

Pseudodifferentialoperatoren mit nichtregulären banachraumwertigen symbolen

Dissertation
zur Erlangung des Grades
„Doktor
der Naturwissenschaften“

am Fachbereich Mathematik
der Johannes Gutenberg-Universität
in Mainz

Bienvenido Barraza Martinez
geboren in Sucre-Sucre (Kolumbien)

Mainz, 18. Februar 2009

Zusammenfassung

Untersucht werden in der vorliegenden Arbeit Versionen des Satzes von Michlin für Pseudodifferentialoperatoren mit nicht-regulären banachraumwertigen Symbolen und deren Anwendungen auf die Erzeugung analytischer Halbgruppen von solchen Operatoren auf vektorwertigen Sobolevräumen $W_p^k(\mathbb{R}^n, E)$, wobei $k \in \mathbb{N}_0$, $1 \leq p \leq \infty$ und E ein Banachraum ist.

Für einen beliebigen Banachraum E und beliebige $\mathcal{L}(E)$ -wertige Symbole ist es unmöglich einen Satz von Michlin auf $L_p(\mathbb{R}^n, E)$ zu erhalten. Deshalb ersetzen wir den L_p -Raum durch den Vektorraum $\mathbf{V}(\mathbb{R}^n, E)$, der durch die Vereinigung aller Besovräume $B_{p,q}^s(\mathbb{R}^n, E)$ erklärt ist. Für Banachräume E_i , $i = 0, 1, 2$, Skalare $m \in \mathbb{R}$, $l, \rho \in \mathbb{N}$ mit $\rho \geq 2l > n$ und Symbole $a \in S_{1,0}^{m,\rho}(\mathbb{R}^n, E_1)$, die beschränkte stetige Ableitungen bis zur Ordnung ρ besitzen, wird gezeigt, dass es eine eindeutige lineare Abbildung $\widetilde{a(D)} : \mathbf{V}(\mathbb{R}^n, E_2) \longrightarrow \mathbf{V}(\mathbb{R}^n, E_0)$ gibt, so dass $\widetilde{a(D)} \in \mathcal{L}(B_{p,q}^{s+m}(\mathbb{R}^n, E_2), B_{p,q}^s(\mathbb{R}^n, E_0))$ und ihre Restriktion auf jeder Schnittmenge $C_b^\infty(\mathbb{R}^n, E_2) \cap B_{p,q}^{s+m}(\mathbb{R}^n, E_2)$ ($s \in \mathbb{R}$, $p, q \in [1, \infty]$) mit der klassischen Definition des Pseudodifferentialoperators $a(D)$, der in [Ku,81] durch ein oszillatorisches Integral definiert wurde, übereinstimmt. Mit Hilfe dieser Version des Satzes von Michlin wird bewiesen, dass geeignete Restriktionen des Operators $\widetilde{a(D)}$ analytische Halbgruppen auf den Besovräumen $B_{p,q}^s(\mathbb{R}^n, E_0)$ und C^∞ -Halbgruppen auf den Sobolevräumen $W_p^k(\mathbb{R}^n, E_0)$ erzeugen.

Weiterhin wird aus $\widetilde{a(D)} \in \mathcal{L}(B_{p,q}^{s+m}(\mathbb{R}^n, E_2), B_{p,q}^s(\mathbb{R}^n, E_0))$, der stetigen Einbettung

$$B_{p,1}^k(\mathbb{R}^n, E) \hookrightarrow W_p^k(\mathbb{R}^n, E) \hookrightarrow B_{p,\infty}^k(\mathbb{R}^n, E) \quad (1 \leq p \leq \infty)$$

und einigen Eigenschaften der Interpolationstheorie hergeleitet, dass die W_p^k -Realisierung eines parabolischen Pseudodifferentialoperators, dessen entsprechendes Symbol einen m -homogenen Hauptteil besitzt, der negative Erzeuger einer analytischen Halbgruppe auf $W_p^k(\mathbb{R}^n, E_0)$ ist (und sogar eine stark stetige Halbgruppe, wenn $p < \infty$). Daraus erhalten wir Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen nicht-autonomer Cauchy-Probleme in Besov- und Sobolevräumen.

Schließlich führen wir eine Symbolklasse $C_*^r S_{1,\delta}^{m,\rho}(\mathbb{R}^n, E)$ ein, in der Symbole $a(x, \xi)$ beschränkte Regularität in beiden Veränderlichen x, ξ besitzen und die die in [Am,97] und [Ki,03] angegebenen Symbole enthält. Durch eine Version der von R. Coifman und Y. Meyer in [C-M,79] eingeführten Zerlegung der Symbole in elementare Symbole und dank einiger Resultate aus der Littlewood-Paley-Theorie erhalten wir einen Pseudodifferentialoperator $\widetilde{a(x, D)}$ für Symbole $a \in C_*^r S_{1,\delta}^{m,2\rho}(\mathbb{R}^n, E)$ ($r > 0, 0 \leq \delta \leq 1, \rho \geq 2l > n$), für den $a(x, D) \in \mathcal{L}(B_{p,q}^{s+m}(\mathbb{R}^n, E_2), B_{p,q}^s(\mathbb{R}^n, E_0))$ gilt, wenn $-(1-\delta)r < s < r$. Mit anderen Worten verallgemeinert dieses Resultat die Versionen des Satzes von Michlin in [Am,97;Th. 6.2] (falls $p, q \in [1, \infty)$) und [Ki,03;Th. 2.3.1] (falls $p \in [1, \infty]$ und $q \in [1, \infty)$).

Summary

In the present work we investigate versions of Michlin's theorem for pseudodifferential operators with non-regular Banach-valued symbols and their applications to the generation of analytic semigroups on Banach-valued Sobolev spaces.

For arbitrary Banach space E and arbitrary $\mathcal{L}(E)$ -valued symbols it is impossible to obtain a Michlin's theorem on $L_p(\mathbb{R}^n, E)$. Hence we replace the L_p space by the vector space $\mathbf{V}(\mathbb{R}^n, E)$, which is defined by the union of all Besov spaces. For Banach spaces E_i , $i = 0, 1, 2$, scalars $m \in \mathbb{R}$, $l, \rho \in \mathbb{N}$ with $\rho \geq 2l > n$ and symbols $a \in S_{1,0}^{m,\rho}(\mathbb{R}^n, E_1)$, which all derivatives smaller than or equal than ρ are continuous, we show that there is a unique linear map $\widetilde{a(D)} : \mathbf{V}(\mathbb{R}^n, E_2) \longrightarrow \mathbf{V}(\mathbb{R}^n, E_0)$ with $\widetilde{a(D)} \in \mathcal{L}(B_{p,q}^{s+m}(\mathbb{R}^n, E_2), B_{p,q}^s(\mathbb{R}^n, E_0))$. Its restriction on every intersection $C_b^\infty(\mathbb{R}^n, E_2) \cap B_{p,q}^{s+m}(\mathbb{R}^n, E_2)$ ($s \in \mathbb{R}$, $p, q \in [1, \infty]$) coincides with the classical definition of the pseudodifferential operator $a(D)$ in [Ku,81], which has been defined by means of an oscillatory integral. In this way, we show that suitable restrictions of the operator $\widetilde{a(D)}$ generate analytic semigroups on the Besov spaces $B_{p,q}^s(\mathbb{R}^n, E_0)$ and C^∞ -semigroups on the Sobolev spaces $W_p^k(\mathbb{R}^n, E_0)$.

Furthermore, using that $\widetilde{a(D)} \in \mathcal{L}(B_{p,q}^{s+m}(\mathbb{R}^n, E_2), B_{p,q}^s(\mathbb{R}^n, E_0))$, the continuous embedding

$$B_{p,1}^k(\mathbb{R}^n, E) \hookrightarrow W_p^k(\mathbb{R}^n, E) \hookrightarrow B_{p,\infty}^k(\mathbb{R}^n, E) \quad (1 \leq p \leq \infty),$$

and some properties of the interpolation theory, we show that the W_p^k -realization of a parabolic pseudodifferential operator, for which the corresponding symbol has a m -homogeneous principal part, is the negative generator of an analytic semigroup on $W_p^k(\mathbb{R}^n, E_0)$ and, if $p < \infty$, it is the generator of a strongly continuous semigroup. Therefore, we obtain the existence and uniqueness of solutions for non-autonomous Cauchy problems in Besov and Sobolev spaces.

Finally, we introduce a class of symbol $C_*^r S_{1,\delta}^{m,\rho}(\mathbb{R}^n, E)$, in which the symbols $a(x, \xi)$ are non-regular in the local variable x and in the dual variable ξ , and in which are included the class of symbols defined in [Am,97] and [Ki,03]. Using a version of decomposition of symbols into elementary symbols introduced in [CM,79], and using some results from the Littlewood-Paley theory, we obtain for symbols $a \in C_*^r S_{1,\delta}^{m,2\rho}(\mathbb{R}^n, E)$ ($r > 0$, $0 \leq \delta \leq 1$, $\rho \geq 2l > n$) a pseudodifferential operator $\widetilde{a(x,D)}$ with $\widetilde{a(x,D)} \in \mathcal{L}(B_{p,q}^{s+m}(\mathbb{R}^n, E_2), B_{p,q}^s(\mathbb{R}^n, E_0))$, if $-(1-\delta)r < s < r$. This pseudodifferential operator coincides with $\widetilde{a(D)}$ and $a(x, D)$ denifed in [Ki,03]. In other words, this result generalizes the versions of the Michlin's theorem in [Am,97; Th 6.2] (if $p, q \in [1, \infty)$) and [Ki,03; Th 2.3.1] (if $p \in [1, \infty]$ und $q \in [1, \infty)$).

Inhaltsverzeichnis

0	Einleitung	v
1	Einleitende Definitionen und Bezeichnungen	1
1.1	Funktionenräume	2
1.1.1	Besovräume	9
1.1.2	Interpolation von Funktionenräumen	18
1.2	Sektorielle Operatoren und analytische Halbgruppen	20
1.3	Das oszillatorische Integral	21
1.3.1	Grundlegende Eigenschaften des oszillatorischen Integrals	27
2	Pseudodifferentialoperatoren	37
2.1	Der Raum der E -wertigen Symbole $S_{1,0}^{m,\rho}(\mathbb{R}^n, E)$	38
2.2	Pseudodifferentialoperatoren für Symbole auf $S_{1,0}^{m,\rho}(\mathbb{R}^n, E)$	39
2.2.1	Definition des Operators $a(D)$ für Symbole in $S_{1,0}^{m,\rho}(\mathbb{R}^n, E)$	39
2.3	Eigenschaften des Operators $a(\widetilde{D})$ auf dem Raum $\mathbf{V}(\mathbb{R}^n, E)$	44
3	Erzeugung der analytischen Halbgruppen von parabolischen Pseudodifferentialoperatoren auf Sobolevräumen	49
3.1	Analytische Halbgruppen von Pseudodifferentialoperatoren auf Besovräumen	50
3.2	C^∞ -Halbgruppen auf Sobolevräumen	59
3.3	Analytische Halbgruppen von parabolischen Pseudodifferentialoperatoren auf Sobolevräumen	63
3.3.1	Die Symbolklasse $S^{m,\rho}(\mathbb{R}^n, E)$	63
4	Anwendungen	79
4.1	Lineare Cauchy-Probleme	79
4.1.1	Von t unabhängige Definitionsbereiche $D(A(t))$	81
4.1.2	Variable Definitionsbereiche $D(A(t))$	82
4.1.3	Beispiel	88
4.2	Semilineare Cauchy-Probleme	90

4.2.1	Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen des semilinearen Cauchy-Problems	90
4.2.2	Elliptische Differentialoperatoren	92
4.2.3	Beispiel: Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen eines semilinearen und elliptischen Differentialgleichungssystems zweiter Ordnung	95
4.3	Reaktions-Diffusions-Gleichungen	100
4.3.1	Kurze Beschreibung der Terme des Koagulations-Fragmentations-Problems und Voraussetzungen	101
4.3.2	Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen des Koagulations-Fragmentations-Problems	105
5	Verallgemeinerung der Theorie	107
5.1	Raum der Symbole $C_*^r S_{1,\delta}^{m,\rho}(\mathbb{R}^n, E)$	109
5.2	Pseudodifferentialoperatoren für Symbole auf $C_*^r S_{1,\delta}^{m,\rho}(\mathbb{R}^n, E)$	117
5.2.1	Definition von $a(x, D)$ für elementare Symbole in $C_*^r S_{1,\delta}^{m,\rho}(\mathbb{R}^n, E_1)$	118
5.2.2	Definition von $a(\widetilde{x}, D)$ für Symbole in $C_*^r S_{1,0}^{m,2\rho}(\mathbb{R}^n, E_1)$	130
5.3	Eigenschaften der Abbildung $a(\widetilde{x}, D)$	133
	Literaturverzeichnis	137

Einleitung

In dieser Arbeit untersuchen wir Versionen des Satzes von Michlin für Pseudodifferentialoperatoren mit nicht-regulären banachraumwertigen Symbolen und Erzeugungsresultate analytischer Halbgruppen von solchen Operatoren auf vektorwertigen Funktionenräumen (wie zum Beispiel auf vektorwertigen Sobolevräumen $W_p^k(\mathbb{R}^n, E)$ mit $k \in \mathbb{N}_0$, $1 \leq p \leq \infty$ und E ein beliebiger Banachraum). Außerdem werden Anwendungen solcher Resultate auf die Lösbarkeit von parabolischen Pseudodifferentialgleichungen untersucht.

In der vorliegenden Arbeit betrachten wir zuerst Symbole im Raum $S_{1,0}^{m,\rho}(\mathbb{R}^n, E)$ mit $m \in \mathbb{R}$, $\rho \in \mathbb{N}_0$ und E ein Banachraum. Dabei sei $a \in S_{1,0}^{m,\rho}(\mathbb{R}^n, E)$

$$\begin{aligned} :\Longleftrightarrow \quad & a \in C^\rho(\mathbb{R}^n, E) \text{ und } \forall \alpha \in \mathbb{N}_0^n \text{ mit } |\alpha| \leq \rho, \exists c_\alpha > 0, \text{ so dass} \\ & \left\| \partial_\xi^\alpha a(\xi) \right\|_E \leq c_\alpha \langle \xi \rangle^{m-|\alpha|} \text{ für alle } \xi \in \mathbb{R}^n. \end{aligned} \quad (1)$$

Wegen des Satzes von Michlin (siehe [Ber-Loef,76; Th.6.1.6], [N-H-H,02; Th. 3.7]) ist bekannt, dass der Pseudodifferentialoperator oder der von a induzierte Fourier-Multiplikator¹

$$\mathcal{F}^{-1}a\mathcal{F} : L_p(\mathbb{R}^n, E_1) \longrightarrow L_p(\mathbb{R}^n, E_2) \quad \text{für } 1 < p < \infty$$

stetig ist, wenn $a \in S_{1,0}^{0,n+1}(\mathbb{R}^n, \mathcal{L}(E_1, E_2))$ und E_1, E_2 Hilberträume sind. In der Praxis möchte man die Gültigkeit dieses Resultats für beliebige Banachräume E_1, E_2 haben, aber dies ist wegen einer Beobachtung von G. Pisier unmöglich, die besagt: Gilt der Satz von Michlin auf $L_p(\mathbb{R}^n, E)$ für $\mathcal{L}(E)$ -wertige Symbole, so ist E isomorph zu einem Hilbertraum (siehe [L-L-M,98] für einen Beweis). Deswegen muss man zum Beispiel die Raumskala $L_p(\mathbb{R}^n, E)$ wechseln, zusätzliche Voraussetzungen für (1) machen oder die Geometrie des Banachraumes E berücksichtigen, um Versionen des Satzes von Michlin zu erhalten. Einerseits hat H. Amann in [Am,97; Th. 6.2] für beliebige Banachräume E_i , $i = 1, 2$ und $a \in S_{1,0}^{m,n+1}(\mathbb{R}^n, \mathcal{L}(E_1, E_2))$ behauptet, dass der Pseudodifferentialoperator $\mathcal{F}^{-1}a\mathcal{F} : \mathcal{B}_{p,q}^{s+m}(\mathbb{R}^n, E_1) \longrightarrow \mathcal{B}_{p,q}^s(\mathbb{R}^n, E_2)$ ($s \in \mathbb{R}$, $p, q \in [1, \infty]$) stetig ist. Dabei ist $\mathcal{B}_{p,q}^s = \dot{\mathcal{B}}_{p,q}^s$, $B_{p,q}^s$ oder $b_{p,q}^s$ (der homogene, der nicht-homogene oder der kleine

¹ $\mathcal{F}$ und $\mathcal{F}^{-1}$ bezeichnen die Fouriertransformation bzw. die inverse Fouriertransformation.

Besovraum). Er hat seine Ergebnisse für die Lösbarkeit der elliptischen und parabolischen Differentialgleichungen auf Zylindern verwendet. Außerdem hat er Resultate der maximalen Regularität von parabolischen Differentialgleichungen erhalten. Die maximale Regularität von parabolischen Differentialgleichungen via Fourier-Multiplikatorsätze wurde auch von L. Weis in [We,01] und W. Arendt in [Ar,04] untersucht. Andererseits hat Weis in [We,01] für UMD -Räume E_i , $i = 1, 2$ und Symbole a in $S_{1,0}^{0,1}(\mathbb{R}, \mathcal{L}(E_1, E_2))$, die eine stärkere Beschränktheitsbedingung als (1) erfüllen, bewiesen, dass $\mathcal{F}^{-1}a\mathcal{F} : L_p(\mathbb{R}, E_1) \longrightarrow L_p(\mathbb{R}, E_2)$ (für $1 < p < \infty$) stetig ist. Unter einem UMD -Raum E versteht man einen Banachraum, für den die Hilberttransformation von $L_p(\mathbb{R}, E)$ nach $L_p(\mathbb{R}, E)$ für $1 < p < \infty$ stetig ist, oder äquivalent dazu, für den die Funktion $m(t) = i\pi \operatorname{sign}(t)$ ein Fourier-Multiplikator auf $L_p(\mathbb{R}, E)$ ($1 < p < \infty$) ist. Diese Bedingung hat die Reflexivität von E zur Folge (siehe [Am,95; Remark 4.4.2]). Um einen optimalen Wert von ρ zu erreichen, wurde die Geometrie der Banachräume E_1, E_2 betrachtet. M. Girardi und L. Weis haben zum Beispiel in [Gi-We,03] Banachräume E_1, E_2 , die Fouriertyp $p \in [1, 2]$ hatten (das heißt Banachräume E_i , für die die Fouriertransformation von $L_p(\mathbb{R}^n, E_i)$ nach $L_{p'}(\mathbb{R}^n, E_i)$ mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$ stetig ist), und Symbole $a \in S_{1,0}^{0,\rho}(\mathbb{R}^n, \mathcal{L}(E_1, E_2))$ betrachtet. Unter diesen Voraussetzungen haben sie bewiesen, dass für alle $s \in \mathbb{R}$, $r, q \in [1, \infty]$ der Pseudodifferentialoperator $\mathcal{F}^{-1}a\mathcal{F} : B_{r,q}^s(\mathbb{R}^n, E_1) \longrightarrow B_{r,q}^s(\mathbb{R}^n, E_2)$ stetig ist, wenn $\rho = \left[\frac{n}{p}\right] + 1$. Daraus folgt, dass man für beliebige Banachräume E_1, E_2 (d.h. mit Fouriertyp $p = 1$) das Theorem 6.2 in [Am,97] erhält. Falls E_1, E_2 gleichmäßig konvexe Banachräume sind (deshalb haben sie Fouriertyp $p, p > 1$)², kann man $\rho = n$ wählen.

Viele Anwendungen auf Probleme der Physik wie zum Beispiel das Problem der Reaktions-Diffusions-Prozesse, das in [Am,00] studiert wurde, weisen auf die Notwendigkeit hin, banachraumwertige Symbole zu betrachten. Einen besonderen Fall dieses Problems werden wir auf dem Sobolevraum $W_1^k(\mathbb{R}^n, L_1(Y, \mu))$ (im Kapitel 4) untersuchen. Es ist bekannt, dass $L_1(Y, \mu)$ kein reflexiver Raum ist. Aus diesem Grund möchten wir in dieser Arbeit (analog wie in [Am,97]) eine Version des Satzes von Michlin für banachraumwertige Symbole erhalten, mit der wir die Erzeugung analytischer Halbgruppe vom entsprechenden Pseudodifferentialoperator erhalten können. Somit erhält man Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen parabolischer Pseudodifferentialgleichungen. Dazu betrachten wir in der vorliegenden Arbeit beliebige Banachräume E_i , $i = 0, 1, 2$, den Vektorraum

$$\mathbf{V}(\mathbb{R}^n, E_i) := \bigcup_{(s,p,q) \in \mathbb{R} \times [1,\infty] \times [1,\infty]} B_{p,q}^s(\mathbb{R}^n, E_i)$$

statt $B_{p,q}^s(\mathbb{R}^n, E_i)$ und Symbole a in $S_{1,0}^{m,\rho_n}(\mathbb{R}^n, E_1)$ mit

$$\rho_n := \begin{cases} n+1, & n \in \mathbb{N} \text{ ungerade,} \\ n+2, & n \in \mathbb{N} \text{ gerade,} \end{cases}$$

und wir zeigen im Satz 2.3.1, dass eine eindeutige und lineare Abbildung

$$\widetilde{a(D)} : \mathbf{V}(\mathbb{R}^n, E_2) \longrightarrow \mathbf{V}(\mathbb{R}^n, E_0)$$

²siehe [Bourg,87].

so existiert, dass

$$\widetilde{a(D)} \Big|_{B_{p,q}^{s+m}(\mathbb{R}^n, E_2) \cap C_b^\infty(\mathbb{R}^n, E_2)} = a(D) \quad \forall s \in \mathbb{R}, p, q \in [1, \infty],$$

wobei³

$$[a(D)u](x) := os - \int \int e^{i\xi\eta} a(\xi) \bullet u(x - \eta) \frac{d(\xi, \eta)}{(2\pi)^n}, \quad x \in \mathbb{R}^n, u \in C_b^\infty(\mathbb{R}^n, E_2)$$

(beachte, dass $a(D) = \mathcal{F}^{-1}(a \bullet \mathcal{F}(\cdot))$ auf $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n, E_2)$, dem Raum der schnell fallenden Funktionen). Das hat zur Folge, dass

$$(a \mapsto \widetilde{a(D)}) \in \mathcal{L}\left(S_{1,0}^{m,\rho_n}(\mathbb{R}^n, E_1), \mathcal{L}(B_{p,q}^{s+m}(\mathbb{R}^n, E_2), \mathcal{B}_{p,q}^s(\mathbb{R}^n, E_0))\right)$$

für alle $m, s \in \mathbb{R}$, $p, q \in [1, \infty]$ und somit

$$(a \mapsto \widetilde{a(D)}) \in \mathcal{L}\left(S_{1,0}^{m,\rho_n}(\mathbb{R}^n, E_1), \mathcal{L}\left(W_p^l(\mathbb{R}^n, E_2), W_p^k(\mathbb{R}^n, E_0)\right)\right),$$

wenn $m \in \mathbb{R}$, $1 \leq p \leq \infty$ und $k, l \in \mathbb{N}$ mit $l > k + m$ (siehe auch Folgerungen des Satzes 2.3.1). Die Abschätzung für ρ_n haben wir durch die Untersuchung der Eigenschaften des oszillatorischen Integrals erhalten. Außerdem vereinfachen diese Eigenschaften den Beweis unseres ersten Hauptresultats (Satz 2.3.1).

Danach werden parabolische Symbole a (mit Konstanten ω und κ) in $S_{1,0}^{m,\rho}(\mathbb{R}^n, \mathcal{L}(E_1, E_0))$ für $m > 0$ und $E_1 \hookrightarrow E_0$ betrachtet. Präzisiert ausgedrückt, ist a parabolisch in $S_{1,0}^{m,\rho}(\mathbb{R}^n, \mathcal{L}(E_1, E_0))$, wenn Konstanten $\omega \geq 0$ und $\kappa \geq 1$ so existieren, dass

$$[a(\xi) + \mu^m e^{i\theta} I]^{-1} \in \mathcal{L}(E_0, E_1) \quad \text{und} \quad \left\| [a(\xi) + \mu^m e^{i\theta} I]^{-1} \right\|_{\mathcal{L}(E_0, E_1)} \leq \kappa \langle \xi, \mu \rangle^{-m}$$

für alle $|\xi, \mu| \geq \omega$ und $\theta \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. Dabei sind $\langle \xi, \mu \rangle := \sqrt{1 + |\xi|^2 + \mu^2}$ und $|\xi, \mu| := \sqrt{|\xi|^2 + \mu^2}$ mit $(\xi, \mu) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_0^+$. Dieser Begriff verallgemeinert die in [Am,01] gegebene Definition der normal-elliptischen Differentialoperatoren mit $\mathcal{L}(E_1, E_0)$ -wertigen konstanten Koeffizienten, und zwar: $p(D) := \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha D^\alpha$ ist normal-elliptisch, wenn es eine Konstante $\kappa \geq 1$ so gibt, dass

$$[\lambda I + p_0(\xi)]^{-1} \in \mathcal{L}(E_0, E_1) \quad \text{und} \quad \left\| [\lambda I + p_0(\xi)]^{-1} \right\|_{\mathcal{L}(E_0, E_1)} \leq \frac{\kappa}{1 + |\lambda|}$$

für alle $\lambda \in \sum_{\frac{\pi}{2}} := \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z \geq 0\}$ und $\xi \in \mathbb{R}^n$ mit $|\xi| = 1$. Dabei ist $p_0(\xi) := \sum_{|\alpha|=m} a_\alpha \xi^\alpha$ der Hauptteil von $p(D)$ (siehe Abschnitt 4.2.2). Für parabolische Symbole a werden wir zeigen:

a) Der Operator $A_1 := -\widetilde{a(D)} \Big|_{\mathcal{B}_{p,q}^{s+m}(\mathbb{R}^n, E_1)}$ erzeugt eine analytische Halbgruppe auf

$\mathcal{B}_{p,q}^s(\mathbb{R}^n, E_0)$, die sogar stark stetig ist, wenn $1 \leq q < \infty$ und $E_1 \xhookrightarrow{d} E_0$.

³Dabei ist $\bullet : E_1 \times E_2 \rightarrow E_0$ eine Multiplikation (siehe Abschnitt 1.1).

- b) Die $\mathfrak{F}_p^k(\mathbb{R}^n, E_0)$ –Realisierung des Operators $A_2 := -a(\widetilde{D})|_{\mathcal{B}_{p,\infty}^{k+m}(\mathbb{R}^n, E_1)}$ mit $k \in \mathbb{N}_0$ erzeugt eine C^∞ –Halbgruppe des singulären Typs α auf dem Raum $\mathfrak{F}_p^k(\mathbb{R}^n, E_0)$. Dabei sind $\alpha \in (0, 1)$ beliebig, $(\mathcal{B}, \mathfrak{F}_p^k) = (\mathring{B}, W_p^k)$ für $1 \leq p < \infty$ und $(\mathcal{B}, \mathfrak{F}_\infty^k)$ ein Paar in

$$\left\{ (B, W_\infty^k), (b, B \cup C^k), (\mathring{B}, C_0^k), (B, C_b^k) \right\}.$$

Es stellt sich die Frage, ob die $\mathfrak{F}_p^k(\mathbb{R}^n, E_0)$ –Realisierung des Operators A_2 auch eine analytische Halbgruppe auf $\mathfrak{F}_p^k(\mathbb{R}^n, E_0)$ erzeugt (mit anderen Worten, ob die Aussage b) für $\alpha = 1$ gilt). In [Am,01] wurden Ergebnisse über die Erzeugung analytischer Halbgruppe auf $L_p(\mathbb{R}^n, E_0)$ mit $1 \leq p < \infty$, $BUC(\mathbb{R}^n, E_0)$ und auf $C_0(\mathbb{R}^n, E_0)$ von Differentialoperatoren erhalten. In [Ki,01] wurde die Erzeugung analytischer Halbgruppen auf $L_p(\mathbb{R}^n, E_0)$ ($1 \leq p < \infty$) von geeigneten parabolischen Pseudodifferentialoperatoren mit $\mathcal{L}(E_0)$ –wertigen Symbolen der Ordnung $m > 1$, die in der Dualvariable ξ mindestens Regularität der Ordnung $2n + 1$ hatten, bewiesen. Pseudodifferentialoperatoren mit $\mathbb{C}$ –vektorwertigen Symbolen von mehreren Veränderlichen, $a(x, \xi)$, die nicht in der Ortsvariable x regulär sind, aber unendlich oft-differenzierbar in der Dualvariable ξ sind, wurden von J. Escher und J. Seiler in [Esc-Sei,07] untersucht. Wenn man dort ein Symbol a unabhängig von der Ortsvariablen (d.h. $a(x, \xi) = a(\xi)$) betrachtet, erhält man nach ihrem Theorem 4.8, dass der entsprechende Operator $-a(x, D)$ eine analytische Halbgruppe auf

$$\mathcal{H}^s = \mathcal{C}_*^s(\mathbb{R}^n), W_p^s(\mathbb{R}^n) \text{ mit } 1 < p < \infty, \text{ und auf } B_{p,q}^s(\mathbb{R}^n), 1 \leq p, q < \infty$$

erzeugt. Dabei sind $s > 0$ und $\mathcal{C}_*^s(\mathbb{R}^n) = B_{\infty,\infty}^s(\mathbb{R}^n)$ die sogenannten Hölder-Zygmund-Räume. Aber wie wir schon oben erwähnt haben, ist die Betrachtung banachraumwertiger nicht-regulären Symbole die Grundlage dieser Arbeit, was durch die Arbeiten [Am,01] und [Ki,01] motiviert wurde. In diesen beiden wie auch in der Arbeit [D-K,06], in der UMD –banachraumwertige Symbole betrachtet wurden, hat die Homogenität des Hauptsymbols eine wichtige Rolle gespielt. Diese Homogenität wird in einer Unterklasse von $S_{1,0}^{m,\rho}(\mathbb{R}^n, E)$ berücksichtigt. Analog wie in [Ki,01] bezeichnen wir mit $S^{m,\rho}(\mathbb{R}^n, E)$ den Raum aller Funktionen $a \in S_{1,0}^{m,\rho}(\mathbb{R}^n, E)$, die eine Funktion $a^0 \in S_{1,0}^{m,\rho}(\mathbb{R}^n, E)$ besitzen, so dass

$$\begin{aligned} a - a^0 &\in S_{1,0}^{m-1,\rho}(\mathbb{R}^n, E) \text{ und} \\ a^0(t\xi) &= t^m a^0(\xi) \text{ für alle } t > 0, \xi \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}. \end{aligned}$$

Das Symbol a^0 wird der Hauptteil oder das Hauptsymbol von a genannt. Außerdem wird $S^{m,\rho}(\mathbb{R}^n, E)$ mit der Norm

$$\|a\|_{S^{m,\rho}(\mathbb{R}^n, E)} := \|a^0\|_{S_{1,0}^{m,\rho}(\mathbb{R}^n, E)} + \|a - a^0\|_{S_{1,0}^{m-1,\rho}(\mathbb{R}^n, E)}$$

betrachtet, die die Einbettung $S^{m,\rho}(\mathbb{R}^n, E) \hookrightarrow S_{1,0}^{m,\rho}(\mathbb{R}^n, E)$ liefert. Für $m > 0$ und a ein parabolisches Symbol in $S^{m,\rho_n}(\mathbb{R}^n, \mathcal{L}(E_0))$ (das heißt a^0 ist parabolisch in $S_{1,0}^{m,\rho_n}(\mathbb{R}^n, \mathcal{L}(E_0))$), siehe

Unterabschnitt 3.3.1) werden wir zeigen, dass die $\mathfrak{F}^k(\mathbb{R}^n, E_0)$ –Realisierung des Operators A_2 eine analytische Halbgruppe auf

$$\mathcal{B}_{p,q}^s(\mathbb{R}^n, E_0), W_p^k(\mathbb{R}^n, E_0), BUC^k(\mathbb{R}^n, E_0), C_0^k(\mathbb{R}^n, E_0) \text{ und auf } C_b^k(\mathbb{R}^n, E_0) \quad (2)$$

für alle $1 \leq p, q \leq \infty, s \in \mathbb{R}, k \in \mathbb{N}_0$ erzeugt, wenn $E_1 = E_0$. Natürlich erzeugt dieser Operator auch eine analytische Halbgruppe auf⁴ $W_p^s(\mathbb{R}^n, E_0) = B_{p,p}^s(\mathbb{R}^n, E_0)$ für alle $s \in \mathbb{R}^+ \setminus \mathbb{N}$ und $1 \leq p < \infty$.

Wir erhalten dann (im Satz 4.1.3) Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen des linearen Cauchy-Problems

$$\begin{cases} \dot{u} + A(t)_{\mathfrak{F}_p^k} u = f(t), & 0 < t \leq T, \\ u(0) = u_0, \end{cases} \quad (3)$$

wobei $\{A(t) : 0 \leq t \leq T\}$ eine geeignete Familie von parabolischen Pseudodifferentialoperatoren ist, $\mathfrak{F}_p^k(\mathbb{R}^n, E_0) = W_p^k(\mathbb{R}^n, E_0)$ für $1 \leq p < \infty$, $\mathfrak{F}_\infty^k(\mathbb{R}^n, E_0) = B \cup C^k(\mathbb{R}^n, E_0)$ (in diesem Fall ist $m > k$), $A(t)_{\mathfrak{F}_p^k}$ die $\mathfrak{F}_p^k(\mathbb{R}^n, E_0)$ –Realisierung von $A(t)$ bezeichnet und $f : [0, T] \rightarrow \mathfrak{F}_p^k(\mathbb{R}^n, E_0)$ eine gegebene hölderstetige Funktion ist. Darüber hinaus ist dabei $\dot{u} := \partial_t u$.

Als eine zweite Anwendung legen wir die Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen eines unendlichen gekoppelten Gleichungssystems dar in der Gestalt des folgenden Reaktions-Diffusions-Anfangswertproblems

$$\begin{cases} \partial_t u + A(t) u = R(x, t, y, u), & t \in (0, T], x \in \mathbb{R}^n, \\ u(x, 0, y) = u_0(x, y), & x \in \mathbb{R}^n. \end{cases} \quad (4)$$

Dabei sind y ein Parameter in einem Maßraum (Y, μ) mit endlichem Maß,

$$A(t) u := - \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(t) \partial_{x_i x_j}^2 u + \sum_{i=1}^n b_i(t) \partial_{x_i} u + b_0(t) u$$

(der Diffusionsterm) eine Familie von elliptischen Differentialoperatoren zweiter Ordnung und a_{ij}, b_i geeignete Koeffizienten, die von der Ortsvariable x unabhängig sind. Dazu schreiben wir (4) als ein abstraktes semilineare Cauchy-Problem

$$\begin{cases} \dot{u} + A(t)_{\mathfrak{F}_p^k} u = g(t, u), & 0 < t \leq T, \\ u(0) = u_0, \end{cases} \quad (5)$$

auf $\mathfrak{F}_p^k(\mathbb{R}^n, \mathbb{E})$ mit $k \in \mathbb{N}_0, p \in [1, \infty], \mathbb{E} = L_1(Y, \mu; \mathbb{R})$, $\mathfrak{F}_p^k = W_p^k$ falls $1 \leq p < \infty$ und $\mathfrak{F}_\infty^k = B \cup C^k$ (in diesem Fall ist $m > k$). Unter geeigneten Voraussetzungen (siehe Satz 4.2.3) wird gezeigt, dass das Problem (5) eine eindeutige Lösung u besitzt und außerdem $u \in C^1((0, T], \mathfrak{F}_p^k(\mathbb{R}^n, \mathbb{E}))$. Für den Beweis wird ein Resultat von Amann [Am,00;Th. 5.1] über

⁴Die Definition und einige Eigenschaften von $W_p^s(\mathbb{R}^n, E_0)$ für $s \in \mathbb{R}^+ \setminus \mathbb{N}$ und $1 \leq p \leq \infty$, der E_0 –vektorwertige Sobolev-Slobodecki Raum, findet man im Kapitel 1.

Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen eines abstrakten semilinearen Cauchy-Problems verwendet.

Resultate wie in diesem Hauptsatz (Satz 4.2.3), wobei $\mathbb{E}$ ein L_1 -Raum ist und $k \in \mathbb{N}_0$, sind noch nicht in der Literatur bekannt. Auf der anderen Seite liefert dieser Satz die Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen des in [Am,00] von Amann eingeführten Koagulations-Fragmentations-Problems mit Diffusion auf dem Sobolevraum $W_1^k(\mathbb{R}^n, L_1(Y, dy; \mathbb{R}))$ für $k \in \mathbb{N}_0$, $Y = \mathbb{R}^+$ oder $\mathbb{N}_0$, wenn der Diffusionsterm $A(t)$ von der Ortsvariablen unabhängig ist.

Zum Schluss führen wir mit Hilfe der in (1) und in [Esc-Sei,07] gegebenen Räume $S_{1,0}^{m,\rho}(\mathbb{R}^n, E)$ bzw. $C_*^r S_{1,\delta}^{m,\rho}(\mathbb{R}^n)$ ($r > 0$, $0 \leq \delta \leq 1$, $\rho \in \mathbb{N}$ mit $\rho \geq \rho_n$) eine Definition des Raumes der Symbole $C_*^r S_{1,\delta}^{m,\rho}(\mathbb{R}^n, E)$ ein. Wir sagen, dass eine E -vektorwertige Funktion $a : \mathbb{R}_x^n \times \mathbb{R}_\xi^n \rightarrow E$ in $C_*^r S_{1,\delta}^{m,\rho}(\mathbb{R}^n, E)$ liegt, falls⁵

$$a_x(\cdot) := a(x, \cdot) \in S_{1,0}^{m,\rho}(\mathbb{R}_\xi^n, L_\infty(\mathbb{R}_x^n, E)) \cap S_{1,0}^{m+\delta r, \rho}(\mathbb{R}_\xi^n, C_*^r(\mathbb{R}_x^n, E)) \quad f.f.a. \ x \in \mathbb{R}^n. \quad (6)$$

An dieser Stelle möchten wir darauf hinweisen, dass die in [Ki,03] angegebenen Symbole auch in $C_*^r S_{1,\delta}^{m,\rho}(\mathbb{R}^n, E)$ enthalten sind (siehe Bemerkung 5.1.3).

Durch eine Version der von R. Coifman und Y. Meyer in [C-M,78] eingeführten Zerlegung der Symbole in elementare Symbole (eine solche Zerlegung für bestimmte banachraumwertige Symbole wurde in [P-S,06] vorgestellt) und dank einiger Resultate aus der Littlewood-Paley-Theorie erhalten wir eine Definition eines „Pseudodifferentialoperators“ $\widetilde{a(x, D)}$ für Symbole $a \in C_*^r S_{1,\delta}^{m,2\rho}(\mathbb{R}^n, E)$ mit $\rho > \rho_n$. Im Satz 5.3.1 werden wir für $-(1-\delta)r < s < r$, ρ_n wie in (1.1), $\rho > \rho_n$ und $a \in C_*^r S_{1,\delta}^{m,2\rho}(\mathbb{R}^n, E_1)$ zeigen, dass $\widetilde{a(x, D)}$ ähnliche Eigenschaften zu $\widetilde{a(D)}$ in Satz 2.3.1 besitzt. Außerdem gilt $\widetilde{a(x, D)} \Big|_{\mathcal{B}_{p,q}^{s+m}(\mathbb{R}^n, E_2)} \in \mathcal{L}(\mathcal{B}_{p,q}^{s+m}(\mathbb{R}^n, E_2), \mathcal{B}_{p,q}^s(\mathbb{R}^n, E_0))$ mit $\mathcal{B} \in \{b, B, \dot{B} \text{ mit } 1 \leq p < \infty\}$ (siehe Korollar 5.3.2). Mit anderen Worten verallgemeinern der Satz 5.3.1 und das Korollar 5.3.2 Versionen des Satzes von Michlin in [Am,97;Th. 6.2] (falls $p, q \in [1, \infty)$) und [Ki,03;Th. 2.3.1] (falls $p \in [1, \infty]$ und $q \in [1, \infty)$). Siehe dafür Bemerkung 5.3.2. Analoge Ergebnisse zu skalaren vektorwertigen Symbolen hat Marschall in [Mar,87] mit weniger Regularitätsannahmen in der Dualvariable ξ erhalten, aber in diesem skalaren Fall wurde der Satz von Plancherel verwendet, den wir in unserem allgemeineren Fall nicht zur Verfügung haben. Darüber hinaus gibt es schon in der Literatur Ergebnisse über Versionen des Satzes von Michlin auf $L_p(\mathbb{R}^n, X)$ -Räumen ($1 < p < \infty$) durch Pseudodifferentialoperatoren mit $\mathcal{L}(X)$ -wertigen Symbolen $a(x, \xi)$, aber dabei ist X ein UMD -Banachraum und die Symbole erfüllen eine stärkere Beschränktheitsbedingung als (1), siehe [De-Kr,06], [P-S,06].

Solche Versionen des Satzes von Michlin, wie schon oben erwähnt wurde, spielen bei der Analysis partieller Differentialgleichungen und der Pseudodifferentialgleichungen eine wichtige Rolle. Zum Beispiel kann man auch die Beschränktheit der geeigneten nicht regulären Pseudodifferentialoperatoren zur Untersuchung der Regularität von Lösungen der nicht linearen elliptischen partiellen Differentialgleichungen anwenden (siehe [Tay,91]).

⁵ $C_*^r(\mathbb{R}^n, E) := B_{\infty,\infty}^r(\mathbb{R}^n, E)$ für $r > 0$ (siehe Definition 1.1.4).

Diese Arbeit ist wie folgt aufgebaut:

Im ersten Kapitel findet man die hier benutzten Bezeichnungen, Definitionen und Eigenschaften der Funktionenräume (Abschnitt 1.1), der sektoriellen Operatoren und analytischen Halbgruppen (Abschnitt 1.2) und des oszillatorischen Integrals (Abschnitt 1.3). Insbesondere werden wir im Abschnitt 1.3 eine allgemeine Version des Theorems 6.4 aus [Ku,81] zeigen, aus dem eine Version des Satzes von Fubini für oszillatorische Integrale folgt.

Dann werden im zweiten Kapitel die Definitionen des Raumes der Symbole $S_{1,0}^{m,\rho}(\mathbb{R}^n, E)$, des Pseudodifferentialoperator $a(D)$ und des Vektorraumes $\mathbf{V}(\mathbb{R}^n, E)$ gegeben. Außerdem werden wir unser erstes Hauptresultat (Satz 2.3.1) bewiesen. Für die Konstruktion des Operator $\widetilde{a(D)}$ wenden wir an, dass

$$\left(B_{p,q}^s(\mathbb{R}^n, E) \cap C_b^\infty(\mathbb{R}^n, E); \|\cdot\|_{B_{p,q}^s} \right) \xhookrightarrow{d} B_{p,q}^s(\mathbb{R}^n, E)$$

gilt, wenn $1 \leq p \leq \infty, 1 \leq q < \infty$, und einige Eigenschaften der Interpolationstheorie für den Fall $q = \infty$.

Das dritte Kapitel enthält die Definitionen der Symbolklasse $S^{m,\rho}(\mathbb{R}^n, E)$, parabolischen Symbole in $S_{1,0}^{m,\rho}(\mathbb{R}^n, E)$ und $S^{m,\rho}(\mathbb{R}^n, E)$ und Realisierung eines Operators. Mittels der Version des Satzes von Michlin des zweiten Kapitels zeigen wir im Abschnitt 3.1 die Erzeugung analytischer Halbgruppen auf Besovräumen vom Operator A_1 , im Abschnitt 3.2 die oben formulierte Aussage b) über die Erzeugung C^∞ -Halbgruppen und im Abschnitt 3.3 die Erzeugung analytischer auf $\mathfrak{F}_p^k(\mathbb{R}^n, E_0)$ von der $\mathfrak{F}_p^k(\mathbb{R}^n, E_0)$ -Realisierung des Operators A_2 , wenn $E_0 = E_1$. Benutzt wird in diesem Abschnitt, dass für parabolische Symbole a in $S^{m,\rho_n}(\mathbb{R}^n, E_0)$

$$b_\lambda^0 := (\lambda + a^0)^{-1} \in S_{1,0}^{-m,\rho_n}(\mathbb{R}^n, E_0) \text{ gilt,}$$

was zusammen mit der Homogenität von a^0 und einigen Eigenschaften des oszillatorischen Integrals die folgende Abschätzung liefert:

$$\|b_\lambda^0(D) u\|_{W_p^k(\mathbb{R}^n, E_0)} \leq \frac{M}{1 + |\lambda|} \|u\|_{W_p^k(\mathbb{R}^n, E_0)} \quad \text{für alle } u \in C_b^\infty(\mathbb{R}^n, E_0) \cap W_p^k(\mathbb{R}^n, E_0)$$

und alle $\lambda \in \sum_{\frac{\pi}{2}, R} := \{z \in \mathbb{C} : |z| \geq R \text{ und } |\arg z| \leq \frac{\pi}{2}\}$, wobei $M \geq 1$ und $R > 0$ geeignete Konstanten sind. Damit erhalten wir, dass die $W_p^k(\mathbb{R}^n, E_0)$ -Realisierung von $A_2^0 := -\widetilde{a^0(D)} \Big|_{B_{p,\infty}^{k+m}(\mathbb{R}^n, E_0)}$ eine analytische Halbgruppe auf dem Sobolevraum $W_p^k(\mathbb{R}^n, E_0)$ erzeugt. Da

$$a = a^0 + (a - a^0) \quad \text{und} \quad a - a^0 \in S_{1,0}^{m-1,\rho_n}(\mathbb{R}^n, E_0) \text{ gelten,}$$

liefert ein Störungsargument (Satz 1.2.2), dass die $W_p^k(\mathbb{R}^n, E_0)$ -Realisierung von A_2 auch eine analytische Halbgruppe auf $W_p^k(\mathbb{R}^n, E_0)$ erzeugt, wenn $E_1 = E_0$. Daher erhält man die Behauptung in (2) (genau genommen den Satz 3.3.3 und dessen Korollar). Trotzdem kann man den genauen Definitionsbereich der Operatoren nicht angeben. Es ist aber möglich, die dichten

Einbettungen

$$\begin{aligned} B_{p,1}^{k+m}(\mathbb{R}^n, E_1) &\xhookrightarrow{d} D\left(A(\tau)_{W_p^k(\mathbb{R}^n, E_0)}\right) \xhookrightarrow{d} b_{p,\infty}^{k+m}(\mathbb{R}^n, E_1), \quad 1 \leq p < \infty, \\ b_{\infty,1}^{k+m}(\mathbb{R}^n, E_1) &\xhookrightarrow{d} D\left(A(\tau)_{BUC^k(\mathbb{R}^n, E_0)}\right) \xhookrightarrow{d} b_{\infty,\infty}^{k+m}(\mathbb{R}^n, E_1) \end{aligned} \quad (7)$$

zu erhalten, die hilfreich für die Untersuchung der Cauchy-Probleme (3) und (5) in Kapitel 4 sind.

Zur Untersuchung parabolischer Evolutionsgleichungen werden in Kapitel 4 die Resultate des dritten Kapitels verwendet. Lineare Cauchy-Probleme (wie in (3)) auf Besovräumen werden im Abschnitt 4.1 behandelt. Da der Definitionsbereich von $A(t)_{\mathfrak{S}_p^k}$ in diesem Fall unabhängig von t ist, wenden wir auch Resultate aus [Acq-Te,85,86], [Pou,65] und [Ta,60] an. Falls man das Problem (3) auf $W_p^k(\mathbb{R}^n, E_0)$ für $1 \leq p < \infty$ oder auf $BUC^k(\mathbb{R}^n, E_0)$ für $p = \infty$ betrachtet (und damit hängt der Definitionsbereich von $A(t)_{\mathfrak{S}_p^k}$ von t ab) verwenden wir auch ein Ergebnis aus [Am,95], (7) und einigen Eigenschaften der Interpolationstheorie, um das Problem zu lösen. Im Abschnitt 4.2 werden semilineare Cauchy-Probleme betrachtet. Insbesondere wird Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen eines semilinearen und elliptischen Differentialgleichungssystems zweiter Ordnung untersucht (siehe Satz 4.2.3). Mit Hilfe des Satzes 4.2.3 können wir dann im Abschnitt 4.3 das oben erwähnten Koagulations-Fragmentations-Problem mit Diffusion analysieren. Dazu geben wir eine kurze Beschreibung des Diffusionsterms $A(t)$ und des Reaktionsterms R in (4), und danach wird im Satz 4.3.1 die Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen dieses Problems gezeigt.

Das letzte Kapitel 5 untergliedert sich in drei Abschnitte: Der erste beginnt mit der Definition des Raumes der Symbole $C_*^r S_{1,\delta}^{m,\rho}(\mathbb{R}^n, E)$ und endet mit einem Korollar über die Zerlegung eines Symbols aus $C_*^r S_{1,\delta}^{m,\rho}(\mathbb{R}^n, E)$ in elementare Symbole.

Im zweiten Abschnitt definieren wir die Abbildungen $a(x; D)$ und $\widetilde{a(x; D)}$ für elementare bzw. allgemeine Symbole in $C_*^r S_{1,\delta}^{m,\rho}(\mathbb{R}^n, E)$. Die Existenz und einige Eigenschaften dieser „Pseudodifferentialoperatoren“ werden dort gezeigt.

Im dritten Abschnitt zeigen wir den Hauptsatz diesen Kapitels (Satz 5.3.1), und als Folgerung wird die Stetigkeit von $\widetilde{a(x; D)}$ auf den Funktionenräumen $B \cup C^k(\mathbb{R}^n, E)$, $C_0^k(\mathbb{R}^n, E)$, $C_b^k(\mathbb{R}^n, E)$ und $W_p^k(\mathbb{R}^n, E)$ für $1 \leq p \leq \infty$ und $k \in \mathbb{N}$ untersucht (siehe Korollar 5.3.3).

Einleitende Definitionen und Bezeichnungen

In diesem Kapitel geben wir die Definitionen und Bezeichnungen an, die in der ganze Arbeit benutzt werden, wie auch einige wichtige Resultate oder Eigenschaften über die hier betrachteten Funktionenräumen (siehe Abschnitt 1.1). Im Abschnitt 1.2 wird kurz die Theorie analytischer Halbgruppen beschreibt und in der Abschnitt 1.3 werden grundlegende Eigenschaften des oszillatorischen Integrals für nicht reguläre Amplituden untersucht.

In der vorliegenden Arbeit bezeichnen $\emptyset$ die leere Menge, $\mathbb{N}$ die Menge der natürlichen Zahlen, $\mathbb{N}_0 := \mathbb{N} \cup \{0\}$,

$$\rho_n := \begin{cases} n + 1, & n \in \mathbb{N} \text{ ungerade,} \\ n + 2, & n \in \mathbb{N} \text{ gerade,} \end{cases} \quad (1.1)$$

$\mathbb{R}$ die Menge der reellen Zahlen, $\mathbb{R}^+ := \{x \in \mathbb{R} : x > 0\}$, $\mathbb{R}_0^+ := \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$, $\mathbb{C}$ die der komplexen Zahlen, $|x| := \left(\sum_{i=1}^n x_i^2\right)^{\frac{1}{2}}$ die euklidische Norm auf $\mathbb{R}^n$, $\langle x \rangle := \left(1 + |x|^2\right)^{\frac{1}{2}}$ für $x \in \mathbb{R}^n$ und E, E_i , $i = 0, 1, 2$ Banachräume mit Normen $\|\cdot\|_E$, $\|\cdot\|_{E_i}$. Alle vorkommenden Banachräume sind über $\mathbb{K} = \mathbb{R} \vee \mathbb{C}$ (das heißt über $\mathbb{R}$ oder über $\mathbb{C}$). Sind $(E_1, \|\cdot\|_{E_1})$ und $(E_2, \|\cdot\|_{E_2})$ derselbe Vektorraum mit äquivalenten Normen $\|\cdot\|_{E_1}$ und $\|\cdot\|_{E_2}$, so bezeichnet man dies als $E_1 \doteq E_2$. Weiterhin sei $\mathcal{L}(E_1, E_0)$ der Raum der linearen und stetigen Abbildungen mit Definitionsbereich E_1 und sein Bild in E_0 , und $\mathcal{L}(E_0) := \mathcal{L}(E_0, E_0)$. Wenn $A \in \mathcal{L}(E_1, E_0)$ und

$$\rho(A) := \left\{ \lambda \in \mathbb{C} : \lambda I - A : D(A) = E_1 \rightarrow E_0 \text{ bijektiv und } (\lambda I - A)^{-1} \in \mathcal{L}(E_0) \right\}$$

die **Resolventenmenge** von A ist, dann wird A als ein Operator in E_0 (mit dem Definitionsbereich E_1) aufgefasst. Mit $R(\lambda, A) := (\lambda I - A)^{-1}$, $\lambda \in \rho(A)$, wird hier die **Resolvente** von A bezeichnet. Falls $X := (X, \mathcal{P})$ und $Y := (Y, \mathcal{Q})$ zwei lokal konvexe topologische Vektorräume sind, deren Topologien von den Familien der Halbnormen $\mathcal{P}$ bzw. $\mathcal{Q}$ induziert werden, so wird $\mathcal{L}(X, Y)$, der Raum der linearen und stetigen Abbildungen von X nach Y , mit der **Topologie der beschränkten Konvergenz** versehen, das heißt die Topologie in $\mathcal{L}(X, Y)$ ist von der

Familie der Halbnormen

$$\left\{ u \mapsto \sup_{x \in B} q(u(x)); B \subset X \text{ beschränkt und } q \in \mathcal{Q} \right\}$$

induziert.

Bekanntlich heißt eine lineare Abbildung $u : (X, \mathcal{P}) \rightarrow (Y, \mathcal{Q})$ stetig genau dann, wenn für jedes $q \in \mathcal{Q}$ existieren $p_1, \dots, p_N \in \mathcal{P}$ für ein $N \in \mathbb{N}$ und eine Konstante K , so dass

$$q(u(x)) \leq K \max_{1 \leq i \leq N} p_i(x) \quad \forall x \in X \quad (1.2)$$

(siehe [Do,06; Lemma 3.18]).

1.1 Funktionenräume

Wir bezeichnen mit $C^k(\mathbb{R}^n, E)$, $k \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$, den Fréchetraum aller E -vektorwertigen Funktionen auf $\mathbb{R}^n$, deren Ableitungen bis zur Ordnung $\leq k$ stetig sind, mit der von der Familie der Halbnormen

$$u \mapsto p_{l,K}(u) := \max_{|\alpha| \leq l} \|\partial^\alpha u\|_{\infty, K}, \quad l < k+1, K \subset \mathbb{R}^n \text{ kompakt},$$

induzierten Topologie. Dabei ist $\partial^\alpha = \partial^{\alpha_1} \dots \partial^{\alpha_n}$ für $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}_0^n$. Manchmal wird die Notation $D_{x_j} := (-i) \partial_{x_j}$ benutzt. Um abzukürzen schreiben wir $C^k(\mathbb{R}^n, E) := C^k(\mathbb{R}^n)$ wenn $E = \mathbb{K}$, und falls $k = \infty$ schreibt man auch $C^\infty(\mathbb{R}^n, E) := \mathcal{E}(\mathbb{R}^n, E)$, der Raum der allen unendlich-oft differenzierbaren Funktionen. Weiterhin sei $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n, E)$ der **Raum der Testfunktionen**, das heißt der Raum der allen unendlich-oft differenzierbaren Funktionen $u : \mathbb{R}^n \rightarrow E$ mit kompaktem Träger und versieht mit der Topologie des induktiven Limes.

Für eine offene Menge $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ und ein $\theta \in (0, 1)$ definiert man den **Raum der hölderstetigen Funktionen** durch

$$C^\theta(\Omega, E) := \left\{ u : \Omega \rightarrow E \text{ stetig} : \|u\|_{C^\theta(\Omega, E)} < \infty \right\},$$

wobei

$$\|u\|_{C^\theta(\Omega, E)} := \|u\|_{\infty, \Omega} + [u]_\theta \quad \text{und} \quad [u]_\theta := \sup_{x, y \in \Omega, x \neq y} \frac{\|u(x) - u(y)\|_E}{|x - y|^\theta}.$$

Wir betrachten auch für $k \in \mathbb{N}_0$ folgende Funktionenräume:

$$C_b^k(\mathbb{R}^n, E) := \left\{ u \in C^k(\mathbb{R}^n, E) : \|u\|_{C_b^k} := \max_{|\alpha| \leq k} \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \|\partial_x^\alpha u\|_E < \infty \right\},$$

$$BUC^k(\mathbb{R}^n, E) := \left\{ u \in C_b^k(\mathbb{R}^n, E) : \partial_x^\alpha u \text{ ist gleichmäßig stetig für alle } |\alpha| \leq k \right\}$$

$$\text{mit der Norm } \|u\|_{BUC^k} := \max_{|\alpha| \leq k} \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \|\partial_x^\alpha u\|_E \quad \text{für } u \in BUC^k(\mathbb{R}^n, E),$$

$C_0^k(\mathbb{R}^n, E) :=$ der Abschluss von $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n, E)$ im $BUC^k(\mathbb{R}^n, E)$

mit der Norm $\|u\|_{C_0^k} := \max_{|\alpha| \leq k} \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \|\partial_x^\alpha u\|_E$ für $u \in C_0^k(\mathbb{R}^n, E)$,

$$BUC^\infty(\mathbb{R}^n, E) := C_b^\infty(\mathbb{R}^n, E) := \bigcap_{k \in \mathbb{N}_0} C_b^k(\mathbb{R}^n, E) \text{ und } C_0^\infty(\mathbb{R}^n, E) := \bigcap_{k \in \mathbb{N}_0} C_0^k(\mathbb{R}^n, E).$$

$C_b^k(\mathbb{R}^n, E)$, $BUC^k(\mathbb{R}^n, E)$ und $C_0^k(\mathbb{R}^n, E)$ sind Banachräume und $C_0^\infty(\mathbb{R}^n, E)$ und $C_b^\infty(\mathbb{R}^n, E)$ sind Frécheträume mit der Familie der Normen $\{p_k(\cdot) := \|\cdot\|_{C_b^k} : k \in \mathbb{N}_0\}$.

Sind $r \in \mathbb{R}^+ \setminus \mathbb{N}$ und $[r] := \max\{k \in \mathbb{N}_0 : k < r\}$, so definiert man den Raum

$$C_b^r(\mathbb{R}^n, E) := \left\{ u \in C_b^{[r]}(\mathbb{R}^n, E) : \partial^\alpha u \in C^{r-[r]}(\mathbb{R}^n, E) \quad \forall |\alpha| = [r] \right\}$$

mit der Norm

$$\|u\|_{C_b^r(\mathbb{R}^n, E)} := \|u\|_{C_b^{[r]}(\mathbb{R}^n, E)} + \max_{|\alpha|=[r]} [\partial^\alpha u]_{r-[r]}.$$

Ebenso definiert man den Raum $B \cup C^r(\mathbb{R}^n, E)$ durch

$$B \cup C^r(\mathbb{R}^n, E) := \left\{ u \in B \cup C^{[r]}(\mathbb{R}^n, E) : \partial^\alpha u \in C^{r-[r]}(\mathbb{R}^n, E) \text{ für alle } |\alpha| = [r] \right\}$$

mit der Norm $\|u\|_{B \cup C^r(\mathbb{R}^n, E)} := \|u\|_{C_b^r(\mathbb{R}^n, E)}$ für $u \in B \cup C^r(\mathbb{R}^n, E)$.

Ein wichtiger Fréchetraum ist

$$\mathcal{S}(\mathbb{R}^n, E) := \left\{ \varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^n, E) : \forall k, l \in \mathbb{N}_0, \|\varphi\|_{k,l} := \max_{|\alpha| \leq l} \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \langle x \rangle^k \|\partial_x^\alpha \varphi(x)\|_E < \infty \right\},$$

der Raum der schnell fallenden E -wertigen Funktionen, der mit seiner Standardtopologie betrachtet wird. Ferner wird $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n, \mathbb{C}) := \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ geschrieben.

Der Raum der E -wertigen temperierten Distributionen $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n, E) := \mathcal{L}(\mathcal{S}(\mathbb{R}^n), E)$ ist der Raum der stetigen und linearen Abbildungen von $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ nach E mit der Topologie der beschränkten Konvergenz.

Für $1 \leq p \leq \infty$ definiert man den Raum der Funktionen $L_p(\mathbb{R}^n, E)$ durch

$$L_p(\mathbb{R}^n, E) := \left\{ u : \mathbb{R}^n \rightarrow E : u \text{ (stark) messbar und } \|u\|_{L_p(\mathbb{R}^n, E)} < \infty \right\},$$

wobei

$$\|u\|_{L_p(\mathbb{R}^n, E)} := \begin{cases} \left[\int_{\mathbb{R}^n} \|u(x)\|_E^p dx \right]^{\frac{1}{p}}, & \text{falls } 1 \leq p < \infty, \\ \operatorname{esssup}_{x \in \mathbb{R}^n} \|u(x)\|_E, & \text{falls } p = \infty. \end{cases}$$

Sind V und W lokal konvexe Räume, so ist V **stetig eingebettet in** W , wenn V ein linearer Unterraum von W ist und aus der Konvergenz in V stets Konvergenz in W folgt.

In diesem Fall schreibt man dann $V \hookrightarrow W$. Ist die Einbettung außerdem dicht, so schreibt man $V \xhookrightarrow{d} W$. Ist $U \subset V$, dann bezeichnet $\overline{U}$ **den Abschluss von U in V** .

Man kann zeigen, dass

$$\mathcal{D}(\mathbb{R}^n, E) \hookrightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R}^n, E) \hookrightarrow L_p(\mathbb{R}^n, E) \hookrightarrow \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n, E).$$

Nun seien $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ und $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n, E)$, dann ist **die distributionelle Ableitung** (bzw. die verallgemeinerte Ableitung) der Ordnung α von u , bezeichnet $\partial^\alpha u$, definiert durch

$$(\partial^\alpha u)(\psi) := (-1)^{|\alpha|} u(\partial^\alpha \psi) \quad \text{für alle } \psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n).$$

Damit definiert man für $1 \leq p \leq \infty$ und $k \in \mathbb{N}_0$ **den vektorwertigen Sobolevraum** $W_p^k(\mathbb{R}^n, E)$ durch

$$W_p^k(\mathbb{R}^n, E) := \{u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n, E) : \partial^\alpha u \in L_p(\mathbb{R}^n, E) \text{ für alle } |\alpha| \leq k\}$$

zusammen mit der Norm

$$\|u\|_{W_p^k(\mathbb{R}^n, E)} := \begin{cases} \left[\sum_{|\alpha| \leq k} \|\partial^\alpha u\|_{L_p(\mathbb{R}^n, E)}^p \right]^{\frac{1}{p}}, & \text{falls } 1 \leq p < \infty, \\ \max_{|\alpha| \leq k} \|\partial^\alpha u\|_{L_\infty(\mathbb{R}^n, E)}, & \text{falls } p = \infty. \end{cases}$$

Und die sogenannten **Sobolev-Slobodecki-Räume** $W_p^s(\mathbb{R}^n, E)$ für $s \in \mathbb{R}^+ \setminus \mathbb{N}$ und $p \in [1, \infty[$ sind definiert durch

$$W_p^s(\mathbb{R}^n, E) := \left\{ u \in W_p^{[s]}(\mathbb{R}^n, E) : \|u\|_{W_p^s(\mathbb{R}^n, E)} < \infty \right\},$$

wobei

$$\|u\|_{W_p^s(\mathbb{R}^n, E)} := \left\{ \sum_{|\alpha| \leq [s]} \|\partial^\alpha u\|_{L_p(\mathbb{R}^n, E)}^p + \sum_{|\alpha| = [s]} \int_{\mathbb{R}^{2n}} \frac{\|\partial^\alpha u(x) - \partial^\alpha u(y)\|_E^p}{|x - y|^{n+(s-[s])p}} d(x, y) \right\}^{\frac{1}{p}}.$$

Abkürzung: Für die obigen und folgenden Funktionenräume $\mathfrak{F}(\mathbb{R}^n, E)$ mit $E = \mathbb{K}$ schreiben wir zur Abkürzung $\mathfrak{F}(\mathbb{R}^n, \mathbb{K}) := \mathfrak{F}(\mathbb{R}^n)$.

Definition 1.1.1 Wir definieren den Raum der **Funktionen temperierten Wachstums** mit Werten im Banachraum E durch

$$u \in \mathcal{O}_{\mathcal{M}}(\mathbb{R}^n, E) :\Leftrightarrow \begin{cases} u \in C^\infty(\mathbb{R}^n, E) : \forall \alpha \in \mathbb{N} \exists c_\alpha > 0, m_\alpha \in \mathbb{N} \text{ mit} \\ \left\| \partial_\xi^\alpha u(\xi) \right\|_E \leq c_\alpha \langle \xi \rangle^{m_\alpha} \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^n \end{cases}$$

zusammen mit der Familie der Halbnormen $\mathcal{P} := \{p_{\alpha, \varphi} : \alpha \in \mathbb{N}_0^n, \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)\}$, wobei $p_{\alpha, \varphi} : \mathcal{O}_{\mathcal{M}}(\mathbb{R}^n, E) \longrightarrow \mathbb{R}_0^+$ durch

$$p_{\alpha, \varphi}(u) := \sup_{\xi \in \mathbb{R}^n} \left\| \varphi(\xi) \partial_\xi^\alpha u(\xi) \right\|_E \quad \text{definiert ist.}$$

Für $m \in \mathbb{R}$ und $a(\xi) := \langle \xi \rangle^m$ kann man leicht durch Induktion zeigen, dass

$$|\partial_\xi^\alpha a(\xi)| \leq c_{m,|\alpha|} \langle \xi \rangle^{m-|\alpha|} \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^n \text{ und } \alpha \in \mathbb{N}_0^n. \quad (1.3)$$

Somit gilt $a \in \mathcal{O}_{\mathcal{M}}(\mathbb{R}^n)$.

Mit der obigen Familie der Halbnormen, $\mathcal{P}$, ist $\mathcal{O}_{\mathcal{M}}(\mathbb{R}^n, E)$ ein vollständig lokal konvexer topologischer Raum (siehe [Am,03; Lemma 1.2.6]).

Unter einer **Multiplikation** $b : E_1 \times E_2 \rightarrow E_0$ versteht man eine stetige bilineare Abbildung mit

$$\|b\|_{\mathcal{L}(E_1 \times E_2, E_0)} := \sup_{e_i \in E_i \setminus \{0\}, i=1,2} \frac{\|b(e_1, e_2)\|_{E_0}}{\|e_1\|_{E_1} \|e_2\|_{E_2}} \leq 1.$$

Einige Beispiele der Multiplikationen sind:

- i) die skalare Multiplikation $\mathbb{K} \times E \rightarrow E$, $(k, e) \mapsto ke$,
- ii) die Auswertung einer linearen Abbildung $\mathcal{L}(E_1, E_0) \times E_1 \rightarrow E_0$, $(A, e_1) \mapsto Ae_1$,
- iii) die Komposition $\mathcal{L}(E_1, E_2) \times \mathcal{L}(E_0, E_1) \rightarrow \mathcal{L}(E_0, E_2)$, $(A, B) \mapsto AB$.

Wenn $\mathfrak{F}(\mathbb{R}^n, E_i)$, $i = 0, 1, 2$, geeignete E_i -vektorwertige Funktionenräume sind, $\bullet : E_1 \times E_2 \rightarrow E_0$ eine Multiplikation ist und

$$(u_1 \bullet u_2)(x) := u_1(x) \bullet u_2(x) \quad \text{für } x \in \mathbb{R}^n \text{ und } u_i \in \mathfrak{F}(\mathbb{R}^n, E_i), i = 0, 1,$$

die von “ $\bullet$ ” induzierte punktweise Multiplikation der Funktionen u_1 und u_2 ist, dann kann man eine Faltung $*_{\bullet}$ bezüglich “ $\bullet$ ” auf geeigneten Funktionenräumen erhalten. Präzisiert wird dies in folgenden Lemmata.

Lemma 1.1.1 *Sei $(\mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2, \mathfrak{F}_0)$ eines der Tripel $(\mathcal{E}, \mathcal{D}', \mathcal{D}')$, $(\mathcal{E}, \mathcal{E}', \mathcal{E}')$, $(\mathcal{S}, \mathcal{O}_{\mathcal{M}}, \mathcal{S})$, $(\mathcal{O}_{\mathcal{M}}, \mathcal{O}_{\mathcal{M}}, \mathcal{O}_{\mathcal{M}})$, $(\mathcal{O}_{\mathcal{M}}, \mathcal{S}', \mathcal{S}')$, $(\mathcal{E}, \mathcal{E}, \mathcal{E})$ oder $(\mathcal{E}, \mathcal{D}, \mathcal{D})$. Dann existiert eine eindeutige, bilineare und in beiden Komponenten stetige Abbildung*

$$\mathfrak{F}_1(\mathbb{R}^n, E_1) \times \mathfrak{F}_2(\mathbb{R}^n, E_2) \longrightarrow \mathfrak{F}_0(\mathbb{R}^n, E_0), (a, u) \mapsto a \bullet u,$$

die die punktweise Multiplikation bzgl. $\bullet$ genannt wird, so dass

$$(\varphi \otimes e_1) \bullet (\psi \otimes e_2) = (\varphi \psi) \otimes (e_1 \bullet e_2)$$

für $\varphi \otimes e_1 \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \otimes E_1$ und $\psi \otimes e_2 \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \otimes E_2$. Dabei sind $\varphi \otimes e(x) := \varphi(x)e$, $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, $e \in E$, $x \in \mathbb{R}^n$ und $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \otimes E := \text{span}\{\varphi \otimes e : \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \text{ und } e \in E\}$, $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n, E_i) := \mathcal{L}(\mathcal{D}(\mathbb{R}^n), E_i)$ und $\mathcal{E}'(\mathbb{R}^n, E_i) := \mathcal{L}(\mathcal{E}(\mathbb{R}^n), E_i)$ mit der Topologie der beschränkten Konvergenz versehen.

Beweis. Siehe [Am,03] Theorem 1.6.4., S.40. □

Aus dem Lemma 1.1.1 ergibt sich:

Lemma 1.1.2 Seien auch E_3 , E_4 und E_5 Banachräume und wir nehmen an, dass Multiplikationen

$$\begin{aligned} \bullet : E_1 \times E_2 &\longrightarrow E_0, \\ \bullet : E_0 \times E_3 &\longrightarrow E_5, \\ \bullet : E_2 \times E_3 &\longrightarrow E_4, \\ \bullet : E_1 \times E_4 &\longrightarrow E_5, \end{aligned}$$

existieren, die assoziativ sind, das heißt

$$(e_1 \bullet e_2) \bullet e_3 = e_1 \bullet (e_2 \bullet e_3) \text{ für alle } e_i \in E_i, i = 1, 2, 3.$$

Dann gilt

$$u_1 \bullet (u_2 \bullet u_3) = (u_1 \bullet u_2) \bullet u_3 \text{ für alle } u_i \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^n, E_i), i = 1, 2, 3.$$

Lemma 1.1.3 Sei $(\mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2, \mathfrak{F}_0)$ eines der Tripel $(B \cup C, L_1, B \cup C)$, (C_0, L_1, C_0) , $(L_\infty, L_1, B \cup C)$ oder (L_p, L_1, L_p) mit $1 \leq p < \infty$. Dann existiert eine Fortsetzung der Faltung bezüglich “ $\bullet$ ” von $\mathfrak{F}_1(\mathbb{R}^n, E_1) \times \mathcal{D}(\mathbb{R}^n, E_2)$ zu einer Multiplikation

$$*_\bullet : \mathfrak{F}_1(\mathbb{R}^n, E_1) \times \mathfrak{F}_2(\mathbb{R}^n, E_2) \longrightarrow \mathfrak{F}_0(\mathbb{R}^n, E_0).$$

Die Fortsetzung ist für $f \in \mathfrak{F}_1(\mathbb{R}^n, E_1)$ und $g \in \mathfrak{F}_2(\mathbb{R}^n, E_2)$ gegeben durch

$$(f *_\bullet g)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(y) \bullet g(x-y) dy, \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

Außerdem gilt

$$\|f *_\bullet g\|_{\mathfrak{F}_0(\mathbb{R}^n, E_0)} \leq \|f\|_{\mathfrak{F}_1(\mathbb{R}^n, E_1)} \|g\|_{\mathfrak{F}_2(\mathbb{R}^n, E_2)}.$$

Beweis. Siehe [Am,03], Theorem 1.9.9., S. 69. □

Außerdem gibt es nach [Am,03; Th. 1.9.1] bilineare und in beiden Komponenten stetige Abbildungen

$$*_\bullet : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n, E_1) \times \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n, E_2) \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathcal{M}}(\mathbb{R}^n, E_0), \quad (1.4)$$

$$*_\bullet : \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n, E_1) \times \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n, E_2) \longrightarrow \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n, E_0), \quad (1.5)$$

so dass

$$(v_1 \otimes e_1) *_\bullet (v_2 \otimes e_2) = (v_1 * v_2) \otimes (e_1 \bullet e_2) \quad (1.6)$$

für alle $v_1, v_2 \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ und $e_i \in E_i, i = 1, 2$.

Auf dem Raum der Lebesgue-integrierbaren Funktionen $L_1(\mathbb{R}^n, E)$ definiert man die **Fouriertransformation** (bzw. die **inverse Fouriertransformation**) einer Funktion $f \in L_1(\mathbb{R}^n, E)$ durch

$$\widehat{f}(\xi) := \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\xi x} f(x) dx, \quad \xi \in \mathbb{R}^n \quad (\text{bzw. } \check{f} := [\widehat{f}](-\cdot)).$$

Es ist bekannt, dass $[\hat{f}]^\vee = [\check{f}]^\wedge = f$ für alle $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n, E)$.

Die **Fouriertransformation** (bzw. die inverse Fouriertransformation) **einer Distribution** $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n, E)$ definiert man durch

$$\hat{u}(\psi) := u(\hat{\psi}) \quad (\text{bzw. } \check{u}(\psi) := u(\check{\psi})) \quad \text{für alle } \psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n).$$

Man bezeichnet auch $\hat{u}$ bzw. $\check{u}$ als $\mathcal{F}u$ bzw. $\mathcal{F}^{-1}u$. Bekanntlich ist auch, dass $\mathcal{F}, \mathcal{F}^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{S}(\mathbb{R}^n, E)) \cap \mathcal{L}(\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n, E))$ und $\mathcal{F}\mathcal{F}^{-1} = \mathcal{F}^{-1}\mathcal{F} = I_{\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n, E)}$.

Für $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ und $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n, E)$ schreibt man

$$\psi(D)u := \mathcal{F}^{-1}(\psi\mathcal{F}u). \quad (1.7)$$

Man kann diesen Ausdruck mit Hilfe der in [Am,03; Th. 1.9.10] gefundenen Gleichheit

$$\widehat{u_1 *_{\bullet} u_2} = (2\pi)^{n/2} \widehat{u_1} \bullet \widehat{u_2}, \quad u_1 \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n, E_1) \text{ und } u_2 \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n, E_2), \quad (1.8)$$

umformulieren. Der Faktor $(2\pi)^{n/2}$ in (1.8) kommt aus der Definition von $\hat{\varphi}$ für $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

Im skalaren Fall gilt auch die Gleichheit (1.8) für Distributionen $u_1, u_2 \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ mit kompaktem Träger (siehe z. B. [Tr,67; Kapitel 30]). Die Gültigkeit von (1.8) wird in der Bemerkung 1.1.1 für den vektorwertigen Fall gezeigt, aber zunächst rufen wir den Begriff vom Träger einer temperierten Distribution in Erinnerung. Seien $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n, E)$ und $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen. Man sagt, dass u **in Ω verschwindet**, falls

$$\langle u, \varphi \rangle := u(\varphi) = 0 \quad \forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \text{ mit } \text{supp}(\varphi) \subset \Omega.$$

Ist $\mathcal{G}_u := \left\{ \Omega \underset{\text{offen}}{\subset} \mathbb{R}^n : u \text{ verschwindet in } \Omega \right\}$, so ist $\omega := \bigcup_{\Omega \in \mathcal{G}_u} \Omega$. Dann definiert man **den**

Träger von u durch

$$\text{supp}(u) := \mathbb{R}^n \setminus \omega.$$

Sind $u_i \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n, E)$ für $i = 1, 2$, so ist offensichtlich, dass $\mathcal{G}_{u_1} \cap \mathcal{G}_{u_2} \subset \mathcal{G}_{u_1+u_2}$. Daher und aus den de Morganschen Gesetzen ergibt sich:

$$\text{supp}(u_1 + u_2) \subset \bigcup_{i=1}^2 \text{supp}(u_i). \quad (1.9)$$

Weiterhin ist es nicht so schwer zu zeigen, dass für ein abgeschlossenes Intervall $I \subset \mathbb{R}^n$ und $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n, E)$ Folgendes gilt:

$$\text{supp}(u) \subset I \iff [u(\varphi) = 0 \text{ für alle } \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \text{ mit } I \cap \text{supp}(\varphi) = \emptyset]. \quad (1.10)$$

Weitere wichtige Aspekte temperierter Distributionen mit kompaktem Träger sind: a)

$$\{u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n, E) : u \text{ hat kompakten Träger}\} = \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n, E)$$

(siehe dazu z. B. [Am,95; III.4.5]), und b) der Satz von Paley-Wiener für Distributionen (siehe z.B. [Wal,94; S. 191] für den skalaren Fall und [Mei,72; Satz 2] für den vektorwertigen Fall) besagt, dass es für jedes $u \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n, E)$ eine holomorphe Funktion $\tilde{u}$ gibt mit

$$\tilde{u}(z) = \left\langle u, (2\pi)^{-\frac{n}{2}} e^{-iz \cdot x} \right\rangle, \quad z = \xi + i\eta, \quad \xi, \eta \in \mathbb{R}^n \quad \text{und} \quad \tilde{u} = \mathcal{F}u \in \mathcal{O}_{\mathcal{M}}(\mathbb{R}^n, E). \quad (1.11)$$

Daraus ergibt sich eine nützliche Bemerkung.

Bemerkung 1.1.1 Seien $u \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n, E_1)$ und $v \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n, E_2)$. Dann gilt

$$\mathcal{F}(u \bullet v) = (2\pi)^{n/2} (\mathcal{F}u) \bullet (\mathcal{F}v) \quad \text{in } \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n, E_0).$$

Beweis. Seien $u \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n, E_1)$ und $v \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n, E_2)$. Aus der Proposition 1.3.3 in [Am,03; S.17] wissen wir bereits, dass $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n, E_1) \xrightarrow{d} \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n, E_1)$. Genau genommen sei $B_R := \{x \in \mathbb{R}^n : |x| < R\}$ für $R > 0$. Dann existiert eine Folge $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$ in $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n, E_1)$ und eine Konstante $R_0 > 0$ mit

$$u_k \rightarrow u \text{ in } \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n, E_1) \quad \text{und} \quad \text{supp}(u_k), \text{supp}(u) \subset B_{R_0} \quad \text{für alle } k \in \mathbb{N}. \quad (1.12)$$

Die in [Am,03; Prop.1.3.3] gegebene Folge ist $u_k = (\phi_k u) * \rho_{\frac{1}{k}}$, $k \in \mathbb{N}$, wobei $\phi_k \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ mit $\phi_k|_{B_k} = 1$ für alle $k \in \mathbb{N}$ und $(\rho_\epsilon)_{\epsilon > 0}$ ein **Standardregularisierer** (engl. standard mollifier) ist (mit ρ_1 gerade). Daher sieht man deutlich, dass

$$\text{supp}(u_k) \subset \text{supp}(\phi_k u) + \text{supp}\left(\rho_{\frac{1}{k}}\right) \subset \text{supp}(u) + B_1 \quad \text{für alle } k \in \mathbb{N},$$

was (1.12) erklärt.

Nun seien $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ und $\varphi \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^n)$ beliebig und sei ψ_0 eine Funktion in $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ mit $\psi_0|_{B_{R_0}} = 1$. Dann erhält man nach (1.11) und (1.12), dass

$$\begin{aligned} p_{\alpha, \varphi}(\mathcal{F}(u - u_k)) &= \sup_{\xi \in \mathbb{R}^n} \left\| \varphi(\xi) \partial_\xi^\alpha (\mathcal{F}(u - u_k)(\xi)) \right\|_{E_1} \\ &= \sup_{\xi \in \mathbb{R}^n} \left\| \varphi(\xi) (\mathcal{F}(x^\alpha (u - u_k))(\xi)) \right\|_{E_1} \\ &= \sup_{\xi \in \mathbb{R}^n} \left\| \varphi(\xi) \left\langle x^\alpha (u - u_k), (2\pi)^{-\frac{n}{2}} e^{-i\xi \cdot x} \right\rangle \right\|_{E_1} \\ &= \sup_{\xi \in \mathbb{R}^n} \left\| \left\langle u - u_k, \underbrace{(2\pi)^{-\frac{n}{2}} x^\alpha e^{-i\xi \cdot x} \varphi(\xi) \psi_0(x)}_{=: \psi_\xi(x) \in \mathcal{E}(\mathbb{R}_x^n)} \right\rangle \right\|_{E_1} \\ &= \sup_{\psi \in B := \{\psi_\xi : \xi \in \mathbb{R}^n\}} \left\| \langle u - u_k, \psi \rangle \right\|_{E_1} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0, \end{aligned}$$

da $B \subset \mathcal{E}(\mathbb{R}^n)$ beschränkt ist und $u_k \rightarrow u$ in $\mathcal{E}'(\mathbb{R}^n, E_1)$. Also

$$\mathcal{F}u_k \longrightarrow \mathcal{F}u \quad \text{in } \mathcal{O}_{\mathcal{M}}(\mathbb{R}^n, E_1).$$

Daraus folgt zusammen mit dem Lemma 1.1.1:

$$\mathcal{F}u_k \bullet \mathcal{F}v \longrightarrow \mathcal{F}u \bullet \mathcal{F}v \quad \text{in } \mathcal{O}_{\mathcal{M}}(\mathbb{R}^n, E_0).$$

Da $\mathcal{O}_{\mathcal{M}}(\mathbb{R}^n, E_1) \hookrightarrow \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n, E_1)$, $\mathcal{E}'(\mathbb{R}^n, E_1) \hookrightarrow \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n, E_1)$ und $\mathcal{F} \in \mathcal{L}(\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n, E_1))$ gelten, erhält man sofort aus (1.5) und (1.8), dass

$$\mathcal{F}(u *_{\bullet} v) \longleftarrow \mathcal{F}(u_k *_{\bullet} v) = (2\pi)^{\frac{n}{2}} \mathcal{F}u_k \bullet \mathcal{F}v \longrightarrow (2\pi)^{\frac{n}{2}} \mathcal{F}u \bullet \mathcal{F}v \quad \text{in } \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n, E_0).$$

Somit ist die Bemerkung bewiesen. $\square$

Definiert man $[u(-\cdot)](\varphi) := u(\varphi(-\cdot))$ für ein $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n, E)$ und alle $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, so gilt für alle $u_i \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n, E_i)$, $i = 1, 2$, dass

$$(u_1 *_{\bullet} u_2)(-\cdot) = [u_1(-\cdot)] *_{\bullet} [u_2(-\cdot)]$$

(siehe Remarks 1.9.5(b) und 1.9.6(h) in [Am,03]). Daraus folgt zusammen mit der Bemerkung 1.1.1, dass

$$\mathcal{F}^{-1}(u_1 *_{\bullet} u_2) = (2\pi)^{n/2} (\mathcal{F}^{-1}u_1) \bullet (\mathcal{F}^{-1}u_2) \quad \text{für alle } u_i \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n, E_i) \text{ und } i = 1, 2. \quad (1.13)$$

Zum Schluss möchten wir noch eine im Abschnitt 5.2 eine wichtige Rolle spielende Bemerkung über den Träger einer Faltung machen. Seien $u_i \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n, E_i)$, $i = 1, 2$, temperierte Distributionen mit kompaktem Träger, dann gilt

$$\text{supp}(u_1 *_{\bullet} u_2) \subset \text{supp}(u_1) + \text{supp}(u_2) \quad (1.14)$$

(vgl. [Am,03; Remarks 1.9.6 (f)]).

1.1.1 Besovräume

Vor der Definition der Besovräume führen wir zuerst die Definition einer Zerlegung der Eins ein.

Definition 1.1.2 (Die Menge $\Phi(\mathbb{R}^n)$ der Zerlegung der Eins) Eine Folge $(\phi_j)_{j \in \mathbb{N}_0}$ in $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ heißt eine Zerlegung der Eins (bezeichnet $(\phi_j)_{j \in \mathbb{N}_0} \in \Phi(\mathbb{R}^n)$), wenn sie Folgendes erfüllt:

a)

$$\begin{aligned} \text{supp}(\phi_0) &\subset \Omega_0 := \{x \in \mathbb{R}^n : |x| \leq 2\} \quad \text{und} \\ \text{supp}(\phi_j) &\subset \Omega_j := \{x \in \mathbb{R}^n : 2^{j-1} \leq |x| \leq 2^{j+1}\} \quad \text{für alle } j \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

b) $\sum_{j=0}^{\infty} \phi_j(\xi) = 1$ für alle $\xi \in \mathbb{R}^n$, und

c) Für jedes $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ existiert eine Konstante $c_{\alpha} > 0$ so, dass¹

$$|D_{\xi}^{\alpha} \phi_j(\xi)| \leq c_{\alpha} 2^{-j|\alpha|} 1_{\Omega_j}(\xi) \quad \text{für alle } \xi \in \mathbb{R}^n \text{ und } j \in \mathbb{N}_0.$$

¹Unter 1_{Ω} versteht man die **charakteristische Funktion** einer Menge Ω .

Im Folgenden betrachten wir stets eine Zerlegung der Eins $(\psi_j)_{j \in \mathbb{N}_0}$, die wie folgt konstruiert ist: Für ein $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ mit

$$\text{supp} \psi \subset \{x \in \mathbb{R}^n : |x| \leq 2\} \text{ und } \psi(x) = 1 \text{ auf } |x| \leq 1 \quad (1.15)$$

definiert man

$$\begin{cases} \tilde{\psi}(x) := \psi(x) - \psi(2x) \quad \forall x \in \mathbb{R}^n, \\ \psi_j(x) := \tilde{\psi}(2^{-j}x) \quad \forall x \in \mathbb{R}^n, j \in \mathbb{N}, \\ \psi_0 := \psi, \\ \psi_{-1} := 0. \end{cases} \quad (1.16)$$

Man kann leicht zeigen, dass

$$\sum_{j=0}^k \psi_j(\xi) = \psi(2^{-k}\xi) \quad \text{für alle } \xi \in \mathbb{R}^n \text{ und } k \in \mathbb{N}_0. \quad (1.17)$$

Definition 1.1.3 (Der Besovraum). Für $s \in \mathbb{R}$ und $p, q \in [1, \infty]$ definiert man den E-vektorwertigen Besovraum der Ordnung s durch

$$B_{p,q}^s(\mathbb{R}^n, E) := \left\{ u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n, E) : \left\| 2^{ks} \|\psi_k(D)u\|_{L_p(\mathbb{R}^n, E)} \right\|_{l_q} < \infty \right\}$$

mit der Norm

$$\|u\|_{B_{p,q}^s(\mathbb{R}^n, E)}^\psi := \left\| 2^{ks} \|\psi_k(D)u\|_{L_p(\mathbb{R}^n, E)} \right\|_{l_q}.$$

Folglich erhält man den Banachraum $(B_{p,q}^s(\mathbb{R}^n, E), \|\cdot\|_{B_{p,q}^s}^\psi)$. Für verschiedene ψ bekommt man äquivalente Normen. Deswegen schreibt man nur $\|\cdot\|_{B_{p,q}^s}$ statt $\|\cdot\|_{B_{p,q}^s}^\psi$.

Einige wichtige Eigenschaften der Besovräume sind:

Satz 1.1.1 Seien $s \in \mathbb{R}$ und $p, q \in [1, \infty]$. Dann gelten:

a) $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n, E) \hookrightarrow B_{p,q}^s(\mathbb{R}^n, E) \hookrightarrow \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n, E)$, aber $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n, E) \xrightarrow{d} B_{p,q}^s(\mathbb{R}^n, E)$, wenn $p, q \in [1, \infty)$.

b) Für alle $1 \leq q_0 \leq q_1 \leq \infty$ gilt

$$B_{p,q_0}^s(\mathbb{R}^n, E) \hookrightarrow B_{p,q_1}^s(\mathbb{R}^n, E). \quad (1.18)$$

c) Für alle $\epsilon > 0$ und $1 \leq q_0, q_1 \leq \infty$ gilt:

$$B_{p,q_0}^{s+\epsilon}(\mathbb{R}^n, E) \hookrightarrow B_{p,q_1}^s(\mathbb{R}^n, E). \quad (1.19)$$

d) Seien $s_1 \leq s_0$ und $1 \leq p_0 \leq p_1 \leq \infty$ mit $s_1 - \frac{n}{p_1} = s_0 - \frac{n}{p_0}$. Dann gilt

$$B_{p_0,q}^{s_0}(\mathbb{R}^n, E) \hookrightarrow B_{p_1,q}^{s_1}(\mathbb{R}^n, E). \quad (1.20)$$

e) Ist $s \in \mathbb{R}^+ \setminus \mathbb{N}$, so ist

$$B_{p,p}^s(\mathbb{R}^n, E) = \begin{cases} W_p^s(\mathbb{R}^n, E), & 1 \leq p < \infty, \\ BUC^s(\mathbb{R}^n, E), & p = \infty. \end{cases}$$

f) Falls $1 \leq p < \infty$, $1 \leq q \leq \infty$ und $k \in \mathbb{N}_0$ mit $s > \frac{n}{p} + k$, dann gilt

$$B_{p,q}^s(\mathbb{R}^n, E) \hookrightarrow C_0^k(\mathbb{R}^n, E).$$

g) Für $k \in \mathbb{N}_0$ gilt

$$B_{p,1}^k(\mathbb{R}^n, E) \hookrightarrow W_p^k(\mathbb{R}^n, E) \hookrightarrow B_{p,\infty}^k(\mathbb{R}^n, E), \quad (1.21)$$

$$B_{\infty,1}^k(\mathbb{R}^n, E) \hookrightarrow C_b^k(\mathbb{R}^n, E) \hookrightarrow B_{\infty,\infty}^k(\mathbb{R}^n, E). \quad (1.22)$$

Beweis. Die Aussagen a)-f) findet man in [Am,97; Kapitel 5], [Ki,03; §1.2] oder in [Schm,86]. Die Aussage g) befindet sich in [Ki,03; Theorem 1.2.6, S.12]. $\square$

Korollar 1.1.1 Sei $B_m := B_{nm,m}^{-(m-\frac{1}{m})}(\mathbb{R}^n, E)$ für $m \in \mathbb{N}$. Dann gelten:

a) $B_m \hookrightarrow B_{m+1}$ für alle $m \in \mathbb{N}$.

b) Seien $m_1, m_2 \in \mathbb{N}$ mit $m_1 \leq m_2$. Dann $B_{m_1} \hookrightarrow B_{m_2}$.

c) Für beliebig $s \in \mathbb{R}$ und $p, q \in [1, \infty]$ existiert ein $m_0 \in \mathbb{N}$, so dass

$$B_{p,q}^s(\mathbb{R}^n, E) \hookrightarrow B_{m_0}.$$

Beweis. Dies folgt aus der obigen Eigenschaften der Besovräume. In der Tat:

a) Sei $m \in \mathbb{N}$. Dann gilt nach (1.19) und (1.20), dass

$$B_m = B_{nm,m}^{-(m-\frac{1}{m})} \hookrightarrow B_{nm,m+1}^{-(m+1-\frac{1}{m})} \hookrightarrow B_{n(m+1),m+1}^{\hat{s}},$$

wobei $\hat{s} - \frac{1}{m+1} = -(m+1) + \frac{1}{m} - \frac{1}{m}$ ist. Also $\hat{s} = -(m+1) + \frac{1}{m+1}$. Somit erhält man

$$B_m = B_{nm,m}^{-(m-\frac{1}{m})} \hookrightarrow B_{n(m+1),m+1}^{-(m+1-\frac{1}{m+1})} = B_{m+1}.$$

b) Es folgt aus a).

c) Nun seien $s \in \mathbb{R}$, $p, q \in [1, \infty]$ und $m \in \mathbb{N}$. Dann

$$B_{p,q}^s(\mathbb{R}^n, E) \hookrightarrow B_{p,m}^{[s]-1}(\mathbb{R}^n, E) \hookrightarrow B_{nm,m}^{\hat{s}}(\mathbb{R}^n, E), \quad (1.23)$$

wobei $[s]$ die größte ganze Zahl kleiner oder gleich als s ist und $\hat{s} := \frac{1}{m} + [s] - 1 - \frac{n}{p} = -\left(m - \frac{1}{m}\right) + \left(m + [s] - 1 - \frac{n}{p}\right)$. Dann wählen wir ein $m_0 \in \mathbb{N}$ so groß, dass $\hat{s} > -\left(m_0 - \frac{1}{m_0}\right)$ (z.B. ist ein $m_0 \in \mathbb{N}$ mit $m_0 > 1 + \frac{n}{p} - [s]$ geeignet). Somit erhält man zusammen mit (1.19), (1.23):

$$B_{p,q}^s(\mathbb{R}^n, E) \hookrightarrow B_{nm_0,m_0}^{-\left(m_0 - \frac{1}{m_0}\right)}(\mathbb{R}^n, E) = B_{m_0}.$$

Daraus folgt c).

□

Aus dem Korollar 1.1.1 kann man leicht sehen, dass es für $s_0, s_1 \in \mathbb{R}$, $p_0, p_1, q_0, q_1 \in [1, \infty]$ ein $m_0 \in \mathbb{N}$ gibt, so dass

$$B_{p_0,q_0}^{s_0}(\mathbb{R}^n, E) \cap B_{p_1,q_1}^{s_1}(\mathbb{R}^n, E) \hookrightarrow B_{nm_0,m_0}^{-\left(m_0 - \frac{1}{m_0}\right)}. \quad (1.24)$$

Weiterhin findet man zwei Lemmata, die in den Sätzen 2.2.3 und 2.3.1 verwendet werden.

Lemma 1.1.4 *Seien $s \in \mathbb{R}$, $p \in [1, \infty]$ und $q \in [1, \infty)$. Dann gilt*

$$\left(C_b^\infty(\mathbb{R}^n, E) \cap B_{p,q}^s(\mathbb{R}^n, E); \|\cdot\|_{B_{p,q}^s}\right) \xrightarrow{d} B_{p,q}^s(\mathbb{R}^n, E). \quad (1.25)$$

Beweis. Für alle $s \in \mathbb{R}$, $p \in [1, \infty]$ und $q \in [1, \infty)$ ist es klar, dass

$$C_b^\infty(\mathbb{R}^n, E) \cap B_{p,q}^s(\mathbb{R}^n, E) \hookrightarrow B_{p,q}^s(\mathbb{R}^n, E).$$

Es bleibt nur die Dichtheit zu zeigen. Falls $p < \infty$ ist, so erhält man nach Satz 1.1.1 und $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n, E) \subset C_b^\infty(\mathbb{R}^n, E) \cap B_{p,q}^s(\mathbb{R}^n, E)$ die Dichtheit in (1.25). Nun seien $u \in B_{\infty,q}^s(\mathbb{R}^n, E)$ mit $q \in [1, \infty)$, $(\psi_j)_{j \in \mathbb{N}_0}$ eine Zerlegung der Eins wie in (1.16) und $u_N := \sum_{k=0}^N \mathcal{F}^{-1}(\psi_k \mathcal{F}u)$, $N \in \mathbb{N}$. Nach Definition ist $\mathcal{F}^{-1}(\psi_j \mathcal{F}u) \in L_\infty(\mathbb{R}^n, E) \forall j \in \mathbb{N}_0$ und somit ist $u_N \in L_\infty(\mathbb{R}^n, E)$. Weiterhin sei $(\varphi_j)_{j \in \mathbb{N}_0}$ andere Zerlegung der Eins wie in (1.16). Dann gilt nach (1.7), (1.8) und (1.4), dass

$$\varphi_j(D)(\psi_k(D)u) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \check{\varphi}_j * (\psi_k(D)u) \in \mathcal{O}_{\mathcal{M}}(\mathbb{R}^n, E) \quad \text{für alle } j, k \in \mathbb{N}_0, \quad (1.26)$$

also ist $\varphi_j(D)(\psi_k(D)u)$ eine reguläre Distribution. Daraus folgt zusammen mit $\check{\varphi}_j \in L_1(\mathbb{R}^n)$, $\psi_k(D)u \in L_\infty(\mathbb{R}^n, E_0)$ und dem Lemma 1.1.3, dass

$$\begin{aligned} \|\varphi_j(D)(\psi_k(D)u)\|_{L_\infty} &\leq \|\check{\varphi}_j\|_{L_1} \|\psi_k(D)u\|_{L_\infty} \\ &= c_\varphi \|\psi_k(D)u\|_{L_\infty} \quad \forall j, k \in \mathbb{N}_0, \end{aligned} \quad (1.27)$$

wobei die Konstante $c_\varphi := \max \{ \|\check{\varphi}_0\|_{L_1}, \|\check{\varphi}_1\|_{L_1} \}$ nicht von j und k abhängt. Damit erhält man

$$\varphi_j(D)(u - u_N) = \varphi_j(D)u - \sum_{k=0}^N \varphi_j(D)(\psi_k(D)u) \in L_\infty(\mathbb{R}^n, E).$$

Daraus ergibt sich zusammen mit $\text{supp}(\psi_j), \text{supp}(\varphi_j) \subset \Omega_j$ und (1.27), dass

$$\begin{aligned} & \|u - u_N\|_{B_{\infty,q}^s(\mathbb{R}^n, E)}^q \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} 2^{jsq} \left\| \varphi_j(D) \left(u - \sum_{k=0}^N \mathcal{F}^{-1}(\psi_k \mathcal{F}u) \right) \right\|_{L_\infty(\mathbb{R}^n, E)}^q \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} 2^{jsq} \left\| \varphi_j(D) \left(\sum_{k=0}^{\infty} \mathcal{F}^{-1}(\psi_k \mathcal{F}u) - \sum_{k=0}^N \mathcal{F}^{-1}(\psi_k \mathcal{F}u) \right) \right\|_{L_\infty(\mathbb{R}^n, E)}^q \\ &= (2\pi)^{n/2} \sum_{j=0}^{\infty} 2^{jsq} \left\| \mathcal{F}^{-1} \left(\varphi_j \sum_{k=N+1}^{\infty} \psi_k \mathcal{F}u \right) \right\|_{L_\infty(\mathbb{R}^n, E)}^q \\ &= c_n \left\{ 2^{Nsq} \left\| \mathcal{F}^{-1}(\varphi_N \psi_{N+1} \mathcal{F}u) \right\|_{L_\infty(\mathbb{R}^n, E)}^q \right. \\ &\quad + 2^{(N+1)sq} \left\| \mathcal{F}^{-1}(\varphi_{N+1}(\psi_{N+1} + \psi_{N+2}) \mathcal{F}u) \right\|_{L_\infty(\mathbb{R}^n, E)}^q \\ &\quad \left. + \sum_{j=N+2}^{\infty} 2^{jsq} \left\| \mathcal{F}^{-1}(\varphi_j \mathcal{F}u) \right\|_{L_\infty(\mathbb{R}^n, E)}^q \right\} \quad \left(\text{weil } \sum_{r=-1}^1 \varphi_j \psi_{j+r} = \varphi_j \right) \\ &\stackrel{(1.8)}{=} c_n \left\{ 2^{Nsq} \left\| \psi_N(D)(\varphi_N(D)u) \right\|_{L_\infty}^q + 2^{(N+1)sq} \left\| (\psi_{N+1} + \psi_{N+2})(D)(\varphi_{N+1}(D)u) \right\|_{L_\infty}^q \right. \\ &\quad \left. + \sum_{j=N+2}^{\infty} 2^{jsq} \left\| \varphi_j(D)u \right\|_{L_\infty}^q \right\} \\ &\stackrel{(1.27)}{\leq} c_{n,q,s,\psi} \left\{ 2^{Nsq} \left\| \varphi_N(D)u \right\|_{L_\infty}^q + 2^{(N+1)sq} \left\| (\varphi_{N+1}(D)u) \right\|_{L_\infty}^q + \sum_{j=N+2}^{\infty} 2^{jsq} \left\| \varphi_j(D)u \right\|_{L_\infty}^q \right\} \\ &= c_{n,q,s,\psi} \sum_{j=N}^{\infty} 2^{jsq} \left\| \varphi_j(D)u \right\|_{L_\infty}^q \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 0, \end{aligned}$$

da u in $B_{\infty,q}^s(\mathbb{R}^n, E)$ ist. Dies impliziert $u_N \in B_{\infty,q}^s(\mathbb{R}^n, E)$ und $u_N \rightarrow u$ in $B_{\infty,q}^s(\mathbb{R}^n, E)$. Darüber hinaus ist u_N eine reguläre Distribution in $C_b^\infty(\mathbb{R}^n, E)$, denn

$$\begin{aligned} u_N &= \sum_{k=0}^N \mathcal{F}^{-1}(\psi_k \mathcal{F}u) = \sum_{k=0}^N \mathcal{F}^{-1}((\chi_k \psi_k) \mathcal{F}u) \quad (\text{mit } \chi_k := \sum_{r=-1}^1 \psi_{k+r}) \\ &= \sum_{k=0}^N \mathcal{F}^{-1}(\chi_k \mathcal{F}(\psi_k(D)u)) \stackrel{(1.8)}{=} \sum_{k=0}^N c_n \check{\chi}_k * (\psi_k(D)u). \end{aligned}$$

Daraus folgt zusammen mit dem Lemma 1.1.3 für alle $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$

$$\partial^\alpha u_N = c_n \sum_{k=0}^N \underbrace{(\partial^\alpha \check{\chi}_k)}_{\in L_1} * \underbrace{(\psi_k(D) u)}_{\in L_\infty} \in B \cup C(\mathbb{R}^n, E).$$

So ist der Satz bewiesen. $\square$

Lemma 1.1.5 Seien $s_i \in \mathbb{R}$, $p_i \in [1, \infty]$, $q_i \in [1, \infty)$ für $i = 0, 1$ und $u \in B_{p_0, q_0}^{s_0} \cap B_{p_1, q_1}^{s_1} \supset \mathcal{S}(\mathbb{R}^n, E)$. Dann existiert eine Folge $(u_N)_{N \in \mathbb{N}}$ in $C_b^\infty(\mathbb{R}^n, E) \cap B_{p_0, q_0}^{s_0}(\mathbb{R}^n, E) \cap B_{p_1, q_1}^{s_1}(\mathbb{R}^n, E)$, so dass

$$u_N \xrightarrow{\|\cdot\|_{B_{p_0, q_0}^{s_0}}} u \quad \text{und} \quad u_N \xrightarrow{\|\cdot\|_{B_{p_1, q_1}^{s_1}}} u.$$

Beweis. Der Beweis ist im Beweis des Lemmas 1.1.4 enthalten. Für $u \in B_{p_0, q_0}^{s_0}(\mathbb{R}^n, E) \cap B_{p_1, q_1}^{s_1}(\mathbb{R}^n, E)$ ist eine geeignete Folge $(u_N)_{N \in \mathbb{N}}$ definiert durch $u_N := \sum_{k=0}^N \mathcal{F}^{-1}(\psi_k \mathcal{F} u)$, $N \in \mathbb{N}$, wobei $(\psi_k)_{k \in \mathbb{N}_0}$ eine Zerlegung der Eins ist. $\square$

Wegen der Gültigkeit der stetigen Einbettungen $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n, E) \hookrightarrow B_{p, q}^s(\mathbb{R}^n, E)$ und $B_{p, q}^{s+1}(\mathbb{R}^n, E) \hookrightarrow B_{p, q}^s(\mathbb{R}^n, E)$ für alle $s \in \mathbb{R}$ und $p, q \in [1, \infty]$ darf man **die homogenen Besovräume** und **die kleinen Besovräume** definieren durch

$$\begin{aligned} \dot{B}_{p, q}^s(\mathbb{R}^n, E) &:= \overline{\left\{ u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n, E) : \|\cdot\|_{B_{p, q}^s} \right\}}^{B_{p, q}^s}, \text{ bzw.} \\ b_{p, q}^s(\mathbb{R}^n, E) &:= \overline{\left\{ B_{p, q}^{s+1}(\mathbb{R}^n, E) : \|\cdot\|_{B_{p, q}^s} \right\}}^{B_{p, q}^s}. \end{aligned}$$

Nach Definition und Satz 1.1.1 a) folgt sofort:

$$\begin{aligned} \mathcal{S}(\mathbb{R}^n, E) &\hookrightarrow \dot{B}_{p, q}^s(\mathbb{R}^n, E) \hookrightarrow B_{p, q}^s(\mathbb{R}^n, E) \quad \text{für alle } s \in \mathbb{R} \text{ und } p, q \in [1, \infty], \\ B_{p, q}^{s+1}(\mathbb{R}^n, E) &\hookrightarrow b_{p, q}^s(\mathbb{R}^n, E) \hookrightarrow B_{p, q}^s(\mathbb{R}^n, E) \quad \text{für alle } s \in \mathbb{R} \text{ und } p, q \in [1, \infty], \\ \dot{B}_{p, q}^s(\mathbb{R}^n, E) &= B_{p, q}^s(\mathbb{R}^n, E) \quad \text{für alle } s \in \mathbb{R} \text{ und } p, q \in [1, \infty). \end{aligned} \quad (1.28)$$

Einige Eigenschaften dieser Räume sind:

Satz 1.1.2 Seien $s \in \mathbb{R}$, $p, q \in [1, \infty]$, $-\infty < s < t < \infty$ und $k \in \mathbb{N}_0$. Dann gelten:

a)

$$b_{p, q}^s(\mathbb{R}^n, E) = \begin{cases} B_{p, q}^s(\mathbb{R}^n, E), & \text{falls } 1 \leq p \leq \infty, 1 \leq q < \infty, \\ \dot{B}_{p, \infty}^s(\mathbb{R}^n, E), & \text{falls } 1 \leq p < \infty, q = \infty. \end{cases}$$

b) $\dot{B}_{\infty, \infty}^s(\mathbb{R}^n, E) \doteq C_0^s(\mathbb{R}^n, E)$, wenn $s \in \mathbb{R}^+ \setminus \mathbb{N}$. Außerdem

$$\dot{B}_{p, 1}^k(\mathbb{R}^n, E) \xrightarrow{d} W_p^k(\mathbb{R}^n, E) \xrightarrow{d} \dot{B}_{p, \infty}^k(\mathbb{R}^n, E) = b_{p, \infty}^k(\mathbb{R}^n, E) \quad (1 \leq p < \infty), \quad (1.29)$$

$$B_{\infty,1}^k(\mathbb{R}^n, E) \hookrightarrow W_{\infty}^k(\mathbb{R}^n, E) \hookrightarrow B_{\infty,\infty}^k(\mathbb{R}^n, E), \quad (1.30)$$

$$b_{\infty,1}^k(\mathbb{R}^n, E) = B_{\infty,1}^k(\mathbb{R}^n, E) \xrightarrow{d} B \cup C^k(\mathbb{R}^n, E) \xrightarrow{d} b_{\infty,\infty}^k(\mathbb{R}^n, E), \quad (1.31)$$

$$\mathring{B}_{\infty,1}^k(\mathbb{R}^n, E) \xrightarrow{d} C_0^k(\mathbb{R}^n, E) \xrightarrow{d} \mathring{B}_{\infty,\infty}^k(\mathbb{R}^n, E). \quad (1.32)$$

c) Falls $E_1 \hookrightarrow E_0$, dann gelten:

$$B_{p,q}^s(\mathbb{R}^n, E_1) \hookrightarrow B_{p,q}^s(\mathbb{R}^n, E_0), \quad (1.33)$$

$$\mathring{B}_{p,q}^s(\mathbb{R}^n, E_1) \hookrightarrow \mathring{B}_{p,q}^s(\mathbb{R}^n, E_0), \quad (1.34)$$

$$b_{\infty,q}^s(\mathbb{R}^n, E_1) \hookrightarrow b_{\infty,q}^s(\mathbb{R}^n, E_0). \quad (1.35)$$

Ist $E_1 \xrightarrow{d} E_0$, so sind auch die Einbettungen (1.34), (1.35) dicht.

d)

$$\mathring{B}_{p,q}^t(\mathbb{R}^n, E) \xrightarrow{d} \mathring{B}_{p,q}^s(\mathbb{R}^n, E) \quad \text{und} \quad b_{p,q}^t(\mathbb{R}^n, E) \xrightarrow{d} b_{p,q}^s(\mathbb{R}^n, E).$$

e) Seien $\mathcal{B} \in \left\{ b, \mathring{B}; B \text{ mit } 1 \leq q < \infty \right\}$ und $E_1 \xrightarrow{d} E_0$. Dann gilt

$$\mathcal{B}_{p,q}^t(\mathbb{R}^n, E_1) \xrightarrow{d} \mathcal{B}_{p,q}^s(\mathbb{R}^n, E_1) \xrightarrow{d} \mathcal{B}_{p,q}^s(\mathbb{R}^n, E_0). \quad (1.36)$$

f) Seien $\mathcal{B} \in \left\{ b, \mathring{B}; B \right\}$, $1 \leq q_1 \leq q_2 \leq \infty$ und $E_1 \hookrightarrow E_0$. Dann gilt

$$\mathcal{B}_{p,q_1}^s(\mathbb{R}^n, E_1) \hookrightarrow \mathcal{B}_{p,q_2}^s(\mathbb{R}^n, E_0). \quad (1.37)$$

g) Seien $\mathcal{B} \in \left\{ b, \mathring{B}; B \right\}$, $1 \leq q_1, q_2 \leq \infty$ und $E_1 \hookrightarrow E_0$. Dann gilt

$$\mathcal{B}_{p,q_1}^t(\mathbb{R}^n, E_1) \hookrightarrow \mathcal{B}_{p,q_2}^s(\mathbb{R}^n, E_0). \quad (1.38)$$

h) Seien $q_1, q_2 \in [1, \infty)$. Dann gilt

$$B_{p,q_1}^t(\mathbb{R}^n, E) \xrightarrow{d} B_{p,q_2}^s(\mathbb{R}^n, E). \quad (1.39)$$

i) Seien $q_1, q_2 \in [1, \infty]$ und $\mathcal{B} \in \left\{ b, \mathring{B}; B \text{ mit } q_1, q_2 < \infty \right\}$. Dann gilt

$$\mathcal{B}_{p,q_1}^t(\mathbb{R}^n, E) \xrightarrow{d} \mathcal{B}_{p,q_2}^s(\mathbb{R}^n, E). \quad (1.40)$$

j) Seien die Voraussetzungen wie in i) und $E_1 \xrightarrow{d} E_0$ gegeben. Dann gilt

$$\mathcal{B}_{p,q_1}^t(\mathbb{R}^n, E_1) \xrightarrow{d} \mathcal{B}_{p,q_2}^s(\mathbb{R}^n, E_0). \quad (1.41)$$

Beweis. Die Aussagen $a) - d)$ findet man in [Am,97; Kapitel 5].

Beweis von e): Nach $d)$ und $c)$ gilt die Aussage (1.36) für $\mathcal{B} = \dot{B}$. Dieser Fall impliziert die folgende Behauptung.

Behauptung: Seien $s \in \mathbb{R}$, $p, q \in [1, \infty]$ und $E_1 \xrightarrow{d} E_0$. Dann gilt

$$b_{p,q}^s(\mathbb{R}^n, E_1) \xrightarrow{d} b_{p,q}^s(\mathbb{R}^n, E_0). \quad (1.42)$$

Für $p = \infty$ und $1 \leq q \leq \infty$ gilt die Behauptung nach $c)$. Falls $1 \leq p, q < \infty$, erhält man aus $a)$ und (1.28) $b_{p,q}^s = B_{p,q}^s = \dot{B}_{p,q}^s$. Ist $1 \leq p < \infty$ und $q = \infty$, so ist nach $a)$ $b_{p,\infty}^s = \dot{B}_{p,\infty}^s$. Damit ist (1.42) bewiesen.

Aus $d)$ und (1.42) folgt (1.36), wenn $\mathcal{B} = b$. Weil $B_{p,q}^s(\mathbb{R}^n, E) = b_{p,q}^s(\mathbb{R}^n, E)$ für alle $1 \leq p \leq \infty$, $1 \leq q < \infty$ gilt, gilt dann (1.36) falls $\mathcal{B} = B$ und $1 \leq q < \infty$.

Beweis von f): Der Fall $\mathcal{B} = B$ folgt aus (1.33) und Satz 1.1.1 b). Nun seien $\mathcal{B} = \dot{B}$ und $u \in \dot{B}_{p,q_1}^s(\mathbb{R}^n, E_1)$. Dann existiert eine Folge $(u_l) \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^n, E_1)$ mit $u_l \rightarrow u$ in $B_{p,q_1}^s(\mathbb{R}^n, E_1)$. Daher erhält man nach dem ersten Fall $u_l \rightarrow u$ in $B_{p,q_2}^s(\mathbb{R}^n, E_0)$. Also $u \in \dot{B}_{p,q_2}^s(\mathbb{R}^n, E_0)$ und

$$\|u\|_{\dot{B}_{p,q_2}^s(\mathbb{R}^n, E_2)} = \|u\|_{B_{p,q_2}^s(\mathbb{R}^n, E_2)} \leq c_1 \|u\|_{B_{p,q_1}^s(\mathbb{R}^n, E_1)} = c \|u\|_{\dot{B}_{p,q_1}^s(\mathbb{R}^n, E_1)}.$$

Also gilt (1.38), wenn $\mathcal{B} = \dot{B}$. Analog zeigt man den Fall $\mathcal{B} = b$.

Beweis von g): Der Fall $\mathcal{B} = B$ erhält man aus (1.33) und Satz 1.1.1 c). Jetzt seien $\mathcal{B} = \dot{B}$ und $u \in \dot{B}_{p,q_1}^t(\mathbb{R}^n, E_1)$. Dann ist nach (1.34) $u \in \dot{B}_{p,q_1}^t(\mathbb{R}^n, E_0)$. Damit existiert eine Folge $(u_l) \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^n, E_0)$ mit $u_l \rightarrow u$ in $B_{p,q_1}^t(\mathbb{R}^n, E_0)$. Dann strebt wegen Satz 1.1.1c) $u_l \rightarrow u$ in $B_{p,q_2}^s(\mathbb{R}^n, E_0)$ und somit gilt $u \in \dot{B}_{p,q_2}^s(\mathbb{R}^n, E_0)$ mit

$$\begin{aligned} \|u\|_{\dot{B}_{p,q_2}^s(\mathbb{R}^n, E_0)} &= \|u\|_{B_{p,q_2}^s(\mathbb{R}^n, E_0)} \leq c \|u\|_{B_{p,q_1}^t(\mathbb{R}^n, E_0)} \\ &\leq \tilde{c} \|u\|_{B_{p,q_1}^t(\mathbb{R}^n, E_1)} = \tilde{c} \|u\|_{\dot{B}_{p,q_1}^t(\mathbb{R}^n, E_1)}. \end{aligned}$$

Also gilt (1.38) für $\mathcal{B} = \dot{B}$. Den Fall $\mathcal{B} = b$ zeigt man analog mit Hilfe von (1.37) und Satz 1.1.1c).

Beweis von h): Die stetige Einbettung folgt aus (1.38). Es bleibt nur die Dichtheit zu zeigen. Dazu sei $u \in B_{p,q_2}^s(\mathbb{R}^n, E)$. Nach (1.36) (mit $E_1 = E_0 = E$ und $\mathcal{B} = B$) gibt es eine Folge $(u_l)_{l \in \mathbb{N}} \subset B_{p,q_2}^{t+1}(\mathbb{R}^n, E)$ mit $u_l \rightarrow u$ in $B_{p,q_2}^s(\mathbb{R}^n, E)$. Da $B_{p,q_2}^{t+1}(\mathbb{R}^n, E) \hookrightarrow B_{p,q_1}^t(\mathbb{R}^n, E)$ wegen (1.38) gilt, ist $(u_l)_{l \in \mathbb{N}} \subset B_{p,q_1}^t(\mathbb{R}^n, E)$. Somit existiert eine Folge in $B_{p,q_1}^t(\mathbb{R}^n, E)$, die gegen u in $B_{p,q_2}^s(\mathbb{R}^n, E)$ konvergiert. Dies zeigt $h)$.

Beweis von i): Aufgrund von (1.38) bleibt nur die Dichtheit in (1.40) zu zeigen. Der Fall $\mathcal{B} = B$ für $1 \leq q_1, q_2 < \infty$ ist genau (1.39).

Falls $\mathcal{B} = \dot{B}$, erhält man nach der Definition des homogenen Besovraumes die Dichtheit. Dazu sei $u \in \dot{B}_{p,q_2}^s(\mathbb{R}^n, E)$. Dann existiert eine Folge $(u_l)_{l \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^n, E)$ mit $u_l \rightarrow u$ in $B_{p,q_2}^s(\mathbb{R}^n, E)$ und weil $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n, E) \hookrightarrow \dot{B}_{p,q_1}^t(\mathbb{R}^n, E)$ für alle $t \in \mathbb{R}$ und $p, q_1 \in [1, \infty]$ gilt, erhält man eine Folge $(u_l)_l \subset \dot{B}_{p,q_1}^t(\mathbb{R}^n, E)$ mit $\|u_l - u\|_{\dot{B}_{p,q_2}^s(\mathbb{R}^n, E)} = \|u_l - u\|_{B_{p,q_2}^s(\mathbb{R}^n, E)} \rightarrow 0$. Somit liegt $\dot{B}_{p,q_1}^t(\mathbb{R}^n, E)$ dicht in $\dot{B}_{p,q_2}^s(\mathbb{R}^n, E)$.

Nun seien $u \in b_{p,q_2}^s(\mathbb{R}^n, E)$ und $\epsilon > 0$. Dann existiert ein $u_0 \in B_{p,q_2}^{s+1}(\mathbb{R}^n, E)$, so dass $\|u - u_0\|_{B_{p,q_2}^s(\mathbb{R}^n, E)} < \frac{\epsilon}{2}$. Nach (1.38) ist $B_{p,q_2}^{s+1}(\mathbb{R}^n, E) \hookrightarrow B_{p,1}^s(\mathbb{R}^n, E)$ und deswegen ist $u_0 \in B_{p,1}^s(\mathbb{R}^n, E) = b_{p,1}^s(\mathbb{R}^n, E)$. Da $b_{p,1}^t(\mathbb{R}^n, E) \xrightarrow{d} b_{p,1}^s(\mathbb{R}^n, E)$ nach (1.36) gilt, gibt es ein $\tilde{u}_0 \in b_{p,1}^t(\mathbb{R}^n, E)$ mit $\|u_0 - \tilde{u}_0\|_{b_{p,1}^s(\mathbb{R}^n, E)} < \frac{\epsilon}{2}$. Mit Hilfe von (1.37) erhält man $b_{p,1}^t(\mathbb{R}^n, E) \hookrightarrow b_{p,q_1}^t(\mathbb{R}^n, E)$ für alle $q_1 \in [1, \infty]$ und somit $\tilde{u}_0 \in b_{p,q_1}^t(\mathbb{R}^n, E)$. Daraus ergibt sich

$$\begin{aligned} \|u - \tilde{u}_0\|_{b_{p,q_2}^s(\mathbb{R}^n, E)} &= \|(u - u_0) + (u_0 - \tilde{u}_0)\|_{B_{p,q_2}^s(\mathbb{R}^n, E)} \\ &\leq \|u - u_0\|_{B_{p,q_2}^s(\mathbb{R}^n, E)} + \|u_0 - \tilde{u}_0\|_{B_{p,q_2}^s(\mathbb{R}^n, E)} \\ &\leq \|u - u_0\|_{B_{p,q_2}^s(\mathbb{R}^n, E)} + \|u_0 - \tilde{u}_0\|_{B_{p,1}^s(\mathbb{R}^n, E)} \\ &< \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon. \end{aligned}$$

Also $b_{p,q_1}^t(\mathbb{R}^n, E) \xrightarrow{d} b_{p,q_2}^s(\mathbb{R}^n, E)$.

Beweis von j):

$$\mathcal{B}_{p,q_1}^t(\mathbb{R}^n, E_1) \xrightarrow[(1.40)]{d} \mathcal{B}_{p,q_2}^s(\mathbb{R}^n, E_1) \xrightarrow[(1.36)]{d} \mathcal{B}_{p,q_2}^s(\mathbb{R}^n, E_0).$$

□

Nun werden wir aus technischen Gründen die sogenannten Calderon-Zygmund-Räume als bestimmte Besovräume betrachten. In [Tay,91; §A.1] findet man eine schöne Verdeutlichung des engen Zusammenhanges zwischen diesen beiden Räumen.

Definition 1.1.4 (Der Calderon-Zygmund-Raum) Für $r > 0$ ist der E -vektorwertige Calderon-Zygmund-Raum $C_*^r(\mathbb{R}^n, E)$ definiert durch $C_*^r(\mathbb{R}^n, E) := B_{\infty,\infty}^r(\mathbb{R}^n, E)$ mit der Norm

$$\|u\|_{C_*^r(\mathbb{R}^n, E)} := \sup_{j \in \mathbb{N}_0} 2^{jr} \|\psi_j(D)u\|_{L_\infty(\mathbb{R}^n, E)} \quad \text{für } u \in C_*^r(\mathbb{R}^n, E).$$

Dabei ist $(\psi_j)_{j \in \mathbb{N}_0}$ eine durch (1.16) definierte Zerlegung der Eins.

Bemerkung 1.1.2 Bezüglich der obigen Definition erhält man:

a) Es gibt eine Konstante $C_r > 0$, so dass

$$\|u\|_{L_\infty(\mathbb{R}^n, E)} \leq C_r \|u\|_{C_*^r(\mathbb{R}^n, E)} \quad \text{für alle } u \in C_*^r(\mathbb{R}^n, E),$$

denn $u = \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j(D)u$ in $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n, E)$ für alle $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n, E)$ und $\sum_{j=0}^{\infty} \psi_j(D)u \in L_\infty(\mathbb{R}^n, E)$, wenn $u \in C_*^r(\mathbb{R}^n, E)$.

b)

$$C_b^r(\mathbb{R}^n, E) \doteq C_*^r(\mathbb{R}^n, E) \text{ falls } r \in \mathbb{R}^+ \setminus \mathbb{N} \text{ und } C_b^r(\mathbb{R}^n, E) \subsetneq C_*^r(\mathbb{R}^n, E) \text{ falls } r \in \mathbb{N}.$$

Dazu kann man in [Tay,91; §A.1] den skalaren Fall nachlesen. Für den vektorwertigen Fall vergleiche Satz 1.1.1 f), g).

1.1.2 Interpolation von Funktionenräumen

Die reelle Interpolation

In diesem Unterabschnitt werden einige Ergebnisse zur reellen Interpolationstheorie zusammengestellt. Folgende Definitionen und Sätze stammen aus [Lu,95] Kapitel 1.

Im Folgenden seien E, F Banachräume mit $F \hookrightarrow E$ gegeben.

Definition 1.1.5 Sei $0 \leq \alpha \leq 1$. Ein Banachraum D mit $F \hookrightarrow D \hookrightarrow E$ gehört zur **Klasse** J_α zwischen E und F , wenn eine Konstante $c_\alpha > 0$ so existiert, dass

$$\|x\|_D \leq c_\alpha \|x\|_E^{1-\alpha} \|x\|_F^\alpha \quad \text{für alle } x \in F. \quad (1.43)$$

Im diesem Fall schreibt man $D \in J_\alpha(E, F)$.

Es gibt verschiedene Methoden, die einen reellen Interpolationsraum zwischen E und F definieren. Wir benutzen die sogenannte K -Methode.

Definition 1.1.6 Für $t \in]0, \infty[$ sei

$$K(t, x, E, F) := \inf_{\substack{x=a+b \\ a \in E, b \in F}} (\|a\|_E + t \|b\|_F).$$

Dann definiert man **den reellen Interpolationsraum** $(\cdot, \cdot)_{\theta, q}$ mit Exponent $\theta \in]0, 1[$ und Parameter $1 \leq q \leq \infty$ durch:

$$(E, F)_{\theta, q} := \left\{ x \in E : \|x\|_{(E, F)_{\theta, q}} := \left\| t^{-\theta - \frac{1}{q}} K(t, x, E, F) \right\|_{L_q} < \infty \right\}.$$

Einige wichtige Eigenschaften der reellen Interpolation von Funktionenräumen sind:

Satz 1.1.3 Seien $1 \leq q_1 \leq q_2 \leq \infty$ und $\theta \in]0, 1[$. Dann gelten:

a) $\left((E, F)_{\theta, q_1} ; \|\cdot\|_{(E, F)_{\theta, q_1}} \right)$ ist ein Banachraum.

b)

$$F \hookrightarrow (E, F)_{\theta, q_1} \hookrightarrow (E, F)_{\theta, q_2} \hookrightarrow (E, F)_{\theta, \infty} \hookrightarrow \overline{F}$$

c) Seien E_i, F_i , $i = 1, 2$ Banachräume, $F_i \hookrightarrow E_i$, $i = 1, 2$ und $T \in \mathcal{L}(E_1, E_2) \cap \mathcal{L}(F_1, F_2)$. Dann gelten $T \in \mathcal{L}\left((E_1, F_1)_{\theta, q_1}, (E_2, F_2)_{\theta, q_1}\right)$ und

$$\|T\|_{\mathcal{L}\left((E_1, F_1)_{\theta, q_1}, (E_2, F_2)_{\theta, q_1}\right)} \leq \left(\|T\|_{\mathcal{L}(E_1, E_2)} \right)^{1-\theta} \left(\|T\|_{\mathcal{L}(F_1, F_2)} \right)^\theta$$

d) Seien $E_i, F_i, i = 1, 2, 3$ Banachräume mit $E_1 \hookrightarrow E_2 \hookrightarrow E_3$ und $F_1 \hookrightarrow F_2 \hookrightarrow F_3$: Außerdem nehmen wir an, dass

$$(E_1, F_1)_{\theta, q_1} \doteq (E_3, F_3)_{\theta, q_1} =: \Lambda_{\theta, q_1}.$$

Dann gilt

$$(E_2, F_2)_{\theta, q_1} \doteq \Lambda_{\theta, q_1}.$$

Beweis. Zu a)-c) siehe [Lu,95], 1.2.3-1.2.6. Die Aussage d) folgt aus der Definition. $\square$

Korollar 1.1.2 Für $\theta \in]0, 1[$ und $1 \leq q \leq \infty$ gibt es eine Konstante $c(\theta, q)$ so, dass

$$\|y\|_{(E, F)_{\theta, q}} \leq c(\theta, q) \|y\|_E^{1-\theta} \|y\|_F^\theta \quad \text{für alle } y \in F. \quad (1.44)$$

Beweis. Siehe [Lu,95] Lemma 1.2.7. $\square$

Wir beenden den Unterabschnitt mit einem wichtigen Resultat, das man in [Am,97; §5] oder in [Schm,83; Th. 2, S. 23] finden kann.

Seien $p, q, q_1, q_2 [1, \infty]$, $-\infty < s_1 < s_2 < \infty$ und $\theta \in (0, 1)$. Dann gilt

$$(B_{p, q_1}^{s_1}(\mathbb{R}^n, E), B_{p, q_2}^{s_2}(\mathbb{R}^n, E))_{\theta, q} \doteq B_{p, q}^{(1-\theta)s_1 + \theta s_2}(\mathbb{R}^n, E). \quad (1.45)$$

Die komplexe Interpolation

Zusammengestellt werden im Folgenden einige Resultate über die in [Am,95; Ch.I, Sektion 2.4] gefundene komplexe Interpolationstheorie. Hierbei bezeichnen E_0, E_1 komplexe Banachräume mit $E_1 \hookrightarrow E_0$.

Nun seien $S := \{z \in \mathbb{C} : 0 < \operatorname{Re} z < 1\}$, $S_j := \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z = j\}$, $j = 0, 1$,

$$C_0(S_j, E_j) := \left\{ f \in C(S_j, E_j) : \lim_{|t| \rightarrow \infty} \|f(j + it)\|_{E_j} = 0 \right\}, \quad j = 0, 1, \text{ und}$$

$$\mathcal{F}(E_0, E_1) := \left\{ f \in C_b(\overline{S}, E_0) : f|_S \text{ holomorph und } f|_{S_j} \in C_0(S_j, E_j), j = 0, 1 \right\}.$$

Dann ist $\mathcal{F}(E_0, E_1)$ ein Banachraum mit der Norm

$$\|f\|_{\mathcal{F}(E_0, E_1)} := \max \left\{ \sup_{t \in \mathbb{R}} \|f(it)\|_{E_0}, \sup_{t \in \mathbb{R}} \|f(1 + it)\|_{E_1} \right\}.$$

Für gegebenes $\theta \in (0, 1)$ definiert man **den komplexe Interpolationsraum** $[E_0, E_1]_\theta$ durch²

$$[E_0, E_1]_\theta := \{x \in E_0 + E_1 : f(\theta) = x \text{ für ein } f \in \mathcal{F}(E_0, E_1)\} ; \|\cdot\|_\theta,$$

²Für die Definition von $[E_0, E_1]_\theta$ braucht man nicht unbedingt $E_0 \hookrightarrow E_1$. Es genügt zu betrachten, dass es ein Hausdorff-topologischer Vektorraum V gibt, so dass $E_i \hookrightarrow V$ für $j = 0, 1$. Falls $E_1 \hookrightarrow E_0$ und $V = E_0$, dann ist $E_0 \cap E_1 \cong E_1$ und $E_0 + E_1 \cong E_0$.

wobei

$$\|x\|_\theta := \inf \left\{ \|f\|_{\mathcal{F}(E_0, E_1)} : f(\theta) = x \right\}.$$

$[E_0, E_1]_\theta$ ist ein exakter Interpolationsraum mit Exponent θ , das heißt die Ungleichung (1.43) ist mit $(c_\alpha, \alpha, D, X, Y) = (1, \theta, [E_0, E_1]_\theta, E_0, E_1)$ erfüllt:

$$\|x\|_\theta \leq \|x\|_{E_0}^{1-\theta} \|x\|_{E_1}^\theta \quad \text{für alle } x \in E_1. \quad (1.46)$$

Sind E_0, E_1 reelle Banachräume mit $E_1 \hookrightarrow E_0$, so ist $[E_0, E_1]_\theta$ definiert durch

$$[E_0, E_1]_\theta := ([(E_0)_\mathbb{C}, (E_1)_\mathbb{C}]_\theta; \|\cdot\|_\theta).$$

Dabei bezeichnet $(E_i)_\mathbb{C}$, $i = 0, 1$, die Komplexifizierung von E_i .

Zum Schluss geben wir ein Resultat an, das man in [Am,97] Sektion 5 finden kann.

Sind $p, q \in [1, \infty]$, $-\infty < s_1 < s_2 < \infty$, $\mathcal{B} \in \left\{ \mathring{B}, b \right\}$ und $\theta \in (0, 1)$, so gilt

$$[\mathcal{B}_{p,q}^{s_1}(\mathbb{R}^n, E), \mathcal{B}_{p,q}^{s_2}(\mathbb{R}^n, E)]_\theta \doteq \mathcal{B}_{p,q}^{(1-\theta)s_1 + \theta s_2}(\mathbb{R}^n, E). \quad (1.47)$$

1.2 Sektorielle Operatoren und analytische Halbgruppen

Hierbei geben wir eine kurze Einführung der Theorie analytischer Halbgruppen, die wir aus [Lu,95; Ch. 2] entnommen haben.

Definition 1.2.1 (sektorieller Operator) Sei $A : D(A) \subset E \longrightarrow E$ ein linearer Operator in einem Banachraum E , wobei $D(A)$ nicht unbedingt dicht in E ist. Dann heißt A **sektoriell**, wenn es Konstanten $\omega \in \mathbb{R}$, $\theta \in]\frac{\pi}{2}, \pi[$ und $M > 0$ so existieren, dass

i) $\rho(A) \supset S_{\theta,\omega} := \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda \neq \omega, |\arg(\lambda - \omega)| < \theta\},$

ii) $\|R(\lambda, A)\|_{\mathcal{L}(E)} \leq \frac{M}{|\lambda - \omega|}$ für alle $\lambda \in S_{\theta,\omega}$.

Ist die Resolventenmenge von A nicht leer, so ist A abgeschlossen, und deshalb ist $D(A)$ unter der Graphnorm

$$\|e\|_{D(A)} = \|e\|_E + \|Ae\|_E$$

ein Banachraum. Nun bezeichnet man durch Γ_ω den gegen den Uhrzeigersinn orientierten Rand von $\overline{S_{\theta,\omega}}$. Ist A sektoriell auf $S_{\theta,\omega}$, so erhält man, dass die Funktion

$$(t \mapsto e^{tA}) \in C^\infty(\mathbb{R}^+, \mathcal{L}(E)) \quad \text{und sogar analytisch,}$$

wobei

$$e^{tA} := \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_\omega} e^{t\lambda} R(\lambda, A) d\lambda \in \mathcal{L}(E) \quad \text{für } t > 0.$$

Somit definiert die Familie $\{e^{tA} : t \geq 0\}$, wobei $e^{0A} := I$, eine analytische Halbgruppe auf E . Wir erinnern uns, dass eine Familie von Operatoren $\{T(t) : t \geq 0\} \subset \mathcal{L}(E)$ eine **Halbgruppe** heißt, wenn

$$\begin{cases} T(t)T(s) = T(t+s), & t, s \geq 0, \\ T(0) = I. \end{cases}$$

Eine Halbgruppe $T(t)$ heißt **analytisch**, wenn die Funktion $t \mapsto T(t) : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathcal{L}(E)$ analytisch ist. Wenn die Funktion $t \mapsto T(t)x$ für jedes $x \in E$ auf $\mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ stetig ist, dann heißt die Halbgruppe **stark stetig**.

In [Lu,95] wurde gezeigt, dass $\{e^{tA} : t \geq 0\}$ mit A sektoriell auch eine stark stetige Halbgruppe ist, genau dann, wenn

$$\lim_{t \rightarrow 0} e^{tA}x = x \quad \text{für alle } x \in E.$$

Die Proposition 2.1.4 in [Lu,95] besagt:

$$\lim_{t \rightarrow 0} e^{tA}x = x \iff x \in \overline{D(A)}$$

und somit ist die analytische Halbgruppe $\{e^{tA} : t \geq 0\}$ auch stark stetig genau dann, wenn $D(A)$ dicht in E liegt.

Satz 1.2.1 Sei $A : D(A) \subset E \rightarrow E$ ein linearer Operator mit $\{\lambda \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} \lambda \geq \omega\} \subset \rho(A)$ und

$$\|\lambda R(\lambda, A)\|_{\mathcal{L}(E)} \leq M \quad \text{für alle } \operatorname{Re} \lambda \geq \omega,$$

wobei $M > 0$ und $\omega \in \mathbb{R}$. Dann ist A sektoriell.

Beweis. Siehe [Lu,95] Proposition 2.1.11. □

Satz 1.2.2 Sei A ein sektorieller Operator in E mit Konstanten $M > 0$, $\omega \in \mathbb{R}$ und $\theta \in]\frac{\pi}{2}, \pi[$. Außerdem seien E_α in der Klasse J_α zwischen E und $D(A)$ mit $0 \leq \alpha < 1$ und $B \in \mathcal{L}(E_\alpha, E)$. Dann ist $A + B : D(A) \rightarrow E$ sektoriell mit Konstanten $\tilde{M} = 2M$, $\tilde{\omega} = \tilde{\omega}(c_\alpha, M, \omega)$ und $\tilde{\theta} = \theta$.

Beweis. Siehe [Lu,95] Proposition 2.4.1 und deren Beweis. □

1.3 Das oszillatorische Integral

Zur Definition eines Pseudodifferentialoperators mit nicht regulären Symbolen im Kapitel 2 benötigen wir die Theorie oszillatorischer Integrale. Aus diesem Grund werden wir das oszillatorische Integral und seine Eigenschaften für nicht reguläre Amplituden untersuchen. Oszillatorische Integrale und ihre Eigenschaften für reguläre Amplituden wurden z.B. in [Hör,60], [Ku,81] und [Sa,91] studiert.

Definition 1.3.1 (Das oszillatorische Integral) Sei $a : \mathbb{R}^{2n} \longrightarrow E$ eine messbare Funktion. Wir nennen a **oszillatorisch integrierbar**, falls für alle $\chi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^{2n})$ mit $\chi(0,0) = 1$ der Limes

$$\lim_{\epsilon \downarrow 0} \int \int e^{-i\eta \cdot y} \chi(\epsilon\eta, \epsilon y) a(\eta, y) d(\eta, y)$$

existiert und unabhängig von der Wahl von χ ist. In diesem Fall bezeichnen wir

$$os - \int \int e^{-i\eta \cdot y} a(\eta, y) d(\eta, y) := \lim_{\epsilon \downarrow 0} \int \int e^{-i\eta \cdot y} \chi(\epsilon\eta, \epsilon y) a(\eta, y) d(\eta, y)$$

(das oszillatorische Integral von a).

Bemerkung 1.3.1 Wenn $a \in L_1(\mathbb{R}^{2n}, E)$, dann stimmen wegen des Satzes über die dominierte Konvergenz das Lebesgue-Integral und das oszillatorische Integral überein, das heißt

$$os - \int \int e^{-i\eta \cdot y} a(\eta, y) d(\eta, y) = \int \int e^{-i\eta \cdot y} a(\eta, y) d(\eta, y).$$

Außerdem ist die **Linearität** des oszillatorischen Integrals offensichtlich.

Definition 1.3.2 (der Raum der Amplitude $\mathcal{A}_{\delta,\tau}^{(m,\rho,\rho')}$) Seien $m \in \mathbb{R}$, $0 \leq \delta < 1$, $0 \leq \tau$, $\rho, \rho' \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$ und $a \in C^{(\rho,\rho')}(\mathbb{R}_{\eta,y}^{2n}, E)$ (d.h. $\partial_\eta^\alpha \partial_y^\beta a(\cdot, \cdot) \in C(\mathbb{R}_\eta^n \times \mathbb{R}_y^n, E)$ für alle $\alpha, \beta \in \mathbb{N}_0^n$ mit $|\alpha| \leq \rho$, $|\beta| \leq \rho'$). Dann definieren wir den Raum $\mathcal{A}_{\delta,\tau}^{(m,\rho,\rho')}(\mathbb{R}_\eta^n \times \mathbb{R}_y^n, E)$ durch

$$a \in \mathcal{A}_{\delta,\tau}^{(m,\rho,\rho')}(\mathbb{R}_\eta^n \times \mathbb{R}_y^n, E) : \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \forall \alpha, \beta \in \mathbb{N}_0^n \text{ mit } |\alpha| \leq \rho, |\beta| \leq \rho', \exists c_{\alpha,\beta} > 0, \text{ so dass} \\ \left\| \partial_\eta^\alpha \partial_y^\beta a(\eta, y) \right\|_E \leq c_{\alpha,\beta} \langle \eta \rangle^{m+\delta|\beta|} \langle y \rangle^\tau \quad \forall (\eta, y) \in \mathbb{R}_{\eta,y}^{2n} \end{array} \right.$$

mit den Normen $(l, l' \in \mathbb{N}_0^n, l \leq \rho, l' \leq \rho')$

$$\|a\|_{(m,l,l')} := \max_{\substack{|\alpha| \leq l \\ |\beta| \leq l'}} \sup_{\eta, y \in \mathbb{R}^n} \langle \eta \rangle^{-m-\delta|\beta|} \langle y \rangle^{-\tau} \left\| \partial_\eta^\alpha \partial_y^\beta a(\eta, y) \right\|_E.$$

Wir bezeichnen weiterhin

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_{\delta,\tau}^m(\mathbb{R}_\eta^n \times \mathbb{R}_y^n, E) &:= \mathcal{A}_{\delta,\tau}^{(m,\infty,\infty)}(\mathbb{R}_\eta^n \times \mathbb{R}_y^n, E) \text{ und} \\ \mathcal{A}(\mathbb{R}_\eta^n \times \mathbb{R}_y^n, E) &:= \cup_{m \in \mathbb{R}} \cup_{0 \leq \delta < 1, 0 \leq \tau} \mathcal{A}_{\delta,\tau}^m(\mathbb{R}_\eta^n \times \mathbb{R}_y^n, E). \end{aligned}$$

Mit der Familie der Normen $\{\|\cdot\|_{(m,l,l')} : l = 0, \dots, \rho, l' = 0, \dots, \rho'\}$ ist $\mathcal{A}_{\delta,\tau}^{(m,\rho,\rho')}(\mathbb{R}_\eta^n \times \mathbb{R}_y^n, E)$ ein Fréchetraum.

Analog können wir den Raum $\mathcal{A}_{\delta,\tau}^{(m,(\rho_1,\rho_2),(\rho'_1,\rho'_2))}(\mathbb{R}_{\eta,\eta'}^{2n} \times \mathbb{R}_{y,y'}^{2n}, E)$ definieren, nämlich:

Definition 1.3.3 (der Raum der Amplitude $\mathcal{A}_{\delta,\tau}^{(m,(\rho_1,\rho_2),(\rho'_1,\rho'_2))}$) Seien $m \in \mathbb{R}$, $0 \leq \delta < 1$, $0 \leq \tau$ und $\rho_i, \rho'_i \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$, $i = 1, 2$.

- a) Sei $a : \mathbb{R}_{\eta,\eta'}^{2n} \times \mathbb{R}_{y,y'}^{2n} \longrightarrow E$ eine Abbildung. Dann $a \in C^{(\rho_1,\rho_2,\rho'_1,\rho'_2)}(\mathbb{R}_{\eta,\eta'}^{2n} \times \mathbb{R}_{y,y'}^{2n}, E)$ genau dann, wenn $\partial_\eta^\alpha \partial_{\eta'}^{\alpha'} \partial_y^\beta \partial_{y'}^{\beta'} a \in C(\mathbb{R}_{\eta,\eta'}^{2n} \times \mathbb{R}_{y,y'}^{2n}, E)$ für alle $\alpha, \alpha', \beta, \beta' \in \mathbb{N}_0$ mit $|\alpha| \leq \rho_1, |\alpha'| \leq \rho_2, |\beta| \leq \rho'_1$ und $|\beta'| \leq \rho'_2$.
- b) Sei $a \in C^{(\rho_1,\rho_2,\rho'_1,\rho'_2)}(\mathbb{R}_{\eta,\eta'}^{2n} \times \mathbb{R}_{y,y'}^{2n}, E)$. Dann

$$a \in \mathcal{A}_{\delta,\tau}^{(m,(\rho_1,\rho_2),(\rho'_1,\rho'_2))}(\mathbb{R}_{\eta,\eta'}^{2n} \times \mathbb{R}_{y,y'}^{2n}, E)$$

$$\begin{aligned} &: \Longleftrightarrow \forall \alpha, \alpha', \beta, \beta' \in \mathbb{N}_0 \text{ mit } |\alpha| \leq \rho_1, |\alpha'| \leq \rho_2, |\beta| \leq \rho'_1, |\beta'| \leq \rho'_2, \\ &\exists C := C_{\alpha,\alpha',\beta,\beta'} > 0, \text{ so dass für alle } \eta, \eta', y, y' \in \mathbb{R}^n \text{ gilt:} \\ &\left\| \partial_\eta^\alpha \partial_{\eta'}^{\alpha'} \partial_y^\beta \partial_{y'}^{\beta'} a(\eta, \eta', y, y') \right\|_E \leq C \langle \eta \rangle^{m+|\beta|\delta} \langle \eta' \rangle^{m+|\beta'|\delta} \langle y \rangle^\tau \langle y' \rangle^\tau. \end{aligned}$$

- c) Für $l_i, l'_i \in \mathbb{N}_0$, $i = 1, 2$ mit $l_i \leq \rho_i$ und $l'_i \leq \rho'_i$ definieren wir auf $\mathcal{A}_{\delta,\tau}^{(m,(\rho_1,\rho_2),(\rho'_1,\rho'_2))}$ die Norm

$$\|a\|_{(m,(l_1,l_2),(l'_1,l'_2))} := \max_{\substack{|\alpha| \leq l_1, |\alpha'| \leq l_2 \\ |\beta| \leq l'_1, |\beta'| \leq l'_2}} \sup_{\eta, \eta' \in \mathbb{R}^n} \left\{ \frac{\left\| \partial_\eta^\alpha \partial_{\eta'}^{\alpha'} \partial_y^\beta \partial_{y'}^{\beta'} a(\eta, \eta', y, y') \right\|_E}{\langle \eta \rangle^{m+|\beta|\delta} \langle \eta' \rangle^{m+|\beta'|\delta} \langle y \rangle^\tau \langle y' \rangle^\tau} \right\}.$$

Lemma 1.3.1 Seien $\rho, \rho' \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$, $l, l' \in \mathbb{N}_0$ mit $2l \leq \rho$, $2l' \leq \rho'$, $a \in C^{(\rho,\rho')}(\mathbb{R}_{\eta,y}^{2n}, E)$ und $\chi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}_{\eta,y}^{2n})$. Dann gilt

$$\begin{aligned} &\int \int e^{-i\eta \cdot y} \chi(\eta, y) a(\eta, y) d(\eta, y) \\ &= \int \int e^{-i\eta y} \langle y \rangle^{-2l} \langle D_\eta \rangle^{2l} \left(\langle \eta \rangle^{-2l'} \langle D_y \rangle^{2l'} (\chi(\eta, y) a(\eta, y)) \right) d(\eta, y), \end{aligned}$$

wobei $\langle D_\eta \rangle^{2l} := (1 - \Delta_\eta)^l = \left(1 + \sum_{j=1}^n D_{\eta_j}^2\right)^l$.

Beweis. Durch Induktion kann man leicht zeigen, dass

$$\langle y \rangle^{-2l} \langle D_\eta \rangle^{2l} e^{-i\eta \cdot y} = e^{-i\eta \cdot y}, \quad (1.48)$$

$$\langle \eta \rangle^{-2l'} \langle D_y \rangle^{2l'} e^{-i\eta \cdot y} = e^{-i\eta \cdot y}. \quad (1.49)$$

Dann erhält man nach (1.49), nach partieller Integration, (1.48) und nach einer weiteren die Behauptung des Lemmas. $\square$

Lemma 1.3.2 *Es seien die folgende Voraussetzungen a), b) und c) gegeben:*

a) $m, \tau, \delta \in \mathbb{R}$, $0 \leq \tau$, $0 \leq \delta < 1$, $l, l' \in \mathbb{N}$ mit $n + \tau < 2l$ und $\frac{m+\tau}{1-\delta} < 2l'$. Seien auch $\rho, \rho' \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$ mit $2l \leq \rho$, $2l' \leq \rho'$ und $a \in \mathcal{A}_{\delta, \tau}^{(m, \rho, \rho')}(\mathbb{R}_\eta^n \times \mathbb{R}_y^n, E)$.

b) Seien $(\chi_j)_{j \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{S}(\mathbb{R}_{\eta, y}^{2n})$, $\chi \in C^\infty(\mathbb{R}_{\eta, y}^{2n})$ mit

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \partial_\eta^\alpha \partial_y^\beta \chi_j(\eta, y) = \partial_\eta^\alpha \partial_y^\beta \chi(\eta, y) \quad \forall (\eta, y) \in \mathbb{R}^{2n}, \alpha, \beta \in \mathbb{N}_0^n.$$

c) Für $\alpha, \beta \in \mathbb{N}_0^n$ existiert eine Konstante $c_{\alpha, \beta}$, so dass

$$\left| \partial_\eta^\alpha \partial_y^\beta \chi_j(\eta, y) \right| < c_{\alpha, \beta} \quad \text{für alle } (\eta, y) \in \mathbb{R}^{2n} \text{ und } j \in \mathbb{N}.$$

Dann gilt

$$\begin{aligned} & \lim_{j \rightarrow \infty} \int \int e^{-i\eta y} \langle y \rangle^{-2l} \langle D_\eta \rangle^{2l} \left\{ \langle \eta \rangle^{-2l'} \langle D_y \rangle^{2l'} \{ \chi_j(\eta, y) a(\eta, y) \} \right\} d(\eta, y) \\ &= \int \int e^{-i\eta y} \langle y \rangle^{-2l} \langle D_\eta \rangle^{2l} \left\{ \langle \eta \rangle^{-2l'} \langle D_y \rangle^{2l'} \{ \chi(\eta, y) a(\eta, y) \} \right\} d(\eta, y). \end{aligned}$$

Beweis. Seien für $j \in \mathbb{N}$ und $(\eta, y) \in \mathbb{R}_{\eta, y}^{2n}$

$$\begin{aligned} J_j(\eta, y) &:= \langle y \rangle^{-2l} \langle D_\eta \rangle^{2l} \left\{ \langle \eta \rangle^{-2l'} \langle D_y \rangle^{2l'} \{ \chi_j(\eta, y) a(\eta, y) \} \right\}, \\ J(\eta, y) &:= \langle y \rangle^{-2l} \langle D_\eta \rangle^{2l} \left\{ \langle \eta \rangle^{-2l'} \langle D_y \rangle^{2l'} \{ \chi(\eta, y) a(\eta, y) \} \right\}. \end{aligned}$$

Man kann leicht nachrechnen, dass

$$\begin{aligned} & J_j(\eta, y) - J(\eta, y) \\ &= \langle y \rangle^{-2l} \langle D_\eta \rangle^{2l} \left\{ \langle \eta \rangle^{-2l'} \langle D_y \rangle^{2l'} \{ (\chi_j(\eta, y) - \chi(\eta, y)) a(\eta, y) \} \right\} \\ &= \langle y \rangle^{-2l} \sum_{\substack{|\gamma| \leq 2l \\ \mu \leq \gamma}} \sum_{\substack{|\theta| \leq 2l' \\ \beta \leq \theta}} \sum_{\alpha \leq \mu} c_z \left(\partial_\eta^{\gamma-\mu} \langle \eta \rangle^{-2l'} \right) \left(\partial_\eta^{\mu-\alpha} \partial_y^{\theta-\beta} (\chi_j - \chi) \right) \left(\partial_\eta^\alpha \partial_y^\beta a \right), \end{aligned}$$

wobei c_z eine Konstante ist, die von $z := (\alpha, \beta, \gamma, \mu, \theta)$ abhängt. Daraus folgt zusammen mit b) und c), dass $\|J_j(\eta, y) - J(\eta, y)\|_E \xrightarrow{j \rightarrow \infty} 0$ für alle $(\eta, y) \in \mathbb{R}^{2n}$ und

$$\|J_j(\eta, y)\|_E \leq c_{l, l'} |a|_{(m, 2l, 2l')} \langle y \rangle^{-2l+\tau} \langle \eta \rangle^{m-(1-\delta)2l'} \in L_1(\mathbb{R}_{\eta, y}^{2n}).$$

Somit folgt die Behauptung aus dem Satz über dominierte Konvergenz. $\square$

Lemma 1.3.3 *Seien $\chi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ mit $\chi(0) = 1$ und $0 < \epsilon < 1$. Dann gelten:*

- a) $\chi(\epsilon x) \xrightarrow{\epsilon \rightarrow 0} 1$ gleichmäßig auf allen kompakten Teilmengen von $\mathbb{R}^n$.
- b) $\partial_x^\alpha \chi(\epsilon x) \xrightarrow{\epsilon \rightarrow 0} 0$ gleichmäßig auf $\mathbb{R}^n$, wenn $\alpha \neq 0$ ist.
- c) Für alle $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ existiert ein $c_\alpha > 0$, unabhängig von $0 < \epsilon < 1$, so dass

$$|\partial_x^\alpha \chi(\epsilon x)| \leq c_\alpha \epsilon^\sigma \langle x \rangle^{-(|\alpha|-\sigma)}, \quad (0 \leq \sigma \leq |\alpha|), \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}^n.$$

Beweis. Siehe [Ku,81] Lemma 6.3. □

Satz 1.3.1 Seien $m, \tau, \delta \in \mathbb{R}$, $0 \leq \tau$, $0 \leq \delta < 1$, $l, l' \in \mathbb{N}$ mit $n + \tau < 2l$, $\frac{m+n}{1-\delta} < 2l'$. Seien auch $\rho, \rho' \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$ mit $2l \leq \rho$, $2l' \leq \rho'$ und $a \in \mathcal{A}_{\delta, \tau}^{(m, \rho, \rho')}(\mathbb{R}_\eta^n \times \mathbb{R}_y^n, E)$. Dann existiert das oszillatorische Integral

$$os - \int \int e^{-iy \cdot \eta} a(\eta, y) d(\eta, y) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int \int e^{-i\eta \cdot y} \chi(\epsilon \eta, \epsilon y) a(\eta, y) d(\eta, y).$$

Denn es gelten:

- a) $\left\| \langle y \rangle^{-2l} \langle D_\eta \rangle^{2l} \left\{ \langle \eta \rangle^{-2l'} \langle D_y \rangle^{2l'} a(\eta, y) \right\} \right\|_E \in L_1(\mathbb{R}_{\eta, y}^{2n}).$
- b) $os - \int \int e^{-i\eta \cdot y} a(\eta, y) d(\eta, y) = \int \int e^{-i\eta \cdot y} \langle y \rangle^{-2l} \langle D_\eta \rangle^{2l} \left\{ \langle \eta \rangle^{-2l'} \langle D_y \rangle^{2l'} a(\eta, y) \right\} d(\eta, y).$

Außerdem existiert eine von $a \in \mathcal{A}_{\delta, \tau}^{(m_1, \rho, \rho')}$ unabhängige Konstante $c > 0$, so dass

$$\left\| os - \int \int e^{-\eta \cdot y} a(\eta, y) d(\eta, y) \right\|_E \leq c \|a\|_{(m, 2l, 2l')}.$$

Beweis. Die Behauptung folgt aus den Lemmata 1.3.1, 1.3.2, 1.3.3 und aus dem Satz über dominierte Konvergenz. Dafür betrachten wir $\chi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^{2n})$ mit $\chi(0, 0) = 1$, $0 < \epsilon < 1$ und

$$I_\epsilon := \int \int e^{-i\eta \cdot y} \chi(\epsilon \eta, \epsilon y) a(\eta, y) d(\eta, y).$$

□

Beispiel 1.3.1 Seien die Voraussetzungen von Satz 1.3.1 erfüllt und $a \in \mathcal{A}_{\delta, \tau}^{(m, \rho, \rho')}(\mathbb{R}_\eta^n \times \mathbb{R}_y^n, E)$, so dass a unabhängig von y ist. Dann gilt

$$os - \int \int e^{-iy \cdot \eta} a(\eta) d(\eta, y) = (2\pi)^n a(0).$$

Beweis. Sei $\chi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ mit $\chi(0) = 1$. Es ist offensichtlich, dass

$$[(\eta, y) \mapsto \psi(\eta, y) := \chi(\eta) \chi(y)] \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^{2n}) \quad \text{mit} \quad \psi(0, 0) = 1.$$

Nun sei $0 < \epsilon < 1$. Dann folgt aus dem Satz 1.3.1, dem Transformationssatz und aus dem Satz über dominierte Konvergenz, dass

$$\begin{aligned} os - \int \int e^{-iy \cdot \eta} a(\eta) d(\eta, y) &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int \int e^{-iy \cdot \eta} \chi(\epsilon \eta) \chi(\epsilon y) a(\eta) d(\eta, y) \\ &\stackrel{\eta' := \frac{\eta}{\epsilon}, y' := \epsilon y}{=} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int \int e^{-iy' \cdot \eta'} \chi(\epsilon^2 \eta') \chi(y') a(\epsilon \eta') d(\eta', y') \\ &= (2\pi)^{\frac{n}{2}} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}^n} \chi(\epsilon^2 \eta') \hat{\chi}(\eta') a(\epsilon \eta') d\eta' \\ &= (2\pi)^{\frac{n}{2}} \chi(0) \left(\int_{\mathbb{R}^n} e^{i0 \cdot \eta'} \hat{\chi}(\eta') d\eta' \right) a(0) \\ &= (2\pi)^n \chi(0) \chi(0) a(0) = (2\pi)^n a(0). \end{aligned}$$

□

Beispiel 1.3.2 Seien Voraussetzungen von Satz 1.3.1 erfüllt und $a \in \mathcal{A}_{\delta, \tau}^{(m, \rho, \rho')}(\mathbb{R}_x^n \times \mathbb{R}_y^n, E)$.

Ist $\int e^{-iy \cdot \eta} a(\eta, y) d\eta$ bzgl. y (bzw. $\int e^{-iy \cdot \eta} a(\eta, y) dy$ bzgl. η) integrierbar, dann gilt

$$\begin{aligned} os - \int \int e^{-iy \cdot \eta} a(\eta, y) d(\eta, y) &= \int \left(\int e^{-iy \cdot \eta} a(\eta, y) d\eta \right) dy \\ \left(\text{bzw. } os - \int \int e^{-iy \cdot \eta} a(\eta, y) d(\eta, y) \right) &= \int \left(\int e^{-iy \cdot \eta} a(\eta, y) dy \right) d\eta. \end{aligned}$$

Beweis. Satz über die dominierte Konvergenz. □

Wegen des Satzes 1.3.1 erhält man wichtige Eigenschaften des oszillatorischen Integrals. Einige von diesen werden im Folgenden bewiesen, aber zuerst zwei Definitionen.

Definition 1.3.4 Seien $a : \mathbb{R}_{\eta, y}^{2n} \longrightarrow E$ eine messbare Funktion, $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^{2n})$ invertierbar, $q(\eta, y) := \eta \cdot y$ für alle $(\eta, y) \in \mathbb{R}_{\eta, y}^{2n}$ und $\chi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^{2n})$ mit $\chi(0, 0) = 1$. Dann definieren wir

$$os - \int \int e^{-iq(A(\eta, y))} a(\eta, y) d(\eta, y) := \lim_{\epsilon \searrow 0} \int \int e^{-iq(A(\eta, y))} \chi(\epsilon \eta, \epsilon y) a(\eta, y) d(\eta, y),$$

wenn der Limes existiert und er unabhängig von der Wahl von χ ist.

Bemerken Sie, dass die Definitionen 1.3.4 und 1.3.1 übereinstimmen, wenn $A \equiv Id \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^{2n})$.

Definition 1.3.5 Sei $\emptyset \neq B \subset \mathcal{A}_{\delta,\tau}^{(m,\rho,\rho')}(\mathbb{R}_\eta^n \times \mathbb{R}_y^n, E)$. B ist eine **beschränkte Menge** in $\mathcal{A}_{\delta,\tau}^{(m,\rho,\rho')}(\mathbb{R}_\eta^n \times \mathbb{R}_y^n, E)$ genau dann, wenn

$$\sup_{a \in B} \left\{ \|a\|_{(m,l,l')} \right\} < \infty \text{ für jedes } l \leq \rho, l' \leq \rho',$$

d.h. für alle $l \leq \rho$ und $l' \leq \rho'$ existiert ein $q := q(l, l') > 0$, so dass

$$\|a\|_{(m,l,l')} < q \quad \forall a \in B.$$

1.3.1 Grundlegende Eigenschaften des oszillatorischen Integrals

Satz 1.3.2 (Translationsinvarianz) Seien Voraussetzungen für m, ρ, ρ', δ und τ wie in Satz 1.3.1 erfüllt, $a \in \mathcal{A}_{\delta,\tau}^{(m,\rho,\rho')}(\mathbb{R}_\eta^n \times \mathbb{R}_y^n, E)$ und $(\eta_0, y_0) \in \mathbb{R}^{2n}$. Dann gilt

$$os - \int \int e^{-i\eta y} a(\eta_0 - \eta, y_0 - y) d(\eta, y) = os - \int \int e^{-i(\eta_0 - \eta) \cdot (y_0 - y)} a(\eta, y) d(\eta, y),$$

wobei

$$os - \int \int e^{-i(\eta_0 - \eta) \cdot (y_0 - y)} a(\eta, y) d(\eta, y) := os - \int \int e^{-i\eta y} e^{-i(\eta_0 y_0 - \eta_0 y - \eta y_0)} a(\eta, y) d(\eta, y).$$

Beweis. Nach Definition gilt, dass

$$\begin{aligned} & os - \int \int e^{-i(\eta_0 - \eta) \cdot (y_0 - y)} a(\eta, y) d(\eta, y) \\ &= os - \int \int e^{-i\eta y} e^{-i(\eta_0 y_0 - \eta_0 y - \eta y_0)} a(\eta, y) d(\eta, y) \\ &= \lim_{\epsilon \searrow 0} \int \int e^{-i(\eta_0 - \eta) \cdot (y_0 - y)} \chi(\epsilon \eta, \epsilon y) a(\eta, y) d(\eta, y) \\ &= \lim_{\epsilon \searrow 0} \int \int e^{-i\eta \cdot y} \chi(\epsilon(\eta_0 - \eta), \epsilon(y_0 - y)) a(\eta_0 - \eta, y_0 - y) d(\eta, y) \\ &\stackrel{\text{L.1.3.1}}{=} \lim_{\epsilon \searrow 0} \int \int e^{-i\eta \cdot y} \langle y \rangle^{-2l} \langle D_\eta \rangle^{2l} \left\{ \langle \eta \rangle^{-2l'} \langle D_y \rangle^{2l'} (\chi_\epsilon(\eta, y) \tilde{a}(\eta, y)) \right\} d(\eta, y). \end{aligned}$$

Dabei sind $\chi_\epsilon(\eta, y) := \chi(\epsilon(\eta_0 - \eta), \epsilon(y_0 - y))$ und $\tilde{a}(\eta, y) := a(\eta_0 - \eta, y_0 - y)$, $\forall (\eta, y) \in \mathbb{R}_\eta^n \times \mathbb{R}_y^n$. Da $\langle \eta_0 - \eta \rangle \leq \sqrt{2} \langle \eta_0 \rangle \langle \eta \rangle$ und $\langle y_0 - y \rangle \leq \sqrt{2} \langle y_0 \rangle \langle y \rangle$ gelten, erhält man

$\tilde{a} \in \mathcal{A}_{\delta,\tau}^{(m,\rho,\rho')}(\mathbb{R}_\eta^n \times \mathbb{R}_y^n, E)$. Dann folgt aus den Lemmata 1.3.2 und 1.3.3, dass

$$\begin{aligned}
os - \int \int e^{-i(\eta_0 - \eta) \cdot (y_0 - y)} a(\eta, y) d(\eta, y) \\
&= \lim_{\epsilon \searrow 0} \int \int e^{-i\eta \cdot y} \langle y \rangle^{-2l} \langle D_\eta \rangle^{2l} \left\{ \langle \eta \rangle^{-2l'} \langle D_y \rangle^{2l'} \{ \chi_\epsilon(\eta, y) \tilde{a}(\eta, y) \} \right\} d(\eta, y) \\
&= \int \int e^{-i\eta \cdot y} \langle y \rangle^{-2l} \langle D_\eta \rangle^{2l} \left\{ \langle \eta \rangle^{-2l'} \langle D_y \rangle^{2l'} \{ 1 \tilde{a}(\eta, y) \} \right\} d(\eta, y) \\
&\stackrel{\text{S.1.3.1}}{=} os - \int \int e^{-i\eta \cdot y} \tilde{a}(\eta, y) d(\eta, y) \\
&= os - \int \int e^{-i\eta \cdot y} a(\eta_0 - \eta, y_0 - y) d(\eta, y),
\end{aligned}$$

also ist der Satz bewiesen. $\square$

Satz 1.3.3 (Parameterdifferentiation-Version I) *Seien $m, \delta, \tau, \rho, \rho', l$ und l' wie im Satz 1.3.1, $N \in \mathbb{N}_0$ und $a : \mathbb{R}_x^n \times \mathbb{R}_{\eta,y}^{2n} \longrightarrow E$, so dass $\partial_x^\gamma a(x, \cdot, \cdot) \in \mathcal{A}_{\delta,\tau}^{(m,\rho,\rho')}(\mathbb{R}_\eta^n \times \mathbb{R}_y^n, E)$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$ und $|\gamma| \leq N$. Außerdem nehmen wir an, dass es für jedes $x \in \mathbb{R}^n$ eine Umgebung U_x gibt, so dass die Menge $\{(\partial_x^\gamma a)(x', \cdot, \cdot) : x' \in U_x\}$ beschränkt in $\mathcal{A}_{\delta,\tau}^{(m,\rho,\rho')}(\mathbb{R}_\eta^n \times \mathbb{R}_y^n, E)$ ist. Dann gilt $\forall \gamma \in \mathbb{N}_0^n$ mit $|\gamma| \leq N$, dass*

$$\partial_x^\gamma os - \int \int e^{-i\eta \cdot y} a(x, \eta, y) d(\eta, y) = os - \int \int e^{-i\eta \cdot y} \partial_x^\gamma a(x, \eta, y) d(\eta, y).$$

Beweis. Seien $\gamma, \alpha, \beta \in \mathbb{N}_0^n$ mit $|\gamma| \leq N$, $|\alpha| \leq 2l \leq \rho$ und $|\beta| \leq 2l' \leq \rho'$. Für $x \in \mathbb{R}^n$ existiert eine Umgebung U_x , so dass $\{(\partial_x^\gamma a)(x', \cdot, \cdot) : x' \in U_x\}$ beschränkt in $\mathcal{A}_{\delta,\tau}^{(m,\rho,\rho')}(\mathbb{R}_\eta^n \times \mathbb{R}_y^n, E)$ ist. Das heißt es gibt eine Konstante $q := q(x, \gamma, m, l, l') > 0$, so dass

$$\|(\partial_x^\gamma a)(x', \cdot, \cdot)\|_{(m, 2l, 2l')} < q, \quad \text{für alle } x' \in U_x.$$

Daraus folgt, dass

$$\|\partial_x^\gamma \partial_\eta^\alpha \partial_y^\beta a(x', \eta, y)\|_E \leq q \langle \eta \rangle^{m+\delta|\beta|} \langle y \rangle^\tau \quad \text{auf } U_x \times \mathbb{R}_{\eta,y}^{2n} \quad (1.50)$$

für alle $|\gamma| \leq N$, $|\alpha| \leq 2l$ und $|\beta| \leq 2l'$.

Nun sei $b(x, \eta, y) := \langle y \rangle^{-2l} \langle D_\eta \rangle^{2l} \left\{ \langle \eta \rangle^{-2l'} \langle D_y \rangle^{2l'} a(x, \eta, y) \right\}$. Wegen (1.50) und der Voraussetzungen erhält man für alle $x' \in U_x$:

$$\|(\partial_x^\gamma b)(x', \eta, y)\|_E \leq c_{l,l',m,x} \langle \eta \rangle^{m-(1-\delta)2l'} \langle y \rangle^{-2l+\tau} \in L^1(\mathbb{R}_{\eta,y}^{2n}).$$

Daraus folgt zusammen mit dem Satz 1.3.1 und dem klassischen Parameterdifferentiationssatz, dass

$$\begin{aligned}
\partial_x^\gamma os - \int \int e^{-i\eta \cdot y} a(x, \eta, y) d(\eta, y) &= \int \int e^{-i\eta \cdot y} \partial_x^\gamma b(x, \eta, y) d(\eta, y) \\
&= os - \int \int e^{-i\eta \cdot y} \partial_x^\gamma a(x, \eta, y) d(\eta, y).
\end{aligned}$$

Somit ist der Satz bewiesen. $\square$

Satz 1.3.4 (Parameterdifferentiation-Version II) Seien $m, \delta, \tau, \rho, \rho', l$ und l' wie im Satz 1.3.1 und $a \in \mathcal{A}_{\delta, \tau}^{(m, (\rho, \rho'), (\rho', \rho'))}(\mathbb{R}_{\eta, \eta'}^{2n} \times \mathbb{R}_{y, y'}^{2n}, E)$. Dann gelten für alle $\alpha, \alpha', \beta, \beta' \in \mathbb{N}_0^n$ mit $|\alpha|, |\alpha'| \leq 2l, |\beta|, |\beta'| \leq 2l'$:

$$\partial_{\eta}^{\alpha} \partial_{y'}^{\beta} os - \int \int e^{-i\eta' \cdot y'} a(\eta, \eta', y, y') d(\eta', y') = os - \int \int e^{-i\eta' \cdot y'} \partial_{\eta}^{\alpha} \partial_{y'}^{\beta} a(\eta, \eta', y, y') d(\eta', y'), \quad (1.51)$$

$$\partial_{\eta'}^{\alpha'} \partial_{y'}^{\beta'} os - \int \int e^{-i\eta \cdot y} a(\eta, \eta', y, y') d(\eta, y) = os - \int \int e^{-i\eta \cdot y} \partial_{\eta'}^{\alpha'} \partial_{y'}^{\beta'} a(\eta, \eta', y, y') d(\eta, y). \quad (1.52)$$

Beweis. Die Gleichheiten (1.51) und (1.52) erhält man analog zum Beweis des Satzes 1.3.3.

□

Satz 1.3.5 (Partielle Integration) Seien die Voraussetzungen für $m, \delta, \tau, \rho, \rho'$ wie im Satz 1.3.1 erfüllt, $\alpha, \beta \in \mathbb{N}_0^n$ und $a \in \mathcal{A}_{\delta, \tau}^{(m, \rho + |\alpha|, \rho')}(\mathbb{R}_{\eta}^n \times \mathbb{R}_y^n, E)$, $\tilde{a} \in \mathcal{A}_{\delta, \tau}^{(m, \rho, \rho' + |\beta|)}(\mathbb{R}_{\eta}^n \times \mathbb{R}_y^n, E)$. Nun definieren wir folgende oszillatorische Integrale

$$os - \int \int (D_{\eta}^{\alpha} e^{-i\eta \cdot y}) a(\eta, y) d(\eta, y) := os - \int \int e^{-i\eta \cdot y} (-y)^{\alpha} a(\eta, y) d(\eta, y), \quad (1.53)$$

$$os - \int \int (D_y^{\beta} e^{-i\eta \cdot y}) \tilde{a}(\eta, y) d(\eta, y) := os - \int \int e^{-i\eta \cdot y} (-\eta)^{\beta} \tilde{a}(\eta, y) d(\eta, y). \quad (1.54)$$

Dann gelten:

$$os - \int \int (D_{\eta}^{\alpha} e^{-i\eta \cdot y}) a(\eta, y) d(\eta, y) = (-1)^{|\alpha|} os - \int \int e^{-i\eta \cdot y} D_{\eta}^{\alpha} a(\eta, y) d(\eta, y), \quad (1.55)$$

$$os - \int \int (D_y^{\beta} e^{-i\eta \cdot y}) \tilde{a}(\eta, y) d(\eta, y) = (-1)^{|\beta|} os - \int \int e^{-i\eta \cdot y} D_y^{\beta} \tilde{a}(\eta, y) d(\eta, y). \quad (1.56)$$

Beweis. Wir werden nur (1.55) beweisen. Der Beweis von (1.56) ist analog. Sei $\chi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}_{\eta, y}^{2n})$ mit $\chi(0, 0) = 1$. Dann gilt nach partieller Integration, der Leibniz Regel und nach dem Lemma 1.3.1, dass

$$\begin{aligned} & \int \int e^{-i\eta \cdot y} \chi(\epsilon \eta, \epsilon y) (-y)^{\alpha} a(\eta, y) d(\eta, y) \\ &= (-1)^{|\alpha|} \int \int e^{-i\eta \cdot y} \langle y \rangle^{-2l} \langle D_{\eta} \rangle^{2l} \left\{ \langle \eta \rangle^{-2l'} \langle D_y \rangle^{2l'} (\chi(\epsilon \eta, \epsilon y) D_{\eta}^{\alpha} a(\eta, y)) \right\} d(\eta, y) \\ &+ \sum_{\substack{0 < \theta \leq \alpha \\ (\theta \neq 0)}} (-1)^{|\alpha|} \int \int e^{-i\eta \cdot y} \langle y \rangle^{-2l} \langle D_{\eta} \rangle^{2l} \left\{ \langle \eta \rangle^{-2l'} \langle D_y \rangle^{2l'} \left(D_{\eta}^{\theta} \chi(\epsilon \eta, \epsilon y) D_{\eta}^{\alpha - \theta} a(\eta, y) \right) \right\} d(\eta, y). \end{aligned}$$

Somit und wegen der Lemmata 1.3.2-1.3.3 existiert das oszillatorische Integral

$$os - \int \int e^{-i\eta \cdot y} (-y)^{\alpha} a(\eta, y) d(\eta, y)$$

und (1.55) gilt.

□

Satz 1.3.6 (Transformationsformel) Seien Voraussetzungen für $m, \delta, \tau, \rho, \rho'$ wie im Satz 1.3.1, $a \in \mathcal{A}_{\delta, \tau}^{(m, \rho, \rho')}(\mathbb{R}_\eta^n \times \mathbb{R}_y^n, E)$, $q(\eta, y) = \eta \cdot y$ für alle $(\eta, y) \in \mathbb{R}_{\eta, y}^{2n}$ und $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^{2n})$ invertierbar. Dann gilt

$$os - \int \int e^{-iq(A(\eta, y))} a(A(\eta, y)) |\det(A)| d(\eta, y) = os - \int \int e^{-i\eta \cdot y} a(\eta, y) d(\eta, y).$$

Beweis. Die Behauptung folgt aus der Definition 1.3.4 und aus dem Satz 1.3.1, denn $\chi \circ A^{-1} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^{2n})$ und $\chi \circ A^{-1}(0, 0) = 1$, wenn $\chi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^{2n})$ mit $\chi(0, 0) = 1$. $\square$

Korollar 1.3.1 Seien Voraussetzungen für $m, \delta, \tau, \rho, \rho'$ wie im Satz 1.3.1 gegeben und $a \in \mathcal{A}_{\delta, \tau}^{(m, \rho, \rho')}(\mathbb{R}_\eta^n \times \mathbb{R}_y^n, E)$. Dann gilt

$$os - \int \int e^{-i\xi \cdot \eta} a(\xi, \eta) d(\xi, \eta) = os - \int \int e^{i\xi \cdot \eta} a(-\xi, \eta) d(\xi, \eta).$$

Beweis. Es folgt aus dem Satz 1.3.6 mit $A = \begin{pmatrix} -I & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}$. $\square$

Im Folgenden werden wir das Hauptresultat dieses Abschnitts beweisen, mit dem wir eine Version des Satzes von Fubini beweisen werden.

Satz 1.3.7 Seien $m, \delta, \tau \in \mathbb{R}$, $0 \leq \tau$, $0 \leq \delta < 1$, $l, l' \in \mathbb{N}$ mit $n + \tau < 2l$, $\frac{n+m}{1-\delta} < 2l'$, $\rho, \rho' \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ mit $2l \leq \rho$, $2l' \leq \rho'$ und $a \in \mathcal{A}_{\delta, \tau}^{(m, (\rho, \rho), (\rho', \rho'))}(\mathbb{R}_{\eta, \eta'}^{2n} \times \mathbb{R}_{y, y'}^{2n}, E)$. Dann existiert das oszillatorische Integral

$$os - \int \int e^{-i(\frac{\eta}{\eta'}) \cdot (\frac{y}{y'})} a(\eta, \eta', y, y') d(\eta, \eta', y, y'). \quad (1.57)$$

Außerdem gelten:

a) Das oszillatorische Integral (1.57) ist gleich

$$\int \int e^{-i\eta y - i\eta' y'} \langle y \rangle^{-2l} \langle y' \rangle^{-2l} \langle D_\eta \rangle^{2l} \langle D_{\eta'} \rangle^{2l} \left(\langle \eta \rangle^{-2l'} \langle \eta' \rangle^{-2l'} \langle D_y \rangle^{2l'} \langle D_{y'} \rangle^{2l'} a \right) d(\eta, \eta', y, y').$$

b) Für alle $a \in \mathcal{A}_{\delta, \tau}^{(m, (\rho, \rho), (\rho', \rho'))}(\mathbb{R}_{\eta, \eta'}^{2n} \times \mathbb{R}_{y, y'}^{2n}, E)$ gilt

$$\left\| os - \int \int e^{-i(\frac{\eta}{\eta'}) \cdot (\frac{y}{y'})} a(\eta, \eta', y, y') d(\eta, \eta', y, y') \right\|_E \leq c_{l, l'} \|a\|_{(m, (2l, 2l), (2l', 2l'))},$$

wobei die Konstante $c_{l, l'} > 0$ unabhängig von a ist.

Beweis. Seien $0 < \epsilon < 1$, $\chi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^{4n})$ mit $\chi(0) = 1$ und

$$I_\epsilon := \int \int e^{-i\eta \cdot y} e^{-i\eta' \cdot y'} \chi(\epsilon\eta, \epsilon\eta', \epsilon y, \epsilon y') a(\eta, \eta', y, y') d(\eta, \eta', y, y').$$

Dann folgt aus (1.48), (1.49) und partieller Integration, dass

$$I_\epsilon = \int \int e^{-i\eta \cdot y} e^{-i\eta' \cdot y'} \underbrace{\langle y \rangle^{-2l} \langle y' \rangle^{-2l} \langle D_\eta \rangle^{2l} \left\{ \langle \eta \rangle^{-2l'} \langle D_{\eta'} \rangle^{2l} \left\{ \langle \eta' \rangle^{-2l'} \langle D_y \rangle^{2l'} \left\{ \langle D_{y'} \rangle^{2l'} \{ \chi a \} \right\} \right\} \right\}}_{=: J_\epsilon}.$$

In der folgenden Notation

$$\sum_{|\gamma| \leq 2l, \beta \leq \gamma \dots} c_z f(\eta, \eta', y, y'; \gamma, \beta, \dots)$$

bezeichnet c_z eine Konstante, die von $z := (\gamma, \beta, \dots)$ abhängt. Nun werden wir eine Abschätzung für $|J_\epsilon|$ in vier Schritten finden.

1.Schritt Aufgrund der Leibniz Regel erhält man

$$\langle D_y \rangle^{2l'} \left\{ \langle D_{y'} \rangle^{2l'} \{ \chi a \} \right\} = \sum_{\substack{|\gamma| \leq 2l', |\theta'| \leq 2l' \\ \beta' \leq \theta', \beta \leq \gamma}} c_z \left(\partial_y^{\gamma-\beta} \partial_{y'}^{\theta'-\beta'} \chi \right) \partial_y^\beta \partial_{y'}^{\beta'} a.$$

2.Schritt

$$\begin{aligned} & \langle D_{\eta'} \rangle^{2l} \left\{ \langle \eta' \rangle^{-2l'} \langle D_y \rangle^{2l'} \left\{ \langle D_{y'} \rangle^{2l'} \{ \chi a \} \right\} \right\} \\ & \stackrel{1. \text{ Schritt}}{=} \sum_{|\theta| \leq 2l} c_\theta \partial_{\eta'}^\theta \left\{ \langle \eta' \rangle^{-2l'} \sum_{\substack{|\gamma| \leq 2l', |\theta'| \leq 2l' \\ \beta' \leq \theta', \beta \leq \gamma}} c_z \left(\partial_y^{\gamma-\beta} \partial_{y'}^{\theta'-\beta'} \chi \right) \partial_y^\beta \partial_{y'}^{\beta'} a \right\} \\ & = \sum_{\substack{|\theta| \leq 2l, \gamma' \leq \theta \\ \alpha' \leq \gamma'}} \sum_{\substack{|\gamma| \leq 2l', |\theta'| \leq 2l' \\ \beta' \leq \theta', \beta \leq \gamma}} c_z \left(\partial_{\eta'}^{\theta-\gamma'} \langle \eta' \rangle^{-2l'} \right) \left(\partial_{\eta'}^{\gamma'-\alpha'} \partial_y^{\gamma-\beta} \partial_{y'}^{\theta'-\beta'} \chi \right) \partial_{\eta'}^{\alpha'} \partial_y^\beta \partial_{y'}^{\beta'} a. \end{aligned}$$

3.Schritt Aus dem 2. Schritt folgt

$$\begin{aligned} & \langle D_\eta \rangle^{2l} \left\{ \langle \eta \rangle^{-2l'} \langle D_{\eta'} \rangle^{2l} \left\{ \langle \eta' \rangle^{-2l'} \langle D_y \rangle^{2l'} \left\{ \langle D_{y'} \rangle^{2l'} \{ \chi a \} \right\} \right\} \right\} \\ & = \sum_{\substack{|\lambda| \leq 2l, \Gamma \leq \lambda \\ \alpha \leq \Gamma}} \sum_{\substack{\theta \leq 2l, \gamma' \leq \theta \\ \alpha' \leq \gamma'}} \sum_{\substack{|\gamma| \leq 2l', |\theta'| \leq 2l' \\ |\beta'| \leq \theta', \beta \leq \gamma}} c_z \left(\partial_\eta^{\lambda-\Gamma} \langle \eta \rangle^{-2l'} \right) \left(\partial_{\eta'}^{\theta-\gamma'} \langle \eta' \rangle^{-2l'} \right) \left(\partial_\eta^{\Gamma-\alpha} \partial_{\eta'}^{\gamma'-\alpha'} \partial_y^{\gamma-\beta} \partial_{y'}^{\theta'-\beta'} \chi \right) \\ & \cdot \partial_\eta^\alpha \partial_{\eta'}^{\alpha'} \partial_y^\beta \partial_{y'}^{\beta'} a. \end{aligned}$$

4.Schritt Nach dem 3. Schritt, dem Lemma 1.3.3, den Voraussetzungen und $\left| \partial_x^\alpha \langle x \rangle^{\tilde{m}} \right| < c_{\tilde{m}} \langle x \rangle^{\tilde{m}-|\alpha|}$ für alle $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ erhält man

$$\|J_\epsilon\|_E \leq c_{l,l'} \|a\|_{(m,(2l,2l)(2l',2l'))} \underbrace{\langle y \rangle^{-2l+\tau} \langle y' \rangle^{-2l'+\tau} \langle \eta \rangle^{m-(1-\delta)2l'} \langle \eta' \rangle^{m-(1-\delta)2l'}}_{\in L_1(\mathbb{R}_{\eta,\eta'}^{2n} \times \mathbb{R}_{y,y'}^{2n})}$$

für alle $0 < \epsilon < 1$. Außerdem folgt aus dem 3. Schritt und dem Lemma 1.3.3, dass

$$\begin{aligned} & \lim_{\epsilon \downarrow 0} J_\epsilon \\ &= e^{-i\eta \cdot y} e^{-i\eta' \cdot y'} \langle y \rangle^{-2l} \langle y' \rangle^{-2l'} \langle D_\eta \rangle^{2l} \left\{ \langle \eta \rangle^{-2l'} \langle D_{\eta'} \rangle^{2l'} \left(\langle \eta' \rangle^{-2l'} \langle D_y \rangle^{2l'} \langle D_{y'} \rangle^{2l'} a(\eta, \eta', y, y') \right) \right\} \end{aligned}$$

punktweise für alle $(\eta, \eta', y, y') \in \mathbb{R}_{\eta,\eta'}^{2n} \times \mathbb{R}_{y,y'}^{2n}$.

Dann folgt die Existenz des oszillatorischen Integrals in (1.57) und die Aussage a) aus dem Satz über dominierte Konvergenz. Die Behauptung b) folgt aus dem 4. Schritt. $\square$

Satz 1.3.8 (Fubini) Seien $m, \delta, \tau \in \mathbb{R}$, $0 \leq \tau$, $0 \leq \delta < 1$, $l, l' \in \mathbb{N}$ mit $n + \tau < 2l$, $\frac{n+m}{1-\delta} < 2l'$, $\rho, \rho' \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ mit $2l \leq \rho$, $2l' \leq \rho'$ und $a \in \mathcal{A}_{\delta,\tau}^{(m,(\rho,\rho),(\rho',\rho'))}(\mathbb{R}_{\eta,\eta'}^{2n} \times \mathbb{R}_{y,y'}^{2n}, E)$. Dann gelten:

$$\left[(\eta, y) \mapsto os - \int \int e^{-i\eta' \cdot y'} a(\eta, \eta', y, y') d(\eta', y') \right] \in \mathcal{A}_{\delta,\tau}^{(m,\rho,\rho')}(\mathbb{R}_\eta^n \times \mathbb{R}_y^n, E), \quad (1.58)$$

$$\left[(\eta', y') \mapsto os - \int \int e^{-i\eta \cdot y} a(\eta, \eta', y, y') d(\eta, y) \right] \in \mathcal{A}_{\delta,\tau}^{(m,\rho,\rho')}(\mathbb{R}_{\eta'}^n \times \mathbb{R}_{y'}^n, E) \quad (1.59)$$

und

$$\begin{aligned} & os - \int \int e^{-i(\eta') \cdot (y')} a(\eta, \eta', y, y') d(\eta, \eta', y, y') \\ &= os - \int \int e^{-i\eta \cdot y} \left(os - \int \int e^{-i\eta' \cdot y'} a(\eta, \eta', y, y') d(\eta', y') \right) d(\eta, y) \\ &= os - \int \int e^{-i\eta' \cdot y'} \left(os - \int \int e^{-i\eta \cdot y} a(\eta, \eta', y, y') d(\eta, y) \right) d(\eta', y'). \end{aligned} \quad (1.60)$$

Beweis. Zunächst zeigen wir (1.58). Seien $\alpha', \beta' \in \mathbb{N}_0^n$ mit $|\alpha'| \leq 2l \leq \rho$, $|\beta'| \leq 2l' \leq \rho'$ und $\eta, y \in \mathbb{R}^n$ fest. Dann gilt für alle $(\eta', y') \in \mathbb{R}_{\eta',y'}^{2n}$, dass

$$\begin{aligned} \left\| \partial_{\eta'}^{\alpha'} \partial_{y'}^{\beta'} a(\eta, \eta', y, y') \right\|_E &\leq \|a\|_{(m,2(l,l),2(l',l'))} \langle \eta \rangle^m \langle \eta' \rangle^{m+\delta|\beta'|} \langle y \rangle^\tau \langle y' \rangle^\tau \\ &= \left(\|a\|_{(m,2(l,l),2(l',l'))} \langle \eta \rangle^m \langle y \rangle^\tau \right) \langle \eta' \rangle^{m+\delta|\beta'|} \langle y' \rangle^\tau. \end{aligned}$$

Also $a(\eta, \cdot, y, \cdot) \in \mathcal{A}_{\delta, \tau}^{(m, \rho, \rho')}(\mathbb{R}_{\eta'}^n \times \mathbb{R}_{y'}^n, E)$ für alle feste $(\eta, y) \in \mathbb{R}_{\eta, y}^{2n}$. Somit existiert nach Satz 1.3.1

$$b(\eta, y) := os - \int \int e^{-i\eta' \cdot y'} a(\eta, \eta', y, y') d(\eta', y'), \quad \text{für alle } (\eta, y) \in \mathbb{R}_{\eta, y}^{2n}.$$

Außerdem gilt nach dem Satz über Parameterdifferenziation (das heißt Satz 1.3.4), Satz 1.3.1b) und nach den Voraussetzungen für a , dass $b \in \mathcal{A}_{\delta, \tau}^{(m, \rho, \rho')}(\mathbb{R}_{\eta}^n \times \mathbb{R}_y^n, E)$ und daher ist b oszillatorisch integrierbar. Dann folgt aus den Sätzen 1.3.1b), 1.3.4 und 1.3.7, dass

$$\begin{aligned} os - \int \int e^{-i\eta \cdot y} b(\eta, y) d(\eta, y) &= \int \int e^{-i\eta \cdot y} \langle y \rangle^{-2l} \langle D_{\eta} \rangle^{2l} \left(\langle \eta \rangle^{-2l'} \langle D_y \rangle^{2l'} b(\eta, y) \right) d(\eta, y) \\ &= os - \int \int e^{-i\left(\frac{\eta}{\eta'}\right) \cdot \left(\frac{y}{y'}\right)} a(\eta, \eta', y, y') d(\eta, \eta', y, y'). \end{aligned}$$

Somit ist die erste Gleichung in (1.60) bewiesen. Ebenso zeigt man (1.59) und

$$\begin{aligned} os - \int \int e^{-i\eta' \cdot y'} \left(os - \int \int e^{-i\eta \cdot y} a(\eta, \eta', y, y') d(\eta, y) \right) d(\eta', y') \\ = os - \int \int e^{-i\left(\frac{\eta}{\eta'}\right) \cdot \left(\frac{y}{y'}\right)} a(\eta, \eta', y, y') d(\eta, \eta', y, y'). \end{aligned}$$

□

Es gibt auch einen zum Satz über majorisierte Konvergenz analogen Satz für die oszillatorischen Integrale. Der Beweis ist analog zum skalaren Fall (vergleiche [Ku,81]).

Lemma 1.3.4 Sei $f \in C^2(I, E)$, mit $I = [0, 1]$. Dann existiert eine Konstante $M > 0$, unabhängig von f , so dass

$$\left(\max_I \|f'(t)\|_E \right)^2 \leq M \left(\max_I \|f(t)\|_E \right) \left\{ \max_I \|f(t)\|_E + \max_I \|f''(t)\|_E \right\}.$$

Beweis. Ein Beweis für den skalaren Fall findet man in [Ku,81], Lemma 6.5, S.49. Nun seien E ein beliebiger Banachraum und $f \in C^2(I, E)$, $f \neq 0$. Dann existiert ein $t_0 \in [0, 1]$, so dass $\max_I \|f'(t)\|_E = \|f'(t_0)\|_E \neq 0$. Nach dem Satz von Hahn-Banach existiert ein $x^* \in E^*$ (E^* der Dualraum von E) mit $\|x^*\|_{E^*} = 1$ und $\langle x^*, f'(t_0) \rangle = \|f'(t_0)\|_E$. Sei $F(t) := \langle x^*, f(t) \rangle$, $t \in [0, 1]$. Dann folgt die Behauptung aus der Anwendung des skalaren Falles auf F . □

Satz 1.3.9 (Dominierte Konvergenz) Seien die Voraussetzungen für $m, \delta, \tau, \rho, \rho'$ wie im Satz 1.3.7 erfüllt, $\{a_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ eine beschränkte Folge in $\mathcal{A}_{\delta, \tau}^{(m, \rho+1, \rho'+1)}(\mathbb{R}_{\eta}^n \times \mathbb{R}_y^n, E)$ und wir nehmen an, dass es ein $a \in \mathcal{A}_{\delta, \tau}^{(m, \rho+1, \rho'+1)}(\mathbb{R}_{\eta}^n \times \mathbb{R}_y^n, E)$ gibt, so dass

$$a_j(\eta, y) \xrightarrow{j \rightarrow \infty} a(\eta, y) \tag{1.61}$$

gleichmäßig auf allen kompakten Teilmengen von $\mathbb{R}_{\eta, y}^{2n}$. Dann gilt

$$\lim_{j \rightarrow \infty} os - \int \int e^{-i\eta \cdot y} a_j(\eta, y) d(\eta, y) = os - \int \int e^{-i\eta \cdot y} a(\eta, y) d(\eta, y). \tag{1.62}$$

Beweis. Für $(\eta, y) \in \mathbb{R}^{2n}$ (fest) und beliebiges $j \in \mathbb{N}$ definieren wir

$$f_j(t) := a_j(\eta + te_k, y) - a(\eta + te_k, y), \quad t \in [0, 1] =: I,$$

wobei $e_k = \left(0, \dots, \overset{k}{1}, 0, \dots, 0\right) \in \mathbb{R}^n$ ein kanonischer Vektor in $\mathbb{R}^n$ ist. Dann folgt aus den Voraussetzungen, dass $\max_I \|f_j(t)\|_E \xrightarrow{j \rightarrow \infty} 0$ und für alle kompakten Teilmengen K in $\mathbb{R}^{2n}$ gilt

$$\begin{aligned} \max_K \max_I \|f_j(t)\|_E &\leq \max_K \max_I \left\{ \|a_j(\eta + te_k, y)\|_E + \|a(\eta + te_k, y)\|_E \right\} \\ &\leq \max_K \max_I \left\{ \langle \eta + te_k \rangle^m \langle y \rangle^\tau \|a_j\|_{(m,0,0)} + \langle \eta + te_k \rangle^m \langle y \rangle^\tau \|a\|_{(m,0,0)} \right\} \\ &\leq c_K \quad \text{für alle } j \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Analog zeigt man, dass

$$\max_K \max_I \|f_j''(t)\|_E \leq \tilde{c}_K \quad \text{für alle } j \in \mathbb{N}.$$

Also ist

$$\left\{ \max_K \max_I \|f_j(t)\|_E + \max_K \max_I \|f_j''(t)\|_E : j \in \mathbb{N} \right\}$$

beschränkt in $\mathbb{R}$ für jedes $K \subset \mathbb{R}^{2n}$ kompakt. Daraus folgt zusammen mit dem Lemma 1.3.4 für alle $\forall (\eta, y) \in K$, dass

$$\begin{aligned} \|\partial_{\eta_k} a_j(\eta, y) - \partial_{\eta_k} a(\eta, y)\|_E &= \|\partial_{\eta_k} (a_j - a)(\eta, y)\|_E \\ &= \left\| \lim_{t \rightarrow 0} \frac{a_j(\eta + te_k, y) - a(\eta + te_k, y) - [a_j(\eta, y) - a(\eta, y)]}{t} \right\|_E \\ &= \left\| \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f_j(t) - f_j(0)}{t} \right\|_E \\ &= \|f_j'(0)\|_E \\ &\leq c^{\frac{1}{2}} \left[\left(\max_I \|f_j(t)\|_E \right) \left\{ \max_I \|f_j(t)\|_E + \max_I \|f_j''(t)\|_E \right\} \right]^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Dann erhält man nach den Voraussetzungen für $\{a_j\}_{j \in \mathbb{N}}$, dass

$$\begin{aligned} \max_K \|\partial_{\eta_k} a_j(\eta, y) - \partial_{\eta_k} a(\eta, y)\|_E &\leq c^{\frac{1}{2}} \underbrace{\max_K \left(\max_I \|f_j(t)\|_E \right)}_{\text{konvergiert gegen 0, wenn } j \rightarrow \infty}^{\frac{1}{2}} \\ &\quad \cdot \underbrace{\left\{ \max_K \max_I \|f_j(t)\|_E + \max_K \max_I \|f_j''(t)\|_E \right\}}_{\text{beschränkt}}^{\frac{1}{2}} \\ &\longrightarrow 0, \quad \text{wenn } j \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Somit gilt für alle $k = 1, \dots, n$, dass

$$\partial_{\eta_k} a_j(\eta, y) \xrightarrow{j \rightarrow \infty} \partial_{\eta_k} a(\eta, y) \quad (1.63)$$

gleichmäßig auf jeder kompakten Teilmenge $K \subset \mathbb{R}^{2n}$. Analog erhält man für jedes $k = 1, \dots, n$, dass

$$\partial_{y_k} a_j(\eta, y) \xrightarrow{j \rightarrow \infty} \partial_{y_k} a(\eta, y) \quad (1.64)$$

gleichmäßig auf jeder kompakten Teilmenge $K \subset \mathbb{R}_{\eta, y}^{2n}$ gilt.

Nun seien $\alpha, \beta \in \mathbb{N}_0^n$ mit $|\alpha| \leq \rho - 1$ und $|\beta| \leq \rho' - 1$ und wir nehmen an, dass

$$\partial_{\eta}^{\alpha} \partial_y^{\beta} a_j(\eta, y) \xrightarrow{j \rightarrow \infty} \partial_{\eta}^{\alpha} \partial_y^{\beta} a(\eta, y)$$

gleichmäßig auf jeder kompakten Teilmenge $K \subset \mathbb{R}_{\eta, y}^{2n}$ gilt. Dann gilt für alle $k = 1, \dots, n$:

$$\partial_{\eta}^{\alpha+e_k} \partial_y^{\beta} a_j(\eta, y) \xrightarrow{j \rightarrow \infty} \partial_{\eta}^{\alpha+e_k} \partial_y^{\beta} a(\eta, y) \quad \text{gleichmäßig auf } K.$$

In der Tat haben wir nach Voraussetzung, dass

$$\left(\partial_{\eta}^{\alpha} \partial_y^{\beta} a_j \right)_{j \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{A}_{\delta, \tau}^{(m, \rho+1-|\alpha|, \rho'+1-|\beta|)}(\mathbb{R}_{\eta}^n \times \mathbb{R}_y^n, E)$$

Außerdem gilt für alle $l \leq \rho + 1 - |\alpha|$ und $l' \leq \rho' + 1 - |\beta|$:

$$\begin{aligned} \left| \partial_{\eta}^{\alpha} \partial_y^{\beta} a_j \right|_{(m, l, l')} &= \max_{\substack{|\tilde{\alpha}| \leq l \\ |\tilde{\beta}| \leq l'}} \sup_{\eta, y \in \mathbb{R}^n} \left\{ \langle \eta \rangle^{-(m+\delta|\tilde{\beta}|)} \langle y \rangle^{-\tau} \left\| \partial_{\eta}^{\tilde{\alpha}} \partial_y^{\tilde{\beta}} \left(\partial_{\eta}^{\alpha} \partial_y^{\beta} a_j(\eta, y) \right) \right\|_E \right\} \\ &= \max_{\substack{|\tilde{\alpha}| \leq l \\ |\tilde{\beta}| \leq l'}} \sup_{\eta, y \in \mathbb{R}^n} \left\{ \langle \eta \rangle^{-(m+\delta|\tilde{\beta}|)} \langle y \rangle^{-\tau} \left\| \partial_{\eta}^{\tilde{\alpha}+\alpha} \partial_y^{\tilde{\beta}+\beta} a_j(\eta, y) \right\|_E \right\} \\ &\leq |a_j|_{(m, \rho+1, \rho'+1)} \\ &< q \quad \text{für alle } j \in \mathbb{N}, \end{aligned}$$

weil $(a_j)_{j \in \mathbb{N}}$ in $\mathcal{A}_{\delta, \tau}^{(m, \rho+1, \rho'+1)}$ beschränkt ist. Also ist $\left(\partial_{\eta}^{\alpha} \partial_y^{\beta} a_j \right)_{j \in \mathbb{N}}$ beschränkt in $\mathcal{A}_{\delta, \tau}^{(m, \rho+1-|\alpha|, \rho'+1-|\beta|)}$. Dann folgt aus (1.63) und (1.64), dass

$$\partial_{\eta}^{\alpha+e_k} \partial_y^{\beta} a_j(\eta, y) \xrightarrow{j \rightarrow \infty} \partial_{\eta}^{\alpha+e_k} \partial_y^{\beta} a(\eta, y) \quad \text{gleichmäßig auf } K,$$

$$\partial_{\eta}^{\alpha} \partial_y^{\beta+e_k} a_j(\eta, y) \xrightarrow{j \rightarrow \infty} \partial_{\eta}^{\alpha} \partial_y^{\beta+e_k} a(\eta, y) \quad \text{gleichmäßig auf } K.$$

Somit erhält man für alle $\alpha, \beta \in \mathbb{N}_0^n$ mit $|\alpha| \leq \rho$ und $|\beta| \leq \rho'$, dass

$$\partial_{\eta}^{\alpha} \partial_y^{\beta} a_j(\eta, y) \xrightarrow{j \rightarrow \infty} \partial_{\eta}^{\alpha} \partial_y^{\beta} a(\eta, y) \quad \text{glm. auf jeder kompakten Teilmenge } K \subset \mathbb{R}_{\eta, y}^{2n}. \quad (1.65)$$

Da

$$\left\| \langle y \rangle^{-2l} \langle D_\eta \rangle^{2l} \left\{ \langle y \rangle^{-2l'} \langle D_y \rangle^{2l'} a_j(\eta, y) \right\} \right\|_E \leq c_{l,l'} q \langle \eta \rangle^{m-(1-\delta)2l'} \langle y \rangle^{\tau-2l} \in L_1(\mathbb{R}_{\eta,y}^{2n})$$

für alle $j \in \mathbb{N}$ gilt, folgt aus dem Satz 1.3.1 b), (1.65) und aus dem Satz über (die klassische) dominierte Konvergenz, dass

$$\begin{aligned} & \lim_{j \rightarrow \infty} os - \int \int e^{-i\eta \cdot y} a_j(\eta, y) d(\eta, y) \\ &= \lim_{j \rightarrow \infty} \int \int e^{-i\eta \cdot y} \langle y \rangle^{-2l} \langle D_\eta \rangle^{2l} \left\{ \langle y \rangle^{-2l'} \langle D_y \rangle^{2l'} a_j(\eta, y) \right\} d(\eta, y) \\ &= \int \int e^{-i\eta \cdot y} \langle y \rangle^{-2l} \langle D_\eta \rangle^{2l} \left\{ \langle y \rangle^{-2l'} \langle D_y \rangle^{2l'} a(\eta, y) \right\} d(\eta, y) \\ &= os - \int \int e^{-i\eta \cdot y} a(\eta, y) d(\eta, y) \end{aligned}$$

und somit ist der Satz bewiesen. □

Bemerkung 1.3.2 Die Sätze 1.3.2-1.3.5 kann man auch mit Hilfe des Satzes 1.3.9 beweisen, aber in diesem Fall muss $a \in \mathcal{A}_{\delta,\tau}^{(m,\rho+1,\rho'+1)}(\mathbb{R}_\eta^n \times \mathbb{R}_y^n, E)$ gefordert werden. Also muss die Amplitude a mehr stetige Ableitungen haben.

Pseudodifferentialoperatoren

Das Ziel dieses Kapitels ist eine Version des Satzes von Michlin auf Besovräumen zu zeigen. Natürlich muss der hier konstruierte Pseudodifferentialoperator einer geeigneten Funktion $a \in C^\rho(\mathbb{R}^n, E_1)$ mit

$$\begin{aligned} [a(D)]u(x) &= \mathcal{F}^{-1}(a\hat{u})(x) = \int e^{ix \cdot \xi} a(\xi) \bullet \hat{u}(\xi) \frac{d\xi}{(2\pi)^{n/2}} \\ &= \int e^{ix \cdot \xi} a(\xi) \bullet \left(\int e^{-i\xi \cdot \eta} u(\eta) \frac{d\eta}{(2\pi)^{n/2}} \right) \frac{d\xi}{(2\pi)^{n/2}} \end{aligned}$$

auf $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n, E_2)$ übereinstimmen¹. Im Allgemeinen gilt die Gleichheit

$$\int e^{ix \cdot \xi} a(\xi) \bullet \left(\int e^{-i\xi \cdot \eta} u(\eta) \frac{d\eta}{(2\pi)^{n/2}} \right) \frac{d\xi}{(2\pi)^{n/2}} = \int \int e^{i\xi \cdot (x-\eta)} a(\xi) \bullet u(\eta) \frac{d(\xi, \eta)}{(2\pi)^n}$$

nicht. Sie gilt jedoch im Sinne von oszillatorischen Integralen, wenn $b_x(\xi, \eta) := a(\xi) \bullet u(x - \eta)$ in $\mathcal{A}_{0,0}^{(m,\rho,\rho')}(\mathbb{R}_\xi^n \times \mathbb{R}_\eta^n, E_0)$ liegt und ρ, ρ' die Voraussetzungen von Satz 1.3.1 erfüllen. Deshalb muss $n < 2l \leq \rho$ sein, was die Definition von ρ_n in (1.1) einen Sinn macht. Zusätzlich muss a noch andere Bedingungen erfüllen wie zum Beispiel

$$\|\partial_\xi^\alpha a(\xi)\|_{E_1} \leq c_\alpha \langle \xi \rangle^{m-|\alpha|} \text{ für alle } \xi \in \mathbb{R}^n \text{ und } |\alpha| \leq \rho.$$

Unter den obigen Voraussetzungen für a kann man sogar $a(D)$ auf den ganzen Raum $C_b^\infty(\mathbb{R}^n, E_2)$ durch das oszillatorische Integral

$$a(D)u(x) := os - \int \int e^{i\xi \cdot \eta} a(\xi) \bullet u(x - \eta) \frac{d(\xi, \eta)}{(2\pi)^n}, \quad x \in \mathbb{R}^n,$$

definieren. Dann können wir dank der dichten Einbettung

$$\left(B_{p,q}^s(\mathbb{R}^n, E) \cap C_b^\infty(\mathbb{R}^n, E); \|\cdot\|_{B_{p,q}^s} \right) \xhookrightarrow{d} B_{p,q}^s(\mathbb{R}^n, E) \quad (2.1)$$

¹Dabei sindt $\bullet : E_1 \times E_2 \rightarrow E_0$ eine Multiplikation und E_0, E_1 und E_2 Banachräume.

(für alle $s \in \mathbb{R}$, $p \in [1, \infty]$, $q \in [1, \infty]$) und einiger Eigenschaften der Interpolationstheorie das Hauptresultat dieses Kapitels (Satz 2.3.1) zeigen, das besagt: Für jede Funktion a im Raum $S_{1,0}^{m,\rho_n}(\mathbb{R}^n, E_1)$ (siehe Definition 2.1.1) gibt es einen eindeutigen linearen Operator $\widetilde{a(D)} : V(\mathbb{R}^n, E_2) \longrightarrow V(\mathbb{R}^n, E_0)$, wobei $V(\mathbb{R}^n, E_i) = \bigcup_{s \in \mathbb{R}, p, q \in [1, \infty]} B_{p,q}^s(\mathbb{R}^n, E_i)$, so dass

$$\widetilde{a(D)} \Big|_{B_{p,q}^{s+m}(\mathbb{R}^n, E_2) \cap C_b^\infty(\mathbb{R}^n, E_2)} = a(D) \quad \forall s \in \mathbb{R}, p, q \in [1, \infty].$$

Dabei ist

$$[a(D)u](x) := os - \int \int e^{i\xi\eta} a(\xi) \bullet u(x - \eta) \frac{d(\xi, \eta)}{(2\pi)^n}, \quad x \in \mathbb{R}^n, u \in C_b^\infty(\mathbb{R}^n, E_2).$$

Damit erhält man ferner

$$(a \mapsto \widetilde{a(D)}) \in \mathcal{L}\left(S_{1,0}^{m,\rho_n}(\mathbb{R}^n, E_1), \mathcal{L}(B_{p,q}^{s+m}(\mathbb{R}^n, E_2), B_{p,q}^s(\mathbb{R}^n, E_0))\right)$$

für alle $m, s \in \mathbb{R}$, $p, q \in [1, \infty]$, $B \in \{B, \mathring{B}, b\}$ und somit

$$(a \mapsto \widetilde{a(D)}) \in \mathcal{L}\left(S_{1,0}^{m,\rho_n}(\mathbb{R}^n, E_1), \mathcal{L}(W_p^l(\mathbb{R}^n, E_2), W_p^k(\mathbb{R}^n, E_0))\right),$$

falls $m \in \mathbb{R}$, $1 \leq p \leq \infty$ und $k, l \in \mathbb{N}$ mit $l > k + m$.

Dieses Kapitel untergliedert sich in drei Abschnitte: Im ersten Abschnitt definieren wir den Raum der Symbole $S_{1,0}^{m,\rho}(\mathbb{R}^n, E_1)$ und geben wir einige Beispiele an. Dann wird im zweiten Abschnitt der Operator $a(D)$ auf $C_b^\infty(\mathbb{R}^n, E)$ definiert und die Stetigkeit von

$$a(D) : \left(B_{p,q}^{s+m}(\mathbb{R}^n, E_2) \cap C_b^\infty(\mathbb{R}^n, E_2); \|\cdot\|_{B_{p,q}^{s+m}}\right) \longrightarrow B_{p,q}^s(\mathbb{R}^n, E_0)$$

gezeigt, wenn $a \in S_{1,0}^{m,\rho}(\mathbb{R}^n, E_2)$ mit $\rho \geq \rho_n$ und $q < \infty$ (siehe Satz 2.2.3). Schließlich werden der Satz 2.3.1 und einige Folgerungen im dritten Abschnitt gezeigt.

2.1 Der Raum der E-wertigen Symbole $S_{1,0}^{m,\rho}(\mathbb{R}^n, E)$

Definition 2.1.1 Seien $m \in \mathbb{R}$, $\rho \in \mathbb{N}_0$ und E ein Banachraum. Man definiert **den Raum der E-wertigen Symbole** vom Grad m und Regularität ρ durch

$$S_{1,0}^{m,\rho}(\mathbb{R}^n, E) := \left\{ a \in C^\rho(\mathbb{R}^n, E) : \forall |\alpha| \leq \rho \exists c_\alpha > 0; \|D_\xi^\alpha a(\xi)\|_E < c_\alpha \langle \xi \rangle^{m-|\alpha|} \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^n \right\}$$

mit der Norm

$$\|a\|_{S_{1,0}^{m,\rho}(\mathbb{R}^n, E)} := \max_{|\alpha| \leq \rho} \sup_{\xi \in \mathbb{R}^n} \left\{ \langle \xi \rangle^{|\alpha|-m} \|D_\xi^\alpha a(\xi)\|_E \right\}.$$

$S_{1,0}^{m,\rho}(\mathbb{R}^n, E)$ ist ein Banachraum. Man sieht leicht, dass

$$a \bullet b \in S_{1,0}^{m_1+m_2,\rho}(\mathbb{R}^n, E_0) \quad \text{für alle } a \in S_{1,0}^{m_1,\rho}(\mathbb{R}^n, E_1), \quad b \in S_{1,0}^{m_2,\rho}(\mathbb{R}^n, E_2) \quad \text{und}$$

$$S_{1,0}^{m_1,\rho}(\mathbb{R}^n, E) \subset S_{1,0}^{m_2,\rho}(\mathbb{R}^n, E), \quad \text{wenn } m_1 \leq m_2.$$

Beispiel 2.1.1 Seien $m \in \mathbb{R}$ und $\rho \in \mathbb{N}_0$ gegeben.

- a) Sind $m \in \mathbb{N}$, $a_\alpha \in E$ für alle $|\alpha| \leq m$ und $p(\xi) = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha \xi^\alpha$ für $\xi \in \mathbb{R}^n$, so ist $p \in S_{1,0}^{m,\rho}(\mathbb{R}^n, E)$ wegen $\partial^\beta \xi^\alpha = \beta! \binom{\alpha}{\beta} \xi^{\alpha-\beta}$ und $\frac{1}{\sqrt{2}}(1 + |\xi|) \leq \langle \xi \rangle \leq (1 + |\xi|)$.
- b) $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n, E) \subset S_{1,0}^{m,\rho}(\mathbb{R}^n, E)$.
- c) $\mathcal{O}_{\mathcal{M}}(\mathbb{R}^n, E) \subset \cup_{m>0} S_{1,0}^{m,\rho}(\mathbb{R}^n, E)$.
- d) Sei $a(\xi) = \langle \xi \rangle^m$ für alle $\xi \in \mathbb{R}^n$. Dann $a \in S_{1,0}^{m,\rho}(\mathbb{R}^n)$.

Weiterhin sei ρ_n wie in (1.1), das heißt

$$\rho_n = \begin{cases} n+1, & n \in \mathbb{N} \text{ ungerade,} \\ n+2, & n \in \mathbb{N} \text{ gerade.} \end{cases}$$

2.2 Pseudodifferentialoperatoren für Symbole auf $S_{1,0}^{m,\rho}(\mathbb{R}^n, E)$

2.2.1 Definition des Operators $a(D)$ für Symbole in $S_{1,0}^{m,\rho}(\mathbb{R}^n, E)$

Definition 2.2.1 Seien $m \in \mathbb{R}$, $\rho \in \mathbb{N}$ mit $\rho \geq \rho_n$ und $a \in S_{1,0}^{m,\rho}(\mathbb{R}^n, E_1)$. Dann definieren wir den **Pseudodifferentialoperator** $a(D)$ durch

$$[a(D)u](x) := os - \int \int e^{i\xi \cdot \eta} a(\xi) \bullet u(x - \eta) \frac{d(\xi, \eta)}{(2\pi)^n}, \quad u \in C_b^\infty(\mathbb{R}^n, E_2) \quad \text{und } x \in \mathbb{R}^n.$$

Bemerkung 2.2.1 a) Das oszillatorische Integral der Definition 2.2.1 existiert wegen

$$b_x(\xi, \eta) := a(\xi) \bullet u(x - \eta) \in \mathcal{A}_{0,0}^{(m,\rho,\infty)}(\mathbb{R}_\xi^n \times \mathbb{R}_\eta^n, E_0) \quad (2.2)$$

und des Satzes 1.3.1.

b) Sei $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n, E_1)$. Dann gilt nach dem Beispiel 1.3.2, dass

$$(2\pi)^{\frac{n}{2}} \psi(D)u = \check{\psi} \bullet u \quad \forall u \in C_b^\infty(\mathbb{R}^n, E_2).$$

Satz 2.2.1 Seien $m \in \mathbb{R}$, $\rho \in \mathbb{N}$ mit $\rho \geq \rho_n$ und $a \in S_{1,0}^{m,\rho}(\mathbb{R}^n, E_1)$. Dann ist die Abbildung

$$a(D) : C_b^\infty(\mathbb{R}^n, E_2) \longrightarrow C_b^\infty(\mathbb{R}^n, E_0)$$

linear und stetig.

Beweis. Sei l' wie im Satz 1.3.1 (nämlich $2l' > n + m$). Nach diesem Satz und nach (2.2) erhalten wir für alle $u \in C_b^\infty(\mathbb{R}^n, E_2)$, dass

$$\|(a(D)u)(x)\|_{E_0} \leq c \|b_x(\cdot, \cdot)\|_{(m, \rho, 2l')} \leq c \|a\|_{S_{1,0}^{m, \rho}} \|u\|_{C_b^{2l'}(\mathbb{R}^n, E_2)}, \quad (2.3)$$

wobei die Konstante c unabhängig von a und u ist. Nun definiere man $b(x, \xi, \eta) := a(\xi) \bullet u(x - \eta)$ auf $\mathbb{R}_x^n \times \mathbb{R}_{\xi, \eta}^{2n}$ und seien $k \in \mathbb{N}_0$ und $\gamma \in \mathbb{N}_0^n$ mit $|\gamma| \leq k$. Dann gilt für jedes $x \in \mathbb{R}^n$, dass $\partial_x^\gamma b(x, \cdot, \cdot) \in \mathcal{A}_{0,0}^{(m, \rho, \infty)}(\mathbb{R}_\xi^n \times \mathbb{R}_\eta^n, E_0)$. Für $x \in \mathbb{R}^n$ existiert ein $R := R_x > 0$ mit $x \in B_R(0)$. Damit betrachten wir

$$\mathcal{N}_\gamma(x) := \{(\partial_x^\gamma b)(x', \cdot, \cdot) : x' \in B_R(0)\}.$$

Dann gilt für alle $\alpha, \beta \in \mathbb{N}_0^n$, $l, l' \in \mathbb{N}_0$ mit $|\alpha| \leq 2l \leq \rho$, $|\beta| \leq 2l'$ und $x' \in B_R(0)$

$$\left\| \left(\partial_\xi^\alpha \partial_\eta^\beta (\partial_x^\gamma b) \right) (x', \cdot, \cdot) \right\|_{E_0} \leq \|a\|_{S_{1,0}^{m, \rho}} \langle \xi \rangle^{m-|\alpha|} \|u\|_{C_b^{2l'+k}},$$

also

$$\|\partial_x^\gamma b(x', \cdot, \cdot)\|_{(m, 2l, 2l')} \leq \|a\|_{S_{1,0}^{m, \rho n}} \|u\|_{C_b^{2l'+k}} \text{ für alle } x' \in B_R(0),$$

das heißt $\mathcal{N}_\gamma(x)$ ist eine beschränkte Teilmenge von $\mathcal{A}_{0,0}^{(m, \rho, \infty)}(\mathbb{R}_\xi^n \times \mathbb{R}_\eta^n, E_0)$. Daraus folgt zusammen mit Satz 1.3.3, dass

$$\begin{aligned} \|\partial_x^\gamma [a(D)u](x)\|_{E_0} &= \left\| \text{os} - \int \int e^{i\eta \cdot \xi} a(\xi) \bullet (\partial_x^\gamma u)(x - \eta) \frac{d(\xi, \eta)}{(2\pi)^n} \right\|_{E_0} \\ &= \|(a(D)(\partial_x^\gamma u))(x)\|_{E_0} \\ &\stackrel{(2.3)}{\leq} c \|a\|_{S_{1,0}^{m, \rho}} \|\partial_x^\gamma u\|_{C_b^{2l'}(\mathbb{R}^n, E_2)} \\ &\leq c \|a\|_{S_{1,0}^{m, \rho}} \|u\|_{C_b^{2l'+k}(\mathbb{R}^n, E_2)} \quad \forall x \in \mathbb{R}^n, \end{aligned}$$

wobei die Konstante c unabhängig von a und u ist. Also

$$\|a(D)u\|_{C_b^k(\mathbb{R}^n, E_0)} \leq c \|a\|_{S_{1,0}^{m, \rho}} \|u\|_{C_b^{2l'+k}(\mathbb{R}^n, E_2)}.$$

Somit folgt zusammen mit der Bemerkung in (1.2) die Behauptung. $\square$

Satz 2.2.2 Seien Voraussetzungen von Lemma 1.1.2 erfüllt und $m_1, m_2 \in \mathbb{R}$, $\rho \in \mathbb{N}$ mit $\rho \geq \rho_n$, $a \in S_{1,0}^{m_1, \rho}(\mathbb{R}^n, E_1)$ und $b \in S_{1,0}^{m_2, \rho}(\mathbb{R}^n, E_2)$. Dann gilt

$$a(D)b(D)u = (a \bullet b)(D)u \quad \text{für alle } u \in C_b^\infty(\mathbb{R}^n, E_3).$$

Beweis. Es ist klar, dass $a \bullet b \in S_{1,0}^{m_1+m_2, \rho}(\mathbb{R}^n, E_0)$. Dann folgt aus dem Satz von Fubini, dem Satz 1.3.2 und aus dem Beispiel 1.3.1 die Behauptung: Seien $u \in C_b^\infty(\mathbb{R}^n, E_3)$ und $x \in \mathbb{R}^n$,

dann gilt

$$\begin{aligned}
& a(D)b(D)u(x) \\
&= os - \int \int e^{i\xi \cdot \eta} a(\xi) \bullet \left(os - \int \int e^{i\xi' \cdot \eta'} b(\xi') \bullet u(x - \eta - \eta') \frac{d(\xi', \eta')}{(2\pi)^n} \right) \frac{d(\xi, \eta)}{(2\pi)^n} \\
&= os - \int_{\mathbb{R}^{4n}} e^{i\xi \cdot \eta} e^{i\xi' \cdot \eta'} [a(\xi) \bullet b(\xi')] \bullet u(x - \eta - \eta') \frac{d(\xi, \xi', \eta, \eta')}{(2\pi)^{2n}} \\
&\stackrel{y=\eta+\eta'}{=} os - \int_{\mathbb{R}^{4n}} e^{i(\xi-\xi') \cdot \eta} e^{i\xi' \cdot y} [a(\xi) \bullet b(\xi')] \bullet u(x - y) \frac{d(\xi, \xi', \eta, y)}{(2\pi)^{2n}} \\
&\stackrel{\tilde{\xi}=\xi-\xi'}{=} os - \int_{\mathbb{R}^{4n}} e^{i\tilde{\xi} \cdot \eta} e^{i\xi' \cdot y} [a(\xi' + \tilde{\xi}) \bullet b(\xi')] \bullet u(x - y) \frac{d(\tilde{\xi}, \xi', \eta, y)}{(2\pi)^{2n}} \\
&= os - \int \int e^{i\xi' \cdot y} \left(os - \int \int e^{i\tilde{\xi} \cdot \eta} a(\xi' + \tilde{\xi}) \frac{d(\tilde{\xi}, \eta)}{(2\pi)^n} \right) \bullet [b(\xi') \bullet u(x - y)] \frac{d(\xi', y)}{(2\pi)^n} \\
&= os - \int \int e^{i\xi' \cdot y} [a(\xi') \bullet b(\xi')] \bullet u(x - y) \frac{d(\xi', y)}{(2\pi)^n} \\
&= [(a \bullet b)(D)u](x).
\end{aligned}$$

Somit ist die Behauptung bewiesen. $\square$

Der Beweis des folgenden Lemmas ist analog zum Beweis des Lemmas 2.5.3 in [Am,03] aber hier geben wir zusätzlich eine wichtige Abschätzung für den Beweis des Satzes 2.2.3.

Lemma 2.2.1 Seien $(\psi_j)_{j \in \mathbb{N}_0}$ wie in (1.16) und $a \in S_{1,0}^{m,n+1}(\mathbb{R}^n, E)$, $m \in \mathbb{R}$. Dann gilt $(\psi_j a)^\vee \in L_1(\mathbb{R}^n, E)$ und

$$\|(\psi_j a)^\vee\|_{L_1(\mathbb{R}^n, E)} \leq c_{n,m,\psi} 2^{jm} \|a\|_{S_{1,0}^{m,n+1}(\mathbb{R}^n, E)} \quad \text{für alle } j \in \mathbb{N}_0.$$

Beweis. Seien $(\psi_j)_{j \in \mathbb{N}_0}$ eine Zerlegung der Eins wie in (1.16) und $a \in S_{1,0}^{m,n+1}(\mathbb{R}^n, E)$, $m \in \mathbb{R}$. Dann

$$\|(\psi_j a)^\vee\|_{L_1(\mathbb{R}^n, E)} = \left\| \left(\tilde{\psi} a(2^j \cdot) \right)^\vee \right\|_{L_1(\mathbb{R}^n, E)} \quad \text{für alle } j \in \mathbb{N}_0, \quad (2.4)$$

wobei $\tilde{\psi} = \psi$ falls $j = 0$.

Nun seien $B := \{x \in \mathbb{R}^n : \frac{1}{2} \leq |x| \leq 2\}$, 1_B die charakteristische Funktion von B , $\alpha \in \mathbb{N}_0$ mit

$|\alpha| \leq n+1$ und $j \in \mathbb{N}$. Dann gilt für alle $\xi \in \mathbb{R}^n$

$$\begin{aligned}
\left\| D^\alpha \left(\tilde{\psi} a(2^j \cdot) \right) (\xi) \right\|_E &\leq \sum_{\beta \leq \alpha} \binom{\alpha}{\beta} \underbrace{2^{j|\beta|}}_{=2^{|\beta|} 2^{(j-1)|\beta|}} \left\| D^{\alpha-\beta} \tilde{\psi}(\xi) \right\|_{1_B(\xi)} \left\| (D^\beta a)(2^j \xi) \right\|_E \\
&\leq \sum_{\alpha \leq \beta} c_{\alpha, \beta, \tilde{\psi}} 1_B(\xi) \max_{|\beta| \leq n+1} \sup_{\Omega_j} \langle \xi \rangle^{|\beta|} \left\| D^\beta a(\xi) \right\|_E \\
&\leq c_{n, \psi} \|a\|_{S_{1,0}^{m, n+1}} 1_B(\xi) \sup_{\Omega_j} \langle \xi \rangle^m \\
&\leq c_{n, \psi} \|a\|_{S_{1,0}^{m, n+1}} 1_B(\xi) \cdot \begin{cases} (1 + 2^{2(j+1)})^{m/2}, & \text{falls } m \geq 0, \\ (1 + 2^{2(j-1)})^{m/2}, & \text{falls } m < 0. \end{cases} \\
&\leq c_{n, m, \psi} 2^{jm} \|a\|_{S_{1,0}^{m, n+1}} 1_B(\xi).
\end{aligned}$$

Ein analoges Resultat bekommt man für $j = 0$, $\tilde{\psi} = \psi$.

Somit ist $D^\alpha \left(\tilde{\psi} a(2^j \cdot) \right) \in L_1(\mathbb{R}^n, E)$ mit

$$\left\| D^\alpha \left(\tilde{\psi} a(2^j \cdot) \right) \right\|_{L_1(\mathbb{R}^n, E)} \leq c_{n, m, \psi} 2^{jm} \|a\|_{S_{1,0}^{m, n+1}} \quad \text{für alle } j \in \mathbb{N}_0, |\alpha| \leq n+1.$$

Daraus folgt zusammen mit

$$x^\alpha \mathcal{F}^{-1} \left(\tilde{\psi} a(2^j \cdot) \right) = (-1)^{|\alpha|} \mathcal{F}^{-1} \left(D^\alpha \left(\tilde{\psi} a(2^j \cdot) \right) \right) \in C_0(\mathbb{R}^n, E),$$

(2.4) und der Ungleichung $|x|^{n+1} \leq c(n) \sum_{|\alpha|=n+1} |x^\alpha|$ die Behauptung. $\square$

Satz 2.2.3 Seien $\rho \in \mathbb{N}$ mit $\rho \geq \rho_n$, $s, m \in \mathbb{R}$ und $a \in S_{1,0}^{m, \rho}(\mathbb{R}^n, E_1)$. Dann existiert genau eine Fortsetzung $a_{s, p, q}(D)$ von

$$a(D) : \left(B_{p, q}^{m+s}(\mathbb{R}^n, E_2) \cap C_b^\infty(\mathbb{R}^n, E_2); \|\cdot\|_{B_{p, q}^{m+s}} \right) \longrightarrow B_{p, q}^s(\mathbb{R}^n, E_0)$$

auf $B_{p, q}^{s+m}(\mathbb{R}^n, E_2)$, so dass

$$a_{s, p, q}(D) : B_{p, q}^{s+m}(\mathbb{R}^n, E_2) \longrightarrow B_{p, q}^s(\mathbb{R}^n, E_0)$$

linear und beschränkt für alle $p \in [1, \infty]$ und $q \in [1, \infty)$ ist.

Außerdem gilt

$$\|a_{s, p, q}(D) u\|_{B_{p, q}^s(\mathbb{R}^n, E_0)} \leq c_{n, m, \psi} \|a\|_{S_{1,0}^{m, n+1}(\mathbb{R}^n, E_1)} \|u\|_{B_{p, q}^{s+m}(\mathbb{R}^n, E_2)} \quad \forall u \in B_{p, q}^{s+m}(\mathbb{R}^n, E_2).$$

Beweis. Wir werden zeigen, dass

$$a(D) : \left(C_b^\infty(\mathbb{R}^n, E_2) \cap B_{p, q}^{s+m}(\mathbb{R}^n, E_2); \|\cdot\|_{B_{p, q}^{s+m}} \right) \longrightarrow B_{p, q}^s(\mathbb{R}^n, E_0) \quad (2.5)$$

linear und stetig ist, wenn $p \in [1, \infty]$ und $q \in [1, \infty)$. Dann folgt die Behauptung aus dem Lemma

1.1.4. Seien $(\psi_k)_{k \in \mathbb{N}_0}$ eine Zerlegung der Eins wie in (1.16), $\chi_k := \sum_{r=-1}^{r=1} \psi_{k+r}$ für alle $k \in \mathbb{N}_0$, $u \in C_b^\infty(\mathbb{R}^n, E_2) \cap B_{p,q}^{s+m}(\mathbb{R}^n, E_2)$ mit $p \in [1, \infty]$, $q \in [1, \infty)$ und $s, m \in \mathbb{R}$. Dann gilt nach dem Satz 2.2.2 für alle $k \in \mathbb{N}_0$ und alle $x \in \mathbb{R}^n$:

$$\begin{aligned} [\psi_k(D)(a(D)u)](x) &= os - \int \int e^{i\xi\eta} (\psi_k a)(\xi) \bullet u(x - \eta) \frac{d(\xi, \eta)}{(2\pi)^n} \\ &\stackrel{\text{Bp. 1.3.2}}{=} \int \mathcal{F}^{-1}(\chi_k \psi_k a)(\eta) \bullet u(x - \eta) \frac{d\eta}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \\ &= (2\pi)^{-\frac{n}{2}} [\mathcal{F}^{-1}(\chi_k \psi_k a) *_{\bullet} u](x) \quad (\text{nach Lemmata 2.2.1, 1.1.3}) \\ &= (2\pi)^{-n} [(\mathcal{F}^{-1}\chi_k) * (\mathcal{F}^{-1}\psi_k a) *_{\bullet} u](x) \\ &= (2\pi)^{-n} [(\mathcal{F}^{-1}(\psi_k a)) *_{\bullet} (\mathcal{F}^{-1}(\chi_k) * u)](x) \\ &= (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \mathcal{F}^{-1}(\psi_k a) *_{\bullet} (\chi_k(D)u)(x), \end{aligned}$$

wobei

$$\mathcal{F}^{-1}(\psi_k a) *_{\bullet} \chi_k(D)u \in L_p(\mathbb{R}^n, E_0).$$

Dann folgt aus den Lemmata 2.2.1 und 1.1.3, dass

$$\|\psi_k(D)(a(D)u)\|_{L_p(\mathbb{R}^n, E_0)} \leq 3c_{n,m,\psi} 2^{km} \|a\|_{S_{1,0}^{m,n+1}(\mathbb{R}^n, E_1)} \|\psi_k(D)u\|_{L_p} \quad \forall k \in \mathbb{N}_0$$

und alle $p \in [1, \infty]$. Somit erhält man für alle $p \in [1, \infty]$, $q \in [1, \infty)$ und $u \in C_b^\infty(\mathbb{R}^n, E_1) \cap B_{p,q}^{s+m}(\mathbb{R}^n, E_1)$, dass

$$\begin{aligned} \|a(D)u\|_{B_{p,q}^s(\mathbb{R}^n, E)} &\leq 3c_{n,m,\psi} \|a\|_{S_{1,0}^{m,n+1}} \left(\sum_{k=0}^{\infty} 2^{ksq} 2^{kmq} \|\psi_k(D)u\|_{L_p}^q \right)^{1/q} \\ &= 3c_{n,m,\psi} \|a\|_{S_{1,0}^{m,n+1}} \|u\|_{B_{p,q}^{s+m}(\mathbb{R}^n, E_2)}. \end{aligned}$$

Daraus folgt, dass

$$a(D) : \left(C_b^\infty(\mathbb{R}^n, E_2) \cap B_{p,q}^{s+m}(\mathbb{R}^n, E_2); \|\cdot\|_{B_{p,q}^{s+m}} \right) \longrightarrow B_{p,q}^s(\mathbb{R}^n, E_0)$$

linear und stetig ist, und

$$\|a(D)u\|_{B_{p,q}^s(\mathbb{R}^n, E_0)} \leq \tilde{c}_{n,m,\psi} \|a\|_{S_{1,0}^{m,n+1}(\mathbb{R}^n, E_1)} \|u\|_{B_{p,q}^{s+m}(\mathbb{R}^n, E_2)}$$

für alle $u \in C_b^\infty(\mathbb{R}^n, E_2) \cap B_{p,q}^{s+m}(\mathbb{R}^n, E_2)$. Dann folgt die Behauptung des Satzes aus dem Lemma 1.1.4 und aus Dichtheitsargument. $\square$

Bemerkung 2.2.2 Beachte, dass die Aussage (2.5) auch für $q = \infty$, $p \in [1, \infty]$ gilt. Man muss oben lediglich die Summe $\sum_{k=0}^{\infty}$ durch $\sup_{k \in \mathbb{N}_0}$ ersetzen.

Einige wichtige Resultate der Interpolationstheorie gestattet uns, die Gültigkeit des Satzes 2.2.3 für $p \in [1, \infty]$ und $q = \infty$ zu behaupten (siehe den Beweis des Satzes 2.3.1 a-ii)).

Aus (1.45) erhält man sofort, dass

$$\left(B_{p,1}^{s+m-\epsilon}(\mathbb{R}^n; E_i), B_{p,1}^{s+m+\epsilon}(\mathbb{R}^n; E_i) \right)_{\frac{1}{2}, q} \doteq B_{p,q}^{s+m}(\mathbb{R}^n; E_i) \quad (2.6)$$

für alle $s, m \in \mathbb{R}$, $1 \leq p, q \leq \infty$ und $\epsilon > 0$ und nach Satz 2.2.3 folgt für alle $s, m \in \mathbb{R}$, $1 \leq p \leq \infty$ und $\epsilon > 0$, dass

$$a_{s-\epsilon, p, 1}(D) \in \mathcal{L}(B_{p,1}^{s+m+\epsilon}(\mathbb{R}^n, E_2), B_{p,1}^{s+\epsilon}(\mathbb{R}^n, E_0)) \cap \mathcal{L}(B_{p,1}^{s+m-\epsilon}(\mathbb{R}^n, E_2), B_{p,1}^{s-\epsilon}(\mathbb{R}^n, E_0)) \quad (2.7)$$

für alle $a \in S_{1,0}^{m, \rho_n}(\mathbb{R}^n, E_1)$. Damit hat man die Voraussetzungen des Satzes 1.1.3c), der im Beweis des Satzes 2.3.1 verwendet wird.

2.3 Eigenschaften des Operators $\widetilde{a(D)}$ auf dem Raum $\mathbf{V}(\mathbb{R}^n, E)$

Wir definieren die Menge $\mathbf{V}(\mathbb{R}^n, E)$ durch

$$\mathbf{V}(\mathbb{R}^n, E) := \bigcup_{(s,p,q) \in \mathbb{R} \times [1, \infty] \times [1, \infty]} B_{p,q}^s(\mathbb{R}^n, E).$$

Die Menge $\mathbf{V}(\mathbb{R}^n, E)$ hat folgende Eigenschaften:

- $\mathbf{V}(\mathbb{R}^n, E)$ ist wegen des Korollars 1.1.1 ein Untervektorraum von $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n, E)$.
- Da $B_{p,\infty}^s(\mathbb{R}^n, E) \hookrightarrow B_{p,q}^{s-1}(\mathbb{R}^n, E)$ für alle $s \in \mathbb{R}$, $p, q \in [1, \infty]$ gilt, ist dann klar, dass

$$\mathbf{V}(\mathbb{R}^n, E) = \bigcup_{(s,p,q) \in \mathbb{R} \times [1, \infty] \times [1, \infty]} B_{p,q}^s(\mathbb{R}^n, E).$$

Nun werden wir das Hauptresultat dieses Kapitels beweisen.

Satz 2.3.1 (und Definition des Operators $\widetilde{a(D)}$) Seien $m \in \mathbb{R}$, ρ_n wie in (1.1) und $a \in S_{1,0}^{m, \rho_n}(\mathbb{R}^n, E_1)$. Dann gelten:

a) Es gibt eine Abbildung $T : \mathbf{V}(\mathbb{R}^n, E_2) \longrightarrow \mathbf{V}(\mathbb{R}^n, E_0)$, so dass

i) T ist linear.

ii) $T \Big|_{B_{p,q}^{s+m} : B_{p,q}^{s+m}(\mathbb{R}^n, E_2) \longrightarrow B_{p,q}^s(\mathbb{R}^n, E_0)}$ ist stetig für alle $s \in \mathbb{R}$ und $p, q \in [1, \infty]$.

iii) $T \Big|_{(B_{p,q}^{s+m}(\mathbb{R}^n, E_2) \cap C_b^\infty(\mathbb{R}^n, E_2))} = a(D)$ für alle $(s, p, q) \in \mathbb{R} \times [1, \infty] \times [1, \infty)$, wobei

$$[a(D)u](x) = os - \int \int e^{-i\xi \cdot \eta} a(\xi) \bullet u(x - \eta) \frac{d(\xi, \eta)}{(2\pi)^n}, \quad u \in C_b^\infty(\mathbb{R}^n, E_2).$$

b) Sei $S : \mathbf{V}(\mathbb{R}^n, E_2) \longrightarrow \mathbf{V}(\mathbb{R}^n, E_0)$ eine andere Abbildung, die i)-iii) erfüllt. Dann ist $T = S$. Wir bezeichnen den Operator T durch $\widetilde{a(D)}$.

Beweis. a) Sei $T : \mathbf{V}(\mathbb{R}^n, E_2) \longrightarrow \mathbf{V}(\mathbb{R}^n, E_0)$ definiert durch

$$T \Big|_{B_{p,q}^{s+m}} := a_{s,p,q}(D) \quad \text{für alle } (s, p, q) \in \mathbb{R} \times [1, \infty] \times [1, \infty], \quad (2.8)$$

wobei $a_{s,p,q}(D)$ die eindeutige Fortsetzung von

$$a(D) : \left(C_b^\infty(\mathbb{R}^n, E_2) \cap B_{p,q}^{s+m}(\mathbb{R}^n, E_2); \|\cdot\|_{B_{p,q}^{s+m}} \right) \longrightarrow B_{p,q}^s(\mathbb{R}^n, E_0)$$

auf $B_{p,q}^{s+m}(\mathbb{R}^n, E_2)$ ist (siehe Satz 2.2.3).

Wir werden in der folgenden Behauptung **A** zeigen, dass T wohldefiniert ist.

Behauptung A. Seien $s_i, m \in \mathbb{R}$, $p_i \in [1, \infty]$, $q_i \in [1, \infty]$ für $i = 1, 2$, $u \in B_{p_1, q_1}^{s_1+m}(\mathbb{R}^n, E_2) \cap B_{p_2, q_2}^{s_2+m}(\mathbb{R}^n, E_2)$ und $a \in S_{1,0}^{m, \rho^n}(\mathbb{R}^n, E_1)$. Dann gilt

$$a_{s_1, p_1, q_1}(D) u = a_{s_2, p_2, q_2}(D) u \quad \text{in } \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n, E_0).$$

Beweis: Nach Lemma 1.1.5 existiert eine Folge $(u_N)_{N \in \mathbb{N}_0}$ in $C_b^\infty(\mathbb{R}^n, E_2) \cap B_{p_1, q_1}^{s_1+m}(\mathbb{R}^n, E_2) \cap B_{p_2, q_2}^{s_2+m}(\mathbb{R}^n, E_2)$ mit

$$u_N \longrightarrow u \quad \text{in } B_{p_i, q_i}^{s_i+m}(\mathbb{R}^n, E_2) \quad \text{für jedes } i = 1, 2, \quad (2.9)$$

und nach Definition von $a_{s_i, p_i, q_i}(D)$ gilt

$$a_{s_i, p_i, q_i}(D) u = \lim_{N \rightarrow \infty} a(D) u_N \quad \text{in } B_{p_i, q_i}^{s_i}(\mathbb{R}^n, E_0), \quad i = 1, 2. \quad (2.10)$$

Ferner erhält man nach dem Korollar 1.1.1, dass

$$B_{p_i, q_i}^{s_i}(\mathbb{R}^n, E_0) \hookrightarrow B_{n j_0, j_0}^{-(j_0 - \frac{1}{j_0})}(\mathbb{R}^n, E_0), \quad i = 1, 2 \quad (2.11)$$

für ein geeignetes j_0 gilt.

Daraus folgt $\|a_{s_1, p_1, q_1}(D) u - a_{s_2, p_2, q_2}(D) u\|_{B_{n j_0, j_0}^{s_{j_0}}} = 0$, wobei $s_{j_0} := -(j_0 - \frac{1}{j_0})$.

Beweis von i) Seien $u, v \in \mathbf{V}(\mathbb{R}^n, E_2)$ und $\lambda \in \mathbb{C}$. Dann existiert ein $m_0 \in \mathbb{N}$, so dass $\lambda u + v \in B_{nm_0, m_0}^{-(m_0 - \frac{1}{m_0})}$ (siehe den Korollar 1.1.1). Daher folgt die Linearität von T .

Beweis von ii) Nach dem Satz 2.2.3 wissen wir, dass diese Behauptung für alle $p \in [1, \infty]$ und $1 \leq q < \infty$ gilt. Außerdem ist es klar nach (1.19), dass

$$B_{p, \infty}^{s+m}(\mathbb{R}^n, E_2) \hookrightarrow B_{p, 1}^{s+m-1}(\mathbb{R}^n, E_2) \subset \mathbf{V}(\mathbb{R}^n, E_2)$$

für alle $s \in \mathbb{R}$, $p \in [1, \infty]$ gilt. Da $a_{s-1, p, 1}(D)$ auf $B_{p, 1}^{s+m-1}(\mathbb{R}^n, E_2)$ erklärt ist, ist auch $a_{s-1, p, 1}(D)$ auf der Teilmenge $B_{p, \infty}^{s+m}(\mathbb{R}^n, E_2)$ von $B_{p, 1}^{s+m-1}(\mathbb{R}^n, E_2)$ erklärt. Im Folgenden werden wir zeigen, dass $a_{s-1, p, 1}(D)$ auf $B_{p, \infty}^{s+m}(\mathbb{R}^n, E_2)$ stetig ist. Somit folgt ii).

Behauptung B. Seien $s, m \in \mathbb{R}$ und $p \in [1, \infty]$. Dann ist

$$a_{s-1,p,1}(D) : B_{p,\infty}^{s+m}(\mathbb{R}^n, E_2) \longrightarrow B_{p,\infty}^s(\mathbb{R}^n, E_0) \text{ stetig.}$$

Außerdem gilt für alle $u \in B_{p,\infty}^{s+m}(\mathbb{R}^n, E_2)$:

$$\|a_{s-1,p,1}(D)u\|_{B_{p,\infty}^s(\mathbb{R}^n, E_0)} \leq c(n, m, \psi) \|a\|_{S_{1,0}^{m,n+1}(\mathbb{R}^n, E_1)} \|u\|_{B_{p,\infty}^{s+m}(\mathbb{R}^n, E_2)}. \quad (2.12)$$

In der Tat folgt aus (2.7) und (1.19), dass

$$\begin{array}{ccc} B_{p,1}^{s+m-1}(\mathbb{R}^n, E_2) & \xrightarrow[\text{stetig}]{a_{s-1,p,1}(D)} & B_{p,1}^{s-1}(\mathbb{R}^n, E_0) \\ \cup & & \cup \\ \left(B_{p,1}^{s+m-1}(\mathbb{R}^n, E_2), B_{p,1}^{s+m+1}(\mathbb{R}^n, E_2) \right)_{\frac{1}{2}, \infty} & \longrightarrow & \left(B_{p,1}^{s-1}(\mathbb{R}^n, E_0), B_{p,1}^{s+1}(\mathbb{R}^n, E_0) \right)_{\frac{1}{2}, \infty} \\ \cup & & \cup \\ B_{p,1}^{s+m+1}(\mathbb{R}^n, E_2) & \xrightarrow[\text{stetig}]{a_{s-1,p,1}(D)} & B_{p,1}^{s+1}(\mathbb{R}^n, E_0) \end{array}$$

Somit erhält man zusammen mit dem Satz 1.1.3c) und (2.6), dass die Restriktion

$$a_{s-1,p,1}(D) : B_{p,\infty}^{s+m}(\mathbb{R}^n, E_2) \longrightarrow B_{p,\infty}^s(\mathbb{R}^n, E_0) \text{ stetig ist und (2.12) erfüllt.}$$

Beweis von iii) Es folgt aus der Definition von T (siehe (2.8) und Satz 2.2.3).

Beweis vom Teil b) Nun sei $S : \mathbf{V}(\mathbb{R}^n, E_2) \longrightarrow \mathbf{V}(\mathbb{R}^n, E_0)$ andere Abbildung, die i)-iii) erfüllt. Für $u \in \mathbf{V}(\mathbb{R}^n, E_2)$ existiert ein (s_0, p_0, q_0) mit $q_0 < \infty$, so dass $u \in B_{p_0, q_0}^{s_0+m}(\mathbb{R}^n, E_2)$. Dann existiert eine Folge $(u_N)_{N \in \mathbb{N}_0}$ in $C_b^\infty(\mathbb{R}^n, E) \cap B_{p_0, q_0}^{s_0+m}(\mathbb{R}^n, E_2)$ mit $u_N \longrightarrow u$ in $B_{p_0, q_0}^{s_0+m}(\mathbb{R}^n, E_2)$. Aus iii) erhält man $Tu_N = Su_N$ für alle $N \in \mathbb{N}_0$. Dann folgt aus ii), dass

$$Tu = B_{p_0, q_0}^{s_0}(\mathbb{R}^n, E_0) - \lim_{N \rightarrow \infty} Tu_N = B_{p_0, q_0}^{s_0}(\mathbb{R}^n, E_0) - \lim_{N \rightarrow \infty} Su_N = Su.$$

Also $T = S$ auf $\mathbf{V}(\mathbb{R}^n, E_2)$. □

Im Folgenden zeigen wir einige Eigenschaften des Operators $\widetilde{a(D)}$.

Korollar 2.3.1 Seien $m \in \mathbb{R}$, $1 \leq p, q \leq \infty$, und $\mathcal{B} \in \{B, \mathring{B}, b\}$. Dann gilt

$$\left(a \mapsto \widetilde{a(D)} \right) \in \mathcal{L} \left(S_{1,0}^{m, \rho_n}(\mathbb{R}^n, E_1), \mathcal{L}(\mathcal{B}_{p,q}^{m+s}(\mathbb{R}^n, E_2), \mathcal{B}_{p,q}^s(\mathbb{R}^n, E_0)) \right)$$

mit

$$\left\| \widetilde{a(D)}u \right\|_{\mathcal{B}_{p,q}^s(\mathbb{R}^n, E_0)} \leq c(n, m, \psi) \|a\|_{S_{1,0}^{m,n+1}(\mathbb{R}^n, E_1)} \|u\|_{\mathcal{B}_{p,q}^{s+m}(\mathbb{R}^n, E_2)} \quad \forall u \in \mathcal{B}_{p,q}^{s+m}(\mathbb{R}^n, E_2).$$

Beweis. Wir zeigen den Satz in drei Fällen. Dafür beachte, dass $B_{p,q}^s$, $\mathring{B}_{p,q}^s$ und $b_{p,q}^s$ Banachräume sind und $\|\cdot\|_{B_{p,q}^s} = \|\cdot\|_{\mathring{B}_{p,q}^s} = \|\cdot\|_{b_{p,q}^s}$.

1. Der Fall $\mathcal{B} = B$ ist im Satz 2.3.1 enthalten.
2. Der Fall $\mathcal{B} = b$: Seien $1 \leq p \leq \infty$, $1 \leq q \leq \infty$, $s \in \mathbb{R}$ und $u \in b_{p,q}^{s+m}(\mathbb{R}^n, E_2)$. Dann existiert eine Folge $(u_l)_{l \in \mathbb{N}} \subset B_{p,q}^{s+m+1}(\mathbb{R}^n, E_2)$ mit $u_l \rightarrow u$ in $B_{p,q}^{s+m}(\mathbb{R}^n, E_2)$. Somit erhält man nach dem ersten Fall, dass

$$\widetilde{a(D)}u_l \xrightarrow{l \rightarrow \infty} \widetilde{a(D)}u \text{ in } B_{p,q}^s(\mathbb{R}^n, E_0).$$

Nun genügt es zu zeigen, dass $\widetilde{a(D)}u_l \in B_{p,q}^{s+1}(\mathbb{R}^n, E_0)$ ($\hookrightarrow b_{p,q}^s(\mathbb{R}^n, E_0)$) für alle $l \in \mathbb{N}$. De facto ist $\widetilde{a(D)}u_l \in B_{p,q}^{s+1}(\mathbb{R}^n, E_0)$, da

$$\widetilde{a(D)} \in \mathcal{L}(B_{p,q}^{s+m+1}(\mathbb{R}^n, E_2), B_{p,q}^{s+1}(\mathbb{R}^n, E_0)).$$

3. Der Fall $\mathcal{B} = \dot{B}$:

- a) Sind $1 \leq p, q < \infty$, so ist $\dot{B}_{p,q}^s = B_{p,q}^s$. Dann wendet man den ersten Fall an, um die Behauptung zu erhalten.
- b) Sind $1 \leq p < \infty$ und $q = \infty$, so gilt $\dot{B}_{p,\infty}^s = b_{p,\infty}^s$. Dann ist in diesem Fall der zweite anwendbar.
- c) Nun seien $p = \infty$ und $1 \leq q \leq \infty$. Weiterhin sei $u \in \dot{B}_{\infty,q}^{s+m}(\mathbb{R}^n, E_2)$. Dann existiert eine Folge $(u_l)_{l \in \mathbb{N}}$ in $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n, E_2)$, so dass $u_l \rightarrow u$ in $B_{\infty,q}^{s+m}(\mathbb{R}^n, E_2)$. Weil $\widetilde{a(D)} : B_{\infty,q}^{s+m}(\mathbb{R}^n, E_2) \rightarrow B_{\infty,q}^s(\mathbb{R}^n, E_0)$ stetig ist, gilt dann

$$\widetilde{a(D)}u_l \xrightarrow{l \rightarrow \infty} \widetilde{a(D)}u \text{ in } B_{\infty,q}^s(\mathbb{R}^n, E_0).$$

Es bleibt nur zu zeigen, dass $(\widetilde{a(D)}u_l)_{l \in \mathbb{N}} \subset \dot{B}_{\infty,q}^s(\mathbb{R}^n, E_0)$. Dazu wählen wir ein $t \in \mathbb{R}^+$, so dass $t > n + [|s|] + 2$. Weil $u_l \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n, E_2) \hookrightarrow B_{1,q}^{t+m}(\mathbb{R}^n, E_2)$ gilt, ist dann

$$\begin{aligned} \widetilde{a(D)}u_l &\in B_{1,q}^t(\mathbb{R}^n, E_0) \xrightarrow[\text{Satz 1.1.1 f)]} C_0^{[|s|]+2}(\mathbb{R}^n, E_0) \\ &\xrightarrow{(1.32)} \dot{B}_{\infty,\infty}^{[|s|]+2}(\mathbb{R}^n, E_0) \xrightarrow[(1.38)]{} \dot{B}_{\infty,q}^s(\mathbb{R}^n, E_0). \end{aligned}$$

□

Korollar 2.3.2 Seien $m, s \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{N}_0$ und $\varepsilon > 0$, so dass $l := m + k + \varepsilon \in \mathbb{N}_0$, und $\mathfrak{F}^k \in \{B \cup C^k, C_0^k, C_b^k, W_p^k; 1 \leq p \leq \infty\}$. Dann gilt

$$(a \mapsto \widetilde{a(D)}) \in \mathcal{L}(S_{1,0}^{m,n+1}(\mathbb{R}^n, E_1), \mathcal{L}(\mathfrak{F}^l(\mathbb{R}^n, E_2), \mathfrak{F}^k(\mathbb{R}^n, E_0))) \quad \text{mit}$$

$$\|\widetilde{a(D)}u\|_{\mathfrak{F}^k(\mathbb{R}^n, E_0)} \leq c(k, l, n, m, \psi) \|a\|_{S_{1,0}^{m,n+1}(\mathbb{R}^n, E_1)} \|u\|_{\mathfrak{F}^l(\mathbb{R}^n, E_2)} \quad \text{für alle } u \in \mathfrak{F}^l(\mathbb{R}^n, E_2).$$

Beweis. Zunächst zeigen wir den Fall $\mathfrak{F}^k = W_p^k$ für $k \in \mathbb{N}_0$, $1 \leq p \leq \infty$. Da $l > m + k$, erhält man nach (1.21) und (1.19):

$$B_{p,1}^k(\mathbb{R}^n, E) \hookrightarrow W_p^k(\mathbb{R}^n, E) \quad \text{und} \quad W_p^l(\mathbb{R}^n, E) \hookrightarrow B_{p,\infty}^l(\mathbb{R}^n, E) \hookrightarrow B_{p,1}^{k+m}(\mathbb{R}^n, E). \quad (2.13)$$

Dies hat zur Folge, dass $\widetilde{a(D)}$ auf $W_p^l(\mathbb{R}^n, E_2)$ wohldefiniert ist und für alle $u \in W_p^l(\mathbb{R}^n, E_2)$ gilt

$$\begin{aligned} \left\| \widetilde{a(D)}u \right\|_{W_p^k(\mathbb{R}^n, E_0)} &= \left\| \widetilde{a(D)}|_{B_{p,1}^{k+m}(\mathbb{R}^n, E_2)} u \right\|_{W_p^k(\mathbb{R}^n, E_0)} \\ &\stackrel{(2.13)}{\leq} c_1 \left\| \widetilde{a(D)}|_{B_{p,1}^{k+m}(\mathbb{R}^n, E_2)} u \right\|_{B_{p,1}^k(\mathbb{R}^n, E_0)} \\ &\stackrel{\text{Kor. 2.3.1}}{\leq} \tilde{c}(k, l, n, m, \psi) \|a\|_{S_{1,0}^{m,n+1}(\mathbb{R}^n, E_1)} \|u\|_{B_{p,1}^{k+m}(\mathbb{R}^n, E_2)} \\ &\stackrel{(2.13)}{\leq} c(k, l, n, m, \psi) \|a\|_{S_{1,0}^{m,n+1}(\mathbb{R}^n, E_1)} \|u\|_{W_p^l(\mathbb{R}^n, E_2)}. \end{aligned}$$

Somit ist $\widetilde{a(D)} \in \mathcal{L}(W_p^l(\mathbb{R}^n, E_2), W_p^k(\mathbb{R}^n, E_0))$ und

$$\left\| \widetilde{a(D)}u \right\|_{W_p^k(\mathbb{R}^n, E_0)} \leq c(k, l, n, m, \psi) \|a\|_{S_{1,0}^{m,n+1}(\mathbb{R}^n, E_1)} \|u\|_{W_p^l(\mathbb{R}^n, E_2)} \quad (2.14)$$

für alle $u \in W_p^l(\mathbb{R}^n, E_2)$.

Nun sei $\mathfrak{F}^k = B \cup C^k$, C_0^k , oder C_b^k für $k \in \mathbb{N}_0$. Dann erhält man für alle $u \in \mathfrak{F}^l(\mathbb{R}^n, E_2)$ nach der Definition der Normen $\|\cdot\|_{\mathfrak{F}^k(\mathbb{R}^n, E)}$ und $\|\cdot\|_{W_\infty^k(\mathbb{R}^n, E)}$, (2.14) und nach $\mathfrak{F}^l(\mathbb{R}^n, E) \hookrightarrow W_\infty^l(\mathbb{R}^n, E)$, dass

$$\begin{aligned} \left\| \widetilde{a(D)}u \right\|_{\mathfrak{F}^k(\mathbb{R}^n, E_0)} &= \left\| \widetilde{a(D)}|_{W_\infty^l(\mathbb{R}^n, E_2)} u \right\|_{\mathfrak{F}^k(\mathbb{R}^n, E_0)} \\ &= \left\| \widetilde{a(D)}|_{W_\infty^l(\mathbb{R}^n, E_2)} u \right\|_{W_\infty^k(\mathbb{R}^n, E_0)} \\ &\stackrel{(2.14)}{\leq} c(k, l, n, m, \psi) \|a\|_{S_{1,0}^{m,n+1}(\mathbb{R}^n, E_1)} \|u\|_{W_\infty^l(\mathbb{R}^n, E_2)} \\ &= c(k, l, n, m, \psi) \|a\|_{S_{1,0}^{m,n+1}(\mathbb{R}^n, E_1)} \|u\|_{\mathfrak{F}^l(\mathbb{R}^n, E_2)}. \end{aligned}$$

Somit ist das Korollar bewiesen. □

Erzeugung der analytischen Halbgruppen von parabolischen Pseudodifferentialoperatoren auf Sobolevräumen

Untersucht wird in diesem Kapitel die Erzeugung der analytischen Halbgruppen von parabolischen Pseudodifferentialoperatoren auf vektorwertigen Sobolevräumen $W_p^k(\mathbb{R}^n, E_0)$, $1 \leq p \leq \infty$. Dabei ist E_0 ein beliebiger Banachraum.

Falls E_0, E_1 Banachräume mit $E_1 \hookrightarrow E_0$ sind und $a \in S_{1,0}^{m,\rho_n}(\mathbb{R}^n, \mathcal{L}(E_1, E_0))$, wissen wir bereits nach dem Korollar 2.3.1, dass

$$\left(a \mapsto \widetilde{a(D)} \right) \in \mathcal{L} \left(S_{1,0}^{m,\rho_n}(\mathbb{R}^n, \mathcal{L}(E_1, E_0)), \mathcal{L}(\mathcal{B}_{p,q}^{m+s}(\mathbb{R}^n, E_1), \mathcal{B}_{p,q}^s(\mathbb{R}^n, E_0)) \right) \quad (3.1)$$

mit

$$\left\| \widetilde{a(D)}u \right\|_{\mathcal{B}_{p,q}^s(\mathbb{R}^n, E_0)} \leq c \|a\|_{S_{1,0}^{m,n+1}(\mathbb{R}^n, \mathcal{L}(E_1, E_0))} \|u\|_{\mathcal{B}_{p,q}^{s+m}(\mathbb{R}^n, E_1)} \quad \forall u \in \mathcal{B}_{p,q}^{s+m}(\mathbb{R}^n, E_1) \quad (3.2)$$

für jedes $m, s \in \mathbb{R}$, $1 \leq p, q \leq \infty$ und $\mathcal{B} \in \{B, \mathring{B}, b\}$. Falls a ein parabolisches Symbol in $S_{1,0}^{m,\rho_n}(\mathbb{R}^n, \mathcal{L}(E_1, E_0))$ ist, werden wir hier zeigen:

- a) Der Operator $A_1 := -\widetilde{a(D)} \Big|_{\mathcal{B}_{p,q}^{s+m}(\mathbb{R}^n, E_1)}$ erzeugt eine analytische Halbgruppe auf $\mathcal{B}_{p,q}^s(\mathbb{R}^n, E_0)$.
- b) Die $\mathfrak{F}^k(\mathbb{R}^n, E_0)$ –Realisierung des Operators $A_2 := -\widetilde{a(D)} \Big|_{\mathcal{B}_{p,\infty}^{k+m}(\mathbb{R}^n, E_1)}$ mit $m \in \mathbb{R}^+$, $k \in \mathbb{N}_0$ erzeugt eine C^∞ –Halbgruppe des singulären Typs α auf dem Raum $\mathfrak{F}^k(\mathbb{R}^n, E_0)$.

Dabei sind $\alpha \in (0, 1)$ beliebig, $(\mathcal{B}, \mathfrak{F}_p^k) = (\mathring{B}, W_p^k)$ für $1 \leq p < \infty$ und $(\mathcal{B}, \mathfrak{F}_\infty^k)$ ist ein Paar in

$$\left\{ (B, W_\infty^k), (b, B \cup C^k), (\mathring{B}, C_0^k), (B, C_b^k) \right\}.$$

Zusätzlich zeigen wir, dass

- c) die $\mathfrak{F}^k(\mathbb{R}^n, E_0)$ –Realisierung des Operators A_2 eine analytische Halbgruppe auf dem Raum $\mathfrak{F}^k(\mathbb{R}^n, E_0)$ erzeugt, das heißt, dass die Aussage b) auch für $\alpha = 1$ gilt, wenn das entsprechende Symbol einen m –homogenen Hauptteil hat und $E_1 = E_0$ (siehe Definition 3.3.1). Genauer wird hier $S^{m, \rho_n}(\mathbb{R}^n, \mathcal{L}(E_0))$, eine bestimmte Klasse der banachraumwertigen Symbole mit beschränkter Regularität, betrachtet und gezeigt, dass die $\mathfrak{F}^k(\mathbb{R}^n, E_0)$ –Realisierung von $A_2 = -a(\widetilde{D})|_{\mathcal{B}_{p, \infty}^{k+m}(\mathbb{R}^n, E_0)}$ eine analytische Halbgruppe auf

$$\mathcal{B}_{p, q}^s(\mathbb{R}^n, E_0), W_p^k(\mathbb{R}^n, E_0), BUC^k(\mathbb{R}^n, E_0), C_0^k(\mathbb{R}^n, E_0) \text{ und auf } C_b^k(\mathbb{R}^n, E_0) \quad (3.3)$$

für alle $1 \leq p, q \leq \infty, s \in \mathbb{R}$ und $k \in \mathbb{N}_0$ erzeugt, wenn das entsprechende Symbol a parabolisch in $S^{m, \rho_n}(\mathbb{R}^n, \mathcal{L}(E_1, E_0))$ ist. Außerdem erzeugt dieser Operator auch eine analytische Halbgruppe auf $W_p^s(\mathbb{R}^n, E_0) \doteq B_{p, p}^s(\mathbb{R}^n, E_0)$ für alle $s \in \mathbb{R}^+ \setminus \mathbb{N}$ und $1 \leq p < \infty$.

Im Folgenden zeigen wir, wie die Hauptresultate diesen Kapitels erreicht wurden: Im ersten Abschnitt findet man die Definition parabolischer Symbole in $S_{1,0}^{m, \rho}(\mathbb{R}^n, \mathcal{L}(E_1, E_0))$ und einige wichtige Eigenschaften der entsprechenden Familie der Pseudodifferentialoperatoren, wie zum Beispiel deren Erzeugung analytischer Halbgruppen auf $\mathcal{B}_{p, q}^s(\mathbb{R}^n, E_0)$. Im zweiten Abschnitt wird die Behauptung b) gezeigt und im dritten zeigen wir unsere Hauptsätze, formal (3.3). Genau genommen handelt es sich um den Satz 3.3.3 und das Korollar 3.3.1. Dazu werden zuerst im Unterabschnitt 3.3.1 die Symbolklasse $S^{m, \rho}(\mathbb{R}^n, \mathcal{L}(E_1, E_0))$ und der Begriff vom parabolischen Symbol in $S^{m, \rho}(\mathbb{R}^n, \mathcal{L}(E_1, E_0))$ definiert und dann werden ihre Eigenschaften untersucht.

Im ganzen Kapitel bezeichnen $E_i, i = 0, 1$ Banachräume mit $E_1 \hookrightarrow E_0$.

3.1 Analytische Halbgruppen von Pseudodifferentialoperatoren auf Besovräumen

Für alle $s \in \mathbb{R}, p, q \in [1, \infty], m \in \mathbb{R}^+, \mathcal{B} \in \{B, \mathring{B}, b\}$ und $a \in S_{1,0}^{m, \rho_n}(\mathbb{R}^n, \mathcal{L}(E_1, E_0))$ bezeichne $A := a(\widetilde{D})|_{\mathcal{B}_{p, q}^{s+m}(\mathbb{R}^n, E_1)}$ mit dem Definitionsbereich $D(A) = \mathcal{B}_{p, q}^{s+m}(\mathbb{R}^n, E_1)$ und $E := \mathcal{B}_{p, q}^s(\mathbb{R}^n, E_0)$. Da $E_1 \hookrightarrow E_0$ und $m > 0$ sind, gilt dann

$$D(A) \hookrightarrow \mathcal{B}_{p, q}^{s+m}(\mathbb{R}^n, E_0) \hookrightarrow \mathcal{B}_{p, q}^s(\mathbb{R}^n, E_0) = E.$$

Somit erhält man nach (3.1), dass

$$A : D(A) \subset E \rightarrow E \text{ ein stetiger Operator ist.} \quad (3.4)$$

Wir werden diese Notationen im Satz 3.1.2 und Korollar 3.1.2 benutzen, um zu zeigen, dass der Operator $-A$ in (3.4) sektoriell ist und deswegen erzeugt er eine analytische Halbgruppe auf $\mathcal{B}_{p,q}^s(\mathbb{R}^n, E_0)$, wenn das Symbol a parabolisch ist.

Im Folgenden benutzen wir die Bezeichnung

$$\mathcal{L}_{is}(E_1, E_0) := \{T \in \mathcal{L}(E_1, E_0) : T \text{ bijektiv und } T^{-1} \in \mathcal{L}(E_0, E_1)\}.$$

Satz 3.1.1 Seien $M > 0$, $r \geq 0$, $\theta \in [0, 2\pi]$ Konstanten, $St_\theta := \{\lambda = \mu e^{i\theta} : \mu \geq r\}$ ein Strahl in $\mathbb{C}$ und

$$\mathcal{A}_{\theta, M} := \{A \in \mathcal{L}(E_1, E_0) : (\lambda I - A) \in \mathcal{L}_{is}(E_1, E_0) \text{ und} \\ \sum_{j=0}^1 (1 + |\lambda|)^{1-j} \|R(\lambda, A)\|_{\mathcal{L}(E_0, E_j)} \leq M \text{ für alle } \lambda \in St_\theta\}.$$

Dann existieren Konstanten $\epsilon_\theta := \epsilon(\theta, M) > 0$, $r_\theta > 0$ und $\hat{M} := \hat{M}(M) > 0$, so dass

$$\sum_{\theta, r_\theta}^{\epsilon_\theta} := \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| \geq r_\theta \text{ und } \arg(\lambda) \in [\theta - \epsilon_\theta, \theta + \epsilon_\theta]\} \subset \rho(A) \quad \forall A \in \mathcal{A}_{\theta, M} \text{ und} \\ \sum_{j=0}^1 (1 + |\lambda|)^{1-j} \|R(\lambda, A)\|_{\mathcal{L}(E_0, E_j)} \leq \hat{M} \quad \text{für alle } \lambda \in \sum_{\theta, r_\theta}^{\epsilon_\theta} \text{ und } A \in \mathcal{A}_{\theta, M}.$$

Beweis. Zuerst zeigen wir zwei Behauptungen.

Behauptung I: Sei $\theta = 0$ in den Voraussetzungen. Dann existieren Konstanten $\epsilon_0 > 0$, $r_0 > 0$ und $\tilde{M} := \tilde{M}(M) > 0$, so dass $\sum_{0, r_0}^{\epsilon_0} \subset \rho(A)$ für alle $A \in \mathcal{A}_{0, M}$ und

$$\|R(\lambda, A)\|_{\mathcal{L}(E_0)} \leq \frac{\tilde{M}}{1 + |\lambda|} \quad \forall \lambda \in \sum_{0, r_0}^{\epsilon_0} \text{ und } A \in \mathcal{A}_{0, M} \text{ gelten.}$$

Beweis der Behauptung I: Wähle $\epsilon_0 := \arcsin(\frac{1}{2(M+1)})$ und ein $r_0 > r$. Nun definiere

$$\sum_{\epsilon_0, r_0}^* := \{\tilde{\lambda} \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} \tilde{\lambda} \geq r_0 \text{ und } |\arg(\tilde{\lambda})| \leq \epsilon_0\}$$

und

$$s := \frac{|\lambda|^2}{\operatorname{Re} \lambda} \quad \text{für } \lambda \in \sum_{\epsilon_0, r_0}^*. \quad (3.5)$$

Dann folgt aus $|\lambda| = |\operatorname{Re} \lambda - i \operatorname{Im} \lambda|$ und aus $\lambda - s = \frac{\operatorname{Im} \lambda [i \operatorname{Re} \lambda - \operatorname{Im} \lambda]}{\operatorname{Re} \lambda}$ für alle $\lambda \in \sum_{\epsilon_0, r_0}^*$, dass

$$\frac{1}{s} |\lambda - s| = \frac{\operatorname{Re} \lambda}{|\lambda|^2} \frac{|\operatorname{Im} \lambda| |i \operatorname{Re} \lambda - \operatorname{Im} \lambda|}{\operatorname{Re} \lambda} = \left| \frac{\operatorname{Im} \lambda}{|\lambda|} \right| = |\sin(\arg(\lambda))| \leq \frac{1}{2(M+1)}$$

(beachte, dass $\epsilon_0 \in (0, \frac{\pi}{6})$ und $f(t) = \sin(t)$ auf $(-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6})$ monoton wachsend ist). Also

$$|\lambda - s| \leq \frac{1 + s}{2(M+1)} \quad \text{für alle } \lambda \in \sum_{\epsilon_0, r_0}^*. \quad (3.6)$$

Nach den Voraussetzungen gilt $\{s \in \mathbb{R} : s \geq r_0\} \subset St_0 \subset \rho(A)$ für alle $A \in \mathcal{A}_{\theta,M}$. Dann erhält man für alle $\lambda \in \sum_{\epsilon_0, r_0}^*$ und s wie in (3.5), dass

$$\left\| (\lambda - s)(sI - A)^{-1} \right\|_{\mathcal{L}(E_0)} \leq |\lambda - s| \frac{M}{1+s} \leq \frac{1}{2} \quad \text{für alle } A \in \mathcal{A}_{0,M}.$$

Dann gilt nach dem Satz über die Neumannsche Reihe $B := \left(I + (\lambda - s)(sI - A)^{-1} \right)^{-1} \in \mathcal{L}(E_0)$ und $\|B\|_{\mathcal{L}(E_0)} \leq 2$. Auf der anderen Seite gilt, dass

$$\lambda I - A = (sI - A) \left[I + (\lambda - s)(sI - A)^{-1} \right] = (sI - A) B^{-1}.$$

Daraus folgt, dass $(\lambda I - A)^{-1} \in \mathcal{L}(E_0)$ und

$$\begin{aligned} \|R(\lambda, A)\|_{\mathcal{L}(E_0)} &\leq \|B\|_{\mathcal{L}(E_0)} \|R(s, A)\|_{\mathcal{L}(E_0)} \\ &\leq \frac{2M}{1+s} \\ &= \frac{2M}{1+|\lambda|} \frac{|\lambda - s + s| + 1}{1+s} \\ &\leq \frac{2M}{1+|\lambda|} \left[\frac{|\lambda - s|}{1+s} + 1 \right] \\ &\leq \frac{\widetilde{M}}{1+|\lambda|} \quad \text{für alle } \lambda \in \sum_{\epsilon_0, r_0}^* \text{ und } A \in \mathcal{A}_{0,M} \end{aligned}$$

mit $\widetilde{M} := 1 + 2M$. Dann lässt sich auf $\sum_{\epsilon_0, r_0}^*$ ein Sektor der Form $\sum_{0, r_0}^{\epsilon_0}$ konstruieren und somit ist die Behauptung I bewiesen.

Behauptung II: Die Behauptung I gilt für jedes $\theta \in [0, 2\pi]$.

Beweis der Behauptung II: Seien $\theta \in (0, 2\pi]$ und $\mathcal{O} : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ eine durch $\mathcal{O}(z) := e^{-i\theta}z$, $z \in \mathbb{C}$, definierte Rotationsfunktion. Es ist klar, dass $\mathcal{O}$ bijektiv ist und $\mathcal{O}^{-1}(z) = e^{i\theta}z$, $z \in \mathbb{C}$. Nach den Voraussetzungen ist $St_\theta \subset \rho(A)$ für alle $A \in \mathcal{A}_{\theta,M}$ und

$$\|R(\lambda, A)\|_{\mathcal{L}(E_0)} \leq \frac{M}{1+|\lambda|} \quad \text{für alle } \lambda \in St_\theta \text{ und } A \in \mathcal{A}_{\theta,M}.$$

Somit erhält man $e^{-i\theta}A \in \mathcal{A}_{0,M}$ für alle $A \in \mathcal{A}_{\theta,M}$, denn $R(\mu, e^{-i\theta}A) = e^{i\theta}R(\lambda, A)$ für alle $\lambda = \mu e^{i\theta} \in St_\theta \subset \rho(A)$, und

$$\sum_{j=0}^1 (1+|\mu|)^{1-j} \left\| R(\mu, e^{-i\theta}A) \right\|_{\mathcal{L}(E_0, E_j)} = \sum_{j=0}^1 (1+|\lambda|)^{1-j} \|R(\lambda, A)\|_{\mathcal{L}(E_0, E_j)} \leq M$$

für alle $\lambda \in St_\theta$ und $A \in \mathcal{A}_{\theta,M}$.

Dann gilt nach der Behauptung I, dass

$$\left\| R(w, e^{-i\theta} A) \right\|_{\mathcal{L}(E_0)} \leq \frac{\tilde{M}}{1 + |w|} \quad \text{für alle } w \in \sum_{0, r_0}^{\epsilon_0} \text{ und } A \in \mathcal{A}_{\theta, M}.$$

Nun sei $\sum_{\theta, r_\theta}^{\epsilon_\theta} := \mathcal{O}^{-1} \left(\sum_{0, r_0}^{\epsilon_0} \right)$. Dann gilt für alle $\lambda \in \sum_{\theta, r_\theta}^{\epsilon_\theta}$ (also $e^{-i\theta} \lambda \in \sum_{0, r_0}^{\epsilon_0}$) und alle $A \in \mathcal{A}_{\theta, M}$, dass $R(\lambda, A) = e^{-i\theta} R(e^{-i\theta} \lambda, e^{-i\theta} A) \in \mathcal{L}(E_0)$. Daraus folgt $\sum_{\theta, r_\theta}^{\epsilon_\theta} \subset \rho(A)$ und

$$\|R(\lambda, A)\|_{\mathcal{L}(E_0)} \leq \frac{\tilde{M}}{1 + |\lambda|} \quad \text{für alle } \lambda \in \sum_{\theta, r_\theta}^{\epsilon_\theta}, \quad A \in \mathcal{A}_{\theta, M}.$$

Folglich ist die Behauptung II bewiesen.

Um den Beweis dieses Satzes zu beenden, genügt es zu zeigen, dass

$$\|R(\lambda, A)\|_{\mathcal{L}(E_0, E_1)} \leq \hat{M} \quad \text{für alle } \lambda \in \sum_{\theta, r_\theta}^{\epsilon_\theta} \text{ und } A \in \mathcal{A}_{\theta, M} \text{ gilt.} \quad (3.7)$$

Dabei ist $\hat{M} := \max \left\{ \tilde{M}, M \left(1 + 2\tilde{M} \right) \right\}$. Dazu seien $A \in \mathcal{A}_{\theta, M}$, $\lambda \in \sum_{\theta, r_\theta}^{\epsilon_\theta}$ und $\lambda_\theta := r_\theta e^{i\theta} \in St_\theta$. Aus $|\lambda_\theta| = r_\theta \leq |\lambda|$ und aus

$$x = (\lambda_\theta - A)^{-1} [(\lambda - A)x + (\lambda_\theta - \lambda)x] \quad \text{für alle } x \in E_1$$

erhält man:

$$\begin{aligned} \|x\|_{E_1} &\leq \|R(\lambda_\theta, A)\|_{\mathcal{L}(E_0, E_1)} [\|(\lambda - A)x\|_{E_0} + |\lambda_\theta - \lambda| \|x\|_{E_0}] \\ &\leq M [\|(\lambda - A)x\|_{E_0} + 2|\lambda| \|x\|_{E_0}] \quad (\text{nach Definition von } \mathcal{A}_{\theta, M}). \end{aligned} \quad (3.8)$$

Darüber hinaus erhält man nach Behauptung II, dass

$$\|R(\lambda, A)y\|_{E_0} \leq \frac{\tilde{M}}{1 + |\lambda|} \|y\|_{E_0} \quad \text{für alle } y \in E_0, A \in \mathcal{A}_{\theta, M} \text{ und } \lambda \in \sum_{\theta, r_\theta}^{\epsilon_\theta}$$

und somit folgt für alle $x \in E_1$ (also $(\lambda - A)x \in E_0$):

$$\|x\|_{E_0} = \|R(\lambda, A)[(\lambda - A)x]\|_{E_0} \leq \frac{\tilde{M}}{1 + |\lambda|} \|(\lambda - A)x\|_{E_0} \quad \text{für alle } A \in \mathcal{A}_{\theta, M}, \lambda \in \sum_{\theta, r_\theta}^{\epsilon_\theta}.$$

Daher und aufgrund von (3.8) bekommt man

$$\begin{aligned} \|x\|_{E_1} &\leq M \left[\|(\lambda - A)x\|_{E_0} + 2\tilde{M} \frac{|\lambda|}{1 + |\lambda|} \|(\lambda - A)x\|_{E_0} \right] \\ &\leq M \left(1 + 2\tilde{M} \right) \|(\lambda - A)x\|_{E_0} \end{aligned}$$

für alle $x \in E_1, A \in \mathcal{A}_{\theta, M}$ und $\lambda \in \sum_{\theta, r_\theta}^{\epsilon_\theta}$. Daraus folgt zusammen mit $(\lambda - A) \in \mathcal{L}_{is}(E_1, E_0)$ die Aussage (3.7). $\square$

Definition 3.1.1 (Parabolische Symbole) Seien $m \in \mathbb{R}^+$, $\mu \geq 0$, $\rho \in \mathbb{N}_0$ und $a \in S_{1,0}^{m,\rho}(\mathbb{R}^n, \mathcal{L}(E_1, E_0))$. Dann heißt das Symbol a parabolisch in $S_{1,0}^{m,\rho}(\mathbb{R}^n, \mathcal{L}(E_1, E_0))$ mit Konstanten ω und κ , wenn Konstanten $\omega \geq 0$ und $\kappa \geq 1$ existieren, so dass

$$\left[a(\xi) + \mu^m e^{i\theta} I \right]^{-1} \in \mathcal{L}(E_0, E_1) \quad \text{und} \quad \left\| \left[a(\xi) + \mu^m e^{i\theta} I \right]^{-1} \right\|_{\mathcal{L}(E_0, E_1)} \leq \kappa \langle \xi, \mu \rangle^{-m} \quad (3.9)$$

für alle $|\xi, \mu| \geq \omega$ und $\theta \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. Dabei sind $\langle \xi, \mu \rangle := \sqrt{1 + |\xi|^2 + \mu^2}$ und $|\xi, \mu| := \sqrt{|\xi|^2 + \mu^2}$.

Im folgenden Satz verwenden wir für $R \geq 0$ und $0 < \theta \leq \pi$ die Notation

$$\sum_{\theta, R} := \{ \lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| \geq R \text{ und } |\arg(\lambda)| \leq \theta \}$$

und die Ungleichung

$$1 + t^m \leq c(1 + t)^m \quad \text{für alle } t \geq 0, \quad (3.10)$$

wobei $m \geq 0$ und $c := c(m) > 0$ eine geeignete Konstante ist.

Satz 3.1.2 Seien $s \in \mathbb{R}$, $p, q \in [1, \infty]$, $m \in \mathbb{R}^+$, ρ_n wie in (1.1), $\mathcal{A} \subset S_{1,0}^{m,\rho_n}(\mathbb{R}^n, \mathcal{L}(E_1, E_0))$ beschränkt. Außerdem nehmen wir an, dass alle $a \in \mathcal{A}$ parabolisch in $S_{1,0}^{m,\rho_n}(\mathbb{R}^n, \mathcal{L}(E_1, E_0))$ mit denselben Konstanten $\omega > 0$ und $\kappa \geq 1$ sind, und $A := \widetilde{a(D)} \Big|_{B_{p,q}^{s+m}(\mathbb{R}^n, E_1)}$, $a \in \mathcal{A}$. Dann $\sum_{\frac{\pi}{2}, R} \subset \rho(-A)$ für $R = \omega^m$, und

$$(1 + |\lambda|)^{1-j} (\lambda + a)^{-1} \in S_{1,0}^{-jm, \rho_n}(\mathbb{R}^n, \mathcal{L}(E_0, E_j)), \quad j = 0, 1, \quad (3.11)$$

$$(1 + |\lambda|)^{1-j} \left\| (\lambda + a)^{-1} \right\|_{S_{1,0}^{-jm, \rho_n}(\mathbb{R}^n, \mathcal{L}(E_0, E_j))} \leq \hat{c}(\kappa), \quad j = 0, 1, \quad (3.12)$$

$$(1 + |\lambda|)^{1-j} \left\| (\lambda I + A)^{-1} \right\|_{\mathcal{L}(B_{p,q}^s(\mathbb{R}^n, E_0), B_{p,q}^{s+jm}(\mathbb{R}^n, E_j))} \leq c(\kappa), \quad j = 0, 1 \quad (3.13)$$

für alle $\lambda \in \sum_{\frac{\pi}{2}, R}$ und alle $a \in \mathcal{A}$, wobei die Konstanten $\hat{c}(\kappa)$, $c(\kappa)$ unabhängig von λ und a sind. Außerdem gilt

$$(\lambda I + A)^{-1} = \widetilde{b_\lambda(D)} \Big|_{B_{p,q}^s(\mathbb{R}^n, E_0)} \quad \lambda \in \sum_{\frac{\pi}{2}, R} \text{ und } a \in \mathcal{A}, \quad (3.14)$$

wobei $b_\lambda := (\lambda + a)^{-1}$.

Beweis. Sei $a \in \mathcal{A}$ parabolisch mit Konstanten $\omega \geq 0$ und $\kappa \geq 1$ und sei $R := \omega^m$. Dann gilt für alle $\lambda \in \sum_{\frac{\pi}{2}, R}$ (also $|\lambda| \geq R$, $\lambda = \left(|\lambda|^{\frac{1}{m}} \right)^m e^{i\theta}$ mit $\theta = \arg(\lambda) \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$) und $\xi \in \mathbb{R}^n$, dass $|\xi, |\lambda|^{\frac{1}{m}}| \geq \omega$, und daraus folgt zusammen mit (3.9) für alle $\xi \in \mathbb{R}^n$, $\lambda \in \sum_{\frac{\pi}{2}, R}$ und $\mu := |\lambda|^{\frac{1}{m}}$, dass $[\lambda I + a(\xi)]^{-1} \in \mathcal{L}(E_0, E_1)$ und

$$\langle \xi \rangle^m \left\| [\lambda I + a(\xi)]^{-1} \right\|_{\mathcal{L}(E_0, E_1)} \leq \langle \xi, \mu \rangle^m \left\| [a(\xi) + \mu^m e^{i\theta} I]^{-1} \right\|_{\mathcal{L}(E_0, E_1)} \leq \kappa$$

und

$$\begin{aligned}
(1 + |\lambda|) \left\| [a(\xi) + \lambda]^{-1} \right\|_{\mathcal{L}(E_0)} &= (1 + \mu^m) \left\| [a(\xi) + \mu^m e^{i\theta} I]^{-1} \right\|_{\mathcal{L}(E_0)} \\
&\stackrel{(3.10)}{\leq} c (1 + \mu^2)^{\frac{m}{2}} \left\| [a(\xi) + \mu^m e^{i\theta} I]^{-1} \right\|_{\mathcal{L}(E_0)} \\
&\leq c \langle \xi, \mu \rangle^m \left\| [a(\xi) + \mu^m e^{i\theta} I]^{-1} \right\|_{\mathcal{L}(E_0, E_1)} \leq c\kappa.
\end{aligned}$$

Also

$$\langle \xi \rangle^m \left\| [a(\xi) + \lambda I]^{-1} \right\|_{\mathcal{L}(E_0, E_1)} \leq \kappa, \quad (3.15)$$

$$(1 + |\lambda|) \left\| [a(\xi) + \lambda]^{-1} \right\|_{\mathcal{L}(E_0)} \leq c\kappa \quad (3.16)$$

für alle $\xi \in \mathbb{R}^n$, $\lambda \in \sum_{\frac{\pi}{2}, R}$ und $a \in \mathcal{A}$.

Weil die Abbildung $T \mapsto T^{-1} : \mathcal{L}_{is}(E_1, E_0) \longrightarrow \mathcal{L}_{is}(E_0, E_1)$ C^∞ ist, gilt $(\lambda + a)^{-1} \in C^{\rho_n}(\mathbb{R}^n, \mathcal{L}(E_0, E_1))$ für alle $\lambda \in \sum_{\frac{\pi}{2}, R}$ mit

$$\partial_j (\lambda + a)^{-1} = -(\lambda + a)^{-1} (\partial_j a) (\lambda + a)^{-1}.$$

Daher zeigt man durch Induktion, dass für jedes $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ mit $|\alpha| \leq \rho_n$ die partielle Ableitung $\partial_\xi^\alpha (\lambda + a)^{-1}$ eine Summe von Termen der Form

$$\pm (\lambda + a)^{-1} \left(\partial_\xi^{\alpha_1} a \right) (\lambda + a)^{-1} \dots \left(\partial_\xi^{\alpha_k} a \right) (\lambda + a)^{-1} \quad (3.17)$$

mit $\alpha_1 + \dots + \alpha_k = \alpha$ ist.

Aus $a \in \mathcal{A} \subset S_{1,0}^{m, \rho_n}(\mathbb{R}^n, \mathcal{L}(E_1, E_0))$ und (3.15) folgt für alle $|\beta| \leq \rho_n$, $\xi \in \mathbb{R}^n$ und $\lambda \in \sum_{\frac{\pi}{2}, R}$, dass

$$\begin{aligned}
\langle \xi \rangle^{|\beta|} \left\| \left(\partial_\xi^\beta a(\xi) \right) (\lambda + a(\xi))^{-1} \right\|_{\mathcal{L}(E_0)} &\leq \langle \xi \rangle^m \langle \xi \rangle^{|\beta| - m} \left\| \partial_\xi^\beta a(\xi) \right\|_{\mathcal{L}(E_1, E_0)} \left\| (\lambda + a(\xi))^{-1} \right\|_{\mathcal{L}(E_0, E_1)} \\
&\leq \kappa \|a\|_{S_{1,0}^{m, \rho_n}} \leq c(\kappa) \quad \text{für alle } a \in \mathcal{A},
\end{aligned}$$

da $\mathcal{A}$ beschränkt ist. Aufgrund dessen und zusammen mit (3.15), (3.17) erhält man

$$\begin{aligned}
\langle \xi \rangle^{|\alpha| + m} \left\| \partial_\xi^\alpha (\lambda + a(\xi))^{-1} \right\|_{\mathcal{L}(E_0, E_1)} &= \langle \xi \rangle^m \langle \xi \rangle^{|\alpha|} \left\| \partial_\xi^\alpha (\lambda + a(\xi))^{-1} \right\|_{\mathcal{L}(E_0, E_1)} \\
&\leq \tilde{c}(\kappa) \langle \xi \rangle^m \left\| (\lambda + a(\xi))^{-1} \right\|_{\mathcal{L}(E_0, E_1)} \\
&\leq \hat{c}(\kappa)
\end{aligned} \quad (3.18)$$

für alle $|\alpha| \leq \rho_n$, $\xi \in \mathbb{R}^n$, $\lambda \in \sum_{\frac{\pi}{2}, R}$ und alle $a \in \mathcal{A}$. Daraus folgt

$$(\lambda + a)^{-1} \in S_{1,0}^{-m, \rho_n}(\mathbb{R}^n, \mathcal{L}(E_0, E_1))$$

und

$$\left\| (\lambda + a)^{-1} \right\|_{S_{1,0}^{-m,\rho_n}(\mathbb{R}^n, \mathcal{L}(E_0, E_1))} \leq \hat{c}(\kappa) \quad \text{für alle } \lambda \in \sum_{\frac{\pi}{2}, R} \text{ und } a \in \mathcal{A}. \quad (3.19)$$

Analog zu (3.18) mit $\langle \xi \rangle^{|\alpha|}$ statt $\langle \xi \rangle^{|\alpha|+m}$ erhalten wir nach (3.16), dass

$$\begin{aligned} \langle \xi \rangle^{|\alpha|} \left\| \partial_\xi^\alpha (\lambda + a(\xi))^{-1} \right\|_{\mathcal{L}(E_0)} &\leq \tilde{c}(\kappa) \left\| (\lambda + a(\xi))^{-1} \right\|_{\mathcal{L}(E_0)} \\ &\leq \frac{\tilde{c}(\kappa)}{1 + |\lambda|} \end{aligned}$$

für alle $|\alpha| \leq \rho_n$, $\xi \in \mathbb{R}^n$, $\lambda \in \sum_{\frac{\pi}{2}, R}$ und $a \in \mathcal{A}$. Somit $(1 + |\lambda|) (\lambda + a)^{-1} \in S_{1,0}^{0,\rho_n}(\mathbb{R}^n, \mathcal{L}(E_0))$ und

$$(1 + |\lambda|) \left\| (\lambda + a)^{-1} \right\|_{S_{1,0}^{0,\rho_n}(\mathbb{R}^n, \mathcal{L}(E_0))} \leq \bar{c}(\kappa) \quad \text{für alle } \lambda \in \sum_{\frac{\pi}{2}, R} \text{ und } a \in \mathcal{A}.$$

Also sind (3.11) und (3.12) bewiesen.

Auf der anderen Seite erhalten wir nach (3.1) und (3.2) für $b_\lambda := (\lambda + a)^{-1}$, dass

$$(1 + |\lambda|)^{1-j} \widetilde{b_\lambda(D)} \Big|_{B_{p,q}^s(\mathbb{R}^n, E_0)} \in \mathcal{L}(B_{p,q}^s(\mathbb{R}^n, E_0), B_{p,q}^{s+jm}(\mathbb{R}^n, E_j)), \quad j = 0, 1 \text{ und}$$

$$(1 + |\lambda|)^{1-j} \left\| \widetilde{b_\lambda(D)} \Big|_{B_{p,q}^s(\mathbb{R}^n, E_0)} \right\|_{\mathcal{L}(B_{p,q}^s(\mathbb{R}^n, E_0), B_{p,q}^{s+jm}(\mathbb{R}^n, E_j))} \leq c^*(\kappa), \quad j = 0, 1$$

für alle $\lambda \in \sum_{\frac{\pi}{2}, R}$ und alle $a \in \mathcal{A}$. Wir wissen auch, dass

$$\lambda I + A = \lambda I + \widetilde{a(D)} \Big|_{B_{p,q}^{s+m}(\mathbb{R}^n, E_1)} \in \mathcal{L}(B_{p,q}^{s+m}(\mathbb{R}^n, E_1), B_{p,q}^s(\mathbb{R}^n, E_0))$$

für alle $\lambda \in \sum_{\frac{\pi}{2}, R}$ und alle $a \in \mathcal{A}$. Daher und nach Satz 2.2.2, Lemma 1.1.4 und nach der Stetigkeit der Operatoren $\lambda I + \widetilde{a(D)} \Big|_{B_{p,q}^{s+m}(\mathbb{R}^n, E_1)}$ und $\widetilde{b_\lambda(D)} \Big|_{B_{p,q}^s(\mathbb{R}^n, E_0)}$ erhält man

$$\begin{aligned} (\lambda I + A) \widetilde{b_\lambda(D)} \Big|_{B_{p,q}^s(\mathbb{R}^n, E_0)} &= I_{B_{p,q}^s(\mathbb{R}^n, E_0)}, \\ \widetilde{b_\lambda(D)} \Big|_{B_{p,q}^s(\mathbb{R}^n, E_0)} (\lambda I + A) &= I_{B_{p,q}^{s+m}(\mathbb{R}^n, E_1)} \end{aligned}$$

für alle $\lambda \in \sum_{\frac{\pi}{2}, R}$, $a \in \mathcal{A}$, und somit folgt die Behauptung. $\square$

Bevor wir einige Folgerungen des Satzes 3.1.2 darlegen, werden wir eine elementare Bemerkung zeigen, die in den Beweisen der Korollarien 3.1.1 und 3.3.1 und der Sätze 3.2.1 und 3.3.3 verwendet wird.

Bemerkung 3.1.1 Seien A_i, B_i , $i = 1, 2$, nicht leere Mengen mit $A_1 \subset A_2$, $B_1 \subset B_2$ und $f_i : A_i \rightarrow B_i$, $i = 1, 2$ bijektive Funktionen. Ist $f_1 = f_2|_{A_1}$, so ist $f_1^{-1} = f_2^{-1}|_{B_1}$.

Beweis. a) $f_2^{-1}|_{B_1} \circ f_1 = I_{A_1}$. In der Tat: Sei $a_1 \in A_1$, dann gilt nach den Voraussetzungen, dass $f_2(a_1) = f_1(a_1) \in B_1$ und somit

$$f_2^{-1}|_{B_1} \circ f_1(a_1) = f_2^{-1}(f_2(a_1)) = a_1.$$

b) $f_1 \circ f_2^{-1}|_{B_1} = I_{B_1}$. Um diese Aussage zu beweisen, betrachten wir ein beliebiges $b_1 \in B_1$ und sei $x := f_2^{-1}|_{B_1}(b_1) \in A_2$ (also $b_1 = f_2(x)$). Da $f_1 : A_1 \rightarrow B_1$ surjektiv ist, gibt es ein $a_1 \in A_1$ mit $f_1(a_1) = b_1$. Daraus folgt zusammen mit $f_1 = f_2|_{A_1}$:

$$f_2(a_1) = f_1(a_1) = b_1 = f_2(x).$$

Dann erhält man nach der Injektivität von f_2 , dass $a_1 = x$ und somit $x \in A_1$ und

$$f_1 \circ f_2^{-1}|_{B_1}(b_1) = f_1(x) = f_2(x) = b_1.$$

□

Korollar 3.1.1 Seien die Voraussetzungen von Satz 3.1.2 erfüllt und $\mathcal{B} \in \{b, \mathring{B}\}$. Dann existieren positive Konstanten M und R , so dass $\sum_{\frac{\pi}{2}, R} \subset \rho \left(-\widetilde{a(D)}|_{\mathcal{B}_{p,q}^{s+m}(\mathbb{R}^n, E_1)} \right)$ und

$$(1 + |\lambda|)^{1-j} \left\| \left(\lambda I + \widetilde{a(D)}|_{\mathcal{B}_{p,q}^{s+m}(\mathbb{R}^n, E_1)} \right)^{-1} \right\|_{\mathcal{L}(\mathcal{B}_{p,q}^s(\mathbb{R}^n, E_0), \mathcal{B}_{p,q}^{s+jm}(\mathbb{R}^n, E_j))} \leq M, \quad j = 0, 1 \quad (3.20)$$

für alle $\lambda \in \sum_{\frac{\pi}{2}, R}$ und alle $a \in \mathcal{A}$.

Beweis. Sei $R > 0$ wie im Satz 3.1.2. Folglich ist $\sum_{\frac{\pi}{2}, R} \subset \rho \left(-\widetilde{a(D)}|_{\mathcal{B}_{p,q}^{s+m}(\mathbb{R}^n, E_1)} \right)$ und

$$(1 + |\lambda|)^{1-j} \underbrace{(\lambda + a)^{-1}}_{=b_\lambda} \in S_{1,0}^{-jm, \rho_n}(\mathbb{R}^n, \mathcal{L}(E_0, E_j)) \quad (j = 0, 1) \quad (3.21)$$

für alle $a \in \mathcal{A}$ und $\lambda \in \sum_{\frac{\pi}{2}, R}$ und daher erhält man zusammen mit Korollar 2.3.1 und $\mathcal{B}_{p,q}^s \hookrightarrow B_{p,q}^s$:

$$\begin{aligned} \left[\left(\lambda + \widetilde{a(D)}|_{\mathcal{B}_{p,q}^{s+m}(\mathbb{R}^n, E_1)} \right)^{-1} |_{\mathcal{B}_{p,q}^s(\mathbb{R}^n, E_0)} \right] |_{\mathcal{B}_{p,q}^s(\mathbb{R}^n, E_0)} &= \widetilde{b_\lambda(D)}|_{\mathcal{B}_{p,q}^s(\mathbb{R}^n, E_0)} \\ &\in \mathcal{L}(\mathcal{B}_{p,q}^s(\mathbb{R}^n, E_0), \mathcal{B}_{p,q}^{s+m}(\mathbb{R}^n, E_1)), \end{aligned}$$

also

$$\left(\lambda + \widetilde{a(D)}|_{\mathcal{B}_{p,q}^{s+m}(\mathbb{R}^n, E_1)} \right)^{-1} (\mathcal{B}_{p,q}^s(\mathbb{R}^n, E_0)) \subset \mathcal{B}_{p,q}^{s+m}(\mathbb{R}^n, E_1)$$

und somit

$$\mathcal{B}_{p,q}^s(\mathbb{R}^n, E_0) \subset \left(\lambda + \widetilde{a(D)} \Big|_{\mathcal{B}_{p,q}^{s+m}(\mathbb{R}^n, E_1)} \right) (\mathcal{B}_{p,q}^{s+m}(\mathbb{R}^n, E_1)) \quad \forall \lambda \in \sum_{\frac{\pi}{2}, R} \text{ und } a \in \mathcal{A}. \quad (3.22)$$

Auf der anderen Seite ist

$$\lambda + \widetilde{a(D)} \Big|_{\mathcal{B}_{p,q}^{s+m}(\mathbb{R}^n, E_1)} = \lambda + \widetilde{a(D)} \Big|_{\mathcal{B}_{p,q}^{s+m}(\mathbb{R}^n, E_1)} \in \mathcal{L}(\mathcal{B}_{p,q}^{s+m}(\mathbb{R}^n, E_1), \mathcal{B}_{p,q}^s(\mathbb{R}^n, E_0))$$

für alle $\lambda \in \sum_{\frac{\pi}{2}, R}$ und $a \in \mathcal{A}$. Daraus folgt zusammen mit (3.22)

$$\left(\lambda + \widetilde{a(D)} \Big|_{\mathcal{B}_{p,q}^{s+m}(\mathbb{R}^n, E_1)} \right) (\mathcal{B}_{p,q}^{s+m}(\mathbb{R}^n, E_1)) = \mathcal{B}_{p,q}^s(\mathbb{R}^n, E_0) \quad \forall \lambda \in \sum_{\frac{\pi}{2}, R} \text{ und } a \in \mathcal{A}. \quad (3.23)$$

Nun ergibt sich aus dem Satz 3.1.2, (3.23) und $\mathcal{B}_{p,q}^s \hookrightarrow B_{p,q}^s$, dass die Funktionen

$$\begin{array}{ccc} \lambda + \widetilde{a(D)} \Big|_{\mathcal{B}_{p,q}^{s+m}} : & \mathcal{B}_{p,q}^{s+m}(\mathbb{R}^n, E_1) & \longrightarrow B_{p,q}^s(\mathbb{R}^n, E_0) \\ & \cup & \cup \\ \lambda + \widetilde{a(D)} \Big|_{\mathcal{B}_{p,q}^{s+m}} : & \mathcal{B}_{p,q}^{s+m}(\mathbb{R}^n, E_1) & \longrightarrow \mathcal{B}_{p,q}^s(\mathbb{R}^n, E_0) \end{array}$$

für alle $\lambda \in \sum_{\frac{\pi}{2}, R}$ und $a \in \mathcal{A}$ bijektiv sind, und deswegen

$$\left(\lambda + \widetilde{a(D)} \Big|_{\mathcal{B}_{p,q}^{s+m}} \right)^{-1} = \left(\lambda + \widetilde{a(D)} \Big|_{\mathcal{B}_{p,q}^{s+m}} \right)^{-1} \Big|_{\mathcal{B}_{p,q}^s} = \widetilde{b_\lambda(D)} \Big|_{\mathcal{B}_{p,q}^s} \quad \forall \lambda \in \sum_{\frac{\pi}{2}, R} \text{ und } a \in \mathcal{A} \quad (3.24)$$

nach Bemerkung 3.1.1.

Dann folgt die Behauptung aus (3.21), (3.24) Korollar 2.3.1 und (3.12). $\square$

Korollar 3.1.2 Seien die Voraussetzungen von Satz 3.1.2 erfüllt, $\mathcal{B} \in \{B, \mathring{B}, b\}$ und $A := \widetilde{a(D)} \Big|_{\mathcal{B}_{p,q}^{s+m}(\mathbb{R}^n, E_1)}$ für jedes $a \in \mathcal{A}$. Dann erzeugt der Operator

$$-A : \mathcal{B}_{p,q}^{s+m}(\mathbb{R}^n, E_1) \subset \mathcal{B}_{p,q}^s(\mathbb{R}^n, E_0) \longrightarrow \mathcal{B}_{p,q}^s(\mathbb{R}^n, E_0)$$

eine analytische Halbgruppe auf $\mathcal{B}_{p,q}^s(\mathbb{R}^n, E_0)$ für jedes $a \in \mathcal{A}$. Darüber hinaus erzeugt $-A$ eine stark stetige Halbgruppe auf $\mathcal{B}_{p,q}^s(\mathbb{R}^n, E_0)$, wenn $E_1 \xrightarrow{d} E_0$ und $q < \infty$.

Beweis. Die Erzeugung analytischer Halbgruppe auf $\mathcal{B}_{p,q}^s(\mathbb{R}^n, E_0)$ folgt aus den Sätzen 3.1.1, 3.1.2 und dem Korollar 3.1.1. Daher und aus dem Satz 1.1.2 j) erhält man, dass $-A$ eine stark stetige Halbgruppe auf $\mathcal{B}_{p,q}^s(\mathbb{R}^n, E_0)$ erzeugt, wenn $E_1 \xrightarrow{d} E_0$ und $q < \infty$. $\square$

3.2 C^∞ –Halbgruppen auf Sobolevräumen

Wir wollen nun einen Satz über Erzeugung einer C^∞ –Halbgruppe auf den Sobolevräumen von einer Familie der parabolischen Pseudodifferentialoperatoren zeigen, aber zuerst einige Definitionen.

Definition 3.2.1 Seien $A : D(A) \subset E \rightarrow E$ ein linearer und abgeschlossener Operator, wobei $D(A)$ nicht unbedingt dicht in E ist, und $\alpha \in (0, 1]$. $-A$ ist **der Erzeuger einer C^∞ –Halbgruppe des singulären Typs α auf E** genannt, wenn Konstanten $M > 0$, $\omega \in \mathbb{R}$ und $\theta \in]\frac{\pi}{2}, \pi[$ existieren, so dass $S_{\theta, \omega} \subset \rho(-A)$ und

$$\|R(\lambda, -A)\|_{\mathcal{L}(E)} \leq \frac{M}{(1 + |\lambda|)^\alpha} \quad \text{für alle } \lambda \in S_{\theta, \omega}. \quad (3.25)$$

Dabei ist $S_{\theta, \omega} = \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda \neq \omega \text{ und } |\arg(\lambda - \omega)| < \theta\}$.

Nun bezeichnet man durch Γ_ω den gegen den Uhrzeigersinn orientierten Rand von $\overline{S_{\theta, \omega}}$. Dann erhält man, dass

$$(t \mapsto e^{-tA}) \in C^\infty(\mathbb{R}^+ \setminus \{0\}, \mathcal{L}(E)),$$

wobei

$$e^{-tA} := \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_\omega} e^{t\lambda} R(\lambda, -A) d\lambda \in \mathcal{L}(E) \quad \text{für } t > 0.$$

Somit definiert die Familie $\{e^{-tA} : t \geq 0\}$, wobei $e^{0A} := I$, eine unendlich oft differenzierbare Halbgruppe auf E , die analytisch ist, wenn $\alpha = 1$. Für die Theorie der C^∞ –Halbgruppen kann man z. B. den Artikel von Yagi [Ya, 89] nachlesen.

Definition 3.2.2 (die Realisierung eines Operators) Seien $A : D(A) \subset E_0 \rightarrow E_0$ ein linearer Operator und $E_1 \hookrightarrow E_0$. Dann definiert man die E_1 –**Realisierung von A** (bezeichnet mit A_{E_1}) durch

$$D(A_{E_1}) := \{x \in D(A) \cap E_1 : Ax \in E_1\}, \quad A_{E_1}x := Ax, \quad x \in D(A_{E_1}).$$

Ist der Operator A abgeschlossen, so ist auch die Realisierung $A_{E_1} : D(A_{E_1}) \subset E_1 \rightarrow E_1$. In diesem Fall ist $(D(A_{E_1}), \|\cdot\|_{D(A_{E_1})})$ ein Banachraum mit der Graphnorm:

$$\|u\|_{D(A_{E_1})} := \|u\|_{E_1} + \|A_{E_1}u\|_{E_1}, \quad u \in D(A_{E_1}).$$

Wir werden im Folgenden zeigen, dass eine geeignete Realisierung des Operators $-a(\widetilde{D})$ eine C^∞ –Halbgruppe auf $W_p^k(\mathbb{R}^n, E_0)$, $BUC^k(\mathbb{R}^n, E_0)$, $C_0^k(\mathbb{R}^n, E_0)$ und $C_b^k(\mathbb{R}^n, E_0)$ erzeugt. Dazu rufen wir einige wichtige stetige Einbettungen des Paragraphen 1.1.1 in Erinnerung. Für $k \in \mathbb{N}_0$ hat man

$$\mathring{B}_{p,1}^k(\mathbb{R}^n, E) \xhookrightarrow{d} W_p^k(\mathbb{R}^n, E) \xhookrightarrow{d} \mathring{B}_{p,\infty}^k(\mathbb{R}^n, E) \quad (1 \leq p < \infty), \quad (3.26)$$

$$B_{\infty,1}^k(\mathbb{R}^n, E) \hookrightarrow W_{\infty}^k(\mathbb{R}^n, E) \hookrightarrow B_{\infty,\infty}^k(\mathbb{R}^n, E), \quad (3.27)$$

$$b_{\infty,1}^k(\mathbb{R}^n, E) = B_{\infty,1}^k(\mathbb{R}^n, E) \xrightarrow{d} B \cup C^k(\mathbb{R}^n, E) \xrightarrow{d} b_{\infty,\infty}^k(\mathbb{R}^n, E), \quad (3.28)$$

$$\dot{B}_{\infty,1}^k(\mathbb{R}^n, E) \xrightarrow{d} C_0^k(\mathbb{R}^n, E) \xrightarrow{d} \dot{B}_{\infty,\infty}^k(\mathbb{R}^n, E), \quad (3.29)$$

$$B_{\infty,1}^k(\mathbb{R}^n, E) \hookrightarrow C_b^k(\mathbb{R}^n, E) \hookrightarrow B_{\infty,\infty}^k(\mathbb{R}^n, E). \quad (3.30)$$

Nun bezeichnet man

$$\mathcal{B} := \begin{cases} \dot{B}, & \text{falls } \mathfrak{F}_p^k = W_p^k, & 1 \leq p < \infty, \\ B, & \text{falls } \mathfrak{F}_p^k = W_{\infty}^k, & p = \infty, \\ b, & \text{falls } \mathfrak{F}_p^k = B \cup C^k, & p = \infty, \\ \dot{B}, & \text{falls } \mathfrak{F}_p^k = C_0^k, & p = \infty, \\ B, & \text{falls } \mathfrak{F}_p^k = C_b^k, & p = \infty. \end{cases} \quad (3.31)$$

Daraus folgt

$$\mathcal{B}_{p,1}^k(\mathbb{R}^n, E) \hookrightarrow \mathfrak{F}_p^k(\mathbb{R}^n, E) \hookrightarrow \mathcal{B}_{p,\infty}^k(\mathbb{R}^n, E), \quad 1 \leq p \leq \infty. \quad (3.32)$$

Auf Basis der obigen Ergebnisse und Bezeichnungen erhält man:

Satz 3.2.1 *Seien die Voraussetzungen von Satz 3.1.2 erfüllt, $\alpha \in (0, 1)$, $m > 0$, $k \in \mathbb{N}_0$, $\mathfrak{F}_p^k = W_p^k$ für $1 \leq p < \infty$, $\mathfrak{F}_{\infty}^k \in \{W_{\infty}^k, BUC^k, C_0^k, C_b^k\}$ und $\mathcal{B}$ wie in (3.31), und seien nun $A := \widetilde{a(\bar{D})} \Big|_{\mathcal{B}_{p,\infty}^{k+m}(\mathbb{R}^n, E_1)}$ für $a \in \mathcal{A}$ und $A_{\mathfrak{F}_p^k}$ die $\mathfrak{F}_p^k(\mathbb{R}^n, E_0)$ -Realisierung von A . Dann erzeugt $-A_{\mathfrak{F}_p^k}$ eine C^{∞} -Halbgruppe des singulären Typs α auf dem Raum $\mathfrak{F}_p^k(\mathbb{R}^n, E_0)$. Genau genommen gibt es Konstanten $M > 0$, $\tilde{\omega} \in \mathbb{R}$ und $\tilde{\theta} \in]\frac{\pi}{2}, \pi[$, so dass $S_{\tilde{\theta}, \tilde{\omega}} \subset \rho(-A_{\mathfrak{F}_p^k})$ und*

$$\left\| \left(\lambda I + A_{\mathfrak{F}_p^k} \right)^{-1} \right\|_{\mathcal{L}(\mathfrak{F}_p^k(\mathbb{R}^n, E_0))} \leq \frac{M}{(1 + |\lambda|)^{\alpha}} \quad (3.33)$$

für alle $\lambda \in S_{\tilde{\theta}, \tilde{\omega}}$ und $a \in \mathcal{A}$. Darüber hinaus gilt

$$\left(\lambda I + A_{\mathfrak{F}_p^k} \right)^{-1} = \left(\lambda I + \widetilde{a(\bar{D})} \Big|_{\mathcal{B}_{p,\infty}^{k+m}(\mathbb{R}^n, E_1)} \right)^{-1} \Big|_{\mathfrak{F}_p^k(\mathbb{R}^n, E_0)}. \quad (3.34)$$

Beweis. Seien $\mathfrak{F}_p^k \in \{B \cup C^k, C_0^k, C_b^k, W_p^k; 1 \leq p \leq \infty\}$ und $\mathcal{B}$ wie in (3.31). Nach dem Satz 3.1.2 und den Korollarien 3.1.1, 3.1.2 existieren Konstanten $\tilde{M} > 0$, $\tilde{\omega} \in \mathbb{R}$ und $\tilde{\theta} \in]\frac{\pi}{2}, \pi[$, so dass

i) $S_{\tilde{\theta}, \tilde{\omega}} \subset \rho(-\widetilde{a(\bar{D})} \Big|_{\mathcal{B}_{p,\infty}^{k+m}(\mathbb{R}^n, E_1)})$ für alle $a \in \mathcal{A}$.

ii) der Operator $-\widetilde{a(\bar{D})} \Big|_{\mathcal{B}_{p,\infty}^{k+m}(\mathbb{R}^n, E_1)}$ in $\mathcal{B}_{p,\infty}^k(\mathbb{R}^n, E_0)$ abgeschlossen ist, da seine Resolventenmenge nicht leer ist, und

iii) für alle $\lambda \in S_{\tilde{\theta}, \tilde{\omega}}$ und $a \in \mathcal{A}$

$$\left(\lambda I + \widetilde{a(D)} \Big|_{\mathcal{B}_{p,\infty}^{k+m}(\mathbb{R}^n, E_1)} \right)^{-1} : \mathcal{B}_{p,\infty}^k(\mathbb{R}^n, E_0) \xrightarrow{\text{Isomorph.}} \mathcal{B}_{p,\infty}^{k+m}(\mathbb{R}^n, E_1), \quad (3.35)$$

$\cup$
 $\mathfrak{F}_p^k(\mathbb{R}^n, E_0)$

$$\left\| \left(\lambda I + \widetilde{a(D)} \Big|_{\mathcal{B}_{p,\infty}^{k+m}(\mathbb{R}^n, E_1)} \right)^{-1} \right\|_{\mathcal{L}(\mathcal{B}_{p,\infty}^k(\mathbb{R}^n, E_0), \mathcal{B}_{p,\infty}^{k+m}(\mathbb{R}^n, E_1))} \leq \tilde{M}, \quad (3.36)$$

$$(1 + |\lambda|) \left\| \left(\lambda I + \widetilde{a(D)} \Big|_{\mathcal{B}_{p,\infty}^{k+m}(\mathbb{R}^n, E_1)} \right)^{-1} \right\|_{\mathcal{L}(\mathcal{B}_{p,\infty}^k(\mathbb{R}^n, E_0))} \leq \tilde{M}. \quad (3.37)$$

Ist $u \in D(A_{\mathfrak{F}_p^k})$, das heißt $u \in D(A) \cap \mathfrak{F}_p^k(\mathbb{R}^n, E_0) \stackrel{\text{Satz 1.1.2 g)}}{=} \mathcal{B}_{p,\infty}^{k+m}(\mathbb{R}^n, E_1)$ und $\widetilde{a(D)} \Big|_{\mathcal{B}_{p,\infty}^{k+m}(\mathbb{R}^n, E_1)} u \in \mathfrak{F}_p^k(\mathbb{R}^n, E_0)$, so ist $v := \left(\lambda I + \widetilde{a(D)} \Big|_{\mathcal{B}_{p,\infty}^{k+m}(\mathbb{R}^n, E_1)} \right) u \in \mathfrak{F}_p^k(\mathbb{R}^n, E_0) \subset \mathcal{B}_{p,\infty}^k(\mathbb{R}^n, E_0)$. Dann erhält man aus (3.35), dass

$$u = \left(\lambda I + \widetilde{a(D)} \Big|_{\mathcal{B}_{p,\infty}^{k+m}(\mathbb{R}^n, E_1)} \right)^{-1} v \quad \text{in } \mathcal{B}_{p,\infty}^{k+m}(\mathbb{R}^n, E_1) \text{ liegt.}$$

Also

$$D(A_{\mathfrak{F}_p^k}) \subset \mathcal{B}_{p,\infty}^{k+m}(\mathbb{R}^n, E_1). \quad (3.38)$$

Nun seien $\lambda \in S_{\tilde{\theta}, \tilde{\omega}}$, $a \in \mathcal{A}$ und $u \in D(A_{\mathfrak{F}_p^k})$ mit $(\lambda I + A_{\mathfrak{F}_p^k})u = 0$. Dann ist

$$-\widetilde{a(D)} \Big|_{\mathcal{B}_{p,\infty}^{k+m}(\mathbb{R}^n, E_1)} u = -A_{\mathfrak{F}_p^k} u = \lambda u$$

und somit $u = 0$ (siehe (3.35)). Also ist $f_1 := \lambda I + A_{\mathfrak{F}_p^k} : D(A_{\mathfrak{F}_p^k}) \longrightarrow \mathfrak{F}_p^k(\mathbb{R}^n, E_0)$ injektiv. Außerdem ist f_1 surjektiv. In der Tat: Sei $v \in \mathfrak{F}_p^k(\mathbb{R}^n, E_0)$. Dann ist nach (3.35), (3.32) und Satz 1.1.2 g)

$$u_\lambda := \left(\lambda I + \widetilde{a(D)} \Big|_{\mathcal{B}_{p,\infty}^{k+m}(\mathbb{R}^n, E_1)} \right)^{-1} v \in \mathcal{B}_{p,\infty}^{k+m}(\mathbb{R}^n, E_1) \hookrightarrow \mathfrak{F}_p^k(\mathbb{R}^n, E_0),$$

das heißt

$$\left(\lambda I + \widetilde{a(D)} \Big|_{\mathcal{B}_{p,\infty}^{k+m}(\mathbb{R}^n, E_1)} \right)^{-1} \left(\mathfrak{F}_p^k(\mathbb{R}^n, E_0) \right) \subset \mathfrak{F}_p^k(\mathbb{R}^n, E_0) \quad \text{für alle } \lambda \in S_{\tilde{\theta}, \tilde{\omega}} \text{ und } a \in \mathcal{A}, \quad (3.39)$$

und somit

$$A_{\mathfrak{F}_p^k} u_\lambda = \left(\lambda I + \widetilde{a(D)} \Big|_{\mathcal{B}_{p,\infty}^{k+m}(\mathbb{R}^n, E_1)} \right) u_\lambda - \lambda u_\lambda = v - \lambda u_\lambda \in \mathfrak{F}_p^k(\mathbb{R}^n, E_0).$$

Also $u_\lambda \in D(A_{\mathfrak{F}_p^k})$ und

$$f_1(u_\lambda) = \left(\lambda I + \widetilde{a(D)} \Big|_{\mathcal{B}_{p,\infty}^{k+m}(\mathbb{R}^n, E_1)} \right) u_\lambda = v,$$

das heißt f_1 ist surjektiv. Daraus folgt zusammen mit (3.35), (3.38), (3.32) und der Bemerkung 3.1.1, dass

$$\left(\lambda I + A_{\mathfrak{F}_p^k} \right)^{-1} = \left(\lambda I + \widetilde{a(\overline{D})} \Big|_{\mathcal{B}_{p,\infty}^{k+m}(\mathbb{R}^n, E_1)} \right)^{-1} \Big|_{\mathfrak{F}_p^k(\mathbb{R}^n, E_0)}. \quad (3.40)$$

Somit ist (3.34) bewiesen.

Andererseits ergibt sich aufgrund vom Satz 1.1.2 g) und (3.32), dass

$$\mathcal{B}_{p,\infty}^{k+m}(\mathbb{R}^n, E_1) \hookrightarrow \mathcal{B}_{p,1}^{k+\delta}(\mathbb{R}^n, E_0) \hookrightarrow \mathfrak{F}_p^k \hookrightarrow \mathcal{B}_{p,\infty}^k(\mathbb{R}^n, E_0) \hookrightarrow \mathcal{B}_{p,1}^{k-\epsilon}(\mathbb{R}^n, E_0) \quad (3.41)$$

für alle $0 < \epsilon < \delta < m$ und $\mathfrak{F}_p^k := \mathfrak{F}_p^k(\mathbb{R}^n, E_0)$. Daraus und aus (3.32), (3.35)-(3.37), (3.40) folgt, dass $A_{\mathfrak{F}_p^k(\mathbb{R}^n, E_0)}$ ein abgeschlossener Operator auf $\mathfrak{F}_p^k(\mathbb{R}^n, E_0)$ ist und

$$\begin{aligned} & \left\| \left(\lambda I + A_{\mathfrak{F}_p^k} \right)^{-1} \right\|_{\mathcal{L}(\mathfrak{F}_p^k, \mathcal{B}_{p,1}^{k+\delta}(\mathbb{R}^n, E_0))} + (1 + |\lambda|) \left\| \left(\lambda I + A_{\mathfrak{F}_p^k} \right)^{-1} \right\|_{\mathcal{L}(\mathfrak{F}_p^k, \mathcal{B}_{p,1}^{k-\epsilon}(\mathbb{R}^n, E_0))} \\ & T_\lambda := \left(\lambda I + A_{\mathfrak{F}_p^k} \right)^{-1} \\ & = \sup_{0 \neq u \in \mathfrak{F}_p^k} \frac{\|T_\lambda u\|_{\mathcal{B}_{p,1}^{k+\delta}(\mathbb{R}^n, E_0)}}{\|u\|_{\mathfrak{F}_p^k}} + (1 + |\lambda|) \sup_{0 \neq u \in \mathfrak{F}_p^k} \frac{\|T_\lambda u\|_{\mathcal{B}_{p,1}^{k-\epsilon}(\mathbb{R}^n, E_0)}}{\|u\|_{\mathfrak{F}_p^k}} \\ & \leq c_1 \sup_{0 \neq u \in \mathcal{B}_{p,\infty}^k(\mathbb{R}^n, E_0)} \frac{\|T_\lambda u\|_{\mathcal{B}_{p,\infty}^{k+m}(\mathbb{R}^n, E_0)}}{\|u\|_{\mathcal{B}_{p,\infty}^k(\mathbb{R}^n, E_0)}} + c_2 (1 + |\lambda|) \sup_{0 \neq u \in \mathcal{B}_{p,\infty}^k(\mathbb{R}^n, E_0)} \frac{\|T_\lambda u\|_{\mathcal{B}_{p,\infty}^k(\mathbb{R}^n, E_0)}}{\|u\|_{\mathcal{B}_{p,\infty}^k(\mathbb{R}^n, E_0)}} \leq \widehat{M} \end{aligned} \quad (3.42)$$

für alle $\lambda \in S_{\tilde{\theta}, \tilde{\omega}}$ und $a \in \mathcal{A}$, wobei $\widehat{M} := (c_1 + c_2) \tilde{M} > 0$ unabhängig von λ und a ist.

Nach den Interpolationseigenschaften der Besovräume (vgl. Unterabschnitt 1.1.2) und $\mathcal{B}_{p,1}^{(1-\theta)(k-\epsilon)+\theta(k+\delta)} = \mathcal{B}_{p,1}^{k+\epsilon}$ mit $\theta := 2\epsilon(\epsilon + \delta)^{-1}$ erhält man

$$\|u\|_{\mathcal{B}_{p,1}^{k+\epsilon}} \leq c(\epsilon, \delta) \|u\|_{\mathcal{B}_{p,1}^{k-\epsilon}}^{1-\theta} \|u\|_{\mathcal{B}_{p,1}^{k+\delta}}^\theta, \quad u \in \mathcal{B}_{p,1}^{k+\delta}. \quad (3.43)$$

Daher bekommt man für $T_\lambda = \left(\lambda I + \widetilde{a(\overline{D})} \Big|_{\mathfrak{F}_p^k} \right)^{-1}$:

$$\begin{aligned} \|T_\lambda\|_{\mathcal{L}(\mathfrak{F}_p^k)} &= \sup_{u \in \mathfrak{F}_p^k} \frac{\|T_\lambda u\|_{\mathfrak{F}_p^k}}{\|u\|_{\mathfrak{F}_p^k}} \\ &\leq \tilde{c} \sup_{u \in \mathfrak{F}_p^k} \frac{\|T_\lambda u\|_{\mathcal{B}_{p,1}^{k+\epsilon}(\mathbb{R}^n, E_0)}}{\|u\|_{\mathfrak{F}_p^k}} \\ &\leq \hat{c}(\epsilon, \delta) \sup_{u \in \mathfrak{F}_p^k} \left\{ \left(\frac{\|T_\lambda u\|_{\mathcal{B}_{p,1}^{k-\epsilon}(\mathbb{R}^n, E_0)}}{\|u\|_{\mathfrak{F}_p^k}} \right)^{1-\theta} \left(\frac{\|T_\lambda u\|_{\mathcal{B}_{p,1}^{k+\delta}(\mathbb{R}^n, E_0)}}{\|u\|_{\mathfrak{F}_p^k}} \right)^\theta \right\} \\ &\leq \tilde{c}(\epsilon, \delta) \|T_\lambda\|_{\mathcal{L}(\mathfrak{F}_p^k, \mathcal{B}_{p,1}^{k-\epsilon}(\mathbb{R}^n, E_0))}^{1-\theta} \|T_\lambda\|_{\mathcal{L}(\mathfrak{F}_p^k, \mathcal{B}_{p,1}^{k+\delta}(\mathbb{R}^n, E_0))}^\theta \\ &\leq \hat{c}(\epsilon, \delta) (1 + |\lambda|)^{(\epsilon-\delta)/(\epsilon+\delta)}, \quad \lambda \in S_{\tilde{\theta}, \tilde{\omega}} \text{ (wegen (3.42)).} \end{aligned}$$

Somit folgt (3.33) durch die Substitution $\epsilon := (1 - \alpha) \delta / (1 + \alpha)$. $\square$

Wir werden noch einmal die folgenden Aussagen, die im Satz 3.2.1 bewiesen wurden, im nächsten Abschnitt verwenden:

$$\left(\lambda I + \widetilde{a(D)} \Big|_{\mathcal{B}_{p,\infty}^{k+m}(\mathbb{R}^n, E_1)} \right)^{-1} \left(\mathfrak{F}_p^k(\mathbb{R}^n, E_0) \right) \subset \mathfrak{F}_p^k(\mathbb{R}^n, E_0) \quad \text{für alle } \lambda \in S_{\tilde{\theta}, \tilde{\omega}} \text{ und } a \in \mathcal{A}, \quad (3.44)$$

$$\left(\lambda I + A_{\mathfrak{F}_p^k} \right)^{-1} = \left(\lambda I + \widetilde{a(D)} \Big|_{\mathcal{B}_{p,\infty}^{k+m}(\mathbb{R}^n, E_1)} \right)^{-1} \Big|_{\mathfrak{F}_p^k(\mathbb{R}^n, E_0)} \quad \text{für alle } \lambda \in S_{\tilde{\theta}, \tilde{\omega}} \text{ und } a \in \mathcal{A}. \quad (3.45)$$

Außerdem werden wir im Abschnitt 3.3 mit den obigen Notationen weitergehen. Dort werden wichtig stetige Einbettungen des Definitionsbereichs von $A_{\mathfrak{F}_p^k}$, $D(A_{\mathfrak{F}_p^k})$, in $\mathcal{B}_{p,\infty}^{k+m}(\mathbb{R}^n, E_1)$ gezeigt. Dabei ist $D(A_{\mathfrak{F}_p^k})$ ein Banachraum mit der Graphnorm

$$\|u\|_{D(A_{\mathfrak{F}_p^k})} := \|u\|_{\mathfrak{F}_p^k(\mathbb{R}^n, E_0)} + \|Au\|_{\mathfrak{F}_p^k(\mathbb{R}^n, E_0)}, \quad u \in D(A_{\mathfrak{F}_p^k}). \quad (3.46)$$

3.3 Analytische Halbgruppen von parabolischen Pseudodifferentialoperatoren auf Sobolevräumen

Für bestimmte Symbole a in $S_{1,0}^{m,\rho}(\mathbb{R}^n, \mathcal{L}(E_0))$ untersuchen wir in diesem Abschnitt, ob geeignete Restriktionen des Operators $-\widetilde{a(D)}$ analytische Halbgruppen auf den Räumen $W_p^k(\mathbb{R}^n, E_0)$ erzeugen. Erzeugung der analytischen Halbgruppe auf $L_p(\mathbb{R}^n, E_0)$, $C_0(\mathbb{R}^n, E_0)$ und $BUC(\mathbb{R}^n, E_0)$ wurde zwar von Amann H. in [Am,01] bewiesen, aber dies bezog sich auf $\mathcal{L}(E_0)$ -vektorwertige und parabolische Differentialoperatoren.

3.3.1 Die Symbolklasse $S^{m,\rho}(\mathbb{R}^n, E)$

Definition 3.3.1 (von $S^{m,\rho}(\mathbb{R}^n, E)$) Seien $m \in \mathbb{R}$ und $\rho \in \mathbb{N}_0$. Durch $S^{m,\rho}(\mathbb{R}^n, E)$ definieren wir den Raum aller Funktionen $a \in S_{1,0}^{m,\rho}(\mathbb{R}^n, E)$, die eine Funktion $a^0 \in S_{1,0}^{m,\rho}(\mathbb{R}^n, E)$ besitzt, so dass

$$\begin{aligned} a - a^0 &\in S_{1,0}^{m-1,\rho}(\mathbb{R}^n, E) \quad \text{und} \\ a^0(t\xi) &= t^m a^0(\xi) \quad \text{für alle } t > 0 \text{ und } \xi \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}. \end{aligned}$$

Das Symbol a^0 ist der **Hauptteil von** a genannt. Außerdem betrachte $S^{m,\rho}(\mathbb{R}^n, E)$ mit der Norm

$$\|a\|_{S^{m,\rho}(\mathbb{R}^n, E)} := \|a^0\|_{S^{m,\rho}(\mathbb{R}^n, E)} + \|a - a^0\|_{S^{m-1,\rho}(\mathbb{R}^n, E)}.$$

Für $m \in \mathbb{N}$ und alle $\rho \in \mathbb{N}_0$ ist es klar, dass das Symbol eines Differentialoperators mit banachraumwertigen konstanten Koeffizienten, $p(\xi) = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha \xi^\alpha$ mit $\xi \in \mathbb{R}^n$, ein Element in $S^{m,\rho}(\mathbb{R}^n, E)$ ist.

Weiterhin erhält man sofort aus $S_{1,0}^{m-1,\rho}(\mathbb{R}^n, E) \subset S_{1,0}^{m,\rho}(\mathbb{R}^n, E)$, dass

$$\begin{aligned} \|a\|_{S_{1,0}^{m,\rho}(\mathbb{R}^n, E)} &\leq \|a^0\|_{S_{1,0}^{m,\rho}(\mathbb{R}^n, E)} + \|a - a^0\|_{S_{1,0}^{m,\rho}(\mathbb{R}^n, E)} \\ &\leq \|a^0\|_{S_{1,0}^{m,\rho}(\mathbb{R}^n, E)} + \|a - a^0\|_{S_{1,0}^{m-1,\rho}(\mathbb{R}^n, E)} \\ &= \|a\|_{S^{m,\rho}(\mathbb{R}^n, E)} \quad \text{für alle } a \in S^{m,\rho}(\mathbb{R}^n, E). \end{aligned}$$

Also

$$S^{m,\rho}(\mathbb{R}^n, E) \hookrightarrow S_{1,0}^{m,\rho}(\mathbb{R}^n, E) \quad \text{mit} \quad \|a\|_{S_{1,0}^{m,\rho}(\mathbb{R}^n, E)} \leq \|a\|_{S^{m,\rho}(\mathbb{R}^n, E)} \quad (3.47)$$

und damit ist jede beschränkte Menge in $(S^{m,\rho}(\mathbb{R}^n, E); \|\cdot\|_{S^{m,\rho}(\mathbb{R}^n, E)})$ auch in $(S_{1,0}^{m,\rho}(\mathbb{R}^n, E); \|\cdot\|_{S_{1,0}^{m,\rho}(\mathbb{R}^n, E)})$.

Definition 3.3.2 Seien $m \in \mathbb{R}^+$, $\rho \in \mathbb{N}_0$ und $a \in S^{m,\rho}(\mathbb{R}^n, \mathcal{L}(E_1, E_0))$. Dann heißt das Symbol a **parabolisch** in $S^{m,\rho}(\mathbb{R}^n, \mathcal{L}(E_1, E_0))$ genau dann, wenn a^0 im Sinne von Definition 3.1.1 parabolisch ist.

Bemerkung 3.3.1 Sei $\mathcal{A}$ eine Familie der parabolischen Symbole in $S^{m,\rho}(\mathbb{R}^n, \mathcal{L}(E_1, E_0))$ mit denselben Konstanten $\kappa^0 > 1$ und $\omega^0 > 0$, das bedeutet es gibt Konstanten $\kappa^0 > 1$ und $\omega^0 > 0$, so dass

$$\left[a^0(\xi) + \mu^m e^{i\theta} I \right]^{-1} \in \mathcal{L}(E_0, E_1) \quad \text{und} \quad \left\| \left[a^0(\xi) + \mu^m e^{i\theta} I \right]^{-1} \right\|_{\mathcal{L}(E_0, E_1)} \leq \kappa^0 \langle \xi, \mu \rangle^{-m} \quad (3.48)$$

für alle $|\xi, \mu| \geq \omega^0$, $\theta \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ und $a \in \mathcal{A}$. Sei ferner $\mathcal{A} \subset S^{m,\rho}(\mathbb{R}^n, \mathcal{L}(E_1, E_0))$ beschränkt, das heißt es gibt eine Konstante $K > 0$ mit

$$\|a\|_{S^{m,\rho}} < K \quad \text{für alle } a \in \mathcal{A}. \quad (3.49)$$

Dann gelten:

- a) $\mathcal{A}$ ist eine Familie der parabolischen Symbole in $S_{1,0}^{m,\rho}(\mathbb{R}^n, \mathcal{L}(E_1, E_0))$ mit denselben Konstanten $\omega = \omega(\omega^0, K) > 0$ und $\kappa = 2\kappa^0$.
- b) Zum $R := (\omega^0)^m$ ist die Menge $\left\{ b_\lambda^0 := (\lambda + a^0)^{-1} : a \in \mathcal{A}, \lambda \in \sum_{\frac{\pi}{2}, R} \right\}$ beschränkt in $S_{1,0}^{-m,\rho}(\mathbb{R}^n, \mathcal{L}(E_0, E_1))$ mit

$$\|\partial_\xi^\alpha b_\lambda^0(\xi)\| \leq c_{K, \kappa^0, \alpha} \langle \xi \rangle^{m-|\alpha|} \left\langle \xi, |\lambda|^{1/m} \right\rangle^{-2m} \quad \text{für alle } \xi \in \mathbb{R}^n, \lambda \in \sum_{\frac{\pi}{2}, R},$$

$$a \in \mathcal{A} \quad \text{und} \quad |\alpha| \leq \rho.$$

Beweis. a) Sei $a \in \mathcal{A}$ und $q = a - a^0$ auf $\mathbb{R}^n$, wobei a^0 der Hauptteil von a ist. Dann gilt für alle $\xi \in \mathbb{R}^n$ und $a \in \mathcal{A}$:

$$\|q(\xi)\|_{\mathcal{L}(E_1, E_0)} \leq K \langle \xi \rangle^{m-1}. \quad (3.50)$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned} \left\| q(\xi) \left(\mu^m e^{i\theta} I + a^0(\xi) \right)^{-1} \right\|_{\mathcal{L}(E_0)} &\leq \|q(\xi)\|_{\mathcal{L}(E_1, E_0)} \left\| (\lambda I + a^0(\xi))^{-1} \right\|_{\mathcal{L}(E_0, E_1)} \\ &\leq K \langle \xi \rangle^{m-1} \langle \xi, \mu \rangle^{-m} \\ &= K \left(\frac{\langle \xi \rangle}{\langle \xi, \mu \rangle} \right)^m \langle \xi \rangle^{-1} \end{aligned}$$

für alle $|\xi, \mu| \geq \omega^0$, $\theta \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right]$ und $a \in \mathcal{A}$.

Daher erhält man eine Konstante $\omega = \omega(\omega^0, K) \geq \omega^0$ so groß genügt, dass

$$\left\| q(\xi) \left(\mu^m e^{i\theta} I + a^0(\xi) \right)^{-1} \right\|_{\mathcal{L}(E_0)} \leq \frac{1}{2} \quad \forall |\xi, \mu| \geq \omega, \quad \theta \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right] \text{ und } a \in \mathcal{A}.$$

So ergibt sich aus

$$\mu^m e^{i\theta} I + a(\xi) = \left[I + q(\xi) \left(\mu^m e^{i\theta} I + a^0(\xi) \right)^{-1} \right] \left(\mu^m e^{i\theta} I + a^0(\xi) \right)$$

und aus dem Satz von Neumann, dass $(\mu^m e^{i\theta} I + a(\xi))^{-1} \in \mathcal{L}(E_0, E_1)$ und

$$\begin{aligned} \left\| \left(\mu^m e^{i\theta} I + a(\xi) \right)^{-1} \right\|_{\mathcal{L}(E_0, E_1)} &\leq 2 \left\| \left(\mu^m e^{i\theta} I + a^0(\xi) \right)^{-1} \right\|_{\mathcal{L}(E_0, E_1)} \\ &\leq \underbrace{2\kappa^0}_{=: \kappa} \langle \xi, \mu \rangle^{-m} \end{aligned}$$

für alle $|\xi, \mu| \geq \omega$, $\theta \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right]$ und $a \in \mathcal{A}$.

Beweis von b): Zunächst nehme $\beta \in \mathbb{N}_0^n$ mit $|\beta| \leq \rho$. Dann gilt für alle $(|\lambda|^{\frac{1}{m}})^m e^{i \arg(\lambda)} = \lambda \in \sum_{\frac{\pi}{2}, R}$

$$\begin{aligned} \left\| \left(\partial_\xi^\beta a^0(\xi) \right) (\lambda + a^0(\xi))^{-1} \right\|_{\mathcal{L}(E_0)} &\leq \left\| \partial_\xi^\beta a^0(\xi) \right\|_{\mathcal{L}(E_0)} \left\| (\lambda + a^0(\xi))^{-1} \right\|_{\mathcal{L}(E_0)} \\ &\leq \left\| \partial_\xi^\beta a^0(\xi) \right\|_{\mathcal{L}(E_0)} \left\| (\lambda + a^0(\xi))^{-1} \right\|_{\mathcal{L}(E_0, E_1)} \\ &\leq \|a^0\|_{S_{1,0}^{m,\rho}} \langle \xi \rangle^{m-|\beta|} \kappa^0 \left\langle \xi, |\lambda|^{1/m} \right\rangle^{-m}. \end{aligned} \quad (3.51)$$

Nun sei $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ mit $|\alpha| \leq \rho$. Weil die Ableitung $\partial_\xi^\alpha (\lambda + a^0)^{-1}$ eine Summe von Termen der Form

$$\pm (\lambda + a^0)^{-1} \left(\partial_\xi^{\alpha_1} a^0 \right) (\lambda + a^0)^{-1} \dots \left(\partial_\xi^{\alpha_k} a^0 \right) (\lambda + a^0)^{-1}$$

mit $\alpha_1 + \dots + \alpha_j = \alpha$ ist, folgt aus (3.51), dass

$$\begin{aligned}
& \left\| \partial_\xi^\alpha (\lambda + a^0(\xi))^{-1} \right\|_{\mathcal{L}(E_0)} \\
& \leq \left\| (\lambda + a^0(\xi))^{-1} \right\|_{\mathcal{L}(E_0)} \sum_{j=1}^{|\alpha|} \sum_{\alpha_1 + \dots + \alpha_j = \alpha} \prod_{i=1}^j \left\| \partial_\xi^{\alpha_i} a(\xi) (\lambda + a^0(\xi))^{-1} \right\|_{\mathcal{L}(E_0)} \\
& \leq \kappa^0 \left\langle \xi, |\lambda|^{1/m} \right\rangle^{-m} \sum_{j=1}^{|\alpha|} \sum_{\alpha_1 + \dots + \alpha_j = \alpha} \prod_{i=1}^j \kappa^0 \|a^0\|_{S_{1,0}^{m,\rho_n}} \langle \xi \rangle^{m-|\alpha_i|} \left\langle \xi, |\lambda|^{1/m} \right\rangle^{-m} \\
& \leq c_{K,\kappa^0,\alpha} \sum_{j=1}^{|\alpha|} \langle \xi \rangle^{jm-|\alpha|} \left\langle \xi, |\lambda|^{1/m} \right\rangle^{-m(j+1)} \\
& \leq c_{K,\kappa^0,\alpha} \langle \xi \rangle^{m-|\alpha|} \left\langle \xi, |\lambda|^{1/m} \right\rangle^{-2m} \sum_{j=1}^{|\alpha|} \underbrace{\langle \xi \rangle^{m(j-1)} \left\langle \xi, |\lambda|^{1/m} \right\rangle^{m(1-j)}}_{\leq 1} \\
& \leq \tilde{c}_{K,\kappa^0,\alpha} \langle \xi \rangle^{m-|\alpha|} \left\langle \xi, |\lambda|^{1/m} \right\rangle^{-2m}
\end{aligned}$$

für alle $\xi \in \mathbb{R}^n$, $\lambda \in \sum_{\frac{\pi}{2}, R}$ und $a \in \mathcal{A}$. Somit ist b) bewiesen. $\square$

Wir werden später (im Kapitel 4) nicht-autonome Evolutionsgleichungen betrachten und deswegen zeigen wir folgende Sätze für eine Familie der parabolischen Symbole.

Satz 3.3.1 Seien $m > 0$, $k \in \mathbb{N}_0$, $1 \leq p \leq \infty$ und $\mathcal{A} \subset S^{m,\rho_n}(\mathbb{R}^n, \mathcal{L}(E_1, E_0))$ beschränkt. Außerdem nehmen wir an, dass alle $a \in \mathcal{A}$ parabolisch in $S^{m,\rho_n}(\mathbb{R}^n, \mathcal{L}(E_1, E_0))$ mit denselben Konstanten $\omega > 0$ und $\kappa \geq 1$ sind. Dann existieren Konstanten $M \geq 1$ und $R > 0$, so dass

$$\left\| \widetilde{b_\lambda^0(D)} \right\|_{\mathcal{B}_{p,\infty}^k(\mathbb{R}^n, E_0)} \left\| u \right\|_{W_p^k(\mathbb{R}^n, E_0)} \leq \frac{M}{1 + |\lambda|} \|u\|_{W_p^k(\mathbb{R}^n, E_0)}$$

für alle $u \in C_b^\infty(\mathbb{R}^n, E_0) \cap W_p^k(\mathbb{R}^n, E_0)$, $\lambda \in \sum_{\frac{\pi}{2}, R}$ und $a \in \mathcal{A}$. Dabei sind $b_\lambda^0 := (\lambda + a^0)^{-1}$, $\mathcal{B} := \mathring{\mathcal{B}}$ falls $1 \leq p < \infty$ und $\mathcal{B} := \mathcal{B}$ falls $p = \infty$.

Beweis. O.B.d.A. sei $R = 1$ in der Bemerkung 3.3.1. Nach Definition ist

$$\left\| \widetilde{b_\lambda^0(D)} \right\|_{\mathcal{B}_{p,\infty}^k(\mathbb{R}^n, E_0)} \left\| u \right\|_{W_p^k(\mathbb{R}^n, E_0)} = \begin{cases} \left(\sum_{|\alpha| \leq k} \left\| \partial_x^\alpha \left(\widetilde{b_\lambda^0(D)} u(x) \right) \right\|_{L_p(\mathbb{R}^n, E_0)}^p \right)^{\frac{1}{p}}, & \text{falls } 1 \leq p < \infty, \\ \max_{|\alpha| \leq k} \left\| \partial_x^\alpha \left(\widetilde{b_\lambda^0(D)} u(x) \right) \right\|_{L_\infty(\mathbb{R}^n, E_0)}, & \text{falls } p = \infty, \end{cases}$$

für alle $u \in C_b^\infty(\mathbb{R}^n, E_0) \cap W_p^k(\mathbb{R}^n, E_0)$, $\lambda \in \sum_{\frac{\pi}{2}, 1}$ und $a \in \mathcal{A}$. Deshalb müssen wir $\partial_x^\alpha \left(\widetilde{b_\lambda^0(D)} u(x) \right)$ berechnen.

Nach dem Satz über Parameterdifferentiation für oszillatorische Integrale, der Transformationsformel und der Homogenität von b_λ^0 erhält man für alle $u \in C_b^\infty(\mathbb{R}^n, E_0) \cap W_p^k(\mathbb{R}^n, E_0)$, $\lambda \in \sum_{\frac{\pi}{2}, 1}$, $|\lambda| := \mu^m$, $\hat{\lambda} := \mu^{-m} \lambda$ und $|\alpha| \leq k$, dass

$$\begin{aligned} \partial_x^\alpha \left(\widetilde{b_\lambda^0(D)} u(x) \right) &= os - \int \int e^{i\xi \cdot \eta} b_\lambda^0(\xi) \partial_x^\alpha u(x - \eta) \frac{d(\xi, \eta)}{(2\pi)^n} \\ &= os - \int \int e^{i\xi \cdot \eta} \frac{1}{|\lambda|} b_{\hat{\lambda}}^0\left(\frac{\xi}{\mu}\right) \partial_x^\alpha u(x - \eta) \frac{d(\xi, \eta)}{(2\pi)^n} \\ &= os - \int \int \mu^n e^{i(\mu\xi) \cdot \eta} b_{\hat{\lambda}}^0(\xi) \partial_x^\alpha u(x - \eta) \frac{d(\xi, \eta)}{|\lambda| (2\pi)^n} \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^n} \mu^n e^{i(\mu\xi) \cdot \eta} \chi_\epsilon(\xi, \eta) b_{\hat{\lambda}}^0(\xi) d\xi \right) \partial_x^\alpha u(x - \eta) \frac{d\eta}{|\lambda| (2\pi)^n}, \end{aligned}$$

also

$$\partial_x^\alpha \left(\widetilde{b_\lambda^0(D)} u(x) \right) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}^n} K_\epsilon(\eta, \lambda) \partial_x^\alpha u(x - \eta) \frac{d\eta}{|\lambda| (2\pi)^n}, \quad (3.52)$$

wobei

$$K_\epsilon(\eta, \lambda) := \int_{\mathbb{R}^n} \mu^n e^{i(\mu\xi) \cdot \eta} \chi_\epsilon(\xi, \eta) b_{\hat{\lambda}}^0(\xi) d\xi \quad (3.53)$$

und $\chi_\epsilon(\xi, \eta) := \chi(\epsilon\xi) \chi(\epsilon\eta)$ für alle $\xi, \eta \in \mathbb{R}^n$, $0 < \epsilon < 1$ und χ eine Funktion in $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ mit $\chi \equiv 1$ auf $|\xi| \leq 1$ und $\chi \equiv 0$ auf $|\xi| \geq 2$ ist. Beachte, dass in (3.52) $\partial_x^\alpha u \in L_p(\mathbb{R}^n, E_0)$ für alle $|\alpha| \leq k$. Nun zeigen wir die folgende Behauptung.

Behauptung: i) Konstanten $C^* > 0$ und $0 < \theta < 1$ existieren, so dass für alle $\epsilon \in (0, 1)$, $\eta \in \mathbb{R}^n$, $\lambda \in \sum_{\frac{\pi}{2}, 1}$ ($|\lambda| := \mu^m$) und $a \in \mathcal{A}$:

$$(1 + |\mu\eta|) |\mu\eta|^n \|K_\epsilon(\eta, \lambda)\|_{\mathcal{L}(E_0)} \leq C^* \mu^n |\mu\eta|^\theta.$$

Dabei sind C^* und θ unabhängig von ϵ, η, λ und a .

ii) Es gibt eine messbare Funktion $K : \mathbb{R}^n \times \sum_{\frac{\pi}{2}, 1} \longrightarrow \mathcal{L}(E_0)$ mit

$$K_\epsilon(\eta, \lambda) \xrightarrow{\epsilon \rightarrow 0} K(\eta, \lambda) \text{ punktweise für jedes } (\eta, \lambda) \in \mathbb{R}_\eta^n \times \sum_{\frac{\pi}{2}, 1}$$

und

$$\|K(\cdot, \lambda)\|_{L_1(\mathbb{R}_\eta^n, \mathcal{L}(E_0))} \leq M$$

für alle $\lambda \in \sum_{\frac{\pi}{2}, 1}$ und $a \in \mathcal{A}$, wobei die Konstante $M > 0$ unabhängig von λ und a ist.

Beweis von i): Sei $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ mit $|\alpha| = n, n + 1$. Dann

$$\int_{\mathbb{R}^n} D_\xi^\alpha \left(\chi_\epsilon(\xi, \eta) b_\lambda^0(\xi) \right) d\xi = 0$$

und somit

$$\begin{aligned} \|(\mu\eta)^\alpha K_\epsilon(\eta, \lambda)\|_{\mathcal{L}(E_0)} &= \left\| \mu^n \int_{\mathbb{R}^n} e^{i(\mu\xi)\cdot\eta} D_\xi^\alpha \left[\chi_\epsilon(\xi, \eta) b_\lambda^0(\xi) \right] d\xi \right\| \\ &= \left\| \mu^n \int_{\mathbb{R}^n} \left(e^{i(\mu\xi)\cdot\eta} - 1 \right) D_\xi^\alpha \left[\chi_\epsilon(\xi, \eta) b_\lambda^0(\xi) \right] d\xi \right\| \\ &\leq 2 \int_{\mathbb{R}^n} \mu^n |\mu\xi|^\theta |\eta|^\theta \left\| D_\xi^\alpha \left[\chi_\epsilon(\xi, \eta) b_\lambda^0(\xi) \right] \right\| d\xi \end{aligned} \quad (3.54)$$

für alle $0 < \theta < 1$, weil $|e^{i(\mu\xi)\cdot\eta} - 1| < 2|\mu\xi|^\theta |\eta|^\theta$. Auf der anderen Seite erhalten wir nach der Bemerkung 3.3.1b) und dem Lemma 1.3.3:

$$\begin{aligned} \left\| D_\xi^\alpha \left[\chi_\epsilon(\xi, \eta) b_\lambda^0(\xi) \right] \right\| &\leq \sum_{\beta \leq \alpha} c_\alpha |\chi(\epsilon\eta)| \left| \partial_\xi^{\alpha-\beta} \chi(\epsilon\xi) \right| \left\| \partial_\xi^\alpha b_\lambda^0(\xi) \right\| \\ &\leq \sum_{\beta \leq \alpha} c_{\alpha,k} \langle \xi \rangle^{|\beta|-|\alpha|} \langle \xi \rangle^{m-|\beta|} \langle \xi, 1 \rangle^{-2m} \\ &\leq \tilde{c}_{\alpha,k} \langle \xi \rangle^{m-|\alpha|} \langle \xi, 1 \rangle^{-2m} \end{aligned} \quad (3.55)$$

für alle $\xi, \eta \in \mathbb{R}^n$, $0 < \epsilon < 1$, $\lambda \in \sum_{\frac{\pi}{2}, 1}$ und $a \in \mathcal{A}$.

Nun wähle $\theta \in (0, 1) \cap (0, m)$. Dann folgt aus (3.54) und (3.55)

$$\begin{aligned} \|(\mu\eta)^\alpha K_\epsilon(\eta, \lambda)\| &\leq 2\tilde{c}_{\alpha,k} \mu^n |\mu\eta|^\theta \int_{\mathbb{R}^n} |\xi|^\theta \langle \xi \rangle^{m-|\alpha|} \langle \xi, 1 \rangle^{-2m} d\xi \\ &\leq c_{\alpha,k} \mu^n |\mu\eta|^\theta \left[\int_{|\xi| \leq 1} |\xi|^\theta d\xi + C_\alpha \int_{|\xi| \geq 1} |\xi|^\theta |\xi|^{m-|\alpha|} |\xi|^{-2m} d\xi \right] \\ &< C_{\alpha,k} \mu^n |\mu\eta|^\theta, \end{aligned}$$

wobei die Konstante $C_{\alpha,k}$ nicht von μ, η und $a \in \mathcal{A}$ abhängt. Somit ergibt sich i).

Beweis von ii): Seien $\epsilon, \epsilon' \in (0, 1)$, $\xi, \eta \in \mathbb{R}^n$ und $\lambda \in \sum_{\frac{\pi}{2}, 1}$. Dann erhält man analog zu (3.54) und (3.55), dass

$$\begin{aligned} (1 + |\mu\eta|) \|\mu\eta\|^n \|K_\epsilon(\eta, \lambda) - K_{\epsilon'}(\eta, \lambda)\|_{\mathcal{L}(E_0)} \\ \leq c(n) \sum_{|\alpha|=n, n+1} \mu^n |\mu\eta|^\theta \int_{\mathbb{R}^n} |\xi|^\theta \left\| \partial_\xi^\alpha \left[(\chi_\epsilon(\xi, \eta) - \chi_{\epsilon'}(\xi, \eta)) b_\lambda^0(\xi) \right] \right\|_{\mathcal{L}(E_0)} d\xi \end{aligned}$$

und

$$|\xi|^\theta \left\| \partial_\xi^\alpha \left[(\chi_\epsilon(\xi, \eta) - \chi_{\epsilon'}(\xi, \eta)) b_\lambda^0(\xi) \right] \right\| \leq 2\tilde{c}_{\alpha,k} |\xi|^\theta \langle \xi \rangle^{m-|\alpha|} \langle \xi, 1 \rangle^{-2m} \in L_1(\mathbb{R}_\xi^n).$$

Daraus folgt zusammen mit dem Lemma 1.3.3 und dem Satz über majorisierte Konvergenz:

$$(1 + |\mu\eta|) |\mu\eta|^n \|K_\epsilon(\eta, \lambda) - K_{\epsilon'}(\eta, \lambda)\|_{\mathcal{L}(E_0)} \xrightarrow{\epsilon, \epsilon' \rightarrow 0} 0$$

punktweise auf $\mathbb{R}_\eta^n \times \sum_{\frac{\pi}{2}, 1}$, und deshalb existiert eine messbare Funktion $K : \mathbb{R}_\eta^n \times \sum_{\frac{\pi}{2}, 1} \rightarrow \mathcal{L}(E_0)$ mit

$$K_\epsilon(\eta, \lambda) \xrightarrow{\epsilon \rightarrow 0} K(\eta, \lambda).$$

Ferner erfüllt die Funktion K nach Teil i)

$$\|K(\eta, \lambda)\|_{\mathcal{L}(E_0)} \leq \frac{C^* \mu^n |\mu\eta|^{\theta-n}}{1 + |\mu\eta|} \in L_1(\mathbb{R}_\eta^n)$$

für alle $\lambda \in \sum_{\frac{\pi}{2}, 1}$ und $a \in \mathcal{A}$. Daraus folgt ii).

Nun erhält man nach (3.52), den Behauptungen i)-ii) und dem Satz über majorisierte Konvergenz für alle $|\alpha| \leq k$, $\lambda \in \sum_{\frac{\pi}{2}, 1}$ und $u \in C_b^\infty(\mathbb{R}^n, E_1) \cap W_p^k(\mathbb{R}^n, E_0)$, dass

$$\begin{aligned} \partial_x^\alpha [\widetilde{b_\lambda(D)} u(x)] &= \int_{\mathbb{R}^n} K(\eta, \lambda) (\partial_x^\alpha u)(x - \eta) \frac{d\eta}{|\lambda| (2\pi)^n} \\ &= \frac{1}{|\lambda| (2\pi)^n} [K(\cdot, \lambda) * (\partial_x^\alpha u)](x) \in L_p(\mathbb{R}^n, E_0), \end{aligned}$$

da $\partial_x^\alpha u \in L_p(\mathbb{R}^n, E_0)$. Also $\widetilde{b_\lambda(D)} u \in W_p^k(\mathbb{R}^n, E_0)$ und

$$\begin{aligned} \left\| \widetilde{b_\lambda(D)} u \right\|_{\mathcal{B}_{p,\infty}^k(\mathbb{R}^n, E_0)} &= \left(\sum_{|\alpha| \leq k} \left\| \partial_x^\alpha (\widetilde{b_\lambda(D)} u) \right\|_{L_p(\mathbb{R}^n, E_0)}^p \right)^{\frac{1}{p}} \\ &\stackrel{\text{Lem. 1.1.3}}{\leq} \frac{1}{|\lambda|} \left(\sum_{|\alpha| \leq k} \|K(\cdot, \lambda)\|_{L_1(\mathbb{R}_\eta^n, \mathcal{L}(E_0))}^p \|\partial_x^\alpha u\|_{L_p(\mathbb{R}^n, E_0)}^p \right)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq \frac{M}{1 + |\lambda|} \|u\|_{W_p^k(\mathbb{R}^n, E_0)} \quad (1 \leq p < \infty) \end{aligned}$$

für alle $u \in C_b^\infty(\mathbb{R}^n, E_0) \cap W_p^k(\mathbb{R}^n, E_0)$, $\lambda \in \sum_{\frac{\pi}{2}, 1}$ und $a \in \mathcal{A}$. Den Fall $p = \infty$ zeigt man analog. Dazu muss man oben $\sum_{|\alpha| \leq k}$ durch $\max_{|\alpha| \leq k}$ ersetzen. $\square$

Satz 3.3.2 Seien $m > 0$, $k \in \mathbb{N}_0$, $\mathfrak{F}_p^k = W_p^k$ für $1 \leq p \leq \infty$ und $\mathcal{B}$ wie in (3.31). Wir nehmen im Fall $p = \infty$ an, dass $m > k$. Außerdem seien $\mathcal{A} := \{a_\tau : \tau \in \mathfrak{I}\} \subset S^{m, \rho_n}(\mathbb{R}^n, \mathcal{L}(E_1, E_0))$ eine beschränkte Familie von parabolischen Symbolen mit denselben Konstanten $\omega > 0$ und $\kappa \geq 1$, $A^0(\tau) := \widetilde{a_\tau^0(D)} \Big|_{\mathcal{B}_{p,\infty}^{k+m}(\mathbb{R}^n, E_1)}$ für $\tau \in \mathfrak{I}$ und $A^0(\tau)_{W_p^k(\mathbb{R}^n, E_0)}$ die $W_p^k(\mathbb{R}^n, E_0)$ -Realisierung von

$A^0(\tau)$. Dabei ist a_τ^0 der Hauptteil von a_τ . Dann existieren Konstanten $M \geq 1$ und $R > 0$, so dass

$$\left\| \left(\lambda I + A^0(\tau)_{W_p^k(\mathbb{R}^n, E_0)} \right)^{-1} \right\|_{\mathcal{L}(W_p^k(\mathbb{R}^n, E_0))} \leq \frac{M}{1 + |\lambda|} \quad \text{für alle } \lambda \in \sum_{\frac{\pi}{2}, R} \quad \text{und } \tau \in \mathfrak{I},$$

wobei M und R unabhängig von λ und $\tau \in \mathfrak{I}$ sind. Somit erzeugt $-A^0(\tau)_{W_p^k(\mathbb{R}^n, E_0)}$ eine analytische Halbgruppe auf $W_p^k(\mathbb{R}^n, E_0)$.

Beweis. Nach (3.34) wissen wir, dass

$$\left(\lambda I + A^0(\tau)_{W_p^k(\mathbb{R}^n, E_0)} \right)^{-1} = \left(\lambda I + \widetilde{a_\tau^0(D)} \Big|_{B_{p,\infty}^{k+m}(\mathbb{R}^n, E_1)} \right)^{-1} \Big|_{W_p^k(\mathbb{R}^n, E_0)}. \quad (3.56)$$

Außerdem erhalten wir nach Satz 3.1.2, dass ein $R_1 \geq 0$ existiert, so dass

$$\widetilde{b_\lambda^0(D)} \Big|_{B_{p,q}^k(\mathbb{R}^n, E_0)} = \left(\lambda I + \widetilde{a_\tau^0(D)} \Big|_{B_{p,q}^{k+m}(\mathbb{R}^n, E_1)} \right)^{-1} \quad (3.57)$$

für alle $\lambda \in \sum_{\frac{\pi}{2}, R_1}$, $\tau \in \mathfrak{I}$, $p, q \in [1, \infty]$ und $k \in \mathbb{N}_0$. Daraus folgt unmittelbar

$$\left(\lambda I + A^0(\tau)_{W_\infty^k(\mathbb{R}^n, E_0)} \right)^{-1} = \widetilde{b_\lambda^0(D)} \Big|_{B_{\infty,\infty}^k(\mathbb{R}^n, E_0)} \quad \text{auf } W_\infty^k(\mathbb{R}^n, E_0). \quad (3.58)$$

Da die Abbildungen

$$\begin{aligned} \lambda I + \widetilde{a_\tau^0(D)} \Big|_{B_{p,\infty}^{k+m}(\mathbb{R}^n, E_1)} &: B_{p,\infty}^{k+m}(\mathbb{R}^n, E_1) \longrightarrow B_{p,\infty}^k(\mathbb{R}^n, E_0) \\ &\cup \\ \lambda I + \widetilde{a_\tau^0(D)} \Big|_{\dot{B}_{p,\infty}^{k+m}(\mathbb{R}^n, E_1)} &: \dot{B}_{p,\infty}^{k+m}(\mathbb{R}^n, E_1) \longrightarrow \dot{B}_{p,\infty}^k(\mathbb{R}^n, E_0) \end{aligned}$$

bijektiv sind und wegen Bemerkung 3.1.1, ist dann

$$\left(\lambda I + \widetilde{a_\tau^0(D)} \Big|_{\dot{B}_{p,\infty}^{k+m}(\mathbb{R}^n, E_1)} \right)^{-1} = \left(\lambda I + \widetilde{a_\tau^0(D)} \Big|_{B_{p,\infty}^{k+m}(\mathbb{R}^n, E_1)} \right)^{-1} \Big|_{\dot{B}_{p,\infty}^k(\mathbb{R}^n, E_0)}. \quad (3.59)$$

Weil $W_p^k(\mathbb{R}^n, E_0) \hookrightarrow \dot{B}_{p,\infty}^k(\mathbb{R}^n, E_0)$ für alle $1 \leq p < \infty$ gilt, erhält man

$$\left(\lambda I + A^0(\tau)_{W_p^k(\mathbb{R}^n, E_0)} \right)^{-1} \stackrel{(3.59)}{=} \left(\lambda I + \widetilde{a_\tau^0(D)} \Big|_{B_{p,\infty}^{k+m}(\mathbb{R}^n, E_1)} \right)^{-1} \Big|_{W_p^k(\mathbb{R}^n, E_0)} \stackrel{(3.57)}{=} \widetilde{b_\lambda^0(D)} \Big|_{W_p^k(\mathbb{R}^n, E_0)}.$$

Nun gibt es nach Satz 3.3.1 Konstanten $M \geq 1$ und $R_2 > R_1$, so dass für alle $\lambda \in \sum_{\frac{\pi}{2}, R_2}$ und $\tau \in \mathfrak{J}$:

$$\left\| \left(\lambda I + A^0(\tau)_{W_p^k(\mathbb{R}^n, E_0)} \right)^{-1} u \right\|_{W_p^k(\mathbb{R}^n, E_0)} \leq \frac{M}{1 + |\lambda|} \|u\|_{W_p^k(\mathbb{R}^n, E_0)} \quad \forall u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n, E_0), \quad 1 \leq p < \infty, \quad (3.60)$$

$$\left\| \left(\lambda I + A^0(\tau)_{W_\infty^k(\mathbb{R}^n, E_0)} \right)^{-1} u \right\|_{W_\infty^k(\mathbb{R}^n, E_0)} \leq \frac{M}{1 + |\lambda|} \|u\|_{W_\infty^k(\mathbb{R}^n, E_0)} \quad \forall u \in C_b^\infty(\mathbb{R}^n, E_0). \quad (3.61)$$

Im Falle $1 \leq p < \infty$ ist $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n, E_0) \xrightarrow{d} W_p^k(\mathbb{R}^n, E_0)$ und daher

$$\left\| \left(\lambda I + A^0(\tau)_{W_p^k(\mathbb{R}^n, E_0)} \right)^{-1} \right\|_{\mathcal{L}(W_p^k(\mathbb{R}^n, E_0))} \leq \frac{M}{1 + |\lambda|} \quad \text{falls } 1 \leq p < \infty. \quad (3.62)$$

Es bleibt nur die Abschätzung (3.61) für alle $u \in W_\infty^k(\mathbb{R}^n, E_0)$ unter der Voraussetzung $m > k$ zu zeigen.

Da $m > k$, gibt es ein $r_1 \in \mathbb{R}$ (z.B. $r_1 = \frac{k-m}{2}$) mit $r_1 < k < r_1 + m$. Nun wählen wir ein $R_3 > R_2$, so dass (3.56), (3.61), (3.62) für alle $\lambda \in \sum_{\frac{\pi}{2}, R_3}$ und $\tau \in \mathfrak{J}$ gelten und die Abbildungen

$$\begin{aligned} \lambda I + \widetilde{a_\tau^0(D)} \Big|_{B_{\infty,1}^{r_1+m}(\mathbb{R}^n, E_1)} &: B_{\infty,1}^{r_1+m}(\mathbb{R}^n, E_1) \longrightarrow B_{\infty,1}^{r_1}(\mathbb{R}^n, E_0) \\ &\cup \qquad \qquad \qquad \cup \\ \lambda I + \widetilde{a_\tau^0(D)} \Big|_{B_{\infty,\infty}^{k+m}(\mathbb{R}^n, E_1)} &: B_{\infty,\infty}^{k+m}(\mathbb{R}^n, E_1) \longrightarrow B_{\infty,\infty}^k(\mathbb{R}^n, E_0) \end{aligned}$$

bijektiv und stetig sind (dies ist möglich wegen (3.1) und Satz 3.1.2). Dann

$$\left(\lambda I + \widetilde{a_\tau^0(D)} \Big|_{B_{\infty,\infty}^{k+m}(\mathbb{R}^n, E_1)} \right)^{-1} = \left(\lambda I + \widetilde{a_\tau^0(D)} \Big|_{B_{\infty,1}^{r_1+m}(\mathbb{R}^n, E_1)} \right)^{-1} \Big|_{B_{\infty,\infty}^k(\mathbb{R}^n, E_0)} \quad (3.63)$$

nach der Bemerkung 3.1.1.

Nun seien $u \in W_\infty^k(\mathbb{R}^n, E_0)$ und $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ mit $\psi \equiv 1$ auf $\overline{B_1(0)}$, $0 \leq \psi \leq 1$ und $\psi \equiv 0$ auf $\mathbb{R}^n \setminus B_2(0)$. Ferner sei $\psi_l(\xi) := \psi(2^{-l}\xi)$ für $\xi \in \mathbb{R}^n$, $l \in \mathbb{N}_0$. Seien darüber hinaus $r_2 \in \mathbb{R}$ mit $r_1 < r_2 < k$ und $r := r_2 - r_1 > 0$. Dann ist offensichtlich, dass $\psi_l \in S_{1,0}^{r,\rho_n}(\mathbb{R}^n)$ und $u_l := \psi_l(D)u \in C_b^\infty(\mathbb{R}^n, E_0)$. Somit erhält man zusammen mit (3.56), (3.63), (3.13) für alle $\lambda \in \sum_{\frac{\pi}{2}, R_3}$ und $\tau \in \mathfrak{J}$, dass von λ und τ unabhängige Konstanten c_i , $i = 1, 2, 3$, existieren, so

dass

$$\begin{aligned}
& \left\| \left(\lambda I + A^0(\tau)_{W_\infty^k(\mathbb{R}^n, E_0)} \right)^{-1} (u - u_l) \right\|_{W_\infty^k(\mathbb{R}^n, E_0)} \\
&= \left\| \left(\lambda I + \widetilde{a_\tau^0(D)} \Big|_{B_{\infty, \infty}^{k+m}(\mathbb{R}^n, E_1)} \right)^{-1} (u - u_l) \right\|_{W_\infty^k(\mathbb{R}^n, E_0)} \\
&\leq c_1 \left\| \left(\lambda I + \widetilde{a_\tau^0(D)} \Big|_{B_{\infty, 1}^{r_1+m}(\mathbb{R}^n, E_1)} \right)^{-1} (u - u_l) \right\|_{B_{\infty, 1}^{r_1+m}(E_1)} \\
&\leq c_2 \|u - u_l\|_{B_{\infty, 1}^{r_1}(\mathbb{R}^n, E_0)} \\
&= c_2 \|(I - \psi_l(D)) u\|_{B_{\infty, 1}^{r_1}(\mathbb{R}^n, E_0)} \\
&\leq c_3 \|1 - \psi_l\|_{S_{1,0}^{r, n+1}(\mathbb{R}^n)} \|u\|_{B_{\infty, 1}^{r_2}(\mathbb{R}^n, E_0)} \\
&\longrightarrow 0, \text{ wenn } l \rightarrow \infty.
\end{aligned}$$

Also

$$\left(\lambda I + A^0(\tau)_{W_\infty^k(\mathbb{R}^n, E_0)} \right)^{-1} u_l \xrightarrow{l \rightarrow \infty} \left(\lambda I + A^0(\tau)_{W_\infty^k(\mathbb{R}^n, E_0)} \right)^{-1} u \quad \text{in } W_\infty^k(\mathbb{R}^n, E_0) \quad (3.64)$$

und gleichmäßig in $\tau \in \mathfrak{I}$. Weil

$$\begin{aligned}
\|(\psi_l(D)) u\|_{W_\infty^k(\mathbb{R}^n, E_0)} &= (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \|\check{\psi}_l * u\|_{W_\infty^k(\mathbb{R}^n, E_0)} \\
&= (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \max_{|\alpha| \leq k} \|\check{\psi}_l * \partial_x^\alpha u\|_{L_\infty(\mathbb{R}^n, E_0)} \\
&\leq \|\check{\psi}_l\|_{L_1(\mathbb{R}^n)} \max_{|\alpha| \leq k} \|\partial_x^\alpha u\|_{L_\infty(\mathbb{R}^n, E_0)} \\
&= \|\check{\psi}\|_{L_1(\mathbb{R}^n)} \|u\|_{W_\infty^k(\mathbb{R}^n, E_0)},
\end{aligned}$$

erhalten wir zusammen mit (3.61), dass

$$\begin{aligned}
\left\| \left(\lambda I + A^0(\tau)_{W_\infty^k(\mathbb{R}^n, E_0)} \right)^{-1} u_l \right\|_{W_\infty^k(\mathbb{R}^n, E_0)} &\leq \frac{M}{1 + |\lambda|} \|u_l\|_{W_\infty^k(\mathbb{R}^n, E_0)} \\
&\leq \frac{M \|\check{\psi}\|_{L_1(\mathbb{R}^n)}}{1 + |\lambda|} \|u\|_{W_\infty^k(\mathbb{R}^n, E_0)} \\
&= \frac{\hat{M}}{1 + |\lambda|} \|u\|_{W_\infty^k(\mathbb{R}^n, E_0)}
\end{aligned}$$

für alle $\lambda \in \sum_{\frac{\pi}{2}, R_3}$ und $\tau \in \mathfrak{I}$, wobei die Konstante $\hat{M} := M \|\check{\psi}\|_{L_1(\mathbb{R}^n)}$ unabhängig von $\tau \in \mathfrak{I}$ und l ist.

Daraus folgt

$$\left\| \left(\lambda I + A^0(\tau)_{W_\infty^k(\mathbb{R}^n, E_0)} \right)^{-1} u \right\|_{W_\infty^k(\mathbb{R}^n, E_0)} \leq \frac{\hat{M}}{1 + |\lambda|} \|u\|_{W_\infty^k(\mathbb{R}^n, E_0)} \quad \text{für alle } u \in W_\infty^k(\mathbb{R}^n, E_0), \quad (3.65)$$

$\lambda \in \sum_{\frac{\pi}{2}, R_3}$ und $\tau \in \mathfrak{I}$. $\square$

Nun werden wir den Hauptsatz dieses Kapitels darlegen.

Satz 3.3.3 *Seien $m > 0$, $k \in \mathbb{N}_0$, $\mathfrak{F}_p^k = W_p^k$ für $1 \leq p \leq \infty$ und $\mathcal{B}$ wie in (3.31). Wir nehmen im Fall $p = \infty$ an, dass $m > k$. Außerdem seien $\mathcal{A} := \{a_\tau : \tau \in \mathfrak{I}\} \subset S^{m, \rho_n}(\mathbb{R}^n, \mathcal{L}(E_1, E_0))$ eine beschränkte Familie von parabolischen Symbolen mit denselben Konstanten $\omega > 0$ und $\kappa \geq 1$, $A(\tau) := \widetilde{a_\tau(D)} \Big|_{B_{p, \infty}^{k+m}(\mathbb{R}^n, E_1)}$ für $\tau \in \mathfrak{I}$ und $A(\tau)_{W_p^k(\mathbb{R}^n, E_0)}$ die $W_p^k(\mathbb{R}^n, E_0)$ -Realisierung von $A(\tau)$. Dann gelten:*

a)

$$B_{p,1}^{k+m}(\mathbb{R}^n, E_1) \xrightarrow{d} D\left(A(\tau)_{W_p^k(\mathbb{R}^n, E_0)}\right) \xrightarrow{d} b_{p,\infty}^{k+m}(\mathbb{R}^n, E_1), \quad 1 \leq p < \infty, \quad (3.66)$$

$$B_{\infty,1}^{k+m}(\mathbb{R}^n, E_1) \hookrightarrow D\left(A(\tau)_{W_\infty^k(\mathbb{R}^n, E_0)}\right) \hookrightarrow B_{\infty,\infty}^{k+m}(\mathbb{R}^n, E_1). \quad (3.67)$$

b) Ist $E_0 = E_1$, so existieren Konstanten $M \geq 1$ und $R > 0$, so dass

$$\left\| \left(\lambda I + A(\tau)_{W_p^k(\mathbb{R}^n, E_0)} \right)^{-1} \right\|_{\mathcal{L}(W_p^k(\mathbb{R}^n, E_0))} \leq \frac{M}{1 + |\lambda|} \quad \text{für alle } \lambda \in \sum_{\frac{\pi}{2}, R} \text{ und } \tau \in \mathfrak{I},$$

wobei M und R unabhängig von λ und $\tau \in \mathfrak{I}$ sind. Somit erzeugt $-A(\tau)_{W_p^k(\mathbb{R}^n, E_0)}$ eine analytische Halbgruppe auf $W_p^k(\mathbb{R}^n, E_0)$.

Beweis. a) Die Aussagen (3.66) und (3.67) folgen aus (3.1) und aus der Gleichheit $\mathring{B}_{p,\infty}^k(\mathbb{R}^n, E_1) = b_{p,\infty}^k(\mathbb{R}^n, E_1)$ für $1 \leq p < \infty$, denn man erhält nach Definition 3.2.2 mit

$$\begin{aligned} A(\tau) : D(A(\tau)) \subset b_{p,\infty}^k(\mathbb{R}^n, E_0) &=: \mathbb{E}_0 \longrightarrow \mathbb{E}_0 \text{ und} \\ A(\tau)_{W_p^k} : D\left(A(\tau)_{W_p^k}\right) \subset W_p^k(\mathbb{R}^n, E_0) &=: \mathbb{E}_1 \longrightarrow \mathbb{E}_1, \end{aligned}$$

dass

$$D\left(A(\tau)_{W_p^k(\mathbb{R}^n, E_0)}\right) = \left\{ u \in b_{p,\infty}^{k+m}(\mathbb{R}^n, E_1) : \widetilde{a_\tau(D)} \Big|_{b_{p,\infty}^{k+m}(\mathbb{R}^n, E_1)} u \in W_p^k(\mathbb{R}^n, E_0) \right\}, \quad p < \infty,$$

und somit¹

$$B_{p,1}^{k+m}(\mathbb{R}^n, E_1) \hookrightarrow D\left(A(\tau)_{W_p^k(\mathbb{R}^n, E_0)}\right) \hookrightarrow b_{p,\infty}^{k+m}(\mathbb{R}^n, E_1), \quad 1 \leq p < \infty.$$

¹ $D\left(A(\tau)_{W_p^k(\mathbb{R}^n, E_0)}\right)$ wurde mit der Graphnorm (3.46) versehen.

Nun sei $u \in b_{p,\infty}^{k+m}(\mathbb{R}^n, E_1)$. Dann existiert (wegen der Definition von den kleinen Besovräumen b) eine Folge $(u_l)_{l \in \mathbb{N}} \subset B_{p,\infty}^{k+m+1}(\mathbb{R}^n, E_1)$ mit $u_l \rightarrow u$ in $B_{p,\infty}^{k+m}(\mathbb{R}^n, E_1)$. Ferner erhält man nach (3.1), dass

$$\widetilde{a_\tau(D)} \Big|_{b_{p,\infty}^{k+m}(\mathbb{R}^n, E_1)} u_l = \widetilde{a_\tau(D)} \Big|_{B_{p,\infty}^{k+m+1}(\mathbb{R}^n, E_1)} u_l \in B_{p,\infty}^{k+1}(\mathbb{R}^n, E_1) \hookrightarrow W_p^k(\mathbb{R}^n, E_0)$$

Daraus folgt $D \left(A(\tau)_{W_p^k} \right) \xrightarrow{d} b_{p,\infty}^{k+m}(\mathbb{R}^n, E_1)$.

Weiterhin sei $u \in D \left(A(\tau)_{W_p^k} \right)$. Dann erhält man nach Definition von $D \left(A(\tau)_{W_p^k} \right)$ für ein $\lambda \in S_{\theta,\omega} \subset \rho(-A(\tau))$ wie im Satz 3.2.1, dass

$$v := \left(\lambda I + \widetilde{a_\tau(D)} \Big|_{b_{p,\infty}^{k+m}(\mathbb{R}^n, E_1)} \right) u \in W_p^k(\mathbb{R}^n, E_0).$$

Da $B_{p,1}^k(\mathbb{R}^n, E_0) \xrightarrow{d} W_p^k(\mathbb{R}^n, E_0)$ für $1 \leq p < \infty$, existiert eine Folge $(v_l)_{l \in \mathbb{N}} \subset B_{p,1}^k(\mathbb{R}^n, E_0)$ mit

$$v_l \longrightarrow v \text{ in } W_p^k(\mathbb{R}^n, E_0). \quad (3.68)$$

Aber aufgrund vom Satz 3.2.1 wissen wir, dass

$$\left(\lambda I + A(\tau)_{W_p^k} \right)^{-1} = \left(\lambda I + \widetilde{a_\tau(D)} \Big|_{b_{p,\infty}^{k+m}(\mathbb{R}^n, E_1)} \right)^{-1} \Big|_{W_p^k(\mathbb{R}^n, E_0)} : W_p^k(\mathbb{R}^n, E_0) \longrightarrow W_p^k(\mathbb{R}^n, E_0)$$

stetig ist. Daraus folgt

$$u_l := \left(\lambda I + \widetilde{a_\tau(D)} \Big|_{b_{p,\infty}^{k+m}(\mathbb{R}^n, E_1)} \right)^{-1} v_l \longrightarrow u \text{ in } W_p^k(\mathbb{R}^n, E_0). \quad (3.69)$$

Auf der anderen Seite erhalten wir nach $B_{p,1}^{k+m}(\mathbb{R}^n, E_1) = b_{p,1}^{k+m}(\mathbb{R}^n, E_1) \hookrightarrow b_{p,\infty}^{k+m}(\mathbb{R}^n, E_1)$ (siehe Satz 1.1.2 f)) und der Bemerkung 3.1.1, dass

$$u_l = \left(\lambda I + \widetilde{a_\tau(D)} \Big|_{b_{p,\infty}^{k+m}(\mathbb{R}^n, E_1)} \right)^{-1} v_l = \left(\lambda I + \widetilde{a_\tau(D)} \Big|_{B_{p,1}^{k+m}(\mathbb{R}^n, E_1)} \right)^{-1} v_l \in B_{p,1}^{k+m}(\mathbb{R}^n, E_1) \quad (3.70)$$

für alle $l \in \mathbb{N}$. Dann folgt aus (3.68)-(3.70), dass eine Folge $(u_l)_{l \in \mathbb{N}} \subset B_{p,1}^{k+m}(\mathbb{R}^n, E_1)$ existiert, so dass

$$\begin{aligned} \|u - u_l\|_{D(A_{W_p^k})} &= \|u - u_l\|_{W_p^k} + \left\| \widetilde{a_\tau(D)} \Big|_{b_{p,\infty}^{k+m}(\mathbb{R}^n, E_1)} (u - u_l) \right\|_{W_p^k} \\ &= \|u - u_l\|_{W_p^k} + \|v - \lambda u - v_l + \lambda u_l\|_{W_p^k} \\ &\leq (1 + |\lambda|) \|u - u_l\|_{W_p^k} + \|v - v_l\|_{W_p^k} \longrightarrow 0, \text{ wenn } l \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Somit liegt $B_{p,1}^{k+m}(\mathbb{R}^n, E_1)$ dicht in $D\left(A(\tau)_{W_p^k}\right)$ für $1 \leq p < \infty$. Folglich ist (3.66) bewiesen. Analog zeigt man (3.67).

Beweis von b) Es reicht zu zeigen, dass der Operator

$$-A(\tau)_{W_p^k} : D\left(A(\tau)_{W_p^k}\right) \subset W_p^k(\mathbb{R}^n, E_0) \longrightarrow W_p^k(\mathbb{R}^n, E_0)$$

sektoriell ist. Dazu wenden wir den (Störungs-)Satz 1.2.2 an. Sei $\tau \in \mathfrak{I}$ gegeben. Dann

$$a_\tau = a_\tau^0 + (a_\tau - a_\tau^0), \quad (3.71)$$

wobei $-A^0(\tau)_{W_p^k}$ wegen der Sätze 3.3.2 und 1.2.1 sektoriell ist.

Weil $q_\tau := a_\tau - a_\tau^0 \in S_{1,0}^{m-1,\rho_n}(\mathbb{R}^n, \mathcal{L}(E_1, E_0))$ und $\mathcal{B}_{p,\infty}^t(\mathbb{R}^n, E_0) \hookrightarrow \mathcal{B}_{p,\infty}^s(\mathbb{R}^n, E_0) \hookrightarrow \mathfrak{F}_p^k(\mathbb{R}^n, E_0)$ für alle $0 \leq k < s < t$ gelten, erhält man nach (3.1) für alle $\epsilon \in (0, 1) \cap (0, m)$

$$\begin{aligned} \widetilde{q_\tau(D)}_{\mathfrak{F}_p^k(\mathbb{R}^n, E_0)} &= \widetilde{q_\tau(D)} \Big|_{\mathcal{B}_{p,\infty}^{k+m}(\mathbb{R}^n, E_1)} \\ &= \widetilde{q_\tau(D)} \Big|_{\mathcal{B}_{p,1}^{k+m-\epsilon}(\mathbb{R}^n, E_1)} \in \mathcal{L}\left(\mathcal{B}_{p,1}^{k+m-\epsilon}(\mathbb{R}^n, E_1), \mathcal{B}_{p,1}^{k+1-\epsilon}(\mathbb{R}^n, E_0)\right) \end{aligned}$$

und $\mathcal{L}\left(\mathcal{B}_{p,1}^{k+m-\epsilon}(\mathbb{R}^n, E_1), \mathcal{B}_{p,1}^{k+1-\epsilon}(\mathbb{R}^n, E_0)\right) \hookrightarrow \mathcal{L}\left(\mathcal{B}_{p,1}^{k+m-\epsilon}(\mathbb{R}^n, E_1), \mathfrak{F}_p^k(\mathbb{R}^n, E_0)\right)$. Außerdem ergibt sich aus (1.28), (3.32), (3.66), (3.67) und Satz 1.1.3d) mit $\theta := \frac{m-\epsilon}{m}$, dass

$$\left(\mathfrak{F}_p^k(\mathbb{R}^n, E_0), D(A(\tau)_{\mathfrak{F}_p^k})\right)_{\theta,1} \doteq \left(B_{p,1}^k(\mathbb{R}^n, E_0), B_{p,1}^{k+m}(\mathbb{R}^n, E_0)\right)_{\theta,1} \doteq B_{p,1}^{k+m-\epsilon}(\mathbb{R}^n, E_0)$$

für alle $1 \leq p \leq \infty$. Zusätzlich ist $D(A^0(\tau)_{\mathfrak{F}_p^k}) = D(A(\tau)_{\mathfrak{F}_p^k})$, denn $a - a^0 \in S_{1,0}^{m-1,\rho_n}(\mathbb{R}^n, \mathcal{L}(E_0))$ und deswegen

$$\widetilde{(a - a^0)(D)} \Big|_{\mathcal{B}_{p,\infty}^{k+m}(\mathbb{R}^n, E_0)} u \in \mathcal{B}_{p,\infty}^{k+1} \hookrightarrow \mathcal{B}_{p,1}^k \hookrightarrow \mathfrak{F}_p^k \text{ für alle } u \in \mathcal{B}_{p,\infty}^{k+m}(\mathbb{R}^n, E_0).$$

Nun folgt die Behauptung aus dem Satz 1.2.2. □

Korollar 3.3.1 *Seien die Voraussetzungen wie im Satz 3.3.3 mit $p = \infty$, $m > k$, aber nun $\mathfrak{F}_\infty^k \in \{BUC^k, C_0^k, C_b^k\}$ und $\mathcal{B}$ wie in (3.31). Dann gelten:*

a)

$$\begin{aligned} b_{\infty,1}^{k+m}(\mathbb{R}^n, E_1) &\xrightarrow{d} D\left(A(\tau)_{BUC^k(\mathbb{R}^n, E_0)}\right) \xrightarrow{d} b_{\infty,\infty}^{k+m}(\mathbb{R}^n, E_1), \\ \dot{B}_{\infty,1}^{k+m}(\mathbb{R}^n, E_1) &\xrightarrow{d} D\left(A(\tau)_{C_0^k(\mathbb{R}^n, E_0)}\right) \xrightarrow{d} \dot{B}_{\infty,\infty}^{k+m}(\mathbb{R}^n, E_1), \\ B_{\infty,1}^{k+m}(\mathbb{R}^n, E_1) &\hookrightarrow D\left(A(\tau)_{C_b^k(\mathbb{R}^n, E_0)}\right) \hookrightarrow B_{\infty,\infty}^{k+m}(\mathbb{R}^n, E_1). \end{aligned} \quad (3.72)$$

b) Ist $E_1 = E_0$, so erzeugt

$$-A(\tau)_{\mathfrak{F}_\infty^k} : D\left(A(\tau)_{\mathfrak{F}_\infty^k}\right) \longrightarrow \mathfrak{F}_\infty^k(\mathbb{R}^n, E_0)$$

eine analytische Halbgruppe auf $\mathfrak{F}_\infty^k(\mathbb{R}^n, E_0)$ für alle $\tau \in \mathfrak{I}$. Genauer gibt es Konstanten $\theta \in]\frac{\pi}{2}, \pi[$, $M \geq 1$ und $\omega > 0$, so dass

$$\left\| \left(\lambda I + A(\tau)_{\mathfrak{F}_\infty^k} \right)^{-1} \right\|_{\mathcal{L}(\mathfrak{F}_\infty^k)} \leq \frac{M}{1 + |\lambda|} \quad (3.73)$$

für alle $\lambda \in S_{\theta, \omega}$ und $\tau \in \mathfrak{I}$.

Beweis. b) Wir wissen bereits aufgrund von (3.44) und (3.45) dass es ein $R_1 > 0$ gibt, so dass $\left(\lambda I + A(\tau)_{\mathfrak{F}_\infty^k} \right)^{-1} (\mathfrak{F}_\infty^k) \subset \mathfrak{F}_\infty^k(\mathbb{R}^n, E_0)$ für alle $\lambda \in \sum_{\frac{\pi}{2}, R_1}$, $\tau \in \mathfrak{I}$. Auf der anderen Seite erhalten wir wegen $\mathcal{B}_{\infty, \infty}^{k+m}(\mathbb{R}^n, E_0) \cap \mathfrak{F}_\infty^k(\mathbb{R}^n, E_0) = \mathcal{B}_{\infty, \infty}^{k+m}(\mathbb{R}^n, E_0)$ und der Definition von Realisierung eines Operators, dass

$$\begin{aligned} D\left(A(\tau)_{\mathfrak{F}_\infty^k}\right) &= \left\{ u \in \mathcal{B}_{\infty, \infty}^{k+m}(\mathbb{R}^n, E_0) : \widetilde{a_\tau(D)} \Big|_{\mathcal{B}_{\infty, \infty}^{k+m}(\mathbb{R}^n, E_0)} u \in \mathfrak{F}_\infty^k(\mathbb{R}^n, E_0) \right\}, \\ A(\tau)_{\mathfrak{F}_\infty^k} u &= \widetilde{a_\tau(D)} \Big|_{\mathcal{B}_{\infty, \infty}^{k+m}(\mathbb{R}^n, E_0)} u \quad \text{für } u \in D\left(A(\tau)_{\mathfrak{F}_\infty^k}\right) \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} D\left(A(\tau)_{W_\infty^k}\right) &= \left\{ u \in \mathcal{B}_{\infty, \infty}^{k+m}(\mathbb{R}^n, E_0) : \widetilde{a_\tau(D)} \Big|_{\mathcal{B}_{\infty, \infty}^{k+m}(\mathbb{R}^n, E_0)} u \in W_\infty^k(\mathbb{R}^n, E_0) \right\}, \\ A(\tau)_{W_\infty^k} u &= \widetilde{a_\tau(D)} \Big|_{\mathcal{B}_{\infty, \infty}^{k+m}(\mathbb{R}^n, E_0)} u \quad \text{für } u \in D\left(A(\tau)_{W_\infty^k}\right). \end{aligned}$$

Da $\mathcal{B}_{\infty, \infty}^{k+m}(\mathbb{R}^n, E_0) \hookrightarrow \mathcal{B}_{\infty, \infty}^{k+m}(\mathbb{R}^n, E_0)$ (siehe (1.28)) und $\mathfrak{F}_\infty^k(\mathbb{R}^n, E_0) \hookrightarrow W_\infty^k(\mathbb{R}^n, E_0)$ gelten, ist dann

$$D\left(A(\tau)_{\mathfrak{F}_\infty^k}\right) \subset D\left(A(\tau)_{W_\infty^k}\right) \quad \text{und} \quad A(\tau)_{\mathfrak{F}_\infty^k} = A(\tau)_{W_\infty^k} \quad \text{auf } D\left(A(\tau)_{\mathfrak{F}_\infty^k}\right).$$

Nach Satz 3.2.1 gibt es eine Konstante $R_2 \geq R_1$, so dass für alle $\lambda \in \sum_{\frac{\pi}{2}, R_2}$, $\tau \in \mathfrak{I}$ die Abbildungen

$$\begin{aligned} \lambda I + A(\tau)_{W_\infty^k} : D\left(A(\tau)_{W_\infty^k}\right) &\longrightarrow W_\infty^k(\mathbb{R}^n, E_0) \\ \cup &\cup \\ \lambda I + A(\tau)_{\mathfrak{F}_\infty^k} : D\left(A(\tau)_{\mathfrak{F}_\infty^k}\right) &\longrightarrow \mathfrak{F}_\infty^k(\mathbb{R}^n, E_0) \end{aligned}$$

bijektiv sind. Daher erhält man wegen der Bemerkung 3.1.1, dass

$$\left(\lambda I + A(\tau)_{\mathfrak{F}_\infty^k} \right)^{-1} = \left(\lambda I + A(\tau)_{W_\infty^k} \right)^{-1} \quad \text{auf } \mathfrak{F}_\infty^k(\mathbb{R}^n, E_0).$$

Daraus folgt zusammen mit (3.65) und der Definitionen der Normen $\|\cdot\|_{W_\infty^k}$ und $\|\cdot\|_{\mathfrak{F}_\infty^k}$ die Behauptung (3.73).

Beweis von a) Ein Beweis für die stetigen Einbettungen in (3.72) führt man analog zum Beweis von (3.66) und (3.67). Als Beispiel werden wir im Folgenden den ersten Ausdruck in (3.72) zeigen.

Es ist klar, dass

$$D(A(\tau)_{BUC^k}) = \left\{ u \in b_{\infty,\infty}^{k+m}(\mathbb{R}^n, E_1) : \widetilde{a_\tau(D)} \Big|_{b_{\infty,\infty}^{k+m}(\mathbb{R}^n, E_1)} u \in BUC^k(\mathbb{R}^n, E_0) \right\},$$

$$A(\tau)_{BUC^k} u = \widetilde{a_\tau(D)} \Big|_{b_{\infty,\infty}^{k+m}(\mathbb{R}^n, E_1)} u \quad \text{für } u \in D(A(\tau)_{BUC^k}).$$

Daraus ergibt sich sofort $D(A(\tau)_{BUC^k}) \hookrightarrow b_{\infty,\infty}^{k+m}(\mathbb{R}^n, E_1)$. Nun sei $u \in b_{\infty,\infty}^{k+m}(\mathbb{R}^n, E_1)$. Dann existiert nach Definition eine Folge $(u_l)_{l \in \mathbb{N}} \subset B_{\infty,\infty}^{k+m+1}(\mathbb{R}^n, E_1)$ mit $u_l \rightarrow u$ in $B_{\infty,\infty}^{k+m}(\mathbb{R}^n, E_1)$. Außerdem haben wir wegen (3.1), (1.19) und (3.28), dass

$$\widetilde{a_\tau(D)} \Big|_{b_{\infty,\infty}^{k+m}(\mathbb{R}^n, E_1)} u_l = \widetilde{a_\tau(D)} \Big|_{B_{\infty,\infty}^{k+m+1}(\mathbb{R}^n, E_1)} u_l \in B_{\infty,\infty}^{k+1}(\mathbb{R}^n, E_1) \hookrightarrow BUC^k(\mathbb{R}^n, E_0).$$

Also $D(A(\tau)_{BUC^k}) \xrightarrow{d} b_{\infty,\infty}^{k+m}(\mathbb{R}^n, E_1)$.

Nun sei $u \in b_{\infty,1}^{k+m}(\mathbb{R}^n, E_1)$. Dann ist $u \in b_{\infty,\infty}^{k+m}(\mathbb{R}^n, E_1)$ wegen Satz 1.1.2 f), und nach (3.1), (1.35), (3.28) ist

$$\widetilde{a_\tau(D)} \Big|_{b_{\infty,\infty}^{k+m}(\mathbb{R}^n, E_1)} u = \widetilde{a_\tau(D)} \Big|_{b_{\infty,1}^{k+m}(\mathbb{R}^n, E_1)} u \in b_{\infty,1}^k(\mathbb{R}^n, E_1) \hookrightarrow BUC^k(\mathbb{R}^n, E_0).$$

Dies liefert $b_{\infty,1}^k(\mathbb{R}^n, E_1) \hookrightarrow D(A(\tau)_{BUC^k})$.

Weiterhin sei $u \in D(A(\tau)_{BUC^k})$. Dann erhält man nach Definition von $D(A(\tau)_{BUC^k})$ für ein $\lambda \in S_{\theta,\omega} \subset \rho(-A(\tau))$ wie im Satz 3.2.1, dass

$$v := \left(\lambda I + \widetilde{a_\tau(D)} \Big|_{b_{\infty,\infty}^{k+m}(\mathbb{R}^n, E_0)} \right) u \in BUC^k(\mathbb{R}^n, E_0).$$

Da $b_{\infty,1}^k(\mathbb{R}^n, E_0) \xrightarrow{d} BUC^k(\mathbb{R}^n, E_0)$ ist, existiert eine Folge $(v_l)_{l \in \mathbb{N}} \subset b_{\infty,1}^k(\mathbb{R}^n, E_0)$ mit

$$v_l \longrightarrow v \text{ in } BUC^k(\mathbb{R}^n, E_0). \quad (3.74)$$

Aber nach Satz 3.2.1 wissen wir, dass

$$(\lambda I + A(\tau)_{BUC^k})^{-1} = \left(\lambda I + \widetilde{a_\tau(D)} \Big|_{b_{\infty,\infty}^{k+m}(\mathbb{R}^n, E_1)} \right)^{-1} \Big|_{BUC^k(\mathbb{R}^n, E_0)} : BUC^k(E_0) \longrightarrow BUC^k(E_0)$$

stetig ist. Daraus folgt

$$u_l := \left(\lambda I + \widetilde{a_\tau(D)} \Big|_{b_{\infty,\infty}^{k+m}(\mathbb{R}^n, E_1)} \right)^{-1} v_l \longrightarrow u \text{ in } BUC^k(\mathbb{R}^n, E_0). \quad (3.75)$$

Auf der anderen Seite erhalten wir nach $b_{\infty,1}^{k+m}(\mathbb{R}^n, E_1) \hookrightarrow b_{\infty,\infty}^{k+m}(\mathbb{R}^n, E_1)$ (siehe Satz 1.1.2 f)) und der Bemerkung 3.1.1, dass

$$u_l = \left(\lambda I + \widetilde{a_\tau(D)} \Big|_{b_{\infty,\infty}^{k+m}(\mathbb{R}^n, E_1)} \right)^{-1} v_l = \left(\lambda I + \widetilde{a_\tau(D)} \Big|_{b_{\infty,1}^{k+m}(\mathbb{R}^n, E_1)} \right)^{-1} v_l \in b_{\infty,1}^{k+m}(\mathbb{R}^n, E_1) \quad (3.76)$$

für alle $l \in \mathbb{N}$. Dann folgt aus (3.74)-(3.76), dass eine Folge $(u_l)_{l \in \mathbb{N}} \subset b_{\infty,1}^{k+m}(\mathbb{R}^n, E_1)$ existiert, so dass

$$\begin{aligned} \|u - u_l\|_{D(A(\tau)_{BUC^k})} &= \|u - u_l\|_{BUC^k} + \left\| \widetilde{a_\tau(D)} \Big|_{b_{\infty,\infty}^{k+m}(\mathbb{R}^n, E_1)} (u - u_l) \right\|_{BUC^k} \\ &= \|u - u_l\|_{BUC^k} + \|v - \lambda u - v_l + \lambda u_l\|_{BUC^k} \\ &\leq (1 + |\lambda|) \|u - u_l\|_{BUC^k} + \|v - v_l\|_{BUC^k} \longrightarrow 0, \text{ wenn } l \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Somit ist $B_{p,1}^{k+m}(\mathbb{R}^n, E_1) \xrightarrow{d} D(A(\tau)_{W_p^k})$. $\square$

Mit der Bezeichnung in (3.31) lassen sich der Satz 3.3.3 und sein Korollar in einem Satz zusammenfassen:

Satz 3.3.4 Seien $m > 0$, $k \in \mathbb{N}_0$, $\mathfrak{F}_p^k = W_p^k$ für $1 \leq p < \infty$, $\mathfrak{F}_\infty^k \in \{W_\infty^k, BUC^k, C_0^k, C_b^k\}$ und $\mathcal{B}$ wie in (3.31). Wir nehmen im Fall $p = \infty$ an, dass $m > k$. Außerdem seien $\mathcal{A} := \{a_\tau : \tau \in \mathfrak{I}\} \subset S^{m, \rho_n}(\mathbb{R}^n, \mathcal{L}(E_1, E_0))$ eine beschränkte Familie von parabolischen Symbolen mit denselben Konstanten $\omega > 0$ und $\kappa \geq 1$, $A(\tau) := \widetilde{a_\tau(D)} \Big|_{\mathcal{B}_{p,\infty}^{k+m}(\mathbb{R}^n, E_1)}$ für $\tau \in \mathfrak{I}$ und $A(\tau)_{\mathfrak{F}_p^k(\mathbb{R}^n, E_0)}$ die $\mathfrak{F}_p^k(\mathbb{R}^n, E_0)$ -Realisierung von $A(\tau)$. Dann gelten:

a)

$$B_{p,1}^{k+m}(\mathbb{R}^n, E_1) \xrightarrow{d} D(A(\tau)_{W_p^k(\mathbb{R}^n, E_0)}) \xrightarrow{d} b_{p,\infty}^{k+m}(\mathbb{R}^n, E_1), \quad 1 \leq p < \infty, \quad (3.77)$$

$$B_{\infty,1}^{k+m}(\mathbb{R}^n, E_1) \hookrightarrow D(A(\tau)_{W_\infty^k(\mathbb{R}^n, E_0)}) \hookrightarrow B_{\infty,\infty}^{k+m}(\mathbb{R}^n, E_1), \quad (3.78)$$

$$\begin{aligned} b_{\infty,1}^{k+m}(\mathbb{R}^n, E_1) &\xrightarrow{d} D(A(\tau)_{BUC^k(\mathbb{R}^n, E_0)}) \xrightarrow{d} b_{\infty,\infty}^{k+m}(\mathbb{R}^n, E_1), \\ \dot{B}_{\infty,1}^{k+m}(\mathbb{R}^n, E_1) &\xrightarrow{d} D(A(\tau)_{C_0^k(\mathbb{R}^n, E_0)}) \xrightarrow{d} \dot{B}_{\infty,\infty}^{k+m}(\mathbb{R}^n, E_1), \\ B_{\infty,1}^{k+m}(\mathbb{R}^n, E_1) &\hookrightarrow D(A(\tau)_{C_b^k(\mathbb{R}^n, E_0)}) \hookrightarrow B_{\infty,\infty}^{k+m}(\mathbb{R}^n, E_1). \end{aligned} \quad (3.79)$$

b) Ist $E_1 = E_0$, so existieren Konstanten $M \geq 1$ und $R > 0$, so dass

$$\left\| \left(\lambda I + A(\tau)_{\mathfrak{F}_p^k(\mathbb{R}^n, E_0)} \right)^{-1} \right\|_{\mathcal{L}(\mathfrak{F}_p^k(\mathbb{R}^n, E_0))} \leq \frac{M}{1 + |\lambda|} \quad \text{für alle } \lambda \in \sum_{\frac{\pi}{2}, R} \text{ und } \tau \in \mathfrak{I},$$

wobei M und R unabhängig von λ und $\tau \in \mathfrak{I}$ sind. Somit erzeugt

$$-A(\tau)_{\mathfrak{F}_p^k} : D(A(\tau)_{\mathfrak{F}_p^k}) \longrightarrow \mathfrak{F}_p^k(\mathbb{R}^n, E_0)$$

eine analytische Halbgruppe auf $\mathfrak{F}_p^k(\mathbb{R}^n, E_0)$.

Anwendungen

In diesem Kapitel untersuchen wir mittels der Ergebnisse des dritten Kapitels parabolische Evolutionsgleichungen.

Im ersten Abschnitt betrachten wir nicht-autonome, lineare Cauchy-Probleme mit konstanten als auch mit variablen Definitionsbereichen. Danach wird im zweiten Abschnitt semilineare Cauchy-Probleme studiert. Analysiert wird insbesondere die Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen eines semilinearen elliptischen Differentialgleichungssystems zweiter Ordnung. Zum Schluss stellen wir im dritten Abschnitt die Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen eines Koagulations-Fragmentations-Problems mit Diffusion fest.

4.1 Lineare Cauchy-Probleme

Seien $T > 0$, $J := [0, T]$ ein abgeschlossenes Intervall in $\mathbb{R}$ und $t \in J$. Im Folgenden bezeichnet t in $a(t, \cdot) \in S_{1,0}^{m,\rho_n}(\mathbb{R}_\xi^n, \mathcal{L}(E_1, E_0))$ und in $\widetilde{a(t, D)}$ nur einen Parameter. Ferner betrachten wir in diesem Abschnitt eine Familie $\mathcal{A} := \{a(t, \cdot) : t \in J\} \subset S^{m,\rho_n}(\mathbb{R}^n, \mathcal{L}(E_1, E_0))$ von parabolischen Symbolen mit denselben Konstanten $\omega > 0$ und $\kappa \geq 1$, so dass

$$J \ni t \longmapsto a(t, \cdot) \in S^{m,\rho_n}(\mathbb{R}^n, \mathcal{L}(E_1, E_0))$$

eine hölderstetige Abbildung bezüglich der Symboltopologie ist, und wir wenden die Sätze des Abschnitts 3.3 an, um Existenz und Eindeutigkeit der Lösungen des Cauchy-Problems

$$\begin{cases} \dot{u} + A(t)_{\mathfrak{F}_p^k} u = f(t), & t \in J \setminus \{0\}, \\ u(0) = u_0, \end{cases} \quad (4.1)$$

in $\mathfrak{F}_p^k(\mathbb{R}^n, E_0)$ zu untersuchen. Dabei sind $A(t) = \widetilde{a(t, D)}$, $t \in J$, und $f : [0, T] \rightarrow \mathfrak{F}_p^k(\mathbb{R}^n, E_0)$ eine gegebene hölderstetige Funktion.

Eine Funktion $u \in C([0, T], E) \cap C^1(]0, T[, E)$ heißt **klassische Lösung** von (4.1) in $[0, T]$, wenn $u(t) \in D(A(t)_{\mathfrak{F}_p^k})$ und $u'(t) + A(t)_{\mathfrak{F}_p^k} u(t) = f(t)$ für alle $t \in]0, T]$ und $u(0) = u_0$. Gilt

zusätzlich $u \in C^1([0, T]; E)$, dann heißt u **strenge Lösung** von (4.1). In diesem Fall erhält man $u_0 \in D\left(A(0)_{\mathfrak{F}_p^k}\right)$.

Im Folgenden seien E_0, E_1 Banachräume mit $E_1 \xhookrightarrow{d} E_0$.

Lemma 4.1.1 *Seien $\alpha, m, s \in \mathbb{R}$ mit $0 < \alpha < 1$ und $m > 0$, $p, q \in [1, \infty]$, ρ_n wie in (1.1), $\mathcal{A} := \{a(t, \cdot) : t \in J\} \subset S_{1,0}^{m,\rho_n}(\mathbb{R}^n, \mathcal{L}(E_1, E_0))$ eine Familie der parabolischen Symbole mit denselben Konstanten ω und κ , so dass*

$$t \longmapsto a(t, \cdot) \in C^\alpha\left(J, S_{1,0}^{m,\rho_n}(\mathbb{R}^n, \mathcal{L}(E_1, E_0))\right). \quad (4.2)$$

Außerdem seien $\mathcal{B} \in \{B, \mathring{B}, b\}$ und $A(t) := \widetilde{a(t, D)}\big|_{\mathcal{B}_{p,q}^{s+m}(\mathbb{R}^n, E_1)}$ für $t \in J$. Dann ist $\mathcal{A}$ beschränkt und

$$t \longmapsto A(t) \in C^\alpha\left(J, \mathcal{L}\left(\mathcal{B}_{p,q}^{s+m}(\mathbb{R}^n, E_1), \mathcal{B}_{p,q}^s(\mathbb{R}^n, E_0)\right)\right).$$

Beweis. Da die Funktion $g : J \rightarrow \mathbb{R}$, die durch $g(t) := \|a(t, \cdot)\|_{S_{1,0}^{m,\rho_n}(\mathbb{R}^n, \mathcal{L}(E_1, E_0))}$ $t \in J$ definiert ist, nach Voraussetzung stetig auf dem kompakten Intervall J ist, erhält man sofort, dass $\mathcal{A}$ beschränkt in $S_{1,0}^{m,\rho_n}(\mathbb{R}^n, \mathcal{L}(E_1, E_0))$ ist.

Nun seien $t, t' \in J$ und $d_{t,t'}(\cdot) := a(t, \cdot) - a(t', \cdot) \in S_{1,0}^{m,\rho_n}(\mathbb{R}^n, \mathcal{L}(E_1, E_0))$. Dann folgt aus (3.2) und (4.2), dass

$$\begin{aligned} \|A(t) - A(t')\|_{\mathcal{L}(\mathcal{B}_{p,q}^{s+m}(\mathbb{R}^n, E_1), \mathcal{B}_{p,q}^s(\mathbb{R}^n, E_0))} &= \left\| \widetilde{d_{t,t'}(D)} \right\|_{\mathcal{B}_{p,q}^{s+m}(\mathbb{R}^n, E_1)} \Big\|_{\mathcal{L}(\mathcal{B}_{p,q}^{s+m}(\mathbb{R}^n, E_1), \mathcal{B}_{p,q}^s(\mathbb{R}^n, E_0))} \\ &\leq c \|a(t, \cdot) - a(t', \cdot)\|_{S_{1,0}^{m,n+1}(\mathbb{R}^n, \mathcal{L}(E_1, E_0))} \\ &\leq cK |t - t'|^\alpha, \end{aligned}$$

wobei die Konstanten c und K unabhängig von t, t' sind. $\square$

Beachte, dass das Lemma 4.1.1 wegen (3.47) auch gilt, wenn man dort $S_{1,0}^{m,\rho_n}$ durch S^{m,ρ_n} ersetzt.

Nun rufen wir die dichten Einbettungen (1.36) in Erinnerung, die in den folgenden Sätzen eine wichtige Rolle spielen.

Seien $p, q \in [1, \infty]$, $-\infty < s < t < \infty$, E_0, E_1 Banachräume mit $E_1 \xhookrightarrow{d} E_0$ und $\mathcal{B} \in \{b, \mathring{B}; B \text{ mit } 1 \leq q < \infty\}$. Dann gilt

$$\mathcal{B}_{p,q}^t(\mathbb{R}^n, E_1) \xhookrightarrow{d} \mathcal{B}_{p,q}^s(\mathbb{R}^n, E_1) \xhookrightarrow{d} \mathcal{B}_{p,q}^s(\mathbb{R}^n, E_0). \quad (4.3)$$

Daraus folgt für alle $m > 0$, dass

$$\mathcal{B}_{p,q}^{m+s}(\mathbb{R}^n, E_1) \xhookrightarrow{d} \mathcal{B}_{p,q}^s(\mathbb{R}^n, E_0). \quad (4.4)$$

Deswegen nehmen wir zuerst an, dass $E_1 \xhookrightarrow{d} E_0$.

4.1.1 Von t unabhängige Definitionsbereiche $D(A(t))$

Seien E_0, E_1 Banachräume mit $E_1 \xhookrightarrow{d} E_0$ gegeben.

Satz 4.1.1 Seien $\alpha, m, s \in \mathbb{R}$ mit $0 < \alpha < 1$ und $m > 0$, $p, q \in [1, \infty]$, ρ_n wie in (1.1), $\mathcal{B} \in \left\{b, \dot{B}; B \text{ mit } 1 \leq q < \infty\right\}$, $\mathcal{A} := \{a(t, \cdot) : t \in J\} \subset S_{1,0}^{m,\rho_n}(\mathbb{R}^n, \mathcal{L}(E_1, E_0))$ eine Familie der parabolischen Symbole mit denselben Konstanten ω und κ , so dass

$$t \mapsto a(t, \cdot) \in C^\alpha \left(J, S_{1,0}^{m,\rho_n}(\mathbb{R}^n, \mathcal{L}(E_1, E_0)) \right)$$

und seien außerdem $A(t) := \widetilde{a(t, D)} \Big|_{\mathcal{B}_{p,q}^{s+m}(\mathbb{R}^n, E_1)}$ für $t \in J$, $u_0 \in \mathcal{B}_{p,q}^s(\mathbb{R}^n, E_0)$ und $f \in C^\alpha(J, \mathcal{B}_{p,q}^s(\mathbb{R}^n, E_0))$. Dann existiert eine Konstante $\tilde{\omega} > 0$, so dass der Operator $\tilde{A}(t) := \tilde{\omega}I + A(t)$ für jedes $t \in J$ folgendes erfüllt:

a) $D(\tilde{A}(t)) \doteq \mathcal{B}_{p,q}^{m+s}(\mathbb{R}^n, E_1)$ und $D(\tilde{A}(t)) \xhookrightarrow{d} \mathcal{B}_{p,q}^s(\mathbb{R}^n, E_0)$ für alle $t \in J$.

b) Es gibt eine Konstante $M \geq 1$, so dass $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(z) \geq 0\} \subset \rho(-\tilde{A}(t))$ und

$$\left\| \left(\lambda I + \tilde{A}(t) \right)^{-1} \right\|_{\mathcal{L}(\mathcal{B}_{p,q}^s(\mathbb{R}^n, E_0))} \leq \frac{M}{1 + |\lambda|} \quad \text{für alle } \operatorname{Re}(\lambda) \geq 0 \text{ und } t \in J.$$

c) Der Operator $\tilde{A}(t) \tilde{A}(\tau)^{-1}$ ist hölderstetig in t mit der gleichmäßigen Operatornorm für jedes $\tau \in J$ (fest): Es gibt eine Konstante $K > 0$, so dass

$$\left\| \tilde{A}(t) \tilde{A}(\tau)^{-1} - \tilde{A}(t') \tilde{A}(\tau)^{-1} \right\|_{\mathcal{L}(\mathcal{B}_{p,q}^s(\mathbb{R}^n, E_0))} \leq K |t - t'|^\alpha \quad \text{für alle } t, t' \in J. \quad (4.5)$$

Somit existiert eine eindeutige Lösung $u := u(\cdot, u_0, f)$ des Cauchy-Problems

$$\begin{cases} \dot{u} + A(t)u = f(t), & t \in J \setminus \{0\}, \\ u(0) = u_0, \end{cases} \quad (4.6)$$

(wegen der Theoreme 1.2-1.3 in [Ta, 60] und der Sätze 4.11-4.12 in [Pou, 65]) und¹

$$u \in C^\alpha(J \setminus \{0\}, \mathcal{B}_{p,q}^{m+s}(\mathbb{R}^n, E_1)) \cap C^{1+\alpha}(J \setminus \{0\}, \mathcal{B}_{p,q}^s(\mathbb{R}^n, E_0)).$$

Genauer ist $u(t) = e^{\tilde{\omega}t}v(t)$, wobei

$$v \in C^\alpha(J \setminus \{0\}, \mathcal{B}_{p,q}^{m+s}(\mathbb{R}^n, E_1)) \cap C^{1+\alpha}(J \setminus \{0\}, \mathcal{B}_{p,q}^s(\mathbb{R}^n, E_0))$$

die eindeutige Lösung des Problems

$$\begin{cases} \dot{u} + \tilde{A}(t)u = e^{-\tilde{\omega}t}f(t), & t \in J \setminus \{0\}, \\ u(0) = u_0, \end{cases} \quad (4.7)$$

ist. Die Funktion u ist eine strenge Lösung von (4.6), wenn $u_0 \in \mathcal{B}_{p,q}^{m+s}(\mathbb{R}^n, E_1)$.

¹ $w \in C^\alpha(J \setminus \{0\}, E)$ bedeutet, dass $w \in C^\alpha([\epsilon, T], E)$ für alle $0 < \epsilon < T$.

Beweis. Nach Korollar 3.1.2 erhalten wir, dass von t unabhängige Konstanten $\omega \geq 0$ und $\beta \in]\frac{\pi}{2}, \pi[$ existieren, so dass $S_{\beta, \omega} \subset \rho(-A(t))$ für alle $t \in J$. Wir werden für ein festes $\tilde{\omega} \geq \omega$ zeigen, dass der Operator $\tilde{A}(t) := \tilde{\omega}I + A(t)$, $t \in J$, die Aussagen a) – c) erfüllt.

Die Aussage a) folgt aus der Definition von $\tilde{A}$ und (4.4). b) folgt aus dem Korollar 3.1.2. Es bleibt nur (4.5) zu zeigen. Dafür seien $\tau, t, t' \in J$ und $u \in \mathcal{B}_{p,q}^s(\mathbb{R}^n, E_0)$. Dann gilt nach Lemma 4.1.1 und Satz 3.1.2, dass

$$\begin{aligned} \left\| \left[\tilde{A}(t) \tilde{A}(\tau)^{-1} - \tilde{A}(t') \tilde{A}(\tau)^{-1} \right] u \right\|_{\mathcal{B}_{p,q}^s(\mathbb{R}^n, E_0)} &= \left\| \left[\tilde{A}(t) - \tilde{A}(t') \right] \left(\tilde{A}(\tau)^{-1} u \right) \right\|_{\mathcal{B}_{p,q}^s(\mathbb{R}^n, E_0)} \\ &\leq K |t - t'|^\alpha \left\| \tilde{A}(\tau)^{-1} u \right\|_{\mathcal{B}_{p,q}^{s+m}(\mathbb{R}^n, E_0)} \\ &\leq K c(\kappa) |t - t'|^\alpha \|u\|_{\mathcal{B}_{p,q}^s(\mathbb{R}^n, E_0)}, \end{aligned}$$

wobei die Konstanten K und $c(\kappa)$ unabhängig von $\tau, t, t' \in J$ sind. Somit ist (4.5) bewiesen. $\square$

Bemerkung 4.1.1 Seien die Voraussetzungen wie im Satz 4.1.1 gegeben, aber mit $E_1 \hookrightarrow E_0$ und $\mathcal{B} \in \{b, \dot{B}, B\}$. Dann erhält man: a') $D(A(t)) \doteq \mathcal{B}_{p,q}^{s+m}(\mathbb{R}^n, E_1) \hookrightarrow \mathcal{B}_{p,q}^s(\mathbb{R}^n, E_0)$ für alle $t \in J$ und b), c) wie im Satz 4.1.1. Daraus folgen zusammen mit den Theoremen 4.1, 4.3, 5.1 und 5.4 in [Acq-Te, 85]:

- i) Ist $u_0 \in \overline{\mathcal{B}_{p,q}^{s+m}(\mathbb{R}^n, E_1)}^{\mathcal{B}_{p,q}^s(\mathbb{R}^n, E_0)}$, so hat das Problem (4.6) eine eindeutige Lösung u in $C^\alpha(J \setminus \{0\}, \mathcal{B}_{p,q}^{m+s}(\mathbb{R}^n, E_1)) \cap C^{1+\alpha}(J \setminus \{0\}, \mathcal{B}_{p,q}^s(\mathbb{R}^n, E_0))$.
- ii) Sind $u_0 \in \mathcal{B}_{p,q}^{s+m}(\mathbb{R}^n, E_1)$ und $A(0)u_0 + f(0) \in \overline{\mathcal{B}_{p,q}^{s+m}(\mathbb{R}^n, E_1)}^{\mathcal{B}_{p,q}^s(\mathbb{R}^n, E_0)}$, so ist dann u eine strenge Lösung.

4.1.2 Variable Definitionsbereiche $D(A(t))$

Wir werden nun den Satz 3.3.3 und das Korollar 3.3.1 anwenden, um Existenz und Eindeutigkeit der Lösungen des Cauchy-Problems (4.1) auf $W_p^k(\mathbb{R}^n, E_0)$ falls $1 \leq p < \infty$ und auf $BUC^k(\mathbb{R}^n, E_0)$ falls $p = \infty$ zu erhalten. Im Gegensatz zum obigen Fall ($D(A(t)) = \mathcal{B}_{p,q}^{s+m}(\mathbb{R}^n, E_1)$ für alle $t \in J$) stehen uns lediglich (3.77) und (3.79) zur Verfügung, das heißt

$$\begin{aligned} B_{p,1}^{k+m}(\mathbb{R}^n, E_1) &\xrightarrow{d} D\left(A(\tau)_{W_p^k(\mathbb{R}^n, E_0)}\right) \xrightarrow{d} b_{p,\infty}^{k+m}(\mathbb{R}^n, E_1), \quad 1 \leq p < \infty, \\ b_{\infty,1}^{k+m}(\mathbb{R}^n, E_1) &\xrightarrow{d} D\left(A(\tau)_{BUC^k(\mathbb{R}^n, E_0)}\right) \xrightarrow{d} b_{\infty,\infty}^{k+m}(\mathbb{R}^n, E_1). \end{aligned}$$

In diesem Fall verwenden wir ein in [Am, 95; Chapter IV, Theorem 2.5.1]² bewiesenes Theorem über die Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen des Cauchy Problems (4.1), wobei $D(A(t))$ variabel sein kann.

²Beachte, dass die reelle Interpolation $(\cdot, \cdot)_{\theta, q}$ für $1 \leq q < \infty$ eine “zulässige” Interpolation ist. Dazu siehe §2.11 in [Am, 95].

Satz 4.1.2 Seien $(A(t))_{t \in J}$ eine Familie von Operatoren in einem Banachraum $\mathbb{E}_0$ mit Definitionsbereich $\mathbb{E}_1(t) := D(A(t))$ für $t \in J$, so dass

a) $\mathbb{E}_1(t) \xrightarrow{d} \mathbb{E}_0$ für alle $t \in J$.

b) $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(z) \geq 0\} \subset \rho(-A(t))$ und es gibt eine Konstante $M \geq 1$, so dass

$$\left\| (\lambda I + A(t))^{-1} \right\|_{\mathcal{L}(\mathbb{E}_0)} \leq \frac{M}{1 + |\lambda|} \quad \text{für alle } \operatorname{Re}(\lambda) \geq 0 \text{ und } t \in J.$$

c) Es gibt Konstanten $\theta \in]0, 1[$, $q \in [1, \infty[$, $\kappa \geq 1$ und einen Banachraum $\mathbb{E}_{\theta,q} := (\mathbb{E}_{\theta,q}; \|\cdot\|_{\theta,q})$, so dass

$$\mathbb{E}_{\theta,q} \doteq (\mathbb{E}_0, \mathbb{E}_1(t))_{\theta,q} =: \mathbb{E}_{\theta,q}(t)$$

und

$$\kappa^{-1} \|x\|_{\theta,q} \leq \|x\|_{\mathbb{E}_{\theta,q}(t)} \leq \kappa \|x\|_{\theta,q}$$

für alle $x \in \mathbb{E}_{\theta,q}$ und $t \in J$.

d) Es gibt Konstanten $\rho \in]1 - \theta, 1[$ und $\eta > 0$, so dass $t \mapsto A^{-1}(t) \in C^\rho(J, \mathcal{L}(\mathbb{E}_0, \mathbb{E}_{\theta,q}))$ und

$$\sup_{t, t' \in J, t \neq t'} \left(\frac{\|A^{-1}(t) - A^{-1}(t')\|_{\mathcal{L}(\mathbb{E}_0, \mathbb{E}_{\theta,q})}}{|t - t'|^\rho} \right) \leq \eta.$$

Außerdem seien $u_0 \in \mathbb{E}_0$, $F = (\mathbb{E}_0, \mathbb{E}_{\theta,q})_{\tilde{\theta}, r}$ für ein $\tilde{\theta} \in]0, 1[$, $r \in [1, \infty[$ und

$$f \in C^\sigma(J, \mathbb{E}_0) + C(J, F)$$

für ein $\sigma \in]0, 1[$. Dann hat das Cauchy-Problem

$$\begin{cases} \dot{u} + A(t)u = f(t), & t \in J \setminus \{0\}, \\ u(0) = u_0, \end{cases}$$

eine eindeutige Lösung

$$u \in C(J, \mathbb{E}_0) \cap C^1(J \setminus \{0\}, \mathbb{E}_0).$$

Ist $u_0 \in (\mathbb{E}_0, \mathbb{E}_{\theta,q})_{\beta', q'}$ für ein $\beta' \in]0, 1[$ und ein $q' \in [1, \infty[$, so ist

$$u \in C\left(J, (\mathbb{E}_0, \mathbb{E}_{\theta,q})_{\beta', q'}\right).$$

Ferner ist u eine strenge Lösung, wenn $u_0 \in D(A(0))$.

Beweis. Siehe [Am,95] Theorem 2.5.1 in Chapter IV. □

Nun nehmen wir im Folgenden $E_1 = E_0$ an.

Lemma 4.1.2 Seien $\alpha, m \in \mathbb{R}$ mit $0 < \alpha < 1$ und $m > 0$, $p \in [1, \infty]$, $\mathcal{A} := \{a(t, \cdot) : t \in J\} \subset S^{m, \rho_n}(\mathbb{R}^n, \mathcal{L}(E_0))$ eine Familie der parabolischen Symbole mit denselben Konstanten ω und κ , so dass

$$t \mapsto a(t, \cdot) \in C^\alpha(J, S^{m, \rho_n}(\mathbb{R}^n, \mathcal{L}(E_0))).$$

Außerdem seien $k \in \mathbb{N}_0$, $\mathfrak{F}_p^k = W_p^k$ für $1 \leq p < \infty$, $\mathfrak{F}_\infty^k = B \cup C^k$ (in diesem Fall $p = \infty$ wird $m > k$ angenommen), $\mathcal{B}$ wie in (3.31) und $A(t) := \widetilde{a(t, D)} \Big|_{\mathcal{B}_{p, \infty}^{k+m}(\mathbb{R}^n, E_0)}$ für $t \in J$. Dann existiert eine von t unabhängige Konstante $\tilde{\omega} > 0$, so dass der Operator $\tilde{A}(t) := \tilde{\omega}I + A(t)_{\mathfrak{F}_p^k}$, $t \in J$, erfüllt:

a) $\mathbb{E}_1(t) := D(\tilde{A}(t)) \xrightarrow{d} \mathfrak{F}_p^k(\mathbb{R}^n, E_0) := \mathbb{E}_0$ für alle $t \in J$.

b) Es gibt eine Konstante $M \geq 1$, so dass $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(z) \geq 0\} \subset \rho(-\tilde{A}(t))$ und

$$\left\| \left(\lambda I + \tilde{A}(t) \right)^{-1} \right\|_{\mathcal{L}(\mathbb{E}_0)} \leq \frac{M}{1 + |\lambda|} \quad \text{für alle } \operatorname{Re}(\lambda) \geq 0 \text{ und } t \in J.$$

c) Für jedes $p, q \in [1, \infty]$ und $\theta \in]0, 1[$ existiert eine Konstante $\kappa > 0$, so dass

$$\mathbb{E}_{\theta, q} := B_{p, q}^{k+\theta m}(\mathbb{R}^n, E_0) \doteq (\mathbb{E}_0, \mathbb{E}_1(t))_{\theta, q} \quad \text{für alle } t \in J \quad (4.8)$$

und

$$\kappa^{-1} \|x\|_{\theta, q} \leq \|x\|_{(\mathbb{E}_0, \mathbb{E}_1(t))_{\theta, q}} \leq \kappa \|x\|_{\theta, q}$$

für alle $x \in (\mathbb{E}_{\theta, q}; \|\cdot\|_{\theta, q})$ und $t \in J$.

d) Für jedes $\theta \in]0, 1[$, $p, q, r \in [1, \infty]$, $\gamma \in]0, \theta m[$ und $\tilde{\theta} := \frac{\gamma}{m\theta}$ gilt

$$B_{p, r}^{k+\gamma}(\mathbb{R}^n, E_0) \doteq (\mathbb{E}_0, \mathbb{E}_{\theta, q})_{\tilde{\theta}, r}.$$

e) Für jedes $\theta \in]0, 1[$ und jedes $q \in [1, \infty]$ gibt es eine Konstante $\eta > 0$, so dass

$$t \mapsto \tilde{A}^{-1}(t) \in C^\alpha(J, \mathcal{L}(\mathbb{E}_0, \mathbb{E}_{\theta, q})) \quad (4.9)$$

und

$$\sup_{t, t' \in J, t \neq t'} \left(\frac{\left\| \tilde{A}^{-1}(t) - \tilde{A}^{-1}(t') \right\|_{\mathcal{L}(\mathbb{E}_0, \mathbb{E}_{\theta, q})}}{|t - t'|^\alpha} \right) \leq \eta. \quad (4.10)$$

Beweis. Nach Satz 3.3.3 und Korollar 3.3.1 erhalten wir, dass von t unabhängige Konstanten $\omega \geq 0$ und $\beta \in]\frac{\pi}{2}, \pi[$ existieren, so dass $S_{\beta, \omega} \subset \rho\left(-A(t)_{\mathfrak{F}_p^k}\right)$ für alle $t \in J$. Wir werden für ein festes $\tilde{\omega} \geq \omega$ zeigen, dass der Operator $\tilde{A}(t) := \tilde{\omega}I + A(t)_{\mathfrak{F}_p^k}$, $t \in J$, die Aussagen a) – e) erfüllt.

Aus Satz 3.3.3, Korollar 3.3.1, (1.28), Satz 1.1.2 a) und (3.32) folgen a), b) und

$$B_{p,1}^{k+m}(\mathbb{R}^n, E_0) \hookrightarrow D\left(A(t)_{\mathfrak{F}_p^k}\right) \hookrightarrow B_{p,\infty}^{k+m}(\mathbb{R}^n, E_0),$$

$$B_{p,1}^k(\mathbb{R}^n, E_0) \hookrightarrow \mathfrak{F}_p^k(\mathbb{R}^n, E_0) \hookrightarrow B_{p,\infty}^k(\mathbb{R}^n, E_0)$$

für alle $t \in J$ und $p \in [1, \infty]$. Daher und aufgrund vom Satz 1.1.3 d) und (1.45) erhält man für jedes $\theta \in]0, 1[$ und $p, q \in [1, \infty]$, $t \in J$:

$$\left(\mathfrak{F}_p^k(\mathbb{R}^n, E_0), D\left(\tilde{A}(t)\right)\right)_{\theta, q} \doteq B_{p,q}^{k+\theta m}(\mathbb{R}^n, E_0).$$

Somit erfüllt $\tilde{A}$ die Aussage c).

Die Aussage d) folgt aus

$$B_{p,1}^k \hookrightarrow \mathfrak{F}_p^k \hookrightarrow B_{p,\infty}^k, \quad B_{p,1}^{k+\theta m} \hookrightarrow B_{p,q}^{k+\theta m} \hookrightarrow B_{p,\infty}^{k+\theta m} \quad \forall p, q \in [1, \infty]$$

und aus dem Satz 1.1.3d), denn

$$(\mathbb{E}_0, \mathbb{E}_{\theta, q})_{\tilde{\theta}, r} = \left(\mathfrak{F}_p^k, B_{p,q}^{k+\theta m}\right)_{\tilde{\theta}, r} \doteq \left(B_{p,1}^k, B_{p,1}^{k+\theta m}\right)_{\tilde{\theta}, r} \doteq B_{p,r}^{(1-\tilde{\theta})k + \tilde{\theta}(k+\theta m)} = B_{p,r}^{k+\gamma}$$

für $\tilde{\theta} = \frac{\gamma}{m\theta}$.

Nun zeigen wir e). Man hat nach $\mathfrak{F}_p^k(\mathbb{R}^n, E_0) \hookrightarrow B_{p,\infty}^k(\mathbb{R}^n, E_0)$ für alle $p \in [1, \infty]$, dass

$$\left\|\tilde{A}(t)^{-1}\right\|_{\mathcal{L}(\mathfrak{F}_p^k, B_{p,\infty}^{k+\theta m})} \leq c_1 \left\|\left(\tilde{\omega}I + \widetilde{a(t, D)}\right)\Big|_{B_{p,\infty}^{k+m}}\right\|^{-1}_{\mathcal{L}(B_{p,\infty}^k, B_{p,\infty}^{k+\theta m})} \quad (4.11)$$

für alle $t \in J$, wobei c_1 eine Konstante unabhängig von t ist. Außerdem existieren von t unabhängige Konstanten $c_2 > 0$, M und $R \geq 0$ (wegen des Satzes 3.1.2 und $B_{p,\infty}^{k+m}(\mathbb{R}^n, E_0) \hookrightarrow B_{p,\infty}^{k+\theta m}(\mathbb{R}^n, E_0)$), so dass

$$\left\|\left(\lambda I + \widetilde{a(t, D)}\right)\Big|_{B_{p,\infty}^{k+m}}\right\|^{-1}_{\mathcal{L}(B_{p,\infty}^k, B_{p,\infty}^{k+jm})} \leq c_2 M \quad (4.12)$$

für alle $\lambda \in \sum_{\frac{\pi}{2}, R}$, $t \in J$ und $j = \theta, 1$.

Jetzt wählen wir ein $\tilde{\omega} \geq R$ (also $\tilde{\omega} \in \sum_{\frac{\pi}{2}, R}$). Dann erhalten wir für alle $t, t' \in J$, dass

$$\begin{aligned}
& \left\| \tilde{A}(t)^{-1} - \tilde{A}(t')^{-1} \right\|_{\mathcal{L}(\mathfrak{F}_p^k, B_{p,\infty}^{k+\theta m})} \\
& \leq c_1 \left\| \left(\tilde{\omega} I + \widetilde{a(t, D)} \Big|_{\mathcal{B}_{p,\infty}^{k+m}} \right)^{-1} - \left(\tilde{\omega} I + \widetilde{a(t', D)} \Big|_{\mathcal{B}_{p,\infty}^{k+m}} \right)^{-1} \right\|_{\mathcal{L}(B_{p,\infty}^k, B_{p,\infty}^{k+\theta m})}, \text{ (wie in (4.11))} \\
& \leq c_1 \left\| \left(\tilde{\omega} I + \widetilde{a(t, D)} \Big|_{\mathcal{B}_{p,\infty}^{k+m}} \right)^{-1} \right\|_{\mathcal{L}(B_{p,\infty}^k, B_{p,\infty}^{k+\theta m})} \left\| \widetilde{a(t, D)} \Big|_{\mathcal{B}_{p,\infty}^{k+m}} - \widetilde{a(t', D)} \Big|_{\mathcal{B}_{p,\infty}^{k+m}} \right\|_{\mathcal{L}(B_{p,\infty}^{k+m}, B_{p,\infty}^k)} \\
& \quad \cdot \left\| \left(\tilde{\omega} I + \widetilde{a(t', D)} \Big|_{\mathcal{B}_{p,\infty}^{k+m}} \right)^{-1} \right\|_{\mathcal{L}(B_{p,\infty}^k, B_{p,\infty}^{k+m})} \\
& \leq c_1 (c_2 M)^2 \left\| \widetilde{a(t, D)} \Big|_{\mathcal{B}_{p,\infty}^{k+m}} - \widetilde{a(t', D)} \Big|_{\mathcal{B}_{p,\infty}^{k+m}} \right\|_{\mathcal{L}(B_{p,\infty}^{k+m}, B_{p,\infty}^k)} \text{ (nach (4.12))} \\
& \leq \eta_\infty |t - t'|^\alpha \quad \text{(wegen der Bemerkung des Lemmas 4.1.1).}
\end{aligned}$$

Dabei ist $\eta_\infty := c_1 (c_2 M)^2 K$ eine Konstante unabhängig von t . Somit ist (4.10) für $q = \infty$ und alle $\theta \in]0, 1[$ gezeigt.

Nun sei ein $\theta' \in \mathbb{R}$ mit $0 < \theta < \theta' < 1$. Dann gilt für alle $q \in [1, \infty]$ nach (1.19), dass $B_{p,\infty}^{k+\theta' m}(\mathbb{R}^n, E_0) \hookrightarrow B_{p,q}^{k+\theta m}(\mathbb{R}^n, E_0)$. Daraus folgt

$$\begin{aligned}
\sup_{t, t' \in J, t \neq t'} \left(\frac{\left\| \tilde{A}^{-1}(t) - \tilde{A}^{-1}(t') \right\|_{\mathcal{L}(\mathbb{E}_0, \mathbb{E}_{\theta, q})}}{|t - t'|^\alpha} \right) &= \sup_{t, t' \in J, t \neq t'} \left(\frac{\left\| \tilde{A}^{-1}(t) - \tilde{A}^{-1}(t') \right\|_{\mathcal{L}(\mathbb{E}_0, B_{p,q}^{k+\theta m})}}{|t - t'|^\alpha} \right) \\
&\leq \sup_{t, t' \in J, t \neq t'} \left(\frac{c \left\| \tilde{A}^{-1}(t) - \tilde{A}^{-1}(t') \right\|_{\mathcal{L}(\mathbb{E}_0, B_{p,\infty}^{k+\theta' m})}}{|t - t'|^\alpha} \right) \\
&= c \sup_{t, t' \in J, t \neq t'} \left(\frac{\left\| \tilde{A}^{-1}(t) - \tilde{A}^{-1}(t') \right\|_{\mathcal{L}(\mathbb{E}_0, \mathbb{E}_{\theta', \infty})}}{|t - t'|^\alpha} \right) \\
&\leq c \eta_\infty =: \eta
\end{aligned}$$

und somit ist e) bewiesen. $\square$

Satz 4.1.3 Seien $\alpha, m, T \in \mathbb{R}^+$ mit $0 < \alpha < 1$, $p \in [1, \infty]$, $\theta \in]1 - \alpha, 1[$, ρ_n wie in (1.1), $J = [0, T]$, $\mathcal{A} := \{a(t, \cdot) : t \in J\} \subset S^{m, \rho_n}(\mathbb{R}^n, \mathcal{L}(E_0))$ eine Familie der parabolischen Symbole mit denselben Konstanten ω und κ , so dass

$$t \mapsto a(t, \cdot) \in C^\alpha(J, S^{m, \rho_n}(\mathbb{R}^n, \mathcal{L}(E_0))).$$

Ferner seien $k \in \mathbb{N}_0$, $\mathfrak{F}_p^k = W_p^k$ für $1 \leq p < \infty$, $\mathfrak{F}_\infty^k = BUC^k$ (in diesem Fall, $p = \infty$, wird $m > k$ angenommen), $\mathcal{B}$ wie in (3.31) und $A(t) := \widetilde{a(t, D)} \Big|_{\mathcal{B}_{p,\infty}^{k+m}(\mathbb{R}^n, E_0)}$ für $t \in J$. Weiterhin seien $u_0 \in \mathfrak{F}_p^k(\mathbb{R}^n, E_0)$ und

$$f \in C^\sigma \left(J, \mathfrak{F}_p^k(\mathbb{R}^n, E_0) \right) + C \left(J, B_{p,r}^{k+\gamma}(\mathbb{R}^n, E_0) \right)$$

für ein $\sigma \in]0, 1[$, $r \in [1, \infty[$ und $\gamma \in]0, \theta m[$. Dann hat das Cauchy-Problem

$$\begin{cases} \dot{u} + A(t)_{\mathfrak{F}_p^k} u = f(t), & t \in J \setminus \{0\}, \\ u(0) = u_0, \end{cases} \quad (4.13)$$

eine eindeutige Lösung

$$u \in C \left(J, \mathfrak{F}_p^k(\mathbb{R}^n, E_0) \right) \cap C^1 \left(J \setminus \{0\}, \mathfrak{F}_p^k(\mathbb{R}^n, E_0) \right).$$

Ist $u_0 \in B_{p,q'}^{k+m\theta\beta}(\mathbb{R}^n, E_0)$ für ein $0 < \beta < 1$ und ein $q' \in [1, \infty[$, dann

$$u \in C \left(J, B_{p,q'}^{k+m\theta\beta}(\mathbb{R}^n, E_0) \right).$$

Außerdem ist u eine strenge Lösung, wenn $u_0 \in D \left(A(0)_{\mathfrak{F}_p^k} \right)$.

Beweis. Nach dem Lemma 4.1.2 und dem Satz 4.1.2 existiert eine eindeutige Lösung

$$v \in C \left(J, \mathfrak{F}_p^k(\mathbb{R}^n, E_0) \right) \cap C^1 \left(J \setminus \{0\}, \mathfrak{F}_p^k(\mathbb{R}^n, E_0) \right)$$

des Problems

$$\begin{cases} \dot{u} + \tilde{A}(t) u = e^{-\tilde{\omega}t} f(t), & t \in J \setminus \{0\}, \\ u(0) = u_0. \end{cases}$$

Dabei ist $\tilde{A}(t)$ wie im Beweis des Lemmas 4.1.2.

Nun seien $0 < \beta < 1$ und $q' \in [1, \infty[$. Dann gilt nach den Voraussetzungen, dass $\gamma' := m\theta\beta < m\theta$, und deswegen ist $\gamma' \in]0, \theta m[$. Damit folgt aus dem Lemma 4.1.2d), dass

$$B_{p,q'}^{k+m\theta\beta}(\mathbb{R}^n, E_0) = B_{p,q'}^{k+\gamma'}(\mathbb{R}^n, E_0) \doteq (\mathbb{E}_0, \mathbb{E}_{\theta,q})_{\beta,q'}.$$

Also liefert der Satz 4.1.2, dass $v \in C \left(J, B_{p,q'}^{k+m\theta\beta}(\mathbb{R}^n, E_0) \right)$, wenn $u_0 \in B_{p,q'}^{k+m\theta\beta}(\mathbb{R}^n, E_0)$ und v eine strenge Lösung ist, wenn $u_0 \in D \left(\tilde{A}(0) \right) = D \left(A(0)_{\mathfrak{F}_p^k} \right)$. Somit ist

$$u(t) := e^{\tilde{\omega}t} v(t)$$

die einzige Lösung von (4.13), die alle gewünschten Eigenschaften dieses Satzes besitzt. $\square$

Bemerkung 4.1.2 Wenn $E_0 = E_1$, $\mathfrak{F}_p^k = W_p^k$ für $1 \leq p < \infty$, $\mathfrak{F}_\infty^k \in \{BUC^k, C_0^k, C_b^k, W_\infty^k\}$ und $\mathcal{B}$ wie in (3.31) sind, dann erhält man

$$D\left(A(t)_{\mathfrak{F}_p^k}\right) \hookrightarrow \mathfrak{F}_p^k(\mathbb{R}^n, E_0)$$

statt a) im Lemma 4.1.2. In diesem Fall kann man die Theorie über lineare und parabolische Gleichungen in Banachräumen mit nicht dichten Definitionsbereichen anwenden. Dazu siehe z. B. [Acq-Te, 86, 87] und [Ya, 89, 90].

4.1.3 Beispiel

Seien $k \in \mathbb{N}_0$, $1 \leq p < \infty$, $\sigma \in]0, 1[$, $u_0 \in W_p^k(\mathbb{R}) = W_p^k(\mathbb{R}, \mathbb{C})$, $f \in C^\sigma([0, 1], W_p^k(\mathbb{R}))$, $b \in \mathbb{R}$, $b \geq 0$ und wir betrachten das Cauchy-Problem

$$\begin{cases} \dot{u} - \Delta_x u + b \sin(t)u = f(t, x), & (t, x) \in (0, 1] \times \mathbb{R}, \\ u(0, x) = u_0(x), & x \in \mathbb{R}, \end{cases} \quad (4.14)$$

auf $W_p^k(\mathbb{R})$. Mit Hilfe des Satzes 4.1.3 werden wir die Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen dieses Problems zeigen.

Dabei sind $E_0 = E_1 = \mathbb{C}$, $\mathfrak{F}_p^k = W_p^k$, $\mathcal{B} = \mathring{B}$, $n = 1$ und $\rho_n = 2$. In diesem Augenblick seien $I_{\mathbb{C}} : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ die identische Abbildung und $a : [0, 1] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{L}(\mathbb{C})$ eine Funktion, die durch

$$a(t, \xi) := [\xi^2 + b \sin(t)] I_{\mathbb{C}}, \quad (t, \xi) \in [0, 1] \times \mathbb{R},$$

definiert ist. Es ist klar, dass $a(t, \cdot) \in S^{2,l}(\mathbb{R}, \mathcal{L}(\mathbb{C}))$ für alle $t \in [0, 1]$ und $l \in \mathbb{N}$, nämlich

$$\|a(t, \cdot)\|_{S^{2,l}(\mathbb{R}, \mathcal{L}(\mathbb{C}))} = \max_{|\alpha| \leq l} \sup_{\xi \in \mathbb{R}} \left| \langle \xi \rangle^{|\alpha|-2} \partial_\xi^\alpha [\xi^2] \right| + |b| \leq 2 + |b| \quad \text{für alle } t \in [0, 1].$$

Dabei beachte, dass $a^0(t, \xi) := \xi^2$ der Hauptteil von $a(t, \cdot)$ ist. Außerdem gilt für jedes $t \in [0, 1]$

$$a(t, D) = -\Delta + b \sin(t) I_{\mathbb{C}} \quad \text{auf } \mathcal{S}(\mathbb{R})$$

(dazu siehe Definition 2.2.1). Weil $\overline{\left\{u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}) : \|\cdot\|_{B_{p,\infty}^{k+2}(\mathbb{R})}\right\}}^{\|\cdot\|_{B_{p,\infty}^{k+2}(\mathbb{R})}} = \mathring{B}_{p,\infty}^{k+2}(\mathbb{R}) \hookrightarrow \mathcal{S}'(\mathbb{R})$, müssen die Operatoren $H(t) := \widehat{a(t, D)} \Big|_{\mathring{B}_{p,\infty}^{k+2}(\mathbb{R})}$ und $-\Delta + b \sin(t) I_{\mathbb{C}}$ im Distributionensinne zusammenfallen. Nun sei $A(t)$, $t \in [0, 1]$, die W_p^k -Realisierung von $H(t)$ in $W_p^k(\mathbb{R})$, das heißt

$$\begin{cases} D(A(t)) = \left\{u \in \mathring{B}_{p,\infty}^{k+2}(\mathbb{R}) : H(t)u \in W_p^k(\mathbb{R})\right\}, \\ A(t)u := H(t)u, \quad u \in D(A(t)). \end{cases}$$

Dann ist

$$\begin{cases} \dot{u} + A(t)u = F(t), & t \in (0, 1], \\ u(0) = u_0, \end{cases}$$

das entsprechende abstrakte Cauchy-Problem von (4.14) mit

$$[t \mapsto F(t) := f(t, \cdot)] \in C^\sigma([0, 1], W_p^k(\mathbb{R})).$$

Zum Schluss zeigen wir, dass $\mathcal{A} := \{a(t, \cdot) : t \in [0, 1]\} \subset S^{2,2}(\mathbb{R}, \mathcal{L}(\mathbb{C}))$ eine Familie der parabolischen Symbole mit denselben Konstanten ω und κ ist, und

$$t \mapsto a(t, \cdot) \in C^\alpha \mathcal{L}([0, 1], S^{2,2}(\mathbb{R}, \mathcal{L}(\mathbb{C}))) \quad (4.15)$$

für alle $\alpha \in]0, 1[$.

Es gibt eine Konstante $\omega > 0$, so dass

$$\xi^4 + \mu^4 \geq 2\xi^2 + 2\mu^2 + 1 \quad \text{für alle } |\xi, \mu| \geq \omega.$$

Weil $\xi^4 + \mu^4 \geq 2\xi^2\mu^2$ für alle $\xi, \mu \in \mathbb{R}$ gilt, ist

$$\begin{aligned} \xi^4 + \mu^4 &= \frac{1}{3} [3(\xi^4 + \mu^4)] \\ &\geq \frac{1}{3} [(\xi^4 + \mu^4) + (2\xi^2 + 2\mu^2 + 1) + (\xi^4 + \mu^4)] \\ &\geq \frac{1}{3} [\xi^4 + \mu^4 + 2\xi^2 + 2\mu^2 + 2\xi^2\mu^2 + 1] \\ &= \frac{1}{3} (\xi^2 + \mu^2 + 1)^2 \quad \text{für alle } |\xi, \mu| \geq \omega. \end{aligned}$$

Daher folgt für alle $t \in [0, 1]$, $\theta \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ (also $\cos \theta \geq 0$) und alle $|\xi, \mu| \geq \omega$, dass

$$\begin{aligned} |\mu^2 e^{i\theta} + \xi^2| &= \sqrt{(\mu^2 e^{i\theta} + \xi^2)(\mu^2 e^{-i\theta} + \xi^2)} \\ &= \sqrt{\xi^4 + \mu^4 + 2\xi^2\mu^2 \cos \theta} \\ &\geq \sqrt{\xi^4 + \mu^4} \\ &\geq \frac{1}{\sqrt{3}} (1 + \xi^2 + \mu^2) = \frac{1}{\sqrt{3}} \langle \xi, \mu \rangle^2. \end{aligned}$$

Also ist $\mathcal{A} := \{a(t, \cdot) : t \in [0, 1]\} \subset S^{2,2}(\mathbb{R}, \mathcal{L}(\mathbb{C}))$ eine Familie der parabolischen Symbole mit denselben Konstanten ω und $\kappa := \sqrt{3}$, denn

$$\left\| \left[\mu^2 e^{i\theta} I_{\mathbb{C}} + a^0(t, \xi) \right]^{-1} \right\|_{\mathcal{L}(\mathbb{C})} = \left| \left[\mu^2 e^{i\theta} + \xi^2 \right]^{-1} \right| \leq \kappa \langle \xi, \mu \rangle^{-2}$$

für alle $|\xi, \mu| \geq \omega$, $\theta \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ und $t \in [0, 1]$.

Außerdem erhält man für alle $\alpha \in]0, 1[$ und alle $t, t' \in [0, 1]$, dass

$$\begin{aligned} \|a(t, \cdot) - a(t', \cdot)\|_{S^{2,2}(\mathbb{R}, \mathcal{L}(\mathbb{C}))} &\leq |b| |\sin(t) - \sin(t')| \\ &\leq |b| \left(\sup_{\beta \in [0, 1]} |\cos(\beta)| \right) |t - t'| \leq |b| |t - t'|^\alpha, \end{aligned}$$

also gilt (4.15). Dann folgt aus dem Satz 4.1.3, dass das Cauchy-Problem (4.14) eine eindeutige Lösung $u \in C([0, 1], W_p^k(\mathbb{R})) \cap C^1([0, 1], W_p^k(\mathbb{R}))$ besitzt.

4.2 Semilineare Cauchy-Probleme

4.2.1 Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen des semilinearen Cauchy-Problems

In diesem Abschnitt bezeichnen $\mathbb{E}_0, \mathbb{E}_1$ Banachräume mit $\mathbb{E}_1 \xhookrightarrow{d} \mathbb{E}_0$ und $(\mathbb{E}_0, \mathbb{E}_1)_{\theta, r}$ einen reellen Interpolationsraum zwischen $\mathbb{E}_0$ und $\mathbb{E}_1$ für $0 < \theta < 1$ und $1 \leq r < \infty$. Ist eine Funktion $u : \mathbb{E}_1 \rightarrow \mathbb{E}_0$ Fréchet-differenzierbar, dann sagt man $u \in \mathbf{C}^1(\mathbb{E}_1, \mathbb{E}_0)$, wenn deren Fréchet-Ableitung $Du : \mathbb{E}_1 \rightarrow \mathcal{L}(\mathbb{E}_1, \mathbb{E}_0)$ stetig ist. Induktiv definiert man $\mathbf{C}^k(\mathbb{E}_1, \mathbb{E}_0)$ für $k \in \mathbb{N}$ und $\mathbf{C}^\infty(\mathbb{E}_1, \mathbb{E}_0)$ durch $\bigcap_{k \in \mathbb{N}} \mathbf{C}^k(\mathbb{E}_1, \mathbb{E}_0)$. Nun definiert man zu $k \in \mathbb{N}_0$, $u \in \mathbf{C}^k(\mathbb{E}_1, \mathbb{E}_0)$ und einer beschränkten Teilmenge $B \subset \mathbb{E}_1$

$$p_{k,B}(u) := \max_{r \leq k} \sup_{x \in B} \|D^r u(x)\|$$

und den lokal konvexen Raum

$$\mathbf{C}_b^k(\mathbb{E}_1, \mathbb{E}_0) := \left\{ u \in \mathbf{C}^k(\mathbb{E}_1, \mathbb{E}_0) : p_{k,B}(u) < \infty \quad \forall B \subset \mathbb{E}_1 \text{ beschränkt} \right\}$$

mit der Topologie, die von der Familie der Halbnormen $\{p_{k,B} : B \subset \mathbb{E}_1 \text{ beschränkt}\}$ induziert ist. Dabei bezeichnen $D^0 u := u$ und $\mathbf{C}^0(\mathbb{E}_1, \mathbb{E}_0) := C(\mathbb{E}_1, \mathbb{E}_0)$.

Weiterhin sei $\mathbf{C}_b^\infty(\mathbb{E}_1, \mathbb{E}_0) := \bigcap_{k \in \mathbb{N}_0} \mathbf{C}_b^k(\mathbb{E}_1, \mathbb{E}_0)$ mit der von der Familie der Halbnormen $\{p_{k,B} : k \in \mathbb{N}_0, B \subset \mathbb{E}_1 \text{ beschränkt}\}$ induzierten Topologie. Darüber hinaus definieren wir zu einer Funktion $u : \mathbb{E}_1 \rightarrow \mathbb{E}_0$ und zu einer beschränkten Teilmenge $B \subset \mathbb{E}_1$

$$p_B(u) := \sup_{x \in B} \|u(x)\|_{\mathbb{E}_0} + \sup_{\substack{x, y \in B \\ x \neq y}} \frac{\|u(x) - u(y)\|_{\mathbb{E}_0}}{\|x - y\|_{\mathbb{E}_1}}$$

und

$$\mathbf{C}_b^{1-}(\mathbb{E}_1, \mathbb{E}_0) := \{u : \mathbb{E}_1 \rightarrow \mathbb{E}_0 : p_B(u) < \infty \text{ für alle } B \subset \mathbb{E}_1 \text{ beschränkt}\}.$$

Mit der Familie von Halbnormen $\{p_B : B \subset \mathbb{E}_1 \text{ beschränkt}\}$ ist $\mathbf{C}_b^{1-}(\mathbb{E}_1, \mathbb{E}_0)$ ein lokal konvexer Raum. Nach dem Mittelwertsatz der Differentialrechnung ist

$$\mathbf{C}_b^1(\mathbb{E}_1, \mathbb{E}_0) \hookrightarrow \mathbf{C}_b^{1-}(\mathbb{E}_1, \mathbb{E}_0).$$

Nun seien $T > 0$, $J = [0, T]$, X ein lokal konvexer Raum, dessen Topologie von der Familie der Halbnormen $\mathcal{P}$ induziert ist, und $0 < \alpha < 1$. Dann definieren wir für eine Funktion $u : J \rightarrow X$, $\tilde{T} \in J$ und $p \in \mathcal{P}$

$$p_{\alpha, \tilde{T}}(u) := \max_{0 \leq t \leq \tilde{T}} p(u(t)) + \sup_{0 \leq s < t \leq \tilde{T}} \frac{p(u(s) - u(t))}{|s - t|^\alpha}$$

und den lokal konvexen Raum

$$\mathbf{C}^\alpha(J, X) := \left\{ u : J \rightarrow X : p_{\alpha, \tilde{T}}(u) < \infty \text{ für alle } \tilde{T} \in J \text{ und } p \in \mathcal{P} \right\}$$

mit der Topologie, die die Familie der Halbnormen $\left\{p_{\alpha, \tilde{T}} : \tilde{T} \in J \text{ und } p \in \mathcal{P}\right\}$ erzeugt.

Mit den obigen Definitionen lässt sich jetzt ein Resultat über Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen des semilinearen Cauchy-Problems formulieren. Im Folgenden bezeichnet $\overset{\circ}{J} := (0, T]$.

Satz 4.2.1 Seien $r \in [1, \infty)$, $0 < \rho \leq \gamma < \beta < 1$, $\theta \in \{\beta, \gamma, \rho\}$, $\mathbb{E}_1 \xrightarrow{d} \mathbb{E}_0$ und

$$\mathbb{E}_{\theta, r} := (\mathbb{E}_0, \mathbb{E}_1)_{\theta, r}.$$

Außerdem nehmen wir an, dass $-A(t) : \mathbb{E}_1 \rightarrow \mathbb{E}_0$ eine stark stetige und analytische Halbgruppe auf $\mathbb{E}_0$ erzeugt, und

$$\begin{aligned} [t \mapsto A(t)] &\in C^\alpha(J, \mathcal{L}(\mathbb{E}_1, \mathbb{E}_0)), \\ [t \mapsto g(t, \cdot)] &\in \mathbf{C}^\alpha(J, \mathbf{C}_b^{1-}(\mathbb{E}_\gamma, \mathbb{E}_\rho)) \end{aligned}$$

für ein $\alpha \in (0, 1)$.

Ist $u_0 \in \mathbb{E}_{\beta, r}$ gegeben, so hat das Anfangswertproblem

$$\begin{cases} \dot{u} + A(t)u = g(t, u), & t \in \overset{\circ}{J}, \\ u(0) = u_0, \end{cases} \quad (4.16)$$

eine eindeutig maximale Lösung

$$u(\cdot, u_0) := u(\cdot, u_0, A, g) \in C(J(u_0), \mathbb{E}_{\beta, r}) \cap C\left(\overset{\circ}{J}(u_0), \mathbb{E}_1\right) \cap C^1\left(\overset{\circ}{J}(u_0), \mathbb{E}_0\right).$$

Das maximale Intervall der Existenz, $J(u_0) := J(u_0, A, g)$, ist offen in J . Ist

$$\sup_{t \in J(u_0) \cap [0, \tilde{T}]} \|u(t, u_0)\|_{\mathbb{E}_{\beta, r}} < \infty$$

für jedes $\tilde{T} \in J$, so ist $u(\cdot, u_0)$ eine **globale Lösung**, das heißt $J(u_0) = J$. Außerdem gibt es für jedes $\tilde{T} \in \overset{\circ}{J}(u_0)$ eine Umgebung $\mathcal{U}$ von (u_0, A, g) in

$$\mathbb{E}_{\beta, r} \times C^\alpha(J, \mathcal{L}(\mathbb{E}_1, \mathbb{E}_0)) \times \mathbf{C}^\alpha(J, \mathbf{C}_b^{1-}(\mathbb{E}_\gamma, \mathbb{E}_\rho)),$$

so dass $[0, \tilde{T}] \subset J(\tilde{u}_0, \tilde{A}, \tilde{g})$ für $(\tilde{u}_0, \tilde{A}, \tilde{g}) \in \mathcal{U}$ und

$$u(\cdot, \tilde{u}_0, \tilde{A}, \tilde{g}) \longrightarrow u(\cdot, u_0, A, g) \quad \text{in } C\left([0, \tilde{T}], \mathbb{E}_{\beta, r}\right),$$

wenn $(\tilde{u}_0, \tilde{A}, \tilde{g}) \longrightarrow (u_0, A, g)$ in $\mathcal{U}$.

Beweis. Siehe [Am,00] Theorem 5.1. □

4.2.2 Elliptische Differentialoperatoren

Eine Anwendung des Satzes 4.2.1 auf einer Familie der elliptischen Differentialoperatoren wird durch ein Beispiel im nächsten Abschnitt eingeführt. Aus diesem Grund geben wir in diesem Paragraphen einige Definitionen und Eigenschaften der elliptischen Differentialoperatoren wieder, die man in [Am,01] Sektion 3 finden kann. Insbesondere wird im Satz 4.2.2 gezeigt, dass das Symbol eines normal-elliptischen Differentialoperators mit konstanten Koeffizienten parabolisch ist.

Seien E_0, E_1 Banachräume mit $E_1 \hookrightarrow E_0$, $m \in \mathbb{N}$ und $a_\alpha : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathcal{L}(E_1, E_0)$ für $|\alpha| \leq m$. Dann ist

$$P := P(x, D_x) := \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha(x) D_x^\alpha \quad (4.17)$$

ein **linearer Differentialoperator** auf $\mathbb{R}^n$ mit $\mathcal{L}(E_1, E_0)$ -vektorwertigen Koeffizienten. Wir nennen $p_0 : \mathbb{R}_x^n \times \mathbb{R}_\xi^n \rightarrow \mathcal{L}(E_1, E_0)$,

$$p_0(x, \xi) := \sum_{|\alpha|=m} a_\alpha(x) \xi^\alpha, \quad (4.18)$$

das **Hauptsymbol** von P .

Für $\theta \in [0, \pi]$ sei $\sum_\theta := \{\lambda \in \mathbb{C} : |\arg \lambda| \leq \theta\} \cup \{0\}$. Sind $\kappa \geq 1$ und $\theta \in [0, \pi)$ gegeben, so wird der Differentialoperator $P(\kappa, \theta)$ **-elliptisch** genannt, wenn

$$[\lambda I + p_0(x, \xi)]^{-1} \in \mathcal{L}(E_0, E_1) \text{ und } \left\| [\lambda I + p_0(x, \xi)]^{-1} \right\|_{\mathcal{L}(E_0, E_1)} \leq \frac{\kappa}{1 + |\lambda|} \quad (4.19)$$

für alle $\lambda \in \sum_\theta$ und $(x, \xi) \in \mathbb{R}_x^n \times \mathbb{R}_\xi^n$ mit $|\xi| = 1$.

Der Operator P heißt **θ -elliptisch**, wenn er (κ, θ) -elliptisch für ein $\kappa \geq 1$ ist, und **normal-elliptisch**, wenn er $\frac{\pi}{2}$ -elliptisch ist.

Bemerkung 4.2.1 ([Am,01], Remarks 3.1) Sei P wie in (4.17). Dann gelten:

a) Die Bedingung (4.19) ist äquivalent zu

$$[\lambda I + p_0(x, \xi)]^{-1} \in \mathcal{L}(E_0, E_1) \text{ und } \left\| [\lambda I + p_0(x, \xi)]^{-1} \right\|_{\mathcal{L}(E_0, E_1)} \leq \frac{\kappa}{|\xi|^m + |\lambda|}$$

für alle $\lambda \in \sum_\theta$ und $(x, \xi) \in \mathbb{R}_x^n \times \mathbb{R}_\xi^n$ mit $\xi \neq 0$.

b) Ist P normal-elliptisch, so ist m gerade.

Satz 4.2.2 Seien P ein normal-elliptischer Differentialoperator (genau genommen $(\kappa, \pi/2)$ -elliptisch) mit konstanten Koeffizienten, das heißt $a_\alpha(x) = a_\alpha \in \mathcal{L}(E_1, E_0)$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$ und $|\alpha| \leq m$, und sei $M_m := \max \{\|a_\alpha\| : |\alpha| \leq m\}$. Dann ist

$$p(\xi) := \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha \xi^\alpha \in S_{1,0}^{m,\rho_n}(\mathbb{R}^n, \mathcal{L}(E_1, E_0))$$

ein parabolisches Symbol mit Konstanten $\omega := \omega(\kappa, M_m) > 0$ und $\kappa_0 := \kappa_0(\kappa, m) > 1$. Darüber hinaus ist p parabolisch in $S^{m,\rho_n}(\mathbb{R}^n, \mathcal{L}(E_1, E_0))$ mit Konstanten ω und κ .

Beweis. Seien $p_0(\xi) := \sum_{|\alpha|=m} a_\alpha \xi^\alpha$ und $q(\xi) := p(\xi) - p_0(\xi)$ für $\xi \in \mathbb{R}^n$, wobei p_0 das Hauptsymbol von P ist. Dann gilt für alle $\xi \in \mathbb{R}^n$:

$$\|q(\xi)\|_{\mathcal{L}(E_1, E_0)} \leq (\max\{\|a_\alpha\| : |\alpha| \leq m\}) \sum_{|\alpha| \leq m-1} |\xi|^{|\alpha|} \leq c(M_m) \max\{1, |\xi|^{m-1}\}.$$

Daher und aufgrund der Bemerkung 4.2.1 a) erhält man

$$\begin{aligned} \left\| q(\xi) (\lambda I + p_0(\xi))^{-1} \right\|_{\mathcal{L}(E_0)} &\leq \|q(\xi)\|_{\mathcal{L}(E_1, E_0)} \left\| (\lambda I + p_0(\xi))^{-1} \right\|_{\mathcal{L}(E_0, E_1)} \\ &\leq \frac{\kappa c(M_m) \max\{1, |\xi|^{m-1}\}}{|\xi|^m + |\lambda|} \end{aligned}$$

für alle $0 \neq \xi \in \mathbb{R}^n$ und $\lambda \in \sum_{\frac{\pi}{2}}$.

Nun seien $\mu \geq 0$, $\theta \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ und $\lambda := \mu^m e^{\theta i} \in \sum_{\frac{\pi}{2}}$. Da

$$\lim_{|\xi, \mu| \rightarrow \infty} \frac{\kappa c(M_m) \max\{1, |\xi|^{m-1}\}}{|\xi|^m + \mu^m} = 0 \quad \text{gilt,}$$

gibt es eine Konstante $\omega_1 := \omega_1(\kappa, M_m) > 1$ so groß genügt, dass

$$\frac{\kappa c(M_m) \max\{1, |\xi|^{m-1}\}}{|\xi|^m + \mu^m} < \frac{1}{2} \quad \forall |\xi, \mu| \geq \omega_1.$$

Daher erhält man $\left\| q(\xi) (\mu^m e^{\theta i} I + p_0(\xi))^{-1} \right\|_{\mathcal{L}(E_0)} \leq \frac{1}{2}$ für alle $|\xi, \mu| \geq \omega_1$ und $\theta \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.

Dann folgt aus

$$\mu^m e^{\theta i} I + p(\xi) = \left[I + q(\xi) (\mu^m e^{\theta i} I + p_0(\xi))^{-1} \right] (\mu^m e^{\theta i} I + p_0(\xi))$$

und aus dem Satz von Neumann, dass $(\mu^m e^{\theta i} I + p(\xi))^{-1} \in \mathcal{L}(E_0, E_1)$ und

$$\begin{aligned} \left\| (\mu^m e^{\theta i} I + p(\xi))^{-1} \right\|_{\mathcal{L}(E_0, E_1)} &\leq 2 \left\| (\mu^m e^{\theta i} I + p_0(\xi))^{-1} \right\|_{\mathcal{L}(E_0, E_1)} \\ &\leq \frac{2\kappa}{|\xi|^m + \mu^m} \end{aligned} \tag{4.20}$$

für alle $|\xi, \mu| \geq \omega_1$ und $\theta \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.

Nun seien $\xi \in \mathbb{R}^n$, $\mu > 0$ mit $|\xi, \mu| = \sqrt{|\xi|^2 + \mu^2} > \omega_1 > 1$. Dann ist $2(|\xi|^2 + \mu^2) \geq |\xi|^2 + \mu^2 + 1$ und somit

$$\begin{aligned} \langle \xi, \mu \rangle^m &= \left(1 + |\xi|^2 + \mu^2\right)^{\frac{m}{2}} \\ &\leq 2^{\frac{m}{2}} \left(|\xi|^2 + \mu^2\right)^{\frac{m}{2}} \\ &= 2^{\frac{m}{2}} \sum_{j=0}^{\frac{m}{2}} \binom{\frac{m}{2}}{j} |\xi|^{2j} \mu^{2(\frac{m}{2}-j)}, \quad \frac{m}{2} \in \mathbb{N} \text{ wegen Bemerkung 4.2.1b)} \\ &= 2^{\frac{m}{2}} \underbrace{\sum_{j=1}^{\frac{m}{2}-1} \binom{\frac{m}{2}}{j} |\xi|^{2j} \mu^{2(\frac{m}{2}-j)}}_{=: Q(|\xi|, \mu)} + 2^{\frac{m}{2}} (|\xi|^m + \mu^m). \end{aligned}$$

Da $\lim_{|\xi|, \mu \rightarrow \infty} \frac{Q(|\xi|, \mu)}{|\xi|^m + \mu^m} = 0$ ist, gibt es eine Konstante $\omega_2 := \omega_2(m) > 1$, so dass

$$\frac{Q(|\xi|, \mu)}{|\xi|^m + \mu^m} \leq 1 \quad \text{für alle } |\xi, \mu| > \omega_2$$

und somit ist

$$\langle \xi, \mu \rangle^m \leq 2^{\frac{m}{2}+1} (|\xi|^m + \mu^m) \quad \text{für alle } |\xi, \mu| > \omega, \quad (4.21)$$

wobei $\omega := \omega(\kappa, M_m) = \max\{\omega_1, \omega_2\}$.

Dann folgt aus (4.20) und (4.21), dass p parabolisch in $S_{1,0}^{m,\rho_n}(\mathbb{R}^n, \mathcal{L}(E_1, E_0))$ mit Konstanten $\omega = \omega(\kappa, M_m)$ und $\kappa_0 := 2^{\frac{m}{2}+2}\kappa > 1$ ist, wie auch in $S^{m,\rho_n}(\mathbb{R}^n, \mathcal{L}(E_1, E_0))$ mit Konstanten ω, κ . $\square$

Eigentlich sollten wir oben (wegen Bemerkung 3.3.1 a)) nur zeigen, dass p parabolisch in S^{m,ρ_n} ist. Aber wir haben den Satz 4.2.2 so bewiesen, weil wir damit illustrieren möchten, warum die Symbolklasse $S^{m,\rho_n}(\mathbb{R}^n, \mathcal{L}(E_1, E_0))$ so definiert wurde.

Eine Folgerung des Satzes 4.2.2 wird nach den folgenden Bezeichnungen gegeben. Seien (Y, μ) ein Maßraum mit endlichem Maß, $\bullet : E_2 \times E_1 \rightarrow E_0$ eine Multiplikation, $\mathbb{E}_i := L_p(Y, \mu; E_i)$ für $i = 0, 1$, $1 \leq p \leq \infty$, $m \in \mathbb{N}$ und seien für alle $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ mit $|\alpha| \leq m$

$$[t \mapsto a_\alpha(t, \cdot)] \in C_b(\mathbb{R}^+, L_\infty(Y, \mu; E_2)). \quad (4.22)$$

Es ist klar, dass für jedes $t \in \mathbb{R}^+$ und $|\alpha| \leq m$ der durch

$$[a_\alpha(t)v](y) := [a_\alpha(t)(y)] \bullet v(y) \quad \text{für } y \in Y \text{ und } v \in \mathbb{E}_1 \quad (4.23)$$

definierte punktweise Multiplikationsoperator $a_\alpha(t) : \mathbb{E}_1 \rightarrow \mathbb{E}_0$ linear und stetig ist. Dabei ist $a_\alpha(t)(y) := a_\alpha(t, y)$.

Somit ist

$$P_t := P_t(D_x) := \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha(t) D_x^\alpha \quad (4.24)$$

ein Differentialoperator mit den konstanten Koeffizienten $a_\alpha(t) \in \mathcal{L}(\mathbb{E}_1, \mathbb{E}_0)$ und dem Parameter $t \in \mathbb{R}^+$. Außerdem gibt es nach (4.22) eine Konstante $K > 0$, so dass

$$\sum_{|\alpha| \leq m} \|a_\alpha\|_{C_b(\mathbb{R}^+, \mathcal{L}(\mathbb{E}_1, \mathbb{E}_0))} < K.$$

Nun sei für $t \in \mathbb{R}^+$ und $\xi \in \mathbb{R}^n$

$$p_t(\xi) := \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha(t) \xi^\alpha$$

das Symbol von P_t . Dann folgt aus dem Satz 4.2.2:

Korollar 4.2.1 *Sind die Operatoren P_t in (4.24) $(\kappa, \pi/2)$ -elliptisch für alle $t \in \mathbb{R}^+$ (d.h. die P_t sind normal-elliptisch mit derselben Konstante $\kappa \geq 1$), so ist $\{p_t : t \in \mathbb{R}^+\} \subset S^{m, \rho_n}(\mathbb{R}^n, \mathcal{L}(\mathbb{E}_1, \mathbb{E}_0))$ eine beschränkte Familie der parabolischen Symbole mit denselben Konstanten $\omega := \omega(\kappa, K) > 0$ und $\kappa_0 := \kappa_0(\kappa, m) \geq 1$.*

Ein besonderer Fall eines elliptischen Differentialoperators wird im folgenden Beispiel betrachtet.

4.2.3 Beispiel: Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen eines semilinearen und elliptischen Differentialgleichungssystems zweiter Ordnung

Seien $T > 0$, $J = [0, T]$, $\mathring{J} = (0, T]$, $\alpha \in (0, 1)$, (Y, μ) ein Maßraum mit endlichem Maß, $y \in Y$ und für jedes $t \in J$ sei

$$A(t) := - \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(t) \partial_{x_i x_j}^2 + \sum_{i=1}^n b_i(t) \partial_{x_i} + b_0(t) \quad (4.25)$$

ein Differentialoperator zweiter Ordnung mit nicht von x sondern von einem Parameter $t \in J$ abhängigen Koeffizienten $a_{ij}(t)$, $b_i(t)$, $b_0(t)$, so dass

$$\begin{aligned} [t \mapsto a_{ij}(t)] &\in C^\alpha(J, L_\infty(Y, \mu, \mathbb{R})), \\ [t \mapsto b_0(t)] &\in C^\alpha(J, L_\infty(Y, \mu, \mathbb{R})), \\ [t \mapsto b_i(t)] &\in C^\alpha(J, L_\infty(Y, \mu, \mathbb{R})) \end{aligned} \quad (4.26)$$

für alle $i, j = 1, \dots, n$ gelten und $[a_{ij}(t, y)]_{n \times n}$ für jedes $t \in J$, $y \in Y$ symmetrisch ist (vgl. (4.23)). Darüber hinaus nehmen wir an, dass eine von t und y unabhängige Konstante $\delta > 0$ existiert, so dass

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(t, y) \xi_i \xi_j \geq \delta \|\xi\|^2 \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^n, y \in Y \text{ und } t \in J \text{ gilt.} \quad (4.27)$$

Wir werden mit Hilfe des Satzes 4.2.1 die Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen folgenden Cauchy-Problems, des Reaktions-Diffusions-Typs zeigen:

$$\begin{cases} \partial_t u + A(t)u = R(x, t, y, u), & t \in (0, T], x \in \mathbb{R}^n, \\ u(x, 0, y) = u_0(x, y), & x \in \mathbb{R}^n. \end{cases} \quad (4.28)$$

Dabei bezeichnen $y \in Y$ einen Parameter und u_0, R geeignete gegebene Funktionen. Dazu ist es notwendig, (4.28) in ein abstraktes Cauchy-Problem umzuwandeln.

Für das Problem (4.28) werden folgende Betrachtungen und Aussagen zusammengestellt. Das Hauptresultat dieses Abschnitts wird im Satz 4.2.3 gezeigt.

a) Umschreibung des Differentialoperators (4.25) : Sei $\mathbb{E} := L_p(Y, \mu; \mathbb{R})$ für ein $1 \leq p \leq \infty$. Nach (4.25) und (4.26) gibt es von x unabhängige Funktionen $a_\beta \in C^\alpha(J, C_b(\mathbb{R}^n, L_\infty(Y, \mu; \mathbb{R})))$ mit $|\beta| \leq 2$, so dass

$$A(t) = \sum_{|\beta|=2} a_\beta(t) D_x^\beta + i \sum_{|\beta|=1} a_\beta(t) D_x^\beta + a_0(t) \quad \text{für alle } t \in J, \quad (4.29)$$

nämlich

$$a_\beta(t) = a_{ij}(t, \cdot) \quad \text{für } |\beta| = 2 \text{ und geeignete } i, j = 1, \dots, n.$$

Mit der Notation

$$[a_\beta(t)v](y) := [a_\beta(t)(y)] \cdot v(y) \quad \text{für alle } v \in \mathbb{E}, y \in Y, t \in J \text{ und } |\beta| \leq 2,$$

wobei $a_\beta(t)(y) := a_\beta(t, y)$ ist, lässt sich $a_\beta(t) : \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{E}$ wie ein Multiplikationsoperator schreiben. Somit lässt sich $A(t)$ als ein linearer Differentialoperator mit $\mathcal{L}(\mathbb{E})$ -vektorwertigen konstanten Koeffizienten auffassen.

b) Behauptung: Sei $t \in J$ und

$$p_{0,t}(\xi) := \sum_{|\beta|=2} a_\beta(t) \xi^\beta, \quad \text{für alle } \xi \in \mathbb{R}^n, \quad (4.30)$$

das Hauptsymbol von $A(t)$. Dann gelten

$$[\lambda I + p_{0,t}(\xi)]^{-1} \in \mathcal{L}(\mathbb{E}) \quad \text{und} \quad \|(\lambda I + p_{0,t}(\xi))^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathbb{E})} \leq \frac{\kappa(\delta)}{1 + |\lambda|}$$

für alle $t \in J$, $\lambda \in \sum_{\pi/2}$ und $\xi \in \mathbb{R}^n$ mit $|\xi| = 1$. Dabei ist $\kappa(\delta) \geq 1$ eine von t, ξ und λ unabhängige Konstante und $\mathbb{E}$ wurde komplexifiziert. Somit ist $A(t)$ eine Familie der $(\kappa, \pi/2)$ -elliptischen Differentialoperatoren mit konstanten Koeffizienten.

Beweis. Seien $t \in J$, $y \in (Y, \mu)$, $\lambda \in \sum_{\pi/2}$ (also $\operatorname{Re} \lambda \geq 0$) und $\xi \in \mathbb{R}^n$ mit $|\xi| = 1$. Dann gilt

$$\begin{aligned} \left| \lambda + \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(t, y) \xi_i \xi_j \right|^2 &= \left(\operatorname{Re} \lambda + \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(t, y) \xi_i \xi_j \right)^2 + \operatorname{Im}^2 \lambda \\ &\geq |\lambda|^2 + 2 \operatorname{Re} \lambda \underbrace{\left(\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(t, y) \xi_i \xi_j \right)}_{\geq 0} + \underbrace{\delta^2 |\xi|^4}_{=1} \\ &\geq \underbrace{\min(1, \delta^2)}_{=: C_\delta} (|\lambda|^2 + 1). \end{aligned} \quad (4.31)$$

Daraus folgt, dass $\lambda + p_{0,t}(\xi) : \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{E}$ surjektiv ist, denn es gibt für $v \in \mathbb{E}$ ein $u := \left(\lambda + \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(t, \cdot) \xi_i \xi_j \right)^{-1} \cdot v \in \mathbb{E}$ mit $(\lambda I + p_{0,t}(\xi)) u = v$. Außerdem erhält man aus (4.31) für alle $v \in \mathbb{E} = L_p(Y, \mu; \mathbb{R})$, dass

$$\begin{aligned} \|(\lambda + p_{0,t}(\xi)) v\|_{L_p(Y, \mu)} &= \left[\int_Y \left| \lambda + \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(t, y) \xi_i \xi_j \right|^p |v(y)|^p d\mu \right]^{\frac{1}{p}} \quad (\text{falls } p < \infty) \\ &\geq C_\delta \langle \lambda \rangle \|v\|_{L_p(Y, \mu)}. \end{aligned}$$

Ebenso zeigt man diese Abschätzung für $p = \infty$. Dann ist $\lambda + p_{0,t}(\xi) : \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{E}$ injektiv und

$$\left\| (\lambda + p_{0,t}(\xi))^{-1} \right\|_{\mathcal{L}(\mathbb{E})} \leq \frac{\tilde{\kappa}(\delta)}{\langle \lambda \rangle} \leq \frac{\kappa(\delta)}{1 + |\lambda|}$$

für alle $t \in J$, $\lambda \in \sum_{\pi/2}$ und $\xi \in \mathbb{R}^n$ mit $|\xi| = 1$. Somit ist die Behauptung bewiesen. $\square$

- c) Aufgrund des Korollars 4.2.1 ist $\{p_t : t \in J\} \subset S^{2, \rho_n}(\mathbb{R}^n, \mathcal{L}(\mathbb{E}))$ eine beschränkte Familie der parabolischen Symbole mit denselben Konstanten $\omega > 0$ und $\kappa_0 > 1$. Dabei ist p_t das Symbol von $A(t)$.
- d) Seien die Voraussetzungen wie im Satz 3.3.4 mit $\mathcal{A} := \{p_t : t \in J\}$, $\mathfrak{F}_\infty^k(\mathbb{R}^n, \mathbb{E}) = BUC^k(\mathbb{R}^n, \mathbb{E})$ und $k < 2$ falls $p = \infty$. Dann erzeugt

$$-A(t)_{\mathfrak{F}_p^k} : D(A(t)_{\mathfrak{F}_p^k}) \rightarrow \mathfrak{F}_p^k(\mathbb{R}^n, \mathbb{E}), \quad t \in J,$$

(wegen des Satzes 3.3.4) eine analytische und sogar eine stark stetige Halbgruppe auf $\mathfrak{F}_p^k(\mathbb{R}^n, \mathbb{E})$. Außerdem sieht man nach der Definition von $A(t)$ und (4.26), dass $D(A(t)_{\mathfrak{F}_p^k}) = D(A(0)_{\mathfrak{F}_p^k}) =: D_0$ und

$$\left[t \mapsto A(t)_{\mathfrak{F}_p^k} \right] \in C^\alpha \left(J, \mathcal{L} \left(D_0, \mathfrak{F}_p^k(\mathbb{R}^n, \mathbb{E}) \right) \right). \quad (4.32)$$

e) **Annahme:** Seien $\tilde{r} \in [1, \infty)$, $0 < \rho \leq \gamma < \beta < 1$, $\theta \in \{\beta, \gamma, \rho\}$, $\mathbb{E}_1 := D_0$, $\mathbb{E}_0 := \mathfrak{F}_p^k(\mathbb{R}^n, \mathbb{E})$ und

$$\mathbb{E}_{\theta, \tilde{r}} := (\mathbb{E}_0, \mathbb{E}_1)_{\theta, \tilde{r}}.$$

Ferner sei $u_0 \in \mathbb{E}_{\beta, \tilde{r}}$ und wir nehmen an, dass es eine Funktion

$$[t \mapsto g(t, \cdot)] \in \mathbf{C}^\alpha(J, \mathbf{C}_b^{1-}(\mathbb{E}_{\gamma, \tilde{r}}, \mathbb{E}_{\rho, \tilde{r}})) \text{ gibt,}$$

so dass $g(\cdot, \cdot)$ die Funktion R in (4.28) vertritt³. Damit:

f) lässt sich der Satz 4.2.1 anwenden, um Existenz und Eindeutigkeit des Problems (4.28) festzustellen. Präzisiert wird dies im folgenden Satz.

Satz 4.2.3 Seien die Voraussetzungen und die Bezeichnungen wie im Beispiel 4.2.3, $0 < \rho \leq \gamma < \beta < 1$, $\tilde{r} \in [1, \infty)$, $u_0 \in B_{p, \tilde{r}}^{k+2\beta}(\mathbb{R}^n, \mathbb{E})$ und

$$[t \mapsto g(t, \cdot)] \in \mathbf{C}^\alpha\left(J, \mathbf{C}_b^{1-}\left(B_{p, \tilde{r}}^{k+2\gamma}(\mathbb{R}^n, \mathbb{E}), B_{p, \tilde{r}}^{k+2\rho}(\mathbb{R}^n, \mathbb{E})\right)\right).$$

Dann hat das Anfangswertproblem

$$\begin{cases} \dot{u} + A(t)_{\mathfrak{F}_p^k} u = g(t, u), & t \in \overset{\circ}{J}, \\ u(0) = u_0, \end{cases} \quad (4.33)$$

eine eindeutig maximale Lösung

$$u := u(\cdot, u_0, A_{\mathfrak{F}_p^k}, g) \in C\left(J(u_0), B_{p, \tilde{r}}^{k+2\beta}(\mathbb{R}^n, \mathbb{E})\right) \cap C\left(\overset{\circ}{J}(u_0), D_0\right) \cap C^1\left(\overset{\circ}{J}(u_0), \mathfrak{F}_p^k(\mathbb{R}^n, \mathbb{E})\right).$$

Das maximale Intervall der Existenz, $J(u_0) := J(u_0, A_{\mathfrak{F}_p^k}, g)$, ist offen in J . Ist außerdem

$$\sup_{t \in \overset{\circ}{J}(u_0) \cap [0, \tilde{T}]} \|u(t, u_0)\|_{B_{p, \tilde{r}}^{k+m\beta}(\mathbb{R}^n, \mathbb{E})} < \infty$$

für alle $\tilde{T} \in J$, dann ist u eine globale Lösung, d.h. $J(u_0) = J$. Darüber hinaus gibt es für jedes $\tilde{T} \in \overset{\circ}{J}(u_0)$ eine Umgebung $\mathcal{U}$ von $(u_0, A_{\mathfrak{F}_p^k}, g)$ in

$$B_{p, \tilde{r}}^{k+2\beta}(\mathbb{R}^n, \mathbb{E}) \times C^\alpha\left(J, \mathcal{L}\left(D_0, \mathfrak{F}_p^k(\mathbb{R}^n, \mathbb{E})\right)\right) \times \mathbf{C}^\alpha\left(J, \mathbf{C}_b^{1-}\left(B_{p, \tilde{r}}^{k+2\gamma}(\mathbb{R}^n, \mathbb{E}), B_{p, \tilde{r}}^{k+2\rho}(\mathbb{R}^n, \mathbb{E})\right)\right),$$

so dass $[0, \tilde{T}] \subset J(\tilde{u}_0, \tilde{A}, \tilde{g})$ für $(\tilde{u}_0, \tilde{A}, \tilde{g}) \in \mathcal{U}$ und

$$u(\cdot, \tilde{u}_0, \tilde{A}, \tilde{g}) \longrightarrow u(\cdot, u_0, A, g) \quad \text{in } C\left([0, \tilde{T}], B_{p, \tilde{r}}^{k+2\beta}(\mathbb{R}^n, \mathbb{E})\right),$$

wenn $(\tilde{u}_0, \tilde{A}, \tilde{g}) \longrightarrow (u_0, A, g)$ in $\mathcal{U}$.

³Konkrete Funktionen R und g werden im Unterabschnitt 4.3.1 eingeführt.

Beweis. Sei $\theta \in \{\beta, \gamma, \rho\}$. Für alle $k \in \mathbb{N}_0$ und $p \in [1, \infty]$ wissen wir bereits, dass

$$\begin{aligned} B_{p,1}^k(\mathbb{R}^n, \mathbb{E}) &\hookrightarrow \mathfrak{F}_p^k(\mathbb{R}^n, \mathbb{E}) \hookrightarrow B_{p,\infty}^k(\mathbb{R}^n, \mathbb{E}), \\ B_{p,1}^{k+2}(\mathbb{R}^n, \mathbb{E}) &\hookrightarrow D_0 \hookrightarrow B_{p,\infty}^{k+2}(\mathbb{R}^n, \mathbb{E}) \end{aligned}$$

(vgl. (3.32), (3.77), (3.79), (1.28) und Satz 1.1.2a)). Daraus folgt zusammen mit dem Satz 1.1.3d) und (1.45):

$$\mathbb{E}_{\theta, \tilde{r}} = (\mathbb{E}_0, \mathbb{E}_1)_{\theta, \tilde{r}} = \left(\mathfrak{F}_p^k(\mathbb{R}^n, \mathbb{E}), D_0 \right)_{\theta, \tilde{r}} \doteq B_{p, \tilde{r}}^{k+2\theta}(\mathbb{R}^n, \mathbb{E})$$

für alle $\tilde{r} \in [1, \infty)$. Außerdem hat man nach den Sätzen 3.3.4 und 1.1.2 j), dass $\mathbb{E}_1 \xhookrightarrow{d} \mathbb{E}_0$. Daher und aus dem Satz 4.2.1 folgt die Behauptung dieses Satzes. $\square$

Bemerkung 4.2.2 Nimmt man die Voraussetzungen des Korollars 3.1.2 an mit $\mathcal{A} := \{p_t : t \in J\}$ und $1 \leq q < \infty$ statt d) im Beispiel 4.2.3, so erzeugt

$$-A(t) : B_{p,q}^{s+2}(\mathbb{R}^n, \mathbb{E}) \rightarrow B_{p,q}^s(\mathbb{R}^n, \mathbb{E}), \quad t \in J,$$

eine stark stetige und analytische Halbgruppe auf $B_{p,q}^s(\mathbb{R}^n, \mathbb{E})$. In diesem Fall ist $D(A(t)) = B_{p,q}^{s+2}(\mathbb{R}^n, \mathbb{E})$ für alle $t \in J$ und ferner gilt

$$[t \mapsto A(t)] \in C^\alpha(J, \mathcal{L}(B_{p,q}^{s+2}(\mathbb{R}^n, \mathbb{E}), B_{p,q}^s(\mathbb{R}^n, \mathbb{E}))).$$

Daher kann man analog zum Satz 4.2.3 das folgende Resultat feststellen:

Satz 4.2.4 Seien die Voraussetzungen und die Bezeichnungen wie im Beispiel 4.2.3, aber mit den Voraussetzungen der Bemerkung 4.2.2 statt d) in diesem Beispiel. Darüber hinaus seien $u_0 \in B_{p,q}^{s+2\beta}(\mathbb{R}^n, \mathbb{E})$ für $0 < \rho \leq \gamma < \beta < 1$, $q \in [1, \infty)$ und

$$[t \mapsto g(t, \cdot)] \in \mathbf{C}^\alpha(J, \mathbf{C}_b^{1-}(B_{p,q}^{s+2\gamma}(\mathbb{R}^n, \mathbb{E}), B_{p,q}^{s+2\rho}(\mathbb{R}^n, \mathbb{E}))).$$

Dann hat das Anfangswertproblem

$$\begin{cases} u' + A(t)u = g(t, u), & t \in \mathring{J}, \\ u(0) = u_0, \end{cases} \quad (4.34)$$

eine eindeutig maximale Lösung $u := u(\cdot, u_0, A, g)$ in

$$C(J(u_0), B_{p,q}^{s+2\beta}(\mathbb{R}^n, \mathbb{E})) \cap C(\mathring{J}(u_0), B_{p,q}^{s+2}(\mathbb{R}^n, \mathbb{E})) \cap C^1(\mathring{J}(u_0), B_{p,q}^s(\mathbb{R}^n, \mathbb{E})).$$

Das maximale Intervall der Existenz, $J(u_0) := J(u_0, g)$, ist offen in J . Ist außerdem

$$\sup_{t \in \mathring{J}(u_0) \cap [0, \tilde{T}]} \|u(t, u_0)\|_{B_{p,q}^{s+m\beta}(\mathbb{R}^n, \mathbb{E})} < \infty$$

für alle $\tilde{T} \in J$, so ist u eine globale Lösung, d.h. $J(u_0) = J$.

Bemerkung 4.2.3 Sind $s, s + 2\beta \in \mathbb{R}^+ \setminus \mathbb{N}$ und $p = \tilde{r}$ im Satz 4.2.4, so ist u die eindeutige Lösung des Problems (4.34) in

$$C\left(J(u_0), W_p^{s+2\beta}(\mathbb{R}^n, \mathbb{E})\right) \cap C\left(\dot{J}(u_0), W_p^{s+2}(\mathbb{R}^n, \mathbb{E})\right) \cap C^1\left(\dot{J}(u_0), W_p^s(\mathbb{R}^n, \mathbb{E})\right),$$

denn $B_{p,p}^s(\mathbb{R}^n, \mathbb{E}) \doteq W_p^s(\mathbb{R}^n, \mathbb{E})$ für alle $s \in \mathbb{R}^+ \setminus \mathbb{N}$ und $1 \leq p < \infty$.

4.3 Reaktions-Diffusions-Gleichungen

In diesem Abschnitt untersuchen wir ein Koagulations-Fragmentations-Problem mit Diffusion für ein System mit einer großen Anzahl von Partikeln. Dieses Modell wurde in [Am,00] von Amann H. eingeführt und dort wurde angenommen, dass das zu betrachtende System eine sehr große Anzahl von Teilchen aufweist, die koagulieren oder zerfallen können, um größere bzw. kleinere Cluster zu bilden. Der Zweck dieser Theorie ist die Beschreibung des Verlaufs der Partikelgrößen-Verteilung als eine von der Zeit und der Position abhängigen Funktion u in einem System, das Veränderungen infolge verschiedener physikalischer Einflüsse erlebt. Dieses mathematische Koagulations-Fragmentations-Modell berücksichtigt die Bewegung der Cluster infolge der Diffusion und der sich überlagernden Transportprozesse.

Formal hat das hier betrachtete unendliche gekoppelte Gleichungssystem die Form des folgenden Reaktions-Diffusions-Anfangswertproblems:

$$\begin{cases} \partial_t u + A(x, t, y) u = R(x, t, y, u), & t \in (0, T], x \in \mathbb{R}^n, \\ u(x, 0, y) = u_0(x, y), & x \in \mathbb{R}^n, \end{cases} \quad (4.35)$$

wobei $n = 1, 2$ oder 3 und (4.35) von einem Parameter y abhängt, der das Volumen oder (mit anderen Worten) die Größe eines Clusters darstellt. Der Diffusions-Konvektions-Operator A und der Reaktionsterm R sind gegeben durch

$$A(x, t, y) u := -\nabla_x \cdot [\mathbf{a}(t, y) \nabla_x u + \vec{a}(t, y) u] + \vec{b}(t, y) \cdot \nabla_x u + a_0(t, y) u, \quad (4.36)$$

$$R(x, t, y, u) := c(x, t, y, u) + f(x, t, y, u) + h(x, t, y), \quad (4.37)$$

und u ist die Partikelgröße-Verteilungsfunktion. Somit sind

$$u(x, t, y) \geq 0 \quad (4.38)$$

und

$$\int_X \int_{y_0}^{y_1} u(x, t, y) dy dx \quad (4.39)$$

die Gesamtsumme der Teilchen mit Volumina innerhalb des Intervalls $[y_0, y_1] \subset \mathbb{R}^+$, die in der Zeit t und in der Region $X \subset \mathbb{R}^n$ enthalten sind. Das Maß dy ist entweder das Lebesgue-Maß auf $\mathbb{R}^+$ oder das Zählmaß auf $\mathbb{N}$.

Eine kurze Einführung der Bedeutung jeder Terme in (4.36), (4.37) und deren erforderliche Voraussetzungen werden im folgenden Abschnitt zusammengestellt. Die detaillierte Beschreibung dieses Modells findet man in [Am,00].

4.3.1 Kurze Beschreibung der Terme des Koagulations-Fragmentations-Problems und Voraussetzungen

Hierbei übernehmen wir die Bezeichnungen von Amann in [Am,00]. Seien (Y, dy) der Maßraum $\mathbb{N}$ mit dem Zählmaß oder $(\mathbb{R}^+, d\lambda)$ mit dem Lebesgue-Maß (damit greift man die simultane Herangehenweise an den Fall diskreter und kontinuierlicher Clustergrößen auf), $\mathbb{E} := L_1(Y, (1+y)dy) = L_1(Y, dy) \cap L_1(Y, ydy)$, $\alpha \in (0, 1)$, $T > 0$, $J = [0, T]$, $\dot{J} = (0, T]$, $t \in J$ und $\mathbb{R}_{sym}^{n \times n}$ der Raum der $n \times n$ -symmetrischen Matrizen mit Komponenten in $\mathbb{R}$.

Der Reaktionsterm R

Der Reaktionsterm R in (4.37) ist die Summe der folgenden drei Terme:

i) Einer ist der Koagulationsterm c der Gestalt

$$c(x, t, y, u) := \frac{1}{2} \int_0^y \eta(x, t, y - y', y') u(y - y') u(y') dy' - u(y) \int_0^\infty \eta(x, t, y, y') u(y') dy', \quad (4.40)$$

wobei der Koagulationskern $\eta(x, t, y, y')$ die Rate der Verschmelzung von Clustern der Größen y und y' in der Zeit t und an der Position x beschreibt. Dort wird angenommen, dass

$$0 \leq \eta(x, t, y, y') = \eta(x, t, y', y) \quad \text{f.f.a. } y, y' \in Y \text{ und } (x, t) \in \mathbb{R}^n \times J,$$

also wird nur die bilineare Koagulation betrachtet. Das erste Integral in (4.40) beschreibt die Tatsache, dass ein Cluster der Größe y nur entstehen kann, wenn zwei Cluster mit Volumina $y - y'$ und y' kollidieren. Der letzte Term in (4.40) bedeutet, dass ein Cluster der Größe y verschwindet, wenn dieses mit einem Cluster anderen beliebigen Volumens kollidiert. Also nimmt die Konzentration der y -Cluster durch die Koagulation von Clustern der Größen $y' < y$ und $y - y'$ zu und durch die Koagulation eines y -Clusters mit einem Cluster beliebiger Größe ab. Nun sei K_{coag} der abgeschlossene Unterraum von $L_\infty(Y^2, dy^2; \mathbb{R})$ definiert durch

$$K_{coag} := \{ \eta \in L_\infty(Y^2, dy^2; \mathbb{R}) : \eta(y, y') = \eta(y', y) \text{ f.f.a. } y, y' \in Y \}. \quad (4.41)$$

Dann nehmen wir an, dass

$$[t \mapsto \eta(t)] \in C^\alpha(J, B \cup C^r(\mathbb{R}^n, K_{coag})) \quad (4.42)$$

für ein $r > 0$ gilt.

ii) Der zweite Term f ist der Fragmentationsterm und dieser ist gegeben durch

$$f(x, t, y, u) := \int_y^\infty \varphi(x, t, y', y) u(y') dy' - \frac{u(y)}{y} \int_0^y \varphi(x, t, y, y') y' dy', \quad (4.43)$$

wobei der Fragmentationskern, φ ,

$$0 \leq \varphi(x, t, y, y'), \quad (y, y') \in Y_\Delta^2 := \{(z, z') \in Y^2 : 0 \leq z' < z\} \quad (4.44)$$

erfüllt. Das erste Integral in (4.43) steht für die Produktion der Cluster der Größe y aus zerfallenen Clustern größerer Volumina. Das letzte Integral in (4.43) berücksichtigt das Verschwinden der y -Cluster infolge seiner Fragmentation in kleineren Clustern. Es wird hier angenommen, dass eine Konstante $\beta > 0$ existiert mit

$$\varphi(x, t, y, y') \leq \beta \quad \text{und} \quad \frac{1}{y} \int_0^y \varphi(x, t, y, y') dy' \leq \beta. \quad (4.45)$$

Nun definiere

$$(\varphi \mapsto \phi_\varphi) \in \mathcal{L}(L_\infty(Y_\Delta^2, dy^2), L_{1,Loc}(Y, dy; \mathbb{R})) \quad (4.46)$$

durch

$$\phi_\varphi(y) := \frac{1}{y} \int_0^y \varphi(y, y') y' dy' \quad \text{f.f.a. } y \in Y, \quad (4.47)$$

wobei $\phi_\varphi(0) := 0$. Dann ist

$$K_{frag} := \{\varphi \in L_\infty(Y_\Delta^2, dy^2; \mathbb{R}) : \phi_\varphi \in L_\infty(Y, dy; \mathbb{R})\} \quad (4.48)$$

ein Banachraum mit der Norm $\varphi \mapsto \|\varphi\|_\infty + \|\phi_\varphi\|_\infty$. Nun wird für ein $r > 0$ angenommen, dass

$$[t \mapsto \varphi(t)] \in C^\alpha(J, B \cup C^r(\mathbb{R}^n, K_{frag})). \quad (4.49)$$

- iii) Der Kraft- oder Quellterm h repräsentiert die Produktion, die aus vorhandenen Quellen resultiert. Das heißt, der Quellterm steht für die Erzeugung der Cluster der Größe y in der Zeit t an der Position x infolge des Beitrages von (zum Beispiel) Teilchen. Zum Schluss nehmen wir an, dass

$$h(x, t, y) \geq 0 \quad \text{für } y \in Y, \quad (4.50)$$

$$[t \mapsto h(t)] \in C^\alpha(J, W_1^\tau(\mathbb{R}^n, \mathbb{E})) \quad (4.51)$$

für ein $0 < \tau < r$.

Der Diffusionsterm A

Der Operator A in (4.36) besteht aus den folgenden Teilen:

- i) Der Koeffizient $\mathbf{a}$ stellt die Diffusionsmatrix dar, die folgende Voraussetzungen erfüllt:

$$[t \mapsto \mathbf{a}(t)] \in C^\alpha(J, L_\infty(Y, dy; \mathbb{R}_{sym}^{n \times n})) \quad (4.52)$$

und es gibt eine Konstante $\delta > 0$, so dass für alle $t \in J$, $y \in Y$ und $\mathbf{a}(t, y) := [a_{ij}(t, y)]_{i,j=1,\dots,n}$

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(t, y) \xi_i \xi_j \geq \delta |\xi|^2 \text{ für alle } \xi \in \mathbb{R}^n. \quad (4.53)$$

Weil es in der Natur kein unendlich großes und kein unendlich kleines Cluster gibt, nehmen wir an, dass $a_{ij}(t, y)$ gleichmäßig beschränkt ist.

- ii) Das Driftvektorfeld $\vec{a}$ beschreibt den Partikeltransport infolge der Außenkräfte wie gravitationelle, elektrische oder thermische Felder. Für $\vec{a}$ wird angenommen, dass

$$[t \mapsto \vec{a}(t)] \in C^\alpha(J, L_\infty(Y, dy; \mathbb{R}^n)). \quad (4.54)$$

- iii) Sind die Teilchen in einem strömenden Fluid suspendiert, das heißt gibt es konvektive Diffusion, so stellt $\vec{b}$ in (4.36) die Geschwindigkeit des Fluids dar. Deswegen muss man in diesem Fall (4.35) mit den Navier-Stokes-Gleichungen für $\vec{b}$ ergänzen. Hierbei wird der inkompressible Fall, nämlich $\operatorname{div} \vec{b} = 0$, angenommen, und dass die suspendierten Teilchen nicht auf die Geschwindigkeitsverteilung wirken. In diesem Fall kann man die Navier-Stokes-Gleichungen für $\vec{b}$ lösen und das Resultat in (4.35) einsetzen. Mit anderen Worten nimmt man an, dass $\vec{b}$ gegeben ist. Nämlich

$$[t \mapsto \vec{b}(t)] \in C^\alpha(J, L_\infty(Y, dy; \mathbb{R}^n)).$$

- iv) Der Koeffizient a_0 ist eine Absorptionsrate und erfüllt

$$[t \mapsto a_0(t)] \in C^\alpha(J, L_\infty(Y, dy; \mathbb{R})). \quad (4.55)$$

Die folgenden Bezeichnungen ermöglichen uns, das Problem (4.35) zu einem abstrakten Anfangswertproblem der Gestalt (4.16) umzuformulieren.

Bezeichnungen

Seien $\eta \in K_{\text{coag}}$ und $\varphi \in K_{\text{frag}}$. Dann definiert man

$$C_\eta(v, w)(y) := \frac{1}{2} \int_0^y \eta(y - y', y') v(y - y') w(y') dy' - v(y) \int_0^\infty \eta(y, y') w(y') dy' \quad (4.56)$$

für $v, w \in \mathbb{E}$ und f.f.a $y \in Y$, und

$$f_\varphi(v)(y) := \int_y^\infty \varphi(y, y') v(y') dy' - \phi_\varphi(y) v(y), \quad v \in \mathbb{E}, \text{ f.f.a } y \in Y. \quad (4.57)$$

Nun nehmen wir an, dass (η, u, v) von $\mathbb{R}^n$ nach $K_{coag} \times \mathbb{E} \times \mathbb{E}$ und (φ, u) von $\mathbb{R}^n$ nach $K_{frag} \times \mathbb{E}$ Abbildungen sind, und definiere

$$C_\eta(u, v)(x) := C_{\eta(x)}(u(x), v(x)), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad (4.58)$$

$$f_\varphi(u)(x) := f_{\varphi(x)}(u(x)), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad (4.59)$$

$$\chi(x, t) := \chi(t)(x), \quad \chi(x, t, y, y') := \chi(x, t)(y, y') \quad (4.60)$$

für $\chi \in \{\eta, \varphi\}$, $(x, t) \in \mathbb{R}^n \times J$ und $(y, y') \in Y \times Y$. Außerdem seien

$$c(x, t, y, u) := C_{\eta(x, t)}(u, u)(x), \quad f(x, t, y, u) := f_{\varphi(x, t)}(u)(y) \quad (4.61)$$

für $(x, t) \in \mathbb{R}^n \times J$, $y \in Y$ und $u \in \mathbb{E}$. Schließlich seien $C(t, \cdot)$ und $F(t, \cdot)$ die Nemytskii-Operatoren, die von $c(\cdot, t, \cdot, \cdot)$ bzw $f(\cdot, t, \cdot, \cdot)$ induziert sind, das heißt

$$C(t, u)(x) := c(x, t, \cdot, u(x)), \quad F(t, u)(x) := f(x, t, \cdot, u(x)) \quad (4.62)$$

für $u : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{E}$ und $(x, t) \in \mathbb{R}^n \times J$.

Unter den Voraussetzungen

$$\sigma \notin \mathbb{N}, r > 0, \tau \in (0, r) \setminus \mathbb{N}, \quad \begin{cases} \tau + n < 2\sigma < 2n, & \text{falls } \tau < n, \\ \sigma := \tau, & \text{falls } \tau > n, \end{cases} \quad (4.63)$$

(4.42) und (4.49) wurde in [Am,00; Sec. 3] festgestellt, dass

$$[t \longrightarrow C(t, \cdot) + F(t, \cdot)] \in \mathbf{C}^\alpha(J, \mathbf{C}_b^\infty(W_1^\sigma(\mathbb{R}^n, \mathbb{E}), W_1^\tau(\mathbb{R}^n, \mathbb{E}))). \quad (4.64)$$

Mit der Bezeichnung

$$g(t, u) := C(t, u) + F(t, u) + h(t) \quad (4.65)$$

lässt sich das Problem (4.35) als die semilineare parabolische Evolutionsgleichung

$$\begin{cases} \dot{u} + A(t)_{W_1^k} u = g(t, u), & t \in \overset{\circ}{J}, \\ u(0) = u_0, \end{cases} \quad (4.66)$$

im Banachraum $W_1^k(\mathbb{R}^n, \mathbb{E})$ schreiben, wobei $A(t)_{W_1^k}$ die Bedingung (4.32) mit $\mathfrak{F}_p^k = W_1^k$ erfüllt und

$$[t \longrightarrow g(t, \cdot)] \in \mathbf{C}^\alpha(J, \mathbf{C}_b^\infty(W_1^\sigma(\mathbb{R}^n, \mathbb{E}), W_1^\tau(\mathbb{R}^n, \mathbb{E}))). \quad (4.67)$$

Nun können wir das System (4.35) einfach lösen.

4.3.2 Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen des Koagulations-Fragmentations-Problems

Satz 4.3.1 *Seien die Notationen und Voraussetzungen wie im Beispiel 4.2.3 und im Unterabschnitt 4.3.1 gegeben mit*

$$0 \leq k < \tau < r, \quad \tau \notin \mathbb{N}, \quad (4.68)$$

$$\frac{k+n}{2} < \sigma < \min\{n, k+2\}, \quad \text{falls } k < n \quad (4.69)$$

und

$$k < \sigma < k+2, \quad \text{falls } k > n \quad (4.70)$$

für ein $\sigma \notin \mathbb{N}$. Ist $u_0 \in W_1^\sigma(\mathbb{R}^n, \mathbb{E})$, so hat das Koagulations-Fragmentations-System (4.35), d.h. das Anfangswertproblem (4.66), eine eindeutige Lösung

$$u(\cdot, u_0) \in C(J(u_0), W_1^\sigma(\mathbb{R}^n, \mathbb{E})) \cap C(\dot{J}(u_0), D_0) \cap C^1(\dot{J}(u_0), W_1^k(\mathbb{R}^n, \mathbb{E})). \quad (4.71)$$

Das maximale Intervall der Existenz, $J(u_0)$, ist offen in J . Ist außerdem

$$\sup_{t \in \dot{J}(u_0) \cap [0, \tilde{T}]} \|u(t, u_0)\|_{W_1^\sigma(\mathbb{R}^n, \mathbb{E})} < \infty$$

für alle $\tilde{T} \in J$, dann ist u eine globale Lösung, das heißt $J(u_0) = J$. Diese Lösung $u(\cdot, u_0, \mathbf{e}, \eta, \varphi, h) := u(\cdot, u_0)$ mit $\mathbf{e}(t) := (\mathbf{a}(t), \vec{a}(t), \vec{b}(t), a_0(t)) \in \mathbb{E}_2$ und

$$\mathbb{E}_2 := L_\infty(Y, dy; \mathbb{R}_{sym}^{n \times n}) \times L_\infty(Y, dy; \mathbb{R}^n) \times L_\infty(Y, dy; \mathbb{R}^n) \times L_\infty(Y, dy; \mathbb{R})$$

hängt im folgenden Sinne stetig von den gegebenen Daten ab: Für $\tilde{T} \in J(u_0)$ existiert eine Umgebung $\mathcal{U}$ von $(u_0, (\mathbf{e}, (\eta, \varphi), h))$ in

$$W_1^\sigma(\mathbb{R}^n, \mathbb{E}) \times BUC^\alpha(J, \mathbb{E}_2 \times B \cup C^r(\mathbb{R}^n, K_{coag} \times K_{frag}) \times W_1^\tau(\mathbb{R}^n, \mathbb{E})),$$

so dass $u(\cdot, \tilde{u}_0, \tilde{\mathbf{e}}, \tilde{\eta}, \tilde{\varphi}, \tilde{h})$ auf $[0, \tilde{T}]$ existiert und

$$u(\cdot, \tilde{u}_0, \tilde{\mathbf{e}}, \tilde{\eta}, \tilde{\varphi}, \tilde{h}) \longrightarrow u(\cdot, u_0, \mathbf{e}, \eta, \varphi, h) \quad \text{in } C([0, \tilde{T}], W_1^\sigma(\mathbb{R}^n, \mathbb{E})),$$

wenn $(\tilde{u}_0, \tilde{\mathbf{e}}, \tilde{\eta}, \tilde{\varphi}, \tilde{h}) \longrightarrow (u_0, \mathbf{e}, \eta, \varphi, h)$ in $\mathcal{U}$.

Beweis. Im Falle $k < n$ sind $\frac{k+n}{2} < \sigma$ und $k < \tau$. Daher kann man ein geeignetes τ so wählen, dass $k < \tau < n$ und

$$\frac{\tau+n}{2} < \sigma < \min\{n, k+2\}. \quad (4.72)$$

Nun wähle ein $\sigma_1 \notin \mathbb{N}$ mit

$$\max \left\{ \tau, \frac{\tau + n}{2} \right\} < \sigma_1 < \sigma < \min \{n, k + 2\}. \quad (4.73)$$

Daraus folgt

$$0 < \underbrace{\frac{\tau - k}{2}}_{=: \rho} < \underbrace{\frac{\sigma_1 - k}{2}}_{=: \gamma} < \underbrace{\frac{\sigma - k}{2}}_{=: \beta} < 1. \quad (4.74)$$

Falls $k > n$, gibt es nach den Voraussetzungen ein $\tau \notin \mathbb{N}$ mit $k < \tau < \sigma$. Dann wähle ein $\sigma_1 \notin \mathbb{N}$ mit $k < \tau \leq \sigma_1 < \sigma$. Daraus ergibt sich zusammen mit (4.70):

$$0 < \underbrace{\frac{\tau - k}{2}}_{=: \rho} \leq \underbrace{\frac{\sigma_1 - k}{2}}_{=: \gamma} < \underbrace{\frac{\sigma - k}{2}}_{=: \beta} < 1.$$

Außerdem ist in diesem Fall wegen (4.68) $\tau > n$. Weil

$$W_1^\sigma(\mathbb{R}^n, \mathbb{E}) \doteq B_{1,1}^{k+2\beta}(\mathbb{R}^n, \mathbb{E}), W_1^{\sigma_1}(\mathbb{R}^n, \mathbb{E}) \doteq B_{1,1}^{k+2\gamma}(\mathbb{R}^n, \mathbb{E}) \text{ und } W_1^\tau(\mathbb{R}^n, \mathbb{E}) \doteq B_{1,1}^{k+2\rho}(\mathbb{R}^n, \mathbb{E})$$

gelten, folgt sofort die Behauptung dieses Satzes aus (4.32), (4.67) und dem Satz 4.2.3. $\square$

Bemerkung 4.3.1 *Im Bezug auf den Satz 4.3.1 sei auf Folgendes hingewiesen:*

- a) Falls es im Problem (4.66) keine Koagulation und Fragmentation gibt (das heißt $g(t, u) = h(t)$) und $h \in C^\alpha(J, W_1^k(\mathbb{R}^n, \mathbb{E}))$, $u_0 \in W_1^k(\mathbb{R}^n, \mathbb{E})$, dann reicht der Satz 4.1.3, um (4.66) zu untersuchen.
- b) Unter geeigneten Voraussetzungen kann man in einem abstrakten Sinne die Positivität der Lösung des Problems (4.66) zeigen (vgl. [Am,00; Th. 6.3]).

Verallgemeinerung der Theorie

Mittels der im Kapitel 2 und in [Esc-Sei,07] gegebenen Räume $S_{1,0}^{m,\rho}(\mathbb{R}^n, E)$ bzw. $C_*^r S_{1,\delta}^{m,\rho}(\mathbb{R}^n, E)$ wird eine Definition des Raumes der Symbole $C_*^r S_{1,\delta}^{m,\rho}(\mathbb{R}^n, E)$ eingeführt, so dass dessen E -banachraumwertige Symbole $a(x, \xi)$ beschränkte Regularität in den Variablen x und ξ besitzen. Anschließend zeigen wir eine Version des Satzes von Michlin auf banachraumwertigen Besovräumen, das heißt wir zeigen die Stetigkeit des Pseudodifferentialoperators $\widetilde{a(x; D)}$ auf den Familien der Besovräume $\mathcal{B}_{p,q}^{s+m}(\mathbb{R}^n, E)$ mit geeigneten Skalaren $s, m \in \mathbb{R}$ und $1 \leq p, q \leq \infty$. Außerdem untersuchen wir die Stetigkeit von $\widetilde{a(x; D)}$ auf den Funktionenräumen $C_0^k(\mathbb{R}^n, E)$, $C_b^k(\mathbb{R}^n, E)$, $B \cup C^k(\mathbb{R}^n, E)$ und $W_p^k(\mathbb{R}^n, E)$ für $1 \leq p \leq \infty$ und $k \in \mathbb{N}_0$.

Im Folgenden bezeichnen $E, E_i, i = 0, 1, 2$ Banachräume und seien $\rho \in \mathbb{N}, \delta, m, p, q, r, s \in \mathbb{R}$ mit $0 \leq \delta \leq 1, r > 0$ und $1 \leq p, q \leq \infty$. Wir rufen in Erinnerung, dass ein Symbol a in $S_{1,0}^{m,\rho}(\mathbb{R}^n, E_1)$ liegt, wenn $a \in C^\rho(\mathbb{R}^n, E_1)$ und es für alle $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ mit $|\alpha| \leq \rho$ ein $c_\alpha > 0$ gibt, so dass

$$\|\partial_\xi^\alpha a(\xi)\|_{E_1} \leq c_\alpha \langle \xi \rangle^{m-|\alpha|} \quad \text{für alle } \xi \in \mathbb{R}^n. \quad (5.1)$$

Für $\rho = \rho_n$ wie in (1.1), $a \in S_{1,0}^{m,\rho_n}(\mathbb{R}^n, E_1)$ und

$$\mathbf{V}(\mathbb{R}^n, E_i) = \bigcup_{(s,p,q) \in \mathbb{R} \times [1,\infty] \times [1,\infty]} B_{p,q}^s(\mathbb{R}^n, E_i), \quad i = 0, 2$$

wurde in Satz 2.3.1 gezeigt, dass es einen eindeutigen und linearen Pseudodifferentialoperator $\widetilde{a(D)} : \mathbf{V}(\mathbb{R}^n, E_2) \longrightarrow \mathbf{V}(\mathbb{R}^n, E_0)$ gibt, so dass:

i)

$$\widetilde{a(D)} \Big|_{B_{p,q}^{s+m}(\mathbb{R}^n, E_2) \cap C_b^\infty(\mathbb{R}^n, E_2)} = a(D) \quad \forall s \in \mathbb{R}, p, q \in [1, \infty],$$

wobei

$$[a(D)u](x) := os - \int \int e^{i\xi\eta} a(\xi) \bullet u(x - \eta) \frac{d(\xi, \eta)}{(2\pi)^n}, \quad x \in \mathbb{R}^n, u \in C_b^\infty(\mathbb{R}^n, E_2).$$

ii)

$$\left(a \mapsto \widetilde{a(D)} \right) \in \mathcal{L} \left(S_{1,0}^{m,\rho_n}(\mathbb{R}^n, E_1), \mathcal{L}(\mathcal{B}_{p,q}^{m+s}(\mathbb{R}^n, E_2), \mathcal{B}_{p,q}^s(\mathbb{R}^n, E_0)) \right) \quad (5.2)$$

für alle $m, s \in \mathbb{R}$, $1 \leq p, q \leq \infty$ und $\mathcal{B} \in \{B, \dot{B}, b\}$. Ferner gilt

$$\left\| \widetilde{a(D)}u \right\|_{\mathcal{B}_{p,q}^s(\mathbb{R}^n, E_0)} \leq c \|a\|_{S_{1,0}^{m,n+1}(\mathbb{R}^n, E_1)} \|u\|_{\mathcal{B}_{p,q}^{s+m}(\mathbb{R}^n, E_2)} \quad \text{für alle } u \in \mathcal{B}_{p,q}^{s+m}(\mathbb{R}^n, E_2). \quad (5.3)$$

Um eine Fortsetzung der obigen Resultate für Symbole mit Orts- und Dualvariable zu erhalten, haben wir zuerst den Raum der Symbole $C_*^r S_{1,\delta}^{m,\rho}(\mathbb{R}^n, E)$ für $r > 0$, $0 \leq \delta \leq 1$ und $\rho \in \mathbb{N}$ mit $\rho \geq \rho_n$ definiert. Wir sagen, dass eine E -vektorwertige Funktion $a : \mathbb{R}_x^n \times \mathbb{R}_\xi^n \rightarrow E$ in $C_*^r S_{1,\delta}^{m,\rho}(\mathbb{R}^n, E)$ liegt, falls¹

$$a_x(\cdot) := a(x, \cdot) \in S_{1,0}^{m,\rho}(\mathbb{R}_\xi^n, L_\infty(\mathbb{R}_x^n, E)) \cap S_{1,0}^{m+\delta r, \rho}(\mathbb{R}_\xi^n, C_*^r(\mathbb{R}_x^n, E)) \quad f.f.a. \ x \in \mathbb{R}^n.$$

An dieser Stelle möchten wir darauf hinweisen, dass die in [Ki,03] angegebenen Symbole $a \in S_{1,0}^{m,r}(\mathbb{R}_x^n \times \mathbb{R}_\xi^n, E)$ auch in $C_*^r S_{1,\delta}^{m,\rho}(\mathbb{R}^n, E)$ enthalten sind (siehe Bemerkung 5.1.3).

Durch eine Version der von R. Coifman und Y. Meyer in [C-M,79] eingeführten Zerlegung der Symbole in elementare Symbole (eine solche Zerlegung für bestimmte banachraumwertige Symbole wurde in [Por-Štr,06] angegeben) und dank einiger Resultate aus der Littlewood-Paley-Theorie erhalten wir eine Definition eines „Pseudodifferentialoperators“

$$\widetilde{a(x, D)} : \mathbf{V}_{r,\delta}^m(\mathbb{R}^n, E_2) \longrightarrow \mathbf{V}_{r,\delta}^0(\mathbb{R}^n, E_0)$$

für Symbole $a \in C_*^r S_{1,\delta}^{m,2\rho}(\mathbb{R}^n, E)$ mit $\rho > \rho_n$, die mit den definierten Operatoren $\widetilde{a(D)}$ im Satz 2.3.1 und $a(x, D)$ in [Ki,03] (falls $1 \leq p \leq \infty$ und $1 \leq q < \infty$) übereinstimmt. Dabei bezeichnet

$$\mathbf{V}_{r,\delta}^m(\mathbb{R}^n, E) := \bigcup_{(\delta-1)r < s < r} \bigcup_{p,q \in [1,\infty]} B_{p,q}^{s+m}(\mathbb{R}^n, E).$$

Der Hauptsatz dieses Kapitels (Satz 5.3.1) besagt, dass es für $\rho > \rho_n$ und $a \in C_*^r S_{1,\delta}^{m,2\rho}(\mathbb{R}^n, E_1)$ eine Abbildung $\widetilde{a(x, D)} : \mathbf{V}_{r,\delta}^m(\mathbb{R}^n, E_2) \longrightarrow \mathbf{V}_{r,\delta}^0(\mathbb{R}^n, E_0)$ gibt, die Folgendes erfüllt:

$$a) \quad \left. \widetilde{a(x, D)} \right|_{B_{p,q}^{s+m}(\mathbb{R}^n, E_2)} \in \mathcal{L}(B_{p,q}^{s+m}(\mathbb{R}^n, E_2), B_{p,q}^s(\mathbb{R}^n, E_0)) \text{ mit}$$

$$\left\| \widetilde{a(x, D)}u \right\|_{B_{p,q}^s(\mathbb{R}^n, E_0)} \leq c \|a\|_{\delta, E_1}^{(m,2\rho)} \|u\|_{B_{p,q}^{s+m}(\mathbb{R}^n, E_2)}$$

für alle $u \in B_{p,q}^{s+m}(\mathbb{R}^n, E_2)$, $p, q \in [1, \infty]$ und $s \in \mathbb{R}$ mit $(\delta - 1)r < s < r$, wobei $\|a\|_{\delta, E_1}^{(m,2\rho)} = \max \left\{ \|a\|_{S_{1,0}^{m,2\rho}[L_\infty(\mathbb{R}^n, E_1)]}, \|a\|_{S_{1,0}^{m+r\delta,2\rho}[C_*^r(\mathbb{R}^n, E_1)]} \right\}$. Dabei ist $S_{1,0}^{m,\rho}[E] := S_{1,0}^{m,\rho}(\mathbb{R}^n, E)$.

¹siehe in § 1.1.1 die Definition von $C_*^r(\mathbb{R}^n, E)$.

- b) Für alle $p, q \in [1, \infty]$, $s \in \mathbb{R}$ mit $(\delta - 1)r < s < r$, $u \in C_b^\infty(\mathbb{R}^n, E_2) \cap B_{p,q}^{s+m}(\mathbb{R}^n, E_2)$ und fast alle $x \in \mathbb{R}^n$ ist

$$\left[\widetilde{a(x, D)u} \right](x) = os - \int \int e^{-i\xi \cdot \eta} a(x, \xi) \bullet u(x - \eta) \frac{d(\xi, \eta)}{(2\pi)^n}.$$

Die Aussage a) gilt auch für $\mathcal{B} \in \left\{ b, \overset{\circ}{B} \text{ mit } 1 \leq p < \infty \right\}$ statt B (siehe Korollar 5.3.2). Außerdem wird an der Bemerkung 5.3.2 verdeutlicht, dass unser Satz 5.3.1 eine Fortsetzung des Theorems 2.3.1 in [Ki,03] (im Falle $1 \leq p \leq \infty$, $1 \leq q < \infty$) ist. Analoge Ergebnisse zu skalaren vektorwertigen Symbolen hat Marschall J. in [Mar,87] mit weniger Regularität in der Dualvariable ξ erhalten, aber in diesem skalaren Fall wurde der Satz von Plancherel verwendet, den wir in unserem allgemeineren Fall nicht zur Verfügung haben.

Dieser Kapitel ist wie folgt organisiert: Der erste Abschnitt beginnt mit der Definition des Raumes der Symbole $C_*^r S_{1,\delta}^{m,\rho}(\mathbb{R}^n, E)$ und endet mit einem Korollar über die Zerlegung eines Symbols aus $C_*^r S_{1,\delta}^{m,\rho}(\mathbb{R}^n, E)$ in elementare Symbole.

Im zweiten Abschnitt definieren wir die Pseudodifferentialoperatoren $a(x; D)$ und $\widetilde{a(x; D)}$ für elementare bzw. allgemeine Symbole in $C_*^r S_{1,\delta}^{m,\rho}(\mathbb{R}^n, E)$. Die Existenz und einige Eigenschaften dieser Pseudodifferentialoperatoren werden dort gezeigt.

Zum Schluss zeigen wir im dritten Abschnitt den Satz 5.3.1 und damit wird die Stetigkeit von $\widetilde{a(x; D)}$ auf den Funktionenräumen $B \cup C^k(\mathbb{R}^n, E)$, $C_0^k(\mathbb{R}^n, E)$, $C_b^k(\mathbb{R}^n, E)$ und $W_p^k(\mathbb{R}^n, E)$ für $1 \leq p \leq \infty$ und $k \in \mathbb{N}_0$ untersucht (siehe Korollar 5.3.3).

5.1 Raum der Symbole $C_*^r S_{1,\delta}^{m,\rho}(\mathbb{R}^n, E)$

Zur Motivation der Definition des Raumes von Symbolen $C_*^r S_{1,\delta}^{m,\rho}(\mathbb{R}^n, E)$ beschreiben wir in der folgenden Bemerkung eine in [Ki,03] betrachtete Klasse der Symbole mit Orts- und Dualvariable.

Bemerkung 5.1.1 In [Ki,03] betrachtete Ch. Kiehn einen Raum der Symbole $\mathbf{S}_{1,0}^{m,r}(\mathbb{R}_x^n \times \mathbb{R}_\xi^n, E)$ mit $m \in \mathbb{R}$ und $r \in [0, \infty]$, der geeignete Funktionen $a : \mathbb{R}_x^n \times \mathbb{R}_\xi^n \rightarrow E$ (mit beschränkter Regularität in x und unendlich oft differenzierbar in ξ) enthält. Dieser wurde genau wie folgt definiert:

- a) Falls $r \in \mathbb{N}_0$ ist $a \in \mathbf{S}_{1,0}^{m,r}(\mathbb{R}_x^n \times \mathbb{R}_\xi^n, E)$, wenn für jedes $N \in \mathbb{N}_0$ eine Konstante $C_{r,N} > 0$ existiert mit

$$|a|_N^{(m,r)} := \max_{|\alpha| \leq N} \sup_{|\beta| \leq r} \sup_{x, \xi \in \mathbb{R}^n} \langle \xi \rangle^{|\alpha| - m} \left\| \partial_\xi^\alpha \partial_x^\beta a(x, \xi) \right\|_E < C_{r,N}.$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned} \left\| \partial_\xi^\alpha a(\cdot, \xi) \right\|_{C_b(\mathbb{R}^n, E)} &\leq C_{r,N} \langle \xi \rangle^{m - |\alpha|} && \text{für alle } \xi \in \mathbb{R}^n \text{ und } |\alpha| \leq N, \\ \left\| \partial_\xi^\alpha a(\cdot, \xi) \right\|_{C_b^r(\mathbb{R}^n, E)} &\leq C_{r,N} \langle \xi \rangle^{m - |\alpha|} && \text{für alle } \xi \in \mathbb{R}^n \text{ und } |\alpha| \leq N. \end{aligned}$$

- b) Falls $r \in [0, \infty) \setminus \mathbb{N}_0$ ist $a \in \mathbf{S}_{1,0}^{m,r}(\mathbb{R}_x^n \times \mathbb{R}_\xi^n, E)$, wenn für jedes $N \in \mathbb{N}_0$ eine Konstante $\tilde{C}_{r,N} > 0$ existiert mit

$$|a|_N^{(m,r)} := |a|_N^{(m,[r])} + \max_{|\alpha| \leq N, |\beta|=[r]} \sup_{\substack{x,y \in \mathbb{R}^n \\ x \neq y}} \langle \xi \rangle^{|\alpha|-m} \frac{\left\| \partial_\xi^\alpha \partial_x^\beta a(x, \xi) - \partial_\xi^\alpha \partial_x^\beta a(y, \xi) \right\|_E}{|x - y|^{r-[r]}} < \tilde{C}_{r,N}.$$

Daraus ergibt sich

$$\begin{aligned} \left\| \partial_\xi^\alpha a(\cdot, \xi) \right\|_{C_b(\mathbb{R}^n, E)} &\leq \tilde{C}_{r,N} \langle \xi \rangle^{m-|\alpha|} \quad \text{für alle } \xi \in \mathbb{R}^n \text{ und } |\alpha| \leq N, \\ \left\| \partial_\xi^\alpha a(\cdot, \xi) \right\|_{C_b^r(\mathbb{R}^n, E)} &\leq \tilde{C}_{r,N} \langle \xi \rangle^{m-|\alpha|} \quad \text{für alle } \xi \in \mathbb{R}^n \text{ und } |\alpha| \leq N. \end{aligned}$$

- c) Den Fall $r = \infty$ werden wir hier nicht betrachten, da es bedeutet, dass das Symbol unendlich oft differenzierbar in x ist, und dafür interessieren wir uns nicht.

Bemerkung 5.1.2 a) Obwohl die Notationen der Räume der Symbole in der Bemerkung 5.1.1 und in (5.1) fast ähnlich sind, sind ihre Objekte ganz verschieden.

- b) Ist $a \in \mathbf{S}_{1,0}^{m,r}(\mathbb{R}_x^n \times \mathbb{R}_\xi^n, E)$, $r \in [0, \infty)$, ein wie in der Bemerkung 5.1.1 definiertes Symbol, so ist

$$a_x(\cdot) := a(x, \cdot) \in S_{1,0}^{m,N}(\mathbb{R}_\xi^n, C_b(\mathbb{R}_x^n, E)) \cap S_{1,0}^{m+r\delta,N}(\mathbb{R}_\xi^n, C_b^r(\mathbb{R}_x^n, E)) \quad (\text{mit } \delta = 0)$$

für jedes $x \in \mathbb{R}^n$ und jedes $N \in \mathbb{N}_0$.

Hiermit möchten wir eine Klasse der Symbole in mehreren Veränderlichen definieren. Die Stetigkeit entsprechender Pseudodifferentialoperatoren wird in den nächsten Abschnitten untersucht. Die Bemerkung 5.1.2 motiviert die folgende Definition.

Definition 5.1.1 (Der Raum der Symbole $C_*^r S_{1,\delta}^{m,\rho}(\mathbb{R}^n, E)$) Seien $m, r, \delta \in \mathbb{R}$ mit $r > 0$, $0 \leq \delta \leq 1$, ρ_n wie in (1.1), $\rho \in \mathbb{N}$ mit $\rho \geq \rho_n$ und $a : \mathbb{R}_x^n \times \mathbb{R}_\xi^n \rightarrow E$ eine E -vektorwertige Funktion. Dann $a \in C_*^r S_{1,\delta}^{m,\rho}(\mathbb{R}^n, E)$ genau dann, wenn

$$a_x(\cdot) := a(x, \cdot) \in S_{1,0}^{m,\rho}(\mathbb{R}_\xi^n, L_\infty(\mathbb{R}^n, E)) \cap S_{1,0}^{m+\delta r, \rho}(\mathbb{R}_\xi^n, C_*^r(\mathbb{R}^n, E)) \quad \text{f.f.a. } x \in \mathbb{R}^n.$$

Bemerkung 5.1.3 a) Man sieht offensichtlich nach den Bemerkungen 1.1.2 b), 5.1.1 und 5.1.2 und nach der Definition 5.1.1, dass

$$\mathbf{S}_{1,0}^{m,r}(\mathbb{R}_x^n \times \mathbb{R}_\xi^n, E) \subset C_*^r S_{1,\delta}^{m,\rho}(\mathbb{R}_\xi^n, E) \quad \text{für jedes } r > 0, 0 \leq \delta \leq 1 \text{ und } \rho \geq \rho_n.$$

- b) Seien die Voraussetzungen wie in der Definition 5.1.1, aber nun sei $a \in S_{1,0}^{m,\rho}(\mathbb{R}_\xi^n, E)$ und $a(x, \xi) := a(\xi)$ für alle $x, \xi \in \mathbb{R}^n$. Dann $a \in C_*^r S_{1,\delta}^{m,\rho}(\mathbb{R}^n, E)$ für alle $r > 0$ und $0 \leq \delta \leq 1$.

Beweis. Seien $x, \xi \in \mathbb{R}^n$ und $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ mit $|\alpha| \leq \rho$. Dann gilt offensichtlich

$$\|\partial_\xi^\alpha a(\cdot, \xi)\|_{L_\infty(\mathbb{R}^n, E)} = \|\partial_\xi^\alpha a(\xi)\|_E \leq C_\alpha \langle \xi \rangle^{m-|\alpha|},$$

d.h. $a \in S_{1,0}^{m,\rho}(\mathbb{R}_\xi^n, L_\infty(\mathbb{R}^n, E))$. Ferner erhält man nach Bemerkung 1.1.2 b):

$$\begin{aligned} \|\partial_\xi^\alpha a(\cdot, \xi)\|_{C_*^r(\mathbb{R}^n, E)} &\leq C(r) \|\partial_\xi^\alpha a(\cdot, \xi)\|_{C_b^r(\mathbb{R}^n, E)} \\ &\leq C(r) \|\partial_\xi^\alpha a(\xi)\|_E \\ &\leq C_{r,\alpha} \langle \xi \rangle^{m-|\alpha|} \leq C_{r,\alpha} \langle \xi \rangle^{m+\delta r-|\alpha|}, \end{aligned}$$

also $a \in S_{1,0}^{m+\delta r,\rho}(\mathbb{R}_\xi^n, C_*^r(\mathbb{R}^n, E))$ für alle $r > 0$ und alle $0 \leq \delta \leq 1$. $\square$

Ein wichtiges Hilfsmittel zur Untersuchung der Pseudodifferentialoperatoren ist die Zerlegung der Symbole aus $C_*^r S_{1,\delta}^{m,2\rho}(\mathbb{R}^n, E)$ in eine unendliche Summe von elementaren Symbolen (vgl. Definition 5.1.2 und Korollar 5.1.1). Diese Zerlegung liefert im Wesentlichen der folgende Satz.

Satz 5.1.1 Seien $m, r, \delta \in \mathbb{R}$ mit $r > 0$ und $0 \leq \delta \leq 1$, ρ_n wie in (1.1), $\rho \in \mathbb{N}$ mit $\rho \geq \rho_n$ und $a \in C_*^r S_{1,\delta}^{m,2\rho}(\mathbb{R}^n, E)$. Außerdem sei $(c_j)_{j \in \mathbb{Z}^n}$ eine durch $c_j := \frac{(1+|j|)^\rho}{(1+|j|^2)^\rho}$, $j \in \mathbb{Z}^n$, definierte Folge in $l^1(\mathbb{Z}^n)$. Dann existieren Folgen $(\varphi_k)_{k \in \mathbb{N}_0}$ in $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ und $(a_{jk})_{(j,k) \in \mathbb{Z}^n \times \mathbb{N}_0}$ in $C_*^r(\mathbb{R}^n, E)$, so dass

a)

$$\begin{aligned} a(x, \xi) &= \sum_{j \in \mathbb{Z}^n} c_j a_j(x, \xi) \quad \text{für alle } \xi \in \mathbb{R}^n \text{ und f.f.a. } x \in \mathbb{R}^n \text{ mit} \\ a_j(x, \xi) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{e^{ij \cdot 2^{-k} \xi}}{(1+|j|)^\rho} \varphi_k(\xi) a_{jk}(x) \quad \text{für alle } j \in \mathbb{Z}^n, \xi \in \mathbb{R}^n \text{ und f.f.a. } x \in \mathbb{R}^n. \end{aligned}$$

b) Es gibt Konstanten $C_1 = C_1(n, m) > 0$ und $C_2 = C_2(n, m, r, \delta) > 0$, so dass

$$\|a_{jk}(x)\|_E \leq C_1 2^{km} \|a\|_{S_{1,0}^{m,2\rho}[L_\infty(\mathbb{R}^n, E)]} \quad \text{für alle } (j, k) \in \mathbb{Z}^n \times \mathbb{N}_0 \text{ und f.f.a. } x \in \mathbb{R}^n, \quad (5.4)$$

$$\|a_{jk}\|_{C_*^r(\mathbb{R}^n, E)} \leq C_2 2^{k(m+r\delta)} \|a\|_{S_{1,0}^{m+r\delta,2\rho}[C_*^r(\mathbb{R}^n, E)]} \quad \text{für alle } (j, k) \in \mathbb{Z}^n \times \mathbb{N}_0. \quad (5.5)$$

c) $\varphi_0, \varphi_1 \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, $\varphi_k(\xi) = \varphi_1(2^{-k}\xi)$ für alle $\xi \in \mathbb{R}^n$, $k \in \mathbb{N}$ und erfüllen:

$$\begin{aligned} \text{supp } \varphi_0 &\subset W_0 := \{\xi \in \mathbb{R}^n : |\xi| \leq 3\} \quad \text{und} \\ \text{supp } \varphi_k &\subset W_k := \left\{ \xi \in \mathbb{R}^n : 2^{k-2} \leq |\xi| \leq 2^{k+2} \right\} \quad \text{für jedes } k \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

d) Für jedes $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ gibt es eine Konstante $C_\alpha > 0$, so dass

$$|\partial_\xi^\alpha \varphi_k(\xi)| \leq C_\alpha 2^{-k|\alpha|} 1_{W_k}(\xi) \quad \text{für alle } \xi \in \mathbb{R}^n, k \in \mathbb{N}_0.$$

e) $a_{\mathbf{j}} \in C_*^r S_{1,\delta}^{m,\rho}(\mathbb{R}^n, E)$ mit

$$\begin{aligned} \|a_{\mathbf{j}}\|_{S_{1,0}^{m,\rho}[L_\infty(\mathbb{R}^n, E)]} &\leq \tilde{C}_1 \|a\|_{S_{1,0}^{m,2\rho}[L_\infty(\mathbb{R}^n, E)]}, \\ \|a_{\mathbf{j}}\|_{S_{1,0}^{m+r\delta,\rho}[C_*^r(\mathbb{R}^n, E)]} &\leq \tilde{C}_2 \|a\|_{S_{1,0}^{m+r\delta,2\rho}[C_*^r(\mathbb{R}^n, E)]} \end{aligned}$$

für alle $\mathbf{j} \in \mathbb{Z}^n$, wobei die Konstanten $\tilde{C}_1, \tilde{C}_2$ unabhängig von $\mathbf{j}$ sind.

Beweis. Sei $(\psi_k)_{k \in \mathbb{N}_0}$ eine Zerlegung der Eins wie in (1.16). Für $k \in \mathbb{N}_0$ definiere

$$b_k(x, \xi) := \psi_k(2^k \xi) a(x, 2^k \xi), \quad \xi \in \mathbb{R}^n \text{ und } f.f.a. \ x \in \mathbb{R}^n. \quad (5.6)$$

Nach Rechnung erhält man, dass $\text{supp}(\psi_k(2^k \cdot)) \subset [\frac{1}{2}, 2]$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Nun entwickeln wir die 2π -periodische Fortsetzung in ξ von b_k in eine Fourier-Reihe und mit Hilfe von Funktionen $\varphi_0, \varphi_1 \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, so dass $\text{supp}(\varphi_0) \subset \{\xi : |\xi| \leq 3\}$, $\varphi_0 \equiv 1$ auf $\text{supp}(\psi_0)$, $\text{supp} \varphi_1 \subset \{\xi : 2^{-2} \leq |\xi| \leq 2^2\}$ und $\varphi_1 \equiv 1$ auf $[\frac{1}{2}, 2]$, bekommt man

$$b_0(x, \xi) = \sum_{\mathbf{j} \in \mathbb{Z}^n} c_{\mathbf{j}} \frac{e^{i\mathbf{j} \cdot \xi}}{(1 + |\mathbf{j}|)^\rho} \varphi_0(\xi) a_{\mathbf{j}0}(x) \quad \text{für alle } \xi \in \mathbb{R}^n \text{ und } f.f.a. \ x \in \mathbb{R}^n,$$

$$b_k(x, \xi) = \sum_{\mathbf{j} \in \mathbb{Z}^n} c_{\mathbf{j}} \frac{e^{i\mathbf{j} \cdot \xi}}{(1 + |\mathbf{j}|)^\rho} \varphi_1(\xi) a_{\mathbf{j}k}(x) \quad \text{für alle } k \in \mathbb{N}, \xi \in \mathbb{R}^n \text{ und } f.f.a. \ x \in \mathbb{R}^n,$$

wobei

$$a_{\mathbf{j}k}(x) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{[-\pi, \pi]^n} e^{-i\mathbf{j} \cdot \xi} (I - \Delta_\xi)^\rho b_k(x, \xi) d\xi \quad (5.7)$$

für alle $(\mathbf{j}, k) \in \mathbb{Z}^n \times \mathbb{N}_0$ und $f.f.a. \ x \in \mathbb{R}^n$. Die obigen Reihen konvergieren gleichmäßig in ξ (siehe [A-B-H-N,01; Theorem 4.2.20]).

Nun definieren wir für $\xi \in \mathbb{R}^n$

$$\varphi_k(\xi) := \begin{cases} \varphi_0(\xi), & \text{falls } k = 0, \\ \varphi_1(2^{-k}\xi), & \text{falls } k \geq 1. \end{cases}$$

Dann gilt für alle $\xi \in \mathbb{R}^n$ und *f.f.a.* $x \in \mathbb{R}^n$, dass

$$\begin{aligned}
 a(x, \xi) &= \left[\sum_{k=0}^{\infty} \psi_k(\xi) \right] a(x, \xi) \\
 &= \sum_{k=0}^{\infty} \psi_k(2^k(2^{-k}\xi)) a(x, 2^k(2^{-k}\xi)) \\
 &= \sum_{k=0}^{\infty} b_k(x, 2^{-k}\xi) \\
 &= \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{\mathbf{j} \in \mathbb{Z}^n} c_{\mathbf{j}} \frac{e^{i\mathbf{j} \cdot 2^{-k}\xi}}{(1+|\mathbf{j}|)^\rho} \varphi_k(\xi) a_{\mathbf{j}k}(x) \right) \\
 &= \sum_{\mathbf{j} \in \mathbb{Z}^n} c_{\mathbf{j}} \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{e^{i\mathbf{j} \cdot 2^{-k}\xi}}{(1+|\mathbf{j}|)^\rho} \varphi_k(\xi) a_{\mathbf{j}k}(x) \right),
 \end{aligned}$$

da die Reihe $\sum_k$ für jedes $\xi \in \mathbb{R}^n$ eine endliche Summe ist. Daraus folgt a). Die Behauptungen c) und d) folgen aus der Konstruktion der Folge $(\varphi_k)_k$ und nach einfacher Rechnung. Nun zeigen wir b).

Aus

$$\begin{aligned}
 a_{\mathbf{j}k}(x) &= \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{[-\pi, \pi]^n} e^{-i\mathbf{j} \cdot \xi} \sum_{|\alpha| \leq 2\rho} c_\alpha \partial_\xi^\alpha b_k(x, \xi) d\xi \\
 &= \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{[-\pi, \pi]^n} e^{-i\mathbf{j} \cdot \xi} \sum_{|\alpha| \leq 2\rho} \sum_{\beta \leq \alpha} c_{\alpha\beta} \left(\partial_\xi^{\alpha-\beta} \psi_k(2^k\xi) \right) \left(\partial_\xi^\beta a(x, 2^k\xi) \right) d\xi
 \end{aligned} \tag{5.8}$$

erhält man für $k \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned}
 \|a_{\mathbf{j}k}(x)\|_E &\leq \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{[-\pi, \pi]^n} \sum_{|\alpha| \leq 2\rho} \sum_{\beta \leq \alpha} \hat{c}_{\alpha,\beta} 2^{k|\beta|} \chi_{[\frac{1}{2}, 2]}(\xi) \underbrace{\left\| \left(\partial_\xi^\beta a(x, \cdot) \right) (2^k\xi) \right\|_E}_{\leq \tilde{c}_\beta \|a\|_{S_{1,0}^{m,2\rho}[L_\infty(\mathbb{R}^n, E)]} \bullet \langle 2^k\xi \rangle^{m-|\beta|}} d\xi \\
 &\leq c(n, m, \phi) \|a\|_{S_{1,0}^{m,2\rho}[L_\infty(\mathbb{R}^n, E)]} 2^{km} \quad \text{für alle } j \in \mathbb{Z}^n, k \in \mathbb{N} \text{ und f.f.a. } x \in \mathbb{R}^n.
 \end{aligned}$$

Für $k = 0$ ist das obige Resultat trivial. Somit ist (5.4) bewiesen.

Nach (5.4) ist $a_{\mathbf{j}k} \in L_\infty(\mathbb{R}^n, E)$ und daher ist für alle $l \in \mathbb{N}_0$ und $\eta \in \mathbb{R}^n$ $(\psi_l(D) a_{\mathbf{j}k})(\eta)$ wohldefiniert und $\psi_l(D) a_{\mathbf{j}k} = (2\pi)^{-n/2} \check{\psi}_l * a_{\mathbf{j}k} \in B \cup C(\mathbb{R}^n, E)$ (siehe Lemma 1.1.3). Aus (5.8)

und dem Satz von Fubini ergibt sich für alle $l \in \mathbb{N}_0$

$$\begin{aligned}
& \left\| \left[2^{lr} \psi_l(D) a_{\mathbf{j}k} \right] (\eta) \right\|_E \\
&= \left\| \frac{2^{lr}}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} \check{\psi}_l(\eta - x) a_{\mathbf{j}k}(x) dx \right\|_E \\
&\stackrel{\text{Fubini}}{=} \left\| \frac{1}{(2\pi)^{3n/2}} \int_{[-\pi, \pi]^n} e^{-i\mathbf{j} \cdot \xi} \sum_{|\alpha| \leq 2\rho} \sum_{\beta \leq \alpha} c_{\alpha\beta} \left[\partial_\xi^{\alpha-\beta} \psi_k(2^k \xi) \right] \left[2^{lr} \psi_l(D) \left(\partial_\xi^\beta a(\cdot, 2^k \xi) \right) \right] (\eta) d\xi \right\|_E \\
&\leq \frac{1}{(2\pi)^{3n/2}} \int_{[-\pi, \pi]^n} \sum_{|\alpha| \leq 2\rho} \sum_{\beta \leq \alpha} \tilde{c}_{\alpha\beta} 2^{k|\beta|} \chi_{[\frac{1}{2}, 2]}(\xi) \left\| 2^{lr} \psi_l(D) \left(\left(\partial_\xi^\beta a \right) (\cdot, 2^k \xi) \right) \right\|_E d\xi.
\end{aligned}$$

Daraus folgt zusammen mit

$$\left\| 2^{lr} \psi_l(D) \left(\left(\partial_\xi^\beta a \right) (\cdot, 2^k \xi) \right) \right\|_{L_\infty(\mathbb{R}^n, E)} \leq c(m, r, \delta) \|a\|_{S_{1,0}^{m+r\delta, 2\rho}[C_*^r(\mathbb{R}^n, E)]} \left\langle 2^k \xi \right\rangle^{m+r\delta-|\beta|},$$

dass

$$\|a_{\mathbf{j}k}\|_{C_*^r(\mathbb{R}^n, E)} \leq c(n, m, r, \delta, \psi) \|a\|_{S_{1,0}^{m+r\delta, 2\rho}[C_*^r(\mathbb{R}^n, E)]} 2^{k(m+r\delta)} \quad \text{für alle } (j, k) \in \mathbb{Z}^n \times \mathbb{N}_0.$$

Beweis von e): Sei $\varphi_{\mathbf{j}k}(\xi) := \frac{e^{i\mathbf{j} \cdot 2^{-k}\xi}}{(1+|\mathbf{j}|)^\rho} \varphi_k(\xi)$ für alle $\xi \in \mathbb{R}^n$ und $(\mathbf{j}, k) \in \mathbb{Z}^n \times \mathbb{N}_0$, dann ist wegen a)

$$a_{\mathbf{j}}(x, \xi) = \sum_{k=0}^{\infty} \varphi_{\mathbf{j}k}(\xi) a_{\mathbf{j}k}(x) \quad \text{für alle } \mathbf{j} \in \mathbb{Z}^n, \xi \in \mathbb{R}^n \text{ und f.f.a. } x \in \mathbb{R}^n.$$

Beachte, dass diese Reihe eine endliche Summe für jedes $\xi \in \mathbb{R}^n$ ist, weil $\text{supp}(\varphi_{\mathbf{j}k}) \subset W_k$. Da $\frac{|\mathbf{j}|^{|\alpha|}}{(1+|\mathbf{j}|)^\rho} \leq 1$ für alle $|\alpha| \leq \rho$,

$$\langle \xi \rangle^{|\alpha|} 1_{W_k}(\xi) = \left(1 + |\xi|^2\right)^{\frac{|\alpha|}{2}} 1_{W_k}(\xi) \leq \left(1 + \left(2^{k+2}\right)^2\right)^{\frac{|\alpha|}{2}} 1_{W_k}(\xi) \leq c_\alpha 2^{k|\alpha|} 1_{W_k}(\xi)$$

und

$$\langle \xi \rangle^m 1_{W_k}(\xi) \geq \begin{cases} \left(1 + \left(2^{k-2}\right)^2\right)^{\frac{m}{2}} 1_{W_k}(\xi) \geq c_m 2^{km} 1_{W_k}(\xi), & \text{falls } m \geq 0, \\ \left(1 + \left(2^{k+2}\right)^2\right)^{\frac{m}{2}} 1_{W_k}(\xi) \geq \tilde{c}_m 2^{km} 1_{W_k}(\xi), & \text{falls } m < 0, \end{cases} \quad (5.9)$$

gelten, erhält man nach (5.4) und d) für alle $|\alpha| \leq \rho$, $\mathbf{j} \in \mathbb{Z}^n$, $\xi \in \mathbb{R}^n$ und f.f.a. $x \in \mathbb{R}^n$, dass

$$\begin{aligned}
\left\| \partial_\xi^\alpha a_{\mathbf{j}}(x, \xi) \right\|_E &\leq \frac{|\mathbf{j}|^{|\alpha|}}{(1+|\mathbf{j}|)^\rho} 3C_\alpha 2^{-k|\alpha|} 1_{W_k}(\xi) C_1 2^{km} \|a\|_{S_{1,0}^{m, 2\rho}[L_\infty(\mathbb{R}^n, E)]} \\
&\leq \tilde{C}_{1,\alpha} \|a\|_{S_{1,0}^{m, 2\rho}[L_\infty(\mathbb{R}^n, E)]} \langle \xi \rangle^{m-|\alpha|}.
\end{aligned}$$

Damit ist $\|a_{\mathbf{j}}\|_{S_{1,0}^{m,\rho}[L_\infty(\mathbb{R}^n, E)]} \leq \tilde{C}_1 \|a\|_{S_{1,0}^{m,2\rho}[L_\infty(\mathbb{R}^n, E)]}$ bewiesen. Ebenso zeigt man, dass

$$\|a_{\mathbf{j}}\|_{S_{1,0}^{m+r\delta,\rho}[C_*^r(\mathbb{R}^n, E)]} \leq \tilde{C}_2 \|a\|_{S_{1,0}^{m+r\delta,2\rho}[C_*^r(\mathbb{R}^n, E)]}$$

und somit ist $e)$ bewiesen. $\square$

Bemerkung 5.1.4 Sei $(\varphi_k)_{k \in \mathbb{N}_0}$ die im Satz 5.1.1 konstruierte Folge und sei

$$\varphi_{\mathbf{j}k}(\xi) := \frac{e^{i\mathbf{j} \cdot 2^{-k}\xi}}{(1 + |\mathbf{j}|)^\rho} \varphi_k(\xi) \quad \text{für alle } \xi \in \mathbb{R}^n, \rho \geq \rho_n \text{ und } (\mathbf{j}, k) \in \mathbb{Z}^n \times \mathbb{N}_0.$$

Dann gelten:

a) Es gibt eine Konstante $\hat{C} > 0$ ($\hat{C} = \max \left\{ \|\check{\varphi}_0\|_{L_1(\mathbb{R}^n)}, \|\check{\varphi}_1\|_{L_1(\mathbb{R}^n)} \right\}$), so dass

$$\|\check{\varphi}_{\mathbf{j}k}\|_{L_1(\mathbb{R}^n)} \leq \hat{C} \quad \text{für alle } (\mathbf{j}, k) \in \mathbb{Z}^n \times \mathbb{N}_0.$$

b) Sind $(\psi_k)_{k \in \mathbb{N}_0}$ eine wie in (1.16) gegebene Zerlegung der Eins, $\hat{C}$ wie oben und $\chi_k := \psi_{k-1} + \psi_k + \psi_{k+1}$ für $k \in \mathbb{N}_0$, so gilt für alle $s \in \mathbb{R}$, $p, q \in [1, \infty]$ und $u \in B_{p,q}^s(\mathbb{R}^n, E)$, dass

$$\|\varphi_{\mathbf{j}k}(D) u\|_{L_p(\mathbb{R}^n, E)} \leq \hat{C} \|\chi_k(D) u\|_{L_p(\mathbb{R}^n, E)} \quad \text{für alle } (\mathbf{j}, k) \in \mathbb{Z}^n \times \mathbb{N}_0.$$

Beweis. Vom Teil a): Seien $\mathbf{j} \in \mathbb{Z}^n$ und $k \geq 1$. Dann erhält man nach dem Satz über Integraltransformation, dass

$$\begin{aligned} \|\check{\varphi}_{\mathbf{j},k}\|_{L_1(\mathbb{R}^n)} &= \int_{\mathbb{R}^n} \left| \int_{\mathbb{R}^n} e^{ix \cdot \xi} \varphi_{\mathbf{j},k}(\xi) d\xi \right| dx \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^n} \left| \int_{\mathbb{R}^n} e^{ix \cdot \xi} e^{i\mathbf{j} \cdot 2^{-k}\xi} \varphi_k(\xi) d\xi \right| dx \quad \left(\text{weil } \frac{1}{(1 + |\mathbf{j}|)^\rho} \leq 1 \right) \\ &\stackrel{\eta := 2^{-k}\xi}{=} \int_{\mathbb{R}^n} 2^{kn} \left| \int_{\mathbb{R}^n} e^{ix \cdot 2^k \eta} e^{i\mathbf{j} \cdot \eta} \varphi_1(\eta) d\eta \right| dx \\ &\stackrel{y := 2^k x}{=} \int_{\mathbb{R}^n} \left| \int_{\mathbb{R}^n} e^{iy \cdot \eta} e^{i\mathbf{j} \cdot \eta} \varphi_1(\eta) d\eta \right| dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} |\check{\varphi}_1(y + \mathbf{j})| dy \\ &\stackrel{x := y + \mathbf{j}}{=} \int_{\mathbb{R}^n} |\check{\varphi}_1(x)| dx \\ &= \|\check{\varphi}_1\|_{L_1(\mathbb{R}^n)}. \end{aligned}$$

Analog erhält man $\|\check{\varphi}_{\mathbf{j},0}\|_{L_1(\mathbb{R}^n)} \leq \|\check{\varphi}_0\|_{L_1(\mathbb{R}^n)}$ für alle $\mathbf{j} \in \mathbb{Z}^n$.

Beweis vom Teil b): Aus Definition einer Zerlegung der Eins und aus Satz 5.1.1 c) folgt, dass $\varphi_{\mathbf{j}k} = \varphi_{\mathbf{j}k} \chi_k$ für alle $(\mathbf{j}, k) \in \mathbb{Z}^n \times \mathbb{N}_0$. Somit bekommt man für alle $u \in B_{p,q}^s(\mathbb{R}^n, E)$:

$$\begin{aligned}
\|\varphi_{\mathbf{j}k}(D)u\|_{L_p(\mathbb{R}^n, E)} &= (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \|\check{\varphi}_{\mathbf{j}k} * u\|_{L_p(\mathbb{R}^n, E)} \\
&= (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \left\| (2\pi)^{-\frac{n}{2}} (\check{\varphi}_{\mathbf{j}k} * \check{\chi}_k) * u \right\|_{L_p(\mathbb{R}^n, E)} \\
&= (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \left\| \check{\varphi}_{\mathbf{j},k} * \left((2\pi)^{-\frac{n}{2}} \check{\chi}_k * u \right) \right\|_{L_p(\mathbb{R}^n, E)} \\
&= (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \|\check{\varphi}_{\mathbf{j},k} * \chi_k(D)u\|_{L_p(\mathbb{R}^n, E)} \\
&\leq \|\check{\varphi}_{\mathbf{j},k}\|_{L_1(\mathbb{R}^n)} \|\chi_k(D)u\|_{L_p(\mathbb{R}^n, E)} \quad (\text{wegen Lemma 1.1.3}) \\
&\stackrel{a)}{\leq} \hat{C} \|\chi_k(D)u\|_{L_p(\mathbb{R}^n, E)}.
\end{aligned}$$

□

Definition 5.1.2 (Elementare Symbole) Seien $m, r, \delta \in \mathbb{R}$ mit $r > 0$, $0 \leq \delta \leq 1$, $\rho \in \mathbb{N}$ mit $\rho \geq \rho_n$ und $a \in C_*^{r, m, \rho}(\mathbb{R}^n, E)$. Man nennt das Symbol a **elementar**, falls Folgen $(\varphi_k)_{k \in \mathbb{N}_0} \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, $(M_k)_{k \in \mathbb{N}_0} \subset C_*^r(\mathbb{R}^n, E)$ und eine von k unabhängige Konstante $c > 0$ existieren, so dass

$$a(x, \xi) = \sum_{k=0}^{\infty} \varphi_k(\xi) M_k(x) \quad \text{für alle } \xi \in \mathbb{R}^n \text{ und f.f.a. } x \in \mathbb{R}^n \quad (5.10)$$

mit $\varphi_0, \varphi_1 \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, $\varphi_k(\xi) = \varphi_1(2^{-k}\xi)$ für $k \geq 1$ und

$$\text{supp}(\varphi_0) \subset \{\xi : |\xi| \leq 3\}, \quad \text{supp}(\varphi_k) \subset W_k \quad \text{für } k \geq 1, \quad (5.11)$$

$$\|\partial^\alpha \varphi_k\|_{L_\infty(\mathbb{R}^n)} \leq c 2^{-k|\alpha|} \quad \text{für alle } \alpha \in \mathbb{N}_0, \quad (5.12)$$

$$\|M_k\|_{L_\infty(\mathbb{R}^n, E)} \leq c \|a\|_{S_{1,0}^{m, \rho}[L_\infty(\mathbb{R}^n, E)]} 2^{km} \quad \text{und} \quad \|M_k\|_{C_*^r(\mathbb{R}^n, E)} \leq c \|a\|_{S_{1,0}^{m+r\delta, \rho}[C_*^r(\mathbb{R}^n, E)]} 2^{k(m+r\delta)} \quad (5.13)$$

für $k \in \mathbb{N}_0$. Dabei ist W_k wie im Teil c) des Satzes 5.1.1.

Korollar 5.1.1 Seien die Voraussetzungen wie im Satz 5.1.1 und $a \in C_*^{r, m, 2\rho}(\mathbb{R}^n, E)$ gegeben. Dann existieren eine Folge der elementaren Symbole $(a_{\mathbf{j}})_{\mathbf{j} \in \mathbb{Z}^n}$ in $C_*^{r, m, \rho}(\mathbb{R}^n, E)$ und eine von $\mathbf{j}$ unabhängige Konstante $c > 0$, so dass

$$a = \sum_{\mathbf{j} \in \mathbb{Z}^n} c_{\mathbf{j}} a_{\mathbf{j}}, \quad \|a_{\mathbf{j}}\|_{S_{1,0}^{m, \rho}[L_\infty(\mathbb{R}^n, E)]} \leq c \|a\|_{S_{1,0}^{m, 2\rho}[L_\infty(\mathbb{R}^n, E)]} \quad \text{und}$$

$$\|a_{\mathbf{j}}\|_{S_{1,0}^{m+r\delta, \rho}[C_*^r(\mathbb{R}^n, E)]} \leq c \|a\|_{S_{1,0}^{m+r\delta, 2\rho}[C_*^r(\mathbb{R}^n, E)]} \quad \text{für alle } \mathbf{j} \in \mathbb{Z}^n.$$

Beweis. Dies folgt aus dem Satz 5.1.1.

□

5.2 Pseudodifferentialoperatoren für Symbole auf $C_*^r S_{1,\delta}^{m,\rho}(\mathbb{R}^n, E)$

Wir beginnen den Abschnitt mit der Einführung einiger wichtigen Lemmata bezüglich der Littlewood-Paley-Theorie.

Lemma 5.2.1 *Seien $s > 0$ und $1 \leq q \leq \infty$. Dann gibt es eine Konstante $c > 0$, so dass*

$$\left\| \left(2^{-ks} \sum_{l=0}^k a_l \right)_k \right\|_{l^q} \leq c \left\| \left(2^{-ks} a_k \right)_k \right\|_{l^q}$$

für alle Folgen $(a_k)_{k \in \mathbb{N}_0}$ in $\mathbb{C}$.

Beweis. Siehe [Am,01] Lemma A1.1, S. 37. □

Lemma 5.2.2 *Seien $s \in \mathbb{R}$, $1 \leq p, q \leq \infty$, $(v_k)_{k \in \mathbb{N}_0}$ eine Folge in $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n, E)$ mit $\left\| 2^{ks} \|v_k\|_{L_p(\mathbb{R}^n, E)} \right\|_{l^q} < \infty$ und Konstanten $0 < c_1 < c_2$ so gegeben, dass*

$$\text{supp}(\hat{v}_0) \subseteq \{\xi : |\xi| \leq c_2\} \quad \text{und} \quad \text{supp}(\hat{v}_k) \subseteq \{\xi : c_1 2^k \leq |\xi| \leq c_2 2^k\}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Dann existiert $v := \sum_{k=0}^{\infty} v_k$ in $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n, E)$, nämlich $v \in B_{p,q}^s(\mathbb{R}^n, E)$ mit

$$\|v\|_{B_{p,q}^s(\mathbb{R}^n, E)} \leq c \left\| \left(2^{ks} \|v_k\|_{L_p(\mathbb{R}^n, E)} \right)_k \right\|_{l^q},$$

wobei die Konstante c unabhängig von v_k ist.

Beweis. Für den skalaren Fall siehe [Marshall,87] Lemma 1.1 und für den vektorwertigen Fall [Am,01] Proposition A1.2. □

Lemma 5.2.3 *Seien $s > 0$, $1 \leq p, q \leq \infty$, $(v_k)_{k \in \mathbb{N}_0}$ eine Folge in $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n, E)$ mit $\left\| 2^{ks} \|v_k\|_{L_p(\mathbb{R}^n, E)} \right\|_{l^q} < \infty$ und c eine Konstante, so dass*

$$\text{supp } p(\hat{v}_k) \subseteq \{\xi : |\xi| \leq c 2^k\} \quad \text{für alle } k \in \mathbb{N}_0.$$

Dann existiert $v := \sum_{k=0}^{\infty} v_k$ in $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n, E)$, $v \in B_{p,q}^s(\mathbb{R}^n, E)$ und

$$\|v\|_{B_{p,q}^s(\mathbb{R}^n, E)} \leq \tilde{c} \left\| \left(2^{ks} \|v_k\|_{L_p(\mathbb{R}^n, E)} \right)_k \right\|_{l^q},$$

wobei die Konstante $\tilde{c}$ unabhängig von v_k ist.

Beweis. Für den skalaren Fall siehe [Marshall,87] Lemma 1.2 und für den vektorwertigen Fall [Am,01] Proposition A1.2. □

5.2.1 Definition von $a(x, D)$ für elementare Symbole in $C_*^r S_{1,\delta}^{m,\rho}(\mathbb{R}^n, E_1)$

Satz 5.2.1 Seien $\delta, m, p, q, r, s \in \mathbb{R}$ mit $0 \leq \delta \leq 1$, $p, q \in [1, \infty]$, $r > 0$, $-(1-\delta)r < s < r$, $\rho \in \mathbb{N}$ mit $\rho \geq \rho_n$ und $a \in C_*^r S_{1,\delta}^{m,\rho}(\mathbb{R}^n, E_1)$ ein elementares Symbol, das heißt

$$a(x, \xi) = \sum_{k=0}^{\infty} \varphi_k(\xi) M_k(x) \quad \text{für alle } \xi \in \mathbb{R}^n, \text{ f.f.a. } x \in \mathbb{R}^n$$

mit $(\varphi_k)_{k \in \mathbb{N}_0}$ und (M_k) wie in der Definition 5.1.2. Ferner seien $(\psi_l)_{l \in \mathbb{N}_0}$ eine Zerlegung der Eins, wie in (1.16), und $M_{l,k} := \psi_l(D) M_k$. Dann existiert

$$\sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} M_{l,k} \bullet \varphi_k(D) u \quad \text{in } B_{p,q}^s(\mathbb{R}^n, E_0) \quad \text{für alle } u \in B_{p,q}^{s+m}(\mathbb{R}^n, E_2)$$

und es gibt eine Konstante $c > 0$, so dass

$$\left\| \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} M_{l,k} \bullet \varphi_k(D) u \right\|_{B_{p,q}^s(\mathbb{R}^n, E_0)} \leq c \|a\|_{\delta, E_1}^{(m,\rho)} \|u\|_{B_{p,q}^{s+m}(\mathbb{R}^n, E_2)} \quad \text{für alle } u \in B_{p,q}^{s+m}(\mathbb{R}^n, E_2), \quad (5.14)$$

wobei $\|a\|_{\delta, E_1}^{(m,\rho)} := \max \left\{ \|a\|_{S_{1,0}^{m,\rho}[L_\infty(\mathbb{R}^n, E_1)]}, \|a\|_{S_{1,0}^{m+r\delta,\rho}[C_*^r(\mathbb{R}^n, E_1)]} \right\}$.

Beweis. Seien $(\psi_l)_{l \in \mathbb{N}_0}$ eine Zerlegung der Eins, $u \in B_{p,q}^{s+m}(\mathbb{R}^n, E_2)$, $M_{l,k} := \psi_l(D) M_k$ für alle $l, k \in \mathbb{N}_0$ und $u_k := \varphi_k(D) u$. Dann erhält man nach (5.13), dass

$$\begin{aligned} \|M_{l,k}\|_{L_\infty(\mathbb{R}^n, E_1)} &= 2^{-lr} \left[2^{lr} \|\psi_l(D) M_k\|_{L_\infty(\mathbb{R}^n, E_1)} \right] \\ &\leq 2^{-lr} \|M_k\|_{C_*^r(\mathbb{R}^n, E_1)} \\ &\leq c(n, m, \psi) \|a\|_{S_{1,0}^{m+r\delta,\rho}[C_*^r(\mathbb{R}^n, E_1)]} 2^{-lr} 2^{k(m+r\delta)} \quad \text{für alle } l, k \in \mathbb{N}_0. \end{aligned}$$

Also

$$\|M_{l,k}\|_{L_\infty(\mathbb{R}^n, E_1)} \leq c(n, m, \psi) \|a\|_{S_{1,0}^{m+r\delta,\rho}[C_*^r(\mathbb{R}^n, E_1)]} 2^{-lr} 2^{k(m+r\delta)} \quad \text{für alle } l, k \in \mathbb{N}_0. \quad (5.15)$$

Nun zeigen wir die folgenden drei Behauptungen.

Behauptung I: $a_{s,p,q}^{(1)}(x, D) u := \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{k-4} M_{l,k} \bullet u_k \in B_{p,q}^s(\mathbb{R}^n, E_0)$ und

$$\|a_{s,p,q}^{(1)}(x, D) u\|_{B_{p,q}^s(\mathbb{R}^n, E_0)} \leq c_1 \|a\|_{S_{1,0}^{m,\rho}[L_\infty(\mathbb{R}^n, E_1)]} \|u\|_{B_{p,q}^{s+m}(\mathbb{R}^n, E_2)} \quad \text{für alle } u \in B_{p,q}^{s+m}(\mathbb{R}^n, E_2).$$

Behauptung II: $a_{s,p,q}^{(2)}(x, D) u := \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=k-3}^{k+3} M_{l,k} \bullet u_k \in B_{p,q}^{s+(1-\delta)r}(\mathbb{R}^n, E_0) \hookrightarrow B_{p,q}^s(\mathbb{R}^n, E_0)$ und

$$\|a_{s,p,q}^{(2)}(x, D) u\|_{B_{p,q}^s(\mathbb{R}^n, E_0)} \leq c_2 \|a\|_{S_{1,0}^{m+r\delta,\rho}[C_*^r(\mathbb{R}^n, E_1)]} \|u\|_{B_{p,q}^{s+m}(\mathbb{R}^n, E_2)} \quad \text{für alle } u \in B_{p,q}^{s+m}(\mathbb{R}^n, E_2).$$

Behauptung III: $a_{s,p,q}^{(3)}(x, D)u := \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=k+4}^{\infty} M_{l,k} \bullet u_k \in B_{p,q}^s(\mathbb{R}^n, E_0)$ und

$$\left\| a_{s,p,q}^{(3)}(x, D)u \right\|_{B_{p,q}^s(\mathbb{R}^n, E_0)} \leq c_3 \|a\|_{S_{1,0}^{m+r\delta,\rho}[C_*^r(\mathbb{R}^n, E_1)]} \|u\|_{B_{p,q}^{s+m}(\mathbb{R}^n, E_2)}. \quad \text{für alle } u \in B_{p,q}^{s+m}(\mathbb{R}^n, E_2).$$

Somit erhält man nach den Behauptungen I-III, dass

$$\sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} M_{l,k}(x) \bullet \varphi_k(D)u = \sum_{i=1}^3 a_{s,p,q}^{(i)}(x, D)u \in B_{p,q}^s(\mathbb{R}^n, E_0)$$

und (5.14) gilt.

Beweis der Behauptung I: Sei $v_k := \sum_{l=0}^{k-4} M_{l,k} \bullet u_k$ für alle $k \geq 4$. Dann folgt aus (1.17), dass

$$\begin{aligned} v_k &= \sum_{l=0}^{k-4} [\mathcal{F}^{-1}(\psi_l \mathcal{F} M_k)] \bullet [\mathcal{F}^{-1}(\varphi_k \mathcal{F} u)] \\ &= \left[\mathcal{F}^{-1} \left(\left(\sum_{l=0}^{k-4} \psi_l \right) \mathcal{F} M_k \right) \right] \bullet [\mathcal{F}^{-1}(\varphi_k \mathcal{F} u)] \\ &= \left[\mathcal{F}^{-1} \left(\psi \left(2^{-k+4} \cdot \right) \mathcal{F} M_k \right) \right] \bullet [\mathcal{F}^{-1}(\varphi_k \mathcal{F} u)]. \end{aligned}$$

Also

$$v_k = \left[\mathcal{F}^{-1} \left(\psi \left(2^{-k+4} \cdot \right) \mathcal{F} M_k \right) \right] \bullet [\mathcal{F}^{-1}(\varphi_k \mathcal{F} u)]. \quad (5.16)$$

Weil

$$\text{supp} \left(\psi \left(2^{-k+4} \cdot \right) \mathcal{F} M_k \right) \underset{\text{komp.}}{\subset} \left\{ \eta \in \mathbb{R}^n : |\eta| \leq 2^{k-3} \right\} =: U_k$$

und

$$\text{supp}(\varphi_k \mathcal{F} u) \underset{\text{komp.}}{\subset} \left\{ \xi \in \mathbb{R}^n : 2^{k-2} \leq |\xi| \leq 2^{k+2} \right\} = W_k$$

gelten, erhält man nach (1.13 – 1.14), dass

$$(2\pi)^{-n/2} \mathcal{F}^{-1} \left[\left(\psi \left(2^{-k+4} \cdot \right) \mathcal{F} M_k \right) *_{\bullet} (\varphi_k \mathcal{F} u) \right] = \left[\mathcal{F}^{-1} \left(\psi \left(2^{-k+4} \cdot \right) \mathcal{F} M_k \right) \right] \bullet [\mathcal{F}^{-1}(\varphi_k \mathcal{F} u)] = v_k$$

und

$$\text{supp } p(\hat{v}_k) \subset U_k + W_k \text{ für alle } k \geq 4.$$

Ist $\eta + \xi \in U_k + W_k$, dann ist $|\eta + \xi| \leq 2^{k-3} + 2^{k+2} = \frac{33}{8} 2^k$ und $|\eta + \xi| \geq |\xi| - |\eta| \geq 2^{k-2} - 2^{k-3} = \frac{1}{8} 2^k$. Also

$$\text{supp } p(\hat{v}_k) \subset \left\{ \eta \in \mathbb{R}^n : \frac{1}{8} 2^k \leq |\eta| \leq \frac{33}{8} 2^k \right\}$$

und daher erhält man nach dem Lemma 5.2.2 und (5.16), dass

$$\begin{aligned}
\|a_{s,p,q}^{(1)}(x, D) u\|_{B_{p,q}^s(\mathbb{R}^n, E_0)} &\leq \tilde{c}_1 \left[\sum_{k=0}^{\infty} 2^{ksq} \left\| \left[\mathcal{F}^{-1} \left(\psi \left(2^{-k+4} \cdot \right) \mathcal{F} M_k \right) \right] \bullet u_k \right\|_{L_p(\mathbb{R}^n, E_0)}^q \right]^{1/q} \\
&\leq \tilde{c}_1 \left[\sum_{k=0}^{\infty} 2^{ksq} \left\| \left[\psi \left(2^{-k+4} \cdot \right) \right]^{\vee} * M_k \right\|_{L_{\infty}(\mathbb{R}^n, E_1)}^q \|u_k\|_{L_p(\mathbb{R}^n, E_2)}^q \right]^{1/q} \\
&\leq \tilde{c}_1 \left[\sum_{k=0}^{\infty} 2^{ksq} \left\| \left[\psi \left(2^{-k+4} \cdot \right) \right]^{\vee} \right\|_{L_1(\mathbb{R}^n)}^q \|M_k\|_{L_{\infty}(\mathbb{R}^n, E_1)}^q \|u_k\|_{L_p(\mathbb{R}^n, E_2)}^q \right]^{1/q} \\
&\leq \hat{c}_1 \|\check{\psi}\|_{L_1(\mathbb{R}^n)} \cdot \|a\|_{S_{1,0}^{m,\rho}[L_{\infty}(\mathbb{R}^n, E_1)]} \left[\sum_{k=0}^{\infty} 2^{k(s+m)q} \|u_k\|_{L_p(\mathbb{R}^n, E_2)}^q \right]^{1/q} \\
&\leq c_1 \|a\|_{S_{1,0}^{m,\rho}[L_{\infty}(\mathbb{R}^n, E_1)]} \|u\|_{B_{p,q}^{s+m}(\mathbb{R}^n, E_2)}.
\end{aligned}$$

Dabei wurde in der letzten Abschätzung die Bemerkung 5.1.4b) mit $\mathbf{j} = 0$ angewandt.

Analog zeigt man den Fall $q = \infty$. Dazu muss oben die Summe $\sum_{k=0}^{\infty}$ durch $\sup_{k \in \mathbb{N}_0}$ ersetzt werden. Damit wurde die Behauptung I gezeigt.

Beweis der Behauptung II: Nun sei $v_k := \sum_{l=k-3}^{k+3} M_{l,k} \bullet u_k$, dann erhält man nach (1.9) und nach analoger Rechnung zur Behauptung I, dass $\text{supp}(\hat{v}_k) \subset \{\xi : |\xi| \leq 20 \cdot 2^k\}$ für alle $k \in \mathbb{N}_0$. Daraus und aus dem Lemma 5.2.3 mit $s + (1 - \delta)r > 0$ folgt, dass

$$\begin{aligned}
\|a_{s,p,q}^{(2)}(x, D) u\|_{B_{p,q}^{s+(1-\delta)r}(\mathbb{R}^n, E_0)} &\stackrel{\text{Fall } q < \infty}{\leq} \tilde{c} \left[\sum_{k=0}^{\infty} 2^{k(s+(1-\delta)r)q} \left\| \sum_{l=k-3}^{k+3} M_{l,k} \bullet u_k \right\|_{L_p(\mathbb{R}^n, E_0)}^q \right]^{1/q} \\
&\stackrel{\text{Dreieck. Ung.}}{\leq} \tilde{c} \left[\sum_{k=0}^{\infty} 2^{ksq} 2^{k(1-\delta)r q} \left(\sum_{l=k-3}^{k+3} \|M_{l,k} \bullet u_k\|_{L_p(\mathbb{R}^n, E_0)} \right)^q \right]^{1/q} \\
&\stackrel{(5.15)}{\leq} \tilde{c}(n, m, \psi) \|a\|_{S_{1,0}^{m+r\delta, \rho}[C_*^r(\mathbb{R}^n, E_1)]} \left[\sum_{k=0}^{\infty} 2^{ksq} 2^{k(1-\delta)r q} \left(\sum_{l=k-3}^{k+3} 2^{km} 2^{k\delta r} 2^{-lr} \right)^q \|u_k\|_{L_p(\mathbb{R}^n, E_2)}^q \right]^{1/q} \\
&\leq 7\tilde{c}(n, m, \psi) \|a\|_{S_{1,0}^{m+r\delta, \rho}[C_*^r(\mathbb{R}^n, E_1)]} \left[\sum_{k=0}^{\infty} 2^{k(s+m)q} 2^{krq} \left(\max_{k-3 \leq l \leq k+3} \{2^{-lr}\} \right)^q \|u_k\|_{L_p(\mathbb{R}^n, E_2)}^q \right]^{1/q} \\
&= 7 \cdot 2^{3r} \tilde{c}(n, m, \psi) \|a\|_{S_{1,0}^{m+r\delta, \rho}[C_*^r(\mathbb{R}^n, E_1)]} \left[\sum_{k=0}^{\infty} 2^{k(s+m)q} 2^{krq} 2^{-krq} \|u_k\|_{L_p(\mathbb{R}^n, E_2)}^q \right]^{1/q} \\
&\leq \tilde{c}(n, m, r, \psi) \|a\|_{S_{1,0}^{m+r\delta, \rho}[C_*^r(\mathbb{R}^n, E_1)]} \|u\|_{B_{p,q}^{s+m}(\mathbb{R}^n, E_2)} \quad (\text{Bem. 5.1.4b) mit } \mathbf{j} = \mathbf{0}).
\end{aligned}$$

Ebenso zeigt man den Fall $q = \infty$. Dazu muss man oben die Summe $\sum_{k=0}^{\infty}$ durch $\sup_{k \in \mathbb{N}_0}$ ersetzen. Somit ist die Behauptung II bewiesen.

Beweis der Behauptung III: Nun sei $v_l := \sum_{k=0}^{l-4} M_{l,k} \bullet u_k$ für alle $l \geq 4$. Dann folgt aus (1.9), dass

$$\begin{aligned} \text{supp } (\hat{v}_l) &= \text{supp } \left(\sum_{k=0}^{l-4} \mathcal{F}(M_{l,k} \bullet u_k) \right) \\ &= \bigcup_{k=0}^{l-4} \text{supp } (\mathcal{F}(M_{l,k} \bullet u_k)) \\ &\subset \bigcup_{k=0}^{l-4} (\Omega_l + W_k) \quad (\text{nach analoger Rechnung zur Beh. I}). \end{aligned}$$

Für jede $l \geq 4$, $0 \leq k \leq l-4$ und alle $\xi + \eta \in \Omega_l + W_k$ erhält man:

$$\begin{aligned} |\xi + \eta| &\leq 2^{l+1} + 2^{k+2} \leq 2^{l+1} + 2^{l-2} = \frac{9}{4} \cdot 2^l, \\ |\xi + \eta| &\geq |\xi| - |\eta| \geq 2^{l-1} - 2^{l-2} = \frac{1}{4} \cdot 2^l \end{aligned}$$

und somit ist

$$\text{supp } p(\hat{v}_l) \subset \underbrace{\left\{ \xi \in \mathbb{R}^n : \frac{1}{4} \cdot 2^l \leq |\xi| \leq \frac{9}{4} \cdot 2^l \right\}}_{\subset W_l!}, \quad l \geq 4. \quad (5.17)$$

Behauptung IIIa): $\sum_{l=4}^{\infty} v_l \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n, E_0)$.

Seien dazu $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ und $\chi_l := \sum_{i=-1}^1 \psi_{l+i}$, $l \geq 4$. Dann ergibt sich aus $\sum_{k=0}^{\infty} \psi_k = 1$ in $\mathcal{O}_{\mathcal{M}}(\mathbb{R}^n)$ und (5.17):

$$\begin{aligned} \langle v_l, \phi \rangle &= \langle \chi_l \hat{v}_l, \check{\phi} \rangle \\ &= \left\langle v_l, \left(\chi_l \widehat{\phi(-\cdot)} \right)^\wedge \right\rangle \\ &= \langle v_l, (\chi_l(D) \phi(-\cdot))(-\cdot) \rangle. \end{aligned}$$

Daraus folgt für alle $p, p' \in [1, \infty]$ mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$, $q \in [1, \infty[$, $q' \in]1, \infty]$ mit $\frac{1}{q} + \frac{1}{q'} = 1$ und alle $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, dass

$$\begin{aligned} \sum_{l=4}^{\infty} \|\langle v_l, \phi \rangle\|_{E_0} &\stackrel{\text{Hölder}}{\leq} \sum_{l=4}^{\infty} \int_{\mathbb{R}^n} \|v_l(x)\|_{E_0} |(\chi_l(D) \phi(-\cdot))(-x)| dx \\ &\stackrel{\text{Hölder}}{\leq} \sum_{l=4}^{\infty} \|v_l\|_{L_p(\mathbb{R}^n, E_0)} \|\chi_l(D) \phi(-\cdot)\|_{L_{p'}(\mathbb{R}^n)} \\ &= \sum_{l=4}^{\infty} \left(2^{ls} \|v_l\|_{L_p(\mathbb{R}^n, E_0)} \right) \left(2^{-ls} \|\chi_l(D) \phi\|_{L_{p'}(\mathbb{R}^n)} \right) \\ &\stackrel{\text{Hölder}}{\leq} 3 \|\phi\|_{B_{p',q'}^{-s}(\mathbb{R}^n)} \left(\sum_{l=4}^{\infty} 2^{lsq} \|v_l\|_{L_p(\mathbb{R}^n, E_0)}^q \right)^{1/q}. \end{aligned} \quad (5.18)$$

Weiter erhält man nach (5.15) und Lemma 5.2.1 mit $s - r < 0$, dass

$$\begin{aligned}
& \left(\sum_{l=4}^{\infty} 2^{lsq} \|v_l\|_{L_p(\mathbb{R}^n, E_0)}^q \right)^{1/q} \\
& \leq c(n, m, \psi) \|a\|_{S_{1,0}^{m+r\delta, \rho}[C_*^r(\mathbb{R}^n, E_1)]} \left[\sum_{l=4}^{\infty} 2^{lsq} \left(\sum_{k=0}^{l-4} 2^{-rk} 2^{k(m+r\delta)} \|u_k\|_{L_p(\mathbb{R}^n, E_2)} \right)^q \right]^{1/q} \\
& = c(n, m, \psi) \|a\|_{S_{1,0}^{m+r\delta, \rho}[C_*^r(\mathbb{R}^n, E_1)]} \left[\sum_{l=4}^{\infty} \left(2^{l(s-r)} \sum_{k=0}^{l-4} 2^{k(m+r\delta)} \|u_k\|_{L_p(\mathbb{R}^n, E_2)} \right)^q \right]^{1/q} \\
& \stackrel{\text{Lemm. 5.2.1}}{\leq} \tilde{c}(n, m, \psi) \|a\|_{S_{1,0}^{m+r\delta, \rho}[C_*^r(\mathbb{R}^n, E_1)]} \left[\sum_{l=0}^{\infty} 2^{l[s+m-r(1-\delta)]q} \|u_l\|_{L_p(\mathbb{R}^n, E_2)}^q \right]^{1/q} \\
& \leq 3\tilde{c}(n, m, \psi) \|a\|_{S_{1,0}^{m+r\delta, \rho}[C_*^r(\mathbb{R}^n, E_1)]} \|u\|_{B_{p,q}^{s+m-r(1-\delta)}(\mathbb{R}^n, E_2)} \\
& \leq \tilde{3}(n, m, \psi) \|a\|_{S_{1,0}^{m+r\delta, \rho}[C_*^r(\mathbb{R}^n, E_1)]} \|u\|_{B_{p,q}^{s+m}(\mathbb{R}^n, E_2)}, \tag{5.19}
\end{aligned}$$

da $s + m - r(1 - \delta) \leq s + m$.

Somit liefern (5.18) und (5.19):

$$\sum_{l=0}^{\infty} \|\langle v_l, \phi \rangle\|_{E_0} \leq c(n, m, \psi, \phi, a, u) < \infty. \tag{5.20}$$

Im Fall $q = \infty$, also $q' = 1$, bekommt man analog zu (5.18) und (5.19), dass

$$\begin{aligned}
\sum_{l=4}^{\infty} \|\langle v_l, \phi \rangle\|_{E_0} & \leq \sum_{l=4}^{\infty} \|v_l\|_{L_p(\mathbb{R}^n, E_0)} \|\chi_l(D)(\phi)\|_{L_{p'}(\mathbb{R}^n)} \\
& \leq \left(\sup_{l \in \mathbb{N}_0} 2^{sl} \|v_l\|_{L_p(\mathbb{R}^n, E_0)} \right) \sum_{l=0}^{\infty} 2^{-ls} \|\chi_l(D)(\phi)\|_{L_{p'}(\mathbb{R}^n)} \\
& \leq c \|\phi\|_{B_{p',1}^{-s}(\mathbb{R}^n)} \left(\sup_{l \in \mathbb{N}_0} 2^{sl} \|v_l\|_{L_p(\mathbb{R}^n, E_0)} \right) \\
& \leq \tilde{c}(n, m, \psi, \phi, a, u) < \infty,
\end{aligned}$$

wobei

$$\sup_{l \in \mathbb{N}_0} 2^{sl} \|v_l\|_{L_p(\mathbb{R}^n, E_0)} \leq \tilde{c}(n, m, \psi) \|a\|_{S_{1,0}^{m+r\delta, \rho}[C_*^r(\mathbb{R}^n, E_1)]} \|u\|_{B_{p,\infty}^{s+m}(\mathbb{R}^n, E_2)}. \tag{5.21}$$

Insgesamt hat man also für jedes $q \in [1, \infty]$:

$$\sum_{l=4}^{\infty} \|\langle v_l, \phi \rangle\|_{E_0} \leq c(n, m, \psi, \phi, a, u) < \infty \quad \forall \phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n).$$

Folglich ist die Reihe $\sum_{l=4}^{\infty} \langle v_l, \phi \rangle$ absolut konvergent im Banachraum E_0 . Somit existiert ein $\langle v, \phi \rangle \in E_0$, so dass für die Folge $(F_i)_{i \geq 4} \subset \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n, E_0)$ mit $F_i := \sum_{l=4}^i v_l$

$$\langle F_i, \phi \rangle \xrightarrow{i \rightarrow \infty} \langle v, \phi \rangle \text{ in } E_0 \text{ gilt,}$$

was $\langle F_i - F_{i'}, \phi \rangle \xrightarrow{i, i' \rightarrow \infty} 0$ impliziert. Dann ist $(F_i)_{i \geq 4}$ eine Cauchy-Folge im vollständigen Raum $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n, E_0)$ und somit existiert $v \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n, E_0)$ mit

$$\sum_{l=4}^i v_l \xrightarrow{i \rightarrow \infty} v \text{ in } \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n, E_0), \quad (5.22)$$

das heißt die Behauptung IIIa) gilt.

Behauptung IIIb):

$$\sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=k+4}^L M_{l,k} \bullet u_k = \sum_{l=4}^L \sum_{k=0}^{l-4} M_{l,k} \bullet u_k \quad \text{für alle } L \in \mathbb{N} \text{ mit } L \geq 4 \quad (5.23)$$

und somit ist

$$\sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=k+4}^{\infty} M_{l,k} \bullet u_k = \sum_{l=4}^{\infty} \sum_{k=0}^{l-4} M_{l,k} \bullet u_k \text{ in } \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n, E_0). \quad (5.24)$$

Beweis durch Induktion: Für $L = 4$ erhält man leicht die Gleichheit (5.23). Nun wenden wir den Induktionsschritt an:

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=k+4}^{L+1} M_{l,k} \bullet u_k &= \sum_{k=0}^{L-3} \sum_{l=k+4}^{L+1} M_{l,k} \bullet u_k \quad \left(\begin{array}{l} \text{denn } k \text{ läuft von } k=0 \text{ bis zu einem} \\ k, \text{ so dass } l=k+4=L+1. \end{array} \right) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=k+4}^L M_{l,k} \bullet u_k + \sum_{k=0}^{L-3} M_{L+1,k} \bullet u_k \\ &= \sum_{l=4}^L \sum_{k=0}^{l-4} M_{l,k} \bullet u_k + \sum_{k=0}^{L-3} M_{L+1,k} \bullet u_k \\ &= \sum_{l=4}^{L+1} \sum_{k=0}^{l-4} M_{l,k} \bullet u_k \end{aligned}$$

und damit ist (5.23) gezeigt. Daher und aus (5.22) erhält man

$$\sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=k+4}^{\infty} M_{l,k} \bullet u_k = \sum_{l=4}^{\infty} \sum_{k=0}^{l-4} M_{l,k} \bullet u_k \text{ in } \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n, E_0).$$

Jetzt folgt sofort die Behauptung III aus (5.17), (5.24) und Lemma 5.2.2, denn

$$\begin{aligned} \left\| a_{s,p,q}^{(3)}(x, D) u \right\|_{B_{p,q}^s(\mathbb{R}^n, E_0)} &\leq c \left[\sum_{l=4}^{\infty} 2^{lsq} \left\| \underbrace{\sum_{k=0}^{l-4} M_{l,k} \bullet u_k}_{=v_l} \right\|_{L_p(\mathbb{R}^n, E_0)}^q \right]^{1/q} \quad (\text{falls } 1 \leq q < \infty) \\ &\stackrel{(5.19)}{\leq} c(n, m, \psi) \|a\|_{S_{1,0}^{m+r\delta, \rho}[C_*^r(\mathbb{R}^n, E_1)]} \|u\|_{B_{p,q}^{s+m}(\mathbb{R}^n, E_2)}. \end{aligned}$$

Analog zeigt man den Fall $q = \infty$, wobei man (5.21) statt (5.19) verwendet. $\square$

Wir bezeichnen die im Satz 5.2.1 gegebene Distribution $\sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} M_{l,k} \bullet \varphi_k(D) u$ durch

$$a_{s,p,q}(x, D) u := \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} M_{l,k} \bullet \varphi_k(D) u, \quad u \in B_{p,q}^{s+m}(\mathbb{R}^n, E_2).$$

Bemerkung 5.2.1 Mit den Voraussetzungen des Satzes 5.2.1 erhält man

$$a_{s,p,q}(x, D) u(x) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{i\xi \cdot x} a(x, \xi) \bullet \hat{u}(\xi) d\xi \quad f.f.a. \quad x \in \mathbb{R}^n \text{ und } u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n, E_2).$$

Beweis. Sei $a(x, \xi) = \sum_{k=0}^{\infty} \varphi_k(\xi) M_k(x)$ ein elementares Symbol in $C_*^r S_{1,\delta}^{m,\rho}(\mathbb{R}^n, E_1)$ (siehe die Voraussetzungen des Satzes 5.2.1). Dann erhält man für alle $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n, E_2)$ und $f.f.a.$ $x \in \mathbb{R}^n$:

$$\frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{i\xi \cdot x} a(x, \xi) \bullet \hat{u}(\xi) d\xi = \mathcal{F}_{\xi \rightarrow x} \left[\underbrace{a(x, \cdot) \bullet \hat{u}}_{\in L_1(\mathbb{R}_{\xi}^n, E_0)} \right] (x) \in L_{\infty}(\mathbb{R}^n, E_0)$$

und damit ist dieses Integral eine reguläre Distribution in $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n, E_0)$. Auf der anderen Seite erhält man nach (5.15), dass

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^K \sum_{l=0}^L \|M_{l,k} \bullet \varphi_k(D) u\|_{L_{\infty}(\mathbb{R}^n, E_0)} &\leq \sum_{k=0}^K \sum_{l=0}^L c_{n,m} \|a\|_{S_{1,0}^{m+r\delta, \rho}} 2^{-lr} 2^{k(m+r\delta)} \|\varphi_k(D) u\|_{L_{\infty}(\mathbb{R}^n, E_2)} \\ &\leq c_{n,m,r,a} \sum_{k=0}^K 2^{k(m+r\delta)} \|\varphi_k(D) u\|_{L_{\infty}(\mathbb{R}^n, E_2)} \\ &\leq c_{n,m,r,a} \|u\|_{B_{\infty,1}^{m+r\delta}(\mathbb{R}^n, E_2)} < \infty \quad \forall K, L \in \mathbb{N}_0. \end{aligned}$$

Also konvergiert $\sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} M_{l,k} \bullet \varphi_k(D) u$ absolut im Banachraum $L_{\infty}(\mathbb{R}^n, E_0)$ und somit ist diese Doppelreihe auch eine reguläre Distribution in $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n, E_0)$.

Nun bekommt man im Distributionensinne

$$\begin{aligned}
\frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{i\xi \cdot x} a(x, \xi) \bullet \hat{u}(\xi) d\xi &= \mathcal{F}_{\xi \rightarrow x}^{-1} [a(x, \cdot) \bullet \hat{u}] \\
&= \mathcal{F}_{\xi \rightarrow x}^{-1} \left[\left(\sum_{k=0}^{\infty} M_k(x) \varphi_k \right) \bullet \hat{u} \right] \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} (M_k(x)) \bullet \mathcal{F}_{\xi \rightarrow x}^{-1} [\varphi_k \hat{u}] \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{l=0}^{\infty} \underbrace{\varphi_l(D) (M_k)}_{=M_{l,k}} \right) \bullet \varphi_k(D)(u) \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} M_{l,k} \bullet \varphi_k(D)(u) \\
&= a_{s,p,q}(x, D)u,
\end{aligned}$$

und daraus folgt die Behauptung. $\square$

Die obige Bemerkung zeigt, dass $a_{s,p,q}(x, D)u$ nicht von der Wahl der Folgen (φ_k) , (ψ_k) und (M_k) abhängt, wenn $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n, E_2)$. Nun wollen wir die folgende Abbildung definieren, deren Unabhängigkeit von der Wahl der Folgen (φ_k) , (ψ_k) und (M_k) im Satz 5.2.3 bewiesen wird.

Definition 5.2.1 Seien die Voraussetzungen wie im Satz 5.2.1 gegeben, aber mit $\rho > \rho_n!$ Dann definiert man die Abbildung $a_{s,p,q}(x, D) : B_{p,q}^{s+m}(\mathbb{R}^n, E_2) \longrightarrow B_{p,q}^s(\mathbb{R}^n, E_0)$ durch

$$a_{s,p,q}(x, D)u := \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} M_{l,k} \bullet \varphi_k(D)u \quad \text{für jedes } u \in B_{p,q}^{s+m}(\mathbb{R}^n, E_2).$$

Man erhält sofort nach dem Satz 5.2.1, dass:

Satz 5.2.2 Seien die Voraussetzungen wie im Satz 5.2.1 gegeben, aber mit $\rho > \rho_n!$ Dann $a_{s,p,q}(x, D) \in \mathcal{L}(B_{p,q}^{s+m}(\mathbb{R}^n, E_2), B_{p,q}^s(\mathbb{R}^n, E_0))$ mit

$$\|a_{s,p,q}(x, D)u\|_{B_{p,q}^s(\mathbb{R}^n, E_0)} \leq c \|a\|_{\delta, E_1}^{(m,\rho)} \|u\|_{B_{p,q}^{s+m}(\mathbb{R}^n, E_2)} \quad \text{für alle } u \in B_{p,q}^{s+m}(\mathbb{R}^n, E_2),$$

$$\text{wobei } \|a\|_{\delta, E_1}^{(m,\rho)} = \max \left\{ \|a\|_{S_{1,0}^{m,\rho}[L^\infty(\mathbb{R}^n, E_1)]}, \|a\|_{S_{1,0}^{m+r\delta,\rho}[C_*^r(\mathbb{R}^n, E_1)]} \right\}.$$

Satz 5.2.3 Seien die Voraussetzungen wie im Satz 5.2.1 gegeben, aber mit $\rho > \rho_n$. Dann gelten:

- a) Sind $p, q \in [1, \infty]$, $s \in \mathbb{R}$ mit $(\delta - 1)r < s < r$ und $u \in C_b^\infty(\mathbb{R}^n, E_2) \cap B_{p,q}^{s+m}(\mathbb{R}^n, E_2)$ so ist

$$[a_{s,p,q}(x, D)u](x) = os - \int \int e^{i\xi \cdot \eta} a(x, \xi) \bullet u(x - \eta) \frac{d(\xi, \eta)}{(2\pi)^n} \text{ für fast alle } x \in \mathbb{R}^n.$$

b) Die in der Definition 5.2.1 definierte Abbildung $a_{s,p,q}(x, D)$ hängt nicht von der Wahl der Folgen (φ_k) , (ψ_k) und (M_k) ab.

Beweis. Um a) zu zeigen, wenden wir den Satz über dominierte Konvergenz (Satz 1.3.9) an. Dafür zeigen wir zuerst folgende Behauptung.

Behauptung Seien $a(x, \xi) = \sum_{k=0}^{\infty} \varphi_k(\xi) M_k(x)$ wie in der Definition 5.1.2 mit $\rho > \rho_n$, $u \in C_b^\infty(\mathbb{R}^n, E_2) \cap B_{p,q}^{s+m}(\mathbb{R}^n, E_2)$, $x \in \mathbb{R}^n$ (fest),

$$b_N(\xi, \eta) := \sum_{k=0}^N \varphi_k(\xi) M_k(x) \bullet u(x - \eta) \quad \text{für } N \in \mathbb{N} \text{ und}$$

$$b_0(\xi, \eta) := a(x, \xi) \bullet u(x - \eta) \quad \text{für alle } (\xi, \eta) \in \mathbb{R}^{2n}.$$

Dann gelten:

i) $(b_N)_{N \in \mathbb{N}_0} \subset \mathcal{A}_{0,0}^{(m,\rho,\infty)}(\mathbb{R}_\xi^n \times \mathbb{R}_\eta^n, E_0)$ beschränkt, d.h. es gibt für jedes $l \in \mathbb{N}_0$ ein $C_{n,l} > 0$, so dass $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{N}_0^n$ mit $|\alpha| \leq \rho$, $|\beta| \leq l$:

$$\left\| \partial_\xi^\alpha \partial_\eta^\beta b_N(\xi, \eta) \right\|_{E_0} \leq C_{\rho,l} \langle \xi \rangle^m \quad \forall (\xi, \eta) \in \mathbb{R}^{2n} \text{ und } N \in \mathbb{N}_0. \quad (5.25)$$

ii) $b_N(\xi, \eta) \xrightarrow{N \rightarrow \infty} b_0(\xi, \eta)$ gleichmäßig auf allen kompakten Teilmengen von $\mathbb{R}^{2n}$.

Beweis der Behauptung i): Aus $a \in S_{1,0}^{m,\rho}[L_\infty(\mathbb{R}^n, E_1)]$ und $u \in C_b^\infty(\mathbb{R}^n, E_2)$ folgt $b_0 \in \mathcal{A}_{0,0}^{(m,\rho,\infty)}(\mathbb{R}_\xi^n \times \mathbb{R}_\eta^n, E_0)$, denn b_0 erfüllt (5.25) mit $C_{\rho,l} = \|a\|_{S_{1,0}^{m,\rho}[L_\infty(\mathbb{R}^n, E_1)]} \|u\|_{C_b^l(\mathbb{R}^n, E_2)}$. Nun seien $N \in \mathbb{N}$ und $\xi \in \mathbb{R}^n$. Dann ist entweder $|\xi| > 2^{N+2}$ oder $|\xi| \leq 2^{N+2}$. Im ersten Fall erhält man $b_N(\xi, \eta) = 0$ für alle $|\xi| > 2^{N+2}$, $\eta \in \mathbb{R}^n$. Falls $|\xi| \leq 2^{N+2}$ gilt, gibt es ein $k_N \leq N+1$, so dass für alle $|\alpha| \leq \rho$, $|\beta| \leq l$:

$$\begin{aligned} \left\| \partial_\xi^\alpha \partial_\eta^\beta b_N(\xi, \eta) \right\|_{E_0} &\leq \sum_{k=0}^N \left| \partial_\xi^\alpha \varphi_k(\xi) \right| \mathbf{1}_{W_k}(\xi) \|M_k(x)\|_{E_1} \left\| \partial_\eta^\beta u(x - \eta) \right\|_{E_2} \\ &\leq c \|a\|_{S_{1,0}^{m,\rho}[L_\infty(\mathbb{R}^n, E_1)]} \|u\|_{C_b^l(\mathbb{R}^n, E_2)} \sum_{j=k_N-1}^{k_N+1} \underbrace{2^{mj} c_\alpha 2^{-|\alpha|j}}_{\leq \tilde{C}_\alpha} \mathbf{1}_{W_j}(\xi) \\ &\stackrel{(5.9)}{\leq} 3C_{\rho,m} \|a\|_{S_{1,0}^{m,\rho}[L_\infty(\mathbb{R}^n, E_1)]} \|u\|_{C_b^l(\mathbb{R}^n, E_2)} \langle \xi \rangle^m. \end{aligned}$$

Somit ist i) bewiesen.

Beweis von ii): Sei $K \subset \mathbb{R}_\xi^n \times \mathbb{R}_\eta^n$ kompakt. Dann existiert ein $\tilde{N} \in \mathbb{N}$, so dass $K \subset \{(\xi, \eta) : |(\xi, \eta)| < 2^{\tilde{N}-2}\}$. Daher erhält man

$$b_N(\xi, \eta) = \sum_{k=0}^{\tilde{N}} \varphi_k(\xi) M_k(x) \bullet u(x - \eta) \quad \text{für alle } (\xi, \eta) \in K \text{ und } N \geq \tilde{N}.$$

Daraus folgt für alle $\varepsilon > 0$ und $N \geq \tilde{N}$:

$$\|b_N(\xi, \eta) - b_0(\xi, \eta)\|_{E_0} = \lim_{\substack{L \rightarrow \infty \\ L \geq \tilde{N}}} \left\| \underbrace{b_N(\xi, \eta) - b_L(\xi, \eta)}_{=0} \right\|_{E_0} = 0 < \varepsilon \text{ für alle } (\xi, \eta) \in K.$$

Also ist *ii*) bewiesen.

Aufgrund der obigen Behauptung darf man den Limes unter das oszillatorische Integral ziehen (siehe Satz 1.3.9). Daraus folgt a), denn

$$\begin{aligned} & os - \int \int e^{i\xi \cdot \eta} a(x, \xi) \bullet u(x - \eta) \frac{d(\xi, \eta)}{(2\pi)^n} \\ &= os - \int \int e^{i\xi \cdot \eta} b_0(\xi, \eta) \frac{d(\xi, \eta)}{(2\pi)^n} \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} os - \int \int e^{i\xi \cdot \eta} b_N(\xi, \eta) \frac{d(\xi, \eta)}{(2\pi)^n} \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} os - \int \int e^{i\xi \cdot \eta} \left(\sum_{k=0}^N \varphi_k(\xi) M_k(x) \right) \bullet u(x - \eta) \frac{d(\xi, \eta)}{(2\pi)^n} \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^N M_k(x) \bullet \left(os - \int \int e^{i\xi \cdot \eta} \varphi_k(\xi) u(x - \eta) \frac{d(\xi, \eta)}{(2\pi)^n} \right) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} [M_k \bullet \varphi_k(D) u](x) \\ &= [a_{s,p,q}(x, D) u](x) \end{aligned}$$

für alle $u \in C_b^\infty(\mathbb{R}_x^n, E_2) \cap B_{p,q}^{s+m}(\mathbb{R}^n, E_2)$ und f.f.a. $x \in \mathbb{R}^n$.

Beweis von b): Zuerst betrachten wir $p \in [1, \infty]$ und $q \in [1, \infty)$. Dann gilt (siehe (1.25))

$$C_b^\infty(\mathbb{R}^n, E_2) \cap B_{p,q}^{s+m}(\mathbb{R}^n, E_2) \xrightarrow{d} B_{p,q}^{s+m}(\mathbb{R}^n, E_2).$$

Außerdem sieht man nach *a*), dass die Restriktion der stetigen linearen Abbildung $a_{s,p,q}(x, D) : B_{p,q}^{s+m}(\mathbb{R}^n, E_2) \longrightarrow B_{p,q}^s(\mathbb{R}^n, E_0)$ auf $C_b^\infty(\mathbb{R}^n, E_2) \cap B_{p,q}^{s+m}(\mathbb{R}^n, E_2)$ nicht von der Wahl der Folgen (φ_k) , (ψ_k) und (M_k) abhängt. Deswegen hängt die eindeutige und stetige Fortsetzung von $a_{s,p,q}(x, D)|_{C_b^\infty(\mathbb{R}^n, E_2) \cap B_{p,q}^{s+m}(\mathbb{R}^n, E_2)}$ auf $B_{p,q}^{s+m}(\mathbb{R}^n, E_2)$, die mit $a_{s,p,q}(x, D)$ zusammenfällt, nicht von der Wahl dieser Folgen ab.

Nun betrachten wir den Fall $p \in [1, \infty]$ und $q = \infty$. Sei $u \in B_{p,\infty}^{s+m}(\mathbb{R}^n, E_2)$, so ist u auch in $B_{p,1}^{s'+m}(\mathbb{R}^n, E_2)$ für ein $s' \in \mathbb{R}$ mit $-(1-\delta)r < s' < s$ und somit existieren nach Satz 5.2.1

$a_{s,p,\infty}(x, D)u$, $a_{s',p,1}(x, D)u$ in $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n, E_0)$, so dass

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^N \sum_{l=0}^{\infty} M_{l,k} \bullet \varphi_k(D) u &\xrightarrow{N \rightarrow \infty} a_{s,p,\infty}(x, D)u \text{ in } \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n, E_0) \text{ und} \\ \sum_{k=0}^N \sum_{l=0}^{\infty} M_{l,k} \bullet \varphi_k(D) u &\xrightarrow{N \rightarrow \infty} a_{s',p,1}(x, D)u \text{ in } \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n, E_0). \end{aligned}$$

Also $a_{s,p,\infty}(x, D)u = a_{s',p,1}(x, D)u$ und weil $a_{s',p,1}(x, D)u$ unabhängig von der Wahl der Folgen (φ_k) , (ψ_k) und (M_k) ist, so ist auch $a_{s,p,\infty}(x, D)u$. $\square$

Korollar 5.2.1 Seien $a \in S_{1,0}^{m,\rho}(\mathbb{R}_\xi^n, E_1)$ mit $\rho > \rho_n$ und $a(x, \xi) := a(\xi)$ für alle $x, \xi \in \mathbb{R}^n$. Nach Bemerkung 5.1.3 wissen wir bereits, dass $a \in C_*^r S_{1,\delta}^{m,\rho}(\mathbb{R}_\xi^n, E_1)$ für alle $r > 0$ und $0 \leq \delta \leq 1$. Sind a ein elementares Symbol und $p, q \in [1, \infty]$, $s \in \mathbb{R}$ mit $-(1-\delta)r < s < r$, so gilt

$$a(D) = a_{s,p,q}(x, D) \quad \text{auf } C_b^\infty(\mathbb{R}^n, E_2) \cap B_{p,q}^{s+m}(\mathbb{R}^n, E_2). \quad (5.26)$$

Im Folgenden zeigen wir den Hauptsatz dieses Abschnitts. Dazu definiere für $m \in \mathbb{R}$, $r > 0$ und $0 \leq \delta \leq 1$ die Teilmenge $\mathbf{V}_{r,\delta}^m(\mathbb{R}^n, E) \subset \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n, E)$ durch

$$\mathbf{V}_{r,\delta}^m(\mathbb{R}^n, E) := \bigcup_{(\delta-1)r < s < r} \bigcup_{p,q \in [1,\infty]} B_{p,q}^{s+m}(\mathbb{R}^n, E).$$

Satz 5.2.4 (und Definition der Abbildung $a(x, D)$) Seien die Voraussetzungen wie im Satz 5.2.1 gegeben, aber mit $\rho > \rho_n$. Dann gibt es eine eindeutige Abbildung $a(x, D) : \mathbf{V}_{r,\delta}^m(\mathbb{R}^n, E_2) \longrightarrow \mathbf{V}_{r,\delta}^0(\mathbb{R}^n, E_0)$, so dass:

- a) $a(x, D)|_{B_{p,q}^{s+m}(\mathbb{R}^n, E_2)} : B_{p,q}^{s+m}(\mathbb{R}^n, E_2) \longrightarrow B_{p,q}^s(\mathbb{R}^n, E_0)$ ist linear stetig für alle $p, q \in [1, \infty]$ und $s \in \mathbb{R}$ mit $(\delta-1)r < s < r$.
- b) Sind $p, q \in [1, \infty]$, $s \in \mathbb{R}$ mit $(\delta-1)r < s < r$ und $u \in C_b^\infty(\mathbb{R}^n, E_2) \cap B_{p,q}^{s+m}(\mathbb{R}^n, E_2)$, so ist

$$[a(x, D)u](x) = os - \int \int e^{i\xi \cdot \eta} a(x, \xi) \bullet u(x - \eta) \frac{d(\xi, \eta)}{(2\pi)^n} \quad f.f.a. \ x \in \mathbb{R}^n.$$

Beweis. a) Sei $a(x, D) : \mathbf{V}_{r,\delta}^m(\mathbb{R}^n, E_2) \longrightarrow \mathbf{V}_{r,\delta}^0(\mathbb{R}^n, E_0)$ definiert durch

$$a(x, D)|_{B_{p,q}^{s+m}(\mathbb{R}^n, E_2)} := a_{s,p,q}(x, D) \quad \text{für alle } p, q \in [1, \infty] \text{ und } s \in \mathbb{R} \text{ mit } (\delta-1)r < s < r, \quad (5.27)$$

wobei die in der Definition 5.2.1 definierte Abbildung

$$a_{s,p,q}(x, D) : B_{p,q}^{s+m}(\mathbb{R}^n, E_2) \longrightarrow B_{p,q}^s(\mathbb{R}^n, E_0)$$

wegen Satz 5.2.2 linear und stetig ist. Also gilt a) automatisch und b) folgt sofort aus dem Satz 5.2.3. Dann bleibt nur zu zeigen, dass die Abbildung $a(x, D)$ wohldefiniert und eindeutig bestimmt ist. Dies wird analog zum Beweis des Satzes 2.3.1 gezeigt:

$a(x, D)$ ist wohldefiniert. Seien $s_i \in \mathbb{R}$ mit $(\delta - 1)r < s_i < r$, $p_i \in [1, \infty]$, $q_i \in [1, \infty)$ für $i = 1, 2$ und $u \in B_{p_1, q_1}^{s_1+m}(\mathbb{R}^n, E_2) \cap B_{p_2, q_2}^{s_2+m}(\mathbb{R}^n, E_2)$. Dann gilt $a_{s_1, p_1, q_1}(D)u = a_{s_2, p_2, q_2}(D)u$ in $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n, E_0)$, denn eine Folge $(u_N)_{N \in \mathbb{N}_0}$ in $C_b^\infty(\mathbb{R}^n, E_2) \cap \left(\bigcap_{i=1,2} B_{p_i, q_i}^{s_i+m}(\mathbb{R}^n, E_2) \right)$ existiert (nach Lemma 1.1.5) mit

$$u_N \longrightarrow u \text{ in } B_{p_i, q_i}^{s_i+m}(\mathbb{R}^n, E_2), \text{ für jedes } i = 1, 2, \quad (5.28)$$

und daher bekommt man nach der Stetigkeit von $a_{s_i, p_i, q_i}(x, D)$, dass

$$a_{s_i, p_i, q_i}(x, D)u = \lim_{N \rightarrow \infty} a_{s_i, p_i, q_i}(x, D)u_N \text{ in } B_{p_i, q_i}^{s_i}(\mathbb{R}^n, E_0), \quad i = 1, 2. \quad (5.29)$$

Ferner erhält man nach dem Korollar 1.1.1, dass

$$B_{p_i, q_i}^{s_i}(\mathbb{R}^n, E_0) \hookrightarrow B_{n j_0, j_0}^{-(j_0 - \frac{1}{j_0})}(\mathbb{R}^n, E_0), \quad i = 1, 2 \quad (5.30)$$

für ein geeignetes $j_0 \in \mathbb{N}$ gilt. Daraus folgt zusammen mit $a_{s_1, p_1, q_1}(x, D)u_N = a_{s_2, p_2, q_2}(x, D)u_N$ (wegen Satz 5.2.3a)) und $s_{j_0} := -(j_0 - \frac{1}{j_0})$, dass

$$\begin{aligned} & \|a_{s_1, p_1, q_1}(x, D)u - a_{s_2, p_2, q_2}(x, D)u\|_{B_{n j_0, j_0}^{s_{j_0}}} \\ &= \|a_{s_1, p_1, q_1}(x, D)u - a_{s_1, p_1, q_1}(x, D)u_N + a_{s_2, p_2, q_2}(x, D)u_N - a_{s_2, p_2, q_2}(x, D)u\|_{B_{n j_0, j_0}^{s_{j_0}}} \\ &\leq \|a_{s_1, p_1, q_1}(x, D)u - a_{s_1, p_1, q_1}(x, D)u_N\|_{B_{n j_0, j_0}^{s_{j_0}}} + \|a_{s_2, p_2, q_2}(x, D)u - a_{s_2, p_2, q_2}(x, D)u_N\|_{B_{n j_0, j_0}^{s_{j_0}}} \\ &\leq c_1 \|a_{s_1, p_1, q_1}(x, D)u - a_{s_1, p_1, q_1}(x, D)u_N\|_{B_{p_1, q_1}^{s_1}} + c_2 \|a_{s_2, p_2, q_2}(x, D)u - a_{s_2, p_2, q_2}(x, D)u_N\|_{B_{p_2, q_2}^{s_2}} \\ &\xrightarrow{N \rightarrow \infty} 0. \end{aligned}$$

Also $a_{s_1, p_1, q_1}(x, D)u = a_{s_2, p_2, q_2}(x, D)u$ in $B_{n j_0, j_0}^{s_{j_0}}(\mathbb{R}^n, E_0) (\hookrightarrow \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n, E_0))$ und somit ist $a(x, D)$ wohldefiniert.

$a(x, D)$ ist eindeutig bestimmt. Nun sei $T : \mathbf{V}_{r, \delta}^m(\mathbb{R}^n, E_2) \longrightarrow \mathbf{V}_{r, \delta}^0(\mathbb{R}^n, E_0)$ andere Abbildung, die a)-b) erfüllt. Für $u \in \mathbf{V}_{r, \delta}^m(\mathbb{R}^n, E_2)$ existiert ein (s_0, p_0, q_0) mit $q_0 < \infty$, so dass $u \in B_{p_0, q_0}^{s_0+m}(\mathbb{R}^n, E_2)$. Dann existiert eine Folge $(u_N)_{N \in \mathbb{N}_0}$ in $C_b^\infty(\mathbb{R}^n, E) \cap B_{p_0, q_0}^{s_0+m}(\mathbb{R}^n, E_2)$ mit $u_N \longrightarrow u$ in $B_{p_0, q_0}^{s_0+m}(\mathbb{R}^n, E_2)$. Aus b) erhält man $Tu_N = a(x, D)u_N$ für alle $N \in \mathbb{N}_0$. Dann folgt aus a), dass

$$Tu = B_{p_0, q_0}^{s_0}(\mathbb{R}^n, E_0) - \lim_{N \rightarrow \infty} Tu_N = B_{p_0, q_0}^{s_0}(\mathbb{R}^n, E_0) - \lim_{N \rightarrow \infty} a(x, D)u_N = a(x, D)u.$$

Also $T = a(x, D)$ auf $\mathbf{V}_{r, \delta}^m(\mathbb{R}^n, E_2)$. □

5.2.2 Definition von $\widetilde{a(x, D)}$ für Symbole in $C_*^r S_{1,0}^{m,2\rho}(\mathbb{R}^n, E_1)$

Nun stellt sich die Frage, wie man einen Pseudodifferentialoperator bezüglich eines beliebigen Symbols a in $C_*^r S_{1,0}^{m,2\rho}(\mathbb{R}^n, E_1)$ definieren könnte. Unter den Voraussetzungen des Satzes 5.1.1 wissen wir schon (siehe auch Korollar 5.1.1), dass eine reelle Folge $(c_j)_{j \in \mathbb{Z}^n}$ in $l^1(\mathbb{Z}^n)$ und eine Folge der elementaren Symbole $(a_j)_{j \in \mathbb{Z}^n}$ in $C_*^r S_{1,\delta}^{m,\rho}(\mathbb{R}^n, E)$ existieren, so dass

$$a(x, \xi) = \sum_{j \in \mathbb{Z}^n} c_j a_j(x, \xi) \quad f.f.a. \ x \in \mathbb{R}^n \text{ und alle } \xi \in \mathbb{R}^n.$$

Wir könnten einen Operator $\widetilde{a(x, D)}$ auf $\mathbf{V}_{r,\delta}^m(\mathbb{R}^n, E)$ definieren durch

$$\widetilde{a(x, D)}u := \sum_{j \in \mathbb{Z}^n} c_j a_j(x, D)u, \quad (5.31)$$

aber ist $\widetilde{a(x, D)}u$ so überhaupt wohldefiniert (d.h. hängt diese Definition nicht von der Wahl der Folgen $(c_j)_{j \in \mathbb{Z}^n}$ und $(a_j)_{j \in \mathbb{Z}^n}$ ab)? Sei $u \in C_b^\infty(\mathbb{R}^n, E_2) \cap B_{p,q}^{m+s}(\mathbb{R}^n, E_2)$ mit $(\delta - 1)r < s < r$ gegeben, dann würde nach Satz 5.2.4 und (5.31)

$$\begin{aligned} \left[\widetilde{a(x, D)}u \right](x) &= \sum_{j \in \mathbb{Z}^n} c_j \left[os - \int \int e^{-i\xi \cdot \eta} a_j(x, \xi) \bullet u(x - \eta) \frac{d(\xi, \eta)}{(2\pi)^n} \right] \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} os - \int \int e^{-i\xi \cdot \eta} \left[\sum_{|j| \leq N} c_j a_j(x, \xi) \bullet u(x - \eta) \right] \frac{d(\xi, \eta)}{(2\pi)^n} \end{aligned} \quad (5.32)$$

gelten und an dieser Stelle möchten wir den Limes unter das Integral ziehen.

Analog zum Beweis des Satzes 5.2.3 werden wir zeigen, dass man in (5.32) den Limes unter das oszillatorische Integral ziehen darf, wenn $\rho > \rho_n$! Daher erhalten wir eine vernünftige Definition der wie in (5.31) vorhergesehenen Abbildung $\widetilde{a(x, D)}$, deren Unabhängigkeit von der Wahl der Folgen $(c_j)_{j \in \mathbb{Z}^n}$ und $(a_j)_{j \in \mathbb{Z}^n}$ im Satz 5.2.6 gezeigt wird.

Definition 5.2.2 (der Abbildung $\widetilde{a(x, D)}$ auf $\mathbf{V}_{r,\delta}^m(\mathbb{R}^n, E_2)$) Seien $m, r, \delta \in \mathbb{R}$ mit $r > 0$, $0 \leq \delta \leq 1$, $\rho \in \mathbb{N}$ mit $\rho > \rho_n$ und $a \in C_*^r S_{1,\delta}^{m,2\rho}(\mathbb{R}^n, E_1)$. Nach Korollar 5.1.1 existiert eine reelle Folge $(c_j)_{j \in \mathbb{Z}^n}$ in $l^1(\mathbb{Z}^n)$ und eine Folge der elementaren Symbole $(a_j)_{j \in \mathbb{Z}^n}$ in $C_*^r S_{1,\delta}^{m,\rho}(\mathbb{R}^n, E_1)$, so dass

$$a(x, \xi) = \sum_{j \in \mathbb{Z}^n} c_j a_j(x, \xi) \quad f.f.a. \ x \in \mathbb{R}^n \text{ und alle } \xi \in \mathbb{R}^n.$$

Damit definiert man die Abbildung $\widetilde{a(x, D)} : \mathbf{V}_{r,\delta}^m(\mathbb{R}^n, E_2) \longrightarrow \mathbf{V}_{r,\delta}^0(\mathbb{R}^n, E_0)$ durch

$$\widetilde{a(x, D)}u := \sum_{j \in \mathbb{Z}^n} c_j a_j(x, D)u \quad \text{für alle } u \in \mathbf{V}_{r,\delta}^m(\mathbb{R}^n, E_2). \quad (5.33)$$

Aus Korollar 5.1.1, (5.27) und Satz 5.2.2 folgt sofort:

Satz 5.2.5 *Seien die Voraussetzungen wie in der Definition 5.2.2. Dann gilt*
 $\widetilde{a(x, D)} \Big|_{B_{p,q}^{s+m}(\mathbb{R}^n, E_2)} \in \mathcal{L}(B_{p,q}^{s+m}(\mathbb{R}^n, E_2), B_{p,q}^s(\mathbb{R}^n, E_0))$ mit

$$\left\| \widetilde{a(x, D)} \Big|_{B_{p,q}^{s+m}(\mathbb{R}^n, E_2)} u \right\|_{B_{p,q}^s(\mathbb{R}^n, E_0)} \leq c \|a\|_{\delta, E_1}^{(m, 2\rho)} \|u\|_{B_{p,q}^{s+m}(\mathbb{R}^n, E_2)}$$

für alle $u \in B_{p,q}^{s+m}(\mathbb{R}^n, E_2)$, $p, q \in [1, \infty]$ und $s \in \mathbb{R}$ mit $(\delta - 1)r < s < r$, wobei $\|a\|_{\delta, E_1}^{(m, 2\rho)} = \max \left\{ \|a\|_{S_{1,0}^{m, 2\rho}[L_\infty(\mathbb{R}^n, E_1)]}, \|a\|_{S_{1,0}^{m+r\delta, 2\rho}[C_*^r(\mathbb{R}^n, E_1)]} \right\}$.

Satz 5.2.6 *Seien die Voraussetzungen wie in der Definition 5.2.2. Dann gelten:*

a)

$$\left[\widetilde{a(x, D)} u \right](x) = os - \int \int e^{i\xi \cdot \eta} a(x, \xi) \bullet u(x - \eta) \frac{d(\xi, \eta)}{(2\pi)^n}$$

für alle $u \in C_b^\infty(\mathbb{R}^n, E_2) \cap B_{p,q}^{s+m}(\mathbb{R}^n, E_2)$, $p, q \in [1, \infty]$ und $s \in \mathbb{R}$ mit $(\delta - 1)r < s < r$.

b) Die in der Definition 5.2.2 gegebene Abbildung $\widetilde{a(x, D)}$ hängt nicht von der Wahl der Folgen $(c_j)_{j \in \mathbb{Z}^n}$ und $(a_j)_{j \in \mathbb{Z}^n}$ ab.

Beweis. Analog zum Beweis des Satzes 5.2.3.

Beweis von a): Seien $p, q \in [1, \infty]$, $s \in \mathbb{R}$ mit $(\delta - 1)r < s < r$, $u \in C_b^\infty(\mathbb{R}^n, E_2) \cap B_{p,q}^{s+m}(\mathbb{R}^n, E_2)$, $x \in \mathbb{R}^n$ (fest),

$$b_N(\xi, \eta) := \sum_{|j| \leq N} c_j a_j(x, \xi) \bullet u(x - \eta), \quad \text{für } N \in \mathbb{N} \text{ und}$$

$$b_0(\xi, \eta) := a(x, \xi) \bullet u(x - \eta) \quad \text{für alle } (\xi, \eta) \in \mathbb{R}^{2n}.$$

Dann gelten:

i) $(b_N)_{N \in \mathbb{N}_0} \subset \mathcal{A}_{0,0}^{(m, \rho, \infty)}(\mathbb{R}_\xi^n \times \mathbb{R}_\eta^n, E_0)$ beschränkt, das heißt es gibt für jedes $l \in \mathbb{N}_0$ ein $C_{\rho, l} > 0$, so dass $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{N}_0^n$ mit $|\alpha| \leq \rho$, $|\beta| \leq l$:

$$\left\| \partial_\xi^\alpha \partial_\eta^\beta b_N(\xi, \eta) \right\|_{E_0} \leq C_{\rho, l} \langle \xi \rangle^m \quad \forall (\xi, \eta) \in \mathbb{R}^{2n} \text{ und alle } N \in \mathbb{N}_0.$$

ii) $b_N(\xi, \eta) \xrightarrow{N \rightarrow \infty} b_0(\xi, \eta)$ gleichmäßig auf allen kompakten Teilmengen von $\mathbb{R}^{2n}$.

Beweis von i): Aus $a \in S_{1,0}^{m,2\rho}(\mathbb{R}_\xi^n, L_\infty(\mathbb{R}_x^n, E_1))$ und $u \in C_b^\infty(\mathbb{R}^n, E_2)$ folgt $b_0 \in \mathcal{A}_{0,0}^{(m,\rho,\infty)}(\mathbb{R}_\xi^n \times \mathbb{R}_\eta^n, E_0)$ und nach Korollar 5.1.1 gilt $b_N \in \mathcal{A}_{0,0}^{(m,\rho,\infty)}(\mathbb{R}_\xi^n \times \mathbb{R}_\eta^n, E_0)$ für alle $N \in \mathbb{N}$.

Beweis von ii): Sei $\epsilon > 0$. Da $(c_j)_{j \in \mathbb{Z}^n}$ in $l^1(\mathbb{Z}^n)$ ist, gibt es ein $\tilde{N} \in \mathbb{N}$, so dass

$$\sum_{N \leq |j| \leq L} c_j < \epsilon \quad \text{für alle } L \geq N \geq \tilde{N}.$$

Daraus folgt für alle $N \geq \tilde{N}$, $K \subset \mathbb{R}^{2n}$ kompakt und alle $(\xi, \eta) \in \mathbb{R}^{2n}$:

$$\begin{aligned} \|b_N(\xi, \eta) - b_0(\xi, \eta)\|_{E_0} &= \lim_{\substack{L \rightarrow \infty \\ L \geq N \geq \tilde{N}}} \|b_N(\xi, \eta) - b_L(\xi, \eta)\|_{E_0} \\ &\leq \lim_{\substack{L \rightarrow \infty \\ L \geq N \geq \tilde{N}}} \sum_{N \leq |j| \leq L} c_j \|a_j(x, \xi) \bullet u(x - \eta)\|_{E_0} \\ &\leq c_K \|a\|_{S_{1,0}^{m,2\rho}[L_\infty(\mathbb{R}^n, E_1)]} \|u\|_{C_b^\infty(\mathbb{R}^n, E_2)} \epsilon \end{aligned}$$

wegen des Korollars 5.1.1. Dabei ist $\tilde{c}_K := \max_{(\xi, \eta) \in K} \langle \xi \rangle^{|m|}$. Somit ist ii) bewiesen.

Aufgrund der obigen Behauptung darf man den Limes unter das oszillatorische Integral ziehen (siehe Satz 1.3.9). Daraus und zusammen mit (5.32) folgt a), denn

$$\begin{aligned} \left[\widetilde{a(x, D)u} \right](x) &= \lim_{N \rightarrow \infty} os - \int \int e^{-i\xi \cdot \eta} \left[\sum_{|j| \leq N} c_j a_j(x, \xi) \bullet u(x - \eta) \right] \frac{d(\xi, \eta)}{(2\pi)^n} \\ &= os - \int \int e^{i\xi \cdot \eta} a(x, \xi) \bullet u(x - \eta) \frac{d(\xi, \eta)}{(2\pi)^n} \end{aligned}$$

für alle $u \in C_b^\infty(\mathbb{R}_x^n, E_2) \cap B_{p,q}^{s+m}(\mathbb{R}^n, E_2)$ und für fast alle $x \in \mathbb{R}^n$. Dabei ist $s \in \mathbb{R}$ mit $(\delta - 1)r < s < r$.

Beweis von b): Sei $s \in \mathbb{R}$ mit $(\delta - 1)r < s < r$. Zunächst betrachten wir $p \in [1, \infty]$ und $q \in [1, \infty)$. Dann

$$C_b^\infty(\mathbb{R}^n, E_2) \cap B_{p,q}^{s+m}(\mathbb{R}^n, E_2) \xrightarrow{d} B_{p,q}^{s+m}(\mathbb{R}^n, E_2).$$

Darüber hinaus sieht man nach a), dass die Restriktion der stetigen linearen Abbildung $\left. \widetilde{a(x, D)} \right|_{B_{p,q}^{s+m}(\mathbb{R}^n, E_2)} : B_{p,q}^{s+m}(\mathbb{R}^n, E_2) \longrightarrow B_{p,q}^s(\mathbb{R}^n, E_0)$ auf $C_b^\infty(\mathbb{R}^n, E_2) \cap B_{p,q}^{s+m}(\mathbb{R}^n, E_2)$ nicht von der Wahl der Folgen $(c_j)_{j \in \mathbb{Z}^n}$ und $(a_j)_{j \in \mathbb{Z}^n}$ abhängt. Deshalb hängt die eindeutige und stetige Fortsetzung von $\left. \widetilde{a(x, D)} \right|_{C_b^\infty(\mathbb{R}^n, E_2) \cap B_{p,q}^{s+m}(\mathbb{R}^n, E_2)}$ auf $B_{p,q}^{s+m}(\mathbb{R}^n, E_2)$, die mit $\left. \widetilde{a(x, D)} \right|_{B_{p,q}^{s+m}(\mathbb{R}^n, E_2)}$ zusammenfällt, nicht von der Wahl dieser Folgen ab.

Nun sei $u \in \mathbf{V}_{r,\delta}^m(\mathbb{R}^n, E_2)$ beliebig. Dann existierten $s \in \mathbb{R}$ mit $(\delta - 1)r < s < r$, $p \in [1, \infty]$ und $q \in [1, \infty)$, so dass $u \in B_{p,q}^{s+m}(\mathbb{R}^n, E_2)$. Deshalb hängt $\left. \widetilde{a(x, D)u} \right|_{B_{p,q}^{s+m}(\mathbb{R}^n, E_2)} = \left. \widetilde{a(x, D)} \right|_{B_{p,q}^{s+m}(\mathbb{R}^n, E_2)} u$ nicht von der Wahl der Folgen $(c_j)_{j \in \mathbb{Z}^n}$ und $(a_j)_{j \in \mathbb{Z}^n}$ ab. $\square$

5.3 Eigenschaften der Abbildung $\widetilde{a(x, D)}$

Gezeigt wird jetzt der Hauptsatz dieses Kapitels.

Satz 5.3.1 Seien $m, r, \delta \in \mathbb{R}$ mit $r > 0$, $0 \leq \delta \leq 1$, $\rho \in \mathbb{N}$ mit $\rho > \rho_n$ und $a \in C_*^r S_{1,\delta}^{m,2\rho}(\mathbb{R}^n, E_1)$.

Dann erfüllt die in der Definition 5.2.2 definierte Abbildung $\widetilde{a(x, D)}$ Folgendes:

$$a) \quad \widetilde{a(x, D)} \Big|_{B_{p,q}^{s+m}(\mathbb{R}^n, E_2)} \in \mathcal{L}(B_{p,q}^{s+m}(\mathbb{R}^n, E_2), B_{p,q}^s(\mathbb{R}^n, E_0)) \text{ mit}$$

$$\left\| \widetilde{a(x, D)} u \right\|_{B_{p,q}^s(\mathbb{R}^n, E_0)} \leq c \|a\|_{\delta, E_1}^{(m, 2\rho)} \|u\|_{B_{p,q}^{s+m}(\mathbb{R}^n, E_2)} \quad \text{für alle } u \in B_{p,q}^{s+m}(\mathbb{R}^n, E_2),$$

$p, q \in [1, \infty]$ und $s \in \mathbb{R}$ mit $(\delta - 1)r < s < r$, wobei

$$\|a\|_{\delta, E_1}^{(m, 2\rho)} = \max \left\{ \|a\|_{S_{1,0}^{m,2\rho}(\mathbb{R}^n, L_\infty(\mathbb{R}^n, E_1))}, \|a\|_{S_{1,0}^{m+r\delta, 2\rho}(\mathbb{R}^n, C_*^r(\mathbb{R}^n, E_1))} \right\}.$$

b)

$$\left[\widetilde{a(x, D)} \right] u(x) = os - \int \int e^{i\xi \cdot \eta} a(x, \xi) \bullet u(x - \eta) \frac{d(\xi, \eta)}{(2\pi)^n}$$

für alle $u \in C_b^\infty(\mathbb{R}^n, E_2) \cap B_{p,q}^{s+m}(\mathbb{R}^n, E_2)$, $p, q \in [1, \infty]$ und $s \in \mathbb{R}$ mit $(\delta - 1)r < s < r$.

Beweis. Die Aussage a) folgt aus dem Satz 5.2.5 und b) aus dem Satz 5.2.6. $\square$

Bemerkung 5.3.1 Seien die Voraussetzungen wie im Satz 5.3.1 gegeben. Ist a auch ein elementares Symbol, so gilt

$$\widetilde{a(x, D)} = a(x, D) \quad \text{auf } \mathbf{V}_{r,\delta}^m(\mathbb{R}^n, E_2).$$

Beweis. Dies folgt aus den Sätzen 5.2.4 und 5.3.1. $\square$

Korollar 5.3.1 Seien die Voraussetzungen von Satz 5.3.1 erfüllt. Ist $\delta = 0$ (also $-r < s < r$), so gilt

$$\left\| \widetilde{a(x, D)} u \right\|_{B_{p,q}^s(\mathbb{R}^n, E_0)} \leq c \|a\|_{S_{1,0}^{m,2\rho}(\mathbb{R}^n, C_*^r(\mathbb{R}^n, E_1))} \|u\|_{B_{p,q}^{s+m}(\mathbb{R}^n, E_2)}$$

für alle $u \in B_{p,q}^{s+m}(\mathbb{R}^n, E_2)$, das heißt

$$\left[a \longmapsto \widetilde{a(x, D)} \right] \in \mathcal{L}\left(C_*^r S_{1,0}^{m,2\rho}(\mathbb{R}^n, C_*^r(\mathbb{R}^n, E_1)), \mathcal{L}(B_{p,q}^{s+m}(\mathbb{R}^n, E_2), B_{p,q}^s(\mathbb{R}^n, E_0))\right)$$

für alle $p, q \in [1, \infty]$ und $|s| < r$. Dabei ist $\|a\|_{S_{1,0}^{m,2\rho}(\mathbb{R}^n, C_*^r(\mathbb{R}^n, E_1))} := \|a\|_{\delta, E_1}^{(m, 2\rho)}$.

Beweis. Weil $C_*^r(\mathbb{R}^n, E_1) \hookrightarrow L_\infty(\mathbb{R}^n, E_1)$ für $r > 0$ gilt, ist dann

$$\|a\|_{S_{1,0}^{m,2\rho}(\mathbb{R}^n, L_\infty(\mathbb{R}^n, E_1))} \leq c_r \|a\|_{S_{1,0}^{m,2\rho}(\mathbb{R}^n, C_*^r(\mathbb{R}^n, E_1))}.$$

Dann folgt die Behauptung aus dem Satz 5.3.1 a). $\square$

Bemerkung 5.3.2 Gezeigt wird mit dem letzten Korollar, dass der Satz 5.3.1 eine Fortsetzung des Theorems 2.3.1 in [Ki,03] ist, wenn $1 \leq p \leq \infty$ und $1 \leq q < \infty$. Dafür beachte, dass der in [Ki,03] definierte Operator $a(x, D)$ mit dem Integral im Satz 5.3.1b) auf $C_b^\infty(\mathbb{R}^n, E_1) \cap B_{p,q}^{s+m}(\mathbb{R}^n, E_1)$ übereinstimmt.

Korollar 5.3.2 Seien die Voraussetzungen wie im Satz 5.3.1 gegeben und $\mathcal{B} \in \{b, B, \dot{B} \text{ mit } 1 \leq p < \infty\}$. Dann gilt $\widetilde{a(x, D)}|_{B_{p,q}^{s+m}(\mathbb{R}^n, E_2)} \in \mathcal{L}(B_{p,q}^{s+m}(\mathbb{R}^n, E_2), \mathcal{B}_{p,q}^s(\mathbb{R}^n, E_0))$ mit

$$\left\| \widetilde{a(x, D)}|_{B_{p,q}^{s+m}(\mathbb{R}^n, E_2)} u \right\|_{\mathcal{B}_{p,q}^s(\mathbb{R}^n, E_0)} \leq c \|a\|_{\delta, E_1}^{(m, 2\rho)} \|u\|_{B_{p,q}^{s+m}(\mathbb{R}^n, E_2)} \quad \text{für alle } u \in B_{p,q}^{s+m}(\mathbb{R}^n, E_2), \quad (5.34)$$

$p, q \in [1, \infty]$ und $s \in \mathbb{R}$ mit $(\delta - 1)r < s < r$.

Beweis. Der Beweis ist analog zum Beweis des Korollars 2.3.1 und wird in drei Fällen gezeigt. Dafür beachte, dass $B_{p,q}^s, \dot{B}_{p,q}^s$ und $b_{p,q}^s$ Banachräume sind und $\|\cdot\|_{B_{p,q}^s} = \|\cdot\|_{\dot{B}_{p,q}^s} = \|\cdot\|_{b_{p,q}^s}$.

1. Der Fall $\mathcal{B} = B$ ist im Satz 5.3.1 enthalten.
2. Der Fall $\mathcal{B} = b$: Seien $1 \leq p \leq \infty, 1 \leq q \leq \infty, s \in \mathbb{R}$ mit $(\delta - 1)r < s < r$ und $u \in b_{p,q}^{s+m}(\mathbb{R}^n, E_2)$. Für $\epsilon > 0$ mit $s + \epsilon < r$ gibt es nach Satz 1.1.2d) eine Folge $(u_l)_{l \in \mathbb{N}} \subset B_{p,q}^{s+m+\epsilon}(\mathbb{R}^n, E_2)$ mit $u_l \rightarrow u$ in $B_{p,q}^{s+m}(\mathbb{R}^n, E_2)$. Somit erhält man nach dem ersten Fall, dass

$$\widetilde{a(x, D)}u_l \xrightarrow{l \rightarrow \infty} \widetilde{a(x, D)}u \text{ in } B_{p,q}^s(\mathbb{R}^n, E_0).$$

Es fehlt nur zu zeigen, dass $\widetilde{a(x, D)}u_l \in B_{p,q}^{s+\epsilon}(\mathbb{R}^n, E_0) (\hookrightarrow b_{p,q}^s(\mathbb{R}^n, E_0))$ für alle $l \in \mathbb{N}$. In der Tat ist $\widetilde{a(x, D)}u_l \in B_{p,q}^{s+\epsilon}(\mathbb{R}^n, E_0)$, da $a(x, D) \in \mathcal{L}(B_{p,q}^{s+m+\epsilon}(\mathbb{R}^n, E_2), B_{p,q}^{s+\epsilon}(\mathbb{R}^n, E_0))$.

3. Der Fall $\mathcal{B} = \dot{B}$: Sei $s \in \mathbb{R}$ mit $(\delta - 1)r < s < r$.
 - a) Sind $1 \leq p, q < \infty$, so ist $\dot{B}_{p,q}^s = B_{p,q}^s$. Dann wendet man den ersten Fall an, um (5.34) zu erhalten.
 - b) Sind $1 \leq p < \infty$ und $q = \infty$, so gilt $\dot{B}_{p,\infty}^s = b_{p,\infty}^s$. Dann ist in diesem Fall der zweite anwendbar.

$\square$

Bemerkung 5.3.3 Seien die Voraussetzungen von Satz 5.3.1 erfüllt mit $r \in \mathbb{R}^+ \setminus \mathbb{N}$. Dann

$$a(\widetilde{x, D}) \Big|_{\dot{B}_{\infty, q}^{s+m}(\mathbb{R}^n, E_2)} \in \mathcal{L} \left(\dot{B}_{\infty, q}^{s+m}(\mathbb{R}^n, E_2), \dot{B}_{\infty, q}^s(\mathbb{R}^n, E_0) \right) \text{ mit}$$

$$\left\| a(\widetilde{x, D}) \Big|_{\dot{B}_{\infty, q}^{s+m}(\mathbb{R}^n, E_2)} \right\|_{\dot{B}_{\infty, q}^s(\mathbb{R}^n, E_0)} \leq c \|a\|_{\delta, E_1}^{(m, 2\rho)} \|u\|_{\dot{B}_{\infty, q}^s(\mathbb{R}^n, E_2)}$$

für alle $u \in \dot{B}_{\infty, q}^{s+m}(\mathbb{R}^n, E_2)$, $q \in [1, \infty]$ und $s \in \mathbb{R}$ mit $(\delta - 1)r < s < r$.

Beweis. Seien $1 \leq q \leq \infty$ und $u \in \dot{B}_{\infty, q}^{s+m}(\mathbb{R}^n, E_2)$, dann existiert eine Folge $(u_l)_{l \in \mathbb{N}}$ in $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n, E_2)$, so dass $u_l \rightarrow u$ in $\dot{B}_{\infty, q}^{s+m}(\mathbb{R}^n, E_2)$. Weil $a(\widetilde{x, D}) : \dot{B}_{\infty, q}^{s+m}(\mathbb{R}^n, E_2) \rightarrow \dot{B}_{\infty, q}^s(\mathbb{R}^n, E_0)$ stetig ist, gilt dann

$$a(\widetilde{x, D})u_l \xrightarrow{l \rightarrow \infty} a(\widetilde{x, D})u \text{ in } \dot{B}_{\infty, q}^s(\mathbb{R}^n, E_0).$$

Es bleibt nur zu zeigen, dass

$$\left(a(\widetilde{x, D})u_l \right)_{l \in \mathbb{N}} \subset \dot{B}_{\infty, q}^s(\mathbb{R}^n, E_0). \quad (5.35)$$

Nach Bemerkung 1.1.2b) ist $C_*^r(\mathbb{R}^n, E) \doteq C_b^r(\mathbb{R}^n, E)$. Nach Satz 5.3.1b) und $u_l \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n, E_2)$ zeigt man analog zum Beweis des Satzes 2.2.1, dass

$$a(\widetilde{x, D})u_l \in C_0^r(\mathbb{R}^n, E) \quad \forall l \in \mathbb{N}.$$

Daraus folgt zusammen mit dem Satz 1.1.2 b) die Behauptung (5.35). Somit ist die Bemerkung bewiesen. $\square$

Wir stellen schließlich die Stetigkeit von $a(\widetilde{x, D})$ auf den Funktionenräumen $B \cup C^l(\mathbb{R}^n, E)$, $C_0^l(\mathbb{R}^n, E)$, $C_b^l(\mathbb{R}^n, E)$ und $W_p^l(\mathbb{R}^n, E)$ für $1 \leq p \leq \infty$ und ein geeignetes $l \in \mathbb{N}$ fest.

Korollar 5.3.3 Seien die Voraussetzungen wie im Satz 5.3.1 gegeben. Ferner seien $k \in \mathbb{N}_0$ mit $k < r$ und $\varepsilon > 0$, so dass $l := m + k + \varepsilon \in \mathbb{N}_0$, und $\mathfrak{F}^k \in \{B \cup C^k, C_0^k, C_b^k, W_p^k; 1 \leq p \leq \infty\}$. Dann gilt

$$a(\widetilde{x, D}) \in \mathcal{L} \left(\mathfrak{F}^l(\mathbb{R}^n, E_2), \mathfrak{F}^k(\mathbb{R}^n, E_0) \right) \text{ mit}$$

$$\left\| a(\widetilde{x, D})u \right\|_{\mathfrak{F}^k(\mathbb{R}^n, E_0)} \leq c \|a\|_{\delta, E_1}^{(m, 2\rho)} \|u\|_{\mathfrak{F}^l(\mathbb{R}^n, E_2)} \quad \text{für alle } u \in \mathfrak{F}^l(\mathbb{R}^n, E_2).$$

Beweis. Zunächst zeigen wir den Fall $\mathfrak{F}^k = W_p^k$ für $k \in \mathbb{N}_0$ mit $k < r$, $1 \leq p \leq \infty$. Da $l > m + k$, erhält man nach (1.21) und (1.19):

$$B_{p,1}^k(\mathbb{R}^n, E) \hookrightarrow W_p^k(\mathbb{R}^n, E) \quad \text{und} \quad W_p^l(\mathbb{R}^n, E) \hookrightarrow B_{p,\infty}^l(\mathbb{R}^n, E) \hookrightarrow B_{p,1}^{k+m}(\mathbb{R}^n, E). \quad (5.36)$$

Dies hat zur Folge, dass $\widetilde{a(x, D)}$ auf $W_p^l(\mathbb{R}^n, E_2)$ wohldefiniert ist und für alle $u \in W_p^l(\mathbb{R}^n, E_2)$ gilt:

$$\begin{aligned}
 \left\| \widetilde{a(x, D)}u \right\|_{W_p^k(\mathbb{R}^n, E_0)} &= \left\| \widetilde{a(x, D)}|_{B_{p,1}^{k+m}(\mathbb{R}^n, E_2)} u \right\|_{W_p^k(\mathbb{R}^n, E_0)} \\
 &\stackrel{(5.36)}{\leq} c_1 \left\| \widetilde{a(x, D)}|_{B_{p,1}^{k+m}(\mathbb{R}^n, E_2)} u \right\|_{B_{p,1}^k(\mathbb{R}^n, E_0)} \\
 &\leq \tilde{c} \|a\|_{\delta, E_1}^{(m, 2\rho)} \|u\|_{B_{p,1}^{k+m}(\mathbb{R}^n, E_2)} \quad (\text{wegen des Korollars 5.3.2}) \\
 &\stackrel{(5.36)}{\leq} C \|a\|_{\delta, E_1}^{(m, 2\rho)} \|u\|_{W_p^l(\mathbb{R}^n, E_2)}.
 \end{aligned}$$

Somit ist $\widetilde{a(x, D)} \in \mathcal{L}(W_p^l(\mathbb{R}^n, E_2), W_p^k(\mathbb{R}^n, E_0))$ für alle $1 \leq p \leq \infty$ und

$$\left\| \widetilde{a(x, D)}u \right\|_{W_p^k(\mathbb{R}^n, E_0)} \leq C \|a\|_{\delta, E_1}^{(m, 2\rho)} \|u\|_{W_p^l(\mathbb{R}^n, E_2)} \quad \text{für alle } u \in W_p^l(\mathbb{R}^n, E_2). \quad (5.37)$$

Nun sei $\mathfrak{F}^k = B \cup C^k$, C_0^k , oder C_b^k für $k \in \mathbb{N}_0$ mit $k < r$. Dann erhält man für alle $u \in \mathfrak{F}^l(\mathbb{R}^n, E_2)$ nach der Definition der Normen $\|\cdot\|_{\mathfrak{F}^k(\mathbb{R}^n, E)}$ und $\|\cdot\|_{W_\infty^k(\mathbb{R}^n, E)}$, nach (5.37) und nach $\mathfrak{F}^l(\mathbb{R}^n, E) \hookrightarrow W_\infty^l(\mathbb{R}^n, E)$, dass

$$\begin{aligned}
 \left\| \widetilde{a(x, D)}u \right\|_{\mathfrak{F}^k(\mathbb{R}^n, E_0)} &= \left\| \widetilde{a(x, D)}|_{W_\infty^l(\mathbb{R}^n, E_2)} u \right\|_{\mathfrak{F}^k(\mathbb{R}^n, E_0)} \\
 &= \left\| \widetilde{a(x, D)}|_{W_\infty^l(\mathbb{R}^n, E_2)} u \right\|_{W_\infty^k(\mathbb{R}^n, E_0)} \\
 &\stackrel{(5.37)}{\leq} c \|a\|_{\delta, E_1}^{(m, 2\rho)} \|u\|_{W_\infty^l(\mathbb{R}^n, E_2)} \\
 &= c \|a\|_{\delta, E_1}^{(m, 2\rho)} \|u\|_{\mathfrak{F}^l(\mathbb{R}^n, E_2)}.
 \end{aligned}$$

Somit ist das Korollar bewiesen. □

Literaturverzeichnis

- [Acq-Te,85] Acquistapace, P. und Terreni, B., On the abstract non-autonomous Cauchy problem in the case constant domains, *Ann. Mat. Pura Appl.*, (4) 140 (1985), 1-55.
- [Acq-Te,86] Acquistapace, P. und Terreni, B., Linear parabolic equations in Banach spaces with variable domains but constant interpolation spaces, *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa*, Ser. IV, 13 (1986), 75-107.
- [Acq-Te,87] Acquistapace, P. und Terreni, B., A Unified Approach to Abstract Linear Non-autonomous Parabolic Equations. *Rend. Sem. Mat. Univ. Padova*, 78 (1987), 47-107.
- [Am,95] Amann, H., *Linear and Quasilinear Parabolic Problems*, Volumen I, Birkhäuser Verlag, 1995.
- [Am,97] Amann, H., Operator-Valued Fourier Multipliers, Vector-Valued Besov Spaces, and Applications, *Math. Nachr.* 186 (1997), 5-56.
- [Am,00] Amann, H., Coagulation-Fragmentation Processes, *Arch. Rat. Mech. Anal.* 151 (2000), 339-366.
- [Am,01] Amann, H., Elliptic operators with infinite dimensional state spaces, *J. Evo. Equ.* 1 (2001), 143-188.
- [Am,03] Amann, H., *Vector-Valued Distributions and Fourier Multipliers*, Zürich 2003, Download von <http://www.math.unizh.ch/amann/files/distributions.pdf>, am 15. November 2005.
- [A-B-H-N, 01] Arendt, W., Batty, Ch., Hieber, M., Neubrander, F., *Vector-valued Laplace transforms and Cauchy Problems*, Monographs in Mathematik, Birkhäuser-Verlag, Basel-Boston-Berlin, 2001.
- [Ar,04] Arendt, W., Fourier multipliers for Hölder continuous functions and maximal regularity, *Stud. Math.* 160 (1), 2004.

- [B,07] Barraza Martínez, B., Pseudodifferentialoperatoren mit nicht regulären Symbolen auf vektorwertigen Besovräumen, Preprint Reihe des Fachbereichs Mathematik Nr. 5, Johannes Gutenberg-Universität, 2007.
- [B,08-I] Barraza Martínez, B., Erzeugung der analytischen Halbgruppen von parabolischen Pseudodifferentialoperatoren auf vektorwertigen Sobolevräumen, Preprint Reihe des Fachbereichs Mathematik Nr. 1, Johannes Gutenberg-Universität, 2008.
- [B,08-II] Barraza Martínez, B., Pseudodifferentialoperatoren mit nicht regulären Symbolen in der Klasse $C_*^r S_{1,\delta}^{m,\rho}(\mathbb{R}^n, E)$, Preprint Reihe des Fachbereichs Mathematik Nr. 2, Johannes Gutenberg-Universität, 2008.
- [B,08-III] Barraza Martínez, B., Anwendung von parabolischen Pseudodifferentialoperatoren auf Reaktions-Diffusions-Gleichungen, Preprint Reihe des Fachbereichs Mathematik Nr. 3, Johannes Gutenberg-Universität, 2008.
- [Ber-Loef,76] Berg, J. und Löfstrom, J., Interpolation Spaces, Springer, 1976.
- [Bou,82] Bourdaud, G., L^p -Estimates for Certain Non-Regular Pseudo-Differential Operators, Comm. Part. Diff. Eq. 7(9) (1982), p. 1023-1033.
- [Bourg,87] Bourgain, J., Vector-Valued Hausdorff-Young inequalities and applications in Geometric of Functional Analysis (1986/87), (Springer-Verlag, Berlin 1998) 239–249.
- [C-M,78] Coifman, R. et Meyer, Y., Au-delà des opérateurs pseudo-différentiels, Astérisque n^o. 57, Soc. Math. France (1978).
- [De-Kr,06] Denk, R. und Krainer, Kr., $\mathcal{R}$ -Boundedness, Pseudodifferential Operators, and Maximal Regularity for some Classes of Partial Differential Operators, arXiv: math/0607735v1 [math. AP], 2006.
- [Do, 06] Dobrowolski, M., Angewandte Funktionanaalyse, Springer Verlag, Berlin, 2006.
- [Esc-Sei,07] Escher, J. und Seiler, J., Bounded H_∞ -calculus for Pseudodifferential Operators and Applications to the Dirichlet-Neumann Operator for $\mathcal{C}^{1+r}$ -domains, 2007, in Vorbereitung.
- [Gib,78] Gibbons, G., Opérateurs pseudo-différentiels et espaces de Besov, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 286 (1978), 895-897.
- [Gir-We,03] Girardi, M. und Weis, L., Operator-Valued Fourier multiplier Theorems on Besov Spaces, Math. Nachr. 251 (2003), 34-51.

- [H,99] Hieber, M., Operator Valued Fourier Multipliers, Progress in Nolinear Differential Equations and Their Applications, Vol. 35 (1999), Birkhäuser Verlag Basel Zwtzerland.
- [Hoer,60] Hörmander, L., Estimates for Traslation Invariant Operators in L^p Spaces, Acta Math. 104 (1960), 93-140.
- [Hoer,67] Hörmander, L., Pseudo-differential Operators and hypoelliptic equations, Proc. Symposium on singular Integrals, Amer. Math. Soc.10 (1967), 138-183.
- [Hoer,71] Hörmander, L., On the L^2 -continuity of peudo-differential operators, Comm. Pure Appl. Math. 24 (1971), 529-535.
- [Ki,00] Kiehn, Chr., Pseudodifferential Operators on Vector-Valued Besov Spaces, Preprint Reihe des Fachbereichs Mathematik Nr 18.00, Johannes Gutenberg-Universität, 2000.
- [Ki,01] Kiehn, Chr., Analytic semigroups of pseudodifferential Operators on $L_p(\mathbb{R}^n, E)$, Preprint Reihe des Fachbereichs Mathematik Nr 10, Johannes Gutenberg-Universität, 2001.
- [Ki,03] Kiehn, Chr., Analytic semigroups of pseudodifferential Operators on Vector - valued function spaces, Shaker Verlag, 2003.
- [Ku,72] Kumano-go, H., Oscillatory integrals of symbols of pseudo-differential operators and the local solvality Theorem of Nirenberg and Treves, Katada Symp. on Partial Diff. Equations (1972), 166-191.
- [Ku,81] Kumano-go, H., Pseudo-Differential Operators, MIT Press, Cambridge, MA,1981.
- [Ku-Na,78] Kumano-go, H. und Nagase M., Pseudo-Differential Operators with Non-Regular Symbols and Applications, Funkcialaj Ekvacioj 21 (1978), 151-192.
- [L-L-M,98] Lancien, F., Lancien, G. und Le Merdy Ch., A Joint Functional Calculus for Sectorial Operators with Commuting Resolvents, Proc. London Math. Soc. (3) 77 (1998), 387-414.
- [Lu,95] Lunardi, A., Analytic Semigroups and Optimal Regularity in Parabolic Problems, Birkhäuser Verlag, Boston 1995.
- [Mar,87] Marschall, J., Pseudo-Differential Operators with Nonregular Symbols of the Class S_{pd}^m , Comm. Part. Diff. Eq., 12(8) (1987), 921-965.
- [Mar,88] Marschall, J., Pseudo-Differential Operators with Coefficients in Sobolev Spaces, Trans. Amer. Math. Soc., Vol. 307, N₀. 1. (1988), 335-361.

- [Mar,92] Marschall, J., Parametrices for Nonregular Elliptic Pseudodifferential Operators, Math. Nachr., 159 (1992), 175-188.
- [Mar,96] Marschall, J., Nonregular Pseudo-Differential Operators, Func. Ana. ist Appl. 15 (1996), 109-148.
- [Na,77] Nagase, M., The L^p -Boundedness of Pseudo-Differential Operators with Non-Regular Symbols, Comm. Part. Diff. Eq. 2(10) (1977), 1045-1061.
- [Mei,72] Meise, R., Darstellung temperierter vektorwertiger Distributionen durch holomorphe Funktionen II, Math. Ann., 198 (1972), 161-178.
- [N-H-H,02] Noll, A., Haller, R. und Hech, H., Michlin's theorem for operator-valued multipliers in n variables, Math. Nachr., 244 (2002), 110-130.
- [P-S,06] Potal, P. und Štrkalj, Ž., Pseudodifferential operators on Bochner spaces and an applications, Math. Z., 253 (2006), 805-819.
- [Pou,65] Poulsen, E., Evolutionsgleichungen in Banachräumen, Math. Zeitschr., 90 (1965), 286-309.
- [Ri,94] Ritter, F., Der Satz von Michlin in einer vektorwertigen Fassung, Diplomarbeit, Johannes-Gutenberg-Universität, 1994.
- [R,73] Rudin, W., Functional Analysis, McGraw-Hill, 1973.
- [Sa,91] Saint-Raymond, X., Elementary Introduction to the Theory of Pseudo-differential Operators, CRC Press, Boca de Raton 1991.
- [Schae,66] Schaefer H., Topological Vector Spaces, The Macmillan Company, New York, 1966.
- [Schm,86] Schmeisser, H., Vector- Valued Sobolev and Besov Spaces, Seminar Analysis of the Karl-Weierstraß-Institute (1986), Band 96.
- [Ta,60] Tabane, H., On the Equations of Evolution in a Banach Spaces, Osaka Math. J. 12 (1960), 363-376.
- [Tay,74] Taylor, M., Pseudo Differential Operators, Springer LNM 416, 1974.
- [Tay,91] Taylor, M., Pseudodifferential Operators and Nonlinear PDE, Birkhäuser Verlag, Boston 1991.
- [Tr,67] Treves, F., Topologic Vector Spaces, Distributions and Kernels, Academic Press, New York-London, 1967.
- [Wal, 94] Walter, W., Einführung in die Theorie der Distributionen, 3. Auflage, Wissenschaftsverlag, Mannheim, Leipzig, Wien, Zürich, 1994.

-
- [We,97] Weis, L., Stability theorems for semi-groups via Multiplier theorems, in: Differential Equations, Asymptotic Analysis, and Mathematics, physics (Potsdam, 1996), (Akademie Verlag, Berlin 1997), 407-411.
- [We,01] Weis, L., Operator-valued Fourier multiplier theorems and maximal L_p -regularity, Math. Ann. 319 (2001), 735-758.
- [Wlo,71] Wloka, J., Funktionalanalysis und Anwendungen, Walter der Gruyter, Berlin 1971.
- [Ya,89] Yagi, A., Parabolic Evolutions in Which the Coefficients are the Generators of Infinitely Differentiable Semigroups, Funkcial. Ekvac. 32 (1989), 107-124.
- [Ya,90] Yagi, A., Parabolic Evolutions in Which the Coefficients are the Generators of Infinitely Differentiable Semigroups, II, Funkcial. Ekvac. 33 (1990), 139-150.