\chi) \hat{S}^{(2)}[\chi_{\min}] \begin{pmatrix} \delta\chi \\ \delta\chi^* \end{pmatrix} . \quad (8.12)$$

Hier stellt $\hat{S}^{(2)}$ den (2×2) -Matrix-Differentialoperator dar, der sich aus den zweiten Funktionalableitungen von S nach χ und χ^* zusammensetzt. In Anhang N wird dieser Operator mittels einer linearen Transformation diagonalisiert, die $(\delta\chi, \delta\chi^*)$ in neue, reelle Felder Φ_1 und Φ_2 überführt. In Abhängigkeit von den neuen Feldern läßt sich S_{fluct} dann folgendermaßen ausdrücken:

$$S_{\text{fluct}}[\chi_{\text{min}}, \delta\chi] = \frac{1}{2} \int \frac{d^d p}{(2\pi)^d} \{ \Phi_1(-p) \mathcal{K}_1(p^2, \theta) \Phi_1(p) + \Phi_2(-p) \mathcal{K}_2(p^2, \theta) \Phi_2(p) \} \quad (8.13)$$

Der hier eingeführte Parameter θ verkörpert den Winkel zwischen n_μ und p_μ . Ferner besitzen die kinetischen Terme $\mathcal{K}_{1/2}$ die nachstehende Form:

$$\begin{aligned} \mathcal{K}_1(p^2, \theta) &= M^2 + 4 \cos^2 \theta p^2 + \frac{p^4}{M^2} - \sqrt{M^4 + 16 \frac{\cos^2 \theta}{M^2} p^6} = 4 \cos^2 \theta p^2 + \mathcal{O}(p^4), \\ \mathcal{K}_2(p^2, \theta) &= M^2 + 4 \cos^2 \theta p^2 + \frac{p^4}{M^2} + \sqrt{M^4 + 16 \frac{\cos^2 \theta}{M^2} p^6} \\ &= 2M^2 + 4 \cos^2 \theta p^2 + \mathcal{O}(p^4) = 4 \cos^2 \theta \left(\frac{M^2}{2 \cos^2 \theta} + p^2 \right) + \mathcal{O}(p^4). \end{aligned} \quad (8.14)$$

In Abbildung 8.2 sind \mathcal{K}_1 und \mathcal{K}_2 in Abhängigkeit des Impulsbetrags $|p|$ dargestellt, und zwar für die Fälle $\theta = 0$ und $\theta = \pi/2$. Diese beschreiben die Anregungen, die parallel ($\theta = 0$) bzw. senkrecht ($\theta = \pi/2$) zur ‐Richtung des Vakuums‐ n_μ propagieren. Für die übrigen Wert von θ ergibt sich ein (zumindest qualitativ) sehr ähnliches Verhalten.

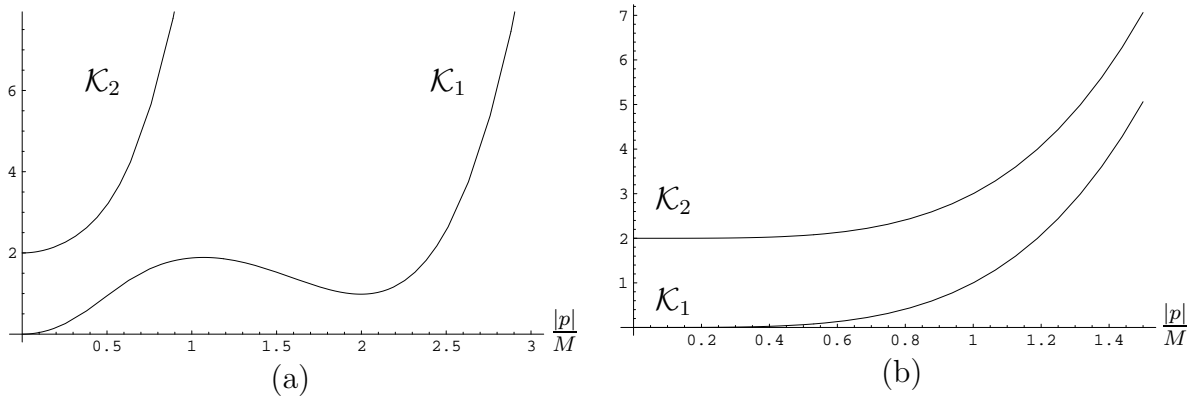


Abbildung 8.2: \mathcal{K}_1 und \mathcal{K}_2 in Einheiten von M^2 als Funktionen von $|p|/M$. Die abgebildeten Kurven entsprechen den Fällen (a) $\theta = 0$ und (b) $\theta = \pi/2$.

Die Mode Φ_1 ist eine masselose Anregung mit inversem Propagator \mathcal{K}_1 , die für alle θ -Werte bei $p = 0$ verschwindet. Sie verkörpert das Goldstone-Boson, das aus der spontan gebrochenen globalen $U(1)$ -Symmetrie hervorgeht. Ferner macht sich hier die spontane

Brechung der $SO(d)$ -Rotationssymmetrie in Gestalt der θ -Abhängigkeit des inversen Propagators bemerkbar. Dabei ist der Fall hervorzuheben, in dem der Impuls p orthogonal zu $Q_{0\mu} = Mn_\mu$ (d.h. $\cos\theta = 0$) ist. Dann stimmt die entsprechende Richtung mit der sogenannten "Goldstone-Richtung" überein, und man erhält $\mathcal{K}_1 = p^4/M^2$. Die Mode Φ_2 ist für alle θ -Werte massiv. Ihre Masse $M/(\sqrt{2}\cos\theta)$ ist offensichtlich richtungsabhängig. Sie stellt das Analogon der "Higgs"- oder "radialen" Mode dar, welche in dem wohlbekanntem Fall der spontanen Symmetriebrechung durch ein "Mexican-hat"-Potential in Erscheinung tritt.

Kapitel 9

Die effektive Theorie des skalaren Modells

9.1 Die effektive Mittelwertwirkung für das skalare Modell

Bevor wir uns der detaillierten Analyse des quantisierten Spielzeugmodells zuwenden, wollen wir klarstellen, welcher Mittel wir uns dazu bedienen. Um den “echten” Vakuumzustand zu finden, ist es erforderlich, Informationen von *nichtperturbativem* Charakter über die herkömmliche effektive Wirkung $\Gamma[\phi]$ zu gewinnen, wobei ϕ den Vakuum-Erwartungswert von χ (in Anwesenheit einer Quelle) verkörpert. Denn wie bereits eingangs erwähnt wurde, sind viele der direkt mit dem Vakuum zusammenhängenden Resultate, wie z.B. das kinetische Kondensat (8.8) nichtanalytisch in λ , so daß eine Störungsentwicklung in λ hier keine sinnvollen Ergebnisse liefern würde. Für unsere nichtperturbativen Studien greifen wir wieder auf das Konzept der effektiven Mittelwertwirkung zurück. Dieses wurde im ersten Teil der vorliegenden Arbeit bereits im Detail erläutert. Fassen wir noch einmal kurz ihre wesentlichen Eigenschaften zusammen.

Wir betrachten Γ als den physikalischen ($k \rightarrow 0$) Limes eines k -abhängigen Wirkungsfunktionals, der effektiven Mittelwertwirkung $\Gamma_k[\phi]$. Das Funktional Γ_k ergibt sich aus der nackten (klassischen) Wirkung S durch eine teilweise Ausintegration der Freiheitsgrade. Dabei gehen in Γ_k nur die Quanteneffekte der Fluktuationen zu solchen Impulsen ein, die größer sind als die IR Cutoffskala k . Auf diese Weise interpoliert die effektive Mittelwertwirkung zwischen der klassischen Wirkung $S = \Gamma_{k \rightarrow \infty}$ und der herkömmlichen effektiven Wirkung $\Gamma = \Gamma_{k \rightarrow 0}$.

Die Skalenabhängigkeit wird hier dadurch implementiert, daß man das Pfadintegral, das das erzeugende Funktional für die verbundenen Greenschen Funktionen definiert,

durch einen Cutoffterm modifiziert. Im Falle der betrachteten skalaren Theorie ist dieses modifizierte Pfadintegral für das erzeugende Funktional W_k von der folgenden Form:

$$\begin{aligned} \exp \{W_k [J]\} &= \int \mathcal{D}\chi \exp \left\{ -S[\chi] - \int d^d x \chi^*(x) \mathcal{R}_k(-\square) \chi(x) \right. \\ &\quad \left. + \int d^d x \{ \chi^*(x) J(x) + J^*(x) \chi(x) \} \right\}. \end{aligned} \quad (9.1)$$

Wie schon im ersten Teil dieser Arbeit bezeichnet $\mathcal{R}_k(p^2)$ die Cutofffunktion. Sie stellt hier eine bis zu einem gewissen Grad beliebige, *positive* Funktion dar, die in der Regel so gewählt wird, daß sie zwischen den beiden Grenzfällen $\mathcal{R}_k(p^2 \rightarrow 0) \rightarrow k^2$ und $\mathcal{R}_k(p^2 \rightarrow \infty) \rightarrow 0$ interpoliert. Dadurch erreicht man, daß die Beiträge der Moden mit kleinen Impulsen durch einen zu k^2 proportionalen Massenterm unterdrückt werden. Im ersten Teil dieser Arbeit wurde die Cutofffunktion nach einer bestimmten Regel an den jeweiligen effektiven kinetischen Term angepaßt, siehe Gleichung (2.4) in Abschnitt 2.2. Hier verzichten wir auf eine derartige Anpassung. Vielmehr machen wir im folgenden davon Gebrauch, daß man die Bedingung $\mathcal{R}_k(p^2 \rightarrow \infty) \rightarrow 0$ fallen lassen und eine vom Impuls unabhängige Cutofffunktion $\mathcal{R}_k = k^2$ verwenden kann, solange dies nicht zu UV Divergenzen führt. Dieser sehr einfache Cutoff reicht für die sich anschließenden Berechnungen vollkommen aus und ermöglicht zudem einen größtenteils analytischen Zugang.

Um an die effektive Mittelwertwirkung zu gelangen, verfährt man wieder nach dem bereits bekannten Schema, vgl. Abschnitt 1.5. Man geht mittels

$$\tilde{\Gamma}_k[\phi] = \int d^d x \{ \phi^* J + J^* \phi \} - W_k[J] \quad (9.2)$$

zur Legendre-Transformierten von W_k über, wobei man das Funktional $J = J(\phi)$ durch Invertieren der Beziehungen

$$\phi(x) = \frac{\delta W_k}{\delta J^*(x)}, \quad \phi^*(x) = \frac{\delta W_k}{\delta J(x)} \quad (9.3)$$

erhält. Letztere definieren die k -abhängigen ("gemittelten") Felder $\phi = \langle \chi \rangle$. Die effektive Mittelwertwirkung resultiert aus der Legendre-Transformierten (9.2), indem man von dieser den auf dem Niveau des ϕ -Feldes formulierten Cutoffterm abzieht:

$$\Gamma_k[\phi] = \tilde{\Gamma}_k[\phi] - \int d^d x \phi^* \mathcal{R}_k(-\square) \phi. \quad (9.4)$$

Sie läßt sich alternativ durch die Integro-Differentialgleichung

$$\begin{aligned} \exp \{-\Gamma_k[\phi]\} &= \int \mathcal{D}\sigma \exp \left\{ -S[\phi + \sigma] - \int d^d x \sigma^* \mathcal{R}_k \sigma \right. \\ &\quad \left. + \int d^d x \left(\sigma^* \frac{\delta \Gamma_k}{\delta \phi^*}[\phi] + \sigma \frac{\delta \Gamma_k}{\delta \phi}[\phi] \right) \right\} \end{aligned} \quad (9.5)$$

darstellen. Hierbei wurde das verschobene Feld

$$\sigma \equiv \chi - \phi \tag{9.6}$$

eingeführt.

In [48, 40] wurde gezeigt, daß das auf diese Weise definierte Wirkungsfunktional, wie oben beschrieben, zwischen den beiden Grenzfällen S und Γ interpoliert und eine exakte Renormierungsgruppengleichung löst. In ihrer allgemeinen Struktur stimmt letztere mit derjenigen überein, die im ersten Teil dieser Arbeit für die Gravitation hergeleitet wurde, siehe außerdem Gleichung (1.1). Im folgenden werden wir aber diese Flußgleichung nicht verwenden, sondern berechnen Γ_k vielmehr direkt aus dem obigen Pfadintegral (9.5) bzw. (9.1). Dieses werten wir mit Hilfe einer Sattelpunktentwicklung aus. Dazu ist die Kenntnis des absoluten Minimums der vollständigen im Integranden enthaltenen Wirkung erforderlich. Wie wir später sehen werden, läßt es sich (zumindest bei Vorgabe bestimmter Quellen) analytisch bestimmen. Entwickelt man den Integranden des Pfadintegrals um dieses Minimum und achtet dabei sorgfältig auf den Entartungsgrad des Minimums, so kann man hier die wesentlichen Charakteristika des echten (Quanten-)Vakuumszustands bereits aus der niedrigsten Ordnung der Sattelpunktentwicklung ableiten. Dementsprechend werden in den folgenden Rechnungen Loop-Effekte außer Acht gelassen. Wie sich herausstellen wird, sorgt die nichttriviale Vakuumstruktur der klassischen Theorie dafür, daß sich bereits in dieser “Tree-level”-Näherung nichttriviale Renormierungseffekte bemerkbar machen.

Welche Konfigurationen ϕ kommen schon vorab für das globale Minimum von Γ in Frage?

Als ein besonders ernstzunehmender Kandidat ist hier sicherlich die Spinwellen-Konfiguration (8.5) zu betrachten, welche gemäß dem vorigen Abschnitt gleichzeitig dem Minimum von S entspricht. Falls diese Lösung der klassischen Bewegungsgleichung tatsächlich auch das Minimum von Γ liefern sollte, so wäre die Rotationssymmetrie des Vakuums spontan gebrochen. Das läßt sich folgendermaßen erklären: Ausgehend von der entarteten Konfiguration (8.5) bei $J = 0$, sorgt bereits das Anschalten einer kleinen Quelle $J(\vec{q})$ dafür, daß die Entartung aufgehoben wird und das absolute Minimum die Impulsrichtung und die Phase von der Quelle übernimmt. Im Limes $J \rightarrow 0$ behält die Spinwellen-Konfiguration dann diese Eigenschaften der Quelle bei, und genau darin äußert sich die spontane Brechung der Rotationssymmetrie. Im weiteren Verlauf werden wir sehen, daß sich die effektive (d.h. die vollständig quantisierte) Theorie zu dem vorliegenden skalaren Modell in der Tat durch diese Symmetriebrechung auszeichnet.

9.2 Die effektive Mittelwertwirkung in der Umgebung des Ursprungs und klassische Renormierungseffekte

Um zeigen zu können, daß die Spinwellen-Konfiguration (8.5) für kleine positive k -Werte dem absoluten Minimum von Γ_k entspricht, müssen wir Informationen darüber einholen, wie sich Γ_k für beliebige ϕ verhält. In diesem Abschnitt konzentrieren wir uns dabei vornehmlich auf kleine ϕ und somit auf Konfigurationen, die sich stark von der Spinwellen-Konfiguration unterscheiden. Insbesondere soll diese Untersuchung die Voraussetzungen für die später anstehende Beantwortung der Frage schaffen, wie im vorliegenden Fall die Konvexität der effektiven Wirkung im Limes $k \rightarrow 0$ hergestellt wird. Außerdem werden wir uns im Laufe dieses Abschnitts mit dem Phänomen der "klassischen Renormierung" beschäftigen.

Gehen wir davon aus, daß Γ_k nach Potenzen von ϕ und ϕ^* um $\phi = 0$ entwickelt werden kann. Aus der U(1)-Symmetrie folgt dann, daß ϕ und ϕ^* darin nur in Form von Potenzen von $|\phi|^2$ auftreten. Da wir uns auf sehr kleine $|\phi|$ beschränken, reicht es aus, den in $|\phi|$ quadratischen Anteil von Γ_k , d.h. die inverse Zwei-Punkt-Funktion am Ursprung, zu studieren. Dabei nutzen wir aus, daß der Ursprung $\phi = 0$ infolge der vorausgesetzten Analytizität und der Symmetrien in jedem Fall einem stationären Punkt von Γ_k entspricht: $\delta\Gamma_k/\delta\phi|_{\phi=0} = 0$. Ferner folgt aus Stetigkeitsgründen, daß aus kleinen Quellen kleine $|\phi|$ -Werte hervorgehen, wenn man einmal von der Phase mit spontaner Symmetriebrechung absieht. Für diesen Fall, also für kleine J -Werte, wird im folgenden das k -abhängige erzeugende Funktional W_k ausgewertet, das sich aus der durch (8.2) festgelegten nackten Theorie ergibt. Das definierende Pfadintegral besitzt die Form

$$\exp \{W_k [J]\} = \int \mathcal{D}\chi \exp \{-S_k^J[\chi; J]\} , \quad (9.7)$$

wobei sämtliche Wirkungsterme zu dem Funktional

$$S_k^J[\chi; J] = S_k[\chi] - \int d^d x \{J^* \chi + J \chi^*\} \quad (9.8)$$

zusammengefaßt wurden. Hier stellt

$$S_k[\chi] = \int d^d x \left\{ \chi^* \omega_k(-\square) \chi + \frac{\lambda}{2} |\chi|^4 \right\} \quad (9.9)$$

die durch den Cutoffterm modifizierte klassische Wirkung dar. Der Cutoffterm bewirkt, daß der klassische kinetische Operator $\Omega(-\square)$ in S durch

$$\omega_k(-\square) \equiv \Omega(-\square) + \mathcal{R}_k(-\square) \quad (9.10)$$

ersetzt wird. In Impulsraumdarstellung ergibt sich daraus

$$\omega_k(p^2) = -p^2 + \mathcal{R}_k(p^2) + \frac{(p^2)^2}{2M^2}. \quad (9.11)$$

Bei k -Werten, die größer sind als ein bestimmter kritischer Wert k_{cr} , kann der Cutoffterm $\mathcal{R}_k(p^2)$ in (9.11) jeden möglichen negativen Beitrag von $\Omega(p^2)$ kompensieren, so daß der modifizierte inverse Propagator $\omega_k(p^2)$ in diesem Fall für alle p positive Werte annimmt. Jede erlaubte Funktion $\mathcal{R}_k(p^2)$ führt zu einem spezifischen kritischen Wert k_{cr} , der jeweils proportional zu M ist, wobei die Größenordnung der Proportionalitätskonstante in der Regel bei eins liegt. Beispielsweise ergibt der massenartige Cutoff $\mathcal{R}_k = k^2$ den Wert $k_{\text{cr}} = M/\sqrt{2}$. Aus dem gerade geschilderten Verhalten von $\omega_k(p^2)$ folgt unmittelbar, daß bei sehr großen k -Werten, und somit insbesondere in der Nähe der UV Cutoffskala \hat{k} , bei der der Renormierungsgruppenfluß beginnt, keine Instabilität auftritt. Verkleinert man nun die Cutoffskala k solange, bis k unterhalb von k_{cr} liegt, so wird $\omega_k(p^2)$ für gewisse $-\square$ -Eigenmoden negativ. Offensichtlich werden zuerst die Moden instabil, deren Eigenwerte in der Nähe von $p^2 = M^2$ angesiedelt sind. Wenn man k schließlich bis auf $k = 0$ herabgesenkt hat, dann sind alle Moden mit Eigenwerten $p^2 \in (0, 2M^2)$ in dem Sinn instabil geworden, daß bei Anregung dieser Moden die Euklidische Wirkung einen Wert annimmt, der sich unterhalb von demjenigen befindet, welcher aus der trivialen Konfiguration $\chi(x) = 0$ resultiert. Das verleitet zu der Vermutung, daß Eigenmoden zu solchen Eigenwerten p^2 , die sich im Bereich von M^2 bewegen, durch die Instabilität zur Kondensation veranlaßt werden. Genau dieses Phänomen werden wir im weiteren Verlauf studieren.

Die Funktionale $W_k[J]$ und $\Gamma_k[\phi]$ besitzen dieselben Symmetrieeigenschaften wie die klassische Wirkung. Neben der $\text{ISO}(d)$ -Invarianz liegt bei ihnen noch eine Invarianz unter globalen $\text{U}(1)$ -Transformationen der Form $J \rightarrow J \exp(i\varphi)$ bzw. $\phi \rightarrow \phi \exp(i\varphi)$ vor. Im Fall des Funktionals W_k hat dies zur Folge, daß die entsprechende Entwicklung nach Potenzen von J und J^* (vorausgesetzt sie existiert) nur Terme enthält, in denen genauso viele J wie J^* enthalten sind. Uns interessiert dabei vornehmlich der in den Quellen quadratische Anteil von W_k , der bekanntlich den effektiven Propagator G_k bei $J = 0$ festlegt.

Wir entwickeln also W_k gemäß

$$W_k[J] = W_k[0] + W_k^{\text{quad}}[J] + \dots \quad (9.12)$$

nach den Quellen, wobei die Punkte für Terme der Ordnung $J^2 J^{*2}$ stehen, und erhalten für den quadratischen Anteil einen Ausdruck der folgenden Form:

$$W_k^{\text{quad}}[J] = \int d^d x d^d y J^*(x) G_k(x, y) J(y) \equiv \int d^d x J^*(x) G_k(-\square) J(x). \quad (9.13)$$

Bildet man nun die Legendre-Transformierte von (9.13) und verwendet (9.4), so ergibt sich dementsprechend

$$\Gamma_k[\phi] = -W_k[0] + \Gamma_k^{\text{quad}}[\phi] + \mathcal{O}(\phi^2 \phi^{*2}) . \quad (9.14)$$

Dabei verkörpert

$$\Gamma_k^{\text{quad}}[\phi] = \int d^d x d^d y \phi^*(x) \Sigma_k(x, y) \phi(y) \equiv \int d^d x \phi^*(x) \Sigma_k(-\square) \phi(x) \quad (9.15)$$

den in den Feldern quadratischen Anteil von Γ_k ; dieser beinhaltet den kinetischen Operator

$$\Sigma_k(-\square) = G_k(-\square)^{-1} - \mathcal{R}_k(-\square) . \quad (9.16)$$

Fortan bezeichnet Σ_k den Differentialoperator $\Sigma_k(-\square)$ oder aber die Impulsraum-Funktion $\Sigma_k(p^2)$.

Im weiteren Verlauf werden wir die effektive Mittelwertwirkung häufig für ebene Wellen $\phi(x) = A \exp(ip_\mu x_\mu + i\alpha)$ auswerten. Aus der $U(1)$ -Invarianz folgt in diesem Fall die Beziehung

$$\Gamma_k[A \exp(ip_\mu x_\mu + i\alpha)] \equiv \mathcal{V} U_k(A; p^2) , \quad (9.17)$$

wobei

$$\mathcal{V} \equiv \int d^d x \quad (9.18)$$

das Raumvolumen angibt. Ferner bezeichnen wir die Funktion $U_k(A; p^2)$ als das zu den $-\square$ -Eigenmoden mit Eigenwert p^2 gehörige effektive Potential. An dieser Stelle ist folgendes anzumerken: Aus Γ_k geht zwar eine unendliche Anzahl solcher "effektiver Potentiale" hervor (eines für jeden Eigenwert p^2), es sollte aber dennoch klar sein, daß die Gesamtheit dieser Potentiale weitaus weniger Informationen enthält als Γ_k selbst, da die Korrelationen zwischen den unterschiedlichen $-\square$ -Eigenmoden durch die U_k nicht erfaßt werden können.

In den folgenden Abschnitten wird das Funktionalintegral (9.7) mit Hilfe einer Sattelpunktentwicklung ausgewertet, d.h. wir berechnen das Funktional Γ_k direkt aus seinen Definitionsgleichungen (9.2)-(9.4), anstatt daß wir die entsprechende Flußgleichung dazu benutzen. Bezeichnet man das globale Minimum von S_k^J mit $\chi_{\min}(J)$, so ergibt sich aus der Sattelpunktentwicklung in niedrigster Ordnung (d.h. in "klassischer" Näherung)

$$W_k[J] \text{ " = " } - S_k^J[\chi_{\min}(J); J] . \quad (9.19)$$

Unter gewissen Umständen (beispielsweise für $J = 0$ und hinreichend kleine k) ist das globale Minimum entartet. In diesem Fall ist die Gleichung (9.19) lediglich von symbolischer Natur (was hier durch die Anführungszeichen am Gleichheitszeichen angedeutet wird). Vielmehr muß man dann über die entarteten Minima summieren. Diese sowohl konzeptionelle als auch technische Feinheit wollen wir aber für den Augenblick vergessen.

Im folgenden werden wir sehen, daß bereits die “klassische” Näherung (9.19) die wesentlichen physikalischen Effekte beinhaltet, die zu einer dynamischen Stabilisierung führen. Auf den ersten Blick dürfte dieses Resultat leicht befremdlich wirken, denn man könnte zunächst erwarten, daß (9.19) zu dem trivialen Resultat $\Gamma_k = S$ führt. Diese Vermutung begründet sich darin, daß zumindest im Falle “herkömmlicher” Theorien, d.h. bei Theorien, die einen *positiv definiten* Hesse-Matrixoperator $S^{(2)} \equiv \delta^2 S / \delta\chi \delta\chi^*$ aufweisen, eine konventionelle perturbative Loop-Entwicklung in niedrigster Ordnung die Standardresultate $\Gamma = S$ und $\chi_{\min} = \phi$ liefert. Da auch im vorliegenden Fall die Beiträge von den Fluktuationen (Ein-Loop-Determinante etc.) vernachlässigt werden (siehe Gleichung (9.19)), stellt sich hier in der Tat die Frage, warum trotzdem nichttriviale Renormierungseffekte auftreten. Dies läßt sich anhand der Integro-Differentialgleichung (9.5) erklären. Dazu ist es erforderlich, das (k -abhängige) globale Minimum $\sigma_{\min} \equiv \sigma_{\min}(\phi)$ der vollständigen im Integranden von (9.5) enthaltenen Wirkung zu studieren. Offensichtlich löst es die Bewegungsgleichung

$$\frac{\delta S}{\delta\phi^*} [\phi + \sigma_{\min}] + \mathcal{R}_k \sigma_{\min} = \frac{\delta\Gamma_k}{\delta\phi^*} [\phi] . \quad (9.20)$$

Um die anschließenden Betrachtungen möglichst allgemein zu halten, gehen wir nun davon aus, daß die nackte Wirkung S nicht näher festgelegt ist. Wir fordern lediglich, daß sie nach unten beschränkt sein soll.

Infolge der Beschränktheit von S dominiert der Term $\int d^d x \sigma^* \mathcal{R}_k \sigma$ im Bereich sehr großer Skalen k das Pfadintegral (9.5) und sorgt dementsprechend für eine starke Unterdrückung der Fluktuationen mit $\sigma \neq 0$, so daß bei solchen Skalen die Hauptbeiträge zum Integral (9.5) von kleinen Oszillationen um $\sigma_{\min} = 0$ stammen. Damit verkörpert in diesem Fall $\sigma_{\min} = 0$ das globale Minimum. Folglich ergibt sich hier $\chi_{\min} \equiv \sigma_{\min} + \phi = \phi$, und aus (9.20) folgt unmittelbar $\Gamma_k = S$. Wenn man k bis hin zu $k = 0$ verkleinert, so passiert es oft (d.h. für eine große Klasse von nackten Wirkungen S), daß das absolute Minimum der Wirkung bei $\sigma_{\min} = 0$ verweilt. Dies ist zumindest dann der Fall, wenn der zugehörige Hesse-Matrixoperator $S^{(2)}$ positiv definit und die Theorie demzufolge schon auf klassischem Niveau stabil ist. Daher treten hier auch keine Kondensationsphänomene auf.

Andererseits läßt (9.20) für hinreichend kleine k auch nichttriviale Lösungen mit $\sigma_{\min} \neq 0$ zu, und zwar genau dann, wenn $S^{(2)}[\phi]$ negative Eigenwerte besitzt. Um für diesen

Fall das korrekte Γ_k zu bestimmen, setzt man $\sigma = \sigma_{\min} + \psi$ und nimmt dann in (9.5) eine Sattelpunktentwicklung um σ_{\min} bzw. $\chi_{\min} \equiv \phi + \sigma_{\min}$ vor. Entwickelt man bis einschließlich zur zweiten Ordnung in ψ , so erhält man den Ausdruck

$$\begin{aligned} \exp \{-\Gamma_k[\phi]\} &= \exp \left\{ -S[\chi_{\min}] - \int d^d x \sigma_{\min}^* \mathcal{R}_k \sigma_{\min} \right. \\ &\quad \left. + \int d^d x \left(\sigma_{\min}^* \frac{\delta \Gamma_k}{\delta \phi^*}[\phi] + \sigma_{\min} \frac{\delta \Gamma_k}{\delta \phi}[\phi] \right) \right\} \\ &\quad \times \int \mathcal{D}\psi \exp \left\{ - \int d^d x \psi^* (S^{(2)}[\chi_{\min}] + \mathcal{R}_k) \psi \right\}. \end{aligned} \quad (9.21)$$

Wenn χ_{\min} den ‘‘korrekten’’ Sattelpunkt verkörpert, dann ist zu erwarten, daß $S^{(2)}[\chi_{\min}] + \mathcal{R}_k$ positiv semidefinit ist. Ist das Minimum entartet, so führen die damit einhergehenden Nullmoden dieses Operators in (9.21) zu einer Integration über die ‘‘Vakuummannigfaltigkeit’’. Die entsprechenden Details hierzu werden später näher erläutert werden.

Um Γ_k in niedrigster Ordnung zu bestimmen, vernachlässigt man in (9.21) nun auch das verbliebene Gaußsche Integral, das im übrigen nur die positiven Eigenwerte von $S^{(2)}[\chi_{\min}] + \mathcal{R}_k$ einbezieht. Das führt zu

$$\begin{aligned} \Gamma_k[\phi] \quad \text{‘‘=’’} \quad & S[\chi_{\min}] + \int d^d x \sigma_{\min}^* \mathcal{R}_k \sigma_{\min} \\ & - \int d^d x \left(\sigma_{\min}^* \frac{\delta \Gamma_k}{\delta \phi^*}[\phi] + \sigma_{\min} \frac{\delta \Gamma_k}{\delta \phi}[\phi] \right). \end{aligned} \quad (9.22)$$

Gilt $\sigma_{\min} \neq 0$ (d.h. $\chi_{\min} \neq \phi$), dann stellt (9.22) eine sehr komplizierte funktionale Differentialgleichung für Γ_k dar, deren Lösung *nicht* $\Gamma_k = S$ entspricht. Somit enthält der ‘‘klassische’’ Term der Sattelpunktentwicklung, also der Term niedrigster Ordnung, dann in der Tat hochgradig nichttriviale Renormierungseffekte, die $\Gamma_k \neq S$ nach sich ziehen. Tatsächlich spiegelt dieser Term für sich genommen schon die Eigenschaften des Kondensationsphänomens qualitativ korrekt wider. Die vernachlässigten Terme höherer Ordnung führen hier in der Regel nur zu geringfügigen quantitativen Korrekturen. Um zu diesem Ergebnis zu gelangen, ist es allerdings unbedingt erforderlich, das absolute Minimum χ_{\min} der (vollständigen) Wirkung korrekt zu identifizieren.

In der nächsthöheren (‘‘next-to-leading’’) Ordnung der Sattelpunktentwicklung führt das oben vernachlässigte Gaußsche Integral über die Fluktuationen ψ dazu, daß die rechte Seite von (9.22) durch einen Ein-Loop-Term der Form $\ln \text{Det}' (S^{(2)}[\chi_{\min}] + \mathcal{R}_k)$ modifiziert wird. Der Strich an der Determinante weist hier darauf hin, daß die Nullmoden des Operators $S^{(2)}[\chi_{\min}] + \mathcal{R}_k$ von den Rechnungen auszuschließen sind. Die Erfahrung lehrt uns, daß in den Fällen, die uns hier interessieren, die durch die Determinante angebrachten Korrekturen typischerweise eher klein sind, zumindest für $d > 2$.

In der Arbeit [58] wurde der oben beschriebene Formalismus dazu verwendet, die durch ein “Mexican-hat”-Potential ausgelöste spontane Symmetriebrechung zu untersuchen. Dort ergab sich, daß der klassische Term der Sattelpunktentwicklung alle wesentlichen Charakteristika des effektiven Potentials, wie z.B. die im Limes $k \rightarrow 0$ hergestellte Konvexität, korrekt beschreibt. Die Ein-Loop-Determinante verändert die Eigenschaften des Potentials nicht. Ferner wurden in [59] ähnliche, durch klassische Instabilität hervorgerufene Renormierungseffekte unter Verwendung der Wegner-Houghton-Gleichung studiert. Außerdem wurde auch in der Arbeit [61] eine skalare Theorie mit einem kinetischen Term von höheren Ableitungen analysiert. Dieses Modell unterscheidet sich im wesentlichen dadurch von dem hier betrachteten, daß es den herkömmlichen, positiven “ $-\square = p^2$ ”-Term enthält.

Kapitel 10

Das absolute Minimum von S_k^J

10.1 Eine hinreichende Bedingung für das absolute Minimum

Mit dem Ziel, die effektive Mittelwertwirkung für das skalare Spielzeugmodell in klassischer Näherung zu berechnen, wird das Pfadintegral (9.7) im weiteren Verlauf einer Sattelpunktentwicklung unterzogen. Wie oben erwähnt wurde, ist es dazu erforderlich, das absolute Minimum der kompletten im Pfadintegral auftauchenden Wirkung zu kennen. Für den vorliegenden Fall bedeutet dies, daß das absolute Minimum der Wirkung S_k^J aus Gleichung (9.8) zu bestimmen ist. In diesem Abschnitt wird ein hinreichendes Kriterium für das gesuchte Minimum hergeleitet, wobei wir uns eines Verfahrens bedienen, das sich eng an das in der Arbeit [58] vorgeschlagene anlehnt. Im einzelnen geht man dabei folgendermaßen vor: Zuerst zerlegt man das Feld χ in eine Lösung χ_{\min} der Bewegungsgleichung $\delta S_k^J / \delta \chi^* = 0$, die später das absolute Minimum liefern soll, und eine beliebige, nicht unbedingt kleine Fluktuation $\delta \chi$:

$$\chi(x) = \chi_{\min}(x) + \delta \chi(x) . \quad (10.1)$$

Setzt man diesen Ansatz in die Wirkung (9.8) ein und nutzt aus, daß die Feldkonfiguration $\chi = \chi_{\min}$ die Bewegungsgleichung

$$\frac{\delta S_k^J}{\delta \chi^*} = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad [\Omega(-\square) + \mathcal{R}_k(-\square) + \lambda |\chi|^2] \chi = J \quad (10.2)$$

löst, so läßt sich $S_k^J[\chi; J]$ wie folgt aufspalten:

$$S_k^J[\chi; J] = S_k^J[\chi_{\min}; J] + \Delta S_k[\chi_{\min}, \delta \chi] . \quad (10.3)$$

Das in (10.3) eingeführte Funktional ΔS_k ist durch den nachstehenden Ausdruck definiert:

$$\Delta S_k[\chi_{\min}, \delta \chi] \equiv \int d^d x \left\{ \delta \chi^* [\Omega(-\square) + \mathcal{R}_k(-\square)] \delta \chi + \frac{\lambda}{2} [\chi_{\min}^2 (\delta \chi^*)^2 \right.$$

$$+\chi_{\min}^*{}^2 (\delta\chi)^2 + 4|\chi_{\min}|^2 |\delta\chi|^2 + 2\chi_{\min} \delta\chi^* |\delta\chi|^2 + 2\chi_{\min}^* \delta\chi |\delta\chi|^2 + |\delta\chi|^4 \Big] \}. \quad (10.4)$$

Wenn χ_{\min} tatsächlich die Wirkung S_k^J minimiert, dann gilt offensichtlich $S_k^J[\chi; J] \geq S_k^J[\chi_{\min}; J] \forall \chi$. Somit folgt aus (10.3), daß χ_{\min} genau dann das absolute Minimum von S_k^J liefert, wenn die Bedingung

$$\Delta S_k[\chi_{\min}, \delta\chi] \geq 0 \quad (10.5)$$

für alle Fluktuationen $\delta\chi$ erfüllt ist. Da ΔS_k nicht explizit von den Quellen abhängt, bleibt die Bedingung in ihrer Form unverändert, wenn man $J = 0$ setzt. Sie ist also für S_k^J und $S_k^{J=0} = S_k$ identisch.

Es erweist sich nun als günstig, den obigen Ausdruck für ΔS_k in folgender Weise umzuschreiben:

$$\begin{aligned} \Delta S_k[\chi_{\min}, \delta\chi] &= \int d^d x \delta\chi^* [\Omega(-\square) + \mathcal{R}_k(-\square) + \lambda |\chi_{\min}|^2] \delta\chi \\ &\quad + \frac{\lambda}{2} \int d^d x (\chi_{\min} \delta\chi^* + \chi_{\min}^* \delta\chi + |\delta\chi|^2)^2. \end{aligned} \quad (10.6)$$

Da $\chi_{\min} \delta\chi^* + \chi_{\min}^* \delta\chi = 2\text{Re}(\chi_{\min} \delta\chi^*)$ reell ist, kann der Integrand des zweiten Integrals in (10.6) nicht negativ werden. Daraus folgt, daß für jedes beliebige $\delta\chi(x)$ am absoluten Minimum automatisch die Ungleichung

$$\int d^d x \delta\chi^* [\Omega(-\square) + \mathcal{R}_k(-\square) + \lambda |\chi_{\min}|^2] \delta\chi \geq 0 \quad (10.7)$$

gilt. Somit stellt (10.7) ein hinreichendes Kriterium für das absolute Minimum der Wirkung S_k^J dar. Erfüllt bei vorgegebener Quelle eine Lösung χ_{\min} der Bewegungsgleichung (10.2) diese Bedingung, so minimiert sie S_k^J global.

10.2 Die Suche nach dem absoluten Minimum

Kommen wir nun zur Bestimmung des absoluten Minimums von S_k^J . Im folgenden werden wir nur den Fall $J = 0$ betrachten und “verbannen” den technisch sehr komplizierten Fall nichtverschwindender externer Quellen in den Anhang M.1. Außerdem beschränken wir die Betrachtungen von nun an auf die massenartige Cutofffunktion $\mathcal{R}_k = k^2$. Dies ist erforderlich, wenn man die Rechnungen analytisch handhabbar gestalten möchte.

Gesucht ist hier also das globale Minimum von $S_k \equiv S_k^{J=0}$. Die zugehörige Feldkonfiguration χ_{\min} verkörpert somit notwendigerweise eine Lösung der Bewegungsgleichung

$$[\omega_k(-\square) + \lambda |\chi|^2] \chi = 0, \quad \omega_k(-\square) \equiv \Omega(-\square) + k^2 = \square + \frac{\square^2}{2M^2} + k^2. \quad (10.8)$$

Die naheliegendste Lösung ist diejenige, die das verschwindende Feld χ beschreibt, $\chi_{\min} = 0$. Es läßt sich nun mit Hilfe des im vorigen Abschnitt hergeleiteten Kriteriums herausfinden, ob $\chi_{\min} = 0$ auch tatsächlich das globale Minimum verkörpert. Dazu setzt man diese Lösung in (10.6) ein, was zu

$$\Delta S_k [\chi = 0, \delta\chi] = \int d^d x \delta\chi^* [\Omega(-\square) + k^2] \delta\chi + \frac{\lambda}{2} \int d^d x |\delta\chi|^4 \quad (10.9)$$

führt. Im nächsten Schritt verwendet man die Fourier-Transformation

$$\delta\chi(x) = \int \frac{d^d p}{(2\pi)^d} \widetilde{\delta\chi}(p) \exp(ip_\mu x_\mu) , \quad (10.10)$$

um an die Impulsraumdarstellung des ersten Terms von (10.9) zu gelangen. Man erhält

$$\Delta S_k [\chi = 0, \delta\chi] = \int \frac{d^d p}{(2\pi)^d} |\widetilde{\delta\chi}(p)|^2 [\Omega(p^2) + k^2] + \frac{\lambda}{2} \int d^d x |\delta\chi|^4 . \quad (10.11)$$

Da $\Omega(p^2) \geq -M^2/2$ gilt, ist $\omega_k(p^2) = \Omega(p^2) + k^2$ im Skalenbereich $k^2 \geq M^2/2$ für alle Impulse immer positiv (oder Null): $\omega_k(p^2) \geq 0$. Somit ist dann auch $\Delta S_k \geq 0$ immer erfüllt. Demzufolge stellt in diesem Skalenbereich $\chi_{\min} = 0$ in der Tat die Feldkonfiguration dar, die die Wirkung S_k global minimiert. Andererseits existieren immer gewisse Konfigurationen mit hinreichend kleiner Amplitude, die dafür sorgen, daß ΔS_k im komplementären Skalenbereich $k^2 < M^2/2$ negativ wird. In diesem Fall kann $\chi_{\min} = 0$ somit nicht das absolute Minimum liefern.

Mit der Absicht, das globale Minimum für Skalen $k^2 < M^2/2$ zu finden, konzentrieren wir uns nun auf solche Feldkonfigurationen χ , die ebene Wellen darstellen, und wählen dementsprechend den Ansatz

$$\chi_{\min}(x) = \chi_0 \exp(iQ_\mu x_\mu + i\alpha) , \quad \chi_0, \alpha \text{ reell.} \quad (10.12)$$

Setzt man (10.12) in die Bewegungsgleichung (10.8) ein, so ergibt sich für die "Amplitude" χ_0 die Bedingung

$$\chi_0(Q^2) = \sqrt{-\omega_k(Q^2)/\lambda} . \quad (10.13)$$

Offensichtlich ist $\chi_0(Q^2)$ nur dann reell, wenn $\omega_k(Q^2) \leq 0$ gilt.

Wie sieht nun die Wirkung für die Lösung (10.12) mit (10.13) aus? Durch Einsetzen in (9.9) ergibt sich

$$S_k [\chi = \chi_0(Q^2) \exp(iQ_\mu x_\mu + i\alpha)] = -\frac{\mathcal{V}}{2\lambda} \omega_k^2(Q^2) . \quad (10.14)$$

Die Wirkung (10.14) hängt noch von einem freien¹ Parameter ab, und zwar von dem Impulsquadrat Q^2 . Außerdem führt die obige Klasse von Lösungen offensichtlich zu einer

¹Natürlich ist Q^2 nur innerhalb gewisser Grenzen als freier Parameter zu betrachten, da χ_0 als reell vorausgesetzt wurde.

kleineren Wirkung als die Lösung $\chi = 0$, für die $S_k = 0$ gilt. In der Hoffnung, daß das absolute Minimum von S_k , das in dem Bereich kleiner Skalen vorherrscht, dieser Klasse von Feldkonfigurationen entstammt, minimieren wir nun den Ausdruck (10.14) bezüglich Q^2 . Dies führt zu der Bedingung $Q^2 = M^2$. Somit lautet hier der Kandidat für das globale Minimum

$$\chi_{\min}(x) = \hat{\chi}_0 \exp(iQ_{0\mu}x_\mu + i\alpha) ; \quad Q_{0\mu} \equiv M n_\mu . \quad (10.15)$$

Dabei stellt n_μ einen beliebigen Einheitsvektor dar (d.h. $n^2 = 1$), die Phase α liegt in dem Intervall $[0, 2\pi)$, und $\hat{\chi}_0$ ist folgendermaßen definiert:

$$\hat{\chi}_0 \equiv \sqrt{-\frac{1}{\lambda}\omega_k(M^2)} = \sqrt{\frac{1}{\lambda} \left(\frac{1}{2}M^2 - k^2 \right)} ; \quad k^2 \leq \frac{1}{2}M^2 . \quad (10.16)$$

Durch Einsetzen der Lösung (10.15) in ΔS_k aus Gleichung (10.6) läßt sich nun definitiv überprüfen, ob sie dem globalen Minimum entspricht. In Impulsraumdarstellung nimmt die linke Seite von (10.7) die nachstehende Form an:

$$\int \frac{d^d p}{(2\pi)^d} \left| \widetilde{\delta\chi}(p) \right|^2 \left[\Omega(p^2) + \frac{1}{2}M^2 \right] . \quad (10.17)$$

Wegen $\Omega(p^2) \geq -M^2/2$ ist dieses Integral augenscheinlich nichtnegativ. Somit ist die hinreichende Bedingung für das globale Minimum erfüllt.

Gleichung (10.15) beschreibt eigentlich sogar eine ganze Familie von entarteten Minima, die durch die Phase α und den Einheitsvektor n_μ parametrisiert wird. Demzufolge ist die zugehörige "Vakuummannigfaltigkeit" $S^1 \times S^{d-1}$.

Insgesamt ergibt sich also, daß die nichttriviale Lösung (10.15) in dem Bereich $k^2 \leq M^2/2$ das absolute Minimum von S_k liefert, während die Lösung $\chi_{\min} = 0$ diese Wirkung für $k^2 \geq M^2/2$ minimiert. Die beiden Lösungen stimmen bei der Skala $k^2 = M^2/2$, bei der der Übergang zwischen den zugehörigen Bereichen stattfindet, überein.

Kapitel 11

Der Renormierungsgruppenfluß von $\Gamma_k[\phi]$

11.1 Renormierungsgruppenfluß des effektiven Propagators $G_k(p^2)$ bei verschwindendem Feld

Dieser Abschnitt widmet sich der Berechnung des (k -abhängigen) effektiven inversen Propagators Σ_k , der in Gleichung (9.15) eingeführt wurde. Dieser läßt sich in *klassischer Näherung* bestimmen, indem man im Pfadintegral (9.7) eine Sattelpunktentwicklung um das globale Minimum von S_k^J vornimmt. Diese führt den Ausführungen des Abschnitts 9.2 zufolge zu dem Ausdruck

$$\exp(W_k[J]) = N_k \sum_{\chi_{\min}} \exp \left\{ -S_k^J[\chi_{\min}; J] - \frac{1}{2} \ln \text{Det}' \hat{S}_k^{(2)}[\chi_{\min}] + \dots \right\}. \quad (11.1)$$

Hier symbolisiert $\sum_{\chi_{\min}}$ eine Summation bzw. Integration über die potentiell entarteten absoluten Minima. Falls eine solche Entartung vorliegt, dann tragen diese Minima natürlich alle zu gleichen Teilen zum Pfadintegral bei und sind dementsprechend auch alle in dem entwickelten Ausdruck (11.1) zu berücksichtigen. Der erste der in den geschweiften Klammern enthaltenen Terme aus Gleichung (11.1) stellt den dominierenden, klassischen Term dar. Der zweite Term enthält die bereits weiter oben angesprochenen Ein-Loop-Beiträge, welche wir im folgenden vernachlässigen werden. Die Normierungskonstante N_k hängt von der Art der Minimums und seinem Entartungsgrad ab. Sie wird derart gewählt, daß $W_k[0]$ eine stetige Funktion von k darstellt, die mit der Anfangsbedingung $W_{k \rightarrow \infty}[0] = 0$ verträglich ist.

Die Feldkonfiguration $\chi_{\min}(x)$ aus Gleichung (11.1) stellt das Minimum von S_k^J bei Anwesenheit einer externen Quelle dar und ist hier somit als Funktional von $J(x)$ aufzufassen. Es erweist sich jedoch als extrem schwierig, $\chi_{\min} = \chi_{\min}(J)$ für ein *beliebiges* J zu

bestimmen, und es ist nicht klar, ob dies überhaupt möglich ist. Da für unsere Zwecke lediglich der bilineare Term von W_k , also der Ausdruck aus Gleichung (9.13), von Relevanz ist, reicht es jedoch aus, das Minimum für *infinitesimale* Quellen J zu kennen, was die Situation erheblich vereinfacht. Denn in diesem Fall läßt sich $\chi_{\min}(J)$ aus einer störungstheoretischen Entwicklung um das quellenfreie Minimum $\chi_{\min}(J=0) \equiv \varphi^{(0)}$ bestimmen, das für $k^2 < M^2/2$ durch Gleichung (10.15) und für $k^2 \geq M^2/2$ durch $\chi = 0$ charakterisiert ist. Dazu geht man wie folgt vor: Man gibt eine beliebige, infinitesimale Quelle $J(x)$ vor und drückt sie durch das Produkt $J(x) \equiv \varepsilon j(x)$ aus, wobei dem Parameter $\varepsilon = \text{konstant}$ die Aufgabe zukommt, in Ausdrücken, die nach der Quelle entwickelt wurden, die Potenzen von J abzuzählen. $j(x)$ verkörpert hier dementsprechend eine Funktion von nullter Ordnung in ε . Damit läßt sich dann die zugehörige Feldkonfiguration χ_{\min} durch den folgenden entwickelten Ausdruck approximieren:

$$\chi_{\min}(x) = \varphi^{(0)}(x) + \varepsilon \varphi^{(1)}(x) + \varepsilon^2 \varphi^{(2)}(x) + \dots \quad (11.2)$$

Wie sich herausstellen wird, reicht es für die Berechnung des J^*J -Terms von W_k aus, den Korrekturterm erster Ordnung $\varphi^{(1)}$ zu kennen. Dieser verkörpert die Lösung der linearisierten Bewegungsgleichung

$$\begin{pmatrix} J \\ J^* \end{pmatrix} = \varepsilon \hat{S}_k^{(2)}[\varphi^{(0)}] \begin{pmatrix} \varphi^{(1)} \\ \varphi^{(1)*} \end{pmatrix}. \quad (11.3)$$

Diese Gleichung ergibt sich, wenn man (11.2) in die Bewegungsgleichung (10.2) einsetzt und die Koeffizienten der in ε linearen Terme vergleicht. Der dabei in Erscheinung tretende Operator $\hat{S}_k^{(2)}$ ist durch

$$\hat{S}_k^{(2)}[\chi] \delta^d(x-y) = \begin{pmatrix} \frac{\delta^2 S_k}{\delta \chi^*(x) \delta \chi(y)} & \frac{\delta^2 S_k}{\delta \chi^*(x) \delta \chi^*(y)} \\ \frac{\delta^2 S_k}{\delta \chi(x) \delta \chi(y)} & \frac{\delta^2 S_k}{\delta \chi(x) \delta \chi^*(y)} \end{pmatrix} \quad (11.4)$$

definiert, was im vorliegenden Fall zu dem nachstehenden Ausdruck führt:

$$\hat{S}_k^{(2)}[\chi] \equiv \begin{pmatrix} \omega_k(-\square) + 2\lambda |\chi|^2 & \lambda \chi^2 \\ \lambda \chi^{*2} & \omega_k(-\square) + 2\lambda |\chi|^2 \end{pmatrix}. \quad (11.5)$$

Für $\chi = \varphi^{(0)}$ ist dieser Matrix-Differentialoperator nichtsingulär, abgesehen von dem Fall, in dem $k < M^2/2$ und “ $-\square = M^2$ ” gilt. (In diesem Fall gilt nämlich $|\varphi^{(0)}| = \hat{\chi}_0 = \sqrt{-\omega_k(M^2)/\lambda}$, mit der Folge, daß die beiden Zeilen bzw. Spalten von (11.5) linear abhängig werden.) Darin spiegelt sich die Entartung des im Bereich kleiner Skalen vorherrschenden Vakuums wider. Für Quellen $J(p^2 \neq Q_0^2)$, die keine Fourier-Komponenten zu Impulsen mit $p^2 = Q_0^2 = M^2$ enthalten, läßt sich $\varphi^{(1)}$ durch Invertieren von (11.3) bestimmen. Entwickelt man nun auch die “on-shell”-Wirkung $S_k^J[\chi_{\min}; J]$ bis zur zweiten

Ordnung in den Quellen, so kann man den gewonnenen Ausdruck für $\varphi^{(1)}$ dazu benutzen, das Resultat der Entwicklung in die folgende Form zu bringen:

$$\begin{aligned}
S_k^J[\chi_{\min}; J] &= S_k^J[\varphi^{(0)} + \varepsilon \varphi^{(1)} + \dots; J] \\
&= S_k^J[\varphi^{(0)}; J] - \varepsilon \int d^d x \{J \varphi^{(1)*} + J^* \varphi^{(1)}\} \\
&\quad + \frac{1}{2} \varepsilon^2 \int d^d x (\varphi^{(1)*}, \varphi^{(1)}) \hat{S}_k^{(2)}[\varphi^{(0)}] \begin{pmatrix} \varphi^{(1)} \\ \varphi^{(1)*} \end{pmatrix} + \mathcal{O}(\varepsilon^3) \\
&= S_k^J[\varphi^{(0)}; J] - \frac{1}{2} \int d^d x (J^*, J) \hat{S}_k^{(2)}[\varphi^{(0)}]^{-1} \begin{pmatrix} J \\ J^* \end{pmatrix} + \mathcal{O}(J^2 J^{*2}) . \quad (11.6)
\end{aligned}$$

Von nun an wird die J -Abhängigkeit von χ_{\min} nicht weiter erwähnt, da die Kenntnis des quellenfreien Minimums $\varphi^{(0)}$ ausreicht, um die Zwei-Punkt-Funktion G_k aus dem entwickelten Ausdruck (11.1) herzuleiten.

Betrachten wir zuerst den Renormierungsgruppenfluß im oberen Skalenbereich $k^2 \geq k_{\text{cr}}^2 = M^2/2$. Dort stellt $\chi_{\min} = \varphi^{(0)} \equiv 0$ das relevante globale Minimum dar, so daß sich aus Gleichung (11.1) in Verbindung mit (11.6)

$$W_k[J] = \int d^d x J^* \omega_k(-\square)^{-1} J + \dots \quad (11.7)$$

ergibt. Dabei wurde für alle $k \geq k_{\text{cr}}$ die Konstante $N_k = 1$ gewählt, was zur Folge hat, daß der quellenunabhängige Anteil von W_k verschwindet: $W_k[0] = 0$. Anhand von (11.7) läßt sich erkennen, daß $G_k(p^2)$ im vorliegenden Fall dem k -abhängigen "Tree-Level"-Propagator $\omega_k(p^2)^{-1}$, d.h. dem Propagator der klassischen Wirkung S_k entspricht. Aus den Gleichungen (9.15) und (9.16) folgt dann, daß der effektive kinetische Term die nachstehende Form annimmt:

$$\Sigma_k(p^2) = \Omega(p^2) , \quad \forall k^2 \geq M^2/2 . \quad (11.8)$$

Offensichtlich ist er mit dem klassischen kinetischen Term identisch. Wir stellen somit fest, daß sich beim inversen Propagator im frühen Stadium der Evolution, d.h., solange k größer als k_{cr} ist, abgesehen von den hier vernachlässigten Loop-Effekten keine Renormierungseffekte bemerkbar machen. Dies war auch nicht anders zu erwarten, da in diesem Skalenbereich der kinetische Term von S_k , also $\omega_k(p^2)$, positiv und die durch den Cutoffterm modifizierte klassische Theorie somit stabil ist. Es gibt also keinen Anlaß zur klassischen Renormierung, die ja den obigen Ausführungen entsprechend durch Instabilitäten induziert wird.

Die Situation ändert sich, sobald k unter den kritischen Wert k_{cr} fällt. In diesem "späten" Evolutionsstadium entspricht der relevante Sattelpunkt dem entarteten Minimum aus Gleichung (10.15), welches durch den Einheitsvektor n_μ und die Phase α parametrisiert ist. Somit ist die in Gleichung (11.1) symbolisch angedeutete "Summation" über χ_{min} als Integration über die Vakuummannigfaltigkeit $S^1 \times S^{d-1}$ aufzufassen. Wie sich herausstellen wird, ist diese Integration von entscheidender Bedeutung für die Wiederherstellung bzw. Beibehaltung der $U(1)$ - und der $ISO(d)$ -Invarianz in W_k bzw. Γ_k . (In Anhang N wird untersucht, welche Auswirkungen es hat, wenn man die Integration über die Vakuummannigfaltigkeit nicht vornimmt.)

Als Ausgangspunkt für die Berechnung von G_k und Σ_k dient wieder Gleichung (11.6). Dabei ist zu beachten, daß im Falle des entarteten Minimums (10.15) die folgende Beziehung gilt:

$$\begin{aligned} S_k^J [\varphi^{(0)}; J] &= S_k [\varphi^{(0)}] - \int d^d x \{ J \varphi^{(0)*} + J^* \varphi^{(0)} \} \\ &= -\frac{\mathcal{V}}{2\lambda} \omega_k^2(M^2) - \sqrt{-\frac{1}{\lambda} \omega_k(M^2)} \left(\tilde{J}(Q_0) e^{-i\alpha} + \tilde{J}^*(Q_0) e^{i\alpha} \right). \end{aligned} \quad (11.9)$$

Hier bezeichnet $\tilde{J}(p)$ die Fourier-Transformierte von $J(x)$. Weist die betrachtete Quelle $J(x)$ keine Fourier-Komponenten zu Impulsen mit $p^2 = Q_0^2 = M^2$ auf, so fällt der letzte Term aus (11.9) heraus. Man setzt nun den Ausdruck für $S_k^J[\chi_{\text{min}}, J]$ aus Gleichung (11.6), der aus dem Wegfallen des besagten Terms resultiert, in die rechte Seite von (11.1) ein und entwickelt auch die linke Seite dieser Gleichung nach den Quellen, was zu der folgenden Beziehung führt:¹

$$\begin{aligned} \exp \{ W_k[0] \} \left(1 + W_k^{\text{quad}}[J] + \dots \right) &= N_k \exp \left\{ \frac{\mathcal{V}}{2\lambda} \omega_k^2(M^2) \right\} \\ &\times \int_0^{2\pi} d\alpha \int_{S^{d-1}} d\mu(n) \left\{ 1 + \frac{1}{2} \int d^d x (J^*, J) \hat{S}_k^{(2)} [\varphi^{(0)}]^{-1} \begin{pmatrix} J \\ J^* \end{pmatrix} + \dots \right\}. \end{aligned} \quad (11.10)$$

Hier bezeichnet $\int d\mu(n)$ das $SO(d)$ -invariante Maß auf S^{d-1} . Da $\omega_{k_{\text{cr}}}(M^2) = 0$ gilt, muß man für $k < k_{\text{cr}}$ offensichtlich

$$N_k = [2\pi \Omega_{d-1}]^{-1} \quad (11.11)$$

¹An dieser Stelle sei angemerkt, daß die Grenzübergänge $J \rightarrow 0$ und $\mathcal{V} \rightarrow \infty$ eventuell nicht vertauschen. Unsere Betrachtungen basieren darauf, daß der Limes $\mathcal{V} \rightarrow \infty$ erst zum Schluß gebildet wird. Natürlich hängt die "korrekte" Reihenfolge der Limites von der physikalischen Situation ab, die man untersuchen möchte. Üblicherweise werden in der Quantenfeldtheorie und in der statistischen Mechanik diese Grenzübergänge in genau umgekehrter Reihenfolge vollzogen, d.h. man schickt zuerst \mathcal{V} gegen unendlich und danach J gegen Null. Da aber das vorliegende skalare Modell den konformen Faktor der Euklidischen Quanten-Gravitation auf Raumzeiten mit *endlichem* Volumen (S^d etc.) simulieren soll, muß hier zuerst der Grenzwert $J \rightarrow 0$ gebildet werden.

wählen, um zu erreichen, daß $W_k[0]$ am Übergangspunkt $k = k_{\text{cr}} \equiv M/\sqrt{2}$ stetig ist. Dabei verkörpert $\Omega_{d-1} \equiv \int_{S^{d-1}} d\mu(n)$ das Volumen der $(d-1)$ -Sphäre. Somit ergibt sich

$$W_k[0] = -C_k \mathcal{V}, \quad (11.12)$$

wobei

$$C_k = -\frac{1}{2\lambda} \omega_k^2(M^2) = -\frac{1}{8\lambda} (M^2 - 2k^2)^2. \quad (11.13)$$

Vergleicht man in (11.10) weiterhin die Koeffizienten der Terme von zweiter Ordnung in den Quellen, so ergibt sich

$$W_k^{\text{quad}}[J] = [2\pi \Omega_{d-1}]^{-1} \int_0^{2\pi} d\alpha \int_{S^{d-1}} d\mu(n) \frac{1}{2} \int d^d x (J^*, J) \hat{S}_k^{(2)}[\varphi^{(0)}]^{-1} \begin{pmatrix} J \\ J^* \end{pmatrix}. \quad (11.14)$$

Bevor in dem obigen Ausdruck die Integration über die Vakuummannigfaltigkeit explizit ausgeführt werden kann, ist es erforderlich, den Operator $\hat{S}_k^{(2)}[\varphi^{(0)}]$ aus Gleichung (11.5) zu invertieren. Für den inversen Operator findet man den folgenden Ausdruck:

$$\begin{aligned} & \hat{S}_k^{(2)}[\varphi^{(0)}]^{-1} \quad (11.15) \\ &= \begin{pmatrix} [\omega_k(-\mathcal{D}^{*2}) - 2\omega_k(M^2)] P_k(\square, \mathcal{D}^{*2}) & \omega_k(M^2) e^{2iMn_\mu x_\mu + 2i\alpha} P_k(\square, \mathcal{D}^2) \\ \omega_k(M^2) e^{-2iMn_\mu x_\mu - 2i\alpha} P_k(\square, \mathcal{D}^{*2}) & [\omega_k(-\mathcal{D}^2) - 2\omega_k(M^2)] P_k(\square, \mathcal{D}^2) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Die hier eingeführten Operatoren P_k , \mathcal{D}_μ und \mathcal{D}_μ^* sind durch

$$P_k(\square, \mathcal{D}^2) \equiv [[\omega_k(-\mathcal{D}^2) - 2\omega_k(M^2)] [\omega_k(-\square) - 2\omega_k(M^2)] - \omega_k^2(M^2)]^{-1} \quad (11.16)$$

und

$$\mathcal{D}_\mu = \partial_\mu + 2iMn_\mu, \quad \mathcal{D}_\mu^* = \partial_\mu - 2iMn_\mu \quad (11.17)$$

definiert. Man setzt nun (11.15) in (11.14) ein und führt zuerst die Integration über α aus. Diese hat zur Folge, daß die Beiträge von den nichtdiagonalen Einträgen des Matrix-Differentialoperators $\hat{S}_k^{(2)}[\varphi^{(0)}]^{-1}$ verschwinden. Somit treten keine J^2 - und J^{*2} -Terme mehr auf, wodurch die U(1)-Invarianz gewährleistet ist. Bei den Beiträgen von den diagonalen Einträgen, die allesamt unabhängig von der Phase α sind, produziert diese Integration lediglich einen multiplikativen Faktor 2π .

Im nächsten Schritt gehen wir zur Impulsraumdarstellung über und vertauschen die beiden übrigen (bis zu diesem Punkt voneinander unabhängigen) Integrationen über den Impuls p und die Richtung des Einheitsvektors n , so daß die letztere zuerst ausgeführt wird. Die einfachste Möglichkeit, dieses Integral zu lösen, ergibt sich, wenn man das n -Koordinatensystem so wählt, daß eine seiner Achsen parallel zum Impuls p liegt. Nachdem

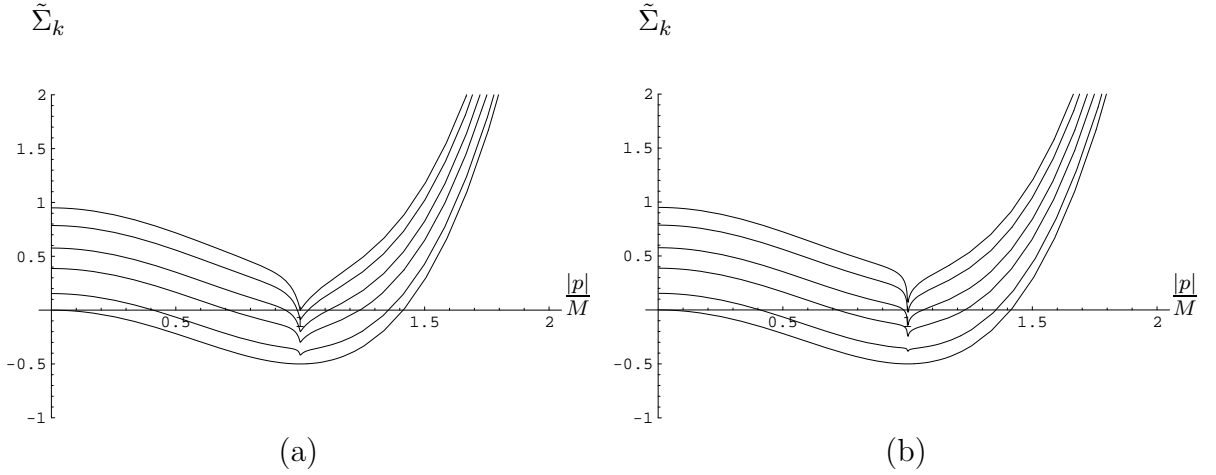


Abbildung 11.1: Der kinetische Term $\tilde{\Sigma}_k$ (in Einheiten von M^2) in (a) $d = 3$ und (b) $d = 4$ Dimensionen als Funktion von $|p|/M$. Die einzelnen Kurven beziehen sich auf verschiedene k -Werte. Die unterste Kurve entspricht $\kappa \equiv k/M = k_{\text{cr}}/M = 1/\sqrt{2}$, während sich die übrigen Kurven in ansteigender Reihenfolge für die κ -Werte 0.65, 0.55, 0.45, 0.3 und 0 ergeben.

man Polarkoordinaten für die Integration über die $(d-1)$ -Sphäre eingeführt hat, enthält der Integrand dann nämlich, abgesehen von den im Volumenelement der $(d-1)$ -Sphäre auftretenden Winkeln, nur noch den Winkel θ , der von p und n eingeschlossen wird und über das Skalarprodukt $p_\mu n_\mu = |p| \cos \theta$ in (11.14) Einzug hält. Folglich hat man es hier nur noch mit einer einzigen nichttrivialen Integration zu tun, und zwar mit der über θ . Die übrigen $d-2$ Winkelintegrale liefern lediglich das Volumen einer $(d-2)$ -Sphäre und somit einen multiplikativen Faktor Ω_{d-2} . Insgesamt resultiert daraus

$$W_k[J] = W_k[0] + \int \frac{d^d p}{(2\pi)^d} \tilde{J}^*(p) \tilde{G}_k(|p|) \tilde{J}(p) + \mathcal{O}(J^2 J^{*2}) , \quad (11.18)$$

wobei man für $\tilde{G}_k(|p|)$ den nachstehenden Ausdruck erhält:

$$\begin{aligned} \tilde{G}_{k=M\kappa}(|p| = Mq) &= M^{-2} \frac{\Omega_{d-2}}{\Omega_{d-1}} \int_0^{(1+\delta_{d,2})\pi} d\theta \sin^{d-2} \theta \left[\left(\frac{(q^2 - 1)^2}{2} + \frac{1}{2} - \kappa^2 \right) \right. \\ &\quad \times \left(\frac{q^4}{2} - 4q^3 \cos \theta + q^2 (3 + 8 \cos^2 \theta) - 12q \cos \theta + 5 - \kappa^2 \right) - \frac{1}{4} + \kappa^2 - \kappa^4 \left. \right]^{-1} \\ &\quad \times \left(\frac{q^4}{2} - 4q^3 \cos \theta + q^2 (3 + 8 \cos^2 \theta) - 12q \cos \theta + 5 - \kappa^2 \right) . \end{aligned} \quad (11.19)$$

Hier wurde $\kappa \equiv k/M$ und $|p| = Mq$ gesetzt. $G_k(p^2) \equiv \tilde{G}_k(|p| \equiv (p_\mu p_\mu)^{1/2})$ verkörpert offensichtlich den durch (9.13) definierten effektiven Propagator. Aus den Gleichungen

(9.14)-(9.16) folgt damit wiederum, daß die effektive Mittelwertwirkung für kleine ϕ die Form

$$\Gamma_k[\phi] = -\frac{\mathcal{V}}{8\lambda} (M^2 - 2k^2)^2 + \int \frac{d^d p}{(2\pi)^d} \tilde{\phi}^*(p) \tilde{\Sigma}_k(|p|) \tilde{\phi}(p) + \mathcal{O}(\phi^2 \phi^{*2}) \quad (11.20)$$

besitzt, wobei der effektive kinetische Term $\Sigma_k(p^2) \equiv \tilde{\Sigma}_k(|p| \equiv (p_\mu p_\mu)^{1/2})$ sich gemäß der Beziehung $\tilde{\Sigma}_k(|p|) \equiv \tilde{G}_k(|p|)^{-1} - k^2$ aus dem effektiven Propagator (11.19) ergibt und $\tilde{\phi}(p)$ die Fourier-Transformierte von $\phi(x)$ verkörpert.

Das in (11.19) verbliebene Integral über θ wurde für die Fälle $d = 2$, $d = 3$ und $d = 4$ berechnet. Dabei ergaben sich explizite, analytische Ausdrücke für den kinetischen Term bei beliebigen k -Werten. Die Ausdrücke, die daraus für $d = 3$, $k = 0$ und $d = 4$, $k = 0$ folgen, sind in Anhang O aufgelistet. Die entsprechenden Ausdrücke für $k > 0$ sowie derjenige für $d = 2$ wurden hier allerdings weggelassen, da sie allesamt extrem umfangreich sind.

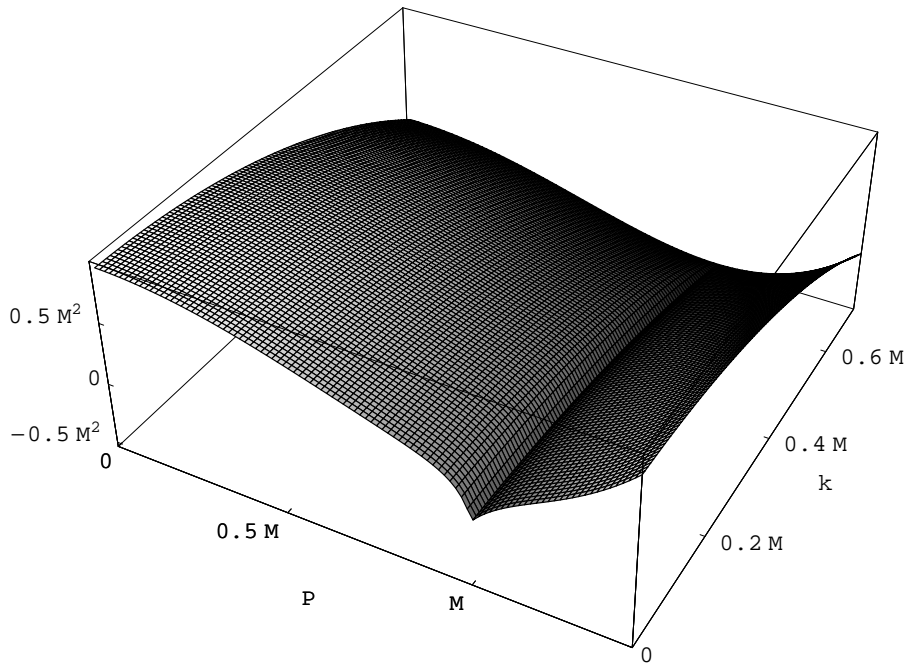


Abbildung 11.2: Der kinetische Term $\tilde{\Sigma}_k$ in $d = 3$ Dimensionen als Funktion von $p \equiv |p|$ und k .

Das Verhalten der verschiedenen kinetischen Terme wird anhand der Abbildungen 11.1, 11.2 und 11.3 veranschaulicht. Diese enthalten zwei verschiedene Arten von Plots. In den 3D-Plots aus den Abbildungen 11.2 und 11.3 wird der kinetische Term in Abhängigkeit der beiden Variablen $|p|$ und k dargestellt, wohingegen die 2D-Plots aus Abbildung 11.1

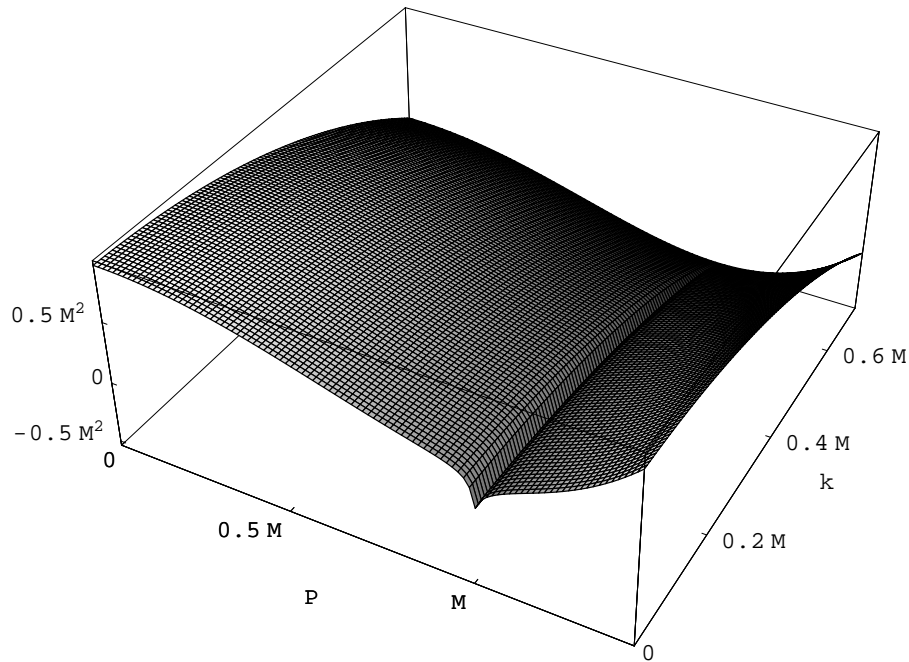


Abbildung 11.3: Der kinetische Term $\tilde{\Sigma}_k$ in $d = 4$ Dimensionen als Funktion von $p \equiv |p|$ und k .

gewisse Schnitte der zugehörigen 3D-Plots zeigen, die sich auf feste k -Werte beziehen. Da der kinetische Term im Skalenbereich $k \geq M/\sqrt{2}$ keine (klassische) Renormierung erfährt und sich somit bei Variation der Skala nicht ändert, wurde dieser Bereich in den Plots nicht berücksichtigt. Dementsprechend beginnen sie erst bei $k = M/\sqrt{2} \equiv k_{\text{cr}}$.

Offensichtlich spiegeln die Plots für die verschiedenen Werte von d qualitativ und größtenteils auch quantitativ das gleiche Verhalten wider. Bei $k = k_{\text{cr}}$ wird der kinetische Term durch die Funktion $\Omega(p^2)$ beschrieben, deren Eigenschaften bereits weiter oben diskutiert wurden. Wenn man sich in Richtung kleinerer Skalen bewegt, dann wird die komplette Funktion angehoben, so daß der Impulsbereich, in dem der kinetische Term $\tilde{\Sigma}_k(|p|)$ negative Werte annimmt, zunehmend kleiner wird. Bei $k = 0$ ist $\tilde{\Sigma}_k(|p|)$ schließlich vollständig nichtnegativ. Die Theorie hat sich somit dynamisch stabilisiert.

Im Laufe des Renormierungsgruppenflusses bildet sich beim kinetischen Term um $|p| = M$ herum eine nach unten gerichtete Spitze heraus, die mit sinkender Skala $k \rightarrow 0$ zunehmend schärfer wird. Wenn $k = 0$ erreicht ist, weist die Funktion $\tilde{\Sigma}_{k=0}(|p|)$ bei $|p| = M$ schließlich eine spitz zulaufende “Singularität” auf, bei der sie zwar nicht differenzierbar, aber noch stetig ist. Es ist im wesentlichen die Form dieses nach unten gerichteten “Peaks”, die den Hauptunterschied zwischen den Resultaten für $d = 2$, $d = 3$ und $d = 4$

ausmacht.² Die Spitze wird offenkundig mit ansteigender Dimensionalität d schärfer.

Abschließend sei angemerkt, daß der sich hier für $d = 3$ und $k = 0$ ergebende effektive kinetische Term mit dem renormierten inversen Propagator $\Omega_{\text{eff}} \equiv \Sigma_{k=0}$ übereinstimmt, der bereits in Abschnitt 8.1 präsentiert wurde, siehe Abbildung 8.1.

11.2 Bereiche im Feldraum ohne klassische Renormierung

Die Resultate, die wir bis zu diesem Punkt für die effektive Mittelwertwirkung erhalten haben, beziehen sich hauptsächlich auf die Form, die ihr kinetischer Term für kleine Werte von ϕ aufweist. In den folgenden Abschnitten werden wir die wesentlichen Eigenschaften der *vollständigen* effektiven Mittelwertwirkung und des zugehörigen effektiven Potentials untersuchen, durch die sich das skalare Modell auszeichnet.

In Abschnitt 9.2 wurde bereits darauf hingewiesen, daß es Bereiche im Raum der ϕ -Felder gibt, in denen keine klassische Renormierung stattfindet und demzufolge die effektive Wirkung in klassischer Näherung mit der nackten übereinstimmt:

$$\Gamma_k[\phi] = S[\phi] = \int d^d x \left\{ \phi^* \Omega(-\square) \phi + \frac{\lambda}{2} |\phi|^4 \right\}. \quad (11.21)$$

Offensichtlich gilt $\Gamma_k = S$ für den *vollständigen* Raum klassischer Felder ϕ , solange wir uns im “frühen Evolutionsstadium” bewegen, das durch $k \geq k_{\text{cr}}$ charakterisiert ist. Denn in diesem Fall ist $\hat{S}_k^{(2)}[\chi]$ für alle χ positiv definit und die Wirkung S_k somit positiv und konvex.

Betrachten wir nun den Fall $k < k_{\text{cr}}$. Aus der in Abschnitt 9.2 geführten Diskussion folgt unmittelbar, daß keine klassischen Renormierungseffekte zu erwarten sind, falls ϕ nur leicht von χ_{min} abweicht. Weiterhin läßt sich leicht nachvollziehen, daß in führender Ordnung $\chi_{\text{min}} = \phi$ und somit auch $\Gamma_k = S$ gilt, solange $|\phi|$ genügend groß ist. Dies werden wir im folgenden zeigen. Dazu nehmen wir an, daß die Bewegungsgleichung (10.2) in guter Näherung durch

$$J = \lambda |\chi_{\text{min}}|^2 \chi_{\text{min}} \quad (11.22)$$

beschrieben wird. Das bedeutet, daß χ_{min} , und folglich J so groß sind, daß der $\omega_k(-\square)$ -Term aus (10.2) gegenüber den Termen aus (11.22) vernachlässigt werden kann. Für Quellen, die diese Eigenschaft besitzen und somit zu der Gleichung (11.22) führen, läßt sich

²Die entsprechenden Plots für $d = 2$ wurden zwar angefertigt, sie werden hier allerdings weggelassen, da sie denjenigen für $d = 3$ und $d = 4$ sehr ähnlich sind.

das erzeugende Funktional W_k durch den folgenden Ausdruck approximieren:

$$W_k[J] = -S_k^J[\chi_{\min}; J] = - \int d^d x \left\{ \frac{\lambda}{2} |\chi_{\min}|^4 - J \chi_{\min}^* - J^* \chi_{\min} \right\}. \quad (11.23)$$

Für die Legendre-Transformierte von W_k ergibt sich damit

$$\tilde{\Gamma}_k[\phi] = \int d^d x \frac{\lambda}{2} |\phi|^4 = S[\phi], \quad (11.24)$$

wobei $\phi = \chi_{\min}$ gilt. Ist der Term $\int d^d x \phi^* \omega_k(-\square)\phi$, der unter den obigen Voraussetzungen gegenüber $\int d^d x \lambda/2 |\phi|^4$ vernachlässigbar ist, mindestens von derselben Größenordnung wie $\int d^d x k^2 |\phi|^2$, dann ist automatisch auch der zuletzt genannte Term gegenüber demjenigen aus (11.24) vernachlässigbar, was schließlich $\Gamma_k = \tilde{\Gamma}_k = S$ zur Folge hat. Andernfalls muß man zusätzlich annehmen, daß $k^2 |\phi|^2 \ll \lambda |\phi|^4$ gilt, um dasselbe Resultat $\Gamma_k = S$ zu erhalten. Offensichtlich sorgt in beiden Fällen das sehr große Feld $\phi = \chi_{\min}$ dafür, daß der Operator $\hat{S}_k^{(2)}[\chi_{\min}]$ positiv definit wird. Es übernimmt dabei gewissermaßen die Funktion eines Cutoffs.

Im folgenden sollen die Ausführungen hierzu noch präzisiert werden. Dazu beschränken wir unsere Betrachtungen von nun an auf Felder ϕ , die ebene Wellen mit reeller, positiver Amplitude A sind:

$$\phi(x) = A \exp(ip_\mu x_\mu + i\beta). \quad (11.25)$$

Beginnen wir mit der Annahme, daß ϕ die Beziehung

$$\Gamma_k[A \exp(ip_\mu x_\mu + i\beta)] = S[A \exp(ip_\mu x_\mu + i\beta)] \quad (11.26)$$

in führender Ordnung der semiklassischen Entwicklung erfüllt. Mit Hilfe der in Anhang M.1 gewonnenen Informationen über χ_{\min} lassen sich nun diejenigen Bedingungen bestimmen, die der Parameter A erfüllen muß, damit tatsächlich $\Gamma_k = S$ realisiert ist. Dabei verfährt man folgendermaßen: Zuerst setzt man (11.25) in (11.21) ein und addiert dann den Cutoffterm $k^2 \int d^d x |\phi|^2$, was zu dem nachstehenden Ausdruck führt:

$$\tilde{\Gamma}_k[A \exp(ip_\mu x_\mu + i\beta)] \equiv \mathcal{V} [U_k(A; p^2) + k^2 A^2] = \mathcal{V} \left[\omega_k(p^2) A^2 + \frac{\lambda}{2} A^4 \right]. \quad (11.27)$$

Aus (11.27) läßt sich gemäß

$$J = \frac{\delta \tilde{\Gamma}_k}{\delta \phi^*} [A \exp(ip_\mu x_\mu + i\beta)] = [\omega_k(p^2) A + \lambda A^3] \exp(ip_\mu x_\mu + i\beta) \quad (11.28)$$

die zu ϕ gehörige Quelle bestimmen. Offensichtlich stellt auch J eine ebene Welle dar. Setzt man $J = \varepsilon \exp(ip_\mu x_\mu + i\beta)$, so vereinfacht sich diese Gleichung zu

$$\omega_k(p^2) A + \lambda A^3 = \varepsilon. \quad (11.29)$$

Wenn man in (11.29) A durch χ_0 ersetzt, erhält man die in Anhang M.1 diskutierte Gleichung (M.5) zurück. Somit kann man die Lösung zu (11.29) aus Anhang M.1 entnehmen. Sie ist von der Form

$$A(\varepsilon; p) = \begin{cases} \chi_0(\varepsilon; p) & \text{für } \omega_k(p^2) \geq 0 \\ \tilde{\chi}_0(\varepsilon; p) & \text{für } \omega_k(p^2) < 0 \end{cases} . \quad (11.30)$$

Die hier auftretenden Funktionen $\chi_0(\varepsilon; p)$ und $\tilde{\chi}_0(\varepsilon; p)$ sind durch die Gleichungen (M.6) und (M.11) definiert.³ Mit Hilfe der Gleichungen (11.29) und (11.30) läßt sich jetzt die Legendre-Transformation von $\tilde{\Gamma}_k$ zu W_k vollziehen. Als Resultat erhält man

$$\begin{aligned} W_k [J = \varepsilon \exp(ip_\mu x_\mu + i\beta)] &= -\mathcal{V} \left[\omega_k(p^2) A^2(\varepsilon; p) + \frac{\lambda}{2} A^4(\varepsilon; p) - 2\varepsilon A(\varepsilon; p) \right] \\ &= -S_k^J [A(\varepsilon; p) \exp(ip_\mu x_\mu + i\beta); \varepsilon \exp(ip_\mu x_\mu + i\beta)] . \end{aligned} \quad (11.31)$$

Aus den Anhängen M.1 und M.2 ist bekannt, daß der Ausdruck auf der rechten Seite von (11.31) genau dann der (mit -1 multiplizierten) "on-shell"-Wirkung am globalen Minimum $-S_k^J[\chi_{\min}; J]$ entspricht, wenn entweder (I): $k \geq k_{\text{cr}}$ oder (II): $k < k_{\text{cr}}$ und $A(\varepsilon; p) \geq A_{\text{triv}}(k)$ gilt. Dabei bezeichnet

$$A_{\text{triv}}(k) \equiv \begin{cases} \sqrt{(M^2 - 2k^2)/(2\lambda)} & \text{für } k < k_{\text{cr}} \\ 0 & \text{für } k \geq k_{\text{cr}} \end{cases} \quad (11.32)$$

den kritischen Wert der Amplitude, der den Bereich, in dem die triviale Beziehung $\Gamma_k = S$ gilt ($A \geq A_{\text{triv}}(k)$), von demjenigen separiert, in dem dies nicht mehr der Fall ist ($A < A_{\text{triv}}(k)$).⁴ Er hängt von k ab, aber nicht vom Impuls p . An dem Punkt $k = k_{\text{cr}}$, an dem der Übergang zwischen dem trivialen und dem nichttrivialen k -Bereich stattfindet, und auch darüber hinaus ($k > k_{\text{cr}}$), ist $A_{\text{triv}}(k) = 0$. Wenn man dann die Skala k , von $k = k_{\text{cr}}$ ausgehend, verkleinert, wächst $A_{\text{triv}}(k)$ stetig an und das A -Intervall, in dem sich nichttriviale Renormierungseffekte bemerkbar machen, weitet sich aus.

Drückt man die Gleichheit von effektiver und nackter Wirkung $\Gamma_k = S$ auf dem Niveau der effektiven Potentiale $U_k(A; p^2)$ aus, welche in Gleichung (9.17) für ebene Wellen der Form (11.25) eingeführt wurden, so ergibt sich die Beziehung $U_k(A; p^2) = U^{(\text{cl})}(A; p^2)$. Dabei bezeichnet $U^{(\text{cl})}(A; p^2)$ das klassische Potential, welches wie folgt definiert ist:

$$U^{(\text{cl})}(A; p^2) \equiv \Omega(p^2) A^2 + \frac{\lambda}{2} A^4 . \quad (11.33)$$

³In dem Fall $\omega_k(p^2) < 0$, für den es eigentlich drei reelle Lösungen gibt, berücksichtigen wir nur die Lösung, die bei $\Delta = 0$ (siehe (M.7)) stetig in diejenige für $\omega_k(p^2) \geq 0$ übergeht. Die beiden anderen Lösungszweige finden hier keine Beachtung.

⁴Falls $k < k_{\text{cr}}$ und $|p| = M$ gilt, nimmt die Amplitude A den Wert $A_{\text{triv}}(k)$ erst bei $\varepsilon = 0$, also bei $J = 0$, an. Im Fall $J = 0$ entspricht χ_{\min} dem *entarteten* Minimum aus Gleichung (10.15), dessen Phase α und Impulsrichtung n_μ zunächst einmal freie Parameter verkörpern. Letzteres ist aber nicht mehr der Fall, wenn eine Quelle mit Impuls $|p| = M$ adiabatisch abgeschaltet wurde. (Weitere Details hierzu folgen später.)

Sein Minimum liegt bei

$$A_{\min}^{(\text{cl})}(p) = \begin{cases} \sqrt{-\Omega(p^2)/\lambda} & \text{für } p^2 \in (0, 2M^2) \\ 0 & \text{für } p^2 \in \{0\} \cup [2M^2, \infty) \end{cases} \quad (11.34)$$

Dort nimmt es den Wert

$$U^{(\text{cl})}(A_{\min}^{(\text{cl})}(p); p^2) = \begin{cases} -\Omega^2(p^2)/(2\lambda) & \text{für } p^2 \in (0, 2M^2) \\ 0 & \text{für } p^2 \in \{0\} \cup [2M^2, \infty) \end{cases} \quad (11.35)$$

an. Im Fall $p^2 \in \{0\} \cup [2M^2, \infty)$ gilt für alle $k < k_{\text{cr}}$ die Beziehung $0 = A_{\min}^{(\text{cl})} < A_{\text{triv}}(k)$, so daß das klassische Minimum hier immer in dem von klassischen Renormierungseffekten betroffenen Amplitudenbereich angesiedelt ist. Dies verhält sich im Fall $p^2 \in (0, 2M^2)$ anders: Liegt k nicht allzu weit unterhalb von k_{cr} , dann befindet sich das klassische Minimum noch in dem Amplitudenbereich, in den es nicht zur klassischen Renormierung kommt ($A_{\text{triv}}(k) < A_{\min}^{(\text{cl})}$). Bei $k = 0$ ist A_{triv} jedoch immer größer als $A_{\min}^{(\text{cl})}$, mit einer Ausnahme: Im Fall $p^2 = M^2$ gilt $A_{\text{triv}}(k = 0) = A_{\min}^{(\text{cl})}$.

11.3 Die Struktur der effektiven Mittelwertwirkung

Im vorangegangenen Abschnitt wurde gezeigt, daß die effektive Mittelwertwirkung $\Gamma_k[\phi]$ für ebene Wellen $\phi = A \exp(ip_\mu x_\mu + i\beta)$ in der klassischen Näherung mit der nackten Wirkung S übereinstimmt, solange $A \geq A_{\text{triv}}(k)$ gilt. Im folgenden werden wir diesen Amplitudenbereich als den ‘‘Außenbereich’’ des effektiven Potentials bezeichnen. Der entsprechende ‘‘Innenbereich’’ $A < A_{\text{triv}}(k)$ zeichnet sich durch das Auftreten nichttrivialer klassischer Renormierungseffekte aus, die durch die Instabilität der nackten Wirkung hervorgerufen werden. Im Fall $k \geq k_{\text{cr}}$ existiert kein Innenbereich ($A_{\text{triv}}(k \geq k_{\text{cr}}) \equiv 0$). Somit ist hier das effektive Potential für alle $A \geq 0$ von der Form (11.33). Gleiches gilt im Falle $k < k_{\text{cr}}$ für den Außenbereich. Es erweist sich hier jedoch als weitaus schwieriger, das Verhalten zu bestimmen, das $U_k(A; p^2)$ im Innenbereich an den Tag legt. Dabei müssen je nachdem, welchen Wert der Betrag des Impulses p annimmt, verschiedene Fälle unterschieden werden.

11.3.1 Der Fall $|p| \neq M$

Betrachten wir zuerst den Fall $|p| \neq M$. Den Resultaten des vorigen Abschnitts zufolge bezieht sich die obige Definition des effektiven Potentials

$$\Gamma_k [A \exp(ip_\mu x_\mu + i\beta)] \equiv \mathcal{V} U_k(A; p^2) \quad (11.36)$$

auf Quellen, die ebene Wellen der Form $J = \varepsilon \exp(ip_\mu x_\mu + i\beta)$ darstellen. Dabei steht die Amplitude der Quelle ε in folgender Beziehung zu A , p und k :

$$\varepsilon = \frac{1}{2} \frac{\partial U_k(A; p^2)}{\partial A} + k^2 A. \quad (11.37)$$

Da gemäß dem Abschnitt 11.2 und dem Anhang M.1 der Außenbereich $A \geq A_{\text{triv}}(k)$ (für $k < k_{\text{cr}}$) bereits durch alle ε -Werte aus dem Intervall $[\varepsilon_k(p^2), \infty)$ parametrisiert ist, muß der Innenbereich von U_k folglich den ε -Werten aus dem komplementären Intervall $[0, \varepsilon_k(p^2))$ entsprechen. Hier ergibt sich nun das Problem, daß wir den exakten Ausdruck für die Feldkonfiguration χ_{min} , die im Bereich $\varepsilon < \varepsilon_k(p^2)$ die Wirkung S_k^J global minimiert, nicht kennen. Daher sind wir auch nicht in der Lage, den Innenbereich des Potentials $U_k(A; p^2)$ *exakt* zu berechnen. Dennoch ist es möglich, das *qualitative* Verhalten zu bestimmen, durch das sich $U_k(A; p^2)$ im Bereich $A < A_{\text{triv}}(k)$ auszeichnet. Dazu sammeln wir zunächst alle erhältlichen Informationen über $U_k(A; p^2)$ und fügen sie dann zu einem einheitlichen Bild zusammen.

Wie bereits in Abschnitt 11.1 nehmen wir an, daß Γ_k zumindest im Bereich hinreichend kleiner $|\phi|$ ein analytisches Funktional von ϕ und ϕ^* darstellt. Aus der U(1)-Invarianz⁵ folgt dann automatisch, daß $U_k(A; p^2)$ eine gerade, analytische Funktion von A ist und somit gemäß

$$U_k(A; p^2) = -\frac{1}{8\lambda} (M^2 - 2k^2)^2 + \sum_{n=1}^{\infty} u_k^{(2n)}(p) A^{2n} \quad (11.38)$$

um $A = 0$ entwickelt werden kann. In Abschnitt 11.1 wurde bereits der erste Koeffizient dieser Entwicklung $u_k^{(2)}(p) = \Sigma_k(p^2)$ berechnet. Zudem wird in Anhang P ein expliziter Ausdruck für $u_k^{(4)}$ hergeleitet. Dieser ist von der folgenden Form:

$$u_k^{(4)}(p) = -(\Sigma_k(p^2) + k^2)^4 G_k^{(4)}(p^2). \quad (11.39)$$

Die in (11.39) enthaltene Vier-Punkt-Funktion $G_k^{(4)}(p^2)$ besitzt eine extrem komplizierte Struktur; sie wurde hier lediglich für einige bestimmte Werte von p und k numerisch ausgewertet. Dies läßt sich aber prinzipiell für jedes beliebige Tupel (p, k) wiederholen. Insgesamt steht uns damit ein Ausdruck zur Verfügung, der es uns ermöglicht, das Verhalten von $U_k(A; p^2)$ für hinreichend kleine Werte von A zu berechnen. Andererseits wissen wir, daß im Außenbereich $A \geq A_{\text{triv}}(k)$ das effektive Potential dem klassischen entspricht, d.h. $U_k(A; p^2) = \Omega(p^2) A^2 + (\lambda/2) A^4$.

Wenden wir uns nun dem Zwischenbereich zu, also dem A -Intervall, in dem einerseits (11.38) nicht mehr anwendbar ist und andererseits A noch unterhalb von $A_{\text{triv}}(k)$ liegt. Für

⁵Da der Parameter A als reell vorausgesetzt wurde, ist die U(1)-Invarianz von U_k nicht direkt erkennbar. Sie ist aber nichtsdestotrotz vorhanden. Dies erkennt man, wenn man bedenkt, daß A als Betrag einer komplexen Zahl $(A e^{i\beta})$ aufzufassen ist.

diesen Bereich liegen keine konkreten Informationen über U_k vor, so daß wir gezwungen sind, nach einer passenden Interpolation zu suchen. Diese sollte den Bereich kleiner A -Werte in einer zumindest qualitativ korrekten Weise mit dem Außenbereich verbinden. Es ist nun äußerst naheliegend, davon auszugehen, daß die gesuchte Interpolation in dem Sinn *minimal* ist, daß sie so wenige Extrema wie möglich aufweist. Wenn beispielsweise $U_k(0; p^2) < U^{(\text{cl})}(A_{\text{triv}}(k); p^2)$ gilt und wenn der Graph der Funktion U_k gleichzeitig bei $A = 0$ eine Linkskrümmung aufweist (und Σ_k somit positiv ist), dann interpolieren wir mit einer Funktion, die vom Bereich kleiner A -Werte bis hin zu $A_{\text{triv}}(k)$ monoton ansteigt. In gleicher Weise nehmen wir an, daß die interpolierende Funktion lediglich ein einziges Minimum aufweist, falls der Graph der Funktion U_k bei $A = 0$ nach rechts gekrümmt ist (d.h., wenn $\Sigma_k < 0$ gilt).

Dieses Approximationsschema läßt sich durch die drei folgenden Punkte rechtfertigen:

- i) Das Bild der minimalen Interpolation wird zumindest in einem Teil des Parameterraums durch die Resultate bestätigt, die sich ergeben, wenn man neben dem A^2 -Term auch den A^4 -Term aus (11.38) berücksichtigt.
- ii) Im Limes $k \rightarrow 0$ führt dieses Schema zu der erwarteten Konvexität von $U_0(A; p^2)$.
- iii) Die resultierenden $U_k(A; p^2)$ -Kurven gehen im Limes $|p| \rightarrow M$ in einfachster Weise stetig in die durch die Funktion $U_k(A; M^2)$ beschriebene Kurve über, welche *exakt* berechnet werden kann.

Im folgenden werden die beiden Fälle $\Omega(p^2) \geq 0$ und $\Omega(p^2) < 0$ nacheinander diskutiert.

Der Fall $\Omega(p^2) \geq 0$

Im Falle $\Omega(p^2) \geq 0$ liegen die zugehörigen p^2 -Werte in $\{0\} \cup [2M^2, \infty)$. Insbesondere ist hier der Fall $p = 0$ enthalten, der das herkömmliche effektive Potential liefert. Da im vorliegenden Fall Σ_k auch für alle $k < k_{\text{cr}}$ positiv ist, führt die minimale Interpolation hier zu einer monoton wachsenden Funktion. Abbildung 11.4 zeigt den typischen Verlauf einer entsprechenden U_k -Kurve und ihre k -Abhängigkeit. Die Form dieser Kurve verändert sich im Laufe des Renormierungsgruppenflusses nur geringfügig. Im Prinzip besteht die einzige Veränderung in einem Absinken von C_k , das durch ein Anwachsen der Steigung der Kurve im Bereich $A < A_{\text{triv}}(k)$ kompensiert wird, und zwar derart, daß (a) der Innen- und der Außenbereich bei $A = A_{\text{triv}}(k)$ stetig ineinander übergehen und (b) $U_{k_2}(A; p^2) < U_{k_1}(A; p^2)$ für alle (A, k_1, k_2) mit $A < A_{\text{triv}}(k_2)$ und $k_2 < k_1 < k_{\text{cr}}$ erfüllt ist.

Dieses Bild vom Renormierungsgruppenfluß des Potentials U_k wird durch die Resultate bestätigt, die sich aus der Näherungslösung (11.38) ergeben. Denn vergleicht man die Ergebnisse, die sich aus der reinen A^2 -Näherung ergeben, mit denjenigen, die aus der

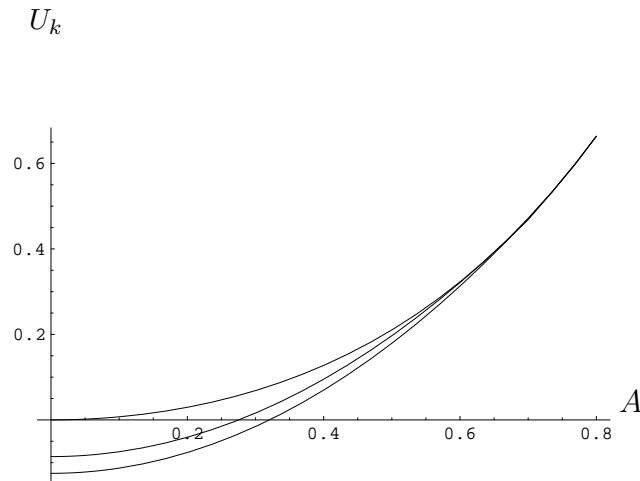


Abbildung 11.4: Qualitatives Verhalten von $U_k(A; p^2)$ (in Einheiten von M^4/λ) für Impulse p mit $p^2 \in \{0\} \cup [2M^2, \infty)$. Die drei abgebildeten Kurven beziehen sich auf die k -Werte $k = k_{\text{cr}}$ (obere Kurve), $k = k_l$ (mittlere Kurve), wobei $0 < k_l < k_{\text{cr}}$ gilt, und $k = 0$. Weiterhin wird A in Einheiten von $M/\sqrt{\lambda}$ angegeben.

Näherung resultieren, welche zusätzlich den A^4 -Term enthält, so stellt man folgendes fest: Der A^2 -Term liefert für alle $A \leq A_{\text{triv}}(k)$ den dominierenden Beitrag zu U_k und führt zu dem in Abbildung 11.4 dargestellten Verhalten, solange die Differenz von $|p|$ und M groß genug ist. In diesem Fall sorgen die Terme höherer Ordnung wie $u_k^{(4)}$ lediglich für geringfügige Korrekturen. Liegt $|p|$ allerdings in der Nähe von M , so ist die A^2 -Näherung nur für einen Bereich hinreichend kleiner A -Werte, der sich nicht über den kompletten inneren Bereich erstreckt, verlässlich. Hier sorgt der A^4 -Term hinsichtlich des oben postulierten Verhaltens von U_k für eine merkbare Verbesserung der Ergebnisse.

Dies wird anhand von Abbildung 11.5 veranschaulicht. Darin werden die Funktion $U^{(\text{cl})}(A; p^2)$ (die in den Parameterbereichen $k \geq k_{\text{crit}}$, A beliebig, sowie $k < k_{\text{cr}}$, $A \geq A_{\text{triv}}(k)$ mit dem exakten U_k übereinstimmt) und die genäherten Ausdrücke

$$\begin{aligned} U_k^{(2)}(A; p^2) &\equiv C_k + \Sigma_k(p^2) A^2 \\ U_k^{(4)}(A; p^2) &\equiv C_k + \Sigma_k(p^2) A^2 - (\Sigma_k(p^2) + k^2)^4 G_k^{(4)}(p^2) A^4 \end{aligned} \quad (11.40)$$

sowohl für $p = 0$, $k = 0$ als auch für $|p| = 3M$, $k = 0$ abgebildet. Offensichtlich ist die Differenz zwischen $p = 0$ und $|p| = M$ insofern nicht groß genug, als $U_0^{(2)}$ eine gute Näherung in dem kompletten Innenbereich darstellen könnte. Sie weist nur für sehr kleine Werte von A das erwartete Verhalten auf und wächst dann zu schnell an, um bei $A_{\text{triv}}(k = 0)$ mit $U^{(\text{cl})}$ zusammentreffen zu können. Der A^4 -Term bewirkt, daß diese Kurve nach unten gebogen wird. Somit liefert $U_0^{(4)}$ bereits für einen sichtlich größeren Bereich von A -Werten relativ genaue Ergebnisse, und die entsprechende Kurve reicht näher an die $U^{(\text{cl})}$ -

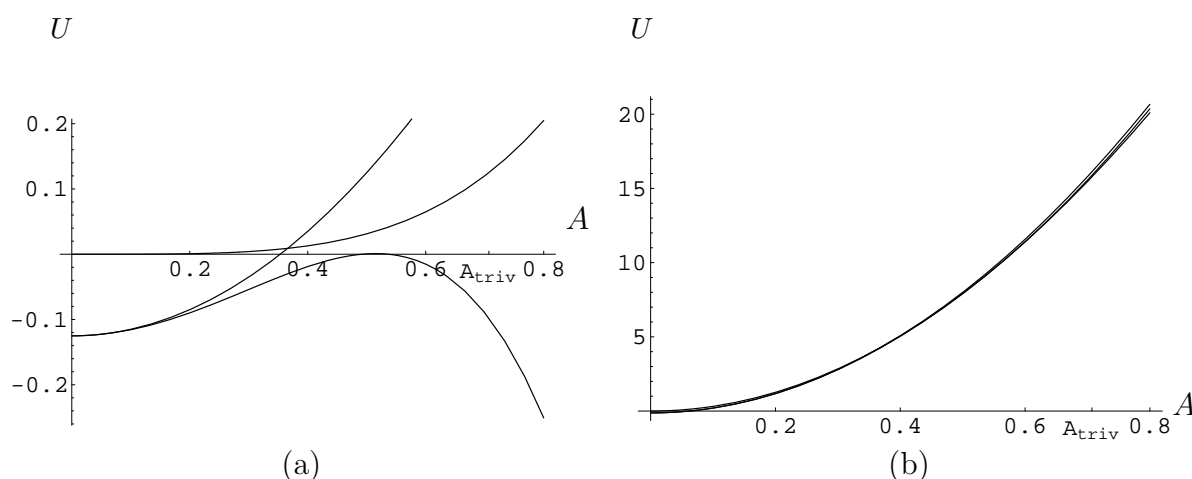


Abbildung 11.5: $U^{(\text{cl})}$, $U_{k=0}^{(2)}$ und $U_{k=0}^{(4)}$ (in Einheiten von M^4/λ) als Funktionen von A (in Einheiten von $M/\sqrt{\lambda}$). (a) Der Fall $p = 0$: Die Kurven für $U_{k=0}^{(2)}$ und $U_{k=0}^{(4)}$ sind diejenigen, die bei $A = 0$ zusammentreffen. Dabei entspricht $U_{k=0}^{(4)}$ der Kurve, die für große A eine negative Steigung aufweist. Die übrige Kurve stellt $U^{(\text{cl})}$ dar. (b) Der Fall $|p| = 3M$: Der Unterschied zwischen den drei Kurven ist kaum erkennbar. In der Nähe von $A_{\text{triv}}(k = 0) = M/\sqrt{2\lambda}$ ergibt sich hier $U_{k=0}^{(4)} < U^{(\text{cl})} < U_{k=0}^{(2)}$.

Kurve heran. Allerdings bricht auch die A^4 -Approximation bei Annäherung an $A_{\text{triv}}(k = 0)$ zusammen. Somit wird klar, daß in diesem Fall Terme höherer Ordnung notwendig sind, um zu erreichen, daß das entwickelte U_k aus Gleichung (11.38) bei $A_{\text{triv}}(k)$ mit der $U^{(\text{cl})}$ -Kurve zusammentrifft.

Im Fall $|p| = 3M$ verbessert sich die Situation erheblich. Hier liefern $U^{(\text{cl})}$, $U_0^{(2)}$ und $U_0^{(4)}$ für alle $A \leq A_{\text{triv}}(k = 0) = M/\sqrt{2\lambda}$ praktisch identische Ergebnisse. (Das liegt daran, daß für hinreichend große $|p|$ -Werte $\sum_{k=0}^{\infty} (p^2)^k \approx \Omega(p^2)$ gilt.) Aufgrund der Korrekturen, die der A^4 -Term anbringt, ist zu erwarten, daß $U_0^{(4)}$ besser mit dem exakten U_0 verträglich ist als $U_0^{(2)}$. Der Unterschied zwischen den beiden Approximationen ist aber zu klein, als daß er erkennbar wäre. Was sich jedoch mit Sicherheit anhand von Abbildung 11.5 festmachen läßt, ist, daß sowohl $U_0^{(2)}$ als auch $U_0^{(4)}$ konvex sind. Außerdem sei hier angemerkt, daß die Qualität der Näherung (11.38) für noch größere Impulse sogar noch weiter ansteigt.

Den allgemeinen Eigenschaften von Legendre-Transformierten nach zu urteilen, sollte $U_k(A; p^2)$ für alle Werte von p im Limes $k \rightarrow 0$ gegen eine konvexe Funktion von A konvergieren. Für die hier betrachteten Impulse ist diese Konvexität tatsächlich realisiert, wenn auch in einer eher trivialen Weise, denn das Potential war von vornherein konvex, d.h. für alle $k > 0$.

Der Fall $\Omega(p^2) < 0$

Kommen wir nun zu dem Fall $\Omega(p^2) < 0$, $|p| \neq M$. Dieser liegt bei Impulsen p mit $p^2 \in (0, 2M^2) \setminus \{M^2\}$ vor. Für solche Impulse liefern die A^2 - und die A^4 -Näherungen aus (11.40) keine verlässlichen Resultate, da die Terme höherer Ordnung bereits bei sehr kleinen Werten von $A < A_{\text{triv}}(k)$ die führenden Beiträge verkörpern. Die Qualität dieser Resultate entspricht maximal derjenigen, die sich im Fall $(p, k) = (0, 0)$ ergibt (siehe oben), und je mehr $|p|$ sich M nähert, desto stärker nimmt sie ab. Folglich muß man zur Bestimmung der qualitativen Eigenschaften, durch die U_k im Innenbereich charakterisiert ist, auf eine andere Methode zurückgreifen.

An erster Stelle ist hier zu erwähnen, daß $\Sigma_k(p^2)$ im Laufe des Renormierungsgruppenflusses sein Vorzeichen wechselt, was sich anhand der Abbildungen 11.1 bis 11.3 erkennen läßt. Folglich existiert eine Skala $\hat{k}(p) < k_{\text{cr}}$, bei der Σ_k eine Nullstelle besitzt: $\Sigma_{\hat{k}}(p^2) = 0$; in den angrenzenden Skalenbereichen gilt $\Sigma_k < 0$ für $k > \hat{k}(p)$ und $\Sigma_k > 0$ für $k < \hat{k}(p)$.

Während Σ_k , also die "Steigung"⁶ von U_k bei $A = 0$, den oben beschriebenen Verlauf nimmt, fällt der konstante Term $U_k(A = 0; p^2) = C_k$ mit sinkendem k von $C_k = 0$ bei $k = k_{\text{cr}}$ auf $C_k = -M^4/(8\lambda)$ bei $k = 0$ ab. Wenn man nun eine minimale Interpolation zwischen diesem Verhalten für kleine A -Werte einerseits und $U^{(\text{cl})}$ andererseits vornimmt, dann erhält man die in Abbildung 11.6 dargestellten Kurven. Anhand dieser Kurven läßt sich erkennen, daß der Vorzeichenwechsel von Σ_k notwendig ist, um im Limes $k \rightarrow 0$ ein konvexes Potential zu erhalten. Denn solange Σ_k negativ ist (also für $k > \hat{k}(p)$), beschreibt U_k im Bereich sehr kleiner A -Werte eine monoton fallende, nach rechts gekrümmte Kurve und ist somit nicht konvex.

Bei der Erstellung der Kurven aus Abbildung 11.6 wurde eine weitere Eigenschaft des effektiven Potential berücksichtigt, die man sich leicht vergegenwärtigen kann: Es existiert eine bestimmte Skala $k_0(p) \in (0, k_{\text{cr}})$, bei welcher der Wert des Potentials am Ursprung mit dem Wert am Punkt A_{triv} übereinstimmt, d.h. $U_{k_0(p)}(0; p^2) = U_{k_0(p)}(A_{\text{triv}}(k_0(p)); p^2)$. Das bedeutet, daß $C_{k_0(p)} = U^{(\text{cl})}(A_{\text{triv}}(k_0(p)); p)$ gilt. Benutzt man (11.13) und (11.35), so ergibt sich daraus die Beziehung $\Omega(p^2) = k_0^2 - M^2/2$. Somit erhält man für k_0 den folgenden Ausdruck:

$$k_0(p) = \frac{1}{\sqrt{2}M} |M^2 - p^2| . \quad (11.41)$$

Eine numerische Analyse ergibt, daß für alle hier betrachteten Impulse die Ungleichung $k_0(p) < \hat{k}(p)$ erfüllt ist. Daher weist das effektive Potential für $k = k_0$ am Ursprung eine Linkskrümmung auf. Unabhängig davon ist $U^{(\text{cl})}$ am Punkt $A_{\text{triv}}(k_0)$ nach links gekrümmt. Damit folgt insgesamt, daß U_k im Innenbereich (mindestens) ein Maximum und

⁶ Σ_k läßt sich hier in der Tat als Steigung interpretieren, wenn man U_k als Funktion von A^2 auffaßt.

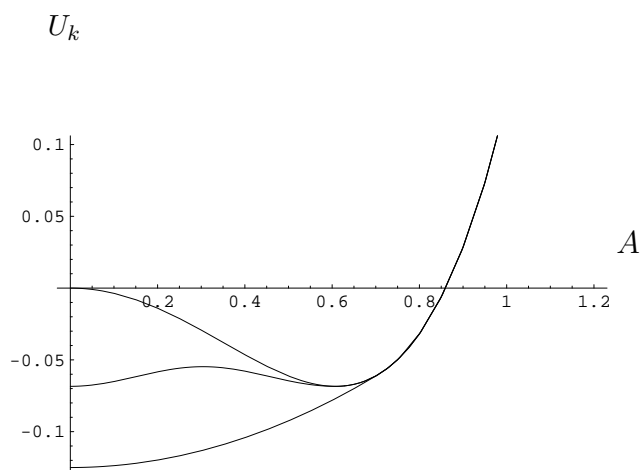


Abbildung 11.6: Qualitatives Verhalten von $U_k(A; p^2)$ (in Einheiten von M^4/λ) für $p^2 \in (0, 2M^2) \setminus \{M^2\}$. Die drei abgebildeten Kurven beziehen sich auf die k -Werte $k = k_{\text{cr}}$ (obere Kurve), $k = k_0$ (mittlere Kurve), wobei $0 < k_0 < k_{\text{cr}}$ gilt, und $k = 0$. Weiterhin wird A in Einheiten von $M/\sqrt{\lambda}$ angegeben.

ein Minimum besitzt. Damit U_k im Limes $k \rightarrow 0$ konvex werden kann, muß das lokale Maximum im Laufe des Renormierungsgruppenflusses so lange zusammenschrumpfen, bis es schließlich von einer bestimmten Skala an nicht mehr vorhanden ist, die irgendwo zwischen $k = k_0(p)$ und $k = 0$ liegt.

Die Existenz des Minimums ist hier nicht weiter überraschend, wenn man bedenkt, daß bereits $U_{k \geq k_{\text{cr}}} = U^{(\text{cl})}$ ein Minimum aufweist. Durch die für $k < k_{\text{cr}}$ auftretenden Renormierungseffekte erfährt die Position dieses Minimums zunächst nur leichte Korrekturen, bevor es dann bei hinreichend kleinen Skalen gänzlich verschwindet. Das gefundene Minimum stellt also das durch Quantenkorrekturen modifizierte Analogon des Minimums von $U^{(\text{cl})}$ dar.

Kombiniert man die Informationen über die Extrema mit den weiter oben erlangten Erkenntnissen, so ergibt sich für das effektive Potential automatisch das in Abbildung 11.6 dargestellte Verhalten. Während der Verlauf der entsprechenden Kurven im Innenbereich $A < A_{\text{triv}}(k)$ lediglich von qualitativer Natur ist, zeigt die Abbildung im Bereich $A \geq A_{\text{triv}}(k)$ die *exakte* Gestalt von U_k . Insbesondere läßt sich anhand dieser Kurven gut nachvollziehen, in welcher Weise der Übergang zu einer konvexen Funktion stattfindet.

11.3.2 Der Fall $|p| = M$

Betrachten wir schließlich den Fall, in dem Resonanz vorliegt, d.h. den Fall $|p| = M$. Wie sich herausstellen wird, läßt sich in diesem Fall ein *exakter* Ausdruck für U_k herleiten.

Wie in den zuvor diskutierten Fällen folgt aus der $U(1)$ -Invarianz die Beziehung

$$\Gamma_k [A \exp(iQ_{0\mu}x_\mu + i\beta)] \equiv \mathcal{V} U_k(A; Q_0^2 \equiv M^2). \quad (11.42)$$

Die zugehörigen Quellen stellen ebene Wellen der Form $\varepsilon \exp(iQ_{0\mu}x_\mu + i\beta)$ dar, deren Amplitude ε die Bedingung

$$\varepsilon = \frac{1}{2} \frac{\partial U_k(A; Q_0^2)}{\partial A} + k^2 A \quad (11.43)$$

erfüllt. Diese Beziehung folgt unmittelbar aus (11.37), wenn man darin p durch Q_0 ersetzt. Aus Abschnitt 11.2 und Anhang M.1 ist bekannt, daß (11.43) den Bereich $\varepsilon > 0$ vollständig auf den Bereich $(A_{\text{triv}}(k), \infty)$ abbildet sowie $\varepsilon = 0$ auf $A = A_{\text{triv}}(k)$. Äußerst bemerkenswert ist hier jedoch die Tatsache, daß $\varepsilon = 0$ im Fall $k < k_{\text{cr}}$ zusätzlich noch dem *kompletten Innenbereich* $0 \leq A < A_{\text{triv}}(k)$ entspricht. (Man erinnere sich daran, daß $A_{\text{triv}}(k \geq k_{\text{cr}}) \equiv 0$.) Um dies zu erkennen, muß man das erzeugende Funktional $W_k[J]$ bei $J = \varrho \exp(iQ_{0\mu}x_\mu)$ explizit auswerten, wobei $\varrho \equiv \varepsilon \exp(i\beta)$ gesetzt wurde. (ϱ verkörpert somit eine komplexe Zahl vom Betrag ε und mit der Phase β .) Setzt man das globale Minimum χ_{min} aus Gleichung (M.10), das sich für die vorliegende Quelle ergibt, in $W_k[J] = -S_k^J[\chi_{\text{min}}(J); J]$ ein und entwickelt diesen Ausdruck nach $|\varrho| \equiv \varepsilon$ um $|\varrho| = 0$, so erhält man (bei $k < k_{\text{cr}}$)

$$\begin{aligned} W_k [J = \varrho \exp(iQ_{0\mu}x_\mu)] \\ = \mathcal{V} \left[\frac{\omega_k^2(M^2)}{2\lambda} + 2|\varrho| \sqrt{-\frac{1}{\lambda} \omega_k(M^2)} - \frac{|\varrho|^2}{2\omega_k(M^2)} \right] + \mathcal{O}(|\varrho|^3). \end{aligned} \quad (11.44)$$

Von entscheidender Bedeutung ist hier die Anwesenheit des in $|\varrho|$ linearen Terms. Denn dieser sorgt dafür, daß $dW_k/d\varrho$ im Punkt $\varrho = 0$ nicht stetig ist. Wenn man nämlich diese Ableitung im Limes $\varrho \rightarrow 0$ betrachtet, so führt dies zu

$$\begin{aligned} \lim_{|\varrho| \rightarrow 0} \left[\frac{d}{d\varrho} W_k [\varrho \exp(iQ_{0\mu}x_\mu)] \right]_{\varrho = |\varrho| \exp(i\beta)} &= \sqrt{-\frac{1}{\lambda} \omega_k(M^2)} \exp(-i\beta) \\ &= A_{\text{triv}}(k) \exp(-i\beta). \end{aligned} \quad (11.45)$$

Offensichtlich hängt der obige Ausdruck von β ab, d.h. von der Richtung in der komplexen Ebene, entlang welcher ϱ gegen $\varrho = 0$ läuft.

Dieses singuläre Verhalten hat zur Folge, daß die herkömmliche Form der Legendre-Transformation hier nicht anwendbar ist. Vielmehr muß man in derartigen Fällen auf die wesentlich allgemeinere Supremum-Definition der Legendre-Transformation zurückgreifen, siehe beispielsweise [62]. Im vorliegenden Fall ergibt sich damit

$$U_k(A; M^2) = -k^2 A^2 + \sup_{\varepsilon \geq 0} \{2A \varepsilon - F_k(\varepsilon; Q_0)\}, \quad (11.46)$$

wobei

$$\begin{aligned} F_k(\varepsilon; Q_0) &\equiv \frac{1}{\mathcal{V}} W_k [\varepsilon \exp(iQ_{0\mu} x_\mu + i\beta)] \\ &= 2\varepsilon \tilde{\chi}_0(\varepsilon; Q_0) - \omega_k(M^2) \tilde{\chi}_0^2(\varepsilon; Q_0) - \frac{\lambda}{2} \tilde{\chi}_0^4(\varepsilon; Q_0) \end{aligned} \quad (11.47)$$

gesetzt wurde. Die in F_k enthaltene Funktion $\tilde{\chi}_0$ ist in (M.11) definiert. Unter Verwendung von (M.5) läßt sich F_k wie folgt umschreiben:

$$F_k(\varepsilon; Q_0) = \frac{3}{2}\varepsilon \tilde{\chi}_0(\varepsilon; Q_0) - \frac{1}{2}\omega_k(M^2) \tilde{\chi}_0^2(\varepsilon; Q_0). \quad (11.48)$$

Da $\tilde{\chi}_0(\varepsilon; Q_0)$ eine streng monoton wachsende Funktion von ε darstellt (und für $k < k_{\text{cr}}$ zudem $\omega_k(M^2) < 0$ gilt), folgt aus Gleichung (11.48), daß F_k streng konvex ist. (Das war auch nicht anders zu erwarten, denn in der hier vorgenommenen klassischen Näherung entspricht W_k gerade der Legendre-Transformierten von $S_k[\chi_{\text{min}}]$.) Infolgedessen ist die Ungleichung

$$\frac{\partial F_k}{\partial \varepsilon}(\varepsilon) > \frac{\partial F_k}{\partial \varepsilon}(\varepsilon = 0) = 2\sqrt{-\frac{1}{\lambda}\omega_k(M^2)} = 2A_{\text{triv}}(k) \quad (11.49)$$

für alle $\varepsilon > 0$ erfüllt. Daraus resultiert, daß die Funktion $2A\varepsilon - F_k(\varepsilon; Q_0)$ ihr Supremum immer bei $\varepsilon = 0$ annimmt, solange $A < A_{\text{triv}}(k)$ gilt. Der zugehörige Supremumswert ist C_k . Folglich entspricht der komplette Innenbereich $[0, A_{\text{triv}}(k)]$ der Quellenamplitude $\varepsilon = 0$, wobei die Länge dieses Intervalls durch den linearen Term von F_k festgelegt ist. Für $A > A_{\text{triv}}(k)$ stimmt die Supremum-Definition der Legendre-Transformation mit der herkömmlichen überein, so daß (11.46) insgesamt zu dem folgenden Ausdruck für U_k führt:

$$U_k(A; M^2) = \begin{cases} C_k - k^2 A^2 & \text{für } A \leq A_{\text{triv}}(k) \\ U^{(\text{cl})}(A; M^2) & \text{für } A > A_{\text{triv}}(k) \end{cases}. \quad (11.50)$$

Das Verhalten des effektiven Potentials (11.50) ist in Abbildung 11.7 dargestellt. Sie zeigt mehrere $U_k(A; M^2)$ -Kurven, die sich auf unterschiedliche k -Werte beziehen. Im Vergleich zu den oben diskutierten Fällen nimmt der Fall $|p| = M$ offensichtlich eine Sonderstellung ein, denn $U_{k=0}(A = 0; M^2) = C_{k=0}$ entspricht genau dem Wert, den das klassische Potential $U^{(\text{cl})}$ an seinem Minimum bei $A_{\text{min}}^{(\text{cl})}$ annimmt, und außerdem findet genau bei $A_{\text{min}}^{(\text{cl})}$ der Übergang zwischen Außen- und Innenbereich statt, d.h. $A_{\text{triv}}(k = 0) = A_{\text{min}}^{(\text{cl})}$. Damit einhergehend, läuft der komplette Innenbereich von U_k gegen einen konstanten Wert, wenn die Cutoffskala von $k = k_{\text{cr}}$ in Richtung $k = 0$ abgesenkt wird. Bei $k = 0$ ist das Potential in diesem Bereich schließlich vollkommen flach und somit insgesamt konvex.

An dieser Stelle sei angemerkt, daß das Funktional $\tilde{\Gamma}_k$ in jedem Fall konvex ist, auch dann, wenn U_k und Γ_k diese Eigenschaft nicht besitzen. (Das war auch nicht anders zu erwarten, denn $\tilde{\Gamma}_k$ entspricht in der klassischen Näherung der zweiten Legendre-Transformierten und somit der konvexen Hülle von $S_k[\chi_{\text{min}}(J)]$.) Vergleicht man (9.17)

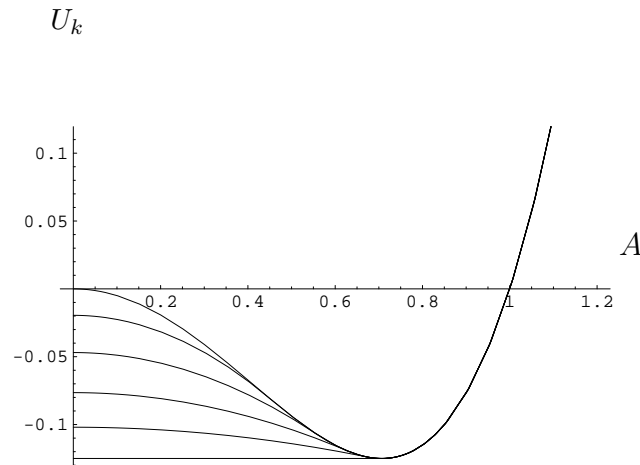


Abbildung 11.7: $U_k(A; p^2)$ (in Einheiten von M^4/λ) als Funktion von A (in Einheiten von $M/\sqrt{\lambda}$) im Spezialfall $|p| = M$. Die einzelnen Kurven beziehen sich auf verschiedene Skalen $k \in [0, k_{\text{cr}}]$. Mit abnehmendem k läuft U_k im Innenbereich gegen einen konstanten Wert. Bei $k = 0$ ist U_k dort vollständig flach.

mit (11.27), so erkennt man, daß sich die Beziehung $\tilde{U}_k \equiv U_k + k^2 A^2$ ergibt, wenn man in $\tilde{\Gamma}_k[\phi]$ eine ebene Welle $\phi = \exp(ip_\mu x_\mu + i\beta)$ einsetzt. Im Fall $|p| = M$, beispielsweise, folgt dann aus Gleichung (11.50) $\tilde{U}_k = C_k$ für $A \leq A_{\text{triv}}(k)$ und $\tilde{U}_k = U^{(\text{cl})} + k^2 A^2$ für $A > A_{\text{triv}}(k)$. Offensichtlich ist diese Funktion \tilde{U}_k für alle k -Werte konvex.

Dieses Verhalten von W_k und Γ_k läßt sich physikalisch nun wie folgt interpretieren. Zunächst einmal stellt (11.45) im Grunde genommen nichts anderes als die Standardformel

$$\left. \frac{\delta W_k}{\delta J^*} \right|_{J=0} = \langle \chi \rangle|_{J=0} \equiv \langle \chi \rangle \quad (11.51)$$

dar, die üblicherweise zur Berechnung des Vakuumerwartungswerts von χ herangezogen wird. In (11.45) beschränkt man sich bei ihrer Auswertung lediglich auf ebene Wellen J . Betrachten wir diese Gleichung bei der Skala $k = 0$. Die von Null verschiedene rechte Seite von (11.45) bedeutet, daß die Moden zum Impuls $|p| = M$ einen nichtverschwindenden Vakuumerwartungswert annehmen. Nachdem J adiabatisch abgeschaltet worden ist, enthält der Erwartungswert

$$\langle \chi(x) \rangle = \frac{M}{\sqrt{2\lambda}} \exp(iMn_\mu x_\mu + i\beta) \quad (11.52)$$

immer noch Informationen über die Quelle, und zwar in Form ihrer Impulsrichtung n_μ und ihrer Phase β ; beides hat $\langle \chi(x) \rangle$ von ihr übernommen. Dadurch wird ein bestimmter Punkt (n, β) aus der Vakuummannigfaltigkeit herausgegriffen, was zur spontanen Brechung der $\text{SO}(d)$ -Symmetrie von Raumzeit-Rotationen sowie der $\text{U}(1)$ -Phasensymmetrie führt.

Ein solches Vakuumkondensat bildet sich nur für die Moden mit $|p| = M$ aus, aber nicht für diejenigen mit $|p| \neq M$. Dieser Unterschied zwischen den beiden Fällen läßt sich anhand der Plots für die verschiedenartigen effektiven Potentiale sehr gut veranschaulichen. Betrachten wir dazu zunächst den Fall $|p| \neq M$ auf der Grundlage des in Abbildung 11.6 dargestellten Beispiels. Ausgehend von der Skala $k = k_{\text{cr}}$, legen wir eine Kugel in das Minimum des Potentials U_k und lassen dieses dann in Richtung kleinerer Skalen evolvieren. Bei einer bestimmten, von Null verschiedenen Skala ist der Punkt erreicht, an dem das lokale Maximum verschwindet und die Steigung von U_k für alle $A > 0$ positiv wird. Dies hat zur Folge, daß die Kugel von der Position des ehemaligen lokalen Minimums bei $A \neq 0$ zum Minimum bei $A = 0$ hinunterrollt. Somit ist der Erwartungswert der entsprechenden Feldmode bei $k = 0$ Null. Anhand von Abbildung 11.7 läßt sich erkennen, daß sich das effektive Potential für $|p| = |Q_0| \equiv M$ diesbezüglich anders verhält. In diesem Fall hat die Potentialmulde bei $A = A_{\text{min}}^{(\text{cl})}(p)$ nämlich für alle $k > 0$ Bestand, so daß die Kugel keine Tendenz entwickelt, in Richtung der Position $A = 0$ zu rollen, sondern bis zum letzten Augenblick der Evolution bei $A = A_{\text{min}}^{(\text{cl})}(p)$ liegen bleibt. Erst dann, wenn $k = 0$ erreicht ist, ist U_k im gesamten Innenraum $A < A_{\text{triv}}(k = 0) = A_{\text{min}}^{(\text{cl})}(Q_0)$, und insbesondere am Punkt $A = 0$, auf den bei $A = A_{\text{min}}^{(\text{cl})}(Q_0)$ vorliegenden Wert abgesunken. Das hat zur Folge, daß der Vakuumerwartungswert der entsprechenden Mode von Null verschieden ist. Dieses Verhalten ist demjenigen sehr ähnlich, das sich im Falle der vertrauten spontanen Symmetriebrechung durch ein "Mexican-hat"-Potential ergibt. Dort kondensiert zwar keine räumlich inhomogene Mode, sondern die konstante Mode mit $p = 0$, dennoch ist hier kein konzeptioneller Unterschied zwischen den beiden Fällen festzustellen, da alle Impulse p auf dem Niveau der effektiven Potentiale U_k zunächst einmal gleich behandelt werden.

Den obigen Resultaten nach zu urteilen, besteht in der hier durchgeführten klassischen Näherung das echte Vakuum aus einer einzelnen ebenen Welle. Diese Feldkonfiguration fungiert als sogenanntes "master field". Das bedeutet, daß sich der Erwartungswert eines jeden zusammengesetzten Operators einfach dadurch bestimmen läßt, daß man in diesen die rechte Seite der Gleichung (11.52) einsetzt. Für den Operator $\partial_\mu \chi^* \partial_\mu \chi$ resultiert daraus beispielsweise das bereits in Abschnitt 8.1 erwähnte kinetische Kondensat (8.8).

11.4 Konsequenzen für die Gravitation

Wir sind nun an einem Punkt angelangt, an dem sich aus den bislang erzielten Ergebnissen gewisse Schlußfolgerungen für die Gravitation ziehen lassen. Bevor damit begonnen wird, bietet es sich an, die Resultate dieses Kapitels zuerst kurz zusammenzufassen.

In den vorangegangenen Abschnitten wurde gezeigt, daß sich das skalare Modell - zumindest in der führenden Ordnung der semiklassischen Entwicklung - auf dynamische

Weise stabilisiert und dabei ein Vakuum-Kondensat ausbildet, das aus einer einzelnen Spinwelle besteht und infolgedessen die Invarianz unter $ISO(d)$ -Raumzeit-Translationen und -Rotationen sowie die $U(1)$ -Phasensymmetrie spontan bricht, siehe Gleichung (11.52). Von der $SO(d)$ -Rotationssymmetrie bleibt dabei eine $SO(d-1)$ -Rotationssymmetrie übrig. Außerdem weist der Grundzustand noch eine Restsymmetrie unter modifizierten, kombinierten Translationen auf, die Phasenrotationen einbeziehen.

Das Kondensat ist hier zwar ein unverkennbares Merkmal der dynamischen Stabilisierung, der wesentliche Effekt, der zu der Stabilisierung führt, ist aber nicht die Kondensation selbst, sondern vielmehr eine ‘‘Massenerzeugung’’, die mit ihr einhergeht. Die dynamisch erzeugte Masse sorgt dafür, daß der effektive kinetische Term $\Omega_{\text{eff}}(p^2) \equiv \Sigma_{k=0}(p^2)$ positiv semidefinit ist und nur für Moden mit $p^2 = M^2$ verschwindet. Solche Moden bilden dann auch letztendlich das Kondensat. Daß es sich hierbei tatsächlich gewissermaßen um eine Massenerzeugung handelt, kann man Abbildung 8.1 entnehmen: Grob gesprochen, geht die $\Omega_{\text{eff}}(p^2)$ -Kurve aus derjenigen des nackten kinetischen Terms $\Omega(p^2)$ hervor, indem letztere um einen konstanten (Masse)²-Term vom Betrag $M^2/2$ nach oben verschoben wird.

Dieser Massenterm rechtfertigt auch das Zurückgreifen auf die Loop-Entwicklung mit anschließender Beschränkung auf den Beitrag führender Ordnung. Denn im Gegensatz zu anderen masselosen Modellen mit *gewöhnlichem* kinetischen Term, bei denen die Loop-Entwicklung i.a. *nicht* zu verlässlichen Resultaten führt [63], werden hier die Loop-Beiträge durch die erzeugte Masse, die gewissermaßen als Cutoff fungiert, unterdrückt und bleiben dadurch vernachlässigbar.

Kommen wir nun zu der Übertragung dieser Ergebnisse auf die Gravitation. Aufgrund der Ähnlichkeit des skalaren Modells mit dem konformen Sektor besteht die berechtigte Hoffnung, daß auch der konforme Faktor χ sich auf dynamische Weise stabilisiert. Dabei könnte es wie bei dem Spielzeugmodell zu der Ausbildung einer nichttrivialen Vakuumstruktur kommen, die durch nichtverschwindende Kondensate der Form $\langle (\bar{D}_\mu \chi)(\bar{D}^\mu \chi) \rangle$ charakterisiert ist. In diesem Fall sollte der nichttriviale Grundzustand der effektiven Theorie allerdings nicht merklich vom flachen Raum abweichen. Da aber der oben analysierte Stabilisierungseffekt in erster Linie mit der Massenerzeugung und nicht direkt mit der Kondensation der symmetriebrechenden Feldkonfigurationen verbunden ist, könnte sich die Euklidische Gravitation vielleicht auch durch Ausbildung einer trivialen Vakuumstruktur mit $\langle g_{\mu\nu} \rangle = \delta_{\mu\nu}$ dynamisch stabilisieren, so daß das absolute Minimum der effektiven Wirkung dann tatsächlich dem flachen Raum entspräche.

Diese These wird noch durch eine weitere Tatsache gestützt. Die Gravitation kann sich nämlich nicht einfach durch die Erzeugung eines Massenterms für die Fluktuationen der Metrik stabilisieren, da dies gegen die geforderte allgemeine Koordinateninvarianz

verstoßen würde. Also müßte der potentielle Stabilisierungsmechanismus in diesem Fall generell etwas andere Gesichtszüge annehmen als im Fall des skalaren Modells. Vor allem kommen hier nur solche zusätzlichen Wirkungsterme, die invariant unter allgemeinen Koordinatentransformationen sind, für den gewünschten Effekt in Frage. Es ist jedoch klar, daß sämtliche *lokalen* Invarianten von höheren Potenzen in der Krümmung - wie z.B. R^2 (siehe oben), $R_{\mu\nu}R^{\mu\nu}$, R^3 etc. - im IR Bereich gegenüber dem Einstein-Hilbert-Term vernachlässigbar sind und daher nicht für eine dynamische Stabilisierung sorgen können [13]. Das bedeutet, daß höchstens *nichtlokale* Invarianten im IR Bereich eine Stabilisierung des konformen Faktors hervorrufen können. Im nächsten Kapitel werden wir uns etwas näher mit dieser Möglichkeit auseinandersetzen.

Kapitel 12

IR Stabilität durch eine nichtlokale Invariante

In den vorangegangenen Kapiteln 8-11 wurde anhand eines skalaren Spielzeugmodells eine Möglichkeit aufgezeigt, wie man das Stabilitätsproblem der Euklidischen Quantengravitation, das auf den konformen Sektor der Einstein-Hilbert-Wirkung zurückzuführen ist, in den Griff bekommen könnte. Die Ergebnisse unserer Untersuchungen deuten darauf hin, daß sich die Theorie eventuell dynamisch stabilisiert, indem sie im Laufe ihrer Evolution von sehr kleinen bis hin zu sehr großen Längenskalen nichtlokale Invarianten generiert. Diese könnten dann dafür sorgen, daß die Theorie im IR Bereich ein absolutes Minimum und somit einen Grundzustand aufweist, der tatsächlich durch den flachen Raum beschrieben wird. In vereinzelt Arbeiten [20, 13, 14, 15] wurden auch schon verschiedene nichtlokale Invarianten auf ihre Auswirkungen diesbezüglich untersucht.

Im weiteren Verlauf dieses Kapitels werden wir uns mit einer nichtlokalen Invariante des Typs $\int d^d x \sqrt{g} R(D^2)^{-1} R$ beschäftigen. Bereits in [13] wurde gezeigt, daß eine Wirkung, die sich aus dem Einstein-Hilbert-Term $\int d^d x \sqrt{g} R$ und einer bestimmten nichtlokalen Invariante dieser Form zusammensetzt, unter gewissen Voraussetzungen bei $g_{\mu\nu} = \delta_{\mu\nu}$ ein lokales Minimum annimmt. Ob dieses Minimum auch global ist, läßt sich anhand der erzielten Ergebnisse nicht beurteilen. Zumindest stellt eine solche Wirkung aber einen ernstzunehmenden Kandidaten für eine effektive Gravitationswirkung Γ dar, deren absolutes Minimum tatsächlich durch den flachen Raum beschrieben wird. (Die Konfiguration $g_{\mu\nu} = \delta_{\mu\nu}$ ist natürlich deswegen als absolutes Minimum zu favorisieren, da ihr Lorentz-sches Analogon, die Minkowski-Metrik $\eta_{\mu\nu}$, den Beobachtungen nach zu urteilen, den Grundzustand der physikalischen Raumzeit im materiefreien Fall zu beschreiben scheint.) Im weiteren Verlauf dieses Kapitels werden wir eine modifizierte (verallgemeinerte) Version der nichtlokalen Invariante aus [13] untersuchen. Im Rahmen dieser Analyse werden verschiedene interessante Grenzfälle studiert. Wie sich dabei herausstellen wird, reprodu-

ziert einer dieser Grenzfälle exakt die Ergebnisse aus [13].

Beginnen wir damit, die mit der Einstein-Hilbert-Wirkung verbundene Problematik kurz zu rekapitulieren. In Abschnitt 7.1 wurde bereits allgemein gezeigt, daß diese Wirkung nicht nach unten beschränkt ist. Denn der konforme Faktor der Metrik kann hier betragsmäßig beliebig große, negative Werte zur Wirkung beisteuern. Betrachten wir die Situation aus einem weniger allgemeinen Blickwinkel. Dazu beschränken wir uns auf den Fall verschwindender kosmologischer Konstante und entwickeln den übrigbleibenden $\int d^d x \sqrt{g} R$ -Term um eine maximal symmetrische Hintergrundmetrik $\hat{g}_{\mu\nu}$ bis einschließlich zur zweiten Ordnung in den Fluktuationen $\bar{h}_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} - \hat{g}_{\mu\nu}$.¹ Zerlegt man weiterhin $\bar{h}_{\mu\nu}$ gemäß (1.36) in seine Komponenten² (siehe Abschnitt 1.5), so ergibt sich folgender Ausdruck:

$$\begin{aligned}
-\int d^d x \sqrt{g} R &= -\int d^d x \sqrt{\hat{g}} \hat{R} - \frac{d-2}{2d} \int d^d x \sqrt{g} \hat{R} \bar{\phi} \\
&+ \frac{1}{2} \int d^d x \sqrt{\hat{g}} \left\{ \frac{1}{2} \bar{h}_{\mu\nu}^T \left[-\hat{D}^2 + \frac{d(d-3)+4}{d(d-1)} \hat{R} \right] \bar{h}^{T\mu\nu} + \frac{d-2}{d} \hat{R} \bar{\xi}_\mu \bar{\xi}^\mu \right. \\
&- \frac{(d-1)(d-2)}{2d^2} \left(\bar{\sigma} \left[-\hat{D}^2 - \hat{R} \right] \bar{\sigma} + 2\bar{\phi} \sqrt{-\hat{D}^2} \sqrt{-\hat{D} - \frac{1}{d-1} \hat{R}} \bar{\sigma} \right. \\
&\left. \left. + \bar{\phi} \left[-\hat{D}^2 + \frac{d-4}{2(d-1)} \hat{R} \right] \bar{\phi} \right) \right\} + \mathcal{O}(\bar{h}^3). \tag{12.1}
\end{aligned}$$

Hier bezeichnet \hat{D}_μ die aus der maximal symmetrischen Metrik $\hat{g}_{\mu\nu}$ konstruierte kovariante Ableitung. Ferner verkörpert \hat{R} den aus $\hat{g}_{\mu\nu}$ hervorgehenden Krümmungsskalar.

Betrachten wir zuerst den linearen Term aus (12.1). Dieser verschwindet offensichtlich im Fall des flachen Raums, d.h. die Wirkung besitzt bei $\hat{R} = 0$ einen stationären Punkt. Von welcher Natur ist nun diese Lösung der Bewegungsgleichung?

Um diese Frage beantworten zu können, untersuchen wir anschließend den quadratischen Anteil aus (12.1). Man erkennt unmittelbar, daß der in den skalaren Feldern quadratische Anteil sicherlich nicht positiv definit ist, wenn $d > 2$ gilt. Am stationären Punkt, also bei $\hat{R} = 0$, ist er in diesem Fall sogar manifest negativ semidefinit. Somit besitzt die Einstein-Hilbert-Wirkung bei $\hat{R} = 0$ kein Minimum, sondern vielmehr einen Sattelpunkt.

¹Es sei an dieser Stelle daran erinnert, daß die maximal symmetrischen Metriken diejenige Klasse von Räumen konstanter Krümmung ($R = \text{konstant}$) bilden, die zusätzlich die Bedingungen (3.6) erfüllen. Aus Abschnitt 3.2 ist bereits bekannt, daß die maximal symmetrischen Räume positiver Krümmung $R > 0$ die Klasse der d -Sphären bilden. Die entsprechenden Räume mit negativem Krümmungsskalar $R < 0$ stellen sogenannte Pseudo-Sphären dar. $R = 0$ entspricht hier natürlich dem flachen Raum.

²Strenggenommen wäre hier eigentlich noch zu überprüfen, inwieweit die TT-Zerlegung auch auf Pseudo-Sphären anwendbar ist. Denn die Existenz dieser Zerlegung ist nur dann von vornherein garantiert, wenn der Raum entweder geschlossen oder offen und asymptotisch flach ist [29]. Pseudo-Sphären sind aber weder das eine, noch das andere.

Will man erreichen, daß die effektive Gravitationswirkung ihr Minimum im flachen Raum einnimmt, muß man die Instabilität im skalaren Sektor beseitigen. Im IR Bereich läßt sich dies aber nicht dadurch bewerkstelligen, daß man der Wirkung einfach Terme von höherer Ordnung in der Krümmung hinzufügt. Diese liefern nämlich bei großen Distanzen nur solche Beiträge, die im Vergleich zu denen des $\int d^d x \sqrt{g} R$ -Terms vernachlässigbar klein sind [13].

Im folgenden werden wir daher den Standpunkt vertreten, daß die effektive Wirkung von der Form

$$\Gamma[g] = -\frac{1}{16\pi G_0} \int d^d x \sqrt{g} R + \Upsilon_0 I_{\text{nl}}[g] \quad (12.2)$$

sein könnte, wobei I_{nl} eine nichtlokale Invariante des oben genannten Typs verkörpert und Υ_0 die zugehörige renormierte Kopplung bezeichnet. Im Rahmen unserer Betrachtungen werden wir uns lediglich mit der Stabilität einer derartigen Theorie beschäftigen und alle anderen phänomenologischen Konsequenzen außer Acht lassen. Natürlich kann man den Ansatz (12.2) im Endeffekt nur dann als seriös betrachten, wenn sich herausstellen sollte, daß er mit allen Beobachtungen verträglich ist. In dieser Hinsicht sind jedoch die Resultate aus [13] bereits recht ermutigend.

Kommen wir nun zur Spezifizierung von I_{nl} . Für den Rest dieses Kapitels werden wir uns auf die Analyse des nichtlokalen Terms

$$I_{\text{nl}}[g] = \int d^d x \sqrt{g} R \mathcal{P}^{-1} R \quad (12.3)$$

konzentrieren, wobei der Operator \mathcal{P} folgendermaßen definiert ist:

$$\mathcal{P} = -D^2 + \varepsilon |R| + m^2. \quad (12.4)$$

Hier stellen ε und m zwei reelle, positive Parameter dar. Während ε dimensionslos ist, besitzt m die Dimension einer Masse. Aufgrund der Positivität von ε und m^2 ist \mathcal{P} positiv definit. Daran ändert sich auch in den Grenzfällen $\varepsilon|R| \rightarrow 0$ und $m^2 \rightarrow 0$ nichts, solange nur jeweils *einer* von diesen beiden Limites betrachtet wird. Um die Positivität von \mathcal{P} zu erhalten, muß lediglich eine dieser beiden Größen strikt positiv (> 0) sein. Läßt man in \mathcal{P} die Betragstriche um R weg und setzt $m = 0$, so erhält man den in [13] untersuchten nichtlokalen Term zurück. (Die Betragstriche wurden in erster Linie hinzugefügt, um auch im Fall $R < 0$ Positivität zu gewährleisten. Davon abgesehen könnte sich diese Modifikation für spätere Anwendungen im Rahmen der trunkierten Flußgleichung als günstig erweisen.)

Es soll nun untersucht werden, ob dieser nichtlokale Term den instabilen skalaren Sektor der Einstein-Hilbert-Wirkung stabilisieren kann. Dazu entwickelt man das Funktional

I_{nl} analog zu (12.1) gemäß

$$I_{\text{nl}}[\hat{g} + \bar{h}] = I_{\text{nl}}[\hat{g}] + I_{\text{nl}}^{\text{lin}}[\bar{h}; \hat{g}] + I_{\text{nl}}^{\text{quad}}[\bar{h}; \hat{g}] + \mathcal{O}(\bar{h}^3) \quad (12.5)$$

nach den Fluktuationen $\bar{h}_{\mu\nu}$ um eine maximal symmetrische Hintergrundmetrik $\hat{g}_{\mu\nu}$ und nimmt dann die TT-Zerlegung von $\bar{h}_{\mu\nu}$ vor. Für die explizite Bestimmung des linearen Anteils $I_{\text{nl}}^{\text{lin}}[\bar{h}; \hat{g}]$ und vor allem des quadratischen Anteils $I_{\text{nl}}^{\text{quad}}[\bar{h}; \hat{g}]$ sind hier allerdings einige recht umfangreiche Rechnungen erforderlich, deren wesentliche Elemente im folgenden kurz zusammengefaßt werden.

Die Funktionale $I_{\text{nl}}^{\text{lin}}[\bar{h}; \hat{g}]$ und $I_{\text{nl}}^{\text{quad}}[\bar{h}; \hat{g}]$ gehen aus der ersten bzw. zweiten Variation von I_{nl} hervor. Für diese ergeben sich zunächst die Beziehungen

$$\begin{aligned} \delta(\sqrt{g} R \mathcal{P}^{-1} R) &= [\delta(\sqrt{g} R)] \mathcal{P}^{-1} R + \sqrt{g} R (\delta \mathcal{P}^{-1}) R + \sqrt{g} R \mathcal{P}^{-1} \delta R, \\ \delta^2(\sqrt{g} R \mathcal{P}^{-1} R) &= [\delta^2(\sqrt{g} R)] \mathcal{P}^{-1} R + 2[\delta(\sqrt{g} R)] (\delta \mathcal{P}^{-1}) R + 2[\delta(\sqrt{g} R)] \mathcal{P}^{-1} \delta R \\ &\quad + \sqrt{g} R (\delta^2 \mathcal{P}^{-1}) R + 2\sqrt{g} R (\delta \mathcal{P}^{-1}) \delta R + \sqrt{g} R \mathcal{P}^{-1} \delta^2 R. \end{aligned} \quad (12.6)$$

Offenkundig benötigt man hier neben den ‘herkömmlichen’ Variationen von R und $\sqrt{g} R$ zusätzlich die Variationen von \mathcal{P}^{-1} . Diese lassen sich folgendermaßen durch die Variationen von \mathcal{P} ausdrücken:

$$\begin{aligned} \delta \mathcal{P}^{-1} &= -\mathcal{P}^{-1} (\delta \mathcal{P}) \mathcal{P}^{-1}, \\ \delta^2 \mathcal{P}^{-1} &= 2\mathcal{P}^{-1} (\delta \mathcal{P}) \mathcal{P}^{-1} (\delta \mathcal{P}) \mathcal{P}^{-1} - \mathcal{P}^{-1} (\delta^2 \mathcal{P}) \mathcal{P}^{-1}. \end{aligned} \quad (12.7)$$

Die Ausdrücke für die Variationen von \mathcal{P} hängen natürlich von der Stufe des Tensors ab, auf den \mathcal{P} wirkt. Im vorliegenden Fall wirkt dieser Operator nur auf skalare Funktionen. Sei nun $f(x)$ eine beliebige skalare Funktion. Dann ergeben sich folgende Beziehungen:

$$\begin{aligned} (\delta \mathcal{P}) f &= \bar{h}^{\mu\nu} D_\mu D_\nu f + (D^\mu \bar{h}_{\mu\nu}) D^\nu f - \frac{1}{2} (D_\lambda \bar{h}_\mu{}^\mu) D^\lambda f + \varepsilon \frac{R}{|R|} (\delta R) f, \\ (\delta^2 \mathcal{P}) f &= -2\bar{h}^{\mu\rho} \bar{h}^\nu{}_\rho D_\mu D_\nu f - 2\bar{h}^{\mu\nu} (D_\mu \bar{h}_{\nu\rho}) D^\rho f - 2\bar{h}^{\mu\nu} (D^\lambda \bar{h}_{\lambda\mu}) D_\nu f \\ &\quad + \bar{h}^{\mu\nu} (D_\mu \bar{h}_\lambda{}^\lambda) D_\nu f + \bar{h}^{\mu\nu} (D_\lambda \bar{h}_{\mu\nu}) D^\lambda f + \varepsilon \frac{R}{|R|} (\delta^2 R) f. \end{aligned} \quad (12.8)$$

Hier wurde $\delta g_{\mu\nu} = \bar{h}_{\mu\nu}$ gesetzt. Als nächstes setzt man (12.7) und (12.8) in (12.6) ein. Für maximal symmetrische Metriken $\hat{g}_{\mu\nu}$ vereinfachen sich die daraus resultierenden Beziehungen zu

$$\begin{aligned} &[\delta(\sqrt{g} R \mathcal{P}^{-1} R)]_{g=\hat{g}} \\ &= \frac{\hat{R}}{\varepsilon |\hat{R}| + m^2} [\delta(\sqrt{g} R)]_{g=\hat{g}} + \frac{m^2 \hat{R}}{(\varepsilon |\hat{R}| + m^2)^2} \sqrt{\hat{g}} [\delta R]_{g=\hat{g}} + \text{kov. Divergenz}, \end{aligned} \quad (12.9)$$

$$\begin{aligned}
& [\delta^2 (\sqrt{g} R \mathcal{P}^{-1} R)]_{g=\hat{g}} \\
&= \frac{1}{\varepsilon |\hat{R}| + m^2} \left\{ \hat{R} [\delta^2 (\sqrt{g} R)]_{g=\hat{g}} + 2m^2 [\delta (\sqrt{g} R)]_{g=\hat{g}} [\mathcal{P}^{-1} \delta R]_{g=\hat{g}} \right\} \quad (12.10) \\
&+ \frac{m^2 \hat{R}}{(\varepsilon |\hat{R}| + m^2)^2} \sqrt{\hat{g}} \left\{ -2 [(\delta \mathcal{P}) \mathcal{P}^{-1} \delta R]_{g=\hat{g}} + [\delta^2 R]_{g=\hat{g}} \right\} + \text{kov. Divergenz} .
\end{aligned}$$

Dabei sind $\delta \mathcal{P}$ und $\delta^2 \mathcal{P}$ durch Gleichung (12.8) festgelegt. Anschließend setzt man die expliziten Ausdrücke für die Variationen von R und $\sqrt{g} R$ (siehe Anhang A) in (12.9) und (12.10) ein und vollzieht dann bei $\bar{h}_{\mu\nu}$ die TT-Zerlegung (1.36). Dadurch erhält man schließlich die gesuchten Ausdrücke für $I_{\text{nl}}^{\text{lin}}$ und $I_{\text{nl}}^{\text{quad}}$. Sie besitzen die nachstehende Form:

$$\begin{aligned}
I_{\text{nl}}^{\text{lin}}[\bar{h}; \hat{g}] &= (\varepsilon |\hat{R}| + m^2)^{-2} \left[\frac{d-2}{2d} (\varepsilon |\hat{R}| + m^2) - \frac{m^2}{d} \right] \int d^d x \sqrt{\hat{g}} \hat{R} \bar{\phi} , \quad (12.11) \\
I_{\text{nl}}^{\text{quad}}[\bar{h}; \hat{g}] &= \frac{1}{2} (\varepsilon |\hat{R}| + m^2)^{-2} \int d^d x \sqrt{\hat{g}} \left\{ -\frac{1}{2} \bar{h}^{\mu\nu} \left[-(\varepsilon |\hat{R}| + 2m^2) \hat{R} \hat{D}^2 \right. \right. \\
&+ \left. \frac{d(d-3)+4}{d(d-1)} \varepsilon |\hat{R}| \hat{R}^2 + \frac{d(d-5)+8}{d(d-1)} m^2 \hat{R}^2 \right] \bar{h}^{\mu\nu} \\
&- \bar{\xi}_\mu \left[\frac{d-2}{d} \varepsilon |\hat{R}| \hat{R}^2 + \frac{d-4}{d} m^2 \hat{R}^2 \right] \bar{\xi}^\mu \\
&+ \left(\frac{d-1}{d} \right)^2 \bar{\sigma} \left[\frac{d-2}{2(d-1)} \left(-(\varepsilon |\hat{R}| + 2m^2) \hat{R} \hat{D}^2 - \varepsilon |\hat{R}| \hat{R}^2 - \frac{d-4}{d-2} m^2 \hat{R}^2 \right) \right. \\
&+ \left. 2m^4 \hat{\mathcal{P}}^{-1} \hat{D}^2 \left(\hat{D}^2 + \frac{1}{d-1} \hat{R} \right) \right] \bar{\sigma} \\
&+ \frac{d-1}{d^2} \bar{\phi} \left[\left((d-2)\varepsilon |\hat{R}| + (d-4)m^2 \right) \hat{R} + \left(-\left(4(d-1)m^4 + d m^2 \hat{R} \right) \hat{D}^2 \right. \right. \\
&+ \left. \left. (d-4)m^4 \hat{R} + d\varepsilon m^2 |\hat{R}| \hat{R} \right) \hat{\mathcal{P}}^{-1} \right] \sqrt{-\hat{D}^2} \sqrt{-\hat{D} - \frac{1}{d-1} \hat{R}} \bar{\sigma} \\
&+ \frac{d-1}{2d^2} \bar{\phi} \left[-\left((d-2)\varepsilon |\hat{R}| - 4m^2 \right) \hat{R} \hat{D}^2 + \frac{(d-4)(d-2)}{2(d-1)} \varepsilon |\hat{R}| \hat{R}^2 \right. \\
&+ \left. \frac{d(d-6)+16}{2(d-1)} m^2 \hat{R}^2 + \left(\left(4(d-1)m^4 + 2m^2 \hat{R} \right) (\hat{D}^2)^2 \right. \right. \\
&+ \left. \left. \left(-2d\varepsilon m^2 |\hat{R}| + \frac{2}{d-1} m^2 \hat{R} - 2(d-4)m^4 \right) \hat{R} \hat{D}^2 \right. \right. \\
&\left. \left. - \frac{2d}{d-1} \varepsilon m^2 |\hat{R}| \hat{R}^2 - 2\frac{d-2}{d-1} m^4 \hat{R}^2 \right) \hat{\mathcal{P}}^{-1} \right] \bar{\phi} . \quad (12.12)
\end{aligned}$$

Wenden wir uns zuerst dem linearen Anteil von I_{nl} zu. Offensichtlich verschwindet er für $\widehat{R} = 0$. Da gleiches für den linearen Anteil des Einstein-Hilbert-Terms aus Gleichung (12.1) gilt, stellt $g_{\mu\nu} = \delta_{\mu\nu}$ folglich eine stationäre Stelle der kombinierten effektiven Wirkung (12.2) dar.

Betrachten wir nun den quadratischen Anteil $I_{\text{nl}}^{\text{quad}}$ aus Gleichung (12.12). Dieser besitzt aufgrund der Tatsache, daß er von den freien Parametern m , ε und \widehat{R} abhängt, eine recht komplizierte Struktur. Daher läßt sich auf den ersten Blick auch nicht erkennen, ob dieser Term den gewünschten stabilisierenden Effekt auf Γ ausüben kann. Eine Betrachtung verschiedener Grenzfälle soll im folgenden Aufschluß darüber geben.

1. $m^2 \ll |\widehat{R}|, \varepsilon |\widehat{R}|$

Wir beginnen unsere Studie mit dem Fall $m^2 \ll |\widehat{R}|, \varepsilon |\widehat{R}|$. Dazu bietet es sich an, zuerst einen Blick auf die Gleichung (12.10) zu werfen. Diese Gleichung deutet bereits darauf hin, daß im vorliegenden Grenzfall die führende Ordnung der zweiten Variation von I_{nl} durch die einfache Beziehung

$$[\delta^2(\sqrt{g} R \mathcal{P}^{-1} R)]_{g=\widehat{g}} = \frac{\widehat{R}}{\varepsilon |\widehat{R}|} [\delta^2(\sqrt{g} R)]_{g=\widehat{g}} + \mathcal{O}\left(\frac{m^2}{\widehat{R}}, \frac{m^2}{\varepsilon |\widehat{R}|}\right) \quad (12.13)$$

beschrieben wird. Eine sorgfältige Untersuchung von (12.12) bestätigt dieses Ergebnis. Die oben vernachlässigten Terme werden durch Potenzen von m^2/\widehat{R} und $m^2/(\varepsilon |\widehat{R}|)$ unterdrückt. Damit einhergehend, ist (12.13) für $m = 0$ exakt gültig.

Einerseits ist dieses Ergebnis natürlich sehr interessant, da sich für maximal symmetrische Hintergrundräume offensichtlich der quadratische Anteil der Einstein-Hilbert-Wirkung mit Hilfe der nichtlokalen Invariante simulieren läßt. Auf der anderen Seite ist aber auch klar, daß sich die quadratische Form der effektiven Wirkung dadurch nicht stabilisieren läßt. Denn wählt man den Parameter Υ_0 aus Gleichung (12.2) derart, daß die Summe der quadratischen Formen von $\int d^d x \sqrt{g} R$ und I_{nl} zu einem stabilen skalaren Sektor führt, dann wird die Instabilität nur verschoben und taucht dementsprechend unweigerlich im tensoriellen und im vektoriellen Sektor auf. Folglich kann dieser Grenzfall auch nicht das gewünschte Minimum bei $g_{\mu\nu} = \delta_{\mu\nu}$ liefern.

2. $|\widehat{R}|, \varepsilon |\widehat{R}| \ll m^2$

Kommen wir nun zu dem Fall $|\widehat{R}|, \varepsilon |\widehat{R}| \ll m^2$. In diesem Fall ist es zweckmäßig, die Moden in die Betrachtungen mit einzubeziehen, und zwar derart, daß nur solche Bereiche im Feldraum untersucht werden, die von Eigenmoden von \widehat{D}^2 aufgespannt werden, deren Eigenwerte in bestimmten Intervallen liegen. Die uns interessierenden Bereiche sind hier $|\widehat{R}|, \varepsilon |\widehat{R}| \ll m^2 \ll p^2$ und $|\widehat{R}|, \varepsilon |\widehat{R}| \ll p^2 \ll m^2$, wobei die Eigenwerte von $-\widehat{D}^2$ wie

üblich mit p^2 bezeichnet werden.

$$2.a) |\widehat{R}|, \varepsilon |\widehat{R}| \ll m^2 \ll p^2$$

Konzentrieren wir uns zuerst auf den Fall $|R|, \varepsilon |R| \ll m^2 \ll p^2$. Unter diesen Voraussetzungen vereinfacht sich Gleichung (12.12) zu

$$I_{\text{nl}}^{\text{quad}}[\bar{h}; \widehat{g}] = \int d^d x \sqrt{\widehat{g}} \quad (12.14)$$

$$\times \left\{ \frac{1}{2} \frac{\widehat{R}}{m^2} \bar{h}_{\mu\nu}^T \widehat{D}^2 \bar{h}^{T\mu\nu} - \frac{d-4}{2d} \frac{\widehat{R}^2}{m^2} \bar{\xi}_\mu \bar{\xi}^\mu - \left(\frac{d-1}{d} \right)^2 (\bar{\sigma} + \bar{\phi}) \widehat{D}^2 (\bar{\sigma} + \bar{\phi}) \right\} + \dots$$

Die Punkte stehen hier für die vernachlässigten Terme. Diese enthalten typischerweise Potenzen von \widehat{R}/m^2 , \widehat{R}/p^2 etc.

Betrachtet man nun auch den quadratischen Anteil des Einstein-Hilbert-Terms aus Gleichung (12.1) in diesem Grenzfall und kombiniert dann die beiden quadratischen Formen gemäß (12.2), so ergibt sich für den quadratischen Anteil der effektiven Wirkung Γ der nachstehende Ausdruck:

$$\Gamma^{\text{quad}}[\bar{h}; \widehat{g}] = \int d^d x \sqrt{\widehat{g}} \left\{ \frac{1}{2} \left(\frac{1}{32\pi G_0} - \frac{\widehat{R}}{m^2} \Upsilon_0 \right) \bar{h}_{\mu\nu}^T (-\widehat{D}^2) \bar{h}^{T\mu\nu} \right.$$

$$+ \left(\frac{d-2}{2d} \frac{1}{16\pi G_0} - \frac{d-4}{2d} \frac{\widehat{R}}{m^2} \Upsilon_0 \right) \widehat{R} \bar{\xi}_\mu \bar{\xi}^\mu$$

$$\left. + \frac{d-1}{4d^2} \left(-\frac{d-2}{16\pi G_0} + 4(d-1) \Upsilon_0 \right) (\bar{\sigma} + \bar{\phi}) (-\widehat{D}^2) (\bar{\sigma} + \bar{\phi}) \right\} + \dots \quad (12.15)$$

Offensichtlich ist der skalare Sektor tatsächlich manifest positiv, wenn die Bedingung

$$\Upsilon_0 > \frac{1}{64\pi G_0} \frac{d-2}{d-1} \quad (12.16)$$

erfüllt ist. Weiterhin läßt sich für jedes Paar (G_0, Υ_0) , das (12.16) erfüllt, immer ein bestimmter \widehat{R} -Wert $\widehat{R}^{\text{stab}} > 0$ finden, so daß sowohl der tensorielle als auch der vektorielle Sektor von (12.15) für alle $\widehat{R} \leq \widehat{R}^{\text{stab}}$ positiv sind. Somit ist dann die quadratische Form insgesamt positiv. Dies gilt insbesondere am stationären Punkt $g_{\mu\nu} = \delta_{\mu\nu}$, also für $\widehat{R} = 0$. Damit nimmt das Funktional Γ aus Gleichung (12.2) in der Tat bei $g_{\mu\nu} = \delta_{\mu\nu}$, also beim flachen Raum, ein Minimum an. Es geht aus diesen Rechnungen natürlich nicht hervor, ob dieses Minimum auch tatsächlich global ist, aber es läßt sich hier zumindest konstatieren, daß das Wirkungsfunktional (12.2) als Kandidat für die “physikalisch realisierte” effektive Wirkung in Frage kommt.

Abschließend sei hierzu noch angemerkt, daß das obige Resultat im Spezialfall $\widehat{R} = 0$ das Ergebnis aus [13] exakt reproduziert.

2.b) $|\widehat{R}|, \varepsilon |\widehat{R}| \ll p^2 \ll m^2$

Um die Analyse abzurunden, betrachten wir zuguter Letzt noch den Fall $|\widehat{R}|, \varepsilon |\widehat{R}| \ll p^2 \ll m^2$. In diesem Fall läßt sich (12.12) folgendermaßen approximieren:

$$I_{\text{nl}}^{\text{quad}}[\bar{h}; \widehat{g}] = \int d^d x \sqrt{\widehat{g}} \left\{ \frac{1}{2} \frac{\widehat{R}}{m^2} \bar{h}_{\mu\nu}^T \widehat{D}^2 \bar{h}^{T\mu\nu} - \frac{d-4}{2d} \frac{\widehat{R}^2}{m^2} \bar{\xi}_\mu \bar{\xi}^\mu \right. \\ \left. + \left(\frac{d-1}{d} \right)^2 m^{-2} (\bar{\sigma} + \bar{\phi}) (\widehat{D}^2)^2 (\bar{\sigma} + \bar{\phi}) \right\} + \dots \quad (12.17)$$

Die vernachlässigten Terme werden hier wieder durch die Punkte angedeutet. Sie sind mit zusätzlichen multiplikativen Faktoren der Form \widehat{R}/m^2 , $\varepsilon |\widehat{R}|/m^2$, \widehat{R}/p^2 etc. ausgestattet, die für eine Unterdrückung dieser Terme gegenüber denjenigen aus (12.17) sorgen. Die Struktur des skalaren Sektors erinnert stark an den skalaren Anteil der quadratischen Form, die aus der zweiten Variation der Invariante $\int d^d x \sqrt{g} R^2$ hervorgeht. Auch dort treten Terme mit quartischen Ableitungen $(\widehat{D}^2)^2$ auf, vgl. Kapitel 5. In dem betrachteten Grenzfall können diese Terme aber keinen Einfluß auf die Stabilität des skalaren Sektors ausüben, da sie gegenüber den dominierenden Termen aus dem quadratischen Anteil von $\int d^d x \sqrt{g} R$ um den multiplikativen Faktor p^2/m^2 unterdrückt sind. Somit liefert dieser Grenzfall nicht das gewünschte Minimum bei $g_{\mu\nu} = \delta_{\mu\nu}$.

Der nächste Schritt bestünde nun darin, die Parameter G_0 , Υ_0 , ε und m aus (12.2) durch entsprechende k -abhängige Größen G_k , Υ_k , ε_k und m_k zu ersetzen und den Renormierungsgruppenfluß des daraus resultierenden Funktionals Γ_k zu untersuchen. Zur Bestimmung der Flußgleichungen für diese Skalen-abhängigen Parameter würde es sich dann anbieten, den Formalismus aus den Kapiteln 1-6 zu verwenden. Man müßte demnach eine trunkierte Flußgleichung für Γ_k aufstellen und daraus die β -Funktionen für G_k , Υ_k , ε_k und m_k herleiten. Insbesondere wäre damit dann zu überprüfen, ob es Renormierungsgruppentrajektorien gibt, für die im Limes $k \rightarrow 0$ der obige Grenzfall 2.a) realisiert ist. In diesem Fall würde der Renormierungsgruppenfluß nämlich zu einer dynamischen Stabilisierung der Theorie führen.

Es existieren sicherlich mehrere Möglichkeiten dafür, wie diese Stabilisierung im Detail ablaufen könnte. Man könnte sich beispielsweise vorstellen, daß bei einer Skala k , die noch weit oberhalb von $k = 0$ liegt, der obige Fall 1 in dem Sinne realisiert ist, daß der "on-shell"-Wert \widehat{R}^{os} von R betragsmäßig wesentlich größer ist als m_k^2 . Im Laufe des Renormierungsgruppenflusses könnte sich dann die Situation derart ändern, daß bei $k = 0$ für alle Moden die Beziehung $m_{k=0}^2 \ll \varepsilon_{k=0} |\widehat{R}^{\text{os}}| \ll p^2$ erfüllt ist und $\Gamma = \Gamma_{k=0}$ somit beim flachen Raum ein Minimum annimmt. Natürlich sind hier auch andere Szenarien

denkbar, die zu demselben qualitativen Verhalten der effektiven Theorie führen wie das gerade geschilderte.

Zusammenfassung und Ausblick

In dieser Arbeit wurden verschiedene Aspekte der Euklidischen Quanten-Einstein-Gravitation mittels Renormierungsgruppenmethoden untersucht. Dabei wurden sowohl in rechentechnischer als auch phänomenologischer Hinsicht neue Ergebnisse erzielt.

Wenden wir uns zunächst den technischen Neuerungen zu. An erster Stelle ist hier die Konstruktion einer neuen, verallgemeinerten exakten Renormierungsgruppengleichung für die Quanten-Einstein-Gravitation zu nennen. Während die ursprüngliche Version dieser Gleichung noch auf der Grundlage der vollständigen Metrik-Fluktuationen $\bar{h}_{\mu\nu}$ formuliert wurde [12], basiert ihre "jüngere Schwester" aus der vorliegenden Arbeit auf den Komponentenfeldern, die aus der TT-Zerlegung von $\bar{h}_{\mu\nu}$ hervorgehen. Ferner wurde sie so konstruiert, daß sie für eine möglichst große Klasse von Hintergrundräumen gilt und infolgedessen auf viele unterschiedliche trunkierte Parameterräume projiziert werden kann.

Die Veränderungen gegenüber der Gleichung aus [12] wurden aus gutem Grund vorgenommen. Sie erweisen sich nämlich als notwendig, wenn man kompliziertere Trunkierungen studieren möchte wie beispielsweise solche, die Materiefelder oder - wie in dieser Arbeit - Invarianten von höherer Potenz in der Krümmung enthalten. Außerdem ließe sich nunmehr auch der Fluß des Eichfixierungsterms berücksichtigen. Ein weiterer Vorteil der neuen Formulierung liegt darin, daß sie das Auffinden eines zulässigen und gleichzeitig rechentechnisch günstigen Cutoffoperators $\mathcal{R}_k[\bar{g}]$ erleichtert, womit wir auf den zweiten wesentlichen technischen Aspekt zu sprechen kommen. In der vorliegenden Arbeit wurde zunächst die in [12] benutzte "Anpassungsregel" für die Konstruktion von $\mathcal{R}_k[\bar{g}]$ auf das Niveau der Komponentenfelder übertragen. Dann wurde ein relativ allgemeiner Cutoffoperator formuliert, der zum einen für eine große Klasse von Hintergrundmetriken $\bar{g}_{\mu\nu}$ die gewünschte Moden-Unterdrückung ermöglicht und zum anderen mit Hilfe der besagten Regel an verschiedene Trunkierungen angepaßt werden kann.

Der dritte technische Aspekt dieser Arbeit betrifft das Projizieren der exakten Flußgleichung auf ausgewählte trunkierte Parameterräume. Eine entsprechende Rechnung wurde für die Gravitation erstmalig in der Arbeit [12] unternommen, in welcher der Renormierungsgruppenfluß unter Verwendung der ursprünglichen Flußgleichung auf den zweidimensionalen Unterraum, den die Einstein-Hilbert-Trunkierung (3.2) beschreibt, projiziert

wurde. In dieser Arbeit wurde zuerst ebendiese Rechnung wiederholt, wobei allerdings die neue Flußgleichung verwendet wurde. Dabei stellte sich heraus, daß die resultierenden nichtperturbativen β -Funktionen der beiden laufenden Kopplungen λ_k und g_k nur unwesentlich von denjenigen aus [12] abweichen. Im nächsten Schritt wurde die verallgemeinerte Flußgleichung auf den von der R^2 -Trunkierung (5.2) aufgespannten Unterraum des Theorienraums projiziert. Letztere ergab sich aus der Erweiterung der Einstein-Hilbert-Trunkierung um einen in der Krümmung quadratischen Term mit laufender Kopplung β_k . Sie beschreibt somit den Renormierungsgruppenfluß in einem nunmehr dreidimensionalen trunkierten Parameterraum, dem λ - g - β -Raum. Dementsprechend lieferte hier die Projektion einen Satz von drei β -Funktionen. Dieser erwies sich als wesentlich komplizierter als derjenige des λ - g -Systems der Einstein-Hilbert-Trunkierung.

Wenden wir uns nun der anwendungsorientierten Seite dieser Arbeit zu. Diese deckt ein Gebiet ab, das sich im wesentlichen aus zwei Teilen zusammensetzt. Während im ersten Teil hauptsächlich die UV Aspekte der Quanten-Einstein-Gravitation untersucht wurden, beschäftigte sich der zweite Teil ausschließlich mit ihren IR Aspekten.

Im ersten Teil wurde unter Verwendung der hergeleiteten β -Funktionen die Fixpunktstruktur des Renormierungsgruppenflusses bestimmt. Dabei wurde zunächst das trunkierte λ - g -System der Einstein-Hilbert-Trunkierung betrachtet. Es stellte sich heraus, daß diese Trunkierung zu einem Gaußschen und einem nicht-Gaußschen Fixpunkt führt. Von besonderer Bedeutung ist hier der nicht-Gaußsche Fixpunkt. Denn wenn er auch in der exakten Theorie existieren würde, dann wäre die Einstein-Gravitation trotz ihrer berühmterbüchtigten perturbativen Nichtrenormierbarkeit aller Wahrscheinlichkeit nach auf nicht-perturbativem Niveau renormierbar und würde somit einen aussichtsreichen Kandidaten für die fundamentale Gravitationstheorie verkörpern. Es ist jedoch nicht von vornherein klar, ob der Fixpunkt der Einstein-Hilbert-Trunkierung auch tatsächlich in der exakten Theorie vorhanden ist. Es wäre nämlich durchaus denkbar, daß er lediglich ein Produkt der Trunkierung darstellt.

Um der Frage nach seiner Existenz in der exakten Theorie auf den Grund zu gehen, wurden in dieser Arbeit verschiedene Tests durchgeführt. Kommen wir zunächst zu den Tests, die im Rahmen der Einstein-Hilbert-Trunkierung vorgenommen wurden. Sie basieren auf der naheliegenden Annahme, daß man den Fixpunkt der Einstein-Hilbert-Trunkierung nur dann als verläßlich betrachten darf, wenn sich seine Eigenschaften unter Variationen des Cutoffs nicht entscheidend ändern. In diesem Zusammenhang wurden verschiedene Größen bezüglich ihrer Cutoff-Abhängigkeit untersucht, wobei der Cutoff in zweierlei Hinsicht variiert wurde. Zum einen wurden die beiden unterschiedlichen Cutofftypen A und B verwendet, wobei der Typ A mit der ursprünglichen Flußgleichung aus [12] einhergeht und der Typ B mit der verallgemeinerten Flußgleichung, die in dieser

Arbeit auf der Grundlage der TT-Zerlegung konstruiert wurde. Zum anderen wurden beide Cutofftypen in Verbindung mit zwei unterschiedlichen Familien von Profildfunktionen benutzt.

Die Analyse erbrachte die folgenden Ergebnisse: In $d = 4$ Dimensionen führt die Einstein-Hilbert-Trunkierung für alle zulässigen Cutoffs vom Typ A und vom Typ B zu einem nicht-Gaußschen Fixpunkt. Dies ist als höchst nichttriviales Resultat zu werten. Das erkennt man beispielsweise daran, daß der Fixpunkt in höheren Dimensionen, für die die Einstein-Hilbert-Trunkierung generell als weniger verlässlich angesehen werden muß, zwar für einige Cutoffs vorhanden ist, für andere jedoch nicht [14, 22].

Ferner erfüllt der nicht-Gaußsche Fixpunkt eine weitere notwendige Voraussetzung, und zwar ist der Fixpunktwert g_* der dimensionslosen Newton-Konstante (ebenso wie λ_*) für alle verwendeten Cutoffs positiv. (Die Positivität von g_* ist aus Stabilitätsgründen wichtig.)

Außerdem stellte sich heraus, daß der nicht-Gaußsche Fixpunkt für alle benutzten Cutoffs in beide Richtungen der λ - g -Ebene UV attraktiv wirkt, wobei der linearisierte Fluß in seiner Umgebung jeweils durch ein komplex konjugiertes Paar kritischer Exponenten mit positivem Realteil festgelegt ist. Der Fixpunkt erfüllt also genau die Bedingungen, die für die asymptotische Sicherheit der Theorie erforderlich sind.

Weiterhin wurde erläutert, daß das Produkt $g_*\lambda_*$ sowie die kritischen Exponenten universelle Größen sind, d.h., sie sind bei exakter Behandlung der Theorie unabhängig vom Cutoffschema. Daraufhin wurden diese Größen hinsichtlich der näherungsbedingten Cutoffschema-Abhängigkeit untersucht, die durch das Trunkieren in sie induziert wird. Das führte zu den folgenden Ergebnissen: Die kritischen Exponenten erweisen sich als relativ unempfindlich gegenüber der Variation des Cutoffs. Es ist nur eine eher schwache Abhängigkeit feststellbar. Die bei dem Produkt $g_*\lambda_*$ noch vorhandenen Anzeichen für Universalität sind jedoch wesentlich beeindruckender. Obwohl g_* und λ_* separat eine recht starke Abhängigkeit vom Cutoffschema aufweisen, ist ihr Produkt in erstaunlichem Maße konstant.

In Anbetracht dieser Ergebnisse erscheint es als relativ unwahrscheinlich, daß der nicht-Gaußsche Fixpunkt der Einstein-Hilbert-Trunkierung allein durch das Approximieren erzeugt wird und nicht in der exakten Theorie existiert, zumal sie durch die verallgemeinerte Trunkierung (5.2) noch untermauert wurden.

Bevor wir uns aber explizit den Resultaten aus der R^2 -Trunkierung widmen, werden wir noch kurz auf den Gaußschen Fixpunkt der Einstein-Hilbert-Trunkierung eingehen. In der vorliegenden Arbeit wurde der Renormierungsgruppenfluß in seiner Umgebung analysiert, wobei die IR Aspekte dieses Flusses im Vordergrund standen. Dabei stellte sich heraus, daß es - zumindest in dieser Näherung - genau eine Trajektorie (die soge-

nannte Separatrix) gibt, die im Limes $k \rightarrow 0$ in den Gaußschen Fixpunkt hineinläuft. Diese Trajektorie besitzt die Eigenschaft, daß die dimensionsbehaftete laufende Newton-Konstante G_k hier mit abnehmender Skala $k \rightarrow 0$ anwächst. Wenn man nun die Quanten-Einstein-Gravitation mit dieser Trajektorie identifiziert, dann würde dieses Verhalten von G_k bedeuten, daß die effektive Gravitationstheorie mit Newton-Konstante G_0 aus einem sogenannten “Antiscreening”-Effekt hervorgeht.

Bis zu diesem Punkt wurden alle Informationen über die Fixpunktstruktur und über die Qualität dieser Ergebnisse der reinen Einstein-Hilbert-Trunkierung entnommen. Natürlich lassen sich diese Resultate im Endeffekt nur dann als verlässlich betrachten, wenn sie sich in allgemeineren Trunkierungen, also bei Vergrößerung des trunkierten Parameterraums, reproduzieren. In der vorliegenden Arbeit wurde auch in dieser Hinsicht ein erster Test durchgeführt, und zwar wurde unter Verwendung der β -Funktionen der R^2 -Trunkierung überprüft, welcher Status den Fixpunkten der Einstein-Hilbert-Trunkierung im λ - g - β -Raum der verallgemeinerten Trunkierung zukommt.

Zunächst einmal stellte sich dabei heraus, daß sich der Gaußsche Fixpunkt der Einstein-Hilbert-Trunkierung in der R^2 -Trunkierung nicht wiederfindet. Betrachtet man jedoch den Fluß, der sich im λ - g - β -Raum in der Nähe des Ursprungs $\lambda = g = \beta = 0$ abspielt und projiziert ihn auf die λ - g -Ebene bei $\beta = 0$, so erkennt man, daß diese Projektion in sehr guter Näherung durch den Fluß beschrieben wird, der bei der Einstein-Hilbert-Trunkierung in der Umgebung des Gaußschen Fixpunkts $(\lambda_*, g_*) = (0, 0)$ festgestellt wurde. Der projizierte Fluß hat demzufolge in der Tat einen Fixpunkt bei $\lambda_* = g_* = 0$. Außerdem enthält er die Separatrix, also diejenige Trajektorie, die als einzige den Fixpunkt im Limes $k \rightarrow 0$ trifft. Diese Trajektorie wird durch die nichtverschwindende β -Komponente des “vollständigen” λ - g - β -Systems in ebendiese Richtung angehoben. Im $d = 4$ -dimensionalen Fall wächst diese Komponente für $k \rightarrow 0$ logarithmisch an, was in Einklang mit den Resultaten aus älteren störungstheoretischen Untersuchungen der R^2 -Gravitation steht. Für $d \neq 4$ liegt ein anderes Verhalten vor; hier zeichnet sich die β -Komponente durch ein Potenz-artiges Laufen aus. Zudem existiert in diesem Fall ein quasi-Gaußscher Fixpunkt bei $\lambda_* = g_* = 0, \beta_* \neq 0$.

Im Gegensatz zum Gaußschen Fixpunkt findet sich der nicht-Gaußsche Fixpunkt der Einstein-Hilbert-Trunkierung sehr wohl in der R^2 -Trunkierung wieder. Analog zu den im Rahmen der Einstein-Hilbert-Trunkierung durchgeführten Untersuchungen wurde er mittels Variation des Cutoffs (hier ausschließlich vom Typ B) einer Qualitätskontrolle unterzogen. Dabei ergab sich, daß der Fixpunkt in der Tat für alle verwendeten Cutoffs existiert und seine Position jeweils nahezu mit derjenigen übereinstimmt, die die Einstein-Hilbert-Trunkierung liefert. Damit geht einher, daß die β -Komponente des Fixpunkts im Vergleich zu den beiden anderen Komponenten immer sehr klein ist. (Sie ist jedoch nicht

Null; für alle Cutoffs gilt $\beta_* > 0$.) Außerdem zeigten die Resultate für die kritischen Exponenten θ_I , daß der Fixpunkt für sämtliche Cutoffs in alle drei Richtungen des λ - g - β -Raums UV attraktiv wirkt. Von den drei kritischen Exponenten, die man am nicht-Gaußschen Fixpunkt der R^2 -Trunkierung erhält, bilden zwei ein komplex konjugiertes Paar, dessen numerische Werte für alle Cutoffs recht gut mit denjenigen des komplex konjugierten θ -Paares aus der Einstein-Hilbert-Trunkierung übereinstimmen.

All dies ist zusammen mit einigen weiteren Resultaten, die sowohl die kritischen Exponenten als auch deren Eigenvektoren betreffen, dafür verantwortlich, daß der linearisierte Fluß der R^2 -Trunkierung in guter Näherung durch die entsprechenden Flußgleichungen der Einstein-Hilbert-Trunkierung beschrieben wird. Das äußert sich darin, daß die Renormierungsgruppentrajektorien sich in der Umgebung des Fixpunkts im wesentlichen auf die $\beta = 0$ -Ebene beschränken und hinsichtlich ihrer Form sehr gut mit denjenigen aus der Einstein-Hilbert-Trunkierung zusammenpassen.

Was die universellen Größen betrifft, so ergab sich aus den Untersuchungen, daß die numerischen Werte für das Produkt $g_*\lambda_*$ und für die kritischen Exponenten im Rahmen der durch die Schema-Abhängigkeit verursachten Ungenauigkeit mit den entsprechenden Werten aus der Einstein-Hilbert-Trunkierung verträglich sind. Außerdem ist die Schema-Abhängigkeit dieser Größen bei beiden Trunkierungen von derselben Größenordnung.

Insgesamt weisen die aus beiden Trunkierungen gewonnenen Erkenntnisse deutlich darauf hin, daß die Ergebnisse, die die Einstein-Hilbert-Trunkierung im UV Bereich liefert, zumindest vom qualitativen Standpunkt aus betrachtet, aller Wahrscheinlichkeit nach verlässlich sind. Folglich ist es ziemlich unwahrscheinlich, daß der gefundene nicht-Gaußsche Fixpunkt lediglich ein Produkt der Trunkierung verkörpert. In Anbetracht dessen könnte die Quanten-Einstein-Gravitation also durchaus asymptotisch sicher und somit nichtperturbativ renormierbar sein.

Die Diskussion der UV Aspekte der Gravitation wurde mit einer Untersuchung des Stabilitätsproblems, das der konforme Faktor der Metrik mit sich bringt, zu Ende geführt. In der vorliegenden Arbeit wurde gezeigt, daß dieses Problem zwar generell in der Einstein-Hilbert-Trunkierung auftaucht, jedoch nicht in der R^2 -Trunkierung, solange sie sich im Bereich genügend großer Skalen k bewegt. Denn unter dieser Voraussetzung ist der zugehörige kinetische Term des konformen Faktors manifest positiv, was ein stabiles Fluktuationsspektrum nach sich zieht. Demhingegen ist im Fall der Einstein-Hilbert-Trunkierung der besagte kinetische Term für den kompletten Skalenbereich negativ und somit instabil. Diese Instabilität überträgt sich hier auch auf den Cutoffoperator \mathcal{R}_k , da er bei der oben geschilderten Anpassung an den kinetischen Term dessen Vorzeichen übernimmt. Bei der R^2 -Trunkierung treten diesbezüglich jedoch keinerlei Probleme auf; auch der angepaßte Cutoffoperator erwies sich für hinreichend große Skalen k als positiv definit. Insgesamt war

es damit möglich zu zeigen, daß die oben zusammengefaßte Renormierungsgruppenstudie des UV Bereichs inklusive des nicht-Gaußschen Fixpunkts im Falle der R^2 -Trunkierung von den üblichen Stabilitätsproblemen verschont bleibt. Ferner weist die gute Übereinstimmung der Ergebnisse aus beiden Trunkierungen darauf hin, daß die Anpassungsregel für den Cutoff auch im Fall der Einstein-Hilbert-Trunkierung korrekt ist, obgleich sie hier zu einem nichtpositiven Cutoff führt.

Der zweite anwendungsorientierte Teil dieser Arbeit beschäftigte sich mit Lösungsansätzen zur Behebung der Instabilität des konformen Faktors im IR Bereich. Dazu wurde zuerst ein skalares Spielzeugmodell vom $|\chi|^4$ -Typ untersucht, dessen nackter kinetischer Term die UV Stabilität sowie die IR Instabilität des aus einer Wirkung der Form $S[g_{\mu\nu}] \propto \int d^d x \sqrt{g} \{-R + \gamma R^2\}$ resultierenden konformen Sektors nachahmt. Das Ziel der Studie bestand darin herauszufinden, ob sich dieses Modell im Laufe des Renormierungsgruppenflusses in Richtung kleiner Skalen k stabilisiert. Bei der Auswertung wurden gängige Standardverfahren angewendet.

Um an die gewünschten Informationen zu gelangen, wurden der effektive inverse Propagator $\Sigma_k(p^2)$ für verschwindendes Hintergrundfeld sowie die Familie von verallgemeinerten (Impuls-abhängigen) effektiven Potentialen $U_k(A; p^2)$ in führender Ordnung der semiklassischen Entwicklung bestimmt. Die Analyse des Renormierungsgruppenflusses dieser Größen ergab, daß starke "instabilitätsinduzierte" Renormierungseffekte in Erscheinung treten, die eine andere Ursache haben als die herkömmlichen, von Quantenfluktuationen hervorgerufenen Renormierungseffekte. Sie beruhen darauf, daß der triviale Sattelpunkt des Pfadintegrals, das die effektive Mittelwertwirkung $\Gamma_k[\phi]$ definiert, in gewissen Bereichen des ϕ -Raums ($\phi = \langle \chi \rangle$) instabil ist. Diese Instabilität tritt deswegen auf, weil die nackte Wirkung $S[\chi]$ ihr globales Minimum nicht bei $\chi = 0$ annimmt. Statt dessen entspricht ihr globales Minimum einem Satz von nichttrivialen Spinwellen-Konfigurationen. Diese entarteten Vakuumkonfigurationen bilden hier die Vakuummannigfaltigkeit $S^1 \times S^{d-1}$.

Es stellte sich heraus, daß die oben beschriebenen Renormierungseffekte zu der erhofften Stabilisierung der effektiven Theorie führen. Das konnte man anhand der Struktur des effektiven kinetischen Terms $\Omega_{\text{eff}} = \Sigma_{k=0}$ erkennen. Für Moden mit $|p| \neq M$ ist er manifest positiv. Das bedeutet, daß diese Moden allesamt stabil sind. Um sie anzuregen, muß man dem System Energie zuführen. Das ist bei Moden mit $|p| = M$ nicht der Fall, denn für sie verschwindet Ω_{eff} . Diese Moden stabilisieren sich, indem sie kondensieren, d.h., sie nehmen nichtverschwindende Vakuumerwartungswerte an. Damit geht - in ähnlicher Weise wie bei der gewöhnlichen spontanen Symmetriebrechung durch ein "Mexican-hat"-Potential - ein Übergang zum "wahren" Quanten-Vakuumzustand einher. Im vorliegenden Fall besteht das Kondensat, das das echte Vakuum (zumindest in führender Ordnung der

semiklassischen Entwicklung) charakterisiert, aus einer einzelnen Spinwelle, die aufgrund ihrer festen Phase und Impulsrichtung die $ISO(d)$ -Symmetrie von Raumzeit-Rotationen und -Translationen sowie die $U(1)$ -Phasensymmetrie des Modells bricht. Sie besitzt den Impuls M und die in nichtanalytischer Weise von der Kopplung λ abhängende Amplitude $M/(2\lambda)$, was den nichtperturbativen Charakter des Kondensats verdeutlicht. Insgesamt hat sich das Modell somit unter Ausbildung einer nichttrivialen Quanten-Vakuumstruktur stabilisiert.

Bei genauerer Betrachtung ließ sich feststellen, daß der eigentliche Stabilisierungseffekt, der mit der Kondensation einhergeht, im Grunde genommen eine Massenerzeugung ist.³ Die erzeugte Masse sorgt letztendlich dafür, daß der effektive kinetische Term positiv, d.h. stabil wird.

Will man die aus dem Modell gewonnenen Erkenntnisse auf den konformen Sektor der Gravitation übertragen, so stößt man dabei auf das folgende Problem: Eine mögliche dynamische Stabilisierung kann hier auf keinen Fall durch die Erzeugung eines einfachen Massenterms für den konformen Faktor realisiert werden, da dieser die geforderte Invarianz unter allgemeinen Koordinatentransformationen verletzen würde. Eine nähere Erörterung dieses Problems führte hier zu der Schlußfolgerung, daß im Fall der Gravitation wahrscheinlich nur nichtlokale Invarianten den gewünschten Stabilisierungseffekt im IR Bereich hervorrufen könnten, siehe hierzu auch [13].

Um diese Möglichkeit näher zu überprüfen, wurde die nichtlokale Invariante $I_{nl}[g] = \int d^d x \sqrt{g} R (-D^2 + \varepsilon|R| + m^2)^{-1} R$, die in vereinfachter Form bereits in [13] studiert worden war, hinsichtlich ihres stabilisierenden Einflusses auf den instabilen konformen Sektor des Einstein-Hilbert-Terms untersucht, was gleichzeitig letzter Gegenstand der Diskussion war. Neben einigen anderen recht interessanten Details ergab die Analyse, daß die Kombination aus S_{EH} (mit $\bar{\lambda} = 0$) und I_{nl} in einem bestimmten Grenzfall der anwesenden Parameter tatsächlich einen positiv definiten kinetischen Operator besitzt. Zudem nimmt die kombinierte Wirkung bei $g_{\mu\nu} = \delta_{\mu\nu}$ zumindest ein lokales Minimum an. Falls dieses Minimum auch global ist - was sich allerdings anhand der Ergebnisse dieser Arbeit nicht erkennen läßt - würde das Vakuum der durch $S_{EH} + I_{nl}$ definierten Theorie, wie erhofft, dem flachen Raum entsprechen. Somit besteht durchaus die Möglichkeit, daß der IR Bereich der Gravitation durch eine Wirkung dieses nichtlokalen Typs beschrieben wird.

Kommen wir nun zu einem kurzen Ausblick auf weiterführende Untersuchungen, die sich im Rahmen des gewählten Zugangs anbieten. Was die Frage nach der IR Stabilität der Gravitation angeht, so könnte man beispielsweise - wie bereits in Kapitel 12 erwähnt wur-

³Hierzu sei angemerkt, daß sich die obigen Resultate auf ein Modell ohne klassischen Massenterm beziehen. Die entsprechenden Ergebnisse für Modelle mit klassischem Massenterm lassen sich aber leicht aus den Resultaten ableiten, die sich hier für nichtverschwindende k ergeben. Das liegt an der speziellen Wahl des IR Cutoffs $\mathcal{R}_k = k^2$.

de - im nächsten Schritt die oben diskutierte nichtlokale Wirkung in einen entsprechenden Trunkierungsansatz umwandeln und dann mit Hilfe der Flußgleichung überprüfen, ob der Renormierungsgruppenfluß im Limes $k \rightarrow 0$ tatsächlich zu dem angesprochenen stabilen Grenzfall führt. Vom technischen Standpunkt aus betrachtet, wäre die Vorgehensweise bei einer solchen Rechnung im Prinzip genau dieselbe wie bei der Auswertung der beiden in dieser Arbeit diskutierten Trunkierungen. Bei der Projektion der Flußgleichung würde jedoch voraussichtlich ein technisches Problem auftreten: Es wird wahrscheinlich recht schwierig sein, eine relativ einfache Metrik zu finden, für die sich die nichtlokale Invariante eindeutig vom Einstein-Hilbert-Term unterscheiden ließe. Mit einer sphärisch symmetrischen Metrik scheint dies jedenfalls sehr schwer zu sein, denn damit ergibt sich zum einen $\int d^d x \sqrt{g} R \propto r^{d-2}$ und zum anderen $\int d^d x \sqrt{g} R (-D^2 + \varepsilon_k |R| + m_k^2)^{-1} R \propto r^{d-2} (\varepsilon_k d(d-1) + m_k^2 r^2)^{-1}$. Falls sich dieses Problem zufriedenstellend lösen läßt, sollten der weiteren Auswertung eigentlich keine zusätzlichen Hindernisse mehr im Weg stehen.

Was die UV Aspekte der Gravitation, also im wesentlichen die Frage nach nichtperturbativer Renormierbarkeit betrifft, so könnte man versuchen, die bisher gewonnenen Hinweise auf die Existenz des nicht-Gaußschen Fixpunkts weiter zu untermauern, indem man noch allgemeinere Trunkierungsansätze auswertet. Hierfür käme beispielsweise als nächstes ein Trunkierungsansatz in Frage, der alle drei in der Krümmung quadratischen Invarianten enthält. (Man müßte dazu allerdings das Projektionsverfahren noch etwas verfeinern.) Andererseits wird man über Trunkierungen, so allgemein sie auch sein mögen, wohl niemals eine endgültige Antwort (im Sinne eines Beweises) auf die Frage erhalten, ob die Quanten-Einstein-Gravitation wirklich nichtperturbativ renormierbar ist. Eventuell läßt sich aber die Flußgleichung auf eine andere Weise dazu benutzen, ein Beweisverfahren zu konstruieren. In der Tat wurden mit Hilfe von Flußgleichungen schon einige Renormierbarkeitsbeweise geführt [9, 64]. Diese beruhen allerdings allesamt auf einem störungstheoretischen Ansatz. Vielleicht ist es jedoch möglich, eine nichtperturbative Variante dieser Beweismethodik zu entwickeln. Das wäre sicherlich eine sehr schwierige, aber auch interessante Aufgabe.

Anhang A

Abkürzungsverzeichnis und Einzelheiten zu Konventionen und Notation

Im folgenden werden die im Laufe dieser Arbeit eingeführten Abkürzungen und Notationen sowie die verwendeten Konventionen in tabellarischer Form zusammengefaßt. Weiterhin enthält dieser Teil des Anhangs eine Tabelle mit Ausdrücken, die man für verschiedene Variationen einiger geometrischer Größen bei Benutzung der zuvor erläuterten Konventionen erhält.

Tabelle A.t1: Abkürzungsverzeichnis

Kürzel	Bedeutung
bzgl.	bezüglich
bzw.	beziehungsweise
d.h.	das heißt
etc.	et cetera
i.a.	im allgemeinen
u.a.	unter anderem
vgl.	vergleiche
Abb.	Abbildung
eff.	effektiv, -er, -e, -es (und dekliniert)
klass.	klassisch, -er, -e, -es (und dekliniert)

Tabelle A.t1: Abkürzungsverzeichnis (Fortsetzung)

Kürzel	Bedeutung
IR	infrarot, -er, -e, -es (und dekliniert)
UV	ultraviolett, -er, -e, -es (und dekliniert)
AS	Asymptotische Sicherheit
KV	Killing-Vektor
PCKV	“proper conformal Killing vector”
ST^2	“symmetric transverse traceless”
T^2 bzw. TT	“transverse traceless”
T	“transverse”
QEG	Quanten-Einstein-Gravitation
QCD	Quantenchromodynamik

Tabelle A.t1: Verwendete Konventionen und Notation

Objekt	Notation/Konvention
Naturkonstanten	$\hbar = c = 1$
Einheiten	$[\text{Länge}] = [\text{Zeit}] = [\text{Masse}]^{-1} = [\text{Energie}]^{-1}$
Lorentzsche Metrik $g_{\mu\nu}$	Signatur: “East Coast”, d.h. $(-, +, +, +, \dots)$
Euklidische Metrik $g_{\mu\nu}$	Signatur: $(+, +, +, +, \dots)$
Inverse Metrik $g^{\mu\nu}$	$g_{\mu\sigma}g^{\sigma\nu} = \delta_{\mu}^{\nu}$
Determinante der Metrik	$g \equiv \det(g_{\mu\nu})$
Christoffel-Symbol	$\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} = \frac{1}{2}g^{\lambda\sigma}(\partial_{\mu}g_{\nu\sigma} + \partial_{\nu}g_{\mu\sigma} - \partial_{\sigma}g_{\mu\nu})$
Riemannscher Krümmungstensor	$R_{\mu\nu\rho}^{\lambda} = \partial_{\nu}\Gamma_{\mu\rho}^{\lambda} - \partial_{\mu}\Gamma_{\nu\rho}^{\lambda} + \Gamma_{\mu\rho}^{\sigma}\Gamma_{\nu\sigma}^{\lambda} - \Gamma_{\nu\rho}^{\sigma}\Gamma_{\mu\sigma}^{\lambda}$
Ricci-Tensor	$R_{\mu\nu} = R_{\mu\lambda\nu}^{\lambda}$
Krümmungsskalar	$R = g^{\mu\nu}R_{\mu\nu}$
Kovariante Ableitung	D_{μ}
Krümmungsoperator:	
a) für Vektoren A_{λ}	$[D_{\mu}, D_{\nu}]A_{\lambda} = R_{\mu\nu\lambda}^{\rho}A_{\rho}$
b) für Tensoren $H_{\lambda\sigma}$	$[D_{\mu}, D_{\nu}]H_{\lambda\sigma} = R_{\mu\nu\lambda}^{\rho}H_{\rho\sigma} + R_{\mu\nu\sigma}^{\rho}H_{\lambda\rho}$

Tabelle A.t2: Variationen verschiedener geometrischer Größen

$\delta g_{\mu\nu}$	$\equiv h_{\mu\nu}$
$\delta g^{\mu\nu}$	$= -h^{\mu\nu}$
$\delta \Gamma_{\mu\nu}{}^\lambda$	$= \frac{1}{2} g^{\lambda\sigma} (D_\mu h_{\nu\sigma} + D_\nu h_{\mu\sigma} - D_\sigma h_{\mu\nu})$
$\delta \sqrt{g}$	$= \frac{1}{2} \sqrt{g} g^{\mu\nu} h_{\mu\nu}$
$\delta R_{\mu\nu\rho}{}^\lambda$	$= \frac{1}{2} (-R_{\mu\nu\rho}{}^\sigma h_\sigma{}^\lambda + R_{\mu\nu\sigma}{}^\lambda h_\rho{}^\sigma - D_\mu D_\rho h_\nu{}^\lambda + D_\nu D_\rho h_\mu{}^\lambda + D_\mu D^\lambda h_{\nu\rho} - D_\nu D^\lambda h_{\mu\rho})$
$\delta R_{\mu\nu}$	$= \frac{1}{2} (R_{\mu\sigma} h_\nu{}^\sigma + R_\nu{}^\sigma h_{\sigma\mu} + 2R_{\sigma\mu\nu\lambda} h^{\sigma\lambda} + D_\nu D_\sigma h_\mu{}^\sigma - D_\mu D_\nu h_\alpha{}^\alpha - D_\lambda D^\lambda h_{\mu\nu} + D_\mu D^\sigma h_{\sigma\nu})$
δR	$= -R^{\mu\nu} h_{\mu\nu} + D_\beta (D_\alpha h^{\alpha\beta} - D^\beta h_\alpha{}^\alpha)$
$\delta^2 \sqrt{g}$	$= \frac{1}{2} \sqrt{g} (\frac{1}{2} g^{\mu\nu} g^{\rho\sigma} h_{\mu\nu} h_{\rho\sigma} - h^{\mu\nu} h_{\mu\nu})$
$\delta^2 R$	$= R_{\beta\mu} h^{\beta\gamma} h_\gamma{}^\mu - R_{\alpha\beta\gamma\rho} h^{\beta\gamma} h^{\alpha\rho} - 3h^{\beta\gamma} D_\gamma D_\alpha h_\beta{}^\alpha + 2h^{\beta\gamma} D_\beta D_\gamma h_\alpha{}^\alpha + 2h_{\beta\gamma} D_\lambda D^\lambda h^{\beta\gamma} - h^{\beta\gamma} D_\alpha D_\beta h_\gamma{}^\alpha - (D_\alpha h^{\beta\gamma}) (D_\beta h_\gamma{}^\alpha) + \frac{3}{2} (D_\lambda h_{\beta\gamma}) (D^\lambda h^{\beta\gamma}) - 2 (D_\gamma h^{\beta\gamma}) (D_\alpha h_\beta{}^\alpha) + 2 (D_\beta h^{\beta\gamma}) (D_\gamma h_\alpha{}^\alpha) - \frac{1}{2} (D_\lambda h_\gamma{}^\gamma) (D^\lambda h_\alpha{}^\alpha)$

Anmerkung zu Tabelle A.t3: Die meisten für die Rechnungen dieser Arbeit erforderlichen Variationen lassen sich aus bestimmten Kombinationen der obigen Ausdrücke gewinnen - wie z.B. $\delta^2(\sqrt{g} R^2) = R^2 \delta^2 \sqrt{g} + 4R(\delta \sqrt{g})(\delta R) + 2\sqrt{g}(\delta R)^2 + 2\sqrt{g} R \delta^2 R$. Diejenigen Variationen, für die dies nicht der Fall ist, werden jeweils an der Stelle angegeben, an welcher sie benötigt werden.

Anhang B

Die TT-Zerlegung

B.1 Pseudo-Projektoren für die TT-Zerlegung

In Abschnitt 1.3 wurde eine sogenannte TT-Zerlegung des Gravitationsfeldes $h_{\mu\nu}$ vorgenommen. Sie gilt für beliebige symmetrische Tensoren zweiter Stufe, sofern letztere auf d -dimensionalen geschlossenen oder offenen, asymptotisch flachen Riemannschen Räumen definiert sind. Sie wird durch die folgende Gleichung beschrieben:

$$h_{\mu\nu} = h_{\mu\nu}^T + h_{\mu\nu}^L + h_{\mu\nu}^{Tr}. \quad (\text{B.1})$$

Hier stellen $h_{\mu\nu}^T$, $h_{\mu\nu}^L$ bzw. $h_{\mu\nu}^{Tr}$ den transversalen, spurfreien, den longitudinalen, spurfreien bzw. den reinen Spurateil von $h_{\mu\nu}$ dar. Diese Felder sind paarweise orthogonal. Gemäß der Gleichung (1.12) lassen sich die einzelnen Anteile durch reine Spin-2-, Spin-1- und Spin-0-Komponentenfelder $h_{\mu\nu}^T$, $\hat{\xi}_\mu$, $\hat{\sigma}$ und ϕ ausdrücken. Das Ziel dieses Abschnitts besteht darin zu zeigen, daß die Komponentenfelder aus dem vollständigen Feld $h_{\mu\nu}$ gewonnen werden können, indem man bestimmte Operatoren $\mathbf{\Pi}$ auf dieses anwendet. Diese Operatoren werden von nun an als Pseudo-Projektoren bezeichnet.

Wenden wir uns zunächst dem longitudinalen, spurfreien Anteil und dem reinen Spurateil zu. Diese lassen sich wie folgt durch einen Vektor ε_μ bzw. ein Skalarfeld ϕ parametrisieren.

$$\begin{aligned} h_{\mu\nu}^L &= (L\varepsilon)_{\mu\nu} \equiv \bar{D}_\mu\varepsilon_\nu + \bar{D}_\nu\varepsilon_\mu - \frac{2}{d}\bar{g}_{\mu\nu}\bar{D}_\lambda\varepsilon^\lambda, \\ h_{\mu\nu}^{Tr} &= \frac{1}{d}\bar{g}_{\mu\nu}\phi, \quad \phi \equiv \bar{g}^{\mu\nu}h_{\mu\nu}^{Tr}. \end{aligned} \quad (\text{B.2})$$

Bei der obigen Darstellung von $h_{\mu\nu}^L$ wurde der Operator L eingeführt, welcher Vektoren auf longitudinale, spurfreie Tensoren abbildet. Gibt man umgekehrt einen Tensor $h_{\mu\nu}^L$ vor, so besitzt die Gleichung $(L\varepsilon)_{\mu\nu} = h_{\mu\nu}^L$ (mindestens) eine Lösung der Form

$$\varepsilon_\mu \equiv \hat{\xi}_\mu + \frac{1}{2}\bar{D}_\mu\hat{\sigma}, \quad (\text{B.3})$$

wobei $\widehat{\xi}_\mu$ einen transversalen Vektor verkörpert und $\widehat{\sigma}$ ein Skalarfeld. Wie bereits in Abschnitt 1.3 dargelegt wurde, ist diese Lösung eindeutig, solange keine konformen Killing-Vektoren (CKV) existieren. Gibt es diese aber, so kann man sie zu der Lösung (B.3) hinzuaddieren und erhält dadurch weitere Lösungen der Gleichung $(L\varepsilon)_{\mu\nu} = h_{\mu\nu}^L$. Im Gegensatz dazu ist das Skalarfeld ϕ eindeutig durch $h_{\mu\nu}$ bestimmt. Setzt man nun die Gleichungen (B.2) und (B.3) in (B.1) ein, so erhält man die Gleichung (1.12) zurück.

Um die einzelnen Komponentenfelder aus $h_{\mu\nu}$ herauszuprojizieren, geht man jetzt wie folgt vor. Zuerst bildet man die kovariante Divergenz von (B.1), setzt darin die Ausdrücke aus (B.2) ein und benutzt die Transversalitätsbedingung $\bar{D}^\mu h_{\mu\nu}^T = 0$, was zu der folgenden Gleichung führt:

$$(\mathcal{D}\varepsilon)_\mu = -\bar{D}^\nu \left(h_{\mu\nu} - \frac{1}{d} \bar{g}_{\mu\nu} \phi \right). \quad (\text{B.4})$$

Der oben eingeführte Operator \mathcal{D} bildet Vektoren auf Vektoren ab und ist durch die Gleichung

$$(\mathcal{D}\varepsilon)_\mu \equiv -\bar{D}^\nu (L\varepsilon)_{\mu\nu} \quad (\text{B.5})$$

definiert. In [29] wurde von York gezeigt, daß \mathcal{D} einen positiv definiten, Hermiteschen Operator darstellt. Zudem wurde in der besagten Arbeit bewiesen, daß die Gleichung $(\mathcal{D}\varepsilon)_\mu = u_\mu$ für jeden beliebigen Vektor u_μ immer eine bis auf eventuell vorhandene CKV eindeutige Lösung ε_μ besitzt. Es ist immer problemlos möglich, die Gleichung (B.4) nach ε_μ aufzulösen, selbst wenn CKV existieren, vgl. [29]. Um diese Lösung zu bestimmen, muß man \mathcal{D} invertieren. Zu diesem Zweck nehmen wir nun an, daß \mathcal{D} (und auch jeder andere Operator, der im weiteren Verlauf zu invertieren ist) einen vollständigen Satz von orthogonalen Eigenfunktionen aufweist und daß Null keinen Häufungspunkt für die zugehörigen Eigenwerte darstellt. Unter diesen Voraussetzungen ist die Existenz seines Inversen, \mathcal{D}^{-1} , sichergestellt, so daß sich aus (B.4) der Ausdruck

$$\varepsilon_\mu = (\mathcal{D}^{-1} \widetilde{\delta} h)_\mu \quad (\text{B.6})$$

ergibt. Der hier eingeführte Operator $\widetilde{\delta}$ bildet gemäß

$$(\widetilde{\delta} h)_\mu = -\bar{D}^\nu \Lambda_{\mu\nu}{}^{\alpha\beta} h_{\alpha\beta} \quad (\text{B.7})$$

Tensoren auf Vektoren ab, wobei

$$\Lambda_{\mu\nu}{}^{\alpha\beta} \equiv \frac{1}{2} (\delta_\mu^\alpha \delta_\nu^\beta + \delta_\mu^\beta \delta_\nu^\alpha) - \frac{1}{d} \bar{g}_{\mu\nu} \bar{g}^{\alpha\beta} \quad (\text{B.8})$$

gerade denjenigen Operator verkörpert, der symmetrische Tensoren auf ihren spurlosen Anteil projiziert. Somit gilt:

$$\Lambda_{\mu\nu}{}^{\alpha\beta} h_{\alpha\beta} = h_{\mu\nu} - \frac{1}{d} \bar{g}_{\mu\nu} \phi. \quad (\text{B.9})$$

Bildet man die kovariante Divergenz der Lösung (B.6), setzt dann in die linke Seite der resultierenden Gleichung für ε_μ den Ausdruck (B.3) ein und verwendet dabei die Transversalität von $\widehat{\xi}_\mu$, also $\bar{D}_\mu \widehat{\xi}^\mu = 0$, so ergibt sich

$$\bar{D}^\mu \varepsilon_\mu = \frac{1}{2} \bar{D}^2 \widehat{\sigma} = \bar{D}^\mu (\mathcal{D}^{-1} \widetilde{\delta} h)_\mu . \quad (\text{B.10})$$

Mit Hilfe von (B.10) lassen sich nun $\widehat{\xi}_\mu$ und $\widehat{\sigma}$ wie folgt durch $h_{\mu\nu}$ ausdrücken:

$$\begin{aligned} \widehat{\sigma} &= 2(\bar{D}^2)^{-1} \bar{D}^\mu (\mathcal{D}^{-1} \widetilde{\delta} h)_\mu \equiv \Xi h , \\ \widehat{\xi}_\mu &= (\mathcal{D}^{-1} \widetilde{\delta} h)_\mu - \bar{D}_\mu (\bar{D}^2)^{-1} \bar{D}^\nu (\mathcal{D}^{-1} \widetilde{\delta} h)_\nu \equiv (\Omega h)_\mu . \end{aligned} \quad (\text{B.11})$$

Offenkundig definieren diese Gleichungen die gesuchten Pseudo-Projektoren für die Komponentenfelder $\widehat{\xi}_\mu$ und $\widehat{\sigma}$. Unter Verwendung von (B.2), (B.6) und (B.9) lassen sich auch die übrigen Pseudo-Projektoren bestimmen. Geht man dann noch zu einer Beschreibung mittels der in (1.24) eingeführten redefinierten Felder ξ_μ und σ über, so ergeben sich insgesamt die nachstehenden Definitionsgleichungen für die Pseudo-Projektoren $\mathbf{\Pi}$, die das Feld $h_{\mu\nu}$ auf seine einzelnen Komponenten abbilden:

$$\begin{aligned} h_{\mu\nu}^T &= (\mathbf{\Pi}_{TT} h)_{\mu\nu} \equiv (\Lambda h)_{\mu\nu} - (L \mathcal{D}^{-1} \widetilde{\delta} h)_{\mu\nu} , \\ \xi_\mu &= (\mathbf{\Pi}_{LT} h)_\mu \equiv \left(\sqrt{-\bar{D}^2 - \text{Ric}} \Omega h \right)_\mu , \\ \sigma &= \mathbf{\Pi}_{LL} h \equiv \sqrt{(\bar{D}^2)^2 + \frac{d}{d-1} \bar{D}_\mu \bar{R}^{\mu\nu} \bar{D}_\nu} \Xi h , \\ \phi &= \mathbf{\Pi}_{Tr} h \equiv \bar{g}^{\mu\nu} h_{\mu\nu} . \end{aligned} \quad (\text{B.12})$$

Ferner lassen sich die Pseudo-Projektoren für die T-Zerlegung von beliebigen *Vektorfeldern* direkt aus (B.11) ableiten. Ausgehend von der Zerlegung $C^\mu = C^{T\mu} + \bar{D}^\mu (-\bar{D}^2)^{-\frac{1}{2}} \eta$ mit $\bar{D}_\mu C^{T\mu} = 0$, erhält man in diesem Fall

$$\begin{aligned} \eta &= \mathbf{\Pi}_L C \equiv (-\bar{D}^2)^{-\frac{1}{2}} \bar{D}_\mu C^\mu , \\ C^{T\mu} &= (\mathbf{\Pi}_T C)^\mu \equiv C^\mu - \bar{D}^\mu (-\bar{D}^2)^{-1} \bar{D}_\nu C^\nu . \end{aligned} \quad (\text{B.13})$$

Offensichtlich bilden $\mathbf{\Pi}_{LL}$ und $\mathbf{\Pi}_{Tr}$ Tensoren auf Skalarfelder, $\mathbf{\Pi}_{LT}$ Tensoren auf Vektoren und $\mathbf{\Pi}_L$ Vektoren auf Skalarfelder ab. Folglich stellen diese Operatoren keine Projektoren im üblichen Sinne dar. Es lassen sich aber die Projektoren \mathbf{P} , die beliebige symmetrische Tensoren $h_{\mu\nu}$ auf $h_{\mu\nu}^L$ bzw. $h_{\mu\nu}^{Tr}$ oder beliebige Vektoren ε_μ auf ihren longitudinalen Anteil abbilden, aus den oben genannten Pseudo-Projektoren $\mathbf{\Pi}$ konstruieren, vgl. [29]. Da die zuletzt genannten $\mathbf{\Pi}$ außerdem Vektoren und symmetrische Tensoren auf ihre einzelnen Feldkomponenten abbilden, vermitteln sie zumindest im weiteren Sinne eine

Projektion. Daher werden die $\mathbf{\Pi}$ hier als Pseudo-Projektoren bezeichnet. Im Gegensatz zu $\mathbf{\Pi}_{LT}$, $\mathbf{\Pi}_{LL}$, $\mathbf{\Pi}_{Tr}$ und $\mathbf{\Pi}_L$ stellen die Operatoren $\mathbf{\Pi}_{TT}$ und $\mathbf{\Pi}_T$, die symmetrische Tensoren bzw. Vektoren auf ihre ST^2 - bzw. T -Komponente abbilden, Projektoren im üblichen Sinne dar.

B.2 Konstruktion des Cutoffs und der Quellterme

Die in der vorliegenden Arbeit konstruierte Flußgleichung für die effektive Mittelwertwirkung Γ_k basiert darauf, daß Γ_k sowohl durch die vollständigen als auch durch die Komponentenfelder ausgedrückt werden kann. Um den Übergang zwischen diesen beiden Beschreibungen zu ermöglichen, ist es notwendig, den Cutoffterm und die Quellterme des definierenden Pfadintegrals auf der Grundlage der Pseudo-Projektoren $\mathbf{\Pi}$ aus Abschnitt B.1 zu konstruieren.

Wenden wir uns zuerst dem Cutoffterm zu. Ausgehend von der Definition (1.28) des Cutoffterms, die auf der Verwendung der vollständigen Felder beruht, wählt man die Cutoffoperatoren $\mathcal{R}_k^{\text{grav}}$ und $\mathcal{R}_k^{\text{gh}}$ nun wie folgt:

$$\begin{aligned}\mathcal{R}_k^{\text{grav}} &= \sum_{\zeta_1, \zeta_2 \in \{h^T, \xi, \sigma, \phi\}} \mathbf{\Pi}_{\zeta_1}^\dagger (\mathcal{R}_k)_{\zeta_1 \zeta_2} \mathbf{\Pi}_{\zeta_2}, \\ \mathcal{R}_k^{\text{gh}} &= \sum_{\bar{\vartheta}_1 \in \{\bar{C}^T, \bar{\eta}\}} \sum_{\vartheta_2 \in \{C^T, \eta\}} \mathbf{\Pi}_{\bar{\vartheta}_1}^\dagger (\mathcal{R}_k)_{\bar{\vartheta}_1 \vartheta_2} \mathbf{\Pi}_{\vartheta_2}.\end{aligned}\quad (\text{B.14})$$

Den obigen Matrixoperator $((\mathcal{R}_k)_{\bar{\vartheta}_1 \vartheta_2})_{\bar{\vartheta}_1 \in \{\bar{C}^T, \bar{\eta}\}, \vartheta_2 \in \{C^T, \eta\}}$ kann man dabei als Matrixblock eines allgemeineren Matrixoperators $((\mathcal{R}_k)_{\psi_1 \psi_2})_{\psi_1, \psi_2 \in \{\bar{C}^T, \bar{\eta}, C^T, \eta\}}$ auffassen, dessen Einträge $(\mathcal{R}_k)_{\psi_1 \psi_2}$ für $(\psi_1, \psi_2) \in \{C^T, \eta\} \times \{C^T, \eta\} \cup \{\bar{C}^T, \bar{\eta}\} \times \{\bar{C}^T, \bar{\eta}\}$ identisch verschwinden, $(\mathcal{R}_k)_{\psi_1 \psi_2} \equiv 0$. Die hier eingeführten Operatoren $(\mathcal{R}_k)_{\zeta_1 \zeta_2}$ und $(\mathcal{R}_k)_{\psi_1 \psi_2}$ müssen die Hermitizitätsbedingungen $(\mathcal{R}_k)_{\zeta_2 \zeta_1} = (\mathcal{R}_k)_{\zeta_1 \zeta_2}^\dagger$ und $(\mathcal{R}_k)_{\psi_2 \psi_1} = -(\mathcal{R}_k)_{\psi_1 \psi_2}^\dagger$ erfüllen. Weiterhin sind die in (B.14) auftretenden $\mathbf{\Pi}$ durch $\mathbf{\Pi}_{h^T} \equiv \mathbf{\Pi}_{TT}$, $\mathbf{\Pi}_\xi \equiv \mathbf{\Pi}_{LT}$, $\mathbf{\Pi}_\sigma \equiv \mathbf{\Pi}_{LL}$, $\mathbf{\Pi}_\phi \equiv \mathbf{\Pi}_{Tr}$, $\mathbf{\Pi}_{\bar{C}^T} \equiv \mathbf{\Pi}_{C^T} \equiv \mathbf{\Pi}_T$, $\mathbf{\Pi}_{\bar{\eta}} \equiv \mathbf{\Pi}_\eta \equiv \mathbf{\Pi}_L$ definiert. Außerdem bezeichnen $\mathbf{\Pi}_\zeta^\dagger$ und $\mathbf{\Pi}_\psi^\dagger$ für alle $\zeta \in \{h^T, \xi, \sigma, \phi\}$ und für alle $\psi \in \{\bar{C}^T, \bar{\eta}, C^T, \eta\}$ die Hermitesch Konjugierten der Operatoren $\mathbf{\Pi}_\zeta$ bzw. $\mathbf{\Pi}_\psi$. Somit sind alle in (B.14) enthaltenen Operatoren $\mathbf{\Pi}$ durch die Gleichungen (B.12) und (B.13) festgelegt.

Setzt man nun (B.14) in (1.28) ein, so führt dies zu

$$\begin{aligned}\Delta_k S[h, C, \bar{C}; \bar{g}] &= \frac{1}{2} \sum_{\zeta_1, \zeta_2 \in \{h^T, \xi, \sigma, \phi\}} \langle \mathbf{\Pi}_{\zeta_1} h, (\mathcal{R}_k)_{\zeta_1 \zeta_2} \mathbf{\Pi}_{\zeta_2} h \rangle \\ &+ \sum_{\bar{\vartheta}_1 \in \{\bar{C}^T, \bar{\eta}\}} \sum_{\vartheta_2 \in \{C^T, \eta\}} \langle \mathbf{\Pi}_{\bar{\vartheta}_1} \bar{C}, (\mathcal{R}_k)_{\bar{\vartheta}_1 \vartheta_2} \mathbf{\Pi}_{\vartheta_2} C \rangle.\end{aligned}\quad (\text{B.15})$$

Wenn man jetzt die Gleichungen (B.12) und (B.13) verwendet und außerdem die weiter oben angegebene Beziehung zwischen den Matrixoperatoren $(\mathcal{R}_k)_{\bar{\vartheta}_1 \vartheta_2}$ und $(\mathcal{R}_k)_{\psi_1 \psi_2}$ benutzt, ergibt sich aus (B.15) schließlich die Gleichung (1.29). Auf diese Weise läßt sich $\Delta_k S$ also vollständig durch die Komponentenfelder ausdrücken.

Betrachten wir nun die Quellenterme aus Gleichung (1.30). Zerlegt man die Quellen der Geistfelder gemäß

$$K^\mu = K_{\bar{C}T}^\mu + \bar{D}^\mu (-\bar{D}^2)^{-\frac{1}{2}} K_{\bar{\eta}}, \quad \bar{K}^\mu = \bar{K}_{\bar{C}T}^\mu + \bar{D}^\mu (-\bar{D}^2)^{-\frac{1}{2}} \bar{K}_{\bar{\eta}}, \quad (\text{B.16})$$

wobei $K_{\bar{C}T}^\mu$ und $\bar{K}_{\bar{C}T}^\mu$ die jeweiligen transversalen Anteile darstellen, d.h. $\bar{D}_\mu K_{\bar{C}T}^\mu = \bar{D}_\mu \bar{K}_{\bar{C}T}^\mu = 0$, so ergibt sich

$$\langle \bar{K}, C \rangle + \langle K, \bar{C} \rangle = \sum_{\psi \in \{C^T, \eta\}} \langle \bar{K}_\psi, \psi \rangle + \sum_{\psi \in \{\bar{C}^T, \bar{\eta}\}} \langle K_\psi, \psi \rangle. \quad (\text{B.17})$$

Jedes Komponentenfeld tritt hier also in Form eines Skalarprodukts mit der zugehörigen Komponentenquelle auf. Um eine entsprechende Aufspaltung des Quellenterms $\langle J, h \rangle$ zu erreichen, muß man wie folgt vorgehen: Zunächst einmal spaltet man analog zu der Zerlegung von $h_{\mu\nu}$ aus Gleichung (B.1) die Quelle $J_{\mu\nu}$ in ihre orthogonalen Anteile auf:

$$J_{\mu\nu} = J_{\mu\nu}^T + J_{\mu\nu}^L + J_{\mu\nu}^{Tr}. \quad (\text{B.18})$$

Gemäß den Gleichungen (B.2) und (B.3) drückt man dann $J_{\mu\nu}^L$ durch

$$J_{\mu\nu}^L = J_{\mu\nu}^{LT} + J_{\mu\nu}^{LL} \quad (\text{B.19})$$

aus, wobei $J_{\mu\nu}^{LT}$ und $J_{\mu\nu}^{LL}$ wie folgt definiert sind:

$$J_{\mu\nu}^{LT} = (L\Theta)_{\mu\nu} = \bar{D}_\mu \Theta_\nu + \bar{D}_\nu \Theta_\mu, \quad J_{\mu\nu}^{LL} = \frac{1}{2} (L\bar{D}v)_{\mu\nu} = \bar{D}_\mu \bar{D}_\nu v - \frac{1}{d} \bar{g}_{\mu\nu} \bar{D}^2 v. \quad (\text{B.20})$$

Hier stellt Θ_μ wiederum einen transversalen Vektor dar, d.h. $\bar{D}_\mu \Theta^\mu = 0$, und das Skalarfeld v parametrisiert den longitudinalen Vektor $\bar{D}_\mu v$. Weiterhin ist der Vektor $\Theta_\mu + \bar{D}_\mu v/2$ wie sein Analogon ε_μ aus Gleichung (B.3) bis auf CKV eindeutig durch das vollständige Feld, hier $J_{\mu\nu}$, bestimmt.

Unter Verwendung von (1.17) zerlegt man nun das Skalarprodukt $\langle J, h \rangle$ gemäß

$$\langle J, h \rangle = \langle J^T, h^T \rangle + \langle J^L, h^{LT} \rangle + \langle J^L, h^{LL} \rangle + \langle J^{Tr}, h^{Tr} \rangle. \quad (\text{B.21})$$

An dieser Stelle erweist es sich nun als besonders wichtig, daß für beliebige nichtverschwindende Tensorfelder $h_{\mu\nu}^T$, $h_{\mu\nu}^{LT}$, $h_{\mu\nu}^{LL}$ und $h_{\mu\nu}^{Tr}$ die nachstehenden Beziehungen gelten:

$$(\mathbf{\Pi}_{TT} h^T)_{\mu\nu} \neq 0, \quad (\mathbf{\Pi}_{LT} h^{LT})_\mu \neq 0, \quad \mathbf{\Pi}_{LL} h^{LL} \neq 0, \quad \mathbf{\Pi}_{Tr} h^{Tr} \neq 0. \quad (\text{B.22})$$

Diese haben nämlich zur Folge, daß die Operatoren $\mathbf{\Pi}_{TT}$, $\mathbf{\Pi}_{LT}$, $\mathbf{\Pi}_{LL}$ bzw. $\mathbf{\Pi}_{Tr}$ invertierbar sind, wenn man jeden einzelnen von ihnen ausschließlich auf Felder aus dem Bildbereich des zugehörigen “echten” Projektors \mathbf{P} wirken läßt, also auf Felder des Typs $h_{\mu\nu}^T$, $h_{\mu\nu}^{LT}$, $h_{\mu\nu}^{LL}$ bzw. $h_{\mu\nu}^{Tr}$. Daher kann man das Skalarprodukt aus Gleichung (B.21) wie folgt ausdrücken:

$$\begin{aligned}
 \langle J, h \rangle &= \langle J^T, \mathbf{\Pi}_{TT}^{-1} \mathbf{\Pi}_{TT} h^T \rangle + \langle J^L, \mathbf{\Pi}_{LT}^{-1} \mathbf{\Pi}_{LT} h^{LT} \rangle + \langle J^L, \mathbf{\Pi}_{LL}^{-1} \mathbf{\Pi}_{LL} h^{LL} \rangle \\
 &\quad + \langle J^{Tr}, \mathbf{\Pi}_{Tr}^{-1} \mathbf{\Pi}_{Tr} h^{Tr} \rangle \\
 &= \sum_{\zeta \in \{h^T, \xi, \sigma, \phi\}} \langle J_\zeta, \zeta \rangle .
 \end{aligned} \tag{B.23}$$

Dabei wurden die Beziehungen aus (B.12) benutzt und die Komponentenquellen

$$\begin{aligned}
 J_{h^T}^{\mu\nu} &\equiv ((\mathbf{\Pi}_{TT}^{-1})^\dagger J^T)^{\mu\nu} = J^{T\mu\nu} , \\
 J_\xi^\mu &\equiv ((\mathbf{\Pi}_{LT}^{-1})^\dagger J^L)^\mu = 2\sqrt{-\bar{D}^2 - \bar{\text{Ric}}} \theta^\mu \\
 &\quad + 2(-\bar{D}^2 - \bar{\text{Ric}})^{-\frac{1}{2}} \left[\left(\frac{1}{d} \bar{g}^{\mu\nu} \bar{R} - \bar{R}^{\mu\nu} \right) \bar{D}_\nu + \frac{1}{d} (\bar{D}^\mu \bar{R}) \right] v , \\
 J_\sigma &\equiv (\mathbf{\Pi}_{LL}^{-1})^\dagger J^L = 2 \left((\bar{D}^2)^2 + \frac{d}{d-1} \bar{D}_\mu \bar{R}^{\mu\nu} \bar{D}_\nu \right)^{-\frac{1}{2}} \bar{D}_\alpha \bar{R}^{\alpha\beta} \theta_\beta \\
 &\quad + \frac{d-1}{d} \sqrt{(\bar{D}^2)^2 + \frac{d}{d-1} \bar{D}_\mu \bar{R}^{\mu\nu} \bar{D}_\nu} v , \\
 J_\phi &\equiv (\mathbf{\Pi}_{Tr}^{-1})^\dagger J^{Tr} = \frac{1}{d} \bar{g}^{\mu\nu} J_{\mu\nu}^{Tr} .
 \end{aligned} \tag{B.24}$$

eingeführt. Kombiniert man nun die Resultate aus (B.17) und (B.23), so erhält man letztendlich (1.31).

Anhang C

Auswertung der rechten Seite der trunkierten Flußgleichung

In diesem Teil des Anhangs werden einige längere Rechnungen präsentiert, die bei der Auswertung der rechten Seite der Flußgleichung $\mathcal{S}_k(R)$ durchzuführen sind. Ein Großteil dieser Rechnungen ist für die beiden im Rahmen dieser Arbeit diskutierten Trunkierungen identisch. Daher werden im folgenden die Betrachtungen so lange wie möglich allgemein gehalten und erst dann auf eine der beiden Trunkierungen eingeschränkt, wenn sich Unterschiede zwischen den jeweiligen Auswertungen ergeben.

Bei sämtlichen Rechnungen dieses Anhangs C wird von einer sphärisch symmetrischen Hintergrundmetrik $\bar{g}_{\mu\nu}$ ausgegangen. Da weiterhin $g_{\mu\nu} = \bar{g}_{\mu\nu}$ gesetzt wird, werden im folgenden der Einfachheit halber die Querstriche über der Metrik, dem Krümmungsskalar und den Operatoren weggelassen.

C.1 Inversion der Operatoren $\Gamma_k^{(2)} + \mathcal{R}_k$ und $S_{\text{gh}}^{(2)} + \mathcal{R}_k$

In den Kapiteln 3 bzw. 5 wurden explizite Ausdrücke für die kinetischen Operatoren $\tilde{\Gamma}_k^{(2)} \equiv \Gamma_k^{(2)} + \mathcal{R}_k$ und $\tilde{S}_{\text{gh}}^{(2)} \equiv S_{\text{gh}}^{(2)} + \mathcal{R}_k$ hergeleitet. Sie lassen sich als Matrix-Differentialoperatoren darstellen, die auf die Spaltenvektoren $(\bar{h}^T, \bar{\xi}, \bar{\phi}_0, \bar{\sigma}, \bar{\phi}_1)^T$ bzw. $(\bar{v}^T, v^T, \bar{\varrho}, \varrho)^T$ wirken. Unabhängig von der jeweiligen Trunkierung nehmen sie die folgende Form an:

$$\tilde{\Gamma}_k^{(2)}[g, g] = \begin{pmatrix} \left(\tilde{\Gamma}_k^{(2)}[g, g] \right)_{\bar{h}^T \bar{h}^T} & 0 & 0 & 0_{1 \times 2} \\ 0 & \left(\tilde{\Gamma}_k^{(2)}[g, g] \right)_{\bar{\xi} \bar{\xi}} & 0 & 0_{1 \times 2} \\ 0 & 0 & \left(\tilde{\Gamma}_k^{(2)}[g, g] \right)_{\bar{\phi}_0 \bar{\phi}_0} & 0_{1 \times 2} \\ 0_{2 \times 1} & 0_{2 \times 1} & 0_{2 \times 1} & \mathcal{Q}_k \end{pmatrix}, \quad (\text{C.1})$$

$$\tilde{S}_{\text{gh}}^{(2)}[g, g] = \begin{pmatrix} 0 & \left(\tilde{S}_{\text{gh}}^{(2)}[g, g]\right)_{\bar{v}^T v^T} & 0 & 0 \\ \left(\tilde{S}_{\text{gh}}^{(2)}[g, g]\right)_{v^T \bar{v}^T} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \left(\tilde{S}_{\text{gh}}^{(2)}[g, g]\right)_{\bar{\varrho}\varrho} \\ 0 & 0 & \left(\tilde{S}_{\text{gh}}^{(2)}[g, g]\right)_{\varrho\bar{\varrho}} & 0 \end{pmatrix}. \quad (\text{C.2})$$

Der Eintrag \mathcal{Q}_k in (C.1) ist seinerseits wiederum ein Matrix-Differentialoperator. Er wirkt auf den skalaren Sektor von $\bar{h}_{\mu\nu}$ und ist wie folgt definiert:

$$\mathcal{Q}_k \equiv \begin{pmatrix} \left(\tilde{\Gamma}_k^{(2)}[g, g]\right)_{\bar{\sigma}\bar{\sigma}} & \left(\tilde{\Gamma}_k^{(2)}[g, g]\right)_{\bar{\phi}_1\bar{\sigma}} \\ \left(\tilde{\Gamma}_k^{(2)}[g, g]\right)_{\bar{\phi}_1\bar{\sigma}} & \left(\tilde{\Gamma}_k^{(2)}[g, g]\right)_{\bar{\phi}\bar{\phi}} \end{pmatrix}. \quad (\text{C.3})$$

Die expliziten Ausdrücke für diese Matrixeinträge hängen natürlich von der betrachteten Trunkierung ab. Im Fall der reinen Einstein-Hilbert-Trunkierung erhält man die in (3.16) angegebenen Ergebnisse, während sich bei der R^2 -Trunkierung die Ausdrücke aus (5.8) ergeben.

Auf der rechten Seite der Flußgleichung (2.3) treten die Operatoren $\Gamma_k^{(2)} + \mathcal{R}_k$ und $S_{\text{gh}}^{(2)} + \mathcal{R}_k$ in Form ihrer Inversen auf, welche nun berechnet werden sollen. Dabei ist folgendes zu beachten: Aufgrund des maximal symmetrischen Hintergrunds treten alle in den Operatoren (C.1) und (C.2) enthaltenen kovarianten Ableitungen D_μ als kovariante Laplace-Operatoren D^2 auf, und abgesehen von diesen Operatoren enthalten sämtliche Einträge ansonsten nur noch x -unabhängige Größen. Das bedeutet, daß die Einträge aus (C.1) und (C.2) allesamt *kommutierende* Differentialoperatoren verkörpern, was die Rechnungen natürlich erheblich vereinfacht. Es ist dementsprechend leicht zu verifizieren, daß die gesuchten inversen Operatoren durch die Ausdrücke

$$\left(\tilde{\Gamma}_k^{(2)}[g, g]\right)^{-1} = \begin{pmatrix} \left[\left(\tilde{\Gamma}_k^{(2)}[g, g]\right)_{\bar{h}^T \bar{h}^T}\right]^{-1} & 0 & 0 & 0_{1 \times 2} \\ 0 & \left[\left(\tilde{\Gamma}_k^{(2)}[g, g]\right)_{\bar{\xi}\bar{\xi}}\right]^{-1} & 0 & 0_{1 \times 2} \\ 0 & 0 & \left[\left(\tilde{\Gamma}_k^{(2)}[g, g]\right)_{\bar{\phi}_0 \bar{\phi}_0}\right]^{-1} & 0_{1 \times 2} \\ 0_{2 \times 1} & 0_{2 \times 1} & 0_{2 \times 1} & \mathcal{Q}_k^{-1} \end{pmatrix} \quad (\text{C.4})$$

und

$$\left(\tilde{S}_{\text{gh}}^{(2)}[g, g]\right)^{-1} = \quad (\text{C.5})$$

$$\begin{pmatrix} 0 & \left[\left(\tilde{S}_{\text{gh}}^{(2)}[g, g] \right)_{\bar{v}^T v^T} \right]^{-1} & 0 & 0 \\ \left[\left(\tilde{S}_{\text{gh}}^{(2)}[g, g] \right)_{v^T \bar{v}^T} \right]^{-1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \left[\left(\tilde{S}_{\text{gh}}^{(2)}[g, g] \right)_{\bar{\varrho}\varrho} \right]^{-1} \\ 0 & 0 & \left[\left(\tilde{S}_{\text{gh}}^{(2)}[g, g] \right)_{\varrho\bar{\varrho}} \right]^{-1} & 0 \end{pmatrix}$$

gegeben sind, wobei \mathcal{Q}_k^{-1} die folgende Form annimmt:

$$\begin{aligned} \mathcal{Q}_k^{-1} &= \left[\left(\tilde{\Gamma}_k^{(2)}[g, g] \right)_{\bar{\sigma}\bar{\sigma}} \left(\tilde{\Gamma}_k^{(2)}[g, g] \right)_{\bar{\phi}_1\bar{\phi}_1} - \left(\tilde{\Gamma}_k^{(2)}[g, g] \right)_{\bar{\phi}_1\bar{\sigma}}^2 \right]^{-1} \\ &\times \begin{pmatrix} \left(\tilde{\Gamma}_k^{(2)}[g, g] \right)_{\bar{\phi}_1\bar{\phi}_1} & - \left(\tilde{\Gamma}_k^{(2)}[g, g] \right)_{\bar{\phi}_1\bar{\sigma}} \\ - \left(\tilde{\Gamma}_k^{(2)}[g, g] \right)_{\bar{\phi}_1\bar{\sigma}} & \left(\tilde{\Gamma}_k^{(2)}[g, g] \right)_{\bar{\sigma}\bar{\sigma}} \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (\text{C.6})$$

Setzt man diese Ausdrücke in die rechte Seite der trunkierten Flußgleichung (2.3) ein, so erhält man

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_k(R) &= \frac{1}{2} \text{Tr}' \left[\sum_{\zeta \in \{\bar{h}^T, \bar{\xi}, \bar{\phi}_0\}} \left[\left(\Gamma_k^{(2)}[g, g] + \mathcal{R}_k[g] \right)_{\zeta\zeta} \right]^{-1} \partial_t (\mathcal{R}_k[g])_{\zeta\zeta} \right] \\ &+ \frac{1}{2} \text{Tr}' \left[\left\{ \left(\tilde{\Gamma}_k^{(2)}[g, g] \right)_{\bar{\sigma}\bar{\sigma}} \left(\tilde{\Gamma}_k^{(2)}[g, g] \right)_{\bar{\phi}_1\bar{\phi}_1} - \left(\tilde{\Gamma}_k^{(2)}[g, g] \right)_{\bar{\phi}_1\bar{\sigma}}^2 \right\}^{-1} \right. \\ &\times \left\{ \left(\Gamma_k^{(2)}[g, g] + \mathcal{R}_k[g] \right)_{\bar{\sigma}\bar{\sigma}} \partial_t (\mathcal{R}_k[g])_{\bar{\phi}_1\bar{\phi}_1} + \left(\Gamma_k^{(2)}[g, g] + \mathcal{R}_k[g] \right)_{\bar{\phi}_1\bar{\phi}_1} \partial_t (\mathcal{R}_k[g])_{\bar{\sigma}\bar{\sigma}} \right. \\ &\left. \left. - 2 \left(\Gamma_k^{(2)}[g, g] + \mathcal{R}_k[g] \right)_{\bar{\phi}_1\bar{\sigma}} \partial_t (\mathcal{R}_k[g])_{\bar{\phi}_1\bar{\sigma}} \right\} \right] \\ &- \text{Tr}' \left[\sum_{\psi \in \{v^T, \varrho\}} \left[\left(S_{\text{gh}}^{(2)}[g, g] + \mathcal{R}_k[g] \right)_{\bar{\psi}\psi} \right]^{-1} \partial_t (\mathcal{R}_k[g])_{\bar{\psi}\psi} \right]. \end{aligned} \quad (\text{C.7})$$

Dabei wurden die folgenden Beziehungen benutzt:

$$\begin{aligned} \left(\left(S_{\text{gh}}^{(2)} \right)_{\bar{v}^T v^T} \right)_{\nu y}^{\mu x} &= - \left(\left(S_{\text{gh}}^{(2)} \right)_{v^T \bar{v}^T} \right)_{\nu y}^{\mu x} = \frac{1}{\sqrt{g(y)}} \frac{\delta}{\delta v^{T\nu}(y)} \frac{1}{\sqrt{g(x)}} \frac{\delta S_{\text{gh}}}{\delta \bar{v}_\mu^T(x)} \\ \left(\left(S_{\text{gh}}^{(2)} \right)_{\bar{\varrho}\varrho} \right)_y^x &= - \left(\left(S_{\text{gh}}^{(2)} \right)_{\varrho\bar{\varrho}} \right)_y^x = \frac{1}{\sqrt{g(y)}} \frac{\delta}{\delta \varrho(y)} \frac{1}{\sqrt{g(x)}} \frac{\delta S_{\text{gh}}}{\delta \bar{\varrho}(x)}. \end{aligned} \quad (\text{C.8})$$

Die Spur des in (C.7) auftretenden ϕ_0 -Terms läßt sich sehr leicht auswerten, da hier

nur die skalaren Harmonischen T^{01} und T^{1m} beitragen.¹ Im Rahmen der Einstein-Hilbert-Trunkierung ergibt sich

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{2} \text{Tr}' \left[\left[\left(\Gamma_k^{(2)}[g, g] + \mathcal{R}_k[g] \right)_{\phi_0 \phi_0} \right]^{-1} \partial_t (\mathcal{R}_k[g])_{\phi_0 \phi_0} \right] \\
 &= \frac{1}{2Z_{Nk}} \sum_{l=0}^1 \sum_{m=1}^{D_l(d,0)} \int d^d x \sqrt{g(x)} T^{lm}(x) [P_k + A_{S1}(d, \alpha) R + B_{S1}(d, \alpha) \bar{\lambda}_k]^{-1} \\
 & \quad \times \partial_t [Z_{Nk} k^2 R^{(0)}(-D^2/k^2)] T^{lm}(x) \tag{C.9} \\
 &= \frac{1}{2Z_{Nk}} \sum_{l=0}^1 \left[D_l(d, 0) \frac{\partial_t [Z_{Nk} k^2 R^{(0)}(\Lambda_l(d, 0)/k^2)]}{\Lambda_l(d, 0) + k^2 R^{(0)}(\Lambda_l(d, 0)/k^2) + A_{S1}(d, \alpha) R + B_{S1}(d, \alpha) \bar{\lambda}_k} \right].
 \end{aligned}$$

Hier stellt $\Lambda_l(d, 0)$ den zu T^{lm} gehörigen Eigenwert des Operators $-D^2$ dar, vgl. Anhang E. Setzt man nun auch noch die übrigen Operatoren aus Gleichung (3.16) in (C.7) ein, so erhält man schließlich die Gleichung (3.17) aus Abschnitt 3.3.

Im Fall der R^2 -Trunkierung nimmt der ϕ_0 -Term die nachstehende Gestalt an:

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{2} \text{Tr}' \left[\left[\left(\Gamma_k^{(2)}[g, g] + \mathcal{R}_k[g] \right)_{\phi_0 \phi_0} \right]^{-1} \partial_t (\mathcal{R}_k[g])_{\phi_0 \phi_0} \right] \\
 &= \frac{1}{2Z_{Nk} \kappa^2} \sum_{l=0}^1 \sum_{m=1}^{D_l(d,0)} \int d^d x \sqrt{g(x)} T^{lm}(x) \left[C_{S2}(d, \alpha) C_{S1}(d, \alpha) \left(P_k + A_{S1}(d, \alpha) R \right. \right. \\
 & \quad \left. \left. + B_{S1}(d, \alpha) \bar{\lambda}_k \right) + (Z_{Nk} \kappa^2)^{-1} \bar{\beta}_k \left(H_S(d) P_k^2 + G_{S2}(d) R P_k + G_{S3}(d) R^2 \right) \right]^{-1} \\
 & \quad \times \partial_t \left[C_{S2}(d, \alpha) C_{S1}(d, \alpha) Z_{Nk} \kappa^2 k^2 R^{(0)}(-D^2/k^2) + \bar{\beta}_k \left(H_S(d) (-2D^2 R^{(0)}(-D^2/k^2) \right. \right. \right. \\
 & \quad \left. \left. + k^4 R^{(0)}(-D^2/k^2)^2 + G_{S2}(d) R k^2 R^{(0)}(-D^2/k^2) \right) \right] T^{lm}(x) \\
 &= \frac{1}{2Z_{Nk} \kappa^2} \sum_{l=0}^1 \left[D_l(d, 0) \left\{ C_{S2}(d, \alpha) C_{S1}(d, \alpha) \left(\Lambda_l(d, 0) + k^2 R^{(0)}(\Lambda_l(d, 0)/k^2) \right. \right. \right. \\
 & \quad \left. \left. + A_{S1}(d, \alpha) R + B_{S1}(d, \alpha) \bar{\lambda}_k \right) \right. \\
 & \quad \left. + (Z_{Nk} \kappa^2)^{-1} \bar{\beta}_k \left(H_S(d) \left(\Lambda_l(d, 0) + k^2 R^{(0)}(\Lambda_l(d, 0)/k^2) \right)^2 \right. \right. \\
 & \quad \left. \left. + G_{S2}(d) R \left(\Lambda_l(d, 0) + k^2 R^{(0)}(\Lambda_l(d, 0)/k^2) \right) + G_{S3}(d) R^2 \right) \right\}^{-1}
 \end{aligned}$$

¹Eine Anmerkung zur Notation: Hier und im folgenden wird jedesmal, wenn l und m fixiert werden, in T^{lm} zur besseren Unterscheidung ein Komma zwischen l und m eingefügt. (Z.B.: $T^{0,1}$ für $l=0, m=1$.)

$$\begin{aligned}
& \times \partial_t \left\{ C_{S2}(d, \alpha) C_{S1}(d, \alpha) Z_{Nk\kappa^2} k^2 R^{(0)}(\Lambda_l(d, 0)/k^2) \right. \\
& + \bar{\beta}_k \left(H_S(d) (2\Lambda_l(d, 0) k^2 R^{(0)}(\Lambda_l(d, 0)/k^2) + k^4 R^{(0)}(\Lambda_l(d, 0)/k^2)^2) \right. \\
& \left. \left. + G_{S2}(d) R k^2 R^{(0)}(\Lambda_l(d, 0)/k^2) \right) \right\}. \tag{C.10}
\end{aligned}$$

Im vorliegenden Fall muß man neben (C.10) noch die übrigen Einträge aus (5.8) in (C.7) einsetzen, um den gesuchten Ausdruck für die rechte Seite der Flußgleichung zu erhalten. Das führt letztendlich zu Gleichung (5.9) aus Abschnitt 5.2.

C.2 Auswertung der Spuren

C.2.1 Allgemeine Betrachtungen

Wenden wir uns jetzt der Auswertung der in den Gleichungen (3.20) bzw. (5.12) auftauchenden Spuren zu. Dazu bietet es sich an, auf die asymptotische Heat-Kernel-Entwicklung zurückzugreifen. In ihrer ursprünglichen Form ist sie bereits oft zur Berechnung von Spuren solcher Operatoren benutzt worden, die auf “zwangsfreie” Felder wirken, siehe z.B. [65]. In diesem Zusammenhang werden hier gerade jene Felder als “zwangsfrei” bezeichnet, die keinerlei Nebenbedingungen unterliegen. Im vorliegenden Fall werden jedoch entsprechende Entwicklungen für Operatoren benötigt, die auf solche Felder wirken, welche gewisse Nebenbedingungen erfüllen. Im einzelnen sind dies Heat-Kernel-Entwicklungen für Laplace-Operatoren D^2 , die auf symmetrische, transversale, spurfreie Tensoren, transversale Vektoren bzw. Skalare wirken. Die hierfür gesuchten Ausdrücke werden in Anhang F hergeleitet, mit dem folgenden Ergebnis:

$$\begin{aligned}
\text{Tr}_{(2ST^2)} \left[e^{-(is-\varepsilon)D^2} \right] &= \left(\frac{i}{4\pi(s+i\varepsilon)} \right)^{d/2} \int d^d x \sqrt{g} \left\{ \frac{1}{2}(d-2)(d+1) \right. \\
& - \frac{(d+1)(d+2)(d-5+3\delta_{d,2})}{12(d-1)} (is-\varepsilon)R \\
& - \frac{(d+1)(5d^4-22d^3-83d^2-392d-228+1440\delta_{d,2}+3240\delta_{d,4})}{720d(d-1)^2} (s+i\varepsilon)^2 R^2 \\
& \left. + \mathcal{O}(R^3) \right\}, \tag{C.11}
\end{aligned}$$

$$\text{Tr}_{(1T)} \left[e^{-(is-\varepsilon)D^2} \right] = \left(\frac{i}{4\pi(s+i\varepsilon)} \right)^{d/2} \int d^d x \sqrt{g} \left\{ d-1 \right.$$

$$\begin{aligned}
& - \frac{(d+2)(d-3) + 6\delta_{d,2}}{6d} (is - \varepsilon) R \\
& - \frac{5d^4 - 12d^3 - 47d^2 - 186d + 180 + 360\delta_{d,2} + 720\delta_{d,4}}{360d^2(d-1)} (s + i\varepsilon)^2 R^2 + \mathcal{O}(R^3) \Big\} ,
\end{aligned} \tag{C.12}$$

$$\begin{aligned}
\text{Tr}_{(0)} \left[e^{-(is-\varepsilon)D^2} \right] &= \left(\frac{i}{4\pi(s+i\varepsilon)} \right)^{d/2} \int d^d x \sqrt{g} \\
&\times \left\{ 1 - \frac{1}{6} (is - \varepsilon) R - \frac{5d^2 - 7d + 6}{360d(d-1)} (s + i\varepsilon)^2 R^2 + \mathcal{O}(R^3) \right\} .
\end{aligned} \tag{C.13}$$

Die zu $\delta_{d,2}$ bzw. $\delta_{d,4}$ proportionalen Terme, die in den obigen Gleichungen (C.11) und (C.12) auftreten, kommen durch den Ausschluß der von unphysikalischen Moden herrührenden Beiträge zustande. Die entsprechenden Details hierzu sind bereits in Abschnitt 1.3 erläutert worden.

Betrachten wir nun eine beliebige Funktion $W(z)$, die eine Fourier-Transformierte $\widetilde{W}(s)$ besitzt. Bei derartigen Funktionen W läßt sich die Spur des Operators $W(-D^2)$, der sich durch Ersetzen des Arguments von W mit $-D^2$ ergibt, wie folgt durch $\widetilde{W}(s)$ ausdrücken:

$$\text{Tr} [W(-D^2)] = \lim_{\varepsilon \searrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} ds \widetilde{W}(s) \text{Tr} \left[e^{-(is-\varepsilon)D^2} \right] . \tag{C.14}$$

Man erhält nun die asymptotische Entwicklung von $\text{Tr}[W(-D^2)]$, indem man die Heat-Kernel-Entwicklung von $\text{Tr}[e^{-(is-\varepsilon)D^2}]$ in (C.14) einsetzt. Für die zur Diskussion stehenden Laplace-Operatoren ergeben sich damit unter Verwendung von (C.11)-(C.13) die folgenden Ausdrücke:

$$\begin{aligned}
\text{Tr}_{(2ST^2)} [W(-D^2)] &= (4\pi)^{-d/2} \left\{ \frac{1}{2} (d-2)(d+1) Q_{d/2}[W] \int d^d x \sqrt{g} \right. \\
&+ \frac{(d+1)(d+2)(d-5+3\delta_{d,2})}{12(d-1)} Q_{d/2-1}[W] \int d^d x \sqrt{g} R \\
&+ \frac{(d+1)(5d^4 - 22d^3 - 83d^2 - 392d - 228 + 1440\delta_{d,2} + 3240\delta_{d,4})}{720d(d-1)^2} Q_{d/2-2}[W] \\
&\times \left. \int d^d x \sqrt{g} R^2 + \mathcal{O}(r^{<d-4}) \right\} ,
\end{aligned} \tag{C.15}$$

$$\begin{aligned}
\text{Tr}_{(1T)} [W(-D^2)] &= (4\pi)^{-d/2} \left\{ (d-1) Q_{d/2}[W] \int d^d x \sqrt{g} \right. \\
&+ \frac{(d+2)(d-3) + 6\delta_{d,2}}{6d} Q_{d/2-1}[W] \int d^d x \sqrt{g} R
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{5d^4 - 12d^3 - 47d^2 - 186d + 180 + 360 \delta_{d,2} + 720 \delta_{d,4}}{360d^2(d-1)} Q_{d/2-2}[W] \int d^d x \sqrt{g} R^2 \\
& + \mathcal{O}(r^{<d-4}) \} , \tag{C.16}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{Tr}_{(0)} [W(-D^2)] &= (4\pi)^{-d/2} \left\{ Q_{d/2}[W] \int d^d x \sqrt{g} \right. \\
& \left. + \frac{1}{6} Q_{d/2-1}[W] \int d^d x \sqrt{g} R + \frac{5d^2 - 7d + 6}{360d(d-1)} Q_{d/2-2}[W] \int d^d x \sqrt{g} R^2 + \mathcal{O}(r^{<d-4}) \right\} . \tag{C.17}
\end{aligned}$$

Die oben eingeführten Funktionale $Q_n[W]$ sind hier wie folgt definiert:

$$Q_n[W] \equiv \lim_{\varepsilon \searrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} ds (-is + \varepsilon)^{-n} \widetilde{W}(s) . \tag{C.18}$$

Mit Hilfe der Mellin-Transformation läßt sich die rechte Seite von (C.18) wiederum direkt durch W ausdrücken, was zu der folgenden Beziehung führt:

$$Q_n[W] = \frac{(-1)^i}{\Gamma(n+i)} \int_0^{\infty} dz z^{n+i-1} \frac{d^i W(z)}{dz^i} , \quad i > -n , \quad i \in \mathbb{N} \cup \{0\} \text{ beliebig.} \tag{C.19}$$

Insbesondere erhält man $Q_0[W] = W(0)$. Ist n positiv, $n > 0$, so bietet es sich an, der Einfachheit halber $i = 0$ zu wählen.² Dann vereinfacht sich der Ausdruck in (C.19) zu

$$Q_n[W] = \frac{1}{\Gamma(n)} \int_0^{\infty} dz z^{n-1} W(z) , \quad n > 0 . \tag{C.20}$$

Betrachten wir nun solche Spuren, die durch Ausschluß einzelner Eigenmoden bzw. Eigenwerte aus den vollständigen Spuren $\text{Tr}[W(-D^2)]$ hervorgehen. Gemäß den Erörterungen aus Anhang F lassen sich derartige Spuren durch

$$\text{Tr}'\dots'[W(-D^2)] = \text{Tr}[W(-D^2)] - \sum_{l \in \{l_1, \dots, l_n\}} D_l(d, s) W(\Lambda_l(d, s)) \tag{C.21}$$

ausdrücken, wobei die Striche an $\text{Tr}'\dots'$ den Ausschluß aller Eigenmoden T^{lm} mit $l \in \{l_1, \dots, l_n\}$ symbolisieren. Außerdem bezeichnen hier $\Lambda_l(d, s)$ und $D_l(d, s)$ die entsprechenden Eigenwerte von $-D^2$ bzw. ihren Entartungsgrad. Da die Eigenwerte $\Lambda_l(d, s)$ proportional zu R sind, kann man $W(\Lambda_l(d, s))$ als Funktion von R betrachten. Um die zu $r^d \propto \int d^d x \sqrt{g}$, $r^{d-2} \propto \int d^d x \sqrt{g} R$ und $r^{d-4} \propto \int d^d x \sqrt{g} R^2$ proportionalen Anteile dieser

²Hierzu ist anzumerken, daß $Q_n[W]$ nicht wirklich von i abhängt, solange nur $i > -n$ erfüllt ist. Das läßt sich sehr leicht durch partielles Integrieren zeigen.

Funktion zu extrahieren, entwickelt man sie nach $R \propto r^{-2}$. Dabei stellt man fest, daß es nur für $d = 2$ und $d = 4$ Terme gibt, die proportional zu r^d , r^{d-2} oder r^{d-4} sind, und zwar $W(0) + W'(0) \Lambda_l(2, s)$ (für $d = 2$) bzw. $W(0)$ (für $d = 4$). Benutzt man nun die in Anhang E tabellierten Ausdrücke für $D_l(d, s)$ und $\Lambda_l(d, s)$ und verwendet (3.7), so ergeben sich daraus schließlich die nachstehenden Beziehungen für diejenigen “unvollständigen” Spuren, die im Rahmen dieser Arbeit für die trunkierte Flußgleichung von Relevanz sind:

$$\begin{aligned} \text{Tr}'_{(1T)}[W(-D^2)] &= \text{Tr}_{(1T)}[W(-D^2)] - \frac{\delta_{d,2}}{16\pi} \left\{ 6W(0) \int d^2x \sqrt{g} R \right. \\ &\quad \left. + 3W'(0) \int d^2x \sqrt{g} R^2 \right\} - \frac{5\delta_{d,4}}{12(4\pi)^2} W(0) \int d^4x \sqrt{g} R^2 + \mathcal{O}(r^{<d-4}) , \quad (\text{C.22}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Tr}''_{(0)}[W(-D^2)] &= \text{Tr}_{(0)}[W(-D^2)] - \frac{\delta_{d,2}}{16\pi} \left\{ 8W(0) \int d^2x \sqrt{g} R \right. \\ &\quad \left. + 3W'(0) \int d^2x \sqrt{g} R^2 \right\} - \frac{\delta_{d,4}}{4(4\pi)^2} W(0) \int d^4x \sqrt{g} R^2 + \mathcal{O}(r^{<d-4}) , \quad (\text{C.23}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Tr}'_{(0)}[W(-D^2)] &= \text{Tr}_{(0)}[W(-D^2)] \\ &\quad - \frac{\delta_{d,2}}{8\pi} W(0) \int d^2x \sqrt{g} R - \frac{\delta_{d,4}}{24(4\pi)^2} W(0) \int d^4x \sqrt{g} R^2 + \mathcal{O}(r^{<d-4}) . \quad (\text{C.24}) \end{aligned}$$

Die Striche an den Spuren sind hier so zu interpretieren, wie es in Abschnitt 3.3 beschrieben wird, d.h., sie symbolisieren den Ausschluß aller Moden, die keinen Beitrag zu den Zerlegungen (1.36) bzw. (1.37) leisten. Ferner bezeichnet W' die Ableitung von W nach dem Argument: $W'(z) = dW(z)/dz$ mit $z = \Lambda_l(d, s)$.

C.2.2 Anwendung auf die Einstein-Hilbert-Trunkierung

Nach den vorbereitenden Betrachtungen des vorigen Unterabschnitts kann nun mit der expliziten Auswertung der rechten Seite der Flußgleichung $\mathcal{S}_k(R)$ fortgefahren werden. Dazu setzt man die oben hergeleiteten Entwicklungen der Spuren in $\mathcal{S}_k(R)$ ein. Im Fall der Einstein-Hilbert-Trunkierung benötigt man dabei lediglich die zu den beiden Operatoren $\int d^d x \sqrt{g}$ und $\int d^d x \sqrt{g} R$ proportionalen Terme aus den Gleichungen (C.15)-(C.17) bzw. (C.22)-(C.24). Setzt man also die entsprechenden Ausdrücke in $\mathcal{S}_k(R)$ aus Gleichung (3.20) ein und vergleicht die Koeffizienten der genannten Operatoren mit denjenigen auf der durch (3.5) festgelegten linken Seite der Flußgleichung, so resultieren die folgenden Differentialgleichungen:

$$\begin{aligned} \partial_t (Z_{N_k} \bar{\lambda}_k) &= (4\kappa^2)^{-1} (4\pi)^{-d/2} \left\{ \frac{1}{2} d(d-1) Q_{d/2} \left[(P_k - 2\bar{\lambda}_k)^{-1} \mathcal{N} \right] \right. \\ &\quad \left. + d Q_{d/2} \left[(P_k - 2\alpha \bar{\lambda}_k)^{-1} \mathcal{N} \right] - 2d Q_{d/2} \left[P_k^{-1} \mathcal{N}_0 \right] \right\} , \quad (\text{C.25}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\partial_t Z_{Nk} = & -(2\kappa^2)^{-1}(4\pi)^{-d/2} \left\{ c_1(d) Q_{d/2-1} \left[(P_k - 2\bar{\lambda}_k)^{-1} \mathcal{N} \right] \right. \\
& + c_2(d) Q_{d/2-1} \left[(P_k - 2\alpha\bar{\lambda}_k)^{-1} \mathcal{N} \right] + c_3(d) Q_{d/2} \left[(P_k - 2\bar{\lambda}_k)^{-2} \mathcal{N} \right] \\
& + c_4(d, \alpha) Q_{d/2} \left[(P_k - 2\alpha\bar{\lambda}_k)^{-2} \mathcal{N} \right] - 2c_2(d) Q_{d/2-1} \left[P_k^{-1} \mathcal{N}_0 \right] \\
& \left. + c_5(d) Q_{d/2} \left[P_k^{-2} \mathcal{N}_0 \right] + 3\delta_{d,2} \left[\frac{\partial_t(Z_{Nk}k^2)}{2Z_{Nk}(k^2 - 2\bar{\lambda}_k)} - \frac{\partial_t(Z_{Nk}k^2)}{2Z_{Nk}(k^2 - 2\alpha\bar{\lambda}_k)} \right] \right\}. \tag{C.26}
\end{aligned}$$

Die hier erscheinenden Koeffizienten c_i sind in (3.24) definiert.

Die verschiedenen Q_n aus den Gleichungen (C.25) und (C.26) können nun wiederum durch die in (3.23) eingeführten $R^{(0)}$ -abhängigen Schwellenfunktionen Φ_n^p und $\tilde{\Phi}_n^p$ ausgedrückt werden. Man verwendet dazu die Beziehungen

$$\begin{aligned}
Q_n \left[(P_k + c)^{-p} \mathcal{N} \right] &= k^{2(n-p+1)} \Phi_n^p(c/k^2) - \frac{1}{2} \eta_N(k) k^{2(n-p+1)} \tilde{\Phi}_n^p(c/k^2), \\
Q_n \left[(P_k + c)^{-p} \mathcal{N}_0 \right] &= k^{2(n-p+1)} \Phi_n^p(c/k^2). \tag{C.27}
\end{aligned}$$

Damit ergeben sich letztendlich die Gleichungen (3.21) und (3.22).

An dieser Stelle muß noch folgender Punkt zur Sprache gebracht werden: Um sicherzustellen, daß die Integrale in (C.19) tatsächlich konvergieren, muß man sich auf solche $R^{(0)}(y)$ beschränken, die in den Limites $y \rightarrow \pm\infty$ genügend stark abfallen. Da aber die Form von $R^{(0)}(y)$ für negative y -Werte von nun an keine Rolle mehr spielt, identifizieren wir die Funktion $R^{(0)}(y)$ mit ihrer Gestalt für nichtnegative Argumente und nehmen dementsprechend an, daß $R^{(0)}(y)$ eine glatte Funktion darstellt, welche nur für $y \geq 0$ definiert ist und die in Abschnitt 2.2 beschriebenen Eigenschaften besitzt.

C.2.3 Anwendung auf die R^2 -Trunkierung

Wenden wir uns nun der R^2 -Trunkierung zu. Um die Spuren auf der rechten Seite der Flußgleichung adäquat auswerten zu können, müssen in diesem Fall die *vollständigen* Ausdrücke aus (C.15)-(C.17) bzw. aus (C.22)-(C.24) in das zugehörige $\mathcal{S}_k(R)$ aus (5.12) eingesetzt werden. Dann führt man das Ergebnis dieser Einsetzungen wieder mit der durch Gleichung (5.4) gegebenen linken Seite zusammen und vergleicht die Koeffizienten der Operatoren $\int d^d x \sqrt{g}$, $\int d^d x \sqrt{g} R$ und $\int d^d x \sqrt{g} R^2$. Daraus resultiert dann das folgende System von Differentialgleichungen:

$$\begin{aligned}
\partial_t (Z_{Nk} \bar{\lambda}_k) = & (4\kappa^2)^{-1}(4\pi)^{-d/2} \left\{ h_8(d) Q_{d/2} \left[\mathcal{A}_1^{-1} \mathcal{N} \right] - h_1(d) Q_{d/2} \left[\mathcal{A}_2^{-1} \mathcal{N} \right] \right. \\
& \left. + a_k Q_{d/2} \left[\mathcal{A}_2^{-1} \mathcal{T}_2 \right] + a_k Q_{d/2} \left[(\mathcal{A}_1 \mathcal{A}_2)^{-1} P_k^2 \mathcal{N} \right] - 2d Q_{d/2} \left[P_k^{-1} \mathcal{N}_0 \right] \right\}, \tag{C.28}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\partial_t Z_{Nk} = & -(2\kappa^2)^{-1} (4\pi)^{-d/2} \left\{ h_9(d) Q_{d/2-1} [\mathcal{A}_1^{-1} \mathcal{N}] - \frac{1}{6} h_1(d) Q_{d/2-1} [\mathcal{A}_2^{-1} \mathcal{N}] \right. \\
& + \frac{1}{6} a_k Q_{d/2-1} [\mathcal{A}_2^{-1} \mathcal{T}_2] + \frac{1}{6} a_k Q_{d/2-1} [(\mathcal{A}_1 \mathcal{A}_2)^{-1} P_k^2 \mathcal{N}] + h_{10}(d) Q_{d/2-1} [P_k^{-1} \mathcal{N}_0] \\
& - h_{11}(d) a_k Q_{d/2} [\mathcal{A}_1^{-1} \mathcal{T}_1] + h_{11}(d) a_k Q_{d/2} [\mathcal{A}_1^{-2} P_k \mathcal{N}] + h_{12}(d) Q_{d/2} [\mathcal{A}_1^{-2} \mathcal{N}] \\
& + h_2(d) a_k Q_{d/2} [(\mathcal{A}_1 \mathcal{A}_2)^{-1} \mathcal{T}_2] + h_3(d) a_k Q_{d/2} [(\mathcal{A}_1 \mathcal{A}_2)^{-1} P_k \mathcal{N}] \\
& + h_4(d) Q_{d/2} [(\mathcal{A}_1 \mathcal{A}_2)^{-1} \mathcal{N}] + h_3(d) a_k Q_{d/2} [\mathcal{A}_2^{-1} \mathcal{T}_1] - h_2(d) a_k^2 Q_{d/2} [\mathcal{A}_1^{-1} \mathcal{A}_2^{-2} P_k^2 \mathcal{T}_2] \\
& - h_3(d) a_k^2 Q_{d/2} [\mathcal{A}_2^{-2} P_k \mathcal{T}_2] - h_4(d) a_k Q_{d/2} [\mathcal{A}_2^{-2} \mathcal{T}_2] - h_2(d) a_k^2 Q_{d/2} [(\mathcal{A}_1 \mathcal{A}_2)^{-2} P_k^4 \mathcal{N}] \\
& - h_3(d) a_k^2 Q_{d/2} [\mathcal{A}_1^{-1} \mathcal{A}_2^{-2} P_k^3 \mathcal{N}] - 2h_4(d) a_k Q_{d/2} [\mathcal{A}_1^{-1} \mathcal{A}_2^{-2} P_k^2 \mathcal{N}] \\
& \left. + h_1(d) h_3(d) a_k Q_{d/2} [\mathcal{A}_2^{-2} P_k \mathcal{N}] + h_1(d) h_4(d) Q_{d/2} [\mathcal{A}_2^{-2} \mathcal{N}] + h_{13}(d) Q_{d/2} [P_k^{-2} \mathcal{N}_0] \right\}, \tag{C.29}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\partial_t \bar{\beta}_k = & (4\pi)^{-d/2} \left\{ h_{14}(d) Q_{d/2-2} [\mathcal{A}_1^{-1} \mathcal{N}] - h_1(d) h_{15}(d) Q_{d/2-2} [\mathcal{A}_2^{-1} \mathcal{N}] \right. \\
& + h_{15}(d) a_k Q_{d/2-2} [\mathcal{A}_2^{-1} \mathcal{T}_2] + h_{15}(d) a_k Q_{d/2-2} [(\mathcal{A}_1 \mathcal{A}_2)^{-1} P_k^2 \mathcal{N}] \\
& - h_{16}(d) Q_{d/2-2} [P_k^{-1} \mathcal{N}_0] - h_{17}(d) a_k Q_{d/2-1} [\mathcal{A}_1^{-1} \mathcal{T}_1] + h_{17}(d) a_k Q_{d/2-1} [\mathcal{A}_1^{-2} P_k \mathcal{N}] \\
& - h_{18}(d) Q_{d/2-1} [\mathcal{A}_1^{-2} \mathcal{N}] + \frac{1}{6} h_2(d) a_k Q_{d/2-1} [(\mathcal{A}_1 \mathcal{A}_2)^{-1} \mathcal{T}_2] \\
& + \frac{1}{6} h_3(d) a_k Q_{d/2-1} [(\mathcal{A}_1 \mathcal{A}_2)^{-1} P_k \mathcal{N}] + \frac{1}{6} h_4(d) Q_{d/2-1} [(\mathcal{A}_1 \mathcal{A}_2)^{-1} \mathcal{N}] \\
& + \frac{1}{6} h_3(d) a_k Q_{d/2-1} [\mathcal{A}_2^{-1} \mathcal{T}_1] - \frac{1}{6} h_2(d) a_k^2 Q_{d/2-1} [\mathcal{A}_1^{-1} \mathcal{A}_2^{-2} P_k^2 \mathcal{T}_2] \\
& - \frac{1}{6} h_3(d) a_k^2 Q_{d/2-1} [\mathcal{A}_2^{-2} P_k \mathcal{T}_2] - \frac{1}{6} h_4(d) a_k Q_{d/2-1} [\mathcal{A}_2^{-2} \mathcal{T}_2] \\
& - \frac{1}{6} h_2(d) a_k^2 Q_{d/2-1} [(\mathcal{A}_1 \mathcal{A}_2)^{-2} P_k^4 \mathcal{N}] - \frac{1}{6} h_3(d) a_k^2 Q_{d/2-1} [\mathcal{A}_1^{-1} \mathcal{A}_2^{-2} P_k^3 \mathcal{N}] \\
& - \frac{1}{3} h_4(d) a_k Q_{d/2-1} [\mathcal{A}_1^{-1} \mathcal{A}_2^{-2} P_k^2 \mathcal{N}] + \frac{1}{6} h_1(d) h_3(d) a_k Q_{d/2-1} [\mathcal{A}_2^{-2} P_k \mathcal{N}] \\
& + \frac{1}{6} h_1(d) h_4(d) Q_{d/2-1} [\mathcal{A}_2^{-2} \mathcal{N}] - h_{20}(d) Q_{d/2-1} [P_k^{-2} \mathcal{N}_0] - h_{11}(d) a_k^2 Q_{d/2} [\mathcal{A}_1^{-2} P_k \mathcal{T}_1] \\
& + \frac{1}{2} h_{11}(d) h_{21}(d) a_k Q_{d/2} [\mathcal{A}_1^{-2} \mathcal{T}_1] + h_{22}(d) a_k Q_{d/2} [\mathcal{A}_1^{-2} \mathcal{N}] \\
& + h_{11}(d) a_k^2 Q_{d/2} [\mathcal{A}_1^{-3} P_k^2 \mathcal{N}] - h_{11}(d) h_{21}(d) a_k Q_{d/2} [\mathcal{A}_1^{-3} P_k \mathcal{N}] \\
& + h_{23}(d) Q_{d/2} [\mathcal{A}_1^{-3} \mathcal{N}] - h_5(d) a_k^2 Q_{d/2} [(\mathcal{A}_1 \mathcal{A}_2)^{-1} \mathcal{T}_2] \\
& \left. + h_6(d) a_k Q_{d/2} [(\mathcal{A}_1 \mathcal{A}_2)^{-1} \mathcal{N}] - \frac{2}{d^2} a_k^2 Q_{d/2} [(\mathcal{A}_1 \mathcal{A}_2)^{-1} P_k \mathcal{T}_1] \right\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +h_2(d) h_3(d) a_k Q_{d/2} [(\mathcal{A}_1 \mathcal{A}_2)^{-1} \mathcal{T}_1] - h_2(d)^2 a_k^2 Q_{d/2} [(\mathcal{A}_1 \mathcal{A}_2)^{-2} P_k^2 \mathcal{T}_2] \\
& + \frac{1}{2} h_2(d) a_k^3 Q_{d/2} [\mathcal{A}_1^{-1} \mathcal{A}_2^{-2} P_k^2 \mathcal{T}_2] - 2h_2(d) h_3(d) a_k^2 Q_{d/2} [\mathcal{A}_1^{-1} \mathcal{A}_2^{-2} P_k \mathcal{T}_2] \\
& - \frac{3}{2} h_2(d) h_4(d) a_k Q_{d/2} [\mathcal{A}_1^{-1} \mathcal{A}_2^{-2} \mathcal{T}_2] - h_6(d) a_k^2 Q_{d/2} [\mathcal{A}_2^{-2} \mathcal{T}_2] \\
& + \frac{1}{2} h_2(d) a_k^3 Q_{d/2} [(\mathcal{A}_1 \mathcal{A}_2)^{-2} P_k^4 \mathcal{N}] - 2h_2(d) h_3(d) a_k^2 Q_{d/2} [(\mathcal{A}_1 \mathcal{A}_2)^{-2} P_k^3 \mathcal{N}] \\
& - \frac{3}{2} h_2(d) h_4(d) a_k Q_{d/2} [(\mathcal{A}_1 \mathcal{A}_2)^{-2} P_k^2 \mathcal{N}] - h_7(d) a_k^2 Q_{d/2} [\mathcal{A}_1^{-1} \mathcal{A}_2^{-2} P_k^2 \mathcal{N}] \\
& - 3h_3(d) h_4(d) a_k Q_{d/2} [\mathcal{A}_1^{-1} \mathcal{A}_2^{-2} P_k \mathcal{N}] - \frac{3}{2} h_4(d)^2 Q_{d/2} [\mathcal{A}_1^{-1} \mathcal{A}_2^{-2} \mathcal{N}] \\
& + h_1(d) h_6(d) a_k Q_{d/2} [\mathcal{A}_2^{-2} \mathcal{N}] - h_2(d) h_3(d) a_k^2 Q_{d/2} [\mathcal{A}_1^{-1} \mathcal{A}_2^{-2} P_k^2 \mathcal{T}_1] \\
& - h_3(d)^2 a_k^2 Q_{d/2} [\mathcal{A}_2^{-2} P_k \mathcal{T}_1] - h_3(d) h_4(d) a_k Q_{d/2} [\mathcal{A}_2^{-2} \mathcal{T}_1] \\
& + h_2(d)^2 a_k^3 Q_{d/2} [\mathcal{A}_1^{-2} \mathcal{A}_2^{-3} P_k^4 \mathcal{T}_2] + 2h_2(d) h_3(d) a_k^3 Q_{d/2} [\mathcal{A}_1^{-1} \mathcal{A}_2^{-3} P_k^3 \mathcal{T}_2] \\
& + 2h_2(d) h_4(d) a_k^2 Q_{d/2} [\mathcal{A}_1^{-1} \mathcal{A}_2^{-3} P_k^2 \mathcal{T}_2] + h_3(d)^2 a_k^3 Q_{d/2} [\mathcal{A}_2^{-3} P_k^2 \mathcal{T}_2] \\
& + 2h_3(d) h_4(d) a_k^2 Q_{d/2} [\mathcal{A}_2^{-3} P_k \mathcal{T}_2] + h_4(d)^2 a_k Q_{d/2} [\mathcal{A}_2^{-3} \mathcal{T}_2] \\
& + h_2(d)^2 a_k^3 Q_{d/2} [(\mathcal{A}_1 \mathcal{A}_2)^{-3} P_k^6 \mathcal{N}] + 2h_2(d) h_3(d) a_k^3 Q_{d/2} [\mathcal{A}_1^{-2} \mathcal{A}_2^{-3} P_k^5 \mathcal{N}] \\
& + 3h_2(d) h_4(d) a_k^2 Q_{d/2} [\mathcal{A}_1^{-2} \mathcal{A}_2^{-3} P_k^4 \mathcal{N}] + h_3(d)^2 a_k^3 Q_{d/2} [\mathcal{A}_1^{-1} \mathcal{A}_2^{-3} P_k^4 \mathcal{N}] \\
& + 4h_3(d) h_4(d) a_k^2 Q_{d/2} [\mathcal{A}_1^{-1} \mathcal{A}_2^{-3} P_k^3 \mathcal{N}] + 3h_4(d)^2 a_k Q_{d/2} [\mathcal{A}_1^{-1} \mathcal{A}_2^{-3} P_k^2 \mathcal{N}] \\
& - h_1(d) h_3(d)^2 a_k^2 Q_{d/2} [\mathcal{A}_2^{-3} P_k^2 \mathcal{N}] - 2h_1(d) h_3(d) h_4(d) a_k Q_{d/2} [\mathcal{A}_2^{-3} P_k \mathcal{N}] \\
& - h_1(d) h_4(d)^2 Q_{d/2} [\mathcal{A}_2^{-3} \mathcal{N}] + h_{24}(d) Q_{d/2} [P_k^{-3} \mathcal{N}_0] \\
& + \delta_{d,2} \left[-\frac{3}{2} a_k \frac{\partial_t [\bar{\beta}_k k^2]}{\bar{\beta}_k (k^2 - 2\bar{\lambda}_k)} + \left(\frac{11}{4} R^{(0)'}(0) + \frac{3}{2} a_k k^2 \right) \frac{\partial_t [Z_{Nk} k^2]}{Z_{Nk} (k^2 - 2\bar{\lambda}_k)^2} \right. \\
& \left. - \frac{11}{4} R^{(0)'}(0) \frac{\partial_t Z_{Nk}}{Z_{Nk} (k^2 - 2\bar{\lambda}_k)} - \frac{1}{2k^2} R^{(0)'}(0) \right] \\
& + \delta_{d,4} \left[\frac{1}{8} \frac{\partial_t [Z_{Nk} k^2]}{Z_{Nk} (k^2 - 2\bar{\lambda}_k)} + \frac{1}{4} \frac{\partial_t [Z_{Nk} k^2]}{Z_{Nk} (3a_k k^4 - (k^2 - 2\bar{\lambda}_k))} \right. \\
& \left. - \frac{3}{8} a_k k^4 \frac{\partial_t [Z_{Nk} k^2]}{Z_{Nk} (k^2 - 2\bar{\lambda}_k) (3a_k k^4 - (k^2 - 2\bar{\lambda}_k))} - \frac{1}{4} \frac{\partial_t [Z_{Nk} k^2]}{Z_{Nk} (9a_k k^4 - 2(k^2 - 2\bar{\lambda}_k))} \right. \\
& \left. - \frac{3}{8} a_k \frac{\partial_t [\bar{\beta}_k k^4]}{\bar{\beta}_k (3a_k k^4 - (k^2 - 2\bar{\lambda}_k))} + \frac{9}{8} a_k \frac{\partial_t [\bar{\beta}_k k^4]}{\bar{\beta}_k (9a_k k^4 - 2(k^2 - 2\bar{\lambda}_k))} \right] \}. \tag{C.30}
\end{aligned}$$

Die hier auftretenden Koeffizienten h_i sind Funktionen der Dimensionalität d . Sie werden in Anhang H.2 einzeln aufgelistet.

Anschließend werden in Anlehnung an die Schwellenfunktionen Φ_n^p und $\tilde{\Phi}_n^p$ aus (3.23) die verallgemeinerten Schwellenfunktionen

$$\Psi_{n;m}^{p;q}(v, w; d) \equiv \frac{(-1)^i}{\Gamma(n+i)} \int_0^\infty dy y^{n+i-1} \frac{\partial^i}{\partial y^i} \left[(y + R^{(0)}(y))^m \left(R^{(0)}(y) - yR^{(0)'}(y) \right) \right. \\ \left. \times (y + R^{(0)}(y) + w)^{-p} \left(32\pi v (y + R^{(0)}(y))^2 - \frac{d-2}{2(d-1)} (y + R^{(0)}(y) + w) \right)^{-q} \right] \quad (\text{C.31})$$

und

$$\tilde{\Psi}_{n;m;l}^{p;q}(v, w; d) \equiv \frac{(-1)^i}{\Gamma(n+i)} \int_0^\infty dy y^{n+i-1} \frac{\partial^i}{\partial y^i} \left[(y + R^{(0)}(y))^m (2y + R^{(0)}(y))^l R^{(0)}(y) \right. \\ \left. \times (y + R^{(0)}(y) + w)^{-p} \left(32\pi v (y + R^{(0)}(y))^2 - \frac{d-2}{2(d-1)} (y + R^{(0)}(y) + w) \right)^{-q} \right] \quad (\text{C.32})$$

eingeführt. Dabei stellt i eine nichtnegative, ganze Zahl dar, die die Bedingung $i > -n$ erfüllt, ansonsten aber beliebig ist. (Die Funktionen Ψ und $\tilde{\Psi}$ hängen genau wie $Q_n[W]$ aus Gleichung (C.19) nicht wirklich von i ab.) Wie in (C.19) bietet es sich hier an, $i = 0$ zu setzen, falls $n > 0$ gilt. Ferner erhält man die gewöhnlichen Schwellenfunktionen $\Phi_n^p(w)$ und $\tilde{\Phi}_n^p(w)$ aus (C.31) und (C.32) zurück, wenn man darin $q = m = l = 0$ setzt:

$$\Phi_n^p(w) = \Psi_{n;0}^{p;0}(v, w; d), \quad \tilde{\Phi}_n^p(w) = \tilde{\Psi}_{n;0;0}^{p;0}(v, w; d) \quad \forall v \quad \forall d. \quad (\text{C.33})$$

Man verwendet nun die folgenden, mit denjenigen aus Gleichung (C.27) eng verwandten Beziehungen

$$Q_n [\mathcal{A}_1^{-p} \mathcal{A}_2^{-q} P_k^m \mathcal{T}_1] = k^{2(m+n-p-q+1)} \Psi_{n;m}^{p;q}(a_k k^2/(32\pi), \bar{\lambda}_k/k^2; d) \\ - \frac{1}{2} \varrho_k k^{2(m+n-p-q+1)} \tilde{\Psi}_{n;m;0}^{p;q}(a_k k^2/(32\pi), \bar{\lambda}_k/k^2; d), \\ Q_n [\mathcal{A}_1^{-p} \mathcal{A}_2^{-q} P_k^m \mathcal{T}_2] = 2k^{2(m+n-p-q+2)} \Psi_{n;m+1}^{p;q}(a_k k^2/(32\pi), \bar{\lambda}_k/k^2; d) \\ - \frac{1}{2} \varrho_k k^{2(m+n-p-q+2)} \tilde{\Psi}_{n;m;1}^{p;q}(a_k k^2/(32\pi), \bar{\lambda}_k/k^2; d), \\ Q_n [\mathcal{A}_1^{-p} \mathcal{A}_2^{-q} P_k^m \mathcal{N}] = k^{2(m+n-p-q+1)} \Psi_{n;m}^{p;q}(a_k k^2/(32\pi), \bar{\lambda}_k/k^2; d) \\ - \frac{1}{2} \eta_N(k) k^{2(m+n-p-q+1)} \tilde{\Psi}_{n;m;0}^{p;q}(a_k k^2/(32\pi), \bar{\lambda}_k/k^2; d), \\ Q_n [P_k^{-p} \mathcal{N}_0] = k^{2(n-p+1)} \Phi_n^p(0), \quad (\text{C.34})$$

um in den Gleichungen (C.28)-(C.30) die Q_n durch $\Psi_{n;m}^{p;q}(v, w; d)$ und $\tilde{\Psi}_{n;m;l}^{p;q}(v, w; d)$ zu ersetzen. Dadurch erhält man schließlich das Gleichungssystem (5.15)-(5.17) aus Abschnitt 5.2.

Anhang D

Flußgleichung in der $d = 4$ -dimensionalen Einstein-Hilbert-Trunkierung

Im folgenden werden die im Rahmen der Einstein-Hilbert-Trunkierung erzielten Ergebnisse dieser Arbeit mit denjenigen aus [30] verglichen. Letztere beruhen auf derselben Trunkierung. Zudem wurde in [30] ebenso wie in der vorliegenden Arbeit ein Cutoff des Typs B verwendet.

Durch Einsetzen von $d = 4$ in Gleichung (3.17) ergibt sich für die rechte Seite $\mathcal{S}_k(R)$ der Flußgleichung

$$\begin{aligned}
\mathcal{S}_k(R) &= \frac{1}{2} \text{Tr}_{(2ST^2)} \left[\frac{\partial_t P_k}{P_k + \frac{2}{3}R - 2\bar{\lambda}_k} \right] + \frac{1}{2} \text{Tr}'_{(1T)} \left[\frac{\partial_t P_k}{P_k + \frac{2\alpha-1}{4}R - 2\alpha\bar{\lambda}_k} \right] \\
&+ \frac{1}{2} \text{Tr}''_{(0)} \left[\frac{\partial_t P_k}{P_k + \frac{\alpha-1}{2}R - 2\alpha\bar{\lambda}_k} \right] + \frac{1}{2} \text{Tr}''_{(0)} \left[\frac{\partial_t P_k}{P_k - 2\bar{\lambda}_k} \right] \\
&+ \frac{1}{2} \sum_{l=0}^1 \left[D_l(4,0) \frac{\partial_t P_k(\Lambda_l(4,0))}{P_k(\Lambda_l(4,0)) - \frac{4\alpha}{3\alpha-1}\bar{\lambda}_k} \right] - \text{Tr}_{(1T)} \left[\frac{\partial_t P_k}{P_k - \frac{R}{4}} \right] - \text{Tr}'_{(0)} \left[\frac{\partial_t P_k}{P_k - \frac{R}{2}} \right] \\
&+ \frac{\partial_t Z_{Nk}}{Z_{Nk}} \left\{ \frac{1}{2} \text{Tr}_{(2ST^2)} \left[\frac{P_k + D^2}{P_k + \frac{2}{3}R - 2\bar{\lambda}_k} \right] + \frac{1}{2} \text{Tr}'_{(1T)} \left[\frac{P_k + D^2}{P_k + \frac{2\alpha-1}{4}R - 2\alpha\bar{\lambda}_k} \right] \right. \\
&+ \frac{1}{2} \sum_{l=0}^1 \left[D_l(4,0) \frac{P_k(\Lambda_l(4,0)) - \Lambda_l(4,0)}{P_k(\Lambda_l(4,0)) - \frac{4\alpha}{3\alpha-1}\bar{\lambda}_k} \right] \\
&\left. - \frac{1}{4\alpha} \text{Tr}''_{(0)} \left[\left\{ [P_k - 2\bar{\lambda}_k] \left[P_k + \frac{\alpha-1}{2}R - 2\alpha\bar{\lambda}_k \right] \right\}^{-1} \right] \right\}
\end{aligned}$$

$$\times \left\{ \left((1 - 3\alpha) \left[(3 - \alpha)P_k + \frac{\alpha - 1}{2}R \right] + 4\alpha(\alpha + 1)\bar{\lambda}_k \right) (P_k + D^2) - 3(1 - \alpha)^2 \sqrt{P_k} \sqrt{P_k - \frac{R}{3}} \left[\sqrt{P_k} \sqrt{P_k - \frac{R}{3}} - \sqrt{-D^2} \sqrt{-D^2 - \frac{R}{3}} \right] \right\}, \quad (\text{D.1})$$

wobei $P_k(\Lambda_l(4, 0)) \equiv \Lambda_l(4, 0) + k^2 R^{(0)}(\Lambda_l(4, 0)/k^2)$ gesetzt wurde. Der obige Ausdruck (D.1) stimmt mit dem entsprechenden Resultat aus [30] bis auf einige wenige dort auftretende Schreibfehler überein. (Siehe Gleichung (3.22) in [30].) Im einzelnen sehen diese Abweichungen wie folgt aus: Zunächst einmal fehlt in der besagten Arbeit jeweils der Strich an den in den Zeilen 1 und 4 von Gleichung (D.1) auftretenden $\text{Tr}'_{(1T)}$ -Termen. Außerdem wird darin der in dem jeweils ersten Term der Zeilen 3 und 5 enthaltene Faktor $D_l(4, 0)$ weggelassen. Zuguter Letzt fehlt in Gleichung (3.22) der Arbeit [30] ein Faktor $1/2$, der oben in der siebten Zeile in dem zu R proportionalen Term vorkommt.

Kommen wir als nächstes zu den Flußgleichungen für Z_{Nk} und $\bar{\lambda}_k$. Um die entsprechenden Gleichungen (3.21) und (3.22) aus Abschnitt 3.3 mit den Ergebnissen aus [30] vergleichen zu können, muß man sie zuerst in eine dafür geeignete Form bringen. Zu diesem Zweck werden (3.21) und (3.22) nach $\bar{\lambda}_k$ entwickelt. Weiterhin benutzt man die Beziehung $\partial_t \bar{\lambda}_k = Z_{Nk}^{-1} \partial_t (Z_{Nk} \bar{\lambda}_k) + \bar{\lambda}_k \eta_N(k)$ und setzt wie in [30]:

$$\kappa_k \equiv 2\kappa^2 Z_{Nk}, \quad Z_k \equiv Z_{Nk}, \quad \eta_k \equiv \partial_t \ln Z_k \equiv -\eta_N(k), \quad q_n^p \equiv 2\Phi_n^p(0), \quad \tilde{q}_n^p \equiv \tilde{\Phi}_n^p(0). \quad (\text{D.2})$$

Dadurch ergibt sich das folgende Differentialgleichungssystem:

$$\partial_t \kappa_k = (4\pi)^{-2} k^2 \left\{ \frac{13}{24} q_1^1 + \left(\frac{55}{24} + \alpha \right) q_2^2 + \eta_k \left[\frac{1}{8} \tilde{q}_1^1 + \left(\frac{25}{24} + \alpha \right) \tilde{q}_2^2 \right] \right\} + \mathcal{O}(\bar{\lambda}_k) \quad (\text{D.3})$$

$$\begin{aligned} \partial_t \bar{\lambda}_k = & \kappa_k^{-1} (4\pi)^{-2} \left\{ k^4 \left[\frac{1}{2} q_2^1 + \eta_k \frac{5}{2} \tilde{q}_2^1 \right] + \bar{\lambda}_k k^2 \left[-\frac{13}{24} q_1^1 \right. \right. \\ & \left. \left. + \left(\frac{17}{24} + \alpha \right) q_2^2 + \eta_k \left(-\frac{1}{8} \tilde{q}_1^1 + \left(\frac{47}{24} + \alpha \right) \tilde{q}_2^2 \right) \right] \right\} + \mathcal{O}(\bar{\lambda}_k^2). \quad (\text{D.4}) \end{aligned}$$

Dieses ermöglicht einen direkten Vergleich mit den Gleichungen (4.6)-(4.9) aus [30]. Abgesehen von den Beiträgen von Materiefeldern, die in [30] zusätzlich berücksichtigt werden, unterscheiden sich die Resultate der beiden Arbeiten dadurch, daß die Vorfaktoren der q_2^2 -Terme jeweils um den Betrag $60/24$ voneinander abweichen. Wie mittlerweile von den Autoren der zitierten Arbeit bestätigt wurde, ist ein falsches Vorzeichen vor einem bestimmten Term in [30] für die Abweichung der Resultate verantwortlich. Dieser Term stellt einen Beitrag von den Geistern dar, der aus der Heat-Kernel-Entwicklung der letzten beiden Terme aus der dritten Zeile von Gleichung (D.1) hervorgeht, und genau dieser

Term besitzt den Vorfaktor $30/24$. Zusammenfassend kann man konstatieren, daß, abgesehen von den genannten Korrekturen, die Ergebnisse beider Untersuchungen miteinander übereinstimmen. Dies war auch nicht anders zu erwarten, da in beiden Arbeiten derselbe Cutoff verwendet wird.

Anhang E

Die sphärischen Harmonischen für symmetrische Tensoren

In diesem Teil des Anhangs werden die auf einem d -dimensionalen sphärischen Hintergrund definierten sphärischen Harmonischen $T_{\mu\nu}^{lm}$, T_{μ}^{lm} und T^{lm} für symmetrische, transversale, spurfreie (ST^2) Tensoren $h_{\mu\nu}^T$, transversale (T) Vektoren ξ_{μ} und Skalare ϕ eingeführt. Diese Harmonischen bilden vollständige Sätze von orthogonalen Funktionen, die die Räume der ST^2 -Tensoren, der T -Vektoren bzw. der Skalare aufspannen. Zudem stellen sie die Eigenfunktionen des auf die Felder des jeweiligen Typs wirkenden kovarianten Laplace-Operators dar. Folglich erfüllen sie die Beziehungen

$$\begin{aligned} -\bar{D}^2 T_{\mu\nu}^{lm}(x) &= \Lambda_l(d, 2) T_{\mu\nu}^{lm}(x) , \\ -\bar{D}^2 T_{\mu}^{lm}(x) &= \Lambda_l(d, 1) T_{\mu}^{lm}(x) , \\ -\bar{D}^2 T^{lm}(x) &= \Lambda_l(d, 0) T^{lm}(x) \end{aligned} \quad (\text{E.1})$$

und, nach entsprechender Normierung,

$$\begin{aligned} \delta^{lk} \delta^{mn} &= \int d^d x \sqrt{\bar{g}} (\mathbf{1}_{(2ST^2)})^{\mu\nu\rho\sigma} T_{\mu\nu}^{lm} T_{\rho\sigma}^{kn} = \int d^d x \sqrt{\bar{g}} (\mathbf{1}_{(1T)})^{\mu\nu} T_{\mu}^{lm} T_{\nu}^{kn} \\ &= \int d^d x \sqrt{\bar{g}} T^{lm} T^{kn} . \end{aligned} \quad (\text{E.2})$$

Dabei stellen $(\mathbf{1}_{(2ST^2)})^{\mu\nu\rho\sigma} = (d-2)/(2d) (\bar{g}^{\mu\rho}\bar{g}^{\nu\sigma} + \bar{g}^{\mu\sigma}\bar{g}^{\nu\rho})$ und $(\mathbf{1}_{(1T)})^{\mu\nu} = (d-1)/d \bar{g}^{\mu\nu}$ die Einheitsmatrizen für die Räume der ST^2 -Tensoren bzw. der transversalen Vektoren dar. Weiterhin bezeichnen die in (E.1) auftauchenden $\Lambda_l(d, s)$ die Eigenwerte von $-\bar{D}^2$, wobei s den jeweiligen Spin des Feldes angibt und l die Werte $s, s+1, s+2, \dots$ annehmen kann. Außerdem dient der zweite obere Index m an $T_{\mu\nu}^{lm}$, T_{μ}^{lm} und T^{lm} dazu, die zu entarteten Eigenwerten gehörigen Eigenmoden abzuzählen. Er kann Werte zwischen eins und $D_l(d, s)$ annehmen, wobei $D_l(d, s)$ den entsprechenden Entartungsgrad angibt.

Tabelle E.t1: Eigenwerte von $-\bar{D}^2$ und ihre Entartung für d -Sphären				
Eigenfunktion	Spin s	Eigenwert $\Lambda_l(d, s)$	Entartungsgrad $D_l(d, s)$	l
$T_{\mu\nu}^{lm}(x)$	2	$\frac{l(l+d-1)-2}{d(d-1)}\bar{R}$	$\frac{(d+1)(d-2)(l+d)(l-1)(2l+d-1)(l+d-3)!}{2(d-1)!(l+1)!}$	2, 3, ...
$T_{\mu}^{lm}(x)$	1	$\frac{l(l+d-1)-1}{d(d-1)}\bar{R}$	$\frac{l(l+d-1)(2l+d-1)(l+d-3)!}{(d-2)!(l+1)!}$	1, 2, ...
$T^{lm}(x)$	0	$\frac{l(l+d-1)}{d(d-1)}\bar{R}$	$\frac{(2l+d-1)(l+d-2)!}{l!(d-1)!}$	0, 1, ...

In [66] werden explizite Ausdrücke für $\Lambda_l(d, s)$ und $D_l(d, s)$ hergeleitet, die in der unten angefügten Tabelle E.t1 wiedergegeben werden. Die Eigenwerte werden hier in Abhängigkeit vom Krümmungsskalar $\bar{R} = d(d-1)/r^2$ der Sphäre mit Radius r ausgedrückt. Zudem wird in [66] gezeigt, daß die Gesamtheit der sphärischen Harmonischen $T_{\mu\nu}^{lm}$, T_{μ}^{lm} bzw. T^{lm} den Raum der ST^2 -Tensoren, der T -Vektoren bzw. der Skalare aufspannt. Folglich kann man beliebige Funktionen $h_{\mu\nu}^T$, ξ_{μ} und ϕ gemäß den Gleichungen

$$\begin{aligned}
h_{\mu\nu}^T(x) &= \sum_{l=2}^{\infty} \sum_{m=1}^{D_l(d,2)} h_{lm}^T T_{\mu\nu}^{lm}(x), \\
\xi_{\mu}(x) &= \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{D_l(d,1)} \xi_{lm} T_{\mu}^{lm}(x), \\
\phi(x) &= \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{D_l(d,0)} \phi_{lm} T^{lm}(x)
\end{aligned} \tag{E.3}$$

nach sphärischen Harmonischen entwickeln. Dabei repräsentieren die Koeffizienten $\{h_{lm}^T\}$, $\{\xi_{lm}\}$ und $\{\phi_{lm}\}$ abzählbar unendliche Mengen von Konstanten, die durch $h_{\mu\nu}^T$, ξ_{μ} bzw. ϕ eindeutig festgelegt sind. Da man den Zerlegungen (1.12) und (1.21) zufolge jeden symmetrischen nicht- T^2 -Tensor und jeden nichttransversalen Vektor durch ST^2 -Tensoren, T -Vektoren und Skalare darstellen kann, liefern die Ausdrücke in (E.3) folglich auch Entwicklungen von solchen Feldern nach sphärischen Harmonischen, vgl. [66, 67, 68, 69].

An dieser Stelle ist es angebracht zu erwähnen, daß die $D_1(d, 1) = d(d+1)/2$ Moden $T_{\mu}^{1,m}$ bzw. die $D_1(d, 0) = d+1$ Moden $T^{1,m}$ die Killing-Gleichung (1.14) bzw. die skalare Gleichung (1.15) erfüllen und daß $T^{0,1}$ eine Konstante ist. Wie bereits in Abschnitt 1.3 dargelegt wurde, liefern die entsprechenden ξ_{μ} - bzw. σ -Moden keinen Beitrag zu dem gemäß (1.12) zerlegten Feld $h_{\mu\nu}$. Bei beliebigen Vektoren $C_{\mu} = C_{\mu}^T + \bar{D}_{\mu}\eta$ ist es die Konstante η -Mode, die keinen Beitrag leistet. Die angesprochenen Moden haben allesamt keine physikalische Bedeutung und sind demzufolge von den Rechnungen auszuschließen.

Anhang F

Heat-Kernel-Koeffizienten für Felder mit differentiellen Nebenbedingungen

In diesem Teil des Anhangs beschaffen wir uns zunächst das allgemeine mathematische Rüstzeug, das für die Auswertung der in (3.20) und (5.12) vorkommenden Spuren benötigt wird. Im Anschluß daran werden die Heat-Kernel-Entwicklungen für die unter den besagten Spuren auftretenden Laplace-Operatoren explizit hergeleitet. Im vorliegenden Fall sind das gerade solche Laplace-Operatoren, die auf Felder mit differentiellen Nebenbedingungen wirken.

Beginnen wir unsere Betrachtungen mit einer Spur der Form

$$\begin{aligned} \mathrm{Tr}_{(s[C])}[f(-D^2)] &= \int d^d x \sqrt{g} \langle x | f(-D^2) | x \rangle_{\mu_1 \dots \mu_s}^{\mu_1 \dots \mu_s} \\ &= \int d^d x \left[(f(-D^2))^{\mu_1 \dots \mu_s \nu_1 \dots \nu_s} (\mathbf{1}_{(s[C])})_{\nu_1 \dots \nu_s \mu_1 \dots \mu_s} \delta^d(x-y) \right]_{x=y}. \end{aligned} \quad (\text{F.1})$$

Hier stellt $f(x)$ eine beliebige glatte Funktion dar, deren Argument x gemäß $x = -D^2$ durch den kovarianten Laplace-Operator D^2 ersetzt wurde. Dabei wird vorausgesetzt, daß D^2 auf Felder mit Spin s wirkt, die eventuell gewissen Nebenbedingungen C wie Symmetrie und/oder Transversalität nachkommen, was durch den Zusatz $(s[C])$ an der Spur symbolisiert wird. Im allgemeinen besitzt ein solcher Laplace-Operator eine bestimmte Matrixstruktur, die natürlich auf $f(-D^2)$ übertragen wird. Weiterhin stellt $\mathbf{1}_{(s[C])}$ die Einheitsmatrix auf dem Raum der *unabhängigen* Feldkomponenten dar.

Ausgehend von einer geschlossenen¹ Riemannschen Mannigfaltigkeit (\mathcal{M}, g) , nehmen

¹Die Beschränkung auf geschlossene Riemannsche Mannigfaltigkeiten wird lediglich vorgenommen, um die Notation nicht komplizierter zu gestalten als unbedingt nötig. Prinzipiell gelten die Ergebnisse dieses Anhangs auch für nichtkompakte, asymptotisch flache Riemannsche Mannigfaltigkeiten.

wir nun an, daß $\{U_{\mu_1 \dots \mu_s}^k(x)\}$ einen vollständigen Satz von orthogonalen Funktionen auf (\mathcal{M}, g) verkörpert, der den Raum der betrachteten Felder aufspannt. Unter Verwendung der Vollständigkeitsrelation

$$(\mathbf{1}_{(s[C])})_{\nu_1 \dots \nu_s \mu_1 \dots \mu_s} \frac{\delta^d(x-y)}{\sqrt{g(x)}} = \frac{1}{2} \sum_k (U_{\nu_1 \dots \nu_s}^k(x) U_{\mu_1 \dots \mu_s}^k(y) + U_{\mu_1 \dots \mu_s}^k(x) U_{\nu_1 \dots \nu_s}^k(y)) \quad (\text{F.2})$$

läßt sich dann (F.1) wie folgt schreiben:

$$\text{Tr}_{(s[C])}[f(-D^2)] = \int d^d x \sqrt{g} \sum_k U_{\mu_1 \dots \mu_s}^k(x) (f(-D^2))^{\mu_1 \dots \mu_s \nu_1 \dots \nu_s} U_{\nu_1 \dots \nu_s}^k(x). \quad (\text{F.3})$$

Nimmt man zusätzlich an, daß $\{U_{\mu_1 \dots \mu_s}^k(x)\}$ einen vollständigen Satz von *orthonormalen Eigenfunktionen des kovarianten Laplace-Operators* darstellt und somit die Beziehung $-D^2 U_{\mu_1 \dots \mu_s}^k(x) = \tilde{\Lambda}_k U_{\mu_1 \dots \mu_s}^k(x)$ erfüllt, so vereinfacht sich (F.3) zu

$$\text{Tr}_{(s[C])}[f(-D^2)] = \sum_k f(\tilde{\Lambda}_k). \quad (\text{F.4})$$

Dabei repräsentiert $\tilde{\Lambda}_k$ den zu $U_{\mu_1 \dots \mu_s}^k$ gehörigen Eigenwert.

Im allgemeinen sind derartige Spuren kaum exakt zu berechnen, so daß man in der Regel gezwungen ist, auf Approximationsverfahren zurückzugreifen. Eine häufig benutzte Näherungsmethode ist die sogenannte Schwinger-De Witt-Entwicklung des diagonalen Heat-Kernels $\langle x | e^{-itD^2} | x \rangle$ für $|t| \rightarrow 0$, die im Englischen oftmals auch als “early-time expansion” bezeichnet wird. (Hier stellt $\mathbf{t} \equiv s + i\varepsilon$ einen komplexen Parameter mit $\text{Im}(\mathbf{t}) = \varepsilon > 0$ dar.) Sie wurde bereits in vielen Arbeiten diskutiert (siehe z.B. [65]) und besitzt die allgemeine Form

$$\langle x | e^{-it(D^2+Q)} | x \rangle = \left(\frac{i}{4\pi\mathbf{t}} \right)^{\frac{d}{2}} \{ a_0(x; Q) - it a_2(x; Q) - \mathbf{t}^2 a_4(x; Q) + \mathcal{O}(\mathbf{t}^3) \}. \quad (\text{F.5})$$

Hier stellt $Q(x)$ ein glattes Matrixpotential dar. Weiterhin verkörpern die a_n , die man üblicherweise als Heat-Kernel-Koeffizienten bezeichnet oder auch Seeley-Koeffizienten nennt, tensorielle Polynome in der Krümmung, in Q und in deren kovarianten Ableitungen. Sie haben die Massendimension n und besitzen dieselbe Matrixstruktur² wie $D^2 + Q$; sie hängen also von dem betrachteten Feldraum ab. Handelt es sich bei $D^2 + Q$ um einen Operator, der auf Felder wirkt, deren Komponenten keine Nebenbedingungen erfüllen und somit voneinander unabhängig sind, so nehmen die ersten drei Koeffizienten die folgende

²Wenn hier von “Matrixstruktur” die Rede ist, so ist dies hinsichtlich eventuell vorhandener Lorentz- und/oder Spinorindizes zu verstehen.

Form an:³

$$\begin{aligned} a_0(x; Q) &\equiv a_0 = \mathbf{1} , \\ a_2(x; Q) &= P , \\ a_4(x; Q) &= \frac{1}{180} (R_{\mu\nu\alpha\beta} R^{\mu\nu\alpha\beta} - R_{\mu\nu} R^{\mu\nu} + D^2 R) \mathbf{1} + \frac{1}{2} P^2 + \frac{1}{12} \mathcal{R}_{\mu\nu} \mathcal{R}^{\mu\nu} + \frac{1}{6} D^2 P . \end{aligned} \quad (\text{F.6})$$

In den obigen Ausdrücken bezeichnet $\mathbf{1}$ die Einheitsmatrix auf dem Raum der betrachteten Felder, und P ist wie folgt definiert:

$$P \equiv Q + \frac{1}{6} R \mathbf{1} . \quad (\text{F.7})$$

Weiterhin ist $\mathcal{R}_{\mu\nu}$ der durch den Kommutator

$$\mathcal{R}_{\mu\nu} \equiv [D_\mu, D_\nu] \equiv D_\mu D_\nu - D_\nu D_\mu \quad (\text{F.8})$$

definierte Krümmungsoperator.

Setzt man die asymptotische Entwicklung (F.5) in (F.1) ein, so ergibt sich für die Operatorspur des Heat-Kernels

$$\text{Tr} \left[e^{-it(D^2+Q)} \right] = \left(\frac{i}{4\pi t} \right)^{\frac{d}{2}} \int d^d x \sqrt{g} \left\{ \text{tr} a_0 - it \text{tr} a_2(x; Q) - t^2 \text{tr} a_4(x; Q) + \mathcal{O}(t^3) \right\}, \quad (\text{F.9})$$

wobei “tr“ die Matrixspur bzgl. der jeweiligen Tensor- oder Spinorindizes symbolisiert.

Sehen wir uns die Koeffizienten a_n etwas genauer an. Für beliebige Skalarfelder ϕ gilt $D_\mu D_\nu \phi = D_\nu D_\mu \phi$ und somit $\mathcal{R}_{\mu\nu} = 0$. Folglich trägt hier der $\mathcal{R}_{\alpha\beta} \mathcal{R}^{\alpha\beta}$ -Term nicht zu a_4 bei. Im Fall von beliebigen Spin- s -Feldern $F_{\mu_1 \dots \mu_s}(x)$ mit ganzzahligem Spin $s \geq 1$ erhält man

$$\mathcal{R}_{\alpha\beta} F_{\mu_1 \dots \mu_s}(x) = \sum_{i=1}^s R_{\alpha\beta\mu_i}{}^\mu F_{\mu_1 \dots \mu_{i-1} \mu \mu_{i+1} \dots \mu_s}(x) . \quad (\text{F.10})$$

Demzufolge liefert $\mathcal{R}_{\alpha\beta} \mathcal{R}^{\alpha\beta}$ in diesem Fall einen nichtverschwindenden Beitrag zu a_4 , der eine $(d^s \times d^s)$ -Matrixstruktur aufweist. Für beliebige Vektoren bzw. Tensoren zweiter Stufe ergibt sich hiermit

$$\begin{aligned} (\mathcal{R}_{\alpha\beta} \mathcal{R}^{\alpha\beta})_{\mu\nu} &= -R_{\alpha\beta\gamma\mu} R^{\alpha\beta\gamma}{}_\nu , \\ (\mathcal{R}_{\alpha\beta} \mathcal{R}^{\alpha\beta})_{\mu\nu\rho\sigma} &= -R_{\alpha\beta\gamma\mu} R^{\alpha\beta\gamma}{}_\rho g_{\nu\sigma} - R_{\alpha\beta\gamma\nu} R^{\alpha\beta\gamma}{}_\sigma g_{\mu\rho} + 2R_{\alpha\beta\mu\rho} R^{\alpha\beta}{}_{\nu\sigma} . \end{aligned} \quad (\text{F.11})$$

³In Rahmen der Einstein-Hilbert-Trunkierung benötigt man nur die ersten beiden Koeffizienten $a_0 \propto r^0$ und $a_2 \propto r^{-2}$, wohingegen für die Analyse von Trunkierungen, die zusätzlich in der Krümmung quadratische Invarianten enthalten, auch der dritte Koeffizient $a_4 \propto r^{-4}$ erforderlich ist.

Von nun an beschränken wir unsere Betrachtungen auf Matrixpotentiale der Form $Q = qR\mathbf{1}_{(s)}$ mit reellem, konstantem q und auf die Klasse der sphärischen Räume S^d . Da in diesem Fall der Krümmungsskalar R eine Konstante darstellt, bietet es sich an, $a_n(x; qR\mathbf{1}_{(s)}) \equiv a_n(q)$ zu setzen. Für die ersten beiden Heat-Kernel-Koeffizienten aus Gleichung (F.6) erhält man somit $a_0(q) \equiv a_0 = \mathbf{1}_{(s)}$ und $a_2(q) = (1 + 6q)/6R\mathbf{1}_{(s)}$. Bei diesen Ausdrücken ist die gesamte s -Abhängigkeit in der Einheitsmatrix $\mathbf{1}_{(s)}$ verborgen, ansonsten sind sie unabhängig vom Spin s des Feldes. Das gilt nicht für den Koeffizienten a_4 . Zum Beispiel ergeben sich für Skalarfelder, Vektoren und Tensoren zweiter Stufe (in dieser Reihenfolge) die Ausdrücke

$$a_4(q) = \frac{1}{360} \left[\frac{5d^2 - 7d + 6}{d(d-1)} + 60q + 180q^2 \right] \mathbf{1}_{(0)} R^2, \quad (\text{F.12})$$

$$[a_4(q)]_{\mu\nu} = \frac{1}{360} \left[\frac{5d^3 - 7d^2 + 6d - 60}{d^2(d-1)} + 60q + 180q^2 \right] (\mathbf{1}_{(1)})_{\mu\nu} R^2, \quad (\text{F.13})$$

$$\begin{aligned} [a_4(q)]_{\mu\nu\rho\sigma} &= \frac{1}{360} \left[\frac{5d^3 - 7d^2 + 6d - 120}{d^2(d-1)} + 60q + 180q^2 \right] (\mathbf{1}_{(2)})_{\mu\nu\rho\sigma} R^2 \\ &\quad + \frac{1}{3d^2(d-1)^2} (g_{\mu\nu}g_{\rho\sigma} - g_{\mu\sigma}g_{\nu\rho}) R^2. \end{aligned} \quad (\text{F.14})$$

Hier unterscheiden sich also die Faktoren vor den jeweiligen Einheitsmatrizen. Letztere sind wie folgt definiert: $\mathbf{1}_{(0)} \equiv 1$, $(\mathbf{1}_{(1)})_{\mu\nu} \equiv g_{\mu\nu}$ und $(\mathbf{1}_{(2)})_{\mu\nu\rho\sigma} \equiv g_{\mu\rho}g_{\nu\sigma}$.

Bis zu diesem Punkt wurden ausschließlich Felder betrachtet, deren Komponenten allesamt unabhängig voneinander sind. Für Felder, die Nebenbedingungen unterliegen, wie transversale Vektoren ξ_μ und ST^2 -Tensoren $h_{\mu\nu}^T$, kann man die Gleichungen (F.6) bzw. (F.13) und (F.14) nicht direkt verwenden. Man kann diese jedoch dazu benutzen, um die entsprechenden Heat-Kernel-Koeffizienten für ξ_μ und $h_{\mu\nu}^T$ zu berechnen. Abgesehen von den Koeffizienten in (F.6), (F.13) und (F.14) benötigt man für diese Rechnung im wesentlichen nur noch die sphärischen Harmonischen und die zugehörigen $-D^2$ -Eigenwerte aus Anhang E sowie die Gleichungen (1.21) und (1.12) zur Zerlegung von beliebigen Vektoren ε_μ und beliebigen symmetrischen Tensoren $h_{\mu\nu}$.

Aus der Kombination der T- bzw. TT-Zerlegung mit den Ergebnissen aus Anhang E ergibt sich, daß der Raum *aller* Vektoren ε_μ bzw. *aller* symmetrischen Tensoren $h_{\mu\nu}$ auf S^d durch den Satz von orthonormalen D^2 -Eigenfunktionen

$$\begin{aligned} &\{T_\mu^{lm} \mid m \in \{1, \dots, D_l(d, 1)\}, l = 1, 2, \dots\} \\ \cup &\{(\Lambda_l(d, 0))^{-\frac{1}{2}} D_\mu T^{lm} \mid m \in \{1, \dots, D_l(d, 0)\}, l = 1, 2, \dots\} \end{aligned} \quad (\text{F.15})$$

bzw.

$$\begin{aligned}
& \{ T_{\mu\nu}^{lm} | m \in \{1, \dots, D_l(d, 2)\}, l = 2, 3, \dots \} \\
\cup & \left\{ \left(2 \left(\Lambda_l(d, 1) - \frac{R}{d} \right) \right)^{-\frac{1}{2}} (D_\mu T_\nu^{lm} + D_\nu T_\mu^{lm}) \Big| m \in \{1, \dots, D_l(d, 1)\}, l = 2, 3, \dots \right\} \\
\cup & \left\{ \left(\Lambda_l(d, 0) \left(\frac{d-1}{d} \Lambda_l(d, 0) - \frac{R}{d} \right) \right)^{-\frac{1}{2}} \left(D_\mu D_\nu - \frac{1}{d} g_{\mu\nu} D^2 \right) T^{lm} \Big| \right. \\
& \left. m \in \{1, \dots, D_l(d, 0)\}, l = 2, 3, \dots \right\} \\
\cup & \left\{ \frac{1}{\sqrt{d}} g_{\mu\nu} T^{lm} | m \in \{1, \dots, D_l(d, 0)\}, l = 0, 1, \dots \right\} \tag{F.16}
\end{aligned}$$

aufgespannt wird. Dabei verkörpern die verschiedenen T^{lm} die gemäß der Gleichung (E.2) normierten sphärischen Harmonischen.

Im nächsten Schritt ersetzt man in der Spurformel (F.3) die Funktion f durch die Exponentialfunktion und setzt dann in den resultierenden Ausdruck die obigen Eigenfunktionen (F.15) bzw. (F.16) ein. Daraufhin benutzt man die Kommutatorrelationen aus Anhang I, um die kovarianten Ableitungen D_μ , die durch die T- bzw. TT-Zerlegung eingeführt werden, an der Exponentialfunktion vorbeizuziehen. Dadurch erreicht man, daß sämtliche kovarianten Ableitungen zu Laplace-Operatoren zusammengefügt werden können. Insgesamt werden durch die oben beschriebenen Umformungen die Heat-Kernel-Spuren für ε_μ und $h_{\mu\nu}$ in Heat-Kernel-Spuren für die zugehörigen Komponentenfelder zerlegt. Diese Zerlegungen sehen wie folgt aus:

$$\text{Tr}_{(1)} \left[e^{-it(D^2+qR)} \right] = \text{Tr}_{(1T)} \left[e^{-it(D^2+qR)} \right] + \text{Tr}_{(0)} \left[e^{-it(D^2+\frac{dq+1}{d}R)} \right] - e^{-it\frac{dq+1}{d}R}, \tag{F.17}$$

$$\begin{aligned}
\text{Tr}_{(2S)} \left[e^{-it(D^2+qR)} \right] &= \text{Tr}_{(2ST^2)} \left[e^{-it(D^2+qR)} \right] + \text{Tr}_{(1T)} \left[e^{-it(D^2+(\frac{d+1}{d(d-1)}+q)R)} \right] \\
&+ \text{Tr}_{(0)} \left[e^{-it(D^2+(\frac{2}{d-1}+q)R)} \right] + \text{Tr}_{(0)} \left[e^{-it(D^2+qR)} \right] - e^{-it(\frac{2}{d-1}+q)R} \\
&- (d+1) e^{-it(\frac{1}{d-1}+q)R} - \frac{d(d+1)}{2} e^{-it(\frac{2}{d(d-1)}+q)R}. \tag{F.18}
\end{aligned}$$

Der letzte Term in (F.17) sowie die letzten drei Terme in (F.18) gehen indirekt aus denjenigen sphärischen Harmonischen T^{lm} und T_μ^{lm} hervor, die nicht in den Mengen von Eigenfunktionen (F.15) bzw. (F.16) enthalten sind. Im einzelnen ergeben sich diese Terme wie folgt: Der letzte Term in (F.17) entstammt der konstanten Eigenfunktion $T^{0,1}$ des Operators $D^2 + (dq+1)/dR$. Weiterhin sind die Eigenmoden $T^{0,1} = \text{konstant}$ und $T^{1,m}$

des Operators $D^2 + (2/(d-1) + q)R$ für den drittletzten bzw. den zweitletzten Term in (F.18) verantwortlich. Wie bereits in Abschnitt 1.3 dargelegt wurde, stellen die ersten kovarianten Ableitungen der $T^{1,m}$ die PCKV von S^d dar. Ferner resultiert der letzte Term in (F.18) aus den Eigenmoden $T_\mu^{1,m}$ des Operators $D^2 + ((d+1)/(d(d-1)) + q)R$. Diese sind gerade die Killing-Vektoren auf S^d .

Die angesprochenen Subtraktionsterme kompensieren die “unphysikalischen” Beiträge, die in den *vollständigen* Spuren für die Komponentenfelder auf der rechten Seite der Gleichungen (F.17) und (F.18) auftauchen. Das läßt sich folgendermaßen erkennen: Betrachten wir die Operatorspur aus Gleichung (F.3). Wir lassen nun die Beiträge von einigen Moden weg, die hier durch U_{k_1}, \dots, U_{k_n} verkörpert werden. Die resultierende Spur, die nur die Beiträge von den übrigen Moden enthält, bezeichnen wir mit $\text{Tr}'_{(s[C])}[f(-D^2)]$. Dann impliziert (F.4) die folgende Beziehung zwischen $\text{Tr}'_{(s[C])}[f(-D^2)]$ und der *vollständigen* Spur $\text{Tr}_{(s[C])}[f(-D^2)]$:

$$\text{Tr}'_{(s[C])}[f(-D^2)] = \text{Tr}_{(s[C])}[f(-D^2)] - \sum_{k \in \{k_1, \dots, k_n\}} f(\tilde{\Lambda}_k) . \quad (\text{F.19})$$

Diese Regel führt in der Tat zu dem letzten Term in (F.17) und den letzten drei Termen in (F.18).

Kommen wir nun zu der Bestimmung der gesuchten Heat-Kernel-Koeffizienten zurück. Als nächstes wird die asymptotische Entwicklung (F.9) in beide Seiten der Gleichungen (F.17) und (F.18) eingesetzt. Dann vergleicht man die Ausdrücke nach Potenzen von R , was zu den folgenden Beziehungen zwischen den Seeley-Koeffizienten für beliebige Vektoren bzw. beliebige symmetrische Tensoren und denjenigen für die jeweiligen Komponentenfelder führt:

$$\begin{aligned} \text{tr } a_0|_{(1T)} &= \text{tr } a_0|_{(1)} - \text{tr } a_0|_{(0)} , & (\text{F.20}) \\ \text{tr } a_2(q)|_{(1T)} &= \text{tr } a_2(q)|_{(1)} - \text{tr } a_2 \left(\frac{dq+1}{d} \right) \Big|_{(0)} + \frac{1}{2} \delta_{d,2} R , \\ \text{tr } a_4(q)|_{(1T)} &= \text{tr } a_4(q)|_{(1)} - \text{tr } a_4 \left(\frac{dq+1}{d} \right) \Big|_{(0)} + \frac{1}{4} \delta_{d,2} (1+2q) R^2 + \frac{1}{24} \delta_{d,4} R^2 \end{aligned}$$

bzw.

$$\begin{aligned} \text{tr } a_0|_{(2ST^2)} &= \text{tr } a_0|_{(2S)} - \text{tr } a_0|_{(1T)} - 2 \text{tr } a_0|_{(0)} , & (\text{F.21}) \\ \text{tr } a_2(q)|_{(2ST^2)} &= \text{tr } a_2(q)|_{(2S)} - \text{tr } a_2 \left(\frac{d+1}{d(d-1)} + q \right) \Big|_{(1T)} - \text{tr } a_2 \left(\frac{2}{d-1} + q \right) \Big|_{(0)} \\ &\quad - \text{tr } a_2(q)|_{(0)} + \frac{7}{2} \delta_{d,2} R , \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{tr } a_4(q)|_{(2ST^2)} &= \text{tr } a_4(q)|_{(2S)} - \text{tr } a_4 \left(\frac{d+1}{d(d-1)} + q \right) \Big|_{(1T)} - \text{tr } a_4 \left(\frac{2}{d-1} + q \right) \Big|_{(0)} \\ &\quad - \text{tr } a_4(q)|_{(0)} + \delta_{d,2} \left(4 + \frac{7}{2}q \right) R^2 + \frac{2}{3}\delta_{d,4} R^2 . \end{aligned}$$

Die zu $\delta_{d,2}$ bzw. $\delta_{d,4}$ proportionalen Terme gehen aus den oben diskutierten Subtraktions-
termen auf der rechten Seite von (F.17) und (F.18) hervor. Die Reihenentwicklung dieser
Subtraktionsterme bzgl. $R \propto r^{-2}$ ist von der Form $\sum_{m=0}^{\infty} b_{2m} r^{-2m}$, während die Terme
 $\int d^d x \sqrt{g} \text{tr } a_n$ der Heat-Kernel-Entwicklung proportional zu r^{d-n} sind. Durch Vergleich
der Potenzen von $R \propto 1/r^2$ findet man, daß ein gegebener Term $b_{2m} r^{-2m}$ nur dann zu
 $\int d^d x \sqrt{g} \text{tr } a_n$ beiträgt, wenn er die Bedingung $-2m = d - n$ erfüllt. Somit liefert ein Term
der Form $b_{2m} r^{-2m} / (\int d^d x \sqrt{g})$ bei festem n und m höchstens für einen bestimmten Wert
von d einen Beitrag zum Seeley-Koeffizienten $\text{tr } a_n|_{(1T)}$ bzw. $\text{tr } a_n|_{(2ST^2)}$. Insbesondere er-
gibt sich daraus, daß die Subtraktionsterme in (F.17) bzw. (F.18) nicht zu $\text{tr } a_0|_{(1T)}$ bzw.
 $\text{tr } a_0|_{(2ST^2)}$ beitragen, wohl aber zu $\text{tr } a_2|_{(1T)}$ und $\text{tr } a_4|_{(1T)}$ bzw. $\text{tr } a_2|_{(2ST^2)}$ und $\text{tr } a_4|_{(2ST^2)}$.
Dabei sind die Beiträge zu den a_2 - bzw. a_4 -Termen von der Form $\delta_{d,2} b_0/r^2$ bzw. $\delta_{d,2} b_2/r^4$
und $\delta_{d,4} b_0/r^4$.

Die rechten Seiten der Gleichungen (F.20) und (F.21) enthalten nur noch Matrixspu-
ren von Seeley-Koeffizienten für solche Felder, die keine differentiellen Nebenbedingun-
gen erfüllen, oder sie lassen sich zumindest vollständig durch solche Spuren ausdrücken.
Um die genannten rechten Seiten auswerten zu können, muß man also lediglich $\text{tr } a_0$,
 $\text{tr } a_2$ und $\text{tr } a_4$ für Skalarfelder ϕ , für beliebige Vektoren ε_μ und für beliebige symmetri-
sche Tensoren $h_{\mu\nu}$ berechnen. Im Fall der Skalarfelder gilt wegen $\mathbf{1}_{(0)} = 1$ offensichtlich
 $\text{tr } a_n(q) = a_n(q)$. Bei Vektoren werden die Matrixspuren gemäß $\text{tr } a_n(q) = g^{\mu\nu} [a_n(q)]_{\mu\nu}$
ausgewertet. Dementsprechend erhält man aus (F.6) und (F.13)

$$\begin{aligned} \text{tr } a_0|_{(1)} &= d , \\ \text{tr } a_2(q)|_{(1)} &= \frac{1+6q}{6} d R , \\ \text{tr } a_4(q)|_{(1)} &= \frac{1}{360} \left[\frac{5d^3 - 7d^2 + 6d - 60}{d(d-1)} + 60dq + 180dq^2 \right] R^2 . \end{aligned} \quad (\text{F.22})$$

Wenden wir uns nun den symmetrischen Tensorfeldern zu. Um die Heat-Kernel-Koeff-
fizienten für diese Felder zu bestimmen, muß man zunächst einmal den Heat-Kernel von
Tensoren zweiter Stufe, die keinerlei Nebenbedingungen erfüllen, gemäß der Gleichung

$$\begin{aligned} &\left\langle x \left| e^{-is(D^2+qR)} \right| x \right\rangle^{\mu\nu\rho\sigma} \Big|_{(2S)} \\ &= \frac{1}{4} \left\{ \left\langle x \left| e^{-is(D^2+qR)} \right| x \right\rangle^{\mu\nu\rho\sigma} \Big|_{(2)} + \left\langle x \left| e^{-is(D^2+qR)} \right| x \right\rangle^{\nu\mu\rho\sigma} \Big|_{(2)} \right\} \end{aligned}$$

Tabelle F.t1: Heat-Kernel-Koeffizienten			
Feld	tr a_0	tr $a_2(q)$	tr $a_4(q)$
ST^2 - Tensor	$(d-2)$ $\times \frac{(d+1)}{2}$	$\frac{(d+1)(d+2)(d-5+3\delta_{d,2})}{12(d-1)} R$ $+ q \frac{(d-2)(d+1)}{2} R$	$\frac{(d+1)(5d^4-22d^3-83d^2-392d-228+1440\delta_{d,2}+3240\delta_{d,4})}{720d(d-1)^2} R^2$ $+ q \frac{(d+1)(d+2)(d-5+3\delta_{d,2})}{12(d-1)} R^2 + q^2 \frac{(d-2)(d+1)}{4} R^2$
T - Vektor	$d-1$	$\frac{(d+2)(d-3)+6\delta_{d,2}}{6d} R$ $+ q(d-1)R$	$\frac{5d^4-12d^3-47d^2-186d+180+360\delta_{d,2}+720\delta_{d,4}}{360d^2(d-1)} R^2$ $+ q \frac{(d+2)(d-3)+6\delta_{d,2}}{6d} R^2 + q^2 \frac{d-1}{2} R^2$
Skalar	1	$\frac{1+6q}{6} R$	$\frac{5d^2-7d+6}{360d(d-1)} R^2 + \frac{1}{6} q R^2 + \frac{1}{2} q^2 R^2$

$$+ \left\langle x \left| e^{-is(D^2+qR)} \right| x \right\rangle^{\mu\nu\sigma\rho} \Big|_{(2)} + \left\langle x \left| e^{-is(D^2+qR)} \right| x \right\rangle^{\nu\mu\sigma\rho} \Big|_{(2)} \right\} \quad (\text{F.23})$$

symmetrisieren. In Verbindung mit Gleichung (F.9) ergibt sich daraus die folgende Beziehung zwischen den Heat-Kernel-Koeffizienten von symmetrischen und nichtsymmetrischen Tensoren zweiter Stufe:

$$[a_n(q)]_{\mu\nu\rho\sigma} \Big|_{(2S)} = \frac{1}{4} \left([a_n(q)]_{\mu\nu\rho\sigma} \Big|_{(2)} + [a_n(q)]_{\nu\mu\rho\sigma} \Big|_{(2)} + [a_n(q)]_{\mu\nu\sigma\rho} \Big|_{(2)} + [a_n(q)]_{\nu\mu\sigma\rho} \Big|_{(2)} \right). \quad (\text{F.24})$$

Insbesondere erhält man $(\mathbf{1}_{(2S)})_{\mu\nu\rho\sigma} = (g_{\mu\rho}g_{\nu\sigma} + g_{\mu\sigma}g_{\nu\rho})/2$. Da sowohl a_0 als auch a_2 immer proportional zur Einheitsmatrix $\mathbf{1}$ sind, muß man für diese lediglich $(\mathbf{1}_{(2S)})_{\mu\nu\rho\sigma}$ in die entsprechenden Ausdrücke aus (F.6) einsetzen, um an $a_0|_{(2S)}$ und $a_2|_{(2S)}$ zu gelangen. $a_4|_{(2S)}$ bestimmt man durch explizites Einsetzen des Ausdrucks aus (F.14) in (F.24).

Die Matrixspur der Heat-Kernel-Koeffizienten für Tensoren zweiter Stufe berechnet man gemäß $\text{tr } a_n = g^{\mu\rho}g^{\nu\sigma} [a_n(q)]_{\mu\nu\rho\sigma}$. Für die symmetrischen Tensoren ergibt sich damit

$$\begin{aligned} \text{tr } a_0|_{(2S)} &= \frac{1}{2}d(d+1), \\ \text{tr } a_2(q)|_{(2S)} &= \frac{1+6q}{12}d(d+1)R, \\ \text{tr } a_4(q)|_{(2S)} &= \frac{1}{720} \left[\frac{5d^4-2d^3-d^2-114d-240}{d(d-1)} + 60q(1+3q)d(d+1) \right] R^2. \end{aligned} \quad (\text{F.25})$$

Um die gesuchten Heat-Kernel-Koeffizienten für T -Vektoren und ST^2 -Tensoren zu erhalten, müssen jetzt nur noch die $a_n|_{(0)}$ ($= \text{tr } a_n|_{(0)}$) und die Matrixspuren aus (F.22) und

(F.25) in die Gleichungen (F.20) bzw. (F.21) eingesetzt werden. Die daraus folgenden Resultate werden in Tabelle F.t1 zusammengefaßt.

Schließen wir diesen Teil des Anhangs mit der folgenden Anmerkung zur Anwendbarkeit der asymptotischen Entwicklung (F.5) ab: Da letztere nur im Limes $|\mathbf{t}| \rightarrow 0$ gültig ist, darf man sie im allgemeinen natürlich nicht Term für Term über $\text{Re}(\mathbf{t}) = s$ oder $\text{Im}(\mathbf{t}) = \varepsilon$ integrieren. Dies ist jedoch immer dann möglich, wenn der Heat-Kernel mit einer "Test"-Funktion gewichtet ist, die die Beiträge von (zu) großen s - bzw. ε -Werten unterdrückt. Bei der in Anhang C.2 diskutierten Anwendung der asymptotischen Entwicklung ist dies in der Tat der Fall.

Anhang G

Koeffizienten aus $\Gamma_k^{(2)}[g, g]$

Für beide im Rahmen dieser Arbeit untersuchten Trunkierungen wurde jeweils der Matrix-Differentialoperator $\Gamma_k^{(2)}[g, g]$ berechnet. Seine Einträge finden sich in den Gleichungen (3.16) bzw. (5.8) wieder. Diese enthalten bestimmte Funktionen der Dimensionalität d und des Eichparameters α , welche im folgenden definiert werden.

$$\begin{aligned}
 A_T(d) &\equiv \frac{d(d-3)+4}{d(d-1)}, \quad G_T(d) \equiv -\frac{d(d-5)+8}{2d(d-1)}, \quad A_V(d, \alpha) \equiv \frac{\alpha(d-2)-1}{d}, \\
 G_V(d) &\equiv -\frac{d-4}{2d}, \quad A_{S1}(d, \alpha) \equiv \frac{\alpha(d-4)}{2\alpha(d-1)-(d-2)}, \\
 A_{S2}(d, \alpha) &\equiv -\frac{\alpha(d-2)-2}{\alpha(d-2)-2(d-1)}, \quad A_{S3}(d) \equiv \frac{d-4}{d}, \quad A_{S4}(d, \alpha) \equiv \frac{\alpha(d-2)-2}{d}, \\
 A_{S5}(d, \alpha) &\equiv \frac{(d-2)(d+2)\alpha^2 + (d^2-10d+8)\alpha + 2(d-2)}{d^2\alpha}, \\
 B_{S1}(d, \alpha) &\equiv -\frac{2\alpha d}{2\alpha(d-1)-(d-2)}, \quad B_{S2}(d, \alpha) \equiv \frac{2\alpha d}{\alpha(d-2)-2(d-1)}, \\
 C_{S1}(d, \alpha) &\equiv -\frac{2\alpha(d-1)-(d-2)}{4(d-1)-2\alpha(d-2)} \frac{d-2}{d-1}, \quad C_{S2}(d, \alpha) \equiv \frac{d-1}{d^2} \frac{2(d-1)-\alpha(d-2)}{\alpha}, \\
 C_{S3}(d, \alpha) &\equiv \frac{(d-2)(\alpha-1)}{\alpha(d-2)-2(d-1)}, \quad E_S(d, \alpha) \equiv -\frac{d-2}{4\alpha d^2} (2\alpha(d-1)-(d-2)), \\
 F_{S1}(d, \alpha) &\equiv -\frac{2[\alpha(d-2)-2(d-1)][2\alpha(d-1)-(d-2)]}{d^2\alpha}, \\
 F_{S2}(d, \alpha) &\equiv \frac{4(d-2)(d-1)(\alpha-1)^2}{d^2\alpha}, \quad G_{S1}(d) \equiv \frac{(d-1)(d-4)}{2d^2}, \\
 G_{S2}(d) &\equiv \frac{(d-1)(d-6)}{d^2}, \quad G_{S3}(d) \equiv \frac{(d-4)(d-6)}{4d^2}, \quad H_S(d) \equiv 2 \left(\frac{d-1}{d} \right)^2. \quad (\text{G.1})
 \end{aligned}$$

Anhang H

Koeffizientenfunktionen in den β -Funktionen der R^2 -Trunkierung

H.1 Die Koeffizientenfunktionen

Im folgenden werden die Koeffizientenfunktionen A_i , B_i und C_i , die in den β -Funktionen der R^2 -Trunkierung aus (5.19)-(5.21) auftreten, explizit angegeben. Die in den nachstehenden Ausdrücken enthaltenen Koeffizienten $h_i(d)$ stellen Funktionen der Dimensionalität d dar und werden in Abschnitt H.2 definiert.

$$\begin{aligned}
 A_1(\lambda_k, g_k, \beta_k; d) \equiv & -2\lambda_k + 2(4\pi)^{1-\frac{d}{2}} g_k \left(h_8(d) \Phi_{d/2}^1(-2\lambda_k) - 2d \Phi_{d/2}^1(0) \right. \\
 & + 64\pi g_k \beta_k \Psi_{d/2;1}^{0;1}(g_k \beta_k, -2\lambda_k; d) - h_1(d) \Psi_{d/2;0}^{0;1}(g_k \beta_k, -2\lambda_k; d) \\
 & \left. + 32\pi g_k \beta_k \Psi_{d/2;2}^{1;1}(g_k \beta_k, -2\lambda_k; d) \right) \tag{H.1}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 A_2(\lambda_k, g_k, \beta_k; d) \equiv & \lambda_k - (4\pi)^{1-\frac{d}{2}} g_k \left(h_8(d) \tilde{\Phi}_{d/2}^1(-2\lambda_k) \right. \\
 & \left. - h_1(d) \tilde{\Psi}_{d/2;0;0}^{0;1}(g_k \beta_k, -2\lambda_k; d) + 32\pi g_k \beta_k \tilde{\Psi}_{d/2;2;0}^{1;1}(g_k \beta_k, -2\lambda_k; d) \right) \tag{H.2}
 \end{aligned}$$

$$A_3(\lambda_k, g_k, \beta_k; d) \equiv -8(4\pi)^{2-\frac{d}{2}} g_k^2 \beta_k \tilde{\Psi}_{d/2;0;1}^{0;1}(g_k \beta_k, -2\lambda_k; d) \tag{H.3}$$

$$\begin{aligned}
 B_1(\lambda_k, g_k, \beta_k; d) \equiv & 4(4\pi)^{1-\frac{d}{2}} \left\{ h_9(d) \Phi_{d/2-1}^1(-2\lambda_k) + h_{10}(d) \Phi_{d/2-1}^1(0) \right. \\
 & \left. + \frac{32}{3} \pi g_k \beta_k \Psi_{d/2-1;1}^{0;1}(g_k \beta_k, -2\lambda_k; d) - \frac{1}{6} h_1(d) \Psi_{d/2-1;0}^{0;1}(g_k \beta_k, -2\lambda_k; d) \right\}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{16}{3} \pi g_k \beta_k \Psi_{d/2-1;2}^{1;1}(g_k \beta_k, -2\lambda_k; d) - 32h_{11}(d) \pi g_k \beta_k \Phi_{d/2}^1(-2\lambda_k) \\
& + 32h_{11}(d) \pi g_k \beta_k \Psi_{d/2;1}^{2;0}(g_k \beta_k, -2\lambda_k; d) + h_{12}(d) \Phi_{d/2}^2(-2\lambda_k) + h_{13}(d) \Phi_{d/2}^2(0) \\
& + 32h_{19}(d) \pi g_k \beta_k \Psi_{d/2;1}^{1;1}(g_k \beta_k, -2\lambda_k; d) + h_4(d) \Psi_{d/2;0}^{1;1}(g_k \beta_k, -2\lambda_k; d) \\
& + 32h_3(d) \pi g_k \beta_k \Psi_{d/2;0}^{0;1}(g_k \beta_k, -2\lambda_k; d) - h_{19}(d) (32\pi g_k \beta_k)^2 \Psi_{d/2;3}^{1;2}(g_k \beta_k, -2\lambda_k; d) \\
& - 64h_4(d) \pi g_k \beta_k \Psi_{d/2;2}^{1;2}(g_k \beta_k, -2\lambda_k; d) - 2h_3(d) (32\pi g_k \beta_k)^2 \Psi_{d/2;2}^{0;2}(g_k \beta_k, -2\lambda_k; d) \\
& + 32h_1(d) h_{19}(d) \pi g_k \beta_k \Psi_{d/2;1}^{0;2}(g_k \beta_k, -2\lambda_k; d) + h_1(d) h_4(d) \Psi_{d/2;0}^{0;2}(g_k \beta_k, -2\lambda_k; d) \\
& - h_2(d) (32\pi g_k \beta_k)^2 \Psi_{d/2;4}^{2;2}(g_k \beta_k, -2\lambda_k; d) \} \tag{H.4}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
B_2(\lambda_k, g_k, \beta_k; d) & \equiv -2(4\pi)^{1-\frac{d}{2}} \left\{ h_9(d) \tilde{\Phi}_{d/2-1}^1(-2\lambda_k) - \frac{1}{6} h_1(d) \tilde{\Psi}_{d/2-1;0;0}^{0;1}(g_k \beta_k, -2\lambda_k; d) \right. \\
& + \frac{16}{3} \pi g_k \beta_k \tilde{\Psi}_{d/2-1;2;0}^{1;1}(g_k \beta_k, -2\lambda_k; d) + 32h_{11}(d) \pi g_k \beta_k \tilde{\Psi}_{d/2;1;0}^{2;0}(g_k \beta_k, -2\lambda_k; d) \\
& + h_{12}(d) \tilde{\Phi}_{d/2}^2(-2\lambda_k) + 32h_3(d) \pi g_k \beta_k \tilde{\Psi}_{d/2;1;0}^{1;1}(g_k \beta_k, -2\lambda_k; d) \\
& + h_4(d) \tilde{\Psi}_{d/2;0;0}^{1;1}(g_k \beta_k, -2\lambda_k; d) - h_3(d) (32\pi g_k \beta_k)^2 \tilde{\Psi}_{d/2;3;0}^{1;2}(g_k \beta_k, -2\lambda_k; d) \\
& - 64h_4(d) \pi g_k \beta_k \tilde{\Psi}_{d/2;2;0}^{1;2}(g_k \beta_k, -2\lambda_k; d) + 32h_1(d) h_3(d) \pi g_k \beta_k \tilde{\Psi}_{d/2;1;0}^{0;2}(g_k \beta_k, -2\lambda_k; d) \\
& \left. + h_1(d) h_4(d) \tilde{\Psi}_{d/2;0;0}^{0;2}(g_k \beta_k, -2\lambda_k; d) - h_2(d) (32\pi g_k \beta_k)^2 \tilde{\Psi}_{d/2;4;0}^{2;2}(g_k \beta_k, -2\lambda_k; d) \right\} \tag{H.5}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
B_3(\lambda_k, g_k, \beta_k; d) & \equiv -2(4\pi)^{1-\frac{d}{2}} \left\{ \frac{16}{3} \pi g_k \beta_k \tilde{\Psi}_{d/2-1;0;1}^{0;1}(g_k \beta_k, -2\lambda_k; d) \right. \\
& - 32h_{11}(d) \pi g_k \beta_k \tilde{\Phi}_{d/2}^1(-2\lambda_k) + 32h_2(d) \pi g_k \beta_k \tilde{\Psi}_{d/2;0;1}^{1;1}(g_k \beta_k, -2\lambda_k; d) \\
& + 32h_3(d) \pi g_k \beta_k \tilde{\Psi}_{d/2;0;0}^{0;1}(g_k \beta_k, -2\lambda_k; d) - h_2(d) (32\pi g_k \beta_k)^2 \tilde{\Psi}_{d/2;2;1}^{1;2}(g_k \beta_k, -2\lambda_k; d) \\
& \left. - h_3(d) (32\pi g_k \beta_k)^2 \tilde{\Psi}_{d/2;1;1}^{0;2}(g_k \beta_k, -2\lambda_k; d) - 32h_4(d) \pi g_k \beta_k \tilde{\Psi}_{d/2;0;1}^{0;2}(g_k \beta_k, -2\lambda_k; d) \right\} \tag{H.6}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
C_1(\lambda_k, g_k, \beta_k; d) & \equiv (4\pi)^{-\frac{d}{2}} \left\{ h_{14}(d) \Phi_{d/2-2}^1(-2\lambda_k) - h_{16}(d) \Phi_{d/2-2}^1(0) \right. \\
& + 64h_{15}(d) \pi g_k \beta_k \Psi_{d/2-2;1}^{0;1}(g_k \beta_k, -2\lambda_k; d) - h_1(d) h_{15}(d) \Psi_{d/2-2;0}^{0;1}(g_k \beta_k, -2\lambda_k; d) \\
& \left. + 32h_{15}(d) \pi g_k \beta_k \Psi_{d/2-2;2}^{1;1}(g_k \beta_k, -2\lambda_k; d) - 32h_{17}(d) \pi g_k \beta_k \Phi_{d/2-1}^1(-2\lambda_k) \right\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{16}{3} h_3(d) \pi g_k \beta_k \Psi_{d/2-1;0}^{0;1}(g_k \beta_k, -2\lambda_k; d) + \frac{16}{3} h_{19}(d) \pi g_k \beta_k \Psi_{d/2-1;1}^{1;1}(g_k \beta_k, -2\lambda_k; d) \\
& + \frac{1}{6} h_4(d) \Psi_{d/2-1;0}^{1;1}(g_k \beta_k, -2\lambda_k; d) + 32 h_{17}(d) \pi g_k \beta_k \Psi_{d/2-1;1}^{2;0}(g_k \beta_k, -2\lambda_k; d) \\
& - h_{18}(d) \Phi_{d/2-1}^2(-2\lambda_k) - h_{20}(d) \Phi_{d/2-1}^2(0) \\
& - \frac{1}{6} h_{19}(d) (32\pi g_k \beta_k)^2 \Psi_{d/2-1;3}^{1;2}(g_k \beta_k, -2\lambda_k; d) \\
& - \frac{32}{3} h_4(d) \pi g_k \beta_k \Psi_{d/2-1;2}^{1;2}(g_k \beta_k, -2\lambda_k; d) - \frac{1}{3} h_3(d) (32\pi g_k \beta_k)^2 \Psi_{d/2-1;2}^{0;2}(g_k \beta_k, -2\lambda_k; d) \\
& + \frac{16}{3} h_1(d) h_{19}(d) \pi g_k \beta_k \Psi_{d/2-1;1}^{0;2}(g_k \beta_k, -2\lambda_k; d) + \frac{1}{6} h_1(d) h_4(d) \Psi_{d/2-1;0}^{0;2}(g_k \beta_k, -2\lambda_k; d) \\
& - \frac{1}{6} h_2(d) (32\pi g_k \beta_k)^2 \Psi_{d/2-1;4}^{2;2}(g_k \beta_k, -2\lambda_k; d) - h_{11}(d) (32\pi g_k \beta_k)^2 \Psi_{d/2;1}^{2;0}(g_k \beta_k, -2\lambda_k; d) \\
& + 32 h_{25}(d) \pi g_k \beta_k \Phi_{d/2}^2(-2\lambda_k) + h_{11}(d) (32\pi g_k \beta_k)^2 \Psi_{d/2;2}^{3;0}(g_k \beta_k, -2\lambda_k; d) \\
& - 32 h_{11}(d) h_{21}(d) \pi g_k \beta_k \Psi_{d/2;1}^{3;0}(g_k \beta_k, -2\lambda_k; d) + h_{23}(d) \Phi_{d/2}^3(-2\lambda_k) + h_{24}(d) \Phi_{d/2}^3(0) \\
& - h_2(d) (32\pi g_k \beta_k)^2 \Psi_{d/2;1}^{1;1}(g_k \beta_k, -2\lambda_k; d) + 32 h_2(d) h_{26}(d) \pi g_k \beta_k \Psi_{d/2;0}^{1;1}(g_k \beta_k, -2\lambda_k; d) \\
& + h_2(d) (32\pi g_k \beta_k)^3 \Psi_{d/2;3}^{1;2}(g_k \beta_k, -2\lambda_k; d) - h_{27}(d) (32\pi g_k \beta_k)^2 \Psi_{d/2;2}^{1;2}(g_k \beta_k, -2\lambda_k; d) \\
& + 32 h_4(d) h_{28}(d) \pi g_k \beta_k \Psi_{d/2;1}^{1;2}(g_k \beta_k, -2\lambda_k; d) - \frac{3}{2} h_4(d)^2 \Psi_{d/2;0}^{1;2}(g_k \beta_k, -2\lambda_k; d) \\
& - h_{29}(d) (32\pi g_k \beta_k)^2 \Psi_{d/2;1}^{0;2}(g_k \beta_k, -2\lambda_k; d) - 32 h_4(d) h_{26}(d) \pi g_k \beta_k \Psi_{d/2;0}^{0;2}(g_k \beta_k, -2\lambda_k; d) \\
& + \frac{1}{2} h_2(d) (32\pi g_k \beta_k)^3 \Psi_{d/2;4}^{2;2}(g_k \beta_k, -2\lambda_k; d) \\
& + \frac{2}{3} h_2(d) h_{28}(d) (32\pi g_k \beta_k)^2 \Psi_{d/2;3}^{2;2}(g_k \beta_k, -2\lambda_k; d) \\
& - 48 h_2(d) h_4(d) \pi g_k \beta_k \Psi_{d/2;2}^{2;2}(g_k \beta_k, -2\lambda_k; d) + 2 h_3(d)^2 (32\pi g_k \beta_k)^3 \Psi_{d/2;3}^{0;3}(g_k \beta_k, -2\lambda_k; d) \\
& - 3 h_1(d) h_3(d) h_{30}(d) (32\pi g_k \beta_k)^2 \Psi_{d/2;2}^{0;3}(g_k \beta_k, -2\lambda_k; d) \\
& + \frac{64}{3} h_1(d) h_4(d) h_{28}(d) \pi g_k \beta_k \Psi_{d/2;1}^{0;3}(g_k \beta_k, -2\lambda_k; d) - h_1(d) h_4(d)^2 \Psi_{d/2;0}^{0;3}(g_k \beta_k, -2\lambda_k; d) \\
& + 3 h_3(d) h_{30}(d) (32\pi g_k \beta_k)^3 \Psi_{d/2;4}^{1;3}(g_k \beta_k, -2\lambda_k; d) \\
& - \frac{4}{3} h_4(d) h_{28}(d) (32\pi g_k \beta_k)^2 \Psi_{d/2;3}^{1;3}(g_k \beta_k, -2\lambda_k; d) + 96 h_4(d)^2 \pi g_k \beta_k \Psi_{d/2;2}^{1;3}(g_k \beta_k, -2\lambda_k; d) \\
& - \frac{2}{3} h_2(d) h_{28}(d) (32\pi g_k \beta_k)^3 \Psi_{d/2;5}^{2;3}(g_k \beta_k, -2\lambda_k; d) \\
& + 3 h_2(d) h_4(d) (32\pi g_k \beta_k)^2 \Psi_{d/2;4}^{2;3}(g_k \beta_k, -2\lambda_k; d)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +h_2(d)^2(32\pi g_k\beta_k)^3\Psi_{d/2;6}^{3;3}(g_k\beta_k, -2\lambda_k; d) \\
& + \left[-\frac{1}{2}R^{(0)'}(0) - \frac{96\pi g_k\beta_k}{1-2\lambda_k} + \frac{11R^{(0)'}(0) + 192\pi g_k\beta_k}{2(1-2\lambda_k)^2} \right] \delta_{d,2} \\
& + \left[\frac{288\pi g_k\beta_k - 1}{4(144\pi g_k\beta_k - (1-2\lambda_k))} + \frac{1}{4(1-2\lambda_k)} \right. \\
& \left. - \frac{96\pi g_k\beta_k - 1}{2(96\pi g_k\beta_k - (1-2\lambda_k))} - \frac{24\pi g_k\beta_k}{(1-2\lambda_k)(96\pi g_k\beta_k - (1-2\lambda_k))} \right] \delta_{d,4} \Big\} \quad (H.7)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
C_2(\lambda_k, g_k, \beta_k; d) \equiv & -\frac{1}{2}(4\pi)^{-\frac{d}{2}} \left\{ h_{14}(d) \tilde{\Phi}_{d/2-2}^1(-2\lambda_k) - h_1(d)h_{15}(d)\tilde{\Psi}_{d/2-2;0;0}^{0;1}(g_k\beta_k, -2\lambda_k; d) \right. \\
& + 32h_{15}(d)\pi g_k\beta_k \tilde{\Psi}_{d/2-2;2;0}^{1;1}(g_k\beta_k, -2\lambda_k; d) + \frac{16}{3}h_3(d)\pi g_k\beta_k \tilde{\Psi}_{d/2-1;1;0}^{1;1}(g_k\beta_k, -2\lambda_k; d) \\
& + \frac{1}{6}h_4(d) \tilde{\Psi}_{d/2-1;0;0}^{1;1}(g_k\beta_k, -2\lambda_k; d) + 32h_{17}(d)\pi g_k\beta_k \tilde{\Psi}_{d/2-1;1;0}^{2;0}(g_k\beta_k, -2\lambda_k; d) \\
& - h_{18}(d) \tilde{\Phi}_{d/2-1}^2(-2\lambda_k) - \frac{1}{6}h_3(d)(32\pi g_k\beta_k)^2 \tilde{\Psi}_{d/2-1;3;0}^{1;2}(g_k\beta_k, -2\lambda_k; d) \\
& - \frac{32}{3}h_4(d)\pi g_k\beta_k \tilde{\Psi}_{d/2-1;2;0}^{1;2}(g_k\beta_k, -2\lambda_k; d) \\
& + \frac{16}{3}h_1(d)h_3(d)\pi g_k\beta_k \tilde{\Psi}_{d/2-1;1;0}^{0;2}(g_k\beta_k, -2\lambda_k; d) \\
& + \frac{1}{6}h_1(d)h_4(d) \tilde{\Psi}_{d/2-1;0;0}^{0;2}(g_k\beta_k, -2\lambda_k; d) - \frac{1}{6}h_2(d)(32\pi g_k\beta_k)^2 \tilde{\Psi}_{d/2-1;4;0}^{2;2}(g_k\beta_k, -2\lambda_k; d) \\
& + 32h_{22}(d)\pi g_k\beta_k \tilde{\Phi}_{d/2}^2(-2\lambda_k) + h_{11}(d)(32\pi g_k\beta_k)^2 \tilde{\Psi}_{d/2;2;0}^{3;0}(g_k\beta_k, -2\lambda_k; d) \\
& - 32h_{11}(d)h_{21}(d)\pi g_k\beta_k \tilde{\Psi}_{d/2;1;0}^{3;0}(g_k\beta_k, -2\lambda_k; d) + h_{23}(d) \tilde{\Phi}_{d/2}^3(-2\lambda_k) \\
& + 32h_6(d)\pi g_k\beta_k \tilde{\Psi}_{d/2;0;0}^{1;1}(g_k\beta_k, -2\lambda_k; d) - h_7(d)(32\pi g_k\beta_k)^2 \tilde{\Psi}_{d/2;2;0}^{1;2}(g_k\beta_k, -2\lambda_k; d) \\
& - 96h_3(d)h_4(d)\pi g_k\beta_k \tilde{\Psi}_{d/2;1;0}^{1;2}(g_k\beta_k, -2\lambda_k; d) - \frac{3}{2}h_4(d)^2 \tilde{\Psi}_{d/2;0;0}^{1;2}(g_k\beta_k, -2\lambda_k; d) \\
& + 32h_1(d)h_6(d)\pi g_k\beta_k \tilde{\Psi}_{d/2;0;0}^{0;2}(g_k\beta_k, -2\lambda_k; d) \\
& + \frac{1}{2}h_2(d)(32\pi g_k\beta_k)^3 \tilde{\Psi}_{d/2;4;0}^{2;2}(g_k\beta_k, -2\lambda_k; d) \\
& - 2h_2(d)h_3(d)(32\pi g_k\beta_k)^2 \tilde{\Psi}_{d/2;3;0}^{2;2}(g_k\beta_k, -2\lambda_k; d) \\
& - 48h_2(d)h_4(d)\pi g_k\beta_k \tilde{\Psi}_{d/2;2;0}^{2;2}(g_k\beta_k, -2\lambda_k; d) \\
& - h_1(d)h_3(d)^2(32\pi g_k\beta_k)^2 \tilde{\Psi}_{d/2;2;0}^{0;3}(g_k\beta_k, -2\lambda_k; d)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -64h_1(d)h_3(d)h_4(d)\pi g_k\beta_k \tilde{\Psi}_{d/2;1;0}^{0;3}(g_k\beta_k, -2\lambda_k; d) \\
& -h_1(d)h_4(d)^2 \tilde{\Psi}_{d/2;0;0}^{0;3}(g_k\beta_k, -2\lambda_k; d) \\
& +h_3(d)^2(32\pi g_k\beta_k)^3 \tilde{\Psi}_{d/2;4;0}^{1;3}(g_k\beta_k, -2\lambda_k; d) \\
& +4h_3(d)h_4(d)(32\pi g_k\beta_k)^2 \tilde{\Psi}_{d/2;3;0}^{1;3}(g_k\beta_k, -2\lambda_k; d) \\
& +96h_4(d)^2\pi g_k\beta_k \tilde{\Psi}_{d/2;2;0}^{1;3}(g_k\beta_k, -2\lambda_k; d) \\
& +2h_2(d)h_3(d)(32\pi g_k\beta_k)^3 \tilde{\Psi}_{d/2;5;0}^{2;3}(g_k\beta_k, -2\lambda_k; d) \\
& +3h_2(d)h_4(d)(32\pi g_k\beta_k)^2 \tilde{\Psi}_{d/2;4;0}^{2;3}(g_k\beta_k, -2\lambda_k; d) \\
& +h_2(d)^2(32\pi g_k\beta_k)^3 \tilde{\Psi}_{d/2;6;0}^{3;3}(g_k\beta_k, -2\lambda_k; d) \\
& + \left[-\frac{11R^{(0)'}(0)}{2(1-2\lambda_k)} + \frac{192\pi g_k\beta_k + 11R^{(0)'}(0)}{2(1-2\lambda_k)^2} \right] \delta_{d,2} \\
& + \left[-\frac{1}{4(144\pi g_k\beta_k - (1-2\lambda_k))} + \frac{1}{4(1-2\lambda_k)} \right. \\
& \left. + \frac{1}{2(96\pi g_k\beta_k - (1-2\lambda_k))} - \frac{24\pi g_k\beta_k}{(1-2\lambda_k)(96\pi g_k\beta_k - (1-2\lambda_k))} \right] \delta_{d,4} \quad (H.8)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
C_3(\lambda_k, g_k, \beta_k; d) & \equiv -\frac{1}{2}(4\pi)^{-\frac{d}{2}} \left\{ 32h_{15}(d)\pi g_k\beta_k \tilde{\Psi}_{d/2-2;0;1}^{0;1}(g_k\beta_k, -2\lambda_k; d) \right. \\
& -32h_{17}(d)\pi g_k\beta_k \tilde{\Phi}_{d/2-1}^1(-2\lambda_k) + \frac{16}{3}h_3(d)\pi g_k\beta_k \tilde{\Psi}_{d/2-1;0;0}^{0;1}(g_k\beta_k, -2\lambda_k; d) \\
& + \frac{16}{3}h_2(d)\pi g_k\beta_k \tilde{\Psi}_{d/2-1;0;1}^{1;1}(g_k\beta_k, -2\lambda_k; d) \\
& -\frac{1}{6}h_2(d)(32\pi g_k\beta_k)^2 \tilde{\Psi}_{d/2-1;2;1}^{1;2}(g_k\beta_k, -2\lambda_k; d) \\
& -\frac{1}{6}h_3(d)(32\pi g_k\beta_k)^2 \tilde{\Psi}_{d/2-1;1;1}^{0;2}(g_k\beta_k, -2\lambda_k; d) \\
& -\frac{16}{3}h_4(d)\pi g_k\beta_k \tilde{\Psi}_{d/2-1;0;1}^{0;2}(g_k\beta_k, -2\lambda_k; d) - h_{11}(d)(32\pi g_k\beta_k)^2 \tilde{\Psi}_{d/2;1;0}^{2;0}(g_k\beta_k, -2\lambda_k; d) \\
& +16h_{11}(d)h_{21}(d)\pi g_k\beta_k \tilde{\Phi}_{d/2}^2(-2\lambda_k) - h_5(d)(32\pi g_k\beta_k)^2 \tilde{\Psi}_{d/2;0;1}^{1;1}(g_k\beta_k, -2\lambda_k; d) \\
& -\frac{2}{d^2}(32\pi g_k\beta_k)^2 \tilde{\Psi}_{d/2;1;0}^{1;1}(g_k\beta_k, -2\lambda_k; d) + 32h_2(d)h_3(d)\pi g_k\beta_k \tilde{\Psi}_{d/2;0;0}^{1;1}(g_k\beta_k, -2\lambda_k; d) \\
& +\frac{1}{2}h_2(d)(32\pi g_k\beta_k)^3 \tilde{\Psi}_{d/2;2;1}^{1;2}(g_k\beta_k, -2\lambda_k; d) \\
& \left. -2h_2(d)h_3(d)(32\pi g_k\beta_k)^2 \tilde{\Psi}_{d/2;1;1}^{1;2}(g_k\beta_k, -2\lambda_k; d) \right\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -48h_2(d)h_4(d)\pi g_k\beta_k \tilde{\Psi}_{d/2;0;1}^{1;2}(g_k\beta_k, -2\lambda_k; d) \\
& -h_2(d)h_3(d)(32\pi g_k\beta_k)^2 \tilde{\Psi}_{d/2;2;0}^{1;2}(g_k\beta_k, -2\lambda_k; d) \\
& -h_6(d)(32\pi g_k\beta_k)^2 \tilde{\Psi}_{d/2;0;1}^{0;2}(g_k\beta_k, -2\lambda_k; d) - h_3(d)^2(32\pi g_k\beta_k)^2 \tilde{\Psi}_{d/2;1;0}^{0;2}(g_k\beta_k, -2\lambda_k; d) \\
& -32h_3(d)h_4(d)\pi g_k\beta_k \tilde{\Psi}_{d/2;0;0}^{0;2}(g_k\beta_k, -2\lambda_k; d) \\
& -h_2(d)^2(32\pi g_k\beta_k)^2 \tilde{\Psi}_{d/2;2;1}^{2;2}(g_k\beta_k, -2\lambda_k; d) + h_3(d)^2(32\pi g_k\beta_k)^3 \tilde{\Psi}_{d/2;2;1}^{0;3}(g_k\beta_k, -2\lambda_k; d) \\
& +2h_3(d)h_4(d)(32\pi g_k\beta_k)^2 \tilde{\Psi}_{d/2;1;1}^{0;3}(g_k\beta_k, -2\lambda_k; d) \\
& +32h_4(d)^2\pi g_k\beta_k \tilde{\Psi}_{d/2;0;1}^{0;3}(g_k\beta_k, -2\lambda_k; d) \\
& +2h_2(d)h_3(d)(32\pi g_k\beta_k)^3 \tilde{\Psi}_{d/2;3;1}^{1;3}(g_k\beta_k, -2\lambda_k; d) \\
& +2h_2(d)h_4(d)(32\pi g_k\beta_k)^2 \tilde{\Psi}_{d/2;2;1}^{1;3}(g_k\beta_k, -2\lambda_k; d) \\
& +h_2(d)^2(32\pi g_k\beta_k)^3 \tilde{\Psi}_{d/2;4;1}^{2;3}(g_k\beta_k, -2\lambda_k; d) \\
& -\frac{96\pi g_k\beta_k}{1-2\lambda_k} \delta_{d,2} + \left[\frac{36\pi g_k\beta_k}{144\pi g_k\beta_k - (1-2\lambda_k)} - \frac{24\pi g_k\beta_k}{96\pi g_k\beta_k - (1-2\lambda_k)} \right] \delta_{d,4} \Big\} \quad (\text{H.9})
\end{aligned}$$

Wie die zu $\delta_{d,2}$ proportionalen Terme in den β -Funktionen der Einstein-Hilbert-Trunkierung, so entstammen auch die in (H.7), (H.8) und (H.9) enthaltenen zu $\delta_{d,2}$ bzw. $\delta_{d,4}$ proportionalen Terme drei unterschiedlichen Quellen. Erstens tauchen darunter die δ -Terme aus Gleichung (5.12) wieder auf. Weitere Beiträge kommen durch das explizite Subtrahieren unphysikalischer Beiträge von den vollständigen Spuren zustande, was gerade bei den mit Strichen versehenen Spuren der Fall ist. Einzelheiten dazu kann man wiederum Anhang C.2 entnehmen. Kurzgefaßt gehen die entsprechenden Terme aus der Entwicklung von verschiedenen Funktionen $f(R)$ nach ihrem Argument R hervor, wobei im Fall $d = 2$ nur die Terme $f(0) + f'(0)R$ zu berücksichtigen sind und im Fall $d = 4$ lediglich der Term $f(0)$. Nur diese Terme liefern einen Beitrag zum Renormierungsgruppenfluß in dem trunkierten λ - g - β -Raum. Den dritten Beitrag zu den zu $\delta_{d,2}$ oder $\delta_{d,4}$ proportionalen Termen in (H.7)-(H.9) liefern schließlich die Heat-Kernel-Entwicklungen für Felder mit differentiellen Nebenbedingungen.

H.2 Diverse d -abhängige Koeffizienten

Im Anschluß werden die in der entwickelten Funktion $\mathcal{S}_k(R)$ aus Gleichung (5.12) und in den obigen Koeffizientenfunktionen enthaltenen $h_i(d)$ aufgelistet. Weiterhin werden einige

ausschließlich in Anhang J.2 auftretende Funktionen $h_j(d)$ definiert.

$$\begin{aligned}
h_1(d) &\equiv \frac{d-2}{d-1}, \quad h_2(d) \equiv \frac{d-4}{d}, \quad h_3(d) \equiv \frac{d^2-8d+4}{2d(d-1)}, \quad h_4(d) \equiv -\frac{(d-2)(d-4)}{d(d-1)}, \\
h_5(d) &\equiv \frac{d^2-4d-2}{2d^2}, \quad h_6(d) \equiv \frac{(d-4)^2}{2d(d-1)}, \quad h_7(d) \equiv \frac{5d^4-48d^3+148d^2-112d+16}{4d^2(d-1)^2}, \\
h_8(d) &\equiv \frac{d^2+d-4}{2}, \quad h_9(d) \equiv \frac{(d+3)(d+2)(d^2-5d+2)}{12d(d-1)}, \quad h_{10}(d) \equiv -\frac{d^2-6}{3d}, \\
h_{11}(d) &\equiv \frac{(d+1)(d-2)}{2}, \quad h_{12}(d) \equiv -\frac{d^4-2d^3-5d^2+16d-14}{2d(d-1)}, \\
h_{13}(d) &\equiv -\frac{2(d+1)}{d}, \quad h_{14}(d) \equiv \frac{5d^6-7d^5-139d^4-545d^3-898d^2+504d-360}{720d^2(d-1)^2}, \\
h_{15}(d) &\equiv \frac{5d^2-7d+6}{360d(d-1)}, \quad h_{16}(d) \equiv \frac{5d^4-7d^3-54d^2-180d+180}{180d^2(d-1)}, \\
h_{17}(d) &\equiv \frac{(d+2)(d+1)(d-5)}{12(d-1)}, \quad h_{18}(d) \equiv \frac{(d+2)(d^5-5d^4-5d^3+43d^2-68d+18)}{12d^2(d-1)^2}, \\
h_{19}(d) &\equiv \frac{5d^2-28d+20}{2d(d-1)}, \quad h_{20}(d) \equiv \frac{(d+3)(d-2)}{3d^2}, \\
h_{21}(d) &\equiv 2\frac{d^2-3d+4}{d(d-1)}, \quad h_{22}(d) \equiv \frac{(d-3)(d^3-d^2-4d+8)}{4d(d-1)}, \\
h_{23}(d) &\equiv \frac{d^6-5d^5+3d^4+31d^3-86d^2+98d-50}{2d^2(d-1)^2}, \quad h_{24}(d) \equiv -2\frac{d+3}{d^2}, \\
h_{25}(d) &\equiv \frac{3d^4-12d^3+9d^2+24d-40}{4d(d-1)}, \quad h_{26}(d) \equiv \frac{d^2-6d+2}{d(d-1)}, \\
h_{27}(d) &\equiv \frac{15d^4-178d^3+628d^2-632d+176}{4d^2(d-1)^2}, \quad h_{28}(d) \equiv -\frac{9(d^2-6d+4)}{2d(d-1)}, \\
h_{29}(d) &\equiv \frac{5d^4-52d^3+168d^2-128d+16}{4d^2(d-1)^2}, \quad h_{30}(d) \equiv \frac{3d^2-16d+12}{2d(d-1)}, \\
h_{31}(d) &\equiv \frac{5d^6-27d^5-71d^4-405d^3-342d^2-960d+360}{720d^2(d-1)^2}, \\
h_{32}(d) &\equiv -\frac{d^6-3d^5-7d^4+5d^3+26d^2-82d+12}{12d^2(d-1)^2}, \\
h_{33}(d) &\equiv \frac{d^6-5d^5+7d^4-13d^3+42d^2-42d+2}{2d^2(d-1)^2},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
h_{34}(d) &\equiv \frac{5d^6 - 7d^5 - 119d^4 - 593d^3 - 846d^2 + 480d - 360}{360d^2(d-1)^2}, \\
h_{35}(d) &\equiv -\frac{d^6 - 3d^5 - 11d^4 + 9d^3 + 54d^2 - 134d + 36}{3d^2(d-1)^2}, \\
h_{36}(d) &\equiv 3\frac{d^6 - 5d^5 + 7d^4 - 9d^3 + 46d^2 - 62d + 14}{d^2(d-1)^2}, \\
h_{37}(d) &\equiv \frac{(d+2)(d^3 - 6d^2 + 3d - 6)}{3d(d-1)}, \quad h_{38}(d) \equiv -2\frac{d^4 - 2d^3 + 3d^2 - 4d - 2}{d(d-1)}, \\
h_{39}(d) &\equiv \frac{5d^2 - 7d + 6}{45d(d-2)}, \quad h_{40}(d) \equiv \frac{30d^5 - 115d^4 - 362d^3 + 721d^2 + 182d + 264}{90d(d-1)(d-2)}, \\
h_{41}(d) &\equiv -2\frac{3d^6 - 17d^5 + 25d^4 + 39d^3 - 166d^2 + 224d - 96}{3d^2(d-1)(d-2)}, \\
h_{42}(d) &\equiv 4\frac{(d-1)(d-4)^2}{d(d-2)}, \quad h_{43}(d) \equiv -\frac{(d+2)(d^3 - 6d^2 + 3d - 6)}{3d(d-1)(d-2)}, \\
h_{44}(d) &\equiv 2\frac{d^4 - 2d^3 + 3d^2 - 4d - 2}{d(d-1)(d-2)}, \quad h_{45}(d) \equiv \frac{d^4 - 3d^3 + 32d - 32}{d^2}, \\
h_{46}(d) &\equiv -\frac{d^4 - 13d^2 - 24d + 12}{6d(d-1)}, \quad h_{47}(d) \equiv \frac{d^4 - 2d^3 - d^2 - 4d + 2}{d(d-1)}. \tag{H.10}
\end{aligned}$$

Anhang I

Kommutatorrelationen für maximal symmetrische Hintergrundräume

Im folgenden werden die Kommutatorrelationen aufgelistet, die benutzt wurden, um die Gleichungen (3.13) aus Abschnitt 3.3, (5.6) aus Abschnitt 5.2 sowie (F.17) und (F.18) aus Anhang F herzuleiten. Sie gelten für alle maximal symmetrischen Hintergrundmetriken.

$$\bar{D}_\mu \bar{D}_\nu \hat{\xi}^\mu = \frac{\bar{R}}{d} \hat{\xi}_\nu \quad (\text{I.1})$$

$$\bar{D}^2 \left(\bar{D}_\mu \hat{\xi}_\nu + \bar{D}_\nu \hat{\xi}_\mu \right) = \bar{D}_\mu \left(\bar{D}^2 + \frac{(d+1)\bar{R}}{d(d-1)} \right) \hat{\xi}_\nu + \bar{D}_\nu \left(\bar{D}^2 + \frac{(d+1)\bar{R}}{d(d-1)} \right) \hat{\xi}_\mu \quad (\text{I.2})$$

$$\left(\bar{D}_\mu \hat{\xi}_\nu + \bar{D}_\nu \hat{\xi}_\mu \right) \left(\bar{D}^\mu \hat{\xi}^\nu + \bar{D}^\nu \hat{\xi}^\mu \right) = -2\hat{\xi}_\mu \left(\bar{D}^2 + \frac{\bar{R}}{d} \right) \hat{\xi}^\mu + \text{kov. Divergenz} \quad (\text{I.3})$$

$$\bar{D}^2 \bar{D}_\mu \hat{\sigma} = \bar{D}^\nu \bar{D}_\mu \bar{D}_\nu \hat{\sigma} = \bar{D}_\mu \left(\bar{D}^2 + \frac{\bar{R}}{d} \right) \hat{\sigma} \quad (\text{I.4})$$

$$\bar{D}^2 \left(\bar{D}_\mu \bar{D}_\nu - \frac{1}{d} \bar{g}_{\mu\nu} \bar{D}^2 \right) \hat{\sigma} = \left(\bar{D}_\mu \bar{D}_\nu - \frac{1}{d} \bar{g}_{\mu\nu} \bar{D}^2 \right) \left(\bar{D}^2 + \frac{2\bar{R}}{d-1} \right) \hat{\sigma} \quad (\text{I.5})$$

$$\begin{aligned} & \left(\bar{D}_\mu \bar{D}_\nu \hat{\sigma} - \frac{1}{d} \bar{g}_{\mu\nu} \bar{D}^2 \hat{\sigma} \right) \left(\bar{D}^\mu \bar{D}^\nu \hat{\sigma} - \frac{1}{d} \bar{g}^{\mu\nu} \bar{D}^2 \hat{\sigma} \right) \\ &= \frac{d-1}{d} \hat{\sigma} \bar{D}^2 \left(\bar{D}^2 + \frac{\bar{R}}{d-1} \right) \hat{\sigma} + \text{kov. Divergenz} \end{aligned} \quad (\text{I.6})$$

$$\begin{aligned} & \left(\bar{D}_\mu \hat{\xi}_\nu + \bar{D}_\nu \hat{\xi}_\mu \right) \exp(\bar{D}^2) \left(\bar{D}^\mu \hat{\xi}^\nu + \bar{D}^\nu \hat{\xi}^\mu \right) \\ &= -2\hat{\xi}_\mu \left(\bar{D}^2 + \frac{\bar{R}}{d} \right) \exp \left(\bar{D}^2 + \frac{(d+1)\bar{R}}{d(d-1)} \right) \hat{\xi}^\mu + \text{kov. Divergenz} \end{aligned} \quad (\text{I.7})$$

$$(\bar{D}_\mu \hat{\sigma}) \exp(\bar{D}^2) \bar{D}^\mu \hat{\sigma} = -\hat{\sigma} \bar{D}^2 \exp\left(\bar{D}^2 + \frac{\bar{R}}{d}\right) \hat{\sigma} + \text{kov. Divergenz} \quad (\text{I.8})$$

$$\begin{aligned} & \left[\left(\bar{D}_\mu \bar{D}_\nu - \frac{1}{d} \bar{g}_{\mu\nu} \bar{D}^2 \right) \hat{\sigma} \right] \exp(\bar{D}^2) \left(\bar{D}^\mu \bar{D}^\nu - \frac{1}{d} \bar{g}^{\mu\nu} \bar{D}^2 \right) \hat{\sigma} \\ &= \frac{d-1}{d} \hat{\sigma} \bar{D}^2 \left(\bar{D}^2 + \frac{\bar{R}}{d-1} \right) \exp\left(\bar{D}^2 + \frac{2\bar{R}}{d-1}\right) \hat{\sigma} + \text{kov. Divergenz} \quad (\text{I.9}) \end{aligned}$$

Anhang J

Näherungslösungen für den nicht-Gaußschen Fixpunkt

Wie bereits in den Kapiteln 4 bzw. 6 erwähnt wurde, sind die β -Funktionen beider in dieser Arbeit diskutierten Trunkierungen viel zu kompliziert, als daß sich aus ihnen die *exakte* Position des nicht-Gaußschen Fixpunkts analytisch bestimmen ließe. Im Rahmen einer (teilweise) störungstheoretischen Behandlung ist es jedoch sehr wohl möglich, *Näherungsformeln* für seine Koordinaten im Raum der Kopplungen herzuleiten. Die daraus folgenden Resultate dienen wiederum als Ausgangspunkt für eine numerische Bestimmung der exakten Position des jeweiligen nicht-Gaußschen Fixpunkts. Diese numerischen Ergebnisse bilden den Kernpunkt der in den Abschnitten 4.3 bzw. 6.3 präsentierten Fixpunktanalysen. Im folgenden werden wir uns statt dessen mit der Herleitung der besagten Näherungsformeln befassen.

J.1 Der nicht-Gaußsche Fixpunkt in der Einstein-Hilbert-Trunkierung

Beginnen wir unsere Betrachtungen mit den β -Funktionen der reinen Einstein-Hilbert-Trunkierung. Um einen ersten Eindruck von der Position des Fixpunkts zu gewinnen, führen wir zuerst die denkbar einfachste Näherung durch und setzen $\lambda_k = \lambda_* = 0$. Dadurch wird der Renormierungsgruppenfluß auf die g -Achse des Raums aller Kopplungen projiziert. Als einzige Bedingung für den nichttrivialen Fixpunkt bleibt dann lediglich die Gleichung $\eta_{N_*} = 2 - d$ übrig. Nach g_* aufgelöst, nimmt diese Gleichung die nachstehende Form an:

$$g_* = \frac{2 - d}{B_1(\lambda_*; \alpha, d) - (d - 2)B_2(\lambda_*; \alpha, d)} . \quad (\text{J.1})$$

Die hier auftretenden Koeffizientenfunktionen B_1 und B_2 sind diejenigen aus Gleichung (3.32). Setzt man jetzt $\lambda_* = 0$, so vereinfacht sich dieser Ausdruck zu

$$g_* = \frac{2-d}{4}(4\pi)^{\frac{d}{2}-1} \left\{ k_1(d) \Phi_{d/2-1}^1(0) + k_2(d) \tilde{\Phi}_{d/2-1}^1(0) + k_3(d, \alpha) \Phi_{d/2}^2(0) + k_4(d, \alpha) \tilde{\Phi}_{d/2}^2(0) + 3\delta_{d,2} \left[\frac{1}{1-2\lambda_k} - \frac{1}{1-2\alpha\lambda_k} \right] \right\}^{-1}. \quad (\text{J.2})$$

Dabei stellen k_1, \dots, k_4 d - und α -abhängige Koeffizienten dar, die wie folgt definiert sind:

$$\begin{aligned} k_1(d) &\equiv \frac{d^4 - 4d^3 - 9d^2 - 12}{12d(d-1)}, & k_2(d) &\equiv \frac{(d-2)(d^4 - 13d^2 - 24d + 12)}{24d(d-1)}, \\ k_3(d, \alpha) &\equiv -\frac{d^4 - 4d^3 + 9d^2 - 8d - 2}{2d(d-1)} - (d-2)\alpha, \\ k_4(d, \alpha) &\equiv -\frac{(d-2)(d^4 - 4d^3 + 5d^2 - 8d + 2)}{4d(d-1)} - \frac{(d-2)^2}{2}\alpha. \end{aligned} \quad (\text{J.3})$$

Verwendet man z.B. die exponentielle Profilfunktion (2.8) mit $s = 1$ und setzt $d = 4$ und $\alpha = 1$, dann ergibt sich aus (J.2) der ungefähre Wert $g_* \approx 0.590$. Dabei wurde benutzt, daß diese Profilfunktion zu $\Phi_1^1(0) = \pi^2/6$, $\Phi_2^2(0) = 1$, $\tilde{\Phi}_1^1(0) = 1$ und $\tilde{\Phi}_2^2(0) = 1/2$ führt, vgl. Anhang K.

Die obige Näherung liefert lediglich erste Informationen über die Projektion des Fixpunkts auf die g -Richtung. Um an die entsprechenden Informationen bzgl. seiner λ -Komponente zu gelangen, muß man sich eines anderen Approximationsverfahrens bedienen. Für solche Zwecke bietet es sich i.a. an, die β -Funktionen zu entwickeln und dann aus den Resultaten der Entwicklung die Position des Fixpunktes näherungsweise zu bestimmen. Im vorliegenden Fall nehmen die β -Funktionen β_λ und β_g aus den Gleichungen (3.28) bzw. (3.30), nachdem sie um $\lambda_k = g_k = 0$ entwickelt und Terme von dritter und höherer Ordnung in den Kopplungen vernachlässigt wurden, die folgende Form an:

$$\begin{aligned} \beta_\lambda(\lambda_k, g_k; \alpha, d) &= -2\lambda_k + \nu_d d g_k + \left[2d(d-1+2\alpha)(4\pi)^{1-\frac{d}{2}} \Phi_{d/2}^2(0) - (d-2)\omega_d(\alpha) \right] \\ &\quad \times \lambda_k g_k + \frac{1}{2}d(d+1)(d-2)(4\pi)^{1-\frac{d}{2}}\omega_d(\alpha) \Phi_{d/2}^1(0) g_k^2 + \mathcal{O}(g^3), \\ \beta_g(\lambda_k, g_k; \alpha, d) &= (d-2)g_k - (d-2)\omega_d(\alpha) g_k^2 + \mathcal{O}(g^3). \end{aligned} \quad (\text{J.4})$$

Dabei wurden die Beziehungen

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\lambda_k} \Phi_n^p(-2\alpha\lambda_k) &= 2\alpha p \Phi_n^{p+1}(-2\alpha\lambda_k), \\ \frac{d}{d\lambda_k} \tilde{\Phi}_n^p(-2\alpha\lambda_k) &= 2\alpha p \tilde{\Phi}_n^{p+1}(-2\alpha\lambda_k) \end{aligned} \quad (\text{J.5})$$

verwendet, siehe auch Anhang K. Weiterhin sind ν_d und $\omega_d(\alpha)$ durch die Ausdrücke in (4.8) und (4.11) definiert, und $\mathcal{O}(g^3)$ steht für die besagten vernachlässigten Terme von dritter und höherer Ordnung in den Kopplungen $g_1(k) = \lambda_k$ und $g_2(k) = g_k$. Da β_g bis einschließlich zur zweiten Ordnung unabhängig von λ_k ist, liefert die nichttriviale Lösung von $\beta_g = 0$ hier gerade die g -Koordinate g_* des Fixpunkts. Man erhält dafür den nachstehenden Ausdruck:

$$g_* = \omega_d(\alpha)^{-1} = \frac{2-d}{4} (4\pi)^{\frac{d}{2}-1} \{k_1(d) \Phi_{d/2-1}^1(0) + k_3(d, \alpha) \Phi_{d/2}^2(0)\}^{-1}. \quad (\text{J.6})$$

Setzt man nun (J.6) in β_λ aus (J.4) ein und vernachlässigt darin auch die Terme von zweiter Ordnung in den Kopplungen, dann führt die Bedingung $\beta_\lambda = 0$ schließlich zu dem folgenden Ausdruck für die λ -Koordinate λ_* :

$$\lambda_* = \frac{\nu_d d}{2\omega_d(\alpha)} = -\frac{d(d-2)(d-3)}{8} \Phi_{d/2}^1(0) \{k_1(d) \Phi_{d/2-1}^1(0) + k_3(d, \alpha) \Phi_{d/2}^2(0)\}^{-1}. \quad (\text{J.7})$$

Betrachten wir nun wieder den Fall $d = 4$, der hier natürlich am meisten interessiert. Bei Verwendung der exponentiellen Profilfunktion (2.8) mit $s = 1$ ergibt sich aus den Gleichungen (J.6) und (J.7) beispielsweise

$$\begin{aligned} g_* &= \left(\frac{13\pi}{144} + \frac{55}{24\pi} + \frac{\alpha}{\pi} \right)^{-1}, \\ \lambda_* &= \zeta(3) \left(\frac{13\pi^2}{144} + \frac{55}{24} + \alpha \right)^{-1}. \end{aligned} \quad (\text{J.8})$$

Z.B. für $\alpha = 1$ folgt daraus $(\lambda_*, g_*) \approx (0.287, 0.751)$. Offenkundig weicht hier g_* nur relativ schwach von dem oben bestimmten Wert $g_* \approx 0.590$ ab.

J.2 Der nicht-Gaußsche Fixpunkt in der R^2 -Trunkierung

Wenden wir uns nun der R^2 -Trunkierung zu. Zur approximativen Bestimmung des Fixpunkts greifen wir dabei auf dieselben Methoden wie im vorangegangenen Abschnitt zurück, beschränken uns hier aber auf den Fall $d > 2$. Zuerst betrachten wir wieder seine Projektion auf die g -Richtung und setzen dementsprechend $\lambda_k = \lambda_* = 0$ und $\beta_k = \beta_* = 0$. In Analogie zur Einstein-Hilbert-Trunkierung läßt sich dann g_* allein aus der Bedingung $\eta_{N_*} = 2 - d$ bestimmen. Für $\beta_* = 0$ vereinfacht sich diese Gleichung derart, daß man sie nach g_* auflösen kann, was zu dem folgenden Ausdruck führt:

$$g_* = \frac{2-d}{B_1(0, 0, \lambda_*; d) - (d-2)B_2(0, 0, \lambda_*; d)}. \quad (\text{J.9})$$

In diesem Fall sind die Koeffizientenfunktionen B_1 und B_2 durch die Gleichungen (H.4) bzw. (H.5) definiert. Setzt man in (J.9) zusätzlich $\lambda_* = 0$, dann resultiert daraus

$$g_* = (4\pi)^{\frac{d}{2}-1} \left\{ h_{43}(d) \Phi_{d/2-1}^1(0) + h_{46}(d) \tilde{\Phi}_{d/2-1}^1(0) + h_{44}(d) \Phi_{d/2}^2(0) + h_{47}(d) \tilde{\Phi}_{d/2}^2(0) \right\}^{-1}. \quad (\text{J.10})$$

Dabei verkörpern die $h_i(d)$ d -abhängige Koeffizienten, deren Gestalt man Abschnitt H.2 entnehmen kann. Sie stehen in folgender Beziehung mit den k_i aus Gleichung (J.3): $h_{43}(d) = k_1(d)$, $h_{46}(d) = k_2(d)$, $h_{44}(d) = k_3(d, \alpha = 1)$, $h_{47}(d) = k_4(d, \alpha = 1)$. Verwendet man also auch im Falle der Einstein-Hilbert-Trunkierung die Eichung $\alpha = 1$, so stimmt das Ergebnis (J.10) exakt mit (J.2) überein.¹ Folglich ergibt sich unter Verwendung der exponentiellen Profilfunktion mit $s = 1$ in $d = 4$ Dimensionen wieder $g_* \approx 0.590$.

Indem man auf das zweite Approximationsverfahren aus dem vorangegangenen Abschnitt zurückgreift, kann man nun auch die λ - und die β -Koordinate des Fixpunkts näher bestimmen. Dazu entwickelt man mit Hilfe der Gleichungen (K.1)-(K.4) aus Anhang K die β -Funktionen (5.19), (5.20) und (5.21) um $\lambda_k = g_k = \beta_k = 0$, was zu den nachstehenden Ausdrücken führt:

$$\begin{aligned} \beta_\lambda(\lambda_k, g_k, \beta_k; d) &= -2\lambda_k + \nu_d d g_k + \mathcal{O}(g^2), \\ \beta_g(\lambda_k, g_k, \beta_k; d) &= (d-2)g_k - (d-2)\omega_d g_k^2 + \mathcal{O}(g^3), \\ \beta_\beta(\lambda_k, g_k, \beta_k; d) &= \gamma_d + (4-d)\beta_k + \mathcal{O}(g^2) \end{aligned} \quad (\text{J.11})$$

Die explizite Form der Parameter ν_d , $\omega_d \equiv \omega_d(\alpha = 1)$ und γ_d ist dabei durch die Gleichungen (4.8), (4.11) und (6.3) festgelegt, und $\mathcal{O}(g^n)$ steht für Terme n ter und höherer Ordnung in den Kopplungen $g_1(k) = \lambda_k$, $g_2(k) = g_k$ und $g_3(k) = \beta_k$.

Wie im Fall der Einstein-Hilbert-Trunkierung ergibt sich g_* als nichttriviale Lösung von $\beta_g = 0$. Diese lautet

$$g_* = \omega_d^{-1} = (4\pi)^{\frac{d}{2}-1} \left\{ h_{43}(d) \Phi_{d/2-1}^1(0) + h_{44}(d) \Phi_{d/2}^2(0) \right\}^{-1}. \quad (\text{J.12})$$

Durch Einsetzen von (J.12) in $\beta_\lambda = 0$ erhält man weiterhin mit (J.11)

$$\lambda_* = \frac{\nu_d d}{2\omega_d} = \frac{d(d-3)}{2} \Phi_{d/2}^1(0) \left\{ h_{43}(d) \Phi_{d/2-1}^1(0) + h_{44}(d) \Phi_{d/2}^2(0) \right\}^{-1}. \quad (\text{J.13})$$

Die beiden Ergebnisse (J.12) und (J.13) stimmen wieder vollständig mit den entsprechenden Ausdrücken der Einstein-Hilbert-Trunkierung, (J.6) und (J.7), überein, wenn man darin $\alpha = 1$ setzt.

¹Es sei an dieser Stelle daran erinnert, daß im Fall der R^2 -Trunkierung sämtliche Rechnungen in der Eichung $\alpha = 1$ durchgeführt werden.

Zuguter Letzt benutzt man β_β , um β_* zu bestimmen. Da jedoch der in β_k lineare Term für $d = 4$ verschwindet, reicht in diesem Fall das entwickelte β_β aus Gleichung (J.11) dazu nicht aus. Aus diesem Grunde berücksichtigt man hier zusätzlich diejenigen Terme von zweiter Ordnung in den Kopplungen, welche linear in β_k sind. Diese Zusatzterme lauten

$$\left. \frac{\partial^2 \beta_\beta}{\partial \lambda_k \partial \beta_k} \right|_{\lambda_k = g_k = \beta_k = 0} = 0 ,$$

$$\alpha_d \equiv \left. \frac{\partial^2 \beta_\beta}{\partial g_k \partial \beta_k} \right|_{\lambda_k = g_k = \beta_k = 0} = -(4\pi)^{1-\frac{d}{2}} \{ 2h_{39}(d) + 2h_{45}(d) \Phi_{d/2}^2(0) - 3\delta_{d,4} \} . \quad (\text{J.14})$$

Unter Einbeziehung des nichtverschwindenden Terms aus (J.14) wird anschließend g_* aus Gleichung (J.12) in $\beta_\beta = 0$ eingesetzt, was zu dem folgenden Ergebnis führt:

$$\beta_* = \frac{\gamma_d}{d - 4 - \alpha_d \omega_d^{-1}} \quad (\text{J.15})$$

$$= \frac{(4\pi)^{-\frac{d}{2}} \{ h_{31}(d) \Phi_{d/2-2}^1(0) + h_{32}(d) \Phi_{d/2-1}^2(0) + h_{33}(d) \Phi_{d/2}^3(0) \}}{d - 4 + \{ 2h_{39}(d) + 2h_{45}(d) \Phi_{d/2}^2(0) - 3\delta_{d,4} \} \{ h_{43}(d) \Phi_{d/2-1}^1(0) + h_{44}(d) \Phi_{d/2}^2(0) \}^{-1}} .$$

Im $d = 4$ -dimensionalen Fall resultiert aus den Gleichungen (J.12), (J.13) und (J.15) beispielsweise bei Verwendung der exponentiellen Profilfunktion mit $s = 1$

$$\lambda_* = \zeta(3) \left(\frac{13\pi^2}{144} + \frac{79}{24} \right)^{-1} \approx 0.287 ,$$

$$g_* = \left(\frac{13\pi}{144} + \frac{79}{24\pi} \right)^{-1} \approx 0.751 ,$$

$$\beta_* = \frac{419(13\pi^2 + 474)}{(4\pi)^2 906768} \approx 0.0018 . \quad (\text{J.16})$$

Hierfür wurden wiederum die in Anhang K hergeleiteten Ausdrücke für die Schwellenfunktionen benutzt.

Anhang K

Einige Eigenschaften der Schwellenfunktionen

In diesem Teil des Anhangs werden verschiedene wichtige Eigenschaften der durch die Gleichungen (3.23), (C.31) und (C.32) definierten Schwellenfunktionen Φ_n^p , $\tilde{\Phi}_n^p$, $\Psi_{n;m}^{p;q}$ und $\tilde{\Psi}_{n;m;l}^{p;q}$ zusammengestellt.

Richten wir unsere Blicke zuerst auf die “verallgemeinerten” Schwellenfunktionen $\Psi_{n;m}^{p;q}(g_k\beta_k, -2\lambda_k; d)$ und $\tilde{\Psi}_{n;m;l}^{p;q}(g_k\beta_k, -2\lambda_k; d)$ mit $l \in \{0, 1\}$. Entwickelt man diese um $\lambda_k = g_k = \beta_k = 0$ bis zur zweiten Ordnung in den Kopplungen, so ergeben sich die folgenden Ausdrücke:

$$\begin{aligned} \Psi_{n;m}^{p;q}(g_k\beta_k, -2\lambda_k; d) &= \left(-2\frac{d-1}{d-2}\right)^q \Phi_n^{p+q-m}(0) + 2(p+q) \left(-2\frac{d-1}{d-2}\right)^q \\ &\quad \times \Phi_n^{p+q-m+1}(0) \lambda_k + 2(p+q)(p+q+1) \left(-2\frac{d-1}{d-2}\right)^q \Phi_n^{p+q-m+2}(0) \lambda_k^2 \\ &\quad - 32\pi q \left(-2\frac{d-1}{d-2}\right)^{q+1} \Phi_n^{p+q-m-1}(0) g_k\beta_k + \mathcal{O}(g^3), \end{aligned} \quad (\text{K.1})$$

$$\begin{aligned} \tilde{\Psi}_{n;m;0}^{p;q}(g_k\beta_k, -2\lambda_k; d) &= \left(-2\frac{d-1}{d-2}\right)^q \tilde{\Phi}_n^{p+q-m}(0) + 2(p+q) \left(-2\frac{d-1}{d-2}\right)^q \\ &\quad \times \tilde{\Phi}_n^{p+q-m+1}(0) \lambda_k + 2(p+q)(p+q+1) \left(-2\frac{d-1}{d-2}\right)^q \tilde{\Phi}_n^{p+q-m+2}(0) \lambda_k^2 \\ &\quad - 32\pi q \left(-2\frac{d-1}{d-2}\right)^{q+1} \tilde{\Phi}_n^{p+q-m-1}(0) g_k\beta_k + \mathcal{O}(g^3), \end{aligned} \quad (\text{K.2})$$

$$\tilde{\Psi}_{n;m;1}^{p;q}(g_k\beta_k, -2\lambda_k; d) = \left(-2\frac{d-1}{d-2}\right)^q \left(\tilde{\Phi}_n^{p+q-m-1}(0) + n \tilde{\Phi}_{n+1}^{p+q-m}(0)\right)$$

$$\begin{aligned}
& +2(p+q) \left(-2\frac{d-1}{d-2}\right)^q \left(\tilde{\Phi}_n^{p+q-m}(0) + n\tilde{\Phi}_{n+1}^{p+q-m+1}(0)\right) \lambda_k \\
& +2(p+q)(p+q+1) \left(-2\frac{d-1}{d-2}\right)^q \left(\tilde{\Phi}_n^{p+q-m+1}(0) + n\tilde{\Phi}_{n+1}^{p+q-m+2}(0)\right) \lambda_k^2 \\
& -32\pi q \left(-2\frac{d-1}{d-2}\right)^{q+1} \left(\tilde{\Phi}_n^{p+q-m-2}(0) + n\tilde{\Phi}_{n+1}^{p+q-m-1}(0)\right) g_k \beta_k + \mathcal{O}(g^3). \quad (\text{K.3})
\end{aligned}$$

Dabei steht $\mathcal{O}(g^3)$ für Terme von dritter und höherer Ordnung in den Kopplungen $g_1(k) = \lambda_k$, $g_2(k) = g_k$ und $g_3(k) = \beta_k$. Äußerst bemerkenswert ist hier, daß in allen Termen dieser Entwicklungen ausschließlich die konventionellen Schwellenfunktionen aus (3.23) auftauchen, und zwar in Form der Parameter $\Phi_n^p(0)$ und $\tilde{\Phi}_n^p(0)$.

Unter Berücksichtigung der Beziehungen aus (C.33) lassen sich die entsprechenden Entwicklungen von $\Phi_n^p(-2\lambda_k)$ und $\tilde{\Phi}_n^p(-2\lambda_k)$ um $\lambda_k = 0$ direkt von den Gleichungen (K.1) und (K.2) ablesen. Man erhält:

$$\begin{aligned}
\Phi_n^p(-2\lambda_k) &= \Phi_n^p(0) + 2p\Phi_n^{p+1}(0)\lambda_k + 2p(p+1)\Phi_n^{p+2}(0)\lambda_k^2 + \mathcal{O}(\lambda_k^3), \\
\tilde{\Phi}_n^p(-2\lambda_k) &= \tilde{\Phi}_n^p(0) + 2p\tilde{\Phi}_n^{p+1}(0)\lambda_k + 2p(p+1)\tilde{\Phi}_n^{p+2}(0)\lambda_k^2 + \mathcal{O}(\lambda_k^3). \quad (\text{K.4})
\end{aligned}$$

Betrachten wir als nächstes den Fall $n = 0$. In diesem Fall kann man die Integrale, die die Schwellenfunktionen definieren, problemlos lösen, und es läßt sich leicht zeigen, daß $\Psi_{n=0;m}^{p;q}$, $\tilde{\Psi}_{n=0;m;l}^{p;q}$, $\Phi_{n=0}^p$ und $\tilde{\Phi}_{n=0}^p$ durch die nachstehenden Ausdrücke gegeben sind:

$$\Psi_{0;m}^{p;q}(v, w; d) = \tilde{\Psi}_{0;m;l}^{p;q}(v, w; d) = (1+w)^{-p} \left(32\pi v - \frac{d-2}{2(d-1)}(1+w)\right)^{-q}, \quad (\text{K.5})$$

$$\Phi_0^p(w) = \tilde{\Phi}_0^p(w) = (1+w)^{-p}. \quad (\text{K.6})$$

Offensichtlich hängen die Schwellenfunktionen für $n = 0$ nicht von der Wahl der Profilfunktion $R^{(0)}(y)$ ab, ihnen kommt in diesem Fall also eine universelle Bedeutung zu.

Aus den Schwellenfunktionen Φ_n^p lassen sich noch weitere universelle Größen gewinnen: Setzt man das Argument von Φ_n^p gleich Null und außerdem $n+1 = p \geq 1$, so läßt sich unter Verwendung der in Abschnitt 2.2 angegebenen Randbedingungen für $R^{(0)}(y)$ leicht die folgende Beziehung beweisen:

$$\Phi_{p-1}^p(0) = \frac{1}{\Gamma(p)}. \quad (\text{K.7})$$

Diese gilt unabhängig von der Wahl der Profilfunktion. Folglich sind die $\Phi_{p-1}^p(0)$ universelle Parameter.

Beschränken wir unsere Betrachtungen von nun an auf die Familie von exponentiellen Profilfunktionen (2.8). In diesem Fall lassen sich die Integrale, die die Parameter $\Phi_n^p(0)$

definieren, analytisch berechnen. Mit Hilfe der Integraldarstellung der Polylogarithmusfunktion

$$\text{Li}_n(x) = \frac{1}{\Gamma(n)} \int_0^\infty dz \frac{x z^{n-1}}{e^z - x}, \quad (\text{K.8})$$

vgl. z.B. [70], ergeben sich insbesondere für die $\Phi_n^p(0)$ mit $p \in \{0, \dots, 4\}$ die folgenden Ausdrücke:

$$\Phi_n^0(0) = n(n+1) s^{-n} \zeta(n+1) \quad (\text{K.9})$$

$$\Phi_n^1(0) = n s^{-n} \{ \zeta(n+1) - \text{Li}_{n+1}(1-s) \} \quad (\text{K.10})$$

$$\Phi_n^2(0) = \begin{cases} s^{2-n} (1-s)^{-1} \text{Li}_{n-1}(1-s) & s \neq 1 \\ 1 & s = 1 \end{cases} \quad (\text{K.11})$$

$$\Phi_n^3(0) = \quad (\text{K.12})$$

$$\begin{cases} [2(n-1)(1-s)^2]^{-1} s^{3-n} \{ (2-s) \text{Li}_{n-2}(1-s) - s \text{Li}_{n-3}(1-s) \} & n \neq 1, s \neq 1 \\ [2^{n-1}(n-1)]^{-1} (2^{n-1} - 1) & n \neq 1, s = 1 \\ -[2(1-s)^2]^{-1} s^{3-n} \{ (2-s) \text{Li}_{-1}^{(1,0)}(1-s) - s \text{Li}_{-2}^{(1,0)}(1-s) \} & n = 1, s \neq 1 \\ \ln(2) & n = s = 1 \end{cases}$$

$$\Phi_n^4(0) = \quad (\text{K.13})$$

$$\begin{cases} [6(n-1)(n-2)(1-s)^3]^{-1} s^{4-n} \{ 2(s^2 - 3s + 3) \text{Li}_{n-3}(1-s) \\ \quad - 3s(2-s) \text{Li}_{n-4}(1-s) + s^2 \text{Li}_{n-5}(1-s) \} & n \neq 1, 2, s \neq 1 \\ [(n-1)(n-2)]^{-1} (1 - 2^{3-n} + 3^{2-n}) & n \neq 1, 2, s = 1 \\ [6(2n-3)(1-s)^3]^{-1} s^{4-n} \{ 2(s^2 - 3s + 3) \text{Li}_{n-3}^{(1,0)}(1-s) \\ \quad - 3s(2-s) \text{Li}_{n-4}^{(1,0)}(1-s) + s^2 \text{Li}_{n-5}^{(1,0)}(1-s) \} & n \in \{1, 2\}, s \neq 1 \\ \ln(27/16) & n = s = 1 \\ \ln(4/3) & n = 2, s = 1 \end{cases}$$

In den obigen Ausdrücken wurden die Funktionen $\text{Li}_n^{(k,l)}(x)$ eingeführt. Sie sind gemäß

$$\text{Li}_n^{(k,l)}(x) \equiv \frac{\partial^k}{\partial n^k} \frac{\partial^l}{\partial x^l} \text{Li}_n(x) \quad (\text{K.14})$$

durch die partiellen Ableitungen der Polylogarithmusfunktion nach x und n definiert. Ferner wurden die folgenden Beziehungen verwendet:

$$\text{Li}_n(1) = \zeta(n), \quad \text{Li}_n^{(0,1)}(x) = \frac{\text{Li}_{n-1}(x)}{x}. \quad (\text{K.15})$$

Hier stellt ζ die Riemannsche Zeta-Funktion dar.

An dieser Stelle sei nochmals darauf hingewiesen, daß die obigen Integrale $\Phi_n^p(0)$ nur bei verschwindendem Argument analytisch gelöst werden können. Im Falle von nichtverschwindenden Argumenten sind hierfür bislang keine analytischen Lösungen bekannt.

Beschränken wir nun unsere Betrachtungen weiter auf die exponentielle Profilfunktion mit Profilparameter $s = 1$. In diesem Fall existiert eine äußerst nützliche Beziehung zwischen den Parametern $\Phi_n^p(0)$ und $\tilde{\Phi}_n^p(0)$. In der Tat läßt sich relativ leicht der folgende Zusammenhang beweisen:

$$\Phi_n^p(0) = \tilde{\Phi}_n^{p-1}(0) . \tag{K.16}$$

Diese Beziehung ist deswegen so nützlich, weil sie es ermöglicht, auch diejenigen Integrale, welche die $\tilde{\Phi}_n^p(0)$ definieren, analytisch zu lösen.

Anhang L

Abschätzung von $(\mathcal{R}_k)_{\bar{\phi}\bar{\sigma}}$: Beweis der Ungleichung (7.14)

In diesem Teil des Anhangs beweisen wir die Ungleichung (7.14) aus Abschnitt 7.3. Zu diesem Zweck betrachten wir zunächst die Funktion

$$f(a, y) = a\sqrt{a(a-y)} - \sqrt{1-y} \quad (\text{L.1})$$

in den Parameterbereichen $a > 1$ und $0 \leq y \leq 2/5$. (Offensichtlich verschwindet diese Funktion für $a = 1$ identisch: $f(1, y) \equiv 0$.) Wie wir weiter unten sehen werden, erweist es sich für den Beweis von (7.14) als notwendig, eine obere Schranke für f zu kennen. Um diese bestimmen zu können, benötigt man die ersten beiden partiellen Ableitungen von f nach y . Für diese ergeben sich die beiden nachstehenden Ausdrücke:

$$\begin{aligned} f^{(0,1)}(a, y) &\equiv \frac{d}{dy}f(a, y) = -\frac{a^2}{2\sqrt{a(a-y)}} + \frac{1}{2\sqrt{1-y}}, \\ f^{(0,2)}(a, y) &\equiv \frac{d^2}{dy^2}f(a, y) = -\frac{a^3}{4[a(a-y)]^{\frac{3}{2}}} + \frac{1}{4(1-y)^{\frac{3}{2}}}. \end{aligned} \quad (\text{L.2})$$

Mit Hilfe dieser Ableitungen können nun für festes, aber beliebiges $a > 1$ die Extrema von f bzgl. y ermittelt werden. Da die Gleichung $f^{(0,1)}(a, y) = 0$ lediglich die Lösung

$$y = y_0(a) \equiv \frac{a(a+1)}{a^2 + a + 1} \quad (\text{L.3})$$

besitzt, kann höchstens an dieser Stelle ein Extremum von f vorliegen. Setzt man y_0 in die obige zweite Ableitung ein, so ergibt sich $f^{(0,2)}(a, y_0(a)) = (a^2 + a + 1)^{\frac{3}{2}}(a^3 - 1)/(4a^3)$. Da dieser Ausdruck für alle $a > 1$ strikt positiv ist, ist für alle Tupel $(a, y) \in (1, \infty) \times [0, 1]$ die Beziehung $f(a, y_0(a)) \leq f(a, y)$ erfüllt. Folglich ist f für beliebiges, aber festes $a > 1$ eine innerhalb des Intervalls $y \in [0, y_0]$ monoton fallende Funktion von y . Zudem stellt

$y_0 = y_0(a)$ eine in dem Parameterbereich $a \geq 1$ monoton wachsende Funktion von a dar, was die Beziehung $y_0(a) \geq y_0(a = 1) = 2/3$ nach sich zieht. Insgesamt ergibt sich daraus, daß f für alle $a > 1$ in dem Intervall $0 \leq y \leq 2/3$ monoton fällt, es gilt dort also $f(a, y) \leq f(a, 0)$. Insbesondere ist diese Beziehung natürlich auch in dem Intervall $y \in [0, 2/5]$ erfüllt, was für die nachfolgenden Betrachtungen von Interesse sein wird.

Der springende Punkt besteht nun darin, daß ein sehr einfacher Zusammenhang zwischen der Funktion f und $(\mathcal{R}_k)_{\bar{\phi}\bar{\sigma}}$ besteht, mit der Folge, daß sich die obigen Ergebnisse auf $(\mathcal{R}_k)_{\bar{\phi}\bar{\sigma}}$ übertragen lassen. Führt man nämlich in $f(a, y)$ die Ersetzungen

$$a \rightarrow \frac{\Lambda_l(4, 0)/k^2 + R^{(0)}(\Lambda_l(4, 0)/k^2)}{\Lambda_l(4, 0)/k^2}, \quad y \rightarrow \frac{R}{3\Lambda_l(4, 0)} = \frac{4}{l(l+3)} \quad (\text{L.4})$$

durch und multipliziert das Resultat dieser Ersetzungen mit $9\beta_k (\Lambda_l(4, 0))^2 / 8$, so erhält man den Ausdruck für $(\mathcal{R}_k)_{\bar{\phi}\bar{\sigma}}$ aus Gleichung (7.12) zurück. Dabei ist anzumerken, daß wegen der Beschränkung auf Eigenwerte $\Lambda_l(4, 0)$ mit $l \geq 2$ die zugehörigen y -Werte tatsächlich in dem Intervall $0 \leq y \leq 2/5$ liegen.¹ Ferner gilt $a > 1$, solange die Ungleichung $R^{(0)}(\Lambda_l(4, 0)/k^2) > 0$ erfüllt ist. Falls es l -Werte gibt, für die $R^{(0)}(\Lambda_l(4, 0)/k^2) = 0$ gilt, so verschwindet für ebendiese l der Cutoff des skalaren Sektors ohnehin vollständig: $(\mathcal{R}_k)_{\bar{\sigma}\bar{\sigma}} = (\mathcal{R}_k)_{\bar{\phi}\bar{\sigma}} = (\mathcal{R}_k)_{\bar{\phi}\bar{\phi}} = 0$. Somit darf man die oben hergeleitete Ungleichung $f(a, y) \leq f(a, 0)$ ohne Einschränkung auf $(\mathcal{R}_k)_{\bar{\phi}\bar{\sigma}}$ übertragen. Für $\beta_k > 0$ nimmt sie die folgende Form an:

$$(\mathcal{R}_k)_{\bar{\phi}\bar{\sigma}} \leq \frac{9}{8}\beta_k k^4 R^{(0)}(\Lambda_l(4, 0)/k^2) \{2\Lambda_l(4, 0)/k^2 + R^{(0)}(\Lambda_l(4, 0)/k^2)\}. \quad (\text{L.5})$$

Diese Ungleichung verwendet man nun, um $(\mathcal{R}_k)_{\bar{\phi}\bar{\phi}} (\mathcal{R}_k)_{\bar{\sigma}\bar{\sigma}} - (\mathcal{R}_k)_{\bar{\phi}\bar{\sigma}}^2$ abzuschätzen. Mit den Ausdrücken für $(\mathcal{R}_k)_{\bar{\sigma}\bar{\sigma}}$ und $(\mathcal{R}_k)_{\bar{\phi}\bar{\phi}}$ aus (7.12) ergibt sich

$$\begin{aligned} (\mathcal{R}_k)_{\bar{\phi}\bar{\phi}} (\mathcal{R}_k)_{\bar{\sigma}\bar{\sigma}} - (\mathcal{R}_k)_{\bar{\phi}\bar{\sigma}}^2 &\geq \left(\frac{k^4 R^{(0)}(\Lambda_l(4, 0)/k^2)}{32\pi g_k} \right)^2 \\ &\times \left\{ 18\pi g_k \beta_k (2\Lambda_l(4, 0)/k^2 + R^{(0)}(\Lambda_l(4, 0)/k^2)) - \frac{3}{16} \right\}. \end{aligned} \quad (\text{L.6})$$

Offensichtlich vereinfacht sich die Positivitätsbedingung $(\mathcal{R}_k)_{\bar{\phi}\bar{\phi}} (\mathcal{R}_k)_{\bar{\sigma}\bar{\sigma}} - (\mathcal{R}_k)_{\bar{\phi}\bar{\sigma}}^2 > 0$ hiermit zu

$$v(k, l, R) + 2\Lambda_l(4, 0)/k^2 + R^{(0)}(\Lambda_l(4, 0)/k^2) > \frac{1}{96\pi g_k \beta_k}. \quad (\text{L.7})$$

Dabei stellt v eine bestimmte nichtnegative Funktion von k , l und R dar: Sie enthält exakt diejenigen Anteile von $-(\mathcal{R}_k)_{\bar{\phi}\bar{\sigma}}^2$, welche auf der rechten Seite von (L.6) vernachlässigt wurden. Wegen $v \geq 0$ folgt aus (L.7) schließlich die hinreichende Bedingung (7.14), und genau das galt es zu zeigen.

¹Die Eigenwerte zu $l = 0$ und $l = 1$ sind hier auszuschließen, da sie, wie in Abschnitt 1.3 detailliert erläutert wird, zu unphysikalischen Eigenmoden gehören.

Anhang M

Globales Minimum bei Vorgabe von ebenen Wellen als Quellen

Dieser Teil des Anhangs widmet sich der Bestimmung des absoluten Minimums der Wirkung S_k^J aus Gleichung (9.8). Dabei beschränken wir unsere Betrachtungen auf Quellen der Form $J = \varepsilon \exp(ip_\mu x_\mu + i\beta)$, d.h. auf ebene Wellen J . Im ersten Abschnitt werden zwei Arten von Lösungen der zugehörigen Bewegungsgleichung untersucht. Jede von diesen liefert das absolute Minimum von S_k^J in einem gewissen Bereich des (ε, p, k) -Parameterraums. Im zweiten Abschnitt wird die Funktion $\varepsilon_k(p^2)$, die die Übergangsregion zwischen den beiden Bereichen beschreibt, in denen jeweils eine der angesprochenen Lösungen das Funktional S_k^J minimiert, exakt bestimmt. Der dritte Abschnitt enthält einige rechen-technische Details, welche für die im ersten Abschnitt angestellten Überlegungen benötigt werden.

M.1 Lösungen der Bewegungsgleichung

In Abschnitt 11.3 wird die effektive Mittelwertwirkung des skalaren Modells $\Gamma_k[\phi]$ für eine bestimmte Familie von klassischen Feldern ϕ berechnet, und zwar für ebene Wellen ϕ . Für diese Rechnungen ist es erforderlich, einige Eigenschaften derjenigen Lösungen von $\delta S_k^J / \delta \chi = 0$ zu kennen, bei denen auch die zugehörigen Quellen J ebene Wellen verkörpern. Dementsprechend beschränken wir die folgenden Betrachtungen auf Quellen der Form

$$J(x) = \varepsilon \exp(ip_\mu x_\mu + i\beta) , \quad (\text{M.1})$$

wobei $\varepsilon \geq 0$ eine reelle, positive "Amplitude" bezeichnet und die Phase β in dem Intervall $[0, 2\pi)$ liegt. Diese Einschränkung ermöglicht es uns, die minimierenden Feldkonfigurationen je nach Größe der Skala k entweder exakt (im Bereich $k^2 \geq M^2/2$) oder zumindest

näherungsweise für genügend kleine ε -Werte (im Bereich $k^2 \leq M^2/2$) zu bestimmen. Die Bewegungsgleichung, die es hier zu lösen gilt, nimmt für Quellen des Typs (M.1) die nachstehende Form an:

$$[\Omega(-\square) + k^2 + \lambda |\chi|^2] \chi = \varepsilon \exp(ip_\mu x_\mu + i\beta) . \quad (\text{M.2})$$

M.1.1 Die Lösung $\chi \propto \exp(ipx + i\beta)$

Die einfachste Lösung, die man sich hier vorstellen kann, entspricht einem Feld χ , das die Existenz des nichttrivialen, entarteten Minimums (10.15), welches in Abschnitt 10.2 im Fall $J = 0$ gefunden wurde, nicht "spürt" und mit derselben Frequenz und Phase oszilliert wie die Quelle. Setzt man den entsprechenden Ansatz

$$\chi(x) = \chi_0 \exp(ip_\mu x_\mu + i\beta) \quad (\text{M.3})$$

in die Bewegungsgleichung (M.2) ein, so ergibt sich daraus die Gleichung

$$\omega_k(p^2) \chi_0 + \lambda |\chi_0|^2 \chi_0 = \varepsilon . \quad (\text{M.4})$$

Sie hängt offenkundig nicht von x ab. Da ε als reell vorausgesetzt wurde, muß auch χ_0 reell sein. Somit vereinfacht sich (M.4) zu einer einfachen kubischen Gleichung in der reellen Variable χ_0 :

$$\chi_0^3 + \frac{\omega_k(p^2)}{\lambda} \chi_0 - \frac{\varepsilon}{\lambda} = 0 . \quad (\text{M.5})$$

Die allgemeine Lösung dieser Gleichung ist durch den folgenden Ausdruck festgelegt:

$$\chi_0(\varepsilon; p) = \left(\frac{\varepsilon}{2\lambda} + \sqrt{\frac{\varepsilon^2}{4\lambda^2} + \frac{\omega_k^3(p^2)}{27\lambda^3}} \right)^{1/3} + \left(\frac{\varepsilon}{2\lambda} - \sqrt{\frac{\varepsilon^2}{4\lambda^2} + \frac{\omega_k^3(p^2)}{27\lambda^3}} \right)^{1/3} . \quad (\text{M.6})$$

Je nach Vorzeichen von

$$\Delta \equiv \frac{\varepsilon^2}{4\lambda^2} + \frac{\omega_k^3(p^2)}{27\lambda^3} \quad (\text{M.7})$$

gilt es hier zwei Fälle zu unterscheiden. Ist Δ positiv, so verkörpert die Amplitude $\chi_0(\varepsilon; p)$ aus Gleichung (M.6) eine einfache, reelle Lösung von (M.5). Ist Δ hingegen negativ, dann wird die Quadratwurzel von Δ imaginär, was zur Folge hat, daß $\chi_0(\varepsilon; p)$ drei unterschiedliche reelle Lösungen von (M.5) umfaßt. Diese lassen sich so umschreiben, daß ihr reeller Charakter offenkundig wird. Man erhält dadurch

$$\chi_0^{(n)}(\varepsilon; p) = 2\sqrt{-\frac{\omega_k(p^2)}{3\lambda}} \cos \left[\frac{1}{3} \arccos \left(\frac{\varepsilon}{2} \sqrt{-\frac{27\lambda}{\omega_k^3(p^2)}} \right) + \frac{2\pi n}{3} \right] , \quad n = 0, 1, 2 . \quad (\text{M.8})$$

Es läßt sich relativ leicht verifizieren, daß lediglich eine dieser drei Lösungen ein ernsthafter Kandidat für das globale Minimum ist, und zwar $\chi_0^{(n=0)}$. Denn setzt man die durch (M.8) verkörperten Lösungen in die Wirkung S_k^J ein, so stellt man fest, daß der zu $\chi_0^{(n=0)}$ gehörige Lösungszweig eine kleinere Wirkung ergibt als die beiden anderen Lösungszweige.¹ Wenn man bedenkt, daß der Zweig $\chi_0^{(n=0)}$ der einzige von den dreien ist, der bei $\Delta = 0$ mit dem zu $\Delta \geq 0$ gehörigen Lösungszweig aus (M.6) zusammenfällt, ist dieses Ergebnis nicht sonderlich überraschend.

Kombiniert man nun die Ausdrücke aus den Gleichungen (M.6) und (M.8), die potentielle Minima in den komplementären Δ -Bereichen darstellen, so lassen sich Lösungen für den vollständigen Bereich von Δ -Werten formulieren. Diese decken dann automatisch auch den kompletten Bereich von ε -Werten ab. Man hat dabei die beiden folgenden Fälle zu unterscheiden. Gilt $\omega_k(p^2) \geq 0$, so ist Δ immer nichtnegativ. Folglich lautet der Kandidat für das globale Minimum in diesem Fall

$$\chi_{\min}(x) = \left[\left(\frac{\varepsilon}{2\lambda} + \sqrt{\Delta} \right)^{1/3} + \left(\frac{\varepsilon}{2\lambda} - \sqrt{\Delta} \right)^{1/3} \right] \exp(ip_\mu x_\mu + i\beta) . \quad (\text{M.9})$$

Wenn allerdings $\omega_k(p^2) < 0$ gilt, so muß man die beiden in den komplementären Bereichen $\Delta \geq 0$ und $\Delta < 0$ relevanten Lösungen passend zusammensetzen. Dadurch ergibt sich schließlich

$$\chi_{\min}(x) = \tilde{\chi}_0(\varepsilon; p) \exp(ip_\mu x_\mu + i\beta) . \quad (\text{M.10})$$

Hier stellt $\tilde{\chi}_0(\varepsilon; p)$ eine von ε , p , λ und k abhängige Funktion dar, die wie folgt definiert ist:²

$$\tilde{\chi}_0(\varepsilon; p) = \begin{cases} \left(\frac{\varepsilon}{2\lambda} + \sqrt{\Delta} \right)^{1/3} + \left(\frac{\varepsilon}{2\lambda} - \sqrt{\Delta} \right)^{1/3} , & \Delta \geq 0 \\ 2\sqrt{-\frac{\omega_k(p^2)}{3\lambda}} \cos \left[\frac{1}{3} \arccos \left(\frac{\varepsilon}{2} \sqrt{-\frac{27\lambda}{\omega_k^3(p^2)}} \right) \right] , & \Delta < 0 \end{cases} . \quad (\text{M.11})$$

M.1.2 Verkörpert $\chi \propto \exp(ipx + i\beta)$ das globale Minimum?

Es gilt jetzt noch zu untersuchen, ob die Lösungen (M.9) und (M.10) tatsächlich das absolute Minimum liefern, oder doch nur zu lokalen Extrema oder Sattelpunkten führen. Betrachten wir dazu zunächst den Bereich großer k -Werte: $k^2 \geq M^2/2$. In diesem Bereich ist die Beziehung $\omega_k(p^2) \geq 0$ immer erfüllt, was zur Folge hat, daß Δ nicht negativ werden kann. Nimmt man die entsprechende Lösung, also Gleichung (M.9), und läßt darin ε gegen Null laufen, so erhält man $\chi_{\min} = 0$. Wie bereits in Abschnitt 10.2 gezeigt wurde, stellt dieser Grenzwert in dem betrachteten k -Bereich die minimierende Feldkonfiguration

¹Der zugehörige Beweis wird in Anhang M.3 nachgereicht.

²Die λ - und k -Abhängigkeit wurde in der gewählten Notation unterdrückt.

bei verschwindender Quelle $J = 0$ dar. Setzt man ferner (M.9) in die linke Seite der Ungleichung (10.7) ein, so ergibt sich der offenkundig nichtnegative Ausdruck

$$\int \frac{d^d q}{(2\pi)^d} \left| \widetilde{\delta\chi}(q) \right|^2 \left\{ \Omega(q^2) + k^2 + \lambda \left[\left(\frac{\varepsilon}{2\lambda} + \sqrt{\Delta} \right)^{1/3} + \left(\frac{\varepsilon}{2\lambda} - \sqrt{\Delta} \right)^{1/3} \right]^2 \right\}. \quad (\text{M.12})$$

(Man beachte dabei, daß $\omega_k(q^2) = \Omega(q^2) + k^2$ gilt und daß für $k^2 \geq M^2/2$ die Beziehung $\omega_k(q^2) \geq 0$ erfüllt ist.³) Aus Gleichung (10.6) folgt dann direkt, daß die Lösung (M.9) der Bedingung für das globale Minimum $\Delta S_k \geq 0$ nachkommt. Somit stellt die Lösung (M.9) das Feld dar, das im Bereich $k^2 \geq M^2/2$ das absolute Minimum von S_k^J liefert; setzt man $\varepsilon = 0$, so erhält man das entsprechende Resultat aus Abschnitt 10.2 zurück.

Im nächsten Schritt wird der Fall $k^2 < M^2/2$ untersucht. In diesem Fall ist sowohl $\omega_k(p^2) \geq 0$ als auch $\omega_k(p^2) < 0$ möglich. Dementsprechend spielen in der folgenden Diskussion beide Lösungen (M.9) und (M.10) eine Rolle. Zunächst einmal sollte hier erwähnt werden, daß die Amplituden beider Lösungen mit ansteigendem ε streng monoton wachsen, ohne dabei gegen einen endlichen Wert zu konvergieren. Das bedeutet nämlich, daß der Term $\lambda |\chi_{\min}|^2$ immer jeden möglichen negativen Wert von $\omega_k(q^2) \geq -M^2/2$ kompensieren kann, solange nur ε groß genug ist. Ist letzteres der Fall, so ist das Integral (M.12) bzw. das entsprechende Integral für die Lösung (M.10),

$$\int \frac{d^d q}{(2\pi)^d} \left| \widetilde{\delta\chi}(q) \right|^2 \left[\Omega(q^2) + k^2 + \lambda \tilde{\chi}_0^2(\varepsilon; p) \right], \quad (\text{M.13})$$

positiv. Da dann auch ΔS_k automatisch positiv ist, liefern die Lösungen (M.9) und (M.10) in ihrem jeweiligen Gültigkeitsbereich unter diesen Voraussetzungen, d.h. bei genügend großen ε -Werten, folglich das absolute Minimum.

Andererseits konvergieren die Lösungen (M.9) und (M.10) im Limes $\varepsilon \rightarrow 0$ *nicht* gegen die nichttriviale, entartete Lösung (10.15), die für $k^2 < M^2/2$ im quellenfreien Fall zum absoluten Minimum von S_k^J führt. Sogar im Fall von Impulsen $p_\mu = M n_\mu$ mit $|n| = 1$ geht aus dem Grenzübergang $\varepsilon \rightarrow 0$ lediglich eine eindeutige, d.h. nichtentartete Lösung der Form (10.15) hervor, deren Einheitsvektor n und Phase β durch die Quelle festgelegt sind. (Bei den in den Kapiteln 8-11 durchgeführten Untersuchungen stellt sich heraus, daß sich genau darin die spontane Brechung der anwesenden Symmetrien äußert.)

In Anbetracht dieser Ergebnisse läßt sich feststellen, daß für jedes Tupel (p, k) mit $|p| \neq M$ und $k^2 < M^2/2$ ein gewisser Wert $\varepsilon_k(p^2) > 0$ existiert, so daß für alle "Amplituden" $\varepsilon \geq \varepsilon_k(p^2)$ eine der beiden Lösungen (M.9) oder (M.10) das absolute Minimum ergibt. Dabei hängt es vom Vorzeichen von $\omega_k(p^2)$ ab, ob (M.9) oder (M.10) die "richtige" Lösung ist. Auf der anderen Seite werden die obigen Lösungen instabil gegenüber

³Der Impuls q sollte hier nicht mit dem Impuls der Quelle p verwechselt werden.

gewissen (nicht unbedingt infinitesimal kleinen) Fluktuationen und verkümmern somit zu Sattelpunkten oder lokalen (nichtglobalen) Extrema, sobald ε die Schwelle $\varepsilon_k(p^2)$ unterschreitet. Das globale Minimum entspricht dann einer anderen Feldkonfiguration. Diese muß bei genügend kleinen ε -Werten eine Verallgemeinerung der nichttrivialen Lösung des quellenfreien Falls (10.15) darstellen, und zwar derart, daß sie sich als Summe von (10.15) und Korrekturtermen von erster und höherer Ordnung in ε schreiben läßt.

Eine obere Schranke für ε_k :

Mit Hilfe der Bedingung (10.5) läßt sich für die Schwelle $\varepsilon_k(p^2)$, bei welcher der Übergang zwischen den beiden ε -Bereichen mit verschiedenartigem globalem Minimum stattfindet, eine obere Schranke $\tilde{\varepsilon}_k(p^2)$ bestimmen. Dazu muß man lediglich $\chi_0 = \hat{\chi}_0$, d.h. den kleinsten Wert für χ_0 , bei dem das erste Integral in (10.6) noch manifest positiv ist (oder verschwindet), in (M.5) einsetzen und die zugehörige Amplitude ε berechnen. Als Resultat erhält man

$$\tilde{\varepsilon}_k(p^2) = \frac{1}{2M^2} \sqrt{-\omega_k(M^2)/\lambda} (p^2 - M^2)^2. \tag{M.14}$$

Wegen der Beziehung $\tilde{\varepsilon}_k(p^2) \geq \varepsilon_k(p^2)$ ist die Bedingung $\varepsilon \geq \tilde{\varepsilon}_k(p^2)$ hinreichend dafür, daß (M.9) oder (M.10) das globale Minimum von S_k^J liefern.

Die bei festem, aber beliebigem Quellenimpuls p vorherrschende Bedingung $\varepsilon \geq \varepsilon_k(p^2)$ läßt sich in eine Bedingung für p umwandeln, die sich umgekehrt auf eine feste, aber beliebige Amplitude ε bezieht. Dazu muß man lediglich $\varepsilon \geq \tilde{\varepsilon}_k(p^2)$ nach p^2 auflösen. Daraus folgt, daß für jeden ε -Wert ein Impuls $p_k(\varepsilon)$ existiert, so daß für alle p^2 , die die Beziehung

$$\max(0, M^2 - p_k^2(\varepsilon)) \leq p^2 \leq M^2 + p_k^2(\varepsilon) \tag{M.15}$$

erfüllen, die Lösungen (M.9) oder (M.10) das absolute Minimum verkörpern. Eine obere Schranke $\tilde{p}_k^2(\varepsilon)$ für $p_k^2(\varepsilon)$ ist hier durch den folgenden Ausdruck gegeben:

$$\tilde{p}_k^2(\varepsilon) = \sqrt{\frac{2M^2 \varepsilon}{\sqrt{-\omega_k(M^2)/\lambda}}} \leq p_k^2(\varepsilon). \tag{M.16}$$

(In Anhang M.2 wird bewiesen, daß eigentlich sogar $\tilde{\varepsilon}_k(p^2) = \varepsilon_k(p^2)$ gilt und somit auch $\tilde{p}_k^2(\varepsilon) = p_k^2(\varepsilon)$ erfüllt ist.)

Der Ausnahmefall $|p| = M$:

Bei Quellenimpulsen $p_\mu = Q_{0\mu} = Mn_\mu$ mit $|n| = 1$ gestaltet sich die Sachlage etwas subtiler. Zunächst einmal läßt sich leicht verifizieren, daß in diesem Fall $\tilde{\chi}_0(\varepsilon; Q_0) > \hat{\chi}_0$

für alle $\varepsilon > 0$ gilt. Folglich liefert (im Bereich $k^2 < M^2/2$) die Lösung (M.10) für jede nichtverschwindende Quelle der Form $J = \varepsilon \exp(iQ_{0\mu}x_\mu + i\beta)$ das absolute Minimum von S_k^J . Dabei übernimmt die Lösung sowohl die Phase der Quelle als auch die Richtung und den Betrag ihres Impulsvektors. Somit sind in (M.10) neben $|p| = M$ auch $p_\mu/|p|$ und β eindeutig festgelegt. Dies ändert sich auch nicht, wenn man die Quelle adiabatisch abschaltet, d.h. den Grenzübergang $\varepsilon \rightarrow 0$ vollzieht. Die Lösung konvergiert dabei gegen $\hat{\chi}_0 \exp(iMn_\mu x_\mu + i\beta)$, wobei n_μ und β immer noch fest sind. Setzt man diesen Ausdruck in das Integral (M.13) ein, so verschwindet dieses. Folglich ist die Bedingung für ein globales Minimum erfüllt. Dennoch ergibt sich nicht das "eigentliche" Vakuum des quellenfreien Falls, dessen Impulsrichtung und Phase ja *freie* Parameter verkörpern. Umgekehrt ist ein "unstetiges" Verhalten zu erkennen, wenn man, ausgehend von der entarteten Vakuumlösung (10.15), eine Quelle der Form $\varepsilon \exp(iQ_{0\mu}x_\mu + i\beta)$ anschaltet. Das globale Minimum wird gezwungen, n_μ und β von der Quelle zu übernehmen. (Dieser Vorgang ist vollständig analog zu dem wohlbekanntem "Abkippen" eines "Mexican-hat"-Potentials, das durch das Anschalten einer symmetriebrechenden Quelle verursacht wird.)

Perturbative Entwicklung um $\chi_{\min}(J = 0)$:

Kehren wir nun zu dem Fall $p_\mu \neq Mn_\mu$ zurück. Wie oben schon erwähnt wurde, muß die minimierende Lösung bei genügend kleinen ε -Werten derart von ε abhängen, daß sie (für $k^2 < M^2/2$) im Limes $\varepsilon \rightarrow 0$ gegen die entartete Vakuumlösung (10.15) konvergiert. Es wird sich weiter unten herausstellen, daß die gesuchte Lösung mit denselben freien Parametern ausgestattet ist wie (10.15). Dementsprechend ist sie in gleichem Maße entartet wie (10.15), so daß die Mannigfaltigkeit des Grundzustands auch in diesem Fall $S^1 \times S^{d-1}$ entspricht.

An dieser Stelle müssen zwei wichtige Punkte angesprochen werden, die diese Lösung betreffen. Zum einen liegen keine Informationen darüber vor, ob der Übergang zwischen den gesuchten entarteten Lösungen und den nichtentarteten Lösungen (M.9), (M.10) wie im Fall $|p| = M$ unstetig abläuft. (Eine stetig schwindende bzw. anwachsende Abhängigkeit von den freien Parametern wäre hier ebenso denkbar.) Zum anderen ist nicht bekannt, wo dieser Übergang überhaupt stattfindet, denn es ist nicht von vornherein ausgeschlossen, daß es Zwischenbereiche gibt, in denen sowohl die gesuchte entartete Lösung für hinreichend kleine ε als auch diejenige für $\varepsilon \geq \varepsilon_k(p^2)$ nicht das globale Minimum liefern. Die Lösungen, die in diesen potentiellen Zwischenbereichen S_k^J minimieren, müßten dann die Eigenschaft besitzen, daß sie die beiden uns bekannten Bereiche $\varepsilon \rightarrow 0$ und $\varepsilon \geq \varepsilon_k(p^2)$ miteinander verbinden. Es liegt zwar kein direkter Beweis vor, der die Existenz dieser "Zwischenlösungen" ausschließt, dennoch erscheint es natürlicher anzunehmen, daß es sie nicht gibt. In diesem Fall läge der Übergangspunkt bei $\varepsilon_k(p^2)$. Das würde wiederum be-

deuten, daß im Gegensatz zum Fall $p_\mu = Mn_\mu$ die Entartung erst *unterhalb von* und nicht *bei* einem bestimmten Wert von ε auftritt, denn die Quelle ist bei Erreichen des Schwellenwerts $\varepsilon_k(p^2)$ von Null verschieden und zwingt dem globalen Minimum immer noch ihre Phase und die Richtung ihres Impulses auf.

Von nun an werden wir der Einfachheit halber den Bereich hinreichend kleiner ε -Werte, in dem die zu bestimmende Lösung das globale Minimum verkörpert, mit dem vollständigen Bereich $\varepsilon < \varepsilon_k(p^2)$ identifizieren. Man sollte dabei aber im Hinterkopf behalten, daß in diesem Bereich zusätzlich die oben angesprochenen potentiellen Zwischenlösungen existieren könnten. Die numerischen Ergebnisse, die in Abschnitt 11.3 präsentiert werden, stützen aber die Annahme, daß sie nicht vorhanden sind.

Betrachten wir nun die Struktur der Lösung, die im Bereich $\varepsilon < \varepsilon_k(p^2)$ das absolute Minimum beschreibt, etwas genauer. Den obigen Überlegungen zufolge läßt sich diese Lösung durch die nachstehende Reihenentwicklung beschreiben:

$$\chi_{\min}(x) = \hat{\chi}_0 \exp(iQ_{0\mu}x_\mu + i\alpha) + \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^n \varphi^{(n)}(x) . \quad (\text{M.17})$$

Um den Term erster Ordnung $\varphi^{(1)}$ zu berechnen, setzt man den Ansatz

$$\chi_{\min}(x) = \hat{\chi}_0 \exp(iQ_{0\mu}x_\mu + i\alpha) + \varepsilon \varphi^{(1)}(x) + \mathcal{O}(\varepsilon^2) \quad (\text{M.18})$$

in die Bewegungsgleichung (M.2) ein und vergleicht die Koeffizienten der in ε linearen Terme. Das führt zu der Gleichung

$$\begin{aligned} & [\omega_k(-D^2) - 2\omega_k(M^2)] \varphi^{(1)} \exp(-iQ_{0\mu}x_\mu - i\alpha) - \omega_k(M^2) \varphi^{(1)*} \exp(iQ_{0\mu}x_\mu + i\alpha) \\ & = \exp(i(p_\mu - Q_{0\mu})x_\mu + i(\beta - \alpha)) . \end{aligned} \quad (\text{M.19})$$

Hier stellt D_μ einen Differentialoperator dar, der wie folgt definiert ist:

$$D_\mu \equiv \partial_\mu + iQ_{0\mu} . \quad (\text{M.20})$$

Aus technischen Gründen erweist es sich an dieser Stelle als günstig, das Feld

$$\psi(x) \equiv \varphi^{(1)}(x) \exp(-iQ_{0\mu}x_\mu - i\alpha) \quad (\text{M.21})$$

einzuführen. Damit läßt sich die Gleichung (M.19) nämlich in eine etwas überschaubarere Form bringen:

$$[\omega_k(-D^2) - 2\omega_k(M^2)] \psi - \omega_k(M^2) \psi^* = \exp(i(p_\mu - Q_{0\mu})x_\mu + i(\beta - \alpha)) . \quad (\text{M.22})$$

Offensichtlich läßt sich die allgemeinste Lösung dieser Gleichung aus dem nachstehenden Ansatz gewinnen:

$$\psi(x) = f \exp(i(p_\mu - Q_{0\mu})x_\mu + i(\beta - \alpha)) + g \exp(-i(p_\mu - Q_{0\mu})x_\mu - i(\beta - \alpha)) . \quad (\text{M.23})$$

Setzt man diesen Ansatz in die Gleichung (M.22) ein, so bedarf es nur einiger relativ einfacher Umformungen, um an die expliziten Ausdrücke für die Parameter f und g zu gelangen. Man erhält

$$f = \frac{\omega_k((2Q_0 - p)^2) - 2\omega_k(M^2)}{[\omega_k((2Q_0 - p)^2) - 2\omega_k(M^2)] [\omega_k(p^2) - 2\omega_k(M^2)] - \omega_k^2(M^2)}, \quad (\text{M.24})$$

$$g = \frac{\omega_k(M^2)}{[\omega_k((2Q_0 - p)^2) - 2\omega_k(M^2)] [\omega_k(p^2) - 2\omega_k(M^2)] - \omega_k^2(M^2)}. \quad (\text{M.25})$$

Indem man die obigen Ausdrücke für f und g in (M.23) einsetzt und das Resultat mit $\exp(iQ_{0\mu}x_\mu + i\alpha)$ multipliziert, gelangt man schließlich an den gesuchten Ausdruck für $\varphi^{(1)}$. Damit läßt sich dann die im Skalenbereich $k^2 < M^2/2$ vorherrschende Lösung von $\delta S_k^J / \delta \chi = 0$ bei hinreichend kleiner Quellenamplitude ε in guter Näherung durch das nachstehende Resultat beschreiben:

$$\begin{aligned} \chi_{\min}(x) &= \hat{\chi}_0 \exp(iQ_{0\mu}x_\mu + i\alpha) \\ &+ \varepsilon \frac{[\omega_k((2Q_0 - p)^2) - 2\omega_k(M^2)] + \omega_k(M^2) \exp(2i(Q_{0\mu} - p_\mu)x_\mu + 2i(\alpha - \beta))}{[\omega_k((2Q_0 - p)^2) - 2\omega_k(M^2)] [\omega_k(p^2) - 2\omega_k(M^2)] - \omega_k^2(M^2)} \\ &\times \exp(ip_\mu x_\mu + i\beta) + \mathcal{O}(\varepsilon^2). \end{aligned} \quad (\text{M.26})$$

Dieses Ergebnis ist natürlich völlig äquivalent zu dem Ausdruck, der sich ergibt, wenn man (11.2) mit (11.3) kombiniert. Wie die entartete Vakuumlösung, die sich im quellenfreien Fall ergibt, so wird auch das Minimum (M.26) durch die Richtung von $Q_{0\mu}$ und die Phase α parametrisiert. Bei der "Resonanz" $|p| = M$ ist die Entwicklung (M.26) nicht für sämtliche Richtungen des Quellenimpulses p_μ wohldefiniert; der Nenner von $\varphi^{(1)}$ verschwindet nämlich, falls p_μ und $Q_{0\mu}$ parallel sind. Das unterstreicht, daß dieser Fall eine Sonderstellung einnimmt, wie bereits weiter oben ausgiebig erläutert wurde.

M.2 Eine notwendige Bedingung für das globale Minimum

Eine Feldkonfiguration χ_{\min} liefert genau dann das globale Minimum der Wirkung S_k^J , wenn sie die Bewegungsgleichung (M.2) löst und außerdem für alle Fluktuationen $\delta\chi$ zu einem nichtnegativen Wert von $\Delta S_k[\chi_{\min}, \delta\chi]$ führt. Dabei ist das Funktional ΔS_k durch den Ausdruck aus Gleichung (10.4) definiert. In Abschnitt 10.1 wurde ΔS_k in geeigneter Weise zerlegt, so daß sich daraus eine hinreichende Bedingung für das globale Minimum entnehmen ließ, und zwar Gleichung (10.7). Aus dieser ergibt sich, daß ΔS_k für ebene

Wellen $\chi_{\min} = \chi_0 \exp(ip_\mu x_\mu + i\alpha)$ immer positiv (oder Null) ist, solange zumindest eine der beiden Ungleichungen $k^2 \geq M^2/2$ oder $\chi_0 \geq \hat{\chi}_0$ erfüllt ist. In diesem Abschnitt werden wir beweisen, daß die hinreichende Bedingung (10.7) gleichzeitig zu einer *notwendigen* wird, falls die Quellen ebene Wellen darstellen. Das hat zur Folge, daß die Lösungen (M.9) und (M.10) im Skalenbereich $k^2 < k_{\text{cr}}^2 = M^2/2$ zu Sattelpunkten werden, sobald die Quellenamplitude ε die jeweilige Schwelle $\varepsilon_k(p^2) = \tilde{\varepsilon}_k(p^2)$ unterschreitet und somit die Ungleichung $\chi_0(\varepsilon; p) < \hat{\chi}_0$ bzw. $\tilde{\chi}_0(\varepsilon; p) < \hat{\chi}_0$ erfüllt ist. Denn in diesem Fall existieren immer gewisse (infinitesimale) Fluktuationen, die ΔS_k negativ werden lassen, was im folgenden explizit gezeigt werden wird.

Wir beginnen den Beweis damit, ΔS_k aus (10.4) in die folgende Form zu bringen:

$$\begin{aligned} \Delta S_k[\chi_{\min}, \delta\chi] &= \frac{1}{2} \int d^d x (\delta\chi^*, \delta\chi) \hat{S}_k^{(2)}[\chi_{\min}, \delta\chi] \begin{pmatrix} \delta\chi \\ \delta\chi^* \end{pmatrix} \\ &+ \frac{\lambda}{2} \int d^d x \{2(\chi_{\min}^* \delta\chi + \chi_{\min} \delta\chi^*) |\delta\chi|^2 + |\delta\chi|^4\}. \end{aligned} \quad (\text{M.27})$$

Man setzt nun $\chi_{\min} = \chi_0 \exp(ip_\mu x_\mu + i\beta)$ in (M.27) ein und diagonalisiert dann den in (11.5) eingeführten Matrix-Differentialoperator $\hat{S}_k^{(2)}$. Analog zu dem in Anhang N berechneten Ausdruck (N.5) erhält man dadurch für den Anteil von ΔS_k , der quadratisch in den Fluktuationen ist, das nachstehende Resultat:

$$\begin{aligned} \Delta S_k^{\text{quad}}[\chi_0 \exp(ip_\mu x_\mu + i\beta), \delta\chi] &\equiv \frac{1}{2} \int d^d x (\delta\chi^*, \delta\chi) \hat{S}_k^{(2)}[\chi_{\min}, \delta\chi] \begin{pmatrix} \delta\chi \\ \delta\chi^* \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \int d^d x \left\{ \Psi_1(\delta\chi) \tilde{\Lambda}_{k,1}(-D_p^2) \Psi_1(\delta\chi) + \Psi_2(\delta\chi) \tilde{\Lambda}_{k,2}(-D_p^2) \Psi_2(\delta\chi) \right\}. \end{aligned} \quad (\text{M.28})$$

Die in (M.28) eingeführten Operatoren $\tilde{\Lambda}_{k,1}(-D_p^2)$ und $\tilde{\Lambda}_{k,2}(-D_p^2)$ sind wie folgt definiert:

$$\begin{aligned} \tilde{\Lambda}_{k,1/2}(-D_p^2) &\equiv \omega_k(D_p^2) + \omega_k(D_p^{*2}) + 4\lambda \chi_0^2 \mp \sqrt{4\lambda^2 \chi_0^4 + (\Omega(-D_p^{*2}) - \Omega(-D_p^2))^2}, \\ D_{p\mu} &\equiv \partial_\mu + ip_\mu, \quad D_{p\mu}^* \equiv \partial_\mu - ip_\mu. \end{aligned} \quad (\text{M.29})$$

Ferner hängen die *reellen* Felder Ψ_1 und Ψ_2 von $\delta\chi$ über Beziehungen ab, die denjenigen zwischen $K_{1/2}$ und J aus Gleichung (N.7) sehr ähneln. (Daher wird an dieser Stelle auf die explizite Angabe dieser Beziehungen verzichtet.) Dessen ungeachtet lassen sich Ψ_1 und Ψ_2 als neue, voneinander unabhängige Variablen behandeln.

Bei der Herleitung des notwendigen Kriteriums spielt der Operator $\tilde{\Lambda}_{k,1}(-D_p^2)$ eine wesentliche Rolle. Läßt man ihn nämlich auf $\exp(\pm iq_\mu x_\mu)$ wirken und fordert gleichzeitig, daß q_μ senkrecht auf p_μ steht ($q_\mu p_\mu = 0$), so erhält man den Schlüssel zum Beweis, in Gestalt der Gleichung

$$\tilde{\Lambda}_{k,1}((q_\mu \pm p_\mu)^2) = -2(q^2 + p^2) + \frac{1}{M^2} (q^2 + p^2)^2 + 2k^2 + 2\lambda \chi_0^2. \quad (\text{M.30})$$

Für $q^2 = M^2 - p^2$ ergibt sich daraus

$$\tilde{\Lambda}_{k,1}((q_\mu \pm p_\mu)^2) = 2k^2 - M^2 + 2\lambda \chi_0^2. \quad (\text{M.31})$$

Dieser Ausdruck ist offensichtlich für alle $\chi_0 < \hat{\chi}_0 \equiv \sqrt{(M^2 - 2k^2)/(2\lambda)}$ negativ. Daraus folgt, daß jede Fluktuation von der Form

$$(\Psi_1, \Psi_2) = A \begin{cases} \left(\cos(\sqrt{M^2 - p^2} m_\mu x_\mu), 0 \right) & , \text{ falls } p^2 < M^2 \\ \left(\exp(-\sqrt{p^2 - M^2} m_\mu x_\mu), 0 \right) & , \text{ falls } p^2 > M^2 \end{cases} \quad (\text{M.32})$$

für alle $\chi_0 < \hat{\chi}_0$ zu $\Delta S_k^{\text{quad}} < 0$ führt. Dabei verkörpert A einen von Null verschiedenen, reellen Parameter, und m_μ ist ein auf p_μ senkrecht stehender Einheitsvektor. Es läßt sich relativ leicht verifizieren, daß die obigen Fluktuationen (M.32) in folgender Beziehung zu den ursprünglichen Fluktuationen $\delta\chi$ stehen:

$$\delta\chi(x) = \Psi_1(x) \exp(ip_\mu x_\mu + i\beta). \quad (\text{M.33})$$

Somit erhält man den nachstehenden Ausdruck, wenn man (M.32) über die Beziehung (M.33) in das Funktional ΔS_k aus Gleichung (M.27) einsetzt:

$$\begin{aligned} & \Delta S_k [\chi_0 \exp(ip_\mu x_\mu + i\beta), \Psi_1(x) \exp(ip_\mu x_\mu + i\beta)] \\ &= \frac{1}{2} \int d^d x \{ (2k^2 - M^2 + 2\lambda \chi_0^2) \Psi_1^2(x) + 4\lambda \chi_0 \Psi_1^3(x) + \lambda \Psi_1^4(x) \} \end{aligned} \quad (\text{M.34})$$

Es gilt jetzt noch zu zeigen, daß man bei sehr kleinen Fluktuationen die obigen Ψ_1^3 - und Ψ_1^4 -Terme gegenüber dem Ψ_1^2 -Term vernachlässigen kann. Dazu wird das System in eine "Box" von endlichem Volumen $\mathcal{V} \equiv \int d^d x$ eingeschlossen und dann der freie Parameter A in (M.32) durch eine geeignete \mathcal{V} -abhängige Amplitude $\delta/\mathcal{N}(\mathcal{V})$ ersetzt. Dabei verkörpert δ einen beliebigen reellen (\mathcal{V} -unabhängigen) Parameter, und $\mathcal{N}(\mathcal{V})$ wird so gewählt, daß das Integral $\int d^d x \Psi_1^n(x)$ im Limes $\mathcal{V} \rightarrow \infty$ für $n = 2, 3, 4$ endlich bleibt und für $n = 2$ von Null verschieden ist. Für genügend kleine δ sind dann offensichtlich die Terme von dritter und vierter Ordnung in Ψ_1 vernachlässigbar, was für alle $\chi_0 < \hat{\chi}_0$ schließlich das gewünschte Resultat $\Delta S_k < 0$ nach sich zieht.

Gehen wir kurz noch etwas näher auf den \mathcal{V} -abhängigen Parameter $\mathcal{N}(\mathcal{V})$ ein. Es existieren natürlich diverse Möglichkeiten, ihn zu wählen. Eine erlaubte Wahl wird beispielsweise durch den nachstehenden Ausdruck verkörpert:

$$\mathcal{N}(\mathcal{V}) = \begin{cases} \sqrt{\mathcal{V}} & \text{für } p^2 < M^2 \\ C(\mathcal{V}_\nu) \int d^d x \exp(-\sqrt{p^2 - M^2} m_\mu x_\mu) & \text{für } p^2 > M^2 \end{cases}. \quad (\text{M.35})$$

Hier wurde $\mathcal{V}_\nu \equiv \int dx_\nu$ gesetzt, und $C(\mathcal{V}_\nu)$ ist wie folgt definiert: $C(\mathcal{V}_\nu) = 1$, falls $m_\nu \neq 0 \forall \nu$; ansonsten $C(\mathcal{V}_\nu) = 1/(\prod_{\nu:m_\nu=0} \sqrt{\mathcal{V}_\nu})$.

Abschließend sei noch einmal darauf hingewiesen, daß den obigen Resultaten zufolge $\hat{\chi}_0$ (im Skalenbereich $k < k_{\text{cr}}$) mit dem Schwellenwert von $\chi_0(\varepsilon; p)$ bzw. $\tilde{\chi}_0(\varepsilon; p)$ übereinstimmt, der den Bereich, in dem die ebenen Wellen (M.9) und (M.10) das absolute Minimum liefern, von demjenigen trennt, in dem die entartete Lösung (M.17) die Wirkung S_k^J global minimiert. Daraus folgt wiederum, daß $\tilde{\varepsilon}_k(p^2) = \varepsilon_k(p^2)$ gilt.

M.3 Wie gelangt man an das ‘‘richtige’’ $\chi_0^{(n)}$?

Dieser Teil des Anhangs liefert den noch ausstehenden Beweis dafür, daß nur eine der drei Lösungen

$$\chi_0^{(n)}(\varepsilon; p) \exp(ip_\mu x_\mu + i\beta) , \quad n = 0, 1, 2 , \quad (\text{M.36})$$

welche in dem durch $\Delta \equiv \varepsilon^2/(4\lambda^2) + \omega_k^3(p^2)/(27\lambda^3) < 0$ charakterisierten Parameterbereich gefunden wurden, ein echter Kandidat für das globale Minimum von S_k^J ist, und zwar die Lösung mit $n = 0$. Dazu muß man lediglich zeigen, daß diese Lösung zu einer geringeren Wirkung führt als die beiden anderen. Beginnen wir den Beweis damit, uns die Gestalt der Amplituden $\chi_0^{(n)}(\varepsilon; p)$ wieder ins Gedächtnis zu rufen. Sie sind von der Form

$$\chi_0^{(n)}(\varepsilon; p) = 2\sqrt{-\frac{\omega_k(p^2)}{3\lambda}} \cos\left(\frac{\theta + 2\pi n}{3}\right) , \quad n = 0, 1, 2 , \quad (\text{M.37})$$

wobei θ folgendermaßen definiert ist:

$$\theta = \arccos\left(\frac{\varepsilon}{2}\sqrt{-\frac{27\lambda}{\omega_k^3(p^2)}}\right) . \quad (\text{M.38})$$

Setzt man (M.36) in S_k^J ein, so erhält man dadurch

$$S_k^J \left[\chi_0^{(n)}(\varepsilon; p) \exp(ip_\mu x_\mu + i\beta); J \right] = \mathcal{V} \frac{4\omega_k^2(p^2)}{3\lambda} [-2z^4 + z^2] . \quad (\text{M.39})$$

Um S_k^J in diese Form zu bringen, wurde der Parameter

$$z \equiv \cos\left(\frac{\theta + 2\pi n}{3}\right) \quad (\text{M.40})$$

eingeführt und die Beziehung

$$\cos \theta = 4z^3 - 3z \quad (\text{M.41})$$

benutzt. Untersuchen wir nun die Struktur der in (M.39) auftauchenden Funktion $f(z) = -2z^4 + z^2$. Sie hat Nullstellen bei $z = 0$ und $z = \pm 1/\sqrt{2}$ und weist ein lokales Minimum

bei $z = 0$ und zwei absolute Maxima bei $z = \pm 1/2$ auf. Demzufolge beschreibt $f(z)$ eine "umgekehrte Doppelmulde" ("reverse double well"). Wenn man die Wertebereiche kennt, die z für $n = 1, 2, 3$ abdeckt, dann kann man anhand der obigen Informationen über das Verhalten von $f(z)$ beurteilen, welche der drei Lösungen die geringste Wirkung ergibt. Es läßt sich relativ leicht nachprüfen, daß die gesuchten z -Intervalle, die hierfür benötigt werden, die folgende Form annehmen:

$$\begin{aligned} n = 0 & : \arccos z \in \left[0, \frac{\pi}{6}\right] \Rightarrow z \in \left[\frac{\sqrt{3}}{2}, 1\right] \\ n = 1 & : \arccos z \in \left[\frac{2\pi}{3}, \frac{5\pi}{6}\right] \Rightarrow z \in \left[-\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}\right] \\ n = 3 & : \arccos z \in \left[\frac{4\pi}{3}, \frac{3\pi}{2}\right] \Rightarrow z \in \left[-\frac{1}{2}, 0\right] \end{aligned} \quad (\text{M.42})$$

Aus der Struktur der Nullstellen und der Extrema folgt direkt, daß die symmetrische Funktion $f(z)$ im Bereich $z \in (-\infty, -1/2]$ monoton wächst, im Bereich $z \in [1/2, \infty)$ monoton fällt und nur im Bereich $z \in (-\infty, -1/\sqrt{2}) \cup (1/\sqrt{2}, \infty)$ negativ ist. Ordnet man die drei Intervalle aus (M.42) in dieses Bild ein, so läßt sich unmittelbar erkennen, daß die Lösung mit $n = 0$ eine geringere Wirkung produziert als die anderen beiden, mit einer Ausnahme: Für $\theta = \pi/2$ liefert der zur $n = 1$ -Lösung gehörige z -Wert ($z = -\sqrt{3}/2$) dieselbe Wirkung wie derjenige, der sich in diesem Fall für die $n = 0$ -Lösung ergibt ($z = \sqrt{3}/2$). Anhand dieser Resultate wird klar, daß nur die $n = 0$ -Lösung als Kandidat für das absolute Minimum von S_k^J in Frage kommt.

Anhang N

Symmetriebrechung durch eine feste Spinwellen-Konfiguration

In Abschnitt 11.1 wurden die Funktionale W_k und Γ_k für infinitesimal kleine Quellen mit Hilfe einer Sattelpunktentwicklung berechnet. Das globale Minimum, um das dabei entwickelt wird, ist entartet. Somit erscheint es natürlich, wie in Abschnitt 11.1 alle Feldkonfigurationen $\chi_{\min}(J \rightarrow 0) \approx \varphi^{(0)}$ gleichberechtigt zu behandeln, indem man den entwickelten Ausdruck über die Vakuummannigfaltigkeit integriert, siehe Gleichung (11.10). In diesem Teil des Anhangs werden wir untersuchen, inwieweit sich die Resultate ändern, wenn man die Integration über die Vakuummannigfaltigkeit wegläßt und nur eine einzige ebene Welle $\varphi^{(0)}$ mit fester Impulsrichtung n_μ und fester Phase α berücksichtigt.

Wir beginnen damit, das k -abhängige erzeugende Funktional für die verbundenen Greenschen Funktionen durch die nachstehende Gleichung zu definieren:

$$W_k^{n,\alpha}[J] \equiv \frac{1}{2} \int d^d x (J^*, J) \hat{S}_k^{(2)}[\varphi^{(0)}]^{-1} \begin{pmatrix} J \\ J^* \end{pmatrix} + \mathcal{O}(J^2 J^{*2}) \quad (\text{N.1})$$

Dieser Ausdruck ist vollkommen analog zur Gleichung (11.14), abgesehen davon, daß er keine Integrationen über n_μ und α enthält. (Der Einfachheit halber wurde hier außerdem der J -unabhängige Term $W_k[0]$ weggelassen.) Für die weiterführenden Rechnungen erweist es sich als günstig, den Matrix-Differentialoperator $\hat{S}_k^{(2)}[\varphi^{(0)}]^{-1}$, der die in (11.15) angegebene Gestalt annimmt, zu diagonalisieren. Das erreicht man durch die unitäre Transformation

$$\hat{S}_k^{(2)}[\varphi^{(0)}]^{-1} \rightarrow VU \hat{S}_k^{(2)}[\varphi^{(0)}]^{-1} U^\dagger V^\dagger, \quad (\text{N.2})$$

wobei U und V folgendermaßen definiert sind:

$$U = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} e^{-iMn_\mu x_\mu - i\alpha} & e^{iMn_\mu x_\mu + i\alpha} \\ -e^{-iMn_\mu x_\mu - i\alpha} & e^{iMn_\mu x_\mu + i\alpha} \end{pmatrix},$$

$$V = [A_k^2(-D^2) + B^2(-D^2)]^{-1/2} \begin{pmatrix} A_k(-D^2) & -B(-D^2) \\ B(-D^2) & A_k(-D^2) \end{pmatrix}, \quad (\text{N.3})$$

mit

$$A_k(-D^2) \equiv 2\omega_k(M^2) + \sqrt{4\omega_k^2(M^2) + B^2(-D^2)}, \quad B(-D^2) \equiv \Omega(-D^{*2}) - \Omega(-D^2), \\ D_\mu \equiv \partial_\mu + iMn_\mu, \quad D_\mu^* \equiv \partial_\mu - iMn_\mu. \quad (\text{N.4})$$

Dadurch läßt sich $W_k^{n,\alpha}$ in die folgende Form bringen:

$$W_k^{n,\alpha}[J] \equiv \frac{1}{2} \int d^d x \left\{ K_1(J; x, n, \alpha) \Lambda_{k,1}(-D^2)^{-1} K_1(J; x, n, \alpha) \right. \\ \left. + K_2(J; x, n, \alpha) \Lambda_{k,2}(-D^2)^{-1} K_2(J; x, n, \alpha) \right\} + \mathcal{O}(J^2 J^{*2}). \quad (\text{N.5})$$

Die hier eingeführten Operatoren

$$\Lambda_{k,1/2}(-D^2) \equiv \omega_k(-D^2) + \omega_k(-D^{*2}) - 4\omega_k(M^2) \mp \sqrt{4\omega_k^2(M^2) + B^2(-D^2)} \quad (\text{N.6})$$

verkörpern die inversen Propagatoren der *reellen* Felder K_1 und K_2 , die durch die nachstehenden Gleichungen definiert sind:

$$K_1(J; x, n, \alpha) \equiv [A_k^2(-D^2) + B^2(-D^2)]^{-1/2} \left\{ A_k(-D^2) \operatorname{Re} (J(x) e^{-iMn_\mu x_\mu - i\alpha}) \right. \\ \left. + iB(-D^2) \operatorname{Im} (J(x) e^{-iMn_\mu x_\mu - i\alpha}) \right\}, \\ K_2(J; x, n, \alpha) \equiv [A_k^2(-D^2) + B^2(-D^2)]^{-1/2} \left\{ A_k(-D^2) \operatorname{Im} (J(x) e^{-iMn_\mu x_\mu - i\alpha}) \right. \\ \left. + iB(-D^2) \operatorname{Re} (J(x) e^{-iMn_\mu x_\mu - i\alpha}) \right\}. \quad (\text{N.7})$$

Da die Integration über die Vakuummannigfaltigkeit fallengelassen wurde, kann bei (N.5) nun direkt die Legendre-Transformation durchgeführt werden. Somit erhält man für das Analogon der effektiven Mittelwertwirkung (11.20) den folgenden Ausdruck:

$$\Gamma_k^{n,\alpha}[\phi] = \frac{1}{2} \int d^d x \left\{ \Phi_1(\phi; x, n, \alpha) [\Lambda_{k,1}(-D^2) - 2k^2] \Phi_1(\phi; x, n, \alpha) \right. \\ \left. + \Phi_2(\phi; x, n, \alpha) [\Lambda_{k,2}(-D^2) - 2k^2] \Phi_2(\phi; x, n, \alpha) \right\} + \mathcal{O}(\phi^2 \phi^{*2}). \quad (\text{N.8})$$

Die Beziehungen zwischen den *reellen* (k -abhängigen klassischen) Feldern Φ_1 und Φ_2 einerseits und dem komplexen (k -abhängigen klassischen) Feld $\phi \equiv \delta W_k^{n,\alpha} / \delta J^*$ andererseits lassen sich aus den Gleichungen in (N.7) ableiten, indem man darin J durch ϕ sowie K_i

durch Φ_i ersetzt. Da die Felder Φ_i von n_μ und α abhängen, sind hier offenkundig sowohl die $\text{SO}(d)$ -Symmetrie von Raumzeit-Rotationen als auch die $\text{U}(1)$ -Phasensymmetrie gebrochen.

Offensichtlich verkörpern die Operatoren $\sigma_{k,1/2}(-D^2) \equiv \Lambda_{k,1/2}(-D^2) - 2k^2$ die effektiven kinetischen Terme der Felder Φ_1 und Φ_2 . Geht man zu einer Beschreibung mittels Impulsraumvariablen über, so läßt sich leicht feststellen, daß die kinetischen Terme bei der Skala $k = 0$ nichtnegative Ausdrücke darstellen. In der Tat ist $\sigma_{0,1}((p + Mn)^2) = \Lambda_{0,1}((p + Mn)^2)$ für alle Impulse $p \neq 0$ strikt positiv und verschwindet lediglich für $p = 0$: $\sigma_{0,1}(M^2) = \Lambda_{0,1}(M^2) = 0$. Ferner ist $\sigma_{0,2}((p + Mn)^2) = \Lambda_{0,2}((p + Mn)^2)$ sogar für alle Impulse p größer als Null. Folglich sind in der effektiven Theorie bei $k = 0$ alle Fluktuationen um das aus einer ebenen Welle bestehende Vakuum stabil.

Abschließend sei hier noch erwähnt, daß $\Gamma_k^{n,\alpha}$ bei der Skala $k = 0$ mit der Wirkung S_{fluct} übereinstimmt, welche in Abschnitt 8.2 diskutiert wurde. In Impulsraumdarstellung ergibt sich somit die Beziehung

$$\mathcal{K}_j(p^2, \theta) = \Lambda_{k=0,j}((p_\mu + Mn_\mu)^2) , \quad (\text{N.9})$$

wobei θ durch $\cos \theta = p_\mu n_\mu / |p|$ festgelegt ist.

Anhang O

Der effektive kinetische Term in drei und vier Dimensionen

In diesem Abschnitt werden die expliziten Ausdrücke für die in Abschnitt 11.1 diskutierten effektiven kinetischen Terme $\tilde{\Sigma}_k(|p| = Mq)$ aufgelistet. Sie wurden für die Fälle $d = 2$, $d = 3$ und $d = 4$ bei beliebigen Skalen k berechnet. Da die entsprechenden Resultate - insbesondere das für $d = 2$ - allerdings extrem umfangreich sind, beschränken sich die unten angegebenen Ausdrücke für den kinetischen Term $\tilde{\Sigma}_k(|p| = Mq)$ aus Platzgründen auf die beiden Spezialfälle $d = 3, k = 0$ und $d = 4, k = 0$.

$d = 3$:

$$\begin{aligned} & \tilde{\Sigma}_{k \rightarrow 0}(|p| = Mq) \\ &= M^2 \left\{ \frac{4(q^{10} - 4q^8 + 7q^6 - 6q^4 + 2q^2)^{1/2} - \arctan \left[\frac{q(q^6 - 4q^5 + q^4 + 8q^3 - 4q^2 - 8q + 6)}{(q^{10} - 4q^8 + 7q^6 - 6q^4 + 2q^2)^{1/2}} \right]}{4(q^4 - 2q^2 + 2)(q^{10} - 4q^8 + 7q^6 - 6q^4 + 2q^2)^{1/2}} \right. \\ & \quad \left. + \frac{4(q^{10} - 4q^8 + 7q^6 - 6q^4 + 2q^2)^{1/2} + \arctan \left[\frac{q(q^6 + 4q^5 + q^4 - 8q^3 - 4q^2 + 8q + 6)}{(q^{10} - 4q^8 + 7q^6 - 6q^4 + 2q^2)^{1/2}} \right]}{4(q^4 - 2q^2 + 2)(q^{10} - 4q^8 + 7q^6 - 6q^4 + 2q^2)^{1/2}} \right\}^{-1} \quad (\text{O.1}) \end{aligned}$$

$d = 4$:

$$\begin{aligned} \tilde{\Sigma}_{k \rightarrow 0}(|p| = Mq) &= 8M^2 q^2 \left\{ \frac{16q^6 - 32q^4 + 32q^2 - 2}{(q^4 - 2q^2 + 2)^2} + 2(q-1)^{-1} (q^4 - 2q^2 + 2)^{-5/2} \right. \\ & \quad \left. \times \left(\frac{(q^7 - 7q^6 + 13q^5 + 5q^4 - 27q^3 + 5q^2 + 29q - 19)^2}{(q+1)^2 (q^{12} - 22q^{10} + 163q^8 - 436q^6 + 731q^4 - 670q^2 + 361)} \right)^{1/2} \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \times \left\{ (q-1)(q^4 - 2q^2 + 2)^{1/2} \left[\frac{1}{2} \frac{(q+1)(q^6 - 11q^4 + 21q^2 - 19)}{q^7 - 7q^6 + 13q^5 + 5q^4 - 27q^3 + 5q^2 + 29q - 19} \right. \right. \\
& \left. \left. + \frac{1}{2} \left(\frac{(q+1)^2(q^{12} - 22q^{10} + 163q^8 - 436q^6 + 731q^4 - 670q^2 + 361)}{(q^7 - 7q^6 + 13q^5 + 5q^4 - 27q^3 + 5q^2 + 29q - 19)^2} \right)^{1/2} \right]^{1/2} \right. \\
& \left. + \text{sign} \left(\frac{q(q^4 - 2q^2 + 2)^{1/2}}{q^7 - 7q^6 + 13q^5 + 5q^4 - 27q^3 + 5q^2 + 29q - 19} \right) \right. \\
& \times (q^5 + 3q^4 - 2q^3 - 6q^2 + 2q + 6) \\
& \times \left[-\frac{1}{2} \frac{(q+1)(q^6 - 11q^4 + 21q^2 - 19)}{q^7 - 7q^6 + 13q^5 + 5q^4 - 27q^3 + 5q^2 + 29q - 19} \right. \tag{O.2} \\
& \left. \left. + \frac{1}{2} \left(\frac{(q+1)^2(q^{12} - 22q^{10} + 163q^8 - 436q^6 + 731q^4 - 670q^2 + 361)}{(q^7 - 7q^6 + 13q^5 + 5q^4 - 27q^3 + 5q^2 + 29q - 19)^2} \right)^{1/2} \right]^{1/2} \right\}^{-1}
\end{aligned}$$

Anhang P

Die Vier-Punkt-Funktion

Um Informationen über das effektive Potential $U_k(A; p^2)$ im Bereich $A < A_{\text{triv}}(k)$, $k < k_{\text{cr}}$, zu gewinnen, wurde in Abschnitt 11.3 seine durch Gleichung (11.38) bestimmte Reihenentwicklung um $A = 0$ bis zur vierten Ordnung in A studiert. In diesem Teil des Anhangs wird der dabei auftretende Koeffizient $u_k^{(4)}(p)$ berechnet, der den Beitrag vierter Ordnung von (11.38) verkörpert.

Für die folgenden Rechnungen setzen wir voraus, daß wir uns im Skalenbereich $k < k_{\text{cr}}$ bewegen und daß die Quellen ebene Wellen $J = \varepsilon \exp(ip_\mu x_\mu + i\beta)$ sind, die die Bedingungen $|p| \neq M$ und $\varepsilon < \varepsilon_k(p^2)$ erfüllen. Das hat zur Folge, daß das Minimum von S_k^J entartet ist und die zugehörige Feldkonfiguration χ_{min} durch die Entwicklung (M.17) aus Anhang M.1 bestimmt ist. Aus Abschnitt 11.1 resultiert dann wiederum, daß das erzeugende Funktional W_k in der klassischen Näherung durch den nachstehenden Ausdruck beschrieben wird:

$$\exp \{W_k[J]\} = N_k \int_0^{2\pi} d\alpha \int d\mu(n) \exp \{-S_k^J[\chi_{\text{min}}; J]\} . \quad (\text{P.1})$$

Betrachten wir zunächst die linke Seite dieser Gleichung. Aufgrund der $U(1)$ -Invarianz und der Analytizität in J und J^* , die wir im Fall von hinreichend kleinen $|J|$ voraussetzen, besitzt W_k eine Entwicklung der Form

$$W_k [J = \varepsilon \exp(ip_\mu x_\mu + i\beta)] = \mathcal{V} \left[-C_k + (\Sigma_k(p^2) + k^2)^{-1} \varepsilon^2 + G_k^{(4)}(p^2) \varepsilon^4 + \mathcal{O}(\varepsilon^6) \right] . \quad (\text{P.2})$$

Die ersten beiden Koeffizienten, C_k und $(\Sigma_k(p^2) + k^2)^{-1}$, sind bereits in Abschnitt 11.1 berechnet worden. Für den Rest dieses Abschnitts werden wir uns mit der Vier-Punkt-Funktion $G_k^{(4)}(p^2)$ befassen. Es sei darauf hingewiesen, daß diese hier nur von einem einzigen Impuls, p , abhängt. Das liegt daran, daß nur ebene Wellen als Quellen verwendet werden.

Als nächstes entwickelt man auch die rechte Seite von (P.1) bis einschließlich zur vierten Ordnung in ε . Nach einer recht umfangreichen Rechnung, auf die hier aus Gründen der Übersichtlichkeit nicht näher eingegangen wird, findet man, daß die entsprechenden Koeffizienten sich ausschließlich aus Termen zusammensetzen, die entweder proportional zu $\mathcal{V} \equiv \int d^d x$ sind oder δ -Funktionen von Impulsen enthalten. Wie man feststellt, leisten die letzteren keinen Beitrag. Somit erhält man

$$\frac{\partial^m}{\partial \varepsilon^m} S_k^J [\chi_{\min}; J = \varepsilon \exp(ip_\mu x_\mu + i\beta)] \Big|_{\varepsilon=0} \equiv \mathcal{V} s_k^{(m)}(p, n; \alpha, \beta), \quad (\text{P.3})$$

zumindest für $m = 0, \dots, 4$. Hier stellt $\{s_k^{(m)}(p, n; \alpha, \beta)\}$ einen Satz von Koeffizientenfunktionen dar, die von p, n, α und β abhängen. Setzt man nun (P.2) und (P.3) in (P.1) ein, so ergibt sich

$$\begin{aligned} & \exp \left\{ \mathcal{V} \left[-C_k + (\Sigma_k(p^2) + k^2) \varepsilon^2 + G_k^{(4)}(p^2) \varepsilon^4 + \mathcal{O}(\varepsilon^6) \right] \right\} \\ &= N_k \int_0^{2\pi} d\alpha \int d\mu(n) \exp \left\{ -\mathcal{V} \sum_{m=0}^4 \frac{1}{m!} s_k^{(m)}(p, n; \alpha, \beta) \varepsilon^m + \mathcal{O}(\varepsilon^5) \right\}. \end{aligned} \quad (\text{P.4})$$

Als nächstes entwickelt man beide Seiten von (P.4) nach ε und \mathcal{V} und vergleicht dann die Koeffizienten von $\mathcal{V}\varepsilon^4$. Das führt zu

$$G_k^{(4)}(p^2) = -\frac{N_k}{4! \mathcal{V}} \int_0^{2\pi} d\alpha \int d\mu(n) \frac{\partial^4}{\partial \varepsilon^4} S_k^J [\chi_{\min}; J = \varepsilon \exp(ip_\mu x_\mu + i\beta)] \Big|_{\varepsilon=0}. \quad (\text{P.5})$$

Um einen expliziten Ausdruck für den Integranden von (P.5) zu erhalten, setzt man in diesen den entwickelten Ausdruck für das nichttriviale, entartete Minimum (M.17) in S_k^J ein, wodurch sich die folgende Gleichung ergibt:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^4}{\partial \varepsilon^4} S_k^J [\chi_{\min}; J = \varepsilon \exp(ip_\mu x_\mu + i\beta)] \Big|_{\varepsilon=0} = 12\lambda \int d^d x \left\{ |\varphi^{(1)}|^4 \right. \\ & \left. + 2 |\varphi^{(1)}|^2 (\varphi^{(2)*}, \varphi^{(2)}) \begin{pmatrix} \varphi^{(0)} \\ \varphi^{(0)*} \end{pmatrix} + (\varphi^{(2)*}, \varphi^{(2)}) \begin{pmatrix} (\varphi^{(1)})^2 \varphi^{(0)*} \\ (\varphi^{(1)*})^2 \varphi^{(0)} \end{pmatrix} \right\}. \end{aligned} \quad (\text{P.6})$$

Die Felder $\varphi^{(0)}$ und $\varphi^{(1)}$ sind durch Gleichung (M.26) festgelegt. $\varphi^{(2)}$ läßt sich aus

$$\frac{\partial^2}{\partial \varepsilon^2} \frac{\delta S_k[\chi_{\min}]}{\delta \chi^*} \Big|_{\varepsilon=0} = 0 \quad (\text{P.7})$$

bestimmen. Die Gleichung (P.7) verkörpert den in ε quadratischen Anteil der Bewegungsgleichung (M.2); sie ergibt

$$\begin{pmatrix} \varphi^{(2)} \\ \varphi^{(2)*} \end{pmatrix} = -\lambda \hat{S}_k^{(2)} [\varphi^{(0)}]^{-1} \left[2 |\varphi^{(1)}|^2 \begin{pmatrix} \varphi^{(0)} \\ \varphi^{(0)*} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} (\varphi^{(1)})^2 \varphi^{(0)*} \\ (\varphi^{(1)*})^2 \varphi^{(0)} \end{pmatrix} \right]. \quad (\text{P.8})$$

für $G_k^{(4)}(p^2)$, und somit auch für die durch (P.2) beschriebene Entwicklung von W_k , zur Verfügung.

Führt man nun das klassische Feld $\phi = A \exp(ip_\mu x_\mu + i\beta)$ ein und benutzt die Definition des effektiven Potentials

$$\begin{aligned} \mathcal{V} U_k(A; p^2) &= \Gamma_k [\phi = A \exp(ip_\mu x_\mu + i\beta)] \\ &= \mathcal{V} [2A \varepsilon(A) - k^2 A^2] - W_k [J = \varepsilon(A) \exp(ip_\mu x_\mu + i\beta)] , \end{aligned} \quad (\text{P.11})$$

so kann man das entsprechende approximierte effektive Potential U_k , wie in Abschnitt 11.3 beschrieben, bestimmen. Die in (P.11) auftauchende Beziehung $\varepsilon(A)$ erhält man, indem man

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{2\mathcal{V}} \frac{\partial}{\partial \varepsilon} W_k [J = \varepsilon \exp(ip_\mu x_\mu + i\beta)] \\ &= \left[(\Sigma_k(p^2) + k^2)^{-1} \varepsilon + 2 G_k^{(4)}(p^2) \varepsilon^3 + \mathcal{O}(\varepsilon^5) \right] \end{aligned} \quad (\text{P.12})$$

invertiert. Es ergibt sich daraus

$$\varepsilon(A) = (\Sigma_k(p^2) + k^2) A - 2 (\Sigma_k(p^2) + k^2)^4 G_k^{(4)}(p^2) A^3 + \mathcal{O}(A^5) . \quad (\text{P.13})$$

Setzt man diesen Ausdruck in (P.11) ein, so erhält man

$$U_k(A; p^2) = C_k + \Sigma_k(p^2) A^2 - (\Sigma_k(p^2) + k^2)^4 G_k^{(4)}(p^2) A^4 + \mathcal{O}(A^6) . \quad (\text{P.14})$$

Der Vergleich mit (11.38) liefert letztendlich das nachstehende Resultat für den Koeffizienten $u_k^{(4)}(p)$:

$$u_k^{(4)}(p) = - (\Sigma_k(p^2) + k^2)^4 G_k^{(4)}(p^2) . \quad (\text{P.15})$$

Literaturverzeichnis

- [1] **P. Ovidius Naso**, *Metamorphoses* I, 1-2; mit Bezug auf den Themenkomplex der vorliegenden Arbeit könnte man die zitierten Zeilen in etwa wie folgt übersetzen: “*Es drängt mich der Geist, von Gebilden zu künden, deren Gestalt sich gewandelt hat.*” (Hier sind natürlich die Gebilde als die effektiven Wirkungsfunktionale zu interpretieren, und der Wandel symbolisiert ihren Renormierungsgruppenfluß.)
- [2] **C. M. Will**, *The Confrontation between General Relativity and Experiment*, Living Rev. Rel. 4 (2001) Nr. 4
- [3] Siehe beispielsweise: **S. W. Hawking** in *Relativity, Groups and Topology II*, Proceedings of the Les Houches Summer School 1983, B. S. De Witt, R. Stora (Eds.), North Holland, Amsterdam, 1984
- [4] **G. Parisi**, *The theory of non-renormalizable interactions: (I) The large N expansion*, Nucl. Phys. B 100 (1975) 368-388; *Symanzik's improvement program*, Nucl. Phys. B 254 (1985) 58-70;
K. Gawedzki, **A. Kupiainen**, *Renormalization of a non-renormalizable quantum field theory*, Nucl. Phys. B 262 (1985) 33-48; *Exact Renormalization for the Gross-Neveu Model of Quantum Fields*, Phys. Rev. Lett. 54 (1985) 2191-2194; *Renormalizing the Nonrenormalizable*, Phys. Rev. Lett. 55 (1985) 363-365;
B. Rosenstein, **B. J. Warr**, **S. H. Park**, *Dynamical symmetry breaking in four-fermion interaction models*, Phys. Rept. 205 (1991) 59-108;
C. de Calan, **P. A. Faria da Veiga**, **J. Magnen**, **R. Sénéor**, *Constructing the Three-Dimensional Gross-Neveu Model with a Large Number of Flavor Components*, Phys. Rev. Lett. 66 (1991) 3233-3236
- [5] **K. G. Wilson**, **J. Kogut**, *The renormalization group and the ε expansion*, Phys. Rept. 12 (1974) 75-200;

- K. G. Wilson**, *The renormalization group: Critical phenomena and the Kondo problem*, Rev. Mod. Phys. 47 (1975) 773-840
- [6] Hierzu findet sich ein Überblick in: **C. Bagnuls, C. Bervillier**, *Exact renormalization group equations: an introductory review*, Phys. Rept. 348 (2001) 91-157;
T. R. Morris, *Elements of the Continuous Renormalization Group*, Prog. Theor. Phys. Suppl. 131 (1998) 395-414
- [7] **J. Berges, N. Tetradis, C. Wetterich**, *Nonperturbative renormalization flow in quantum field theory and statistical physics*, Phys. Rept. 363 (2002) 223-386
- [8] **C. Wetterich**, *Effective Average Action in Statistical Physics and Quantum Field Theory*, Int. J. Mod. Phys. A 16 (2001) 1951-1982
- [9] **J. Polchinski**, *Renormalization and effective Lagrangians*, Nucl. Phys. B 231 (1984) 269-295
- [10] **S. Weinberg**, *Ultraviolet divergences in quantum theories of gravitation*, erschienen in *General Relativity, an Einstein Centenary Survey*, S. W. Hawking, W. Israel (Eds.), Cambridge University Press, 1979
- [11] **S. Weinberg**, *What is Quantum Field Theory, and What Did We Think It Is?*, e-print: hep-th/9702027
- [12] **M. Reuter**, *Nonperturbative Evolution Equation for Quantum Gravity*, Phys. Rev. D 57 (1998) 971-985 (e-print: hep-th/9605030)
- [13] **C. Wetterich**, *Effective Nonlocal Euclidean Gravity*, Gen. Rel. Grav. 30 (1998) 159-172
- [14] **F. Saueressig**, *Renormierungsgruppenfluß der Quanten-Einstein-Gravitation in der Einstein-Hilbert-Trunkierung und nichtlokalen Erweiterungen*, Diplomarbeit, Mainz 2001
- [15] **M. Reuter, F. Saueressig**, *A class of nonlocal truncations in Quantum Einstein Gravity and its renormalization group behavior*, wird in Phys. Rev. D erscheinen (e-print: hep-th/0206145)
- [16] **J. F. Donoghue**, *Leading quantum correction to the Newtonian potential*, Phys. Rev. Lett. 72 (1994) 2996-2999; *General relativity as an effective field theory: The leading quantum corrections*, Phys. Rev. D 50 (1994) 3874-3888

- [17] **A. Bonanno, M. Reuter**, *Quantum gravity effects near the null black hole singularity*, Phys. Rev. D 60 (1999) 084011 (e-print: gr-qc/9811026)
- [18] **A. Bonanno, M. Reuter**, *Renormalization group improved black hole spacetimes*, Phys. Rev. D 62 (2000) 043008 (e-print: hep-th/0002196)
- [19] **A. Bonanno, M. Reuter**, *Cosmology of the Planck era from a renormalization group for quantum gravity*, Phys. Rev. D 65 (2002) 043508 (e-print: hep-th/0106133); eine Anwendung ähnlicher Methoden auf das sehr späte Universum findet sich in: *Cosmology with self-adjusting vacuum energy density from a renormalization group fixed point*, Phys. Lett. 527 B (2002) 9-17 (e-print: astro-ph/0106468)
- [20] **N. C. Tsamis, R. P. Woodard**, *Relaxing the cosmological constant*, Phys. Lett. B 301 (1993) 351-357; *Strong infrared effects in quantum gravity*, Annals Phys. 238 (1995) 1-82;
I. Antoniadis, E. Mottola, *Four-dimensional quantum gravity in the conformal sector*, Phys. Rev. D 45 (1992) 2013-2025;
I. Antoniadis, P. O. Mazur, E. Mottola, *Fractal geometry of quantum spacetime at large scales*, Phys. Lett. B 444 (1998) 284-292
- [21] **W. Souma**, *Non-Trivial Ultraviolet Fixed Point in Quantum Gravity*, Prog. Theor. Phys. 102 (1999) 181-195
- [22] **M. Reuter, F. Saueressig**, *Renormalization Group Flow of Quantum Gravity in the Einstein-Hilbert-Truncation*, Phys. Rev. D 65 (2002) 065016 (e-print: hep-th/0110054)
- [23] **S. Falkenberg, S. D. Odintsov**, *Gauge Dependence of the Effective Average Action in Einstein Gravity*, Int. J. Mod. Phys. A 13 (1998) 607-623
- [24] **W. Souma**, *Gauge and Cutoff Function Dependence of the Ultraviolet Fixed Point in Quantum Gravity*, e-print: gr-qc/0006008
- [25] **M. Reuter**, *Newton's Constant isn't constant*, erscheint in *Annual Report 2000 of the International School in Physics and Mathematics, Tbilisi, Georgia*, e-print: hep-th/0012069
- [26] **A. Ashtekar**, *New Variables for Classical and Quantum Gravity*, Phys. Rev. Lett. 57 (1986) 2244-2247;
A. Ashtekar, *Lectures on non-perturbative canonical gravity*, World Scientific, Singapore, 1991;

Ein aktueller Überblick findet sich in: **A. Ashtekar**, *Quantum Geometry and Gravity: Recent Advances*, e-print: gr-qc/0112038; *Quantum Geometry In Action: Big Bang and Black Holes*; e-print: math-ph/0202008

- [27] **A. Perez**, *Finiteness of a spinfoam model for Euclidean quantum general relativity*, Nucl. Phys. B 599 (2001) 427-434;
L. Crane, A. Perez, C. Rovelli, *Perturbative Finiteness in Spin-Foam Quantum Gravity*, Phys. Rev. Lett. 87 (2001) 181301; *A finiteness proof for the Lorentzian state sum spinfoam model for quantum general relativity*, e-print: gr-qc/0104057
- [28] **J.-I. Sumi, W. Souma, K.-I. Aoki, H. Terao, K. Morikawa**, *Scheme Dependence of the Wilsonian Effective Action and Sharp Cutoff Limit of the Flow Equation*, e-print: hep-th/0002231
- [29] **J. W. York Jr.**, *Conformally invariant orthogonal decomposition of symmetric tensors on Riemannian manifolds and the initial-value problem of general relativity*, J. Math. Phys. 14 (1973) 456-464
- [30] **D. Dou, R. Percacci**, *The running gravitational couplings*, Class. Quant. Grav. 15 (1998) 3449-3468
- [31] **L. N. Granda**, *Nonperturbative renormalization group for Einstein gravity with matter*, Europhys. Lett. 42 (1998) 487-492;
L. N. Granda, S. D. Odintsov, *Exact renormalization group for $O(4)$ gauged supergravity*, Phys. Lett. B 409 (1997) 206-212
- [32] **A. A. Bytsenko, L. N. Granda, S. D. Odintsov**, *Exact renormalization group and running Newtonian coupling in higher-derivative gravity*, JETP Lett. 65 (1997) 600-604;
L. N. Granda, S. D. Odintsov, *Effective average action and nonperturbative renormalization group equation in higher derivative quantum gravity*, Grav. Cosmol. 4 (1998) 85-95
- [33] **K. S. Stelle**, *Classical Gravity with Higher Derivatives*, Gen. Rel. Grav. 9 (1978) 353-371; *Renormalization of higher-derivative quantum gravity*, Phys. Rev. D 16 (1977) 953-969
- [34] **E. Tomboulis**, *$1/N$ expansion and renormalization in quantum gravity*, Phys. Lett. 70 B (1977) 361-364;
J. Julve, M. Tonin, *Quantum gravity with higher derivative terms*, Nuovo

- Cimento 46 B (1978) 137-152;
- E. S. Fradkin, A. A. Tseytlin**, *Renormalizable asymptotically free quantum theory of gravity*, Phys. Lett. 104 B (1981) 377-381; *Higher derivative quantum gravity: One loop counterterms and asymptotic freedom*, Nucl. Phys. B 201 (1982) 469-491 (Titel wurde in der Zeitschrift geändert);
- I. G. Avramidi, A. O. Barvinsky**, *Asymptotic freedom in higher-derivative quantum gravity*, Phys. Lett. 159 B (1985) 269-274;
- N. H. Barth, S. M. Christensen**, *Quantizing fourth-order gravity theories: The functional integral*, Phys. Rev. D 28 (1983) 1876-1893
- [35] **O. Lauscher, M. Reuter**, *Ultraviolet fixed point and generalized flow equation of quantum gravity*, Phys. Rev. D 65 (2001) 025013 (e-print: hep-th/0108040)
- [36] **O. Lauscher, M. Reuter**, *Is Quantum Einstein Gravity nonperturbatively renormalizable?*, Class. Quant. Grav. 19 (2002) 483-492 (e-print: hep-th/0110021)
- [37] **O. Lauscher, M. Reuter**, *Towards nonperturbative renormalizability of Quantum Einstein Gravity*, erschienen in *Proceedings of the 5th Workshop on Quantum Field Theory under the Influence of External Conditions*, Int. J. Mod. Phys. A 17 (2002) 993-1002 (e-print: hep-th/0112089)
- [38] **O. Lauscher, M. Reuter**, *Flow Equation of Quantum Einstein Gravity in a Higher-Derivative Truncation*, Phys. Rev. D 66 (2002) 025026 (e-print: hep-th/0205062)
- [39] **O. Lauscher, M. Reuter, C. Wetterich**, *Rotation Symmetry Breaking Condensate in a Scalar Theory*, Phys. Rev. D 62 (2000) 125021 (e-print: hep-th/0006099)
- [40] **M. Reuter, C. Wetterich**, *Effective average action for gauge theories and exact evolution equations*, Nucl. Phys. B 417 (1994) 181-214; *Exact evolution equation for scalar electrodynamics*, Nucl. Phys. B 427 (1994), 291-324
- [41] Eine Vorstufe der effektiven Mittelwertwirkung wurde in den folgenden Arbeiten verwendet: **M. Reuter, C. Wetterich**, *Average action for the Higgs model with abelian gauge symmetry*, Nucl. Phys. B 391 (1993) 147-175; *Running gauge coupling in three dimensions and the electroweak phase transition*, Nucl. Phys. B 408 (1993) 91-130

- [42] **M. Reuter**, *Effective average action of Chern-Simons field theory*, Phys. Rev. D 53 (1996) 4430-4435; *Renormalization of the topological charge in Yang-Mills theory*, Mod. Phys. Lett. A 12 (1997) 2777-2802;
S. Falkenberg, B. Geyer, *Effective average action in $N = 1$ super-Yang-Mills theory*, Phys. Rev. D 58 (1998) 085004
- [43] **L. F. Abbott**, *The background field method beyond one loop*, Nucl. Phys. B 185 (1981) 189-203
- [44] **S. L. Adler**, *Einstein gravity as a symmetry-breaking effect in quantum field theory*, Rev. Mod. Phys. 54 (1982) 729-766
- [45] **M. Reuter, C. Wetterich**, *Quantum Liouville field theory as solution of a flow equation*, Nucl. Phys. B 506 (1997) 483-520
- [46] **A. H. Chamseddine, M. Reuter**, *Induced two-dimensional quantum gravity and $SL(2, R)$ Kac-Moody current algebra*, Nucl. Phys. B 317 (1989) 757-771
- [47] **E. Mottola**, *Functional integration over geometries*, J. Math. Phys. 36 (1995) 2470-2511
- [48] **C. Wetterich**, *Exact evolution equation for the effective potential*, Phys. Lett. B 301 (1993) 90-94
- [49] **U. Ellwanger, M. Hirsch, A. Weber**, *Flow equations for the relevant part of the pure Yang-Mills action*, Z. Phys. C 69 (1996) 687-697
- [50] Ein Vergleich und eine Optimierung von Profilkfunktionen findet sich in: **D. F. Litim**, *Optimisation of the exact renormalisation group*, Phys. Lett. B 486 (2000) 92-99; *Optimised renormalisation group flows*, Phys. Rev. D 64 (2001) 105007; *Critical exponents from optimised renormalisation group flows*, Nucl. Phys. B 631 (2002) 128-158
- [51] **D. F. Litim, J. M. Pawłowski**, *Flow equations for Yang-Mills theories in general axial gauges*, Phys. Lett. B 435 (1998) 181-188; *On general axial gauges for QCD*, Nucl. Phys. Proc. Suppl. 74 (1999) 329-332; *On Gauge Invariant Wilsonian Flows*, e-print: hep-th/9901063
- [52] Private Mitteilung von **J. M. Pawłowski** an M. Reuter
- [53] **R. Gastmans, R. Kallosh, C. Truffin**, *Quantum gravity near two dimensions*, Nucl. Phys. B 133 (1978) 417-434;

- S. M. Christensen, M. J. Duff**, *Quantum gravity in $2 + \varepsilon$ dimensions*, Phys. Lett. 79 B (1978) 213-216
- [54] **H. Kawai, M. Ninomiya**, *Renormalization group and quantum gravity*, Nucl. Phys. B 336 (1990) 115-145
- [55] **I. Jack, D. R. T. Jones**, *The epsilon expansion of two-dimensional quantum gravity*, Nucl. Phys. B 358 (1991) 695-712;
H. Kawai, Y. Kitazawa, M. Ninomiya, *Ultraviolet stable fixed point and scaling relations in $(2 + \varepsilon)$ -dimensional quantum gravity*, Nucl. Phys. B 404 (1993) 684-714;
T. Aida, Y. Kitazawa, J. Nishimura, A. Tsuchiya, *Two-loop renormalization in quantum gravity near two dimensions*, Nucl. Phys. B 444 (1995) 353-380
- [56] **G. K. Savvidy**, *Infrared instability of the vacuum state of gauge theories and asymptotic freedom*, Phys. Lett. B 71 (1977) 133-134
- [57] **E. D'Hoker, R. Jackiw**, *Classical and quantal Liouville field theory*, Phys. Rev. D 26 (1982) 3517-3542; *Space-Translation Breaking and Compactification in the Liouville Theory*, Phys. Rev. Lett. 50 (1983) 1719-1722
- [58] **A. Ringwald, C. Wetterich**, *Average Action for the N Component ϕ^4 Theory*, Nucl. Phys. B 334 (1990) 506-526
- [59] **J. Alexandre, V. Branchina, J. Polonyi**, *Instability induced renormalization*, Phys. Lett. B 445 (1999) 351-356
- [60] **N. Tetradis, C. Wetterich**, *Scale dependence of the average potential around the maximum in ϕ^4 -theories*, Nucl. Phys. B 383 (1992) 197-217
- [61] **J. Polonyi**, *The anti-ferromagnetic vacuum*, e-print: hep-lat/9610030;
V. Branchina, H. Mohrbach, J. Polonyi, *The antiferromagnetic ϕ^4 Model, I. The Mean-field Solution*, Phys. Rev. D 60 (1999) 045006; *The antiferromagnetic ϕ^4 Model, II. The one-loop renormalization*, Phys. Rev. D 60 (1999) 045007
- [62] **L. O'RaiFeartaigh, A. Wipf, H. Yoneyama**, *The constraint effective potential*, Nucl. Phys. B 271 (1986) 653-680
- [63] **S. Coleman, E. Weinberg**, *Radiative Corrections as the Origin of Spontaneous Symmetry Breaking*, Phys. Rev. D 7 (1973) 1888-1910

- [64] **G. Keller, C. Kopper**, *Perturbative renormalization of QED via flow equations*, Phys. Lett. B 273 (1991) 323-332;
G. Keller, C. Kopper, M. Salmhofer, *Perturbative Renormalization and Effective Lagrangians in Φ_4^4* , Helv. Phys. Acta 65 (1992) 32-52
- [65] **S. Minakshisundaram, A. Pleijel**, *Some properties of the eigenfunctions of the Laplace-Operator on Riemannian manifolds*, Can. J. Math. 1 (1949) 242-256;
S. Minakshisundaram, *Eigenfunctions on Riemannian Manifolds*, J. Indian Math. Soc. 17 (1953) 158-165;
R. T. Seeley, *Complex powers of an elliptic operator*, Proc. Symp. Pure Math. 10 (1967) 288-307;
P. B. Gilkey, *The spectral geometry of a Riemannian manifold*, J. Diff. Geom. 10 (1975) 601-618;
A. O. Barvinsky, G. A. Vilkovisky, *The generalized Schwinger-De Witt technique in gauge theories and quantum gravity*, Phys. Rept. 119 (1985) 1-74;
G. A. Vilkovisky, *Heat kernel: Rencontre entre physiciens et mathématiciens*, preprint: CERN-TH-6392-92 (1992)
- [66] **M. A. Rubin, C. R. Ordóñez**, *Eigenvalues and degeneracies for n -dimensional tensor spherical harmonics*, J. Math. Phys. 25 (1984) 2888-2894;
Symmetric-tensor eigenspectrum of the Laplacian on n -spheres, J. Math. Phys. 26 (1985) 65-67
- [67] **B. Allen**, *Graviton propagator in de Sitter space*, Phys. Rev. D 34 (1986) 3670-3675
- [68] **E. S. Fradkin, A. A. Tseytlin**, *One-loop effective potential in gauged $O(4)$ supergravity and the problem of the Λ term*, Nucl. Phys. B 234 (1984) 472-508
- [69] **T. R. Taylor, G. Veneziano**, *Quantum gravity at large distances and the cosmological constant*, Nucl. Phys. B 345 (1990) 210-230
- [70] **O. Lewin**, *Polylogarithms and Associated Functions*, Elsevier, Amsterdam, 1981

