

Ultrapräzise Messung des
elektronischen g-Faktors in
wasserstoffähnlichem Sauerstoff.

Dissertation zur Erlangung des Grades
Doktor der Naturwissenschaften
am Fachbereich Physik der
Johannes Gutenberg-Universität in Mainz.

José Luis Verdú Galiana
geb. in Xixona - Alicante
Mainz, den 21. Dezember 2004.

Inhaltsverzeichnis

1	<i>Einführung</i>	7
1.1	Die Breit-Formel und Kernkorrekturen	8
1.2	QED Beiträge	8
1.2.1	Theoretischer g-Faktor von $^{16}\text{O}^{7+}$	10
1.3	Der experimentelle g-Faktor: Definition	10
2	<i>Speicherung von geladenen Teilchen</i>	13
2.1	Allgemeine Vorüberlegungen	13
2.2	Die zylindrische Falle	17
2.2.1	Das elektrische Potential der fünfpoligen Falle	20
2.3	Ideale Bewegung des Ions in der Penningfalle	24
2.3.1	Das Invarianztheorem	26
2.4	Berechnung der C_j – Koeffizienten	28
2.4.1	Kompensierung des elektrostatischen Potentials	29
2.4.2	Orthogonalität der fünfpoligen Falle	30
2.5	Die reale Penningfalle: sekulare Störungen	31
2.5.1	Das anharmonische Speicherpotential	32
2.5.2	Das inhomogene Magnetfeld	35
2.5.3	Quadratische Korrektur: die magnetische Flasche	36
2.5.4	Einfluß der magnetischen Flasche auf die Bewegungsfrequenzen	37
2.5.5	Bestimmung der Spin-Ausrichtung des Elektrons	40
2.6	Verallgemeinerung der c_j – Koeffizienten	41
2.6.1	Abhängigkeit des optimalen Tuning-Ratios von der Zyklotronenergie	42
2.6.2	Wirkung des Gradienten des Magnetfeldes auf die Bewegungsfrequenzen	43
3	<i>Beschreibung der Apparatur</i>	45
3.1	Überblick über den experimentellen Aufbau	45
3.2	Elektronischer Nachweis der Ionenbewegung	48

3.2.1	Messung der axialen Frequenz	50
3.2.2	Direkte Messung der Zyklotronfrequenz	52
3.2.3	Die Breite der Zyklotron-Resonanz	54
4	Einleitende experimentelle Ergebnisse	59
4.1	Apparative Effekte	59
4.1.1	Die Massenschleife	59
4.1.2	Die Relaxationszeit der axialen Frequenz	61
4.2	Die Kühlzeitkonstante der Zyklotronbewegung	63
4.3	Kopplung der Bewegungsmoden	65
4.3.1	Seitenbandkühlung	66
4.4	Messung der Magnetronfrequenz	68
4.5	Indirekte Messung der Zyklotronfrequenz	73
4.6	Der dreifache Dip	78
4.7	Optimierung des Tuning-Ratios	80
4.7.1	Abhängigkeit des optimalen Tuning-Ratios von der Zyklotronenergie	82
4.8	Messung der Orthogonalität der Falle	86
4.9	Messung der axialen Temperatur	87
4.10	Larmor-Frequenz in der Analysefalle	89
5	Der g-Faktor von $^{16}\text{O}^{7+}$	91
5.1	Messablauf	91
5.1.1	Versuch eines Frequenzverhältnisses	92
5.1.2	Bestimmung des Erfolgs eines Versuchs Γ in der PF	94
5.2	Ergebnisse: experimentelle $S_W(\Gamma)$ – Resonanzen	95
5.2.1	Abhängigkeit von Γ_m von der Zyklotronenergie	97
5.2.2	Einfluß der Binweite	98
5.3	Theoretische Linienform der Resonanz	99
5.3.1	Dynamik des Spins	100
5.3.2	Wirkung der magnetischen Inhomogenitäten	100
5.3.3	Variation der Zyklotronenergie	104
5.3.4	Variation der axialen Temperatur	106
5.3.5	Variation der Mikrowellenleistung	108
5.4	Extrapolation $T_z \rightarrow 0$ und/oder $L_{MW} \rightarrow 0$	110
5.5	Weitere systematische Fehlerquellen	112
5.5.1	Extrapolation auf verschwindende Magnetronenergie	112
5.5.2	Null-Punkt der Zyklotronenergie	113
5.5.3	Zeitbasis des Spektrum-Analysators	113
5.5.4	Spektrale Reinheit des Mikrowellensignals	115
5.5.5	Einfluß der Massenschleife	116
5.5.6	Einfluß des Tuning-Ratios	118
5.5.7	Andere mögliche Fehlerquellen	119
5.5.8	Zusammenfassung: Traditionelle Methode	120
5.6	Ergebnisse der Doppel-Dip-Methode	121
5.6.1	Auswertung	125
5.6.2	Linienform der Doppel-Dip-Methode	126

5.6.3	Fehler des Lorentz-Fits	127
5.6.4	Vergleich mit der traditionellen Methode	130
5.7	Der g-Faktor von $^{16}\text{O}^{7+}$	131
5.7.1	Atomare Masse des Elektrons	133
6	Zusammenfassung und Ausblick	135
6.1	Verbesserung der Messgenauigkeit	135
6.2	Messung an höhere Z	137
6.3	Andere mögliche Messaufgaben	137
A	Lösung der Bewegungsgleichungen	139
A.1	Hamiltonische Beschreibung der Bewegung	141
B	Magnetfeld einer Spule endlicher Länge	143
B.1	Analytische Berechnung	143
B.1.1	Elliptische Integrale	146
B.2	Ergebnisse	148
B.2.1	Axiale Komponente	148
B.2.2	Radiale Komponente	149
B.2.3	Vergleich mit den experimentellen Daten	149
B.2.4	Das Magnetfeld der g-Faktor-Spule	151
C	Die Magnetische Flasche	153
C.1	Berechnung des Magnetfeldes	153
C.2	Magnetfeld auf der Achse	154
C.2.1	Theoretische Bestimmung von B_1, B_2 und B_4	156

Kapitel 1

Einführung

Das Hauptobjekt dieser Dissertation ist ein einzelnes wasserstoffartiges Sauerstoff Ion , $^{16}\text{O}^{7+}$. Unser Interesse richtet sich auf das darin gebundene Elektron, dessen gyromagnetischer-Faktor (kurz *g-Faktor*) gemessen werden soll. Diesen kann man als dimensionslose Proportionalitätskonstante zwischen dem magnetischen Dipolmoment und dem Drehimpuls des Elektrons definieren:

$$\vec{\mu}_e = -g_j \cdot \frac{e}{2m_e} \vec{J}. \quad (1.1)$$

Dabei sind jeweils e die (positive) Elementarladung und m_e die Elektronenmasse. g_j ist der zu messende g-Faktor (auch Landé-Faktor genannt). \vec{J} stellt den gesamten Drehimpuls des gebundenen Elektrons dar: $\vec{J} = \vec{L} + \vec{S}$, mit \vec{L} =mechanische Drehimpuls und \vec{S} =Spin. Nach der Formel von Landé gilt:

$$g_j = \frac{3}{2} + \frac{s(s+1) - l(l+1)}{2j(j+1)} \quad (1.2)$$

Da das Elektron im vorliegenden Experiment sich im Grundzustand des Ions befindet, hat man: $l = 0, s = 1/2 \rightarrow j = 1/2$ und deshalb¹ $g = 2$. Dieses Ergebnis erfolgt unmittelbar aus der Dirac-Gleichung des freien Elektrons (siehe z.B. [Sch61] oder [Sch01] für eine detaillierte Berechnung). Im klassischen Fall hat man dagegen $s = 0, l \neq 0 \rightarrow g = 1$. Die Tatsache, daß für den Elektronen-Spin $g = 2$ gilt, beruht im wesentlichen darauf, daß der Spinzustand erst gegen Rotationen von 4π und nicht von 2π invariant ist.

Der berühmte $g - 2$ Experiment von Dehmelt stellt einen der bis heute strengsten Tests der *freien* Quantenelektrodynamik (kurz QED) dar [Deh90]. Der gemessene g-Faktor des freien Elektrons $g = 2 + 2 \times (1\,159\,652\,188,4 \pm 4,3) \cdot 10^{-12}$, [Dyc87], ist in hervorragender Übereinstimmung mit dem von der QED gelieferten theoretischen Wert [Hug99], [Kin90]. Im Fall des gebundenen Elektrons erfährt es unter dem Einfluss des Kerns ein elektrostatisches Feld von etwa 10^6 V/m, was auf die Coulombsche Wechselwirkung zurückzuführen ist. Ein dermaßen starkes Feld lässt sich künstlich nicht erzeugen. Dies stellt den eigentlichen Grund zur Messung an hoch geladenen Ionen wie $^{16}\text{O}^{7+}$ dar. Das Ziel der vorliegenden Arbeit besteht darin, die theoretischen Vorhersagen

¹ Ab nun wird zur Vereinfachung $g_{1/2}$ durch g ersetzt.

der Quantenelektrodynamik unter dem Einfluss von extrem starken elektrostatischen Feldern zu testen. Der g-Faktor des gebundenen Elektrons setzt sich aber aus verschiedener Beiträgen zusammen. Dies wird in den nächsten Abschnitten kurz beschrieben.

1.1 Die Breit-Formel und Kernkorrekturen

Die Energie des Elektrons in einem externen Magnetfeld läßt sich in der korrekten relativistischen Beschreibung durch Lösung der Dirac-Gleichung gewinnen. Diese wurde von Breit [Bre28] zum ersten Mal durchgeführt und führte zu einem g-Faktor:

$$g_j = 2 \left[\frac{1 + 2\sqrt{1 - (Z\alpha)^2}}{3} \right]. \quad (1.3)$$

Dabei ist α die Feinstrukturkonstante ($1/\alpha = 137,03599976$). Z stellt die Kernladungszahl des Ions dar ($Z = 8$ für Sauerstoff). Die Gleichung 1.3 ist in der Literatur als Breit-Formel bekannt. Sie gilt aber nur für einen punktförmigen Kern. Die endliche Ausdehnung des Kerns verursacht eine leichte Modifikation der Wellenfunktion des Elektrons, was mit sich bringt, daß die Energieverschiebung aufgrund der Wechselwirkung mit dem externen Magnetfeld leicht modifiziert wird. Dies verschiebt den freien elektronischen g-Faktor vom Wert $g = 2$ weiter. Im Fall vom $^{16}\text{O}^{7+}$ ist dieser Beitrag zum effektiven g-Faktor gleich $\Delta g = +1,6 \cdot 10^{-9}$ [Gla02]. Dies liegt gerade am Rand der bis dato erreichten Messgenauigkeit von $1 \cdot 10^{-9}$. Darüberhinaus, und besonders für leichte Ionen wie $^{16}\text{O}^{7+}$, muß man die endliche Masse des Kerns berücksichtigen: die Zeeman-Aufspaltung muß weiter korrigiert werden. Shabaev und Yerokhin haben den Einfluß der Mitbewegung des Kerns² in allen Ordnungen in αZ und in erster Ordnung in m/M berechnet. Für wasserstoffähnlichen Sauerstoff erhielten sie $\Delta g = +0,0000001170$ [Sha02].

Schließlich muß man die Kernpolarisation erwähnen. Aufgrund der internen Struktur des Kerns mit Protonen und Neutronen kann es virtuelle An- und Abregungen geben; dabei werden zwei Photonen mit dem Elektron ausgetauscht. Dieser Effekt ist für QED-Korrekturen der Lamb-Verschiebung ins Detail berechnet worden [Moh98]. Nach T. Beier ist der Beitrag der Kernpolarisation zum elektronischen g-Faktor in wasserstoffähnlichen Ionen von der gleichen Größenordnung wie die QED-Korrekturen in der Ordnung $(\alpha/\pi)^2$ und deshalb, nach der bis jetzt erreichten theoretischen Genauigkeit, vernachlässigbar [Bei00].

1.2 QED Beiträge

Im Fall des freien Elektrons ist der beherrschende Beitrag der QED zum g-Faktor in der Ordnung α/π von einem einzigen Feynman-Graph gegeben, der sogenannte Vakuumpolarisation. Dieser wurde bereits in 1947 von

² In der englischen Literatur *nuclear recoil* genannt.

Schwinger ausgewertet [Sch48], [Sch49] und ergibt den Wert $\alpha/2\pi$. Im Gegensatz dazu beinhaltet die gleiche Korrektur beim gebundenen Elektron sechs Feynman-Graphen, jeweils drei für die Selbstenergie-Korrektur und drei für die Vakuumpolarisation-Korrektur. Sie sind in Abbildung 1.1 gezeigt:

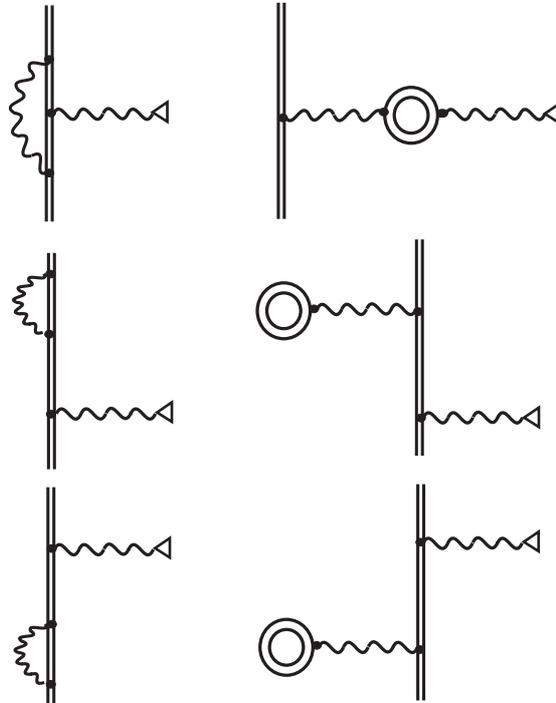


Abbildung 1.1: **Feynman-Graphen in erster Ordnung α/π .**

Die Doppel-Linien stellen das gebundene Elektron dar. Das externe Magnetfeld ist durch ein kleines Dreieck vertreten. Der Wellenzug entspricht virtuellen Photonen. Die Diagramme links stellen die Selbstenergie dar, wogegen die rechten der Vakuumpolarisation entsprechen. Siehe [Bei00] für Details.

Die Selbstenergie-Korrektur zum elektronischen g-Faktor hat eine relativ lange Geschichte. Hier sollen die Arbeiten von T. Beier *et al.* [Bei00] und V. A. Yerokhin und V. M. Shabaev [Yer02] erwähnt werden. In [Bei00] sind sowohl die Selbstenergie- als auch die Vakuumpolarisation-Korrekturen vorgestellt. Mit dem dort aufgelisteten Beiträgen zum g-Faktor und durch Vergleich mit dem experimentellen Wert von ν_L/ν_c , wurde ein neuer sehr präziser Wert für die Masse des Elektrons gewonnen [Bei02] (siehe Unterabschnitt 1.3). Dies stellte einen wichtigen Erfolg der Messung des g-Faktors am $^{12}\text{C}^{5+}$ mit der *Mainzer-Apparatur*³ dar. Inzwischen ist die theoretische Berechnung des g-Faktors des gebundenen Elektrons noch genauer geworden. Die gegenwärtigen Fortschritte in diese Richtung sind vor allem V. M. Shabaev und seinen Mitarbeitern zu verdanken. Neben der präzisen Berechnung der Kernkorrekturen konnte er, zusammen mit V. A. Yerokhin, die Selbstenergie-Korrektur in erster Ordnung in α/π und in allen Ordnungen in αZ bestimmen. Dies führte zu einer Verbesserung des theoretischen Wertes

³ Sie wird im Kapitel 3 beschrieben.

des g-Faktors um einen Faktor 3 für Kohlenstoff und 2 für Sauerstoff [Yer02]. Die Tatsache, daß alle Korrekturen zum g-Faktor des gebundenen Elektrons mit der Kernladungszahl schnell wachsen (mit der logischen Ausnahme der freien QED, siehe [Bei00]) bildet eine zusätzliche Motivation, den g-Faktor am Sauerstoff zu messen. Für die Zukunft ist es sogar geplant, den g-Faktor vom wasserstoffähnlichen Uran experimentell zu bestimmen [Qui01].

1.2.1 Theoretischer g-Faktor von $^{16}\text{O}^{7+}$

Die folgende Tabelle fasst den Status der Theorie (im Juni 2003) zum elektronischen g-Faktor am wasserstoffähnlichen Sauerstoff zusammen. Sie ist aus [Yer02] entnommen worden⁴. Die Unsicherheit des theoretischen g-Faktors ist

Beschreibung	Wert
Dirac mit Breit-Korrektur	1,997 726 003 1
Kernausdehnung	0,000 000 001 6
Freie QED $\sim \alpha/\pi$	0,002 322 819 5
Bound-State QED-SE $\sim \alpha/\pi$	0,000 001 622 7(1)
Bound-State QED-VP $\sim \alpha/\pi$	-0,000 000 026 5
Freie und BS-QED $\sim (\alpha/\pi)^2$	-0,000 003 517 1(6)
Nuclear Recoil	0,000 000 117 0
Ergebnis	2,000 047 020 2(6)

Tabelle 1.1: **Theoretische Beiträge zum elektronischen g-Faktor von $^{16}\text{O}^{7+}$.** Nach [Yer02].

im wesentlichen der Unsicherheit der BS-QED-Korrekturen in der Ordnung $(\alpha/\pi)^2$ zurückzuschreiben. Um diese zu reduzieren, muß man eine nicht perturbative (also in allen αZ -Ordnungen gültigen) Berechnung der 2-Photonen Beiträge durchführen. Dafür sind 50 Feynman-Graphen auszuwerten [Bei00]. Dies ist sehr aufwendig, und ein Resultat ist nicht in die nächsten Zukunft zu erwarten.

1.3 Der experimentelle g-Faktor: Definition

Um den g-Faktor zu messen, braucht man ein starkes Magnetfeld B . In seiner Anwesenheit lautet die Zeeman-Aufspaltung:

$$\Delta E = h \cdot \nu_L = g \cdot \mu_B \cdot B. \quad (1.4)$$

Mit Hilfe des externen Magnetfeldes und der eines elektrostatischen Feldes werden wir ein $^{16}\text{O}^{7+}$ -Ion in einer sogenannten *Penningfalle* speichern. Die

⁴SE = Selbstenergie. VP = Vakuumpolarisation. BS-QED = Bound State QED oder QED des gebundenen Elektrons.

Messaufgabe besteht darin, die Larmor-Präzessionsfrequenz des Elektrons ν_L zu bestimmen. Dafür werden wir das Ion mit Mikrowellen bestrahlen, um dabei *Spin-Flips*⁵ zu induzieren. Bei einer gewissen Mikrowellenfrequenz ist die *Spin-Flip-Rate* maximal. Diese Frequenz entspricht der Larmor-Frequenz. Der benötigte Wert des Magnetfeldes wird aus der *Zyklotronfrequenz* des gespeicherten Ions, $\nu_c = \frac{q}{m} \cdot B$, gewonnen. Der Zusammenhang zwischen dem gesuchten g-Faktor und den zwei messbaren Frequenzen ν_L und ν_c lautet:

$$g = 2 \cdot \frac{\nu_L}{\nu_c} \cdot \frac{m_e}{m} \cdot \frac{q}{q_e}. \quad (1.5)$$

Dabei sind m_e und q_e jeweils die Masse und die Ladung des Elektrons. m und q stellen die gleichen Größen des Ions dar. Als unmittelbares Ergebnis der vorliegenden Messung, erhält man das Frequenzverhältnis $\frac{\nu_L}{\nu_c}$. Das Massenverhältnis $\frac{m_e}{m}$ wird aus der Literatur entgegengenommen, um den g-Faktor bestimmen zu können. Man kann aber das Argument umkehren und aus der vorliegenden Messung und aus der theoretischen Wert des g-Faktors, wenn er als korrekt angesehen werden kann, die Elektronenmasse erhalten. Dies wurde, wie gesagt, bei der Messung am $^{12}\text{C}^{5+}$ schon gemacht. Das Ergebnis stellte die bis jetzt genaueste Messung der Masse des Elektrons dar [Bei02]. Die Genauigkeit wurde um einen Faktor 3 erhöht bezüglich der bislang akzeptierten Masse des Elektrons [Far95], [Dyc95]. Die vorliegende Messung an $^{16}\text{O}^{7+}$ soll diejenige an $^{12}\text{C}^{5+}$ vervollständigen und verbessern. All dies wird in den nächsten Kapiteln ausführlich diskutiert.

⁵ Umklapp des Spins des Elektrons.

Kapitel 2

Speicherung von geladenen Teilchen

In diesem Kapitel soll die im Experiment verwendete Technik zur langen Speicherung von Ionen ausführlich beschrieben werden. Zunächst wird die harmonische Näherung des Speicherpotentials und die damit verbundene Lösung der Bewegungsgleichungen vorgestellt. Da diese Näherung für ultrapräzise Messungen wie die vorliegende zu grob ist, wird in nachfolgenden Abschnitten versucht, ein möglichst realistisches Modell dazu aufzubauen. Im Experiment werden die Ionen mit magnetischen und elektrischen Kräften in einer *zylindrischen Penningfalle* gespeichert. Die Penningfalle wird im Abschnitt 2.2 ausführlich diskutiert. Außerdem verwenden wir einen Helium-Kryostaten, um den Käfig auf einer Temperatur von 4,2 Kelvin zu halten. Die Temperatur der gespeicherten Ionen kann auf etwa den gleichen Wert gebracht werden und das ist für Präzisionsmessungen eine wichtige Voraussetzung.

2.1 Allgemeine Vorüberlegungen

Um ein Teilchen mit Ladung q speichern zu können bieten sich natürlicherweise die Coulomb und die magnetische Kräfte an:

$$\vec{F} = q \cdot [\vec{E}(\vec{r}; t) + \vec{v} \times \vec{B}(\vec{r}; t)]. \quad (2.1)$$

Zunächst wollen wir die Möglichkeiten zur Speicherung allein mit dem elektrischen Anteil untersuchen.

Damit die Bewegung des Teilchens auf eine bestimmte Region des Raumes beschränkt wird, muß dort die darauf ausgeübte Netto-Kraft gleich Null sein d.h. der vom Ion gesehene zeitliche Mittelwert des elektrischen Feldes muß verschwinden:

$$\langle \vec{E}(r, \theta, z; t) \rangle_t = \langle \nabla \cdot \phi(r, \theta, z; t) \rangle_t = \vec{0} \quad (2.2)$$

dabei sind (r, θ, z) die üblichen zylindrischen Koordinaten. Verwendet man ein elektrostatisches Speicherfeld, $\vec{E} \neq \vec{E}(t)$, bedeutet Gleichung (1.2), daß das elektrische Potential am Ort des Ions eine Singularität aufweisen muß. Um stabil speichern zu können, muß das Potential außerdem minimal sein.

Nehmen wir an, daß das Potential ein Minimum in „axialer Richtung“, \vec{u}_z , am Koordinatenursprung $(0,0)$, habe (Abbildung 2.1).

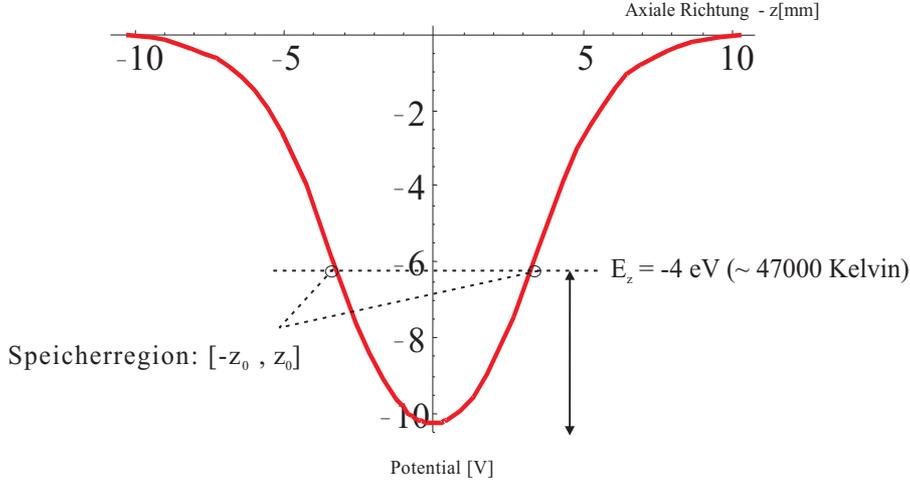


Abbildung 2.1: **Axiales Speicherpotential**

Da die potentielle Energie des Ions ($q \cdot \phi$) nicht größer als seine gesamte Energie, E_z , sein kann, ist dessen Bewegung auf $[-z_0, z_0]$ eingeschränkt. In erster Näherung gilt $z_0 \sim \sqrt{E_z}$. Normalerweise befinden sich die Ionen im thermischen Gleichgewicht mit der Umgebung. Deshalb reicht im Prinzip eine kleine Spannung (~ 10 Volt) völlig aus, um sie einzufangen. Technisch lässt sich so ein Potentialminimum mittels einem zylindrischen Elektrodenturm relativ einfach realisieren.

Angenommen daß es keine freie Ladungsträger in der Speicherregion gäbe (mit der Ausnahme der zu speichernden Ionen selbst¹) und daß zylindrische Symmetrie vorhanden sei (also $\phi \neq \phi(\theta)$) muss das elektrische Potential, $\phi(r, z)$, die Laplace-Gleichung erfüllen:

$$\nabla^2 \phi(r, z) = 0. \quad (2.3)$$

Allgemein kann man die Lösung der Laplace-Gleichung als eine Taylorentwicklung um $(r = 0, z = 0)$ darstellen²:

$$\begin{aligned} \phi(r, z) &= \phi_0 + r \cdot \left. \frac{\partial \phi}{\partial r} \right|_{(0,0)} + z \cdot \left. \frac{\partial \phi}{\partial z} \right|_{(0,0)} + \frac{r^2}{2!} \cdot \left. \frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} \right|_{(0,0)} + \frac{z^2}{2!} \cdot \left. \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} \right|_{(0,0)} + \dots \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{i=0}^k \binom{k}{i} \left. \frac{\partial^k \phi}{\partial r^i \cdot \partial z^{k-i}} \right|_{(0,0)} \cdot r^i \cdot z^{k-i} \right). \end{aligned} \quad (2.4)$$

¹ Da das Experiment im wesentlichen mit einem einzelnen Ion durchgeführt wird, sind etwaige kollektive Phänomene, auf der Coulombschen Wechselwirkung basierend, zu vernachlässigen.

² Es wird einfach angenommen daß $\phi(r, z)$ eine C^∞ Funktion um $(r = 0, z = 0)$ ist.

Führt man noch die Notation $C_{i,k} = \binom{k}{i} \frac{\partial^{i+k} \phi}{\partial r^i \cdot \partial z^k} \Big|_{(0,0)}$ ein, dann bedeutet 2.2, daß $C_{1,0} = C_{0,1} = 0$. Vorausgesetzt, daß die gesamte Energie des Teilchens „klein“ genug ist, kann man zunächst die Terme höherer Ordnung als zwei ($k > 2$) vernachlässigen. Dann nimmt das elektrische Potential eine besonders unkomplizierte Form an³:

$$\phi(r, z) = \phi_0 + C_{2,0} r^2 + C_{0,2} z^2 + \mathcal{O}^3(r, z). \quad (2.5)$$

Setzt man diese Funktion in die Laplace-Gleichung ein (mit $\nabla^2 = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$), erhält man:

$$2 C_{2,0} + C_{0,2} = 0 \Rightarrow C_{2,0} = -C_{0,2}/2 \quad (2.6)$$

und daraus resultiert das einfachste Speicherpotential, das man erzeugen kann⁴:

$$\phi(r, z) = C_2 \cdot \left(z^2 - \frac{r^2}{2} \right). \quad (2.7)$$

Nun lässt sich die Kraft, die von einem Teilchen mit Ladung q und Masse m unter dem Einfluss dieses elektrischen Feldes erfahren wird, trivialerweise bestimmen:

$$\vec{F}_{el}(r, z) = m(\ddot{r}, \ddot{z}) = -\nabla \cdot (q \phi(r, z)) = \underbrace{(-2q C_2 z)}_{F_z} \cdot \vec{u}_z + \underbrace{(q C_2 r)}_{F_r} \cdot \vec{u}_r. \quad (2.8)$$

In Abhängigkeit des Vorzeichens der an die Fallenelektroden angelegten Spannung lautet $C_2 > 0$ oder $C_2 < 0$. Der axiale Komponente der Kraft wirkt daher unterschiedlich:

- $C_2 > 0 \rightarrow F_z$ ist *anziehend*: das (positive) Ion schwingt um $z=0$ auf der \vec{u}_z Richtung und wird damit axial eingefangen.
- $C_2 < 0 \rightarrow F_z$ ist *abstoßend*: das (positive) Ion wird aus $z=0$ herausgetrieben. Keine axiale Speicherung.

Dabei ist das Verhalten von F_r immer genau umgekehrt wie dasjenige von F_z . Das heißt, eine Speicherung in einer Dimension hat zur Folge, daß das Ion in der dazu senkrechten Richtung aus der Falle entweicht. Mit anderen Worten: die Erzeugung eines absoluten dreidimensionalen Potentialminimums ist wegen der Laplace-Gleichung nicht möglich.

³ Man kann die Taylorentwicklung zweiter Ordnung des Potentials matriziell schreiben: $\phi(r, z) = \phi_0 + \underbrace{\begin{pmatrix} r \\ z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_{2,0} & C_{1,1} \\ C_{1,1} & C_{0,2} \end{pmatrix}}_{\mathcal{H}} \begin{pmatrix} r \\ z \end{pmatrix} + \mathcal{O}^3(r, z)$ wobei $\frac{\partial^2 \phi}{\partial r \partial z} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial z \partial r} = C_{1,1}$. Da die

Matrix \mathcal{H} reell und symmetrisch ist, kann man immer ein orthogonales Koordinatensystem finden in dem sie diagonal wird, d.h. der Koeffizient $C_{1,1}$ kann immer als gleich Null angenommen werden. Außerdem hat die Konstante ϕ_0 keinen dynamischen Effekt und kann vernachlässigt werden.

⁴ Im Rahmen dieser Dissertation werden die wichtigen Koeffizienten: $C_{0,k} = \frac{1}{k!} \frac{\partial^k \phi}{\partial z^k} \Big|_{(0,0)}$, zur Vereinfachung mit C_k bezeichnet.

Mit diesen Argumenten ist es eindeutig, daß an eine reine elektrostatische *vollständige* Speicherung nicht zu denken ist. Die Richtung, in der das Ion mit \vec{E} eingefangen wird, definiert man als *axiale Richtung*. Um das Ion auch in *radialer Richtung* einfangen zu können, benötigt man eine zusätzliche bindende Kraft, die $(q C_2 r) \cdot \vec{u}_r$ überwindet. Diese zusätzliche Kraft wird mit Hilfe eines magnetostatischen Feldes $\vec{B} = B_0 \cdot \vec{u}_z$ hervorgerufen. Damit ist die gesamte auf das Ion wirkende Kraft (in kartesischen Koordinaten):

$$\vec{F} = \vec{F}_{el} + \vec{F}_{mag} = q(C_2 x + B_0 y) \vec{u}_x + q(C_2 y - B_0 x) \vec{u}_y - q(2C_2 z) \vec{u}_z. \quad (2.9)$$

Im Fall von wasserstoffartigem Sauerstoff, da die Ladung positiv ist, muss das Fallenzentrum in axialer Richtung auf negativen Potential liegen, um es um $z = 0$ „einzusperren“. Selbstverständlich, um negativ geladene Teilchen (wie Elektronen) speichern zu können, muß $C_2 < 0$ gelten; die angelegte Spannung muß umgepolt werden. Dabei ist die Polarität des Magnetfeldes irrelevant, sie bedingt nur den Drehsinn um die z-Achse: Uhrzeigersinn für Elektronen (mit $B_0 > 0$ und aus positiver z-Entfernung beobachtet) und umgekehrt für positive Ionen.

Das Paar $[\phi(r, z) = C_2 \cdot (z^2 - \frac{r^2}{2}), \vec{B} = B_0 \cdot \vec{u}_z]$ nennt man *Penningfalle*. In unserem Experiment wird \vec{B} mittels einer supraleitenden Spule erzeugt und beträgt etwa 3,7 Tesla. Die Speicherspannung wird von einem Präzisionsnetzteil hervorgerufen. Im nächsten Kapitel wird der gesamte experimentelle Aufbau skizziert.

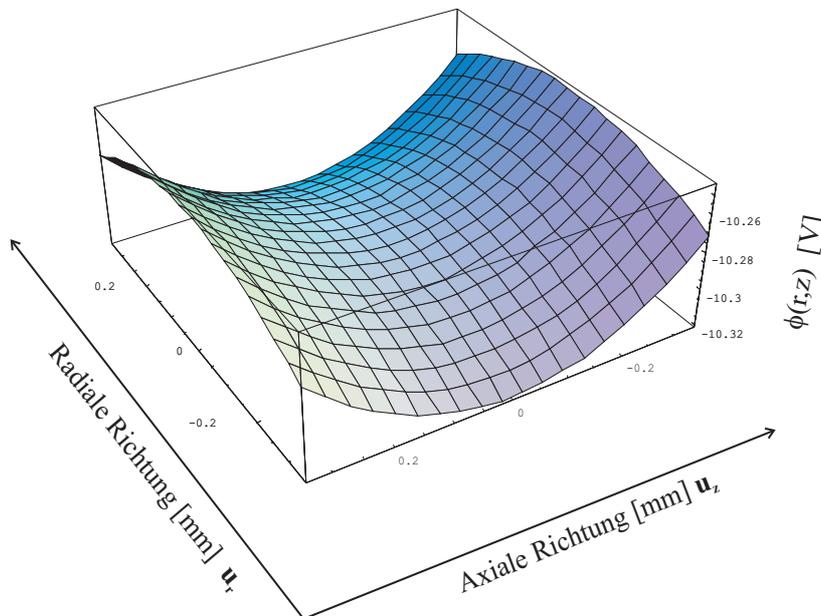


Abbildung 2.2: **Darstellung von $\phi(r, z)$ um $(0, 0)$.**

Aufgrund der Laplace-Gleichung können keine absolute Minima (bzw. Maxima) bestehen.

Die Abbildung veranschaulicht das dreidimensionale elektrische Potential um eine Singularität ($\nabla \cdot \phi(0,0) = \vec{0}$). Die Grafik beruht auf einer analytischen Berechnung von $\phi(r, z)$ für den im Experiment verwendeten Käfig (siehe nächster Abschnitt). Die Sattelform von $\phi(r, z)$ ist eindeutig zu sehen.

2.2 Die zylindrische Falle

Wenn man Elektroden mit der Form des in Abbildung 1.2 dargestellten Potentials anfertigen würde, dann hätte man eine klassische hyperbolische Falle hergestellt. Im Experiment wird aber eine ringförmige Geometrie wie die folgende verwendet⁵:

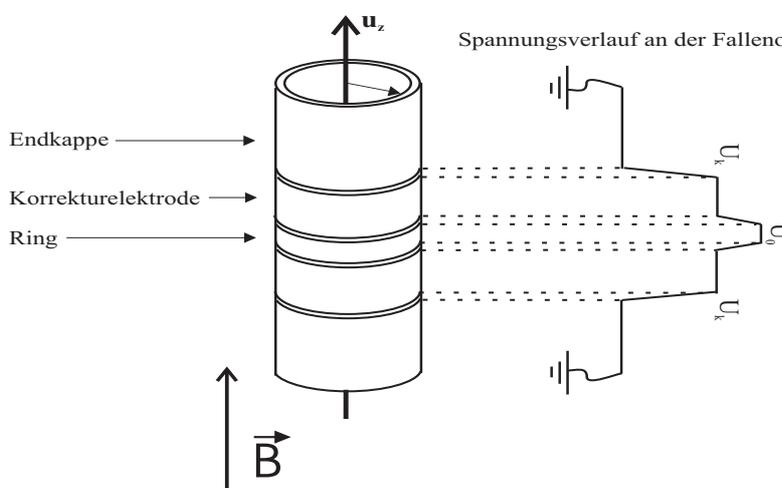


Abbildung 2.3: Die fünfpolige zylindrische Penningfalle.

Rechts ist der Potentialverlauf auf der Elektrodenoberfläche zu sehen. Das Potential zwischen den Elektroden ist mit steilen Geraden angenähert, da die Spalte im wesentlichen parasitäre Kapazitäten bilden [Her99]. Damit sind die notwendigen Randwerte zur Bestimmung von $\phi(r, z)$ sehr genau definiert.

Die zwei äußeren Elektroden nennt man *Endkappen*. Normalerweise liegen sie auf Masse (0 Volt). Gleich daneben gibt es zwei *Korrektorelektroden* die dafür sorgen, daß das Potential binnen eines möglichst großen Bereiches harmonisch bleibt. Dafür liegen normalerweise beide Elektroden auf der gleichen Spannung U_k . Schließlich im Fallenzentrum befindet sich der sogenannte *Ring*. Die Spalte zwischen den einzelnen Elektroden sind mit einem isolierendem Material (Saphir) gefüllt und sorgen dafür, daß sämtliche Elektroden voneinander dc-mässig getrennt sind.

Die Elektroden wurden aus sauerstofffreiem elektrolytischem Kupfer hergestellt und sind jeweils mit einer von den anderen Elektroden unabhängigen

⁵ Die zylindrische Penningfalle wurde zum ersten Mal an der Arbeitsgruppe von Herrn Prof. G. Gabrielse in Harvard (USA) entwickelt. Die vorliegende Version beruht auf die am Antiproton-Experiment am CERN verwendete Falle [Gab95].

konstanten Spannung versorgt. Damit sie möglichst perfekt leitende Äquipotentialflächen bilden, wurden alle vergoldet und sorgfältig gereinigt. Die gesamte aufwendige Prozedur zur Anfertigung der Falle wurde im wesentlichen von Herrn S.Stahl durchgeführt und eine ausführliche Beschreibung dazu kann in seiner Doktorarbeit gefunden werden [Sta98].

In der Abbildung 2.3 ist der übliche Spannungsverlauf gezeigt. Wenn die am Ring angelegte Spannung U_0 negativ bezüglich der Endkappen ist, dann entsteht ein Potentialminimum im Zentrum des Käfigs und somit lassen sich positive Ionen wie $^{16}\text{O}^{7+}$ speichern. Natürlich ist das Potential an der Fallenoberfläche diskontinuierlich; auf der Fallenchse aber wird es „geglättet“ und sieht genauso wie in der Abbildung 1.1 aus. Mit diesem Spannungsverlauf und zusammen mit dem Magnetfeld werden die Ionen um die z-Achse und am Zentrum des Rings eingefangen: (0,0) stellt den Gleichgewichtspunkt dar.

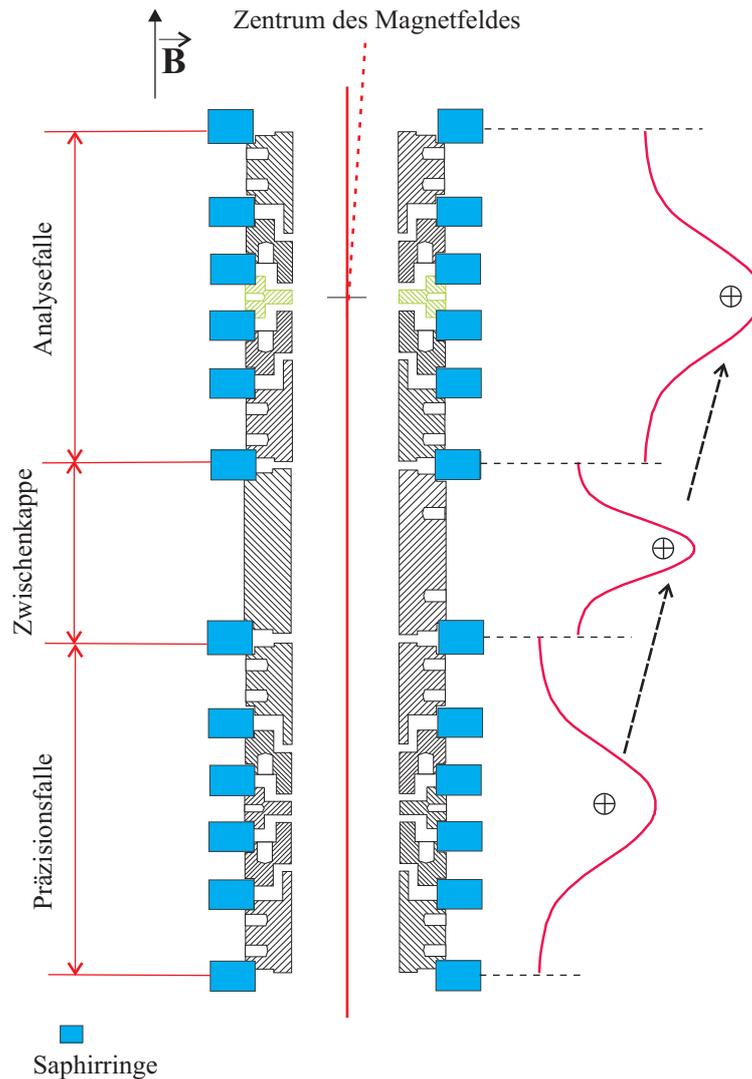
Die Mainzer Doppel-Falle

Ein wesentlicher Vorteil des zylindrischen Käfigs dem hyperbolischen gegenüber besteht darin, daß man es sehr leicht erweitern kann (Modularität): man braucht nur zum ursprünglichen Turm so viele Elektroden hinzufügen wie man will. In der Tat besteht die Apparatur aus zwei von einer Zwischenelektrode getrennten fast identischen fünfpoligen Fallen, jeweils Präzisions- und Analysefalle genannt.

Durch geschickte Auswahl der an den verschiedenen Elektroden angelegten Spannungen lassen sich die Ionen zwischen Präzisions- und Analysefalle hin und her transportieren: man braucht nur die Lage des Potentialminimums beliebig zu verschieben (siehe Abbildung 2.4). In der Tat wird das $^{16}\text{O}^{7+}$ - Ion während des normalen Messablaufs ständig zwischen beiden Käfigen hin und her transportiert. Die wesentlichen Aufgaben jeder Falle lauten:

- Präzisionsfalle (kurz PF):
 - Erzeugung der Ionen und elektronisches „Putzen“ der erzeugten (unreinen) Ionenwolke, um eine reine $^{16}\text{O}^{7+}$ - Wolke vorzubereiten.
 - Reduzierung der Ionenanzahl bis auf ein einzelnes Ion.
 - Unmittelbare Messung des $\frac{\nu_L}{\nu_c}$ Verhältnisses \rightarrow eigentliche Messung des elektronischen g-Faktors.
- Analysefalle (kurz AF):
 - Bestimmung der Spin-Ausrichtung.

Die zwei Käfige sind bis auf das Anfertigungsmaterial des Rings identisch. In der Analysefalle wurde der Ring aus Nickel hergestellt, um eine sogenannte „magnetische Flasche“ hervorzurufen. Die Anwesenheit dieses ferromagnetischen Materials verzerrt die sonst homogenen Magnetfeldlinien der supraleitenden Spule so, daß vom „kontinuierlichen Stern-Gerlach Effekt“ [Deh86] Gebrauch gemacht werden kann.

Abbildung 2.4: **Querschnitt der Doppel-Falle.**

Auf der rechten Seite ist die Verschiebung des Potentialminimums skizziert.

Da die Messung des g -Faktors unter möglichst idealen Bedingungen erfolgen soll, braucht man eine zweite Falle⁶ (die Präzisionsfalle) in der die Inhomogenität des Magnetfeldes wesentlich kleiner (siehe Anhang 3) als in der sonst notwendigen magnetischen Flasche ist. Die Idee dieser Aufteilung, die Aufgaben räumlich zu trennen, wurde zuerst von Herrn N. Hermanspahn konzipiert: die Messung des elektronischen g -Faktors am $^{12}\text{C}^{5+}$ zeigte, daß die Messgenauigkeit in der Analysefalle aufgrund des inhomogenen Verlaufs des Magnetfeldes sehr schränkt ist:

$$g_{\text{AF}} = 2,001\,041\,8(18) \quad [\text{Her00}].$$

⁶ Es ist vorgeschlagen worden, eine einzige Falle um g -Faktoren zu messen zu verwenden, in der die magnetische Flasche beliebig an- und ausgeschaltet werden könnte [Dyc86]. Die hier vorgestellte Lösung mit dem Transport des Ions ist, nach Auffassung des Autors, wesentlich einfacher und effizienter.

Herrn H.Häffner gelangt es zum ersten Mal die Messung des g-Faktors am $^{12}\text{C}^{5+}$ in der Präzisionsfalle durchzuführen.

$$g_{\text{PF}} = 2,001\,041\,596(5) \quad [\text{Häf00b}].$$

Der Fehler wurde dabei um einen Faktor $2 \cdot 10^3$ kleiner. Die von Herrn Häffner zuerst entwickelte Messprozedur wird im Rahmen dieser Dissertation, als „Traditionelle Methode“ gekennzeichnet [Häf03]. In späteren Abschnitten wird eine neue Messmethode eingeführt. Elektrisch sind beide Käfige absolut identisch.

2.2.1 Das elektrische Potential der fünfpoligen Falle

Um bei der Messung des elektronischen g-Faktors am $^{16}\text{O}^{7+}$ eine relative Genauigkeit von $\sim 10^{-9}$ erreichen zu können, muß man die Physik des Messvorgangs selbst gut verstehen. Für die spätere Analyse der Unsicherheiten des Messergebnisses ist ein der Realität möglichst naheliegendes mathematisches Modell des elektrischen Feldes notwendig.

Die Abbildung 2.5 veranschaulicht einen Querschnitt des Käfigs mit den, für den normalen Messbetrieb, verwendeten Spannungen. Man kann das mathematische Problem: $\{\phi(r, z) / \nabla^2 \phi(r, z) = 0; \text{ mit Randwerten}\}$ verallgemeinern, in dem man fünf verschiedene Spannungen an den fünf Elektroden postuliert, aber wir interessieren uns ausschließlich für den hier dargestellten Fall:

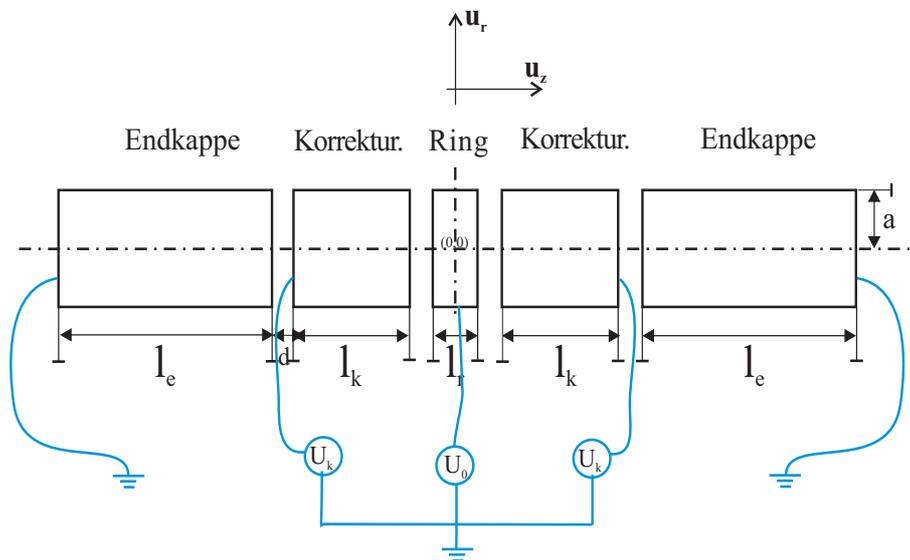


Abbildung 2.5: **Die Fallenspannungen zur g-Faktor Messung.**

Obwohl die wirkliche Geometrie der Elektroden etwas komplizierter aussieht (Abbildung 2.4), entspricht die innere Fläche der Falle, also das was das Ion tatsächlich sieht, der Abbildung ziemlich genau.

Der Elektrodenturm besitzt eine Symmetrieebene um den Ring ($z = 0$) und eine Symmetrieachse \vec{u}_z . Diese Symmetrien gewährleisten, daß:

- Das Potential ist Rotationssymmetrisch: $\phi \neq \phi(\theta)$.
- Alle ungeraden Termen der Taylorentwicklung $\{C_{i,k}, \forall (i,k) / i+k = \text{ungerade}\}$ fallen weg.

Die Falle bildet einen von Äquipotentialflächen geschlossenen Raum. Innerhalb dieses Raumes ist die Funktion $\phi(r, z) / \nabla^2 \cdot \phi(r, z) = 0$ von den angelegten Spannungen⁷ einzeln definiert (Satz von Helmholtz [Gri89]). Das Problem der Bestimmung von $\phi(r, z)$ ist deshalb ein typisches Randwertproblem, dessen Lösung mit den Methoden der klassischen Elektrodynamik erhalten werden kann [Gri89]. Hier wird nur die Lösung für die in Abbildung 1.3 gezeigten Randbedingungen vorgestellt; eine ausführliche mathematische Herleitung dieses Resultates befindet sich in [Ver01].

$$\phi(r, z) = \sum_m \left\{ \frac{8U_0}{l \cdot d \cdot k_m^2 \cdot I_0(k_m a)} \sin\left(\frac{k_m d}{2}\right) \left[\sin\left(\frac{k_m(d+l_r)}{2}\right) + \dots \right. \right. \\ \left. \left. + 2T \sin\left(\frac{k_m(d+l_k)}{2}\right) \cos\left(\frac{k_m(2d+l_r+l_k)}{2}\right) \right] I_0(k_m r) \cos(k_m z) \right\} \quad (2.10)$$

wobei:

- $k_m = \frac{m\pi}{l}$ mit $m \in \{1, 3, 5, \dots\}$ und $l = 4d + 2l_e + 2l_k + l_r$, gesamte Länge der Falle (= 20,58 mm, siehe unten).
- U_0 , Spannung am Ring.
- $T = \frac{U_k}{U_0}$, Verhältnis der an der Korrektorelektroden angelegten Spannung zur Ringspannung. T wird „**Tuning-Ratio**“, (kurz T.R.) genannt.
- $I_0(x)$ stellt die modifizierte Bessel-Funktion erster Art und nullter Ordnung dar. $I_0(x) = 1 + \frac{x^2}{2^2} + \frac{x^4}{2^2 \cdot 4^2} + \frac{x^6}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2} + \dots$. Ausführliche Information zu dieser Funktion kann man z.B. in [Abr72] finden.
- Der Definitionsbereich von $\phi(r, z)$ lautet:
$$\begin{cases} r \in [0, a] \\ \theta \in [0, 2\pi] \\ z \in [-l/2, l/2] \end{cases}$$

Die Abmessungen der im Experiment verwendeten Falle lauten (nach [Sta98]):

$$(l_e = 6,80, l_k = 2,75, l_r = 0,92, d = 0,14, a = 3,50) \pm 0,05, \text{ mm.} \quad (2.11)$$

⁷ Theoretisch sind das nur zwei Spannungen, nämlich die Ringspannung U_0 und die Korrekturspannung U_k . Dafür sind während des normalen Betriebs der Falle beide Korrektorelektroden de-mässig an der gleichen Spannungsquelle angeschlossen und somit $U_{k,links} = U_{k,rechts}$. Trotzdem ist die Kopplungsimpedanz für beide Elektroden wahrscheinlich nicht absolut identisch, sodaß diese Beziehung nicht hundertprozentig stimmt. Allerdings muß dieser Unterschied ziemlich klein sein, da er bis jetzt experimentell noch nicht nachgewiesen worden ist.

Diese Werte gelten aber nur für Raumtemperatur. Das Experiment wird jedoch bei 4,2 K betrieben. Die angegebene Unsicherheit stellt die Fertigungstoleranz dar. Im Laufe dieser Dissertation werden diese Parameter verwendet, um theoretische Vorhersage mit Hilfe von $\phi(r, z)$ zu erhalten. Außerdem werden standardmäßig eine nominelle Spannung $U_0 = -13,227480$ V und ein Tuning-Ratio $T = 0,883030$ für die Berechnungen benutzt. Dies sind die realen Werte, die aus technischen Gründen während der Messung des g-Faktors eingesetzt wurden.

In der Abbildung ist die Darstellung der Äquipotentialflächen der Funktion $\phi(r, z)$ binnen eines kleinen Raums $[-0,5, 0,5] \times [-0,5, 0,5]$ [mm] (entspricht etwa einem Drittel des Fallendurchmessers mal der Länge des Rings) zu sehen:

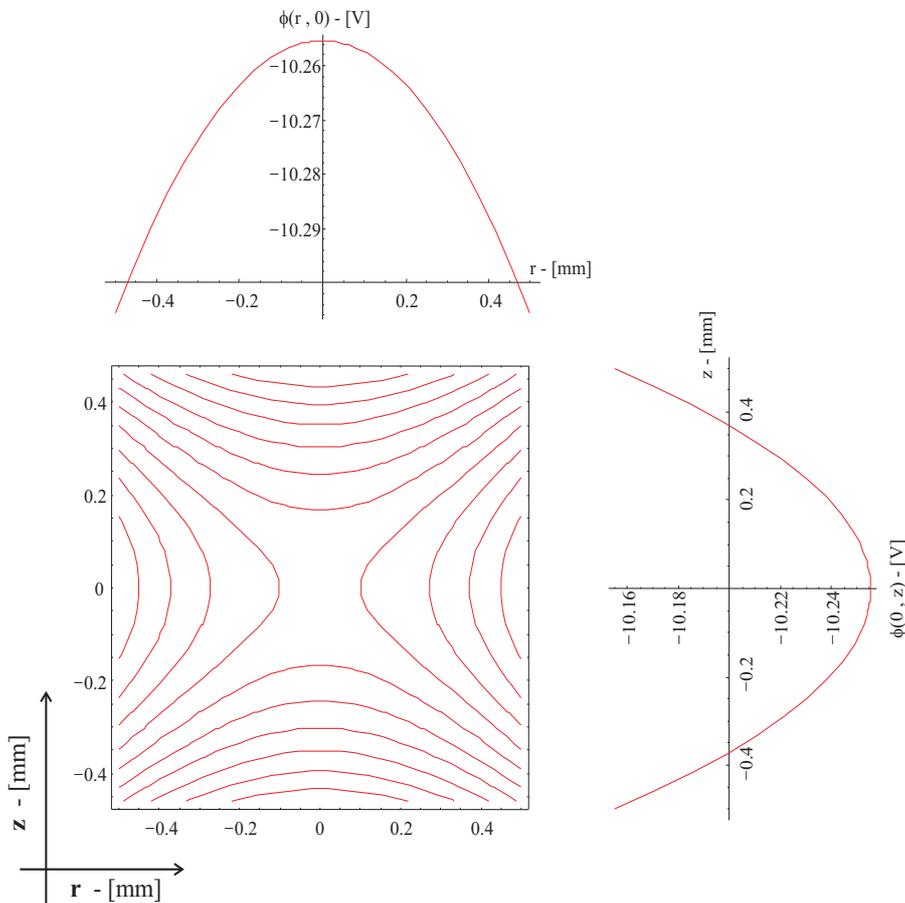


Abbildung 2.6: **Querschnitt der Äquipotentialflächen von $\phi(r, z)$.**
Die Grafiken wurden mit Gleichungen 2.10 und 2.11 berechnet.

Wie erwartet, ist die Struktur dieser Äquipotentialflächen fast identisch mit diejenigen der klassischen hyperbolischen Falle [Bro86]. Die Sattelform von $\phi(r, z)$ um $(0, 0)$ ist auch eindeutig zu sehen. Das elektrische Potential ähnelt für diese kleine Abstände einer Parabel $\phi \sim z^2$, die Rückstellkraft ist somit linear in z und das Ion führt auf \vec{u}_z eine harmonische Bewegung durch. Im Prinzip würde eine dreipolige Falle (2 Endkappen + Ring) ausrei-

chen, aber mit der Hilfe der Korrekturolektroden kann man es erreichen, daß die effektive Harmonizität des Potentials mit der typischen axialen Energie des Ions von $E_z \sim 3$ meV ziemlich exakt gewährleistet wird. Dies wird in folgenden Abschnitten ausführlich untersucht.

Mit etwas Phantasie erkennt man, daß in diesem kleinem Bereich, \vec{u}_z und \vec{u}_r fast nicht unterscheidbar sind (also was \vec{u}_z oder \vec{u}_r ist, hängt nur vom Vorzeichen von U_0 ab, angenommen daß $\vec{B} = \vec{0}$). Wenn man diese Potentialstruktur rotieren würde, dann würde das Potentialminimum entlang \vec{u}_z zum Maximum und umgekehrt für \vec{u}_r , damit wäre die Lorentz-Kraft auf \vec{u}_z nun abstoßend und auf \vec{u}_r anziehend. Rotiert man das Bild schnell genug, dann kann man es im Mittelwert schaffen, daß das Ion dreidimensional ohne den Gebrauch eines (unbequemen) Magnetfeldes gespeichert wird. Das Bild zu rotieren ist in der Realität ganz einfach: anstatt einer konstanten Spannung braucht man nur eine sinusförmige Wechselspannung am Ring anzulegen, damit schwingt das Potential zwischen Maximum und Minimum hin und her. Das ist im wesentlichen die Grundlage der sogenannten „Paul-Falle“ die in der modernen Spektroskopie eine große Bedeutung hat. Beim hier behandelten Experiment ist jedoch \vec{B} zur Messung des g-Faktors notwendig.

Das elektrische Quadrupolfeld

Zur Vereinfachung definiert man die Koeffizienten A_m und B_m :

$$A_m = \frac{8}{l d \left(\frac{m\pi}{l}\right)^2 I_0\left(\frac{m\pi}{l} a\right)} \cdot \sin\left(\frac{m\pi}{2} d\right) \cdot \sin\left(\frac{m\pi}{2} (d+l_r)\right)$$

$$B_m = \frac{16}{l d \left(\frac{m\pi}{l}\right)^2 I_0\left(\frac{m\pi}{l} a\right)} \cdot \sin\left(\frac{m\pi}{2} d\right) \cdot \sin\left(\frac{m\pi}{2} (d+l_k)\right) \cdot \cos\left(\frac{m\pi}{2} (2d+l_k+l_r)\right)$$

mit $m = 2n + 1$, $n \in \mathbb{N}$.

(2.12)

Diese Koeffizienten sind Funktionen ausschließlich der Geometrie der Falle. Das elektrische Feld, $\vec{E} = -\nabla \cdot \phi(r, z)$, lässt sich durch Differentiation von (2.10) bestimmen⁸ (m ist immer ungerade):

$$\vec{E}(r, z) = U_0 \cdot \underbrace{\left[\sum_m \left(-\frac{m\pi}{l} [A_m + T \cdot B_m] I_1\left(\frac{m\pi}{l} r\right) \cos\left(\frac{m\pi}{l} z\right) \right) \right]}_{\mathcal{E}_r} \hat{u}_r + \dots$$

$$U_0 \cdot \underbrace{\left[\sum_m \left(+\frac{m\pi}{l} [A_m + T \cdot B_m] I_0\left(\frac{m\pi}{l} r\right) \sin\left(\frac{m\pi}{l} z\right) \right) \right]}_{\mathcal{E}_z} \hat{u}_z.$$

(2.13)

Mit den in 2.11 angegebenen Parametern und der vorliegenden Formel 2.13 kann man $\vec{E}(r, z)$ darstellen (dabei ist die Darstellung auf typischen Bewe-

⁸ $I_1(x) = \frac{d}{dx} I_0(x)$ und $I_1(0) = 0$, [Abr72].

gungsamplituden $r_0 \sim z_0 \sim 60 \mu\text{m}$ entsprechend einer Ionentemperatur von 4 Kelvin, beschränkt):

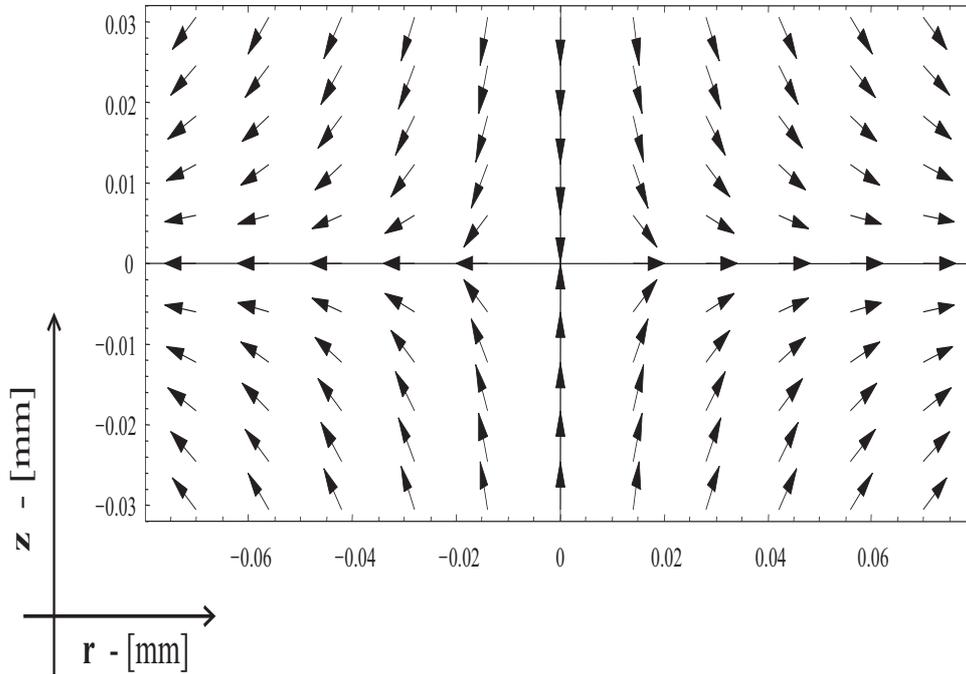


Abbildung 2.7: Das elektrische Quadrupolfeld.

Die Quadrupol-Struktur ist eindeutig zu erkennen. Genau im Zentrum $(0,0)$ ist das Feld gleich Null, also die in 2.2. vorgestellte Voraussetzung zur Speicherung ist mit dem verwendeten Spannungsverlauf erfüllt. Man kann auch sehen, daß, wie erwartet, \mathcal{E}_z anziehend wirkt aber \mathcal{E}_r nicht.

Genau auf den Achsen und aus Symmetriegründen ist das elektrische Feld entweder rein axial ($\vec{E} = \mathcal{E}_z \cdot \hat{u}_z$; für $r = 0$) oder rein radial ($\vec{E} = \mathcal{E}_r \cdot \hat{u}_r$; für $z = 0$). Diese typische Struktur eines Quadrupolfeldes wird auch gebraucht, um die verschiedenen Bewegungsmodi der Ionen mittels Wechselfelder zu koppeln.

Natürlich ist eine Lösung der Bewegungsgleichungen mit dem komplizierten elektrischen Feld (2.13) nicht möglich. Man kann sie nur annäherungsweise lösen und dann Korrekturen mit Hilfe der C_j -Koeffizienten zu den gefundenen Lösungen bringen.

2.3 Ideale Bewegung des Ions in der Penningfalle

Als erstes wollen wir die Bewegung eines Ions unter dem Einfluß von $[\phi(r, z) = U_0 c_2 (z^2 - \frac{r^2}{2}), \vec{B} = B_0 \cdot \vec{u}_z]$, untersuchen. Das reelle Potential und das reelle Magnetfeld sind offensichtlich komplizierter: höhere Terme der Taylorentwicklung sowohl von $\phi(r, z)$ als auch von $\vec{B}(r, z)$ sind immer anwesend.

Allerdings sind die wesentlichen dynamischen Eigenschaften des Ions durch das **harmonische Potential** $U_0 c_2 (z^2 - \frac{r^2}{2})$ und das **homogene Magnetfeld** $\vec{B} = B_0 \cdot \vec{u}_z$ gegeben. Im Abschnitt 2.5, werden wir die Effekte der elektrischen Anharmonizitäten und der magnetischen Inhomogenitäten berücksichtigen.

Verwendet man normierte Koeffizienten $c_j = \frac{C_j}{U_0}$, dann lauten die Newtonschen Bewegungsgleichungen (2.9) mit der Lorentz- Kraft (in kartesischen Koordinaten):

$$\begin{aligned} m\ddot{z} &= (-2qU_0 c_2)z \\ m \begin{pmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \end{pmatrix} &= qB_0 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} + qU_0 c_2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (2.14)$$

Die axiale Bewegung ist von den anderen entkoppelt und stellt einen trivialen harmonischen Oszillator dar. Die Lösung lautet:

$$\begin{aligned} z(t) &= \sqrt{\frac{E_z}{q c_2 U_0}} \cdot \cos(2\pi\nu_z t + \varphi_z) \\ \text{mit } \nu_z &= \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{q}{m} \cdot 2 c_2 U_0} \longrightarrow \text{axiale Frequenz.} \end{aligned} \quad (2.15)$$

Typische experimentelle Werte⁹ sind: $E_z = 61$ Kelvin (= 5,3 meV) und $\nu_z = 925$ kHz. Die Amplitude lässt sich damit sehr gut bestimmen: $A_z = \frac{\sqrt{2E_z/m}}{2\pi\nu_z} = 43 \mu\text{m}$. Dies stellt 4,6 % der Länge des Rings dar.

Man sollte als besondere Eigenschaft der axialen Frequenz bemerken, daß sie mittels der Ringspannung, U_0 , beliebig verstimmt werden kann. In erster Näherung gilt: $\Delta\nu_z = \frac{1}{2} \left(\frac{\nu_z}{U_0} \right) \Delta U_0 \simeq +35$ kHz/V in der Präzisionsfalle (Typische Speicherspannung $U_0 = -13,227480$ V) und $+85$ kHz/V in der Analysefalle (Typische Speicherspannung $U_0 = -2,174400$ V). Gleichzeitig ist ν_z von der Stärke des Magnetfeldes B_0 völlig unabhängig.

Die x und y Gleichungen sind dagegen miteinander gekoppelt, deshalb braucht man ein bißchen mehr Mühe, um sie zu lösen (Anhang A):

$$\begin{aligned} x(t) &= A_+ \sin(2\pi\nu_+ t + \varphi_+) + A_- \sin(2\pi\nu_- t + \varphi_-) \\ y(t) &= A_+ \cos(2\pi\nu_+ t + \varphi_+) + A_- \cos(2\pi\nu_- t + \varphi_-). \end{aligned} \quad (2.16)$$

Die radiale Bewegung setzt sich aus zwei kreisförmigen periodischen Bewegungen zusammen¹⁰: $\vec{\rho}(t) = A_+ \cdot (\sin(\omega_+ t + \varphi_+), \cos(\omega_+ t + \varphi_+)) + A_- \cdot (\sin(\omega_- t + \varphi_-), \cos(\omega_- t + \varphi_-))$, jeweils *Zyklotron-* (A_+) und *Magnetronbewegung* (A_-) genannt. Aus positiver z -Richtung betrachtet, laufen beide im Uhrzeigersinn. Die Frequenzen lauten:

$$\begin{aligned} \nu_+ &= \frac{\nu_c}{2} + \sqrt{\left(\frac{\nu_c}{2}\right)^2 - \frac{\nu_z^2}{2}} \longrightarrow \text{reduzierte Zyklotronfrequenz} \\ \nu_- &= \frac{\nu_c}{2} - \sqrt{\left(\frac{\nu_c}{2}\right)^2 - \frac{\nu_z^2}{2}} \longrightarrow \text{Magnetronfrequenz} \end{aligned} \quad (2.17)$$

⁹ Von nun an und falls es nicht anders explizit erwähnt, werden sich alle angegebene experimentelle Werte auf ein einzelnes $^{16}\text{O}^{7+}$ - Ion in der Präzisionsfalle beziehen.

¹⁰ Es ist günstig, die Kreisfrequenzen folgendermaßen zu definieren: $\omega_j = 2\pi\nu_j$, wobei die unmittelbar meßbare Frequenzen nach wie vor ν_j bleiben.

wobei $\nu_c = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{q}{m} \cdot B_0 \longrightarrow$ freie Zyklotronfrequenz¹¹.

Die vorliegende Tabelle fasst die typischen Werte aller drei Frequenzen, Energien und Amplituden eines $^{16}\text{O}^{7+}$ -Ions in der Präzisionsfalle zusammen:

Frequenz [Hz]	Energie [meV]	Amplitude [μm]	Quantenzahl
$\nu_+ = 25\,289\,562$	$E_+ = 0,36$	$A_+ = 0,41$	3 460
$\nu_z = 925\,156$	$E_z = 5,29$	$A_z = 43,3$	1 385 100
$\nu_- = 16\,942$	$E_- = -0,097$	$A_- = 8,29$	1 385 100

Tabelle 2.1: **Dynamische Parameter eines $^{16}\text{O}^{7+}$ -Ions in der PF.**

und in der Analysefalle:

Frequenz [Hz]	Energie [meV]	Amplitude [μm]	Quantenzahl
$\nu_+ = 24\,948\,510$	$E_+ = 0,36$	$A_+ = 0,41$	3 510
$\nu_z = 369\,220$	$E_z = 0,42$	$A_z = 30,6$	276 500
$\nu_- = 2\,736$	$E_- = -0,032$	$A_- = 3,73$	276 500

Tabelle 2.2: **Dynamische Parameter eines $^{16}\text{O}^{7+}$ -Ions in der AF.**

Die riesigen Quantenzahlen deuten außerdem darauf hin, daß eine reine klassische Beschreibung der Bewegung völlig ausreichend ist.

In Abbildung 2.8 ist eine (nicht maßstäbliche) Darstellung der Ionenbewegung in der Falle zu sehen. Normalerweise sind die Verhältnisse der verschiedenen Frequenzen nicht ganzzählig und die Kurve ist deshalb nicht geschlossen. Das Ion besetzt im Laufe der Zeit den gesamten Raumbereich $[A_- - A_+, A_- + A_+] \otimes [-A_z, A_z]$.

2.3.1 Das Invarianztheorem

Man sollte bemerken daß $\nu_+ + \nu_- = \nu_c$. Damit lässt sich im Prinzip das Magnetfeld am Ort des Ions bestimmen: $\nu_c = 25\,306\,504\text{ Hz} \rightarrow B_0 = 3,796\,830\text{ T}$. Allerdings ist diese Beziehung nur im idealen Fall korrekt. In [Bro86] ist

¹¹ ν_c wäre die Drehfrequenz eines Ions um die Magnetfeldachse wenn das elektrische Feld nicht vorhanden wäre. Im Kontext der Penningfalle ist ν_c nur zur Vereinfachung der Gleichungen definiert. Ab nun, wenn nicht anders explizit erläutert, mit „Zyklotronfrequenz“ wird immer die reduzierte Zyklotronfrequenz ν_+ gemeint.

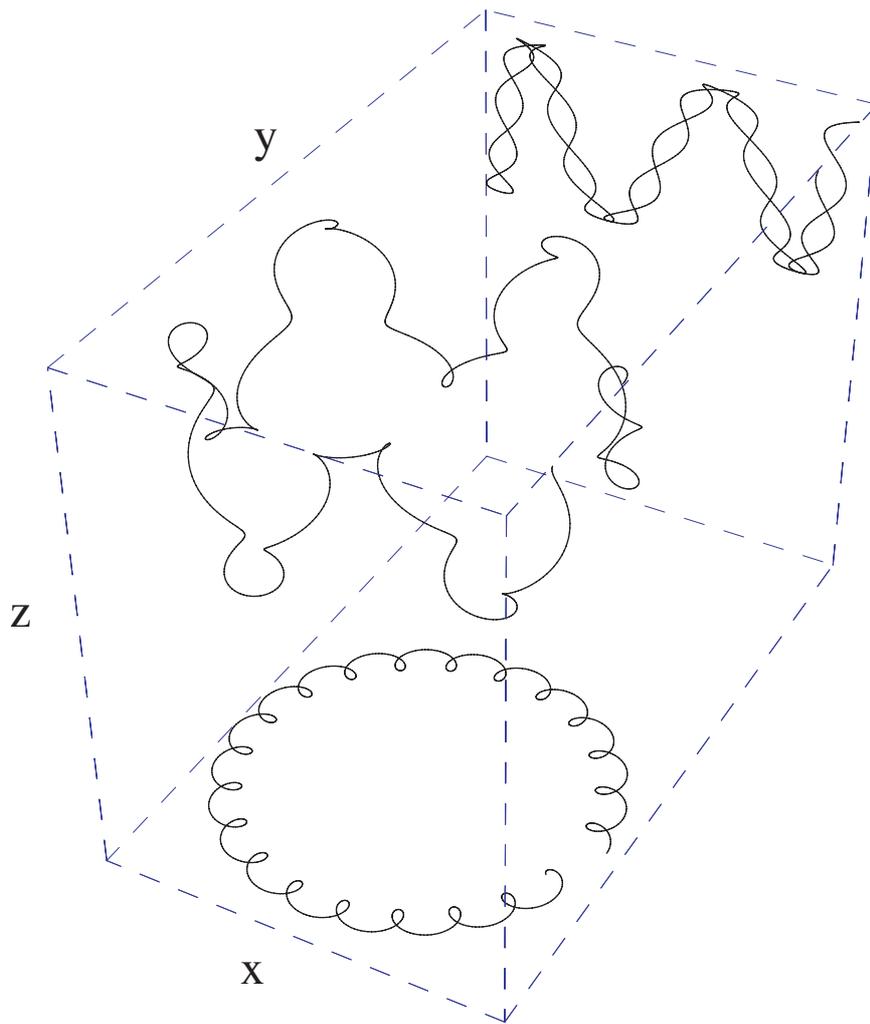


Abbildung 2.8: **Bewegung eines Ions in der Penningfalle.**

Auf den $x - z$ und $y - z$ Ebenen sind die Projektionen der Bewegung gezeigt. Dadurch wird die Periodizität aller drei Komponenten der Bewegung offensichtlich.

vorgeschlagen worden die folgende Formel zu verwenden:

$$\nu_c = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{q}{m} \cdot B_0 = \sqrt{\nu_+^2 + \nu_z^2 + \nu_-^2}. \quad (2.18)$$

Diese Beziehung gilt selbst wenn die Fallenelektroden nicht perfekt ausgerichtet sind, eine Verkippung zwischen Magnetfeldachse und Elektrodenturm besteht und/oder die Elektroden- Geometrie nicht absolut rotations-symmetrisch sind [Bro86]. Da alle diese Imperfektionen unvermeidlicherweise immer vorhanden sind, eignet sich 2.18 zur Kalibrierung des Magnetfeldes besser als die ideale Beziehung: trotz aller Abweichungen vom idealen Fall setzt sich die Bewegung des Ions noch aus drei periodischen Bewegungen zusammen; die *messbaren Frequenzen* ν_+ , ν_z , ν_- liefern mittels dieser Formel den Betrag des Magnetfeldes. Man nennt 2.18 *Invarianztheorem*. Es wird zu solchem Zweck systematisch verwendet.

Der Fehler bei der Bestimmung der freien Zyklotronfrequenz lautet nach dem Invarianztheorem (mit den in Tabelle 1.1 angegebenen Werten):

$$\begin{aligned}\Delta\nu_c &= \frac{\nu_+}{\nu_c} \cdot \Delta\nu_+ + \frac{\nu_z}{\nu_c} \cdot \Delta\nu_z + \frac{\nu_-}{\nu_c} \cdot \Delta\nu_+ \\ &\simeq 0,9993 \cdot \Delta\nu_+ + 0,04 \cdot \Delta\nu_z + 0,0007 \cdot \Delta\nu_+.\end{aligned}\quad (2.19)$$

Wenn man eine relative Messgenauigkeit des Magnetfeldes, und somit des g-Faktors, von 10^{-9} anstrebt, muß die freie Zyklotronfrequenz mit einem kleineren (absoluten) Fehler als 26 mHz gemessen werden; die entsprechenden (absoluten) Toleranzen für die axiale und Magnetronfrequenz sind jeweils 0,65 Hz und 37 Hz. Die möglichst genaue Messung von ν_+ ist offensichtlich am wichtigsten.

2.4 Berechnung der C_j – Koeffizienten

Angesichts der linearen Abhängigkeit von $\phi(r, z)$ als Funktion der Ringspannung U_0 ist es günstig, die Koeffizienten C_k zu normieren: $c_j = \frac{C_j}{U_0}$. Die so normierten Koeffizienten sind lediglich eine Funktion der geometrischen Parameter der Falle und des angelegten Tuning-Ratios:

$$c_j = c_j(l_e, l_k, l_r, d, a; T) \quad ; \quad C_j = U_0 \cdot c_j.$$

Mit (2.11) läßt sich das Potential (2.9) folgendermaßen umschreiben:

$$\phi(r, z) = U_0 \cdot \sum_m [A_m + T \cdot B_m] I_0\left(\frac{m\pi}{l}r\right) \cos\left(\frac{m\pi}{l}z\right). \quad (2.20)$$

Die Koeffizienten c_j kann man nun trivialerweise berechnen ($I_0(0) = 1$):

$$c_j = \frac{1}{j!} \cdot \frac{1}{U_0} \cdot \left. \frac{\partial^j \phi}{\partial z^j} \right|_{(0,0)} = \frac{1}{j!} \cdot \sum_m [A_m + T \cdot B_m] \underbrace{\left[\frac{\partial^j}{\partial z^j} \cos\left(\frac{m\pi}{l}z\right) \right]_{z=0}}_{\delta} \quad (2.21)$$

man hat (mit $n \in \mathbb{N}^+$):

$$\begin{aligned}- \forall j = 2n + 1 \text{ (} j \text{ ungerade)} &\rightarrow \delta = (-1)^{\frac{j+1}{2}} \left(\frac{m\pi}{l}\right)^j \sin(0) = 0 \\ - \forall j = 2n \text{ (} j \text{ gerade)} &\rightarrow \delta = (-1)^{j/2} \left(\frac{m\pi}{l}\right)^j \cos(0) = (-1)^{j/2} \left(\frac{m\pi}{l}\right)^j.\end{aligned}$$

Wie man aus Symmetriegründen erwartet, verschwinden alle ungeraden Terme der Taylorentwicklung von $\phi(r, z)$. In der Praxis ist das aber nicht ganz korrekt, da zum Beispiel die Falle nicht perfekt symmetrisch um den Ring ist, oder, wie schon erwähnt, die Korrekturspannungen und die obere und untere Masse nicht hundertprozentig übereinstimmen. Das alles führt dazu, daß kleine ungerade Terme immer anwesend sind.

Besonders wichtig ist der c_2 –Term; mit 2.11 berechnet er sich zu:

$$c_2 = -0,030374 \pm 0,000002 \text{ 1/mm}^2 \quad (2.22)$$

wobei der Fehler auf der Anfertigungstoleranz von $50 \mu\text{m}$ beruht. Mit der nominellen Spannung von $U_0 = -13,227480 \text{ V}$ soll theoretisch die axiale Frequenz eines $^{16}\text{O}^{7+}$ – Ions $\nu_z = 923\,236 \text{ Hz}$ betragen, die reale beträgt aber $925\,160 \text{ Hz}$. Spätere Überlegungen werden beide Werte näher zusammenrücken. Trotzdem ist die Übereinstimmung zwischen Theorie und Experiment schon vielversprechend. Der nächste Absatz zeigt es noch deutlicher.

2.4.1 Kompensierung des elektrostatischen Potentials

Um das Potential möglichst harmonisch zu gestalten, müßten alle Terme bis auf c_2 verschwinden. Die folgende Abbildung zeigt den Verlauf des Terms c_4 als Funktion des angelegten Tuning-Ratios:

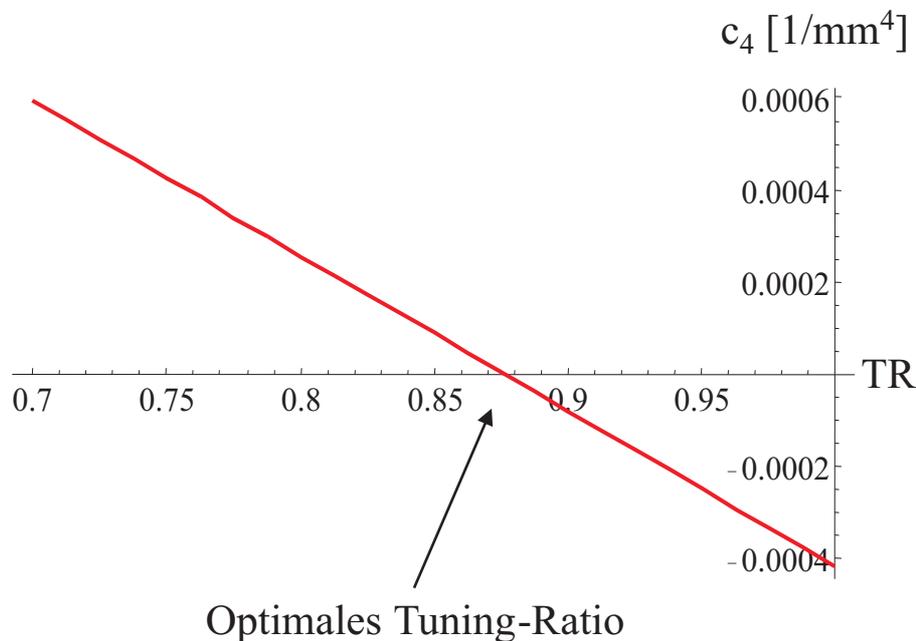


Abbildung 2.9: **Optimierung des Fallenpotentials.**

Legt man ein *optimales Tuning-Ratio* $\rightarrow \text{TR}_{\text{Opt}}$ an, dann lässt sich der c_4 Term auf Null kompensieren. Rechnerisch ergibt sich $\text{TR}_{\text{Opt}} = 0,876\,129 \pm 0,000\,002$ für unsere Falle. Der Fehler ist nochmals nur auf die Anfertigungstoleranz zurückzuführen. Der Wert TR_{Opt} wird experimentell ermittelt und liegt um $0,883\,020$ in der Präzisionsfalle. In der Analysefalle ruft die Anwesenheit des Nickelrings eine Abhängigkeit des optimalen Tuning-Ratios von der Zyklotronenergie hervor. Dies wird im Abschnitt 2.6 erläutert.

Angenommen, daß man das optimale Tuning-Ratio angelegt hat, dann ist die nächste nicht verschwindende elektrische Anharmonizität durch den Term c_6 gegeben; nach Gleichung 2.10 $\rightarrow c_6 = -5,5 \cdot 10^{-7} \text{ 1/mm}^6$. Dieses kann bei der Fehleranalyse für den g-Faktor völlig ignoriert werden.

2.4.2 Orthogonalität der fünfpoligen Falle

Die c_j -Koeffizienten lassen sich nach 1.15 folgendermaßen schreiben ($j =$ gerade, $m =$ ungerade):

$$\begin{aligned} c_j &= e_j(l_e, l_k, l_r, d, a) + T \cdot d_j(l_e, l_k, l_r, d, a) \\ e_j(l_e, l_k, l_r, d, a) &= \frac{1}{j!} \cdot \sum_{m=1}^{\infty} A_m \cdot (-1)^{j/2} \left(\frac{m\pi}{l}\right)^j \\ d_j(l_e, l_k, l_r, d, a) &= \frac{1}{j!} \cdot \sum_{m=1}^{\infty} B_m \cdot (-1)^{j/2} \left(\frac{m\pi}{l}\right)^j. \end{aligned} \quad (2.23)$$

Man sollte beachten, daß die d_j -Parameter die Abhängigkeit von c_j als Funktion des Tuning-Ratios darstellen $\rightarrow d_j = \frac{\partial c_j}{\partial T}$. Besonders günstig wäre es wenn d_2 gleich Null wäre, damit würde der c_2 -Term und somit die axiale Frequenz des Ions vom angelegten Tuning-Ratio unabhängig. Selbstverständlich darf der d_4 -Term nicht verschwinden, ansonsten ließe sich das Potential nicht kompensieren.

Der Begriff *Orthogonalität* bezieht sich darauf, daß man eine gewisse Geometrie der Käfigelektroden finden kann für welche $d_2 = 0$. Wenn das der Fall ist, dann spricht man von einer *orthogonalen Falle*.

Legt man die Parameter: $l_e = 6,80$, $l_r = 0,92$, $d = 0,14$, $a = 3,50$ mm fest, kann d_2 als Funktion der Länge der Korrektorelektroden dargestellt werden:

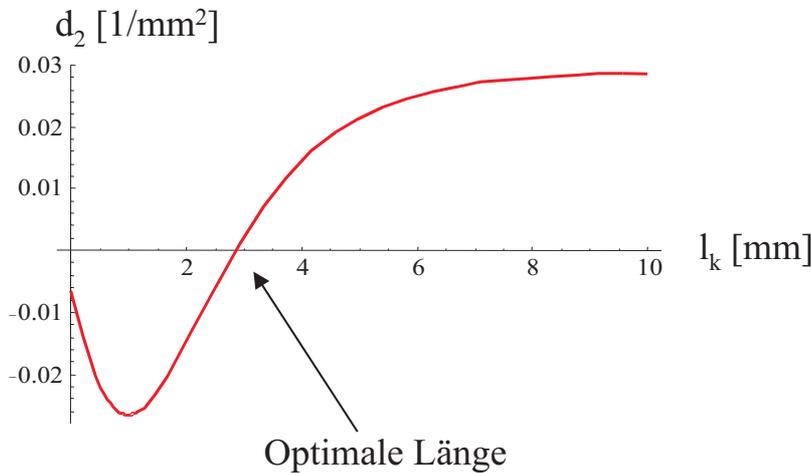


Abbildung 2.10: **Optimale Länge der Korrektorelektroden.**

Die Abbildung 2.10 zeigt, daß eine (und nur eine) bestimmte Länge der Korrektorelektroden besteht, für die $d_2 = 0$. Rechnerisch erhält man $l_K = 2,84790 \pm 0,00005$ mm als optimale Länge. Der Fehler hier ist rein numerisch.

Da die im Experiment verwendete Falle eine Länge der Korrektorelektroden von $l_K = 2,75 \pm 0,05$ mm aufweist, ist sie theoretisch nicht ganz Ortho-

gonal¹². Für diese Länge berechnet sich d_2 zu $-0,001594 \pm 0,000002$ $1/mm^2$ und die theoretische Abhängigkeit der axialen Frequenz vom angelegten Tuning-Ratio lautet:

$$\nu_z = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{q}{m} 2U_0(e_2 + Td_2)} \rightarrow \frac{\partial \nu_z}{\partial T} = \frac{q}{m} \cdot \frac{U_0}{4\pi^2 \nu_z} \cdot d_2 = 24 \text{ Hz/mUnit} \quad (2.24)$$

für ein $^{16}\text{O}^{7+}$ -Ion in der PF.

Darüber hinaus ist technisch der d_4 -Term auch wichtig, da er angibt, um wieviel das Tuning-Ratio geändert werden muß, damit eine bekannte Anharmonizität $c_4 \neq 0$ kompensiert werden kann. Für unsere Falle gilt theoretisch $d_4 = -0,00337 \pm 0,00002$ $1/mm^4$. Um das Tuning-Ratio experimentell zu optimieren, wird c_4 gemessen und mit Hilfe vom hier angegebenen d_4 -Term das Tuning-Ratio variiert bis c_4 minimal wird.

2.5 Die reale Penningfalle: sekulare Störungen

Um das Magnetfeld am Ort des Ions zu bestimmen wird vom Invarianztheorem Gebrauch gemacht, um einige der Abweichungen vom idealen Fall unserer Falle zu umgehen. Leider gibt es zusätzliche Effekte, welche die messbaren Frequenzen beeinflussen und ihr Verhalten vom idealen Fall noch weiter entfernen. Diese sind im Invarianztheorem nicht berücksichtigt worden und müssen daher extra analysiert werden.

Für die g-Faktor-Messung ist es sehr wichtig, möglichst gut zu verstehen was eigentlich gemessen wird, um mögliche systematische Fehler zu verhindern oder mindestens zu minimieren; mit anderen Worten: wir müssen das Magnetfeld am Ort des Ions während der Messung der Larmor-Frequenz genau kennen. Diese Forderung wird indirekt mittels der Messung der Bewegungsfrequenzen, ν_+ , ν_z , ν_- , erfüllt. In einem realen Käfig, wo das elektrische Potential nicht mehr harmonisch und das Magnetfeld nicht homogen ist, sind sämtliche Frequenzen keine reinen Funktionen der Speicherspannung und des Magnetfeldes mehr, sondern auch der Bewegungsenergien $\nu_{\pm, z, L} = \nu_{\pm, z, L}(E_{\pm, z})$. Da die Messung aller dieser Frequenzen unvermeidlicherweise bei unterschiedlichen nicht verschwindenden Energien stattfindet, ist der gemessene g-Faktor, $g_m \sim \frac{\nu_L(E_+, E_z, E_-)}{\nu_c(E_+, E_z, E_-)}$, auch eine Funktion der Energien $\rightarrow g_m = g_m(E_+, E_z, E_-)$, insbesondere der Zyklotronenergie, wie wir demnächst sehen werden. Da logischerweise bei geringeren Energien die experimentelle Lage mehr dem idealen Fall ähnelt, ist zu erwarten, daß bei verschwindenden Energien sich die Messung immer mehr dem *richtigen g-Faktor*, g_0 , nähert. Infolgedessen werden wir das Ergebnis unseres Experi-

¹² Die hier angegebene Fertigungstoleranz ist ziemlich konservativ, in der Tat wurde die technische Zeichnung der Korrekturolektrode, mit einer Fertigungstoleranz von $10\mu m$, der mechanischen Werkstatt des Physik-Instituts angegeben. Die Techniker können im Prinzip das Metall so fein bearbeiten [Ver01].

ments folgendermaßen definieren:

$$g_{\text{exp}} = \lim_{\substack{E_+ \rightarrow 0 \\ E_z \rightarrow 0 \\ E_- \rightarrow 0}} g_m(E_+, E_z, E_-). \quad (2.25)$$

Wir werden den g-Faktor bei verschiedenen Energien messen müssen und anschließend auf Energie Null extrapolieren. Wie diese Extrapolation durchzuführen ist, spielt eine zentrale Rolle bei dem hier behandelten Experiment und muß möglichst gut verstanden werden. Im Laufe dieser Dissertation werden wir auf zwei Methoden zur Messung von g_m stoßen. Die erste *traditionelle* Methode ist diejenige, die schon erfolgreich von Herrn H. Häffner zur Messung des g-Faktors an $^{12}\text{C}^{5+}$ eingesetzt wurde [Häf03], dabei ist die niedrigste messbare Zyklotronenergie auf etwa 3 eV ($\sim 33\,000$ K) begrenzt. Bei der zweiten *neuen* Methode dagegen liegt die typische Zyklotronenergie bei etwa 0,1 eV (~ 1100 K), also ungefähr ein Faktor dreißig kleiner. Andererseits sind die axiale und Magnetronenergie mit beiden Methoden fast identisch und betragen jeweils 1,7 meV und -0,032 meV.

Neben der Abhängigkeit des gemessenen g-Faktors von den Energien, gibt es zusätzliche Vorgänge, die im einzelnen diskutiert werden müssen; z.B. ist g_m auch eine Funktion der verwendeten Mikrowellenleistung, L_{MW} , die benötigt wird um Spin-Flips in der Präzisionsfalle zu induzieren: $g_m = g_m(L_{MW})$. Wir werden auch auf verschwindende Mikrowellenleistung extrapolieren müssen, aber logischerweise kann man nicht unmittelbar bei Mikrowellenleistung Null messen, daher wird diese Extrapolation auf rein theoretischen Überlegungen beruhen.

Nun aber wollen wir uns mit den auf die nicht verschwindenden Energien zurückzuführenden Effekten beschäftigen. Diese beruhen im wesentlichen, wie schon erwähnt, auf der Abweichungen des elektrischen Potentials von der idealen Harmonizität und auf den Inhomogenitäten des Magnetfeldes.

2.5.1 Das anharmonische Speicherpotential

Im Absatz 2.4.1 wurde die Kompensierung des c_4 -Terms des elektrischen Potentials mittels der Korrekturspannungen erläutert. Obwohl c_4 zum großen Teil minimiert werden kann, besteht immer eine gewisse Unsicherheit in der Kompensierung, die dazu führt, daß $\phi(r, z)$ immer einen kleinen anharmonischen Anteil beinhaltet. Wie schon erwähnt, spielen die ungeraden Terme, c_1, c_3, \dots aus Symmetrie-Gründen eine untergeordnete Rolle. Darüberhinaus werden wir sehen, daß sie keine sogenannten *sekularen Störungen* verursachen können: in erster Ordnung der Störungstheorie ist ihr Effekt auf die Bewegungsfrequenzen gleich Null. Infolgedessen werden wir uns auf den Einfluß des kleinen c_4 -Terms konzentrieren.

Aus 1.26 hat man:

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} \rightarrow \begin{cases} \frac{\partial^4 \phi}{\partial r^4} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{\partial^4 \phi}{\partial r^2 \partial z^2} \\ \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2 \partial r^2} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{\partial^4 \phi}{\partial z^4} \end{cases} \text{ und da } \frac{\partial^4 \phi}{\partial r^2 \partial z^2} = \frac{\partial^4 \phi}{\partial z^2 \partial r^2}$$

$$\text{hat man } \rightarrow \frac{\partial^4 \phi}{\partial r^4} = \frac{1}{4} \cdot \frac{\partial^4 \phi}{\partial z^4} \rightarrow c_{4,0} = \frac{1}{4} \cdot c_{0,4}; \quad c_{2,2} = -\frac{1}{2} \cdot c_{0,4}. \quad (2.26)$$

Mit Hilfe der Taylorschen Entwicklung des Potentials (Gleichung 2.4) und des obigen Ausdrucks läßt sich der Oktupol-Beitrag zum elektrischen Potential folgendermaßen darstellen:

$$\Delta \phi(r, z) = U_0 c_4 \cdot \left(z^4 - \frac{1}{2} z^2 r^2 + \frac{1}{4} r^4 \right). \quad (2.27)$$

Dieser Beitrag stellt eine kleine anharmonische Störung des Potentials dar, die zur Hamiltonischen Funktion welche die Bewegung des Ions in der Penningfalle beschreibt, addiert werden muß: $H = H_{axial,0} + H_{radial,0} + q \cdot \Delta \phi(r, z)$. Als Beispiel wollen wir die Wirkung des z^4 Terms untersuchen:

Man hat den gestörten axialen Anteil der Hamiltonischen Funktion: $H_{axial} = \frac{p_z}{2m} + (q U_0 c_2) z^2 + (q U_0 c_4) z^4 = H_{axial,0} + \Delta H$. Wenn man anstatt der üblichen Koordinaten (z, p_z) , die Aktion-Winkel Koordinaten verwendet ($j_z, \beta_z = \varphi_z/2\pi$), definiert durch: $j_z = E_z/\nu_z$; $\beta_z = \text{Anfangsphase}$ (siehe Gleichung 2.15), dann hat man erreicht, daß (j_z, β_z) kanonisch konjugierte Variablen darstellen (siehe Anhang A). Da diese zwei Variablen, im idealen Fall, Bewegungskonstante sind, ist der ungestörte Hamilton-Operator als Funktion von ihnen identisch Null¹³ $\rightarrow H_{axial,0}(\beta_z, j_z) = 0$. Damit sind ihre Bewegungsgleichungen mit dem beigefügten Störungspotential ziemlich einfach:

$$\frac{d\beta_z}{dt} = \frac{\partial \Delta H(\beta_z, j_z)}{\partial j_z} \quad ; \quad \frac{dj_z}{dt} = -\frac{\partial \Delta H(\beta_z, j_z)}{\partial \beta_z}. \quad (2.28)$$

Nun kann man diese Gleichungen nur annäherungsweise lösen. Dafür setzt man auf der rechten Seite der obigen Ausdrücke die ungestörte Lösung 2.15 für $z(t)$ ein:

$$\Delta H(\beta_z, j_z) = (q U_0 c_4) \cdot z(t)^4 = q U_0 c_4 \left(\frac{j_z \nu_z}{q U_0 c_2} \right)^2 \cos^4[2\pi(\nu_z t + \beta_z)]. \quad (2.29)$$

Die Gleichung für β_z lautet:

$$\dot{\beta}_z = \frac{c_4}{c_2^2} \cdot \frac{2 j_z \nu_z^2}{q U_0} \cdot \cos^4[2\pi(\nu_z t + \beta_z)]. \quad (2.30)$$

Da β_z auf beiden Seiten der vorherigen Gleichung steht, kann man sie analytisch nicht exakt lösen; man sieht trotzdem, daß β_z eine periodische Funktion

¹³ Das läßt sich ganz allgemein mit Hilfe der Hamilton-Jacobi Theorie für ein konservatives periodisches System, wie einen harmonischen Oszillator, formal beweisen. Der Beweis ist relativ einfach, aber hier nicht wichtig. Siehe [Gol80].

ist. Sie verursacht eine Netto-Änderung (bzw. *eine sekulare Störung*) in β_z nach einer Schwingungsperiode von:

$$\overline{\dot{\beta}_z} = \frac{c_4}{c_2^2} \cdot \frac{2 j_z \nu_z^2}{q U_0} \cdot \overline{\cos^4[2\pi(\nu_z t + \beta_z)]} = \frac{c_4}{c_2^2} \cdot \frac{2 j_z \nu_z^2}{q U_0} \cdot \frac{3}{8}. \quad (2.31)$$

Nach längeren Zeitintervallen als eine Schwingungsperiode ist der Mittelwert der Zeitabhängigkeit von β_z durch folgende triviale Funktion angegeben:

$$\beta_z(t) = \overline{\dot{\beta}_z} t + \beta_{z,0}. \quad (2.32)$$

Da $\frac{dj_z}{dt} \propto \cos^3[2\pi(\nu_z t + \beta_z)]$ und der Mittelwert aller ungeraden Potenzen von trigonometrischen Funktionen gleich Null ist, hat man außerdem: $\overline{\frac{dj_z}{dt}} = 0$. Infolgedessen ist in erster Ordnung der Einfluß des z^4 -Terms auf die Anfangsphase limitiert: sie ist keine Konstante der Bewegung mehr. Die axiale Bewegung kann noch mittels der idealen Lösung 2.15 beschrieben werden, dabei muß aber die konstante $\varphi_z = 2\pi\beta_z$ durch die in 2.30 gefundene Funktion ersetzt werden:

$$z(t) = A_z \cos[2\pi(\nu_z t + \beta_z(t))] = A_z \cos[2\pi(\nu_z + \overline{\dot{\beta}_z}) \cdot t + \varphi_{z,0}]. \quad (2.33)$$

Die vorherige Gleichung besagt, daß in erster Ordnung die axiale Bewegung noch periodisch ist, die Frequenz aber muß folgendermaßen geändert werden:

$$\nu_z = \nu_{z,0} + \overline{\dot{\beta}_z} \longrightarrow \nu_z = \nu_{z,0} + \frac{c_4}{c_2^2} \cdot \frac{3 \nu_z}{4 q U_0} E_z. \quad (2.34)$$

Wie schon am Anfang dieses Abschnittes erwähnt, ist nun die Frequenz eine Funktion der Energie. Diese ist die wichtigste Konsequenz der Einführung des anharmonischen Anteils $\Delta\phi$. Im Prinzip, wenn die Energie konstant wäre, könnte man ν_z genauso präzise wie im idealen Fall bestimmen, da E_z aber keine Konstante ist, sondern einer Boltzmann Verteilung (siehe Abschnitt 4.9) unterworfen, verbreitet sich die axiale Resonanz, und daher läßt sich ν_z mit zunehmender Temperatur immer ungenauer bestimmen. Aus diesem Grund muß der c_4 -Term möglichst klein gehalten werden. Nun ist die experimentelle Methode, die man dafür verwendet, auch eindeutig: man misst ν_z bei zwei unterschiedlichen axialen Energien (bzw. Temperaturen) und die an der Korrektorelektroden angelegte Spannung wird solange geändert bis die absolute Differenz beider Messungen möglichst gering ist.

Verallgemeinerung des erhaltenen Resultates: Korrekturmatrix

Mit dem vorherigen Modell kann man die Physik der realen Penningfalle sehr pädagogisch einführen. Trotzdem muß die Berechnung noch verallgemeinert werden, da weitere Abhängigkeiten der Frequenzen von den Energien bestehen. In [Bro86] ist eine leistungsfähigere Methode verwendet worden, basierend auf der Störungstheorie der Quantenmechanik, um den Effekt des $\Delta\phi$ Terms auf alle Bewegungsfrequenzen zu untersuchen. Neben der hier vorgestellten Abhängigkeit der Bewegungsfrequenz von der Energie sind dort auch

die Effekte auf die Larmor- Frequenz ω_L berücksichtigt worden. Das Ergebnis wird in Form einer Korrekturmatrix angegeben¹⁴:

$$\begin{pmatrix} \Delta\omega_+/\omega_+ \\ \Delta\omega_z/\omega_z \\ \Delta\omega_-/\omega_- \\ \Delta\omega_L/\omega_L \end{pmatrix} = \frac{6 c_4}{q U_0} \begin{pmatrix} +\frac{1}{4}(\omega_z/\omega_+)^4 & -\frac{1}{2}(\omega_z/\omega_+)^2 & -(\omega_z/\omega_+)^2 \\ -\frac{1}{2}(\omega_z/\omega_+)^2 & \frac{1}{4} & 1 \\ -(\omega_z/\omega_+)^2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \Delta E_+ \\ \Delta E_z \\ \Delta E_- \end{pmatrix}. \quad (2.35)$$

Aus dem vorgestellten mathematischen Modell lernt man also, daß die Bewegung des Ions in einem realen Käfig noch periodisch ist und daher mit wohl definierter aber energieabhängiger Frequenz stattfindet. Außerdem können die ungeraden Abweichungen des Potentials vom harmonischen Fall keine sekulären Störungen verursachen und daher werden sie eine sehr untergeordnete Rolle bei der Suche nach möglichen systematischen Fehlerquellen spielen. In der Tat ist nur der Gradient des Magnetfeldes in der Präzisionsfalle von Bedeutung für die g-Faktor Messung. Alle anderen ungeraden elektrischen und magnetischen Koeffizienten sind mit der jetzigen erreichten Messgenauigkeit von etwa 1 ppb völlig irrelevant.

Genauso wie beim elektrischen Potential, zeichnet sich die Abweichung des Magnetfeldes von der idealen Homogenität dadurch aus, daß sämtliche messbaren Frequenzen Funktionen der Energien werden. Das wollen wir im nächsten Absatz ausführlich untersuchen.

2.5.2 Das inhomogene Magnetfeld

Im Anhang B ist das Magnetfeld der Spule berechnet worden. Allgemein ist das Magnetfeld nicht rein axial, sondern es besteht aus einem axialen plus einem radialen Anteil: $\vec{B} = B_r \cdot \hat{u}_r + B_z \cdot \hat{u}_z$. Mit B.10, B12 und der in Abbildung B.6 angegebenen Parameter, erhält man $B_r/B_z = -8 \cdot 10^{-12}$ in der Präzisionsfalle und am Ort des Ions. Selbst wenn der Einfluß des Nickelrings berücksichtigt wird (Anhang C), ist dieses Verhältnis $B_r/B_z = -4 \cdot 10^{-8}$ völlig vernachlässigbar. Infolgedessen, wird der radiale Anteil des Magnetfeldes in der nachfolgenden Analyse ignoriert.

Viel wichtiger ist die Tatsache, daß B_z (ab nun einfach *das Magnetfeld*) keine Konstante, sondern ortsabhängig, bzw. inhomogen ist: $B_z = B_z(r, z)$. Genauso wie beim elektrischen Potential, definieren wir die B_j - Koeffizienten folgendermaßen:

$$B_j = \frac{1}{j!} \cdot \frac{\partial^j}{\partial z^j} B_z(r, z) \Big|_{(0, z_0)} \quad (2.36)$$

wobei $z_0 = -27,8 \text{ mm}$ für die Präzisionsfalle und $z_0 = 0$ für die Analysefalle [Sta98] gilt. Im Anhang C sind theoretische Werte einiger dieser Koeffizienten angegeben.

¹⁴Die in [Bro86] verwendete Definition von c_4 ist verschieden als diejenige dieser Dissertation.

2.5.3 Quadratische Korrektur: die magnetische Flasche

Aufgrund der axialen Symmetrie des Magnetfeldes in der Analysefalle ist dessen Gradient theoretisch gleich Null, deshalb ist die Abweichung von \vec{B} von der perfekten Homogenität in erster Näherung durch die in B.14 hergeleitete quadratische Funktion beschrieben, d.h. durch eine *magnetische Flasche*:

$$\Delta\vec{B}(r, z) = B_2 \left[-z \cdot r \cdot \hat{u}_r + \left(z^2 - \frac{r^2}{2} \right) \cdot \hat{u}_z \right]. \quad (2.37)$$

In der Präzisionsfalle ist jedoch $B_1 \neq 0$. Dieser ungerade Term stellt keine sekulare Störung der Bewegung dar und sein Einfluß auf die Ionenbewegung muß extra analysiert werden.

Zunächst können beide Fallen als eine magnetische Flasche angesehen werden; der Unterschied ist rein quantitativ; die Analysefalle ist etwa 1000 Mal inhomogener als die Präzisionsfalle: $B_{2,AF} \sim 1000 B_{2,PF}$. Von der magnetischen Flasche wird in beiden Käfigen auf verschiedene Art Gebrauch gemacht.

Die Abbildung 2.11 veranschaulicht die geometrische Lage jener Punkte mit dem gleichen Betrag des Magnetfeldes in der Analysefalle. Sie beruht auf der exakten Berechnung des Magnetfeldes des Nickelrings (siehe Anhang C).

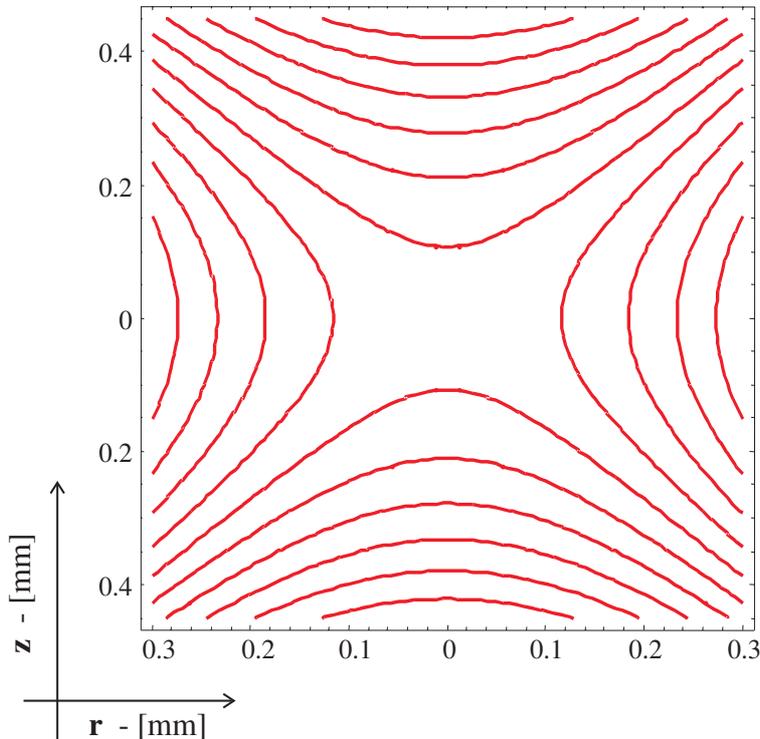


Abbildung 2.11: Äquimagnetfeldlinien in der Analysefalle.

Für typische Bewegungsamplituden ($\sim 30\mu\text{m}$) ist das Magnetfeld parabelförmig.

Es ist eindeutig zu sehen, daß in sehr guter Näherung die Ortsabhängigkeit

des Magnetfeldes durch Parabeln beschrieben werden kann. Man sollte darauf achten, daß die analytische Abhängigkeit der axialen Komponenten von (r, z) identisch mit denjenigen des elektrischen Potentials ist.

2.5.4 Einfluß der magnetischen Flasche auf die Bewegungsfrequenzen

Mit Hilfe der im Anhang A angegebenen Lagrangeschen Funktion, $L(\vec{r}, \dot{\vec{r}})$ läßt sich der Effekt des inhomogenen Anteils des Magnetfeldes, $\Delta\vec{B}(r, z)$, auf die Bewegung relativ einfach bestimmen. Da für das homogene Feld $\vec{A}(\vec{r}) = \frac{1}{2}\vec{B} \times \vec{r}$ gilt, kann man L folgendermaßen umschreiben:

$$\begin{aligned} L(\vec{r}, \dot{\vec{r}}) &= \frac{1}{2}m\dot{\vec{r}}^2 - q\phi(\vec{r}) + q\vec{A}(\vec{r}) \cdot \dot{\vec{r}} \rightarrow q\vec{A}(\vec{r}) \cdot \dot{\vec{r}} = q\frac{1}{2}(\vec{B} \times \vec{r}) \cdot \dot{\vec{r}} = \dots \\ &= \frac{q}{2m}\vec{B} \cdot (\vec{r} \times m\dot{\vec{r}}) = \frac{q}{2m}\vec{l} \cdot \vec{B} \rightarrow \vec{\mu} = \frac{q}{2m}\vec{l} = \text{magnetisches Dipolmoment;} \end{aligned}$$

und die Lagrangesche Funktion $L(\vec{r}, \dot{\vec{r}}) = \frac{1}{2}m\dot{\vec{r}}^2 - q\phi(\vec{r}) + \vec{\mu} \cdot \vec{B}$.

Der Term $\vec{\mu} \cdot \vec{B}$ stellt die *magnetische Energie* dar, die aufgrund der Wechselwirkung des magnetischen Dipolmoments des Ions mit dem Magnetfeld auftaucht. Wenn man die magnetische Flasche hinzufügt, dann entsteht ein zusätzlicher Beitrag zu dieser Energie: $\vec{\mu} \cdot \Delta\vec{B}$. Addiert man diesen neuen Term zur Lagrangeschen Funktion, dann erhält man:

$$\begin{aligned} L &= \frac{1}{2}m\dot{\vec{r}}^2 + \mu_z B_0 - qU_0 c_2 \left(z^2 - \frac{r^2}{2} \right) + \mu_z B_2 \left(z^2 - \frac{r^2}{2} \right) \\ L &= \frac{1}{2}m\dot{\vec{r}}^2 + \mu_z B_0 - (qU_0 c_2 - \mu_z B_2) \cdot \left(z^2 - \frac{r^2}{2} \right). \end{aligned} \quad (2.38)$$

Die neue Lagrangesche Funktion ist analytisch identisch mit der früheren, nur der Vorfaktor des elektrischen Potentials ist nun vom magnetischen Anteil der Energie modifiziert worden; entsprechend wird die axiale Frequenz auch modifiziert:

$$\omega_z = \sqrt{\frac{2qU_0 c_2}{m} - \frac{2\mu_z B_2}{m}} \simeq \omega_{z,0} - \frac{\mu_z B_2}{m \omega_{z,0}}. \quad (2.39)$$

Limitierungen des vorgestellten Modells

Zuerst sollte man bemerken, daß der radiale Anteil der magnetischen Flasche nicht berücksichtigt worden ist; da dieser Term aber linear mit z und r skaliert und $z(t)$, $r(t)$ beide periodische Funktionen sind, ist dessen Effekt im Mittelwert gleich Null und kann in erster Ordnung keine sekulare Störung verursachen. Zweitens muß erwähnt werden, daß strenggenommen das magnetische Dipolmoment μ_z keine Konstante der Bewegung ist, und daher ist die analytische Abhängigkeit der Bewegungsgleichungen mit den Ortskoordinaten durch die magnetische Flasche modifiziert. Eine unmittelbare Berechnung des mechanischen Drehmoments mit der in 2.16 angegebenen

Lösung liefert: $l_z = (\vec{r} \times \vec{p})_z = -mA_+^2 \omega_+ - mA_-^2 \omega_- - mA_+ A_- \omega_c \cos[(\omega_+ - \omega_-) \cdot t + \Delta\varphi] \neq \text{Konst.}$ Wir sind nur an den sekularen Störungen interessiert, d.h. an den Effekten, deren Mittelwert nicht verschwindet. Da $\cos[(\omega_+ - \omega_-) \cdot t + \Delta\varphi]$ eine periodische Funktion ist, ist deren Mittelwert gleich Null und sie kann keine permanente Verschiebung der Bewegungsfrequenzen mit der Energie verursachen. Was übrig bleibt ist $\bar{l}_z = -mA_+^2 \omega_+ - mA_-^2 \omega_- = l_+ + l_-$ mit $l_+ =$ Zyklotron Drehmoment, $l_- =$ Magnetron Drehmoment. Die vorgestellten Drehmomente haben auch eine andere einfache Interpretation: $l_{\pm} = -mA_{\pm}^2 \omega_{\pm} = \frac{2m}{q} \cdot \pi A_{\pm}^2 \cdot -q\nu_{\pm} = \frac{2m}{q} \times \text{Fläche} \times \text{Strom} = \frac{2m}{q} \times \text{magnetisches Dipolmoment } (\mu_{\pm})$. Mit den in A.16 und A.17 erhaltenen Ausdrücken für A_+ und A_- bekommt man:

$$\begin{aligned} l_+ &= -mA_+^2 \omega_+ = -\frac{2E_+}{(\omega_+ - \omega_-)} \longrightarrow \mu_+ = \frac{q}{2m} l_+ = -\frac{q}{m} \cdot \frac{E_+}{(\omega_+ - \omega_-)} \\ l_- &= -mA_-^2 \omega_- = -\frac{2E_-}{(\omega_- - \omega_+)} \longrightarrow \mu_- = \frac{q}{2m} l_- = -\frac{q}{m} \cdot \frac{E_-}{(\omega_- - \omega_+)} \quad (2.40) \\ \text{und } \bar{\mu}_z &= \mu_+ + \mu_- = -\frac{q}{m} \cdot \frac{1}{(\omega_+ - \omega_-)} \cdot (E_+ - E_-). \end{aligned}$$

Mit den in Tabelle 1.1 angegebenen Parametern hat man für ein einzelnes $^{16}\text{O}^{7+}$ -Ion in der Präzisionsfalle¹⁵: $\mu_+ = -1,53 \cdot 10^{-23} \text{ Am}^2 = -1,65 \mu_B$ und $\mu_- = -1,33 \cdot 10^{-24} \text{ Am}^2 = -0,14 \mu_B$, wobei $\mu_B = 9,2740154 \cdot 10^{-24} \text{ Am}^2$ das *Bohrsche Magneton* darstellt. Beide Dipolmomente sind ähnlicher Größenordnung wie dasjenige des Elektron-Spins des Ions.

Abhängigkeit der axialen Frequenz von den Energien

Aus 1.26 hat man:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \omega_z}{\partial E_+} &= -\frac{B_2}{m\omega_{z,0}} \cdot \frac{\partial \bar{\mu}_z}{\partial E_+} = \frac{B_2}{m\omega_{z,0}} \cdot \frac{q}{m} \cdot \frac{1}{(\omega_+ - \omega_-)} \\ &\simeq \frac{B_2}{m\omega_{z,0}} \cdot \frac{q}{m} \cdot \frac{1}{\omega_c} = \frac{B_2}{B_0} \cdot \frac{1}{m\omega_{z,0}} \quad (2.41) \\ \frac{\partial \omega_z}{\partial E_-} &= -\frac{\partial \omega_z}{\partial E_+} \\ \frac{\partial \omega_z}{\partial E_z} &= 0. \end{aligned}$$

Da die Verschiebung der axialen Frequenz ganz einfach gemessen werden kann, eignet sie sich zur experimentellen Bestimmung der Zyklotron- (bzw. Magnetron-) Energie sehr gut:

$$\Delta E_+ = \frac{B_0}{B_2} \cdot (2\pi)^2 m \nu_{z,0} \cdot \Delta \nu_z. \quad (2.42)$$

In der Präzisionsfalle $\Delta E_+ = +2,90 \text{ eV/Hz} = 33\,623 \text{ K/Hz}$. In der Analysefalle $\Delta E_+ = +0,9 \text{ meV/Hz} = 10,60 \text{ K/Hz}$. Wenn das Ion sich im thermischen

¹⁵ Das Minus-Vorzeichen kommt dadurch zustande, weil die radiale Bewegung in Uhrzeigersinn verläuft und damit das Drehmoment antiparallel zum Magnetfeld gerichtet ist.

Gleichgewicht mit der Nachweiselektronik befindet, beträgt seine Zyklotronenergie etwa 4 Kelvin. Entsprechend dieser Energie wird die axiale Frequenz gemessen: $\nu_{z,0}$. Diese gilt als Referenz. Um die Zyklotronbewegung nachweisen zu können, muß sie allerdings angeregt werden. Dabei ändert sich die axiale Frequenz: $\Delta\nu_z$. Mit dieser Änderung und 2.42 lässt sich dann die neue Zyklotronenergie sehr genau bestimmen. Das ist eine der wichtigsten Anwendungen der magnetischen Flasche in der Präzisionsfalle. Bedauerlicherweise lässt sich der $B_{2,PF}$ -Term nicht so einfach wie der c_4 -Term kompensieren und deshalb muss der g-Faktor als Funktion der Zyklotronenergie gemessen werden. Außerdem kann man mit der magnetischen Flasche der PF die axiale Temperatur des Ions während der g-Faktor Messung sehr gut bestimmen.

Abhängigkeit der Zyklotron- und Magnetronfrequenz von den Energien

Aus 2.17 können die Zyklotron- und Magnetronfrequenzen als reine Funktionen der axialen Frequenz und des Magnetfeldes angesehen werden: $\omega_+ = \omega_+(\omega_c, \omega_z)$, $\omega_- = \omega_-(\omega_c, \omega_z)$. Als Beispiel wollen wir nun die Abhängigkeit von ω_+ von der Zyklotronenergie bestimmen:

$$\frac{\partial \omega_+}{\partial E_+} = \frac{\partial \omega_+}{\partial \omega_c} \cdot \frac{\partial \omega_c}{\partial E_+} + \frac{\partial \omega_+}{\partial \omega_z} \cdot \frac{\partial \omega_z}{\partial E_+}. \quad (2.43)$$

Im idealen Fall aber: $\frac{\partial \omega_c}{\partial E_+} = 0$ und $\frac{\partial \omega_+}{\partial \omega_z} = \frac{-\omega_z}{(\omega_+ - \omega_-)} \simeq -\frac{\omega_z}{\omega_+}$ und deshalb:

$$\frac{\partial \omega_+}{\partial E_+} = -\frac{B_2}{B_0} \cdot \frac{1}{m\omega_+} \longrightarrow \frac{\partial \omega_+ / \partial E_+}{\partial \omega_z / \partial E_+} = -\frac{\omega_z}{\omega_+} \simeq -\frac{1}{25} \quad (2.44)$$

die letzte Beziehung deutet darauf hin, daß eine bestimmte Änderung der Zyklotronenergie ΔE_+ nicht die gleiche Verschiebung in beiden Frequenzen ν_z und ν_+ verursacht. $\Delta\nu_+$ ist nämlich 25 Mal kleiner (für ein $^{16}\text{O}^{7+}$ -Ion) und in entgegengesetzter Richtung wie die entsprechende Änderung von ν_z . Letztere ist gegenüber ν_+ deshalb wesentlich empfindlicher und eignet sich besser zur Bestimmung der Zyklotronenergie (bzw. der Magnetronenergie). Das gilt allgemein für alle mögliche Änderungen der axialen Frequenz: alles was eine gewisse Verschiebung $\Delta\nu_z$ hervorruft (zum Beispiel ein Spin-Flip), beeinflusst ν_+ gleichzeitig auch aber etwa 25 Mal weniger.

Zusammenfassung: Korrekturmatrix

Genauso wie beim elektrischen Potential, eignet sich die hier vorgestellte Methode sehr gut, um die grundlegende Physik in der magnetischen Flasche zu verstehen. Trotzdem verursacht diese weitere Verschiebungen der Frequenzen mit den Energien (z.B der Zyklotronfrequenz mit der axialen Energie), die mit diesem einfachen Modell nicht so einfach verstanden werden können. Eine systematische Berechnung der sekularen Störungen der magnetischen Flasche wurde von Gabrielse und Brown durchgeführt [Bro86]. Hier wird das

Ergebnis nochmals in Form einer Matrix angeben¹⁶:

$$\begin{pmatrix} \Delta\omega_+/\omega_+ \\ \Delta\omega_z/\omega_z \\ \Delta\omega_-/\omega_- \\ \Delta\omega_L/\omega_L \end{pmatrix} = \frac{B_2}{B_0} \cdot \frac{1}{2m\omega_+\omega_-} \begin{pmatrix} -(\frac{\omega_z}{\omega_+})^2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & -2 \\ -(\frac{\omega_z}{\omega_+})^2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \Delta E_+ \\ \Delta E_z \\ \Delta E_- \end{pmatrix}. \quad (2.45)$$

2.5.5 Bestimmung der Spin-Ausrichtung des Elektrons

Dem schlaun Leser ist wahrscheinlich schon aufgefallen, daß die magnetische Flasche sich sehr gut zur Feststellung der Spin-Ausrichtung des Elektrons eignet. Tatsächlich, da das gesamte magnetische Dipolmoment des Ions sich nicht nur aus dem mechanischen Dipolmoment, sondern aus der Summe diesem plus dem inneren (das vom Spin des Elektrons hervorgerufen wird: $\vec{\mu}_S$) zusammensetzt, ist die axiale Frequenz des Ions in der magnetischen Flasche auch eine Funktion des Spin-Zustands des Elektrons.

Sei $\nu_z(\uparrow)$ (bzw. $\nu_z(\downarrow)$) die axiale Frequenz des Ions mit der dritten Komponenten des Elektronspins $+1/2$ (bzw. $-1/2$), dann hat man aus 2.39:

$$\begin{aligned} \vec{\mu}_S = -g \frac{e}{2m_e} \vec{S} \rightarrow \nu_z(\uparrow) - \nu_z(\downarrow) &= \frac{B_2}{4\pi^2 m \nu_{z,0}} \cdot g\mu_B \cdot \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right) \\ \nu_z(\uparrow) - \nu_z(\downarrow) &= \begin{cases} 475 \text{ mHz} & \text{Analysefalle} \\ 0,15 \text{ mHz} & \text{Präzisionsfalle} \end{cases} \quad \text{für ein } {}^{16}\text{O}^{7+} \text{ Ion.} \end{aligned} \quad (2.46)$$

Der Sprung der axialen Frequenz aufgrund eines Spin-Flips in der Präzisionsfalle ist zu klein um nachgewiesen werden zu können; in der Analysefalle dagegen kann er relativ einfach detektiert werden. Eigentlich, wie schon öfters erwähnt, besteht die einzige spezifische Aufgabe der letzteren darin, die Spin-Ausrichtung festzustellen. Aus diesem Grund ist die typische Arbeitsfrequenz in der Analysefalle $\nu_z \sim 369\,220$ Hz auch deutlich kleiner als die in der PF, $\nu_z \sim 925\,150$ Hz, damit der Sprung durch einen Spin-Flip einfacher zu messen ist.

Man sollte darauf achten, daß $\nu_z(\uparrow) - \nu_z(\downarrow)$ umgekehrt proportional zur Masse des Ions ist: für die nahe Zukunft ist es geplant, den g-Faktor an wasserstoffähnliches Calcium, ${}^{40}\text{Ca}^{+19}$, zu messen; mit der jetzigen magnetische Flasche würde der Spin-Flip ~ 190 mHz betragen, was der Nachweis fast unmöglich macht¹⁷. Um das Problem zu umgehen ist eine neue Falle entwickelt worden [Ver01], die eine etwa vier Mal stärkere magnetische Flasche beinhaltet; anstatt aus Nickel ist der Ring der Analysefalle aus einer Kobalt-Eisen Legierung hergestellt worden, damit ist $B_2 \sim 40 [\frac{\text{mT}}{\text{mm}^2}]$ und $\Delta\nu_z \sim 760$ mHz für ${}^{40}\text{Ca}^{+19}$, was ganz einfach nachzuweisen ist.

¹⁶ Um aus 1.28 zu dem hier angegebenen Vorfaktor zu gelangen, muß davon Gebrauch gemacht werden, daß im idealen Fall folgende Beziehung besteht: $\omega_z^2 = 2\omega_+ \cdot \omega_-$.

¹⁷ Die statistischen Schwankungen von ν_z in der Analysefalle betragen ≈ 200 mHz [Ver01]. Diese sind auf Fluktuationen des elektrischen Speicherfelds zurückzuführen. Technisch ist es sehr schwer das elektrische Potential noch stabiler zu halten. Infolgedessen könnten bei einer eventuellen Messung an ${}^{40}\text{Ca}^{+19}$ keine Spin-Flips von den reinen statistischen Fluktuationen der axialen Frequenz unterschieden werden.

Im folgenden Abschnitt wird die verwendete Technik zur Bestimmung der Bewegungsfrequenzen erläutert. An dieser Stelle genügt es zu wissen, daß die axiale Frequenz mit etwa einer Genauigkeit von 50 mHz in knapp zwei Minuten gemessen werden kann. Die folgende Abbildung veranschaulicht eine Messung des kontinuierlichen Stern-Gerlach Effekts in der AF. Dabei wurde ein einzelnes $^{16}\text{O}^{7+}$ -Ion ständig, zwischen sukzessiven Messungen der axialen Frequenz, mit Mikrowellen (~ 103 GHz) bestrahlt. Die Messung zeigt zwei eindeutig definierte Zustände entsprechend Spin-Up und Spin-Down.

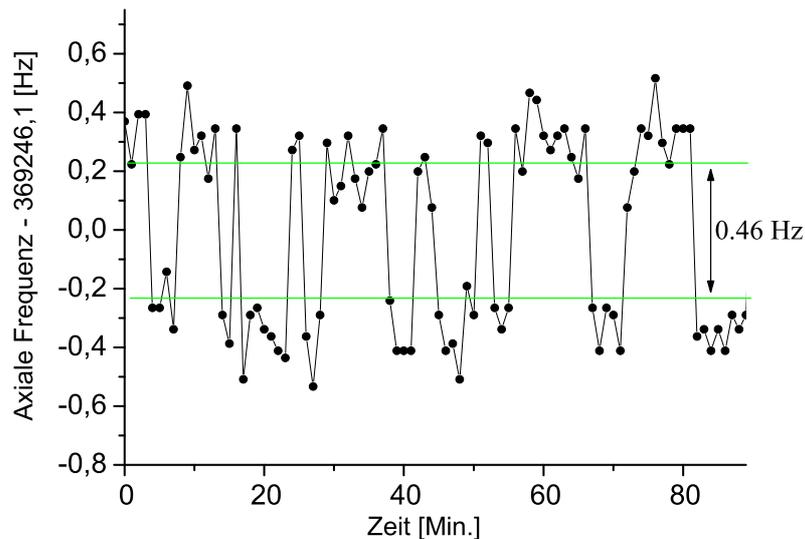


Abbildung 2.12: **Spin-Flips eines $^{16}\text{O}^{7+}$ -Ions in der Analysefalle.**

Aus der Messung ist zu sehen, daß der theoretisch erwartete Mittelwert des Sprungs aufgrund eines Spin-Flips von 475 mHz dem experimentellen Wert von 460 mHz sehr Nahe liegt. Unser Modell des Verhaltens des Ions in einem inhomogenen Magnetfeld liefert also gute und präzise Vorhersagen.

2.6 Verallgemeinerung der c_j -Koeffizienten

Um eine Messung wie diejenige der letzten Abbildung technisch möglich zu machen, ist es notwendig, noch einen wichtigen Punkt zu verstehen, nämlich die Abhängigkeit des optimalen Tuning-Ratios von der Zyklotronenergie des Ions: $TR_{Opt} = f(E_+)$.

Zwei gut definierte Frequenz-Bereiche entsprechend „Spin-Up“ und „Spin-Down“ gewinnt man nur wenn die Streuung von ν_z möglichst klein gehalten wird. Dafür ist absolut notwendig, das Tuning-Ratio immer optimal zu haben, ansonsten ist die Frequenz eine Funktion der axialen Energie. Die thermischen Fluktuationen der letzteren verursachen dann, daß die damit verknüpften Schwankungen von ν_z dermaßen groß werden, daß man keine getrennten Frequenz-Bereiche wie in Abbildung 2.12 sehen kann. Wenn das

der Fall ist, dann kann man die Spin-Ausrichtung des Elektrons nicht bestimmen und deshalb den g-Faktor nicht messen.

Das gesamte vom Ion gesehene axiale Potential ist die Summe des elektrischen plus des magnetischen Anteils:

$$\left. \begin{aligned} \phi_{el} &= \sum q U_0 c_j z^j \\ \phi_{mag} &= - \sum \mu_z B_j z^j \end{aligned} \right\} \rightarrow \phi = \phi_{el} + \phi_{mag} = \sum_{j=0}^{\infty} \underbrace{(q U_0 c_j - \mu_z B_j)}_{\tilde{c}_j} \cdot z^j. \quad (2.47)$$

Mit der in 2.23 eingeführten Notation und dem in 2.40 vorgestellten Ergebnis definieren wir die verallgemeinerten \tilde{c}_j -Koeffizienten folgendermaßen:

$$\tilde{c}_j = q U_0 e_j + q U_0 T d_j - \left(-\frac{q}{m} \cdot \frac{E_+ - E_-}{\omega_+ - \omega_-} + \frac{g\mu_B m_S}{2\pi} \right) \cdot B_j. \quad (2.48)$$

2.6.1 Abhängigkeit des optimalen Tuning-Ratios von der Zyklotronenergie

Der Koeffizient \tilde{c}_2 steuert das Verhalten der axialen Frequenz des Ions. Wie wir im vorherigen Abschnitt schon gesehen haben, ist ν_z eine Funktion der Energien (Magnetron und Zyklotron) und des Spins. An dieser Stelle sind wir eher am \tilde{c}_4 -Term interessiert, denn im inhomogenen Magnetfeld, also wenn $B_4 \neq 0$, ist er auch eine Funktion der Energien. Um das gesamte Potential harmonisch zu gestalten muß man den verallgemeinerten \tilde{c}_4 -Term kompensieren und dafür ein bestimmtes Tuning-Ratio angelegen:

$$\tilde{c}_4 = 0 \rightarrow TR_{Opt} = -\frac{e_4}{d_4} + \left(-\frac{q}{m} \cdot \frac{E_+ - E_-}{\omega_+ - \omega_-} + \frac{g\mu_B m_S}{2\pi} \right) \cdot \frac{B_4}{q U_0 d_4}. \quad (2.49)$$

Nach 2.49 ist das optimale Tuning-Ratio eine Funktion der Zyklotron- und Magnetronenergie und sogar des Spin-Zustandes des Elektrons. Im Laufe der Messung des g-Faktors bleibt die Magnetronenergie konstant, deshalb ist dieser Zusammenhang von TR_{Opt} mit E_- weniger bedeutend: das Tuning-Ratio wird für die eine konstante Magnetronenergie optimiert. Im Gegensatz dazu ändert sich die Zyklotronenergie während der Messung ständig; entsprechend muss das TR daran angepasst werden:

$$\frac{\partial TR_{Opt}}{\partial E_+} = -\frac{q}{m} \cdot \frac{1}{\omega_+ - \omega_-} \cdot \frac{B_4}{q U_0 d_4}. \quad (2.50)$$

Im Anhang C ist der B_4 -Koeffizient in beiden Käfigen berechnet worden, zusammen mit den jeweils typischen Frequenzen und Speicherspannungen hat man¹⁸:

- In der Präzisionsfalle: $\frac{\partial TR_{Opt}}{\partial E_+} = -8,5 \text{ nU/Hz}$
- In der Analysefalle: $\frac{\partial TR_{Opt}}{\partial E_+} = 4,7 \mu\text{U/Hz}$.

¹⁸ Hier bezeichnet „U“ eine Einheit des dimensionslosen Tuning-Ratios.

Wenn also durch Anregung sich die Zyklotronenergie um ein Hz (gemessen durch die Verschiebung der axialen Frequenz) ändert, damit das Tuning-Ratio optimal gehalten wird, sollte man es theoretisch um $-4,6 \mu\text{U}$ (in der AF) verstimmen. Das mag wenig erscheinen, ist aber sehr bedeutend: die Entdeckung dieser Abhängigkeit machte die Messung des g-Faktors am wasserstoffähnlichen Sauerstoff möglich. Als dieser Vorgang noch unbekannt war, waren die Schwankungen der axialen Frequenz in der AF so groß, daß man die Spin-Ausrichtung des Elektrons gar nicht bestimmen konnte. Im Unterabschnitt 4.7.1 wird die Messung von $TR_{Opt} = f(E_+)$ vorgestellt.

In der PF ist die Abhängigkeit des Tuning-Ratios von der Zyklotronenergie absolut irrelevant da das Magnetfeld etwa tausend Mal homogener ist. Sie beeinflußt die Messung des g-Faktors nicht. Darüberhinaus ist die Abhängigkeit von der Spin-Ausrichtung in beiden Käfigen völlig vernachlässigbar.

2.6.2 Wirkung des Gradienten des Magnetfeldes auf die Bewegungsfrequenzen

Der Koeffizient \tilde{c}_1 liefert einen schnellen Zugang zur Untersuchung des Einflusses von B_1 auf die Zyklotronfrequenz.

Aufgrund der endlichen Zyklotronenergie bewirkt der Gradient des Magnetfeldes eine Netto-Kraft in axialer Richtung, die vom elektrischen Gradienten kompensiert werden muß. Das Ion bewegt sich solange, bis der Gleichgewichtspunkt (r_0, z_0) erreicht wird. An diesem Punkt muss $\tilde{c}_1(r_0, z_0) = 0$ gelten, also:

$$\mu_z B_1(r_0, z_0) = q U_0 c_1(r_0, z_0) \rightarrow \frac{c_1(r_0, z_0)}{B_1(r_0, z_0)} = \frac{\mu_z}{q U_0}. \quad (2.51)$$

Angenommen, daß diese magnetische Kraft rein axial sei, ist $r_0 = 0$, allerdings $z_0 \neq 0$. Wie schon erwähnt, ist die Magnetronenergie während der Messung konstant und daher an dieser Stelle irrelevant. Die Zyklotronenergie dagegen nimmt aufgrund der Widerstandskühlung stetig ab und verursacht damit eine Netto-Verschiebung des Gleichgewichtspunkts Δz . Mit 2.40 hat man:

$$\Delta \left[\frac{c_1(z_0)}{B_1(z_0)} \right] = \frac{-\Delta E_+}{m U_0 (\omega_+ - \omega_-)} \quad ; \quad \Delta \left(\frac{c_1}{B_1} \right) = \frac{\Delta c_1 \cdot B_1 - \Delta B_1 \cdot c_1}{B_1^2}$$

$$\Delta B_1 = \frac{\Delta B_1}{\Delta z} \cdot \Delta z \simeq \underbrace{\frac{\partial B_1}{\partial z}}_{2B_2} \cdot \Delta z \rightarrow \Delta \left(\frac{c_1}{B_1} \right) \simeq 2 \cdot \frac{c_2 \cdot B_1 - B_2 \cdot c_1}{B_1^2} \cdot \Delta z$$

$$\text{und daher:} \quad \Delta z = \frac{B_1^2}{c_2 \cdot B_1 - B_2 \cdot c_1} \cdot \frac{-1}{2m U_0 (\omega_+ - \omega_-)} \cdot \Delta E_+ \quad (2.52)$$

in der Präzisionsfalle gilt $c_1 \cdot B_2 \ll c_2 \cdot B_1$, außerdem $(\omega_+ - \omega_-) \simeq \omega_+$. Mit diesen Näherungen und den theoretischen Werten von B_1 (Tabelle C.1) und c_2 (2.22) erhält man schließlich:

$$\Delta z = \frac{B_1}{c_2} \cdot \frac{-1}{2m U_0 \omega_+} \cdot \Delta E_+ \rightarrow \frac{\Delta z}{\Delta E_+} = -8,9 \text{ nm/Hz}. \quad (2.53)$$

Wenn die Anregung der Zyklotronenergie 1 Hz beträgt, dann verschiebt sich das Ion theoretisch um 8,9 nm in Richtung des abnehmenden Magnetfeldes (oder anders gesagt, das Ion entfernt sich vom Zentrum der supraleitenden Spule). Das wiederum ruft eine Änderung des vom Ion erfahrenen Magnetfeldes hervor: $\Delta B = B_1 \cdot \Delta z$ und somit der Zyklotronfrequenz:

$$\begin{aligned} \Delta\omega_+ &\simeq \Delta\omega_c \left[1 - \frac{1}{2} \left(\frac{\omega_z}{\omega_c} \right)^2 \right] \simeq \frac{q}{m} \cdot \Delta B \left[1 - \frac{1}{2} \left(\frac{\omega_z}{\omega_+} \right)^2 \right] \\ \hookrightarrow \Delta\omega_+ &= -\frac{q}{m} \cdot \frac{B_1^2}{c_2} \cdot \frac{1}{2mU_0\omega_+} \cdot \left[1 - \frac{1}{2} \left(\frac{\omega_z}{\omega_+} \right)^2 \right]. \end{aligned} \quad (2.54)$$

Mit 2.15 und der Annäherung $\omega_+ \simeq \omega_c$ lässt sich die obige Formel umschreiben und unmittelbar mit der Abhängigkeit der Zyklotronfrequenz mit E_+ aufgrund von B_2 (siehe 2.45) vergleichen:

$$\begin{aligned} \frac{\Delta\omega_+}{\omega_+} &= -\frac{1}{m\omega_z^2} \cdot \left(\frac{B_1}{B_0} \right)^2 \left[1 - \frac{1}{2} \left(\frac{\omega_z}{\omega_+} \right)^2 \right] \cdot \Delta E_+ \rightarrow \frac{\Delta\nu_+}{\Delta E_+} = -3,9 \text{ mHz/Hz} \\ \frac{\Delta\omega_+}{\omega_+} &= -\frac{1}{m\omega_z^2} \cdot \frac{B_2}{B_0} \left(\frac{\omega_z}{\omega_+} \right)^2 \cdot \Delta E_+ \rightarrow \frac{\Delta\nu_+}{\Delta E_+} = -36 \text{ mHz/Hz}. \end{aligned} \quad (2.55)$$

Man sollte folgende Eigenschaften bemerken:

1. In beiden Fällen ändert sich die Zyklotronfrequenz *linear* mit der Energie.
2. Der Einfluß des B_2 -Terms ist etwa zehn Mal grösser als derjenige von B_1 . Damit beide gleich wären, müsste B_1 etwa drei Mal grösser werden.
3. Bedauerlicherweise lassen sich beide Effekte nicht gegenseitig kompensieren, da sie gleichen Vorzeichens sind. Ausserdem erscheint in 2.55 der Gradient zum Quadrat.

Man hätte denken können, der Term B_1 beeinflusse ν_+ auf irgendeine nicht lineare Art, z.B. mit der Wurzel der Energie. Das ist aber völlig ausgeschlossen, denn die Störung ist nicht sekular.

Kapitel 3

Beschreibung der Apparatur

Auf den folgenden Seiten wird der experimentelle Aufbau kurz beschrieben. Da die Apparatur schon mehrmals sehr ausführlich beschrieben worden ist, wird hier nur das wichtigste vorgestellt. Dem interessierten Leser ist die Arbeit von Herrn Dr.S.Stahl [Sta98] besonders zu empfehlen. Dort kann man viele Details über die Elektronik, die den Nachweis von einzelnen Teilchen ermöglicht erhalten. In [Häf00a] findet man eine sehr interessante Diskussion über die Wechselwirkung der gespeicherten Ionen mit den Käfigelektroden und den Detektionsspulen. Die theoretische Signalformen der nachzuweisenden Teilchen sind dort präzise abgeleitet. Ein zusätzlicher wichtiger technischer Punkt ist die verwendete Technik zur Erzeugung der hochgeladenen Ionen im Käfig. Hierüber ist vieles in [Her99] zu lesen.

3.1 Überblick über den experimentellen Aufbau

Wie schon erwähnt wird das Magnetfeld mittels einer supraleitenden Spule bereitgestellt. Die Abbildung 3.1 veranschaulicht den dazu verwendeten Kryostaten. Die wichtigsten Merkmale der Apparatur sind dort skizziert und können in den folgenden Punkten zusammengefasst werden:

1. Die Sonderanfertigung eines 6 Tesla Magneten von Oxford Instruments wurde mit einer Bohrung von etwa 12 cm Durchmesser versehen. Die Käfige und die entsprechende Nachweiselektronik können somit problemlos im Inneren des Magnetfeldes plaziert werden. Diese Bohrung wird mit Turbopumpen bis auf einen Druck von $\sim 10^{-7}$ mbar evakuiert und dann dicht geschlossen.
2. In der Bohrung hat man einen zylindrischen Dewar mit flüssigem Helium. Der sorgt dafür, die ganze Apparatur innerhalb der Bohrung durch thermischen Kontakt auf knapp 4 Kelvin abzukühlen. Das ist theoretisch auch die Temperatur der gespeicherten Ionen, denn sie sind normalerweise mit der Nachweiselektronik im thermischen Gleichgewicht [Her99].

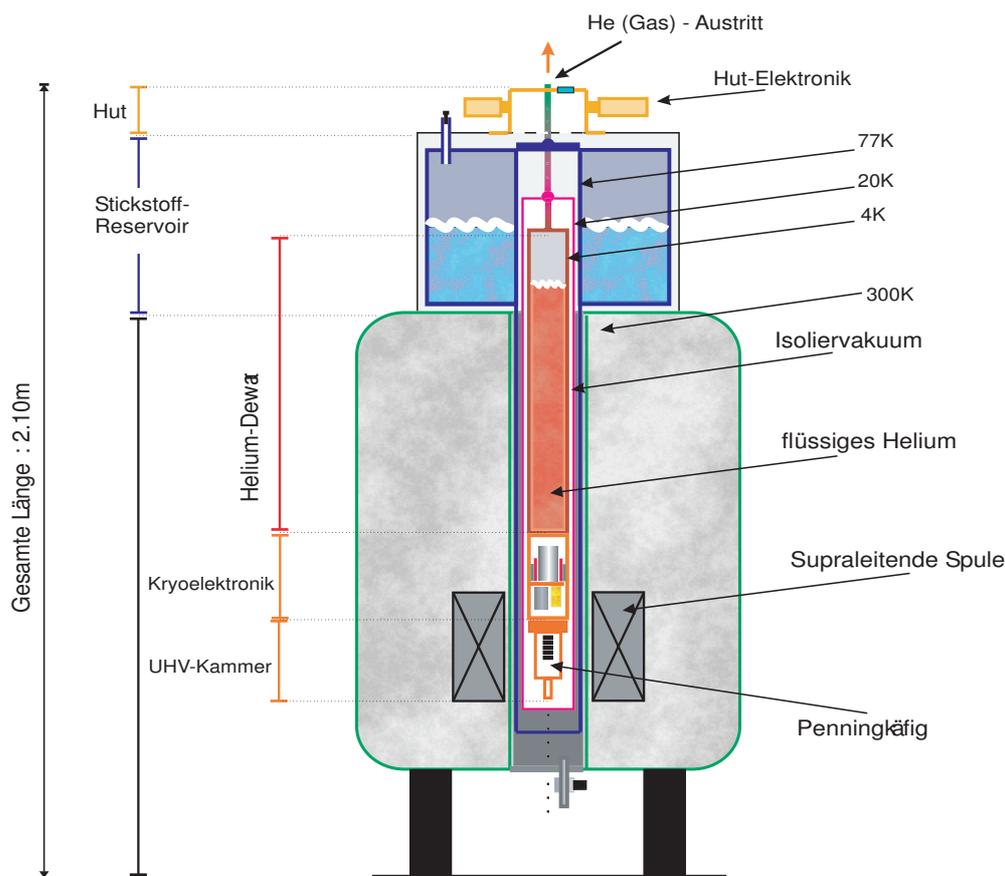


Abbildung 3.1: Kryostat mit supraleitender Spule und Vakuummkammer.

3. Am Rand der Bohrung befinden sich zwei Schilde auf jeweils 77 und 20 K: um den He-Verbrauch zu minimieren ist das ganze System mit (billigem) flüssigem N_2 vorgekühlt. Diese äußeren Schilde sorgen dafür, daß die thermische Belastung des flüssigen (teueren) He-Behälters möglichst gering wird [Her96],[Sta98]. Dafür ist der 77 K Schild mit dem Stickstoff-Behälter im thermischen Kontakt und trennt somit den He-Dewar vom Raumtemperatur-Bereich.
4. Unmittelbar unter dem He-Dewar befindet sich die Nachweiselektronik mit den Detektionsspulen und den Vorverstärkern. Aus technischen Gründen ist es absolut notwendig die Nachweisspulen möglichst nah an den Käfig zu bringen. Außerdem beträgt somit ihre Temperatur auch etwa 4 K und deren Johnson Rauschen (siehe [Joh28] und [Nyq28] für eine Definition davon) wird deshalb minimiert. Dies optimiert das Signal-zu-Rauschen-Verhältnis der Ionen und macht den Nachweis einzelner Teilchen überhaupt möglich [Sta98].
5. Am unteren Ende der Bohrung und genau in der Mitte der supraleitenden Spule befindet sich die Vakuummkammer. Sie stellt das Herz des Experiments dar. Sie beinhaltet die Doppelfalle in Ultra-Hoch-Vakuum-Bedingungen mit einem Druck unter 10^{-16} mBar [Her99]. Die Vakuum-

kammer wird bei Raumtemperatur evakuiert und mit einer speziellen Zange dicht verschlossen, damit beträgt der Druck zunächst etwa 10^{-8} mbar. Erst wenn sie in Kontakt mit dem He-Dewar gebracht wird friert das ganze Restgas aus (Kryopumpeffekt) und extrem niedrige Drucken werden erreicht [Sta98]. Da die Ionen nun kaum Stößen mit Restgasatomen unterworfen sind, kann man sie *Monatelang* in der Falle speichern [Her99]. Dies stellt optimale Bedingungen für das Experimentieren dar.

6. Die Vakuumkammer ist mit einem Flansch versehen, auf welchem mehrere Vakuumdurchführungen sitzen. Diese stellen die notwendigen elektrischen Kontakte zum Betrieb der Falle und zur Detektion der Ionen zur Verfügung. Zahlreiche Koaxialkabel verlaufen an der gesamten Bohrung des Kryostaten entlang und setzen damit am sogenannten „Hut“ mittels zusätzlicher Flansche und Vakuumdurchführungen die Falle mit der äußeren Welt in Verbindung. Darüberhinaus sorgen ein spezieller Hohlleiter zusammen mit einem Quarzfenster am Vakuumkammerflansch und einem Mikrowellenhorn dafür, daß die notwendigen Mikrowellen zum Spin-Umklappen aus dem Raumtemperaturbereich ins Fallennere gelangen.
7. Im Raumtemperaturbereich gibt es umfangreiche Geräte wie Funktionsgeneratoren, Mikrowellensynthesizer, Netzteile, Präzisionsmultimeter, elektrische Filter, Verstärker, Oszilloskope und digitale FFT-Spektrumanalysatoren (kurz FFT¹), die dazu dienen die Ionen anzuregen, zu kühlen und deren elektrischen Signale aufzunehmen. Das ganze ist mittels eines Rechners gesteuert, was den Betrieb des Experimentes enorm erleichtert. Normalerweise laufen die Messungen automatisch Tag und Nacht sieben Tage in der Woche.

Der Experiment befindet sich in einem Labor im Keller des Instituts für Physik in Mainz. Der Raum ist etwa 4,5 m hoch und verfügt über einen Kran zum Aufheben und Runterstecken des Bohrungseinsatzes. Dieses wiegt etwa 20 Kg. Die Ausstattung des Labors umfasst neben den elektronischen Geräten und den Turbopumpen auch spezielle Flasche zum transportieren vom flüssigen Helium und Stickstoff. Das verdampfende Helium wird eingesammelt und an den He-Kompressor des Instituts durch spezielle Dichtröhren weitergeleitet, wo es erneut verflüssigt wird. Das verdampfende N_2 dagegen löst sich in der Luft aus. Der Helium Behälter der Apparatur (~ 5 Liter) muss jede fünf Tage wieder gefüllt werden; beim Stickstoff (~ 20 Liter) jede 2 Tage. Für den Magneten betragen diese Zeitspanne jeweils 20 und 10 Tage. Das ganze ist relativ klein und bequem gestaltet; ein einziger Doktorand genügt im Prinzip das Experiment vollständig im Betrieb zu setzen².

¹ Fast Fourier Transform.

² An dieser Stelle muss die ausgezeichnete Arbeit von Dr. Stahl und Dr. Hermanspahn während des Entwurfs und der Konstruktion des Experimentes explizit anerkannt werden.

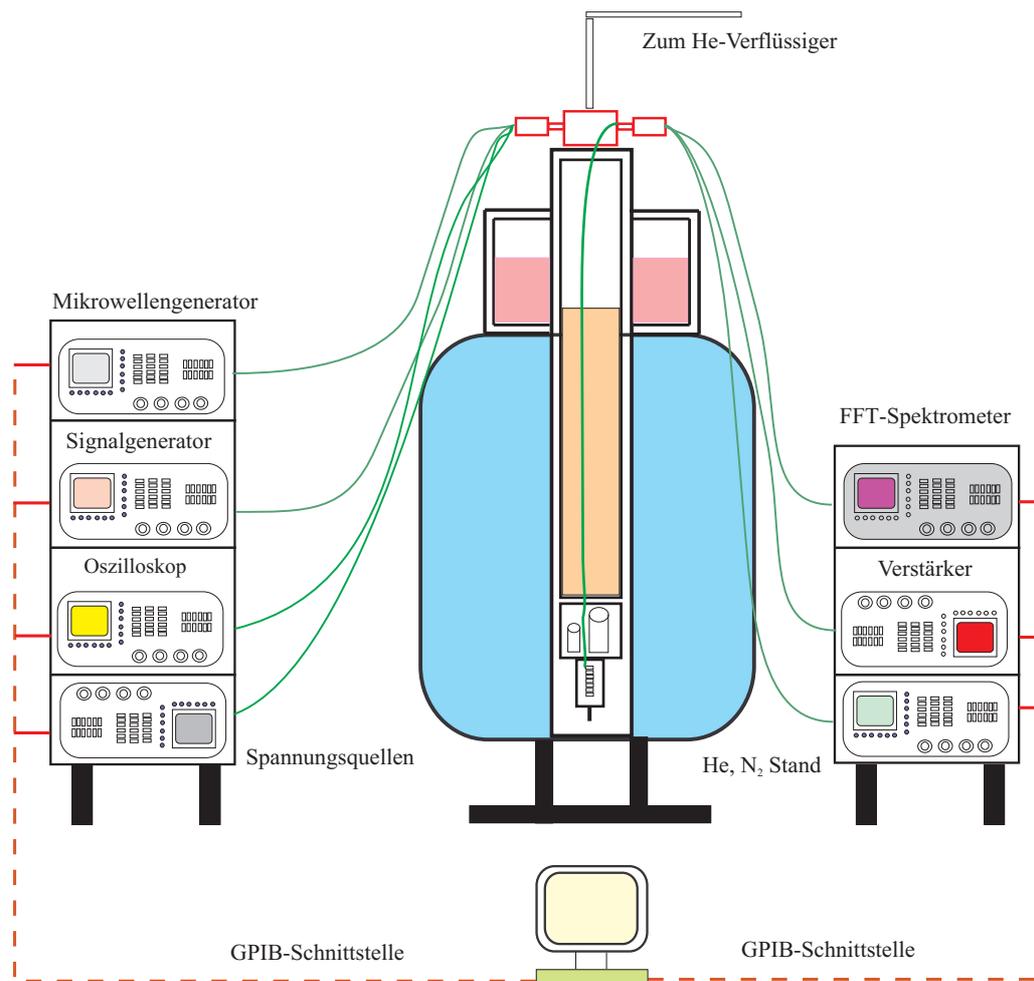


Abbildung 3.2: Kryostat und Raumtemperaturausrüstung.

3.2 Elektronischer Nachweis der Ionenbewegung

In unserem Experiment wird keinerlei Art von optischem Nachweis benutzt. Man verwendet die von Dehmelt entwickelte „bolometrische“ Technik [Deh68], [Win75]. Die Ionen werden ausschließlich elektronisch detektiert, d.h. das von ihnen an die Fallenelektroden induzierte elektrische Signal wird verstärkt und (normalerweise) im Frequenzbereich mit Hilfe eines FFT-Analysatoren registriert. Dazu werden Schwingkreise (kurz LC)³ an die Fallenelektroden angeschlossen, die resonant mit der Ionenbewegung durch die induzierten Spiegelladungen wechselwirken. Als Beispiel ist der Nachweis der axialen Bewegung in Abbildung 3.3 gezeigt: die vom positiven Ion auf der (idealisierten) oberen Endkappe angezogenen Elektronen fließen durch den Schwingkreis zur unteren Endkappe. Letztere ist AC-mässig geerdet. Der induzierte Strom I

³ Ein Schwingkreis besteht normalerweise aus einer Spule mit Impedanz L und einem Kondensator C . Er verhält sich wie ein erzwungener harmonischer Oszillator mit Resonanzfrequenz $\omega_{LC} = 1/\sqrt{LC}$ [Mal99].

ruft einen Spannungsabfall am Schwingkreis hervor: U_{ind} ; dieser stellt unser Messsignal dar. Da das Ion eine periodische Bewegung durchführt, ist der induzierte Strom auch periodisch, und zwar mit der Frequenz des Ions: $U_{ind}(\nu_z) = I(\nu_z) \cdot Z(\nu_z)$. In Resonanz ist die frequenzabhängige Impedanz des

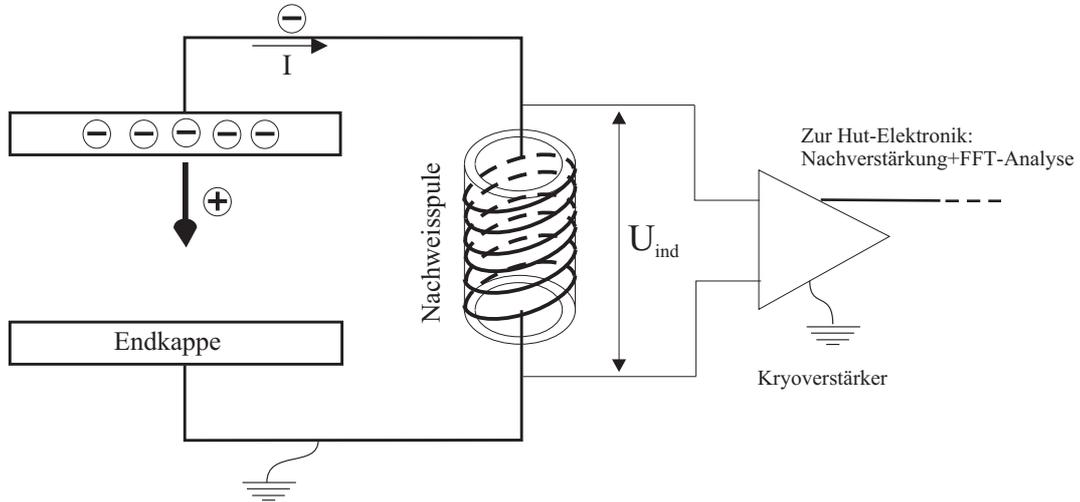


Abbildung 3.3: **Schema Nachweis axialer Bewegung.**

Die Nachweisspule besteht aus supraleitender Draht. Die Kapazität C muss möglichst klein sein, damit die Güte des Schwingkreises und somit seine Resonanzimpedanz maximal wird. Deswegen ist kein Kondensator explizit gezeichnet: C setzt sich ausschließlich aus parasitärer Kapazitäten zusammen; siehe [Sta98].

Schwingkreises maximal und damit U_{ind} auch. Im Fall der axialen Bewegung erfolgt die resonante Ion-Schwingkreis Kopplung, wenn folgende Voraussetzung zutrifft:

$$\nu_z = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{q}{m} \cdot 2c_2 U_0} = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{1}{\sqrt{LC}} = \nu_{LC} \longrightarrow U_0 = \frac{m}{q} \cdot \frac{1}{2c_2 LC}. \quad (3.1)$$

Erst wenn diese Bedingung erfüllt wird, ist das Signal-zu-Rauschen-Verhältnis gut genug, um die Ionen nachweisen zu können. Die Speicherspannung lässt sich sehr einfach ändern bis die gewünschte Ionensorte in Resonanz mit dem Schwingkreis gerät. Die Parameter L und C stehen allerdings fest und lassen sich nicht so einfach variieren. In unserem Experiment verfügen wir über drei Schwingkreise: einen zur Messung von ν_z in der PF mit $\omega_{LC} = 2\pi \cdot 925\,450$ Hz, einen zur Messung von ν_z in der AF (und damit der Spin-Ausrichtung des Elektrons) mit $\omega_{LC} = 2\pi \cdot 369\,280$ Hz und einen zur direkten Messung von ν_+ in der PF mit $\omega_{LC} = 2\pi \cdot 25\,350\,000$ Hz. Im letzteren Fall müssen L und C für jede Ionensorte abgestimmt werden da ν_+ kaum mit der Spannung verstimmt werden kann. Natürlich kann man das Magnetfeld ändern um die resonante Kopplung zu schaffen aber aus technischen Gründen macht man das mit supraleitenden Spulen sehr ungern.

3.2.1 Messung der axialen Frequenz

Normalerweise wird das Ionensignal im Frequenzbereich betrachtet; die folgende Abbildung zeigt dagegen das axiale Signal mehrerer Ionen im Zeit-Bereich. Dabei wird die Spannung stetig rampenmässig geändert, damit alle

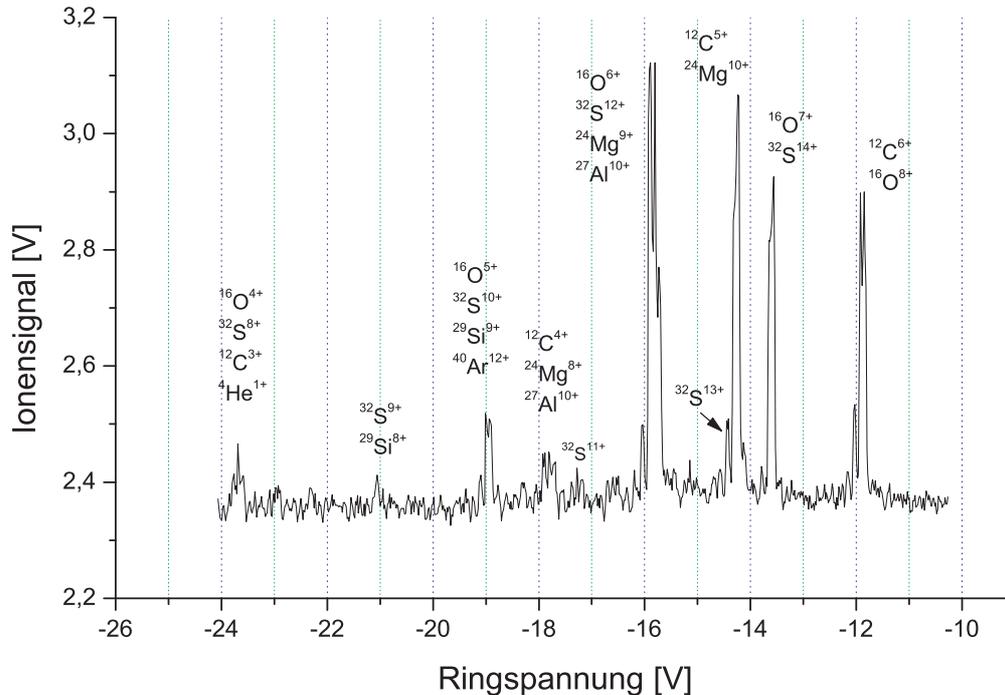


Abbildung 3.4: Massenspektrum in der Präzisionsfalle.

in der Falle anwesenden Ionensorten nach und nach in Resonanz mit dem Schwingkreis geraten. Jedesmal wenn eine geeignete Spannung vorliegt, damit eine bestimmte Ionensorte die Bedingung 3.1 erfüllt, nimmt schnell der Spannungsabfall am LC stark zu. Das wird mit Hilfe des Oszilloskops registriert. Der Spektrum zeigt die Ionen kurz nach der Erzeugung⁴ wenn sie noch hohe kinetische Energie besitzen. Die Signale entsprechen Wolken von mehreren (Hunderten) Ionen. Aus diesem Verbund von Ionen muss ein einziges $^{16}\text{O}^{7+}$ -Ion im Käfig bleiben. Die Prozedur dafür, das sogenannte „Putzen“ der Falle, ist in [Häf03] ausführlich beschrieben und wird hier nicht weiter diskutiert. Ab nun werden sich alle gezeigten Messungen auf ein einzelnes $^{16}\text{O}^{7+}$ -Ion beziehen. Man sollte darauf achten, daß das Auflösungsvermögen des Massenspektrums sehr gering ist da, Isomere wie z.B. $^{16}\text{O}^{7+}$ und $^{32}\text{S}^{14+}$ nicht voneinander unterschieden werden können. Die Messungen im Frequenzbereich sind viel genauer und ermöglichen es, einzelne Ionen zu diskriminieren.

⁴ Die Ionen werden in der Falle selbst durch Stöße eines Elektronenstrahls gegen ein Graphit-Target produziert. Siehe [Her99] für Details.

Der axiale Dip

Der vom Ion induzierte Strom I fließt über den Schwingkreis und dadurch über seinen ohmschen Widerstand $R = Q \cdot \omega_{LC} \cdot L$, wobei Q die Güte des Schwingkreises darstellt ($Q \approx 1100$ in der PF, $Q \approx 2400$ in der AF und $Q \approx 300$ für den Nachweis von ω_+). Deshalb wird am Schwingkreis elektrische Leistung $P = I^2 \cdot R$ dissipiert. Diese Energie geht dem gespeicherten Ion verloren. Mit anderen Worten: das Ion erfährt *Widerstandskühlung*, solange bis seine Energie die Rauschtemperatur des LCs erreicht hat. Letztere definiert sich durch die Johnson-Spannungsdichte [Joh28], [Nyq28]: $U_{rausch} = \sqrt{4kT_z R}$, wobei k die Boltzmann-Konstante darstellt. Im Gleichgewicht ist die Energie des Ions durch die Temperatur des Schwingkreises gegeben: $E_z = k \cdot T_z$ (siehe Abschnitt 4.9 zur Messung von T_z). Normalerweise misst man die axiale Frequenz, wenn das Ion kalt ist, also wenn es sich im thermischen Gleichgewicht mit dem LC befindet. In diesem Fall sieht das vom Ion hervorgerufene Signal im Frequenzbereich folgendermaßen aus:

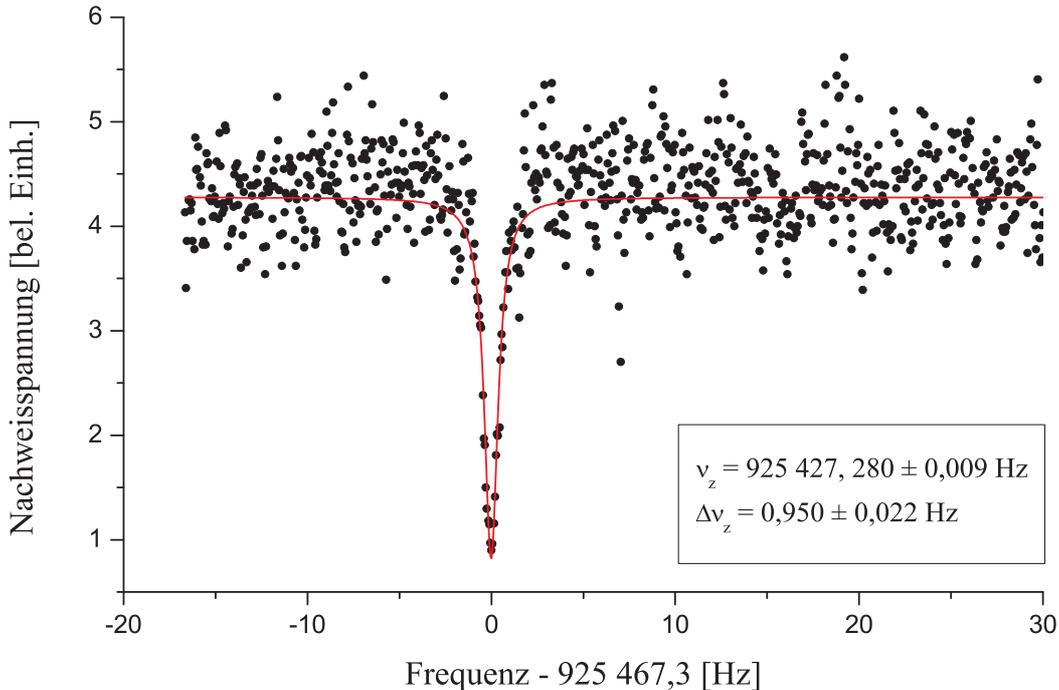


Abbildung 3.5: **Dip eines $^{16}\text{O}^{7+}$ -Ions in der PF.**

Die Messzeit beträgt etwa 2 Minuten.

Das Ion schließt die Rauschspannung des LCs kurz: es entsteht ein Minimum im Frequenzspektrum des Johnson-Rauschens, dessen Zentrum der axialen Frequenz entspricht. Dieses Minimum nennt man „Dip“. Man sollte darauf achten, daß die Breite des Dips etwa 1 Hz beträgt und dessen Zentrum sich mit einer Unsicherheit von ~ 10 mHz bestimmen lässt. In [Häf00a] wurde die Entstehung des Dips mathematisch sehr ausführlich diskutiert. Im hier angezeigten Spektrum ist der Dip mittels einer Lorentz-Kurve angefitet worden; allgemein kann man das aber nicht so machen: wenn das Ion sich

nicht exakt in Resonanz mit dem Schwingkreis befindet, dann schliesst es nur halbwegs das Johnson-Rauschen des LCs kurz und aus dem reinen Minimum entsteht ein halbdispersives Spektrum. In der Analysefalle wird die Ringspannung üblicherweise so gesetzt, daß das Ion am Rand des Schwingkreises sitzt; das axiale Spektrum sieht dann folgendermaßen aus:

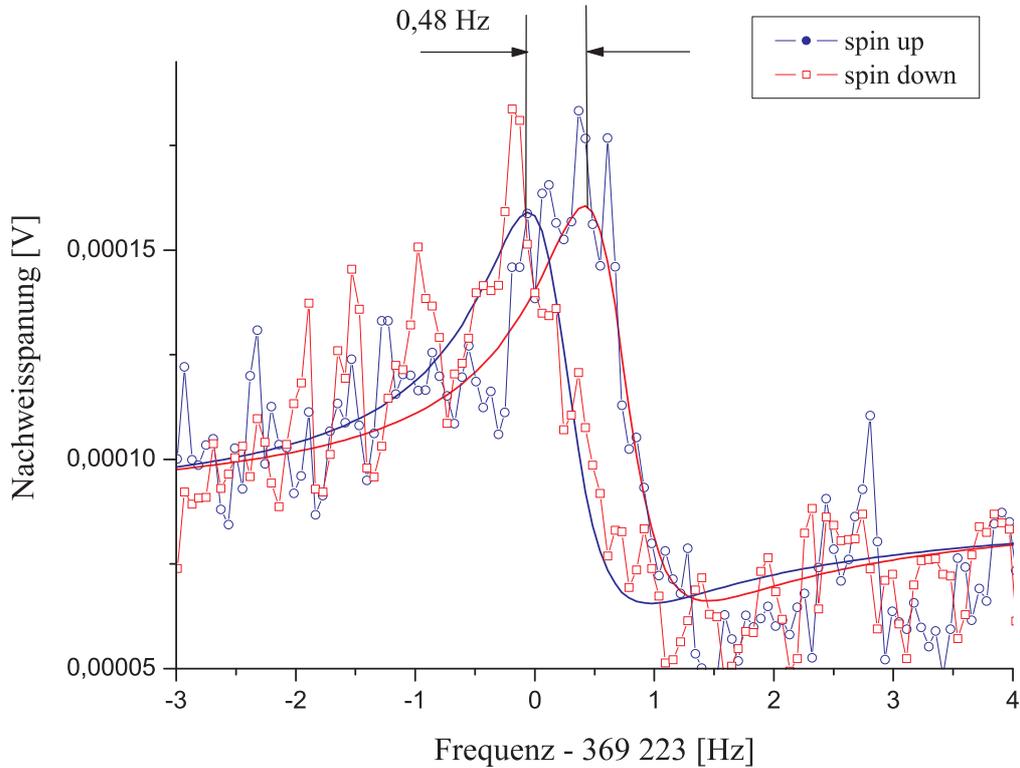


Abbildung 3.6: **Dips in der AF.**

Für jede Spin-Ausrichtung des Elektrons ist jeweils ein Spektrum zu sehen. Bei dieser Messung betrug der Frequenz-Sprung 480 mHz, also 20 mHz über dem Mittelwert (siehe Abbildung 2.12). Mit dem halbdispersiven Spektrum ist ν_z schärfer definiert. Damit lassen sich im Prinzip mögliche Spin-Flips besser nachweisen.

In [Her99] kann man die analytische Linienform dieses Spektrums finden; danach wird die Kurve angefitet und die axiale Frequenz gewonnen. Die Abbildung veranschaulicht außerdem den Frequenz-Sprung bei einem Spin-Flip. In der Analysefalle wird so gemessen, um ν_z möglichst scharf definiert zu haben und dabei die Spin-Ausrichtung einfacher bestimmen zu können.

3.2.2 Direkte Messung der Zyklotronfrequenz

Im Fall des Zyklotron-Nachweises muss das Ion (also seine Zyklotronbewegung) auf eine Energie von mindestens 3 eV angeregt werden, um dessen Signal überhaupt detektieren zu können. Dieser Energie entspricht eine Temperatur von etwa 33000 Kelvin. Der Zyklotron-Schwingkreis besitzt auf der anderen Seite eine Temperatur von 4,9 K [Her99]; also liegt das Ion völlig außerhalb des Gleichgewichts mit dem LC. In diesem Fall überwindet die von

ihm induzierte Spannung erheblich den Pegel des Johnson-Rauschens des Zyklotron-Schwingkreises und kann problemlos nachgewiesen werden. Diesmal kommt das Signal aber als Maximum vor:

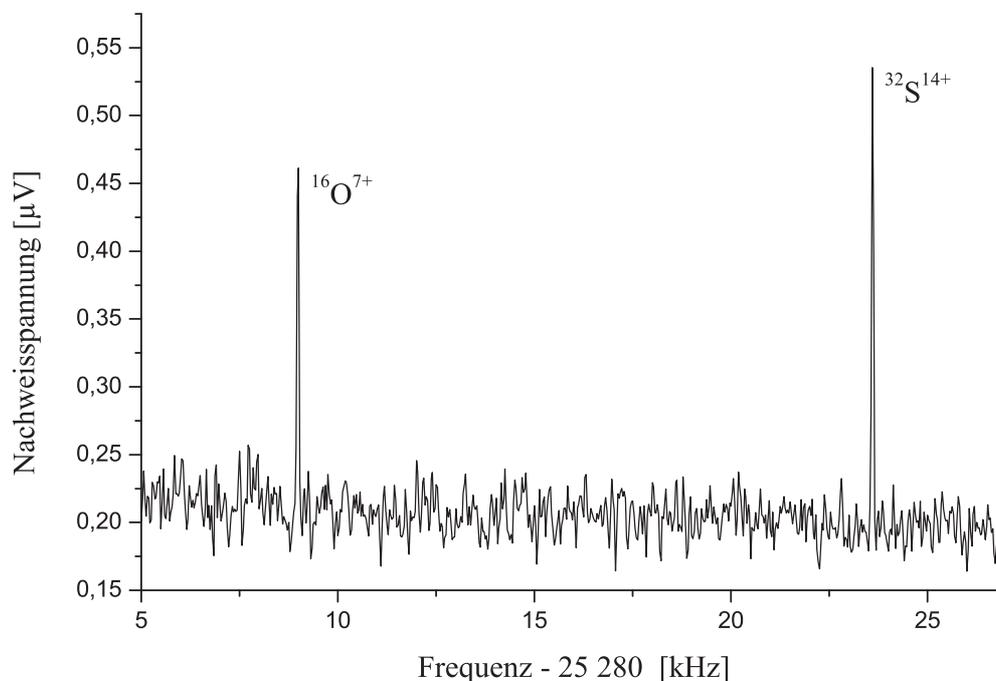


Abbildung 3.7: **Zyklotron-Spektrum zweier einzelnen Ionen.**

Die Abbildung veranschaulicht die Signale von zwei Ionen, nämlich der Isomere $^{16}\text{O}^{7+}$ und $^{32}\text{S}^{14+}$. Der kleine Unterschied im q/m -Verhältnis beider Ionen aufgrund unterschiedlicher Bindungsenergien führt dazu, daß sie im gleichen Magnetfeld von 3,7 Tesla verschiedene Zyklotronfrequenzen aufweisen. Offensichtlich ist das Auflösungsvermögen im Frequenzbereich dem im Zeit-Bereich deutlich überlegen. Außerdem besteht kein Zweifel mehr daran, daß das Signal links von einem $^{16}\text{O}^{7+}$ -Ion stammt, denn andere Kombinationen von Isomeren sind beim angegebenen Magnetfeld nicht möglich.

Um das unerwünschte $^{32}\text{S}^{14+}$ -Ion los zu werden, wird es gezielt zusätzlich angeregt, bis seine Energie ihm erlaubt, die Potentialbarriere zu überwinden und die Falle zu verlassen. Was übrig bleibt ist ein einzelnes $^{16}\text{O}^{7+}$ -Ion für die Messung des g -Faktors. Das Zyklotron-Signal dieses Ions wird in einem Spektrum mit einer Auflösung von circa 15 mHz aufgenommen (etwa 1 Minute Messzeit) und ist in Abbildung 3.8 zu sehen. Typischerweise beträgt die Breite der Zyklotron-Resonanz ≈ 40 mHz bei einer Frequenz von 25 MHz. Dies ergibt eine relative Breite von $\frac{\Delta\nu_{\pm}}{\nu_{\pm}} \simeq 1,6 \cdot 10^{-9}$. Das Zentrum der Zyklotron-Resonanz kann mittels eines Lorentz-Fits bestimmt werden. Die relative Unsicherheit beträgt dabei $2 \cdot 10^{-10}$.

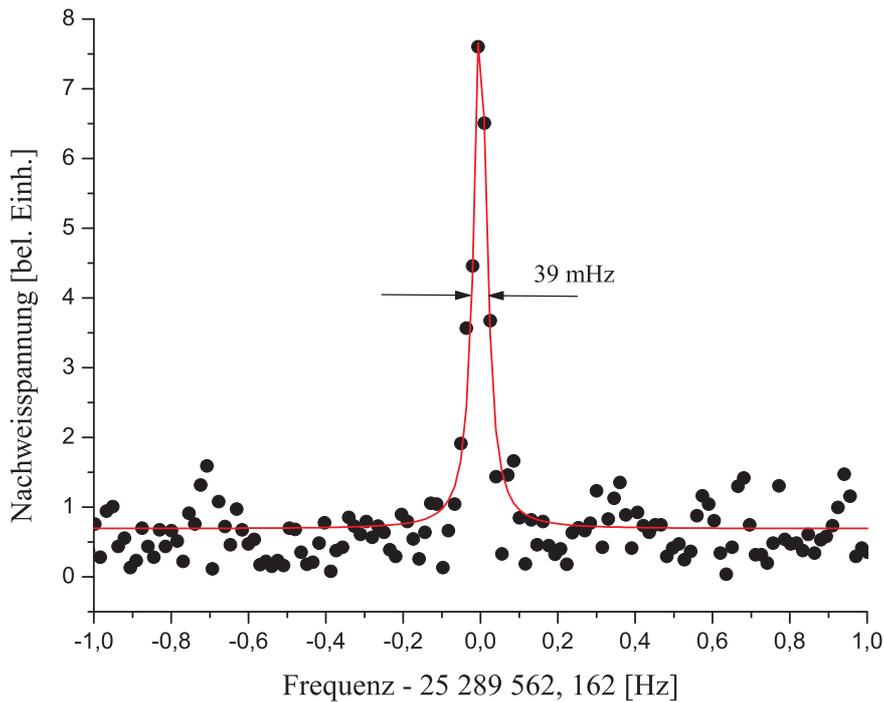


Abbildung 3.8: **Zyklotron-Resonanz eines $^{16}\text{O}^{7+}$ -Ions.**

3.2.3 Die Breite der Zyklotron-Resonanz

Selbstverständlich je schärfer die Zyklotron-Resonanz desto genauer lässt sich ν_+ messen. Zur Breite des Zyklotron-Signals tragen verschiedene Effekte bei:

1. *Die Widerstandskühlung:* Da die Energie des Ions deutlich über der Temperatur des Schwingkreises liegt, vollzieht es im Laufe der Messung von ν_+ starke Widerstandskühlung. Im inhomogenen Magnetfeld und aufgrund der Abhängigkeit $\nu_+ = \nu_+(E_+)$ verbreiten dies die Zyklotron-Resonanz erheblich.
2. *Die Fluktuationen der axialen Energie:* Die axiale Bewegung befindet sich im Gleichgewicht mit dem entsprechenden Schwingkreis und daher ist die axiale Energie E_z keine Konstante, sondern einer Boltzmann-Verteilung unterworfen. Infolgedessen, da im inhomogenen Magnetfeldes $\nu_+ = \nu_+(E_z)$ (siehe 2.45), verursachen die thermischen Fluktuationen von E_z eine Verbreiterung der Zyklotron-Resonanz.
3. *Die Fluktuationen des Magnetfeldes:* Unerwünschte Verschiebungen und Fluktuationen des Magnetfeldes sind immer vorhanden. Binnen der üblichen Messzeit von einer Minute bewirken diese eine weitere Verbreiterung des Zyklotron-Signals.

Vergleich mit der Theorie

Die Untersuchung der Breite der Zyklotron-Resonanz bietet eine ausgezeichnete Möglichkeit zum Test der im vorherigen Kapitel vorgestellten Theorie

zur Bewegung des Ions in der realen Penningfalle.

Der Betrag der vom Ion am Schwingkreis induzierten Spannung als Funktion der Frequenz lautet nach [Häf00a]:

$$U_{ind}(\nu) \propto \frac{\gamma/2}{\sqrt{(\nu_+ - \nu)^2 + (\gamma/2)^2}} \quad \text{wobei} \quad \nu_+ = \nu_+^0 + \kappa_+ \cdot E_+ + \kappa_z \cdot E_z.$$

Hier stellt ν_+^0 die ideale Zyklotronfrequenz dar. Die Konstante γ ist umgekehrt proportional zur Kühlzeitkonstante der Zyklotronbewegung und deren Messung ist im Abschnitt 4.2 erläutert. Die Koeffizienten κ_+ und κ_z sind aus 2.45 zu entnehmen.

Da im Laufe der Messung sich sowohl E_+ als auch E_z ändern, ist die gemessene Nachweisspannung $U_{exp}(\nu)$ dem Mittelwert von U_{ind} gleich:

$$U_{exp} = \frac{1}{kT} \cdot \frac{\gamma}{2T} \int_0^\infty \exp\left(-\frac{E_z}{kT}\right) \cdot dE_z \int_0^T \frac{\exp(-t\gamma/2) \cdot dt}{\sqrt{\left(\frac{\gamma}{2}\right)^2 + (\nu_+^0 + \kappa_+ E_+^0 \cdot \exp(-t\gamma) + \kappa_z E_z - \nu)^2}} \quad (3.2)$$

wobei nur folgende Mittelungsprozesse gleichzeitig berücksichtigt worden sind:

- a) Die Widerstandskühlung der Zyklotronbewegung mit der stetigen Abnahme der Zyklotronenergie: $E_+(t) = E_+^0 \cdot \exp(-t\gamma)$. Hier stellt E_+^0 die Anfangsenergie dar. Die Konstante T ist die Messzeit und beträgt ungefähr eine Minute.
- b) Die thermischen Fluktuationen der axialen Energie. Dabei wird jeder Energie E_z ein nach der Boltzmann-Verteilung passendes Gewicht $\exp\left(-\frac{E_z}{kT}\right)$, zugeordnet. Mit T ist die axiale Temperatur gemeint. Sie beträgt etwa 61 Kelvin.

Die Koeffizienten κ_+ und κ_z kann man mit dem experimentellen Wert von $B_2 = 8 \pm 0,8 \mu\text{T}/\text{mm}^2$ [Häf03] sehr einfach bestimmen:

$$\kappa_+ = -0,013 \pm 0,001 \text{ Hz/eV} \quad \kappa_z = 9,4 \pm 1 \text{ Hz/eV}. \quad (3.3)$$

Zusammen mit 3.2 lassen sich nun theoretische Zyklotron-Resonanzen berechnen. Die Abbildung 3.9 veranschaulicht drei simulierte Spektren für drei unterschiedliche Zyklotronenergien. Man beobachtet folgende Eigenschaften:

1. Die Breite nimmt mit der Zyklotronenergie zu.
2. Das Zentrum der Resonanz entfernt sich mit zunehmender Energie vom idealen Wert der Frequenz ν_+^0 . Bei höheren Energien sieht das Ion ein kleineres mittleres Magnetfeld.

Eine genauere Untersuchung des theoretischen Verhaltens der Breite zeigt, daß die Zunahme mit der Zyklotronenergie linear sein soll. In der Tat, wenn man die theoretische Breite (definiert als FWHM⁵) als Funktion der Zyklotronenergie darstellt, erhält man eine Gerade $y = y_0 + m \cdot x$ (siehe Abbildung 3.10). Ein linearer Fit davon liefert das Ergebnis: $y_0 = 3,8 \pm 0,8 \text{ mHz}$,

⁵ Full Width at Half Maximum.

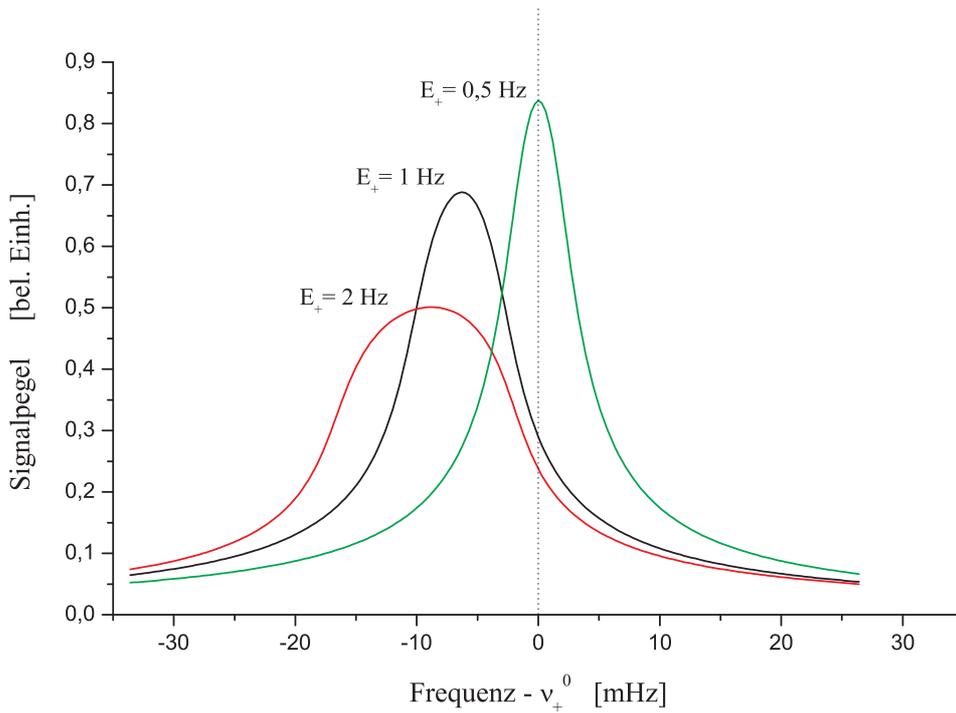


Abbildung 3.9: **Theoretische Zyklotron-Resonanzen für drei Energien.**

Die Spektren sind normiert, deshalb liegt der Pegel bei höheren Energien immer relativ niedriger. Bei dieser Simulation wurde die Verbreiterung der Resonanz aufgrund der thermischen Fluktuationen von E_z nicht berücksichtigt.

$m = 7,0 \pm 0,7$ mHz/Hz, wobei die Zyklotronenergie durch die Verschiebung der axialen Frequenz kalibriert werden soll.

Die Abbildung 3.10 veranschaulicht die experimentelle Untersuchung der Breite als Funktion der Energie. Zunächst bestätigt man die erwartete lineare Abhängigkeit. Außerdem stimmt der experimentelle Wert der Steigung, $m = 6,2 \pm 0,4$ mHz/Hz, innerhalb der Fehlergrenzen sehr gut mit dem theoretischen überein. Dies stellt schon eine nichttriviale erfolgreiche Vorhersage unseres relativ einfachen Modells dar. Trotzdem bleiben noch einige Fragen offen, denn allein die Widerstandskühlung der Zyklotronenergie kann nicht die gesamte Breite der Resonanz erklären.

In der Tat; wenn man den Offset y_0 betrachtet, dann liegt offensichtlich eine große Diskrepanz zwischen Theorie und Experiment vor: $y_{0,Theo} = 3,8$ mHz, wobei $y_{0,Exp} = 39,7$ mHz. Genauso wie die Widerstandskühlung von E_+ , verursacht die Boltzmann-Verteilung der axialen Energie einen linearen Zusammenhang zwischen der Breite der Zyklotron-Resonanz und der axialen Temperatur des Ions T_z . Diese verbreitert die Zyklotron-Resonanz relativ schneller (vergleiche die Koeffizienten κ_+ und κ_z in der Gleichung 3.3) als die Zyklotronenergie selbst. Das wird bei der Messung des g-Faktors auch experimentell offensichtlich (siehe Abschnitte 5.3.4 und 5.6). Darüberhinaus muß man, wie oben erwähnt, die kurzzeitig stochastischen Fluktuationen des Magnetfeldes berücksichtigen. Man kann sie leider nicht direkt messen und

deshalb ist ihre Wirkung quantitativ nicht bekannt.

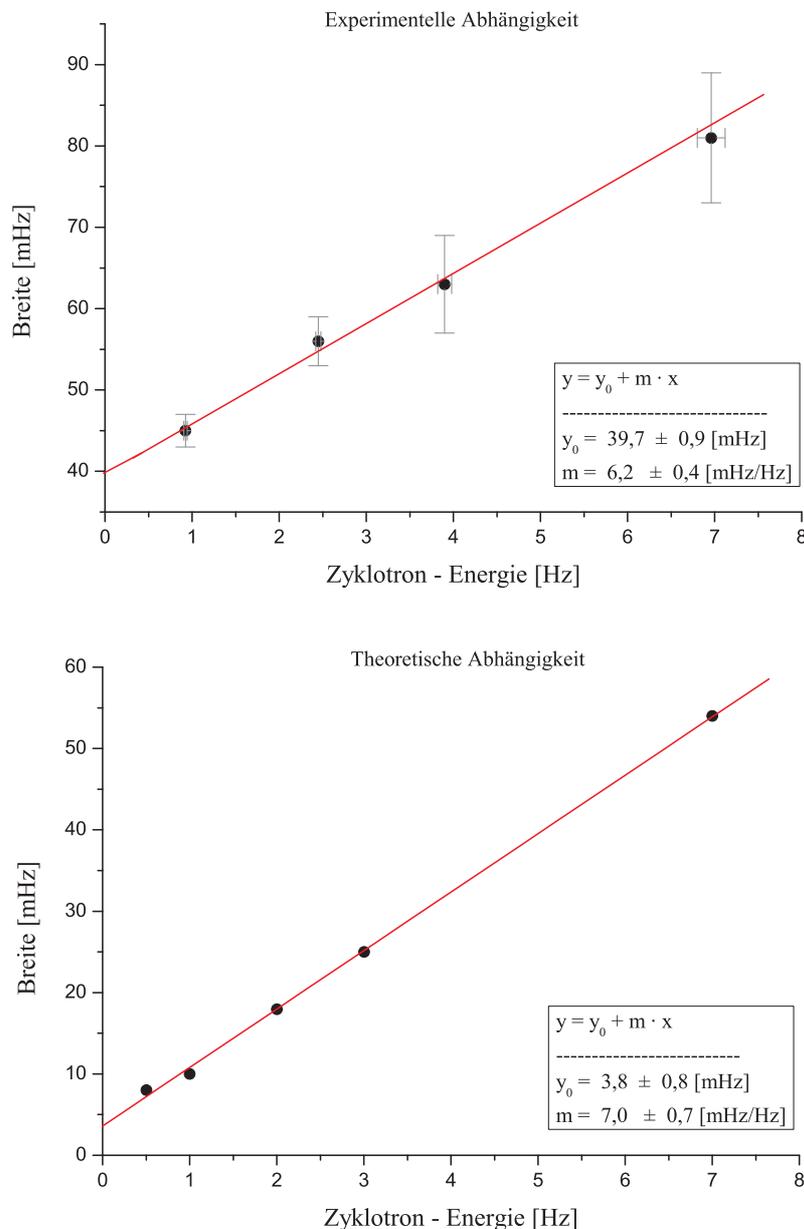


Abbildung 3.10: **Breite der Zyklotron-Resonanz als Funktion der Energie.** Der unterschiedliche Offset kann durch die axiale Temperatur und die Fluktuationen des Magnetfeldes erklärt werden.

Offensichtlich müssen sowohl die Zyklotronenergie als auch die axiale Temperatur möglichst klein gehalten werden, um die Zyklotronfrequenz am genauesten messen zu können. Die gegenwärtigen technischen Grenzen liegen bei $T_z = 4,2$ Kelvin und $E_+ = \frac{\omega_z}{\omega_+} \cdot T_z \simeq 25 \times 4,2 \simeq 100$ Kelvin = 3 meV (um diese untere Grenze zu verstehen siehe Unterabschnitt 4.3.1). Da die Meßzeit aufgrund des Fourier-Limits nicht kleiner als eine Minute sein kann, wenn man mHz-Auflösung anstrebt, bleiben die vorgestellten Mittelungsprozesse des Magnetfeldes immer vorhanden. Diese setzen die Grenze

in der Genauigkeit zur Bestimmung g-Faktoren mit der jetzigen Apparatur fest. Selbst wenn man die Inhomogenität des Magnetfeldes in der Präzisionsfrage reduzieren würde (also B_2 und eventuell auch B_1 minimieren) oder die Energien des Ions mit Hilfe eines „Dilution Refrigerators“ auf einige mK abkühlen würde, blieben die stochastischen Fluktuationen des Feldes immer noch anwesend. Da mit der jetzigen Apparatur und bei 4,2 Kelvin diese stochastischen Fluktuationen sehr wahrscheinlich schon den größten Beitrag zum Fehler der Messung liefern würden, wären die erwähnten Maßnahmen ohne eine verbesserte Zeitstabilisierung des Magnetfeldes zwecklos. Letztere ist zwar möglich (siehe [Dyc99]) aber von enormem technischen Aufwand. Zurzeit der Veröffentlichung dieser Dissertation ist diese Verbesserung nicht geplant.

Kapitel 4

Einleitende experimentelle Ergebnisse

In diesem Kapitel werden einige wichtige Messungen zur Vorbereitung der eigentlichen Messung des g-Faktors vorgestellt. Manche von ihnen zeigen Vorgänge, die man in jeder realen Penningfalle erwarten würde, d.h. Vorgänge die auf der *schönen Physik* des Käfigs beruhen. Im Vergleich dazu werden auch einige *apparative Effekte* vorgestellt, d. h. Effekte, die nur nach zahlreichen geduldigen Beobachtungen dieser Apparatur entdeckt wurden. Die theoretischen Grundlagen dieser Effekte bleiben in allen Fällen nur halbwegs geklärt. Sie werden als empirische Tatsachen betrachtet; wichtig ist letztendlich bloß, daß man durch ihre Kenntnis ungewollte systematische Verfälschungen der Messung des g-Faktors vermeidet. Da die apparative Effekte alle Messungen (und nicht nur die des g-Faktors) „verschmutzen“, muss man sie in einem möglichst frühen Stadium kennen, um sich vor ihnen schützen zu können. Aus diesem Grund wollen wir dieses Kapitel mit ihrer Beschreibung beginnen.

4.1 Apparative Effekte

Hauptsächlich gibt es zwei bekannte apparative Effekte. Man mag sich natürlich die Frage stellen, ob noch weitere Effekte bestehen; die Antwort ist einfach und lautet: ja, die gibt es.... aber sie sind so winzig, daß sie nach sieben Jahren Experimentierzeit, drei abgeschlossenen Promotionen, sechs Diplomarbeiten und tausenden von Arbeitstunden im Labor, noch unentdeckt bleiben. Deshalb sind sie irrelevant. Da die bekannten Effekte die Messung des g-Faktors nur im sub-ppb Bereich beeinflussen, ist die Wirkung der Verborgenen mit absoluter Sicherheit noch kleiner und völlig vernachlässigbar.

4.1.1 Die Massenschleife

Im Unterabschnitt 2.2.1 wurde das elektrische Potential der zylindrischen Falle untersucht. Idealerweise sind nur zwei Spannungen vorhanden, welche die axiale Frequenz des Ions bestimmen, nämlich die Ringspannung U_0 und

die Korrekturspannung¹ $U_k = T \times U_0$ ($T = \text{Tuning-Ratio}$). Beide Spannungen werden von einem Präzisionsnetzteil zur Verfügung gestellt. Bedauerlicherweise ist die vom Ion effektiv erfahrene Spannung auch von anderen Geräten abhängig. Die folgende Abbildung veranschaulicht dies:

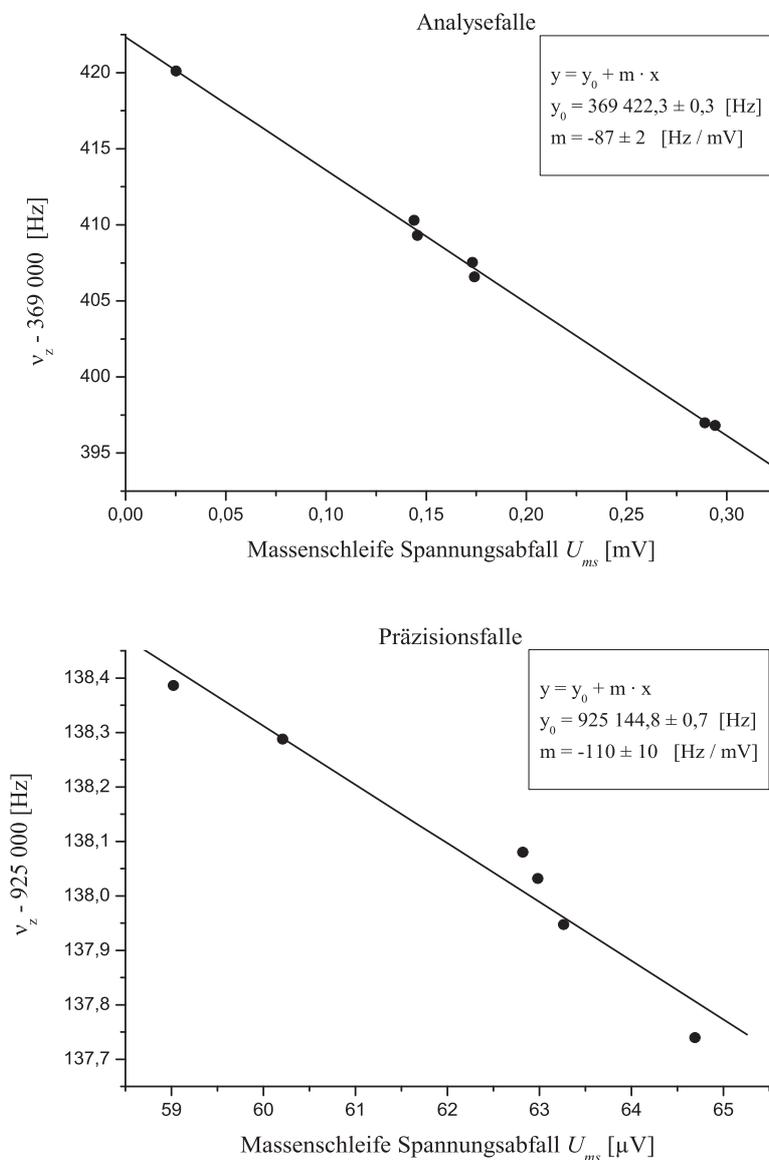


Abbildung 4.1: **Zusammenhang ν_z - Massenschleifenspannung.**

Im Prinzip ist die elektrische dc-Masse in unserem Experiment von der sogenannten *Speicher Potential Steuerung*² (kurz *SPS*) definiert. Wenn man aber mit einem Präzisionsmultimeter den (theoretisch verschwindenden) Spannungsabfall zwischen der *SPS* und dem Gehäuse des Magneten misst, U_{ms} , findet man erstens, daß er nicht verschwindet und zweitens, daß er mit der

¹ Unsere Falle ist nicht ganz Orthogonal. Siehe 2.4.2 und 4.8

² Dabei handelt es sich um eine selbst gebaute elektronische Steuerung mehrerer Relais und Schaltern. Siehe [Sta98] für Einzelheiten.

axialen Frequenz des Ions korreliert ist. Die lineare Korrelation ist in der Abbildung 4.1 offensichtlich. Beobachtungen zeigen, daß dieser Spannungsabfall davon *systematisch* abhängt welches Gerät zum letzten Mal vom Rechner zur Steuerung des Experiments (per GPIB-Schnittstelle) angesprochen wurde. Zum Beispiel: wenn der Rechner den Pegel des Mikrowellengenerators einstellt, hat U_{ms} einen Wert der anders ist, als wenn Daten vom FFT-Analysator eingelesen werden. Damit verschiebt sich die axiale Frequenz des Ions auch. Dieser Effekt kann z.B. dazu führen, die Spin-Ausrichtung in der AF nicht mehr bestimmen zu können (siehe Abbildung 2.12). Um den Effekt zu eliminieren wird U_{ms} bei der ersten Messung von ν_z als Referenz gesetzt; die nachfolgenden Messungen der axialen Frequenz werden mit ihren entsprechenden U_{ms} Werten und mit dem in Abbildung 4.1 gefundenen Korrelationsfaktor nachträglich korrigiert.

Auf den Einfluß dieses Vorgangs auf die Messung des g-Faktors wird in späteren Abschnitten eingegangen.

Man vermutet eine geschlossene Massenschleife als Verantwortungsträgerin für diesen unangenehmen apparativen Effekt, daher der ihm gegebene Name.

4.1.2 Die Relaxationszeit der axialen Frequenz

Während der g-Faktor-Messung wird das Ion ständig zwischen der Analyse- und Präzisionsfalle hin- und her-transportiert. In der AF bleibt es bis zwei Spin-Flips induziert werden etwa zwanzig Minuten. Nachdem es zurück in die PF transportiert wurde braucht die axiale Frequenz einige Minuten, um einen konstanten Wert anzunehmen. Wenn man ν_z zwanzig Mal nach dem Transport sukzessive misst, dann beobachtet man folgendes:

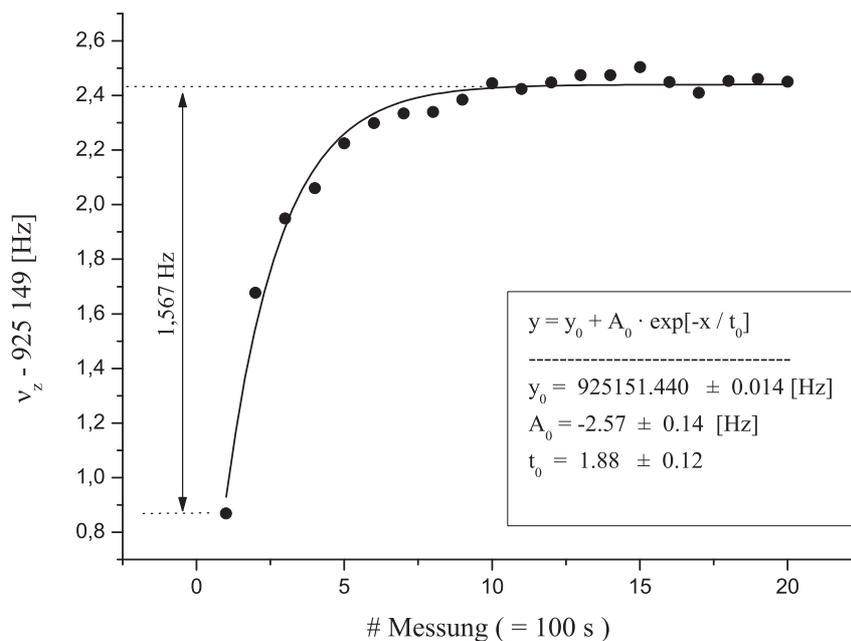


Abbildung 4.2: **Relaxationszeit der axialen Frequenz in der PF.**

Die Relaxationszeit beträgt nach dieser Messung 3,2 Minuten. Diese Zeitspanne ist zu lang um durch die Einschwingzeit des Präzisionsnetzteils für die Falle erklärt zu werden.

Wenn der Effekt nicht berücksichtigt würde, würde man einen systematischen Fehler in der Messung der Zyklotronenergie von circa $-0,6$ Hz machen. Da der gemessene g -Faktor g_m eine Abhängigkeit von der Zyklotronenergie von $+2,6$ ppb/Hz aufweist (siehe Abschnitt 5.2.1), dann wäre das endgültige Ergebnis des g -Faktors nach der Extrapolation auf verschwindende Zyklotronenergie um $2,6 \times (-0,6) = -1,56$ ppb falsch. Dies ist größer als der bei den vorausgegangenen Messungen zum g -Faktor von Kohlenstoff veröffentlichte gesamte Fehler [Häf00b] und daher nicht akzeptabel. Der vorgestellte apparative Effekt wurde erst im Rahmen dieser Dissertation entdeckt und war zur Zeit der Messung am Kohlenstoff $^{12}\text{C}^{5+}$ nicht bekannt. Es mag sehr wohl sein, daß der Effekt sich erst im Laufe der Zeit entwickelt hat, ansonsten wäre er höchstwahrscheinlich früher beobachtet worden³.

In der AF wurde der Effekt nicht beobachtet. Der Unterschied lag daran, daß wenn das Ion sich in der AF befand, die Ringspannung in der PF auf Null gesetzt wurde. Die Ringspannung in der AF blieb dagegen immer an gelegt, selbst wenn das Ion sich in der PF befand. Ändert man dies, also lässt man die Ringspannung in der PF auch immer an liegen, dann beobachtet man folgendes:

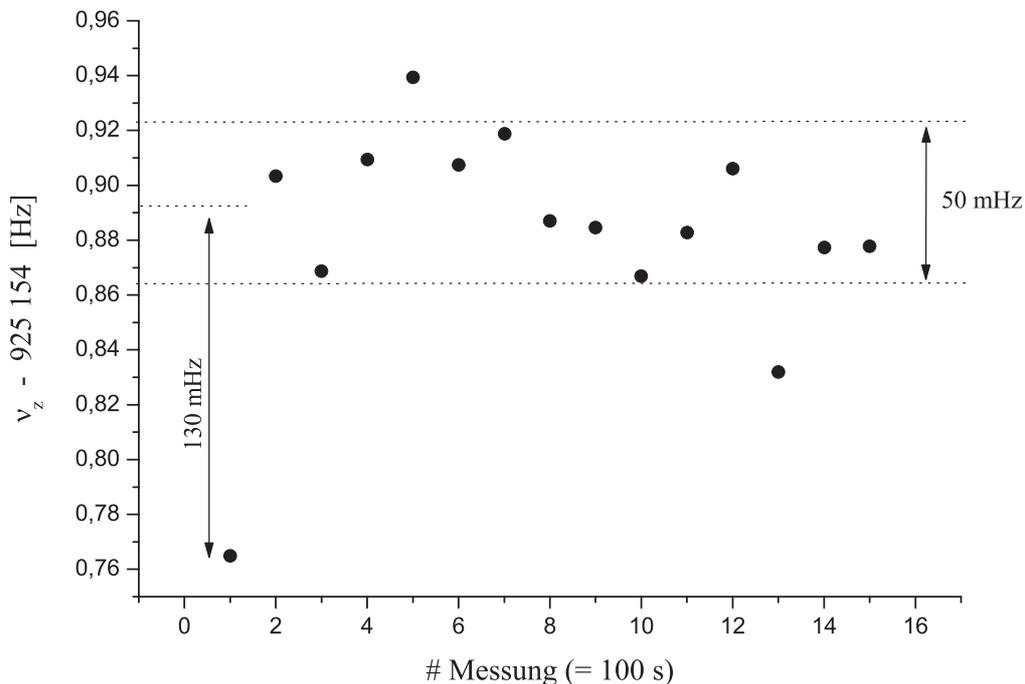


Abbildung 4.3: **Apparativer Effekt minimiert.**

Der Effekt ist fast verschwunden. Wie schon erwähnt ist das Netzteil für

³ An dieser Stelle ist die Beobachtungsfähigkeit von Herrn Dr. H. Häfner gar nicht zu unterschätzen, denn er hat den vorherigen absolut nicht trivialen apparativen Effekt der Massenschleife entdeckt.

diesen Effekt nicht verantwortlich. Die im vorherigen Abschnitt vorgestellte Massenschleife wurde experimentell auch ausgeschlossen. Es besteht also eine zusätzliche Quelle, welche die vom Ion effektive erfahrene Spannung beeinflusst. Um welche Art von Quelle es sich handelt ist aber unbekannt. Wichtig ist nur, daß der Effekt vermieden werden kann. Der Weg zu einer guten Messung des g -Faktors am $^{16}\text{O}^{7+}$ ist somit geebnet.

Nun wollen wir unsere Aufmerksamkeit auf die *schöne Physik* zurückkehren.

4.2 Die Kühlzeitkonstante der Zyklotronbewegung

Wie schon erwähnt, muss man das Ion anregen um ν_+ direkt messen zu können. Einmal angeregt, erfährt es Widerstandskühlung bis seine Energie sich der Temperatur des Schwingkreises angleicht. Nach 2.42 eignet sich eine kontinuierliche Messung der axialen Frequenz nach der Anregung des Ions sehr gut um die Widerstandskühlung der Zyklotronbewegung zu veranschaulichen:

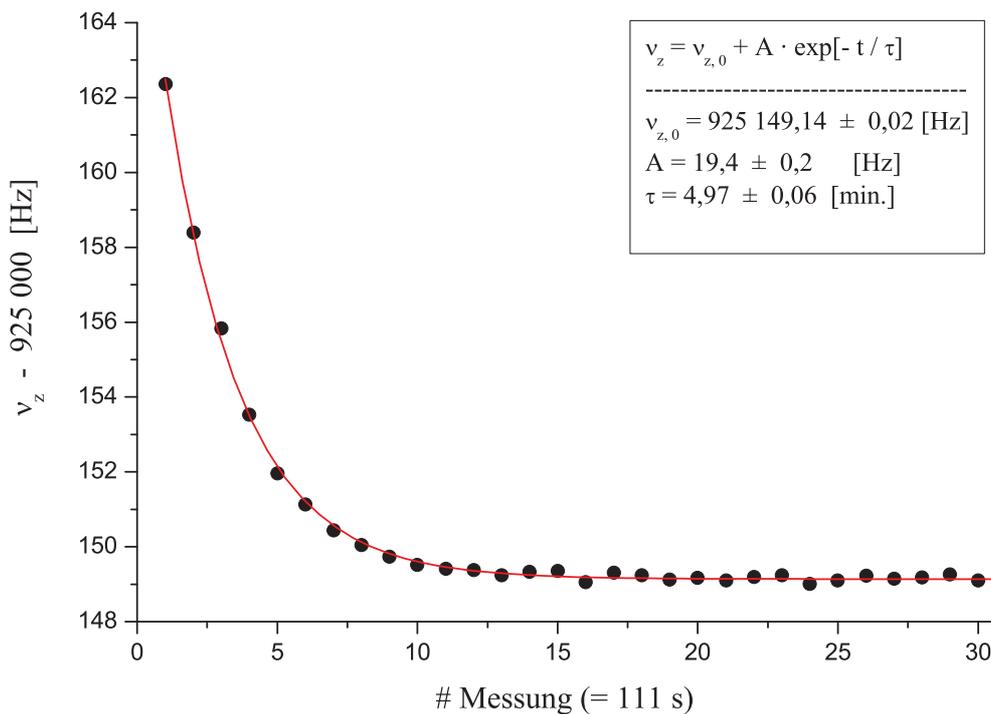


Abbildung 4.4: Messung der Kühlzeitkonstante der Zyklotronbewegung über ν_z .

Nach der Messung beträgt die Kühlzeitkonstante $\tau = 4,97 \pm 0,06$ Min. Sie hängt vom Ohmschen Widerstand des Schwingkreises R , von der Größe des Käfigs (definiert durch den effektiven Elektrodenabstand D ; siehe [Bro86]) und der Ionensorte ab: $\tau = \frac{D^2}{R} \cdot \frac{m}{q^2}$ [Sta98]. In unserem Fall ist $R \simeq 1 \text{ M}\Omega$ für

den Zyklotron-Nachweis und $D = 5,5$ mm. Der Zusammenhang zwischen der Breite des Dips γ und der Kühlzeitkonstante ist trivial und lautet $\gamma = \frac{1}{2\pi\tau}$. Je kleiner die Kühlzeitkonstante, desto breiter der Dip. Bei der gemessenen Kühlzeitkonstante von 4,97 Min. ist der Zyklotron-Dip nur $\gamma_+ = 0,5$ mHz breit. Ein dermaßen scharfer Dip läßt sich nicht nachweisen; die zeitlichen Fluktuationen des Magnetfeldes verschmieren ihn und machen ihn deshalb unsichtbar. Um die Zyklotronbewegung wie in Abbildung 3.8 direkt als Resonanz nachweisen zu können muss die Zyklotronenergie mindestens 1 Hz (Verschiebung der axialen Frequenz über dem Gleichgewichtwert $\nu_{z,0}$) betragen. Aus technischen Gründen lassen sich bei 25 MHz keine Spulen mit hinreichend großem Ohmschen Widerstand herstellen, um den Zyklotron-Dip sichtbar zu machen [Sta98], [Her99]. Bei der axialen Bewegung mit $\nu_z \simeq 1$ MHz ist dies bei einer Umgebungstemperatur von 4 Kelvin und unter der Verwendung von supraleitendem Draht wie Niob-Titan relativ einfach zu erreichen [Sta98]. In der Tat, nach der Breite des axialen Dips in der PF (Abbildung 3.5) von $\gamma_z = 0,95$ Hz berechnet sich die axiale Kühlzeitkonstante zu $\tau_z = 168 \pm 4$ ms.

Nach 2.44 ist die axiale Frequenz gegenüber Änderungen der Zyklotronenergie wesentlich empfindlicher als ν_+ . Die Kühlung der Zyklotronbewegung läßt sich trotzdem auch direkt durch die Verfolgung der Zyklotronfrequenz nachweisen:

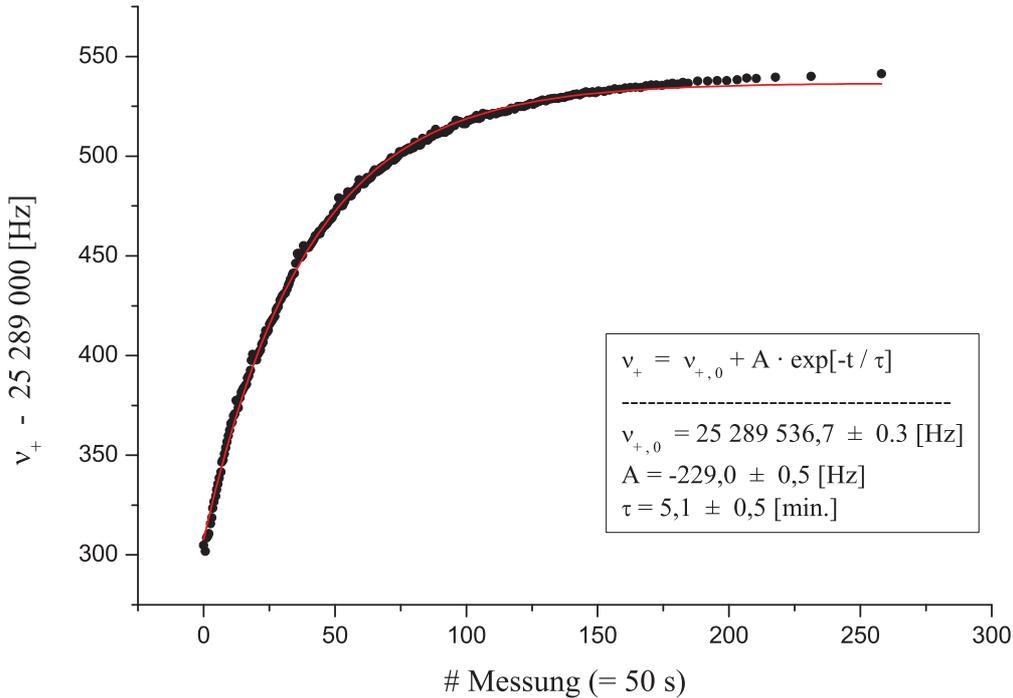


Abbildung 4.5: **Messung der Kühlzeitkonstante über ν_+ .**

Die mit der direkten und indirekten Methode gemessenen Kühlzeitkonstanten von jeweils $5,1 \pm 0,5$ Min. und $4,97 \pm 0,06$ Min. stimmen sehr gut überein.

Bei abnehmender Zyklotronenergie ist der vom Ion gesehene Mittelwert des Magnetfeldes größer und damit ν_+ auch. Dieses Verhalten wurde im Ab-

schnitt 3.2.3 theoretisch vorausgesagt (siehe Abbildung 3.9) und wird hiermit experimentell beobachtet.

4.3 Kopplung der Bewegungsmoden

Mit Hilfe eines geeigneten elektromagnetischen Wechselfeldes lassen sich verschiedene Eigenbewegungen des Ions in der Penningfalle miteinander koppeln: die Energie einer Eigenbewegung fließt in die andere und umgekehrt. Phänomenologisch kann man diesen Vorgang mittels einer Kopplungskonstante γ_c beschreiben. Als Beispiel wollen wir die Kopplung $\omega_+ - \omega_z$ untersuchen. Zusammen mit der Widerstandskühlung und der Modenkopplung lautet die Energiebilanz beider Eigenbewegungen des Ions:

$$\begin{aligned}\dot{E}_+ &= -\gamma_+ \cdot (E_+ - k \cdot T_+) + \gamma_c \cdot (E_z - E_+) \\ \dot{E}_z &= -\gamma_z \cdot (E_z - k \cdot T_z) + \gamma_c \cdot (E_+ - E_z)\end{aligned}\quad (4.1)$$

wobei γ_z und γ_+ die Widerstandskühlung jeweils der axialen und Zyklotronbewegung, d.h. die Kopplung der Bewegungsmoden an den entsprechenden Nachweisschwingkreis beschreiben: $\gamma_{+,z} = \frac{1}{2\pi\tau_{+,z}}$. Die experimentellen Werte zu diesen Konstanten wurden im vorherigen Abschnitt schon angegeben. Im normalen Fall gilt $\gamma_c = 0$, die Gleichungen in 4.1 sind damit entkoppelt und trivialerweise zu lösen: $E_{+,z}(t) = E_{+,z}^0 \cdot \exp(-\gamma_{+,z} \cdot t)$. Diese Funktionen widerspiegeln die normale Widerstandskühlung, so wie in Abbildung 4.4 gezeigt.

Schaltet man nun ein Wechselfeld $\vec{E} = \vec{E}_0 \cdot e^{i\omega t}$ mit Frequenz $\omega \simeq \omega_+ - \omega_z$ an, dann werden die Bewegungsmoden gekoppelt $\rightarrow \gamma_c \neq 0$. Der Kopplungsanteil in 4.1 ist so geschrieben, daß durch γ_c Energie von der axialen in die Zyklotronbewegung und umgekehrt hin- und her-pendelt. Da durch diese Kopplung keine Energie dissipiert, sondern nur transformiert werden kann, muss die Kopplungskonstante rein imaginär sein: $\gamma_c \in \mathbb{C}$ und $\mathcal{Re}(\gamma_c) = 0$. Der Betrag von γ_c hängt von der Stärke der Kopplung ab. In [Cor90] kann man eine halbklassische Erläuterung zur Entstehung der Kopplung mittels dem Quadrupolanteil des Wechselfeldes finden. Das hier vorgestellte phänomenologische Modell genügt, um die grundlegende Physik der Kopplung zu verstehen. Die vollständige Lösung der Gleichungen 4.1 lautet:

$$\begin{aligned}E_+(t) &= \frac{E_+^0 + \mu_2 E_z^0}{1 - \mu_1 \mu_2} \cdot e^{\lambda_- t} - \mu_2 \cdot \frac{E_z^0 + \mu_1 E_+^0}{1 - \mu_1 \mu_2} \cdot e^{\lambda_+ t} \\ E_z(t) &= \frac{E_z^0 + \mu_1 E_+^0}{1 - \mu_1 \mu_2} \cdot e^{\lambda_+ t} - \mu_1 \cdot \frac{E_+^0 + \mu_2 E_z^0}{1 - \mu_1 \mu_2} \cdot e^{\lambda_- t}\end{aligned}\quad (4.2)$$

mit $\mu_1 = \frac{\gamma_z + \gamma_c + \lambda_+}{\gamma_c}$ $\mu_2 = \frac{\gamma_+ + \gamma_c + \lambda_-}{\gamma_c}$; $\lambda_{\pm} = -\frac{\gamma_z + \gamma_+ + 2\gamma_c}{2} \pm \frac{\sqrt{(\gamma_z - \gamma_+)^2 + 4\gamma_c^2}}{2}$.

Um die Gleichungen 4.1 am einfachsten lösen zu können muss man zur Matrixschreibweise übergehen; die Exponenten λ_{\pm} stellen lediglich die Eigenwerte der Matrix dar. Sobald die Kopplung verschwindet ($\gamma_c \rightarrow 0$) streben, wie erwartet, die λ_{\pm} gegen die üblichen (umgekehrten) Kühlzeitkonstanten $\gamma_{z,+}$.

4.3.1 Seitenbandkühlung

Der Anfangswert der Zyklotronenergie sei $E_+^0 = 5 \text{ eV}$ ($\simeq 1,7 \text{ Hz}$). Das ist eine typische Energie, bei der die Zyklotronfrequenz gemessen wird. Auf der anderen Seite sei die axiale Anfangsenergie $E_z^0 = 1,72 \text{ meV}$ ($\simeq 20 \text{ K}$), also das Ion befinde sich im thermischen Gleichgewicht mit dem axialen Schwingkreis. Ferner sei eine relativ schwache Kopplung mit $|\gamma_c| = 0,6 \text{ Hz}$ und mit Frequenz $\omega \simeq \omega_+ - \omega_z$ anwesend. Die Abbildung 4.6 veranschaulicht die Dynamik der Energie beider Eigenbewegungen nach den in 4.2 vorgestellten Lösungen und mit den hier angegebenen Anfangswerten:

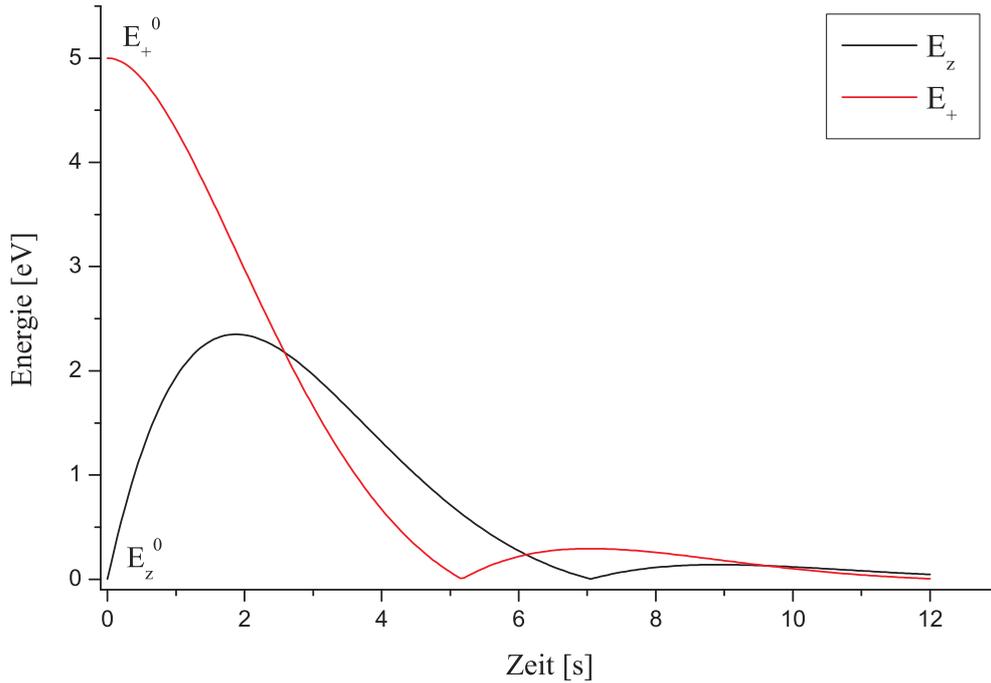


Abbildung 4.6: Darstellung der Lösungen von 4.1.

Man beobachtet, daß während der ersten 2 Sekunden ein Energietransfer von der *heissen* Zyklotron- in die *kalte* axiale Bewegung stattfindet. Gleichzeitig wird Energie sehr schnell durch den Ohmschen Widerstand des axialen LCs dissipiert. Zu einem bestimmten Zeitpunkt (etwa 2 Sekunden nach dem Einschalten der Seitenbandkopplung) beherrscht diese Dissipation die gesamte Lage und die axiale Energie wächst nicht mehr, sondern strebt sehr schnell gegen ein Gleichgewicht mit dem Schwingkreis. Inzwischen ist die Zyklotronbewegung durch die Kopplung effektiv sehr schnell über den axialen LC heruntergekühlt worden. Dies stellt die Grundlage der *Seitenbandkühlung* dar. In knapp 5 Sekunden wird der Zyklotronradius stark reduziert. Die gleiche Absenkung der Zyklotronenergie durch die übliche Widerstandskühlung hätte über fünfzehn Minuten gedauert (siehe Abbildung 4.4). Im Laufe der Messung des g-Faktors mit der traditionellen Methode wird das Ion ange-regt, um ν_+ zu messen; bevor es in die AF zu transportiert wird, muss es aber wieder gekühlt werden. Durch die hier vorgestellte Seitenbandkühlung spart man offensichtlich viel Zeit.

Limitierung des Modells

Lässt man die Zeit in 4.2 gegen unendlich streben, dann wird theoretisch ein Gleichgewichtspunkt erreicht weil: $\langle E_+(t \rightarrow \infty) \rangle = \langle E_z(t \rightarrow \infty) \rangle = k \cdot T_z$. Die Mittelwerte beider Energien werden identisch und der Temperatur des axialen Schwingkreises gleich. Das ist aber eine *falsche* Vorhersage.

Ein quantenmechanisches Modell der Seitenbandkopplung wie man in [Bro86] oder [Kre99] finden kann, zeigt, daß eigentlich werden die Hauptquantenzahlen beider Bewegungsmoden n_+, n_z gekoppelt. Im Gleichgewicht hat man dann: $\langle n_+(t \rightarrow \infty) \rangle = \langle n_z(t \rightarrow \infty) \rangle$. Quantenmechanisch ist die Energie der Harmonischen Oszillatoren durch die bekannte Formel $E_{+,z} = n_{+,z} \hbar \omega_{+,z}$ gegeben. Im Gleichgewicht gilt infolgedessen folgende Beziehung zwischen den beiden Energien:

$$\langle E_+ \rangle = \langle E_z \rangle \cdot \frac{\omega_+}{\omega_z} = k \cdot T_z \cdot \frac{\omega_+}{\omega_z}. \quad (4.3)$$

Für unser Sauerstoff-Ion bei $T_z = 61$ Kelvin, hat man: $\langle E_+ \rangle = 61 \times (25 \text{ MHz} / 925 \text{ kHz}) \simeq 1667$ Kelvin (= 0,143 eV). Dies stellt die Grenze der Seitenbandkühlung dar. Es soll darauf hingewiesen werden, daß die Endenergie durch die Temperatur des axialen Schwingkreises gegeben ist. Das liegt daran, daß $\gamma_z \gg \gamma_+$. Wäre es andersherum, also $\gamma_+ \gg \gamma_z$, dann hätte man: $\langle E_z \rangle = \langle E_+ \rangle \cdot \frac{\omega_z}{\omega_+}$, und der LC des Zyklotron-Nachweises würde die Lage beherrschen. In diesem Fall könnte man die axiale Bewegung tief unter der Temperatur des flüssigem Heliums kühlen. In späteren Abschnitten werden wir sehen, daß die Breite der g-Faktor-Resonanz stark mit T_z zunimmt, deshalb ist es von grosser Bedeutung diese möglichst klein zu halten. Leider ist es nicht trivial, einen LC bei 25 MHz mit dem notwendigen großen Ohmschen Widerstand zu bauen. Ein möglicher Ausweg wäre, den effektiven Elektrodenabstand D kleiner zu machen, also eine wesentlich kleinere Falle zu verwenden.

Vergleich mit dem Experiment: Direkte Messung von τ_z

Zunächst wollen wir als Beispiel die Kopplung der Bewegungsmoden im Zeitbereich in der Analysefalle nachweisen. Dafür wurde das axiale Signal des Ions gleichgerichtet und mit Hilfe eines digitalen Oszilloskops aufgenommen. Das Ergebnis ist in Abbildung 4.7 zu sehen. Um die dargestellte Messung durchzuführen wurde zuerst die Zyklotronbewegung angeregt und danach an die axiale Bewegung gekoppelt. Die Kopplung erfolgte mittels eines relativ breiten Frequenz-Sweeps um 24 553 000 Hz (entspricht ungefähr $\nu_+ - \nu_z$ in der AF). Der beobachtete plötzliche Zuwachs der Nachweisamplitude entspricht der Einstrahlung der richtigen Kopplungsfrequenz. Wie erwartet, nimmt zuerst die axiale Energie sehr schnell zu, um fortgehend durch die Widerstandskühlung wieder abzusinken bis das Ionsignal völlig verschwindet. Das in Abbildung 4.6 gezeigte theoretische Verhalten der Energie ist deshalb prinzipiell bestätigt. Aus der experimentellen Kurve in 4.7 ist darüberhinaus die axiale Kühlzeitkonstante in der AF direkt zu gewinnen. Dafür und zur Vereinfachung wurde eine schwache Kopplung angenommen und damit

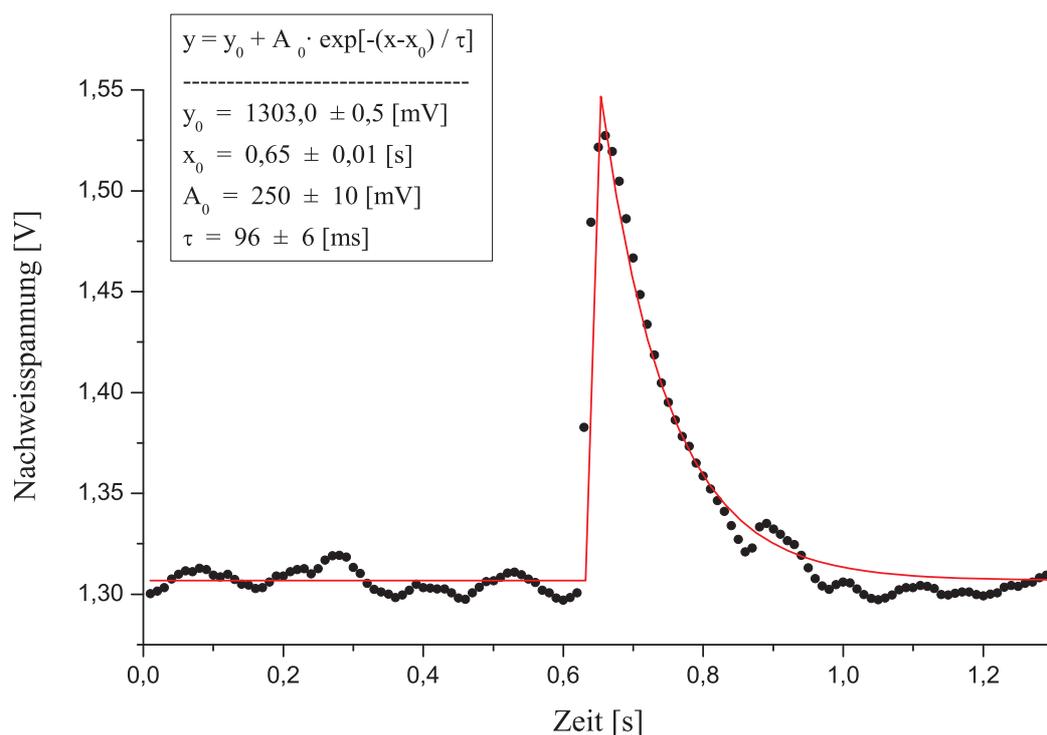


Abbildung 4.7: Nachweis der Kopplung der Bewegungsmoden im Zeitbereich.

die experimentellen Daten an eine einfache exponentielle Funktion angefitet: $y_0 + A \cdot \exp[-(x - x_0)/\tau]$. Die somit erhaltene Abklingkonstante τ ist nicht exakt gleich der echten axialen Kühlzeitkonstante τ_z . Nach dem Fit ist $\tau = 96 \pm 6$ ms.

Darüberhinaus erlaubt diese Messung, die Zyklotronfrequenz in der AF zu bestimmen. Wie schon gesagt, erfolgt die Kopplung (in diesem Fall) mittels eines Frequenz-Sweeps. Der beobachtete Signal-Peak taucht aber nur auf wenn der richtige untere Seitenband, $\nu_+ - \nu_z$, vorliegt. Im oben gezeigten Beispiel geschah dies, wenn die Frequenz des Sweeps $24\,558 \pm 1$ kHz betrug. Mit Hilfe der bekannten axialen Frequenz lässt sich ν_+ einfach bestimmen: $\nu_+ = 24\,558 + 369 = 24\,927 \pm 2$ kHz. Wir werden sehen, daß diese indirekte Messung der Zyklotronfrequenz wesentlich genauer sein kann. Nun aber wollen wir uns mit ν_- beschäftigen.

4.4 Messung der Magnetronfrequenz

Genauso wie beim Zyklotronfreiheitsgrad lässt sich die Magnetronbewegung durch Koppeln an die axiale Bewegung kühlen. Dafür muss das obere Seitenband verwendet werden: $\omega_z + \omega_-$, [Kre99]. Eigentlich heisst dies, daß kinetische Energie aus der axialen Bewegung in die Magnetronbewegung gepumpt wird. Damit klettert das Ion den elektrischen radialen Potentialberg hinauf und infolgedessen verringert sich sein Magnetronradius. Dieses Zentrieren des

Ion-Laufbahns wurde zum ersten Mal von Dehmelt et al. verwendet [Dyc78]. Darüberhinaus lässt sich die Magnetronfrequenz mittels der Kopplung sehr genau messen. Dafür wird der imaginäre Anteil der Exponenten λ_{\pm} in 4.2 verwendet. Dieser ist im wesentlichen auf die Kopplungskonstante γ_c zurückzuführen und verursacht nichtdissipative Schwingungen der Energie. In Abbildung 4.6 sind letztere noch eindeutig zu sehen: etwa zum Zeitpunkt $t = 5$ s lebt die fast erloschene axiale Bewegung durch Zufuhr von Zyklotronenergie wieder zu auf. Im Gleichgewicht und wenn die Kopplung immer anwesend bleibt, hat man nach 4.2: $E_z(t) \propto E_z^0 \cdot \cos(2\gamma_c \cdot t) \propto 2E_z^0 \cos^2(\gamma_c \cdot t)$. Setzt man dies in die Lösung der Bewegungsgleichung 2.15 ein, erhält man:

$$\begin{aligned} z(t) &\propto \sqrt{\frac{2E_z^0}{q c_2 U_0} \cos^2(\gamma_c t)} \cdot \cos(\omega_z t + \varphi_z) \propto \cos(\gamma_c t) \cdot \cos(\omega_z t + \varphi_z) \\ &= \frac{1}{2} \cos[(\omega_z + \gamma_c) \cdot t + \varphi_z] + \frac{1}{2} \cos[(\omega_z - \gamma_c) \cdot t + \varphi_z]. \end{aligned} \quad (4.4)$$

Die axiale Bewegung setzt sich nun aus zwei reinen sinusförmigen Schwingungen mit Frequenzen $(\omega_z + \gamma_c)$ und $(\omega_z - \gamma_c)$ zusammen. Mit anderen Worten, der axiale Dip spaltet sich in zwei getrennte neue Dips auf.

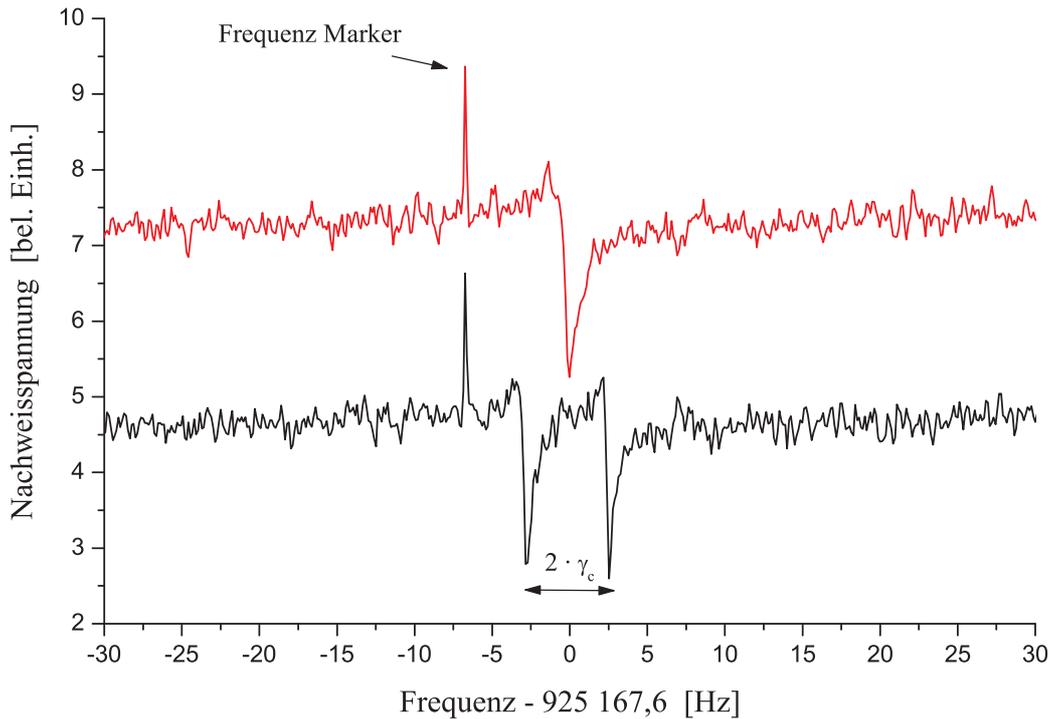


Abbildung 4.8: **Nachweis eines Doppel-Dips.**

Dabei wurden die axiale und Magnetronbewegung mittels des oberen Seitenbands gekoppelt. Man beobachtet, daß die Summe der Breiten beider Dips unabhängig von der Kopplungsfrequenz und gleich die Breite des einzelnen Dips ist (siehe Abbildung 4.14).

Bei dem anderen Freiheitsgrad (in diesem Fall der Magnetronbewegung) findet die Aufspaltung der Eigenfrequenz genauso statt.

Quantenmechanisches Zwei-Niveau-System: „Dressed Atom“-Formalismus

In [Cor90] wird eine halbklassische Beschreibung des Kopplungsvorgangs diskutiert. Viel eleganter und leistungsfähiger ist es aber die Kopplung als Antrieb eines quantenmechanischen Zwei-Niveau Systems mittels eines externen Feldes zu betrachten. Dies wird z.B. in [Hak81] gemacht. Hier wollen wir das grafisch darstellen:

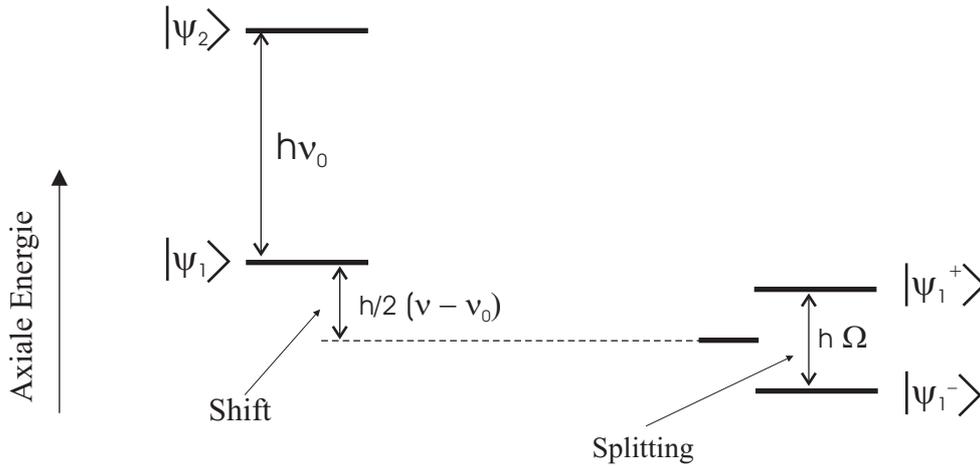


Abbildung 4.9: **AC-Stark-Effekt und Rabi-Aufspaltung der Eigenbewegungen in der Penningfalle.**

Die ebenfalls vorhandene Verschiebung und Aufspaltung des $|\psi_2\rangle$ Zustandes ist der Einfachheits halber nicht gezeichnet.

Hier ist $|\psi_1\rangle = |0_z\rangle \otimes |E_+\rangle$ und $|\psi_2\rangle = |E_z\rangle \otimes |0_+\rangle$. Die Energien (bzw. die Quantenzahlen) E_z und E_+ sind durch die Kopplung korreliert und um 90 Grad phasenverschoben: wenn der axiale Zustand „voll“ ist wird der Zyklotron-Zustand „leer“ und umgekehrt. Die Kopplung mit einem Wechselfeld $\sim V \cdot e^{-i2\pi\nu t}$, verursacht zwei Effekte in den Eigenfrequenzen des Ions:

1. *Verschiebung*⁴. Wenn das Kopplungsfeld nicht in Resonanz mit dem berücksichtigten Seitenband ν_0 ist, dann verschieben sich beide Zustände um $\delta/2 = -(\nu - \nu_0)/2$ bezüglich der ungekoppelten Frequenzen. Der Offset δ wird *Detuning* genannt.
2. *Aufspaltung*⁵. Wie schon erwähnt, verursacht die Modulation der Energie eine Aufspaltung der Bewegungsfrequenz. Die Lücke zwischen den beiden neuen Zuständen beträgt: $h \cdot \Omega$ (h ist die Plancksche Konstante). Die *Rabi-Frequenz* Ω ist proportional zur in 4.1 eingeführten Kopplungskonstante: $2\pi\Omega = 2 \cdot \gamma_c$. Außerdem ist sie hauptsächlich von der Stärke des Kopplungsfeldes V abhängig; $\Omega = \sqrt{\delta^2 + (2V)^2}$.

⁴ *Shift* auf englisch.

⁵ *Splitting* auf englisch.

Die Frequenzen des linken und rechten Dips in Abbildung 4.8 sind schließlich jeweils von folgendem Ausdruck gegeben:

$$\nu_{z,l} = \nu_{z,0} - \frac{\delta}{2} - \frac{\Omega}{2} \quad ; \quad \nu_{z,r} = \nu_{z,0} - \frac{\delta}{2} + \frac{\Omega}{2} \quad (4.5)$$

wobei $\nu_{z,0}$ die „natürliche“ axiale Frequenz des Ions (also ohne Kopplung) darstellt. Es ist günstig, auch die Mittelfrequenz zu definieren: $\nu_m = (\nu_{z,l} + \nu_{z,r})/2$. Damit hat man $\nu_m = \nu_{z,0} - \delta/2$. Nur wenn die Kopplung exakt resonant zum entsprechenden Seitenband ist (also $\delta = 0$) wird die Mittelfrequenz der axialen Frequenz identisch.

Um die Magnetronfrequenz zu messen, wird die Frequenz des Kopplungsfeldes solange geändert, bis die resonante Kopplung exakt getroffen wird. Diese Bedingung lässt sich erkennen unter anderem dadurch, daß die Rabi-Frequenz (bzw. der Abstand zwischen den zwei Dips) in Resonanz minimal wird:

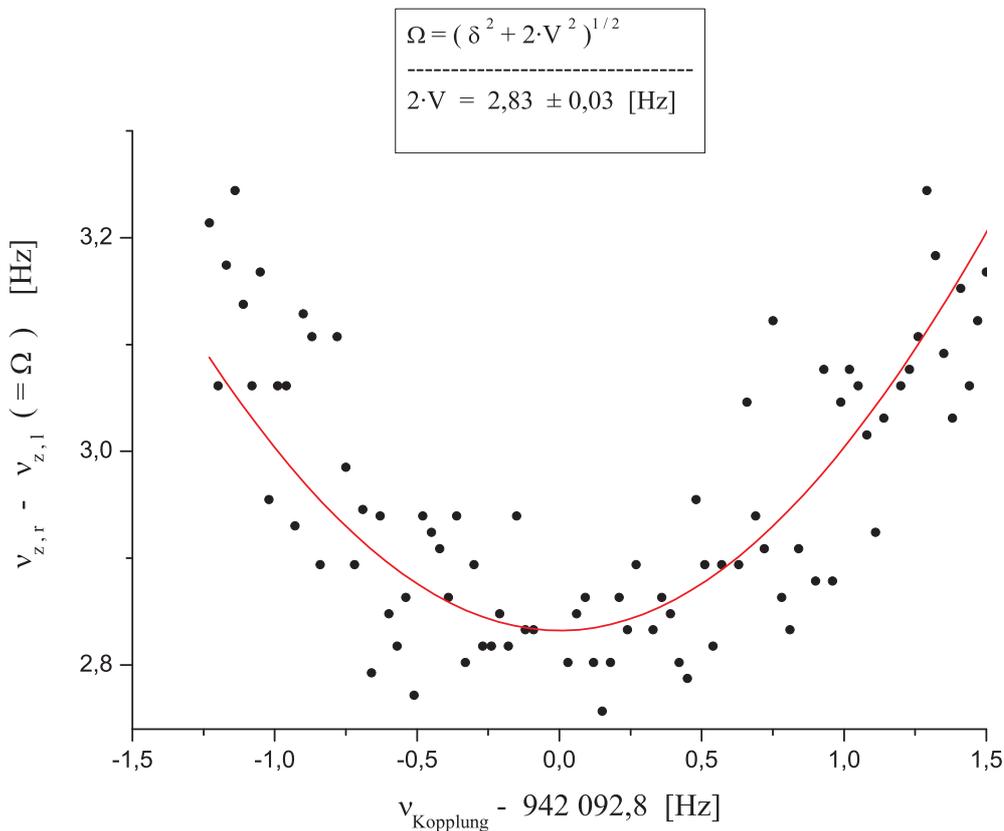


Abbildung 4.10: **Darstellung von Ω als Funktion der Kopplungsfrequenz.** Die Rabi-Frequenz wird bei resonanter Kopplung minimal.

Um diese Messung durchzuführen wurde die Kopplungsfrequenz innerhalb eines schmalen Bereiches schrittweise variiert. Man beobachtet, daß die als Funktion von $\nu_{Kopplung}$ gemessene Rabi-Frequenz dem erwarteten theoretischen Verhalten folgt. Das Minimum findet bei $\nu_{Kopplung} = 942\,092,8 \pm 0,3$ Hz statt. Aus diesem Wert und der bekannten axialen Frequenz ($\nu_z =$

925 168,9 Hz für die vorgestellte Messung) lässt sich trivialerweise die Magnetronfrequenz ableiten: $\nu_- = \nu_{\text{Kopplung}} - \nu_z = 16\,923,9 \pm 0,4$ Hz.

Die Verfolgung der Frequenzen jeweils des linken, des rechten und des einzelnen Dips liefern auch eine sehr gute Übereinstimmung mit der Theorie. Das kann man in folgender Abbildung eindeutig sehen:

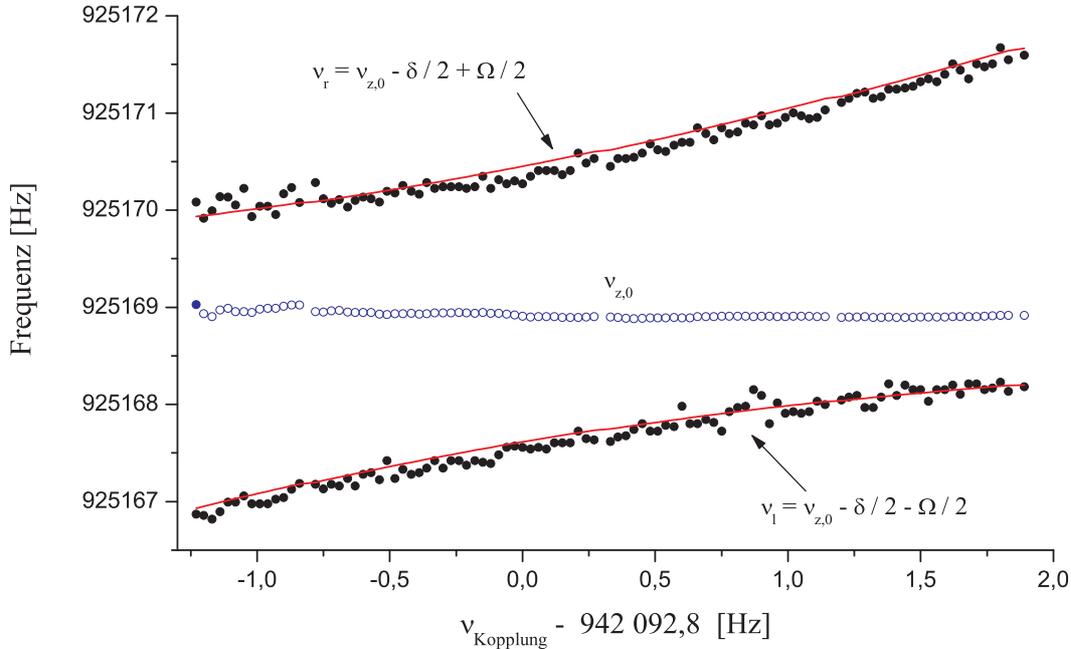


Abbildung 4.11: **Entwicklung der Dips mit der Kopplungsfrequenz.**

Das Verhalten der gespaltenen Dips wird in der Literatur „Avoided Crossing“ genannt [Cor90]. Die Messung bestätigt die Gleichung 4.5.

Man sollte darauf achten, daß mit einem einzelmem Doppel-Dip-Spektrum nur zwei Frequenzen zu gewinnen sind, nämlich ν_l und ν_r . Dafür wird eine theoretische Doppel-Dip Kurve an den experimentellen Daten angepasst (siehe Abbildung 5.21). In den Gleichungen 4.5 dagegen stecken vier Unbekannte: ν_z , δ , Ω und V (=Stärke der Kopplung wird auch in Hz gemessen). Eine zusätzliche Information, über die man verfügt ist die Kopplungsfrequenz ν_k , was eine zusätzliche Unbekannte mit sich bringt, nämlich die Magnetronfrequenz (bzw. die Zyklotronfrequenz wenn man mit dem unteren Seitenband $\omega_+ - \omega_z$ koppelt). Die Lage kann man in folgender Tabelle zusammenfassen:

Bekannte Größen	Gesuchte Frequenzen
ν_l, ν_r, ν_k	$\nu_z, \nu_{\pm}, \delta, \Omega, V$

Tabelle 4.1: **Liste der charakteristischen Frequenzen eines 2-Dip-Spektrums.**

Offensichtlich steht auf der Seite der unbekanntem Größen eine zu viel. Um das Problem zu umgehen wurde in der oben vorgestellte Messung die axiale Frequenz extra gemessen, d. h. zwischen zwei sukzessiven 2-Dip-Spektren

wurde einen normalen 1-Dip Spektrum (also ohne Kopplung) aufgenommen. Letzteres liefert unmittelbar den Wert von ν_z , was somit auf die Seite der bekannten Größen fällt. Auf diese Weise lässt sich das Problem vervollständigen. Theoretisch genügen zwei Messungen, eine eines Doppel-Dips und eine eines Einzel-Dips, um alle gewünschten Frequenzen bestimmen zu können.

Das Gleichungssystem, das alle diese Mengen verknüpft, lautet:

$$\begin{aligned}\nu_l &= \nu_z - \frac{\delta}{2} - \frac{\Omega}{2} \\ \nu_r &= \nu_z - \frac{\delta}{2} + \frac{\Omega}{2} \\ \delta &= (\nu_z + \nu_-) - \nu_k \quad \text{bzw.} \quad \delta = \nu_k - (\nu_+ - \nu_z) \\ \Omega &= \sqrt{\delta^2 + (2V)^2}.\end{aligned}\tag{4.6}$$

Für die Messung des g-Faktors sind eigentlich nur ν_{\pm} und ν_z relevant. Trotzdem muss man alle Frequenzen messen um diese drei zu gewinnen. Die Magnetronfrequenz wird allerdings nur einmal gemessen; während der Messung des g-Faktors bleibt die Ringspannung in guter Näherung konstant und deshalb ν_- auch. Etwaige Drifts oder Fluktuationen dieser Spannung werden durch die direkte Messung von ν_z verfolgt. In den etwa drei Monaten langen Messzeit des g-Faktors ist die effektive Spannung stabil genug, damit die Verschiebung der Magnetronfrequenz sich weit unter der notwendigen Mindestgrenze von 37 Hz hält (siehe Abschnitt 2.3.1). Sicherheitshalber wurde allerdings ν_- mehrmals innerhalb der erwähnten Messzeit gemessen. Darüberhinaus hat man mit Hilfe der Beziehung $\nu_- = \frac{\nu_z^2}{2\nu_+}$:

$$\begin{aligned}\Delta\nu_- &= \left(\frac{\nu_z}{\nu_+}\right) \cdot \Delta\nu_z - \frac{1}{2} \left(\frac{\nu_z}{\nu_+}\right)^2 \cdot \Delta\nu_+ \\ &= 0,037 \cdot \Delta\nu_z - 0,00067 \cdot \Delta\nu_+ \text{ Hz, (für ein } ^{16}\text{O}^{7+}\text{-Ion).}\end{aligned}\tag{4.7}$$

Zusammen mit dem angegebenen Wert von $\nu_- = 16\,923,9$ jeweils bei $\nu_z = 925\,168,9$ und $\nu_+ = 25\,289\,569 \pm 1$ Hz, wurde die Abweichung der Magnetronfrequenz bezüglich des angegebenen Wertes durch die (sowieso notwendige) ständige Messung der axialen und reduzierten Zyklotronfrequenz bestimmt und mit Hilfe von 4.7 für jeden einzelnen Messpunkt der g-Faktor-Resonanz korrigiert.

4.5 Indirekte Messung der Zyklotronfrequenz

Wie in früheren Abschnitten schon erläutert, lassen sich die Zyklotron- und axiale Bewegung auch sehr effektiv koppeln, und zwar mittels dem unteren Seitenband $\nu_+ - \nu_z$. Die Kopplung wurde zuerst als schnelle Kühlungs-Methode vorgestellt. Das Interesse daran geht aber deutlich darüber hinaus, denn sie erlaubt genauso wie bei der Magnetronbewegung, die reduzierte Zyklotronfrequenz zu messen. Dafür wird das Gleichungssystem 4.6 mit $\delta = \nu_k - (\nu_+ - \nu_z)$ verwendet. Diese *indirekte Messung* der Zyklotronfrequenz weist einen sehr wichtigen Vorteil gegenüber der direkten Messung

auf, nämlich die extrem niedrigen Zyklotronenergien bei denen sich ν_+ messen lässt. Durch die Kopplung beträgt die Zyklotronenergie eines $^{16}\text{O}^{7+}$ -Ions etwa 43 meV (siehe Gleichung 4.3) in unserer Apparatur. Im Vergleich dazu lautet der zur direkten Messung nötige Mindestwert der Zyklotronenergie etwa 3 eV, also ungefähr zwei Größenordnungen mehr. Um davon effizient profitieren zu können, muss erst festgestellt werden, ob die indirekte Methode bei der Bestimmung der reduzierten Zyklotronfrequenz mindestens so genau wie die direkte sein kann oder nicht.

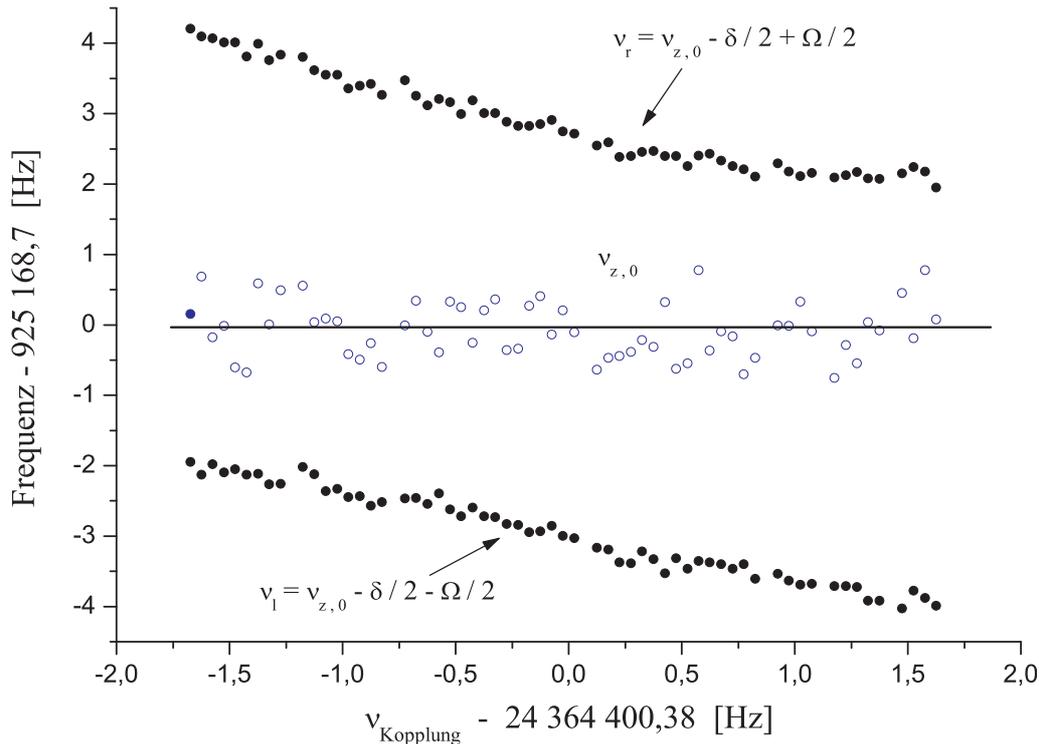


Abbildung 4.12: **Avoided Crossing mit Kopplung** $\omega_+ - \omega_z$.

Das Detuning weist nun das entgegengesetzte Vorzeichen als bei der Magnetronkopplung auf.

Um den g-Faktor zu messen wird bei verschiedenen Mikrowellenfrequenzen mindestens einige Hundert Mal versucht einen Spin-Flip zu induzieren. Bei jedem Versuch muss das Magnetfeld am Ort des Ions und während des Einstrahlens der Mikrowellen gemessen werden. Außerdem soll die Messung binnen einigen Minuten stattfinden. Die direkte Methode erlaubt, ν_+ mit einer relativen Genauigkeit von $\sim 1 \cdot 10^{-9}$ in etwa einer Minute zu bestimmen. Damit die indirekte Methode eine ähnliche Genauigkeit erreichen könnte, wäre es vorteilhaft die Messung nur mit einem einzelnen Doppel-Dip Spektrum durchzuführen, d.h. ohne den Bedarf an 1-Dip-Spektren; ansonsten wird die Genauigkeit aufgrund von Fluktuationen und Verschiebungen sowohl des Magnet- als auch des elektrischen Feldes verringert. Aus dem Doppel-Dip-Spektrum braucht man eine zusätzliche Information, die es erlaubt, das Gleichungssystem 4.5 vollständig zu lösen.

Die Quantenmechanik bietet eine mögliche Lösung an, nämlich die Verwendung der Breiten beider Dips zur Einschätzung der Symmetrie der Kopplung. Die Lösung der Schrödinger-Gleichung in der Diracschen Abbildung liefert die Wellenfunktion der aufgespaltenen Zustände [Hak81]. Mit der in Abbildung 4.9 eingeführten Schreibweise:

$$\begin{aligned} |\psi_1\rangle &= \frac{2 \cdot V}{\sqrt{2\Omega(\Omega - \delta)}} \cdot |\psi_1^+\rangle + \frac{2 \cdot V}{\sqrt{2\Omega(\Omega + \delta)}} \cdot |\psi_1^-\rangle \\ |\psi_2\rangle &= \frac{\Omega - \delta}{\sqrt{2\Omega(\Omega + \delta)}} \cdot |\psi_2^+\rangle - \frac{\Omega + \delta}{\sqrt{2\Omega(\Omega - \delta)}} \cdot |\psi_2^-\rangle. \end{aligned} \quad (4.8)$$

Die Entwicklung des Quadrats der theoretischen Wellenfunktionen als Funktion des Detunings ist in folgender Abbildung zu sehen:

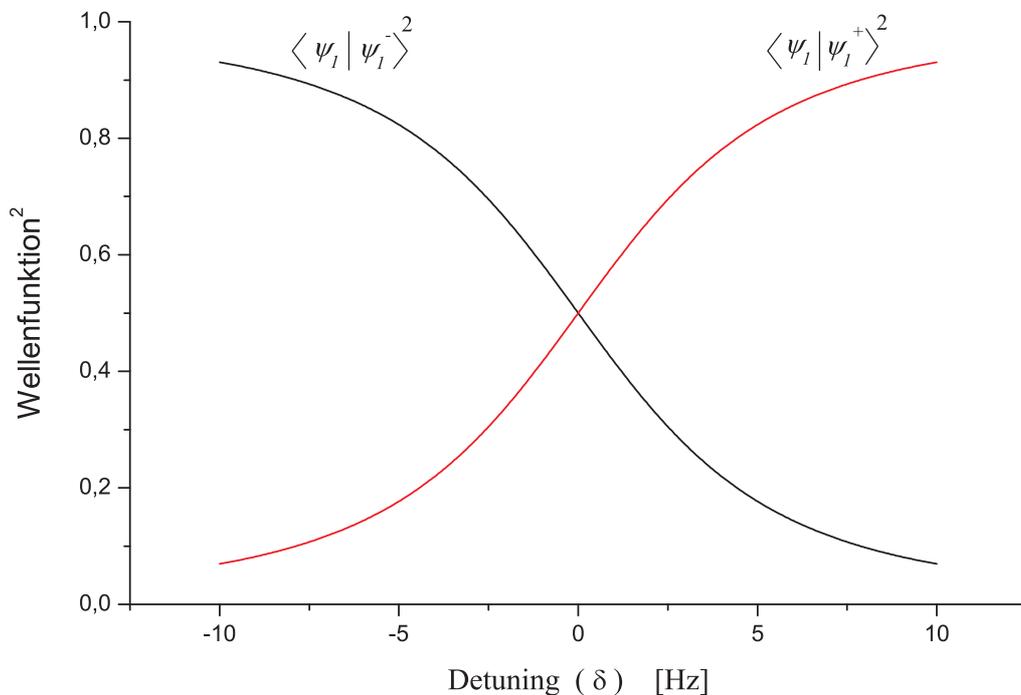


Abbildung 4.13: **Theoretische Wahrscheinlichkeiten beider Dips als Funktion des Detunings.**

Die Grafik wurde mit den in 4.8 angegebenen Funktionen berechnet. Dabei wurde eine Rabi-Frequenz ($= 2 \cdot V$) von 5,9 Hz angenommen. In Resonanz ist $\delta = 0$ und beide Zustände sind gleich wahrscheinlich: die zwei Dips werden symmetrisch.

Diese Zustände kann man jeweils mit dem rechten, $|\psi_1^+\rangle$, oder dem linken Dip identifizieren, $|\psi_1^-\rangle$. In Resonanz ist die Aufenthaltswahrscheinlichkeit beider Zustände gleich. Wenn das Detuning zu groß ist, also wenn die externe Kopplungsfrequenz zu weit weg von der Resonanz liegt, ist die Kopplung kaum zu spüren, denn die Wahrscheinlichkeit eines Zustandes gegen eins strebt wobei die des anderen gegen Null geht. Dies bedeutet, daß der eine Dip oder der andere, je nachdem wie das Vorzeichen des Detunings steht, verschwindet. Unter diesen Umständen ist im Frequenz-Spektrum nur ein

Dip zu sehen. Der verbleibende Dip ist mit dem einzelnen *normalen* Dip (ohne Kopplung) identisch. Experimentell kann man die Wellenfunktion mit der Breite des entsprechenden Dips identifizieren:

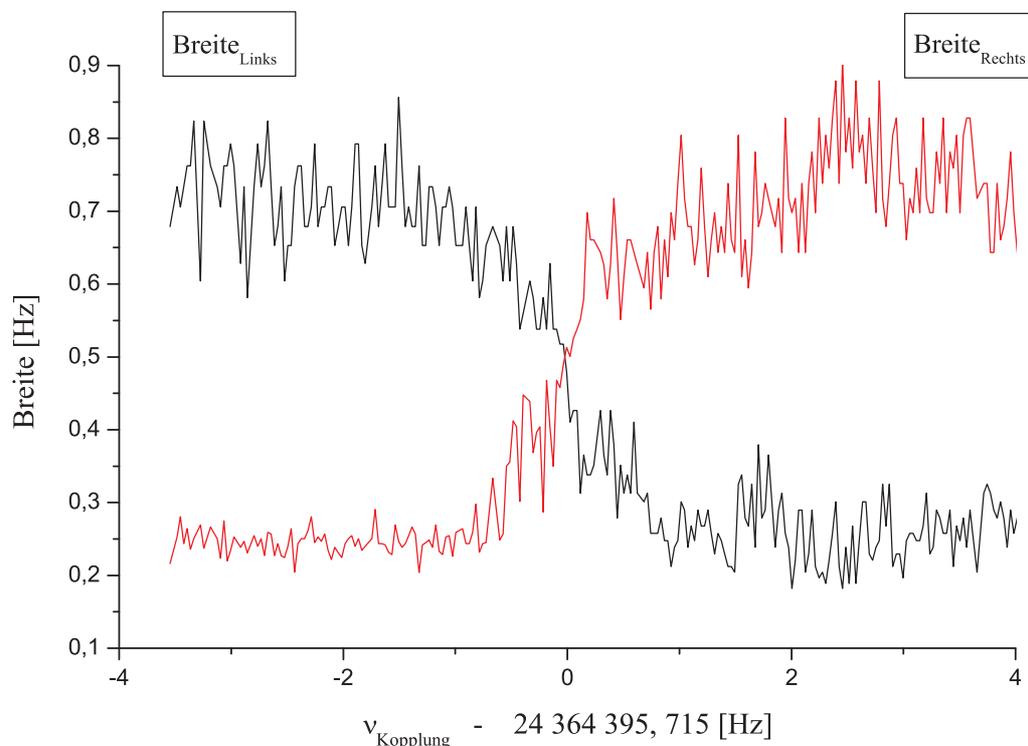


Abbildung 4.14: **Experimentelle Abhängigkeit der Breite beider Dips als Funktion des Detunings.**

Wie die Grafik zeigt, ist das gemessene Verhalten der Breiten qualitativ mit der vorhergesagten theoretischen Abhängigkeit der Wellenfunktionen vom Detuning identisch. Um den Kreis zu schließen, kann man nun die Breiten normieren, indem man ihre Summe gleich eins setzt und beide mit dem somit gefundenen Normierungsfaktor multipliziert. Mit dem Quadrat der in 4.8 vorgestellten Wellenfunktionen und den gemessenen (normierten) Breiten gewinnt man eine neue Gleichung in δ und Ω . Dabei bleibt die Anzahl der Unbekannten unverändert. Diese neue Gleichung kann man nun verwenden, um das Gleichungssystem 4.6 nach ν_+ und ν_z aufzulösen. Damit lassen sich beide Frequenzen mit einem einzelnen Doppel-Dip-Spektrum bestimmen. Im Prinzip bräuchte man kein 1-Dip-Spektrum (davor oder danach oder beides) aufzunehmen. Die Probleme der elektrischen und magnetischen Fluktuationen und der zeitlichen Verschiebungen beider Felder wären damit in erster Näherung beseitigt.

Bedauerlicherweise ist diese Methode nicht genau genug, da die Breiten der Dips sich nicht so scharf wie ihre Frequenzen selbst bestimmen lassen. Zwar ist sie relativ schnell, da sie alle Frequenzen auf ein Mal zu bestimmen erlaubt, aber für die von uns angestrebte Genauigkeit erweist sie sich als nicht ausreichend präzise. Die folgende Abbildung vergleicht die mehrmalige Mes-

sung der axialen Frequenz, erst direkt aus dem Doppel-Dip-Spektrum und mit Hilfe der durch die Breiten gewonnenen zusätzlichen Information extrahiert und dann aus einer nachfolgenden 1-Dip-Messung (als kontinuierliche Kurve dargestellt):

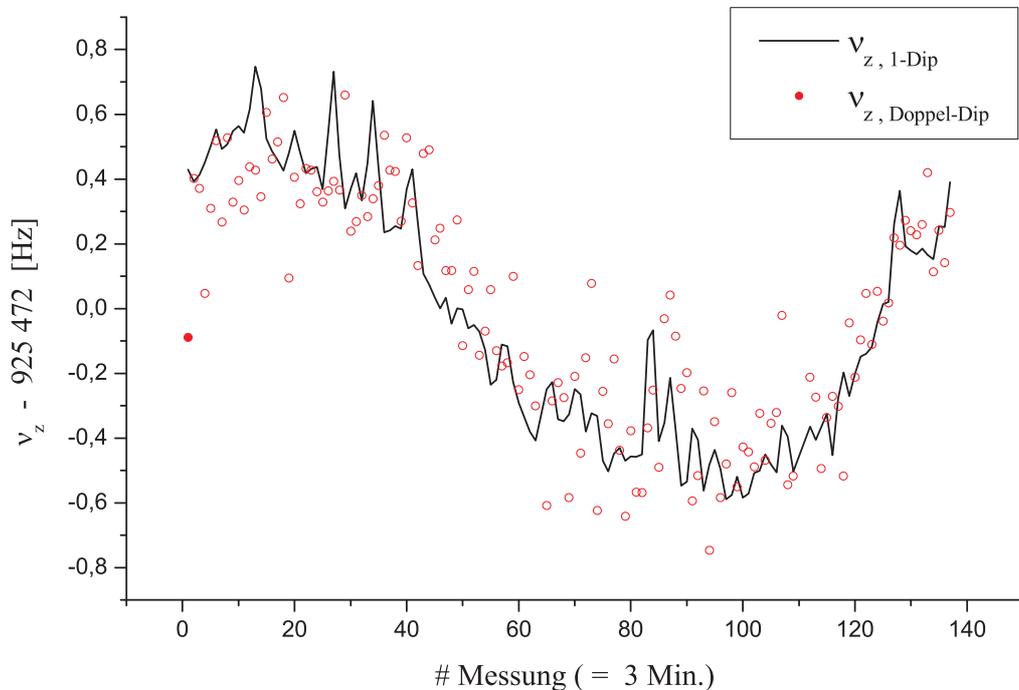


Abbildung 4.15: **Vergleich Messung der axialen Frequenz 1-Dip versus 2-Dip.**

Die relativ größere Streuung der Messpunkte aus den Doppel-Dip+Breiten um die 1-Dip Messlinie bestätigt die oben vorgestellte Argumentation. Trotzdem ist das Verhalten der Breiten der Dips ein schönes und einfach zu verstehendes Beispiel des quantenmechanischen Verhaltens des Ions. Allein aus diesem Grund lohnt sich vorhergehende Diskussion. Die klassische Mechanik kann den beobachteten Vorgang auch erklären aber nur mit Ad-Hoc Hypothesen [Cor90] und (nach Meinung des Autors) nicht auf die elegante und einfache Weise der Quantenmechanik.

Aus der oberen Abbildung sieht man wie die Speicherspannung und damit die axiale Frequenz mit der Zeit driftet. Diese Verschiebung kann man weitgehend eliminieren, indem man die axiale Frequenz mittels zwei Einzel-Dip-Spektren bestimmt. Die zwei Einzel-Dip-Spektren werden vor und nach der Doppel-Dip-Messung aufgenommen; die entsprechende axiale Frequenz ist daher als Mittelwert der zwei Messungen definiert: $\nu_z = (\nu_{z,vor} + \nu_{z,nach})/2$. Damit gewinnt man die nötige Information über ν_z , die zusammen mit $\nu_{z,l}$ und $\nu_{z,r}$ und dem Gleichungssystem 4.6 die *indirekte* Bestimmung der reduzierten Zyklotronfrequenz ν_+ erlaubt. Solange die Drift der Speicherspannung linear ist (und es ist so für „kurze“ Zwischenmesszeiten) eliminiert diesen Mittelungsprozess in erster Ordnung die Auswirkung der elektrischen Drifts. Lokale, nicht-lineare Fluktuationen der Speicherspannung werden nicht be-

seitigt. Nur durch eine ausreichende Menge an Statistik d.h. an Messpunkten zur g-Faktor-Resonanz, wird die Auswirkung dieser stochastischen Fluktuationen reduziert.

Wir werden zwei Messungen des g-Faktors vorstellen:

1. *Traditionelle Methode:* Die notwendige Messung des Magnetfeldes wird mittels direkter Bestimmung der reduzierten Frequenz, wie in Sektion 3.2.2 vorgestellt, stattfinden.
2. *Doppel-Dip-Methode:* Die Messung des Magnetfeldes am Ort des Ions während dem induzieren der Spin-Flips wird durch die indirekte, hier vorgestellte Methode zur Messung von ν_+ durchgeführt.

In allen anderen Merkmalen sind diese zwei Messungen identisch. Die erste Methode liefert den experimentellen g-Faktor bei hohen Zyklotronenergien. Der zweite erlaubt, die Messung mit einem relativ kalten Ion durchzuführen. Die eigentliche Messung des g-Faktors wird im nächsten Kapitel ausführlich erläutert.

4.6 Der dreifache Dip

Für die zweite Methode werden wir, wie schon erwähnt, zwei Mal die axiale Frequenz mittels 1-Dip-Spektren messen müssen. Wir haben gesehen, daß die Verwendung der in den Breiten der doppelten Dips steckenden Informationen nicht hinreichende präzise Ergebnisse liefert. Dabei kommt die Limitierung dadurch zustande, daß man statt reine Resonanz-Frequenzen eben Breiten messen muß. Letztere lassen sich nicht so scharf wie Erstere definieren. Eine gute Alternative dazu hätte man, wenn man eine dritte Resonanz-Frequenz im gleichen Spektrum messen könnte. Dafür braucht man einen dreifachen Dip-Spektrum. Die Frage lautet natürlich: wo soll der dritte Dip herkommen?. Eine mögliche Lösung ist in 4.4 enthalten. Dort sahen wir wie die zwei Dips durch eine *vollständige* Modulation der axialen Bewegungsamplitude hervorgerufen wurden. Gelingt uns eine partielle Modulation der axialen Energie, dann wird sich die Gleichung 4.4 folgendermaßen transformieren:

$$\begin{aligned} z(t) &\propto (\alpha + \beta \cdot \cos(\gamma_c t)) \cdot \cos(\omega_z t) \longrightarrow \\ &\hookrightarrow \alpha \cdot \cos(\omega_z t) + \frac{\beta}{2} \cdot \cos[(\omega_z + \gamma_c) \cdot t] + \frac{\beta}{2} \cdot \cos[(\omega_z - \gamma_c) \cdot t] \end{aligned} \quad (4.9)$$

wobei α und β die Modulationstiefen darstellen; bei vollständiger Modulation: $\beta = 1, \alpha = 0$ und ohne Kopplung: $\beta = 0, \alpha = 1$. Die axiale Bewegung setzt sich nun aus drei periodischen Schwingungen zusammen: die üblichen Dips links und rechts des auch anwesenden ungekoppelten normalen Dips. Aus dem letzteren würde man unmittelbar ν_z messen und dann mit ν_l, ν_r und 4.6 die reduzierte Zyklotronfrequenz, ν_+ , mit einem einzigen Spektrum herausfinden.

Eine partielle Modulation der Bewegungsamplitude kann man sehr einfach durch Modulation des Kopplungssignals selbst realisieren. Man braucht

nur das koppelnde Wechselfeld während der Aufnahme des Doppel-Dip Spektrums schnell genug an- und auszuschalten. Das Endergebnis einer solchen Aufnahme setzt sich nun aus dem gemittelten Spektrum eines einzelnen Dips plus eines Doppel-Dips zusammen. Effektiv hat man eine partielle Kopplung wie in Gleichung 4.9 geschafft. Experimentell ist es trivial das Kopplungsfeld mittels eines zusätzlichen digitalen Funktionsgenerators zu modulieren. Letzterer kann dafür programmiert werden, einen Zug von sich wiederholenden TTL-Pegeln (also einen Zug von An-Aus Signalen) mit einer bestimmten Frequenz zu liefern. Der Ausgang dieses Funktionsgenerators wird an den Modulationseingang des ersten Generators, welcher das Kopplungssignal erzeugt, angeschlossen. Am Ausgang dieses letzteren Geräts entsteht das notwendige modulierte Wechselfeld.

Tut man das, dann erhält man Spektren wie das folgende:

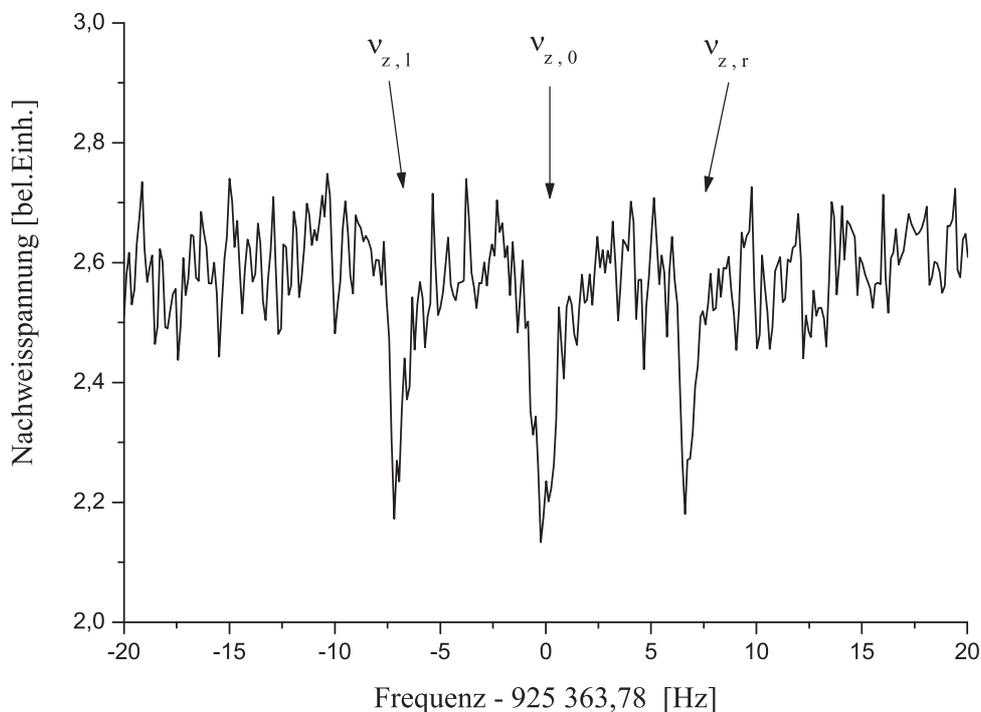


Abbildung 4.16: **Experimentelles Spektrum eines dreifachen Dips.**
Mit nur einem Spektrum kann man das Gleichungssystem 4.6 vollständig lösen.

Mit der Verwendung dieser Technik kann man im Prinzip die stochastischen Fluktuationen des elektrischen und des magnetischen Feldes reduzieren. Wir haben gesehen, daß solche Fluktuationen die Hauptlimitierung der Doppel-Dip + 2 Mal 1-Dip Methode darstellen; mit einem dreifachen Dip kann man sehr wahrscheinlich die Genauigkeit der Messung wesentlich verbessern. Im Rahmen dieser Dissertation wurde die 3-Dip-Technik nicht weiter bearbeitet. Obwohl eine originale Idee des Autors, konnte wegen Zeitmangel diese Technik zur Messung des g -Faktors an $^{16}\text{O}^{7+}$ nicht eingesetzt werden. Die Methode ist aber vielversprechend und wird von T.Valenzuela und S.Djekic für ihre jeweiligen Doktorarbeiten weiter untersucht.

4.7 Optimierung des Tuning-Ratios

Im Unterabschnitt 2.5.1 wurde die Auswirkung der elektrischen Anharmonizitäten auf die Bewegungsfrequenzen untersucht. Laut Gleichung 2.34 verursacht der c_4 -Term eine lineare Verschiebung der axialen Frequenz mit der axialen Energie. Im Abschnitt 2.4.1 wurde die Kompensierung der elektrischen Anharmonizitäten mittels geschickter Einstellung des Tuning-Ratios vorgestellt. Nun wollen wir diese Optimierung experimentell untersuchen. Die Methode, um c_4 zu minimieren wurde Anhang der Ableitung der Korrekturmatrix 2.35 schon vorgestellt. Dabei, muss man die axiale Frequenz bei zwei unterschiedlichen Temperaturen⁶ messen. Die Differenz beider Messungen, $\Delta\nu_z = \nu_z(T_{high}) - \nu_z(T_{low})$, wird als experimenteller zugänglicher Maßstab für die Größe des c_4 -Terms verwendet. Gleichung 2.34 gewährleistet die Eignung dieser Vorgehensweise.

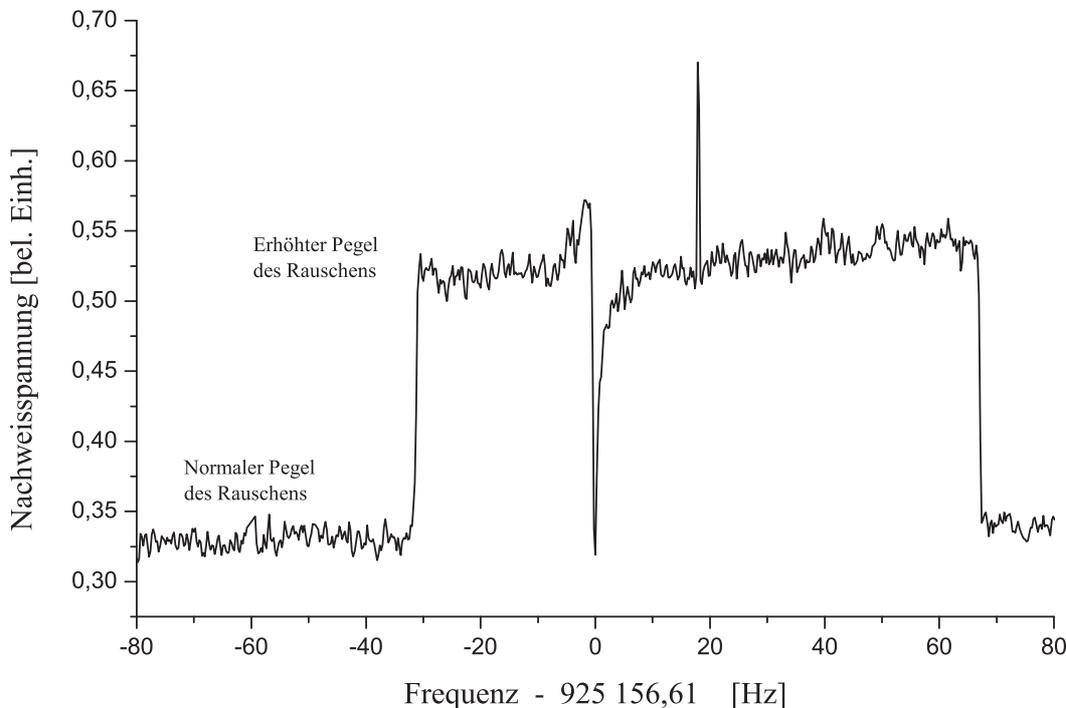


Abbildung 4.17: **Künstliche Erhöhung der axialen Temperatur des Ions.** Die Abbildung wurde mit dem Ion in der Präzisionsfalle aufgenommen. In der AF wird die gleiche Methode benutzt.

Die obere Abbildung veranschaulicht die zur kontrollierten Anhebung der Temperatur eingesetzte Technik. Mittels eines programmierbaren digitalen Funktionsgenerators⁷ wird weißes Rauschen um die axiale Frequenz des Ions generiert. Damit wird der gesamte Pegel des vom Ion gesehenen Johnson-Rauschens und entsprechend die Temperatur künstlich erhöht. Wie schon

⁶ Ab nun und wenn nicht anders explizit erläutert wird der nackte Ausdruck „Temperatur“ sich immer auf die *axiale Temperatur* des Ions beziehen.

⁷ In unserem Experiment werden Geräte der Firma Stanford Research Systems, Modell: SRS-DS 345 zu solchen Zwecken eingesetzt.

gesagt, wird die Frequenz-Differenz gemessen und das angelegte Tuning-Ratio solange variiert bis diese minimal wird. Nach den Grafiken ist die Korrela-

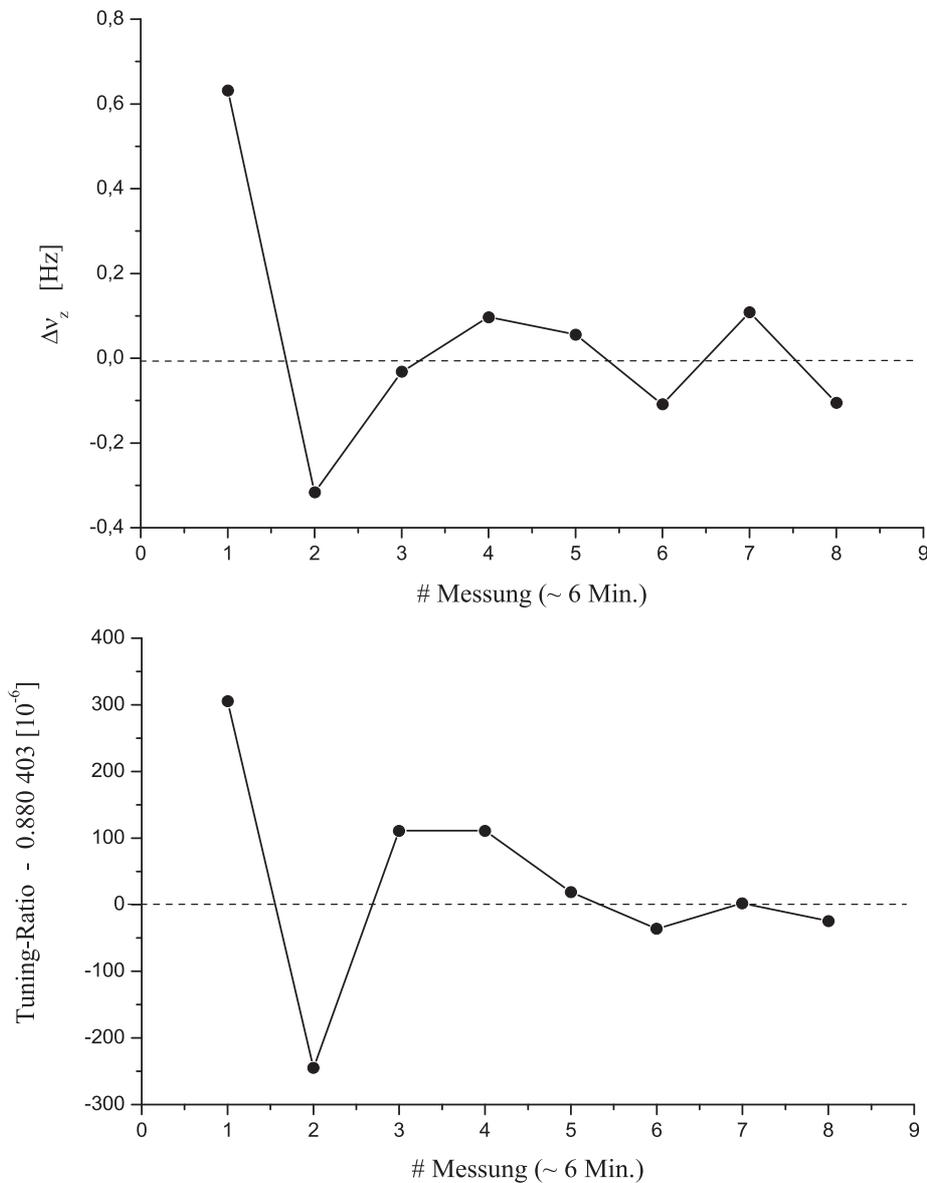


Abbildung 4.18: **Optimierung des Tuning-Ratios.**

tion zwischen dem angelegten Tuning-Ratio T und der Frequenz-Differenz $\Delta\nu_z$ ganz offensichtlich. Man sieht, wie am Anfang der Optimierung das versuchte T ziemlich daneben liegt; entsprechend ist $\Delta\nu_z$ relativ groß. Mit Hilfe des in Abschnitt 2.4.2 berechneten d_4 -Terms und der gemessenen Frequenz-Differenz führt der Steuerrechner eine gezielte Änderung von T durch, um letztere um einen möglichst großen Betrag zu reduzieren. Binnen wenigen Versuchen gelingt es der automatischen Steuerung des Experiments, ein konvergentes Tuning-Ratio zu finden; dabei ist $\Delta\nu_z$ minimiert worden und deshalb der unerwünschte c_4 -Term auch. Man sagt, die Falle sei (elektrisch) kompensiert worden. Der Fehler in der Bestimmung des optimalen Tuning-

Ratios, TR_{Opt} , ist außerdem sehr klein:

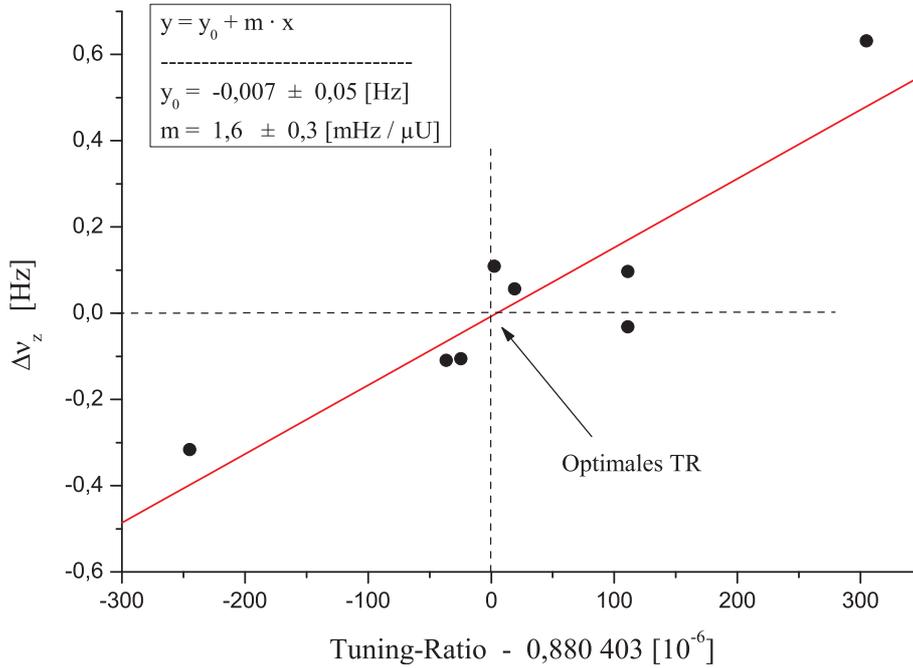


Abbildung 4.19: Fehler in der Bestimmung des optimalen Tuning-Ratios.

Durch anfitzen einer Geraden an die Messpunkte kann man die Nullstelle sehr genau bestimmen. Nach dem Fit ist $TR_{\text{Opt}} = 0,880403 \pm 0,000005$. Dabei ist aber die echte Präzision durch die Stabilität der Speicherspannung bedingt, deshalb sollte man die Unsicherheit in der Bestimmung des optimalen Tuning-Ratios etwas größer abschätzen: $\Delta TR_{\text{Opt}} = 30 \cdot 10^{-6}$. Diese (konservative) Abschätzung wird bei der Diskussion zur systematischen Unsicherheit in der Messung des g-Faktors berücksichtigt (siehe Abschnitt 5.5.6).

Alle in diesem Abschnitt vorgestellten experimentellen Beispiele beziehen sich auf die Analysefalle. In der Präzisionsfalle kann man identische Ergebnisse nachweisen. Im nächsten Abschnitt bleiben wir trotzdem noch bei der AF, weil dort ein sehr interessanter Phänomen durch die Anwesenheit des Nickelrings stattfindet.

4.7.1 Abhängigkeit des optimalen Tuning-Ratios von der Zyklotronenergie

Im Abschnitt 2.6 wurde eine lineare Korrelation des optimalen Tuning-Ratios mit der Zyklotronenergie in beiden Fällen vorhergesagt. Nun kann man diese theoretische Vorhersage mit dem Experiment vergleichen. Wir sahen, daß der erwartete Korrelationsfaktor in der PF zu klein ist, um experimentell nachgewiesen werden zu können. In der AF dagegen verursacht der Nickelring eine vergleichsweise riesige Inhomogenität des Magnetfeldes. Im Anhang C wurde der B_4 -Term berechnet (siehe Tabelle C.1) und damit erhielten wir einen Korrelationsfaktor $\frac{\partial TR_{\text{Opt}}}{\partial E_+} = 4,7 \mu\text{U/Hz}$.

Um experimentell diese Vorhersage zu testen wurde das optimale Tuning-Ratio für verschiedene Zyklotronenergien in der AF gemessen. Dabei wurde die erste Optimierung mit dem Ion im thermischen Gleichgewicht mit dem Zyklotron-Schwingkreis durchgeführt. Die axiale Frequenz bei dieser ersten Messung dient als Referenz. Folglich wurde die Zyklotronbewegung leicht angeregt und das Tuning-Ratio erneut optimiert. Die Verschiebung der axialen Frequenz bezüglich dem Referenz-Wert gilt dabei als geeignetes Maß für die Zyklotronenergie. Die Optimierung erfolgte für mehrere Energien. Man muß außerdem erwähnen, daß diese Messung in der AF problemlos durchgeführt werden kann, da an den Elektroden der AF kein für die Zyklotronfrequenz des Ions in der AF geeigneter Schwingkreis angeschlossen ist. Deshalb unterliegt das Ion keiner Zyklotron-Widerstandskühlung; die Zyklotronenergie bleibt nach der leichten Anregung während des Optimierungsprozesses konstant. Das Ergebnis der verschiedenen Optimierungen für die verschiedenen Energien ist in folgender Abbildung zu sehen:

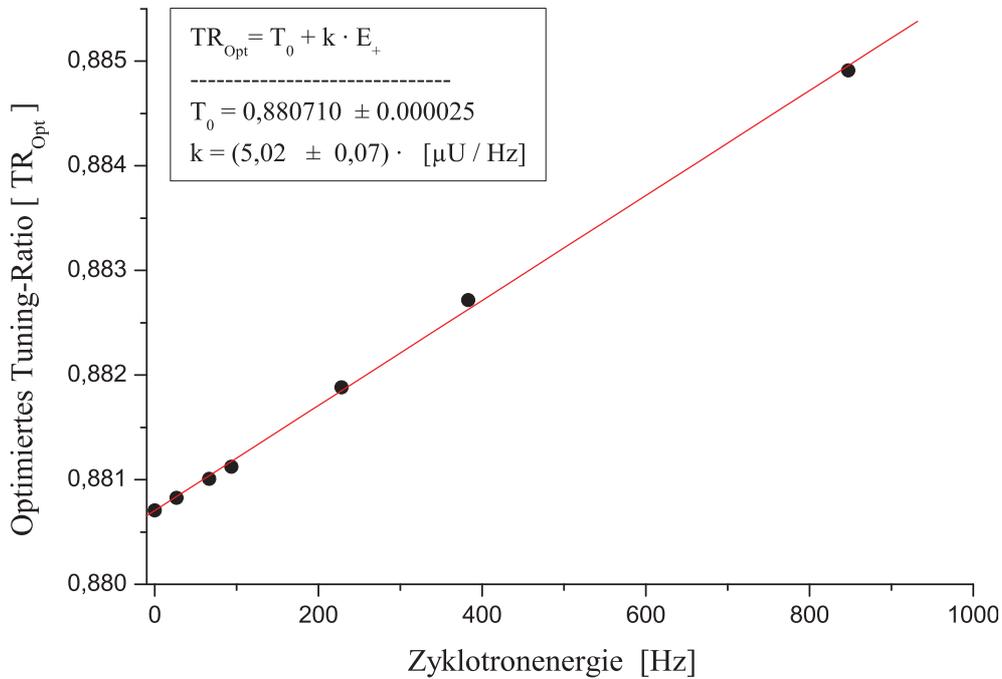


Abbildung 4.20: **Optimales Tuning-Ratio als Funktion der Zyklotronenergie in der AF.**

Man sieht, daß wie erwartet TR_{Opt} linear mit zunehmender Zyklotronenergie wächst. Die erhaltene experimentelle Steigung, $\left. \frac{\partial TR_{Opt}}{\partial E_+} \right|_{Exp} = 5,02 \pm 0,07$ $\mu U/Hz$, stimmt fast exakt mit der theoretischen überein. Diese Messung ist in zweifacher Hinsicht erfolgreich:

- Zum einen kann man sie als eine Messung des B_4 -Terms in der Analysefalle verstehen; dabei zeigt sich die im Anhang C durchgeführte Berechnung dieses Terms als hervorragend. Infolgedessen kann die Mes-

sung als Test (und Bestätigung) unseres theoretischen Modells des Magnetfeldes angesehen werden.

- Zum anderen zeigt sie, daß die in Sektion 2.6 eingeführte Verallgemeinerung der c_j -Koeffizienten die korrekte Darstellung der Dynamik des Ions in der Penningfalle liefert. Aus dieser ging auch unmittelbar unsere Theorie zur Wirkung des B_1 -Terms auf ν_+ hervor. Als wichtigste Schlußfolgerung erhielten wir die lineare Abhängigkeit der Zyklotronfrequenz mit der Zyklotronenergie. Mit dem in dieser Sektion aufgezeichneten Ergebnis sehen wir uns legitimiert, dieser wichtigen Schlußfolgerung Glauben zu schenken. Sie wird bei der Diskussion der g-Faktor Messung eine gewisse Rolle spielen.

Zuletzt muß man sagen, daß die Entdeckung der Abhängigkeit des Tuning-Ratios von der Zyklotronenergie erst die Messung des g-Faktors an $^{16}\text{O}^{7+}$ möglich machte. Vor der Erkenntnis dieses Vorgangs waren große Fluktuationen der axialen Frequenz in der AF dermaßen häufig, daß man die Spin-Ausrichtung des Elektrons sehr selten bestimmen konnte. Das ist in Abbildung 4.21 eindeutig zu sehen. Sie veranschaulicht die übliche Bestimmung der Spin-Ausrichtung in der AF im Laufe der g-Faktor Messung. Dafür werden dort mit einer bestimmten bekannten Mikrowellenfrequenz zwei Spin-Flips induziert (siehe Abschnitt 4.10). Damit lässt sich im Prinzip den Spin-Zustand zweifelsfrei erkennen. Die obere Grafik in Abbildung 4.21 z.B. zeigt immer die eindeutig erkennbare Reihenfolge *up-down-up*. Zwischen zwei dieser sukzessiven Messungen befindet sich das Ion in der PF, wo man bei einem bestimmten Verhältnis $\frac{\nu_{MW}}{\nu_c}$ einen Spin-Flip zu induzieren versucht. Dies ist im wesentlichen die Prozedur zur Messung des g-Faktors. Sie wird aber im nächsten Kapitel ausführlich beschrieben. Wie schon gesagt, erlaubt die obere Grafik in Abbildung 4.21 immer zu wissen, ob in der PF ein Spin-Flip induziert wurde oder nicht (kein einziges Mal in diesem Fall, da alle Messungen stets die gleiche Reihenfolge zeigen: *up-down-up*). Bei der unteren Grafik dagegen, ist der Spin-Zustand nur ganz am Anfang zu erkennen (*down-up-down*); in den nachfolgenden Messungen löschen die Fluktuationen der axialen Frequenz jede Spur der Spin-Ausrichtung: die Messung des g-Faktors ist damit unmöglich. Der Unterschied zwischen beiden Grafiken besteht nur darin, daß das Tuning-Ratio bei der oberen stets entsprechend der Zyklotronenergie-Abhängigkeit angepasst wurde. Bei der Unteren Messung dagegen ließ man es unverändert. Der Qualitätsunterschied ist offensichtlich. Man muß außerdem sagen, daß aus technischen Gründen die Widerstandskühlung der Zyklotronbewegung zurzeit der gezeigten Messung nicht richtig funktionierte⁸. Aus diesem Grund fand die Bestimmung der Spin-Ausrichtung in der AF immer bei ganz unterschiedlichen Zyklotronenergien statt, mit der Folge, daß ohne entsprechende Nachkorrektur des Tuning-Ratios die Fluktuationen der axialen Frequenz riesig wurden. Beim ersten Versuch, zwei Spin-Flips zu induzieren (in der unteren Grafik) war die Zyklotronenergie des Ions diejenige, bei der das Tuning-Ratio optimiert wurde,

⁸ Ein unangenehmer apparativer Effekt machte die Kühlzeitkonstante extrem groß und deshalb die Kühlung sehr ineffizient.

deswegen verläuft der Versuch richtig. Bei den nachfolgenden Versuchen dagegen lag das unveränderte Tuning-Ratio immer ganz falsch. Das Ergebnis ist offensichtlich.

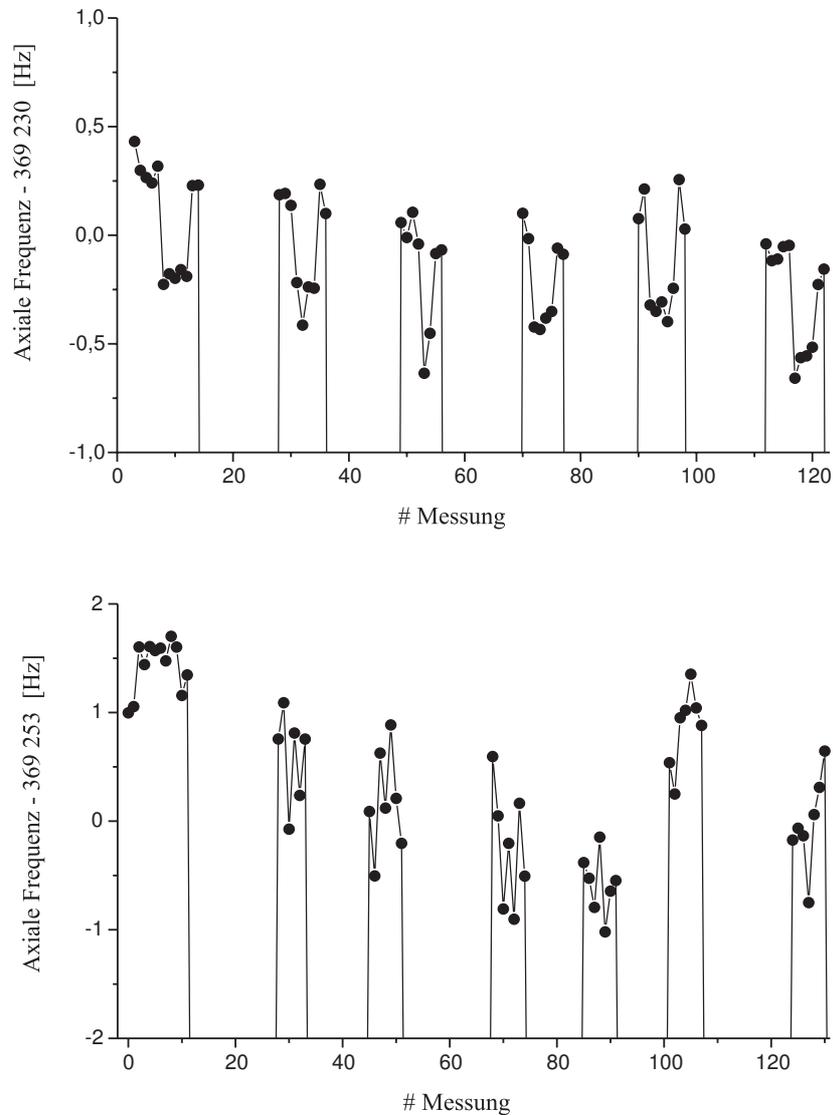


Abbildung 4.21: **Bestimmung der Spin-Ausrichtung während der g-Faktor Messung.**

Die obere Messung wurde mit Korrektur des Tuning-Ratios mit der Zyklotronenergie nach der in Abbildung 4.20 gefundenen Steigung durchgeführt. Bei der unteren Grafik dagegen blieb das Tuning-Ratio unverändert.

Die Entdeckung dieses Vorgangs erwies sich als entscheidend. Im Vergleich zu Sauerstoff, beträgt der Frequenzsprung eines $^{12}\text{C}^{5+}$ – Ion bei einem Spin-Flip etwa 0,75 Hz. Dieser Unterschied macht aber die Messung am letzteren einfacher. Die Spin-Flip-Nachweiseffizienz lag während der Messung am Kohlenstoff etwa um 75 % im besten Fall. Mit der Anpassung an dem nach der Zyklotronenergie abhängigen optimalen Tuning-Ratio, wurden Nachweiseffizienzen von über 90 % für das „schwierige“ $^{16}\text{O}^{7+}$ – Ion die Regel.

4.8 Messung der Orthogonalität der Falle

Die Messung der axialen Frequenz als Funktion des angelegten Tuning-Ratios bietet einen einfachen und schnellen Zugang zum Test der im Abschnitt 2.2.1 vorgestellten Berechnung des elektrischen Potentials in unserem zylindrischen Käfig. In der Sektion 2.4.2 sahen wir, daß laut dieser Berechnung unsere Falle nicht ganz orthogonal sein kann. Außerdem lieferte die Berechnung eine Abhängigkeit von $\frac{\partial \nu_z}{\partial T} = 24 \pm 1$ Hz/mU (siehe Gleichung 2.24) für ein wasserstoffähnliches Sauerstoff-Ion in der Präzisionsfalle. Dabei bezieht sich der Fehler auf die Unsicherheit der Abmessungen der Käfigelektroden. Nun wollen wir diese Vorhersage experimentell prüfen:

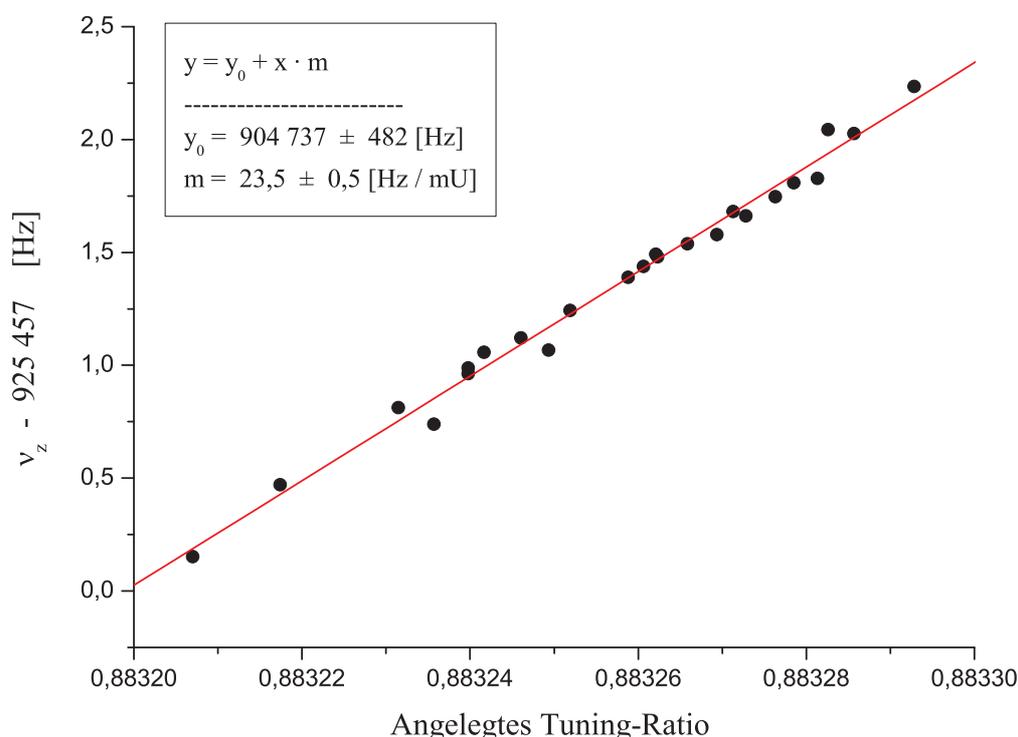


Abbildung 4.22: **Messung der axialen Frequenz als Funktion des angelegten Tuning-Ratios.**

Die Messung wurde in der Präzisionsfalle durchgeführt. Nach dieser Messung ist die im Experiment verwendete Falle offensichtlich nicht orthogonal. Die Messung der (nicht) Orthogonalität in der Analysefalle liefert ähnliche Ergebnisse.

Die erhaltene Steigung, $\left. \frac{\partial \nu_z}{\partial T} \right|_{exp} = 23,5 \pm 0,5$, stimmt sehr gut mit dem erwarteten theoretischen Wert überein. Für die nahe Zukunft ist geplant eine neue Falle aufzubauen, um den g-Faktor an $^{40}\text{Ca}^{19+}$ zu messen [Ver01]; dabei wird die Länge der Korrektorelektroden auf 2,85 mm erhöht, um die Orthogonalität der Falle zu verbessern (siehe Abbildung 2.10). Die hervorragende Übereinstimmung unserer theoretischen Vorhersage mit dem Experiment gewährleistet die Richtigkeit dieser Maßnahme.

4.9 Messung der axialen Temperatur

Der Kenntnis der axialen Temperatur in der Präzisionsfalle ist grundlegend für die Fehleranalyse zur g-Faktor Messung. Im Laufe der letzteren wird das Ion ständig zwischen beiden Käfigen hin- und her-transportiert. Wie schon mehrmals erwähnt, besteht die einzige spezifische Aufgabe der Analysefalle darin, die Spin-Ausrichtung des Elektrons zu bestimmen. Die starke magnetische Flasche erlaubt außerdem, eine sehr große Auflösung der Zyklotronenergie zu erzielen. Nach Gleichung 2.42 entspricht einer Verschiebung der axialen Frequenz in der AF von einem Hz lediglich einer Zyklotronenergie von 0,9 meV oder 10 Kelvin. Man kann aber Verschiebungen der axialen Frequenz von nur etwa 100 mHz messen, d. h. Änderungen in der Zyklotronenergie von 1 Kelvin lassen sich ohne weiteres nachweisen. All dies wird benutzt, um die axiale Temperatur in der Präzisionsfalle zu bestimmen. Dafür wird keine separate Messung durchgeführt; sie wird zusammen mit dem g-Faktor gemessen.

Im nächsten Kapitel wird der genaue Messablauf zur Messung des g-Faktors beschrieben. An dieser Stelle genügt es zu wissen, daß vor dem Transport in die AF die Zyklotronbewegung des Ions mittels Seitenbandkopplung schnell gekühlt wird. Im Abschnitt 4.3.1 sahen wir, daß durch diese Kopplung die axiale und die Zyklotronenergie verknüpft werden. Jedes Mal unmittelbar nach der Kopplung hat man: $E_+ = E_z \cdot \frac{\nu_z}{\nu_+}$, was direkt aus der Angleichung beider Hauptquantenzahlen folgt. Durch die $\nu_+ - \nu_z$ -Kopplung wird die Information bezüglich dem Wert der axialen Energie in den Zyklotronfreiheitsgrad gespeichert. Nun, wie schon im oberen Absatz erläutert, da im inhomogenen Magnetfeld die axiale Frequenz eine lineare Funktion der Zyklotronenergie ist, wird ν_z verwendet, um letztere zu bestimmen. Nach der Seitenbandkopplung transportiert man das Ion in die Analysefalle, und dort wird sogleich die axiale Frequenz gemessen. Diese Messung findet immer bei einer vordefinierten konstanten Spannung statt. Deshalb spiegelt die Streuung der axialen Frequenz nach allen Transporten die thermischen Fluktuationen der Zyklotronenergie wider, die wiederum unmittelbar mit der axialen durch die Seitenbandkopplung verbunden ist.

Die Streuung der axialen Frequenz ist auf der nächsten Seite in Abbildung 4.23 zu sehen. Offensichtlich ist die axiale Frequenz einer Boltzmann-Verteilung unterworfen. Letztere ist nach der Statistischen Mechanik die typische Wahrscheinlichkeitsverteilung der Energie eines Systems im thermischen Gleichgewicht mit einem warmen Reservoir [Del78]. In unserem Fall wird das warme Reservoir durch das Elektronen-Gas des Nachweisschwingkreises gebildet. Wir hatten schon erwähnt, daß man diesem Elektronen-Gas eine Temperatur zuordnen kann, nämlich die der makroskopischen Johnson-Rauschdichte, $U_{rausch} = \sqrt{4kT_z R}$. Auf der x-Achse der Abbildung 4.23 ist die Zyklotronenergie aufgetragen, wobei die Verschiebung der axialen Frequenz bezüglich dem Minimalwert (entspricht der Referenzfrequenz für die vorgegebene konstante Spannung) gemeint ist. Der Mittelwert der Verteilung kann mit einem Fit der experimentellen Daten an einer Boltzmann-Kurve gewonnen werden. Dabei muss darauf geachtet werden, daß der Minimalwert

der axialen Frequenzverschiebung nach dem Fit mit Null übereinstimmend ist.

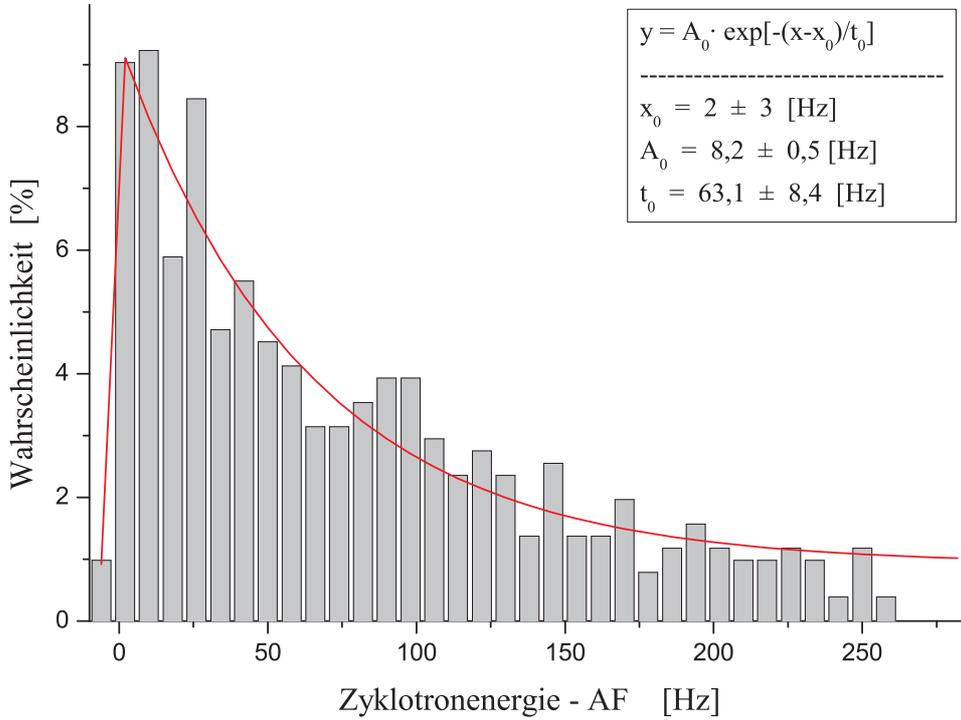


Abbildung 4.23: **Boltzmann-Verteilung der Zyklotronenergie.**

Die Verteilung ist normiert. Nach dem Fit beträgt der Mittelwert der Verteilung $t_0 = 63 \pm 8$ Hz.

Die mittlere Zyklotronenergie des Ions nach dem Transport beträgt: $\langle E_+ \rangle = 63,1 \times 0,9 = 56,79$ meV = 668,9 K. Diese mittlere Zyklotronenergie ist mit dem mittlerem Wert von E_z unmittelbar verbunden. Die Verknüpfung ist trivial und ermöglicht uns, die axiale Temperatur des Ions zu gewinnen:

$$k \cdot T_z = \langle E_z \rangle = \frac{\omega_z}{\omega_+} \cdot \langle E_+ \rangle = \frac{925\,150}{25\,289\,604} \times 56,79 = 2,1 \text{ meV}. \quad (4.10)$$

Diese mittlere axiale Energie muss noch korrigiert werden, da sie entspricht noch nicht genau der Temperatur des Schwingkreises. Den Grund kann man leicht verstehen: nach der Seitenbandkopplung bleibt das Ion 235 Sekunden in der PF (siehe nächsten Kapitel zum Messablauf) bevor es in die AF transportiert wird. Während dieser Zeit unterliegt es Widerstandskühlung, deshalb ist die Zyklotronenergie zum Zeitpunkt der Messung der axialen Frequenz in der AF etwas niedriger als diejenige, die unmittelbar mit der axialen Temperatur verknüpft ist. Da die Kühlzeitkonstante der Zyklotronbewegung bekannt ist, $\tau = 300$ s (siehe Abschnitt 4.2), muss die erhaltene mittlere Zyklotronenergie um einen Faktor $e^{235/300}$ erhöht werden. Wir können schließlich die axiale Temperatur bestimmen:

$$k \cdot T_z = 2,1 \times e^{235/300} = 4,5 \text{ meV} \longrightarrow T_z = 61 \pm 12 \text{ K}. \quad (4.11)$$

Der Fehler beruht im wesentlichen auf der Unsicherheit in der Kenntnis des B_2 -Terms in der AF zur Eichung der Zyklotronenergie, auf den Schwankungen der Zyklotron-Kühlzeitkonstante im Laufe der g-Faktor Messung und auf dem statistischen Fehler in der Bestimmung des Mittelwertes der Boltzmann-Verteilung.

4.10 Larmor-Frequenz in der Analysefalle

Um dieses Kapitel zu beenden, wollen wir nun eine Art von Messung vorstellen, die vor etwa 4 Jahren die ersten Ergebnisse zum g-Faktor am $^{12}\text{C}^{5+}$ lieferte [Her00], nämlich die Bestimmung der Larmor-Frequenz in der Analysefalle. Wie wir schon heute wissen, ist diese Vorgehensweise nicht optimal, da die extrem starke magnetische Flasche die Resonanz stark verbreitert und deshalb die Genauigkeit der Messung enorm verringert. Nichts desto trotz ist diese Messung für $^{16}\text{O}^{7+}$ interessant, denn sie ist relativ einfach und lehrreich. Das Ion in der AF wird ständig mit Mikrowellen unterschiedlicher Frequen-

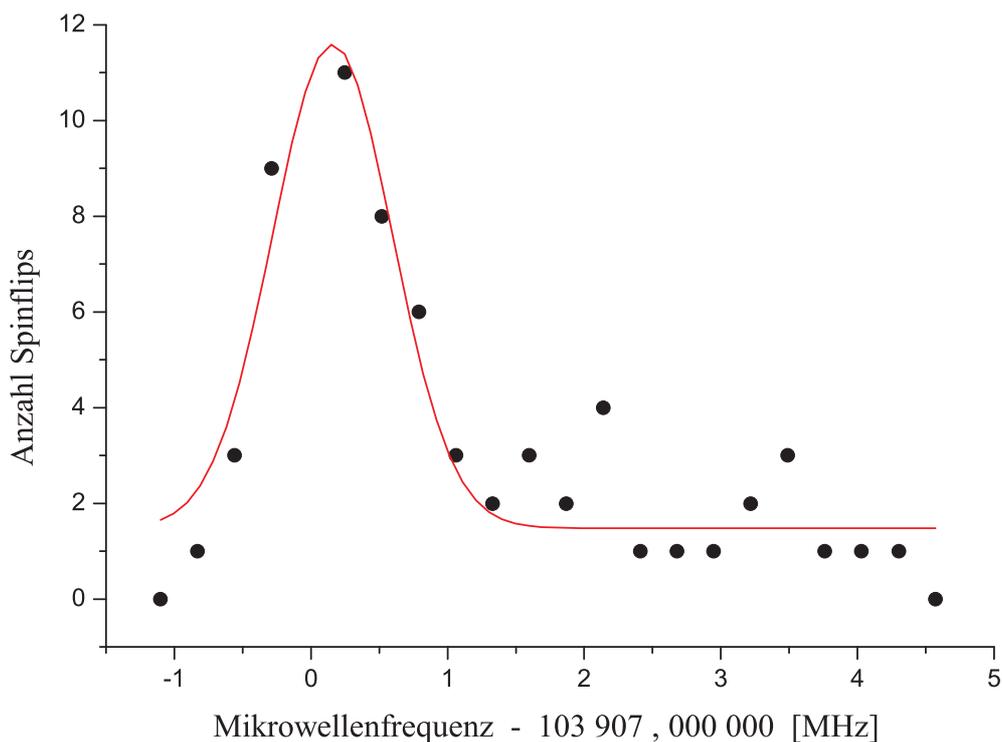


Abbildung 4.24: **Larmor Resonanz eines $^{16}\text{O}^{7+}$ -Ions in der AF.**

zen bestrahlt. Man versucht z.B. 20 mal einen Spin-Flip mit jeder Frequenz zu induzieren; am Schluss zählt man, wie viele erfolgreiche Versuche vorkommen. Die Tatsache, ob ein Spin-Flip geschehen ist oder nicht wird durch die Messung der axialen Frequenz vor und nach dem Einstrahlen der Mikrowellen herausgefunden (siehe Abbildung 2.12). In weniger als 24 Stunden kann man eine Resonanz wie in Abbildung 4.24 erhalten.

Wenn man außerdem das Magnetfeld in der AF misst, kann man, mit Hilfe der vorgestellten Resonanz, den g-Faktor ermitteln. Die Analyse der Kurve ist nicht trivial (siehe [Her99] für Einzelheiten) und wird hier nicht weiter diskutiert. Wichtig ist nur, daß man wie erwartet eine Resonanz beobachtet. Man entnimmt daraus, daß bei einer Mikrowellenfrequenz von $\sim 103,907 \pm 0,001$ GHz die Anzahl der induzierten Spin-Flips maximal ist. Diese Information wird im Laufe der *richtigen* Messung des g-Faktors verwendet.

Kapitel 5

Der g-Faktor von $^{16}\text{O}^{7+}$

An dieser Stelle sind wir so weit, daß wir uns endlich mit der eigentlichen Messung des g-Faktors beschäftigen können. Zunächst werden wir die Prozedur ausführlich beschreiben, danach werden die ersten experimentellen Ergebnisse vorgestellt. Anschließend wird die Theorie zur g-Resonanz entwickelt. Sie wird bei der endgültigen Fehlerdiskussion eine grundlegende Rolle spielen.

Wie schon erwähnt, werden im Rahmen dieser Dissertation zwei Messungen des g-Faktors am wasserstoffähnlichen Sauerstoff vorgestellt. Der einzige Unterschied dabei besteht darin, wie die Zyklotronfrequenz zur Bestimmung des Magnetfeldes am Ort des Ions während der Bestrahlung mit Mikrowellen gemessen wird. Bei der *traditionellen Methode* geschieht dies mittels der im Unterabschnitt 3.2.2 vorgestellten direkten Messung von ν_+ . Die *Doppel-Dip-Methode* bezeichnet dagegen die Messung des g-Faktors mit Hilfe der im Abschnitt 4.5 gezeigten indirekten Technik zur Bestimmung der Zyklotronfrequenz. Dieser einzige Unterschied macht die Fehlerdiskussion für beide Methoden trotzdem wesentlich unterschiedlich. Wir werden letztere ausführlich in beiden Fällen durchführen. Nun aber wollen wir die Prozedur zur Messung des g-Faktors vorstellen. Wenn nicht anders explizit erwähnt, wird sich zunächst die Vorstellung auf die *traditionelle Methode* beziehen.

5.1 Messablauf

Angenommen, daß man ein einzelnes $^{16}\text{O}^{7+}$ -Ion präpariert und anschließend das Tuning-Ratio in beiden Käfigen optimiert hat, kann die *eigentliche* Messung des g-Faktors beginnen. Da die Messung sehr kompliziert ist und außerdem eine relativ große Menge an Messdaten gleichzeitig zu behandeln ist, muss sie von einem Rechner automatisch durchgeführt werden. Im wesentlichen wird versucht, bei einem bestimmten Frequenzverhältnis, ν_{MW}/ν_c , einen Spin-Flip in der Präzisionsfalle zu induzieren. Insgesamt sind mindestens 500 Versuche nötig, um genügend Statistik für den g-Faktor zu erhalten. Da jeder Versuch etwa 50 Minuten dauert und da man die Messung jede 36 Stunden aus technischen Gründen für circa 4 Stunden unterbrechen muss¹,

¹ Um Stickstoff zu füllen. Außerdem muss man jeden fünften Tag flüssiges Helium füllen; dabei muss die Messung für fünf oder sechs Stunden unterbrochen werden.

braucht man insgesamt etwa zwei Monate, um sie abzuschließen.

Die Messung startet mit dem Ion in der Analysefalle. Der Algorithmus zum Versuch des Frequenzverhältnisses, ν_{MW}/ν_c , lautet:

1. Bestimmung der Spin-Ausrichtung des Elektrons. Dafür werden Mikrowellen eingestrahlt und anschließend die axiale Frequenz gemessen; so oft bis zwei Übergänge (gekennzeichnet durch einen Sprung in ν_z von ~ 460 mHz) eindeutig beobachtet werden. Siehe Abbildungen 2.12, 4.21 und 5.1
2. Transport des Ions in die Präzisionsfalle.
3. Anregung der Zyklotronbewegung, um das ν_+ - Signal sichtbar zu machen. Für die Doppel-Dip-Methode ist diese Anregung unnötig und deshalb unterbleibt.
4. Messung der axialen Frequenz, $\nu_{z,1}$.
5. Messung der Zyklotronfrequenz ν_+ . Während dieser Messung werden Mikrowellen der Frequenz ν_{MW} eingestrahlt. Damit versucht man, einen Spin-Flip in der Präzisionsfalle zu induzieren. Die Frequenz ν_+ wird entweder direkt oder durch $\nu_+ - \nu_z$ -Kopplung gemessen.
6. Messung der axialen Frequenz, $\nu_{z,2}$.
7. Seitenbandkühlung. Anschließend Messung der *kalten* axialen Frequenz, $\nu_{z,kalt}$.
8. Messung von technischen Parametern: He und N₂ Druck, Temperatur im Labor und Zeitbasis des Spektrum-Analysators, Widerstandskühlung der Zyklotronbewegung (siehe Abschnitt 4.9). Zeitdauer dieses Abschnitts: 235 Sekunden.
9. Transport des Ions in die Analysefalle. Neuer Anfang bei Punkt 1.

Insgesamt braucht man etwa 50 Minuten um einen Zyklus zu vervollständigen. Besonderen Anteil daran hat die Bestimmung des Spin-Zustandes in der AF, sie dauert etwa 30 Minuten.

5.1.1 Versuch eines Frequenzverhältnisses

Das Ziel ist, eine Resonanz der Spin-Flip-Wahrscheinlichkeit als Funktion des variablen Frequenzverhältnisses zu gewinnen. Das ist die wichtigste (aber nicht die einzige) unabhängige Variable der Messung. Sie wird folgendermaßen definiert:

$$\Gamma = \frac{\nu_{MW}}{\nu_c} \quad , \text{ typisch. } \quad \Gamma \sim \frac{105\,385\,923\,000}{25\,306\,530} \sim 4164,376\,180. \quad (5.1)$$

Wie wir schon im Kapitel 1 sahen, muss man die Stärke des Magnetfeldes am Ort des Ions bestimmen, um den g-Faktor zu messen. Dafür ist

die freie Zyklotronfrequenz ν_c nötig. Sie wird mittels des Invarianztheorems (siehe Unterabschnitt 2.3.1) erhalten. Da die Messung unvermeidlicherweise bei nicht verschwindender Zyklotronenergie stattfindet, verschieben sich die Zyklotron- und die axiale Frequenz bezüglich ihren jeweiligen idealen Werte folgendermaßen:

$$\begin{aligned}\nu_{z,0} &\rightarrow \nu_{z,0} + \Delta\nu_z \\ \nu_{+,0} &\rightarrow \nu_{+,0} + \Delta\nu_+ \text{ mit } \Delta\nu_+ = -(\nu_{z,0}/\nu_{+,0}) \cdot \Delta\nu_z \text{ (siehe Gleichung 2.44).}\end{aligned}$$

Die Magnetronfrequenz wird separat mit dem gekühlten Ion gemessen (siehe Abschnitt 4.4) und ändert sich deshalb durch die Anregung der Zyklotronbewegung (bzw. durch die $\nu_+ - \nu_z$ Kopplung) nicht.

Mit dem Invarianztheorem misst man aber das Magnetfeld nicht am Ort des Ions sondern nur dessen idealen homogenen Anteil ($= B_0$):

$$\begin{aligned}\nu_c &= \sqrt{(\nu_{+,0} + \Delta\nu_+)^2 + (\nu_{z,0} + \Delta\nu_z)^2 + \nu_-^2} \\ &\approx \sqrt{\nu_{+,0}^2 + \nu_{z,0}^2 + \nu_-^2 + 2 \cdot \Delta\nu_+ \cdot \nu_{+,0} + 2 \cdot \Delta\nu_z \cdot \nu_{z,0}} \quad (5.2) \\ &= \sqrt{\nu_{+,0}^2 + \nu_{z,0}^2 + \nu_-^2} = \frac{q}{m} \cdot \frac{1}{2\pi} \cdot B_0 = \nu_{c,0}.\end{aligned}$$

Dieses Ergebnis wurde zuerst von H. Häfner vorgestellt [Häf03]. Es ist aber für die Fehlerdiskussion sehr wichtig und wurde deshalb hier wiederholt.

Wir definieren die axiale Frequenz als den Mittelwert beider Messungen, vor und nach dem Einstrahlen der Mikrowellen:

$$\nu_{z,m} = \frac{\nu_{z,1} + \nu_{z,2}}{2}. \quad (5.3)$$

Bei der traditionellen Methode mit der direkten Messung von ν_+ kann man die entsprechende axiale Frequenz nicht gleichzeitig messen, deswegen wird ν_z zwei Mal gemessen und der Mittelwert, $\nu_{z,m}$, verwendet. Dieser ist derjenige, der in das Invarianztheorem eingeht. Bei der Doppel-Dip-Methode wird genauso vorgegangen. Erst mit dem dreifachen Dip wäre es möglich, alle Frequenzen wirklich gleichzeitig zu messen.

Im Fall der traditionellen Methode muss außerdem die Zyklotronenergie für jede einzelne Messung bestimmt werden; das geschieht durch die Messung der axialen Frequenz nach Anwendung von einigen Sekunden Seitenbandkühlung. Wir definieren die *experimentelle Zyklotronenergie* folgendermaßen:

$$E_+ = \nu_{z,m} - \nu_{z,kalt} \text{ in Hz.} \quad (5.4)$$

Das Ergebnis der Messung wird die Spin-Flip-Wahrscheinlichkeit, S_W , als Funktion von mehreren Parametern sein:

$$S_W = S_W(\Gamma; E_+, T_z, E_-, L_{MW}). \quad (5.5)$$

Die Magnetronenergie, E_- , ist konstant während der Messung und wird nicht extra gemessen. Die Leistung der Mikrowellen, L_{MW} , wird auch konstant

gehalten. Sie wird durch die maximale erhaltene experimentelle Spin-Flip-Wahrscheinlichkeit definiert (siehe Abschnitte 5.3.5 und 5.4).

Die Funktionen, $S_W(\Gamma; E_+, T_z, E_-, L_{MW})$ stellen Resonanz-Kurven dar. Das Maximum dieser Resonanzen, $g_m(E_+, T_z, E_-, L_{MW})$ wird uns zum *wahren* g-Faktor führen (siehe Unterabschnitt 2.5 und nachfolgende Seiten). All diese Definitionen werden uns darüberhinaus bei der Fehlerdiskussion viel helfen.

5.1.2 Bestimmung des Erfolgs eines Versuchs Γ in der PF

Die folgende Abbildung veranschaulicht einen erfolgreich induzierten Spin-Flip in der Präzisionsfalle:

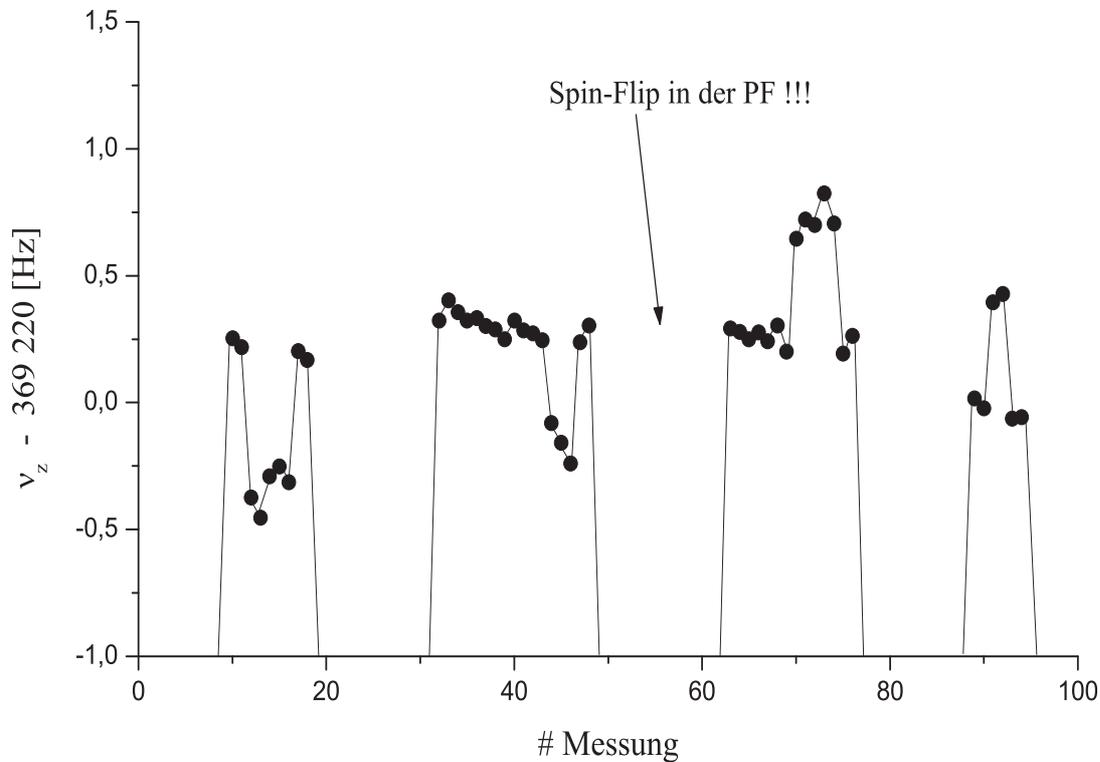


Abbildung 5.1: Nachweis eines Spin-Flips in der PF.

Während sich das Ion in der AF befindet, induziert man zwei Spin-Flips, um den Spin-Zustand zu bestimmen. In der Abbildung sieht man, daß man am Anfang die Reihenfolge $|up\rangle - |down\rangle - |up\rangle$ hat. Anschließend transportiert man das Ion in die PF und versucht dort ein bestimmtes Γ_1 . Um zu entscheiden ob der Versuch erfolgreich war (ob ein Spin-Flip induziert wurde oder nicht) transportiert man es in die AF zurück und induziert erneut zwei Spin-Flips. Im vorgestellten Beispiel sieht man, daß der erste Versuch in der Präzisionsfalle nicht erfolgreich verlaufen ist, denn die nachfolgende Spin-Reihenfolge in der AF erscheint identisch mit der ersten. Im Gegenteil dazu ist die zweite Reise des Ions in die PF schon erfolgreich; die dritte

Spin-Reihenfolge lautet $|down\rangle - |up\rangle - |down\rangle$, also genau umgekehrt wie die vorherige. Das Ion hat einen Spin-Flip in der Präzisionsfalle erfahren. Der entsprechende Γ_2 „kassiert“ einen Spin-Flip, das Konto von Γ_1 dagegen steht noch auf Null.

5.2 Ergebnisse: experimentelle $S_W(\Gamma)$ – Resonanzen

Man wiederholt die Prozedur des vorherigen Abschnitts einige Hundert Mal bis man eine umfangreiche Menge von verschiedenen Γ_i versucht hat. Bei jedem Γ_i zählt man, wie oft Spin-Flips vorkommen und anschließend dividiert man durch die gesamte Anzahl von Versuchen, die innerhalb des Bereichs $\Gamma_i \pm \delta\Gamma$ sitzen. Damit bestimmt man die Spin-Flip-Wahrscheinlichkeit, $S_W(\Gamma_i)$. Die *Binweite*, $\delta\Gamma$, ist für alle *Vertreter*, Γ_i , identisch. Typischerweise verwenden wir für die Binweite Werte, die im (absoluten) ppm-Bereich liegen, also $\delta\Gamma \sim 0,000\,010$.

Auf der nächsten Seite ist das Ergebnis² in Form von vier $S_W(\Gamma)$ – Resonanzen zu sehen. Insgesamt wurde der Mess-Algorithmus 510 Mal wiederholt. Die Daten wurden nach ihrer Zyklotronenergie in 4 Gruppen sortiert. Jede Resonanz setzt sich aus ungefähr 120 Messpunkten zusammen. Unter diesen befinden sich jeweils zwischen zwanzig und dreißig Spin-Flips in der Präzisionsfalle. Als Beispiel werden Resonanzen mit unterschiedlichen Binweiten von $\delta\Gamma = 14, 15$ und 22 ppm gezeigt. Wir werden den Einfluß der willkürliche verwendeten Größe der Binweite auf das Endergebnis der Messung im Abschnitt 5.2.2 untersuchen.

Die wichtigsten Eigenschaften der vier Resonanzen sind in folgender Tabelle zusammengefasst:

Zyklotronenergie [Hz]	Γ_m (Maximum)	S_W -Max. [%]	relative Breite
$0,81 \pm 0,17$	4164, 376 179 (3)	39 ± 9	$9 \cdot 10^{-9}$
$1,38 \pm 0,18$	4164, 376 186 (3)	64 ± 13	$8 \cdot 10^{-9}$
$2,27 \pm 0,35$	4164, 376 168 (6)	37 ± 12	$1,4 \cdot 10^{-8}$
$4,4 \pm 1,0$	4164, 376 162 (6)	41 ± 12	$1,2 \cdot 10^{-8}$

Tabelle 5.1: **Eigenschaften der vier $S_W(\Gamma)$ – Resonanzen.**

² Ab nun werden wir uns ausschließlich auf die Ergebnisse der *traditionellen Methode* beziehen. Die entsprechenden Resultate der *Doppel-Dip-Methode* werden extra im Abschnitt 5.6 vorgestellt.

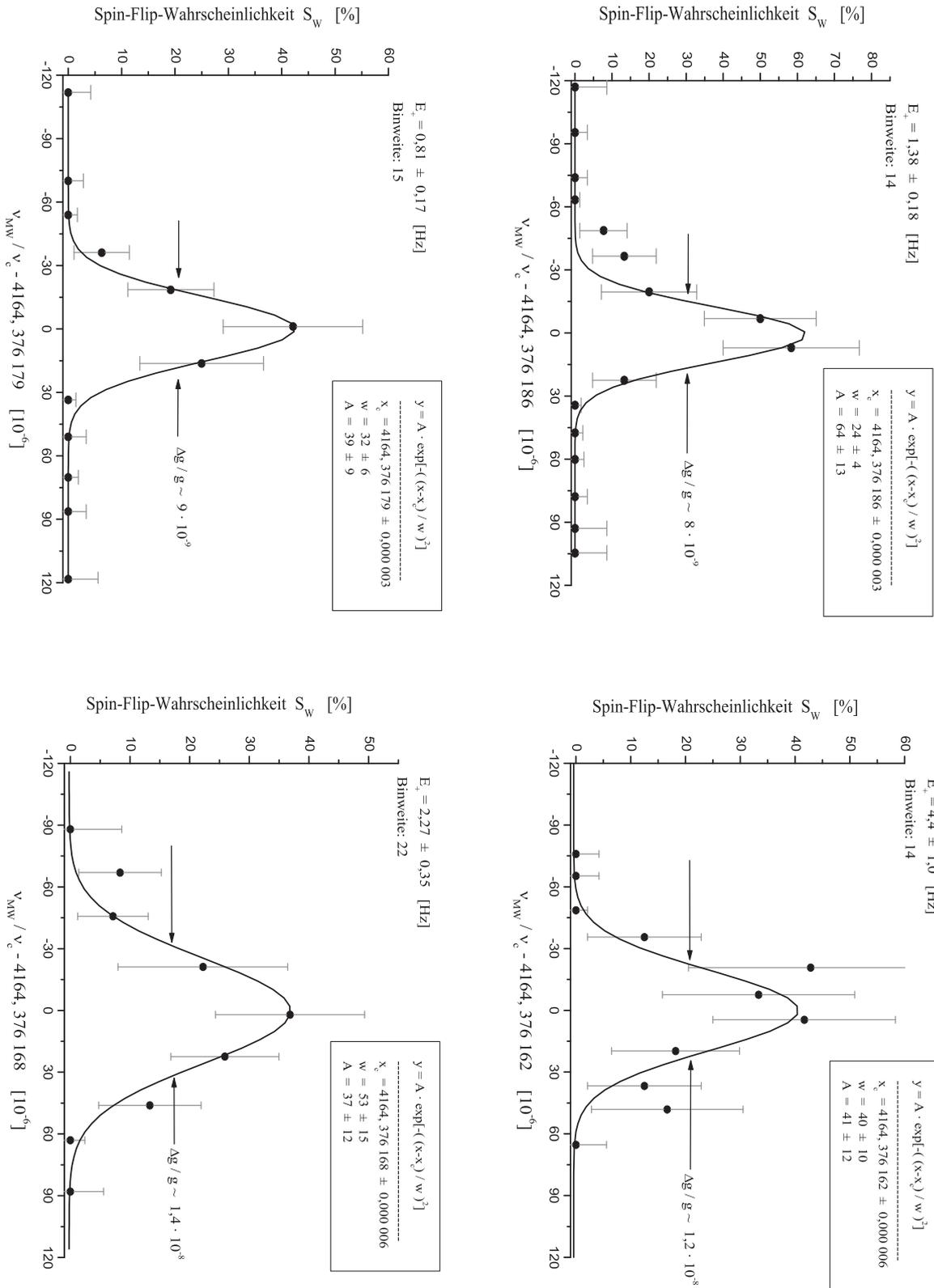


Abbildung 5.2: Vier $S_W(\Gamma)$ – Resonanzen für vier Zyklotronenergien. Der Fehler der einzelnen Messpunkte wurde unter Annahme einer Binomial-Verteilung abgeschätzt, siehe [Häf00a] für Einzelheiten.

Um die Lage des Maximums der jeweiligen Resonanzen herauszufinden wurden die experimentellen Daten mit der Methode der kleinsten Quadraten an eine Gauss-Kurve angefitet. Der in Tabelle 5.1 angegebene Fehler bezieht sich auf den Fehler des Fits. Typischerweise lautet dieser Fehler $\sim 3 \cdot 10^{-6}$ in Γ (also in dimensionslosen) Einheiten. Dies entspricht einem relativen Fehler von $\frac{3 \cdot 10^{-6}}{4164,376179} = 7 \cdot 10^{-10}$. Der Leser mag schon einen Vorgeschmack der erzielten Genauigkeit bekommen. Man muss außerdem erwähnen, daß die experimentellen Daten mit der kommerziell erhältlichen Software *Microcal Origin 7.0* behandelt wurden.

Man beobachtet außerdem, daß alle Resonanzen ähnlich schmal sind. Typischerweise beträgt die relative Breite $\sim 1 \cdot 10^{-8}$. Die zwei Resonanzen mit den höheren Zyklotronenergien sind breiter als die zwei anderen. Dies beruht darauf, daß die Zyklotronenergie der ersteren wesentlich unschärfer als die der letzteren definiert ist. Der angegebene Fehler der Energien stellt die Standard-Abweichung der gestreuten Energien der einzelnen Messpunkte bezüglich deren Mittelwert dar. Wir werden sehen, daß die Zyklotronenergie nur eine untergeordnete Rolle in der Verbreiterung der S_W -Resonanzen spielt. Die axiale Temperatur und die Mikrowellenleistung dagegen tragen entscheidend dazu bei.

Alle vier Messungen wurden bei einer konstanten axialen Temperatur von 61 ± 12 Kelvin durchgeführt (siehe Abschnitt 4.9). Die Mikrowellenleistung wurde auch konstant gehalten.

Das Ziel ist es nun, aus diesen Resonanzen den „wahren“ g-Faktor oder besser gesagt das „richtige“ Frequenzverhältnis, Γ_0 , entsprechend dem g-Faktor von $^{16}\text{O}^{7+}$ zu extrahieren.

5.2.1 Abhängigkeit von Γ_m von der Zyklotronenergie

Der erste Schritt, den wir machen wollen, ist die Untersuchung des Einflusses der Zyklotronenergie auf die Lage des Maximums der experimentellen Resonanzen.

Mit den vier in Tabelle 5.1 angegebenen Energien bei denen das Messprogramm durchgeführt wurde und mit den jeweiligen Resonanzen, kann man die Maxima, Γ_m , als Funktion der Zyklotronenergie darstellen. Das Ergebnis ist in Abbildung 5.3 zu sehen. Man beobachtet, daß die Lage des Maximums eine lineare Abhängigkeit von der Zyklotronenergie aufweist. Offensichtlich kann man Γ_m nicht als das „wahre“ Frequenzverhältnis definieren.

Wir hatten schon im Abschnitt 2.5 erwähnt, daß durch die Abweichungen des elektrischen und magnetischen Feldes vom idealen Fall, insbesondere durch die Inhomogenität des letzteren, der *gemessene* g-Faktor Γ_m eine Funktion der Energien wird³. In Sektion 3.2.3 sahen wir wie die Magnetfeld-Inhomogenitäten die Zyklotronresonanz als Funktion von E_+ verschieben

³Die Verknüpfung zwischen dem im Abschnitt 2.5 definierten g_m und dem hier bevorzugten Γ_m ist trivial und lautet (Gleichung 1.4): $g_m = 2 \cdot \Gamma_m \frac{m_e}{m} \cdot \frac{q}{q_e}$. Für uns ist immer angebrachter von Γ_m als von g_m zu sprechen, da das erstere die eigentliche Meßgröße darstellt.

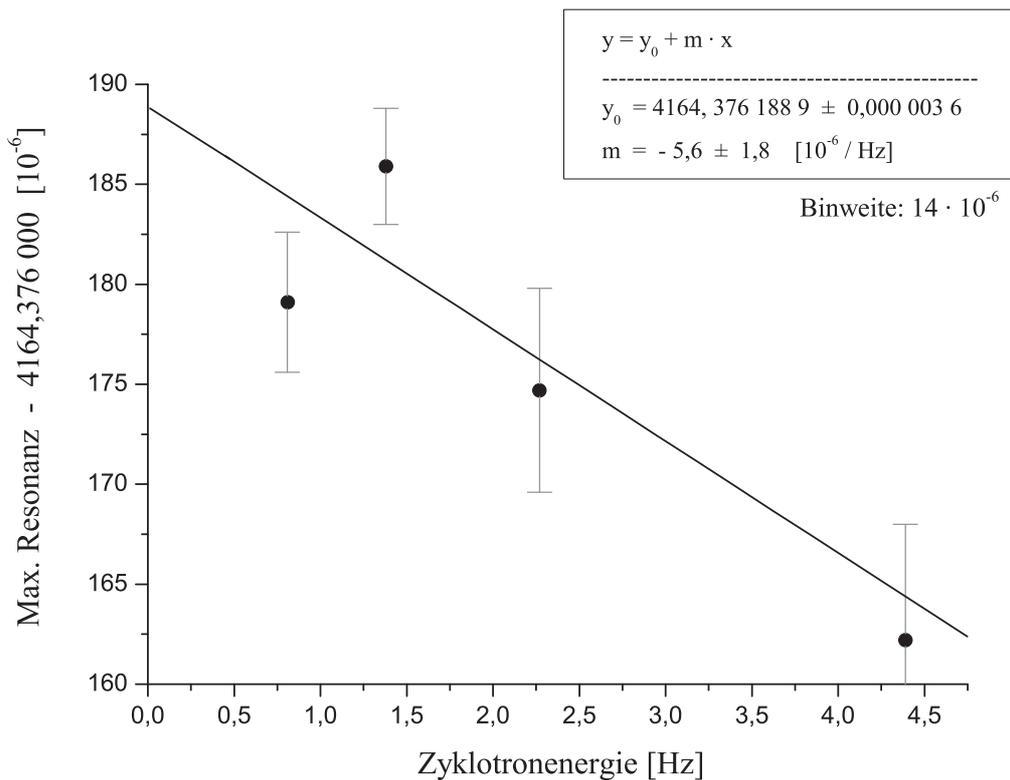


Abbildung 5.3: **Extrapolation auf verschwindende Zyklotronenergie.**

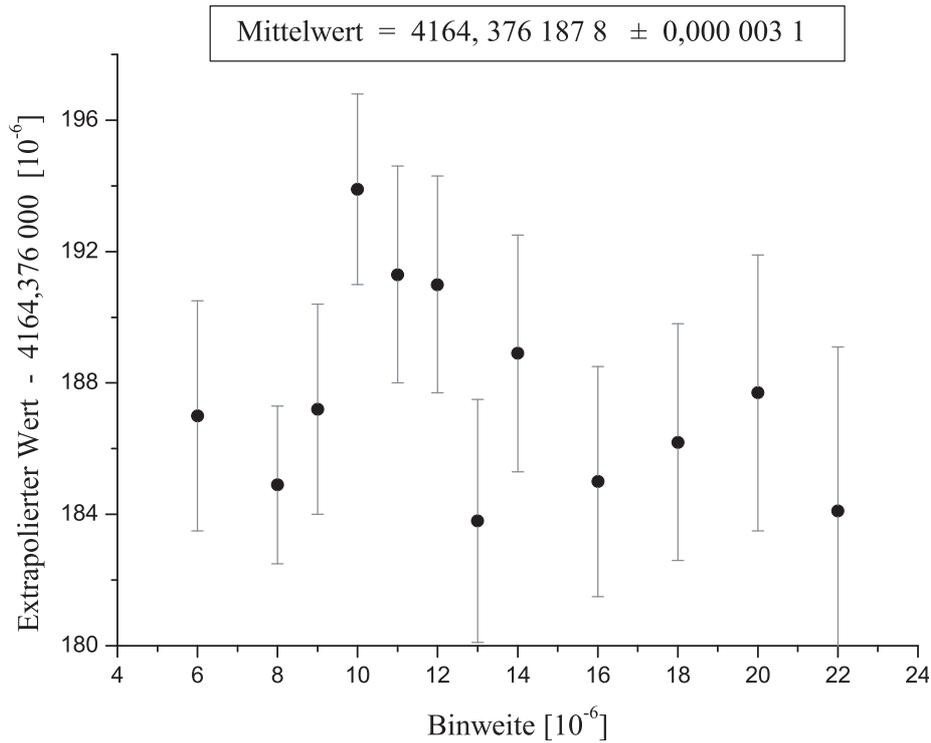
(siehe Abbildung 3.9). Dieses Verhalten ist hiermit auch für den gemessenen g-Faktor selbst bestätigt.

Wie wir schon im Abschnitt 2.5 argumentierten, werden wir auf verschwindende Energien extrapolieren müssen, um den wahren g-Faktor herauszufinden. In Abbildung 5.3 ist ein linearer Fit der Messdaten durchgeführt worden. Damit kann man den auf verschwindende- E_+ extrapolierten Wert gewinnen: $\Gamma_m = 4164,376\,188\,9$ (36).

5.2.2 Einfluß der Binweite

Im vorherigen Beispiel wurde die Extrapolation mit den Resonanzen mit einer Binweite von $\delta\Gamma = 14$ ppm berechnet. Diese Binweite ist aber völlig willkürlich und könnte im Prinzip das Ergebnis systematisch beeinflussen. Um das zu vermeiden wurde die vorherige Analyse für eine Reihe von verschiedenen Binweiten nochmals durchgeführt. In Abbildung 5.4 ist die Streuung der extrapolierten Γ_m als Funktion der verwendeten Binweiten zu sehen. Die Streuung der extrapolierten Werte ist durchaus stochastisch. Es wurden Binweiten von $6 \cdot 10^{-6}$ bis $22 \cdot 10^{-6}$ benutzt. Die passen sinnvoll in die Resonanzen hin. Selbst die schärfste Resonanz mit einer Halbwertsbreite von etwa $30 \cdot 10^{-6}$ kann bei $\delta\Gamma = 22 \cdot 10^{-6}$ mindestens zwei Punkte in deren „Kern“ enthalten. Alles was darüberhinaus geht, ist sinnlos und wird infolgedessen nicht berücksichtigt.

Wir definieren den Mittelwert der in Abbildung 5.4 eingetragenen Mes-

Abbildung 5.4: Die Γ_m für die verschiedenen Binweiten.

spunkte als Ergebnis der Extrapolation auf verschwindende Zyklotronenergie:

$$\Gamma_m(E_+ = 0, T_z, E_-, L_{MW}) = 4164,376\,187\,8 \pm 0,000\,003\,1. \quad (5.6)$$

Der Fehler stellt die Standardabweichung der Streuung dar und ist *rein statistisch*. Der Mittelwert wurde mit Gewichtung der einzelnen Punkten nach ihren eigenen Fehler berechnet. Der erhaltene Wert $\Gamma_m(E_+ = 0, T_z, E_-, L_{MW})$ ist nur vorläufig und entspricht dem wahren g-Faktor noch nicht. Weitere Korrekturen sind noch anzubringen, insbesondere muss man auf verschwindende axiale Temperatur und Mikrowellenleistung extrapolieren.

Die experimentelle Steigung von $\Gamma_m = \Gamma_m(E_+)$

Ganz interessant ist die Information, die in der Steigung der Gerade in Abbildung 5.3 steckt. Der Mittelwert dieser Steigung für alle angegebene Binweiten lautet:

$$\overline{\frac{\partial \Gamma_m}{\partial E_+}} = -5,1 \pm 1,0 \quad [10^{-6}/\text{Hz}]. \quad (5.7)$$

Der Fehler ist nochmals rein statistisch. Diese Zahl werden wir mit der theoretischen Vorhersage vergleichen.

5.3 Theoretische Linienform der Resonanz

In Abbildung 5.2 haben wir die Messdaten an eine Gauss-Kurve angepasst. Wir werden in diesem Abschnitt sehen, daß dies nur für „kleine“ Temperaturen

korrekt ist. Bei höheren Temperaturen ist die erwartete theoretische Linienform aufgrund der Boltzmann-Verteilung der axialen Energie sehr unsymmetrisch. Außerdem haben wir gesehen, daß man den gesuchten g-Faktor mit dem Maximum der Resonanz nicht identifizieren darf. Darüberhinaus werden wir die Notwendigkeit der Extrapolation aller Energien und der Mikrowellenleistung auf Null ausführlich begründen.

5.3.1 Dynamik des Spins

Angenommen, daß zum Zeitpunkt $t = 0$ der Elektronspin sich im Zustand $|down\rangle$ befindet, lautet die Wahrscheinlichkeit, in Anwesenheit einer elektromagnetischen Welle der Frequenz $\omega_{MW} = 2\pi\nu_{MW}$ (in unserem Fall Mikrowellen) ihn zum Zeitpunkt t im $|up\rangle$ Zustand zu finden:

$$P(t) = \frac{(\gamma/\hbar)^2}{(\gamma/\hbar)^2 + (\omega_{MW} - \omega_{L,0})^2/4} \cdot \sin^2 \left[\sqrt{\frac{\gamma^2}{\hbar^2} + \frac{(\omega_{MW} - \omega_{L,0})^2}{4}} \cdot t \right]. \quad (5.8)$$

Diese Formel ist in der Literatur als *Rabi-Formel* bekannt; ihre Ableitung kann in fast jedem Buch zu Quantenmechanik gefunden werden (siehe z.B. [Sak85]). Dabei ist $\gamma = \frac{e\hbar}{m_e} \cdot B_{MW}$ und B_{MW} = Stärke des Magnetfeldes der Mikrowellen; $\omega_{L,0} = \frac{g_0 \mu_B B_0}{\hbar}$ = Larmor Frequenz des Elektrons im magnetischen Speicherfeld B_0 . Da die Wahrscheinlichkeit der Absorption und der stimulierten Emission identisch sind, gibt die Rabi-Formel die Wahrscheinlichkeit eines Spin-Flips zum Zeitpunkt t beim angegebenen elektromagnetischen Feld an. Sie ist aber nur im idealen Fall eines perfekt homogenen Speicherfeldes und eines unendlich scharfen Mikrowellen-Signals gültig. Unsere Aufgabe nun lautet, mit Hilfe dieser Formel die theoretische Form der $S_W(\Gamma)$ -Resonanz herauszufinden.

Als erstes muss man darauf achten, daß das im Experiment verwendete Mikrowellen-Signal eine Breite von etwa 4 Hz @ 105 GHz aufweist. Dies bedeutet, daß die Dynamik des Spins inkohärent getrieben wird, und da die Messzeit etwa eine Minute beträgt, muss der $\sin^2[\dots]$ -Term in der Rabi-Formel durch seinen Mittelwert von 1/2 ersetzt werden. Damit ist die maximale erreichbare Spin-Flip-Wahrscheinlichkeit gleich 1/2 (siehe Abschnitt 5.3.5 für weitere Einzelheiten).

5.3.2 Wirkung der magnetischen Inhomogenitäten

Im Abschnitt 2.5.2 sahen wir, daß aufgrund des B_2 -Terms sämtliche Frequenzen eine Funktion der verschiedenen Energien sind. Im Fall der Larmor Frequenz hat man (siehe Gleichung 2.45): $\nu_L = \nu_{L,0} + \kappa_+ \cdot E_+ + \kappa_z \cdot E_z$. Die Werte der Koeffizienten κ_+ und κ_z sind in Gleichung 3.3 angegeben. Die ideale Larmor Frequenz muss in der Rabi-Formel durch die Energieabhängige ersetzt werden. Tut man dies, erhält man nach einfacher Algebra die Energie-abhängige Spin-Flip Wahrscheinlichkeit (für die vorgegebene Mi-

krowellenfrequenz ν_{MW}) von:

$$P(\nu_{MW}; E_+, E_z) = \frac{1}{2} \cdot \frac{\left(\frac{1}{2\pi^2} \cdot \frac{B_{MW}}{B_0}\right)^2}{\left(\frac{1}{2\pi^2} \cdot \frac{B_{MW}}{B_0}\right)^2 + \left(g_0 + \alpha_+ \cdot E_+ + \alpha_z \cdot E_z - \frac{h\nu_{MW}}{\mu_B B_0}\right)^2}. \quad (5.9)$$

Da die Magnetronenergie während der Messung konstant bleibt wird sie zunächst vernachlässigt. Die neuen Koeffizienten α_+ und α_z sind Funktionen der angegebenen κ_+ und κ_z . Ihre Werte lauten jeweils⁴:

$$\alpha_+ = -\frac{B_2}{B_0} \cdot \frac{g_0}{m 4\pi^2 \nu_+^2} \cdot \left[1 + \frac{\nu_+}{2\nu_-} \cdot \frac{B_1^2}{B_0 B_2} \left(1 - \frac{\nu_z^2}{2\nu_+^2}\right)\right] = -1,1 \pm 0,1 \quad \left[\frac{10^{-9}}{\text{eV}}\right]$$

$$\alpha_z = +\frac{B_2}{B_0} \cdot \frac{g_0}{m 8\pi^2 \nu_+ \cdot \nu_-} = 7,5 \pm 0,8 \quad \left[\frac{10^{-7}}{\text{eV}}\right]. \quad (5.10)$$

Der Fehler ist in beiden Fällen auf die Unsicherheit des experimentellen Wertes von B_2 in der Präzisionsfalle zurückzuführen. Der Einfluß des Gradienten des Magnetfeldes, B_1 , ist berücksichtigt worden (Gleichung 2.55). Es soll darauf hingewiesen werden, daß die axiale Energie um fast drei Größenordnungen größeren Einfluß als E_+ hat.

Darüberhinaus und nach Gleichung 5.2 hat man:

$$\frac{h\nu_{MW}}{\mu_B B_0} = 2 \left(\frac{q}{e} \cdot \frac{m_e}{m}\right) \cdot \frac{\nu_{MW}}{\nu_c} = 2 \left(\frac{q}{e} \cdot \frac{m_e}{m}\right) \cdot \Gamma. \quad (5.11)$$

Diese einfache Beziehung besagt, daß die theoretische Spin-Flip Wahrscheinlichkeit $P(\nu_{MW}; E_+, E_z)$, als Funktion des *messbaren Frequenzverhältnisses*, Γ , verstanden werden kann. Die Tatsache, daß mit dem Invarianztheorem nur der homogene Anteil, B_0 , des Magnetfeldes gemessen werden kann (Gleichung 5.2) ist in dieser Theorie *exakt* enthalten.

Die Funktion $P(\Gamma; E_+, E_z)$ ist noch nicht mit der gesuchten Resonanz $S_W(\Gamma; E_+, T_z, L_{MW})$ identisch⁵. Sie stellt die Wahrscheinlichkeit eines Spin-Flips für ein bestimmtes Energie-Paar, (E_+, E_z) dar, wobei in Wirklichkeit während der Messung dieses Energie-Paar nicht so scharf definiert ist. Das Ion besitzt verschiedene Energien während der Einstrahlungszeit der Mikrowellen. Die *messbare* Spin-Flip-Wahrscheinlichkeit ist infolgedessen gleich der Summe der Wahrscheinlichkeiten, daß ein Spin-Flip bei $(E_+, E_z)_1$, oder bei $(E_+, E_z)_2$, oder bei $(E_+, E_z)_3$, oder bei induziert wird.

Um die richtige theoretische Form der Resonanz zu finden, müssen noch zwei Integrationen durchgeführt werden: $\iint dE_+ dE_z \cdot P(\Gamma; E_+, E_z) \cdot \rho(E_+, E_z)$. Die Funktion $\rho(E_+, E_z)$ stellt die Wahrscheinlichkeit dar, daß das Ion die Energien (E_+, E_z) hat.

Innerhalb der *traditionellen Methode* sind beide Energien voneinander entkoppelt und deshalb völlig unabhängig. Man hat $\rho(E_+, E_z) = \rho_+(E_+) \cdot \rho_z(E_z)$.

⁴ g_0 ist der theoretische g-Faktor (siehe Tabelle 1.1).

⁵ Die Mikrowellenleistung, L_{MW} , ist in der vorgestellten Funktion 5.9 schon implizit durch B_{MW} enthalten.

Diese zwei Funktionen sind aber bekannt:

1. $\rho_z(E_z) = e^{-E_z/k \cdot T_z}$.

Dies ist die Boltzmann-Verteilung. Sie spiegelt die thermischen Fluktuationen der axialen Energie wieder (siehe Abschnitt 4.9). Sie muß normiert werden, d.h. durch $k \cdot T_z$ dividiert werden.

2. $\rho_+(E_+) = E_+^0 \cdot e^{-t/\tau}$.

Diese Funktion ist keine eigentliche Wahrscheinlichkeitsverteilung. Sie stellt die Widerstandskühlung der Zyklotronbewegung dar. Man sollte nicht vergessen, daß man das Ion anregen muß, um das Zyklotron-Signal sichtbar zu machen. Während der Messzeit von ν_+ und gleichzeitiger Einstrahlung der Mikrowellen erfährt es erhebliche Widerstandskühlung. Diese muss an dieser Stelle mitberücksichtigt werden. Die Messung der Kühlzeitkonstante, τ , wurde in Abschnitt 4.2 beschrieben. Sie beträgt etwa 5 Minuten (siehe Abbildung 4.4 oder 4.5).

Mit der *Doppel-Dip-Methode* bleibt die Widerstandskühlung der Zyklotronbewegung erspart. Die theoretische Linienform der Resonanz ist schließlich durch folgende Funktion gegeben:

$$\frac{1}{2} \int_0^\infty dE_z \frac{e^{-E_z/k \cdot T_z}}{k \cdot T_z} \int_0^t dt' \frac{\sigma^2}{\sigma^2 + (g_0 + \alpha_+ E_+^0 \cdot e^{-t'/\tau} + \alpha_z E_z - \beta \Gamma)^2} \cdot \frac{1}{t}. \quad (5.12)$$

Zur Vereinfachung wurden die Parameter $\sigma = \frac{1}{2\pi^2} \cdot \frac{B_{MW}}{B_0}$ und $\beta = 2 \cdot \frac{q}{e} \cdot \frac{m_e}{m}$ definiert. Der Parameter t stellt die Messzeit dar. Sie beträgt ungefähr eine Minute. In der oberen Formel erscheint die Messzeit zur Normierung der Funktion auch im Nenner.

Die Integrale in 5.12 lassen sich nicht analytisch lösen. Sie müssen numerisch ausgewertet werden. Wie schon im Rahmen dieser Dissertation üblich der Fall wird dies mit Hilfe des Programms *Mathematica 4.0 ©Wolfram Research* problemlos erledigt.

Die Funktion in 5.12 ist die gesuchte theoretische Linienform der Resonanz. Wir werden sie $S_{W,T}$ nennen, um hervorzuheben, daß es sich um ein mathematisches Modell handelt. Sie ist eine Funktion von mehreren Variablen:

$$S_{W,T} = S_{W,T}(\Gamma; E_+^0, T_z, g_0, \sigma, t, \alpha_+, \alpha_z, \tau).$$

Die Parameter $t, \alpha_+, \alpha_z, \tau$ sind fest und werden für die nachfolgenden Simulationen immer konstant und gleich den schon angegebenen Werten gehalten. Der Parameter σ entspricht der Stärke des Magnetfeldes der Mikrowellen. Wir werden Spektren mit verschiedenen σ berechnen; als Referenz werden wir aber den Wert $B_{MW} = 7,5$ mGauss verwenden (entspricht $\sigma = 1,0 \cdot 10^{-8}$ bei $B_0 = 3,797$ Tesla). Da B_{MW} direkt nur sehr schwer gemessen werden kann, werden wir als Maßstab dafür die Spin-Flip-Wahrscheinlichkeit am Maximum verwenden, $S_W(\Gamma_m)$. Die Simulationen der Resonanz ergeben die

vorgestellte Zahl als wahrscheinlichen Wert für die Stärke des Magnetfeldes der Mikrowellen, denn mit den üblichen $T_z = 61$ K und $E_+^0 = 2,89$ eV (=1 Hz) erhält man eine theoretische maximale Spin-Flip-Wahrscheinlichkeit von 40%, was sehr nah an der experimentellen Realität liegt (siehe Tabelle 5.1).

Darüberhinaus werden wir den theoretischen Wert für den g-Faktor g_0 in die Simulationen einsetzen. Nach [Yer02] ist $g_0 = 2,000\,047\,020\,5$ ($\rightarrow \Gamma_{0,T} = 4164,376\,167\,9$). Wir werden außerdem den Achsen-Ursprung bei den simulierten Resonanzen bei $(g_0, 0)$ setzen. Damit veranschaulicht man sehr eindeutig die Verschiebung des Maximums der Resonanzen bezüglich des „wahren“ g-Faktors. Dies wird die Notwendigkeit der Extrapolation auf verschwindende Energien deutlich machen.

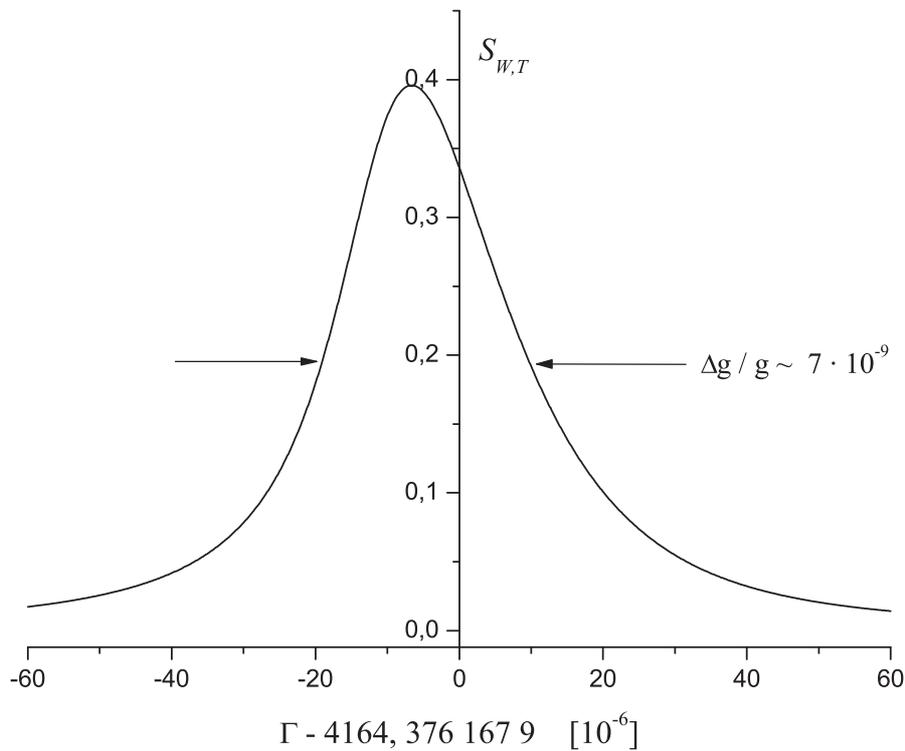


Abbildung 5.5: $S_{w,T}$ für eine Zyklotronenergie von 2 Hz und $T_z = 61$ K. Die Verschiebung des Maximums der Resonanz bezüglich dem Wert des richtigen Frequenzverhältnisses beträgt etwa $12 \cdot 10^{-6}$; dies entspricht einer relativen Abweichung von 3 ppb. Das Maximum der experimentellen Resonanzen darf deshalb nicht unmittelbar mit dem gesuchten g-Faktor identifiziert werden.

Ein zusätzlich wichtiger Punkt ist die Breite der theoretischen Resonanz. Die hier vorgestellte Simulation weist eine relative Breite von $7 \cdot 10^{-9}$ auf. In der Tabelle 5.1 ist die Breite der vier grundlegenden Resonanzen zu sehen. Wie man dort sehen kann, liegen alle angegebenen Werte über dem hier theoretisch erhaltenen. Dies deutet darauf hin, daß die in der theoretischen Simulation nicht enthaltenen Fluktuationen des Magnetfeldes auch mitwirken. Sie tragen zwischen 10 und 20 % zur gesamten Breite der Resonanz bei.

5.3.3 Variation der Zyklotronenergie

Um die Güte des vorgestellten theoretischen Modells zu testen, wollen wir zunächst Spektren mit verschiedenen Zyklotronenergien berechnen. Mit Hilfe von $S_{W,T}$ wurde dies für eine Reihe von unterschiedlichen E_+ -Werten gemacht. Das Ergebnis ist in Abbildung 5.6 zu sehen:

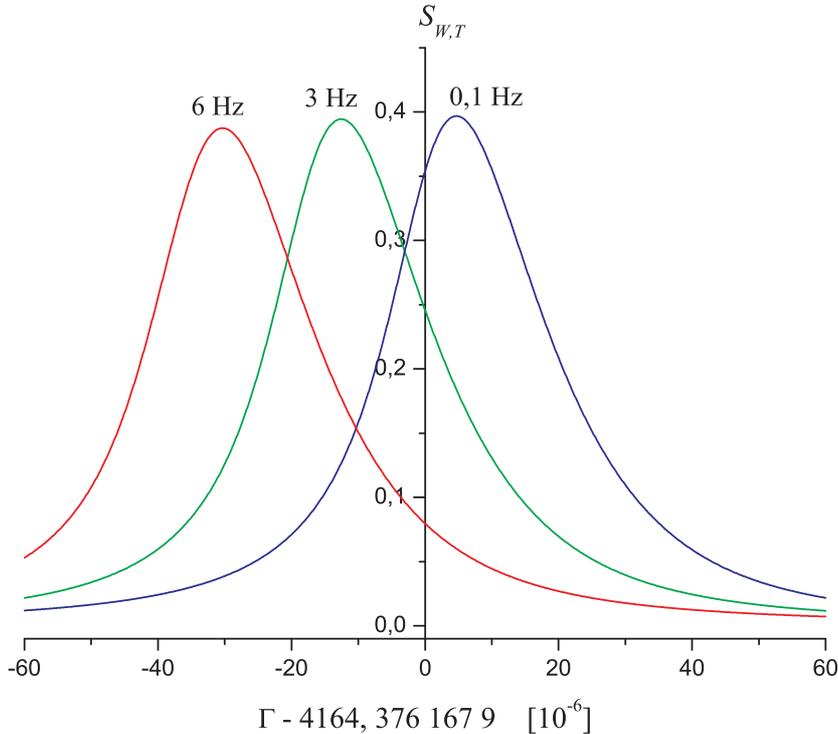


Abbildung 5.6: $S_{W,T}$ für drei Zyklotronenergien.

$T_z = 61$ K für alle drei. Die Mikrowellen Leistung ist auch gleich für alle.

Man sieht, wie sich das Maximum der Resonanz mit zunehmender E_+ zu immer kleineren Werten verschiebt. Darüberhinaus ist die Breite binnen der angegebenen Zyklotronenergien ungefähr konstant. In der Tabelle 5.1 sahen wir, daß die vier Resonanzen ähnliche Breiten besitzen. Die kleinen Unterschiede sind nur auf die Sortierung der Daten in vier Gruppen mit unterschiedlich scharf definierten E_+ zurückzuführen.

Von großer Bedeutung ist die theoretische Vorhersage über die Entwicklung des Maximums der Resonanz, Γ_m , mit der Zyklotronenergie. Sie ist in der Abbildung 5.7 gezeigt (siehe nächste Seite). Die theoretische Simulation liefert wichtige Informationen:

1. Die Entwicklung von Γ_m mit E_+ ist durchaus linear. Man sollte nicht vergessen, daß in der Theorie sogar die Wirkung des Gradienten des Magnetfeldes enthalten ist. Selbst damit ist $\Gamma_m = \Gamma_m(E_+)$ völlig linear. Infolgedessen muss die Extrapolation auf verschwindende Zyklotronenergie mittels einer Gerade durchgeführt werden. Die Vorgehensweise, die im Abschnitt 5.2.1 verwendet wurde (siehe Abbildung 5.3) ist somit fest theoretisch begründet.

2. Die Steigung der Gerade lautet: $\frac{\partial \Gamma_m}{\partial E_+} = 5,9 \pm 0,6 [10^{-6}/\text{Hz}]$. Der Fehler beruht auf der Unsicherheit der Kenntnis des B_2 - und des B_1 -Terms in der Präzisionsfalle. Die theoretische Vorhersage stimmt binnen der Fehlergrenzen mit dem experimentellen Wert (siehe Gleichung 5.7) sehr gut überein. Sie stellt einen wichtigen Erfolg unseres Modells dar.

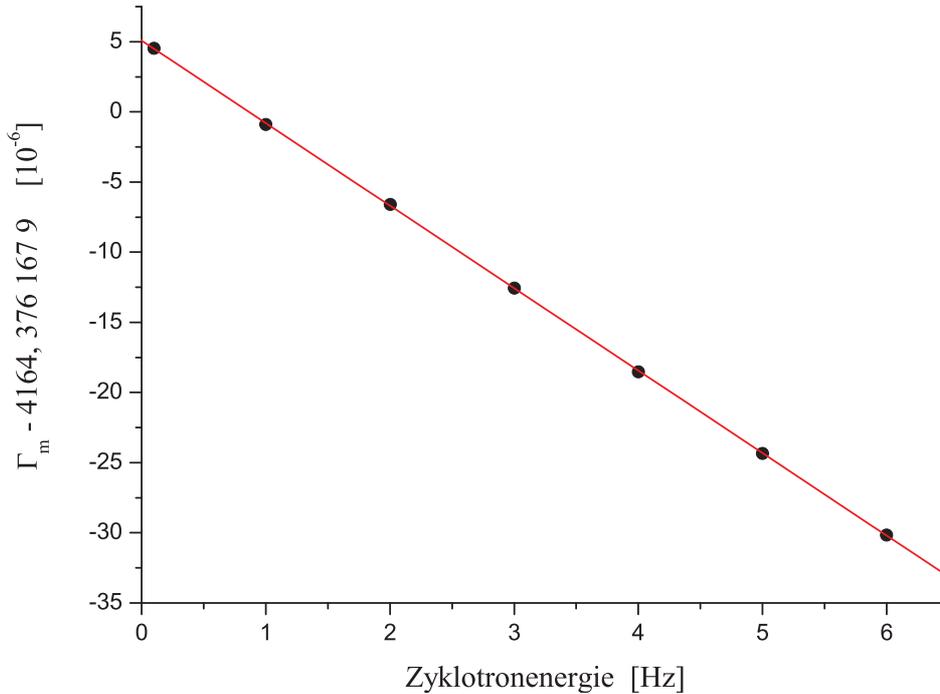


Abbildung 5.7: Γ_m als Funktion der Zyklotronenergie nach der Theorie.

Die erhaltenen theoretischen Spektren zeigen außerdem, daß bei den vorgegebenen Parametern ($T_z = 61$ K und $\sigma = 1,0 \cdot 10^{-8}$) die Verwendung einer Gauss-Kurve zur Anpassung an den experimentellen Daten gerechtfertigt ist. Das Maximum der experimentellen Resonanzen wurde als Ergebnis des Fits an eine Gauss-Kurve gewonnen (siehe Abbildung 5.2); die entsprechenden theoretischen Spektren sind dabei offensichtlich symmetrische Kurven. Infolgedessen ist diese Vorgehensweise korrekt und verursacht keine bedeutende systematische Verschiebung in der Bestimmung von Γ_m . Dies ist aber nicht immer der Fall; wir werden sehen, daß bei höheren axialen Temperaturen und/oder niedrigeren Mikrowellenleistungen die theoretischen Spektren sehr unsymmetrisch werden. Dann ist die Bestimmung des Maximums mit einem symmetrischen Gauss-Modell nicht möglich.

Wir wissen, daß die Maxima der experimentellen Resonanzen nicht dem gesuchten g-Faktor, oder besser gesagt, dem „wahren“ Frequenzverhältnis, Γ_0 , entsprechen. Man könnte im Prinzip versuchen, die Daten an $S_{W,T}$ anzufitten, um Γ_0 herauszufinden. Dies ist aber in der Praxis unmöglich oder extrem schwer; dabei wäre der Fehler des Fits extrem hoch. Der einzige vernünftige Weg um Γ_0 zu gewinnen besteht darin, die Extrapolation auf

verschwindende Energien durchzuführen. Wir haben mit der Extrapolation $E_+ \rightarrow 0$ schon den ersten Schritt in diese Richtung unternommen. Übrig bleibt die Extrapolation auf verschwindende axiale Temperatur und Magnetronenergie. Letztere spielt aber nur eine untergeordnete Rolle; deshalb wollen wir nun unsere Aufmerksamkeit dem ersten schenken.

5.3.4 Variation der axialen Temperatur

Die folgende Abbildung zeigt mehrere theoretische Resonanzen mit unterschiedlichen axialen Temperaturen:

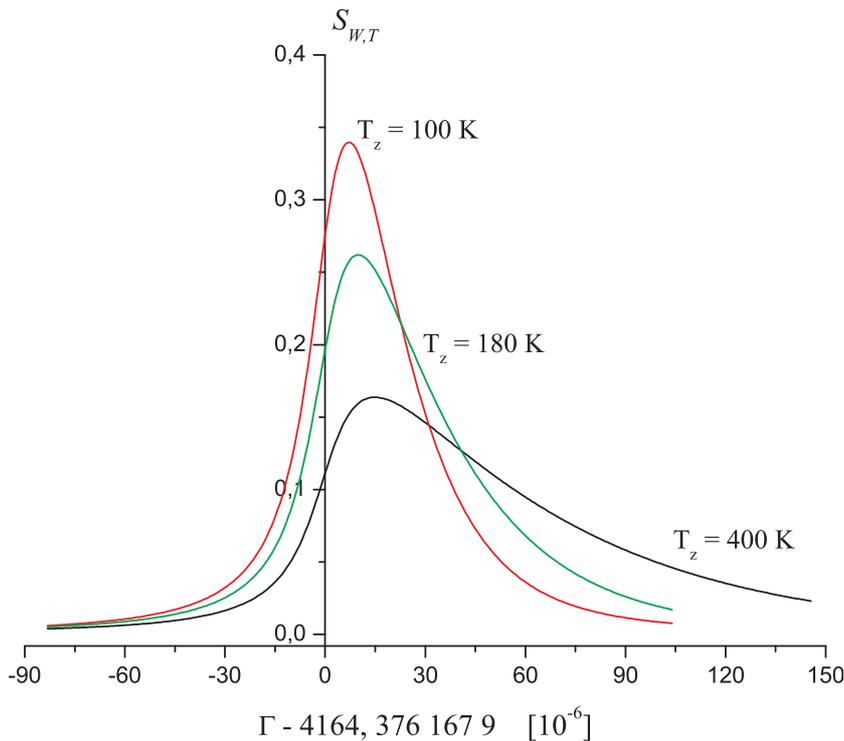


Abbildung 5.8: **Entwicklung der $S_{W,T}$ – Resonanzen mit der axialen Temperatur.**

Alle Kurven wurden mit einer konstante Mikrowellenleistung berechnet und zwar mit dem üblichen Wert von $\sigma = 1,0 \cdot 10^{-8}$. Die Zyklotronenergie wurde dabei auch konstant und gleich Null gesetzt.

Aus der Abbildung lernt man folgendes:

1. Das Maximum der Spin-Flip-Resonanz entfernt sich mit zunehmender Energie immer weiter vom eigentlichen g-Faktor. In der Abbildung ist dieser am Achsen-Ursprung platziert. Im Gegensatz zur Zyklotronenergie, wächst Γ_m mit T_z . Dies beruht auf den unterschiedlichen Vorzeichen von α_+ und α_z (siehe Gleichung 5.10).
2. Die Zunahme von $\Gamma_m = \Gamma_m(T_z)$ ist nicht linear.

3. Die Breite der Resonanz nimmt mit der axialen Temperatur dramatisch zu. Wichtig für die Genauigkeit des Experiments ist es daher, T_z möglichst klein zu halten⁶.
4. Unmittelbar verknüpft mit dem oberen Punkt ist die mit T_z zunehmende Asymmetrie der Resonanzen. In der Abbildung ist eindeutig zu sehen, wie die Kurven bei höheren Temperaturen immer mehr die Boltzmann-Verteilung der axialen Energie widerspiegeln. In diesen Fällen kann man keine Gauss-Kurve verwenden, um das Maximum der Resonanz zu gewinnen. Dies wird mit der *Doppel-Dip-Methode* auch experimentell offensichtlich (siehe Abbildung 5.18).
5. Die maximale Spin-Flip-Wahrscheinlichkeit strebt (idealerweise) gegen $1/2$ wenn $T_z \rightarrow 0$ (und angenommen $E_+ = 0$). Die Tatsache, daß diese Wahrscheinlichkeit experimentell nicht gleich $1/2$ ist, gibt einen Hinweis über die Abweichung der experimentellen Resonanz vom idealen Lorentz-Kurve (Gleichung 5.8).

Die folgende Abbildung veranschaulicht die Abhängigkeit des Maximums, Γ_m , von der Temperatur:

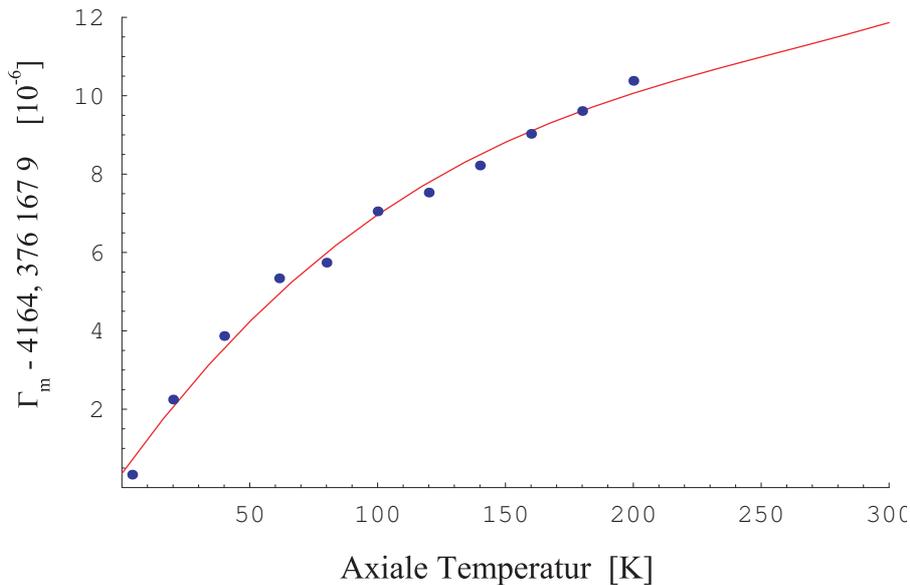


Abbildung 5.9: Γ_m als Funktion der axialen Temperatur nach der Theorie.

Die Punkte sind den einzelnen theoretischen Spektren entnommen worden. Die stetige Kurve stellt einen Fit der Punkte mit einem Polynom dritter Ordnung dar. Es lautet (mit T_z in Kelvin und $\Delta\Gamma_m$ in [10^{-6}]):

$$\Delta\Gamma_m(T_z) = 0,358 + 0,0909 \cdot T_z - 0,000285 \cdot T_z^2 + 3,676 \cdot 10^{-7} \cdot T_z^3. \quad (5.13)$$

⁶ Der erste wichtige Schritt in diese Richtung wurde schon von Dr. S. Stahl vorgeschlagen. Im zurzeit noch laufenden Promotion von T. Valenzuela wird dies eine zentrale Rolle spielen.

Der Fehler der einzelnen Koeffizienten ist hier nicht wichtig, nur die Tatsache, daß dieses Polynom zur Extrapolation auf verschwindende axiale Temperatur verwendet wird.

5.3.5 Variation der Mikrowellenleistung

Die folgende Abbildung veranschaulicht drei theoretische Spektren mit unterschiedlichen Mikrowellenleistungen bzw. Stärken des Magnetfeldes der Mikrowellen:

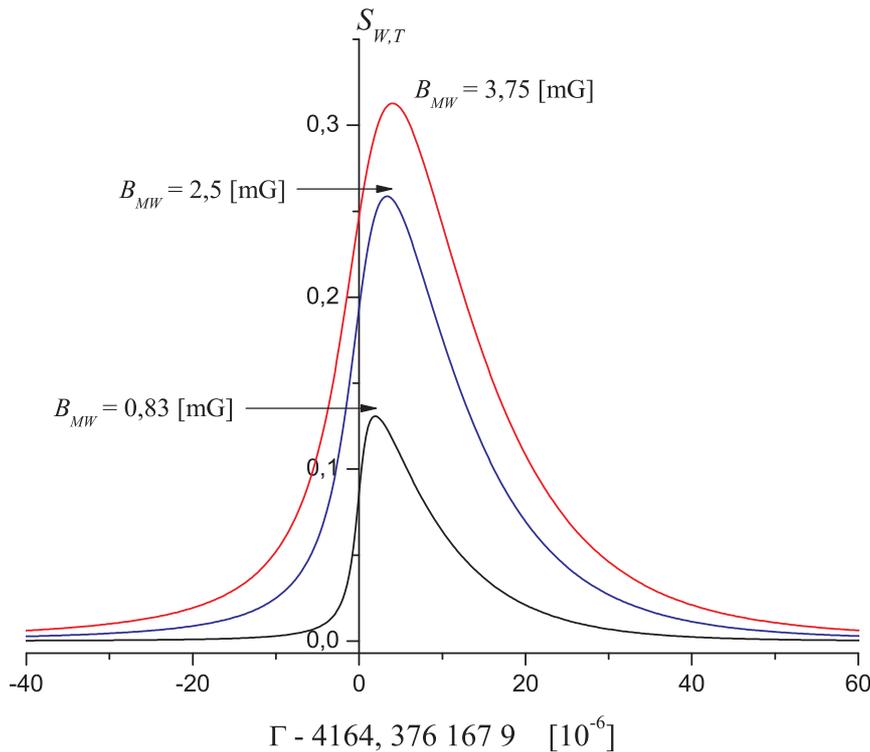


Abbildung 5.10: $S_{W,T}$ für drei Mikrowellenleistungen.

Die Zyklotronenergie ist gleich Null und $T_z = 61\ \text{K}$ für alle drei Kurven.

Aus der Abbildung lernt man folgendes:

1. Das Maximum der Spin-Flip-Resonanz entfernt sich mit zunehmender Mikrowellenleistung vom wahren g-Faktor. Genauso wie die Abhängigkeit von der axialen Temperatur, wächst Γ_m mit der Stärke des Magnetfeldes der Mikrowellen B_{MW} .
2. Die Breite der Resonanzen wächst sehr schnell mit der Mikrowellenleistung. Dies verdeckt zum Teil die Asymmetrie der Kurve aufgrund der Boltzmann-Verteilung der axialen Energie. Bei niedrigen B_{MW} ist die Asymmetrie jedoch leicht erkennbar.
3. Die Funktion $\Gamma_m = \Gamma_m(\sigma)$ kann analytisch nur schwer erhalten werden. Genauso wie im Fall der axialen Temperatur wird aus der Darstellung

der Maxima mehrerer theoretischen Spektren ein Polynom als Funktion der Mikrowellenleistung angefitzt, um $\Gamma_m = \Gamma_m(\sigma)$ zu gewinnen (siehe Abbildung 5.11).

Obwohl in der Abbildung 5.10 nicht zu sehen, ist die maximale Spin-Flip-Wahrscheinlichkeit gleich $1/2$. Bei zunehmender Mikrowellenleistung wird $S_{W,T}$ niemals $1/2$ überschreiten. Dieser *Sättigungseffekt* führt zu einer dramatischen Verbreiterung der Resonanz. Dieses Phänomen wurde schon während der Messung am $^{12}\text{C}^{+5}$ beobachtet. Deswegen wurden die in dieser Dissertation vorgestellten Messungen mit geringerer Mikrowellenleistung durchgeführt, damit die Sättigung der Resonanz vermieden wird. Einzelheiten zu diesem Effekt finden sich in [Häf03].

Die Darstellung der Maxima der Resonanzen ist in folgender Abbildung zu sehen. Die Punkte entsprechen einzelnen berechneten theoretischen Spektren. Die Kurve stellt das angefitzte Polynom dritter Ordnung dar.

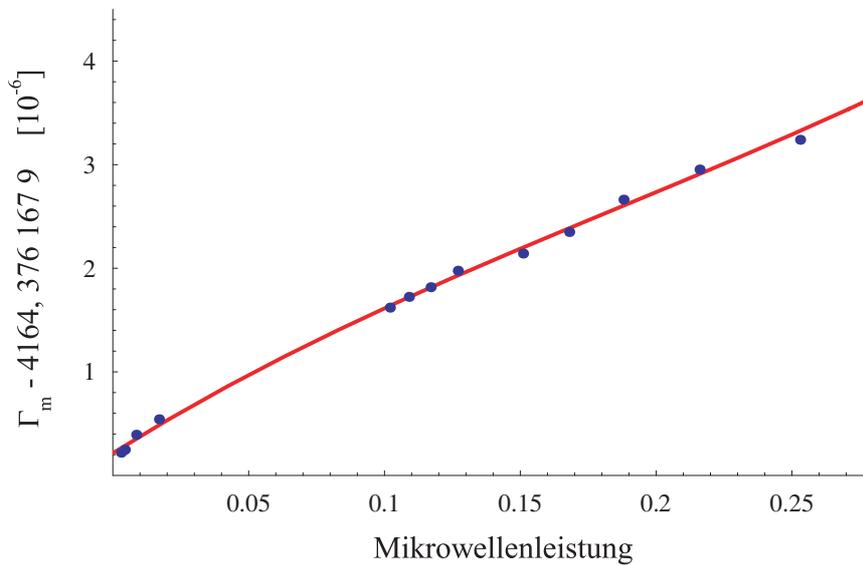


Abbildung 5.11: Γ_m als Funktion der Mikrowellenleistung (theoretisch). Auf der x-Achse ist s_w dargestellt (siehe Tabelle 5.1).

Als Maßstab für die Mikrowellenleistung ist die Spin-Flip-Wahrscheinlichkeit am Maximum verwendet worden. Wir symbolisieren sie mit s_w . Dies erleichtert den Vergleich mit dem Experiment, denn die Stärke des Magnetfeldes der Mikrowellen am Ort des Ions, also B_{MW} bzw. der Parameter σ , ist in der Tat sehr schwer zu messen.

Das angefitzte Polynom dritter Ordnung lautet (mit $\Delta\Gamma_m$ in $[10^{-6}]$ Einheiten):

$$\Delta\Gamma_m(s_w) = 0,22 + 16,43 \cdot s_w - 29,89 \cdot s_w^2 + 53,42 \cdot s_w^3. \quad (5.14)$$

Für „kleine“ s_w ist die Funktion linear. Wenn sich s_w dem Sättigungswert von $1/2$ nähert, wird sie stark unlinear; wie die großen Werte der quadratischen und kubischen Terme zeigen. Der Fehler der einzelnen Koeffizienten

ist hier unwichtig; relevant ist dieses Polynom nur zur Korrektur des erhaltenen experimentellen g-Faktors und zur Untersuchung des damit verbundenen Fehlers. Das wollen wir nun im folgenden Abschnitt diskutieren.

5.4 Extrapolation $T_z \rightarrow 0$ und/oder $L_{MW} \rightarrow 0$

Wir wollen an dieser Stelle mit der Auswertung der experimentellen Ergebnisse fortfahren. Dafür werden wir auf den in 5.6 angegebenen Wert von $\Gamma_m(E_+ = 0, T_z, E_-, L_{MW})$ zurück kommen. Angesichts der in den vorherigen Abschnitten vorgestellten theoretischen Überlegungen ist nun die Vorgehensweise eindeutig geworden. Idealerweise müßte man mehrere Resonanzen bei unterschiedlichen axialen Temperaturen und Mikrowellenleistungen messen. Dies wäre aber zeitlich sehr aufwendig und konnte im Rahmen dieser Dissertation nicht realisiert werden. Infolgedessen werden wir die Extrapolationen auf verschwindende T_z und L_{MW} mit den theoretischen Polynomen 5.13 und 5.14 durchführen. Die Begründung dieser Vorgehensweise liegt an den Erfolgen der Theorie, unter anderem an den Übereinstimmungen Theorie-Experiment zu:

1. Abhängigkeit $\Gamma = \Gamma(E_+)$. Siehe Abbildung 5.7 und Gleichung 5.7.
2. Erwarteten Breiten der Resonanzen. Siehe Tabelle 5.1 und Abbildungen 5.2, 5.5, 5.6, 5.8 und 5.10.
3. Abhängigkeit der Breite der Zyklotron-Resonanz von E_+ . Siehe Abbildung 3.10.
4. Abhängigkeit des optimalen Tuning-Ratios von der Zyklotronenergie. Siehe Abbildung 4.20. und Gleichung 2.50.
5. Nicht-Orthogonalität der Präzisionsfalle. Siehe Gleichung 2.24 und Abbildung 4.22.

Besonders wichtig ist der in Punkt 1 aufgelistete Erfolg der Theorie, denn er ist gleicher Natur wie die in diesem Abschnitt durchzuführenden Korrekturen.

Extrapolation $T_z \rightarrow 0$

Mit dem Polynom 5.13 und der experimentellen axialen Temperatur von $T_z = 61 \pm 12$ K (siehe Abschnitt 4.9) hat man folgende am gemessenen Frequenzverhältnis anzubringende Korrektur:

$$\Delta\Gamma_m = -4,6 \pm 0,8 [10^{-6}]. \quad (5.15)$$

Der angegebene Fehler ist der Unsicherheit des Wertes von T_z zurückzuschreiben.

Extrapolation $L_{MW} \rightarrow 0$

In der Abbildung 5.12 ist die experimentelle Resonanz mit allen Messdaten zu sehen. Sämtliche gemessenen Frequenzverhältnisse, Γ_i , wurden dabei nach ihrer Zyklotronenergie mit der in Gleichung 5.7 angegebenen Steigung von $\Gamma_m = \Gamma_m(E_+)$ korrigiert. Aus der Resonanz und mittels eines Gauss-Fits erhält man die Spin-Flip-Wahrscheinlichkeit am Maximum: $A = 41 \pm 5$ %. Wie schon öfters erwähnt, wird diese zur Kalibrierung der Mikrowellenleistung verwendet. Mit Hilfe davon und des in Gleichung 5.15 vorgestellten Polynoms, bekommt man die am Frequenzverhältnis anzubringende Korrektur:

$$\Delta\Gamma_m = -5,4 \pm 0,8 [10^{-6}]. \quad (5.16)$$

Der Fehler besteht aus der Summe des statistischen Fehlers der maximalen Spin-Flip-Wahrscheinlichkeit A plus dem Fehler verursacht durch die Unsicherheit des B_2 -Terms. Die Tatsache, daß beide Korrekturen (Gleichun-

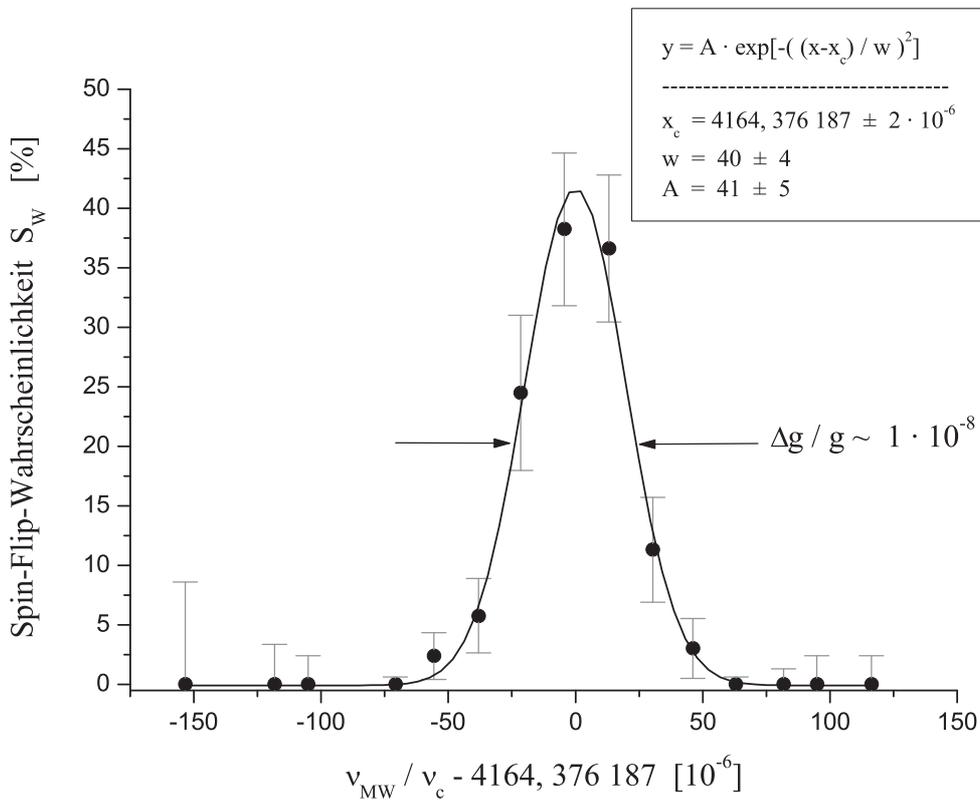


Abbildung 5.12: **Experimentelle S_W – Resonanz mit allen korrigierten Messdaten.**

gen 5.15 und 5.16) innerhalb der Fehlergrenzen gleich sind, ist kein Zufall, sondern eigentlich zu erwarten: wie man in den Abbildungen 5.8 und 5.10 sieht, strebt das Maximum der Resonanz, Γ_m , gegen das richtige Frequenzverhältnis, $\Gamma_{0,T}$, (dargestellt von der vertikalen Achse) unabhängig davon, ob man auf verschwindende Temperatur oder auf verschwindende Mikrowellenleistung extrapoliert. Das setzt voraus, daß die Extrapolation auf verschwin-

dende Zyklotronenergie schon durchgeführt worden ist. Dann, als einzige Abweichung vom idealen Fall, also von der Rabi-Formel, bleibt die Abhängigkeit der Spin-Flip-Wahrscheinlichkeit von der axialen Energie übrig. Letztendlich muss man *entweder* auf $T_z \rightarrow 0$ *oder* auf $L_{MW} \rightarrow 0$ extrapolieren. Da es völlig willkürlich ist, wie man das macht, definieren wir die am $\Gamma_m(E_+ = 0, T_z, E_-, L_{MW})$ anzubringende Korrektur als der Mittelwert von 5.15 und 5.16:

$$\Delta\Gamma_m = -5,0 \pm 0,6 \quad [10^{-6}]. \quad (5.17)$$

Der Fehler setzt sich aus der Standard-Abweichung und dem durch B_2 bedingten Fehler zusammen (quadratische Summe von beiden).

Diese Korrektur ist die wichtigste, die man am g-Faktor anbringen muss, aber nicht die einzige. Um die Analyse des experimentellen Ergebnisses zu vervollständigen sind noch andere kleinere Effekte zu berücksichtigen.

5.5 Weitere systematische Fehlerquellen

Auf den nächsten Seiten werden einige weitere mögliche systematische Fehlerquellen ausführlich untersucht. Nach Auffassung des Autors ist die Liste ausreichend, um den g-Faktor mit einer garantierten Unsicherheit angeben zu können. Man kann natürlich so viele Fehlerquellen untersuchen wie man will. Die einzige Begrenzung dabei ist die Phantasie. Damit könnte die Liste aber unendlich lang werden. Es mag sein, daß in der (sehr) fernen Zukunft Genauigkeiten im Bereich von 10^{-16} möglich sein werden (siehe [Hol00]). Die dem gegenwärtigen Stand der Technik wichtigsten Beiträge werden in den folgenden Abschnitten vorgestellt. Der Rest ist (noch) irrelevant.

5.5.1 Extrapolation auf verschwindende Magnetronenergie

Wir werden ein einfaches Modell verwenden, um die nötige Korrektur aufgrund der endlichen Magnetronenergie zu bestimmen. Zunächst muß man aber E_- herausfinden. Da die Magnetronbewegung durch Seitenbandkoppelung an die axiale Bewegung gekühlt wird, ist deren Energie durch folgende Beziehung vorgegeben:

$$\begin{aligned} \langle E_- \rangle &= - \langle E_z \rangle \cdot \frac{\omega_-}{\omega_z} = -k \cdot T_z \cdot \frac{\omega_-}{\omega_z} \longrightarrow \dots \\ \langle E_- \rangle &= -1,1 \pm 0,1 \text{ K} = -0,1 \pm 0,01 \text{ meV}. \end{aligned} \quad (5.18)$$

Die Natur der anzubringenden Korrektur ist dieselbe wie bei der Zyklotronenergie bzw. der axialen Temperatur. Da keine Messung $\Gamma_m = \Gamma_m(E_-)$ vorliegt, werden wir uns auf die Theorie stützen. Wie schon gesagt, können wir ein einfaches Modell benutzen:

$$\Gamma_m \propto \frac{\nu_L}{\nu_c} \longrightarrow \Delta\Gamma_m = \left[\frac{\partial\Gamma_m}{\partial\nu_L} \cdot \frac{\partial\nu_L}{\partial E_-} + \frac{\partial\Gamma_m}{\partial\nu_c} \cdot \frac{\partial\nu_c}{\partial E_-} \right] \cdot \Delta E_- . \quad (5.19)$$

Die partiellen Ableitungen erhält man mit Hilfe der Korrekturmatrix der magnetischen Inhomogenitäten (Gleichung 2.45) und den üblichen dynamischen Parameter in der Präzisionsfalle:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \nu_L}{\partial E_-} &= \frac{B_2}{B_0} \cdot \frac{1}{2 m \omega_+ \omega_-} \cdot \nu_L \cdot 2 = 79 \pm 8 \text{ kHz/eV} \\ \frac{\partial \nu_c}{\partial E_-} &= \frac{B_2}{B_0} \cdot \frac{2}{2 m \omega_+ \omega_-} \cdot \frac{\nu_+^2 - \nu_z^2/2 - \nu_-^2}{\nu_c} = 18 \pm 2 \text{ Hz/eV}.\end{aligned}\quad (5.20)$$

Die zweite Beziehung erhält man unter Verwendung des Invarianztheorems. Mit diesen Ableitungen und dem Wert der Magnetronenergie erhält man schließlich die an Γ_m anzubringende Korrektur.

$$\Delta \Gamma_m = +(6,3 \pm 0,6) \cdot 10^{-10}.\quad (5.21)$$

Da $E_- < 0$, ist der gemessene g-Faktor zu klein. Die anzubringende Korrektur ist infolgedessen positiv. Der Fehler der Korrektur beruht ausschließlich auf die Unsicherheit von B_2 in der Präzisionsfalle. Man sieht, daß die Korrektur völlig vernachlässigbar ist. Trotzdem, der Vollständigkeit der Fehleranalyse zuliebe, sollte sie hier diskutiert werden.

5.5.2 Null-Punkt der Zyklotronenergie

Die Frequenz des kalten Ions $\nu_{z,kalt}$ wird unmittelbar nach der Zyklotronseitenbandkühlung gemessen. Aus diesem Grund stellt sie nicht den „wahren“ Null-Punkt der Zyklotronenergie dar (siehe Sektion 5.1 zum Messablauf). Nach der Seitenbandkopplung ist $E_+ = 0,143 \text{ eV}$ (siehe Gleichung 4.3) und mit der Abhängigkeit $\frac{\partial \Gamma_m}{\partial E_+}$ (siehe Gleichung 5.7) hat man folgende am gemessenen g-Faktor anzubringende Korrektur:

$$\Delta \Gamma_m = +(2,5 \pm 0,3) \cdot 10^{-7}.\quad (5.22)$$

Der Fehler ist wiederum der Unsicherheit des B_2 -Terms und des Korrelationsfaktors $\frac{\partial \Gamma_m}{\partial E_+}$ zurückzuschreiben.

5.5.3 Zeitbasis des Spektrum-Analysators

Wie schon im Kapitel 3 erwähnt, werden alle Frequenzen mittels eines digitalen Spektrum-Analysators gemessen. Alle elektronischen Geräte besitzen eine gemeinsame Zeitbasis; sie sind alle seriell an einer externen Atom-Uhr gekoppelt. Diese Kopplung erfolgt durch sogenannte PLL-Schaltkreise⁷. Bedauerlicherweise verfügt der verwendete FFT-Analysator nicht darüber und läuft daher mit seiner eigenen Zeitbasis. Letztere ist aber unvermeidlicherweise verschieden von der gemeinsamen der anderen Geräte. Um das Problem zu lösen wird von einem „Marker“ Gebrauch gemacht (siehe Abbildung 4.8). Er wird von einem an die Atom-Uhr gekoppelten Funktionsgenerator produziert. Durch die Messung der vom FFT-Analysator wiedergegebenen

⁷ Phase Locked Loop, siehe z.B. [Mal99] für Einzelheiten.

Marker-Frequenz (also des *Istwertes* des Markers) und Vergleich mit dem *Sollwert*, kann man den diesbezüglich systematischen Fehler korrigieren und reduzieren. Jeder einzelner Messpunkt, der zur S_W -Resonanz beiträgt, beinhaltet eine solche Marker-Frequenz Messung (siehe Punkt 8 des Messablaufs im Abschnitt 5.1).

Die Streuung der Vergleiche *Istwert-Sollwert* ist in der Abbildung 5.13 zu sehen. Man beobachtet eine positive Netto-Abweichung des Markers bezüglich des Sollwertes. Der Mittelwert dieser Abweichungen beträgt: $4,7 \pm 0,2$ mHz. Der Fehler stellt die Standard Abweichung der Datensammlung dar.

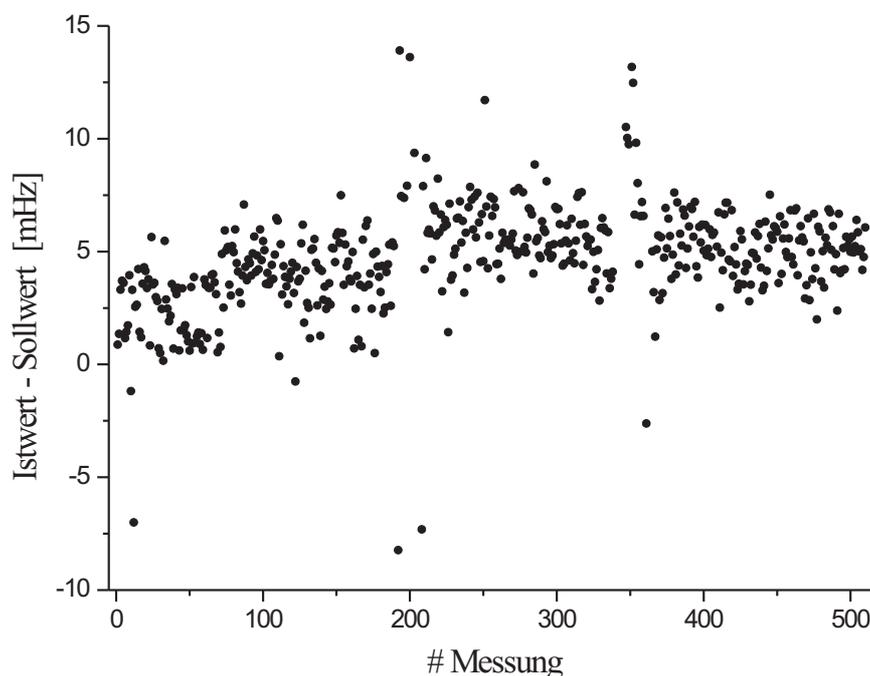


Abbildung 5.13: **Abweichungen des Markers aufgrund der falschen Zeitbasis des FFT-Analysators.**

Der vom FFT-Analysator hervorgerufene Fehler ist darüberhinaus von der Lage des Markers im Frequenz-Spektrum abhängig. Dies kann man in Abbildung 5.14 auf der nächsten Seite beobachten.

Im Laufe der Messung wurde der Marker immer genau 2,6 Hz rechts von der Zyklotronfrequenz des Ions positioniert und an dieser Stelle wurde die Abweichung des FFT-Analysators gemessen⁸. Unter diesen Bedingungen wurden die Daten in Abbildung 5.13 erhalten. Infolgedessen ist die gegebene mittlere Abweichung des Markers mit der vom FFT-Analysator hervorgerufe-

⁸ Die Zyklotronfrequenz muss heterodyn runtergemischt werden, da der FFT nur Frequenzen bis 400 kHz direkt nachweisen kann. Die Mischung bringt das Ionsignal bis auf etwa 534 Hz herunter. Mit dieser als Mitten-Frequenz und mit einer Spanne von 12 Hz wird der Zyklotronspektrum (Abbildung 3.8) aufgenommen.

nen Abweichung der Zyklotronfrequenz nicht identisch. Um letztere herauszufinden, muss die mittlere Abweichung des Markers, mit der in Abbildung 5.14 angegebenen Steigung der Differenz *Istwert-Sollwert* als Funktion des Sollwerts, korrigiert werden. Die systematische Abweichung in der Bestimmung

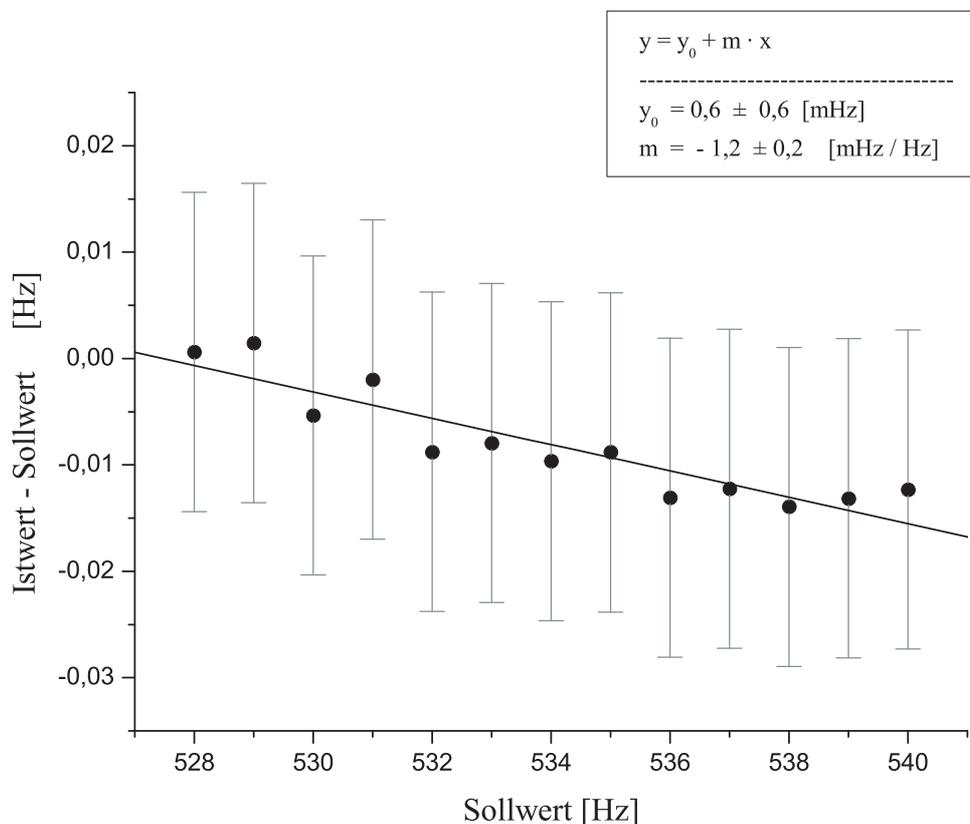


Abbildung 5.14: **Abweichung des FFT-Analysators als Funktion der Lage des Markers.**

der freien Zyklotronfrequenz lautet deshalb: $\Delta\nu_c \simeq \Delta\nu_+ = 4,7 - 2,6 \times 1,1 = 1,84$ mHz. Die gemessene freie Zyklotronfrequenz ist 1,84 mHz zu groß und damit der erhaltene g-Faktor zu klein. An letzteren ist folgende positive Korrektur anzubringen:

$$\Delta\Gamma_m = \Gamma_m \cdot \frac{\Delta\nu_c}{\nu_c} = +(3,0 \pm 1,5) \cdot 10^{-7}. \quad (5.23)$$

Bisher ist nur die Korrektur zu ν_+ berücksichtigt worden. Es bestehen logischerweise auch Korrekturen zu ν_z und zu ν_- , sie sind aber völlig vernachlässigbar (siehe Abschnitt 2.3.1 zum Invarianztheorem).

5.5.4 Spektrale Reinheit des Mikrowellensignals

In den vorherigen Abschnitten sind einige Effekte vorgestellt worden, die Korrekturen zum gemessenen g-Faktor mit sich bringen. Ab nun sind noch andere Effekte übrig, die das Ergebnis der Messung mit einer gewissen systematischen Unsicherheit belasten, aber keine Korrekturen des gefundenen

Wertes von $\Gamma_m(E_+ = 0, T_z = 0, E_- = 0, L_{MW} = 0)$ verursachen (d.h. sie können nicht beziffert werden). Wir wollen mit dem Einfluß der endlichen Breite des Mikrowellensignals auf das Messergebnis beginnen.

Die Abbildung 5.15 veranschaulicht das zum Induzieren von Spin-Flips verwendete Mikrowellensignal. Seine relative Breite beträgt $\Delta MW = 4 \cdot 10^{-11}$. Innerhalb dieses Frequenzbereichs ist keine bedeutende Asymmetrie zu erkennen. Die Form der Mikrowellen kann deshalb keine Verschiebung des gemessenen g-Faktors verursachen.

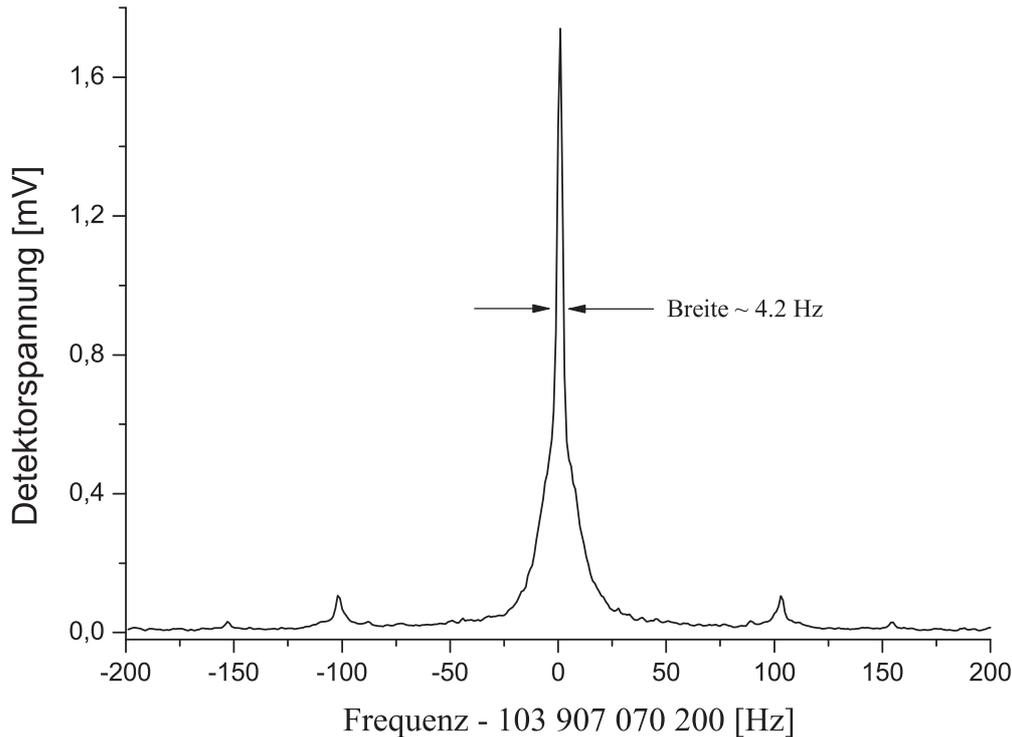


Abbildung 5.15: **Das Mikrowellensignal.**

Es ist von einem an die Atom-Uhr gelockten Generator hervorgerufen. Das Signal wurde mit Hilfe des FFT-Analysators aufgenommen. Dafür wurde es mit einem speziellen Oberwellenmischer und einem zweiten Generator runtermischt.

Wir definieren die systematische Unsicherheit in der Messung von Γ_0 aufgrund des breiten Mikrowellensignals folgendermaßen:

$$\delta\Gamma_0 = \Gamma_0 * \Delta MW = 4164,376\,1878 \times 4 \cdot 10^{-11} = 1,7 \cdot 10^{-7}. \quad (5.24)$$

5.5.5 Einfluß der Massenschleife

Im Unterabschnitt 4.1.1 wurde über die Existenz eines elektrischen apparativen Effekts, nämlich einer vermuteten Massenschleife, berichtet. Um das Magnetfeld zu messen, wird vom Invarianztheorem Gebrauch gemacht, was voraussetzt, daß man die axiale Frequenz und die Zyklotronfrequenz des Ions gleichzeitig kennt. Aus technischen Gründen wird aber im Laufe der Messung

die axiale Frequenz zwei Mal bestimmt: vor und nach der Messung der Zyklotronfrequenz. Wir nannten diese Frequenzen jeweils $\nu_{z,1}$ und $\nu_{z,2}$ (siehe Sektion 5.1 zum Messablauf). Außerdem muß die kalte axiale Frequenz $\nu_{z,kalt}$ zur Kalibrierung der Zyklotronenergie vermessen werden. All diese Frequenzen werden deshalb nicht gleichzeitig mit ν_+ gemessen und können infolgedessen, aufgrund des sich immer ändernden Spannungsabfalls an der Massenschleife, einen systematischen Fehler bei der Messung des g-Faktors verursachen. Um das zu vermeiden, misst man diesen Spannungsabfall jeweils während der Messung von ν_+ , $\nu_{z,1}$, $\nu_{z,2}$ und $\nu_{z,kalt}$. Die entsprechenden Spannungsabfälle sind u_+ , $u_{z,1}$, $u_{z,2}$ und $u_{z,kalt}$. Diese Werte werden auf u_+ bezogen. Anschließend und mit Hilfe der in Abbildung 4.1 gefundenen Korrelationsfaktor, werden sämtliche axialen Frequenzen korrigiert. Mit den neuen Werten von $\nu_{z,1}$ und $\nu_{z,2}$ und zusammen mit ν_+ wird, wie gesagt, das vom Ion erfahrene Magnetfeld mittels des Invarianztheorems erhalten. Im Prinzip ist somit das Massenschleife-Problem beseitigt.

Die folgende Abbildung veranschaulicht die Streuung der Korrekturen im Laufe des gesamten Messprogramms des g-Faktors:

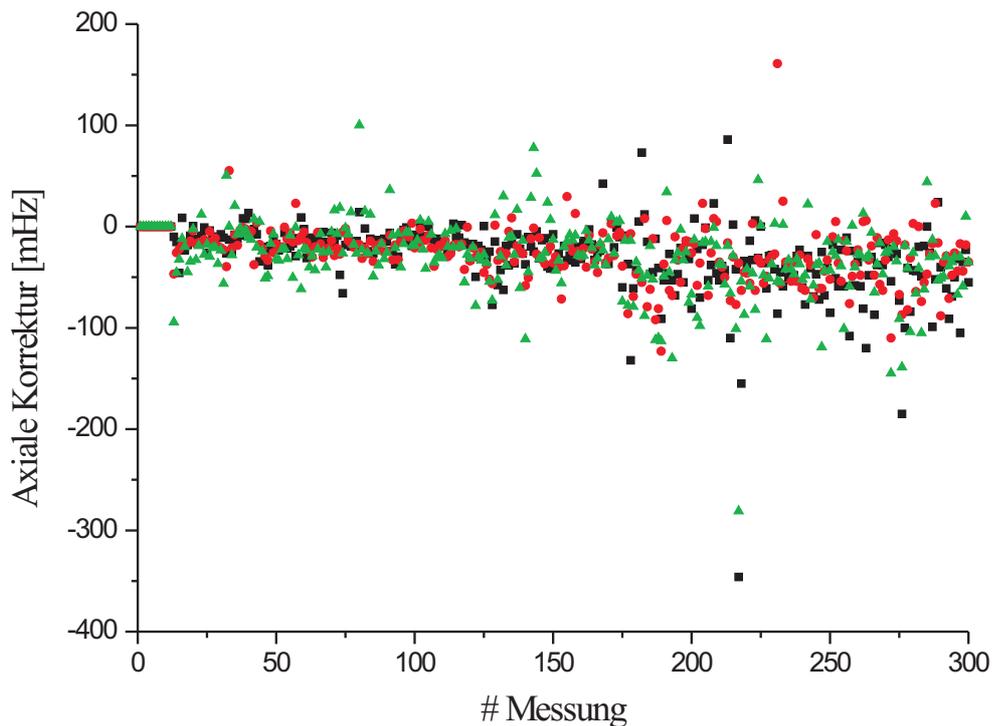


Abbildung 5.16: **Korrekturen der axialen Frequenzen bezüglich der Zyklotronfrequenz aufgrund der Massenschleife.**

Die Korrekturen liegen meistens auf der negativen Hälfte des Diagramms.

Nach Abb 5.16 ist die Massenschleife während der Messung der axialen Frequenzen durchschnittlich größer als während der Messung von ν_+ (man muss

das negative Vorzeichen der Steigung der Geraden in Abbildung 4.1 berücksichtigen). Die Bedeutung der Entdeckung der Massenschleife ist hiermit nochmals hervorzuheben, denn ansonsten hätte man einen erheblichen systematischen Fehler in der Messung des g-Faktors begangen. Wir wollen nun die damit verbundene systematische Unsicherheit zum gemessenen g-Faktor bestimmen.

Der Mittelwert der Korrekturen lautet jeweils: $\overline{Korr_{z,1}} = -30 \pm 2$ mHz, $\overline{Korr_{z,2}} = -26 \pm 2$ mHz und $\overline{Korr_{z,kalt}} = -30 \pm 2$ mHz. Da die Steigung der Gerade in Abbildung 4.1 mit einem Fehler von 10 % belastet ist, sind diese Korrekturen auch mit einer systematischen Unsicherheit von 10 % belastet. Diese verursachen ihrerseits einen systematischen Fehler in der Messung des g-Faktors:

$$\delta\Gamma_{0,i} = \Gamma_0 \cdot \frac{\nu_{z,i}}{\nu_c^2} \cdot \delta Korr_{z,i} \longrightarrow \delta\Gamma_0 = 3 \cdot 10^{-8}. \quad (5.25)$$

Dabei sind die Fehler von $\nu_{z,1}$ und $\nu_{z,2}$ quadratisch addiert worden. Der Fehler von $\nu_{z,kalt}$ geht nicht unmittelbar in die Bestimmung des Magnetfeldes ein, sondern nur indirekt durch die Messung der Zyklotronenergie. Er ist deshalb extrem klein und völlig vernachlässigbar.

5.5.6 Einfluß des Tuning-Ratios

Im Abschnitt 4.7 wurde die zur Optimierung des Tuning-Ratios verwendete Methode vorgestellt. Wir sahen, daß trotz der Güte der Methode immer noch ein möglicher Fehler in der Einstellung des optimalen Tuning-Ratios vorhanden sei. Die Methode beruht darauf, die Differenz zweier axialen Frequenzen bei unterschiedlichen Temperaturen zu minimieren, $(\nu_{z,heiss} - \nu_{z,kalt}) \rightarrow 0$. Das Tuning-Ratio wurde sehr oft während den drei Monaten zur Messung des g-Faktors optimiert.

Die Abbildung 5.17 veranschaulicht die erreichten minimalen Frequenzdifferenzen aller Optimierungsvorgänge. Der Mittelwert der Streuung im Gleichgewicht beträgt: $\overline{\Delta\nu_z} = 2$ mHz. Darüberhinaus wurde in der Sektion 2.5.2 die Korrekturmatrix zu den vom c_4 -Term verursachten elektrischen Anharmonizitäten berechnet. Mit Hilfe davon und mit dem angegebenen $\overline{(\Delta\nu_z)}$ kann man den möglichen restlichen absoluten Wert von c_4 bestimmen:

$$\Delta c_4 = \frac{\overline{Abs(\Delta\nu_z)}}{\Delta T_z} \cdot \frac{2qU_0}{3 \cdot \nu_z} \rightarrow \Delta c_4 = 8,6 \cdot 10^{-6} \quad (5.26)$$

dabei wurde eine axiale Temperatur-Differenz von $\Delta T_z = 180$ K zur Optimierung benutzt. Mit diesem möglichen Rest der elektrischen Anharmonizität in der Präzisionsfalle kann man den damit verknüpften etwaigen systematischen Fehler des g-Faktors abschätzen. Dafür muss man berücksichtigen, daß die axiale Frequenz bei einer künstlich erhöhten axialen Temperatur gemessen wurde (siehe Abbildung 4.17)⁹. Die Erhöhung der axialen Temperatur

⁹ Die künstliche Erhöhung der Temperatur wird gemacht, um das Signal-zu-Rauschen-Verhältnis des axialen Spektrums zu verbessern und damit die Messung zu beschleunigen. Bei der Messung von ν_+ wird das logischerweise nicht gemacht.

betrug dabei 200 Kelvin. Mit dieser und mit den erhaltenen c_4 kann man den möglichen systematischen Fehler in der Messung von ν_z leicht herausfinden: $\delta\nu_z = 2,2$ mHz.

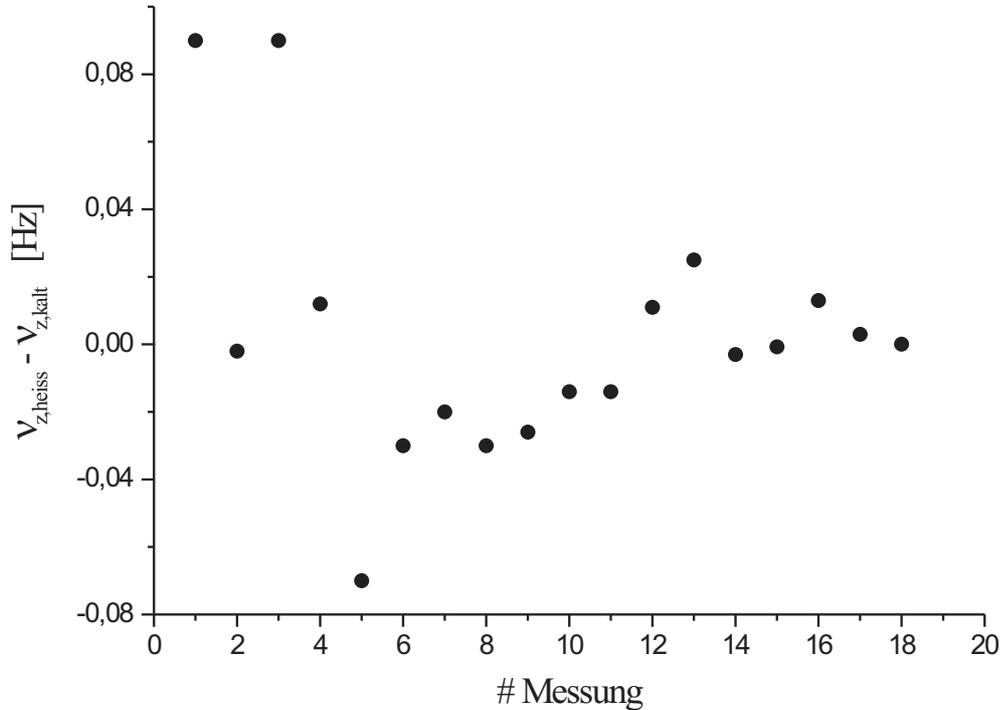


Abbildung 5.17: **Axiale Frequenzdifferenzen beim Optimieren des Tuning-Ratios.**

Nun ist es trivial, die damit verknüpfte Unsicherheit des g-Faktors zu bestimmen; man muss nur dieselbe Gleichung wie im vorherigen Abschnitt verwenden, aber mit dem jetzigen Wert von $\delta\nu_z$:

$$\delta\Gamma_0 = \Gamma_0 \cdot \frac{\nu_z}{\nu_c^2} \cdot \delta\nu_z \longrightarrow \delta\Gamma_0 = 1,3 \cdot 10^{-8}. \quad (5.27)$$

Dem Leser mag es angesichts der kleinen erhaltenen Unsicherheit erscheinen, daß sich die Mühe nicht lohnt. Man muss dabei bedenken, daß die Größe dieser Unsicherheit a priori unbekannt war. Jetzt können wir ohne Zweifel behaupten, daß das Tuning-Ratio kein großes Problem mehr darstellt.

5.5.7 Andere mögliche Fehlerquellen

Die Fehlerliste zu einer Präzisionsmessung wie der vorliegenden, kann eigentlich nie abgeschlossen werden. Um den Leser nicht zu viel damit zu belasten, wird in dieser Dissertation auf den Bericht über zusätzliche Fehlerquellen

verzichtet. Trotzdem muß man erwähnen, daß noch weitere mögliche Fehlerquellen als die bis jetzt beschrieben bestehen und untersucht wurden. Unter anderen hat man:

1. *Relativistische Fehler.* Die endlichen Energien des Ions (besonders der Zyklotronbewegung) während der Messung, verursachen relativistische Abweichungen der Frequenzen vom idealen Fall; genauso wie die magnetischen Inhomogenitäten und die elektrischen Anharmonizitäten. In [Häf03] wird die mögliche systematische Unsicherheit auf $\delta\Gamma_0 = 4 \cdot 10^{-9}$ abgeschätzt.
2. *Cavity-QED-Effekte.* Eine interessante Analyse dazu kann in [Häf00a] gefunden werden. Siehe auch [Pur46]. Der mögliche Fehler ist durchaus vernachlässigbar.
3. *Nichtlinearitäten der Nachweiselektronik.* Alle Verstärker werden weit weg von ihrer Sättigung betrieben. Die winzigen Ionensignale können keine messbare Verschiebung der nachgewiesenen Frequenzen verursachen. Letztere sind deshalb „echt“.

Damit wird die Analyse der g-Faktor-Messung mit der *traditionellen Methode* abgeschlossen.

5.5.8 Zusammenfassung: Traditionelle Methode

Nun wollen wir das Endergebnis der Messung des g-Faktors mit der traditionellen Methode vorstellen. Wir fangen mit dem systematischen Fehler an. Dafür werden alle in vorherigen Abschnitten erhaltenen Unsicherheiten in eine Tabelle eingetragen. Da sie alle zum großen Teil unabhängig voneinander sind, definieren wir die totale systematische Unsicherheit als die quadratische Summe aller Beiträge. Das Ergebnis ist in Tabelle 5.3 auf der nächsten Seite zu sehen.

Darüberhinaus muss man die gefundenen Korrekturen am g-Faktor anbringen. Dabei ist unsere Referenz-Zahl diejenige, die wir als Ergebnis der Extrapolation auf verschwindende Zyklotronenergie und unter Berücksichtigung des Einflusses der Binweite in Sektion 5.2.2 erhielten (siehe Abbildungen 5.3 und 5.4 und Gleichung 5.6). Das alles ist in die Tabelle 5.2 zusammengetragen.

Das Endergebnis der vorliegenden Messung lautet:

$$\Gamma_0 = 4164, 376\,1834 \pm \underbrace{0,000\,0031}_{\text{statistisch}} \pm \underbrace{0,000\,0006}_{\text{systematisch}}. \quad (5.28)$$

Der gesamte Fehler (quadratische Summe von beiden Unsicherheiten) lautet $3,2 \cdot 10^{-6}$. Der relative Fehler beträgt $8 \cdot 10^{-10}$.

Im Abschnitt 5.7 werden wir mit dem in der Literatur angegebenen Wert für die Masse des $^{16}\text{O}^{7+}$ -Ions den eigentlichen g-Faktor vorstellen.

Wert	Gleichung	Beschreibung
4164,376 187 80	5.6	Maximum der Resonanz mit $E_+ = 0$
- 0,000 005 00	5.17	Extrapolation $T_z/L_{MW} \rightarrow 0$
+ 0,000 000 30	5.23	Zeitbasis FFT-Analysator
+ 0,000 000 25	5.22	Null Punkt E_+
~ 0	5.21	Extrapolation $E_- \rightarrow 0$
4164,376 183 35	5.28	Endergebnis

Tabelle 5.2: Systematische Korrekturen zum Frequenzverhältnis.

$\delta\Gamma_0$	Gleichung	Beschreibung
$6 \cdot 10^{-7}$	5.17	Extrapolation $T_z/L_{MW} \rightarrow 0$
$6 \cdot 10^{-11}$	5.21	Extrapolation $E_- \rightarrow 0$
$1,5 \cdot 10^{-7}$	5.23	Zeitbasis FFT-Analysator
$3 \cdot 10^{-8}$	5.22	Null-Punkt E_+
$2 \cdot 10^{-7}$	5.24	Spektrale Reinheit Mikrowellen
$3 \cdot 10^{-8}$	5.25	Massenschleife
$1,3 \cdot 10^{-8}$	5.27	Falsches Tuning-Ratio
$4 \cdot 10^{-9}$	—	Relativistische Unsicherheit
$6 \cdot 10^{-7}$	5.28	Quadratische Summe

Tabelle 5.3: Systematische Unsicherheiten zum Frequenzverhältnis.

5.6 Ergebnisse der Doppel-Dip-Methode

Wir haben gelernt, daß die drei Eigenenergien des Ions im inhomogenen Magnetfeld verschiedene Auswirkungen auf die g-Faktor-Resonanz haben. Im Abschnitt 5.2.1 sahen wir z.B., wie sich das Maximum der Resonanz mit der Zyklotronenergie verschiebt. Darüberhinaus lernten wir mit Hilfe der Theorie, daß die Breite stark mit der axialen Temperatur und der Mikrowellenleistung wächst. Die Abhängigkeit $\Gamma_m = \Gamma_m(E_+)$ war schon seit der Messung am $^{12}\text{C}^{5+}$ bekannt. Hingegen war damals der Einfluß der axialen Temperatur nicht ganz geklärt.

Die Doppel-Dip-Methode wurde dafür entwickelt, die Zyklotronenergie bei der g-Faktor-Messung möglichst klein zu halten. Im Abschnitt 4.3.1 sahen wir, daß man damit die Zyklotronfrequenz mit einer minimalen Energie von $E_+ \simeq 1700$ K messen kann (siehe Gleichung 4.3). Mit der traditionellen

Methode hingegen, beträgt die minimale nötige Energie $E_+ \simeq 33000$ K, ist also um einen Faktor 20 größer. Man hoffte, man könne mit der Doppel-Dip-Methode die Breite der S_W -Resonanz verkleinern. Die Reduzierung der Zyklotronenergie ist dabei allerdings nicht entscheidend. Wesentlich größer ist der Einfluß der axialen Temperatur und der Mikrowellenleistung. Wenn man mit δg die (absolute) Breite der Spin-Wahrscheinlichkeit-Resonanz symbolisiert, ergibt sich nach der im Abschnitt 5.3 entwickelten Theorie:

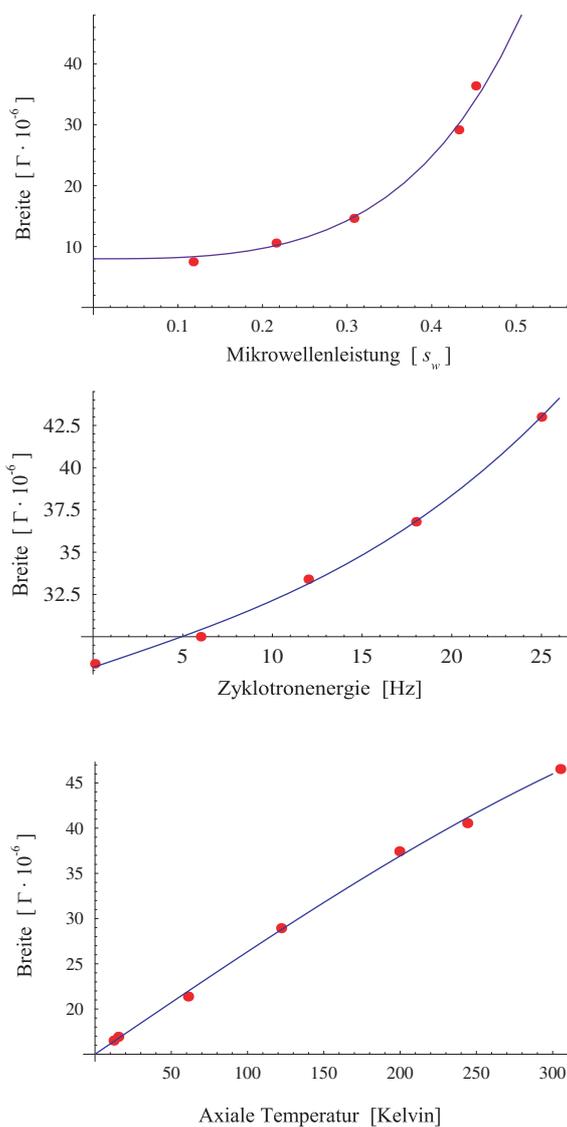


Abbildung 5.18: **Absolute Breite der Resonanzen $S_{W,T}$ als Funktion der Mikrowellenleistung, der Zyklotronenergie und der axialen Temperatur.** Die Breite δg ist in Einheiten des Frequenzverhältnisses $\Gamma[10^{-6}]$ auf der y -Achse dargestellt. Die Mikrowellenleistung ist in Einheiten der *Maximalen-Spin-Flip-Wahrscheinlichkeit* s_w dargestellt. Berechnet mit dem in 5.3 vorgestellten Modell.

Wenn man als „Faustregel“ annimmt, daß die Genauigkeit der Messung auf 10 % der Breite der S_W -Resonanz begrenzt ist, dann lernt man aus der Abbildung 5.18 folgendes:

1. Die Breite nimmt mit allen Variablen zu. Obwohl es in der Abbildung nicht zu sehen ist, spielen die stochastischen Fluktuationen des Magnetfeldes eine ähnliche Rolle. Wir werden sehen, daß sie etwa mit 15 % zur Breite der experimentellen S_W -Resonanz der Doppel-Dip-Methode beitragen. All diese Variablen müßen folglich möglichst klein sein, um die Genauigkeit der g-Faktor-Messung zu maximieren.
2. Die größte Zunahme von δg ist der Mikrowellenleistung zuzuordnen. Nur bei relativ geringeren Leistungen ist diese Zunahme etwa linear. Wenn sich die Leistung aber der Sättigung nähert ($s_w = 0,5$), wird die Zunahme dramatisch schnell. In diesem Fall wächst die Breite ungefähr exponentiell mit der Mikrowellenleistung. Sie beeinflußt die Genauigkeit der g-Messung auf entscheidende Weise.

Linearisiert man die Abhängigkeit der Breite mit den verschiedenen Variablen, dann erhält man:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \delta g}{\partial E_+} &= +0,586 \cdot 10^{-6} \text{ } \Gamma/\text{Hz} \\ \frac{\partial \delta g}{\partial T_z} &= +0,124 \cdot 10^{-6} \text{ } \Gamma/\text{K} \\ \frac{\partial \delta g}{\partial L_{MW}} &= +37,5 \cdot 10^{-6} \text{ } \Gamma/s_w, \text{ (gilt nur bei } s_w < 0,3 \text{)}. \end{aligned} \quad (5.29)$$

Nach der Theorie erwartet man, daß die Zyklotronenergie kaum zur Verbreiterung der S_W -Resonanz beiträgt. Bei der traditionellen Methode, mit einer Zyklotronenergie von 0,81 Hz (siehe Tabelle 5.1), verbreitet sie die Resonanz lediglich um $0,81 \times 0,586 \cdot 10^{-6} \simeq 0,5 \cdot 10^{-6}$ [Γ]. Der Beitrag zur gesamten (relativen) Breite von $9 \cdot 10^{-9}$ beträgt nur $1 \cdot 10^{-10}$, also etwa ein 10 %. Bei den anderen in Tabelle 5.1 vorgestellten Resonanzen hat man ähnliche Ergebnisse. Es ist trotzdem wichtig, E_+ so weit wie möglich zu minimieren; sie verschiebt stark das Maximum der S_W -Resonanz vom wahren g-Faktor. Um letzteren zu bestimmen, muß man sich auf eine „unelegante“ Extrapolation stützen. Mit der Doppel-Dip-Methode schafft man es, die g-Faktor-Messung in der Nähe von $E_+ = 0$ durchzuführen.

Die Messung mit der Doppel-Dip-Methode begann im April 2002 und wurde Ende Juni des gleichen Jahres abgeschlossen. Um ein gutes axiales Signal zu erhalten, wurde die Temperatur T_z mit weißem elektrischen Rauschen auf 200 Kelvin erhöht. Dies führt zu einer Verbreiterung der Resonanz. Der Einfluß von T_z auf die S_W -Resonanz war zum damaligen Zeitpunkt noch nicht ausführlich untersucht worden; man glaubte, E_+ trage am meisten zur Verbreiterung der Resonanz bei. Da man über wenig Zeit verfügte, erhöhte man außerdem die Mikrowellenleistung ein wenig¹⁰. Man hätte sie natürlich reduzieren können, aber die Spin-Flip-Wahrscheinlichkeit wäre damit gesunken und entsprechend die (kostbare) Messzeit gestiegen. Für die nahe Zukunft ist eine neue Messung an $^{12}\text{C}^{5+}$ geplant. Diese müßte von den

¹⁰ Sie betrug -13 dBm (= Ausgangsleistung des Mikrowellengenerators) für die traditionelle Methode und -12,8 dBm für die Doppel-Dip-Methode.

in dieser Dissertation vorgestellten Erkenntnissen bei der Messung von $^{16}\text{O}^{7+}$ profitieren.

Die Auswirkung der erhöhten axialen Temperatur und Mikrowellenleistung wird offensichtlich. Die experimentell erhaltene Resonanz ist in unterer Abbildung zu sehen:

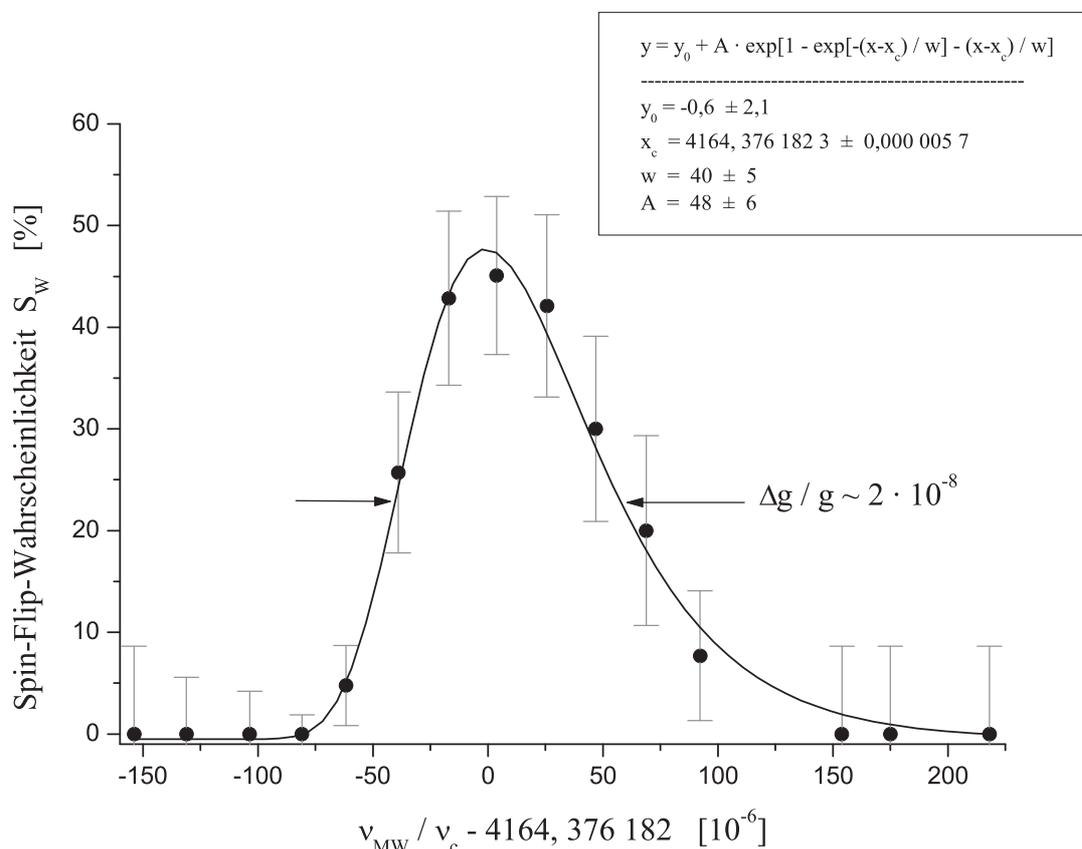


Abbildung 5.19: S_W – Resonanz mit der Doppel-Dip-Methode.

Aufgrund der erhöhten axialen Temperatur ist die Resonanz eindeutig asymmetrisch. Sie spiegelt die Boltzmann-Verteilung der axialen Energie wider. Außerdem ist sie doppelt so breit wie diejenige der traditionellen Methode (Abbildung 5.12).

Aus der Abbildung sind folgende Merkmale hervorzuheben:

1. Die Resonanz ist asymmetrisch. Sie gibt die Boltzmann-Verteilung der axialen Energie wider. Dieses Verhalten war nach der Theorie zu erwarten (siehe Abbildung 5.8).
2. Das Maximum der Resonanz entspricht dem „wahren“ g-Faktor nicht. Genauso wie bei der traditionellen Methode, muß man auf verschwindende axiale Temperatur und/oder Mikrowellenleistung extrapolieren.
3. Die Resonanz ist doppelt so breit wie diejenige der traditionellen Methode (siehe Abbildung 5.12). Die Breite setzt sich aus drei Beiträgen zusammen: die Mikrowellenleistung, die axiale Temperatur und die Fluktuationen des Magnetfeldes.

4. Um die Lage des Maximums herauszufinden, wurden die experimentellen Daten an eine vereinfachte asymmetrische Kurve angepasst. Nach dem Fit ist das Maximum $\Gamma_m = 4164, 376\,182 \pm 0, 000\,006$.

Besonders interessant ist außerdem, zu verstehen, woher die Breite der Resonanz rührt. Die experimentelle lautet nach der Abbildung 5.19 (relativ) $\delta g/g = 2 \cdot 10^{-8}$. Die Mikrowellenleistung während der Messung betrug $s_w = 0,48 \pm 0,06$. Dies verbreitert theoretisch die Resonanz (Abbildung 5.18) auf $48 \cdot 10^{-6}$ [Γ]. Die axiale Temperatur verbreitert sie um weitere $200 \times 0,124 \cdot 10^{-6} = 22 \cdot 10^{-6}$ [Γ]. Insgesamt sind das $48 + 22 = 70$ [μΓ]. Relativ entspricht dies $\delta g/g = 1,7 \cdot 10^{-8}$. Die verbleibenden $0,3 \cdot 10^{-8}$ sind den stochastischen Fluktuationen des elektrischen und Magnetfeldes zuzuschreiben.

Diese $0,3 \cdot 10^{-8}$ stellen die Grenze der erreichbaren Genauigkeit mit der jetzigen Apparatur dar. Selbst wenn man die axiale Temperatur auf 4 Kelvin (oder sogar noch tiefer mit Hilfe eines „Dilution-Refrigerators“) reduzieren würde, blieben die stochastischen Fluktuationen der Speicher-Felder vorhanden. Nach der erwähnten Faustregel wäre der relative Fehler der g-Faktor-Messung etwa $3 \cdot 10^{-10}$. Um die Genauigkeit zu verbessern, müßte man das Magnetfeld (das elektrische Feld ist nicht so relevant) zeitlich besser stabilisieren. Dies ist zwar möglich [Dyc99], aber von enormem technischen Aufwand. Für die nahe Zukunft ist keine solche Stabilisierung geplant.

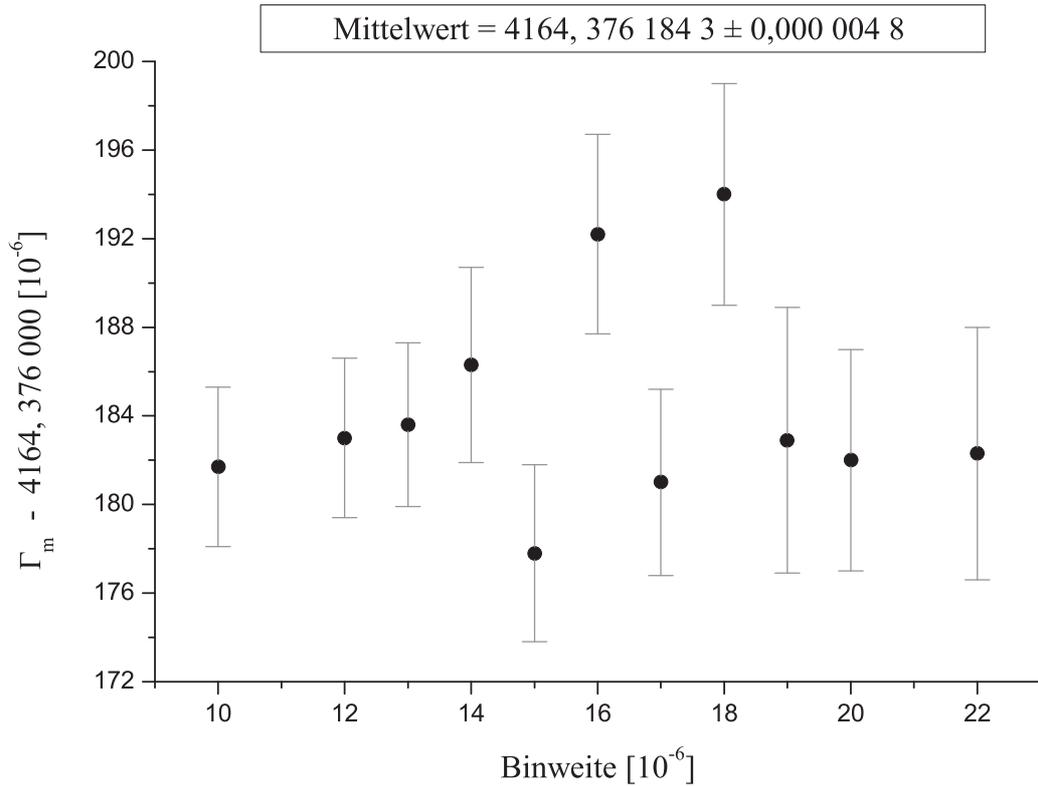
5.6.1 Auswertung

Wie schon erwähnt, entspricht das gefundene Maximum der S_W -Resonanz keineswegs dem „echten“ g-Faktor. Wir müßen eine ähnliche Analyse wie bei der traditionellen Methode durchführen. Die vielen identischen Aspekte der Doppel-Dip-Methode bezüglich der traditionellen werden hier nicht nochmals im Detail wiederholt. Die Ergebnisse werden in den Tabellen 5.4 und 5.5 aufgelistet. Dazu gehört, unter anderen, die willkürliche verwendete Binweite zur Bestimmung der S_W -Resonanz. In Abbildung 5.19, wurde z.B. eine Binweite von $22 \cdot 10^{-6}$ benutzt. Die Abbildung 5.20 veranschaulicht das Ergebnis des asymmetrischen Fits für verschiedene Binweiten. Der Mittelwert der Maxima lautet:

$$\Gamma_m(T_z, E_-, L_{MW}) = 4164, 376\,184\,3 \pm 0\,000\,004\,8. \quad (5.30)$$

Dabei ist: $T_z = 200 \pm 40$ K, $E_- = -0,1 \pm 0,01$ meV (Gleichung 5.18) und $L_{MW} = 0,48 \pm 0,06$ [s_w]. Der Fehler ist rein statistisch; er stellt die Standardabweichung der Datensammlung in Abbildung 5.20 dar. Verglichen mit dem Fehler der traditionellen Methode (Gleichung 5.6), ist der neue Fehler etwa um einen Faktor 1,6 größer geworden. Er ist der statistischen Unsicherheit in der Bestimmung des Maximums der Kurve zuzurechnen. Wie man erwartet nimmt der Fehler wegen der breiteren Kurve zu.

Um das richtige Γ_0 herauszufinden, muss diese Zahl noch korrigiert werden. Außerdem muss der systematische Fehler der Messung abgeschätzt werden. Das wollen wir auf den nächsten Seiten erledigen.

Abbildung 5.20: Γ_m für verschiedenen Binweiten.

5.6.2 Linienform der Doppel-Dip-Methode

Der einzige Unterschied zur Linienform der traditionellen Methode besteht darin, daß die Zyklotronenergie nicht mehr als unabhängige Variable, sondern unmittelbar verknüpft mit der axialen Temperatur vorkommt. Im Abschnitt 4.3.1 sahen wir, daß durch die Seitenbandkopplung ein Energie-Transfer zwischen der Zyklotron- und der axialen Bewegung stattfindet. Man hat deshalb folgende Beziehung (t' ist die Zeit und Ω die Rabi-Frequenz):

$$E_+(t') = E_z(t') \cdot \frac{\omega_+}{\omega_z}; \quad E_z(t') = E_z^0 \cdot \cos(\Omega t'). \quad (5.31)$$

Die Energie oszilliert zwischen beiden Bewegungen hin- und her. Außerdem ist die axiale Energie einer Boltzmann-Verteilung unterworfen:

$$\rho(E_z^0) = \frac{\exp(-E_z^0/kT_z)}{kT_z}.$$

Nun ist es ziemlich einfach, die Linienform der Spin-Flip-Resonanz zu bekommen. Man muß lediglich die gleiche Prozedur wie im Abschnitt 5.3 wiederholen. Hier wird nur das Ergebnis gegeben:

$$S_{W,T} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{t} \int_0^\infty dE_z^0 \frac{e^{-E_z^0/kT_z}}{k \cdot T_z} \int_0^t dt' \frac{\sigma^2}{\sigma^2 + (g_0 + \tilde{\alpha}_z E_z^0 \cdot \cos(\Omega t') - \beta \Gamma)^2}. \quad (5.32)$$

Dabei wurde σ im Abschnitt 5.3 (Siehe Gleichung 5.12) definiert. Dort sahen wir, daß $\sigma = 1,0 \cdot 10^{-8}$, was einem Magnetfeld der Mikrowellen von $B_{MW} = 7,5 \cdot 10^{-7}$ T entspricht. Diese Zahl wurde durch Anpassung der theoretischen an die experimentellen Spektren herausgefunden. t stellt die Messzeit dar. Um die Integration zu vereinfachen kann man $t = n/\Omega$ setzen, wobei $n \in \mathbb{N}$. Die Messzeit eines Doppel-Dips mit gleichzeitige Einstrahlung der Mikrowellen betrug ungefähr 260 s. Die Rabi-Frequenz Ω betrug typischerweise etwa 5,3 Hz. β und g_0 wurden im Unterabschnitt 5.3.2 gegeben. Der neue Koeffizient $\tilde{\alpha}_z$ lautet:

$$\tilde{\alpha}_z = \frac{B_2}{B_0} \cdot \frac{g_0}{4\pi^2 m \nu_+} \cdot \left(\frac{1}{2\nu_-} - \frac{1}{\nu_z} \right) = 7,2 \pm 0,7 \frac{10^{-7}}{\text{eV}}. \quad (5.33)$$

Er ist ein wenig kleiner als der in Gleichung 5.10 gegebene α_z . Dies liegt daran, daß α_z und α_+ nun durch die Seitenbandkopplung addiert werden. Sie haben entgegengesetzte Vorzeichen und daraus resultiert $\tilde{\alpha}_z$. Die Abhängigkeit von $S_{W,T}$ von der Zyklotronenergie ist verschwunden, letztere ist von der axialen Temperatur „verschluckt“ worden. Mit 5.32 kann man die theoretische Abhängigkeit $\Gamma_m = \Gamma_m(T_z)$ erhalten:

$$\Delta\Gamma_m(T_z) = 0,212 + 0,0724 \cdot T_z - 0,000255 \cdot T_z^2 + 3,955 \cdot 10^{-7} \cdot T_z^3. \quad (5.34)$$

Dabei ist $\Delta\Gamma_m$ in $[10^{-6}]$ und T_z in K. Man kann, mit Hilfe von Gleichung 5.32, ein gleichartiges Polynom mit der Mikrowellenleistung als unabhängige Variable finden. Genauso wie bei der traditionellen Methode, muß man dann auf verschwindende T_z oder L_{MW} extrapolieren. Am Γ_m (Gleichung 5.30) ist aus diesem Grund folgende Korrektur anzubringen:

$$\Delta\Gamma_m = -7,4 \pm 0,8 [10^{-6}]. \quad (5.35)$$

5.6.3 Fehler des Lorentz-Fits

Die Abbildung 4.21 zeigt ein experimentelles Doppel-Dip-Spektrum mit der entsprechenden Fit-Kurve. Um den Fit-Vorgang zu vereinfachen, wurden beide Dips an eine theoretische Lorentz-Kurve angefitet. Damit gewinnt man beide Frequenzen $\nu_{z,l}$ und $\nu_{z,r}$ als Ergebnis des Fits. Diese Vorgehensweise ist allerdings nur korrekt, wenn der Dip perfekt in Resonanz mit dem Nachweisschwingkreis ist. Ansonsten, nimmt der Dip eine halbdispersive Gestalt an (siehe Abbildung 3.6), was nicht von der theoretischen Lorentz-Kurve wiedergegeben wird. In diesem Fall liefert der Lorentz-Fit eine falsche axiale Frequenz.

In [Her99] kann man die „richtige“ theoretische Linienform, die den mit dem Schwingkreis wechselwirkenden Dip wiedergibt, finden. Mit dieser Kurve wurden, bei einer festen Frequenz ν_{LC} , mehrere Spektren generiert mit verschiedenen vorgegebenen axialen Frequenzen ν_z . Diese simulierten Dips wurden dann mit einer Lorentz-Kurve angefitet. Die Abbildung 5.22 zeigt die Abweichung des Ergebnisses des Lorentz-Fits (*Istwert*) bezüglich dem vorgegebenen axialen Frequenz (*Sollwert*). Diese Abweichung ist eine Funktion

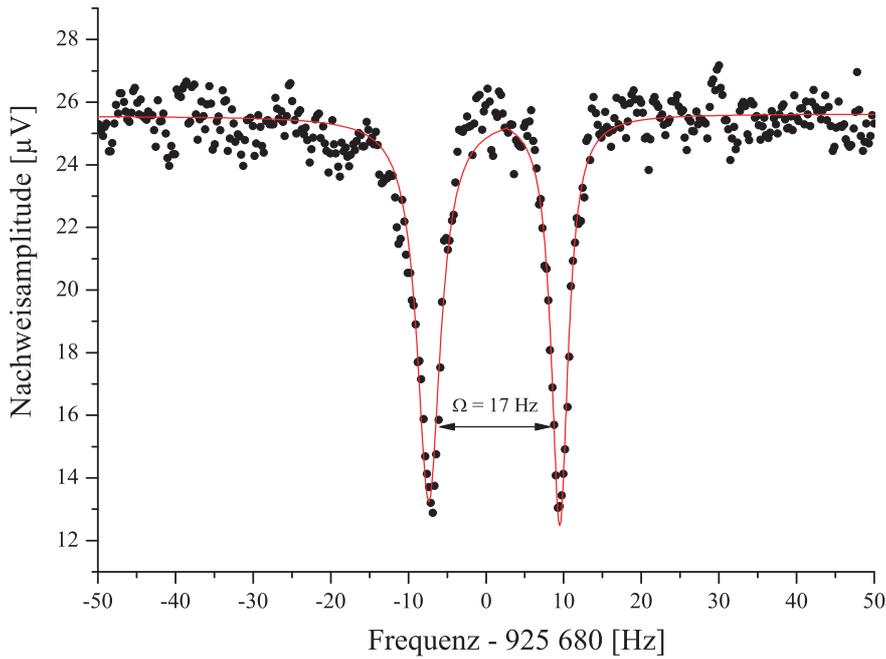


Abbildung 5.21: **Doppel-Dip-Spektrum mit Lorentz-Fit.**

Die Stärke der Kopplung war in diesem Beispiel etwa drei Mal größer als während der Messung des g-Faktors. Dabei betrug die Rabi-Frequenz typischerweise $\Omega = 5,3$ Hz.

der Lage des Dips bezüglich dem (fixierten) Resonanz-Frequenz des Schwingkreises.

Während der g-Faktor-Messung wurde versucht, den Dip möglichst in Resonanz mit dem LC zu setzen. Trotzdem gab es eine kleine Differenz zwischen der Frequenz des Ions und der des Schwingkreises. Letztere betrug $\nu_{LC} = 925\,467 \pm 4$ Hz, die mittlere axiale Frequenz des Ions war $\nu_z = 925\,474 \pm 2$ Hz. Deshalb ist der Lorentz-Fit systematisch fehlerhaft. Der Fehler lässt sich aber mit der in Abbildung 5.22 vorgestellten Steigung der Abweichung des Fits leicht korrigieren. Dafür braucht man das Gleichungssystem 4.6: die Zyklotronfrequenz lässt sich unter Verwendung folgender Formel bestimmen: $\nu_+ = \nu_k + \nu_l + \nu_r - \nu_z$. Angenommen, daß man durch den Lorentz-Fit einen Fehler jeweils von $\delta\nu_l$, $\delta\nu_r$ und $\delta\nu_z$ begangen hat, hat man einen Fehler in der Bestimmung der Zyklotronfrequenz von $\delta\nu_+ = \delta\nu_l + \delta\nu_r - \delta\nu_z$. Die Frequenz-Differenz zwischen dem Ion und dem Schwingkreis betrug $\nu_z - \nu_{LC} = 7$ Hz. Damit, mit der Rabi-Frequenz $\Omega = 5,3$ Hz und mit der Steigung der Abweichung des Lorentz-Fits von $-0,8$ mHz/Hz, (Abbildung 5.22), kann man den systematischen Fehler in der indirekten Messung der Zyklotronfrequenz schließlich herausfinden:

$$\begin{aligned} \delta\nu_+ &= (7 - 5,3/2) \cdot (-0,8) + (7 + 5,3/2) \cdot (-0,8) - 7 \cdot (-0,8) \\ &= -6 \text{ mHz} . \end{aligned} \quad (5.36)$$

Dieser Fehler in der Bestimmung der Zyklotronfrequenz verursacht einen Fehler im gemessenen Frequenzverhältnis Γ_m . Am letzteren ist deshalb folgende

Korrektur anzubringen:

$$\Delta\Gamma_m = \frac{\delta\nu_+}{\nu_c} \cdot \Gamma_m = \frac{-6 \cdot 10^{-3}}{25,3 \cdot 10^6} \cdot 4164,3761843 = (-1,0 \pm 0,4) \cdot 10^{-6}. \quad (5.37)$$

Der Fehler der Korrektur ist der Unsicherheit der Frequenz des Schwingkreises und der des Ions zurückzuschreiben.

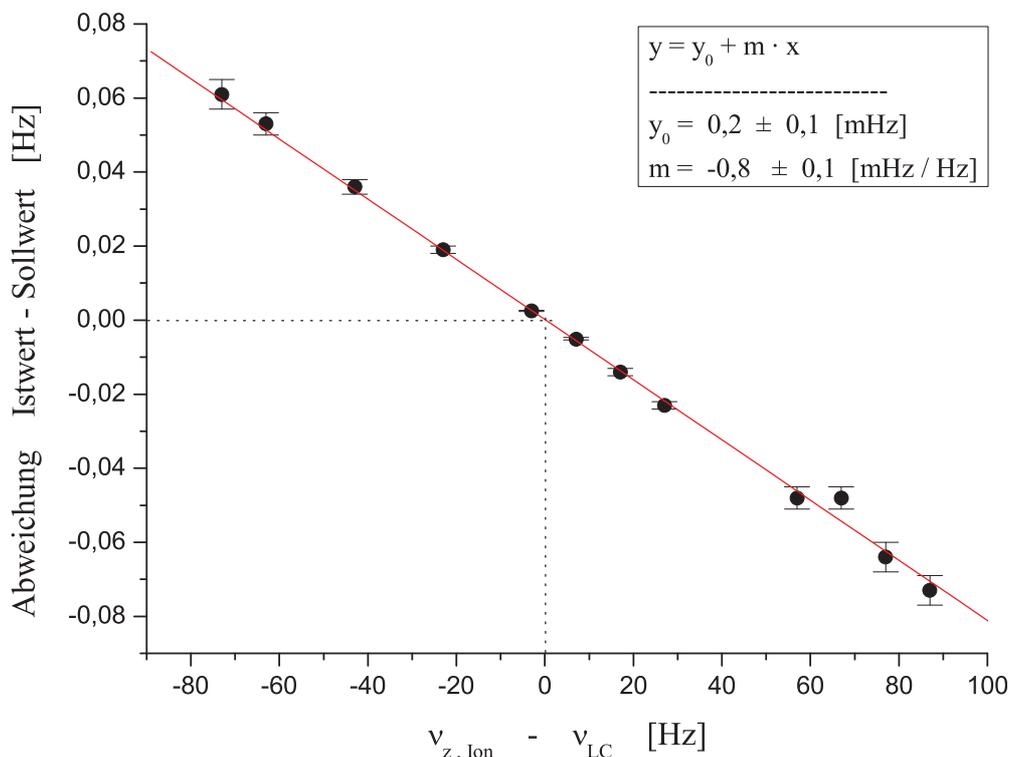


Abbildung 5.22: **Abweichung des Lorentz-Fits eines axialen Dips als Funktion des Detunings.**

Der Fehler des Lorentz-Fits ist der bedeutendste, welcher bei der traditionellen Methode nicht vorkommt. Aus diesem Grund wurde er hier ausführlich beschrieben. Andere wichtige Fehler sind diejenige, die für die traditionelle Methode schon diskutiert worden sind. Sie werden an dieser Stelle nicht nochmals beschrieben. Die Tabellen 5.4 und 5.5 fassen die Auswertung der Messung des g-Faktors mit der Doppel-Dip-Methode zusammen. Das Endergebnis lautet:

$$\Gamma_0 = 4164,3761743 \pm \underbrace{0,0000048}_{\text{statistisch}} \pm \underbrace{0,0000010}_{\text{systematisch}}. \quad (5.38)$$

Der gesamte Fehler (quadratische Summe von beiden Unsicherheiten) lautet $4,9 \cdot 10^{-6}$. Der relative Fehler beträgt $1,2 \cdot 10^{-9}$.

Im Abschnitt 5.7 werden wir mit dem in der Literatur angegebenen Wert für die Masse des $^{16}\text{O}^{7+}$ -Ions den eigentlichen g-Faktor nach der Doppel-Dip-Methode vorstellen.

Wert	Gleichung	Beschreibung
4164,376 184 30	5.30	Maximum der Resonanz
− 0, 000 007 40	5.35	Extrapolation $T_z/L_{MW} \rightarrow 0$
− 0, 000 001 60	—	Zeitbasis FFT-Analysator
− 0, 000 001 00	5.37	Lorentz-Fit
~ 0	5.21	Extrapolation $E_- \rightarrow 0$
4164,376 174 30	5.38	Endergebnis

Tabelle 5.4: Systematische Korrekturen zum Frequenzverhältnis.

$\delta\Gamma_0$	Gleichung	Beschreibung
$8 \cdot 10^{-7}$	5.35	Extrapolation $T_z/L_{MW} \rightarrow 0$
$6 \cdot 10^{-11}$	5.21	Extrapolation $E_- \rightarrow 0$
$1 \cdot 10^{-7}$	—	Zeitbasis FFT-Analysator
$2 \cdot 10^{-7}$	5.24	Spektrale Reinheit Mikrowellen
$4 \cdot 10^{-7}$	—	Massenschleife
$4 \cdot 10^{-7}$	5.37	Lorentz-Fit
$4 \cdot 10^{-9}$	—	Relativistische Unsicherheit
$1,0 \cdot 10^{-6}$	5.38	Quadratische Summe

Tabelle 5.5: Systematische Unsicherheiten zum Frequenzverhältnis.

5.6.4 Vergleich mit der traditionellen Methode

Zuerst muß man den erheblichen Unterschied des statistischen Fehlers bei den Messungen hervorheben. Dadurch, daß die Resonanz der Doppel-Dip-Methode zwei Mal so breit wie diejenige der traditionellen-Methode, und da beide Messungen über eine ähnliche Menge an Messdaten verfügen, war dieses Ergebnis zu erwarten. Der statistische Fehler der ersten Methode ist ungefähr ein 70 % größer als derjenige der zweiten Methode. Nach der theoretischen Abhängigkeit der Breite der S_W -Resonanz mit T_z und L_{MW} (Abbildung 5.18) war ihr Beitrag zum δg jeweils $22 \cdot 10^{-6}$ (mit $T_z = 200$ K) und $49 \cdot 10^{-6}$ (mit $s_w = 0,48$). Bei der traditionellen Methode hatte man $7 \cdot 10^{-6}$ (mit $T_z = 61$ K) und $27 \cdot 10^{-6}$ ($s_w = 0,41$). Nach der Theorie ist infolgedessen die verdoppelte Breite der S_W -Resonanz zu 60 % der erhöhten Mikrowellenleistung, und zu 40 % der erhöhten axialen Temperatur, zuzuschreiben. Besonders dramatisch ist die Zunahme von δg mit L_{MW} . Wegen

Zeitmangels konnte die Messung bei kleineren T_z und L_{MW} nicht wiederholt werden.

Bezüglich der systematischen Unsicherheit der Messung mit der Doppel-Dip-Methode muß der große Beitrag der Massenschleife hervorgehoben werden. Im Vergleich zur traditionellen Methode ist dieser Beitrag um einen Faktor 10 größer geworden. Dies ist auf die besondere Empfindlichkeit der indirekten Messung von ν_+ vom elektrischen Feld zurückzuführen. Erst mit einem dreifachen Dip wird diese Empfindlichkeit wesentlich reduziert (Abschnitt 4.6).

Die Unsicherheit aufgrund des Lorentz-Fits muß hier auch explizit erwähnt werden. Sie könnte mit Hilfe eines Fits mit der in [Her99] vorgestellten (komplexeren) Funktion reduziert werden.

Die anderen Beiträge zur systematischen Unsicherheit sind in beiden Messungen entweder identisch oder sehr ähnlich. Sie benötigen hier keine zusätzlichen Kommentare.

5.7 Der g-Faktor von $^{16}\text{O}^{7+}$

Wie versprochen, wollen wir jetzt den richtigen elektronischen g-Faktor von $^{16}\text{O}^{7+}$ vorstellen. Das unmittelbare Ergebnis unseren Messungen kommt in Form eines Frequenzverhältnisses vor. Zusätzlich müssen wir von der Masse des $^{16}\text{O}^{7+}$ -Ions und des Elektrons Gebrauch machen. Beide wurden in der Gruppe von Van Dyck gemessen durch Vergleich des Verhältnisses der freien Zyklotronfrequenzen zweier in einer Penningfalle gespeicherten Ionensorten beim vorgegebenen konstanten Magnetfeld. Die eine Ionensorte ist normalerweise ein Mitglied der Kohlenstoff-Familie $^{12}\text{C}^i$ ($i > 0$). Damit erhält man die Masse der zweiten Ionensorte direkt in atomaren Einheiten. Im Fall des Elektrons lautet ihr Ergebnis:

$$m_e = 0,000\,548\,579\,911\,0 \pm 0,000\,000\,000\,001\,2 \text{ u} \quad [\text{Dyc95}]. \quad (5.39)$$

Für $^{16}\text{O}^{7+}$ werden wir die akzeptierte Masse des neutralen Atoms verwenden.

$$m_O = 15,994\,914\,622\,0 \pm 0,000\,000\,002\,5 \text{ u} \quad [\text{Aud95}]. \quad (5.40)$$

Um die Masse des $^{16}\text{O}^{7+}$ -Ions zu gewinnen braucht man lediglich folgende Formel anzuwenden: $m_{ion} = m_O - 7m_e + E_{Bind}$. Dabei ist m_e die in Gleichung 5.39 angegebene Masse. E_{Bind} stellt die Summe der Bindungsenergien der ersten sieben Elektronen im neutralen ^{16}O -Atom dar. Aus der Kelly-Tabelle bekommt man $E_{Bind} = (1,258\,66 \pm 0,000\,09) \cdot 10^{-6} \text{ u}$. Die Masse des $^{16}\text{O}^{7+}$ -Ions lautet somit:

$$m_{ion} = 15,991\,075\,825\,5 \pm 0,000\,000\,003\,0 \text{ u}. \quad (5.41)$$

Mit 5.39 und 5.41 können wir den elektronischen g-Faktor in wasserstoffähnlichem Sauerstoff bekommen. Dafür braucht man folgende Formel:

$$g = 2 \cdot \frac{7e}{e} \cdot \frac{m_e}{m_{ion}} \cdot \Gamma_0. \quad (5.42)$$

Mit dem vorgestellten Ergebnis für das Frequenzverhältnisses (Gleichungen 5.28 und 5.38) erhält man schließlich den g-Faktor jeweils mit der traditionellen Methode und mit der Doppel-Dip-Methode:

$$\begin{aligned} g_{exp} &= 2,000\,047\,025\,1 \pm 1,5 \cdot 10^{-9} \pm 0,3 \cdot 10^{-9} \pm 4,4 \cdot 10^{-9} \quad (\text{traditionell}) \\ g_{exp} &= 2,000\,047\,020\,8 \pm 2,3 \cdot 10^{-9} \pm 0,5 \cdot 10^{-9} \pm 4,4 \cdot 10^{-9} \quad (\text{Doppel-Dip}). \end{aligned} \quad (5.43)$$

Dabei stellt der erste Fehler die statische Unsicherheit dar. Der zweite ist die Abschätzung der systematischen Unsicherheit. Beide g-Faktoren sind außerdem mit der Unsicherheit der Elektronenmasse belastet (dritter Fehler in der Gleichung 5.42). Letztere lautet $4,4 \cdot 10^{-9}$ und stellt bei weitem die größte Unsicherheit des experimentellen g-Faktors dar.

Der theoretische g-Faktor wurde im Kapitel 1 vorgestellt. Er lautet:

$$g_{the} = 2,000\,047\,020\,2 \pm 0,6 \cdot 10^{-9} \quad [\text{Yer02}]. \quad (5.44)$$

Wir sahen (Tabelle 1.1), daß g_{the} sich aus verschiedenen Beiträgen zusammensetzt. Mit der von der vorliegenden Messung erreichten Genauigkeit lassen sich die BS-QED Beiträge sowohl der Selbstenergie als auch der Vakuumpolarisation in erster Ordnung α/π testen. Die Korrektur aufgrund der endlichen Masse des Kerns liegt auch eindeutig innerhalb der experimentellen Genauigkeit. Hingegen lässt sich nichts über die Korrektur des g-Faktors wegen des nicht punktförmigen Kerns schließen. Dafür bräuchte man eine genauere Messung. All diese Beiträge lassen sich experimentell einzeln nicht voneinander unterscheiden¹¹. Man kann nur behaupten, daß innerhalb der Fehlergrenzen Theorie und Experiment im allgemeinen übereinstimmen.

Es bestehen andere Tests der Vorhersagen der BS-QED. Unter anderen müssen die Messungen des Lamb-Shifts an wasserstoff- [Bey95] und lithiumähnliche [Bei98] schwere Ionen erwähnt werden. Die erreichte Genauigkeit bei der Messung des Lamb-Shifts an U^{91+} ist relativ niedrig [Bey95] und ermöglicht eine Verifizierung der theoretischen Vorhersagen der BS-QED lediglich im 3 % Bereich. Die Messung an lithiumähnlichen Wismut $^{209}\text{Bi}^{80+}$ [Bei98] weist eine wesentlich bessere experimentelle Genauigkeit auf, sie ist trotzdem wegen der limitierten Präzision der Theorie aufgrund der noch nicht berechneten 2-Photonen Beiträge begrenzt. Nach [Häf00a] ist die BS-QED mittels dieser Messung nur mit einer Genauigkeit von etwa 2 % verifiziert worden.

Neben dem Lamb-Shift gibt es eine Reihe von Experimenten und theoretischen Arbeiten zur Hyperfein-Aufspaltung an hoch geladenen Ionen (siehe [Bei00] und dort angegebenen Referenzen). Allerdings, aufgrund der unpräzisen Kenntnis der Kerneigenschaften sind die theoretischen Vorhersagen zur Struktur der Hyperfein-Aufspaltung nicht sehr genau [Bei00].

Die vorliegende Messung des g-Faktors am $^{16}\text{O}^{7+}$ stellt deshalb und zusammen mit der Messung am $^{12}\text{C}^{5+}$ einen der strengsten Tests der BS-QED dar.

¹¹ Um die Kerneffekte einzeln diskriminieren zu können, müßte man den g-Faktor an verschiedenen Isotopen messen. Die Differenz in der gemessenen g-Faktoren würde unmittelbare Auskunft über die Kernkorrekturen liefern [Bei03].

5.7.1 Atomare Masse des Elektrons

Aus dem gemessenen Frequenzverhältnis und angenommen, daß die theoretische Berechnung des g-Faktors für $^{16}\text{O}^{7+}$ korrekt ist, lässt sich mit Hilfe der Gleichung 5.42 die Masse des Elektrons in atomaren Einheiten gewinnen. Dafür braucht man außerdem die Masse des neutralen Sauerstoff-Atoms und die gesamte Bindungsenergie der sieben fehlenden Elektronen am $^{16}\text{O}^{7+}$.

$$m_e = \frac{m_O + E_{Bind}}{7(1 + 2\Gamma_0/g_{the})}. \quad (5.45)$$

Setzt man alle bekannte Werte in diese Gleichung ein, bekommt man schließlich die Masse des Elektrons:

$$\begin{aligned} m_e &= 0,000\,548\,579\,909\,8 (\pm 4 \pm 1,6 \pm 1,0) \cdot 10^{-13} \text{ u} \quad (\text{traditionell}) \\ m_e &= 0,000\,548\,579\,911\,0 (\pm 6 \pm 1,6 \pm 1,0) \cdot 10^{-13} \text{ u} \quad (\text{Doppel-Dip}). \end{aligned} \quad (5.46)$$

Der erste Fehler resultiert aus der Unsicherheit des Frequenzverhältnisses Γ_0 (siehe jeweils Gleichungen 5.28 und 5.38). Der zweite Fehler ist der Unsicherheit des theoretischen g-Faktors zurückzuschreiben (siehe Gleichung 5.44). Der dritte Fehler ist von der Unsicherheit der Masse des neutralen Sauerstoff-Atoms hervorgerufen. Die von den Bindungsenergien verursachte Unsicherheit beträgt $3 \cdot 10^{-17}$ und ist deshalb völlig vernachlässigbar. Der gesamte Fehler lautet $5 \cdot 10^{-13}$ (traditionelle Methode) bzw. $7 \cdot 10^{-13}$ (Doppel-Dip-Methode). Die somit gewonnene Masse des Elektrons ist um einen Faktor 2,4 (traditionelle Methode) bzw. 1,7 (Doppel-Dip-Methode) genauer als die in CODATA aufgelistete Masse (Gleichung 5.39). Darüberhinaus stimmen beide Zahlen innerhalb der Fehlergrenzen sehr gut überein, sowohl mit der akzeptierten Masse als auch mit derjenigen aus der Messung am $^{12}\text{C}^{5+}$:

$$m_e = 0,000\,548\,579\,909\,3 \pm 3 \cdot 10^{-13} \pm 0,8 \cdot 10^{-13} \text{ u} \quad [\text{Yer02}]. \quad (5.47)$$

Dabei ist der erste Fehler durch die Unsicherheit des am $^{12}\text{C}^{5+}$ gemessenen Frequenzverhältnisses [Häf00b] bedingt. Der zweite resultiert aus der Theorie [Yer02]. Die Messung am $^{12}\text{C}^{5+}$ wurde bis jetzt nur mit der traditionellen Methode durchgeführt. Der kleinere (erste) Fehler im Vergleich zur gleichen Messung am $^{16}\text{O}^{7+}$, beruht auf der größeren Anzahl an Messdaten bei der Messung an $^{12}\text{C}^{5+}$. Der zweite Fehler (von der Theorie) ist bei $^{12}\text{C}^{5+}$ deswegen kleiner, weil er mit der Kernladungszahl des Ions zum Quadrat skaliert. Dieser Fehler ist im wesentlichen der Unkenntnis der BS-QED Beiträge in der Ordnung $(\alpha/\pi)^2$ zurückzuschreiben [Yer02]. Aus diesem Grund ist es geschickter, die Masse des Elektrons durch die Messung des g-Faktors an möglichst leichten Ionen zu bestimmen. Zu diesem Zweck ist $^4\text{He}^{1+}$ vorgeschlagen worden [Her99], da bei diesem Ion die BS-QED Korrekturen zum theoretischen g-Faktor in der Ordnung $(\alpha/\pi)^2$ am kleinsten sind. Allerdings ist die Messung am $^4\text{He}^{1+}$ aus technischen Gründen¹² zur Zeit der Veröffentlichung dieser Dissertation nicht geplant. Die Doppel-Dip-Methode soll, zusammen mit der

¹² Die kleine Ladung macht den elektronischen Nachweis dieses Ions sehr schwer [Sta98].

Reduzierung der axialen Temperatur und der Mikrowellenleistung, durch eine erneute Messung an $^{12}\text{C}^{5+}$ eine wesentliche Verbesserung in der Präzision der Masse des Elektrons erlauben.

Alea jacta est.

Kapitel 6

Zusammenfassung und Ausblick

Im Rahmen dieser Dissertation wurden zwei Messungen des magnetischen Moments des an wassertoffähnlichem Sauerstoff gebundenen Elektrons vorgestellt. Die erste Messung wurde mit der gleichen Methode durchgeführt die schon bei $^{12}\text{C}^{5+}$ verwendet wurde. Um die systematische Unsicherheit dieser Messung zu reduzieren, wurde eine zweite Methode entwickelt. Besonders schwerwiegend bei der ersten Variante war die Abhängigkeit des Maximums der Spin-Flip-Resonanz von der Zyklotronenergie des Ions. Mit der neuen Doppel-Dip-Methode wurde diese Belastung der Messung beseitigt. Wir lernten, daß die axiale Temperatur und die Mikrowellenleistung die größte Wirkung auf die Breite der $S_W(\Gamma)$ – Resonanz ausüben. Die Messung des Frequenzverhältnisses ν_L/ν_c konnte außerdem dafür benutzt werden, um die Masse des Elektrons mit einer sehr kompetitiven Genauigkeit zu bestimmen. In diesem Sinne bestätigte die vorliegende Messung am $^{16}\text{O}^{7+}$ die mit $^{12}\text{C}^{5+}$ erhaltenen Wert für m_e . Man kann argumentieren, die Messung am $^{16}\text{O}^{7+}$ sei ein erfolgreicher Test der Rechen-Methoden der BS-QED und somit sei die Gewinnung der Masse des Elektrons mittels der Messung am $^{12}\text{C}^{5+}$ fest begründet.

Zusammen mit den experimentellen Ergebnissen wurde im Laufe der vorliegenden Dissertation ein vollständiges theoretisches Modell der Messung selbst entwickelt. Mit Hilfe davon konnte man zum ersten Mal den Einfluß von E_+ , T_z und L_{MW} auf die $S_W(\Gamma)$ – Resonanz quantitativ untersuchen. Nun ist es angebracht, die nach Auffassung des Autors beste zukünftige Strategie zur Verbesserung der Messgenauigkeit vorzustellen.

6.1 Verbesserung der Messgenauigkeit

Die Doppel-Dip-Methode stellt die beste Option für die unmittelbare Zukunft nach der Veröffentlichung dieser Dissertation dar. Die hier vorgestellte Messung kann dadurch verbessert werden, indem man die axiale Temperatur und die Mikrowellenleistung reduziert. Erstere kann man mindestens von den 200 K der vorliegenden Messung auf 60 K verkleinern, dafür muß man

lediglich auf die künstliche Erhöhung der axialen Temperatur verzichten (siehe Abbildung 4.17). Bedauerlicherweise zeigen die noch laufenden Versuchen von T. Valenzuela und S. Djekic, daß die theoretische untere Grenze von 4 K schwer zu erreichen ist; eine externe unerwünschte Rauschenquelle ist immer unvermeidlicherweise vorhanden. Trotz dieses Hindernisses kann die Breite der $S_W(\Gamma)$ – Resonanz deutlich verkleinert werden. Nach Gleichung 5.29 würde man sie um $0,124 \cdot 10^{-6} \times (200 - 61) = 17 \cdot 10^{-6} [\Gamma]$ verringern. Wenn man außerdem die Mikrowellenleistung reduziert (was trivialerweise durchzuführen ist) dann wird die Resonanz erheblich schmaler. Die folgende Abbildung vergleicht die jetzige $S_W(\Gamma)$ – Resonanz mit derjenigen die man theoretisch erhalten könnte. Nach dieser Simulation ist eine Verbesserung

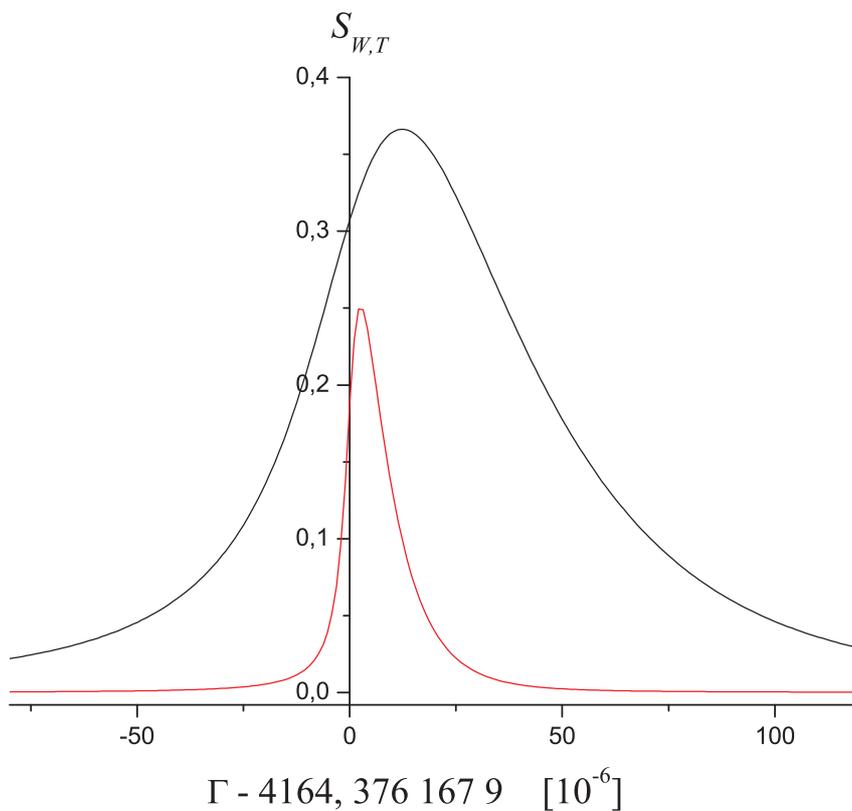


Abbildung 6.1: **Vergleich der gegenwärtigen Resonanz mit der möglichen zukünftigen.**

Beide $S_{W,T}(\Gamma)$ – Resonanzen wurden mit Hilfe der Gleichung 5.32 simuliert. Die breitere ist mit 200 K berechnet worden. Die schärfere wurde mit $T_z = 61$ K und einer reduzierten Stärke des Magnetfeldes der Mikrowellen berechnet.

der Messgenauigkeit der Doppel-Dip-Methode gegenüber den gegenwärtigen Stand mindestens um einen Faktor 5 möglich. Da die Doppel-Dip-Methode etwa einen Faktor 1,7 ungenauer als die traditionelle war, kann man mit großer Wahrscheinlichkeit insgesamt ein Faktor 3 gewinnen. Um die Messung noch weiter zu verbessern sollte man die dreifach-Dip Technik (Abschnitt 4.6) verwenden.

6.2 Messung an höhere Z

Das Ziel des Gesamtprojektes ist die QED unter dem Einfluß von starken elektrischen und magnetischen Feldern zu testen. In der Zukunft soll die Mainzer-Apparatur an die GSI in Darmstadt gebracht werden, um den g -Faktor an superschweren Ionen wie U^{91+} zu messen. Davor ist es geplant die Messung an Ionen mit mittleren Z wie $^{40}\text{Ca}^{19+}$ in Mainz durchzuführen. Dafür wurde vom Autor dieser Dissertation eine neue Penningfalle entwickelt, die es ermöglicht neutrale Ca-Atome bis zum wasserstoffartigen Ca zu ionisieren. Das Käfig ist in Abbildung 6.2 zu sehen. Dabei wurde außerdem die Stärke der magnetischen Flasche durch Verwendung einer speziellen Kobalt-Eisen Legierung um einen Faktor 4 vergrößert. Damit lässt sich die Spinausrichtung des Elektrons an $^{40}\text{Ca}^{19+}$ relativ einfach bestimmen. Die Sättigungspolarisation dieser Legierung beträgt etwa 2,4 T und stellt die gegenwärtige Grenze dar. Um schwerere Ionen messen zu können, wird man unbedingt die Größe der Falle reduzieren müssen.

6.3 Andere mögliche Messaufgaben

Die Mainzer-Apparatur ermöglicht neben g -Faktoren auch andere wichtigen atomaren Eigenschaften wie Bindungsenergien und Massen zu bestimmen. Durch Vergleich der freien Zyklotronfrequenz einer bestimmten Ionensorte mit derjenigen eines ^{12}C – Ions kann man die Masse des ersteren unmittelbar in atomaren Einheiten erhalten. Die Messung der Masse eines Atoms in sukzessiven Ionisationsstufen erlaubt die Bestimmung der entsprechenden Bindungsenergien. Dabei ist der Auflösungsvermögen der Mainzer-Apparatur sehr kompetitiv, da Zyklotron-Resonanzen im ppb Bereich ohne weiteres nachgewiesen werden können. Die neue Falle (Abbildung 6.2) mit drei aneinander liegenden Käfigen eignet sich hervorragend zum schnellen Vergleich der freien Zyklotronfrequenz zweier verschiedenen Ionen. Die langen Speicherzeiten (Monate) bilden darüberhinaus einen entscheidenden Vorteil zur Erzielung höherer Präzision.

Neben der Bestimmung atomarer Eigenschaften kann man noch Kernphysik mit der Mainzer-Apparatur betreiben, indem man Kern g_I – Faktoren an ungeraden Isotopen misst. Einzelheiten dazu sind in [Häf00a] zu finden.

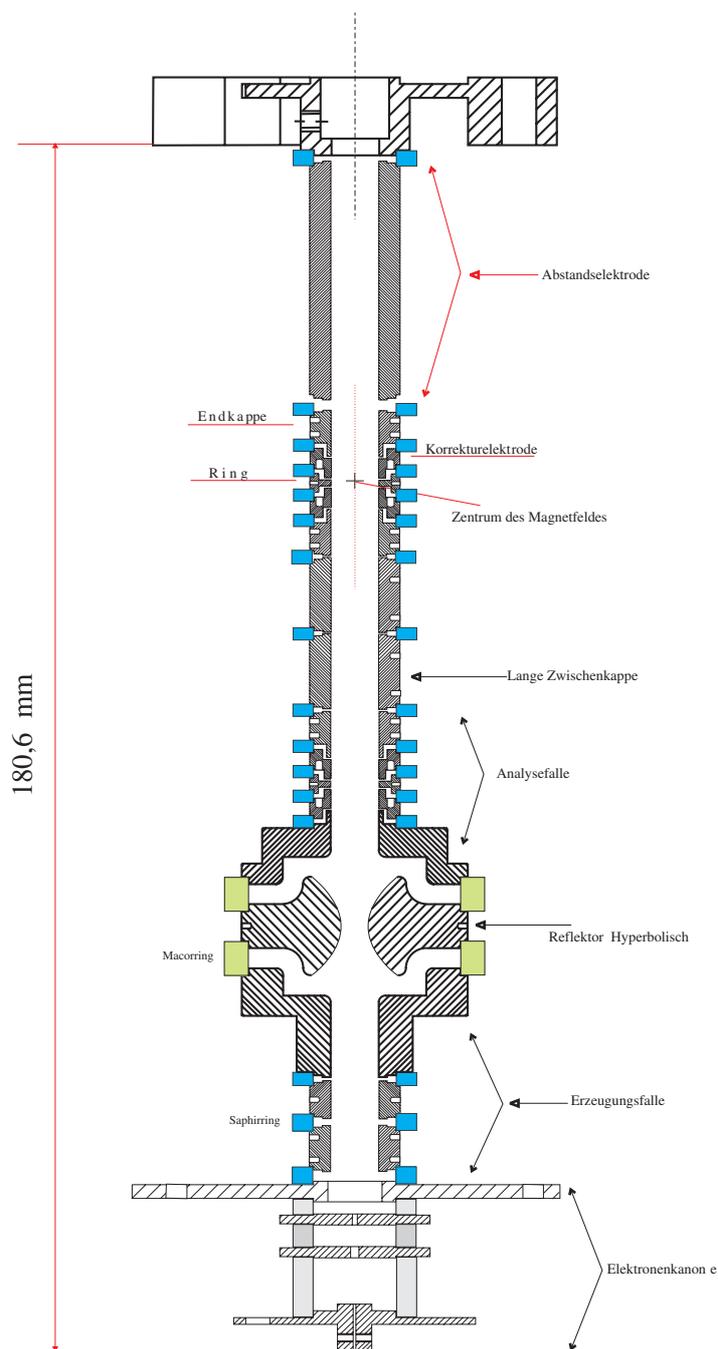


Abbildung 6.2: Die neue Penningfalle.

Einzelheiten zu dem Käfig sind in [Ver01] zu finden. Im Rahmen der Diplomarbeit von J. Alonso wird die Falle gebaut und getestet.

Anhang A

Lösung der Bewegungsgleichungen

Das System von Differentialgleichungen, welche die Bewegung des Ions in der idealen Penningfalle beschreiben, lautet:

$$m\ddot{z} = (-2qU_0c_2)z$$
$$m \begin{pmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \end{pmatrix} = qB_0 \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}}_{\mathcal{A}} \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} + qU_0c_2 \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{\mathcal{I}} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}. \quad (\text{A.1})$$

Diejenige der axialen Bewegung ist trivial und benötigt hier keine explizite Lösung. Wir wollen uns auf die x - und y -Gleichungen konzentrieren.

Die einzige Schwierigkeit, das x - y -Gleichungssystem zu lösen, besteht darin, daß beide Gleichungen gekoppelt sind. Da $\mathcal{AI} = \mathcal{IA}$, braucht man nur die Matrix \mathcal{A} zu diagonalisieren. Damit werden automatisch beide Gleichungen im neuen Koordinatensystem entkoppelt und deren Lösung sehr einfach. Man sollte jedoch beachten, daß \mathcal{A} zwar reell aber nicht symmetrisch ist, d.h. eine Diagonalisierung in \mathbb{R} ist nicht gewährleistet. In der Tat muß die Diagonalisierung in \mathbb{C} stattfinden:

$$\det(\mathcal{A} - \lambda\mathcal{I}) = 0 \longrightarrow \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -1 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 1 = 0 \longrightarrow \lambda_{\pm} = \pm i. \quad (\text{A.2})$$

Bestimmung der Eigenvektoren $\mathcal{A}\vec{v}_{\pm} = \pm i\vec{v}_{\pm}$:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix} = \pm i \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix} \rightarrow v_y = \pm i v_x \rightarrow v_x = 1 \Rightarrow v_y = \pm i$$

und somit lassen sich folgende orthonormale¹ Eigenvektoren und die damit verbundene Transformationsmatrix, \mathcal{U} , definieren:

$$\hat{u}_+ = \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{u}_x + i\hat{u}_y) \quad \hat{u}_- = \frac{1}{\sqrt{2}}(i\hat{u}_x + \hat{u}_y) \longrightarrow \mathcal{U} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{pmatrix} \quad (\text{A.3})$$

¹ Mit dem in \mathbb{C} üblichen Skalarprodukt, kann man sofort nachprüfen: $\hat{u}_i \cdot \hat{u}_j = \delta_{ij}$.

\mathcal{U} ist unitär: $\mathcal{U}\mathcal{U}^+ = \mathcal{I} \longrightarrow \mathcal{U}^+ = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -i \\ -i & 1 \end{pmatrix}$.

Man erhält den Ortsvektor $\vec{r} = x \hat{u}_x + y \hat{u}_y$, der in die neue Basis $\{\hat{u}_+, \hat{u}_-\}$ transformiert werden muß:

$$\mathcal{U}^+ \cdot \vec{r} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -i \\ -i & 1 \end{pmatrix} (x \hat{u}_x + y \hat{u}_y) = \begin{pmatrix} \frac{x-iy}{\sqrt{2}} \\ \frac{y-ix}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_+ \\ r_- \end{pmatrix}. \quad (\text{A.4})$$

Der Ortsvektor lautet nun: $\vec{r} = (r_+ \hat{u}_+ + r_- \hat{u}_-)$ mit $r_+ = \frac{x-iy}{\sqrt{2}}$ und $r_- = \frac{y-ix}{\sqrt{2}}$; (r_+, r_-) stellen die Bewegungskordinaten in der neuen Basis dar.

Die Bewegungsgleichungen können mit Hilfe des neuen Koordinatensystems entkoppelt werden; man braucht nur die Gleichung A.1 folgendermaßen zu transformieren:

$$m \frac{d^2}{dt^2} \mathcal{U}^+ \cdot \vec{r} = qB_0 \cdot \frac{d}{dt} (\mathcal{U}^+ \mathcal{A} \mathcal{U}) \mathcal{U}^+ \cdot \vec{r} + (qU_0 c_2) (\mathcal{U}^+ \mathcal{I} \mathcal{U}) \mathcal{U}^+ \cdot \vec{r}$$

aufgrund der Unitarität von \mathcal{U} folgt:

- $\mathcal{U}^+ \mathcal{I} \mathcal{U} = \mathcal{I}$ (trivial).

- $\mathcal{U}^+ \mathcal{A} \mathcal{U} = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$. Man braucht das Produkt gar nicht explizit durchzuführen, da es die Matrix \mathcal{A} , in ihrer diagonalisierten Form, automatisch darstellen muß. Die setzt sich dann aus ihren Eigenwerten $\pm i$, auf der Hauptdiagonal zusammen.

Man erhält schließlich die entkoppelten Bewegungsgleichungen mit den neuen Koordinaten:

$$m \begin{pmatrix} \ddot{r}_+ \\ \ddot{r}_- \end{pmatrix} = (qB_0 i) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{r}_+ \\ \dot{r}_- \end{pmatrix} + qU_0 c_2 \begin{pmatrix} r_+ \\ r_- \end{pmatrix}. \quad (\text{A.5})$$

Als Beispiel, werden wir nun die Gleichung für r_+ lösen. Sie lautet:

$$m \ddot{r}_+ = (qB_0 i) \dot{r}_+ + (qU_0 c_2) r_+. \quad (\text{A.6})$$

Diese Gleichung ist diejenige eines gedämpften harmonischen Oszillators. Der Dämpfungsfaktor $(qB_0 i)$ aber ist rein imaginär, deshalb stellt er keinen Energieverlust dar. Um sie zu lösen, verwendet man den Ansatz: $e^{\lambda t}$, was folgendes charakteristisches Polynom liefert:

$$\lambda^2 - \left(\frac{qB_0 i}{m}\right) \lambda - \left(\frac{qU_0 c_2}{m}\right) = 0 \rightarrow \lambda_{\pm} = \frac{\frac{qB_0 i}{m} \pm \sqrt{-\left(\frac{qB_0}{m}\right)^2 + 4\left(\frac{qU_0 c_2}{m}\right)}}{2} \quad (\text{A.7})$$

mit $\omega_c = \frac{qB_0}{m}$ und $\omega_z = \sqrt{\frac{2qU_0 c_2}{m}}$, erhält man die Ausdrücke der Bewegungsfrequenzen:

$$\lambda_{\pm} = \left[\frac{\omega_c}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\omega_c}{2}\right)^2 - \frac{\omega_z^2}{2}} \right] i = \omega_{\pm} i \quad (\text{A.8})$$

und somit lassen sich die Lösungen der Bewegungsgleichungen schreiben als:

$$\begin{aligned} r_+(t) &= A e^{i\omega_+ t} + B e^{i\omega_- t} \quad ; \quad A, B \in \mathbb{C} \\ r_-(t) &= A' e^{-i\omega_+ t} + B' e^{-i\omega_- t} \quad ; \quad A', B' \in \mathbb{C}. \end{aligned} \quad (\text{A.9})$$

Die Integrationskonstanten A, B, A', B' , kann man mit den Anfangswerten bestimmen. Man sollte beachten, daß r_+ und r_- beide lineare Kombinationen der Eigenfrequenzen $e^{i\omega_+ t}$ und $e^{i\omega_- t}$ sind. Deshalb kann weder r_+ noch r_- jeweils mit der Zyklotron- oder Magnetronbewegung identifiziert werden.

Die Kartesischen Koordinaten erhält man mittels der Transformationsmatrix \mathcal{U} und ein bißchen einfacher Algebra:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \mathcal{U} \begin{pmatrix} r_+ \\ r_- \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} x(t) = A_+ \sin(\omega_+ t + \varphi_+) + A_- \sin(\omega_- t + \varphi_-) \\ y(t) = A_+ \cos(\omega_+ t + \varphi_+) + A_- \cos(\omega_- t + \varphi_-) \end{cases} \quad (\text{A.10})$$

wobei $\{A_+, A_-, \varphi_+, \varphi_-\} \in \mathbb{R}$, Integrationskonstanten sind.

A.1 Hamiltonische Beschreibung der Bewegung

Im Laufe der Dissertation wird ständig über Begriffe wie Zyklotronenergie, Zyklotronradius, u.s.w. gesprochen. Besonders für die Fehlerdiskussion ist es angebracht, genau zu definieren was damit gemeint ist. Darüber hinaus wollen wir die Quantenmechanische Lösung der Bewegungsgleichungen skizzieren. Die Lagrangesche Funktion des Ions in der Penningfalle lautet (bzw. allgemein eines geladenes Teilchens in einem elektromagnetischen Feld $\{\phi(\vec{r}), \vec{A}(\vec{r})\}$, [Gol80]):

$$L(\vec{r}, \dot{\vec{r}}) = \frac{1}{2} m \dot{\vec{r}}^2 - q\phi(\vec{r}) + q\vec{A}(\vec{r}) \cdot \dot{\vec{r}} \quad ; \quad \vec{A}(\vec{r}) = \frac{1}{2} \vec{B} \times \vec{r}. \quad (\text{A.11})$$

Man kann sie² mit den Koordinaten $\{r_+, r_-\}$ folgendermaßen schreiben:

$$L(r_+, r_-, \dot{r}_+, \dot{r}_-) = \frac{1}{2} m (\dot{r}_+^2 + \dot{r}_-^2) + \frac{1}{2} m \omega_z^2 \left(\frac{r_+^2 + r_-^2}{2} \right) + \frac{qB_0}{2} (r_+ \dot{r}_- - r_- \dot{r}_+). \quad (\text{A.12})$$

Man kann nun die entsprechenden kanonischen Momente erhalten:

$$\left. \begin{aligned} p_+ &= \frac{\partial L}{\partial \dot{r}_+} = m\dot{r}_+ - \left(\frac{qB_0}{2} r_- \right) \\ p_- &= \frac{\partial L}{\partial \dot{r}_-} = m\dot{r}_- + \left(\frac{qB_0}{2} r_+ \right) \end{aligned} \right\} \rightarrow H(r_+, r_-, p_+, p_-) = \dot{r}_+ p_+ + \dot{r}_- p_- - L \quad (\text{A.13})$$

und schließlich erhält man die (radiale) Hamiltonische Funktion des Ions in der Penningfalle:

$$H(r_+, r_-, p_+, p_-) = \frac{(p_+ + \frac{qB_0}{2} r_-)^2}{2m} + \frac{(p_- - \frac{qB_0}{2} r_+)^2}{2m} - \frac{1}{2} m \omega_z^2 \left(\frac{r_+^2 + r_-^2}{2} \right). \quad (\text{A.14})$$

² Die Beziehung $\vec{A} = \frac{1}{2} \vec{B} \times \vec{r}$ ist keineswegs allgemein. Sie gilt nur im homogenen Feld $\vec{B} = B_0 \hat{u}_z$.

Da $\frac{\partial H}{\partial t} = 0$, ist die Energie konstant. Außerdem kann sie in zwei unabhängige Beiträge aufgeteilt werden. Wenn man die Lösungen A.10 (oder A.9) in $H(r_+, r_-, p_+, p_-)$ einsetzt, erhält man:

$$H = \underbrace{\frac{1}{2}mA_+^2\left(\omega_+^2 - \frac{\omega_z^2}{2}\right)}_{E_+} + \underbrace{\frac{1}{2}mA_-^2\left(\omega_-^2 - \frac{\omega_z^2}{2}\right)}_{E_-} = \text{Konst.} \quad (\text{A.15})$$

Wir definieren:

- Die *Zyklotronenergie* E_+ und den *Zyklotronradius* A_+ . Der Zusammenhang zwischen den beiden lautet:

$$A_+ = \sqrt{\frac{2E_+}{m(\omega_+^2 - \omega_z^2/2)}} \quad (\text{A.16})$$

- Die *Magnetronenergie* $E_- (< 0)$ und den *Magnetronradius* A_- . Der Zusammenhang zwischen den beiden lautet:

$$A_- = \sqrt{\frac{2E_-}{m(\omega_-^2 - \omega_z^2/2)}} \quad (\text{A.17})$$

Ganz allgemein gilt $H(\vec{r}, \vec{p}) = \frac{(\vec{p} - q\vec{A})^2}{2m} - q\phi(\vec{r})$ für ein geladenes Teilchen in einem elektromagnetischen Feld. Hier meint \vec{p} immer das kanonische Moment wie oben definiert und nicht das mechanische Moment $m\vec{v}$ [Gol80].

Da die radiale Bewegung sich aus der Überlagerung zweier konservativer periodischer Bewegungen zusammensetzt, kann man Paare von kanonischen konjugierten *Aktion-Winkel* Variablen ($\{J_+, \alpha_+\}$ und $\{J_-, \alpha_-\}$) definieren. Damit lässt sich die Hamiltonische Funktion folgendermaßen schreiben³:

$$H(J_+, \alpha_+, J_-, \alpha_-) = \frac{J_+}{2\pi} \omega_+ + \frac{J_-}{2\pi} \omega_- \quad (\text{A.18})$$

wobei: $\left\{ \begin{array}{l} \alpha_{\pm} = (\omega_{\pm} t + \varphi_{\pm}) \rightarrow \text{Winkel-Variablen} \\ J_{\pm} = \frac{2\pi E_{\pm}}{\omega_{\pm}} \rightarrow \text{Aktion. Sie ist eine Konstante der Bewegung.} \end{array} \right.$

Im Prinzip ist das Bewegungsproblem damit auch etwa quantenmechanisch gelöst. Die Quantisierung der Energie lautet:

$$\begin{aligned} E_+ &= \left(n_+ + \frac{1}{2}\right) \hbar \omega_+ \quad , \quad n_+ \in \mathbb{N} \\ E_- &= -\left(n_- + \frac{1}{2}\right) \hbar \omega_- \quad , \quad n_- \in \mathbb{N}. \end{aligned} \quad (\text{A.19})$$

Eine ausführliche quantenmechanische Lösung kann man z.B. in [Ita82] oder in [Bro86] finden.

³ Um das formell zu beweisen, muß man nur prüfen, daß die Relationen $r_{\pm} = r_{\pm}(J_{\pm}, \alpha_{\pm})$, $p_{\pm} = p_{\pm}(J_{\pm}, \alpha_{\pm})$ mit den obigen Variablen eine Kanonische Transformation darstellen. Das läßt sich z.B. durch die Erfüllung der Symplektischen Kondition [Gol80] bestätigen. Diese Prozedur ist relativ einfach, aber sehr langwierig, und wird hier nicht explizit durchgeführt.

Anhang B

Magnetfeld einer Spule endlicher Länge

Dem Autor dieser Dissertation ist nicht gelungen, eine Referenz in der Literatur zu finden, wo das Magnetfeld einer Spule endlicher Länge **vollständig** (das heisst, nicht nur auf der Symmetrieachse) angegeben wird. Da dieser Magnetfeldverlauf aber für das g-Faktor Experiment von großer Wichtigkeit ist, wird er in diesem Anhang analytisch angegeben. Mit der heutzutage überall zugänglichen Mathematik-Software (wie z.B. **Mathematica 4.0** @Wolfram Research) ist die Verarbeitung der gefundenen Lösungen mit „komplizierten“ elliptischen Funktionen leicht durchführbar.

B.1 Analytische Berechnung

Gegeben sei eine Spule mit Länge L und Halbdurchmesser R :

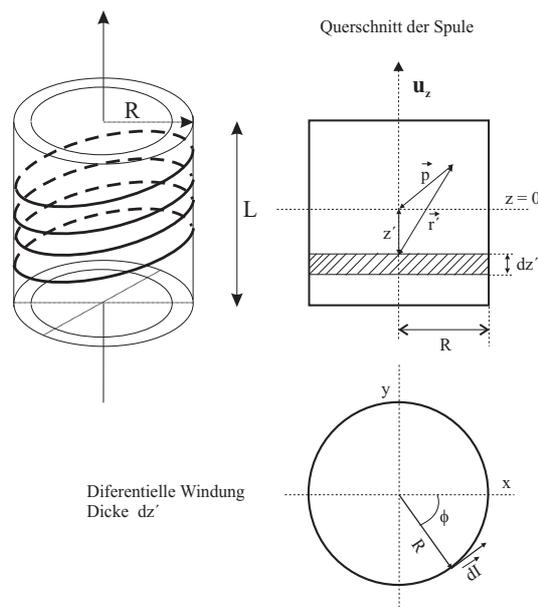


Abbildung B.1: Skizze Spule endlicher Länge.

Um das Magnetfeld $\vec{B}(r, z)$ zu bestimmen, werden wir zunächst den Beitrag einer differentiellen Windung, $dz' \leftrightarrow d\vec{B}$, berechnen. Das gesamte Magnetfeld folgt dann aus der Summe aller differentiellen Beiträge aller Windungen der Spule: $\vec{B} = \int d\vec{B}$

Wir definieren (vergleiche mit Abbildung B.1):

- *Feldpunkt:* $\vec{p} = (0, r, z)$.¹
- *Quellpunkt:* $\vec{r} = (R \cos \phi, R \sin \phi, z')$
- $\vec{r}' = \vec{p} - \vec{r} = (-R \cos \phi, r - R \sin \phi, z - z')$
 $\|\vec{r}'\|^2 = (R^2 + r^2 + (z - z')^2 - 2rR \sin \phi)$
- *Strom einer diff. Windung:* $d\vec{I} = +dI(-\sin \phi, \cos \phi, 0) = dI \cdot \hat{u}_\phi$.
 Wobei $\frac{dI}{dz'} = J = \text{konstant}$, $J = \text{Stromdichte}$.

Das Magnetfeld einer differentiellen Windung auf den Feldpunkt \vec{p} lautet nach dem Biot-Savartschen Gesetz:

$$d\vec{B}(\vec{p}) = \frac{\mu_0}{4\pi} dI \oint_0^{2\pi} R d\phi \frac{\hat{u}_\phi \times \hat{r}'}{\|\vec{r}'\|^2}. \quad (\text{B.1})$$

Nun $\hat{u}_\phi \times \vec{r}' =$

$$\begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ -\sin \phi & \cos \phi & 0 \\ -R \cos \phi & r - R \sin \phi & (z - z') \end{vmatrix} = (z - z') [\cos \phi \hat{i} + \sin \phi \hat{j}] + (R - r \sin \phi) \cdot \hat{k} \\ = (z - z') \cdot \hat{u}_r + (R - r \sin \phi) \cdot \hat{u}_z. \quad (\text{B.2})$$

Wie aus Symmetrie-Gründen erwartet, besteht das Magnetfeld nur aus zwei Komponenten: $\vec{B} = B_r \hat{u}_r + B_z \hat{u}_z$. Wir wollen uns zunächst auf den axialen Anteil konzentrieren:

$$dB_z(\vec{p}) = \frac{\mu_0 R}{4\pi} dI \oint_0^{2\pi} d\phi \frac{R - r \sin \phi}{(R^2 + r^2 + (z - z')^2 - 2rR \sin \phi)^{3/2}}. \quad (\text{B.3})$$

Mit der Lösung dieses Integrals würde man den Beitrag einer differentiellen Windung erhalten. Wir wollen aber das gesamte Magnetfeld berechnen und dafür muß man eine zweite Integration über die gesamte Länge der Spule durchführen. Da $dI = J \cdot dz'$, läßt sich $B_z(\vec{p})$ folgendermaßen bestimmen:

$$B_z(\vec{p}) = \int_{-L/2}^{L/2} dB_z(\vec{p}) = \frac{\mu_0 R J}{4\pi} \int_{-L/2}^{L/2} dz' \oint_0^{2\pi} d\phi \frac{R - r \sin \phi}{(R^2 + r^2 + (z - z')^2 - 2rR \sin \phi)^{3/2}}. \quad (\text{B.4})$$

¹ Aus Symmetrie-Gründen kann man \vec{B} auf der y-Achse berechnen. Das Ergebnis hat allgemeine Gültigkeit, wobei die Berechnung vereinfacht wird.

Es ist günstiger, die Integrationsreihe zu vertauschen (Satz von Fubini):

$$B_z(\vec{p}) = \frac{\mu_0 R J}{4\pi} \oint_0^{2\pi} d\phi (R - r \sin \phi) \underbrace{\int_{-L/2}^{L/2} \frac{dz'}{(k + (z - z')^2)^{3/2}}}_{I_1} \quad (\text{B.5})$$

wobei $k = (R^2 + r^2 - 2rR \sin \phi)$.

Nun kann das Integral I_1 mit dem Variablenumtausch $\text{tg } x = \frac{z - z'}{R}$, trivialerweise berechnet werden. Hier wird einfach das Ergebnis angegeben:

$$I_1 = \left| \frac{-(z - z')}{k \sqrt{k + (z - z')^2}} \right|_{-L/2}^{L/2} = \frac{(z + L/2)}{k \sqrt{k + (z + L/2)^2}} - \frac{(z - L/2)}{k \sqrt{k + (z - L/2)^2}} \quad (\text{B.6})$$

und daher:

$$B_z(\vec{p}) = \frac{\mu_0 R J}{4\pi} (z + L/2) \oint_0^{2\pi} d\phi \frac{(R - r \sin \phi)}{(R^2 + r^2 - 2rR \sin \phi) \sqrt{(R^2 + r^2 + (z + L/2)^2 - 2rR \sin \phi)}} - \frac{\mu_0 R J}{4\pi} (z - L/2) \oint_0^{2\pi} d\phi \frac{(R - r \sin \phi)}{(R^2 + r^2 - 2rR \sin \phi) \sqrt{(R^2 + r^2 + (z - L/2)^2 - 2rR \sin \phi)}}. \quad (\text{B.7})$$

Wir definieren:

$$a = \frac{2rR}{R^2 + r^2} \longrightarrow 0 < a < 1; \forall r \in [0, \infty [\quad (\text{B.8})$$

$$b = \frac{2rR}{R^2 + r^2 + (z + L/2)^2} \longrightarrow 0 < b < a < 1; \begin{cases} \forall r \in [0, \infty [\\ \forall z \in] - \infty, \infty [\end{cases}$$

und damit lässt sich das erste Integral in B.7 folgendermaßen umschreiben:

$$I_+ = \oint_0^{2\pi} d\phi \frac{(R - r \sin \phi)}{(R^2 + r^2) [1 - a \sin \phi] \sqrt{R^2 + r^2 + (z + L/2)^2} [\sqrt{1 - b \sin \phi}]}$$

$$= \frac{1}{(R^2 + r^2) \sqrt{R^2 + r^2 + (z + L/2)^2}} \oint_0^{2\pi} d\phi \frac{(R - r \sin \phi)}{[1 - a \sin \phi] [\sqrt{1 - b \sin \phi}]}$$

$$; \oint_0^{2\pi} d\phi \frac{(R - r \sin \phi)}{[1 - a \sin \phi] [\sqrt{1 - b \sin \phi}]} \longrightarrow \begin{cases} \oint_0^{2\pi} d\phi \frac{R}{[1 - a \sin \phi] [\sqrt{1 - b \sin \phi}]} \\ \oint_0^{2\pi} d\phi \frac{-r \sin \phi}{[1 - a \sin \phi] [\sqrt{1 - b \sin \phi}]} \end{cases} \quad (\text{B.9})$$

die Berechnung des Magnetfeldes ist nun fast abgeschlossen, wir müssen lediglich die zwei letzten Integrale berechnen²:

² An dieser Stelle muss die wunderbare analytische Leistungsfähigkeit des erwähnten Programms, Mathematica 4.0, explizit anerkannt werden.

$$\begin{aligned}
& - \oint_0^{2\pi} d\phi \frac{-r \sin \phi}{[1 - a \sin \phi][\sqrt{1 - b \sin \phi}]} = 0 \quad ; \quad \forall a, b \\
& - \oint_0^{2\pi} d\phi \frac{R}{[1 - a \sin \phi][\sqrt{1 - b \sin \phi}]} = \frac{-4R}{(a-1)\sqrt{1-b}} \cdot \Pi\left(\frac{2a}{a-1}, \frac{2b}{b-1}\right)
\end{aligned}$$

wobei $\Pi(n, m)$ ein vollständiges elliptisches Integral dritter Gattung darstellt.

B.1.1 Elliptische Integrale

Ausführliche Information über die elliptischen Integrale kann man zum Beispiel in [Abr72] finden, allerdings ist es an dieser Stelle angebracht, ein paar allgemeine Informationen über diese Funktionen vorzustellen. Außerdem muss die in dieser Arbeit verwendete Schreibweise eindeutig definiert werden.

Es gibt drei Standard-Typen von Legendre-Jacobi (vollständigen) elliptischen Integralen:

- *Vollständiges Elliptisches Integral erster Gattung:*

$$K(m) = \int_0^{\pi/2} d\theta (1 - m \sin^2 \theta)^{-1/2}$$

- *Vollständiges Elliptisches Integral zweiter Gattung:*

$$E(m) = \int_0^{\pi/2} d\theta (1 - m \sin^2 \theta)^{+1/2}$$

- *Vollständiges Elliptisches Integral dritter Gattung:*

$$\Pi(n, m) = \int_0^{\pi/2} d\theta (1 - n \sin^2 \theta)^{-1} (1 - m \sin^2 \theta)^{-1/2}$$

Die folgenden drei Abbildungen zeigen das wesentliche Verhalten dieser drei Funktionen auf der reellen Gerade:

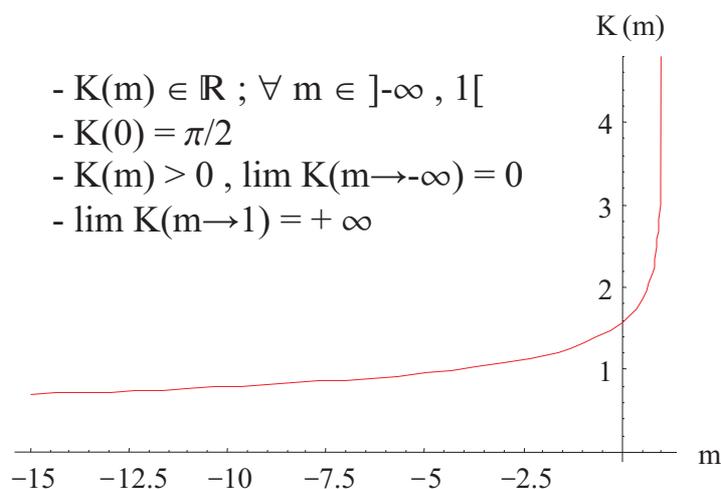


Abbildung B.2: Darstellung von $K(m)$.

Alle drei Funktionen sind innerhalb $] -\infty, 1[$ wohldefiniert und liefern reelle positive Werte. $K(m)$ und $\Pi(m)$ weisen allerdings eine senkrechte Asymptote bei $m, n = 1$ auf. Da $0 < b < a < 1 \rightarrow \frac{2a}{a-1} < 0, \frac{2b}{b-1} < 0$ und die erhaltene Funktion, $B_z(\vec{p})$, ist in allen Punkten des Raumes wohldefiniert.

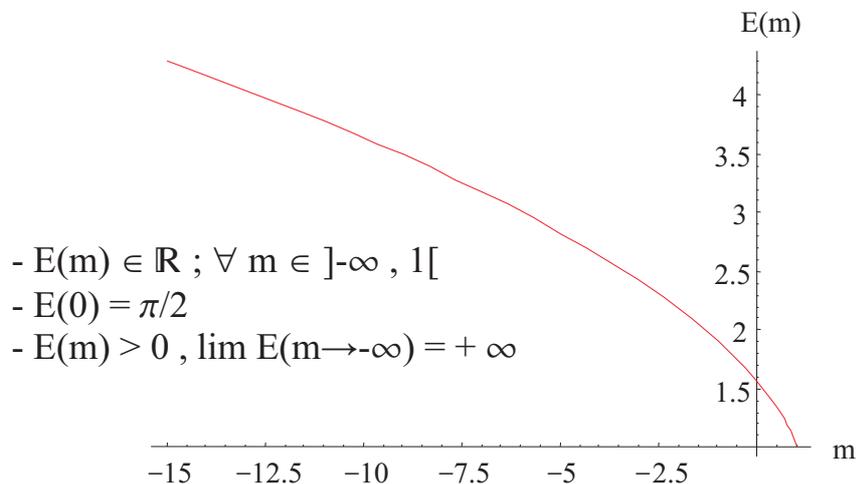


Abbildung B.3: Darstellung von $E(m)$.

Die elliptischen Integrale tauchen häufig in sehr verschiedenen Bereichen der Physik auf. Sehr bekannt ist zum Beispiel das klassische Keplersche Problem, wo die Laufbahn eines Planeten um die Sonne als Funktion der Zeit mittels elliptischer Integrale beschrieben wird. Darüberhinaus sind sie im Rahmen der mathematischen Analyse als Forschungsobjekte selbst im Zusammenhang mit den sogenannten *Speziellen Funktionen* von grosser Bedeutung.

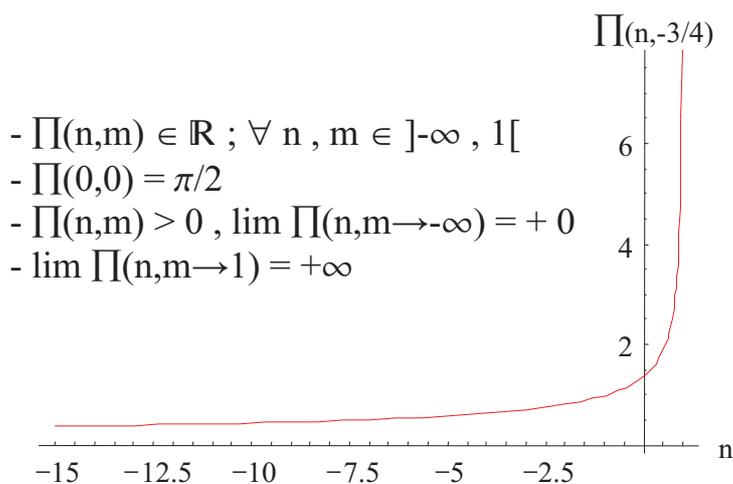


Abbildung B.4: Darstellung von $\Pi(m, n)$.

B.2 Ergebnisse

Mit den durchgeführten Integralen lässt sich den theoretischen Verlauf des Magnetfeldes einer Spule endlicher Länge, $\vec{B}_{Spule}(\vec{r}) = B_r(\vec{r}) \cdot \hat{u}_r + B_z(\vec{r}) \cdot \hat{u}_z$, bestimmen.

B.2.1 Axiale Komponente

Ersetzt man $a = \frac{2rR}{R^2+r^2}$, $b_{\pm} = \frac{2rR}{R^2+r^2+(z \pm L/2)^2}$ in B.7 erhält nach ein bißchen einfacher Algebra den Ausdruck für die axiale Komponente des Magnetfeldes:

$$B_z(r, z) = \frac{\mu_0 N I R^2}{\pi(R-r)^2} \cdot \left[\frac{z+L/2}{\sqrt{(R-r)^2+(z+L/2)^2}} \cdot \Pi\left(\frac{-4Rr}{(R-r)^2}, \frac{-4Rr}{(R-r)^2+(z+L/2)^2}\right) - \dots \right. \\ \left. - \frac{z-L/2}{\sqrt{(R-r)^2+(z-L/2)^2}} \cdot \Pi\left(\frac{-4Rr}{(R-r)^2}, \frac{-4Rr}{(R-r)^2+(z-L/2)^2}\right) \right]. \quad (\text{B.10})$$

Hier bedeuten (r, z) ab nun die üblichen zylindrischen Koordinaten³. Außerdem ist die Stromdichte, J , durch: $J = NI$ ersetzt worden, wobei N = Windungsdichte und I = Strom.

Wir wollen nun einige spezielle Beispiele vorstellen.

Magnetfeld auf der Symmetrieachse

Wenn $r = 0 \rightarrow \vec{B} = B_z \hat{u}_z$, ist das Magnetfeld rein axial (wegen der zylindrischen Symmetrie der Spule) und da $\Pi(0, 0) = \pi/2$, erhält man aus B.10 trivialerweise die bekannte Formel [Wei62]:

$$B_z(0, z) = \frac{\mu_0 N I}{2} \left[\frac{z+L/2}{\sqrt{R^2+(z+L/2)^2}} - \frac{z-L/2}{\sqrt{R^2+(z-L/2)^2}} \right]. \quad (\text{B.11})$$

Magnetfeld einer unendlich langen Spule

Wenn $L \rightarrow +\infty$ dann folgt aus B.11:

$$B_z(0, z) = \frac{\mu_0 N I}{2} \left[\frac{+\infty}{+\infty} - \frac{-\infty}{+\infty} \right] = \frac{\mu_0 N I}{\cancel{2}} \cdot \cancel{2} = \mu_0 N I$$

und das ist die berühmte Formel.

³ Die Berechnung von B_z ist mit kartesischen Koordinaten durchgeführt worden. Aufgrund der zylindrischen Symmetrie der Spule jedoch, kann der Koordinate r als *Abstand zur z-Achse* angenommen werden und nicht nur als y -Koordinate, wie es eigentlich für die Berechnung definiert worden ist.

B.2.2 Radiale Komponente

Wenn man den radialen Anteil in B.2 berücksichtigt und eine sehr ähnliche Berechnung wie die vorherige durchführt, dann erhält man:

$$B_r(r, z) = \frac{\mu_0 N I R}{\pi} \left[\frac{K\left(\frac{-4 R r}{(R-r)^2+(z-L/2)^2}\right)}{\sqrt{(R-r)^2+(z-L/2)^2}} - \frac{\sqrt{(R-r)^2+(z-L/2)^2}}{R^2+r^2+(z-L/2)^2} \cdot E\left(\frac{-4 R r}{(R-r)^2+(z-L/2)^2}\right) \right. \\ \left. - \frac{K\left(\frac{-4 R r}{(R-r)^2+(z+L/2)^2}\right)}{\sqrt{(R-r)^2+(z+L/2)^2}} + \frac{\sqrt{(R-r)^2+(z+L/2)^2}}{R^2+r^2+(z+L/2)^2} \cdot E\left(\frac{-4 R r}{(R-r)^2+(z+L/2)^2}\right) \right] \quad (\text{B.12})$$

wobei K und E die definierten vollständigen elliptischen Integrale, jeweils erster und zweiter Gattung, darstellen. Damit ist die Berechnung des gesamten Magnetfeldes einer Spule endlicher Länge im gesamten Raum beendet.

B.2.3 Vergleich mit den experimentellen Daten

Die im Experiment verwendete supraleitende Spule wurde von der britischen Firma *Oxford Research Instruments* geliefert. In der zur Spule mitgelieferten Dokumentation ist das makroskopische „stray field mapping“ zu finden, die benutzt werden kann, um die Güte des vorgestellten theoretischen Modells zu testen. Die vorliegende Abbildung zeigt die von *Oxford R. Instruments* gelieferten Werte, also den Verlauf des Magnetfeldes auf der Achse ($r = 0$), zusammen mit der nach B.11 vorgenommenen Fit-Kurve an diese Daten:

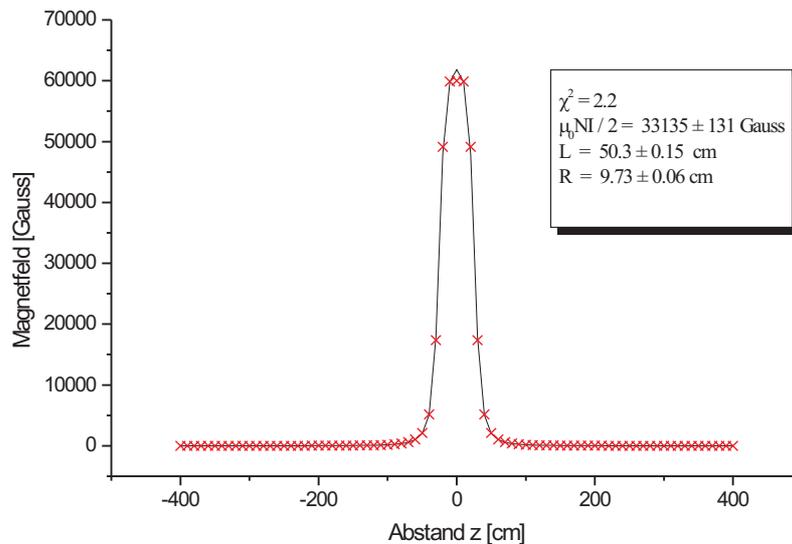


Abbildung B.5: Makroskopischer axialer Verlauf des Magnetfeldes. Die Kreuze stellen die vom Hersteller angegebenen experimentellen Werte dar.

Die effektiven Parameter der im Experiment verwendeten Spule lauten nach dem Fit: $L_{\text{Spule}} = 503,5 \pm 1,5$ mm, $R_{\text{Spule}} = 97,3 \pm 0,6$ mm und $\frac{\mu_0 NI}{2} = 33135 \pm 131$ Gauss.

Eine vorsichtige Untersuchung des Fit-Ergebnis in der Region um $z = 0$ zeigt, daß allein das in B.11 enthalte theoretische Modell die erreichte Homogenität des Magnetfeldes nicht widerspiegeln kann. Besonders ist zu beachten, daß der zentrale Punkt nicht auf der theoretischen Kurve sitzt. Ein wesentlich besseres Ergebnis erzielt man, in dem man eine Helmholtzsche Anordnung postuliert:

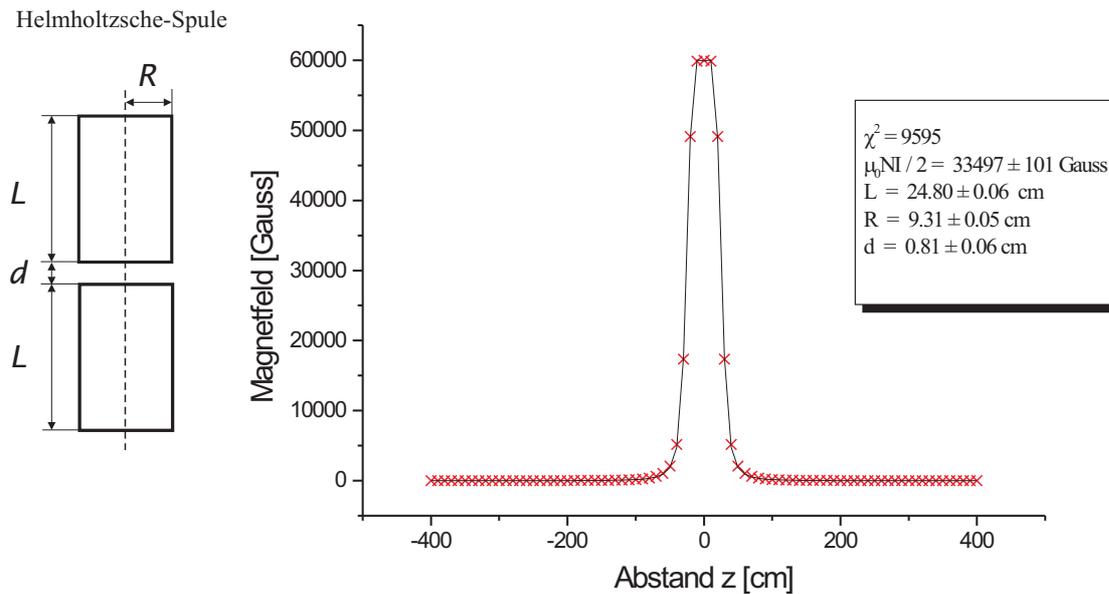


Abbildung B.6: **Fit mit Helmholtzschers Anordnung.**

In der Abbildung ist eindeutig zu sehen, daß eine solche Anordnung eine wesentlich bessere Homogenität im Zentrum $z = 0$ als diejenige der einzelnen Spule liefert. Nun liegen alle Punkte auf der theoretischen angefitzten Kurve, was nicht der Fall war bei dem vorherigen Fit. Der Abstand zwischen den beiden Spulen beträgt nur: $d = 0,81 \pm 0,05$ mm. Außerdem wäre die gesamte Länge der Helmholtzschen Anordnung, $2 \times 24,80 + 0,81 = 50,41$ cm, fast identisch mit diejenigen der einzelnen Spule, 50,3 cm.

Man muss dazu sagen, daß es sich nur um ein Modell der Spule handelt, aber nützliche Informationen können damit erhalten werden. In der Realität, um ein möglichst homogenes Magnetfeld zu produzieren, wird die Windungsdichte entlang des Spulenkerns sorgfältig variiert, damit \vec{B} binnen einer vordefinierten Region möglichst ortsunabhängig ist.

Als letztes muß angemerkt werden, daß allein die bessere axiale Homogenität des Magnetfeldes keine bessere radiale Homogenität gewährleistet. Die folgenden Abbildungen veranschaulichen den theoretischen axialen und radialen Verlauf von $B_z(r, z)$ nach dem Fit, erst mit einer einzelnen Spule

(gestrichelte Darstellung) und mit der Helmholtzschen Anordnung:

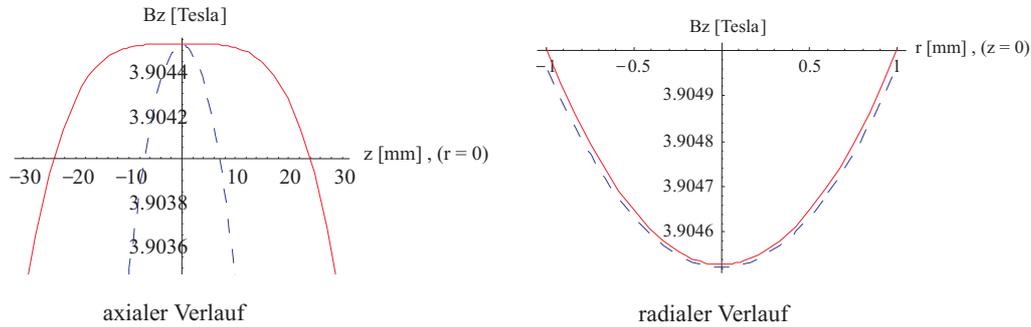


Abbildung B.7: Vergleich der radialen und axialen Inhomogenität.

Offensichtlich ist das Magnetfeld der Helmholtzschen Anordnung, der z -Achse entlang, wesentlich homogener als dasjenige der einzelnen Spule; trotzdem ist der radiale Verlauf von B_z beider Strukturen voneinander nicht unterscheidbar.

Allgemein gilt (aus den Maxwell'schen Gleichungen $\vec{\nabla} \times \vec{B} = \vec{0}$ und $\nabla \cdot \vec{B} = 0$ und angenommen, daß zylindrische Symmetrie vorhanden sei):

$$\frac{\partial^2 B_z(r, z)}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial B_r(r, z)}{\partial z} = -\frac{\partial^2 B_z(r, z)}{\partial z^2}. \quad (\text{B.13})$$

Im Zentrum der Spule, wo der Gradient von \vec{B} verschwindet, ist das Magnetfeld annäherungsweise eine quadratische Funktion der Ortskoordinaten. Die einfachste quadratische vektorielle Funktion, die B.13 (und damit die Maxwell'schen Gleichungen) erfüllt lautet:

$$\Delta \vec{B}(r, z) = B_2 \left[-z \cdot r \cdot \hat{u}_r + \left(z^2 - \frac{r^2}{2} \right) \cdot \hat{u}_z \right]. \quad (\text{B.14})$$

In [Bro86] wird $\Delta \vec{B}$ *magnetische Flasche* genannt. Aus B.14 erhält man trivialerweise daß: $\frac{\partial^2 \Delta B_z(0,0)}{\partial r^2} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{\partial^2 \Delta B_z(0,0)}{\partial z^2} = -B_2 \longrightarrow$ genauso wie beim elektrischen Potential ist das Magnetfeld (strenggenommen der axiale Anteil B_z) im Zentrum ein Sattelpunkt: axial ist es ein Maximum, radial ein Minimum. In Abbildung B.7 ist dieses Verhalten eindeutig zu sehen.

B.2.4 Das Magnetfeld der g-Faktor-Spule

Zum Abschluss ist auf der nächsten Seite das Magnetfeld der supraleitenden Spule im gesamten Raum gezeichnet. Die Abbildung beruht auf der exakten Lösung B.10 und B.12 mit den zur Spule gehörigen Parametern (Fit Ergebnisse in Abbildung B.6). Makroskopisch ist die Spule einfach ein grosser magnetischer Dipol, wie es meistens bei Magnetfeldern der Fall ist. Neben der Darstellung von \vec{B} ist eine skalierte Zeichnung der Penningfalle.

Wie man in der Abbildung sieht, sitzt die Analysefalle (theoretisch) genau im Zentrum der Spule, außerdem sollten Spule und Falle koaxial sein. Das

ganze System ist senkrecht zum Erdboden gerichtet, damit eine etwaige Verkipfung der Fallachse gegenüber der Spule aufgrund des unsymmetrisch verteilten Gewichtes zum großen Teil vermieden wird.

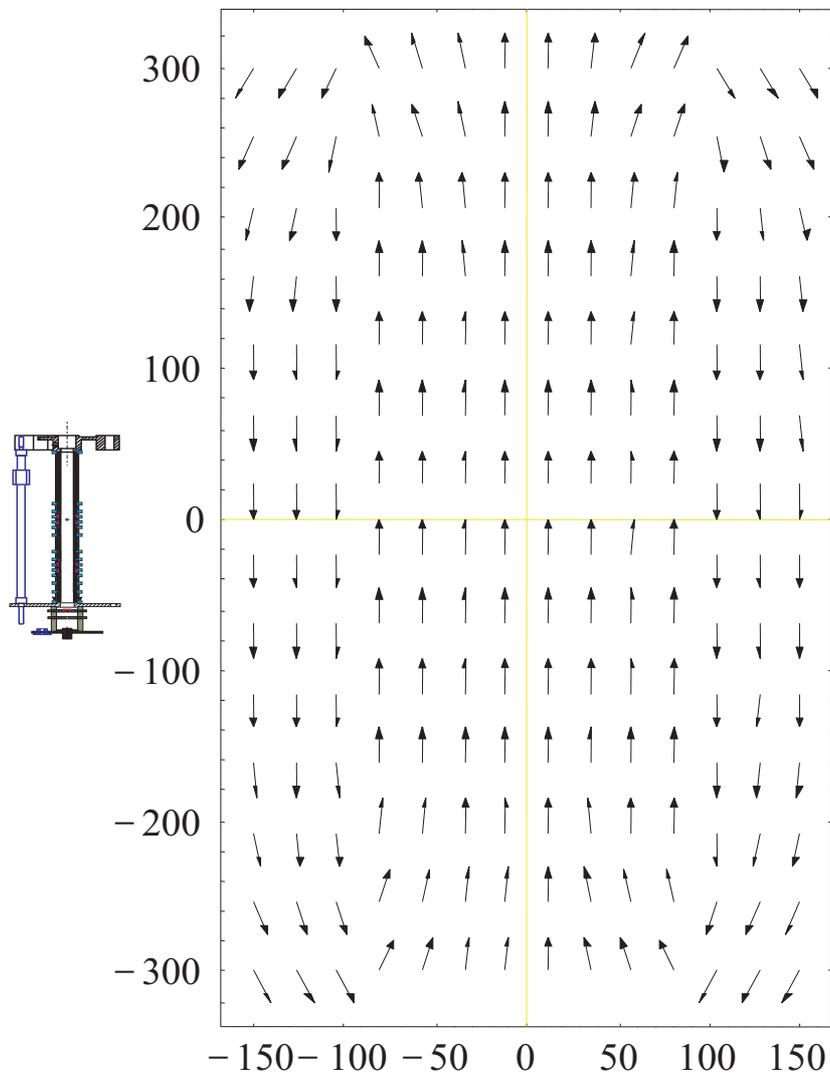


Abbildung B.8: Magnetfeld der supraleitenden Spule.
Abstände in mm.

Anhang C

Die Magnetische Flasche

Wie schon öfter erwähnt, besteht der Ring in der Analysefalle aus ferromagnetischem Material, nämlich aus Nickel. In der Anwesenheit eines Magnetfeldes von etwa 3,7 Tesla, ist dieser völlig polarisiert; dabei beträgt die Sättigungspolarisation von Nickel $\mu_0 \cdot M_{\text{Ni}} = 0,641 \text{ T}$ [Sta98]. Die im Experiment verwendete Penningfalle wurde so entworfen, daß sie koaxial zur supraleitenden Spule sein sollte und das Zentrum der Analysefalle mit demjenigen der Spule übereinstimmen mußte. Darüberhinaus ähnelt die Geometrie des Rings der eines Torus mit rechteckigem Querschnitt:

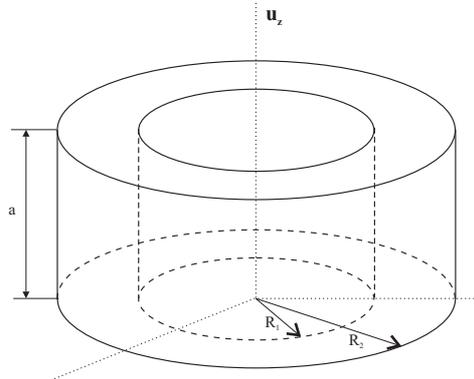


Abbildung C.1: Darstellung des Nickelrings.

C.1 Berechnung des Magnetfeldes

Allgemein kann man das Magnetfeld eines magnetisierten Materials mit magnetischer Dipolmoment-Dichte $\vec{M}(\vec{r})$ mit Hilfe des magnetischen Vektorpotentials $\vec{A}(\vec{r})$ berechnen [Gri89] (V =Volumen des Rings, S =Oberfläche):

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\vec{\nabla} \times \vec{M}}{\|\vec{r}'\|} dV + \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_S \frac{\vec{M} \times \hat{n}}{\|\vec{r}'\|} dS. \quad (\text{C.1})$$

Angenommen, daß der Ring gleichförmig magnetisiert ist, dann ist $\vec{\nabla} \times \vec{M} = \vec{0}$ und die Berechnung von $\vec{A}(\vec{r})$ vereinfacht sich auf das zweite Integral

auf der Oberfläche. Dadurch, daß das Magnetfeld der Spule im wesentlichen rein axial ist, $\vec{B}_{Spule} = B_z \cdot \hat{u}_z$, ist die induzierte Polarisation auch axial gerichtet: $\vec{M} = M_{Ni} \cdot \hat{u}_z$ und daraus folgt:

$$\vec{M} \times \hat{n} = \begin{cases} \text{auf der oberen und unteren Oberfläche:} \\ \quad \hookrightarrow M_{Ni} \cdot \hat{u}_z \times \hat{u}_z = \vec{0} \\ \text{jeweils auf der inneren und äußeren Oberfläche:} \\ \quad \hookrightarrow M_{Ni} \cdot \hat{u}_z \times \pm \hat{u}_r = \pm M_{Ni} \cdot \hat{u}_\phi \end{cases}$$

Der Term $\pm M_{Ni} \cdot \hat{u}_\phi$ stellt einen oberflächlichen effektiven Strom, \vec{J}_\pm , dar, auf dem das vom Nickelring induzierte Magnetfeld beruht.

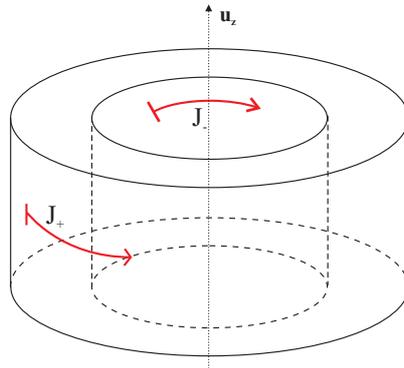


Abbildung C.2: Darstellung der effektiven Ströme auf dem Ring.

Der Nickelring kann also als die Überlagerung zweier konzentrischer Spulen mit Halbdurchmessern R_1 , R_2 angesehen werden, jeweils von einem effektiven Strom $\vec{J}_+ = +M_{Ni} \cdot \hat{u}_\phi$ und $\vec{J}_- = -M_{Ni} \cdot \hat{u}_\phi$ durchflossen. Infolgedessen ist das Magnetfeld des Rings, $\vec{B}_{Ring}(r, z)$, mit der im Anhang B gefundenen mathematischen Lösung komplett beschrieben. Wir haben es hier nicht nötig das Integral C.1 explizit zu berechnen.

C.2 Magnetfeld auf der Achse

Von besonderem Interesse ist der Verlauf vom \vec{B}_{Ring} auf der Symmetrie-Achse. Mit B.11 und mit den geometrischen Parametern der zwei äquivalenten Spulen lässt sich das Magnetfeld des Nickelrings folgendermaßen schreiben:

$$B_{z, Ring}(0, z) = \frac{\mu_0 M_{Ni}}{2} \left[\frac{z + a/2}{\sqrt{R_2^2 + (z + a/2)^2}} - \frac{z - a/2}{\sqrt{R_2^2 + (z - a/2)^2}} - \frac{z + a/2}{\sqrt{R_1^2 + (z + a/2)^2}} + \frac{z - a/2}{\sqrt{R_1^2 + (z - a/2)^2}} \right]. \quad (C.2)$$

Ein identisches Ergebnis kann durch unmittelbare Integration von C.1 erhalten werden [Her99].

Die Abmessungen des Nickelrings lauten (bei Raum-Temperatur):

- $a = 0,92 \pm 0,01$ mm , Dicke des Rings \equiv Länge der Spulen.
- $R_1 = 3,5 \pm 0,01$ mm , Halbdurchmesser der inneren Spule.
- $R_2 = 5,3 \pm 0,02$ mm , Halbdurchmesser der äußeren Spule.

Mit B.10 , B.12 und den vorliegenden Parametern lässt sich das Magnetfeld des Rings im gesamten Raum bestimmen. Die folgende Abbildung veranschaulicht \vec{B}_{Ring} . Genauso wie bei der supraleitenden Spule ist die Struktur eines magnetischen Dipols eindeutig zu erkennen:

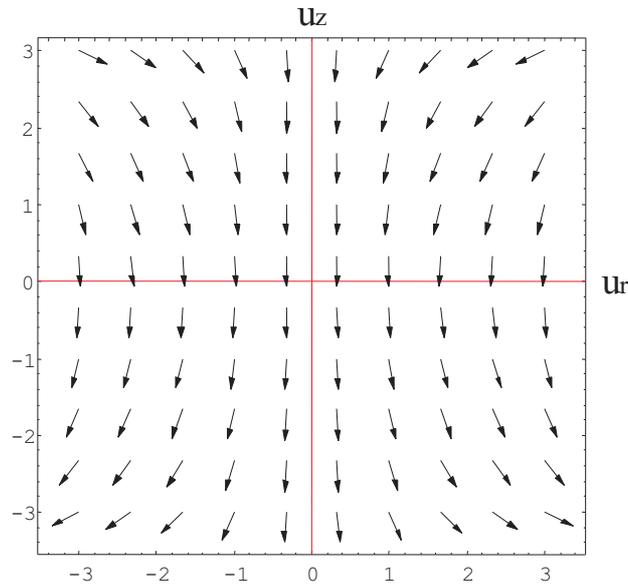


Abbildung C.3: Magnetfeld des Nickelrings.

Das Magnetfeld des Nickelrings ist (auf der Achse) dem der Spule entgegen gerichtet (vergleiche Abbildung B.8). Dies beruht darauf, daß der effektive Strom auf der inneren Fläche des Rings in die entgegengesetzte Richtung als derjenige der Spule fließt. Die Auswirkung dieser inneren Flanke übertrifft die der äußeren, deren effektiven Strom den gleichen Drehsinn als derjenige der supraleitenden Spule hat. Aus größerer Entfernung aber (~ 30 cm) ist der Einfluß der äußeren Fläche dominant und die Magnetfeldlinien laufen im gleichen Sinn wie diejenige der Spule.

Infolgedessen ist der Betrag des gesamten Magnetfeldes in der Analysefalle, $\vec{B}_{gesamt} = \vec{B}_{Spule} + \vec{B}_{Ring}$, etwas kleiner als in der Präzisionsfalle (Abbildung C.4). In der Tat; das Verhältnis der gemessenen Zyklotronfrequenzen in der Präzisions- und in der Analysefalle stimmt sehr gut mit dem erwarteten überein (siehe Abschnitt 4.3.1 zur Messung der Zyklotronfrequenz in der AF):

$$\left. \begin{array}{l} \nu_{c,AF} = 24\,929\,700 \pm 500 \text{ Hz} \\ \nu_{c,PF} = 25\,306\,500 \pm 2000 \text{ Hz} \end{array} \right\} \rightarrow \frac{\nu_{c,AF}}{\nu_{c,PF}} = 0,985 \leftrightarrow \underbrace{\frac{B_{z,AF}}{B_{z,PF}} = 0,994}_{\text{Theorie}}$$

C.2.1 Theoretische Bestimmung von B_1, B_2 und B_4

Mit der Einführung des Nickelrings verzerrt man lokal die Homogenität des Magnetfeldes in der Analysefalle. Da der Ring axial symmetrisch ist, sind alle ungeraden Terme: $B_k; \forall k = \text{ungerade}$, im Prinzip gleich Null. Allerdings wirkt der Nickelring auch in der Präzisionsfalle; besonders groß ist der Gradient des Magnetfeldes dort (also B_1). Mit Hilfe von C.2¹ wollen wir nun eine theoretische Vorhersage zu den Termen B_1, B_2 und B_4 herausfinden.

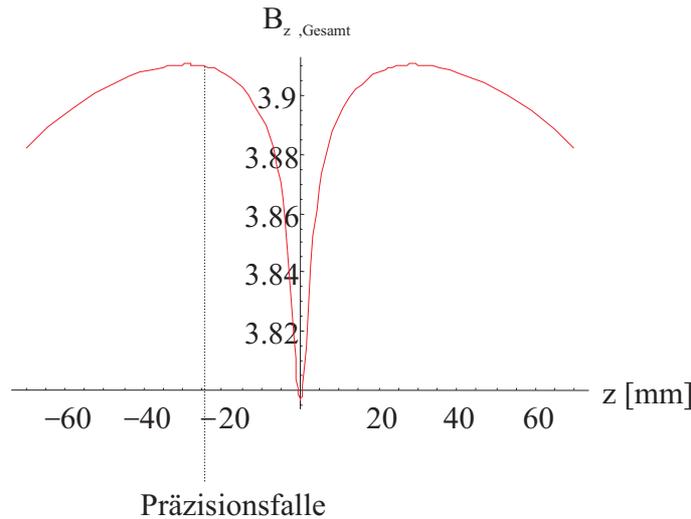


Abbildung C.4: **Gesamtes Magnetfeld auf der Achse** ($r = 0$).

Die Definition lautet²: $B_k = \frac{1}{k!} \cdot \frac{\partial^k B_z}{\partial z^k} \Big|_{(0,z)}$ und nach C.2 mit den entsprechenden geometrischen Abmessungen:

Koeffizient	Analysefalle	Präzisionsfalle
B_1	0	$66,3 \pm 4,7 \frac{\mu T}{mm}$
B_2	$10,06 \pm 0,06 \frac{mT}{mm^2}$	$4,4 \pm 0,3 \frac{\mu T}{mm^2}$
B_4	$-0,98 \pm 0,02 \frac{mT}{mm^4}$	$11 \pm 1 \frac{nT}{mm^4}$

Tabelle C.1: **Theoretische Magnetfeld-Inhomogenitäten.**

¹ Eigentlich, aus mechanischen Gründen, setzt sich der Nickelring aus drei konzentrischen Ringen wie derjenige in Abbildung C.1 mit verschiedenen Abmessungen zusammen [Her99]. Die mathematische Funktion, die so eine Anordnung beschreibt, ist einfach die Summe von drei Funktionen wie C.2, jeweils mit den entsprechenden geometrischen Parametern. Die hier vorgestellten Ergebnissen der B_k Koeffizienten wurden mit so einer Funktion erhalten.

² Gemeint hier ist nur das Magnetfeld des Nickelrings ohne die Spule.

Abbildungsverzeichnis

1.1	Feynman-Graphen in erster Ordnung α/π	9
2.1	Axiales Speicherpotential	14
2.2	Darstellung von $\phi(r, z)$ um $(0, 0)$	16
2.3	Die fünfpolige zylindrische Penningfalle.	17
2.4	Querschnitt der Doppel-Falle.	19
2.5	Die Fallenspannungen zur g-Faktor Messung.	20
2.6	Querschnitt der Äquipotentialflächen von $\phi(r, z)$	22
2.7	Das elektrische Quadrupolfeld.	24
2.8	Bewegung eines Ions in der Penningfalle.	27
2.9	Optimierung des Fallenpotentials.	29
2.10	Optimale Länge der Korrektorelektroden.	30
2.11	Äquimagnetfeldlinien in der Analysefalle.	36
2.12	Spin-Flips eines $^{16}\text{O}^{7+}$ - Ions in der Analysefalle.	41
3.1	Kryostat mit supraleitender Spule und Vakuumkammer.	46
3.2	Kryostat und Raumtemperaturausrüstung.	48
3.3	Schema Nachweis axialer Bewegung.	49
3.4	Massenspektrum in der Präzisionsfalle.	50
3.5	Dip eines $^{16}\text{O}^{7+}$ - Ions in der PF.	51
3.6	Dips in der AF.	52
3.7	Zyklotron-Spektrum zweier einzelnen Ionen.	53
3.8	Zyklotron-Resonanz eines $^{16}\text{O}^{7+}$ - Ions.	54
3.9	Theoretische Zyklotron-Resonanzen für drei Energien.	56
3.10	Breite der Zyklotron-Resonanz als Funktion der Energie.	57
4.1	Zusammenhang ν_z - Massenschleifenspannung.	60
4.2	Relaxationszeit der axialen Frequenz in der PF.	61
4.3	Apparativer Effekt minimiert.	62
4.4	Messung der Kühlzeitkonstante der Zyklotronbewegung über ν_z	63
4.5	Messung der Kühlzeitkonstante über ν_+	64
4.6	Darstellung der Lösungen von 4.1.	66
4.7	Nachweis der Kopplung der Bewegungsmoden im Zeitbereich.	68
4.8	Nachweis eines Doppel-Dips.	69
4.9	AC-Stark-Effekt und Rabi-Aufspaltung der Eigenbewegungen in der Penningfalle.	70

4.10	Darstellung von Ω als Funktion der Kopplungsfrequenz.	71
4.11	Entwicklung der Dips mit der Kopplungsfrequenz.	72
4.12	Avoided Crossing mit Kopplung $\omega_+ - \omega_z$	74
4.13	Theoretische Wahrscheinlichkeiten beider Dips als Funktion des Detunings.	75
4.14	Experimentelle Abhängigkeit der Breite beider Dips als Funktion des Detunings.	76
4.15	Vergleich Messung der axialen Frequenz 1-Dip versus 2-Dip.	77
4.16	Experimentelles Spektrum eines dreifachen Dips.	79
4.17	Künstliche Erhöhung der axialen Temperatur des Ions.	80
4.18	Optimierung des Tuning-Ratios.	81
4.19	Fehler in der Bestimmung des optimalen Tuning-Ratios.	82
4.20	Optimales Tuning-Ratio als Funktion der Zyklotronenergie in der AF.	83
4.21	Bestimmung der Spin-Ausrichtung während der g-Faktor Messung.	85
4.22	Messung der axialen Frequenz als Funktion des angelegten Tuning-Ratios.	86
4.23	Boltzmann-Verteilung der Zyklotronenergie.	88
4.24	Larmor Resonanz eines $^{16}\text{O}^{7+}$ -Ions in der AF.	89
5.1	Nachweis eines Spin-Flips in der PF.	94
5.2	Vier $S_W(\Gamma)$ -Resonanzen für vier Zyklotronenergien.	96
5.3	Extrapolation auf verschwindende Zyklotronenergie.	98
5.4	Die Γ_m für die verschiedenen Binweiten.	99
5.5	$S_{W,T}$ für eine Zyklotronenergie von 2 Hz und $T_z = 61$ K.	103
5.6	$S_{W,T}$ für drei Zyklotronenergien.	104
5.7	Γ_m als Funktion der Zyklotronenergie nach der Theorie.	105
5.8	Entwicklung der $S_{W,T}$ -Resonanzen mit der axialen Temperatur.	106
5.9	Γ_m als Funktion der axialen Temperatur nach der Theorie.	107
5.10	$S_{W,T}$ für drei Mikrowellenleistungen.	108
5.11	Γ_m als Funktion der Mikrowellenleistung (theoretisch).	109
5.12	Experimentelle S_W -Resonanz mit allen korrigierten Messdaten.	111
5.13	Abweichungen des Markers aufgrund der falschen Zeitbasis des FFT-Analysators.	114
5.14	Abweichung des FFT-Analysators als Funktion der Lage des Markers.	115
5.15	Das Mikrowellensignal.	116
5.16	Korrekturen der axialen Frequenzen bezüglich der Zyklotronfrequenz aufgrund der Massenschleife.	117
5.17	Axiale Frequenzdifferenzen beim Optimieren des Tuning-Ratios.	119
5.18	Absolute Breite der Resonanzen $S_{W,T}$ als Funktion der Mikrowellenleistung, der Zyklotronenergie und der axialen Temperatur.	122

5.19	S_W – Resonanz mit der Doppel-Dip-Methode.	124
5.20	Γ_m für verschiedenen Binweiten.	126
5.21	Doppel-Dip-Spektrum mit Lorentz-Fit.	128
5.22	Abweichung des Lorentz-Fits eines axialen Dips als Funktion des Detunings.	129
6.1	Vergleich der gegenwärtigen Resonanz mit der möglichen zukünftigen.	136
6.2	Die neue Penningfalle.	138
B.1	Skizze Spule endlicher Länge.	143
B.2	Darstellung von $K(m)$	146
B.3	Darstellung von $E(m)$	147
B.4	Darstellung von $\Pi(m,n)$	147
B.5	Makroskopischer axialer Verlauf des Magnetfeldes.	149
B.6	Fit mit Helmholtzscher Anordnung.	150
B.7	Vergleich der radialen und axialen Inhomogenität.	151
B.8	Magnetfeld der supraleitenden Spule.	152
C.1	Darstellung des Nickelrings.	153
C.2	Darstellung der effektiven Ströme auf dem Ring.	154
C.3	Magnetfeld des Nickelrings.	155
C.4	Gesamtes Magnetfeld auf der Achse ($r = 0$).	156

Literaturverzeichnis

- [Abr72] M. Abramowitz and I. Stegun;
Handbook of Mathematical Functions.
Dover Publications, Inc., New York, (1972)
- [Aud95] G. Audi and A. H. Wapstra;
The 1995 update to the atomic mass evaluation.
Nuclear Physics A595, **4** , 409 , (1995)
- [Bei98] P. Beiersdorfer, A. L. Osterheld, J.H. Scofield, J.R. Crespo
López-Urrutia and K. Widman;
*Measurement of QED and Hyperfine Splitting in the $2s_{1/2} - 2p_{3/2}$
X-Ray Transition in Li-like $^{209}\text{Bi}^{80+}$.*
Phys. Rev. Lett., **80** , 3022 , (1998)
- [Bei00] T. Beier, I. Lindgren, H. Persson, S. Salomonson, P. Sunnergren,
H. Häffner and N. Hermanspahn;
 g_j factor of an electron bound in a hydrogenlike ion.
Phys. Rev. A, **62** , 032510 , (2000)
- [Bei02] T. Beier, H. Häffner, N. Hermanspahn, S.G. Karshenboim, H.-J.
Kluge, W. Quint, S. Stahl, J. Verdú and G. Werth;
New Determination of the Electron's Mass.
Phys. Rev. Lett., **88** , 011603 , (2002)
- [Bey95] H. Beyer et al. ;
*Measurement of the Ground State Lambshift of Hydrogenlike
Uranium at the Electron Cooler of the ESR.*
Z. Phys. D, **35** , 169 , (1995)
- [Bre28] G. Breit;
Nature (London), **122** , 649 , (1928)
- [Bro85] L. Brown;
Geonium Lineshape.
Annals of Physics, **159** , 62 , (1985)
- [Bro86] L. Brown, G. Gabrielse;
Geonium Theory.
Rev. Mod. Phys., **58** , 233 , (1986)

- [Cor90] E. A. Cornell, M. Weisskoff, K. R. Boyce and D. E. Pritchard;
Mode coupling in a Penning Trap: π pulses and a classical avoided crossing.
Phys. Rev. A, **41** , 312 , (1990)
- [Deh68] H. G. Dehmelt and F. L. Walls;
“Bolometric“ technique for the rf spectroscopy of stored ions.
Phys. Rev. Lett., **21** , 127 , (1968)
- [Deh86] H. G. Dehmelt;
Continuos Stern-Gerlach effect: Principle and idealized apparatus.
Proc. Natl. Acad. Sci. USA, **53** , 2291 , (1986)
- [Deh90] H. G. Dehmelt;
Experiments with an isolated subatomic particle at rest.
Rev. Mod. Phys., **62** , 233 , (1990)
- [Del78] J. de la Rubia Pacheco, J. J. Brey Abalo;
Introducción a la Mecánica Estadística.
Ediciones del Castillo S. A. , Madrid (1978)
- [Dif95] F. DiFilippo, V. Natarajan, M. Bradley, F. Palmer, D.E. Pritchard;
Accurate atomic mass measurements from Penning trap comparisons of individual ions.
Physica Scripta , **T59** , 144 , (1995)
- [Dyc78] R. S. VanDyck, P. B. Schwinberg and H. G. Dehmelt;
in *New Frontiers in High Energy Physics.*
Plenum , New York , 159 , (1978)
- [Dyc86] R. S. Van Dyck Jr., F. L. Moore, D. L. Farnham and P. B. Schwinberg;
Variable magnetic bottle for precision geonium experiments.
Rev. Sci. Instr. , **57** , 593 , (1986)
- [Dyc87] R. S. Van Dyck Jr., P. B. Schwinberg, and H. G. Dehmelt;
New high-precision comparison of electron and positron g-factors.
Phys. Rev. Lett. , **59** , 26 , (1987)
- [Dyc95] R. S. Van Dyck Jr., D. L. Farnham, and P. B. Schwinberg;
Precision Mass Measurements in the UW-PTMS and the Electron’s “Atomic Mass“.
Physica Scripta, **T59** , 134 , (1995)
- [Dyc99] R. S. Van Dyck Jr., D. L. Farnham, S. L. Zafonte and P. B. Schwinberg;
Ultrastable superconducting magnet system for a Penning trap mass spectrometer.
Rev. Sci. Instrum., **70** , 1665 , (1999)

- [Far95] D. L. Farnham, R. S. Van Dyck Jr. and P. B. Schwinberg;
Determination of the electron's atomic mass and the proton / electron mass ratio via Penning trap mass spectroscopy.
Phys. Rev. Lett., **75** , 3598 , (1995)
- [Gab95] G. Gabrielse, D. Phillips, W. Quint, H. Kalinowsky, G. Rouleau and W. Jhe;
Special relativity and the single antiproton: Fortyfold improved comparison of \bar{p} and p charge-to-mass ratios.
Phys. Rev. Lett., **74** , 3544 , (1995)
- [Gla02] D. A. Glazov and V. M. Shabaev;
Finite nuclear size correction to the bound-electron g Factor in a hydrogenlike atom.
Phys. Lett. A, **297** , 408 , (2002)
- [Gol80] H. Goldstein;
Classical Mechanics, Second Edition.
Addison-Wesley Publishing Company, Massachusetts USA (1980)
- [Gri89] D. J. Griffiths;
Introduction to electrodynamics – Second Edition.
Prentice-Hall Inc., Englewood Cliffs, (1989)
- [Häf00a] H. Häffner;
Präzisionsmessung des magnetischen Moments des Elektrons in wasserstoffähnlichem Kohlenstoff.
Dissertation, Universität Mainz (2000)
- [Häf00b] H. Häffner, T. Beier, N. Hermanspahn, H.-J. Kluge, W. Quint, S. Stahl, J. Verdú and G. Werth;
High-Accuracy Measurement of the Magnetic Moment Anomaly of the Electron Bound in Hydrogenlike Carbon.
Phys. Rev. Lett., **85** , 5308 , (2000)
- [Häf03] H. Häffner, T. Beier, S. Djekić, N. Hermanspahn, H.-J. Kluge, W. Quint, S. Stahl, J. Verdú, T. Valenzuela and G. Werth;
Double Penning trap technique for precise g factor determinations in highly charged Ions.
Eur. Phys. J. D, **22** , 163 , (2003)
- [Hak81] H. Haken;
LIGHT I - Waves, Photons, Atoms.
North Holland, Amsterdam (1981)
- [Her96] N. Hermanspahn;
Aufbau eines Tieftemperaturkryostaten zum Betrieb einer Penningfalle.
Diplomarbeit, Universität Mainz (1996)

- [Her99] N. Hermanspahn;
Das magnetische Moment des gebundenen Elektrons in wasserstoffartigem Kohlenstoff C^{5+} .
Dissertation, Universität Mainz (1999)
- [Her00] N. Hermanspahn, H. Häffner, H.-J. Kluge, W. Quint, S. Stahl, J. Verdú and G. Werth;
Observation of the Continuous Stern-Gerlach Effect on an Electron Bound in an Atomic Ion.
Phys. Rev. Lett., **84** , 427 , (2000)
- [Hol00] R. Holzwarth, T. Udem, W. Hänsch, J. C. Knight, W. J. Wadsworth and P. St. J. Russell;
Optical Frequency Synthesizer for Precision Spectroscopy.
Phys. Rev. Lett., **85** , 2264 , (2000)
- [Hug99] V. W. Hughes, T. Kinoshita;
Anomalous g Values of the electron and Muon.
Rev. Mod. Phys., **71** , 133 , (1999)
- [Ita82] W. M. Itano and D. J. Wineland;
Laser cooling of ions stored in harmonic and Penning traps.
Phys. Rev. A, **25** , 35 , (1982)
- [Joh28] J. B. Johnson;
Thermal Agitation of Electricity in Conductors.
Phys. Rev., **32** , 97 , (1928)
- [Kin90] T. Kinoshita;
Theory of the anomalous magnetic moment of the electron - numerical approach.
Quantum Electrodynamics , T. Kinoshita (Ed.), World Scientific, Singapur (1990)
- [Kre99] M. Kretschmar;
A quantum mechanical model of Rabi oscillations between two interacting harmonic oscillator modes and the interconversion of modes in a Penning trap.
AIP Conference Proceedings , **457** , 242 , (1999)
- [Mal99] A. P. Malvino;
Electronic Principles, Sixth Edition .
Glencoe/McGraw-Hill, USA (1999)
- [Moh98] P. J. Mohr, G. Plunien and G. Soff;
QED corrections in heavy atoms.
Phys. Rep., **293** , 227 , (1998)
- [Nyq28] H. Nyquist;
Thermal Agitation of Electric Charge in Conductors.
Phys. Rev., **32** , 110 , (1928)

- [Pur46] E. M. Purcell;
Spontaneous Emmission Probabilities at radio Frequencies.
Phys. Rev., **69** , 681 , (1946)
- [Qui01] W. Quint et al.;
HITRAP: A Facility for High-Accuracy Experiments with Trapped Highly Charged Ions.
Hyperfine Interactions, **132** , 457 , (2001)
- [Sak85] J. J. Sakurai;
Modern Quantum Mechanics.
Addison-Wesley Publishing Company, Inc., USA (1985)
- [Sch01] F. Scheck;
Theoretische Physik 4, Quantisierte Felder.
Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, (2001)
- [Sch61] S. S. Schweber;
An Introduction to Relativistic Quantum Field Theory.
Row, Peterson and Company, Evanston IL, USA (1961)
- [Sch48] J. Schwinger;
On Quantum-Electrodynamics and the Magnetic Moment of the electron.
Phys. Rev. , **73** , 416 , (1948)
- [Sch49] J. Schwinger;
Quantum electrodynamics III. The electromagnetic properties of the electron-radiative corrections to scattering.
Phys. Rev. , **76** , 790 , (1949)
- [Sha02] V. M. Shabaev and V. A. Yerokhin;
Recoil Correction to the Bound-Electron g Factor in H-like Atoms to All orders in αZ .
Phys. Rev. Lett., **88** , 091801 , (2002)
- [Sta98] S. Stahl;
Aufbau eines Experimentes zur Bestimmung elektronischer g -Faktoren einzelner wasserstoffähnlicher Ionen.
Dissertation, Universität Mainz (1998)
- [Ver01] J. L. Verdú Galiana;
One experiment for the high precision measurement of the g_j -factor of the electron bound in hydrogenlike ions.
Diplomarbeit, Universität Mainz (2001)
- [Wei62] W. Weizel;
Physikalische Formelsammlung, Erster Band.
Bibliographisches Institut, Mannheim (1962)

- [Win75] D. J. Wineland and H. G. Dehmelt;
Principles of the stored ion calorimeter.
J. Appl. Phys., **46** , 919 , (1975)
- [Yer02] V. A. Yerokhin, P. Indelicato and V. M. Shabaev;
Self-Energy Correction to the Bound-Electron g Factor in H-like Ions.
Phys. Rev. Lett., **89** , 143001 , (2002)

