

## Bemerkungen zur Translog-Funktion und ihrer Schätzung

Von

ALEXANDER SCHIERJOTT, PETER M. SCHULZE\*

Angesichts der Energiepreissteigerungen der letzten Jahre und einem daraus resultierenden geänderten Nachfrageverhalten gibt es Bemühungen, nicht nur Energieaggregate in Produktionsfunktionen zu berücksichtigen, sondern auch Substitutionsprozesse zwischen den Produktionsfaktoren bzw. einzelnen Energieträgern zu quantifizieren.

Zur Abschätzung wird hierbei oft die Translog-Funktion benutzt. Deshalb soll im folgenden dieser Ansatz mit seinen Testmöglichkeiten skizziert werden und eine Darstellung verschiedener Schätzungen für die Bundesrepublik Deutschland erfolgen.

### 1. Translog-Funktion und Testmöglichkeiten

#### 1.1 Translog-Funktion

Für mehr als zwei Inputgüter sind Produktionsfunktionen vom Typ Cobb-Douglas oder CES zur Beschreibung der Produktionsstruktur kaum geeignet, da sie bezüglich der Substitutionselastizitäten ( $\sigma_{ij}$ ) restriktive Annahmen setzen. So sind die Elastizitäten bei den genannten Produktionsfunktionen für alle Faktorpaare identisch und konstant.

Diese recht weitgehende Einschränkung führte zur Entwicklung „flexibler“ Produktionsfunktionen, die zum einen als Verallgemeinerung der bis dahin verwendeten Funktionen anzusehen sind,<sup>1</sup> zum anderen eine approximative Be-

\* Institut für Statistik und Ökonometrie der Johannes Gutenberg-Universität, Haus Recht und Wirtschaft, 6500 Mainz 1.

1 Vgl. DIEWERT, W.E., An Application of the Shepard Duality Theorem: A Generalized Leontief Production Function, *Journal of Political Economy*, 79 (1971), S.497ff.; DERS., Applications of Duality Theory, in: INTRILIGATOR, M.D., KENDRICH, D.A. (eds.), *Frontiers of Quantitative Economics*, Vol.2, Amsterdam/Oxford/New York 1974, S.108ff.

stimmung der Produktionsstruktur über die Entwicklung einer Taylor-Reihe<sup>2</sup> vornehmen. Zu der zweiten genannten Möglichkeit gehört die Translog-Funktion, die von Christensen, Jorgenson und Lau entwickelt wurde.<sup>3</sup>

Hier lautet die Produktionsfunktion

$$(1) \quad \ln y = \alpha_0 + \sum_i \alpha_i \ln X_i + \frac{1}{2} \sum_i \sum_j \gamma_{ij} \ln X_i \ln X_j.$$

Unter der Voraussetzung vollständiger Konkurrenz ( $\partial y / \partial X_i = p_i$ ) ist der Kostenanteil für den Faktor  $X_i$  mit

$$(2) \quad N_i = \frac{\partial \ln y}{\partial \ln X_i} = \frac{\partial y}{\partial X_i} \cdot \frac{X_i}{y}$$

bzw.

$$(3) \quad N_i = \alpha_i + \sum_j \gamma_{ij} \ln X_j \quad \text{definiert.}$$

Im Vordergrund steht dann die Untersuchung der Nachfrage- und Substitutionselastizitäten, nicht nur mittels einer Produktionsfunktion, sondern auch mit der dualen Kostenfunktion,<sup>4</sup> die die optimale Faktornachfrage (in Abhängigkeit von den Faktorpreisen) wesentlich einfacher erfaßt.

Die duale Kostenfunktion sei

$$(4) \quad \ln K = \beta_0 + \beta_y \ln y + \sum_i \beta_i \ln p_i + \frac{1}{2} \delta_{yy} (\ln y)^2 + \frac{1}{2} \sum_i \sum_j \delta_{ij} \ln p_i \ln p_j + \sum_i (\delta_y)_i \ln y \ln p_i.$$

2 Die Expansion der Taylor-Reihe als Approximation für eine Produktionsfunktion  $\ln y = f(\ln X_1, \dots, \ln X_n)$  erfolgt in dem Punkt, in dem alle Inputfaktoren gleich 1 sind ( $X_i^* = 1$ ):

$$Z_i = \ln X_i; Z_i^* = \ln X_i^*; Z^* = (Z_1^*, \dots, Z_n^*)$$

$$\hat{y} = f(Z^*) + \sum \frac{\partial f}{\partial Z_i} \Big|_{Z^*} (Z_i - Z_i^*) + \frac{1}{2} \sum_i \sum_j \frac{\partial^2 f}{\partial Z_i \partial Z_j} \Big|_{Z^*} (Z_i - Z_i^*) (Z_j - Z_j^*)$$

$$\alpha_0 = f(Z^*); \alpha_i = \frac{\partial f}{\partial Z_i} \Big|_{Z^*}; \gamma_{ij} = \gamma_{ji} = \frac{\partial^2 f}{\partial Z_i \partial Z_j} \Big|_{Z^*} = \frac{\partial^2 f}{\partial Z_j \partial Z_i} \Big|_{Z^*}$$

Vgl. BURGESS, D.F., Production Theory and Derived Demand for Imports, *Journal of International Economics*, 4 (1974), S.107f.; DENNY, M., FUSS, M., The Use of Approximation Analysis to Test for Separability and the Existence of Consistent Aggregates, *The American Economic Review*, 67 (1977), S.406f.

3 Vgl. CHRISTENSEN, L.R., JORGENSON, D.W., LAU, L.J., Transcendental Logarithmic Production Frontiers, *The Review of Economic and Statistics*, 55 (1973), S.28ff.

4 Vgl. MCFADDEN, D., Cost, Revenue, and Profit Functions, in: FUSS, M., MCFADDEN, D. (eds.), *Production Economics: A Dual Approach to Theory and Applications*, Vol.1, Amsterdam/New York/Oxford 1978, S.19ff.

Für die Kosten  $k$  pro Outputeinheit lautet der Translog-Ansatz

$$(5) \quad \ln k = \beta_0 + \sum_i \beta_i \ln p_i + \frac{1}{2} \sum_i \sum_j \delta_{ij} \ln p_i \ln p_j,$$

mit dem Kostenanteil für den  $i$ -ten Faktor

$$(6) \quad S_i = \beta_i + \sum_j \delta_{ij} \ln p_j.$$

Die folgenden Ausführungen zu den Separabilitätsbedingungen gelten auch für eine solche Kostenfunktion.

Mit der Anwendung dieses Ansatzes ergibt sich zunächst die Frage, ob die Translog-Funktion die Annahmen einer neoklassischen Produktionsfunktion erfüllt, denn es ist a priori nicht sichergestellt, daß es sich um eine monoton steigende, konvexe Funktion (konkav für die Kostenfunktion) handelt und wenn, dann nur mit einem eingeschränkten Wertebereich.<sup>5</sup>

Ohne weitere Parameterrestriktionen ist mit dem Translog-Ansatz die Darstellung einer nicht-homothetischen Produktionsfunktion möglich. Durch weitere a priori-Restriktionen können Homothetizität bzw. lineare Homogenität berücksichtigt werden. Im Unterschied zu einer Cobb-Douglas- oder CES-Funktion sind die Substitutionselastizitäten bei mehr als zwei Produktionsfaktoren paarweise unterschiedlich.

### 1.2 Testmöglichkeiten

Bisher wurde nur erwähnt, daß a priori die Translog-Funktion (Produktionsfunktion) die globalen Bedingungen (Regularitätsbedingungen) einer monoton steigenden Funktion mit zum Ursprung konvexen Isoquanten nicht erfüllt.

Bei empirischen Untersuchungen sollten zunächst die globalen Bedingungen einer well behaved-Produktionsfunktion ex post geprüft werden. Die Bedingungen sind für eine bestimmte Stichprobe erfüllt, wenn die geschätzten Kostenanteile positive Werte besitzen und eine negativ-semidefinite Hesse-Matrix vorliegt. Nur unter diesen Voraussetzungen ist eine produktionstheoretisch sinnvolle Funktionalbeziehung definiert.<sup>6</sup> Außerdem muß die Symmetrieeigenschaft  $\gamma_{ij} = \gamma_{ji}$  erfüllt sein.<sup>7</sup> Dann ist der Translog-Ansatz als Approximation zweiter Ordnung für eine beliebige Produktionsfunktion der Form

$$(7) \quad \ln y = f(\ln X_1, \dots, \ln X_n)$$

zu verstehen.

Treten neben die Symmetriebedingung  $\gamma_{ij} = \gamma_{ji}$  die Adding-up-Bedingungen

$$\sum_i \alpha_i = 1 \quad \text{und} \quad \sum_i \gamma_{ij} = 0,$$

so ist die Translog-Funktion eine Approximation für eine linear-homogene Produktionsfunktion mit konstanten Skalenerträgen oder eine Approximation für eine entsprechende Kostenfunktion, die linear-homogen in bezug auf die Faktorpreise ist. Gleichzeitig sind damit die Bedingungen für Gewinnmaximierung bei vollständiger Konkurrenz erfüllt.<sup>8</sup>

Aus den drei oben genannten Bedingungen folgt  $\sum_j \gamma_{ij} = 0$ .

Untersuchungen nur aggregierter Produktionsfaktoren bedeuten weitgehende Separabilitätsrestriktionen, die im weiteren für den Fall von drei bzw. vier Produktionsfaktoren  $X_1, X_2, X_3, X_4$  erläutert werden.

Mit der Frage, ob es sich bei der Translog-Funktion um die tatsächliche (wahre) Funktion oder ob es sich um eine Approximation für eine beliebige logarithmische Funktion handelt, sind Auswirkungen auf die Form der Restriktionen verbunden. Da die erste Möglichkeit eine starke Einschränkung der Gültigkeit bedeutet, soll hier die Translog-Funktion als Approximation angesehen werden.<sup>9</sup>

Neben dieser Vorbedingung muß die Annahme der schwachen (weak) und starken (strong) Separabilität unterschieden werden.

Ist die Produktionsfunktion schwach separierbar, kann sie also in der Form

$$(8) \quad \ln y = f(G(\ln X_1, \ln X_2), \ln X_3)$$

betrachtet werden, muß die Restriktion  $\alpha_1 \gamma_{23} - \alpha_2 \gamma_{13} = 0$  erfüllt sein. Für die Substitutionselastizität bedeutet dies

$$\sigma_{13} = \sigma_{23}.$$

8 Vgl. ZWEIFEL, P., Die Translog-Näherung einer beliebigen Transformationskurve: Darstellung und Kritik, Jahrbücher für Nationalökonomie und Statistik, 193 (1978), S. 460 ff.

9 Zu den Restriktionen, die sich aus der ersten Möglichkeit ergeben, vgl. CHRISTENSEN, L.R., JORGENSEN, D.W., LAU, L.J., a.a.O., S.33 ff.; BERNDT, E.R., CHRISTENSEN, L.R., Testing for the Existence of a Consistent Aggregate Index of Labor Inputs, The American Economic Review, 64 (1974), S.393 ff.; BERNDT, E.R., WOOD, D.O., Technology, Prices and the Derived Demand for Energy, The Review of Economics and Statistics, 57 (1975), S.265 ff.; zur zweiten Möglichkeit vgl. DENNY, M., FUSS, M., a.a.O., S.406 ff.

Die Separabilitätsbedingungen gelten analog auch für eine duale Kostenfunktion.

5 Vgl. BERNDT, E.R., CHRISTENSEN, L.R., The Translog Function and the Substitution of Equipment, Structures, and Labor in U.S. Manufacturing 1929-68, Journal of Econometrics, 1 (1973), S.84 f.

6 Vgl. CAVES, D.W., CHRISTENSEN, L.R., Global Properties of Flexible Functional Forms, The American Economic Review, 70 (1980), S.423 ff.

7 Vgl. SIMMONS, P., WEISERBS, D., Translog Flexible Functional Forms and Associated Demand System, The American Economic Review, 69 (1979), S.894 f.

Bei einer Produktionsfunktion mit vier Faktoren<sup>10</sup>, also

$$(9) \quad \ln y = f(G(\ln X_1, \ln X_2), \ln X_3, \ln X_4),$$

sind für schwache Separabilität die Bedingungen

$$(*) \quad \begin{aligned} \alpha_1 \gamma_{23} - \alpha_2 \gamma_{13} &= 0 \\ \alpha_1 \gamma_{24} - \alpha_2 \gamma_{14} &= 0 \end{aligned}$$

zu beachten. Für die Substitutionselastizitäten folgt dann

$$\sigma_{13} = \sigma_{23} \quad \text{und} \quad \sigma_{14} = \sigma_{24}$$

oder allgemein

$$\sigma_{jk} = \sigma_{ik} \quad (i, j \in N_s, k \notin N_s).^{11}$$

Soll ein Produktionsfaktor in seine Komponenten disaggregiert und die Faktorzusammensetzung je Outputseinheit untersucht werden,<sup>12</sup> muß neben dieser notwendigen Bedingung der schwachen Separabilität die hinreichende Bedingung gelten, daß die Höhe des Gesamtaggregates für die Zusammensetzung dieses Aggregates keine Rolle spielt, das Gesamtaggregat also in seinen Komponenten homothetisch ist.

Bei der Annahme einer linear-homogenen Produktionsfunktion sind jedoch die Bedingungen für schwache Separabilität und schwache homothetische Separabilität identisch.<sup>13</sup>

Bei einer partiell stark separierbaren Produktionsfunktion

$$(10) \quad \ln y = G(\ln X_1, \ln X_2) + H(\ln X_3)$$

muß  $\gamma_{13} = \gamma_{23} = 0$  sein.

Für die allgemeinere Form

$$(11) \quad \ln y = F(G(\ln X_1, \ln X_2) + H(\ln X_3))$$

10 Für den allgemeinen Fall ( $n$  Produktionsfaktoren) vgl. BLACKORBY, C., PRIMONT, D., RUSSEL, R. R., On Testing Separability Restrictions with Flexible Functional Forms, *Journal of Econometrics*, 5 (1977), S. 198 ff.

11 Es seien  $N = \{1, \dots, n\}$  Inputgüter (Preise), die in  $s$  Gruppen unterteilt werden:  $N = \{N_1, \dots, N_t, \dots, N_s\}$ ;  $N = N_1 \cup N_2 \cup \dots \cup N_s$ ,  $N_t \cap N_s = \emptyset$  für  $t \neq s$ .

12 Vgl. unten S. 199 ff.

13 Vgl. DENNY, M., FUSS, M., a. a. O., S. 408.

sind bei zwei Gruppen die Bedingungen der schwachen und der partiell starken Separabilität identisch. Für mehr als zwei Gruppen, z. B.

$$(12) \quad F(G(\ln X_1, \ln X_2) + H(\ln X_3) + J(\ln X_4))$$

sind neben den Restriktionen (\*) zusätzlich

$$(**) \quad \begin{aligned} \alpha_2 \gamma_{34} - \alpha_3 \gamma_{24} &= 0 \\ \alpha_1 \gamma_{34} - \alpha_4 \gamma_{13} &= 0 \end{aligned}$$

notwendig.

Damit ergibt sich

$$\sigma_{14} = \sigma_{34} = \sigma_{24} \quad \text{und} \quad \sigma_{13} = \sigma_{43} = \sigma_{23}$$

bzw. - da  $\sigma_{34} = \sigma_{43}$  -

$$\sigma_{14} = \sigma_{34} = \sigma_{24} = \sigma_{13} = \sigma_{23}$$

oder allgemein

$$\sigma_{jk} = \sigma_{ik} \quad (i \in N_s, j \in N_t, k \in N_s \cup N_t).$$

Durch Prüfung weiterer Restriktionen kann der Translog-Ansatz zur Approximation einer CES-Funktion und Cobb-Douglas-Funktion verwendet werden:

Eine vollständig stark separable Produktionsfunktion der Form

$$(13) \quad \ln y = f(G_1(\ln X_1) + G_2(\ln X_2) + G_3(\ln X_3))$$

ist durch die Bedingung der paarweise gleichen Substitutionselastizitäten, also im Beispiel durch  $\sigma_{13} = \sigma_{23} = \sigma_{12}$ , impliziert. Für eine vollständig stark separable Funktion sind die folgenden Restriktionen zu testen:

$$(***) \quad \begin{aligned} \alpha_1 \gamma_{23} - \alpha_2 \gamma_{13} &= 0 \\ \alpha_1 \gamma_{23} - \alpha_3 \gamma_{12} &= 0 \end{aligned}$$

und implizit

$$\alpha_2 \gamma_{13} - \alpha_3 \gamma_{12} = 0.$$

Bei einer linear-homogenen Produktionsfunktion sind - analog den Ausführungen zur schwachen Separabilität - die Bedingungen für vollständige starke Separabilität und vollständige starke homothetische Separabilität identisch.

Gelten diese Bedingungen gemeinsam mit den Adding-up-Bedingungen

$$\sum_i \alpha_i = 1, \sum_i \gamma_{ij} = 0,$$

so ist die linear-homogene Translog-Funktion eine Approximation der CES-Funktion.

Ist außerdem  $\gamma_{12} = \gamma_{13} = 0$ , handelt es sich um eine Approximation der Cobb-Douglas-Funktion

$$(14) \quad \ln y = \alpha_0 + \alpha_1 \ln X_1 + \alpha_2 \ln X_2 + \alpha_3 \ln X_3.$$

Durch die geschilderten Restriktionsmöglichkeiten zeigen sich auch die Vorteile des Translog-Ansatzes: Anstatt durch die funktionale Form (Cobb-Douglas-Funktion, CES-Funktion) bestimmte Eigenschaften a priori vorzugeben, besteht die Möglichkeit, diese Eigenschaften bei empirischen Untersuchungen zu testen. Deshalb wird der Translog-Ansatz verstärkt für empirische Analysen verwendet. Die Anwendungsbereiche sollen im folgenden kurz erläutert werden.

## 2. Anwendungsbereiche

Bei Anwendung der Translog-Funktion können Produktionsfunktionen mit mehr als zwei hoch aggregierten Produktionsfaktoren betrachtet werden, ohne a priori restriktive Annahmen für die Substitutionselastizitäten zu treffen.

Dann besteht die Möglichkeit, einen Produktionsfaktor isoliert zu untersuchen, in einzelne Subaggregate aufzuspalten und die Zusammensetzung eines Faktors zu bestimmen.

Schließlich lassen sich beide Ansätze miteinander verknüpfen.

### 2.1 Aggregierte Produktionsfaktoren

Es sei

$$(15) \quad y = F(C, L, E, M)$$

eine Produktionsfunktion mit den aggregierten Produktionsfaktoren Kapital ( $C$ ), Arbeit ( $L$ ), Energie ( $E$ ), Roh-, Hilfs- und Zwischenprodukten ( $M$ ).

Die duale Kostenfunktion

$$(16) \quad K = G(y, p_C, p_L, p_E, p_M)$$

zeigt die Abhängigkeit der Kosten von Output  $y$  und den Faktorpreisen  $p_C, p_L, p_E, p_M$ .

Häufig wird für empirische Untersuchungen dann die Annahme einer homothetischen Kostenfunktion getroffen, so daß die Kosten lediglich von den Faktorpreisen und nicht mehr von dem Produktionsniveau  $y$  abhängen.

Werden in empirischen Untersuchungen nur aggregierte Faktoren benutzt, bedeutet dies implizit die Annahme der schwachen Separabilität. Nur dann ist die Produktionsfunktion in ihren Faktoren konsistent aggregierbar, da die Zusammensetzung jedes Aggregates unabhängig von der Zusammensetzung der anderen Aggregate ist.<sup>14</sup> Hierzu sind in letzter Zeit zahlreiche Untersuchungen erschienen.<sup>15</sup>

Für die Bundesrepublik Deutschland wurden empirische Untersuchungen von Friede, Griffin/Gregory und Pindyck<sup>16</sup> durchgeführt. Friede geht in seiner Analyse von einer Translog-Preisfunktion (Kostenfunktion) aus, die linear-homogen ist und die Symmetrieeigenschaften durch Vorgabe der entsprechenden Parameterrestriktionen erfüllt. Die geschätzte Kostenfunktion bezieht sich auf vier Produktionsfaktoren Kapital, Arbeit, Energie, Roh-, Hilfs- und Zwischenprodukte für den Zeitraum von 1954–1967.<sup>17</sup>

Die Substitutions- und Preiselastizitäten lassen sich für jedes Jahr berechnen.<sup>18</sup> Um seine Ergebnisse mit denen von Berndt und Wood (USA) vergleichen

14 Vgl. BERNDT, E. R., CHRISTENSEN, L. R., The Internal Structure of Functional Relationships: Separability, Substitution, and Aggregation, *The Review of Economic Studies*, 50 (1973), S. 403 ff.

Diese Aussage trifft nur zu, wenn die Leontiefsche bzw. Hickssche Aggregationsbedingung nicht gilt. Vgl. FUSS, M. A., Demand for Energy in Canadian Manufacturing, *Journal of Econometrics*, 5 (1977), S. 91; BERNDT, E. R., WOOD, D. O., a. a. O., S. 265.

15 Vgl. z. B. TURNOVSKY, H. L., DONNELLY, W. A., Energy Substitution, Separability, and Technical Progress in the Australian Iron and Steel Industry, *Journal of Business & Economic Statistics*, 2 (1984), S. 54 ff.; DENNY, M., MAY, D., The Existence of a Real Value-Added Function in the Canadian Manufacturing Sector, *Journal of Econometrics*, 5 (1977), S. 55 ff.; DARGAY, J. M., The Demand for Energy in Swedish Manufacturing Industries, *Scandinavian Journal of Economics*, 85 (1983), S. 37 ff.; GAROFALO, G. A., MALHOTRA, D. M., Input Substitution in the Manufacturing Sector during the 1970's: A Regional Analysis, *Journal of Regional Science*, 24 (1984), S. 51 ff.

16 Vgl. FRIEDE, G., Investigation of Producer Behavior in the Federal Republic of Germany Using the Translog Price Function, Königstein/Cambridge 1980, S. 73 ff.; GRIFFIN, J. M., GREGORY, P. R., An Intercountry Translog Model of Energy Substitution Responses, *The American Economic Review*, 66 (1976), S. 845 ff.; PINDYCK, R. S., Interfuel Substitution and the Industrial Demand for Energy: An International Comparison, *The Review of Economics and Statistics*, 61 (1979), S. 169 ff. Da PINDYCK die Kostenfunktion über zwei Stufen schätzt, erfolgt die Darstellung der Ergebnisse in Abschnitt 2.3.

17 Unter Berücksichtigung des technischen Fortschritts schätzt FRIEDE die Kostenfunktion nach der Gauss-Newton-Methode.

18 Die Substitutions- und Preiselastizitäten können nach der Definition von ALLEN aus der Produktionsfunktion (1) und ihren Anteilsgleichungen (2) abgeleitet werden. Vgl. zu einer solchen Vorgehensweise z. B. HUMPHREY, D. B., MORONEY, J. R., Substitution among Capital, Labor, and Natural Resource Products in American Manufacturing, *Journal of Political Economy*, 83 (1975), S. 61 ff.

zu können, bezieht Friede die aufgeführten Elastizitäten auf die Jahre 1954, 1962 und 1967 im Vergleich zu 1953 und 1971 für die USA. Die Limitierung des Zeitraumes 1954–1967 für die Schätzung ergibt sich aus der Verfügbarkeit der Daten.

Griffin/Gregory betrachten die Substitutionsbeziehung zwischen drei Inputfaktoren Kapital, Arbeit und Energie. Außerdem gewinnen sie die Daten aus einer Kombination von Längs- und Querschnittswerten.<sup>19</sup> Die geschätzten Preiselastizitäten der erwähnten Untersuchungen sind für die Bundesrepublik Deutschland in Tab. 1 aufgeführt:

Tab. 1: Eigenpreiselastizitäten für die Bundesrepublik Deutschland<sup>20</sup>

		$\eta_{CC}$	$\eta_{LL}$	$\eta_{EE}$	$\eta_{MM}$
Friede	1954	-0,38	-0,66	-0,45	-0,23
	1962	-0,40	-0,65	-0,40	-0,24
	1967	-0,40	-0,64	-0,35	-0,24
Griffin/Gregory	1965	-0,36	-0,27	-0,80	-

Die geschätzten Preiselastizitäten sind negativ, was auch aus ökonomischer Sicht plausibel erscheint. Sie zeigen zwar für beide Untersuchungen relativ unelastische Reaktionen, die geschätzten Werte weisen jedoch deutliche Unterschiede auf.

Auch bei den Substitutionselastizitäten (Tab. 2) ergeben sich Unterschiede der geschätzten Werte.

Jedoch muß hier die unterschiedliche Vorgehensweise bei der Datenimplementierung beachtet werden, da Griffin/Gregory die Stichprobe – wie erwähnt –

Aus der dualen Kostenfunktion ist eine einfachere Berechnung der Elastizitäten möglich:

$$\sigma_{ij} = \frac{\delta_{ij} + S_i S_j}{S_i S_j} \text{ und } \sigma_{ii} = \frac{\delta_{ii} + S_i (S_i - 1)}{S_i^2}$$

$\delta_{ij}$ ,  $\delta_{ii}$ ,  $S_i$ ,  $S_j$  sind geschätzte Größen.

Vgl. UZAWA, H., Production Functions with Constant Elasticities of Substitution, The Review of Economic Studies, 29 (1962), S. 292; SHEPARD, R. W., Theory of Cost and Production Functions, Princeton/New York, 2. ed., 1970, S. 169 ff.

Die Preiselastizitäten ergeben sich aus den Substitutionselastizitäten und geschätzten Kostenanteilen:

$$\eta_{ii} = \sigma_{ii} S_i \text{ und } \eta_{ij} = \sigma_{ij} S_j;$$

vgl. BERNDT, E. R., WOOD, D. O., a. a. O., S. 261.

19 Vgl. GRIFFIN, J. M., GREGORY, P. R., a. a. O., S. 850.

Die Schätzung der Kostenfunktion und der entsprechenden Anteilsgleichungen erfolgt nach der Iterativen Zellner-Methode. Vgl. KMENTA, J., GILBERT, R. F., Small Sample Properties of Alternative Estimators of Seemingly Unrelated Regressions, Journal of the American Statistical Association, 63 (1968), S. 1191 ff.

20 Vgl. FRIEDE, G., a. a. O., S. 78; GRIFFIN, J. M., GREGORY, P. R., a. a. O., S. 852.

Tab. 2: Substitutionselastizitäten für die Bundesrepublik Deutschland

		$\sigma_{CE}$	$\sigma_{LE}$	$\sigma_{CL}$	$\sigma_{EM}$	$\sigma_{CM}$	$\sigma_{LM}$
Friede	1954	1,11	0,38	1,08	0,35	0,15	0,83
	1962	1,11	0,37	1,07	0,26	0,17	0,84
	1967	1,13	0,34	1,07	0,18	0,15	0,84
Griffin/Gregory	1965	1.03	0,78	0,50	-	-	-

aus einem pooling-data-set gewinnen, während Friede eine Zeitreihe für die Bundesrepublik Deutschland verwendet. Die Koeffizienten sind nicht direkt vergleichbar, da durch die „gepoolten“ Daten langfristige Effekte in den Vordergrund treten.

Außerdem betrachten Griffin/Gregory die Beziehungen zwischen drei Faktoren, während Friede noch zusätzlich den Faktor Roh-, Hilfs- und Zwischenprodukte einbezieht.

Insgesamt erscheint wegen unterschiedlicher Spezifikation, differierender Datenmaterials und unterschiedlicher Zeiträume der Schätzungen ein genauere Vergleich nicht möglich.

## 2.2 Beziehungen zwischen Subaggregaten

Neben der Anwendung des Translog-Ansatzes auf mehrere Produktionsfaktoren kann auch ein einzelnes Aggregat, z. B. Energie, in Subaggregate (Öl, Kohle, Strom, Gas) aufgespalten werden. Dann betrachtet man die Beziehungen zwischen den Subaggregaten unabhängig von dem Gesamttaggregat Energie, aber auch unabhängig von den anderen Aggregaten – in dem oben genannten Beispiel unabhängig von den Produktionsfaktoren Arbeit, Kapital und Roh-, Hilfs- und Zwischenprodukten. Die Untersuchung eines solchen „Submodells“ erfordert die Annahme der schwachen Separabilität und Homothetizität. Die Zusammensetzung des Energieaggregates ist dann unabhängig von der Zusammensetzung der anderen Aggregate und unabhängig von der Gesamtenergiemenge.

Diese Vorgehensweise wird besonders häufig für das Energieaggregat angewendet, da sich sowohl durch die zeitliche Entwicklung der Energiepreise als auch – bei sektoraler Betrachtung – zwischen den einzelnen Sektoren meistens deutliche Unterschiede zeigen.

Wir beschränken uns in Tab. 3 auf die Darstellung der Ergebnisse für die Bundesrepublik Deutschland von Friede (Spalten A) und Hippmann et al. (Spalten B).<sup>21</sup>

21 Vgl. FRIEDE, G., a. a. O., S. 91; HIPPMANN, H.-D., SCHIERJOTT, A., SCHULZE, P. M., Preiselastizitäten der Energienachfrage. Eine ökonometrische Analyse für verschiedene Wirtschaftszweige der Bundesrepublik Deutschland, Jahrbuch für Sozialwissenschaft,

Tab. 3: Eigenpreiselastizitäten für das Jahr 1962

	$\eta_{11}$		$\eta_{22}$		$\eta_{33}$		$\eta_{44}$
	1 $\hat{=}$ Gas		2 $\hat{=}$ Kohle		3 $\hat{=}$ Öl		
	A	B	A	B	A**	B	A
Chemische Industrie*	0,95	- 3,689	-3,26	-1,181	-0,63	-1,881	-0,83
Stahl u. Leichtmetall*	-0,04	- 2,065	-1,34	-1,28	-0,66	-0,639	-1,49
Maschinenbau*	-4,73	- 2,337	-4,36	-2,164	-1,37	-1,417	-2,31
Elektrotechnik*	-0,99	- 2,881	-8,08	-2,267	-2,22	-1,209	-3,23
Nahrungs- u. Genußmittel*	-3,15	-12,214	-4,13	-2,140	-0,79	-1,417	-1,42
					-1,23		

\* Für diese Sektoren sind die Schätzungen aus der Input-Output-Tab. nach Friede vergleichbar.

\*\* Friede spaltet den Ölverbrauch in Rohöl und Raffinerieöl auf.

Für die Beurteilung der recht unterschiedlichen Ergebnisse sind die differierenden Schätzmethoden – nicht-linearer Ansatz bei Friede und iteratives Zellner-Verfahren bei Hippmann et al. – wohl weniger entscheidend als vielmehr die zugrundeliegenden Daten und der Untersuchungszeitraum.

So wurde Erdgas nach 1959 eingeführt, und die Einführung kann erst mit 1970 als abgeschlossen betrachtet werden. Gleichzeitig ist die Verwendung von Kohle zurückgegangen.

Da sich die Preiselastizitäten aus den Substitutionselastizitäten und geschätzten Anteilen zusammensetzen, ist mit einem hohen geschätzten Kostenanteil auch eine hohe Elastizität verbunden.

Aus der Berechnung der Substitutionselastizität ist aber zu ersehen, daß bei einem sehr kleinen Kostenanteil, wie es z. B. bei Einführung von Erdgas Anfang der 60er Jahre der Fall war, die Substitutionselastizität gegen unendlich geht, so daß mit kleinem Kostenanteil die Elastizität in der Regel hoch und bei einem großen Kostenanteil eher niedrig geschätzt wird.

Mit den Energiepreisen werden die Parameter  $\delta_{ii}$  (bzw.  $\delta_{ij}$ ) geschätzt. Schon hier gibt es deutliche Unterschiede durch die Erfassung der Preisbewegungen in den 70er Jahren in der Untersuchung von Hippmann et al.

33 (1982), S. 139 ff. Die in Tab. 3 aufgeführten Ergebnisse für das Jahr 1962 basieren auf dem in der letztgenannten Untersuchung verwendeten Datenmaterial für einen Zeitraum von 1960–1980.

Die Ergebnisse von PINDYCK werden nicht berücksichtigt, da es sich nicht um nach Sektoren aufgliederte Daten und um einen zweistufigen Ansatz handelt, vgl. Abschnitt 2.3.

Zu dem direkten Vergleich der beiden Untersuchungen ist auch auf die unterschiedliche Anzahl der betrachteten Subaggregate hinzuweisen. Während bei Friede fünf Energieträger das Aggregat bilden, wurden bei der Analyse von Hippmann et al. aus Mangel an verfügbaren Daten die Elastizitäten für drei Energieträger geschätzt. Eine solche Vorgehensweise ist jedoch nur möglich, wenn wieder schwache Separabilität zwischen den drei Energieträgern Kohle, Gas und Öl einerseits und Strom andererseits unterstellt wird. Diese Hypothese kann jedoch angesichts der sehr engen Substitutionsbeziehungen angezweifelt werden. Der relative Kostenanteil jedes Subaggregates wird als zu hoch ausgewiesen, Anteilsverschiebungen durch Strom werden nicht berücksichtigt.

Damit soll verdeutlicht werden, daß die Schätzergebnisse außerordentlich sensibel auf die Auswahl des Zeitraumes und die Auswahl der betrachteten Subaggregate reagieren.

Neben den beiden schon genannten Ansätzen zur Energienachfrage in der Bundesrepublik Deutschland ist noch die Untersuchung von Gottwald<sup>22</sup> zu erwähnen. Hier wird nicht die optimale Faktornachfrage geschätzt, sondern die durchaus realistische Hypothese einer verzögerten Anpassung unterstellt. Die dargestellte Lag-Verteilung und ihre Interpretation als Koyck-Verteilung durch Gottwald sind jedoch nicht miteinander zu vereinbaren, denn es werden die Prozesse aller betrachteten Energieträger simultan als lag-erzeugende Funktion betrachtet. Die Gewichte sind dann nicht mehr geometrisch abnehmend wie bei der Koyckschen Lag-Verteilung.

Da die meisten Koeffizienten der Kostenfunktion bzw. Kostenanteile nicht signifikant sind und insbesondere die lag-Variablen teilweise unplausible Parameterwerte ( $> 1$ ) aufweisen, liegt die Vermutung nahe, daß die Schätzergebnisse der Elastizitäten nicht gesichert sind.

### 2.3 Mengen- oder Preisindex als Instrumentvariable

Bisher wurde die Schätzung einer Funktion mit aggregierten Produktionsfaktoren und die Schätzung eines Submodells, also Disaggregation eines einzelnen Faktors, getrennt gesehen. Aber hier bietet sich die Möglichkeit, beide Ansätze miteinander zu verbinden.<sup>23</sup>

22 Vgl. GOTTWALD, D., Die Energienachfrage ausgewählter Sektoren des verarbeitenden Gewerbes in der Bundesrepublik Deutschland, Zeitschrift für Energiewirtschaft, 7 (1983), S. 262 ff.

23 Vgl. FUSS, M. A., a. a. O., S. 96 ff.; LESIUS, P. J. J., MULLER, F., NIJKAMP, P., Operational Methods for Strategic Environmental and Energy Policies, in: LAKSHMANAN, T. R., NIJKAMP, P. (eds.), Economic-Environmental-Energy Interactions. Modeling and Policy Analysis, Boston/The Hague/London 1980, S. 44 ff.; PINDYCK, R. S., a. a. O., S. 174 ff.

Die Produktionsfunktion  $y = F(C, L, E, M)$  zeigt nur aggregierte Produktionsfaktoren. Implizit werden konsistente Aggregationsfunktionen der Form

$$C = S_1(C_1, \dots, C_c), L = S_2(L_1, \dots, L_l), E = S_3(E_1, \dots, E_m), \\ M = S_4(M_1, \dots, M_r)$$

unterstellt. Die Indices kennzeichnen die jeweiligen Subaggregate.

Oben wurde schon erwähnt, daß bei einer Betrachtung der aggregierten Produktionsfaktoren die Bedingung der schwachen Separabilität erfüllt sein muß, damit eine konsistente Aggregation möglich ist. Geht man einen Schritt weiter und fordert, daß die Aggregate bezüglich ihrer Subaggregate homothetisch sind und keine Skaleneffekte vorliegen, kann eine zweistufige Optimierungstrategie angewendet werden: Zunächst ist jedes Aggregat hinsichtlich seiner optimalen Zusammensetzung zu untersuchen. In einem zweiten Schritt erfolgt die Bestimmung der Größe jedes Aggregates. Diese zweistufige Vorgehensweise bietet sich insbesondere dann an, wenn ein aggregierter Mengen- oder Preisindex für das Modell nicht verfügbar ist bzw. die Preisgröße endogenisiert werden soll. Durch die Schätzung des Submodells, entweder

$$E = S_3(E_1, \dots, E_m) \text{ für die Produktionsfunktion oder} \\ p_E = G_3(p_1, \dots, p_m) \text{ für die Kostenfunktion,}$$

ist die Zusammensetzung und damit der Index von Mengen ( $E$ ) oder Preisen ( $p_E$ ) der Subaggregate abhängig. Fuss bezeichnet die geschätzten Indices  $\hat{E}$  bzw.  $\hat{p}_E$  als Instrumentvariablen für das Makromodell.<sup>24</sup>

Pindyck wendet die zweistufige Vorgehensweise zur Berechnung der Preis- und Substitutionselastizitäten einiger Industrieländer an. Die zur Schätzung benutzten Daten bestehen aus kombinierten Quer- und Längsschnittrihen. Das Submodell enthält vier Energieträger, das Gesamtmodell die drei Produktionsfaktoren Kapital, Arbeit und Energie. Die Preiselastizitäten sind für den Mittelwert aller geschätzten Anteilswerte berechnet, erfassen also langfristige Reaktionen auf Preisänderungen.

Tab. 4: Preiselastizitäten für die Bundesrepublik Deutschland

Submodell	$\eta_{11} = -2,31$	$\eta_{22} = -1,09$	$\eta_{33} = 0,03$	$\eta_{44} = -0,12$
Gesamtmodell	$\eta_{CC} = -0,29$	$\eta_{LL} = -0,47$	$\eta_{EE} = -0,85$	

Auch hier scheint ein Vergleich mit den anderen, schon genannten Untersuchungen wegen der unterschiedlichen betrachteten Zeiträume und Daten kaum sinnvoll.

24 Vgl. Fuss, M. A., a. a. O., S. 96.

### 3. Schlußbemerkungen

Die Spezifizierung der Produktionsfunktion und die Erklärung der Produktionsstruktur mit Hilfe des Translog-Ansatzes ist nicht unumstritten. So kommt etwa Kouvaritakis nach einem Vergleich mehrerer Ansätze zu dem Schluß, daß das Translog-Modell keine guten Ergebnisse liefert.<sup>25</sup> Sicherlich kann die Translog-Funktion nicht als einziger Ansatz zur Erklärung der Produktionsstruktur gelten. Auch von der theoretischen Grundlage her bestehen zahlreiche Probleme, die z. B. die Dualität von Produktions- und Kostenfunktion,<sup>26</sup> die Durchführung von Tests der Restriktionen,<sup>27</sup> bei Schätzung der Produktions- oder Kostenfunktion die hohe Anzahl der Parameter<sup>28</sup> und die genaue Definition und Interpretation der Elastizitäten<sup>29</sup> betreffen. Bleibt man sich dieser Fragen bewußt, ist die Anwendung der Translog-Funktion sicherlich zu rechtfertigen oder man zieht sich als Konsequenz – besonders in Hinblick auf die praktische Anwendung – auf einfachere Modelle zurück.

Aber ungeachtet der Entscheidung, einen noch weitergehenden oder einfacheren Ansatz zur Bestimmung der Produktionsstruktur zu wählen, müssen das Datenmaterial, der Zeitraum, für den die Daten vorliegen, und die Maßeinheiten der Daten geprüft werden.

Die Frage, was überhaupt gemessen werden soll – kurzfristige, langfristige oder durchschnittliche Elastizitäten –, läßt sich nur in Verbindung mit der genauen Datenbeschaffenheit und dem theoretischen Modell lösen.

25 Vgl. KOUVARITAKIS, N., Energienachfrage-Elastizitäten: eine Synthese der Veröffentlichungen zu diesem Thema, in: KOMMISSION DER EUROPÄISCHEN GEMEINSCHAFT (Hrsg.), Europäische Wirtschaft, 16 (1983), S. 76.

26 Vgl. BURGESS, D. F., Duality Theory and Pitfalls in the Specification of Technologies, Journal of Econometrics, 3 (1975), S. 105 ff.

27 Vgl. GALLANT, A. R., On the Bias in Flexible Functional Forms and an Essentially Unbiased Form: The Fourier Flexible Form, Journal of Econometrics, 15 (1981), S. 233 ff.

28 Vgl. ZWEIFEL, P., a. a. O., S. 452 ff.

29 Kurzfristige Preiselastizitäten können z. B. bei Jahresdaten für jedes Jahr berechnet werden. Langfristige Elastizitäten lassen sich durch Kombination von Längs- und Querschnittsdaten ermitteln, ebenso durch Berücksichtigung etwa partieller Anpassungsprozesse (Koyck- oder Almon-Lagverteilung). Vgl. auch zur Unterscheidung von Brutto- und Nettoelastizität BERNDT, E. R., WOOD, D. O., Engineering and Econometric Interpretations of Energy-Capital Complementarity, The American Economic Review, 69 (1979), S. 344 ff.

### Summary

Changes in energy prices in the seventies and the response of demand behavior to these changes have led to estimations of production-functions with an energy-aggregate in addition to the typical factors of capital and labour. Then the substitution processes within and between the energy aggregate and the other production factors are analysed.

These analyses often use the translog-function and therefore, this approach and its possibilities of testing are shortly discussed. Furthermore, different estimations for the Federal Republik of Germany are compared.