Die Fortsetzbarkeit von Differentialformen auf arithmetischen Quotienten von hermiteschen symmetrischen Räumen

Von *Klaus Pommerening* in Mainz

Einleitung

Sei D ein hermitescher symmetrischer Raum vom nichtkompakten Typ, also isomorph zu einem beschränkten symmetrischen Gebiet. Auf D operiere eine diskontinuierliche Gruppe Γ, die arithmetisch definierbar ist. Der Quotientenraum D/Γ läßt sich als Zariski-offener Teil in seine Baily-Borel-Kompaktifizierung X_Γ einbetten, die eine normale projektive Varietät ist. Der Funktionenkörper K von X_Γ ist der Körper der automorphen Funktionen für Γ auf D [4].

Sei X ein glattes projektives Modell von K, das den regulären Ort X_Γ^{reg} von X_Γ als Zariski-offenen Teil enthält. Der Vektorraum $\Omega^p(X)$ der alternierenden holomorphen Differentialformen vom Grad p ist endlich-dimensional und seine Dimension g_p eine birationale Invariante von K. Jede solche Differentialform liefert durch Einschränkung eine Differentialform auf dem regulären Ort von D/Γ, also eine Γ-invariante Differentialform ω auf D; diese ist zwar zunächst auf dem Urbild des singulären Orts von D/Γ nicht definiert, da aber D/Γ normal ist und die Quotientenabbildung $D \longrightarrow D/\Gamma$ diskrete Fasern hat, ist die Ausnahmemenge mindestens 2-kodimensional, und der Riemannsche Hebbarkeitssatz liefert die Fortsetzung auf ganz D. Da ω von X kommt, erfüllt es auch die Wachstumsbedingungen bei Annäherung an die rationalen Randkomponenten, die man von automorphen Formen verlangt und die oft schon aus dem Transformationsverhalten mit Hilfe des Koecher-Prinzips folgen; für die Anwendbarkeit dieses Prinzips auf vektorwertige automorphe Formen siehe (3. 5).

Bezeichne $A[\Gamma, \bigwedge^p]$ den Raum der automorphen Formen für Γ zu dem natürlichen Automorphiefaktor, der zu den p-Formen gehört, und $\Omega^p(D)^\Gamma$ den Raum der Γ-invarianten p-Formen auf D. Dann haben wir die Inklusionen

$$\Omega^p(X) \hookrightarrow A[\Gamma, \textstyle\bigwedge^p] \hookrightarrow \Omega^p(D)^\Gamma,$$

vergleiche (1. 1). Die Gleichheit an der zweiten Stelle ist die Frage nach dem Koecher-Prinzip, die Gleichheit an der ersten Stelle das Ziel dieser Arbeit. Ich beweise in §1:

Hauptsatz. *Sei D ein hermitescher symmetrischer Raum vom nichtkompakten Typ und Γ eine arithmetisch definierbare Gruppe auf D. Sei X eine Desingularisierung der Baily-Borel-Kompaktifizierung von D/Γ. Dann liefert für $p < \operatorname{Dim} D$ die natürliche Inklusion einen Isomorphismus $\Omega^p(X) \cong A[\Gamma, \bigwedge^p]$.*

Man kann diesen Satz auch ohne Verwendung der Desingularisierung mit dem elementaren Begriff „Fortsetzungseigenschaft" von [7], III. 5, formulieren. Nennt man die Elemente von $A[\Gamma, \bigwedge^p]$ „automorphe p-Formen", so heißt das:

Korollar. *Jede automorphe p-Form für Γ auf D mit $p < \operatorname{Dim} D$ hat die Fortsetzungseigenschaft, definiert also eine reguläre Differentialform des Körpers K der automorphen Funktionen.*

Im Fall $p = \operatorname{Dim} D$ ist die entsprechende Aussage bekanntlich falsch; allerdings sind Spitzenformen fortsetzbar [2], IV. §1.

Der Spezialfall, daß D der Siegelsche Halbraum und Γ mit der Siegelschen Modulgruppe kommensurabel ist, wurde in [8] behandelt. In diesem Fall ist auch bekannt, daß $A[\Gamma, \bigwedge^p] \neq 0$ nur für ganz bestimmte p gilt [16]; die umgekehrte Frage nach der Existenz derartiger Differentialformen ist bisher nur sehr lückenhaft beantwortet.

Zwischenergebnisse und Beweise werde ich so formulieren, daß sich auch lokale Aussagen (betreffend die Fortsetzung in die Umgebung fester Punkte) und Aussagen über beliebige Tensorfelder (statt alternierender Differentialformen) gewinnen lassen, auch wenn ich diese Gesichtspunkte dann nicht weiter verfolge.

§1. Fortsetzbarkeit von Tensorfeldern

In diesem Paragraphen wird der Hauptsatz aus der Einleitung bewiesen; dabei lasse ich Lücken, die dann in §2—§4 geschlossen werden.

(1. 1) Sei $\mathfrak{G}$ eine halbeinfache algebraische Gruppe, definiert über $\mathbb{Q}$, und der nichtkompakte Anteil G von $\mathfrak{G}(\mathbb{R})^0$ sei zu $\operatorname{Aut} D$ isogen; d. h., G operiert auf D so, daß Kern und Kokern von $G \to \operatorname{Aut} D$ endlich sind, und D ist isomorph zum Quotienten von G oder $\mathfrak{G}(\mathbb{R})^0$ nach einer maximalen kompakten Untergruppe.

Eine arithmetische Untergruppe $\Gamma \leqq \mathfrak{G}(\mathbb{Q})$ heißt *nett*, wenn für alle rationalen Darstellungen $\rho\colon \mathfrak{G} \to GL_m(\mathbb{C})$ über $\mathbb{Q}$ die von den Eigenwerten aller $\rho(g)$, $g \in \Gamma$, erzeugte Untergruppe von $\mathbb{C}^\times$ torsionsfrei ist [5], 17. 1. Da jede arithmetische Untergruppe von G einen netten Normalteiler von endlichem Index hat, ist es oft harmlos, die bequeme Voraussetzung „nett" zu machen. Ist Γ nett, so insbesondere torsionsfrei; die Operation von Γ auf D ist dann fixpunktfrei, der Quotient D/Γ also glatt, und die Quotientenabbildung $\nu\colon D \to D/\Gamma$ ist die universelle Überlagerung. Sei also ab jetzt Γ nett.

Sei nun D als Gebiet in einem $\mathbb{C}$-Vektorraum J realisiert und T ein Γ-invariantes (holomorphes kovariantes) Tensorfeld vom Grad p auf D, also

$$T \in \Omega^{\otimes p}(D)^\Gamma = \Omega^{\otimes p}(D/\Gamma),$$

oder anders ausgedrückt, T ist eine holomorphe Abbildung

$$T\colon D \longrightarrow M_p = \mathrm{Mult}_p(J, \mathbb{C});$$

für jedes $z \in D$ ist $T(z)\colon J \times \cdots \times J \longrightarrow \mathbb{C}$ multilinear. Die Gruppe $GL(J)$ operiert auf M_p durch die rationale Darstellung

$$\rho\colon GL(J) \longrightarrow GL(M_p), \quad (\rho g \cdot \beta)[x_1, \ldots, x_p] = \beta[g^{-1}x_1, \ldots, g^{-1}x_p].$$

Die Γ-Invarianz von T bedeutet

$$T(z)[x_1, \ldots, x_p] = T(\gamma z)[\gamma'(z)x_1, \ldots, \gamma'(z)x_p] \text{ für alle } \gamma \in \Gamma,\ z \in D,\ x_1, \ldots, x_p \in J,$$

also $T(\gamma z) = \rho(\gamma'(z)) \cdot T(z)$; d.h., T ist automorphe Form im weiteren Sinne für Γ zum Automorphiefaktor $j_\rho = \rho \circ$ Ableitung. In den Fällen, wo das Koecher-Prinzip gilt, siehe (3. 5), ist also T sogar automorphe Form; in den anderen Fällen will ich das zusätzlich voraussetzen und dann allgemein T ein automorphes Tensorfeld nennen.

Sei D^* die Vereinigung aller rationalen Randkomponenten (gebildet im kompakten Dualraum von D) mit der Satake-Topologie. Dann ist D^*/Γ, mit der Struktur einer projektiven Varietät versehen, die Baily-Borel-Kompaktifizierung von D/Γ. Sei $\pi\colon X \longrightarrow D^*/\Gamma$ mit $X \supseteq D/\Gamma$ eine Desingularisierung. Das Problem ist: Wann ist T von D/Γ auf X fortsetzbar?

(1. 2) Dieses Problem ist lokaler Natur: Sei $E \subseteq \mathbb{C}$ der offene Einheitskreis und $\dot{E} = E - \{0\}$. Sei $\psi\colon E^n \to X$ eine Karte mit o.B.d.A. $\psi(0) =: x \in X - D/\Gamma$; da die Fortsetzung über analytische Mengen der Kodimension $\geqq 2$ kein Problem ist, kann man $\psi(\dot{E} \times E^{n-1}) \subseteq D/\Gamma$ annehmen. Die Quotientenabbildung $D^* \longrightarrow D^*/\Gamma$ werde ebenfalls mit ν bezeichnet. Sei $a \in D^*$ mit $\nu(a) = \pi(x)$ gewählt und F die rationale Randkomponente mit $a \in F$. Sei ferner W eine zusammenhängende Umgebung von a in der Satake-Topologie, die unter dem Stabilisator Γ_a invariant ist, mit $\nu(W) \cong W/\Gamma_a$ und $\gamma W \cap W = \emptyset$ für $\gamma \in \Gamma - \Gamma_a$[4], §4. Man kann weiter $\pi\psi(E^n) \subseteq \nu(W)$ und $W \cap F$ relativ kompakt in F annehmen. Die Fortsetzung von T in eine Umgebung von x ist gesichert, wenn das zurückgezogene Tensorfeld $\psi^* T$ von $\dot{E} \times E^{n-1}$ auf E^n fortsetzbar ist.

Solche Abbildungen ψ lassen sich ziemlich gut beschreiben: Sei $H \subseteq \mathbb{C}$ die obere Halbebene. Dann ist

$$q\colon H \times E^{n-1} \longrightarrow \dot{E} \times E^{n-1}, \quad (\zeta, \eta) \mapsto (e^{2\pi i \zeta}, \eta),$$

die universelle Überlagerung, und man kann $\psi \circ q$ auf die Überlagerung

$$\nu\colon W \cap D \longrightarrow W \cap D/\Gamma_a$$

hochheben. Das ergibt das kommutative Diagramm

$$\begin{tikzcd}
H \times E^{n-1} \arrow[r, "\Psi"] \arrow[d, "q"'] & W \cap D \arrow[r, hook] \arrow[d] & D^* \arrow[d, "\nu"] \\
\dot{E} \times E^{n-1} \arrow[r] \arrow[d] & W \cap D/\Gamma_a \arrow[r, hook] \arrow[d] & D^*/\Gamma \\
E^n \arrow[r, "\psi"'] & \pi^{-1}\nu(W) \arrow[r, hook] & X \arrow[u, "\pi"']
\end{tikzcd}$$

Die Abbildung Ψ erfüllt die Funktionalgleichung

$$\Psi(\zeta+1,\eta)=\gamma\Psi(\zeta,\eta) \text{ mit einem } \gamma\in\Gamma_a.$$

Ich verwende jetzt einen Satz von A. Borel, vgl. [14], (4. 5): *Sei $\Gamma\leqq G$ arithmetisch und $\varphi\colon H\to D$ holomorph mit der Funktionalgleichung $\varphi(\zeta+1)=\gamma\varphi(\zeta)$ für ein $\gamma\in\Gamma$; dann ist eine Potenz von γ unipotent.* Da Γ als nett vorausgesetzt ist, ist also γ selbst schon unipotent; außerdem läßt γ die gesamte Randkomponente F fest, da es dort den Fixpunkt a hat.

(1. 3) Jetzt wird D als Siegel-Gebiet 3. Art im Vektorraum J über der Randkomponente F mit $a=0$ realisiert. Dazu will ich mich der bequemen Sprache der Jordan-Tripelsysteme bedienen.

Sei also J ein positives hermitesches Jordan-Tripelsystem, d. h., ein endlich-dimensionaler $\mathbb{C}$-Vektorraum mit einer $\mathbb{R}$-trilinearen Abbildung

$$\{\ \}\colon J\times J\times J\longrightarrow J,$$

die $\mathbb{C}$-linear in der ersten und dritten, $\mathbb{C}$-antilinear in der zweiten Variablen ist und folgende Identitäten erfüllt:

$$\{uvw\}=\{wvu\},$$
$$\{uv\{xyz\}\}=\{\{uvx\}yz\}-\{x\{vuy\}z\}+\{xy\{uvz\}\}.$$

Ferner sei $\square\colon J\times J\to \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(J)$ durch $(x\,\square\,y)z:=\{xyz\}$ definiert; die Spurform

$$(.|.)\colon J\times J\to\mathbb{C},\quad (x|y):=\mathrm{Sp}\,x\,\square\,y,$$

ist hermitesch und wird als positiv definit vorausgesetzt.

Sei weiter $e\in J$ ein Idempotent, d. h., $\{eee\}=e$, und

$$J=J_1\oplus J_{\frac{1}{2}}\oplus J_0\quad\text{mit}\quad J_\nu=J_\nu(e)=\{x\in J\,|\,\{eex\}=\nu x\}$$

die zugehörige Peirce-Zerlegung, siehe [11], § 3 (Achtung: dort ist das Jordan-Tripelprodukt anders normiert!), oder [13], V. § 6. Dann ist J_1 mit $xy:=\{xey\}$ eine komplexe Jordan-Algebra mit Einselement e. Ist Q die quadratische Abbildung, also $Q(u)x=\{uxu\}$, so ist $A=J_1^{Q(e)}$ (der Fixpunktraum) eine formal-reelle Jordan-Algebra mit $J_1=A\oplus iA$; die Spurform von A ist, vgl. [13], S. 232, bis auf einen rationalen Proportionalitätsfaktor gleich der Einschränkung der Spurform von J; der positive Kegel P von A ist bezüglich der Spurform selbstadjungiert.

Die Abbildung

$$L\colon J_{\frac{1}{2}}\times J_{\frac{1}{2}}\to J_1,\quad L(v,w)=\{vwe\},$$

ist bezüglich der reellen Form A hermitesch und bezüglich P positiv definit [11], 10. 4. Außerdem ist J_0 ein Untertripelsystem von J; sei F das zu J_0 gehörige beschränkte symmetrische Gebiet [11], § 4, also die Einheitskugel in der Spektralnorm. Der Ausdruck

$$\mu(t)w:=2i\{ewt\}\quad\text{für}\quad w\in J_{\frac{1}{2}},\ t\in J_0,$$

ist $\mathbb{C}$-linear in t, $\mathbb{C}$-antilinear in w, insbesondere ist $\mu(t) \in \mathrm{End}_{\mathbb{R}}(J_{\frac{1}{2}})$. Für $t \in F$ ist $1 \pm \mu(t)$ invertierbar; man setzt

$$L_t(v, w) := L\big(v, [1+\mu(t)]^{-1} w\big) \quad \text{für} \quad t \in F,\ v, w \in J_{\frac{1}{2}}.$$

Dann ist

$$D := \{(z, w, t) | t \in F,\ w \in J_{\frac{1}{2}},\ z \in J_1,\ \mathrm{Im}\, z - \mathrm{Re}\, L_t(w, w) \in P\}$$

die Realisierung des zu J gehörigen hermiteschen symmetrischen Raumes vom nichtkompakten Typ als Siegel-Gebiet 3. Art über der Randkomponente F [11], §10.

(1. 4) Das Siegel-Gebiet D besitzt als Automorphismen unter anderem die Translationen $z \mapsto z + v$ mit $v \in A$. Die arithmetische Gruppe Γ liefert unter diesen die Verschiebungen um die Vektoren eines Gitters Δ.

Nun zurück zur Abbildung Ψ: $H \times E^{n-1} \to D$ aus (1. 2). In §2 wird gezeigt, daß es ein $v \in \Delta \cap \bar{P}$ und eine holomorphe Abbildung λ: $E^n \to J$ gibt mit

$$\Psi(\zeta, \eta) = \zeta v + \lambda(e^{2\pi i\zeta}, \eta).$$

Sei $\lambda = \lambda_1 + \lambda_{\frac{1}{2}} + \lambda_0$ mit λ_j: $E^n \to J_j$ für $j = 0, \frac{1}{2}, 1$.

Das Tensorfeld T will ich im Moment auch nur lokal betrachten: Sei W eine Umgebung von $0 \in F$ in der Satake-Topologie wie in (1. 2), die also insbesondere unter $\Gamma \cap Z(F)$ invariant ist, wobei $Z(F)$ der Stabilisator von F in G ist. Ich setze nur noch voraus, daß T auf $W \cap D$ definiert und (als Tensorfeld) unter $\Gamma \cap Z(F)$ invariant ist; außerdem soll die Wachstumsbedingung bei F erfüllt sein, die sich so ausdrückt: Da $T(z+v) = T(z)$ für $v \in \Delta$, hat T eine Fourier-Entwicklung über das duale Gitter:

$$T(z, w, t) = \sum_{s \in \Delta^*} a_s(w, t)\, e^{2\pi i (s|z)}$$

mit a_s: $J_{\frac{1}{2}} \times (W \cap F) \to M_p$ holomorph; die Wachstumsbedingung heißt: $a_s \neq 0$ höchstens für $s \in \bar{P}$. Die $a_s(w, t)$ mit $s \in \Delta^* \cap \bar{P}$, $w \in J_{\frac{1}{2}}$ und $t \in W \cap F$ heißen die Fourier-Jacobi-Koeffizienten von T bei F.

Zu klären ist, ob $\psi^* T$ auf ganz E^n fortsetzbar ist.

(1. 5) Zur Klärung dieser Frage wird zuerst $\Psi^* T$ betrachtet. Für

$$(\zeta, \eta) \in H \times E^{n-1}$$

ist $\Psi^* T(\zeta, \eta)$ eine p-Multilinearform auf $\mathbb{C}^n$ mit der Beschreibung

$$\begin{aligned}\Psi^* T(\zeta, \eta)\,[y_1, \ldots, y_p] &= T \circ \Psi(\zeta, \eta)\,[\Psi'(\zeta, \eta)\, y_1, \ldots, \Psi'(\zeta, \eta)\, y_p] \\ &= \sum_{s \in \Delta^* \cap \bar{P}} a_s\big(\lambda_{\frac{1}{2}}(e^{2\pi i\zeta}, \eta), \lambda_0(e^{2\pi i\zeta}, \eta)\big)\,[\Psi'(\zeta, \eta)\, y_1, \ldots, \Psi'(\zeta, \eta)\, y_p] \cdot e^{2\pi i\zeta(s|v)} \cdot g_s(e^{2\pi i\zeta}, \eta)\end{aligned}$$

mit g_s: $E^n \to \mathbb{C}$ holomorph, $g_s(u, \eta) = e^{2\pi i (s|\lambda_1(u, \eta))}$.

Nun zu ψ^*T: Es ist $\Psi^*T(\zeta,\eta)=\psi^*T(\zeta,\eta)\circ q'(\zeta,\eta)$ und

$$q'(\zeta,\eta)=\begin{bmatrix} 2\pi i e^{2\pi i\zeta} & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1\end{bmatrix},$$

für $u=e^{2\pi i\zeta}\in E$ gilt also

$$\begin{aligned}\psi^*T(u,\eta)[x_1,\dots,x_p] &= \Psi^*T(\zeta,\eta)[q'(\zeta,\eta)^{-1}x_1,\dots,q'(\zeta,\eta)^{-1}x_p]\\ &= \Psi^*T(\zeta,\eta)[y_1,\dots,y_p]\end{aligned}$$

mit

$$y_j=\begin{bmatrix}\frac{1}{2\pi i u}x_{j1}\\ x_{j2}\\ \vdots\\ x_{jn}\end{bmatrix}.$$

Für das Einsetzen wird außerdem benötigt

$$\begin{aligned}\Psi'(\zeta,\eta)y_j &= y_{j1}v+\lambda'(e^{2\pi i\zeta},\eta)\cdot q'(\zeta,\eta)y_j\\ &= y_{j1}v+\lambda'(e^{2\pi i\zeta},\eta)x_j\,.\end{aligned}$$

Zusammengenommen kommt dann heraus:

$$\psi^*T(u,\eta)[x_1,\dots,x_p]=\sum_{s\in\Delta^*\cap\bar P}a_s(\lambda_{\frac{1}{2}}(u,\eta),\lambda_0(u,\eta))\left[\frac{x_{11}}{2\pi i u}v+\lambda'(u,\eta)x_1,\dots\right]\cdot u^{(s|v)}g_s(u,\eta).$$

Also ist ψ^*T auf E^n fortsetzbar, wenn für alle $s\in\Delta^*\cap\bar P$ und alle $x_1,\dots,x_p\in\mathbb{C}^n$ der Summand dieser Reihe fortsetzbar ist. Dazu reicht es hin, wenn die meromorphe Funktion $u\mapsto a_s(\dots)\dots$ in 0 die Ordnung $\geqq -(s|v)$ hat ($(s|v)$ ist ganzzahlig $\geqq 0$). Die multilineare Auswertung dieses Ausdrucks ergibt

$$\sum_{\mu=0}^{p}\frac{1}{(2\pi i u)^\mu}\cdot\sum_{|I|=\mu}a_s(\lambda_{\frac{1}{2}}(u,\eta),\lambda_0(u,\eta))[Z_I]$$

mit $Z_I=(z_1,\dots,z_p)$, wobei $I\subseteqq\{1,\dots,p\}$ und

$$z_j=\begin{cases}x_{j1}v, & \text{wenn } j\in I,\\ \lambda'(u,\eta)x_j, & \text{wenn } j\notin I.\end{cases}$$

Damit ist gezeigt:

Lemma. *Für jede der p-Multilinearformen* $a=a_s(\lambda_{\frac{1}{2}}(u,\eta),\lambda_0(u,\eta))$ *auf* J *mit* $s\in\Delta^*\cap\bar P$ *und* $(u,\eta)\in E^n$ *gelte:*

Sind mehr als $(s|v)$ *der Argumente* $z_1,\dots,z_p\in J$ *gleich* v, *so ist* $a[z_1,\dots,z_p]=0$.

Dann ist $\psi^* T$ auf E^n fortsetzbar.

(1. 6) Daraus ergibt sich ein lokales Fortsetzungskriterium, das ich aber erst in (3. 8) etwas weiter verfolgen will. Für die Situation in (1. 1) folgt:

Satz. *Sei Γ eine nette arithmetische Gruppe auf D und T ein automorphes Tensorfeld vom Grad p für Γ auf D. Für jede rationale Randkomponente F von D mögen alle Fourier-Jacobi-Koeffizienten $a_s(w, t) \in M_p$, $s \in \Delta^* \cap \bar{P}$, $w \in J_{\frac{1}{2}}$, $t \in F$, folgende Bedingung erfüllen:*

(F) *Sind für ein $v \in \Delta \cap \bar{P}$ mehr als $(s|v)$ der Argumente $x_1, \ldots, x_p \in J$ gleich v, so ist $a_s(w, t)[x_1, \ldots, x_p] = 0$.*

Dann ist T ein fortsetzbares Tensorfeld von D/Γ.

Falls T eine alternierende Differentialform ist, ist (F) nur im Fall $(s|v) = 0$ wirklich eine Bedingung; man kann (F) dann ersetzen durch

(F′) *Ist $x_1 \in \Delta \cap \bar{P}$ und $(s|x_1) = 0$, so ist $a_s(w, t)[x_1, \ldots, x_p] = 0$.*

Das entsprechende Kriterium für multikanonische Tensorfelder hat Y.-S. Tai mit ganz anderen Methoden hergeleitet [2], IV. § 1. Statt der expliziten Gestalt der glatten Kompaktifizierungen von D/Γ habe ich hier, einer Anregung von E. Freitag und dem Muster von [8] folgend, elementare funktionentheoretische Schlüsse im Umkreis des Satzes von Landau/Valiron verwendet, siehe § 2.

Die Bedingung (F′) für $p < \operatorname{Dim} D$ wird in § 3 nachgewiesen. Daraus folgt dann der in der Einleitung formulierte Hauptsatz, denn die Voraussetzung „nett" läßt sich wie in [8], § 3, entfernen.

§ 2. Holomorphe Abbildungen in arithmetische Quotienten

In diesem Paragraphen wird die Lücke zu Beginn von (1. 4) geschlossen.

(2. 1) Sei D ein Siegel-Gebiet 3. Art über der Randkomponente F wie in (1. 3). Gegeben sei eine Abbildung $\varphi\colon H \longrightarrow D$ mit der Funktionalgleichung

$$\varphi(\zeta + 1) = \gamma \varphi(\zeta),$$

wobei $\gamma \in Z(F)$ unipotent ist. Sei φ zerlegt in $\varphi = \varphi_1 + \varphi_{\frac{1}{2}} + \varphi_0$ mit $\varphi_j\colon H \longrightarrow J_j$. Da $\varphi_0(\zeta + 1) = \varphi_0(\zeta)$, ist $\varphi_0(\zeta) = \lambda_0(e^{2\pi i \zeta})$ mit einer holomorphen Abbildung $\lambda_0\colon \dot{E} \longrightarrow F$; ich setze voraus, daß λ_0 in 0 eine hebbare Singularität hat, denn dies ist für die Anwendung in (1. 4) erfüllt:

In (1. 2) geht $\nu \Psi(\zeta, \eta) = \psi(e^{2\pi i \zeta}, \eta)$ in X gegen $\psi(0, \eta)$ für $\operatorname{Im} \zeta \longrightarrow \infty$, also in D^*/Γ gegen einen Punkt von $\nu(\bar{W}) \cong \bar{W}/\Gamma_a$, und die ν-Urbilder davon haben die gleiche J_0-Komponente.

(2. 2) Zunächst wird zusätzlich $\lambda_0(0) = 0$ angenommen.

Satz. *Sei $\varphi: H \to D$ holomorph, $\varphi = \varphi_1 + \varphi_{\frac{1}{2}} + \varphi_0$ mit $\varphi_j: H \to J_j$, ferner sei $\varphi_0(\zeta) = \lambda_0(e^{2\pi i\zeta})$ mit $\lambda_0: E \to F$ holomorph und $\lambda_0(0) = 0$. Dann gilt*

$$\varphi_j(\zeta) = O(|\zeta|^j) \quad \text{und} \quad \frac{\varphi(\zeta)}{\zeta} \to v \in \bar{P}$$

für $\zeta \to \infty$ in einem beliebigen Winkelbereich $\Omega_\alpha = \{\zeta \in H | \alpha \leqq \arg\zeta \leqq \pi - \alpha\}$ mit $\alpha > 0$.

Beweis. Die Aussage für φ_0 ist trivial. Sei weiter $l \in A^*$ eine Linearform mit $l(\bar{P} - \{0\}) > 0$. Dann ist $l \circ L$ eine Norm auf $J_{\frac{1}{2}}$, also $lL(w, w) \geqq c_1 \|w\|^2$ mit geeignetem $c_1 > 0$ und $\|w\|^2 = (w|w)$. Für kleines t ist $[1 + \mu(t)]^{-1} = 1 - \mu(t) + \mu(t)^2 - \cdots$, und die Definition von L_t ergibt die Abschätzung

$$l(\operatorname{Re} L_t(w, w)) \geqq c_1 \|w\|^2 - \frac{c_2' \|t\| \|w\|^2}{1 - \|t\|} \geqq (c_1 - c_2 \|t\|) \|w\|^2.$$

Für genügend kleines t ist also

(1) $$l(\operatorname{Re} L_t(w, w)) \geqq c_3 \|w\|^2 \quad \text{mit} \quad c_3 > 0.$$

Für beliebiges $(z, w, t) \in D$ mit kleinem t ist $\operatorname{Im} z - \operatorname{Re} L_t(w, w) \in P$, also

$$\operatorname{Im} l(z) = l(\operatorname{Im} z - \operatorname{Re} L_t(w, w)) + l(\operatorname{Re} L_t(w, w)) > c_3 \|w\|^2.$$

Für $\zeta \in H$ mit genügend großem $\operatorname{Im}\zeta$ ist $\varphi_0(\zeta)$ genügend klein, also

(2) $$\operatorname{Im} l(\varphi_1(\zeta)) > c_3 \|\varphi_{\frac{1}{2}}(\zeta)\|^2 > 0.$$

Aus dem Satz von Landau/Valiron [9] folgt, daß in jedem Winkelbereich Ω_α der Grenzwert

$$\frac{l\varphi_1(\zeta)}{\zeta} \longrightarrow v_l \geqq 0 \quad \text{für} \quad \zeta \longrightarrow \infty$$

existiert.

Da man A^* mit endlich vielen solchen Linearformen aufspannen kann, folgt daß $\lim\limits_{\zeta \to \infty} \frac{\varphi_1(\zeta)}{\zeta} =: v \in A$ in jedem Ω_α existiert; also ist dort $\varphi_1(\zeta) = O(|\zeta|)$. Da alle $v_l \geqq 0$ sind, ist $v \in \bar{P}$.

Aus der Ungleichung (2) erhalte ich außerdem

$$\|\varphi_{\frac{1}{2}}(\zeta)\|^2 < \frac{1}{c_3} \operatorname{Im} l\varphi_1(\zeta),$$

also $\varphi_{\frac{1}{2}}(\zeta) = O(|\zeta|^{\frac{1}{2}})$, insbesondere $\frac{\varphi_{\frac{1}{2}}(\zeta)}{\zeta} \to 0$ für $\zeta \to \infty$ in Ω_α. □

(2. 3) **Zusatz.** *Falls in der Situation von (2. 2) von vornherein φ die Gestalt $\varphi(\zeta)=\zeta^m a_m(e^{2\pi i\zeta})+\cdots+a_0(e^{2\pi i\zeta})$ mit $a_\mu\colon E\to J$ holomorph hat, so ist $a_\mu=0$ für $\mu\geqq 2$ und a_1 konstant $=v\in\bar P$.*

Beweis. Die Aussage des Satzes (2. 2) ergibt nur $a_\mu(0)=0$ für $\mu\geqq 2$ und $a_1(0)=v$. Man muß also etwas weiter ausholen.

Sei $a_{\mu j}$ die J_j-Komponente von a_μ. Aus der Ungleichung (2) folgt $l\varphi_1(\zeta)\in H$ für $\operatorname{Im}\zeta>C$. Für $k\in\mathbb{Z}$ gilt dann

$$\frac{l\varphi_1(\zeta+k)}{k^m}=\frac{(\zeta+k)^m}{k^m}\,la_{m1}(e^{2\pi i\zeta})+\cdots+\frac{1}{k^m}\,a_{01}(e^{2\pi i\zeta})\in H,$$

also für $k\to\infty$ auch $la_{m1}(e^{2\pi i\zeta})\in\bar H$. Für den offenen Kreis B um 0 mit Radius $e^{2\pi C}$ gilt also wegen der Gebietstreue $la_{m1}(B)\subseteq H$ oder la_{m1} konstant. Für $m\geqq 2$ ist $la_{m1}(0)=0$, also la_{m1} konstant $=0$, und für $m=1$ ebenso la_{11} konstant $=lv$. Also hat $l\varphi_1$ die Gestalt

$$l\varphi_1(\zeta)=\zeta lv+la_{01}(e^{2\pi i\zeta}),$$

und weil l beliebig war,

$$\varphi_1(\zeta)=\zeta v+a_{01}(e^{2\pi i\zeta}).$$

Auf φ_1 wird jetzt (1) angewendet: Für $\operatorname{Im}\zeta>C$ ist

$$\operatorname{Re}L_{\varphi_0(\zeta)}\big(\varphi_{\frac12}(\zeta),\,\varphi_{\frac12}(\zeta)\big)\in\bar P.$$

Annahme: $m\geqq 1$ und $\eta:=a_{m,\frac12}\neq 0$. Sei ζ fest gewählt mit $\operatorname{Im}\zeta>C$ und $\eta(e^{2\pi i\zeta})\neq 0$. Für $k\in\mathbb{N}$ ist dann

$$\varphi_1(\zeta+k)=kv+\varphi_1(\zeta),\quad \varphi_0(\zeta+k)=\varphi_0(\zeta),$$

$$\frac{1}{k^{2m}}\operatorname{Re}L_{\varphi_0(\zeta+k)}\big(\varphi_{\frac12}(\zeta+k),\,\varphi_{\frac12}(\zeta+k)\big)=\operatorname{Re}L_{\varphi_0(\zeta)}\big(\eta(e^{2\pi i\zeta}),\,\eta(e^{2\pi i\zeta})\big)+\frac1k[\ldots]\in\bar P,$$

$$\frac{1}{k^{2m}}\big[\operatorname{Im}\varphi_1(\zeta+k)-\operatorname{Re}L_{\varphi_0(\zeta+k)}\big(\varphi_{\frac12}(\zeta+k),\,\varphi_{\frac12}(\zeta+k)\big)\big]$$
$$=-\operatorname{Re}L_{\varphi_0(\zeta)}\big(\eta(e^{2\pi i\zeta}),\,\eta(e^{2\pi i\zeta})\big)+\frac1k[\ldots]\in\bar P,$$

also

$$\operatorname{Re}L_{\varphi_0(\zeta)}\big(\eta(e^{2\pi i\zeta}),\,\eta(e^{2\pi i\zeta})\big)\in\bar P\cap(-\bar P)=\{0\}.$$

Aus (1) folgt $\eta(e^{2\pi i\zeta})=0$, Widerspruch. Daher ist

$$\varphi_{\frac12}(\zeta)=a_{0,\frac12}(e^{2\pi i\zeta}).$$

Für φ_0 war nichts zu zeigen. □

(2. 4) Sei $N(F) \leqq G$ der Normalisator der Randkomponente F. Die Elemente von $N(F)$ liefern Automorphismen von D des folgenden Typs [12], 1. §3:

$$
(3) \qquad \begin{pmatrix} z \\ w \\ t \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \alpha z + a(w, t) \\ \beta(t) w + b(t) \\ g(t) \end{pmatrix},
$$

wobei α ein Automorphismus von P, g ein Automorphismus von F, $\beta\colon F \to \operatorname{End} J_{\frac{1}{2}}$ holomorph, $b\colon F \to J_{\frac{1}{2}}$ holomorph und $a\colon J_{\frac{1}{2}} \times F \to J_1$ holomorph und in w ein Polynom vom Grad $\leqq 2$ ist. Ferner operiert $N(F)$ transitiv auf F und liefert die volle Zusammenhangskomponente der 1 von $\operatorname{Aut} F$. Es ist $N(F) = \mathfrak{N} \cap G$ für eine parabolische Untergruppe $\mathfrak{N} \leqq \mathfrak{G}$.

Ist $\mathfrak{U} = R_u(\mathfrak{N})$, so liefert die reelle Gruppe $U = \mathfrak{U}(\mathbb{R})$ genau die „Translationen" von D; setzt man $u_t := [1 + \mu(t)] u$ für $u \in J_{\frac{1}{2}}$ und $t \in F$, so liefert U also die affinen Abbildungen

$$
\begin{pmatrix} z \\ w \\ t \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} z + v + iL(2w + u_t, u) \\ w + u_t \\ t \end{pmatrix} \quad \text{für} \quad v \in A, \ u \in J_{\frac{1}{2}}.
$$

Insbesondere ist U Erweiterung

$$
0 \longrightarrow A \xrightarrow{\alpha} U \xrightarrow{\beta} J_{\frac{1}{2}} \longrightarrow 0.
$$

Die drei weiteren Faktoren $\mathfrak{G}_h$, $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{S} := \mathfrak{G}_l$ der 5-Faktor-Zerlegung von $\mathfrak{N}$ [2], III. §4. 1, ergeben eine fastdirekte Zerlegung eines geeignet gewählten Levi-Faktors von $\mathfrak{N}$: Nach Übergang zu den reellen Gruppen liefert $\mathfrak{G}_h(\mathbb{R})$ die Automorphismen von F und $\mathfrak{M}(\mathbb{R})$ ist kompakt; ist $\mathfrak{Z} = \mathfrak{M}\mathfrak{S}\mathfrak{U}$, so ist $Z(F) = \mathfrak{Z}(\mathbb{R}) \cap G$. Hier interessiert $S := \mathfrak{S}(\mathbb{R})^\circ$. Diese Gruppe S operiert linear auf J, trivial auf J_0 und respektiert die formal-reelle Jordan-Algebra A; der Einschränkungshomomorphismus $S \to GL(A)$ hat einen endlichen Kern und als Bild die zusammenhängende Automorphismengruppe des Kegels P, die gleichzeitig die zusammenhängende Strukturgruppe der Jordan-Algebra A ist. Im übrigen operiert $\mathfrak{S}$ selbst auf J_1 (mit endlichem Kern) als zusammenhängende Strukturgruppe und respektiert die Zerlegung $J_1 \oplus J_{\frac{1}{2}} \oplus J_0$.

(2. 5) **Satz.** *Sei $\varphi\colon H \to D$ holomorph, $\varphi = \varphi_1 + \varphi_{\frac{1}{2}} + \varphi_0$ mit $\varphi_j\colon H \to J_j$ und $\varphi_0(\zeta) = \lambda_0(e^{2\pi i \zeta})$ mit $\lambda_0\colon E \to F$ holomorph. Außerdem gelte $\varphi(\zeta + 1) = \gamma\varphi(\zeta)$ mit $\gamma \in Z(F)$ unipotent. Dann gibt es ein $v \in \bar{P}$ und eine holomorphe Abbildung $\lambda\colon E \to J$ mit*

(i) $\gamma(z, w, t) = (z + v, w, t)$,

(ii) $\varphi(\zeta) = \zeta v + \lambda(e^{2\pi i \zeta})$.

Beweis. Es ist nur (ii) zu beweisen, denn (i) folgt daraus unmittelbar. Sei $\delta \in N(F)$ so gewählt, daß δ den Punkt $\lambda_0(0) \in F$ nach 0 abbildet und δ^{-1} die Gestalt (3) aus (2. 4) hat. Dann hat $\delta \circ \varphi$ eine entsprechende Funktionalgleichung für die unipotente Transformation $\delta\gamma\delta^{-1} \in Z(F)$. Ist die analoge Behauptung

$$\delta \circ \varphi(\zeta) = \zeta\tilde{v} + \tilde{\lambda}(e^{2\pi i\zeta})$$

bewiesen, so folgt (ii) mit $v = \alpha\tilde{v}$ und $\lambda = \delta^{-1} \circ \tilde{\lambda}$. Ich darf also o.B.d.A. $\lambda_0(0) = 0$ annehmen.

Da γ unipotent und $Z(F)/SU$ kompakt ist, liegt γ sogar in SU, ist also affin, d.h.,

$$\gamma x = gx + b \quad \text{für } x \in J$$

mit $g \in GL(J)$ unipotent und $b \in J$ (genauere Information wird hier nicht benötigt). Zu lösen ist also die Funktionalgleichung

$$\varphi(\zeta+1) = g\varphi(\zeta) + b.$$

Für die Ableitung $\varphi' \colon H \to J$ gilt

$$\varphi'(\zeta+1) = g\varphi'(\zeta).$$

Es ist $g = \exp(2\pi i X) = \sum_{\mu=0}^{m} \frac{1}{\mu!}(2\pi i X)^\mu$ mit $X \in \operatorname{End}(J)$ nilpotent, und

$$\psi(\zeta) := \exp(-2\pi i\zeta X)\,\varphi'(\zeta)$$

hat die Periode 1. Also hat ψ in H eine lokal gleichmäßig konvergente Fourier-Entwicklung

$$\psi(\zeta) = \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} c_\nu e^{2\pi i\nu\zeta} \quad \text{mit} \quad c_\nu = \int_0^1 \psi(s+iy)\,e^{-2\pi i\nu(s+iy)}\,ds \in J;$$

dabei kann $y > 0$ beliebig gewählt werden. Einsetzen ergibt

$$\begin{aligned} c_\nu &= \int_0^1 \exp[-2\pi i(s+iy)X]\,\varphi'(s+iy)\,e^{-2\pi i\nu(s+iy)}\,ds \\ &= \int_0^1 \exp[-2\pi i(s+iy)(\nu 1 + X)]\,\varphi'(s+iy)\,ds \\ &= \exp[-2\pi i(1+iy)(\nu 1 + X)]\,\varphi(1+iy) - \exp[2\pi y(\nu 1 + X)]\,\varphi(iy) \\ &\quad - 2\pi i(\nu 1 + X)\int_0^1 \exp[-2\pi i(s+iy)(\nu 1 + X)]\,\varphi(s+iy)\,ds. \end{aligned}$$

Für $y \geqq y_0$ und $0 \leqq s \leqq 1$ liegt $s+iy$ in einem Winkelbereich Ω_α (mit geeignetem α); da $\varphi(\zeta) = O(|\zeta|)$ nach (2. 2), folgt

$$\|\varphi(s+iy)\| \leqq \beta \cdot |s+iy| \leqq \beta \cdot (1+y),$$

$$\begin{aligned}\|c_\nu\| \leqq{}& e^{2\pi\nu y} \cdot \left\| \sum_{\mu=0}^{m} \frac{1}{\mu!} [-2\pi i(1+iy)X]^\mu \right\| \cdot \beta(1+y) \\ &+ e^{2\pi\nu y} \cdot \left\| \sum_{\mu=0}^{m} \frac{1}{\mu!} [2\pi y X]^\mu \right\| \cdot \beta(1+y) \\ &+ 2\pi \|\nu 1 + X\| \cdot \int_0^1 e^{2\pi\nu y} \cdot \left\| \sum_{\mu=0}^{m} \frac{1}{\mu!} [-2\pi i(s+iy)X]^\mu \right\| \cdot \beta(1+y)\, ds \\ \leqq{}& c \cdot e^{2\pi\nu y} \cdot y^{m+1}\end{aligned}$$

mit geeignetem $c>0$ für alle $y \geqq y_0$. Falls $\nu<0$, geht die rechte Seite gegen 0 für $y \to \infty$, also ist dann $c_\nu = 0$. Daher ist ψ in ∞ holomorph, also

$$\psi(\zeta) = \omega(e^{2\pi i\zeta}) \quad \text{mit} \quad \omega\colon E \to J \quad \text{holomorph.}$$

Damit hat

$$\varphi'(\zeta) = \exp(2\pi i\zeta X)\, \psi(\zeta) = \sum_{\mu=0}^{m} \frac{1}{\mu!} (2\pi i\zeta X)^\mu\, \omega(e^{2\pi i\zeta})$$

eine lokal gleichmäßig konvergente Reihenentwicklung

$$\varphi'(\zeta) = \sum_{\mu=0}^{m} \sum_{\nu=0}^{\infty} \zeta^\mu e^{2\pi i\nu\zeta} a_{\mu\nu} \quad \text{mit} \quad a_{\mu\nu} \in J.$$

Die Stammfunktion φ hat also die Form

$$\varphi(\zeta) = \sum_{\mu=0}^{m+1} \zeta^\mu a_\mu(e^{2\pi i\zeta})$$

mit $a_\mu\colon E \to J$ holomorph. Die Behauptung folgt aus (2. 3). □

(2. 6) Damit ist die Lücke in (1. 4) geschlossen; denn v hängt nicht von η ab, da γ nicht von η abhängt.

Für den Fall von Siegel-Gebieten 2. Art vergleiche man auch [15].

§3. Invarianzeigenschaften von Fourier-Jacobi-Koeffizienten

(3. 1) Sei D ein Siegel-Gebiet 3. Art wie in (1. 3) beschrieben. Sei $\mathfrak{G}$ über $\mathbb{Q}$ definiert und F rationale Randkomponente. Dann sind $\mathfrak{N}$, $\mathfrak{U}$, A und $\mathfrak{S}$ über $\mathbb{Q}$ definiert [2], S. 221, und $e \in A(\mathbb{Q})$; für die Bezeichnungen siehe (2. 4).

Sei $\Gamma \leqq G$ eine arithmetische Gruppe. Dann ist $\Gamma \cap U$ diskret und kokompakt, insbesondere $\Delta := \alpha^{-1}(\Gamma \cap U)$ ein Gitter in A (es kam schon in (1. 4) vor) und $\Omega := \beta(\Gamma \cap U)$ ein Gitter in $J_{\frac{1}{2}}$; für die Bedeutung von α und β siehe (2. 4). Es ist $\Delta \subseteqq A(\mathbb{Q})$, und das duale Gitter Δ^* ist mit Δ kommensurabel [2], II. §3, also auch $\Delta^* \subseteqq A(\mathbb{Q})$. Außerdem ist $\Gamma \cap S$ arithmetisch, und weil die halbeinfache Gruppe $(\mathfrak{S}, \mathfrak{S})$ über $\mathbb{Q}$ definiert ist, ist $\Gamma \cap (S, S)$ Zariski-dicht in (S, S) [5], 15. 12 zusammen mit 8. 10.

Die Gruppe $\mathfrak{S}(\mathbb{Q})$ operiert auf $A(\mathbb{Q})$ als Strukturgruppe dieser rationalen Jordan-Algebra, vgl. (2. 4), und normalisiert $\mathfrak{U}(\mathbb{Q})$. Für $y \in P \cap A(\mathbb{Q})$ ist die quadratische Abbildung $Q(y)$ im Bild von $\mathfrak{S}(\mathbb{Q})$, und es folgt für $u \in \Omega$, daß $2\{yeu\} \in \mathbb{Q}\Omega$. Da dieser Ausdruck linear in y ist, folgt, daß $\{yeu\} \in \mathbb{Q}\Omega$ für alle $y \in A(\mathbb{Q})$ und $u \in \Omega$, d.h., $\mathbb{Q}\Omega$ ist ein $A(\mathbb{Q})$-Modul im Sinne von [11], 10. 2.

(3. 2) Idempotente und Randkomponenten: Sei $c \in A$ ein Idempotent, wobei es egal ist, ob man Idempotent in A oder in J meint. Die gemeinsame Peirce-Zerlegung von J bezüglich $\{c, e-c\}$ [11], 3. 14, hat die Gestalt

$$J = J_{00} \oplus J_{01} \oplus J_{02} \oplus J_{11} \oplus J_{12} \oplus J_{22},$$

$$J_1 = J_{11} \oplus J_{12} \oplus J_{22}, \quad J_{\frac{1}{2}} = J_{01} \oplus J_{02}, \quad J_0 = J_{00},$$

$$J_1(c) = J_{11}, \quad J_{\frac{1}{2}}(c) = J_{01} \oplus J_{12}, \quad J_0(c) = J_{00} \oplus J_{02} \oplus J_{22}.$$

Dann ist $A_1(c) := A \cap J_{11}$ die Peirce-1-Komponente von c in A und der positive Kegel P_c von $A_1(c)$ erfüllt $\bar{P}_c = \bar{P} \cap A_1(c)$. Auf diese Weise erhält man alle Randkomponenten von P [2], II. §3, [6], XI. §7.

Die Unterräume J_{01} und J_{02} von $J_{\frac{1}{2}}$ sind invariant unter $\mu(J_0)$:

$$w \in J_{01}, \ t \in J_0 \Rightarrow \mu(t)w = 2i\{ewt\} = 2i\{cwt\} \in J_{01}$$

nach den Peirce-Multiplikationsregeln, analog für J_{02}. Außerdem ist $L(J_{\frac{1}{2}}, J_{02}) \subseteq J_{12} \oplus J_{22}$, denn für $u \in J_{01}$ und $v, w \in J_{02}$ gilt:

$$L(u+v, w) = \{uwe\} + \{vwe\} = \{u, w, e-c\} + \{v, w, e-c\}.$$

Eine Randkomponente P_c des Kegels P, $c \in A$ ein Idempotent, heißt rational, wenn $P_c \cap A(\mathbb{Q}) \neq \emptyset$. Das ist genau dann der Fall [2], S. 133, wenn $c \in A(\mathbb{Q})$. Ist dann $u \in \Omega$, $u = u_1 + u_2$ mit $u_i \in J_{0i}$, so $u_1 = 2\{ccu\} \in \mathbb{Q}\Omega$ und für geeignetes $m \in \mathbb{N}$, $m \geqq 1$, ist $mu \in \Omega \cap J_{01} \oplus \Omega \cap J_{02}$. Also hat $\Omega \cap J_{01} \oplus \Omega \cap J_{02}$ einen endlichen Index in Ω (der Quotient ist Torsionsgruppe und endlich erzeugt), insbesondere ist $\Omega \cap J_{0i}$ ein Gitter in J_{0i} für $i = 1, 2$.

(3. 3) Bis auf weiteres wird statt Γ die Untergruppe $\Gamma_\infty := \Gamma \cap Z(F)$ betrachtet. Diese ist eine diskrete Untergruppe von $Z(F)$ mit den folgenden drei Eigenschaften:

a) $\Gamma_\infty \cap U$ ist kokompakt; die zugehörigen Gitter $\Delta \leqq A$ und $\Omega \leqq J_{\frac{1}{2}}$ sind dadurch wie üblich definiert.

b) $\Gamma_\infty \cap (S, S)$ ist Zariski-dicht in (S, S).

c) Wenn $\Delta^* \cap P_c \neq \emptyset$, dann ist $\Omega \cap J_{02}$ ein Gitter in J_{02}.

Außerdem sei $W \subseteq D^*$ eine Γ_∞-invariante Umgebung eines Punktes $a \in F$.

Sei ρ: $GL(J) \to GL(V)$ eine (endlich-dimensionale) rationale Darstellung. Sei f: $W \cap D \to V$ eine automorphe Form im weiteren Sinne für Γ_∞ zum Automorphiefaktor $j_\rho := \rho \circ$ Ableitung, d.h., f ist holomorph in $W \cap D$ und

$$f(\gamma Z) = \rho(\gamma'(Z)) \cdot f(Z) \quad \text{für alle } Z \in W \cap D \text{ und alle } \gamma \in \Gamma_\infty.$$

Dann ist f invariant unter Δ, hat also eine Fourier-Entwicklung über das duale Gitter Δ^*:

$$f(z, w, t) = \sum_{s \in \Delta^*} a_s(w, t)\, e^{2\pi i (s|z)}$$

mit holomorphen Fourier-Jacobi-Koeffizienten $a_s\colon J_{\frac{1}{2}} \times (W \cap F) \to V$; ich nehme o.B.d.A. an, daß die Reihe in ganz $W \cap D$ konvergiert.

(3. 4) Das Transformationsverhalten unter Ω ergibt eine Bedingung an die Fourier-Jacobi-Koeffizienten: Für jedes $t \in F$ bilden die $u_t = [1 + \mu(t)]u$ mit $u \in \Omega$ ein Gitter Ω_t in $J_{\frac{1}{2}}$, und für $u \in \Omega$, $t \in F$ gilt mit einem passenden $v \in \Delta$:

$$f\big(z + v + iL(2w + u_t, u),\, w + u_t,\, t\big) = \sigma(u) \cdot f(z, w, t),$$

wobei

$$\sigma(u) := \begin{pmatrix} 1 & 2iL(-, u) & iL\big(\mu(-)u, u\big) \\ & 1 & \mu(-)u \\ & & 1 \end{pmatrix} \in GL(V)$$

antiholomorph von u abhängt und ein reelles Polynom ist. Der Vergleich der Fourier-Reihen ergibt

$$\sum_{s \in \Delta^*} \sigma(u)\, a_s(w, t)\, e^{2\pi i (s|z)} = \sum_{s \in \Delta^*} a_s(w + u_t, t)\, e^{2\pi i (s|z)} \cdot e^{-2\pi (s|L(2w + u_t, u))},$$

also die erste Invarianzeigenschaft

(FJ1) $$a_s(w + u_t, t) = e^{2\pi (s|L(2w + u_t, u))}\, \sigma(u) \cdot a_s(w, t)$$

$$\textit{für alle} \quad s \in \Delta^*,\ w \in J_{\frac{1}{2}},\ u \in \Omega,\ t \in W \cap F.$$

Da S auf J linear und auf J_0 trivial operiert, gilt für $g \in \Gamma_\infty \cap S$ die Funktionalgleichung

$$\sum_{s \in \Delta^*} \rho(g) \cdot a_s(w, t)\, e^{2\pi i (s|z)} = \rho(g) \cdot f(z, w, t) = f\big(g(z, w, t)\big)$$

$$= \sum_{s \in \Delta^*} a_s(gw, t)\, e^{2\pi i (s|gz)} = \sum_{s \in \Delta^*} a_s(gw, t)\, e^{2\pi i (g^* s|z)},$$

wobei g^* die adjungierte Abbildung ist. Nun werden U und αA von S normalisiert; die Konjugation der Verschiebung um $v \in A$ mit $g \in S$ ergibt die Verschiebung um $gv \in A$. Da ebenso $\Gamma_\infty \cap U$ und $\alpha\Delta$ von $\Gamma_\infty \cap S$ normalisiert werden, ist Δ unter $\Gamma_\infty \cap S$ invariant. Daher ist Δ^* unter g^* invariant, und die letzte Gleichungskette hat die Fortsetzung

$$= \sum_{s \in \Delta^*} a_{g^{*-1}s}(gw, t)\, e^{2\pi i (s|z)}.$$

Der Koeffizientenvergleich ergibt die zweite Invarianzeigenschaft

(FJ2) $a_{g^{*-1}s}(gw, t) = \rho(g) \cdot a_s(w, t)$ *für alle* $s \in \Delta^*$, $g \in \Gamma_\infty \cap S$, $w \in J_{\frac{1}{2}}$ *und* $t \in W \cap F$.

(3. 5) Die Darstellung $J_{\frac{1}{2}} \to GL(V)$, $u \mapsto \sigma(\bar{u})$, der Vektorgruppe $J_{\frac{1}{2}}$ ist rational, das Bild $\sigma(J_{\frac{1}{2}})$ also eine zusammenhängende unipotente Untergruppe von $GL(V)$. Also haben wir eine Zerlegung

$$V = V_1 \oplus \cdots \oplus V_m$$

$$\text{mit } \sigma(u)v - v \in V_1 \oplus \cdots \oplus V_{j-1} \text{ für } v \in V_j,\ u \in J_{\frac{1}{2}}\ (1 \leqq j \leqq m).$$

Bei festem s und t sei entsprechend zerlegt

$$a_s(w, t) = a_1(w) + \cdots + a_m(w) \quad \text{mit} \quad a_j\colon J_{\frac{1}{2}} \to V_j \text{ holomorph};$$

sei r maximal mit $a_r \neq 0$. Aus (FJ1) folgt

$$a_1(w+u_t) + \cdots + a_r(w+u_t) = e^{2\pi (s|L(2w+u_t, u))}[\sigma(u)a_1(w) + \cdots + \sigma(u)a_r(w)].$$

Der Vergleich der V_r-Komponenten ergibt

$$a_r(w+u_t) = e^{2\pi(s|L(2w+u_t,u))}a_r(w) \quad \text{für alle} \quad w \in J_{\frac{1}{2}},\ u \in \Omega,$$

bei beliebigen festen $s \in \Delta^*$ und $t \in W \cap F$. Damit ist jede Koordinate von a_r eine Theta-Funktion zum Gitter Ω_t, und die elementare Herleitung des Koecher-Prinzips verläuft weiter wie in [3], wobei in einem Fall auch die zweite Invarianzeigenschaft benötigt wird; „elementar“ bedeutet, daß man ohne die Kompaktifizierungstheorie auskommt. *Das Koecher-Prinzip gilt also für vektorwertige automorphe Formen sinngemäß genauso wie für skalarwertige.*

Bis auf weiteres betrachte ich ab jetzt nur noch automorphe Formen, d.h., Fourier-Jacobi-Koeffizienten $a_s \neq 0$ kommen nur für $s \in \Delta^* \cap \bar{P}$ vor.

Für arithmetische Gruppen auf D, wie etwa in (1. 1) oder (1. 4), ist das höchstens dann eine Einschränkung, wenn $\mathfrak{G}$ über $\mathbb{Q}$ definierte Faktoren SL_2 enthält. Falls eine arithmetische Untergruppe $\Gamma \leqq G$ gegeben ist, bedeutet „automorphe Form“ natürlich, daß die Wachstumsbedingung in allen rationalen Randkomponenten gilt. Die automorphen Formen für $\Gamma \cap Z(F)$ auf Mengen vom Typ $W \cap D$ sollen auch lokale automorphe Formen für Γ auf D heißen.

(3. 6) **Satz.** *In der Situation von* (3. 3) *sei* $f\colon W \cap D \to V$ *eine automorphe Form für* $\Gamma_\infty \leqq Z(F)$ *bezüglich der rationalen Darstellung* $\rho\colon GL(J) \to GL(V)$. *Sei* $c \in A$ *ein Idempotent mit* $\Delta^* \cap P_c \neq \emptyset$, *und sei* $s \in \Delta^* \cap P_c$. *Dann gilt für den Fourier-Jacobi-Koeffizienten* $a_s\colon J_{\frac{1}{2}} \times (W \cap F) \to V$ *von* f:

(i) $a_s(w+u_t, t) = \sigma(u)a_s(w, t)$ *für alle* $w \in J_{\frac{1}{2}}$, $u \in \Omega \cap J_{02}$ *und* $t \in W \cap F$.

(ii) $a_s(w, t)$ *hängt nur von* t *und der Komponente von* w *in* J_{01} *ab.*

Die Doppelindizierung von J bezieht sich auf (3. 2).

Beweis. (i) Für $u \in \Omega \cap J_{02}$ ist auch $u_t \in J_{02}$ und $L(2w+u_t, u) \in J_{12} \oplus J_{22}$; andererseits ist $s \in J_{11}$. Da die Peirce-Zerlegung orthogonal ist, folgt

$$(s|L(2w+u_t, u)) = 0.$$

(ii) Sei $V = V_1 \oplus \cdots \oplus V_m$ die Zerlegung aus (3. 5). Ich zerlege außerdem $w = w_1 + w_2$ mit $w_i \in J_{0i}$ und betrachte bei festem w_1 und $t \in W \cap F$ die holomorphe Funktion $a\colon J_{02} \to V$, $a(z) = a_s(w_1 + z, t)$, zerlegt in $a = a_1 + \cdots + a_m$ mit $a_j\colon J_{02} \to V_j$; zu zeigen: a ist konstant.

Für $u \in \Omega \cap J_{02}$ folgt aus (i) wie in (3. 5) die Periodizität $a_m(z + u_t) = a_m(z)$. Da die u_t das Gitter $\Omega_t \cap J_{02}$ durchlaufen, ergibt der Satz von Liouville, daß a_m konstant ist.

Seien schon $a_m, \ldots, a_{j+1}$ als konstant entlarvt. Dann folgt für die V_j-Komponente

$$a_j(z + u_t) = a_j(z) + \tau(u),$$

wobei $\tau(u)$ die V_j-Komponente von $\sigma(u) a_{j+1} + \cdots + \sigma(u) a_m$ ist. Die Ableitung $a_j'\colon J_{02} \to \mathrm{Hom}_C(J_{02}, V_j)$ ist daher holomorph und periodisch, also konstant, und

$$a_j(z) = b_1 z + b_0 \quad \text{mit} \quad b_1 \in \mathrm{Hom}_C(J_{02}, V_j),\ b_0 \in V_j.$$

Es folgt

$$\tau(u) = b_1 u_t = b_1 u + b_1 \mu(t) u \quad \text{für alle} \quad u \in \Omega \cap J_{02}.$$

Da beide Seiten reelle Polynome in u sind und ein Gitter Zariski-dicht ist, gilt diese Gleichung sogar für alle $u \in J_{02}$. Da $b_1 u$ holomorph, $\tau(u)$ und $b_1 \mu(t) u$ antiholomorph sind, folgt $b_1 = 0$, a_j konstant.

Durch Induktion folgt die Behauptung: a konstant. □

(3. 7) **Satz.** *In der Situation von (3. 3) sei $f\colon W \cap D \to V$ eine automorphe Form für $\Gamma_\infty \leqq Z(F)$ bezüglich der rationalen Darstellung $\rho\colon GL(J) \to GL(V)$. Sei $c \in A$ ein Idempotent mit $\Delta^* \cap P_c \neq \emptyset$, und sei $s \in \Delta^* \cap P_c$. Dann gilt für den Fourier-Jacobi-Koeffizienten a_s von f bei beliebigen $w \in J_{\frac{1}{2}}$ und $t \in W \cap F$:*

(i) $a_s(w, t) = \sigma(u) a_s(w, t)$ *für alle* $u \in \Omega \cap J_{02}$,

(ii) $a_s(w, t) = \rho(g) a_s(w, t)$ *für alle* $g \in \Gamma_\infty \cap S$ *mit* $g^*|_{J_0(e-c)} = 1$.

Beweis. (i) folgt direkt aus (3. 6).

(ii) Aus (FJ2) folgt $a_s(gw, t) = \rho(g) a_s(w, t)$. Da $J_0(e-c) = J_{11} \oplus J_{01} \oplus J_{00}$, folgt $g^* v = v$ für alle $v \in J_{01}$, also

$$(gw|v) = (w|g^* v) = (w|v) \quad \text{für alle} \quad v \in J_{01},$$

$$gw - w \in J_{\frac{1}{2}} \cap J_{01}^{\perp} = J_{02}.$$

Da $a_s(w, t)$ nur von der J_{01}-Komponente von w abhängt, folgt die Behauptung. □

Bemerkung. Für das Jordan-Tripelsystem $S_n(\mathbb{C})$ der symmetrischen $n \times n$-Matrizen folgt $g^*|_{J_{01}}=1$ aus $g^*|_{J_{11}}=1$ automatisch; $g^*|_{J_{00}}=1$ ist sowieso erfüllt. Aber schon für $M_{2,q}(\mathbb{C})$, das Jordan-Tripelsystem aller $2 \times q$-Matrizen, ist dieser Schluß falsch.

(3. 8) Ich kehre nun zur Situation in (1. 2) zurück, wo insbesondere Γ eine nette arithmetische Gruppe auf D ist, behalte aber auch die Voraussetzungen von (3. 1) bei. Sei außerdem ω eine automorphe alternierende p-Form für $\Gamma_\infty = \Gamma \cap Z(F)$ auf $W \cap D$; jeder Fourier-Jacobi-Koeffizient $a = a_s(w, t)$ ist dann eine alternierende p-Multilinearform $a\colon J \times \cdots \times J \to \mathbb{C}$. Als hinreichendes Kriterium für die Fortsetzbarkeit bleibt (F′) aus (1. 6) übrig.

Sei nun $c \in A(\mathbb{Q})$ das Idempotent mit $s \in P_c$. Ich betrachte die Gruppe

$$S_c := \{g \in (S, S) \mid g|_{J_0(e-c)} = 1\}^\circ \leqq S \leqq GL(J).$$

Da $\mathfrak{S}$ über $\mathbb{Q}$ definiert und c rational ist, ist $\Gamma \cap S_c$ Zariski-dicht in S_c. Nach (3. 7) ist a unter allen g^* mit $g \in S_c$ invariant, d.h.,

$$a[g^* x_1, \ldots, g^* x_p] = a[x_1, \ldots, x_p] \quad \text{für alle} \quad g \in S_c \quad \text{und} \quad x_1, \ldots, x_p \in J.$$

Die Bedingung $(s|x_1)=0$ zusammen mit $s \in P_c$ und $x_1 \in \bar{P}$ impliziert im übrigen $x_1 \in J_0(c)$ [6], XI. §7, also $x_1 \in J_{22}$.

Ebenso ist $\sigma(\Omega \cap J_{02})$ Zariski-dicht in $\sigma(J_{02})$ und a unter $\sigma(J_{02})$ invariant, d.h.,

$$a[\xi(u) x_1, \ldots, \xi(u) x_p] = a[x_1, \ldots, x_p] \quad \text{für alle} \quad u \in J_{02} \quad \text{und} \quad x_1, \ldots, x_p \in J,$$

wobei

$$\xi(u) \begin{pmatrix} y_1 \\ y_{\frac{1}{2}} \\ y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 + 2iL(y_{\frac{1}{2}}, u) + iL(\mu(y_0)u, u) \\ y_{\frac{1}{2}} + \mu(y_0) u \\ y_0 \end{pmatrix},$$

wenn $y_j \in J_j$, also $\sigma(u) = \rho(\xi(u))$.

Also ist a unter dem semidirekten Produkt $S_c^* \ltimes \xi(J_{02}) \leqq GL(J)$ invariant, und das Kriterium (F′) wird dadurch auf das wesentliche vergröbert: Gegeben ist ein Idempotent $c \in A$ und eine alternierende p-Multilinearform a auf J, die $S_c^* \ltimes \xi(J_{02})$-invariant ist. Für das Fortsetzbarkeitskriterium ist zu zeigen:

(F″) *Für* $x_1 \in J_{22}$, $x_2, \ldots, x_p \in J$ *beliebig gilt* $a[x_1, \ldots, x_p] = 0$.

(3. 9) Die Invarianz-Voraussetzung läßt sich einfacher fassen, wenn der Dualraum $\operatorname{Hom}(J, \mathbb{C})$ mit Hilfe der Spurform (komplex-antilinear) mit J identifiziert wird. Dabei geht die Operation von $GL(J)$ bzw. der Lie-Algebra $\mathfrak{gl}(J)$ in die kontragrediente über:

$$(g, x) \mapsto g^{*-1} x \quad \text{für} \quad g \in GL(J),$$
$$(X, x) \mapsto -X^* x \quad \text{für} \quad X \in \mathfrak{gl}(J).$$

Die alternierende Form a wird dann zu einem Element von $\bigwedge^p J$, das S_c-invariant für die gewöhnliche Operation von S_c ist und außerdem $\tau(J_{02})$-invariant, wo $\tau(u) := \xi(u)^* \in GL(J)$ auf $y = y_1 + y_{\frac{1}{2}} + y_0 \in J$ mit $y_j \in J_j$ wie folgt wirkt:

$$\tau(u)\begin{pmatrix} y_1 \\ y_{\frac{1}{2}} \\ y_0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} y_1 \\ y_{\frac{1}{2}} + 2i\{uey_1\} \\ y_0 + 2i\{uey_{\frac{1}{2}}\} - 2\{ue\{uey_1\}\} \end{pmatrix} = y + 2i\{uey\} - 2\{ue\{uey\}\}$$

(beim Nachprüfen denke man an $(v \square w)^* = w \square v$). Ersetzt man in der Definition von S_c die Bedingung $g \in (S, S)$ durch $g \in S$, so erhält man eine etwas größere Gruppe, unter der a noch relativ invariant ist; die zugehörige Lie-Algebra enthält alle Elemente von $(A_{11} \oplus A_{12} \oplus A_{22}) \square (e - c)$ mit $A_{ij} = A \cap J_{ij}$, d.h., solche Elemente lassen die Gerade $\mathbb{C}a$ invariant. Die Lie-Algebra von $\tau(J_{02})$ besteht offensichtlich aus

$$J_{02} \square e = J_{02} \square (e - c).$$

Also ist die Gerade $\mathbb{C}a$ invariant unter $J \square (e - c) \subseteqq \mathfrak{gl}(J)$.

Das Ergebnis (4. 1) von §4 wird sein, daß im Falle $p < \operatorname{Dim} J$ dann

$$a \in \bigwedge^p(J_{\frac{1}{2}}(e-c) \oplus J_0(e-c)) = \bigwedge^p(J_{11} \oplus J_{12} \oplus J_{01} \oplus J_{02} \oplus J_{00})$$

sein muß. Für die alternierende Form interpretiert ist das genau die Bedingung (F'').

(3. 10) Damit ist, bis auf den letzten Rest in §4, die Lücke am Ende von (1. 6) geschlossen. Darüber hinaus gilt sogar die lokale Aussage:

Satz. *Sei D ein hermitescher symmetrischer Raum vom nichtkompakten Typ und Γ eine nette arithmetische Gruppe auf D. Sei $X \supseteqq D/\Gamma$ eine Desingularisierung der Baily-Borel-Kompaktifizierung und $x \in X - D/\Gamma$ im regulären Ort einer 1-kodimensionalen Komponente. Dann werden die alternierenden p-Formen in einer Umgebung von x für $p < \operatorname{Dim} D$ genau durch die entsprechenden lokalen automorphen p-Formen für Γ auf D gegeben.*

Für die Bezeichnungsweise siehe (3. 5). Der Fall, daß x nicht im regulären Ort einer 1-kodimensionalen Komponente liegt, ist nur aus Bequemlichkeit nicht mitbehandelt worden, weil er ja für das globale Fortsetzungsproblem uninteressant ist. Wollte man ihn mitbehandeln, müßte man in (1. 2) nur $\dot{E} \times E^{n-1}$ durch $\dot{E}^m \times E^{n-m}$ ersetzen und könnte dann für die Abbildung Ψ in (1. 4) bzw. §2 den Ansatz von [15] auf Siegel-Gebiete 3. Art verallgemeinern.

§ 4. Invarianten in der äußeren Algebra eines Jordan-Tripelsystems

In diesem Paragraphen wird nun die letzte verbleibende Lücke geschlossen. Sie war in (3. 9) offen geblieben.

(4. 1) **Satz.** *Sei J ein positives hermitesches Jordan-Tripelsystem mit Strukturalgebra $\mathfrak{g} = J \square J \subseteqq \mathfrak{gl}(J)$ und $c \in J$ ein Idempotent. Sei $p < \operatorname{Dim} J$, und sei $a \in \bigwedge^p J$ relativ invariant für $\mathfrak{g}_c := J \square c$, also $\mathfrak{g}_c a \subseteqq \mathbb{C}a$. Dann ist $a \in \bigwedge^p(J_{\frac{1}{2}}(c) + J_0(c))$.*

Bemerkung. Die Wurzelraum-Zerlegung in (4. 3) wird zeigen, daß $\mathfrak{g}_c = J \square J_1(c)$ und daß dies eine Unteralgebra von $\mathfrak{g}$ ist. Natürlich annulliert $\mathfrak{g}_c$ den Unterraum $J_0(c)$. Aber schon an einfachen Beispielen sieht man, daß der Annullator von $J_0(c)$ in $\mathfrak{g}$ echt größer sein kann — etwa, wenn c maximal, also $J_0(c) = 0$, aber J keine Jordan-Algebra, also $J \neq J_1(c)$ ist.

Für den Beweis des Satzes darf man o.B.d.A. J als einfach annehmen: Zerlegt man nämlich J in eine direkte Summe von einfachen Jordan-Tripelsystemen $J_1 \oplus \cdots \oplus J_m$, so zerlegen sich das Idempotent c und die Lie-Algebra $\mathfrak{g}$ entsprechend. Außerdem ist

$$\bigwedge^p J = \bigoplus_{|\nu| = p} [\bigwedge^{\nu_1} J_1 \otimes \cdots \otimes \bigwedge^{\nu_m} J_m],$$

wobei jeder Summand von $\mathfrak{g}$ nur auf den entsprechenden Faktor $\bigwedge^{\nu_k} J_k$ wirkt.

Sei also J einfach. Sei $\{c_1, \ldots, c_n\}$ ein vollständiges System von Idempotenten von J mit $c = c_{r+1} + \cdots + c_n$, $0 \leqq r \leqq n$; insbesondere die c_i primitiv und $e := c_1 + \cdots + c_n$ ein maximales Idempotent; die Annahme $r < n$, also $c \neq 0$, ist keine Einschränkung. Dazu gehört die vollständige Peirce-Zerlegung

$$J = J_1 \oplus J_{\frac{1}{2}}, \quad J_1 = J_1(e) = \bigoplus_{1 \leqq i \leqq j \leqq n} J_{ij}, \quad J_{\frac{1}{2}} = J_{\frac{1}{2}}(e) = \bigoplus_{i=1}^{n} J_{0i}$$

mit
$$J_{ij} = \begin{cases} J_1(c_i) & \text{für } i = j \geqq 1, \\ J_{\frac{1}{2}}(c_i) \cap J_{\frac{1}{2}}(c_j) & \text{für } i \neq j,\ i, j \geqq 1, \end{cases}$$

$$J_{0i} = J_{i0} = J_{\frac{1}{2}}(c_i) \cap \bigcap_{j \neq i} J_0(c_j) \quad \text{für } i = 1, \ldots, n.$$

Da e maximal ist, ist $J_0(e) = 0$; da J einfach ist, haben alle „gemischten" Komponenten J_{ij} für $1 \leqq i < j \leqq n$ die gleiche Dimension d, ebenso alle Komponenten J_{0i} die gleiche Dimension d' [10], §17. Ich will d die Multiplizität von J_1 und d' die Multiplizität von $J_{\frac{1}{2}}$ nennen.

(4. 2) Die Lie-Algebra $\mathfrak{g}$ hat die torale Unteralgebra

$$\mathfrak{t} = \bigoplus_{i=1}^{n} \mathbb{C} c_i \square c_i.$$

Die Wurzelraum-Zerlegung von $\mathfrak{g}$ bezüglich $\mathfrak{t}$ sieht so aus:

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{z}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{t}) \oplus \bigoplus_{\substack{i, j = 0 \\ i \neq j}}^{n} \mathfrak{g}_{ij}, \quad \mathfrak{z}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{t}) = \sum_{i=1}^{n} \mathfrak{g}_{ii},$$

mit der (noch ziemlich redundanten) Beschreibung

$$\mathfrak{g}_{ij} = \sum_{k=0}^{n} J_{ik} \square J_{kj} \quad \text{für} \quad i, j = 0, \ldots, n,\ (i, j) \neq (0, 0).$$

Ist $\gamma_i: \mathfrak{t} \to \mathbb{C}$ die i-te Koordinatenfunktion und $\gamma_0 = 0$, so gehört $\mathfrak{g}_{ij}$ zur Wurzel $\frac{1}{2}(\gamma_i - \gamma_j)$. Das Wurzelsystem ist übrigens vom Typ A_{n-1}, wenn $J_{\frac{1}{2}} = 0$, und sonst vom Typ A_n.

An der Wurzelraum-Zerlegung der Lie-Algebra $\mathfrak{g} + \mathfrak{p}_+ + \mathfrak{p}_-$ von $\mathfrak{G}$, der Gruppe aus (1. 1), in [2], III. §3. 2, Aussage III auf Seite 184, sieht man, daß stets

$$\operatorname{Dim} \mathfrak{g}_{ij} = \operatorname{Dim} J_{ij};$$

die dortigen kompakten Wurzeln gehören nämlich zu unserer Lie-Algebra $\mathfrak{g}$, während die Wurzelräume zu den positiven nichtkompakten Wurzeln den Peirce-Komponenten von J entsprechen. Es folgt

$$\mathfrak{g}_{ij} = c_i \,\Box\, J_{ij} = J_{ij} \,\Box\, c_j \quad \text{für} \quad i, j = 1, \ldots, n, \; i \neq j,$$
$$\mathfrak{g}_{i0} = c_i \,\Box\, J_{i0}, \;\; \mathfrak{g}_{0i} = J_{0i} \,\Box\, c_i \quad \text{für} \quad i = 1, \ldots, n.$$

In $\mathfrak{g}_c$ stecken die Wurzelräume $\mathfrak{g}_{ij} = J_{ij} \,\Box\, c_j$ für $i = 0, \ldots, n$ und $j = r+1, \ldots, n$ mit $i \neq j$ und die torale Unteralgebra

$$\mathfrak{t}_c = \bigoplus_{i=r+1}^{n} \mathbb{C}\, c_i \,\Box\, c_i.$$

Nun ist

$$J \,\Box\, J_1(c) = \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=r+1}^{n} \sum_{k=r+1}^{n} J_{ik} \,\Box\, J_{kj}$$
$$\subseteq \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=r+1}^{n} \mathfrak{g}_{ij} \subseteq \mathfrak{g}_c,$$

also $\mathfrak{g}_c = J \,\Box\, J_1(c)$, und für $x, y \in J$ gilt

$$[x \,\Box\, c, y \,\Box\, c] = \{xcy\} \,\Box\, c - y \,\Box\, \{cxc\} \in J \,\Box\, J_1(c) = \mathfrak{g}_c.$$

Damit ist die Bemerkung in (4. 1) bewiesen. Eine ähnliche Überlegung zeigt auch, daß $\mathfrak{g}_c$ von $\mathfrak{t}$ normalisiert wird.

Da eine relative $\mathfrak{g}_c$-Invariante a unter dem Kommutator-Ideal $[\mathfrak{g}_c \mathfrak{g}_c]$ absolut invariant ist, d.h., $[\mathfrak{g}_c \mathfrak{g}_c]\, a = 0$, ist es von Interesse, folgendes zu wissen:

a) $\mathfrak{g}_{ij} \subseteq [\mathfrak{g}_c \mathfrak{g}_c]$ für $i = 0, \ldots, n$, $j = r+1, \ldots, n$ mit $i \neq j$. Das folgt aus $[c_j \,\Box\, c_j, X] = -\frac{1}{2} X$ für $X \in \mathfrak{g}_{ij}$.

b) $c_i \square c_i - c_j \square c_j \in [\mathfrak{g}_c \mathfrak{g}_c]$ für $i, j = r+1, \ldots, n$. Für geeignetes $x \in J_{ij}$, das man sich aus (4. 3) suchen kann, gilt nämlich $\{c_i + c_j, x, x\} = c_i + c_j$, also

$$[c_i \square x, x \square c_i] = c_i \square c_i - \frac{1}{2} x \square x,$$

$$[x \square c_j, c_j \square x] = \frac{1}{2} x \square x - c_j \square c_j,$$

also $c_i \square c_i - c_j \square c_j \in [\mathfrak{g}_{ij} \mathfrak{g}_{ji}]$.

(4. 3) Der weitere Beweis beruht auf einer expliziten Basiswahl in J. Diese wird jetzt vorgestellt, zunächst für die Jordan-Algebra J_1, die nach [10], 10. 14, einfach ist.

Lemma. *Sei J_1 eine einfache komplexe Jordan-Algebra vom Rang n und der Multiplizität d. Sei $\{c_1, \ldots, c_n\}$ ein vollständiges System von Idempotenten und $J_1 = \bigoplus J_{ij}$ die zugehörige Peirce-Zerlegung. Dann gibt es*

$$a_{ij}^{\mu} \in J_{ij},\ 1 \leqq i, j \leqq n,\ i \neq j,\ 1 \leqq \mu \leqq d,\ \text{mit } a_{ij}^{1} = a_{ji}^{1},\ a_{ij}^{\mu} = -a_{ji}^{\mu} \text{ für } 2 \leqq \mu \leqq d,$$

so daß gilt:

(i) $\{c_i | 1 \leqq i \leqq n\} \cup \{a_{ij}^{\mu} | 1 \leqq i < j \leqq n, 1 \leqq \mu \leqq d\}$ *ist eine $\mathbb{C}$-Basis von J.*

(ii) $a_{ij}^{\mu} \cdot a_{ij}^{\nu} = \delta_{\mu\nu}(c_i + c_j)$ *für $i \neq j$.*

(iii) $a_{ij}^{\mu} \cdot a_{jk}^{\nu} = \frac{1}{2} \varepsilon_{\mu\nu} a_{ik}^{\pi(\mu,\nu)}$, *wenn i, j, k paarweise verschieden, wobei $\varepsilon_{\mu\nu} \in \{1, -1\}$*

und $\pi(\mu, \nu) \in \{1, \ldots, d\}$ die Eigenschaften (B2) *bis* (B7) *unten haben.*

Es wird dann noch $a_{ii}^{1} = c_i$ gesetzt.

Beweis. Im trivialen Fall $n = 1$ ist $J_1 = \mathbb{C}$, also nichts zu beweisen. Im Fall $n = 2$ ist J_1 als Jordan-Algebra isomorph zu $\mathbb{C}^N$ mit der Multiplikation

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_N \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 y_1 + \cdots + x_N y_N \\ x_1 y_2 + x_2 y_1 \\ \vdots \\ x_1 y_N + x_N y_1 \end{bmatrix}.$$

Dabei ist $e = (1, 0, \ldots, 0)'$, und bis auf einen Automorphismus hat jedes vollständige System von Idempotenten die Gestalt $c_1 = c = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0, \ldots, 0\right)'$, $c_2 = e - c$. Es ist $d = N - 2$ und $J_{12} = \{(0, 0, x_3, \ldots, x_N)' | x_3, \ldots, x_N \in \mathbb{C}\}$. Daher ist nur noch a_{12}^{μ} als $(\mu + 2)$-ter Einheitsvektor zu wählen. Damit ist (i) und (ii) erfüllt, und (iii) ist leer.

Im Fall $n \geqq 3$ ist J_1 bis auf Isomorphie die Algebra $H_n(C)$ der „hermiteschen“ $n \times n$-Matrizen über einer der Algebren mit Involution $C = \mathbb{C}$, $\mathbb{C} \oplus \mathbb{C}$, Quaternionen-Algebra oder Cayley-Algebra über $\mathbb{C}$. Man kann eine Basis $\{b_1, \ldots, b_d\}$ von C wählen mit

$$b_1 = \text{Einselement von } C,$$

$$b_1^* = b_1,\ b_\mu^* = -b_\mu \quad \text{für} \quad \mu = 2, \ldots, d,$$

wobei der Stern die $\mathbb{C}$-lineare Involution von C bedeutet,

$$b_\mu b_\nu = \varepsilon_{\mu\nu} b_{\pi(\mu,\nu)},$$

so daß gilt:

(B1) $\varepsilon_{\mu\nu} \in \{1, -1\}$, $\pi(\mu, \nu) \in \{1, \ldots, d\}$;

(B2) für festes μ ist $\pi(\mu, -)$ eine Permutation von $\{1, \ldots, d\}$;

(B3) $\pi(1, \nu) = \pi(\nu, 1) = \nu$ und $\varepsilon_{1\nu} = \varepsilon_{\nu 1} = 1$;

(B4) $\pi(\mu, \nu) = \pi(\nu, \mu)$;

(B5) $\pi(\mu, \nu) = 1 \Leftrightarrow \mu = \nu$;

(B6) $\varepsilon_{\mu\mu} = (-1)^{1-\delta_{1\mu}} = \begin{cases} 1, & \text{wenn } \mu = 1, \\ -1, & \text{wenn } \mu \neq 1; \end{cases}$

(B7) $\varepsilon_{\nu\mu} = (-1)^{1+\delta_{\mu\nu}+\delta_{1\mu}+\delta_{1\nu}} \varepsilon_{\mu\nu} = \begin{cases} \varepsilon_{\mu\nu}, & \text{wenn } \mu = \nu \text{ oder } \mu = 1 \text{ oder } \nu = 1, \\ -\varepsilon_{\mu\nu} & \text{sonst.} \end{cases}$

Das kann man direkt aus der Multiplikationstafel von C ablesen, siehe etwa [6], S. 222.

Die Behauptungen des Lemmas folgen jetzt, wenn man für $i \neq j$

$$a_{ij}^\mu := b_\mu E_{ij} + b_\mu^* E_{ji}$$

setzt, wobei E_{ij} die Matrix mit einer 1 an der Stelle (i, j) und Nullen sonst sein soll. □

(4. 4) Falls das Jordan-Tripelsystem J nicht von einer Jordan-Algebra kommt, ist die Basiswahl wie folgt zu vervollständigen:

Lemma. *Sei J ein einfaches positives hermitesches Jordan-Tripelsystem mit vollständigem System $\{c_1, \ldots, c_n\}$ von Idempotenten und maximalem Idempotent $e = c_1 + \cdots + c_n$. Dann kann man eine Basis der Jordan-Algebra J_1 wie in* (4. 3) *und eine Basis $\{a_{0j}^\mu \mid 1 \leqq \mu \leqq d'\}$ von jedem Peirce-Raum J_{0j} für $1 \leqq j \leqq n$ wählen, so daß*

$$\{a_{jk}^\mu e a_{0j}^\nu\} = \zeta_{\mu\nu} a_{0k}^{\tau(\mu,\nu)} \quad \textit{für} \quad j \neq k, \ j, k \neq 0,$$

wobei $\zeta_{\mu\nu} \in \{1, -1, i, -i\}$, $\tau(\mu, \nu) \in \{1, \ldots, d'\}$ und $\tau(\mu, -)$ bei festem μ eine Permutation von $\{1, \ldots, d'\}$ ist.

Es wird dann noch $a_{j0}^\mu = a_{0j}^\mu$ gesetzt.

Beweis. Hier greife ich vollends auf die Klassifikation zurück. Es sind drei Fälle zu behandeln.

1. *Fall.* $J = M_{n,q}(\mathbb{C})$ mit $1 \leqq n < q$, das Jordan-Tripelsystem der $n \times q$-Matrizen mit $\{uvw\} = \frac{1}{2}(u\bar{v}'w + w\bar{v}'u)$. Hier ist $d=2$ und $d' = q-n$, und man kann wählen

$$\begin{aligned} c_j &= E_{jj} && \text{für } 1 \leqq j \leqq n, \\ \left.\begin{aligned} a_{jk}^1 &= E_{jk} + E_{kj}, \\ a_{jk}^2 &= iE_{jk} - iE_{kj} \end{aligned}\right\} && && \text{für } 1 \leqq j,\ k \leqq n \text{ mit } j \neq k, \\ a_{0j}^\nu &= E_{j,n+\nu} && \text{für } 1 \leqq j \leqq n,\ 1 \leqq \nu \leqq q-n. \end{aligned}$$

2. *Fall.* $J = A_{2n+1}(\mathbb{C})$ mit $n \geqq 2$, das Jordan-Tripelsystem der schiefsymmetrischen $(2n+1) \times (2n+1)$-Matrizen mit Tripelprodukt wie eben. Hier ist $d=4$, $d'=2$, und man kann wählen

$$\begin{aligned} c_j &= E_{2j-1,2j} - E_{2j,2j-1} && \text{für } 1 \leqq j \leqq n, \\ \left.\begin{aligned} a_{jk}^1 &= E_{2j-1,2k} - E_{2k,2j-1} - E_{2j,2k-1} + E_{2k-1,2j}, \\ a_{jk}^2 &= iE_{2j-1,2k} - iE_{2k,2j-1} + iE_{2j,2k-1} - iE_{2k-1,2j}, \\ a_{jk}^3 &= E_{2j-1,2k-1} - E_{2k-1,2j-1} + E_{2j,2k} - E_{2k,2j}, \\ a_{jk}^4 &= iE_{2j-1,2k-1} - iE_{2k-1,2j-1} - iE_{2j,2k} + iE_{2k,2j} \end{aligned}\right\} && \text{für } 1 \leqq j,\ k \leqq n \text{ mit } j \neq k, \\ \left.\begin{aligned} a_{0j}^1 &= E_{2j-1,2n+1} - E_{2n+1,2j-1}, \\ a_{0j}^2 &= E_{2j,2n+1} - E_{2n+1,2j} \end{aligned}\right\} && \text{für } 1 \leqq j \leqq n. \end{aligned}$$

3. *Fall.* $J = M_{1,2}(\mathbb{C})$, das Jordan-Tripelsystem der 1×2-Matrizen über der komplexen Cayley-Algebra mit $\{uvw\} = \frac{1}{2}\left(u(\tilde{v}w) + w(\tilde{v}u)\right)$, wobei $\tilde{v} = \bar{v}^{*\prime}$. Hier ist $d=6$, $d'=4$. Sei $\{b_1, \ldots, b_8\}$ eine Basis von C wie in (4. 3). Dann kann man wählen

$$\begin{aligned} c_1 &= \frac{1}{2}(b_1 + ib_2, 0), & c_2 &= \frac{1}{2}(b_1 - ib_2, 0), \\ a_{12}^\mu &= (ib_{2+\mu}, 0) \quad \text{für } 1 \leqq \mu \leqq 6, \\ a_{01}^1 &= (0, b_1 + ib_2), & a_{02}^1 &= (0, b_1 - ib_2), \\ a_{01}^2 &= (0, b_3 + ib_4), & a_{02}^2 &= (0, b_3 - ib_4), \\ a_{01}^3 &= (0, b_5 + ib_6), & a_{02}^3 &= (0, b_5 - ib_6), \\ a_{01}^4 &= (0, b_8 + ib_7), & a_{02}^4 &= (0, b_8 - ib_7). \end{aligned}$$

Beim Nachrechnen der Behauptung beachte man, daß

$$\{(a, 0)\,(b_1, 0)\,(0, x)\} = \frac{1}{2}(0, ax). \quad \square$$

(4. 5) Kehren wir zur Wurzelraum-Zerlegung von $\mathfrak{g}$ zurück. Sei

$$T_{ij}^\mu := \left\{\begin{aligned} &2c_i \,\square\, a_{ij}^\mu \quad \text{für } 1 \leqq i \leqq n,\ 0 \leqq j \leqq n, \\ &2a_{ij}^\mu \,\square\, c_j \quad \text{für } 0 \leqq i \leqq n,\ 1 \leqq j \leqq n, \end{aligned}\right\} \quad i \neq j,\ 1 \leqq \mu \leqq d \text{ bzw. } d'.$$

Falls $1 \leqq i$, $j \leqq n$, stimmen beide Definitionen überein: Da $a_{ij}^\mu \in J_{ij} \cap J^{Q(e)}$ folgt dann nämlich aus [11], 9. 13,

$$c_i \,\square\, a_{ij}^\mu = e \,\square\, a_{ij}^\mu = a_{ij}^\mu \,\square\, e = a_{ij}^\mu \,\square\, c_j.$$

Die T_{ij}^{μ} für $1 \leqq \mu \leqq d$ bzw. d' bilden eine Basis von $\mathfrak{g}_{ij}$, $i \neq j$. Aus (4. 3) und (4. 4) folgen Formeln für ihre Wirkung, von denen ich anschließend diese benötige:

$$
\begin{array}{ll}
T_{ij}^{\mu} c_j = a_{ij}^{\mu} & \text{für } 0 \leqq i < j \leqq n,\ 1 \leqq \mu \leqq d \text{ bzw. } d', \\
T_{ij}^{\mu} a_{ij}^{\nu} = 2\,\delta_{\mu\nu}\, c_i & \text{für } 1 \leqq i,\ j \leqq n,\ i \neq j,\ 1 \leqq \mu, \nu \leqq d, \\
T_{ij}^{\mu} a_{jk}^{\nu} = \varepsilon_{\mu\nu}\, a_{ik}^{\pi(\mu,\nu)} & \text{für } 1 \leqq i \leqq n,\ 1 \leqq j < k \leqq n,\ i \neq j,\ 1 \leqq \mu, \nu \leqq d, \\
T_{ij}^{\mu} a_{kj}^{\nu} = (-)^{1+\delta_{1\nu}}\, \varepsilon_{\mu\nu}\, a_{ik}^{\pi(\mu,\nu)} & \text{für } 1 \leqq i < j \leqq n,\ 1 \leqq k < j \leqq n,\ k \neq i,\ 1 \leqq \mu,\ \nu \leqq d, \\
T_{ij}^{\mu} a_{kj}^{\nu} = (-1)^{\delta_{1\nu} + \delta_{\mu\nu}}\, \varepsilon_{\mu\nu}\, a_{ki}^{\pi(\mu,\nu)} & \text{für } 1 \leqq k < i \leqq n,\ 1 \leqq j \leqq n,\ i \neq j,\ 1 \leqq \mu, \nu \leqq d, \\
T_{0j}^{\mu} a_{kj}^{\nu} = (-1)^{1+\delta_{1\nu}}\, \zeta_{\nu\mu}\, a_{0k}^{\tau(\nu,\mu)} & \text{für } 1 \leqq j,\ k \leqq n,\ j \neq k,\ 1 \leqq \mu \leqq d',\ 1 \leqq \nu \leqq d, \\
T_{ij}^{\mu} a_{0j}^{\nu} = (-1)^{1+\delta_{1\mu}}\, \zeta_{\mu\nu}\, a_{0i}^{\tau(\mu,\nu)} & \text{für } 1 \leqq i,\ j \leqq n,\ i \neq j,\ 1 \leqq \mu \leqq d,\ 1 \leqq \nu \leqq d'.
\end{array}
$$

(4. 6) Die Basis von J ergibt auf kanonische Weise eine Basis der äußeren Algebra $\bigwedge J$, die aus t-Gewichtsvektoren besteht. Das Gewicht $\chi = \chi_1 \gamma_1 + \cdots + \chi_n \gamma_n$ eines solchen Basisvektors v wird mit dem n-Tupel $(\chi_1, \ldots, \chi_n)$ von halbganzen Zahlen identifiziert. Dann ist

$$\chi_i = \sum_{\nu} \nu \times (\text{Zahl der Faktoren von } v \text{ in } J_\nu(c_i))$$

und $v \in \bigwedge^p J$ mit $p = \chi_1 + \cdots + \chi_n$. Da $\mathfrak{g}_c$ von $\mathfrak{t}$ normalisiert wird, ist auch jede Komponente von a in einem Gewichtsraum relativ $\mathfrak{g}_c$-invariant, wenn a selbst relativ $\mathfrak{g}_c$-invariant ist. Ein Gewichtsvektor, der relativ invariant für $\mathfrak{g}_c$ ist, ist es erst recht für $\mathfrak{t}_c$, und unter $\mathfrak{t}_c \cap [\mathfrak{g}_c \mathfrak{g}_c]$ ist er sogar absolut invariant; sein Gewicht χ erfüllt also $\chi_{r+1} = \cdots = \chi_n$.

Nehme ich zum Beweis von Satz (4. 1) eine relative $\mathfrak{g}_c$-Invariante a, so kann ich also o. B. d. A. annehmen, daß a ein t-Gewichtsvektor zum Gewicht χ mit $\chi_{r+1} = \cdots = \chi_n$ und daher Linearkombination entsprechender Basisvektoren ist.

Nun wird die Basis

$$\{a_{ij}^{\mu} \mid 0 \leqq i \leqq j \leqq n,\ 1 \leqq j \leqq n,\ 1 \leqq \mu \leqq 1 \text{ bzw. } d \text{ bzw. } d'\}$$

von J lexikographisch bezüglich des Tripels (i, j, μ) geordnet. Die Basisvektoren von $\bigwedge J$ sollen stets als Produkt der a_{ij}^{μ} in aufsteigender Reihenfolge geschrieben werden; die Basis von $\bigwedge J$ wird dann ebenfalls lexikographisch geordnet.

Ich kann annehmen, daß a Basisvektoren außerhalb von $\bigwedge (J_{\frac{1}{2}}(c) \oplus J_0(c))$ enthält; sei v der lexikographisch erste unter diesen, dessen Koeffizient γ möglicherweise nicht 0 ist. *Zu zeigen*: $\gamma = 0$.

1. *Fall.* v enthält keinen Faktor c_m mit $r+1 \leqq m \leqq n$.

Dann enthält v einen sonstigen Faktor aus $J_1(c)$; sei a_{ij}^{μ} mit $r+1 \leqq i < j \leqq n$ der letzte davon. In $T_{ji}^{\mu} v$ tritt der Basisvektor w auf, der aus v entsteht, wenn man a_{ij}^{μ} durch c_j ersetzt, und zwar mit dem Koeffizienten ± 2; da T_{ji}^{μ} bezüglich des äußeren Produkts als Derivation operiert, treten in der Basisdarstellung von $T_{ji}^{\mu} v$ möglicherweise weitere Summanden auf, die aber nicht interessieren. Andererseits kann w unter der Wirkung von T_{ji}^{μ} auch aus anderen Basisvektoren entstehen. Da w hinter a_{ij}^{μ} nur noch den Faktor c_j stehen hat, muß ein solcher Basisvektor lexikographisch vor v stehen und außerhalb von $\bigwedge (J_{\frac{1}{2}}(c) \oplus J_0(c))$ liegen, kann also bei a nicht vorkommen. Also tritt w in $T_{ji}^{\mu} a = 0$ mit dem Koeffizienten $\pm 2\gamma$ auf. Es folgt $\gamma = 0$.

2. *Fall.* v enthält einen Faktor c_m mit $r+1 \leqq m \leqq n$, aber nicht alle a_{im}^{μ} mit $0 \leqq i \leqq m-1$, $1 \leqq \mu \leqq d$ bzw. d'.

Dann sei

$$I := \{(i, \mu) | 0 \leqq i \leqq m-1,\ 1 \leqq \mu \leqq d \text{ bzw. } d',\ a_{im}^{\mu} \text{ fehlt in } v\},$$
$$I' := \{(i, \mu, j, \nu) | 0 \leqq i < j,\ (i, \mu),\ (j, \nu) \in I,\ a_{ij}^{\pi(\mu, \nu)} \text{ bzw. } a_{ij}^{\tau(\nu, \mu)} \text{ kommt in } v \text{ vor}\}.$$

Für $\eta = (i, \mu, j, \nu) \in I'$ sei u_η der folgende Basisvektor von $\bigwedge J$: In v werden c_m und $a_{ij}^{\pi(\mu,\nu)}$ bzw. $a_{ij}^{\tau(\nu,\mu)}$ durch a_{im}^{μ} und a_{jm}^{ν} ersetzt (und die Faktoren wieder in die richtige Reihenfolge gebracht). Dieser habe in der Basisdarstellung von a den Koeffizienten γ_η.

Für $(k, \rho) \in I$ tritt in der Basisdarstellung von $T_{km}^{\rho} v$ der folgende Basisvektor $w_{k\rho}$ von $\bigwedge J$ auf: In v wird c_m durch a_{km}^{ρ} ersetzt. Der Koeffizient von $w_{k\rho}$ in $T_{km}^{\rho} a$ setzt sich additiv aus folgenden Beiträgen zusammen:

a) Von v kommt $(-1)^{s_{k\rho}} \cdot \gamma$, wobei $s_{k\rho}$ die Anzahl der Faktoren von v ist, die echt zwischen a_{km}^{ρ} und c_m liegen.

b) Von u_η mit $\eta = (k, \rho, j, \nu) \in I'$ kommt im Fall $k \geqq 1$ der Beitrag $(-1)^{1+\delta_{1\nu}} \cdot \varepsilon_{\rho\nu} \cdot (-1)^{1+t_\eta+s_{k\rho}-s_{j\nu}} \cdot \gamma_\eta$, wobei t_η die Anzahl der Faktoren von v ist, die echt zwischen $a_{kj}^{\pi(\rho,\nu)}$ und a_{km}^{ρ} liegen. Im Fall $k=0$ ist $\varepsilon_{\rho\nu}$ durch $\zeta_{\nu\rho}$ und $\pi(\rho, \nu)$ durch $\tau(\nu, \rho)$ zu ersetzen.

c) Von u_η mit $\eta = (i, \mu, k, \rho) \in I'$ kommt $(-1)^{\delta_{1\mu}+\delta_{\mu\rho}} \cdot \varepsilon_{\rho\mu} \cdot (-1)^{t_\eta} \cdot \gamma_\eta$, falls $i \geqq 1$. Im Fall $i=0$ ist der Beitrag $(-1)^{1+\delta_{1\rho}} \cdot \zeta_{\rho\mu} \cdot (-1)^{t_\eta} \cdot \gamma_\eta$.

d) Außerdem kann $w_{k\rho}$ bei Basisvektoren entstehen, die bis zur Stelle (k, m) wie v aussehen, außer daß der Faktor a_{km}^{ρ} dazukommt, die also lexikographisch vor v stehen und außerhalb von $\bigwedge(J_{\frac{1}{2}}(c) \oplus J_0(c))$ liegen, die somit bei a nicht vorkommen.

Da $T_{km}^{\rho} a = 0$, ist der Koeffizient von $w_{k\rho}$ hierin 0, also

$$\begin{aligned}
0 = \gamma &+ \sum_{\substack{(j,\nu)\in I \text{ mit} \\ \eta=(0,\rho,j,\nu)\in I'}} (-1)^{1+\delta_{1\nu}} \cdot \zeta_{\nu\rho} \cdot (-1)^{1+t_\eta-s_{j\nu}} \cdot \gamma_\eta \\
&+ \sum_{\substack{(j,\nu)\in I \text{ mit} \\ \eta=(k,\rho,j,\nu)\in I'}} (-1)^{1+\delta_{1\nu}} \cdot \varepsilon_{\rho\nu} \cdot (-1)^{1+t_\eta-s_{j\nu}} \cdot \gamma_\eta \\
&+ \sum_{\substack{(0,\mu)\in I \text{ mit} \\ \eta=(0,\mu,k,\rho)\in I'}} (-1)^{1+\delta_{1\rho}} \cdot \zeta_{\rho\mu} \cdot (-1)^{t_\eta-s_{k\rho}} \cdot \gamma_\eta \\
&+ \sum_{\substack{(i,\mu)\in I \text{ mit} \\ \eta=(i,\mu,k,\rho)\in I'}} (-1)^{\delta_{1\mu}+\delta_{\mu\rho}} \cdot \varepsilon_{\rho\mu} \cdot (-1)^{t_\eta-s_{k\rho}} \cdot \gamma_\eta .
\end{aligned}$$

Diese Gleichungen werden über $(k, \rho) \in I$ summiert:

$$\begin{aligned}
0 = |I| \cdot \gamma &+ \sum_{\eta=(0,\rho,j,\nu)\in I'} (-1)^{1+\delta_{1\nu}} \cdot \zeta_{\nu\rho} \cdot (-1)^{1+t_\eta-s_{j\nu}} \cdot \gamma_\eta \\
&+ \sum_{\eta=(k,\rho,j,\nu)\in I'} (-1)^{1+\delta_{1\nu}} \cdot \varepsilon_{\rho\nu} \cdot (-1)^{1+t_\eta-s_{j\nu}} \cdot \gamma_\eta \\
&+ \sum_{\eta=(0,\mu,k,\rho)\in I'} (-1)^{1+\delta_{1\rho}} \cdot \zeta_{\rho\mu} \cdot (-1)^{t_\eta-s_{j\nu}} \cdot \gamma_\eta \\
&+ \sum_{\eta=(i,\mu,k,\rho)\in I'} (-1)^{\delta_{1\mu}+\delta_{\mu\rho}} \cdot \varepsilon_{\rho\mu} \cdot (-1)^{t_\eta-s_{k\rho}} \cdot \gamma_\eta ,
\end{aligned}$$

also $|I| \cdot \gamma = 0$, $\gamma = 0$.

3. *Fall.* v enthält ein c_m mit $r+1 \leqq m \leqq n$ und alle a_{im}^{μ} mit $0 \leqq i \leqq m-1$, $1 \leqq \mu \leqq d$ bzw. d', aber nicht alle a_{mi}^{μ} mit $m+1 \leqq i \leqq n$, $1 \leqq \mu \leqq d$, als Faktoren.

Jetzt sei

$$I := \{(i, \mu) | m+1 \leqq i \leqq n,\ 1 \leqq \mu \leqq d,\ a_{mi}^{\mu} \text{ fehlt in } v\},$$

$$I' := \{(i, \mu, j, \nu) | m+1 \leqq i < j \leqq n;\ (i, \mu), (j, \nu) \in I,\ a_{ij}^{\pi(\mu,\nu)} \text{ kommt in } v \text{ vor}\}.$$

Für $\eta = (i, \mu, j, \nu) \in I'$ entstehe der Basisvektor u_η aus v, indem man c_m und $a_{ij}^{\pi(\mu,\nu)}$ durch a_{mi}^{μ} und a_{mj}^{ν} ersetzt; der Koeffizient von u_η in a sei γ_η.

Für $(k, \rho) \in I$ entstehe $w_{k\rho}$ aus v, indem man c_m durch a_{mi}^{μ} ersetzt. Der Koeffizient von $w_{k\rho}$ in $T_{km}^{\rho} a$ setzt sich additiv aus folgenden Beiträgen zusammen:

a) Von v kommt $(-1)^{1-\delta_{1\rho}+s_{k\rho}} \cdot \gamma$, wobei $s_{k\rho}$ die Anzahl der Faktoren von v ist, die echt zwischen c_m und a_{mk}^{ρ} liegen.

b) Von u_η mit $\eta = (i, \mu, k, \rho) \in I'$ kommt $\varepsilon'_{\rho\mu} \cdot (-1)^{1+t_\eta+s_{k\rho}-s_{i\mu}} \cdot \gamma_\eta$, wobei t_η die Anzahl der Faktoren von v ist, die echt zwischen a_{mk}^{ρ} und $a_{ik}^{\pi(\mu,\rho)}$ liegen, und

$$\varepsilon'_{\rho\mu} = (-1)^{1-\delta_{\rho\mu}} \cdot \varepsilon_{\rho\mu}.$$

c) Von u_η mit $\eta = (k, \rho, j, \nu) \in I'$ kommt $\varepsilon'_{\rho\nu} \cdot (-1)^{t_\eta} \cdot \gamma_\eta$.

Dabei habe ich o. B. d. A. angenommen, daß v den Faktor c_k nicht enthält, denn sonst läge der 2. Fall vor. Zusammen folgt:

$$\begin{aligned} 0 = \gamma &+ \sum_{\substack{(i,\mu) \in I \text{ mit} \\ \eta = (i,\mu,k,\rho) \in I'}} \varepsilon'_{\rho\mu} \cdot (-1)^{\delta_{1\rho}+t_\eta-s_{i\mu}} \cdot \gamma_\eta \\ &+ \sum_{\substack{(j,\nu) \in I \text{ mit} \\ \eta = (k,\rho,j,\nu) \in I'}} \varepsilon'_{\rho\nu} \cdot (-1)^{\delta_{1\rho}-1+t_\eta-s_{k\rho}} \cdot \gamma_\eta . \end{aligned}$$

Diese Gleichungen werden wieder über alle $(k, \rho) \in I$ summiert:

$$\begin{aligned} 0 = |I| \cdot \gamma &+ \sum_{\eta = (i,\mu,k,\rho) \in I'} \varepsilon'_{\rho\mu} \cdot (-1)^{\delta_{1\rho}+t_\eta-s_{i\mu}} \cdot \gamma_\eta \\ &- \sum_{\eta = (k,\rho,j,\nu) \in I'} \varepsilon'_{\rho\nu} \cdot (-1)^{\delta_{1\rho}+t_\eta-s_{k\rho}} \cdot \gamma_\eta \\ = |I| \cdot \gamma &+ \sum_{\eta = (i,\mu,j,\nu) \in I'} [\varepsilon'_{\nu\mu} \cdot (-1)^{\delta_{1\nu}} - \varepsilon'_{\mu\nu} \cdot (-1)^{\delta_{1\mu}}] \cdot (-1)^{t_\eta - s_{i\mu}} \cdot \gamma_\eta . \end{aligned}$$

Da $\varepsilon'_{\nu\mu}(-1)^{\delta_{1\nu}} = \varepsilon'_{\mu\nu}(-1)^{\delta_{1\mu}}$, folgt wieder $0 = |I| \cdot \gamma$, also $\gamma = 0$.

4. *Fall.* v enthält ein c_m mit $r+1 \leqq m \leqq n$, alle a_{im}^{μ} mit $0 \leqq i \leqq m-1$, $1 \leqq \mu \leqq d$ bzw. d', und alle a_{mi}^{μ} mit $m+1 \leqq i \leqq n$, $1 \leqq \mu \leqq d$, als Faktoren.

Für das Gewicht χ von v gilt dann $\chi_m = 1 + \frac{1}{2}(n-1)d + \frac{1}{2}d' = \chi_{r+1} = \cdots = \chi_n$. Das geht nur, wenn v alle Basisvektoren von $J_1(c) \oplus J_{\frac{1}{2}}(c)$ als Faktoren enthält. Da $p < \operatorname{Dim} J$, fehlt in v mindestens ein Basisvektor von $J_0(c)$ als Faktor; sei a_{ij}^{μ} ein solcher mit $0 \leqq i < j \leqq r$, $1 \leqq \mu \leqq d$ bzw. d', oder $1 \leqq i = j \leqq r$, $\mu = 1$. In $T^{\mu}_{jn} v$ tritt der Basisvektor w auf, der aus v entsteht, wenn man a^1_{in} durch a^{μ}_{ij} ersetzt, und zwar mit einem Koeffizienten ± 1 oder ± 2. Da w sonst alle Faktoren von $J_{0n} \oplus \cdots \oplus J_{nn}$ enthält ($r < n$ ist vorausgesetzt), kommt es unter der Wirkung von T^{μ}_{jn} von keinem anderen Basisvektor. Also folgt wieder $\gamma = 0$.

Damit ist der Satz (4. 1) und schließlich auch der Hauptsatz dieser Arbeit bewiesen. □

Anmerkung. Das analoge Ergebnis zu Hilfssatz 2 in [8] ist im Fall $d \geqq 2$, $n \geqq 4$, falsch. Daher sieht der Beweis von Satz (4. 1) teilweise anders aus als der von Satz 4′ in [8].

Literatur

[1] Algebraic Groups and Discontinuous Subgroups, (ed. by A. Borel, G. D. Mostow). Proc. Symp. Pure Math. **9**, Providence 1966.

[2] *A. Ash, D. Mumford, M. Rapoport, Y.-S. Tai*, Smooth Compactification of Locally Symmetric Varieties, Brookline 1975.

[3] *W. L. Baily*, Fourier-Jacobi series, in [1], 296—300.

[4] *W. L. Baily, A. Borel*, Compactification of arithmetic quotients of bounded symmetric domains, Ann. of Math. **84** (1966), 442—528.

[5] *A. Borel*, Introduction aux Groupes Arithmétiques, Act. Sci. Ind., Paris 1969.

[6] *H. Braun, M. Koecher*, Jordan-Algebren, Berlin-Heidelberg-New York 1966.

[7] *E. Freitag*, Siegelsche Modulfunktionen, Berlin-Heidelberg-New York 1983.

[8] *E. Freitag, K. Pommerening*, Reguläre Differentialformen des Körpers der Siegelschen Modulfunktionen, J. reine angew. Math. **331** (1982), 207—220.

[9] *E. Landau, J. Valiron*, A deduction from Schwarz's lemma, J. London Math. Soc. **4** (1929), 162—163.

[10] *O. Loos*, Jordan Pairs, Lect. Notes in Math. **460**, Berlin-Heidelberg-New York 1975.

[11] *O. Loos*, Bounded Symmetric Domains and Jordan Pairs, Math. Lect., Univ. of California, Irvine 1977.

[12] *I. I. Piatetsky-Chapiro*, Géométrie des Domaines Classiques et Théorie des Fonctions Automorphes, Paris 1966.

[13] *I. Satake*, Algebraic Structures of Symmetric Domains, Princeton 1980.

[14] *W. Schmid*, Variation of the Hodge structure: The singularities of the period mapping, Invent. Math. **22** (1973), 211—319.

[15] *W. Schmid*, Abbildungen in arithmetische Quotienten hermitesch symmetrischer Räume, in: Classification of Algebraic Varieties and Compact Complex Manifolds, Lect. Notes in Math. **412**, Berlin-Heidelberg-New York 1974, 243—258.

[16] *R. Weissauer*, Vektorwertige Siegelsche Modulformen kleinen Gewichts, J. reine angew. Math. **343** (1983), 184—202.

Fachbereich Mathematik der Johannes-Gutenberg-Universität, Saarstraße 21, D-6500 Mainz

Eingegangen 13. Juli 1984