

Die Mammographie als Anwendungsbeispiel der elektrischen Impedanztomographie

Dissertation

zur Erlangung des Grades
“Doktor der Naturwissenschaften”
am Fachbereich Physik
der Johannes Gutenberg-Universität in Mainz

Carsten Lehmann
geboren in Montabaur

Mainz 2000

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	1
2	Mathematische Formulierung des Problems	9
2.1	Vorüberlegungen	9
2.2	Herleitung der grundlegenden Differentialgleichung der EIT	12
2.3	Das Vorwärtsproblem	13
2.4	Das inverse Problem	14
2.5	Variationsformulierung	15
2.6	Lösung der Laplacegleichung für spezielle Fälle	16
2.6.1	Einleitung	16
2.6.2	Lösung des Neumannproblems mit Greensfunktion	17
2.6.3	Das zweidimensionale Potentialproblem	18
2.6.4	Das dreidimensionale Potentialproblem	20
2.6.5	Zusätzliche Randbedingungen	22
2.6.6	Metallische Leiter und Nichtleiter	25
2.7	Einfache Impedanztomographen	34
2.8	Zur Berechtigung einer zweidimensionalen Problembehandlung	40
3	Modellierung der Elektroden	51
3.1	Einleitung	51
3.2	Untersuchung eines einfachen Elektrodenmodells	51
3.3	Das Potential im Außenraum	54
3.4	Korrekturströme	56
3.5	Die Stromverteilung auf einer Elektrode bei nicht verschwindendem Kontaktwiderstand	59
3.6	Ein Fallbeispiel	66
3.6.1	Fallbeschreibung	66
3.6.2	Erforderliche Meßgenauigkeit	67
3.6.3	Auswirkungen des Kontaktwiderstands	69
3.6.4	Effekte der Elektroden	70
3.6.5	Zusammenfassung	71
4	Linearisierung des Vorwärtsproblems	73
4.1	Einleitung	73
4.2	Die Fréchet-Ableitung	76
4.3	Spezielle Fälle	77

4.3.1	Der zweidimensionale Fall	77
4.3.2	Der dreidimensionale Fall	79
4.4	Grenzen der Zulässigkeit einer Linearisierung	79
4.5	Konsequenzen für realistische Meßdaten	80
4.5.1	Versuchsbeschreibung	80
4.5.2	Überlagerung zu trigonometrischen Strommustern	82
4.5.3	Optimale Ströme	86
4.5.4	Fourieranalyse der Potentialänderung	87
5	Rekonstruktionsalgorithmen	93
5.1	Überblick	93
5.2	Vereinbarungen	95
5.3	Rekonstruktion mit einem Versuch	96
5.3.1	Umformulierung des EIT-Problems	96
5.3.2	Anwendung der Methode auf den Einheitskreis	100
5.3.3	Anwendung der Methode auf den Halbraum	102
5.3.4	Was sieht der Elefantenrüsselfisch (<i>Gnathonemus petersii</i>)?	110
5.4	Rekonstruktion mit mehreren Versuchen	125
5.4.1	Formulierung des Rekonstruktionsverfahrens zur Bestimmung von σ	125
5.4.2	Formulierung des Rekonstruktionsverfahrens zur Bestimmung von $\Delta\sqrt{\sigma}$	126
5.4.3	Vergleich der beiden Verfahren	127
5.4.4	Rekonstruktionsergebnisse für realistische Daten	129
5.4.5	Rekonstruktion von $\Delta\sqrt{\sigma}$ im Halbraum	139
6	Zusammenfassung und Ausblick	147
A	Inverse Probleme	151
A.1	Inverse und schlecht gestellte Probleme	151
A.2	Spektraldarstellung kompakter Operatoren	153
A.3	Die Moore-Penrose Lösung	154
A.4	Regularisierung schlecht gestellter Probleme	156
A.5	Die abgeschnittene Singulärwertzerlegung	157
A.6	Die Tikhonov-Phillips Regularisierung	158
A.7	Stabilisierung durch Änderung des Problems	159
B	Variationsformulierung des EIT-Problems	163
B.1	Variationsformulierung	163
B.2	Die Fréchet-Ableitung	165

Kapitel 1

Einleitung

Die medizinische Diagnostik von Erkrankungen in der weiblichen Brust ist von sehr großer Bedeutsamkeit. Dies liegt vor allen Dingen darin begründet, daß das sogenannte Mammakarzinom, ein bösartiger Brustkrebs, die häufigste Krebstodesursache bei der Frau ist.

Die Untersuchung der Brust beginnt mit einer sogenannten Palpation, womit gemeint ist, daß die Brust nach verdächtigen Stellen abgetastet wird. Das Abtasten sollte sich jedoch nicht allein auf die Brust beschränken. Ebenso sollten die Lymphknoten untersucht werden.

Ein weiterer Baustein der Mammadiagnostik ist im Anschluß daran die Durchführung einer sogenannten Mammographie. Hierunter versteht man die Nativaufnahme, d.h. die sogenannte Leeraufnahme ohne Verwendung von Kontrastmitteln, der weiblichen Brust. Heutzutage wird dies durch die Erstellung eines oder zweier Röntgenbilder erzielt. Im zweiten Fall erstellt man Bilder zu zwei senkrecht aufeinander stehenden Strahlengängen, einem sogenannten *mediolateralen* (horizontalen) und einem *craniokaudalen* (vertikalen) Strahlengang.

Die Mammographie wird sehr effektiv durch eine zusätzliche sonographische Untersuchung der Brust ergänzt. Hiermit ist vor allen Dingen die Erkennung von Zysten außerordentlich gut möglich.

Von denen darüber hinaus reichenden Untersuchungsmethoden sollte noch die Magnetresonanztomographie genannt werden, die allerdings, nicht zuletzt wegen der Kostenfrage, eher selten zur Anwendung kommt.

Die medizinische Forschung auf dem Gebiet der Krebserkrankung hat ganz allgemein eine sehr wichtige Erkenntnis gebracht. Die Früherkennung eines Krebses steigert die Chance auf Bekämpfung der Krankheit ganz erheblich. Daher sind im Rahmen der Vorsorge regelmäßige Kontrolluntersuchungen ratsam. Man hat dabei zu beachten, daß die durchschnittliche Tumorverdopplungszeit speziell für das Mammakarzinom bei ca. 3 Monaten liegt, womit Untersuchungen sinnvollerweise in Intervallen von nicht über einem Jahr stattfinden sollten. Gerade wegen der gesundheitlichen Belastung einer Röntgenmammographie wird hiervon jedoch vor allem bei jungen Frauen abgeraten. Daher besteht ein großes Interesse an sogenannten Scanning-Systemen, die in regelmäßigen Vorsorgeuntersuchungen eingesetzt werden können und in der Lage sind, verdächtige Regionen sicher zu orten.

Sowohl unter dem Aspekt dieses Scannings, als auch als Bereicherung und Ergän-

zung der oben erwähnten bewährten Untersuchungsmethoden könnte die *elektrische Impedanztomographie (EIT)* von großem Nutzen sein.

Bei diesem Untersuchungsverfahren möchte man sich zu Nutze machen, daß verschiedenartige Materialien sich im allgemeinen in ihren elektrischen Impedanzen (komplexen elektrischen Widerständen) deutlich unterscheiden. Gelingt es, eine gesamte Widerstands- oder Leitfähigkeitsverteilung in einem Körper zu bestimmen, so gelangt man auf diesem Weg unmittelbar zu dessen Zusammensetzung. Es wird dann möglich, Bilder vom Inneren des Körpers zu erzeugen.

Wie groß die Unterschiede des ohmschen Widerstandes in der medizinischen Anwendung der EIT tatsächlich sind, verdeutlicht die folgende Tabelle:

Gewebeart	spezifischer Widerstand (Ωm)
Knochen	17
Fett	21-28
Lunge	7.3-24
Herzmuskel (longitudinal)	1.6-5.8
Herzmuskel (transversal)	4.2-51
Skelettmuskel (longitudinal)	1.3-1.5
Skelettmuskel (transversal)	18-23
Leber	3.5-5.5
Blut	1.5
Plasma	0.66

Tabelle 1.1

Zur Bestimmung der unbekannten Leitfähigkeitsverteilung sind nur außerhalb des betrachteten Körpers durchgeführte Experimente nötig. Dazu werden an ihm Elektroden angebracht, an denen die Möglichkeit besteht, Strom in den Körper ein- oder abfließen zu lassen. Anschließend wird die resultierende Spannungsverteilung gemessen. Dies kann an den gleichen Elektroden geschehen, es können aber auch extra hierfür vorgesehene weitere Elektroden diese Aufgabe erledigen. Die Auswertung der zu verschiedenen Strom-Konfigurationen gemessenen äußeren Potentialverteilungen führt dann zur Rekonstruktion der gesuchten Verteilung und zur Erstellung eines Bildes.

Eine der Hauptschwierigkeiten in der praktischen Anwendung der EIT beruht auf der Tatsache, daß zur Rekonstruktion der Leitfähigkeitsverteilung eine möglichst gute Kenntnis der Form des Körpers, sowie der Positionen der angebrachten Elektroden notwendig ist. Dies gilt insbesondere dann, wenn das gewünschte Bild hoch aufgelöst sein soll.

In der Mammographie als Anwendungsgebiet der EIT können diese Probleme noch am besten bewältigt werden, da sich der zu untersuchende Körper der Meßapparatur anpassen kann. Doch nicht nur aus diesem Grund stellt die Mammographie ein attraktives Anwendungsgebiet für die EIT dar. Die Früherkennung von Mammakarzinomen, natürlich eines der Hauptziele in der Mammadiagnostik, erscheint durch die Betrachtung der elektrischen Impedanz besonders gut möglich zu sein. Da sich dieses kranke Brustgewebe von gesundem auch dadurch unterscheidet, daß es sehr

viel stärker durchblutet wird, erhöht sich nämlich die elektrische Leitfähigkeit signifikant, wie in obiger Tabelle die Widerstandswerte für Blut und Fett belegen. Weiterhin existieren wichtige Unterschiede zwischen gesundem und krankem Gewebe, die von Veränderungen in den Zellen herrühren. Betroffen sind dabei sowohl Zellmembran als auch Zellwasser. Alles in allem kann man für ein Mammakarzinom eine 20- bis 40-fach geringere elektrische Impedanz erwarten [59]. Dies führt zu einer enorm guten Differenzierung dieses kranken Gewebes von gesundem.

Zwei Vorgehensweisen erscheinen zur Konstruktion eines Tomographen denkbar:

1. Ein zylindrisches Gefäß wird mit einer Flüssigkeit gefüllt, deren Leitfähigkeit der von gesundem Brustgewebe entspricht. In diesen Zylinder wird die zu untersuchende Brust eingetaucht. Messungen können dann am Rand des Zylinders, der dicht mit Elektroden besetzt ist, durchgeführt werden.

Ein großer Vorteil dieser Methode ist die gewählte Symmetrie, die die mathematische Formulierung des EIT-Problems erleichtert. Dies gilt insbesondere für zweidimensionale Untersuchungen mit dem Ziel, kreisförmige Schnittbilder des Brustgewebes zu berechnen. Die im Topf befindliche restliche Flüssigkeit garantiert dabei den optimalen Kontakt zu den Elektroden.

2. Eine andere mögliche Vorgehensweise basiert auf einem aus einer ebenen Platte bestehenden Tomographen. Auf dieser befinden sich zahlreiche Elektroden zur Aufnahme der Meßdaten. Indem man die Platte an die Brust drückt, wird der Rand des zu untersuchenden Körpers eben. Auch dies begünstigt die mathematische Formulierung des Problems.

Ein solches Gerät ist als Scanningsystem besonders gut vorstellbar. Wählt man eine sehr kleine Plattengröße mit z.B. $3 \times 3 \text{ cm}^2$ Flächeninhalt, so kann der Arzt durch wiederholtes Anlegen der Platte an die Brust den jeweiligen Bereich vor der Platte untersuchen.

Aber auch zur Ergänzung unklarer Befunde ist ein Einsatz des Geräts vorstellbar, indem verdächtige Regionen ganz gezielt betrachtet werden.

Zum Stand der Forschung auf dem Gebiet der elektrischen Impedanztomographie

Zum ersten Mal kam 1987 ein elektrischer Impedanz-Tomograph in der Praxis zum Einsatz. Das von Brown und Seagel entwickelte Mark1-System bestand aus einem Gürtel mit 16 Elektroden, der dem Patienten um den Brustkorb gelegt wurde und so Bilder der Herz- und Lungenaktivität lieferte. Die Qualität der Bilder nahm im Laufe der Jahre fortlaufend zu. Neben verbesserten Rekonstruktionsalgorithmen wurden auch die eingesetzten Computer immer leistungstärker. Dies ermöglichte auch die Verwendung einer größeren Anzahl von Elektroden. Heute arbeitet man in Sheffield sowohl mit einem 64-, als auch mit einem (16+32+16)-Elektrodensystem. Bei letzterem benutzt man drei Gürtel, die übereinander am Körper angelegt werden, wobei der mittlere Gürtel 32, die beiden äußeren Gürtel 16 Elektroden tragen. Ebenso wurde es möglich, in nur Bruchteilen von Sekunden einen ganzen Meßzyklus aufzunehmen und eben so schnell im Anschluß ein Bild zu berechnen. Als Rekonstruktionsalgorithmus in zwei aber auch drei Dimensionen verwendet man

hauptsächlich den sogenannten Backprojection-Algorithmus. Das System arbeitet bei unterschiedlichen Frequenzen von 1 KHz bis 1 MHz. Dies ermöglicht es, sowohl Real- als auch Imaginärteil der Leitfähigkeitsverteilung zu betrachten.

Viele Arbeitsgruppen auf der ganzen Welt arbeiten daran, ein ähnliches Gerät zur Überwachung von Herz und Lunge zu entwickeln. Beispielsweise entwickelte eine Gruppe in Moskau um A.V. Korjenesky und V.A. Cherepenin ein Gerät, daß in der Sekunde bereits 12 Bilder liefert.

Das vielleicht weltweit führende Team befindet sich im Rensellar Institut in Troy bei New York. Die bekanntesten Mitarbeiter sind Jonathan Newell, Margaret Cheney, David Isaacson, David G. Gisser und Gary J. Saulnier. Der große Erfolg des von ihnen entwickelten ACT3-Systems (die dritte Version des Adaptive Current Tomography-Systems) beruht vor allem auf der Entdeckung der optimalen Ströme durch David Isaacson. Hierbei werden in einem iterativen Verfahren äußere Stromverteilungen berechnet, die für eine Bestimmung der gesuchten Leitfähigkeitsverteilung besonders gut geeignet sind. Das Gerät liefert in der Sekunde 20 Bilder, ermöglicht also eine fließende Darstellung der Herz- und Lungenaktivität. Neben dieser Überwachungsfunktion bestehen weitere Ziele in der Lokalisierung von Tumoren in der Lunge und der Diagnostizierung einer Lungenembolie.

Das ACT3-System arbeitet bei einer Frequenz von 28.8 KHz. Es werden 32 Elektroden verwendet. Zwei verschiedene Methoden zur Bildberechnung kommen zum Einsatz. Zum einen werden *zwei* unmittelbar hintereinander aufgenommene Meßzyklen miteinander verglichen. Man erhält damit eine bildliche Darstellung der Änderung der Leitfähigkeitsverteilung. Zum anderen wird für *einen* aufgenommenen Meßzyklus im Anschluß die Leitfähigkeitsverteilung bestimmt. Im zweiten Fall werden alle Meßdaten mit den theoretisch erwarteten Meßdaten für eine homogene Leitfähigkeitsverteilung verglichen. Die in dieser theoretischen Vorhersage liegenden Fehler führen allerdings zur Zeit noch zu Bildern geringerer Qualität.

Ein weiteres medizinisches Anwendungsgebiet der EIT bezieht sich auf die bildliche Darstellung von Gehirnfunktionen. Führend ist hier eine Gruppe um David Holder und Adam Gibson in London. Denkbar ist ein Einsatz der EIT auch zur Überwachung von Nierenimplantaten. Der Beginn der Abstoßung läßt sich dabei theoretisch dadurch feststellen, daß wegen einer geringeren Durchblutung der Niere deren elektrische Leitfähigkeit abnimmt. In der praktischen Anwendung funktionierende Geräte kamen jedoch hier noch nicht zum Einsatz.

Schließlich ist natürlich die Früherkennung von Mammakarzinomen als Anwendungsgebiet der EIT von großem Interesse. Hier kam es Anfang diesen Jahres in der Forschung auf dem Gebiet der elektrischen Impedanztomographie insofern zu einem Durchbruch, als das zum ersten Mal ein kommerziell erwerbliches Gerät auf den Markt kam, das in der medizinischen Technik auf EIT-Basis beruht. Der sogenannte *Transscan 2000* ist, wie der Name schon andeutet, ein Scanninggerät zur Erkennung von Erkrankungen in der weiblichen Brust. Dieses von der Firma Siemens vertriebene System wird aktuell in einigen Kliniken getestet. Die grundlegende Idee des Verfahrens und die mit dem Gerät zu erwartenden Resultate in der Erkennung von Tumoren werden in der Arbeit gegen Ende des zweiten Kapitels diskutiert.

Eine Verwendung der EIT ist aber nicht auf die Medizin beschränkt. Von großem Interesse ist auch die Optimierung chemischer Prozesse. Eine große Arbeitsgruppe der University of science and technology in Manchester beschäftigt sich mit der Über-

wachung von Mischungen verschiedener Flüssigkeiten oder Gasen durch ein EIT-System. Damit ist es auch möglich, das Verhältnis von Wasser und Öl in Pipelines zu messen.

Zum Stand der Forschung auf dem Gebiet der Mammographie

Wie bereits in den einleitenden Worten erwähnt, existieren im wesentlichen drei Methoden zur Untersuchung der Brust, die sich gegenseitig ergänzen.

1. Zu Beginn der Untersuchung steht die gründliche Abtastung der Brust und der Lymphknoten. Können hierdurch verdächtige Regionen geortet werden, ist dies unmittelbar eine Indikation für weitere Untersuchungen.
2. Die Röntgenaufnahme der Brust ist wohl die bedeutsamste dieser Untersuchungsmethoden. Bei der Verwendung dieser Technik hat man sich jedoch den damit verbundenen Gesundheitsrisiken für die Patientin bewußt zu sein. Für kontrastreiche Aufnahmen mit hoher Detailerkennung wären Röhrenspannungen von 25 – 35 kV wünschenswert, was allerdings zu einer sogenannten Parenchymdosis von ca. 1 cGy führt. Diese Gesamtstrahlenbelastung für die Brust stellt sich damit als deutlich zu hoch heraus. Man vermutet, daß in diesem Fall durch eine wiederholte Mammographie die Spontaninzidenz des Brustkrebses um 0,8 – 1% erhöht sein könnte. Es ist daher notwendig, einen Kompromiß zwischen vertretbarer Strahlenbelastung und diagnostisch erforderlicher Bildqualität zu finden. Mit der heutzutage verwendeten Technik beträgt die Strahlenbelastung noch ca. 0.07 cGy, was zumindest in Deutschland als unbedenklich angesehen wird.

Die korrekte Interpretation einer Röntgenaufnahme ist nicht immer einfach. Es existieren viele verschiedene Arten der Mammaerkrankung, von denen hier nur einige erwähnt werden sollen.

- Das Fibroadenom ist bei jungen Frauen der häufigste benigne, d.h gutartige Tumor.
- Die Zyste ist ein blasenförmiges Gebilde mit flüssigem Inhalt. Die Unterscheidung der Zyste von einem soliden Tumor ist sicher nur durch die sogenannte Pneumozystographie möglich, bei der man den Zysteninhalt abpunktiert und durch Luft ersetzt, um im Anschluß eine weitere Röntgenaufnahme zu machen.
- Das extrem gefährliche Mammakarzinom kann durch das Röntgenbild vor allem bei älteren Patientinnen meist sicher erkannt werden. Hingegen wird im dichten Drüsenkörper junger Frauen nur jeder zweite getastete Knoten auch im Röntgenbild gesichtet.

Gerade die sehr gute Erkennung der bösartigen Mammakarzinome machen die Röntgenmammographie in der Mammadiagnostik heutzutage unentbehrlich.

3. Die Sonographie ist ein bildgebendes Ultraschallverfahren, das die teilweise Reflexion von hochfrequenten Ultraschallwellen (1-10 MHz) an Grenzflächen

unterschiedlicher Gewebestruktur nutzt. Ein Schallkopf sendet kurze Schallimpulse in den Körper, empfängt die reflektierten Echoimpulse und leitet sie zu einer Bildröhre weiter.

Die Sonographie stellt in der Mammadiagnostik eine Realtime-Scanning Technik dar, die die Röntgenmammographie sehr effektiv ergänzt. Dies gilt vor allem in der Zystendiagnostik, die sonographisch in über 90% der Fälle korrekt gelingt. Die Grenze der Nachweisbarkeit ist dabei mit 2 – 3 mm sehr gering. Weniger gut ist mit ca. 1 cm die Nachweisgrenze für Fibroadenome. Mammakarzinome sind sonographisch in ca. 85% zu diagnostizieren, wobei auch hier die Nachweisgrenze bei ca. 1 cm liegt. Eine weitere Erkrankung, das sogenannte Lipom, wird mit Hilfe der Sonographie sehr gut erkannt, da sie unter der Realtime-Ansicht bei variierender Gewebekompression sehr gut die charakteristische Kompressibilität des Lipoms zeigt.

Generell kann man sagen, daß die Sonographie für tastbare Befunde von über ca. 1 cm sich der Röntgenmammographie sogar als überlegen erweist, allerdings für die Früherkennung von Karzinomen weniger geeignet ist.

Von weiterführenden Untersuchungen, die bei einem unklaren Mammographiebefund notwendig werden, soll hier noch die Magnetresonanztomographie erwähnt werden. Bei dieser Technik macht man sich zu Nutze, daß Atomkerne mit unterschiedlicher Protonen- oder Neutronenanzahl einen Kernspin besitzen. In einem statischen äußeren Magnetfeld kommt es zu einer Aufspaltung der Energieniveaus verschiedener Spinzustände. Übergänge zwischen den einzelnen Niveaus können durch ein weiteres äußeres Hochfrequenzfeld angeregt werden. Die größte Wirkung erzielt man dabei bei Verwendung der sogenannten Larmorfrequenz. Eine örtliche Auflösung erzielt man bei diesem Verfahren, indem man durch eine Inhomogenität der verwendeten Felder die Bedingungen zur Anregung der Kernresonanz von Ort zu Ort unterschiedlich gestaltet.

In der Mammographie verwendet man häufig die Technik einer dynamischen Magnetresonanztomographie. Dabei vergleicht man die Zustände vor und nach Injektion eines Kontrastmittels, das sehr schnell in Karzinomen angereichert wird. Bereits nach Zeiten von durchschnittlich 1 Min treten in den Differenzbildern deutlich die Strukturen des Tumors hervor.

Zu den einzelnen Kapiteln

1. Im Kapitel “Mathematische Formulierung des Problems” wird zunächst die grundlegende elliptische Differentialgleichung des EIT-Problems abgeleitet. Dazu werden die Maxwell’schen Gleichungen in einer quasistatischen Näherung mit dem Ohmschen Gesetz kombiniert. Es folgt die Vorstellung des direkten und des inversen Problems der elektrischen Impedanztomographie. Beim ersten handelt es sich um die Aufgabenstellung, bei bekannter Leitfähigkeitsverteilung σ Meßergebnisse möglichst präzise vorhersagen zu können. Ist dieses direkte Problem oder “Vorwärtsproblem” vollständig verstanden, so kann man sich dem inversen Problem zuwenden, das darin besteht, aus Meßergebnissen auf die Leitfähigkeitsverteilung zurückzuschließen.

Von besonders entscheidender Bedeutung ist ein genaues Verständnis von den im Falle einer homogenen Leitfähigkeit zu erwartenden Meßwerten. Spezielle Fälle dieses Vorwärtsproblems lassen sich häufig noch analytisch behandeln.

Die Betrachtung von nicht- und metallisch leitenden Objekten in einem ansonsten homogen leitenden Medium ist störungstheoretisch sehr gut möglich. Mit den gewonnenen Ergebnissen kann man bereits Funktionsweisen einfacher Impedanztomographen studieren, was gegen Ende des Kapitels auch geschieht. Abschließend wird die Problematik diskutiert, inwieweit eine rein zweidimensionale Betrachtungsweise der EIT zulässig ist. Damit verbunden wird ein spezielles Elektrodenystem, das Guardelektrodenystem und seine Vorteile in einer zweidimensionalen Behandlung der EIT vorgestellt.

2. Das Kapitel “Modellierung der Elektroden” untersucht die Problematik der Stromdichteverteilung auf der Elektrode. Wie experimentell sehr gut bestätigt ist, gehorchen Stromdichte und Potential auf der Elektrode einer “Robin-Randbedingung”. Ein in dieser Gleichung befindlicher Parameter Z beschreibt das physikalische Phänomen des “Kontaktwiderstands”, der beim Übergang des Stroms von der Elektrode zum Körper auftritt.

Numerisch werden die Stromdichteverteilungen für verschiedene Kontaktwiderstände auf einer Elektrode bestimmt. Ebenso wird diskutiert, inwiefern es erlaubt ist, einzelne Elektroden isoliert zu betrachten, d.h. Einflüsse anderer Elektroden zu vernachlässigen.

Abschließend werden alle Ergebnisse noch einmal an einem Fallbeispiel erläutert.

3. Das Kapitel “Linearisierung des Vorwärtsproblems” diskutiert, wie winzige Änderungen in der Leitfähigkeitsverteilung sich in der Lösung des Potentialproblems bemerkbar machen. Übertragen auf die Mammographie soll also herausgefunden werden, wie ein winziger Tumor mit einer anderen elektrischen Leitfähigkeit als der des umgebenden gesunden Gewebes die Potentialmeßwerte beeinflusst. Dies kann jedoch nur näherungsweise bestimmt werden, da dafür die Linearisierung des eigentlichen nichtlinearen Problems erfolgen muß. Im Kapitelabschnitt “Konsequenzen für realistische Meßdaten” wird geprüft, inwieweit eine Linearisierung des Problems in der praktischen Anwendung zulässig ist. Die dazu herangezogenen realistischen Meßdaten stammen von EIT-Versuchen unseres Kollaborationspartners Dr. G. Schuhfried aus Wien.

4. Das Kapitel “Rekonstruktionsalgorithmen” behandelt zunächst Verfahren, die sich auf die Rekonstruktion der Verteilung $\Delta\sqrt{\sigma}$ für eine Leitfähigkeitsverteilung σ beziehen. Ausgangspunkt ist die Formulierung eines Algorithmus, dem die Auswertung eines einzigen Versuchs zugrunde liegt. Damit ist gemeint, daß nur die äußere Potentialverteilung für eine äußere Stromdichte gemessen wird. Die Untersuchung dieses Verfahrens erfolgt am Beispiel des Einheitskreises und des Halbraums.

Ein weiterer Ansatz zur Behandlung des EIT-Problems mit einem Versuch ist aus der Natur kopiert. Der Elefantenrüsselfisch orientiert sich in tiefen Gewässern, indem er um sich ein Wechselstromfeld aufbaut und mit Rezeptoren auf der Haut die resultierende Potentialverteilung bestimmt. Der Abschnitt

“Was sieht der Elefantenrüsselfisch” zeigt daher zunächst “Unterwasserbilder”, wie sie der Fisch wahrnehmen könnte. Im Anschluß wird diskutiert, ob ähnliche Untersuchungsmethoden in der Mammographie eingesetzt werden können.

Im Anschluß hieran werden mehrere Versuche zur Rekonstruktion untersucht. Im Falle des Einheitskreises werden die Rekonstruktionen von $\Delta\sqrt{\sigma}$ und der Leitfähigkeitsverteilung σ selbst für realistische Daten präsentiert. Die Meßergebnisse unseres EIT-Versuchs in Wien beziehen sich dabei auf metallische Störkörper von ca. 2 cm Durchmesser in einem Tomographen von ca. 21 cm Durchmesser. Umgerechnet auf typische Dimensionen in der Mammographie untersucht man damit Störungen einer homogenen Leitfähigkeitsverteilung von ca. 1 cm Durchmesser.

Die Untersuchung des EIT-Problems in drei Dimensionen wird abschließend für den Fall des Halbraums diskutiert. Die Rekonstruktion von $\Delta\sqrt{\sigma}$ bezieht sich dabei auf synthetische Meßdaten.

5. Die beiden Anhänge der Arbeit, “Inverse Probleme”, und “Variationsformulierung des EIT-Problems” liefern in knapper Form die in der Arbeit benötigten mathematischen Hilfsmittel.

Die Theorie der inversen Problem behandelt den mathematischen Formalismus, mit dem beispielsweise in der Computertomographie aus vorgegebenen Meßdaten auf die gesuchte bildgebende Verteilung, wie etwa den Röntgenabsorptionskoeffizienten in der Röntgentomographie oder die elektrische Impedanz in der Impedanztomographie, zurückgeschlossen wird. Dabei kommen Verfahren zur Anwendung, die eine stabile Rekonstruktion ermöglichen. Mit stabil ist in diesem Zusammenhang gemeint, daß kleine Änderungen in den Daten zu kleinen Änderungen der Lösung des inversen Problems führen. Das ist von großer Bedeutung, da in der Praxis Meßfehler, und seien sie auch winzig, unvermeidlich sind.

Letztendlich erreicht man diese Stabilisierung durch zusätzliche, vernünftige Forderungen an die Lösungsfunktion. Eines der meist gebrauchten Verfahren, die Tikhonov-Phillips Regularisierung, wird ebenso vorgestellt, wie ein Stabilisierungsverfahren neueren Datums, die approximative Inverse. Beide Verfahren werden in späteren Kapiteln in der konkreten Anwendung zum Einsatz kommen.

Eine strenge mathematische Formulierung des Vorwärtsproblems gelingt, indem das Problem der Auffindung einer Lösung zu einer elliptischen Differentialgleichung durch ein äquivalentes Variationsproblem ersetzt wird. Der Anhang B der Arbeit bezieht sich auf die Vorlesung “Mathematische Grundlagen der elektrischen Impedanztomographie” von Prof. Dr. M. Hanke-Bourgeois. Einige wichtige Aussagen, die teilweise an verschiedenen Stellen der Arbeit benötigt werden, sind im Anhang B kurz zusammengefaßt dargestellt.

Kapitel 2

Mathematische Formulierung des Problems

2.1 Vorüberlegungen

Die in der elektrischen Impedanztomographie aufgenommenen Meßwerte sind die am Rand des betrachteten Körpers bestimmten Potentialverteilungen zu verschiedenen, möglichst genau bekannten äußeren Stromdichten. Eine Bestimmung der gesuchten Leitfähigkeitsverteilung im Innern des Körpers setzt zunächst ein genaues Verständnis des Vorwärtsproblems der EIT voraus, dessen Lösung ein Vorhersagen der Meßwerte zu einer bekannten Leitfähigkeitsverteilung erlaubt. Dazu ist es im Prinzip notwendig, die vier makroskopischen Maxwellschen Gleichungen

$$\nabla \cdot D = 4\pi\rho, \quad (2.1)$$

$$\nabla \times H - \frac{1}{c} \frac{\partial D}{\partial t} = \frac{4\pi}{c} j, \quad (2.2)$$

$$\nabla \times E + \frac{1}{c} \frac{\partial B}{\partial t} = 0, \quad (2.3)$$

$$\nabla \cdot B = 0 \quad (2.4)$$

für die dielektrische Verschiebung D , das elektrische Feld E , das magnetische Feld H und die magnetische Induktion B zusammen mit dem verallgemeinerten ohmschen Gesetz

$$j = j(E, B) \quad (2.5)$$

zu lösen.

In letzterem kann der Zusammenhang zwischen den Feldern E und B und der Stromdichte j durchaus kompliziert sein und, wie im Fall der Hysterese, von der Vorgeschichte des Materials abhängen. Die Quellen auf der rechten Seite der Maxwellschen Gleichungen, die Stromdichte j und die Ladungsdichte ρ genügen der Kontinuitätsgleichung

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot j = 0. \quad (2.6)$$

Um die mathematische Formulierung des Problems nicht übermäßig zu verkomplizieren, sind einige einschränkende Annahmen zu treffen. Zum einen betreffen diese das untersuchte Medium:

- In dem betrachteten Medium gilt das ohmsche Gesetz in der Form

$$j = \sigma E, \quad (2.7)$$

wobei die Leitfähigkeit σ in obiger Gleichung eine skalare Größe darstellt.

- Das Medium ist isotrop und es gelten die Verknüpfungsrelationen

$$D = \epsilon E, \quad (2.8)$$

$$B = \mu H. \quad (2.9)$$

Hierin ist ϵ die sogenannte elektrische Dielektrizitätskonstante und μ die magnetische Permeabilität.

Die Tatsache, daß σ skalar gewählt wird, stellt dabei je nach Anwendungsgebiet eine starke Vereinfachung der real existierenden Situation dar. Insbesondere für Muskeln in der medizinischen Anwendung der EIT sind radiale und longitudinale Leitfähigkeit stark unterschiedliche Größen, wie Tabelle (1.1) in der Einleitung verdeutlicht.

Weitere Vereinfachungen erreicht man durch Anforderungen an das Experiment:

- Die in der EIT verwendeten Ströme sind Wechselströme. Diese sind so zu wählen, daß eine quasistatische Behandlung des Problems zulässig ist. Dazu muß die Wellenlänge des elektrischen Feldes verglichen mit der maximalen Ausdehnung des Gebietes sehr groß sein. Für medizinische Anwendungen arbeitet man daher zumeist im Bereich zwischen 1 kHz und 1 MHz.

Eine zu kleine Wahl der verwendeten Frequenz ist ebenfalls zu vermeiden, da ansonsten eine elektrische Polarisierung des Mediums zu erwarten ist.

Die Zulässigkeit einer quasistatischen Behandlung läßt sich folgendermaßen begründen [15],[27]:

Für sämtliche Felder F kann man bei harmonischer Zeitabhängigkeit

$$F(x, t) = F(x) e^{i\omega t} \quad (2.10)$$

schreiben.

Bei Beachtung der Verknüpfungsrelationen (2.8),(2.9) erhält man damit aus den Gleichungen (2.2),(2.3), sowie dem ohmschen Gesetz (2.7)

$$\nabla \times H = \left(\frac{i\omega\epsilon}{c} + \frac{4\pi\sigma}{c} \right) E, \quad (2.11)$$

$$\nabla \times E = -\frac{i\omega\mu}{c} H. \quad (2.12)$$

In der praktischen Anwendung der EIT haben die untersuchten Körper eine Ausdehnung l von weniger als 1 m. Damit ist die Bedingungsgleichung für die quasistatische Behandlung

$$\frac{\omega l}{c} \ll 1 \quad (2.13)$$

für den oben angegebenen Frequenzbereich sehr gut erfüllt. Um sicher zu sein, daß eine Vernachlässigung der Zeitableitungen in den Maxwellgleichungen (2.1)-(2.4) möglich ist, sollte man die Diskussion jedoch noch weiterführen.

Dazu schreibt man zunächst die Gleichungen (2.11) und (2.12) in einer Form, in der die Felder dimensionslos sind. Es sei

$$\begin{aligned} E &= [E] \tilde{E}, \\ H &= [H] \tilde{H}, \\ x &= [x] \tilde{x}, \\ \nabla \times &= [x]^{-1} \tilde{\nabla} \times, \end{aligned}$$

wobei die Klammerausdrücke [] die Einheiten tragen sollen und alle mit einer Tilde gekennzeichneten Größen dimensionslos sind.

Damit gehen die Gleichungen (2.11) und (2.12) über in

$$\tilde{\nabla} \times \tilde{H} = \left(\frac{i\omega\epsilon}{c} + \frac{4\pi\sigma}{c} \right) \frac{[E][x]}{[H]} \tilde{E}, \quad (2.14)$$

$$\tilde{\nabla} \times \tilde{E} = -\frac{i\omega\mu}{c} \frac{[H][x]}{[E]} \tilde{H}. \quad (2.15)$$

In Gleichung (2.14) dominiert auf der rechten Seite der Term $4\pi\sigma$ im allgemeinen deutlich gegenüber dem Term $\omega\epsilon$. Für das spezielle Anwendungsgebiet Mammographie wird dies in der Folge noch gezeigt.

Damit sind die dimensionslosen Felder $\tilde{E}$ und $\tilde{H}$ in etwa von gleicher Größenordnung, wenn man die Einheiten $[E]$ und $[H]$ so wählt, daß

$$\frac{4\pi\sigma [E][x]}{c [H]} = 1$$

gilt.

Mit dieser Forderung an $[E]$ und $[H]$ erhält man als neues Gleichungssystem

$$\tilde{\nabla} \times \tilde{H} = \tilde{E} + \frac{i\omega\epsilon}{4\pi\sigma} \tilde{E} \quad (2.16)$$

$$\tilde{\nabla} \times \tilde{E} = -\frac{i4\pi\sigma\omega\mu [x]^2}{c^2} \tilde{H} \quad (2.17)$$

Hieraus folgt, daß eine quasistatische Behandlung des Problems, in der $\nabla \times E = 0$ gesetzt wird, zulässig sein sollte, wenn die dimensionslose Größe

$$k = \frac{4\pi\sigma\omega\mu [x]^2}{c^2} \quad (2.18)$$

wesentlich kleiner als 1 ist.

Im Falle der Mammographie als ein Beispiel aus der medizinischen Anwendung der EIT kann man von einer Größenordnung $[x]$ von weniger als 20 cm sprechen. Die Leitfähigkeit ist im wesentlichen die von Fettgewebe, die sich nach Tabelle (1.1) mit $\sigma < 0.05$ (Ohm meter) $^{-1}$ abschätzen läßt. Üblicherweise wird in medizinischen

Anwendungen eine Frequenz von etwa 30 kHz verwendet, womit ein vernünftiger Hautkontakt sichergestellt ist. Damit ermittelt man einen Wert von $k < 10^{-4}$, was unterhalb des Bereichs der momentan erreichten relativen Meßgenauigkeit liegt.

Mit den hier angegebenen Werten erhält man außerdem $4\pi\sigma \approx 6 \times 10^9 \text{ s}^{-1}$ und $\omega\epsilon \approx 6 \times 10^5 \text{ s}^{-1}$, wobei eine mittlere Dielektrizitätskonstante von 20 zugrunde gelegt wurde, was nicht unrealistisch ist. Dies bestätigt die oben durchgeführte Abschätzung, wonach man den frequenzabhängigen Term vernachlässigen und in guter Näherung mit einer reellen Leitfähigkeit rechnen kann.

Mit Hilfe der Gleichungen (2.7), (2.11) erhält man somit in guter Näherung

$$\nabla \cdot j = \nabla(\sigma E) = \nabla \cdot \left(\frac{c}{4\pi} \nabla \times H \right) = 0.$$

Aufgrund der doch sehr groben Abschätzungen in der obigen Diskussion entscheidet aber letztendlich erst das Experiment und der Vergleich von gemessenen Daten und theoretischer Vorhersage über die Gültigkeit einer quasistatischen Behandlung des Problems.

Darüber hinaus kann man sagen, daß die Betrachtung des komplexen Anteils der Impedanz nur bei Verwendung sehr hochfrequenter Wechselströme im Experiment möglich ist.

In der weiteren Diskussion wird die Leitfähigkeitsverteilung als reell angesehen. Die Vernachlässigung der zeitlichen Ableitungen in den Maxwellschen Gesetzen führt nun auf einfache Weise zur grundlegenden Differentialgleichung der elektrischen Impedanztomographie.

2.2 Herleitung der grundlegenden Differentialgleichung der EIT

Gegeben sei ein beschränktes Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^p, p = 2, 3$, in dem sich ein leitendes Medium befindet. Zur Bestimmung der gesuchten Leitfähigkeitsverteilung σ werden am Rand $\partial\Omega$ dieses Gebietes Elektroden angebracht, über die Strom ins Innere injiziert wird. Weiterhin werden die zu verschiedenen Stromanordnungen resultierenden äußeren Potentialverteilungen gemessen. In der Praxis geschieht dies entweder an den bereits vorliegenden Elektroden, über die Strom fließt, oder an extra dafür vorgesehene weitere Elektroden.

Da in der EIT mit Wechselströmen niedriger Frequenz gearbeitet wird, liegt in guter Näherung ein quasistatischer Zustand vor. Als Bedingungsgleichungen für die Stromdichte j und das elektrische Feld E ergeben sich die Kirchhoffschen Gleichungen [36]

$$\nabla \cdot j = 0, \tag{2.19}$$

$$\nabla \times E = 0, \tag{2.20}$$

unmittelbar aus dem Faradayschen Induktionsgesetz (2.3) und der Kontinuitätsgleichung (2.6) bei Vernachlässigung der zeitlich abgeleiteten Terme.

Weiterhin gelte das Ohmsche Gesetz (2.7)

$$j = \sigma E.$$

Die Leitfähigkeitsverteilung $\sigma : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ ist hierin eine beschränkt meßbare Funktion mit

$$0 < \underline{\sigma} \leq \sigma \leq \overline{\sigma} < \infty. \quad (2.21)$$

Da $\nabla \times E = 0$ gilt, hat das Feld E die Form

$$E = -\nabla \phi, \quad (2.22)$$

wobei $\phi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ das elektrische Potential in Ω ist. Die Gleichungen (2.19)-(2.22) lassen sich zu einer einzigen Gleichung für das Potential ϕ zusammenfassen:

$\nabla \cdot (\sigma \nabla \phi) = 0.$

(2.23)

2.3 Das Vorwärtsproblem

Gleichung (2.23) stellt die entscheidende partielle Differentialgleichung des EIT-Problems dar. Eine Lösung dieser Gleichung bei gegebener Leitfähigkeitsverteilung σ ist allerdings erst durch die Vorgabe einer Randbedingung eindeutig oder wie im Fall der Neumannrandbedingung bis auf eine Konstante eindeutig festgelegt.

Die Randbedingung lautet im Falle des Neumannproblems

$$j_\phi(x) = \left(\sigma \frac{\partial \phi}{\partial n} \right) (x) \quad \forall x \in \partial\Omega, \quad (2.24)$$

$$\int_{\partial\Omega} j_\phi(x) dx = 0, \quad (2.25)$$

wobei hierin n die äußere Normale auf $\partial\Omega$ ist.

Physikalisch beschreibt j_ϕ die äußere Stromdichteverteilung, die im Experiment an den Körper angelegt wird. Die Bedingung (2.25) ergibt sich aus der Forderung nach Stromerhaltung (2.19).

Als Lösungsfunktion erhält man das elektrische Potential ϕ , das im Experiment am Rand des Gebietes bestimmt wird und wie bereits erwähnt nur bis auf eine Konstante bestimmt ist. Diese kann so gewählt werden, daß die Bedingung

$$\int_{\partial\Omega} \phi(x) dx = 0 \quad (2.26)$$

erfüllt ist, wodurch die Eindeutigkeit der Lösung des Neumannproblems sichergestellt ist.

Eine andere Möglichkeit, eine Randbedingung zu formulieren, ist die Dirichlet-Randbedingung

$$\phi(x)|_{x \in \partial\Omega} = \phi_0(x) \quad (2.27)$$

mit einer Randpotentialverteilung ϕ_0 . Diese Bedingung stellt ohne eine weitere Zusatzbedingung die Eindeutigkeit der Lösung des Problems (2.23) sicher.

Zu diesem Zeitpunkt ist jedoch unklar, welche Funktionenräume für die äußeren Stromdichte- bzw. Potentialverteilungen zulässig sind. Eine präzisere mathematische Beschreibung des Problems verwendet die im Anhang B beschriebene Formulierung des Problems als Variationsproblem. Damit kann gezeigt werden, daß die Wahl einer quadratintegrablen Stromdichte zulässig ist, und die resultierende äußere Potentialverteilung ebenfalls quadratintegrabel ist. Beachtet man weiterhin die beiden Gleichungen (2.25),(2.26), so befinden sich beide Funktionen im Raum

$$\mathcal{L}_\diamond^2(\partial\Omega) = \left\{ f \in \mathcal{L}^2(\partial\Omega), \int_{\partial\Omega} f(x) dx = 0 \right\}. \quad (2.28)$$

Da die zu einer Neumannschen Randbedingung gehörige Stromdichte $j_\phi \in \mathcal{L}_\diamond^2(\partial\Omega)$ eindeutig zu einer Randpotentialverteilung $\phi \in \mathcal{L}_\diamond^2(\partial\Omega)$ führt, die linear von j_ϕ abhängt, kann eine lineare Abbildung

$$\Lambda_\sigma : \mathcal{L}_\diamond^2(\partial\Omega) \rightarrow \mathcal{L}_\diamond^2(\partial\Omega) \quad (2.29)$$

definiert werden, die die zueinander gehörigen Neumann- und Dirichletschen Randbedingungen miteinander verbindet. Sie trägt daher den Namen Neumann-nach-Dirichlet Abbildung. Die Gestalt der Abbildung hängt von der Leitfähigkeitsverteilung σ ab. Diesen Zusammenhang kann man durch eine weitere Abbildung Λ beschreiben:

$$\Lambda : \sigma \mapsto \Lambda_\sigma. \quad (2.30)$$

Somit besteht das direkte Problem der EIT darin, aus einer gegebenen Leitfähigkeitsverteilung σ die zugehörige Neumann-nach-Dirichlet Abbildung $\Lambda(\sigma) = \Lambda_\sigma$ zu bestimmen.

2.4 Das inverse Problem

Aus der obigen Formulierung des direkten Problems ist die Fragestellung für das inverse Problem unmittelbar klar. Es geht um die Invertierung der Abbildung Λ aus Gleichung (2.30). Dies ist natürlich nur dann möglich, falls Λ injektiv ist. Dann ist sichergestellt, daß einer Neumann-nach-Dirichlet Abbildung Λ_σ eindeutig eine Leitfähigkeitsverteilung σ zugeordnet werden kann. Dabei spielt die gewählte Funktionenklasse für die Leitfähigkeiten eine wichtige Rolle.

Zu einem Durchbruch in der mathematischen Forschung auf diesem Gebiet gelangten Kohn und Vogelius, als sie in einer berühmten Arbeit einen Eindeutigkeitsbeweis für analytische Leitfähigkeitsverteilungen zeigten. Damit wurde erstmals eine formale Berechtigung für die Anwendbarkeit der elektrischen Impedanztomographie geliefert.

In weiteren Arbeiten wurde jedoch auch gezeigt, daß die Rekonstruktion eines Leitfähigkeitstensors $\sigma_{i,j}$ aus der Kenntnis der entsprechenden Neumann-nach-Dirichlet Abbildung im allgemeinen nicht eindeutig ist. Daher und aus Gründen des Rechenaufwands beschränken sich die zur Zeit funktionierenden Geräte auf die Rekonstruktion einer skalaren Leitfähigkeitsverteilung. Wie bereits erwähnt, kann jedoch insbesondere in der medizinischen Anwendung die Leitfähigkeitsverteilung eines Körpers lokal stark richtungsabhängig sein. Dies gilt vor allem für Muskeln

oder Knochen. Bei der Rekonstruktion einer skalaren Leitfähigkeit hat man diese Tatsache zu ignorieren und mit einem größeren Modellfehler zu leben.

Neben den Modellfehlern sind natürlich auch Meßfehler in der Behandlung des inversen Problems zu berücksichtigen. Daran anschließend stellt sich die Frage nach der Stabilität des inversen Problems. In wie weit beeinflussen also kleine Änderungen in den Meßwerten die rekonstruierte Leitfähigkeitsverteilung.

Für exemplarische Beispiele läßt sich die Instabilität der EIT unmittelbar nachweisen [31]. Betrachtet man zum Beispiel für den zweidimensionalen Fall des Einheitskreises die radialsymmetrische Leitfähigkeitsverteilung

$$\sigma(r) = \begin{cases} \Sigma & , \quad 0 \leq r \leq \rho \\ 1 & , \quad \rho < r \leq 1 \end{cases} \quad \Sigma > 1, \quad (2.31)$$

so ist für die Wahl $\Sigma(\rho) = 1 + \rho^{-1}$

$$\|\sigma - 1\|_{\mathcal{L}^2(\Omega)}^2 = \pi \quad \forall \rho.$$

Wie man zeigen kann [31], sind die Neumann-nach-Dirichlet Operatoren $\Lambda(\sigma)$ aus (2.29) Hilbert-Schmidt Operatoren, d.h für eine beliebige Orthonormalbasis $\{f_i\}$ von $\mathcal{L}_\diamond^2$ ist

$$|||\Lambda(\sigma)|||_{HS} = \left(\sum_{i=1}^{\infty} \|\Lambda(\sigma) f_i\|_{\mathcal{L}_\diamond^2}^2 \right)^{1/2} < \infty.$$

Bezüglich dieser Hilbert-Schmidt Norm $|||\cdot|||_{HS}$ läßt sich für die Leitfähigkeiten aus (2.31)

$$|||\Lambda(\sigma) - \Lambda(1)|||_{HS} \rightarrow 0, \quad \rho \rightarrow 0$$

zeigen.

Anschaulich gesprochen verursachen winzige Störkörper mit sehr großer Leitfähigkeit im Zentrum des Gebietes kaum meßbare Effekte in den äußeren Potentialen.

Damit ist das EIT-Problem schlecht gestellt. Die Bestimmung sinnvoller Leitfähigkeitsverteilungen ist somit nur mit Hilfe einer Stabilisierung des Problems durch Techniken aus der Theorie inverser Probleme möglich.

2.5 Variationsformulierung

In der mathematischen Theorie partieller Differentialgleichungen spielt die Umformulierung eines Problems in ein zugehöriges Variationsproblem eine entscheidende Rolle. Dabei wird die Lösung der Differentialgleichung unter einer festen Nebenbedingung als Lösung eines Minimierungsproblems charakterisiert.

Die folgenden Abschnitte stellen im wesentlichen eine kurze Zusammenfassung der entsprechenden Kapitel der Vorlesung “Mathematische Grundlagen der elektrischen Impedanztomographie” von Prof. Dr. M. Hanke-Bourgeois dar [31]. An dieser Stelle werden jedoch nur das Konzept der Variationsformulierung, sowie die hauptsächlichen Resultate bei Anwendung auf das EIT-Problem erläutert, da in der Folge noch in konkreten Rechnungen davon Gebrauch gemacht wird. Eine etwas umfangreichere Zusammenstellung der Ergebnisse findet sich im Anhang B.

Es bezeichne $H^1_\diamond(\Omega)$ die Vervollständigung des Raumes $\{u \in C^1(\overline{\Omega}) \mid \int_{\partial\Omega} u \, ds = 0\}$ bezüglich der Norm

$$\|u\|_{H^1_\diamond(\Omega)} := \left(\int_{\Omega} |\nabla u|^2 \, dx \right)^{1/2}. \quad (2.32)$$

Man kann zeigen, daß für eine Funktion $f \in \mathcal{L}^2_\diamond(\partial\Omega)$ das lineare Funktional

$$b(u) := \int_{\partial\Omega} f u \, ds \quad (2.33)$$

stetig über $H^1_\diamond(\Omega)$ ist.

Weiterhin sei die Bilinearform

$$a(u, v) := \int_{\Omega} \sigma \nabla u \cdot \nabla v \, dx \quad (2.34)$$

gegeben.

Existiert eine Beschränkung der Leitfähigkeitsverteilung σ durch eine obere und untere Schranke gemäß Gleichung (2.21), so kann gezeigt werden, daß die Funktion Φ , mit

$$\Phi[u] := \frac{1}{2} a(u, u) - b(u), \quad (2.35)$$

ebenfalls stetig über $H^1_\diamond(\Omega)$ ist.

Wie weiterhin gezeigt werden kann, ist die Funktion $u_m \in H^1_\diamond(\Omega)$, die Φ minimiert, eindeutig durch die Variationsgleichung

$$a(u_m, v) = b(v) \quad \forall v \in H^1_\diamond(\Omega) \quad (2.36)$$

charakterisiert. Gleichzeitig ist u_m Lösung des Potentialproblems (2.23) zu einer gegebenen Neumannrandbedingung f .

2.6 Lösung der Laplacegleichung für spezielle Fälle

2.6.1 Einleitung

Für den Fall einer konstanten Leitfähigkeitsverteilung σ reduziert sich das vorliegende Problem auf die Lösung der Laplacegleichung $\Delta\phi = 0$. Eine präzise Kenntnis der Lösung dieser Gleichung zu verschiedenen Neumannrandbedingungen ist in der elektrischen Impedanztomographie oftmals von entscheidender Bedeutung. Vorwegnehmend kann gesagt werden, daß die Strategie vieler Rekonstruktionsalgorithmen die Erkennung einer Abweichung der Leitfähigkeitsverteilung vom homogenen Fall ist. Es ist daher wünschenswert, eine Potentiallösung zu dieser Situation möglichst analytisch zu besitzen.

Die Problematik in der Aufgabenstellung liegt in der Geometrie der betrachteten Gebiete. Im zweidimensionalen Fall ist der Kreis das am einfachsten zu behandelnde Gebiet. In drei Dimensionen ist der Halbraum insbesondere für geophysikalische Anwendungen von großem Interesse. Die analytische Behandlung des Problems für eine

nicht konstante Leitfähigkeitsverteilung σ setzt im allgemeinen gewisse Symmetrieanforderungen an σ voraus. So vereinfacht sich das Problem für radialsymmetrische Leitfähigkeitsverteilungen auf dem Kreis entscheidend.

Ein anderer interessanter Fall ist die Betrachtung eines nicht- oder metallisch leitenden Objekts, das von einem konstant leitenden Medium umgeben ist. Auch hier kann in Einzelfällen eine Lösung des Problems geschlossen formuliert werden.

2.6.2 Lösung des Neumannproblems mit Greensfunktion

Für einige Gebiete ist die Bestimmung einer Greensfunktion zum Neumannproblem möglich. Dies löst dann unmittelbar das Vorwärtsproblem für eine konstante Leitfähigkeitsverteilung und ermöglicht ebenso die Anwendung von Rekonstruktionsverfahren, die im fünften Kapitel der Arbeit untersucht werden.

Das Greensche Theorem lautet:

$$\int_{\Omega} \Delta u v \, dx - \int_{\Omega} \Delta v u \, dx = \int_{\partial\Omega} v \frac{\partial u}{\partial n} \, ds - \int_{\partial\Omega} u \frac{\partial v}{\partial n} \, ds.$$

Existiert eine Funktion $G(x, x')$, so daß

$$\Delta G(x, x') = -\delta(x - x'),$$

so gewinnt man durch die Ersetzung $u \rightarrow G$, $v \rightarrow \phi$ die Gleichung

$$\phi(x) = - \int_{\Omega} \Delta \phi(x') G(x, x') \, dx' + \int_{\partial\Omega} \left\{ G \frac{\partial \phi}{\partial n'} - \phi \frac{\partial G}{\partial n'} \right\} \, ds'. \quad (2.37)$$

Zur Lösung des Neumannproblems ist die Greensfunktion gesucht, die

$$\Delta' G_N(x, x') = -\delta(x - x'), \quad (2.38)$$

$$\left. \frac{\partial G_N(x, x')}{\partial n'} \right|_{x' \in \partial\Omega} = -\frac{1}{S} \quad \forall x \in \Omega \quad (2.39)$$

erfüllt. Hierin ist mit S die Gesamtoberfläche des betrachteten Gebietes Ω gemeint. Die zweite dieser Forderungen ist erlaubt, da

$$\int_{\partial\Omega} \frac{\partial G_N(x, x')}{\partial n'} \, ds' = \int_{\Omega} \Delta' G_N(x, x') \, dx' = -1.$$

Hat man eine solche Greensfunktion gefunden, und fordert man für die zu einer Neumannbedingung f gehörige gesuchte Potentiallösung ϕ die Normierung

$$\int_{\partial\Omega} \phi(x)|_{x \in \partial\Omega} \, ds = 0,$$

so lautet mit dem Greenschen Theorem speziell für $\Delta \phi = 0$ die Lösung

$$\phi(x) = \int_{\partial\Omega} G_N(x, x') f(x') \, ds'.$$

2.6.3 Das zweidimensionale Potentialproblem

Zunächst wird das Neumannproblem auf dem Kreis mit Radius R diskutiert. Es ist also $\Omega = \{(x, y) : x^2 + y^2 < R^2\}$. Zur Ableitung der gesuchten Greensfunktion für das Neumannproblem entwickelt man die freie Greensfunktion

$$G(r, \phi, r', \phi') = -\frac{1}{4\pi} \ln(r^2 + r'^2 - 2rr' \cos(\phi - \phi'))$$

in einen vollständigen Satz harmonischer Funktionen, indem man zunächst die Funktion geeignet umformt:

$$\begin{aligned} -\frac{1}{4\pi} \ln(r^2 + r'^2 - 2rr' \cos(\gamma)) &= -\frac{1}{4\pi} \left\{ 2 \ln(r_{>}) + \ln \left(1 + \left(\frac{r_{\leq}}{r_{>}} \right)^2 - 2 \frac{r_{\leq}}{r_{>}} \cos(\gamma) \right) \right\}, \\ \gamma &= \phi - \phi'. \end{aligned}$$

Hierin bezeichnet $r_{<}$ ($r_{>}$) die kleinere (größere) Norm der beiden Vektoren $\vec{x}$ und $\vec{x}'$.

Als nächstes ist es zweckmäßig, den von γ abhängigen Ausdruck in der obigen Gleichung in eine Fourierskosinusreihe zu entwickeln. Die Entwicklung einer Funktion $f(x)$ im Intervall $[0, l]$ lautet

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi}{l} x, \quad (2.40)$$

$$a_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \cos \frac{n\pi}{l} x dx. \quad (2.41)$$

Mit Hilfe der beiden Integrale [30]

$$\int_0^\pi \ln(1 - 2a \cos(x) + a^2) \cos(nx) dx = \frac{-\pi a^n}{n} \quad (a^2 < 1), \quad (2.42)$$

$$\int_0^\pi \ln(a^2 - 2ab \cos(x) + b^2) dx = 2\pi \ln(|a|) \quad (|a| \geq |b|), \quad (2.43)$$

erhält man

$$-\frac{1}{2\pi} \ln(|\vec{x} - \vec{x}'|) = -\frac{1}{2\pi} \left\{ \ln(r_{>}) - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left(\frac{r_{\leq}}{r_{>}} \right)^n \cos(n\gamma) \right\}. \quad (2.44)$$

Um zur Lösung des Neumannproblems das Greensche Theorem anwenden zu können, fordert man, wie in Gleichung (2.39) beschrieben, die Greensfunktion zu finden, die $\partial G(x, x') / \partial n' = -1/2\pi R$ für alle Vektoren x erfüllt. Zunächst ist

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial r'} \left\{ \frac{-1}{4\pi} \ln(r^2 + r'^2 - 2rr' \cos(n\gamma)) \right\} \Big|_{r'=R} &= \\ -\frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial r_{>}} \left\{ \ln(r_{>}) - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left(\frac{r_{\leq}}{r_{>}} \right)^n \cos(n\gamma) \right\} \Big|_{r_{>}=R} &= \\ -\frac{1}{2\pi R} - \frac{1}{2\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{r^n}{R^{n+1}} \cos(n\gamma). \end{aligned}$$

In der oben angegebenen Entwicklung (2.44) hat der erste Term $-\ln(r_+)/2\pi$ der Summe die gewünschte Eigenschaft (2.39). Die Normalenableitung der verbleibenden Summe stimmt mit der Normalenableitung der in gestrichenen und ungestrichenen Argumenten harmonischen Funktion

$$f(r, \phi, r', \phi') = - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \frac{(r'r)^n}{R^{2n}} \cos(n\gamma)$$

überein. Die beiden Forderungen (2.38), (2.39) sind demnach erfüllt, falls man zur freien Greensfunktion $-f/(2\pi)$ addiert. Weiterhin hat man jedoch noch die Freiheit, eine Konstante C zu dieser Funktion zu addieren. Wählt man speziell $C = -\ln(R)$, so erkennt man in $-\ln(R) + f$ die Reihenentwicklung (2.44) für $r_+ = R$ und $r_- = r'r/R$ wieder. Als Endergebnis erhält man damit die Greensfunktion für das Neumannproblem

$$\begin{aligned} G_N(r, \phi, r', \phi') &= -\frac{1}{2\pi} \left\{ \ln(r_+) - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left(\frac{r_-}{r_+} \right)^n \cos(n\gamma) \right\} \\ &\quad - \frac{1}{2\pi} \left\{ \ln(R) - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left(\frac{r'r}{R^2} \right)^n \cos(n\gamma) \right\} \end{aligned} \quad (2.45)$$

$$\begin{aligned} &= -\frac{1}{4\pi} \left\{ \ln(r^2 + r'^2 - 2rr' \cos(\phi - \phi')) \right. \\ &\quad \left. + \ln \left(R^2 + \frac{r'^2 r^2}{R^2} - 2rr' \cos(\phi - \phi') \right) \right\}. \end{aligned} \quad (2.46)$$

Für den speziellen Fall einer Neumannrandbedingung der Form

$$j(\phi) = \frac{1}{R} (\delta(\phi - \phi_0) - \delta(\phi - \phi_1)), \quad (2.47)$$

die für eine konstante Leitfähigkeitsverteilung $\sigma \equiv 1$ eine Situation beschreibt, in der ein Strom über eine punktförmige Elektrode bei ϕ_0 in das Gebiet einfließt und über eine zweite punktförmige Elektrode bei ϕ_1 wieder abfließt, erhält man als Lösung des Potentialproblems bei Abwesenheit innerer Quellen

$$u(r, \phi) = \frac{-1}{2\pi} \left(\ln(r^2 + R^2 - 2rR \cos(\phi - \phi_0)) - \ln(r^2 + R^2 - 2rR \cos(\phi - \phi_1)) \right). \quad (2.48)$$

Für die Randwerte von u folgt somit

$$u(R, \phi) = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1 - \cos(\phi - \phi_1)}{1 - \cos(\phi - \phi_0)}. \quad (2.49)$$

Das Potential besitzt damit an den Orten der Elektroden logarithmische Singularitäten. Diese Situation entschärft sich jedoch, wenn man die endliche Ausdehnung der Elektroden berücksichtigt.

Weiterhin wird aus Gleichung (2.45) ersichtlich, daß im Falle des Einheitskreises die Funktionen

$$\tau_n(\phi) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin n\phi & , \quad n > 0 \\ \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos n\phi & , \quad n < 0 \end{cases} \quad (2.50)$$

für eine Leitfähigkeitsverteilung $\sigma \equiv 1$ Eigenfunktionen der Neumann-nach-Dirichlet Abbildung Λ_σ sind, denn es gilt

$$\begin{aligned}
& \int_0^{2\pi} G_N(r, \phi, r', \phi')|_{r'=1} \tau_n(\phi') d\phi' \\
&= -\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \left\{ \ln(1) - \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} r^m \cos(m(\phi - \phi')) \right\} \tau_n(\phi') d\phi' \\
&= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} r^m (\cos(m\phi) \cos(m\phi') + \sin(m\phi) \sin(m\phi')) \tau_n(\phi') d\phi' \\
&= \frac{1}{|n|} r^{|n|} \tau_n(\phi) \xrightarrow{r \rightarrow 1} \frac{1}{|n|} \tau_n(\phi). \tag{2.51}
\end{aligned}$$

Die abgeleiteten Eigenwerte $1/|n|$ verdeutlichen, daß die kleine Variation einer vorgegebenen äußeren Stromdichte zu einer kleinen Veränderung der resultierenden äußeren Potentialverteilung führt, während eine Umkehrung der Aussage nicht möglich ist. Dies ist auch der Grund, weshalb man in der elektrischen Impedanztomographie möglichst Ströme anlegen und resultierende Spannungen messen sollte.

2.6.4 Das dreidimensionale Potentialproblem

Wie in der Einleitung angesprochen, bezieht sich ein weiteres wichtiges Anwendungsgebiet der elektrischen Impedanztomographie auf die Untersuchung des Halbraumes $\Omega = \{(x, y, z) | z > 0\}$. Für eine konstante Leitfähigkeitsverteilung reduziert sich das Problem auf die Lösung der Laplacegleichung $\Delta\phi = 0$ in Ω . Mit dem Produktansatz

$$\phi(x, y, z) = X(x) Y(y) Z(z) \tag{2.52}$$

erhält man die drei entkoppelten Differentialgleichungen

$$\frac{1}{X} \frac{d^2 X}{dx^2} = -\alpha^2; \quad \frac{1}{Y} \frac{d^2 Y}{dy^2} = -\beta^2; \quad \frac{1}{Z} \frac{d^2 Z}{dz^2} = \alpha^2 + \beta^2.$$

Somit ist

$$\phi(x, y, z) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ik_1 x} e^{-ik_2 y} e^{-\sqrt{k_1^2 + k_2^2} z} f(k_1, k_2) dk_1 dk_2 \tag{2.53}$$

die allgemeine Lösung der Laplacegleichung in Ω mit verschwindendem Potential für $z \rightarrow \infty$. Die Funktion $f(k_1, k_2)$ dient der Beschreibung der Randbedingungen auf $\partial\Omega = \{(x, y, z) | z = 0\}$. Zunächst sollen nur reine Neumannrandbedingungen betrachtet werden. Dazu untersucht man am geeignetsten den Fall einer einzigen Punktelektrode, über die der Strom 1 einfließt. Wegen der geforderten Stromerhaltung wird die abgeleitete Lösung garantieren, daß der Strom im Unendlichen abfließt. Man betrachtet also die Stromdichte

$$j(\vec{x}) = j(x, y) = - \left. \frac{\partial \phi(x, y, z)}{\partial z} \right|_{z=0} = \delta^{(2)}(\vec{x} - \vec{x}_0). \tag{2.54}$$

Das Minuszeichen rührt dabei von dem in negative z-Richtung zeigenden Normalenvektor auf $\partial\Omega$.

Mit

$$f(k_1, k_2) = \frac{1}{(2\pi)^2} \frac{e^{i(k_1 x_0 + k_2 y_0)}}{\sqrt{k_1^2 + k_2^2}} = \frac{1}{(2\pi)^2} \frac{e^{i\langle \vec{k}, \vec{x}_0 \rangle}}{\sqrt{k_1^2 + k_2^2}}$$

erhält man die gesuchte Funktion

$$\phi(x, y, z) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\langle \vec{k}, \vec{x} \rangle} e^{-\sqrt{k_1^2 + k_2^2} z} \frac{e^{i\langle \vec{k}, \vec{x}_0 \rangle}}{\sqrt{k_1^2 + k_2^2}} dk_1 dk_2,$$

da eine Berechnung der zugehörigen Randstromdichte zu einer Darstellung der δ -Distribution führt:

$$-\frac{\partial \phi(x, y, z)}{\partial z} \Big|_{z=0} = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\langle \vec{k}, \vec{x} - \vec{x}_0 \rangle} d^2k = \delta^{(2)}(\vec{x} - \vec{x}_0).$$

Zur Ausführung der Integration wechselt man zu ebenen Polarkoordinaten und erhält mit $k = |\vec{k}|$

$$\phi(x, y, z) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^{\infty} \int_0^{2\pi} e^{-ik|\vec{x} - \vec{x}_0| \cos \theta} e^{-kz} d\theta dk.$$

Die θ -Integration liefert als Ergebnis [30]

$$\int_0^{2\pi} e^{-ik|\vec{x} - \vec{x}_0| \cos \theta} d\theta = 2\pi J_0(k|\vec{x} - \vec{x}_0|).$$

Hierin ist J_0 die Besselfunktion erster Art 0-ter Ordnung. Als Endergebnis erhält man nach der ebenfalls möglichen Ausführung der k -Integration [30]

$$\phi(x, y, z) = \frac{1}{2\pi} \frac{1}{\sqrt{(\vec{x} - \vec{x}_0)^2 + z^2}}.$$

Die Potentiallösung $\phi(x, y, z)$ für eine beliebige auf $\partial\Omega$ anliegende Neumannrandbedingung $j(x, y)$ lautet damit

$$\phi(x, y, z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{j(x', y') dx' dy'}{\sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2 + z^2}}. \quad (2.55)$$

Eine alternative Ableitung dieses Resultats mit Hilfe des Greenschen Theorems ist ebenfalls möglich. Damit verbunden wird ein sehr wichtiges Konzept zur Lösung vieler weiterer Probleme erläutert, die Methode der Spiegelladungen.

Die Anwendung des Greenschen Satzes (2.37) erzwingt zunächst eine geeignete Einschränkung des Halbraums. Eine mögliche Wahl stellt eine Halbkugel mit hinreichend großem Radius R dar:

$$\Omega = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 < R^2, z > 0\}. \quad (2.56)$$

Es ist jedoch problematisch eine Greensfunktion zum Neumannproblem zu finden, die die Bedingungen (2.38), (2.39) erfüllt. Die Forderung (2.39) nach einer Konstanz

der Normalableitung der Neumann Greensfunktion auf der Oberfläche ist jedoch nicht die einzige Möglichkeit zur Verwendung des Greenschen Theorems für das Neumannproblem. Die Funktion

$$G_N(\vec{x}, \vec{x}') = \frac{1}{4\pi |\vec{x} - \vec{x}'|} + \frac{1}{4\pi \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z + z')^2}} \quad (2.57)$$

erfüllt auf einem Teil der Randfläche, nämlich auf

$$(\partial\Omega)_1 = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 < R^2, z = 0\}, \quad (2.58)$$

die Gleichung

$$\frac{\partial G_N}{\partial n'}(\vec{x}, \vec{x}') = 0 \quad , \vec{x} \in \Omega, \vec{x}' \in \partial\Omega. \quad (2.59)$$

Die Konstruktion der Funktion (2.57) ist physikalisch motiviert. Der zu der freien Greensfunktion $1/(4\pi |\vec{x} - \vec{x}'|)$ addierte und in Ω harmonische Term stellt die Potentialverteilung einer Spiegelladung dar. Diese hat im Falle des Dirichletproblems das umgekehrte Vorzeichen, damit die Greensfunktion am Rand $(\partial\Omega)_1$ verschwindet. Im Falle des Neumannproblems bleibt das Vorzeichen der Spiegelladung erhalten, damit der Fluß des Potentials durch die Ebene $z = 0$ Null wird.

Um das Greensche Theorem zur Lösung des Neumannproblems für den Halbraum anwendbar zu machen, müssen allerdings Forderungen an die Potentialverteilung gestellt werden. Fordert man für große $|\vec{x}|$ das asymptotische Verhalten

$$\phi(\vec{x}) \propto |\vec{x}|^{-\alpha} \quad , \alpha > 0, \quad (2.60)$$

so verschwindet für einen hinreichend großen Radius R in Gleichung (2.37) das Oberflächenintegral über der Halbkugel und man erhält

$$\begin{aligned} \phi(\vec{x}) &= - \int_{\Omega} G_N(\vec{x}, \vec{x}') \Delta' \phi(\vec{x}') dV' + \int_{(\partial\Omega)_1} \left\{ G_N(\vec{x}, \vec{x}') \frac{\partial \phi(\vec{x}')}{\partial n'} \right. \\ &\quad \left. - \phi(\vec{x}') \frac{\partial G_N(\vec{x}, \vec{x}')}{\partial n'} \right\} dS' \\ &= - \int_{\Omega} G_N(\vec{x}, \vec{x}') \Delta' \phi(\vec{x}') dV' + \int_{(\partial\Omega)_1} G_N(\vec{x}, \vec{x}') \frac{\partial \phi(\vec{x}')}{\partial n'} dS'. \end{aligned} \quad (2.61)$$

Die so abgeleitete Lösung rechtfertigt die Bedingung (2.60) sicher für eine lokalisierte Verteilung $\Delta\phi$. Für den Fall $\Delta\phi = 0$ ergibt sich bei vorgegebener Neumannrandbedingung j durch Anwendung von Gleichung (2.61) unmittelbar das aus dem Separationsansatz abgeleitete Ergebnis (2.55).

Die Methode der Spiegelladungen erlaubt es, weitere interessante Spezialfälle zu betrachten.

2.6.5 Lösung des Potentialproblems bei zusätzlichen Randbedingungen

Bisher wurde nur die stark idealisierte Situation des unendlich ausgedehnten Halbraums untersucht. In der Realität muß man bis auf wenige Ausnahmen (in geophysikalischen Untersuchungen kann man die Erdoberfläche sicherlich als quasi unendlich

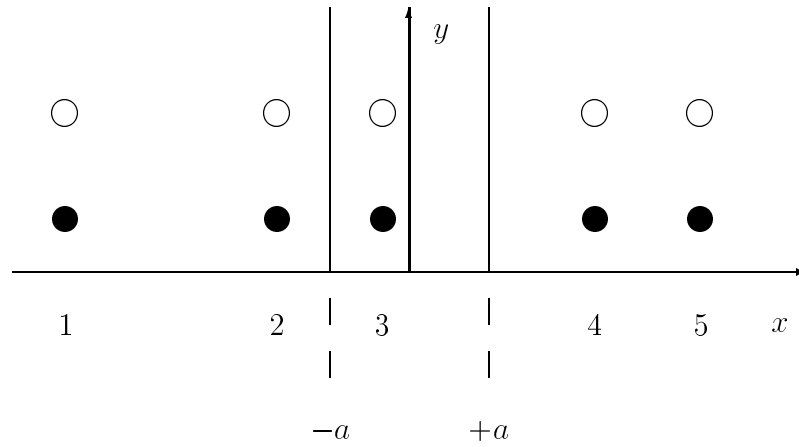


Abbildung 2.1: Spiegelströme

ausgedehnt auffassen, ebenso kann man die gesamte Erde als Halbraum unter dieser Ebene ansehen) jedoch Störungen dieser Situation untersuchen.

Der nächst einfachere Fall liegt vor, wenn eine Lösung der Laplacegleichung im Raum $\Omega_a = \{(x, y, z) \mid |x| < a, z > 0\}$ gesucht ist. Dabei soll weiterhin die äußere Stromdichte nur in $\partial\Omega_{a,1} = \{(x, y, z) \mid |x| < a, z = 0\}$ von Null verschieden sein. Es soll also kein Strom durch die Begrenzungsflächen $x = \pm a$ fließen. Im Unterschied zu dem bisher behandelten Problem lautet die Neumannbedingung nun:

$$-\frac{\partial\phi}{\partial z}\Big|_{z=0} = j(x, y), \quad \frac{\partial\phi}{\partial x}\Big|_{x=\pm a} = 0. \quad (2.62)$$

Eine Möglichkeit, um zum Ergebnis zu gelangen, führt wiederum über den Separationsansatz $\phi(x, y, z) = X(x)Y(y)Z(z)$, der zu drei entkoppelten Differentialgleichungen in Ω_a führt. Es ist in dem hier vorliegenden einfachen Fall aber wiederum möglich, die Methode der Spiegelladungen zu verwenden. Die Idee ist, die auf $\partial\Omega_{a,1}$ anliegende Stromdichteverteilung j an den Ebenen $x = \pm a$ mehrfach zu spiegeln, um dadurch die gewünschten Randbedingungen zu erzeugen. Genauer gesagt ist es Ziel des Verfahrens, eine harmonische Funktion im gesamten Raum Ω zu bestimmen, die im Teilraum Ω_a die Grenzbedingungen (2.62) erfüllt.

Die Vorgehensweise zur Bestimmung der Spiegelströme geschieht dabei in völliger Analogie zum Potentialproblem einer Ladungsverteilung zwischen zwei parallelen, unendlich ausgedehnten, geerdeten, ebenen Platten, wie Abbildung (2.1) verdeutlicht.

Ausgangspunkt der Betrachtung sind zwei Elektroden, die in der $z = 0$ -Ebene zwischen $x = a$ und $x = -a$ liegen. Durch eine der Elektroden soll der Strom $+1$ eingespeist werden. Dieser fließt durch die zweite Elektrode wieder ab. In der Abbildung ist dies durch die Elektrodenkonfiguration 3 dargestellt. Um der Randbedingung für $x = +a$ zu genügen, wird die gespiegelte Stromdichte 4 verwendet. Verteilung 2 soll die gewünschte Randbedingung für $x = -a$ garantieren. Damit ist das Problem jedoch noch nicht gelöst, da die hinzukommenden Stromdichteverteilungen jeweils auf “der anderen Seite” wieder für Probleme sorgen. Zur Kompensation wird Ver-

teilung 2 an der Ebene $x = +a$ gespiegelt, was Verteilung 5 ergibt. Ebenso sind die beiden Elektroden bei 1 die an $x = -a$ gespiegelte Verteilung 4. Allgemein führt die Spiegelung einer Stromdichteverteilung $j(x, y)$ an der Begrenzungsebene $x = a$ zu einer Spiegelverteilung $j_{r,1}(x, y) = j(2a - x)$. Entsprechend führt die Spiegelung an der Ebene $x = -a$ zur Verteilung $j_{l,1}(x, y) = j(-2a - x)$. Die Korrekturen in zweiter Ordnung haben die Form $j_{r,2}(x, y) = j(4a + x)$ bzw. $j_{l,2}(x, y) = j(-4a + x)$ und man findet als Korrektur in i -ter Ordnung

$$\begin{aligned} j_{r,i}(x, y) &= j(2i a + (-1)^i x), \\ j_{l,i}(x, y) &= j(-2i a + (-1)^{i-1} x). \end{aligned}$$

Die ursprüngliche Stromdichteverteilung wiederholt sich demnach in Schritten von $2a$ zum einen Teil an der Ebene $x = 0$ gespiegelt, zum anderen Teil ungespiegelt.

Ob die aus den unendlich vielen Stromkonfigurationen resultierende Potentialverteilung überhaupt existiert und, falls ja, wie groß die Konvergenzgeschwindigkeit ist, hängt dabei entscheidend von der Ausgangsverteilung $j(x, y)$ ab.

Entscheidend ist dabei das asymptotische Verhalten der zugehörigen Potentiallösung, was man am besten durch eine Multipolentwicklung untersucht.

Dazu schreibt man die Lösung des Potentialproblems für den Halbraum (2.55) in der Form

$$\phi(x, y, z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{j(x', y') \delta(z') dx' dy' dz'}{\sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2}}. \quad (2.63)$$

Gleichung (2.63) zeigt die Analogie zu elektrostatischen Problemen, indem man sich Stromdichteverteilungen auf Elektroden als Flächenladungsdichten vorstellt.

Die Multipolentwicklung einer Potentialverteilung lautet:

$$\phi(\vec{x}) = \frac{q}{r} + \frac{\vec{p} \cdot \vec{x}}{r^3} + \frac{1}{2} \sum_{ij} Q_{ij} \frac{x_i x_j}{r^5}. \quad (2.64)$$

Die Gesamtladung q der gedachten Flächenladungsdichte ist hier Null, was eine Konsequenz aus der Stromerhaltung ist. Monopolmomente der Potentialverteilung würden die Methode der Spiegelladung auch nicht möglich machen, da hier die betrachtete Reihe nicht konvergieren würde. Man kann demnach beispielsweise niemals über eine Elektrode einen Strom in den Halbraum fließen lassen und diesen durch Spiegelladungen bis ins Unendliche in einem Kasten einsperren. Bezüglich eines Referenzpotentials von Null im Unendlichen wäre das dazu benötigte Potential auf der Elektrode unendlich groß.

Um die Frage zu klären, ob bei verschwindendem Monopolmoment die Konvergenz der aus den Spiegelladungen erzeugten Reihe von Potentialfunktionen gegeben ist, schätzt man die Ausgangspotentialverteilung zunächst folgendermaßen ab:

$$\phi(\vec{x}) < \frac{C}{r^2} \quad \forall \vec{x} : |\vec{x}| = r > R.$$

Dies ist für ein festes $R > 1$ durch die Wahl einer geeigneten Konstante C immer möglich.

Aufgrund der Tatsache, daß die Spiegelverteilungen in regelmäßigen Abständen von $2a$ erscheinen und die obige Abschätzung für jede Spiegelverteilung zulässig ist, ist damit auch die Existenz des zugehörigen Potentials gesichert.

Für große Entfernungen wird das Verhalten der Potentialverteilung vor allem durch das Dipolmoment

$$\vec{p} = \frac{1}{2\pi} \int_{\Omega} \vec{x}' j(x', y') \delta(z') d^3x'$$

und den Tensor des Quadrupolmoments

$$Q_{ij} = \frac{1}{2\pi} \int_{\Omega} (3x'_i x'_j - r'^2 \delta_{ij}) j(x', y') \delta(z') d^3x' \quad (2.65)$$

bestimmt.

Ideal für eine schnelle Konvergenz des Verfahrens sind offensichtlich Stromdichteverteilungen $j(x, y)$ mit möglichst vielen verschwindenden niedrigen Multipolmomenten der zugehörigen Potentialverteilung. Im Falle einer Quadrupolverteilung lautet das Verhalten für große Abstände $\phi(r) \propto 1/r^3$, wodurch die oben formulierte Methode sehr schnell konvergieren sollte. Damit kann man auch folgern, daß die Potentiallösungen zu solchen Stromverteilungen sich bei einer kleinen Variation der Randbedingungen stabil verhalten. Dies kann in der Praxis von großer Bedeutung sein, falls eine genaue Beschreibung der Randbedingungen nicht möglich ist. Nachteilhaft ist dann jedoch, daß Informationen über die Leitfähigkeitsverteilung, für die man sich letztendlich interessiert, vor allem in unmittelbarer Nähe der Oberfläche $z = 0$ gewonnen werden, wie in der Folge noch deutlich werden wird.

Ist das betrachtete Gebiet quaderförmig, existieren also zusätzlich zur oberen Randbedingung in x -Richtung noch weitere Bedingungen der Form $|y| < b$, $0 < z < c$, so läßt sich auch hier die Methode der Spiegelströme anwenden. Dazu wird die gesamte oben konstruierte Stromdichteverteilung zunächst geeignet an den y -Grenzen des Gebiets mehrfach gespiegelt. Danach lassen sich die Randbedingungen in z -Richtung behandeln. Das Verfahren der Spiegelströme hat gegenüber der Lösung des Problems durch einen Potenzreihenansatz den großen Vorteil, daß die in der Lösung auftauchenden Terme physikalisch interpretierbar sind. Weiterhin gewinnt man auf einfache Weise eine Vorstellung darüber, wie Variationen in den Randbedingungen die Potentiallösung beeinflussen.

2.6.6 Metallische Leiter und Nichtleiter

Aus der Variationsformulierung des EIT-Problems aus Abschnitt 2.5 geht hervor, daß nur durch die Forderung einer nach oben und unten beschränkten positiv-definiten Leitfähigkeitsverteilung garantiert werden kann, daß eine eindeutige Lösung des Potentialproblems existiert, die stetig von der äußeren Neumannrandbedingung abhängt. Dies wird aber erst im Anhang B dieser Arbeit in einer ausführlicheren Formulierung des Variationsproblems deutlich.

Im Falle der Existenz eines metallischen oder nicht leitenden Körpers ist man dazu gezwungen, das Problem dahin gehend umzuformulieren, daß man den Störkörper aus dem betrachteten Gebiet ausschließt und an dem so entstandenen zusätzlichen

Rand neue Randbedingungen formuliert. Jetzt und in der Folge soll dabei unter einem metallischen Leiter ein idealer Leiter verstanden werden.

Für einen nicht leitenden Störkörper ist aus der physikalischen Anschauung unmittelbar klar, daß kein Strom durch den Körper fließt und damit als zusätzliche Randbedingung eine verschwindende Neumannrandbedingung zu fordern ist. Für den Fall des metallischen Leiters erwartet man im Störkörpergebiet eine konstante Potentialverteilung, was wegen der Stetigkeit des Potentials auf eine zusätzliche Dirichletrandbedingung führt.

Als Beispiel kann man eine metallische Kugel in einem Gebiet Ω betrachten. Die Kugel $K_\epsilon(\vec{x}_0)$, deren Mittelpunkt sich am Ort $\vec{x}_0$ befindet, habe den Radius ϵ .

Wie oben erläutert ist es sinnvoll, das Gebiet $\Omega_l := \Omega \setminus \overline{K_\epsilon(\vec{x}_0)}$ zu betrachten. Der Rand des so definierten Gebietes besteht aus dem Rand $\partial\Omega$ des ursprünglichen Gebietes Ω und dem durch den Ausschnitt der Kugel verursachten Rand $\partial\Omega_K$:

$$\partial\Omega_l = \partial\Omega \cup \partial\Omega_K.$$

Zu fest vorgegebener Neumannrandbedingung auf $\partial\Omega$ lautet das Potentialproblem also nun

$$\begin{aligned} \Delta \phi(\vec{x}) &= 0 & , \vec{x} \in \Omega_l, \\ \frac{\partial \phi}{\partial n}(\vec{x}) &= j(\vec{x}) & , \vec{x} \in \partial\Omega, \\ \phi(\vec{x}) &= \text{const.} & , \vec{x} \in \partial\Omega_K. \end{aligned}$$

Betrachtet man die in Ω harmonische Funktion ϕ_0 , die auf $\partial\Omega$ die gewünschte Neumannrandbedingung j liefert, so ist die Funktion

$$\phi_a : \Omega_l \rightarrow \mathbb{R}, \quad \phi_a(\vec{x}) = \phi_0(\vec{x}), \quad \vec{x} \in \Omega_l$$

ebenfalls in Ω_l harmonisch und erfüllt auf $\partial\Omega$ die gleiche Neumannbedingung wie ϕ_0 . Die geforderte konstante Potentialverteilung auf $\partial\Omega_K$ ist aber noch nicht gegeben. Eine Lösung des Problems findet man im Falle des Halbraums $\Omega = \{(x, y, z) | z > 0\}$, indem man, wie schon zuvor, mit Ladungsverteilungen außerhalb des Gebietes $\partial\Omega_l$, also auch innerhalb der ausgeschlossenen Kugel $K_\epsilon(\vec{x}_0)$, arbeitet.

Dazu definiert man das Koordinatensystem K' , dessen Ursprung sich im Zentrum der Kugel befinden möge. Bezüglich dieses Systems lautet die Potentialverteilung

$$\phi'_0(\vec{x}') := \phi_0(\vec{x}_0 + \vec{x}') = \phi_0(\vec{x}).$$

Gesucht sind nun die Multipolmomente der Ladungsverteilung im Inneren der Kugel, die zu einem äußeren Feld ϕ_{korr} führen, das die Potentialverteilung ϕ_a richtig korrigiert. Dazu soll in gestrichelten Kugelkoordinaten zunächst gelten

$$\phi'_{korr}(\epsilon, \theta', \phi') = -\phi'_0(\epsilon, \theta', \phi') + \langle \phi'_0 \rangle_{\partial\Omega_K}. \quad (2.66)$$

Hierin stellt $\langle \phi'_0 \rangle_{\partial\Omega_K}$ das über die Kugeloberfläche gemittelte Potential dar.

Da die Korrekturpotentialverteilung ϕ'_{korr} durch eine geeignete Ladungsverteilung im Innern der Kugel erzeugt wird, kann man im Außenraum der Kugel folgende Darstellung für ϕ'_{korr} wählen:

$$\phi'_{korr}(r', \theta', \phi') = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \frac{4\pi}{2l+1} q_{lm} \frac{Y_{lm}(\theta', \phi')}{r'^{l+1}}. \quad (2.67)$$

Hierin bezeichnen die Y_{lm} die Kugelflächenfunktionen, die die folgenden Orthonormalitäts- und Vollständigkeitsrelationen erfüllen:

$$\int_0^\pi d\theta \int_0^{2\pi} d\phi \sin(\theta) Y_{lm}^*(\theta, \phi) Y_{l'm'}(\theta, \phi) = \delta_{l,l'} \delta_{m,m'}, \quad (2.68)$$

$$\sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l Y_{lm}^*(\theta, \phi) Y_{lm}(\theta', \phi') = \delta(\phi - \phi') \delta(\cos \theta - \cos \theta'). \quad (2.69)$$

Mit der Forderung (2.66) erhält man

$$q_{lm} = -\frac{(2l+1)\epsilon^{l+1}}{4\pi} \int_0^\pi d\theta' \int_0^{2\pi} d\phi' \sin(\theta') Y_{lm}^*(\theta', \phi') (\phi'_0(\epsilon, \theta', \phi') - \langle \phi'_0 \rangle_{\partial\Omega_K}). \quad (2.70)$$

Wegen $Y_{00} = 1/\sqrt{4\pi}$ verschwindet das Monopolmoment q_{00} . Damit hat das Korrekturpotential die Form

$$\begin{aligned} \phi'_{\text{corr}}(r', \theta', \phi') &= -\sum_{l=1}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \left(\int_0^\pi d\theta'' \int_0^{2\pi} d\phi'' \sin(\theta'') Y_{lm}^*(\theta'', \phi'') \right. \\ &\quad \left. (\phi'_0(\epsilon, \theta'', \phi'') - \langle \phi'_0 \rangle_{\partial\Omega_K}) \right) \frac{Y_{lm}(\theta', \phi') \epsilon^{l+1}}{r'^{l+1}}. \end{aligned} \quad (2.71)$$

Die Funktion $\phi'_l := \phi'_a + \phi'_{\text{corr}}$ erfüllt nun auf $\partial\Omega_K$ die geforderte Dirichletrandbedingung, denn das so konstruierte Potential ist am Rand der Kugel konstant und nimmt den Wert $\langle \phi'_0 \rangle_{\partial\Omega_K}$ an. Außerdem ist ϕ'_l im gesamten Gebiet Ω_l harmonisch. Allerdings ist die geforderte Neumannrandbedingung auf $\partial\Omega$ verletzt. Dies hat man durch eine Spiegelung der Ladungsverteilung in der Kugel an der $z = 0$ -Ebene zu kompensieren, was dann wiederum die Situation auf der Kugel stört. Durch weitere Korrekturen und Spiegelungen nähert man sich jedoch immer mehr der gesuchten Potentiallösung. Eine besonders schnelle Konvergenz erzielt man für einen weit von der $z = 0$ -Ebene entfernten kleinen Störkörper.

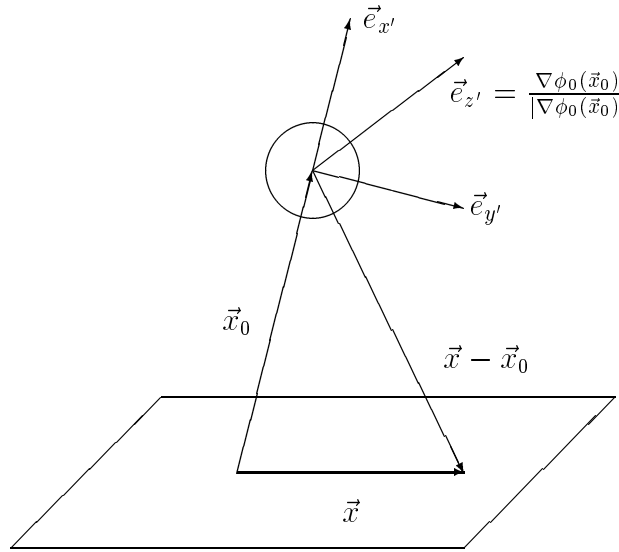
Richtet man, wie in Abbildung (2.2) das Koordinatensystem K' so aus, daß bei Abwesenheit des kugelförmigen Störkörpers mit Zentrum $\vec{x}_0$ die z' -Achse in Richtung des Gradienten $\nabla\phi_0(\vec{x}_0)$ zeigt, kann die Potentialverteilung im gestrichenen Koordinatensystem in guter Näherung in Kugelkoordinaten bis auf eine Konstante folgendermaßen geschrieben werden:

$$\phi'_0(r', \theta', \varphi') = |\nabla\phi_0(\vec{x}_0)| r' \cos \theta' = \sqrt{\frac{4\pi}{3}} |\nabla\phi_0(\vec{x}_0)| r' Y_{10}(\theta', \varphi'). \quad (2.72)$$

Diese Gleichheit gilt umso besser, je kleiner der Radius ϵ und je glatter die ungestörte Potentialverteilung am Ort der Störung ist. Das Potential auf der Kugeloberfläche hat damit den Wert $\sqrt{\frac{4\pi}{3}} |\nabla\phi_0(\vec{x}_0)| \epsilon Y_{10}(\theta', \varphi')$.

Wegen der Orthonormalität der Kugelflächenfunktionen ist das Korrekturpotential also nach Gleichung (2.71) in dieser Näherung ein reines Dipolpotential der Form

$$\phi'_{\text{corr}}(r', \theta', \varphi') = -\sqrt{\frac{4\pi}{3}} \epsilon^3 |\nabla\phi_0(\vec{x}_0)| \frac{Y_{10}(\theta', \varphi')}{r'^2}. \quad (2.73)$$

Abbildung 2.2: Orientierung des Koordinatensystems K'

Nun kann man auch den Einfluß der zur Erhaltung der Neumannrandbedingung auf $\partial\Omega$ anzubringenden Spiegelladung am Ort der Kugel abschätzen. Dazu äquivalent kann man das Korrekturfeld ϕ'_{kor} am Ort $\vec{x}'_s$ der Spiegelladung betrachten. Für einen Abstand d der Kugel zur $z = 0$ -Ebene erhält man

$$|\nabla' \phi'_{kor}(\vec{x}'_s)| \leq 2 |\nabla \phi_0(\vec{x}_0)| \left(\frac{\epsilon}{2d} \right)^3. \quad (2.74)$$

Bei hinreichend großem Abstand der Störung von der Meßebene und kleinem Volumen des Störkörpers können also höhere Korrekturen komplett vernachlässigt werden. Auf der Meßebene sind die Beiträge der Korrektur aus der Ladungsverteilung im Inneren der Kugel und der Spiegelverteilung identisch. Man erhält in ungestrichenen Koordinaten

$$\phi_{kor}(\vec{x})|_{z=0} = -\frac{2\epsilon^3 \nabla \phi_0(\vec{x}_0) \cdot (\vec{x} - \vec{x}_0)}{|\vec{x} - \vec{x}_0|^3}, \quad \vec{x} \in \partial\Omega. \quad (2.75)$$

Die hier betrachtete metallische kleine Kugel gibt eine Vorstellung darüber, welche Änderungen in der Potentialverteilung beispielsweise in der Mammographie bestenfalls von einem kugelförmigen Tumor zu erwarten sind.

Die Untersuchung eines kleinen kugelförmigen Nichtleiters geschieht in völliger Analogie. In diesem Fall ist klar, daß kein Stromfluß in die Kugel stattfinden darf. Der durch die Kugeloberfläche fließende ungestörte Strom ist nach Gleichung (2.72) in gestrichenen Koordinaten:

$$\nabla' \phi'_0(r', \theta', \varphi') \cdot \vec{e}_{r'} = |\nabla \phi_0(\vec{x}_0)| \cos \theta' = \sqrt{\frac{4\pi}{3}} |\nabla \phi_0(\vec{x}_0)| Y_{10}(\theta', \varphi').$$

Wiederum dient ein durch eine Ladungsverteilung im Inneren der Kugel erzeugtes Dipolpotential zur gewünschten Korrektur:

$$\phi'_{korr}(r', \theta', \varphi') = \frac{4\pi}{3} q_{10} \frac{Y_{10}(\theta', \varphi')}{r'^2}, \quad q_{10} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \epsilon^3 |\nabla \phi_0(\vec{x}_0)|. \quad (2.76)$$

Unter Berücksichtigung der Neumannrandbedingung auf $\partial\Omega$ durch eine Spiegelladung erhält man in ungestrichenen Koordinaten die Korrekturpotentialverteilung auf der Meßebene

$$\phi_{korr}(\vec{x})|_{z=0} = \frac{\epsilon^3 \nabla \phi_0(\vec{x}_0) \cdot (\vec{x} - \vec{x}_0)}{|\vec{x} - \vec{x}_0|^3}, \quad \vec{x} \in \partial\Omega. \quad (2.77)$$

Die beiden hier diskutierten Fälle einer ideal leitenden bzw. nichtleitenden Kugel in einem Medium mit konstanter Leitfähigkeit können ebenso als Grenzfälle einer Situation angesehen werden, in der die Leitfähigkeitsverteilung σ in einem Gebiet Ω die Form

$$\sigma(x) = \begin{cases} \kappa & , \quad x \in K \subset \Omega \\ 0 & , \quad x \in \Omega \setminus \overline{K} \end{cases} \quad (2.78)$$

mit einer Konstanten $0 < \kappa \neq 1$ hat [33],[12]. In der Folge soll n_K die äußere Normale auf K und n_Ω die äußere Normale auf Ω bezeichnen. Für eine Stromdichteverteilung $f \in \mathcal{L}^2_\diamond(\partial\Omega)$ kann man dann das Randwertproblem folgendermaßen charakterisieren [12]:

$$\Delta \phi(x) = 0, \quad x \in \Omega \setminus \partial K, \quad (2.79)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial n_\Omega}(x) = f(x), \quad x \in \partial\Omega, \quad (2.80)$$

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} (\phi(x + h n_K) - \phi(x - h n_K)) = 0, \quad x \in \partial K, \quad (2.81)$$

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \left(\frac{\partial \phi(x + h n_K)}{\partial n_K} - \kappa \frac{\partial \phi(x - h n_K)}{\partial n_K} \right) = 0, \quad x \in \partial K, \quad (2.82)$$

$$\int_{\partial\Omega} \phi \, ds = 0. \quad (2.83)$$

Gleichung (2.81) garantiert die Stetigkeit der Potentiallösung. Als Folge der Stromerhaltung ergibt sich (2.82). Diese beiden Gleichungen, die die Grenzbedingungen an der Trennfläche der beiden verschiedenen Medien bestimmen, werden durch drei weitere Gleichungen ergänzt, die aus dem Randwertproblem zur Laplacegleichung bekannt sind.

Eine mögliche Vorgehensweise zur Bestimmung einer approximativen Lösung dieses Problems sieht wiederum zunächst den üblichen Ansatz

$$\phi = \phi_0 + \phi_{korr}$$

vor. Die Potentialverteilung ϕ_0 ist im gesamten Gebiet Ω harmonisch und erfüllt die Neumannrandbedingung (2.80). Für die Potentialverteilung ϕ_{korr} kann man bei Übergang in ein geeignetes gestrichenes Koordinatensystem, dessen Ursprung in K

liegt,

$$\phi'_{korr}(r', \theta', \phi') = \begin{cases} \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l A_{lm} r'^l Y_{lm}(\theta', \phi') & , \quad \vec{x}(r', \theta', \phi') \in K \\ \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l (B_{lm} r'^l + C_{lm} r'^{-(l+1)}) Y_{lm}(\theta', \phi') & , \quad \vec{x}(r', \theta', \phi') \in \Omega \setminus \overline{K} \end{cases}$$

ansetzen.

Zur Bestimmung der unbekannten Größen A_{lm}, B_{lm}, C_{lm} verwendet man die Bedingungsgleichungen (2.80), (2.81), (2.82). Das Problem vereinfacht sich allerdings enorm, wenn man es in einem Gebiet behandelt, in dem man mit Spiegelladungen arbeiten kann. In diesem Fall setzt man B_{lm} für alle l und m Null und vernachlässigt zunächst die Neumannrandbedingung (2.80). Dieses Versäumnis kann später durch Spiegelladungen korrigiert werden.

Speziell für einen kugelförmigen Störkörper mit Radius ϵ liefert dann die Stetigkeitsbedingung (2.81)

$$A_{ij} = C_{ij} \epsilon^{-2j-1}.$$

Gleichung (2.82) ergibt

$$-\sum_{l,m} (l+1) C_{lm} \epsilon^{-l-2} Y_{lm}(\theta', \phi') - \sum_{l,m} \kappa l A_{lm} \epsilon^{l-1} Y_{lm}(\theta', \phi') + (1-\kappa) \frac{\partial \phi'_0}{\partial r'}(\epsilon, \theta', \phi') = 0.$$

Mit Hilfe der Orthogonalitätsrelationen (2.68) für die Kugelflächenfunktionen erhält man damit abschließend

$$C_{ij} = \frac{(1-\kappa)\epsilon^{l+2}}{(l+1+\kappa l)} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \frac{\partial \phi'_0}{\partial r'}(\epsilon, \theta', \phi') Y_{ij}^*(\theta', \phi') \sin \theta' d\theta' d\phi'.$$

Für die Potentialverteilung ϕ'_0 aus Gleichung (2.72) bestimmt man damit

$$C_{10} = \frac{1-\kappa}{2+\kappa} \epsilon^3 \sqrt{\frac{4\pi}{3}} |\nabla \phi_0|,$$

was im Limes $\kappa \rightarrow \infty$ zu dem Korrekturpotential aus Gleichung (2.73) und im Limes $\kappa \rightarrow 0$ zu Gleichung (2.76) führt.

Für kleine kugelförmige Störobjekte erhält man damit immer in erster Ordnung eine Potentialänderung in Form eines Dipolpotentials. Der Faktor

$$\alpha = \frac{1-\kappa}{\kappa+2} \quad (2.84)$$

ermöglicht einen Vergleich zwischen kugelförmigen Objekten mit einer endlichen Leitfähigkeit κ und metallisch- bzw. nichtleitenden Körpern gleicher Form. Beispielsweise ist für eine hinreichend kleine Kugel mit 10-facher Leitfähigkeit ihrer Umgebung die Potentialänderung am Rand im Vergleich zu einer metallischen Kugel betragsmäßig nur um einen Faktor 3/4 geringer.

Die hier durchgeführten Rechnungen lassen sich zumindest für metallische Störkörper problemlos auf kompliziertere Objekte ausweiten, sofern man deren Oberfläche durch Kugelkoordinaten parametrisieren kann. Dazu muß man jedoch für eine gegebene Parametrisierung $\epsilon(\theta', \phi')$ Gleichung (2.66) folgendermaßen verallgemeinern:

$$\phi'_{\text{corr}}(\epsilon(\theta', \phi'), \theta', \phi') = -\phi'_0(\epsilon(\theta', \phi'), \theta', \phi') + [\phi'_0]_{\partial\Omega_K}, \quad (2.85)$$

$$[\phi'_0]_{\partial\Omega_K} = \frac{\int_0^\pi d\theta' \int_0^{2\pi} d\phi' \sin\theta' \epsilon(\theta', \phi') \phi'_0(\epsilon(\theta', \phi'), \theta', \phi')}{\int_0^\pi d\theta' \int_0^{2\pi} d\phi' \sin\theta' \epsilon(\theta', \phi')}. \quad (2.86)$$

Hiermit ist sichergestellt, daß das damit abgeleitete Korrekturpotential keinen Monopolanteil besitzt.

Das analytisch noch am besten zu behandelnde etwas anspruchsvollere Objekt ist ein Rotationsellipsoid, dessen Oberfläche für drei feste Konstanten a, b, c implizit durch die Gleichung

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad (2.87)$$

gegeben ist.

In Kugelkoordinaten kann man damit die Oberfläche folgendermaßen parametrisieren:

$$\epsilon(\theta, \phi) = \sqrt{(a^2 \cos^2 \phi + b^2 \sin^2 \phi) \sin^2 \theta + c^2 \cos^2 \theta}.$$

Aus den Gleichungen (2.85), (2.67) und bei Ausnutzung der Orthogonalität der Kugelflächenfunktionen ergeben sich in diesem Fall die Multipolmomente q_{lm} der Potentialänderung ϕ_{corr} zu

$$q_{lm} = -\frac{2l+1}{4\pi} \int_0^\pi d\theta' \int_0^{2\pi} d\phi' \left(\sqrt{(a^2 \cos^2 \phi + b^2 \sin^2 \phi) \sin^2 \theta + c^2 \cos^2 \theta} \right)^{l+1} \sin(\theta') Y_{lm}^*(\theta', \phi') (\phi'_0(\epsilon, \theta', \phi') - [\phi'_0]_{\partial\Omega_K}). \quad (2.88)$$

Im Gegensatz zu Gleichung (2.70) hat man hier die Winkelabhängigkeit von ϵ zu beachten, das nicht aus dem Integral gezogen werden darf.

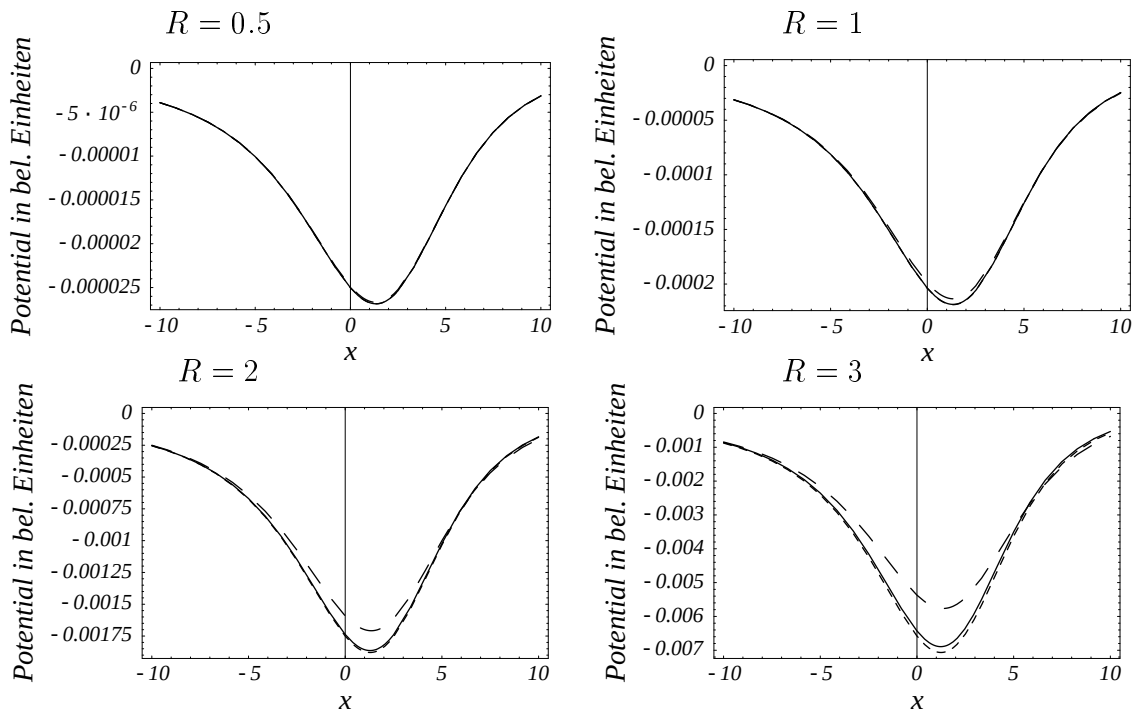
In wie weit die hier bestimmten Korrekturpotentiale tatsächlich bereits in niedrigen Ordnungen sinnvolle Ergebnisse liefern, soll nun untersucht werden. Dazu kann man nochmals eine metallisch leitende Kugel in einem ansonsten homogen leitenden Medium im Halbraum betrachten und für das Verhältnis $\epsilon/2d$ aus Gleichung (2.74) Werte ansetzen, die nicht mehr wesentlich kleiner als eins sind. In diesem Fall sind zum einen höhere Multipolmomente zu berücksichtigen. Zum anderen erzwingt die Potentialverteilung, die durch die an der Ebene $z = 0$ gespiegelte Ladungsverteilung entsteht, weitere Korrekturen. Die Größenordnungen der einzelnen Beiträge zur Potentialänderung lassen sich an einzelnen Beispielen veranschaulichen. Dazu betrachtet man eine Punktelektrode auf der $z = 0$ -Ebene an den Koordinaten $(x = 0, y = 0)$, über die der Strom $I = 1$ in den Halbraum einfließt. Der Strom fließe an einer weiteren Elektrode, die sich in großer Entfernung zur ersten befinde, wieder ab. Da es sich hier idealisiert um eine Punktelektrode handeln soll, ist damit

für eine homogene Leitfähigkeitsverteilung von $\sigma \equiv 1$ in der Nähe der Elektrode die Potentialverteilung

$$\phi(x, y, z) = \frac{1}{2\pi} \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

gegeben. Auf eine Berücksichtigung der Elektrodenbreite und die damit verbundene Änderung dieser Potentialverteilung wird im nächsten Kapitel eingegangen. An dieser Stelle soll nur die durch einen ideal leitenden kugelförmigen Störkörper verursachte Potentialänderung interessieren, die im wesentlichen von einer Elektrodenmodellierung unabhängig ist, sofern sich der Störkörper in hinreichendem Abstand zur Elektrode befindet.

Die folgenden Beispielrechnungen beziehen sich auf eine Kugel, deren Mittelpunkt sich am Ort $(x, y, z) = (2, 0, 6)$ befindet. Es werden die vier verschiedenen Radien 0.5, 1, 2 und 3 betrachtet. In Abbildung (2.3) sind zu jedem dieser Fälle drei Kurven abgebildet.



Potentialänderung ohne Berücksichtigung der Spiegelladungskorrektur

Potentialänderung ohne Berücksichtigung des Quadrupolmoments

Potentialänderung bei voller Berücksichtigung der Korrekturen

Abbildung 2.3: Durch eine ideal leitende Kugel verursachte Potentialänderung für verschiedene Kugelradien R

Die durchgezogene Linie stellt die beste Approximation an die resultierende Potentialänderung dar. Hier sind zur Bestimmung der Korrekturverteilung ϕ_{korr} alle Dipol- und Quadrupolmomente berücksichtigt. Weiterhin wurden die Auswirkungen

des Potentials der Spiegelladungsverteilung am Ort der Störung untersucht. In allen hier betrachteten Fällen führte dies im wesentlichen nur zu einer kleinen Korrektur des ursprünglich angesetzten Dipolmoments q_{10} .

Die Vernachlässigung dieser “Spiegelladungskorrekturen” liefert somit Änderungen der Potentialverteilungen, die nur für die größeren Kugeln mit Radien 2 und 3 sichtbar sind.

Einen erheblich schwereren Fehler begeht man, wenn man die Multipolentwicklung (2.71) bereits beim Dipolmoment abbricht. Die reine Dipolkorrektur ist in den Abbildungen ebenfalls dargestellt. Vor allem für die größte der vier Kugeln ist demnach eine Anwendung von Gleichung (2.75) zur Bestimmung der verursachten Potentialänderung am Rand nicht zulässig.

Abschließend kann man noch untersuchen, in welchem Verhältnis zueinander die vier Potentialänderungen zu den vier unterschiedlich großen Störobjekten stehen. Vergleicht man die Kurven zunächst in großer Entfernung zur Störung, so zeigt sich, daß sich die Werte der Potentialänderung im Verhältnis wie die vier unterschiedlichen Volumina der Kugeln verhalten. Dies ist verständlich, da für die Untersuchung des asymptotischen Verhaltens eine alleinige Betrachtung der Dipolmomente ausreicht, und nach Gleichung (2.70) das Dipolmoment der Korrekturladungsverteilung im Innern der Kugel proportional zu ϵ^3 ist. Gleicht man durch eine Umskalierung das asymptotische Verhalten der vier Kurven an, so bleiben jedoch in unmittelbarer Nähe zum Störobjekt Unterschiede in den Potentialverläufen zu erkennen. Dies veranschaulicht Abbildung (2.4).

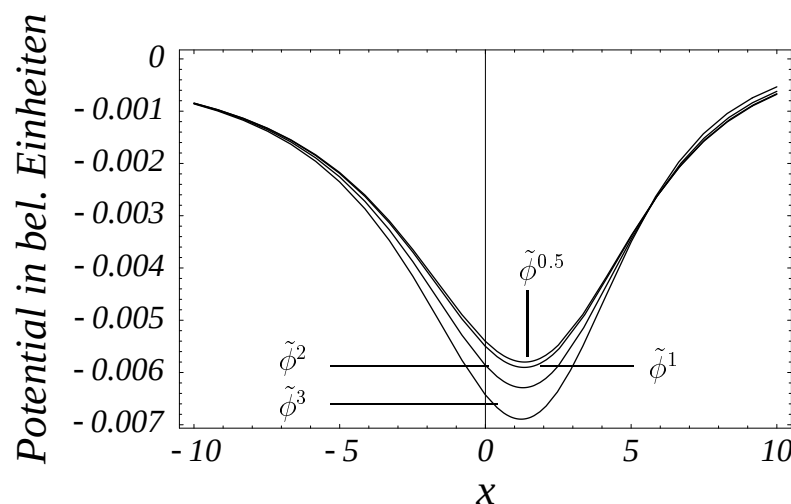


Abbildung 2.4: Vergleich der Korrekturpotentiale

Dargestellt sind die umskalierten Potentialfunktionen $\tilde{\phi}^R$, deren asymptotisches Verhalten übereinstimmt. Der Index R bezeichnet den Radius des zugehörigen Störkörpers. Deutlich sichtbar unterscheiden sich demnach die Korrekturpotentiale für die Kugeln mit Radius 0.5 und 1 annähernd nur durch einen Faktor $(0.5/1)^3$, den Faktor also, der das asymptotische Verhalten der beiden Kurven angleicht. Für größere Störkörper gewinnen jedoch höhere Quadrupolmomente an Bedeutung, so

daß sich die unterschiedlichen Kurven auch noch nach einer Umskalierung deutlich unterscheiden.

2.7 Einfache Impedanztomographen

An dieser Stelle ist man bereits soweit, sich die Wirkungsweise einfacher Impedanztomographen klar zu machen. Mit einfach ist in diesem Zusammenhang keinesfalls der technische Aufwand gemeint, der zur Konstruktion der in der Folge diskutierten Geräte nötig ist. Vielmehr sollen nun Tomographen betrachtet werden, die unmittelbar, d.h. ohne eine Rekonstruktion der Leitfähigkeitsverteilung sinnvoll interpretierbare Bilder liefern.

Im Falle der Mammographie liegt es nahe, zunächst einmal zu versuchen, Techniken aus der Röntgendiagnostik zu kopieren. Die dort übliche Vorgehensweise ist, daß die zu untersuchende Brust zwischen zwei Platten eingeklemmt wird. Durch eine darauf folgende Bestrahlung der Brust erhält man unmittelbar ein Bild, dessen Bildpunkte Aufschluß über den entlang des Stahlgangs aufintegrierten Röntgenabsorptionskoeffizienten liefern. Zu messen ist in diesem Fall die Intensitätsverteilung der Röntgenstrahlung. In Analogie zu dieser Vorgehensweise könnte man versuchen, die Röntgenstrahlung durch elektrische Ströme zu ersetzen. Die beiden Platten sollten in diesem Fall möglichst dicht mit Elektroden besetzt sein. Setzt man dann die Platten auf ein jeweils konstantes aber unterschiedliches Potential, so kann man in Analogie zur Messung der Röntgenstrahlintensität den über die Elektroden abfließenden Strom messen.

Um eine Vorstellung von den mit dieser Technik zu erwartenden Bildern zu erhalten, kann man als eine einfache Modellannahme einen Kasten mit Seitenlängen a, b, c betrachten, wie er in Abbildung (2.5) dargestellt ist.

In diesem Fall betrachtet man also das Gebiet

$$\Omega = \{(x, y, z) | 0 < x < a, 0 < y < b, 0 < z < c\}.$$

In der Folge sollen Potentialverteilungen studiert werden, die sich dadurch ergeben, daß bei $z = 0$ bzw. $z = c$ eine Randpotentialverteilung angelegt wird und weiterhin an den übrigen Randflächen des Gebiets kein Stromfluß nach außen stattfindet. Zusammenfassend betrachtet man das gemischte Randwertproblem

$$\begin{aligned} \nabla(\sigma \nabla \phi) &= 0, \\ \phi(x, y, 0) &= \phi_0(x, y), \\ \phi(x, y, c) &= \phi_c(x, y), \\ \frac{\partial \phi}{\partial n} &= 0, \quad x = 0 \vee x = a \vee y = 0 \vee y = b. \end{aligned}$$

Für eine homogene Leitfähigkeitsverteilung $\sigma \equiv 1$ bestimmt man für $\phi_0 \equiv 0$ und $\phi_c \equiv Q$ die Potentialverteilung $\phi(x, y, z) = Q/c \cdot z$. Mit den Überlegungen aus den letzten Abschnitten kann man sich nun klarmachen, wie sich bei gleichbleibenden Randbedingungen die Potentialverteilung ändert, wenn sich ein ideal leitender, kleiner kugelförmiger Körper im Gebiet befindet. Dazu schließt man, wie in den vorigen Diskussionen erläutert, die Kugel vom betrachteten Gebiet aus und ergänzt eine

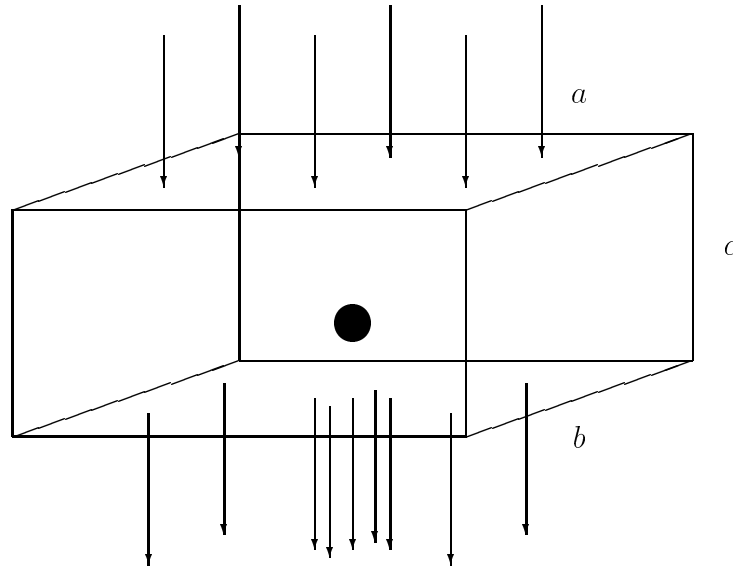


Abbildung 2.5: Durch die Existenz eines sehr gut leitenden Objekts in einer homogenen Hintergrundleitfähigkeit kommt es zu einer Bündelung des Stromflusses

außerhalb der Kugel harmonische Potentialverteilung, die von einem in z -Richtung ausgerichteten Dipol herrührt. Die Dirichletrandbedingungen an den Grenzflächen bei $z = 0$ und $z = c$ werden durch mehrere Spiegelladungen erzeugt. Dabei ist zu beachten, daß bei jeder Spiegelung ein Vorzeichenwechsel zustande kommt, da sich die Dipolrichtung umkehrt und ein weiterer Vorzeichenwechsel zur Erhaltung der Dirichletrandbedingung nötig ist. Zusammenfassend ist das Vorgehen in Abbildung (2.6) dargestellt. Hier wird ebenfalls deutlich, daß Effekte von Spiegelladungen am Ort des Störobjekts tatsächlich vernachlässigt werden können, sofern dieses sich nicht in allzu großer Nähe zum Rand befindet.

Für eine ideal leitende Kugel mit Zentrumskoordinaten (x_0, y_0, z_0) und Radius ϵ erhält man somit bei Vernachlässigung der Neumannrandbedingungen mit den drei führenden Termen der Potentialkorrektur

$$\begin{aligned}
 \phi_{\text{kor}}(x, y, z) \approx & \frac{-\epsilon^3 Q(z - z_0)}{c \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2}^3} \\
 & + \frac{-\epsilon^3 Q(z + z_0)}{c \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z + z_0)^2}^3} \\
 & + \frac{-\epsilon^3 Q(z - (2c - z_0))}{c \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - (2c - z_0))^2}^3}. \quad (2.89)
 \end{aligned}$$

Die wie gesagt hier noch vernachlässigten Neumannrandbedingungen werden durch

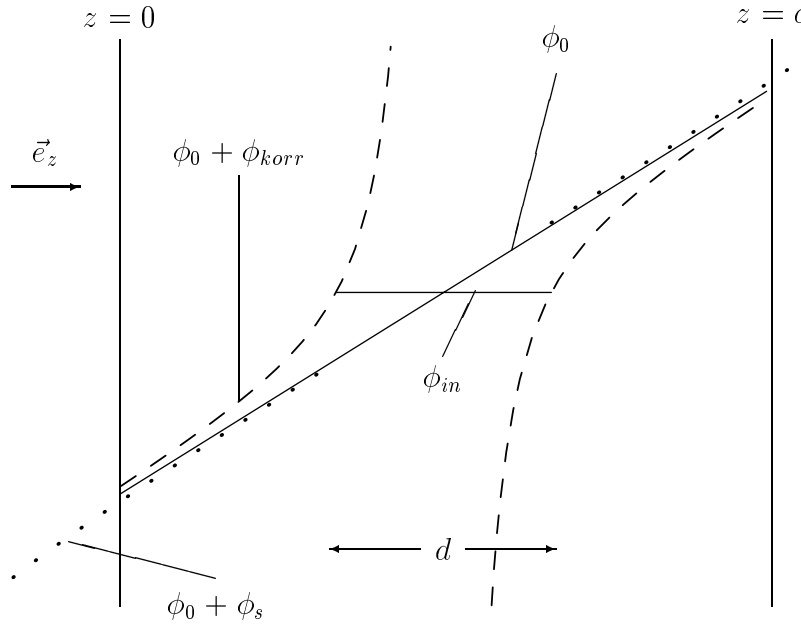


Abbildung 2.6: Die ungestörte Potentialverteilung ϕ_0 unterscheidet sich von der Potentialverteilung im gestörten Fall außerhalb des ideal leitenden, kugelförmigen Störobjekts mit Durchmesser d im wesentlichen durch ein Dipolfeld ϕ_{kor} , das für eine stetige Anbindung an die konstante Potentialverteilung ϕ_{in} im Innenraum des Objekts sorgt. Die zur Erhaltung der Randbedingungen nötigen Spiegelladungen erzeugen eine Korrektur ϕ_s der Potentialverteilung, die am Ort der Störung meist vernachlässigbare Beiträge liefert

weitere Spiegelungen an den Ebenen $x = 0, a$ bzw. $y = 0, b$ erreicht.

Um die Situation zu vereinfachen wird in der Folge eine kleine Störung der homogenen Leitfähigkeitsverteilung in unmittelbarer Nähe von $z = 0$ und großem Abstand zu den übrigen Begrenzungsflächen von Ω betrachtet. Interessiert man sich für die Änderung der ohne die Störung konstanten äußeren Stromdichteverteilung bei $z = 0$ in der Nähe der Störung, so muß man nur die in Gleichung (2.89) dominierenden ersten beiden Terme betrachten. Die gesuchte Verteilung ergibt sich, indem man die Normalenableitung, also in diesem Fall $-d/dz$, der Potentialkorrektur bildet. Man erhält

$$-\frac{d}{dz}\phi_{kor}(\vec{x})|_{z=0} = \frac{2\epsilon^3 Q(2z_0^2 - (x - x_0)^2 - (y - y_0)^2)}{\sqrt{z_0^2 + (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}^5}. \quad (2.90)$$

Die so gewonnene Randstromverteilung läßt sich bildlich darstellen, indem man die Helligkeit eines Bildpunktes durch die Größe der zugehörigen Stromdichte bestimmt. Für zwei winzige ideal leitende Störkörper vom Radius 0.01 an den Koordinaten (4, 4, 1) bzw. (4, 4, 3) erhält man damit die in Abbildung (2.7) dargestellten Diagramme. Dazu kann man folgende Dinge feststellen:

1. Die Qualität der Bilder ist in keinem Fall mit der Qualität von Röntgenbildern vergleichbar, sofern sich die Leitfähigkeitsverteilung des Störobjekts

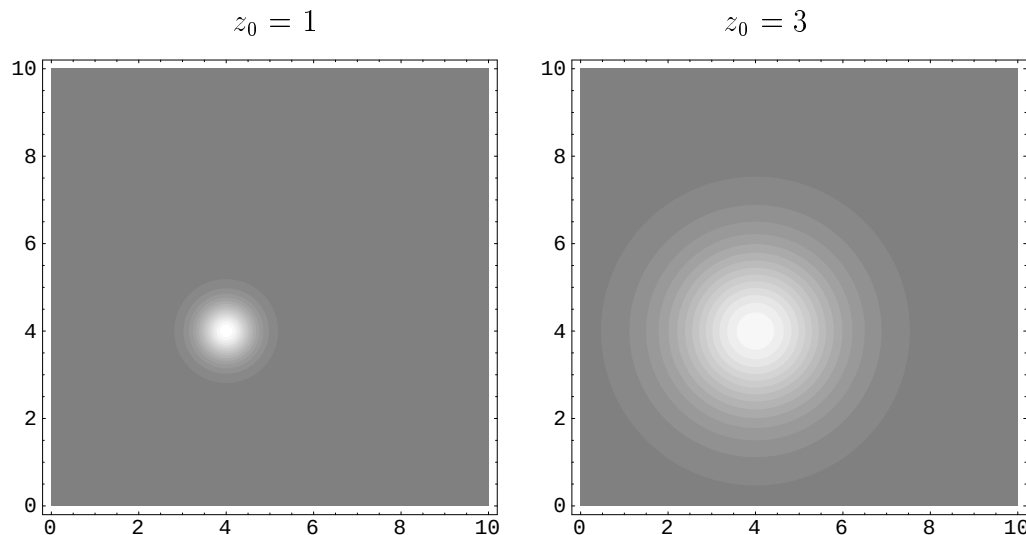


Abbildung 2.7: Darstellung der äußeren Stromverteilung $-d/dz \phi_{kor}(\vec{x})|_{z=0}$ bezüglich zweier kugelförmiger Störkörper an den Koordinaten $(4,4,1)$ und $(4,4,3)$

ebenso deutlich von der Hintergrundverteilung abhebt, wie es beim Röntgenabsorptionskoeffizienten der Fall ist. Dies gilt insbesondere dann, wenn sich das Objekt in einiger Entfernung zur Meßebe befindet. In diesem Fall erhält man auch kaum Aufschluß über die genaue Größe des Objekts. Der Faktor ϵ^3 in Gleichung (2.90) sorgt nur für eine Erhöhung der Intensität der gemessenen Stromänderung. Dies gilt zumindest für Radien ϵ , für die die oben geführte Diskussion, die zur Ableitung von Gleichung (2.90) führte, noch vernünftig ist.

- Die beiden gezeigten Bilder können nicht verdeutlichen, wie stark die Intensität der Stromänderung für verschiedene Entfernungen der Störung zur Ebene $z = 0$ schwankt. Dies kann man aber unmittelbar an Gleichung (2.90) ablesen. Für $x = x_0$ und $y = y_0$, also am Ort der maximalen Stromdichteänderung findet man

$$-\frac{d}{dz} \phi_{kor}(\vec{x})|_{z=0, x=x_0, y=y_0} = \frac{4\epsilon^3 Q}{c z_0^3}.$$

Der durch die gemessene Stromverteilung sichtbare Effekt eines kleinen Störobjekts nimmt damit proportional zur dritten Potenz des Abstandes dieses Objekts zur Meßebe ab.

Aus beiden Punkten der Aufzählung geht deutlich hervor, daß sich die Chancen auf erfolgreichen Einsatz eines Impedanztomographen vom hier dargestellten Typ deutlich verbessern, falls man Objekte in nicht allzu großer Entfernung zur Meßebe orten muß.

Aus diesem Grund werden zur Zeit ebenfalls Geräte getestet, die aus einer einzigen dicht mit Elektroden besetzten Platte bestehen [59]. Während der Untersuchung hält die Patientin eine Elektrode, die als Stromquelle dient, in ihrer rechten Hand. Die auf die Brust aufgesetzte Platte ermöglicht das Abfließen des Stroms, was im

Falle eines sehr gut leitenden Objekts in der Nähe der Meßplatte zu einem charakteristischen Bild, wie oben dargestellt, führt.

Allerdings hat der Gewinn an Nähe zu den gesuchten Objekten, wie beispielsweise Mammakarzinomen, auch einen Preis. Dieser besteht darin, daß der Strom im ungestörten Fall sicherlich nicht eine so einfache Form hat, wie im oben diskutierten Fall der zwei Platten auf unterschiedlichen Potentialniveaus. Vielmehr ist nun nur in unmittelbarer Umgebung zur Meßebe eine Stromfluß senkrecht zu dieser gegeben. In tieferen Regionen muß damit gerechnet werden, daß auf schwer vorherzusagende Art und Weise der Strom "seitlich abfließt". Damit mischen sich zu den bisher betrachteten Dipolladungsverteilungen, die in z -Richtung ausgerichtet sind, noch Anteile in x - oder y -Richtung. Die gemessenen äußeren Stromdichten haben in diesem Fall eher das in Abbildung (2.8) gezeigte Aussehen. Hier sind für zwei

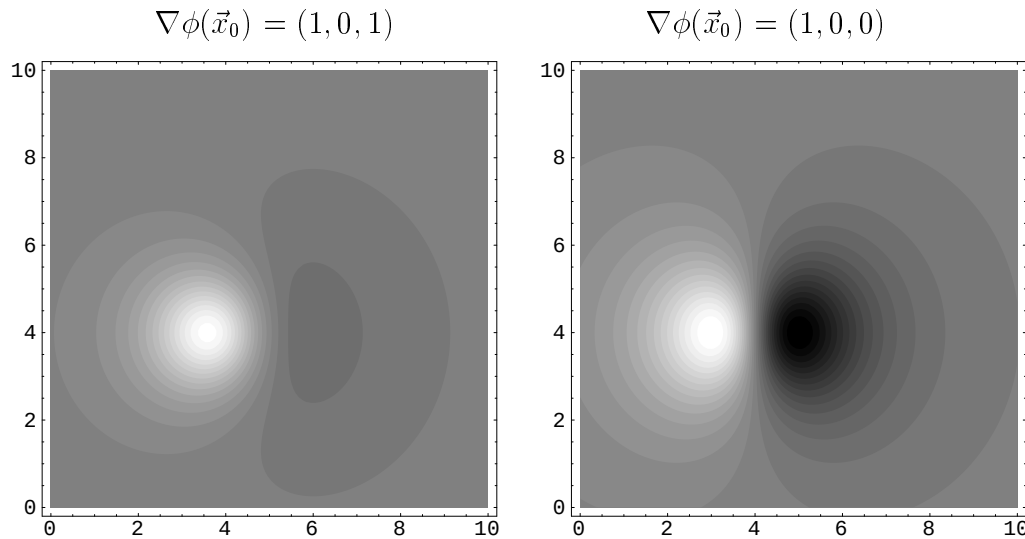


Abbildung 2.8: Darstellung der äußeren Stromverteilung bezüglich eines kugelförmigen Störkörpers an den Koordinaten (4,4,2) bei verschiedenen ungestörten Stromverläufen

verschiedene ungestörte Stromdichteverteilungen die durch eine kleine Störung resultierenden äußeren Stromdichteänderungen dargestellt. Im ersten Fall fließt der ungestörte Strom am Ort des leitenden Objekts mit gleichen Anteilen in x - und z -Richtung. Im zweiten Fall hat der Strom keine z -Komponente mehr und fließt parallel zur Meßebe. Dieser Fall tritt in der Praxis beispielsweise dann auf, wenn man sich die Meßplatte parallel zur Thoraxwand, die in recht guter Näherung als stromundurchlässig angesehen werden kann, aufgesetzt denkt und Regionen in der Nähe der Thoraxwand betrachtet.

In jedem der betrachteten Fälle verliert das Bild sichtlich an Qualität. Ein noch schwerwiegenderes Problem sollte allerdings die Tatsache darstellen, daß bei einem parallel zur Meßplatte verlaufenden ungestörten Strom die betrachteten Dipolpotentialverteilungen zur Meßplatte hin stärker als zuvor, nämlich mit $1/r^3$ abfallen und somit die gemessenen Veränderungen der Stromverteilung sogar mit der vierten Potenz des Abstandes des gesuchten Objekts zur Meßebe abnimmt.

Weiterhin ist zu beachten, daß in den bisherigen Diskussionen stillschweigend angenommen wurde, daß sich die “Untergrundstromverteilung” auf der Meßplatte, die man erhält, falls man ein homogen leitendes Medium untersucht, aus der wirklich gemessenen Verteilung herausfiltern läßt. Dies ist auch sicherlich für den aus zwei Platten bestehenden Tomographen problemlos möglich. Hier kann der Untergrundstrom auf einem Großteil der Platte in guter Näherung als konstant angesehen werden. Probleme würden beim Einsatz des Gerätes in der Praxis noch am ehesten an den Randzonen der Platten zu untersuchen sein.

Bei Verwendung von nur einer Platte, die auf die Brust aufgesetzt wird, ist die Situation unklarer. Theoretisch ist eine Fourieranalyse der gemessenen Stromverteilung und Verwendung eines geeigneten Filters für niedrige Fourierkomponenten denkbar. Dabei würde man allerdings auch Informationen über tiefer gelegene Objekte, die eine verschwommene äußere Stromdichteänderung erzeugen, verlieren. Das Auffinden einer optimalen Lösung ist sicherlich erst mit Meßergebnissen aus dem praktischen Einsatz eines Gerätes und den daraus gewonnenen Erfahrungen möglich.

Abschließend soll noch betrachtet werden, welche Bildqualität man im Falle eines nicht mehr kugelförmigen Störkörpers zu erwarten hat.

Die folgende Abbildung (2.9) bezieht sich auf ein zigarrenförmiges Objekt, d.h. den in Gleichung (2.87) definierten Rotationsellipsoiden mit $a = 1$, $b = c = 0.5$, in unterschiedlichen Entfernungen zur Meßebeane $z = 0$. Es wurden in Gleichung (2.88) alle Multipolmomente bis einschließlich $l = 7$ berücksichtigt.

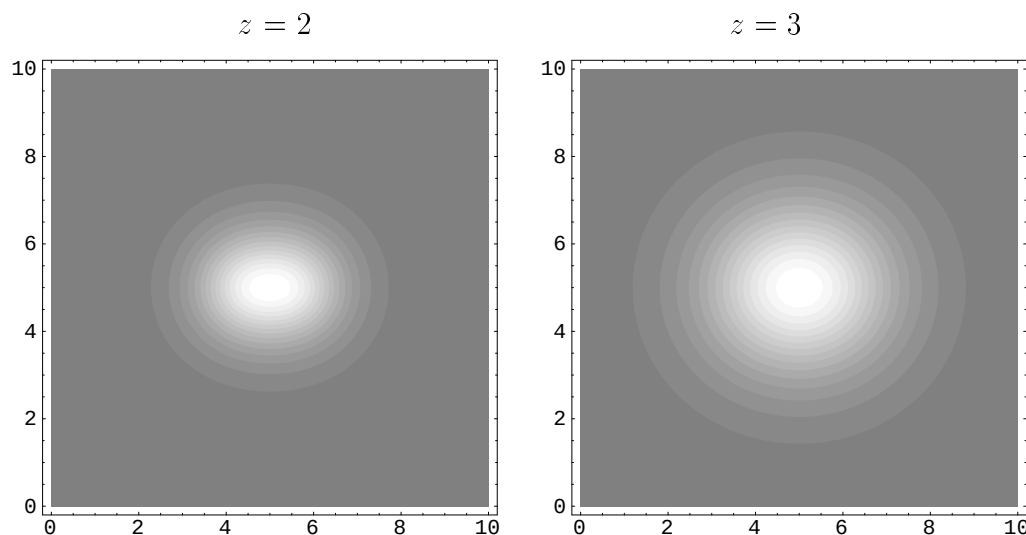


Abbildung 2.9: Darstellung der äußeren Stromverteilung bezüglich eines zigarrenförmigen Störkörpers an den Koordinaten (4,4,2) bzw. (4,4,3)

Auf dem linken Bild ist die erwartete Ellipsoidform noch recht deutlich zu erkennen. Ebenfalls befriedigend ist die Tatsache, daß auch die Dimension des gesuchten Objekts in etwa richtig wiedergegeben ist. Das rechte der beiden Bilder macht deutlich, daß allerdings bei zunehmender Entfernung des Störkörpers zum Rand sehr rasch keinerlei Aussagen zur Form des Objekts möglich sind. Dies gilt sicherlich

dann, wenn die Entfernung des Objekts zur Meßebeane bedeutend größer ist, als dessen Abmessungen.

2.8 Zur Berechtigung einer zweidimensionalen Problembetrachtung

Da der elektrische Strom naturgemäß in drei Dimensionen durch einen Körper fließt, scheint die dreidimensionale Untersuchung der Gegebenheiten erzwungen zu sein. Dies führt jedoch zu folgenden formalen und praktischen Schwierigkeiten:

1. In den allerwenigsten Anwendungen können Meßelektroden wirklich am gesamten Rand des Körpers angelegt werden. Im übrigen ist man im allgemeinen nicht an der Leitfähigkeitsverteilung im gesamten Körper interessiert. So interessiert man sich zum Beispiel in der medizinischen Anwendung des Verfahrens immer nur für bestimmte Körperteile, wie einen Oberarm, Brustkorb etc.
2. Eine dreidimensionale Rekonstruktion der Leitfähigkeitsverteilung kann wegen einer beschränkten Computerkapazität nur zu Bildern mit einer sehr groben Auflösung führen.

Damit liegt der Wunsch nahe, das Problem auf zwei Dimensionen zu reduzieren. Die meisten bereits im Einsatz befindlichen Tomographen liefern zur Zeit auch in der Tat nur zweidimensionale Rekonstruktionsergebnisse.

Die Berechtigung einer zweidimensionalen Betrachtungsweise ist für einige Spezialfälle tatsächlich gegeben. Dazu betrachte man folgendes Problem:

Gegeben sei das zylinderförmige Gebiet

$$\Omega = \{(r, \theta, z) | 0 < r < R, 0 \leq \theta < 2\pi, -H/2 < z < H/2\}$$

und eine von z unabhängige Leitfähigkeitsverteilung σ . Um die Glattheit des Gebietes zu garantieren, hat man sich den Zylinder an den Kanten geeignet abgerundet zu denken.

Gesucht ist nun eine Lösung u des Vorwärtsproblems zu einer Neumannrandbedingung, die nur auf dem Zylindermantel von Null verschieden sei und dort ebenfalls von z unabhängig ist.

Aus der Variationsformulierung des Vorwärtsproblems geht hervor, daß u damit auch das Funktional

$$\begin{aligned} \Phi[u] &= \int_{-H/2}^{H/2} \int_0^{2\pi} \int_0^R \sigma(r, \theta) \left(u_r^2(r, \theta, z) + \frac{u_\theta^2(r, \theta, z)}{r^2} + u_z^2(r, \theta, z) \right) r \, dz \, d\theta \, dr \\ &\quad - \int_{-H/2}^{H/2} \int_0^{2\pi} f(\theta) u(R, \theta, z) R \, dz \, d\theta. \end{aligned}$$

minimiert. Betrachtet man die Funktion $\tilde{u}(r, \theta, z) := u(r, \theta, -z)$, so stellt man fest, daß

$$\begin{aligned}
\Phi[\tilde{u}] &= \int_{-H/2}^{H/2} \int_0^{2\pi} \int_0^R \sigma(r, \theta) \left(\tilde{u}_r^2(r, \theta, z) + \frac{\tilde{u}_\theta^2(r, \theta, z)}{r^2} + \tilde{u}_z^2(r, \theta, z) \right) r \, dz \, d\theta \, dr \\
&- \int_{-H/2}^{H/2} \int_0^{2\pi} f(\theta) \tilde{u}(R, \theta, z) R \, dz \, d\theta \\
&= \int_{-H/2}^{H/2} \int_0^{2\pi} \int_0^R \sigma(r, \theta) \left(u_r^2(r, \theta, -z) + \frac{u_\theta^2(r, \theta, -z)}{r^2} + u_z^2(r, \theta, -z) \right) r \, dz \, d\theta \, dr \\
&- \int_{-H/2}^{H/2} \int_0^{2\pi} f(\theta) u(R, \theta, -z) R \, dz \, d\theta \\
&= \int_{H/2}^{-H/2} \int_0^{2\pi} \int_0^R \sigma(r, \theta) \left(u_r^2(r, \theta, z) + \frac{u_\theta^2(r, \theta, z)}{r^2} + u_z^2(r, \theta, z) \right) r \, (-dz) \, d\theta \, dr \\
&- \int_{H/2}^{-H/2} \int_0^{2\pi} f(\theta) u(R, \theta, z) R \, (-dz) \, d\theta \\
&= \Phi[u]
\end{aligned}$$

ist.

Da die Lösung jedoch eindeutig ist, folgt $u(r, \theta, z) = u(r, \theta, -z)$ und $\partial u / \partial z(r, \theta, 0) = 0$. Folglich fließt kein Strom durch die $z = 0$ -Ebene und das Problem kann separat für die obere und untere Zylinderhälfte behandelt werden. Tut man dies, so erhält man mit den selben Argumenten $\partial u / \partial z(r, \theta, \pm H/4) = 0$. Führt man analog fort, so kommt man zu der erwarteten Schlußfolgerung, daß die Lösungsfunktion nicht von z abhängt. Dann reduziert sich jedoch das Minimierungsproblem in der Art, daß eine Funktion $u(r, \theta)$ gesucht ist, die das Funktional

$$\begin{aligned}
\Phi[\tilde{u}] &= \int_0^{2\pi} \int_0^R \sigma(r, \theta) \left(\tilde{u}_r^2(r, \theta) + \frac{\tilde{u}_\theta^2(r, \theta)}{r^2} \right) r \, d\theta \, dr \\
&- \int_0^{2\pi} f(\theta) \tilde{u}(R, \theta) R \, d\theta
\end{aligned}$$

minimiert. Äquivalent dazu ist die Lösung der Differentialgleichung $\nabla(\sigma \nabla \phi) = 0$ in zwei Dimensionen für den Kreis mit Radius R bei gegebener Neumannrandbedingung $f(\theta)$.

Natürlich ist die soeben diskutierte Situation selten in praktischen Anwendungen zu finden und es ist notwendig, beliebige äußere Stromdichten $j = j(\phi, z)$ zu betrachten. Eine analytische Behandlung des Problems ist allerdings dann nur noch für eine sehr kleine Menge von Leitfähigkeitsverteilungen möglich [54]. Im Fall einer homogenen Leitfähigkeitsverteilung $\sigma \equiv 1$ findet man eine Lösung mit Hilfe des Separationsansatz

$$u(r, \theta, z) = W(r)Q(\theta)Z(z).$$

Dieser führt auf die drei gewöhnlichen Differentialgleichungen

$$\frac{d^2 Z}{dz^2} + k^2 Z = 0, \quad (2.91)$$

$$\frac{d^2 Q}{d\theta^2} + n^2 Q = 0, \quad (2.92)$$

$$\frac{d^2 W}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dW}{dr} - \left(k^2 + \frac{n^2}{r^2} \right) W = 0. \quad (2.93)$$

Die spezielle Wahl der Separationskonstanten führt zu den allgemeinen Lösungen

$$Z(z) = a_z \sin(kz) + b_z \cos(kz), \quad (2.94)$$

$$Q(\theta) = a_\theta \sin(n\theta) + b_\theta \cos(n\theta), \quad (2.95)$$

$$W(r) = a_r I_n(kr) + b_r K_n(kr). \quad (2.96)$$

Die in Gleichung (2.96) auftauchenden Funktionen I_n und K_n sind die sogenannten modifizierten Besselfunktionen, die für reelle Argumente und reelles n reellwertig sind.

Im folgenden soll z die Werte von 0 bis H durchlaufen, was die folgenden Rechnungen etwas bequemer macht. Die Forderung nach einem verschwindenden Stromfluß durch den Boden und den Deckel des Zylinders führt mit der Bezeichnung

$$\lambda_i = \frac{i\pi}{H}$$

zu einer allgemeinen Lösung

$$\begin{aligned} u(r, \phi, z) &= \sum_{n=0}^{\infty} \cos n\phi \left\{ A_{0,n} r^n + \sum_{i=1}^{\infty} A_{i,n} \cos(\lambda_i z) I_n(\lambda_i r) \right\} \\ &+ \sum_{n=1}^{\infty} \sin n\phi \sum_{i=1}^{\infty} B_{i,n} \cos(\lambda_i z) I_n(\lambda_i r). \end{aligned} \quad (2.97)$$

Hierbei wurde bereits die Forderung nach Regularität der Lösungsfunktion berücksichtigt, weshalb die in $x = 0$ divergenten Funktionen $K_n(x)$ nicht in den Doppelsummen auftauchen.

Mit der Differentiationsregel

$$\frac{d}{dx} I_n(x) = \frac{1}{2} (I_{n-1}(x) + I_{n+1}(x))$$

für die modifizierte Besselfunktion I_n bestimmt man

$$\begin{aligned} \left. \frac{d}{dr} u(r, \phi, z) \right|_{r=1} &= \sum_{n=0}^{\infty} \cos n\phi \left\{ n A_{0,n} + \sum_{i=1}^{\infty} A_{i,n} \cos(\lambda_i z) \frac{\lambda_i}{2} (I_{n-1}(\lambda_i R) + I_{n+1}(\lambda_i R)) \right\} \\ &+ \sum_{n=1}^{\infty} \sin n\phi \sum_{i=1}^{\infty} B_{i,n} \cos(\lambda_i z) \frac{\lambda_i}{2} (I_{n-1}(\lambda_i R) + I_{n+1}(\lambda_i R)). \end{aligned} \quad (2.98)$$

Speziell kann man nun eine äußere Stromdichte der Form

$$j_m^\epsilon(\phi, z) = \begin{cases} \cos(m\phi) & , \quad \frac{H}{2} - \epsilon < z < \frac{H}{2} + \epsilon \\ 0 & , \quad \text{sonst} \end{cases} \quad (2.99)$$

betrachten, die nur auf einem Band der Breite 2ϵ von Null verschieden ist.

Zur Bestimmung der Konstanten $A_{i,n}, B_{i,n}$ aus Gleichung (2.97), die zu den harmonischen Funktionen $u_{j_m^\epsilon}$ mit der gewünschten Neumannrandbedingung (2.99) gehören, benötigt man die Fourierkosinuserwicklung (2.40) von j_m^ϵ im Intervall $(0, H)$:

$$\begin{aligned} j_m^\epsilon(\phi, z) &= \left(\frac{2\epsilon}{H} + \frac{2}{H} \left(\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_i} [\sin(\lambda_i x)]_{H/2-\epsilon}^{H/2+\epsilon} \cos(\lambda_i z) \right) \right) \cos(m\phi) \\ &= \left(\frac{2\epsilon}{H} + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{4 \cos(i\pi/2) \sin(\lambda_i \epsilon)}{\lambda_i H} \cos(\lambda_i z) \right) \cos(m\phi). \end{aligned}$$

Die Lösung zum Neumannproblem bezüglich der äußeren Stromdichte j_m^ϵ erhält man demnach mit Gleichung (2.98) durch die folgende Besetzung der Konstanten:

$$A_{0,n} = \frac{2\epsilon}{nH} \delta_{nm} ; \quad B_{i,n} = 0;$$

$$A_{i,n} = \begin{cases} \frac{-8 \sin(\lambda_i \epsilon)}{H \lambda_i^2 (I_{n-1}(\lambda_i R) + I_{n+1}(\lambda_i R))} \delta_{nm} & , \quad i = 2, 6, 10, \dots \\ \frac{8 \sin(\lambda_i \epsilon)}{H \lambda_i^2 (I_{n-1}(\lambda_i R) + I_{n+1}(\lambda_i R))} \delta_{nm} & , \quad i = 4, 8, 12, \dots \\ 0 & , \quad sonst \end{cases}$$

Mit der Ersetzung $i = 2j$ erhält man schließlich

$$u_{j_m^\epsilon}(r, \phi, z) = \cos m\phi \left\{ \frac{2\epsilon r^m}{mH} + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{2 \sin(2\lambda_j \epsilon + j\pi)}{H \lambda_j^2 (I_{m-1}(2\lambda_j R) + I_{m+1}(2\lambda_j R))} \right. \\ \left. \times \cos(2\lambda_j z) I_m(2\lambda_j r) \right\}. \quad (2.100)$$

Ebenso einfach ist es möglich, für äußere Stromdichten der Form

$$j_m^{d_1, d_2, \epsilon}(\phi, z) = \begin{cases} \cos(m\phi) & , \quad d_1 - \epsilon < z < d_1 + \epsilon, d_2 - \epsilon < z < d_2 + \epsilon \\ 0 & , \quad sonst \end{cases} \quad (2.101)$$

eine zugehörige Potentiallösung zu finden. In diesem Fall erhält man die Koeffizienten

$$A_{0,n} = \frac{4\epsilon}{nH} \delta_{nm} ; \quad B_{i,n} = 0;$$

$$A_{i,n} = \frac{-8 \sin(\lambda_i \epsilon) (\cos(\lambda_i d_1) + \cos(\lambda_i d_2))}{H \lambda_i^2 (I_{n-1}(\lambda_i R) + I_{n+1}(\lambda_i R))} \delta_{nm}.$$

Die beiden verschiedenen Typen von hier untersuchten äußeren Stromdichten j_m^ϵ bzw. $j_m^{d_1, d_2, \epsilon}$ sollen dabei in der derzeitigen Praxis verwendete Elektrodensysteme simulieren. Beispielsweise bei der Untersuchung des Brustkorbs in der medizinischen Anwendung der EIT werden dem Patienten ein oder mehrere Gürtel umgeschnallt, die dicht mit Elektroden besetzt sind. Dadurch können am Patienten annähernd solche Stromdichten angelegt werden, wie sie hier diskutiert werden. Bei der Verwendung mehrerer übereinander sitzender Elektroden spricht man auch von einem "Guardelektrodensystem". Üblicherweise erfolgt dabei die Potentialmessung an Elektroden, die zwischen zwei stromführenden Elektroden plziert sind, und über die selbst kein Strom in den Körper ein- oder abfließt.

Zur weiteren Diskussion ist eine asymptotische Darstellung der modifizierten Besselfunktion I_n hilfreich. Es gilt

$$I_n(x) \rightarrow \frac{1}{\Gamma(n+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^n, \quad x \ll 1, \quad (2.102)$$

$$I_n(x) \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2\pi x}} e^x \left(1 + O\left(\frac{1}{x}\right)\right), \quad x \gg 1, n. \quad (2.103)$$

Zunächst folgt aus (2.103), daß beispielsweise die Reihe (2.100) für $r = R$ überhaupt konvergiert, da die Glieder für große j stärker als C/j^2 abfallen. Außerdem wird deutlich, daß unabhängig von der Breite 2ϵ des Strombandes für immer kleiner werdendes H und damit immer größer werdende Argumente in den modifizierten Besselfunktionen der 0-te Term in der Reihenentwicklung (2.97) mit dem “richtigen” $1/m$ -Verhalten gegenüber der restlichen Summe dominiert.

Es ist allerdings problematisch, Aussagen zum Konvergenzverhalten für ein sehr großes H und insbesondere für den interessanten Grenzfall $H \rightarrow \infty$ zu machen.

In der Folge wird exemplarisch der Fall $H = R = 1$ genauer betrachtet. Abbildung (2.10) zeigt für $R = 1$, $H = 1$, $\epsilon = 0.05$, $d_1 = 0.35$ und $d_2 = 0.65$ die resultierenden Potentialverteilungen bei $\phi = 0$ für die Fälle $n = 1, 2, 3$. Dabei werden die Potentiallösungen zu Stromdichten der Form j_m^ϵ mit φ_m bezeichnet, während Potentiallösungen zu Stromdichten der Form $j_m^{d_1, d_2, \epsilon}$ ψ_m lauten.

Zunächst geht aus den Abbildungen ganz offenkundig hervor, daß die Annahme eines in der Ebene $z = 0.5$ fließenden Stromes in beiden Fällen eine sehr starke Vereinfachung der tatsächlichen Situation darstellt. Vielmehr bilden sich für kleiner werdende Werte von r zumindest für den Fall $n = 1$ im linken und im rechten Diagramm überraschend schnell Äquipotentiallinien aus, die andeuten, daß der Stromfluß bei festem r für verschiedene Werte von z annähernd identisch ist. In den linken der dargestellten Diagramme fällt auf, daß an den Orten der Elektroden die Potentialwerte extrem ansteigen, während die Situation in Elektrodennähe für ein Guardelektrodensystem weniger dramatisch erscheint.

Darüber hinaus kann man sich jedoch die Frage stellen, ob die tatsächlich vorliegende Potentialverteilung wenigstens bei $z = 0.5$ mit der in einem zweidimensionalen Modell theoretisch vorhergesagten Funktion übereinstimmt. Eine Antwort auf diese Frage gibt Abbildung (2.11). Zum einen sind hier die Schnitte der Potentialverteilungen aus Abbildung (2.10) mit der Ebene $z = 0.5$ dargestellt. In jedem einzelnen Diagramm ist dies die obere der beiden dargestellten Kurven. Zusätzlich eingezeichnet ist der jeweilige 0-te Term der Reihenentwicklung (2.97). Dieser zeigt nämlich gerade das von der zweidimensionalen Theorie verlangte r^n/n -Verhalten des Radialanteils der Potentialfunktionen zu äußeren Stromdichten der Form $\cos n\phi$.

Aus der Abbildung geht hervor, daß insbesondere in der Nähe der Elektroden eine zweidimensionale Beschreibung die real vorliegende dreidimensionale Situation falsch wiedergibt. Am ehesten erscheint noch bei einem Guardelektrodensystem eine zweidimensionale Problembeschreibung denkbar. Doch auch hier ist die Übereinstimmung mit der zweidimensionalen Theorie nicht perfekt.

Als nächstes soll untersucht werden, welche Neumann-nach-Dirichlet Abbildung in einer zweidimensionalen Approximation bei einem tatsächlich dreidimensionalen zylindrischen Objekt bestimmt wird. Beispielsweise kann man sich fragen, zu welchem Bild ein zweidimensionaler Rekonstruktionsalgorithmus kommt, wenn die aufgenommenen Meßergebnisse von der Untersuchung eines zylinderförmigen Brustkorbs stammen. Würde man also beispielsweise einen überraschenderweise homogen leitenden Brustkorb als einen solchen wiedererkennen?

Dazu wird idealisiert angenommen, daß in dem erwähnten Experiment äußere Stromdichten, wie j_n^ϵ bzw. $j_n^{d_1, d_2, \epsilon}$ mit hoher Genauigkeit an dem Zylinder mit Höhe H und Radius 1 angelegt werden können, und daß es ebenfalls möglich ist, die zugehörigen äußeren Potentialverteilungen bei $z = H/2$ zu bestimmen. Bei der

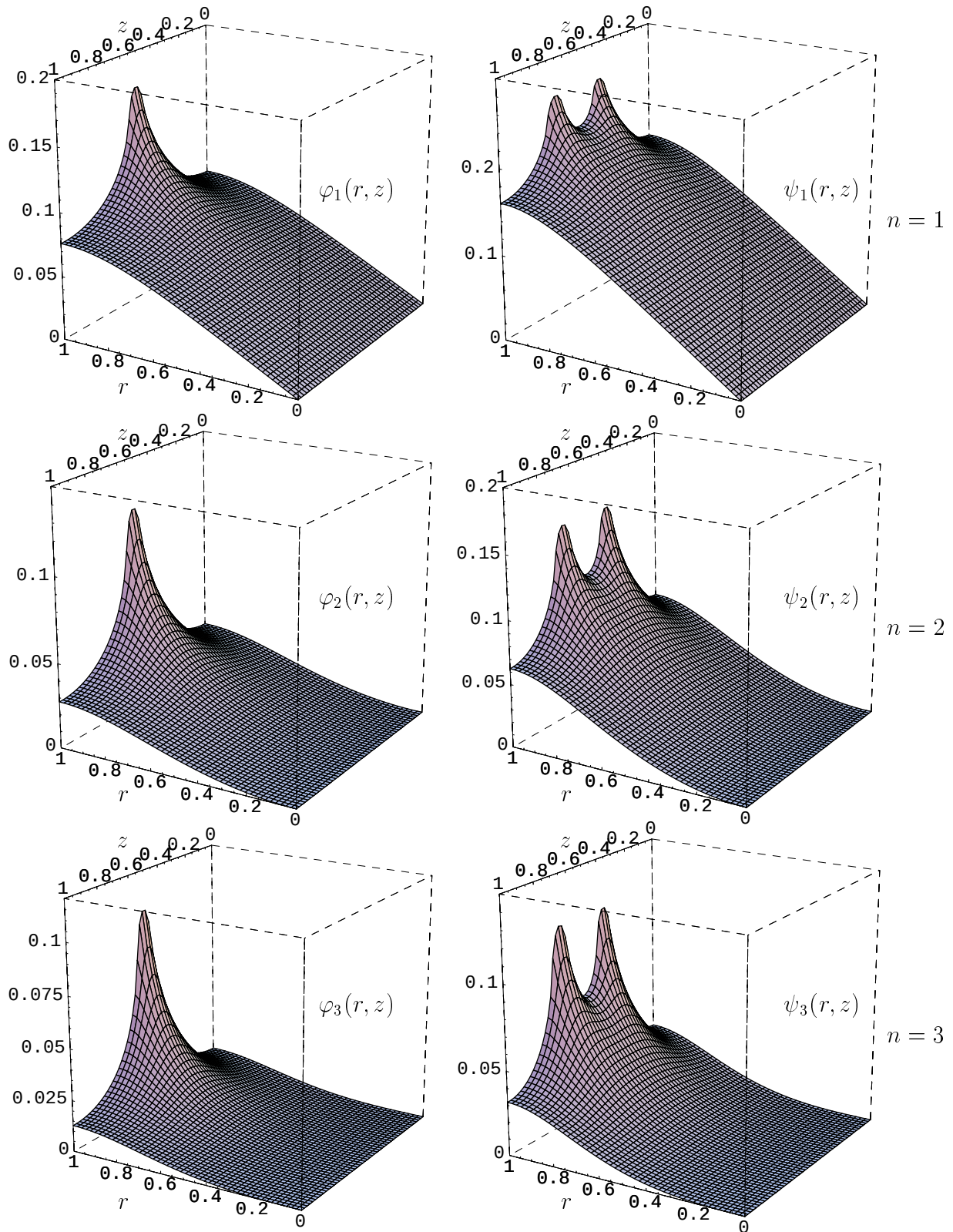


Abbildung 2.10: Vergleich eines herkömmlichen Elektrodensystems mit einem Guardelektrodensystem. Linke Seite: Potentialverteilung $\varphi_n(r, z) := u_{j_n}(r, 0, z)$. Rechte Seite: Potentialverteilung $\psi_n(r, z) := u_{j_n, d_1, d_2, \epsilon}(r, 0, z)$. Dargestellt sind die Fälle $n=1, 2, 3$ für $\epsilon = 0.05$, $d_1 = 0.35$, $d_2 = 0.65$ und $H = 1$

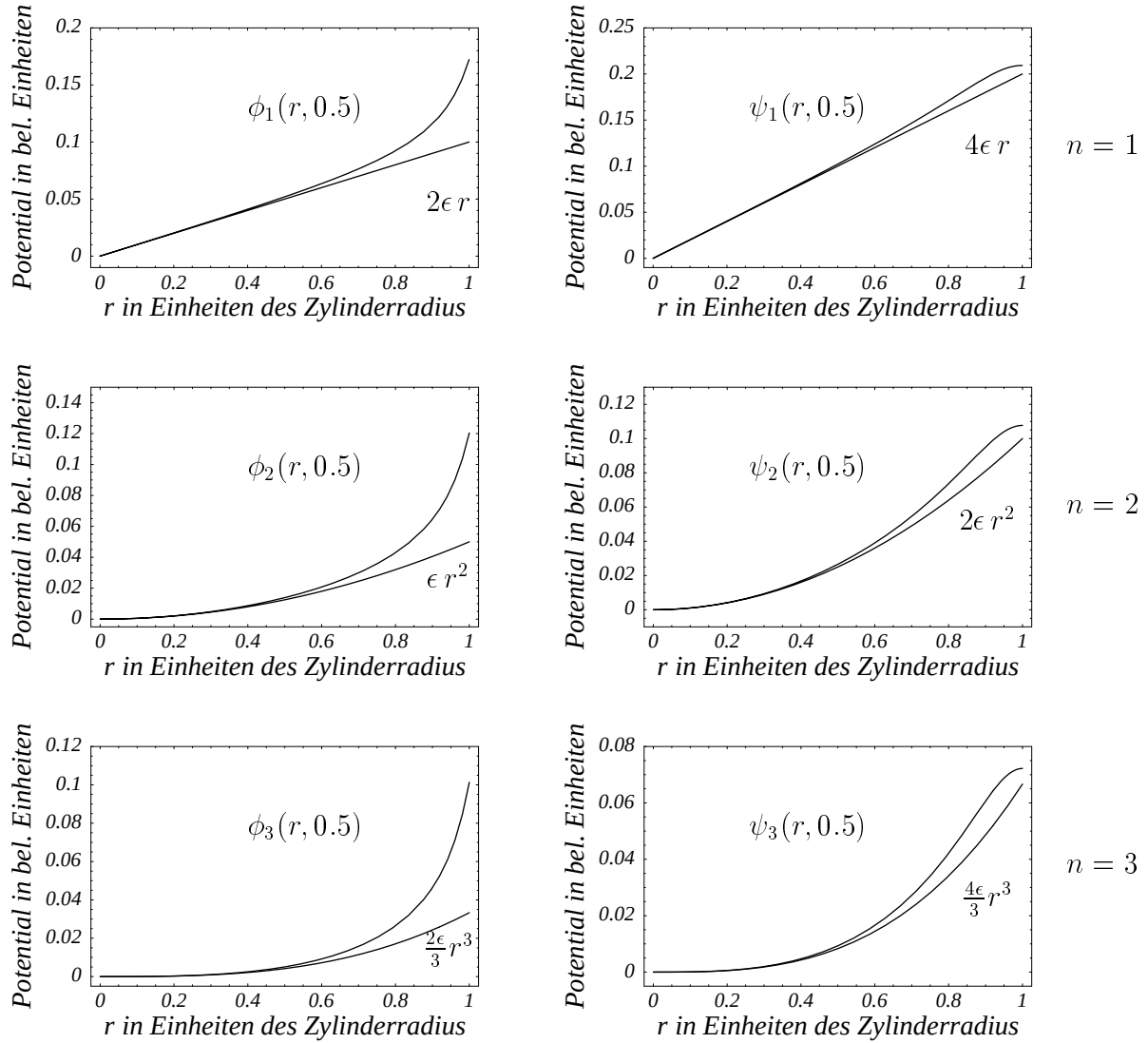


Abbildung 2.11: Vergleich eines herkömmlichen Elektrodensystems mit einem Guardelektrodensystem in der Ebene der Potentialmessung. Linke Seite: Potentialverteilung $\phi_n(r, 0.5) = u_{j_n^\epsilon}(r, 0, 0.5)$. Rechte Seite: Potentialverteilung $\psi_n(r, 0.5) = u_{j_n^{d_1, d_2, \epsilon}}(r, 0, 0.5)$. Die unteren Kurven in jedem Diagramm stellen das 0-te Glied in der jeweiligen Reihenentwicklung (2.97) dar.

Gültigkeit einer zweidimensionalen Problembeschreibung sollte man im Falle einer homogenen Leitfähigkeitsverteilung bis auf einen unwichtigen Skalierungsfaktor das Eigenwertspektrum der Neumann-nach-Dirichlet Abbildung Λ_1 aus Gleichung (2.51) wiederfinden. In diesem Fall würde ein Rekonstruktionsalgorithmus wie gewünscht eine konstante Leitfähigkeitsverteilung liefern.

Zunächst kann man dazu bemerken, daß die von der Theorie vorhergesagten trigonometrischen Eigenfunktionen der Neumann-nach-Dirichlet Abbildung in dem obigen Gedankenexperiment tatsächlich als Eigenfunktionen der gemessenen Neumann-nach-Dirichlet Abbildung gefunden werden. Dies gilt für beide Typen der verwendeten äußeren Stromdichten, denn es gilt

$$u_{j_m^\epsilon}(1, \phi, H/2) = a_m \cos(m\phi), \quad (2.104)$$

$$u_{j_m^{d_1, d_2, \epsilon}}(1, \phi, H/2) = b_m \cos(m\phi). \quad (2.105)$$

Für die Wahl von $\epsilon = 0.1, 0.2, 0.3, 0.4$ zeigt Abbildung (2.12) die resultierenden Amplituden a_m und einen $1/m$ -Fit.

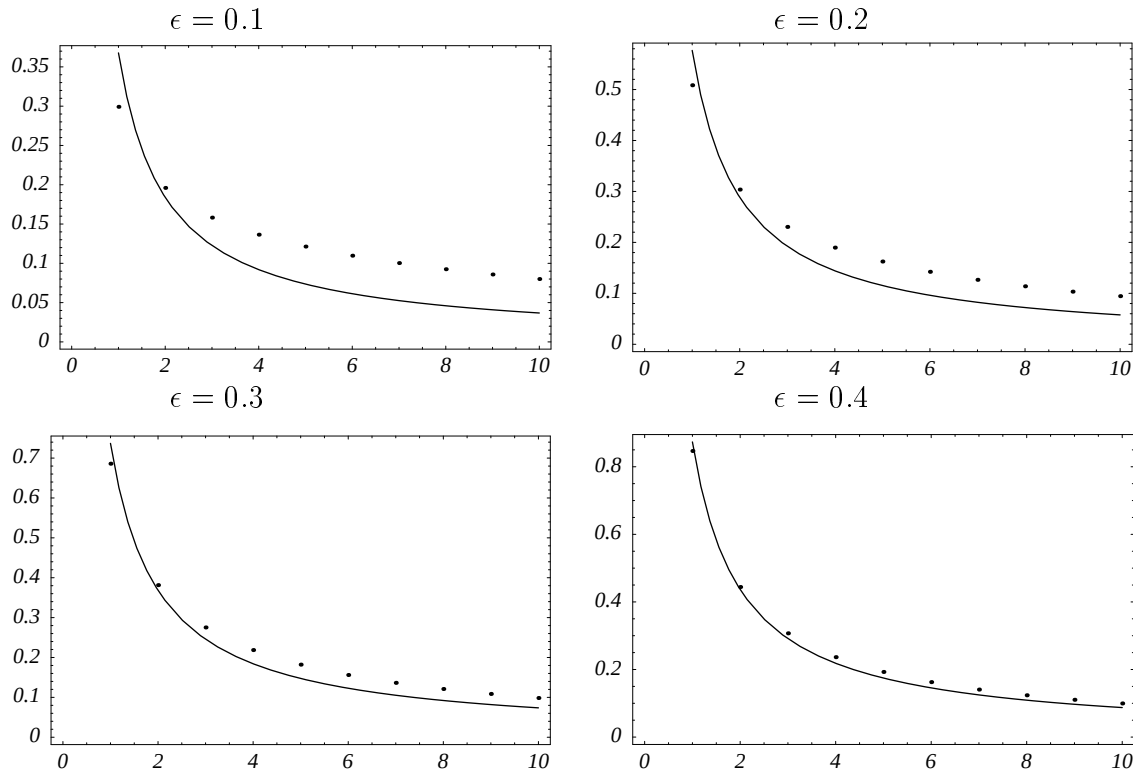


Abbildung 2.12: Verhalten der Amplituden a_n für vier verschiedene Breiten 2ϵ des "Strombandes"

Es wird deutlich, daß für ein zylindrisches Objekt eine zweidimensionale Problembetrachtung ohne Verwendung von Guardelektroden im allgemeinen äußerst kritisch ist, wenn nicht die Höhe H des Zylinders deutlich kleiner als dessen Radius ist.

Das Ergebnis bleibt annähernd das gleiche, wenn man die Potentialverteilung nicht bei $z = H/2$ betrachtet, sondern eine Integration von $z = H/2 - \epsilon$ bis $z = H/2 + \epsilon$ durchführt und die Größen

$$a'_m := \left(\int_{H/2-\epsilon}^{H/2+\epsilon} u_{j_m^\epsilon}(1, \phi, z) dz \right) / (2\epsilon \cos(m\phi)) \quad (2.106)$$

betrachtet. Dies verdeutlicht Abbildung (2.13) für $\epsilon = 0.1, 0.2$.

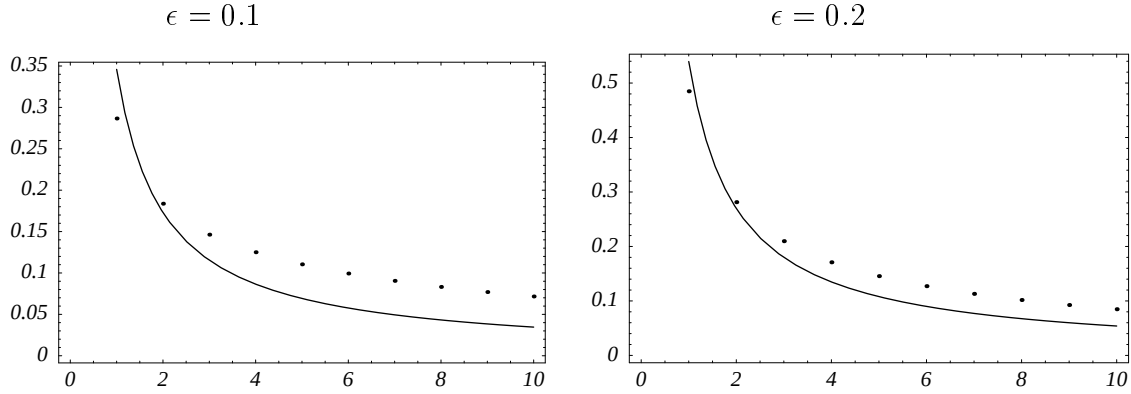


Abbildung 2.13: Verhalten der Amplituden a'_n für zwei verschiedene Breiten 2ϵ des "Strombandes"

Zur Untersuchung von Guardelektrodensystemen kann man in Analogie zur obigen Vorgehensweise für $H = 1$ zwei "Strombänder" der Breite $\epsilon = 0.05$ an den Orten $z = 1/2 \pm 0.15$ betrachten und die resultierende Potentialverteilung bei $z = 1/2$ bestimmen. Damit erhält man unmittelbar die Amplituden b_m aus Gleichung (2.105). Das Ergebnis ist in Abbildung (2.14) dargestellt.

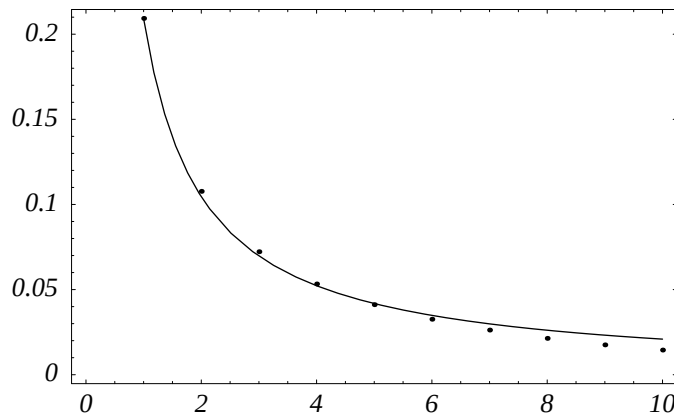


Abbildung 2.14: Verhalten der Amplituden b_n für ein Guardelektrodensystem

Zumindest für eine homogene Leitfähigkeitsverteilung scheint das Guardelektrodensystem eine zweidimensionale Problembetrachtung eher möglich zu machen.

Dennoch ist auch hier die Übereinstimmung mit der zweidimensionalen Theorie und deren Voraussage für die Eigenwerte der Neumann-nach-Dirichlet Abbildung Λ_1 nicht perfekt.

Die Situation für eine andere Zylinderhöhen H muß im Prinzip vollständig neu untersucht werden. Es deutet aber nichts darauf hin, daß die zweidimensionale Formulierung des Problems für sehr große H eher gerechtfertigt ist. Dies soll abschließend ein Vergleich der Potentialverteilungen zu einer Stromdichte mit Winkelabhängigkeit $\cos \phi$ zu den beiden Zylinderhöhen $H = 1$ und $H = 20$ verdeutlichen. Für große Zylinderhöhen scheint demnach das extreme Verhalten der Potentiallösung am Rand noch zuzunehmen.

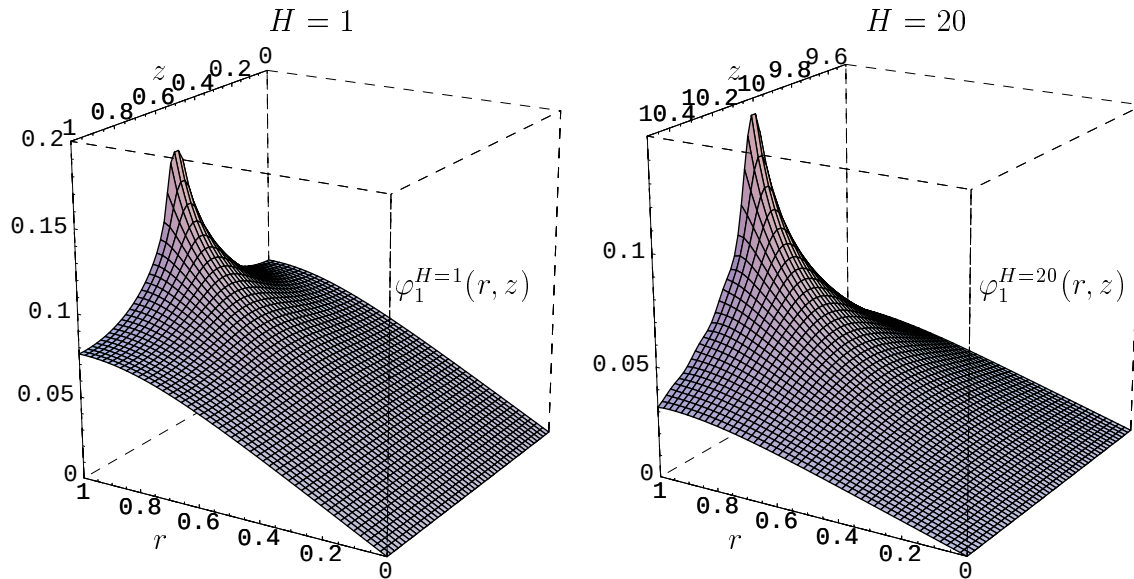


Abbildung 2.15: Vergleich der Potentialverteilungen zu verschiedenen Zylinderhöhen

Ebenfalls sollte noch bemerkt werden, daß sich die hier geführte Diskussion nur auf eine homogene Leitfähigkeitsverteilung $\sigma \equiv 1$ bezog. Völlig unklar ist, inwiefern kompliziertere Leitfähigkeitsverteilungen in der dreidimensionalen Wirklichkeit mit einer zweidimensionalen Theorie verträglich sind.

Kapitel 3

Modellierung der Elektroden

3.1 Einleitung

Um in der elektrischen Impedanztomographie das Vorwärtsproblem genau berechnen zu können, ist ein Verständnis der Gegebenheiten an Orten stromführender Elektroden von großer Bedeutung. Die Forschung auf diesem Gebiet beschränkte sich jedoch bisher weitestgehend auf den zweidimensionalen Fall [18],[51],[52],[62]. Zum einen möchte man verstehen, wie der Potentialmeßwert auf der Elektrode durch einen eventuell existierenden Kontaktwiderstand “verfälscht” sein kann. Zum anderen interessiert aber auch die Stromdichteverteilung auf der Elektrode. Für diese ist zunächst nur das Integral über die Elektrodenfläche, der über die Elektrode einfließende Gesamtstrom, bekannt. Die Art der Verteilung beeinflusst jedoch in starkem Maße die gesamte Potentialverteilung am Rand des untersuchten Körpers.

Da in der elektrischen Impedanztomographie selbst für konstante Leitfähigkeiten eine analytische Lösung des Vorwärtsproblems nur in wenigen Fällen mit einfachen Randbedingungen existiert, ist man im allgemeinen gezwungen, das Problem numerisch zu behandeln. Die Feinheit der dabei verwendeten Diskretisierung des Gebietes ist aber insbesondere bei der Behandlung des Problems in drei Dimensionen für eine präzise Vorstellung der Situation an einer Elektrode unzureichend.

Um eine analytische Rechnung auch mit komplizierten Randbedingungen durchführen zu können, muß daher das real existierende Problem geeignet vereinfacht werden. Eine Möglichkeit dazu bietet die Vorstellung, daß ein Strom über eine Elektrode in den Halbraum fließt und im Unendlichen abfließt. Störungen dieser idealisierten Situation, etwa durch weitere stromführende Elektroden oder durch die Begrenzungen des tatsächlich vorliegenden Gebietes können danach separiert betrachtet werden.

3.2 Untersuchung eines einfachen Elektrodenmodells

Eine mögliche Beschreibung der Situation an einer Elektrode besteht in der Annahme, daß der über die Elektrodenfläche einfließende Strom gerade so verteilt ist, daß das resultierende Potential auf der Elektrode konstant ist. Begründet wird diese

Annahme dadurch, daß die metallische Elektrode als ideal leitend und damit als Äquipotentialfläche angesehen wird. In der Folge sei die Elektrode kreisförmig und habe den Radius 1.

Die Teile des Gebietes $\partial\Omega$, auf denen sich jeweils eine Elektrode befindet, werden mit $E_i, i = 1, \dots, N$ bezeichnet. Weiterhin sei $j_i(\vec{x})$ die Stromdichteverteilung auf der i -ten Elektrode. Es wird dann die Funktion $j(\vec{x}) = \sum_i j_i(\vec{x})$ gesucht, so daß

$$\begin{aligned} \phi(x, y, z) &= \frac{1}{2\pi} \sum_{i=1}^N \int_{E_i} \frac{j_i(\vec{x}')}{\sqrt{(\vec{x} - \vec{x}')^2}} d^2x' = c_j \quad \forall \vec{x} \in E_j, \quad c_j = \text{const.}, \\ \sum_{i=1}^N \int_{E_i} j_i(\vec{x}) d^2x &= 0. \end{aligned}$$

Sind alle Elektroden sehr weit voneinander entfernt, so kann die Situation an einer einzelnen Elektrode entkoppelt von den Einflüssen durch andere Elektroden betrachtet werden. Ebenso kann man o.B.d.A fordern, daß der über diese Elektrode einfließende Gesamtstrom 1 betrage. Legt man den Mittelpunkt der Elektrode in den Nullpunkt des gewählten Koordinatensystems, so kann aus Symmetriegründen die gesuchte Stromdichtefunktion allein vom Betrag des Vektors $\vec{x}$ abhängen: $j = j(|\vec{x}|)$. Bei Benutzung ebener Polarkoordinaten erhält man damit mit $r = |\vec{x}|$

$$\phi(r, \theta, z=0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^1 \frac{j(r') r' dr' d\theta'}{\sqrt{r^2 + r'^2 - 2rr' \cos(\theta - \theta')}}. \quad (3.1)$$

Man findet, daß

$$j(r) = \frac{1}{2\pi} \frac{1}{\sqrt{1-r^2}} \quad (3.2)$$

die gesuchte Funktion ist.

Beweis:

1.

$$\int_E j(\vec{x}) d^2x = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^1 \frac{r dr d\theta}{\sqrt{1-r^2}} = \left[-\sqrt{1-r^2} \right]_0^1 = 1.$$

2. Zur Berechnung des Potentials auf der Elektrode hält man einen Punkt $\vec{x}$ auf der Elektrode fest und geht, wie in Abbildung (3.1) angedeutet, zu den neuen Koordinaten $\rho = |\vec{x} - \vec{x}'|$ und dem Winkel γ über.

Mit Hilfe des Dreiecks ABD erhält man die Beziehung

$$r'^2 = r^2 + \rho^2 - 2r\rho \cos \gamma,$$

und damit

$$\frac{1}{\sqrt{r^2 + r'^2 - 2rr' \cos(\theta - \theta')}} = \frac{1}{\rho}; \quad \frac{1}{\sqrt{1-r'^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-r^2 - \rho^2 + 2r\rho \cos \gamma}}.$$

Um die Grenze $R(\gamma)$ der ρ -Integration zu berechnen, betrachtet man das Dreieck ACD und erhält mit $|\vec{x}| = r$, $\overline{AC} = R(\gamma)$, $\overline{CD} = 1$, $\overline{DA} = r$

$$R(\gamma)^2 + r^2 - 2R(\gamma)r \cos \theta = 1 \Rightarrow R(\gamma) = r \cos(\gamma) \pm \sqrt{1 - r^2 \sin(\gamma)^2}.$$

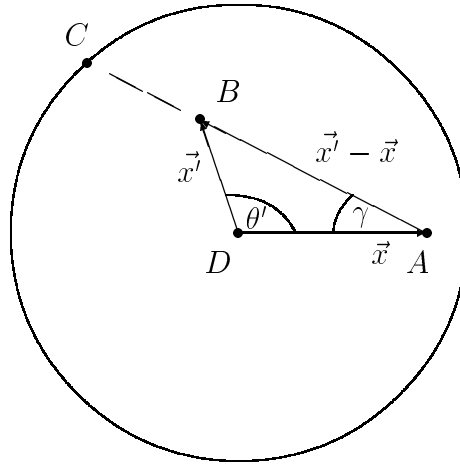


Abbildung 3.1: Zur Potentialberechnung auf der Elektrode

Wegen

$$r \cos(\gamma) - \sqrt{1 - r^2 \sin^2(\gamma)} \leq r \cos(\gamma) - \sqrt{r^2 - r^2 \sin^2(\gamma)} = 0$$

ist damit die Grenze der ρ -Integration durch

$$R(\gamma) = r \cos(\gamma) + \sqrt{1 - r^2 \sin^2(\gamma)}$$

gegeben.

In den neuen Koordinaten lautet das Integral also

$$\begin{aligned} \phi(r, \theta = 0, z = 0) &= \frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^{2\pi} \int_0^1 \frac{r' dr' d\theta'}{\sqrt{1 - r'^2} \sqrt{r^2 + r'^2 - 2rr' \cos \theta'}} \\ &= \frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{r \cos \gamma + \sqrt{1 - r^2 \sin^2 \gamma}} \frac{d\rho d\gamma}{\sqrt{1 - r^2 - \rho^2 + 2r\rho \cos \gamma}} \\ &= \frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^{2\pi} \int_{-r \cos \gamma}^{\sqrt{1 - r^2 \sin^2 \gamma}} \frac{d\rho d\gamma}{\sqrt{1 - \rho^2 - r^2 \sin^2 \gamma}}. \end{aligned}$$

Nach Ausführen der ρ -Integration erhält man

$$\begin{aligned} &\frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^{2\pi} \int_{-r \cos \gamma}^{\sqrt{1 - r^2 \sin^2 \gamma}} \frac{d\rho d\gamma}{\sqrt{1 - \rho^2 - r^2 \sin^2 \gamma}} \\ &= \frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^{2\pi} d\gamma \left[\arcsin \frac{\rho}{\sqrt{1 - r^2 \sin^2 \gamma}} \right]_{-r \cos \gamma}^{\sqrt{1 - r^2 \sin^2 \gamma}} \\ &= \frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^{2\pi} \left\{ \frac{\pi}{2} + \arcsin \frac{r \cos \gamma}{\sqrt{1 - r^2 \sin^2 \gamma}} \right\} d\gamma. \end{aligned}$$

Weiterhin gilt:

$$\begin{aligned}
& \int_0^{2\pi} \arcsin \frac{r \cos \gamma d\gamma}{\sqrt{1 - r^2 \sin^2 \gamma}} \\
&= \int_0^\pi \arcsin \frac{r \cos \gamma d\gamma}{\sqrt{1 - r^2 \sin^2 \gamma}} + \int_\pi^{2\pi} \arcsin \frac{r \cos \gamma d\gamma}{\sqrt{1 - r^2 \sin^2 \gamma}} \\
&= \int_0^\pi \arcsin \frac{r \cos \gamma d\gamma}{\sqrt{1 - r^2 \sin^2 \gamma}} + \int_\pi^0 \arcsin \frac{r \cos (2\pi - \gamma) (-d\gamma)}{\sqrt{1 - r^2 \sin^2 (2\pi - \gamma)}} \\
&= 2 \int_0^{\pi/2} \arcsin \frac{r \cos \gamma d\gamma}{\sqrt{1 - r^2 \sin^2 \gamma}} + 2 \int_{\pi/2}^\pi \arcsin \frac{r \cos \gamma d\gamma}{\sqrt{1 - r^2 \sin^2 \gamma}} \\
&= 2 \int_0^{\pi/2} \arcsin \frac{r \cos \gamma d\gamma}{\sqrt{1 - r^2 \sin^2 \gamma}} + 2 \int_{\pi/2}^0 \arcsin \frac{r \cos (\pi - \gamma) (-d\gamma)}{\sqrt{1 - r^2 \sin^2 (\pi - \gamma)}} \\
&= 2 \int_0^{\pi/2} \left\{ \arcsin \frac{r \cos \gamma}{\sqrt{1 - r^2 \sin^2 \gamma}} - \arcsin \frac{r \cos \gamma}{\sqrt{1 - r^2 \sin^2 \gamma}} \right\} d\gamma = 0.
\end{aligned}$$

Als Endergebnis für das Potential auf einer Elektrode zur Stromdichte $j(r) = 1/(2\pi\sqrt{1-r^2})$ folgt:

$$\phi(r, \theta, z = 0) = \frac{1}{4}, \quad r \leq 1. \quad (3.3)$$

Das singuläre Verhalten der Stromdichteverteilung am Rand der Elektrode ist hierbei kein Phänomen, das nur bei der dreidimensionalen Behandlung des Problems auftaucht. Vielmehr sind auch in der zweidimensionalen Theorie der EIT dann allerdings anders ausgebildete Singularitäten zu beobachten. In der Natur sorgt jedoch die Existenz eines Kontaktwiderstands dafür, daß die Stromdichteverteilung auf einer Elektrode in jedem Fall an jedem beliebigen Punkt auf der Elektrode endlich ist, was in späteren Untersuchungen noch deutlich werden wird.

Zunächst soll jedoch die Potentialverteilung, die aus dem einfachen hier diskutierten Elektrodenmodell hervorgeht, auch außerhalb der Elektrode bestimmt werden.

3.3 Das Potential im Außenraum

Im obigen Abschnitt wurde gezeigt, daß die Stromdichtefunktion $j(r) = 1/(2\pi\sqrt{1-r^2})$ die Eigenschaft besitzt, ein konstantes Potential auf der gesamten Elektrode zu erzeugen. Eine Berechnung des Potentials auf dem gesamten Rand $\partial\Omega$ des Gebietes ist in diesem speziellen Fall ebenfalls leicht möglich. Dafür ist das Integral

$$\phi(r, \theta, z = 0) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^{2\pi} \int_0^1 \frac{r' dr' d\theta'}{\sqrt{1 - r'^2} \sqrt{r^2 + r'^2 - 2rr' \cos \theta'}}, \quad r > 1 \quad (3.4)$$

für Punkte (x, y) außerhalb der Elektrode zu lösen. Wie zuvor geht man dazu zu den Koordinaten ρ und γ über.

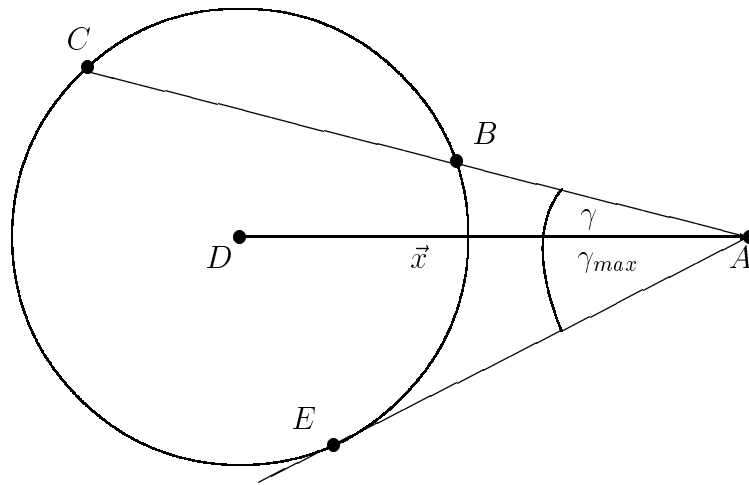


Abbildung 3.2: Zur Potentialberechnung im Außenraum

Dabei ändern sich jedoch nun die Grenzen der Integration. Die Grenzen $R_{min}(\gamma)$ und $R_{max}(\gamma)$ der ρ -Integration ergeben sich durch Betrachten der Dreiecke ABD bzw. ACD in Abbildung (3.2):

$$R_{min}(\gamma) = r \cos \gamma - \sqrt{1 - r^2 \sin^2 \gamma}, \quad R_{max}(\gamma) = r \cos \gamma + \sqrt{1 - r^2 \sin^2 \gamma}.$$

Die Winkelintegration erstreckt sich von $-\gamma_{max}$ bis γ_{max} . Zur Bestimmung dieses Grenzwinkels betrachtet man das rechtwinklige Dreieck ADE und findet

$$\gamma_{max} = \arcsin \frac{1}{r}.$$

Man erhält damit für Punkte außerhalb der Elektrode das Potential

$$\begin{aligned} \phi(r, \theta, z=0) &= \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\gamma_{max}}^{\gamma_{max}} \int_{r \cos \gamma - \sqrt{1 - r^2 \sin^2 \gamma}}^{r \cos \gamma + \sqrt{1 - r^2 \sin^2 \gamma}} \frac{d\rho d\gamma}{\sqrt{1 - r^2 - \rho^2 + 2r\rho \cos \gamma}} \\ &= \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\gamma_{max}}^{\gamma_{max}} \int_{-\sqrt{1 - r^2 \sin^2 \gamma}}^{\sqrt{1 - r^2 \sin^2 \gamma}} \frac{d\rho d\gamma}{\sqrt{1 - \rho^2 - r^2 \sin^2 \gamma}} \\ &= \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\gamma_{max}}^{\gamma_{max}} d\gamma \left[\arcsin \frac{\rho}{\sqrt{1 - r^2 \sin^2 \gamma}} \right]_{-\sqrt{1 - r^2 \sin^2 \gamma}}^{\sqrt{1 - r^2 \sin^2 \gamma}} \\ &= \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\gamma_{max}}^{\gamma_{max}} \left\{ \frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2} \right) \right\} d\gamma = \frac{1}{2\pi} \arcsin \frac{1}{r}. \end{aligned}$$

Da für kleine Winkel $\alpha \sin \alpha \approx \alpha$ gilt, reduziert sich in großer Entfernung von der Elektrode das Potential im Außenraum, wie erwartet, auf das Potential einer Punktelektrode. Abbildung (3.3) zeigt die Potentialverläufe im Falle einer Punktelektrode und im Falle einer Elektrode vom Radius 1. Man erkennt eine schnelle Annäherung der beiden Kurven, so daß mit bloßem Auge schon bei einer Entfernung von ca. 3 Elektrodenradien kaum ein Unterschied zu sehen ist.

Da man typischerweise in der elektrischen Impedanztomographie eine Genauigkeit

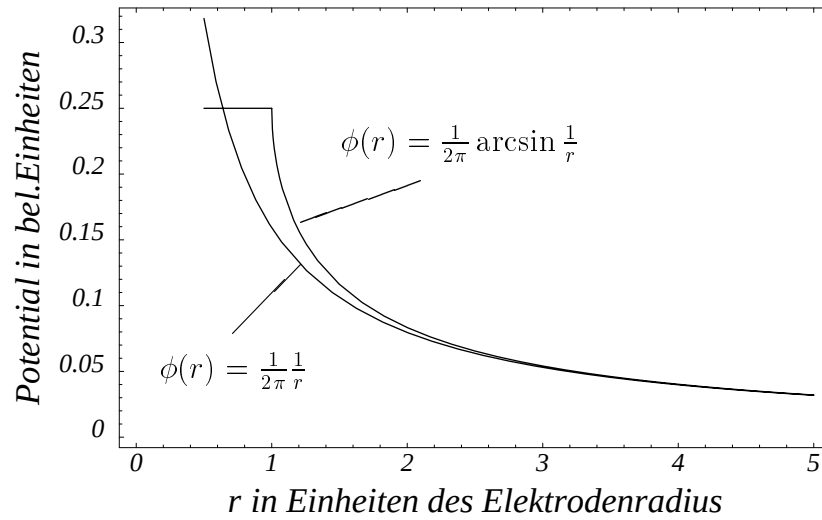


Abbildung 3.3: Vergleich der Potentialverläufe bezüglich einer punktförmigen und einer metallischen Elektrode ohne Berücksichtigung eines Kontaktwiderstands

der Vorwärtsrechnung von 1‰ erreichen möchte (in diesem Rahmen bewegen sich die Meßfehler), ist von Interesse, ab welcher Entfernung eine Berücksichtigung der Elektrodenbreite nicht mehr nötig ist. Man erhält als minimalen Abstand etwa 13 Elektrodenradien. Folglich ist die Verwendung von Punktelektroden im theoretischen Modell zumindest für die Behandlung des Vorwärtsproblems kritisch.

3.4 Korrekturströme

In diesem Abschnitt soll ein Weg gefunden werden, eine Korrektur der Stromdichtefunktion auf einer Elektrode zu finden, die notwendig wird, falls das System durch die Existenz anderer Elektroden gestört wird. Gegeben sind dazu als einfachster Fall zwei stromdurchflossene Elektroden im Abstand R , über die zum einen der Strom $+1$ in den Körper ein-, zum anderen der Strom -1 aus dem Körper abfließt. Die Stromdichten auf beiden Elektroden sollen wiederum so gestaltet sein, daß das resultierende Potential auf beiden Elektroden konstant sei. Dabei entsteht das Problem, daß man die radiale Symmetrie der Lösungsfunktion aufgeben muß. Man sucht daher eine nicht radialsymmetrische Korrekturstromdichte j_p , so daß sich die Stromdichtefunktion auf einer der beiden Elektroden folgendermaßen schreiben läßt:

$$j(r, \theta) = \frac{1}{2\pi\sqrt{1-r^2}} + j_p(r, \theta), \quad \int_E j_p df = 0. \quad (3.5)$$

Dabei soll j_p auf der Elektrode ein Potential erzeugen, das addiert zum Störpotential der zweiten Elektrode wiederum zu einem konstanten Gesamtpotential führt. Ein solcher Korrekturstrom könnte, wie bald deutlich wird, in etwa so aussehen:

$$j_p(r, \theta) = C \frac{2\pi r \cos \theta}{\sqrt{1-r^2}}, \quad C = \text{konst.}$$

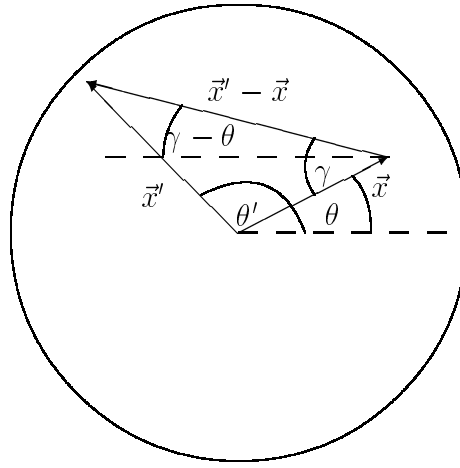


Abbildung 3.4: Zum Korrekturstrom

Der Faktor 2π in obigem Ausdruck hat keinerlei Bedeutung und verkürzt nur die folgenden Rechnungen.

Zunächst ist unmittelbar klar, daß der von j_p verursachte Gesamtstrom über die Elektrode Null ist. Zur Berechnung des von j_p erzeugten Potentials auf der Elektrode geht man wie immer zu dem neuen Koordinatensatz $\rho = |\vec{x} - \vec{x}'|$ und dem Winkel γ über. Abbildung (3.4) verdeutlicht, wie sich j_p in diesen Koordinaten schreibt:

$$j_p(r', \theta') = 2\pi \frac{r' \cos \theta'}{\sqrt{1 - r'^2}} = 2\pi \frac{r \cos \theta - \rho \cos (\gamma - \theta)}{\sqrt{1 - r^2 - \rho^2 + 2r\rho \cos \gamma}}.$$

Damit ergibt sich das Korrekturpotential

$$\phi_p(r, \theta, z = 0) = \int_0^{2\pi} \int_0^{r \cos \gamma + \sqrt{1 - r^2 \sin^2 \gamma}} \frac{r \cos \theta - \rho \cos (\gamma - \theta)}{\sqrt{1 - r^2 - \rho^2 + 2r\rho \cos \gamma}} d\rho d\gamma.$$

Aus den vorigen Abschnitten ist bekannt, daß

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \int_0^{r \cos \gamma + \sqrt{1 - r^2 \sin^2 \gamma}} \frac{r \cos \theta}{\sqrt{1 - r^2 - \rho^2 + 2r\rho \cos \gamma}} d\rho d\gamma \\ = \pi^2 r \cos \theta \end{aligned}$$

ist. Die ρ -Integration für das verbleibende Integral kann ebenfalls problemlos durchgeführt werden:

$$\begin{aligned} & \int_0^{2\pi} \int_0^{r \cos \gamma + \sqrt{1 - r^2 \sin^2 \gamma}} \frac{\rho \cos (\gamma - \theta)}{\sqrt{1 - r^2 - \rho^2 + 2r\rho \cos \gamma}} d\rho d\gamma \\ &= \int_0^{2\pi} \left[- \left(r \arctan \frac{-\rho + r \cos \gamma}{\sqrt{1 - r^2 - \rho^2 + 2r\rho \cos \gamma}} \cos \gamma \right. \right. \\ &+ \left. \left. \sqrt{1 - r^2 - \rho^2 + 2r\rho \cos \gamma} \right) \cos (\gamma - \theta) \right]_0^{r \cos \gamma + \sqrt{1 - r^2 \sin^2 \gamma}} d\gamma. \end{aligned}$$

Die Auswertung der oberen Grenze liefert das Integral

$$\int_0^{2\pi} -r \left(-\frac{\pi}{2}\right) \cos \gamma \cos(\gamma - \theta) d\gamma = \frac{\pi^2}{2} r \cos \theta.$$

Die Auswertung der unteren Grenze ergibt

$$\begin{aligned} & \int_0^{2\pi} - \left(r \arctan \frac{r \cos \gamma}{\sqrt{1-r^2}} \cos \gamma + \sqrt{1-r^2} \right) \cos(\gamma - \theta) d\gamma \\ = & \int_0^\pi -r \arctan \frac{r \cos \gamma}{\sqrt{1-r^2}} (\cos \gamma \cos \theta + \sin \gamma \sin \theta) d\gamma + \\ & \int_\pi^0 -r \arctan \frac{r \cos(2\pi - \gamma)}{\sqrt{1-r^2}} (\cos(2\pi - \gamma) \cos \theta + \sin(2\pi - \gamma) \sin \theta) (-d\gamma) \\ = & -2r \cos \theta \int_0^\pi \arctan \frac{r \cos \gamma}{\sqrt{1-r^2}} \cos^2 \gamma d\gamma \\ = & -2r \cos \theta \left\{ \int_0^{\pi/2} \arctan \frac{r \cos \gamma}{\sqrt{1-r^2}} \cos^2 \gamma d\gamma + \right. \\ & \left. \int_{\pi/2}^0 \arctan \frac{r \cos(\pi - \gamma)}{\sqrt{1-r^2}} \cos^2(\pi - \gamma) (-d\gamma) \right\} \\ = & -2r \cos \theta \left\{ \int_0^{\pi/2} \arctan \frac{r \cos \gamma}{\sqrt{1-r^2}} \cos^2 \gamma - \arctan \frac{r \cos \gamma}{\sqrt{1-r^2}} \cos^2 \gamma d\gamma \right\} = 0. \end{aligned}$$

Als Endergebnis erhält man

$$\phi_p(r, \theta, z = 0) = \frac{\pi^2 r \cos \theta}{2}. \quad (3.6)$$

Die Äquipotentiallinien dieser Verteilung befinden sich parallel zur y-Achse. Der Abfall des Potentials parallel zur x-Achse ist linear. Dies entspricht in guter Näherung einer Potentialverteilung, wie sie von einer hinreichend weit entfernten Elektrode erzeugt wird. Das Potential des Korrekturstroms auf der gesamten Meßebene berechnet man wie zuvor unter Beachtung von Abbildung (3.2). Man erhält:

$$\phi_p(r, \theta, z = 0) = \int_{-\gamma_{max}}^{\gamma_{max}} \int_{r \cos \gamma - \sqrt{1-r^2 \sin^2 \gamma}}^{r \cos \gamma + \sqrt{1-r^2 \sin^2 \gamma}} \frac{r \cos \theta - \rho \cos(\gamma - \theta)}{\sqrt{1-r^2 - \rho^2 + 2r\rho \cos \gamma}} d\rho d\gamma. \quad (3.7)$$

Führt man die ρ -Integration aus (aus dem obigen Abschnitt ist bekannt, daß dazu eine Stammfunktion existiert), so erhält man

$$\begin{aligned} \phi_p(r, \theta, z = 0) &= 2\pi r \cos \theta \arcsin \frac{1}{r} - \int_{-\gamma_{max}}^{\gamma_{max}} d\gamma \, r\pi \cos \gamma \cos(\gamma - \theta) \\ &= 2\pi r \cos \theta \arcsin \frac{1}{r} - \int_{-\gamma_{max}}^{\gamma_{max}} d\gamma \, r\pi \cos^2 \gamma \cos \theta. \end{aligned}$$

Entwickelt man $\cos^2 \gamma$ für kleine Winkel γ , so fällt der in r lineare Term weg und man erhält

$$\phi_p(r, \theta, z = 0) = \frac{2}{3} \pi r \cos \theta \arcsin^3 \frac{1}{r} \approx \frac{2}{3} \pi \cos \theta \frac{1}{r^2}. \quad (3.8)$$

Nun ist man soweit, den Einfluß einer stromdurchflossenen Elektrode E_1 auf eine weitere Elektrode E_2 , die sich im Abstand R von dieser aufhält, abzuschätzen. Dazu sieht man in erster Näherung die Elektrode E_1 , über die der Gesamtstrom I_1 fließen soll, als Punktelektrode an. Die gesamte von Elektrode E_1 herrührende Störpotentialverteilung ϕ_s auf Elektrode E_2 lautet in linearer Näherung

$$\phi_s(r, \theta) = \frac{-I_1 r \cos \theta}{2\pi R^2},$$

was bis auf den Faktor $-I_1/(\pi^3 R^2)$ mit dem Potential aus Gleichung (3.6) übereinstimmt.

Zur Korrektur dieser Störung baut sich demnach auf Elektrode E_2 für $I_1 = 1$ die Stromdichte

$$j_p(r, \theta) = 2\pi \frac{r \cos \theta}{\pi^3 R^2 \sqrt{1-r^2}} = \frac{2r \cos \theta}{\pi^2 R^2 \sqrt{1-r^2}} \quad (3.9)$$

auf.

Das Korrekturpotential hat in hinreichend großer Entfernung die Gestalt

$$\phi_p(r, \theta, z = 0) = \frac{2 \cos \theta}{3\pi^2 R^2} \frac{1}{r^2}. \quad (3.10)$$

Man erkennt hieran, daß der Einfluß einer Elektrode auf eine andere mit dem Quadrat des Abstandes abnimmt. Für die Potentialmessung ist das Gebiet zwischen den beiden Elektroden am meisten von der notwendigen Korrektur betroffen.

3.5 Die Stromverteilung auf einer Elektrode bei nicht verschwindendem Kontaktwiderstand

Die Existenz eines Kontaktwiderstands Z zwischen Elektrode und zu untersuchendem Körper verkompliziert das vorliegende Problem erheblich. Zur Beschreibung der physikalischen Situation muß die an die Potentiallösung geforderte Randbedingung geändert werden. Zur Vereinfachung wird wiederum angenommen, daß alle am Körper anliegenden Elektroden weit genug voneinander entfernt liegen, so daß die alleinige Betrachtung einer Elektrode, über die der Gesamtstrom 1 einfließt, ausreicht. Es zeigt sich, daß die Wahl der folgenden Randbedingung den experimentellen Erfahrungen am besten genügt [51]:

$$\phi(\vec{x}) + Z \sigma(\vec{x}) \frac{\partial \phi}{\partial n}(\vec{x}) = V, \quad \forall \vec{x} \in E, \quad (3.11)$$

$$\sigma(\vec{x}) \frac{\partial \phi}{\partial n}(\vec{x}) = 0, \quad \text{sonst.} \quad (3.12)$$

Hierin ist σ die in der Folge als konstant 1 angenommene Leitfähigkeit des Gebietes, Z der positiv-definite Kontaktwiderstand und V das konstante Potential auf der Elektrode. Die Suche einer Lösung des Potentialproblems unter der so formulierten Randbedingung wird Robinproblem genannt. In dem hier untersuchten Fall der unendlich ausgedehnten Ebene existiert eine lineare Beziehung zwischen Stromdichteverteilung $j \in \mathcal{L}^1(E)$ und der zugehörigen Potentialverteilung $\phi \in \mathcal{L}^1(E)$ in der

Form

$$\phi(x, y, z = 0) = \frac{1}{2\pi} \int_E \frac{j(\vec{x}')}{\sqrt{(\vec{x} - \vec{x}')^2}} d^2 x' =: Aj(x, y). \quad (3.13)$$

Der Kern des linearen Integraloperators A lautet

$$k(\vec{x}, \vec{y}) = \frac{1}{2\pi} \frac{1}{|\vec{x} - \vec{y}|} \quad (3.14)$$

und ist damit schwach singulär (der Grad der Singularität (=1) ist kleiner als die Dimension der Mannigfaltigkeit, über die integriert wird (=2) [66]). Der lineare Operator A ist bezüglich der gewählten $\mathcal{L}^1(E)$ -Topologie stetig und kompakt. Überdies ist A selbstadjungiert und positiv definit. Das Robinrandwertproblem stellt sich damit in dem hier speziell diskutierten Fall als Fredholmsche Integralgleichung zweiter Art dar:

$$Aj + Zj = V. \quad (3.15)$$

Eine eindeutige Lösung existiert nach der Fredholmschen Alternative nur dann, wenn die zugehörige homogene Gleichung $Aj + Zj = 0$ nur die triviale Lösung besitzt. Dies ist für $Z > 0$ wegen der oben erwähnten Eigenschaften von A sicherlich der Fall.

Zur numerischen Lösung des Robinproblems kann man die Tatsache ausnutzen, daß die gesuchte Stromdichteverteilung ebenso wie die zugehörige Potentialfunktion radialsymmetrisch sein müssen. Zur Diskretisierung des Problems bietet es sich daher an, die Elektrode in N Ringe zu zerlegen. Auf diesen Ringen soll die Stromdichtefunktion konstant sein. Wie aus Abbildung (3.5) hervorgeht, sollen der äußere und innere Begrenzungsradius des i -ten Ringes $R_i = i\epsilon$ und $R_{i-1} = (i-1)\epsilon$ betragen, wobei ϵ die Breite der Ringe darstellt. Für N Ringe und einen Elektrodenradius R gilt also $N\epsilon = R$. Bezeichnet man mit j_i die Stromdichte auf dem i -ten Ring, so fließt über diesen Ring ein Gesamtstrom $I_i = j_i(\pi R_i^2 - \pi R_{i-1}^2)$ in das Gebiet ein. Mit $R_i = i\epsilon$ erhält man demnach $I_i = j_i(2i-1)\pi\epsilon^2$. Die Forderung nach einem Gesamtstrom von 1 führt zur ersten Bedingung, die an die j_i gestellt werden muß:

$$\sum_{i=1}^N j_i (2i-1)\pi\epsilon^2 = 1. \quad (3.16)$$

Neben den N unbekannten Größen j_i ist ebenfalls das konstante Elektrodenpotential gesucht. Daher fehlen zur numerischen Lösung des Problems weitere N Gleichungen. Diese findet man dadurch, daß man im Abstand $r_i = (2i-1)\epsilon/2$ eine Potentialberechnung durchführt und das Robinproblem dort diskretisiert formuliert. Sind die Potentiale ϕ_i im Abstand r_i vom Elektrodenzentrum bekannt, so gewinnt man die N Gleichungen:

$$\phi_i + Zj_i = V = \text{const.}, \quad i = 1, \dots, N. \quad (3.17)$$

Zur Berechnung der Potentiale ϕ_i muß die durch einen einzelnen Ring erzeugte Potentialverteilung gefunden werden. Für beispielsweise den n -ten Ring interessiert demnach das Potential

$$\phi_i = \phi(r_i) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_{R_{n-1}}^{R_n} \frac{r' dr' d\phi'}{\sqrt{r_i^2 + r'^2 - 2r_i r' \cos \phi'}}. \quad (3.18)$$

Dabei sind drei Fälle zu unterscheiden:

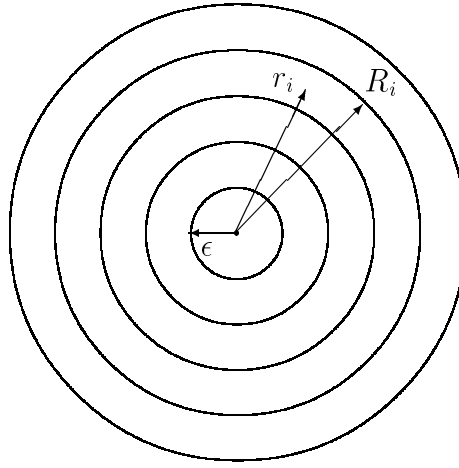


Abbildung 3.5: Zur Diskretisierung des Robinproblems

1. Interessiert das Potential ϕ_i auf einem weiter außen gelegenen Ring ($i > n$), so ist $r_i > R_n$ und es gilt mit $p = \frac{r'}{r_i}$

$$\phi_i = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_{R_{n-1}}^{R_n} \frac{r' dr' d\phi'}{r_i \sqrt{1 + p^2 - 2p \cos \phi'}}.$$

In diesem Integral ist die Winkelintegration durchführbar, denn es gilt [30]

$$\int_0^\pi \frac{d\phi}{\sqrt{1 + p^2 - 2p \cos \phi}} = 2K(p), \quad p^2 < 0,$$

wobei $K(p)$ das vollständig elliptische Integral 1. Art darstellt:

$$K(p) = \int_0^{\pi/2} \frac{d\alpha}{\sqrt{1 - p^2 \sin^2 \alpha}}.$$

Somit folgt

$$\begin{aligned} \phi_i &= \frac{1}{2\pi} \int_{R_{n-1}}^{R_n} \left\{ \int_0^\pi \frac{r' dr' d\phi'}{r_i \sqrt{1 + p^2 - 2p \cos \phi'}} + \int_\pi^{2\pi} \frac{r' dr' d\phi'}{r_i \sqrt{1 + p^2 - 2p \cos \phi'}} \right\} \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{R_{n-1}}^{R_n} \int_0^\pi \frac{r' dr' d\phi'}{r_i \sqrt{1 + p^2 - 2p \cos \phi'}} = \frac{2}{\pi} \int_{R_{n-1}}^{R_n} \frac{r'}{r_i} K\left(\frac{r'}{r_i}\right) dr' \\ &= \frac{2}{\pi} \int_{R_{n-1}/r_i}^{R_n/r_i} r' r_i K(r') dr'. \end{aligned}$$

Jetzt läßt sich auch die r' -Integration durchführen [30]. Man erhält als Endergebnis:

$$\begin{aligned} \phi_i &= \frac{2r_i}{\pi} [E(r') - (1 - r'^2)K(r')]_{R_{n-1}/r_i}^{R_n/r_i} \\ &= \frac{2r_i}{\pi} \left(E(R_n/r_i) - E(R_{n-1}/r_i) - (1 - (R_n/r_i)^2)K(R_n/r_i) \right. \\ &\quad \left. + (1 - (R_{n-1}/r_i)^2)K(R_{n-1}/r_i) \right). \end{aligned} \tag{3.19}$$

Hierin ist

$$E(p) = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - p^2 \sin^2 \alpha} d\alpha$$

das vollständig elliptische Integral 2. Art.

2. Betrachtet man das Potential auf einem weiter innen gelegenen Ring, so gilt $r_i < R_{n-1}$. Nach Ausführen der Winkelintegration erhält man dann

$$\begin{aligned} \phi_i &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_{R_{n-1}}^{R_n} \frac{r' dr' d\phi'}{r' \sqrt{\left(\frac{r_i}{r'}\right)^2 + 1 - 2\frac{r_i}{r'} \cos \phi'}} \\ &= \frac{2}{\pi} \int_{R_{n-1}}^{R_n} K\left(\frac{r}{r'}\right) dr' = \frac{2}{\pi} \int_{r_i/R_{n-1}}^{r_i/R_n} \frac{-r_i}{r'^2} K(r') dr'. \end{aligned}$$

Auch hier läßt sich die r' -Integration durchführen [30] und es folgt

$$\phi_i = \frac{2r_i}{\pi} \left[\frac{E(r')}{r'} \right]_{r_i/R_{n-1}}^{r_i/R_n} \quad (3.20)$$

$$= \frac{2r_i}{\pi} \left(\frac{E(r_i/R_n) R_n}{r_i} - \frac{E(r_i/R_{n-1}) R_{n-1}}{r_i} \right). \quad (3.21)$$

3. Ist das Potential auf dem betrachteten Ring gesucht, so erstreckt sich die r' -Integration von $r_i - \epsilon/2$ bis $r_i + \epsilon/2$. Mit den Ergebnissen aus 1. und 2. erhält man

$$\begin{aligned} \phi_i &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_{r_i - \epsilon/2}^{r_i + \epsilon/2} \frac{r' dr' d\phi'}{\sqrt{r'^2 + r_i^2 - 2r_i r' \cos \phi'}} \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left\{ \int_{r_i - \epsilon/2}^{r_i} \frac{r' dr' d\phi'}{\sqrt{r'^2 + r_i^2 - 2r_i r' \cos \phi'}} \right. \\ &\quad \left. + \int_{r_i}^{r_i + \epsilon/2} \frac{r' dr' d\phi'}{\sqrt{r'^2 + r_i^2 - 2r_i r' \cos \phi'}} \right\} \\ &= \frac{2r_i}{\pi} \left\{ [E(r') - (1 - r'^2) K(r')]_{(r_i - \epsilon/2)/r_i}^1 + \left[\frac{E(r')}{r'} \right]_1^{r_i/(r_i + \epsilon/2)} \right\} \\ &= \frac{2r_i}{\pi} \left\{ \left(1 - \frac{r_i - \epsilon/2}{r_i} \right) K\left(\frac{r_i - \epsilon/2}{r_i} \right) \right. \\ &\quad \left. - E\left(\frac{r_i - \epsilon/2}{r_i} \right) + \frac{r_i + \epsilon/2}{r_i} E\left(\frac{r_i}{r_i + \epsilon/2} \right) \right\}. \end{aligned}$$

Im folgenden ist für den Spezialfall $N = 4$ das zu lösende Gleichungssystem abgebildet.

$$\begin{pmatrix}
 z + \frac{E(\frac{1}{4})}{2\pi} & \frac{2E(\frac{1}{16}) - E(\frac{1}{4})}{2\pi} & \dots \\
 \frac{3(E(\frac{4}{9}) - \frac{5}{9}K(\frac{4}{9}))}{4\pi} & z + \frac{3(-E(\frac{4}{9}) + \frac{4}{3}E(\frac{9}{16}) + \frac{5}{9}K(\frac{4}{9}))}{4\pi} & \dots \\
 \frac{5(E(\frac{4}{25}) - \frac{21}{25}K(\frac{4}{25}))}{4\pi} & \frac{5(-E(\frac{4}{25}) + E(\frac{16}{25}) + \frac{21}{25}K(\frac{4}{25}) - \frac{9}{25}K(\frac{16}{25}))}{4\pi} & \dots \\
 \frac{7(E(\frac{4}{49}) - \frac{45}{49}K(\frac{4}{49}))}{4\pi} & \frac{7(-E(\frac{4}{49}) + E(\frac{16}{49}) + \frac{45}{49}K(\frac{4}{49}) - \frac{33}{49}K(\frac{16}{49}))}{4\pi} & \dots \\
 \frac{\pi}{16} & \frac{3\pi}{16} & \dots \\
 \dots & \frac{3E(\frac{1}{36}) - 2E(\frac{1}{16})}{2\pi} & \frac{4E(\frac{1}{64}) - 3E(\frac{1}{36})}{2\pi} \\
 \dots & \frac{3(2E(\frac{1}{4}) - \frac{4}{3}E(\frac{9}{16}))}{4\pi} & \frac{3(\frac{8}{3}E(\frac{9}{64}) - 2E(\frac{1}{4}))}{4\pi} \\
 \dots & z + \frac{5(-E(\frac{16}{25}) + \frac{6}{5}E(\frac{25}{36}) + \frac{9}{25}K(\frac{16}{25}))}{4\pi} & \frac{5(\frac{8}{5}E(\frac{25}{64}) - \frac{6}{5}E(\frac{25}{36}))}{4\pi} \\
 \dots & \frac{7(-E(\frac{16}{49}) + E(\frac{36}{49}) + \frac{33}{49}K(\frac{16}{49}) - \frac{13}{49}K(\frac{36}{49}))}{4\pi} & z + \frac{7(-E(\frac{36}{49}) + \frac{8}{7}E(\frac{49}{64}) + \frac{13}{49}K(\frac{36}{49}))}{4\pi} \\
 \dots & \frac{5\pi}{16} & \frac{7\pi}{16} \\
 \dots & -1 & \left(\begin{array}{c} j_1 \\ j_2 \\ j_3 \\ j_4 \\ V \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{array} \right) .
 \end{pmatrix}$$

Der Lösungsvektor enthält dabei in den ersten vier Einträgen die gesuchten, auf den Kreisringen konstanten Stromdichten j_i . Der fünfte Eintrag gibt das auf der Elektrode gemessene Potential an. Eine numerische Lösung des Gleichungssystems für fest vorgegebenen Kontaktwiderstand Z findet man problemlos mit Hilfe der algebraischen Programmiersprache Mathematica. Dabei ist zu beachten, daß die elliptischen Funktionen nicht einheitlich wie oben definiert sind. In der Literatur findet man ebenso die Bezeichnungen

$$\begin{aligned}
 K(p) &= \int_0^{\pi/2} \frac{d\alpha}{\sqrt{1 - p \sin^2 \alpha}}, \\
 E(p) &= \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - p \sin^2 \alpha} d\alpha,
 \end{aligned}$$

die so auch in Mathematica verwendet werden.

Nach Erstellen des Programms kann man dessen Genauigkeit dadurch testen, daß man die Stromdichteverteilung für die Situation mit Kontaktwiderstand $Z = 0$ bestimmt. Für einen Elektrodenradius $R = 1$ lautet die exakte Lösung nach Gleichung (3.2) $j_{Z=0}(r) = 1/(2\pi\sqrt{1-r^2})$. Abbildung (3.6) zeigt das Ergebnis der diskretisierten Rechnung für 400 Ringe.

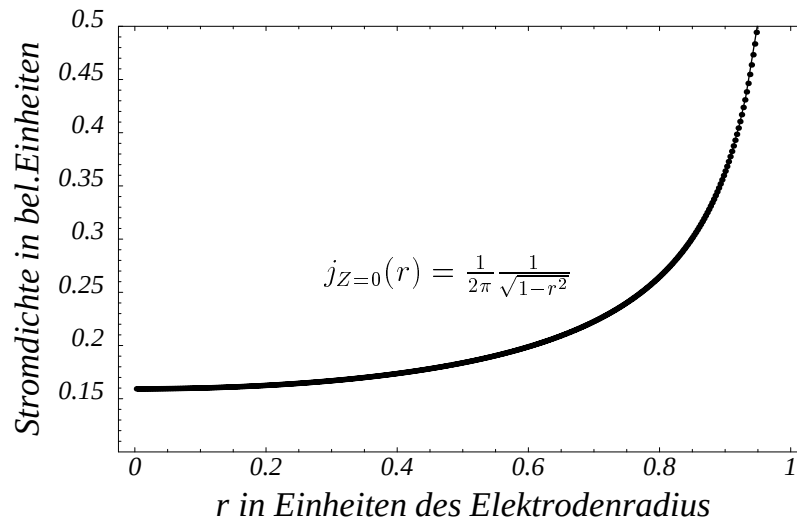


Abbildung 3.6: Vergleich der numerischen und analytischen Bestimmung der radialen Stromdichteverteilung für einen Kontaktwiderstand $Z=0$

Ebenfalls eingetragen ist die exakte analytische Lösung, die hervorragend mit der diskreten Verteilung übereinstimmt. Ebenfalls befriedigend ist das Ergebnis für das an der Elektrode konstante Potential V . Man erhält 0.2501, was eine Abweichung von weniger als 1‰ von dem exakten Wert 0.25 darstellt.

Das Mathematica-Programm bestätigt damit sehr gut die zuvor durchgeführten Rechnungen. Die Potential- und Stromdichteverteilungen für verschiedene Kontaktwiderstände können nun völlig problemlos bestimmt werden, indem der Programmparameter Z von Null verschieden gesetzt wird. Man erhält die in der Abbildung (3.7) dargestellten Verläufe, die sich auf die Kontaktwiderstände $Z = 0.1$ (sehr kleiner Kontaktwiderstand) und $Z = 1000$ (sehr großer Kontaktwiderstand) beziehen. Zur besseren graphischen Darstellung wurden die Punkte durch gerade Linien miteinander verbunden.

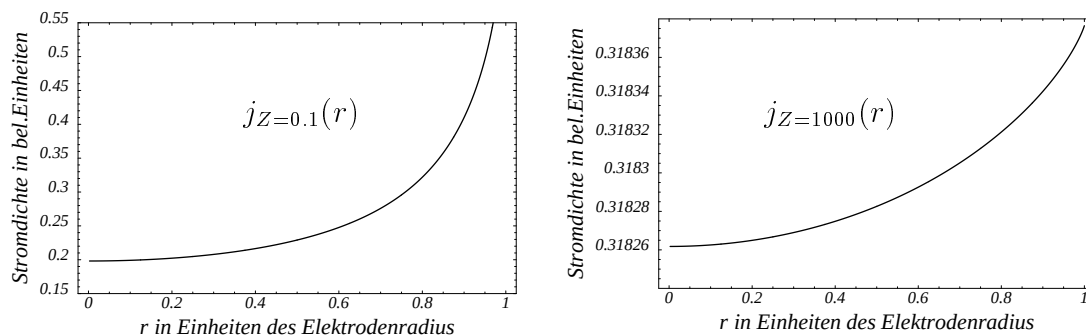


Abbildung 3.7: Radiale Stromdichteverteilung für von Null verschiedene Kontaktwiderstände. Das linke Diagramm bezieht sich auf einen Kontaktwiderstand von $Z=0.1$, das rechte auf $Z=1000$.

Im Falle des sehr kleinen Kontaktwiderstands $Z = 0.1$ läßt sich zunächst kaum eine Änderung zur Verteilung in Abbildung (3.6) erkennen. Dennoch sind die vorhandenen Unterschiede sehr beachtlich. Folgende Punkte sind hervorzuheben:

1. Der Betrag der Stromdichte im Zentrum der Elektrode wächst an. Er beträgt im hier vorliegenden Fall eines Kontaktwiderstands von 0.1 etwa $j_{Z=0.1}(0) = 0.2$. Zu vergleichen ist dies mit dem entsprechenden Wert für $Z = 0$. Dieser ist $j_{Z=0}(0) = 1/(2\pi) \approx 0.16$. Es fließt demnach bei Erhöhung des Kontaktwiderstands mehr Strom durch das Zentrum der Elektrode ein. Kompensiert wird dieses Verhalten durch eine entsprechende Absenkung der Stromdichte am Rand der Elektrode. Damit die Robin-Bedingung $\phi + Zj = V = \text{const.}$ erfüllt ist, muß sogar die Singularität bei $r = 1$ vollständig verschwinden. Leider läßt sich jedoch numerisch nicht bestimmen, zu welchem Wert die Stromdichteverteilung am Rand strebt.
2. Das auf der Elektrode gemessene konstante Potential wächst an und nimmt in dem speziellen Fall mit $Z = 0.1$ einen Wert von ca. 0.29 an. Auch dies ist eine beachtliche Steigerung zu dem Potential von 0.25 im Falle eines Kontaktwiderstands $Z = 0$.

Auch die in der Abbildung rechts dargestellte Stromdichteverteilung ähnelt den zuvor gesehenen.

Die Skalierung der y-Achse zeigt jedoch, daß die Verteilung annähernd konstant ist. Der Wert der Stromdichte im Zentrum beträgt ca. 0.31826. Für das Gesamtpotential auf der Elektrode ergibt sich hier $V = 319$. Für immer größer werdenden Kontaktwiderstand flacht die Kurve immer mehr ab. Im Grenzwert $Z \rightarrow \infty$ fließt der Strom gleichmäßig über die Elektrode ein. Die konstante Stromdichte beträgt dann $j = 1/\pi \approx 0.31831$. Dies ist verständlich, da in der Robin-Gleichung der Term Zj auf der linken Seite den dominierenden Anteil einnimmt.

Hat man bei gegebenem Kontaktwiderstand die Stromdichteverteilung auf der Elektrode wie oben beschrieben numerisch bestimmt, läßt sich auch das zugehörige äußere Potential diskretisiert angeben. Dazu ergänzt man zu den Elektrodenringen weitere Ringe der Breite ϵ außerhalb der Elektrode. Zur Berechnung der gesuchten Potentialverteilung benutzt man Gleichung (3.19).

Von besonderem Interesse ist der Fall $Z \rightarrow \infty$, für den die Stromdichteverteilung auf der Elektrode konstant wird. In diesem Fall ist die zugehörige äußere Potentialverteilung leicht bestimmbar. Nach Gleichung (3.19) ergibt sich mit $R_{n-1} = 0$ und $R_n = 1$ für eine auf 1 normierte Stromdichte

$$\phi(r) = \frac{2r}{\pi^2} \left(E\left(\frac{1}{r}\right) - \left(1 - \frac{1}{r^2}\right) K\left(\frac{1}{r}\right) \right). \quad (3.22)$$

Dies kann man mit dem anderen Extremfall einer konstanten Potentialverteilung auf der Elektrode vergleichen.

In Abbildung (3.8) sind beide Verteilungen dargestellt, wobei die zu einem konstanten Potential auf der Elektrode gehörige Verteilung gestrichelt eingezeichnet ist. Das unterschiedliche Verhalten der beiden Kurvenverläufe ist mit bloßem Auge kaum sichtbar, so daß die Darstellung beider Kurven in einem Diagramm auch nur durch

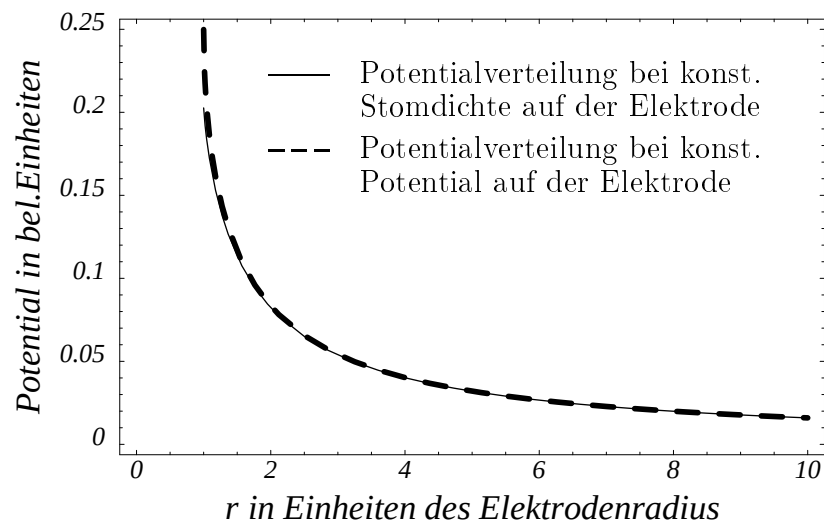


Abbildung 3.8: Vergleich der Potentialverläufe. Die zu konstantem Potential auf der Elektrode gehörige Potentialverteilung ist gestrichelt dargestellt.

eine unterschiedlich stark gewählte Strichstärke realisierbar war. Dennoch existiert ein Unterschied, der durchaus mit den von Störkörpern verursachten Effekten in der gemessenen Potentialverteilung am Rand konkurrieren kann. Dies kann man am besten an Hand eines Fallbeispiels erkennen.

3.6 Ein Fallbeispiel

3.6.1 Fallbeschreibung

Alle bisherigen Überlegungen lassen sich nun an einem Fallbeispiel anschaulich darstellen. Dazu betrachte man Abbildung (3.9).

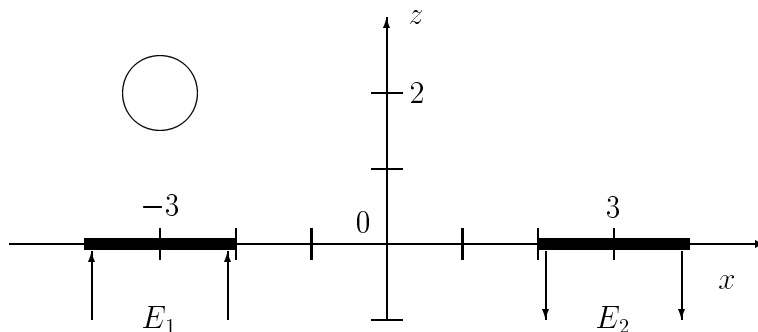


Abbildung 3.9: Ein Fallbeispiel

Im Schnittbild $y = 0$ sind zwei kreisförmige Elektroden E_1, E_2 dargestellt, die

sich auf der $z = 0$ -Ebene befinden, und über die Strom in den Halbraum $z > 0$ ein- bzw. abfließt, wie die Pfeile andeuten. Die Elektroden haben den Radius 1 und befinden sich mit ihren Zentren an den Koordinaten $\vec{x}_1 = (-3, 0, 0)$ und $\vec{x}_2 = (3, 0, 0)$. Unmittelbar vor Elektrode 1 sei ein metallisch leitender kugelförmiger Störkörper. Die Kugel hat den Radius 0.5 und befindet sich mit ihrem Zentrum an den Koordinaten $\vec{x}_K = (-3, 0, 2)$.

Wählt man für die Einheit im Diagramm 0.5 cm, so ist der Abstand des Störkörpers, dessen Durchmesser 0.5 cm beträgt, zum Rand $z = 0$ 1 cm. Die Elektroden haben in diesem Fall ebenso einen Durchmesser von 1 cm. Ihre Mittelpunkte sind 3 cm voneinander entfernt. Damit ist die oben gewählte Situation durchaus praxisnah. Beispielsweise interessiert man sich in der Mammographie für solch kleine Tumore, die eine deutlich höhere Leitfähigkeit haben, als das sie umgebende Gewebe.

Es soll nun geklärt werden, welche Meßgenauigkeit mindestens notwendig ist, um die Effekte der Störung in den Meßdaten zu erkennen. Danach wird untersucht, welche Anforderungen an die Genauigkeit der theoretischen Beschreibung des Problems gestellt werden müssen. Um einen Vergleich verschiedener Potentialverteilungen möglich zu machen, muß eine einheitliche Normierung gewählt werden. In den folgenden Abbildung ist dies die Normierung der Potentiale auf den Wert Null im Punkt $(0, 0, 0)$.

3.6.2 Erforderliche Meßgenauigkeit

Denkt man sich zunächst den Störkörper weg, so bildet sich auf der $z = 0$ -Ebene eine zu einer konstanten Leitfähigkeit gehörige Potentialverteilung aus. Nimmt man weiterhin an, daß die Elektroden metallisch sind und kein Kontaktwiderstand existiert, so erwartet man ohne Berücksichtigung der gegenseitigen Wechselwirkung der Elektroden eine Potentialverteilung ϕ_0 , wie sie in Abbildung (3.10) für $y = 0$ dargestellt ist.

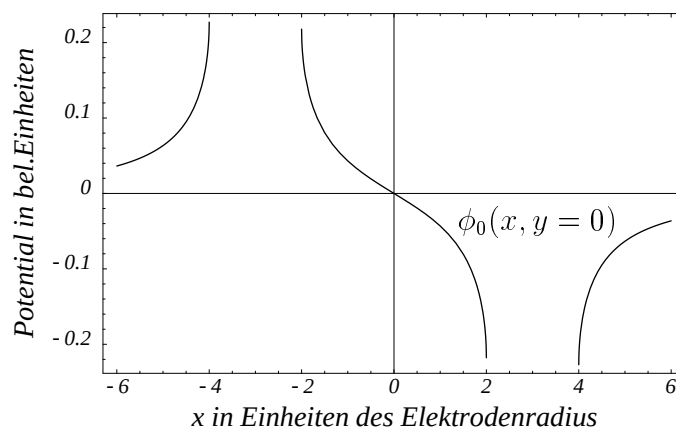


Abbildung 3.10: Ungestörte Potentialverteilung zum Fallbeispiel bei $y = 0$

Setzt man nun den Störkörper in das Gebiet ein, so ändert sich die Potentialverteilung auf der Meßebene, wie im vorigen Kapitel beschrieben wurde. Da der

Störkörper recht klein ist und der Abstand zur Ebene hinreichend groß, ist diese Änderung in sehr guter Näherung ein Dipolpotential. Die Potentialänderung $\delta\phi$ auf der Ebene $z = 0$ wird in Abbildung (3.11) gezeigt.

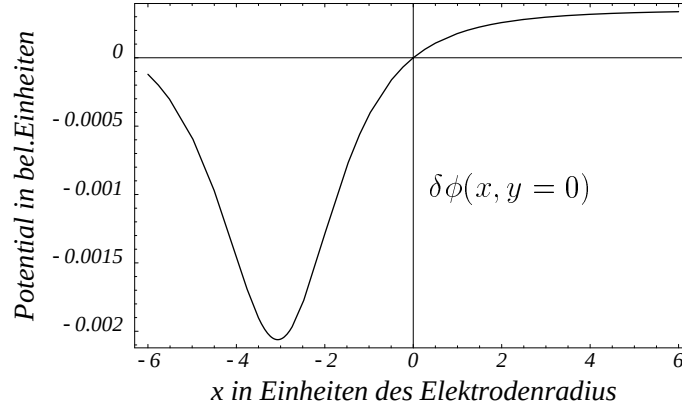


Abbildung 3.11: Vom leitenden Störkörper verursachte Potentialänderung bei $y = 0$

Zur Ermittlung eines vom Störkörper verursachten relativen Effekts ist ein direkter Vergleich der Abbildungen (3.10) und (3.11) jedoch nicht sinnvoll, da in diesem Fall die speziell gewählte Normierung eingehen würde. Eine Betrachtung, die unabhängig von der Normierung ist, bezieht sich nur auf Potentialdifferenzen. Es ist daher sinnvoll, die Ableitungen der Kurven aus obigen Abbildungen zu vergleichen.

In diesem Sinne zeigt Abbildung (3.12), daß die maximale relative Größe der Änderung bei unter 2 Prozent liegt, was überraschend wenig ist. Dennoch sollte bei einer Meßgenauigkeit von üblicherweise 0.1 Prozent der Effekt prinzipiell beobachtbar sein.

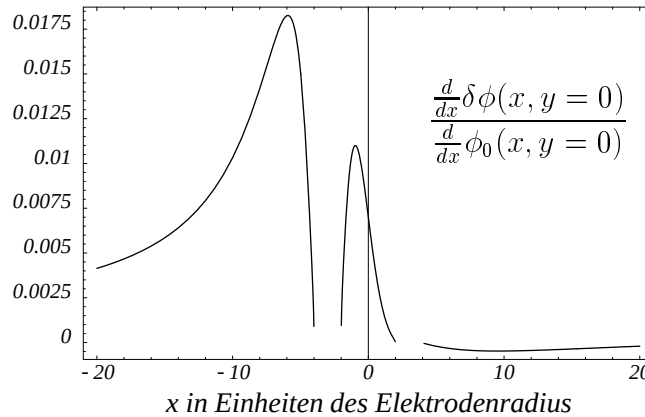


Abbildung 3.12: Relativer Effekt der Störung

Wie aus den Überlegungen der letzten Abschnitte hervorgeht, ist aber die oben berechnete Potentialverteilung zur homogenen Leitfähigkeitsverteilung sicherlich falsch. Zum einen hat man die Auswirkungen eines nicht verschwindenden Kontaktwiderstands zu berücksichtigen. Zum anderen beeinflussen die Elektroden gegenseitig die auf ihnen herrschenden Stromdichteverteilungen.

3.6.3 Auswirkungen des Kontaktwiderstands

Betrachtet man zunächst die Auswirkungen des Kontaktwiderstands, so ist dieser im schlimmsten Fall so groß, daß die Stromverteilung auf beiden Elektroden annähernd konstant ist. Es ist wichtig zu beobachten, daß in diesem Fall die Elektroden auch völlig entkoppelt voneinander beschrieben werden können, da in der Robin-Gleichung (3.11)

$$\phi + Z \sigma \frac{\partial \phi}{\partial n} = V, \quad \forall \vec{x} \in E$$

das an der Elektrode herrschende Potential eine untergeordnete Rolle spielt. Demnach wird auch bei unmittelbar nebeneinander liegenden Elektroden die Stromdichte konstant bleiben.

Die durch einen unendlich großen Kontaktwiderstand verursachte Potentialänderung $\delta\phi_k$ außerhalb der Elektroden ist in Abbildung (3.13) dargestellt. Dabei benutzt man Gleichung (3.22), die die äußere Potentialverteilung zu einer gleichmäßig durchflossenen Elektrode angibt.

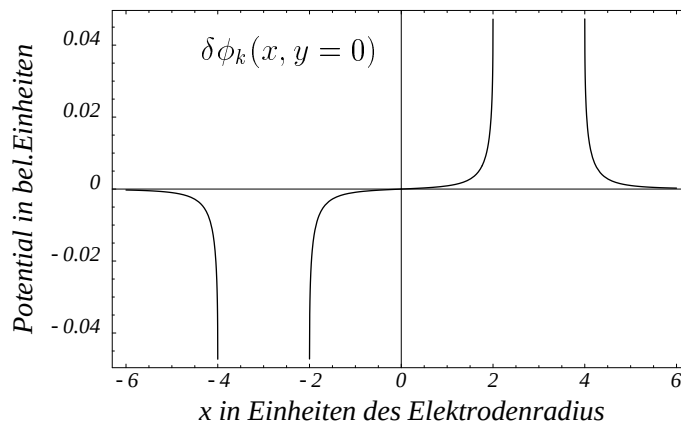


Abbildung 3.13: Korrektur der Potentialverteilung wegen großem Kontaktwiderstand an den Elektroden

Ein Vergleich mit der vom Störkörper verursachten Potentialänderung $\delta\phi$ zeigt wiederum im Intervall $x \in [-1, 1]$ Abbildung (3.14). Zur besseren Unterscheidung der Kurven wurde die vom Kontaktwiderstand hervorgerufene Änderung gestrichelt dargestellt.

Im Diagramm wird deutlich, daß eine genaue Kenntnis des Kontaktwiderstands nicht nur für das auf einer Elektrode gemessene Potential von großer Bedeutung ist.

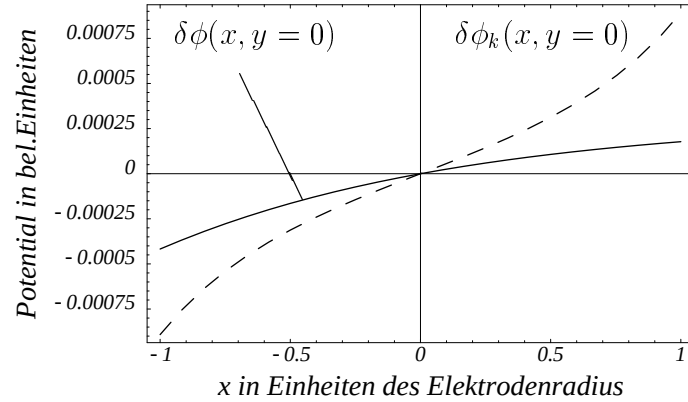


Abbildung 3.14: Vergleich der Potentialverläufe. Die durch die Änderung des Kontaktwiderstands hervorgerufene Potentialverschiebung ist gestrichelt dargestellt.

Die Änderung der Stromdichteverteilung auf der Elektrode verursacht einen global sichtbaren Effekt, der die Erkennung des Störkörpers äußerst problematisch macht.

3.6.4 Effekte der Elektroden

Ist der Kontaktwiderstand vernachlässigbar klein, so dominiert in der Robin-Gleichung (3.11) auf der linken Seite das Potential ϕ . Dies führt dazu, daß man die Elektroden nicht mehr entkoppelt voneinander betrachten darf. Eine nötige Korrektur $\delta\phi_e$ der Potentialverteilung wurde in guter Näherung in Abschnitt 3.4 hergeleitet und ist für den hier betrachteten Fall in Abbildung (3.15) dargestellt.

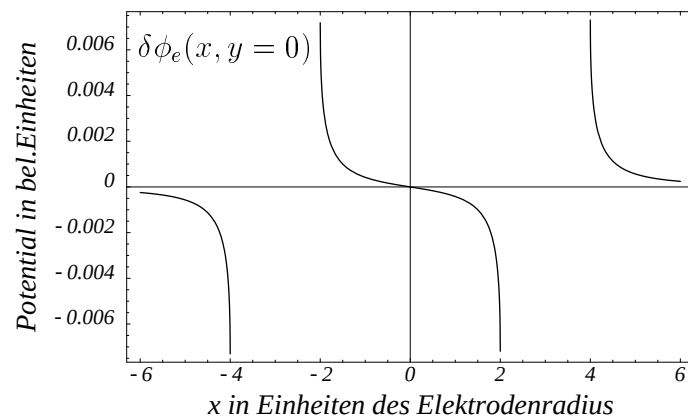


Abbildung 3.15: Korrektur der Potentialverteilung wegen Einfluß anderer Elektroden

Der Vergleich mit der vom Störkörper verursachten Potentialänderung ist in Abbildung (3.16) dargestellt, wobei die Effekte der Elektroden gestrichelt dargestellt

sind.

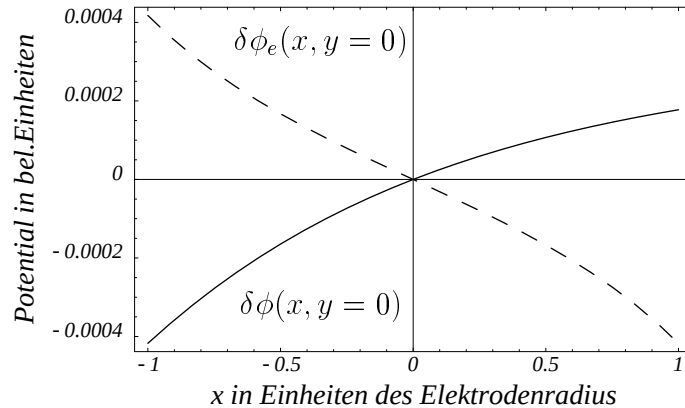


Abbildung 3.16: Vergleich der Potentialverläufe. Die durch die Elektroden verursachten Potentialverschiebungen sind gestrichelt dargestellt.

In der Abbildung wird deutlich, daß für einen Kontaktwiderstand $Z = 0$ die Elektroden keinesfalls entkoppelt voneinander betrachtet werden dürfen. Die damit verbundenen Fehler sind von einer ähnlichen Größenordnung wie im vorigen Abschnitt. Der vom Störkörper herrührende Effekt ist unterdrückt.

3.6.5 Zusammenfassung

In der Untersuchung des oben aufgeführten Fallbeispiels wurde deutlich, daß die Potentialmessung in unmittelbarer Nähe von Elektroden nur mit einem präzisen Verständnis der zugehörigen Stromdichteverteilungen sinnvoll ist. Beide in diesem Abschnitt diskutierten Fehlerquellen in der mathematischen Beschreibung des Vorwärtsproblems können in ihren Auswirkungen die durch einen Störkörper verursachte Änderung der Potentialverteilung überdecken. Ein sehr großer Kontaktwiderstand sollte eine stabile konstante Stromdichte auf den Elektroden unabhängig von deren Plazierungen garantieren. Solange man auf eine Potentialmessung auf stromführenden Elektroden verzichtet, würde ein solcher großer Kontaktwiderstand eine einfache mathematische Modellierung des Problems zulassen. Die Beschreibung der Stromdichteverteilungen auf Elektroden bei einem kleinen Kontaktwiderstand ist komplizierter. In diesem Fall kommt es sehr stark auf die Positionierung der verschiedenen Elektroden an. Die Stromdichteverteilungen können dann in hoher Genauigkeit nur noch numerisch berechnet werden. Dazu jedoch ist ein enorm hoher Rechenaufwand erforderlich. Der im Abschnitt 3.4 aufgezeigte Weg für eine Korrektur der Stromdichten auf Elektroden ist ein möglicher Ausweg, falls alle stromführenden Elektroden hinreichend weit voneinander entfernt sind und nicht über zu viele Elektroden Strom fließt.

Kapitel 4

Linearisierung des Vorwärtsproblems

4.1 Einleitung

Die in Kapitel 2 vorgestellten Lösungen des Vorwärtsproblems stellen eine sehr kleine Auswahl aus den Fällen dar, in denen eine analytische Lösung des Vorwärtsproblems bekannt ist. Eine umfangreichere Auflistung findet sich in [53],[54]. Dennoch ist auch für einfache Geometrien, wie etwa der Kreis in zwei Dimensionen, eine Bestimmung der Neumann-nach-Dirichlet Abbildung im allgemeinen nur numerisch möglich. Auf Grund der Tatsache, daß die in Kapitel 2 vorgestellte Abbildung (2.30)

$$\Lambda : \sigma \mapsto \Lambda_\sigma,$$

die den Zusammenhang zwischen gesuchter Leitfähigkeitsverteilung σ und gemessenem Neumann-nach-Dirichlet Operator Λ_σ beschreibt, nichtlinear ist, können einzelne gefundene Lösungen auch nicht linear kombiniert werden, um weitere Fälle zu beschreiben.

Durch die Linearisierung des Problems ist es möglich, die Auswirkungen kleiner Leitfähigkeitsänderungen in den Meßwerten zu untersuchen. Damit können auch Aussagen über die Stabilität des Vorwärtsproblems bezüglich bestimmter Topologien in der Menge der Leitfähigkeitskoeffizienten getroffen werden. Weiterhin spielt die Linearisierung des Vorwärtsproblems in den meisten Rekonstruktionsalgorithmen eine entscheidende Rolle.

In der Folge wird die Linearisierung des Vorwärtsproblems zunächst ausgehend von der elliptischen Differentialgleichung (2.23) beschrieben. Die wesentlichen Zusammenhänge lassen sich dadurch problemlos ableiten.

Sehr viel prinzipieller ist allerdings die Bestimmung der Fréchet-Ableitung der Neumann-nach-Dirichlet Abbildung im nächsten Abschnitt, die [31] entnommen ist. Hier wird dann auch die Frage nach den erlaubten Funktionenklassen für die Leitfähigkeitsverteilung in der linearisierten Beschreibung des Problems diskutiert.

Ausgangspunkt der folgenden Überlegungen ist also zunächst die schon mehrfach erwähnte elliptische Differentialgleichung (2.23)

$$\nabla(\sigma \nabla \phi) = 0,$$

die in der elektrischen Impedanztomographie den Zusammenhang zwischen gesuchter Leitfähigkeitsverteilung σ und zu verschiedenen Neumannbedingungen gehörigen Potentialverteilungen ϕ beschreibt.

Setzt man die Stetigkeit des Vorwärtsproblems für eine geeignete Wahl der Funktionenklasse für die Leitfähigkeitsverteilung voraus, so führt eine infinitesimale Änderung der Leitfähigkeitsverteilung zu einer infinitesimalen Änderung der Potentialverteilung bei gleichbleibender Neumannrandbedingung.

Sei ϕ_0 Lösung der Differentialgleichung (2.23) für eine Leitfähigkeitsverteilung σ_0 bei fester gegebener Neumannrandbedingung f . Dabei erfüllt ϕ_0 die Normierungsbedingung (2.26), d.h. es ist

$$\int_{\partial\Omega} \phi_0(x)|_{x \in \partial\Omega} ds = 0.$$

Gesucht ist nun eine Lösung der Differentialgleichung $\nabla((\sigma_0 + \delta\sigma)\nabla\phi) = 0$ bei gleicher Neumannrandbedingung und gleicher Normierung. Dabei sei $\delta\sigma$ eine Variation der Leitfähigkeitsverteilung, die am Rand des betrachteten Gebietes verschwindet. Für die Variation der Lösung $\delta\phi$ folgt damit:

$$\begin{aligned} \nabla((\sigma_0 + \delta\sigma)\nabla(\phi_0 + \delta\phi)) &= 0 \\ &= \nabla(\sigma_0 \nabla \phi_0) + \nabla(\sigma_0 \nabla \delta\phi) + \nabla(\delta\sigma \nabla \phi_0) + \nabla(\delta\sigma \nabla \delta\phi). \end{aligned}$$

Der erste der vier Terme ist nach Voraussetzung Null. Vernachlässigt man den letzten Term, so erhält man die Differentialgleichung

$$\nabla(\sigma_0 \nabla \delta\phi) = -\nabla(\delta\sigma \nabla \phi_0). \quad (4.1)$$

Da die Potentialverteilung ϕ_0 bereits der verlangten Neumannrandbedingung f genügt, muß Gleichung (4.1) unter der Neumannrandbedingung $\partial(\sigma_0 \delta\phi)/\partial n = 0$ gelöst werden. Von besonderem Interesse ist der Fall $\sigma_0 \equiv 1$, für den man die Auswirkungen kleiner Änderungen einer homogenen Leitfähigkeitsverteilung untersucht.

Gleichung (4.1) ist für $\sigma_0 \equiv 1$ die Poissongleichung $\Delta\phi = -4\pi\rho$ für eine Ladungsdichteverteilung

$$\rho = \frac{1}{4\pi} \nabla(\delta\sigma \nabla \phi_0).$$

Eine Lösung des Problems existiert, da man verlangt hat, daß die Variation der Leitfähigkeiten am Rand verschwindet. Denn dann gilt

$$\int_{\Omega} \nabla(\delta\sigma \nabla \phi_0) dx = \int_{\partial\Omega} \delta\sigma \frac{\partial \phi_0}{\partial n} ds = 0, \quad (4.2)$$

womit die Gesamtladung verschwindet.

Zur analytischen Lösung des Problems hilft das Greensche Theorem (2.37). Hat man eine Greensfunktion zum Neumannproblem gefunden, die somit die Anforderungen (2.38) und (2.39) erfüllt, so lautet die Lösung zu Gleichung (4.1)

$$\delta\phi(x) = \int_{\Omega} G_N(x, x') \{ \nabla'(\delta\sigma(x') \nabla' \phi_0(x')) \} dx'.$$

Die Potentialänderung $\delta\phi$ erfüllt dabei automatisch die Normierungsbedingung (2.26), was durch die spezielle Konstruktion der Greensfunktion mit der Bedingung (2.39) garantiert ist.

Da die Variation der Leitfähigkeit am Rand nach Voraussetzung verschwindet, erhält man durch partielles Integrieren

$$\delta\phi(x) = - \int_{\Omega} \nabla' G_N(x, x') \cdot \nabla' \phi_0(x') \delta\sigma(x') dx'. \quad (4.3)$$

Der linearisierte Zusammenhang zwischen infinitesimalen Leitfähigkeits- und Potentialänderungen wird also durch eine Fredholmsche Integralgleichung mit Integralkern

$$K(x, x') = -\nabla' G_N(x, x') \cdot \nabla' \phi_0(x') \quad (4.4)$$

beschrieben.

In der Folge sollen idealisiert Punktelektroden betrachtet werden. Ein möglicher Strom fließt dann bei einer Elektrode am Ort x_i in das Gebiet ein, und an einem anderen Ort x_j wieder heraus. Bezeichnet $\phi_{i,j}$ die zugehörige Lösung des Vorwärtsproblems zu $\sigma_0 \equiv 1$, so erzeugt eine Leitfähigkeitsänderung $\delta\sigma$ zwischen zwei Punkten x_k, x_l nach Gleichung (4.3) die Potentialdifferenzänderung

$$\begin{aligned} & \delta\phi(x_k) - \delta\phi(x_l) \\ &= - \int_{\Omega} (\nabla' G_N(x_k, x') - \nabla' G_N(x_l, x')) \cdot \nabla' \phi_{i,j}(x') \delta\sigma(x') dx' \\ &= - \int_{\Omega} \left(\nabla' \int_{\partial\Omega} G_N(x'', x') (\delta(x'' - x_k) - \delta(x'' - x_l)) dx'' \right) \cdot \nabla' \phi_{i,j}(x') \delta\sigma(x') dx' \\ &= - \int_{\Omega} \nabla' \phi_{k,l}(x') \cdot \nabla' \phi_{i,j}(x') \delta\sigma(x') dx'. \end{aligned} \quad (4.5)$$

Gleichung (4.5) liefert für eine Diskretisierung der Leitfähigkeitsverteilung die Einträge der sogenannten Sensitivitymatrix. Sie gibt eine sehr schöne anschauliche Vorstellung über die Auswirkungen kleiner Änderungen von σ in den Potentialmeßwerten.

In dem obigen Beispiel fließt der Strom von einer Punktelektrode am Ort x_i zu einer anderen am Ort x_j . Um bei gegebener Variation der Leitfähigkeitsverteilung $\delta\sigma$ die zugehörige Änderung der Potentialdifferenz bezüglich der Orte x_k und x_l in erster Näherung zu berechnen, denkt man sich an diesen Orten stromführende Elektroden und löst das zugehörige Potentialproblem, um $\phi_{k,l}$ zu erhalten. Die gesuchte Größe $\delta\phi(x_k) - \delta\phi(x_l)$ ergibt sich dann unmittelbar mit Gleichung (4.5).

Zur Bestimmung infinitesimaler Potentialänderungen wird also in diesem Fall nur die Kenntnis der Neumann-nach-Dirichlet Abbildung zu $\sigma_0 \equiv 1$ benötigt.

Für die Ableitung der obigen Gleichungen wurde allerdings die Stetigkeit des Vorwärtsproblems vorausgesetzt. Weiterhin bezog sich die Untersuchung nur auf die infinitesimale Änderung einer homogenen Leitfähigkeitsverteilung. Eine präzisere Beschreibung der Situation ist nur über die Variationsformulierung des Vorwärtsproblems möglich. Der nächste Abschnitt stellt eine sehr knappe Zusammenfassung zur Linearisierung des Vorwärtsproblems aus der bereits erwähnten Vorlesung "Mathematische Grundlagen der elektrischen Impedanztomographie" [31] dar. Eine etwas umfangreichere Darstellung findet sich im Anhang B.2.

4.2 Die Fréchet-Ableitung

Wie bereits mehrfach erwähnt, ist die Meßgröße in der elektrischen Impedanztomographie die Neumann-nach-Dirichlet Abbildung Λ_σ , die in keinem linearen Zusammenhang mit der gesuchten Leitfähigkeitsverteilung σ steht. Bei der Frage nach der Linearisierung des Vorwärtsproblems geht es formell um die Bestimmung der Fréchet-Ableitung Λ' von Λ . Dazu muß jedoch zunächst einmal die Frage nach der Gutgestelltheit des Vorwärtsproblems beantwortet werden.

Dazu seien zwei Leitfähigkeitsverteilungen σ_1, σ_2 , die beide nach oben und unten beschränkt sind, gegeben:

$$0 < \underline{\sigma} \leq \sigma_1, \sigma_2 \leq \bar{\sigma} < \infty.$$

Bei gegebener Stromvorgabe $f \in \mathcal{L}_\diamond^2(\partial\Omega)$ führt die Lösung des Vorwärtsproblems nach Kapitel 2 zu zwei Potentialfunktionen $u_1, u_2 \in H_\diamond^1(\Omega)$. Wie man zeigen kann, gilt

$$\|u_1 - u_2\|_{H_\diamond^1(\Omega)} \leq \frac{2}{\underline{\sigma}^2} \|f\|_{\mathcal{L}_\diamond^2(\partial\Omega)} \|\sigma_2 - \sigma_1\|_\infty. \quad (4.6)$$

Besondere Beachtung verdient die Verwendung der Maximumnorm $\|\cdot\|_\infty$ in der Menge der Leitfähigkeitskoeffizienten. Leider ist eine ähnliche Aussage bei Verwendung der $\mathcal{L}^2(\Omega)$ -Topologie nicht möglich.

Ansonsten sind die durch Gleichung (4.6) beschriebenen Zusammenhänge recht gut anschaulich verständlich. Die Verwendung größerer äußerer Ströme f führt zu größeren Änderungen in den resultierenden Potentialen. Ebenso sorgt grob gesprochen eine große untere Schranke $\underline{\sigma}$, also große Werte der Leitfähigkeitsverteilungen σ_1, σ_2 für kleine Werte der Potentiallösungen u_1, u_2 .

Der Weg zu einer Fréchet-Ableitung von Λ führt über die Bestimmung der Fréchet-Ableitung einer Zuordnungsfunktion F_f , die bei fester Neumannrandbedingung f einer Leitfähigkeitsverteilung σ die zugehörige Lösung des Potentialproblems u zuweist:

$$\begin{aligned} F_f &: \mathcal{L}_+^\infty(\Omega) \rightarrow H_\diamond^1(\Omega), \\ F_f &: \sigma \mapsto u = \Lambda_\sigma f. \end{aligned}$$

Bezeichnet $u = F_f(\sigma)$ die Lösungsfunktion zu einer Leitfähigkeitsverteilung σ und $u + u' = F_f(\sigma + h)$ die Lösungsfunktion zur Verteilung $\sigma + h$, so ist das Ziel, eine Beziehung zwischen u' und h für kleine Änderungen h abzuleiten.

Man findet, daß der Operator

$$F'_f(\sigma) : \mathcal{L}^\infty(\Omega) \rightarrow H_\diamond^1(\Omega) \quad , \quad F'_f(\sigma)h = u', \quad (4.7)$$

$$\int_\Omega \sigma \nabla u' \cdot \nabla v \, dx = - \int_\Omega h \nabla u \cdot \nabla v \, dx \quad \forall v \in H_\diamond^1(\Omega) \quad (4.8)$$

die Fréchet-Ableitung von F_f ist. Es gilt

$$\|F_f(\sigma + h) - F_f(\sigma) - F'_f(\sigma)h\|_{H_\diamond^1(\Omega)} \leq \frac{2}{\underline{\sigma}^3} \|f\|_{\mathcal{L}^2(\partial\Omega)} \|h\|_\infty^2. \quad (4.9)$$

Das eigentliche Interesse bezieht sich jedoch auf die Differenzierbarkeit im “Meßwertraum”, d.h die Differenzierbarkeit des Neumann-nach-Dirichlet Operators. Dieser bildet äußere Stromverteilungen auf die resultierenden äußeren Potentialverteilungen ab. Unter Verwendung des Spurooperators γ , der einer Funktion $u \in H^1_\diamond(\Omega)$ die Randwertverteilung zuordnet, liegt es damit nah, den Operator

$$(\Lambda'(\sigma)h)f = \gamma F'_f(\sigma)h, \quad h \in \mathcal{L}^\infty(\Omega), \quad f \in \mathcal{L}^2_\diamond(\partial\Omega) \quad (4.10)$$

zu betrachten.

Bis hierher verliefen alle Betrachtungen in völliger Allgemeinheit. Speziell für den zweidimensionalen Fall des Einheitskreises läßt sich weiter zeigen, daß $\Lambda'(\sigma)$ bezüglich der Hilbert-Schmidt Norm $||| \cdot |||_{HS}$ die Fréchet-Ableitung der Neumann-nach-Dirichlet Abbildung darstellt.

In diesem Fall gilt

$$|||\Lambda(\sigma + h) - \Lambda(\sigma) - \Lambda'(\sigma)h|||_{HS} \leq \frac{32}{\sigma^6} \|h\|_\infty^4 \sum_{n=1}^{\infty} n^{-2}. \quad (4.11)$$

Interessant ist die schwache Formulierung dieser Aussage. Für zwei Funktionen $f, g \in \mathcal{L}^2_\diamond(\partial\Omega)$ und zugehörige Potentiale u, v bezüglich vorgegebener Leitfähigkeitsverteilung σ kann man zeigen, daß

$$\langle (\Lambda'(\sigma)h)f, g \rangle = - \int_{\Omega} h \nabla u \cdot \nabla v \, dx \quad (4.12)$$

gilt.

Ausdrücke des Typs $\langle \Lambda f, g \rangle$ stellen aber gerade die aufgenommenen Meßwerte für äußere Stromdichtefunktionen f und Potential messende Funktionen g dar. Im entarteten Fall punktförmiger Elektroden erkennt man Gleichung (4.5) wieder, die aber nur für eine Leitfähigkeitsverteilung $\sigma \equiv 1$ abgeleitet worden war.

4.3 Spezielle Fälle

Wie aus den vorigen Abschnitten hervorgeht, ist zur Bestimmung der Auswirkungen einer Variation der Leitfähigkeitsverteilung in erster Näherung nur die Kenntnis der Potentiallösungen zum ungestörten Fall nötig. Von besonderem Interesse für die praktische Anwendung sind der Kreis in zwei und der Halbraum in drei Dimensionen. In Kapitel 2 wurden analytische Lösungen zu einer homogenen Leitfähigkeitsverteilung $\sigma \equiv 1$ angegeben. Mit den obigen Überlegungen lassen sich nun Effekte kleiner Störungen angeben.

4.3.1 Der zweidimensionale Fall

Speziell für das Neumannproblem auf dem Einheitskreis findet man nach Kapitel 2 die Greensfunktion

$$\begin{aligned} & G_N(r, \phi, r', \phi') \\ = & -\frac{1}{4\pi} \left\{ \ln(r^2 + r'^2 - 2rr' \cos(\phi - \phi')) + \ln(1 + r'^2 r^2 - 2rr' \cos(\phi - \phi')) \right\}. \end{aligned}$$

Nach Gleichung (4.12) lassen sich damit leicht die Auswirkungen einer kleinen Störung $\delta\sigma$ einer homogenen Leitfähigkeitsverteilung $\sigma_0 \equiv 1$ angeben. Bezeichnet ϕ_0 die Potentiallösung zu vorgegebener äußerer Stromdichte f , so folgt für die äußere Potentialänderung $\delta\phi$

$$\begin{aligned} & \langle \delta\phi, g \rangle_{\mathcal{L}_s^2(\partial\Omega)} \\ &= - \int_{\Omega} \nabla' \left(\int_{\partial\Omega} G_N(1, \phi, r', \phi') g(\phi) d\phi \right) \cdot \nabla' \phi_0(r', \phi') \delta\sigma(r', \phi') r' dr' d\phi' \\ &= \int_{\partial\Omega} \left(- \int_{\Omega} \nabla' G_N(1, \phi, r', \phi') \cdot \nabla' \phi_0(r', \phi') \delta\sigma(r', \phi') r' dr' d\phi' \right) g(\phi) d\phi. \end{aligned}$$

Speziell für $r = 1$ hat die Greensfunktion in kartesischen Koordinaten die einfache Gestalt

$$G_N(\vec{x}, \vec{x}')|_{|\vec{x}|=1} = -\frac{1}{\pi} \ln(|\vec{x} - \vec{x}'|).$$

Damit gilt

$$\nabla' G_N(\vec{x}, \vec{x}')|_{|\vec{x}|=1} = \frac{1}{\pi} \frac{(\vec{x} - \vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|^2}.$$

Für den entarteten Fall einer Punktstörung der Form

$$\delta\sigma(\vec{x}) = \delta(\vec{x} - \vec{x}_0)$$

ist demnach die Änderung der äußeren Potentialverteilung in erster Näherung durch

$$\delta\phi(\vec{x}) = -\frac{(\vec{x} - \vec{x}_0) \cdot \nabla\phi_0(\vec{x}_0)}{\pi|\vec{x} - \vec{x}_0|^2}$$

gegeben.

Daraus lassen sich folgende Dinge ablesen

- Betrachtet man im speziellen den Randpunkt in Richtung des ungestörten Stroms, so ergibt sich bei einer Erhöhung der Leitfähigkeit am Ort $\vec{x}_0$ der Störung eine Erniedrigung des Randpotentials, was physikalisch sinnvoll ist.
- Die durch die Existenz eines Störkörpers hervorgerufenen Effekte in der Potentialverteilung nehmen mindestens reziprok zum Abstand des Störkörpers vom Rand ab.
- Eine Vergrößerung der Potentialänderung wird einzig und allein durch eine Erhöhung des ungestörten Stroms am Ort der Störung hervorgerufen.

Aus dem dritten der genannten Punkte geht hervor, daß die Wahl der äußeren Stromdichten im Experiment von großer Bedeutung ist. Speziell für den Fall des Kreises sorgen kosinusartige äußere Stromdichten $j(\phi) = \cos n\phi$ für kleine n für eine mehr oder weniger gleichmäßige Verteilung des Stroms im gesamten Gebiet. Für $n = 1$ ist bei einer homogenen Leitfähigkeit die Stromdichte in jedem Punkt gleich groß.

Große Werte von n entsprechen stark oszillierenden äußeren Stromdichten, die hingegen nicht weit in das Gebiet eindringen, so daß hierdurch nur Informationen über die Leitfähigkeitsverteilung in unmittelbarer Randnähe gewonnen werden.

4.3.2 Der dreidimensionale Fall

Die Linearisierung des Problems im dreidimensionalen Fall läßt sich am besten an Hand des Halbraums verdeutlichen. Die Greensfunktion zum Neumannproblem hat auf der Randebene die Gestalt

$$G_N(\vec{x}, \vec{x}')|_{\vec{x} \in \partial\Omega} = \frac{1}{2\pi|\vec{x} - \vec{x}'|}.$$

Damit ergibt sich in Analogie zu den obigen Rechnungen für die Änderung der Potentialverteilung durch das Einbringen eines punktförmigen Störkörpers am Ort $\vec{x}_0$ unnormiert

$$\delta\phi(\vec{x}) = -\frac{(\vec{x} - \vec{x}_0) \cdot \nabla\phi_0(\vec{x}_0)}{2\pi|\vec{x} - \vec{x}_0|^3}. \quad (4.13)$$

Die Unnormierbarkeit der Lösung spielt dabei keine Rolle, da sowieso nur Potentialdifferenzen zwischen verschiedenen Punkten auf einem beschränkten Teilgebiet der Grenzebene meßbar sind.

An der abgeleiteten Gleichung ist auffällig, daß im Gegensatz zum zweidimensionalen Fall die Stärke der Potentialänderung mindestens quadratisch zum Abstand des Störkörpers vom Rand abnimmt. Dies ist anschaulich dadurch zu erklären, daß in drei Dimensionen der Strom eine weitere Dimension zum Umfließen der Störung besitzt. Die Bestimmung eines zweidimensionalen Schnittbilds einer dreidimensionalen Leitfähigkeitsverteilung ist damit generell problematisch. Die in der tatsächlichen dreidimensionalen Welt erzeugten meßbaren Effekte einer Störung können in einem zweidimensionalen Modell falsch interpretiert werden.

4.4 Grenzen der Zulässigkeit einer Linearisierung

In den vorherigen Abschnitten wurde das Potentialproblem für eine homogene Leitfähigkeitsverteilung mit infinitesimaler Störung untersucht. Eine Linearisierung dieses Problems führte zu einer Beziehung zwischen Leitfähigkeitsänderung im Inneren des untersuchten Gebietes und zugehöriger Änderung der Lösung des Potentialproblems am Gebietsrand. Diese linearisierte Beschreibung des Problems führt allerdings bei starken Änderungen der Leitfähigkeitsverteilung zu völlig falschen Resultaten. Als Beispiel kann der Fall eines metallisch leitenden Störkörpers im Halbraum dienen. Die durch das Einbringen eines solchen Störkörpers mit Radius ϵ am Ort $\vec{x}_0$ verursachte Potentialänderung am Rand wurde in Kapitel 2 abgeleitet. Bei hinreichend großem Abstand zur Meßebeene gilt Gleichung (2.75)

$$\phi_{korr}(\vec{x}) = -\frac{2\epsilon^3 \nabla\phi(\vec{x}_0) \cdot (\vec{x} - \vec{x}_0)}{|\vec{x} - \vec{x}_0|^3}, \quad \vec{x} \in \partial\Omega.$$

Ein Vergleich mit Gleichung (4.13) zeigt, daß dies in der linearisierten Beschreibung des Problems einer Leitfähigkeitsänderung $\delta\sigma = 3$ und natürlich nicht $\delta\sigma = \infty$ entspricht. Dennoch ist erfreulich, daß alle sonstigen Abhängigkeiten bezüglich des Ortes des Störkörpers und der Stärke des ungestörten Stroms auch im Grenzfall eines metallischen Leiters erhalten bleiben.

Ein ähnliches Resultat findet man für den Fall eines Nichtleiters. Ein Vergleich der Gleichungen (2.77) und (4.13) zeigt, daß ein winziger nichtleitender Störkörper in der linearisierten Beschreibung des Problems einer Änderung der Leitfähigkeit von 1 auf -0.5 gleichkommt. Obwohl eigentlich negative Leitfähigkeiten physikalisch sinnlos sind, läßt sich demnach das Potentialproblem bezüglich einer homogenen Leitfähigkeitsverteilung mit Wert 1 und einem kleinem Störkörper recht gut in der linearisierten Fassung im Leitfähigkeitsintervall $[-0.5, 4]$ untersuchen. Für das inverse Problem, das darin besteht, aus Potentialverteilungen am Rand des zu untersuchenden Körpers zu verschiedenartigen Neumannrandbedingungen die Leitfähigkeitsverteilung zu rekonstruieren, kann eine solche Einschränkung der möglichen Leitfähigkeitswerte ein probates Mittel zur Stabilisierung sein.

Die Existenz von Nichtleitern und metallischen Leitern stellt damit für die linearisierte Beschreibung des Problems kein Hindernis dar. Problematischer wird die Situation allerdings dann, wenn die Größe und die Anzahl der Störkörper zunehmen. Dennoch werden auch für kompliziertere Leitfähigkeitsverteilungen bereits jetzt in der Praxis mit Rekonstruktionsverfahren, die mit nur einem einzigen Newtonschritt ein Bild erzeugen, gute Ergebnisse erzielt [17].

4.5 Konsequenzen für realistische Meßdaten

4.5.1 Versuchsbeschreibung

Mit unserem Kollaborationspartner Dr. G. Schuhfried führt unsere Arbeitsgruppe in Wien Experimente zur elektrischen Impedanztomographie durch. Der Versuchsaufbau ist in Abbildung (4.1) skizziert. Die genauen Abmessungen finden sich in Abbildung (4.2).

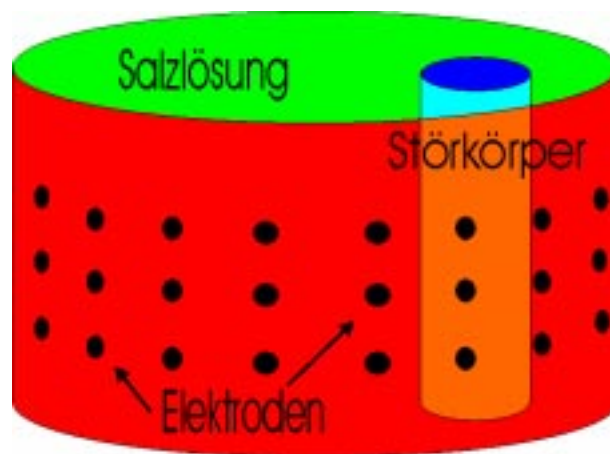


Abbildung 4.1: Versuchsaufbau

In einem zylindrischen Gefäß befindet sich eine Salzlösung mit homogener Leitfähigkeit. Als Störkörper dient ein zylinderförmiger Leiter. Am Rand des Gefäßes sind drei Reihen von Elektroden angebracht. Über die äußeren zwei Reihen wird Strom in das Gefäß injiziert, wobei die Stromverteilung in beiden Reihen gleich ist. In

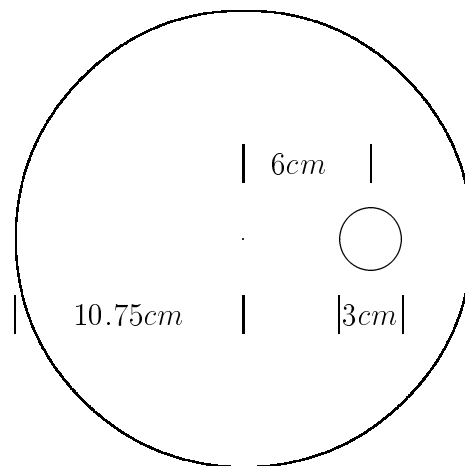


Abbildung 4.2: Abmessungen

der mittleren Schicht befinden sich potentialmessende Elektroden. Durch solch ein Guardelektrodensystem, das schon in den Untersuchungen zur Berechtigung einer zweidimensionalen Problembeschreibung im zweiten Kapitel vorgestellt wurde, versucht man, den Stromverlauf in der Ebene der potentialmessenden Elektroden zu bündeln, um dort eine zweidimensional beschreibbare Situation zu schaffen. Hierbei denkt man sich die stromführenden Elektroden in diese Ebene hinein projiziert. Ein stromführendes Elektrodenpaar läßt sich in diesem Sinne als eine einzige stromführende Elektrode in der zweidimensionalen Beschreibung verstehen. Hiervon wird in der Folge durchgängig Gebrauch gemacht.

Die Gesamtanzahl der Elektroden in unserem Versuch ist 32. Die Durchnummerierung der Elektroden in den folgenden Abbildungen geschieht von 0 bis 31. Der Vergleich der experimentellen Werte mit den theoretischen Rechnungen beziehen sich auf den Einheitskreis, wobei in ebenen Polarkoordinaten (r, ϕ) sich das Zentrum der i -ten Elektrode bei $(1, i\pi/32)$ befindet. Die folgenden Untersuchungen beziehen sich auf Potentialmessungen zu einem Stromeingang bei Elektrode 0 und einem Stromausgang bei einer der übrigen Elektroden. Die absolute Stromstärke ist in jedem Versuch die gleiche und kann o.B.d.A als 1 angenommen werden. Dies ergibt 32 Potentialmeßwerte ϕ_i zu insgesamt 31 verschiedenen Stromkonfigurationen j_i . Die Gültigkeit der Bedingung (2.26) führt in der diskretisierten Beschreibung des Problems zu der Normierungsbedingung

$$\sum_{i=0}^{31} \phi_i = 0,$$

so daß man letztendlich über 31×31 unabhängige Meßwerte verfügt.

Zunächst geschah die Aufnahme der ersten Meßreihe ohne den zylindrischen Störkörper. Im Anschluß wurde eine zweite Meßreihe mit Störkörper aufgenommen.

An Hand der soeben beschriebenen Versuchsanordnung läßt sich die Qualität einer linearisierten Beschreibung des Problems gut überprüfen. Die wesentlichen Untersuchungen beziehen sich auf Gleichung (4.12), die den Zusammenhang zwischen einer kleinen Störung h einer Leitfähigkeitsverteilung σ und der zugehörigen

Potentialänderung u' bei fest vorgegebener äußerer Stromdichte f beschreibt:

$$\langle u', g \rangle_{\mathcal{L}^2_\diamond(\partial\Omega)} = \int_{\Omega} h \nabla u \cdot \nabla v \, dx.$$

Wie in Abschnitt 4.2 beschrieben sind hierin u und v die Potentiallösungen bezüglich der ungestörten Leitfähigkeitsverteilung σ bei äußeren Stromdichten f und g . Aus der obigen Gleichung ist unmittelbar ersichtlich, daß bestimmte äußere Stromdichten besonders gut zur Lokalisierung eines Störobjekts geeignet sind. Dies ist grob gesprochen dann der Fall, wenn die zugehörige Stromdichte zum ungestörten Problem am Ort der Störung besonders groß ist.

In gleicher Weise erwartet man für die durch einen Störkörper verursachte Potentialänderung u' bevorzugt Momente $\langle u', g \rangle_{\mathcal{L}^2_\diamond(\partial\Omega)}$, falls g auch als “guter” Strom angesehen werden kann.

Beide Aspekte lassen sich an den gewonnenen Meßdaten sehr gut veranschaulichen.

4.5.2 Überlagerung zu trigonometrischen Strommustern

Die oben erwähnten 31 verschiedenen Stromanordnungen mit einem Stromeingang bei Elektrode 0 und einem Stromausgang bei einer der übrigen Elektroden bilden eine Basis für die Menge aller möglichen Stromkonfigurationen. Somit ist es durch eine geeignete Linearkombination der Basisströme möglich, beispielsweise trigonometrische Strommuster annähernd zu erzeugen. Bezeichnet j_i den äußeren Strom mit Stromeingang bei Elektrode 0 und Stromausgang bei Elektrode i , so kann man für ein $k \in \mathbb{N}$, $k < 16$ folgende Linearkombination betrachten:

$$j = \sum_{i=1}^{31} -\cos(ki\pi/16) j_i.$$

Über die i -te Elektrode fließt in diesem Fall der Strom $\cos(ki\pi/16)$ in den Körper, wodurch man sich einer kontinuierlichen Stromdichteverteilung der Form $j(\phi) = \cos k\phi$ annähert.

Zwei Fragen bleiben jedoch noch offen:

1. Nimmt mit der angegebenen Überlagerung der Strom an Elektrode 0 ebenfalls den richtigen Wert $\cos(0 k\pi/32) = 1$ an? Äquivalent dazu kann man fragen, ob in der diskretisierten Beschreibung einer kosinusartigen äußeren Stromdichte die Stromerhaltung unmittelbar garantiert ist, d.h. ob

$$\sum_{i=1}^{32} \cos(ki\pi/16) = 0$$

gilt.

2. Für die äußeren Stromdichten $j_k(\phi) = \cos k\phi$ gilt unabhängig von $k > 0$

$$\int_0^{2\pi} |j_k(\phi)|^2 d\phi = \pi.$$

Es stellt sich die Frage, ob in der diskretisierten Beschreibung diese Eigenschaft erhalten bleibt.

Zunächst gilt

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{32} \cos(ki\pi/16) &= \sum_{i=1}^{16} \cos(ki\pi/16) + \sum_{i=1}^{16} \cos(k(i+16)\pi/16) \\ &= \begin{cases} 2 \sum_{i=1}^{16} \cos(ki\pi/16) & ; \quad k = 2n, \quad n \in \mathbb{N} \\ 0 & ; \quad k = 2n - 1, \quad n \in \mathbb{N} \end{cases}. \end{aligned}$$

Führt man mit der Zerlegung der Summe fort, so erhält man im nächsten Schritt

$$\begin{aligned} 2 \sum_{i=1}^{16} \cos(ki\pi/16) &= 2 \left(\sum_{i=1}^8 \cos(ki\pi/16) + \sum_{i=1}^8 \cos(k(i+8)\pi/16) \right) \\ &= \begin{cases} 4 \sum_{i=1}^8 \cos(ki\pi/16) & ; \quad k = 4n, \quad n \in \mathbb{N} \\ 0 & ; \quad \text{sonst} \end{cases}. \end{aligned}$$

Letztendlich erhält man

$$\sum_{i=1}^{32} \cos(ki\pi/16) = \begin{cases} 32 \cos(k\pi/16) & ; \quad k = 32n, \quad n \in \mathbb{N} \\ 0 & ; \quad \text{sonst} \end{cases}.$$

Mit der Forderung $k < 16$ ist also sichergestellt, daß der resultierende Strom an Elektrode 0 tatsächlich 1 beträgt. Es gilt demnach für alle $k < 16$

$$\int_0^{32} \cos(kx\pi/16) dx = 0 = \sum_{i=1}^{32} \cos(ki\pi/16). \quad (4.14)$$

Zur Beantwortung der zweiten der obigen Fragen benutzt man die Identität

$$\cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x).$$

Damit gilt in Analogie zum obigen Vorgehen

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{32} |\cos(ki\pi/16)|^2 &= \sum_{i=1}^{32} \frac{1}{2}(1 + \cos(ki\pi/8)) \\ &= 16 + \frac{1}{2} \left(\sum_{i=1}^{16} \cos(ki\pi/8) + \sum_{i=1}^{16} \cos(k(i+16)\pi/8) \right) \\ &= 16 + \sum_{i=1}^{16} \cos(ki\pi/8) = \begin{cases} 16 + 16 \cos(k\pi/8) & ; \quad k = 16n, \quad n \in \mathbb{N} \\ 16 & ; \quad \text{sonst} \end{cases}. \end{aligned}$$

Unter der Bedingung $k < 16$ erhält man demnach in voller Analogie zur kontinuierlichen Beschreibung

$$\int_0^{32} |\cos(kx\pi/16)|^2 dx = 16 = \sum_{i=1}^{32} |\cos(ki\pi/16)|^2. \quad (4.15)$$

Alle Rechnungen bleiben gültig, wenn man eine endliche Ausdehnung Δ der Elektroden mitberücksichtigt, solange man annimmt, daß die Stromverteilung auf der

Elektrode konstant ist. In diesem Fall wird der Strom, der über die i -te Elektrode fließt, durch das Produkt der konstanten Stromdichte j_i mit Δ beschrieben. In allen obigen Überlegungen kann dann die Größe Δ aus den Summen herausgezogen werden.

Aus Abschnitt 2.6.3 ist bekannt, daß die Funktionen

$$\tau_n(\phi) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin n\phi & , \quad n > 0 \\ \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos n\phi & , \quad n < 0 \end{cases}$$

Eigenfunktionen der Neumann-nach-Dirichlet Abbildung Λ_1 sind. Die folgenden Abbildungen verdeutlichen, daß eine diskretisierte sinus- bzw. kosinusförmige äußere Stromdichte für eine homogene Leitfähigkeitsverteilung in unserem Tomographen tatsächlich eine sinus- bzw. kosinusförmige äußere Potentialverteilung erzeugt, wie es die zweidimensionale theoretische Beschreibung verlangt. In Abbildung (4.3) wurden die aufgenommenen Meßdaten für eine homogene Leitfähigkeitsverteilung angenähert zu einem kosinusförmigen Strommuster überlagert, indem über die i -te Elektrode der Strom $\cos(i\pi/32)$ eingespeist wurde. Der ebenfalls in der Abbildung

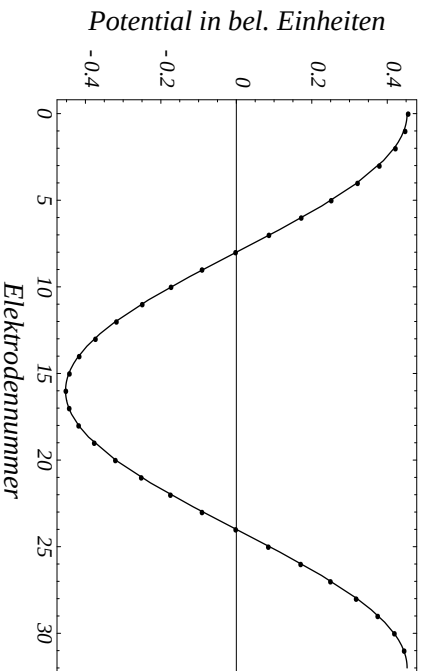
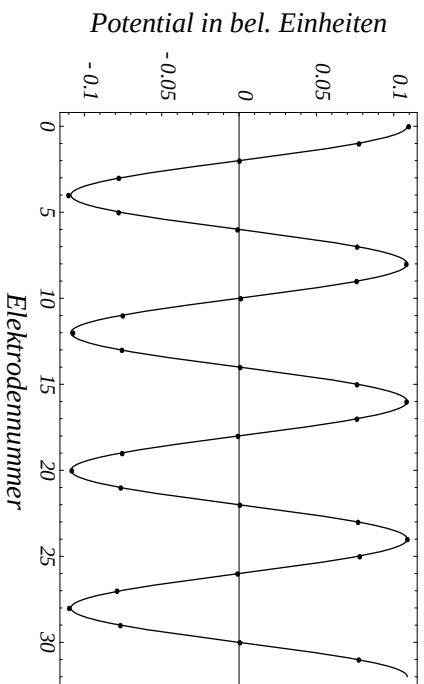


Abbildung 4.3: Äußeres Potential zu kosinusförmiger Stromvorgabe und Fit der Meßdaten durch $\cos(\pi x/32)$

dargestellte Fit der Meßdaten durch eine Kosinusfunktion bestätigt die Erwartung erstaunlich gut. Die Übereinstimmung der Theorie und des Experiments ist, zumindest was die Gestalt der Kurven angeht, auch für höher frequente Stromverteilungen gegeben. Dies veranschaulicht exemplarisch Abbildung (4.4) für eine äußere Stromverteilung der Form $j(\phi) = \cos(4\phi)$.

In den bisherigen Betrachtungen wurden allerdings die Amplituden der äußeren Potentialverteilungen nicht miteinander verglichen. Dies ist jedoch notwendig, da auch hier die theoretische Beschreibung Vorhersagen macht. Die Eigenwerte der Neumann-nach-Dirichlet Abbildung Λ_1 zu den Eigenfunktionen τ_n sind $1/|n|$. Für eine konstante Leitfähigkeitsverteilung erwartet man demnach auch ein proportional zu $1/|n|$ abfallendes Verhalten der Eigenwerte. Um zu überprüfen, ob auch in

Abbildung 4.4: Fit der Meßdaten durch $\cos(4\pi x/32)$

diesem Punkt die diskretisierte äußere Stromdichte zu gleichen Resultaten wie im kontinuierlichen Fall führt, wurden für Wellenzahlen $k = 1, \dots, 15$ und kosinusförmige diskrete äußere Stromverteilungen die resultierenden Potentialverteilungen untersucht. Die Amplituden der Verteilungen wurden durch einen Fit der jeweiligen diskreten Potentialmeßwerte durch die entsprechende Kosinusfunktion gewonnen. Anschließend wurden durch einen Fit mit der Funktion $1/k$ die Übereinstimmung von Theorie und Praxis getestet. Das Resultat zeigt Abbildung (4.5).

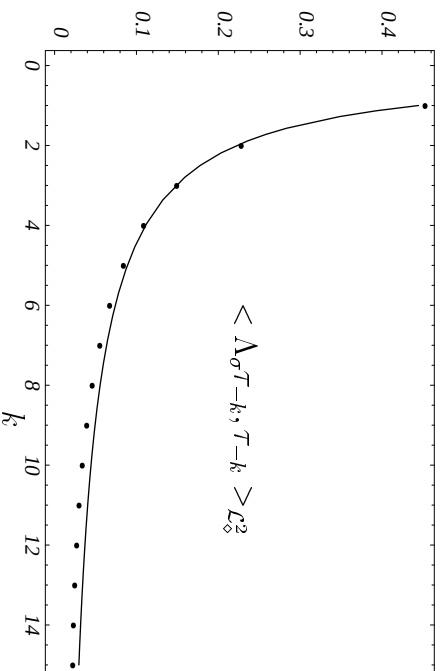


Abbildung 4.5: Vergleich der Amplituden $\Lambda_{\sigma\tau-k}$, $\tau-k > \mathcal{L}_2^2(\partial\Omega)$ der kosinusförmigen äußeren Potentialverteilungen für verschiedene Wellenzahlen k mit dem theoretisch erwarteten Verhalten

Wie deutlich zu erkennen ist, weichen schon bei $k = 5$ die Amplituden der diskret gemessenen äußeren Potentialverteilungen vom erwarteten Verhalten der zweidimensionalen Theorie sichtbar ab. Betrachtet man aber nochmals die Untersuchungen zur Berechtigung einer zweidimensionalen Problembeschreibung, so stellt man qualitativ eine recht gute Übereinstimmung von Abbildung (4.5) mit Abbildung (2.14) fest.

4.5.3 Optimale Ströme

Welche Voraussetzungen an die Meßgenauigkeit müssen gestellt werden, damit zwei Leitfähigkeitsverteilungen σ und τ voneinander unterschieden werden können? Diese Frage kann nur im Zusammenhang mit den im Experiment angelegten äußeren Stromdichten beantwortet werden. Für eine bestimmte äußere Stromvorgabe j mißt man die zugehörigen Potentialverteilungen $\Lambda_\sigma j$ und $\Lambda_\tau j$. Diese sind unterschiedbar, falls $\|\Lambda_\sigma j - \Lambda_\tau j\|_{\mathcal{L}^2_0(\partial\Omega)}$ nicht unterhalb der Meßgenauigkeit liegt. Um verschiedene Stromvorgaben miteinander vergleichen zu können, ist es notwendig, eine geeignete Normierung für j in die Überlegungen mit einzubeziehen. Es erscheint sinnvoll, die Größe

$$\delta(j) = \frac{\|\Lambda_\sigma j - \Lambda_\tau j\|_{\mathcal{L}^2_0(\partial\Omega)}}{\|j\|_{\mathcal{L}^2_0(\partial\Omega)}} \quad (4.16)$$

zu betrachten [29]. Ein äußerer Strom, der optimal erkennen läßt, daß es sich bei den beiden Leitfähigkeitsverteilungen σ und τ um unterschiedliche Funktionen handelt, sollte nach der obigen Definition $\delta(j)$ maximieren.

Es stellt sich im Falle des Einheitskreises heraus, daß im wesentlichen trigonometrische Strommuster mit niedriger Frequenz als optimale Ströme angesehen werden können. Das dies für zwei Leitfähigkeitsänderungen, die sich nur wenig voneinander unterscheiden, tatsächlich der Fall ist, wird im nächsten Abschnitt deutlich, in dem für eine beliebige fest vorgegebene Stromvorgabe die resultierenden äußeren Potentiale genauer untersucht werden.

Die folgenden Untersuchungen beziehen sich auf die äußeren Stromdichten $\cos \phi$ und $\cos 4\phi$ aus dem vorigen Abschnitt. In beiden Fällen ändert sich die äußere Potentialverteilung, wenn man den leitenden Störkörper in die Salzlösung eintaucht. Die gemessenen Potentialänderungen für beide Fälle sind in den Abbildungen (4.6) und (4.7) dargestellt.

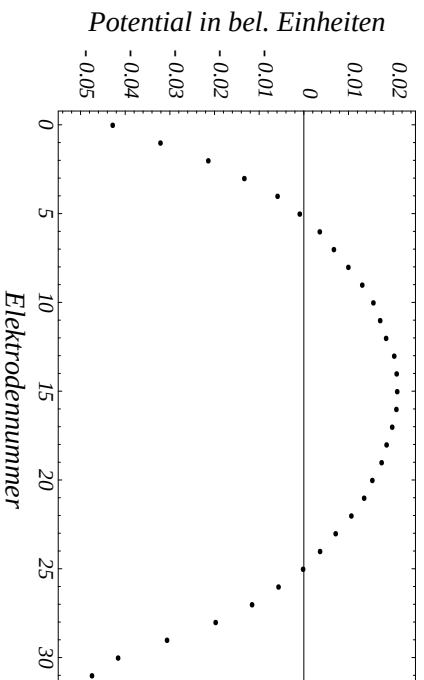
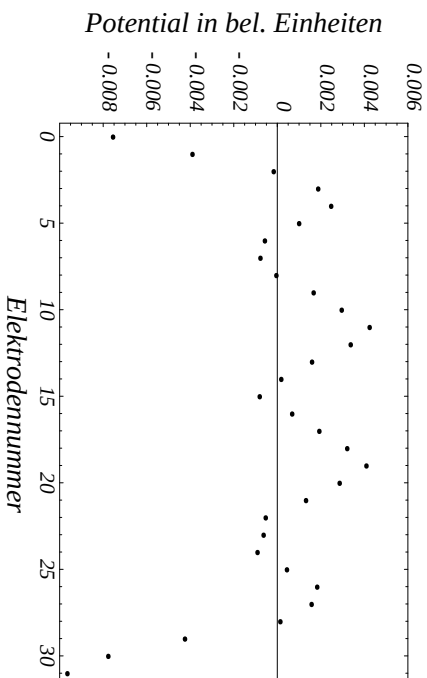


Abbildung 4.6: Änderung der Potentialverteilung für $j(\phi) = \cos(\phi)$

Abbildung 4.7: Änderung der Potentialverteilung für $j(\phi) = \cos(4\phi)$

Es wird deutlich, daß für die höher frequente äußere Stromdichte die Potentialänderung tatsächlich schwächer ist. Dies gilt aber nur für den absolut gemessenen Effekt. Betrachtet man die relative Änderung der Potentialverteilung, so erkennt man bei einem Vergleich der Abbildungen (4.6), (4.3) bzw. (4.7), (4.4), daß für die jeweils maximale Potentialänderung relativ zum ungestörten Potentialwert sich in beiden Fällen in etwa eine 10-prozentige Abweichung ergibt.

Für diese deutlich sichtbaren Differenzen in den Potentialmeßwerten ist das Arbeiten mit optimalen Strömen nicht zwingend notwendig. Sollen jedoch auch winzige Störkörper erkannt werden, so wird es notwendig, optimale Ströme anzulegen, um Änderungen in den letzten Stellen der absoluten Meßgenauigkeit noch zu erkennen.

4.5.4 Fourieranalyse der Potentialänderung

Im vorigen Abschnitt wurde diskutiert, inwiefern äußere Stromdichten mit gleicher $\mathcal{L}_\diamond^2$ -Norm verschiedene durch einen Störkörper verursachten Potentialänderungen hervorrufen. Die Tatsache, daß die zu erwartenden Effekte bei höher frequenten äußeren Strömen abnimmt, wurde dort nur an Hand zweier Beispiele erläutert. Ein besseres Verständnis gewinnt man leicht durch die Beobachtung, daß in der linearierten Beschreibung des Problems durch Gleichung (4.12) Ströme und Spannungen völlig gleichberechtigt eingehen. Ist also zu einer fest vorgegebenen äußeren Stromdichte f ein bestimmtes Moment der Potentialänderung $\langle u', g \rangle_{\mathcal{L}_\diamond^2}$ besonders groß, so kann man schließen, daß g ebenfalls als optimaler Strom angesehen werden kann.

Als einfachsten Fall kann man dazu untersuchen, wie sich kleine Störungen h einer homogenen Leitfähigkeitsverteilung $\sigma \equiv 1$ in den Meßdaten auswirken. Nach Gleichung (4.12) und der Greensfunktion G_N zum Neumannproblem erhält man damit in ebenen Polarkoordinaten in linearer Näherung

$$\begin{aligned} & \langle u', g \rangle_{\mathcal{L}_\diamond^2} \\ &= - \int_0^1 \int_0^{2\pi} \nabla' \left(\int_0^{2\pi} G_N(1, \phi, r', \phi') g(\phi) d\phi \right) \cdot \nabla' u(r', \phi') h(r', \phi') r' d\phi' dr'. \end{aligned}$$

Hierin ist u die Potentiallösung zum fest vorgegebenen Strom f . Mit der in Abschnitt 2.6.3 angegebenen Entwicklung (2.45) der Greensfunktion berechnet man weiter

$$\begin{aligned}
& < u', g >_{\mathcal{L}_0^2} \\
&= \int_0^1 \int_0^{2\pi} \nabla' \left(\int_0^{2\pi} \frac{1}{\pi} \left\{ \ln(1) - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} (r')^n \cos(n(\phi - \phi')) \right\} g(\phi) d\phi \right) \\
&\quad \cdot \nabla' u(r', \phi') h(r', \phi') r' d\phi' dr' \\
&= -\frac{1}{\pi} \int_0^1 \int_0^{2\pi} \left(\int_0^{2\pi} \sum_{n=1}^{\infty} (r')^{n-1} (\cos n(\phi - \phi') \vec{e}_{r'} + \sin n(\phi - \phi') \vec{e}_{\phi'}) g(\phi) d\phi \right) \\
&\quad \cdot \nabla' u(r', \phi') h(r', \phi') r' d\phi' dr'.
\end{aligned}$$

Hierin bezeichnen $\vec{e}_{r'}$ und $\vec{e}_{\phi'}$ die krummlinigen Basisvektoren

$$\vec{e}_{r'} = \begin{pmatrix} \cos \phi' \\ \sin \phi' \end{pmatrix}, \quad \vec{e}_{\phi'} = \begin{pmatrix} -\sin \phi' \\ \cos \phi' \end{pmatrix}. \quad (4.17)$$

Der obige Ausdruck vereinfacht sich sehr stark, wenn man speziell $g = \cos m\phi$ setzt und damit

$$\begin{aligned}
& < u', \cos m\phi >_{\mathcal{L}_0^2} \\
&= -\int_0^1 \int_0^{2\pi} \left(\int_0^{2\pi} \sum_{n=1}^{\infty} (r')^{n-1} (\cos n(\phi - \phi') \vec{e}_{r'} + \sin n(\phi - \phi') \vec{e}_{\phi'}) \cos m\phi d\phi \right) \\
&\quad \cdot \nabla' u(r', \phi') h(r', \phi') r' d\phi' dr' \\
&= -\int_0^1 \int_0^{2\pi} (r')^m (\cos m\phi' \vec{e}_{r'} + \sin m\phi' \vec{e}_{\phi'}) \cdot \nabla' u(r', \phi') h(r', \phi') d\phi' dr' \\
&= -\int_0^1 \int_0^{2\pi} (r')^m \begin{pmatrix} \cos(m-1)\phi' \\ -\sin(m-1)\phi' \end{pmatrix} \cdot \nabla' u(r', \phi') h(r', \phi') d\phi' dr'
\end{aligned}$$

erhält. Entsprechend bestimmt man für $g = \sin m\phi$

$$\begin{aligned}
& < u', \sin m\phi >_{\mathcal{L}_0^2} \\
&= -\int_0^1 \int_0^{2\pi} (r')^m \begin{pmatrix} \sin(m-1)\phi' \\ \cos(m-1)\phi' \end{pmatrix} \cdot \nabla' u(r', \phi') h(r', \phi') d\phi' dr'.
\end{aligned}$$

Für den entarteten Fall einer Punktstörung der Form

$$h(r, \phi) = \frac{1}{r} \delta(r - r_0) \delta(\phi)$$

ergibt sich damit

$$\begin{aligned}
< u', \cos m\phi >_{\mathcal{L}_0^2} &= -r_0^{m-1} (\nabla u(r_0, 0))_x, \\
< u', \sin m\phi >_{\mathcal{L}_0^2} &= -r_0^{m-1} (\nabla u(r_0, 0))_y.
\end{aligned}$$

Die Beiträge des ungestörten Stroms in x- bzw. y-Richtung bestimmen demnach die Kosinus- bzw. Sinusbeiträge der äußeren Potentialänderung. Der Faktor r^{m-1} in den obigen Gleichungen sorgt dafür, daß höher frequente Anteile weniger stark vertreten sind. Das Verhalten der Fourierkoeffizienten für Störkörper mit einer vorgegebenen

kleinen Ausdehnung läßt sich ebenfalls leicht abschätzen. In diesem Fall werden die Fourierkoeffizienten für größer werdende Frequenzen sehr schnell gegen Null gehen, sobald die Ausdehnung der Störung größer als die entsprechenden Wellenlängen ist.

Daraus ergeben sich folgende Schlußfolgerungen:

1. Verursacht eine kleine Störung der Leitfähigkeitsverteilung eine Änderung u' der äußeren Potentialdifferenz, so nehmen die Momente $\langle u', \cos m\phi \rangle_{\mathcal{L}_0^2}$, $\langle u', \sin m\phi \rangle_{\mathcal{L}_0^2}$ für größer werdende m ab. Dies hat zur Folge, daß die äußeren Stromdichten $\cos m\phi$, $\sin m\phi$ für kleine m als optimale Ströme angesehen werden können, was im vorherigen Abschnitt bereits ohne Begründung angenommen wurde.
2. Das Abfallen der Fourierkoeffizienten wird vor allen Dingen vom Abstand des Störkörpers zum Rand bestimmt. Die Fourierkoeffizienten fallen bei größerem Abstand schneller ab. Dies hat zur Folge, daß man die Effekte kleiner Störungen, die sich in unmittelbarer Randnähe befinden, zum großen Teil aus den Daten herausfiltern kann, indem man hochfrequente Anteile der gemessenen Potentialänderung eliminiert.

Der zweite der oben angesprochenen Punkte ist vor allem für einen praktischen Einsatz der EIT von Relevanz. In vielen medizinischen Anwendungen bereitet die unregelmäßige Beschaffenheit der Haut große Probleme. Die Rekonstruktion der eigentlich interessanten Objekte im Körperinneren wird dadurch enorm erschwert. Zumindestens in der linearen Näherung des Problems stellt jedoch die Fourieranalyse der Meßdaten und das Herausfiltern hoher Frequenzanteile eine mögliche Problembehandlung dar. Es bleibt allerdings noch die Frage, wie genau die linearisierte Beschreibung des Problems die wirklichen Verhältnisse wiedergibt.

Um die Qualität der linearisierten Beschreibung des Problems zu prüfen, kann man untersuchen, ob sich die obigen Resultate mit den Meßwerten aus unserem Versuch verifizieren lassen.

Zunächst kann man die im Versuch angelegten Ströme zu einem kosinusartigen Strommuster überlagern, wie im vorletzten Abschnitt erläutert wurde. Die resultierende äußere Potentialverteilung zeigt Abbildung (4.3). Da sich das Zentrum des Störkörpers in Polarkoordinaten bei ungefähr $r = 0.56$ und $\phi = 0$ befindet, erwartet man nach den obigen Überlegungen eine resultierende Potentialänderung u' der Form

$$u'(\phi) = \text{const} \sum_{n=1}^{\infty} 0.56^{n-1} \cos n\phi. \quad (4.18)$$

Als Realteil einer diskreten Fouriertransformation der gemessene Potentialänderung, die in Abbildung (4.6) dargestellt ist, bestimmt man die in Abbildung (4.8) dargestellten Koeffizienten a_n .

Das Abfallverhalten der Koeffizienten a_n wird nur ungenau durch Gleichung (4.18) beschrieben, wie der mit eingezeichnete Fit zeigt. Es fällt aber auf, daß ohne den Koeffizienten a_1 eine viel bessere Übereinstimmung von Theorie und Experiment erzielt werden kann. Dies belegt Abbildung (4.9), in der deutlich wird, daß alle übrigen Koeffizienten a_n recht gut das geforderte $0.56^{(n-1)}$ -Verhalten zeigen.

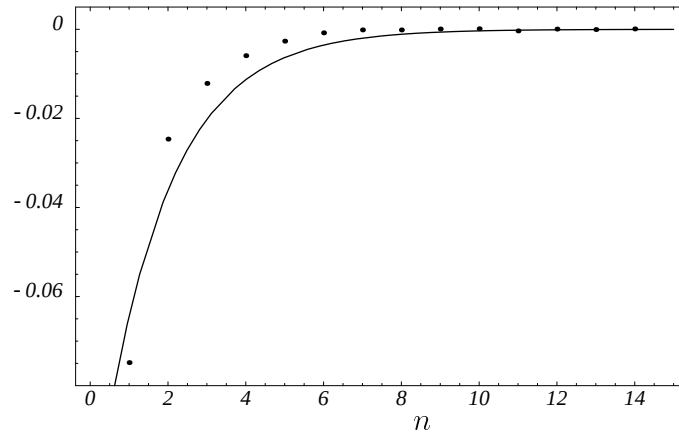


Abbildung 4.8: Fourierkoeffizienten a_n der Potentialänderung und Fit der Koeffizienten durch $0.56^{(n-1)}$

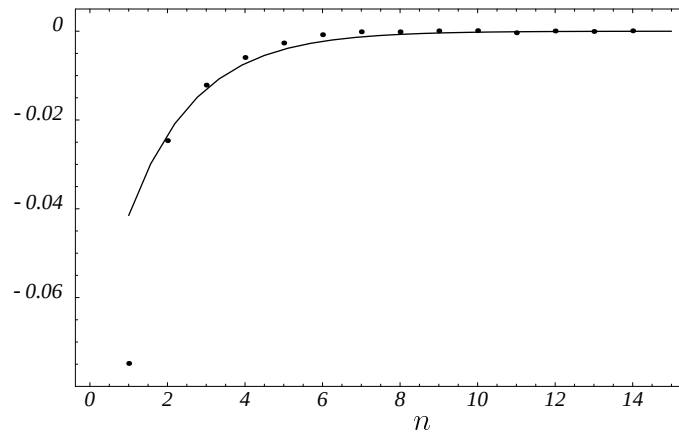


Abbildung 4.9: Fit der Fourierkoeffizienten a_n ohne Berücksichtigung des Koeffizienten a_1

Es stellt sich die Frage, ob dies mit der speziell gewählten kosinusförmigen äußeren Stromdichte zu tun hat.

Dies ist in der Tat der Fall, wie Abbildung (4.10) belegt. Hier wurde die durch den Störkörper verursachte Potentialänderung für die äußere Stromdichte $j(\phi) = \cos 4\phi$, wie sie in Abbildung (4.7) dargestellt ist, untersucht. Es wird hier noch deutlicher sichtbar, daß der Fourierkoeffizient a_4 am weitesten vom erwarteten Verhalten abweicht. Die trotzdem schlechtere Übereinstimmung mit Gleichung (4.18) im Vergleich zu Abbildung (4.9) ist hier durch die Meßungenauigkeit zu erklären, da die gemessene Potentialänderung deutlich kleiner ist.

Zwei Antworten erscheinen plausibel, um diesen seltsamen Effekt zu erklären:

1. Die angelegten Ströme in den beiden Meßreihen mit und ohne Störobjekt differieren etwas voneinander. Dies würde in der Fourieranalyse der Differenzdaten nur den zur äußeren Stromdichte gehörigen Fourierkoeffizient entscheidend betreffen.

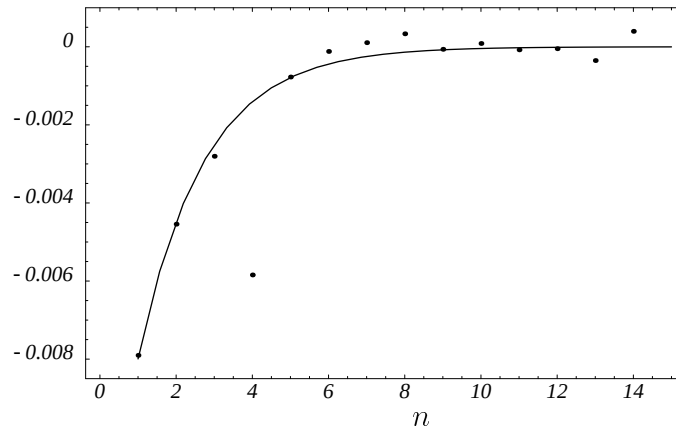


Abbildung 4.10: Fit der Fourierkoeffizienten a_n ohne Berücksichtigung des Koeffizienten a_4 für eine äußere Stromdichte $j(\phi) = \cos 4\phi$

2. Durch das Eintauchen des Störkörpers in den Meßtopf steigt das Gel etwas an. Denkt man sich an dieser Stelle den Störkörper weg und ersetzt ihn durch Gel, so findet man eine andere Situation vor, als die ohne Störkörper untersuchte.

Bei der Genauigkeit der äußeren Stromvorgabe von ca. 1‰ erscheint der zweite Grund die plausible Erklärung zu sein. In jedem Fall wird aber deutlich, wie problematisch es ist, die gemessene Neumann-nach-Dirichlet Abbildung Λ_σ von einer Neumann-nach-Dirichlet Abbildung Λ_{σ_0} zu einer konstanten Leitfähigkeitsverteilung $\sigma_0 \equiv 1$ zu unterscheiden, um in der linearisierten Form des Problems σ zu bestimmen.

Kapitel 5

Rekonstruktionsalgorithmen

5.1 Überblick

Der erste in der Praxis funktionierende Tomograph zur Bestimmung einer Leitfähigkeitsverteilung aus äußeren Strom- und Spannungsmessungen war das von Barber und Brown in Sheffield entwickelte APT (Applied Potential Tomography)-System [2],[3]. Dabei ließ man nur über zwei jeweils benachbarte Elektroden Strom in den zu untersuchenden Körper ein- bzw. abfließen. Die Rekonstruktion gelang über einen Backprojektion Algorithmus entlang der Äquipotentiallinien zur konstanten Leitfähigkeitsverteilung.

Die meisten Rekonstruktionsalgorithmen basieren allerdings auf einer Linearisierung des ursprünglich nichtlinearen Problems bezüglich einer Startverteilung für die Leitfähigkeit. Das heute wohl berühmteste in der Praxis funktionierende Gerät beruht auf dem im Rensselaer Polytechnic Institute entwickelten NOSER Algorithmus (Newton One Step Error Reconstructor) [17]. Der Name deutet an, daß zur Bilderstellung nur ein Newton-Schritt benötigt wird. Weiterhin verwendet das Gerät optimale Ströme, die die Effekte von Störungen einer homogenen Leitfähigkeitsverteilung in den Daten besonders gut sichtbar machen [29]. Im Falle des Einheitskreises sind dies im wesentlichen trigonometrische Strommuster. Ein kosinusartiger äußerer Strom garantiert zum Beispiel eine gleichmäßige Stromverteilung im gesamten Gebiet. Generell funktioniert die Methode der optimalen Ströme dann besonders gut, wenn der Rand des Gebietes möglichst vollständig mit Elektroden besetzt ist.

Die Bestimmung der Leitfähigkeitsverteilung mit nur einem Newton-Schritt versagt allerdings, wenn die gesuchte Verteilung zu komplexe Strukturen besitzt. In diesem Fall ist die linearisierte Beschreibung des Problems mit zu großen Fehlern behaftet und es wird notwendig, weitere Korrekturen zu bestimmen. Die Vorgehensweise dabei sieht folgendermaßen aus:

1. Stelle eine Vermutung für σ_0 auf
2. Löse das Vorwärtsproblem
3. Vergleiche das Ergebnis mit den Meßwerten
4. Bestimme eine Korrektur von σ_0 durch eine Lösung des linearisierten Problems

5. Gehe zu (2)

Verfahren diesen Typs wurden mehrfach untersucht. [11],[58]. Es zeigte sich, daß in dieser Weise aufgebaute Algorithmen bereits nach wenigen Schritten befriedigende Resultate liefern. Der große Nachteil solcher Verfahren liegt allerdings an dem erheblich höheren zeitlichen Aufwand. Dies bezieht sich vor allem auf die Punkte 2. und 4. der obigen Aufzählung. Zur Bestimmung einer Korrektur im i -ten Schritt ist zunächst die Lösung des Vorwärtsproblems sehr zeitaufwendig. Der Rechenaufwand zur Bestimmung einer verallgemeinerten Inversen der Fréchet-Ableitung in Schritt 4. ist im Anschluß hieran auch im Falle einer oft verwendeten gröberen Diskretisierung für das inverse Problem ebenfalls erheblich. Im Gegensatz dazu nutzt beispielsweise der NOSER Algorithmus aus, daß solche enorm zeitaufwendigen Berechnungen einmalig mit hoher Präzision durchgeführt werden können, wonach die eigentliche Bildberechnung aus den gewonnenen Meßdaten in Bruchteilen von Sekunden möglich ist.

Ein weiteres iteratives Verfahren ist der Layer-Stripping Algorithmus. Ziel dieses Verfahrens ist es, die Leitfähigkeitsverteilung schichtweise von außen nach innen gehend zu bestimmen. Dabei benutzt man zur Rekonstruktion in den äußeren Schichten vorzugsweise hochfrequente äußere Stromverteilungen, die nicht tief ins Gebiet vordringen. Die Kenntnis der Leitfähigkeitsverteilungen in den äußeren Schichten wird dann benutzt, um durch Ströme niedrigerer Frequenz zu weiter innen liegenden Schichten vorzudringen. Dabei pflanzen sich jedoch in jedem Iterationsschritt Fehler aus den vorherigen Berechnungen fort. Die Leitfähigkeitsverteilung kann damit im Innern des Gebiets nur noch ungenau bestimmt werden. Ebenso ist die Benutzung hochfrequenter äußerer Stromdichten technisch schwer realisierbar. Aus diesen Gründen ist der Layer-Stripping Algorithmus in der praktischen Anwendung nicht ganz so erfolgreich, wie der NOSER Algorithmus.

Einer der bekanntesten direkten Rekonstruktionsalgorithmen in der EIT bezieht sich auf ein Widerstandsnetzwerkmodell [20],[21],[22],[13]. In diesem Netzwerk ist es nach Curtis und Morrow möglich, aus den gemessenen Strom- und Spannungsmeßwerten am Rand unmittelbar die zugehörige diskrete Leitfähigkeitsverteilung zu bestimmen. Der Algorithmus bezieht sich dabei auf ganz bestimmte äußere Stromverteilungen, sogenannte Curtis-Morrow Ströme, die eine größtenteils konstante zugehörige Potentialverteilung erzeugen. Der Algorithmus hat jedoch zwei entscheidende Nachteile, die einen Einsatz in der Praxis verhindern.

Zum einen rekonstruiert man, ähnlich dem Layer-Stripping Algorithmus, die Leitfähigkeitsverteilung vom Rand ausgehend, wobei sich in jedem Schritt die Fehler der vorherigen Berechnungen fortpflanzen.

Zum anderen ist die Methode besonders dann vielversprechend, wenn die oben erwähnten Curtis-Morrow Ströme im Experiment angelegt werden. Doch schon bei sehr groben Gittern sind die dazu nötigen äußeren Ströme viel zu groß.

Ein sehr aktuelles Forschungsgebiet bezieht sich auf die Gebietserkennung in der elektrischen Impedanztomographie. Dabei geht man davon aus, daß die Leitfähigkeitsverteilung im wesentlichen konstant ist und sich nur in bestimmten Teilgebieten sprunghaft ändert. Ein Rekonstruktionsalgorithmus zielt dann darauf ab, zunächst nur solche Teilgebiete zu lokalisieren, bevor man daran geht, die Werte der Leitfähigkeit in diesen Gebieten zu bestimmen.

Erst in jüngster Zeit ist es gelungen, einen Algorithmus für eine solche Gebietserkennung zu entwickeln [12]. Nimmt die gesuchte Leitfähigkeitsverteilung σ bis auf die gesuchten Teilgebiete den Wert 1 an, so untersucht man das Bild des Operators $|\Lambda_1 - \Lambda_\sigma|^{1/2}$ nach Anteilen von äußeren Potentialverteilungen, die von Dipolen an irgend welchen inneren Punkten herrühren. Findet man solche Anteile, so kann man diese Punkte einem gesuchten Teilgebiet zuordnen.

Ist sogar der Wert der Leitfähigkeit in den gesuchten Einschlüssen bekannt, so reicht theoretisch bereits die Kenntnis von ein (zweidimensionales Problem) bzw. zwei (dreidimensionales Problem) äußeren Potentialverteilungen aus, um die Leitfähigkeitsverteilung zu bestimmen [33]. Konkrete Rekonstruktionsalgorithmen existieren aber zur Zeit hierfür noch nicht.

5.2 Vereinbarungen

Die in den nächsten Abschnitten vorgestellten Rekonstruktionsalgorithmen beziehen sich auf einen oder mehrere Versuche. Damit ist gemeint, daß zur Rekonstruktion der gesuchten Leitfähigkeitsverteilung σ die äußeren Potentialverteilungen zu einer oder mehreren Stromkonfigurationen herangezogen werden.

Die numerischen Tests der Algorithmen in einem Gebiet Ω beziehen sich grundsätzlich auf Leitfähigkeitsverteilungen, die sich nicht wesentlich von einer homogenen Verteilung σ_0 unterscheiden:

$$\sigma(x) = \sigma_0(x) + \delta(x) \quad , x \in \Omega, \quad (5.1)$$

$$\sigma_0(x) = 1 \quad , x \in \Omega. \quad (5.2)$$

Der Wert der Konstanten in Gleichung (5.2) schränkt dabei die Allgemeinheit nicht ein.

Für die Formulierung der Algorithmen ist es teilweise nötig, gewisse Randbedingungen an σ zu fordern. Oftmals wird davon ausgegangen, daß

$$\sigma(x) = 1 \quad , x \in \partial\Omega, \quad (5.3)$$

$$\nabla \sigma(x) \cdot n = 0 \quad , x \in \partial\Omega \quad (5.4)$$

gilt, daß sich also die Leitfähigkeitsverteilung am Rand nicht ändert. Diese Situation ist ebenfalls in allen numerischen Tests der Algorithmen gegeben.

In der Folge wird bei Verwendung der Bedingungen (5.3),(5.4) ausdrücklich darauf hingewiesen.

Alle folgenden bildlich dargestellten Funktionen $f(x, y)$ sind wie folgt zustande gekommen:

Dem betragsmäßig größten Wert $|f_{max}|$ der Funktion f im jeweils betrachteten Gebiet wurde ein Weißton zugeordnet. Entsprechend wurden Bezirke, in denen die Funktion den Wert $-|f_{max}|$ annimmt, falls dies überhaupt der Fall ist, mit einem Schwarzton gekennzeichnet. Dazwischen erfolgte eine Abstufung über weitere 28 verschiedene Graustufen.

Auch hier wird bei Abweichungen von dieser Regel ausdrücklich darauf hingewiesen.

5.3 Rekonstruktion mit einem Versuch

5.3.1 Umformulierung des EIT-Problems

Einer der Hauptschwierigkeiten in der Lösung des EIT-Problems liegt in der Nichtlinearität der zugrunde liegenden Gleichungen begründet. Da die Lösung des Potentialproblems zu einer Linearkombination zweier verschiedener Leitfähigkeitsverteilungen im allgemeinen nicht eine Linearkombination der Einzellösungen darstellt, ist man üblicherweise gezwungen, daß Problem durch Linearisierungsverfahren, wie etwa das Newton-Verfahren zu vereinfachen. Die im wesentlichen von Prof. Sorin Ciulli ausgearbeitete und hier vorgestellte Methode macht sich zu Nutze, daß die alleinige Betrachtung eines Versuchs, d.h. die Potentialmessung am Rand des zu untersuchenden Körpers zu einer einzigen Randstromverteilung, viele mathematische Komplikationen vermeidet [19]. Es zeigt sich, daß das ursprüngliche nichtlineare Problem durch die Hintereinanderschaltung verschiedener einfach zu behandelnder Probleme gelöst werden kann. Wie sich herausstellt, ist dabei jedoch die Lösung nur eine Lösung im verallgemeinerten Sinne, deren Wert stark von einem guten Regularisierungsverfahren abhängt.

Die fundamentale elliptische Differentialgleichung des EIT-Problems lautet für eine Leitfähigkeitsverteilung σ nach Gleichung (2.23)

$$\nabla(\sigma \nabla \phi) = 0, \quad (5.5)$$

wobei die Potentialverteilung ϕ durch Neumann- oder Dirichletrandbedingungen festgelegt ist. Durch die Transformationen

$$\tau = \sqrt{\sigma}, \quad (5.6)$$

$$\psi = \tau \phi \quad (5.7)$$

erhält man eine Schrödingergleichung zum Energieeigenwert Null, denn

$$\begin{aligned} 0 &= \nabla(\sigma \nabla \phi) = \sum_{i=1}^3 \partial_i (\sigma \partial_i \phi) = \sum_{i=1}^3 \partial_i (\tau^2 \partial_i (\psi / \tau)) \\ &= \sum_{i=1}^3 \partial_i (\tau \partial_i \psi - \psi \partial_i \tau) = \tau \Delta \psi - \psi \Delta \tau, \end{aligned}$$

und damit

$$\Delta \psi = \psi \frac{\Delta \tau}{\tau}. \quad (5.8)$$

Aus Gleichung (5.8) geht hervor, daß eine Variation der Leitfähigkeitsverteilung und damit eine Variation von τ dem Einbringen einer Ladungsquelle $X = -\psi \Delta \tau / \tau$ äquivalent ist. Damit ist die Strategie des weiteren Vorgehens festgelegt. Ziel ist es, aus der Kenntnis der Dirichlet- und Neumannrandwerte der Funktion ψ zunächst auf $\Delta \psi$ zurückzuschließen, um im weiteren erst ψ , dann $\Delta \tau / \tau$ und schließlich τ selbst zu berechnen.

Zur Bestimmung der Neumann- bzw. Dirichletranddaten der Funktion ψ ist eine Messung der Leitfähigkeitsverteilung an der Oberfläche des betrachteten Gebietes

notwendig. Fordert man die Gültigkeit der Gleichungen (5.3) und (5.4), so erhält man aus den gemessenen Neumann- und Dirichletrandwerten der Funktion ϕ die entsprechenden Randwerte der Funktion ψ

$$\begin{aligned} f(x) &= \nabla \psi(x) \cdot n|_{x \in \partial\Omega} = \nabla(\phi(x)\tau(x)) \cdot n|_{x \in \partial\Omega} = \nabla \phi(x) \cdot n|_{x \in \partial\Omega}, \\ g(x) &= \psi(x)|_{x \in \partial\Omega} = (\phi(x)\tau(x))|_{x \in \partial\Omega} = \phi(x)|_{x \in \partial\Omega}. \end{aligned}$$

Mit Hilfe des Greenschen Satzes kann nun eine verallgemeinerte Lösung für $\Delta\psi$ gefunden werden. Dazu ist es jedoch notwendig, für das betrachtete Gebiet Ω Greensfunktionen $G_{D,N}(x, x')$ zum Dirichlet- bzw. Neumannproblem zu kennen. Im Falle des Neumannproblems ist aus dem dritten Kapitel bekannt, daß eine Greensfunktion $G_N(x, x')$ gesucht ist, die die Gleichungen (2.38) und (2.39) erfüllt:

$$\begin{aligned} \Delta G_N(x, x') &= -\delta(x, x') \quad , \quad x, x' \in \Omega, \\ \frac{\partial G_N}{\partial n}(x, x') &= -\frac{1}{S} \quad , \quad x \in \Omega, x' \in \partial\Omega. \end{aligned}$$

Wie zuvor stellt hierin S den gesamten Flächeninhalt der Randfläche dar.

Im Falle des Dirichletproblems fordert man

$$\begin{aligned} \Delta G_D(x, x') &= -\delta(x, x') \quad , \quad x, x' \in \Omega, \\ G_D(x, x') &= 0 \quad , \quad x \in \Omega, x' \in \partial\Omega. \end{aligned}$$

Mit dem Greenschen Satz (2.37) und Gleichung (5.8) folgt damit zum einen

$$\psi(x) = - \int_{\partial\Omega} \frac{\partial G_D(x, x')}{\partial n} g(x') ds' - \int_{\Omega} G_D(x, x') \psi(x') \frac{\Delta\tau(x')}{\tau(x')} dx'. \quad (5.9)$$

Gleichung (5.9) stellt die Beziehung zwischen den unbekannten Größen τ und ψ und der gemessenen äußeren Potentialverteilung g dar.

Die ebenfalls bekannte Stromverteilung f am Rand führt zu einer weiteren Bestimmungsgleichung für die Funktion ψ :

$$\psi(x) = \int_{\partial\Omega} G_N(x, x') f(x') ds' - \int_{\Omega} G_N(x, x') \psi(x') \frac{\Delta\tau(x')}{\tau(x')} dx'. \quad (5.10)$$

Dabei ist zu beachten, daß das gemessene Potential die Normierungseigenschaft (2.26)

$$\int_{\partial\Omega} \psi(x) dx = 0$$

besitzt, damit Gleichung (5.10) gültig ist.

Die Funktionen

$$\varphi_D(x) := - \int_{\partial\Omega} \frac{\partial G_D}{\partial n}(x, x')|_{x' \in \partial\Omega} g(x') ds', \quad (5.11)$$

$$\varphi_N(x) := \int_{\partial\Omega} G_N(x, x')|_{x' \in \partial\Omega} f(x') ds' \quad (5.12)$$

beschreiben hierin Lösungen des homogenen Problems zu einer konstanten Leitfähigkeitsverteilung, für die $\Delta\tau = 0$ gilt, was zu einem Verschwinden der Volumenintegrale in den Gleichungen (5.9), (5.10) führt.

Die Größen $\varphi_D(x)$ und $\varphi_N(x)$ stimmen damit für eine homogene Leitfähigkeitsverteilung $\sigma_0 \equiv 1$ miteinander überein. Weicht jedoch bei fester Randstromvorgabe die am Rand des Gebietes $\partial\Omega$ gemessene Potentialverteilung von der für $\sigma \equiv 1$ erwarteten ab, kann die Leitfähigkeitsverteilung nicht mehr im gesamten betrachteten Gebiet Ω konstant sein. Es liegt daher nahe, die Differenz der beiden homogenen Lösungen zu betrachten:

$$\varphi(x) := \varphi_N(x) - \varphi_D(x) = - \int_{\Omega} \{G_D(x, x') - G_N(x, x')\} \psi(x') \frac{\Delta\tau(x')}{\tau(x')} dx'. \quad (5.13)$$

Mit den Bezeichnungen

$$K(x, x') := G_D(x, x') - G_N(x, x'), \quad (5.14)$$

$$X(x) := -\psi(x) \Delta\tau(x) / \tau(x) \quad (5.15)$$

erhält man demnach eine Fredholmsche Integralgleichung 1.Art:

$$\varphi(x) = \int_{\Omega} K(x, x') X(x') dx'. \quad (5.16)$$

Gleichung (5.16) stellt zusammen mit einer der beiden Gleichungen (5.9),(5.10) ein zu diesen beiden Gleichungen äquivalentes Gleichungssystem dar.

Wie bereits angedeutet sieht das weitere Vorgehen zur Rekonstruktion der Leitfähigkeitsverteilung folgendermaßen aus:

1. Bestimmung der Funktion $X(x)$ durch Lösen der Fredholmschen Integralgleichung (5.16).
2. Bestimmung der Funktion $\psi(x)$ durch Einsetzen von $X(x)$ in eine der Gleichungen (5.9),(5.10). Damit ergibt sich unmittelbar auch die Funktion $V(x) = -\Delta\tau/\tau = X/\psi$.
3. Bestimmung von $\tau(x)$ durch Lösen der Fredholmschen Integralgleichung 2.Art

$$\tau(x) = \tau_D(x) + \int_{\Omega} G_D(x, x') V(x') \tau(x') dx', \quad (5.17)$$

$$\tau_D(x) := - \int_{\partial\Omega} \frac{\partial G_D}{\partial n}(x, x')|_{x' \in \partial\Omega} \sqrt{\sigma_r}(x') ds', \quad (5.18)$$

wobei σ_r die gemessene Oberflächenleitfähigkeitsverteilung ist, die in dem hier betrachteten Fall konstant ist.

Aus der Aufzählung geht offensichtlich hervor, daß die einzelnen Rechnungen in der obigen Reihenfolge durchgeführt werden müssen. Daher ist es wichtig, zu klären, ob eine ungenaue Bestimmung der Funktion $X(x)$ eine Fehlerfortpflanzung in den beiden weiteren Schritten nach sich zieht. Dazu muß als erstes untersucht werden, inwiefern eine präzise Bestimmung von $X(x)$ prinzipiell möglich ist.

Es stellt sich heraus, daß $X(x)$ selbst bei fehlerfreien Meßdaten im allgemeinen nicht exakt bestimmt werden kann. Dies sieht man unmittelbar dem Integralkern K aus Gleichung (5.16) an. Da $K(x, x')$ aus der Differenz zweier Greensfunktionen

besteht, ist K in beiden Argumenten harmonisch. Hat man demnach eine Lösung zu Gleichung (5.16) gefunden, so erhält man weitere Lösungen, indem man Funktionen addiert, die keine harmonischen Anteile enthalten. Man hat demnach eine unendlich große Lösungsmannigfaltigkeit, aus der man eine geeignete Lösung zu wählen hat. Am einfachsten geschieht dies unter der Annahme, daß $X, \varphi \in \mathcal{L}^2(\Omega)$ gilt und der Operator

$$\begin{aligned} K : \mathcal{L}^2(\Omega) &\rightarrow \mathcal{L}^2(\Omega) \\ (Kf)(x) &= \int_{\Omega} K(x, x') f(x') dx' \end{aligned}$$

kompakt ist. Dann läßt sich K durch eine Singulärwertzerlegung darstellen:

$$Kf = \sum_n \sigma_n \langle f, v_n \rangle u_n. \quad (5.19)$$

Hierin ist $\{v_n\}$ ein vollständiges Orthogonalsystem für

$$\overline{\mathcal{R}(K^T)} = \mathcal{N}(K)^\perp,$$

während $\{u_n\}$ ein vollständiges Orthogonalsystem für

$$\overline{\mathcal{R}(K)} = \mathcal{N}(K^T)^\perp$$

ist.

Eine Möglichkeit zur Bestimmung einer eindeutig definierten Lösung bietet die verallgemeinerte Inverse $f^\dagger = K^\dagger g$:

$$f^\dagger = K^\dagger g = \sum_{\sigma_n > 0} \sigma_n^{-1} \langle g, u_n \rangle v_n. \quad (5.20)$$

Die so gefundene verallgemeinerte Lösung $f^\dagger$ ist demnach die Projektion der wahren Lösungsfunktion f auf das Komplement des Nullraums des Operators K :

$$f^\dagger = \sum_n \langle f, v_n \rangle v_n. \quad (5.21)$$

Geeignete Zusatzinformationen können jedoch die Qualität der gefundenen Lösung steigern. Verfügt man zum Beispiel über die Kenntnis einer Funktion, in deren Nähe sich die gesuchte Lösung aufhalten sollte, so läßt sich dieses Wissen in der Rekonstruktion der gesuchten Funktion ausnutzen. Dazu verwendet man einen Lagrange Multiplikator λ , der bestimmt, in welchem Maß die Zusatzinformation eingehen soll. Die somit bestimmte eindeutige Lösung X_λ hängt allerdings vom Stabilisierungsparameter λ ab, wie der Index andeuten soll.

Der obigen Aufzählung zu Folge wird die Quellverteilung X_λ als nächstes beispielsweise in Gleichung (5.10) eingesetzt, um die Funktion ψ zu bestimmen. Dabei ist jedoch zu beachten, daß der Nullraum des dann betrachteten Integraloperators

$$\tilde{G}_N : g \mapsto f \quad f(x) = \int_{\Omega} G_N(x, x') g(x') dx'$$

vom Nullraum $\mathcal{N}(K)$ verschieden ist, womit verschiedene Lösungen zur Gleichung (5.16) im allgemeinen verschiedene Potentiallösungen ψ liefern. Dies führt in der Folge zu großen Problemen, da die Bestimmung der Funktion $V = \Delta\tau/\tau$ eine Division durch ψ verlangt, wobei die Auswirkungen der Nullstellen von ψ völlig unklar sind.

5.3.2 Anwendung der Methode auf den Einheitskreis

Im Falle des Einheitskreises sind die Greensfunktionen $G_{N,D}$ zum Neumann- bzw. Dirichletproblem bekannt. G_N wurde bereits in Kapitel 2 abgeleitet (2.46). Im Falle des Dirichletproblems bestimmt man

$$G_D(r, \theta, r', \theta') = -\frac{1}{4\pi} \ln \frac{r^2 + r'^2 - 2rr' \cos(\theta - \theta')}{1 + r^2 r'^2 - 2rr' \cos(\theta - \theta')}. \quad (5.22)$$

Die zu lösende Integralgleichung (5.16) hat demnach in diesem speziellen Fall die Gestalt

$$\varphi(r, \theta) = \int_0^1 r' dr' \int_0^{2\pi} d\theta' \frac{1}{2\pi} \ln(1 + r^2 r'^2 - 2rr' \cos(\theta - \theta')) X(r', \theta'). \quad (5.23)$$

Wie ebenfalls in Kapitel 2 beschrieben wurde, läßt sich der Kern K dieser Integralgleichung in eine Fourierkosinusreihe entwickeln:

$$\ln(1 + r^2 r'^2 - 2rr' \cos(\theta - \theta')) = -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{r^k r'^k \cos k(\theta - \theta')}{\pi k}.$$

Mit den Bezeichnungen

$$u_k^1(r, \theta) = \sqrt{(2k+2)/\pi} r^k \cos k\theta, \quad (5.24)$$

$$u_k^2(r, \theta) = \sqrt{(2k+2)/\pi} r^k \sin k\theta \quad (5.25)$$

kann man K damit auch in der Form

$$K(r, \theta, r', \theta') = -\sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=1}^2 \sigma_k u_k^j(r, \theta) u_k^j(r', \theta')$$

$$\sigma_k = \frac{1}{2k(k+1)}$$

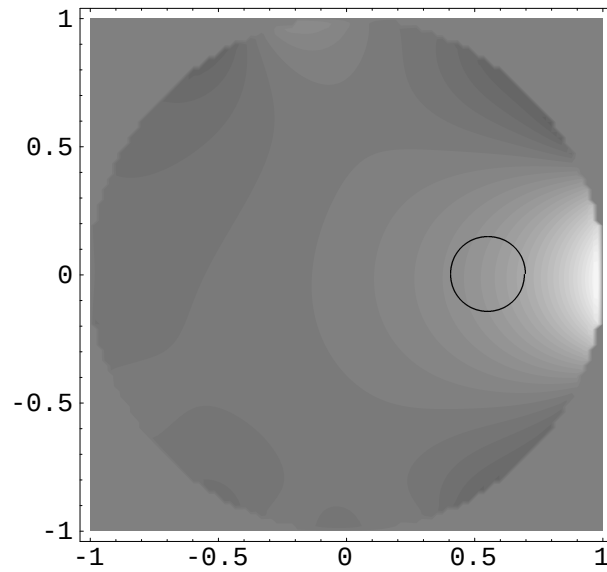
schreiben.

Da die Funktionen u_k^j paarweise orthogonal zueinander stehen, hat man damit unmittelbar eine Singulärwertzerlegung des Operators K gefunden und kann eine verallgemeinerte Inverse angeben. Verwendet man zur Stabilisierung eine Tikhonov-Regularisierung, so bestimmt man mit Gleichung (A.19) bei einem Regularisierungsparameter λ

$$X_\lambda = -\sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=1}^2 \frac{\sigma_k}{\sigma_k^2 + \lambda} \varphi_k^j u_k^j, \quad (5.26)$$

$$\varphi_k^j = \int_0^1 r dr \int_0^{2\pi} d\theta u_k^j(r, \theta) \varphi(r, \theta). \quad (5.27)$$

Abbildung (5.1) zeigt ein Rekonstruktionsergebnis von X für realistische von unserem Tomographen aufgenommene Meßwerte. Als äußere Stromdichte wurde eine kosinusförmige Verteilung gewählt. Zur Bestimmung der Koeffizienten φ_k^j wurden die in der Abbildung (4.9) dargestellten Fourierkoeffizienten a_n herangezogen, wobei der Koeffizient a_1 mit Hilfe des in der Abbildung eingezeichneten Fits korrigiert wurde.

Abbildung 5.1: Rekonstruktion von X

Das Rekonstruktionsergebnis war dabei annähernd unabhängig von der Wahl des Regularisierungsparameters λ . Kleine Variationen in dem nicht unmittelbar gemessenen, sondern durch einen Fit bestimmten Wert für φ_1^1 erbrachten keine wesentlichen Änderungen in der Rekonstruktion.

In jedem Fall kann man einzig und allein eine Art “Schatten” erkennen, den der zylindrische Störkörper, wie er in Abbildung (4.1) skizziert ist, auf den Rand des Gebietes wirft.

Als nächstes hat man daher zu untersuchen, ob es zu einer Verbesserung der Bildqualität nach dem zweiten Schritt der Rekonstruktion kommt. Hierzu ist eine Bestimmung der Funktion ψ aus der rekonstruierten Verteilung X nötig. Nach Gleichung (5.10) hat man dazu Integrale des Typs

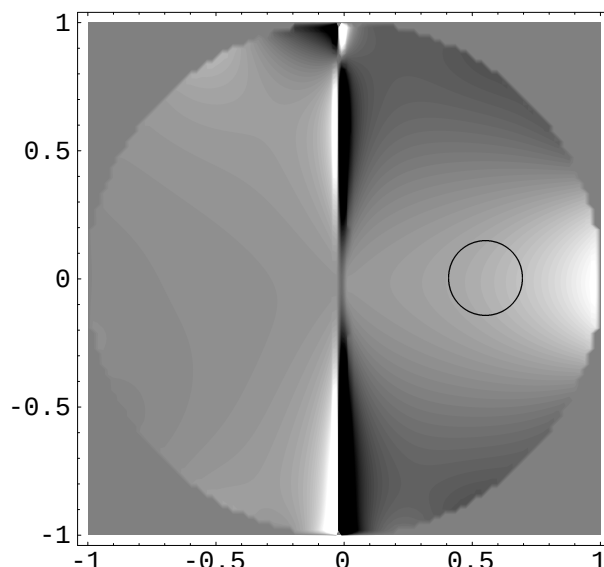
$$\int_0^1 r dr \int_0^{2\pi} d\theta G_N(r, \theta, r', \theta') u_k^j(r, \theta)$$

zu lösen.

Hierzu kann man die Entwicklung (2.45) verwenden. Als Endergebnis erhält man zu einer gegebenen Funktion X_λ aus Gleichung (5.26) die zugehörige Potentialfunktion

$$\psi(r, \theta) = \varphi_N(r, \theta) + \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=1}^2 \frac{\sigma_k}{\sigma_k^2 + \lambda} \phi_k^j \frac{u_k^j}{4k(k+1)} ((k+2) - k r^2). \quad (5.28)$$

Somit ist es möglich, ebenfalls die Funktion $\Delta\tau/\tau$ durch Division von X durch ψ zu bestimmen. Das Rekonstruktionsergebnis ist in Abbildung (5.2) dargestellt. Problematisch ist dabei die Division durch Null an Stellen des Nulldurchgangs der Funktion ψ . In dem konkret abgebildeten Ergebnis wurde für Punkte x mit $|\psi(x)| < a = 0.00001$ die Größe $X(x)/a$ dargestellt. Damit ist eine Interpretation des Ergebnisses in diesem Bereich sicher nicht sinnvoll. Im Gegensatz zu der

Abbildung 5.2: Rekonstruktion von $\Delta\tau/\tau$

in den Vereinbarungen formulierten Regel zur bildlichen Darstellung eines Rekonstruktionsergebnisses wurden daher solche kritischen Punkte x zur Bestimmung des betragsmäßig größten Werts der Verteilung nicht betrachtet.

Man kann feststellen, daß sich eine Verbesserung des Rekonstruktionsergebnisses aus Abbildung (5.1) im interessanten Bereich am Ort der Störung sicherlich nicht ergeben hat. Schon allein auf Grund des sinnlosen Verhaltens der dargestellten Verteilung an den Stellen des Nulldurchgangs der Funktion ψ kann man kein vernünftiges Ergebnis für τ durch die jetzt anstehende Lösung von Gleichung (5.17) erwarten.

Abgesehen von den nicht zufriedenstellenden hier präsentierten Rekonstruktionsergebnissen ist eine Behandlung des EIT-Problems mit einem Versuch in zwei Dimensionen wohl schon aus praktischen Gründen kaum ratsam. Als Information über die gesuchte Leitfähigkeitsverteilung steht einem einzig und allein die Potentialverteilung zu einer äußeren Stromdichte zur Verfügung. Dieser Informationsgehalt ist zwar im Idealfall unendlich groß, wie die Untersuchungen des vierten Kapitels jedoch zeigen, sind die in der Praxis meßbaren Potentialänderungen in einer trigonometrischen Basis auf die Anteile zu niedrigen Frequenzen beschränkt. In dem hier diskutierten Fall, der sich unmittelbar auf die Abbildung (4.6) bezieht, stehen einem bestenfalls zehn Meßwerte zur Verfügung, zu denen man im Rahmen des Meßfehlers Vertrauen haben kann. Ein Bild hoher Qualität war daher von Anfang an nicht zu erwarten.

5.3.3 Anwendung der Methode auf den Halbraum

Die konkrete Anwendung der Methode auf den Spezialfall eines unendlich ausgehenden Halbraums verlangt zunächst die Bestimmung der beiden Greensfunktio-

nen $G_{N,D}$ zum Neumann- bzw. Dirichletproblem der Potentialgleichung. Wie in den Untersuchungen des zweiten Kapitels wird auch in der Folge statt des gesamten Halbraums eine Halbkugel mit sehr großem Radius R betrachtet.

Im Falle des Neumannproblems bestimmt man, wie in Kapitel 2 beschrieben, die Greensfunktion (2.57)

$$G_N(\vec{x}, \vec{x}') = \frac{1}{4\pi |\vec{x} - \vec{x}'|} + \frac{1}{4\pi \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z + z')^2}},$$

die auf einem Teil der Randfläche, nämlich auf

$$(\partial\Omega)_1 := \{(x, y, z) ; x^2 + y^2 < R^2, z = 0\},$$

die Gleichung

$$\frac{\partial G_N}{\partial n'}(\vec{x}, \vec{x}') = 0 \quad , \vec{x} \in \Omega, \vec{x}' \in \partial\Omega$$

erfüllt.

Bezüglich der Neumannrandbedingung

$$f(\vec{x}) = \nabla\psi(\vec{x}) \cdot \vec{n}|_{\vec{x} \in (\partial\Omega)_1}$$

erhält man als Lösung zum Potentialproblem $\Delta\psi = -X$

$$\begin{aligned} \psi(\vec{x}) &= \int_{\Omega} G_N(\vec{x}, \vec{x}') X(\vec{x}') dV' + \int_{(\partial\Omega)_1} \left\{ \phi(\vec{x}') \frac{\partial G_N(\vec{x}, \vec{x}')}{\partial n'} \right. \\ &\quad \left. - G_N(\vec{x}, \vec{x}') f(\vec{x}') \right\} dS' \\ &= \int_{\Omega} G_N(\vec{x}, \vec{x}') X(\vec{x}') dV' - \int_{(\partial\Omega)_1} G_N(\vec{x}, \vec{x}') f(\vec{x}') dS'. \end{aligned}$$

Die Konstruktion der Greensfunktion zum Dirichletproblem ist mit der Methode der Spiegelladungen unmittelbar klar. Man erhält

$$G_D(\vec{x}, \vec{x}') = \frac{1}{4\pi |\vec{x} - \vec{x}'|} - \frac{1}{4\pi \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z + z')^2}}. \quad (5.29)$$

Das Vorzeichen der Spiegelladung stellt sicher, daß G_D auf $(\partial\Omega)_1$ wie gewünscht verschwindet. Damit gilt für eine Dirichletrandbedingung

$$g(\vec{x}) = \psi(\vec{x})|_{\vec{x} \in (\partial\Omega)_1}$$

$$\begin{aligned} \psi(\vec{x}) &= \int_{\Omega} G_D(\vec{x}, \vec{x}') X(\vec{x}') dV' + \int_{(\partial\Omega)_1} \left\{ g(\vec{x}') \frac{\partial G_D(\vec{x}, \vec{x}')}{\partial n'} \right. \\ &\quad \left. - G_D(\vec{x}, \vec{x}') \frac{\partial \phi(\vec{x}')}{\partial n'} \right\} dS' \\ &= \int_{\Omega} G_D(\vec{x}, \vec{x}') X(\vec{x}') dV' + \int_{(\partial\Omega)_1} \frac{\partial G_D(\vec{x}, \vec{x}')}{\partial n'} g(\vec{x}') dS'. \end{aligned}$$

Wie in den Gleichungen (5.12),(5.11) führt man als nächstes die Funktionen φ_N und φ_D ein, wobei darauf zu achten ist, daß sich hier die Integration nur über $(\partial\Omega)_1$ erstreckt.

$$\varphi_D(\vec{x}) := - \int_{(\partial\Omega)_1} \frac{\partial G_D}{\partial n'}(\vec{x}, \vec{x}') g(\vec{x}') dS' \quad (5.30)$$

$$\varphi_N(\vec{x}) := \int_{(\partial\Omega)_1} G_N(\vec{x}, \vec{x}') f(\vec{x}') dS' \quad (5.31)$$

Mit der Bezeichnung $\varphi := \varphi_N - \varphi_D$ erhält man dann die gewünschte Fredholmsche Integralgleichung (5.16) mit einem Integralkern

$$K(\vec{x}, \vec{x}') = - \frac{1}{2\pi \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2}}.$$

Zur Beschreibung eines praxisnahen Falls hat man zu berücksichtigen, daß die Potentialverteilung auf der Meßebeane natürlich nur stark begrenzt experimentell zugänglich ist. Realistisch ist, daß man beispielsweise in einem rechteckigen Gebiet N Potentialwerte diskret mißt. Damit ist jedoch eine Bestimmung der zugehörigen harmonischen Funktion φ_D im gesamten Halbraum nicht möglich.

Ein weiteres Problem besteht in der Normierung der gemessenen Potentialfunktion. Man umgeht dieses Problem, indem man nur Differenzpotentiale betrachtet, die von einer Normierung unabhängig sind. Für eine Referenzelektrode am Ort $\vec{x}_0 = (0, 0, 0)$ und N weitere Elektroden an den Orten $\vec{x}_n$, $n = 1 \cdots N$ der Meßelektroden erhält man dann die N Gleichungen

$$\varphi(\vec{x}_n) - \varphi(\vec{x}_0) = \int_{\Omega} \{K(\vec{x}_n, \vec{x}') - K(\vec{x}_0, \vec{x}')\} X(\vec{x}') dV'.$$

Zur Lösung des Rekonstruktionsproblems betrachtet man also den Operator

$$\tilde{K} : \mathcal{L}^2(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}^N, \quad \varphi(\vec{x}_n) - \varphi(\vec{x}_0) = \int_{\Omega} K_n(\vec{x}') X(\vec{x}') dV', \quad (5.32)$$

$$K_n(\vec{x}') = \frac{1}{2\pi \sqrt{(x_n - x')^2 + (y_n - y')^2 + (z - z')^2}} - \frac{1}{2\pi |\vec{x}'|}, \quad (5.33)$$

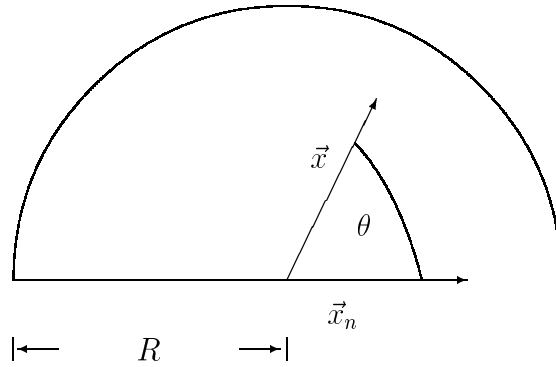
der einer durch eine Leitfähigkeitsänderung verursachten Quelle $X(\vec{x})$ die zugehörigen Potentialdifferenzänderungen am Rand zuordnet. Für den so definierten Operator läßt sich leicht eine approximative Inverse finden. Im Anhang A der Arbeit über Inverse Problem ist erläutert, was darunter genau zu verstehen ist.

Dazu hat man die Gramsche Matrix $\tilde{K}\tilde{K}^T$ mit den Einträgen

$$(\tilde{K}\tilde{K}^T)_{nm} = \int_{\Omega} K_n(\vec{x}) K_m(\vec{x}) dV \quad (5.34)$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{\Omega} \left(\frac{1}{|\vec{x}|} - \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}_n|} \right) \left(\frac{1}{|\vec{x}|} - \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}_m|} \right) dV \quad (5.35)$$

zu berechnen.

Abbildung 5.3: Zur Berechnung von $(\tilde{K}\tilde{K}^T)_{nm}$

Zur Bestimmung der oben auftretenden Integrale geht man folgendermaßen vor:
Zunächst ist

$$\begin{aligned}
 (\tilde{K}\tilde{K}^T)_{nm} &= \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{\Omega} \frac{1}{|\vec{x}|^2} - \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}_n| |\vec{x}|} dV \\
 &+ \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{\Omega} \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}_n| |\vec{x} - \vec{x}_m|} - \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}_m| |\vec{x}|} dV \\
 &= I_1 + I_2.
 \end{aligned}$$

Zur Auswertung des Integrals I_1 geht man am zweckmäßigsten zu Kugelkoordinaten über, wie es in Abbildung (5.3) angedeutet ist. Dabei legt man die z -Achse in Richtung des Vektors $\vec{x}_n$. Somit gilt mit $|\vec{x}| = r$ und $|\vec{x}_n| = r_n$

$$\begin{aligned}
 I_1 &= \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{\Omega} \frac{1}{|\vec{x}|^2} - \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}_n| |\vec{x}|} \\
 &= \frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^\pi d\phi \int_0^\pi d\theta \int_0^R dr \, r^2 \sin \theta \left(\frac{1}{r^2} - \frac{1}{r \sqrt{r^2 + r_n^2 - 2rr_n \cos \theta}} \right).
 \end{aligned}$$

Nach Ausführen der Winkelintegrationen erhält man

$$\begin{aligned}
 I_1 &= \frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^R dr \left(2\pi - \frac{\pi}{r_n} \left[\sqrt{r^2 + r_n^2 - 2rr_n \cos \theta} \right]_0^\pi \right) \\
 &= \frac{R}{2\pi} - \frac{1}{4\pi r_n} \int_0^R dr \left(\sqrt{(r_n + r)^2} - \sqrt{(r_n - r)^2} \right).
 \end{aligned}$$

Das verbleibende Integral liefert

$$\begin{aligned}
 &\int_0^R dr \left(\sqrt{(r_n + r)^2} - \sqrt{(r_n - r)^2} \right) \\
 &= \int_0^R dr (r_n + r) + \int_0^{r_n} dr -(r_n - r) + \int_{r_n}^R dr (r_n - r) \\
 &= r_n R + \frac{1}{2} r^2 + \frac{1}{2} r_n^2 - r_n^2 + r_n(R - r_n) - \frac{1}{2} R^2 + \frac{1}{2} r_n^2 = 2r_n R - r_n^2.
 \end{aligned}$$

Damit erhält man als Endergebnis

$$I_1 = \frac{R}{2\pi} - \frac{2r_n R - r_n^2}{4\pi r_n} = \frac{r_n}{4\pi}. \quad (5.36)$$

Das verbleibende Integral I_2 läßt sich ebenso einfach bestimmen. Der Integrand

$$\frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}_n| |\vec{x} - \vec{x}_m|} - \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}_m| |\vec{x}|} = \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}_m|} \left(\frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}_n|} - \frac{1}{|\vec{x}|} \right)$$

zeigt das asymptotische Verhalten $\propto 1/|\vec{x}|^3$, so daß für einen hinreichend großen Radius R der Halbkugel das Integral unter kleinen Translationen invariant ist. Um dies zu erkennen, betrachtet man für eine Translation des Ursprungs um den Vektor $\vec{d}$ das Integral über eine Halbkugel mit Zentrum $\vec{d}$ und Radius $\tilde{R} = R - |\vec{d}|$. Bezeichnet man das so definierte Integrationsgebiet mit $\tilde{\Omega}$, so ergibt sich für das Integral I_2 :

$$I_2 = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{\tilde{\Omega}} \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}_n| |\vec{x} - \vec{x}_m|} - \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}_m| |\vec{x}|} dV + Rest.$$

Der Restterm läßt sich auf Grund des asymptotischen Verhaltens des Integranden leicht abschätzen:

$$Rest < C \frac{1}{\tilde{R}^3} 4\pi R^2 |\vec{d}|.$$

Für im Vergleich zum Kugelradius kleine Translationen geht der Restterm damit gegen Null, womit sich das Integral I_2 auf die Form des bereits berechneten Integrals I_1 bringen läßt:

$$\begin{aligned} I_2 &= \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{\Omega} \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}_n| |\vec{x} - \vec{x}_m|} - \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}_m| |\vec{x}|} dV \\ &\approx \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{\Omega} \frac{1}{|\vec{x}| |\vec{x} - (\vec{x}_n - \vec{x}_m)|} - \frac{1}{|\vec{x}| |\vec{x} - (-\vec{x}_m)|} dV \\ &= \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{\Omega} \frac{1}{|\vec{x}| |\vec{x} - (\vec{x}_n - \vec{x}_m)|} - \frac{1}{|\vec{x}|^2} - \left(\frac{1}{|\vec{x}| |\vec{x} - (-\vec{x}_m)|} - \frac{1}{|\vec{x}|^2} \right) dV \\ &= \frac{1}{4\pi} (|\vec{x}_m| - |\vec{x}_m - \vec{x}_n|). \end{aligned}$$

Die gesuchten Matrixeinträge haben somit die einfache Gestalt

$$(\tilde{K} \tilde{K}^T)_{nm} = \frac{1}{4\pi} (|\vec{x}_m| + |\vec{x}_n| - |\vec{x}_m - \vec{x}_n|). \quad (5.37)$$

Für einen Test des Rekonstruktiosverfahrens kann man sich eine Situation vorstellen, wie sie in Abbildung (5.4) dargestellt ist.

Sie zeigt die Meßanordnung auf der Ebene $z = 0$. Die Kreise $\bullet$ und $\circ$ sollen stromführende Elektroden repräsentieren, wobei über die mittlere Elektrode ($\bullet$) der Strom $I = +4$ in den Halbraum einfließen soll, während über die äußeren Elektroden ($\circ$) jeweils der Strom $I = -1$ abfließt. Die übrigen Punkte auf der Meßebeane stellen potentialmessende Elektroden dar, deren Gesamtanzahl in der Abbildung und den folgenden Rechnungen $N = 31 \times 31 = 961$ ist. Außerdem sei eine Potentialmessung auch auf der zentralen stromfließenden Elektrode möglich. Die folgenden

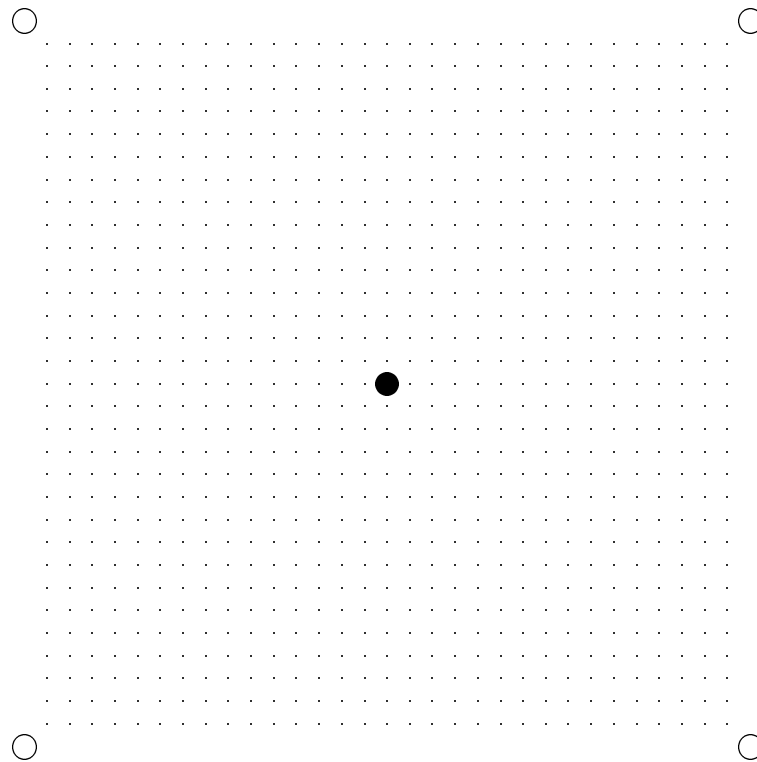


Abbildung 5.4: Modellierung der Meßplatte

Rechnungen beziehen sich auf eine Längeneinheit, die durch den Abstand zweier potentialmessender Elektroden gegeben ist.

Der Rekonstruktionsalgorithmus soll nun beispielhaft an einem kugelförmigen metallisch leitenden Störkörper mit Radius $R = 1$ und Zentrumskoordinaten $(0, 0, 6)$ getestet werden. Der Störkörper befindet sich damit hinter der stromfließenden Elektrode $\bullet$ in einem Abstand von 6 Elektrodenabständen zur Meßebe $z = 0$. Mit den in Kapitel 2 angegebenen Methoden läßt sich die von diesem Störkörper verursachte Änderung der Potentialverteilung bestimmen. Man erhält bei einem solch großen Verhältnis von Abstand zur Meßebe zu Radius in sehr guter Näherung eine reine Dipolkorrektur ϕ_D . Da in dem hier untersuchten Fall die beiden Bedingungsgleichungen (5.3), (5.4) sicher erfüllt sind, ergibt eine Messung verschiedener Potentialdifferenzen $\phi_D(\vec{x}_n) - \phi_D(\vec{x}_0)$ unmittelbar bis auf ein Vorzeichen die gesuchten Meßwertgrößen $\varphi(\vec{x}_n) - \varphi(\vec{x}_0)$, aus denen die gesuchte Funktion X bestimmt werden soll.

Die in der Folge dargestellten Lösungen des Rekonstruktionsproblems (5.32), (5.33) beziehen sich auf eine verallgemeinerte Inverse mit

$$e_\gamma(\vec{x}, \vec{y}) = \delta(\vec{x} - \vec{y}).$$

Die daraus resultierende Verteilung $X = \psi \Delta \tau / \tau$ ist für verschiedene Schnitte parallel zur (x,y)-Ebene in Abbildung (5.5) dargestellt.

Aus den einzelnen Abbildungen geht nicht hervor, daß die rekonstruierte Funktion zum Rand $z = 0$ hin stark anwächst. Für eine dreidimensionale Vorstellung von

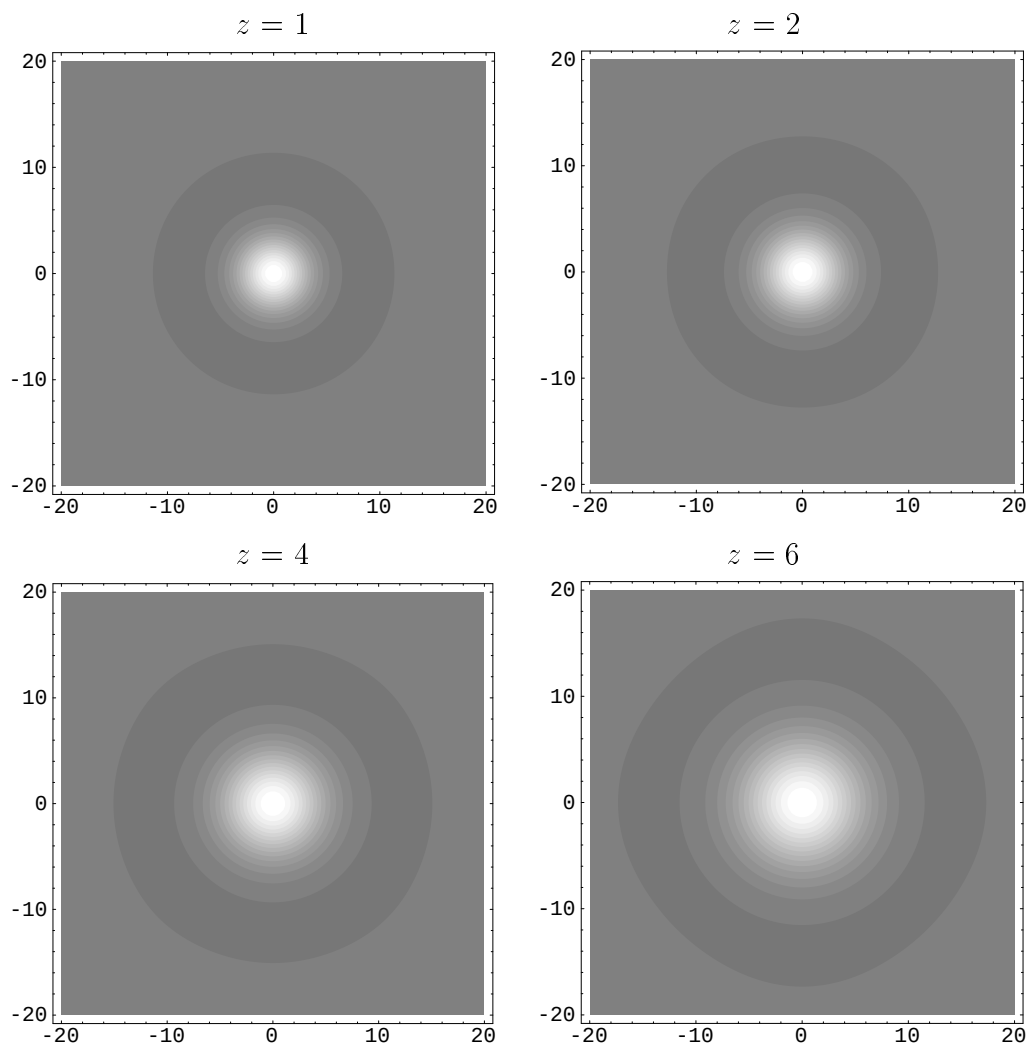


Abbildung 5.5: Schnittbilder der Rekonstruktion von X für einen kugelförmigen Störkörper an den Koordinaten $(0,0,6)$

der Lösungsfunktion ist es hilfreich sich daran zu erinnern, daß X eine harmonische Funktion ist. Es wird aber deutlich, daß die grobe Ortung eines deutlich anders leitenden Störkörpers möglich ist, sofern man eine Kenntnis davon besitzt, welche Meßwerte man für den ungestörten Fall zu erwarten hat.

Weitere Tests des hier untersuchten Rekonstruktionsverfahrens belegen, daß das Hinzufügen weiterer kleiner kugelförmiger Störkörper, die sich in größerer Entfernung zur Meßebene befinden, kaum sichtbare Veränderungen im Rekonstruktionsergebnis liefert. Verursachen demnach mehrere unterschiedlich große und unterschiedlich leitende Störkörper mehrere Anteile in der gemessenen Potentialänderung, so ist es einzig und allein möglich, dem dominierenden Anteil in dieser Verteilung eine Störquelle zuzuordnen, in dem Sinne, wie es die Abbildung (5.5) verdeutlicht. Solche Untersuchungen basieren allerdings darauf, daß die unterschiedlichen Potentialkorrekturen entkoppelt voneinander betrachtet werden können, was nur für einen hinreichend großen Abstand der einzelnen Störquellen voneinander auch mit großer

Genauigkeit gilt.

Test der Stabilität der Rekonstruktion

Von einem exakten Verständnis einer ungestörten Situation mit homogener Leitfähigkeit, die bei den obigen Betrachtungen vorausgesetzt wurde, kann man realistischerweise nicht ausgehen. Daher ist es notwendig, den Rekonstruktionsalgorithmus auf seine Stabilität zu testen. In Abbildung (5.6) sind Schnittbilder der Rekonstruktion in den Ebenen $z = 1$ und $z = 6$ für fehlerhafte Daten dargestellt.

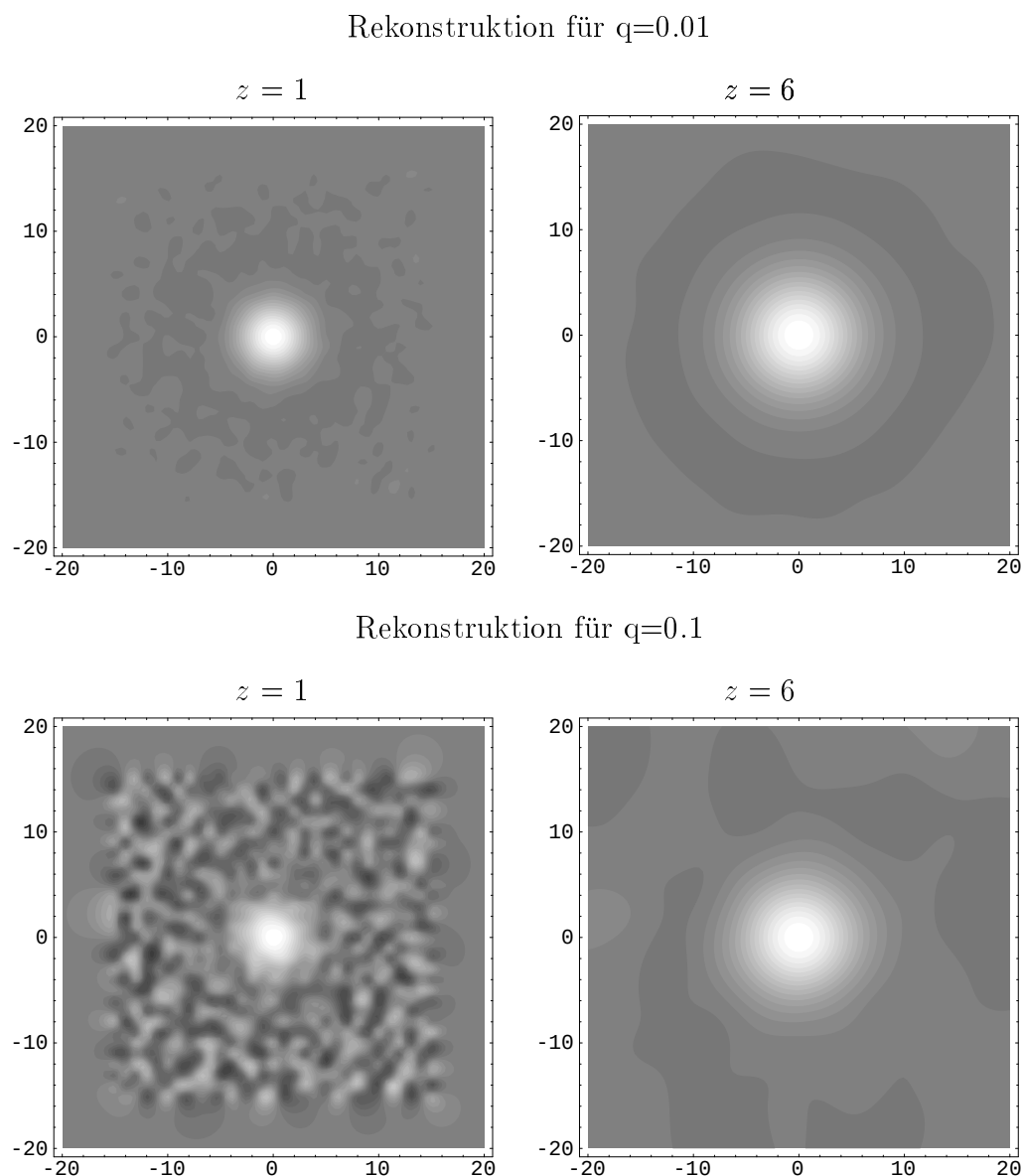


Abbildung 5.6: Schnittbilder der Rekonstruktion von X für einen kugelförmigen Störkörper bei nach Gleichung (5.38) fehlerbehafteten Daten.

Für einen exakten Messwert m wurde dabei der fehlerhafte Meßwert m_f folgen-

dermaßen bestimmt:

$$m_f = m(1 + qz). \quad (5.38)$$

Hierin ist z eine vom Computer generierte Zufallszahl zwischen -1 und 1 und q die Gewichtung des Fehlers, die in den beiden folgenden Beispielen 0.1 und 0.01 beträgt. Obwohl insbesondere für $q = 0.1$ das Rekonstruktionsergebnis sichtbar schlechter ist, ist das Ergebnis durchaus zufriedenstellend, da eine grobe Ortung der Störung weiterhin möglich ist.

5.3.4 Was sieht der Elefantenrüsselfisch (*Gnathonemus petersii*)?

Der Elefantenrüsselfisch ist ein in Afrika lebender schwach elektrischer Fisch. Solche Tiere verfügen über ein sogenanntes elektrisches Organ, meist abgewandelte Muskelzellen, mit der sie in ihrer Umgebung ein elektrisches Wechselstromfeld aufbauen können. Mit ihren Elektrorezeptororganen sind die Fische in der Lage, dieses Feld zu messen und somit auch Veränderungen der Feldform wahrzunehmen. Jedes Objekt in der Umgebung des Fisches projiziert in dieser Art ein "elektrisches" Bild auf dessen Hautoberfläche. Das Aussehen des Bildes hängt von Größe und Ort der Störung ab. Nimmt man an, daß in unmittelbarer Nähe des Fisches das elektrische Feld homogen ist, so kann man sich eine Vorstellung von diesem elektrischen Bild machen. Dazu kann man sich den Fisch idealisiert in der (x, y) -Ebene liegend denken. Das ungestörte elektrische Feld habe die Form $E(x, y, z) = Cx$. Ein ideal leitender oder nichtleitender Störkörper verursacht eine Änderung der Potentialverteilung in Form eines Dipolfelds. Für eine ideal leitende Kugel mit den Zentrumskoordinaten $(0, 0, z_0)$ und Radius ϵ beträgt die Potentialänderung $\delta\phi$ auf der Fischhaut nach Gleichung (2.75) in guter Näherung

$$\delta\phi(x, y) = -\frac{2C\epsilon^3x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z_0^2}^3}.$$

Die Abbildung (5.7) verdeutlicht, das ein in unmittelbarer Nähe des Fisches gelegener Störkörper ein sehr scharfes Dipolsignal als elektrisches Bild hinterläßt. Entfernt sich der Körper von der Hautoberfläche, so verschwimmt das Signal zunehmend. Genauer gesagt wandern Maximum und Minimum der Potentialänderung auseinander. Weiterhin verringert sich die Stärke der Änderung, was allerdings aus den hier gezeigten Bildern nicht hervorgeht.

An der Universität Bonn, an der in der zoologischen Abteilung das Verhalten des Fisches genauer untersucht wird, hat man daher die Vermutung geäußert, daß *Gnathonemus petersii* die Entfernung zu einem Objekt dadurch bestimmt, daß er den maximalen Anstieg mit dem maximalen Betrag der Potentialänderung ins Verhältnis setzt. In dem einfachen Modell eines homogenen elektrischen Feldes in der unmittelbaren Umgebung des Fisches kann man diese Vermutung leicht überprüfen.

Offensichtlich ist für jedes feste Wertepaar (x, z_0) die Potentialänderung $\delta\phi$ für $y = 0$ maximal. Als x -Wert des maximalen Betrags der Potentialänderung ermittelt man $x_{max} = \pm z_0/\sqrt{2}$ und als zugehörigen Potentialwert

$$\phi_{max} := |\delta\phi(x_{max}, 0)| = \frac{4C\epsilon^3}{\sqrt{3}^3 z_0^2}.$$

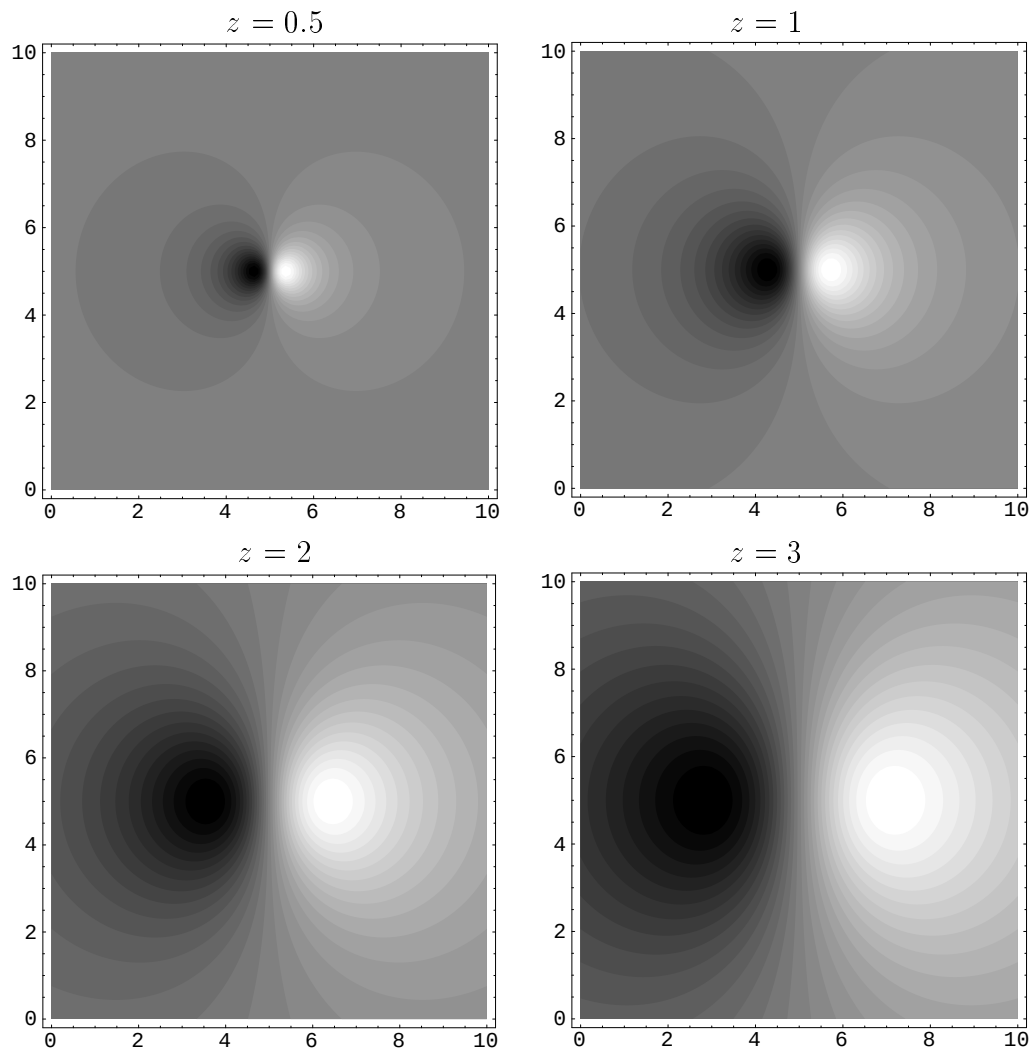


Abbildung 5.7: Aussehen des elektrischen Bildes eines sehr kleinen kugelförmigen Störkörpers in Abhängigkeit zur Entfernung z vom Fisch

Zur Bestimmung des maximalen Anstiegs der Potentialänderung sind die Extremstellen der Funktion

$$|\nabla \delta \phi|^2 = 4 C^2 \epsilon^6 \frac{(2x^2 + y^2 + z_0^2)^2 + 9x^2 y^2}{(x^2 + y^2 + z_0^2)^5}$$

zu bestimmen. Man findet, daß der maximale Anstieg der Potentialänderung sich im Punkt $(x, y) = (0, 0)$ befindet. Damit gilt:

$$\phi'_{max} := |\nabla \delta \phi(0, 0)| = 2C \left(\frac{\epsilon}{z_0} \right)^3.$$

Das Verhältnis aus beiden Größen

$$\frac{\phi_{max}}{\phi'_{max}} = \frac{2}{3\sqrt{3}} z_0$$

ist also tatsächlich proportional zur Entfernung des Störkörpers. Dies gilt aber sicher nur solange, wie man das elektrische Feld als homogen ansehen kann. Im übrigen ergibt sich in dem hier diskutierten Fall einer ideal leitenden Kugel die Entfernung zur $z = 0$ -Ebene unmittelbar aus der Kenntnis von x_{max} .

Eine Bestimmung des größten Betrags der Potentialänderung ist für den Fisch außerdem dazu notwendig, um eine Abschätzung über die Größe der Störung zu bekommen. Dabei muß er allerdings zusätzlich eine Kenntnis über die ungefähre Leitfähigkeit des Störungsobjekts besitzen. Das ist unmittelbar klar, wenn man bedenkt, daß auch große Objekte vom Fisch sicherlich nicht mehr wahrgenommen werden können, falls die Leitfähigkeit des Objekts der Leitfähigkeit des umgebenden Wassers zu ähnlich ist.

Um zu klären, ob die hier beschriebene Vorgehensweise des Elefantenrüsselfischs zur Orientierung in trüben Gewässern kopiert und in der medizinischen Diagnostik eingesetzt werden kann, muß man sich die weitergehende Frage stellen, inwiefern die oben gezeigten elektrischen Bilder zu realistischen dreidimensionalen Leitfähigkeitsverteilungen umgerechnet werden können.

Dazu kann man zunächst vereinfacht das folgende Problem betrachten. Der Bezug zur Mammographie als einem möglichen praktischen Anwendungsgebiet wird im Anschluß diskutiert.

Gesucht sei die Leitfähigkeitsverteilung σ in

$$\Omega = \{(x, y, z) | 0 < x < a, 0 < y < b, 0 < z < c\}$$

Für die weitere Behandlung ist es zweckmäßig den Rand $\partial\Omega$ des Gebietes in die sechs Seitenteile zu zerteilen:

$$\partial\Omega = \partial\Omega_{x=0} \cup \partial\Omega_{x=a} \cup \partial\Omega_{y=0} \cup \partial\Omega_{y=b} \cup \partial\Omega_{z=0} \cup \partial\Omega_{z=c}.$$

Hierbei ist zum Beispiel mit $\partial\Omega_{x=0}$ die Menge

$$\partial\Omega_{x=0} = \{(x, y, z) | x = 0, 0 \leq y \leq b, 0 \leq z \leq c\}$$

gemeint.

Die folgenden Untersuchungen beziehen sich auf eine feste äußere Stromdichte. Es sei

$$\sigma \frac{\partial\phi}{\partial n} = -C \quad ; \quad (x, y, z) \in \partial\Omega_{x=0} \quad (5.39)$$

$$\sigma \frac{\partial\phi}{\partial n} = C \quad ; \quad (x, y, z) \in \partial\Omega_{x=a} \quad (5.40)$$

$$\sigma \frac{\partial\phi}{\partial n} = 0 \quad ; \quad \text{sonst.} \quad (5.41)$$

Offensichtlich ist im Falle $\sigma = \sigma_0 \equiv 1$ eine Lösung des Potentialproblems durch $\phi_0(x, y, z) = Cx$ gegeben. In der Folge wird der Einfachheit halber $C = 1$ gesetzt, was durch eine geeignete Wahl der Einheiten für Leitfähigkeit und Potential immer erreicht werden kann.

Eine Änderung $\delta\sigma$ der homogenen Verteilung bewirkt eine Änderung $\delta\phi$ der Potentialverteilung ϕ_0 . Für eine Funktion $g \in \mathcal{L}^2_\diamond(\partial\Omega)$ erhält man nach Gleichung (4.12) in linearer Näherung

$$\langle \delta\phi, g \rangle_{\mathcal{L}^2_\diamond(\partial\Omega)} = - \int_{\Omega} \nabla\phi_0 \cdot \nabla\phi_g \delta\sigma \, d^3x,$$

wobei ϕ_g die Lösung des Potentialproblems zu einer äußeren Stromdichteverteilung g ist.

In dem hier diskutierten Problem soll eine Potentialmessung jedoch nur auf $\partial\Omega_{z=0}$ möglich sein. Es sei $\{u_n\}$ eine Orthonormalbasis von $\mathcal{L}^2_\diamond(\partial\Omega_{z=0})$. Weiterhin sei $\tilde{u}_n \in \mathcal{L}^2_\diamond(\partial\Omega)$ folgendermaßen definiert:

$$\tilde{u}_n(x) := \begin{cases} u_n(x) & ; \quad x \in \partial\Omega_{z=0} \\ 0 & ; \quad \text{sonst} \end{cases}. \quad (5.42)$$

Damit gilt mit Gleichung (4.12) speziell für Momente $\langle \delta\phi, \tilde{u}_n \rangle_{\mathcal{L}^2_\diamond(\partial\Omega)}$

$$\langle \delta\phi, u_n \rangle_{\mathcal{L}^2_\diamond(\partial\Omega_{z=0})} = \langle \delta\phi, \tilde{u}_n \rangle_{\mathcal{L}^2_\diamond(\partial\Omega)} = - \int_{\Omega} \nabla\phi_0 \cdot \nabla\phi_{\tilde{u}_n} \delta\sigma \, d^3x.$$

Der Zusammenhang zwischen einer Leitfähigkeitsänderung $\delta\sigma$ und einer zugehörigen Änderung der Potentialverteilung $\delta\phi \in \mathcal{L}^2_\diamond(\partial\Omega_{z=0})$ wird damit in linearer Näherung durch den Operator

$$\begin{aligned} A : \mathcal{L}^2(\Omega) &\rightarrow \mathcal{L}^2_\diamond(\partial\Omega_{z=0}) \\ A\delta\sigma &:= - \sum_{n=1}^{\infty} \left(\int_{\Omega} \nabla\phi_0 \cdot \nabla\phi_{\tilde{u}_n} \delta\sigma \, d^3x \right) u_n \end{aligned} \quad (5.43)$$

beschrieben.

Natürlich kann man dabei nicht erwarten, aus der Kenntnis von $\delta\phi$ eindeutig auf die gesuchte Leitfähigkeitsverteilung zurückschließen zu können.

Als vollständiges Orthonormalsystem für $\mathcal{L}^2_\diamond(\partial\Omega_{z=0})$ kann man die Funktionen

$$u_{i,j}(x, y) = C_{i,j} \cos \frac{i\pi x}{a} \cos \frac{j\pi y}{b} \quad i, j = 0, 1, \dots, \quad (i, j) \neq (0, 0) \quad (5.44)$$

$$C_{i,j} = \begin{cases} 2/\sqrt{ab} & ; \quad i, j \neq 0 \\ \sqrt{2/(ab)} & ; \quad \text{sonst} \end{cases} \quad (5.45)$$

wählen.

Damit läßt sich jede Funktion $\varphi \in \mathcal{L}^2_\diamond(\partial\Omega_{z=0})$ als doppelte Fourierkosinusreihe schreiben:

$$\varphi(x, y) = \sum_{\substack{i,j=0 \\ (i,j) \neq (0,0)}}^{\infty} a_{i,j} u_{i,j}(x, y) \quad (5.46)$$

$$a_{i,j}(x, y) = \int_0^b \int_0^a \varphi(x, y) u_{i,j}(x, y) \, dx \, dy. \quad (5.47)$$

Für eine äußere Stromdichte $\tilde{u}_{i,j} \in \mathcal{L}^2_\diamond(\partial\Omega)$, die sich mit Gleichung (5.42) aus $u_{i,j}$ ergibt, bestimmt man mit der Abkürzung

$$\delta_{i,j} = \pi \sqrt{(i/a)^2 + (j/b)^2}$$

die zugehörige Potentialfunktion

$$\phi_{\tilde{u}_{i,j}}(x, y, z) = \frac{C_{i,j}}{\delta_{i,j}(1 - e^{-2\delta_{i,j}c})} \cos \frac{i\pi x}{a} \cos \frac{j\pi y}{b} \left\{ e^{-\delta_{i,j}z} + e^{\delta_{i,j}z - 2\delta_{i,j}c} \right\}. \quad (5.48)$$

Die Funktion setzt sich aus Anteilen der Form

$$\cos \alpha x \cos \beta y e^{\pm \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} z}$$

zusammen und ist damit offensichtlich harmonisch.

Für die Normalenableitung auf $\partial\Omega_{z=0}$ verifiziert man

$$-\left. \frac{d\phi_{\tilde{u}_{i,j}}(x, y, z)}{dz} \right|_{z=0} = -u_{i,j} \frac{-1 + e^{-2\delta_{i,j}c}}{(1 - e^{-2\delta_{i,j}c})} = u_{i,j}.$$

Alle anderen Normalenableitungen auf den übrigen fünf Randflächen verschwinden, was man leicht überprüft.

Damit gilt

$$-\nabla\phi_0 \cdot \nabla\phi_{\tilde{u}_{i,j}} = \frac{C_{i,j}i\pi}{a\delta_{i,j}(1 - e^{-2\delta_{i,j}c})} \sin \frac{i\pi x}{a} \cos \frac{j\pi y}{b} \left\{ e^{-\delta_{i,j}z} + e^{\delta_{i,j}z - 2\delta_{i,j}c} \right\}.$$

Die Funktionen

$$v_{i,j} := \frac{-\nabla\phi_0 \cdot \nabla\phi_{\tilde{u}_{i,j}}}{\|\nabla\phi_0 \cdot \nabla\phi_{\tilde{u}_{i,j}}\|_{\mathcal{L}^2(\Omega)}}, \quad i = 1, \dots, j = 0, \dots \quad (5.49)$$

bilden somit ebenfalls ein Orthonormalsystem, womit unmittelbar ein singuläres System für den Operator A gegeben ist. Mit $\sigma_{i,j} := \|\nabla\phi_0 \cdot \nabla\phi_{\tilde{u}_{i,j}}\|_{\mathcal{L}^2(\Omega)}$ gilt

$$\begin{aligned} A v_{i,j} &= - \sum_{\substack{l,m=0 \\ (l,m) \neq (0,0)}}^{\infty} \left(\int_{\Omega} \nabla\phi_0 \cdot \nabla\phi_{\tilde{u}_{l,m}} v_{i,j} d^3x \right) u_{i,j} \\ &= \sum_{\substack{l,m=0 \\ (l,m) \neq (0,0)}}^{\infty} \left(\int_{\Omega} \sigma_{l,m} v_{l,m} v_{i,j} d^3x \right) u_{l,m} = \sigma_{i,j} u_{i,j}. \end{aligned}$$

Für die Singulärwerte $\sigma_{i,j}$ ergibt sich

$$\begin{aligned} \sigma_{i,j} &= \left(\frac{i^2 \pi^2}{a^2 \delta_{i,j}^2 (1 - e^{-2\delta_{i,j}c})^2} \int_0^c \left(e^{-\delta_{i,j}z} + e^{\delta_{i,j}z - 2\delta_{i,j}c} \right)^2 dz \right)^{1/2} \\ &= \frac{i\pi}{a\delta_{i,j}(1 - e^{-2\delta_{i,j}c})} \left(\left[\frac{-1}{2\delta_{i,j}} e^{-2\delta_{i,j}z} + 2z e^{-2\delta_{i,j}c} + \frac{1}{2\delta_{i,j}} e^{-4\delta_{i,j}c + 2\delta_{i,j}z} \right]_0^c \right)^{1/2} \\ &= \frac{i\pi}{a\delta_{i,j}(1 - e^{-2\delta_{i,j}c})} \left(\frac{1}{2\delta_{i,j}} (1 - e^{-4\delta_{i,j}c}) + 2c e^{-2\delta_{i,j}c} \right)^{1/2}. \end{aligned}$$

Als wichtigen Spezialfall kann man die Tiefe $c = \infty$ betrachten, worauf sich die nun unmittelbar folgenden Abbildungen auch beziehen. Man erhält in diesem Fall

$$\sigma_{i,j} = \frac{i\pi}{a\sqrt{2\delta_{i,j}^3}}, \quad (5.50)$$

$$v_{i,j}(x, y, z) = C_{i,j} \sqrt{2\delta_{i,j}} \sin \frac{i\pi x}{a} \cos \frac{j\pi y}{b} e^{-\delta_{i,j}z}. \quad (5.51)$$

Die von kleinen Störungen herrührenden Änderungen in der Potentialverteilung, wie sie Abbildung (5.7) zeigt, lassen sich somit durch die Anwendung einer verallgemeinerten Inversen auf Leitfähigkeitsverteilungen zurückrechnen. Es ist jedoch zu beachten, daß die Störung der homogenen Leitfähigkeitsverteilung in dem hier betrachteten Kasten zu einer anderen Potentialänderung als im Halbraum führt. Auf diese Problematik wird in der Folge noch eingegangen. Zunächst werden nur solche Potentialänderungen betrachtet, wie sie Abbildung (5.7) zeigt und wie sie ein Elefantenrüsselfisch “sehen” würde. Dabei wird angenommen, daß die notwendige Korrektur durch Spiegelladungen zur Bestimmung der entsprechenden Potentialänderung im Kasten keinen wesentlichen Beitrag liefert.

Beispielhaft stellt Abbildung (5.8) Schnittbilder der berechneten Leitfähigkeitsverteilung für eine winzige kugelförmige Störung mit Radius 0.01 an den Koordinaten $(4, 4, 0.1)$ dar.

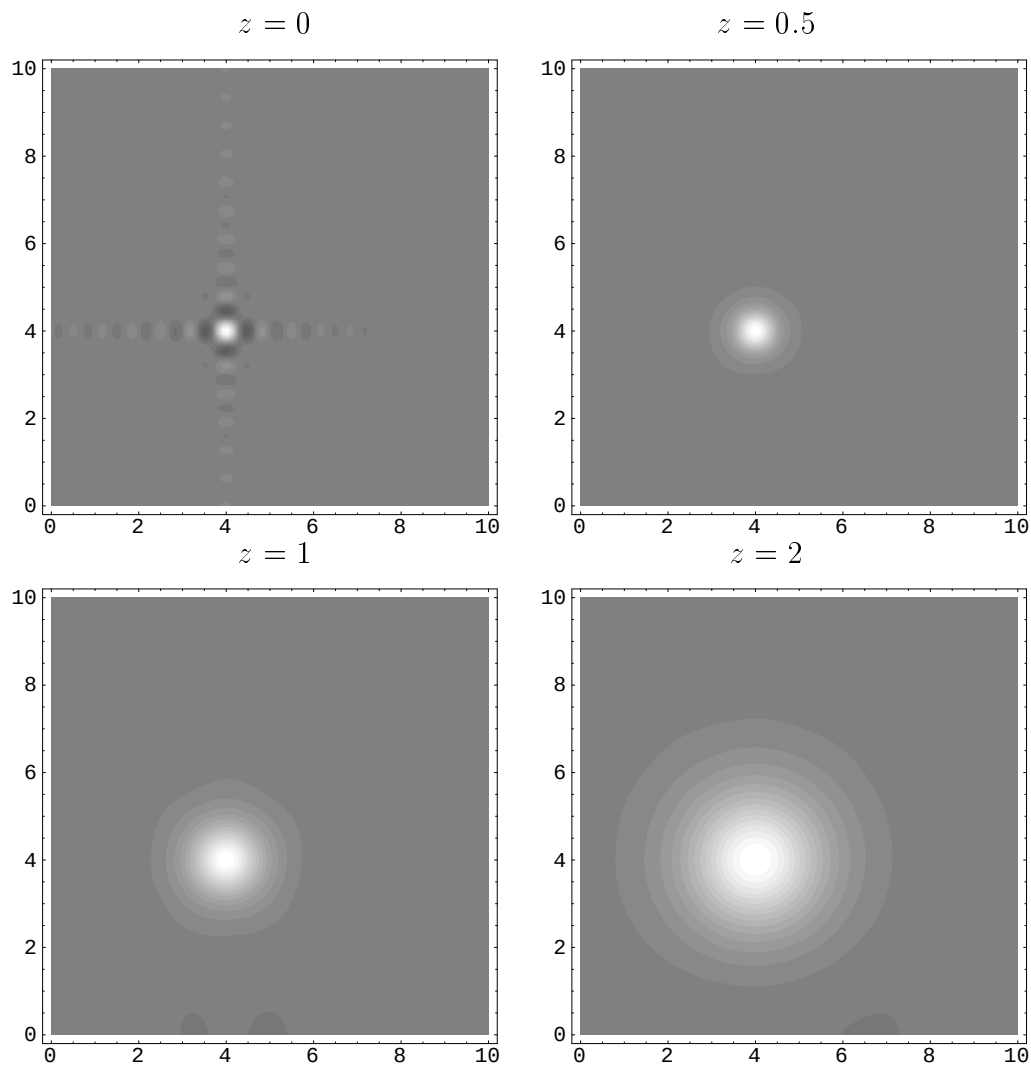


Abbildung 5.8: Schnittbilder in verschiedenen Tiefen z der rekonstruierten Leitfähigkeitsverteilung bezüglich eines kugelförmigen Störkörpers mit Radius 0.01 an den Koordinaten $(4, 4, 0.1)$

Als zugrunde gelegte Meßwerte dienen hierzu die doppelten Fourierkosinuskoeffizienten aus Gleichung (5.47), die für die Randpotentialverteilung des entsprechenden Dipolfelds berechnet wurden. Es wurden Wellenzahlen bis zu $i_{max} = j_{max} = 30$ berücksichtigt. Eine Stabilisierung des Rekonstruktionsverfahrens war nicht notwendig.

Das Schnittbild für $z = 0$ zeigt, daß die Störung deutlich an den richtigen x - und y -Koordinaten wiedergefunden wird. Allerdings ist das komplette dreidimensionale Bild fehlerhaft. Dies ist aber auch nicht anders zu erwarten, wenn man die harmonischen Funktionen $v_{i,j}$ betrachtet, aus denen das Bild aufgebaut ist.

Für eine Störung, die weiter von der Ebene $z = 0$ entfernt ist, hat das Rekonstruktionsergebnis eine deutlich geringere Qualität. Dies veranschaulicht exemplarisch das in Abbildung (5.9) dargestellte Rekonstruktionsergebnis, das sich auf einen vorgegebenen winzigen Störkörper am Ort (4,4,2) bezieht.

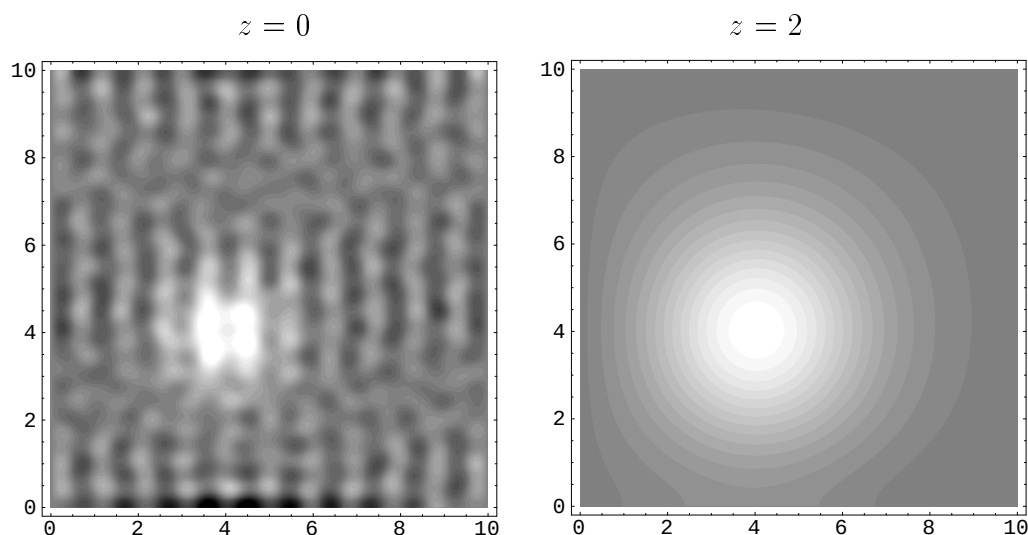


Abbildung 5.9: Schnittbilder in verschiedenen Tiefen z der rekonstruierten Leitfähigkeitsverteilung bezüglich eines kugelförmigen Störkörpers mit Radius 0.01 an den Koordinaten (4,4,2)

Auch in diesem Fall sind in verschiedenen Ebenen parallel zur $z = 0$ -Ebene weiße Flecken deutlich sichtbar. Jedoch wird auch hier deutlich, daß der betrachtete Rekonstruktionsalgorithmus keine Tiefenauflösung liefert.

Weiterhin fällt auf, daß das Rekonstruktionsergebnis bei $z = 0$ sicherlich verbesserungsfähig ist. In der Folge wird daher im Zusammenhang mit dem Modell eines denkbaren Tomographens die Stabilisierung des Rekonstruktionsverfahrens näher untersucht.

Untersuchung der Stabilität der Rekonstruktion

Als Vorbemerkung zu den folgenden Sätzen sollte man daran erinnern, daß schon die bisher gezeigten Bilder allesamt auf mehr oder weniger fehlerhaften Meßdaten beruhen. Bei der Bestimmung der vom Störkörper verursachten Potentialänderung wurde

nie auf die Abmessungen des Gebietes geachtet. Diese absichtliche Vernachlässigung hat durchaus ihren Sinn, wenn man die schematische Darstellung eines denkbaren Tomographen in Abbildung (5.10) betrachtet.

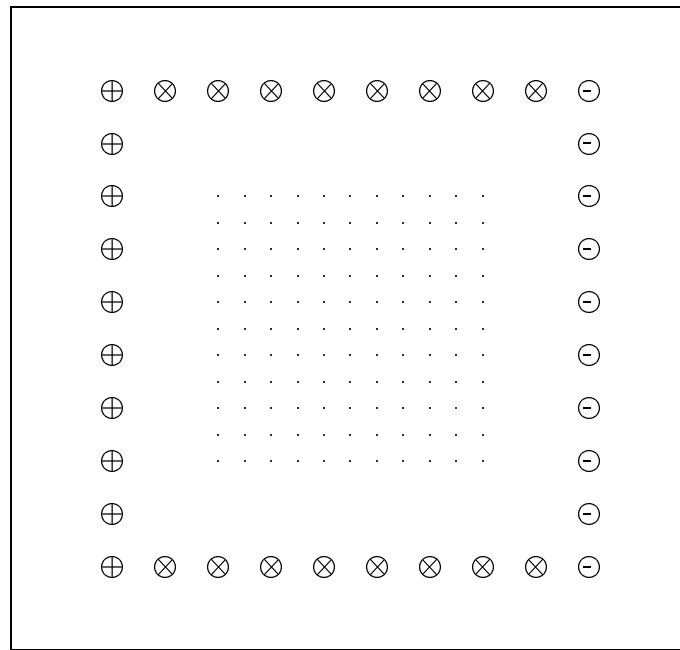


Abbildung 5.10: Schematische Darstellung des Tomographen

Das hier gezeigte Bild hat man sich als Aufsicht auf einen Stempel vorzustellen, den man auf die zu untersuchende Brust aufsetzt. Die in der Abbildung dargestellten Kreise sollen Elektroden verschiedenen Typs darstellen. An den Elektroden $\oplus$ ist ein konstantes Potential ϕ_+ angelegt. Ebenso liegt an den Elektroden $\ominus$ ein ebenfalls konstantes Potential $\phi_- < \phi_+$ an. An den weiterhin zu erkennenden Elektroden $\otimes$ fällt die angelegte Potentialverteilung kontinuierlich von links mit dem Potential ϕ_+ nach rechts mit dem Potential ϕ_- ab. Durch diese Anordnung wird in der zu untersuchenden Brust vor der Stempeloberfläche ein annähernd homogener Strom erzeugt, der in der Abbildung von links nach rechts fließt. Optional können im Außenraum des durch die Elektroden $\oplus$, $\ominus$ und $\otimes$ erzeugten Quadrats noch weitere Elektroden angebracht werden, die für eine noch größere Homogenität des resultierenden Stroms sorgen. Weiterhin sind im Zentrum der Abbildung kleinere Punkte zu erkennen, die weitere, kleinere Elektroden darstellen, an denen die resultierende Potentialverteilung gemessen wird. Es ist sicherlich zweckmäßig, den Abstand zwischen potentialmessenden und stromführenden Elektroden nicht zu gering zu wählen, um Inhomogenitäten der Stromverteilung in unmittelbarer Nähe der stromführenden Elektroden in der zugehörigen Potentialverteilung auf der Stempeloberfläche nicht mitzumessen.

Setzt man einen solchen Tomographen nun möglichst so auf die Brust auf, daß die oben dargestellte Meßebe parallel zur Thoraxwand liegt, so kann man im Falle eines homogen leitenden Fettgewebes vor den potentialmessenden Elektroden in sehr guter Näherung eine stetig abfallende Potentialverteilung erwarten. Ebenso darf man annehmen, daß ein gedachter Kasten vor den potentialmessenden Elektroden,

der bis zur Thoraxwand reicht, von einem homogenen Strom durchflossen wird. Man findet also eine Situation vor, wie sie auf den letzten Seiten diskutiert wurde. Die Anwesenheit eines hinreichend großen Mammakarzinoms sollte zur Messung eines elektrischen Bildes führen, das wie eines der Bilder aus Abbildung (5.7) aussehen könnte. Keinesfalls wird man jedoch exakt die Potentialverteilung messen, die das "Kastenmodell" mit den in den Gleichungen (5.39)-(5.41) geforderten Randbedingungen vorhersagt. Wie sich in den bisher gezeigten Rekonstruktionsergebnissen allerdings überwiegend gezeigt hat, spielen solche Randbedingungen keine so entscheidende Bedeutung, zumal man bei der praktischen Anwendung eines solchen Gerätes verdächtige Stellen auch problemlos ins Zentrum des Bildes rücken kann. Ebenso simulieren vernachlässigte Spiegelpotentialverteilungen Einflüsse auf die Potentialverteilung, die von Objekten außerhalb des gedachten Kastens herrühren.

Die folgenden Untersuchungen zur Stabilität des Rekonstruktionsergebnisses beschränken sich auf das Verhalten der Lösung bei $z = 0$. Zur Stabilisierung des Rekonstruktionsergebnisses ist die Untersuchung einer abgeschnittenen Singulärwertzerlegung sinnvoll. Die endliche Anzahl von potentialmessenden Elektroden ermöglicht nämlich von vorn herein nur im begrenzten Maße einen experimentellen Zugang zu den Fourierkoeffizienten (5.47). Dies ist aber in vielen Fällen gar nicht so tragisch, wie Abbildung (5.11) zeigt.

Die beiden linken der dargestellten Bilder zeigen das gesuchte Rekonstruktionsergebnis $p(x, y)$ für einen winzigen Störkörper an den Koordinaten $\vec{x}_0 = (4, 4, z)$ für $z = 0.1$ und $z = 2$. Wenn $\delta\sigma$ die gegebene Leitfähigkeitsänderung ist, bestimmt man

$$p(x, y) = \sum_{\substack{i=1 \\ j=0}}^{\infty} \langle \delta\sigma, v_{i,j} \rangle v_{i,j}(x, y, 0).$$

In den Bildern auf der linken Seite wurde für $\delta\sigma$ der entartete Fall einer δ -Distribution betrachtet. Die beiden rechten Bilder der Abbildung zeigen das jeweilige Rekonstruktionsergebnis, das durch das Abschneiden hoher Frequenzen zustande gekommen ist. Die dargestellten Resultate beziehen sich speziell auf $i_{max} = j_{max} = 15$. Das Ergebnis für $z = 2$ kann man unmittelbar mit dem linken Bild aus Abbildung (5.9) vergleichen, das sich auf $i_{max} = j_{max} = 30$ bezieht. Es wird deutlich, daß das mit der abgeschnittenen Singulärwertzerlegung erzielte Ergebnis der angestrebten Verteilung sehr viel näher kommt, so daß sich hier eventuell beschränkte Meßmöglichkeiten als untragisch erweisen. Anders sieht es aus, wenn man winzige Störungen in unmittelbarer Nähe zur Meßplatte betrachtet. Dies verdeutlichen die beiden oberen Bilder, die sich auf einen Störkörper bei $z = 0.1$ beziehen und damit mit dem Rekonstruktionsergebnis aus Abbildung (5.8) für $z = 0$ verglichen werden können. Hier macht sich das Fehlen hoher Frequenzen in der Lösungsfunktion eher negativ bemerkbar, da es sichtbar zu einem Verlust der Detailschärfe kommt. Allerdings bezieht sich das Rekonstruktionsergebnis aus Abbildung (5.8) auch auf annähernd fehlerfreie Daten, da sich für Objekte in der Nähe der Meßebeine die fehlenden Spiegelladungen in der Betrachtung kaum bemerkbar machen.

Außer den bislang betrachteten Modellfehlern kann man auch zufällige Meßfehler untersuchen, wie sie aus Gleichung (5.38) hervorgehen. Man erhält auch in diesem Fall bei Fehlern von bis zu 10% noch befriedigende Resultate. Als Grund hierfür kann man das sehr langsame Abfallen der Singulärwerte aus Gleichung (5.50) anführen.

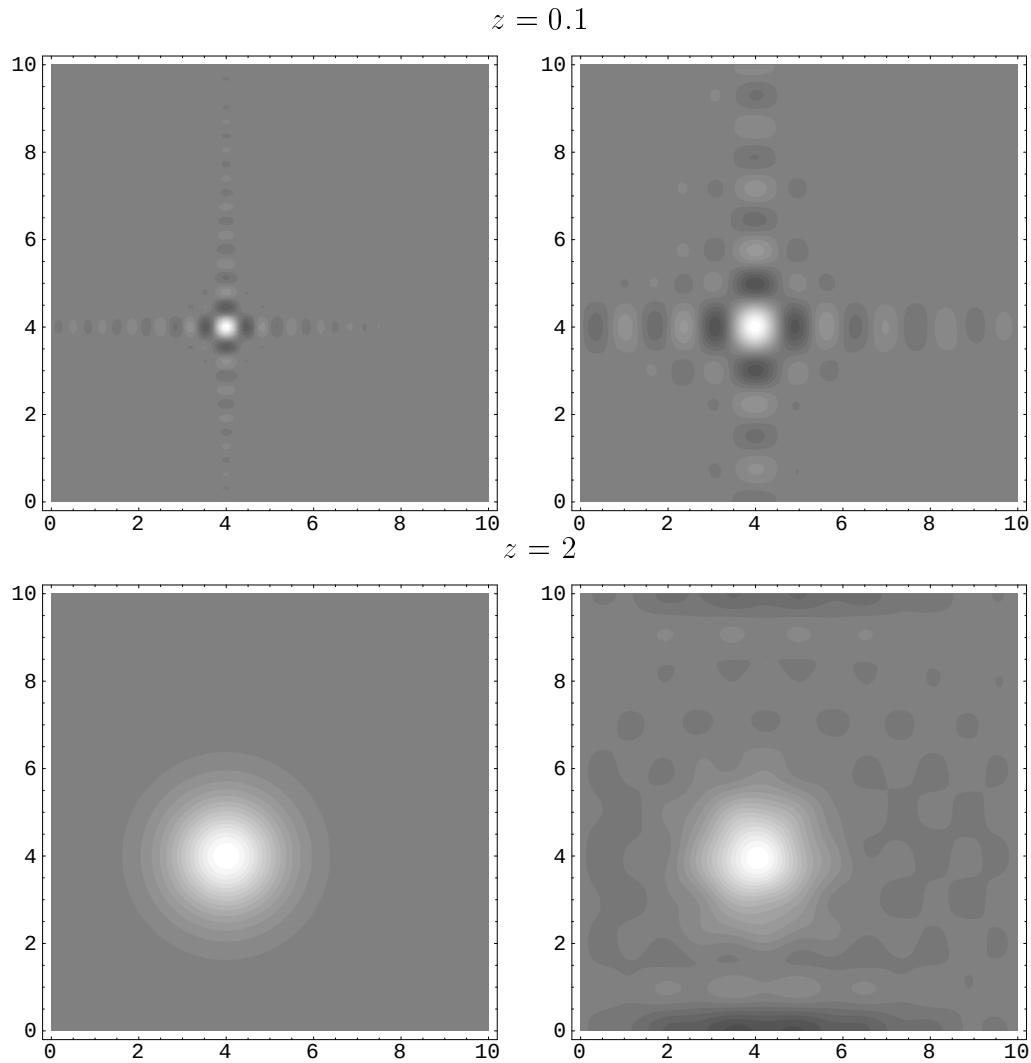


Abbildung 5.11: Erwartetes (links) und aus den Daten berechnetes (rechts) Rekonstruktionsergebnis bei $z = 0$ bezüglich eines winzigen Störkörpers an den Koordinaten $(4,4,2)$ bzw. $(4,4,0.1)$ bei Verwendung einer abgeschnittenen Singulärwertzerlegung.

Weitere Bemerkungen

Die in den Abbildungen (5.8) und (5.9) dargestellten Rekonstruktionsergebnisse erinnern in ihrer Form an einen Trichter, der sich in positive z -Richtung aufweitet. Für den in Abbildung (5.8) zugrunde gelegten Störkörper in unmittelbarer Nähe zur Meßebeane hat man den Eindruck, daß sich der Trichter dort schließt, während man sich bei Betrachten der Abbildung (5.9) die Spitze des Trichters außerhalb des untersuchten Körpers im Halbraum $z < 0$ vorstellen kann. Tatsächlich existiert ein einfacher Zusammenhang zwischen beiden Bildern. Dazu betrachte man für $c = \infty$ den Orthogonalprojektor $P_{i,j}$ auf den durch $v_{i,j}$ aufgespannten Unterraum. Es sei also

$$P_{i,j} f = \langle v_{i,j}, f \rangle_{\mathcal{L}^2(\Omega)} v_{i,j}.$$

Speziell für eine δ -Distribution $f = \delta_{\vec{x}_0}$ erhält man mit $v_{i,j}$ aus Gleichung (5.51)

$$(P_{ij}\delta_{\vec{x}_0})(x, y, z) = 2\delta_{i,j} C_{i,j}^2 \sin \frac{i\pi x_0}{a} \sin \frac{i\pi x}{a} \cos \frac{i\pi x_0}{b} \cos \frac{i\pi x}{b} e^{-\delta_{i,j}(z+z_0)}.$$

Daraus folgt aber, daß für ein beliebiges ϵ und alle i, j gilt:

$$(P_{ij}\delta_{(x_0, y_0, z_0)})(x, y, z + \epsilon) = (P_{ij}\delta_{(x_0, y_0, z_0 + \epsilon)})(x, y, z).$$

Setzt man in obiger Gleichung speziell $\epsilon = -z_0$, so erkennt man, daß man einen punktförmigen Störkörper an die Meßebene “heranzoomen” kann, indem man sich das Rekonstruktionsergebnis für negative Werte von z betrachtet. Dies veranschaulicht Abbildung (5.12) für einen punktförmigen Störkörper an den Koordinaten $(4, 4, 1)$.

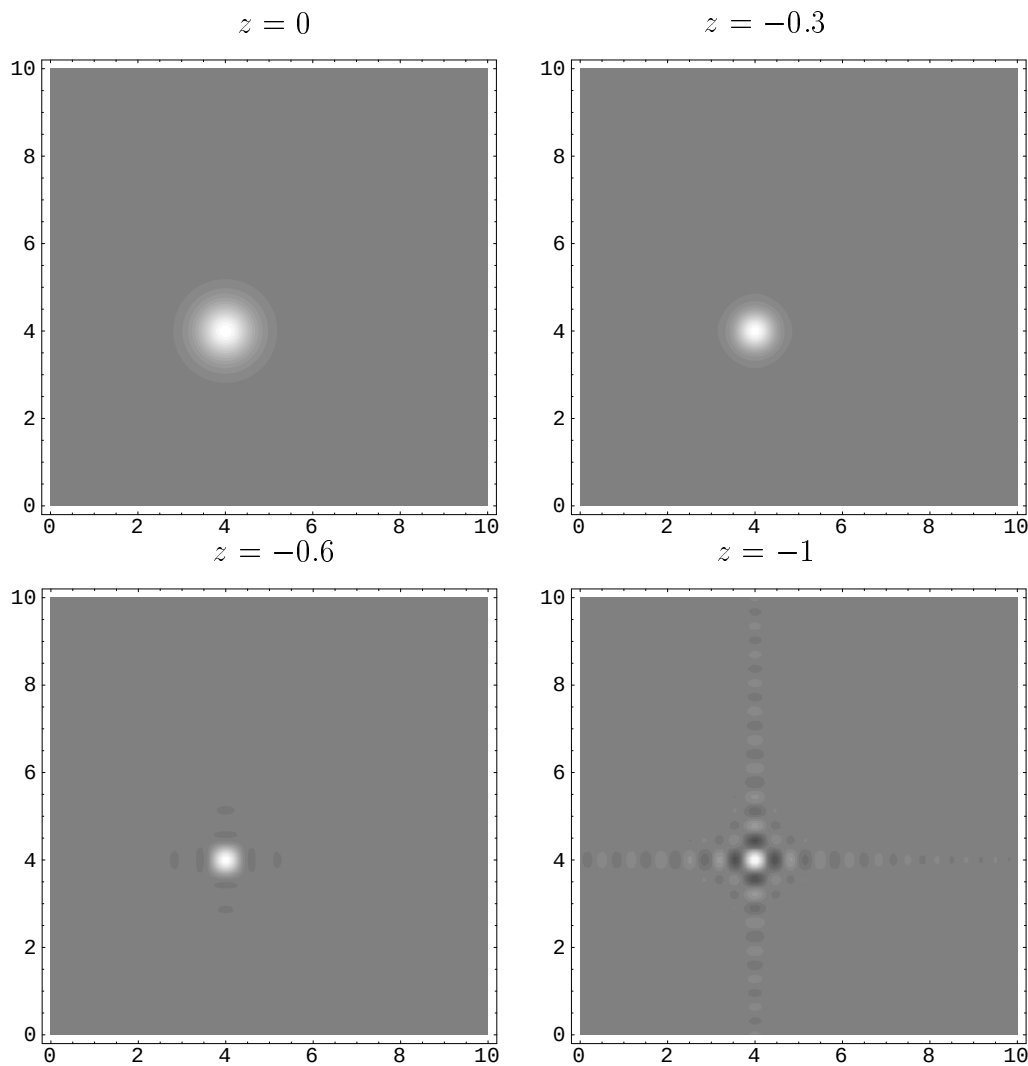


Abbildung 5.12: Punktförmige Störkörper lassen sich zur Meßebene “zoomen”, indem man das Rekonstruktionsergebnis im Halbraum $z < 0$ betrachtet. Der hier gezeigte Fall bezieht sich auf einen Störkörper an den Koordinaten $(4, 4, 1)$

Das für $z = 0$ noch sehr verschwommene Bild verschärft sich mehr und mehr, falls man sich das Rekonstruktionsergebnis für immer kleiner werdende negative z betrachtet.

Bei diesen Überlegungen hat man jedoch zu beachten, daß für große Werte von i und j die zugehörigen Funktionen $v_{i,j}$ für immer kleiner werdende negative z sehr rasch ansteigen. Eine Betrachtung der Lösungsfunktion für $z < 0$ ist daher nur im Zusammenhang mit einer stärkeren Stabilisierung sinnvoll.

Eine Verbesserung der Bildqualität durch die Betrachtung der Lösungsfunktion für $z < 0$ ergibt sich vor allen Dingen für Objekte mit einer komplexeren äußeren Gestalt. Wie schon in den Betrachtungen zu den im ersten Kapitel beschriebenen Impedanztomographen läßt sich als nächst komplizierterer Fall ein Rotationsellipsoid noch recht einfach untersuchen. Die folgenden Abbildungen beziehen sich auf einen solchen Ellipsoiden mit Zentrumskoordinaten $(5, 5, 2)$ und Halbachsen $a = 1.5$, $b = 0.5$, $c = 0.5$, wobei sich die Konstanten auf die durch Gleichung (2.87) gegebene implizite Darstellung beziehen. Wie in den Untersuchungen des ersten Kapitels wurde die Multipolentwicklung der vom Ellipsoiden verursachten Potentialänderung bis zu der Ordnung $l = 7$ bestimmt.

Die Abbildung (5.13) zeigt das daraus abgeleitete Rekonstruktionsergebnis für verschiedene Werte von z . Im linken der beiden Bilder, das sich auf den Fall $z = 0$ bezieht, ist die gewünschte Zigarrenform des Objekts kaum zu erkennen. Das rechts daneben dargestellte Ergebnis für $z = -1$ rekonstruiert das vorgegebene Objekt sichtbar besser. Allerdings ist eine starke Regularisierung nötig, wie beispielsweise die Wahl von $i_{max} = j_{max} = 10$ in einer abgeschnittenen Singulärwertzerlegung, was zu dem hier dargestellten Bild führte.

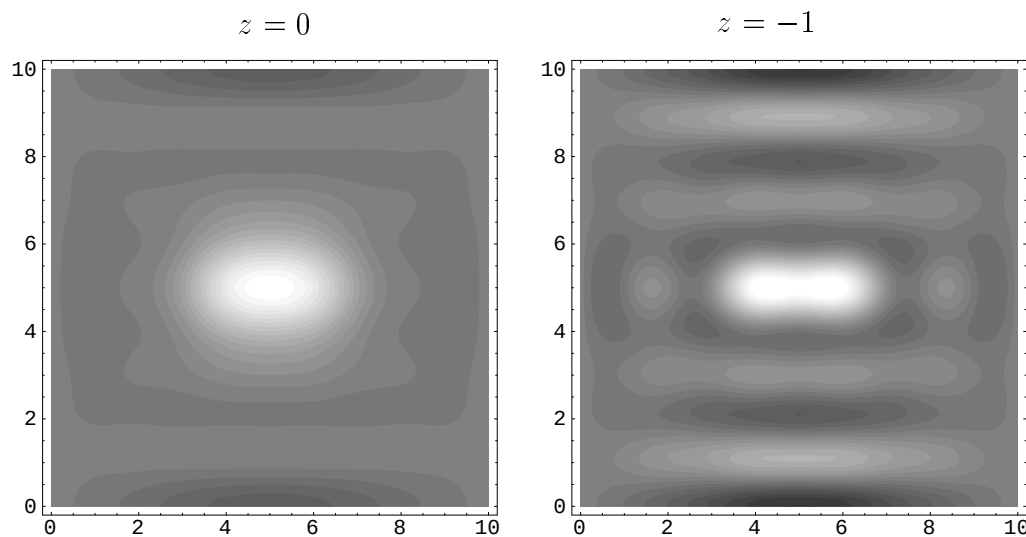


Abbildung 5.13: Rekonstruktionsergebnis für einen herangezoomten ellipsoiden Störkörper an den Koordinaten $(5,5,2)$

Die hier beschriebene Möglichkeit des Heranzoomens des Objekts wirft jedoch unmittelbar die Frage auf, wie sich ein kleiner Störkörper in weiter Entfernung zur Meßebeane von einem größeren Körper in kleinerer Entfernung unterscheiden läßt,

oder anders gefragt: wie weit darf man ein Objekt heranzoomen? Eine weiterführende Untersuchung des Problems erscheint nur mit der Kenntnis der Leitfähigkeitsverteilung des Objekts möglich, wobei man sich immer dabei im klaren sein muß, daß die hier benutzte linearisierte Formulierung des Problems für sehr große Objekte eventuell stark fehlerbehaftet ist. Geht man noch einen Schritt weiter, indem man sich nur für ein kugelförmiges Objekt fester Leitfähigkeit interessiert, so sollten Ort und Größe der Kugel unmittelbar aus der gemessenen Potentialänderung hervorgehen. Die Vorgehensweise wurde bereits bei der Interpretation der elektrischen Bilder, wie sie ein Elefantenrüsselfisch möglicherweise sieht, angesprochen. Betrachtet man in diesem Bild nur den Abstand zwischen Maximum und Minimum der Potentialänderung und weiterhin den Betrag der maximalen Potentialänderung, so sollte es bei gegebener Leitfähigkeit der Kugel möglich sein, aus diesen gemessenen zwei Größen auf zwei unbekannte Größen zurückzuschließen, nämlich den Abstand der Kugel zur (x, y) -Ebene und deren Durchmesser.

Eine entscheidende Verbesserung der Bilder erhält man ebenfalls, wenn eine Zusatzinformation für die gesuchte Leitfähigkeitsverteilung der Art

$$\delta\sigma(x, y, z) = \overline{\delta\sigma}(x, y)h(z) \quad (5.52)$$

für eine bekannte Funktion $h(z)$ existiert.

In diesem Fall wird mit $\Omega^* = \{(x, y) | 0 < x < a, 0 < y < b\}$ der Zusammenhang zwischen der zu messenden Potentialänderung und der nun gesuchten Funktion $\overline{\delta\sigma}$ durch den Operator

$$\begin{aligned} \overline{A} : \mathcal{L}^2(\Omega^*) &\rightarrow \mathcal{L}^2(\partial\Omega_{z=0}) \\ \overline{A}\overline{\delta\sigma} &:= - \sum_{\substack{i,j=0 \\ (i,j) \neq (0,0)}}^{\infty} \left(\int_{\Omega} \nabla\phi_0 \cdot \nabla\phi_{\tilde{u}_{i,j}} \overline{\delta\sigma}(x, y) h(z) d^3x \right) u_{i,j} \\ &= - \sum_{\substack{i,j=0 \\ (i,j) \neq (0,0)}}^{\infty} \left(\int_0^a \int_0^b \frac{C_{i,j} i\pi}{a\delta_{i,j}(1 - e^{-2\delta_{i,j}c})} \sin \frac{i\pi x}{a} \cos \frac{j\pi y}{b} \overline{\delta\sigma}(x, y) dy dx \right) \\ &\times \left(\int_0^c (e^{-\delta_{i,j}z} + e^{\delta_{i,j}z - 2\delta_{i,j}c}) h(z) dz \right) u_{i,j} \end{aligned} \quad (5.53)$$

beschrieben.

Das singuläre System für den Operator $\overline{A}$ hat damit die Gestalt $\{\overline{v}_{i,j}, u_{i,j}, \overline{\sigma}_{i,j}\}$ mit

$$\overline{v}_{i,j} = C_{i,j} \sin \frac{i\pi x}{a} \cos \frac{j\pi y}{b} \quad (5.54)$$

$$\overline{\sigma}_{i,j} = \frac{i\pi}{a\delta_{i,j}(1 - e^{-2\delta_{i,j}c})} \int_0^c (e^{-\delta_{i,j}z} + e^{\delta_{i,j}z - 2\delta_{i,j}c}) h(z) dz. \quad (5.55)$$

Als Beispiel einer Rekonstruktion kann man nochmals den schon mehrfach diskutierten Fall eines winzigen Störkörpers am Ort $(4,4,2)$ betrachten. Die in der Folge dargestellten Rekonstruktionsergebnisse können somit unmittelbar mit den Abbildungen (5.9) und (5.11) verglichen werden.

Als Funktion $h(z)$ wurde eine Stufenfunktion der Form

$$h(z) = \Theta(z - c1) - \Theta(z - c2); \quad c1 = 1.9, \quad c2 = 2.1$$

gewählt. Hierin bezeichnet Θ die Θ -Distribution, die für Argumente $x > 0$ den Wert $\Theta(x) = 1$ hat und ansonsten verschwindet. Das Rekonstruktionsergebnis ist in Abbildung (5.14) dargestellt. Weiterhin zeigt die Abbildung die berechnete Rekonstruktion für einen noch weiter von der Meßebeene entfernten Störkörper.

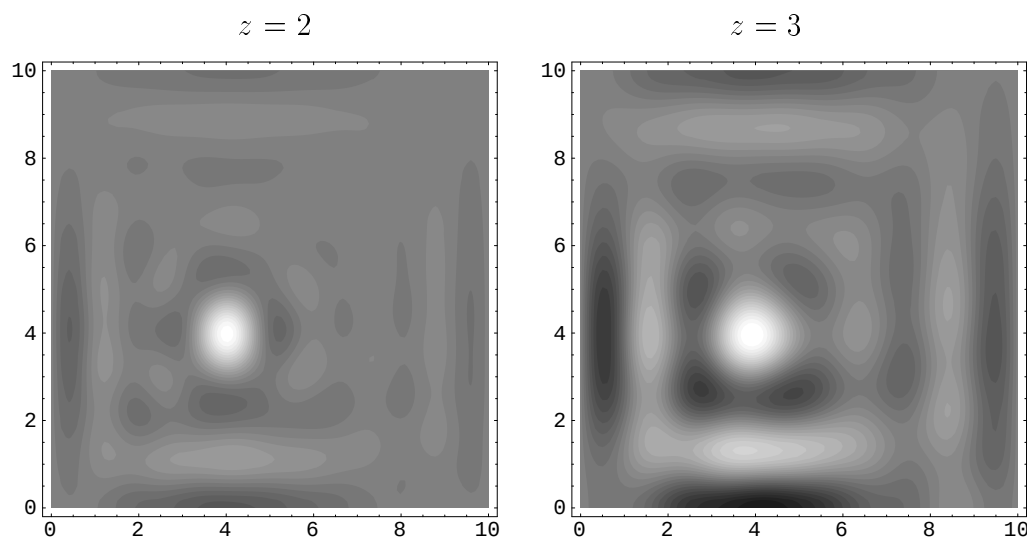


Abbildung 5.14: Rekonstruierte Leitfähigkeitsverteilung bezüglich zweier kugelförmiger Störkörper an den Koordinaten $(4,4,2)$ und $(4,4,3)$ bei einer Zusatzinformation der Form $\sigma(x, y, z) = h(z)\bar{\sigma}(x, y)$

Im Falle des linken Bildes wird deutlich, daß sich die Qualität der Rekonstruktion gegenüber den früheren Ergebnissen bedeutend verbessert hat. Auch noch tiefer gelegene Störkörper können mit einer Zusatzinformation der Art (5.52) problemlos erkannt werden. Im rechten Diagramm der Abbildung (5.14) wurde dazu die obige Stufenfunktion mit den Konstanten $c_1 = 2.9$ und $c_2 = 3.1$ besetzt. Jedoch scheint es so zu sein, daß die Qualität der Bilder trotz der zusätzlichen Information (5.52) mehr und mehr abnimmt, wenn der Abstand des Störkörpers zur Meßebeene wächst. Dies liegt allerdings vor allem daran, daß bis zu diesem Zeitpunkt die Bestimmung der vom Störkörper verursachten Potentialänderung ohne Berücksichtigung von Randbedingungen an den Wänden des betrachteten Kastens geschah. Korrigiert man diese Ungenauigkeit durch Spiegelladungen, so verbessert sich das Rekonstruktionsergebnis wieder. Dies veranschaulicht Abbildung (5.15), die das Ergebnis der Rekonstruktion bei Berücksichtigung der ersten vier Spiegelladungen (rechts, links, oben und unten) darstellt.

Als Faustregel kann man sagen, daß Randbedingungen kaum eine Rolle spielen, falls der Abstand des Objekts zur Ebene $z = 0$ deutlich geringer ist, als der Abstand zu den gedachten Begrenzungsflächen des Kastens bei $x = 0, a$ und $y = 0, b$. Wenn im speziellen Anwendungsgebiet Mammographie zentral vor der Meßplatte befindliche Objekte bis zu einer Tiefe von 1 cm geortet werden sollen, empfiehlt sich daher für die Fläche, auf der die Potentialmessung stattfindet, ungefähr eine Größe von $4 \times 4 \text{ cm}^2$. Die in der Praxis zu klärende Frage ist demnach, ob in solchen Dimensionen das "Kastenmodell" vernünftig ist oder korrigiert werden muß.

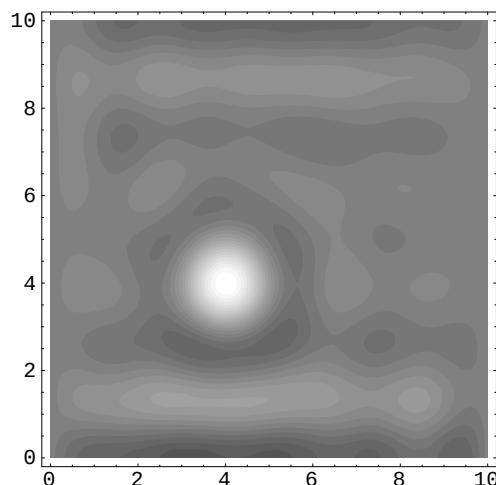


Abbildung 5.15: Rekonstruktionsergebnis der rechten Situation aus der zuletzt gezeigten Abbildung bei zusätzlicher Berücksichtigung von Spiegelladungen

Bei der Betrachtung der Stabilität des hier vorgestellten Rekonstruktionsalgorithmus mit einer zusätzlichen Information über die gesuchte Leitfähigkeitsverteilung der Form (5.52) spielt eben jene Zusatzinformation eine große Rolle. Dies erkennt man, wenn man das Verhalten der Singulärwerte $\bar{\sigma}_{i,j}$ aus Gleichung (5.55) für verschiedene Funktionen $h(z)$ betrachtet. Ist a priori bekannt, daß man die gesuchten Objekte in unmittelbarer Nähe zur Meßebeane vorfindet, so liefert das in Gleichung (5.55) auftretende Integral für hinreichend kleine i und j im wesentlichen einen gleichen Beitrag, so daß man Singulärwerte $\bar{\sigma}_{i,j} \propto i/\delta_{i,j}$ erhält.

Sucht man hingegen Objekte in sehr großer Entfernung zur Meßebeane, so sorgt die im Integral auftauchende Exponentialfunktion für ein extrem schnelles Abfallen der Singulärwerte. Eine geeignete Stabilisierung des Problems ist demnach der speziell gewählten Funktion $h(z)$ anzupassen.

Zum Abschluß der Untersuchungen dieses Abschnitts gehören noch zwei Bemerkungen, die sich auf alle hier vorgestellten Möglichkeiten einer Rekonstruktion beziehen.

1. Alle bisherigen Untersuchungen bezogen sich auf den Fall eines in z -Richtung unendlich ausgedehnten Kastens, also auf den Fall $c = \infty$. Die Betrachtung eines endlichen Werts für c ist problemlos möglich, führt aber zu keinen wesentlichen Änderungen der Rekonstruktionsergebnisse. So bleiben alle der hier dargestellten Bilder beispielsweise für den Fall $c = 5$ annähernd exakt erhalten. Wirklich beachtlich Effekte ergeben sich erst für einen unrealistisch kleinen Wert für c , für den man eine annähernd flächenhafte Leitfähigkeitsverteilung rekonstruiert.
2. Der hier diskutierte Tomograph ist sicherlich noch ausbaufähig. Zum einen wurde zur Rekonstruktion der Leitfähigkeitsverteilung nur die Potentialverteilung zu einer äußeren Stromdichte betrachtet. Man könnte zumindest einen

konstanten Stromfluß in y -Richtung in die Untersuchung miteinbeziehen.

Zum zweiten besteht eine weitere Möglichkeit zur Gewinnung von Informationen über die Leitfähigkeitsverteilung in der Bestimmung verschiedener Meßergebnisse der Potentialänderung für einen wachsenden Anpreßdruck der Meßplatte auf die Brust. Eine solche Technik wird bereits mit Erfolg in der Sonographie eingesetzt, indem man dort die durch die Kompression des Gewebes hervorgerufene Änderung im Schallbild interpretiert.

5.4 Rekonstruktion mit mehreren Versuchen

5.4.1 Formulierung des Rekonstruktionsverfahrens zur Bestimmung von σ

Die Bestimmung der Leitfähigkeitsverteilung σ in einem Gebiet Ω durch Kenntnis der im zweiten Kapitel beschriebenen Neumann-nach-Dirichlet Abbildung ist sicherlich das zentrale Forschungsgebiet der elektrischen Impedanztomographie. Eine der Problematiken bei der Behandlung des inversen Problems ist die vorliegende Nichtlinearität. Viele der existierenden Rekonstruktionsalgorithmen beschränken sich auf die Behandlung der linearisierten Beschreibung des Problems, die in Kapitel 4 vorgestellt wurde. Zu einer gemessenen Neumann-nach-Dirichlet Abbildung Λ_M bestimmt man dazu zunächst eine geeignete konstante Startverteilung σ_0 . Diese gewinnt man durch Minimierung der Funktion

$$F(\lambda) = |||\Lambda_M - \lambda \Lambda_1|||_{HS}^2.$$

Als Resultat erhält man hieraus wegen $\Lambda_{\sigma_0} = \sigma_0^{-1} \Lambda_1$

$$\sigma_0 = \frac{|||\Lambda_1|||_{HS}^2}{\langle \Lambda_M, \Lambda_1 \rangle_{HS}}. \quad (5.56)$$

Die linearisierte Problemstellung lautet damit

$$\Lambda_M = \Lambda_{\sigma_0} + \Lambda'(\sigma_0) \delta \sigma. \quad (5.57)$$

Bei der alleinigen Behandlung dieses linearisierten Problems hat man natürlich zu beachten, daß man außer möglicher experimenteller Fehler generell auch einen Modellfehler zu beachten hat.

Die wohl verbreitetste Vorgehensweise zur Behandlung des EIT-Problems besteht in der Minimierung des Funktionals

$$F(\delta \sigma) = |||\Lambda_M - \Lambda_{\sigma_0} - \Lambda'(\sigma_0) \delta \sigma|||_{HS}^2 + \gamma ||\delta \sigma||_{\mathcal{L}^2(\Omega)}. \quad (5.58)$$

Der hierin zusätzlich auftretende Term $\gamma ||\delta \sigma||_{\mathcal{L}^2(\Omega)}$ dient zur Regularisierung des Problems.

In der Folge soll eine Lösung für $\delta \sigma$ aus Gleichung (5.57) jedoch durch die Verwendung einer approximativen Inversen gefunden werden. Dazu schreibt man das Problem für zwei Funktionen $f, g \in \mathcal{L}^2(\partial\Omega)$ mit zugehörigen Potentiallösungen ϕ_f, ϕ_g

des Neumannproblems zu einer konstanten Leitfähigkeitsverteilung $\sigma \equiv \sigma_0$ nach Gleichung (4.12) in der Form

$$m_{g,f} := \langle g, (\Lambda_M - \Lambda_{\sigma_0}) f \rangle_{\mathcal{L}^2(\partial\Omega)} = - \int_{\Omega} \delta\sigma \nabla\phi_g \cdot \nabla\phi_f dx. \quad (5.59)$$

Die Größe $\langle g, (\Lambda_M - \Lambda_{\sigma_0}) f \rangle_{\mathcal{L}^2(\partial\Omega)}$ ist hierin der in einem Experiment bestimmte Meßwerte für eine äußere Stromdichte f und eine "Potentialmeßfunktion" g .

Mißt man beispielsweise bei einer äußeren Stromdichte f die Potentialdifferenz $\phi_{i,j}$ zwischen zwei Punkten x_i und x_j mit punktförmigen Elektroden, so ist die zugehörige Meßfunktion $g = \delta(x - x_i) - \delta(x - x_j)$.

Ebenso ist es aus der theoretischen Kenntnis der Neumann-nach-Dirichlet Abbildung Λ_1 möglich, $\langle g, \Lambda_{\sigma_0} f \rangle_{\mathcal{L}^2(\partial\Omega)}$ zu bestimmen. Für n verschiedene äußere Stromdichten f_i , $i = 1, \dots, n$ und m verschiedene Potentialmeßfunktionen g_j , $j = 1, \dots, m$ erhält man demnach $N = mn$ Gleichungen für die gesuchte Leitfähigkeitsänderung $\delta\sigma$. Das Rekonstruktionsproblem läßt sich hieraus folgendermaßen formulieren:

$$A : \mathcal{L}^2(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}^N,$$

$$(A\delta\sigma)_{(i-1)m+j} = \int_{\Omega} k_{i,j}(x) \delta\sigma(x) dx, \quad i = 1, \dots, n, \quad j = 1, \dots, m, \quad (5.60)$$

$$k_{i,j} = -\nabla\phi_{f_i} \cdot \nabla\phi_{g_j}. \quad (5.61)$$

5.4.2 Formulierung des Rekonstruktionsverfahrens zur Bestimmung von $\Delta\sqrt{\sigma}$

Die ersten in diesem Kapitel untersuchten Rekonstruktionsalgorithmen bezogen sich auf die Bestimmung der Funktion $X = \Delta\tau\phi$. Die ursprüngliche Idee des Verfahrens bestand darin, aus der Kenntnis der Funktion X auf die Funktion $\psi = \sqrt{\sigma}\phi$ zu schließen, um schlußendlich die eigentlich gesuchte Größe, die Leitfähigkeitsverteilung σ zu bestimmen. Das Problem bestand jedoch darin, daß die zunächst zu rekonstruierende Größe X im allgemeinen für jeden Versuch eine andere ist, so daß zur Bestimmung von X nur eine Stromverteilung betrachtet werden darf. Es wurde jedoch auch deutlich, daß aus diesem einen Versuch selbst bei einer exakten Kenntnis der gemessenen äußeren Potentialverteilung eine Bestimmung von X nicht eindeutig möglich ist.

Die Auswertung mehrerer Versuche führt zu einem anderen Problem. Es ist dann zwingend notwendig, eine vernünftige Annahme für die Potentialfunktion zu machen, wie etwa die Lösung zum ungestörten Problem mit Leitfähigkeitsverteilung $\sigma_0 \equiv 1$.

In der Folge wird ein Algorithmus formuliert, der kleine Änderungen einer homogenen Leitfähigkeitsverteilung σ_0 rekonstruiert, wobei o.B.d.A. $\sigma_0 \equiv 1$ gelten soll. Weiterhin wird gefordert, daß die gesuchte Verteilung $\sigma = \sigma_0 + \delta\sigma$ den Bedingungen (5.3), (5.4) genügt.

Ausgangspunkt der Überlegungen ist Gleichung (5.13). Da in der Folge die Meßergebnisse zu verschiedenen äußeren Stromdichten herangezogen werden sollen, wird in der Zukunft ein Index f an einer Potentialfunktion an die zugehörige äußere

Stromdichte erinnern. In diesem Sinne schreibt sich Gleichung (5.13) folgendermaßen neu:

$$\varphi_f(x) := \varphi_{N,f}(x) - \varphi_{D,f}(x) = - \int_{\Omega} \{G_D(x, x') - G_N(x, x')\} \tilde{\psi}_f(x') \frac{\Delta\tau(x')}{\tau(x')} dx'. \quad (5.62)$$

Mit den geforderten Bedingungen (5.3), (5.4) beschreibt $\varphi_{N,f}(x)$ die Potentialverteilung zur fest vorgegebenen Neumannrandbedingung f für eine konstante Leitfähigkeitsverteilung σ_0 . Die harmonische Funktion $\varphi_{D,f}(x)$ besitzt an den Stellen der Meßelektroden die gemessene Randpotentialverteilung.

Die Tilde $\sim$ soll in Gleichung (5.62) andeuten, daß es sich um eine Lösung der Schrödingergleichung (5.8) bezüglich der gesuchten Verteilung σ handelt. Demgegenüber bezeichnen Potentialfunktionen ohne Tilde in der Folge Lösungen zum ungestörten Problem $\sigma_0 \equiv 1$.

Für eine Potentialmeßfunktion $g \in \mathcal{L}^2_{\diamond}(\partial\Omega)$ ergibt sich damit

$$\begin{aligned} \langle \varphi_f, g \rangle_{\mathcal{L}^2(\partial\Omega)} &= - \int_{\Omega} \left(\int_{\partial\Omega} (G_D(x, x') - G_N(x, x'))|_{x \in \partial\Omega} g(x) dx \right) \tilde{\psi}_f(x') \frac{\Delta\tau(x')}{\tau(x')} dx' \\ &= \int_{\Omega} \phi_g(x') \tilde{\phi}_f(x') \Delta\tau(x') dx'. \end{aligned}$$

Dabei wurde benutzt, daß die Greensfunktion G_D zum Dirichletproblem nach Voraussetzung am Rand verschwindet. Weiterhin wurde die Funktion $\tilde{\psi}_f$ über den Zusammenhang (5.7) durch die eigentliche physikalische Potentialfunktion $\tilde{\phi}_f$ ersetzt.

Unter der Annahme, daß die gesuchte Änderung der Leitfähigkeitsverteilung $\delta\sigma$ klein ist, kann man $\tilde{\phi}_f$ gegen ϕ_f abschätzen. Man erhält dann

$$\langle \varphi_f, g \rangle_{\mathcal{L}^2(\partial\Omega)} = \int_{\Omega} \phi_g(x') \phi_f(x') \Delta\tau(x') dx'. \quad (5.63)$$

Für die Rekonstruktion der gesuchten Funktion $\Delta\tau$ können nun mehrere Stromkonfigurationen herangezogen werden.

Wie im letzten Abschnitt ergeben sich dabei für n verschiedene äußere Stromdichten f_i , $i = 1, \dots, n$ und m Potentialbeobachtungsfunktionen g_j , $j = 1, \dots, m$ insgesamt $N = m n$ Meßwerte zur Bestimmung von $\Delta\tau$.

Zusammengefaßt untersucht man bei der Bestimmung von $\Delta\tau$ das folgende Problem

$$B : \mathcal{L}^2(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}^N,$$

$$(B\Delta\tau)_{(i-1)m+j} = \int_{\Omega} k_{i,j}(x) \Delta\tau(x) dx, \quad i = 1, \dots, n, \quad j = 1, \dots, m, \quad (5.64)$$

$$k_{i,j} = \phi_{f_i} \phi_{g_j}. \quad (5.65)$$

5.4.3 Vergleich der beiden Verfahren

Zwischen den in den vergangenen Abschnitten abgeleiteten Sätzen von Integralgleichungen zur Bestimmung von $\delta\sigma$ bzw. $\Delta\sqrt{\sigma}$ besteht ein einfacher Zusammenhang.

Bei Gültigkeit der Bedingungen (5.3), (5.4) kann man die Integralgleichungen (5.60) folgendermaßen umformen:

$$\begin{aligned}
 (A\delta\sigma)_{(i-1)m+j} &= - \int_{\Omega} \nabla\phi_{f_i} \cdot \nabla\phi_{g_j} \delta\sigma \, dx \\
 &= - \int_{\Omega} (\nabla\phi_{f_i} \cdot \nabla\phi_{g_j} + \frac{1}{2}\Delta\phi_{f_i} + \frac{1}{2}\Delta\phi_{g_j}) \delta\sigma \, dx \\
 &= - \frac{1}{2} \int_{\Omega} \Delta(\phi_{f_i}\phi_{g_j}) \delta\sigma \, dx \\
 &= - \frac{1}{2} \int_{\Omega} (\phi_{f_i}\phi_{g_j}) \Delta(\delta\sigma) \, dx.
 \end{aligned}$$

Die Oberflächenterme verschwinden hierbei bei der partiellen Integration wegen der oben aufgeführten Randbedingungen für $\delta\sigma$.

Der in obiger Gleichung auftauchende Vorfaktor $1/2$ erklärt sich, wenn man $\sqrt{1+\delta\sigma} \approx 1 + 1/2\delta\sigma$ für kleine Änderungen $\delta\sigma$ beachtet. Der Wechsel des Vorzeichens im Vergleich zu Gleichung (5.64) ist einfach durch den ebenfalls stattfindenden Vorzeichenwechsel auf der Meßwertseite zu klären.

Den deutlichen Unterschied zwischen den beiden hier diskutierten Problemstellungen einer Rekonstruktion von $\delta\sigma$ bzw. $\Delta\tau$ erkennt man am besten daran, daß man den von einem Störkörper in einer homogenen Leitfähigkeitsverteilung $\sigma_0 \equiv 1$ verursachten "Gesamteffekt" E betrachtet, womit die Wurzel der Summe der Quadrate aller im Versuch gemessenen Potentialänderungen gemeint sein soll. Im Idealfall, in dem die Bestimmung sämtlicher Potentialfunktionen zu sämtlichen äußeren Stromdichten exakt bestimmt werden kann, ermittelt man für E die Hilbert-Schmidt Norm der Differenz von gemessener Neumann-nach-Dirichlet Abbildung Λ_M zu Λ_1 :

$$E = |||\Lambda_M - \Lambda_1|||_{HS}.$$

Im Falle des Einheitskreises kann man nun leicht die Voraussage für E für eine punktförmige Störung der Form $\delta\sigma = \delta(\vec{x} - \vec{x}_0)$ in der linearisierten Problembezeichnung (5.60) bestimmen. Als Funktionen f_i bzw. g_j wählt man dazu am geeignetsten die Funktionen τ_n aus Gleichung (2.50). Das linke Diagramm in Abbildung (5.16) zeigt für $n_{max} = 200$ das Resultat $|A\delta_{\vec{x}_0}|$, das offensichtlich nur von $r = |\vec{x}_0|$ abhängt. Im Vergleich dazu ist rechts daneben $|B\delta_{\vec{x}_0}|$ gegen r aufgetragen.

Im Falle des Diagramms auf der linken Seite erkennt man, daß für kleine r der meßbare Gesamteffekt annähernd konstant bleibt und den Wert $2/\pi$ annimmt. Für kleine Abstände des Störobjekts zum Zentrum mißt man nämlich im wesentlichen nur zu den beiden äußeren Stromdichten $\tau_1(\phi) = 1/\sqrt{\pi}\cos(\phi)$, $\tau_{-1}(\phi) = 1/\sqrt{\pi}\sin(\phi)$ mit zugehörigen Potentialänderungen $\delta\phi_{\tau_1}, \delta\phi_{\tau_{-1}}$ die Momente $\langle \delta\phi_{\tau_1}, \tau_1 \rangle_{\mathcal{L}^2_0(\partial\Omega)}$, $\langle \delta\phi_{\tau_2}, \tau_2 \rangle_{\mathcal{L}^2_0(\partial\Omega)}$. Für ein größer werdendes r ergibt sich in unmittelbarer Randnähe ein dramatischer Anstieg der Kurve.

Im Vergleich dazu zeigt sich im rechten Diagramm ein gleichmäßiger Anstieg der Kurve zum Rand hin. Damit ist allerdings noch nichts endgültiges über beispielsweise die Schlechtgestellttheit der beiden unterschiedlichen Probleme gesagt. Es wird allerdings durchaus deutlich, daß es sinnvoll erscheint, beide hier betrachteten Rekonstruktionsmöglichkeiten an Hand realistischer Daten zu testen.

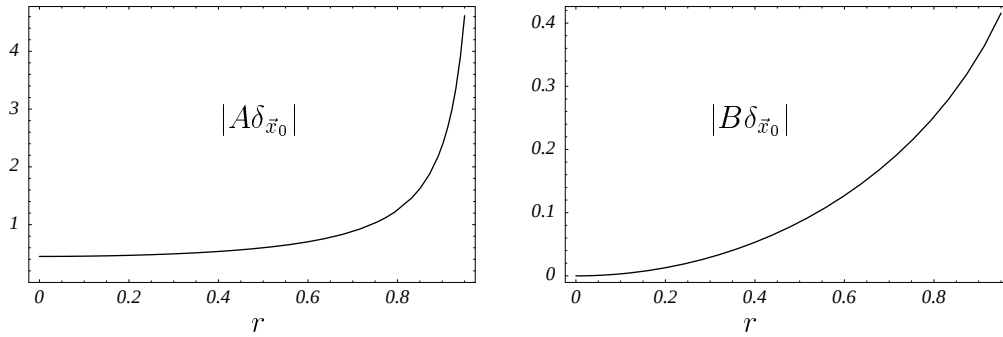


Abbildung 5.16: Meßbarer Gesamteffekt E für eine Störung $\delta\sigma = \delta(\vec{x} - \vec{x}_0)$ (links) bzw. $\Delta\tau = \delta(\vec{x} - \vec{x}_0)$ (rechts) mit Abstand $r = |\vec{x}_0|$ zum Zentrum

5.4.4 Rekonstruktionsergebnisse für realistische Daten

Zum Test beider Rekonstruktionsverfahren wird zunächst der im vierten Kapitel beschriebene Fall eines Zylinders in einer homogen leitenden Flüssigkeit untersucht. Wie in diesem Kapitel beschrieben, werden trigonometrische Randstromverteilungen betrachtet, die man durch eine geeignete Linearkombination der im eigentlichen Experiment verwendeten äußeren Stromdichten approximiert. Im Anschluß daran kann man eine diskrete Fouriertransformation der resultierenden Potentialverteilungen durchführen. Dies alles geschieht in Analogie zu den Untersuchungen des vierten Kapitels, die zu einer recht guten Bestätigung der linearisierten Problembeschreibung des EIT-Problems führten.

Die folgenden Untersuchungen beziehen sich auf 30 Funktionen τ_n , $|n| \leq 15$ aus Gleichung (2.50). Als zugehörige Potentialfunktion ϕ_{τ_n} zu einer äußeren Stromdichte τ_n bestimmt man

$$\phi_{\tau_n}(r, \phi) = \frac{r^{|n|}}{\sqrt{\pi}|n|} \sin(|n|\phi), \quad n > 0, \quad (5.66)$$

$$\phi_{\tau_n}(r, \phi) = \frac{r^{|n|}}{\sqrt{\pi}|n|} \cos(|n|\phi), \quad n < 0. \quad (5.67)$$

Die Integralkerne aus Gleichung (5.61) sind damit die folgenden Funktionen:

$$\nabla\phi_{\tau_n} \cdot \nabla\phi_{\tau_m} = \frac{r^{|n|+|m|-2}}{\pi} \times \begin{cases} \cos(|n| - |m|)\phi & , \quad n, m > 0 \\ \cos(|n| - |m|)\phi & , \quad n, m < 0 \\ \sin(|n| - |m|)\phi & , \quad n > 0, m < 0 \\ \sin(|m| - |n|)\phi & , \quad m > 0, n < 0 \end{cases}.$$

Entsprechend ergeben sich die Integralkerne aus Gleichung (5.65) zur Rekonstruktion von $\Delta\tau$ durch einfache Multiplikation der harmonischen Funktionen (5.66), (5.67).

Die Bestimmung der Startverteilung geschah im Falle der Rekonstruktion von

$\delta\sigma$ durch die diskretisierte Form von Gleichung (5.56):

$$\sigma_0 = \frac{\sum_{\substack{i,j=-n \\ i,j \neq 0}}^n \langle \tau_i, \Lambda_1 \tau_j \rangle^2}{\sum_{\substack{i,j=-n \\ i,j \neq 0}}^n \langle \tau_i, \Lambda_M \tau_j \rangle \langle \tau_i, \Lambda_1 \tau_j \rangle}. \quad (5.68)$$

Die Rekonstruktion von $\Delta\tau$ setzt jedoch voraus, daß die Leitfähigkeitsverteilung am Rand des Gebietes konstant ist. Zur Bestimmung dieser Konstanten ist es daher zweckmäßig, in obiger Gleichung nur die zu großen Frequenzen gehörigen Anteile zu berücksichtigen. Die meisten der folgenden Bilder, die eine Rekonstruktion von $\Delta\tau$ zeigen, beziehen sich auf eine Bestimmung der Leitfähigkeitsverteilung am Rand durch die folgende Gleichung:

$$\sigma_0 = \frac{\sum_{\substack{i,j=-n \\ |i|,|j| \geq n_{max}=10}}^n \langle \tau_i, \Lambda_1 \tau_j \rangle^2}{\sum_{\substack{i,j=-n \\ |i|,|j| \geq n_{max}=10}}^n \langle \tau_i, \Lambda_M \tau_j \rangle \langle \tau_i, \Lambda_1 \tau_j \rangle}. \quad (5.69)$$

Die Folgen einer Variation von n_{max} werden ebenfalls diskutiert.

Die zunächst gezeigten Bilder ergeben sich durch die numerische Bestimmung und Anwendung einer verallgemeinerten Inverse mit $e_\gamma(x, y) = \delta(x - y)$. Die Stabilisierung der beiden Rekonstruktionsprobleme wird dabei einzig und allein durch eine Tikhonov-Stabilisierung zur Bestimmung des sogenannten Rekonstruktionskerns v_γ aus Gleichung (A.21) erzielt. Im weiteren Verlauf dieses Abschnitts wird auch die Möglichkeit einer Regularisierung durch eine geeignet gewählte Funktion e_γ diskutiert.

Alle in der Folge gezeigten Abbildungen beziehen sich auf eine Rekonstruktion von $\delta\sigma$ bzw. $-\Delta\sqrt{\sigma}$. Der Wechsel des Vorzeichens im Falle von $\Delta\sqrt{\sigma}$ erleichtert den Vergleich der gewonnenen Resultate. Dies erkennt man, wenn man folgendes Beispiel betrachtet:

$$\begin{aligned} \delta\sigma(x, y) &= e^{-\alpha((x-x_0)^2+(y-y_0)^2)} \\ \Delta\sqrt{\delta\sigma(x, y)} &= (-2\alpha + \alpha^2((x-x_0)^2 + (y-y_0)^2))e^{-\frac{\alpha}{2}((x-x_0)^2+(y-y_0)^2)}. \end{aligned}$$

Im Zentrum der Störung bei (x_0, y_0) ergibt sich damit $\delta\sigma(x_0, y_0) = 1$, während man $\Delta\sqrt{\delta\sigma(x_0, y_0)} = -2\alpha$ erhält.

Zunächst zeigt daher Abbildung (5.17) das Rekonstruktionsergebnis von $\delta\sigma$ bzw. $-\Delta\sqrt{\sigma}$ für einen zylindrischen Störkörper, wie ihn Abbildung (4.1) zeigt, mit den von unserem Tomographen aufgenommenen Daten.

In beiden Fällen ist der Zylinder als heller Fleck deutlich erkennbar. Ebenfalls ist in der Abbildung maßstabsgerecht, wie dies aus Abbildung (4.2) hervorgeht, der Rand des Zylinders skizziert.

Während die Rekonstruktion von $\delta\sigma$ insbesondere in Randnähe sicherlich weniger fehlerbehaftet ist, liegen die Vorzüge des rechts dargestellten Bildes, das die Rekonstruktion von $-\Delta\sqrt{\sigma}$ zeigt, in der besseren Ortsbestimmung des gesuchten Objekts.

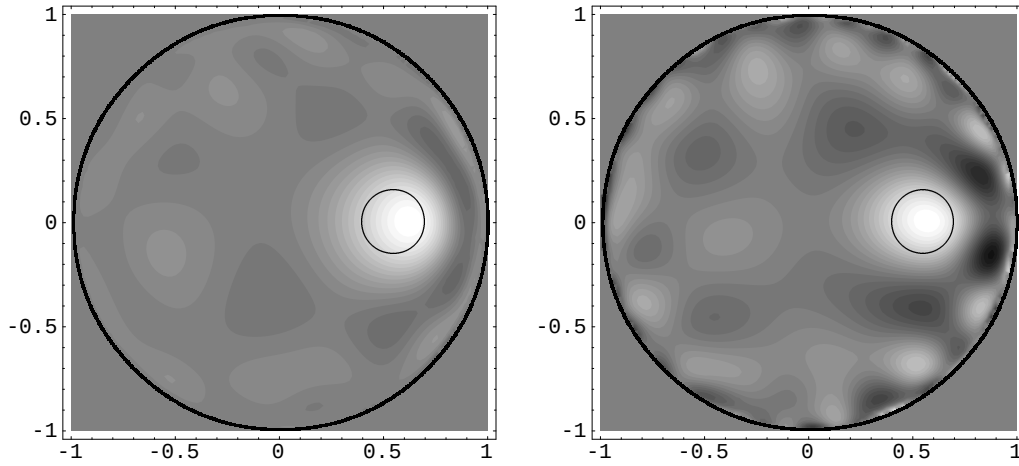


Abbildung 5.17: Rekonstruktionsergebnis für einen zylindrischen Störkörper. Linke Seite: Rekonstruktion von $\delta\sigma$. Rechte Seite: Rekonstruktion von $-\Delta\sqrt{\sigma}$

In beiden der hier dargestellten Bilder läßt sich jedoch die genaue Abmessung des Störobjekts nicht erkennen.

Wie bereits erwähnt, soll auch für verschiedene Startwerte das Rekonstruktionsergebnis für $-\Delta\sqrt{\sigma}$ untersucht werden. Bei der Wahl von $n_{max} = 5$ bzw. $n_{max} = 0$ ergeben sich die in Abbildung (5.18) dargestellten Bilder.

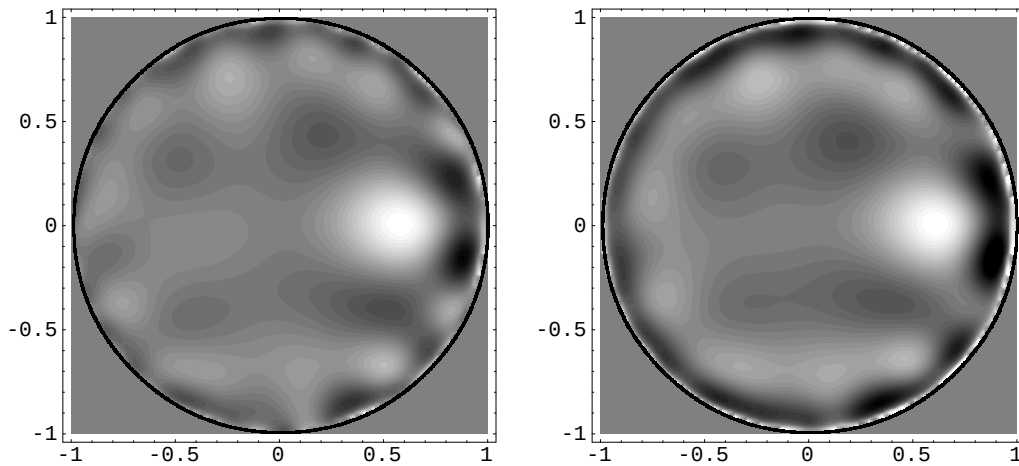


Abbildung 5.18: Rekonstruktion von $-\Delta\sqrt{\sigma}$ für einen zylindrischen Störkörper bei unterschiedlicher Wahl der Startleitfähigkeit. Linke Seite: $n_{max} = 5$. Rechte Seite: $n_{max} = 0$

Gerade im Falle $n_{max} = 0$ geht aus der Abbildung deutlich hervor, daß die durch Gleichung (5.69) ermittelte Konstante σ_0 stark von dem Wert der Leitfähigkeit am

Rand abweicht. Dies führt dort zu einem Sprung der rekonstruierten Verteilung $\Delta\sqrt{\delta\sigma}$.

Dennoch bleibt der zylindrische Störkörper sehr gut zu erkennen. Für praktische Zwecke ist dies von Bedeutung, da man sicherlich nicht generell von einer ideal konstanten Leitfähigkeitsverteilung am Rand ausgehen kann.

In den Untersuchungen zur Berechtigung einer zweidimensionalen Problembeschreibung im ersten Kapitel wurde deutlich, daß die theoretische Kenntnis der Neumann-nach-Dirichlet Abbildung Λ_1 von zweifelhaftem Wert sein kann, wenn das hier betrachtete zweidimensionale Modell in der praktischen Anwendung keine Gültigkeit besitzt und Korrekturen aus einer präzisen dreidimensionalen Beschreibung notwendig werden. Die Tatsache, daß die bislang gezeigten Bilder überhaupt die erzielte Qualität besitzen, ist sicherlich auf das bei unserem Tomographen verwendete Guardelektrodensystem zurückzuführen, wie die entsprechenden Untersuchungen im ersten und vierten Kapitel belegen. Es zeigte sich dort, daß im dreidimensionalen Modell eines Zylinders der Höhe H das Guardelektrodensystem in der Ebene der Potentialmessung auch für große Werte von H zu Potentialverteilungen führt, die mit einer zweidimensionalen Theorie beschrieben werden können. Dennoch ist auch für diese Elektrodenanordnung eine zweidimensionale Beschreibung nicht exakt gegeben. Insbesondere stimmt im Falle einer homogenen Leitfähigkeitsverteilung im Zylinder die theoretische Vorhersage von $\Lambda_c c = \text{konst.}$ aus dem zweidimensionalen Modell nicht mit den praktisch ermittelten Meßwerten $\langle \tau_n, \Lambda_M \tau_n \rangle$ überein. Dies gilt jedoch nicht für die Nichtdiagonalelemente $\langle \tau_n, \Lambda_M \tau_m \rangle$, $m \neq n$, für die man im Experiment idealerweise immer $\langle \tau_n, \Lambda_M \tau_m \rangle = 0$ bestimmen würde, in Übereinstimmung mit der zweidimensionalen Theorie.

Der Zusatz "idealerweise" ist hier allerdings von großer praktischer Bedeutung, da man nur über eine endliche Anzahl von Elektroden verfügt, über die man Strom in den Zylinder ein- und abfließen lassen kann, und überdies noch Meßfehler mitberücksichtigen muß.

Dennoch sollen nun Rekonstruktionsergebnisse betrachtet werden, die dadurch entstehen, daß man in den Gleichungen (5.60), (5.64) die im obigen Sinne kritischen Meßwerte $\langle \tau_n, \Lambda_M \tau_n \rangle$ nicht berücksichtigt und die weitere Vorgehensweise beibehält. Offensichtlich entfällt dabei völlig die Problematik der Bestimmung eines geeigneten Startwerts. Es ist jedoch zu beachten, daß nicht nur für eine konstante Leitfähigkeitsverteilung sämtliche Nichtdiagonaleinträge der Neumann-nach-Dirichlet Abbildung verschwinden. Wie bereits erwähnt, führen auch radialsymmetrische Leitfähigkeitsverteilungen σ zu einer Neumann-nach-Dirichlet Abbildung Λ_σ , deren Eigenvektoren die Funktionen τ_n sind. Mit dem hier untersuchten Rekonstruktionsverfahren ist man demnach "blind" für radialsymmetrische Leitfähigkeitsverteilungen.

Die Abbildung (5.19) zeigt die Rekonstruktionsergebnisse für den bereits zuvor betrachteten zylindrischen Störkörper diesmal ohne Berücksichtigung der Meßwerte $\langle \tau_n, \Lambda_M \tau_n \rangle$.

Wie zu erkennen ist, bleibt das Resultat annähernd das gleiche. Es sollte demnach unabhängig von der Höhe H des in der Realität vorliegenden Zylinders möglich sein, Störkörper zu erkennen, die in nicht allzu großer Entfernung vom Rand liegen. Je weiter sich jedoch die gesuchten Objekte vom Rand entfernt befinden, desto

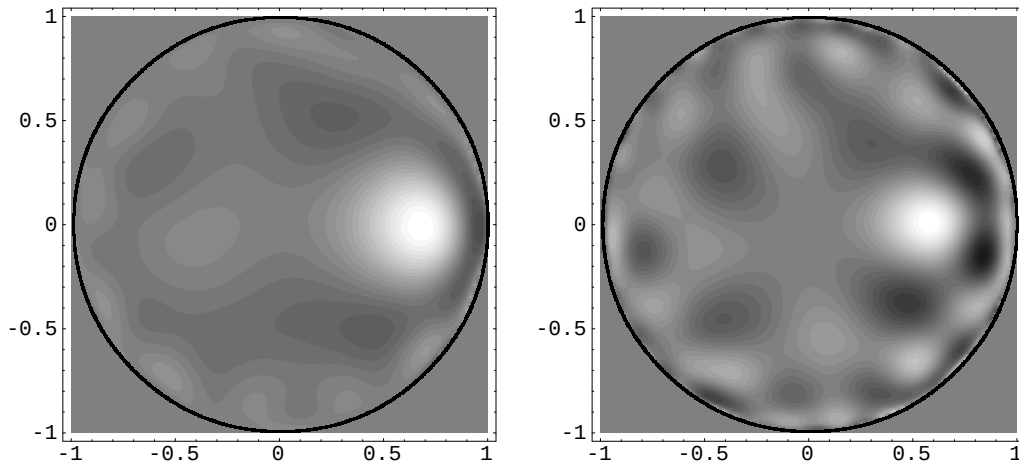


Abbildung 5.19: Rekonstruktionsergebnis für einen zylindrischen Störkörper ohne Berücksichtigung der Meßwerte $\langle \tau_n, \Lambda_M \tau_n \rangle$. Linke Seite: Rekonstruktion von $\delta\sigma$. Rechte Seite: Rekonstruktion von $-\Delta\sqrt{\sigma}$

entscheidender werden die vernachlässigten Informationen, wonach man zumindest mit der hier verwendeten verallgemeinerten Inversen keine vernünftigen Bilder mehr erhält.

Rekonstruktionsergebnisse für einen kleinen metallischen Störkörper

Die folgenden Abbildungen stellen die Rekonstruktionsergebnisse für weitere Meßreihen, die in jüngster Zeit aufgenommen wurden und sich auf ein kleines metallisches Objekt von ca. 2 cm Durchmesser beziehen, dar. Das Objekt wurde dabei an drei verschiedenen Orten platziert:

1. in der Ebene der Potentialmessung in etwa zwischen Mitte und Rand des Tomographen
2. ca. 2 cm oberhalb der Ebene der Potentialmessung in etwa zwischen Mitte und Rand des Tomographen
3. in der Ebene der Potentialmessung in etwa in der Mitte des Tomographen

In keinem der drei Fälle war dadurch jedoch eine Rekonstruktion von $\delta\sigma$ oder $\Delta\sqrt{\sigma}$ möglich. Es stellte sich heraus, daß die von einem solch kleinen Störkörper verursachten Änderungen in den äußeren Potentialverteilungen nicht groß genug sind und von systematischen Fehlern weitestgehend überdeckt werden. Die damit gemeinten Fehlerquellen sind die folgenden:

1. Der von uns benutzte Tomograph ist nicht ideal zylinderförmig. Der äußere Durchmesser reicht von ca. 21 cm bis ca. 22 cm.
2. Die Positionierung der Elektroden ist nicht in exakt gleichmäßigen Abständen.

3. Die endliche Anzahl von Elektroden erlaubt es nicht genau genug, kosinusförmige äußere Stromdichten zu approximieren.

Natürlich waren all diese Fehlerquellen bereits bei der Betrachtung des zylinderförmigen Störkörpers vorhanden, spielten aber dort kaum eine Rolle.

Um auch für kleinere Objekte zu einem Rekonstruktionsergebnis zu gelangen, ist es notwendig, eine Eichung der Meßapparatur vorzunehmen. Damit ist gemeint, daß die Neumann-nach-Dirichlet Abbildung Λ_1 nicht aus der theoretischen Beschreibung gewonnen wird, sondern ebenfalls im Experiment bestimmt wird. Um weiteren systematischen Fehlern vorzubeugen, die beispielsweise durch die Erwärmung der Meßapparatur oder der im Tomograph befindlichen Flüssigkeit zurückzuführen wäre, wurde unmittelbar im Anschluß an jede der drei oben aufgeführten Messungen eine sogenannte Leermessung ohne Störobjekt durchgeführt.

Bei dieser Eichung hat man zu berücksichtigen, daß bei der experimentellen Bestimmung der Diagonalelemente $\langle \tau_n, \Lambda_1 \tau_n \rangle$ die spezielle Höhe der Flüssigkeit im Tomographen eine Rolle spielt. Die Eichung des Tomographen zur Untersuchung ganz beliebiger Objekte ist daher wiederum nur für die Nichtdiagonalelemente der Neumann-nach-Dirichlet Abbildung möglich.

Daher wird auch in der Folge, so weit dies möglich ist, auf kritische Meßwerte der Form $\langle \tau_n, \Lambda_M \tau_n \rangle$ für die Rekonstruktionen verzichtet.

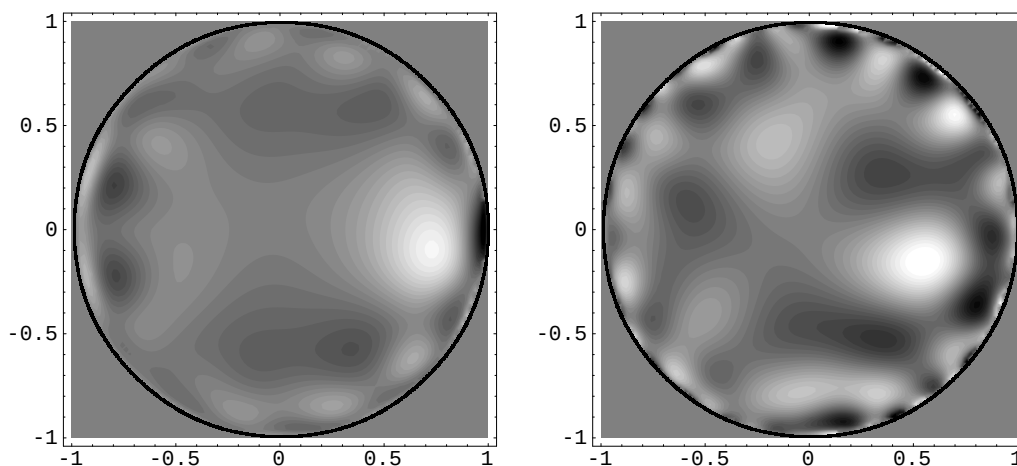


Abbildung 5.20: Rekonstruktionsergebnis für einen kleinen metallischen Störkörper ohne Berücksichtigung der Meßwerte $\langle \tau_n, \Lambda_M \tau_n \rangle$. Linke Seite: Rekonstruktion von $\delta\sigma$. Rechte Seite: Rekonstruktion von $-\Delta\sqrt{\sigma}$

Abbildung (5.20) zeigt die Rekonstruktionsergebnisse für ein kleines metallisches Objekt in der Nähe des Rands des Tomographen.

Im Vergleich zu den bislang präsentierten Resultaten für das zylinderförmige Störobjekt schneiden die beiden hier gezeigten Bilder sicherlich eher schlecht ab. In beiden der dargestellten Rekonstruktionsergebnisse tauchen mehrere großflächige Bereiche auf, an denen man einen Störkörper vermuten könnte. Dies gilt vor allem für die rechts gezeigte Rekonstruktion von $-\Delta\sqrt{\sigma}$. Im Randbereich zeigt das Bild

große Fluktuationen der rekonstruierten Verteilung. Andererseits trifft man mit der Bestimmung von $-\Delta\sqrt{\sigma}$ besser den Ort des metallischen Objekts, das im Falle der Rekonstruktion von $\delta\sigma$ zum Rand hin verschwommen erscheint.

Die nächsten beiden Abbildungen zeigen, daß eine zweidimensionale Problembetrachtung und die Darstellung eines zweidimensionalen Schnittbilds nicht wirklich als ein solches interpretiert werden darf. Vielmehr kommt es bestenfalls zu einer Art Überlagerung verschiedener Bilder, wobei die Leitfähigkeitsverteilung in der betrachteten Ebene den dominierenden Einfluß hat. Damit ist die Situation jedoch nur stark vereinfacht beschrieben. Inwiefern eine Änderung der Leitfähigkeitsverteilung in verschiedenen Ebenen zu unterschiedlichen Änderungen in den Meßwerten führt, kann nur durch eine vollständig dreidimensionale Behandlung des Problems untersucht werden.

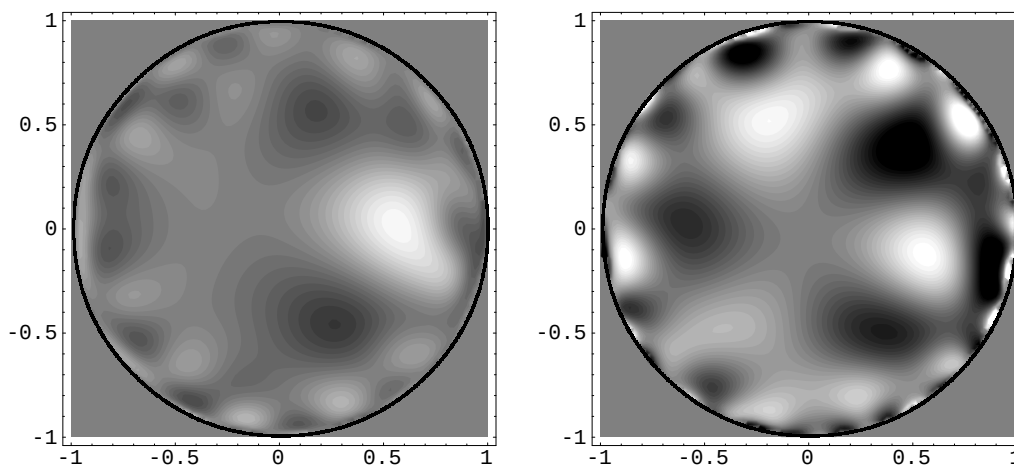


Abbildung 5.21: Rekonstruktionsergebnis für einen kleinen metallischen Störkörper außerhalb der Ebene der Potentialmessung ohne Berücksichtigung der Meßwerte $< \tau_n, \Lambda_M \tau_n >$. Linke Seite: Rekonstruktion von $\delta\sigma$. Rechte Seite: Rekonstruktion von $-\Delta\sqrt{\sigma}$

Die Abbildung (5.21) bezieht sich auf das metallische Objekt, das nun ca. 2 cm außerhalb der Ebene der Potentialmessung in den Tomographen gehalten wurde. Im Vergleich zu den zuvor gezeigten Bildern verschlechtert sich bei der Betrachtung von $\Delta\sqrt{\sigma}$ die Bildqualität zusehends. Im linken oberen Bereich taucht ein weiterer weißer Fleck auf, den man durchaus auch als gut leitenden Störkörper interpretieren könnte.

Die Tatsache, daß das Rekonstruktionsergebnis für $\delta\sigma$ ein fast schon besseres Ergebnis, wie das eben gesehene, liefert, ist kaum verständlich.

Die dritte der oben aufgezählten Meßreihen bezieht sich auf die Positionierung des metallischen Störkörpers im Zentrum des Tomographen. Aufgrund der Tatsache, daß die in diesem Fall gesuchte Leitfähigkeitsverteilung annähernd radialsymmetrisch ist, erhält man für die gemessene Änderung der Neumann-nach-Dirichlet

Abbildung fast ausschließlich in den Diagonalelementen $\langle \tau_n, \Lambda_M \tau_n \rangle$ von Null verschiedene Einträge, so daß es hier nicht in Frage kommt, diese kritischen Meßwerte zu vernachlässigen.

Ebenfalls wird an dieser Stelle deutlich, daß die Bestimmung von $\Delta\sqrt{\sigma}$, so wie sie hier durchgeführt wurde, für Störobjekte im Zentrum des Tomographen versagt.

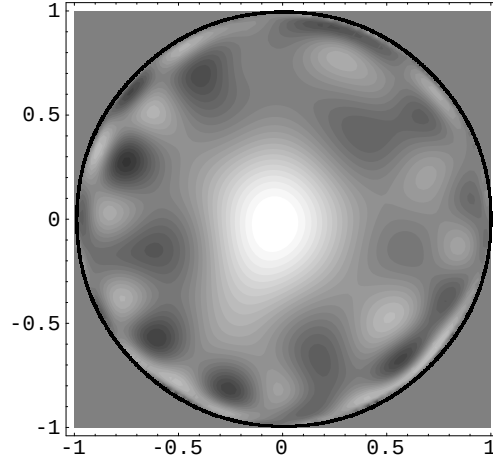


Abbildung 5.22: Rekonstruktion von $\delta\sigma$ für einen kleinen metallischen Störkörper in der Mitte des Tomographen

Das Rekonstruktionsergebnis für $\delta\sigma$ ist hingegen recht zufriedenstellend. Dennoch sind auch hier in Randnähe einige Bildartefakte zu erkennen, die man im praktischen Einsatz eines Tomographen leicht als real existierende Objekte fehlinterpretieren könnte.

Abschließend soll nun untersucht werden, inwieweit eine geeignet gewählte Funktion e_γ zur Stabilisierung des Problems beitragen kann. Dazu wurde folgende Funktion betrachtet.

$$e_\gamma(x(r, \phi), y(r', \phi')) = \begin{cases} \frac{1}{f_\gamma(r)} & , \quad r - \gamma < r' < r + \gamma, r|\phi - \phi'| < \gamma, r > \gamma/\pi \\ \frac{(\pi)}{(1 + pi)^2 \gamma^2} & , \quad r < \gamma/\pi, r' < (\gamma/\pi) + \gamma \\ 0 & , \quad sonst \end{cases} \quad (5.70)$$

$$f_\gamma(r) = \frac{2\gamma}{r} \int_{\max\{0, r-\gamma\}}^{\min\{1, r+\gamma\}} r' dr'. \quad (5.71)$$

Damit erhält man für eine gegebene Funktion h und einen Punkt $x = (r \cos \phi, r \sin \phi)$ mit hinreichend weitem Abstand zu Zentrum und Rand

$$\langle e_\gamma(x, \cdot), h(\cdot) \rangle = \frac{1}{(2\gamma)^2} \int_{\phi-\gamma/r}^{\phi+\gamma/r} \int_{r+\gamma}^{r-\gamma} r' h(r' \phi') dr' d\phi'.$$

Für $\gamma \ll r$ betrachtet man daher hier statt des Funktionswerts $h(r, \phi)$ den über eine Umgebung des Punktes $x(r, \phi)$ gemittelten Wert. Die Umgebung nimmt dabei

für sehr kleine γ immer mehr die Form eines Quadrats mit Kantenlänge 2γ an. Betrachtet man Punkte in einer ganz bestimmten Entfernung, nämlich $r = \gamma/\pi$ vom Kreismittelpunkt, so geht das hier betrachtete Kreissegment in einen Kreis mit Radius $(\gamma/\pi) + \gamma$ über. Für noch näher am Kreiszentrum gelegene Punkte wird die Funktion weiterhin über diese Kreisfläche gemittelt.

Einen weiteren Sonderfall hat man in unmittelbarer Randnähe zu beachten. Dort hat man das Problem, das das für kleine γ annähernd quadratische Kreissegment über den Rand $r = 1$ herausragt. Die verallgemeinerte Inverse führt in diesem Fall zu einer Mittelung der Funktion über eine annähernd rechteckige Fläche, wobei nur eine Seitenlänge weiterhin 2γ bleibt.

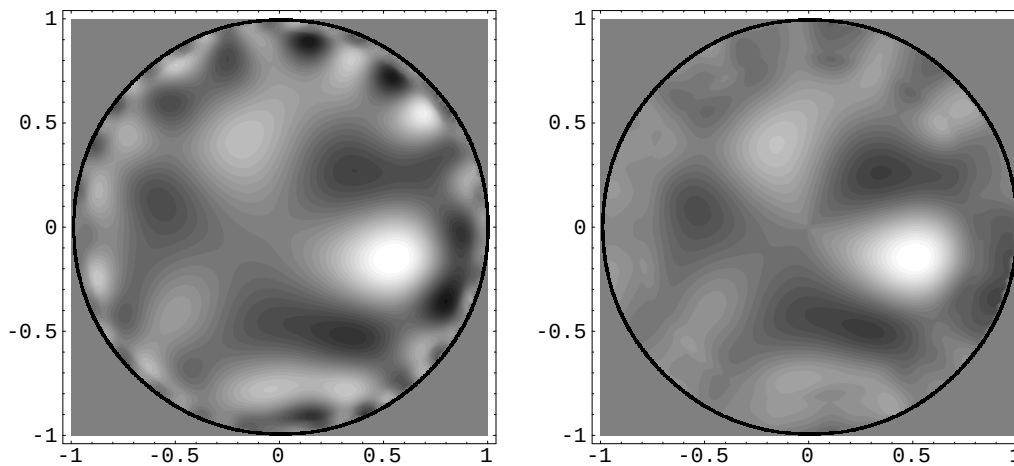


Abbildung 5.23: Rekonstruktion von $-\Delta\sqrt{\sigma}$ für einen kleinen metallischen Störkörper bei zusätzlicher Stabilisierung durch eine Funktion e_γ . Linke Seite: $\gamma = 0.01$. Rechte Seite: $\gamma = 0.1$.

Beispielhaft ist das Rekonstruktionsergebnis für $\Delta\sqrt{\sigma}$ aus Abbildung (5.20) in Abbildung (5.23) nochmals mit zusätzlicher Stabilisierung durch die in Gleichung (5.70) definierte Funktion e_γ dargestellt. Das Rekonstruktionsergebnis gewinnt für verschiedene Werte von γ jedoch nicht überragend an Qualität. Für kleine Werte, wie $\gamma = 0.01$ weist das linke der hier dargestellten Bilder kaum Änderungen gegenüber dem entsprechenden Ergebnis aus Abbildung (5.20) auf. Erst durch eine sehr große Wahl von γ sind sichtbare Veränderungen feststellbar, wie das rechte der dargestellten Bilder belegt, das durch die Wahl von $\gamma = 0.1$ zustande gekommen ist. Die Wirkung beschränkt sich jedoch auf Regionen in unmittelbarer Randnähe. Einige im linken Bild auftauchende helle Flecken am Rand sind im rechten Bild zwar nicht völlig verschwunden, jedoch ist die Abnahme der Helligkeit deutlich erkennbar, womit man bei Betrachtung des rechten Bildes kaum Objekte in Randnähe vermutet.

Leider führt die Variation des Parameters λ in der Tikhonov-Regularisierung für den Rekonstruktionskern v_γ in Verbindung mit Variationen von γ zu keiner nennenswerten Verbesserung. Dies gilt für beide hier diskutierten Rekonstruktionsverfahren.

Insbesondere führt eine besonders kleine Wahl von λ , wie dies im eigentlichen Sinn der Methode ist, in keinem Fall zu einem sinnvollen Ergebnis.

Diskussion der Ergebnisse

Die hier durchgeführten Untersuchungen zeigen, daß eine Ortung von Störkörpern in einem ansonsten homogenen Medium durchaus möglich ist, falls man die von jenem Körper verursachten Änderungen in den verschiedenen äußeren Potentialverteilungen präzise genug kennt. Eventuell ist es allerdings in einem praktischen Einsatz eines solchen Verfahrens notwendig, Meßverfahren zu entwickeln, die eine unmittelbare Messung der Effekte möglich macht.

So erscheint es denkbar, zwei Meßzyklen vor und nach der Injektion eines Kontrastmittels durchzuführen und aus den Differenzen der verschiedenen Potentialmeßwerte ein Schnittbild der vom Kontrastmittel verursachten Änderung der Leitfähigkeitsverteilung zu berechnen. In diesem Fall würde auch die Problematik der oben diskutierten Tomographeneichung entfallen. Es bliebe allerdings weiterhin das Problem, das eine zweidimensionale Behandlung der EIT mit beachtlichen Modellfehlern verbunden ist, die eine Interpretation des berechneten Bildes als wahres Schnittbild der Leitfähigkeitsverteilung verbieten.

Die dargestellten Ergebnisse zeigen, daß eine Betrachtung von σ ebenso wie eine Betrachtung von $\Delta\tau$ in den meisten Fällen zu sinnvollen Resultaten führte. Im Zentrum des Tomographen versagte allerdings die Rekonstruktion von $\Delta\tau$, was nun begründet werden soll.

Die Forderung nach Gültigkeit der Bedingungen (5.3), (5.4) war zur Bestimmung der Neumann- und Dirichletranddaten der Funktion ψ nötig. Die gewählten Forderungen an die gesuchte Leitfähigkeitsverteilung kann man sich auch durch eine Bestimmung der Leitfähigkeitsverteilung in unmittelbarer Randnähe ersetzt denken. In jedem Fall hat man jedoch das Problem, das die rekonstruierte Lösung $\Delta\tau$ nicht unbedingt mit den geforderten Randbedingungen für σ verträglich sein muß. Das ergibt sich aus der Tatsache, daß bei den hier untersuchten Problemen des Typs $A : \mathcal{L}^2(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}^N$

$$(Af)_i = \int_{\Omega} k_i(x) f(x) dx \quad i = 1, \dots, N$$

die Verwendung einer verallgemeinerten Inversen mit $e_{\gamma}(x, y) = \delta(x, y)$ zu einer Lösung führt, die in dem von den $\{k_i\}$ aufgespannten Raum liegt. Der Wert der Rekonstruktion hängt damit stark davon ab, wie gut die gesuchte Verteilung mit den Funktionen k_i approximiert werden kann. Die in dem hier untersuchten Rekonstruktionsproblem auftauchenden Funktionen sind Produkte harmonischer Funktionen, wobei allerdings rein harmonische Funktionen nicht auftauchen. Dies führt insbesondere für zentral im Tomographen gelegene Störobjekte zu schlechten Resultaten.

Eine Verbesserung des Rekonstruktionsergebnis läßt sich möglicherweise dadurch erzielen, daß man das hier gegebene inverse Problem unter Nebenbedingungen formuliert. Bei Gültigkeit der Bedingungen (5.3), (5.4) gilt für jede in Ω harmonische Funktion f

$$\int_{\Omega} f \Delta(\tau - 1) dx = \int_{\partial\Omega} f \frac{\partial(\tau - 1)}{\partial n} ds - \int_{\Omega} \nabla f \cdot \nabla(\tau - 1) dx$$

$$= - \int_{\Omega} \nabla((\nabla f)(\tau - 1)) dx = 0. \quad (5.72)$$

Die gesuchte Funktion $\Delta\tau = \Delta(\tau - 1)$ ist damit bezüglich des $\mathcal{L}^2$ -Skalarprodukts orthogonal zu allen in Ω harmonischen Funktionen.

Umgekehrt: Ist eine Funktion $w = \Delta v$ orthogonal zu allen in Ω harmonischen Funktionen, so erhält man mit dem Greenschen Satz bei einer Dirichletrandbedingung $v \equiv 0$, also der Randbedingung für die Funktion $\tau - 1$ auf $\partial\Omega$ die Lösung

$$v_D(x) = - \int_{\Omega} G_D(x, x') w(x') dx'.$$

Eine Neumannrandbedingung der Form $\partial v / \partial n = 0$ führt zu einer Lösung

$$v_N(x) = - \int_{\Omega} G_N(x, x') w(x') dx',$$

die auf der Oberfläche des Gebiets auf 0 normiert ist.

Da sich die Greensfunktionen G_D und G_N nur um einen harmonischen Anteil unterscheiden, findet man

$$v_N(x) - v_D(x) = - \int_{\Omega} (G_N(x, x') - G_D(x, x')) w(x') dx' = 0,$$

da nach Voraussetzung w keine harmonischen Anteile enthält.

Es ist jedoch bei der Verwendung einer verallgemeinerten Inversen, die hier untersucht wird, problematisch, die in Gleichung (5.72) formulierten Nebenbedingungen an die gesuchte Funktion in das Rekonstruktionsverfahren mit einzubeziehen. Eine Verbesserung der hier gezeigten Ergebnisse ist also durchaus denkbar.

5.4.5 Rekonstruktion von $\Delta\sqrt{\sigma}$ im Halbraum

In gleicher Weise, wie im vorigen Abschnitt für den Einheitskreis kann man auch im Falle des Halbraums die Rekonstruktion von $\Delta\sqrt{\sigma}$ untersuchen. Dazu betrachtet man $M + 1$ punktförmig gedachte Elektroden an den Orten $\vec{x}_k^s$, $k = 0, \dots, M$ auf der (x, y) -Ebene. Damit sind M linear unabhängige Stromkonfigurationen denkbar. Es sei

$$j_k(\vec{x}) = \delta(\vec{x} - \vec{x}_k^s) - \delta(\vec{x} - \vec{x}_0^s) \quad k = 1, \dots, M.$$

In diesem Fall hält man also eine Elektrode am Ort $\vec{x}_0^s$ als Stomausgang fest und wählt jeweils eine der verbleibenden Elektroden als Stromeingang.

Des weiteren seien auf der (x, y) -Ebene $N + 1$ weitere Elektroden an den Orten $\vec{x}_k^p$, $k = 0, \dots, N$ vorhanden, an denen zu jedem der angelegten äußeren Ströme die zugehörige Potentialverteilung bestimmt werden kann. Als Beobachtungsfunktionen kann man die folgenden N Funktionen wählen:

$$p_k(\vec{x}) = \delta(\vec{x} - \vec{x}_k^p) - \delta(\vec{x} - \vec{x}_0^p) \quad k = 1, \dots, N.$$

Damit werden die Potentialdifferenzen zwischen einer Elektrode bei $\vec{x}_0^p$ zu allen weiteren Elektroden bestimmt.

Bezeichnet $m_{(k-1)N+i}$ die i -te gemessene Potentialdifferenz bezüglich der k -ten angelegten Stromkonfiguration, so erhält man in Analogie zum Gleichungssystem

(5.64) zur Bestimmung der gesuchten Verteilung $\Delta\sqrt{\sigma}$ im Halbraum die $N M$ Gleichungen

$$K : \mathcal{L}^2(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}^{N \times M}, \quad m_{(k-1)N+i} = \int_{\Omega} K_{(k-1)N+i}(\vec{x}') \Delta\tau(\vec{x}') dV' \quad (5.73)$$

$$K_{(k-1)N+i}(\vec{x}) = \frac{1}{(2\pi)^2} \left(\frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}_i^s|} - \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}_0^s|} \right) \left(\frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}_k^p|} - \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}_0^p|} \right). \quad (5.74)$$

Zur Bestimmung einer verallgemeinerten Inversen hat man in diesem Fall die Gramsche Matrix des Systems $\{K_i\}$ zu bestimmen und damit Integrale der Form

$$\int_{\Omega} \left(\frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}_i|} \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}_j|} \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}_l|} \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}_m|} \right) dV. \quad (5.75)$$

zu berechnen.

Als hinreichende Bedingung für die Existenz aller zu berechnender Integrale kann man verlangen, daß an den Orten der (x, y) -Ebene, an denen ein Strom in den Halbraum ein- oder abfließt, keine Potentialmessung stattfinden soll. In diesem Fall hat man dafür gesorgt, daß nicht mehr als zwei Vektoren $\vec{x}_s$ in Gleichung (5.75) übereinstimmen, womit über die im Integral auftauchenden Singularitäten integriert werden kann.

Zur Bestimmung der Integrale ist zunächst zu beachten, daß man die Integration einfacher auf dem gesamten $\mathbb{R}^3$ durchführen kann:

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} dy \int_0^{\infty} dz \prod_{i=1}^4 \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}_i|} = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} dy \int_{-\infty}^{\infty} dz \prod_{i=1}^4 \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}_i|}. \quad (5.76)$$

Eine Integration über den gesamten $\mathbb{R}^3$ vereinfacht sich durch die Bestimmung folgender Fouriertransformation:

$$q_{i,j}(\vec{k}) := (\mathcal{F} \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}_i|} \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}_j|})(\vec{k}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}_i|} \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}_j|} e^{i\vec{k} \cdot \vec{x}} d^3x.$$

Nach dem Parseval'schen Theorem gilt damit

$$Q_{i,j,l,m} := \int_{\mathbb{R}^3} \left(\frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}_i|} \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}_j|} \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}_l|} \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}_m|} \right) d^3x = \int_{\mathbb{R}^3} q_{i,j}(\vec{k}) \overline{q_{l,m}(\vec{k})} d^3k, \quad (5.77)$$

wenn man die Paare (i, j) und (l, m) so wählt, daß $\vec{x}_i \neq \vec{x}_j$ und $\vec{x}_l \neq \vec{x}_m$ gilt, was aber immer möglich ist.

Zur Berechnung der gesuchten Fouriertransformation benötigt man die Feynmanformel

$$\frac{1}{A_1^{\nu_1} \cdots A_N^{\nu_N}} = \frac{\Gamma(\nu_1 + \cdots + \nu_N)}{\Gamma(\nu_1) \cdots \Gamma(\nu_N)} \underbrace{\int_0^1 \cdots \int_0^1}_N \frac{(\prod_{i=1}^N \alpha_i^{\nu_i-1} d\alpha_i) \delta(\sum_{i=1}^N \alpha_i - 1)}{(\alpha_1 A_1 + \cdots + \alpha_N A_N)^{\nu_1 + \cdots + \nu_N}}. \quad (5.78)$$

Setzt man hierin

$$A_i = \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}_i|^2}, \quad \nu_i = \frac{1}{2},$$

so erhält man

$$\frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}_i|} \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}_j|} = \frac{1}{\pi} \int_0^1 \frac{d\alpha \alpha^{-1/2} (1 - \alpha)^{-1/2}}{\alpha |\vec{x} - \vec{x}_i|^2 + (1 - \alpha) |\vec{x} - \vec{x}_j|^2}. \quad (5.79)$$

Weiterhin gilt

$$\begin{aligned} \alpha |\vec{x} - \vec{x}_i|^2 + (1 - \alpha) |\vec{x} - \vec{x}_j|^2 &= \vec{x}^2 - 2\alpha \vec{x} \cdot \vec{x}_i + \alpha \vec{x}_i^2 - 2(1 - \alpha) \vec{x} \cdot \vec{x}_j + \\ &+ (1 - \alpha) \vec{x}_j^2 = \vec{x}^2 - 2\vec{x} \cdot (\alpha \vec{x}_i + (1 - \alpha) \vec{x}_j) + \alpha \vec{x}_i^2 + (1 - \alpha) \vec{x}_j^2 \\ &= |\vec{x} - (\alpha \vec{x}_i + (1 - \alpha) \vec{x}_j)|^2 - \alpha^2 \vec{x}_i^2 - 2\alpha(1 - \alpha) \vec{x}_i \cdot \vec{x}_j - (1 - \alpha)^2 \vec{x}_j^2 + \alpha \vec{x}_i^2 \\ &+ (1 - \alpha) \vec{x}_j^2 = |\vec{x} - (\alpha \vec{x}_i + (1 - \alpha) \vec{x}_j)|^2 + C^2 \\ C^2 &= \alpha(1 - \alpha) |\vec{x}_i - \vec{x}_j|^2. \end{aligned}$$

Somit findet man

$$\begin{aligned} &\int_{\mathbb{R}^3} \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}_i|} \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}_j|} e^{i\vec{k} \cdot \vec{x}} d^3x. \\ &= \int_{\mathbb{R}^3} \left\{ \frac{1}{\pi} \int_0^1 \frac{d\alpha \alpha^{-1/2} (1 - \alpha)^{-1/2}}{|\vec{x} - (\alpha \vec{x}_i + (1 - \alpha) \vec{x}_j)|^2 + C^2} \right\} e^{i\vec{k} \cdot \vec{x}} d^3x \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^1 d\alpha \alpha^{-1/2} (1 - \alpha)^{-1/2} \left\{ \int_{\mathbb{R}^3} \frac{1}{|\vec{x}|^2 + C^2} e^{i\vec{k} \cdot (\vec{x} + \alpha \vec{x}_i + (1 - \alpha) \vec{x}_j)} d^3x \right\}. \end{aligned}$$

Zur Auswertung des Volumenintegrals setzt man $\vec{k} = |\vec{k}| \vec{e}_z$ und geht zu sphärischen Polarkoordinaten über. Mit $k := |\vec{k}|$ und $r := |\vec{x}|$ erhält man

$$\begin{aligned} &\int_{\mathbb{R}^3} \frac{1}{|\vec{x}|^2 + C^2} e^{i\vec{k} \cdot (\vec{x} + \alpha \vec{x}_i + (1 - \alpha) \vec{x}_j)} d^3x = \\ &e^{i\vec{k} \cdot (\alpha \vec{x}_i + (1 - \alpha) \vec{x}_j)} \int_0^{2\pi} d\phi \int_{-1}^1 d\cos\theta \int_0^\infty r^2 dr \frac{1}{r^2 + C^2} e^{ikr \cos\theta} = \\ &e^{i\vec{k} \cdot (\alpha \vec{x}_i + (1 - \alpha) \vec{x}_j)} 2\pi \int_0^\infty \frac{r^2 dr}{ikr(r^2 + C^2)} (e^{ikr} - e^{-ikr}) = \\ &e^{i\vec{k} \cdot (\alpha \vec{x}_i + (1 - \alpha) \vec{x}_j)} 4\pi \int_0^\infty \frac{r dr}{k(r^2 + C^2)} \sin kr = \frac{2\pi^2}{k} e^{i\vec{k} \cdot (\alpha \vec{x}_i + (1 - \alpha) \vec{x}_j)} e^{-Ck}. \end{aligned}$$

Die verbleibende α -Integration läßt sich durch die Substitution $\alpha = \sin^2 \varphi$ vereinfachen:

$$\begin{aligned} &\int_{\mathbb{R}^3} \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}_i|} \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}_j|} e^{i\vec{k} \cdot \vec{x}} d^3x. \\ &= \frac{2\pi}{k} \int_0^1 d\alpha \alpha^{-1/2} (1 - \alpha)^{-1/2} e^{i\vec{k} \cdot (\alpha \vec{x}_i + (1 - \alpha) \vec{x}_j)} e^{-Ck} \\ &= \frac{2\pi}{k} \int_0^{\pi/2} d\varphi 2 \sin \varphi \cos \varphi (\sin^2 \varphi \cos^2 \varphi)^{-1/2} e^{i\vec{k} \cdot (\sin^2 \varphi \vec{x}_i + (\cos^2 \varphi) \vec{x}_j) - \sin \varphi \cos \varphi k |\vec{x}_i - \vec{x}_j|}. \end{aligned}$$

Der Exponent in diesem Integral läßt sich durch die Umformungen

$$\vec{k} \cdot \vec{x}_i \sin^2 \varphi + \vec{k} \cdot \vec{x}_j \cos^2 \varphi$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\vec{k} \cdot \vec{x}_i + \vec{k} \cdot \vec{x}_j}{2} (\sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi) + \frac{\vec{k} \cdot \vec{x}_i - \vec{k} \cdot \vec{x}_j}{2} \sin^2 \varphi + \frac{\vec{k} \cdot \vec{x}_j - \vec{k} \cdot \vec{x}_i}{2} \cos^2 \varphi \\
&= \frac{\vec{k} \cdot \vec{x}_i + \vec{k} \cdot \vec{x}_j}{2} + \frac{\vec{k} \cdot \vec{x}_j - \vec{k} \cdot \vec{x}_i}{2} \cos 2\varphi, \\
\sin \varphi \cos \varphi &= \frac{1}{2} \sin 2\varphi
\end{aligned}$$

noch weiter vereinfachen. Mit der Substitution $\psi = 2\varphi$ und den Abkürzungen

$$\begin{aligned}
\vec{a}_{ij} &= \frac{\vec{x}_i + \vec{x}_j}{2}, \\
\vec{b}_{ij} &= \frac{\vec{x}_j - \vec{x}_i}{2}
\end{aligned}$$

erhält man schließlich

$$\int_{\mathbb{R}^3} \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}_i|} \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}_j|} e^{i\vec{k} \cdot \vec{x}} d^3x = \frac{2\pi}{k} \int_0^\pi d\psi e^{i\vec{k} \cdot (\vec{a}_{ij} + \vec{b}_{ij} \cos \psi) - |\vec{b}_{ij}|k \sin \psi}. \quad (5.80)$$

Mit Gleichung (5.77) bestimmt man hieraus

$$\begin{aligned}
Q_{i,j,l,m} &= \int_{\mathbb{R}^3} q_{ij}(\vec{k}) \overline{q_{lm}}(\vec{k}) d^3k \\
&= \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{\mathbb{R}^3} d^3k \frac{4\pi^2}{k^2} \left(\int_0^\pi d\psi e^{i\vec{k} \cdot (\vec{a}_{ij} + \vec{b}_{ij} \cos \psi) - |\vec{b}_{ij}|k \sin \psi} \right) \\
&\quad \times \left(\int_0^\pi d\psi' e^{-i\vec{k} \cdot (\vec{a}_{lm} + \vec{b}_{lm} \cos \psi') - |\vec{b}_{lm}|k \sin \psi'} \right).
\end{aligned}$$

Nach Vertauschung der Integrationsreihenfolge läßt sich die d^3k Integration vollständig ausführen. Mit den Bezeichnungen

$$A_{ijlm}(\psi, \psi') := |\vec{a}_{ij} - \vec{a}_{lm} + \vec{b}_{ij} \cos \psi - \vec{b}_{lm} \cos \psi'| \quad (5.81)$$

$$B_{ijlm}(\psi, \psi') := |\vec{b}_{ij}| \sin \psi + |\vec{b}_{lm}| \sin \psi' \quad (5.82)$$

und Übergang in sphärische Polarkoordinaten erhält man

$$\begin{aligned}
Q_{i,j,l,m} &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int_0^\pi d\psi \int_0^\pi d\psi' \left(\int_{\mathbb{R}^3} d^3k \frac{4\pi^2}{k^2} e^{i\vec{k} \cdot (\vec{a}_{ij} - \vec{a}_{lm} + \vec{b}_{ij} \cos \psi - \vec{b}_{lm} \cos \psi') - |\vec{b}_{ij}|k \sin \psi - |\vec{b}_{lm}|k \sin \psi'} \right) \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi d\psi \int_0^\pi d\psi' \left(\int_0^{2\pi} d\phi \int_{-1}^1 d\cos \theta \int_0^\infty dk e^{ikA_{ijlm} \cos \theta - kB_{ijlm}} \right) \\
&= 2 \int_0^\pi d\psi \int_0^\pi d\psi' \left(\int_0^\infty dk \frac{\sin kA_{ijlm}}{kA_{ijlm}} e^{-kB_{ijlm}} \right) \\
&= 2 \int_0^\pi d\psi \int_0^\pi d\psi' \frac{\arctan(A_{ijlm}/B_{ijlm})}{A_{ijlm}}.
\end{aligned}$$

Das hierin noch auftauchende Flächenintegral kann problemlos und ohne allzu großen Zeitaufwand numerisch bestimmt werden. Hat man für alle möglichen Kombinationen von stromführenden und potentialmessenden Elektroden die zugehörigen Größen $Q_{i,j,l,m}$ bestimmt, so ergeben sich letztendlich die gesuchten Matrixeinträge der Gramschen Matrix zu den Funktionen K_i aus Gleichung (5.74).

Numerischer Test des Rekonstruktionsalgorithmus

Wie erwähnt, verlangt die hier gezeigte Behandlung des Problems, das stromführende und potentialmessende Elektroden getrennt auf der (x, y) -Ebene platziert sind. Die numerischen Tests des Rekonstruktionsalgorithmus beziehen sich auf die in Abbildung (5.24) dargestellte Meßplatte.

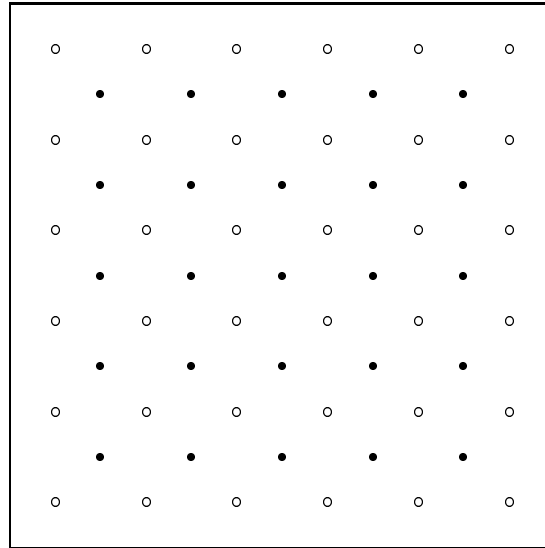


Abbildung 5.24: Modellierung der Meßplatte

Die ausgefüllten Kreise ($\bullet$) repräsentieren hierin stromführende Elektroden, während alle übrigen Kreise ($\circ$) potentialmessende Elektroden beschreiben.

In allen in der Folge diskutierten Fälle wurden die betrachteten kugelförmigen Störkörper als metallisch leitend angesehen. Für jede äußere Stromanordnung wurde die zugehörige vom Störkörper verursachte Potentialänderung durch die Multipolentwicklung (2.71) bis einschließlich zur Ordnung $l = 2$ bestimmt. Analog zu den Ergebnissen in der zweidimensionalen Problembetrachtung soll auch hier immer die Funktion $-\Delta\sqrt{\sigma}$ dargestellt werden, was bei einem metallisch leitenden Störkörper zu einem hellen Fleck in der Rekonstruktion führt.

Im ersten der hier untersuchten Fälle wird ein kugelförmiges Störkörper an den Koordinaten $(6, 6, 6)$ mit einem Radius von $R = 1$ betrachtet.

In Abbildung (5.25) sind drei verschiedene Schnittbilder des Rekonstruktionsergebnisses für $-\Delta\sqrt{\sigma}$ in verschiedenen Ebenen parallel zur (x, y) -Ebene dargestellt. Im Schnittbild für $z=6$ ist auch nochmals zur Orientierung die Positionierung der verschiedenen Elektroden bei $z = 0$ skizziert. Weiterhin ist in der Abbildung ein weiteres Schnittbild parallel zur (x, z) -Ebene dargestellt.

Wie zunächst aus dem in der Abbildung links oben dargestellten Bild hervorgeht, ist zwar deutlich ein Objekt zu erkennen, jedoch handelt es sich hierbei kaum um eine Kugel mit Radius $R = 1$. Ebenso wird die Position der Kugel nicht ganz richtig wiedererkannt. Die drei übrigen Schnittbilder parallel zur (x, y) -Ebene dokumentieren, dass sowohl x - als auch y -Komponente der Störung richtig wiedergegeben

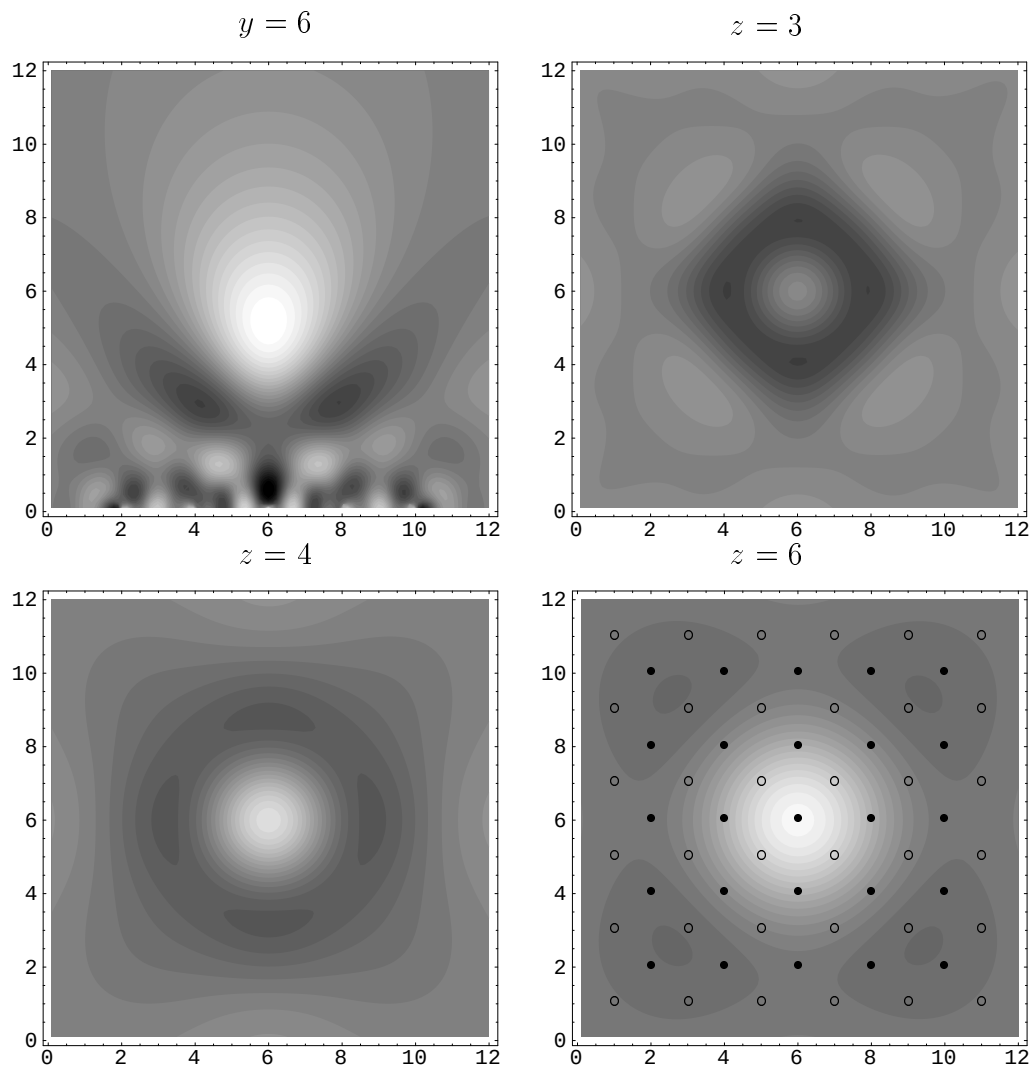


Abbildung 5.25: Rekonstruktion von $-\Delta\sqrt{\sigma}$ bezüglich eines kugelförmigen Störkörpers mit Durchmesser 2 an den Koordinaten $(6,6,6)$. Links oben: Schnittbild $y=6$. Rechts oben: Schnittbild $z=3$. Links unten: Schnittbild $z=4$. Rechts unten: Schnittbild $z=6$; ebenfalls ist hier die Elektrodenanordnung aus Abbildung (5.24) maßstabsgerecht miteingezeichnet.

sind. Allerdings befindet sich die z -Komponente der Störung etwas zu sehr in Nähe der Meßebene. Dieser Effekt verschlimmert sich immer dramatischer, je weiter man das Störobjekt von der $z = 0$ -Ebene entfernt. Im Gegensatz dazu erhält man eine bedeutend bessere Bildqualität für näher an der Meßebene gelegene Objekte, wie dies ja auch zu erwarten ist.

Dies verdeutlicht Abbildung (5.26), in der Störkörper verschiedenen Durchmessers an den Mittelpunktsskoordinaten $(6,6,2)$ betrachtet werden. Dabei werden in der Abbildung die Schnittbilder für $y = 6$ dargestellt.

Ein Größenunterschied zwischen beiden Objekten ist in diesem Fall auch in der Rekonstruktion deutlich gegeben. Allerdings spiegelt das Ergebnis in beiden Fällen nicht die vorgegebene Situation exakt wider. Dies verdeutlichen die miteingezeich-

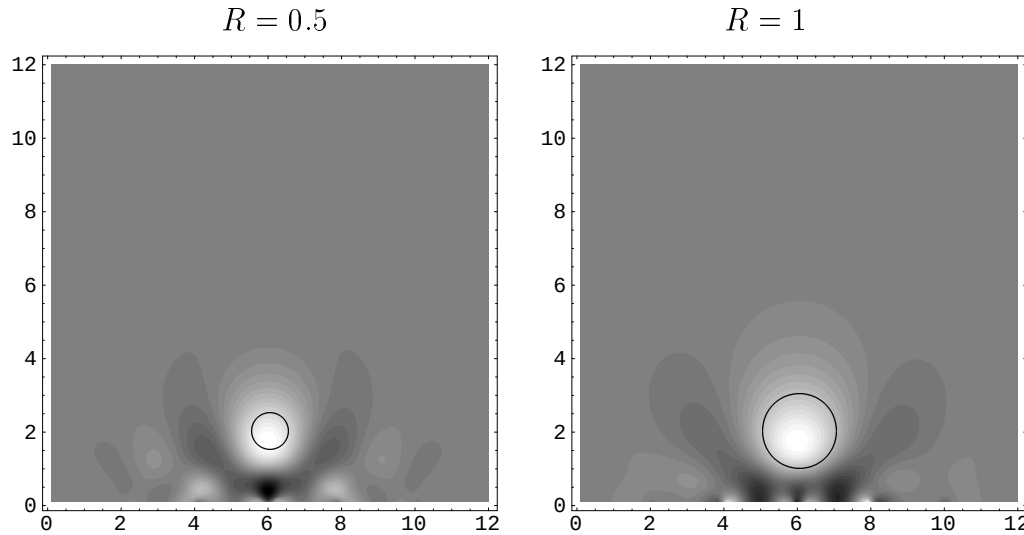


Abbildung 5.26: Rekonstruktion von $-\Delta\sqrt{\sigma}$ bezüglich eines kugelförmigen Störkörpers an den Koordinaten $(6,6,2)$. Für die Kugelradien $R=0.5$ und $R=1$ sind jeweils die Schnittbilder für $y = 6$ dargestellt.

neten Abmessungen der betrachteten kugelförmigen Störobjekte.

Somit liefern die hier gezeigten Rekonstruktionsergebnisse nur ungefähre Hinweise auf die Größe von Störobjekten und dies auch nur dann, wenn die Abmessungen des Objekts nicht deutlich kleiner sind, als seine Entfernung zur Meßebe.

Auch für Störkörper, die nur wenig von der Meßplatte entfernt sind, lassen sich keine scharfen Umrandungen des Objekts finden. Vielmehr verschwimmt das Rekonstruktionsergebnis immer mehr für große Werte von z .

Untersuchung der Stabilität des Rekonstruktionsalgorithmus

Abschließend soll die Stabilität des hier untersuchten Rekonstruktionsalgorithmus für $\Delta\sqrt{\sigma}$ betrachtet werden. Dazu wird nochmals die bereits untersuchte Situation eines kugelförmigen Störkörpers mit einem Durchmesser von 1 an den Koordinaten $(6,6,6)$ betrachtet. Die Abbildung (5.25) zeigt verschiedene Schnittbilder der Rekonstruktion für exakte Daten. Dies ist allerdings streng genommen schon nicht ganz richtig, da die Berechnung der von der leitenden Kugel verursachten Änderung der Potentialverteilung nur näherungsweise geschah. In dem hier betrachteten Fall, in dem die Abmessungen des Objekts deutlich kleiner sind, als dessen Entfernung zum Rand $z = 0$, kann man jedoch eine Bestimmung der Potentialänderung, die Dipol- und Quadrupolmomente berücksichtigt, quasi als exakt ansehen.

Fehlerbehaftete Daten kann man sich beispielsweise durch Gleichung (5.38) erzeugen. Die so ermittelten Werte

$$m_f = m(1 + qz)$$

lieferten für $q = 0.1$ und $q = 0.01$ die in Abbildung (5.27) dargestellten Schnittbilder der Rekonstruktionsergebnisse bei $y = 6$. Diese beziehen sich jedoch nun auf eine größere Wahl des Regularisierungsparameters λ .

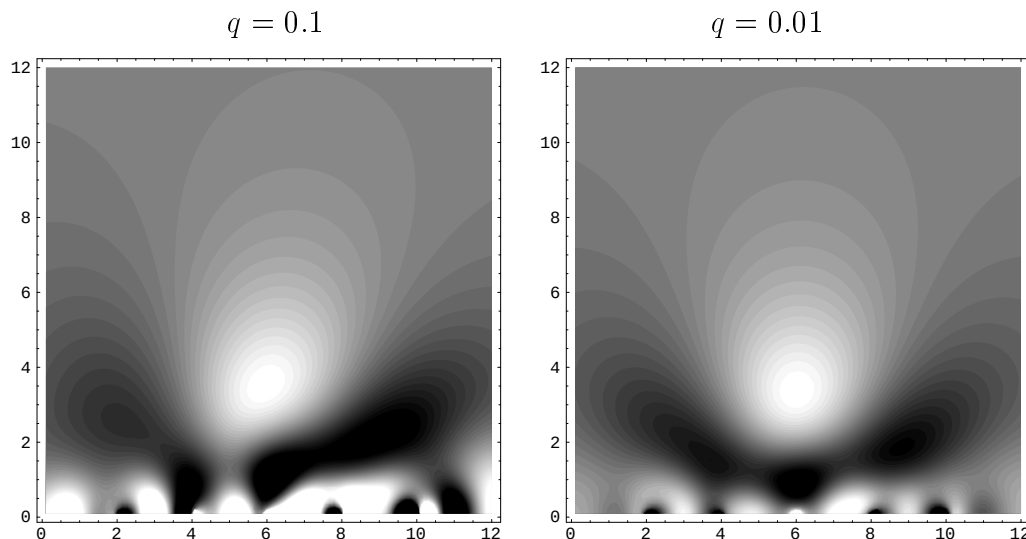


Abbildung 5.27: Rekonstruktion von $-\Delta\sqrt{\sigma}$ bezüglich eines kugelförmigen Störkörpers an den Koordinaten (6,6,6) für nach Gleichung (5.38) fehlerbehaftete Meßdaten. Dargestellt sind Schnittbilder der Rekonstruktion für $y = 6$

In beiden Fällen bleibt der Störkörper deutlich zu erkennen. Wie schon für den Fall von exakten Daten hat man natürlich auch hier nicht zu erwarten, scharfe Objektbegrenzungen zu finden. Als wesentlichen Unterschied zum linken oberen Bild der Abbildung (5.25) findet man jedoch, daß die dargestellten Objekte scheinbar näher zur $z = 0$ -Ebene gerückt sind. Dies ist allerdings nicht auf die zugrunde liegenden fehlerbehafteten Daten zurückzuführen. Vielmehr erhält man auch für den exakten Datensatz bei der hier gewählten Regularisierung ein ganz ähnliches Ergebnis.

Die in diesem Abschnitt betrachteten Rekonstruktionsergebnisse errechneten sich aus den von einem Störobjekt verursachten Änderungen in den Potentialverteilungen zu verschiedenen äußeren Stromdichten. Man muß aber betonen, daß diese Meßgrößen im Experiment nicht unmittelbar zugänglich sind. Die dort gefundenen Potentialverteilungen beinhalten auch die Anteile zu einer homogenen Leitfähigkeitsverteilung. Wie die Untersuchungen des dritten Kapitels zur Modellierung der Elektroden belegen, ist dieser hier gar nicht betrachtete Anteil allerdings zum einen stark dominierend und zum zweiten von einer genauen Kenntnis des Kontaktwiderstands abhängig. Prinzipiell ist daher der praktische Einsatz eines Tomographen, der aus einer Platte mit stromführenden und potentialmessenden Elektroden besteht, wie dies schematisch in Abbildung (5.24) dargestellt ist, ohne die Verwendung weiterer Hilfsmittel, wie beispielsweise Kontrastmittel, erst dann denkbar, wenn ein genaues Verständnis von den zu erwartenden Meßwerten im Falle einer homogenen Leitfähigkeitsverteilung des untersuchten Objekts vorliegt. Abweichungen von diesen Erwartungen können dann beispielsweise zu den oben gezeigten Bildern umgerechnet werden.

Kapitel 6

Zusammenfassung und Ausblick

In der vorliegenden Arbeit wurde der Einsatz der elektrischen Impedanztomographie (EIT) im Bereich der Mammographie untersucht. Die umfangreiche Forschung auf diesem Gebiet begründet sich dadurch, daß Mammakarzinome eine bedeutend größere Leitfähigkeit besitzen, als das sie umgebende gesunde Gewebe. Eine Differenzierung von Objekten, die auf der Betrachtung des Röntgenabsorptionskoeffizienten beruht, ist vor allem bei jungen Frauen mit einem dichteren Fettgewebe in der Brust weniger gut gegeben.

Das endgültige Aussehen eines elektrischen Impedanztomographen ist auf sehr vielfältige Art und Weise denkbar, da mehrere Herangehensweisen an das Problem möglich sind.

Die auf den ersten Blick natürlichste Vorgehensweise besteht in einer Art Kopie eines sehr erfolgreichen Untersuchungsverfahrens, der Röntgenaufnahme der Brust. In diesem Fall wird die Brust zwischen zwei Platten geklemmt und ein Abfall der Strahlintensität beim Durchgang von Röntgenstrahlung durch das Gewebe bestimmt.

In Analogie dazu ist es im Bereich der elektrischen Impedanztomographie möglich, die beiden Platten auf ein unterschiedliches elektrisches Potential zu legen, um im Anschluß die äußere Stromdichteverteilung auf den Platten zu bestimmen. Diese Vorgehensweise wird gegen Ende des zweiten Kapitels der Arbeit untersucht. Tatsächlich erscheint die praktische Verwendung eines solchen Tomographen durchaus denkbar. Objekte, die deutlich besser leiten, als die sie umgebende Materie führen zu einer beobachtbaren Erhöhung der äußeren Stromdichte auf beiden Platten.

Es wird bei der Untersuchung eines solchen Verfahrens jedoch eine Problematik deutlich, die man als charakteristisch für die gesamte elektrische Impedanztomographie ansehen kann. Die von den gesuchten Objekten, im Fall der Mammographie also beispielsweise Mammakarzinomen, verursachten Effekte in den Meßwerten nehmen dramatisch ab, wenn sich das Objekt vom Rand des betrachteten Gebiets entfernt. Speziell in dem hier betrachteten Fall nimmt die maximal meßbare Stromänderung auf einer Platte in etwa mit der dritten Potenz des Abstands des Objekts zur Platte ab. Verbunden damit führt die Bestimmung der äußeren Stromdichteverteilung auf den Platten für weit von beiden Platten entfernte Objekte nur zu sehr stark verschwommenen Bildern. Die Chance auf Erkennung eines Tumors steigt damit, wenn sich dieser in nicht allzu großer Entfernung zur Meßplatte befindet.

Dies führt unmittelbar zu der Idee, statt zweier Platten nur noch eine kleine Platte zu benutzen, die man ganz gezielt an die Brust aufsetzt, um Regionen vor dieser Platte zu untersuchen. Geräte, die auf dieser Technik basieren, werden bereits heute in der Praxis getestet. Die Patientin hält dabei eine Elektrode in der Hand, über die Strom in den Körper fließt. Auf der Platte, die mit zahlreichen Elektroden besetzt ist, wird dann gemessen, auf welche Art und Weise der Strom abfließt. Auch dieses Untersuchungsverfahren wird im zweiten Kapitel dieser Arbeit betrachtet.

Ein Verfahren ganz ähnlicher Art wird im fünften Kapitel über Rekonstruktionsalgorithmen untersucht. Das Verfahren beruht jedoch hier darauf, durch die Messung von äußeren Potentialverteilungen Rückschlüsse über die gesuchte Leitfähigkeitsverteilung zu ziehen. Dazu versucht man, während der Aufnahme der Potentialmeßwerte einen möglichst homogenen, parallel zur Meßplatte fließenden Strom in der Brust anzulegen. Die zugehörige äußere Potentialverteilung sollte im Falle einer homogenen Leitfähigkeit linear verlaufen. Abweichungen von diesem Verhalten lassen auf die Existenz anders leitender Objekte, wie beispielsweise Mammakarzinome, schließen. Das dazu verwendete Rekonstruktionsverfahren beruht auf der Linearisierung des Vorwärtsproblems der EIT, das im vierten Kapitel der Arbeit und in Teilen des Anhangs B untersucht wird. Als Rekonstruktionsergebnis erhält man die Projektion der gesuchten Leitfähigkeitsverteilung auf einen Satz harmonischer Funktionen.

Auch bei Verwendung dieser Methode fallen meßbare Effekte mit der dritten Potenz des Abstands des Objekts zum Rand ab.

Nachdem die theoretischen Test der Rekonstruktionsalgorithmen auf diesem Gebiet verheißungsvoll sind, ist auch der Bau eines entsprechenden Geräts durch die Firma Dr. G. Schuhfried GmbH geplant. Experimentelle Test und die Auswertung realistischer Daten werden dann weitere Aufschlüsse über die Chancen eines solchen Tomographen liefern.

Alle oben aufgeführten bildgebenden Verfahren haben jedoch eins gemeinsam. Die vollständige Rekonstruktion der dreidimensionalen Leitfähigkeitsverteilung und die zugehörige Erstellung eines dreidimensionalen Bildes ist durch sie nicht möglich. Bei den beiden ersten hier betrachteten Tomographen wird nur die äußere Stromverteilung zu einem konstant angelegten Potential bestimmt. Im dritten Fall besteht die Vorgehensweise darin, durch die Messung einer Potentialverteilung Rückschlüsse auf die Leitfähigkeitsverteilung zu schließen.

Eine weiterführende Fragestellung ist daher, ob die Betrachtung mehrerer, verschiedener äußerer Stromdichten und die Messung der jeweils zugehörigen Potentialverteilungen eine Verbesserung des Rekonstruktionsergebnisses liefert. Die zugrunde liegende mathematische Beschreibung dieses Problems, das man auch als das eigentliche EIT-Problem auffassen kann, wird zu Beginn des zweiten Kapitels dargestellt.

Rekonstruktionsalgorithmen, die sich auf die Messungen äußerer Potentialverteilungen zu verschiedenen äußeren Stromdichten beziehen, werden in der Arbeit in zwei und in drei Dimensionen untersucht.

Im zweidimensionalen Modell der elektrischen Impedanztomographie betrachtet man nur eine Schnittfläche eines dreidimensionalen Objekts. Am Rand dieser Fläche platziert man Elektroden, über die man verschiedenartige äußere Stromdichtekonfigurationen am Körper erzeugt. Die zugehörigen äußeren Potentialverteilungen, die gemessen werden, führen dann zur Bestimmung einer Leitfähigkeitsverteilung in dem

betrachteten zweidimensionalen Gebiet.

Im Falle der Mammographie könnte man in diesem Sinne versuchen, einige mit Elektroden besetzte Gürtel um die zu untersuchende Brust zu schnallen, um in den dadurch definierten Ebenen Schnittbilder der Leitfähigkeitsverteilung zu ermitteln. Wie jedoch Untersuchungen im zweiten Kapitel der Arbeit zur Berechtigung einer solchen zweidimensionalen Betrachtung aufzeigen, ist dies mit einem Fehler im zugrunde gelegten Modell verbunden, da der Strom keinesfalls auch nur annähernd in einer fest vorgegebenen Ebene fließt. Im Falle einer praktischen Anwendung dieser Methode müßte daher ein berechnetes zweidimensionales Bild immer als eine Überlagerung verschiedener Schnittbilder angesehen werden, wobei unklar bleibt, wie diese Überlagerung genau zustande kommt. Dennoch zeigen Tests von zweidimensionalen Rekonstruktionsalgorithmen mit realistischen Daten, die unserer Arbeitsgruppe von einem in der Firma Dr. G. Schuhfried GmbH entwickelten Tomographen zur Verfügung gestellt wurden, daß die Ortung von Objekten sehr hoher Leitfähigkeit in einem homogen leitenden Medium prinzipiell möglich ist. Dazu wird in dieser Arbeit die Bestimmung der Leitfähigkeitsverteilung σ ebenso betrachtet, wie die Rekonstruktion der Funktion $\Delta\sqrt{\sigma}$, wobei Δ hier den Laplace-Operator bezeichnet.

Als Testobjekte wurden in einigen Experimenten kleine metallische Störkörper von ca. 2 cm Durchmesser bei einem Durchmesser des Tomographen von ca. 21 cm betrachtet. Dies entspricht in den typischen Dimensionen der Mammadiagnostik der Ortung von Mammakarzinomen von ca. 1 cm Durchmesser. In beiden der in der Arbeit betrachteten Methoden war es möglich, die metallischen Störkörper wiederzuerkennen. Besonders erfolgreich ist die Betrachtung von $\Delta\sqrt{\sigma}$ für Objekte, die sich nicht im Zentrum des Tomographen befinden. In diesem Fall ist eine genaue Ortsbestimmung der Objekte besser möglich, als mit dem herkömmlichen Verfahren der Bestimmung von σ selbst. Dieses Verfahren wiederum führt für Störkörper im Zentrum des Tomographen zu deutlich besseren Ergebnissen. Allerdings war zu jedem der gezeigten Rekonstruktionsergebnisse die Aufnahme einer Meßreihe ohne Störobjekt notwendig.

Abschließend wird im fünften Kapitel der Arbeit die bereits oben angesprochene Methode einer dicht mit Elektroden besetzten Platte, die zur Untersuchung auf die Brust aufgesetzt wird, nun noch einmal unter dem Aspekt der Auswertung äußerer Potentialverteilungen zu einer Reihe verschiedener äußerer Stromdichten untersucht. In dem hier speziell untersuchten Verfahren werden die an der Platte angebracht Elektroden als punktförmig angesehen und in zwei Gruppen getrennt. Zum einen existieren Elektroden, über die Strom in die Brust ein- oder abfließt. Zum anderen werden an den übrigen Elektroden zu verschiedenen Stromanordnung die zugehörigen Potentialmeßwerte bestimmt. Das vor dieser Meßebebene untersuchte Gebiet wird in dem in der Arbeit betrachteten Rekonstruktionsverfahren idealisiert als der gesamte Halbraum angenommen.

Die letzten Abschnitte des fünften Kapitels zeigen Rekonstruktionen von $\Delta\sqrt{\sigma}$, die sich für verschiedene gesuchte Objekte auf vom Computer generierte Meßdaten beziehen. Es zeigt sich hierbei, daß eine Lokalisierung der vorgegebenen Störobjekte recht zufriedenstellend möglich ist, während die Bestimmung einer scharfen Umrandung der Objekte äußerst problematisch erscheint. Weiterhin hat man generell in Verfahren, die auf Potentialmessungen in unmittelbarer Nähe stromführender

Elektroden beruhen, mit großen Komplikationen in der praktischen Umsetzung zu rechnen. Wie die Untersuchungen im dritten Kapitel zur Modellierung von Elektroden in der EIT in drei Dimensionen zeigen, hängt die zu einer festen Stromvorgabe gemessene Potentialverteilung auch empfindlich davon ab, wie der Strom genau über die am Gebiet anliegenden Elektroden in das Gebiet ein- oder abfließt.

Um möglichst genau den von einem Störkörper verursachten Effekt in der Änderung der Potentialverteilung zu bestimmen und damit in der Folge Rückschlüsse auf Ort und Gestalt dieses Körpers zu ziehen, sind höchstwahrscheinlich weitergehende Meßtechniken notwendig. Zwei mögliche Wege zu einer befriedigenden Problemlösung scheinen dabei besonders chancenreich zu sein.

Zum einen ist es denkbar, äußere Potentialverteilungen zu verschiedenen Frequenzen des Wechselstroms zu bestimmen und die Differenz der gemessenen Verteilungen zur Rekonstruktion der zugehörigen Änderung des komplexen Teils der Leitfähigkeitsverteilung zu benutzen. Diese Technik wurde bereits von verschiedenen Arbeitsgruppen angewendet [50].

Zum anderen kann man versuchen, eine äußerst bewährte Methode in der Computertomographie sich auch auf dem Gebiet der elektrischen Impedanztomographie zu Nutze zu machen: die Kontrastmittelmethode. Speziell in der Mammographie ist die sogenannte dynamische Magnetresonanztomographie eine der erfolgreichsten Untersuchungsmethoden überhaupt. Hierbei werden zwei Aufnahmen der Brust vor und nach Injektion eines Kontrastmittels miteinander verglichen. In Mammakarzinomen kommt es dabei in der enorm kurzen Zeit von meist weniger als einer Minute zu einer bedeutenden Anreicherung dieser Flüssigkeit.

Mit der elektrischen Impedanztomographie ist es durchaus denkbar, die Anreicherung eines Kontrastmittels in einem Mammakarzinom zu beobachten, sofern dieses Mittel eine bedeutende Änderung der elektrischen Leitfähigkeit des Tumors verursacht.

Anhang A

Inverse Probleme

A.1 Inverse und schlecht gestellte Probleme

Tomographien aller Art sind Verfahren, die mit Hilfe von Meßdaten, die außerhalb eines betrachteten Körpers aufgenommen werden, auf ein Bild im Inneren zurückschließen. Dies geschieht dadurch, daß die Bestimmung einer geeigneten physikalischen Größe das Körperinnere charakterisiert. So haben beispielsweise Knochen und Fettgewebe unterschiedliche Röntgenabsorptionskoeffizienten, was man sich in der Röntgentomographie zunutze macht.

Um auf diese Art Bilder erstellen zu können, ist ein Verständnis nötig, welche physikalischen Gesetze dafür sorgen, daß man bestimmte Meßdaten erhält. Mathematisch gesprochen, ist es notwendig, einen Operator zu finden, der Bilder und Daten miteinander verbindet. Das Problem, aus bekannten Bildern und Daten diesen Operator zu finden, wird auch *Identifizierungsproblem* genannt [5].

Hat man einen geeigneten Operator zur Verfügung, so ist für eine gegebene Bildfunktion eine Voraussage der experimentellen Daten möglich. Ein Problem dieser Art wird in diesem Zusammenhang auch als direktes Problem bezeichnet.

Das eigentliche Problem der Bildberechnung bei gegebenen experimentellen Daten und bekanntem mathematischen Operator nennt man das Rekonstruktionsproblem [5]. In vielen Büchern wird dieses auch als das *Inverse Problem* bezeichnet [45].

Bei der Untersuchung solcher inverser Probleme stößt man auf vielseitige Komplikationen. Dabei sind insbesondere folgende Punkte von Interesse:

- Ist der Modelloperator des Problems nicht surjektiv, d.h. liegen die gemessenen Daten nicht zwingend im Bild des Operators, so ist es möglich, daß zu vorgegebenen Daten gar keine Lösung existiert. Grund dafür sind Fehler, von denen man zwei Typen zu unterscheiden hat:
 1. Fehler, die durch das Modell und den zugehörigen Modelloperator entstehen, der i.a. niemals exakt ist,
 2. sowie experimentelle Fehler, die ohnehin unvermeidlich sind.

Obwohl in solch einem Fall keine Lösung im herkömmlichen Sinn existiert, ist es aber trotzdem möglich, ein Resultat zu erzielen, indem man die Moore-Penrose Lösung angibt, die gleich vorgestellt wird.

- Existiert zum Problem eine Lösung, so muß diese nicht eindeutig sein. Dieser Fall tritt dann ein, wenn der das Problem beschreibende Modelloperator nicht injektiv ist. Auch hier kann die Moore-Penrose Lösung helfen, um aus den i.a. unendlich vielen Möglichkeiten eine auszuwählen.
- Die exakte Lösung des Problems zu gegebenen fehlerbehafteten Daten kann trotz kleiner Fehler ein sehr schlechtes Ergebnis darstellen. Dies ist so zu verstehen:
Sorgt eine kleine Veränderung in den Daten für eine große Änderung im Ergebnis, so können die oben erwähnten Fehler für ein völlig unsinniges Resultat verantwortlich sein, indem sie eben jene kleine Veränderung bewirken. Abhilfe schafft in einem solchen Fall die Stabilisierung oder Regularisierung des Problems.

Diese Überlegungen führen zur mathematischen Definition des schlecht gestellten Problems nach Hadamard:

Definition A.1 *Seien X, Y topologische Räume und sei $A : X \rightarrow Y$ eine Abbildung. Das Problem (A, X, Y) heißt gut gestellt im Sinne von Hadamard, wenn*

1. *die Gleichung $Af = g$ für jedes $g \in Y$ eine Lösung hat,*
2. *diese Lösung eindeutig ist,*
3. *die Lösung stetig von den Daten abhängt.*

Das Problem heißt schlecht gestellt, falls eine der Bedingungen nicht erfüllt ist.

Es ist jedoch zu beachten, daß die Forderung der Stetigkeit der inversen Abbildung (3.) zwar eine notwendige, aber keine hinreichende Bedingung für die Stabilität der Lösung ist. Die Unterscheidung gut gestelltes oder schlecht gestelltes Problem nach Hadamard ist in der Praxis tatsächlich zu grob. Im Falle eines gut gestellten Problems läßt sich jedoch das Maß der Fehlerfortpflanzung von den Daten zur Lösung durch eine Konditionszahl bestimmen, die man durch einen Vergleich der relativen Fehler erhält [5]:

$$\frac{\|\delta f\|_X}{\|f\|_X} \leq \text{cond}(A) \frac{\|\delta g\|_Y}{\|g\|_Y}. \quad (\text{A.1})$$

Hierbei beschreibt δf den Fehler in der Lösung, während δg den Fehler in den Daten angibt. Eine kleine Konditionszahl garantiert also eine stabile Lösung. Man spricht in diesem Fall auch von einem gut konditionierten Problem. Diese sind in der physikalischen Praxis jedoch leider ein Ausnahmefall, denn schlecht konditionierte Probleme mit großer Konditionszahl sind sehr viel häufiger anzutreffen. Die Behandlung dieser Probleme ist demnach der Hauptbestandteil in der Theorie der Inversen Probleme.

A.2 Spektraldarstellung kompakter Operatoren

Mittels der Spektraldarstellung kompakter Operatoren läßt sich die Regularisierung eines schlecht gestellten Problems besonders anschaulich darstellen. Daher wird sie in den folgenden Abschnitten eine zentrale Rolle spielen und soll nun kurz vorgestellt werden:

Seien X, Y Hilberträume und sei

$$K(X, Y) = \{A : X \rightarrow Y, A \text{ linear, stetig und kompakt}\}$$

der Raum der linearen, stetigen und kompakten Operatoren von X nach Y . Sei weiterhin $T \in K(X, X)$ selbstadjungiert, also

$$T = T^*.$$

Bezeichnet

$$\sigma(T) = \{\lambda \in \mathbb{C}, \lambda I - T \text{ ist nicht invertierbar}\}$$

das Spektrum von T , so hat dieses folgende Eigenschaften:

1. $\sigma(T)$ ist eine diskrete Punktmenge mit einzig möglichem Häufungspunkt Null.
2. $\lambda \in \sigma(T)$ mit $\lambda \neq 0$ ist Eigenwert endlicher Vielfachheit, d.h der Kern $\mathcal{N}(T - \lambda I)$ der Abbildung $T - \lambda I$ ist endlichdimensional.¹
3. Die Elemente des Spektrums bilden eine Nullfolge.
4. Es existiert eine Orthonormalbasis e_n von X , die aus Eigenvektoren von T besteht.²

Es gilt also für jedes $x \in X$

$$Tx = \sum_n \lambda_n \langle x, \omega_n \rangle \omega_n, \quad (\text{A.2})$$

wobei mit λ_n die Eigenwerte und mit ω_n die zugehörigen orthonormierten Eigenvektoren von T gemeint sind.

Gilt zudem im speziellen $T = A^*A$, für einen Operator $A \in K(X, X)$, so sind außerdem alle Eigenwerte $\lambda_n \geq 0$. Die $\lambda_n \neq 0$ seien so numeriert, daß

$$\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots$$

Werden die zu den λ_n gehörigen Eigenvektoren mit v_n bezeichnet, so läßt sich definieren:

$$\sigma_n := +\sqrt{\lambda_n}, \quad (\text{A.3})$$

$$u_n := \sigma_n^{-1} A v_n. \quad (\text{A.4})$$

¹Die Eigenschaften (1.) und (2.) folgen aus der Kompaktheit des Operators mittels des Satzes von Riesz-Schauder

²Die Eigenschaften (3.) und (4.) folgen aus dem Satz von Hilbert-Schmidt bei Ausnutzung der Kompaktheit und Selbstadjungiertheit des Operators

Die so definierten σ_n nennt man die Singulärwerte des Operators A . Da, wie man zeigen kann,

$\{v_n\}$ ein vollständiges Orthonormalsystem für $\overline{\mathcal{R}(A)}$ und

$\{u_n\}$ ein vollständiges Orthonormalsystem für $\overline{\mathcal{R}(A^*)}$

bildet, gilt also für jedes $f \in X$

$$Af = \sum_n \sigma_n \langle f, v_n \rangle u_n. \quad (\text{A.5})$$

Hiermit ist eine Spektraldarstellung des Operators A gegeben.

Definition A.2 *Die Menge von Tripel*

$$\{v_n, u_n, \sigma_n\}_{n \geq 0}$$

wird *singuläres System für A genannt*.

A.3 Die Moore-Penrose Lösung

Wie oben angedeutet, dient dieser Abschnitt dazu, einen verallgemeinerten Lösungsbegriff vorzustellen. Eines der oben angesprochenen Probleme war, daß zu vorgegebenen Daten keine Lösung des inversen Problems zu existieren braucht. Ist dieser Fall eingetreten, so ist die Idee der Moore-Penrose Lösung ein Ergebnis anzugeben, das annähernd jene Daten erzeugt. Der dabei gemachte Fehler wird in der Folge Defekt genannt und sollte möglichst klein sein.

Seien X, Y Hilberträume. Sei wiederum $A \in K(X, Y)$.

Sucht man nun die Lösungen der Operatorgleichung

$$Af = g, \quad (\text{A.6})$$

so ist zu beachten, daß eine Lösung nur für solche g , die $g \in \overline{\mathcal{R}(A)}$ erfüllen, also aus dem Bild des Operators sind, existiert:

$$g = \sum_n g_n u_n.$$

Darüber hinaus muß g noch gewisse Glattheitsbedingungen erfüllen, nämlich

$$\sum_n |\sigma_n^{-2}| \langle g, u_n \rangle^2 < \infty.$$

Erfüllt g beide Forderungen, so sagt man auch, daß g die Picard-Bedingung erfüllt.

Für solche g , die nicht im Bild des Operators A liegen, kann man nun aber ein $f \in X$ suchen, das den Defekt

$$J(f) := \|Af - g\| \quad (\text{A.7})$$

minimiert. Bezeichnet

$$P_{\overline{\mathcal{R}(A)}} : Y \rightarrow Y \quad (\text{A.8})$$

den Projektionsoperator auf den Abschluß des Wertebereichs von A , so erhält man für die Minimierung des Defekts:

$$\min_{f \in X} J(f) = \|g - P_{\overline{\mathcal{R}(A)}} g\|. \quad (\text{A.9})$$

Somit erfüllt das gesuchte f die Gleichung

$$Af = P_{\overline{\mathcal{R}(A)}} g \quad (\text{A.10})$$

und wird damit Pseudolösung der Gleichung $Af = g$ genannt. Diese ist jedoch nur im Falle der Injektivität des Operators A eindeutig. Ist A hingegen nicht injektiv, so entscheidet man sich unter den unendlich vielen Möglichkeiten einer Pseudolösung für die mit kleinster Norm.

Definition A.3 *Das so gefundene f wird Moore-Penrose Lösung oder verallgemeinerte Lösung genannt. Man schreibt auch $f^\dagger$ und nennt die dazu gehörige Abbildung*

$$A^\dagger : \mathcal{R}(A) \oplus \mathcal{R}(A)^\perp \rightarrow X \quad (\text{A.11})$$

verallgemeinerte Inverse.

Diese hat folgende Eigenschaften [5]:

1. Der Definitionsbereich $\mathcal{D}(A^\dagger)$ liegt dicht in Y . Es gilt $\mathcal{D}(A^\dagger) = Y$, wenn $\mathcal{R}(A)$ abgeschlossen ist.
2. Ist $\mathcal{R}(A)$ abgeschlossen und es existiert A^{-1} , dann gilt $A^\dagger|_{\mathcal{R}(A)} = A^{-1}$.
3. $\mathcal{R}(A^\dagger) = \mathcal{N}(A)^\perp$.
4. $A^\dagger$ ist eine lineare Abbildung.
5. $A^\dagger$ ist beschränkt und nach Punkt 4 damit auch genau dann stetig, wenn $\mathcal{R}(A)$ abgeschlossen ist.
6. Für jedes $y \in \mathcal{D}(A^\dagger)$ ist der Vektor $A^\dagger y$ die einzige Pseudolösung, die in $\mathcal{N}(A)^\perp$ liegt.

Es läßt sich weiterhin zeigen, daß $f^\dagger = A^\dagger g$ die eindeutige Lösung der sogenannten Normalgleichung

$$A^* A f = A^* g \quad (\text{A.12})$$

ist.

Die verallgemeinerte Inverse läßt sich auch für nicht kompakte Operatoren bilden. Die Eigenschaft der Kompaktheit kann aber, falls vorhanden, insofern ausgenutzt werden, daß man, wie schon für den Operator selbst, eine Singulärwertdarstellung der verallgemeinerten Inversen finden kann. Man erhält:

$$A^\dagger g = \sum_{\sigma_n > 0} \sigma_n^{-1} \langle g, u_n \rangle v_n. \quad (\text{A.13})$$

In Gleichung (A.13) tretenden Terme der Form $\sigma_n^{-1} \langle g, u_n \rangle v_n$ auf. Somit führt eine kleine Änderung in g von der Form $g \rightarrow g + \epsilon u_n$ für große n wegen des Faktors σ_n^{-1} zu einer großen Änderung in $A^\dagger g$. Eine der Schlüsselaufgaben bei der Behandlung inverser Probleme ist gerade dies zu vermeiden, um die Ergebnisse stabil und damit aussagekräftiger zu machen. Dies gelingt mit Hilfe einer Regularisierung.

A.4 Regularisierung schlecht gestellter Probleme

Im folgenden seien die gemessenen fehlerhaften Daten immer mit g^ϵ bezeichnet. Dabei soll ϵ die Größe des Fehlers beschreiben. Mit g seien dementsprechend die exakten Daten gemeint, also solche, die man mit Hilfe des Operators A aus einer bekannten Verteilung f berechnet: $Af = g$. Wie bereits erwähnt, hat man bei inversen Problemen häufig damit zu kämpfen, daß sich Fehler in den Daten in keinem vernünftigen Maß zu Fehlern im Ergebnis fortpflanzen. Die Idee der Regularisierung ist es nun, den Modelloperator A abzuändern, so daß man ansich einen weiteren Fehler hinzufügt, da nunmehr der Operator A das zugrunde gelegte Modell falsch beschreibt. Existieren jedoch weitere Informationen über die gesuchte Lösung f , wie etwa Glattheitsbedingungen oder Forderungen an die Norm, so ist es möglich, den entstandenen Gesamtfehler kleiner zu machen.

Definition A.4 *Gegeben sei eine Familie von Operatoren*

$$\{T_\gamma\}_{\gamma>0}, \quad T_\gamma : Y \rightarrow X.$$

Existiert dann eine Abbildung $\gamma : \mathbb{R}^+ \times Y \rightarrow \mathbb{R}^+$, so daß für alle $g \in \mathcal{D}(A)$ und für alle $g^\epsilon \in Y$ mit $\|g - g^\epsilon\| \leq \epsilon$ gilt:

$$\lim_{\substack{\epsilon \rightarrow 0 \\ g^\epsilon \rightarrow g}} T_{\gamma(\epsilon, g^\epsilon)} = A^\dagger g,$$

so nennt man $\{T_\gamma\}$ eine Regularisierung von $A^\dagger$. Sind überdies alle T_γ lineare Operatoren, so ist $\{T_\gamma\}$ eine lineare Regularisierung. Hierbei bezeichnet man γ als Regularisierungsparameter. Dieser wird so gewählt, daß

$$\lim_{\substack{\epsilon \rightarrow 0 \\ g^\epsilon \rightarrow g}} \gamma(\epsilon, g^\epsilon) = 0$$

ist.

Während γ sinnvollerweise immer vom Fehler ϵ abhängen sollte, muß es jedoch nicht zwingend von den Daten g^ϵ abhängen. Spielen die Daten bei der Bestimmung des Regularisierungsparameters eine Rolle, so spricht man von einer a-posteriori Parameterwahl, andernfalls von einer a-priori Parameterwahl.

Die Regularisierung eines kompakten Operators läßt sich am besten mit Hilfe der Singulärwertdarstellung gewinnen. Dazu betrachtet man die Darstellung eines Operators A und der zugehörigen verallgemeinerten Inversen

$$Af = \sum_n \sigma_n \langle f, v_n \rangle u_n,$$

$$A^\dagger g = \sum_{\sigma_n > 0} \sigma_n^{-1} \langle g, u_n \rangle v_n.$$

Eine Regularisierung der verallgemeinerten Inversen gewinnt man nun dadurch, daß man eine Abbildung

$$F_\gamma : \mathbb{R}^+ \times Y \rightarrow \mathbb{R}^+$$

definiert, die Filter genannt wird. Weiterhin definiert man

$$T_\gamma g := \sum_{\sigma_n > 0} \sigma_n^{-1} F_\gamma(\sigma_n, g) < g, u_n > v_n. \quad (\text{A.14})$$

Im folgenden sei F_γ unabhängig von den Daten, was sicherstellt, daß alle T_γ lineare Operatoren sind.

Definition A.5 *Nach den oben genannten Voraussetzungen heißt F_γ regularisierendes Filter für den Operator A , wenn gilt*

$$\sup_n |F_\gamma(\sigma_n) \sigma_n^{-1}| = c(\gamma) < \infty, \quad (\text{A.15})$$

$$\lim_{\gamma \rightarrow 0} F_\gamma(\sigma_n) = 1 \text{ punktweise in } \sigma_n, \quad (\text{A.16})$$

$$|F_\gamma(\sigma_n)| \leq c \text{ für alle } \gamma \text{ und } \sigma_n. \quad (\text{A.17})$$

Erfüllt F_γ diese drei Bedingungen, so läßt sich zeigen, daß die durch Gleichung (A.14) definierte Operatorenfamilie $\{T_\gamma\}$ eine Regularisierung von $A^\dagger$ darstellt.

Ein Vergleich der aus den fehlerbehafteten Daten g^ϵ gewonnenen regularisierten Lösung $T_\gamma g^\epsilon$ mit der verallgemeinerten Inversen $A^\dagger g$ liefert

$$\begin{aligned} \|T_\gamma g^\epsilon - A^\dagger g\| &= \|T_\gamma g^\epsilon - T_\gamma g + T_\gamma g - A^\dagger g\| \\ &\leq \|T_\gamma g^\epsilon - T_\gamma g\| + \|T_\gamma g - A^\dagger g\|. \end{aligned}$$

Der so definierte Gesamtfehler der Regularisierung setzt sich aus einem Datenfehler $\|T_\gamma g^\epsilon - T_\gamma g\|$ und einem Regularisierungsfehler $\|(T_\gamma - A^\dagger)g\|$ zusammen. Die Kunst in der Wahl eines geeigneten Regularisierungsparameters besteht darin, einen vernünftigen Kompromiß zwischen Minimierung des Datenfehlers und Minimierung des Regularisierungsfehlers zu finden.

Spezielle Regularisierungsverfahren gewinnt man durch die Wahl eines geeigneten Filters. Hierfür existieren mehrere Möglichkeiten, von denen die abgeschnittene Singulärwertzerlegung und die Tikhonov-Phillips Regularisierung die beliebtesten sind.

A.5 Die abgeschnittene Singulärwertzerlegung

Definition A.6 *Das durch das Filter*

$$F_\gamma(\sigma) = \begin{cases} 1 & , \quad \sigma \geq \gamma \\ 0 & , \quad \sigma < \gamma \end{cases} \quad (\text{A.18})$$

erzeugte Verfahren heißt abgeschnittene Singulärwertzerlegung.

Um zu sehen, ob das so definierte Filter wirklich regularisierend ist, muß man die Bedingungen (A.15)-(A.17) überprüfen:

1. Wegen $F_\gamma(\sigma_n) = 0$ für $\sigma_n < \gamma$ gilt

$$\sup_n |F_\gamma(\sigma_n)\sigma_n|^{-1} \leq \gamma^{-1},$$

2. $F_\gamma(\sigma)$ konvergiert für $\gamma \rightarrow 0$ punktweise in σ gegen 1,
3. $|F_\gamma(\sigma)| \leq 1$.

Für den durch die abgeschnittene Singulärwertzerlegung erzeugten regularisierenden Operator gilt somit

$$\|T_\gamma\| = \gamma^{-1}.$$

A.6 Die Tikhonov-Phillips Regularisierung

Der Ausgangspunkt bei der Behandlung eines inversen Problems war die Untersuchung des Defekts

$$J(f) := \|Af - g\|.$$

Die Minimierung dieser Größe ist jedoch mit Problemen verbunden. Man sieht dies beispielsweise dem äquivalenten Problem der Lösung der Normalgleichung (A.12)

$$A^*Af = A^*g$$

an. Der Operator A^*A ist nämlich nicht notwendigerweise positiv definit, was zur Folge hat, daß die Stetigkeit des inversen Operators $(A^*A)^{-1}$ nicht gewährleistet ist.

Eine Möglichkeit zur Regularisierung besteht darin, zum Defekt $J(f)$ einen Strafterm der Form $\gamma\|f\|^2$ zu addieren und die Minimierung des Funktional

$$J_\gamma(f) := \|Af - g\|^2 + \gamma\|f\|^2$$

zu untersuchen. Der zusätzliche Term, dessen Gewicht durch den Regularisierungsparameter γ bestimmt ist, sorgt dafür, daß unter allen Funktionen, die mit den Daten g im Rahmen eines Meßfehlers verträglich sind, solche mit kleiner Norm bevorzugt werden.

Die Minimierung des Funktional $J_\lambda(f)$ führt statt der Normalgleichung (A.12) nun zur Gleichung

$$(A^*A + \gamma I)f = A^*g$$

Eine so gewählte Regularisierung läßt sich mittels der Singulärwertdarstellung folgendermaßen darstellen:

$$T_\gamma g = \sum_{\sigma_n > 0} \sigma_n^{-1} \frac{\sigma_n^2}{\sigma_n^2 + \gamma} < g, u_n > v_n. \quad (\text{A.19})$$

Das so definierte Filter

$$F_\gamma(\sigma_n) = \frac{\sigma_n^2}{\sigma_n^2 + \gamma}$$

ist tatsächlich ein regularisierendes Filter, da die Gleichungen (A.15), (A.16), (A.17) erfüllt sind:

1.

$$\sup_{\sigma_n > 0} |F_\gamma(\sigma_n)\sigma_n|^{-1} = \sup_n \frac{\sigma_n}{\sigma_n^2 + \gamma} \leq \gamma^{-1},$$

2. für festes n gilt punktweise

$$\lim_{\gamma \rightarrow 0} \frac{\sigma_n^2}{\sigma_n^2 + \gamma} = 1,$$

3.

$$\sup_{\sigma_n > 0} |F_\gamma(\sigma_n)| = \sup_{\sigma_n > 0} \frac{\sigma_n^2}{\sigma_n^2 + \gamma} < 1.$$

A.7 Stabilisierung durch Änderung des Problems

Eine weitere Möglichkeit zur Behandlung inverser Probleme besteht in einer Abänderung der Fragestellung. Dies geschieht beispielsweise dadurch, daß man sich nicht mehr für die eigentliche Lösungsfunktion f , sondern für lineare Funktionale von f interessiert. Für eine gegebene Operatorgleichung $Af = g$ zwischen zwei Hilberträumen X und Y entspricht dies der Wahl einer gröberen Topologie in X , was zu einer Stabilisierung des Problems führt. Gesucht sei also in der Folge die Funktion

$$f_\gamma(x) = \langle f(\cdot), e_\gamma(x, \cdot) \rangle_X.$$

Die Funktionen e_γ sind dabei für die Stärke und Qualität der Stabilisierung verantwortlich. Ein einfaches Beispiel für die Wahl von e_γ für $X = \mathcal{L}^2(\Omega)$, $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ lautet

$$e_\gamma(x, y) = \frac{3}{4\pi\gamma^3} \chi_\gamma(\|x - y\|), \quad (\text{A.20})$$

wobei χ_γ die charakteristische Funktion der Kugel mit Radius γ und Zentrum 0 ist, die für Argumente kleiner γ den Wert 1 annimmt und ansonsten Null ist. Mit der Wahl einer solchen Funktion rekonstruiert man also nicht mehr den eigentlichen Funktionswert $f(x)$, sondern den um eine Umgebung von x gemittelten Wert und eliminiert dadurch die hohen Frequenzkomponenten, die üblicherweise für die Schlechtgestellttheit des Problems verantwortlich sind.

Hat man sich zur Stabilisierung des Problems eine geeignete Funktion e_γ ausgewählt, so ist es als nächstes notwendig, ein v_γ zu finden, so daß

$$A^*v_\gamma = e_\gamma \quad (\text{A.21})$$

gilt. In obiger Gleichung kann im allgemeinen keine Gleichheit gefordert werden, da e_γ nicht im Bild des Operators A^* liegen muß. Zur Bestimmung von v_γ minimiert man daher den Defekt $\|A^*v_\gamma - e_\gamma\|$ und erhält damit die Normalgleichung

$$AA^*v_\gamma = Ae_\gamma.$$

Die zur Auffindung der Funktion v_γ benötigte Regularisierung kann dabei sehr schwach sein, da die feine Regularisierung des Problems erst durch den Parameter γ bestimmt wird.

Damit gilt für die Funktionale $\langle f, e_\gamma \rangle$:

$$\langle f, e_\gamma \rangle \approx \langle f, A^* v_\gamma \rangle = \langle Af, v_\gamma \rangle = \langle g, v_\gamma \rangle =: S_\gamma g. \quad (\text{A.22})$$

Die Funktion $S_\gamma g := \langle g, v_\gamma \rangle$ wird approximative Inverse des Operators A genannt [46].

Besonders häufig tritt in der Praxis die Situation $X = \mathcal{L}^2(\Omega)$, $Y = \mathbb{R}^N$ auf. Das inverse Problem besteht dann darin, aus N Meßwerten eine Funktion in $\mathcal{L}^2(\Omega)$ zu rekonstruieren. Sei

$$A : \mathcal{L}^2(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}^N, \quad (Af)_n = \langle f, k_n \rangle = \int_{\Omega} k_n(y) f(y) dy \quad n = 1, \dots, N. \quad (\text{A.23})$$

Es läßt sich nun auch leicht der adjungierte Operator angeben:

$$A^* : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathcal{L}^2(\Omega), \quad A^* g(x) = \sum_{n=1}^N g_n k_n(x). \quad (\text{A.24})$$

Damit ist unmittelbar eine Matrixdarstellung des Operators AA^* gegeben. Man erhält die sogenannte Gramsche Matrix der Basis $\{k_n : 1 \leq n \leq N\}$

$$AA^* : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N, \quad (AA^*)_{mn} = \langle k_m, k_n \rangle = \int_{\Omega} k_m(y) k_n(y) dy. \quad (\text{A.25})$$

Zusammengefaßt bekommt man die approximative Inverse

$$\langle f(\cdot), e_\gamma(\cdot, x) \rangle = \langle g, v_\gamma \rangle = \sum_{i,j} g_i ((AA^*)^{-1})_{ij} \int_{\Omega} k_j(y) e_\gamma(x, y) dy. \quad (\text{A.26})$$

Man erhält damit eine Lösung des Problems, ohne daß eine Diskretisierung der gesuchten Funktion notwendig war. Die Funktionen

$$v_{\gamma,i} := \sum_j ((AA^*)^{-1})_{ij} \int_{\Omega} k_j(y) e_\gamma(x, y) dy,$$

die den Lösungsraum aufspannen, können unabhängig von den Daten ermittelt werden, so daß bei Kenntnis dieser Funktionen eine Lösungsfunktion schnell gefunden ist. Allerdings kann insbesondere der Zeitaufwand zur Berechnung der Integrale $(AA^*)_{mn} = \langle k_m, k_n \rangle$ beträchtlich sein. Dies hängt von der jeweiligen Problemstellung ab.

Wie bereits angedeutet, ist zur Bestimmung von $v_{\gamma,i}$ eine Regularisierung, wie etwa eine Tikhonov-Regularisierung aus dem vorigen Abschnitt zweckmäßig. Bei Vernachlässigung dieser Problematik kann man sich die Wirkung der approximativen Inversen sehr leicht veranschaulichen. Es ist

$$S_\gamma g = \langle g, v_\gamma \rangle = \langle g, (AA^*)^{-1} A e_\gamma \rangle = \langle A^* (AA^*)^{-1} g, e_\gamma \rangle.$$

Der Ausdruck $A^* (AA^*)^{-1} g$ stellt aber gerade die Lösung kleinster Norm f_M zum Problem $Af = g$ dar. Das erkennt man, wenn man beachtet, daß die Lösung kleinster Norm im Bild des adjungierten Operators A^* liegt und damit

$$f_M = A^* u, \quad AA^* u = g$$

gilt. Somit folgt, wie behauptet

$$f_M = A^*(AA^*)^{-1}g,$$

womit man für die approximative Inverse auch

$$S_\gamma g = \langle f_M, e_\gamma \rangle$$

schreiben kann. In dieser Weise glättet die approximative Inverse also die Lösung kleinster Norm.

Die Vorteile der approximativen Inversen gegenüber herkömmlichen Verfahren sind:

1. Keine Diskretisierung von f wird benötigt.
2. Die Funktion e_γ kann bezüglich verschiedener Punkte $x \in X$ variieren.
3. Eine Änderung von γ beeinflusst nicht den Operator in der zu lösenden Gleichung (A.21).

Anhang B

Variationsformulierung des EIT-Problems

B.1 Variationsformulierung

In diesem Abschnitt erfolgt eine etwas ausführlichere Zusammenfassung der entsprechenden Kapitel der Vorlesung “Mathematische Grundlagen der elektrischen Impedanztomographie” von Prof. Dr. M. Hanke-Bourgeois [31].

Es bezeichne $H_{\diamond}^1(\Omega)$ die Vervollständigung des Raumes $\{u \in C^1(\overline{\Omega}) \mid \int_{\partial\Omega} u \, ds = 0\}$ bezüglich der Norm

$$\|u\|_{H_{\diamond}^1(\Omega)} := \left(\int_{\Omega} |\nabla u|^2 \, dx \right)^{1/2}. \quad (\text{B.1})$$

Man kann zeigen, daß für eine Funktion $f \in \mathcal{L}_{\diamond}^2(\partial\Omega)$ das lineare Funktional

$$b(u) := \int_{\partial\Omega} f u \, ds \quad (\text{B.2})$$

stetig über $H_{\diamond}^1(\Omega)$ ist.

Weiterhin sei die Bilinearform

$$a(u, v) := \int_{\Omega} \sigma \nabla u \cdot \nabla v \, dx \quad (\text{B.3})$$

gegeben. Existiert eine Beschränkung der Leitfähigkeitsverteilung σ durch eine obere und untere Schranke gemäß Gleichung (2.21), so kann gezeigt werden, daß die Funktion Φ , mit

$$\Phi[u] := \frac{1}{2} a(u, u) - b(u), \quad (\text{B.4})$$

ebenfalls stetig über $H_{\diamond}^1(\Omega)$ ist. Dies wird durch die obere Schranke $\overline{\sigma}$ garantiert, die für die Stetigkeit der Bilinearform sorgt:

$$|a(u, v)| \leq \overline{\sigma} \|u\|_{H_{\diamond}^1(\Omega)} \|v\|_{H_{\diamond}^1(\Omega)} \quad \forall u, v \in H_{\diamond}^1(\Omega). \quad (\text{B.5})$$

Die untere Schranke stellt sicher, daß die Bilinearform a zusätzlich koerzitiv ist:

$$a(u, u) \geq \underline{\sigma} \|u\|_{H_{\diamond}^1(\Omega)}^2 \quad \forall u \in H_{\diamond}^1(\Omega). \quad (\text{B.6})$$

Damit ist wegen

$$\begin{aligned}\Phi[u] &\geq \frac{1}{2}\underline{a}\|u\|^2 - \|b\|_{(H_\diamond^1(\Omega))'}\|u\| - \frac{1}{2\underline{a}}\|b\|_{(H_\diamond^1(\Omega))'}^2 + \frac{1}{2\underline{a}}\|b\|_{(H_\diamond^1(\Omega))'}^2 \\ &= \left(\sqrt{\frac{\underline{a}}{2}}\|u\| - \sqrt{\frac{1}{2\underline{a}}}\right)^2 - \frac{1}{2\underline{a}}\|b\|_{(H_\diamond^1(\Omega))'}^2 \geq -\frac{1}{2\underline{a}}\|b\|_{(H_\diamond^1(\Omega))'}^2\end{aligned}$$

Φ nach unten beschränkt.

Dies ist wichtig, damit das Minimierungsproblem

$$\Phi[u] \rightarrow \min \quad (\text{B.7})$$

eine Lösung $u_m \in H_\diamond^1(\Omega)$ besitzt, für die überdies gezeigt werden kann, daß sie eindeutig ist.

Da für ein $t \in \mathbb{R}$ für alle $v \in H_\diamond^1(\Omega)$

$$\begin{aligned}\Phi[u_m] &\leq \Phi[u_m + tv] = \frac{1}{2}a(u, u) + ta(u, v) + \frac{1}{2}t^2a(v, v) - b(u) - tb(v) \\ &= \Phi[u] + t(a(u, v) - b(v)) + \frac{1}{2}t^2a(v, v)\end{aligned}$$

gilt, läßt sich die Lösung durch die Variationsgleichung (2.36)

$$a(u_m, v) = b(v) \quad \forall v \in H_\diamond^1(\Omega)$$

charakterisieren.

Für die so gefundene Potentialverteilung gilt

$$\|u_m\|_{H_\diamond^1(\Omega)} \leq \frac{2}{\underline{\sigma}}\|f\|_{\mathcal{L}^2(\partial\Omega)}, \quad (\text{B.8})$$

was besagt, daß die zu vorgegebenen Randströmen resultierenden Potentiale stetig von diesen abhängen.

Für eine hinreichende Glattheit des Gebietes Ω sowie der Leitfähigkeitsverteilung σ erhält man aus Gleichung (2.36) durch partielle Integration

$$\int_{\Omega} v \nabla(\sigma \nabla u) dx = \int_{\partial\Omega} \sigma v \frac{\partial u}{\partial n} ds - a(u, v) \quad (\text{B.9})$$

$$= \int_{\partial\Omega} \sigma v \frac{\partial u}{\partial n} ds - b(v). \quad (\text{B.10})$$

Für sämtliche Testfunktionen v die auf $\partial\Omega$ verschwinden, liefern die Oberflächenintegrale keinen Beitrag, so daß notwendig

$$\nabla(\sigma \nabla u) = 0,$$

also gerade Gleichung (2.23) folgt. Setzt man dies wieder in Gleichung (B.10) ein, so findet man für alle $v \in H_\diamond^1(\Omega)$

$$\begin{aligned}\int_{\partial\Omega} \sigma v \frac{\partial u}{\partial n} ds - b(v) &= \\ \int_{\partial\Omega} \sigma v \frac{\partial u}{\partial n} ds - \int_{\partial\Omega} v f ds &= 0.\end{aligned}$$

Somit gilt

$$f = \sigma \frac{\partial u}{\partial n}. \quad (\text{B.11})$$

Wie gewünscht führt damit die Lösung des Minimierungsproblems (B.7) zur Lösung der Differentialgleichung $\nabla(\sigma \nabla u) = 0$ bezüglich der Neumannrandbedingung $f = \sigma \partial u / \partial n$.

Ebenso gilt die Umkehrung: Ist u Lösung der Differentialgleichung (2.23) unter einer fest vorgegebenen Neumannrandbedingung f , so folgt für dieses u die Gültigkeit der Gleichung (2.36).

B.2 Die Fréchet-Ableitung

Gegeben seien zwei Leitfähigkeitsverteilungen σ_1, σ_2 , die beide nach oben und unten beschränkt seien:

$$0 < \underline{\sigma} \leq \sigma_1, \sigma_2 \leq \bar{\sigma} < \infty.$$

Bei gegebener Stromvorgabe $f \in \mathcal{L}^2_\diamond(\partial\Omega)$ führt die Lösung des Vorwärtsproblems nach Kapitel 3 zu Potentialfunktionen $u_1, u_2 \in H^1_\diamond(\Omega)$. Nach Gleichung (2.36) sind diese durch das Variationsproblem

$$\begin{aligned} a_i(u, v) &= b(v) \quad \forall v \in H^1_\diamond(\Omega) \\ a_i(u, v) &= \int_\Omega \sigma_i \nabla u \cdot \nabla v \, dx \\ b(v) &= \int_{\partial\Omega} f v \, ds \end{aligned}$$

charakterisiert. Da u_1, u_2 Lösungen des Variationsproblems zu gleicher Neumannrandbedingung f sind, folgt

$$a_1(u_1, v) = a_2(u_2, v) \quad \forall v \in H^1_\diamond(\Omega). \quad (\text{B.12})$$

Für die folgenden Betrachtungen ist es nützlich, die Bilinearform

$$A_{1,2}(u, v) := a_2(u, v) - a_1(u, v) = \int_\Omega (\sigma_2 - \sigma_1) \nabla u \cdot \nabla v \, dx \quad (\text{B.13})$$

einzuführen.

Diese läßt sich nach oben abschätzen:

$$|A_{1,2}(u, v)| \leq \|\sigma_2 - \sigma_1\|_\infty \|u\|_{H^1_\diamond(\Omega)} \|v\|_{H^1_\diamond(\Omega)}. \quad (\text{B.14})$$

Aus der Definition der Bilinearform $A_{1,2}$ aus Gleichung (B.13) und Gleichung (B.12) folgt zunächst

$$\begin{aligned} A_{1,2}(u_2, v) + a_1(u_2 - u_1, v) &= \\ a_2(u_2, v) - a_1(u_2, v) + a_1(u_2, v) - a_1(u_1, v) &= \\ a_2(u_2, v) - a_1(u_2, v) + a_1(u_2, v) - a_2(u_2, v) &= 0. \end{aligned} \quad (\text{B.15})$$

Speziell für $v = u_1 - u_2$ ergibt sich damit

$$a_1(u_1 - u_2, u_1 - u_2) = A_{1,2}(u_2, u_1 - u_2). \quad (\text{B.16})$$

Beachtet man Gleichung (B.8), nach der

$$\|u\|_{H_\diamond^1(\Omega)} \leq \frac{1}{\underline{\sigma}} \|f\|_{\mathcal{L}_\diamond^2(\Omega)},$$

so erhält man als erstes Resultat Gleichung (4.6)

$$\|u_1 - u_2\|_{H_\diamond^1(\Omega)} \leq \frac{2}{\underline{\sigma}^2} \|f\|_{\mathcal{L}_\diamond^2(\partial\Omega)} \|\sigma_2 - \sigma_1\|_\infty.$$

Weiter sei $F_f : \sigma \mapsto u$

$$F_f : \mathcal{L}_+^\infty(\Omega) \rightarrow H_\diamond^1(\Omega), \quad F_f : \sigma \mapsto u$$

die Zuordnungsfunktion, die bei fester Neumannrandbedingung f einer Leitfähigkeitsverteilung σ die zugehörige Lösung des Potentialproblems u zuweist. Bezeichnet u die Lösungsfunktion zu einer Leitfähigkeitsverteilung σ und $u + u'$ die Lösungsfunktion zur Verteilung $\sigma + h$, so ist das Ziel, eine Beziehung zwischen u' und h für kleine Änderungen h abzuleiten.

Führt man in Gleichung (B.15) die Ersetzungen $u_1 \rightarrow u$ und $u_2 \rightarrow u + u'$ durch, so folgt mit den Definitionen der beteiligten Bilinearformen

$$\int_\Omega \sigma \nabla u' \cdot \nabla v \, dx = - \int_\Omega h \nabla(u + u') \cdot \nabla v \, dx, \quad \forall v \in H_\diamond^1(\Omega). \quad (\text{B.17})$$

Wegen der Stetigkeitsaussage aus Gleichung (4.6) läßt sich auf der rechten Seite der Gleichung $u + u'$ für kleine h gegen u abschätzen. Damit kann man zeigen, daß der Operator

$$\begin{aligned} F'_f(\sigma) : \mathcal{L}^\infty(\Omega) &\rightarrow H_\diamond^1(\Omega) \quad , \quad F'_f(\sigma)h = u' \\ \int_\Omega \sigma \nabla u' \cdot \nabla v \, dx &= - \int_\Omega h \nabla u \cdot \nabla v \, dx \quad \forall v \in H_\diamond^1(\Omega) \end{aligned}$$

die Fréchet-Ableitung von F_f ist. Es gilt

$$\|F_f(\sigma + h) - F_f(\sigma) - F'_f(\sigma)h\|_{H_\diamond^1(\Omega)} \leq \frac{2}{\underline{\sigma}^3} \|f\|_{\mathcal{L}^2(\partial\Omega)} \|h\|_\infty^2. \quad (\text{B.18})$$

Unter Verwendung des Spurooperators γ , der einer Funktion $u \in H_\diamond^1(\Omega)$ die Randwertverteilung zuordnet, kann man den Operator

$$(\Lambda'(\sigma)h)f = \gamma F'_f(\sigma)h, \quad h \in \mathcal{L}^\infty(\Omega), \quad f \in \mathcal{L}_\diamond^2(\partial\Omega)$$

definieren.

Speziell für den zweidimensionalen Fall des Einheitskreises läßt sich weiter zeigen, daß $\Lambda'(\sigma)$ bezüglich der Hilbert-Schmidt Norm $||| \cdot |||$ die Fréchet-Ableitung der Neumann-nach-Dirichlet Abbildung darstellt.

In diesem Fall gilt

$$|||\Lambda(\sigma + h) - \Lambda(\sigma) - \Lambda'(\sigma)h||| \leq \frac{32}{\underline{\sigma}^6} \|h\|_\infty^4 \sum_{n=1}^{\infty} n^{-2}. \quad (\text{B.19})$$

Weiterhin findet man, daß für zwei Funktionen $f, g \in \mathcal{L}_\diamond^2(\partial\Omega)$ und zugehörige Potentiale u, v bezüglich vorgegebener Leitfähigkeitsverteilung σ nach Gleichung (B.17) für kleine h

$$\begin{aligned} \langle (\Lambda'(\sigma)h)f, g \rangle &= \int_{\partial\Omega} u' g \, ds \\ &= \int_{\Omega} \sigma \nabla u' \cdot \nabla v \, dx \\ &= - \int_{\Omega} h \nabla u \cdot \nabla v \, dx \end{aligned}$$

gilt.

Literaturverzeichnis

- [1] Alessandrini, G. *Stable determination of conductivity by boundary measurements*, Appl. Analysis 27 (1988), 153-169
- [2] Barber, D.C. und Brown, B.H. *Applied potential tomography*, J. Phys.E: Sci. Instrum., Vol. 17, (1984)
- [3] Barber, D.C. und Seager, A.D. *Fast reconstruction of resistance images*, Clin.Phys.Physiol.Meas., Vol.8, Suppl.A, 47-54 (1987)
- [4] Bartsch, M. et al. *Solution of Maxwell's equations*, Computer Physics Communications (1992) 22-39
- [5] Baumeister, J. *Stable solution of inverse problems*, Friedr. Vieweg & Sohn, Braunschweig/Wiesbaden
- [6] Berryman, J.G. und Kohn, R.V. *Variational constraints for electrical impedance tomography*, Physical Review Letters, Volume 65, Number 3 (1990)
- [7] Bertero, M. *Regularisation methods for linear inverse problems*, in Inverse problems, Talenti, G. (ed.), Lecture Notes in Math., Vol. 1225, Springer (1986)
- [8] Borcea, L., Berryman, J.G. und Papanicolaou, G.C. *High contrast impedance tomography*, Inverse Problems 12 (1996), 835-856
- [9] Borcea, L., Berryman, J.G. und Papanicolaou, G.C. *Matching pursuit for imaging high contrast conductivity*, Inverse Problems 15 (1999), 81-849
- [10] Breckon, W. *Image reconstruction in electrical impedance tomography*, Dissertation, School of computing and mathematical sciences, Oxford Polytechnique (1990)
- [11] Brühl, M., Hanke, M. und Wanzki, H. *Ein Rekonstruktionsverfahren für die elektrische Impedanztomographie*, Preprint des Instituts für praktische Mathematik, Universität Karlsruhe
- [12] Brühl, M. *Gebietserkennung in der elektrischen Impedanztomographie*, Dissertation Fakultät für Mathematik der Universität Karlsruhe
- [13] Buchert, R. und Schilcher, K. *A model study of electrical impedance tomography using synthetic finite precision data*, MZ-TH/94-05 - Preprint (1994)

- [14] Chen, Z.Q. und Paoloni, F.J. *An error study on some linear reconstruction algorithms for electrical impedance tomography*, Clin.Phys.Physiol.Meas., Vol.13 (1992), No.4, 389-409
- [15] Cheney, M. Isaacson, D. und Newell, J. *Electrical impedance Tomography*, Preprint des Rensselaer Polytechnic Institute, Troy N.Y
- [16] Cheney, M. und Isaacson, D. *An overview of inversion algorithms for impedance imaging*, Contemporary Mathematics, Vol. 122 (1991), 29-39
- [17] Cheney, M., Isaacson, D., Newell, J., Goble, J., Simske, S. *NOSER: An algorithm for solving the inverse conductivity problem*, Int. J. Imag. Syst. Techn. 2, 66-75, (1990)
- [18] Ciulli, S., Ispas, S. und Pidcock, M. *Anomalous thresholds and edge singularities in electrical impedance tomography*, J. of Math. Physics, 37 (1996)
- [19] Ciulli, S., Pidcock, M.K., Spearman, T.D., und Stroian, A. *A method for image reconstruction using an integral equation of the Lippmann-Schwinger type with particular application to Electrical Impedance Tomography*, Preprint
- [20] Curtis, E. und Morrow, J. *Determining the resistors in a network*, SIAM J.Appl.Math. No.3 (1990), 918-930
- [21] Curtis, E. und Morrow, J. *The Dirichlet-to-Neumann map for a resistor network*, SIAM J.Appl.Math No.4 (1991), 1011-1029
- [22] Curtis, E. und Morrow, J. *Circular planar graphs and resistor networks*, Preprint
- [23] Dijkstra, A.M., Brown, B.H., Leathard, A.D., Harris, N.D., Barber, D.C. und Edbrooke, D.L. *Clinical applications of electrical impedance tomography*, Journal of medical Engineering and Technology, Vol.17 No.3 (1993), 89-98
- [24] Dobson, D.C. *Convergence of a reconstruction method for the inverse conductivity problem*, SIAM J.Appl.Math., Vol.52 No.2 (1992), 442-485
- [25] Dobson, D.C. und Santosa, F. *recovery of blocky images from noisy and blurred data*, Preprint
- [26] Dobson, D.C. und Santosa, F. *An image-enhancement technic for electrical impedance tomography*, Inverse Problems 10 (1994), 317-334
- [27] Fließbach, T. *Elektrodynamik*, Spektrum Akademischer Verlag (1997)
- [28] Gisser, D.G., Isaacson, D. und Newell, J.C. *Current topics in impedance imaging*, Clin.Physiol. Meas., 1987, Vol.8, Suppl. A, 39-46
- [29] Gisser, D.G., Isaacson, D. und Newell, J.C. *Electric current computed tomography and eigenvalues*, SIAM J.Appl.Math., Vol.50 No.6, 1623-1634

- [30] Gradshteyn, I.S., Ryzhik, M. *Table of integrals, series and products*, Academic Press (1980)
- [31] Hanke, M. *Mathematische Grundlagen der elektrischen Impedanztomographie*, Skript zur Vorlesung
- [32] Holder, D.S. *Electrical impedance tomography*, University College London Press (1993)
- [33] Isakov, V. and Powell, J. *On the inverse conductivity problem with one measurement*, Inverse Problems Vol.6, 311-318
- [34] Jackson, J.D. *Klassische Elektrodynamik*, deGruyter, Berlin (1983)
- [35] Kemelman, Arthur *Abnormal electrical properties betray breast tumors to scanner*, Electronics International (1980)
- [36] Kohn, R. und McKenney, A. *Numerical implementation of a variational method for electrical impedance tomography*, Inverse Problems (1990), 389-414
- [37] Kohn, R. und Vogelius, M. *Determining Conductivity by Boundary Measurements*, Comm.Pure.Appl.Math. (1984), 289-298
- [38] Kohn, R. und Vogelius, M. *Determining Conductivity by Boundary Measurements II. Interior Results*, Comm.Pure.Appl.Math. (1985), 643-667
- [39] Kozuoglu, M., Leblebicioglu, K. und Ider, Y.Z. *A fast image reconstruction algorithm for electrical impedance tomography*, Physiol.Meas. Suppl.A (1994), 115-124
- [40] Lee, M.J. und Uhlmann, G. *Determining anisotropic real-analytic conductivities by boundary measurements*, Pure and Appl. Math. Vol.17 (1989) 1097-1012
- [41] Li J. *A method of reducing the error caused by boundary shape and electrode position in electrical impedance tomography*, Physiol. Meas. 15 (1994) 169-174
- [42] Lionheart, W.R.B. *Boundary shape and electrical impedance tomography*, Preprint der Oxford Brookes University
- [43] Lionheart, W.R.B., Lidgley, F.J., McLeod, C.N., Paulson, K.S. Pidcock, M.K. und Shi, Y. *Electrical impedance tomography for high speed chest imaging*, Preprint der EIT Research Group, Oxford Brookes University
- [44] Lionheart, W.R.B. *Conformal uniqueness results in anisotropic electrical impedance imaging*, Preprint der Oxford Brookes University
- [45] Louis, A.K. *Inverse und schlecht gestellte Probleme*, Teubner, Stuttgart (1989)
- [46] Louis, A.K. und Maass, P. *A mollifier method for linear operator equations of the first kind*, Inverse Problems 6 (1990), 427-440
- [47] Louis, A.K. *Approximative inverse for linear and some nonlinear problems*, Inverse Problems, Vol.11, No.6, 1211-1224

- [48] Luenberger, D.G. *Optimization by vector space methods*, Wiley & Sons (1969)
- [49] Molyneux, J.E. und Witten, A. *Impedance tomography: imaging algorithms for geophysical applications*, Inverse Problems 10 (1994) 655-667
- [50] Osypka, M. Gersing, E. Meyer-Warden, K. *Komplexe elektrische Impedanztomographie im Frequenzbereich von 10 Hz bis 50 kHz*, Z. Med. Phys.3 (1993) 124-132
- [51] Paulson, K., Breckon, W. and Pidcock, M. *Electrode modelling in electrical impedance tomography*, SIAM J.Appl.Math., Vol.52, No.4, 1012-1022
- [52] Pidcock, M.K., Ciulli, S. und Ispas, S. *Singularities of mixed boundary value problems in electrical impedance tomography*, Preprint des Laboratoire de physique mathématique Montpellier
- [53] Pidcock, M.K., Kuzuoglu, M. und Leblebicioglu, K. *Analytic and semi-analytic solutions in electrical impedance tomography: I. Two dimensional problems*, Physiol. Meas. 16 (1995) 77-90
- [54] Pidcock, M.K., Kuzuoglu, M. und Leblebicioglu, K. *Analytic and semi-analytic solutions in electrical impedance tomography: I. Three dimensional problems*, Physiol. Meas. 16 (1995) 91-110
- [55] Prudnikov, Brychkov, Marichev *Integrals and series Volume 1: Elementary functions*
- [56] Prudnikov, Brychkov, Marichev *Integrals and series Volume 2: Special functions*
- [57] Thurn, P. und Bücheler, E. *Einführung in die radiologische Diagnostik*, Georg Thieme Verlag Stuttgart (1992)
- [58] Savelsberg, I. *Elektrische Impedanztomographie mit realistischen Daten*, Dissertation, Fachbereich Physik der Johannes Gutenberg-Universität Mainz (1998)
- [59] www.med.siemens.com *TransScan 2000 for breast cancer detecting*,
- [60] Smallwood, R. *Electrical imaging tomography: from data to image*, Summer University of Southern Stockholm: Noninvasive diagnostics with electrical impedance (1997)
- [61] Sommersalo, E., Cheyney, M., Isaacson, D. und Isaacson, E. *Layer stripping: a direct numerical method for impedance imaging*, Inverse problems 7 (1991), 899-926
- [62] Sommersalo, E., Cheyney, M. and Isaacson, D. *Existence and uniqueness for electrode models for electrical current computed tomography*, SIAM J.Appl.Math., Vol.52, No.4, 1023-1040
- [63] Sylvester, J., Uhlmann, G. *A global uniqueness theorem for an inverse boundary value problem*, Annals of mathematics 125 (1987) 153-169

-
- [64] Wang, W., Brown, B.H., Leathard, A.D. und Lu, L. *Noise equalization within EIT images*,
 - [65] Webster J.G. *Electrical impedance tomography*, Adam Hilger, Bristol und New York (1990)
 - [66] Werner, D. *Funktionalanalysis*, Springer-Verlag Berlin Heidelberg (1995)